现代物理基础丛书 68

粒子物理学导论

肖振军

南京师范大学理论物理研究所

吕才典

中科院高能物理研究所理论室

科学出版社,北京

内容简介

粒子物理是研究物质最深层次结构的前沿学科，本书注重粒子物理基础知识的介绍，按照由浅入深的顺序对粒子物理发展史、基本相互作用、基本粒子的分类，高速粒子运动学,相互作用过程的运动学问题作了介绍。对于粒子物理的主要研究对象-轻子和强子,核力与同位旋、奇异粒子、对称性和各种守恒定律，夸克模型和强子结构以及电磁相互作用，深度非弹性散射与核子结构的部分子模型，量子色动力学，电弱相互作用的拉氏量和粒子谱,电弱规范对称性自发破缺的Higgs机制等分别进行了讨论。对于最新的理论研究成果和实验测量数据也作了介绍，例如，LHC实验中的Top物理和Higgs物理，重味物理与CP 破坏的理论和实验研究进展。对B介子工厂、LHC等重要的高能物理实验做了重点介绍。以北京正负电子对撞机实验(BEPCII+BESIII)和大亚湾中微子实验为例，对高能物理实验装置、实验数据的采集和分析流程做了较为系统的介绍。本书部分内容涉及量子场论计算。

本书可以作为理论物理和粒子物理与原子核物理及其它相关专业的研究生和高年级本科生粒子物理课程的教科书，也可以作为理论物理工作者和高能物理实验工作者的参考书。

序言

浩瀚的宇宙由微小的原子和其它物质粒子所组成，原子是由原子核和电子组成，原子核是由核子（质子和中子）组成，而核子则是由夸克和胶子组成。我们所认识的多彩的物质世界归根结底就是各种基本粒子存在和相互作用的世界。研究物质最小尺度最深层次的微观结构、研究基本粒子性质及其相互作用的前沿学科就是粒子物理学。

通过几十年实验和理论的探索，描述电弱相互作用和强相互作用基本规律的粒子物理标准模型已经建立并取得了前所未有的成功，这是在人类认识自然规律历史长河中的重大成就。当前对超越标准模型的新物理的探索更是方兴未艾。展现和介绍粒子物理学的基本知识和丰富内容，对于对自然科学有兴趣的读者特别是物理专业的读者显然是十分有益的。

本书的两位作者肖振军教授和吕才典研究员，都是在北京大学物理系学习并获得理学博士学位的，是我教过的学生中的佼佼者。我跟两位认识很久，合作发表过多篇论文，在科研工作中交流也很频繁。两位作者在粒子物理理论领域，特别是重味物理方向从事了多年的研究工作，分别独立或者合作完成了多项重要研究成果，成绩斐然，是国内该领域的优秀学者。肖振军和吕才典在B介子物理研究领域密切合作20多年，从1995年合作完成第一篇发表在”Phys.Rev.D”的学术论文，到先后合作主持两项国家自然科学基金重点项目，合作培养一批优秀研究生，堪称学术合作的楷模。

肖振军在河南师范大学和南京师范大学，吕才典在中国科学院大学（中科院研究生院）讲授粒子物理学课程多年，在教学科研上颇有心得。这次他们把多年的教学科研工作总结在这本《粒子物理学导论》中。该书总结了粒子物理学发展的全貌，前八章包含了粒子物理学的基本内容，从粒子物理的基本概念讲起，由浅入深，介绍了粒子物理标准模型的基本概念、基本相互作用、对称性及其应用。在第九和第十两章，作者介绍了粒子物理学各个主要前沿方向的最新进展，包括标准模型理论的精确检验、顶夸克性质的理论计算和实验测量等，重点介绍了2012年7月发现的希格斯玻色子性质的LHC实验测量结果，B、D介子系统的混合与CP破坏唯象研究最新进展，以及两个B介子工厂实验和LHCb实验的最新结果。在第十一章，作者以北京正负电子对撞机实验（BEPCII/BESIII）为切入点，介绍了粒子物理实验的基本方法和高能物理实验数据分析的流程，介绍了目前世界上主要的高能物理实验装置的基本情况，并对中国科学家提出的关于未来高能物理实验项目的一些设想做了简要介绍。该书还在每一章提供了一些练习题和思考题，对于研究生准备粒子物理考试提供了帮助，是一本不可多得的粒子物理学入门教材。

长期以来，国内一直缺少一本全面介绍粒子物理学基础和标准模型全貌以及最新进展的研究生入门教科书。这本书的完成填补了这个空白。肖振军和吕才典撰写的这本书既涵盖了粒子物理学经典的主要内容，又对粒子物理理论研究和实验测量的最新成果和进展做了全面、详细的介绍，相关实验数据更新到2014年底。看到两位学者不辞辛苦写作的这本400多页的《粒子物理学导论》，我既为他们的成绩感到欣慰，也为后来的更年轻的学子们感到高兴，欣然提笔作此序言。不论是在粒子物理理论研究领域还是实验研究领域，对于初次进入这些领域的研究生和年轻学者来说，这本书都可以引领他们熟悉粒子物理的基本理论框架，并帮助他们迅速进入自己感兴趣的前沿研究方向。

赵光达

2015年7月30日于北大燕园

前言

粒子物理学是一门发展迅速的基础学科，致力于研究比原子核更深层次的微观世界中物质的结构、性质和相互作用的规律。粒子物理研究以量子场论为依托，处理从几个MeV到TeV能区的极其广泛的物理现象。借助于极端高能的实验手段，高强度和高精度的实验装置，深入物质内部，探索物质的结构，寻找其最小组元及其相互作用规律；寻求物质、能量、时间、空间的深刻内涵。微观世界基本粒子的物理规律和宏观宇宙的起源、演化密切相关。

从上世纪三十年代劳伦斯发明的直径只有10厘米、价值约100美元的第一个粒子回旋加速器，到今天在欧洲核子研究中心(CERN)运行的周长27公里的高能质子-质子对撞机(LHC)和重量超过1万吨的探测器，其价格以10亿-100亿美元计算。今天的粒子物理理论和实验研究是一门“大科学”：需要巨大的人力和财力资源的投入，需要广泛的国际合作。在欧洲核子研究中心，有来自全世界80多个国家和地区的大约1万名科学家和工程师在那里工作，他们代表着500多家大学和研究所。在北京正负电子对撞机实验中，虽然我们的存储环周长只有大约240米，但却是这个能区最先进的实验设施。北京谱仪国际合作组的近400位物理学家和研究生参加了对τ-粲物理实验探测器建造、运行、数据的采集和分析工作，他们来自世界11个国家的53所大学和研究所。

2012年7月瑞士日内瓦的大型强子对撞机实验发现了标准模型的最后一个粒子-被称为“上帝粒子”的希格斯(Higgs)粒子，直接导致提出规范对称性自发破缺“Higgs机制”的彼得·希格斯和弗朗索瓦·恩格勒获得2013年诺贝尔物理奖。希格斯粒子的发现意味着粒子物理标准模型的粒子谱补齐了最后一块短板，但是却并不意味着粒子物理研究的终结，实际上却开启了粒子物理研究的新纪元。在标准模型理论框架下，希格斯粒子是目前已知的所有基本粒子内禀质量的来源，但是却无法解释不同粒子质量有巨大差别的原因。而且希格斯粒子的存在意味着超出原来四种基本相互作用的第五和第六种相互作用（汤川耦合和希格斯自相互作用）的存在，急需进一步的粒子物理实验的验证。

一直以来，随着粒子物理学的高速发展，国内缺少一本反映粒子物理近期发展并适合初入门的学生学习的教科书。本书注重粒子物理基础知识的介绍，按照由浅入深的顺序对粒子物理发展史、基本相互作用、基本粒子的分类和高速粒子运动学-洛伦兹变换，相互作用过程的运动学)等问题作了介绍。对于粒子物理的主要研究对象-轻子和强子，核力与同位旋，奇异粒子和共振态粒子，对称性和各种守恒定律，夸克模型和强子结构以及电磁相互作用，深度非弹性散射与核子结构的部分子模型，电弱相互作用理论的拉氏量和粒子谱，电弱规范对称性自发破缺的Higgs(BEH)机制等分别进行了讨论。

本书也注重学科前沿的发展情况介绍，同时给出了各个研究方向的研究前沿进展情况。并以一些反应过程为例，给出一些计算和讨论的实用例子。在本书后半部分，作

者讨论在高能量前沿方向的标准模型精确检验，介绍LEP、Tevatron对撞机实验的结果，重点介绍在LHC强子对撞机实验上发现Higgs粒子，对Higgs粒子性质的初步实验测量，对Top夸克对产生和单产生过程的高精度实验研究等。在高精度前沿方向，作者介绍美国和日本的B介子工厂实验和LHCb在高能对撞机实验上对含b介子系统的研究结果，并对未来重味物理的发展和Super-B工厂Belle-II实验做简单讨论。

粒子物理包括粒子物理理论和实验探测两大组成部分。本书的主要内容包括粒子的结构、性质、基本相互作用、标准模型理论和其精确检验等。其中同时涉及高能物理实验、对撞机物理和探测器技术等。在本书的最后，作者还对高能对撞机物理实验，对实验数据采集和分析做了基础性介绍。主要介绍了北京正负电子对撞机和北京谱仪实验，重点介绍探测器结构、数据采集与数据分析方法，以及近期BESIII的主要实验测量结果。作者还对大亚湾中微子实验做了简要介绍，对我国下一代高能对撞机实验的几个主要候选方案做了简单介绍。

本书由作者在南京师范大学和中国科学院大学(前中科院研究生院)讲授粒子物理学相关课程讲义的基础上编写而成。感谢两所学校的老师和同学对于本书使用过程中所提出的意见和建议以及授课过程中非常有益的讨论。在授课、课间讨论过程中，很多研究生对本书所涉及的部分表达式的推导和验证做出了贡献。特别是中国科学院大学物理学院2014级的研究生们，在本学期使用本书初稿的过程中，发现了许多打印错误和解释不清楚之处，为作者修改书稿提供了帮助，作者在此表示感谢。感谢南京师范大学钟彬博士对本书粒子物理实验部分的贡献，特别是撰写了第十一章部分小节的初稿。

作者感谢恩师赵光达先生和高崇寿先生的教诲和栽培。作者感谢戴元本、邝宇平、张宗烨、张肇西、黄涛、杜东生、李重生、薛晓舟、鲁公儒、黄朝商、童国梁、丁亦兵、曾谨言、李小源、李学潜等各位老师多年来在学术上的指导和帮助。在长期的科研工作中，作者就粒子物理的许多问题和吴岳良、郑海扬、侯维恕、李湘楠、高原宁、张新民、王青、马伯强、郑汉青、乔从丰、邹冰松、罗民兴、任中洲、杨金民、马建平、廖益、刘纯、赵强、苑长征、金山、胡红波、朱世琳、朱守华、李海波、杨茂志、杨亚东、李作宏、张大新、陈莹、平加伦、郭立波、王建雄、贾宇、彭光雄、郑阳恒、黄明球、岳崇兴、王凯、陈绍龙、杨德山、沈月龙、徐庆君、金立刚、王琦、孙俊峰、曹俊杰、李营、王伟、王玉明、常钦等许多朋友和同事做过很多有益的讨论，在此一并表示衷心的感谢。

本书可以作为理论物理和粒子物理与原子核物理及其它相关专业的研究生和高年级本科生粒子物理课程的教科书，也可以作为理论物理工作者和高能物理实验工作者的参考书。对于没有任何量子场论和群论基础的读者，可以略去书中标有星号的章节。

粒子物理学探究领域和范围很广，需要的数学和物理知识复杂，限于作者水平和成书时间较为仓促，书中难免存在疏漏和问题，也必定有叙述或者打印错误，引文也可能有疏漏之处，请读者发电邮到两位作者的邮箱: xiaozhenjun@njnu.edu.cn，lucd@ihep.ac.cn，指正这些问题，以便及时更改。作者在此表示衷心的感谢。

本书的出版受到国家自然科学基金项目(11235005)和江苏省物理一级学科重点学科建

设项目(1343201042)的联合资助。

肖振军，吕才典，2014年12月。于南京和北京

目　录

目录 ix

第一章　绪论 1

1.1　粒子物理学的研究内容 2

1.1.1　粒子物理学发展简史 2

1.1.2　场和基本相互作用 5

1.1.3　自然单位制 8

1.2　高能物理实验手段 10

1.2.1　宇宙线 10

1.2.2　高能加速器 12

1.2.3　粒子探测技术 17

1.2.4　实验数据获取和分析 22

1.3　粒子的基本性质 24

1.3.1　粒子的静态性质 24

1.3.2　粒子寿命与衰变宽度 26

1.3.3　粒子的分类 30

1.4　练习题 33

第二章　高速粒子运动学 35

2.1　狭义相对论 35

2.1.1　洛伦兹变换 35

2.1.2　洛伦兹变换的快度描写 39

2.2　两粒子碰撞和质心坐标系 41

2.2.1　质心坐标系和反应阈能 42

2.2.2　散射和微分截面 47

2.2.3　微分截面在实验室系-质心系之间的变换关系 50

2.3　相空间 52

2.3.1　n体不变相空间 53

2.3.2　共振态和不变质量谱 54

2.3.3 二体衰变运动学 ····· 56
2.3.4 三体末态和达立兹图 ····· 58
2.3.5 二体反应截面 ····· 65
2.4 练习题 ····· 67

第三章 强子与强子间相互作用 ····· 69
3.1 核力与同位旋 ····· 69
3.1.1 汤川耦合与π介子 ····· 69
3.1.2 同位旋的引入 ····· 72
3.1.3 两个核子体系的同位旋 ····· 74
3.1.4 π介子-核子系统的同位旋 ····· 76
3.1.5 同位旋算符及波函数的矩阵表示 ····· 77
3.2 同位旋对称性的应用 ····· 78
3.2.1 同位旋守恒定律 ····· 79
3.2.2 同位旋的破坏 ····· 82
3.2.3 同位旋在弱衰变中的应用 ····· 83
3.3 奇异数和重子数 ····· 85
3.3.1 奇异粒子的发现 ····· 85
3.3.2 奇异数守恒 ····· 86
3.3.3 重子数b ····· 88
3.3.4 超荷和盖尔曼-西岛关系： ····· 90
3.4 共振态 ····· 91
3.4.1 弹性散射的分波分析 ····· 92
3.4.2 共振态的产生和描写 ····· 93
3.4.3 介子共振态 ····· 95
3.4.4 重子共振态 ····· 97
3.5 **练习题** ····· 99

第四章 轻子和量子电动力学 ····· 101
4.1 轻子的基本性质 ····· 101
4.1.1 贝塔衰变与中微子的引入 ····· 102
4.1.2 反贝塔衰变，中微子相互作用 ····· 103
4.1.3 轻子数守恒 ····· 105

4.2 量子电动力学基础 ····· 106
4.2.1 相对论狄拉克方程 ····· 107
4.2.2 量子电动力学拉氏量 ····· 113
4.2.3 量子电动力学的费曼规则 ····· 115
4.2.4 电子和缪子的反常磁矩 ····· 118
4.3 电磁散射过程 ····· 121
4.3.1 轻子对湮灭产生过程 ····· 122
4.3.2 R值测量 ····· 125
4.3.3 巴巴散射和Drell-Yan过程 ····· 128
4.4 中微子振荡 ····· 130
4.4.1 两种中微子间的振荡 ····· 130
4.4.2 中微子振荡的一般规律 ····· 132
4.4.3 中微子振荡实验 ····· 135
4.4.4 中微子的螺旋度与手征性 ····· 141
4.5 **练习题** ····· 144

第五章 对称性和守恒定律 ····· 147
5.1 守恒量的一般性质 ····· 147
5.1.1 对称和变换 ····· 148
5.1.2 诺特尔定理 ····· 149
5.1.3 量子力学中的对称性和守恒量 ····· 150
5.2 时空对称性 ····· 152
5.2.1 连续时空对称性 ····· 152
5.2.2 空间反射变换和宇称 ····· 156
5.2.3 宇称守恒和宇称不守恒 ····· 158
5.3 电荷共轭变换、G变换和C、G宇称守恒 ····· 161
5.3.1 电荷共轭变换 ····· 161
5.3.2 纯中性态和C宇称守恒 ····· 162
5.3.3 G变换和G宇称 ····· 165
5.3.4 G宇称守恒 ····· 166
5.4 CPT对称性与CPT定理 ····· 168
5.4.1 CP不变性 ····· 168
5.4.2 时间反演和T不变性 ····· 170

5.4.3 CPT定理 ····· 173
5.5 全同粒子交换对称性 ····· 174
5.5.1 全同粒子组成系统的选择规则 ····· 175
5.5.2 正反费米子组成系统的对称性 ····· 176
5.5.3 正反玻色子组成的系统 ····· 177
5.6 对称性和群* ····· 178
5.6.1 U(1)规范不变性和电荷守恒 ····· 180
5.6.2 SU(2)群和同位旋 ····· 181
5.6.3 SU(3)群 ····· 182
5.7 练习题 ····· 184

第六章 强子结构与夸克模型 ····· 187
6.1 夸克模型和轻介子系统 ····· 187
6.1.1 强子结构模型发展简史 ····· 187
6.1.2 夸克模型 ····· 190
6.1.3 赝标量介子 ····· 193
6.1.4 矢量介子 ····· 196
6.2 轻重子系统的味SU(3)群表示 ····· 198
6.2.1 重子八重态 ····· 200
6.2.2 重子十重态和夸克颜色 ····· 202
6.2.3 重子质量 ····· 206
6.2.4 重子磁矩 ····· 209
6.2.5 静态SU(6)模型 ····· 211
6.3 重夸克偶素 ····· 212
6.3.1 粲夸克偶素 ····· 212
6.3.2 OZI规则 ····· 216
6.3.3 底夸克偶素 ····· 218
6.4 重味强子 ····· 220
6.4.1 粲味介子 ····· 221
6.4.2 粲味重子 ····· 222
6.4.3 底介子 ····· 226
6.4.4 底重子 ····· 228
6.5 奇特强子态 ····· 230

6.5.1 轻介子奇特态 231
6.5.2 类粲偶素 233
6.5.3 五夸克态 237
6.5.4 奇特态的命名规则 239
6.6 练习题 240

第七章 量子色动力学与部分子分布函数 243
7.1 量子色动力学简介 243
7.1.1 强相互作用拉氏量和费曼规则 244
7.1.2 手征对称性 247
7.1.3 渐进自由与夸克禁闭 249
7.1.4 格点量子色动力学 253
7.1.5 重离子碰撞和夸克胶子等离子体 255
7.2 电子-质子散射 259
7.2.1 电子-质子弹性散射 259
7.2.2 核子的电磁形状因子 261
7.2.3 电子-质子非弹性散射 263
7.2.4 电子-质子深度非弹性散射 268
7.3 部分子模型和部分子分布函数 269
7.3.1 简单部分子模型 269
7.3.2 电子-夸克散射过程 273
7.3.3 部分子分布函数 275
7.4 部分子分布函数计算 279
7.4.1 极高能深度非弹性散射 280
7.4.2 强子对撞机上的部分子分布函数 283
7.4.3 部分子分布函数程序简介 287
7.5 练习题 291

第八章 电弱统一理论 295
8.1 弱相互作用理论发展简史 296
8.1.1 弱相互作用的发现 296
8.1.2 弱相互作用的普适性 298
8.1.3 夸克混合与卡比玻角 300

8.1.4 GIM机制 ····· 301
8.2 中性K介子系统的对称性与CP破坏 ····· 304
8.2.1 $K^0 - \bar{K}^0$振荡 ····· 306
8.2.2 CP破坏 ····· 308
8.2.3 CKM夸克混合矩阵 ····· 313
8.3 电弱统一理论的基本结构 ····· 315
8.3.1 希格斯机制 ····· 318
8.3.2 W、Z规范玻色子 ····· 320
8.3.3 汤川耦合 ····· 324
8.3.4 费米子的规范相互作用 ····· 326
8.4 弱衰变过程举例 ····· 328
8.4.1 中间玻色子的两体衰变 ····· 328
8.4.2 $\pi^{\pm}$介子衰变 ····· 330
8.4.3 K介子稀有衰变 ····· 332
8.5 **练习题** ····· 336

第九章 标准模型精确检验和TeV物理 ····· 339
9.1 标准模型精确检验 ····· 340
9.1.1 标准模型电弱参数的精确测量 ····· 340
9.1.2 规范玻色子多点耦合的实验检验 ····· 344
9.2 顶夸克物理 ····· 346
9.2.1 顶夸克的产生 ····· 348
9.2.2 顶夸克弱衰变 ····· 350
9.3 希格斯物理 ····· 353
9.3.1 希格斯玻色子的主要产生过程 ····· 354
9.3.2 希格斯工厂实验 ····· 357
9.3.3 希格斯粒子的树图衰变 ····· 359
9.3.4 希格斯衰变的实验测量 ····· 362
9.3.5 $H \to \gamma\gamma$衰变 ····· 366
9.3.6 希格斯玻色子与新物理探索 ····· 369
9.4 **练习题** ····· 373

第十章　重味物理和CP破坏 ····· **375**
10.1 CKM矩阵幺正三角形相角 ····· 375
10.1.1 相角β ····· 377
10.1.2 相角α ····· 378
10.1.3 相角γ ····· 379
10.1.4 CKM矩阵整体拟合 ····· 381
10.2 D介子系统的混合与CP破坏 ····· 383
10.3 B介子系统的混合与CP破坏 ····· 386
10.3.1 B介子混合 ····· 387
10.3.2 直接CP破坏 ····· 391
10.3.3 间接CP破坏 ····· 392
10.3.4 混合型CP破坏 ····· 394
10.3.5 相位ϕ_s ····· 394
10.4 B介子典型衰变过程 ····· 396
10.4.1 低能有效哈密顿量方法 ····· 396
10.4.2 B介子两体纯轻子衰变过程 ····· 398
10.4.3 B介子半轻子衰变过程与“反常” ····· 401
10.4.4 B介子强子衰变过程简介 ····· 415
10.4.5 重味重子和奇异强子态简介 ····· 421
10.5 **练习题** ····· 421

附录 A　狄拉克方程与狄拉克矩阵 ····· **425**
A.1 4维时空γ矩阵公式 ····· 425
A.2 N维时空γ矩阵公式 ····· 429
A.3 菲尔兹重排 ····· 431

附录 B　标准模型的费恩曼规则与$SU(3)_c$规范群 ····· **435**
B.1 标准模型理论的费恩曼规则 ····· 435
B.2 $SU(3)_C$色规范群 ····· 441

附录 C　电磁学关系式和物理常数表 ····· **443**

参考文献 ····· **445**

第一章　绪论

物质是由什么组成的？

人们在研究自然界的普遍规律的时候有一个很自然的问题就是物质组成的最小单位是什么？在我国古代典籍《庄子.天下篇》中，庄子提出“一尺之捶，日取其半，万世不竭。”也就是说一尺之捶（棍，杖），今天取其一半，明天取其一半的一半，后天再取其一半的一半的一半，如是“日取其半”，总有一半留下，所以“万世不竭”。一尺之捶是一个有限的物体，但它却可以无限地分割下去。这是辩证的思想，认为物质组成应该没有最小的极限。实际上夏朝时的中国人（公元前两千年）相信物质是由金、木、水、火、土（五行）组成。古希腊哲学家恩培多克勒(Empedocles) 在公元前430年认为物质是由水、火、土和空气组成的。另一位古希腊哲学家德谟克利特(Democritus) 认为万物是由大小不同、质量不同、有不可入性的原子组成，原子是“不可再分”的意思。战国时代宋国的哲学家惠施也有此观点（至小无内，谓之小一）。真正带有近代性质的原子论，是由约翰·• 道尔顿（John Dalton，英国化学家，1766-1844）在十九世纪初提出来的，随后盖-吕萨克（Joseph Louis Gay-Lussac，法国化学家，1778-1850）、阿伏伽德罗（Amedeo Avogadro, 意大利物理学家，1776-1856）等人对气体进行研究时也提出了类似的想法。1826年布朗（Robert Brown，英国植物学家，1773-1858）观测到液体中“微粒”的无规则运动，证实了不可见的微粒的存在。十九世纪，自然科学创立，物理、化学等相继诞生。人们逐渐认识到各种物质都是由分子组成的，不同分子的性质是物质的物理和化学性质的基础。分子又是由原子组成的，门捷列夫（德米特里·伊万诺维奇·门捷列夫，俄国科学家，1834-1907）的元素周期表给出了物质组成的最新答案：物质世界是由约110种元素组成。1897年汤姆逊[1]发现电子，从而使得人们认识到原子也是有内部结构的。

20世纪是物理学飞速发展的世纪，也可以说是一个物理学的世纪。这个世纪的前30年是原子物理学的时代，与化学的研究并存。汤姆逊首先提出并完善了一种原子结构模型-葡萄干布丁模型，他认为原子内正负电荷总量是相等的，正电荷均匀分布在球体内，而电子像葡萄干一样均匀镶嵌在球体内。1909年卢瑟福[2]的α粒子散射实验证实了原子内部有一个带正电的核心。因而原子（元素）是由原子核和电子组成的。随后的核物理研究告诉我们，原子核则是由质子和中子组成的。20世纪的30、40年代是核物理学大发展的时期。在这之后，很多不稳定的粒子被实验相继发现了，人们开始寻找比质子和中子更“基本”的粒子，夸克模型的诞生，标志着粒子物理学蓬勃发展起来。

---

[1] Joseph John Thomson (1856.12.28-1940.8.30)，英国物理学家，以其对电子和同位素的实验研究著称。因发现电子获得1906年诺贝尔物理学奖。

[2] Ernest Rutherford (1871.8.30－1937.10.19)，新西兰著名物理学家。卢瑟福构造了原子结构的卢瑟福模型，首先提出放射性半衰期的概念，证实放射性涉及从一个元素到另一个元素的嬗变。因为“对元素蜕变以及放射化学的研究”而获得1908年诺贝尔化学奖。

粒子物理学的研究对象就是物质的最深层次结构和最基本的相互作用[1, 2] 。粒子物理学认为质子和中子是由夸克组成的，那么到底有多少种夸克，或者说有多少种基本粒子呢？这些夸克又是如何组成质子、中子、介子等强子束缚态的呢？它们是通过什么样的相互作用联系起来的？传递基本相互作用的媒介粒子有哪些？研究这些内容需要什么样的理论？这就是本书试图告诉大家的。

1.1 粒子物理学的研究内容

1.1.1 粒子物理学发展简史

粒子物理学的发展历史从某种程度上也可以说是各种基本粒子的发现史，按照顺序有：

1. 电子： 1897年，约瑟夫·汤姆逊利用带电粒子束在电磁场中偏转的方法，测量了电子的荷/质比（e/m）。1907-1913年，罗伯特·安德鲁· 密立根[3] 用在电场和重力场中运动的带电油滴进行实验，发现所有油滴所带的电量均是某一最小电荷的整数倍，该最小电荷值就是电子电荷。密立根发现了电荷的不连续性，也就是说电荷是量子化的。

2. 光子： 1901年，马克斯·普朗克[4] 提出能量量子化假说，以解释黑体辐射实验。1905年，阿尔伯特·爱因斯坦[5] 提出光量子假说，成功解释了光电效应，并因此获得1921年诺贝尔物理学奖。

3. 原子的核式结构模型： 1911年，欧内斯特·卢瑟福发现了α粒子的大角度散射，提出了原子的核式结构模型：原子中有一个很小的原子核，带有正电荷Ze和原子的绝大部分质量，Z个带负电的电子绕核转动。1913年，尼尔斯·玻尔[6] 提出著名的三个假设，建立了氢原子模型，对氢原子光谱给出了自洽的解释。

4. 质子： 1919年，卢瑟福用α粒子轰击靶原子，得到了氢核，也就是质子（proton）。

5. 中子： 1932年，查德威克[7] 在人工核裂变实验中发现中子(neutron)，这表明原子核是有内部结构的，原子核是由带正电的质子和不带电的中子组成的。

[3]Robert Andrews Millikan，1868.3.22-1953.12.19，美国实验物理学家，由于其在测定电子电荷以及光电效应的出色工作获得1923年诺贝尔物理学奖。

[4]Max Planck (1858.4.23-1947.10.4)，德国物理学家，量子论重要创始人，因发现能量量子化获得1918年诺贝尔物理学奖。

[5]Albert Einstein (1879.3.14-1955.4.18)，美籍德裔犹太人，创立了狭义相对论和广义相对论，给出了质能关系式$E = mc^2$。被公认为是继伽利略、牛顿以来最伟大的物理学家。

[6]Niels Bohr (1885.10.7-1962.11.18)，丹麦物理学家。他提出了玻尔模型，提出互补原理和哥本哈根诠释来解释量子力学，获得1922年诺贝尔物理学奖。

[7]James Chadwick (1891.10.2-1974.7.24)，英国实验物理学家。1935年因发现质子而获的诺贝尔物理学奖。1939-1943年参加英国及美国曼哈顿工程的原子弹研究，获得多种荣誉。

6. **正电子：** 1932年，卡尔·安德森[8] 在宇宙线实验中发现了正电子（positron），这是人类发现的第一个反粒子。这一发现证实了狄拉克方程的正确性。

7. **回旋加速器：** 1932年，劳伦斯[9]设计和制造了第一台高能粒子回旋加速器，使得人们对物理的探索范围扩大至兆电子伏特的能标。

8. **汤川理论：** 1935年，汤川秀树[10]创立了强相互作用的汤川理论，并预言了π 介子的存在。

9. **缪轻子：** 1936年，卡尔·安德森和赛斯· 内德梅耶在宇宙线实验中发现了μ轻子。

10. **π介子：** 1947年，塞西尔·鲍威尔发展了探测微观粒子的照相乳胶记录法，并以此发现了汤川预言的π 介子。

11. **反质子：** 1955年，美国物理学家塞格雷和张伯伦发现了反质子的存在，表明强子也有反粒子，展现了反粒子的普遍性。他们因此发现获得了1959年诺贝尔物理学奖。

12. **中微子：** 1956年，弗雷德里克·莱因斯证实了中微子的存在，因此获得了1995年的诺贝尔物理学奖。

13. **缪中微子：** 1962年，里昂·莱德曼[11]、梅尔文·施瓦茨和杰克·斯坦伯格发现了第二种中微子-缪子中微子。

14. **夸克：** 1964年，盖尔曼[12]提出了描述强子内部结构的夸克模型，很好地解释了强子的对称性，对实验探测到的上百种强子进行了分类。

15. **粲夸克与J/Ψ介子：** 1974年，由丁肇中[13]和B. Richter(1931-2018, 美国物理学家)领导的两个实验组在他们的实验中同时发现了由$c\bar{c}$对构成的新粒子J/ψ，证实了第四种夸克：粲夸克的存在。

16. **τ轻子：** 1975年，由马丁·佩尔[14] 领导的SLAC-LBL实验组在美国斯坦福直线加速器实验室的正负电子对撞机发现了很重的第三代带电轻子：τ轻子。

---

[8] Carl David Anderson (1905.9.3-1991.1.11)，瑞典裔美国物理学家，因为发现正电子获得1936年诺贝尔物理学奖。

[9] Ernest Orlando Lawrence (1901.8.8-1958.8.27), 美国物理学家，因为发明高能粒子回旋加速器，获得1939年诺贝尔物理学奖，美国劳伦斯伯克利和劳伦斯利弗莫尔国家实验室都是以他名字命名的。

[10] 日本物理学家汤川秀树(1907.1.23-1981.9.8), 提出了核力的介子理论，获得1949年诺贝尔物理学奖，他也是第一个获得诺贝尔奖的日本人。

[11] Leon Lederman (1922.7.15-2018.10.3)，美国实验物理学家，曾任美国物理学会主席，因发现缪子中微子与M. Schwartz 和J. Steinberger 分享了1988年的诺贝尔物理学奖。

[12] Murray Gell-mann (1929.9.15-2019.5.24)，美国物理学家，提出了强子的夸克模型，获得1969年诺贝尔物理学奖。

[13] 丁肇中(Samuel C.C. Ting) (1936.1.27∼)，美籍华人物理学家，因发现J/Ψ粒子与B. Richter 分享1976年诺贝尔物理学奖。

[14] Martin L. Perl (1927.6.24-2014.9.30)，美国物理学家，因发现τ轻子获得1995年诺贝尔物理学奖。

17. **底夸克：** 1977年，由里昂·莱德曼领导的CFS-E288实验组在费米实验室的质子-原子核对撞实验中发现了$\Upsilon(b\bar{b})$粒子。证实了底（bottom or beauty）夸克的存在。

18. **$W^{\pm}$和Z^0玻色子：** 1983年，在欧洲核子研究中心(European Organization for Nuclear Research，简称CERN) 的质子-反质子对撞机上工作的UA1和UA2合作组宣布发现了传递弱相互作用的$W^{\pm}$和Z^0矢量玻色子，直接证明了电弱统一理论的正确性。因在发现$W^{\pm}$和Z^0玻色子的实验中所起的决定性作用，卡洛·鲁比亚和西蒙·范德梅尔一起获得了1984 年的诺贝尔物理学奖。

19. **顶夸克：** 1995年，美国费米实验室CDF和D0国际合作组发现第六种夸克-顶夸克（*top*）的存在。这是迄今为止发现的质量最重的基本粒子，超过质子质量的170倍。

20. **希格斯玻色子：** 2012年 7 月，在欧洲核子研究中心的大型质子-质子对撞机（Large Hadron Collider, 简称LHC）上工作的Atlas 和CMS合作组宣布发现了标准模型最后一个基本粒子– 自旋为零的的希格斯玻色子。彼得·希格斯和弗朗索瓦·恩格勒因为在1964年预言了希格斯玻色子而获得2013 年诺贝尔物理学奖。

在经典物理学中，我们已经知道物理规律存在的对称性必然导致守恒定律的存在，例如

空间平移不变性 $\rightarrow$ 动量守恒；
时间平移不变性 $\rightarrow$ 能量守恒；
空间转动不变性 $\rightarrow$ 角动量守恒。

在粒子物理的发展过程中，物理学家发现对称性与守恒定律对于粒子物理的研究极为重要。在后面的学习中我们会看到，除了这些有经典对应的守恒量和对称性，粒子物理学中还引入了很多非常有趣的新的对称性，例如分立对称性、内部对称性，相乘性守恒量和部分守恒量等。粒子物理学的发展历史同时也是发现和研究对称性的历史。对于对称性的研究，原则上还需要专门的数学工具–群论。对于粒子物理学来说，特别需要学习李群和李代数的知识。

二十世纪是物理学高速发展的世纪，人们耳熟能详的标志性成就是量子力学和相对论。量子力学的发展成功地解释了原子线状光谱的来源：原子分立能级。通过量子力学的薛定谔方程对于库仑势的解，人们得到了氢原子的束缚态分立能级，电子在这些束缚态能级之间跃迁放射出的固定能量光子对应于氢原子的线状光谱。但是，量子力学本身的局限性在于，它只能解出束缚态能级，却并不能解释电子为什么在这些能级之间跃迁以及如何跃迁，如果有多个跃迁符合选择定则时，电子如何挑选能级来实现不同的跃迁。量子力学的创始人之一的薛定谔[15]也加入了质疑的阵营：当电子从一个能级跃迁到另一个能级时，按照相对论，它的速度不能超过光速，而跃迁是需要时间的，那么跃迁过程中，电子

[15]Erwin Schrödinger (1887.8.12-1961.1.4), 奥地利物理学家。因对构建量子力学的贡献，和狄拉克分享1933年诺贝尔物理学奖

表 1.1:　四种基本相互作用性质的比较。

相互作用	强度	力程	媒介子	参与作用粒子	束缚态
强作用	$\alpha_s \sim 1$	$10^{-15}m$	胶子	夸克, 胶子	强子
电磁作用	$\alpha = 1/137$	$F \propto 1/r^2$	光子	带电粒子	原子、分子
弱作用	10^{-5}	$< 10^{-17}m$	$W^{\pm}, Z^0$	夸克、轻子	无
引力	10^{-39}	$F \propto 1/r^2$	引力子	所有粒子	太阳系等

在离开前一个能级，还没到达下一个能级之前，电子处于什么状态呢？这些问题都是量子力学不能回答的，必须由在粒子物理学发展过程中建立起来的量子场论来给出答案。

1.1.2　场和基本相互作用

粒子物理学是二十世纪四十年代开始从原子核物理学中分离出来的，是研究微观最小客体的性质、运动、相互作用、相互转化的规律的学科。其目的是探讨微观最小客体内部结构以及宇宙运行的最基本理论规律，是物理学的基础学科，也是物理学研究的最前沿。自然界中已知的四种基本相互作用是引力相互作用、弱相互作用、电磁作用和强相互作用，这些基本相互作用特点如表1.1所示。引力相互作用力和电磁相互作用力都是随着作用的距离增加而“减弱”，跟距离的平方成反比，属于长程力；弱相互作用力和强相互作用力是短程力。相互作用力程的物理意义是相互作用的有效作用范围。正由于作用力程的差别，在宏观物理现象中，人们早就认识到了引力相互作用和电磁相互作用，而弱相互作用和强相互作用则是到了原子核物理学中才被直接认识到它们的存在。从表1.1可以看出，强相互作用的强度α_s比电磁相互作用的强度α大两个量级。从典型的电磁作用库仑位势$V(r) = \alpha/r$和强相互作用的汤川位势$V(r) = \alpha_s \cdot e^{-\mu r}/r$，可以看出，强相互作用是短程的强作用力，而日常生活中常见的电磁相互作用是长程比较弱的力。

经典的引力理论是牛顿[16]总结出来的万有引力理论。用以描写近代天文现象和宇宙学的是爱因斯坦总结的现代引力理论–广义相对论。在经典电磁学范围描写电磁相互作用的是麦克斯韦[17]的经典电动力学。而粒子物理学研究的对象是微观的基本粒子，它们具有以下三个特点：

1. 所有粒子都是微观尺度的，所以具有量子性，需要一个量子理论。

2. 基本粒子又是高速运动的，大多数情况下非常接近于光速，因而需要一个相对论性的理论。相对论量子力学虽然诞生了，但还是一个单粒子运动方程，并不能描写粒子数可变的相互作用系统。

[16]Isaac Newton，1643.1.4-1727.3.31，英国著名物理学家、数学家，英国皇家学会会长。
[17]James Clerk Maxwell，1831.6.13-1879.11.5，英国物理学家、数学家。

3. 粒子物理学研究的系统经常发生基本粒子的产生和衰变，因而需要一个描写粒子数可变的系统的场论。

能够同时满足这三个条件的理论，就只有相对论性的量子场论（QFT: Quantum Field Theory）[3–9]。量子场论也是目前为止我们所知的最基本的相互作用理论。对于那些运动速度不太快的系统，我们可以取低速近似，也就是非相对论近似，这时量子场论就回到了量子力学；而对于那些虽然运动速度快，却是宏观客体的研究对象，量子场论可以回到相对论力学；对于既是宏观的、又是非相对论的客体，则回到经典的牛顿力学。描述三种基本相互作用的量子场论分别是

1. 1941-1950 发展起来的描写电磁相互作用的量子电动力学(QED：Quantum Electromagnetic Dynamics);

2. 1964-1971发展起来的电弱统一理论（Quantum Electroweak Theory）;

3. 1972-1974发展起来的描写强相互作用的量子色动力学(QCD: Quantum Chromodynamics)。

电弱统一理论和量子色动力学一起构成了粒子物理的基本理论“标准模型”（SM：Standard Model）[10–21]。量子场论给出了一个新的基本粒子的物理图象，概括如下：

1. 每种粒子对应一种场，场没有不可入性，对应各种不同粒子的场在空间中互相重叠地充满全空间。场的激发状态表现为出现相应的粒子，场的不同激发状态表现为粒子的数目和运动状态不同。例如，电子场的激发状态可以表现为一个电子，也可表现为多个电子。场处于基态时由于不能释放出能量，不能输出信号，从而不表现出直接的物理效应，亦即不表现为出现粒子。因此场和粒子之间，场是更基本的，粒子只是场处于激发状态的表现。

   在物理学的发展过程中，人们对于物质存在形式的认识也是在不断变化的。最初认识粒子是物质存在的基本形式，粒子在空间占有一定的体积，有不可入性。粒子有质量，有能量，有动量，有角动量。后来人们又认识到场不能只看作是为了描述物理规律方便而引入的概念，**场本身也是物质存在的基本形式**。场也有质量，有能量，有动量，有角动量，这些性质和粒子是一样的。但是场是充满全空间的，没有不可入性，这些性质和粒子是不一样的。到这时，粒子和场被认为是物质存在的两种基本形式。现在量子场论则明确指出：物质存在的两种形式中，场是更基本的，粒子只是场处于激发状态的表现形式。

2. 一般说来，场用复数量描写。与此相应，场的激发也用复数量描写，互为复共轭的两种激发状态表现为粒子和反粒子互换的两种物理状态。例如：电子场的一种激发状态表现为一个电子，与之成复共轭的激发状态表现为一个能量、动量相同的正电

子。如果某场用实量描写，与此相应，场的激发也用实量描写，这时复共轭就是它自身，粒子就是它自身的反粒子。

3. 场的基态是能量最低的状态，如果所有的场都处于基态，称为物理真空。由此可见，真空并不是真的“空无一物”。对于物理真空态，全空间充满各种场，只是由于所有场都处于能量最低状态而不可能表现出任何释放出能量从而给出信号的物理效应。

相互作用存在于场之间，无论是处于基态还是处于激发态的场都同样地与其它场相互作用。粒子是场处于激发状态的表现，因此粒子间的相互作用来自场之间的相互作用。场之间的相互作用是粒子转化的原因。场论对粒子间的相互作用的机理给出了清楚的图象。现在考虑中子的贝塔衰变过程

$$n \to p + e^{-} + \bar{\nu}. \tag{1.1}$$

自由中子为什么会自动衰变? 一个自然的回答是中子通过相互作用而衰变。再问中子和谁相互作用? 自然的回答是中子和质子、电子以及中微子相互作用。然而当中子存在时，质子、电子以及中微子还不存在。而当质子、电子以及中微子存在时，中子却已经不存在了。中子和质子、电子以及中微子没有一个时刻同时存在，它们之间又如何相互作用呢? 这个物理图象和物理概念上的表观上的矛盾，在场论中自然地解决了。

根据场论给出的基本物理图象，再看中子的贝塔衰变过程。开始时，中子场处于激发状态，表现为存在一个中子。而质子场、电子场和中微子场则处于基态，表现为没有质子、电子和中微子(或相应的反粒子)。经过中子场与质子场、电子场和中微子场之间的弱相互作用，中子场可以跃迁到基态把激发能量传过去而引起质子场、电子场和中微子场的激发，表现为中子消失而产生了一个质子、一个电子和一个反中微子。这就是中子β 衰变过程的场论图象。在这个图象中，衰变过程得以发生的原因是场之间的弱相互作用。正因为中子场与质子场、电子场和中微子场之间存在弱相互作用的联系，才使中子场从激发状态跃迁回基态的改变引起质子场、电子场和中微子场从基态到激发状态的改变，表现为中子贝塔衰变的过程。

粒子场论中没有超距作用，所有相互作用都必须通过场（粒子）来传递，所以每种基本相互作用都有相应的媒介粒子来传递。上面的中子贝塔衰变过程在波恩近似下，是中子和质子通过传递一个W玻色子来与电子和中微子相互作用。强相互作用的原始媒介粒子是八种胶子，它们在夸克之间传递的强相互作用称为色相互作用。原子核中的质子和中子统称为核子，核子都是色中性的粒子，但是实验上看到核子之间是有相互作用的，这是色相互作用的剩余作用。这情况类似于分子之间的范德瓦尔斯[18]力，它的原始来源是电磁相互作用。但即使是中性分子之间也可以有范德瓦尔斯力，这是因为它是复杂电磁相互作用的剩余作用，不能简单地归结为交换一个光子。同样地强相互作用也不能简单地归结为交

[18]Johannes Diderik van der Waals, 1837.11.23-1923.3.8, 荷兰物理学家，长期担任荷兰皇家科学院秘书，1910年诺贝尔物理学奖获得者。

换一个胶子，特别是在能量不是非常高时。胶子、光子、$W^{\pm}, Z^0$ 粒子和引力子都是规范粒子，它们传递的相互作用都是规范相互作用。现在实验上还没有观察到自由胶子，并且现有理论也认为单个自由胶子不能够独立存在，只能存在于强子内部或在反应过程中出现并起作用而被间接察觉到。由表-1.1可以看出，引力相互作用比其它3类相互作用弱30多个量级。尽管在天体物理学宏观尺度对引力相互作用已经研究的相当清楚，但在粒子物理学涉及的微观尺度（小于10^{-8}米），还没有能够直接对引力相互作用进行实验研究。在粒子物理实验和理论研究中，引力相互作用因为太弱而被忽略。引力子如果存在的话，按现有量子引力理论，它的质量也为零，它传递的也是长程力。重矢量玻色子$W^{\pm}$和Z^0 粒子的自旋为1，并且由于其质量很重，传递的是力程很短的短程力。

希格斯玻色子是标准模型最后一个发现的基本粒子，与前四种基本相互作用不同，涉及希格斯粒子的汤川耦合和希格斯场的自相互作用不是通常的规范相互作用。目前已经有人把Higgs玻色子通过“汤川耦合”使费米子获得质量的作用称之为“第5种相互作用”。大型强子对撞机实验正在对$Ht\bar{t}, Hb\bar{b}, H\tau\tau$等涉及各种费米子的汤川耦合，以及希格斯玻色子的自相互作用$(3H, 4H$等耦合$)$的强度和特点进行实验测量，这些研究将帮助我们精确检验标准模型理论，深入理解高能、微观领域新的基本相互作用。

1.1.3 自然单位制

在粒子物理研究中，由于所研究的对象是非常小的基本粒子，而且运动速度非常快，接近光速，所以使用过去大家常用的国际单位制会非常不方便。自然单位制是粒子物理中普遍使用的最方便的单位制[2]，以避免数字写起来太麻烦，不直观。在这个单位制中，通常以一些常用的物理学基本常数作为单位，例如粒子的速度我们通常不是用“米/秒”作为单位，而是以光速“c”作为单位。这样光子的速度就不用写3×10^8米/秒，而是单位1。光速c=1，也就意味着“长度”和“时间”的量纲就相同了，$1s = 2.9979\times10^8$ 米。下一步我们定义普朗克常数$\hbar = 1$，这样[19]就有：[能量] = 1/[时间]，即$1(MeV)^{-1} = 6.582\times10^{-22}s$。然后我们定义波尔兹曼常数$\kappa = 1$，这样就有：[能量] = [温度]，1eV = 11604 K。

在这些约定之下，最后就只剩下了一个独立的量纲，它可以是长度、时间、能量或者其它任何一种量纲。通常我们选取能量的单位电子伏特(eV)来标定上面这些所有的物理量。常用的单位是：1 keV=1000eV, 1MeV=1000keV, 1GeV=1000 MeV, 1TeV =1000 GeV。例如，我们一般说π介子的质量是140MeV/c^2，或者直接说是140MeV。

如果我们再进一步定义牛顿引力常数$G_N = 1$ 或者普朗克质量$M_{\text{Planck}} = (\hbar c/G_N)^{1/2} = 1$，就得到了一个更普遍的自然单位制，这时候就只有数字，一个单位不剩了。这相当于是用普朗克质量作为质量的单位，但是由于普朗克质量是个很大的质量(10^{19}GeV)，所有粒子的质量就变成很小的数字，实际上并不方便，所以并不常用。

[19]我们用[X]表示物理量X的量纲。

关于电荷的单位，由于电荷的量子化，我们取电子的电荷为基本电荷e单位。在原子物理里面得到的精细结构常数$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq 1/137$在粒子物理里作为量子电动力学的基本相互作用常数会经常用到。

在相对论的课程中，大家学到了四维时空，也就是闵可夫斯基空间$(x_1, x_2, x_3, x_4 = it)$，相应的四维能量和动量是$(p_1, p_2, p_3, p_4 = iE)$。因为第四维是复数，不是很方便，在广义相对论和粒子物理学中我们一般引入一个四维度规：

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

四维时空矢量定义为$x = (t, x_1, x_2, x_3),\ x_i, i = 0, 1, 2, 3$，四维能量动量$p = (E, p_1, p_2, p_3),\ p_i, i = 0, 1, 2, 3$。这样每个四维矢量都不用含有虚数的定义了。但两个四维矢量的乘积就定义为

$$A \cdot B = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

在粒子物理里，由于经常会遇到求和的情况，我们一般会在公式里省略求和号$\sum$；凡是遇到重复的上下指标都认为是求和，而且在粒子物理的公式里，也从来没有遇到重复指标不是求和的情况。四维能动量和四维时空坐标的平方就分别是

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2,$$

$$x^2 = t^2 - |\mathbf{x}|^2.$$

由上面的定义可以看出，$x^2 > 0$意味着时间分量大于空间分量，类似地通常我们把满足$p^2 > 0$的四维动量称为类时的动量，而把满足$p^2 < 0$ 的动量称为类空的动量。因为粒子的质量都是大于或者等于0的，实的在壳粒子的4维动量在此度规下一般满足$p^2 > 0$。

由于常见的基本粒子里，光子是静止质量为0的粒子，满足$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$条件的运动学我们称之为光锥。在超高能实验中，质量比较轻粒子的运动速度都非常接近光速。在光锥上运动的粒子，由于$E = |\mathbf{p}|$，人们就只需要一个参数E 或者$|\mathbf{p}|$，再加上粒子的运动方向来描写粒子的运动，人们因此发明了“光锥坐标系”，使运动学变得简单。

在光锥坐标系中，四维动量矢量p可以写定义为

$$p = (p^+, p^-, \mathbf{p}_\perp), \tag{1.3}$$

其中

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^3), \quad p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^3), \quad p_\perp = (p^1, p^2). \tag{1.4}$$

在光锥坐标系中，一个矢量的纵向分量等于它在光锥上的投影，而横向分量与普通直角坐标系相同。如果粒子是在光锥上运动，其运动就只能在正负光锥矢量n_+和n_-上运动：$n_+ = (1, 0, \mathbf{0}_\perp)$, $n_- = (0, 1, \mathbf{0}_\perp)$。其在普通直角坐标系中的形式为

$$n_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \qquad n_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1). \tag{1.5}$$

另外一些关系为

$$\begin{aligned} p^+ &= n_+ \cdot p, \quad p^- = n_- \cdot p, \\ p^2 &= 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2, \quad p_a \cdot p_b = p_a^+ p_b^- + p_a^- p_b^+ - \mathbf{p}_{a\perp} \cdot \mathbf{p}_{b\perp}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

在光锥坐标系中，度规张量$g_{\mu\nu}$不再是对角矩阵，

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

其中$\mu, \nu = +, -, 1, 2$。

从20世纪60年代开始，伯克利的粒子数据工作组每两年会更新发布已知粒子及其性质的粒子数据表[2]，也包括重要的粒子物理常数和理论总结。这些结果在网站http://pdg.lbl.gov上可以查到，也可以在这个网站上**免费**订阅纸质版本和一个压缩的小本子。这个小本子很有用，粒子物理学家几乎都是人手一册的。

1.2 高能物理实验手段

粒子物理学是实验科学，宇宙线、高能加速器和粒子探测器是高能物理实验的主要手段[22–27]。因为研究愈深层次的物质结构需要愈细的探针：更高能量的入射粒子。根据量子力学，能量为E的粒子的德布罗意波长为

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2\mu E}, \quad E = 1GeV \longrightarrow \lambda \approx 2 \times 10^{-16} m. \tag{1.8}$$

要研究$d = 10^{-16}$m 以下距离的物质结构问题，就需要E大于几个GeV，即$p > h/d$。另外，由于粒子物理研究的多为瞬态、小截面过程，需要高灵敏、高精度的粒子探测器。

1.2.1 宇宙线

在粒子加速器发明之前，宇宙线是粒子物理学家发现新粒子的主要途径，例如缪子、π介子以及以K介子、Λ超子为代表的奇异粒子等最早都是在宇宙射线实验中被发现的。宇宙线实验是粒子物理最重要的实验手段之一。宇宙线来源于宇宙空间的高能粒子束流，

最早是奥地利物理学家赫斯[20]在1912年利用氦气球发现的，大部分来源于太阳。其它可能来源，特别是极高能粒子束流的来源还有待于研究。这些来自外太空的高能粒子（主要是质子）在地球大气上层击中原子时会产生大量次级粒子雨。

作为基本粒子的产生源，宇宙线有其优点：它们是“免费”的，其中存在极高能量的粒子: $E > 10^{11}$GeV。目前LHC大型强子对撞机实验的加速器能够提供的质子束流最高能量只能达到6.5TeV（1TeV $= 10^3$GeV）。因此，更高能量的粒子只能来源于宇宙线；但是，宇宙线也有缺点，高能粒子束流强度太低，它们被合理体积探测器探测到的几率太低，而且其能量范围和种类不是可控的，在地球上被大气层散射后，能量损失很大，因此宇宙线实验需要耐心和运气（有点“守株待兔”的意思）。

随着高能加速器的发明，“人造”高能粒子源产生的粒子数量多、能量可控，单束团的粒子数在10^{10}量级，成为高能物理实验的主力，宇宙线实验变得越来越不重要了。但是作为能产生超高能粒子的免费源以及研究宇宙起源的工具，宇宙线实验近年来又有新的发展。高能粒子在散射过程中产生大量的次级粒子，形成巨大的簇射，其中可以包括多达10 亿个次级粒子，覆盖数平方公里面积。为观察这类事例，就需要在较大面积布下计数器阵列，测量所有簇射粒子到达的位置和时间，以确定初级宇宙线高能粒子的位置和能量。大气中次级宇宙线粒子，包括质子、π 介子、正反μ 子、正负电子与光子等。随着大气层深度不同，各种粒子的比例也不同。次级粒子的总数随着高度降低而迅速下降。因此宇宙线实验在海拔越高的地方越有优势。



图 1.1: 西藏羊八井国际宇宙线观测站

我国的宇宙线观测站早期建立在云南，后来在海拔4300米的西藏羊八井建立了中国-日本合作的广延大气簇射阵列和中国-意大利合作的全覆盖探测阵列，如图-1.1 所示，

[20]Victor Francis Hess, 1883.6.24-1964.12.17，奥地利物理学家，后加入美国籍。因发现宇宙射线而和卡尔.安德森分享了1936年诺贝尔物理学奖。

是国际四大超高能γ 天文和超高能宇宙线研究阵列之一，发现了宇宙线的各向异性分布，并得到了宇宙线和银河系共转的证据，以及其它丰富的研究成果。近期又在四川省甘孜州海拔4400 米的稻城亚丁，建设占地1.36平方公里的国家重大科技基础设施“高海拔宇宙线观测站（LHAASO）”。2021年5月，基于已经建成的1/2规模探测装置，在2020年内11个月的观测结果，LHAASO国际合作组宣布在银河系内发现大量超高能伽马射线源，并记录到最高能量为1.4PeV的伽马光子（$1PeV = 10^6$GeV）。实验测到的伽马光子信号高于周围背景7倍标准偏差以上，射线源的位置测量精度优于0.3^0 [24]。这些重要发现开启了“超高能伽马天文学”时代。LHAASO 实验将在宇宙线起源、宇宙高能γ 射线源的搜寻、监测及空间环境预报研究方面做出重大贡献。

当然，既然宇宙线来源于地球之外，在地球之外的直接探测比高海拔观测站能更有效地观测到初级宇宙线。由美籍华裔物理学家丁肇中领导的阿尔法磁谱仪计划(AMS)主要目的在与寻找太空中的反物质和暗物质，同时测量宇宙线，研究宇宙起源。探测器“阿尔法磁谱仪-02”（AMS-02）重约7.7吨，在2011 年发射成功，目前已经收集了大约1000亿条宇宙线的数据，主要实验结果已经发表[25]。AMS实验通过以前所未有的精度测量宇宙线中正电子的比例，反质子-质子比，以及电子、正电子、质子、氦核等粒子的通量，改变了人类对宇宙线的认识。

1.2.2 高能加速器

加速器物理实验利用粒子加速器将带电粒子的速度和动能提高到一定状态，通过对撞或者打靶让高速粒子之间(对撞机实验)或者高速粒子与其他物质之间(固定靶实验)发生相互作用。经过相互作用产生的末态粒子会在不同类型的探测器中留下电子学信号，测量这些电子学信号，通过计算可以得到这些末态粒子的电荷、质量、自旋等物理量，研究它们的性质和相互作用的规律。加速器是能够可控制地产生实验所需要的高能粒子束流的仪器。例如在斯坦福大学的PEP-II 加速器，每一个粒子束团有$(2.1/5.9) \times 10^{10}$个（正）电子，而整个储存环中同时会有1658个粒子束团，数目巨大，有效地克服了宇宙线实验粒子能量大小不可控、粒子数量稀少的缺点。

粒子加速器是提高荷电原子核和亚原子粒子速度和动能的各种装置的统称[1, 22, 23]，是粒子物理实验中的重要研究工具，为研究人员研究基本粒子的性质和相互作用规律提供了一种手段。基于粒子加速器研究的技术在辐射照相、癌症治疗、放射性同位素生产等方面有广泛应用。从1932年英国物理学家J.D.考克饶夫[21]和E.T.S. 瓦尔顿[22] 首次用人工加速粒子观测到原子核的裂变以来，加速器在粒子物理实验研究中就处于十分重要的地位。加速器通常可以分为两类：直线加速器和环形加速器，它们的加速能力和被加速粒子的能量通常以电子伏(eV)和它的倍数为单位来表示。通常用亮度(Luminosity)来表示对单位时间单位面积上加速粒子的数目，单位为$\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$。目前世界上高能加速器的最高亮度记录

[21] J.D. Cockcroft (1897.5.27-1967.9.18)，英国实验物理学家，卢瑟福的学生，获得1951年的诺贝尔物理学奖。
[22] E.T.S. Walton (1903.10.6-1995.6.25). 爱尔兰实验物理学家，获得1951年的诺贝尔物理学奖。

是日本的KEKB加速器保持的，亮度超过了$10^{34}\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$。

直线加速器是粒子加速路径为一直线的粒子加速器。一个直线加速器可以分为若干节，被加速粒子的最终能量是各节能量提高的总和。直线加速器根据被加速粒子的特点可以采用两种不同的加速装置：行波直线加速器和驻波直线加速器。行波直线加速器主要用于电子加速。通过行进的纵向分布电磁场加速电子，提高电子动能。行波加速器采用波导结构，其基本加速单元是真空管，在加速过程中通过调整行波的相速度使电子被持续加速。驻波直线加速器主要用于加速质子或重离子，通过电磁驻波加速粒子，提高其动能。驻波加速器采用带有漂移管的谐振腔结构，相邻的漂移管之间留有空隙，粒子每经过一次空隙，就被射频电磁波产生的电场加速一次。无论是行波直线加速器还是驻波直线加速器，都具有被加速粒子束流强度高、能量可逐节增加等优点，理论上可以使粒子在保持高流强的同时被提高到实验预设的任意能量，但是实际上，加速器的尺寸，昂贵的高频、微波功率源需求量都制约了被加速粒子的能量上限。

早期的直线加速器由于受到技术上的限制并不能使粒子获得很高的能量，因此物理学家开始研究是否可以对直线加速器进行改造，提高加速器的能量上限，环形加速器应运而生。相比于直线加速器，环形加速器借助磁场的作用使粒子被加速的路径成螺线形或大致为圆形的曲线。通过在加速路径上增加对粒子加速的次数来提高粒子的能量。最重要的环形加速器是回旋加速器和同步加速器。回旋加速器的核心部件是放置于真空中的两个半圆形的中空D型盒，D型盒接在高频交流电源上作为电极，电极间留有空隙。在其中一个D型盒中心附近放置待加速粒子源。整个装置置于强电磁铁间，磁场方向垂直于D型盒底面，如图1.2所示。回旋加速器对粒子的加速过程大致是：待加速带电粒子从粒子源中发射，第一次经过两电极间的空隙时被交流电产生的电场第一次加速，加速后的粒子沿着运动方向进入D 型盒。由于D型盒处于磁场中，带电粒子在D型盒中做圆周运动，绕过半个圆周后，带电粒子第二次经过电极间的空隙，若由交流电产生的电场此时反向，带电粒子将第二次被加速后进入另一个D型盒，继续运动半个圆周后第三次到达空隙。此时可以称为一个加速周期。这个周期内粒子运动了一个圆周(由两个半径不同的半圆组成)，两次经过电极间的空隙，被加速两次。带电粒子如上所述做周期性运动，反复被加速，能量不断提高。

早期回旋加速器最重要的成果就是人工放射性物质的产生。对它的研究不仅促进了粒子加速器的发展，也促进了辐射在生理学和医学上的应用，在粒子物理实验发展史上具有特殊地位。1930年，美国物理学家E.O.劳伦斯提出了回旋加速器的理论，1932年制造了世界上第一台质子回旋加速器(直径13厘米，加速能量80keV)，通过改变粒子加速路径的方法将粒子加速至较高能量。在此基础上，物理学家又发明了同步加速器。同步加速器又称同步回旋加速器，是回旋加速器的进一步发展，它可以根据磁场变化的需要和粒子质量的相对论性增长而改变加在D型盒的交流电频率，进一步提高粒子能量。同步加速器应用相位稳定性原理使粒子做圆周运动的频率与外加在D型盒上的交流电的振荡频率同步，变化的磁场使粒子在加速后做半径大致相同的圆周运动，这样就克服了回旋加速器中回旋

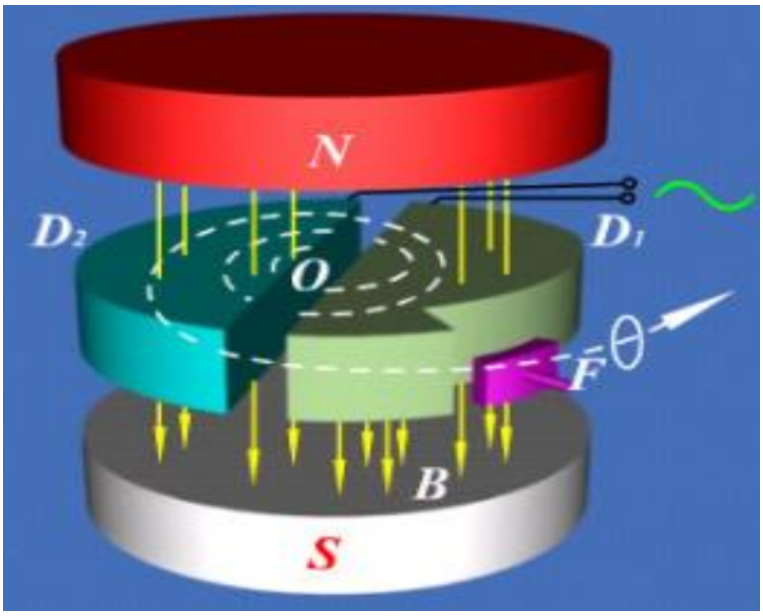


图 1.2: 回旋加速器示意图

次数受限的缺点。这一优点使同步加速器技术广泛应用于现代高能粒子物理实验。

同步加速器的环形运行轨道可以让带电粒子反复通过同一加速间隙，粒子能量将能得到多次增长，加速效率提高。但是由于接近光速的带电粒子在环形轨道运动，有很大的加速度而放出电磁辐射，称为“同步辐射”，其辐射功率正比于粒子能量的四次方，反比于粒子质量的四次方。对于质量很小的电子来说，高能同步加速器的能量损耗严重，200GeV就基本上已经达到了上限。更高能量的电子加速器，需要从环形改回直线加速器。虽然同步辐射对于粒子物理来说是一种损耗，但是这种辐射却是一种很难得的高性能X光源，其具有高强度、宽频谱、方向性好、偏振性好、脉冲宽度窄的特点。很多正负电子对撞机在做粒子物理实验的同时，也提供高性能的同步辐射光，例如中科院高能物理所1989年建成的北京正负电子对撞机（BEPC）就同时是一个同步辐射光源。世界上很多国家也建造了一些加速器作为专门的同步辐射光源，这包括我国安徽省合肥市和上海市的同步辐射光源和正在北京怀柔建造的同步辐射光源。这些光源在研究凝聚态物理和纳米材料性质方面具有不可替代的重要性。

作为加速器物理实验的两种主要方式，对撞机实验和固定靶实验各有利弊。对撞机实验的优点在于加速器束流能量能够全部利用，缺点在于束流种类、反应末态和对撞亮度均受到限制。固定靶实验的优点在于可以使用的束流和粒子种类比较多，反应末态比较丰富，缺点是束流能量不能全部利用。早期在回旋加速器时代，打靶实验很普遍；随着对加速器束流能量的要求越来越高，对撞机实验占据了主导地位，这个原因我们将在下一章详细阐述。按照被加速的粒子种类，高能对撞机主要有以下几类：正负电子对撞机、质子-反质子对撞机、质子-质子对撞机、轻子-强子对撞机和重离子对撞机等等。对撞实验在当今加速器实验中占有非常重要的地位，表1.2列出了世界上一些主要的对撞机和其研究

表 1.2: 世界上主要高能对撞机及其研究重点[2, 26–29]

名称	国家	能量(GeV)	研究重点
BEPC(BEPCII)	中国	$3 \sim 5$	粲夸克、τ轻子
CESR	美国	10	b夸克
CESR-c	美国	3-11	粲偶素、D物理
HERA	德国	$30(e^-) + 820(p)$	质子结构
TEVATRON	美国	1800/2000	t夸克
PEPII	美国	$9(e^-) + 3.1(e^+)$	b介子、CP破坏
KEKB	日本	$8(e^-) + 3.5(e^+)$	b介子、CP破坏
Super-KEKB	日本	$7(e^-) + 4(e^+)$	b介子、CP破坏
LHC	欧洲	7000-14000	Higgs物理、Top物理、重离子碰撞 B_s, B_c介子、CP破坏、粲偶素、新物理

重点。其中，美国的CESR、Tevatron和PEPII, 德国的HERA和日本的KEKB已经停止运行。

为了对B介子的混合、衰变和CP破坏机制进行细致研究，美国在斯坦福直线加速器中心，日本在筑波分别建造了两个B介子工厂。美国和日本的两个B介子工厂在1999年投入运行。2001年，在两个B介子工厂工作的BaBar和Belle国际合作组发现了B介子系统的CP破坏（正反物质不对称）过程，日本的理论学家小林诚和益川敏英因为事先预测这一结果而获得了2008年诺贝尔物理学奖[30, 31]。

2010年，随着Belle实验运行结束，KEK联合多家合作单位决定将他们的B介子工厂全面升级为超级B介子工厂（Super-KEKB）[28, 29, 32]。其中，加速器首次采用了纳米级的束流技术，其设计对撞亮度比之前提高了近40倍。与此同时，KEK对探测器也进行了全面的升级。Belle II国际合作组目前共有来自26个国家和地区116个合作单位的约1000名科学家共同参与，其主要物理目标包括研究正反物质不对称、寻找超出标准模型的新物理、研究味物理及强子物理等。Belle II实验已于2020年春天开始正式运行，预计未来10年Belle II将积累相当于其前身Belle实验100倍的数据样本，在高精度前沿领域的研究上做出独特的贡献。在日本KEK的超级B工厂的实验，将和属于高能量前沿的LHC实验上的LHCb重味B物理相关实验形成互补。

欧洲核子研究中心成立于1954 年9 月29 日，是世界上最大的粒子物理学实验室。LHC实验由欧洲核子研究中心主持，全球85个国家的多个大学和研究机构，逾8000位物理学家参与建造的粒子加速器系统，其结构示意如图1.3所示。这个位于瑞士和法国交界的日内瓦城市附近的加速器是目前世界上最大、加速环最长、对撞能量最高的粒子加速器，通过高能质子束的对撞来产生大量物理学家们希望得到的新粒子，比如希格斯玻色子和

可能的“超对称粒子”等。

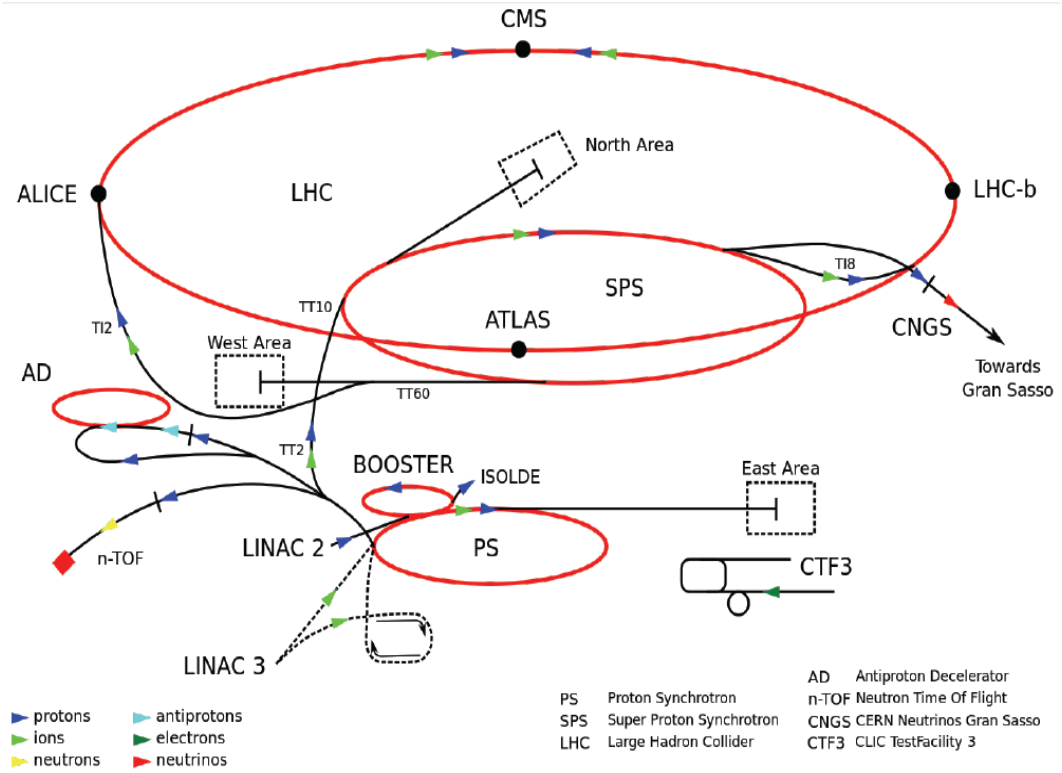


图 1.3: 欧洲核子研究中心(CERN)的大型强子对撞机(LHC)结构示意图。

大型强子对撞机LHC的主体是一个建造在地下50至150米之间，圆周长为26659米的质子同步加速器[1]。它利用了以前大型正负电子对撞机(LEP)实验的环形隧道。隧道截面直径三米，整个环形隧道位于同一平面，贯穿瑞士与法国边境。隧道中放置由超导磁铁包覆的两个质子束流管(储存环)，两个束流管中的质子以粒子束团的形式沿相反的方向环绕加速器运行。目前整个储存环共有$2556+2556$个质子束团，构成了质子束团“列车”。储存环上有四个对撞点，安装有四台探测器ALICE，ATLAS，CMS和LHCb。在每个对撞点附近都装有二极偏向磁铁及四极聚焦磁铁控制质子束团的体积和运动方向。对撞机的质心对撞能量设计目标为$7+7=14$TeV，目前运行的质心对撞能量为$6.5+6.5=13$TeV。每个质子束团环绕整个储存环所用时间为89微秒，或者说质子束团最短碰撞时间间隔为25纳秒。发生对撞的质子并不是全能量注入，而是经过一系列加速设施逐步提升能量，其加速、对撞过程大致如下：

(1) 首先通过剥离氢原子核外电子的方式得到质子；质子在直线加速器(图1.3的LINAC2)中加速到50MeV后注入到质子同步推进器(BOOSTER)；在质子同步推进器中质子能量提升到1.4GeV，然后注入质子同步加速器(图1.3的PS)；在质子同步加速器中，质子能量被进一步提高到26GeV，然后注入超级质子同步加速器(SPS)；在超级质子

同步加速器中，质子能量被提高到450GeV，最后以顺时针和逆时针两个方向分别注入LHC的两个质子储存环，注入时间为4分20秒。

(2) 在如图1.4所示的储存环内，质子束经过20分钟加速后达到最高能量。2010年LHC开始运行时质心系能量是7TeV，2012年提高到8TeV，2015年开始第二阶段运行时，质心系能量达到13TeV。在储存环内超导束流管的极低温达到1.9K，真空度比月球表面低10倍。

(3) 在加速过程完成后，在正常运行状态下，质子束团可在储存环超导束流管内持续运动数小时。在RUN-I运行周期（2010-2012），每个质子束团的长度为9.4厘米，半径为18.8微米(10^{-6}米)，含有约1.6×10^{11}个质子，每个储存环有1380个质子束团。在RUN-II运行周期（2015-2018），质子束团的长度为8厘米，半径为8.5微米，含有约1.1×10^{11}个质子，每个存储环同时有2556个质子束团在高速飞行(是光速的99.9999991%)，每个质子束团每秒钟绕26.659公里长的存储环运行约11000圈，在探测器的对撞点每秒钟发生大约10^9次质子-质子对撞。

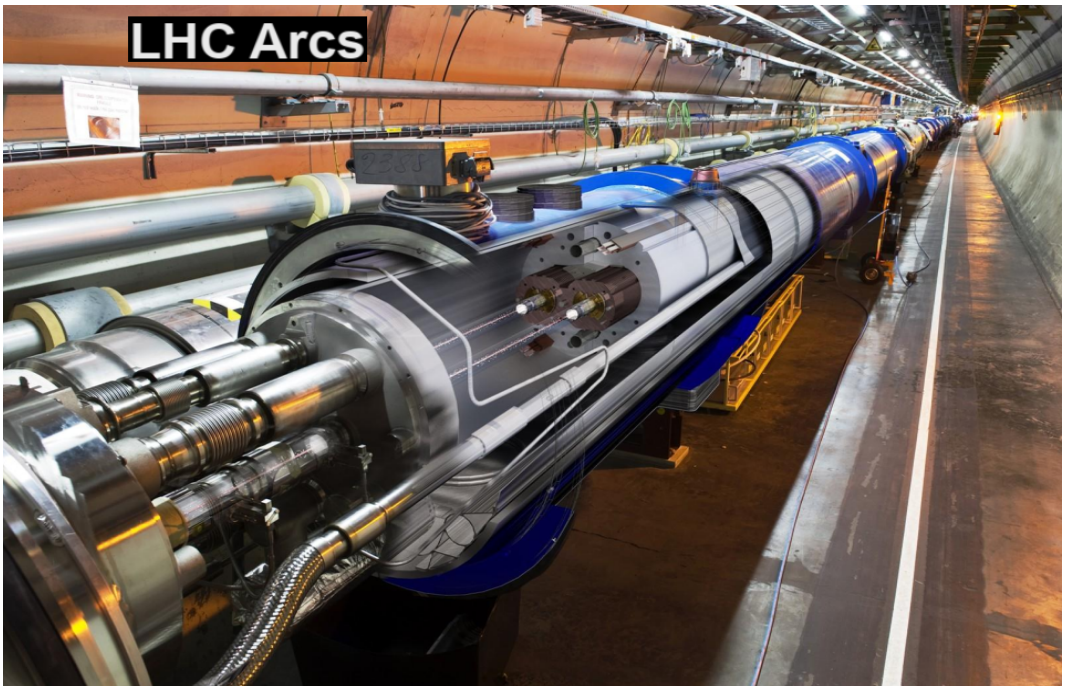


图 1.4:　CERN的大型强子对撞机地下隧道内的一段存储环实景图。

1.2.3　粒子探测技术

探测器是人类认识物质世界的重要工具，探测器的发展史就是人类对物质世界认识不断深化的历史。1590年出现的显微镜和1609年出现的望远镜是人类利用光学理论发明的

探测器，它们使人类的观测尺度从肉眼范围向“大”和“小”两个方向拓展，极大地促进了物理实验科学和其他学科的发展[22, 23]。

粒子探测器是粒子物理实验研究中与加速器同等重要的另一类装置，用来探测各种粒子的湮灭、产生和衰变，记录相关信息。经过加速器加速的粒子通过对撞方式或固定靶方式发生相互作用后，相互作用的末态粒子会和探测器内的物质发生作用产生某种信息(如电、光脉冲或材料结构的变化)，这些信息经放大后被记录，经过科学处理分析后得到末态粒子的数目、位置、能量、动量、飞行时间、速度、质量等物理量，这些物理量是物理学家研究粒子性质的基础。

现代粒子探测器的发展可以从1895年伦琴[23] 发现X射线和1896年贝克勒尔[24] 发现β射线作为开端。1911年英国物理学家卢瑟福借助显微镜观察到单个α粒子打在硫化锌涂层上引起发光。这正是闪烁计数器的雏形。随着实验技术的发展，探测器的研发不断前进。20世纪二十年代到六十年代先后出现了核乳胶、云雾室、火花室、流光室等各种探测器。这些不断出现的新型探测器在新粒子和新物理现象的发现过程中起了决定性作用。正电子e^+和缪子于1932年和1936年在云雾室中先后被发现。1939年在电离室中发现核裂变现象。1954年在气泡室实验中发现了Σ^0超子。1961年用火花室发现了中微子ν_μ等。

按照记录方式的不同，粒子探测器可以分为计数器类探测器和径迹室型探测器。计数器类探测器以电脉冲的形式记录分析粒子与探测器物质发生相互作用或辐射产生的信息，常见的有电离室、正比计数器、盖革计数器和闪烁计数器等。径迹室类探测器则记录分析粒子与探测器物质发生相互作用或辐射后产生的径迹图象，常见的有核乳胶、云雾室、火花室和流光室等。

(1) 核乳胶是一种能记录带电粒子单个径迹的照相乳胶。带电入射粒子在乳胶中会形成潜影中心，粒子运动的径迹被乳胶记录，经过化学处理后可在显微镜下观察。核乳胶有极佳的位置分辨本领(1微米)，灵敏度高，防本底干扰强，可以连续使用。

(2) 云雾室分为云室和气泡室。云室中充满过饱和蒸气，入射粒子产生的离子集团在其中形成冷凝中心而结成液滴。气泡室中充满过热液体，入射粒子产生的离子集团在过热液体中形成气化中心而变成气泡。照相记录液滴或气泡的运动就可以观测带电粒子的运动径迹。

(3) 火花室和流光室工作时需要较高的电压，当粒子进入装置后会发生电离，电离产生的离子在强电场下运动时继续发生电离(多次电离)。多次电离过程中产生的流光和火花使带电粒子的径迹可见。火花室和流光室具有较好的时间特性，空间分辨率约为200微米。

[23]Wilhelm Röntgen (1845.3.27-1923.2.10)，德国物理学家。因为发现X射线而获得首次颁发的1901年诺贝尔物理学奖。

[24]Antoine Henri Becquerel (1852.12.15-1908.8.25)，法国物理学家。因发现天然放射性，与发现放射性元素钋和镭的居里夫妇分享了1903年诺贝尔物理学奖。

(4) 此外还有一类固体径迹探测器，利用云母、塑料等材料探测重带电粒子的运动路径。

伴随着加速器的发展，粒子物理实验研究逐步进入核子夸克层次。实验中经过相互作用产生的末态粒子种类和数目愈来愈复杂，事例率不断提高。新的特点要求探测器能够快速记录这些实验现象，径迹探测器的事例记录速度已经不能满足要求。电子学计数型探测器逐步取代了在粒子发现史上起过重要作用的径迹探测器。

气体电离探测器通过收集入射粒子在气体中产生的电离电荷实现测量。主要类型有电离室、正比计数器和盖革计数器。它们的结构相似，一般都是具有两个电极的圆筒状容器，充有某种气体，电极间加电压，差别是工作电压范围不同。

(1) 电离室工作电压较低，直接收集入射粒子在气体中产生的离子对。其输出脉冲幅度较小，上升时间较快，可用于辐射剂量测量和能谱测量。

(2) 正比计数器的工作电压较高，入射粒子在气体中产生的离子对在电场中高速运动时产生更多的离子对，电极上收集到比原始离子对要多得多的离子对(即气体放大作用)，从而得到较高的输出脉冲。脉冲幅度正比于入射粒子损失的能量，适于作能谱测量。

(3) 盖革计数器又称盖革-弥勒计数器或G-M计数器，它的工作电压更高，入射粒子在气体中运动时会出现比正比计数器更多的电离过程(多次电离)，因此输出的脉冲幅度更高。此时的脉冲幅度已不再正比于电离的离子对数，可以不经放大直接被记录。它只能测量粒子数目而不能测量能量，完成一次脉冲计数的时间较长。

多丝室和漂移室是正比计数器的变型，既有计数功能，又可以分辨带电粒子的运动区域。多丝室工作要求与正比计数器类同，内部有许多平行的电极丝，每一根丝及其邻近空间相当于一个探测器，后面与一个记录仪器连接。当被探测的粒子进入该丝邻近空间时，与该丝连接的记录仪器才记录一次事件。漂移室与多丝室类似，但电极丝的数目减少。漂移室通过测量离子漂移到丝的时间来确定离子产生的位置，它具有更好的位置分辨率(达50微米)，但计数率不如多丝室高。

闪烁计数器的工作原理是将闪烁体上被带电粒子击中的原子(分子)在电离或激发后的退激过程产生的光信号经过光电器件(如光电倍增管)变成电信号来实现测量。闪烁计数器分辨时间短、探测效率高，还可根据电信号的大小测定粒子的能量。闪烁体可分为三大类：无机闪烁体，常见的有用铊(Tl)激活的碘化钠NaI(Tl)和碘化铯CsI(Tl)晶体。它对电子、光子辐射灵敏，发光效率高，有较好的能量分辨率，但光衰减时间较长；锗酸铋晶体密度大，发光效率高；玻璃闪烁体，如氟化钡(BaF_2)。它可以测量α粒子、低能X辐射，加入载体后可测量中子。有机闪烁体，包括塑料、液体和晶体，它的特点是光衰减时间短(2∼3纳秒，快塑料闪烁体可小于1纳秒)，常用在时间测量中，对带电粒子的探测效率将

近百分之百。气体闪烁体，包括氩、氦等惰性气体，发光效率不高，它的特点也是光衰减时间较短(小于10纳秒)，但是发光效率不高。电磁量能器和强子量能器就是一种闪烁体计数器。高能电子或光子在介质中会产生电磁簇射，簇射产生的次级粒子总能量与入射电子或光子能量成正比，收集次级粒子总能量就可以确定入射电子或光子在介质中损失的能量。电磁量能器可以实现这种测量。类似的，高能强子在介质中会发生强子簇射，簇射产生的电离电荷与入射强子能量成正比，收集总电离电荷即可确定入射强子在介质中损失的总能量。强子量能器可以实现这种测量。

还有一类利用高速带电粒子辐射性质设计的计数型探测器也在普遍使用。高速带电粒子在透明介质中的运动速度超过光在该介质中的运动速度时会发生辐射，这种辐射称为切伦科夫辐射。应用切伦科夫辐射设计的探测器叫做切伦科夫计数器。切伦科夫计数器常用来测量带电粒子速度，常与光电倍增管配合使用。可分为阈式(只记录大于某一速度的粒子)和微分式(只选择某一确定速度的粒子)两种。高速带电粒子穿过两种介质的界面会产生穿越辐射，其辐射能量与粒子能量成正比，穿越辐射计数器正是穿越辐射的应用之一。在粒子速度极高，十分接近光速时，穿越辐射计数器可以有效鉴别这些高能粒子。

在粒子探测器的发展史上，共有6位物理学家因其在粒子探测器研发领域的贡献而获得诺贝尔物理学奖：

(1) 1927年，英国物理学家查尔斯·威耳孙(C.T.R. Wilson，1869.2.14-1959.11.15) 因发明用蒸汽凝聚观察带电粒子轨迹的方法(云室)而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

(2) 1948年，英国物理学家帕特里克·布莱克特(P. Blackett，1897.11.18-1974.7.13) 因改进威耳孙云室和在宇宙线方面的研究而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

(3) 1950年，英国物理学家塞西尔·鲍威尔(C.F. Powell，1903.12.5-1969.8.9，威尔逊和卢瑟福的学生) 因发展了用以研究核反应过程的照相乳胶记录法而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

(4) 1960年，美国物理学家唐纳德·格拉泽(D.A. Glaser，1926.9.21-2013.2.28) 因发明气泡室而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

(5) 1968年，美国物理学家路易斯·阿尔瓦雷茨(L.W. Alvarez，1911.6.13-1988.9.1，康普顿的学生) 因发展了氢气气泡室技术和数据分析方法而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

(6) 1992年，法籍波兰物理学家乔治·夏帕克(G. Charpak，1924.8.1-2010.9.29) 因在正比计数管的基础上发明了多丝正比室而获得该年度的诺贝尔物理学奖。

随着粒子物理研究的发展，加速器能量的提高，固定靶实验和对撞机实验产生的粒子数目越来越多，需要测量粒子的参数也越来越多，单个探测器已经无法满足这些需要。

20世纪60年代末，固定靶实验和对撞机实验相继出现了由多种探测器组成的大型磁谱仪。大型磁谱仪可以同时测量粒子的多种运动学参量(能量、动量、速度等)，测量粒子的多种属性(电荷、质量、自旋、宇称、寿命等)。大型磁谱仪一般由顶点探测器、中心径迹室、飞行时间计数器、切仑科夫计数器、穿越辐射探测器、电磁量能器、强子量能器、缪子(μ)计数器、亮度监测器、常规及超导磁铁等子探测器和子系统构成。大型磁谱仪自诞生那一天起，在粒子物理探测方面就显示出综合性能的优势，做出了许多重要的高能物理实验成果：一些重要粒子的发现(J/ψ、$W^{\pm}$、Z_0、t夸克、希格斯粒子等)、电弱统一模型的精确测定、量子色动力学理论的检验等。现在实验上磁谱仪的规模越来越大，测量精度越来越高。可以预计粒子探测器研究在新世纪中会得到更好的发展，对高能物理的研究发展做出更大的贡献。现在的高能物理实验所用的探测器，均为非常复杂、昂贵、高度自动化、计算机化的高技术设备。重量在5000 $\sim$ 13000 吨的巨型设备，造价1-10亿美元，研制周期5-10年。

欧洲核子研究中心的大型强子对撞机(LHC) 实验上有四个大型探测器[33]：CMS和ATLAS 是综合探测器，是以发现希格斯粒子为主要目标而设计的。ALICE则是专门为重粒子碰撞实验设计，以研究QCD真空和夸克胶子等离子体为目标。与前3个探测器不同，LHCb是单臂探测器，是为进行B物理实验研究而专门优化设计的高能探测器。

北京中科院高能物理研究所北京正负电子对撞机（BEPC-II）的电子（正电子）直线加速段长200米，储存环周长为237.53米，单环电子（正电子）束团数目为119，束团长度为1.2厘米，质心能量为$2-4.9$GeV，设计亮度$1.0\times10^{33}cm^{-2}sec^{-1}$。BES-III(北京谱仪)是一个比较大型的粒子探测器[26, 27]。探测收集在τ-粲能区经e^+e^-对撞产生的末态粒子及其衰变产物，进行τ-粲物理研究。物理目标主要是：τ- 粲能区弱电相互作用研究；强相互作用研究；寻找新强子态和可能的超出标准模型的新物理信号[27]。为了实现这些物理目标，BESIII探测器的设计必须满足以下要求：

(1) 很好的光子能量分辨率，角度分辨率和光子识别能力；

(2) 精确测量带电粒子的四动量，特别是低动量粒子；

(3) 好的粒子鉴别能力(e、μ、π、K、p)，尤其是强子的鉴别能力；

(4) 前端电子学系统，触发系统，以及数据获取系统要适应BEPCII的多束团工作模式。

为了达到这些要求，BESIII探测器采用了基于流水线技术的前端电子学系统和流水线工作方式的触发判选系统，以及如图1.5 所示的探测器设计，由内向外依次为：

(1) 单丝分辨率好于130μm的He基气体漂移室；

(2) 能量分辨率好于2.5%@1GeV的CsI晶体量能器探测鉴别光子和电子；

(3) 塑料闪烁体组成的时间分辨率好于90ps的飞行时间计数器鉴别带电强子；

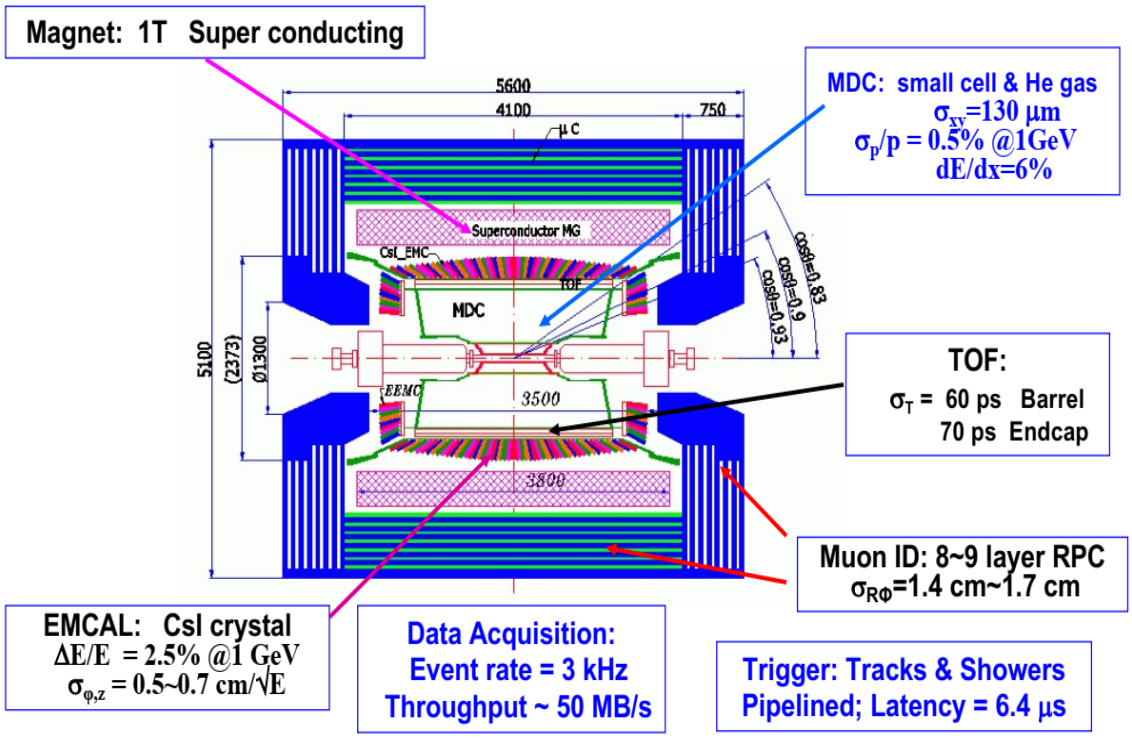


图 1.5: BESIII探测器总体结构沿束流线的剖面图

(4) 场强为1.0Tesla的超导螺旋线管磁铁为漂移室提供1T的磁场；

(5) 阻性板计数器(RPC)间隔铁吸收体组成的缪子鉴别器。

1.2.4 实验数据获取和分析

数据获取和分析是物理实验中的重要环节，科学认真地分析数据才能得到真实可靠的实验结果，在粒子物理实验中也不例外。不同类型的实验要求有不同的数据分析方法，但是不管方法怎么不同，探测器能够探测的末态粒子是有限的，数据分析的流程是大致相同的。

对撞机实验可以在很短时间内实现很多物理过程，伴随着这些物理过程会产生数量可观的不同粒子，大多数粒子的寿命很短，刚产生就发生了衰变(这些粒子可以统称为中间态)，谱仪(探测器)不能记录它们的信息。如果它们衰变的末态粒子能够被谱仪探测到，那么物理学家就可以通过这些末态粒子来重建中间态，研究整个实验过程。不论是强子对撞实验还是正负电子对撞实验，谱仪能够直接探测的粒子是有限的：光子γ、正负电子$e^{\pm}$、正负缪子$\mu^{\pm}$、$K^{\pm}$介子、$\pi^{\pm}$介子、质子p和反质子$\bar{p}$。这些粒子中有中性粒子和带电粒子，带电粒子又可分为轻子和强子。由于性质不同，这些粒子会在谱仪中留下不同的信息。

触发判选系统是谱仪的重要组成部分，是快速实时事例选择和控制系统。它对高能对

撞机产生的事例进行快速实时判选，保留好事例并尽可能排除本底，为物理分析提供可靠的数据。现代对撞机的亮度非常高，瞬间发生的碰撞次数以及产生的粒子数目非常大。大多数情况下，实验数据处理系统来不及全部记录下来。触发系统需要在极高的本底下选出有用的物理事例，把本底压缩到数据获取系统可以接受的程度。整个触发判选系统可以分成二级：第一级为硬件触发，必须对前端电子学数据用流水线式的方法进行存储处理，触发判选系统也要用流水线方式进行处理；第二级为软件事例筛选，由计算机集群在数据读出后进行。某一事例如果没有通过硬件触发，那该事例信息将逐步溢出或被覆盖而被丢弃。如果通过了硬件触发，则各子探测器电子学的流水线控制电路将对应的数据段移入读出缓冲器，再由在线控制读出控制插件将储存在各子探测器电子学缓冲器中的数据读出并进行事例组装。组装成的事例数据由计算机集群再进行过滤处理。

数据获取系统是基于前端电子学和触发判选的硬件系统，由读出系统、在线系统、校准系统和其它辅助服务系统组成。获取通过一级触发判选后的前端电子学事例数据，经过两级计算机预处理和高速网络传输，将分布在各电子学读出机箱中的事例数据段迅速汇集到在线计算机群整理成为完整事例，并进行标记、处理和监测，最终将这些事例数据通过网络传送到计算中心安全记录到永久介质上。

离线数据处理系统包括离线计算机系统和离线软件系统两部分，主要是对在线获取的数据进行进一步的处理并进行物理分析。离线计算机系统主要有4方面的任务: (1) 原始数据的处理和物理分析；(2) 各种数据之间的传输；(3) 各种数据和文件的存储和管理；(4) 用户和各种设备之间的通讯。离线数据处理环境建设是基于高性价比、可扩充和良好的可维护性和共享性的原则。

离线软件系统的主要任务是处理实验数据和蒙特卡罗数据以及管理各种工具库和文件库。对于实验数据，是将在线获取系统记录下来的数字信号在离线计算机上还原为粒子种类、能量、动量、空间位置坐标等物理量，为物理分析提供条件。对于蒙特卡罗数据，主要是物理事例的产生和探测器的模拟。离线软件系统由主框架系统、实用软件包和工具软件包系统、数据刻度和事例重建系统、蒙特卡罗事例产生和模拟系统以及用户分析软件包组成。

离线数据刻度是从数据中挑出具有典型特征而且反应截面较大的事例(如背对背的Bhabha 或双缪子事例)，经过拟合计算出在线获取原始数据时表征探测器状态的刻度常数(如主漂移室中电子的漂移速度、粒子飞行时间、各灵敏丝位置修正、电磁量能器中簇射能量、幅度常数等等)。由于各子探测器的工作状态并不是稳恒不变的，这就会导致即使同样的事例最后在探测器中得到的响应也会有所不同，因此就必须要有一套与各探测器相关的、精确反映各探测器状态、重现一定时间段内探测器工作状态的参数，这套参数就是刻度常数。离线数据刻度就是计算这套参数的过程。好的刻度常数必须能够对原始数据做各种系统修正，包括：由于各探测器各部分性能不一致引起的信号不均匀性；电子学各读出道特性的差异使信号产生的畸变；环境变化对探测器的影响等等。此外还需要对数据作一些特殊的修正，如带电粒子电离的涨落等。

事例重建是用刻度过程得到的各子探测器的刻度常数对原始数据进行处理转换，将原始数据中记录的探测器读出电子学的输出数字信号还原为粒子的位置、能量、动量等物理量，并初步判断事例类型以备物理分析之用。

蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation)源于随机过程，是解决随机过程和复杂问题的一种方法，目前特指利用计算机做实验和研究。它包括事例产生、粒子在探测器中的输运及相互作用、探测器响应等一系列过程。模拟的目的是使模拟数据最大程度的近似于探测器在线获取的实验数据。

粒子物理实验的数据分析主要包括事例选择、本底分析和误差处理三个步骤。事例选择是利用探测器给出的位置、动量、能量和质量等信息对衰变的末态粒子进行选择和判断。首先要判断末态粒子数目。利用漂移室信息可以选择出末态粒子数正确的所有事例作为候选事例。接着利用漂移室、飞行时间计数器和电磁量能器的信息对这些候选事例进行粒子鉴别，不满足条件的事例剔除，满足条件的事例保留。然后对末态粒子进行能动量拟合，要求末态粒子的能动量与初态的粒子的能动量在一定的误差范围内保持一致。这样事例选择就完成了。

由于探测器受到测量精度的限制，事例选择并不能保证终选事例中没有混有其他物理过程（本底），因此需要通过本底分析来区分终选事例中的信号和本底。对不同本底过程可以采取不同的处理方法，对于已知的本底过程要进行判别、剔除。

最后一步就是误差分析，误差分析是所有实验数据处理的必须步骤。粒子物理实验中的误差分析主要包括统计误差和系统误差。统计误差来源于事例的统计涨落，系统误差则是由实验仪器和数据分析方法本身引入的误差，例如质量刻度、分辨和本底形状的变化等。质量刻度通过参考道的方式考虑；质量分辨通过调整计算机模拟方式考虑；本底形状则通过变化拟合曲线考虑。将统计误差和所有的系统误差综合，得到总误差。

1.3 粒子的基本性质

粒子物理学的主要研究对象是微观粒子，微观粒子具有量子性质，有可能具有更深层次的内部结构，粒子物理学的终极目标之一是找到最基本的粒子，也就是没有内部结构的“基本粒子”。相同种类的微观粒子都具有全同性，它们具有相同的内禀属性，描写粒子内禀性质的主要参量包括质量、寿命、电荷、自旋以及宇称等等，其中宇称等相乘性量子数将在第五章中详细讨论。为了方便读者，我们在此列出国内外出版的粒子物理理论和实验方面的主要参考书[22, 23, 26, 34–45, 48–57]。

1.3.1 粒子的静态性质

电荷：最早，从密立根的油滴实验开始，我们就知道，粒子的电荷是量子化的。以质子的电荷或者电子电荷的绝对值$e = 1.602 \times 10^{-19}$C 为基本电荷单位，大多数粒子的电荷都是电子电荷的整数倍。但是在夸克模型中夸克是分数电荷$\frac{2}{3}e$, 或者$-\frac{1}{3}e$。在粒子的产生

和衰变过程中，初末态粒子系统的电荷守恒定律是严格的。在实验上可以测量质子和电子的电荷大小差别，目前的实验测量结果是：$(|q_p|-|q_e|)/|q_e|<10^{-21}$。该结果证明，在实验误差范围内电子电荷确实是量子化的。电荷为什么是量子化的是一个需要在理论上回答的问题。在1931年狄拉克[25]就试图回答这个问题：假设存在磁单极子，则电荷量子化就是一个自然推论。但是到目前为止，还没有任何实验证实磁单极子的存在。当然在现代的量子电动力学理论中，电荷量子化和电荷守恒是一个$U(1)$ 定域规范对称性的自然推论。所有粒子的电荷都在粒子数据表[1]中给出，已发现的粒子最大电荷是重子Δ^{++}携带的2个单位的正电荷：$Q=2e$。当然最小电荷是下夸克的电荷绝对值：$|Q_d|=\frac{1}{3}e$。

自旋、极化，自旋统计关系： 所有的粒子都有自旋，自旋是量子化的。复合粒子的自旋是其组成部分的总自旋和轨道角动量的和。因而自旋具有角动量的性质。对于自旋为j的粒子，其自旋角动量在任一方向的投影取值为$j, j-1, j-2, ..., -j+1, -j$。一共有$2j+1$个。轨道角动量反映的是时空的旋转对称性，但是基本粒子的自旋是内禀属性，并不对应时空属性，其来源机制目前并不是很清楚。所有粒子按照自旋可以分为两类：费米子和玻色子：

(1) 自旋量子数S为半整数$(1/2, 3/2, \cdots)$的粒子，满足费米[26]-狄拉克统计，称之为费米子。

(2) 自旋量子数S为整数$(0, 1, 2, \cdots)$的粒子，满足玻色[27]- 爱因斯坦统计，称之为玻色子。

反应前后粒子系统所遵守的统计规律不变。由奇数个费米子组成的体系仍然是费米子体系。

粒子数据表[1]列出了所有已发现粒子的自旋性质，已发现粒子的最大的自旋量子数是重子Δ的激发态$J=15/2$，但是其置信度较低。已经确定的粒子最大自旋量子数只有$J=11/2$。常见粒子的自旋量子数：

$$S(e^-,\mu^-,\tau^-,p,n)=\frac{1}{2};\quad S(\pi,K,\eta,\eta')=0;\quad S(\rho,\omega,\phi,\gamma,W^{\pm},Z^0)=1. \tag{1.9}$$

对于自旋为0的粒子来说，只有一个自由度，在量子场论里，我们通常只用一个单数值的场量来描写。对于自旋不为0的粒子来说，其自旋有多个投影，意味着有多个自由度。在量子场论里，我们需要用粒子的场量来反映这些自由度。但是在量子力学里我们已经知道，角动量的对易关系复杂，不是洛伦兹协变的物理量。实际上，严格说来，角动量也不

[25] Paul Dirac, 1902.8.8-1984.10.20, 英国理论物理学家。1926年在剑桥大学获得博士学位，1928 年提出狄拉克方程，建立了相对论量子力学。1933年获得诺贝尔物理学奖。

[26] Enrico Fermi，1901.9.29-1954.11.28, 意大利物理学家。因发现用中子产生新的放射性元素和慢中子产生核反应而获得1938年诺贝尔物理学奖。

[27] Satyendra Nath Bose, 1894.1.1-1974.2.4，印度理论物理学家。1924年撰写的论文“Plank's law and light quantum hypothesis”投稿被拒，后把稿件寄给了爱因斯坦。爱因斯坦非常欣赏这篇论文，亲自把论文由英文翻译成德文，写了序言，直接推荐发表在著名的“德国物理年鉴”上，建立了玻色- 爱因斯坦统计。

是实验上的直接可观测量。例如矢量粒子，其自旋量子数为1，有三个投影，也就是有三个自由度，为了描述这个矢量粒子，可以定义四维的**极化矢量：** $\epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda = 0, 1, 2, 3)$。利用极化矢量满足归一化条件：$\epsilon^\mu \epsilon_\mu = 1$, 也就是

$$\epsilon^0 \epsilon_0 - \epsilon^\perp \epsilon_\perp - \epsilon^\parallel \epsilon_\parallel = 1, \tag{1.10}$$

我们可以去掉不独立的无用的0分量，也就是只有三个有意义的极化方向。在动量方向上投影，一般应有三个方向：1，0，-1，两个横向极化$\epsilon^\perp$，一个纵向极化$\epsilon^\parallel$。

对于光子来说，由于规范对称性的要求，洛伦兹条件为$\partial^\mu A_\mu = 0$。在动量表象：$k^\mu \epsilon_\mu = 0$，即

$$k^0 \epsilon_0 - \mathbf{k} \cdot \epsilon = k^0 \epsilon_0 - |\mathbf{k}| \epsilon_\parallel = 0. \tag{1.11}$$

光子质量为0，能量= 动量($k^0 = |\mathbf{k}|, E^2 = p^2$)，所以$\epsilon_\parallel = \epsilon_0$，纵向极化也没有了。即对光子来说，有$\epsilon^\perp \epsilon_\perp = -1$。所以光子只有1，$-1$ 两个极化方向, 都是横向的。光子虽然自旋为1，却比普通自旋为1的粒子自由度少，这是质量为0的粒子的特殊性。

对于自旋1/2的费米子旋量场，自旋的两个投影是两个自由度，正反粒子又是两个自由度，所以总共需要四个自由度的场量来描写。这四个分量组成一个列矩阵，其复共轭就是一个行矩阵。这种四个自由度的费米子场，我们称为狄拉克场。

螺旋度 （helicity）的定义：我们把粒子的自旋角动量$\mathbf{s}$ 在粒子运动方向上的投影称为螺旋度: $\lambda = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}/|\mathbf{k}|$。以电子为例，如图-1.6 所示，当电子的三动量$\mathbf{k}$ 与其自旋角动量$\mathbf{s}$同向时，电子是右手的，其螺旋度$\lambda = +1/2$。当电子的$\mathbf{k}$ 与$\mathbf{s}$反向时，电子是左手的，$\lambda = -1/2$。螺旋度在研究粒子的运动性质和动力学性质的时候特别重要。如果一个粒子在运动时候自旋对于运动方向是右旋的，当换到另一个沿着同一方向以更快的速度运动的参考系上来看，粒子的运动方向就反号了，自旋对于运动方向就变成左旋的了，这样粒子的螺旋度在不同参考系里是可以不同的。

如果粒子的质量等于零，其自旋角动量$\mathbf{s}$有特殊性质：由于其以光速运动，就永远找不到另一个比其运动更快的参考系，粒子的螺旋度就也不会随着参考系的改变而变号，所以螺旋度是好量子数。按照前面的讨论，相应地，粒子的自由度数目会减少。如光子的自旋量子数是1，其螺旋度$\lambda = \pm 1$，没有0 分量。

1.3.2 粒子寿命与衰变宽度

能够区分不同种类粒子的一个重要参数是粒子的质量，各种粒子是“场”的激发态，也是束缚态，因而粒子的质量也是分立的，或者说是量子化的。由于相对论效应，高速运动的粒子质量会变大$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$。在粒子物理里，粒子的质量一般指静质量$m_0$。运动质量m 是随着坐标系变换而变化的，而静止质量m_0则是洛伦兹不变的。一个自由的基本粒子，以速度$\mathbf{v}$运动，其能量满足$E = m_0/\sqrt{1 - v^2} > 0$, 动量满足$\mathbf{P} = m_0\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2}$,

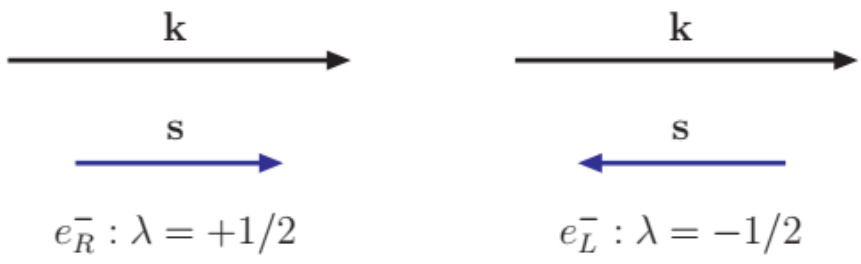


图 1.6:　电子的螺旋度-右旋（R）和左旋（L）定义：e_R^-和e_L^-。

在任何坐标系它都满足质壳条件：$E^2 - \mathbf{P}^2 = m_0^2$。在能量和动量组成的四维空间里，这个等式给出了一个四维空间中的一个三维曲面的方程，以“壳”来形象地表示这个曲面。

常见粒子的质量：

光子:　$< 1 \times 10^{-18}$ eV

电子:　0.511 MeV

缪子:　105.7 MeV

质子:　938.3 MeV

最重的顶夸克质量有172 GeV。

非相对论情况下，自由粒子波函数满足薛定谔方程：

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad H|\psi(0)\rangle = m|\psi(0)\rangle. \tag{1.12}$$

哈密顿量H的测量值的物理意义是该自由粒子的总能量: 可以简写为$H|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle$。对于自由粒子，哈密顿量H是静止能量，其本征值就是质量。薛定谔方程的解为：

$$|\psi(t)\rangle = e^{-imt}|\psi(0)\rangle \tag{1.13}$$

其中m 是本征值。波函数的归一化是：

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1. \tag{1.14}$$

这表示一个稳定粒子，t时刻粒子在全空间中存在的概率为100%，而且不随时间变化，正弦波的归一化条件是与时间无关的。

对于不稳定粒子，我们修改本征值为复数$m \to m - i\Gamma/2$。相应薛定谔方程的解修改为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(m-i\Gamma/2)t}|\psi(0)\rangle = e^{-imt-\Gamma t/2}|\psi(0)\rangle. \tag{1.15}$$

也就是说对于不稳定粒子会多一个描写参数，我们把这个质量的虚部Γ称为宽度，这时候波函数模的平方修正为

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = e^{-\Gamma t}\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = e^{-\Gamma t} < 1, \tag{1.16}$$

负号出于因果性条件。也就是说，找到粒子的概率是时间的函数；如果是多粒子体系，这意味着随时间增加，粒子数在减少，也就是说粒子在衰变：

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}. \tag{1.17}$$

在粒子质量参数上加一个虚数部分之后，可以描写粒子指数衰变的状态，这也是核物理里不稳定核（放射性同位素）的指数衰减律。

按照量子力学，对于粒子的时空波函数(公式1.15)作傅里叶变换，就会得到粒子的能动量波函数

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{iMt}|\psi(t)\rangle = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{iMt} e^{-imt-\Gamma t/2}|\psi(0)\rangle & (1.18)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{M-m+i\Gamma/2}|\psi(0)\rangle. & (1.19) \end{aligned}$$

相应地，能动量波函数的模平方，就是不稳定粒子的质量分布函数,

$$\rho(M) = \Gamma\phi(M)^*\phi(M) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(M-m)^2+\Gamma^2/4}, \tag{1.20}$$

其中Γ是归一化参数。实验上对于不稳定粒子，测量多个粒子的质量就会发现每次测量是不同的值，这个分布函数形式就是公式(1.20)，也称为Breit-Wigner公式。从图1.7可以看出，粒子质量m的物理意义是粒子实际测量质量的期望值，也是最可几取值。粒子质量的概率密度衰减到一半处的粒子质量上下限是$m_0 \pm \Gamma/2$，也就是说这时候共振峰的宽度是Γ。

除了质子和电子等少数几种因为对称性的要求（重子数和轻子数守恒）不能衰变的粒子以外，其它各种粒子都要衰变。即粒子存在一段时间后就会消失。我们引进寿命的概念来描述粒子存在时间的长短。粒子的寿命是指其静止时的大量粒子的平均寿命，与不稳定粒子的质量类似，也是个分布函数。

粒子的衰变过程要受到物理守恒定律的限制，衰变过程总是统计性的。粒子衰变性质一般与相互作用类型及末态相空间体积有关。令N(t) 为t时刻某种不稳定粒子的数目，在dt时间间隔中，由于衰变，粒子数改变了dN，则dN应正比于N(t)，还正比于dt。如果我们定义比例常数为$-1/\tau$，这样应有

$$dN = -(1/\tau)Ndt, \tag{1.21}$$

解之，得

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}. \tag{1.22}$$

利用上面公式，我们可以求解所有粒子衰变的平均寿命，

$$\begin{aligned} \tau &= < t >= \frac{\int tdN}{\int dN} = \frac{\int tN(0)e^{-t/\tau}dt}{\int N(0)e^{-t/\tau}dt} \\ &= \frac{-tN(0)e^{-t/\tau}|_0^\infty + \int N(0)e^{-t/\tau}dt}{\int N(0)e^{-t/\tau}dt/\tau}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

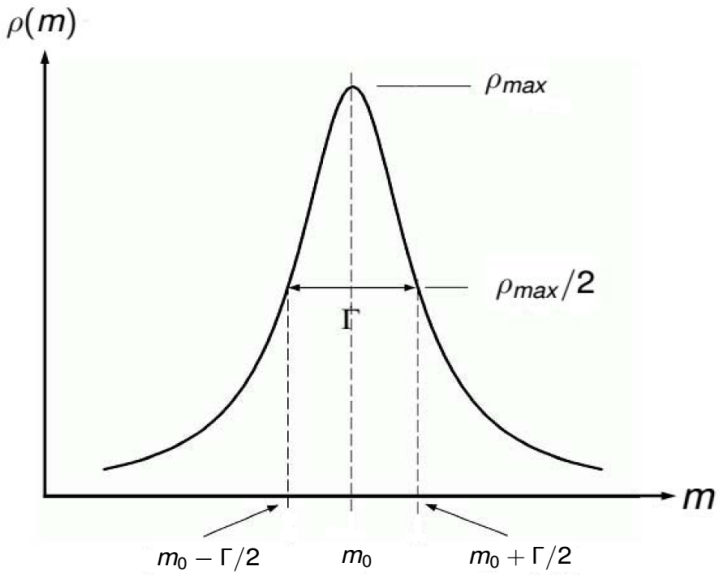


图 1.7:　不稳定粒子质量的实验测量分布示意图。

也就是说τ是粒子的平均寿命。比较上面的公式(1.17)和(1.22)，可以得到平均寿命τ 与衰变前粒子质量参数-衰变宽度Γ的关系

$$\Gamma = 1/\tau. \tag{1.24}$$

也就是说，不稳定粒子的衰变宽度等于其衰变平均寿命的倒数。这是自然单位制的结果，恢复到普通单位制，则有$\Gamma\tau = \hbar$。这个公式马上变得熟悉起来，从图1.7可知，2Γ正是粒子质量的不确定度，而寿命τ是衰变时间的不确定度；因而这是海森堡[28]的能量和时间不能同时测量的不确定关系公式。粒子是场的激发态，对应于氢原子的激发态能级，激发态跃迁到基态，按照能量守恒，放出光子的能量等于激发态能级的能量。实验发现，每次跃迁发射出的光子是不同的，激发态能级的能量肯定就是不固定的，统计结果显示，能级越高，其能级能量的不确定度越大，电子在能级上停留的时间（寿命）越短。回到粒子物理，从公式（1.21）知道，粒子衰变几率（快慢）正比于寿命的倒数，也就是粒子的宽度(公式1.24)。所以量子场论的任务之一就是计算每个粒子质量分布的宽度，也叫作衰变宽度。

处在能量较高能级的电子总会按照选择定则跃迁到较低的能级；一个有质量的粒子也总会衰变到比其质量低的任意粒子（除非有对称性的限制），所以质量比较大的粒子衰变时，一般有许多衰变道。例如B 介子的两体非粲强子衰变道有近100 个。某个衰变道的

[28]Werner Karl Heisenberg, 1901.12.5- 1976.2.1, 德国物理学家，量子力学的主要创始人，获得1932 年诺贝尔物理学奖。

衰变几率由该衰变道的分宽度Γ_i决定，总宽度是所有分宽度的总和

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i. \tag{1.25}$$

那么不稳定粒子衰变到某个衰变道的几率（亦即分支比）就是

$$BR_i = \Gamma_i/\Gamma. \tag{1.26}$$

对于寿命长的粒子，它在探测器中会留下径迹。若粒子产生后，至最后衰变的轨迹长L，动量P, 则

$$L = (P/m)\tau = \tau v/\sqrt{1-v^2}. \tag{1.27}$$

所以可以通过测量径迹的长度来测量寿命τ。例如$\tau = 10^{-10}$s 时，$L = c\tau = 3cm$。但实际上由于高速运动粒子的相对论寿命延长效应，探测器中的L要大得多。

对于寿命短的粒子，可以通过测量粒子的质量分布，从而得到宽度Γ，也就是得到了寿命的倒数。但对于中间状态的粒子最讨厌，寿命不长不短，测量相对比较困难。实验上可以测量分支比BR_i，在理论上计算每个衰变道的分宽度Γ_i，加起来得到总衰变宽度Γ。利用的是$\Gamma_i = \Gamma \times \mathrm{BR}_i$，即实验和理论联系起来得到宽度或者寿命。下面给出几个常见粒子的寿命测量值[1]：

光子: $\tau = \infty$,
电子: $\tau > 6.6 \times 10^{28}$年,
μ 子: $\tau = (2.1969811 \pm 0.0000022) \times 10^{-6}$秒,
$\pi^{\pm}$ 介子: $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$秒,
π^0 介子: $\tau = (8.52 \pm 0.18) \times 10^{-17}$秒,
中子: $\tau = (879.4 \pm 0.6)$ 秒,
质子: $\tau > 3.6 \times 10^{29}$ 年.

1.3.3 粒子的分类

微观粒子的种类很多，分类方法也有很多种，例如，可以按自旋和统计性质分类：费米子和玻色子; 也可以按粒子的电荷分类：带电粒子和中性粒子。现在已经发现的几百种粒子，通常按它们参与各种相互作用的性质分为强子、轻子、媒介粒子和希格斯玻色子：

1. 强子： 直接参与强相互作用的粒子称之为“强子”。它们又分为两类：介子：自旋为整数的玻色子；重子：自旋为半整数的费米子。在粒子数据表[1]中，现已发现的粒子绝大多数是强子。我们比较熟悉的强子有

   介子: $\pi, K, \eta, \eta', \rho, K^*, \omega, \phi, D, J/\Psi, \Upsilon, B^{\pm}, B^0, B_S, B_C$,...;
   重子: $p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Delta, \Omega, \Omega_b, \Lambda_c, \Lambda_b$, ...

2. **轻子：** 不直接参与强相互作用的自旋1/2的费米子，它们可以直接参与电磁相互作用和弱相互作用。现在发现的轻子共有3代6种:

$$(e^-, \nu_e), \quad (\mu^-, \nu_\mu), \quad (\tau^-, \nu_\tau). \tag{1.28}$$

3. **规范玻色子：** 传递相互作用的媒介粒子，它们的自旋都是1，实验直接发现的有光子和三种弱作用中间矢量玻色子$W^{\pm}$和Z^0。传递强相互作用的是胶子(gluon)，虽然实验上没有看到自由的胶子，但是正负电子对撞机实验中的三喷注事例$e^+e^- \to q\bar{q}g$证实了胶子的存在。

4. **希格斯(Higgs)玻色子：** 希格斯粒子是在2012年LHC实验中发现的基本标量玻色子。发现并研究希格斯玻色子的性质，是LHC实验自2009年投入运行以来最重要的工作。

现已发现的700多种粒子中，只有11种粒子可能是真正稳定粒子，这就是光子，三种中微子和它们的反粒子，电子、正电子、质子和反质子。粒子物理学中并没有按粒子是否真正稳定来对粒子进行分类。因为虽然粒子是否真正稳定在实验上的表现是明显的，然而从粒子的内部属性来看，不一定是最重要的标志。例如“$e-\mu-\tau$疑难”：从这三个带电轻子的相互作用性质上难以找到差异；然而从它们的寿命来看，电子是稳定的，缪子的寿命是2.197×10^{-6}秒，τ子的寿命是$2.903(5) \times 10^{-13}$秒，差别是明显的。而这些差别的来源是它们质量上的不同。粒子物理学中把粒子按衰变性质和行为分为稳定粒子和共振态两类：**不能通过强相互作用衰变的粒子称为稳定粒子；可以通过强相互作用衰变的粒子称为共振态。**

从表1.1中各种相互作用的强度我们知道，强相互作用的耦合常数最大，而量子场论计算表明粒子衰变宽度(寿命的倒数)正比于耦合常数的平方，因此，通过强相互作用衰变的粒子寿命很短，通过电磁相互作用和弱相互作用衰变的寿命则要长得多，似乎可以用寿命的长短来区分稳定粒子和共振态。然而实际情况要复杂得多。现已发现的粒子中，寿命最长的和寿命最短的粒子都属于稳定粒子。现已发现的最不稳定的稳定粒子是顶夸克, Z玻色子和W玻色子。这几个粒子虽然不能直接强衰变，但是由于其质量非常重，可以通过弱作用衰变到比其轻的几乎所有粒子，因而其寿命非常之短。例如Z玻色子，现在实验测得平均寿命为$(2.59 \pm 0.03) \times 10^{-25}s$。除了顶夸克、Z粒子和W粒子外，其它的稳定粒子的平均寿命$\geq 5.8 \times 10^{-20}s$。现已发现的最稳定的共振态是$\Upsilon(10355)$粒子，它的平均寿命为$2.53 \times 10^{-20}s$，远长于Z粒子的平均寿命。

按照现有实验和理论的认识，强子是复合粒子，它们是由更深层次的夸克和反夸克所组成。夸克和反夸克通过胶子传递的色相互作用结合成强子。现在实验上虽然还没有直接发现自由夸克或自由胶子，现有理论也认为由于强相互作用的色禁闭(color confinement)性质，自由夸克和自由胶子不能够独立存在，只能存在于强子内部，但是它们在强子内部的存在和在反应过程中所起作用却可以被从实验上间接观察和验证。现在

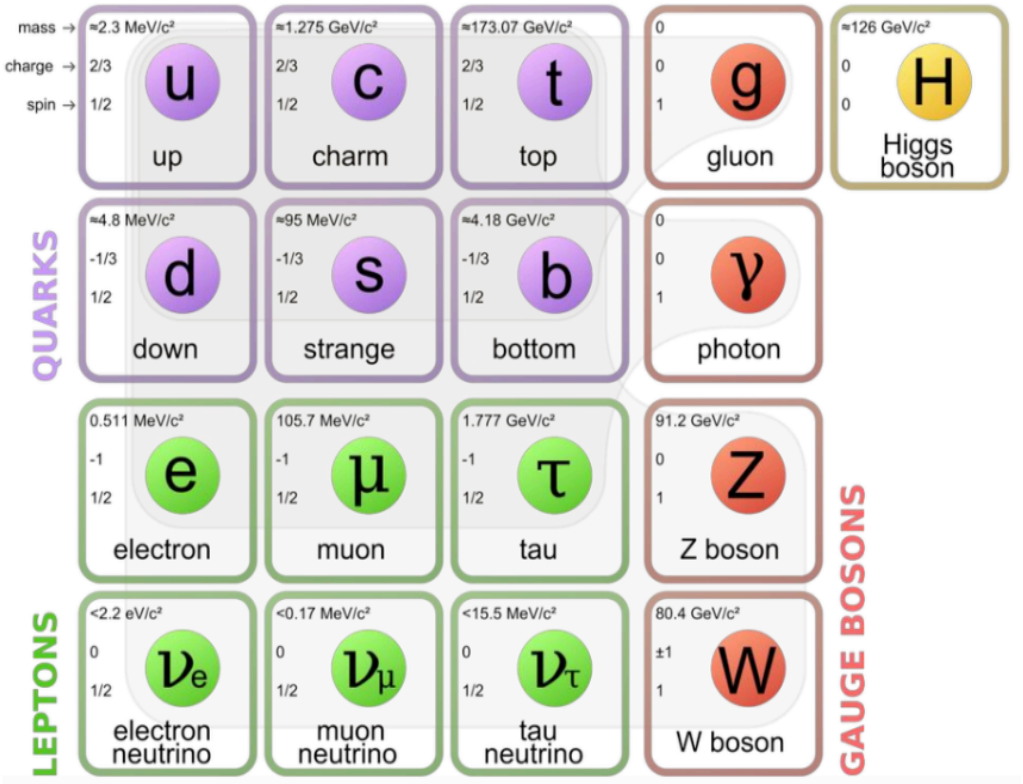


图 1.8: 标准模型所有基本粒子的性质列表。

还没有实验的迹象显示轻子和夸克有内部结构，它们还都可以按点粒子来对待，并且看作是属于同一层次。我们可以按现有标准模型理论在轻子-夸克层次对粒子进行分类，如图1.8所示，按照质量本征态，有6种夸克、6种轻子，4种规范玻色子和一个希格斯粒子，一共17个。如果按照相互作用本征态，粒子自由度数目则大大增加：

1. **规范玻色子：** 传递相互作用的媒介粒子，包括光子、$W^{\pm}$、Z玻色子和8种胶子，它们的自旋都是1；一共有1+3+8 =12个规范玻色子。

2. **费米子：** 轻子和夸克，它们的自旋都是1/2。电弱统一理论要求，规范场的相互作用中出现的“反常”必须完全消除。消除“反常”的条件之一是所有费米子的电荷之和为零。因此，轻子和夸克总是整代地存在的，每一代费米子的电荷之和为零。

   现在已知自然界至少存在三代费米子，每代两个轻子，一共6个，再加上它们的反粒子，总数是12个轻子。而对于夸克来说，12个不同味道的夸克每味夸克还有3种颜色，所以一共是$12 \times 3 = 36$种夸克。那么自然界到底存在几代费米子？特别是是否存在第四代费米子？从实验上去探寻和发现第四代费米子是现在粒子物理学研究的又一个重要课题。

3. **希格斯粒子：** 它与之前所有的基本粒子都很不同，是唯一自旋为0的标量粒子。在此之前发现的所有基本粒子都是自旋为1/2的费米子或者自旋为1的规范玻色子。希格斯粒子在实现电弱对称性的自发破缺，使规范玻色子和费米子获得质量等方面起着非常重要的作用。

所以，按照相互作用本征态的自由度数目，自然界已知存在的基本粒子数目为：$12+(6+6)+(6\times3\times2)+1=61$。

1.4　练习题

1. 在粒子物理标准模型中，最基本的粒子分类中有哪些种类的粒子？并写出其自旋和电荷。

2. 最基本的相互作用有哪几种？为什么在粒子物理研究中我们可以直接忽略万有引力的影响？

3. 基本粒子的质量宽度有什么物理意义？

4. 反应截面一般用毫巴(mb)来表示: $1mb = 10^{-3}b = 10^{-27}cm^2$。利用GeV单位来证明$1GeV^{-2} = 0.389mb$。

5. 在标准模型理论框架下，哪个粒子是最轻的介子、哪个是最轻的重子？哪个粒子是最重的费米子？

6. 有哪几种类型的高能对撞机实验？正负电子和质子-质子高能对撞机实验的主要优缺点是什么？

7. 哪几种粒子是粒子探测器可以直接探测到的？

8. 电场和磁场在环形加速器里分别起什么作用？

第二章　高速粒子运动学

上一章我们已经提到，在粒子物理的研究中，各种粒子的运动速度大多接近光速，因而需要用到狭义相对论。在力学或者电动力学的课程中已经对狭义相对论有相关的介绍，在这一章中，我们只作简单总结，并详细介绍粒子高速运动时各种实验现象和唯象物理规律。

2.1　狭义相对论

在经典的伽利略变换下，空间与时间是相互独立的，这与近代的光速测量实验结果矛盾。在近代发展起来的爱因斯坦的狭义相对论的基本原理是：所有物理规律在惯性系中都是等价的；真空光速在所有惯性系中都是恒定的。关于四维度规$g_{\mu\nu}$，我们已经在(1.2)式给出了4×4矩阵定义，在电动力学和广义相对论中经常用到的协变和逆变坐标、动量分别定义如下[41]，

$$x_\mu = (t,-\mathbf{x}),\quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = (t,\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

$$p_\mu = (E,-\mathbf{p}),\quad p^\mu = g^{\mu\nu}p_\nu = (E,\mathbf{p}). \tag{2.2}$$

2.1.1　洛伦兹变换

物理规律在任意惯性参考系中是相同的。两个惯性系之间，时空变换关系为洛伦兹变换。洛伦兹变换公式最先是由实验观测总结出来的公式，但是有了狭义相对论之后，是可以由光速不变原理直接推导出来的。如图-2.1所示，在两个平行惯性坐标系O,O'中，O'系相对于O系沿x-轴正向以速度v运动，那么四维坐标(时空矢量)x^μ的洛伦兹变换关系可以写为[52]：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu;\qquad x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu; \tag{2.3}$$

其中Λ^μ_ν是4×4洛伦兹变换矩阵$\mathbf{\Lambda}$的矩阵元。明确写成矩阵形式则有

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +v\gamma & 0 & 0 \\ +v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

这里$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$。第二个变换矩阵是$\mathbf{\Lambda}$的逆矩阵$\mathbf{\Lambda}^{-1}$，满足幺正性$\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda} = I$。从O'坐标系变换到O坐标系的逆变换可以通过简单变换速度v 的符号得到：

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +v\gamma & 0 & 0 \\ +v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

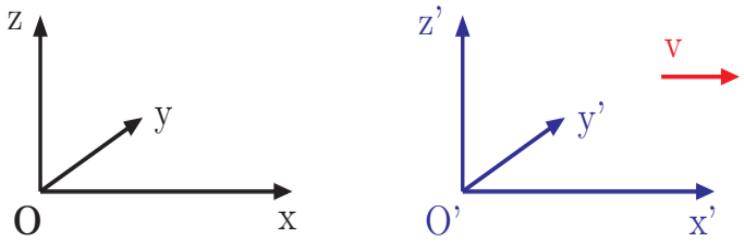


图 2.1: O' 惯性坐标系相对于O 坐标系沿着x轴方向以速度v 运动。

在坐标系的洛伦兹变换下，有一系列与经典力学不同的结论：

1. 同时的相对性 ：如果两个事件在O坐标系同时间不同地点发生，它们在O'坐标系则不同时发生。

2. 运动的尺子变短 ：从静止系统中看固定在运动系统中的某物体，其长度将由L_0缩短成L:

$$L = L_0/\gamma < L_0. \tag{2.7}$$

3. 运动的时钟变慢: 运动坐标系中的时间间隔$(\Delta t' = t'_1 - t'_2)$比静止坐标系中的时间间隔$\Delta t$变长的现象，称之为时间的洛仑兹膨胀。

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \tag{2.8}$$

对粒子的平均寿命，同样有：

$$\tau = \gamma \tau_0. \tag{2.9}$$

μ轻子和π介子的飞行衰变实验已经证实了**运动的时钟变慢** 。μ轻子的质量为$m_\mu = 106\text{MeV}$，寿命$\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}s$。而总能量为106GeV的$\mu$轻子，其$\gamma$值为1000，飞行衰变寿命将为$\tau = 2.2 \times 10^{-3}s$。

四动量p的洛伦兹变换关系：　与四维时空矢量的洛伦兹变换相同，若在O系中粒子的四动量为$p=(E,\mathbf{p})$，那么在以速度为v沿x-轴正向运动的O'系中，粒子的四动量$p'=(E',\mathbf{p}')$ 所满足的洛伦茨变换关系为：

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}p^{\nu}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

进而可导出洛伦兹不变量

$$E^2 - |\mathbf{p}|^2 = E'^2 - |\mathbf{p}'|^2 = m^2. \tag{2.11}$$

对单粒子体系，如果粒子在O系中静止，那么有

$$E'^2 - |\mathbf{p}'|^2 = E^2 = m_0^2 \tag{2.12}$$

其中m_0为粒子的静质量。

对多粒子系统，有洛伦兹不变量

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i\right)^2 = Constant \tag{2.13}$$

当这个多粒子系统是由一个母粒子M_0衰变产生，那么这个常量就等于M_0^2，称为这个多粒子系统的**不变质量**。

对静止质量为m_0的运动粒子, 有关系式

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} = E\mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/E. \tag{2.14}$$

静止质量为m_0 的粒子的4-动量写为$p=(E,\mathbf{p})$，质壳关系为$p^2 \equiv E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_0^2$. 其在运动速度为$v$的坐标系中的能量和动量$(E',\mathbf{p}')$ 还可以写为

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad p'_{\perp} = p_{\perp}, \tag{2.15}$$

其中$\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$，$p_{\perp}$ $(p_{\parallel})$ 表示垂直于（平行于）O'系运动方向$\mathbf{v}$ 的三动量分量[1]。对应的逆变换为

$$\begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad p_{\perp} = p'_{\perp}. \tag{2.16}$$

四维偏微商的洛伦兹变换。　使用(2.3)式所示的四维坐标的洛伦兹变换关系，可以导出四维偏微商所满足的洛伦兹变换关系。仍然考虑如图-2.1所示的惯性坐标系O和O'，

O'系中的(t', x')可以写成O系中(t, x, y, z)的函数：$x'(t, x, y, z)$和$t'(t, x, y, z)$，那么可以证明：

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial t' \\ \partial/\partial x' \\ \partial/\partial y' \\ \partial/\partial z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

与(2.4)式比较可知，四维偏微商∂_μ是洛伦兹变换下的协变矢量:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{2.18}$$

对应的逆变矢量四维偏微商∂^μ的形式为:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{2.19}$$

进而可以定义四维偏微商所满足的d'Alembertian [52]:

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.20}$$

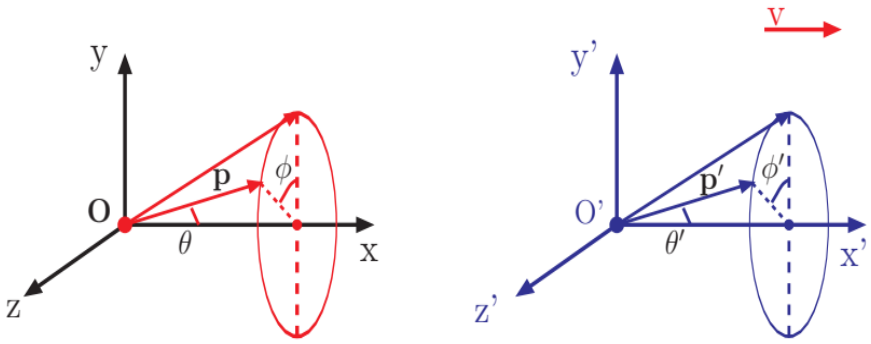


图 2.2: 在O系中粒子的运动方向(θ, ϕ)与该粒子在O'系中的运动方向(θ', ϕ')之间的洛伦兹变换关系。

作为时空洛伦兹变换式(2.3)的一个应用，我们讨论粒子运动方向(θ, ϕ)在两个平行惯性系之间的变换关系. 如图-2.2所示，设某粒子的运动方向在惯性系O系中为(θ, ϕ)，在以速度v沿x轴方向运动的另一惯性系O'系中为(θ', ϕ')。现在寻找(θ', ϕ')和(θ, ϕ)之间的变换关系。

首先证明方位角ϕ在两个惯性坐标系中是相等的。因为

$$\tan\phi = \frac{p_z}{p_y} = \frac{p'_z}{p'_y} = \tan\phi'. \tag{2.21}$$

所以有$\phi' = \phi$。下面考虑极角θ 和θ'之间的关系。由(2.15)式可得

$$\begin{aligned} p' \cos\theta' &= \gamma \left(p\cos\theta - vE \right), \\ p' \sin\theta' &= p \sin\theta. \end{aligned} \tag{2.22}$$

两式相除可得

$$\tan\theta' = \frac{p\sin\theta}{\gamma\left(p\cos\theta - vE\right)} = \frac{u\sin\theta}{\gamma\left(u\cos\theta - v\right)} \tag{2.23}$$

其中$u = p/E$是粒子在惯性系中的运动速度。我们也可以把上式写成

$$\tan\theta' = \frac{\tan\theta}{\gamma\left(1 - \frac{v}{u_x}\right)} \tag{2.24}$$

其中$u_x = u\cos\theta$。同样，由逆洛伦兹变换可得

$$\tan\theta = \frac{p'\sin\theta'}{\gamma\left(p'\cos\theta' + vE'\right)} = \frac{u'\sin\theta'}{\gamma\left(u'\cos\theta' + v\right)} \tag{2.25}$$

其中$u' = p'/E'$是粒子在O' 系中的运动速度。还可以把上式写成

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{u'_x}\right)} \tag{2.26}$$

其中$u'_x = (p'/E')\cos\theta'$.

2.1.2　洛伦兹变换的快度描写

从前面的讨论可以看到，洛伦兹变换的公式非常麻烦，而在粒子物理实验中，有时候实验室系和计算方便的质心系是不同的，所以经常需要变换。时空关系的洛伦兹变换公式(2.3)可以展开写为

$$t' = \gamma\left(t - vx\right), \quad x' = \gamma\left(x - vt\right), \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2.27}$$

实验上为了方便，我们可以引入快度Y来代替速度v来描写洛伦兹变换，

$$\begin{aligned} \sinh Y &= \frac{1}{2}\left(e^{Y} - e^{-Y}\right) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v \\ \cosh Y &= \frac{1}{2}\left(e^{Y} + e^{-Y}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma. \end{aligned} \tag{2.28}$$

在此定义下，v 与Y 是一一对应的:

$$\begin{aligned} v: &\quad -1 \to 0 \to 1, \\ Y: &\quad -\infty \to 0 \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.29}$$

这时(2.27)式可以写成

$$x'^{\mu} = Y^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.30}$$

其中

$$Y^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh Y & -\sinh Y & 0 & 0 \\ -\sinh Y & \cosh Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

我们现在讨论速度合成的问题。如图-2.1所示，O'系相对于O系以速度v 沿O系的x轴方向运动，粒子在O'系以速度v'' 沿x轴方向运动。那么，根据相对论速度相加的公式，粒子相对于O系的速度v' 为

$$v' = \frac{v + v''}{1 + vv''}. \tag{2.32}$$

但用快度描写时，快度在洛伦兹变换下可以简单地相加：

$$Y' = Y + Y'', \tag{2.33}$$

这就给计算带来了很大的方便。现在，在高能物理实验中经常用快度代替速度来进行理论分析和计算。

四动量的快度描写： 对自由粒子的四动量$p_{\mu} = (E, -\mathbf{p})$，同样有

$$p'_{\mu} = Y^{\nu}_{\mu} p_{\nu} \tag{2.34}$$

根据上式可以证明：如果在一个惯性系O中，某粒子的$\mathbf{p}$的方向不和x轴平行，则该粒子的E和p_x可以表示为

$$E = m_{\perp} \cosh Y, \quad p_x = m_{\perp} \sinh Y \tag{2.35}$$

其中横质量$m_{\perp} = \sqrt{m_0^2 + p_y^2 + p_z^2}$ 的物理意义是：**如果主要观察粒子在x方向运动的变换性质，可以把粒子等效地看成没有y和z 方向的运动，但其质量增加为$m_{\perp}$.**

当在另一个相对于O系平行运动的O'系中观察和描写该粒子的运动情况时，只需将O'系相对于O系的快度Y'从粒子相对于O系的快度Y中减去就行了。这时，粒子相对于O'系的能量和动量可以简单的写为

$$E' = m_{\perp} \cosh(Y - Y'), \qquad p'_x = m_{\perp} \sinh(Y - Y') \tag{2.36}$$

这就是利用快度的方便之处。

两粒子的相对快度： 如果两个粒子在O 系中沿某一方向运动，其快度分别为Y_1和Y_2，在一个相对于O 系以快度Y_{01}沿x方向运动的O'系看来，他们的快度分别为

$$Y_1' = Y_1 - Y_{01}, \qquad Y_2' = Y_2 - Y_{01}. \tag{2.37}$$

两个粒子的快度之差为

$$\Delta Y' = Y_1' - Y_2' = Y_1 - Y_2 = \Delta Y, \tag{2.38}$$

即在O和O'系中，两个粒子的快度之差相等，或者说两粒子之间的相对快度是洛伦兹不变的。 如果在第三个沿x方向运动的O''系中看，第一个粒子的快度为Y_1''，第二个粒子的快度为Y_2''，那么有

$$\Delta Y'' = Y_1'' - Y_2'' = \Delta Y = \Delta Y'. \tag{2.39}$$

两个粒子相对速度就没有这样简单的关系了。

从公式(2.35)我们可以得到$v_x = thY$，或者

$$\frac{E + P_x}{E - P_x} = e^{2Y} \tag{2.40}$$

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + P_x}{E - P_x}. \tag{2.41}$$

如果粒子质量m $= 0$, 则$E^2 - |P|^2 = 0$，所以有

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{|P| + P_x}{|P| - P_x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}, \tag{2.42}$$

这里$P_x = |P| \cos\theta$，角度是探测器最容易测量的量，可由带电粒子径迹得到。如果m $\neq 0$, 则把$\eta \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ 称为赝快度。利用$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$得到

$$\eta = \ln \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} = -\ln \tan\frac{\theta}{2}. \tag{2.43}$$

在实验上很容易定出的是η，而严格理论上要用的是Y。在快度为0（粒子静止）附近，两者差别大一些，但在很多时候，粒子的运动速度很快，可以近似利用赝快度来作计算。

2.2 两粒子碰撞和质心坐标系

在上一章中，我们提到了量子场论能够精确地计算不同束缚态能级之间的跃迁几率，也就是粒子的衰变宽度，这是粒子自发衰变的性质，这个几率是质量的量纲。另外在粒子物理中，我们非常依赖于加速器实验，因而量子场论还需要给出两粒子碰撞的几率，我们在这一节集中讨论这个量纲是面积的散射几率。至于三粒子或更多粒子的同时碰撞几乎是不可能发生的，我们不在这里考虑，三粒子不同时但间隔时间很短发生的碰撞，总可以分解为两次连续的二体碰撞。

2.2.1 质心坐标系和反应阈能

物理实验通常是在实验室进行的，但是对于复杂的相互作用过程，我们必须在质心坐标系来作研究才能简单有效地解决所有问题，因而实验室坐标系和质心坐标系之间的洛伦兹变换会被经常用到。为了尽量减少这种洛伦兹变换带来的复杂性，寻找并利用洛伦兹不变量而不是协变量来解决问题便是一个捷径。

质心与质心系： 设一组质量分别为$m_1, m_2, \ldots, m_n$的粒子，它们在实验室系中的坐标分别为$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$，定义该粒子系统的质心坐标为

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}, \tag{2.44}$$

那么，质心在实验室系中的运动速度为

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i m_i}. \tag{2.45}$$

我们把与质心相对静止的坐标系称之为质心系。 即质心在质心系中的速度$\mathbf{v}_c' = 0$，那么有

$$\frac{\sum_i \mathbf{p}_i'}{\sum_i m_i} = 0, \tag{2.46}$$

即在质心系中粒子系统的总动量为零

$$\sum_i \mathbf{p}_i' = 0. \tag{2.47}$$

在粒子物理学中，由于粒子系统可能包括静止质量为零，但动量不为零的光子、中微子等粒子，因此以总动量为零的(2.47)式来定义一组粒子的质心坐标系更为合适。我们称其为**动量中心系** 更为恰当。

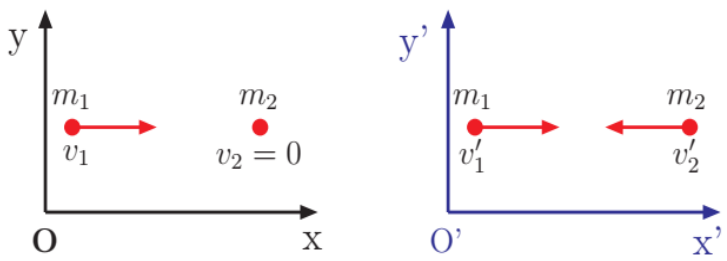


图 2.3: 在实验室坐标系O和质心坐标系O'中两粒子碰撞(打靶和对撞)前的状态。

两粒子体系，非相对论情况： 我们首先考虑非相对论情况下的两粒子体系。如图-2.3所示，设在实验室系中，入射粒子$(m_1, \mathbf{v}_1)$打在静止靶粒子上$(m_2, \mathbf{v}_2 = 0)$。两粒子体系的总动量、总能量(动能)和质心速度分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_1\mathbf{v}_1, \\ E &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2, \\ \mathbf{v}_c &= \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1+m_2}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

在质心系中观察，两粒子分别以速度$\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2'$对头碰撞，其总动量为零。即

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_c = \frac{m_2\mathbf{v}_1}{m_1+m_2}, \\ \mathbf{v}_2' &= -\frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1+m_2}, \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

该两粒子体系的质心系总动能E'为

$$E' = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1'|^2 + \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_2'|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)|\mathbf{v}_1|^2 = \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}_1|^2, \tag{2.50}$$

其中定义$\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ 为该两粒子体系的约化质量。显然

$$E' < E = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2. \tag{2.51}$$

一般情况下，有

$$E - E' = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2 - \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}_1|^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\mathbf{v}_c|^2, \tag{2.52}$$

或者写成

$$E = E' + \frac{1}{2}(m_1+m_2)|\mathbf{v}_c|^2. \tag{2.53}$$

由该式可以看出：在非相对论情况下，实验室系中入射粒子的动能（两粒子体系的总能量）被分成两个部分：

(a) 质心$(m = m_1+m_2)$以速度$\mathbf{v}_c$运动的动能，这一部分能量对两粒子之间的相互作用没有贡献；

(b) 在质心系中，两粒子相对运动的总动能E'。这一部分能量才是激发粒子体系内部自由度的相互作用有效能量。

如果入射粒子和靶粒子的质量相等$m_1 = m_2$，这两部分能量也相等，意味着入射粒子动能只有一半成为有效能量。当入射粒子质量m_1远小于靶粒子质量m_2的时候，有效能量E'占

比越大。所以在非相对论情况下，靶粒子质量要远大于入射粒子质量，才会更有效利用入射粒子的动能。反之，靶粒子质量太小，则大部分入射粒子动能就浪费掉了。

通过以上分析我们知道，打靶实验中总会有一部分的入射粒子动能损失。如果我们能把上面的靶粒子也加速到其动量跟入射粒子的动量大小相等，而方向相反，这时候，实验室坐标系也就是质心坐标系了，所有粒子动能都变成有效能量，而且在质心系很多计算会变简单。但是早期从卢瑟福的α粒子散射实验开始，大多数实验都是打靶实验。其原因主要是实验中的粒子太小！例如到目前为止人们仍然没有发现电子有结构，其半径小于10^{-15}米！如果分别只加速两个微观粒子让其对撞，其迎头对撞上的几率完全可以忽略不计。虽然一旦对撞成功，其能量利用率是100%，但是因为绝大部分对撞都不成功，其损失却是相当大；而打靶实验则不同，可以把靶做得足够大和足够厚，使得所有入射粒子都会撞到其中一个靶粒子，因而打靶实验具有很高的经济性。

两粒子体系，相对论情况： 考虑两个粒子在实验室坐标系发生碰撞，它们在实验室系和质心系的总动量和总能量分别记为：$\mathbf{p}, E$ 和$\mathbf{p}', E' = E_{cm}$。对一般的两粒子体系，由洛伦兹不变式(2.13)可知质心系总能量的平方是洛伦兹不变量，即

$$\begin{aligned} E_{cm}^2 &= (E_1' + E_2')^2 - (\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2')^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\cos\theta, \end{aligned} \tag{2.54}$$

其中θ是两个粒子运动方向之间的夹角。

对两个粒子的碰撞，E_{cm}是碰撞后产生的全部粒子质量和的上限。下面我们考虑几种典型情况：

1. **粒子打靶实验：** 在实验室系中入射粒子$(m_1, \mathbf{p}_1)$打在静止的靶粒子$(m_2, \mathbf{p}_2 = 0)$上。碰撞前质心以速度v相对于实验室系运动，两粒子在实验室系和质心系的四动量分别记为

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (m_2, 0), \\ p_1' &= (E_1', \mathbf{p}_1'), \quad p_2' = (E_2', \mathbf{p}_2'), \end{aligned} \tag{2.55}$$

这时有

$$E_{cm}^2 = 2E_1m_2 + m_1^2 + m_2^2. \tag{2.56}$$

对于高能入射粒子，如果$m_1, m_2 \ll E_1$，则有

$$E_{cm}^2 \approx 2E_1m_2 \longrightarrow E_{cm} = \sqrt{2E_1m_2}. \tag{2.57}$$

由此可见，在高能情况下加速粒子打静止靶时，可用来产生新粒子或者激发内部自由度的反应有效能量，即质心系总能量E_{cm}与入射粒子能量的平方根$\sqrt{E_1}$成正比。因此，将加速器能量提高100倍，反应有效能量才提高10倍，能量利用的效率很低。因此，1956年人们设计了对撞机实验：入射粒子和靶粒子都处于运动状态。

2. **两个粒子对撞实验：** 当两个高能粒子对撞时，粒子质量远小于粒子被加速的能量，忽略粒子质量，则粒子能量和动量近似相等，由公式(2.54)得

$$E_{cm}^2 = 4E_1E_2. \tag{2.58}$$

对于对称的两个粒子对撞($E_1 = E_2 = E$)，实验室等同于质心系

$$E_{eff} = E_{cm} = 2E. \tag{2.59}$$

这时粒子加速的能量利用效率最高，达到了100%。

例如：欧洲核子研究中心的LHC实验，目前质子和反质子都被加速到能量为6.5TeV, 有效利用能量为质心系能量$E_{cm} = 13$TeV。如果把这个实验改成通常的反质子打质子靶的实验，则由公式(2.57)可知，需要加速入射反质子束的能量为

$$E_p = \frac{E_{cm}^2}{2m_p} \approx 84500 \text{ TeV}. \tag{2.60}$$

这是非常巨大的一个能量，是在可以预见的将来都达不到的加速能量。这也是高能加速器在最近的几十年里全部从打靶实验改成了对撞机实验的一个主要原因。

按照之前在非相对论情况下的解释，两个微观粒子由于非常小，特别是电子几乎没有大小，对撞几率几乎为0。而且，根据量子场论的计算，也是因果律的要求，随着两个微观粒子被加速能量的提高，其对撞几率(截面)会越来越小，对撞机看起来无论如何都不是一个好的选择。对撞机的发展其实归功于加速器技术的另一个进步，现代加速器不再是对单个粒子加速，而是对粒子束团加速，每个微小束团里的粒子数目可以达到10^{10}个。以目前正在运行的LHC实验为例，其一个质子束团的长度为8厘米，横截面半径为8.5微米，体积约为1.8×10^{-2}立方毫米（大小约为1粒芝麻的1%），却含有1.1×10^{11}个质子！环形加速器的储存环里可以同时容纳很多(> 1000)的束团，巨大数量的被加速粒子因而克服了非常小的碰撞截面的困难。

3. **不对称对撞机：** 在两个B介子工厂和超级B介子工厂实验中，对撞机质心系能量选取在$\Upsilon(4S)$的共振产生区($m(\Upsilon(4S)) = 10.580$GeV)，以便于大量产生高速飞行的正反B介子对，进而测量B介子衰变过程中的CP对称性破坏效应。如果正负电子束团的能量一样，实验室系就等同于质心系，产生的正反B介子将是静止的，不利于鉴别正反粒子。这些实验因而设计成电子束流的能量比正电子束流的能量高。这样，经对撞产生的Υ 介子及其次级衰变产物在实验室系就会沿高能电子束流的方向高速飞行，这样使产生的粒子寿命延长，有利于对称性破坏参数的测量。以日本的KEK-B加速器为例，电子加速能量$E_{e^-} = 8$GeV，正电子加速能量$E_{e^+} = 3.5$GeV，质心系总能量为

$$E_{cm} = \sqrt{4E_{e^-}E_{e^+}} = 10.583GeV. \tag{2.61}$$

质心的运动速度约为$0.55c$。

引入质心系的概念，在描写粒子物理实验和理论分析有很多方便之处。例如:

(1) 两粒子弹性碰撞时，在质心系中两个粒子的动量大小相等，方向相反。碰撞后两粒子向相反方向飞行。

(2) 两体碰撞时，碰撞后次级粒子的角分布在质心系中是轴对称的。如果碰撞两个粒子是全同粒子，次级粒子的分布对作用面(通过作用点，垂直于作用轴的平面) 也是对称的。

(3) 自旋为零的粒子衰变时，所产生的次级粒子在质心系中有球对称分布。

反应前后粒子的能量差定义为反应Q值，Q值是指反应过程中释放出来的能量。 考虑最简单的二粒子(质量分别为m_1和m_2)碰撞到二体末态(质量分别为m_3和m_4)的反应，根据爱因斯坦质量和能量的转化关系，由总能量守恒可以知道

$$Q = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4). \tag{2.62}$$

我们把$Q > 0$**的反应称为放热反应** 。由于初态粒子质量大于末态粒子质量，从能动量守恒的角度，这种反应能否发生只与相互作用性质有关而与入射粒子能量无关。

在粒子物理中我们更关心的是$Q < 0$ **的吸热反应，** 只有当入射粒子能量大于或者等于某一值时，吸热反应才可能发生。我们把产生吸热反应所需的入射粒子的(实验室系)最小能量E_{thr}，称之为**吸热反应的阈能。**

在质心系中，由于反应初态粒子和末态粒子的总动量都为零, 所以有可能使全部末态粒子处于静止状态，把质心系的总能量全部转化为末态粒子的质量。这是对撞机能够产生更高质量粒子最经济的状态。能量在反应前后是守恒的，但是却是需要在质心系和实验室系之间作洛伦兹变换，非常复杂，根据能动量守恒，整个系统的不变质量平方在反应前后必须相等，而且这是一个洛伦兹不变量，因而在反应前我们可以在实验室计算，反应后可以在质心系计算，虽然坐标系不同，却也是相等的

$$(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \left(\sum_f E'_f\right)^2 - 0 = \left(\sum_f m_f\right)^2. \tag{2.63}$$

考虑末态是多个粒子的打靶反应($E_2 = m_2$)的情况，

$$(E_{\rm thr} + m_2)^2 - \mathbf{p}_{thr}^2 \;=\; \left(\sum_f m_f\right)^2. \tag{2.64}$$

对$1 + 2 \to 3 + 4$ 散射过程和$1 + 2 \to N(N > 2)$散射过程，反应阈能$E_{\rm thr}$的表达式为：

$$\begin{aligned} E_{\rm thr} &= \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_2}, \\ E_{\rm thr} &= \frac{\left(\sum_{f=1}^N m_f\right)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2m_2}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

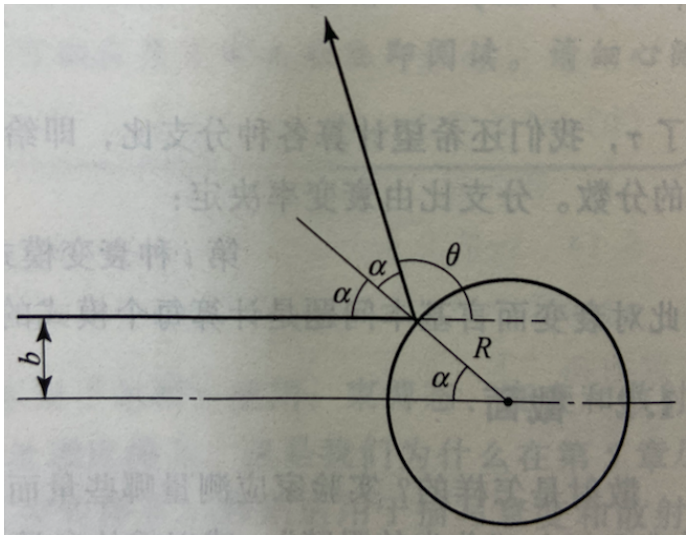


图 2.4:　经典刚性球体的散射。

例题2.1：考虑高能质子打静止质子靶$p+p \to p+p+p+\bar{p}$的反应过程，计算反应阈能。

解：在实验室系，按照上面的公式，这个$2 \to 4$产生反质子的过程的反应阈能为

$$E_{\text{thr}} = \frac{(4m_p)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 7m_p = 6.57GeV. \tag{2.66}$$

美国伯克利实验室的Bevatron同步质子加速器的能量根据上面的计算选为6.8GeV，其主要目的之一就是寻找反质子。建成后不久，就在1955年发现了反质子，1956年又发现了反中子。

2.2.2　散射和微分截面

两个粒子在加速器碰撞的产物可以是非常复杂的，描写这样的过程需要怎样的复杂物理量呢？我们从最简单的打靶实验开始，日常的打靶，每次的结果是不确定的，但是足够多次的统计规律基本上是确定的，神枪手和普通人的中靶率肯定是不一样的，我们可以类比为粒子物理中不同的基本相互作用；在固定打靶者和打靶距离的情况下，显然，目标靶的大小，也就是面积是最决定的因素，我们下面要说明的就是在量子情况下，两粒子碰撞几率就是用面积(截面)来描写的。

首先从经典力学开始，一个粒子对准一个半径R的刚性球撞击，如图2.4所示

$$b = R\sin\alpha, \quad 2\alpha = \pi - \theta, \tag{2.67}$$

因此，

$$b = R\cos(\theta/2). \tag{2.68}$$

瞄准距离b越小，偏转角度θ越大；如果粒子在瞄准距离b到b+db之间入射，它将在散射角θ 和$\theta + d\theta$ 之间射出。因为散射体是刚性球体，图2.4实际上应该是一个立体图，还

有一个绕入射粒子方向旋转的方位角ϕ。因此，不失一般性的是，粒子穿过无穷小的面积$d\sigma = |bdbd\phi|$，它将散射到立体角$d\Omega = |\sin\theta d\theta d\phi|$。自然地，$d\sigma$越大，$d\Omega$也应该越大，这个比例因子叫做微分(散射)截面D

$$d\sigma = D(\theta)d\Omega. \tag{2.69}$$

因此，

$$D(\theta) = d\sigma/d\Omega = \left|\frac{bdbd\phi}{\sin\theta d\theta d\phi}\right|. \tag{2.70}$$

由公式(2.68)，可得

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2}\sin(\theta/2). \tag{2.71}$$

所以，

$$d\sigma/d\Omega = \frac{Rb\sin(\theta/2)}{2\sin\theta} = \frac{R^2}{4}. \tag{2.72}$$

总截面是对全部立体角的积分，因而对于刚性球体来说，

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4}d\Omega = \pi R^2. \tag{2.73}$$

这是一个球体的最大截面面积，对应于很显然的结论：任何入射在这个面积之内的粒子将被散射，而在截面之外的粒子将没有影响地穿过。

如果把刚性球体换成是一个相互作用势场，例如库仑势，我们同样可以类似地求出一个电荷e被另一个电荷Z的库仑势散射的微分截面公式[1]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze}{4E\sin^2(\theta/2)}\right)^2, \tag{2.74}$$

其中E是入射粒子的初始动能。这里的靶不再有经典力学的实体大小和截面，但是描写对撞几率的依然是面积单位的散射截面，所以是有效(等效)截面的概念。这个公式是20 世纪初卢瑟福最先推导出的α 粒子散射公式，它证实了原子是有内部结构的，而且原子中所有的正电荷都集中在中心很小的原子核上。这个公式虽然最初是在经典电磁学的基础上推导出的，但是在量子层次也是类似的。从这个公式可以看出微分散射截面反比于粒子的动能，也就是随着入射粒子能量的提高，粒子碰撞的几率是越来越小的，这是量子场论的计算结果。粒子的动能是有下限的，但是原则上却并没有上限，如果碰撞几率随着入射粒子能量的提高而增大，必然会最终超过100%，这是违反因果律的，任何物质并不能无中生有。

上一章中，我们提到了一个不稳定粒子可以衰变到任何比它质量低的粒子，除非有对称性的限制禁止其衰变。同样，两个粒子的碰撞，可以是**弹性碰撞**，只改变两个粒子的能动量，而不改变粒子的种类和数量；也可以是**非弹性碰撞**[2]，末态粒子的种类或者数量与

[1]任何一本原子物理教科书上都有这个公式的推导，我们这里就不重复了。

[2]粒子物理里弹性散射和非弹性散射的定义与经典力学不同。

初态粒子比较发生了改变。在非弹性碰撞的情况下，只要满足对称性也就是守恒量的要求，质量比质心系能量低的粒子都可以产生，对于相同的初态碰撞粒子，我们可以有很多个不同的末态反应截面。总截面是每个分截面的和

$$\sigma_{tot} = \Sigma_i \sigma_i. \tag{2.75}$$

黄金规则： 粒子的衰变宽度和两粒子碰撞的截面都是对应于量子情况的反应率问题，在量子力学的相互作用表象，可以推导出费米的黄金规则，其给出的反应率公式是：

$$W = 2\pi |M_{ij}|^2 \rho_f, \tag{2.76}$$

其中M_{ij}是初态和末态之间的跃迁矩阵元，它包含所有的动力学信息：相互作用的耦合常数、传播子和末态角度分布信息等可以由量子场论的费曼图给出的公式。ρ_f是末态态密度，它依赖于参与反应粒子的质量、能量和动量等纯运动学的变量，反映一个给定过程中末态粒子的相空间状态数目。例如一个重粒子衰变到轻的粒子可以涉及到一个比较大的相空间因子，因为有很多不同的方式去分配剩余的能量；相反，像中子的贝塔衰变，由于初态的中子几乎和末态的质子加上电子的质量相等，几乎没有多余的能量剩下，末态相空间很小，衰变比较难发生，因而中子寿命较长。态密度ρ_f在量子场论框架下，利用相对论的协变性，各种可能的量子态求和等于所有末态粒子四动量的积分，当然由于能动量守恒的要求，约束条件是要有的，我们可以得到相对论性的黄金规则公式

$$W = \int \frac{(2\pi)^4}{4E_1 E_2} |M_{ij}|^2 d\Phi_n, \tag{2.77}$$

其中$d\Phi_n$是n体末态不变相空间体积元:

$$d\Phi_n = \delta^4 \left(P - \Sigma_f p_f\right) \prod_{f=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}, \tag{2.78}$$

我们将在下一节2.3，详细讨论。

对于图2.3所示的打靶或者对撞实验，如果对撞粒子的数密度分别是n_1和n_2，速度分别是v_1和v_2，那么在体积V 里发生碰撞的次数为

$$(v_1 + v_2) n_1 n_2 \sigma V. \tag{2.79}$$

通常我们在量子的情况是用归一化的波函数，对应于在单位体积单位时间内，单个粒子与单个粒子的对撞几率为

$$W = (v_1 + v_2)\sigma. \tag{2.80}$$

利用费米的黄金规则公式(2.77)我们可以得到

$$d\sigma = \int \frac{(2\pi)^4 |M_{ij}|^2}{4E_1 E_2 (v_1 + v_2)} d\Phi_n, \tag{2.81}$$

上面公式的分母的平方可以化为

$$E_1^2E_2^2(\mathbf{p}_1/E_1+\mathbf{p}_2/E_2)^2=(E_1\mathbf{p}_2+E_2\mathbf{p}_1)^2=E_1^2\mathbf{p_2^2}+\mathbf{p_1^2}E_2^2+2E_1E_2\mathbf{p_1p_2}, \tag{2.82}$$

由于对撞的两个粒子运动方向在一条直线上，因而有

$$(p_1\cdot p_2)^2=(E_1E_2+\mathbf{p_1p_2})^2=E_1^2E_2^2+\mathbf{p_1^2p_2^2}+2E_1E_2\mathbf{p_1p_2}. \tag{2.83}$$

把上面两个公式相减，我们就得到了公式(2.81)分母的洛伦兹不变形式

$$E_1E_2(v_1+v_2)=\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}. \tag{2.84}$$

在打靶实验的情况下，粒子2在实验室系静止，因而有

$$\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}=m_2|\mathbf{p_1}|. \tag{2.85}$$

在对撞实验情况下，如果在粒子1和2的质心系，有

$$\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}=\sqrt{s}|\mathbf{p_1}|, \tag{2.86}$$

其中$s=E_{cm}^2$是洛伦兹不变量。

最后在相对论的情况，对应于量子场论的S矩阵元计算公式，两个粒子碰撞的截面公式的洛伦兹不变表达式为

$$d\sigma=\frac{(2\pi)^4|M_{ij}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}d\Phi_n. \tag{2.87}$$

2.2.3 微分截面在实验室系-质心系之间的变换关系

两个粒子的碰撞截面公式(2.87)是洛伦兹不变的，表示的是在一个反应中特定事件的发生几率应该是与坐标系无关的。那么，由截面的洛伦兹不变性可得

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)'d\Omega', \tag{2.88}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)'\frac{d\Omega'}{d\Omega} \tag{2.89}$$

其中$d\Omega=d\cos\theta\,d\phi$，$\theta$和$\phi$是球极坐标的角变量。

若考虑$1+2\to3+4$反应，取第一个粒子的动量$\mathbf{p}_1$方向为x方向，极角θ 由x轴量起，ϕ为对x轴的方位角，两个坐标系沿着x轴相对运动。那么，由于$\phi=\phi'$, 可得

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)'\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} \tag{2.90}$$

下面先推导$d\cos\theta'/d\cos\theta$的表达式。根据四维动量的洛伦兹变换关系，次级粒子3和4的能量-动量在实验室系和质心系两坐标系之间的变换关系为

$$\begin{aligned} E' &= \gamma_c(E - v_c p_x), \\ p'_x &= \gamma_c(p_x - v_c E), \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z. \end{aligned} \tag{2.91}$$

考虑到动量分量的投影关系有

$$E' = \gamma_c(E - v_c p\cos\theta), \tag{2.92}$$

$$p'\cos\theta' = \gamma_c(p\cos\theta - v_c E), \tag{2.93}$$

$$p'\sin\theta' = p\sin\theta. \tag{2.94}$$

在质心系中，次级粒子的E', p'与该粒子在实验室系的运动方向无关，因而有

$$\frac{dE'}{d\cos\theta} = 0, \qquad \frac{dp'}{d\cos\theta} = 0 \tag{2.95}$$

利用关系式$dE/dp = p/E$，将(2.92)和(2.93)式对$\cos\theta$ 求微商，得到

$$p'\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \gamma_c\left(p + \cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta} - v_c\frac{p}{E}\frac{dp}{d\cos\theta}\right), \tag{2.96}$$

$$0 = \gamma_c\left(\frac{p}{E}\frac{dp}{d\cos\theta} - v_c p - v_c\cos\theta\frac{dp}{d\cos\theta}\right). \tag{2.97}$$

从上两个式子中消去$dp/d\cos\theta$，然后得到

$$\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \frac{p^2}{\gamma_c p'\left(p - v_c E\cos\theta\right)} = \frac{p}{\gamma_c p'\left(1 - \frac{v_c}{v}\cos\theta\right)}. \tag{2.98}$$

其中$v = p/E$是该次级粒子在实验室系中的运动速度。最后有

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{p}{\gamma_c p'\left(1 - \frac{v_c}{v}\cos\theta\right)}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)'. \tag{2.99}$$

为了得到以θ', E'为变量的上述关系式，考虑反向洛伦兹变换

$$E = \gamma_c(E' + v_c p'\cos\theta'), \tag{2.100}$$

$$p\cos\theta = \gamma_c(p'\cos\theta' + v_c E'). \tag{2.101}$$

由(2.101)式，

$$\frac{\cos\theta}{p} = \frac{p\cos\theta}{p^2} = \frac{1}{p^2}\gamma_c\left(p'\cos\theta' + v_c E'\right) \tag{2.102}$$

由(2.100)和(2.102)式，

$$\frac{v_c E}{p}\cos\theta = \frac{1}{p^2}v_c\gamma_c^2\left(E' + v_c p'\cos\theta'\right)\cdot\left(p'\cos\theta' + v_c E'\right), \tag{2.103}$$

因此

$$1 - \frac{v_c E}{p}\cos\theta = \frac{1}{p^2}\left[p^2 - v_c\gamma_c^2\left(E' + v_c p'\cos\theta'\right)\cdot\left(p'\cos\theta' + v_c E'\right)\right]. \tag{2.104}$$

考虑到洛伦兹不变式(2.13)，可以把p^2写成

$$p^2 = E^2 - m^2 = E^2 - E'^2 + p'^2 = p'^2 - E'^2 + \gamma_c^2\left(E' + v_c p'\cos\theta'\right)^2. \tag{2.105}$$

代入(2.104) 式可得

$$1 - \frac{v_c E}{p}\cos\theta = \frac{p'^2}{p^2}\left[1 + v_c\frac{E'}{p'}\cos\theta'\right], \tag{2.106}$$

代入(2.98) 式可得

$$\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \frac{p^3}{\gamma_c p'^3\left(1 + v_c\frac{E'}{p'}\cos\theta'\right)} = \frac{p^3}{\gamma_c p'^3\left(1 + \frac{v_c}{v'}\cos\theta'\right)}. \tag{2.107}$$

这里v'表示该粒子在质心系中的运动速度。最后得到表达式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{p^3}{\gamma_c p'^3\left(1 + \frac{v_c}{v'}\cos\theta'\right)}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)', \tag{2.108}$$

其中v_c表示质心速度, $v = \mathbf{p}/E$是该次级粒子在实验室系中的运动速度。$v' = \mathbf{p}'/E'$是该次级粒子在质心系中的运动速度。

2.3 相空间

根据费米的黄金规则公式(2.77)，衰变宽度和反应截面等反应率正比于态密度，也就是末态粒子的相空间。空间体积元d^3x不是洛伦兹不变的，时间间隔元dt 也不是洛伦兹不变的，但四维时空体积元$d^4x = d^3x\,dt$是洛伦兹不变的。同样地，动量相空间体积元d^3p不是洛伦兹不变的，能量间隔元dE也不是洛伦兹不变的，但四维动量相空间体积元$d^4p = d^3p\,dE$是洛伦兹不变的。所以当利用费米的黄金规则计算跃迁反应率时候的态密度，应该用四维的相空间体积元。考虑自由粒子的运动时，粒子的四维动量总要满足质壳条件$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$，这反映为四维动量相空间体积元$d^4p$总是要和体现质壳条件的$\delta$函数$\delta(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)$乘在一起，还要乘上反映粒子能量必须大于0的函数$\theta(E)$，因此自由物理粒子的四维动量相空间不变体积元可以写为

$$d^4p\;\delta(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\,\theta(E). \tag{2.109}$$

在对四维动量相空间积分时，由于有δ函数，dE的积分是确定的，可以先积出来，得到

$$\begin{aligned}\int d^4p\delta(E^2-\mathbf{p}^2-m^2)\theta(E) &= \int d^3p[\delta(E^2-\mathbf{p}^2-m^2)]\frac{d(E^2-\mathbf{p}^2-m^2)}{2E} \\ &= \frac{d^3p}{2E}\Big|_{E=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}} = \frac{d^3p}{2\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}}.\end{aligned} \tag{2.110}$$

所以独立的积分只有三重。

2.3.1　n体不变相空间

n个末态粒子的自由度为$4n$, 但在考虑n个质壳条件和4个初末态能量和动量守恒条件以后，n个末态粒子体系的自由度降低为$4n-n-4=3n-4$个。这时的$3n-4$ 维空间称之为相空间。

要计算反应过程的总截面，就需要考虑末态粒子处于所有可能的能量、动量状态时跃迁几率贡献的总和 • 。对(2.78)式所定义的$d\Phi_n$积分，得到不变相空间积分

$$\Phi_n = \int \delta^4\left(P-\sum_f p_f\right)\prod_{f=1}^{n}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f}. \tag{2.111}$$

一般情况下，反应几率中的跃迁矩阵元M_{ij} 和初末态粒子的四动量相关，相空间积分必须和跃迁矩阵元的平方一起积分。

考虑一个粒子的衰变或两个粒子碰撞所产生的反应，如果初态和末态共涉及n个粒子，衰变和反应几率除了由相互作用决定，还决定于相空间的大小，而相空间由n 个粒子的四维动量组成。我们在这一章中将详细讨论末态是两个粒子或者三个粒子的情况，如果末态粒子数量超过四个，则这个相空间积分非常复杂，几乎是不可能解析得到的。粒子的能动量在反应前后守恒，但是因为必须在同一坐标系下考虑才行，经常需要进行洛伦兹变换；但如果是洛伦兹不变量则在任何坐标系下计算的结果都是相同的。因此，我们需要知道n个初末态粒子可以组成多少个独立的洛伦兹不变量。 也就是找洛伦兹标量，以避免坐标系变换。

对于初态和末态共涉及n个粒子的系统，由于能量动量守恒，则这n个四动量只有n-1个是独立的，任意二个四矢量的内积是标量，n-1个四动量可以构成洛伦兹标量的个数为，

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2.112}$$

但是其中的质壳条件有n 个（$p_i^2=m_i^2$，质量是常数，不是变量）需要去掉。所以n个粒子反应中独立的可变的洛伦兹不变量为

$$\frac{n(n-1)}{2}-n = \frac{n(n-3)}{2}. \tag{2.113}$$

从这里也可以看出来二体衰变$A\to B+C$ 没有独立的洛伦兹标量(n=3)，末态粒子动量都是确定的。当$n=4,5,6,7$时，独立洛伦兹不变量数分别为$2,5,9,14$. 它们随n的增加而迅速增长。

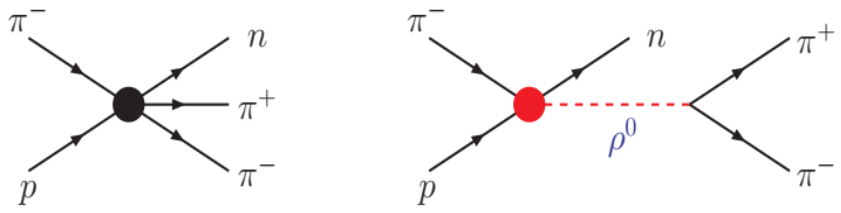
2.3.2 共振态和不变质量谱

在上一章的粒子分类中，我们提到了一类能够通过强相互作用衰变的粒子被称为共振态，这类粒子占了已发现粒子的大部分，其寿命极短，产生之后立即就衰变了，因而目前为止没有任何实验手段能够直接探测到这些粒子。但是通过探测这些粒子的衰变产物，由能动量守恒，我们可以在实验上重建出这些粒子的质量和宽度性质；由角动量守恒，可以重建出中间态粒子的自旋。因此，粒子数据表[1]上的大部分粒子都是以这样的形式间接发现的。

例如在两体碰撞反应中产生的n个末态粒子，其中的一部分往往可能是碰撞过程中产生的极短寿命的中间态粒子(共振态)衰变出来的次级粒子。为确认和鉴别该中间态粒子的存在，实验上需要测量每个次级粒子的能量和动量，然后由不变质量公式计算中间态粒子的不变质量M，

$$p^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{p}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} E_{i,cm}\right)^2 = M^2. \tag{2.114}$$

通过上面的不变质量计算，得到衰变前的中间粒子的如图1.7所示的质量分布，共振峰的中心值对应于共振态的质量m_0、半高宽对应于共振态的宽度Γ。



(a) $\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n$ (b) $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$

图 2.5: (a) 二体碰撞直接产生三体末态的示意图$\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n$; (b) 二体碰撞先产生二体末态$\pi^- + p \to \rho^0 + n$，然后其中的$\rho^0$ 介子随后衰变$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$.

如图-2.5所示，反应$\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n$可以通过两个道进行，

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n, \tag{2.115}$$

$$\pi^- p \rightarrow \rho^0 + n \to (\pi^+ + \pi^-) + n. \tag{2.116}$$

如果反应是通过(2.115)式进行的，那么该反应是一个$2 \to 3$的散射过程，$\pi^+\pi^-$系统的不变质量是由相空间决定的一种统计分布。如果反应是通过(2.116)式进行的，那么$\pi^+\pi^-$系统的不变质量接近于单一值，等于M_{ρ^0}. 实际上该谱线具有一定的宽度，为Bright-Wigner共振曲线式的分布，反映谱线的自然宽度和测量仪器的误差。在实际的反应过程中，如图-2.6所示的两种方式都存在，因而实际的不变质量谱是相空间统计分布((a)-道的贡献)和

一个共振峰((b)-道的贡献)的叠加状态。目前的实验数据是[1]：

$$m(\rho(770)) \;=\; (775.26 \pm 0.25)\text{MeV}, \quad \Gamma_\rho = (149.1 \pm 0.8)\text{MeV}. \tag{2.117}$$

$\rho(770)$介子的最主要衰变道是$\rho \to \pi\pi$，几乎为100%。

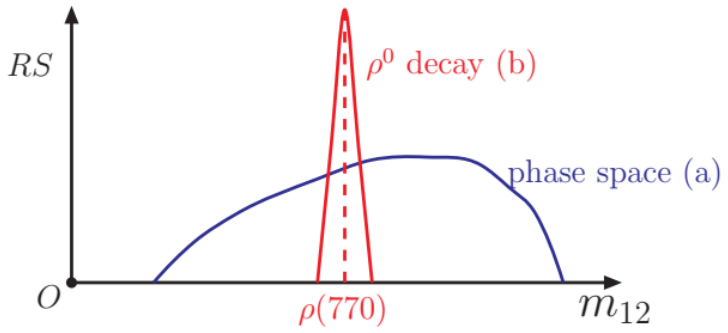


图 2.6: 如图-2.5所示的反应过程(a) 和(b)的$\pi^+\pi^-$不变质量谱。

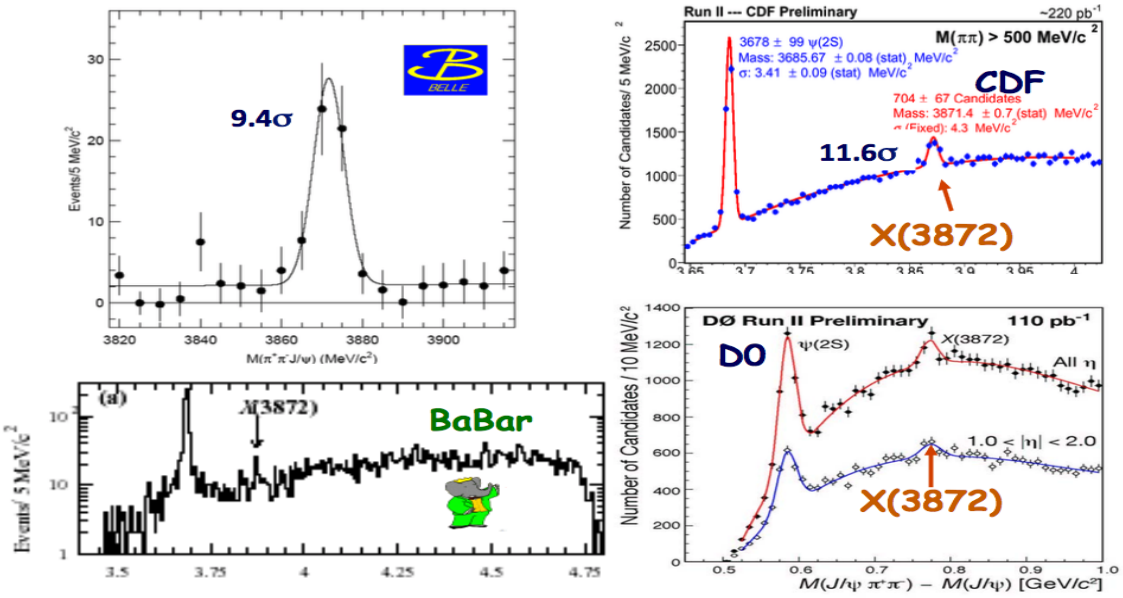


图 2.7: 类粲偶素共振态X(3872)在Belle、BaBar、CDF和D0实验发现过程的$\pi^+\pi^- J/\Psi$不变质量谱。

新共振态强子$X(3872)$的发现：2003年，在日本B介子工厂工作的Belle实验组通过对$B^+ \to K^+\pi^+\pi^- J/\Psi$衰变过程的研究，在$\pi^+\pi^- J/\Psi$不变质量谱分布中发现了一个共振结构[58]。如图2.7所示，其质量为$3872.0 \pm 0.6(stat.) \pm 0.5(syst.)$ MeV，宽度$\Gamma < 2.3$MeV。随后在美国的B介子工厂工作的BaBar实验组以及芝加哥的费米国家实验室的CDF和D0两个实验组都在同一个$\pi^+\pi^- J/\Psi$的不变质量谱中发现了这个共振态结构。X(3872)的发现开启了一大类类粲偶素粒子X,Y,Z 的发现进程，开启了强子物理新的热点研究领域。

几乎所有的粒子物理实验组都投入了相当的力量研究这些奇特共振态，包括北京中科院高能所的BESIII实验、日内瓦大型强子对撞机上的LHCb、ATLAS和CMS后来都参加了对X(3872)等奇特态强子的研究工作。当然很多理论物理研究力量也投入其中[59–61]。到目前为止，我们对这些粒子性质的研究还处在初级阶段，我们将在第六章对奇特强子态研究做比较详细的讨论。

2.3.3 二体衰变运动学

这一节中，为了突出显示相空间的作用，我们假设一种特殊的跃迁矩阵元$|M_{ij}|^2$与粒子的四动量无关，我们只作公式(2.111)的积分。不变相空间的计算通常是在质心系进行，$n=2$时两体相空间的计算比较简单。在质心系公式(2.111)式可以写为

$$\begin{aligned}(2\pi)^6\Phi_2 &= \int \delta^4\left(p_{cm}-p_1-p_2\right)\frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2}\\ &= \int \delta\left(E-E_1-E_2\right)\frac{d^3p_1}{4E_1E_2}\\ &= \int \frac{\delta\left(E-E_1-E_2\right)}{4E_1E_2}\frac{d^3p_1}{dE}dE\\ &= \int \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{4E_1E_2}d\Omega\,\frac{d|\mathbf{p}_1|}{dE}.\end{aligned} \tag{2.118}$$

其中$E=E_1+E_2$为质心系总能量，$d^3p_1=|\mathbf{p}_1|^2d|\mathbf{p}_1|d\Omega$。在质心系中，因为

$$|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|=|\mathbf{p}|, \tag{2.119}$$

所以有

$$\frac{dE}{d|\mathbf{p}_1|}=\frac{dE_1}{d|\mathbf{p}_1|}+\frac{dE_2}{d|\mathbf{p}_2|}=|\mathbf{p}|\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)=|\mathbf{p}|\frac{E}{E_1E_2}. \tag{2.120}$$

将上式代入(2.118)式可得

$$(2\pi)^6\Phi_2=\frac{|\mathbf{p}|}{4E}\int d\Omega. \tag{2.121}$$

如果末态粒子在质心系中的分布是各向同性的，那么有

$$(2\pi)^6\Phi_2=\frac{\pi|\mathbf{p}|}{E}. \tag{2.122}$$

如果末态粒子的质量都为零，且各向同性，那么有$|\mathbf{p}|=E/2$，则

$$\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^5}, \tag{2.123}$$

类似于二体碰撞截面的情况，通过费米的黄金规则公式(2.76)我们可以得到一个静止质量为M的粒子衰变到n个粒子的微分宽度，其可以表示为洛伦兹不变矩阵元$\mathcal{M}$ 跟相空间的乘积

$$d\Gamma=\frac{(2\pi)^4}{2M}|\mathcal{M}|^2d\Phi_n, \tag{2.124}$$

其中$d\Phi_n$是n体相空间体积元(2.78)。

考虑质量为M的粒子的两体衰变过程：$A \to 1+2$，把公式(2.121)式的推导结果代入上面公式就可以得到在其静止系（质心系）微分衰变宽度为

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathbf{p}_1|}{M^2} d\Omega. \tag{2.125}$$

推导末态粒子动量($P=(M,0), p_1=(E_1,\mathbf{p}_1), p_2=(E_2,\mathbf{p}_2)$)：

$$\begin{aligned} p_1^2 = (P-p_2)^2 \quad &\longrightarrow m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2 \\ &\longrightarrow E_2 = \frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2M}, \end{aligned} \tag{2.126}$$

$$E_1 = M - E_2 = \frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}. \tag{2.127}$$

所以有

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{\sqrt{(M^2-(m_1+m_2)^2)\,(M^2-(m_1-m_2)^2)}}{2M}. \tag{2.128}$$

二体衰变中两个末态粒子的四动量都是唯一确定的数值，这也验证了公式(2.113)，两体衰变中没有独立的洛伦兹不变量。

上述二体相空间的计算很简单，末态粒子数目每多一个，就会多三重积分；因此粒子数目越多，相空间的积分越复杂。我们在下一节会详细讨论三体相空间的计算，但是超过四体或更多末态粒子的相空间很难解析计算，现在一般会用蒙特卡洛的模拟计算进行。在计算机技术发展起来之前，人们是利用递推的办法。如果已知n体相空间Φ_n，那么(n+1)体相空间可以认为是一个粒子的二体衰变，其中一个粒子是由n个粒子组成的一个类共振的个体，其质量为$m_{1\ldots n}$，利用δ函数的性质，有

$$\delta^4\left(p - \sum_{i=1}^{n+1} p_i\right) = \int d^4p_{1\ldots n}\delta^4(p - p_{1\ldots n} - p_{n+1})\delta^4\left(p_{1\ldots n} - \sum_{i=1}^{n} p_i\right), \tag{2.129}$$

其中$p_{1\ldots n} = \sum_{i=1}^{n} p_i$。那么有

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} = &\int \delta^4(p - p_{1\ldots n} - p_{n+1})\delta(p_3^2 - m_3^2) d^4p_{1\ldots n} d^4p_{n+1} \\ &\cdot \int \delta^4\left(p_{1\ldots n} - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \cdot d\Phi_n. \end{aligned} \tag{2.130}$$

定义n个粒子的不变质量为$m_{1\ldots n}$，利用δ函数的性质，在上式中插入一个等于1的因子

$$\int \delta(p_{1\ldots n}^2 - m_{1\ldots n}^2)\, dm_{1\ldots n}^2 = 1, \tag{2.131}$$

则得

$$\Phi_{n+1} = \int dm_{1\ldots n}^2 \Phi_2(M, m_{1\ldots n}, m_{n+1}) \cdot \Phi_n(m_{1\ldots n}). \tag{2.132}$$

(n+1)个粒子的相空间等于一个二体衰变的相空间，只是其中一个粒子的质量$m_{1\ldots n}$不是一个固定数值，这个粒子会继续衰变到n个粒子，所以我们还得乘以n个粒子的相空间。

用完全类似的方法可以证明递推公式：

$$\Phi_n = \int dm_l^2\, \Phi_{n-l+1}(M)\cdot\Phi_l(m_l). \tag{2.133}$$

利用上面的递推公式，我们可以利用二体衰变的相空间很容易得到三体相空间的积分结果

$$\Phi_3 = \frac{E^2}{32(2\pi)^7}. \tag{2.134}$$

明显地，在有限的质心系能量下，三体相空间比两体相空间小。如果我们暂时不考虑跃迁矩阵元里与初末态粒子能动量的关系，只积分相空间将得到

$$\Phi_n = \frac{1}{4(2\pi)^5(n-1)!(n-2)!}\left(\frac{E^2}{16\pi^2}\right)^{n-2}, \tag{2.135}$$

因而有

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \frac{E^2}{16\pi^2 n(n-1)}. \tag{2.136}$$

从运动学上考虑，有限的初态衰变质量，产生的粒子数越多，概率越小。在黄金规则的公式(2.76)里，反应几率正比于态密度，而末态粒子数目越多，粒子的能动量取值范围越小，因而只从运动学上考虑反应几率正比于相空间的大小。

2.3.4 三体末态和达立兹图

如图-2.8所示，对三体衰变$A\to 1+2+3$一共有四个粒子的四动量，我们可以定义如下的洛伦兹不变量

$$m_{12}^2 = (p_1+p_2)^2 = (p-p_3)^3 = M^2+m_3^2-2ME_3, \tag{2.137}$$

$$m_{13}^2 = (p_1+p_3)^2 = (p-p_2)^3 = M^2+m_2^2-2ME_2, \tag{2.138}$$

$$m_{23}^2 = (p_2+p_3)^2 = (p-p_1)^3 = M^2+m_1^2-2ME_1, \tag{2.139}$$

同时有

$$m_{12}^2+m_{13}^2+m_{23}^2 = M^2+m_1^2+m_2^2+m_3^3, \tag{2.140}$$

所以一共只有两个独立的洛伦兹不变量。

根据(2.137-2.139)式可以证明3个末态粒子的能量和洛伦兹不变量m_{ij}^2之间有如下关系：

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2M}\left[M^2+m_1^2-m_{23}^2\right], \\ E_2 &= \frac{1}{2M}\left[M^2+m_2^2-m_{13}^2\right], \\ E_3 &= \frac{1}{2M}\left[M^2+m_3^2-m_{12}^2\right]. \end{aligned} \tag{2.141}$$

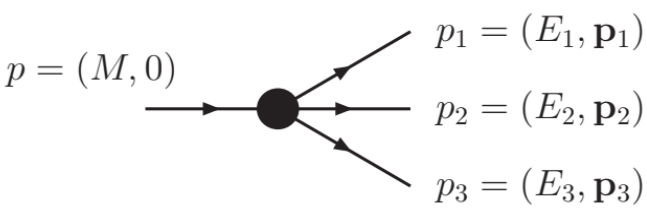


图 2.8: 三体衰变示意图。

因为$E_1^2 = m_1^2 + |\mathbf{p}_1|^2$，所以有

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1|^2 &= \frac{1}{4M^2}\left[M^2 + m_1^2 - m_{23}^2\right]^2 - m_1^2 \\ &= \frac{1}{4M^2}\left[M^4 + m_1^4 + m_{23}^4 - 2M^2m_1^2 - 2M^2m_{23}^2 - 2m_1^2m_{23}^2\right] \\ &= \frac{1}{4M^2}\lambda\left(M^2, m_1^2, m_{23}^2\right). \end{aligned} \tag{2.142}$$

其中

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc, \tag{2.143}$$

那么有

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{1}{2M}\sqrt{\lambda\left(M^2, m_1^2, m_{23}^2\right)}, \tag{2.144}$$

类似可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_2| &= \frac{1}{2M}\sqrt{\lambda\left(M^2, m_2^2, m_{13}^2\right)}, \\ |\mathbf{p}_3| &= \frac{1}{2M}\sqrt{\lambda\left(M^2, m_3^2, m_{12}^2\right)}, \end{aligned} \tag{2.145}$$

由m_{12}^2的定义式(2.137)

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2, \tag{2.146}$$

当m_1和m_2末态粒子为静止时，$2p_1 \cdot p_2$项最小，故有

$$m_{12}^2 \geq m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 = (m_1 + m_2)^2. \tag{2.147}$$

另外，由公式(2.137)

$$m_{12}^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \leq M^2 + m_3^2 - 2Mm_3, \tag{2.148}$$

所以有

$$m_{12}^2 \leq (M - m_3)^2, \tag{2.149}$$

因此得到m_{12}^2的上下限为

$$(m_1+m_2)^2 \le m_{12}^2 \le (M-m_3)^2. \tag{2.150}$$

同理可证其余m_{ij}^2的取值范围为

$$(m_1+m_3)^2 \le m_{13}^2 \le (M-m_2)^2, \tag{2.151}$$

$$(m_2+m_3)^2 \le m_{23}^2 \le (M-m_1)^2. \tag{2.152}$$

三体衰变末态的三粒子相空间(2.78)一共有9重积分，利用δ函数积分掉4重积分，应该还剩下5重积分。在初态粒子静止系，三个末态粒子的动量$\vec{\mathbf{p}}_i (i=1,2,3)$必须在同一平面内：$\vec{\mathbf{p}}_1+\vec{\mathbf{p}}_2+\vec{\mathbf{p}}_3=0$。$\vec{\mathbf{p}}_i$的空间指向（相对于母粒子）可以用3个欧拉角$(\alpha,\beta,\gamma)$来确定，三体衰变的微分宽度公式可以表示为

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5}\cdot\frac{|\mathcal{M}|^2}{16M}\,dE_1 dE_2\,d\alpha\;d(\cos\beta)\;d\gamma. \tag{2.153}$$

如果使用$1-2$粒子的静止系，那么有

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5}\cdot\frac{|\mathcal{M}|^2|}{16M^2}\vec{\mathbf{p}}_1^*||\vec{\mathbf{p}}_3|dm_{12}d\Omega_1^*\,d\Omega_3, \tag{2.154}$$

其中Ω_3是粒子3在母粒子静止系中的动量和立体角

$$|\vec{\mathbf{p}}_1^*| = \frac{1}{2m_{12}}\left[\left(m_{12}^2-(m_1+m_2)^2\right)\left(m_{12}^2-(m_1-m_2)^2\right)\right]^{1/2}, \tag{2.155}$$

$$|\vec{\mathbf{p}}_3| = \frac{1}{2M}\left[\left(M^2-(m_{12}+m_3)^2\right)\left(M^2-(m_{12}-m_3)^2\right)\right]^{1/2}. \tag{2.156}$$

即把$1-2$粒子体系作为一个等效粒子来对待。

如果母粒子是一个标量粒子，或者我们对其自旋求平均，而且跃迁矩阵元与角度无关，那么对（2.153,2.154）两式中角度的积分可以给出

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{8M}\,dE_1 dE_2, \tag{2.157}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{32M^3}\,dm_{12}^2\,dm_{23}^2. \tag{2.158}$$

上式即为达立兹(Dalitz) 图的标准形式。还可以写成

$$\frac{d\Gamma}{dm_{12}^2\,dm_{23}^2} = \frac{1}{256\pi^3}\cdot\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{M^3}. \tag{2.159}$$

达立兹图:

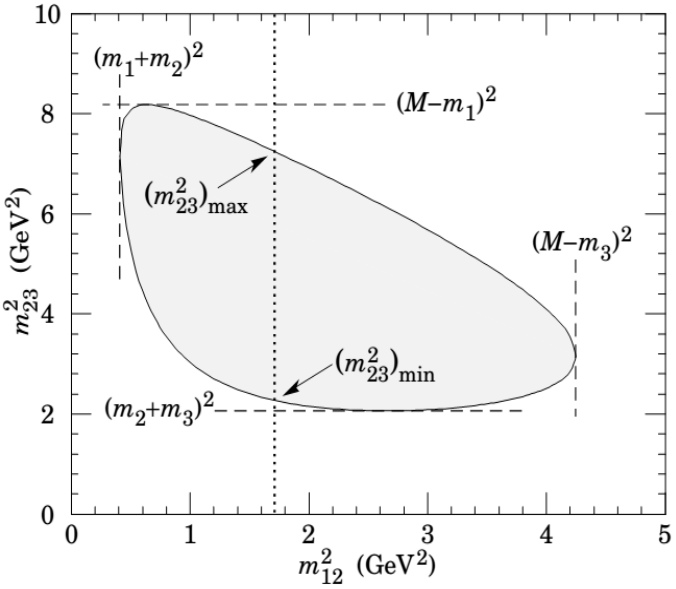


图 2.9:　三体衰变的达立兹图表示[1]，能动量守恒限制了所有衰变事例局限在阴影区域。

对于给定的m_{12}^2值，m_{23}^2 取值的上下限范围决定于$\mathbf{p}_2$ 是平行于还是反平行于$\mathbf{p}_3$:

$$\left(m_{23}^2\right)_{max} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}\right)^2, \tag{2.160}$$

$$\left(m_{23}^2\right)_{min} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}\right)^2, \tag{2.161}$$

其中$E_2^* = (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/(2m_{12})$和$E_3^* = (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/(2m_{12})$是在$m_{12}$静止系中粒子2和3的能量. 在$m_{12}^2 - m_{23}^2$平面内的事例散点图称之为达立兹图，如图2.9所示，其事例数分布的硬边界由公式(2.150-2.152)，也就是末态粒子的质量决定。

由(2.159) 式可知，**当$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ 是常数时，在达立兹图上事例数的分布是均匀的。** 那么，在达立兹图上的非均匀分布可以告诉我们关于$\overline{|\mathcal{M}|^2}$的信息。例如，对$D \to K\pi\pi$衰变过程，当$m_{K\pi} = m_{K^*(980)}$时，达立兹图出现带状分布，表明这时的衰变链是: $D \to K^*\pi \to K\pi\pi$，即出现了共振态K^*，伴随着$K^* \to K\pi$的次级衰变。

图-2.10所示是2007年实验上发现多夸克态$Z(4430)$的实验数据给出的达立兹图[62]。这是日本的B 介子工厂Belle 实验在$B^0 \to K^-\pi^+\Psi'$ 三体衰变的达立兹图表示, 横坐标是$K^-\pi^+$ 的两粒子不变质量平方，纵坐标是$\Psi'\pi^+$ 的两粒子不变质量平方。可以看出在$K^-\pi^+$ 的两粒子不变质量等于890MeV的附近(左边两条竖实线之间)有密集的数据点，形成了竖状的黑带，这显然是$K^*(890) \to K^-\pi^+$衰变造成的，另外在$(1430MeV)^2$ 附近(图2.10中右边两条竖实线之间)也有较多的数据点，这是$K^*(1430) \to K^-\pi^+$的共振峰造成的，这两个K^*粒子都是很早以前在别的实验就发现的粒子。如果我们把公式(2.158) 中的m_{23}，也就是$\Psi'\pi^+$ 的两粒子不变质量积分掉，就会得到如图2.11左边的图所示的不变质

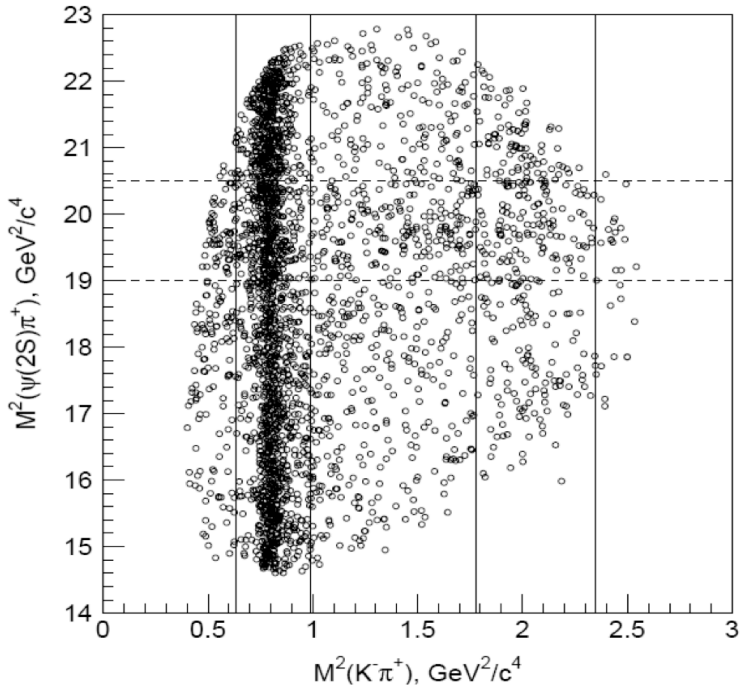


图 2.10: $B^0 \to K^-\pi^+\Psi'$三体衰变的达立兹图表示[62], 横坐标是$K^-\pi^+$的两粒子不变质量平方，纵坐标是$\Psi'\pi^+$的两粒子不变质量平方。

量分布图，很明显地看到两个K^*粒子的共振峰。这说明$B \to K^-\pi^+\Psi'$ 三体衰变有相当一部分是由$B^0 \to K^*\Psi' \to K^-\pi^+\Psi'$ 两个级联的二体衰变造成的。

图2.10中$B \to K^-\pi^+\Psi'$三体衰变的达立兹图中, 在$\Psi'\pi^+$ 的两粒子不变质量平方等于$(4.4GeV)^2$的附近也有较多粒子数据点积累，形成一个横向的数据带(两条水平断续线之间)，显示有共振结构。实验上为了突出信号强度，我们把已知的$K^*(890) \to K^-\pi^+$和$K^*(1430) \to K^-\pi^+$的共振峰之内的数据点去掉(Veto)，就得到了图2.11右图中去掉已知共振峰之后数据给出的$Z(4430)^+ \to \pi^+\Psi'$ 的共振峰。这确认了共振结构$Z(4430)$的发现[62]，质量$m = (4433 \pm 4 \pm 2)$MeV，宽度为$\Gamma = (45^{+18+30}_{-13-13})$MeV。因此，在$B^0 \to K^-\pi^+\Psi'$ 衰变中，除了一部分直接的三体衰变外，其中大部分是由$B^0 \to K^*\Psi' \to K^-\pi^+\Psi'$ 组成的两个级联的二体衰变，还有一部分是由$B^0 \to K^-Z(4430)^+ \to K^-\pi^+\Psi'$ 两个级联的二体衰变。虽然只是一个三体衰变，其衰变机制却相当复杂。

非相对论达立兹图:

在非相对论的情况下，粒子的动能等于总能量减去静止质量$T = E - m_0$，因而三体衰变的微分宽度公式(2.157)可以改写为

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{8M} dT_1 dT_2, \tag{2.162}$$

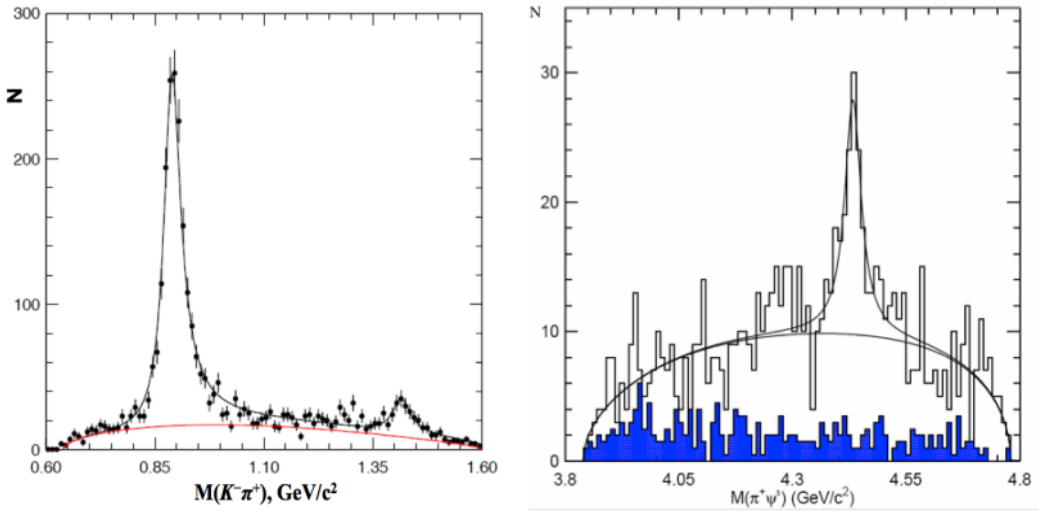


图 2.11:　$B \to K^-\pi^+\Psi'$三体衰变的二粒子不变质量谱表示, 左图是$K^*(899) \to K^-\pi^+$和$K^*(1430) \to K^-\pi^+$的共振峰，右图是去掉已知共振峰之后数据给出的$Z(4430)^+ \to \pi^+\Psi'$ 的共振峰。

所以衰变几率也可以用动能积分来表示，三体衰变的达立兹图也可以用三个粒子的动能来考虑。一般我们在质心系中作研究，则可以证明末态粒子的动能之和Q为常数

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 = E_1 + E_2 + E_3 - m_1 - m_2 - m_3 = M - m_1 - m_2 - m_3. \quad (2.163)$$

从平面几何知识我们知道，等边三角形内任何一点到三边的距离之和为常数，即等边三角形的高。因此可以将一个三体衰变的所有测量数据(末态三粒子的质心系动能)画在高为Q的等边三角形之内，这样的图也称为达立兹图。当然，并不是三角形内的每一个点都代表物理上允许的运动学分布，例如，三角形的是三个顶点就不满足能动量守恒。

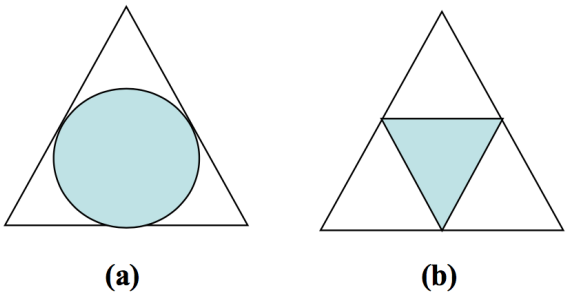


图 2.12:　(a)非相对论情况下的动能坐标达立兹图允许区域(阴影部分); (b)极端相对论情况下的动能坐标达立兹图允许区域(阴影部分)。

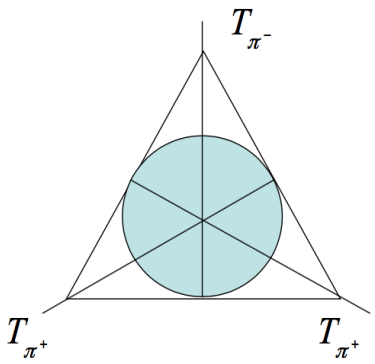


图 2.13: $K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$衰变的非相对论情况下的动能坐标达立兹图允许区域(阴影部分)。

考虑一个简单的情况，末态三个粒子的质量相同，则由于质心系三粒子动量和为0，可以得到

$$\mathbf{p_3^2} = \mathbf{p_1^2} + \mathbf{p_2^2} + 2\mathbf{p_1}\mathbf{p_2}\cos\theta, \tag{2.164}$$

其中θ是粒子1和2之间的夹角。由上式很容易得到，

$$4\mathbf{p_1^2}\mathbf{p_2^2} \geq (\mathbf{p_3^2} - \mathbf{p_1^2} - \mathbf{p_2^2})^2. \tag{2.165}$$

在非相对论情况下，$\mathbf{p_i^2} = 2mT_i$，因而上式可以化为，

$$4T_1T_2 \geq (T_3 - T_1 - T_2)^2. \tag{2.166}$$

由于$4T_1T_2 = (T_3 - T_1 - T_2)^2$表示的是等边三角形的内接圆，因而公式(2.166)表示的是图2.12(a)所示内接圆内所有的点。

在极端相对论的情况下，粒子的质量相对于动能可以忽略不计，有$T_i \simeq E_i \simeq |\mathbf{p_i}|$，则达立兹图的边界条件为

$$T_3 = T_1 + T_2, \quad if \quad \mathbf{p_3} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} \tag{2.167}$$

$$T_3 = T_1 - T_2, \quad if \quad \mathbf{p_1} = \mathbf{p_3} + \mathbf{p_2} \tag{2.168}$$

$$T_3 = T_2 - T_1, \quad if \quad \mathbf{p_2} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_3} \tag{2.169}$$

这三条线围起来的是如图2.12(b)所示的倒三角形。一般情况下，三体衰变的末态粒子数据点应该是介于图2.12(a)和(b)之间的状态。和用洛伦兹不变量表示的达立兹图一样，粒子动能表示的达立兹图内三角形阴影区内的事例点的密度正比于衰变矩阵元的平方，由具体衰变的相互作用性质决定，可以用来确定初态粒子的性质。

例题2.2：考虑$K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$衰变过程，利用非相对论情况下动能的达立兹图确定K介子的自旋。

解：K^+介子的主要衰变道之一是$K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$，由于两个π^+介子是全同玻色子，按照全同性原理的要求需要用完全对称的波函数描写，它们之间的轨道角动量是用勒让德函数描写的，因此L=0，2，4，...，只能取偶数，以形成全对称的波函数；另外的π^- 介子与π^+ 介子对之间的轨道角动量由于没有对称性的限制，则可以取l=0，1，2，...的各种可能。

1. 如果$L \geq 2$，即两个π^+介子对的轨道角动量取较大值，因此两个π^+介子占去较多的动能，相应地π^- 介子的动能就会较少，这样图2.13中圆的上部事例点的分布应该较少。

2. 如果$l \geq 1$，π^-介子相对于两个π^+介子对具有较大的轨道角动量，则π^-介子动能也较大，则图2.13中圆的下部事例点的密度应该较小。

实验结果是事例点的分布没有明显密度较大和较小的区域，基本上是均匀的，因此，上面两种可能应该排除，$L = l = 0$的可能性最大。由于已知，π介子的自旋为0，因而根据角动量守恒，K介子的自旋只能是0。

2.3.5　二体反应截面

二粒子散射到二粒子的反应过程$1 + 2 \to 3 + 4$是最简单的碰撞过程，也只有这种情况才有可能是弹性散射过程，其能动量守恒条件为

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \tag{2.170}$$

可以写出的洛伦兹不变量，也称为Mandelstam 变量为

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \tag{2.171}$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \tag{2.172}$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_1 - p_3)^2. \tag{2.173}$$

但是根据公式(2.113)，4体过程应该只有两个独立的洛伦兹不变量。实际上s, t, u要满足关系

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2. \tag{2.174}$$

确实只有两个是独立的。对于这三个不变量的物理意义可以通过图-2.14所示反映出来：图中左图表示的是两个入射粒子通过湮灭到一个中间态粒子，然后变成为末态两个粒子的过程，中间态粒子的能量正好是反应过程的质心系总能量$\sqrt{s} = E_{cm}$，这个图也通常称为s道 费曼图；中间的图反应的是粒子1通过与粒子2交换一个中间态粒子，分别变为末态粒子3 和4的过程，其中t为中间态粒子的四动量平方，称为反应过程的动量转移平方，这

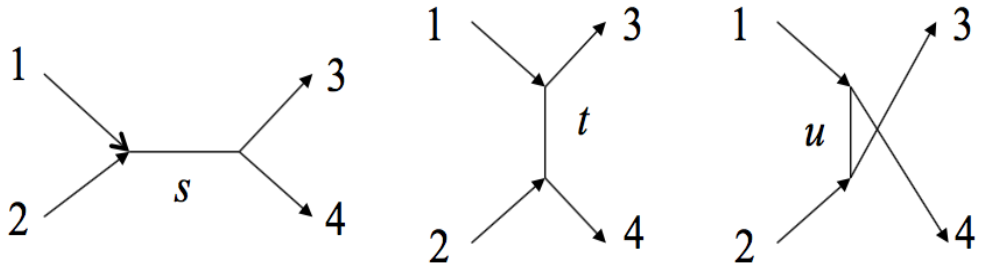


图 2.14: 二粒子散射到二粒子反应过程$1+2\to 3+4$的最低阶费曼图。

个图通常称为t道 ；最右边的图并不常出现，而是只出现在末态的两个粒子是全同粒子的情况，因为全同粒子是不可区分的，这个u道的过程必须包含进来，以使得整个计算满足全同性原理，全同性原理是泡利不相容原理的推广，我们将在第五章的第5.5节，详细阐述。另外，量子场论还会告诉我们，如果末态有全同粒子的存在，除了计算跃迁矩阵元$\mathcal{M}$时候增加的交换全同粒子(反)对称的费曼图，计算衰变宽度或者散射截面的公式还会增加一个$1/n!$ 的对称因子，其中n是全同粒子的数目。

对如图-2.14所示的$2\to 2$ 反应过程，根据公式(2.87,2.121) 得到质心系二体反应微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi)^2 s}\frac{|\mathbf{p_f}|}{|\mathbf{p_i}|}, \tag{2.175}$$

其中$|\mathbf{p_f}|$和$|\mathbf{p_i}|$分别是末态出射粒子和初态入射粒子在质心系的动量大小。如果是弹性散射的情况，初末态粒子质量相等，则有$|\mathbf{p_f}|=|\mathbf{p_i}|$，上面公式会进一步简化。对于打靶实验，靶粒子静止，实验室坐标系的微分截面公式推导很麻烦，可以通过我们在2.2.3节推导的微分截面洛伦兹变换公式(2.108)得到。

实际上通过变量代换，二体到二体散射的微分截面公式可以写为洛伦兹不变的形式，利用洛伦兹不变量t的定义(2.172)，在质心系我们可得

$$\begin{aligned} t &= p_1^2+p_3^2-2p_1\cdot p_3 \\ &= m_1^2+m_3^2-2E_1E_3+2|\mathbf{p_1}\mathbf{p_3}|\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.176}$$

由于质心系中初末态粒子的能量和动量都是被能动量守恒条件确定的，各个粒子的质心系能量和动量分别为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{s+m_1^2-m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad E_2=\frac{s+m_2^2-m_1^2}{2\sqrt{s}}, \\ E_3 &= \frac{s+m_3^2-m_4^2}{2\sqrt{s}}, \qquad E_4=\frac{s+m_4^2-m_3^2}{2\sqrt{s}}, \\ |\mathbf{p_i}| &= \sqrt{E_i^2-m_i^2}, \end{aligned} \tag{2.177}$$

因而公式(2.176)中只有粒子1和3的动量之间的夹角θ是变量，因而有

$$dt=2|\mathbf{p_1}\mathbf{p_3}|d\cos\theta. \tag{2.178}$$

质心系中$\mathbf{p_1}=\mathbf{p_i}$，$\mathbf{p_3}=\mathbf{p_f}$，因此公式(2.175)可以改写为

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{2(8\pi)^2 s}\frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p_1}|^2}d\phi. \tag{2.179}$$

一般情况下，二体散射与方位角ϕ无关，积分掉这个角度只给出2π的因子，我们就得到了二体到二体散射的微分截面公式的洛伦兹不变形式，

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{64\pi s}\frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p_{1cm}}|^2}. \tag{2.180}$$

2.4　练习题

1. 北京的正负电子对撞机能够最多把一个电子加速到2GeV的能量，如果一个跟电子一样质量(0.5MeV)的静止寿命5ps 的粒子被加速到2GeV能量，它的寿命可以延长到多少？

2. 上述的粒子在探测器里平均可以留下多长的径迹？

3. 在ω介子静止的参考系中观察ω介子的衰变，若ω介子的质量为M_ω，π^+、π^-、π^0介子的质量都是M_π，光子的质量为零，且$M_\omega>3M_\pi$，求:
   1) $\omega\to\pi^+\pi^-$ 时，π^+（或π^-）介子的衰变动量；
   2) $\omega\to\pi^0\gamma$时，π^0介子的衰变动量；
   3) $\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 时，π^0介子衰变动量的最小取值；
   4) $\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 时，π^0介子衰变动量的最大取值。

4. 用动量为P_A、质量为M_A的粒子去碰撞静止的粒子B, 实现了反应$A+B\to C+D$, 若M_B, M_C, M_D 分别为B、C、D粒子的质量。问满足什么条件时，有可能观察到C粒子沿A粒子入射的相反方向飞出？下述条件是否充分？
   1) $M_C=0$, $M_A+M_B>M_D$
   2) $M_C\neq 0$, $M_C<M_A$, $M_A+M_B<M_C+M_D$

5. 如果用实验室动量为P = 800MeV 的π^-介子去碰撞静止的质子p，则能否反应为$K^0\Lambda$，能不能反应为$K^0\Sigma^0$？

6. 考虑$A\to 1+2$的两体衰变过程，证明母粒子A的质量可以写成如下形式：

$$m_A^2=m_1^2+m_2^2+2E_1E_2(1-\beta_1\beta_2\cos\theta), \tag{2.181}$$

   其中$\beta_i=v_i/c(i=1,2)$表示粒子的速度，θ是粒子1和粒子2运动方向之间的夹角。

7. 对于$1+2\to 3+4$两粒子散射过程，其Mandelstam 变量(s,t,u)可以定义为

$$s=(p_1+p_2)^2,\quad t=(p_1-p_3)^2,\quad u=(p_1-p_4)^2, \tag{2.182}$$

   证明：$s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$。

8. 在德国汉堡的HERA加速器$e^- p$对撞机实验中，电子束流的能量是27.5 GeV，质子束流的能量是820 GeV，计算电子- 质子对撞时质心系能量。

9. 考虑$\pi^0 \to 2\gamma$衰变过程，在实验室坐标系π^0介子的能量是10GeV，其质量是$m_{\pi^0} = 135$ MeV，如果要求末态任意光子能量远大于π^0介子质量，计算实验室系两个末态光子之间的最大开角θ_{max}和最小张角θ_{min}。

10. 一个质量为3 GeV的粒子沿z-轴正向以动量$\mathbf{p} = 4$ GeV飞行，计算该粒子的能量E和飞行速度$\mathbf{v}$。

11. 北京正负电子对撞机实验中电子束流的能量是2 GeV，存储环的周长是237.53米；而日内瓦大型强子对撞机实验中质子束流的能量是4 TeV，加速环的周长是26659米。计算在这两种情况下电子、质子的运动速度，以及它们每秒钟飞行的圈数。

12. 在对撞机实验中，通过与径迹探测器中“displaced vertex”相对应的$\Lambda \to \pi^- p$衰变过程来确认重子Λ。考虑一次这样的衰变过程，实验测得π^-和质子p的动量分别为0.75 GeV 和4.25 GeV，这两个末态粒子径迹之间的开角为9°，π介子和质子的质量分别为139.6MeV和938.3 MeV:

    (a) 计算重子Λ的质量。

    (b) 平均而言，这个能量的Λ重子从产生到衰变飞行的距离约为0.35米，计算Λ重子的寿命τ_Λ。

13. 在大型强子对撞机实验的第一阶段，人们加速了两束分别为4TeV的质子以实现8TeV质心系对撞能量。如果换为固定靶实验，计算需要入射质子加速到多少能量才能再次实现8TeV对撞能量。(质子质量取为1GeV)

14. 一个质量为m的粒子在飞行中衰变到两个光子，探测器中可以探测到这两个光子的能量分别为E_1和E_2，试证明这两个光子飞行方向的夹角θ满足关系：$\cos\theta = 1 - m^2/(2E_1E_2)$。

第三章　强子与强子间相互作用

顾名思义，强子就是参与强相互作用的粒子，包含介子（玻色子）和重子（费米子）两大类粒子。在第一章中我们已经指出描写强相互作用的基本理论是量子色动力学，传递强相互作用的媒介粒子是色八重态的胶子。在夸克模型下，强子是由夸克组成的，对于夸克模型的具体细节我们将留到第六章再讨论。这一章中我们将沿着强相互作用理论和实验发展的历史轨迹，简单介绍强子的基本性质及其相关的基本理论知识。

3.1　核力与同位旋

3.1.1　汤川耦合与π介子

历史上，我们最早接触到的强相互作用是核力，核力把质子和中子束缚在一起，形成原子核，是强相互作用的剩余相互作用，也属于强相互作用。核力具有以下几个特点：

1. 力程短，$\sim 10^{-15}m$; 作用强、快：$t \sim 10^{-23}s$。

2. 核力具有电荷无关性：质子-质子、质子-中子和中子-中子之间的核力是相同的。

3. 核力不仅具有中心力的成分，也具有与自旋相关的非中心力成分。

4. 一个核子只与其近旁的少数几个核子发生作用，称之为核力的饱和性。

在20世纪初叶，人们就发现了核力相互作用非常强，具有上述与电磁相互作用非常不同的性质，但是核子之间的核力相互作用理论却是类比于电磁相互作用得出来的。

1. π介子的预言和发现

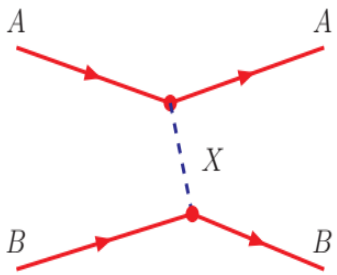


图 3.1:　粒子A 和B之间通过交换一个重玻色子X而发生相互作用。

在20世纪30年代，由于量子理论和实验的高速发展，人们已经确定，微观荷电粒子之间的电磁相互作用是通过交换光子产生的。电磁相互作用的长程性是源于光子的零质量。1935年，汤川秀树发表了解释核内强相互作用的介子理论。他把核力场与电磁场做了类比，考虑到核力的短程性，假设核子间存在如图-3.1所示能通过交换一个重的玻色子X而产生的核力。在强子A静止系，考虑跃迁过程

$$A(p_A) \to A(p'_A) + X(p_X), \tag{3.1}$$

A和X粒子的四动量可以写为

$$p_A = (m_A, 0), \quad p'_A = (E_A, \mathbf{p}), \quad p_X = (E_X, -\mathbf{p}), \tag{3.2}$$

其中$E_A = \sqrt{m_A^2 + |\mathbf{p}|^2}, E_X = \sqrt{m_X^2 + |\mathbf{p}|^2}$。根据不确定关系，可以估算在被重新吸收以前，重$X$ 玻色子所能传播的最远距离。因为能量的不确定度为$\Delta E = E_X + E_A - m_A \geq m_X$，如果$\Delta E$存在的时间间隔为$\Delta t$，那么根据能量-时间不确定关系有$\Delta t \approx \hbar/\Delta E$，所以$X$玻色子传播的距离-亦即这种相互作用的力程为

$$R = c\Delta t \approx c\hbar/m_X. \tag{3.3}$$

我们已经知道核力被局限在原子核的范围内，力程是10^{-15}m，由$\hbar c \simeq 197$MeV fm，汤川秀树通过上面的公式反推出传递核力的中间玻色子质量是100MeV的量级。英国物理学家塞西尔·鲍威尔[1]发展了研究核反应过程的照相乳胶记录法，并使用此方法在1947年发现了π介子，证实了汤川秀树在1935年关于“介子”的预言。

2. 强相互作用的汤川势

如果把核子之间交换的π介子作为一个“等效势场”$V(r)$来处理，那么这个等效势所满足的克莱因-戈登方程为

$$\nabla^2 V(r) = m_\pi^2 V(r). \tag{3.4}$$

其解为

$$V(r) = \frac{g_s^2}{4\pi r} e^{-r/R}, \tag{3.5}$$

其中g_s是积分常数，可以被理解为是A, B粒子和π玻色子之间的耦合常数。上式中的$V(\mathbf{r})$就是1935年汤川提出的“汤川势”。

在汤川介子理论中，相互作用耦合常数g_s与量子电动力学中的电荷e类似，所以可以定义在$r \leq R$的力程范围内核力耦合强度为

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \tag{3.6}$$

[1]Cecil Frank Powell, 1903.12.5-1969.8.9，因发现π介子获得1950年诺贝尔物理学奖，他和合作者还发现了$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 的衰变过程，解释了在宇宙线实验中看到的缪轻子的来源。

当一个粒子（平面波）被这样一个势场$V(r)$散射时，动量转移为$\vec{\mathbf{q}}$。在动量空间，散射振幅可以写成

$$f(\vec{\mathbf{q}}) = \int V(\vec{\mathbf{r}}) e^{i\vec{\mathbf{q}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} \cdot d^3\vec{\mathbf{r}}. \tag{3.7}$$

取近似$V(\vec{\mathbf{r}}) = V(r)$，那么在球坐标系有

$$f(\vec{\mathbf{q}}) = 4\pi g \int V(r) \frac{\sin qr}{qr} r^2 dr = \frac{-g_s^2}{q^2 + m_\pi^2}. \tag{3.8}$$

对类点相互作用，$q^2 \ll m_\pi^2$，$f(\vec{\mathbf{q}})$ 变成一个由α_s 和m_π确定的常数

$$f(\vec{\mathbf{q}}) = -G = \frac{-4\pi\alpha_s}{m_\pi^2}. \tag{3.9}$$

更细致的研究表明，当发生核反应的强子之间的距离比较远（低能核反应）时，可以近似用汤川势(3.5) 描写这样的反应。但当距离很小（高能入射粒子）时，汤川介子理论失效。**这表明，对高能核反应，必须考虑核子的内部结构!**

3. π介子性质

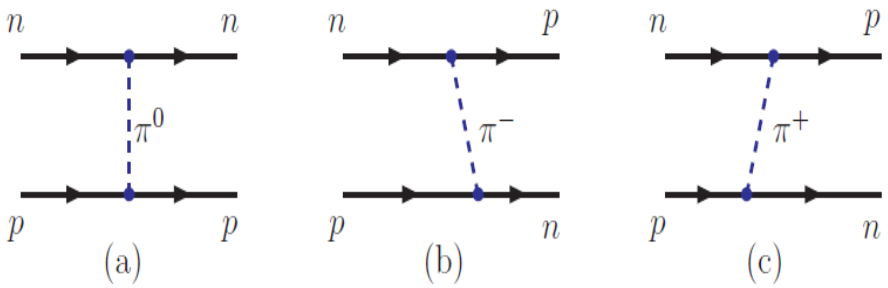


图 3.2:　核力的汤川模型：直接作用(a) 和交换作用(b,c)。

实验上一共发现三种π介子：π^+、π^0和π^-。它们对应于图 3.2所示的汤川理论中传递核力的直接作用和交换作用的媒介粒子。π^+和π^-介子互为正反粒子，其质量可以通过测量$\pi^\pm$介子在磁场中的轨迹确定其动量，另外测量π^+介子在介质中的电离或射程以确定其速度或能量后，计算出其质量

$$m_{\pi^\pm} = 139.57039(18) MeV, \quad \tau_{\pi^+} = 2.6033(5) \times 10^{-8} s. \tag{3.10}$$

由上式可以看出$\pi^\pm$介子的寿命比较长，这是因为$\pi^\pm$介子的主要衰变道是弱作用衰变过程$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$，

$$\mathcal{BR}(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu) = 99.98770(4)\%. \tag{3.11}$$

但π^0介子主要衰变道$\pi^0 \to \gamma\gamma$则是电磁相互作用衰变过程

$$\mathcal{BR}(\pi^0 \to \gamma\gamma) \quad = \quad 98.823(34)\%. \tag{3.12}$$

因为电磁相互作用的强度比弱相互作用高几个量级，所以π^0介子的寿命就比$\pi^{\pm}$介子的寿命短很多（差9个量级）！这么短的寿命使得对π^0介子质量的测量较为复杂，需要通过测量其衰变末态两个光子的能量来获得[1]

$$m_{\pi^0} \quad = \quad 134.9768(5)MeV, \quad \tau_{\pi^0} = 8.52(18) \times 10^{-17}s. \tag{3.13}$$

三个π介子的自旋量子数都为0。π^+介子的自旋可以根据细致平衡原理通过测量其和氘核d的可逆反应

$$\pi^+ + d \longleftrightarrow p + p \tag{3.14}$$

的正、反向作用截面来确定。由正反粒子性质知道π^-和π^+介子具有相同的自旋。π^0介子的自旋则可以通过研究$\pi^0 \to 2\gamma$衰变来确定。

3.1.2 同位旋的引入

质子和中子的自旋相同（$S = 1/2$），质量相近（$m_p = 938.3$ MeV, $m_n = 939.6$ MeV），但电荷不同。质子和中子都参与强相互作用过程，强相互作用性质相似，但电磁相互作用和弱相互作用性质不同。类似的情况还有π介子，它们的三种荷电状态也是质量相近、强相互作用性质相似，电磁和弱作用性质不同。如果只考察强相互作用，略去远比强相互作用弱的其它几种相互作用，那么根据大量实验数据得到的结论是：**可以把质子p和中子n看作是同一种粒子（“核子”N)的不同带电状态，把π^+, π^0, π^-看作是π 介子的不同带电状态。**

另外的证据来源于**镜像核**，如果两种原子核的核子总数一样，而一个核的中子数等于另一个核的质子数，则其互为镜像核。如${}^3_1\mathrm{H}$ 和${}^3_2\mathrm{He}$，${}^7_3\mathrm{Li}$ 和${}^7_4\mathrm{Be}$，${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ 和${}^{14}_{8}\mathrm{O}$等。以镜像核${}^7_3\mathrm{Li}$ 和${}^7_4\mathrm{Be}$为例，从如图-3.3所示的能级实验测量结果可以看出：（a）“镜像核”之间的能级分布相似；（b）“镜像核”的基态结合能相差不大，而且结合能的差值基本上等于“镜像核”的库仑位能差（表-3.1）。我们把pp和nn之间的强相互作用相同称为核力的电荷对称性；而把在相同状态下，pp、np和nn之间的强相互作用都相同称为核力的电荷无关性。

同位旋(Isospin)是粒子物理学中最早遇到的重要的内部对称性。根据质子、中子在强相互作用过程中的相似性，1932年，海森堡提出了同位旋的概念： **在强相互作用中，把质子和中子看作是同一种粒子的两种荷电状态** 。

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad [I = 1/2, I_3 = \pm 1/2]. \tag{3.15}$$

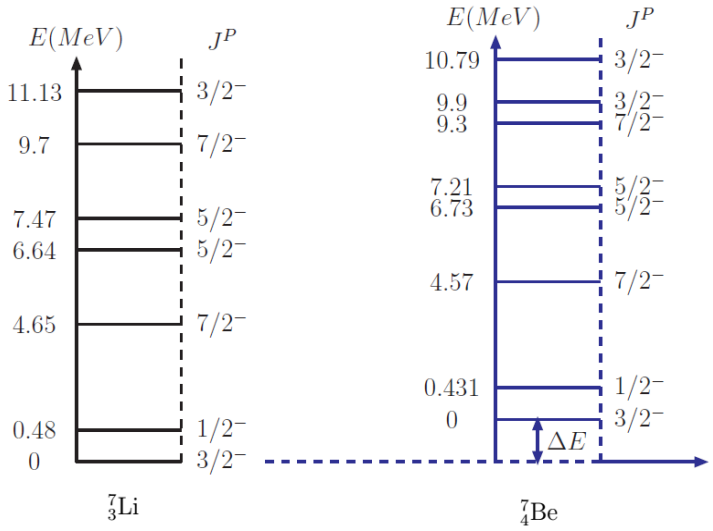


图 3.3: 镜像核 $^{7}_{3}$Li 和 $^{7}_{4}$Be 的能级比较图。

表 3.1: 一些“镜像核”的基态结合能.

镜像核	$^{3}_{1}$H 和$^{3}_{2}$He	$^{7}_{3}$Li 和$^{7}_{4}$Be	$^{14}_{6}$C和$^{14}_{8}$O
结合能(MeV)	8.33, 7.60	38.96, 37.33	104.70, 98.14
结合能差(MeV)	0.73	1.65	6.55
库仑位能差(MeV)	0.8	1.8	6.7

可以把同位旋与粒子的自旋做类比，电子的自旋是1/2，它在某一特定的方向上的投影可以有1/2和−1/2两个值；如果另一种粒子的自旋为1，则它在z方向的投影可以有$1, 0, -1$三个值。自旋在z方向的投影取不同值是同一种粒子的不同运动状态。类似地，也可以认为核子具有某种类似于自旋的“旋”，称为同位旋。

尽管自旋角动量本质上是一种量子效应，但从物理性质的角度，自旋角动量和轨道角动量均为角动量。用群论的语言来说，轨道角动量是由空间三个方向转动的生成元所构成的特殊三维正交群SO(3)，自旋角动量则是二维特殊幺正群SU(2)。类似地，同位旋也可类比一种抽象空间中的某种“角动量”。粒子物理学对这类反映粒子对称性质的抽象空间统称为内部空间，以和普通的三维空间相区分，和同位旋相联系的内部空间通常称为同位旋空间。

实验显示的规律性和特征可以被概括为：可以引入一个内部抽象空间上的$SU(2)$变换群，强相互作用在这个内部空间的$SU(2)$群变换下具有不变性，相应的三个生成元构成一个具有三个分量的抽象空间中的矢量。考虑到这个内部对称性的数学结构和自旋相同，称这个内部$SU(2)$对称性为同位旋对称性。**同位旋是强相互作用下的守恒量，所有的强子都具有确定的同位旋。**

在同位旋空间里也可以选定一个特殊方向。同位旋为I的粒子，其同位旋在这特殊

表 3.2: 两核子体系的同位旋量子数(I, I_3)和同位旋波函数χ_{I,I_3}。

对称性	I	I_3	同位旋波函数χ_{I,I_3}	物理态
对称	1	$+1$	$\chi_{1,1} = \chi^1_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\,\chi^2_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$	pp
对称	1	0	$\chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi^1_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,\chi^2_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \chi^2_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,\chi^1_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right]$	pn
对称	1	-1	$\chi_{1,-1} = \chi^1_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\,\chi^2_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$	nn
反对称	0	0	$\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi^1_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,\chi^2_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \chi^2_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,\chi^1_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right]$	pn

方向(通常称为第三方向)的投影I_3的可取值为$I, I-1, \cdots, -I+1, -I$，共$2I+1$个值，这和角动量完全相同；由于同位旋把不同电荷的粒子统一起来，因此可以规定I_3的本征态也就是电荷取确定值的态，同一同位旋多重态内不同I_3本征值的改变等于电荷的改变：$\Delta I_3 = \Delta Q$。自旋在某一特定方向的投影取不同值的电子是电子的不同运动状态。与此相应，一个同位旋多重态中，I_3取不同值的诸分量也可以被看作是同一种粒子的不同带电状态。例如对于π介子，其同位旋量子数为1，π^+、π^0和π^-则分别代表其同位旋第三分量投影$I_3 = 1, 0, -1$。

如前所述，核子的同位旋概念完全是比照电子自旋概念引入的。在数学处理上类似，但他们在物理上是完全不同的物理量。**电子自旋是角动量，同位旋表示内部空间的对称性。** 核力在同位旋空间具有旋转不变性，与位置空间完全无关。在50年代以后的粒子物理的发展中，发现π, K等强相互作用粒子都具有同位旋。在它们参与的强相互作用过程中，同位旋守恒定律具有普遍的意义。因此，在粒子物理研究中，同位旋是一个非常有用的概念。

3.1.3 两个核子体系的同位旋

由于描写同位旋和自旋的李群都是二维特殊幺正群SU(2)，同位旋的运算法则可以完全借鉴于量子力学中自旋和自旋的耦合运算。把两个核子的同位旋分别记为：$\hat{I}^{(1)}$, $\hat{I}^{(2)}$，那么，两核子系统的总同位旋$\hat{I}$为两个核子的同位旋的矢量和：

$$\hat{I} = \hat{I}^{(1)} \oplus \hat{I}^{(2)}: \quad 1/2 \oplus 1/2 \to 1, 0. \tag{3.16}$$

两核子同位旋的第三分量之和则遵守普通代数加法。

核子的同位旋波函数是算符(I, I_3)的共同本征波函数χ_{I,I_3}。质子的同位旋波函数是$\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$，中子的同位旋波函数是$\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$。类似于二电子自旋波函数，两核子体系的同位旋波函数χ_{I,I_3}有四种可能状态列在表-3.2 中，其中前三个是总同位旋为1的三个不同同位旋投影分量波函数，它们是对称状态；最后一个是总同位旋为0的反对称状态。

两核子体系的总波函数为空间波函数$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$、自旋波函数$\chi_{s,s_z}$ 和同位旋波函数χ_{I,I_3}

表 3.3: 两核子体系轨道角动量$L=0$时波函数ψ的六种可能状态。

$\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$	自旋波函数χ_{s,s_z}	同位旋波函数χ_{I,I_3}	状态数目
对称	对称：$S=1,S_z=0,\pm1$	反对称：$I=0,I_3=0$	3
对称	反对称：$S=0,S_z=0$	对称：$I=1,I_3=0,\pm1$	3

的乘积

$$\psi=\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot\chi_{s,s_z}\cdot\chi_{I,I_3}. \tag{3.17}$$

在引入了同位旋波函数以后，质子和中子为全同费米子，遵守推广了的泡利原理: **在核子体系波函数中，对于任意两个核子的交换，核子体系总波函数应该是反对称的。**若只考虑在质心系中系统的轨道角动量$L=0$的状态，那么这时体系波函数的空间部分$\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$对于两个核子的交换是对称的，则自旋波函数$\chi_{s,s_z}$和同位旋波函数$\chi_{I,I_3}$的乘积必须是反对称的。对于由两个自旋量子数为1/2的核子构成的体系，其对称和反对称自旋波函数$\chi^{S,A}_{s,s_z}$的表达式为：

$$\chi^S_{1,1} = \chi_{\frac12}(1)\chi_{\frac12}(2), \tag{3.18}$$

$$\chi^S_{1,0} = \frac{1}{\sqrt2}\left[\chi_{\frac12}(1)\chi_{-\frac12}(2)+\chi_{-\frac12}(1)\chi_{\frac12}(2)\right], \tag{3.19}$$

$$\chi^S_{1,-1} = \chi_{\frac12}(1)\chi_{-\frac12}(2), \tag{3.20}$$

$$\chi^A_{0,0} = \frac{1}{\sqrt2}\left[\chi_{\frac12}(1)\chi_{-\frac12}(2)-\chi_{-\frac12}(1)\chi_{\frac12}(2)\right]. \tag{3.21}$$

对于两个核子的交换，其自旋波函数和同位旋波函数必须一个对称，另一个反对称。按照这个要求在我们得出由χ_{s,s_z}和χ_{I,I_3}构成的六种可能反对称态波函数表达式在表-3.3中。从这个表中可以总结出，符合泡利原理要求的总同位旋和总自旋之和应该为奇数。考虑到量子力学给出的交换两个粒子，轨道角动量L 会给出$(-1)^L$的对称系数，广义泡利原理对两核子体系的量子数L,S,I给出的限制是L+S+I=奇数。

若不考虑同位旋，质子和中子不是全同粒子。处在$L=0$状态的两核子体系也有六种可能状态。这时，两核子体系的波函数为

$$\psi_{L,s,s_z}=\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\cdot\chi_{s,s_z}. \tag{3.22}$$

可以有以下三种具体情况：

1. 两核子为全同nn系统，泡利原理起作用。对于$L=0$态，空间部分$\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$对于两个核子的交换是对称的，则自旋部分$\chi_{s,s_z}$只能是反对称的单态$\chi_{0,0}$。总波函数也只有一个$\psi_{0,0,0}$态。

2. 两核子为全同pp系统。同理可以证明总波函数也只有一个$\psi_{0,0,0}$态。

3. 两核子为np系统，泡利原理不起作用。对于$L=0$态，空间部分$\psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$对于两个核子的交换是对称的，但自旋部分$\chi_{s,s_z}$可以是反对称的单态$\chi_{0,0}$，也可以是对称的三重态$\chi_{1,1}$，$\chi_{1,0}$ 和$\chi_{1,-1}$。总波函数有四个。

所以考虑或者不考虑同位旋波函数时得到的两核子体系独立状态数目是完全相同的，均为6个。对于轨道角动量不等于0的状态，结论也是一样的。虽然考虑或者不考虑同位旋量子数时候，体系存在的状态数目是不会改变的，但是引入同位旋对称性之后，理论上更为清楚简洁，特别是在有更多强子参与、情况更复杂的情况下，同位旋理论能够简捷地分析出系统的状态，概括了更多的物理内容，理论上提高了一步。

3.1.4 π介子-核子系统的同位旋

三种π介子和两种核子组成的系统一共有6种可能的物理状态：$|\pi^+p\rangle$, $|\pi^+n\rangle$, $|\pi^0p\rangle$, $|\pi^0n\rangle$, $|\pi^-p\rangle$ 和$|\pi^-n\rangle$。按照每个粒子的同位旋和其第三分量量子数，二粒子系统的同位旋波函数构成无耦合表象的一组基矢：

$$\begin{aligned}
\psi_{\pi^+p} &= |1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\pi^+n}=|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
\psi_{\pi^0p} &= |1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\pi^0n}=|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\\
\psi_{\pi^-p} &= |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\pi^-n}=|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

类似于两粒子自旋的耦合，π介子和核子组成的系统总同位旋按照SU(2)群的运算规则$1\times 1/2\to I=3/2,1/2$，πN系统按照总同位旋分类，也有6 种可能的物理状态。其同位旋波函数构成耦合表象的一组基矢：

$$\begin{aligned}
\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} &= \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}=\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\\
\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} &= \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}=\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle,\\
\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

可以将无耦合表象下的物理状态按照耦合表象下的物理状态通过Clebesh-Gorden系

数[1]展开为

$$\begin{aligned}
\psi_{\pi^+p} &= \psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}},\\
\psi_{\pi^0p} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\\
\psi_{\pi^-p} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\\
\psi_{\pi^-n} &= \psi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}},\\
\psi_{\pi^0n} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\\
\psi_{\pi^+n} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

同理，也可以将耦合表象下的物理状态按照无耦合表象下的物理状态展开为

$$\begin{aligned}
\psi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} &= \psi_{\pi^+p},\\
\psi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\pi^0p} + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\pi^+n},\\
\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\pi^-p} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\pi^0n},\\
\psi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} &= \psi_{\pi^-n},\\
\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\pi^+n} - \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\pi^0p},\\
\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{\pi^0n} - \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{\pi^-p}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.1.5　同位旋算符及波函数的矩阵表示

核子同位旋波函数和电子自旋波函数一样，可以用矩阵表示为:

$$\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{proton}, \qquad \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{neutron}, \tag{3.27}$$

同理，核子同位旋算符也和电子自旋算符一样可以写为:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

除了1/2因子外，同位旋算符和自旋算符的泡利矩阵$\vec{\sigma}$形式上完全一样，满足同样的对易关系

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k, \tag{3.29}$$

$\hat{I}^2$和$\hat{I}_3$算符的本征方程也和自旋类似，可以写为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{I}}^2\,\chi_{I,I_3} &= I(I+1)\,\chi_{I,I_3},\\ \widehat{\mathrm{I}}_3\,\chi_{I,I_3} &= I_3\,\chi_{I,I_3}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

另外，还可以定义同位旋“升”、“降”算符$\widehat{\mathrm{I}}_+$、$\widehat{\mathrm{I}}_-$，以及两个投影算符$\widehat{\mathrm{I}}_p$、$\widehat{\mathrm{I}}_n$；

$$\hat{I}_+ = I_1 + iI_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{I}_- = I_1 - iI_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

$$\hat{I}_p = \frac{1}{2} + I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{I}_n = \frac{1}{2} - I_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

将“升”、“降”算符$\widehat{\mathrm{I}}_+$、$\widehat{\mathrm{I}}_-$作用在质子和中子波函数上，得到

$$\begin{aligned}\hat{I}_+\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= 0, \qquad \hat{I}_+\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\\ \hat{I}_-\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \qquad \hat{I}_-\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned} \tag{3.33}$$

将投影算符$\widehat{\mathrm{I}}_p$、$\widehat{\mathrm{I}}_n$作用在质子和中子波函数上，得到

$$\begin{aligned}\hat{I}_p\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \qquad \hat{I}_p\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = 0,\\ \hat{I}_n\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= 0, \qquad \hat{I}_n\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

对于一般的状态

$$\chi(N) = a\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + b\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}, \tag{3.35}$$

则有

$$\hat{I}_p\chi(N) = a\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \quad \hat{I}_n\chi(N) = b\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}. \tag{3.36}$$

即把投影算符$\widehat{\mathrm{I}}_p$、$\widehat{\mathrm{I}}_n$作用到任意波函数上，分别挑出质子态或中子态。

π介子的同位旋量子数为1，对应(π^+,π^0,π^-)三个状态。引入同位旋空间的升降算符，则有：

$$\widehat{\mathrm{I}}_\pm = \widehat{\mathrm{I}}_1 \pm i\widehat{\mathrm{I}}_2, \qquad \widehat{\mathrm{I}}_\pm\,|I,I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3\pm 1)}|I,I_3\pm 1\rangle. \tag{3.37}$$

3.2 同位旋对称性的应用

同位旋守恒在强相互作用系统具有非常广泛的应用，能够对很多相互作用过程给出很强的限制，而且在弱作用过程中也有很多应用，给出很强的限制。

3.2.1　同位旋守恒定律

同位旋概念的物理基础是强相互作用的电荷无关性。在强相互作用过程中，I 和I_3 都是守恒量。在电磁相互作用中，I不守恒，但I_3是守恒量；在弱相互作用中，I和I_3 都不是守恒量。在量子场论中，相互作用决定于具体的拉氏量，同位旋在上述相互作用中守恒与否决定于拉氏量中的相互作用是否具有同位旋对称性。

如果只考察强相互作用，略去远比强相互作用弱，从而可以作为小的修正的电磁相互作用和弱相互作用，那么在强子参加的强相互作用过程中同位旋是守恒量。同位旋守恒要求系统在同位旋空间中的状态在反应过程中保持不变。由于系统在同位旋空间所处的态可以完全地通过系统的同位旋I及其在第三方向的投影I_3来描写，同位旋守恒直接表现为系统的I和I_3在反应前和反应后不变。根据同位旋守恒定律可以得到一些反应截面之间的比例关系。

例题3.1： 利用同位旋守恒定律，证明下述反应

$$n + p \to d + \pi^0, \tag{3.38}$$

$$p + p \to d + \pi^+, \tag{3.39}$$

反应截面之间存在关系：

$$\sigma(n + p \to d + \pi^0) = 1/2 \cdot \sigma(p + p \to d + \pi^+). \tag{3.40}$$

证明： 由于氘核d的同位旋$I_d = 0$，所以两个反应过程的末态的同位旋均为1，而初态的同位旋则不同。对反应(3.39)的初态pp系统有：$I = I_3 = 1$。那么，对反应$p + p \to d + \pi^+$，由上一节两核子体系的同位旋波函数表 3.2可以看出，$\chi_{1,1}$态对截面有贡献。而反应(3.38)的初态np 系统有$I_3 = 0$，$I = 0, 1$。由表 3.2可以看出，初态np系统处于$I = 0$和$I = 1$态的几率各为1/2。在反应(3.38)中，由于同位旋守恒，因而只有$\chi_{1,0}$态对截面有贡献（电磁相互作用对这些反应的贡献可以忽略）。考虑到$\chi_{1,0}$态前面的系数$1/\sqrt{2}$，因此有(3.40)式的截面关系成立。实验测量结果与(3.40)式符合得很好。

例题-3.2： 考虑π介子和核子的强相互作用过程的散射截面，求证同位旋守恒给出的限制和预言：只需要用2个独立振幅及其相对相位来描写10个可能的散射过程截面。

证明： 考虑π介子和核子散射过程，电荷守恒下允许存在下述10个过程：

$$\begin{aligned} \pi^+ p &\to \pi^+ p, \quad (\sigma_1), \qquad \pi^- n \to \pi^- n, \quad (\sigma_2), \\ \pi^+ n &\to \pi^+ n, \quad (\sigma_3), \qquad \pi^- p \to \pi^- p, \quad (\sigma_4), \\ \pi^0 p &\to \pi^0 p, \quad (\sigma_5), \qquad \pi^0 n \to \pi^0 n, \quad (\sigma_6), \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\pi^+ n \to \pi^0 p, \quad (\sigma_7), \qquad \pi^0 p \to \pi^+ n, \quad (\sigma_8), \tag{3.42}$$

$$\pi^0 n \to \pi^- p, \quad (\sigma_9), \qquad \pi^- p \to \pi^0 n, \quad (\sigma_{10}). \tag{3.43}$$

我们用$\sigma_1,\cdots,\sigma_{10}$分别表示这10个过程的截面。其中前6个是弹性散射过程，后面4个是电荷交换散射过程。如果没有同位旋守恒，也没有其它对称性的限制，这10个截面是互相独立的，需要独立进行测量。

但是过程7和8互为逆过程，过程9和10也互为逆过程。如果考虑了时间反演不变性，应有$\sigma_7=\sigma_8$和$\sigma_9=\sigma_{10}$，也就是说只有8个互相独立的截面，需要用8个独立的跃迁振幅来描写。**若考虑同位旋不变性后，可以证明这8个过程最后将只需要用2个独立振幅及其相对相位来描写。**

强相互作用在同位旋空间转动时具有不变性。考虑在同位旋空间绕垂直于第三轴的任意轴转180度，这样就把第三轴的方向反向了，所有的粒子的I不变，但I_3变号。在这样的转动下，过程1和2互换，过程3和4互换，过程5和6互换，过程7和10互换，过程8和9互换，同位旋空间转动不变性给出

$$\sigma_1=\sigma_2,\quad \sigma_3=\sigma_4,\quad \sigma_5=\sigma_6,\quad \sigma_7=\sigma_{10},\quad \sigma_8=\sigma_9. \tag{3.44}$$

再加上时间反演不变性导致的等式，$\sigma_7=\sigma_8=\sigma_9=\sigma_{10}$，这样从同位旋空间转动不变性出发，即使不作定量计算，已经可以得出最多只有4个独立的截面。

π介子和核子强相互作用的同位旋守恒定律要求$H=H(I)$，与I有关，但与I_3无关。因为πN系统的总同位旋$I=1/2,3/2,$ 基本的散射矩阵元只有2个，分别对应$1/2\to 1/2$和$3/2\to 3/2$的跃迁，即

$$f = \langle\psi_{\frac{3}{2},fs}|\hat{H}|\psi_{\frac{3}{2},is}\rangle,\quad i.e.,\quad \frac{3}{2}\longrightarrow\frac{3}{2}, \tag{3.45}$$

$$g = \langle\psi_{\frac{1}{2},fs}|\hat{H}|\psi_{\frac{1}{2},is}\rangle,\quad i.e.,\quad \frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}. \tag{3.46}$$

因此，由于反应前后同位旋及第三分量守恒，根据第3.1.4节的π介子和核子系统的CG系数公式(3.25)，我们可以得到下列各组反应截面：

$$\begin{cases}\pi^+p\to\pi^+p\\ \pi^-n\to\pi^-n\end{cases},\quad M_1=f, \tag{3.47}$$

$$\begin{cases}\pi^0p\to\pi^0p\\ \pi^0n\to\pi^0n\end{cases},\quad M_2=\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}g, \tag{3.48}$$

$$\begin{cases}\pi^0p\to\pi^+n\\ \pi^0n\to\pi^-p\\ \pi^-p\to\pi^0n\\ \pi^+n\to\pi^0p\end{cases},\quad M_3=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[f-g\right], \tag{3.49}$$

$$\begin{cases}\pi^-p\to\pi^-p\\ \pi^+n\to\pi^+n\end{cases},\quad M_4=\frac{1}{3}f+\frac{2}{3}g. \tag{3.50}$$

显然，4个独立的截面都可以由两个跃迁矩阵元f, g来表示。

由于反应截面正比于跃迁振幅绝对值的平方($\sigma_i \propto |M_i|^2$)，所以和测量有直接关系的是这两个跃迁振幅的绝对值$|f|$, $|g|$ 和它们之间的相对相角θ，亦即在(3.47)-(3.50)式的4个振幅M_i中，只有$|f|$, $|g|$和f与g 之间的相对相角θ这3个需要独立测量的量。根据上述4个方程式可以找到反应截面之间的关系

$$|M_1|^2 + |M_4|^2 = 2|M_2|^2 + |M_3|^2, \longrightarrow \sigma_1 + \sigma_4 = 2\sigma_2 + \sigma_3. \tag{3.51}$$

所以对应的反应截面也只有3个是独立的。

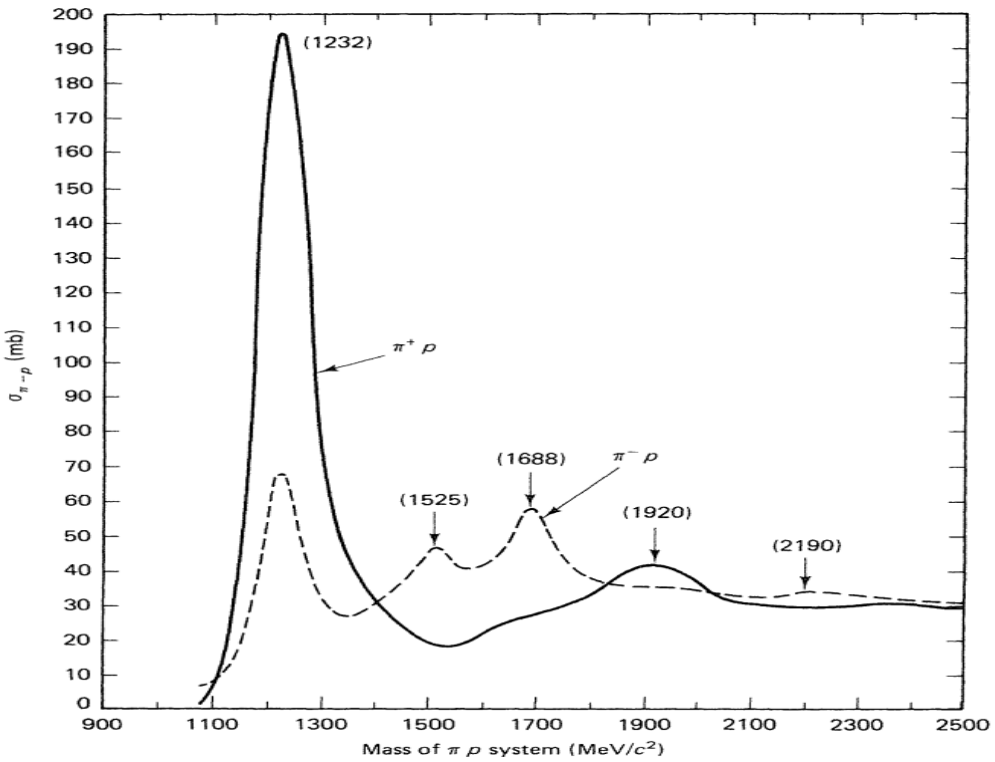


图 3.4: 由$\pi^+ p$ (实线) 和$\pi^- p$ （虚线）散射总截面。在1232MeV处是Δ^{++}共振态（实线）和Δ^0共振态（虚线）。另外的峰分别对应$\Delta^{++}(1920)$和其他几个Δ^0共振态[44]。

1951年，费米等人在πN散射质心能量1232MeV处看到了一个鼓包，如图-3.4所示。这就是历史上发现的第一个$(3,3)$重子共振态$\Delta(1232)$。这个图给出的实验结果表明，Δ^{++}共振态（实线）的产生截面是Δ^0共振态（虚线）截面的三倍：$\sigma(\pi^+ p \to \Delta^{++}) : \sigma(\pi^- p \to \Delta^0) \approx 3$。这就是$\pi N$散射过程中最初难以理解的$(3,3)$共振问题。

后续研究表面共振态Δ是同位旋量子数等于3/2的4重态: $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0$ 和Δ^-。因此在πN散射中产生同位旋量子数等于3/2的Δ共振态，只有同位旋3/2的f矩阵元可以贡献，$(3,3)$共振问题迎刃而解。如果在$E_{cm} = 1232$ MeV 附近取$g = 0$，也就是只考虑$\frac{3}{2} \to \frac{3}{2}$跃迁

矩阵元f 的贡献时，(3.47-3.50)式中所表示的各反应截面为：

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= |\mathcal{M}_1|^2 = |f|^2, \quad \sigma_2 = |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{4}{9}|f|^2, \\ \sigma_3 &= |\mathcal{M}_3|^2 = \frac{2}{9}|f|^2, \quad \sigma_4 = |\mathcal{M}_4|^2 = \frac{1}{9}|f|^2,\end{aligned} \tag{3.52}$$

据此，应有下述截面关系：

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ p)}{\sigma_{tot}(\pi^- p)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3 + \sigma_4} = 3. \tag{3.53}$$

这里利用同位旋守恒，很容易地解释了图-3.4所示的实验测量结果。

3.2.2 同位旋的破坏

大量的实验结果表明，在电磁相互作用下，同位旋量子数I 是不守恒的，其量子数的改变量仅为0或1。但同位旋第三分量在电磁相互作用下是守恒的。因此可以总结出电磁作用下同位旋改变的选择定则：$|\Delta I_3| = 0, |\Delta I| = 0$ 或1。

例如：$\pi^0 \to \gamma\gamma$衰变，光子无同位旋，因为只有强子才有，初态π^0介子同位旋为1，所以$|\Delta I| = 1$，但π^0介子同位旋第三分量为0，所以反应前后不变。类似的反应还有$\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$。

弱相互作用下，总同位旋和其第三分量都不守恒，大量实验结果表明，在大多数弱作用过程中，总有$|\Delta I| \leq 1$，这叫做最小破坏原理。

回忆前面引入同位旋概念时，我们认为一个同位旋多重态中的不同粒子是同一个粒子的不同带电状态。如果同位旋对称性是严格的，那么同一个同位旋多重态中的粒子质量应该完全相等，但实际上由于荷电状态的不同，电磁相互作用的差别造成它们的质量是不完全相同的，尽管通常差别很小（这一点我们在前面核子和 π 介子的情形可以看到）。在这个意义上来说，同位旋对称性只是一种近似的对称性。这种同位旋的微小破坏（主要由质量的差别引起）也体现在通过同位旋变换联系起来的物理过程中。例如上一节中两个例题中的截面关系式的成立是忽略了质子和中子之间的质量差别的基础上的。根据目前的实验测量，在强相互作用过程中同位旋对称性的破坏一般小于5%。

ϕ介子强衰变中的同位旋破坏问题。 ϕ介子的质量为(1019.461 ± 0.016)MeV，其同位旋为零，是自旋为1的矢量介子。根据强相互作用的规律分析，ϕ介子可以通过强相互作用衰变为K^+K^-或$K^0\bar{K}^0$末态。同位旋守恒要求$\phi \to K^+K^-$和$\phi \to K^0\bar{K}^0$的衰变振幅相等。如果$K^\pm$粒子的质量和K^0粒子的质量相同，则立刻可以推断这两种衰变方式的衰变分支比相同。但实际上，它们的质量略有差别：$m_{K^0} = (497.611 \pm 0.013)$ MeV，$m_{K^+} = (493.677 \pm 0.016)$ MeV。这个微小差别导致在ϕ的质心系中，两种衰变方式的衰变动量分别为110.492 MeV和126.918 MeV，这个差别将导致这两种衰变方式的分支比有所不同。由于K介子的自旋为零，这两种衰变方式应该通过轨道角动量为1的分波进行。根据量子力学中一般证明的离心位垒的性质：粒子衰变轨道角动量为L时，其衰变几率正比

于质心系衰变动量p的$2L+1$次方，可以得出在同位旋守恒的基础上并考虑了质量微小差别的影响后，这两种衰变方式的相对分支比为

$$R = \left(p_{K^+K^-}/p_{K^0\bar{K}^0}\right)^3 = (126.918/110.492)^3 = 1.516. \tag{3.54}$$

如果进一步考虑到ϕ的质量有宽度为4.249 MeV，利用Breit-Wigner公式对ϕ介子的质量的分布求平均，更精确的衰变宽度公式为

$$\Gamma = \frac{f^2}{48\pi^2}\int ds \frac{m_\phi \Gamma_\phi (s-4m_K^2)^{3/2}}{[(s-m_\phi^2)+m_\phi^2\Gamma_\phi^2]s}. \tag{3.55}$$

由上式得到这两种衰变方式相对分支比的更精确的理论估算为

$$R \simeq 1.421. \tag{3.56}$$

现有实验值约为1.45 ± 0.05，与理论预言值符合得很好。

由于ϕ介子质量非常接近于两个K介子的质量和，引起较大的相空间差别，上述ϕ介子衰变中的强相互作用同位旋破坏是非常大的破坏。这个结果也表明，在讨论强相互作用过程中同位旋破坏的影响时，可以在处理相互作用过程时按同位旋守恒来处理，而同位旋破坏的影响可以主要归结为同位旋多重态中不同分量之间质量差引起的运动学效应。

3.2.3　同位旋在弱衰变中的应用

虽然同位旋在弱作用中并不是守恒量，而且破坏程度也很大，但是同位旋对称性在弱相互作用中也有着非常大的应用，特别是在很多介子弱衰变中，人们利用同位旋对称性推导出了很多同位旋求和规则，对于弱衰变的性质研究以及计算起到了很重要的作用。例如，在B介子的弱衰变中，三个两体$B \to D\pi$衰变道的衰变振幅就有如下的同位旋求和规则：

$$\sqrt{2}M(B^0 \to \pi^0 \bar{D}^0) + M(B^0 \to \pi^+ D^-) = M(B^+ \to \pi^+ \bar{D}^0). \tag{3.57}$$

由于衰变振幅一般都是复数量，所以这个求和规则在复平面上就组成一个如图 3.5 所示的同位旋三角图形。

首先，这三个衰变的初态粒子(B^+, B^0)是一个同位旋二重态。在夸克层次这三个衰变是通过$\bar{b} \to \bar{c}u\bar{d}$的弱相互作用有效哈密顿量进行的，也就是弱作用在这里能够改变同位旋$\Delta I = 1$，而且同位旋第三分量也有改变$\Delta I_3 = 1$，这个弱相互作用的效果相当于一个同位旋1，第三分量为1的强子：$|H_{eff}\rangle = |1,1\rangle$。与强相互作用同位旋守恒，不改变同位旋不同，这里的初态粒子必须跟弱作用有效哈密顿量的同位旋耦合才能变成末态粒子的同位旋。考虑1/2与1的耦合，我们得到1/2和3/2两种同位旋振幅$A_{1/2}, A_{3/2}$。由$|B^0\rangle = |1/2,-1/2\rangle$，通过如图-3.6所示的C-G系数表[1]得到

$$\langle B^0|H_{eff} = \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2};1,1\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle \frac{3}{2},\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|. \tag{3.58}$$

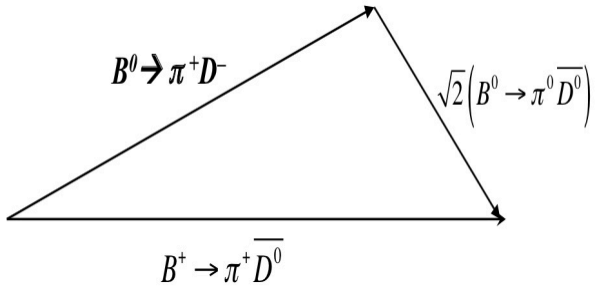


图 3.5: 三个$B \to D\pi$衰变道的衰变振幅在复平面上形成的同位旋三角形关系示意图。

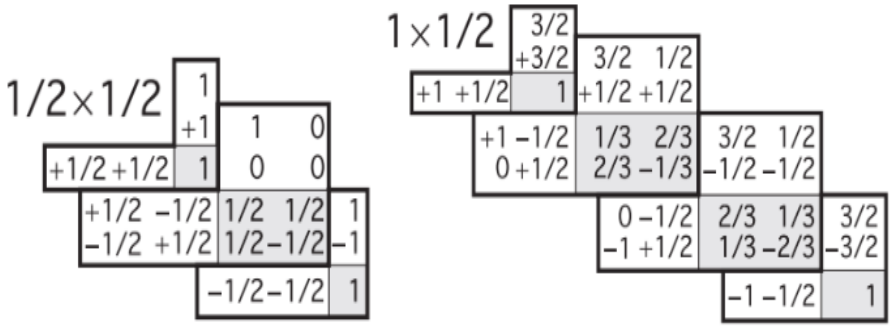


图 3.6: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 和$1 \times \frac{1}{2}$的Clebsch-Gordan系数表[1] 。每个数字都需要额外加上一个平方根符号。

衰变末态中的π介子是同位旋三重态，而$(\bar{D}^0, D^-)$是同位旋二重态，同样利用图 3.6所示的C-G系数，得到

$$|\pi^+ D^-\rangle = \left|1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{3.59}$$

衰变初态(3.58)中的同位旋必须等于末态(3.59)中的同位旋，所以有

$$M(B^0 \to \pi^+ D^-) = \frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}. \tag{3.60}$$

同理，

$$|\pi^0 \bar{D}^0\rangle = \left|1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle. \tag{3.61}$$

所以有

$$M(B^0 \to \pi^0 \bar{D}^0) = \frac{\sqrt{2}}{3}(A_{3/2} - A_{1/2}). \tag{3.62}$$

由$|B^+\rangle = |1/2, 1/2\rangle$，可以得到

$$\langle B^+|H_{eff} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\right| = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right|. \tag{3.63}$$

而

$$|\pi^+\bar{D}^0\rangle = \left|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle. \tag{3.64}$$

所以有

$$M(B^+ \to \pi^+\bar{D}^0) = A_{3/2}. \tag{3.65}$$

最后我们把(3.62)乘以$\sqrt{2}$，然后与(3.60)式相加，再与(3.65)比较，就得到了同位旋三角关系(3.57)。

从上面的例子我们可以看到，虽然弱相互作用中同位旋不守恒，但是只要起作用的弱作用有效哈密顿量能够改变的同位旋数值是确定的，就可以通过把这个同位旋改变量计算进去的方法，利用同位旋守恒得到我们需要的同位旋关系。在本章后面的练习题中有D介子、B介子和Λ_c重子弱衰变的另外几个例子，这种同位旋关系在弱衰变中是普遍的现象。

3.3　奇异数和重子数

3.3.1　奇异粒子的发现

1947年，人们在宇宙线实验中观察到了后来被称为奇异粒子的粒子。因为中性粒子在云室中不能留下径迹，所以只观察到两个末态带电粒子留下的叉形径迹。通过对带磁场的云室中带电粒子径迹的偏转曲率以及电离密度的测量分析，知道这两个末态粒子一个是质子，一个是π^-介子。当时看到的奇异粒子的V型衰变如图 3.7(a)所示。

通过测量末态粒子的能量和动量可以定出这个中性奇异粒子的质量。它的质量显然比质子大。这是当时所知的质子、中子、电子、光子和π介子之外的一个新粒子。新粒子的发现引起了人们的广泛注意。后来又发现了另一类“V”型事例，末态是π^-和π^+，如图3.7(b)所示，其质量是电子质量的1000倍，当时称为θ^0介子，其寿命为10^{-10}秒，

$$V_1^0 \to p + \pi^-, \qquad V_2^0 \to \pi^+ + \pi^-. \tag{3.66}$$

V_1^0粒子后来称之为Λ^0粒子(超子)。V_2^0粒子的质量比质子小，后来称之为K^0介子。到1954年在美国布鲁克海文(Brookhaven)实验室3GeV质子同步加速器实验中大量产生了奇异粒子后，他们的“奇异”特性才展现出来并得到系统的研究。“奇异粒子”是当时新发现的一批粒子的总称，它们具有以下几个明显的特性：

1. 奇异粒子一般经强相互作用协同（成对）产生，单独地衰变为非奇异粒子。　例如：

$$\pi^- + p \;\to\; \Sigma^- + K^+ + \pi^0, \quad K^+ \to \mu^+\nu_\mu, \quad \Sigma^- \to n\pi^-, \tag{3.67}$$

$$p + p \;\to\; p + \Lambda^0 + K^+, \quad K^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad \Lambda^0 \to n + \pi^0. \tag{3.68}$$

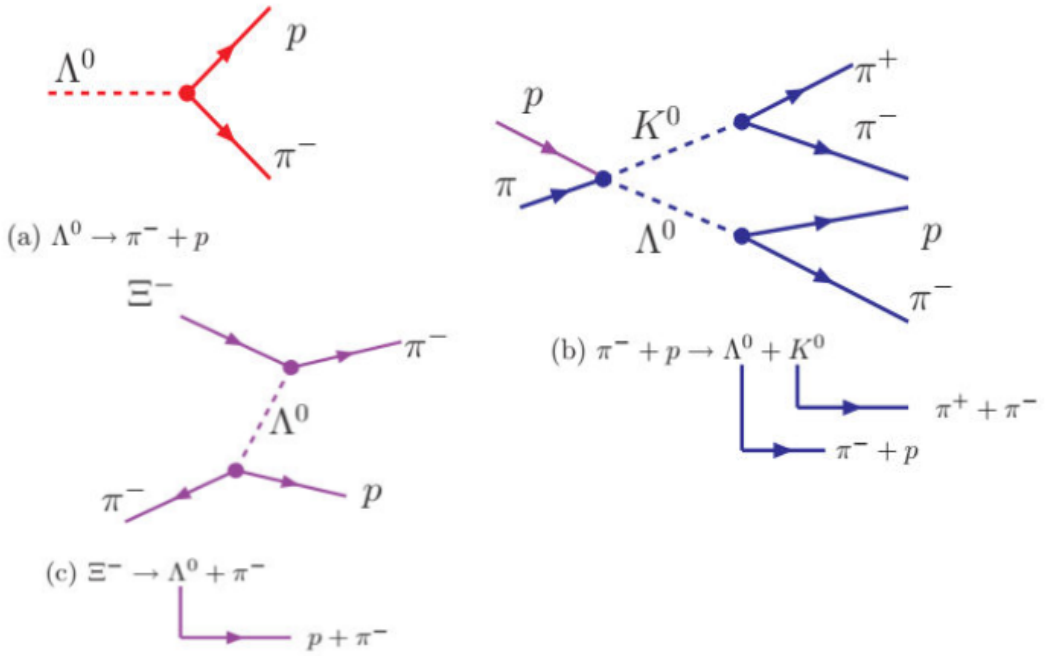


图 3.7: (a) 奇异粒子的V型衰变；(b) $\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$ 反应，产生的奇异粒子随后发生弱衰变$\Lambda^0 \to p + \pi^-$ 和$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$；(c) 双V 型衰变：$\Xi^- \to \pi^- + \Lambda^0$衰变，随后$\Lambda^0 \to \pi^- + p$衰变。

2. **快产生（$t \sim 10^{-23}s$，强相互作用），慢衰变（$\tau \sim 10^{-8} - 10^{-10}s$，弱衰变）。** 奇异粒子$K^+$ 和Λ^0的主要衰变道和分支比分别为

$$\begin{aligned} K^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu, \quad (Br \approx 64\%), \quad \tau_{K^\pm} = 1.2 \times 10^{-8}s, \\ K^+ &\to \pi^+ + \pi^0, \quad (Br \approx 21\%), \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\to \pi^- + p, \quad (Br = 64\%), \quad \tau_{\Lambda^0} = 2.6 \times 10^{-10}s, \\ \Lambda^0 &\to \pi^0 + n, \quad (Br = 36\%). \end{aligned} \tag{3.70}$$

第一个衰变道显然是弱衰变过程(末态只含轻子)。Λ超子的两个主要衰变道虽然初末态都是强子，却并不是强衰变，因为强衰变的特征时间是$10^{-23}s$，所以Λ超子的两个主要衰变道只能是弱衰变过程。

随后人们又发现了很多奇异粒子，例如同位旋三重态的$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$粒子、如图3.7(c)所示的$\Xi^-$粒子及其同位旋二重态的伙伴$\Xi^0$粒子、自旋3/2的同位旋单态$\Omega^-$粒子以及很多激发态粒子。这期间发现的整数自旋的介子都比核子轻，其他半整数自旋的奇异粒子都比核子重，称之为重子。

3.3.2 奇异数守恒

所有奇异粒子都是不稳定粒子，产生之后都会很快衰变，其自旋量子数只能通过其衰变末态的测量利用角动量守恒来确定，例如K^0介子的自旋可以通过$K^0 \to \pi^0\pi^0$衰变来

确定。由于π^0介子的自旋为0，双π^0系统的波函数应该是对称的，即双π^0系统的轨道角动量L应为偶数：$L=0,2,4,\cdots$。在K^0介子质心系中，分析末态π^0介子角分布时，未见各向异性，这说明K^0介子的自旋为0。对于K^+介子的自旋确定可以参见第2.3.4节的例题2.2，是通过对$K^+\to\pi^+\pi^+\pi^-$三体衰变过程的研究，由达立兹图分析确定的。

1. **奇异数S:**

奇异粒子经强相互作用协同产生，经弱相互作用单独的衰变为非奇异粒子。但有些协同产生过程虽然阈能很低，但实验上却始终没有发现过。例如：

$$n+n\to\Lambda^0+\Lambda^0. \tag{3.71}$$

的过程是被严格禁戒的。为了解释这类现象，1953年，西岛和彦(Nishijima)提出奇异数的概念，说明上述反应被严格禁戒的原因在于奇异数不守恒。

奇异数S的规定： 非奇异粒子奇异数为零，奇异粒子的奇异数由强相互作用或者电磁相互作用的实验确定。最初人们确定，在反应过程

$$\pi^-+p\to\Lambda^0+K^0 \tag{3.72}$$

中，K^0 和Λ^0的奇异数必须大小相等，符号相反，以保证末态奇异数为零，满足守恒要求。对奇异数的具体规定只有相对意义，而无绝对意义。人们规定：

$$S_{K^+,K^0}=+1, S_{\Lambda^0}=-1. \tag{3.73}$$

其它奇异粒子的奇异数根据反应过程来确定。例如

$$\begin{aligned}
\pi^-+p &\to \Sigma^-+K^+ \Longrightarrow S_{\Sigma^-}=-1,\\
\pi^-+p &\to \Sigma^0+K^0 \Longrightarrow S_{\Sigma^0}=-1,\\
\pi^++p &\to \Sigma^++K^+ \Longrightarrow S_{\Sigma^+}=-1,\\
\pi^-+p &\to K^0+K^++\Xi^- \Longrightarrow S_{\Xi^-}=-2,\\
K^-+p &\to \Xi^-+K^+ \Longrightarrow S_{K^-}=-1,\\
&\to \Xi^0+K^0 \Longrightarrow S_{\Xi^0}=-2.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

从以上确定的强子的奇异数中我们也可以发现一些规律：正反粒子的奇异数相反，所有重子的奇异数为零或负数，反重子的奇异数为零或正数。这些规律来源于我们将在第六章中讨论的夸克模型。

2.**奇异数守恒：**

实验表明，在强相互作用和电磁相互作用中奇异数都是守恒的。在强相互作用过程中，为了保证奇异数守恒，奇异粒子必须成对产生。(3.72)式所表示的$\pi^-+p\to K^0+\Lambda^0$就是此类反应过程。1952年，人们发明了气泡室“Bubble chambers”[2] 作为新型粒子探测

[2]气泡室：把液体(如液态氢)装在高压容器内，入射粒子和经核反应产生的次级粒子沿它们的飞行径迹使液体发生电离，当容器内的压强降低时，沿飞行径迹的电离液体发生沸腾，产生气泡，经照相完成径迹测量。

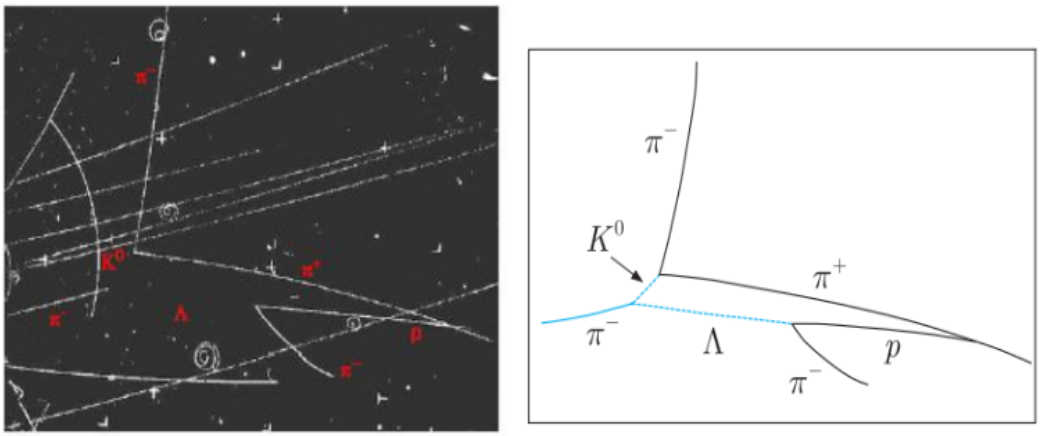


图 3.8: 左图是$\pi^- + p \longrightarrow K^0 + \Lambda^0 \longrightarrow (K^0 \to \pi^+ + \pi^-) + (\Lambda \to \pi^- + p)$反应的气泡室照片，其中$K^0$和$\Lambda$的两个V型衰变径迹清晰可见。右图是该过程的物理径迹示意图。

器，同时也提供了作为靶粒子的质子源。图-3.8就是一张核反应$\pi^- + p \longrightarrow K^0 + \Lambda^0$的气泡室照片。在该图片上可以很清楚的看到$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$和$\Lambda \to \pi^- + p$ 的“V” 型衰变径迹。到1974年，人们借助气泡室和其他高精度的仪器，发现了几百个由u, d, s三种轻夸克构成的各种强子态。

在弱相互作用中，奇异数不守恒，但存在$|\Delta S| = 1, 0$的选择定则。例如

$$\Lambda^0 \quad \to \quad p + \pi^-, \quad or \quad n + \pi^0, \tag{3.75}$$

$$\Sigma^+ \quad \to \quad p + \pi^0, \quad or \quad n + \pi^+. \tag{3.76}$$

在弱相互作用中，虽然二级弱作用$|\Delta S| = 2$的情况也存在，但其几率是非常小的。例如$\Xi^0 \to p + \pi^-$和$\Xi^- \to n + \pi^-$衰变的分支比小于10^{-3}。

3. 常见奇异粒子的寿命：

在粒子数据表中，很容易查到各类强子的基本物理参数[1]。对于常见的奇异强子，除了Σ^0因为能够发生电磁衰变，因而具有非常短（$\sim 10^{-20} s$）的寿命，其它奇异粒子只能发生奇异数改变的弱衰变，寿命都很长，在$10^{-8} - 10^{-10}$秒量级。

3.3.3 重子数b

质子和中子是最早发现的核子，中子的质量比质子的质量重1.3MeV。自由中子虽然可以衰变，但它衰变时转化成比它略轻的质子：$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$几乎是中子的唯一衰变道。质子的质量是电子质量的1836倍，比(π, K, ρ) 等强子重很多。按照已知的守恒定律的限制，质子应该衰变，例如$p \to \pi^0 + \pi^+$衰变道。但质子是稳定的，到现在为止人们还没有观察到质子的衰变，其寿命$\tau_p > 10^{31}$ 年。这些事实表明还存在一个相加性守恒量：重子数b。质子和中子的重子数为1，介子，电子和光子的重子数都是0。实验表明重子数是

表 3.4: 重子数不守恒的质子衰变道举例和其以10^{32}年为单位的衰变寿命下限。

衰变道	$p \to e^+\pi^0$	$p \to \mu^+\pi^0$	$p \to e^+\eta$	$p \to \mu^+\eta$	$p \to \mu^+\omega$	$p \to K^+\nu$
寿命下限	> 160	> 77	> 100	> 47	> 28	> 59

一个严格的内部相加性守恒量，违背重子数守恒定律的反应过程都是严格禁戒的。所有重子的重子数为1 ，所有反重子的重子数为-1 ，所有非重子的重子数为0。

电荷，重子数，奇异数都是内部相加性守恒量，它们之间的共同点和区别有哪些呢? 它们的相同点在于：可能取值都是整数，数学结构相同，都是和$U(1)$相角变换相联系。它们之间的差别表现在物理上：首先是守恒的程度不同，电荷和重子数是严格守恒量，奇异数在弱相互作用下不守恒。另一差别表现在如何测量上：电荷的测量可以看粒子走过的径迹，用电动力学来计算和分析。这是因为电荷是电磁相互作用的相互作用常数，它决定了电磁相互作用的强度，从而可以通过电磁相互作用来测量。重子数和奇异数则不能通过类似的动力学效应来测量。这些内部量子数只能根据守恒定律，通过已知粒子的重子数和奇异数来确定未知粒子的重子数和奇异数。

重子数作为一个严格的内部相加性守恒量，远早于奇异数就被人们所认识。**既然重子数和电荷一样，也是一个严格的内部相加性守恒量，那么是否也是某种$U(1)$规范场的相互作用常数?** 如果存在这种重子数规范场，这种规范场的量子也应和光子一样，是质量为零的粒子。这种相互作用也应是长程的，静作用力也应和库仑力类似，与两个粒子重子数的乘积成正比, 与两个粒子之间的距离平方成反比。由于这种重子数相互作用随距离的变化和引力相互作用完全相同，两物体之间的重子数相互作用将完全与引力相互作用混在一起。

李政道和杨振宁研究过如何从实验上来检验重子数相互作用是否确实存在：原子核的质量数等于它的重子数，引力相互作用与质量成正比，**但原子核的质量和质量数并不严格相等，** 存在由于质子和中子的质量差以及它们结合成各种不同的原子核时结合能的不同造成的微小的差别。如果重子数相互作用确实存在，利用这个微小的差别，就可以通过精确测量引力相互作用而检测出来。他们分析了当时的实验，发现在相当高的精度下找不到差别，**这表明重子数不对应规范相互作用，没有动力学效应。** 由此可以看到，粒子物理中遇到的内部相加性守恒量，有些是某种相互作用的动力学荷，有动力学效应。有些则不是，没有直接的动力学效应。

在第四章中我们将引入量子场论，基本粒子之间的相互作用决定于相互作用的拉氏量，而目前的粒子物理标准模型拉氏量的规范相互作用和希格斯场引起的相互作用中都保证了重子数的守恒。当然，后面将讨论到超出标准模型的新物理，例如大统一理论就会破坏重子数的守恒。实际上，现代宇宙学认为我们的宇宙来源于大爆炸，按照标准模型重子数守恒的话，大爆炸在暴涨阶段正反物质都是成对产生，而天文观测中并没有发现反物

质世界，因而结合大爆炸理论和天文学观测，需要一个破坏重子数的理论。因而，很多粒子物理实验一直在寻找重子数破坏的反应。经过几十年的寻找，我们只能给出质子衰变的寿命下限，表3.4中是一些例子。

3.3.4 超荷和盖尔曼-西岛关系：

各粒子奇异数S的值是根据奇异数守恒的要求以及实验结果分析而赋予的。从这两方面的要求来说，各粒子的S值并没有完全确定下来。事实上如果把上面所给出各粒子的S值都乘一共同常数值作为新定义的S值，则上述要求仍满足。如果把上面所给出各粒子的S值再加一个强相互作用过程中守恒的相加性量子数作为新定义的守恒量，上述要求亦仍满足。为了避免这些不确定性带来的任意性，粒子物理学家实际上采取了自然的约定，即以最初确定的上述粒子的奇异数值为标准来确定其它粒子的奇异数值。按照这样规定的奇异数值，不久就总结出强子的**盖尔曼-西岛关系**：

$$\mathbf{Q = I_3 + \frac{Y}{2}}, \qquad \mathbf{Y = b + S}. \tag{3.77}$$

其中Y表示超荷量子数。Y也是相加性量子数，在强相互作用和电磁相互作用中超荷量子数Y都是守恒的。后来的实验充分证明了盖尔曼-西岛关系的普遍性，这个关系在六十年代强子对称性及分类理论的探索中是一个重要的基本关系式。

表 3.5: 一些奇异重子的量子数。

重子	质量(GeV)	奇异数S	重子数b	超荷Y	电荷Q	同位旋I	I_3
Λ	1.1157	-1	1	0	0	0	0
Σ^+	1.1894	-1	1	0	$+1$	1	$+1$
Σ^0	1.1926	-1	1	0	0	1	0
Σ^-	1.1974	-1	1	0	-1	1	-1
Ξ^0	1.3149	-2	1	-1	0	1/2	$+1/2$
Ξ^-	1.3217	-2	1	-1	-1	1/2	$-1/2$
Ω^-	1.6725	-3	1	-2	-1	0	0

奇异粒子大多经强相互作用产生，根据强相互作用对于各种量子数都守恒的要求，可以通过奇异粒子产生的过程，通过守恒量定出奇异重子的奇异数S、重子数b、超荷Y、电荷Q、同位旋量子数I 和I_3等，如表 3.5所示。

K介子系统的同位旋及其第三分量的确定比较曲折。早期在实验中发现了三个不同荷电状态的K介子，它们质量相近，但如果定义其$I = 1$，将导致强相互作用过程中同位旋不守恒。考虑反应

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0, \tag{3.78}$$

初态同位旋为$I=1/2$或者$3/2$，$I_3=-1/2$。末态Λ^0同位旋为0，那么K^0介子的同位旋只能是$I=1/2$或者$3/2$，才能使同位旋量子数I和I_3守恒。

后来根据对强相互作用过程的分析，证明中性的K介子有两个态$K^0\neq\bar{K}^0$ [3]，二者互为正反粒子。这样，K介子系统就构成了两个同位旋二重态，

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

奇异数的引入很好地解释了奇异粒子的特性。在这以前，粒子物理学中所认识到的守恒量除能量、动量、角动量、电荷外，按加法计算的守恒量只有同位旋的分量，奇异数完全是根据实验的规律性独立地总结出来的客观存在的守恒量。

奇异量子数的下述两个特点对粒子物理学的发展是有启示意义的：

1. 它是一个“近似”守恒的相加性守恒量，在强相互作用和电磁相互作用下严格守恒但是在弱相互作用下可以不守恒。

2. 与电荷不同，奇异数本身不是某种规范场相互作用的“荷”，因此它的确定只能通过实验的分析总结，不能象电荷那样通过它所体现的电磁相互作用性质的动力学效应来测定。

奇异数的存在和被认识给人们以启示：粒子物理中丰富多彩的内容表现之一就是自然界中客观上还可能存在其它一些反映粒子内部性质的量子数，它们有可能是“近似”守恒量，有可能并不是某种相互作用的“荷”。事实上，1974年以后发现的粲数C和底数B，都是属于这类量子数。考虑到强子物理的这些发展，盖尔曼-西岛关系已经推广为

$$Q=I_3+\frac{1}{2}Y, \quad Y=b+S+C+B+T, \tag{3.80}$$

其中T为顶数，这个量子数的存在理论上早有预言。在第六章中我们将看到这些量子数都对应于不同夸克的“味”道。

3.4　共振态

所有强子都参与强相互作用，除了少数基态强子由于对称性的要求，不能衰变或者只能弱衰变之外，绝大多数的强子都是能够强衰变的共振态，因而它们的寿命都相当短，具体性质只能靠其衰变产物来研究。幸运的是，强相互作用是所有相互作用中对称性最高的，它们遵守最多的守恒定律。除了普遍遵守的能量、动量、角动量、电荷、轻子数、重子数守恒定律外，强相互作用还遵守同位旋和奇异数守恒定律。利用这些守恒定律我们可以方便地研究这些共振态的性质。在后面第五章中我们对粒子物理研究涉及的各种对称性和守恒定律做全面的介绍，引入空间反射、时间反演、电荷共扼和G变换等以及它们对应的守恒量。

[3] 在第六章夸克模型中，$K^0=|d\bar{s}\rangle$，$\bar{K}^0=|\bar{d}s\rangle$。

3.4.1 弹性散射的分波分析

在量子力学中，已经讨论过散射问题：分波法和波恩近似。考虑一束无自旋粒子轰击一个无自旋的靶，薛定谔方程为：

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \tag{3.81}$$

设入射粒子是具有单一能量的平面波:

$$\psi_i(r,\theta) = e^{ikr} = \frac{i}{2kr}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)\left[(-1)^L e^{-ikr} - e^{ikr}\right]P_L(\cos\theta), \tag{3.82}$$

其中$P_L(\cos\theta)$是代表轨道角动量的勒让德多项式。上式方括号中的第一、二项分别代表入射和出射L分波部分。在$V(r)$的作用下，出射L分波的振幅和相位都发生变化。若以$2\delta_L$表示L分波相位的变化，以η_L 表示L分波振幅的变化，那么，当$r\to\infty$时，薛定谔方程的渐进解为[34]：

$$\psi_i(r,\theta) = \frac{i}{2kr}\sum_{L=0}^{\infty}(2L+1)\left[(-1)^L e^{-ikr} - \eta_L e^{2i\delta_L}e^{ikr}\right]P_L(\cos\theta), \tag{3.83}$$

其中$0<\eta\le 1$称之为非弹性系数。由(3.82)和(3.83)两式相减得到散射波函数

$$\psi_{sc}(r,\theta) = \frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{L}(2L+1)\frac{\eta_L e^{2i\delta_L}-1}{2i}P_L(\cos\theta). \tag{3.84}$$

或写为

$$\psi_{sc}(r,\theta) = f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{3.85}$$

其中

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{L}(2L+1)f_L P_L(\cos\theta), \tag{3.86}$$

$$f_L = \frac{1}{2i}\left[\eta_L e^{2i\delta_L}-1\right]. \tag{3.87}$$

上式中的$f(k,\theta)$和f_L分别称之为散射振幅和第L分波散射振幅。

根据弹性散射微分截面的表达式，可以求得总的弹性散射截面

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{L}(2L+1)\left|\frac{\eta_L e^{2i\delta_L}-1}{2i}\right|^2. \tag{3.88}$$

另外，可以算出$\eta_L<1$时非弹性散射截面为

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{L}(2L+1)\left(1-|\eta_L|^2\right). \tag{3.89}$$

因此，总散射截面为

$$\sigma_T = \sigma_{el} + \sigma_{inel} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_L (2L+1)\left(1-\eta_L\cos 2\delta_L\right). \tag{3.90}$$

当$\theta = 0$时，由(3.86)式可得

$$\mathbf{Im}f(k,0) = \frac{1}{2k}\sum_L (2L+1)\left(1-\eta_L\cos 2\delta_L\right) = \frac{k}{4\pi}\sigma_T. \tag{3.91}$$

该式通常称之为**光学定理**。由(3.88,3.89)两式可得L分波的最大($\delta_L = \pi/2$)弹性散射截面和最大($\eta_L = 0$)非弹性散射截面为

$$(\sigma_{el})^L_{max} = \frac{4\pi}{k^2}(2L+1), \tag{3.92}$$

$$(\sigma_{inel})^L_{max} = \frac{\pi}{k^2}(2L+1). \tag{3.93}$$

3.4.2　共振态的产生和描写

在前面，我们是以平面波来描写入射粒子的。但实际上，入射粒子不可能是单色平面波，而应该看成是一个定域的波包，是具有各种能量的平面波的迭加。假定波包主要有动量在k_0附近的平面波所贡献，则

$$E(k) \simeq E(k_0) + (\mathbf{k}-\mathbf{k_0})\nabla E(k_0), \tag{3.94}$$

傅里叶变换之后可得入射波包$\psi_i(\mathbf{r},t)$ [34]：

$$\psi_i(\mathbf{r},t) \simeq e^{i\lambda(t)}\psi_i(\mathbf{r}-\mathbf{v}t,0), \tag{3.95}$$

其中$\mathbf{v} = \nabla E(k_0)$。在时间t内，入射波包以速度$\mathbf{v}$平移了$\mathbf{v}t$，相因子改变了$\lambda(t)$，波包形状不变。

对散射波包作同样处理，可以得到

$$\psi_{sc}(\mathbf{r},t) = \sum_L (2L+1)R_L(\mathbf{r},t)P_L(\cos\theta), \tag{3.96}$$

$$rR_L(r,t) \simeq e^{i\xi_L(t)}[r-v(t-\tau_L)]R_L[r-v(t-\tau_L),0], \tag{3.97}$$

其中

$$v = E'(k_0) = \left.\frac{dE(k)}{dk}\right|_{k=k_0}, \tag{3.98}$$

$$\tau_L = \frac{\delta'_L(k_0)}{v} = \left.\frac{1}{v}\frac{d\delta(k)}{dk}\right|_{k=k_0}. \tag{3.99}$$

(3.97)式说明一个对散射波包有贡献的具有确定分波角动量L的态沿着径向以速度$\mathbf{v}$向外传播，相对于入射波有一个相位的改变。当波包通过位势$V(r)$区域时，受到一个时间迟

滞τ_L，当此时间迟滞τ_L比较长时，也就是说$\delta_L(k)$在k_0附近变化急剧的时候，我们就说系统中形成了一个角动量为L的**共振态**，如图-3.9所示。

第L分波散射振幅f_L是一个复数量，可以用复平面上的一个矢量表示，如阿贡图-3.10所示(弹性散射：$\eta_L = 1$)。阿贡图上回路最高点处的质心系总能量就相当于共振态粒子的能量。

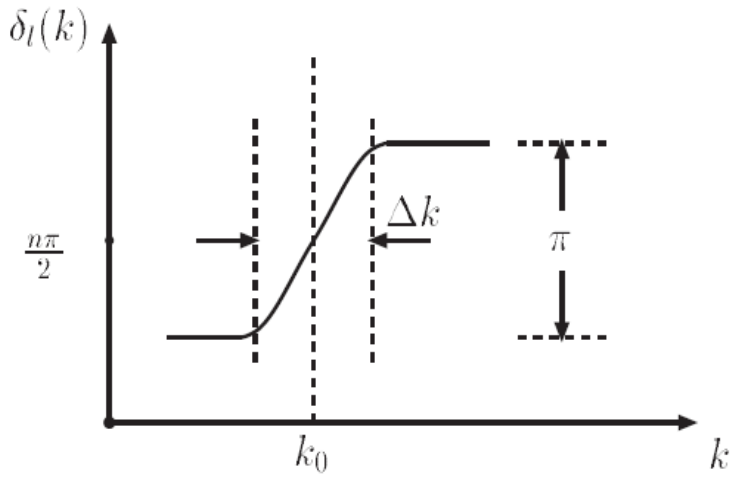


图 3.9: 在k_0处有共振态时，$\delta_l(k)$ 随k变化的关系。

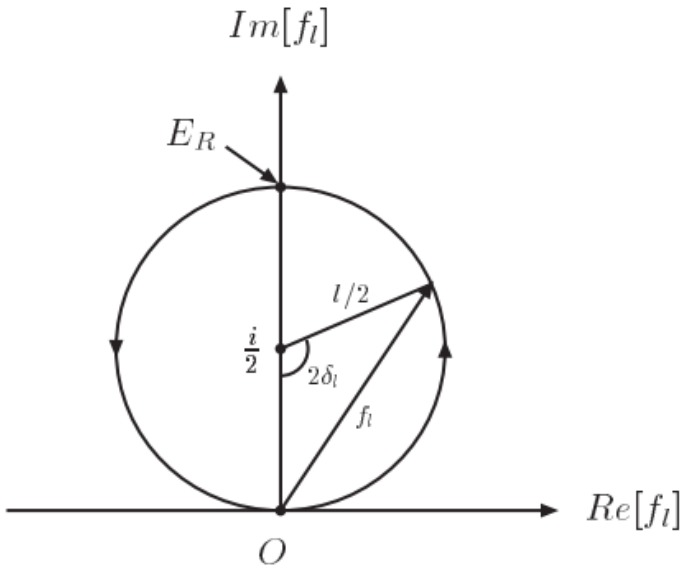


图 3.10: $\eta_l = 1$时的阿贡(Argand) 图，E_R 为共振态能量。

在k_0附近，将分波散射振幅f_L重新写为($\eta_L = 1$时)，

$$f_L = e^{i\delta_L(E)} \sin\delta_L(E) = 1/\left[\cot\delta_L(E) - i\right]. \tag{3.100}$$

对$\cot\delta_L(E)$ 在共振态能量E_R附近做泰勒展开：

$$\cot\delta_L(E)=\cot\delta_L(E_R)+(E-E_R)\left[\frac{d}{dE}\cot\delta_L(E)\right]_{E=E_R}+\cdots\simeq-(E-E_R)\frac{2}{\Gamma}. \quad (3.101)$$

其中$\cot\delta_L(E_R)=0$，　并定义

$$\frac{2}{\Gamma}=-\left[\frac{d}{dE}\cot\delta_L(E)\right]_{E=E_R}. \quad (3.102)$$

忽略高次项就得到

$$f_L=\frac{\Gamma/2}{(E-E_R)-i\Gamma/2}. \quad (3.103)$$

同时，L分波的弹性散射截面为：

$$\sigma_{el}^L=\frac{4\pi}{k^2}(2L+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_R)^2+(\Gamma/2)^2}. \quad (3.104)$$

此式称之为Breit-Wigner公式。　这个共振曲线在第一章通过简单的量子力学得到过，其分布如图-1.7所示。在$E=E_R$处有一共振峰，宽度为Γ，寿命为$\tau_L=1/\Gamma$。我们也可以说，一个共振态就对应于分波振幅在复能量

$$E=E_R-i\frac{\Gamma}{2}. \quad (3.105)$$

处的一个极点。以上的分波分析方法是确定共振态存在与否的方法之一。这个方法比之前在第二章我们给出的达立兹图方法要复杂，但是分波分析法却是对于共振态比较密集、质量相差不大的共振态的区分非常有效。

3.4.3　介子共振态

在上世纪60年代，随着奇异粒子的发现人们发现了越来越多的介子。除了最初的$\pi^{\pm}$介子和$K^{\pm}$、$K^0(\bar{K}^0)$介子因为主要衰变道是弱衰变，寿命比较长，π^0是电磁衰变之外，其余大多数介子都是强衰变的共振态。由于强衰变共振态的寿命非常短，这些粒子只能通过其衰变末态粒子的重建，利用能动量守恒在不变质量谱上找到共振峰而发现。

1. $\rho(770)$介子：

O.R.Erwin等在1961年实验测量了$\pi^-+p\to\pi^++\pi^-+n$和$\pi^-+\pi^0+p$反应过程中$\pi\pi$系统的不变质量谱(见图-2.6)，发现了共振峰$\rho(770)$。ρ介子有三个荷电状态：$\rho^{\pm},\rho^0$。同时由于ρ是2π共振态，它们的同位旋只能是1或2。但实验上没有发现反应$\pi^++p\to\pi^++\pi^++n$中有$\pi^+\pi^+$共振态，这就证明ρ 的同位旋只能是1。由于在ρ介子的两π衰变中，末态两π介子在同位旋对称性下是全同玻色子，要求两π系统的波函数具有交换对称性。而$I=1$的同位旋波函数是反对称的，因此要求空间波函数也必须是反对称的，即2π的相对轨道角动量$L=1,3,5,\cdots$。实验上测得上述反应中的π介子角分布具有形式

$$W(\theta)=A+B\cos\theta+C\cos^2\theta, \quad (3.106)$$

与$L=1$情况相符合，由此确定ρ介子的自旋$J=1$。除了能够通过强相互作用衰变到两个π介子，ρ介子也可以有一些电磁相互作用的衰变道，例如$Br(\rho^0 \to e^+e^-) = (4.72 \pm 0.05) \times 10^{-5}$。这么小的分支比充分说明电磁作用相比于强相互作用是非常弱的，因此我们一般说$\rho \to 2\pi$ 的衰变是强衰变，不会提到这个过程其实也是可以通过电磁和弱作用衰变的。

2. $\omega(782)$介子：

1961年，B. Maglić等人发现在$\bar{p}p$湮灭产生的3个π介子末态不变质量谱中发现了一个共振态[63]：

$$\bar{p}+p \to \omega+\pi^+ +\pi^- \to [\pi^+ +\pi^- +\pi^0]+\pi^+ +\pi^-. \tag{3.107}$$

他们在2500个四叉事例中找到了800个有π^0 (通过丢失质量法分析确认) 的事例，做出这800个事例的3π不变质量谱，发现在组态$\pi^+\pi^-\pi^0$的不变质量谱在790MeV附近有一个尖锐的峰，这就是ω介子。而在别的带电组态的不变质量谱中则没有发现共振峰，表面只有中性的ω介子，其同位旋为0。后来，根据如图-3.11 （左图）所示的$\pi^+ + d \to pp\pi^+\pi^-\pi^0$反应中3$\pi$ 共振态的达立兹图理论分析和实验结果，可以确定ω介子是自旋为1 的矢量介子。图-3.11右图所显示的$\pi^+ + d \to pp\pi^+\pi^-\pi^0$反应中3$\pi$不变质量谱中右边那个尖锐的峰对应共振态$\omega$。

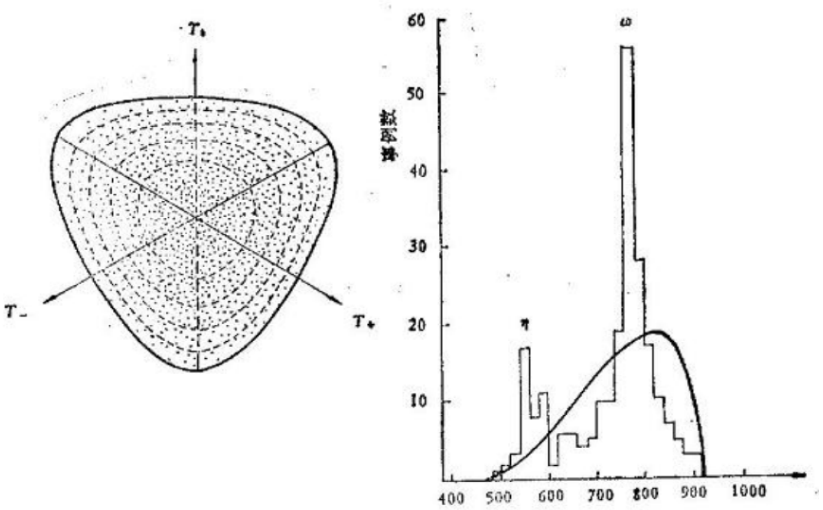


图 3.11: 左图表示实验给出的ω衰变的达里兹图；右图表示$\pi^+ + d \to pp\pi^+\pi^-\pi^0$反应中3$\pi$不变质量谱。

3. $\eta(547)$介子：

η 介子是1961年在反应

$$\pi^+ + d \to p+p+\eta \to p+p+[\pi^+ +\pi^- +\pi^0] \tag{3.108}$$

中伴随着ω介子一起被发现的[63–65]。如图-3.11右图所示，那个左侧较低的峰对应η介子，其峰值对应η介子的质量。η是自旋为0、同位旋为0的单态介子。虽然η介子是跟ω介子一起在共振峰中发现的，但是其性质却迥然不同，其主要衰变分支比如下

$$\begin{aligned}\mathcal{BR}(\eta \to 2\gamma) &= 39.41(20)\%, &(3.109)\\ \mathcal{BR}(\eta \to 3\pi^0) &= 32.68(23)\%, &(3.110)\\ \mathcal{BR}(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) &= 22.92(28)\%. &(3.111)\end{aligned}$$

可以看出η介子衰变到三个π介子的衰变分支比跟衰变到2个光子的电磁衰变的分支比是同量级的，因而可以肯定其衰变到三个π介子的衰变也是电磁衰变。η介子的衰变宽度$\Gamma_\eta = 1.31(5)$ keV，也是电磁衰变的特征宽度。

4. $\phi(1020)$介子：

$\phi(1020)$介子是1963年在研究反应

$$\begin{aligned}K^- + p &\to \Lambda + K^+ + K^-,\\ &\to \Lambda + K^0 + \bar{K}^0,\end{aligned} \quad (3.112)$$

中2K系统的KK不变质量谱时发现的。没有找到它的荷电态，它属于$I = 0$的同位旋单态。实验上测量衰变

$$\phi \to K^+ + K^-, \quad (3.113)$$

中末态K介子的角分布，确定其自旋为1。

5. $K^*(892)$介子：

K^*是最早确认的带奇异数$S = \pm 1$ 的矢量介子共振态。K^*首先是在反应

$$\begin{aligned}K^- + p &\to K^{*-}(\to K^-\pi^0) + p, &(3.114)\\ K^- + p &\to K^{*-}(\to \bar{K}^0\pi^-) + p, &(3.115)\end{aligned}$$

中发现的。K^*共振态和K介子一样，有四个不同的态：$K^{*\pm}$和$K^{*0}(\bar{K}^{*0})$。类似地，K^*介子系统也构成了两个同位旋二重态，

$$\begin{pmatrix} K^{*+} \\ K^{*0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^{*0} \\ K^{*-} \end{pmatrix}. \quad (3.116)$$

3.4.4　重子共振态

到上世纪60年代初，除了组成原子核的基本组分质子和中子，人们已经发现了包括超子在内很多的重子。自旋为1/2 的基态重子除了质子不衰变之外，其它都可以衰变。其中Σ^0粒子比较特殊，它的质量比同位旋单态的超子Λ稍重，可以电磁衰变$\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$，

其寿命较短在10^{-20}秒的量级。其它自旋为1/2 的基态重子都只能弱衰变，寿命比较长在10^{-10}秒的量级。而自旋3/2 的重子和其它的角动量和径向量子数激发态重子都是能够强衰变的重子共振态。

πN散射中的共振：

如图-3.4所示，在πN散射实验中可以通过总截面曲线上出现的共振峰发现共振态，例如之前提到过的$(3,3)$共振$\Delta(1232)$。除了这个共振态之外，图-3.4中，在$\pi^- p$散射的截面虚线上还可以看到核子的激发态$N^*(1520)$, $N^*(1680)$和$N^*(2190)$等共振峰。在$\pi^+ p$散射的截面实线上还可以看到激发态$\Delta^*(1920)$共振峰。

当多个共振态的质量比较接近，较多的共振态迭加在一起时，就不可能分辨出各个共振峰。这时，可以通过对πN散射的实验数据做相移分析，画出不同状态的阿贡图，就可以确定在该态中是否有共振态粒子存在。1970年，阿叶德(Ayed)等人就是这样在实验上确认了$\Delta(1236)$, $N^*(1440)$ 等共振态的存在。

共振态自旋的确定：

共振态重子和介子一样，寿命太短，因而只能用测量末态粒子角分布的方法来确定重子共振态的自旋。以π介子和核子散射中产生的$\Delta(1232)$和Λ超子为例，其被发现的衰变道为

$$\Delta(1232) \to N + \pi \quad , \quad \Lambda \to \pi^- + p. \tag{3.117}$$

末态π介子自旋为0，核子自旋为1/2，因而末态粒子总自旋为1/2。根据量子力学，轨道角动量由勒让德函数描写，当轨道角动量L=0，则末态π介子的角分布必是各向同性的，这时，末态粒子总角动量为1/2，这恰好是Λ超子被发现时候的情形，因此，Λ超子的自旋被确定为1/2。

如果π介子和核子之间的轨道角动量L=1，则末态两粒子总角动量为1/2和3/2两种情况。如果只考虑在入射的π介子和核子动量平行方向产生的$\Delta(1232)$和Λ超子，因为轨道角动量在动量方向的投影为0，因而这个方向的末态粒子总角动量分量只有$\pm 1/2$ 两种可能，其波函数为

$$\psi_{\frac{1}{2},+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle Y_{11} - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle Y_{10}, \tag{3.118}$$

$$\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle Y_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle Y_{1-1}, \tag{3.119}$$

$$\psi_{\frac{3}{2},+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle Y_{10} + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle Y_{11}, \tag{3.120}$$

$$\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle Y_{10} + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle Y_{1-1}, \tag{3.121}$$

根据球谐函数

$$Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad , \quad Y_{1\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \tag{3.122}$$

考虑以π介子入射方向作为实验观测的坐标轴，可以求得末态π介子的角分布为

$$|\psi_{1/2}|^2 = \left|\psi_{\frac{1}{2},+\frac{1}{2}}\right|^2+\left|\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right|^2=\frac{1}{2\pi}, \tag{3.123}$$

$$|\psi_{3/2}|^2 = \left|\psi_{\frac{3}{2},+\frac{1}{2}}\right|^2+\left|\psi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}\right|^2\propto 1+3\cos^2\theta. \tag{3.124}$$

可以看出，如果重子共振态的自旋为1/2，其衰变的两个末态粒子之间即使轨道角动量为1，其衰变产物的角分布也是各向同性的。在$\Delta(1232)$产生的实验中，实验测得其衰变末态π介子的角分布与(3.124)式符合，因此确定$\Delta(1232)$的自旋为3/2。历史上，其它重子，例如Σ、Ξ 等粒子的自旋也是类似确定的。

小结

本章所讲述的强子物理在粒子物理发展早期起到了非常重要的作用。对其分类和组成结构的研究发展起来非常重要的夸克模型(第六章)；对强子间相互作用性质的研究发展了第七章将要阐述的量子色动力学理论，随着之后电弱统一理论的发展，强子物理大多归类于中高能核物理的研究范围，但是21世纪初开始，随着第二章第2.3.2 节中所举例X(3872)粒子的发现，一系列以X、Y、Z命名的新强子共振态不断被实验发现，这一古老的学科再一次焕发了新春。这些新发现的粒子很难用第六章的传统夸克模型解释，这些研究也形成了一个新的交叉学科分支。

3.5　练习题

1. 试判断，下述过程在哪些相互作用下是允许的，哪些是不允许的？为什么？

   1) $\pi^-p\to K^-\Sigma^+$,　2) $pp\to nK^+\Sigma^+$,　3) $\pi^-p\to\pi^+\rho^-$,

   4) $n\to e^-\pi^+$,　5) $p\bar{p}\to K^+\pi^-n\bar{n}$,　6) $p\bar{n}\to K^+K^0\pi^0$,

   7) $K^0n\to\Lambda\pi^0$,　8) $p\bar{p}\to K^+\pi^-\bar{n}$,　9) $\Lambda\to p\pi^0$.

2. (D^+,D^0)介子是同位旋的二重态, 其主要衰变道都是弱衰变，其中$D^0\to\pi^+K^-$, $D^0\to\pi^0\bar{K}^0$ 和$D^+\to\pi^+\bar{K}^0$ 的衰变是通过$\Delta I=1,\ \Delta I_3=1$ 的弱作用有效哈密顿量进行的。试推导这三个衰变过程之间存在的同位旋三角关系。

3. 已知三个$B\to\pi\pi$衰变过程的弱相互作用同位旋改变有两种$\Delta I=1/2$和$\Delta I=3/2$，末态两个π介子由于全同粒子对称性，总同位旋只有1和2两种状态，试证明其衰变振幅构成复平面上的同位旋三角关系:

$$M(B^0\to\pi^-\pi^+)+\sqrt{2}M(B^0\to\pi^0\pi^0) = M(B^+\to\pi^0\pi^+). \tag{3.125}$$

4. Ξ^*是Ξ重子的激发态，试证明其衰变过程分支比有如下关系：

$$Br(\Xi^{*0} \to \Xi^- + \pi^+) = 2Br(\Xi^{*0} \to \Xi^0 + \pi^0), \quad (3.126)$$
$$Br(\Xi^{*-} \to \Xi^0 + \pi^-) = 2Br(\Xi^{*-} \to \Xi^- + \pi^0). \quad (3.127)$$

5. Λ_c是同位旋为0的重子，试证明其弱衰变过程分支比有如下关系：

$$Br(\Lambda_c \to nK^+) = Br(\Lambda_c \to pK^0) \quad (3.128)$$
$$Br(\Lambda_c \to n\pi^+) = 2Br(\Lambda_c \to p\pi^0) \quad (3.129)$$

6. Λ_c三体弱衰变的同位旋改变量为$\Delta I = 1$，试证明其弱衰变过程振幅有如下关系：

$$\sqrt{2}M(\Lambda_c \to p\bar{K}^0\pi^0) + M(\Lambda_c \to pK^-\pi^+) + M(\Lambda_c \to n\bar{K}^0\pi^+) = 0. \quad (3.130)$$

7. 对下列散射或者衰变过程，根据初末态粒子和可能的守恒量，判断它们是什么类型的相互作用引起的过程？

   1) $\pi^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$　　2) $\gamma + p \to \pi^+ + n$　　3) $K^-p \to \Lambda\pi^+\pi^-$
   4) $p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$　　5) $D^- \to K^+ + \pi^- + \pi^-$　　6) $\Sigma^+ \to p\pi^0$
   7) $\Lambda + p \to K^- + p + p$　　8) $\pi^- + p \to n + e^+ + e^-$　　9) $\Xi^- \to \Lambda\pi^-$.

8. 散射过程$e^+e^- \to K^+K^-$，求末态系统的总同位旋以及轨道角动量的可能值。

9. 试证明自旋3/2重子两体衰变中，即使末态两粒子之间轨道角动量为2，其末态角分布公式也跟(3.124)式相同。

10. 在π介子和核子散射中产生的自旋为1的ρ介子主要衰变到两个π介子，这个两体衰变中，π介子自旋为0，两粒子之间轨道角动量为1，求其末态角分布具体形式。

第四章　轻子和量子电动力学

如第一章所述，人们在实验上已经发现了三代、六种味道的轻子，“轻子”的名字来源是由于早期发现的两代费米子质量都很小。所有轻子不参加强相互作用，中性的中微子也不参与电磁相互作用，只参与弱相互作用。在标准模型理论框架下，弱相互作用只有左手相互作用。由于到目前为止没有测量到中微子的质量，可以假设其质量为0。这样按照第1.3节的讨论，中微子左右手分量就是独立的。其右手分量不参与任何相互作用，也就是不存在的自由度。带电轻子因为有质量，其右手分量则是必须存在的自由度，因为这是质量项中要求的，而且是电磁相互作用要求的。在10^{-18}米尺度上，还没有发现轻子的结构，目前可以认为轻子是类点的粒子。

4.1　轻子的基本性质

第一章中提到，电子是最早发现的基本粒子。1937年，卡尔·安德森(C.D. Anderson)和其学生赛斯·内德梅耶[1] 在云室宇宙线实验中发现了缪子(μ)。缪子和电子非常相似，只是质量不同，缪子是不稳定粒子。1975年，在实验中又发现了τ轻子。这个第三代带电轻子质量为$m_\tau \approx 1777\text{MeV}$，虽然是基本粒子，但是比质子还要重！$\tau$轻子主要衰变道是强子衰变道，占大约60%。其轻子衰变道为：

$$\tau^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau, \quad (17.83\%), \tag{4.1}$$

$$\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau, \quad (17.37\%). \tag{4.2}$$

由于缪子的质量太轻，无法衰变到强子，几乎100%衰变到e^-:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (\sim 100\%). \tag{4.3}$$

电子是质量最轻的带电粒子，由于电荷守恒，不能衰变，到目前为止还没有发现电子的衰变。

三代轻子的基本性质见表4.1，每一代轻子中，都有一个中性的中微子。如果中微子有质量的话，按照量子力学理论就会造成不同中微子之间的混合，实验上应该观测到中微子振荡的现象，

$$\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu \longleftrightarrow \nu_\tau. \tag{4.4}$$

最近的实验观察到中微子的振荡[2]，但是实验上并没有中微子有质量的直接证据。从表4.1可以看出到目前为止，实验上只能分别给出对三代中微子质量的上限。

[1] Seth Henry Neddermeyer (1907.9.16 – 1988.1.29)，美国物理学家，与导师一起合作发现了缪子。二战时参加了制造原子弹的曼哈顿计划，并长期供职于洛斯阿拉莫斯国家实验室。1982 年获得费米奖。

[2] 我们将在第4.4节具体讨论中微子振荡。

表 4.1: 三代轻子的基本性质[1]。

轻子	质量(MeV)	磁矩(μ_B)	寿命	轻子数
e^-	0.5109989461(31)	1.00115965218091(26)	$> 6.6 \times 10^{28}$ 年	$L_e = +1$
μ^-	105.6583745(24)	1.0011659209(6)	$2.1969811(22)\mu s$	$L_\mu = +1$
τ^-	1776.86 ± 0.12	?	$(290.3 \pm 0.5)fs$	$L_\tau = +1$
ν_e	$< 1.1 \times 10^{-6}$	0	非常稳定	$L_e = +1$
ν_μ	< 0.19	0	非常稳定	$L_\mu = +1$
ν_τ	< 18.2	0	非常稳定	$L_\tau = +1$

4.1.1 贝塔衰变与中微子的引入

历史上最早看到的弱相互作用是不稳定原子核的贝塔衰变。如果认为原子核的贝塔衰变是两体衰变：

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^-, \tag{4.5} $$

那么两体衰变过程末态粒子的能量和动量按照第二章的讨论应该是完全确定的。所以，原子核的衰变能Q 应按能量-动量守恒的原则分配给核Y 和电子(β)，

$$ E_e = M(Y) - M(X), \tag{4.6} $$

电子的动能就必须是确定的单一取值。1914年，英国物理学家查德威克通过实验发现：**由原子核的贝塔衰变产生的电子的能谱是连续分布的，如图-4.1所示[66, 67]。** 人们的预期和实验结果产生了严重的矛盾。**人们甚至因此而怀疑能量守恒定律在微观世界是否仍然成立!**

1930年，为了拯救能量守恒定律，泡利[3] 提出假设：原子核的贝塔衰变应该是三体衰变，第三个中性粒子也是原子核的组分之一。其质量应该和电子e^- 的质量是同一个量级，它是中性的，自旋为1/2。

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e, \tag{4.7} $$

这样就可以解释贝塔衰变的能谱分布实验结果。为了与比较重的中子相区别，**费米给这个新的中性费米子命名为中微子 “Neutrino”。**

实际上，我们现在知道，**在核子层次，任何原子核的三体贝塔衰变就是中子的贝塔衰变，** 即：

$$ n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \tag{4.8} $$

[3]Wolfgang Pauli (1900.4.25-1958.12.15)，美籍奥地利物理学家。师从A. Sommerfeld，1921年获博士学位。因发现量子力学中的不相容原理而获得1945年诺贝尔物理奖。



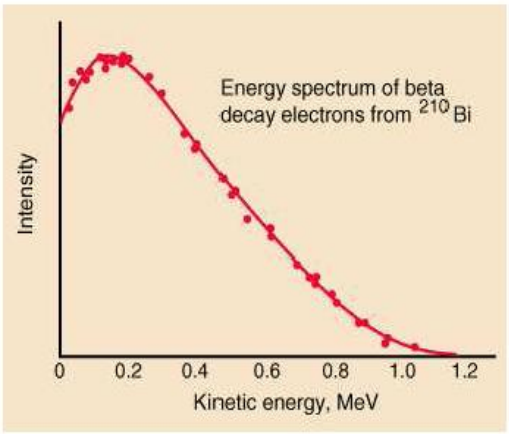


图 4.1:　英国物理学家查德威克和他观察到的^{210}Bi原子核贝塔衰变的电子连续能谱图[66, 67].

这是最早发现的由弱相互作用引起的中子衰变过程。由于核子和电子都是费米子，如果没有中微子的引入，质子和电子的自旋耦合成的总角动量必然是整数，与初态中子的半整数自旋不符，上述反应不但不能满足能量守恒的要求，也不能满足角动量守恒的要求。因此，虽然中微子一直很难被实验直接发现，物理学家已经逐渐接受了其存在的必要性。在夸克层次，贝塔衰变实际上是一个下夸克（d）衰变到了上夸克（u）和电子以及反中微子的弱反应

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{4.9}$$

4.1.2　反贝塔衰变，中微子相互作用

1930年，泡利提出了中微子的假设来解释贝塔衰变中的能量和动量损失，但是这并不能成为中微子存在的充分证据。只有中微子相互作用的发现才能成为直接证据。20世纪50年代，中微子假设已经被广泛接受了，能量、动量、甚至角动量的守恒都是正确的。然而还没有谁看见过中微子。在这里“看见”的意思是，在断定它产生于 β 衰变以后，又观察到它在另外的地方干了点什么。例如引起下面的反应：

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+ \quad or \quad \nu_e + n \to p + e^-. \tag{4.10}$$

这是贝塔衰变的一种反过程。这是个弱相互作用的过程，具体计算需要用到后面章节所介绍的量子场论和弱相互作用理论。我们这里利用场论知识直接给出此反应的截面公式为

$$\sigma(\bar{\nu}_e + p \to n + e^+) = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2 p^2}{v_i v_f}, \tag{4.11}$$




图 4.2: 发现弱相互作用的意大利物理学家费米(N. Fermi)和奥地利物理学家泡利(W. Pauli).

其中$v_i \sim v_f \sim c$是初末态轻子的相对速度，由于质量很轻都非常接近光速。弱作用矩阵元$|\mathcal{M}|$是无量纲的。普适费米耦合常数G_F的量纲是E^{-2}。所以，截面的量纲是E^{-2}，或者说是长度的平方（面积）。在数值上$|\mathcal{M}|^2 \sim 4$，$G_F = 1.1664 \times 10^{-5} GeV^{-2}$，$1GeV^{-1} = 1.975 \times 10^{-14} cm$，因此，

$$\sigma(\bar{\nu}_e + p \to n + e^+) = 10^{-43}\ E^2 cm^2, \tag{4.12}$$

其中能量E以MeV为单位。**这是一个非常小的截面，相当于中微子的自由程超过50光年。**也就是说当一个1MeV的中微子穿过一光年厚的铅板时，平均才会发生一次相互作用。因而要看到这种弱相互作用，需要有极强的中微子流量。

F. Reines[4] 和C.L. Cowan[5]在1953年首先观察到了第一个中微子反应。但是直到1956年萨凡纳河核反应堆的中微子实验才使他们宣告中微子的实验发现。他们利用核反应堆作为中微子源。铀裂变反应是丰富的中子源，中子发生贝塔衰变，发射出电子和反中微子（裂变产生的中子衰变得到的中微子能量在几个MeV）。**对一个1000MW的反应堆，几米远处的通量是$10^{13} cm^{-2} s^{-1}$ 的量级。因而靠巨大的流量补偿，即使微小的反应截面，每小时也可以有几个事例发生。** 为了去除其它来源的背景事例(例如宇宙射线)，必须有明显不同的可探测信号。探测器使用的是氯化镉和水。当一个反中微子与一个氢核相撞反应

[4]Frederick Reines (1918.3.18-1998.8.26)，美国物理学家。因发现中微子与M.L. Perl分享了1995年诺贝尔物理学奖。

[5]Clyde Lorrain Cowan (1919.12.6-1974.5.24)，美国物理学家。1951-1956年，和F. Reines合作进行核反应堆中微子实验，发现了中微子。

时，二者相互作用按照式(4.10)而产生一个正电子和中子，正电子很快被一个电子俘获而湮灭产生光子，光子由闪烁计数器记录。同时，中子也被慢化并被一个镉核所捕获而产生光子（镉的作用是在中子慢下来以后捕获它），这批光子也被闪烁计数器记录下来，但比前一批晚数微秒，两个批次有时间间隔的光子记录，是中微子发生相互作用的特有信号证据。Reines和Cowan在200小时的实验中，记录了567个中微子反应事例，反中微子第一次被探测到了。

4.1.3　轻子数守恒

中微子被发现之后，有一个难以理解的现象一直困扰着物理学家：所有实验中都一直没有观察到衰变$\mu^- \to e^-\gamma$，尽管人们从1947年开始就对这些过程进行了很多徒劳的寻觅。

1962年，L.M.Lederman、M. Schwartz 和J. Steinberger 在美国纽约长岛的布鲁克海文国家实验室首次用实验室中微子束流做实验。他们使用高能质子束流打击铍(Be)靶，产生大量的次级带电粒子$\pi^{\pm}$，这些粒子衰变产生$\mu^{\pm}$和正反中微子ν_μ，带电的粒子通过屏蔽墙被吸收掉，只让中微子进入探测器, 实验上探测到了反应

$$\nu_\mu + N \to \mu^- + X, \tag{4.13}$$

而没有观测到

$$\nu_\mu + N \to e^- + X. \tag{4.14}$$

这个实验证实了缪子中微子的存在，第一次给出了中微子味道的证据，也就是说电子中微子和缪子中微子是不同的。三个实验物理学家因此获得了1988年诺贝尔物理奖。后续的实验也发现，贝塔衰变中产生的电子反中微子只能发生反应$\nu_e + N \to e^- + X$ 却没有缪子产生。鉴于上面所有提到的弱相互作用的实验证据都自洽地表明，不同味道的轻子是不同的。为了描写轻子的这个性质，我们引入了轻子数的概念：所有的轻子都有一个守恒的量子数，我们称其为轻子数：

1. e^-, ν_e的轻子数$L_e = 1$，它们的反粒子$e^+, \bar{\nu}_e$的轻子数为$L_e = -1$；

2. μ^-, ν_μ的轻子数$L_\mu = 1$，它们的反粒子$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$的轻子数为$L_\mu = -1$；

3. τ^-, ν_τ的轻子数$L_\tau = 1$，它们的反粒子$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$的轻子数为$L_\tau = -1$。

到目前为止，所有实验事实都表明，在各类相互作用中，电子轻子数L_e，缪子轻子数L_μ，τ子轻子数L_τ总是分别守恒的。轻子不能单独地产生或湮灭，只能和其它轻子同时产生或湮灭，以保持轻子数守恒。即反应前后的轻子数L_e, L_μ, L_τ分别守恒。根据轻子数

表 4.2: 轻子数破坏的衰变举例和目前的实验精度给出的上限。

衰变道	轻子数破坏种类	分支比上限
$\mu^- \to e^- e^+ e^-$	L_μ, L_e	$< 1.0 \times 10^{-12}$
$\mu^- \to e^- \gamma$	L_μ, L_e	$< 4.2 \times 10^{-13}$
$\mu^- \to e^- 2\gamma$	L_μ, L_e	$< 7.2 \times 10^{-11}$
$\tau^- \to e^- \gamma$	L_τ, L_e	$< 3.3 \times 10^{-8}$
$\tau^- \to e^- \pi^0$	L_τ, L_e	$< 8.0 \times 10^{-8}$
$\tau^- \to \mu^- \gamma$	L_μ, L_τ	$< 4.4 \times 10^{-8}$
$\tau^- \to \mu^- \mu^+ \mu^-$	L_μ, L_τ	$< 2.1 \times 10^{-8}$
$\tau^- \to e^- \mu^+ \mu^-$	L_e, L_τ	$< 2.7 \times 10^{-8}$

守恒规律，我们就不难理解下列的反应过程为什么没有在实验上看到

$$\begin{aligned} e^- + e^- &\not\longrightarrow \pi^- + \pi^-, \\ \nu_\mu + N &\not\longrightarrow e^- + N', \\ \mu^- &\not\longrightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \end{aligned} \tag{4.15}$$

事实上，当初正是因为看不到这些反应过程，启发人们设想有某种量子数的守恒禁戒了这些反应过程，从而引入了轻子数的概念。

由于轻子数守恒的限制，我们现在也很容易理解缪子的主要衰变道(4.3)式，反应式的左边$L_\mu = 1$，所以反应式右边只能出现缪子中微子，而不是像(4.15)式那样出现反缪子中微子($L_\mu = -1$)。而且由于轻子数L_e守恒的要求，末态中除了电子还得有反电子中微子。类似于贝塔衰变，这个衰变末态中的两个（反）中微子也是没有被直接观测到的，实验上也是通过末态电子的能谱分布和角动量守恒要求，推测出其三体衰变的本质。

按照最小的标准模型理论，轻子数守恒是必须的，但是这并不能束缚物理学家探索超出标准模型的新物理，后面我们会提到有很多新物理模型是可以破坏轻子数守恒的，在第4.4节中微子振荡的发现，原则上中微子应该有微小的质量，这也会引起微小的不同味道轻子数的破坏，因而一直有坚持不懈的努力来寻找这些轻子数破坏的证据，表4.2中列出来这些努力给出的一些结果举例[1]。当然，中微子质量引起的中微子振荡给出的是不同味道轻子的混合，总轻子数$L_e + L_\mu + L_\tau$还是必须守恒的。现在通常我们把不同味道轻子数破坏的衰变道(例如表4.2中所列)称为Lepton Family Number破坏，而总轻子数破坏才称为Lepton Number 破坏，后者的例子有：$\tau^- \to e^+ \pi^- \pi^-$, $\tau^- \to \mu^+ \pi^- K^-$等。

4.2 量子电动力学基础

量子电动力学是描写电磁相互作用的基本理论，是最早的相对论性的量子场论，狄拉

克方程是其发展的开端，重整化理论最终证明了其理论的完备性，电子反常磁矩的计算和实验验证则是其高度精确性的体现。

4.2.1　相对论狄拉克方程

在非相对论量子力学中，我们用薛定谔方程来描写粒子的运动，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \hat{\mathcal{H}}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4.16}$$

这个方程是从经典能量和动量关系

$$\frac{\mathbf{p^2}}{2m} + V = E \tag{4.17}$$

出发，把能动量算符化，然后得到的。

对相对论性粒子，能动量关系变为$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$，薛定谔方程相应地换成克莱因-戈登(Klein-Gordon)方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{\mathbf{x}},t) \;\; = \;\; \nabla^2\psi(\vec{\mathbf{x}},t) - m^2\psi(\vec{\mathbf{x}},t). \tag{4.18}$$

实际上薛定谔最先写出的是这个方程，当他发现这个方程无法给出氢原子能级之后,才放弃它而写出来著名的非相对论薛定谔方程。除了“正常的”正能解($E > 0$)以外, 克莱因-戈登方程还有负能($E < 0$)解

$$\psi^*(\mathbf{x},t) = N^* e^{-i(\mathbf{p}\cdot\vec{\mathbf{x}} - Et)} \tag{4.19}$$

对自由粒子平面波解，其几率密度ρ和几率流矢量$\mathbf{j}$可以写为

$$\rho = 2|N|^2 E, \quad \mathbf{j} = 2|N|^2\mathbf{p}. \tag{4.20}$$

显然对负能解$E < 0$，意味着存在非物理的“负几率密度”。这里我们并不能像经典理论那样随意丢弃负能解，因为所有的解形成一个完备集。因此，克莱因-戈登方程不能对相对论性粒子提供一个自洽的描述。其原因在于克莱因-戈登方程含有对时间的二阶导数[52]。当然我们现在知道这个方程如果在量子场论的框架下是描写自旋为0的量子场的。

为了在相对论下描写自旋1/2的电子，狄拉克采取的战略是因子化能动量关系。1928年，狄拉克得到了只包含一阶导数的相对论性狄拉克方程，

$$i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\gamma\cdot\mathbf{p} + m)\,\psi \tag{4.21}$$

其中γ和γ^0为4×4狄拉克矩阵

$$\gamma^i \;\; = \;\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

这里，$i=1,2,3$，σ_i即为2×2泡利矩阵, I为2×2的单位矩阵。

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

泡利矩阵满足反对易关系

$$\{\sigma_i,\sigma_j\}=\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}. \tag{4.24}$$

因为$\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma^0$都是$4\times 4$的矩阵，我们可以统一把它们写为$\gamma^\mu,\mu=0,1,2,3$，其满足反对易关系

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}. \tag{4.25}$$

上面(4.22)式定义的是4×4狄拉克矩阵的狄拉克-泡利表示。狄拉克矩阵的一般运算规则在附录中给出。波函数$\psi(\mathbf{x},t)$ 满足的狄拉克方程可以改写为：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0. \tag{4.26}$$

上式所描写的自由粒子波函数ψ 也应为四维形式

$$\psi(\mathbf{x},t)=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

所以狄拉克方程实际上是4个联立的方程，应当有4个独立的解，对应于四个状态。狄拉克方程的平面波解可以写为

$$\psi(\mathbf{x},t)=u(E,\mathbf{p})\ e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}, \tag{4.28}$$

其中的函数$u(E,\mathbf{p})$是四分量的狄拉克旋量。它代表电子的场算符，是粒子的能量和动量的函数。所以，狄拉克方程在能动量空间的形式为，

$$(\not{p}-m)u=0. \tag{4.29}$$

其中$\not{p}=\gamma^\mu p_\mu$，四分量旋量波函数$u(E,\mathbf{p})$是粒子的四动量p_μ的函数。这时，几率密度ρ和几率流矢量$\mathbf{j}$可以合并定义为四矢量流

$$j^\mu=(\rho,\mathbf{j})=\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\ \psi=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{4.30}$$

量子力学的连续性方程可以写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0. \tag{4.31}$$

可以证明，伴随旋量波函数$\overline{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma^{0}$的四分量形式为

$$\overline{\psi}=(\psi_1^*,\psi_2^*,-\psi_3^*,-\psi_4^*). \tag{4.32}$$

下面我们从狄拉克方程(4.29)出发，给出自由粒子的解。首先考虑$\vec{\mathbf{p}}=0$粒子静止的情况。这时自由粒子平面波可以写为

$$\psi=u(E,0)\ e^{-iEt}, \tag{4.33}$$

代入方程(4.29)可得：$E\gamma^0\ u=mu$，写成四维形式：

$$E\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\\\phi_4\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\\\phi_4\end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

对上式移项可得

$$\begin{pmatrix}E-m&0&0&0\\0&E-m&0&0\\0&0&-E-m&0\\0&0&0&-E-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\\\phi_4\end{pmatrix}=0. \tag{4.35}$$

显而易见，我们得到四个相互正交的解，前两个解可以写为

$$u_1(E,0)=N\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad u_2(E,0)=N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

它们是正能解：$E=+m$。另外两个解可以写为

$$u_3(E,0)=N\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad u_4(E,0)=N\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

它们是负能解：$E=-m$。其中的N是归一化系数。这四个波函数也是自旋算符$\vec{\mathbf{s}}_z$的解：$u_1(E,0)$和$u_2(E,0)$分别表示自旋向上、自旋向下的正能解。$u_3(E,0)$和$u_4(E,0)$分别表示自旋向上、自旋向下的负能解。加上波函数的含时因子，静止的自由粒子的含时平面波解可

以写为：

$$\begin{aligned}\psi_1 &= N\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt}, \quad \psi_2 = N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt},\\ \psi_3 &= N\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{imt}, \quad \psi_4 = N\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{imt}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

对于一般的$\mathbf{p} \neq 0$的自由粒子情况，把自由粒子平面波函数$\psi(\mathbf{x},t)$直接代入狄拉克方程(4.29)，可以得到

$$(E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3 - m)u = 0. \tag{4.39}$$

在“狄拉克-泡利”表象下，上式可以写成

$$\left[\begin{pmatrix}I & 0\\0 & -I\end{pmatrix}E - \begin{pmatrix}0 & \sigma\cdot\mathbf{p}\\-\sigma\cdot\mathbf{p} & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}I & 0\\0 & I\end{pmatrix}\right]u = 0, \tag{4.40}$$

其中的I是2×2的单位矩阵。把四分量旋量波函数u写成两个2分量波函数(u_A,u_B)的列矢量

$$u = \begin{pmatrix}u_A\\u_B\end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

那么，可以把(4.40)式写成

$$\begin{pmatrix}(E-m)I & -\sigma\cdot\mathbf{p}\\\sigma\cdot\mathbf{p} & -(E+m)I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_A\\u_B\end{pmatrix} = 0. \tag{4.42}$$

由上式可以得到(u_A,u_B)满足的关联方程

$$u_A = \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E-m}u_B, \qquad u_B = \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A. \tag{4.43}$$

对u_A，可以取其相互正交的两个解为

$$u_A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad u_A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

那么，对应的u_B的表达式可以写为

$$u_B = \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_z & p_x - ip_y\\p_x + ip_y & -p_z\end{pmatrix}u_A, \tag{4.45}$$

所以，自由粒子狄拉克方程的前两个解为

$$u_1(E,\mathbf{p})=N_1\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_x+ip_y}{E+m}\end{pmatrix},\quad u_2(E,\mathbf{p})=N_2\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{p_x-ip_y}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix},\tag{4.46}$$

其中的$N_{1,2}$是归一化系数。同理可得u_3和u_4，

$$u_3(E,\mathbf{p})=N_3\begin{pmatrix}\frac{p_z}{E-m}\\\frac{p_x+ip_y}{E-m}\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_4(E,\mathbf{p})=N_4\begin{pmatrix}\frac{p_x-ip_y}{E-m}\\\frac{-p_z}{E-m}\\0\\1\end{pmatrix},\tag{4.47}$$

其中的$N_{3,4}$是归一化系数。这样，自由粒子的狄拉克方程的四个相互正交的解为

$$\psi_i=u_i(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)},\quad i=1,2,3,4.\tag{4.48}$$

实际上，狄拉克方程描写的粒子就是自旋量子数为1/2的旋量费米子。对于电子的情况，两个正能解$\psi_{1,2}$描写电子，两个负能解$\psi_{3,4}$描写电子的反粒子“正电子”。习惯上，用字母v代表反粒子的场算符，反粒子场也是狄拉克方程的解

$$\psi_i=v_i(E,\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)},\quad i=1,2,3,4.\tag{4.49}$$

相应地，反粒子场也满足狄拉克方程

$$(\not{p}+m)v=0.\tag{4.50}$$

在第一章中我们提到过，反粒子的场和正粒子的场原则上应该是互为复共轭的，但是这里的费米子场算符是用矩阵表示的，所以会更复杂，应该是用逆矩阵来表示，具体地，

$$\bar{u}=u^\dagger\gamma^0,\quad \bar{v}=v^\dagger\gamma^0.\tag{4.51}$$

在这样的定义下，它们满足狄拉克方程

$$\bar{u}(\not{p}-m)=0.\quad \bar{v}(\not{p}+m)=0.\tag{4.52}$$

可以证明，它们是正交完备的

$$\sum_{s=1,2}u^s\bar{u}^s=\not{p}+m,\quad \sum_{s=1,2}v^s\bar{v}^s=\not{p}-m.\tag{4.53}$$

如图4.3所示，u代表湮灭一个动量为p的费米子场，而$\bar{u}$则代表产生一个动量为p的反费米子场；$\bar{v}$ 代表湮灭一个动量为p的反费米子场，而v则代表产生一个动量为p的反费米子场。

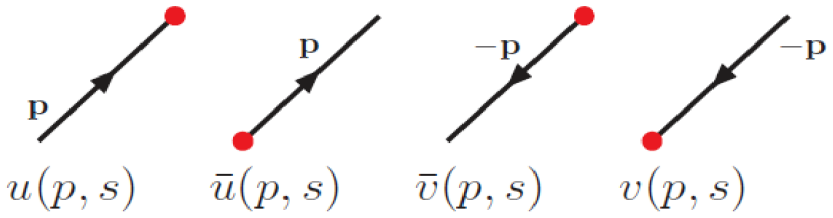


图 4.3: 费米子外线费曼规则。

如图-4.4所示，狄拉克假定，所谓的物理真空就是负能海洋中的所有能级都被填满，但所有正能级都空着的状态。在负能海中的电子接受到$\geq 2m_ec^2$的能量时，就跳到正能级之中，变成普通的正能电子，同时在负能量海洋中出现一个空穴，那就是正电子。能量转化成了正负电子对。电子和正电子互为反粒子，每一个带电粒子都有一个带相反电荷的反粒子.

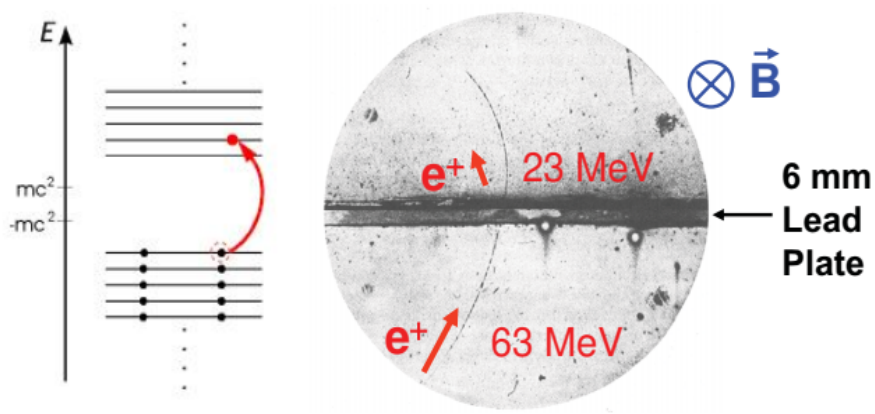


图 4.4: 在狄拉克真空中的电子和正电子(左图); 在威尔森云室中正电子轨迹照片(右图)[68]。

1932年，卡尔.安德森使用伯克利实验室的威尔森云室来研究宇宙射线。根据粒子径迹照片来推断粒子的性质。安德森在他所拍的第一张云室照片上就发现了电子的反粒子[68]，并命名为正电子(positron)。如图-4.4所示，安德森把云室放在垂直纸面的磁场中，使得带电粒子的运动产生偏转，然后根据粒子径迹长度、方向和偏转曲率半径等数据来推断粒子的性质。为了区分正负电荷，安德森在云室中放置了一个铅板，粒子通过铅板会减速，然后在洛伦兹力的作用下绕圈运动，可以观察到粒子的运动方向，从而确定其电荷为正。正电子是人类发现的第一个反粒子。后来实验发现所有的粒子均有反粒子。反粒子的发现是20世纪物理学最重要的发现之一。人们过去认为由稳定粒子$-(p,n,e)$组成的物质世界是永恒的，不会消失也不会产生。实际上的物质世界比我们现象的更加丰富多彩。正反

粒子可以湮灭，也可以成对产生。

在20世纪初，爱因斯坦提出了质能转换关系式，导致了原子能的发现和应用。不同类型的物质变化过程联系着不同程度的质能转化。在化学反应中，原子本身基本上保持不变，只是由一种化合物转变成另一种化合物，化学反应造成的能量变化约为1-10eV，而对应的静止质量的变化只有原子量的$10^{-9}-10^{-10}$数量级。原子核反应造成的能量变化约为1MeV量级，约占核子本身质量的千分之一。正反粒子的湮灭过程是最强的质-能转化过程。在正、反粒子湮灭时，全部的静止质量几乎都转化为动能。这种最强的能量转换形式如能在技术上加以利用（如正反物质火箭发电机），则比目前已知的核反应堆，在质-能转换效率上高上千倍。反物质在理论上是最理想的燃料。

4.2.2　量子电动力学拉氏量

从狄拉克方程出发，自旋1/2的费米子狄拉克场的自由拉氏量可以写为，

$$\mathcal{L}_0 \;=\; i\,\overline{\psi}(x)\,\partial\!\!\!/\,\psi(x) \;-\; m\,\overline{\psi}(x)\psi(x)\,. \tag{4.54}$$

显然，$\mathcal{L}_0$具有整体$U(1)$对称性。即在整体$U(1)$规范变换

$$\begin{aligned}\psi(x) \;&\to\; \psi'(x) \;\equiv\; e^{-iQ\alpha}\,\psi(x),\\ \overline{\psi}(x) \;&\to\; \overline{\psi'}(x) \;\equiv\; e^{iQ\alpha}\,\overline{\psi}(x).\end{aligned} \tag{4.55}$$

下是不变的，其中Q,α 是任意的实常数。然而，对于定域$U(1)$规范变换（Q仍然是任意实常数，但$\alpha=\alpha(x)$与时空坐标有关）

$$\begin{aligned}\psi(x) \;&\to\; \psi'(x) \;\equiv\; e^{-iQ\alpha(x)}\,\psi(x),\\ \overline{\psi}(x) \;&\to\; \overline{\psi'}(x) \equiv\; e^{iQ\alpha(x)}\,\overline{\psi}(x),\end{aligned} \tag{4.56}$$

由于(4.54)式中的导数项的变换为

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow \partial_\mu\psi'(x) = e^{-iQ\alpha(x)}\,(\partial_\mu - iQ\partial_\mu\alpha(x))\,\psi(x), \tag{4.57}$$

上式中的第二项破坏了$\mathcal{L}_0$的$U(1)$不变性。如果我们引入一个新的矢量场$A_\mu(x)$，并定义协变微商D_μ为

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow (\partial_\mu + iQA_\mu)\,\psi(x). \tag{4.58}$$

这时，矢量场$A_\mu(x)$的定域$U(1)$规范变换为

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x). \tag{4.59}$$

同时，$D_\mu\psi(x)$象场量一样变换，

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-iQ\alpha(x)}\;D_\mu\psi(x) \tag{4.60}$$

使得“扩展的拉氏量”$\mathcal{L}$的形式变为，

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - QA_{\mu}\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \tag{4.61}$$

在定域$U(1)$规范变换下的不变性得到恢复。当取$Q = -e$(e表示电子电荷的绝对值)时，A_{μ}就是我们熟悉的QED中的光子场（或者称之为电磁场）。

这样，我们根据规范原理导出了自旋$1/2$的费米子旋量场$\psi(x)$ 与规范场$A_{\mu}(x)$的相互作用项，就是我们非常熟悉的$\gamma f \bar{f}$电磁相互作用顶角。 为了使A_{μ}成为一个真实的能够传播的场，我们必须在拉氏量中加进涉及A_{μ}的导数项。这种类型的唯一规范不变的洛伦兹标量是

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.62}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \tag{4.63}$$

是电磁场的场强张量。可以验证$F_{\mu\nu}$是规范不变的，协变导数D_{μ}和$F_{\mu\nu}$ 的关系式为

$$D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu} = ieF_{\mu\nu}. \tag{4.64}$$

这样，包含了动力学项的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\,\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\,\overline{\psi}(x)\psi(x) - eA_{\mu}(x)\overline{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi(x). \tag{4.65}$$

上式不包含规范场质量项$m^2A_{\mu}A^{\mu}$，因为这样的项破坏规范对称性，所以光子是无质量的。

(4.65) 式中的拉氏量还包含如下特点：

(1) 由该拉氏量可以导出**著名的麦克斯韦方程组:**

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = J^{\nu}, \qquad with \quad J^{\nu} = e\overline{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi(x). \tag{4.66}$$

其中J^{ν}就是费米子电磁流。**这样，我们仅仅从$U(1)$规范不变性出发，导出了量子电动力学的拉氏量。**

(2) 由于光子不带电荷，拉氏量(4.65)不含规范场的自耦合项，即光子场无自相互作用。

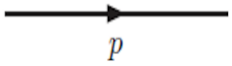
(3) 光子和物质场的耦合由对称群下的变换性质所决定。其它的高量纲的规范不变的耦合，如$\overline{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)F^{\mu\nu}$为量子电动力学的可重整性要求所排除[8]。

4.2.3　量子电动力学的费曼规则

经典电动力学成功的描写了宏观范围内的电磁现象。在高速微观范围内，量子电动力学(QED)是一种相当完美的电磁相互作用理论。电磁场是$U(1)_{em}$规范场。量子电动力学是最简单的阿贝尔规范场论。量子电动力学认为，带电粒子之间的电磁相互作用是通过交换光子而实现的，电磁相互作用的强度由耦合常数$\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$描写，由于$\alpha$很小，微扰论展开的高阶项收敛很快。

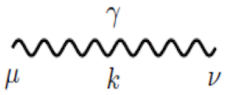
1949年，美国物理学家R.费曼[6] 提出用图示的方法来描写粒子的产生和衰变过程：这就是费曼图方法。这是一种描写粒子散射、反应和转化过程的形象、直观的方法。我们定义内线和外线，用不同形式的线段表示不同的外线粒子和内线传播子，用不同线段的交叉顶点表示相互作用，在顶点处用费曼规则表示粒子间的相互作用-耦合。然后根据费曼图来做理论计算。可以根据一个过程的费曼图和相应的费曼规则，很方便的写出跃迁矩阵元。用最简单的树图表示领头阶贡献，用单圈图表示次领头阶贡献，用多圈图表示更高阶的贡献，进而计算相关的可观测物理量。

作为非阿贝尔规范场的量子电动力学，其费曼规则也非常简单，从自由费米子的拉氏量(4.54)，可以得到电子的传播子



$$\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

一般用实线表示费米子(箭头表示正费米子运动方向或者反费米子的负动量方向)；外线费米子的费曼规则我们在4.2.1 节的图4.3中已经给出。一般用虚线表示自旋为0玻色子，用波浪线表示自旋$s = 1$的光子。从拉氏量的光子动能项(4.62)，可以得到光子的传播子



$$\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} + \frac{(\xi-1)k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

相互作用顶点(Vertex):　三条或多于三条线的连接点是相互作用顶角。从拉氏量的协变导数项中，我们可以得到电子和光子三点相互作用顶点[41]。顶角处满足相关量子数的守恒定律。顶角处的耦合系数由具体相互作用的性质（此处对于量子电动力学为电荷）决定。



$$ieQ_f\gamma_\mu$$

对于具体的不稳定粒子衰变过程或者两粒子碰撞过程，我们需要用量子场论来计算其衰变几率（宽度）和碰撞几率（截面）。按照量子力学理论，这种几率正比于各种跃迁振幅的和的平方。在量子场论框架下，按照路径积分表示相当于各种跃迁矩阵元和的平

[6] Richard Feynman (1918.5.11-1988.2.15), 美国物理学家。1942年在普林斯顿大学获得博士学位，导师是J.A.惠勒。费曼在洛斯阿拉莫斯国家实验室参加了制造原子弹的曼哈顿过程。著有经典的大学物理教科书《费曼物理学讲义》。因在QED重整化方面的工作和J. Schwinger, S.I. Tomonaga分享了1965年诺贝尔物理奖。

方，对于初末态确定的过程，跃迁矩阵元可以由费曼图来表示，由于定域场论的要求，没有超距作用，所以在初末态粒子场之间必须由合适的粒子场传递相互作用。**对具体跃迁过程，画费曼图的一些约定规则如下：**

(1) 时间轴一般以从左向右为正；

(2) **内线与外线：** 内线为中间过程，称为（虚粒子）传播子。外线表示在初态、末态中观察到的粒子，是实际存在的粒子。外线实粒子需要满足两个条件：(a) 初态和末态之间的总能量-动量守恒；(b) 每个实粒子都满足“质壳条件”：

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2. \tag{4.67}$$

内线粒子–传播子不需要满足“质壳条件”。

(3) 任何顶角上连续的费米子线必须为偶数条，箭头朝里和朝外的费米子线的条数相等，也就是说费米子线沿着箭头的方向必须是连续的，不能间断；这个规则反应的就是我们在4.1.3节由实验总结出的规律：轻子数守恒和重子数守恒（后面讲到）。

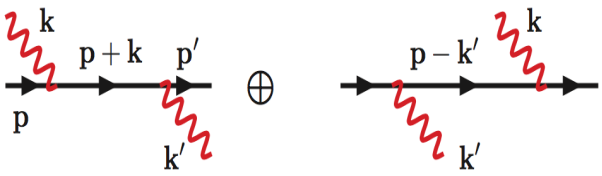


图 4.5: 康普顿散射过程$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$的领头阶费曼图。

对于每一个跃迁过程的费曼图，根据外线、传播子和顶角的费曼规则，可以直接写出相对应过程的跃迁振幅。如果一个过程包含几个费曼图，那么该过程的总振幅等于几个分振幅之和。以康普顿散射$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$ 为例，最低阶的两个费曼图如图 4.5所示。由于光子的全同粒子性质，可以看到领头阶的费曼图是两个s道，其中包含两个光子交换位置的费曼图。根据之前的费曼规则，与两个费曼图相对应的领头阶跃迁振幅可以写为

$$i\mathcal{M}_a = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\epsilon^*_\mu(k')\frac{i[(\not{p}+\not{k})+m_e]}{(p+k)^2-m_e^2}(-ie\gamma^\nu)u(p)\epsilon_\nu(k)\,, \tag{4.68}$$

$$i\mathcal{M}_b = \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k)\frac{i[(\not{p}-\not{k}')+m_e]}{(p-k')^2-m_e^2}(-ie\gamma^\mu)u(p)\epsilon^*_\nu(k'). \tag{4.69}$$

总振幅为两个分振幅之和，同时有

$$d\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 \propto \alpha^2. \tag{4.70}$$

但是，这个跃迁振幅和散射截面只是量子场论的领头阶近似。图4.5并不是完整的康普顿散射的全部可能费曼图，按照费曼图的规则，图4.6所示的费曼图也应该可以。只不

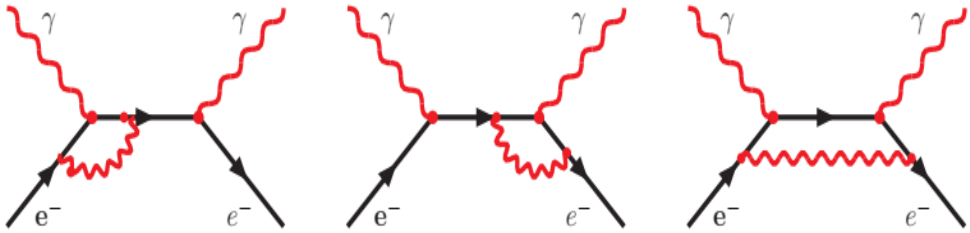


图 4.6:　康普顿散射过程$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$的典型一圈费曼图。

过这些图比图4.5中的图多了一个光子传播子和两个相互作用顶点。我们一般把图4.5中的费曼图称为树图（领头阶），而图4.6中的图称为一圈图修正，当然，按照费曼规则，我们还应该有两圈图、三圈图等多圈图的贡献。一圈图中多的两个顶点，每个都正比于电子电荷e，而e^2 则正比于精细结构常数$\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$；由于$\alpha$ 很小，所以我们经常忽略图4.6 中的一圈图和其它高阶修正。

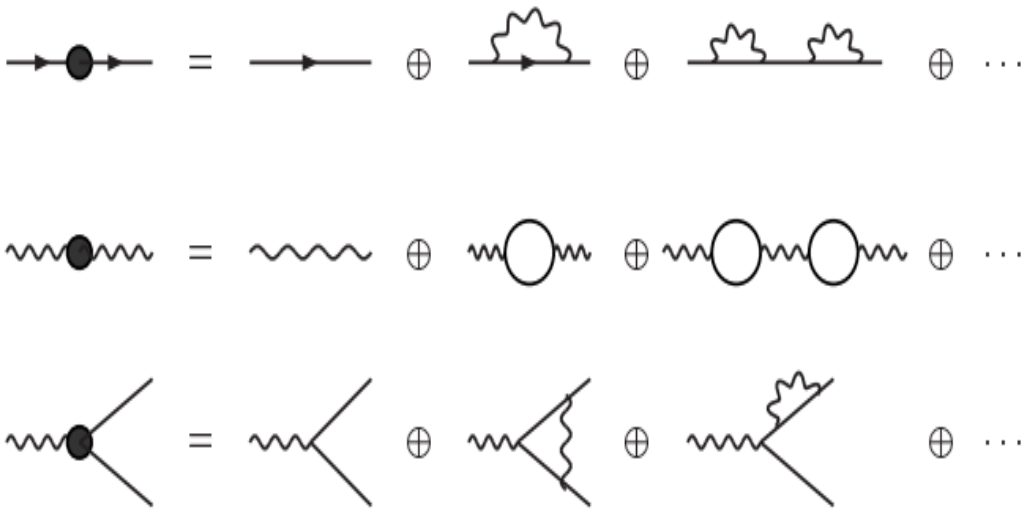


图 4.7:　量子电动力学中三种基本发散图形：电子自能图，光子真空极化图和顶角修正图。

不同于前一章中末态相空间的四动量积分，受到能动量守恒和质壳条件的限制，积分范围严重受限，这些圈图内的粒子由于是虚粒子，四动量没有任何限制。当圈图中粒子传播子的数量小于等于3时，对动量的四重积分会出现无穷大的发散问题。这些发散出现在所有的圈图计算中，这使得量子场论的微扰计算失去了应有的定量计算的物理意义。费曼、朝永振一郎(Tomonaga)、Schwinger 在技术上证明，我们可以把这些发散分别定义在电子质量m和耦合常数e的定义中，使它们成为实验测量的物理量。拉氏量中相应的量称为裸的质量和裸的耦合常数。这个过程称为重整化。能这么做的前提是，发散的数目是有限的，而费曼等人证明，在量子电动力学中只存在如图-4.7所示的三种发散图形：电子自能图，光子自能图和顶角修正图。我们可以采用重整化方法逐级的引入抵消项，吸收到物

理常数的定义中来消除发散。可以证明任何量子场论的计算中出现不能抵消的无穷大的数目确实是跟量子场论拉氏量中的物理可观测量的数目是相等的。量子场论的重整化和微扰计算在技术上是可行的。

实际上出现无穷大发散的理论原因在于我们的动量积分是从零到无穷大，这是有问题的。目前的拉氏量在实验上只验证到了TeV的量级，更高能量处可能有（应该肯定有）我们目前不知道的新理论、新粒子（质量很重），在那个能量尺度我们现有的理论将不适用。重整化的过程，就是把那些未知的新物理和重粒子的贡献等效定义到我们现有的物理参数中。也就是承认我们现有的量子场论应该是更高能量尺度的基本理论的有效理论。由量子力学不确定原理，$\Delta x \Delta p \sim \hbar$, 动量无穷大相应于空间无穷小，换句话说，无穷大的出现的原因是在坐标空间我们把积分积分到了我们所不知道的粒子的内部结构里。

4.2.4 电子和缪子的反常磁矩

在经典力学中，角动量对应于旋转，旋转的电荷相当于一个环形电流，必然产生磁矩。通过电磁学可以得到电子的轨道磁矩和角动量之间的关系为：

$$\mu_L = \frac{-e}{2m_e}\mathbf{L} = -g_l \mu_B \mathbf{L}, \tag{4.71}$$

其中单位磁矩为玻尔磁子$\mu_B = e/(2m_e)$，$g_l = 1$称之为朗德g因子。

在量子力学中，虽然自旋并不能用旋转来解释，但是由狄拉克方程可以导出[7]，自旋角动量为$\mathbf{s}$ 的带电粒子有磁矩：

$$\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{s}}. \tag{4.72}$$

其中e是粒子的电荷，m是粒子的质量。对于点粒子场，磁矩g因子满足关系$gS = 1$。例如对于$S = 1/2$的自旋角动量，有$g = 2$。对于轨道角动量，有$g = 1$。实际上，实验上测量的并不是以上的正常磁矩，而是gS 与1的差别，称为反常磁矩。对质子和中子，对他们的磁矩的实验测量结果为[1]：

$$\mu_p = 2.7928473446(8)\mu_N, \quad \mu_n = -1.9130427(5)\mu_N, \tag{4.73}$$

其中$\mu_N = |e|/(2m_p)$是核磁子。

如果质子和中子是点粒子，那么应该有$\mu_p = \mu_N, \mu_n = 0$。因为中子不带电，现在实验测得的中子磁矩完全是反常磁矩。对于质子和中子来说，由于它们是由夸克和胶子组成的复合粒子，反常磁矩问题来源于他们的内部结构，应由夸克模型来解释。因为反常磁矩与重子的内部结构有关，反过来也可以通过对重子的反常磁矩的实验测量来研究重子的内部结构。

[7] 具体推导可以参见[52] 的附录B。

在实验测量中发现的g因子和狄拉克方程的预言是有一定的偏差的，这称为反常磁矩，可以定义为

$$a_\mu = (g-2)/2. \tag{4.74}$$

对自旋量子数为1/2的电子和缪子，对它们的反常磁矩$(g-2)/2$实验测量值已经非常精确[1]：

$$a_e = 1159652180.91(26) \times 10^{-12}, \quad a_\mu = 11659209(6) \times 10^{-10}. \tag{4.75}$$

可以看出，电子和缪子的反常磁矩在很高的精度下不为0。我们已经知道轻子是没有内部结构的，那么，它们的反常磁矩肯定不是来源于内部结构的问题。它们来源于电磁场的自相互作用(量子涨落)，这可以通过量子电动力学的圈图计算获得。理论上，在量子场论中任何相互作用过程。包括基本粒子的磁矩需要考虑相互作用的量子修正，也就是图4.7中第三行基本相互作用的高级圈图的计算可以得到准确率极高的g因子。

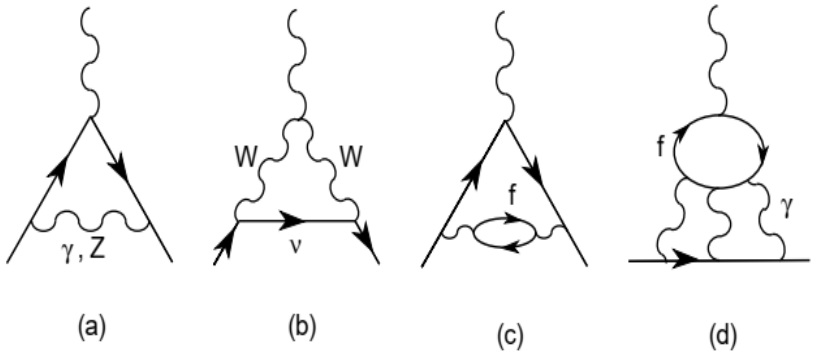


图 4.8: 对轻子反常磁矩有贡献的典型费曼图。包括电弱修正和强相互作用修正。

在量子电动力学理论中，对轻子反常量纲有贡献的最低阶圈图如图-4.8所示。经过理论物理学家多年的努力，对于反常量纲计算的电磁修正已达到四圈水平[69]，领头阶对数项计算达到五圈[70]，是目前最精确的理论计算，其误差主要来源于输入参数$\alpha = e^2/4\pi$的不确定性。由于实验精度的提高，理论上虽然弱相互作用的贡献远小于电磁相互作用，但是其贡献已经不可忽略，由$W^\pm$和Z^0玻色子圈图提供的弱作用修正为$(1.52 \pm 0.03) \times 10^{-9}$。另外，计算到两圈图或者更高阶修正的时候，例如图-4.8(c)或者(d)中的轻子圈可以换成夸克圈，夸克圈的贡献不可避免地就带来了强相互作用的贡献，而在第七章中我们将讨论强相互作用的非微扰性质，对反常量纲计算的主要理论误差来源于双圈和三圈强相互作用修正部分。

电子反常磁矩的理论计算和实验测量是奠定量子电动力学的基石。理论的最新计算结果是[71]

$$a_e^{SM} = 1159652181.61(23) \times 10^{-12}, \tag{4.76}$$

可以看出一直到第10位有效数字，电子的反常磁矩的理论计算值与实验测量还完全符合。这也是人类历史上得到精确实验验证的精确度最高的理论结果，成功地验证了量子电动力学的准确性。由于轻子反常磁矩的主要贡献来源于电磁场的自相互作用，我们可以反过来，根据(4.75)式中的实验值来确定电磁相互作用的精细结构常数α。由电子反常磁矩的实验测量值给出的精细结构常数数值精度已经非常接近最精确的铯反冲实验的精度[71]。

对于缪子，除了质量的不同，其相互作用性质完全相同。也由于质量的不同，缪子可以衰变到电子，因而是不稳定的，从公式(4.75)可以看出，其反常量纲的实验测量精度也低于电子反常量纲。但是人们依然对于缪子反常磁矩的研究兴趣远高于电子，原因是如果有超出标准模型的新物理，其贡献一般正比于m_ℓ^2/Λ_{NP}^2 (其中Λ_{NP} 标志新物理的能量尺度)，对于缪子反常磁矩的贡献远大于对于电子的贡献，在标准模型理论框架下，可以精确计算a_μ的值。在实验上，又可以对a_μ做精确测量。这就使得我们能够通过对a_μ的研究，精确检验标准模型理论，同时寻找新物理存在的信号或者证据。如果我们把标准模型理论计算的缪子反常量纲$a_\mu^{\rm SM}$ 写成三部分之和，即

$$a_\mu^{\rm SM} = a_\mu^{\rm QED} + a_\mu^{\rm EW} + a_\mu^{\rm Had}. \tag{4.77}$$

其中QED部分包含所有来自光子和轻子圈图的贡献，第二部分包含所有来自$W^\pm, Z^0$玻色子和希格斯粒子圈图的贡献，第三部分则来自夸克、胶子圈图贡献。这三部分，目前的计算结果是[1]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\rm QED} &= 116584718.92(0.03)\times 10^{-11}, \\ a_\mu^{\rm EW} &= 153.6(1.0)\times 10^{-11}, \\ a_\mu^{\rm Had} &= \begin{cases} (6939(39)(7)\times 10^{-11}, & \text{LO contribution}, \\ 19(26)\times 10^{-11}, & \text{NLO contribution}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.78}$$

由于强相互作用的非微扰性质，理论精确计算比较困难，在计算其对缪子反常磁矩的贡献$a_\mu^{\rm Had}$时，为了提高精确度，使用了与$\sigma(e^+e^-\to hadrons)$ 相关的实验数据。三项贡献之和最后得到的标准模型理论计算值为[1]

$$a_\mu^{\rm SM} = 116591803(1)(42)(26)\times 10^{-11}, \tag{4.79}$$

其中的三个误差分别来源于弱修正，领头阶强子圈图修正和次领头阶修正。理论与实验测量结果的偏离为

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\rm exp} - a_\mu^{\rm SM} = 261(63)(48)\times 10^{-11}. \tag{4.80}$$

标准模型理论预言值和实验测量值之间的偏离为3.7σ。电子和缪子的反常磁矩问题，一直是检验量子场论精确计算的重要场所。实际上在2001年以来，对于缪子的反常磁矩，理论和实验一直有超过两个标准偏差的偏离，这也成为粒子物理研究的热点之一。已经有许多工作，试图从新物理的角度解释这个偏离。要进一步提高理论预言精度，需要关于

截面$\sigma(e^+e^- \to hadrons)$和$\tau$ 衰变末态粒子的不变质量分布更精确的实验测量数据或者格点QCD理论的精确计算。

2021年3月，美国费米实验室Muon g-2 合作组公布了最新实验测量结果[47]：$a_\mu = 116592040(54) \times 10^{-11}$，与标准模型理论值$a_\mu(SM) = 116591810(43) \times 10^{-11}$[46]之间有3.3$\sigma$的偏离。如果把这个实验结果与之前实验结果作简单平均，则总的实验结果与理论中心值的偏差变小，但是由于实验误差也变小，理论与实验的相对偏差为

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\rm Exp} - a_\mu^{\rm SM} = (251 \pm 59) \times 10^{-11}, \tag{4.81}$$

置信度为4.2σ，已经非常接近公认的5σ新发现标准。

4.3　电磁散射过程

散射过程。根据能动量守恒的限制，正负电子不能湮灭到一个光子，最典型的是湮灭到两个光子。从图4.9可以看出，正负电子湮灭到双光子过程：$e^+e^- \to \gamma\gamma$的领头阶贡献来源于一个t道和一个u道，其实这个湮灭过程的费曼图就是康普顿散射的两个费曼图(图4.5)旋转90度就可以得到。所以它们的相互作用矩阵元应该是一样的，不一样的部分是末态的相空间积分和初末态粒子的种类不同。简单的计算可以得到这个湮灭过程的微分截面公式为[1]：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \to \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2}{2s}\frac{t^2+u^2}{tu}. \tag{4.82}$$

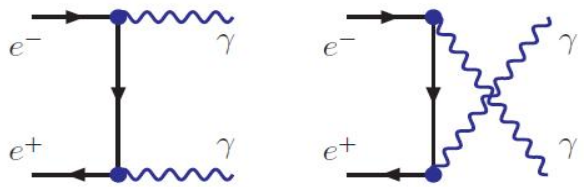


图 4.9:　正负电子湮灭到两个光子$e^+e^- \to \gamma\gamma$ 的领头阶费曼图。

电子和缪子散射过程

电子和缪子散射$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$, $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 过程在领头阶只有t道贡献，见图4.10。当然在高能时会有弱作用Z^0玻色子的贡献，我们这里不考虑。散射过程的计算公式可以完全由下面4.3.1节的轻子对湮灭产生过程的公式(4.96)作一个变换(入射的正电子变为出射的电子，出射的μ^+变为入射的μ^-)得到

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-\mu^+ \to e^-\mu^+) &= \frac{\alpha^2}{8|p|^2}\frac{s^2+u^2}{t^2} \\ &= \frac{\alpha^2(1+\cos^4\frac{\theta}{2})}{8|p|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}.\end{aligned} \tag{4.83}$$

其中$|p|$是质心系中末态粒子的动量大小。这个在反应质心系下成立的公式是在量子电动力学的一级近似下得到的，并且忽略了轻子的质量。在量子层次，$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$和$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$这两个过程应该没有差别，没有同电相斥，异号相吸的现象。

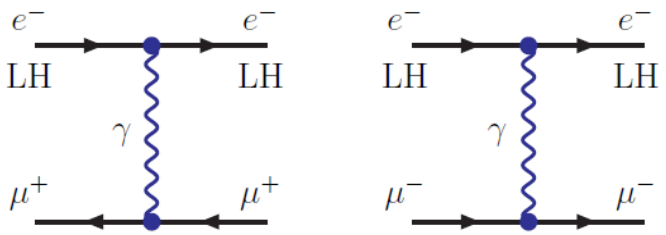


图 4.10: 电子和缪子散射$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$, $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ 的领头阶费曼图。

穆勒(Moeller)散射$e^-e^- \to e^-e^-$

这是一个基本的电磁弹性散射过程。通过对这个散射过程的实验测量可以在一定程度上检验量子电动力学。20世纪70年代，根据对这个散射过程的实验测量，并根据当时实验的质心系能量300~500MeV和实验精确度确定了在10^{-16}米的尺度上仍可以将电子看作点粒子。由于末态的两个电子是全同粒子，因而穆勒散射过程有t道和u道两个图的贡献，见图4.11。散射微分截面公式为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s}\left\{\frac{2}{\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)} + \frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}\right\}. \tag{4.84}$$

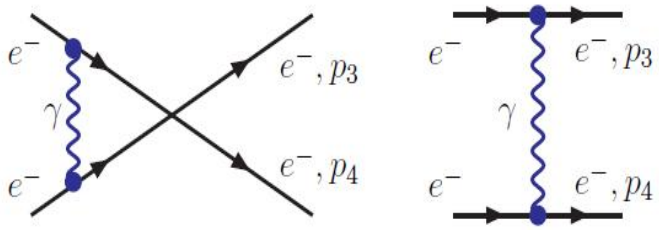


图 4.11: 穆勒散射过程$e^-e^- \to e^-e^-$的领头阶费曼图。

除了这一节提到的轻子散射过程，还有电子和夸克的散射过程，它们是粒子物理实验研究核子结构函数、强子内部分子分布函数的主要手段，我们将在第七章详细介绍。

4.3.1 轻子对湮灭产生过程

对$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$散射过程，在树图层次只有S道贡献，其费曼图如图-4.12所示。如果

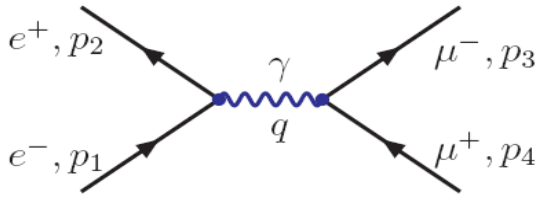


图 4.12:　$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射过程的S-道树图费曼图。

只考虑电磁相互作用，就只有光子传播子的贡献，S道的振幅为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) &= \bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(p_3)(-ie\gamma^\nu)v(p_4) \\ &= \frac{ie^2}{q^2}\left[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\right]. \end{aligned} \tag{4.85}$$

矩阵元的模方为

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\ \bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2)\right]\cdot\left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\ \bar{v}(p_4)\gamma_\nu u(p_3)\right]. \tag{4.86}$$

对于非极化情况，要对初态电子-正电子自旋求平均，对末态缪子自旋求和，其中自旋求和关系已在公式(4.53) 中给出，所以有

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4}\sum_{s_i}|\mathcal{M}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)|^2 \\ &= \frac{e^4}{4q^4}Tr\left[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu\right]\cdot Tr\left[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\nu\right], \end{aligned} \tag{4.87}$$

一般情况下，加速器中正负电子能量远大于其静止质量，在(4.87)式中，令$m_e = 0$可得

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4q^4}Tr\left[\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\right]\cdot Tr\left[\not{p}_3\gamma_\mu\not{p}_4\gamma_\nu - m_\mu^2\gamma_\mu\gamma_\nu\right]. \tag{4.88}$$

利用附录中的γ矩阵求迹公式可得

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{4q^4}\left\{4\left[p_1^\nu p_2^\mu + p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu}p_1\cdot p_2\right]\right. \\ &\quad \left.\cdot 4\left[p_{3\mu}p_{4\nu} + p_{3\nu}p_{4\mu} - g_{\mu\nu}\left(p_3\cdot p_4 + m_\mu^2\right)\right]\right\} \\ &= \frac{e^4}{4q^4}\cdot 16\left\{(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - p_1\cdot p_2\left(p_3\cdot p_4 + m_\mu^2\right)\right. \\ &\quad + (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - p_1\cdot p_2\left(p_3\cdot p_4 + m_\mu^2\right) \\ &\quad \left. + 4(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + 4m_\mu^2 p_1\cdot p_2 - 2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)\right\} \\ &= \frac{8e^4}{q^4}\left\{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + m_\mu^2 p_1\cdot p_2\right\}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

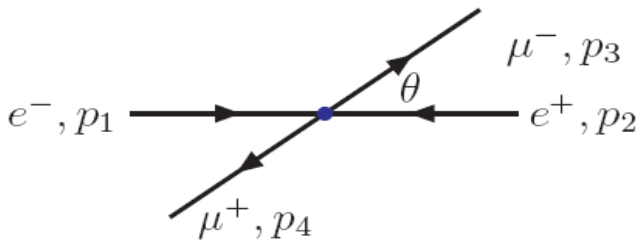


图 4.13: 在质心系中的$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射过程。

在e^+e^-质心系下，我们取$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$过程中的4-动量相对关系如图-4.13所示

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, E), \\ p_2 &= (E, 0, 0, -E), \\ p_3 &= (E, |\mathbf{p}_3|\sin\theta, 0, |\mathbf{p}_3|\cos\theta), \\ p_4 &= (E, -|\mathbf{p}_3|\sin\theta, 0, -|\mathbf{p}_3|\cos\theta), \end{aligned} \tag{4.90}$$

其中$|\mathbf{p}_3| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$。另外，由能动量守恒$(p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$，得

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = E^2 - E|\mathbf{p}_3|\cos\theta, \tag{4.91}$$

同理有

$$p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = E^2 + E|\mathbf{p}_3|\cos\theta, \tag{4.92}$$

把上式代入(4.89) 式中，可得

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{2E^4}\left[E^2(E - |\mathbf{p}_3|\cos\theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{p}_3|\cos\theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2\right] \\ &= e^4\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{4.93}$$

把上面的矩阵元平方公式代入质心系下$2 \to 2$过程的微分截面公式(2.175) 可以得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s}\sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}\left[\left(1 + \frac{4m_\mu^2}{s}\right) + \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right)\cos^2\theta\right], \tag{4.94}$$

其中$s = 4E^2$为质心系能量平方，$\alpha = e^2/(4\pi)$为电磁精细结构常数。如果对撞质心系能量远大于缪子质量，则上面公式简化为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4s}\left[1 + + \cos^2\theta\right]. \tag{4.95}$$

利用第二章引进的Mandelstam变量，上式可以改写为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{8|p|^2}\frac{t^2 + u^2}{s^2}. \tag{4.96}$$

将(4.94)式对立体角$d\Omega$积分可得总截面公式：

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\left(1+\frac{4m_\mu^2}{s}\right). \tag{4.97}$$

对高能正负电子对撞机实验，$m_\mu^2/s \ll 1$，缪子质量可以忽略，即有

$$\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \tag{4.98}$$

这个公式表面，对于电磁散射过程，其反应几率（截面）正比于精细结构常数的平方，反比于质心系能量平方，也就是说，随着对撞能量的提高，反应截面是越来越小的。在上述计算过程中把缪子质量换成τ轻子质量，由于轻子相互作用的普适性，就可以马上得到$e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ 的公式。

4.3.2　R值测量

在上一节的散射过程中把末态的缪子对换成夸克对，可以类似地计算反应$e^+e^- \to q\bar{q}$最低阶的公式，这个反应的树图阶也只有s-道。不同的是，这里夸克的电荷是分数电荷e_q，而且夸克有额外的颜色自由度$N_c = 3$，因此其截面公式为

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) &= \frac{1}{2s}\int\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 d\Phi \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\cdot e_q^2\cdot N_c\end{aligned} \tag{4.99}$$

上面的计算过程虽然简单，但是这个截面公式却并不是实验可观测量，在后面的强相互作用理论中我们会讲到夸克禁闭现象，也就是夸克只能在强子的束缚态中存在。上述反应末态中的正反夸克最后必须强子化为介子和重子才能被实验观测到。**如果假设夸克-强子对偶性(quark-hadron duality)** 的存在，也就是假设理论计算的末态产生的夸克对产生截面，跟实验中测量到的所有强子末态的集合是相等的，我们可以定义

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to hadrons)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \simeq N_c\sum_q e_q^2. \tag{4.100}$$

上式只在较低能区($s \ll m_Z^2$)，忽略弱作用Z玻色子的贡献，而且只考虑最低价树图的情况下才是适用的。

由于不同夸克的质量差别很大，对撞机的不同质心系能量能够产生的末态有效夸克数目也是不同的, 忽略重夸克质量的影响，相对应的R 值的标准模型理论预言则可以写为

$$R = N_c\sum_{i=1}^{n}Q_i^2 = \begin{cases}\frac{2}{3}\,N_C & for \quad q = u,d,s; \\ \frac{10}{9}\,N_C & for \quad q = u,d,s,c; \\ \frac{11}{9}\,N_C & for \quad q = u,d,s,c,b.\end{cases} \tag{4.101}$$

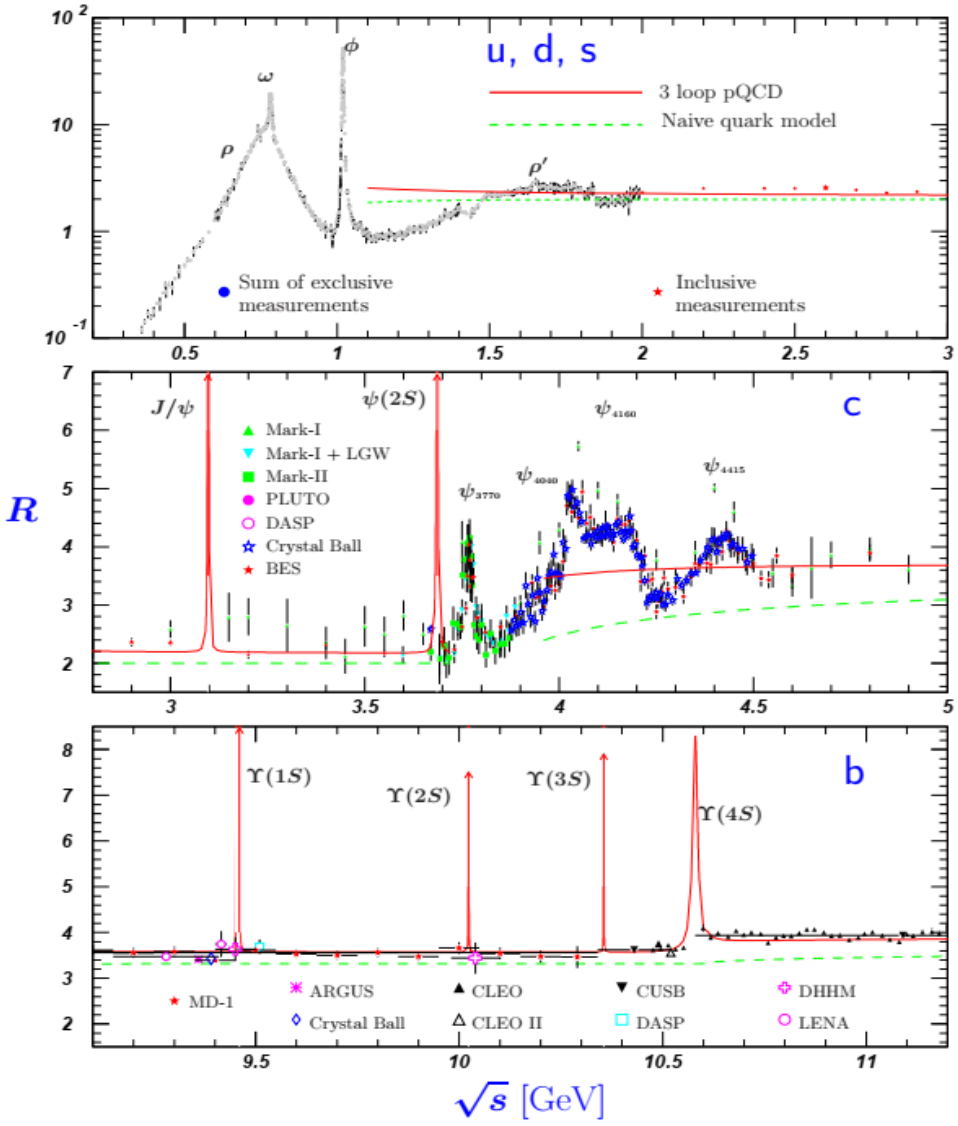


图 4.14: e^+e^- 对撞实验中产生截面比值R随质心系有效能量$\sqrt{s}$的变化[1]。

另外，量子场论的计算是基于微扰论的，完整精确的计算应该包括圈图修正，这里既有轻子也有夸克，因而高阶修正有量子电动力学和量子色动力学两种修正，因为量子电动力学的精细结构常数远小于强相互作用，作为很好的近似，我们可以先忽略电磁修正，只考虑领头阶的量子色动力学修正，那么有

$$R = N_c \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\right), \tag{4.102}$$

这将提供大约10%的增强。在比较低能量区域，对R值的实验测量结果如图-4.14所示[1]。显然，在较低的(u, d, s)能区，在中间的J/ψ能区和较高的Υ能区的实验测量数据都支持$N_C = 3$。在图4.14第二个图中可以看出**中国科学院高能物理研究所BES实验组在北京正负电子对撞机上对R值在2-5GeV能区做了最精确的测量，大幅度降低了实验测量误差[72]**。

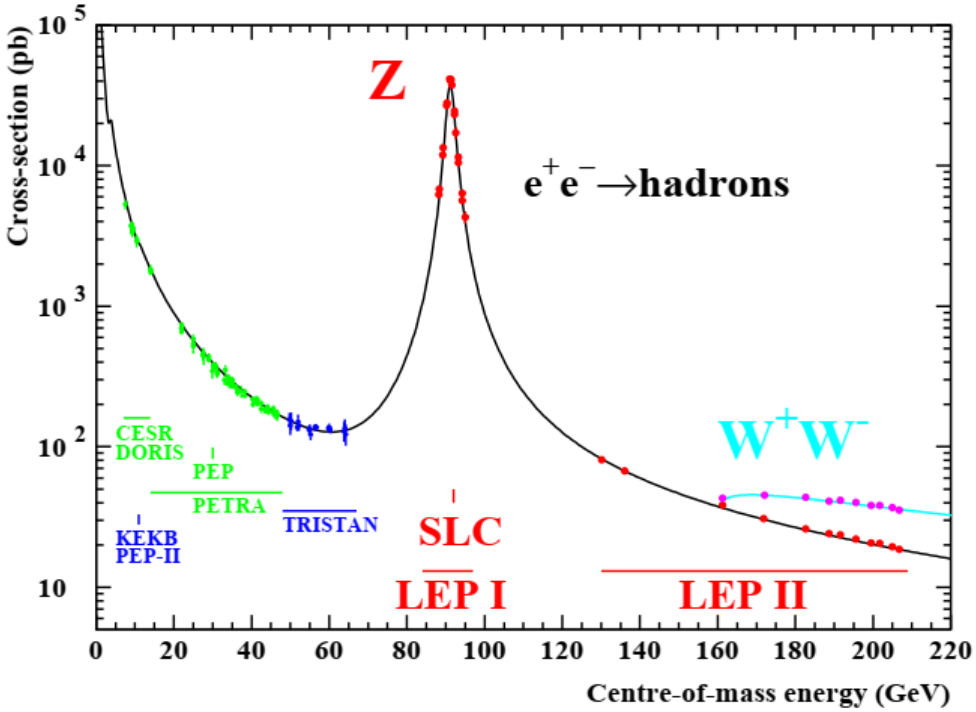


图 4.15: 作为质心系能量函数的强子产生截面$\sigma_{had} = \sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})$。实线表示标准模型理论预言，包括光子辐射修正的影响[73]；数据点表示各个正负电子对撞机实验(CESR，DORIS，KEKB，PEP-II，PEP，PETRA，TRISTAN，SLC，LEP-I 和LEP-II)的测量结果，同时标出了各个加速器的能量区间。

R值的测量是验证QCD理论的基本实验之一，也是夸克分数电荷和颜色存在的最有力实验证据之一。在各个能区的正负电子对撞机实验中，均可以对$e^+e^- \to$ hadrons的产生截面做精确测量。图-4.15表示1973年以来先后运行的几个正负电子对撞机实验，在比较高能量区域对强子产生截面$\sigma_{had}(e^+e^- \to \text{hadrons})$的精确实验测量结果。图中的实线表示在整个能区的标准模型理论预言值。从图-4.15的左边低能区开始，首先是德国DESY的DORIS正负电子对撞机，其最大质心系能量为11.2 GeV，运行时间为1973-1983年。美国康奈尔的CESR正负电子对撞机，其最大质心系能量为12 GeV，运行时间为1979-2002年。然后是KEKB和PEP-II，也就是日本和美国的两个B介子工厂，1999年投入运行，主要运行在$\Upsilon(4S)$的共振态峰值$E_{CM} = 10.5$ GeV附近。PETRA是在德国DESY建造的正负电子对撞机，最大质心系能量为46.8 GeV，运行时间为1978-1986年。PEP是在美国SLAC建造的正负电子对撞机，最大质心系能量为30 GeV，运行时间为1980-1990年。这些实验对σ_{had}的实验测量数据为左侧的绿色误差棒。TRISTAN是在日本KEK建造的正负电子对撞机，最大质心系能量为64 GeV，运行时间为1987-1995年，其实验数据为蓝色误差棒。

由图-4.15中曲线可以看到两个峰值，一个在低端：$\sqrt{s} \sim 0$附近，一个在Z^0介子质

量$M_Z \approx 91$GeV附近。当质心系能量$\sqrt{s}$比较小时，虚光子交换过程对$e^+e^- \to \gamma^* \to q\bar{q}$过程起主要作用。然后随着对撞质心系能量$\sqrt{s}$变大，产生截面由第一个峰值处按照$1/S$快速下降。在$m_Z$附近能区，$Z^0$共振贡献对$e^+e^- \to q\bar{q}$过程起主要的作用，实验数据主要由位于日内瓦的欧洲核子中心LEP 实验提供。当$\sqrt{s} \geq 2m_W$时，实验数据主要由LEP II实验提供。

4.3.3 巴巴散射和Drell-Yan过程

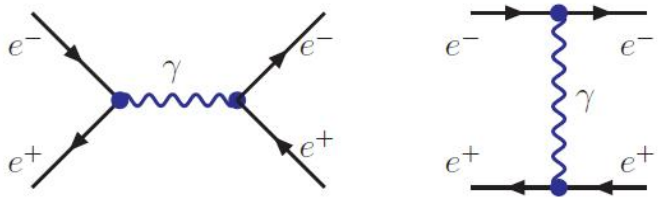


图 4.16: 巴巴弹性散射$e^+e^- \to e^+e^-$过程的领头阶费曼图。

正负电子对撞机实验中最简单的过程是$e^+e^- \to f^+f^-$。末态费米子可以是轻子，也可以是夸克; 当末态轻子是其它轻子对（例如$\mu^+\mu^-$、$\tau^+\tau^-$）或者夸克对时，是我们之前刚讨论的情况，只有“s-道”有贡献。当末态轻子是电子对或者电子中微子对时，如图-4.16所示的“s-道”和“t-道”均有贡献。最典型的是巴巴弹性散射$e^+e^- \to e^+e^-$，对于这个过程的s-道贡献，其散射振幅参见公式(4.85)。对于t-道贡献，其振幅可以写为:

$$\mathcal{M}^{(t)} = [\overline{v}(p_2)\gamma^\alpha v(p_4)] \frac{e^2}{t} [\overline{u}(p_3)\gamma_\alpha u(p_1)] \tag{4.103}$$

对于（正）电子来说，其手征性有两种可能性，例如对于确定的左手(L)-左手(L)-组合，其振幅的模方为

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\bar{e}_L e_L \to e_L \bar{e}_L)|^2 &= 16(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \left|e^2/s + e^2/t\right|^2 \\ &= 4u^2 \left|e^2/s + e^2/t\right|^2 . \end{aligned} \tag{4.104}$$

其中$u = (p_1 - p_4)^2$。同理，对于确定的右手(R)-右手(R)-组合，其振幅的模方为

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_R \to e_R \bar{e}_R)|^2 = 4u^2 \left|e^2/s + e^2/t\right|^2 . \tag{4.105}$$

对其它可能的手征组合情况，则有

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_L e_L \to e_R \bar{e}_R)|^2 = 4t^2 \left|e^2/s\right|^2 , \tag{4.106}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_L \to e_L \bar{e}_L)|^2 = 4t^2 \left|e^2/s\right|^2 , \tag{4.107}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_L e_R \to e_R \bar{e}_L)|^2 = 4s^2 \left|e^2/t\right|^2 , \tag{4.108}$$

$$|\mathcal{M}(\bar{e}_R e_L \to e_L \bar{e}_R)|^2 = 4s^2 \left|e^2/t\right|^2 , \tag{4.109}$$

其中$t=(p_1-p_3)^2$，$s=(p_1+p_2)^2=4E^2$。

可以证明一个左手极化或右手极化的入射轻子$e^-_{L,R}$与一个无极化的e^+的散射截面是相等的，这反映的是电磁相互作用中，宇称是守恒的：

$$\frac{d\sigma_L}{dt} = \frac{d\sigma_R}{dt} = \frac{e^4}{8\pi s^2}\left\{u^2\left|1/s+1/t\right|^2+t^2/s^2+s^2/t^2\right\}. \tag{4.110}$$

把上述结果加到一起，可得自旋平均的微分截面为：

$$\frac{d\sigma}{dt}(e^+e^-\to e^+e^-) = \frac{e^4}{8\pi s^2}\left\{u^2\left|1/s+1/t\right|^2+t^2/s^2+s^2/t^2\right\}. \tag{4.111}$$

如果我们选择如图4.13和公式(4.90)所示的散射过程的4-动量和角度的关系，可得

$$u=-\frac{s}{2}(1+\cos\theta),\quad t=-\frac{s}{2}(1+\cos\theta), \tag{4.112}$$

则著名的巴巴弹性散射过程的微分散射截面公式为，

$$\frac{d\sigma(e^+e^-\to e^+e^-)}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4s}\left\{1+\cos^2\theta+2\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}-\frac{4\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}\right\}. \tag{4.113}$$

当然在高能时，也会有Z^0玻色子的弱作用贡献，由于宇称不守恒，上述计算会变得左右手征不对称，公式复杂很多。

强子碰撞中轻子对产生: Drell-Yan过程

1970年，S. Drell[8]和颜东茂[9]指出在强子对撞实验中，产生一对正反轻子对[74]的反应(其中X为任意强子态)

$$p+p\to\mu^+\mu^-+X, \tag{4.114}$$

实际上是通过正反夸克对湮灭为一个虚光子之后产生的，其领头阶的费曼图如图4.17所示。可以看出它实际上就是$e^+e^-\to q\bar{q}$ 过程的时间反演。这个过程的微分截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q\bar{q}\to\mu^+\mu^-)=\frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta). \tag{4.115}$$

此类过程现在都被称作“Drell－Yan”过程，后来的实验也确实验证了上面的角分布，证明强子对撞中的轻子对产生主要来源于单个虚光子的贡献。由于此过程的理论计算比较简单，之后也很快有理论的高阶修正计算，而且实验上缪子的探测效率也是最高的，“Drell－Yan”过程也成为测量强子中夸克分布函数的重要手段之一。

[8]Sidney David Drell (1926.9.13-2016.12.21), 美国理论物理学家。1949年在伊利诺艾大学获博士学位，在量子色动力学和粒子物理研究中有重要贡献，2000年获费米奖，2011年获得美国国家科学奖。

[9]Tung-Mow Yan (1937- 今)，美籍华裔物理学家，康奈尔大学教授。1968年在哈弗大学获博士学位，师从诺贝尔奖获得者J.Schwinger教授。

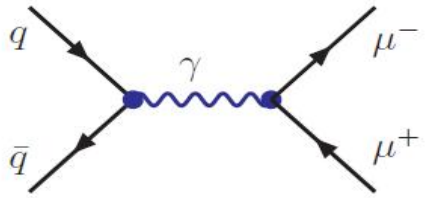


图 4.17: 强子碰撞中“Drell-Yan”轻子对产生过程的领头阶费曼图。

4.4 中微子振荡

如果中微子有非零质量，质量本征态不等于相互作用本征态，不同代中微子之间会有混合，那么，就会发生中微子振荡。在$t=0$时产生的$\nu_\alpha(t=0)$中微子，由于中微子是通过弱作用产生的，ν_α肯定是弱作用的本征态。在随后的飞行传播中，却必须以质量本征态传播，由于不同的质量本征态的飞行速度不同，质量小的本征态速度快，肯定首先到达探测器。这个质量本征态是不同弱作用本征态的叠加，意味着$t>0$时刻，飞行过距离L后，有一定的几率变成另一种中微子ν_β: $\mathcal{P}_{\alpha\beta}\neq 0$，这个几率大小是飞行距离的函数。这种现象称之为中微子振荡。 实际上中微子束流传播通过的介质的性质对中微子振荡也有较强的影响。我们在这里只对真空中的中微子振荡作一简单介绍，不涉及介质中传播的情况[75]。对中微子物理更详细的讨论，读者可以看文献[38, 76, 77]。

4.4.1 两种中微子间的振荡

为了演示中微子振荡的机制和规律，我们先假设只有两种中微子，相互作用本征态和质量本征态之间的混合矩阵可以简化为

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}. \tag{4.116}$$

假设t=0时刻实验产生的只有电子中微子，反解上述方程，我们会得到初始时刻质量本征态$|\nu_e>$的几率振幅：

$$<\nu_e|\nu_1\rangle=\cos\theta,\quad <\nu_e|\nu_2\rangle=\sin\theta. \tag{4.117}$$

中微子在传播过程中以质量本征态$|\nu_i\rangle$(i=1,2)飞行，期间没有发生相互作用，那么在t 时刻的质量本征态的表达式为

$$|\nu_1\rangle=\cos\theta\, e^{-iE_1t},\quad |\nu_2\rangle=\sin\theta\, e^{-iE_2t}. \tag{4.118}$$

这时，如果我们用探测器去测量中微子，就会测到t 时刻的电子中微子和缪子中微子的数量；理论上我们可以通过上面(4.116)得到t时刻这两种中微子的几率振幅，例如缪子中微

子振幅为

$$\begin{aligned} |\nu_\mu\rangle &= -\cos\theta\, e^{-iE_1 t}\sin\theta + \sin\theta\, e^{-iE_2 t}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta\,(e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}). \end{aligned} \tag{4.119}$$

测量到缪子中微子的几率则是上述振幅的平方

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{e\mu} &= \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)\,[1-\cos(E_2 t - E_1 t)] \\ &= \sin^2(2\theta)\,\sin^2\frac{(E_2-E_1)\,t}{2}. \end{aligned} \tag{4.120}$$

考虑中微子质量非常接近于0，$|\vec{\mathbf{p}}_1| \approx |\vec{\mathbf{p}}_2| = p \approx E$，即

$$E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{\mathbf{p}}_i|^2} \approx |\vec{\mathbf{p}}_i| + \frac{m_i^2}{2E_i}. \tag{4.121}$$

则在t时刻出现缪子中微子和电子中微子的几率分别为

$$\mathcal{P}_{e\mu} = \sin^2(2\theta)\,\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 t}{4E}\right), \tag{4.122}$$

$$\mathcal{P}_{ee} = 1 - \mathcal{P}_{e\mu}. \tag{4.123}$$

其中$\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$是两种中微子质量的平方差。考虑到中微子总是以非常接近光速运动的，上式中的时间t可以在自然单位制中直接换成中微子的飞行距离L.

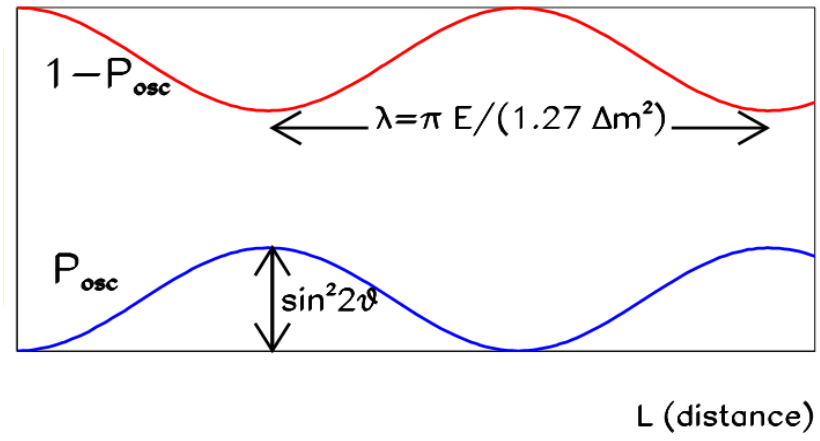


图 4.18:　振荡几率$\mathcal{P}_{osc}$和再现几率$\mathcal{P}_{\alpha\alpha} = 1 - \mathcal{P}_{osc}$ 随距离L的变化。

如果中微子质量用电子伏特做单位，能量用GeV做单位，飞行距离用公里做单位，则缪子中微子的振荡产生几率和电子中微子的再现几率随距离L的变化如图-4.18所示。可以明显看出，电子中微子的数量随着飞行距离的增加缓慢减少，到达最低点$(1-\sin^2 2\theta)$后

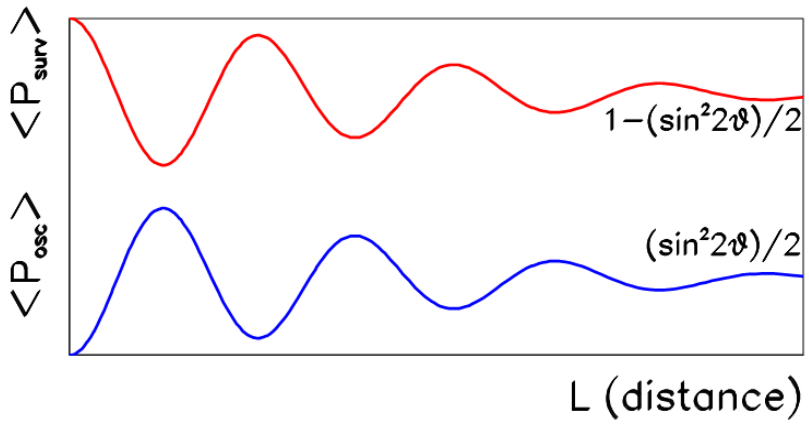


图 4.19: 对能量分布做平均后的中微子振荡几率$\mathcal{P}_{osc}$和再现几率$\mathcal{P}_{\alpha\alpha} = 1 - \mathcal{P}_{osc}$随距离$L$的变化。

又开始缓慢增加，周而复始，按照正弦函数的平方关系而振荡；对于缪子中微子来说，其数量从开始为0，随着传播距离的增加而缓慢增加，然后又缓慢减少，与电子中微子成互补的振荡曲线。

对实际的中微子振荡，中微子不是单色的，有一个能量分布，需要对能量分布做平均，

$$< \mathcal{P}_{\alpha\beta} >= \int dE_\nu \frac{d\Phi}{dE_\nu} \sigma_{CC}(E_\nu)\, \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu). \tag{4.124}$$

平均后的几率分布随距离L的变化如图-4.19所示。

4.4.2 中微子振荡的一般规律

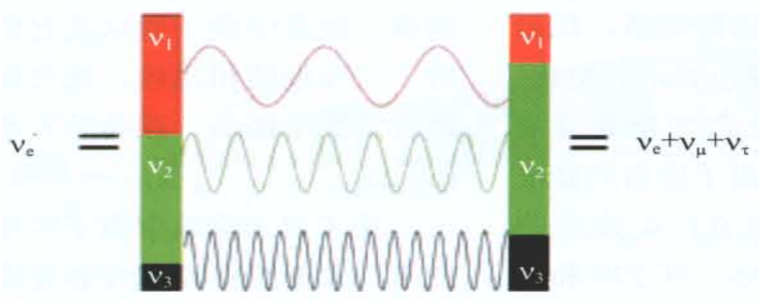


图 4.20: 电子中微子作为三种中微子质量本征态的组合，由于不同质量本征态速度的不同，在经过一段距离飞行后，其比例发生变化，重新组合成弱作用本征态后会变成另外的μ和τ中微子。

中微子振荡的原因是三种中微子的质量本征态与弱作用本征态不同。中微子的产生和探测都是通过弱相互作用，而传播则由其质量本征态决定。由于存在混合，产生时的弱

作用本征态$\nu_e(\nu_\mu,\nu_\tau)$是三种中微子质量本征态ν_1,ν_2,ν_3的迭加。三种质量本征态按不同的物质波频率传播，传播速度由质量大小决定，因此如图4.20所示在经过足够长的传播距离后三种中微子质量的比例会跟开始时不同，这时候由实验观察中微子，会呈现出不同的弱作用本征态成分。当用弱作用去探测中微子时，就会看到不同的中微子。

一般地说，味道本征态并不等同于质量本征态，二者之间的变换关系是

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix}. \tag{4.125}$$

其中U是3×3的幺正混合矩阵，也称为PMNS矩阵。为了使得物理意义更清楚，可以将混合矩阵参数化为3个欧拉转动矩阵的乘积

$$U=\begin{pmatrix}\cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0\\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23}\\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13}e^{-i\delta}\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_{13}e^{-i\delta} & 0 & \cos\theta_{13}\end{pmatrix}. \tag{4.126}$$

因此这里按照线性代数，一个3×3幺正矩阵可以由3个混合角和一个复相角，一共四个参数来描写。一般来说，如果有N 种质量为m_i的中微子，那么混合角的数目等于$N(N-1)/2$，而且有$(N-1)(N-2)/2$ 个不为0的相位（CP破坏相角）。在中微子的传播过程中以质量本征态飞行，只有当中微子有不同的质量，传播速度的不同会造成味道量子数并不守恒。因而探测到中微子发生振荡的可能性跟中微子质量平方差别相关，三种中微子可以有两种质量平方差Δm^2_{21}和Δm^2_{32}。因此，描写标准模型的三种中微子振荡的实验最少可以由4个混合参数和2个质量参数来描写，这也是下一节的中微子振荡实验已经测量到的6个参数。

类似于上一节两种中微子混合的情况，我们可以推导出三种中微子混合的公式。假设一个中微子的味道本征态$|\nu_\alpha\rangle$通过

$$l_\alpha + N \to \nu_\alpha + N' \tag{4.127}$$

散射过程产生，可以把$|\nu_\alpha\rangle$展开成质量本征态$|\nu_i\rangle(i=1,2,3)$的线性叠加，

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i}\,|\nu_i\rangle. \tag{4.128}$$

那么，在时间t (或距离L)以后，它随时间的演化为

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i}\,|\nu_i(t)\rangle. \tag{4.129}$$

我们用$\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ 来表示一个（产生时）ν_α中微子被测量成一个ν_β中微子的几率。该几率依赖于三个因素：**变换矩阵U，传播时质量本征值的变化，传播距离L。** 几率$\mathcal{P}_{\alpha\beta}$的表达式为

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = |\langle\nu_\beta(t)|\nu_\alpha(0)\rangle|^2 = \left|\sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i}\,U^*_{\beta i}\langle\nu_i(t)|\nu_i(0)\rangle\right|^2. \tag{4.130}$$

如果忽略中微子转播时跟物质的相互作用，并且中微子束流的能量都是相同的，其传播类似于平面波

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t}|\nu_i(0)\rangle, \tag{4.131}$$

其中E_i表示中微子ν_i的能量，那么有

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{j\neq i}^{3} \mathrm{Re}\left[U^*_{\alpha i}\,U_{\beta i}\,U_{\alpha j}\,U^*_{\beta j}\right]\,\sin^2\left(\frac{\Delta_{ij}}{2}\right)\\ &\quad +2\sum_{j\neq i}^{3} \mathrm{Im}\left[U^*_{\alpha i}\,U_{\beta i}\,U_{\alpha j}\,U^*_{\beta j}\right]\,\sin\left(\Delta_{ij}\right),\end{aligned} \tag{4.132}$$

其中

$$\Delta_{ij} = (E_i - E_j)t. \tag{4.133}$$

跟两味中微子混合一样，考虑相对论（高能）中微子近似(4.121)，那么有

$$\frac{\Delta_{ij}}{2} = 1.27\frac{m_i^2 - m_j^2}{eV^2}\frac{L/E}{Km/GeV}. \tag{4.134}$$

在上述近似下，振荡几率$\mathcal{P}_{\alpha\beta}$依赖于两个中微子质量平方差参数$\Delta m^2_{21}$ 和Δm^2_{23} ，四个中微子混合矩阵参数和两个具体实验相关的参数：中微子能量E和中微子传播距离L。

从公式中也可以看出

- 当$\Delta m^2 \sim E/L$时，振荡最明显(maximal sensitivity);
- 当$\Delta m^2 \ll E/L$时，也就是中微子传播的距离不够远，没有足够的时间发生振荡，

$$\sin^2\left(1.27\Delta m^2 L/E\right) \approx 0 \longrightarrow <\mathcal{P}_{\alpha\beta}> \approx 0. \tag{4.135}$$

- 当$\Delta m^2 \gg E/L$时，得到振荡平均值为

$$\langle\sin^2\left(1.27\Delta m^2 L/E\right)\rangle \approx \frac{1}{2} \longrightarrow \langle\mathcal{P}_{\alpha\beta}\rangle \approx \frac{1}{2}\sin^2\left(2\theta\right). \tag{4.136}$$

要观察到两个中微子之间的振荡，必须满足两个条件: θ不能太小，L/E的值和Δm^2要匹配。按照中微子的来源划分，有宇宙线中微子，太阳中微子（$E_\nu = 0.1 \sim 20MeV$），大气中微子，反应堆中微子($E_\nu \sim$ MeV) ，加速器中微子($E_\nu = 0.3 \sim 30$GeV)和超新星爆发产生的中微子($E_\nu \sim$ MeV)。在表-4.3中，我们列出目前的各种中微子源的E, L值和对应的敏感Δm^2值。

以上推导的中微子振荡公式，对于反中微子也是类似的，只不过混合矩阵(4.126)需要变成其复共轭，也就是其中的相位δ反号即可。对于反中微子振荡几率，公式(4.132)中的第一行在代换$U \to U^*$时是不变的，该项因而是CP守恒的项。对于公式(4.132)式中的第二行做复共轭时会**改变符号，所以该项破坏CP对称性。**

表 4.3:　各种中微子源的中微子能量，飞行距离和对应的敏感的Δm^2值.

中微子源	能量(GeV)	距离(Km)	$\Delta m^2(eV^2)$
太阳中微子	10^{-3}	10^7	10^{-10}
大气中微子	$0.1-10^2$	$10-10^3$	$10^{-1}-10^{-4}$
反应堆中微子	10^{-3}	短基线: $0.1-1$	$10^{-2}-10^{-3}$
		长基线: $10-10^2$	$10^{-4}-10^{-5}$
加速器中微子	10	短基线: 0.1	>0.01
		长基线: 10^2-10^3	$10^{-2}-10^{-3}$

4.4.3　中微子振荡实验

从1968年开始，有非常多的中微子实验通过不同的中微子源、不同的中微子种类、不同的中微子束流能量、不同的中微子传播距离和不同的与模型无关的证据验证了中微子振荡的现象。这些实验现象不需要假设奇特的新物理、不需要破坏基本的对称性、不需要更改太阳模型、不需要引入新粒子、不需要微调模型参数，只需要假设三代中微子存在非简并的静止质量就可以给出完美的解释。中微子振荡实验引起的中微子非零质量是目前唯一有坚实的实验证据的超出最小标准模型的新物理，但它却并不影响我们迄今已经有的标准模型理论和实验。如果所有的中微子质量都为0，则三代轻子数L_e, L_μ 和L_τ 是对所有相互作用分别守恒的好量子数。如果中微子有质量，哪怕是很小的质量，则会发生代与代的混合，这时轻子数L_e, L_μ 和L_τ将不是严格的守恒量子数。但它们的和，也就是总轻子数$L = L_e + L_\mu + L_\tau$仍然是严格守恒量。实际上，由于目前发现的中微子只有非常微小的质量，不同的中微子虽然会发生混合，我们在4.1.3节给出的轻子数分代守恒的规律依然适用于目前除中微子振荡实验之外的所有的粒子物理实验。

1. **太阳中微子实验**

   最早的中微子振荡实验证据来源于太阳中微子数量的减少。根据标准太阳模型，太阳内每时每刻都在发生如下的聚变反应

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e + 0.42MeV \tag{4.137}$$

$$p + d \rightarrow {}^3He + \gamma\,(5.51MeV) \tag{4.138}$$

$${}^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + 2p + \gamma\,(12.98MeV) \tag{4.139}$$

   氢（质子）合成氘核，然后合成氦核，综合上面三式，得到

$$4p \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e + 24.8MeV. \tag{4.140}$$

   聚变中产生的两个正电子会很快和负电子湮灭额外放出1MeV的能量，因此每个氦核的产生会得到25.9MeV的能量，主要以光子的形式辐射出来。另外，每个中微子

平均会携带0.5MeV的能量。也就是说，太阳每放出25MeV 的能量会同时产生两个电子中微子。利用地球上的太阳常数2卡路里/平方厘米/分钟，可以得出地球上的中微子流量是$6 \times 10^{10}/cm^2/s$。

1964年，物理学家雷·戴维斯[10] 和天文学家约翰·巴卡尔在美国南达科他州的霍姆斯塔克金矿中进行了中微子探测实验。霍姆斯塔克实验首次成功测量到了太阳产生的中微子，但结果还是有些出乎意料。探测到的中微子数量只有根据标准太阳模型计算出来的三分之一，有三分之二的中微子不翼而飞。这让科学家们大惑不解，一方面寻找理论计算中的错误和漏洞，另一方面重复实验，持续测量了30 多年。测量结果始终没有改变，其它实验组也相继做了类似的实验，都得到相同的结果。这就是著名的太阳中微子丢失问题。为了解释理论计算与实验结果的差异，有些天文学家开始怀疑太阳模型可靠性。另一方面，意大利的物理学家布鲁诺·庞蒂科夫在实验之初就提出可以用中微子振荡来解释这个问题。太阳产生的是电子中微子，在电子中微子从太阳核心飞出的过程中，会通过振荡转变成其它两种中微子。霍姆斯塔克实验只能探测电子中微子，无法探测其它两种。虽然早在1968年人们就已经发现了太阳中微子数目的反常现象，但是中微子振荡的实验事实长期以来一直没有得到物理学家的重视，原因是太阳的标准模型理论并不能得到直接的实验验证，如果没有别的实验的确认，人们总可以怀疑太阳标准模型的准确性。

1999年，萨德伯里中微子观测站（Sudbury Neutrino Observatory，缩写为SNO）开始太阳中微子的探测实验。实验探测器放在加拿大安大略省一个2100米深的矿坑中，使用了新的中微子探测方法，根据高速粒子通过介质时发出切伦科夫光的现象来探测中微子，这种方法对三种中微子都有效果。2001年，在萨德伯里中微子观测站发表的结果中，把失踪的中微子都找回来了，结果表明太阳中微子从太阳核心产生后部分转化成了其它类型的中微子。这个SNO中微子实验的领导者阿瑟·麦克唐纳[11] 因发现太阳中微子振荡与日本物理学家梶田隆章分享了2015年的诺贝尔物理奖。

2. **大气中微子实验**

在第一章提到的高能宇宙线在通过地球的大气层时，会产生很多的次级粒子，其中会大量产生π, K等介子，而这些介子会发生如下级联反应

$$\pi^+/K^+ \to \mu^+\nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu, \tag{4.141}$$

$$\pi^-/K^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu. \tag{4.142}$$

这些反应说明，地面上每得到一个电子中微子（或反电子中微子），我们应该得到两个缪子中微子（或者反缪子中微子）。更精确的计算给出的结果应该是$\nu_\mu : \nu_e = 2.11$。

[10] Raymond Davis (1914.10.14-2006.5.31), 美国物理学家，因发现太阳中微子获得2002年诺贝尔物理奖。

[11] Arthur Bruce McDonald (1943.8.29- ）, 加拿大物理学家，因发现中微子震荡与梶田隆章（Takaaki Kajita，1959.3.9- ，日本物理学家）分享2015年诺贝尔物理学奖。

定义

$$R = \frac{(N_\mu/N_e)_{exp}}{(N_\mu/N_e)_{theory}} \tag{4.143}$$

最早观测到大气中微子振荡的实验是日本的超级神冈实验(Super Kamiokande: Super-K)。这个实验在1998年以确凿的证据发现中微子存在振荡现象，即一种中微子在飞行中可以变成另一种中微子，使几十年来令人困惑不解的太阳中微子失踪之迷和大气中微子反常现象得到了合理的解释。这个实验的领导人梶田隆章Takaaki Kajita和加拿大物理学家阿瑟·麦克唐纳分享了2015年的诺贝尔物理奖，而这个实验的开创者Yoji Totsuka在2008年就去世了，失去了获得诺贝尔奖的机会。目前所有大气中微子实验通过不同海拔高度和不同角度的观测给出的平均值是$R \simeq 0.6$。也就是说，实验观测到的缪子中微子数目比理论计算预期的数目少很多。通过拟合所有中微子实验给出的证据表面，大气中微子实验观察到减少的缪子中微子大多转化成了τ中微子。

3. **反应堆中微子实验**

大气中微子和太阳中微子都是天然的中微子源，其实验设计比较简单，只需要一个好的探测器和比较深的矿井来屏蔽本底即可，但是其缺点也是明显的：中微子束流不可控，非常依赖于理论计算，实验系统误差较大。由于核反应堆中会大量产生中子，因而也是天然的中微子源，而且由于反应堆的发电功率原则上是可控的，因而其中微子束流也是可控的，反应堆中微子实验也很快称为比较流行的中微子实验。例如2002年开始的中日美合作的位于日本富山的Kamland反应堆中微子实验的中微子束流能量大约是5MeV，探测器离中微子源约180 公里，其探测器是一千吨的液体闪烁体，测量到的参数空间验证了SNO的太阳中微子实验结果。

早期的中微子实验给出的结果表面中微子混合矩阵中的两个混合角很大，也很快得到了测量，第三个混合角θ_{13} 则预计很小，实验上很难测量其大小。为了精确测量到这个混合角的大小，中国和美国的物理学家合作设计了大亚湾反应堆中微子实验。我国广东省深圳的大亚湾核电站与岭澳核电站功率大，能够提供足够强的中微子流。其次是紧临高山，适合建立地下实验室以屏蔽宇宙射线对实验的干扰。在全世界的反应堆中，同时具备这两个条件的极为少见。大亚湾核电站与岭澳核电站相距约1公里，共有6个反应堆，总热功率为17.4GW，是当时世界排名第二的反应堆群。

2007年10月动工，2011年开始逐步完成探测器的建造与安装。由于大亚湾有两个反应堆群，需要两个近探测器分别对它们进行测量。如图-4.21所示，大亚湾近点探测器距离大亚湾核电厂的核反应堆约360米，岭澳近点探测器距岭澳核电厂的核反应堆约500米，远探测器离大亚湾反应堆1900米，离岭澳反应堆1600米。2个近点实验大厅分别放置2台中微子探测器，远点探测器放置4台探测器；每台探测器高5米、直径5米、重110吨，均置于10米深的水池中。实验站之间用总长3公里的水平隧道相

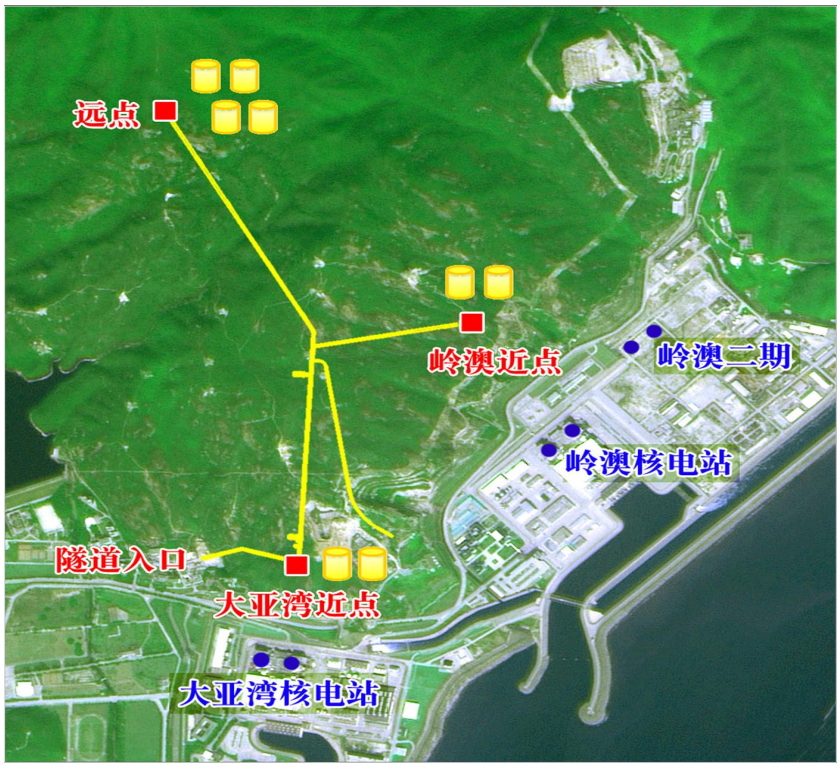


图 4.21: 大亚湾中微子实验现场地图。8组探测器分别放置在大亚湾近点(2组)，岭澳近点(2组)和远点(4组)。

连，可以方便地在不同实验站之间移动探测器。从隧道入口处到大亚湾近点实验站则采用有坡度的隧道，以将探测器置于更深的地下，减小宇宙线本底的影响。同时，探测器放置在水池之中，以屏蔽周围岩石层的放射性。尽管有这些屏蔽，一些高能量的宇宙线依然可以穿山而入。这时，装在水池墙上的光电倍增管（水切仑科夫探测器）和水池顶上的缪子探测器会记录下这些宇宙线的轨迹，并从中微子数据中排除掉，其探测效率可达到99.5%。通过远、近站点共八个全同的探测器对反应堆中微子的相对测量，可以大大消除实验的系统误差。

大亚湾中微子实验的目标是将$\sin^2(2\theta_{13})$测量到0.01或更高的精度。如图-4.22所示，实验利用电子反中微子在大型液体闪烁体探测器中的反 β 衰变反应

$$\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n, \tag{4.144}$$

来测量反应堆中微子。比较远近探测器测得的中微子通量和能谱，就可以知道中微子是否发生了振荡，进而确定振荡参数θ_{13}。如果存在振荡，在远探测器看到的中微子通量将比预期要少；同时，由于不同能量的中微子振荡几率不一样，测得的能谱将发生有规律的变形。反贝塔衰变反应是电子反中微子被氢核俘获，生成一个正电子和一个中子。中微子的能量几乎全由正电子带走，在液体闪烁体内有$1 \sim 8$ MeV的能量沉积。生成的中子经慢化后在液体闪烁体中掺杂的钆元素上被俘获，以

伽马光子的形式放出约8MeV的能量，比正电子信号平均慢30μs。正电子信号与中子信号在能量与时间上的符合可以干净地辨认出中微子与其它本底。

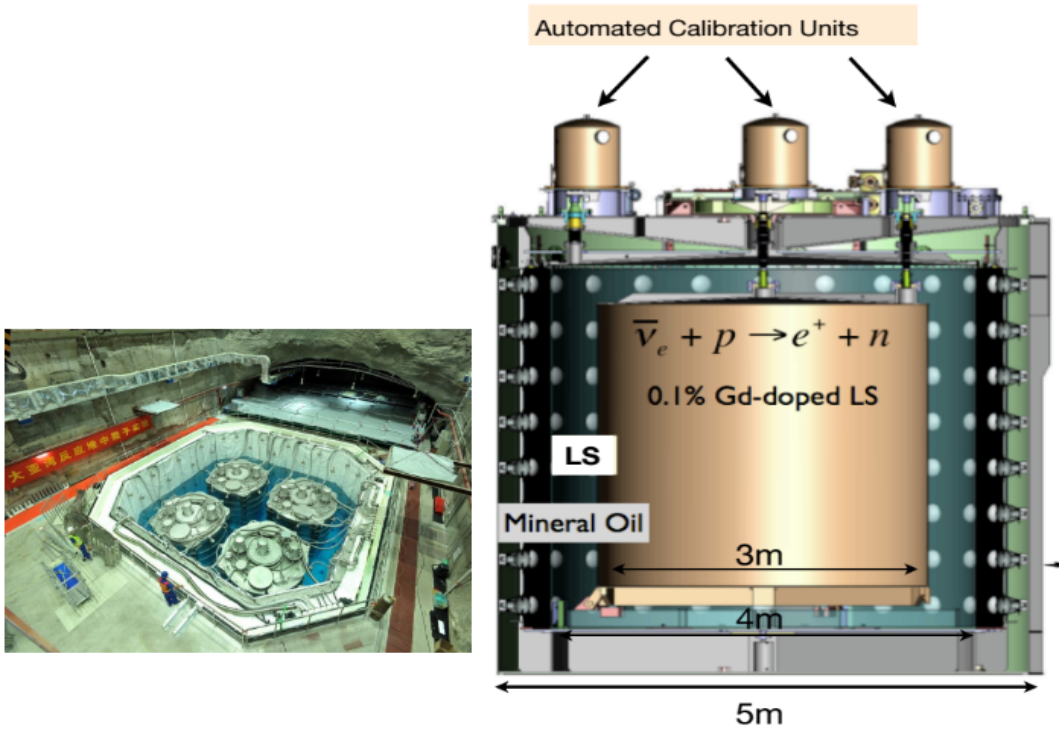


图 4.22:　大亚湾中微子实验的远点实验大厅照片(左图，水池中有4个探测器)。右图为实验探测器的剖面示意图。

2011年底，法国的Double Chooz实验给出了$\sin^2\theta_{13}$的初步测量结果

$$\sin^2\theta_{13} = 0.022 \pm 0.013. \tag{4.145}$$

由于只有远点的单个探测器，因而其实验精度不高，但是结果中心值显示这个$\sin^2\theta_{13}$并不是跟预期的那么小。大亚湾中微子实验国际合作组因而修改实验安装方案，不再等8个探测器全部组装完成，而是在2011年12月24日开始，总共只有6 个探测器的情况下，开始记录实验数据。至2012年2月17 日的实验中完成了实验数据的获取、质量检查、刻度、修正和数据分析。2012日3月8日，大亚湾中微子实验国际合作组宣布，发现一种新的中微子震荡模式，精确测量到了[78]

$$\sin^2\theta_{13} = 0.024 \pm 0.004. \tag{4.146}$$

这个结果早于当年四月公布的韩国RENO实验的结果：

$$\sin^2\theta_{13} = 0.029 \pm 0,006, \tag{4.147}$$

而且由于大亚湾实验设计先进，其实验精度也明显比RENO好。大亚湾实验证实θ_{13}并非如人们预计的那样小，这使得我们必须对相关理论进行重新思考。这开启了新实验的大门，使得在轻子部分发现CP破坏具有了可能性，为解释中微子与反中微子的区别，甚至为解释早期宇宙间物质不对称的现象提供了基础。大亚湾实验发现了新的中微子振荡模式，是当时精度最高的实验测量结果。这是中国诞生的一项重大物理成果，被称为中微子物理的一个里程碑。2012年底，大亚湾中微子实验成果入选美国《科学》杂志2012年度十大科学突破。2013年1月19日，该项科技成果被选为2012年中国十大科技进展，2016年获国家自然科学一等奖。

2012年以来，大亚湾中微子实验的实验测量结果保持了最高实验测量精度，对中微子质量平方差$|\Delta m^2_{ee}|$的测量精度与加速器中微子实验MINOS的测量精度相近。大亚湾中微子实验在2020年底完成科学使命、正式退役。中国科学院高能物理研究所的专家在2015年则开始建设江门中微子实验。建设内容包括：位于地下700米的地下洞室、大型的水池、一个装满2万吨液体闪烁体和光电倍增管的中微子探测器以及少量配套的设施，能量分辨率达到前所未有的3%。江门中微子实验的目标是测量中微子质量顺序，精确测量中微子混合参数，同时也将研究大气中微子、太阳中微子、超新星中微子、地球中微子以及质子衰变等，计划2022年建成并开始运行取数。

4. **加速器中微子实验**

加速器产生的中微子束流，具有能量高、流强大、方向性好等特点，非常适用于进行中微子的研究。加速器中微子实验根据中微子传播距离的长短分为短基线和长基线两种。国际上短基线加速器实验主要应用于研究中微子与物质的相互作用，以及寻找新型中微子等。短基线实验在标准模型建立的过程中起到了至关重要的作用。例如，1973 年，欧洲核子中心观测到加速器缪子与强子或电子通过“中性流”发生弱相互作用的过程，成为电弱统一理论的重要证据，并为电弱统一理论的三位创始人温伯格（S.Weinberg）、萨拉姆（A. Salam）和格拉肖（S. Glashow）带来了1979年诺贝尔物理奖。

长基线实验主要用于研究中微子振荡和测量振荡参数。国际上第一个长基线加速器实验是日本的K2K 实验。中微子束流由位于东京附近的高能加速器研究机构（KEK）提供，探测器位于日本西部神冈（Kamioka）的一个矿井中，也就是超级神冈使用的探测器，主体部分为5 万吨纯水，通过观察中微子与水发生带电流作用产生带电轻子并发出的切伦科夫光来测量中微子的方向、能量并鉴别中微子的种类。束流平均能量为1.4GeV，飞行距离约为250 km。2003 年，K2K 首次公布实验结果，观测到了缪中微子的消失：预期可以看到158 个事例，实际只看了112 个事例。同时，不同能量的中微子消失几率不一样，与中微子振荡的理论及超级神冈测到的中微子振荡参数完全一致。这是国际上首次通过人工的中微子源证实大气中微子振荡。

另一个著名的长基线中微子实验是美国的MINOS。其探测的中微子束流来自于著名的费米国家实验室，基线长度达到735km，探测器位于明尼苏达州苏丹的一个矿井中，由总共5400 吨铁和闪烁体交替排列而成，对于缪中微子的探测能力远好于电子中微子。MINOS 在2005 年开始运行，是国际上第一个分别观测到正反缪中微子消失的实验。加速器产生的缪中微子消失之后，大部分都变成了陶中微子。由于陶子的质量很大，达到1.8GeV，因此只有能量很高的陶中微子才能发生带电流反应从而被识别和探测到。另一方面，陶子的寿命很短，在产生之后的万亿分之一秒时间内几乎都会衰变，因此陶中微子的探测十分困难，需要探测器的特殊设计，同时测量数百微米的陶子径迹，及其次级粒子在陶子衰变顶点附近的拐弯。欧洲核子中心建立了一条指向意大利格兰萨索(Gran Sasso)地下实验室的中微子束流线，而位于格兰萨索的OPERA 实验正是被设计用来探测缪中微子到陶中微子的振荡。OPERA 使用了1800 吨夹在铅块之间的感光乳剂，从2006 年开始运行，找到缪中微子振荡到陶中微子的直接证据。

上述太阳中微子、大气、反应堆和加速器中微子实验中的中微子来源各不相同，但是多数情况下它们是同时存在的，所以实验技术上需要分别屏蔽，也可以通过不同中微子源的束流能量(见表4.3)和来源方向来区分。所有实验得到的数据，通过整体拟合可以给出的三代中微子的质量平方差和PMNS混合矩阵中四个参数的测量结果[1]

$$\begin{aligned} \Delta m^2_{32} &= (2.453 \pm 0.034) \times 10^{-3} eV^2, \quad & \sin^2\theta_{23} &= 0.545 \pm 0.021, \\ \Delta m^2_{21} &= (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5} eV^2, \quad & \sin^2\theta_{12} &= 0.307 \pm 0.013, \\ \sin^2\theta_{13} &= 0.0218 \pm 0.0007, \quad & \delta &= (1.36 \pm 0.17)\pi. \end{aligned} \tag{4.148}$$

4.4.4　中微子的螺旋度与手征性

在第一章中我们把基本粒子在其运动方向上的投影定义为螺旋度，中微子和电子一样，自旋为1/2，因而其螺旋度应该也有两个±1/2。类似电子，我们也可以用狄拉克方程来描述中微子的运动和相互作用。但是由于目前为止我们还没有观测到中微子的质量大小，因此如果中微子没有质量的话，就会像第一章所讨论光子的情形类似，其螺旋度投影数量就会减少。这种无质量的费米子，正反粒子合起来就只有两个自由度，用狄拉克的四分量理论来描写就有点浪费。中微子不带电因而不参与电磁相互作用，它也没有颜色，不参与强相互作用。因为弱相互作用中宇称不守恒，弱相互作用拉氏量中只有左手相互作用，没有右手相互作用，因此，对于中微子来说，就只有左手的中微子和右手的反中微子两个自由度。历史上赫尔曼·外尔从狄拉克方程得出的两分量理论可以来描写这种情况，因而，没有质量的中微子也称为外尔费米子。当然，量子场论是在四维时空定义的，而粒子自旋和螺旋度是在三维空间(或者动量)定义的，不是洛伦兹不变的。因此，在量子场论

中一般是定义手征投影算符

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_L &= \frac{1-\gamma_5}{2},\ \mathcal{P}_R = \frac{1+\gamma_5}{2},\\ \psi &= \psi_L + \psi_R,\quad \psi_L = L\psi,\quad \psi_R = R\psi.\end{aligned} \tag{4.149}$$

左手中微子参与弱相互作用，而右手中微子不参与弱相互作用。手征态ψ_L和$\bar{\psi_R}$是弱相互作用的物理本征态。 可以证明，对零质量的自由费米子，它们的螺旋度本征态和手征性本征态是相同的:

$$\mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_{L,R}. \tag{4.150}$$

对质量为m的自由费米子，其手征态是两个螺旋度态的组合

$$\mathcal{P}_{L,R} = \mathcal{P}_\pm + \mathcal{O}(\frac{m}{p}). \tag{4.151}$$

如果中微子只有上面所提的两种状态:$(\nu_L, \bar{\nu}_R)$，那么在做空间反演时，左旋中微子ν_L将变成自然界不存在的右旋中微子ν_R，右旋反中微子$\bar{\nu}_R$也将变成自然界不存在的左旋反中微子$\bar{\nu}_L$。因此，在二分量中微子理论情况下，空间反演不变性受到破坏，这样就可以理解有中微子参与的弱相互作用过程中宇称不守恒现象的原因。

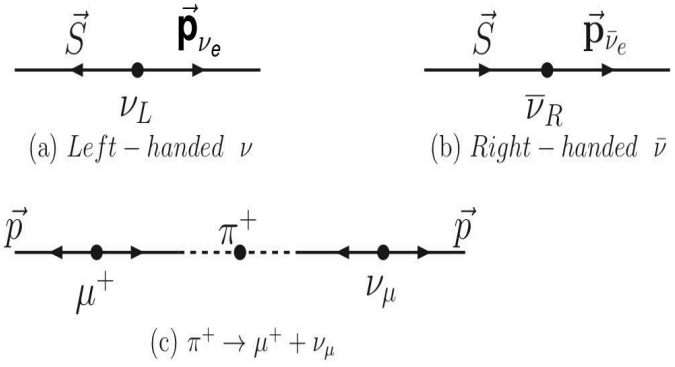


图 4.23: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$衰变中在$\pi^+$ 的静止坐标系中观测到的μ^+ 和ν_μ 的螺旋度。

中微子具有确定的螺旋度，是以中微子静止质量为零为前提的。**对于静止质量不为零的粒子，粒子的运动方向是相对的，因此静止质量不为零的粒子没有固定的螺旋度。**实验上可以通过$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$衰变过程中对衰变产物中$\mu^+$的纵向极化测量，可以定出中微子的螺旋度。在$\pi$介子静止系中，取$z$轴为衰变产物的运动方向。由于$\pi$介子自旋为零，角动量守恒要求$\mu^+$和$\nu_\mu$自旋的$z$分量必须大小相等、方向相反。由于动量守恒，$\mu^+$和$\nu_\mu$的动量$\vec{p}$也必须大小相等、方向相反。即$\mu^+$和$\nu_\mu$应向相反方向运动。因此，如图4.23所示，在$\pi^+$介子静止系看，$\mu^+$和$\nu_\mu$ 具有相同的螺旋度。实验测的μ^+是左旋的，所以ν_μ也是左旋的。这和其它实验定出的电子中微子的螺旋度是一致的。

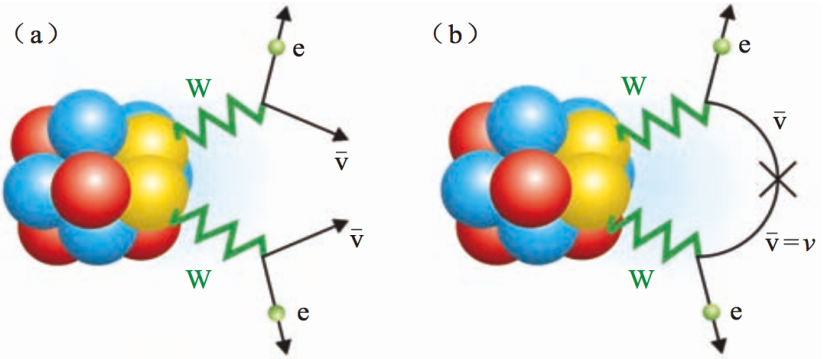


图 4.24:　原子核的双贝塔衰变：(a)通常的无关联双贝塔衰变；(b)无中微子放出的双贝塔衰变。

1937 年，意大利物理学家马约拉纳[12]因为不满意狄拉克方程中电子和正电子之间的非对称性，将正、反粒子的场组合成一个同时满足正、反粒子的对称性和狄拉克方程的场，对应的粒子就是所谓的马约拉纳费米子，它们是自己的反粒子。马约拉纳在文章中提出，中性的中微子可能就是这种新的马约拉纳费米子。1939 年，哈佛大学的弗瑞（W. Furry）提出可以通过寻找无中微子双贝塔衰变来对中微子的本质做出判断，也就是说寻找双贝塔衰变中仅仅有两个电子而没有中微子的末态反应。这种反应的原理如图4.24所示，一般情况下，两次贝塔衰变是如图(a)所示没有关联的；无中微子双贝塔衰变则要求第一个贝塔衰变放出一个虚的中微子在第二个贝塔衰变中被吸收，以至于形成没有中微子的双贝塔末态，这种反应只有中微子是马约拉纳粒子才可能发生。符合这样条件的天然原子核有三十多种。有趣的是，早期预言的无中微子双贝塔衰变比普通双贝塔衰变更容易发生，其半衰期在10^{15} 年左右。

20 世纪50 年代起，有多个实验寻找无中微子双贝塔衰变未果，将半衰期推到了大于10^{17} 年，与马约拉纳理论不符，狄拉克中微子占了绝对上风。然而，1957 年李- 杨发现的弱相互作用宇称最大化破缺揭示了中微子的手征性，即中微子总是左旋的，而反中微子总是右旋的，在中微子质量为零的标准模型下，左右手不能互相转变。因此即使中微子是自己的反粒子，图4.24(b)中的虚湮灭过程由于手征的不匹配而不能发生。换句话说，如果中微子质量为零的话，无中微子双贝塔衰变无论中微子是狄拉克还是马约拉纳都不可能发生，更不能作为区分两者的判据!

20 世纪末对中微子的研究有了突破进展，中微子振荡的发现证实了中微子并非质量为零，而是有着极其微小的质量，成为真正超出最小标准模型的新物理。这个发现也使中微子的手征变换成为了可能，重新点燃了人们测量无中微子双贝塔衰变的希望。实际上这个稀有衰变一旦被发现，除了验证中微子是马约拉纳费米子外，还会对粒子物理有一系列革命性的影响。在图4.24(b)里，初态的轻子数为0，末态由于仅有两个电子而轻子数为2，因此在标准模型里严格守恒的轻子数在这个反应里被破坏。另外，由于中微子的绝

[12]Ettore Majorana，(1906-?)，意大利天才青年物理学家，出生于西西里岛，1938年离奇失踪。

对质量联系手征变换几率，而中微子质量的直接测量十分困难，无中微子双贝塔衰变正是另一种独立的间接测量中微子质量的方法。

当然由于中微子的微小质量使其手征翻转几率也极其渺小，以至于无中微子双贝塔衰变率远远小于普通双贝塔衰变，通常被认为半衰期在10^{26} 年以上。尽管如此，当前国际上无中微子双贝塔衰变的实验还是开展了很多个。双贝塔衰变实验目前测得有双衰变的核有11种，半衰期大致在10^{20} 年。实验观测上无中微子双贝塔衰变最主要的观测量是总电子能量分布。由于两个中微子的存在，普通双贝塔事例形成一个连续的能谱，而真正的无中微子双贝塔信号在核反应的Q 值处会出现一个尖锋。

4.5 练习题

1. 已经发现的中微子有几种？什么叫中微子振荡？中微子振荡实验的结果有什么重要意义？

2. 试判断，下述过程哪些是在最小标准模型下允许的，哪些是不允许的？为什么？

$$\begin{array}{llll} 1)\ \pi^0 \to e^+e^- & 2)\ \mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu\gamma & 3)\ e^-\mu^- \to e^-\mu^- & 4)\ \tau^- \to e^-\omega \\ 5)\ p \to e^+\gamma & 6)\ n \to pe^-\nu_e\gamma & 7)\ \tau^+ \to \mu^+\nu_\mu\bar{\nu}_\tau & 8)\ n \to e^-\pi^+ \end{array} \tag{4.152}$$

3. 穆勒(Moeller)散射和巴巴(Bhabha)散射有什么区别？并画出它们各自的领头阶费曼图。

4. 考虑一个动量为$\mathbf{k}$、能量为$E = |\mathbf{k}| = k$的入射光子与处于静止状态的电子的康普顿散射。如果把散射光子和电子的四动量分别写为k'和p'，初末态粒子的四动量守恒关系式为$k + p = k' + p'$。由关系式$p^2 = m_e^2$，试证明散射光子的能量E'可以写为

$$E' = \frac{E}{1 + (E/m_e)(1 - \cos\theta)}, \tag{4.153}$$

其中θ是光子的散射角。

5. 电子的自旋角动量量子数$S = 1/2$，其自旋角动量的空间指向只有两个：即$S_z = \pm\hbar/2$(国际单位制)。电子的自旋角动量算符满足一般的角动量对易关系:$[\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{s}}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{s}_k$。

(a) 证明$\bar{\mathbf{s}}_i$的矩阵表示可以写成如下形式：

$$\hat{\mathbf{s}}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{4.154}$$

(b) 证明在$(\hat{S}^2, \hat{S}_z)$共同本征表象下，电子的自旋本征波函数可以写为

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.155}$$

6. 要观察到两个中微子之间的振荡，必须满足的条件是什么？为什么？

7. 日本超级神冈的中微子实验和中国大亚湾的中微子实验的主要区别有哪些？对超级神冈的中微子实验的主要结果做一个简述。

8. 在距离核反应堆300米处，KamLAND 类型的中微子实验测量$\bar{\nu}_e$的流量，所得结果是(不存在振荡时的)期望值的$90 \pm 10\%$。假定只考虑2味中微子混合和最大混合角($\theta = 45°$)，并且中微子的平均能量是2.5 MeV，请估算Δm^2_{1j}。

9. 利用第5题的结论，试证明：满足狄拉克方程的费米子具有内禀自旋角动量，自旋量子数为$s = 1/2$。

10. 思考题：既然实验发现中微子振荡，也就是一种中微子会变成另外一种中微子，那么1962年发现加速器产生的缪子中微子不能跟核子作用产生电子的实验是否会是错的？

11. 试画出电子夸克散射$e^- u \to e^- u$的领头阶费曼图，并写出其相互作用矩阵元。

第五章　对称性和守恒定律

对称性与守恒定律在粒子物理理论和实验研究中均具有非常重要的地位：

(1) 在对相互作用动力学机制缺乏了解的情况下，通过对称性的研究可以获得很多有关相互作用的重要知识。可以根据对称性和相关的守恒定律，对动力学的哈密顿量给出一定的限制。关于强相互作用理论的早期研究就是一个很好的例子。

(2) 在有些情况下，虽然已经有了很好的动力学理论，但对一些具体问题的计算却非常复杂。利用对称性理论则可以帮助人们简化计算，得到具有相同准确度的结果。

(3) 在粒子物理学中，存在不同性质的对称性：有些对称性是普适的，相应的守恒量则是严格的（例如能量、动量和角动量），另外一些对称性是近似的或者破缺的，则守恒量是有条件的或者是破缺的但满足一定的选择定则（例如同位旋）。

在本章，我们将对粒子物理中各种基本对称性的定义和性质，对称性与守恒量之间的关系做详细的介绍。重点研究C宇称守恒、强相互作用中的G宇称守恒、弱相互作用中的宇称（P）破坏，研究K介子、B介子系统的CP破坏等。

5.1　守恒量的一般性质

对称性是人们在长期观察自然和认识自然过程中所产生、积累的一种认知。在自然界千变万化的运动演化过程中，万事万物显现出各式各样的对称性。

根据人类的观测，太阳是一个离地球最近的一颗恒星-大火球。太阳火球在绕过中心的任意轴旋转某一角度后，其形状和位置都不显现任何可以察觉的变化。这种性质称为绕球心旋转对称性。没有人会说看到太阳横过来或倒过来了。如果要想确切判断球体是否绕过中心的任意轴转了一个角度，就需要在球上添加某些记号，根据这些记号的位置变化来判断球是否作了转动。实际上，这些记号的作用就是使球不再具有严格的旋转对称性，亦即在一定程度上破坏了旋转对称性。物理学上称这种情况为对称性的破缺。

自然界千变万化的运动演化，从一个侧面来说，就体现为显现出各式各样的对称性，同时又通过这些对称性的演化和破缺来反映出运动演化的特点。日夜交替是人们最熟知的自然现象，24小时的昼夜循环，在时间上显现出具有周期性的平移对称。 但是，我们无法根据日夜交替的特点来区分任何两天。为了能够区分和判断它，就需要找到对称性破缺的表现。人们在长期的生活中，发现昼夜的时间长短比例和夜间星群的分布都有相似的周期性变化，而且月亮每天的位置和形状也不相同。后来，逐渐有了年的概念，并产生了历法。从对称性的角度来看，地球上的生活环境显现出以24小时为周期的时间平移对称

性，但这个对称性又有微小的破缺，它提供了不同的两天之间的区分依据。 同时通过这个破缺又显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性。如果日（或者天）的周期对称性是严格的，没有微小的破缺，那就不可能显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性。

因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然规律的一个重要方面。

5.1.1 对称和变换

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的。一个球具有绕球心的旋转对称性，这是把球在转动前和绕球心转某一角度后的情况进行比较而得出的结论。在数学上，将两种情况之间通过确定的规则对应起来的关系，称为从一种情况到另一种情况的变换。 物理学中对称性的观念可以概括为：如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有与该变换所对应的对称性。

既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上。因此，可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质来对对称性进行分类。对空间性质进行变换所对应的对称性统称为空间对称性。对时间性质进行变换所对应的对称性统称为时间对称性。空间对称性和时间对称性是最基本、最常见的对称性，但并不是所有的对称性都能归入到这两类对称性之中。

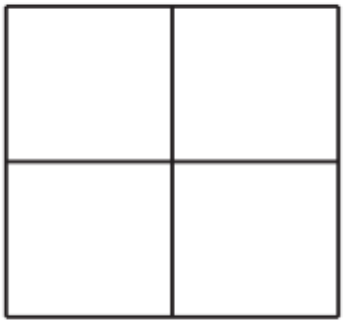




图 5.1: 由4个全同(左图)或大小相同但颜色不同的小正方形构成的正方形（右图）。

现在来看图5.1的左图，它是由4个全同的小正方形构成的正方形平面图形，具有如下的对称性：(a) 在平面上，绕图形中心转90度角的任意整数倍，图形不变； (b) 绕过图形中心并过四边形的一个角或一个边的中点的轴线转180度，图形不变。

如果将图形中的小正方形分别涂上绿、蓝两种颜色，则原来所具有的许多对称性便破缺了，这时只剩下在平面上绕图形中心转180度角或绕过图形中心并过四边形的一个角的中点的轴线转180度，图形不变。但正是由于有了颜色，图形又显现出新的对称性来：在平面上将图形绕中心转90度角，然后把绿变成蓝，蓝变成绿，在这样的复合变换下，原图形完全不变。 绕过图形中心并过四边形的一个边的中点的轴转180度，然后再把蓝色和绿色互换，在这样的复合变换下，原图形也是完全不变的。

这些复合变换涉及的不仅是空间性质，还涉及到颜色。显然，颜色是物体的一种基本属性，原则上它与物体的空间性质是互相独立的，通过颜色体现的变换，不能简单地用某种空间变换来替代。由此可见，各种物体的性质及其运动的不同，不仅体现在对空间和时间的描述上，还体现在一些与空间和时间的描述相独立的其它性质上。

物理学中把通过与空间和时间相独立的其它性质的变换所体现的对称性，称为内部对称性 。在宏观物理学的范围里，内部对称性常常具有很强的直观性，因此认识其存在并没有很大的困难。在微观范围里，内部对称性的直观性减弱了，对内部对称性的认识和理解的难度增加了。但这并不表明内部对称性的重要性减少了。事实上，随着物理学对微观世界的探索日益深入，认识到的内部对称性也愈来愈多。这些内部对称性对我们认识和理解自然界及其运动规律起着愈来愈重要的作用。

5.1.2　诺特尔定理

当人们熟悉了对称性的观念之后，便想要弄清对称性和自然规律的关系是什么？研究如何通过已经观察到的对称性来探索未知的物理规律？如何通过对大量分散的实验测量结果的归纳分析来发现新的对称性？

守恒定律与物理学运动规律在一定的变换下的不变性有密切联系。物理学在这方面探索的一个重要进展是建立了艾米·诺特尔定理[1]，这个定理首先是在经典物理学中给出的；后来推广到量子物理范围内也得到了普遍证明。

诺特尔定理[79]：如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，则必然存在一种对应的守恒定律。

1. **空间平移不变性与动量守恒定律。**　用体系的广义坐标q和拉氏量

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{5.1}$$

描写一个体系时，系统的拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \tag{5.2}$$

如果空间是均匀的，则$\mathcal{L}$不依赖于广义坐标q，这时

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \tag{5.3}$$

因此拉氏方程(5.2)变为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \tag{5.4}$$

[1] Amalie Emmy Noether，1882.3.23-1935.4.14，德国数学家和物理学家。她对抽象代数和理论物理中的对称性与守恒定律有重要贡献。1915年，应著名数学家E.希尔伯特的邀请到哥廷根大学数学系任教。1918年发表了关于诺特尔定理证明的论文。

即

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{P}_i = Constant. \tag{5.5}$$

系统的总动量守恒。

2. **空间转动不变性与角动量守恒定律。** 当选广义坐标q为角度时，广义动量$\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$表示体系的角动量。因此，空间的各项同性，即空间绝对方向的不可测量性，导致空间转动不变性，进而得到总角动量守恒定律。

3. **时间平移不变性与能量守恒定律：** 如果考虑到没有时间的绝对原点，即时间也具有均匀性，引起系统对时间平移的不变性时，拉氏量与时间无关，即：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \tag{5.6}$$

系统的总能量守恒。

5.1.3 量子力学中的对称性和守恒量

在量子力学中，体系的状态由波函数$\psi(\mathbf{r},t)$描写，$\psi(\mathbf{r},t)$满足薛定谔方程(4.16)。对任意算符$\hat{\mathbf{F}}$在$\psi(\mathbf{r},t)$态下的期待值可以定义为物理可观测量$\mathbf{F}$，

$$\overline{\mathbf{F}} = \langle\psi(\mathbf{r},t)|\hat{\mathbf{F}}|\psi(\mathbf{r},t)\rangle. \tag{5.7}$$

对上式做时间微分，得到[34]

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathbf{F}(t)} = \overline{\frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}}{\partial t}} + \frac{1}{i\hbar}\overline{[\widehat{\mathbf{F}}, \mathcal{H}]}. \tag{5.8}$$

因此当算符$\hat{\mathbf{F}}$不显含时间t并且和哈密顿量算符$\mathcal{H}$对易时，其对应的可观测物理量$\mathbf{F}$是守恒量，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = 0. \tag{5.9}$$

另外，在量子理论中，分立变换的不变性也可以导致存在一个守恒量，这类守恒量在经典理论中是不存在的。可以引入一个一般的变换U 描写不变性:

$$\psi'(\mathbf{r},t) = U\psi(\mathbf{r},t). \tag{5.10}$$

如果量子系统的运动规律在U变换下具有不变性，即$U\psi(\mathbf{r},t)$仍然满足薛定谔方程

$$\mathcal{H}[U\psi(\mathbf{r},t)] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[U\psi(\mathbf{r},t)]. \tag{5.11}$$

假设U变换与时间无关，在上式两边分别左乘U^+，可得

$$U^+\mathcal{H}U\psi(\mathbf{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[U^+U\psi(\mathbf{r},t)]. \tag{5.12}$$

波函数的归一化要求U变换是幺正的：$U^+U=UU^+=I$。则由上式可得

$$U^+\mathcal{H}U\psi(\mathbf{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t), \tag{5.13}$$

即

$$U^+\mathcal{H}U=\mathcal{H}. \tag{5.14}$$

结论：**体系哈密顿量在幺正变换U下不变，则量子系统的运动规律在U变换下不变。** 一般情况下，U不是厄密的，没有可观测量与之对应。对有些分立变换，U是幺正的，又是厄密的，在这些分立变换下，U就代表一个可观测的物理守恒量量。

例题-5.1：如果体系的哈密顿量$\mathcal{H}$在幺正变换U下不变，证明U必与哈密顿算符对易$[U,\mathcal{H}]=0$。

证明： 由哈密顿量在幺正变换U下不变的公式(5.14)两边都左乘U，可得

$$UU^+\mathcal{H}U=U\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}U=U\mathcal{H}, \tag{5.15}$$

所以有$[U,\mathcal{H}]=0$成立，证毕。

根据诺特尔定理，可以用运动规律所满足的对称性来对相应的守恒量进行分类。 如果对称性是属于场和粒子的时空性质的某种变换，称为时空对称性，相应的守恒量称为时空对称性守恒量。例如，时间平移不变性决定能量守恒；空间平移不变性决定动量守恒；空间转动不变性决定角动量守恒；空间反射不变性决定P宇称守恒，这些都是时空对称性守恒量。时间反演变换T本身是直接施于时间的，运动规律满足时间反演变换不变性并不表明存在相应的守恒定律和守恒量。

如果对称性是属于场和粒子的独立于时空性质的某种变换，则称为内部对称性，相应的守恒量称为内部对称性守恒量。电荷，同位旋，奇异数，粲数，底数，重子数、轻子数，C宇称，G宇称等都属于内部对称性守恒量。

从守恒量的数学运算来看，基本的守恒量可以区分为两大类：

1. 相加性守恒量: 一个复合体系的总守恒量是其各组成部分所贡献该守恒量的代数和。例如**能量、动量、角动量分量、电荷、同位旋、奇异数、粲数、底数、轻子数、重子数都是相加性守恒量** 。

2. 相乘性守恒量: 一个复合体系的总守恒量是其各组成部分该守恒量的乘积。例如**P宇称、C宇称、G宇称，CP宇称都是相乘性守恒量** 。

一般地讲，有经典对应的守恒量都是相加性守恒量。相乘性守恒量都是无经典对应的量子守恒量。

复合对称性守恒量

相乘性守恒量中，两个不守恒量乘起来就可能守恒，例如，弱作用中空间反射$\mathcal{P}$和粒子反演$\mathcal{C}$。相加性守恒量则没有这样的性质。如果二个变换均守恒，则复合变换也守恒，相乘性或者相加性都可以，但是这并没有增加守恒量个数。

例题-5.2：考虑相乘性守恒量P和相加性守恒量Q，若定义$P' = Pe^{iQ}$ 或$P' = Pe^{iaQ}$，那么P' 是相乘性守恒量。

证明： 考虑到

$$\sum_i Q_i = \sum_f Q_f, \quad \prod P_i = \prod P_f, \tag{5.16}$$

所以有

$$\begin{aligned} \prod P_i' &= \prod P_i e^{iaQ_i} = \left(\prod P_i\right) e^{ia(\sum Q_i)} = \left(\prod P_f\right) e^{ia(\sum Q_f)} \\ &= \prod P_f' \end{aligned} \tag{5.17}$$

成立。

既然守恒定律的表现形式为一个孤立系统某物理量的总量在运动过程中不随时间改变，那么守恒定律的成立与否就直接和孤立系统的运动规律有关，特别是与相互作用有关。从这个关系上来考察，又可以把守恒定律分为两类:

1. **如果一个守恒定律对各种相互作用都成立则称为严格守恒律；**
2. **如果一个守恒定律对某些相互作用成立，但对另一些相互作用不成立，并且在运动过程中后者影响是次要的，则称为近似守恒定律(或部分守恒定律)。**

按照上述区分，能量、动量、角动量、电荷是有经典对应的相加性严格守恒量；同位旋、奇异数是无经典对应的相加性近似守恒量；P宇称、C宇称、CP宇称是无经典对应的相乘性近似守恒量。

5.2 时空对称性

5.2.1 连续时空对称性

在经典力学理论中，我们已经证明：根据物理规律在时间和空间变换下不变的对称性，可以导出三个基本的守恒定律：系统总动量、总角动量和总能量分别守恒的定律。**这些定律表明：所有物理规律在任何地方，任何时间都是一样的。而且和空间取向无关。**在量子的情况下，连续时空对称性依然存在，因而上述的守恒定律仍然严格守恒。

1. 空间平移不变性和动量守恒定律

在空间平移变换下，体系的波函数将做如下变换：

$$\psi(\mathbf{r}) \to \psi'(\mathbf{r}) = U(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{a}), \tag{5.18}$$

这里$U(\mathbf{a})$是作用于波函数上的平移算符。所有变换$U(\mathbf{a})$的全体，形成了空间平移变换群。

考虑沿z方向的一个无穷小变换：

$$U(0,0,\delta_z)\psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y,z-\delta_z) \approx \psi(\mathbf{r}) - \delta_z\frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{r}), \tag{5.19}$$

其中$U(0,0,\delta_z) = 1 - i\delta_z P_z$。同理可得：$U(\delta_x,0,0) = 1 - i\delta_x P_x$，$U(0,\delta_y,0) = 1 - i\delta_y P_y$。因此，对于沿任意方向的一个无穷小变换有：

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta_{\mathbf{a}};\quad U(\mathbf{a}) = 1 - i\delta_{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{P}. \tag{5.20}$$

动量$\mathbf{P}$称为该平移变换群的**生成元** 。有限变换可以看成是无穷小变换的累积

$$U(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}}\psi(\mathbf{r}). \tag{5.21}$$

如果在波函数空间取动量的本征矢作为基矢，则得

$$\psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = U(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}_E}\psi(\mathbf{r}), \tag{5.22}$$

其中$\mathbf{P}_E$表示动量算符的本证值。空间平移不变性要求算符$U(\mathbf{a})$和$\mathcal{H}$对易

$$[U(\mathbf{a}),\mathcal{H}] = 0. \tag{5.23}$$

即有$[\mathbf{P},\mathcal{H}] = 0$。即动量$\mathbf{P}$是守恒量。

2. 时间平移不变性和能量守恒定律

考虑量子系统波函数$\psi(t)$ 在时间平移变换

$$t \to t' = t + \tau \tag{5.24}$$

下的变换性质。这时$\psi(t)$变为$\psi'(t')$，时间平移不变性要求

$$\psi'(t') = \psi(t) = \psi(t'-\tau), \tag{5.25}$$

即有

$$\psi'(t) = \widehat{U}(\tau)\psi(t) = \psi(t-\tau). \tag{5.26}$$

对无穷小变换$t' = t + \delta t$有

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\delta t)\psi(t) &= \psi(t-\delta t) = \left(1 - \delta t \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t) \\ &= (1 + i\delta t\widehat{\mathbf{H}})\psi(t), \end{aligned} \tag{5.27}$$

所以有

$$\widehat{U}(\delta t) = 1 + i\delta t\widehat{\mathbf{H}}, \tag{5.28}$$

其中哈密顿算符$\widehat{\mathbf{H}}$是时间平移变换的生成元，是守恒的力学量，即总能量守恒。

同样可以证明，对有限的时间平移变换(5.24)式有

$$\widehat{U}(\tau) = e^{i\tau\widehat{\mathbf{H}}}. \tag{5.29}$$

时间平移群的最小不可约表示也构成$U(1)$ 群。

3. 空间转动不变性和角动量守恒定律

三维空间的纯转动构成$SO(3)$群。若空间坐标系受到一个转动g，其坐标和波函数的变换为

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = g\mathbf{r}, \tag{5.30}$$

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}'). \tag{5.31}$$

对于表征粒子客观状态的波函数，空间转动不变性意味着

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) = \psi(g^{-1}\,\mathbf{r}'). \tag{5.32}$$

即

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(g^{-1}\,\mathbf{r}). \tag{5.33}$$

该式表达了转动态和原始态之间的关系。我们可以用一个转动算符$\hat{R}(\mathbf{n},\theta)$ 来描述状态之间的这种变换性质

$$\psi'(\mathbf{r}) = \hat{R}(\mathbf{n},\theta)\psi(\mathbf{r}). \tag{5.34}$$

若仅考虑绕z 轴的转动，则可以证明

$$g = g(\hat{z},\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.35}$$

而

$$g^{-1}=\tilde{g}(\hat{z},\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

如果只考虑一个绕z 轴的无穷小转动$\delta\theta$，则有

$$g = g(\hat{z},\theta)=\begin{pmatrix}1 & -\delta\theta & 0\\ \delta\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

$$g^{-1} = \tilde{g}(\hat{z},\theta)=\begin{pmatrix}1 & \delta\theta & 0\\ -\delta\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

故有

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{r}) &= \hat{R}(\hat{z},\delta\theta)\psi(\mathbf{r})=\psi(g^{-1}\mathbf{r})=\psi(x+y\delta\theta,-x\delta\theta+y,z)\\ &= \left[1+\delta\theta\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\psi(\mathbf{r})\\ &= \left[1-i\delta\theta\left(-ix\frac{\partial}{\partial y}+iy\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi(\mathbf{r})\\ &= (1-i\delta\theta\hat{L}_z)\psi(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{5.39}$$

即有

$$\hat{R}(\hat{z},\delta\theta)=1-i\delta\theta\hat{L}_z. \tag{5.40}$$

同理可有

$$\hat{R}(\hat{x},\delta\theta) = 1-i\delta\theta\hat{L}_x\,, \tag{5.41}$$

$$\hat{R}(\hat{y},\delta\theta) = 1-i\delta\theta\hat{L}_y\,. \tag{5.42}$$

因此，对绕任意方向$\mathbf{n}$的无穷小转动$\delta\theta$有

$$\hat{R}(\mathbf{n},\delta\theta)=1-i\delta\theta\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}, \tag{5.43}$$

其中$\mathbf{n}$表示一个单位矢量，$\hat{R}(\mathbf{n},\delta\theta)$ 是群元素$g(\mathbf{n},\delta\theta)$的表示。$\hat{\mathbf{L}}$是$SO(3)$ 群的生成元，它满足如下的对易关系

$$[L_i,L_j]=i\,\epsilon_{ijk}\,L_k. \tag{5.44}$$

有限转动可以看成是无穷多个无穷小转动相继作用的累积结果。因此可以证明对有限转动

$$\hat{R}(\mathbf{n},\theta)=e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}},\quad \text{or}\quad e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}}, \tag{5.45}$$

其中$\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$是总角动量。体系的哈密顿量$\mathcal{H}$在转动变换下的不变性意味着对任何群元有

$$\left[\mathcal{H},\hat{\mathbf{R}}\right]=0,\quad or\quad \left[\mathcal{H},\hat{\mathbf{J}}\right]=0. \tag{5.46}$$

所以总角动量守恒。$\mathcal{H},\mathbf{J}^2,J_z$组成一组相互对易的力学量完全集合，共同本征波函数为Ψ_{njm}，三个量子数(n,j,m)是与哈密顿算符$\mathcal{H}$，总角动量平方算符$\mathbf{J}^2$和总角动量第三分量算符$\mathbf{J}_z$对应的好量子数。

在1.3节中，我们曾经指出，所有粒子都有自旋，自旋也具有角动量的性质，因而在量子力学的情况下，总角动量守恒是指自旋和轨道角动量之和守恒。例如在已知的复合粒子中，所有粒子的自旋都是由其组成部分的自旋和轨道角动量耦合而得到的。

5.2.2 空间反射变换和宇称

空间反射变换简称P变换，定义为空间坐标都反号，但时间不变的变换，即

$$\vec{\mathbf{r}}\to-\vec{\mathbf{r}},\quad t\to t. \tag{5.47}$$

在P变换下，每一个运动状态变为另一个状态。对于一个特定的点或者经典力学的一个物体来说，P变换的效果等价于特定角度(180°) 的转动。因此在经典物理范围，P变换不变性并不对应存在某种守恒定律。但在微观物理范围内，对于量子态的描写来说，P变换不能完全等效于某种转动，或者等价于某种特殊的连续变换。P变换是一种典型的分立变换，P变换不变性直接和宇称守恒相联系。

在P变换下

$$\vec{\mathbf{r}}\to-\vec{\mathbf{r}},\quad \vec{\mathbf{p}}\to-\vec{\mathbf{p}},\quad E\to E,\quad \vec{\mathbf{L}}=\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{p}}\to(-\vec{\mathbf{r}})\times(-\vec{\mathbf{p}})=\vec{\mathbf{L}}. \tag{5.48}$$

即，动量$\vec{\mathbf{p}}$是矢量在P变换下变号，能量E是标量不变号，角动量是轴矢量也不变号。所以角动量和P变换是可以对易的，有共同的本征态。

一. 轨道宇称和内禀宇称

按照定义, P变换满足

$$P^2=1. \tag{5.49}$$

因此P的本征值可取值为±1，P的本征值又称P宇称。当系统轨道角动量为L时，其本征波函数为球谐函数$Y_{lm}(\theta,\phi)$，在P 变换下，

$$\theta\to\pi-\theta,\quad \phi\to\pi+\phi \tag{5.50}$$

从而有

$$\widehat{P}Y_{Lm}(\theta,\phi)=Y_{Lm}(\pi-\theta,\pi+\phi)=(-1)^{L}Y_{Lm}(\theta,\phi) \tag{5.51}$$

即轨道角动量的宇称为$P=(-1)^{L}$。在P变换下，粒子内部波函数也有P宇称，称内禀宇称(记为P'或者η_P)，其数值只能由实验确定。

二. 内禀宇称、相对宇称和总宇称

(1) 纯中性粒子（所有内部相加性守恒量，如电荷,奇异数,重子数等都等于0的粒子，例如光子γ 和赝标介子π^0 ）的内禀宇称是确定的，历史上是由实验来确定给出的，例如：

$$P'(\gamma)=-1,\quad P'(\pi^0)=-1; \tag{5.52}$$

(2) 根据电子偶素实验和波函数反对称要求，自旋为半整数的费米子f与其反粒子$\bar{f}$的相对(内禀)宇称为-1，即有$P'(f\bar{f})=(-1)$。而对于一对正反玻色子则有:$P'(b\bar{b})=+1$。那么，由一对正反粒子组成的纯中性系统的总宇称P为

$$P(f\bar{f})=(-1)^{L}\cdot P'(f\bar{f})=(-1)^{L+1},\quad P(b\bar{b})=(-1)^{L}\cdot P'(b\bar{b})=(-1)^{L}, \tag{5.53}$$

其中的$(-1)^{L}$是轨道角动量贡献的轨道宇称。

对于非纯中性粒子，其内禀宇称只能是相对的，只要满足上面第(2)条的要求即可。针对各种不同的内部对称性相加性守恒量，约定以下的标准以消除不确定性：

1. 同一同位旋多重态的不同电荷态, 宇称相同，例如由上面(1)所知，π^0介子的宇称为为负，我们约定$\pi^{\pm}$介子的宇称也为负；

2. 对于重子，我们约定所有重子数b为正的基态重子的宇称$P'(b)=+1$, 则根据上面的(2)所有基态反重子的宇称为-1；

3. 对于轻子，我们约定轻子数L_e、L_μ 、L_τ为正的轻子的宇称$P'(e^-)=P'(\mu^-)=P'(\tau^-)=+1$，相应的轻子数为$-1$的反轻子的宇称为$-1$；

4. 对于具有奇异数的介子，我们在第六章夸克模型中会将SU(2)的同位旋对称性扩充到包括奇异数的SU(3)对称性，因而我们约定在同一个SU(3)多重态的介子具有相同的宇称，例如$P'(K)=P'(\pi)=-1$，$P'(K^*)=P'(\rho)=-1$；类似地，具有粲数C的介子和有底数B的介子，也约定它们具有与其同一SU(5)多重态的介子相同的宇称，例如$P'(D)=P'(B)=P'(\pi)=-1$。

现在基本粒子表[1]中列出的宇称值，都是按上述约定并根据宇称守恒（电磁或者强相互作用过程）的相关实验定出来的。

三. 两粒子、三粒子系统的(总)宇称

对于内禀宇称分别为$P'(1)$和$P'(2)$，轨道角动量量子数为L的两粒子系统，其(总)宇称可以写为:

$$P = P'(1)\ P'(2)\ (-1)^L. \tag{5.54}$$

例如对两π体系，因为π介子自旋量子数为$S=0$，总角动量量子数$J=L+S=L$，轨道宇称为$(-1)^L=(-1)^J$。同时有$P'(1)=P'(2)=-1$。所以两π体系的(总)宇称为：$P=(-1)^J$。也就是说两π体系的（总）宇称量子数只能是：$J^P=L^{(-1)^L}=0^+,1^-,2^+,3^-,\cdots$。

对双矢量粒子系统，每个粒子的自旋量子数为1，统的总自旋量子数$S=0,1,2$，总角动量量子数$J=L,|L\pm1|,|L\pm2|$。但是在第1.3.1节中我们提到，由于光子质量为0，其自旋只有两个横向极化自由度。因此双光子系统并不等同于一般的双矢量粒子情况。例如著名的朗道-杨定理[80]就限制双光子系统无论取何种轨道角动量都不能耦合为总角动量为1的态[37]。如果考虑每个光子的偏振，根据玻色统计的要求构造双光子系统所有的波函数，可以得出当J为奇数，宇称$P=-1$时，只能有L=奇数，$S=1$，而这不满足光子的横波条件[81]。因此对双光子系统，$J^P=1^\pm,3^-,5^-,\cdots,(2N+1)^-$是禁止的，其它$J^P$组合都是允许的。

对于内禀宇称分别为$P'(i)$的三粒子系统，其宇称可以写为：

$$P = P'(1)P'(2)P'(3)\cdot(-1)^{L+l}, \tag{5.55}$$

其中量子数L表示粒子“1”和“2”在它们的质心系的轨道角动量，量子数l表示第“3”个粒子相对于粒子“1-2”的质心的轨道角动量。

5.2.3 宇称守恒和宇称不守恒

物理规律在空间反射下的不变性导致宇称守恒。这时要求哈密顿量和空间反射算符对易，即

$$[\mathcal{H},\widehat{P}]=0. \tag{5.56}$$

在上世纪50年代中叶之前，所有的实验都证实宇称守恒是普遍的物理规律。例如在原子物理中氢原子不同能级之间的跃迁所引起的线状光谱有跃迁选择定则，其中角动量守恒要求$\Delta J=0,\pm1$，而因为跃迁所放出光子的宇称是-1，跃迁选择定则因而要求$\Delta L=\pm1$。

宇称守恒在确定粒子的自旋和宇称等性质方面具有非常广泛的应用。在上一节中，我们给出了基态的介子和重子的宇称约定，其它激发态粒子的宇称则都要由宇称守恒的实验来确定，例如在3.4.3节中讨论过的ϕ介子的宇称就是通过其(3.113)式的衰变得出的：末

态角分布得出的ϕ介子的自旋为1，因而两个K介子之间的轨道角动量为1，因此ϕ介子的宇称为

$$P_K'^2(-1)^1 = -1. \tag{5.57}$$

发现奇异粒子后，在对最轻的奇异粒子衰变过程的研究中遇到了一个疑难，即“$\theta-\tau$”疑难。这个疑难表现为：实验中发现了两种质量、寿命和电荷都相同的粒子θ和τ，衰变时，θ衰变为两个π介子，τ衰变为三个π介子。实验结果的分析表明，三个π介子的总角动量为零，宇称为负；而两个π介子的总角动量为零，则宇称只能是正。因此从质量、寿命和电荷来看，θ和τ似乎应是同一种粒子，但是从衰变行为来看，如果宇称是守恒量，则θ和τ就不可能是同一种粒子。

李政道[2] 和杨振宁[3]当时对“$\theta-\tau$”疑难问题十分重视[82]。在1955年底到1956年初，他们做了许多尝试，都没有成功。其中一条道路是提议宇称不守恒，但是当时很多实验都验证了宇称守恒，却没有发现任何的不守恒现象。其实当时他们和其它的物理学家都没有想到关键的一点：宇称不守恒只在弱相互作用发生。不但没有想到这一点，而且还有一个错误印象，以为贝塔衰变实验已经观测到了弱相互作用中的宇称守恒。所以“$\theta-\tau$”之谜没有答案。

1956年4月底5月初的一天，他们想到了这一关键点。调研发现：**所有证实了宇称守恒的实验都是在强相互作用或者电磁相互作用过程中做的，但是在弱相互作用过程中宇称守恒并没有得到实验的判定性检验。** 李政道和杨振宁提出，这个疑难产生的原因在于弱相互作用过程中宇称可以不守恒。他们建议了多个实验，其中之一为通过钴60的贝塔衰变实验来对这一点进行判定性检验，

$$^{60}\mathrm{Co} \to ^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{5.58}$$

实验的原理是利用核磁技术使钴60的原子核极化，即原子核的自旋方向沿确定方向排列，观察钴60通过贝塔衰变(弱作用)放出电子的方向分布。如果宇称是守恒的，则沿自旋轴正向的半球方向内射出的电子数应与包含自旋轴负向的半球方向内射出的电子数相同（自旋与角动量在镜像变换下不变），即左右对称；反之如果这两个半球方向内射出的电子数不相等，即表现出明显的左右不对称性；则表明弱相互作用过程中宇称不守恒。

他们的文章[83]并未被当时的物理学界所赞同。泡利在写给韦斯科夫的一封著名的信中说：“我不相信上帝是一个弱作用的左撇子···。”另一方面，对实验物理学家来说，由于他们所建议的几个实验都不是简单易做的，而大家又不相信他们解决问题的方向是对的，所以很少有人动手去做那些实验。

[2]李政道，1926.11.24-，美籍华人物理学家。1950年在芝加哥大学获得博士学位，导师是费米。以弱相互作用中宇称不守恒和非拓扑孤立子理论闻名于世，与杨振宁分享1957年诺贝尔物理奖。

[3]杨振宁，1922.10.1-, 美籍华人物理学家。泰勒的博士生，1948年在芝加哥大学获得博士学位。以弱相互作用中宇称不守恒、Yang-Mills规范场和Yang-Baxter方程闻名于世，与李政道分享1957年诺贝尔物理奖。

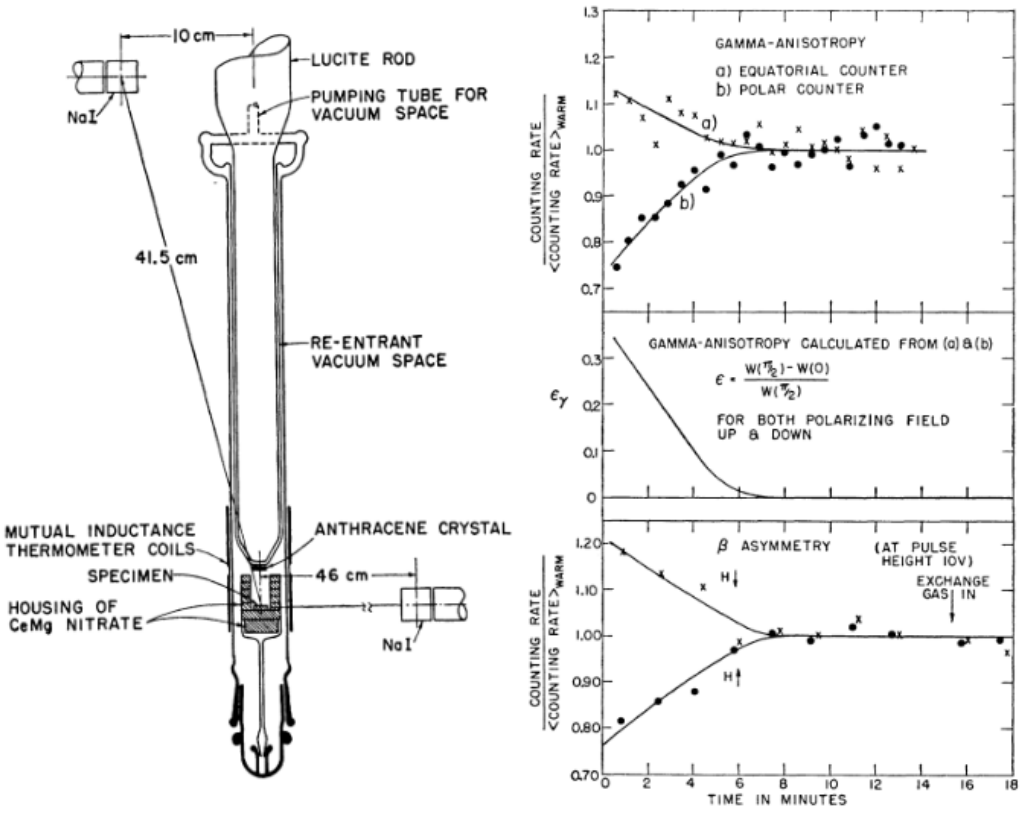


图 5.2: 左图是吴健雄所使用的实验测量仪器的示意图。右图为实验结果：极化场的光子各向异性和贝塔衰变中电子数目不对称性图（扫描自[84]）。

哥伦比亚大学的吴健雄[4] 是李政道和杨振宁的朋友和同事，也是贝塔衰变研究的名家，她与美国国家标准局的四位物理学家合作，做了钴60的贝塔衰变实验。1957年初，他们完成了实验，公布了如图5.2所示的实验测量结果[84]：上图的γ光子各向异性观测结果用来量度钴60的极化度，下图的数据点则是在磁场变换方向前后同一地点测量到的电子数目，可以看出，贝塔衰变发射出的电子反向于磁场的方向；随着时间推移，极化消失，则不对称度也消失。实验结果表明：**在贝塔衰变中宇称确实不守恒。** 这项结果引起了物理学界的震惊！各个实验室竞相做其它的弱作用的实验，例如同期的《物理评论》中也发表了Lederman等人在李-杨建议下的缪子衰变的观测实验。**所有相关实验均证明：在弱相互作用过程中宇称不守恒。**

过去人们对于守恒定律的理解比较简单，没有想到适用范围的问题，弱相互作用宇称不守恒的实验证明告诉人们：各种守恒定律的适用范围可以不同，有的物理量在一切相互

[4] 吴健雄，1912.5.31-1997.2.16, 美籍华人物理学家。1940年在加州大学伯克利分校获得博士学位，导师是E.劳伦斯。在贝塔衰变研究和宇称不守恒实验测量方面有重要贡献，曾获得沃尔夫奖和美国国家科学奖。

表 5.1: 宇称不守恒的弱作用衰变道和其实验测量分支比上限。

衰变道	$\eta \to \pi^+\pi^-$	$\eta \to \pi^0\pi^0$	$\eta \to 4\pi^0$	$\eta' \to \pi^+\pi^-$	$\eta_c \to \pi^0\pi^0$	$\eta_c \to K^+K^-$
分支比上限	1.3×10^{-5}	3.5×10^{-4}	6.9×10^{-7}	1.8×10^{-5}	4×10^{-5}	6×10^{-4}

作用过程中都是守恒的，而有些物理量则只在某些相互作用过程中才是守恒的。宇称就是人们认识的第一个只在某些相互作用过程中才守恒的相乘性守恒量。在研究各种守恒定律时，无论涉及的是相加性守恒量还是相乘性守恒量，都要注意和研究这些守恒定律的适用范围。

P宇称在强相互作用和电磁相互作用过程中守恒，但在弱相互作用过程中不守恒。因此对不直接参与强相互作用和电磁相互作用的中微子，没有确定的P宇称，因为不能从任何实验中确定。宇称守恒与否也是判定粒子衰变过程是何种相互作用的重要判据之一。一般来说，一个衰变过程如果能够通过强相互作用或者电磁作用进行，也必然可以通过弱相互作用进行，只是弱作用太弱了，可以忽略不计，但是如果这个过程是宇称不守恒的，那么必然是弱作用过程。例如，η、η'和η_c粒子的主要衰变道是通过电磁或者强相互作用进行的，表5.1中所列的衰变道则都是宇称不守恒的弱衰变过程。

5.3　电荷共轭变换、G变换和C、G宇称守恒

在第四章我们已经提到描写费米子运动的相对论性狄拉克方程。利用这个方程来研究氢原子能级分布时，给出了氢原子能级的精细结构，与实验很好地符合。从这个方程可以自动导出电子自旋与轨道角动量不同：轨道角动量、沿某一特定方向的投影的取值为普朗克常数的整数倍，而电子自旋角动量沿某一特定方向的投影的取值却应为$\pm 1/2$，这也是当时已经从原子光谱的实验研究中总结出的认识，而狄拉克方程对之给出了自然的理论解释。狄拉克方程也正确预言了电子自旋的回磁比为轨道角动量的回磁比的二倍，这些成就促使人们相信狄拉克方程是一个正确地描写电子运动的相对论性量子力学方程。

狄拉克方程也预言了正电子的存在，后来在宇宙线实验中被发现，随后在加速器实验中发现了反质子，它的质量和质子相同，电荷为$-e$，在后来的加速器实验中又发现了一系列的反粒子。实验表明，各种粒子都有相应的反粒子存在，这个规律是普遍的。

5.3.1　电荷共轭变换

在粒子物理中，按照量子场论提供的图象，一般说来，场的激发态表现为粒子。场的任一种激发状态都有与之对应的复共轭的激发状态，这在物理上相应于粒子与反粒子。粒子和反粒子的质量，寿命，自旋相同，但它们的一切内部相加性守恒量都互相反号。也有可能，某些粒子的一切内部相加性守恒量都为零，反粒子就是他们自己，这些粒子称为Majorana 粒子或纯中性粒子，相应的场称为Majorana场或纯中性场。各种粒子都有与之相对应的反粒子，这个普遍结论被几十年的粒子物理的发展不断印证。

电荷共轭（C）变换又称正反粒子变换，是指在一个系统中，把一切粒子换成与它们相应的反粒子。 在C变换下，所有相加性量子数(Q, L, B, S, 等)都要变号，电磁场强度**E**、**H** 也要变号。但时间、空间、动量、角动量等则保持不变。

在C变换下，

$$\hat{C}\psi_A = \eta_A \psi_{\bar{A}}, \tag{5.59}$$

其中η_A是一个相因子。由归一化条件可得: $\eta_A \eta_A^* = 1$。如果对某一粒子态做两次C变换，则应回到原来的粒子态

$$\hat{C}^2\psi_A = \hat{C}\eta_A\psi_{\bar{A}} = \eta_A\eta_{\bar{A}}\psi_A = \psi_A. \tag{5.60}$$

所以应有

$$\eta_A\eta_{\bar{A}} = 1, \tag{5.61}$$

即

$$\eta_{\bar{A}} = \eta_A^*. \tag{5.62}$$

正反粒子的C变换相因子互为复共轭。

如果Q是一个相加性守恒量，$|A\rangle$ 是Q的任意本征态，则有

$$\hat{Q}\hat{C}|A\rangle = \hat{Q}\eta_c(A)|\bar{A}\rangle = -Q'(A)\eta_c(A)|\bar{A}\rangle \tag{5.63}$$

$$\hat{C}\hat{Q}|A\rangle = Q'(A)\hat{C}|A\rangle = Q'(A)\eta_c(A)|\bar{A}\rangle \tag{5.64}$$

即

$$(\hat{Q}\hat{C} + \hat{C}\hat{Q})|A\rangle = 0. \tag{5.65}$$

考虑到任意态总可以用Q的本征态展开，因此一般地都有

$$(\hat{Q}\hat{C} + \hat{C}\hat{Q}) = 0 \tag{5.66}$$

这就是说，所有的相加性守恒量都和C变换反对易。因此一般来说，相加性守恒量和C变换没有共同本征态，只有所有的内部相加性守恒量取值为零的态才可能同时又是C变换的本征态。这样的粒子态就是前述的纯中性态。

5.3.2 纯中性态和C宇称守恒

根据C变换的定义式(5.59)，**C变换的本征态一定是纯中性粒子**$(\gamma, \pi^0, \eta, \rho^0, \omega, \phi, \cdots)$，**或纯中性系统**$(e^+ - e^-, p - \bar{p}, \cdots)$。对纯中性粒子或纯中性系统，有

$$\hat{C}\psi_n = \eta_n\psi_n = \pm\psi_n, \tag{5.67}$$

我们称$\eta_n = \pm 1$的态为正、负C宇称态。这时η_n是好量子数。

可以证明：$\eta_C(\gamma) = -1,\ \eta_C(\pi^0) = +1$。　对于光子，由于$C$变换时电荷及电流变号，相应的电场和磁场也变号，即

$$\mathbf{E} \longrightarrow -\mathbf{E},\quad \mathbf{B} \longrightarrow -\mathbf{B}, \tag{5.68}$$

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\phi) \longrightarrow (-\mathbf{A}, -i\phi) = -A_\mu. \tag{5.69}$$

所以光子具有负C宇称。由于C宇称是相乘性量子数，所以n个光子系统的C宇称为

$$\eta_C(n\gamma) = (-1)^n. \tag{5.70}$$

π^0介子可以通过电磁相互作用衰变到两个光子，因此π^0介子的C宇称是正的：$\eta_C(\pi^0) = +1$。

对于具有确定轨道角动量**L** 和总自旋**S**的正、反费米子对（$f\bar{f}$），或正、反玻色子对（$B\bar{B}$）构成的纯中性系统，也具有确定的C宇称，**理论上可以证明：不论组成系统的正反粒子是费米子还是玻色子，这个纯中性系统的C宇称由其轨道角动量和总自旋量子数确定：**

$$\eta_C = (-1)^{L+S} \tag{5.71}$$

这个结果非常重要，在粒子物理的对称性分析中经常使用。我们可以通过简单的分析来证明（5.71）式成立。

证明：　在坐标表象质心系中考察一对正反粒子组成的纯中性系统，设系统的轨道角动量为L，总自旋为S，系统的态可以用$|x, s_1; -x, s_2\rangle$描写，其中第一组量描写正粒子，第二组量描写反粒子，$2x$为两粒子间相对径矢，s_1，s_2分别描写两粒子的自旋状态。对这个态作CP变换，按照定义可以得到

$$CP|x, s_1; -x, s_2\rangle = (\eta_C P)|x, s_1; -x, s_2\rangle, \tag{5.72}$$

其中η_C表示两粒子系统的C宇称，P表示两粒子系统的宇称。对态$|x, s_1; -x, s_2\rangle$分步做变换可得

$$CP|x, s_1; -x, s_2\rangle = C|-x, s_1; x, s_2\rangle = |x, s_2; -x, s_1\rangle, \tag{5.73}$$

再交换两个粒子的自旋就回到变换前状态$|x, s_1; -x, s_2\rangle$。而交换两个粒子的自旋将贡献一个因子$(-1)^{S+1}$（费米子对）或者$(-1)^S$（玻色子对），也就是说有

$$CP|x, s_1; -x, s_2\rangle \;=\; \begin{cases} (-1)^{S+1}|x, s_1; -x, s_2\rangle, & \text{Fermion pair;} \\ (-1)^{S}|x, s_1; -x, s_2\rangle, & \text{Boson pair.} \end{cases} \tag{5.74}$$

比较(5.72,5.74)两式的结果，得到两个量子数的乘积为：

$$\eta_C\ P = \begin{cases} (-1)^{S+1}, & \text{Fermion pair;} \\ (-1)^{S}, & \text{Boson pair.} \end{cases} \tag{5.75}$$

但已知正反费米子对系统的P字称为$P=(-1)^{L+1}$；正反玻色子对系统的P 字称为$P=(-1)^{L}$，其中$(-1)^{L}$是轨道角动量的贡献，因此一对正反粒子组成系统的内禀C字称为：

$$\eta_C\ P = \eta_c\,(-1)^{L+1} = (-1)^{S+1}, \quad \longrightarrow \quad \eta_C = (-1)^{L+S},\ \text{Fermion pair;} \tag{5.76}$$

$$\eta_C\ P = \eta_c\,(-1)^{L} = (-1)^{S}, \quad \longrightarrow \quad \eta_C = (-1)^{L+S},\ \text{Boson pair.} \tag{5.77}$$

证毕。

C字称守恒

根据现有实验，在强相互作用和电磁相互作用中，C字称是守恒的，实际上，从强相互作用和电磁相互作用的拉氏量也可以看出它们是在C 变换下不变的。

在C变换不变性的要求下，如果把反应过程初态和末态粒子全部换成相应的反粒子，则反应几率（表现在反应截面上）、角分布、动量、自旋和轨道角动量等量都是相同的。例如$m=891.66(26)$ MeV的K^{*+}介子，它的宽度为$\Gamma=50.8(9)$ MeV，它的主要衰变方式是通过强相互作用衰变为$K^{+}\pi^{0}$和$K^{0}\pi^{+}$。同时它还可以通过电磁相互作用衰变为$K^{+}\gamma$，分支比为$9.9(9)\times10^{-4}$。C变换不变性要求K^{*+}介子的反粒子K^{*-}介子的质量和宽度应该与K^{*+}介子的完全相同，它的主要衰变方式是通过强相互作用衰变为$K^{-}\pi^{0}$和$\bar{K}^{0}\pi^{-}$。同时它也应还可以通过电磁相互作用衰变为$K^{-}\gamma$，分支比为$9.9(9)\times10^{-4}$ (粒子数据表据此只列出正粒子性质，不列反粒子)。

如果反应过程的初态是C算符的本征态，在C字称守恒的条件下，末态也一定是C算符相同本征值的本征态。

例题-5.3：对$e^{+}+e^{-}\to n\gamma$过程，讨论由C字称守恒对末态光子数n的可能取值给出的限制。

解： 由(5.70,5.71)两式和电磁衰变过程中C字称守恒的要求，应该有

$$(-1)^{L+S}=(-1)^{n}. \tag{5.78}$$

因此，如果电子偶素的衰变是在基态$(L=0)$进行的，则衰变过程有两种可能

1. 在$L=S=J=0$的单态$^{1}S_{0}$进行衰变时，n应为偶数，即主要衰变为两个γ光子。衰变成四个γ的几率要小四个数量级$(\alpha^{2}\approx10^{-4})$。

2. 在$L=0,\ J=S=1$的三重态$^{3}S_{1}$进行衰变时，n应为奇数，即主要衰变为三个γ光子。变成一个光子的可能性被能量、动量守恒禁戒。

$\pi^{0}\to\gamma\gamma$的衰变是另一个例子。π^{0}介子的C字称为正，光子的C字称为负，因此π^{0}介子可以衰变成两个光子，但不能衰变成三个光子。实验数据表明：

$$Br(\pi^{0}\to3\gamma)/Br(\pi^{0}\to2\gamma)<3.1\times10^{-8}. \tag{5.79}$$

表 5.2: 明显破缺C字称守恒的电磁衰变的例子和实验给出的分支比上限。

衰变道	$\eta \to \pi^0\gamma$	$\eta \to 3\gamma$	$\omega \to 2\pi^0$	$\omega \to 3\pi^0$	$\eta' \to 3\gamma$	$\eta' \to \mu^+\mu^-\eta$
分支比上限	9×10^{-5}	1.6×10^{-5}	2.2×10^{-4}	2.3×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.5×10^{-5}

在第四章我们给出了电磁相互作用的拉氏量，很显然这个拉氏量在电荷共轭变换下是不变的，因而电磁相互作用中C字称守恒是严格的，类似的情况在强相互作用中也是一样的。但是寻找超出标准模型的新物理一直是物理学家的追求，除了在理论上的探索，实验上破坏已知对称性和守恒定律的实验迹象将给出非常重要的研究方向。在表5.2中我们列出了一些明显破缺C字称守恒的电磁衰变的例子和实验目前给出的分支比上限[1]。

在弱相互作用中，现有实验发现C字称不守恒，而在后面的弱作用章节中也可以看出弱相互作用的拉氏量在C 变换下不是不变的。

5.3.3　G变换和G字称

C字称守恒对于通过强相互作用和电磁相互作用实现的过程给出了很强的预言，但是由于只有纯中性粒子和某些纯中性系统才有确定的C字称，它的适用范围受到很大的限制。人们期望能找到适用范围更大的类似的守恒定律。除了同位旋对称性所包含的相加性守恒量I_3以及与其相关的电荷Q之外，其它内部相加性守恒量都为零的粒子称为普通介子（根据盖尔曼–西岛关系，$Q = I_3$）。例如$\pi^{\pm}$不是C算符的本征态，没有确定的C字称，

$$\widehat{C}\psi_{\pi^+} = \eta_\pi \psi_{\pi^-}. \tag{5.80}$$

ψ_{π^+}和ψ_{π^-}都不是算符$\widehat{C}$的本征态，就谈不上本征值。普通介子满足新的对称性要求，这个对称性是由同位旋和C变换所复合组成的。这就是只在强相互作用中守恒的量子数–G字称，它是讨论强子性质时用到的一个重要概念。

$\widehat{G}$变换的定义是：一个系统在进行绕同位旋空间第二坐标轴I_2旋转180° 角后，再做电荷共轭变换：

$$\widehat{G} = CR_2 = Ce^{i\pi I_2}. \tag{5.81}$$

对普通中性介子(如π^0)，其同位旋波函数为$\chi(1,0)$。在同位旋空间中绕第二坐标轴I_2旋转180°角的问题和角动量波函数$Y_L^0(\theta,\phi)$在普通位置空间中绕Y轴旋转180°角的情况在形式上是相似的。可以用相同的算符$R_2' = e^{i\pi L_y}$表示，计算方法也一样。算符R_2和R_2'的作用结果都是将θ换成$\pi - \theta$。对$Y_L^0(\theta,\phi)$和$\chi(I,0)$的R_2'、R_2变换分别为：

$$\begin{aligned} Y_L^0(\theta,\phi) \quad & \xrightarrow{\theta \to \pi - \theta} \quad (-1)^L Y_L^0(\theta,\phi), \\ \chi(I,0) \quad & \xrightarrow{e^{i\pi I_2}} \quad (-1)^I \chi(I,0). \end{aligned} \tag{5.82}$$

以π^+介子为例，算符R_2使I_3改变符号，即$R_2\pi^+ \to \pi^-$，而$\widehat{C}$算符又把它变回来$\widehat{C}\pi^- \to \pi^+$，因而有

$$\widehat{G}(\pi^+,\pi^0,\pi^-) \to \pm(\pi^+,\pi^0,\pi^-). \tag{5.83}$$

符号怎样选择呢？以π^0为例：π^0衰变为两个光子，其$\widehat{C}$算符的本征值$\eta_C = +1$。算符R_2作用到π^0波函数上，其本征值为$(-1)^I = -1$，因此

$$\widehat{G}\psi_{\pi^0} = (-1)^I\psi_{\pi^0} = -\psi_{\pi^0} \tag{5.84}$$

同时，我们可以选择$\pi^{\pm}$的G字称与π^0的G字称相同，均为-1。一般地，对于单个普通介子我们有

$$G' = \eta_C\,(-1)^I. \tag{5.85}$$

这种讨论可以推广到$I_3 = 0$的其他中性粒子系统。例如，对于一个核子-反核子系统，其总自旋为S，轨道角动量为L，$\widehat{C}$算符的作用结果给出一个因子：$(-1)^{L+S}$。对中性核子-反核子系统，这时$\widehat{G} = \widehat{C}R_2$算符的作用结果为：

$$\widehat{G}\psi = (-1)^{L+S+I}\psi \tag{5.86}$$

由于强作用具有电荷无关性，所以上式对$I_3 \neq 0$的一般情况也是适用的。**所以对于由一对正反粒子组成的具有确定轨道角动量L和总自旋S的系统，其G字称量子数G'为**

$$G' = (-1)^{L+S+I}. \tag{5.87}$$

在抽象的同位旋空间里绕第二轴转 π 角相当于把第一轴和第三轴都反向，这样粒子的I_3就将变号。再经过C 变换时，粒子的所有的内部相加性守恒量都变号，I_3就将又再变一次号，又回到了初始的值。因此实际上G变换不改变I_3的值，但把除I_3以外的其它所有的内部相加性守恒量都变号。**对于普通介子，除I_3以外的其它所有的内部相加性守恒量都为零，实际上就是G变换的本征态，其本征值称为G字称。** 一切强子都有确定的G变换，但只有普通介子才是$\widehat{G}$算符的本征态，具有确定的G字称。同一组同位旋多重态具有相同的G字称。G字称是相乘性量子数。在强相互作用中，G字称量子数是守恒量。

由几个具有确定的G字称的子系统所组成的系统也具有确定的G字称，其值等于各子系统G字称的乘积。**由于π介子的G字称为-1，n个π介子组成系统的G字称等于$(-1)^n$** 。

5.3.4 G字称守恒

由于强相互作用在C变换和同位旋转动下是不变的，因此它在G变换下也是不变的。对强相互作用过程，G字称和C字称都是守恒的。但是在电磁相互作用下，C字称守恒。但由于同位旋不守恒了，G也就不守恒了。G字称的这个性质在研究和分析普通介子的强衰变时特别重要，它给出很强的限制和预言。在表-5.3中给出了一些常见赝标和矢量介子共振态的有关量子数和其衰变到π介子末态时，π介子的数目。可以看出，G字称为正的介子可以通过强相互作用衰变到两个π介子，而G字称为负的介子可以通过强相互作用衰变到三个π介子。下面我们以ρ、η和ω普通介子的多π产生过程为例，讨论C和G字称守恒在强子衰变分析中所起的作用。

表 5.3: 一些常见介子的量子数和主要π介子衰变道。

粒子质量(MeV)	$\pi(140)$	$\rho(770)$	$\omega(783)$	$\phi(1020)$	$\eta(549)$	$\eta'(958)$
自旋宇称(J^P)	0^-	1^-	1^-	1^-	0^-	0^-
同位旋(I)	1	1	0	0	0	0
C宇称	+1	-1	-1	-1	+1	+1
G宇称	-1	+1	-1	-1	+1	+1
主要π介子衰变道		2π	3π	3π	3π	5π

例题-5.4：使用强相互作用中G宇称守恒分析$\rho \to 2\pi$衰变过程，并确定ρ介子的量子数。

解： 在3.4.3节，我们讨论了同位旋I=1的ρ介子的发现过程。考虑到ρ介子几乎100%强衰变到$\pi\pi$对，而π介子的G宇称量子数是-1，由G宇称守恒定出ρ介子的G宇称为$G' = +1$，进而可以定出ρ^0介子的C宇称为-1，即

$$G'(\rho^0) = C(\rho^0) \cdot (-1)^I = G(2\pi^0) = 1, \longrightarrow C(\rho^0) = -1. \tag{5.88}$$

这样可以预言ρ介子通过强相互作用衰变到三个π介子末态是严格禁戒的(G宇称守恒)。同理ρ^0介子通过电磁相互作用衰变到两个光子末态也是严格禁戒的(C宇称守恒)，这些预言都已被实验很好地验证了。

由于$\pi\pi$系统的总自旋为零，由$\eta_C = (-1)^{L+S}$得到$\pi^+\pi^-$系统的C宇称为$(-1)^L$，其中L为$\pi^+\pi^-$之间的轨道角动量。前面已经定出ρ^0介子的C 宇称为-1，由此决定了L必须为奇数。角动量守恒决定ρ^0介子的自旋J等于$\pi^+\pi^-$之间的轨道角动量L, 从而J也必须是奇数。进一步的实验确定了ρ 介子的$J = 1$。

例题-5.5：考虑$\omega \to 3\pi, 2\pi, \pi\gamma$ 衰变过程，讨论不同衰变道的性质，确定ω粒子的量子数。

解： 同样在3.4.3节，我们讨论了ω 介子的发现过程，其性质可以从以下几个方面来确定：

(1) 由于它的宽度值为MeV的量级，可以推测它主要是通过强相互作用而衰变的。

(2) 由它是I $= 0$ 的普通介子，因为$G(\pi) = -1$，那么由G宇称守恒定出ω介子的G宇称为$(-1)^3 = -1$。由$G(\omega) = C(\omega)(-1)^I = -1$，可以定出$\omega$介子的C宇称为$C(\omega) = -1$。这样可以预言$\omega$ 介子通过强相互作用衰变到$\pi\pi$ 末态是禁戒的(G宇称守恒)。

(3) 由于$C(\omega) = -1$，$C(\pi^0) = 1$，$C(\gamma) = -1$，所以ω介子可以通过电磁相互作用衰变到$\pi^0\gamma$（C宇称守恒），对该衰变道分支比的实验测量结果为$(8.40 \pm 0.22)\%$。

表 5.4: 基于G宇称、C宇称守恒的原则，对ω介子衰变道允许-禁戒情况的总结：x表示禁戒，O表示可以衰变。

衰变道	$\omega \to \pi^+\pi^-$	$\pi^0\pi^0$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\gamma$	$\pi^0\gamma$	$\pi^+\pi^-\pi^0$
电磁作用	O	x	x	x	O	O
强作用	x	x	x	x	x	O

(4) 由于$C(\omega) = -1$，而π^0的C宇称为+1, 所以$\omega \to 2\pi^0, 3\pi^0$衰变道被C宇称守恒严格禁戒。

(5) ω介子虽然由于G宇称守恒的限制，不能通过强相互作用衰变到$\pi^+\pi^-$末态，但是如果ω 介子的自旋J=奇数, 它仍可通过电磁作用而衰变到$\pi^+\pi^-$末态，因为这时$\pi^+\pi^-$系统的C宇称也是-1。实验上后来发现ω介子有$(1.53 \pm 0.06)\%$的分支比衰变到$\pi^+\pi^-$末态，这也印证了ω介子的自旋J = 奇数。实验确定了ω介子的自旋是J=1。

ω介子的这些衰变道的性质总结在表 5.4中。

例题-5.6：分析η介子的衰变性质。

在3.4.3节中我们讨论了如图-3.11所示的η介子的发现过程。通过C宇称守恒，由$\eta \to \pi^0\pi^0\pi^0$可以定出其C宇称为：$\eta_C = +1$。由于其为同位旋单态，因而η介子的G 宇称应为：

$$G(\eta) = +1 \cdot (-1)^I = +1(-1)^0 = +1. \tag{5.89}$$

受G宇称守恒的限制，η介子不能通过强相互作用衰变到3π末态。所以η的主要衰变都只能通过二级电磁相互作用衰变到3π或者$\eta \to \gamma\gamma$, $\eta \to \pi^+\pi^-\gamma$等。那么$\eta$介子为什么不能衰变到两个$\pi$介子呢？答案是：$\eta$是$0^-$赝标介子，衰变到两个$\pi$介子的过程虽然是G宇称守恒，但却是P宇称不守恒的过程（π也是0^-赝标介子），因而不能通过电磁或者强作用过程进行。

5.4 CPT对称性与CPT定理

1957年发现了“弱相互作用下P宇称不守恒”，这就提出了一个问题：在弱相互作用下C宇称是不是守恒？CP是不是守恒？是不是C和CP都不守恒？

5.4.1 CP不变性

1957-1958年建立的普适费米弱相互作用理论，很好地概括了弱相互作用过程中宇称可以不守恒的要求，并且很快地得到实验的验证。按照这个理论，弱相互作用过程中C宇称也不守恒；但是弱相互作用具有CP不变性，也就是说在弱相互作用过程中CP宇称还是

守恒的。当然，由于电磁和强作用中C和P宇称分别都守恒，CP联合起来肯定也守恒，却并不增加新的守恒量。

CP变换不变性的物理含意是：两个通过CP变换相联系的过程，其演化性质和概率分布完全相同。 例如考虑$\pi^{\pm}$介子的纯轻子衰变过程，看起来，$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$衰变过程与$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$衰变过程应该是通过C变换互相联系的。在宇称不守恒发现以前，大家普遍都是这么认为的。但是，由于这两个过程是弱作用过程，中微子的自旋为1/2，由于它的静止质量为零，左旋分量和右旋分量是分开的，根据弱作用的性质，$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$衰变过程的中微子$\nu_\mu$只有左旋分量，这样经过单独C变换后得到的应该是一个自旋为1/2的左旋反中微子，而这是不存在的，因为反中微子都是右旋的。因此，只有把$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$衰变过程经过CP变换，$\pi^+$介子将变为$\pi^-$介子，$\mu^+$轻子将变为$\mu^-$轻子，同时运动方向将反向，但自旋方向不变，这反映为左旋将变为右旋，右旋将变为左旋，左旋中微子变为右旋反中微子，这样才能得到$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 衰变过程。

弱相互作用的CP不变性要求π^+介子和π^-介子的这两个衰变过程的性质和衰变宽度完全相同，实验也确实很好地验证了这一点。在第八章中，我们将看到弱相互作用的带电流只有左手相互作用，而没有右手相互作用很好地解释了C和P宇称在弱作用中的最大破坏，而CP联合变换不变的拉氏量特点。

要特别强调的是，由于中微子不直接参与强相互作用和电磁相互作用但可以直接参与弱相互作用，中微子和反中微子之间不是由C变换相联系而是由CP变换相联系，表现为中微子是左旋就决定了反中微子是右旋，实验很好地验证了这个预言，如图5.3所示。

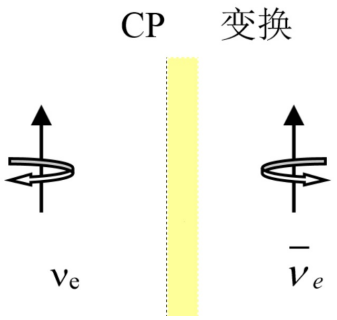


图 5.3:　左手中微子和右手反中微子之间通过CP变换相联系。

CP联合不变的弱相互作用理论建立没有多久，1964年7月，人们在实验上发现了中性K介子系统的弱相互作用衰变过程的CP破坏。由于正反粒子的衰变过程是通过CP联合变换相联系的，因此实验上寻找CP破坏的直接证据大多集中在观测正反粒子衰变过程的分支比的不同。虽然CP 破坏的程度很小，但是却揭示了弱相互作用与另外相互作用的本质区别，促使了弱相互作用理论的进一步发展。我们将在第八章和第十章中详细讨论这个问题。

5.4.2 时间反演和T不变性

在经典物理学中，人们对时间反演守恒或者不守恒的概念是熟悉的。牛顿第二定律$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$在时间反演下是不变的。但热传导和热扩散的情况则完全不同，因为这些过程和时间的一阶微商有关。在微观世界里，原子或分子间的弹性碰撞过程是时间反演不变的。但对于宏观过程，由于系统包含了大量的粒子，过程将遵守统计规律，总是从有序到无序。例如，气体经过小孔的膨胀过程，在现实世界中是不可逆的。

在坐标空间中，对波函数时间反演的定义是

$$\psi(\mathbf{r},t)\xrightarrow{T}\psi(\mathbf{r},-t). \tag{5.90}$$

如果量子力学体系的哈密顿量$\widehat{H}$有时间反演不变性，那么对薛定谔方程(4.16)做时间反演变换，可得

$$\widehat{H}\psi(\mathbf{r},-t)=-i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},-t)}{\partial t} \tag{5.91}$$

可以看出，$\psi(\mathbf{r},t)$和$\psi(\mathbf{r},-t)$遵守的运动方程并不相同。如果我们对(5.91)式两端取复数共轭，则得

$$\widehat{H}^*\psi^*(\mathbf{r},-t)=i\hbar\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},-t)}{\partial t} \tag{5.92}$$

因此，当$\widehat{H}=\widehat{H}^*$时，$\psi(\mathbf{r},t)$和$\psi^*(\mathbf{r},-t)$满足相同的薛定谔方程。**因此，可以把$\psi^*(\mathbf{r},-t)$定义为$\psi(\mathbf{r},t)$的时间反演态。$\widehat{H}=\widehat{H}^*$是时间反演不变性成立的条件。** 因此，人们要求量子力学的算符是厄米的。

如果引进时间反演算符T，可以把时间反演态的定义形式写成：

$$T\psi(\mathbf{r},t)=\psi^*(\mathbf{r},-t). \tag{5.93}$$

显然有$T^2=1, T=T^{-1}$。T是一个反线性算符（反幺正算符）：$TOT^{-1}=O^*$。可以验证：

$$\begin{aligned} T\mathbf{r}T^{-1} &= \mathbf{r}^*=\mathbf{r};\\ T\mathbf{p}T^{-1} &= \mathbf{p}^*=-\mathbf{p};\\ T\mathbf{J}T^{-1} &= \mathbf{J}^*=-\mathbf{J}; \end{aligned} \tag{5.94}$$

需要说明的是，$TOT^{-1}=O^*$只在坐标表象成立。

细致平衡原理：时间反演不变性要求一个反应的正向和逆向进行的跃迁振幅相等。如果能够在实验上证实细致平衡原理，也就检验了量子力学中的时间反演不变性。量子力学单位时间内状态的跃迁几率(2.76) 正比于跃迁矩阵元的平方和末态相空间单位能级密度。时间反演不变性要求正、逆向反应过程的跃迁振幅相等。因此，正、逆向反应过程的反应截面应分别与其末态能级密度成正比。例如考虑可逆两体散射过程

$$A+B\longleftrightarrow C+D, \tag{5.95}$$

细致平衡原理要求，在相同质心系能量情况下两散射截面有以下关系

$$\frac{d\sigma(AB\to CD)}{d\Omega}=\frac{(2s_C+1)(2s_D+1)}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\frac{p_f^2}{p_i^2}\cdot\frac{d\sigma(CD\to AB)}{d\Omega} \tag{5.96}$$

其中s_A,s_B,s_C和s_D分别为A,B,C和D粒子的自旋，p_i是A,B质心系的动量，p_f是C,D质心系的动量。这里假定了初态粒子没有极化，末态对所有的自旋态都进行了测量。因而计算中要对初态粒子自旋求平均，对末态粒子自旋求和。要注意，这里是对相同的质心系总能量和相同的质心系散射角而言的。

细致平衡原理得到了实验的支持。1968年，V.Witsch等人进行了如下实验

$$p+{}^{27}\mathrm{Al}\longleftrightarrow\alpha+{}^{24}\mathrm{Mg}, \tag{5.97}$$

结果表明，在实验误差(0.5%)范围内，两组反应截面基本重合，符合细致平衡原理。电磁相互作用中的时间反演不变性的实验例子是

$$n+p\longleftrightarrow d+\gamma. \tag{5.98}$$

根据下一节的CPT守恒定律，在弱相互作用中既然CP不守恒，那么时间反演T在弱作用过程也应不守恒，以保证CPT联合守恒。例如，$\Lambda\to p+\pi^-$是典型的弱相互作用衰变过程，但其逆反应$p+\pi^-\to\Lambda$一直没有被观察到，原因是质子和π介子之间的强相互作用散射截面比较大，而它们对撞产生Λ粒子是弱作用，比相应的强相互作用弱几个量级，弱作用的影响被淹没了。B介子工厂实验已经在很高的精度下确认了B介子系统的CP破坏，我们原则上同样可以研究B介子衰变过程的T破坏。但到目前为止，还没有找到好的方法来研究B介子系统任何T破坏的直接实验。

目前检验时间反演不变性的精确方法是关于中子电偶极矩d_n和电子电偶极矩d_e的实验测量。如果把中子放在电磁场中，电场强度为$\vec{\mathbf{E}}$，磁场强度为$\vec{\mathbf{B}}$，那么与场相关的中子的哈密顿量(附加能量)可以写为

$$\mathcal{H}=-2\left(d_n\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{\mathbf{E}}+\mu_n\vec{\mathbf{S}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right)=-\left(d_n\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{E}}+\mu_n\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right)=\mathcal{H}_D+\mathcal{H}_\mu, \tag{5.99}$$

其中$\vec{\mathbf{S}}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$表示中子的自旋角动量，$d_n$和$\mu_n$分别表示中子的电偶极矩和磁偶极矩的大小。在中子静止系，其自旋角动量$\vec{\mathbf{S}}$的指向定义了中子电偶极矩矢量$\vec{\mathbf{d}}$ 和磁偶极矩矢量$\vec{\mu}$ 的方向。对(5.99) 式中的哈密顿量分别做宇称变换$\mathbf{P}$和时间反演变换$\mathbf{T}$，那么有

$$\mathbf{P}\mathcal{H}\mathbf{P}^{-1}=-\left(d_n\vec{\sigma}\cdot(-\vec{\mathbf{E}})+\mu_n\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right)=-\mathcal{H}_D+\mathcal{H}_\mu, \tag{5.100}$$

$$\mathbf{T}\mathcal{H}\mathbf{T}^{-1}=-\left(d_n(-\vec{\sigma})\cdot\vec{\mathbf{E}}+\mu_n(-\vec{\sigma})\cdot(-\vec{\mathbf{B}})\right)=-\mathcal{H}_D+\mathcal{H}_\mu, \tag{5.101}$$

也就是说：$\mathcal{H}_\mu$在$\mathbf{P}$和$\mathbf{T}$变换下是不变的，但$\mathcal{H}_D$在$\mathbf{P}$和$\mathbf{T}$变换下是变的。只有当$d_n=0$时，才能够保持中子电偶极矩($\mathcal{H}_D$)在$\mathbf{P}$和$\mathbf{T}$变换下的不变性。**换句话说就是：时间反演不变性和宇称守恒均要求中子的电偶极矩为0。**

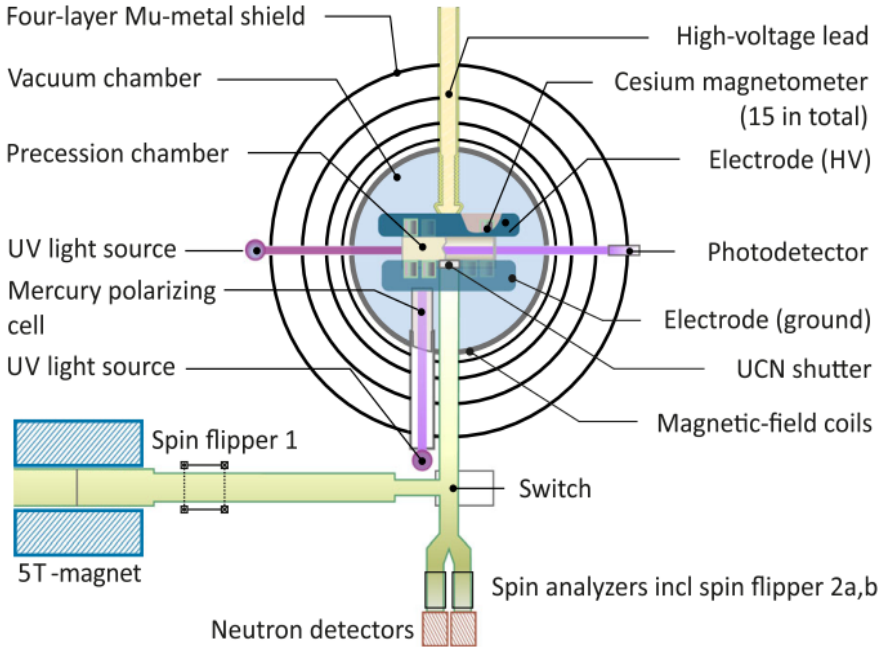


图 5.4: 测量中子电偶极矩谱仪示意图[89]。

如图-5.4所示，在最新的测量中子电偶极矩的实验上，人们就是通过改变加到超冷中子上的外电场$\vec{\mathbf{E}}$和外磁场$\vec{\mathbf{B}}$的方向，同时测量极化超冷中子自旋角动量的近动频率的变化$\nu_{\pm}$来测量中子电偶极矩的。对中子电偶极矩，标准模型的理论预言值为[1]

$$d_n^{\mathrm{SM}} \sim 10^{-31} e \cdot cm. \tag{5.102}$$

在部分超出标准模型的新物理模型框架下，可以存在比较大的中子电偶极矩。实验上通过60多年的努力，仍然没有发现$d_n \neq 0$。目前的最新实验测量值上限为[1]：

$$d_n^{\mathrm{EX}} \quad < \quad 1.8 \times 10^{-26}\ e \cdot cm, (90\% \quad C.L.). \tag{5.103}$$

尽管对中子电偶极矩d_n的测量是目前最精确的几个测量之一，但要达到标准模型预言的10^{-31}的量级，估计还需要几十年的努力。对轻子电偶极矩的实验测量也是没有发现$d_l \neq 0$，对电子和缪子电偶极矩的实验测量上限(90%置信度)为[1]：

$$\begin{aligned} \text{Electron}: \quad & \langle e|\mathbf{d}|e\rangle \ < 0.11 \times 10^{-28}\ e \cdot cm, \\ \text{Muon}: \quad & \langle \mu|\mathbf{d}|\mu\rangle \ < 10^{-19}\ e \cdot cm. \end{aligned} \tag{5.104}$$

在表-5.5中，我们给出了在**C**、**P**和**T**变换下，一些常见物理量的变换性质。

表 5.5: 在**C**、**P**和**T**变换下，一些常见物理量的变换关系。其中$\vec{\sigma}$是泡利矩阵，表示自旋角动量。

物理量	C（电荷共轭）	P（空间反射）	T（时间反演）
$\vec{\mathbf{r}}$(空间坐标)	$\vec{\mathbf{r}}$	-$\vec{\mathbf{r}}$	$\vec{\mathbf{r}}$
t(时间坐标)	t	t	-t
$\vec{\mathbf{p}}$ (矢量)	$\vec{\mathbf{p}}$	$-\vec{\mathbf{p}}$	$-\vec{\mathbf{p}}$
$\vec{\mathbf{L}}$(轴矢量)	$\vec{\mathbf{L}}$	$\vec{\mathbf{L}}$	$-\vec{\mathbf{L}}$
$\vec{\sigma}$(轴矢量)	$\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$	$-\vec{\sigma}$
$\vec{\mathbf{E}}$(电场)	$-\vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{E}}$
$\vec{\mathbf{B}}$(磁场)	$-\vec{\mathbf{B}}$	$\vec{\mathbf{B}}$	$-\vec{\mathbf{B}}$
Q(电荷)	$-Q$	Q	Q
$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{E}}$
$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}$	$-\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}$	$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}$	$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{B}}$
$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}$(纵向极化)	$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}$	$-\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}$	$\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbf{p}}$
$\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{p}}_1\times\vec{\mathbf{p}}_2)$ (横向极化)	$\vec{\sigma}\cdot(\mathbf{p}_1\times\vec{\mathbf{p}}_2)$	$\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{p}}_1\times\vec{\mathbf{p}}_2)$	$-\vec{\sigma}\cdot(\vec{\mathbf{p}}_1\times\vec{\mathbf{p}}_2)$

5.4.3　CPT定理

量子场论中证明了一个基本定理-CPT定理[6, 9]：**如果所讨论的场是定域场，场具有相对论所要求的洛伦兹协变性，满足自旋统计关系，则运动规律在CPT联合变换下不变。**

CPT定理的一个直接的推论是反粒子和粒子的质量、寿命、自旋和磁矩的g因子都完全相同。可以通过实验检验这些推论来对CPT定理进行检验，CPT定理已经在相当高的精度下为实验所证实[90–94]。另一方面；由于CPT定理成立的三个基本条件都是相当基本的，一般总是能够满足的，它被实验很好地证实也是容易理解的。

洛伦兹不变性是现有物理规律的基石，它保证了物理规律的普适性。但是宇宙大爆炸理论却告诉我们现有的四维时空并不是与生俱来的，如果宇宙有诞生和消亡的话，也必然伴随着洛伦兹不变性的破坏。因此，洛伦兹不变性对于现代物理大夏非常重要，物理学家希望能够找到洛伦兹不变性破缺的蛛丝马迹。CPT 破坏是与洛伦兹不变性的破坏(Lorentz violation) 相互关联的，CPT破坏的物理可观测量一定破坏洛伦兹不变性。因此，除了在宇宙大尺度寻找物理规律的各向异性，在微观尺度寻找CPT破坏的迹象也是非常有效的手段。

对正反粒子质量的差别研究目前精度最高的实验是在90%置信度下的正反K介子质量

上限[1]:

$$|m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}|/m_{average} \quad < \quad 6 \times 10^{-19}. \tag{5.105}$$

其它，如正负电子和正反质子质量差别在90%置信度的实验上限分别是[1]:

$$|m_{e^+} - m_{e^-}|/m_e < 8 \times 10^{-9}; \qquad |m_p - m_{\bar{p}}|/m_p < 7 \times 10^{-10}. \tag{5.106}$$

正负缪子寿命差别的实验测量是[1]:

$$\tau_{\mu^+}/\tau_{\mu^-} \quad = \quad 1.00002 \pm 0.00008. \tag{5.107}$$

另外，对中性介子系统$P^0 - \bar{P}^0$混合相干性(Interferometry)的研究也是测量CPT破坏的自然而且非常敏感的方法。以前的研究主要集中在$K^0 - \bar{K}^0$系统，现在已经开始涉及对D^0, B^0, B_s^0系统的研究[95]。

5.5 全同粒子交换对称性

考察n个全同粒子组成的系统，定义P_{ij}为第i个粒子与第j个粒子交换的变换。显然，P_{ij}与C变换和P变换类似，也是一个$P_{ij}^2 = 1$的分立变换。对于n个全同粒子组成的系统，更广地可以考虑这n个粒子间的任意置换，所有这些置换的整体构成一个S_n 群。然而，S_n群中的所有置换都可以分解成许多交换变换的连续进行，因此重要的是研究最简单的交换变换P_{ij}, P_{ij}和单位元1 构成一个S_2 群。

按照全同性原理，P_{ij}对全同粒子的作用并不改变体系的状态，并且运动规律对全同粒子是不可分辨的，因此在P_{ij}作用下哈密顿量H不变，即$P_{ij}H = HP_{ij}$。按照艾米·诺特尔定理，P_{ij}在各种相互作用下都是守恒量。P_{ij}的本征值为±1，它把一切粒子分为两大类。自旋统计关系的研究给出：本征值为正的粒子自旋为整数，波函数为完全对称的，这类粒子统称玻色子；本征值为负的粒子自旋为半整数，波函数为完全反对称的，这类粒子统称费米子。P_{ij}是一个严格守恒量的物理含义在于：每一种粒子是费米子还是玻色子是确定的，任一种粒子在其存在的时间内不可能改变P_{ij} 的本征值，亦即其波函数是完全对称的还是完全反对称的这两种情况不能互相转化。

全同粒子交换变换P_{ij}和C变换、P变换都是分立变换，但它们的性质还是有所不同的。C变换和P变换在弱相互作用过程中不守恒而P_{ij}则是严格守恒量；然而P_{ij}是定义在全同粒子存在的时间，亦即只对交换所涉及的粒子数不改变的过程中P_{ij}才有明确的含义。另一方面对于任何全同粒子来说，P_{ij}的含义都是明确的，并取本征值+1 或-1。对于C变换来说，只有纯中性粒子才是C 变换的本征态。P变换下粒子内部波函数的变换性质需要利用P不变性来确定。这些都是它们之间的差异，是由这几种变换物理上含义的不同所带来的。

5.5.1　全同粒子组成系统的选择规则

对于由两个全同费米子组成的系统，交换两个粒子轨道角动量L会贡献符号$(-1)^L$，总自旋S会贡献$(-1)^{S+1}$，根据自旋统计关系，其波函数必须反对称$(-1)^{L+S+1}=-1$，而对于两个全同玻色子系统，总自旋S会贡献$(-1)^S$，波函数必须是全对称的$(-1)^{L+S}=+1$，**因此不论费米子还是玻色子，两个全同粒子组成的系统都必须满足L+S = 偶数。**

强相互作用下同位旋守恒的客观规律把同一同位旋多重态中的不同电荷态联系在一起，可以作为同一种粒子在同位旋空间中的不同状态。因此只要考虑了同位旋空间中的全同粒子交换算符本征态的贡献，可以把同一同位旋多重态中各粒子都作为全同粒子来对待。类似于粒子的不同自旋极化方向。

同位旋对交换算符本征值的贡献与自旋类似，即对半整数同位旋粒子贡献$(-1)^{I+1}$；对整数同位旋粒子贡献$(-1)^I$，其中I为两个粒子的总同位旋。因此考虑同位旋的全同性后的选择定则也可以表为：对半整数同位旋粒子，要求L+S+I = 奇数，对整数同位旋粒子则要求L+S+I = 偶数, 也就是：**统一要求L+S+I+2 i = 偶数，其中i为单个粒子的同位旋。**

例题-5.6：氘核是(pn)态，为什么没有(pp)和(nn)束缚态存在？

解： 氘核是由质子p和中子n组成的（pn）束缚态。因为质子和中子构成同位旋2重态，其自旋和同位旋都是1/2。根据前面的讨论可知对(pn)系统的量子数的限制是：L+S+I+2 i = 偶数。考虑到2i=1，实验上已确定氘核的自旋量子数S = 1，L是0和2的混合，因此两个核子的总同位旋I 必须为偶数。但I只能是0或1，所以I 只能是零，也就是$|I,I_3\rangle=|0,0\rangle$的(pn)态。因此不存在与氘核对应的总同位旋I=1的(pp)或(nn)束缚态，实验上也确实没有观察到这样的态存在。

例题-5.7：讨论两个π 介子组成的系统的量子数的可能取值。

解： 因为π 介子是自旋量子数S=0，同位旋为1的玻色子。玻色统计性要求$(-1)^{L+I}=+1$，因此π介子对的总同位旋量子数$I=0,1,2$与其轨道角动量L的奇偶性应相同：即I = 0, 2 时，L = 偶数；I = 1时，L = 奇数。

另一方面，两个π 介子组成的系统的总角动量等于轨道角动量J = L。宇称为$P=(-1)^L$。两个π 介子的G宇称为正，相应中性分量的C宇称为$\eta_C=G'(-1)^I=(-1)^I$。因为L, I 奇偶性相同，所以有$P=\eta_C$, 也就是说两个π 介子系统的C 和P宇称必须相同。这样两个π 介子组成的系统的量子数只能取表5.6中的值：其中C宇称的值是指中性分量的C宇称，$\pi^0\pi^0$系统的C宇称为正，其P宇称也一定为正，也就是$\pi^0\pi^0$系统的$J^{PC}=$ 偶$^{++}$。因此在$J^{PC}=$ 奇$^{--}$情形不会有$\pi^0\pi^0$出现。所以为$J^{PC}=1^{--}$的ρ^0和ω介子都不能衰变到$\pi^0\pi^0$末态。另外η和η'都是0^{-+}的赝标粒子，根据表5.6，它们不能通过强或者电磁作用衰变到两个π^0介子或者$\pi^+\pi^-$对。

表 5.6: 两个π介子组成的系统的量子数的可能取值。

J^{PC}	I^G	粒子组态
偶$^{++}$	0^+	$\pi^+\pi^-$，$\pi^0\pi^0$
偶$^{++}$	2^+	$\pi^+\pi^-$，$\pi^0\pi^0$，$\pi^+\pi^0$，$\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^+$，$\pi^-\pi^-$
奇$^{--}$	1^+	$\pi^+\pi^-$，$\pi^+\pi^0$，$\pi^-\pi^0$ （无$\pi^0\pi^0$）

表 5.7: 由正反费米子构成的复合粒子系统J^{PC}量子数的可能取值。

L	S = 0	S = 1
0	0^{-+}	1^{--}
1	1^{+-}	0^{++}, 1^{++}, 2^{++}
2	2^{-+}	1^{--}, 2^{--}, 3^{--}
3	3^{+-}	2^{++}, 3^{++}, 4^{++}

5.5.2 正反费米子组成系统的对称性

粒子和反粒子是同一种场的不同激发态，它们之间通过C变换联系起来。因此，粒子和反粒子之间应存在有通过C 变换来实现的全同性。这样在正反粒子之间应该用CP_{ij}来代替P_{ij}。考察一对正反粒子组成的系统，这是一个纯中性系统。如果把正反粒子交换，系统未变但态变了，但如再作C变换则态仍复原。若这系统的C字称为η_C，则CP_{ij}作用的结果为: 对费米子有$\eta_C\ (-1)^{L+S+1} = -1$，对玻色子有$\eta_C\ (-1)^{L+S} = +1$。**因此不论对费米子还是玻色子，一对正反粒子组成的系统($f\bar{f}$或者$B\bar{B}$)，其C宇称均为$\eta_C = (-1)^{L+S}$。** 这正是我们在第5.3.2节导出的公式(5.71)。

在现代强子结构模型中，介子的某些主要性质都可以把介子看作是一对自旋1/2的正反费米子(正反夸克)的束缚态，因此重要的是首先要判定由一对自旋1/2的正反粒子所组成的系统应具有哪些量子数，以及这样的系统有哪些定性特征。首先系统的总自旋S可取值为0和1，轨道角动量L可取任意非负整数值，系统的总角动量J可取值为$J = |L-S|$, $|L-S|+1$, ..., $L+S$，系统的P字称为$P = (-1)^{L+1}$，C字称为$\eta_C = (-1)^{L+S}$。如果把这系统整体当作一个粒子看待，J也就是观察到的该复合粒子的自旋。由上面的讨论得到这个$f\bar{f}$系统的J^{PC}量子数可取值如表-5.7所示：

$$J^{PC} = J^{L+1,L+S}. \tag{5.108}$$

如果原组成成分的费米子是同位旋$I = 0$的粒子，则这一对正反费米子组成的体系的$I = 0$，并且$G' = \eta_C$。如果原组成成分的费米子是$I = 1/2$的态，则上表中每一组量子数所代表的态又代表了一个$I = 0$，$G' = \eta_C$ 的态和一个$I = 1$，$G' = -\eta_C$的态。

表 5.8: 由一对自旋为0或1的正反玻色子组成的粒子系统J^{PC}量子数的可能取值。对纯中性全同玻色子对，$\eta_C = -1$的加括号的态是不允许的。

	粒子s = 0	粒子s = 1		
L	S = 0	S=0	S = 1	S=2
0	0^{++}	0^{++}	(1^{+-})	2^{++}
1	(1^{--})	(1^{--})	$0^{-+}, 1^{-+}, 2^{-+}$	$(1^{--}, 2^{--}, 3^{--})$
2	2^{++}	2^{++}	$(1^{+-}, 2^{+-}, 3^{+-})$	$0^{++}, 1^{++}, 2^{++}, 3^{++}, 4^{++}$
3	(3^{--})	(3^{--})	$2^{-+}, 3^{-+}, 4^{-+}$	$(1^{--}, 2^{--}, 3^{--}, 4^{--}, 5^{--})$

如果介子是由一对正反费米子对组成的束缚态，可以估计$L = 0$的态应为基态，其能量应为最低。 按上表，基态量子数应为$J^{PC} = 0^{-+}$（赝标量）和1^{--}（矢量），而$J^{PC} = 0^{++}$（标量）的态尽管其J值很小，却是P波激发态，从而应具有较高的能量。实验上发现介子质量谱的排列符合上面表格要求的基本定性特征，π、K等介子是$J^{PC} = 0^{-+}$的质量最低的介子，而ω、ρ、K^*等粒子则是质量较大的矢量介子$J^{PC} = 1^{--}$。这是对认为介子是由一对正反费米子组成的观点的重要支持。上面表格还说明了具有哪些量子数的介子可以和一对正反费米子耦合(即如果能量允许的话，衰变成一对正反费米子)，以及耦合(及衰变)是通过什么分波。一个值得注意的特征是：只有$J \geq 1$ 并且$P = \eta_C$ 的介子才有可能同时与相差2的两种轨道角动量的正反费米子对耦合，这种介子的衰变将比较复杂，需要做分波分析；$J < 1$ 或$P = -\eta_C$的介子都只能与一种轨道角动量的正反费米子对耦合。这个特征对分析新发现的重介子的量子数是重要的。

5.5.3　正反玻色子组成的系统

现在考察由一对自旋为$s = 0, 1$的正反玻色子组成的系统。按照上面类似的讨论，J^{PC}结果如表-5.8所示。把这个表和一对正反费米子组成的系统的结果相比较，可以看到基态的量子数完全变了。在正反玻色子组成的系统中，1^{--}态至少是P波激发态，0^{-+}态则只在总自旋为1的P波激发态中出现。当正反玻色子为纯中性全同粒子对，即粒子与反粒子相同（例如π^0、π^0介子对或者光子对）时，按统计对称性，还要受$L + S$ =偶数的限制，那些$\eta_C = -1$的加括号的态是不允许的，而仅保留$\eta_C = +1$态的结果。

将现已发现的介子谱和上表的基本定性特征相比较并不相符，这表明不支持把介子看作是正反玻色子所组成的束缚态。 但这个表在分析普通介子的强和电磁衰变行为时是很有用的。例如：可以衰变到一对正反赝标介子的态量子数可以是$J^{PC} = 0^{++}$，1^{--}，2^{++}，3^{--} ...，但可以衰变到一对纯中性赝标介子的态则只能是$J^{PC} = 0^{++}$，2^{++}，...。按照这个规则，$J^{PC} = 1^{--}$ 的ρ^0介子衰变到$\pi^+\pi^-$ 态是允许的，但衰变到$\pi^0\pi^0$态则是不允许的。再如，因为光子是自旋s=1的矢量玻色子，当双光子系统的L=1时，由表-5.8可以看

出只有$J^{PC}=(0^{-+},2^{-+},2^{-+})$的态才是可能的。换句话说，就是只有$\eta_C=+1$ 的态才有可能衰变为两个光子，所以1^{--}的ρ、ω、J/ψ 等都不能衰变到两个光子。

如果在讨论普通介子的衰变行为时要考虑G宇称，则只要把关于G宇称的分析加进去就行了。实验和理论的研究表明，介子可以看作是一对正反夸克所组成的，夸克是自旋为1/2的费米子。但是理论上也曾研究在夸克的基础上构造另一类束缚态。首先两个夸克结合成一个称为"双夸克"的集团，双夸克内部轨道角动量为零，从而双夸克的总角动量(通常称自旋)为0或1; 再由一对正反双夸克结合成一个束缚态。这类束缚态称为四夸克态，由一对正反双夸克结合成四夸克态的量子数规则由正反玻色子组成的系统的表描写。对于多夸克态的研究是一个新兴的交叉学科，我们将在第6.4节介绍。

从上面的讨论可以看到，由一对正反费米子不可能组成J^{PC}为0^{--}，0^{+-}，1^{-+}，2^{+-}，3^{-+}，... 的态，这些态称为奇特态。现有实验已发现的大量介子中，还没有一个属于奇特态，这是对介子由一对正反夸克所组成的观点的又一重要支持。从表5.8中还可以看出，由自旋为1的正反玻色子所组成的系统，可以具有下述奇特态的量子数：

$$J^{PC}=1^{-+},\quad 2^{+-},\quad 3^{-+},\quad \ldots. \tag{5.109}$$

因此如果实验上发现了具有这些量子数的奇特态粒子，则它们不可能是一对正反夸克所组成的介子，但可能是由正反双夸克所组成的四夸克态或胶球。从两个表的对比可以看出，零自旋的奇特态$J^{PC}=0^{+-}$和0^{--} 不可能由自旋小于等于1的一对正反粒子所构成。现在考虑一般的情形，如果一个由一对正反粒子所组成的系统总自旋J= 0，则要求L = S，这样的系统一定有$\eta_C=(-1)^{L+S}=+1$ 也就是说不论组成成分的自旋为什么值，不论通过什么轨道角动量分波，一对正反粒子组成的系统都不能构成零自旋的奇特态。因此在奇特态中，零自旋的奇特态是“绝对奇特态”，在高能物理的研究中，探寻奇特态存在的实验迹象一直是人们密切关注的问题。

5.6 对称性和群*

人们在对物质结构的研究中，很早就注意到了对称性研究的重要性。这种对称性通常表现为物质体系在某些对称操作下的不变性，这些对称操作的集合就构成了数学上的群。

在群论中，定义群为一组元素的集合：

$$G=\{g_0,g_1,g_2,\cdots,g_i\}, \tag{5.110}$$

其中任意两个元素g_i和g_j的乘积g_ig_j仍然是此群的元素。对称变换的特点符合这种要求，因而可以用群的理论和方法处理这些对称变换的问题。群论也可以称为描写对称性的数学。

在粒子物理中常用的群又分为“阿贝尔群”和“非阿贝尔群”两类。 连续两次变换的结果和两次变换的顺序无关的群，如幺正群$U(1)$ 为阿贝尔群，否则称为非阿贝尔群（如特殊幺正群$SU(3)$）。如图-5.5所示的非阿贝尔转动$AB-BA=C\neq 0$就是一个例子。

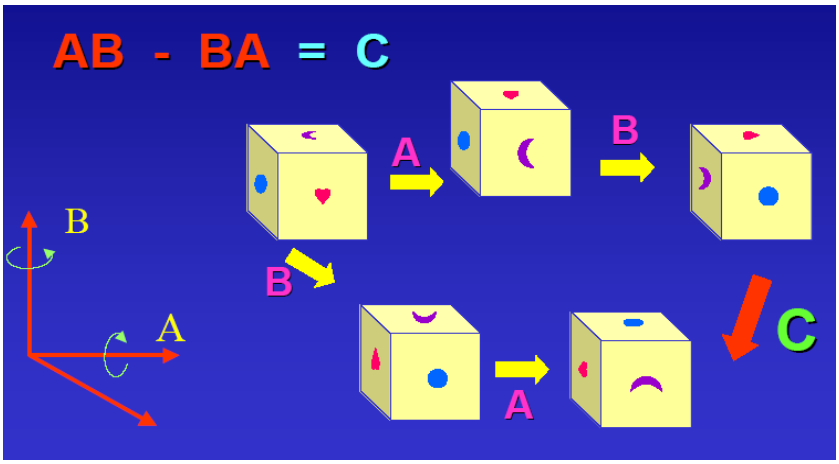


图 5.5:　一个在外表面上绘有图形的正立方体的非阿贝尔转动。

一个群的元素，是在一定区间内连续变化的变量的函数时，称为连续群。当一个群的元素可以用分立的符号，如$g_0, g_1, g_2, \cdots$ 标记时，称为分立群。量子系统的对称群确定系统的多重态结构，这涉及群的表示问题。一个群在不同的空间中有不同的表示。如果在某个n维空间中，和群G对应的是n维空间的一个线性变换，它就给出群G的一个线性表示，记为$D(G)$。n维空间的线性变换群可以写成$n \times n$矩阵。群的不可约表示的意思是：这种表示不能再约化为其它两种表示的直和。例如两个$SU(3)$群的基础表示"3"的直积可以约化为两个不可约表示的直和:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}, \qquad \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}. \tag{5.111}$$

现在需要考察的是：**如果一个变换是某一个变换群的元素，运动规律不仅对这一个特定的变换，而且对这个变换群中一切元素所代表的变换都是不变的时候，相应的守恒量具有什么性质。**

一般说来，如果运动规律在某一李群G变换下不变，群G的维数为m，即群G中任意元素都对应m个群参数的一组值，则对应m个群参数ξ_i，$i = 1, \cdots m$，将有m个守恒量Q_i，又称守恒荷。值得注意的是，守恒荷的个数等于生成元的个数，守恒荷与生成元是一一对应的，同时守恒荷既与具体表示无关又与时空坐标无关，它们之间满足与生成元相同的李代数关系。因此这些守恒荷与生成元在数学上同构，实际上就是生成元在理论中的具体形式。正因为如此，我们都用Q_i来标记。

群论的研究和应用，对粒子物理学的发展起了重要的作用。一些物理内容根本不同的对称性，可以用相同的群来描写。例如，强作用和弱作用的同位旋对称性以及粒子的自旋性质，都可以用$SU(2)$群来描写；李群$SO(3)$很好地描写了角动量守恒的对称性，$U(1)$群很好的描写了电荷、轻子数、重子数、奇异粒子数等相加性量子数的守恒定律；而$SU(3)$群可以用来描写三种夸克味道或三种颜色的对称性等。

5.6.1 U(1)规范不变性和电荷守恒

电荷守恒定律反应了粒子波函数相对位相的不可测量性。这种$U(1)$规范不变性导致电荷守恒。

由于系统的相位不能绝对测量，因此，在对具有电荷Q的系统状态波函数ψ_Q做相位变换

$$\psi_Q \longrightarrow \psi'_Q = e^{i\lambda Q}\psi_Q \tag{5.112}$$

时，应有规范不变性，λ是与时空点无关的任意实参数。ψ_Q、ψ'_Q均满足薛定谔方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_Q = \widehat{H}\psi_Q, \qquad i\frac{\partial}{\partial t}\psi'_Q = \widehat{H}\psi'_Q, \tag{5.113}$$

Q为电荷算符，也是这种变换的生成元。由方程(5.112,5.113)可得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_Q = \left[e^{-i\lambda Q}\widehat{H}e^{i\lambda Q}\right]\psi_Q. \tag{5.114}$$

规范不变性要求

$$e^{-i\lambda Q}\widehat{H}e^{i\lambda Q} = \widehat{H}. \tag{5.115}$$

考虑无穷小变换，可得

$$[Q, \widehat{H}] = 0, \tag{5.116}$$

即电荷守恒。

这种变换是一种连续变换，变换元素的全体构成$U(1)$群。它所对应的量子数是相加性的。如果一个系统包含n个粒子，分别具有电荷量子数$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，在系统的总波函数进行变换时，各粒子波函数分别进行变换：

$$\psi'_Q = e^{i\lambda Q_1}\cdots e^{i\lambda Q_n}\psi_Q = e^{i\lambda Q}\psi_Q, \tag{5.117}$$

其中

$$Q = \sum_i^n Q_i. \tag{5.118}$$

即系统的总电荷守恒。

电荷守恒是规范对称性的直接推论，因此任何电荷不守恒的发现会导致量子场论理论体系的坍塌，但是这并不能阻止物理学家寻找这种可能性，其中一个寻找电荷不守恒的高精度实验是中子衰变，目前的实验上限（68%置信度）是

$$Br(n \to p\nu_e\bar{\nu}_e) < 8 \times 10^{-27}. \tag{5.119}$$

5.6.2　SU(2)群和同位旋

同位旋空间的旋转不变性，可以用$SU(2)$群来描写。$SU(2)$群的基础表示是二维表示，基矢是协变基矢

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.120}$$

$SU(2)$群元素作用于此协变基矢上得到基础表示。任一态矢量可以表示成ϕ_1, ϕ_2的线性组合

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.121}$$

当我们用$SU(2)$群描写同位旋空间的旋转不变性时，常用$u = \phi_1,\ d = \phi_2$来表示$I_3 = \pm 1/2$的粒子。对质子-中子系统，u, d分别表示质子和中子。在绕某一轴，例如I_2轴转动θ角度时，有

$$\chi' = U\chi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \chi. \tag{5.122}$$

变换函数U的一般形式可以写为

$$U = \exp\left[\frac{1}{2} i\theta \mathbf{n} \cdot \sigma\right], \tag{5.123}$$

其中θ表示绕$\mathbf{n}$轴的转动角。σ是我们所熟知的泡利矩阵，无穷小变换的生成元，其矩阵表示见(4.23)式。σ矩阵与$SU(2)$同位旋群生成元$\vec{S}$之间的关系为$S_i = \sigma_i/2$,S_i或σ_i之间的其他对易关系与量子力学中相同，例如对易关系

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k, \tag{5.124}$$

其中的ϵ_{ijk}是$SU(2)$ 群的结构常数。$\hat{S}^2$算符为$SU(2)$同位旋群的Casimir算符$\widehat{C} = \hat{S}^2$。我们还可以定义升、降算符

$$\hat{S}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2\right]. \tag{5.125}$$

可以把二维情况的结果推广到N维情况。用$\widehat{S}^2$和$\hat{S}_3$的共同本征态来描写粒子态。对每一个不可约表示（对于给定的S）, $\hat{S}^2$的本征值为$S(S+1)$是一个固定值。在此表示内的多重态可以用S_3的不同本征值来区别。

如果我们能够找到一组$N \times N$维矩阵$I, I_1, I_2, \cdots, I_N$，同样能够满足对易关系

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k. \tag{5.126}$$

那么就说他们构造了$SU(2)$群代数的一个N维表示。同位旋为I的多重态有$(2I+1)$个成员：例如对π介子，$I=1$, 有三个成员，分别为$\pi^{\pm},\pi^{0}$。

一般地说，$SU(N)$群的基础表示为N，其共扼表示为N^{*}。在$SU(2)$的情况下，2和2^{*}在转动中具有相同的变换方式。而对于$N=3,4,\cdots$情况则不同。例如，$SU(3)$群的基础表示3与其共扼表示$\bar{3}$在转动中具有不同的变换方式。

$SU(N)$群的正则表示： $SU(N)$群生成元最简单的表示是$N^{2}-1$个厄米无迹$N\times N$矩阵。例如，$SU(2)$群生成元最简单的表示就是(4.23)式所列的3个2×2 泡利矩阵。用这些矩阵，我们可以定义$SU(N)$群的$N^{2}-1$维表示，称为正则表示(Regular representation)。

在$SU(2)$的情况下，正则表示就是三维矢量表示。如果选取$\hat{S}_3$为对角形式，则三维矩阵表示为：

$$\hat{S}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \hat{S}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_2=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{5.127}$$

它们满足$SU(2)$代数。以本征态（$I=1$）作为基矢，$\hat{S}_3$作用于其上时，得到本征值$S_3=1,0,-1$。例如，π介子的三个荷电状态π^{+},π^{0},π^{-}就属于$SU(2)$同位旋群的一个三维表示。

5.6.3 SU(3)群

如果我们把基矢由u,d扩大到u,d,s，则可将$SU(2)$群扩充为$SU(3)$群。$SU(3)$群的基础表示为

$$\phi=a_l u+a_2 d+a_3 s, \tag{5.128}$$

其中三个基础表示基矢为

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad s=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{5.129}$$

把变换定义为

$$\phi'=U\phi, \tag{5.130}$$

其中

$$U=\exp\left[\frac{1}{2}i\hat{\theta}\hat{\mathbf{n}}\cdot\lambda\right], \tag{5.131}$$

和$SU(2)$中的σ 相似，λ是8个独立的厄密无迹3×3 矩阵。1962年盖尔曼给出的矩阵表示为

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.132}$$

SU(3)中包含3个SU(2)子群：λ_1和λ_2构成(u,d)同位旋SU(2)群，$F_3 = \lambda_3/2$是和I_3对应的算符；λ_6和λ_7构成(d,s)U旋SU(2)群；λ_4和λ_5构成(u,s) V旋SU(2)群。如图-5.6所示，SU(3)三重态包含I，U，V三个SU(2)二重态。

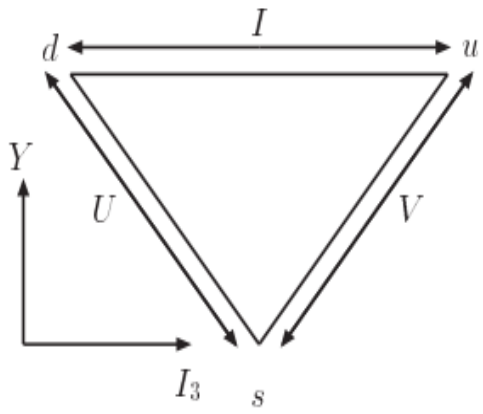


图 5.6:　SU(3)三重态包含I，U，V 三个SU(2)二重态。

重子数B，I_3和Y与λ_i的关系是

$$B = \frac{1}{3}\lambda_0, \quad I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_3, \tag{5.133}$$

其中λ_0为单位矩阵。矩阵$\lambda_i/2$的对易和反对易关系为

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j\right] = if_{ijk}\left(\frac{1}{2}\lambda_k\right), \tag{5.134}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j\right\} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk}\left(\frac{1}{2}\lambda_k\right), \tag{5.135}$$

其中$SU(3)$群的结构常数f_{ijk}是反对称的，d_{ijk}是对称的。他们的非零独立元素如下

$$\begin{aligned}
f_{123} &= 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{237} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2, \\
f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2, \\
d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}, \\
d_{146} &= d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = 1/2, \\
d_{247} &= d_{366} = d_{377} = -1/2, \\
d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{5.136}$$

5.7 练习题

1. 强子碰撞的实验中发现了一个粒子，称为b_1, 其质量和宽度分别为$m = (1230 \pm 3)$MeV, $\Gamma = (142 \pm 9)$MeV, 它主要在$\omega\pi^+$，$\omega\pi^0$，$\omega\pi^-$的末态中发现, 试分析b_1的量子数S，b，I^G，J^{PC}的可能取值。

2. ρ^0, ρ^+, ρ^-是自旋为1，同位旋为1的普通介子，质量为770MeV。它能通过强相互作用衰变为一对自旋为0的π介子。试说明，为什么$\rho^\pm \to \pi^\pm\pi^0$ 和$\rho^0 \to \pi^+\pi^-$的衰变可以发生，而$\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ 的衰变却是禁戒的。

3. (1) 试证明：如果一个介子可以通过强相互作用衰变到$\pi^+\pi^-$对，那么其宇称量子数一定为：$C = P = (-1)^S$，其中S表示该介子的自旋量子数。

   (2) 矢量介子$\rho(770)$和张量介子$f_2(1275)$均可以通过强相互作用衰变到$\pi^+\pi^-$对，请问：

   (a) 两个电磁衰变过程$\rho^0 \to \pi^0\gamma$和$f_2 \to \pi^0\gamma$中的哪一个是被禁戒的？

   (b) 两个过程$\rho^0 \to \pi^0\pi^0$和$f_2 \to \pi^0\pi^0$中的哪一个在任意相互作用下都是被禁戒的？

4. D^+（同位旋I=1/2, 第三分量$I_3 = 1/2$）和D_s^+（同位旋为0）都是$J^P = 0^-$ 的赝标量粒子，D^+可以通过弱作用衰变到两个π介子（$\pi^+\pi^0$），讨论这两个π 介子可能的同位旋组成并说明理由，D_s^+则不能衰变到两个π 介子，说明原因（弱衰变$\Delta I \leq 3/2$）。

5. 在强相互作用过程中，奇异数S是守恒的。考虑强相互作用过程（X, Y表示任意强子态的组合）

$$(1)\ \ \pi^- + p \to K^0 + X; \qquad (2)\ \ \pi^- + p \to \bar{K}^0 + Y, \tag{5.137}$$

   解释为什么引起第1个过程的入射π介子的“阈能”比引起第2个过程的入射π介子的“阈能”低。

6. 氘核$d=(pn)$是由质子和中子构成的束缚态，其自旋量子数$S=1$，空间宇称$P_d=1$。请证明氘核只能是(p,n)系统的$^3S_1$和$^3D_1$态。

7. 如果处于静止状态的$(p,\bar{p})$经湮灭过程演化为S态，并且只考虑强和电磁相互作用，那么请解释$p+\bar{p}\to\pi^0\pi^0$为什么被禁戒？

8. 试证明朗道-杨定理：一个自旋为1的介子不能衰变到两个光子或者两个胶子。

9. $\eta'(958)$是赝标量介子，其衰变宽度为188keV，三个主要衰变道的衰变分支比是：

$$\begin{aligned}&(1)\qquad Br(\eta\to\rho^0+\gamma)=29.5\%;\\&(2)\qquad Br(\eta\to 2\pi^0+\eta)=22.4\%;\\&(3)\qquad Br(\eta\to\pi^+\pi^-+\eta)=42.5\%;\end{aligned}\tag{5.138}$$

使用这些信息，判断η'介子的P宇称和C宇称。并解释为什么没有在实验上看到$\eta'\to\pi^+\pi^-,\pi^0\pi^0$衰变道。

10. π^-介子的宇称量子数首先是通过π介子俘获反应

$$\pi^-+d\to n+n\tag{5.139}$$

确定的，其中d是氘核，n是中子。已知氘核$d=(pn)$是质子和中子的S波束缚态，自旋量子数为1，宇称量子数$P_d=+1$，由此推证$P_{\pi^-}=-1$。

11. 试判断下述过程能否发生，为什么？如果能发生，判断是通过什么相互作用发生的，为什么？

1) $\eta\to\pi^+\pi^-\gamma$,　2) $\eta\to\pi\pi$,　3) $\omega\to\pi^+\pi^-$,　4) $\pi^0\to 3\gamma$,
5) $J/\psi\to\rho^-\pi^+$,　6) $J/\psi\to\pi^+\pi^-$,　7) $\rho^0\to\pi^0\pi^0$,　8) $J/\psi\to 2\gamma$,
9) $K^+\to\pi^+\pi^0$,　10) $\phi\to K_SK_S$,　11) $\rho^0\to\eta\pi^0$.

12. 欧洲大型强子对撞机上的实验LHCb发现，在$J/\psi-J/\psi$的不变质量谱中有一个共振结构，质量为6905 ± 11MeV，宽度为80 ± 19MeV，暂时命名为X(6900)。试根据这些信息讨论这个粒子的所有可能的量子数I^GJ^{PC}。

13. 高能对撞机实验在$\pi^+\pi^-$的不变质量谱中发现共振态J/ψ，且测量$\pi^+\pi^-$之间的轨道角动量为1，同时发现其存在强相互作用衰变道$J/\psi\to\pi^+\pi^-\pi^0$，那么

1）　尝试分析J/ψ的所有可能量子数；
2）　为什么$J/\psi\to\pi^+\pi^-$衰变不能是强相互作用？
3）　是否存在$J/\psi\to\gamma\gamma$的衰变道，并给出理由；
4）　是否存在$J/\psi\to\pi^0\pi^0$的衰变道，并给出理由。

14. 高能实验在J/ψ和光子的不变质量谱中发现一个共振态X

1）试确定X的可能量子数；

2）如果X也能通过强相互作用衰变到J/ψ和ω，而且已知两粒子处于S波，那么X的可能量子数是什么？

第六章　强子结构与夸克模型

如图-6.1所示，从1894年英国物理学家汤姆逊在卡文迪许实验室发现电子，到1964年2月萨莫斯实验组在布鲁克海汶国家实验室发现Ω^-重子，人们已经发现了大量的介子、重子以及它们的激发态[1]。当这些所谓“基本粒子”的数量超过了一百之后，人们自然要问：这些粒子都是基本的吗？是否存在更深层次的物质结构呢？下一个层次的“基本粒子”是什么样子？其电荷是多少？自旋量子数是什么？是什么样的相互作用使它们形成在实验上看到的质子、中子和众多“束缚态强子”？所有这些问题在上世纪60年代初都是未知的!

面对这么多粒子，很难设想他们都是基本的。因此人们猜测，至少强子应该有内部结构，可能是复合粒子。人们最早用质子和中子作为基本粒子构造其他强子，发现奇异粒子之后，人们不得不扩充基本粒子的种类。物理学家开始按照质量、自旋、同位旋、奇异数等基本性质对强子分组、做分析和归类研究[96–100]。在此过程中，群论作为研究对称性的数学理论起到了至关重要的作用，人们把性质类似的强子放到同一个粒子多重态里，这些多重态对应于李群中的不同表示。

随着强子分类中对称性的研究深入，强子结构模型也浮出水面，盖尔曼和乔治·茨维格[2] 分别独立地提出带有分数电荷的夸克模型[101–104]。美国马里兰大学的格林伯格教授[3] 提出了夸克带有“颜色”自由度的设想[16, 105–107]，1964年，基于夸克模型可以分类解释当时已经发现的全部强子。这将是这一章的主要内容。

6.1　夸克模型和轻介子系统

6.1.1　强子结构模型发展简史

物理学家对强子内部结构及其动力学的探索，可以追朔到上世纪40年代末。1949年，费米-杨振宁提出了第一个强子结构模型，试图用更“基本”的粒子解释一些强子态。费米-杨振宁用$N\bar{N}$的复合态来解释π, η介子[108]。但费米-杨振宁模型不能解释奇异粒子的构成，明显是不完整的。

1. 坂田模型

1956年，为了解释奇异粒子，日本名古屋大学的坂田昌一[4] 将更基本的粒子扩充到3个: 也就是质子、中子和超子Λ以及它们的反粒子[109]。(p, n, Λ)填充SU(3)群的基础表

[1] Σ^*, Ξ^*等重子激发态在图-6.1中并没有直接显示。

[2] George Zweig (1937.5.30-)，美国物理学家和神经生理学家。1964年在加州理工学院获得博士学位，导师是理查德·费曼教授。1963-1964年，“夸克模型”和著名的“OZI”规则提出者之一。1970 年代初转行研究“听觉传导”和神经生理学。1981年获得“麦克阿瑟天才奖”，1996年获得美国科学院奖。

[3] Oscar Wallace Greenberg (1932.2.28- 今)，美国理论物理学家，1964年提出夸克具有新的颜色自由度的假设。

[4] Shoichi Sakata (1911.1.18-1970.12.16)，日本物理学家。在1956 年提出强子结构的坂田模型。

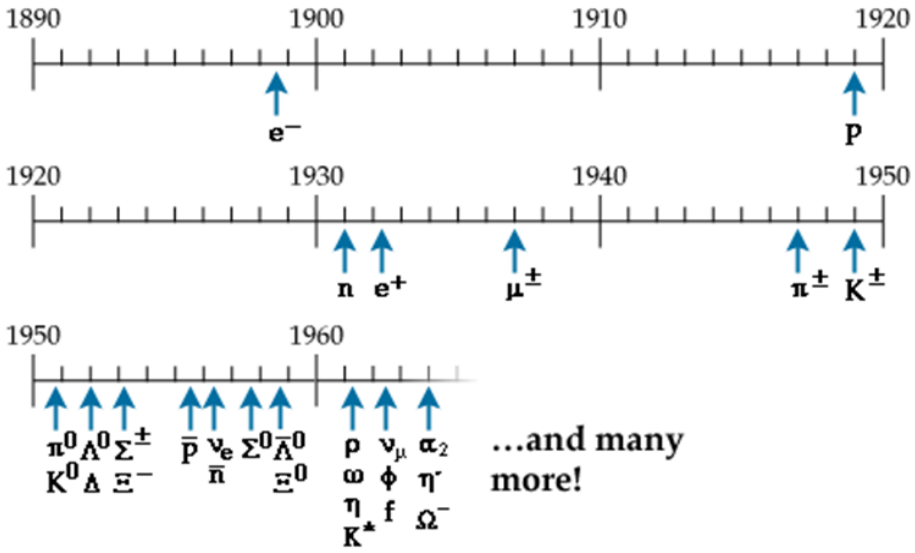


图 6.1: 从电子到Ω^-重子，人们发现这些基本粒子的年代示意图。

示“3”，其反粒子组成SU(3)群的“$\bar{3}$”维表示。坂田认为，介子是由正反重子组成的，在群论中

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8, \tag{6.1}$$

其中“8”和“1” 分别为味SU(3)介子八重态和单态。人们可以使用坂田模型很好解释当时发现的质量最低的9个介子。这9个赝标介子的性质相似：自旋均为0，宇称均为-1。其中的一个η'可以作为SU(3) 单态；另外的八个$(K^{\pm,0}, \bar{K}^0, \pi^{\pm,0}, \eta)$则是SU(3)的八重态。它们正好可以放在如图-6.2(a)所示的正六边形方阵中。图中处于同一条斜线的粒子电荷相同，三条斜线分别代表电荷$Q = -1,\ 0,\ +1$。同一水平线的粒子具有相同的奇异数，第一组(K^+, K^0)构成同位旋二重态，奇异数为$S = 1$，电荷不同，质量相近; 第二组$(\pi^{\pm}, \pi^0)$的奇异数为$S = 0$，同位旋三重态$(I = 1)$, 是最轻的强子; 第三组是同位旋单态$(I = S = Q = 0)$的η和η'。第四组$(K^-, \bar{K}^0)$是第一组的反粒子，奇异数$S = -1$。

坂田模型虽然在解释介子的分类中非常成功，但在解释重子时却遇到了困难。我们不能用三个坂田子(p, n, Λ)组成重子，因为那时的重子数将为+3，与实验矛盾。人们尝试用两个坂田子和一个反坂田子组成重子，以避免重子数问题，但是却会引入奇异数为正的重子（例如$pn\bar{\Lambda}$），这也与实验矛盾。上述尝试尽管后来证明是不正确的，但这些工作都给强子分类及强子结构理论的发展创造了条件。

2. “八正法”模型

1961年初，为了解决重子的问题，盖尔曼和纽曼[5] 分别独立地提出“八正法”对强子进行分类[96–98]。在“八正法”模型下，介子和重子均属于SU(3)幺正对称群的8维表示或

[5]Yuval Neuman(1925.5.14 - 2006.4.26)，以色列理论物理学家。1960 年在伦敦帝国学院获得博士学位，师从诺贝尔奖获得者萨拉姆。1961年，独立提出对强子进行分类的“八正法”模型。

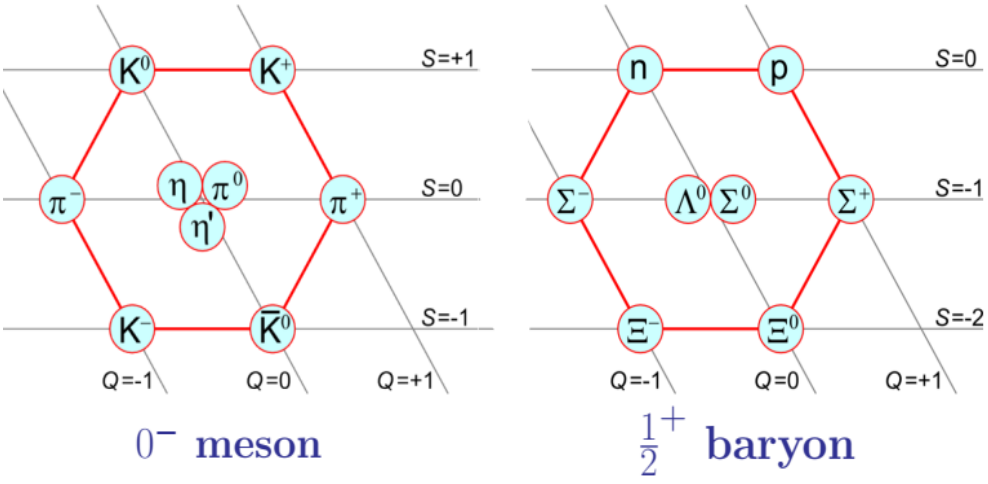


图 6.2:　(a) $J^P = 0^-$赝标介子八重态和单态; (b) $J^P = \frac{1}{2}^+$重子八重态。

由8维表示直乘分解所得到的其他表示。按照SU(3)群的性质有

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \overline{10} + 27. \tag{6.2}$$

因此除了基态介子属于SU(3)的八重态表示，8个质量最轻的重子同样组成$\frac{1}{2}^+$重子八重态。如图 6.2(b) 所示，这些重子同样分成四组：奇异数为0的2个核子(n, p)，奇异数为-1的同位旋三重态$\Sigma^{\pm}$, Σ^0超子，同位旋单态Λ 超子和奇异数为-2同位旋二重态Ξ^-, Ξ^0 超子。这八个重子，自旋都是1/2，宇称均为正值，质量相近。只是电荷不同、同位旋不同、奇异数不同。

质量最低的0^-赝标介子和$\frac{1}{2}^+$重子都是SU(3)群的八重态。但是当时还发现了量子数为$\frac{3}{2}^+$、同位旋$I = \frac{3}{2}$的重子四重态：$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+$和$\Delta^{++}$。这组重子的奇异数S=0，它们在SU(3)群的表示待定。1962年元月，在欧洲核子研究中心召开的一次会议上，实验家报告他们新近发现了两类新重子[110, 111]，即$J^P = \frac{3}{2}^+$的重子三重态$(\Sigma^{*-}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*+})$ 和重子二重态(Ξ^{*-}, Ξ^{*0})。盖尔曼参加了这次会议，他立刻意识到这9个J^P相同的重子应该属于“八正法”(6.2)式中SU(3)群的十重态表示，并且果断地预言了当时仍然缺失的第10个$\frac{3}{2}^+$重子Ω^-的存在。这个重子十重态各组粒子在$I_3 - Y$平面上的排列如图-6.3所示，按照群表示论在最下角的那个Ω^-重子的奇异数$S = -3$，$Q = -1$。

3. Ω^-重子的发现

在第三章中根据同位旋理论，同一同位旋多重态中粒子的质量差是由电磁相互作用引起的，非常小，可以忽略不计。在上述“八正法”的SU(3)多重态粒子中，不同奇异量子数的各组粒子之间的质量差异却比较大，例如在$\frac{1}{2}^+$的重子中，质量差异为：

$$\frac{m(\Sigma) - m(N)}{m(\Sigma) + m(N)} \approx 12\%, \quad \frac{m(\Xi) - m(N)}{m(\Xi) + m(N)} \approx 17\%, \tag{6.3}$$

这种质量差异显然不是由电磁相互作用造成的。进一步的研究表面，这种同一SU(3)多重态内部的质量差异基本正比于奇异数的差别，例如，在$\frac{3}{2}^+$的这组重子中，具有不

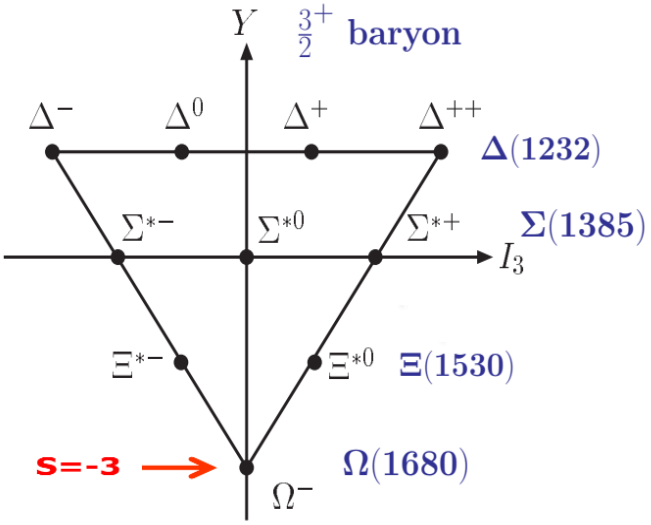


图 6.3: $J^P = \frac{3}{2}^+$重子十重态。

同的奇异数的粒子之间的质量差异大约是150MeV。重子四重态$\Delta(1232)$和重子三重态$\Sigma^*(1385)$的质量差是153MeV，$\Sigma^*(1385)$和重子二重态$\Xi^*(1530)$的质量差是145MeV，所以如果把$\Xi^*(1530)$与Ω^-的质量差取为150MeV，由此可以估算出Ω^-的质量为$m(\Omega^-) \approx 1680\text{MeV}$。

盖尔曼的研究促成了布鲁克海汶国家实验室(BNL)的实验家们立刻启动气泡室(Bubble Chamber)实验，寻找Ω^- 粒子[112–114]。经过2年的努力，如图-6.4所示，BNL的萨莫斯实验组在1964年2月宣布他们通过对产生和衰变链

$$\begin{aligned} K^- p &\to \Omega^- K^+ K^0, \\ \Omega^- &\to \Xi^0 \pi^-, \\ \Xi^0 &\to \Lambda(\to p\pi^-)\pi^0(\to 2\gamma \to 2(e^+e^-)), \end{aligned} \tag{6.4}$$

的实验测量和分析，发现了Ω^-粒子，并测得其$J^P = \frac{3}{2}^+$，$S = -3$, 质量为

$$m(\Omega^-) = 1686 \pm 12 \text{ MeV}. \tag{6.5}$$

BNL实验组的实验测量结果与盖尔曼的理论预言符合的很好。对理论家和实验家们来说，Ω^-重子的预言和发现都是巨大的成功!

6.1.2 夸克模型

八正法基于SU(3)群的多重态理论，对众多强子进行了有规则的分类，并且根据$\frac{3}{2}^+$重子十重态中的空位预言了重子Ω^-的存在，很快被实验所证实。但盖尔曼在提出SU(3)八正法理论时，跳过了SU(3)的基础表示“3”，这使他感到很不安。因为“3”是SU(3)群的基础表示，其他的“8”和“10”维表示均可以由$3 \otimes \bar{3}$的直积，$3 \otimes 3 \otimes 3$的直积得到。那么为什么强

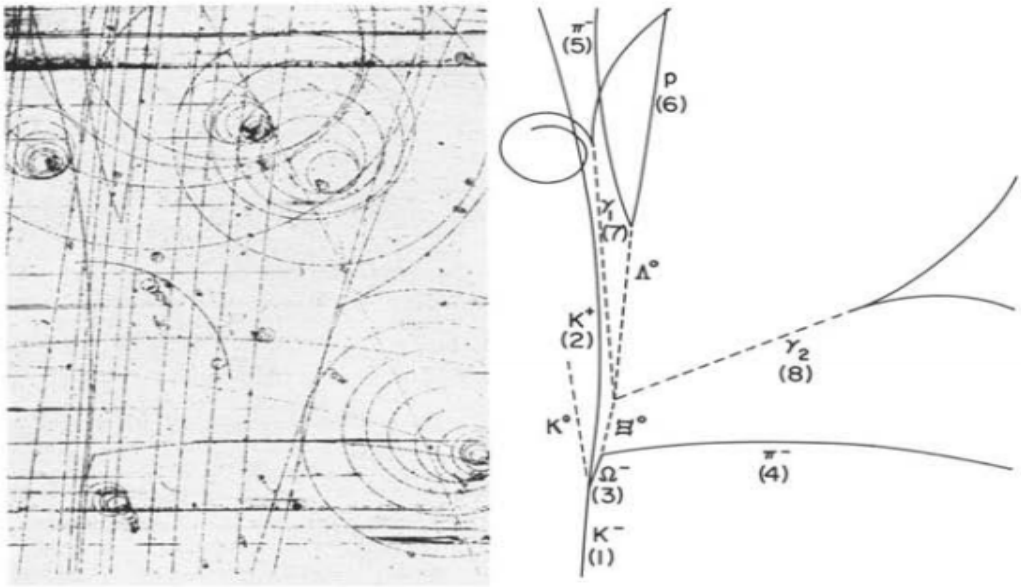


图 6.4:　左侧图为整个产生和衰变链($K^-p \to \Omega^- K^+ K^- \to \cdots$) 的气泡室径迹照片，右侧为同一过程的径迹示意图[112]。

子没有三重态的群表示呢？这些多重态的内在规律是什么？强子是否应该是某些更基本的粒子构造出来的束缚态？

坂田尝试过坂田子(n, p, Λ)作为更基本的粒子，但不成功。盖尔曼也试图寻找基本强子以填充基础表示，却找不到已知的“ 最基本”的粒子来代替这个三重态，他发现，如果坚持整数电荷的观念，那么最小的一组粒子应为4个。他讨论了各种四个基本粒子的方案，但均不能令人满意。1963年3月，他到哥伦比亚大学访问。在午餐期间，他同哥伦比亚大学的罗伯特·塞伯[6] 等人讨论了有关八正法理论[115, 116]。盖尔曼当时向塞伯解释了没有考虑群表示“3”的原因是它需要分数电荷2/3和$-1/3$。盖尔曼经过几天的思考，认为分数电荷是可能存在的。为了避免实验上没有观察到分数电荷的问题，盖尔曼假定它们被束缚在粒子内部。关于夸克模型的论文“重子和介子的一个简略模型”[101]于1964年2月在欧洲《物理快报》上发表。该文虽然只有两页长和很少的公式，但却是现代物理学的一个重要里程碑。

如图-6.5所示，在盖尔曼的“夸克模型”中，三个轻的(u, d, s)夸克填充$SU(3)$群的“3”表示，对应的反夸克$(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$填充$SU(3)$的“$\bar{3}$”表示。这些夸克的量子数也在图-6.5中给出，自旋量子数均为1/2, 携带的电荷数分别为2/3，$-1/3$，$-1/3$，重子数均为1/3，s夸克携带奇异数$S = -1$，他们完全满足盖尔曼－西岛关系。除了自旋以外，三种反夸克携带的其它量子数和夸克相反。盖尔曼还指出，重子由三个夸克组成，介子由一个夸克和一个反夸克组成。他还预言了四夸克态$(qq\bar{q}\bar{q})$和五夸克态$(qqqq\bar{q})$的存在。

与此同时，茨维格在1964年1月提交了他80页的论文预印本[103]，称这些基本的分数

[6]Robert Serber (1909.3.14-1997.6.1)，美国核物理学家。参加了曼哈顿计划，1971年担任美国物理学会主席。

电荷粒子为“王牌”(Aces)，并对如何使用“Aces”和他们的反粒子来构造介子和重子多重态，以及如何解释这些多重态的性质做了细致的讨论。同一时期，我国物理工作者也于1965年至1966年，提出并深入研究了强子结构的“层子模型”。

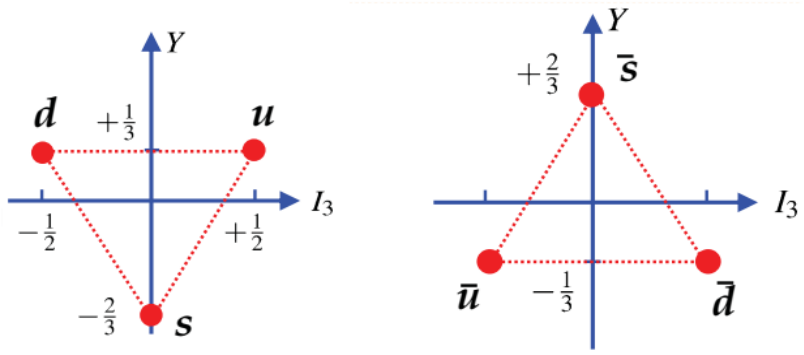


图 6.5: 味$SU(3)$群的基础表示“$3=(u,d,s)$”和其复共轭表示“$\bar{3}=(\bar{u},\bar{d},\bar{s})$”。

我们用量子数J^{PC}对强子进行分类： 在夸克模型中，介子是由夸克和反夸克构成的束缚态：$M=(q\bar{q}')$ (q, q' 可以不同)。夸克是费米子，每个夸克的自旋量子数是1/2。那么$q\bar{q}'$介子系统的总自旋量子数$S=0,1$。如果正反夸克之间的轨道角动量为L，那么根据上一章的讨论，$q\bar{q}$系统的空间宇称、C宇称和同位旋量子数分别为

$$P=(-1)^{L+1},\quad C=(-1)^{L+S},\quad G=(-1)^{L+S+I}. \tag{6.6}$$

其中“I”表示一组同位旋多重态的同位旋量子数，例如核子(p,n)系统的$I=1/2$。当然，只有电中性和味中性系统才有C宇称。由前一章的讨论我们知道，由正反费米子组成的系统，其基态应该是轨道角动量$L=0$的量子数为$J^{PC}=0^{-+}$ 和1^{--} 的介子。当$q\bar{q}$系统的$L=1$时，有$J^{PC}=0^{++}$ (标量), 1^{+-} 和1^{++} (轴矢量), 2^{++} (张量)。实验上发现质量最低的介子果然是$J^{PC}=0^{-+}$和1^{--}，其中最轻的$J^{PC}=0^{-+}$是图6.2中所示的赝标量介子。

盖尔曼的夸克模型有3味轻夸克和对应的3种反夸克可以直接构成9种介子$q\bar{q}'$：

$$u\bar{u},d\bar{u},s\bar{u},u\bar{d},d\bar{d},s\bar{d},u\bar{s},d\bar{s},s\bar{s}. \tag{6.7}$$

以3味轻夸克为基础所组成的这9种介子可以按味SU(3)群的不可约表示(6.1)式分类为一个单态和一个八重态。图6.2(a)所示的9种0^{-+}赝标量介子、后面6.1.4节的9个1^{--}矢量介子以及S波激发态0^{++}介子、1^{+-} 介子等都是1维和8维表示。夸克模型在粒子分类方面很好地解决了八正法理论所存在的问题，介子多重态只有1和8 两种表示，原来在八正法理论中可以出现的表示10、10^* 和27 这里自动不出现。

通过几十年的努力，人们通过高能实验发现了很多的强子，但是根据夸克模型，应该还有很多强子没有被实验发现，这些强子一旦被实验发现后，人们通过其衰变产物确定了

表 6.1:　中性没有味道介子的命名规则[1]，其中目前没有出现在粒子数据表的$\Pi_{c,b}, W_{c,b}$和R_b 已经用括号括起来。

	S= 0	S= 1	S= 1	S=0
J^{PC}	$0^{-+}(^1S_0)$	$1^{--}(^3S_1)$	$0^{++}(^3P_0)$	$1^{+-}(^1P_1)$
	2^{-+}	2^{--}	$1^{++}(^3P_1)$	3^{+-}
	4^{-+}	3^{--}	$2^{++}(^3P_2)$	5^{+-}
$^{2S+1}L_J$	^{1}(L偶数)$_J$	^{3} (L偶数)$_J$	^{3}(L奇数)$_J$	^{1}(L 奇数)$_J$
$u\bar{d}, u\bar{u}-d\bar{d}, d\bar{u}$ (I =1)	π	ρ	$a_{0,1,2}$	b
$u\bar{u}+d\bar{d}, s\bar{s}$(I=0)	η, η'	ω, ϕ	$f_{0,1,2}, f'$	$h_{1,3,5}, h'$
$c\bar{c}$ (I=0)	η_c	J/ψ	$\chi_{c0,c1,c2}$	h_c
$b\bar{b}$ (I=0)	η_b	Υ	$\chi_{b0,b1,b2}$	h_b
I=1 with $c\bar{c}$	(Π_c)	R_c	(W_c)	Z_c
I=1 with $b\bar{b}$	(Π_b)	(R_b)	(W_b)	Z_b

其量子数后，就会给其相应的名字，这些名字是由夸克模型定义的规则，一般是唯一确定的。更详细的规则可以在粒子数据表上查到[1]。

无色、无味($S=C=B=T=0$)、只有同位旋的介子，由一对正反夸克组成。由于夸克自旋为1/2，因而正反夸克对的总自旋只有0和1两种。强子命名的一般规则是：强子的名字与他携带的量子数相对应。这些中性没有味道的介子的命名规则在表-6.1 中列出。一般以不同的字母区分P、C和I量子数不同的粒子态，例如，使用f 和f'表示同位旋$I=0$ 的标量介子，使用字母a表示同位旋$I=1$的标量粒子，b、h和h'则分别表示同位旋为1和0的轴矢量介子。

对于可以通过强相互作用衰变的激发态，包括轨道角动量激发态和径向激发态，一般把它的质量放在括号中，以示区别，例如$\rho(1700)$。在表-6.2中，列出了目前实验上已经观察到的大部分轻介子态$(q\bar{q}')$ $(q=u,\, d,\, s)$，更多的粒子态可以在粒子数据表[1]中找到。按照粒子数据组(PDG)的惯例，人们使用字母K分别表示带有奇异数的同位旋$I=1/2$的奇异介子。

6.1.3　赝标量介子

我们首先讨论质量最低的0^-赝标介子八重态和单态，(6.7)式中的$u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$是没有味道的味单态，它们可以互相混合组成新的态。当然独立的态数还是三个。其中的反对称态$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$和$u\bar{d}$、$d\bar{u}$两个态一起组成$\pi$介子的同位旋三重态：

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d}), \quad \pi^- = d\bar{u}. \tag{6.8}$$

表 6.2: 在夸克模型下的$q\bar{q}'$轻介子谱[$q = u,\ d,\ s$]。已经在实验上观察到的部分轻介子态[1]。

$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	I=1 $u\bar{d}, \bar{u}d, \frac{1}{2}(d\bar{d}-u\bar{u})$	I=$\frac{1}{2}$ $u\bar{s}, d\bar{s}, \bar{d}s, -\bar{u}s$	I=0 f'	I=0 f
1^1S_0	0^{-+}	π	K	η	$\eta'(958)$
1^3S_1	1^{--}	$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\phi(1020)$	$\omega(782)$
1^1P_1	1^{+-}	$b_1(1235)$	K_{1B}	$h_1(1380)$	$h_1(1170)$
1^3P_0	0^{++}	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	$f_0(1710)$	$f_0(1370)$
1^3P_1	1^{++}	$a_1(1260)$	K_{1B}	$f_1(1420)$	$f_1(1285)$
1^3P_2	2^{++}	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	$f_2'(1525)$	$f_2(1270)$
1^1D_2	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$K_2(1770)$	$\eta_2(1870)$	$\eta_2(1645)$
1^3D_1	1^{--}	$\rho(1700)$	$K^*(1680)$		$\omega(1650)$
1^3D_2	2^{--}		$K_2(1820)$		
1^3D_3	3^{--}	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	$\phi_3(1850)$	$\omega_3(1670)$
1^3F_4	4^{++}	$a_4(2040)$	$K_4^*(2045)$		$f_4(2050)$
1^3G_5	5^{--}	$\rho_5(2350)$	$K_5^*(2380)$		
1^3H_6	6^{++}	$a_6(2450)$			$f_6(2510)$
2^1S_0	0^{-+}	$\pi(1300)$	$K(1460)$	$\eta(1475)$	$\eta(1295)$
2^3S_1	1^{--}	$\rho(1450)$	$K^*(1410)$	$\phi(1680)$	$\omega(1420)$

$(u\bar{s}, d\bar{s})$和$(s\bar{u}, s\bar{d})$可以分别构成K介子的同位旋二重态：

$$\begin{pmatrix} K^+ = u\bar{s} \\ K^0 = d\bar{s} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 = s\bar{d} \\ K^- = s\bar{u} \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

同位旋单态$\eta_q = (u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$和$\eta_s = s\bar{s}$通过混合，可以构成两个新的同位旋单态$\eta_8$ 和η_1，

$$\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}\right), \qquad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}\right). \tag{6.10}$$

在实验上看到的质量本征态η和η'介子是味SU(3)单态η_1 和味八重态η_8的混合

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ \sin\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

混合角θ_P是由许多相关实验确定的。根据目前的研究可知混合角在$-20°$和$-10°$ 之间[39, 117]。η_1 和η_8 的质量矩阵可以写为

$$M = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{81}^2 \\ m_{18}^2 & m_{88}^2 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

物理态η和η' 的质量本征值m_η 和$m_{\eta'}$为

$$R^T M R = \begin{pmatrix} m_\eta^2 & 0 \\ 0 & m_{\eta'}^2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

对$\eta - \eta'$ 介子混合的问题, 除了用“单态-八重态基”的混合来描写，还可以用“味道本征态基”(η_q 和η_s) 下的混合来描写, 混合角是ϕ

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = U(\phi) \begin{pmatrix} \eta_q \\ \eta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_q \\ \eta_s \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

这两种不同的混合描述应该是等价的[39]。

π介子是质量最轻的介子，只能发生味道改变的弱衰变或者电磁衰变，由于$\pi^\pm$介子只能是弱衰变，所以寿命较长$\tau = 2.6033 \times 10^{-8}$s。而对于中性的$\pi^0$介子，其主要衰变道是电磁衰变$\pi^0 \to \gamma\gamma$，其寿命就短了很多：在$10^{-17}$s量级。

K介子是带奇异数的最轻的介子，它们的衰变产物肯定是没有奇异数的粒子，因而也只能是弱衰变，寿命较长，在10^{-8} 秒量级。K^+介子除了(3.69)式的两个主要衰变道外，还有稀有衰变道

$$\begin{aligned} K^+ &\to e^+\nu_e,\ 1.582(7) \times 10^{-5}; \\ &\to \pi^+\pi^0\pi^0,\ 1.760(23)\%; \\ &\to \pi^+\pi^-\pi^+,\ 5.583(24)\%. \end{aligned} \tag{6.15}$$

$\eta(547)$介子性质在上一章的例题5.6讨论过。$\eta'(958)$介子的质量很重，衰变道更多，而且可以强相互作用衰变，其主要衰变道为

$$\begin{aligned} \eta' &\to \pi^+\pi^-\eta,\ 42.5(5)\%; \\ &\to \pi^0\pi^0\eta,\ 22.4(5)\%. \end{aligned} \tag{6.16}$$

其衰变宽度为$\Gamma_{\eta'} = 188$keV (对应$\tau_{\eta'} \approx 3.5 \times 10^{-21}$秒)。当然由于两体衰变都是P宇称和CP宇称不守恒的，上面的强相互作用衰变道都是三体衰变，相空间要比两体衰变小，才使其衰变宽度小于一般的强衰变粒子的兆电子伏特量级。而且它们的分支比跟电磁衰变都是同量级的

$$\begin{aligned} \eta' &\to \rho^0\gamma,\ 29.5(4)\%; \\ &\to \gamma\gamma,\ 2.307(33)\%. \end{aligned} \tag{6.17}$$

上面第二个衰变道比第一个的分支比小的原因是第一个衰变道是一级电磁衰变，而第二个是二级电磁衰变。所有8个赝标量粒子的夸克组成总结在表6.3中。

表 6.3: $J^P = 0^-$ 和1^- 介子的夸克组成。

Y	I	夸克组分	$J^P = 0^-$	$J^P = 1^-$
0	1	$\bar{u}d,\ (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2},\ u\bar{d}$	π^-, π^0, π^+	ρ^-, ρ^0, ρ^+
1	1/2	$\bar{s}d, \bar{s}u$	K^0, K^+	K^{*0}, K^{*+}
-1	1/2	$\bar{u}s, \bar{d}s$	$K^-, \bar{K}^0$	$K^{*-}, \bar{K}^{*0}$
0	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	η_8	ϕ_8
0	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	η_1	ϕ_1
0	0	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$		$\omega(784)$
0	0	$s\bar{s}$		$\phi(1020)$

6.1.4 矢量介子

与赝标量介子类似，1^-矢量介子也是一个单态和一个八重态。与π介子同位旋三重态对应的矢量介子同位旋三重态是ρ 介子。与两个K介子二重态对应的矢量介子二重态是K^*。它们的夸克组成列在表6.3中。实验上观察到的两个同位旋单态的质量本征态$\omega(782)$和$\phi(1020)$是$SU(3)$的八重态ϕ_8和单态ϕ_1的混合。ϕ_8 和ϕ_1 的质量矩阵可以写为

$$M = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{81}^2 \\ m_{18}^2 & m_{88}^2 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

其本征波函数可以写为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)/\sqrt{3}, \\ \phi_8 &= (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)/\sqrt{6}, \end{aligned} \tag{6.19}$$

质量矩阵M 的本征值为m_ω 和m_ϕ

$$R^T M R = \begin{pmatrix} m_\omega^2 & 0 \\ 0 & m_\phi^2 \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta_V & -\sin\theta_V \\ \sin\theta_V & \cos\theta_V \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

所以有

$$\begin{aligned} \phi &= \cos\theta_V \phi_8 - \sin\theta_V \phi_1, \\ \omega &= \sin\theta_V \phi_8 + \cos\theta_V \phi_1. \end{aligned} \tag{6.22}$$

当取$\tan\theta_V = \sqrt{1/2}$时，有

$$\begin{aligned} \omega &= (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2} \\ \phi &= \bar{s}s. \end{aligned} \tag{6.23}$$

这是“理想混合”，$\theta_V \approx 35.3^0$, 无数的粒子物理实验观测结果证明: ω 和ϕ非常接近这样的理想混合。由于都是u和d轻夸克组成的，ω 和ρ介子的质量很接近，而$\phi = s\bar{s}$的质量则较大。

强子质量的确定依赖很多因素：组分夸克的种类，内部动能分布，束缚能的大小，与角动量耦合相关的精细结构等。从简单夸克模型建立开始，人们就使用该模型讨论赝标介子和矢量介子的质量问题。如果SU(3)味对称性是严格的，那么3味轻夸克u、d、s的质量应该相等，但关于介子质量的实验测量结果告诉我们事实不是这样。考虑到$\pi^{\pm}$和π^0的质量差以及质子和中子的质量差都很小，所以一般认为u和d夸克的质量大致相同，$m_u = m_d$是一个很好的近似。s夸克则比u，d夸克重很多。从另外一个角度，自旋为1的矢量介子ρ和自旋为0的赝标介子π的夸克组成相同，但他们的质量差5 倍。这表明粒子的质量和束缚态粒子内部的价夸克之间的自旋-自旋相互作用可能相关。如果把0^{-+}和1^{--}介子质量简单参数化为如下形式[44, 118, 119]

$$m = m_1 + m_2 + A \cdot \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2}, \tag{6.24}$$

其中$m_{1,2}$和$\mathbf{S}_{1,2}$分别是介子内两个价夸克的组分质量和自旋角动量，A为由拟合待定的参数。考虑两个价夸克自旋角动量耦合为总自旋$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$，平方后有

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\left[S^2 - S_1^2 - S_2^2\right] = \begin{cases} -\frac{3}{4}, & \text{for } 0^- \text{ meson}, \\ \frac{1}{4} & \text{for } 1^- \text{ meson}. \end{cases} \tag{6.25}$$

把实验测量的π、K、ρ、ω、K^*和ϕ粒子的质量[1]作为输入，与公式(6.24)给出的理论结果相减后作最小二乘法拟合，求

$$\sum_i (m_i^{ex} - m_i^{th})^2 \tag{6.26}$$

的最小值，得到组分夸克质量和参数A的拟合值为:

$$m_u = m_d = 309MeV, \quad m_s = 483MeV, \quad A = 4m_u^2 \cdot 159MeV. \tag{6.27}$$

把这些值代入(6.24)可以得到表-6.4的结果[44]。显然，对该表所列出的介子的质量，计算结果和实验值符合的很好。但对η和η'介子，由于同时涉及3个轻夸克(u,d,s)的贡献、质量本征态和味道本征态混合角度不准确，情况比较复杂，暂不做讨论。

上面通过唯象方法，用介子质量输入，拟合出的夸克质量，通常称为组分夸克质量，在下一章的量子色动力学理论中，夸克之间是通过传递胶子相互作用的，上面的唯象模型

表 6.4: 0^-和1^-轻介子质量（单位取MeV）的拟合值与测量值比较。

介子	π	K	ρ	K^*	ω	ϕ
拟合值	144	490	775	893	775	1031
测量值	138	496	775	894	783	1019

并没有胶子的自由度，因此组分夸克质量是考虑了它们组成强子时候与胶子的相互作用（强相互作用结合能）之后的等效质量。由于实验上并不能测量单独的夸克，因此夸克的质量也并不是直接的实验观测量，夸克质量的定义是理论或者模型依赖的，除了上面的组分夸克质量，一般在量子色动力学理论拉氏量中的质量是流夸克质量，对于3种轻夸克来说，流夸克质量远小于组分夸克质量。六种流夸克质量的大小在1.3.3节的图1.8中粒子表中有给出，

由于矢量介子$\rho(770), K^*(892)$和$\phi(1020)$的质量远大于对应的赝标介子，所以它们都可以通过强相互作用衰变到赝标介子，衰变宽度都能超过兆电子伏特的量级：

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho &= 149.1(8)\text{MeV}, \quad \Gamma_{K^{*\pm}} = 50.8(9)\text{MeV}, \\ \Gamma_\omega &= 8.49(8)\text{MeV}, \quad \Gamma_\phi = 4.249(13)\text{MeV}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

这些矢量介子中ρ和ω粒子的主要衰变道在上一章的例题5.4和5.5中讨论过了。K^*粒子的衰变比较简单，主要是强衰变

$$K^* \rightarrow K\pi, \sim 100\%. \tag{6.29}$$

至于ϕ介子的衰变性质我们将在6.3.2节详细讨论。

6.2 轻重子系统的味SU(3)群表示

在上个世纪六十年代已经发现的重子八重态和十重态都在八正法的群表示中，是八正法成功的标志之一。盖尔曼和茨威格的夸克模型继承了这些成功的分类群表示，他们认为所有重子都是由三个不同的夸克组成的。3个轻夸克(u, d, s)构成$SU(3)$味对称群的基础表示“3”，考虑3个基础表示“3”的乘积与分解：

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \tag{6.30}$$

上式中的表示“8” 就可以描写我们所熟悉的$J^P = \frac{1}{2}^+$的轻夸克重子八重态$(N, \Lambda, \Sigma, \Xi)$，表示“10” 就是$J^P = \frac{3}{2}^+$的轻夸克重子十重态$(\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega)$, 而$J^P = \frac{1}{2}^-$ 的重子单态$\Lambda(1405)$则可能是表示“1”的粒子。当然，许多重子激发态也可以构成另外的八重态和十重态[1]，我们在这里先不讨论。夸克模型成功解决了八正法(6.2)式中多余的$\overline{10}$和27表示不存在的问题。

如果把三个夸克之间的两个相对轨道角动量均取为零, 那么(qqq)体系自旋角动量的耦合为：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=(1\oplus 0)\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2}. \tag{6.31}$$

也就是说基态S波重子的自旋和宇称量子数为$J^P=\frac{1}{2}^+$和$\frac{3}{2}^+$。质量最低的重子是$J^P=\frac{1}{2}^+$的重子八重态，质量稍高一些的重子是$J^P=\frac{3}{2}^+$的重子十重态，实验和理论预期是一致的。

在夸克模型下，由于重子是三体束缚态，对重子的处理相应比介子复杂。如图-6.6所示，3个价夸克之间存在2个轨道角动量：$\mathbf{L}_{12}$是夸克1和2关于其质心A的轨道角动量，$\mathbf{L}'$是(1,2)组合和夸克3相对于3个粒子质心B的轨道角动量。如果两个轨道角动量量子数L_{12}和L' 不为零，他们之间的耦合就比较复杂。因此，质量比最低的$J^P=\frac{1}{2}^+$ 的重子八重态和$J^P=\frac{3}{2}^+$的重子十重态高的重子轨道激发态波函数和量子数都比较复杂。

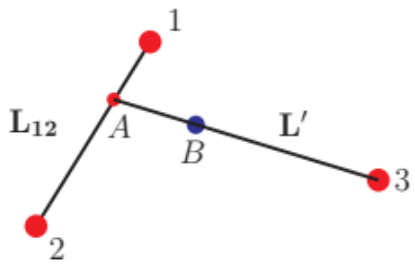


图 6.6:　3夸克系统的轨道角动量耦合。$\mathbf{L}_{12}$是夸克1和2关于其质心A的轨道角动量，$\mathbf{L}'$是(12)组合和夸克3关于这3个粒子质心B的轨道角动量。

按照约定，目前所有已经发现的普通重子都用下面规则来命名：

1. 对于由三个u或d夸克组成的重子，每个夸克的同位旋都是1/2，它们可以组成1/2和3/2 两种总同位旋，其中同位旋1/2的，我们命名为核子N，其基态自旋1/2，激发态可以为3/2；另一种同位旋3/2的重子则命名为Δ，其基态自旋3/2，激发态则可以是1/2。这些粒子的奇异数、粲数和底数均为零。

2. 对于由两个u或d夸克再加上另外一个没有同位旋的夸克组成的重子，总同位旋可以组成0和1两种，其中的同位旋单态，我们命名为Λ，其基态是味SU(3)八重态的粒子；同位旋1的重子则命名为Σ，其基态是自旋1/2 的味道八重态粒子，第一激发态是自旋3/2 的味十重态粒子。

3. 对于由1个u或d夸克再加上两个没有同位旋的夸克组成的重子，则是味八重态和十重态都有的Ξ粒子，其同位旋为1/2。

4. 对于没有u或d夸克的重子，我们命名为Ω（同位旋0）。

表 6.5: $\frac{1}{2}^+$ 轻味重子的夸克组分。

Y	I	夸克组分	强子态	质量(MeV)
1	$\frac{1}{2}$	$ddu,\ uud$	$n,\ p$	939
0	0	$s(du-ud)/\sqrt{2}$	Λ	1116
0	1	$sdd,\ s(du+ud)/\sqrt{2},\ suu$	$\Sigma^-,\ \Sigma^0,\ \Sigma^+$	1193
-1	$\frac{1}{2}$	$ssd,\ ssu$	$\Xi^-,\ \Xi^0$	1318

除了基态以外的重子，例如可以经过强相互作用衰变的激发态重子，包括轨道角动量激发态和径向激发态，把它们的质量也包含在名字的括号里以示区别。例如$N(1440), \Delta(1232), \Lambda(1405), \Sigma(1385), \Xi(1530)$ 和$\Omega(2012)$ 等。

6.2.1 重子八重态

八重态重子的夸克组成如表 6.5所示，这8个重子组成SU(3)群的八重态表示，其奇异数和同位旋多重态如图 6.2(b)所示。从群表示理论可知，同位旋SU(2)群是SU(3)群的子群。因此核子N和Ξ都是同位旋SU(2)群的二重态表示，其奇异数分别为0 和-2; Σ 是同位旋三重态; Λ是同位旋单态。和同位旋类比，我们也可引入另外的SU(2)群来分别表示U旋(U-spin)和V旋(V-spin)。在U旋下，d夸克和s夸克组成SU(2)群的二重态基础表示；在V旋下，u夸克和s夸克组成SU(2)群的二重态基础表示，

$$\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

因此，如图 6.7所示，在U旋之下，八重态重子分类为U旋的二重态：(p, Σ^+)、(Σ^-, Ξ^-)，U旋三重态(n, Σ^0, Ξ^0)和单态Λ。

同位旋、U旋和V旋都是SU(2)群描述的对称性，分别都有三个生成元，通常使用(5.132)式的盖尔曼矩阵λ_i 来定义同位旋，U 旋和V 旋的9 个生成元的算符形式：

$$I_1 = \frac{1}{2}\lambda_1,\quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda_2,\quad I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \tag{6.33}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\lambda_4,\quad V_2 = \frac{1}{2}\lambda_5,\quad V_3 = \frac{1}{4}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8), \tag{6.34}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\lambda_6,\quad U_2 = \frac{1}{2}\lambda_7,\quad U_3 = \frac{1}{4}(-\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8), \tag{6.35}$$

在此定义下，可以证明下述关系：

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2},\quad U_3 = -\frac{Q}{2} + Y,\quad V_3 = \frac{1}{2}(Q+Y). \tag{6.36}$$

其中的第一个式子就是著名的盖尔曼-西岛关系式。另外，由于

$$I_3 + U_3 + V_3 = Q + Y. \tag{6.37}$$

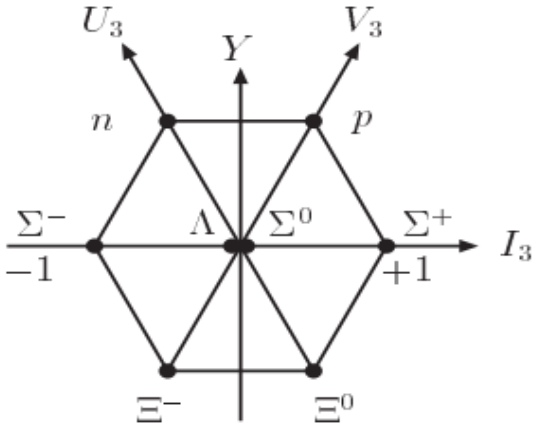


图 6.7:　$\frac{1}{2}^+$重子八重态的同位旋、U旋和V旋对称性表示。

这9个生成元中只有8个是独立的，它们构成SU(3)群的8个生成元。

从上一节的分析中，我们知道u和d夸克的质量基本相等，而s夸克则重得多，因此同位旋对称性在强相互作用中是非常好的对称性，在上一章的讨论中，我们也看到同位旋守恒在强相互作用中也得到了很好的实验检验。但是(6.32)式所示的U旋和V 旋则由于较重的s夸克，对称性破缺比较大，因此，在实际应用中，这两种SU(2)对称性被提到的概率越来越小。

从衰变前后粒子奇异数是否变化，可以把强子弱衰变分成两类。第一类强子衰变是沿I_3 方向进行的。例如：$n \to p + l^- + \bar{\nu}_l$, 选择定则为：

$$\Delta S = 0, \quad \Delta I = 0, \quad \Delta I_3 = \pm 1. \tag{6.38}$$

第二类强子衰变是沿U_3或V_3方向进行的。例如：$\Lambda^0 \to p + \pi^-$(沿V旋方向), $\Lambda^0 \to n + \pi^0$(沿U旋方向)。选择定则为：

$$\Delta S = 1, \ \Delta I = \frac{1}{2}, \ \Delta I_3 = \pm\frac{1}{2}. \tag{6.39}$$

实验测量结果告诉我们，$\frac{1}{2}^+$八重态的重子是质量最轻的重子，由于重子数守恒它们的衰变受到了很多的限制：

(1) 质子是质量最轻的重子，由于重子数守恒，所以不衰变。但是在大统一理论下可以衰变，目前实验测到的寿命下限为$\tau > 10^{31}$ 年。

(2) 由于初、末态质量限制（$m_n < m_p + m_\pi$），$n \to p + \pi$的强子衰变道没有打开。中子的主要衰变道是β衰变。在夸克层次，该衰变过程属于弱衰变$d \to u + W^* \to u + (e^- + \bar{\nu}_e)$，夸克味道改变，同位旋三分量改变。除了不衰变的质子，中子是寿命最长的重子!

(3) $\Lambda(1116)$超子是有奇异数($S=-1$)的质量最轻的重子。由于奇异数守恒的限制，$\Lambda(1116)$不能强衰变，也不能电磁衰变，主要衰变道是弱作用的强子衰变道：

$$\begin{aligned}\Lambda \to \quad & p+\pi^- \ \ (63.9(5)\%);\\ & n+\pi^0 \ \ (35.8(5)\%);\\ & n+\gamma \ \ (0.175(15)\%).\end{aligned} \tag{6.40}$$

上面所示三个主要衰变道中的最后一个衰变道虽然有光子参加，却不是通常的电磁衰变，而是电弱圈图衰变，因为奇异数发生了改变。Λ超子寿命因此比较长，$\tau(\Lambda)=2.632(20)\times 10^{-10}$秒。

(4) Σ^+和Σ^-重子不是互为正反粒子，Σ^+ 的反粒子是$\overline{\Sigma}^- = \bar{u}\bar{u}\bar{s}$，$\Sigma^-$的反粒子是$\overline{\Sigma}^+ = \bar{d}\bar{d}\bar{s}$。两粒子质量差为8.1 MeV，主要衰变道的末态和分支比都有很大不同，寿命差别也较大：

$$\begin{aligned}\Sigma^+: \quad & \tau(\Sigma^+)=0.80\times 10^{-10}s;\\ & \mathcal{B}(\Sigma^+\to p\pi^0)=51.57(30)\%; \quad \mathcal{B}(\Sigma^+\to n\pi^+)=48.31(30)\%;\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^-: \quad & \tau(\Sigma^-)=1.479(11)\times 10^{-10}s;\\ & \mathcal{B}(\Sigma^-\to n\pi^-)=99.848(5)\%; \quad \mathcal{B}(\Sigma^-\to ne^-\bar{\nu}_e)\approx 0.1\%.\end{aligned} \tag{6.42}$$

(5) Σ^0和$\Sigma^\pm$虽然是同位旋的三重态，质量差别不大，但是其衰变性质却有很大的不同！因为Σ^0可以通过电磁相互作用衰变到质量更轻的Λ粒子，

$$\mathcal{B}(\Sigma^0\to\Lambda\gamma)\approx 100\%; \quad \mathcal{B}(\Sigma^0\to\Lambda\gamma\gamma)<3\%(90\%\text{C.L.}). \tag{6.43}$$

电磁衰变比弱作用衰变强很多，所以Σ^0的寿命在$10^{-20}s$的量级，比$\Sigma^\pm$的寿命短9个量级之多。

(6) $\Xi^{0,-}$是质量最轻的奇异数$S=-2$的重子，因而只能发生奇异数改变的弱衰变，二者质量差约为6.8MeV，寿命也接近：

$$\begin{aligned}\Xi^0: \quad & \tau(\Xi^0)=2.90(9)\times 10^{-10}s;\\ & \mathcal{B}(\Xi^0\to\Lambda\pi^0)=99.524(12)\%; \quad \mathcal{B}(\Xi^0\to\Lambda\gamma)\approx 0.1\%;\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\Xi^-: \quad & \tau(\Xi^-)=1.639(15)\times 10^{-10}s;\\ & \mathcal{B}(\Xi^0\to\Lambda\pi^-)=99.887(35)\%; \quad \mathcal{B}(\Xi^-\to\Sigma^-\gamma)\approx 1.3\times 10^{-4}.\end{aligned} \tag{6.45}$$

6.2.2 重子十重态和夸克颜色

由图-6.3可以看出，在6.1.1节讨论过的$\frac{3}{2}^+$轻味重子十重态包含四组奇异数各不相同的同位旋多重态粒子，它们的夸克组成是：

(1) 同位旋四重态$\Delta(1232)$：$\Delta^-(ddd)$, $\Delta^0(ddu)$, $\Delta^+(duu)$, $\Delta^{++}(uuu)$;　$I=3/2$, $S=0$；

(2) 同位旋三重态$\Sigma(1384)$: $\Sigma^{*-}(dds)$, $\Sigma^{*0}(dus)$, $\Sigma^{*+}(uus)$;　$I=1$, $S=-1$；

(3) 同位旋二重态$\Xi(1530)$: $\Xi^{*-}(ssd)$, $\Xi^{*0}(ssu)$;　$I=1/2$, $S=-2$；

(4) 同位旋单态$\Omega^-(1672)(sss)$：$I=0$, $S=-3$。

因为重子数守恒要求, 重子十重态不能衰变到只有介子和光子的末态，它们主要衰变到质量较轻的$1/2^+$重子(反重子与重子衰变一样，只是根据CP变换衰变到相应的反粒子)：

$$\begin{aligned}
\Delta &\to N\pi, \quad 99.4\%, \qquad \Gamma\approx 120\text{MeV},\\
&\to N\gamma, \quad 0.5\%,\\
\Sigma^*(1385) &\to \Lambda\pi, \quad 88\%, \qquad \Gamma\approx 37\text{MeV},\\
&\to \Sigma\pi, \quad 12\% \qquad .
\end{aligned} \tag{6.46}$$

这里除了末态有光子的第二个Δ衰变过程是电磁衰变，其它都是强衰变过程，所以衰变宽度都是超过兆电子伏特的量级。下面的Ξ^*衰变也是类似的

$$\begin{aligned}
\Xi^*(1385) &\to \Xi\pi, \quad 100\%, \qquad \Gamma\approx 9\text{MeV},\\
&\to \Xi\gamma, \quad <4\%,
\end{aligned} \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^-(1672) &\to \Lambda K^-, \quad 67.8(7)\%, \qquad \tau=0.821(11)\times 10^{-10}s,\\
&\to \Xi^0\pi^-, \quad 23.6(7)\%.
\end{aligned} \tag{6.48}$$

这里最重的Ω重子不是给出的宽度而是寿命，这么长的寿命意味着它上面的衰变是弱衰变，因为奇异数不守恒。实际上，在第6.2.1节中可以看到，$1/2^+$的重子中不存在奇异数为-3的伙伴，由于质量的限制，Ω粒子也不能经强相互作用衰变到Ξ^0+K^-。所以没有保持重子数守恒的衰变，Ω重子只有弱衰变。

夸克与颜色自由度

夸克模型结合了坂田模型和八正法的优点，几乎解决了SU(3)群表示的所有问题，但是也遇到了无法克服的理论困难。上述十重态中的Δ^-、Δ^{++}和Ω^-粒子分别是ddd、uuu和sss三种全同夸克组成的，费米-狄拉克统计关系要求重子波函数对于其中任何两个组分夸克的交换必须是完全反对称的。由于已知基态$3/2^+$重子的任意两个夸克之间的轨道角动量为0，其空间波函数ψ_{space}是全对称的。由其自旋3/2可知其自旋波函数$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$和味波函数(qqq)均为全对称态。因此三者的乘积对于两个夸克的交换也是全对称态。这就和3个全同费米子束缚态所必须满足的自旋统计关系的要求相矛盾。

为了解决这个理论上的困难，人们作了多方面的试探。1964年，O.W. Greenberg引入了夸克的颜色自由度[105]，认为夸克的内部对称性除了味对称性外，还应该有颜色量子

数。每味夸克都有3种颜色，它们满足色$SU(3)_c$对称性，构成色$SU(3)_c$的3维表示。3个夸克组成重子时，根据3个3维表示的直积分解式(6.30)，重子属于颜色$SU(3)_c$的单态1维表示

$$\psi_{color}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{rgb}-\mathrm{rbg}+\mathrm{gbr}-\mathrm{grb}+\mathrm{brg}-\mathrm{bgr}), \tag{6.49}$$

其中“r”表示红色(red)，“g”表示绿色(green)，“b”表示蓝色(blue)。很容易验证对于任意两个夸克的交换，颜色波函数ψ_{color} 都是反对称的。另外，$SU(3)_c$是一个严格的规范对称性，颜色波函数ψ_{color}对所有重子都一样，所以一般不明确写出来。这样，基态重子的总波函数$\Psi(baryon)$就是反对称的，自旋统计关系仍然保持。

通过前面的讨论可以感觉到，重子比介子复杂！在味道SU(3)对称性下，(u,d,s)夸克是“全同粒子”，相对于任意两个夸克的交换，重子的基态波函数必须是反对称的。那么，完整的重子波函数应该包含4个部分

$$\Psi(baryon)=\psi_{space}\cdot\psi_{flavor}\cdot\psi_{spin}\cdot\psi_{color}, \tag{6.50}$$

这4个波函数分别表示空间波函数、味道波函数、自旋波函数和颜色波函数。

对重子的自旋波函数ψ_{spin}，可以构成完全对称的$S=\frac{3}{2}$的ψ_S，混合对称的$S=\frac{1}{2}$的$\psi_{1,2}$和ψ_{23} [44]

$$\psi_S\left(\frac{3}{2},S_z\right) = \begin{cases} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle=(\uparrow\uparrow\uparrow), \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\uparrow\uparrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow), \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow+\uparrow\downarrow\downarrow+\downarrow\uparrow\downarrow), \\ |\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle=(\downarrow\downarrow\downarrow), \end{cases} \tag{6.51}$$

$$\psi_{12}\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)\uparrow, \\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)\downarrow, \end{cases} \tag{6.52}$$

$$\psi_{23}\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\uparrow(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow), \\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\downarrow(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow), \end{cases} \tag{6.53}$$

类似可以构造混合对称的ψ_{13}，但易于证明$\psi_{13}=\psi_{12}+\psi_{23}$。

对重子的味波函数ψ_{flavor}，3味轻夸克有27种可能性：$uuu,uud,\cdots,sss$。进而可以构成完全对称的、反对称的和混合对称的组合。也就是味SU(3)群的“$10\oplus8\oplus8\oplus1$”多重态。首先是完全对称十重态ψ_S^{10}

$$\psi_S^{10}=\begin{cases} \Delta: & ddd,\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu+dud+udd),\frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu),uuu, \\ \Sigma^*: & \frac{1}{\sqrt{3}}(dds+dsd+sdd),\frac{1}{\sqrt{6}}(uds+usd+dus+dsu+sud+sdu), \\ & \frac{1}{\sqrt{3}}(uus+usu+suu), \\ \Xi^*: & \frac{1}{\sqrt{3}}(dss+sds+ssd),\frac{1}{\sqrt{3}}(uss+sus+ssu), \\ \Omega: & sss, \end{cases} \tag{6.54}$$

然后是两个混合对称态ψ_{12}^f和ψ_{23}^f

$$\psi_{12}^f=\begin{cases} N: & \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)d, \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)u, \\ \Lambda: & \frac{1}{\sqrt{12}}\left[2(ud-du)s+(us-su)d-(ds-sd)u\right], \\ \Sigma: & \frac{1}{\sqrt{2}}(ds-sd)d, \frac{1}{2}\left[(us-su)d+(ds-sd)u\right], \frac{1}{\sqrt{2}}(us-su)u, \\ \Xi: & \frac{1}{\sqrt{2}}(ds-sd)s, \frac{1}{\sqrt{2}}(us-su)s, \end{cases} \tag{6.55}$$

$$\psi_{23}^f=\begin{cases} N: & \frac{1}{\sqrt{2}}d(ud-du), \frac{1}{\sqrt{2}}u(ud-du), \\ \Lambda: & \frac{1}{\sqrt{12}}\left[2s(ud-du)+d(us-su)-u(ds-sd))\right], \\ \Sigma: & \frac{1}{\sqrt{2}}d(ds-sd), \frac{1}{2}\left[d(us-su)+u(ds-sd)\right], \frac{1}{\sqrt{2}}u(us-su), \\ \Xi: & \frac{1}{\sqrt{2}}s(ds-sd), \frac{1}{\sqrt{2}}s(us-su), \end{cases} \tag{6.56}$$

同样，可以定义混合对称态ψ_{13}^f，但其满足关系式$\psi_{13}^f=\psi_{12}^f+\psi_{23}^f$。

对于重子十重态，其反对称的总波函数为

$$\psi_{color}Y_{0,0}(\theta,\phi)\psi_S\left(\frac{3}{2},S_z\right)\psi_S^{10}; \tag{6.57}$$

对于重子八重态，其反对称的总波函数为

$$\psi_{color}Y_{0,0}(\theta,\phi)\psi_{12}\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)\psi_{12}^f, \tag{6.58}$$

或者

$$\psi_{color}Y_{0,0}(\theta,\phi)\psi_{23}\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)\psi_{23}^f. \tag{6.59}$$

由于反夸克的颜色是SU(3)的$\bar{3}$维表示，由一对正反夸克组成介子时，其颜色空间的群表示直积分解按照(6.1) 式，其颜色空间的一维表示是对称的单态，形成的介子满足玻色-爱因斯坦统计。

夸克颜色虽然最初是作为唯象理论模型引入的自由度，但是之后经过了许多实验的验证，在其基础上发展起来的量子色动力学更成为强相互作用的基本理论。颜色自由度的证据举例如下：

1. 考虑如图-6.8 所示的$\pi^0\to\gamma\gamma$ 电磁衰变过程，在$\pi^0\to\gamma\gamma$ 衰变几率的计算中，如果不考虑夸克的三种颜色，则理论值与实验值相差九倍。如果假定夸克具有三种颜色，由于衰变几率与颜色数的平方成正比，则理论值与实验值符合的很好；

2. 正负电子对撞实验中正反夸克对的产生截面和$\mu^+\mu^-$对产生截面的比值R，实验对R值的精确测量，同样支持$N_c=3$，详见我们在第4.3.2 节的讨论。

3. 标准模型理论的可重整化要求每一代的轻子和夸克的总电荷为零，$Q_e+0+N_C(Q_u+Q_d)=0$，进而导致对夸克颜色自由度的限制$N_C=3$。

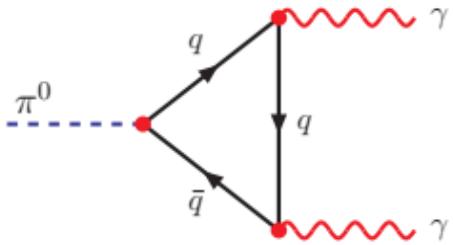


图 6.8: 通过夸克三角图进行的$\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变。

6.2.3 重子质量

在6.1.4节讨论介子质量谱的时候，我们指出过，上、下夸克的质量相近，奇异夸克的质量远大于前两者的质量。从图-6.9中轻味重子和介子的质量相对大小可以看出，强子质量对奇异夸克的个数有较强的依赖关系。除了0^-赝标量介子由于手征对称性造成的戈德斯通粒子效应外，从其它粒子可以看出，同一SU(3)多重态中不同强子之间的质量差别正比于奇异数的差别，每个奇异数相当于一个奇异夸克的流质量大小$m_s \sim 150$ MeV。事实上，在实验上发现Ω^-之前人们就是根据该关系式预言了$\frac{3}{2}^+$ 重子十重态Ω^-的质量。

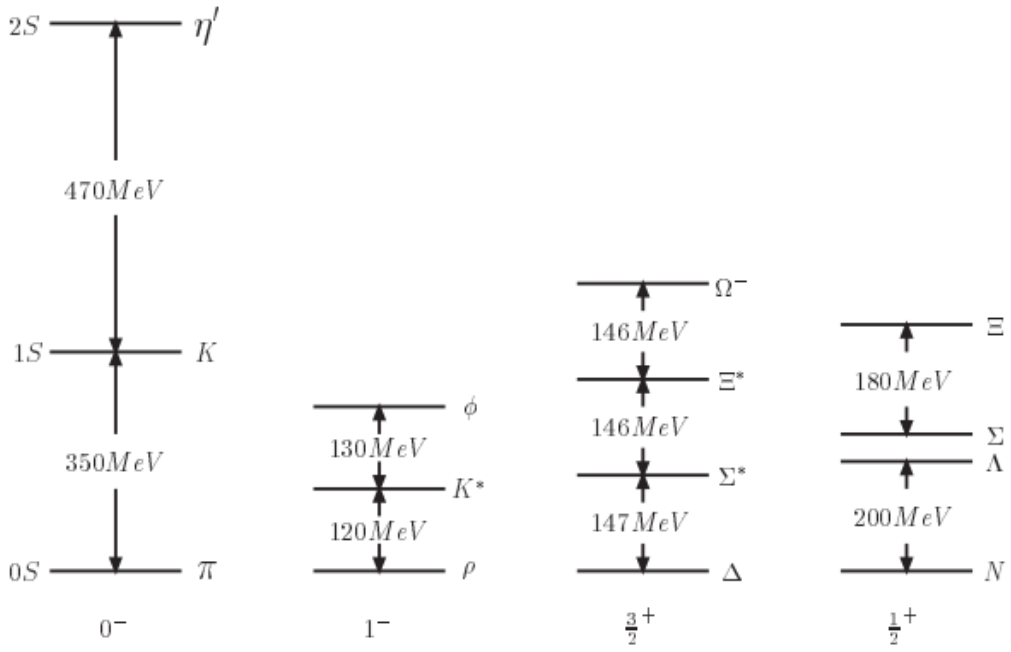


图 6.9: 粒子的静质量和不同的$SU(2)$同位旋多重态之间的质量差示意图。$0S, 1S, 2S$表示粒子包含的奇异夸克的数目。

类似介子质量谱的情况，对于重子质量也采用唯象方法，考虑m_s和$m_u = m_d$之间质量差别，同时考虑由于夸克间自旋-自旋耦合引起的质量分裂，三个夸克之间有三个自旋

角动量[44]：

$$m(baryon) = m_1 + m_2 + m_3 + B\left[\frac{\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2}{m_1m_2} + \frac{\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_3}{m_1m_3} + \frac{\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3}{m_2m_3}\right], \tag{6.60}$$

其中m_i和$\mathbf{S}_i$分别表示第i个价夸克的质量和自旋角动量，B是需要通过拟合已知实验数据得到的待定参数。对于重子十重态，所有三个夸克自旋都平行，每两个夸克之间的总自旋都组合为1，因此

$$(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = 2, \tag{6.61}$$

所以，

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = 1/4, \tag{6.62}$$

同理可得

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3 = 1/4, \tag{6.63}$$

把上述结果代入(6.60)式，经简单计算可得：

$$\begin{aligned} m_\Delta &= 3m_u + \frac{3B}{4m_u^2}, \quad m_{\Sigma(1385)} = 2m_u + m_s + \frac{B}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_um_s}\right), \\ m_{\Xi(1530)} &= m_u + 2m_s + \frac{B}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_um_s}\right), \quad m_\Omega = 3m_s + \frac{3B}{4m_s^2}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

对于重子八重态，由

$$J^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_3), \tag{6.65}$$

得到，

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_3 = \frac{1}{2}j(j+1) - \frac{9}{8} = -\frac{3}{4}, \tag{6.66}$$

所以对于核子，

$$m_N = 3m_u - \frac{3B}{4m_u^2}. \tag{6.67}$$

对于夸克组分都是u, d, s三种夸克的Σ和Λ重子，其上夸克和下夸克的同位旋之和分别为1和0，为了保证除了颜色部分的总波函数交换对称，这两个夸克之间的总自旋也相应地必须分别为1和0。因此对于Σ重子，

$$(\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = S_u^2 + S_d^2 + 2\mathbf{S}_u\cdot\mathbf{S}_d = 2, \tag{6.68}$$

因此$\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = 1/4$。利用(6.60,6.66)式，可得

$$m_\Sigma = 2m_u + m_s + B\left[\frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_s}\right] \tag{6.69}$$

$$= 2m_u + m_s + \frac{B}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right). \tag{6.70}$$

而对于Λ重子，

$$(\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = 0, \tag{6.71}$$

因此$\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = -3/4$。类似地，我们可以得到

$$m_\Lambda = 2m_u + m_s - \frac{3B}{4m_u^2}, \quad m_\Xi = 2m_s + m_u + \frac{B}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right). \tag{6.72}$$

类似于介子的情况，我们把实验测量的所有重子八重态和十重态的质量[1]作为输入值，利用上面(6.64,6.67,6.70,6.72) 式作最小二乘法拟合，得到

$$m_u = m_d = 364MeV, \quad m_s = 537MeV, \quad B = 4m_u^2 \cdot 49MeV, \tag{6.73}$$

可以看出，这里得到的组分夸克质量跟介子情况下得到的结果(6.27)比较接近。

如果我们把介子的质量公式(6.24)和这里的重子质量公式一起考虑，用最小二乘法拟合u/d夸克、s夸克组分质量和A/B参数，可以得到

$$m_u = m_d = 346MeV, \quad m_s = 523MeV. \tag{6.74}$$

从这里我们可以看到，所有夸克模型中的S波粒子：赝标量介子、矢量介子、八重态和十重态重子的质量都可以用一个非常简单的组分夸克模型来解释，这是夸克模型成功的标志之一。

历史上，在SU(3)多重态理论刚提出来的时候，盖尔曼和大久保(Okubo)利用实验测量数据和对称性，在夸克模型提出之前，推导出了一些唯象质量公式，基本反映了基态强子的夸克组成。他们假设强子质量包含一个SU(3)不变的常数项和另一个与超荷Y成比例的项

$$M = a + bY, \tag{6.75}$$

显然对一个给定的SU(3)多重态，a和b是常数。由于超荷Y正比于奇异数，这个简单公式只反映了不同奇异数粒子之间的质量差异。如图 6.9所示，八重态重子中Λ和Σ重子的奇异数相同，质量却差别较大，为了解决这个问题，盖尔曼和大久保引入了第二个假设，强子质量还与同位旋算符平方值$\hat{I}^2$和超荷平方Y^2成正比，

$$M = a + bY + cI(I+1) + dY^2. \tag{6.76}$$

由于十重态重子的质量劈裂是完全正比于奇异数的，因此我们必须要求，对于十重态重子，

$$cI(I+1)+dY^2=x+yY. \tag{6.77}$$

这里x和y都是常数。把重子十重态的四个质量带入上式，消去x和y，可以推出，$d=-\frac{1}{4}c$，这样，我们就得到了盖尔曼- 大久保质量公式：

$$M=a+bY+c\left[I(I+1)-\frac{1}{4}Y^2\right]. \tag{6.78}$$

对$\frac{1}{2}^+$ 重子八重态，由上式可得

$$M_N=a+b+\frac{c}{2},\quad M_\Sigma=a+2c,\quad M_\Xi=a-b+\frac{c}{2},\quad M_\Lambda=a. \tag{6.79}$$

进而导出质量关系

$$\frac{1}{2}(M_N+M_\Xi)=\frac{3}{4}M_\Lambda+\frac{1}{4}M_\Sigma. \tag{6.80}$$

为了减小电磁质量劈裂效应的影响，沿U旋方向(见图-6.7)选择中性粒子，利用实验值($M(n)=939.6$MeV, $M(\Sigma^{+,0,-})=(1189.4,1192.6,1197.5)$MeV, $M(\Lambda)=1115.7$ MeV, $M(\Xi^{0,-})=(1314.9,1321.7)$ MeV) 得到：

$$\frac{1}{2}(M_n+M_{\Xi^0}) = 1127.3\pm0.7MeV, \tag{6.81}$$

$$\frac{3}{4}M_\Lambda+\frac{1}{4}M_{\Sigma^0} = 1134.9\pm0.2MeV, \tag{6.82}$$

两者之差为7.6 ± 0.7 MeV, (6.80)式理论和实验之间的差别比较小。

6.2.4　重子磁矩

当忽略轨道角动量时，轻味重子的磁矩$\vec{\mu}$ 就是3个价夸克磁矩$\vec{\mu}_i$ 的矢量和。若不考虑小的辐射修正，那么质量m、电荷q 且自旋为1/2的价夸克的磁偶极矩$\vec{\mu}$和其大小μ 是：

$$\vec{\mu}=\frac{q}{m}\mathbf{S},\qquad \mu_z=\frac{q}{2m}. \tag{6.83}$$

对(u,d,s)轻夸克，他们的磁矩的值分别为

$$\mu_u=\frac{2}{3}\frac{e}{2m_u},\quad \mu_d=-\frac{1}{3}\frac{e}{2m_d},\quad \mu_s=-\frac{1}{3}\frac{e}{2m_s}, \tag{6.84}$$

其中e表示电子电荷的绝对值。所以重子$\mathcal{B}$的磁矩可以写为

$$\mu_\mathcal{B}=\langle\mathcal{B}\uparrow|(\mu_{1z}+\mu_{2z}+\mu_{3z})|\mathcal{B}\uparrow\rangle=2\sum_{i=1}^{3}\langle\mathcal{B}\uparrow|(\mu_iS_{iz})|\mathcal{B}\uparrow\rangle, \tag{6.85}$$

其中$S_{iz}=\pm\frac{1}{2}$。

例6.1 取组分夸克质量为$m_u=m_d=336$ MeV，利用中子的自旋与味道波函数，计算中子的磁矩[44]。

解： 首先重子八重态的自旋波函数和味道波函数均为混合对称(6.52-6.56)。但我们可以使用ψ_{ij}^{f}和ψ_{ij}^{spin}的乘积来构造对称化的波函数，那么

$$\Psi_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\psi_{12}^{spin}\psi_{12}^{f}+\psi_{23}^{spin}\psi_{23}^{f}+\psi_{13}^{spin}\psi_{13}^{f}\right] \tag{6.86}$$

对于任意两个价夸克的交换以上波函数都是对称的。再乘上如(6.49)式所定义的反对称化颜色波函数ψ_{color}，就能得到满足自旋统计关系的中子波函数。具体展开上面中子的自旋和味道波函数(6.86)式，可以得到

$$\begin{aligned}\Psi_n &= \frac{\sqrt{2}}{3}\Big\{\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(dud-udd)+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(ddu-dud)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(ddu-udd)\Big\}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big\{ddu(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)+dud(2\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\\ &\quad+udd(2\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)\Big\}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big\{2(d\uparrow)(d\uparrow)(u\downarrow)-(d\uparrow)(d\downarrow)(u\uparrow)-(d\downarrow)(d\uparrow)(u\uparrow)+\cdots\Big\}.\end{aligned} \tag{6.87}$$

上式共有9项，写出来的是前3项。考虑该式的第1项$\frac{\sqrt{2}}{3}(d\uparrow)(d\uparrow)(u\downarrow)$，可得

$$\begin{aligned}\mu_{n,1} &= \frac{2}{9}\langle d\uparrow)(d\uparrow)(u\downarrow)|\mu_{1z}+\mu_{2z}+\mu_{3z}|d\uparrow)(d\uparrow)(u\downarrow)\rangle\\ &= \frac{2}{9}(2\mu_d-\mu_u).\end{aligned} \tag{6.88}$$

第2和第3项结果相同，均为$\mu_u/18$。全部9项结果加在一起得到中子的磁矩为

$$\mu_n=\frac{4}{3}\mu_d-\frac{1}{3}\mu_u. \tag{6.89}$$

重复上面的计算，利用质子的夸克组成uud，同理可得到质子的磁矩为

$$\mu_p=\frac{4}{3}\mu_u-\frac{1}{3}\mu_d. \tag{6.90}$$

已知$m_u=m_d=336$ MeV，经计算可得中子和质子磁偶极矩的理论值分别为

$$\mu_n=-1.86\mu_N,\quad \mu_p=2.79\mu_N, \tag{6.91}$$

其中$\mu_N=e\hbar/(2m_p)$为玻尔磁子。二者的实验测量数据为：$\mu_n=-1.913\mu_N$，$\mu_p=2.793\mu_N$。质子和中子的磁矩理论和实验结果是重子由三个夸克组成的重要证据。

6.2.5　静态SU(6)模型

对于由三种轻夸克(uds)组成的强子由李群SU(3)来描写其对称性，实验发现了重子有一个八重态(自旋1/2)、一个十重态(自旋3/2), 介子有一个自旋为0的八重态和自旋为1的八重态。组成它们的夸克或者反夸克之间的轨道角动量都为0。它们是质量最低的强子态。根据泡利不相容原理，夸克或者反夸克的自旋投影只有两种状态。

静态SU(6)的基础表示“6”是指考虑了夸克的自旋状态后共有六种夸克自由度($u\uparrow, u\downarrow, d\uparrow, d\downarrow, s\uparrow, s\downarrow$)，我们马上就可以看出，静态SU(6)里含有两个子群

1. SU(3)，对固定自旋的各种夸克(味空间)进行变换。
2. SU(2)，对固定种类的夸克的自旋进行变换。

用符号表示就是$(3,2)$。前一个数字表示味空间，后一个表示自旋空间。即表示“6”包含了一个自旋为二重态的SU(3)三重态（所有状态都有相同的宇称）。而反夸克则构成表示“$\bar{6}$”。对于由正反夸克组成的介子

$$6 \times \bar{6} = 35 + 1 \tag{6.92}$$

其中的单态是η_1，自旋和味空间都是单态，而表示“35”的分解式是

$$35 = (8,1) + (8,3) + (1,3) \tag{6.93}$$

也就是说，表示“35”含有一个零自旋的介子八重态（赝标量介子），另有一个自旋为1（三重态）的介子八重态（矢量介子），这些正是在前面遇到的两个介子八重态。此外还有一个表示(1,3)，即一个SU(3)单态的矢量介子（自旋1），就是ϕ_1。

对重子也作类似的运算，可得：

$$6 \times 6 \times 6 = 20_A + 56_S + 70_M + 70_M \tag{6.94}$$

其中的表示“56_S”是味道和自旋的全对称态，含有以下内容：

$$56 = (8,2) + (10,4)$$

即一个自旋1/2的SU(3)八重态和自旋3/2的SU(3)十重态，这是之前讨论过的重子基态的全部内容。这个结论通过式(6.94) 的SU(6)群表示很容易看出，味道和自旋波函数的表示中只有“56_S”表示是全对称的，乘以S波轨道角动量的全对称波函数和颜色SU(3) 的全反对称表示才能满足全同性原理（泡利不相容原理）；另外的“20”、“70”维表示都不满足，因而只能靠轨道角动量激发态波函数的对称性来一起组成满足全同性原理的波函数。

在(6.30)式中的味单态“1”是味空间SU(3)的全反对称态：

$$dsu + uds + sud - usd - sdu - dus \tag{6.95}$$

对任意两个夸克的变换，波函数都会变号。而所有重子的颜色空间波函数也是全反对称态，合起来的波函数是对称的，三个夸克的总自旋1/2的波函数是混合对称的，总自旋3/2的波函数是全对称的，如果没有轨道角动量，总波函数不可能是全反对称的，因而不可能存在这样的物理态。因此，味道SU(3)单态的$\Lambda(1405)$ 和式(6.94)中的20_A表示和70_M表示的重子态都是轨道激发态，都不存在S 波的态。

上面的讨论中，重子谱的轨道角动量基态(S波)“56”维表示和介子谱的“1”、“35”总共三个表示就包含了经典强子态(S波)的全部粒子，这是经过实验检验的，但是对于激发态情况则是非常复杂，对于介子激发态，我们后面在6.5.1节会指出，实验发现的共振态的数量多于夸克模型的预言数量，给介子类的奇特态很大的自由度。但是重子的情况则是相反的，由于目前的加速器实验中重子的产率远小于介子，实验发现的重子激发态的数量小于理论预言的共振态数量，以至于很难填满这里给出的SU(6) 群的表示。

6.3 重夸克偶素

1964-1974年，3味轻夸克u, d, s所能构成的很多介子和重子被实验发现，夸克模型逐渐被物理学家接受并成为一个成功的物理理论。在1970年代初对K介子衰变过程的研究中，人们发现奇异数改变的弱中性流是不存在的。我们将在第八 章讨论，Glashow，lliopoulos和Maiani提出的一个被称为GIM 机制的方案[120]，这个方案引入了第四味夸克，称为粲夸克（charm），并预言粲夸克的质量应为1.5 GeV左右。由正负电子组成的束缚态被称为电子偶素，由一对正反夸克作为价粒子的介子则称为夸克偶素，例如ϕ介子就是由正反s 夸克组成的夸克偶素，由正反粲夸克组成的介子因而被称为粲夸克偶素；由于粲夸克质量很重，也跟底夸克偶素一起被分类为重夸克偶素。

6.3.1 粲夸克偶素

1974年11月，丁肇中领导的14人实验组在美国布鲁克海文国家实验室30GeV的加速器上，通过测量高能质子打击铍靶所产生的e^+e^-对不变质量谱，

$$p + Be \to J + X \to (e^+ + e^-) + X. \tag{6.96}$$

利用大型精密双臂谱仪，观察所产生的e^+e^-对的不变质量谱分布，来判断是否存在共振态粒子：

$$M^2_{e^+e^-} = 2m_e^2 + 2\left[E_1E_2 - p_1p_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\right]. \tag{6.97}$$

如图-6.10左图所示，在不变质量分布曲线上实验发现了一个质量为3.1 GeV，宽度接近0的粒子，命名为J粒子。同时，伯顿·里克特等人在斯坦福国家实验室直线加速器中心的正负电子对撞实验SPEAR上，利用磁探测器（MARK-I）测量e^+e^-对撞的截面，如图-6.10右图所示，发现在同一个位置的强子末态(a)、正负电子末态(b)和缪子对末态(c) 中反应截面

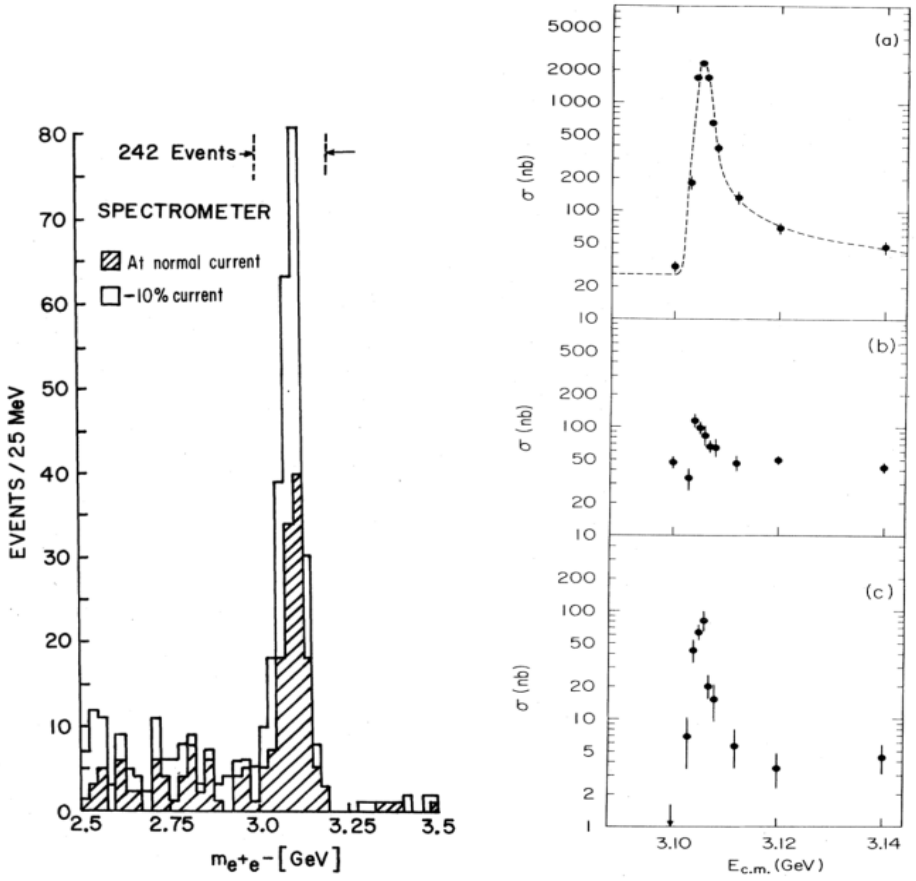


图 6.10: 丁肇中实验组在正负电子对不变质量谱测到的J/ψ事例（左图）[121]。右侧图是Richter 实验组在SPEAR实验上测得的e^+e^-对撞截面的质心系能量分布，从上到下分别是强子末态(a)、正负电子末态(b)和缪子对末态(c)[121]。

都有一个共振峰结构，但他们称之为ψ 粒子。两个实验组同时投稿美国“物理评论快报”，收稿日期分别为11月12 号和13 号，仅差一天。随后意大利Frascadi实验室，在知道美国布鲁克海文国家实验室的发现消息后，立即提高了其安东尼加速器的能量，测量了J粒子的性质，并在11 月18 日寄出初步结果。“物理评论快报”按照特殊政策没有审稿，在12月2号同时刊登了这三篇文章[121, 122]，宣布发现粲夸克偶素：J/ψ 粒子。

J/ψ是矢量介子，被解释为$c\bar{c}$的束缚态-粲偶素（Charmonium）。J/ψ的发现对粲夸克的存在给出了直接的实验证据，进一步夯实了夸克模型的实验基础，使强子结构理论的研究进入新的研究阶段。这一出乎意料的实验发现和其在粒子物理学上的重要意义立即轰动了物理界，被称之为“十一月革命”！由于这一工作，丁肇中和里克特教授共同获得了1976年的诺贝尔物理奖。

J/ψ粒子的主要性质：

$$I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--}), \qquad \Gamma_{J/\psi} = (92.9 \pm 2.8)\text{keV},$$
$$m_{J/\Psi} = (3096.900 \pm 0.006)\text{MeV}, \qquad \Gamma_{ee} = (5.53 \pm 0.10)\text{keV}. \tag{6.98}$$

J/ψ粒子的一个显著特点就是衰变宽度很窄，远小于其它矢量共振态的衰变宽度： 例如ρ, ω和ϕ介子的宽度都是MeV的量级。但是，J/ψ的轻子衰变宽度和ρ, ω和ϕ介子的轻子衰变宽度的差别不大，都是keV的量级

$$\begin{aligned}\Gamma(\rho \to e^+e^-) &= 7.04(6)\text{keV}, \quad \Gamma(\omega \to e^+e^-) = 0.60(2)\text{keV},\\ \Gamma(\phi \to e^+e^-) &= 1.26(4)\text{keV}.\end{aligned} \tag{6.99}$$

也就是说，J/ψ的电磁衰变过程和其他轻味介子的电磁衰变类似，没有发生异常，出现异常的应该是强衰变。

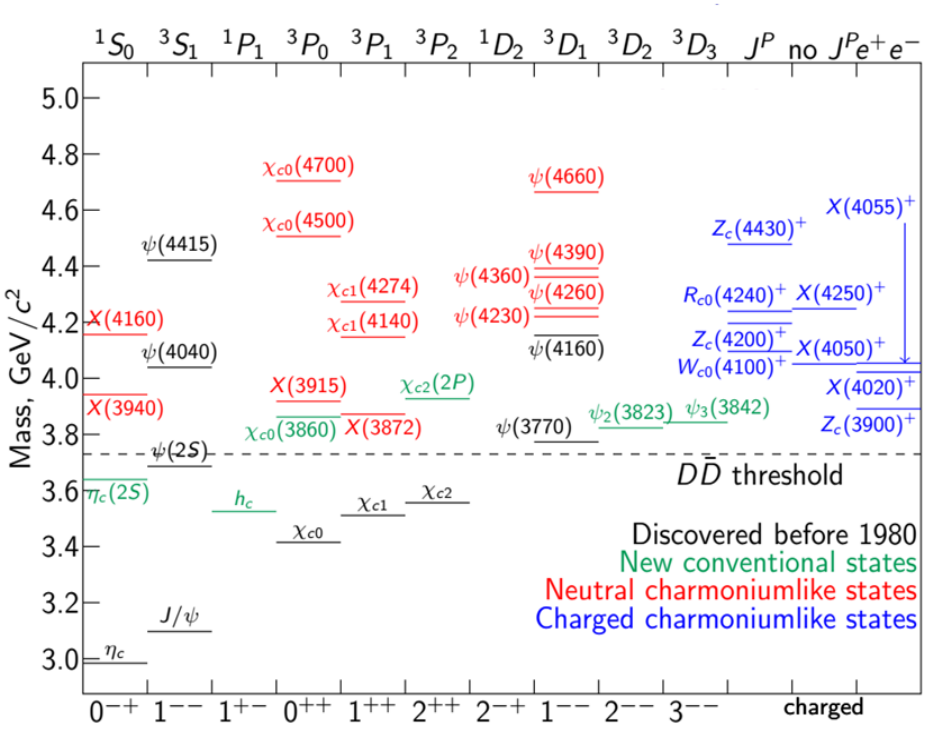


图 6.11: 粲偶素谱示意图[1]。

J/ψ及相近粒子谱：

与电子-正电子偶素$\bar{e}e$的能级结构非常类似，粲偶素的不同状态可以用主量子数n和总角动量量子数J、轨道角动量L、总自旋S来表示：记为$^{2S+1}L_J$，最早发现的J/ψ粒子是$^3S_1$态。根据上一章的讨论我们知道，粲偶素的宇称和电荷共轭分别为:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(c\bar{c})(-1)^L = (-1)^{L+1}, \qquad C = (-1)^{L+S}. \tag{6.100}$$

到2020年，如图-6.11所示，人们在实验上已经观察到众多粲偶素的径向激发态、角动量激发态等高激发态，这其中也包括很难用传统夸克模型解释的类粲偶素的奇特态，有的甚至是带电荷的类粲偶素共振态，我们将在6.5.2节详细讨论它们的具体性质。按照量子力学，类似于氢原子，高激发态会放出光子跃迁到较低的态，在图-6.12，我们给出了几个主要

粲偶素衰变的跃迁能级图和电磁衰变道。每一个状态线条的宽度与该状态粒子的衰变宽度成正比。**在前面已经提到，人们引入粲量子数“C”来描写第四味粲夸克。** 在强相互作用中，粲数C是守恒的。在弱相互作用中，粲数是不守恒的，但存在选择定则$\Delta C = 1$。考虑粲夸克之后，盖尔曼- 西岛关系式也改写为：$Q = I_3 + \frac{1}{2}(b + S + C)$。

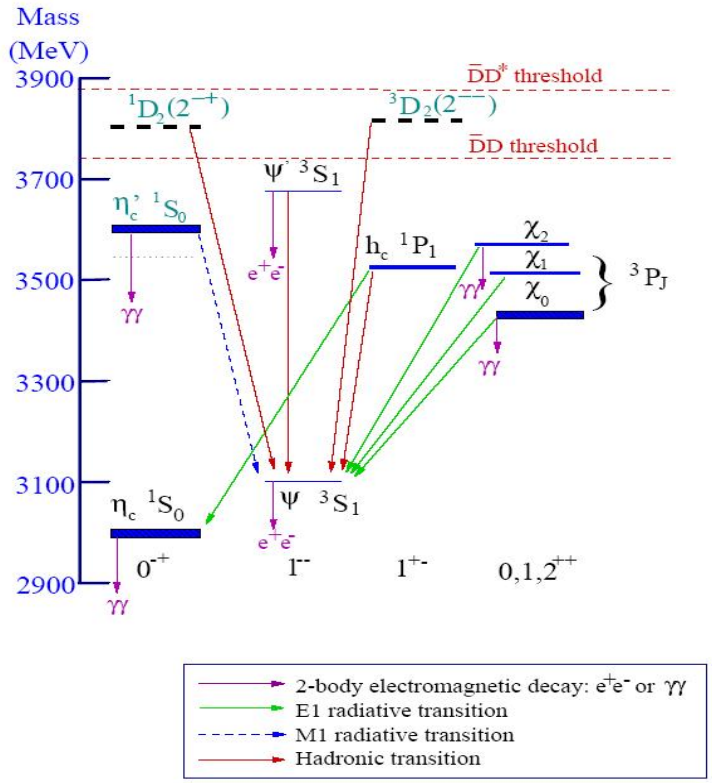


图 6.12: 几个主要粲偶素衰变的能级示意图。

粲夸克是人们发现的第一个重味夸克，其形成的矢量束缚态J/ψ也具有独特的产生截面高、共振峰非常窄、实验信噪比高的特点。从其发现开始就是物理学家研究的重点。北京中科院高能物理研究所的正负电子对撞机从1988年10月建成，1994-1996 对探测器进行了升级改造，2004-2008对加速器和探测器一起升级改造，30多年期间一直在J/ψ能区进行物理研究，积累了世界上最多的J/ψ共振事例。实验由17个国家的80多所大学和研究机构的500位科学家共同合作，取得了非常多重要的研究成功，在世界上引领了这个能区的物理研究。

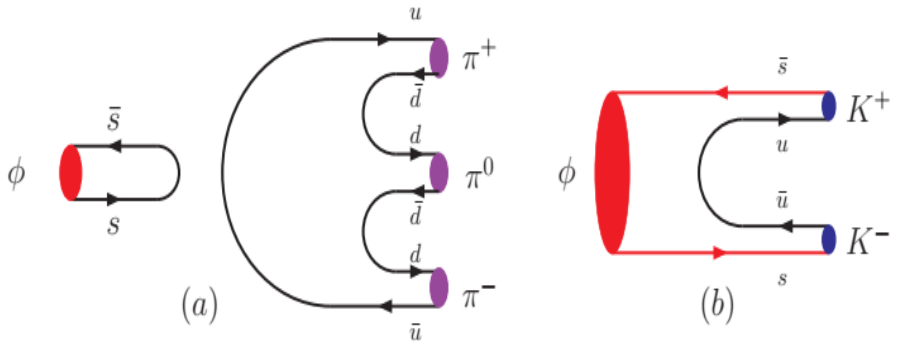


图 6.13: ϕ 介子的主要衰变道: (a) 被强烈压低的湮灭衰变道，图中的初末态价夸克分处不相连的两部分; (b) OZI 规则允许的直接衰变道。

6.3.2 OZI规则

60年代在研究短寿命介子时遇到了一个不好理解的问题。当时发现的ω介子和ϕ介子的量子数完全相同，都是$J^{PC}=1^{--}$，$I^G=0^-$。他们的质量和宽度分别为

$$m_\omega=(782.0\pm0.1)MeV,\qquad \Gamma_\omega=(8.5\pm0.1)MeV, \tag{6.101}$$

$$m_\phi=(1019.41\pm0.01)MeV,\qquad \Gamma_\phi=(4.41\pm0.05)MeV. \tag{6.102}$$

既然ω介子和ϕ介子的量子数相同，它们的衰变性质应该相同。我们预测这两个粒子有非常类似的强相互作用性质。考虑到ω介子的质量比ϕ介子要轻，对任一给定的衰变道来说，ω介子的相空间比ϕ介子的相空间要小。如果没有动力学机制上的特别差异，相应的衰变宽度也应比ϕ介子的要小。再考虑到由于ω介子质量较低，有些衰变道只有ϕ介子才有(例如衰变到$K\bar{K}$)，可以期望ω介子的衰变宽度应比ϕ介子的衰变宽度要窄。然而实验给出ω介子的衰变宽度却比ϕ介子的宽度要宽一倍，与一般估计不一致。这个问题特别集中反映在$\pi^+\pi^-\pi^0$衰变道上。$\pi^+\pi^-\pi^0$是ω介子的主要衰变道，其分宽度为7.6MeV。尽管ϕ介子这个道的相空间比ω介子相应的相空间要大，ϕ介子这个道的分宽度仅0.57MeV，比ω介子的分宽度小一个数量级。按照夸克模型，ω介子是u 态和d 态的叠加态，ϕ介子是$s\bar{s}$态。则当ω介子衰变时，ω介子中的原有的价夸克和价反夸克都转化为末态组成粒子的价粒子，但ϕ介子中原有的价夸克和价反夸克都不能转化为末态组成粒子的价粒子，而必需如图6.13(a)所示湮灭掉。组成末态介子的价夸克则需要通过高阶QCD和电弱修正贡献另行成对产生出来，因此ϕ 介子到$\pi^+\pi^-\pi^0$道的衰变远比ω介子到相同末态的衰变困难就是可以理解的了。

Okubo、Zweig和Iizuka三人据此总结出了一个经验规则(OZI规则)[103, 119]: **在强子反应过程中，如果价夸克的费曼图被断成互不相联的两部分，则该过程的反应几率被大大压低** 。根据该规则反应几率被压低的过程称为OZI禁戒过程。

如图-6.13所示，由于ϕ主要是$\bar{s}s$ 态，它到3π的衰变只能通过湮灭图6.13(a)进行，所以被强烈压低。它到$K\bar{K}$的衰变不必通过湮灭图，可以通过图6.13(b)直接产生，所以没

有压低。尽管$\phi \to KK$ 衰变的相空间只有大约30MeV($m_\phi - 2m_K \approx 30$ MeV)，远远小于$\phi \to 3\pi$衰变的相空间($m_\phi - 3m_\pi \approx 630$ MeV)，但$\phi \to KK$ 衰变仍然是ϕ介子最主要的衰变道，分支比达到83%。

在(6.98)式的实验测量结果中J/ψ粒子宽度非常窄；另外，其径向激发态$\psi' = \psi(2S)$的衰变宽度也很窄，

$$\Gamma(\psi') = 294(8)\ \text{keV}, \qquad m_{\psi'} = 3686.10(6)\ \text{MeV}. \tag{6.103}$$

有了OZI规则之后，我们就可以理解这两个粲偶素介子的窄宽度原因。按照夸克模型，所有的J/ψ粒子都是$c\bar{c}$束缚态。D介子是带一个c夸克的介子, 例如$D^+ = (c\bar{d})$。因为最轻的D介子的质量是1870 MeV，所以，J/ψ, $\psi'(2s)$质量均小于$2m_D$，不能衰变到两个D介子，只能通过强湮灭（图6.14）过程衰变到由轻夸克(u,d,s)构成的轻味介子，根据上一节的OZI规则，这些湮灭道是被强烈压低的，因此这两个介子的衰变宽度很窄。

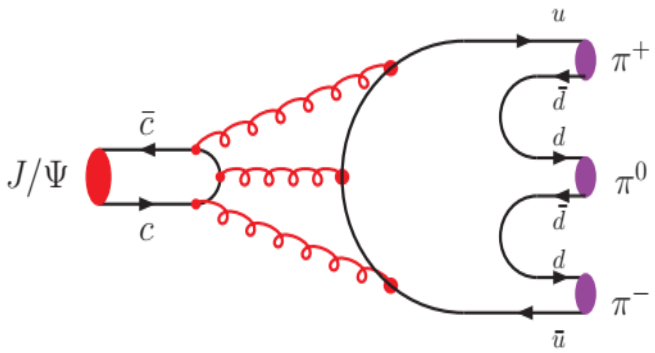


图 6.14:　通过3胶子交换实现的$J/\psi \to 3\pi$ 湮灭道产生过程。

ψ''或其它的ψ高激发态的质量则大于$2m_D$. 介子中的原有的价夸克c和价反夸克$\bar{c}$都可以直接转化为末态粒子的价夸克，即通过类似图-6.13(b)所示的衰变道衰变到$D\bar{D}$对。从图6.14可以看出，经湮灭道衰变的价夸克费曼图实际上断成两个互不相联的部分，需要由至少三个胶子来连接两个部分。通过图-6.13(b)衰变的价粒子费曼图是一个整体，初态粒子的价夸克c和$\bar{c}$也是末态D介子的价夸克。因此ψ''或其它的ψ高激发态的宽度都大于25MeV，比J/ψ和ψ'的衰变宽度大两个量级。例如

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\psi(3770)) = (27.2 \pm 1.0)\ \text{MeV}, \quad && m_{\psi(3770)} = (3773.7 \pm 0.4)\ \text{MeV},\\
&\Gamma(\psi(4160)) = (70 \pm 10)\ \text{MeV}, && m_{\psi(4160)} = (4191 \pm 5)\ \text{MeV},\\
&\Gamma(\psi(4360)) = (96 \pm 7)\ \text{MeV}, && m_{\psi(4360)} = (4368 \pm 13)\ \text{MeV},\\
&\Gamma(\psi(4415)) = (62 \pm 20)\ \text{MeV}, && m_{\psi(4415)} = (4421 \pm 4)\ \text{MeV}.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

这些高激发态和其它强子（ρ, ω等）的衰变宽度相当。

量子色动力学的解释：　胶子是带颜色的，而介子是没有颜色的，因此单个胶子不能连接湮灭图。而由于C 宇称守恒的限制，矢量介子不能衰变到两个自旋为1的规范粒子、

例如两个光子或者两个胶子。 因而如图-6.14所示，只能通过至少三个胶子衰变。这样，领头阶的贡献已经是QCD的高阶图了，$\propto \alpha_s^3$ 量级的压低效应明显。

考虑$\eta_c(2980)$介子。该粒子的量子数为$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$，是赝标量介子。其质量为$m(\eta_c) = 2983.9 \pm 0.5$ MeV。$\eta_c(2980)$ 介子质量比J/ψ 粒子还低，因而也不能衰变到两个D介子。也是OZI禁戒的过程。但它的衰变宽度是$\Gamma(\eta_c) = (32.0 \pm 0.7)$ MeV，虽然没有达到100 多MeV的量级，却比J/ψ的宽度大得多。原因就是，η_c是赝标量介子，它能衰变到两个胶子，也就是说可以通过交换两个胶子衰变到其他轻强子态。两胶子道的压低效应就比三胶子交换衰变的压低效应弱。

同样地，$\chi_{c0}(3415) \to 3\pi$也是OZI压低的过程。由于是标量介子$[0^+(0^{++})]$，可以通过两个胶子衰变，$\Gamma = (10.8 \pm 0.6)$ MeV，所以压低的也没有J/ψ厉害。$\chi_{c1}(3511) \to 3\pi$也是OZI禁戒的过程，由于是轴矢量介子$[0^+(1^{++})]$，只能通过三个胶子衰变，$\Gamma = (0.84 \pm 0.04)$ MeV。虽然其质量比$\chi_{c0}(3415)$重100MeV，但其衰变宽度却比前者低一个量级。OZI规则最早是在ϕ和ω介子到$\pi^+\pi^-\pi^0$道的衰变中通过实验总结出来的，现在却得到了量子色动力学理论和夸克模型的很好解释，而且在许多衰变过程中都成立。在现已发现的不稳定粒子中，有十几种粒子的强衰变都是OZI禁戒过程。

6.3.3 底夸克偶素

1977年，由莱德曼领导的费米实验室E288实验组在400GeV质子-原子核对撞实验中发现了由一对正反底夸克构成的窄宽度的$b\bar{b}$强子束缚态，命名为Υ粒子$[0^-(1^{--})]$ [123]。前3个Υ共振态的主要性质如下：

$$\begin{aligned}
&\Upsilon(1S): \quad m = 9.46030(26)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = 54.02(1.25)\ \text{keV}, \quad \Gamma_{ee} = 1.340(18)\ \text{keV},\\
&\Upsilon(2S): \quad m = 10.02326(31)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = 31.98(2.63)\ \text{keV}, \quad \Gamma_{ee} = 0.612(11)\ \text{keV},\\
&\Upsilon(3S): \quad m = 10.3552(5)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = 20.32(1.85)\ \text{keV}, \quad \Gamma_{ee} = 0.443(8)\ \text{keV}, \qquad (6.105)
\end{aligned}$$

这3个底偶素$\Upsilon(1S, 2S, 3S)$是衰变宽度很窄(keV)的共振态。底夸克的质量约为4.6GeV左右，含底夸克b的最轻的粒子是$I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$的赝标介子$B^+ = (u\bar{b})$和$B^0 = d\bar{b}$：

$$\begin{aligned}
m(B^+) = 5279.34(12)\ \text{MeV}, \quad \tau(B^+) = 1.638(4) \times 10^{-12} s,\\
m(B^0) = 5279.65(12)\ \text{MeV}, \quad \tau(B^+) = 1.519(4) \times 10^{-12} s. \qquad (6.106)
\end{aligned}$$

因为$\Upsilon(1S)$–$\Upsilon(3S)$介子的质量小于$2m_B$，不可能衰变为一对正反B 介子。这样，前3个Υ共振态的B介子末态衰变道就不可能打开，所以它们只能通过湮灭道做强衰变，都是OZI禁戒过程而受到压低，分支比最大的衰变道也跟二级电磁衰变的$l^+l^-(l = e, \mu, \tau)$道同一量级。因此前3个Υ底偶素介子的衰变宽度很窄，均在keV量级，和粲偶素J/ψ类似，表现出明显的“重质量，窄宽度”性质。

在图 6.15中，我们给出了B介子工厂能量范围的$e^+e^- \to b\bar{b}$的反应截面示意图。可以看出，$\Upsilon(3S)$ 共振态的窄宽度在图中只能显示为一条竖线；而$\Upsilon(4S)$、$\Upsilon(5S)$和$\Upsilon(6S)$三个

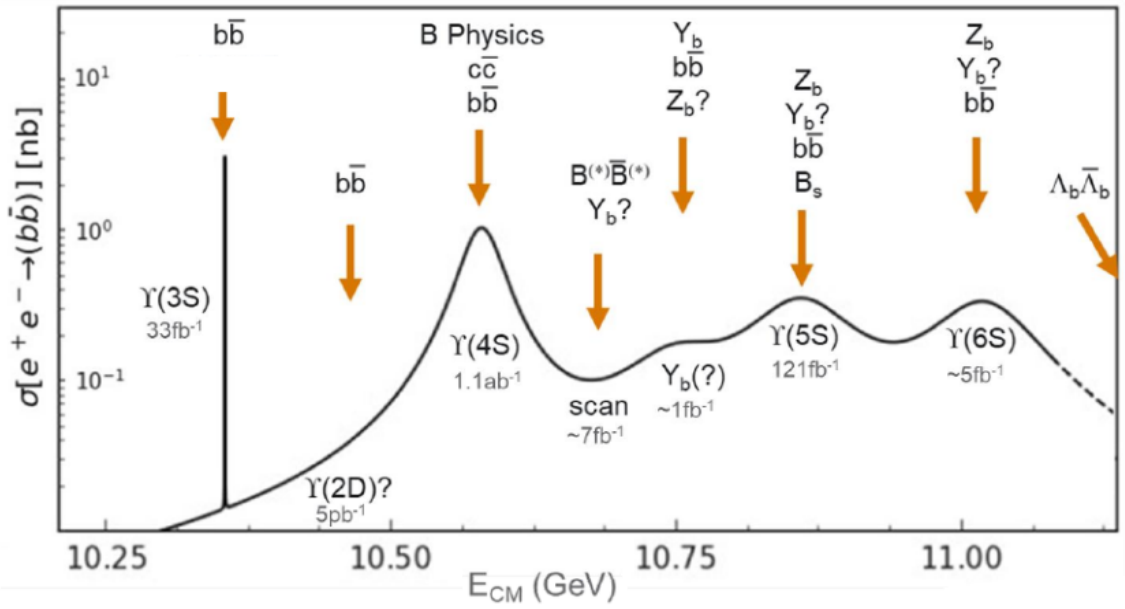


图 6.15:　在B介子工厂能量范围的$e^+e^- \to b\bar{b}$过程中产生的$\Upsilon(NS)$ $(N = 3, 4, 5, 6)$共振态示意图。$\Upsilon(1S, 2S)$ 在更左侧没有显示。

共振态则有明显的宽度

$$\begin{aligned}
\Upsilon(4S): &\quad m = 10.5794(12)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = (20.5 \pm 2.5)\ \text{MeV}, \\
\Upsilon(5S): &\quad m = 10.8852(21)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = (37 \pm 4)\ \text{MeV}, \\
\Upsilon(6S): &\quad m = 11.000(4)\ \text{GeV}, \quad \Gamma = (24 \pm 7)\ \text{MeV}.
\end{aligned} \tag{6.107}$$

显然，这些Υ 高激发态的质量均在$B\bar{B}$质量阈值之上，可以衰变到两个B介子，因而具有很大的衰变宽度。　从图 6.15可以看出，$\Upsilon(4S)$的产生截面是最高的，达到了ab^{-1}的量级，其质量恰好在$B\bar{B}$的质量阈值上，因而两个B介子工厂以及后来的超级B介子工厂主要在这个能量点上工作，积累了大量的$B\bar{B}$ 事例数。另外，由于$\Upsilon(5S)$的质量在$B_s\bar{B}_s$ 对质量阈值之上，可以衰变到B_s 介子对；B介子工厂实验也选择在$\Upsilon(5S)$的质量阈值附近运行，以产生大量的$B_s\bar{B}_s$对事例，研究B_s介子的衰变性质[30–32]。

底夸克偶素除了1^{--}的Υ之外，还有0^{-+}同样是OZI规则压低的窄宽度的基态η_b、轨道角动量激发态$\chi_{b0}(0^{++})$、$\chi_{b1}(1^{++})$、$\chi_{b2}(2^{++})$、$h_b(1^{+-})$以及这些粒子的径向激发态；其中已经被实验发现的粒子和量子数列在表 6.6的第六列。

量子力学给出，通过散射所能分辨的空间间隔与散射时的动量成反比，即低能散射时分辨间隔大，高能散射时分辨间隔小。低能散射时，由于分辨间隔大，分辨率低，对于强子内部结构不可能观察得很细致，只能看到强子作为一个整体。在高能散射时，由于分辨间隔小，分辨率高，对于强子内部结构就可以观察得很细致，看到内部结构的具体细节。

J/ψ粒子和Υ粒子是质量很重的粒子，研究它们的结构性质时所涉及的散射过程能量动量变化尺度是GeV量级，这对应于分辨间隔小于0.2fm，因此人们可以对J/ψ粒子和Υ粒

表 6.6: 含有1-2个重c,b夸克的$q\bar{q}'$重介子谱[1]。

$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	I=0 $c\bar{c}$	I=$\frac{1}{2}$ $c\bar{u},c\bar{d},\cdots$	I=0 $c\bar{s},\bar{c}s$	I=0 $b\bar{b}$	I=$\frac{1}{2}$ $b\bar{u},b\bar{d},\cdots$	I=0 $b\bar{s},b\bar{c},\cdots$
1^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(1S)$	D	$D_s^{\pm}$	$\eta_b(1S)$	B	$B_s^0,B_c^{\pm}$
1^3S_1	1^{--}	J/ψ	D^*	$D_s^{*\pm}$	$\Upsilon(1S)$	B^*	B_s^*
1^1P_1	1^{+-}	$h_c(1P)$	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)^{\pm}$	$h_b(1P)$	$B_1(5721)$	$B_{s1}(5830)^0$
1^3P_0	0^{++}	$\chi_{c0}(1P)$	$D_0^*(2300)$	$D_{s0}(2317)^{*\pm}$	$\chi_{b0}(1P)$		
1^3P_1	1^{++}	$\chi_{c1}(1P)$	$D_1(2430)$	$D_{s1}(2460)^{\pm}$	$\chi_{b1}(1P)$		
1^3P_2	2^{++}	$\chi_{c2}(1P)$	$D_2^*(2460)$	$D_{s2}^*(2573)^{\pm}$	$\chi_{b2}(1P)$	$B_2^*(5747)$	$B_{s2}^*(5840)^0$
2^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(2S)$	$D(2550)$		$\eta_b(2S)$		$B_c(2S)^{\pm}$
2^3S_1	1^{--}	$\psi(2S)$		$D_{s1}^*(2700)^{\pm}$	$\Upsilon(2S)$		$B_c^*(2S)^{\pm}$
1^3D_1	1^{--}	$\psi(3770)$		$D_{s1}^*(2860)^{\pm}$			
1^3D_2	2^{--}	$\psi_2(3823)$			$\Upsilon_2(1D)$		
2^3P_J	$0,1^{++}$	$\chi_{c0}(3860)$			$\chi_{b0,1}(2P)$		
	2^{++}	$\chi_{c2}(3930)$			$\chi_{b2}(2P)$		
2^1P_1	1^{+-}				$h_b(2P)$		
3^3S_1	1^{--}	$\psi(4040)$			$\Upsilon(3S)$		
3^3P_J	$0,1,2^{++}$				$\chi_{b1,2}(3P)$		
2^3D_1	1^{--}	$\psi(4160)$					
4^3S_1	1^{--}	$\psi(4415)$			$\Upsilon(4S)$		
1^3D_3	3^{--}		$D_3^*(2750)$	$D_{s3}^*(2860)^{\pm}$			

子的内部结构进行比轻介子细致得多的实验研究。另一方面，由于粲夸克和底夸克很重，它们和相应的反夸克组成$J/\psi,\Upsilon$介子时可以近似地按非相对论性运动来处理。这在理论处理上大大简化，并能得到足够好的精确度，只有在精确讨论某些特殊性质时，才需要进一步考虑相对论性的修正。考虑到上述实验和理论两方面的因素，尽管重夸克偶素发现得较晚，对它们内部结构性质的研究要比对轻介子内部结构性质的研究细致深入得多。

6.4 重味强子

在本节，我们主要介绍包含了c、b价夸克的粲介子和粲重子，b介子和b重子。对于带有奇异数S、粲数C或者底数B的介子，由于这些量子数的正负号定义是有任意性的，我们约定夸克的奇异数、粲数或者底数和其电荷有相同的符号：s夸克的电荷为负，所以其奇异数也为负。c夸克的电荷为正，其粲数也为正。底夸克（b）的底数相应地为负。因而，带电的介子的味道符号，和它的电荷符号一致。例如，K^+，D^+，B^+的奇异数、粲数和底数分别都是正的。而且，他们的同位旋第三分量也是正的。例如$D_s^+(c\bar{s})$的电荷、奇异数和粲数都是正的；$B_c^+(\bar{b}c)$的电荷、底数和粲数都是正的，而其反粒子的这几种量子数则都是负的。

在实验上已经发现了很多重介子多重态，在表-6.6中，我们列出了夸克模型下的含有1-2个粲夸克或者底夸克，并且已经在实验上看到的重介子，其中的重夸克偶素介子的

基本性质已经在上节讨论过。

6.4.1　粲味介子

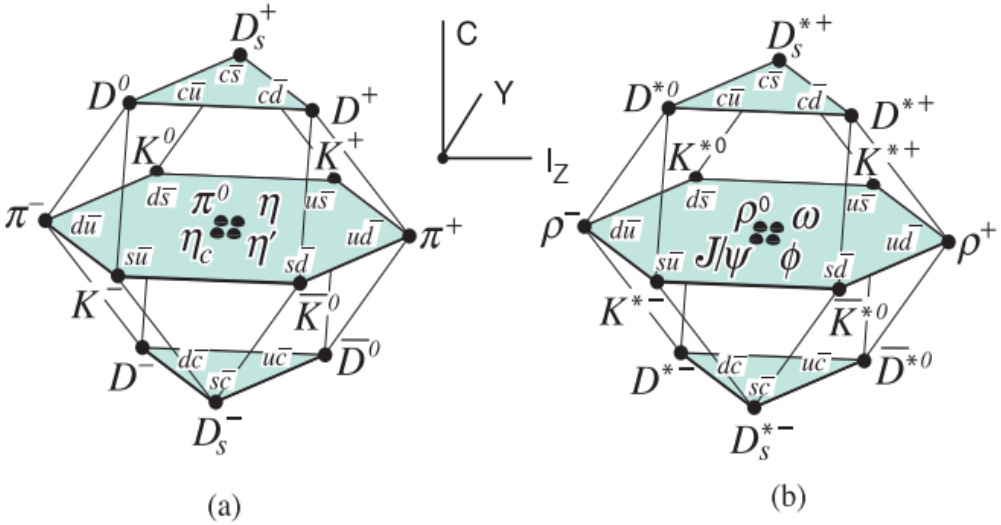


图 6.16:　由4味夸克(u,d,s,c)构成的16重态$SU(4)$权图：(a) 0^-赝标量介子；(b) 1^-矢量介子。三个坐标轴分别表示粒子的同位旋第三分量“I_3”, 超荷“Y”与粲数“C”。

我们已经知道(u,d,s) 夸克在味空间SU(3)的对称性。如果我们考虑4味夸克(u,d,s,c)，那么将有SU(4)的味道空间对称性。这4味夸克构造的$4\times4=16$个$q\bar{q}'$基态介子将组成一个SU(4)群的1维表示和15维表示，可以用如图-6.16所示的三维立体图表示。在图-6.16出现的含粲赝标量介子的基本性质为[1]:

$$\begin{aligned}
D^+=c\bar{d}:&\quad m(D^+)=1869.65(5)\ \text{MeV},\quad \tau(D^+)=1.040(7)\ \text{ps},\\
D^0=c\bar{u}:&\quad m(D^0)=1864.83(5)\ \text{MeV},\quad \tau(D^0)=0.4101(15)\ \text{ps},\\
D_s^+=c\bar{s}:&\quad m(D_s^+)=1968.34(7)\ \text{MeV},\quad \tau(D_s^+)=0.504(4)\ \text{ps},
\end{aligned}\tag{6.108}$$

这些赝标D和D_s介子是质量最轻的带粲数的粒子，由于强作用要求粲数守恒，因而没有强衰变，弱衰变粒子寿命较长，在皮秒量级。他们的主要衰变道是通过弱相互作用$\Delta C=1$的强子衰变道、半轻和纯轻子衰变道，例如

$$\begin{aligned}
D^+\to&\quad \bar{K}^0e^+\nu_e\quad 8.73(10)\%;\\
\to&\quad K_L^0\pi^+,\quad 1.46(5)\%;
\end{aligned}\tag{6.109}$$

$$\begin{aligned}
D^0\to&\quad K^-e^+\nu_e\quad 3.542(35)\%;\\
\to&\quad K^-\pi^+,\quad 3.950(31)\%;
\end{aligned}\tag{6.110}$$

$$\begin{aligned} D_s^+ \to & \quad \phi e^+\nu_e \quad 2.39(16)\%; \\ \to & \quad K^+K_L, \quad 1.49(6)\%. \end{aligned} \tag{6.111}$$

实验上没有发现$\Delta S=1$, $\Delta C=0$的$D_s^+ \to D^0\pi^+$衰变，也就是夸克层次$\bar{s} \to \bar{u}u\bar{d}$ 的衰变，重夸克c为旁观者。这种衰变原则上应该是可以发生的，没有发生的原因是质量阈值限制：$\delta m = m_{D_s^+} - m_{D^0} \approx 104$ MeV，小于$m_\pi = 140$ MeV。

在图-6.16(b)出现的含粲矢量介子的基本性质为[1]，

$$\begin{aligned} D^{*+}: & \quad m = 2010.26(5) \text{ MeV}, \quad \Gamma = (83.4 \pm 1.8) \text{ keV}, \\ D^{*0}: & \quad m = 2006.85(5) \text{ MeV}, \quad \Gamma < 2.1 \text{ MeV}, \\ D_s^{*+}: & \quad m = 2112.2(4) \text{ MeV}, \quad \Gamma < 1.9 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{6.112}$$

这些矢量介子有强相互作用衰变过程$D^* \to D\pi$，但相空间很小：只有1-2MeV。所以其衰变宽度也仅为keV的量级。它们的主要衰变道也包括电磁衰变过程$D^* \to D\gamma$。以$D^*(2110)^+$为例，其三个主要衰变道的分支比分别为

$$Br(D^{*+} \to D^0\pi^+) = 67.7(5)\%; \tag{6.113}$$

$$Br(D^{*+} \to D^+\pi^0) = 30.7(5)\%; \tag{6.114}$$

$$Br(D^{*+} \to D^+\gamma) = 1.6(4)\%. \tag{6.115}$$

更高质量的重味介子激发态，包括轨道激发态和径向激发态也有很多已经在实验上被观测到，并测量了其量子数J^{PC}。在表-6.6 中，我们列出了夸克模型下的含有1-2 个重粲夸克的部分介子谱，它们由于质量比较高，可以通过强相互作用衰变到较低的D、D_S等粒子。

6.4.2 粲味重子

由(u,d,s,c)四种夸克组成的重子相应地有SU(4)的味道空间对称性。根据$SU(4)$群的三个基础表示“4”的直乘分解得到的不可约表示为

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 20_S \oplus 20_{MA} \oplus 20_{MS} \oplus \bar{4}_A \tag{6.116}$$

与$\frac{1}{2}^+$的SU(3)的八重态对应的SU(4)混合对称的二十重态如图-6.17(a)所示。与自旋$\frac{3}{2}^+$的SU(3) 十重态对应的SU(4)全对称表示的二十重态如图-6.17(b)所示。带粲味道的重子名字完全用原来的SU(3)多重态的规则，把其中的一个s夸克换成c夸克，相应的重子符号不变，只是增加一个下标c来表示，例如$\Lambda(uds) \to \Lambda_c^+(udc)$；对应于$\Sigma^+$, Σ^0，Σ^-，有粲数$C=+1$的$\Sigma_c^{++}(uuc)$，$\Sigma_c^+(udc)$，$\Sigma_c^0(ddc)$ 三重态。

1. 基态单粲重子

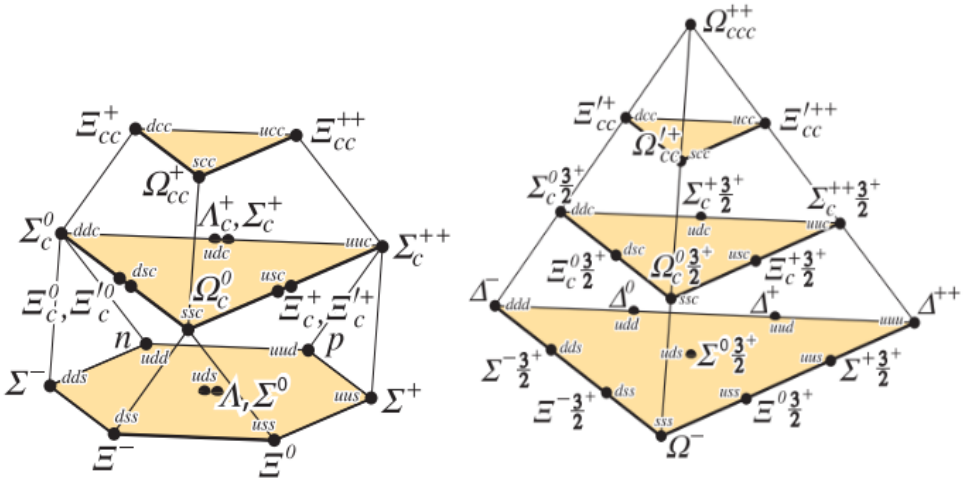


图 6.17:　由4味夸克(u,d,s,c)构成的$SU(4)$多重态重子。(a) 包含一个SU(3) 八重态重子的20重态。(b) 包含一个SU(3)十重态重子的20重态。

图-6.17(a)所示的9个自旋1/2的含单个粲夸克的重子已经被实验全部找到，其夸克组成、质量和寿命分别为：

$$\Lambda_c^+(udc): \quad m=2286.46(14)\ \text{MeV}, \quad \tau=2.024(31)\times10^{-17}s, \tag{6.117}$$

$$\Omega_c^0(ssc): \quad m=(2695.2\pm1.7)\ \text{MeV}, \quad \tau=2.68(26)\times10^{-17}s; \tag{6.118}$$

以上两粒子都是同位旋单态；两个同位旋二重态表示则包括

$$\begin{aligned}
\Xi_c^+(usc): &\quad m=(2467.94^{+0.17}_{-0.20})\ \text{MeV}, \quad \tau=4.56(5)\times10^{-17}s,\\
\Xi_c^0(dsc): &\quad m=(2470.90^{+0.22}_{-0.29})\ \text{MeV}, \quad \tau=1.53(6)\times10^{-17}s,
\end{aligned} \tag{6.119}$$

$$\begin{aligned}
\Xi_c^{\prime+}(usc): &\quad m(\Xi_c^{\prime+})=2578.4(5)\ \text{MeV}, \quad \to\Xi_c^+\gamma(seen),\\
\Xi_c^{\prime0}(dsc): &\quad m(\Xi_c^{\prime0})=2579.2(5)\ \text{MeV}, \quad \to\Xi_c^0\gamma(seen);
\end{aligned} \tag{6.120}$$

这些粲重子没有强相互作用衰变道，寿命在$10^{-17}s$量级。另外一组同位旋三重态为

$$\Sigma_c(2455)^{++}(uuc): \quad m=(2453.97\pm0.14)\ \text{MeV}, \quad \Gamma=(1.89^{+0.09}_{-0.18})\ \text{MeV}, \tag{6.121}$$

$$\Sigma_c(2455)^{+}(udc): \quad m=(2452.9\pm0.4)\ \text{MeV}, \quad \Gamma<4.6\ \text{MeV}, \tag{6.122}$$

$$\Sigma_c(2455)^{0}(ddc): \quad m=(2453.75\pm0.14)\ \text{MeV}, \quad \Gamma=(1.83^{+0.11}_{-0.19})\ \text{MeV}. \tag{6.123}$$

这3个同位旋多重态之间的质量差小于1MeV，均100%经强相互作用衰变到$\Lambda_c^+\pi$末态，衰变宽度在2MeV量级。

2. 双粲重子

由于质量较重，产生较为困难，人们对双粲重子Ω_{cc}^+、Ξ_{cc}^+以及三粲重子Ω_{ccc}^{++}知之甚少。对双粲重子Ξ_{cc}^{++}衰变过程的理论和实验研究，一直到2017年才开始取得突破[124–133]。实

际上，SELEX实验组在2012年曾经声称他们通过对$\Xi_{cc}^{+} \to \Lambda_c^{+} K^{-}\pi^{+}$的研究发现了$\Xi_{cc}^{+}$ [134]，并测量了其质量和寿命

$$\begin{aligned} m(\Xi_{cc}^{+}) &= (3518.7 \pm 1.7)\ \text{MeV}, \quad \tau(\Xi_{cc}^{+}) < 30 \times 10^{-15} s, \\ R &= \frac{\sigma(\Xi_{cc}^{+})}{\sigma(\Lambda_c^{+})} \mathcal{B}(\Xi_{cc}^{+} \to \Lambda_c^{+} K^{-}\pi^{+}) \sim 20\%. \end{aligned} \tag{6.124}$$

SELEX的不成熟实验结果也误导了后来的实验，FOCUS、BaBar、Belle和LHCb等实验都在SELEX实验发现的衰变道进行测量，结果都没有发现Ξ_{cc}^{+}，特别是LHCb实验组，他们积累了远远超过SELEX实验组的超大数据量，却在相同的衰变道没有发现Ξ_{cc}^{+}的踪迹。

几年的努力无果之后，LHCb实验中国组的科学家寻求国内理论家的帮助，经过讨论和系统理论研究，结论是[124, 129, 133]

1. Ξ_{cc}^{++} 的寿命比Ξ_{cc}^{+}的寿命大3-5倍。而长寿命有助于在做强子对撞机上实验数据分析时更有效地压低背景，所以首先寻找Ξ_{cc}^{++}才是正确的选择。

2. $\Xi_{cc}^{++} \to \Sigma_c^{++}\bar{K}^{*0} \to \Lambda_c^{+}\pi^{+}K^{-}\pi^{+}$衰变道和$\Xi_{cc}^{++} \to \Xi_c^{+}\pi^{+}$衰变道是$\Xi_{cc}^{++}$的主要弱衰变道，衰变分支比在10%的量级，而且都是带电粒子末态，实验容易探测，所以这两个衰变道是首选。

3. $\Xi_{cc}^{++} \to \Lambda_c^{+}K^{-}\pi^{+}\pi^{+}$ 的衰变分支比$\Xi_{cc}^{+} \to \Lambda_c^{+}K^{-}\pi^{+}$的分支比大5 倍左右，进一步证明，首先寻找$\Xi_{cc}^{++}$才是正确的。

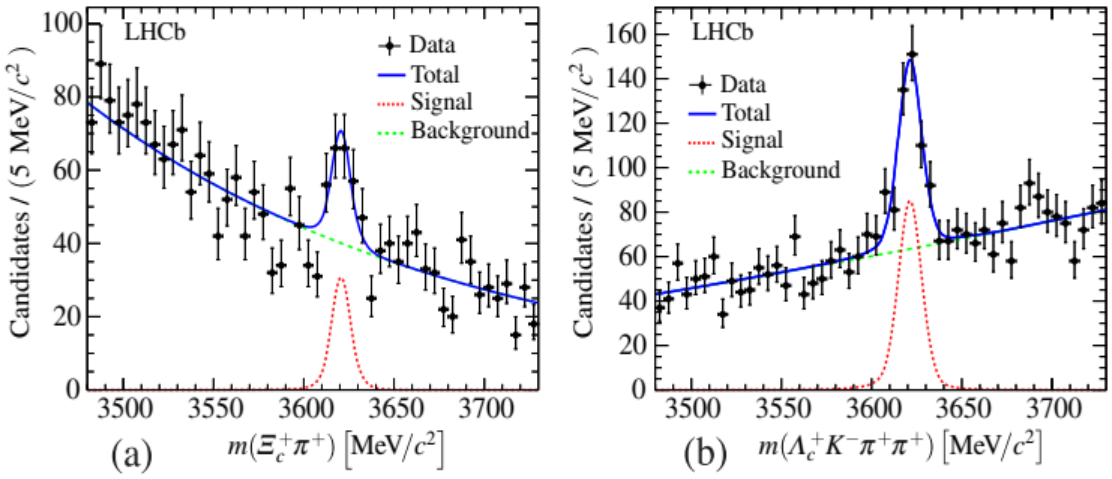


图 6.18: LHCb实验组对双粲重子Ξ_{cc}^{++}两个衰变过程的实验测量结果：(a) $\Xi_{cc}^{++} \to \Xi_c^{+}\pi^{+}$弱衰变过程[127]；(b) $\Xi_{cc}^{++} \to \Lambda_c^{+}K^{-}\pi^{+}\pi^{+}$ 弱衰变过程[125, 126]。

如图-6.18(b)所示，LHCb实验中国组根据中国理论家的建议很快在2017年通过$\Lambda_c^{+}K^{-}\pi^{+}\pi^{+}$ 的不变质量谱发现了一个明显的共振峰结构，首次证实了双粲重子Ξ_{cc}^{++} [125]的存

在，并测量了其基本性质[126, 128]：

$$\Xi_{cc}^{++}: \quad m = (3621.55 \pm 0.23 \pm 0.30)\ \text{MeV}, \quad \tau = 0.256(27)\ \text{ps}. \tag{6.125}$$

对Ξ_{cc}^{++}的寿命的测量结果证实该双粲重子的衰变是弱相互作用衰变。随后如图-6.18(a)所示，LHCb实验组也观测到了理论预言的$\Xi_{cc}^{++} \to \Xi_c^+\pi^+$ 弱衰变道[127]。

为了检验SELEX对Ξ_{cc}^+的实验测量结果，LHCb实验组使用RUN1和RUN2采集的的全部数据(9.2fb^{-1})，对SELEX实验曾经发现的弱衰变过程

$$\Xi_{cc}^+ \to \Lambda_c^+ K^-\pi^+ \quad with \quad \Lambda_c^+ \to pK^-\pi^+ \tag{6.126}$$

做了分析，但LHCb在$3400 \le m(\Lambda_c^+K^-\pi^+) \le 3800$ MeV的整个能量区间内没有看到明显的信号。对SELEX在(6.124)式所定义的R比值，LHCb也做了测量，结果为[135]

$$R = \frac{\sigma(\Xi_{cc}^+)}{\sigma(\Lambda_c^+)}\mathcal{B}(\Xi_{cc}^+ \to \Lambda_c^+K^-\pi^+) = [0.23, 0.45] \times 10^{-3} \quad \text{for} \quad \tau(\Xi_{cc}^+) = [40, 160]\text{fs}. \tag{6.127}$$

显然，LHCb实验组对比值R的测量结果比SELEX的结果$R \sim 0.2$ 小了大约3个量级。另外，如果比较一下式(6.124)和(6.125)，就会发现质量差达到了103MeV，这明显超过了Ξ_{cc}^+和Ξ_{cc}^{++}之间的同位旋分裂。

3. 粲重子激发态

在图-6.17(b)出现的自旋3/2的10个含粲重子中，含有单粲夸克的有6 个重子都已经在实验上发现，其中$\Sigma_c(2520)$是同位旋三重态，三者之间的质量差小于1MeV，衰变宽度大约15MeV：

$$\begin{aligned}
&\Sigma_c(2520)^0(ddc), \quad m = 2518.48(20)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (15.3^{+0.4}_{-0.5})\ \text{MeV},\\
&\Sigma_c(2520)^+(duc), \quad m = (2517.5 \pm 2.3)\ \text{MeV}, \quad \Gamma < 17\ \text{MeV, C.L.90\%},\\
&\Sigma_c(2520)^{++}(uuc), \quad m = (2518.41^{+0.21}_{-0.19})\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (14.78^{+0.30}_{-0.40})\ \text{MeV},
\end{aligned} \tag{6.128}$$

因为$\Sigma_c(2520)$与Λ_c^+的质量差只有231MeV，所以其强衰变道只有1个：$\Sigma_c(2520) \to \Lambda_c^+\pi$。$\Xi_c(2645)$是自旋3/2的同位旋二重态，同位旋本征态之间的质量差也小于1MeV，衰变宽度约为2.2MeV。

$$\begin{aligned}
&\Xi_c(2645)^0(dsc), \quad m = (2646.38^{+0.20}_{-0.23})\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (2.35 \pm 0.22)\ \text{MeV},\\
&\Xi_c(2645)^+(usc), \quad m = (2645.56^{+0.24}_{-0.30})\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (2.14 \pm 0.19)\ \text{MeV},
\end{aligned} \tag{6.129}$$

因为$\Xi_c(2645)$与自旋1/2的Ξ_c^0的质量差只有175MeV，所以其强衰变道也只有1个：$\Xi_c(2645) \to (\Xi_c^0\pi^+, \Xi_c^+\pi^-)$。$\Omega_c(2770)$是自旋3/2的同位旋单态，他与自旋1/2的同位旋单态Ω_c^0的质量差只有70MeV，所以该粒子没有强衰变道，而只能由电磁相互作用衰变到$\Omega_c^0\gamma$ 末态。

$$\Omega_c(2770)^0(ssc), \quad m = (2765.9 \pm 2.0)\ \text{MeV}, \quad \text{Br}(\Omega_c(2770)^0 \to \Omega_c^0\gamma) \approx 100\%. \tag{6.130}$$

含单个粲夸克的重子激发态也发现了很多，但是其中大多数的J^P量子数未定，需要理论和实验的共同努力，例如LHCb实验组同时测到的4 个Ω_c^0 重子激发态$\Omega_c(3000)^0$, $\Omega_c(3050)^0$, $\Omega_c(3065)^0$ 和$\Omega_c(3090)^0$，其质量和衰变宽度等可观测物理量给出了实验测量结果[136]，却不能确定J^P量子数。

在图-6.17(b)出现的自旋3/2的10个含粲重子中，对含有2个粲夸克的$\Xi_{cc}'^{+}$, $\Xi_{cc}'^{++}$, $\Omega_{cc}'^{+}$和含有3个粲夸克的Ω_{ccc}^{++}的理论研究比较少，并缺乏实验研究，在此不做进一步讨论。在PDG2020还列出另外一些含粲的重子共振态，但对这些粒子的理论和实验研究目前也很少，还需要更多的工作。

6.4.3 底介子

众所周知，美国SLAC和日本KEK的两个B介子工厂实验对B介子系统做了系统的研究。BaBar和Belle两个实验组合计采集了1700兆B介子对的产生和衰变事例，对B介子的众多衰变过程做了系统测量，发现了B介子系统的CP 破坏，得到了一批重要结果。2010年以来，LHC实验(尤其是LHCb合作组)已经采集了大量的各种B介子和b 重子的事例，尤其是对B_s, B_c和含b重子的实验研究，LHCb实验有其独特的优势。

类似粲介子的情况，如果我们考虑4味夸克(u,d,s,b)，那么也有SU(4)的味道空间对称性。这4味夸克构造的$4\times 4=16$个$q\bar{q}'$基态介子将组成一个SU(4)群的1维表示和15维表示，可以把图 6.16所示的三维立体图表示中的粲夸克换成底夸克就得到相应的底介子。底夸克介子的基态是赝标量粒子，其中包括同位旋二重态$B^+=u\bar{b}$和$B^0=d\bar{b}$，其质量和寿命的实验测量值列在式(6.106)；另一个带奇异数的底介子是

$$B_s^0=s\bar{b}:\quad m=5366.88(14)\ \text{MeV},\quad \tau(B_s^0)=1.515(4)\ \text{ps}, \tag{6.131}$$

这些粒子的性质与其反粒子性质相同。B^+、B^0和B_s^0是带底数的最轻的介子，这些粒子没有强衰变，只有$\Delta B=1$ 的弱衰变。例如，$B^0\to D^-\pi^+$、$J/\psi K$，$B_s^0\to D_s^-D_s^+$ 等。因此这些粒子寿命较长，在ps量级。B介子的弱衰变过程非常多，既包含多体强子衰变过程，又包含纯轻衰变和半轻衰变过程，实验上已经看到大约1000多个衰变道，对其中的100多个衰变道做了精确测量。相对应的矢量B介子是

$$B^{*+}=u\bar{b},\quad B^{*0}=d\bar{b},\quad B_s^*=s\bar{b}, \tag{6.132}$$

以及它们的反粒子。这些粒子的衰变宽度为keV的量级，主要衰变道是$B^*\to B\gamma$的电磁衰变。由于$M(B^*)<M_B+m_\pi$，所以$B^*\to B\pi$的衰变道没有打开。

除了上述基态粒子，还应该有轨道和径向高阶激发态等，例如$B_1(5721)^+$，其强衰变道已经打开，衰变宽度在MeV量级

$$\begin{aligned} B_1(5721)^+,\frac{1}{2}(1^+):\quad & m=5725.9^{+2.5}_{-2.7}\ \text{MeV},\quad \Gamma=(31\pm 6)\ \text{MeV},\\ & B_1(5721)^+\to B^{*0}\pi^+. \end{aligned} \tag{6.133}$$

在表6.6我们给出了这些激发态，可以看出相对于粲介子，实验发现的B介子激发态还比较少。

含b重味介子的性质在某些方面很象氢原子。 主要的质量被重夸克（原子核）携带。轻夸克（电子）的质量很小，围绕重夸克高速旋转。同样地，重味介子的外在性质也主要依赖于轻夸克的性质而不是重夸克。例如，在零级近似下，重味介子的许多性质与重夸克的质量大小无关。重夸克质量的一级修正大小是Λ/M的量级。$\Lambda \sim 0.2GeV$，是强相互作用的尺度参量，它刻画轻夸克的组分质量大小和胶子结合能大小。例如

$$m_{D_S} - m_D = (99 \pm 1)\ \text{MeV}, \quad m_{B_S} - m_B = (90 \pm 3)\ \text{MeV}, \tag{6.134}$$

差别只依赖于轻夸克的质量，而与重夸克几乎无关。这是由重夸克对称性决定的[17]。

在B介子衰变研究方面，两个B介子工厂实验取得了巨大成功，LHCb实验也已经达到或者超过(对部分衰变道)两个B介子工厂的实验测量精度。对B_s介子的研究，LHCb实验则提供了目前最好的实验测量结果。在标准模型理论框架下对B/B_s介子的各类衰变过程和CP破坏研究，将在本书的第十章做详细介绍。

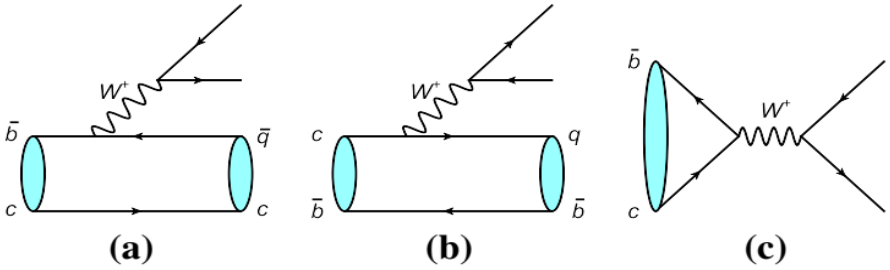


图 6.19: 标准模型中B_c介子的三类主要衰变过程示意图：(a) b夸克衰变；(b) c夸克衰变；(c) $\bar{b}c$ 湮灭。

重重介子B_c^+和B_c^{*+}

两味重夸克组成的重重介子$B_c^+ = c\bar{b}$以及其反粒子是最重的b味基态介子，是1998年由CDF实验组在其半轻子衰变道中首次发现的。双重夸克组成的介子的特殊性表现在：虽然不能强衰变，但是两个重夸克都可以弱衰变，也就是有粲数和底数分别改变1 或者同时改变1 的如图-6.19所示的三类弱衰变

$$\begin{aligned}
\bar{b} \to \bar{c}(\bar{u}) \quad (\sim 20\%); \quad & B_c^+ \to J/\psi\pi^+, J/\psi D_s^+, \cdots, \\
c \to s(d) \quad (\sim 70\%); \quad & B_c^+ \to B_s\pi^+, B_0\mu^+\nu_\mu, \cdots, \\
c\bar{b} \to u\bar{d}(\bar{s}) \quad (\sim 10\%); \quad & B_c^+ \to \pi^+\pi^0, \pi^+K_S, \cdots .
\end{aligned} \tag{6.135}$$

其与普通的基态介子相比，衰变快、寿命短:

$$m_{B_c^+} = 6274.47(32)\ \text{MeV}, \qquad \tau(B_c^+) = 0.510(9)\ \text{ps.} \sim \tau_B/3. \tag{6.136}$$

由于B_c介子太重，两个B介子工厂实验无法对其进行研究。在LHC投入运行以前，只有LEP实验和Tevatron 强子对撞机实验采集了B_c介子的产生和衰变数据，但数据量很少。因此除了基态的B_c介子之外，其各种激发态很长时间都没有被实验观测到，B_c介子的衰变道也只测量到了很少几个。在LHC实验中B_c介子的产生截面大约是在Tevatron实验产生截面的10倍，再考虑到LHC实验的超高亮度，LHC实验是B_c 介子研究的最好实验设施。经过努力，CMS、ATLAS和LHCb实验组都通过$B_c\pi^+\pi^-$末态测量到了$B_c^+(2S)$ 共振态，其质量在6872MeV。三个实验组也声称看到了$B_c^{*+}(2S)$共振态。B_c^+介子由于由两个重夸克组成，其结合能远小于夸克质量，类似于重夸克偶素，理论上可以用非相对论近似来计算其束缚态性质，简化计算之后容易很多，因而理论上是研究强相互作用束缚态性质的理想场所。

6.4.4 底重子

在图6.17中把所有的粲夸克换成底夸克，我们就会得到底夸克和三种轻夸克作为SU(4)基础表示，所组成的所有基态(S 波)重子，类似地得到两个自旋分别为$1/2^+$和$3/2^+$ 的二十重态群表示。当然，对于Ξ_{cc}、Ω_{cc} 和Ω_{ccc} 三种重子，还存在只更换其中一个或者两个粲夸克为底夸克的情况，得到粲底重子Ξ_{cb}、Ω_{cb}、Ω_{ccb} 和Ω_{cbb}。加上这些粒子之后，我们需要考虑5味夸克作为基础表示的SU(5)对称性，所有重子的群表示分解为

$$5 \otimes 5 \otimes 5 \quad = \quad \overline{10}_A \oplus 40_{MA} \oplus 40_{MS} \oplus 35_S. \tag{6.137}$$

因此，对于所有重子基态有自旋$1/2^+$的味道混合对称的40重态（SU(3)八重态+12个粲重子+12个底重子+8个粲底重子）和自旋$3/2^+$ 的味道全对称的35 重态（SU(3)十重态+10个粲重子+10个底重子+5个粲底重子）。

在上述所有底重子和粲底重子中，只有**包含一个重b夸克和两个轻夸克（u,d,s）的重子** 被实验观测到。按照重子的命名规则，这类粒子只有四类：Λ_b、Ξ_b、Σ_b和Ω_b重子，其$I(J^P)$量子数多为夸克模型预言，有待实验确认[1, 87]，具体性质如下：

(1) **同位旋单态**$\Lambda_b(\mathrm{udb})$

该重子1991年在CERN的实验中首次被发现，随后被其他实验所证实。自旋1/2的Λ_b是最轻的含b夸克重子，只有底数改变1 的弱作用衰变，寿命在皮秒量级[137–141]。Λ_b重子性质的最精确测量主要来源于LHCb实验[142–144]

$$\begin{aligned} m &= 5619.60(17)\ \mathrm{MeV}, \qquad \tau = 1.471(9)\ \mathrm{ps}, \\ \mathcal{B}(\Lambda_b \to \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l) &= (6.2^{+1.4}_{-1.3})\%, \qquad \mathcal{B}(\Lambda_b \to \Lambda_c^+ D_s^-) = (1.10 \pm 0.10)\%. \end{aligned} \tag{6.138}$$

LHCb和CMS实验组还研究了在pp对撞过程中Λ_b和$\bar{\Lambda}_b$重子产生的不对称性，定义了不对称性参数A_{P}

$$A_{\mathrm{P}} = \frac{\sigma(pp \to \Lambda_b^0 Y) - \sigma(pp \to \bar{\Lambda}_b^0 Y)}{\sigma(pp \to \Lambda_b^0 Y) + \sigma(pp \to \bar{\Lambda}_b^0 Y)}, \tag{6.139}$$

其中Y表示其它任意末态粒子。LHCb实验组在快度区间$2.15 \leq y \leq 4.10$ 和横向动量区间$2 \leq p_T \leq 27\text{GeV}$ 对参数A_{P}做了测量，首次在5.8σ水平证实Λ_b和$\bar{\Lambda}_b$重子产生的不对称性[144]。由于强相互作用的C宇称守恒性质，在夸克层次的正反底夸克产生过程肯定是对称的，形成正反Λ_b分别需要u、d夸克和$\bar{u}$、$\bar{d}$夸克，正反超子在质子- 质子对撞产生中的不对称性来源于正反轻夸克数量的不对称性，质子中只有正夸克u、d组分，强子对撞机中的反夸克来源于QCD真空，但是由于C宇称守恒，其必然伴随正夸克一起成对产生，数量比正夸克少，这也反映了夸克模型的正确性。

(2) **同位旋三重态**$\Sigma_b^{(*)0}(\text{udb})$、$\Sigma_b^{(*)+}(\text{uub})$、$\Sigma_b^{(*)-}(\text{ddb})$

$\Sigma_b^{\pm}$是$J^P = \frac{1}{2}^+$ 的重子，在2007年被CDF实验组首次发现，后来被LHCb等实验所证实[141]，其性质如下

$$\begin{aligned} m(\Sigma_b^+) &= 5810.56(25)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 5.0(5)\ \text{MeV}, \\ m(\Sigma_b^-) &= 5815.64(27)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 5.3(5)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{6.140}$$

中性的Σ_b^0则还没有实验测量数据。$\frac{3}{2}^+$的$\Sigma_b^{*\pm}$重子也已经发现

$$\begin{aligned} m(\Sigma_b^{*+}) &= 5830.32(27)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 9.4(5)\ \text{MeV}, \\ m(\Sigma_b^{*-}) &= 5834.74(30)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 10.4(8)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{6.141}$$

可以看出上述不同自旋、不同电荷的重子衰变宽度都在同一个量级，原因是它们的主要衰变道相同，都是$\Sigma_b^{(*)\pm} \to \Lambda_b^0\pi^{\pm}$的强衰变。2019年，LHCb实验组也通过对$\Sigma_b^{*\pm} \to \Lambda_b^0\pi^{\pm}$ 衰变的研究，发现了新激发态$\Sigma_b(6097)^{\pm}$，其自旋量子数未定，基本性质为

$$\begin{aligned} \Sigma_b(6097): \quad & m(\Sigma_b^+) = (6095.8 \pm 1.7)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (31 \pm 6)\ \text{MeV}, \\ & m(\Sigma_b^-) = (6098.0 \pm 1.8)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (29 \pm 4)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{6.142}$$

(3) **同位旋二重态**$\Xi_b^0(\text{usb})$**和**$\Xi_b^-(\text{dsb})$

$J^P = 1/2^+$的$\Xi_b^{0,-}$重子是在2007年被CDF和D0实验组发现的，

$$\begin{aligned} \Xi_b^0: \quad & m = 5791.9(5)\ \text{MeV}, \quad \tau = 1.480(30)\ \text{ps}, \\ \Xi_b^-: \quad & m = 5797.0(6)\ \text{MeV}, \quad \tau = 1.572(40)\ \text{ps}, \end{aligned} \tag{6.143}$$

由于是质量最轻的同时带有奇异数和底数的重子，它们只有弱衰变，因此寿命较长。按照夸克模型，由图6.17(a)可知，把粲夸克换成底夸克，自旋$J^P = 1/2^+$的Ξ_b重子应该有两个同位旋二重态，实验上第二个二重态只找到一个粒子

$$\Xi_b'^-: \quad m = 5935.02(5)\ \text{MeV}, \quad \Gamma \leq 0.08\ \text{MeV}, \text{CL} = 95\%. \tag{6.144}$$

$J^P = 3/2^+$的Ξ_b^*重子是通过末态粒子为$\Xi_b^0\pi^-$和$\Xi_b^-\pi^+$的衰变过程被发现的[145–147]。

$$\begin{aligned} \Xi_b(5945)^0: \quad & m = 5952.3(6)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 0.90(18)\ \text{MeV}, \\ \Xi_b(5955)^-: \quad & m = 5955.33(13)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 1.65(33)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{6.145}$$

2018年，LHCb实验组发现了激发态$\Xi_b(6227)^-$ [148]；2021年，LHCb实验组发现了激发态$\Xi_b(6227)^0$ [149]，$\Xi_b(6227)^{0,-}$ 重子的J^P量子数还有待确认。2021年，CMS和LHCb实验组还发现了另外3个Ξ_b的新激发态：$\Xi_b(6100)^-$，$\Xi_b(6327)^0$和$\Xi_b(6333)^0$[150, 151]。这些Ξ_b重子的质量、寿命或者衰变宽度为

$$\begin{aligned}
&\Xi_b(6100)^-, \frac{3}{2}^- : \quad m = 6100.3(2)(1)(6)\ \text{MeV}, \quad \Gamma < 1.9\ \text{MeV}, \text{CL} = 95\%, \\
&\Xi_b(6227)^0 : \quad m = 6227.1(15)(5)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (18.6^{+5.0}_{-4.1} \pm 1.4)\ \text{MeV}, \\
&\Xi_b(6227)^- : \quad m = 6227.9(8)(5)\ \text{MeV}, \quad \Gamma = (19.9 \pm 2.1 \pm 1.5)\ \text{MeV}, \\
&\Xi_b(6327)^0, \frac{3}{2}^+ : \quad m = 6327.28(23)(8)(24)\ \text{MeV}, \quad \Gamma < 2.56\ \text{MeV}, \\
&\Xi_b(6333)^0, \frac{5}{2}^+ : \quad m = 6332.69(18)(3)(22)\ \text{MeV}, \quad \Gamma < 1.85\ \text{MeV}.
\end{aligned} \tag{6.146}$$

(4) **同位旋单态Ω_b^-(bss)**

2008年，美国费米实验室的D0和CDF实验组通过衰变链

$$\Omega_b^- \to J/\psi\Omega^-, \quad \text{with} \quad J/\psi \to \mu^+\mu^-, \quad \text{and} \quad \Omega^- \to \Lambda K^- \to p\pi^- K^-, \tag{6.147}$$

发现了$J^P = 1/2^+$的Ω_b^-重子[152–154]，其质量和寿命的实验测量结果是[1]

$$m = (6046.1 \pm 1.7)\ \text{MeV}, \qquad \tau = (1.64^{+0.18}_{-0.17})\ \text{ps}. \tag{6.148}$$

和最近发现的双重味重子Ξ_{cc}^{++}类似，Ξ_{bc}^0(dcb)也是可能存在的双重味重子，人们已经在众多理论模型下对此类重子的产生和衰变做了大量研究[129, 155–162]。LHCb 实验组也搜寻了双重味重子Ξ_{bc}^0，没有发现显著的信号，对其质量和寿命给出了上限[163]。

6.5 奇特强子态

夸克模型理论框架下，成功解释了介子是由一个夸克和一个反夸克($q\bar{q}'$)组成的，重子是由三个夸克(qqq)组成的。但根据现在的强相互作用QCD理论，除了这些经典的介子和重子，还可以存在各种如图-6.20所示的奇特强子态：四夸克态、五夸克态、六夸克态、强子分子态、胶子混杂态和胶子球等。在实验上寻找奇特强子态，测量他们的物理性质显得非常重要，对检验QCD 的非微扰性质有重要意义。经过坚持不懈的努力，人们发现了很多传统夸克模型比较难以解释的类似奇特强子态或者候选者，但是长久以来这些努力却依然没有取得非常显著的令所有人信服的判定性成果。

一个典型的例子是在B介子工厂首先发现的$D_{s0}^*(2317)$和$D_{s1}^*(2460)$共振态，它们的宽度非常窄，而且其质量比夸克模型预言的P波宽共振态质量低很多，因而被广泛认为是分子态的候选者。但是另一方面，由于其质量非常接近$DK(DK^*)$的质量阈值，运动学效应也可以定性解释其低质量和窄宽度，因而这两个粒子的传统夸克模型解释也不能完全排除。

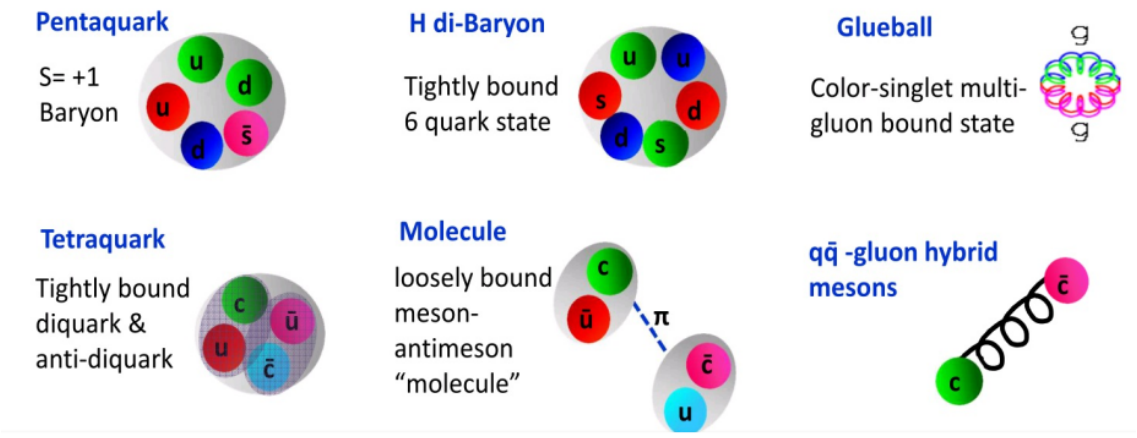


图 6.20:　特强子态：四夸克态、五夸克态、混杂态、胶子球、双重子态和强子-分子态的示意图。

6.5.1　轻介子奇特态

1. 轻标量介子

历史上对于最轻的9个标量介子共振态的研究一直处于混乱和争议不断的状态。例如最轻的$f_0(500)$介子[1]，之前被称为σ 粒子的质量为(400-550)MeV，而宽度比质量还大，非常宽，高达(400-700)MeV，信号与背景根本分不开，从其衰变末态来看，怎么也不像一个共振峰，因此粒子数据表过去并不认为其是一个“粒子”。实验通过分波分析法确认其为一个真实的共振态也就是二十多年前的事情。同样的事情也发生在$K_0^*(700)$，之前称之为κ粒子。当然，$f_0(500)$ 介子的特殊性还体现在其量子数与QCD真空相同，还在手征对称性破缺（下一章）和线性σ模型中起非常重要的作用 [164, 165]。

按照夸克模型，除了$K_0^*(700)$ 和$f_0(550)$，还有7个粒子的质量在1 GeV以下，组成P波标量介子的SU(3)味道对称性的单态和八重态，其夸克组成为

$$
\begin{aligned}
&|f_0(500)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle) \equiv |\bar{n}n\rangle, \quad |f_0(980)\rangle = |\bar{s}s\rangle, \\
&|a_0^0(980)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle), \quad |a_0^-(980)\rangle = |\bar{u}d\rangle, \quad |a_0^+(980)\rangle = |\bar{d}u\rangle. \\
&|K_0^{*-}(700)\rangle = |\bar{u}s\rangle, \quad |\bar{K}_0^{*0}(700)\rangle = |\bar{d}s\rangle, \quad |K_0^{*0}(700)\rangle = |\bar{s}d\rangle, \quad |K_0^{*+}(700)\rangle = |\bar{s}u\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.149}
$$

当然这些标量粒子的复杂性并不仅仅体现在宽度和质量同量级的问题，还体现在其很难理解的比矢量介子还低的质量上。夸克模型认为介子是由正反夸克组成的，按照上一章的讨论，正反费米子组成的束缚态，基态是0^{-+}，自旋激发态是1^{--}，这都是我们这一章讨论过的内容。轨道角动量激发态最低的应该就是自旋和轨道角动量都为1的0^{++}介子，由于其为轨道角动量激发态，质量应该比1^{--}的矢量粒子高，但是$f_0(500)$介子和$K_0^*(700)$介子却比相应的ρ介子和K介子质量低。另一个难以解释的困难是上述$a_0(980)$和$f_0(980)$分别是上下夸克和奇异夸克组成却质量简并的事实。为了解释这些困难，Jaffe认为这9个标量

粒子并不是两个正反夸克组成的，而应该是四夸克态 [166], 在味道SU(3) 对称性下，两个夸克和两个反夸克的群表示为

$$3 \otimes 3 \otimes \bar{3} \otimes \bar{3} = (\bar{3} \oplus 6) \otimes (3 \oplus \bar{6}) = 9 \oplus 36 \oplus 18 \oplus \overline{18}. \tag{6.150}$$

四夸克态标量粒子中的双（反）夸克系统组成对于所有量子数的全反对称波函数：颜色和味道都是$\bar{3}$ (3)表示、自旋为0，其质量最低的表示应该是上面的9重态，夸克组成为

$$\begin{aligned}
&|f_0(500)\rangle = |\bar{u}u\bar{d}d\rangle, \quad |f_0(980)\rangle = |\bar{n}n\bar{s}s\rangle, \\
&|a_0^0(980)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|(\bar{u}u - \bar{d}d)\bar{s}s\rangle, \quad |a_0^+(980)\rangle = |\bar{d}u\bar{s}s\rangle, \quad |a_0^-(980)\rangle = |\bar{u}d\bar{s}s\rangle, \\
&|K_0^{*+}(700)\rangle = |\bar{s}u\bar{d}d\rangle, \quad |K_0^{*0}(700)\rangle = |\bar{s}d\bar{u}u\rangle, \\
&|\bar{K}_0^{*0}(700)\rangle = |\bar{d}s\bar{u}u\rangle, \quad |K_0^{*-}(700)\rangle = |\bar{u}s\bar{d}d\rangle.
\end{aligned} \tag{6.151}$$

因为上述四夸克态的总自旋和轨道角动量都为0，处于基态，如果这些标量粒子是由这样的四夸克态组成，就可以很好解释它们的质量比矢量介子(自旋为1的激发态)还低的事实；也可以解释$a_0(980)$和$f_0(980)$质量简并的事实。当然，后面我们将看到，所谓的四夸克态几乎不太可能跟双介子组成的分子态区分开，分子态的解释也一直伴随着这些粒子性质的研究。

质量低于1GeV的标量粒子的属性界定也直接影响其它标量介子的状态性质标定，如果上述的标量粒子属于基态的双夸克态介子，则质量1.5GeV附近的标量粒子多重态应该属于径向激发态，如果前述标量粒子属于四夸克态或者分子态，那么质量1.5GeV 附近的标量粒子则是基态。这些粒子包括同位旋三重态$a_0(1450)$, 两个同位旋二重态$K_0^*(1430)$ 和三个同位旋单态$f_0(1370)$、$f_0(1500)$和$f_0(1710)$。

2. 胶球

下一章我们将要讲述强相互作用的基本理论–量子色动力学，其媒介粒子是胶子，按照这个理论，强相互作用形成的强子束缚态的颜色部分必须是单态。除了夸克之外，胶子也带有颜色指标，是颜色SU(3)群的八重态表示，则两个胶子按照式(6.2)也是可以形成颜色单态表示，另外，如果三个胶子的话，也是可以形成颜色单态的。因此，胶球也是可以存在的，两个胶子形成的束缚态量子数在上一章的表5.8中给出，由于胶子并不带同位旋量子数，因此其同位旋为0，由于量子数相同，原则上胶球也可以与同位旋为0的正反夸克组成的介子混合。由于这个原因给我们在实验上寻找并确定胶球带来了极大的困难。

上面提到的质量在1.5GeV附近的标量粒子，数一下就会发现，一共是10个态，比通常的介子多重态多出来一个。比较流行的解释是：这里多出来的就是胶球态。从5.5.3节的表5.8可以看出，两个胶子组成的基态束缚态应该量子数应该是0^{++}。格点QCD 的计算结果给出的基态胶球质量是1700MeV 左右[167]，也和这里的三个同位旋单态质量相近。当然，由于基态胶球的量子数和夸克模型标量介子的量子数相同，它们之间发生混合是非常正常的。$f_0(1370)$、$f_0(1500)$ 和$f_0(1710)$ 应该是两个夸克模型同位旋单态和胶球混合后形成的三个质量本征态[168]。

根据表5.8，胶球的第一激发态量子数应该是2^{++}，格点QCD也给出了质量预言在2300MeV 附近，相应地，在实验上我们也测到了$f_2(2010)$、$f_2(2300)$和$f_2(2340)$三个质量相近的同位旋单态。由于夸克组成的同位旋单态和胶球很容易混合，虽然不能确定上面三个质量本征态哪个的胶球成分更大，但是跟标量粒子的情况类似，这里也确实多出来了一个态。至于胶球的轨道角动量激发态0^{-+}，按照格点QCD的计算，其质量应该大于2GeV，当然另外的模型计算，例如流管模型认为$\eta(1405)$应该是候选者[169]，同样地，这个质量区域也比夸克模型多出来了一个同位旋单态，除了$\eta(1405)$还有$\eta(1295)$和$\eta(1475)$。总而言之，目前对于胶球的研究只是发现了一些存在的证据，由于混合的存在，并不能肯定其存在。实际上根据5.5.3节的讨论，量子数为1^{-+}、2^{+-}等的态不能由正反夸克组成，却可以由胶子组成，因而这些态的发现才可以是确定的证据，但是理论计算认为这些态的宽度非常宽，很难在实验上被确定存在。

3. 混杂态

除了胶球之外，强相互作用的传播粒子–胶子，还可以跟$q\bar{q}$或者qqq一起形成一个束缚态，称为混杂态。不同于胶球，混杂态有夸克组分，因此可以是同位旋的单态也可以是三重态，而且可以是带电的粒子，也可以是重子。从基态开始的混杂态量子数是0^{-+}, 1^{-+}, 1^{--}和2^{-+}，但是对于混杂态的质量预言则是很不确定，比较早的胶子流管模型和格点QCD 计算认为其基态质量大约在1.8–1.9GeV [170]。但是势模型却预言基态质量在1.4GeV附近[171]。在接近这个质量范围的量子数为$I^G(J^{PC}) = 1^-(1^{-+})$的$\pi_1(1400)$和$\pi_1(1600)$由于同位旋的原因不可能是胶球，因而是很好的混杂态的候选者。当然由于前者跟$\eta\pi$的强耦合也很可能是四夸克态，而后者由于跟$\eta'\pi$的强耦合，更倾向于混杂态。对于0^{-+}量子数，由于$\pi(1800)$解释成π介子的径向激发态，其宽度太窄，质量也在混杂态的预言范围，可以作为一个很好的混杂态候选者。另外，$\eta_2(1870)$也被推荐为量子数2^{-+}的混杂态。

6.5.2　类粲偶素

对于奇特态的研究虽然困难，却一直有坚持不懈的理论和实验研究。突破性的进展出现在21世纪初。Belle实验组在2003年首先发现了类粲偶素粒子X(3872)，其量子数为$I^G(J^{PC}) = 0^+(1^{++})$ [58]，并被后续的CDF，D0，BaBar，LHCb 和BESIII实验组在他们所做的强子对撞机实验和正负电子对撞机实验所证实[172–176]。最早发现X(3872)的四个实验分析结果在第二章的图2.7中讨论过。Belle和BaBar看到了$X(3872) \to \gamma J/\psi$ 电磁衰变道，证明X(3872)的电荷共轭变换量子数C=1。CDF和LHCb实验确定了X(3872)的$I^G(J^P) = 0^+(1^+)$。

X(3872)是第一个被发现的XYZ奇异强子，也几乎是最难以理解的窄共振态。对所有已经发现的奇异强子，各个实验组采集的和X(3872) 相关的数据量最大。在实验研究和理论研究两个方面，X(3872)都是长期的研究热点。在理论研究方面，人们基于不同的理论模型来研究X(3872)的产生和衰变过程，给出了多种可能的解释：

1. **紧致的四夸克态**$c\bar{c}n\bar{n}$。 但是这个解释的不利之处在于，实验一直没有找到这个态的带电伙伴。

2. **$D\bar{D}^*$组成的分子态**[177–181]. 支持证据是：X(3872)的强相互作用衰变道$X(3872) \to D^0\bar{D}^{*0}, D^0\bar{D}^0\pi^0$分支比很大，同位旋破坏比较大；

3. **由$\bar{D}D^*$分子态和粲偶素构成的混合态。** 这容易解释X(3872) 的窄宽度和辐射衰变过程$X(3872) \to J/\psi\gamma$ [182–184]。

对X(3872)的其它解释还有运动学近阈增长结构、混杂态等等[185–189]。随着研究进展，虽然X(3872)的内部结构没有定论，但是其外部表现的量子数和衰变性质越来越清楚，2020 年的粒子数据表开始，用普通介子符号，命名其为$\chi_{c1}(3872)$ [1]。

近20年来，对重味多夸克态的理论研究和实验测量成为强子物理的重要热点研究领域，人们已经在正负电子对撞机实验和强子对撞机实验中发现了许多新的X、Y、Z奇特强子态[59–61, 190–196]。例如，$\psi(4230)$[之前被称为$Y(4230)$]、$\psi(4360)$[之前被称为$Y(4360)$]、$\psi(4660)$[之前被称为$Y(4660)$]等等，这些共振态也都难以用传统夸克模型解释，更像是分子态。其中$\psi(4660)$共振态最为奇特，其衰变末态包括$\psi(2S)\pi\pi$，$\Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$和$D_s\bar{D}_{s1}$。由于这个质量附近的粒子对众多，除了紧致四夸克态$cs\bar{c}\bar{s}$的解释，理论也给出了$D_s^{(*)}\bar{D}_{s1}(2536)$ 和$D_s^{(*)}\bar{D}_{s2}(2573)$以及重子偶素$\Lambda_c^+\bar{\Lambda}_c^-$的解释。

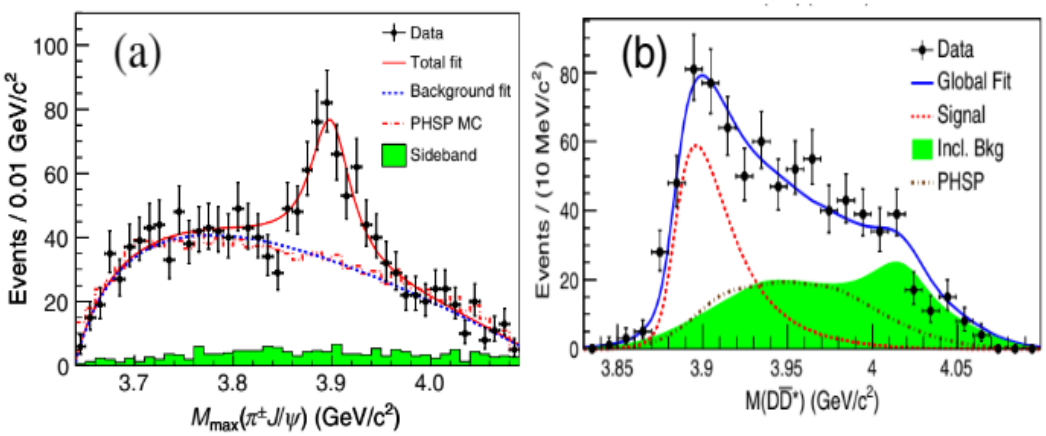


图 6.21: BESIII对$M_{max}(\pi^\pm J/\psi)$(a)和$M(D\bar{D}^*)$(b)的不变质量分布的拟合结果[197, 199, 200]。

第二个突破是带电荷类粲偶素的发现。 粲能区的粒子一般都含有粲偶素$c\bar{c}$，不带电荷，因而虽然有很多性质难以用普通夸克模型解释，却并不能完全确定其四夸克的组分。2013年6月，BESIII和Belle实验组发现了一个新的共振结构$Z_c(3900)$ [197, 198]。如图-6.21(a) 所示，BESIII实验组对$e^+e^- \to \pi^+\pi^- J/\psi$ 衰变过程进行分析，在$\pi^\pm J/\psi$ 的不变质量谱分布中发现一个清楚的峰结构：质量为$m = (3899.0 \pm 3.6 \pm 4.9)$ MeV，宽度为$\Gamma = (46 \pm 10 \pm 20)$ MeV，被命名为$Z_c(3900)^\pm$。图-6.21(b)显示的是在$D\bar{D}^*$ 的不变

质量谱分布中的峰结构[200]。和一般的中性粲偶素不同，新发现的$Z_c(3900)^{\pm}$不但含有隐粲偶素$c\bar{c}$而且带有电荷，提示它至少含有4个价夸克，夸克结构可能为$Z^+ = c\bar{c}u\bar{d}$或者是$Z^- = c\bar{c}d\bar{u}$。这是一种奇特强子态，不能用普通夸克模型解释。CLEOc实验也在$e^+e^- \to \pi\pi J/\psi$衰变道看到了电中性的$Z_c(3900)^0$ [203]。虽然带电荷奇异粒子究竟是紧致的四夸克态还是松散的分子态还有争议，但是却毋庸置疑地确认了超出传统夸克模型的奇特态存在的证据。

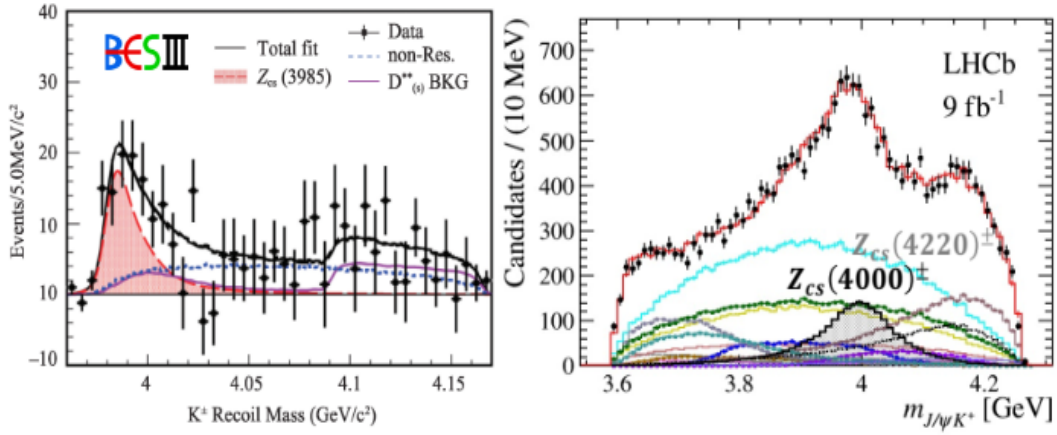


图 6.22:　左侧图：BESIII得到的在$e^+e^- \to K^+(D_s^-\bar{D}^{*0} + D_s^{*-}D^0)$ 衰变过程中相对于K 介子反冲质量$RM(K^+)$的拟合结果[201]; 右侧图：LHCb得到的相对于$m(J/\psi K^+)$质量分布的拟合结果[202]。

Belle和LHCb实验组还通过对$\bar{B}^0 \to J/\psi K^-\pi^+$，$\Lambda_b^0 \to J/\psi p\pi^-$ 和$B \to K\pi^{\pm}\psi'$ 衰变过程的研究，发现了$Z_c(4200)$和$Z_c(4430)^{\pm}$ [204–207] 。其中的$Z_c(4430)^{\pm}$是已经发现的最重的带电荷的类粲偶素介子，它可以解释成紧致四夸克态、$D^*\bar{D}_1$分子态或者由粲介子三角发散图贡献的末态相互作用结构。而$Z_c(4200)$共振态除了通常的解释，也可能只是运动学效应造成的结构。

2021年3月，BESIII实验组通过对$e^+e^- \to K^+(D_s^-D^{*0} + D_s^{*-}D^0)$衰变过程的分析，发现在$D_s^-D^{*0}$ 和$D_s^{*-}D^0$ 的质量阈值3985MeV附近存在如图 6.22左图所示的一个清楚的增强结构[201, 208] 。该粒子带一个单位负电荷，不可能是粲偶素。如果他是2夸克介子态$\bar{u}s$，那其质量就太重，远远超过已经发现的和QCD理论所预言的K^*激发态的质量。况且其宽度只有大约13MeV，远远小于K^*高激发态的宽度(> 100 MeV)。所以，人们普遍相信：$Z_{cs}(3985)$的夸克组态是$c\bar{c}\bar{u}s$，是一个奇特强子态。但目前还无法确定$Z_{cs}(3985)$ 是何种类型的四夸克态：是紧致的四夸克态还是强子分子态。分析表明，$Z_{cs}(3985)^-$的夸克组态可能是$c\bar{c}s\bar{u}$ [208]。

2021年3月，LHCb实验组通过对$B^+ \to J/\psi\phi K^+$ 衰变过程的拟合分析，如图 6.22右图所示，发现了衰变到$J/\psi K^+$ 的两个新的奇特四夸克态$Z_{cs}(4000)^+$ 和$Z_{cs}(4220)^+$，拟合的置信度分别为15σ 和5.9σ [202]。LHCb的实验测量结果确认了含奇异夸克的隐粲四夸克态Z_{cs}的存在。

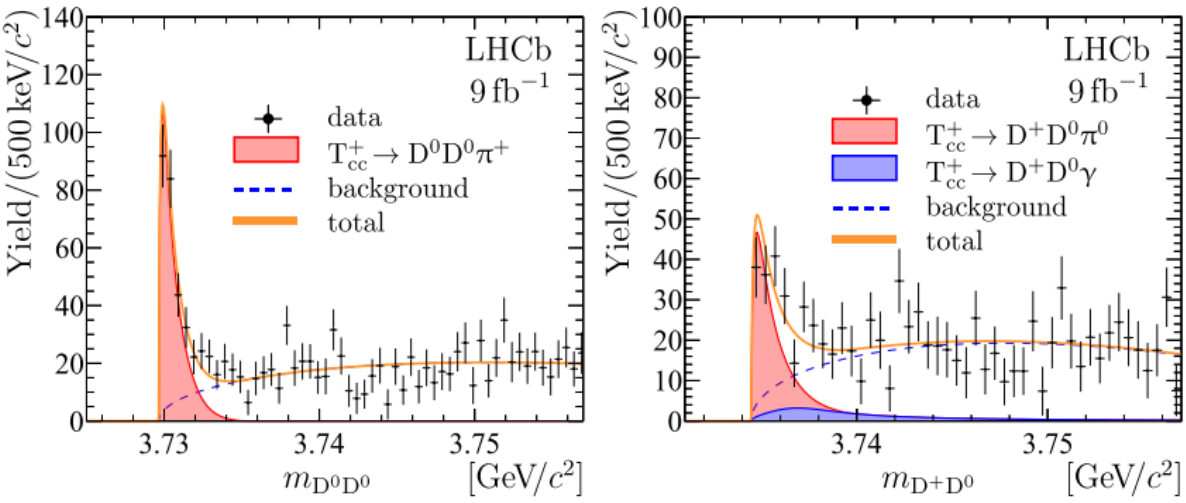


图 6.23: LHCb实验组对$m_{D^0D^0}$和$m_{D^+D^0}$质量分布的拟合结果[209, 210]。

除了标准的类粲偶素奇特态，LHCb实验组还观测到了四个重夸克组成的奇特态。他们在双J/ψ末态的不变质量谱中发现了一个共振结构X(6900)，因而只能解释成$cc\bar{c}\bar{c}$的夸克组成。共振态质量测量值为$m = 6905 \pm 11$MeV，宽度为$\Gamma = 80 \pm 19$MeV[211]。这个唯一发现的四重夸克奇特态的理论解释也是非常多，紧致四夸克态、分子态、混杂态、以及阈增长结构等。

新的奇特态证据还包括非类粲偶素多夸克态的发现，2021年9月，LHCb实验组对$D^0D^0\pi^+$和$D^+D^0\pi^0$的不变质量分布做了分析。如图-6.23所示，可以看到尖锐峰值分布，分别对应$T_{cc}^+ \to D^0D^0\pi^+$ 和$T_{cc}^+ \to D^+D^0\pi^0$ 衰变道。详细分析表明：T_{cc}^+的衰变链是$T_{cc}^+ \to DD^* \to D(D\pi + D\gamma)$，若使用Breit-Wigner参数化，共振峰值相对于$D^{*+}D^0$阈值的位置为[209]

$$\begin{aligned} \delta m_{\rm BW} &= m_{T_{cc}^+} - (m_{D^{*+}} + m_{D^0}) = -273 \pm 61 \pm 5^{+11}_{-14}\ \text{KeV}, \\ \Gamma_{\rm BW} &= 410 \pm 165 \pm 43^{+18}_{-38}\ \text{KeV}, \end{aligned} \tag{6.152}$$

其中$m_{D^{*+}} + m_{D^0} = 3875.09 \pm 0.07$ MeV，前两个误差分别为统计和系统误差，第3个误差表示由量子数约定导致的误差。由上式可以看出$m_{T_{cc}^+} \approx 3875$ MeV，其质量略低于$D^{*+}D^0$质量阈值。与到目前为止所有已经观测到的奇特态强子相比，T_{cc}^+的宽度是最窄的[1, 194]。

这个共振峰结构被解释为粲数C=2的新双粲四夸克态$T_{cc}^+(3875)$ [209, 210]。分析表明$T_{cc}(3875)^+$ 的夸克组态可能是$cc\bar{u}\bar{d}$，量子数可能是$J^P = 1^+$。在$D^+D^0\pi^+$和D^+D^+的不变质量分布中没有峰，这表明该实验没有看到T_{cc}^{++}。这意味着T_{cc}^+是$I = 0$的同位旋单态。

由于底夸克很重，其实验上的产额远低于粲夸克，类底夸克偶素奇特态被实验发现的数量则很少，一个例子是：2012年，Belle实验组通过对$\Upsilon(5S) \to \Upsilon(nS)\pi^+\pi^-$ (n=1,2,3)和$\Upsilon(5S) \to h_b(mP)\pi^+\pi^-$ (m=1,2) 这5 个衰变道的研究，发现了构型为$(b\bar{b}u\bar{d}, b\bar{b}d\bar{u})$的奇特态$Z_b(10610)^\pm$和$Z_b(10610)^\pm$ [212]。

6.5.3　五夸克态

实验上寻找五夸克态的努力有很长的富有戏剧性的历史，经过50年的努力依然没有令人信服的候选者。第一波五夸克态候选者是声称含有一个反奇异夸克的$Z_0(1780)$、$Z_0(1865)$和$Z_1(1900)$，1976年这些“粒子”开始出现在粒子数据表之上，一直到1992 年版的粒子数据表给出结论“这些结果没有确切的结论，也没有新的证据证明重子不是三个夸克组成的。”

Θ^+之谜？ 1997年，D. Diakonov 与合作者基于手征孤子模型(chiral soliton model) 预言了Z^+ 五夸克态的存在，并预言其质量约为1530MeV，衰变宽度小于15MeV，价夸克结构是$uudd\bar{s}$[213]。2003年，基于文献[213]的理论预言，LEPS实验组通过激光打靶实验对$\gamma n \to K^+K^-n$过程做了研究[214]，在K^+n的不变质量谱发现了奇异数S=1的强子共振态Θ^+ (置信度为4.6σ)：

$$m(\Theta^+) = 1540 \pm 10 \text{ MeV}, \quad \Gamma \leq 25 \text{ MeV}. \tag{6.153}$$

LEPS实验组认为可以把该共振峰解释为介子-重子(KN)共振态，因为K^+和n的夸克组成分别是$u\bar{s}$和udd，所以以Θ^+的夸克组成只能是$uudd\bar{s}$。随后的ZEUS实验组在$e^+p \to e^+K^0pX$实验的K^0p不变质量谱也看到了这个共振结构[215]，其它类似多个实验也相继支持该结果，PDG2004也把Θ^+分类为“established particle”。但与此同时又有BES, BaBar, Belle 等多个实验没有看到该共振峰的存在[216, 217]。由于声称看到Θ^+粒子的实验统计量偏低，而且短期内很难增加数据，而没有看到这个粒子的实验组则大多拥有海量的实验数据，因此主流观点认为并不存在$\Theta(1540)^+$五夸克态。

重味五夸克态 真正的转机发生在2015年7月，LHCb实验组首先宣布发现五夸克态$P_c(4380)^+$和$P_c(4450)^+$ [218]。他们利用实验数据对$\Lambda_b^0 \to J/\psi pK^-$衰变过程做了研究。如图-6.24所示，在$\Lambda_b^0 \to J/\psi pK^-$ 衰变过程的$m_{J/\psi p}$不变质量分布中发现了两个明显的共振峰结构，其中蓝色的窄阴影直方图表示$P_c(4450)^+$ 的窄共振峰，其左侧较低较宽的紫色阴影直方图表示$P_c(4380)^+$的宽共振峰，由于J/ψ和p两个粒子的夸克组成分别是$c\bar{c}$和uud，因此能强衰变到这两个末态粒子的共振态夸克组成只能是$c\bar{c}uud$，这表面存在两个含粲五夸克共振态$P_c(4380)^+$ 和$P_c(4450)^+$。LHCb实验组的发现才真正开启了重味五夸克态的发现和研究高潮，这个发现也是当年的国际物理学领域的十项突破之一，LHCb 中国组成员对此次发现作出了主要贡献。

2019 年4月，LHCb实验组使用提高了一个量级的同类数据再次对$\Lambda_b^0 \to J/\psi pK^-$衰变过程做分析，得到了与之前不同的结果[219]:

(1) 如图-6.24(b)和表-6.7所示，LHCb看到了3个与2015年结果不同的新五夸克态。首先，在图-6.24(a) 中出现的共振峰$P_c(4380)^+$在图 6.24(b)中没有出现。但在低端，LHCb发现了一个新的窄共振态$P_c(4312)^+$，置信度为7.3σ。表-6.7中比值$\mathcal{R}$的定义是[219]

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to P_c^+K^-)\mathcal{B}(P_c^+ \to J/\psi p)}{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to J/\psi pK^-)}. \tag{6.154}$$

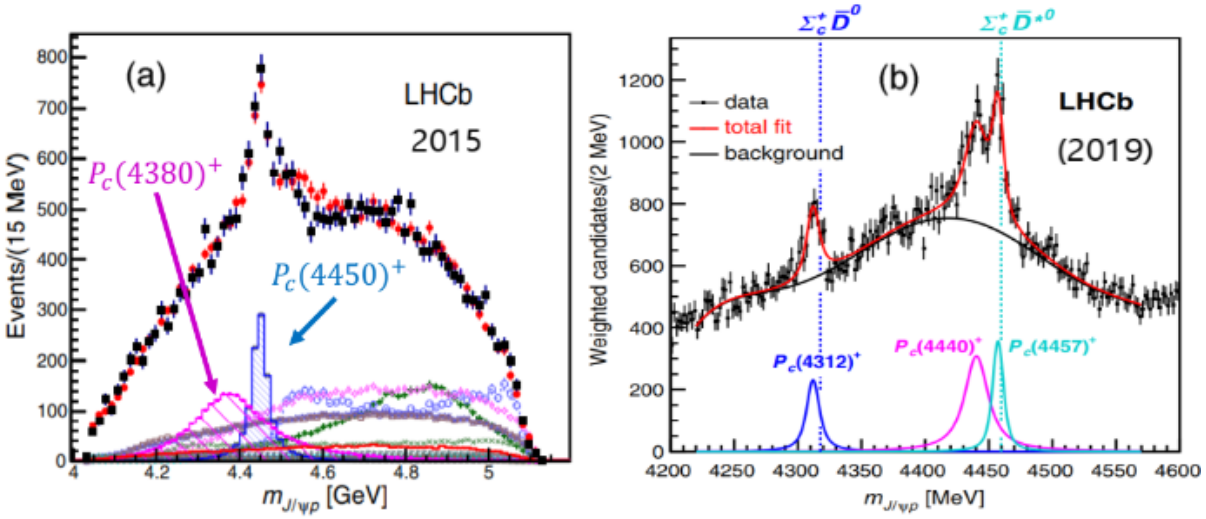


图 6.24: (a)2015年LHCb对$\Lambda_b^0 \to J/\psi p K^-$衰变过程中$m_{J/\psi p}$不变质量分布，其中蓝色的窄阴影直方图表示$P_c(4450)^+$的贡献，其左侧较低较宽的紫色阴影直方图表示$P_c(4380)^+$的贡献[218]，其他低平曲线表示各个$\Lambda^*$激发态的贡献；(b)2019年LHCb对$m_{J/\psi p}$分布改进的拟合结果，3个不同的$P_c^+$ 五夸克共振态已经直接标出[219]。

$\mathcal{R}$比值包含了各个共振态振幅和他们之间干涉效应的贡献。

(2) 在2019年的大数据量分析结果中，2015年看到的$P_c(4450)$分成了离得很近的两个窄五夸克共振态$P_c(4440)$和$P_c(4457)$，置信度为5.4σ。

(3) 从图-6.24(b)可以看出，五夸克态$P_c(4312)^+$ 的质量比强子对$\Xi_c^+\bar{D}^0$ 的质量阈值低大约5MeV，$P_c(4457)^+$ 的质量比$\Xi_c^+\bar{D}^{*0}$ 的质量阈值低大约2MeV，考虑到束缚能，这两个五夸克态看起来很象是“重子-介子”束缚态。P_c^+的最小价夸克结构是$duuc\bar{c}$，$\Xi_c^+\bar{D}^0$ 和$\Xi_c^+\bar{D}^{*0}$的价夸克结构是$[duc][u\bar{c}]$，这3个P_c^+共振态的窄宽度性质也支持“重子-介子”分子态的理解。当然，从不同的理论模型出发对这些五夸克态的结构和性质的讨论有很多，是真正的五夸克态，强子分子态还是其他可能构造，一直在讨论之中。有兴趣的读者可以参看文献[155, 220]和那里所引用的众多参考文献。

不同于类粲偶素的四夸克奇异态是由不同的实验组不同的衰变道互相佐证发现的，而且量子数大多是确定的，这些P_c^+五夸克态目前只在LHCb一个实验而且只在强相互作用衰变到强子末态$J/\psi p$的一个衰变道被发现，J^P量子数还不确定。在杰斐逊实验室的GlueX实验组就给出了对于P_c^+五夸克态寻找的负面结论。在2020版的粒子数据表中列出了4 个P_c^+ 含粲五夸克态[1]：$P_c(4312)^+$, $P_c(4380)^+$, $P_c(4440)^+$ 和$P_c(4457)^+$，但只给了“一星” 评级（知之甚少）。

五夸克态P_c^+的价夸克结构是$[uudc\bar{c}]$。如果把其中的一个轻夸克换成奇异夸克s，可以生成新的带奇异数的五夸克态P_{cs}^0 ($[usdc\bar{c}]$) 或者P_{cs}^+ ($[uusc\bar{c}]$) [222–226] 。理论

表 6.7:　2015年以来，LHCb实验组给出的对隐粲五夸克共振态P_c^+ $(uudc\bar{c})$和P_{cs}^0 ($[usdc\bar{c}]$)质量和宽度的实验测量结果[218–221]。

五夸克态	质量(MeV)	宽度(MeV)	$\mathcal{R}(\%)$
$P_c(4380)^+$ [218]	$4380 \pm 8 \pm 29$	$205 \pm 18 \pm 86$	
$P_c(4450)^+$ [218]	$4449.8 \pm 1.7 \pm 2.5$	$39 \pm 5 \pm 19$	
$P_c(4312)^+$ [219]	$4311.9 \pm 0.7^{+6.8}_{-0.6}$	$9.8 \pm 2.7^{+3.7}_{-4.5}$	$0.30 \pm 0.07^{+0.34}_{-0.09}$
$P_c(4440)^+$ [219]	$4440.3 \pm 1.3^{+4.1}_{4.7}$	$20.6 \pm 4.9^{+8.7}_{-10.1}$	$1.11 \pm 0.33^{+0.22}_{-0.10}$
$P_c(4457)^+$ [219]	$4457.3 \pm 0.6^{+4.1}_{-1.7}$	$6.4 \pm 2.0^{+5.7}_{-1.9}$	$0.53 \pm 0.16^{+0.15}_{-0.13}$
$P_{cs}(4459)^0$ [220]	$4458.8 \pm 2.9^{+4.7}_{-1.1}$	$17.3 \pm 6.5^{+8.0}_{-5.7}$	

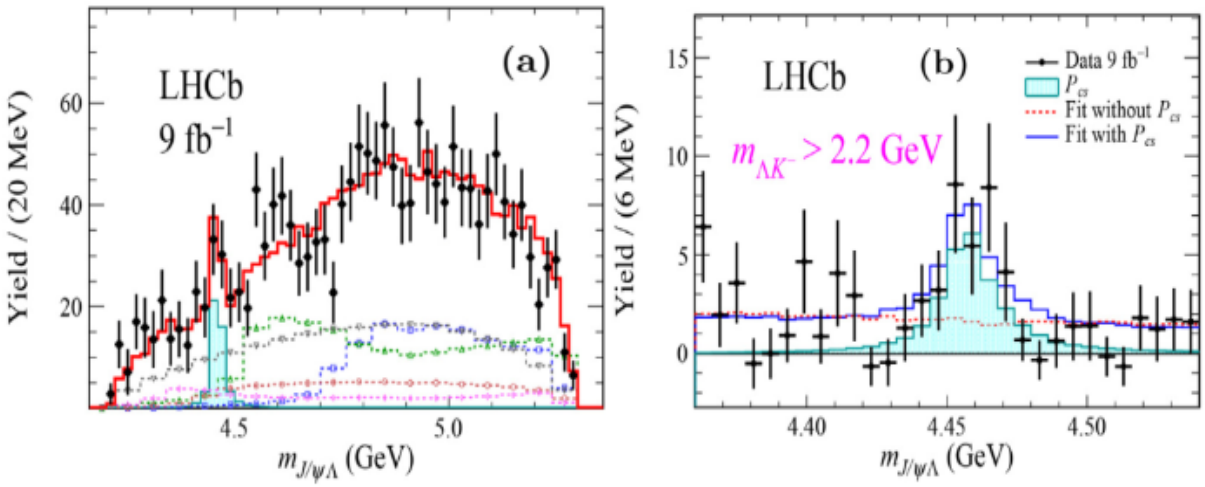


图 6.25:　(a)在只存在一个P_{cs}^0的假设下，对$m_{J/\psi\Lambda}$质量分布的拟合结果，浅蓝色直方图表示P_{cs}^0的贡献[220]，其他低平曲线表示各个Ξ激发态的贡献和非共振态贡献；(b)在$m_{\Lambda K^-} > 2.2$ GeV限制条件下对$m_{J/\psi\Lambda}$质量分布的拟合结果[220]。

家[222, 226]还建议实验测量$\Xi_b^- \to J/\psi\Lambda K^-$衰变过程，寻找五夸克态$P_{cs}$ 存在的证据。2020年12月，LHCb实验组对$\Xi_b^- \to J/\psi\Lambda K^-$衰变过程中$J/\psi\Lambda$的不变质量分布做了分析，如图-6.25所示，数据分析支持存在P_{cs}^0，其质量和宽度参数为

$$m(P_{cs}^0) = 4458.8 \pm 2.9^{+4.7}_{-1.1}\ \text{MeV}, \quad \Gamma = 17.3 \pm 6.5^{+8.0}_{-5.7}\ \text{MeV}, \tag{6.155}$$

信号置信度为3.1σ，J^P不确定。这个可能的新五夸克态$P_{cs}(4459)^0$比$\Xi_c^0\bar{D}^{*0}$质量阈值低19MeV。由于信号置信度偏低，这个五夸克态候选者还需要更多的实验数据支持。

6.5.4　奇特态的命名规则

人们通常认为介子由一对正反夸克组成，而重子则由三个夸克组成，而超出这些构型的强子便被称为奇特强子态。简而言之，四夸克态、五夸克态、胶子混杂态和胶子球

都是奇特强子态。他们的量子数J^{PC}也与基于简单夸克模型得到的结果不一致。根据前面的讨论可知，$q\bar{q}$介子的量子数不可能是$J^{PC} = (0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, etc)$。对此类“简单奇特态”, 我们使用与普通$q\bar{q}$介子系统相同的符号，但把他的自旋量子数作为下标加上去。例如$\pi_1(1400)$的$I^G(J^{PC}) = 1^-(1^{-+})$就是这样一个非$q\bar{q}$奇特强子态。

表 6.8: 在PDG2020上部分强子的名称有改变，改变后的强子新旧名称对照表[1]。

PDG2020	原有名称	$I^G(J^{PC})$	PDG2020	原有名称	$I^G(J^{PC})$
$\psi_2(3823)$	X(3823)	$0^-(2^{--})$	$\chi_{c1}(3872)$	X(3872)	$0^-(1^{++})$
$\chi_{c2}(3930)$	$\chi_{c2}(2P), Z(3930)$	$0^+(2^{++})$	$\chi_{c1}(4140)$	Y(4140)	$0^+(1^{++})$
$\psi(4230)$	Y(4230)	$0^-(1^{--})$	$R_{c0}(4240)$	$Z_c(4240)$	$1^+(0^{--})$
$\psi(4260)$	Y(4260)	$0^-(1^{--})$	$\chi_{c1}(4274)$	Y(4274)	$0^+(1^{++})$
$\psi(4360)$	Y(4360)	$0^-(1^{--})$	$\chi_{c0}(4500)$	X(4500)	$0^+(0^{++})$
$\psi(4660)$	X(4660), Y(4660)	$0^-(1^{--})$	$\chi_{c0}(4700)$	X(4700)	$0^+(0^{++})$
$Z_b(10650)$	$Z_b^{(\prime)}(10650)$	$1^+(1^{+-})$			
X(3915)	$\chi_{c0}(3915)$, X(3915), Y(3940)	$0^+(0/2^{++})$	X(4020)	$Z_c^{(\prime)}(4020)$	$1^+(?^{?-})$
$X(4050)^{\pm}$	$Z_1(4050)$	$1^-(?^{?+})$	$X(4055)^{\pm}$	$Z_c(4055)$	$1^-(?^{?-})$
$X(4250)^{\pm}$	$Z_2(4250)$	$1^-(?^{?+})$			

对于新发现的量子数没有确定的奇特态候选者，通常用X、Y、Z等字母来表示。习惯上，用X或者Y表示类粲偶素粒子；用字母Z 表示同位旋$I = 1$的包含了$c\bar{c}$和$b\bar{b}$对的强子态。如果这些新发现的共振态的量子数完全确定了，粒子数据表会根据它们的相应夸克模型量子数来重新命名，例如之前提到的X(3872)在2020年版本的粒子数据表改名为$\chi_{c1}(3872)$。在表 6.8中我们列出了这些粒子的新旧名字对照表。对于其中量子数确定的含有粲(底)夸克对组分又有同位旋的粒子，在表 6.1中我们给出了粒子数据表建议的命名规则：Z_c、Z_b命名自旋$S = 0$的PC字称为“$+-$”的奇特态；R_c、R_b为自旋$S = 1$的PC字称为“$--$”的奇特态；另外，建议用Π_c、Π_b和W_c和W_b分别命名还没有被实验发现的PC字称为“$-+$”和“$++$”的奇特态。一般用字母T表示含有两个粲数或者底数的四夸克态候选者，用字母P 表示五夸克态候选者。

6.6 练习题

1. 利用夸克模型给出反重子$\overline{\Xi}^+$、$\overline{\Xi}_{cc}^{--}$、$\overline{\Xi}_{cb}^0$、$\overline{\Omega}_c$、$\overline{\Lambda}_b$ 和$\overline{\Sigma}_b^+$的夸克组成、同位旋和同位旋第三分量。

2. 利用夸克模型写出基态反重子$\overline{\Xi}_{cb}^0$、$\overline{\Omega}_c$的味道、自旋和颜色波函数。

3. 利用组分夸克模型给出的介子质量公式(6.24,6.25)，计算

1) 赝标量介子η_c、D^0和D_s^+，以及矢量介子J/ψ、D^{*0}和D_s^{*+}的质量，并与实验数值比较；

2) 赝标量介子η_b、B^+和B_s^0，以及矢量介子Υ、B^{*+}和B_s^{*0}的质量，并与实验数值比较。

4. 利用组分夸克模型，推导公式(6.72)中重子八重态Ξ粒子的质量公式。

5. 已经知道，η_b介子是强衰变的共振态，但是其衰变宽度却比通常共振态窄，试利用OZI规则说明其原因，并画出其衰变的简单费曼图。

6. 类似于重子颜色波函数(6.49)式，构造介子的颜色单态波函数。

7. 中性介子可以通过虚光子衰变到正负电子对，如公式(6.99)所示，其衰变宽度是keV的量级，这种电磁衰变的矩阵元正比于$\langle\psi|\hat{Q}_q|\psi\rangle$，这里$\psi$是介子的味道波函数，$\hat{Q}_q$是夸克电荷算符。如果我们忽略相空间的影响，证明

$$\Gamma(\rho^0 \to e^+e^-) : \Gamma(\omega \to e^+e^-) : \Gamma(\phi \to e^+e^-) \;=\; 9:1:2. \tag{6.156}$$

8. 给出三种证明QCD色因子存在的实验证据，并简要说明。

9. 类似公式(6.87)，写出重子八重态的Λ^0和Σ^0粒子的波函数。

10. 利用组分夸克模型，

(a) 计算自旋向下($S_z = -1/2$)时，u, d夸克的自旋磁矩的z分量。

(b) 如果把质子看成是由3个价夸克构成的费米子束缚态:$p = uud$，并考虑同位旋对称性($m_u \approx m_d = 336$ MeV)，求质子的磁矩。

11. 利用组分夸克模型，类似于例题6.1，

1) 写出八重态重子Σ^-的波函数；

2) 计算八重态重子Σ^-的磁矩。

12. 考虑同位旋多重态$\Delta, \pi, (p, n)$和(u, d)夸克间的同位旋对称性，对$I = 3/2$的Δ重子同位旋四重态的下述强相互作用衰变过程，试证明：

$$\begin{aligned}&\Gamma(\Delta^- \to \pi^- n) : \Gamma(\Delta^0 \to \pi^- p) : \Gamma(\Delta^0 \to \pi^0 n) : \Gamma(\Delta^+ \to \pi^+ n) = 3:1:2:1,\\ &\Gamma(\Delta^+ \to \pi^+ n) : \Gamma(\Delta^+ \to \pi^0 p) : \Gamma(\Delta^{++} \to \pi^+ p) = 1:2:3.\end{aligned} \tag{6.157}$$

13. 如果没有颜色自由度，那么重子波函数可以写成如下形式：

$$\Psi = \phi_{flavor}\chi_{spin}\eta_{space}. \tag{6.158}$$

不考虑夸克间的轨道角动量，

(a) 试证明我们仍然可以构造一个同位旋1/2的质子波函数，使得$\phi_{flavor}\chi_{spin}$对于两个夸克的交换是全反对称的。

(b) 对这个无色夸克模型，证明质子的磁矩$\mu_p < 0$，并且有：$\mu_p/\mu_n = -1/2$，与实验测量值$\mu_p = 2.792\mu_N > 0$，$\mu_n = -1.913\mu_N < 0$，以及$\mu_p/\mu_n \approx -1.46$相矛盾。

第七章　量子色动力学与部分子分布函数

在上一章中我们给出了强子结构的夸克模型，通过一系列强子谱的实验数据和强子衰变性质验证了夸克模型的正确性。但是一个简单的问题是核子内部是否只有三个价夸克，三个价夸克在强子内部是如何分布的，它们之间是通过什么样的相互作用束缚在一起的？上世纪七十年代初，美国斯坦福直线加速器中心(SLAC)的物理学家进行了一系列的轻子-核子(eN和νN) 深度非弹性散射(DIS)实验，发现质子内部有定域的散射中心，发现强子的结构函数具有比约肯[1] 标度无关性(Bjorken Scaling)。为解释这些令人惊奇的结果，费曼提出了关于核子的部分子模型[227]：**假设核子是由点状(point-like)的部分子(parton) 组成；部分子在深度非弹性散射过程中是近似自由的。** 采用部分子模型可以自然的解释比约肯标度无关性[228, 229]。更细致的研究确认了部分子的自旋为1/2，并且具有分数电荷。人们进一步对深度非弹性散射实验数据的分析得出结论：这些点状的部分子具有和夸克模型中夸克相同的量子数，如自旋、电荷、味道（同位旋）等。除了带电的部分子，实验数据和理论分析还表明除了夸克之外，还存在中性的部分子-即量子色动力学中的胶子[230]。

轻子-核子的深度非弹性散射实验显然支持了夸克模型，但是实验上却没有观察到自由的夸克和胶子，那么一个自然的问题就是，这些部分子是怎样被束缚在强子中的？在第三章，我们讨论了π介子在核子间传递的强相互作用；在第六章，我们重点讨论了强子内部结构的夸克模型，进而讨论了强子的基本性质，以及强子的产生与衰变过程。但简单的夸克模型并没有给出强子内部夸克（部分子）的动力学性质，即它们之间的相互作用具体形式。在上世纪七十-八十年代建立的量子色动力学(QCD)理论成功的回答了这个问题。

7.1　量子色动力学简介

1954年，杨振宁和罗伯·特米尔斯(Robert Mills)将电磁场U(1)规范不变性的思想推广到SU(2)群，发现了非阿贝尔规范场的重要特点，人们也称其为Yang-Mills规范场。1967年，温伯格、色拉姆和格拉肖将其应用到$SU(2)\times U(1)$群，提出了电磁相互作用和弱相互作用的统一理论[2]。1973年，戴维·格罗斯[3]，弗兰克·维尔切克[4] 和戴维·波利策[5] 引

[1] James D. Bjorken, 1934.6.22-，美国理论物理学家。

[2] 这将是我们下一章讲述的内容。

[3] David Jonathan Gross (1941.2.19-)，美国理论物理学家。1966年在加州大学伯克利分校获得博士学位。1973年与他的博士生F. Wilczek证明了$SU(3)_c$强相互作用的渐进自由性质，与维尔切克和波利策分享了2004年的诺贝尔物理学奖。

[4] Frank Anthony Wilczek(1951.5.15-)，美国理论物理学家。因证明强相互作用的渐近自由性质与Gross和Politzer分享了2004年的诺贝尔物理学奖。

[5] Hugh David Politzer (1949.8.31-)，美国理论物理学家。1974年在哈佛大学获得博士学位，师从Sidney Coleman。在读博期间，在他发表的第一篇学术论文中独立证明了QCD的渐进自由性质，与格罗斯和维尔切克分享了2004 年的诺

入$SU(3)$规范群建立了描写强相互作用的量子色动力学理论[231]。

7.1.1 强相互作用拉氏量和费曼规则

类比于描写电子和光子之间电磁相互作用的量子电动力学拉氏量，我们可以写出描写夸克、胶子之间强相互作用的拉氏量。只不过由于上一章引入的描写相互作用的颜色是三种，量子色动力学的规范群只能是非阿贝尔的$SU(3)$群，夸克在颜色空间属于$SU(3)$群的基础表示“3”。与量子电动力学类似，我们要求体系的拉氏量在定域$SU(3)_C$ 规范变换下保持不变。为了满足这个要求，需要把对夸克波函数的微商变成协变微商。引入的规范玻色子场-胶子场$A^{a\mu}(x), a = 1, ...8$属于$SU(3)_C$ 群的伴随表示，所以有8个不同的胶子。对于每一味道的夸克，我们有

$$D^\mu q_\alpha \equiv \left[\partial^\mu - i g_s \frac{\lambda^a}{2} A^{a\mu}(x)\right] q_\alpha \equiv \left[\partial^\mu - i g_s A^\mu(x)\right] q_\alpha, \tag{7.1}$$

其中$\alpha = 1, 2, 3$ 表示夸克的颜色指标，$\lambda^a/2$ $(a = 1, 2, \ldots, 8)$ 是$SU(3)_C$ 基础表示的8个生成元。矩阵λ^a 是无迹的盖尔曼矩阵，且满足第5.6.3节(5.134,5.135)式所示的对易关系和反对易关系。强相互作用的强度用耦合常数g_s来表示，通常定义$\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$。

我们要求$D^\mu q_\alpha$ 和夸克波函数q_α具有完全相同的变换方式，即

$$(D^\mu\ q_\alpha)' = U\ \ (D^\mu\ q_\alpha) \tag{7.2}$$

进而导出协变导数和胶子场的规范变换性质:

$$D^\mu \to (D^\mu)' = U\, D^\mu\, U^\dagger\,, \quad A^\mu \to (A^\mu)' = U\, A^\mu\, U^\dagger - \frac{i}{g_s}\,(\partial^\mu U)\, U^\dagger\,. \tag{7.3}$$

在无穷小$SU(3)_C$ 变换下，

$$U = 1 - i\frac{\lambda^a}{2}\,\theta^a \tag{7.4}$$

其中规范参数$|\theta^a| \ll 1$，q_α 和$A^{a\mu}$ 的规范变换为

$$q_\alpha \longrightarrow (q_\alpha)' = q_\alpha + i\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta}\theta^a\, q_\beta\,, \tag{7.5}$$

$$A^{a\mu} \longrightarrow (A^{a\mu})' = A^{a\mu} + \frac{1}{g_s}\,\partial^\mu(\theta^a) - f^{abc}\,\theta^b\, A^{c\mu}\,. \tag{7.6}$$

显然，胶子场A^a_μ的规范变换要比QED光子场$\mathcal{A}_\mu$的变换复杂的多。

为了构造一个规范不变的胶子场的动能项，我们引入对应的场强张量：

$$G^{a\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g_s\, f^{abc}\, A^{b\mu}\, A^{c\nu}\,. \tag{7.7}$$

贝尔物理学奖。

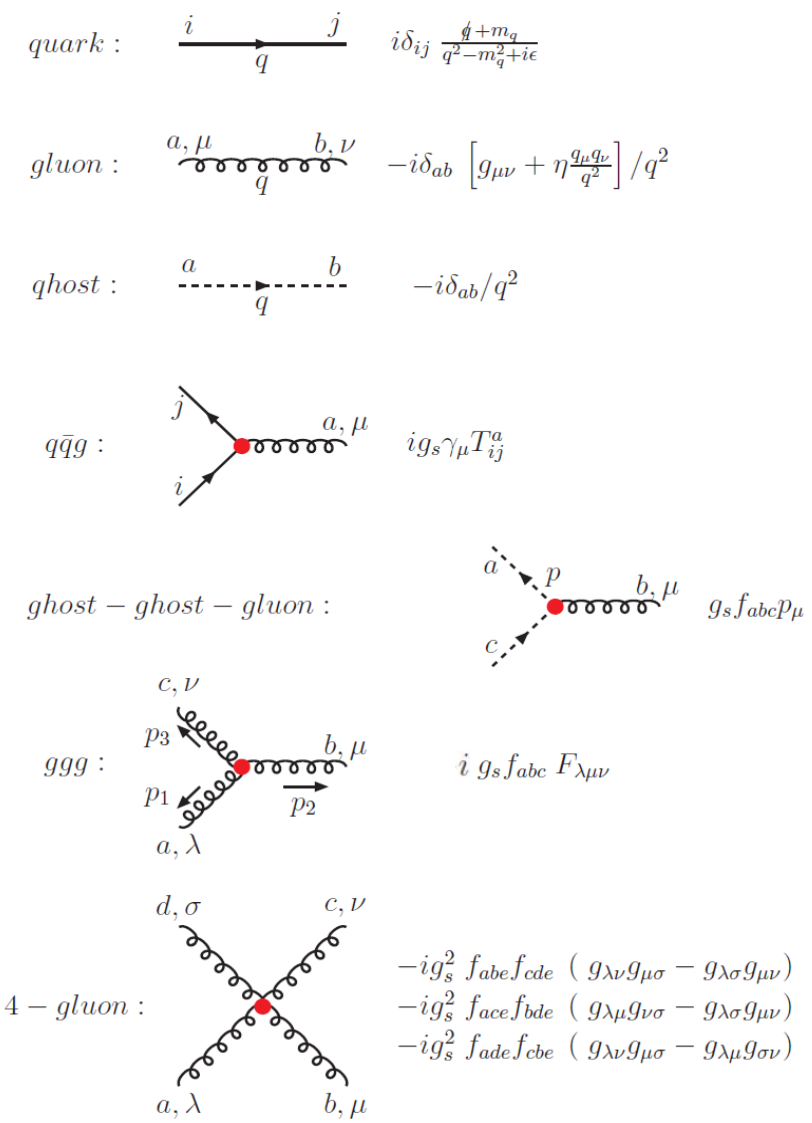


图 7.1: QCD传播子和QCD顶点因子费曼规则。$F_{\lambda\mu\nu}(p_1,p_2,p_3) = g_{\lambda\mu}(p_1-p_2)_\nu + g_{\mu\nu}(p_2-p_3)_\lambda + g_{\nu\lambda}(p_3-p_1)_\mu$。

在规范变换下，场强张量$G^{\mu\nu}$的变换为

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow (G^{\mu\nu})' = U\, G^{\mu\nu}\, U^\dagger . \tag{7.8}$$

对色指标的求迹为$\mathrm{Tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\, G^{a\mu\nu}G^a_{\mu\nu}$，在规范变换下保持不变。对胶子动能项做适当的归一化，我们最后得到在$SU(3)_C$ 定域规范变换下不变的QCD拉氏量:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} \equiv -\frac{1}{4}\, G^{a\mu\nu}G^a_{\mu\nu} + \sum_f \bar{q}^\alpha_f\, (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)\, q^\alpha_f + g_s\, A^{a\mu} \sum_f \bar{q}^\alpha_f\, \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} q^\beta_f . \tag{7.9}$$

上式中的第二项给出了各个夸克场的动能项，由此可以导出对应的夸克场传播子。第三项给出了夸克-胶子相互作用项: $\bar{q}qg$ 顶角耦合。类似于量子电动力学的情况，正则量子化后上述两项给出的费曼规则在图7.1的第一行和第四行中分别给出。

(7.9)式中QCD拉氏量的第一项可以展开分解为如下几个部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm QCD} &= -\frac{1}{4}\left(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu}\right)\left(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu\right)\\ &\quad -\frac{g_s}{2}f^{abc}\left(\partial^\mu A^{a\nu}-\partial^\nu A^{a\mu}\right)A^b_\mu A^c_\nu-\frac{g_s^2}{4}f^{abc}f^{ade}A^{b\mu}A^{c\nu}A^d_\mu A^e_\nu .\end{aligned} \tag{7.10}$$

上式中的第一行是胶子场动能项，由此可以导出对应的胶子传播子。第二行给出了三胶子和四胶子自耦合项。由于非阿贝尔理论的非线性（存在三规范场、四规范场自相互作用）使得问题复杂化，采取类似量子电动力学的正则量子化不能保持理论的协变性[16]。1967年，法捷耶夫[6]和波波夫(V.N. Popov)提出了在路径积分量子化中引入辅助鬼场(Ghost)的办法，既能保持理论的规范不变性又能保持协变性的量子化方案。这个方案所付出的代价是，费曼规则中多了没有物理自由度的鬼场。需要注意的是，鬼场是辅助场，所以不能出现在外线，其对于抵消规范玻色子的非物理自由度(时间分量和纵向自由度)具有重要作用。以上导出的QCD 费曼规则包括胶子和鬼场传播子以及QCD 相互作用顶点费曼图在图7.1 中给出。

类似于带电费米子和光子的电磁耦合顶点，在强相互作用的费曼规则中，我们有夸克和胶子的强相互作用耦合顶点。类似地，把电子巴巴（电磁）散射领头阶费曼图（图4.16）中的光子换成胶子，电子换成夸克，我们就得到QCD中正反夸克散射的领头阶费曼图。利用上面给出的费曼规则，很容易写出其散射矩阵元

$$\mathcal{M}^{(t)}=\left[\overline{v}(p_2)\gamma^\alpha v(p_1)\right]\frac{g_s^2}{q^2}\left[\overline{u}(p_3)\gamma_\alpha u(p_4)\right]T^a_{ij}T^a_{kl}, \tag{7.11}$$

其中$T^a=\lambda^a/2$是颜色矩阵。可以看出这里QCD强相互作用的散射矩阵元在领头阶的树图层次，跟电磁散射矩阵元的主要差别就是这里多了(7.11)式最后的颜色自由度。

在4.3.2节我们讨论过R值测量的实验，即电磁散射过程$e^+e^-\to q\bar{q}$的过程，这个过程的末态在理论上是夸克和反夸克，由于夸克禁闭，在实验上（反）夸克必然会变成强子才能在探测器上被探测到。强子化的过程是非微扰的，非常复杂，但是在能量很高时，例如质心系能量超过30GeV的时候，（反）夸克大概率会强子化为一个喷注[7]，这个喷注包含至少10个强子（大部分是π介子），这些强子的动量方向基本一致，形成一束不太容易分辨个体的强子喷注。因此R值测量的实验末态大多是两个强子喷注。

在讨论过R值测量的实验时，我们还曾经指出应该考虑强相互作用的修正。这些QCD修正中最重要的一个费曼图就是如图 7.2 左图所示，夸克线可以直接辐射出胶子。1979年，这个过程首先在德国汉堡的正负电子对撞机PETRA 上的四个实验：Mark-J、TASSO、PLUTO和JADE 实验组发现。他们观察到了如图 7.2的右图所示的三喷注实验事例，由于正反夸克从QCD真空中都是成对产生，奇数的三喷注事例里面，有一个必然是胶子形成的。通过对末态角分布的测量研究，实验也确定了，其中一个喷注的自旋应该是1。这也是胶子首次被实验发现的过程。

[6]Ludwig D. Faddeev(1934.3-2017.2)，俄罗斯理论物理学家和数学家，中国科学院外籍院士，曾获狄拉克奖、马克

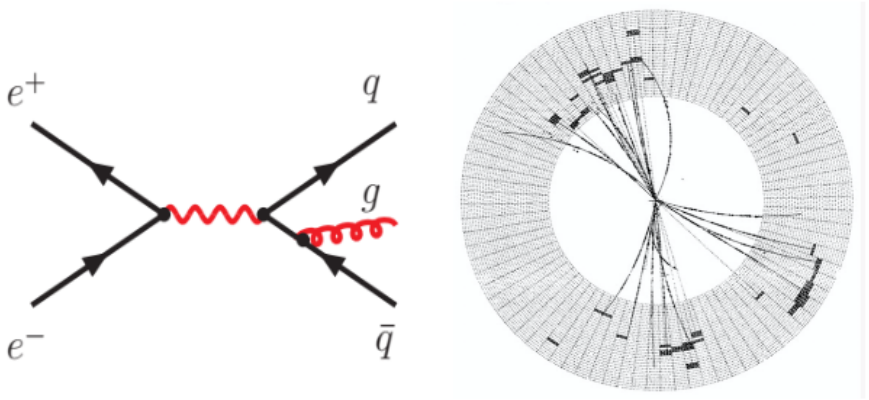


图 7.2:　左图：$e^+e^- \to q\bar{q}g$的领头阶费曼图；右图：PETRA正负电子对撞机上JADE实验组观察到的三喷注事例。

7.1.2　手征对称性

上一章中我们曾经指出，在u,d夸克质量相等的极限下，强相互作用有很好的同位旋SU(2)对称性，或者说，在夸克质量相等的情况下，这些夸克在强相互作用下是不可区分的，这可以通过两味夸克波函数

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

在拉氏量(7.9)式的规范变换不变性体现出来。实际上u,d夸克质量很小，接近于0。如果我们忽略其质量，QCD对于这两个夸克的拉氏量(7.9)式可以简化为

$$i\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu D_\mu \psi \;\; = \;\; i\,\bar{\psi}_L\,\gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\,\bar{\psi}_R\,\gamma^\mu D_\mu \psi_R, \tag{7.13}$$

其中左右旋费米场的定义已经在(4.149)给出。由于狄拉克的费米子场是由四个分量组成的，分成左右旋两部分之后，显然就只有两个分量，这种表示也被称为外尔费米子场。容易看出，左右旋费米场在手征变换

$$\psi_L \;\; \to \;\; exp(i\theta_i \mathcal{P}_L \tau_i)\psi_L \tag{7.14}$$

$$\psi_R \;\; \to \;\; exp(i\theta_i \mathcal{P}_R \tau_i)\psi_R \tag{7.15}$$

下是不变的。$\tau_i(\ i=1,2,3)$是泡利矩阵。可以看出，费米子的左右旋分量分属于不同的封闭的对称群，也就是说，QCD 的拉氏量满足$SU_L(2)\times SU_R(2)$的对称性，它是在u、d夸克质量为0的极限条件下得到的。

另一方面，在外尔费米子场的定义下，QCD拉氏量中的费米子质量项可以改写为

$$-m\bar{\psi}\psi \;\; = \;\; -m\bar{\psi}_L\psi_R - m\bar{\psi}_R\psi_L. \tag{7.16}$$

斯·普朗克奖等多种奖项。

[7]所谓“喷注”(Jets) 是指在高能对撞机实验中由高能粒子对撞产生的“一簇高速飞行的高能强子流”。

也就是说，夸克质量项把左右旋的夸克场耦合在了一起。这说明了为什么包含夸克质量项的QCD拉氏量对称性只有$SU(2)$的同位旋对称性，而没有$SU_L(2)\times SU_R(2)$的手征对称性。

由于实验上并没有简并的粒子存在，手征对称性显然是破缺了的。这个对称性的破缺需要通过对称性自发破缺的机制来实现。在这个机制中有一个戈德斯通定理指出[164, 232]：任何连续对称性的自发破缺必然伴随着自旋为零的零质量玻色子。这样的玻色子也被称为戈德斯通粒子。具体地，对于手征对称性的自发破缺是通过所谓的σ模型理论来实现的。在描写同位旋为1的$\vec{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$介子的拉氏量中引入一个同位旋为0的标量$\sigma$粒子

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma)^2+(\partial_\mu\vec{\pi})^2\right]+\frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)-\frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\vec{\pi}^2)^2. \tag{7.17}$$

对于上式后两项的势能项求偏导数，在$\mu^2>0$的条件下，可以得到势能项的极小值位置

$$\sigma^2+\vec{\pi}^2 = \mu^2/\lambda\equiv v^2. \tag{7.18}$$

上式的v也被称为真空期望值，为了保留拉氏量中尽量多的对称性，我们取同位旋为0的σ粒子的基态场不为0

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = v,\qquad \langle 0|\vec{\pi}|0\rangle = 0. \tag{7.19}$$

为了在微扰论中明显表示场的激发态，我们重新定义、平移σ场

$$\sigma' = \sigma - v. \tag{7.20}$$

在新的场定义下的拉氏量则改为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\sigma')^2+(\partial_\mu\vec{\pi})^2\right]-\mu^2\sigma'^2-\lambda v\sigma'(\sigma'^2+\vec{\pi}^2)-\frac{\lambda}{4}(\sigma'^2+\vec{\pi}^2)^2. \tag{7.21}$$

上式中π场的平方项消失了，这代表π介子就是戈德斯通定理要求的零质量戈德斯通粒子，而σ'场则在对称性自发破缺中得到了质量$m_{\sigma'}=\sqrt{2}\mu$.

u,d夸克的质量虽然很小，但是却并不严格为0，因此QCD拉氏量所具有的这种手征对称性是近似的对称性或者有明显破缺的对称性。由于这种明显破缺的存在，因而π介子质量并不为0，但是相比于其它介子来说，π介子质量明显小了很多，其作为戈德斯通粒子的性质也很明显。QCD的手征对称性破缺是自发对称性破缺和明显对称性破缺的共同作用造成的。如果我们进一步把奇异夸克的质量也忽略，则QCD 拉氏量具有的手征对称性进一步扩充为$SU_L(3)\times SU_R(3)$，戈德斯通粒子的数量也从SU(2) 群生成元的个数3，增加到SU(3) 群生成元个数8，包括四个K 介子等。显然夸克质量越大，手征对称性的破缺也就越大。由于奇异夸克的质量比上、下夸克的质量重一到两个数量级，因此QCD 拉氏量的$SU_L(3)\times SU_R(3)$ 的手征对称性比$SU_L(2)\times SU_R(2)$ 的手征对称性破缺更大。

实际上，手征对称性的历史非常悠久，是在QCD理论建立之前就在强相互作用的有效理论中被发现了。由于QCD理论在低能强相互作用中的非微扰性质，其适用范围只局限在远大于1GeV的能尺度之上，而手征微扰论则是描写低能π介子和核子散射及相互作用的最有效理论工具，除了在低能粒子物理中的应用之外，其在核物理理论和强子物理中还有非常广泛的应用，(7.17)式的手征拉氏量也应该包含π介子场和核子场的相互作用[11]，手征拉氏量能够很好地描述低能强子之间的强相互作用性质。

7.1.3　渐进自由与夸克禁闭

夸克禁闭：　理论上，当夸克之间距离比较大，或者当动量转移较小时，夸克之间的相互作用变的很大；夸克被“禁闭”在强子内部，因此实验上我们观察不到“自由夸克”或者“自由胶子”，QCD的这种性质被称为夸克禁闭。最初，夸克禁闭只是一个理论假设，1974年，赫拉尔杜斯·霍夫特[8] 在一维时间和一维空间下，同时证明了强相互作用的渐近自由和夸克禁闭[233]。同一年，肯尼斯·威尔森[9]在利用分立的欧几里德点阵代替连续时空（格点规范理论）情况下也证明了夸克禁闭[234]。人们一直试图从QCD的基本原理出发来推导出这个结论，但是目前看来离彻底解决这个问题还有一定距离。

渐进自由：　当夸克之间距离很小，或者当动量转移Q^2很大时，夸克之间的相互作用变的很弱，可以近似地看成自由粒子，这个性质被称为渐进自由(asymptotic freedom)。强相互作用的渐近自由性质使得我们在高能的量子色动力学计算中，可以很方便地利用微扰论来计算物理过程，而不用担心收敛性问题。

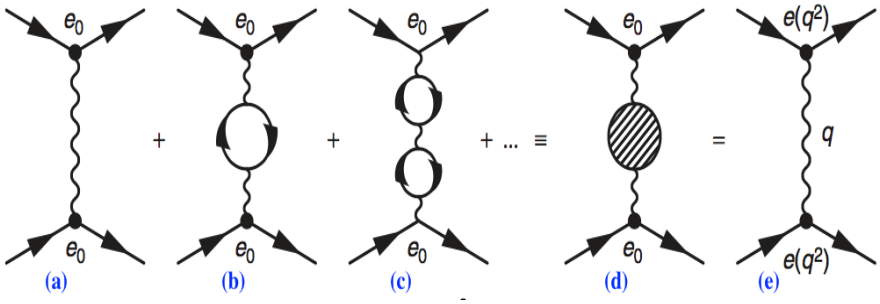


图 7.3:　量子电动力学耦合常数e_0的圈图修正费曼图和重整化。

为了解释QCD渐近自由的性质，我们首先来讨论电磁相互作用，其库仑势$V(r) = -e^2/(4\pi r)$，在傅里叶变换下，转换到动量空间，可以得到

$$V(Q^2) \;=\; \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = -\frac{e^2}{Q^2}. \tag{7.22}$$

[8]Gerardus 't Hooft (1946.7.5-)，荷兰物理学家，与他的导师韦尔特曼因证明了规范场的可重整性质而获得1999年度诺贝尔物理学奖。

[9]Kenneth Geddes Wilson(1936.6.8 – 2013.6.15)，美国理论物理学家。因其对相变理论的贡献而获得1982年诺贝尔物理奖。威尔森是盖尔曼的学生，1961年在加州理工学院获得博士学位，他在规范场重正化理论和格点场论方面也有重要贡献。

这对应于如图7.3(a)所示的正负电子库仑散射的树图矩阵元，其正比于耦合常数平方和光子的传播子。回顾一下在第4.2.3节所述的量子电动力学费曼规则，除了树图以外，我们还需要考虑如图7.3(b)(c)等的圈图高阶修正，这些高阶计算还会引起无穷大的发散问题，使得光子传播子不再是$1/Q^2$的形式，(7.22)式变得非常复杂，为了解决发散的问题，人们采取如图7.3(e)的方式重新定义耦合常数来吸收这些发散和有限的贡献，使得光子传播子继续保持$1/Q^2$的形式。把图7.3所示的所有圈图贡献求和，可以得到

$$\alpha(Q^2) \equiv \frac{e^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{\alpha(0)}{1-\frac{\alpha(0)}{3\pi}\ln\frac{Q^2}{m_e^2}}. \tag{7.23}$$

上式中分母的负号表明，量子电动力学的耦合常数随着Q^2的增大而变大，当然这个变化非常缓慢。例如原子物理中$\alpha(Q^2 \simeq 0) = 1/137.035999084$，而$\alpha(Q^2 = M_W^2) = 1/128$。

精细结构表达式(7.23)中的分母，在Q^2非常大的时候有零点，使得(7.23)式发散，这被称为**朗道奇点**，这时候的相互作用能量在10^{280}MeV处（相互作用距离小到了10^{-291}厘米），远超过了普朗克尺度，是不可能达到的能量区域。这显然也是微扰论不适用的区域，或者说是未知的新物理必然会出现的区域。

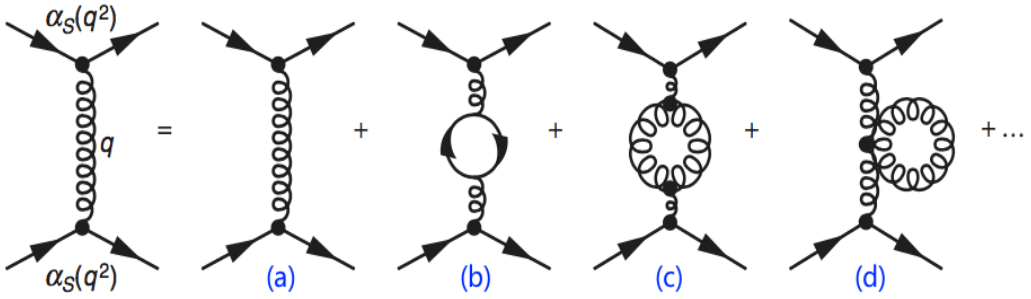


图 7.4: QCD耦合常数α_s的重整化和领头阶及一圈图修正费曼图。

与量子电动力学中的光子场情况不同，QCD是非阿贝尔规范场，胶子场有自作用，戴维·格罗斯、弗兰克·维尔切克和戴维·波利策在1973年发现[231, 235]，强相互作用的耦合常数α_s 与量子电动力学的精细结构常数α 有很大不同。在计算夸克-夸克散射的圈图修正的时候，除了夸克圈图的修正，还会有图7.4(c)和(d) 所示的胶子圈图修正。格罗斯等人的计算发现胶子（玻色子）圈图的贡献与夸克（费米子）的贡献符号相反，类似(7.23)式的量子电动力学领头阶对数求和结果，对于量子色动力学我们得到

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g_S^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}\beta_0\ln\frac{Q^2}{\mu^2}}, \tag{7.24}$$

其中

$$\beta_0 = (33-2n_f)/3, \tag{7.25}$$

n_f 是夸克味道数目。由于目前标准模型只有三代，6种夸克味道，因此$\beta_0 > 0$。β_0的符号表明，量子色动力学的耦合常数随着Q^2 的增大而减小，证明QCD有渐近自由的性质。由于只有非阿贝尔规范场才有规范场的自相互作用，西德尼·科尔曼[10] 和格罗斯也证明了只有非阿贝尔规范场理论才可能是渐近自由的[236]。可以看出，当夸克的味道数目大于或者等于17的时候，(7.24)式分母的符号就会变号了，渐进自由的性质就会消失。

QCD的渐近自由性质是利用部分子模型解释深度非弹性散射的理论基础，也使得我们能够利用QCD微扰理论计算大动量转移情况下的强相互作用物理量。但是，另一方面，也意味着我们在小Q^2区域，微扰方法就会失效，因此我们不能像QED那样可以在长程极限定义耦合常数。虽然原则上强相互作用的物理可观测量应该是重整化标度无关的，但是在理论计算到有限阶的情况下，物理量都是与重整化标度相关的。技术上，在QCD中，物理可观测量的理论计算值都可以表示成依赖于耦合常数$\alpha_s(\mu)$的表达式，而$\alpha_s(\mu)$本身随重整化能标μ的跑动，变化比较大。

为了使得(7.24)式的耦合常数公式可以与实验比较，我们需要给出一个与重整化标度无关的表达式。通过简单的数学处理，(7.24)式可以改写为

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} - \frac{\beta_0}{4\pi}\ln Q^2 \;=\; \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - \frac{\beta_0}{4\pi}\ln \mu^2. \tag{7.26}$$

可以看出，上式的左边只是Q^2的函数，而右边只是μ^2的函数，等式成立的条件显然是它们等于一个共同的常数。设这个常数为

$$-\frac{\beta_0}{4\pi}\ln \Lambda^2, \tag{7.27}$$

则我们很容易就可以得到强相互作用领头阶的耦合常数表达式

$$\alpha_{\rm s}(Q^2) \;=\; \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}. \tag{7.28}$$

原则上，如果我们能够把我们所需的物理量计算到无穷阶，物理量的观测值应该不依赖于重整化能标的选取。根据这个性质，我们可以得到QCD的耦合常数$\alpha_s(\mu)$满足下面的重整化群方程[6, 17]：

$$\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}\alpha_s = \beta\left(\alpha_s\right) = -\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2}\alpha_s^3 - \ldots. \tag{7.29}$$

其中的β函数反应的就是图7.4所示的胶子自能修正计算到不同圈图阶的系数，例如计算到2 圈和3圈图的结果分别是[16, 17, 107]

$$\beta_1 \;=\; 102 - 38n_f/3, \tag{7.30}$$

$$\beta_2 \;=\; \frac{1}{2}\left(2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2\right). \tag{7.31}$$

[10]Sidney Richard Coleman(1937.3.7-2007.11.18)，美国物理学家，盖尔曼的博士生，1962 年获得博士学位，后任哈佛大学教授，戴维·波利策的导师。他是量子场论的权威学者，在有效理论，对称破缺和宇宙学方面都有重要工作。

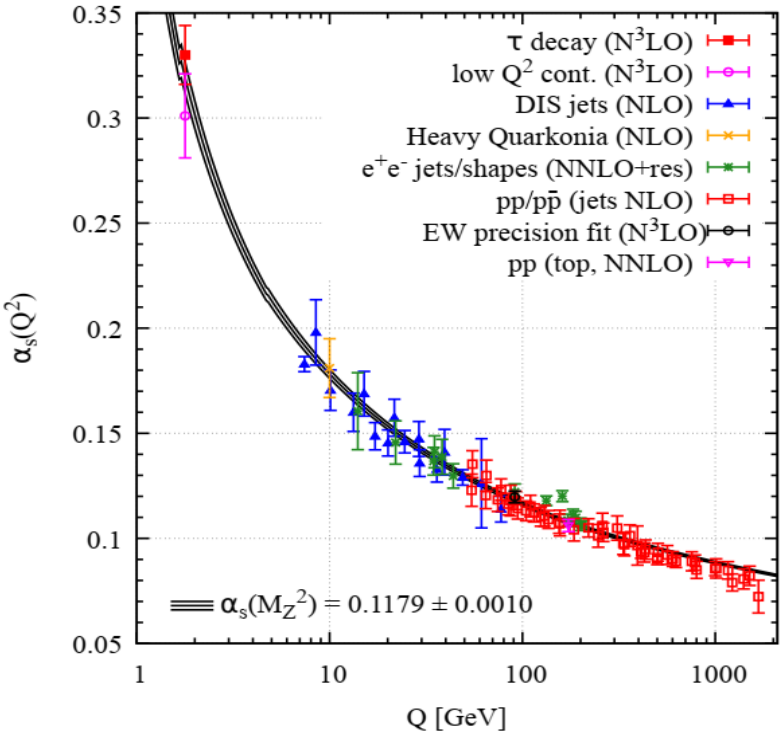


图 7.5: 在不同能区的实验测量得到的$\alpha_s(Q^2)$随能标Q演化的结果[1]，括号内已经标注了抽取$\alpha_s(Q^2)$时所使用的QCD微扰计算的精度。

β 函数目前理论上已经计算到5圈图的水平，因此，公式(7.29)计算到β_4的结果给出α_s 的解析表达式为

$$\begin{aligned}\alpha_s(Q^2) &= \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\left[1-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\ell}{\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}+\frac{\beta_1^2(\ell^2-\ell-1)+\beta_0\beta_2}{\beta_0^4\ln^2\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\right.\\ &+ \frac{\beta_1^3(-2\ell^3+5\ell^2+4\ell-1)-6\beta_0\beta_2\beta_1\ell+\beta_0^2\beta_3}{2\beta_0^6\ln^3\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\\ &+ \frac{18\beta_0\beta_2\beta_1^2(2\ell^2-\ell-1)+\beta_1^4(6\ell^4-26\ell^3-9\ell^2+24\ell+7)}{6\beta_0^8\ln^4\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\\ &+ \left.\frac{-\beta_0^2\beta_3\beta_1(12\ell+1)+2\beta_0^2(5\beta_2^2+\beta_0\beta_4)}{6\beta_0^8\ln^4\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\right],\end{aligned} \tag{7.32}$$

其中$\ell=\ln\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}$。QCD能标因子$\Lambda$是作为微分方程(7.29)的边界条件引进的，其具体数值需要通过实验对于α_s 的具体测量数值反解(7.28,7.32)式来得到。因此，对于不同的圈图近似和不同的能量尺度下不同的夸克味道数目，Λ 的数值都是不同的，而不同能量尺度附近的α_s实验测量值显然也是不一样的。

各个不同的实验组在不同的能区测量得到的$\alpha_s(Q^2)$值显示在图-7.5中，其中包括τ轻子的强子衰变道测量、HERA的喷注实验测量、重夸克偶素衰变实验、强子对撞机上的喷

注实验和电弱精确检验实验的拟合等。在图中的括号内已经标注了抽取$\alpha_s(Q^2)$时所使用的QCD 微扰计算的精度。在质子质子对撞实验中，可以通过对“喷注”的测量和研究来测量强相互作用耦合常数$\alpha_s(Q^2)$的数值及其随能标Q^2的演化。在每一个能量点上，大型强子对撞机的实验测量精度当然不如正负电子对撞机实验。但其优势在于它覆盖了Q^2很大的能区:从$\sim$ 1 GeV 到$\sim$ 2000 GeV，特别是在以前的实验无法达到的高Q^2区域，这些实验表明$\alpha_s(Q^2)$在很宽的能量范围具有渐进自由性质。

不同实验能够测量的$\alpha_s(Q^2)$区域是不同的，为了便于比较不同实验的测量结果，人们一般常用的是，把各个不同实验在不同能量点测量的α_s 值通过当前最精确的α_s理论公式，延拓推导到同一个给定尺度的数值，通常是在Z 玻色子的质量尺度来定义。粒子数据表给出的$\alpha_s(m_Z^2)$的世界平均值为[1]

$$\alpha_s(m_Z^2) = 0.1179 \pm 0.0010, \tag{7.33}$$

这是综合了不同能量点、不同方法的测量值，包括τ轻子衰变、格点QCD计算、深度非弹性散射实验、LHC强子对撞机实验、正负电子湮灭实验以及Z玻色子质量附近实验数据等得出的。

在过去的半个世纪，描写强相互作用的$SU(3)_C$量子色动力学理论不断发展，成为粒子物理标准模型理论的一部分。微扰QCD的相关计算很多都已经达到次次领头阶精度，$\alpha_s(\mu^2 = Q^2)$随能标μ跑动的渐近自由性质得到大量的实验证实。在非微扰能区，尽管从量子色动力学基本原理出发的计算或估算仍然比较困难，但非微扰QCD研究特别是在因子化和格点QCD方面也取得了很大进步。由于强相互作用的禁闭效应，夸克和胶子总是被束缚在很小的费米尺度范围内，很难被实验研究，但是人们也试图利用高能重离子碰撞实验来有效研究QCD 真空的性质。

7.1.4　格点量子色动力学

量子色动力学是描写强相互作用的唯一基本理论，其基本自由度是夸克和胶子，但是由于夸克禁闭效应，自由的夸克不能在实验上被直接观测，所有实验观测量都与强子有关，而夸克束缚为强子态是不能用微扰论定量计算的。目前的非微扰处理强子观测量的唯象方法，包括各种组分夸克模型、QCD求和规则、光锥求和规则以及各种有效理论，而格点量子色动力学是唯一从量子色动力学基本相互作用理论出发的处理非微扰问题的有效方法。

格点量子场论最早是由肯尼斯·威尔森在1974年提出来的[234]。它相当于一种处理紫外发散的正规化方案，采用的是路径积分量子化方案，经过维克(Wick)转动将四维闵可夫斯基时空转动到四维欧几里德时空，在欧几里德时空上把连续时空离散化，由于时空点的个数是有限的，从而避免了积分的发散问题，当计算能力无限增强，时空点个数增多，从而可以无限接近连续时空极限。格点量子色动力学，简称格点QCD只是格点量子场论的一个分支：用格点量子场论方法研究量子色动力学的分支。在微扰论适用区域，格点

规范理论给出和其它正规化方案自洽的结果，但是不同于通常的维数正规化等方案，格点QCD 并不依赖于微扰论，格点QCD 计算任何非微扰物理观测量都是通过计算机数值方法来用格距求和代替路径积分来进行计算。由于非微扰现象集中地出现在强相互作用中，因此大部分从事格点场论的研究人员都是研究格点QCD的，但是需要指出的是，格点场论的方法原则上也可以应用到非QCD的其它理论中。

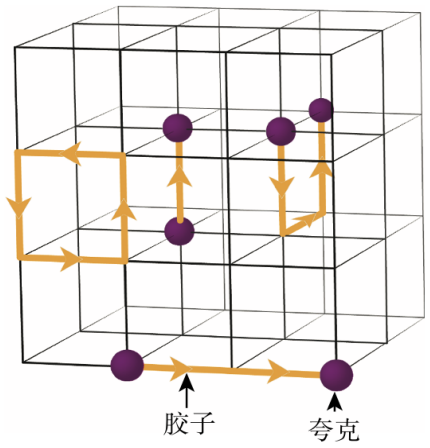


图 7.6: 格点QCD中，夸克和反夸克定义在格点上，而胶子场则定义在相邻格点间的链接上。

如图7.6所示，具体计算时，把夸克和反夸克场定义在格点上，而规范场则定义在相邻两个格点间的链接上。计算机只能处理有限的自由度，因此，格点量子色动力学处理的系统有一个有限大的体积（通常取为长度L 的一个四维盒子），有一个不为0的格距a，那么每一个维度上的格点数目是$N = L/a$，总的格点数目是N^4。

格距a的存在使得体系自动获得了紫外截断$\Lambda \simeq \pi/a$，而有限的体积实际上还使得体系获得了红外的截断$2\pi/L$。因为截断的存在，因此不会有无穷大发散的存在。我们在有限L和有限a的情况下研究量子体系的多自由度性质，真实世界的量子场论体系定义为上述体系在$a \to 0,\ L \to \infty$下的极限，这两个极限分别是格点场论的连续极限和无穷体积极限。由于定域场论的相互作用在距离r增大时候基本都是指数衰减，也由于格点QCD所计算的物理量大多是束缚态问题，无穷体积极限是很容易达到的，而且有很好的连续极限存在，使得物理量不依赖于截断。量子体系中存在粒子的产生和湮灭，其中最轻的是π介子，因此只要格点的体积足够大，以保证π介子不会受到有限体积的影响，经验上来说，当$m_\pi L \geq 4$时，有效体积效应就不明显了，这时候对应的$L \sim 6$fm。

目前格点QCD计算的统计误差主要来源是有限格距a的大小问题。在有限体积L确定的情况下，只有足够小的格距，才能保证所计算物理量的误差足够小。如果既想要最大的体积，又想要最小的格距，对于目前的计算能力来说是达不到的。一般各个格点组根据不同的物理目标进行相应的取舍。如果所研究的物理对象对于轻夸克质量比较敏感，那么通常格点体积要求比较大，这个时候格距a只能取大一点，然后做连续极限外推得

到$a \to 0$的结果；如果对于格距误差要求比较高，那么一般可以把π介子质量取大一些，然后最后再外推到物理的π介子质量上。因此，目前制约格点QCD 理论计算的主要因素还是计算资源的问题，只有当计算能力足够强大，使得格距很小，以使得定量计算更接近于连续极限的情况下，格点QCD 的计算精度才能真正达到物理要求。

1979年，M. Kreutz将蒙特卡洛模拟方法引入格点场论的研究，大大拓展了格点场论的研究范围，使得格点场论计算逐渐成为非微扰研究的主流研究方法。这些计算结果可以直接与实验进行比较并且获得越来越多的验证。随着计算机计算能力的大幅提高，格点QCD数字模拟研究已经逐步成为粒子物理中与高能物理实验研究和传统的理论研究并列的第三大分支。与其它一些理论方法比较，格点场论的重要优势就是人们清楚知道如何系统地改进目前的计算。我们即使知道目前的计算有很多不尽如人意的地方，面临尚无法承受的计算压力，但是计算机发展的“摩尔定律”[11]，也会帮助我们过几年就可以克服。

利用路径积分量子化进行表述，格点QCD 形式上类似于一个统计物理模型。对于正反夸克场ψ、$\bar{\psi}$和规范场A_μ之间的相互作用，相应的有效作用量记为$S[\psi(x), \bar{\psi}(x), A_\mu(x)]$，包含了系统所有物理的配分函数Z，则可以由路径积分给出

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} DA_\mu \, exp(-S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]), \tag{7.34}$$

其中$exp(-S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu])$是粒子场应当服从的玻尔兹曼分布。我们感兴趣的任何一个物理量$O[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$的期望值$\langle O \rangle$可以表达为，

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D\psi D\bar{\psi} DA_\mu O[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \, exp(-S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \tag{7.35}$$

这非常类似于一个统计系统中的系综平均值，正是这种相似性使得蒙特卡洛方法的使用成为可能。相应的，典型的格点QCD 数值计算也可以分为两大步骤：第一，利用蒙特卡洛算法产生正确分布的规范场组态；第二，从正确分布的组态中取样对感兴趣的物理量$O[\phi]$进行测量。以目前典型的计算规模$32^3 \times 64$来看，这相当于进行一个约两千万维的数值积分；如果不使用超级计算机，这样高维积分的计算是无法实现的。

格点QCD 的蒙特卡洛模拟研究为QCD的理论研究提供了非常重要的非微扰方法。传统上，格点QCD在强子谱学和核子结构的计算方面取得了巨大的成就。在上一节的量子色动力学耦合常数α_s的跑动计算以及这一章后面所要讨论的强子结构函数和部分子分布函数计算中都起到了重要作用。近年来，在上一章我们所讨论的多夸克态、胶球、混杂态等奇特强子态的研究方面起到了重要作用[237]。另一方面，格点QCD 在极端条件下的QCD 研究方面，例如下一节的高温高密度QCD 性质研究方面也是至关重要的。

7.1.5　重离子碰撞和夸克胶子等离子体

QCD在高能量下具有渐进自由的性质，但是通常的粒子物理实验中夸克处于这种状态的时间很短，空间范围也都很小，并不能满足实验仪器观测的需要。为了研究QCD真

[11]这个定律说，计算机的计算能力大约每隔18个月就会翻倍。

空的性质，人们想到了在高温(高能量)同时高密度的情况下也许QCD真空会发生相变，形成一种新的状态–夸克胶子等离子体[238]。宇宙学的大爆炸理论认为，宇宙诞生的极早期(约1微妙)是由夸克胶子等离子体组成的。在现今宇宙中的中子星的内核，当重子密度超过了一定临近值，也可能存在这种夸克胶子等离子体。这种相变的临近点以及相变的具体性质需要理论和实验的共同努力来研究，理论上格点QCD的计算表面这个相变是存在的，但却并不是一个严格意义上的相变，而是一种快速的平滑过渡，相变温度约在154MeV，1MeV$\sim 10^{10}$ K。

类似于普通物质固、液、气状态以密度和温度变化为坐标轴的相变图，我们也可以画出一张以不同核物质存在于不同温度和密度区间的核物质相图。如图7.7所示，在低温低密度下，核物质是稀薄的强子体系；在高温低密度下，核物质将通过连续过渡的过程解除禁闭，进入到夸克胶子等离子体相，它存在于高温高密的广阔区域；在低温高密度下，核物质可能会通过一级相变进入新的高密度夸克物质相。

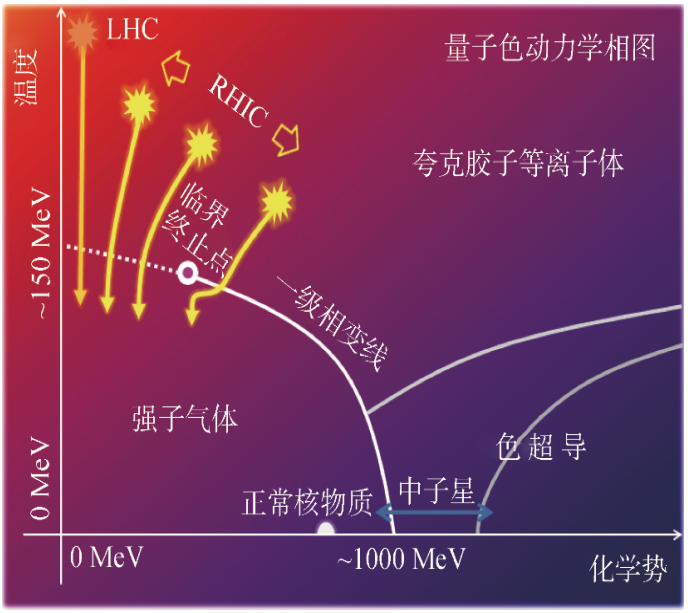


图 7.7: 核物质相图的示意图。

实验上人们设计了相对论性重离子碰撞来研究QCD真空的性质。这已经成为粒子物理和核物理实验中一个重要的研究分支。首先是把原子电离成重离子，然后用高能加速器加速后实现原子核与原子核的高速碰撞。每个核子的能量都超过10GeV以上，这样在碰撞时就完全不同于通常的核子-核子碰撞。首先，是单次碰撞中的多粒子产生现象；其次是在不太小的有限体积内的高温高密度状态。而核子-核子碰撞时，涉及的体积很小，只能观察到粒子的相互作用和反应。

1986年，欧洲核子中心的超级质子同步加速器(SPS)开始原子核碰撞实验，1994年又实现了超重核(铅)的加速器实验。2000 年，美国纽约长岛的布鲁克海文(Brookhaven) 国家实验室的RHIC 对撞机开始运行金原子核和金原子核对撞实验，后来也进行铅原子核的

对撞实验。质心系有效能量为100 GeV。在RHIC重离子碰撞实验中，有Phoenix、STAR等四个实验组。2010年在日内瓦的欧洲核子中心CERN 建造的大型强子对撞机LHC上，TeV量级的重离子碰撞实验开始研究铅核和铅核对撞，加速能量为2.76TeV，这就是Alice实验[239, 240]。著名华裔物理学家李政道先生最早建议用重离子碰撞来探索极端极端条件下的新物质形态–夸克胶子等离子体，并大力推动了相对论重离子碰撞物理这一领域的发展和RHIC 对撞机的上马运行。来自中国的实验物理学家也广泛地参与了RHIC和LHC的实验项目，并取得了许多非常重要的物理成果。

图-7.8显示了两个高能铅核束团的整个碰撞演化过程。首先是两个高能铅-铅离子束团在$t = 0$时刻发生高能对撞，在$t \sim 1fm/c = 3 \times 10^{-24}$ 秒时形成夸克胶子等离子，在$t \sim 5fm/c$ 时发生膨胀，最后在$t \sim 10 - 15fm/c$ 时发生强子化并“freeze-out”。LHC实验中重离子束团的对撞能量达到TeV量级。重粒子碰撞过程中很多核子相互碰撞挤压，有可能发生相变，形成夸克胶子等离子体。这相当于一个很大尺度的QCD相互作用态，而对比于强子内的夸克和胶子相互作用只是小尺度。相对论重离子碰撞实验研究的虽然是原子核的碰撞，但是研究的内容更直接和粒子物理理论特别是QCD真空的性质相关。需要的理论方法直接和量子色动力学、多粒子产生理论即统计力学相关，所以是粒子物理和核物理研究的交叉领域。

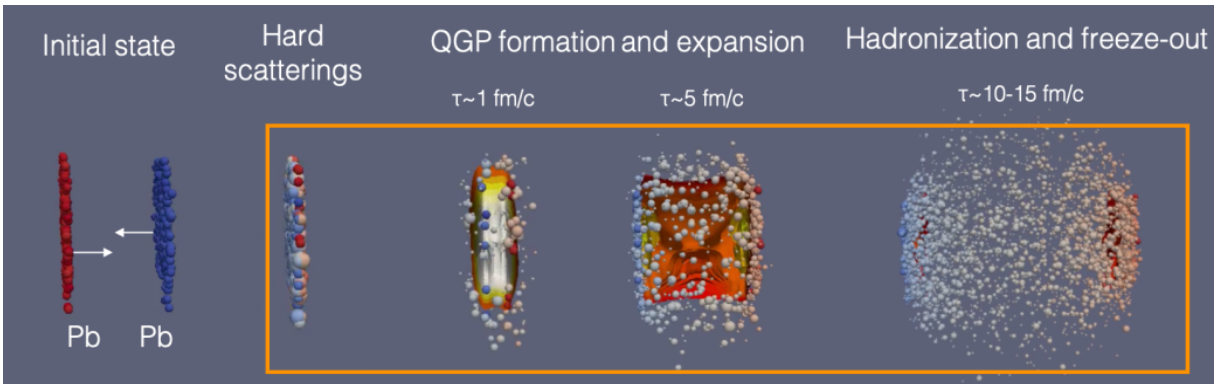


图 7.8: 重离子对撞实验中高能铅-铅离子束团对撞的整个演化过程示意图。

在原子核中两个相邻核子之间的距离大约超过2fm，各核子间距离大于核子半径的两倍，各核子之间是互相分开的，颜色禁闭效应使各个强子之间是相对独立的，这就是典型的强子物质。在量子色动力学中，两个色禁闭的夸克之间的势能随着距离增加迅速增加，如果两个夸克之间有许多其它的夸克，它们就会造成类似于电动力学的德拜屏蔽效应。当两个夸克之间的距离大于德拜屏蔽距离时，它们之间的相互作用就会被屏蔽掉了。当然由于QCD的色禁闭效应，相邻的夸克之间会很快形成一个个色单态的强子。只有在相对论性的重离子碰撞中形成的高温高密夸克胶子物质，才有可能完成相变，产生新的物质态形式：夸克胶子等离子体。

在重离子碰撞实验中，检验是否产生了新的物质态的基本标志是判断是否发生了相

变。从统计物理知道，如果发生的是一级相变，则相变特征非常明显，找到临界点就可以了。但是更多的研究显示，QCD的夸克胶子等离子体相变很可能只是二级相变，这意味着没有明显的临界点。在重离子碰撞实验研究中，判断是否确实实现了从强子物质态到夸克胶子等离子体的相变，人们提出了几个比较有特征性的信号：

1. 直接光子和直接轻子。

   在大量强子产生时，还会伴随有光子和轻子产生。由于强相互作用产生的是强子，光子和轻子往往是由强子再衰变而产生的，这样它们的能量一般比较低。如果产生了夸克胶子等离子体，就可能在夸克胶子等离子体形成初期温度还比较高时，就由夸克反夸克直接发出光子和通过光子产生轻子，这些直接光子和轻子将具有较高的能量，与强子衰变出来的光子和轻子有明显的不同。

2. K/π 比的上升。

   在夸克胶子等离子体中，K介子和π介子的形成都是由夸克与反夸克直接生成的。由于温度$T \sim 200$MeV，s夸克虽比u、d 夸克重，但由于温度高，s夸克和u、d夸克质量差对K介子和π介子相对产额的影响要比强子物质相时小得多。这将表现为K/π比的增长。考虑到s夸克只有一部分形成K^-和$\bar{K}^0$粒子，同时K^-介子产生后也很容易被再吸收，而$\bar{s}$夸克将主要形成K^+ 和K^0介子，并且K^+介子产生后也不易再被吸收，这种增长将特别明显地在K^+/π^+ 上表现出来。在夸克胶子等离子体中正夸克多，反夸克少。

3. J/Ψ压低。

   如果在夸克胶子等离子体中产生了c和$\bar{c}$，它们可以结合J/Ψ粒子，也可以和其它夸克反夸克结合成D和$\bar{D}$ 介子。由于c 和$\bar{c}$数量较少，它们的平均距离较远，德拜屏蔽效应将使它们不容易相互结合成J/Ψ粒子而比较容易就近与其它夸克反夸克结合成D和$\bar{D}$介子；因此和D、$\bar{D}$相比，J/Ψ粒子的产生就受到了压低．而在一般强子物质相中不会有这种机理。

尽管这几个实验现象被作为夸克胶子等离子体出现时带有特征性的信号而提出来，但是理论的研究又表明：即使没有发生相变，在强子物质相的高能量基础上，这几种特征性的信号也都有可能会出现．因此在实验上观察到了这些信号之后，要确切判断是否确实出现了夸克胶子等离子体，还需要理论和实验相配合做艰巨细致的分析工作，特别是需要观察到是否发生了相变。

2005年，实验物理学家对RHIC最初几年的实验结果分析总结，认为“一种新的高温高密物质态”已经产生，它由夸克和胶子组成，但是该物质与预言的状态有极大的不同。该物质几乎不透明，吸收任何穿过的快速部分子的大量能量。

7.2　电子-质子散射

虽然夸克模型很好地解释了强子分类和强子结构的对称性，但是很长一段时间内，强相互作用的散射问题却一直是难以解决的理论问题，早期的研究表明强相互作用的强度/耦合常数大到微扰论失效的程度。即使是最基本的质子-质子弹性散射实验也很难用微扰理论处理。幸运地是，电子和质子的散射实验给我们研究强子结构带来了曙光。所有能量的电子-质子散射实验几乎都可以用电子和质子之间的单光子交换作用来近似。由于这个虚光子和电子以及质子的相互作用都是电子电荷的量级，因而它们正比于精细结构常数$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$，这个很小的数字使得微扰论适用性不存在任何问题。

电子和质子的散射实验早期都是只加速电子的打靶实验，后期才有同时加速电子和质子的对撞机实验。按照质心系能量区分，早期的实验有弹性散射实验和非弹性散射实验，前者指被散射的质子内部没有发生实质变化，后者指质子跃迁到了激发态，或者末态产生了新的粒子。对于末态产生新粒子的实验又称为深度非弹性散射实验。

7.2.1　电子-质子弹性散射

原子核和核子都有一定的大小，具有内部结构。实验上我们一般通过电子与核子的散射实验，来了解核子结构。利用轻子作为入射粒子比利用强子进行散射实验的优点是：**首先，轻子本身没有结构，可以看成点粒子。同时，电磁相互作用和弱作用便于微扰计算，相互作用常数是已知的。因此，轻子和核子散射中的未知量主要是核子结构。** 而核子和核子散射截面大，反应道多，本底复杂难于分析。而且由于强作用吸收截面大，与之相伴随的衍射散射事件也多，这类事件动量交换不大，不利于研究强子结构。另外，强相互作用不能用微扰论，计算困难。

历史上，原子的内部结构是通过卢瑟福α粒子散射实验得到的。由于实验发现有1/8000的α粒子被原子大角度散射，卢瑟福认为原子中必然存在一个集中了绝大部分原子质量和正电荷的“原子核”，因而诞生了原子的核式模型。卢瑟福还通过经典电磁学理论推导出了在量子的情况下也适用的非相对论的“卢瑟福散射公式”(2.74)。卢瑟福散射实验是粒子物理加速器打靶实验的鼻祖，对于研究原子核甚至核子内部结构也完全适用。考虑到核子的尺度远远小于原子，一般用尺度非常小的电子束做探针，对核子进行散射实验，探测原子核的内部结构。在电子能量不太高的情况下，卢瑟福散射公式还是适用的。

现代粒子物理实验，电子能量很高，达到了极端相对论的程度，而且电子也是有自旋的，需要用量子场论而不是经典理论来描写，理论上可以采用量子电动力学计算电磁散射截面和末态粒子角分布，通过和实验测量数据的比较，确定非点粒子的内部电荷分布。对于自旋为1/2 的相对论电子，与自旋为零，电荷为Ze的原子核散射的微分散射截面可以算出为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{Z^2\alpha^2\cos^2(\theta/2)}{4p_0^2\sin^4(\theta/2)\left[1+\frac{2p_0}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]} \tag{7.36}$$

其中p_0为入射电子动量，M为靶核的质量。莫特[12]在1930年得到该公式。与卢瑟福散射公式相比，莫特公式在分子上多$\cos^2(\theta/2)$一项，分母中多了$\sin^2(\theta/2)(2p_0/M)$一项。在小角度时，它们对微分截面影响不大。对高能电子，大角度散射，卢瑟福散射公式和莫特公式才有明显的区别。

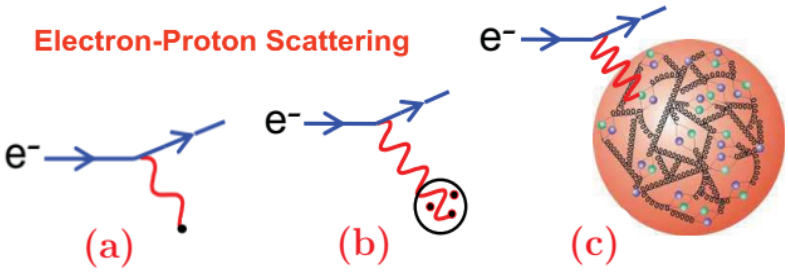


图 7.9: 电子-质子散射的示意图：(a)交换光子波长$\lambda \gg r_p$，电子和质子都是点粒子; (b) $\lambda \sim r_p$，虚光子深入质子内部，但还是弹性散射；(c) $\lambda \ll r_p$，质子被打撒，非弹性散射。

莫特公式虽然是相对论性的公式，但是其适用范围仍然局限于质子作为点粒子的情况，而且忽略了质子的反冲效应。如图-7.9(a)所示，莫特公式适用范围是电子-质子散射过程的弹性散射区：这时电子和质子交换虚光子的能量$h\nu = E - E'$比较低，其波长λ远大于质子的线度$r_p \sim 1\text{fm}$，这时的质子相当于一个无自旋的类点粒子。

当然实际情况是，电子与核子散射时，两者都具有自旋。除了库仑相互作用以外，两粒子间的自旋-自旋，或磁相互作用也应当考虑进去。电子和质子之间交换的虚光子波长远大于质子半径$\lambda \gg r_p$，电子和质子都是点粒子，分别具有磁矩$e\hbar/(2m_ec)$和$e\hbar/(2m_pc)$，则相对论性电子和非极化靶的散射截面公式为

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} &= \frac{\alpha^2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{4p_0^2\sin^4\frac{\theta}{2}\left[1+\frac{2p_0}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}\left\{1+\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right\} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left\{1+\frac{q^2}{2M^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{7.37}$$

这里q^2是电子和质子之间交换的虚光子的四动量平方，上式比莫特散射公式多出一项来自磁散射的$\frac{q^2}{2M^2}\tan^2(\theta/2)$。在大角度和高能量转移情况下，这一项变的比电散射项重要。根据经典理论，可以这样理解：**在非常近的距离碰撞时，磁位能($\propto 1/r^2$)变得比电位能($\propto 1/r$)更重要。**

当入射电子的能量持续升高，如图-7.9(b)所示，交换虚光子的波长接近于质子的线度($\lambda \sim r_p$)。这时交换虚光子的波长已经足够短(能量足够高)，可以解构质子的内部结构，散射截面的计算需要考虑质子的内部结构，也就是与质子内的电荷和磁矩分布相关。这时的电子-质子散射是弹性散射和非弹性散射共存的区域。

[12]Nevill Francis Mott (1905.9.30-1996.8.8)，英国物理学家。因对磁学和无序系统的电子结构理论的贡献与美国物理学家范弗雷克和安德森共同获得1977年度诺贝尔物理学奖。

在入射电子能量比较高，交换虚光子的波长小于质子的线度($\lambda < r_p$)，电子-质子弹性散射的截面也变小（上面散射截面公式都反比于电子动量p_0^2）。这时电子-质子散射以非弹性散射为主，入射虚光子不再是与整个质子相互作用，而是与质子内部的部分子相互作用，作用的结果是质子解体。在图-7.9(c)所示的深度非弹性散射连续区，这时入射电子能量非常高，$\lambda \ll r_p$，这时交换虚光子的波长已经非常短(能量非常高$Q^2 \gg M^2$)。虚光子看到的质子不是点粒子，而是由夸克、海夸克和胶子组成的部分子海。

在后两种情况的非弹性散射区，靶核子或者被激发到一个分立能级-共振态，或者有更高的激发能，达到使末态产生一个或者多个π 介子，甚至使得整个质子被打撒。只有在大动量转移的深度非弹性散射区域，电子深入质子内部，才能真正有效探测质子的内部结构。所以我们在下面两节将着重讨论深度非弹性散射连续区。在这一节，我们首先从弹性散射开始讨论。

7.2.2　核子的电磁形状因子

电子只与带电粒子有电磁相互作用(弱相互作用忽略不计)，因此电子和核子的深度非弹性散射探测到的是核子的内部电荷分布函数$\rho(\mathbf{R})$。如果被探测粒子没有自旋，例如某些原子核的情况，电荷分布应该是球对称的，归一化的核内电荷分布$\rho(\mathbf{R})$的三维傅立叶变换为

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d^3\mathbf{R}. \tag{7.38}$$

相应于坐标空间的球对称性，动量空间的分布函数将只是动量大小的函数，我们定义$F(\mathbf{q}^2)$为原子核的形状因子。 由于量子场论物理观测量大多是在能动量空间定义的，所以形状因子才是常见的物理量。

例如，如果原子核内电荷分布函数为汤川分布，

$$\rho(R) = \rho_0 \frac{e^{-mR}}{R}, \tag{7.39}$$

则其形状因子为

$$F(\mathbf{q}^2) = \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right)^{-1}, \tag{7.40}$$

其中$m^2 = 4\pi\rho_0$由$F(\mathbf{q}^2)$ 的归一化条件得到。当原子核的形状因子已知时，可以由反傅立叶变换算出原子核的电荷分布函数。

在能量转移比较小的情况，只需考虑三动量转移。计算表明，由于原子核有一定体积，在此体积中电荷分布函数的傅里叶变换是$F(\mathbf{q}^2)$，则电子对于有一定电荷分布的原子核的微分散射截面为[52]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(\mathbf{q}^2)|^2. \tag{7.41}$$

即在考虑原子核体积及其中电荷分布时，其散射截面公式比莫特散射公式多一个形状因子的平方$|F(\mathbf{q}^2)|^2$。

质子和中子的形状因子：

质子和中子不是点粒子，而且有自旋，其磁矩也是反常的，因而与狄拉克理论预言的点粒子性质有所区别。考虑到上述复杂性，我们必须考虑核子的反常磁矩和电荷分布。我们首先假设核子有四个形状因子：质子的电形状因子$G_E^p(q^2)$ 和磁形状因子$G_M^p(q^2)$；中子的电形状因子$G_E^n(q^2)$和磁形状因子$G_M^n(q^2)$。由于需要考虑洛伦兹不变的公式，这里的四个形状因子的不变量我们改成了四动量q^2，而不再是三维动量$\mathbf{q}^2$的函数。因而这里的形状因子也不能简单解释为核子的电荷或者磁矩分布的傅里叶变换。只有在小q^2极限下才可以近似认为这个自变量代换是不影响这个傅里叶变换的[52]。在量子场论框架下，与虚光子相互作用的是质子的电磁流，其电磁形状因子的定义是

$$J_\mu^p = \bar{\psi}\left[G_E^p(q^2)\gamma_\mu + i\frac{q^\nu \sigma_{\mu\nu}}{2M}G_M^p(q^2)\right]\psi, \tag{7.42}$$

其中q为虚光子的四度动量，也是散射过程的四-动量转移。按照其定义，质子的形状因子归一化为：

$$G_E^p(0) = 1, \quad G_M^p(0) = \mu_p = 2.79\mu_B, \tag{7.43}$$

对于中子的电磁形状因子也可以类似定义，但是由于中子总的电荷为0，因而有$G_E^n(0) = 0$；中子反常磁矩为负数，因而有

$$G_M^n(0) = \mu_n = -1.91\mu_B. \tag{7.44}$$

诺森布鲁斯[13]最早从理论上算出电子和质子弹性散射的截面公式，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left\{\frac{[G_E^p(q^2)]^2 + \frac{q^2}{4M^2}[G_M^p(q^2)]^2}{1+\frac{q^2}{4M^2}} + \frac{q^2}{2M^2}[G_M^p(q^2)]^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}, \tag{7.45}$$

这个公式因而被称为诺森布鲁斯公式，它是根据量子电动力学的领头阶(只有树图)，也就是在单光子交换（玻恩近似）下得到的。在实验上利用高能电子$(0.4-16\text{GeV})$和液氢靶散射测定质子形状因子的工作，验证了诺森布鲁斯公式。对中子的散射，最早是利用对氘和质子的相差法得到的，但实验数据不很精确。实验数据验证了电中性的中子内正负电荷均匀分布的假设，因而有$G_E^n(q^2) \simeq 0$。经过大量的重复实验，人们发现，核子的形状因子$G_M^{p,n}(q^2)$ 和$G_E^p(q^2)$ 对q^2 的依赖关系符合简单的标度定律[55]

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(q^2)}{\mu_n} = G(q^2), \tag{7.46}$$

[13]Marshall Rosenbluth (1927.2.5-2003.9.28)，美国等离子体物理学家。因其在等离子体物理和可控热核聚变方面的贡献而获得1967年的爱因斯坦奖、1997年的美国科学院奖。

也就是说，由实验得到的核子形状因子只有一个是独立的，这个形状因子$G(q^2)$可以很好的用偶极子公式描写

$$G(q^2)=\frac{1}{\left(1+\frac{q^2}{M_v^2}\right)^2}, \tag{7.47}$$

其中$M_v^2=0.71\text{GeV}^2$。由此偶极子公式，通过傅里叶变换可以算出质子内部的电荷分布为指数分布

$$\rho(R)=\rho_0 e^{-M_v R}, \tag{7.48}$$

其均方根半径定义了质子的电荷半径为

$$R=\frac{\sqrt{12}}{M_v}=0.80\ \ \text{fm}. \tag{7.49}$$

形状因子的物理意义：

电磁形状因子描写核子中电荷和磁矩的空间分布。核子的形状因子的存在，表明核子不是点粒子，而是具有一定的大小和电荷分布。 近年来在较高q^2区域，质子的电磁形状因子的实验结果，与偶极子公式符合得很好。现在人们普遍认为，核子内部的电荷分布是如(7.48)式所示的指数型分布。

实际上，1960年以前，当实验数据只限于低q^2值时，人们曾认为可以用一组单极子的总和

$$G(q^2)=\sum_i \frac{g_i}{1+q^2/M_i^2}, \tag{7.50}$$

拟合实验数据。这种形状因子，对应核子中汤川型电荷分布。1959年，Frazer等人提出上述拟合时，曾假定有质量为$q^2=M_i^2(J^P=1^-)$的矢量介子$(\pi\pi)$共振态的贡献存在，也就是ρ,ω介子的贡献。

偶极形状因子(7.47)式的傅里叶变换，对应指数形式的电荷分布(7.48)式，当$R\to 0$时，$\rho(R)\to$ 常数。说明核子中心没有硬核。但这并不意味着质子中一定没有颗粒状的东西，只是在中心没有硬核。

7.2.3　电子-质子非弹性散射

早在上世纪50年代，Robert Hofstadter 在斯坦福大学研究了电子-质子的弹性散射实验，和电子-原子核的弹性散射实验，得到了质子和原子核的电磁半径。1962 年，斯坦福大学为了继续研究质子的结构，成立了斯坦福直线加速器中心(SLAC)，1967年，建成大型电子直线加速器，并达到设计电子束流能量：20 GeV。直线加速器包含3 公里长的电子直线加速器和接收电子的最大能量分别为1.6GeV, 8 GeV和20GeV的3台巨型磁谱仪。如图-7.10所示就是探测器部分，左侧的大筒是作为质子靶的液氢罐。直线加速器出来的电

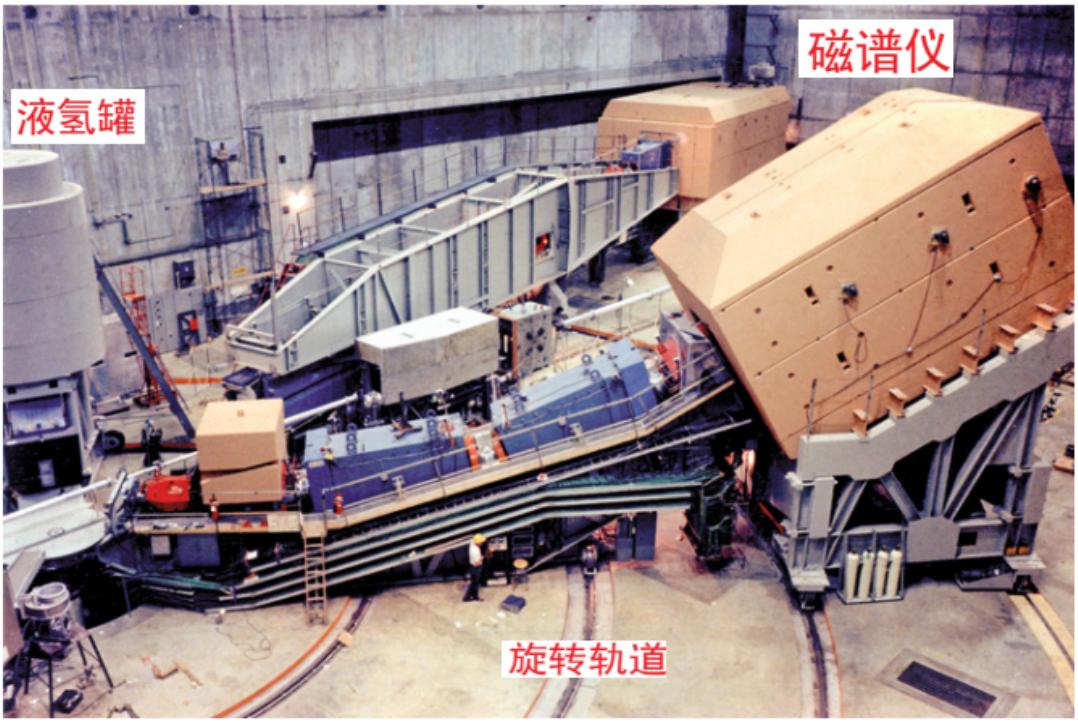


图 7.10: SLAC-MIT实验的探测器示意图。左侧的大筒是作为质子靶的液氢罐。电子被质子散射后，从左侧飞行到右侧的两个大箱型磁谱仪。磁谱仪可以沿圆形轨道转动，以方便从不同的角度对末态散射电子做精确测量。

子被质子散射后，从左侧飞行到右侧的两个大箱型磁谱仪。磁谱仪可以沿圆形轨道转动，以方便从不同的角度对末态散射电子做精细测量。由杰罗姆·弗里德曼[14]，亨利·肯德尔[15]和理查德·泰勒[16] 带领的SLAC-MIT实验组使用上述探测器对电子-质子的弹性和非弹性散射进行了先驱性研究[241–245]。这个实验的设计跟后来的加速器实验不同的是，它不探测末态的强子，而只非常精确地测量被散射电子的四动量，通过能动量守恒计算得到反应中的能量-动量转移，也就是虚光子的四动量。

上述这种只测量反应中一个末态粒子的实验，一般称为**单举过程(inclusive)** 。因为非弹性散射实验的末态超过了两个粒子，而且数目是不定的，被散射的电子的能量和动量方向不再像弹性散射那样受到能动量守恒的限制，都是独立的变量。单变量的诺森布鲁克公式(7.45)必须修改为双变量(E', q^2)的微分截面公式$d\sigma/d\Omega dE'$，其具体形式将在下一节给出。

[14]Jerome Isaac Friedman(1930.3.28-今)，美国实验物理学家。恩里克.费米的学生，1956年在芝加哥大学获得博士学位。因对核子的深度非弹性散射的研究而与亨利·肯德尔和理查德·泰勒分享了1990年的诺贝尔物理奖。

[15]Henry Kendall (1926.12.19-1999.2.15)，美国实验物理学家。

[16]Richard Edward Taylor (1929.11.2-今)，加拿大实验物理学家。

在如图-7.11所示的电子和质子的单举散射过程

$$e^-(k) + p(p) \to e^-(k') + X \tag{7.51}$$

中，X是指除了电子以外的所有末态强子。在质子(靶粒子)静止系，入射和出射电子的四动量k, k'分别为

$$k = (E, 0, 0, E), \qquad k' = (E', 0, E'\sin\theta, E'\cos\theta); \tag{7.52}$$

其中θ 表示末态轻子相对于入射电子运动方向的散射角。散射前质子和散射后所有强子末态的四动量分别为

$$p = (M, \mathbf{0}), \qquad p_X = (M + \nu, \mathbf{q}); \tag{7.53}$$

其中M是质子质量。虚光子的四动量为$q = (\nu, \mathbf{q})$。洛伦兹不变量ν定义为

$$\nu \equiv \frac{p \cdot q}{M} = E - E', \tag{7.54}$$

可以看出，在初态质子静止系，ν等于电子能量转移大小。SLAC-MIT实验中末态的强子系统是没有直接观测的，这个相对于散射轻子反冲的“X”系统的不变质量W可以通过其它量表示出来

$$W^2 \equiv p_X^2 = M^2 + 2M\nu + q^2 \,. \tag{7.55}$$

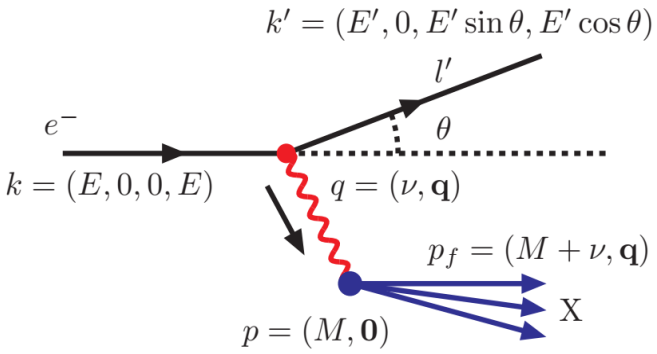


图 7.11:　电子和质子非弹性散射过程初末态粒子的四动量和散射角。

SLAC-MIT实验组只对初末态电子的各种参数做精确测量。实验中交换的虚光子是类空的$q^2 < 0$，我们用$Q^2 = -q^2 > 0$ 表示电子-质子之间交换动量的平方。图-7.12所示是SLAC实验给出的$e^-p \to e^-X$微分散射截面$d\sigma/(d\Omega dE')$对强子末态X的不变质量W的依赖关系[49, 241, 244]，其中入射电子的能量和散射角分别为$E = 10$ GeV，$\theta = 6°$。由于弹性散射截面太大，图-7.12最左侧的$W = M \sim 1$GeV处的弹性散射峰的高度已经除以因子8.5，对应弹性散射过程$ep \to ep$。显然，对于弹性散射，我们可以得到：

$$W^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 = M^2. \tag{7.56}$$

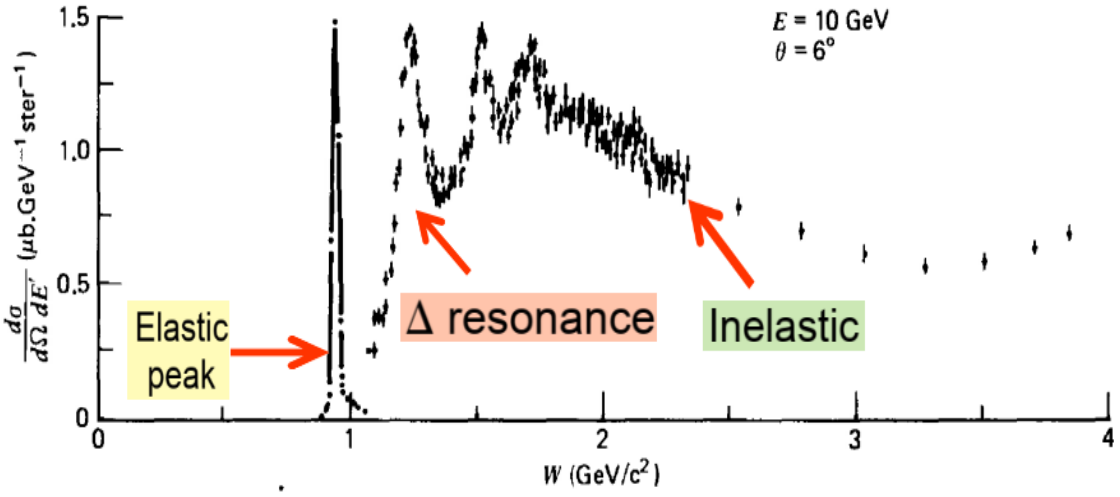


图 7.12: SLAC-MIT实验给出的$E = 10\text{GeV}$、$\theta = 6°$时$e^- p \to e^- X$微分散射截面$d\sigma/(d\Omega dE')$对末态强子不变质量W的依赖关系，其中$W \sim 1$处的弹性散射峰的高度已经除以因子8.5。

所以对弹性散射ν满足关系式: $\nu = \frac{Q^2}{2M}$。

在图–7.12中的共振激发区对应$1 < W \lesssim 1.8$ GeV。这个区域中，弹性散射和非弹性散射共存，在弹性散射本底之上的几个共振峰就对应$\Delta(1232)$等强子共振态。一般考虑矢量为主模型，虚光子能量在矢量介子V的质量附近共振，

$$W \approx M_V^2. \tag{7.57}$$

在弹性散射区和共振激发区，只有一个独立变量，一般取为$Q^2 = -q^2$。

在图-7.12中，电子-质子散射的末态强子不变质量$W \geqslant 1.8\text{GeV}$ 的区域是非弹性散射连续区，非常复杂的多粒子末态呈现出相对于W 的平滑分布。而所谓的“深度非弹性散射”是指$Q^2 \gg M^2 \gg m_e^2$，m_e^2（甚至M^2）将被忽略，在这个区域质子被电子打散，末态“X”是由多个强子组成的。在$W \sim 3$ GeV 和$W \sim 9$ GeV 的区域，还会分别出现粲偶素$(c\bar{c})$共振峰和底偶素$(b\bar{b})$ 共振峰。

在非弹性散射区域，利用初末态电子的四动量，并且忽略电子的质量，我们可以得到[1, 49, 50]，

$$Q^2 \;=\; -q^2 = 2k \cdot k'|_{m_e=0} = 2EE'(1 - \cos\theta) = 4EE' \sin^2(\theta/2)\ . \tag{7.58}$$

通过上式，实际上我们证明了Q^2是正定的，也就是我们之前假设动量转移平方q^2是类空的正确性。通常我们定义无量纲的洛伦兹不变量

$$x \;\equiv\; \frac{-q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{W^2 + Q^2 - M^2}\ , \tag{7.59}$$

这个变量x也被称为**比约肯(Bjorken)变量**，是深度非弹性散射中最重要的运动学变量之一。因为重子数守恒的要求，电子-质子散射的末态中至少要有一个重子，因此，末态强子系统X的不变质量总是大于质子（最轻的重子）的质量，所以$W^2 > M^2$，由(7.59)式可得，x的范围是

$$0 \leq x \leq 1. \tag{7.60}$$

变量x表示电子-质子散射的弹性散射程度，例如，在极端情况下，$x = 1$等价于$W^2 = M^2$，意味着完全弹性散射。在下一节的部分子模型中，我们将证明在极高能量对撞机实验中，x 近似等于核子中被撞击的那个部分子（夸克）动量占质子总动量的分数。

第二个无量纲的洛伦兹不变量是，

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{E - E'}{E}, \tag{7.61}$$

它是表示非弹性程度的参数，它也表示在初态核子静止系入射轻子的能量损失分数$1 - E'/E$。在这个坐标系，末态强子的能量总是大于初态质子的能量，也就是质子的静止质量，因此入射电子总是要损失能量的，所以y的范围也是

$$0 \leq y \leq 1. \tag{7.62}$$

对于入射轻子-核子体系的质心系能量平方

$$s = (p + k)^2 = \frac{Q^2}{xy} + M^2 + m_e^2 = 2ME\ , \tag{7.63}$$

在我们感兴趣的高能区，也就是非弹性散射区，$s \gg M^2$并满足比约肯极限[228, 229]：Q^2和ν 都很大，$x = Q^2/(2M\nu)$ 趋于定值。对于确定的对撞质心系能量，电子-质子非弹性散射的运动学可以由x, Q^2, ν, y中的两个洛伦兹不变量来描写。

在$W \geq 2$ GeV的非弹性散射区，实验发现测量得到的末态电子的微分散射截面和预期不同，呈现出独特的性质。在这个区域，因为质子被打碎并带走更多的能量，末态电子的能量损失很大，所以人们一般预计电子散射截面会大幅度降低。但实际实验测量结果显示：**在进入非弹性散射区以后，末态电子尽管损失很大能量，但出人意料的以更大的几率出现在大角度上。**

弹性散射和非弹性散射截面随Q^2的变化有明显的差异。图-7.13是SLAC-MIT的电子-质子散射实验给出的弹性和非弹性散射微分截面随Q^2 变化关系的结果[241, 242]，在该图中给出的是散射截面与莫特散射截面的比值。图中左侧的很陡的点划线表示$e^- p \to e^- X$弹性散射微分截面(已经用莫特截面做归一化) 随Q^2的变化。右侧的三条线分别表示当末态强子“X”系统的不变质量$W = (2.0, 3.0, 3.5)$ GeV时，$e^- p \to e^- X$深度非弹性散射微分截面随Q^2的变化。显然弹性散射截面对Q^2有很强的依赖性，当Q^2由0.5增加到$\sim 3.6 GeV^2$时，它下降了约3个量级。而非弹性散射截面对Q^2的变化只有比较弱的依赖性。同时可以从图

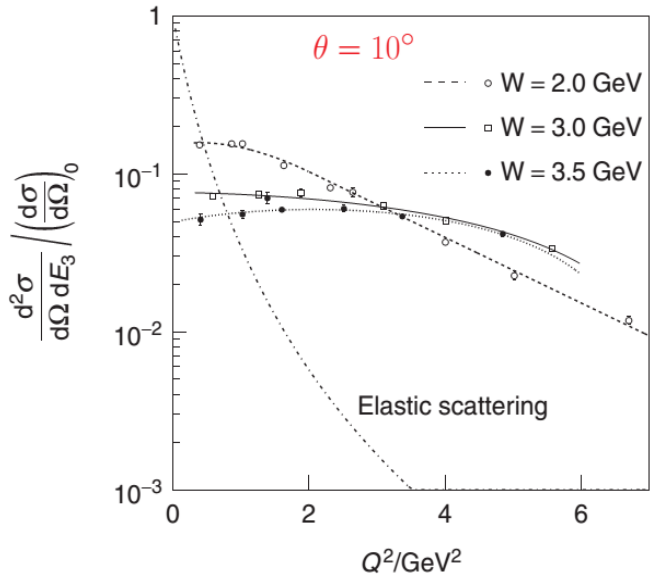


图 7.13: $e^- p \to e^- X$散射过程中弹性和非弹性散射微分截面随动量转移平方Q^2的变化关系[242]。

中看出，当“X”系统的不变质量W的数值变大时，对Q^2的依赖性也趋于减弱。实验结果表明，电子-质子非弹性散射微分截面只有较弱的Q^2依赖性，比约肯和费曼据此认为，当虚光子以很高能量射入到质子内部时，遇到的不是“软”的介子云，而是质子内部的“类点粒子”。

7.2.4 电子-质子深度非弹性散射

在7.2.2节，我们给出了电子质子弹性散射的最一般公式：诺森布鲁斯公式(7.45)，利用上一节给出的洛伦兹不变量Q^2和y，这个公式可以改写为：

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\frac{G_E^2 - \frac{Q^2}{4M^2}G_M^2}{1-\frac{Q^2}{4M^2}}\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)+\frac{1}{2}y^2G_M^2\right], \tag{7.64}$$

为了对上式进行一下简化，我们可以把质子的两个形状因子$G_E(Q^2)$ 和$G_M(Q^2)$ 重新组合得到另外两个函数$f_1(Q^2)$ 和$f_2(Q^2)$，这样上面的微分截面公式简化为

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)f_2(Q^2)+\frac{1}{2}y^2f_1(Q^2)\right], \tag{7.65}$$

由于在弹性散射的情况下，$x=1$，因而由(7.63)式可知，y只是Q^2的函数，所以$f_1(Q^2)$ 只是磁相互作用函数，而$f_2(Q^2)$ 则有电和磁双重贡献。

到了非弹性散射区，由于W^2 是连续的，可以取任意值，Q^2和y均为独立变量，我们可以把上面的弹性散射公式(7.65)推广到非弹性散射，这时的微分散射截面可以写为

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)\frac{F_2(x,Q^2)}{x}+y^2F_1(x,Q^2)\right], \tag{7.66}$$

这个公式表示的是$e^- p \to e^- X$非弹性散射中电子跟一个部分子交换虚光子的散射截面。其中$F_1(x,Q^2)$ 和$F_2(x,Q^2)$ 为无量纲量，称之为**核子的结构函数** ，因为结构函数是x和Q^2双变量的函数，它们不能再解释为质子电荷和磁矩分布函数的傅里叶变换。

在上一节的图7.13中，我们指出在电子-质子散射实验中，非弹性微分散射截面与动量转移平方Q^2的依赖很弱。当$\nu \geq 4$ GeV以上时，(7.66)式中的$F_2(x,Q^2)$与Q^2关系不大，只是无量纲量x的函数。实验数据表明：在ν和Q^2较大的连续区内，$F_2(x,Q^2)$主要依赖于x

$$F_2(x,Q^2) \longrightarrow F_2(x). \tag{7.67}$$

这就是所谓的**"比约肯标度无关性(Bjorken scaling)"** [228, 229]。在后来的SLAC实验中，从两个8 GeV和20 GeV能谱仪收集到的$\theta = 6°, 10°, 18°, 26°, 34°$ 的深度非弹散射实验数据，发现结构函数$F_1(x,Q^2)$也只是单一变量x的函数，遵守比约肯的标度无关性。

在SLAC-MIT实验之后，又有多个实验对于比约肯的标度无关性进行了验证，图-7.14表示20多年来实验测量确定的质子结构函数$F_2(x,Q^2)$ 在不同x参数值之下，随参数Q^2 变化的曲线[1]，其中H1和ZEUS是(正)电子和质子对撞实验，SLAC、HERMES和JLAB是(正)电子打靶实验，BCDMS、E665和NMC是缪子打靶实验。由图-7.14可见：

1. 在x取值很小或者很大的区域，质子的结构函数$F_2(x,Q^2)$对Q^2值变化有比较强的依赖性。

2. 但在$0.02 < x < 0.5$的中间区域，F_2基本上与Q^2无关。

进一步的实验还发现，在Q^2很大的深度非弹性散射区域，质子的结构函数$F_2(x)$和$F_1(x)$ 并不是独立的，它们满足**Callan-Gross关系式**

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \tag{7.68}$$

如图-7.15所示，实验家在3个不同Q^2取值区域对比值$2xF_1(x)/F_2(x)$对x的依赖性做了实验测量，结果支持比值$2xF_1(x)/F_2(x) \sim 1$的结论。这个实验测量结果与我们在下一节从QCD推导出的电子和夸克散射的截面公式比较，可以得出一个重要推论：**部分子(夸克)应该是自旋1/2 的费米子，而不是自旋为0 的玻色子。** 这是因为[42, 50]：如果部分子(夸克)是自旋为0的玻色子，那么将有$F_1(x) \to 0$，这与实验测量结果矛盾。

7.3　部分子模型和部分子分布函数

7.3.1　简单部分子模型

根据前面的讨论我们知道，高能轻子和核子的深度非弹性散射实验数据显示了很好的标度无关性。1968年8月，费曼到SLAC访问，实验组和他讨论了他们发现的电子-质子深度非弹散射的反常结果和比约肯的标度无关性解释。费曼对此很感兴趣，很快基于部分

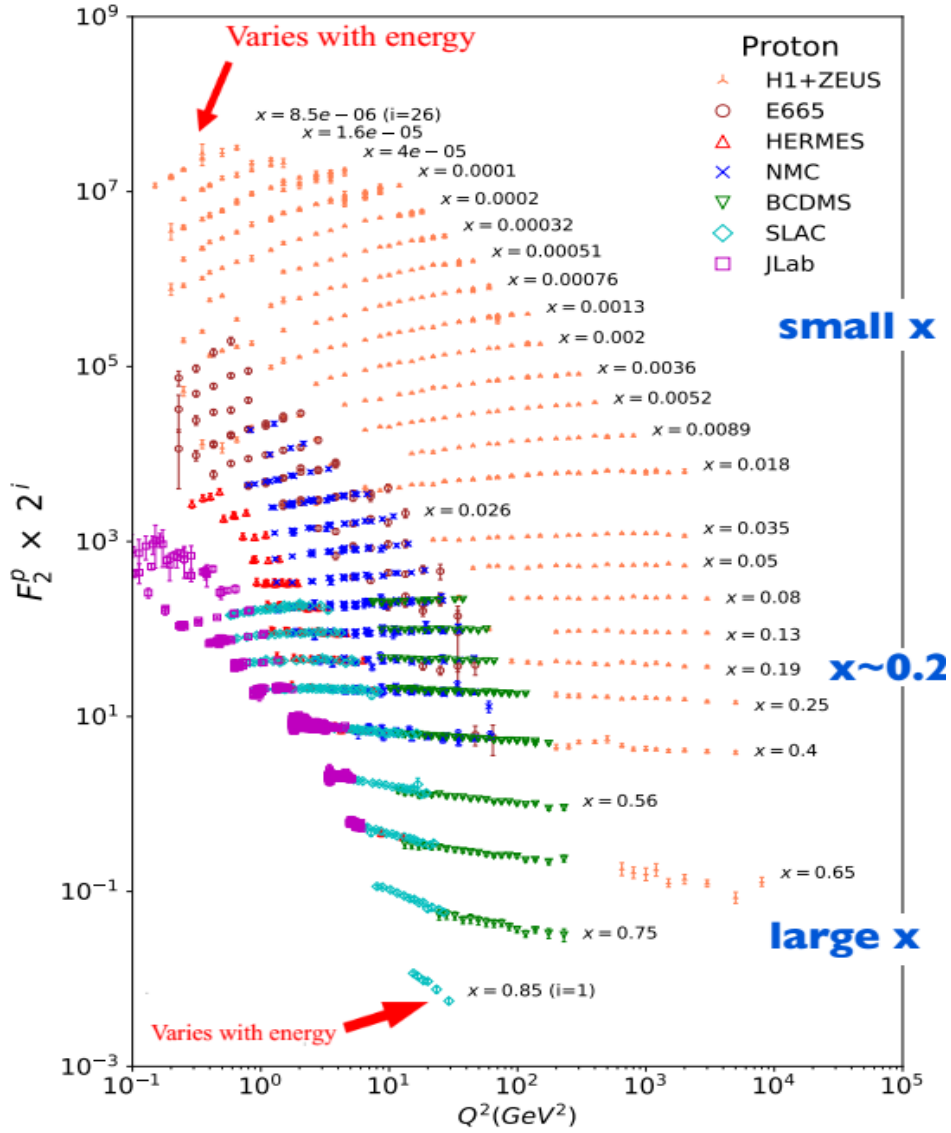


图 7.14: 根据不同实验测量得到的质子结构函数$F_2(x, Q^2)$在不同参数x值下，随Q^2的变化[1]。

子模型解决了这个问题。他把质子看成是由部分子构成的复合粒子，把电子-质子深度非弹散射实验看成是由电子发射的虚光子与质子内部的部分子发生的弹性碰撞，经过计算，直接导出了比约肯标度无关性。

在夸克和胶子的概念被普遍接受之前，费曼在深度非弹性散射实验基础上提出的核子的部分子结构假设是[227]：**核子象一个孤粒子或口袋，其中包含许多部分子。部分子模型把强子看成是由类点、准自由的部分子组成的体系。** 此物理图像清晰，计算比较简单，又能同实验比较，对强子结构和强相互作用研究的深入发展起了重要作用。费曼从深度非弹性散射实验中找到了部分子模型的重要证据。费曼的部分子模型和盖尔曼的夸克模型有异曲同工之妙，部分子包含了夸克、海夸克，还有传递强相互作用的胶子，含有比较丰富的动力学。

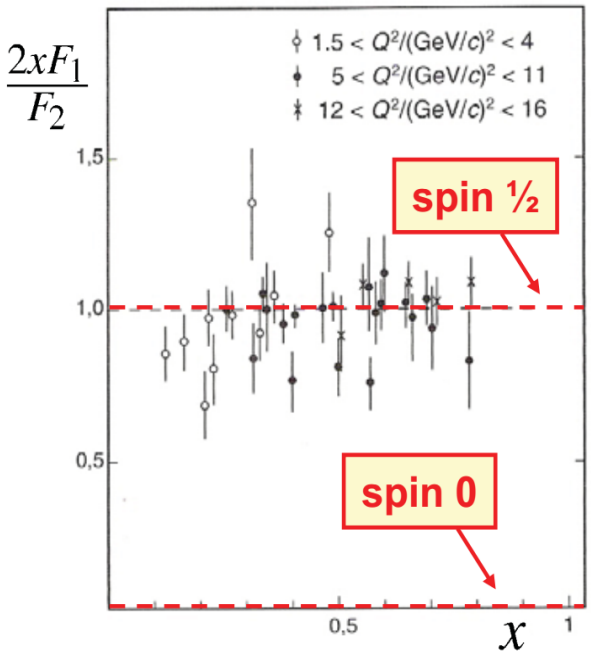


图 7.15: 在不同的x和Q^2取值下，由SLAC的$e^- p$深度非弹散射实验得到的比值$2xF_1(x)/F_2(x)$的实验测量结果[52, 244, 245]。

根据费曼的部分子模型，电子与核子的深度非弹性散射过程，可以分解成电子与组成核子的各个部分子之间的散射过程。如图-7.16所示，

$$e + q \to l' + q'. \tag{7.69}$$

这种图像与轻子和原子核的碰撞类似。当轻子能量很低时，可以认为轻子与整个原子核进行碰撞。但当轻子能量足够高时，轻子和原子核的碰撞可以看成轻子与原子核中某个核子进行了碰撞。这就是所谓的**脉冲近似** (pulse approximation)。在光子和原子的碰撞中也有类似情况。**因此，在能量很高时，可以将轻子-核子的深度非弹性散射归结为轻子与核子内部的一个部分子之间的瞬时相互作用，而其它部分子几乎没有参与相互作用。** 在下一小节，我们会通过量子场论计算电子和自由夸克的散射来推导深度非弹性散射的截面公式，其理论基础其实是基于7.1.3节的QCD渐近自由性质，这也是比约肯标度无关性的理论基础。

深度非弹性散射只有在加速能量很高的时候才可以发生，根据第二章的讨论，加速能量很高时，同步辐射很强，打靶实验的效率会很低，只有对撞才是最经济的选择，因此，后来的电子-质子散射实验都是同时加速电子和质子之后的对撞机实验而不是打靶实验。在这种对撞机实验或者打靶实验的质心系中，质子具有很高的动量，在相对论效应下，质子在运动方向上的尺度将被严重压缩（相对论运动的尺子缩短），其形状从球体变成铁饼状。相应的在动量空间，由于质子具有很高的能量，$E \gg m_p$，质子质量可以忽略，其四动量可以写为$p = (E, 0, 0, E)$，质子所处这样的坐标系称为**无穷大动量坐标系** ，这时候质

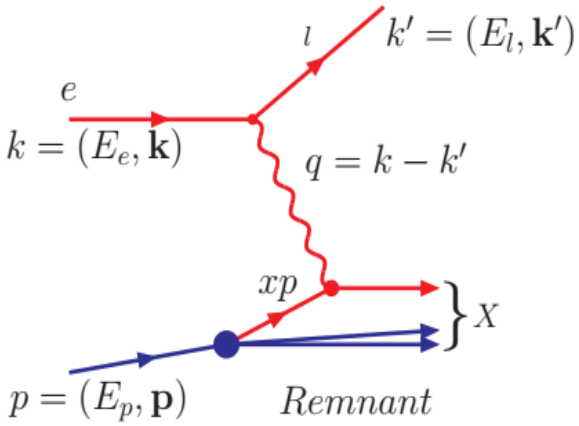


图 7.16: 在部分子模型中，入射的电子与质子内部（近似自由）的部分子发生散射。$l = e$时为中性流过程；$l = \nu_e$时为带电流过程。

子内部所有部分子将具有相同方向的动量，其横向动量将忽略不计，因而描写质子内部部分子的动量分布函数– 形状因子，将只是纵向动量(对撞机加速方向)的函数。图7.16中被散射质子（动量为p）的第i个部分子携带的动量为

$$p_i = x_i p. \tag{7.70}$$

其中$0 \leq x_i \leq 1$为动量分数，显然有$\sum_i x_i = 1$。

图7.16中被散射夸克动量为xp，根据动量守恒，散射后其动量为$xp + q$，因此有

$$(xp + q)^2 = x^2 p^2 + 2xp \cdot q + q^2 = m_q^2. \tag{7.71}$$

高能散射下夸克质量可以忽略不计，$x^2 p^2 = m_q^2 \simeq 0$，所以我们得到

$$2xp \cdot q + q^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-q^2}{2p \cdot q}. \tag{7.72}$$

这里我们证明了上一节引入的(7.59)式定义的比约肯变量x在忽略夸克质量的前提下等于参加反应的夸克动量占质子总动量的分数（无穷大动量坐标系下$E \gg m_p$）。

根据QCD理论，质子里面的夸克可以通过交换胶子而产生相互作用，这些相互作用会使得质子中的夸克动量不再是一个固定值而是有一个分布。这个分布函数通常称为**质子的部分子分布函数(PDF)** 。由于质子中夸克所占质子的动量分数x等于质子结构函数中的比约肯变量，因此，可以预期部分子分布函数和质子的结构函数是相关的。质子中u夸克的分布函数$f^u(x)$的定义表示在质子中u夸克所带的动量分数在x 和$x + dx$ 之间的u夸克数目是$f^u(x)dx$。类似地，我们也可以定义下夸克的分布函数$f^d(x)$。一般来说，这些分布函数是需要用实验来确定的。不过，如果质子组成非常简单并且没有相互作用的话，这个分布函数可以是非常简单的，如图7.17所示，如果质子中只有一个夸克（部分子），那分布函数就是在$x = 1$处的δ函数；简单夸克模型中，夸克是三个组分夸克，如果它们之间没

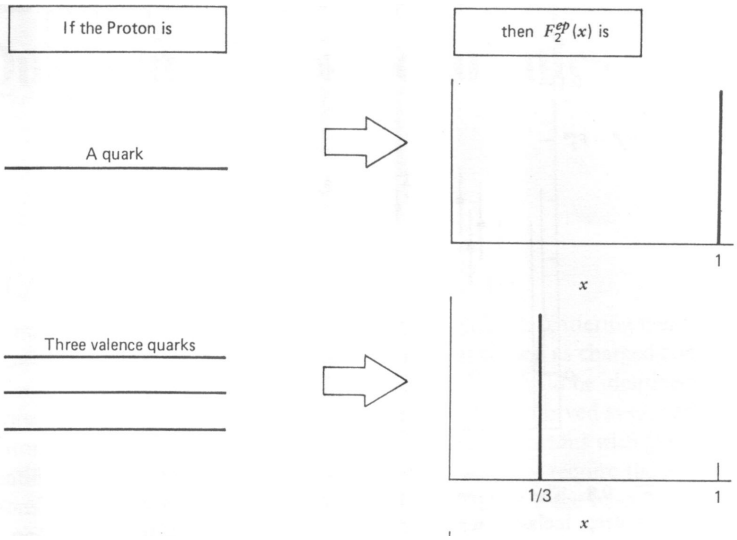


图 7.17:　没有内部相互作用情况下，简单夸克模型的部分子分布函数。

有相互作用，那么每个夸克携带的动量分数就是1/3，这时候的分布函数就是在$x = 1/3$处的δ函数。

实际情况是，质子中的三个组分夸克之间有很强的相互作用，这个相互作用会造成每个夸克所占的动量分数不再固定，而是如图 7.18所示，在$x = 1/3$处有一个峰值的分布函数。更进一步考虑QCD的高阶修正，质子中的组分夸克可以通过如图 7.18左下图所示的虚胶子产生虚的正反夸克对，这些正反夸克对的动量如果很大的话，会被虚胶子传播子$1/q^2$ 压低，因此这些高阶修正显然只会增强如图 7.18 右下图所示的夸克分布函数中小x附近的分布几率。这些从QCD真空通过虚胶子贡献出来的夸克也经常被称为海夸克。很显然，海夸克不仅贡献了小x附近的u和d夸克，也会贡献反夸克，因此质子中也应该有$\bar{u}$和$\bar{d}$的分布函数$f^{\bar{u}}(x)$和$f^{\bar{d}}(x)$。显然，同样由于虚胶子传播子的压低效应，反夸克的分布函数也应该主要集中在小x区域。同样，质子中必然也存在QCD真空里涨落出来的胶子分布函数$f^g(x)$，再进一步考虑的话，质子中还应该有正反奇异夸克的分布，甚至很少的更高质量的重夸克的存在，它们同样都应该是集中在小x 区域。

7.3.2　电子-夸克散射过程

在部分子层次，电子和质子的深度非弹性散射，其本质是电子和质子中的一个夸克的散射过程$eq \to eq$，考虑图-7.16 的红线部分，入射和出射夸克携带的动量分别为xp和$xp + q$，根据第四章给出的量子电动力学的费曼规则，电子和夸克散射的树图振幅为

$$\mathcal{M} = \frac{e^2\, e_q}{q^2}\bar{e}(k')\gamma_\mu e(k) \cdot \bar{u}(xp + q)\, \gamma^\mu\, u(xp), \tag{7.73}$$

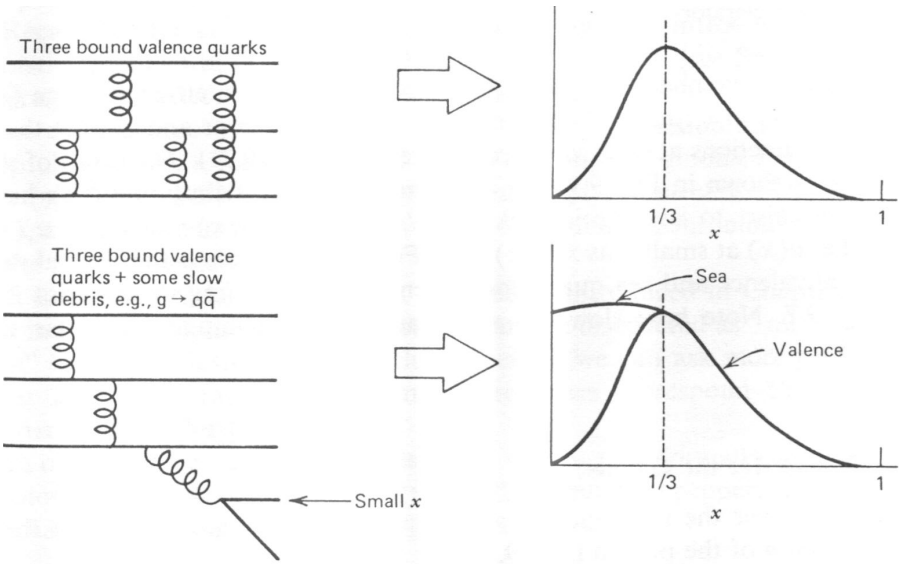


图 7.18: 由3个价夸克和胶子交换构成的质子中夸克分布函数示意图（上图）；考虑胶子自能图对应的海夸克对$q\bar{q}=(u\bar{u},d\bar{d})$贡献的部分子分布函数示意图（下图）。

对于末态的电子和夸克自旋求和，初态的电子和夸克自旋求平均可得散射矩阵元平方为

$$\frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 = e^4e_q^2\cdot 2\frac{[k\cdot(xp)][k'\cdot(xp+q)]+[k\cdot(xp+q)][xp\cdot k']}{(k\cdot k')^2} \tag{7.74}$$

$$= 2e^4e_q^2\frac{[k\cdot(xp+q)]^2+[k\cdot(xp)]^2}{(k\cdot k')^2} = 2e^4e_q^2\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{7.75}$$

在上面的计算中，我们忽略了电子和夸克的质量。最后把散射矩阵元平方代入第二章的二体散射微分截面公式(2.180)就可得到电子和夸克散射的截面公式。

$$\frac{d\sigma}{dq^2}=\frac{e^4e_q^2}{32\pi s|\mathbf{p_{1cm}}|^2}\frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{7.76}$$

在质心系，$|\mathbf{p_{1cm}}|=\sqrt{s}/2$，$t=q^2$，因此上式可以改写为

$$\frac{d\sigma}{dq^2}=\frac{e^4e_q^2}{8\pi q^4}\quad\frac{s^2+u^2}{s^2}. \tag{7.77}$$

利用Mandelstam变量之间的关系$s+t+u=\sum_i m_i^2$，而高能下电子和夸克质量都可以忽略，可得

$$u\simeq -s-t=-s-q^2, \tag{7.78}$$

最后，我们得到电子和夸克散射的微分截面公式为

$$\frac{d\sigma}{dq^2}=\frac{2\pi\alpha^2e_q^2}{q^4}\quad\left[1+\left(1+\frac{q^2}{s}\right)^2\right]. \tag{7.79}$$

需要注意的是，上式中的质心系能量平方“s”是在电子和夸克的质心系定义的，它与电子-质子质心系能量平方差了x的倍数，利用前面的(7.63)式，忽略电子和质子的质量，可以得到上式中“s”的表达式

$$“s” = Q^2/y = -q^2/y, \tag{7.80}$$

进而得到

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{q^4}\left[1+(1-y)^2\right], \tag{7.81}$$

或者改写为

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4}\left[1-y+\frac{y^2}{2}\right]. \tag{7.82}$$

可以看出，上式是Q^2和y的函数，按照7.2.3节所指出的，x, Q^2, ν, y中只有两个洛伦兹不变量是独立的，上式也是Q^2和x的函数。

根据夸克模型，质子中的带电部分子是夸克，因此电子-质子深度非弹性散射的截面可以通过上面的电子和夸克散射截面以及夸克的部分子分布函数得到。对于一个带电荷e_q的夸克，我们用$f^q(x)dx$表示质子内部被散射的夸克携带的动量分数在$x \to x+dx$之间的几率。那么，质子内动量分数在$x \to x+dx$之间的夸克被电子散射的截面为

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[1-y+\frac{y^2}{2}\right] e_q^2 f^q(x)dx, \tag{7.83}$$

电子-质子深度非弹性散射的截面应该等于各种味道夸克和电子散射截面的和

$$\frac{d^2\sigma(ep\to eX)}{dx\,dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[1-y+\frac{y^2}{2}\right]\sum_q e_q^2 f^q(x). \tag{7.84}$$

这样我们就得到了在部分子模型下电子-质子深度非弹性散射的截面公式。把(7.84)式和之前的用质子结构函数定义的电子-质子深度非弹性散射公式(7.66)比较，可以得到

$$F_2^{ep}(x,Q^2) = 2xF_1^{ep}(x,Q^2) = x\sum_q e_q^2 f^q(x). \tag{7.85}$$

这个公式的前半部分就是之前实验总结出的**Callan-Gross关系式(7.68)**，这里通过电子和夸克散射得出的公式与实验规律一致，充分说明质子中的带电费米子就是自旋1/2 的夸克。(7.85)式也说明，结构函数$F_{1,2}(x)$ 与Q^2 无关，这就是比约肯的标度无关性。(7.85)式的后半部分则给出了质子结构函数和部分子分布函数之间的关系。

7.3.3　部分子分布函数

在上一章我们知道，质子是由三个夸克组成的，因此质子中的带电部分子就是夸克，它们具有不同的味道和电荷，因而与光子有不同的相互作用强度。核子的结构函数$F_2(x)$，或部分子动量几率分布函数$f(x)$，应当是各种味道部分子贡献之和。

考虑到电磁相互作用与电荷平方成正比，令质子中出现具有动量xp的第i 种夸克的几率为$f_p^i(x)$，定义

$$f(x)=\sum_i e_i^2 f_p^i(x), \tag{7.86}$$

其中e_i是第i种夸克所带的电量（以电子电荷的绝对值为单位）。例如：$e_u=2/3$，$e_d=-1/3$等等。

对于质子来说，其价夸克组成为$p=uud$，如果先忽略一般认为很小的海夸克的贡献，那么就有

$$f(x)=\frac{4}{9}\left[f_p^u(x)+f_p^{\bar{u}}(x)\right]+\frac{1}{9}\left[f_p^d(x)+f_p^{\bar{d}}(x)\right]. \tag{7.87}$$

因此，由电子和质子散射得到的质子结构函数公式(7.85)，可得

$$\begin{aligned} F_2^{ep}(x) &= 2xF_1^{ep}(x)=xf(x) \\ &= x\left\{\frac{4}{9}\left[f_p^u(x)+f_p^{\bar{u}}(x)\right]+\frac{1}{9}\left[f_p^d(x)+f_p^{\bar{d}}(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{7.88}$$

同理可得中子($n=udd$)的结构函数

$$\begin{aligned} F_2^{en}(x) &= 2xF_1^{en}(x) \\ &= x\left\{\frac{4}{9}\left[f_n^u(x)+f_n^{\bar{u}}(x)\right]+\frac{1}{9}\left[f_n^d(x)+f_n^{\bar{d}}(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{7.89}$$

如果忽略质子和中子内很小的电磁相互作用差别，由同位旋对称性，把质子中的u和d夸克互换，就可得到中子，因此有

$$\begin{aligned} f_p^u(x) &= f_n^d(x)=u(x),\quad f_p^{\bar{u}}(x)=f_n^{\bar{d}}(x)=\bar{u}(x), \\ f_p^d(x) &= f_n^u(x)=d(x),\quad f_p^{\bar{d}}(x)=f_n^{\bar{u}}(x)=\bar{d}(x). \end{aligned} \tag{7.90}$$

最后把上式代入(7.88,7.89)，可得质子和中子的结构函数

$$F_2^{ep}(x) = x\left\{\frac{4}{9}\left[u(x)+\bar{u}(x)\right]+\frac{1}{9}\left[d(x)+\bar{d}(x)\right]\right\}, \tag{7.91}$$

$$F_2^{en}(x) = x\left\{\frac{4}{9}\left[d(x)+\bar{d}(x)\right]+\frac{1}{9}\left[u(x)+\bar{u}(x)\right]\right\}. \tag{7.92}$$

对(7.91,7.92)两式做积分可得

$$\int_0^1 F_2^{ep}(x)dx = \frac{4}{9}f_u+\frac{1}{9}f_d, \tag{7.93}$$

$$\int_0^1 F_2^{en}(x)dx = \frac{4}{9}f_d+\frac{1}{9}f_u, \tag{7.94}$$

其中

$$f_u = \int_0^1 x\left[u(x)+\bar{u}(x)\right]\,dx \quad f_d = \int_0^1 x\left[d(x)+\bar{d}(x)\right]\,dx, \tag{7.95}$$

f_u表示在一个质子中由u夸克和$\bar{u}$携带的总动量分数，相应地，f_d则是d夸克和$\bar{d}$所携带的总动量分数。利用SLAC实验对质子结构函数$F_2^{ep}(x,Q^2)$ 在$2\text{GeV}^2 < Q^2 < 30\text{GeV}^2$范围的$x$依赖性实验测量结果，积分后可以得到

$$\int_0^1 F_2^{ep}(x)dx \approx 0.18. \tag{7.96}$$

由于中子是不稳定的，自然界中并不存在自由的中子；又由于中子不带电，也很难在加速器中加速中子，因此实验上并不能直接测量中子的结构函数或者部分子分布函数。人们一般是通过对氘核(Deuteron) 的结构函数$F_2^{eD}(x)$ 的实验测量，利用关系式

$$F_2^{eD}(x) = \frac{1}{2}\left[F_2^{ep}(x)+F_2^{en}(x)\right] \tag{7.97}$$

减去质子的贡献，然后导出$F_2^{en}(x)$，具体实验结果是

$$\int_0^1 F_2^{en}(x)dx \approx 0.12. \tag{7.98}$$

把上面的质子和中子实验结果代入(7.93,7.94)式，解之可得到f_u和f_d的数值约为

$$f_u \approx 0.36, \quad f_d \approx 0.18. \tag{7.99}$$

根据夸克模型，质子中有2个上夸克和1个下夸克，上式的结果$f_u = 2f_d$符合一般预期。**由(7.99)可知，质子内部的三个价夸克携带了质子动量的大约54%，另外一半主要被胶子携带** 。由于胶子是不带电荷的，因此它们并不对于电子-质子深度非弹性散射这种电磁过程有贡献，其分布函数也不能由这种电磁散射实验来直接测量得到。

在简单部分子模型中，我们把强子结构函数具体化为各种夸克的分布函数。由于在不同的过程中，参与的夸克可能不同，相互作用的类型也可能不同，从而提供了从各种渠道深入研究强子结构的可能。现在我们知道，在核子内部，有价夸克、正反海夸克和传递强相互作用的规范粒子胶子。在简单部分子模型中，核子内部分子之间的相互作用被忽略，这导致核子的结构函数与Q^2无关。**在“基于QCD的部分子模型”中，人们考虑了核子内部夸克之间由胶子交换产生的QCD修正，以及胶子自相互作用的影响。这时，核子的结构函数$F_{1,2}(x,Q^2)$、部分子分布函数$f^q(x,Q^2)$都会有一个较小的Q^2依赖性。** 后面我们会讨论到，在现代强子对撞机上，Q^2的变化范围很大，这个Q^2的依赖性会非常显著。

由图-7.18的左侧图可知，与胶子自能图相关联的海夸克对部分子分布函数$u(x)$、$d(x)$等也有贡献。如果考虑海夸克的贡献，那么有：

$$\begin{aligned} u(x) &= u_V(x)+u_S(x), \quad d(x) = d_V(x)+d_S(x), \\ \bar{u}(x) &= \bar{u}_S(x), \quad \bar{d}(x) = \bar{d}_S(x). \end{aligned} \tag{7.100}$$

因为质子含有uud三个价夸克，所以我们预期在质子内发现u夸克的几率应该是2，即

$$\int_0^1 (u(x)-\bar{u}(x))dx = \int_0^1 u_V(x)dx = 2, \tag{7.101}$$

同时我们预期在质子内发现d夸克的几率应该是1，

$$\int_0^1 d_V(x)dx = 1. \tag{7.102}$$

实际上我们并不能准确计算出海夸克对分布函数在不同x处的贡献大小，但我们知道海夸克对来自于胶子-夸克对耦合$gq\bar{q}$，$(u,\bar{u})$或者$(d,\bar{d})$总是同时成对出现。再考虑到u,d夸克的同位旋对称性，应当有以下关系成立：

$$u_S(x) = \bar{u}_S(x) = d_S(x) = \bar{d}_S(x) = S(x). \tag{7.103}$$

在考虑了海夸克对的影响以后，可以把(7.91,7.92)式写成以下形式

$$F_2^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}u_V(x) + \frac{1}{9}d_V(x) + \frac{10}{9}S(x)\right], \tag{7.104}$$

$$F_2^{en}(x) = x\left[\frac{4}{9}d_V(x) + \frac{1}{9}u_V(x) + \frac{10}{9}S(x)\right]. \tag{7.105}$$

考虑到海夸克主要来自于QCD真空产生的低能胶子，所以当$x\to 0$时，海夸克的贡献应当是主要的。因此，中子和质子的结构函数比值为

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} = \frac{4d_V(x)+u_V(x)+10S(x)}{4u_V(x)+d_V(x)+10S(x)} \to 1, \quad \text{as} \quad x\to 0. \tag{7.106}$$

如图-7.19 所示，电子-质子和电子-氘核的深度非弹性散射实验测量数据确实支持上述结果。另外，当x值比较大时，价夸克的贡献是主要的，海夸克的贡献可以忽略。这时考虑到$u_V(x)\approx 2d_V(x)$，那么有

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \to 2/3, \quad \text{as} \quad x\to 1. \tag{7.107}$$

但是，这个理论计算结果和图-7.19所示的$x\to 1$时的实验测量值~ 0.25 并不一致。这说明，简单部分子模型还不足以很好的解释实验！这个差别可以由泡利不相容原理定性地来解释，在$x\to 1$时，其中一个组分夸克带有质子的绝大部分动量，而另外两个组分夸克只能在动量接近于0的状态。由于泡利不相容原理禁止两个相同的上夸克处于同一个状态，因此，质子中的下夸克处于$x\to 1$ 的状态是不太被允许的。$x\to 1$时，$d_V(x)/u_V(x)\to 0$，就会得到

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \to 1/4, \quad \text{as} \quad x\to 1. \tag{7.108}$$

当然上述问题的定量解决，必须考虑次领头阶和其他高阶修正，考虑来源于质子内部可能存在的其它海夸克$s\bar{s}$、$c\bar{c}$和$b\bar{b}$的贡献，以及胶子的贡献，甚至考虑在质子内部的光子

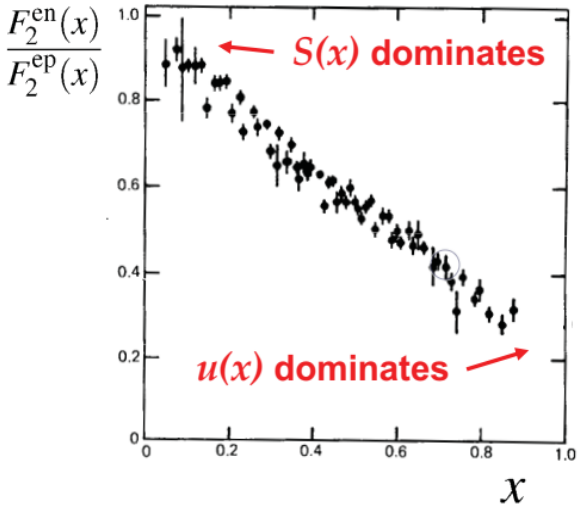


图 7.19:　电子-质子和电子-氘核的深度非弹性散射实验对比值$F_2^{en}(x)/F_2^{ep}(x)$ 的测量结果[52]。

成分的贡献[246, 247]。这些非组分夸克的贡献对于极高能对撞机实验非常重要，我们将在下一节重点讨论。实际上，分布函数最终还是需要大量实验数据的支持。

与质子的情况不同，由于直接实验测量的困难，到目前为止，人们对中子的形状因子的研究还很不成熟，我们在此也不准备详细讨论。

7.4　部分子分布函数计算

HERA (Hadron Electron Ring Anlage) 是目前为止世界上能量最高的正(负)电子-质子对撞机，位于德国汉堡DESY加速器中心(见图-7.20)。这个加速器1991年开始运行，2007年结束运行，先后进行了e^-p 和e^+p对撞实验，有两个实验组(H1 和ZEUS)在HERA工作。HERA的加速器储存环周长6336m，可以加速电子或者正电子最高到27.5GeV的能量，加速质子最高到920GeV的能量；对撞质心能量可达$\sqrt{s} = 332$GeV；储存环里有189个（正）电子束团，180个质子束团；（正）电子束团长度0.83厘米，质子束团长度为8.5 厘米；每个束团有3×10^{10} 个（正）电子或者7×10^{10} 个质子。从图7.14中各个实验对于质子结构函数$F_2(x, Q^2)$的测量贡献，明显可以看出，HERA 实验对于探测极高能情况下质子的部分子分布函数，特别是在非常大$Q^2(10^4\text{GeV}^2)$ 和非常小$x(\leq 10^{-4})$ 区域的物理起到了不可替代的作用。由于之前我们以电子-夸克散射的QCD理论计算解释了比约肯的标度无关性质，HERA实验对于这个性质的检验一方面说明了QCD 理论的正确性，另一方面也说明了在虚光子的波长$\lambda \sim hc/Q \sim 10^{-18}$m，夸克还是点粒子，夸克的半径应该小于$10^{-18}$米。

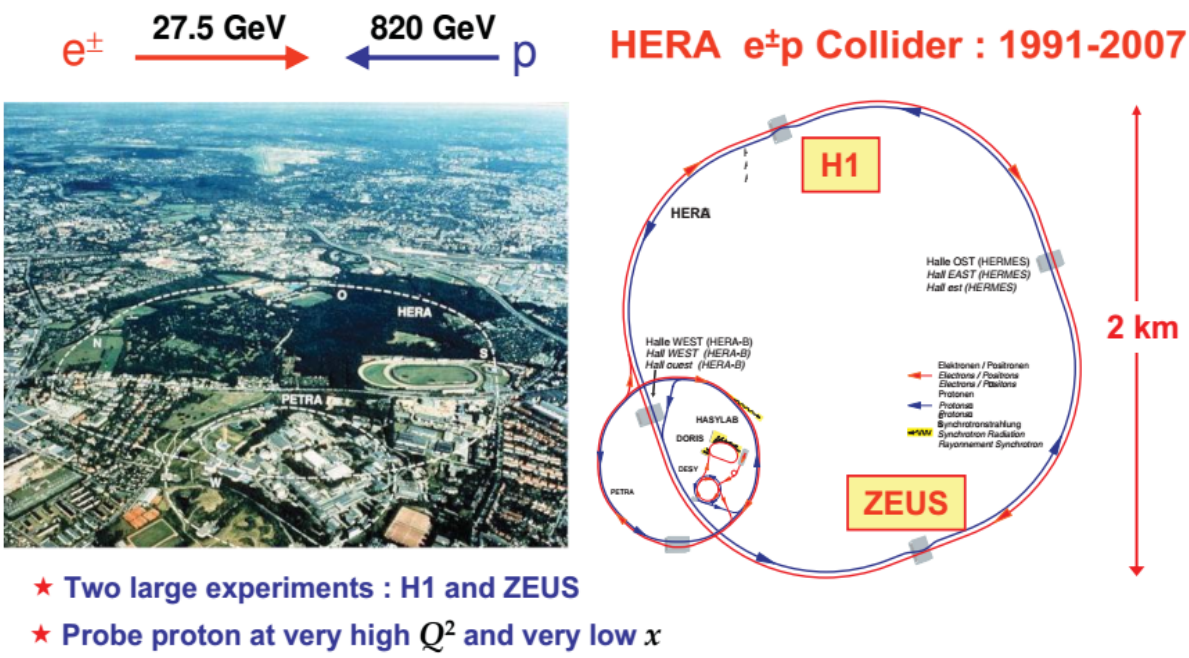


图 7.20: 德国汉堡的HERA 正负电子和质子对撞机地面示意图和结构示意图[52]。

7.4.1 极高能深度非弹性散射

德国的HERA （正）电子和质子对撞机是极高能量的电子-质子深度非弹性散射实验，弱相互作用在这个能量下不再能忽略，电子和质子中的夸克除了交换虚光子之外，还可以交换弱作用的媒介粒子Z和W。实验中既有中性流过程(由γ, Z 传递相互作用)，也有带电流过程(由$W^{\pm}$ 传递相互作用)，以e^-入射为例两种过程分别为

$$e^- + p \to e^- + X, \quad e^- + p \to \nu_e + X. \tag{7.109}$$

这种极高能量实验中，部分子密度函数$f^q(x)$ 对Q^2 会有一个较弱的依赖性。

我们首先考虑中性流过程，与图-7.16 相对应的散射振幅为

$$M = e^2 \bar{u}(k', \lambda')\gamma^\mu u(k, \lambda)\frac{1}{q^2} < X|J_\mu|p, \sigma > . \tag{7.110}$$

对初态自旋求平均，对末态强子求和，可得散射截面为

$$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2s}}_{flux} \sum_X \underbrace{\int d\Phi}_{phase\ \ space} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{spin} |\mathcal{M}|^2_{ep\to eX}}_{spin\quad averaged|M|^2} . \tag{7.111}$$

对相空间的积分为

$$\int d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{dk'^3}{2E'} d\Phi_X = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left(\frac{\pi Q^2}{2sx^2} dQ^2 dx\right) d\Phi_X. \tag{7.112}$$

其中

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2_{ep\to eX}=\frac{e^4}{Q^4}\cdot L^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \tag{7.113}$$

其中已用到

$$\frac{dk'^3}{2E'}=\pi E'dE'd\cos\theta=\frac{\pi Q^2}{2sx^2}dQ^2dx. \tag{7.114}$$

轻子张量流$L_{\mu\nu}$ 为

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}Tr\left[\not{k}\gamma_\nu\not{k}'\gamma_\mu\right]=2\left[k_\mu k'_\nu+k_\nu k'_\mu-\frac{Q^2}{2}g_{\mu\nu}\right]. \tag{7.115}$$

流守恒关系式为：

$$q_\mu L^{\mu\nu}=q_\nu L^{\mu\nu}=0. \tag{7.116}$$

强子张量$W_{\mu\nu}$为

$$W_{\mu\nu}=\sum_x d\Phi_x\ h_{\mu\nu}, \tag{7.117}$$

它是q^2和$q\cdot p$ (或者等价为x和Q^2) 的函数。我们有

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}=\frac{2\pi\alpha^2y^2}{Q^6}\,L^{\mu\nu}\cdot W_{\mu\nu}(x,Q^2). \tag{7.118}$$

强子张量$W_{\mu\nu}(p,q)$的最一般的形式是

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}(p,q) &= -g_{\mu\nu}W_1+\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}W_2-i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p^\rho q^\sigma}{M^2}W_3+\frac{q_\mu q_\nu}{M^2}W_4+\frac{p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu}{M^2}W_5\\ &\quad+\frac{p_\mu q_\nu-p_\nu q_\mu}{M^2}W_6.\end{aligned} \tag{7.119}$$

时间反演变换的对称性导致$W_{\mu\nu}=W_{\nu\mu}$，因而由$W_6=0$。由于强子顶角的流守恒条件

$$q_\mu W^{\mu\nu}=q_\nu W^{\mu\nu}=0, \tag{7.120}$$

可以把W_4 和W_5 用W_1 和W_2来表示，得到

$$W_5=-\frac{p\cdot q}{q^2}W_2,\quad W_4=\left(\frac{p\cdot q}{q^2}\right)^2W_2+\frac{M^2}{q^2}W_1. \tag{7.121}$$

最后利用质子的结构函数，重新定义上面的W_i，(7.119)式的强子张量只有三个独立的非极化的结构函数$F_{1,2,3}(x,Q^2)$

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu} &= -\left(g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{Q^2}\right)F_1+\left(p_\mu+\frac{p\cdot q}{Q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu+\frac{p\cdot q}{Q^2}q_\nu\right)F_2\\ &\quad+i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p^\rho q^\sigma}{2p\cdot q}F_3,\end{aligned} \tag{7.122}$$

其中的结构函数$F_{1,2}(x,Q^2)$我们已经在7.2.4节给出定义，F_3则来源于交换弱作用Z玻色子的贡献，从其洛伦兹结构很容易看出，这项是宇称不守恒的。

由上面各式，可以得到在极高能散射情况下，电子和质子的中性流微分散射截面公式为

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}=\frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left[xy^2F_1+\left(1-y-\frac{xyM^2}{s}\right)F_2+xy\left(1-\frac{y}{2}\right)F_3\right]. \tag{7.123}$$

另外，还可以把$e^-p\to e^-X$深度非弹性散射微分截面写成其他运动学变量的函数，相应的变换关系为[1]

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy}=x(s-M^2)\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}=\frac{2\pi M\nu}{E'}\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}. \tag{7.124}$$

因此，在忽略了质子质量的情况下，上述微分截面公式(7.123)还可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma(e^-p\to e^-X)}{dx\,dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4}\left[xy^2F_1(x,Q^2)+(1-y)F_2(x,Q^2)\right.\\ &\left.+xy\left(1-\frac{y}{2}\right)F_3(x,Q^2)\right],\end{aligned} \tag{7.125}$$

只考虑光子交换时，没有了$F_3(x,Q^2)$的贡献，上面的微分散射截面公式就变成了(7.66)式。在简单部分子模型和渐近自由的极限下，$F_{1,2}$与Q^2无关。但是，考虑到QCD的耦合常数只是随能量升高（相互作用距离缩短）而减小，并不是消失；以及核子内的胶子对结构函数的影响，那么$F_{1,2}$与Q^2有比较弱的依赖关系。

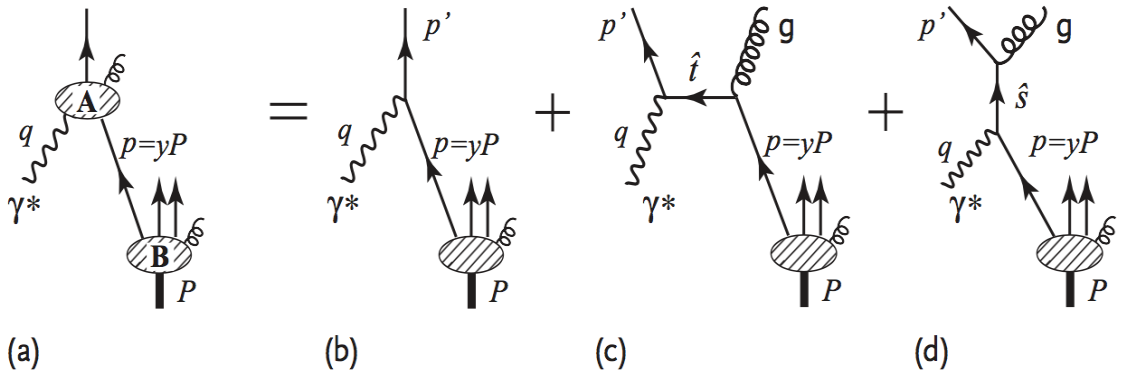


图 7.21: 电子质子深度非弹性散射中电子和夸克散射的领头阶QCD修正费曼图[53]。

实际上，在上一节我们通过电子和夸克散射的量子场论散射截面计算证明比约肯标度无关性的时候，除了假设完全的渐近自由性质外，更大的假设是我们只考虑了树图费曼图（玻恩近似）的贡献。由于QCD的耦合常数α_s比电磁作用的精细结构常数大得多，其QCD修正也大得多。如图7.21(c)和(d)所示的QCD树图阶修正费曼图给出的贡献就会明显破坏比约肯标度无关性。

在极高能量对撞能量下，由于弱作用Z玻色子的贡献，我们之前推导的质子结构函数的表达式(7.85,7.88)需要修改为

$$F_2(x,Q^2) = \sum_q x \left[f^q(x,Q^2)+f^{\bar{q}}(x,Q^2)\right] A_q\,, \tag{7.126}$$

其中

$$A_q = \underbrace{e_q^2}_{\gamma-\gamma} \underbrace{-2e_qV_eV_q\,\frac{Q^2}{M_Z^2+Q^2}}_{\gamma-Z} + \underbrace{(v_e^2+a_e^2)(v_q^2+a_q^2)\,\frac{Q^4}{(M_Z^2+Q^2)^2}}_{Z-Z}, \tag{7.127}$$

其中耦合系数v_e, a_e, v_q 和a_q的表达式为

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{1}{2\sin 2\theta_W}\left[-1+4\sin^2\theta_W\right], \\ a_e &= -\frac{1}{2\sin 2\theta_W}, \\ v_q &= \frac{1}{2\sin 2\theta_W}\left[T_{3q}-2e_q\sin^2\theta_W\right], \\ a_q &= \frac{T_{3q}}{2\sin 2\theta_W}. \end{aligned} \tag{7.128}$$

当然，在极高能量下，Callan-Gross关系式也不再适用，$F_2(x,Q^2)$ 和$F_1(x,Q^2)$是两个独立的函数。对于另一个结构函数

$$xF_3(x,Q^2) = \sum_q x \left[f^q(x,Q^2)-f^{\bar{q}}(x,Q^2)\right] B_q, \tag{7.129}$$

其中

$$B_q = -2e_qa_ea_q\,\frac{Q^2}{M_Z^2+Q^2} + 4v_ea_ev_qa_q\,\frac{Q^4}{(M_Z^2+Q^2)^2}, \tag{7.130}$$

除了在极高能量和小x区域，结构函数$F_3(x,Q^2)$的贡献很小。

7.4.2　强子对撞机上的部分子分布函数

通过电子-质子深度非弹性散射实验的研究，我们已经确认：核子是由部分子（夸克，反夸克和胶子）组成，分布函数$f^i(x,Q^2)$ 告诉我们在核子内发现(携带动量为xp，转移动量平方Q^2) 部分子i的几率。但是由于电子只参与电磁相互作用，在极高能量也有弱相互作用，电子-质子深度非弹性散射实验因此只能提供核子内部夸克的分布函数。由于极高能量下，胶子组分在质子中所占比例可以高达50%，胶子的分布函数需要另外的途径来探测。另外，在高能质子-(反)质子对撞实验中，人们需要使用部分子分布函数来描写质子内部结构，部分子分布函数是许多物理量精确测量过程的主要系统误差来源，部分子分布函数的精度将是在大型强子对撞机实验中寻找稀有的新物理信号的瓶颈！而新的大型强

子对撞机的能量远高于现有的电子-质子深度非弹性散射实验的能量，极高能量之下的部分子分布函数已经没有电子-质子深度非弹性散射实验的支持。因此，在理论上更好地理解部分子分布函数是大型强子对撞机物理的一个非常重要的研究方向。

在强子对撞机上人们可以把各类物理过程(DIS, Drell-Yan, Jet等) 的截面σ 写成部分子函数与部分子硬散射截面的卷积形式:

$$\sigma = f\left(x, Q^2, \{a\}\right) \otimes \hat{\sigma} \tag{7.131}$$

上式左侧是可以通过实验测量得到的具体过程截面σ，右侧的硬散射截面$\hat{\sigma}$可以基于QCD和电弱标准模型理论来做微扰计算，部分子分布函数$f(x, Q^2, \{a\})$是普适的，应该由实验给出。要给出高精度的QCD理论预言需要使用高精度的部分子分布函数实验测量数据，例如深度非弹性散射实验作为输入，而高精度的QCD 理论预言对高能对撞机实验数据同样至关重要！要提高非微扰的部分子分布函数的准确度又必须使用高精度的实验数据作为拟合的输入，二者之间有非常密切的相互依赖的关系。

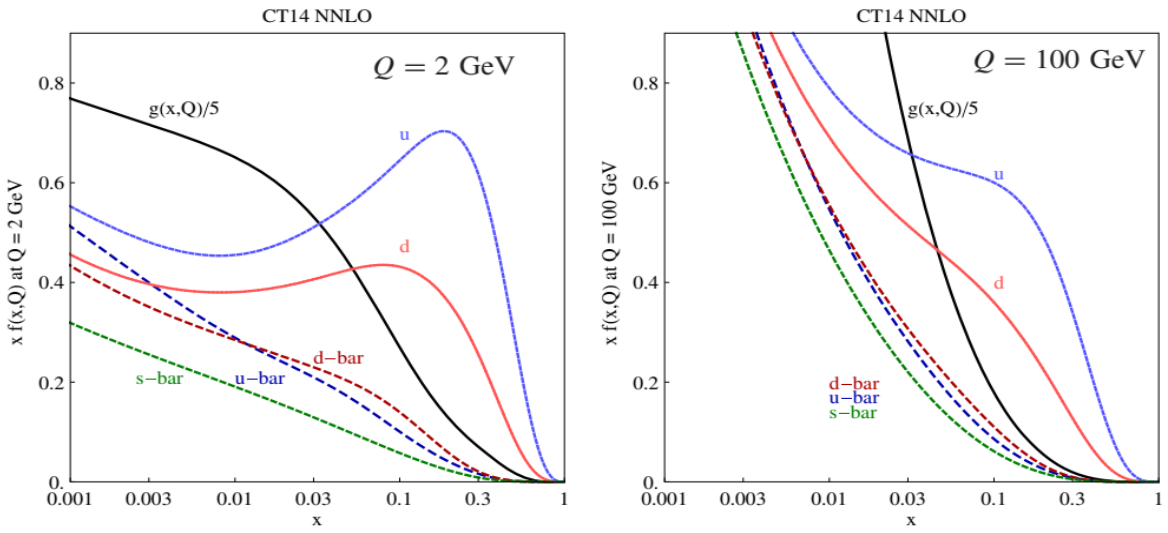


图 7.22: 当取$Q = 2$GeV（左图）和100GeV（右图）时，使用CT14程序给出的部分子$(u, d, \bar{u}, \bar{d}, s, g)$分布函数$xf(x, Q)$ 随动量分数x的变化。其中胶子的分布函数乘了一个1/5因子，并假设$s = \bar{s}$) [248]。

在强子对撞机上的质子**部分子分布函数** 需要完整考虑价夸克、海夸克、重味夸克和胶子的贡献

$$proton = \underbrace{uud}_{\text{valence}} + \sum_{q} \underbrace{q\bar{q}}_{\text{sea}} + gluons. \tag{7.132}$$

甚至在极高能量下，我们也需要考虑质子中W, Z玻色子的分布函数。

如果同时考虑海夸克$s(x),\bar{s}(x)$和$c(x),\bar{c}(x)$以及胶子分布函数$g_1(x,Q^2)$的贡献，那么可以把(7.88,7.89)式的核子结构函数$F_2^{ep}(x)$、$F_2^{en}(x)$ 扩充，写为

$$\begin{aligned} F_2^{ep}(x) &= x\sum_q e_q^2\, f_p^q(x) \\ &= x\left\{\frac{4}{9}\left[u(x)+\bar{u}(x)+c(x)+\bar{c}(x)\right]\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{9}\left[d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)\right]+g_1(x)+\cdots\right\}, \end{aligned} \tag{7.133}$$

$$\begin{aligned} F_2^{en}(x) &= x\sum_q e_q^2\, f_n^q(x) \\ &= x\left\{\frac{4}{9}\left[d(x)+\bar{d}(x)+c(x)+\bar{c}(x)\right]\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{9}\left[u(x)+\bar{u}(x)+s(x)+\bar{s}(x)\right]+g_1(x)+\cdots\right\}. \end{aligned} \tag{7.134}$$

图-7.22表示在取$Q=2\text{GeV}$（左图）和100GeV（右图）时，使用CT14程序给出的质子内部的部分子$(u,d,\bar{u},\bar{d},s,g)$分布函数$xf(x,Q)$ 随动量分数x的变化[248]。从左图的Q^2较低的分布函数图可以看出，由于质子中组分夸克的贡献u夸克的分布函数是d的两倍，两者也都在$x\simeq 1/3$附近有峰值。胶子的贡献很大(图-7.22中胶子的分布函数被压低了5倍)，与预期相符，主要集中在小x 区域。反夸克的分布函数相对较小，由于主要来源于虚胶子的贡献，因而也集中在小x区域。另外，虽然各种反夸克的分布函数类似，但是在x 不太小的区域，明显可以看出$\bar{d}(x)>\bar{u}(x)$，这是由于组分夸克中u夸克比d夸克多，根据泡利不相容原理$g\to u\bar{u}$ 相对更不容易一些。至于左图中小x区域，$\bar{d}(x)<\bar{u}(x)$，则是由于d夸克质量比u夸克质量稍大，产生稍微困难一些，这同时也是s夸克分布函数更小的原因。

上一节中我们指出，在相当大范围的x区域，比约肯标度无关性都是适用的，但是从图7.14可以看出，在非常小和非常大的x区域，这个标度无关性是破坏了的：在小x区域，质子结构函数随Q^2增加而增大，而在大x区域，则随Q^2增加而减小，也就是说，在大Q^2处，结构函数往小x区域偏离。这种标度无关性的破坏，也就是在大Q^2区域，质子中动量分数较小的夸克比例会更多的现象，是可以从QCD基本理论定量微扰计算的。定性地来说，随Q^2增加质子结构函数中重夸克和胶子的组分会增大，相应地轻夸克所占动量分数减少也是可以预期的。另外，比约肯标度无关性只是表示部分子函数对于Q^2的依赖性很弱，并不是真的无关，在Q^2差别很大的时候，例如图 7.22 给出的两个不同Q^2 的部分子分布函数差别还是很大，因此，从比较小Q^2的部分子分布函数并不能很容易地得到比较大Q^2 的部分子分布函数。

对于相对较小的Q^2，虚光子的波长较长，如图7.23(a)所示，虚光子不容易探测到质子内部的更详细结构；而对于非常大的Q^2，短波长的虚光子可以进入到精细结构的探测，例如图7.23(b)所示，可以探测到夸克辐射虚胶子$q\to qg$的效应。因此在这种大Q^2区

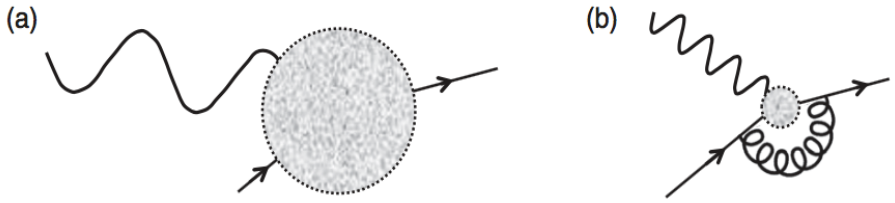


图 7.23: 长、短波长虚光子对于探测质子内部部分子的精细程度对比。

域，虚光子“看到”更多带小x动量的夸克。虽然理论上我们并不能从QCD的第一原理出发来计算质子的部分子分布函数，但是其Q^2依赖性则可以使用Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) QCD 演化方程[249–251] 来计算。这些方程的理论基础就是QCD的子过程$q \to qg$和$g \to q\bar{q}$。通常人们利用DGLAP演化方程，把实验测量的各种Q^2的分布函数数据作为输入，然后导出大Q^2 区域的部分子分布函数$f(x,Q)$，这些大Q^2区域的部分子分布函数$f(x,Q)$会与新的强子对撞机实验进行比较，修正各种参数，然后再次利用DGLAP演化方程推导出更大Q^2 区域的部分子分布函数[53]。由于这些分布函数对于强子对撞机物理非常重要，世界上有多个合作组在进行类似的工作，并给出了非常复杂的程序包。在实验和理论两方面的努力下，不断提高对部分子分布函数的计算精度。

由于胶子是不带电荷的，因此它们并不对于电子-质子深度非弹性散射这种电磁过程有贡献，其分布函数也不能由这种电磁散射实验来直接测量得到。原则上，利用电子-质子深度非弹性散射实验的数据和DGLAP 演化方程可以得到胶子的分布函数，但是这非常依赖理论公式的精度，而且演化方程是需要一个基准能量点的输入的。胶子的分布函数对于强子对撞机上的粒子物理研究非常重要，极高能强子对撞机上的相互作用过程研究绝大多数都依赖于胶子分布函数的准确性。物理学家实际上是通过如下的实验来测量胶子分布函数的

$$p + p \quad \to \quad \gamma X, \tag{7.135}$$

$$\gamma + N \quad \to \quad J/\psi + X. \tag{7.136}$$

对于第一个实验，其主要反应过程是QCD的康普顿反应

$$q + g \quad \to \quad \gamma + q, \tag{7.137}$$

和一个次要的正反夸克对湮灭过程

$$q + \bar{q} \quad \to \quad \gamma + g. \tag{7.138}$$

当然实验上的难度主要体现在如何消除π^0、η^0和η'等到双光子衰变的本底分辨上。

(7.136)式表示的实验过程的主要反应是

$$\gamma + g \quad \to \quad c + \bar{c}. \tag{7.139}$$

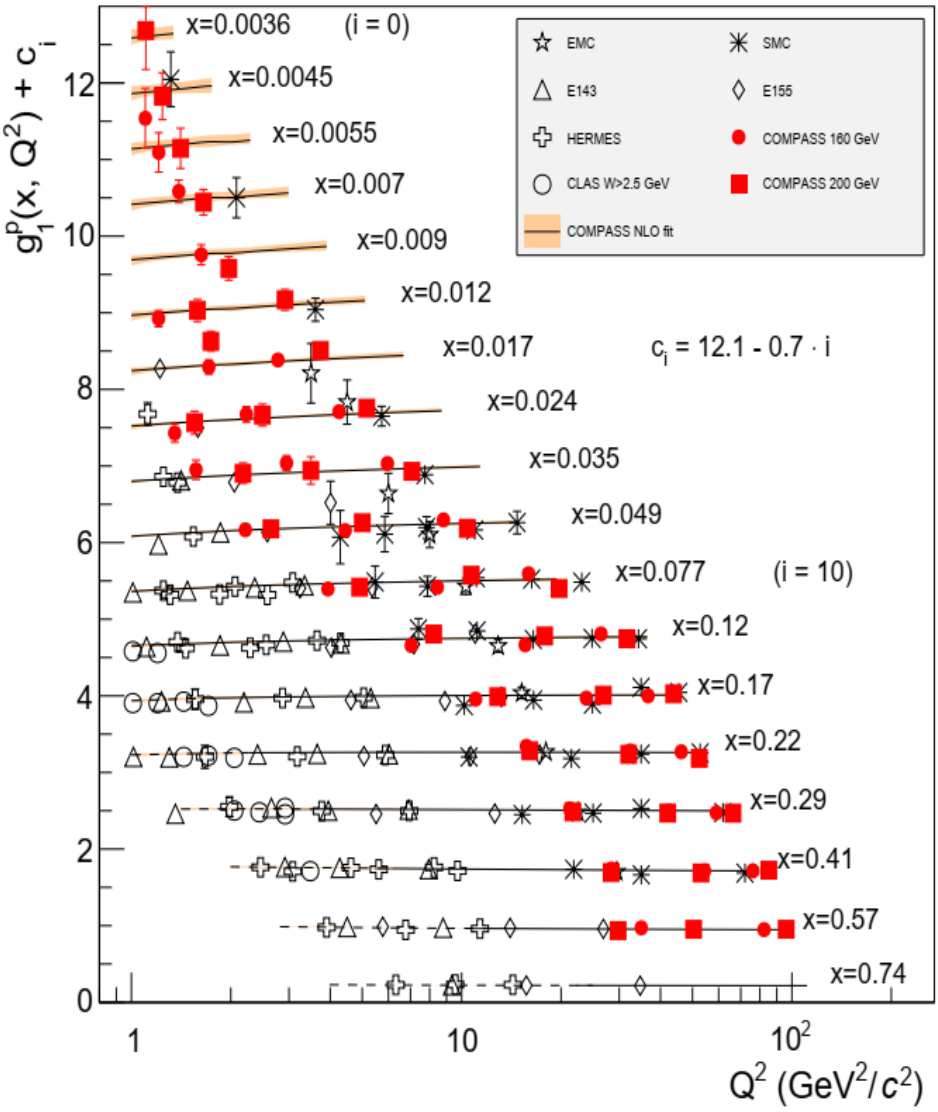


图 7.24:　粒子数据表综合给出的HERMES等实验对质子中胶子的分布函数$g_1^p(x,Q^2)$的实验测量结果[1]。

$J\psi$粒子是高能物理实验中最容易观测的强子末态之一，因此$J\psi$粒子产生实验的观测提供了很好的胶子分布函数的测量手段。

图 7.24给出了HERMES等各个实验组对质子中胶子的分布函数$g_1^p(x,Q^2)$相对于不同的(x,Q^2)的实验测量结果[1]。图中的实线表示对于每一个给定的x取值，使用次领头阶QCD理论公式拟合实验数据得到的分布函数g_1^p的Q^2依赖性。可以看出胶子的部分子分布函数在相当大程度也有很好的比约肯标度无关性。当然，从图 7.22和图 7.24也可以看出在小x区域，质子中胶子的分布函数也破坏了比约肯标度无关性，有较大的Q^2依赖性。

7.4.3　部分子分布函数程序简介

目前在国际上有HERAPDF，ABM、JR、CTEQ、MSTW和NNPDF等合作组利用次

次领头阶的DGLAP演化方程，对相关实验过程可观察物理量的QCD 理论预言和实验数据进行分析，开发并不断更新部分子分布函数计算程序，这些程序均为开放程序。近30年来，在众多的高能物理实验数据的基础上，部分子分布函数的精度在不断提高。目前，理论家们对很多强子反应过程截面的计算已经达到次次领头阶($\sim \alpha_s^2 \sim \alpha_{em}$)水平。这些程序不但输入了原有的大量深度非弹性散射等相关实验数据，也包括了费米实验上2TeV质心系能量的正反质子对撞机的实验数据；最新的部分子分布函数计算程序还包含了日内瓦大型强子对撞机实验获得的大量各种类型的实验数据。

HERAPDF，ABM和JR三个合作组的部分子分布函数计算程序包分别是HERAPDF 2.0 [230], ABM12 [252] 和JR14 PDF 程序包[253]。1990年代以来，英国MSTW合作组 先后提供了多个版本的部分子分布函数计算程序[254]，每一个版本的基本理论框架是相同的，但每次更新都有大量改进，2020年最新版本的名称是：MSHT20[255, 256]。MSTW合作组目前使用的网址是：http://www.hep.ucl.ac.uk/msht/。另一个部分子分布函数计算程序LHAPDF6[257] 的网址是：https://lhapdf.hepforge.org/index.html。

NNPDF合作组 是由英国、意大利、荷兰和西班牙等国的学者组成的一个新的国际合作组。他们在2017 年提供了部分子分布函数计算程序NNPDF 3.1[258]。2021年最新版本的名称是：NNPDF 4.0 [259]。新版本基于以大型强子对撞机实验数据为主的大数据，特别是大型强子对撞机RUN-II的实验结果，包含44组数据，使用的数据点比NNPDF 3.1的旧版本多约400个。NNPDF合作组在编程中使用了机器学习技术。在新程序中，作者使用了次次领头阶精度的QCD计算结果和领头阶精度的电弱计算结果，考虑了多种来源的误差影响。合作组使用新程序包，对典型的大型强子对撞机实验过程做了验证性计算分析，研究了所使用实验数据的内部一致性，检查了程序输出结果对输入参数和拟合方法的依赖性。NNPDF 合作组目前使用的网址是：https://docs.nnpdf.science/。

不同部分子分布函数程序包之间存在一定的的差别，主要包括以下几个方面：

1. 包含了不同的实验数据。使用了不同的参数化方法。使用了不同的工具程序包来做高阶QCD修正计算。

2. 使用了不同的方法来确定“最优拟合”。使用不同的方法来处理误差，考虑了不同的误差来源。

3. 对重味夸克-海夸克贡献的不同处理方式。在计算中使用了不同的次次领头阶的$\alpha_s(M_Z^2)$ 和Q_0 取值。

CTEQ合作组

1990年代初以来，美国的CTEQ-TEA合作组撰写并不断更新部分子分布函数程序，从早期的CTEQ1，中期的CTEQ5，到近期的CT14 和最新的CT18。在图7.22中，给出的是CT14的结果，只包含了三个轻夸克和胶子的分布函数。图-7.25是文献[247]中的图-2。它显示了当取$Q = 2$和100 GeV 时，使用CT18和CT18Z 程序得到的部分子分布函

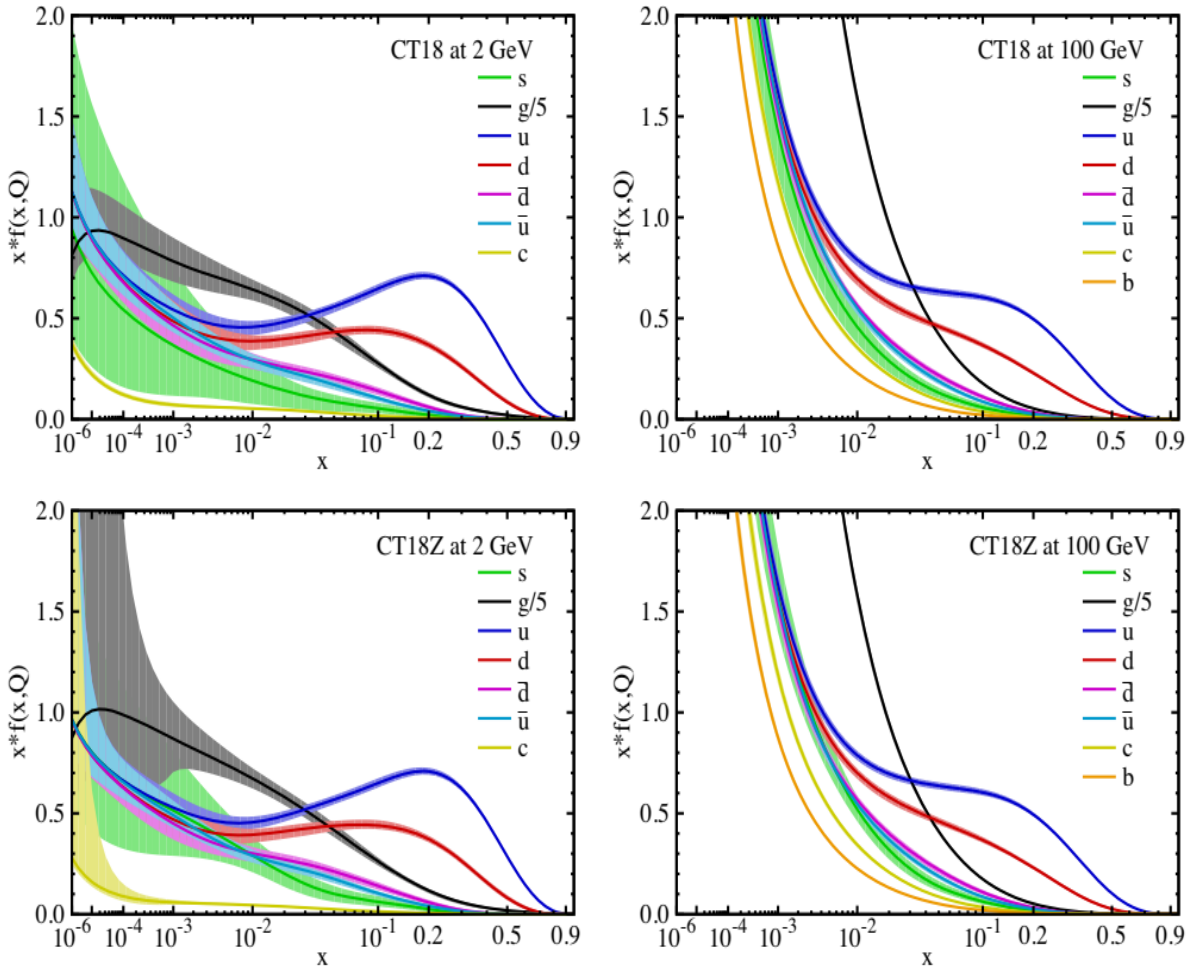


图 7.25:　当取$Q = 2, 100$ GeV时，程序CT18 和CT18Z给出的部分子分布函数$xf(x, Q)$随动量分数x的演化，部分子包含$(u, d, s, c, b, \bar{u}, \bar{d})$和胶子g，曲线宽度对应90%置信度的误差[247]。

数$xf(x, Q)$对动量分数x的依赖关系。可以看出，在$Q = 2$GeV时，部分子包括(u, d, s, c)、$(\bar{u}, \bar{d})$和胶子g，随着能量升高，在$Q = 100$ GeV时，部分子分布函数增加了b夸克的分布函数。拟合结果的精度在次次领头阶水平[247]，线宽表示对应90%置信度的误差，对胶子分布函数乘上了一个1/5 因子。

CT18已经包含了目前已知的次次领头阶的QCD和电弱修正，主要包含以下主要内容[247]：

1. 在CT18中，取初始能量参考点$Q_0 = 1.3$ GeV时的6个质子部分子分布函数

$$u_v(x), \quad d_v(x), \quad \bar{u}(x), \quad \bar{d}(x), \quad s(x), \quad g(x), \tag{7.140}$$

的3681个实验数据点作为输入，通过整体拟合得到了6个部分子的分布函数$f(x, Q_0)$[247]。在$Q > Q_0$的区域，人们使用DGLAP演化方程[249–251] 导出大Q区域的部分

子分布函数$f(x,Q)$。并利用了$u(x)=u_v(x)+\bar{u}(x)$, $d(x)=d_v(x)+\bar{d}(x)$和$\bar{s}(x)=s(x)$。对应的第"i"个部分子的分布函数表达式为

$$f^i(x,Q_0,\{a_1,a_2,\cdots\})=a_0^i\ x^{a_1^i-1}\ (1-x)^{a_2^i}\ P^i(x), \tag{7.141}$$

其中a_1^i项描写当$x\to 0$时部分子分布函数的演化，a_2^i项描写当$x\to 1$时PDF的演化。在CTEQ系列的PDF程序中，$P^i(x)$选择为某种形式的伯恩斯坦(Berstein)多项式[247]：

$$P^i(x)=e^{a_3x}\left(1+e^{a_4}x+e^{a_5}x^2\right). \tag{7.142}$$

为了避免偏离(bias)，一般选取很多参数变量，使参数化具有足够的弹性。但太多参数变量也可能导致出现多个极小值和难于收敛等问题。原则上，只要小心选择，不同的参数化方案应该导致类似的拟合结果。CTEQ-TEA合作组尝试了200多种参数化方法，以检查拟合的参数依赖性[247]。在动量分数x很小和很大的区域，实验数据对参数选取的限制很小。

2. 在CT14全面QCD分析计算的基础上，新版本CT18增加了HERA Run-II的全部实验数据[17]，还增加了10多组来自ATLAS, CMS和LHCb 实验组的高精度实验数据。即使是在LHC的时代，来自HERA ep对撞的DIS数据对构造CT18 部分子分布函数系列程序(CT18, CT18A, CT18X 和CT18Z) 仍起着关键的作用。LHCb实验的探测器放置在前冲区域，对于小x和大x区域的部分子分布函数有着较高的灵敏度。在PDF全局拟合中，LHCb数据既可以作为ATLAS和CMS 实验数据的有效补充，还可以提供大量颇为独特的信息。在CT18（Z）程序中，有29个形状因子，使用了3681 (3493) 个实验数据点，拟合的χ^2值与数据点数N_{pt}之比为$\chi^2/N_{pt}=1.17(1.19)$。

3. CTEQ-TEA合作组在CT18的基础上，还通过调整部分输入数据点或者改变相关参数的选择，给出了另外3个CT18A，CT18X和CT18Z 部分子分布函数程序包。在这一套4个部分子分布函数程序包中，CT18和CT18Z之间的差别最大。CT18不包含"ATLAS 7TeV W/Z 数据" 但包含"CDHSW $F_2^{p,d}$ 数据" [18] ，但CT18Z则与之相反。二者还使用了不同的DIS因子化能标和极点质量m_c [247]:

$$\begin{aligned}
\text{CT18}: &\quad \mu^2_{\text{F,DIS}}=Q^2, \quad m_c=1.3\ \text{GeV},\\
\text{CT18Z}: &\quad \mu^2_{\text{F,DIS}}=0.8^2\left(Q^2+\frac{0.3\ \text{GeV}^2}{x_B^{0.3}}\right), \quad m_c=1.4\ \text{GeV},
\end{aligned} \tag{7.143}$$

其中x_B是比约肯参数，而不是部分子动量分数x。

4. 部分子分布函数$c(x,Q),\bar{c}(x,Q)$表示在质子内部的粲夸克分布[260]，CTEQ-TEA合作组考虑了三种类型的可能机制：

[17] CT14只使用了HERA Run-I的实验数据。

[18] 详见文献[247] 的表-1和-2中的标记和说明。

(a) 微扰粲夸克的领头阶贡献，来自于DGLAP方程的演化；

(b) 内禀粲夸克，可以作为强子束缚态内部的非微扰结构出现，对应的幂次压低因子为$\mathcal{O}(\Lambda^2_{QCD}/m_c^2)$，一般假定IC PDF 分量是普适的，与具体硬散射过程无关；

(c) 拟合粲夸克(fitted charm)来自于整体拟合，包含高扭度、高幂次贡献。

考虑到动量求和规则，粲夸克部分子分布函数的引入将影响到胶子和海夸克的部分子分布函数，尤其是对$\bar{u}(x)$ 和$\bar{d}(x)$的影响比较大。$(c(x), \bar{c}(x)$分布函数的精确理论计算对LHC实验中的许多过程（例如对W,Z和希格斯玻色子的产生、$Z+c$喷注产生等）的精确测量有较大影响。

对更多的细节，详见文献[247]和那里所引用的参考文献。CTEQ-TEA 合作组目前使用的网址是：https://www.physics.msu.edu/scalise/cteq/，该网页上有20多年来的CTEQ 暑期学校的链接，还可以查阅并下载很多涉及QCD微扰计算和深度非弹性散射研究的学术报告和相关资料。

7.5　练习题

1. QCD 的β函数是夸克味道数量的函数，在一圈图近似下的β_0函数表达式是(7.25)式，粲夸克的质量大约在1.5GeV附近，试利用一圈图近似的α_s公式(7.28)，推导3个味道的$\Lambda^{(3)}$和4个味道的$\Lambda^{(4)}$ 之间的关系。

2. 试证明(7.40)式的形状因子，可以由(7.39)式的电荷分布的傅里叶变换得到。

3. 试推导$e^- p \to e^- X$深度非弹性散射微分截面对于不同运动学变量函数的变换公式(7.124)。

4. 利用(7.73)式的电子夸克散射振幅，推导(7.74)和(7.75)式的矩阵元平方公式。

5. 试利用微分截面公式(7.118) 和强子流(7.122)式，推导电子-质子散射的中性流散射微分截面公式。

6. 考虑高能质子-反质子散射过程$p\bar{p} \to 2\ jets + X$，画出最低阶的QCD费曼图。其中X表示对撞产生的任意强子末态。

7. Drell-Yan 过程$p\bar{p} \to \mu^+\mu^- X$的总产生截面可以写为

$$\sigma_{\rm DY} = \frac{4\pi\alpha^2}{81s}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx_1 dx_2}{x_1 x_2} \left[4u(x_1)u(x_2) + d(x_1)d(x_2) + 4\bar{u}(x_1)\bar{u}(x_2) + \bar{d}(x_1)\bar{d}(x_2)\right]. \quad (7.144)$$

(a) 把这个截面用价夸克的分布振幅和单一的海夸克部分子分布函数(即$S(x) = \bar{u}(x) = \bar{d}(x)$)表示出来;

(b) 对于类似的$pp \to \mu^+\mu^- X$ Drell-Yan 产生过程，写出总产生截面表达式.

8. 4-动量为$k=(E,\mathbf{k})$的入射电子与静止的质子靶($p=(m_p,0)$)通过单光子交换发生散射。末态电子和末态强子的4-动量分别为k'和p'。

   (a) 在质子静止系中，证明：

   $$p'^2 = q^2 + 2m_p(E-E') + m_p^2, \tag{7.145}$$

   其中$q^2=(k-k')^2$，E和E'是初末态电子的能量。

   (b) 如果电子是高速飞行的相对论电子，证明在质子静止系中有$q^2=-4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}$，其中$\theta$是入射电子的散射角。

   (c) 对弹性散射情况，证明：

   $$E' = \frac{E}{1+\frac{2E}{m_p}\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{7.146}$$

   当取$E=4.8$ GeV，$\theta=6^\circ$时，计算E'的数值。

   (d) 对弹性散射情况，当$E=4.879$ GeV, $\theta=10^\circ$时，发现在$E'=4.2$ GeV有一个共振峰，计算末态强子的不变质量。

9. 在非相对论夸克模型理论框架下，可以用下面的束缚势$V(r)$来很好地描写重夸克偶素$Q\bar{Q}(Q=c,b)$，

   $$V(r) = -\frac{a}{r} + br, \tag{7.147}$$

   通过对相关实验数据的拟合，得到参数(a,b)的值：$a\approx 0.30$，$b\approx 0.23$ GeV^2。

   (a) 请指出势函数$V(r)$的第1项和第2项的来源和性质。

   (b) 可以对重夸克偶素$Q\bar{Q}$的基态能量做如下估计。对给定的r，束缚态的总能量可以写为

   $$E(r) = 2m - \frac{a}{r} + br + \frac{p^2}{m} \tag{7.148}$$

   其中$m=m_Q$，p是Q的动量(非相对论情况)。解释为什么可以做近似：$p\sim 1/r$，并导出$E(r)$的表达式。然后证明，在该近似下重夸克偶素$Q\bar{Q}$的基态半径r_0可以由下式解出：

   $$\frac{2}{mr_0^3} = \frac{\alpha_s^2}{r_0^2} + b. \tag{7.149}$$

   (c) 考虑粲偶素$c\bar{c}$，并近似取$m_c=1.5$ GeV，证明对$c\bar{c}$系统，有$<1/r_0>\approx 0.67$ GeV。并基于该模型，估算$c\bar{c}$基态能量。

(d) 考虑$c\bar{c}$的2个激发态：

$$\begin{aligned}\psi(2S): &\quad m = 3686.1\text{MeV}, \Gamma = 0.3\text{MeV};\\ \psi(3770): &\quad m = 3773.5\text{MeV}, \Gamma = 27.2\text{MeV}.\end{aligned} \tag{7.150}$$

解释这两个激发态衰变宽度的巨大差别的可能来源。

10. 试利用QCD的QED的费曼规则画出(7.138)式的强子对撞机上的单光子产生过程$q + \bar{q} \to \gamma + g$的领头阶费曼图，并计算其微分截面。

11. 试利用QCD的QED的费曼规则画出(7.137)式的QCD康普顿散射过程$q + g \to \gamma + q$的领头阶费曼图，并计算其微分截面。

12. 在HERA对撞机上入射电子能量为$E_1 = 27.5\text{GeV}$，质子能量为$E_2 = 820\text{GeV}$，试证明HERA上的深度非弹性散射过程的比约肯变量公式

$$x = \frac{E_3}{E_2} \cdot \frac{1 - \cos\theta}{2 - (E_3/E_1)(q + \cos\theta)}, \tag{7.151}$$

其中θ和E_3分别是电子被散射后的出射角度和能量。

13. (a) 在电子-质子非弹性散射的打靶实验中，证明不同变量的微分截面公式关系

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{EE'}{\pi}\frac{d^2\sigma}{dE'dQ^2} = \frac{EE'}{\pi}\frac{2Mx^2}{Q^2}\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}; \tag{7.152}$$

(b) 利用上式，证明(7.66)式的微分截面公式可以改写为

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[\frac{F_2}{\nu}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{2F_1}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]. \tag{7.153}$$

第八章　电弱统一理论

自然科学研究告诉我们，在自然界存在四种基本相互作用：电磁相互作用，弱相互作用，强相互作用和引力相互作用。把不同类型的相互作用统一起来，一直是物理学家们追求的一个梦想!

英国物理学家牛顿[1]把人们在地球上观测到的重力和星球间引力统一到万有引力。在1865 年，麦克斯韦[2]把电和磁统一到了一种矢量场理论－电磁场中。统一的电磁场用麦克斯韦方程来描写，麦克斯韦方程引入了一个自由参数－光速。

量子电动力学告诉我们，电磁场是规范相互作用。如要建立电磁相互作用和弱相互作用的统一理论，这个统一理论也应该是规范相互作用，需要解决以下几个问题：

1. 规范相互作用总是和一定规范变换群下的不变性相联系，电磁规范相互作用是和$U(1)$规范不变性相联系. 如果有统一的电弱规范相互作用，首先要回答它是和什么规范变换群的不变性相联系?

2. 电磁规范相互作用是通过放出和吸收光子来体现的，规范不变性决定光子的自旋为1，光子的质量为0。统一的电弱相互作用如果是规范相互作用，则规范粒子的自旋应为1，质量应为0。但弱相互作用是短程相互作用，传递弱相互作用的规范玻色子的质量应该很重，这表明规范对称性已经破缺，就需要回答规范对称性如何破缺，如何使传递弱作用的矢量规范玻色子获得重质量？机制是什么？

3. 电磁规范相互作用是可重整的，这是QED理论已经证明了的。但对于更大规范变换群的电弱相互作用，是不是仍然是可重整的，特别是在规范对称性破缺，规范玻色子得到重质量之后，电弱相互作用是不是仍然是可重整的，这还需要从理论上给予证明。有质量规范场能否重整化?

4. 量子场论中给出：在连续变换对称性自发破缺时，必然伴随出现零自旋、零质量的粒子，称为戈德斯通玻色子。然而实验上并没有发现这样的粒子。因此，如何能在电弱规范对称性破缺的同时，不出现这种零自旋、零质量的粒子，也是理论上必须解决的问题。

在本章，我们将对电弱统一理论的基本理论框架做一个初步的介绍，在第九和第十章，将对标准模型精确检验和重味物理的部分课题做比较系统的介绍和讨论。对更详细的内容读者可以阅读下列专著[3, 4, 6–13, 19–21] 和其他参考文献。

[1]Isaac Newton (1642.12.25 - 1726.3.20)，建立了经典力学，牛顿三定律，发现了万有引力。

[2]James Clerk Maxwell (1831.6.13 - 1879.11.5)，苏格兰数学物理学家。建立了电磁场的麦克斯韦方程，实现了电和磁的统一。

8.1 弱相互作用理论发展简史

从1930年代到1960年代，弱相互作用的理论研究经历了非常缓慢的发展历程。

8.1.1 弱相互作用的发现

1934年： 为了解释原子核的贝塔衰变的电子“反常”能谱，泡利提出存在不带电中微子的假设，用三体衰变（但中微子不可见）解释了原子核β衰变的电子能量连续谱。

1934年，费米借鉴量子电动力学理论提出描述原子核β衰变的流-流有效理论:

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n\right) \left(\overline{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu\right). \tag{8.1}$$

但是耦合常数G_F与电动力学很不一样，不但非常弱，而且带质量量纲的负二次方。这里的弱作用是四个费米子的点相互作用。

1936年： G. Gamow[3] 和E. Teller [4] 推广了费米理论到任意的γ矩阵结构：

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left(\overline{\psi}_p \Gamma^i \psi_n\right) \left(\overline{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu\right), \tag{8.2}$$

其中$\Gamma_i = 1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$构成了$(1+4+1+4+6) = 16$个分量的$4\times 4$狄拉克矩阵(完全集合)。

1954年： 杨振宁和米尔斯[261] 在量子场论中首次引入定域$SU(2)$规范不变的概念，为电弱统一理论的建立提供了数学框架。

1955年： Alvarez等人发现θ，τ粒子有相同的衰变宽度$(\Gamma_\theta = \Gamma_\tau)$ 和质量$(m_\theta = m_\tau)$，似乎应该是同一个态。但是它们却通过不同的末态衰变，其末态宇称相反：

$$\begin{aligned} \theta^+ &\to \pi^+\pi^0, \qquad J^p = 0^+; \\ \tau^+ &\to \pi^+\pi^+\pi^-, \qquad J^p = 0^-, \end{aligned} \tag{8.3}$$

这就是历史上俗称的$\theta-\tau$之迷。

1956年: 李政道和杨振宁认为θ和τ是同一个粒子，但在弱相互作用过程宇称可以不守恒，并提出实验建议，以检验弱相互作用中的宇称不守恒[83]。

1957年: 为了检验弱相互作用中宇称是否守恒，吴健雄等人测量了极化^{60}Co 原子核β衰变中电子的角分布

$$^{60}\mathrm{Co} \longrightarrow ^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{8.4}$$

发现其衰变依赖于赝标量$\langle \vec{\mathbf{J}}_{nuc} \rangle \cdot \vec{\mathbf{p}}_e$，证明了弱相互作用中的宇称不守恒。

[3] George Gamow，1904.3.4-1968.8.19，美籍俄裔物理学家，国际著名核物理学家和天体物理学家。

[4] Edward Teller，1908.1.15-2003.9.9，美国实验物理学家，劳伦斯-利弗莫尔国家实验室创始人，杨振宁教授的博士导师，曾获得费米奖和爱因斯坦奖。

1957年， H. Frauenfelder等人进一步确认在弱作用中宇称不守恒：对在β 衰变过程

$$^{60}\mathrm{Co} \longrightarrow e^{-}(long.pola.) + \bar{\nu}_e + X, \tag{8.5}$$

中发射的电子的纵向极化量（$\vec{\sigma}_e \cdot \vec{\mathbf{p}}_e$ ）的测量表明，弱作用中发射的电子绝大部分是左手的。弱作用中宇称不守恒的发现表明：在弱作用流中必须包含有γ_5项

$$\mathcal{L}_{weak} \longrightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left(\overline{\psi}_p \Gamma^i \psi_n\right) \left(\overline{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu\right). \tag{8.6}$$

这时，CP对称性保持(P破坏时，C也破坏)。

1957年， 李政道，杨振宁和朗道[5]等人提出中微子的二分量理论。它要求中微子要么是左手的要么是右手的。由于已知弱作用中涉及的电子（正电子）是左手（右手）的，故轻子流应写为

$$J^i_{lept.} \equiv \overline{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5) \psi_\nu \longrightarrow \overline{\psi}_e \frac{1+\gamma_5}{2} \Gamma^i \psi_\nu. \tag{8.7}$$

因此中微子螺旋度的测量是决定弱流结构的关键。如$\Gamma^i = V, A$，则有$\{\gamma_5, \Gamma^i\} = 0$，中微子应是左手的, 否则轻子流将为零。另一方面，如$\Gamma^i = S, T$，则有$[\gamma_5, \Gamma^i] = 0$，中微子应是右手的。

1957年， 许温格[6]、李政道和杨振宁等人[262] 发展了有关在弱作用中引入重质量的带电中间矢量玻色子($W^{\pm}$) 的思想。认为四费米子相互作用是“类点”的，即S-波相互作用。分波的幺正性要求这种相互作用所产生的反应截面必须满足

$$\sigma < 4\pi / p^2_{cm}. \tag{8.8}$$

然而，由于G_F具有量纲M^{-2}，故四费米子弱相互作用的截面应满足

$$\sigma \sim G^2_F p^2_{cm}. \tag{8.9}$$

也就是说，随着反应质心能量的提高，反应截面将迅速增大。因此，费米有效理论当$p_{cm} \sim 300GeV$ 时将破坏理论的幺正性。这个问题可仿照量子电动力学，通过引入中间矢量玻色子来传递相互作用而得到解决。但这里的中间矢量玻色子应具有与光子不同的性质。首先由于β衰变是荷电流过程，故该粒子应带电。其次由于弱作用的短程性，该粒子应当具有重质量。最后，它们不应具有确定的宇称以允许弱流具有V-A结构。引入满足上述特征的玻色子以后，轻子的四费米子相互作用哈密顿量

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\overline{\psi}_{\nu_l} \Gamma_\mu \psi_l \overline{\psi}_{\nu'_l} \Gamma_\mu \psi'_l + h.c.\right], \tag{8.10}$$

[5]Lev Davidovich Landau，1908.1.22-1988.4.1，苏联物理学家，因在超流和超导电性方面的研究成果而获得1962年诺贝尔物理奖。

[6]J.S. Schwinger，1918.2.12-1994.7.16，美国物理学家，因在建立QED 理论方面的贡献获得1965年诺贝尔物理奖。

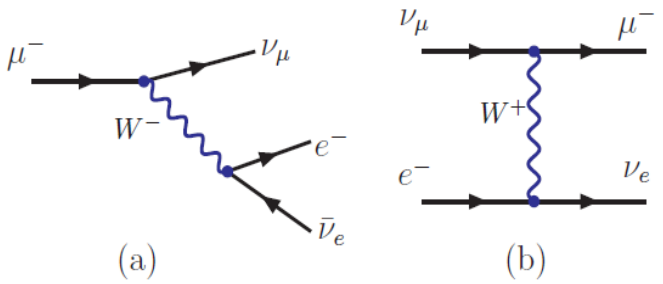


图 8.1: 描写$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ 和$\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ 过程的树图费曼图。

就变为费米子和W玻色子的三体相互作用

$$\mathcal{L}_{weak} = g\left[J^{-\mu}W_\mu^+ + J^{+\mu}W_\mu^-\right]. \tag{8.11}$$

式中的g是无量纲的弱作用耦合常数, $J^\mu = \overline{\psi}_{\nu_l}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,\psi_l$是宇称破坏的左手弱作用带电流。

1958年： 理查德·费曼等人提出了普适性$V-A$相互作用理论：

$$J^{+\mu}_{lept.} = \overline{\psi}_e\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,\psi_{\nu_e}. \tag{8.12}$$

M. Goldhaber[263] 等首次证实中微子是左手的（即螺旋度为负的），这个结果证实弱作用的结构确实是$V-A$型的。这也奠定了最大宇称破坏的弱作用理论，也使得弱相互作用成为规范相互作用理论，从而为电磁相互作用和弱作用最终统一奠定基础。弱相互作用的左手流结构也持续得到了越来越精确的实验检验，近期最准确的验证$V-A$结构带电流弱相互作用的实验，包括TWIST实验组的10^{10}量级的极化缪子衰变的角分布测量[264]。

8.1.2 弱相互作用的普适性

1949年： J.A. Wheeler [7] 和J. Tiomno[8]，李政道，Rosenbluth 和杨振宁等人提出费米弱作用的普适性建议。即对当时已经发现的不同弱作用过程

$$\begin{aligned} \beta-decay: &\quad n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \mu-decay: &\quad \mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \mu-capture: &\quad \mu^- + p \to n + \nu_\mu, \end{aligned} \tag{8.13}$$

可以用同一个普适费米耦合常数G_F来描写。

在量子电动力学中，电磁相互作用严格正比于费米子的电荷，强相互作用对于不同夸克也是普适的。既然不同的轻子不发生混合，一个自然的问题是，弱相互作用耦合常数是

[7] John A. Wheeler，1911.7.9-2008.4.13，美国物理学家。在广义相对论和统一场论方面有重要贡献，费曼的博士导师，曾获得费米奖，爱因斯坦奖和富兰克林奖。

[8] Jayme Tiomno，1920.4.16-2011.1.12，巴西物理学家，在广义相对论和粒子物理研究中有重要贡献。

否对所有的轻子都是一样的？或者说，是否所有的轻子都带有相同的弱作用的荷？对于纯轻子相互作用来说，例如，μ子和τ子的衰变，它们都是通过如图8.1所示W粒子传播的短程相互作用发生的。作用强度正比于费米耦合常数

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2}. \tag{8.14}$$

因为耦合常数或者说弱作用荷g是没有量纲的。因而费米耦合常数就有质量量纲的平方倒数。粒子的衰变宽度正比于衰变振幅的平方，也就正比于耦合常数的平方，所以是质量量纲的四次方倒数；因为电子和中微子的质量可以忽略不计，因而我们只有一个有量纲的量m_μ，所以在μ轻子的衰变宽度公式中μ轻子质量必须以5次方的形式出现，以使得宽度的量纲是质量的量纲，所以通过简单的量纲分析我们就得到了μ子的衰变宽度

$$\Gamma(\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu) \equiv 1/\tau_\mu \propto G_\mu^2 m_\mu^5. \tag{8.15}$$

实际上，在忽略末态轻子质量的前提下，量子场论树图级的计算给出的结果是：

$$\Gamma(\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu) \equiv 1/\tau_\mu = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \tag{8.16}$$

τ轻子有很多衰变道，其中的$\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau$的分支比(分宽度/总宽度)实验测量值是$(17.82 \pm 0.04)\%$ [1]。同样的计算可以给出

$$\begin{aligned} Br(\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau) &= \Gamma(\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau)/\Gamma_\tau \\ &= \Gamma(\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau)\tau_\tau = \frac{\tau_\tau G_\tau^2 m_\tau^5}{192\pi^3}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

从τ轻子的寿命和上面的衰变公式，我们可以检验耦合常数G_μ和G_τ 的普适性：

$$(G_\tau/G_\mu)^2 = Br(\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau)(m_\mu/m_\tau)^5(\tau_\mu/\tau_\tau). \tag{8.18}$$

已知$\tau_\mu = 2.1969811 \times 10^{-6}$s，$m_\mu = 105.6583745$ MeV，$\tau_\tau = 290.3 \times 10^{-15}$s，$m_\tau = 1776.86$ MeV，由此得到$G_\tau/G_\mu \simeq 1.0013$。这可以看出，$\tau$和$\mu$轻子衰变的弱作用耦合常数具有很好的普适性。

从$\tau^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau$ 和$\tau^+ \to \mu^+\nu_\mu\bar{\nu}_\tau$ 的相对分支比，还可以检验电子和μ子的弱耦合的普适性：

$$G_\mu/G_e = 1.001 \pm 0.004; \tag{8.19}$$

从$\pi^+ \to e^+\nu_e$ 和$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 的衰变分支比可以得出

$$G_\mu/G_e = 1.001 \pm 0.002. \tag{8.20}$$

以上的结果充分说明，不同的轻子对W玻色子的带电流耦合是普适的。

由于对撞机能量的提高，人们也开始了对于W玻色子直接衰变到轻子的普适性进行检验。在日内瓦的大型正负电子对撞机(LEP) 实验上测到的这些衰变的分宽度在实验误差范围内是相等的[1]：

$$\frac{Br(W^+ \to \mu^+\nu_\mu)}{Br(W^+ \to e^+\nu_e)} = 0.996 \pm 0.008, \qquad \frac{Br(W^+ \to \tau^+\nu_\tau)}{Br(W^+ \to e^+\nu_e)} = 1.004 \pm 0.020. \tag{8.21}$$

不同的带电轻子对中性Z玻色子耦合的普适性也经过了实验的检验，在日内瓦的大型正负电子对撞机(LEP)实验上测到的这些衰变的分宽度在实验误差范围内是相等的[1]：

$$\begin{aligned} & Br(Z^0 \to e^+e^-) : Br(Z^0 \to \mu^+\mu^-) : Br(Z^0 \to \tau^+\tau^-) \\ = \;& 1 : (1.0001 \pm 0.0024) : (1.0020 \pm 0.0032). \end{aligned} \tag{8.22}$$

因此，所有轻子的弱作用耦合常数g或G_F都是普适的。

在上个世纪90年代初，由于τ轻子的寿命测量精度的提高，对(G_τ/G_μ)比值的实验测量结果对轻子普适性的偏离已经有2.4个标准偏差，轻子普适性遭到了怀疑。北京谱仪合作组于1991年11月7日–1992年1月20日，进行了τ轻子质量测量的数据获取工作，北京谱仪合作组所获结果：$M_\tau = 1776.9 \pm 0.4 \pm 0.2$MeV，与1990年版粒子数据表(PDG)给出的世界平均值相比，降低了7.2MeV，北京谱仪合作组纠正了约7 MeV偏离后，实验精度也提高了8倍。从而维护了轻子弱相互作用的普适性，为验证弱相互作用的耦合常数是唯一的，进而说明标准模型理论的正确性起了推动作用。

8.1.3 夸克混合与卡比玻角

在上世纪60年代初，实验上观测到奇异数改变（$\Delta S = 1$）的弱衰变被大大压低。例如，中子的β衰变宽度远大于超子Λ的β衰变宽度：

$$\Gamma_{\Delta S=0}\left(n \to p + e^- + \bar{\nu}\right) \gg \Gamma_{\Delta S=1}\left(\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}\right). \tag{8.23}$$

另一个奇异粒子的半轻子衰变$\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e$ 也是$\Delta S = 1$的奇异数改变过程，实验发现它比$\Delta S = 0$ 的过程$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ 被压低大约20倍。另外从上面的中子β衰变中抽取的费米耦合常数G_F比μ子衰变$\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ 中的G_F也小一点。进一步的实验表明，不同轻子的弱相互作用强度具有普适性，而不同强子的弱相互作用强度则具有很大的不同，表现为不同强子的弱相互作用没有普适性。

1963年，意大利物理学家卡比玻引入卡比玻角和强子弱流[265]来解释上面的实验结果。在这个理论中，轻子是以味道本征态来参加弱相互作用的，而夸克则不是。d和s夸克要先混合成一个弱作用本征态d'，然后再参与弱相互作用。他们的混合用卡比玻角θ_c来描写，即夸克弱相互作用的二重态是

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

在夸克的弱相互作用中，费米耦合常数G_F其实是和轻子中的一样的。只是在$\Delta S = 0$的过程中（中子β 衰变）涉及到上面的u 和d 夸克。因而有效耦合是$G_F \cos\theta_c$，而对于$\Delta S = 1$的奇异数改变过程，涉及到u和s夸克，因而正比于$G_F \sin\theta_c$, 实验给出$\theta_c \sim 12°$, $\sin\theta_c \sim 0.22$, $\sin^2\theta_c \sim 0.05$，所以其差别是大约20 倍。由于$\cos^2\theta_c \sim 0.95$，显然比1小，所以中子的β衰变中的费米耦合常数G_F只比μ介子衰变中的小一点。事实上，与(8.12)式的轻子弱流类似，强子弱流可写为

$$J_\mu^h = \bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + \bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u. \tag{8.25}$$

上式中第一项可解释$\Delta S = 0$的跃迁，而第二项解释$\Delta S = 1$的过程。使用新的相互作用本征态(8.24)，可以把强子弱流写为

$$J_\mu^h = \bar{d}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)u = \cos\theta_c\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + \sin\theta_c\bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u. \tag{8.26}$$

通过卡比玻角的引入，人们把轻强子的衰变分为了两类：卡比玻压低的过程和卡比玻允许的过程，它们的分支比分别正比于$\sin^2\theta_c$和$\cos^2\theta_c$，例如

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu)} \sim \frac{\sin^2\theta_c}{\cos^2\theta_c}, \tag{8.27}$$

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+\nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \pi^0 e^+\nu_e)} \sim \frac{\sin^2\theta_c}{\cos^2\theta_c}. \tag{8.28}$$

卡比玻的理论在这里得到了很好的验证。类似的结论也发生在D介子的纯轻子衰变和非轻子衰变道中，也分成了卡比玻压低的过程和卡比玻允许的过程。卡比玻混合角的引入使得弱相互作用的普适性从轻子部分推广到了夸克部分，为统一的弱相互作用理论的建立奠定了基础。

8.1.4　GIM机制

在早期的实验上发现，弱相互作用都是(8.26)式所示的带电流相互作用，这种相互作用能够改变夸克的味道，这是第三章中所发现的弱相互作用中奇异数和同位旋不守恒的根源所在。这与电磁相互作用只有中性流，而且不能改变夸克味道有很大的不同。但是弱相互作用除了带电流以外，也有中性流相互作用。卡比玻的理论虽然可以很好地解释味改变带电流过程，但是在当时解释上面提到的中性流实验时却遇到了困难。

类似于(8.11)式的W玻色子传递的带电弱流相互作用，我们可以写出Z^0传递的左手弱中性流相互作用

$$\mathcal{L}_{NC} = g_Z\left[\bar{\psi}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,\psi Z_\mu^0\right]. \tag{8.29}$$

其中Z^0 和e^+e^-，$\mu^+\mu^-$, $\nu_e\bar{\nu}_e$, $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ 等轻子的中性流耦合与实验数据吻合，没有出现问题，但是Z^0和强子的耦合，本质上也就是Z^0和夸克的中性流耦合却出了问题。按照卡比玻的

表 8.1: 味道改变的中性流过程和其实验测量分支比(单位：10^{-9})。

衰变道	$K_L \to \mu^+\mu^-$	$K_L \to \pi^+\pi^-e^+e^-$	$K_L \to \mu^+\mu^-e^+e^-$	$K_L \to e^+e^-e^+e^-$
衰变分支比	6.84 ± 0.11	311 ± 19	2.69 ± 0.27	35.6 ± 2.1
衰变道	$K^+ \to \pi^+\mu^+\mu^-$	$K^+ \to \pi^+e^+e^-$	$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$	
衰变分支比	94 ± 6	300 ± 9	$0.114^{+0.040}_{-0.033}$	

理论，弱作用的本征态是u, d'，而不是u, d。Z^0和$d'\bar{d}'$ 的耦合，由(8.24) 式可得

$$\begin{aligned} d'\bar{d}' &= (d\cos\theta_c + s\sin\theta_c)(\bar{d}\cos\theta_c + \bar{s}\sin\theta_c) \\ &= (d\bar{d}\cos^2\theta_c + s\bar{s}\sin^2\theta_c) + (s\bar{d} + d\bar{s})\cos\theta_c\sin\theta_c. \end{aligned} \tag{8.30}$$

其中第一项是$\Delta S = 0$的过程，实验上是有的，但是后面的交叉项是$\Delta S = 1$的中性流过程，却与当时的实验是矛盾的，因为当时没有发现味道改变的中性流衰变过程。

中性弱流的选择规则是$\Delta S = 0$，也就是说，没有味道改变的树图中性流。奇异数改变的中性流衰变很长时间都没有被实验观测到。虽然，现在非常高精度的实验装置已经测量到了一些味道改变的弱中性流过程，但是其衰变分支比非常小，如表8.1 所示，实验测量到的味道改变中性流的K介子衰变有很强的限制：分支比都在$10^{-9} - 10^{-7}$ 范围，远小于正常的弱作用衰变宽度。

1970年，为了解释中性流实验和卡比玻理论的矛盾，格拉肖（S.L. Glashow），李尔普罗斯(J. Iliopoulous) 和梅安尼(L. Maiani) 提出了著名的GIM 机制[120]，他们预言第4种夸克-粲夸克的存在，粲夸克与弱作用下夸克本征态$s' = (s\cos\theta_c - d\sin\theta_c)$ 构成了第2 个新的夸克弱作用二重态，

$$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s\cos\theta_c - d\sin\theta_c \end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

新增加的二重态会给出Z^0耦合新的贡献

$$\begin{aligned} s'\bar{s}' &= (s\cos\theta_c - d\sin\theta_c)(\bar{s}\cos\theta_c - \bar{d}\sin\theta_c) \\ &= (s\bar{s}\cos^2\theta_c + d\bar{d}\sin^2\theta_c) - (s\bar{d} + d\bar{s})\cos\theta_c\sin\theta_c. \end{aligned} \tag{8.32}$$

把(8.30)和(8.32)式相加，就会得到

$$d'\bar{d}' + s'\bar{s}' = d\bar{d} + s\bar{s}. \tag{8.33}$$

可以看到$\Delta S = 1$的味道改变中性流耦合抵消掉了。剩下的对角的$d\bar{d}$和$s\bar{s}$耦合的前面的系数也没有了θ_c的三角函数，而都变成了1，也就是说Z^0 与不同代的夸克弱作用耦合是相同的[9]。尽管早在1964 年比约肯和格拉肖就在他们的论文中提出了可能存在第四种(粲)夸

[9]在后面的电弱统一理论中，我们会知道，虽然Z^0玻色子跟不同代的上型夸克或者下型夸克耦合是分别相同的，但是跟上夸克的耦合和跟下夸克的耦合是两种不同的耦合。

克的假设[266]，但人们却没有认真对待粲夸克是否存在的问题。GIM机制要求必须存在与u夸克对应的c夸克，以解释为什么不存在味道改变的弱中性流过程，同时解释为什么弱作用$\Delta S=2$带电流过程是压低的，但$\Delta S=1$的带电流过程是允许的。所以人们一般把“预言”第四种粲夸克的贡献归于格拉肖、李尔普罗斯和梅安尼[120]。

GIM机制的提出也使得弱相互作用的拉氏量不仅对于不同代的轻子是普适的，对于不同代的夸克的耦合也是普适的，使得弱作用拉氏量变得非常简洁，具有非常重要的理论意义。考虑(u,d,s,c)四味夸克，为了使强子弱流是普适的，即具有同一耦合常数G_F，同时又能解释奇异数改变过程被大大压低的实验事实，利用卡比玻引入的混合角θ_c, GIM机制给出了一个2×2的混合矩阵，它描述了夸克的质量本征态和弱作用本征态的相对关系：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{8.34}$$

式中(d,s)和(d',s')分别是质量本征态和弱作用本征态。由于因果性或者守恒定律的要求，混合矩阵必须是幺正的。而2×2 幺正矩阵只需要一个参数-卡比玻角θ_c来描写。所有的与(u,d,s,c)夸克有关的弱衰变都与这个唯一的参数一致。由于历史的原因(当时只有一种上夸克)，我们用下夸克的混合来描写弱相互作用，实际上，这只是一个习惯约定，我们也可以用两个上夸克的混合来描写

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

公式(8.34)和(8.35)的描写是完全等价的。u和d’(d、s)夸克耦合，c和s’(d、s)夸克耦合，等价于d 和u’(u、c) 夸克耦合，s 和c’(u、c) 夸克耦合。同样也可以上下夸克都混合。需要指出的是，夸克混合的一个必要条件是夸克的质量不相同。如果s和d夸克的质量相同，或者u和c夸克的质量相同，也就是两代夸克的质量发生简并，我们就没有办法(没有量子数来标记)通过它们的质量来区分出两种夸克，也就无所谓混合。这实际上是最小标准模型中轻子的情况。中微子质量为0，所以没有混合。如果中微子有不同的质量，也会有混合矩阵，也将有CP 破坏。这是我们在第四章讨论过的。

GIM机制解释了实验上发现的没有味道改变中性流过程的问题，但是通过味道改变的带电流作用，还是可以发生味道改变的中性流过程，例如表8.1所示，都是已经被实验发现的味道改变弱中性流过程的分支比。从这个表格可以看出这些过程的分支比都很小，是压低很厉害的。这其实是GIM机制的额外效果，它不仅把树图的味道改变中性流耦合抵消掉了，而且通过混合矩阵的幺正性条件，给出了这些过程的圈图压低效应之外的额外压低效应，人们通常把这些分支比很低的衰变道统称为**稀有衰变** ，由于标准模型的贡献很小，它们很可能对于超出标准模型的新物理比较敏感，我们将在这一章的最后讨论K介子的稀有衰变。

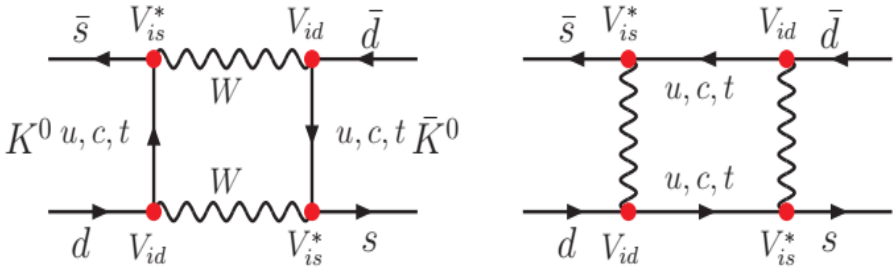


图 8.2: 标准模型中对$K^0-\bar{K}^0$ 混合有主要贡献的单圈箱(Box)图，内线费米子可以是3个上夸克(u,c,t) 的任意组合。

8.2 中性K介子系统的对称性与CP破坏

弱作用中的宇称不守恒而CP联合守恒被实验确立之后，所谓的θ和τ粒子确定为同一种粒子，其名称在如今的粒子数据表上称为K 介子，其中的中性K^0和$\bar{K}^0$介子互为正反粒子，能够区分这两个粒子的量子数是同位旋第三分量和奇异数，但是由于K介子只有弱衰变，而弱衰变中同位旋和奇异数都不守恒，因此通过其衰变行为是不能区分K^0和$\bar{K}^0$粒子的。由于K^0和$\bar{K}^0$ 介子是通过CP联合变换来联系的，如果约定如下的CP变换相位

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \qquad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \tag{8.36}$$

我们可以定义$|K_1\rangle$是CP为偶(即CP本征值$\eta_{cp}=+1$)的CP本征态，$|K_2\rangle$是CP为奇(即$\eta_{cp}=-1$)的本征态

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right], \qquad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\right]. \tag{8.37}$$

由于CP守恒，中性K介子衰变时，K_1可以衰变到两个π介子，衰变得很快，平均寿命为$0.8954(4)\times10^{-10}s$，称为短寿命K介子，记为K_S。K_2介子CP为负，只能衰变到三个π介子，由于相空间比衰变到两个π介子的相空间小很多(见2.3.3节的讨论)，K_2介子衰变得很慢，平均寿命为$5.116(21)\times10^{-8}s$，称为长寿命K介子，记为K_L。这种差异导致$K_{\rm L}$和$K_{\rm S}$的寿命相差572倍。由于巨大的寿命差别，在高能对撞机上，实验物理学家一般只能通过其两个π 介子的衰变末态探测到K_S介子；而K_L介子则由于长寿命，大部分穿过探测器后才衰变，而很难被探测到。

中性K介子一般是通过强相互作用产生的，强作用保持奇异数守恒，其产生的时候显然处于味道本征态$K^0=\bar{s}d$ 或者$\bar{K}^0=s\bar{d}$。但是其弱衰变的时候显然处于质量本征态=CP本征态。这个变化是通过图-8.2所示的弱作用箱图发生的，这通常被称为$K^0-\bar{K}^0$混合。

如果中性K介子之间没有混合，那么依据第一章(1.15)式的不稳定粒子时间依赖的波函数，$t=0$时刻的一个$|K^0\rangle$介子在$t>0$时刻的波函数可以写成

$$|K^0(t)\rangle = |K^0\rangle e^{-iMt}e^{-\Gamma t/2}\,, \tag{8.38}$$

其中M和Γ 分别是K^0介子的质量和宽度。但是，实际上中性K介子之间可以通过图8.2所示的费曼图发生混合，因此K 介子波函数$|K(t)\rangle$所表示的时间演化，必须同时包含K^0和$\bar{K}^0$介子。薛定谔方程为

$$i\frac{d}{dt}|K(t)\rangle = \hat{H}|K(t)\rangle, \qquad |K(t)\rangle = \begin{pmatrix} |K^0(t)\rangle \\ |\bar{K}^0(t)\rangle \end{pmatrix}. \tag{8.39}$$

不稳定系统的哈密顿量不再是一个算符，而是需要两个算符来描写

$$\hat{H} = \hat{M} - i\frac{\hat{\Gamma}}{2} = \begin{pmatrix} M_{11} - i\frac{\Gamma_{11}}{2} & M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2} \\ M_{21} - i\frac{\Gamma_{21}}{2} & M_{22} - i\frac{\Gamma_{22}}{2} \end{pmatrix}, \tag{8.40}$$

其中$\hat{M}$ 和$\hat{\Gamma}$ 都是2×2的厄米矩阵，二者的本征值也都是实数。介子是复合粒子，其质量来源于夸克内禀质量和相互作用，对于中性K^0介子系统，由于混和效应，从而变成了上面的夸克矩阵

$$M_{ij} \;=\; m_0\delta_{ij} + \langle i|\hat{H}_w|j\rangle + \sum_n \mathcal{P}\frac{\langle i|\hat{H}_w|n\rangle\langle n|\hat{H}_w|j\rangle}{E_n - m_0}, \tag{8.41}$$

其中第二项代表图8.2所示的$K^0 - \bar{K}^0$ 混合，第三项是长程贡献，其中$\mathcal{P}$代表柯西主值，n是K^0 或者$\bar{K}^0$ 可以通过弱作用衰变的末态。Γ 是衰变宽度，因此只由相互作用决定

$$\Gamma_{ij} \;=\; 2\pi\sum_n \delta(E_n - m_0)\langle i|\hat{H}_w|n\rangle\langle n|\hat{H}_w|j\rangle. \tag{8.42}$$

考虑到矩阵$\hat{M}$和$\hat{\Gamma}$的厄米性质和哈密顿量H的CPT不变性，对各个矩阵元有如下限值：

$$M_{21} = M_{12}^*\,, \qquad \Gamma_{21} = \Gamma_{12}^*\,, \qquad \text{(hermiticity)} \tag{8.43}$$

$$M_{11} = M_{22} \equiv M\,, \qquad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} \equiv \Gamma\,, \quad \text{(CPT)} \tag{8.44}$$

最后我们有

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} M - i\frac{\Gamma}{2} & M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2} \\ M_{12}^* - i\frac{\Gamma_{12}^*}{2} & M - i\frac{\Gamma}{2} \end{pmatrix}. \tag{8.45}$$

把上式带入薛定谔方程(8.39)式，其求解过程相当于对角化(8.45)式，从而得到本征值

$$M - \frac{i}{2}\Gamma \pm Q, \tag{8.46}$$

其中$Q = \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}$。这两个本征值对应的就是质量本征态，同时也是寿命本征态K_L和K_S。其质量差和宽度差分别为

$$\Delta M = M_L - M_S = 2\mathrm{Re}(Q), \qquad \Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_S = -4\mathrm{Im}(Q). \tag{8.47}$$

把(8.46)式的本征值带入本征值方程，很容易得到K_L和K_S的质量本征态

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\left(|K^0\rangle + \xi|\bar{K}^0\rangle\right), \tag{8.48}$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\left(|K^0\rangle - \xi|\bar{K}^0\rangle\right), \tag{8.49}$$

其中

$$\xi = \left(\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}\right)^{1/2}. \tag{8.50}$$

如果弱作用的拉氏量是CP守恒的，就会有$M_{12} = M_{12}^*$ 和$\Gamma_{12} = \Gamma_{12}^*$，上面的参数$\xi = 1$，因此(8.48,8.49)式就会变到跟(8.37)式一样。这时候质量本征态等同于CP本征态。

从式(8.41)可以看出，质量矩阵的对角元来源于强相互作用，非对角元来源于弱相互作用，因此K_L和K_S 的质量差非常小，对ΔM_K实验测量结果的平均值为[1]:

$$\Delta M_K = (3.484 \pm 0.006) \times 10^{-15}\text{GeV}. \tag{8.51}$$

K介子只有弱相互作用引起的衰变，从式(8.42)也可以看出，Γ矩阵的非对角元和对角元是同一个量级，对角化后的结果就是K_L 的寿命和K_S 寿命差别很大!

8.2.1 $K^0 - \bar{K}^0$振荡

K_S介子和K_L介子500多倍的平均寿命差别导致十分有趣的结果，在K^0介子产生后，由(8.37)式可知，有50% 按K_S 介子衰变，50% 按K_L 介子衰变. 由于K_S 介子的平均寿命远比K_L介子的平均寿命要短，在经过量级为10^{-9}s 的一段时间之后，K_S 介子基本上衰变殆净，但K_L 介子则衰变掉的很少，因此剩下的基本上是纯K_L介子。而由(8.37)式可知，K_L介子是由50%K^0介子和50%$\bar{K}^0$ 介子组成的，也就是说，虽然最初产生的是K^0介子，但经过一段距离后，会从中产生$\bar{K}^0$ 介子。如果这时候，让束流穿过一层物质(质子)，强相互作用下，核子与奇异数$S = +1$的K^0介子只会发生（准）弹性散射，但是奇异数$S = -1$ 的$\bar{K}^0$ 除了弹性散射，还会通过强相互作用产生相同奇异数的超子，例如Λ产生过程$\bar{K}^0 + p \to \Lambda + \pi^+$，因此$\bar{K}^0$介子的反应截面更大。如图8.3所示，通过介质之后，$\bar{K}^0$介子被质子吸收多于K^0 介子。这时候剩下K^0 介子和$\bar{K}^0$ 数量不等，因此经过物质之后的K_L 介子不纯了。也就是说，K_S介子又再生了。如果一开始时产生的是$\bar{K}^0$介子，结果也类似.

由第一章的公式我们得到中性K介子的衰变按照质量本征态描写，其衰变振幅包括衰减因子和振荡因子

$$A_S(t) = A_S(0)e^{-iM_S t}e^{-\Gamma_S t/2} \tag{8.52}$$

$$A_L(t) = A_L(0)e^{-iM_L t}e^{-\Gamma_L t/2}. \tag{8.53}$$

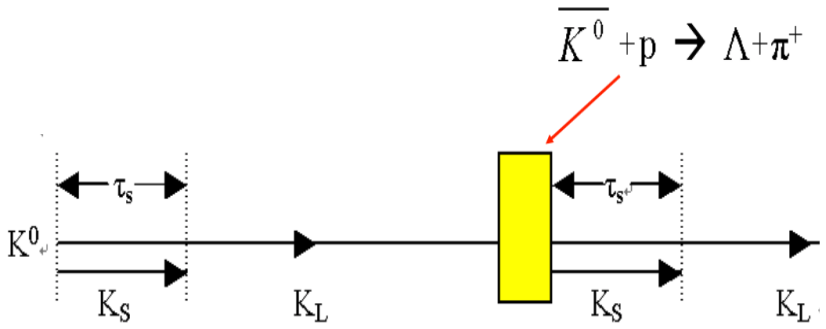


图 8.3: 中性K介子系统$K^0-\bar{K}^0$振荡，K_S粒子再产生的示意图。

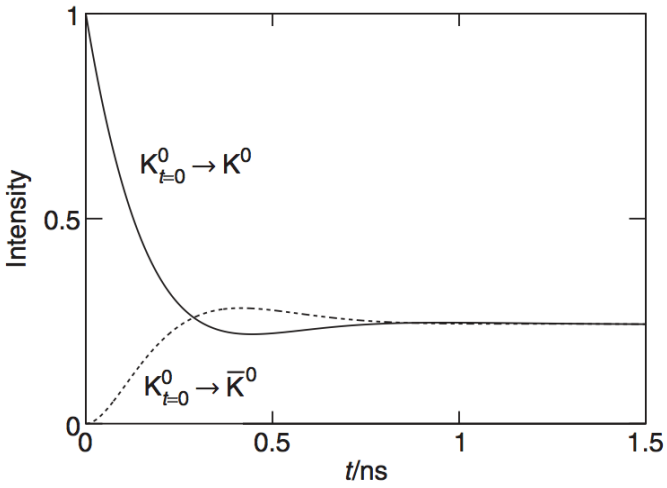


图 8.4: 中性K^0介子产生后，K^0和$\bar{K}^0$介子的流强随时间t振荡的示意图。

例如通过加速器实现的高能碰撞实验中产生了单位流强的K^0介子，动量为p = 2GeV，这些K^0介子衰变时表现为流强为50% 的K_S 介子和流强为50%的K_L介子，振幅则为

$$A_S(0) = A_L(0) \quad = \quad 1/\sqrt{2}. \tag{8.54}$$

反解(8.37)式，可得

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|K_S\rangle + |K_L\rangle\right], \qquad |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|K_S\rangle - |K_L\rangle\right]. \tag{8.55}$$

时间t后，可观测物理量，K^0和$\bar{K}^0$介子的流强由$I = AA^* = |A|^2$，可得

$$I(K^0) \quad = \quad \frac{1}{2}[A_S(t) + A_L(t)][A_S(t) + A_L(t)]^* \tag{8.56}$$

$$= \quad \frac{1}{4}\left\{e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}e^{i[m_S-m_L]t} + e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}e^{i[m_L-m_S]t}\right\} \tag{8.57}$$

$$= \quad \frac{1}{4}\left\{e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}\cos\Delta m t\right\}, \tag{8.58}$$

$$I(\bar{K}^0) = \frac{1}{2}[A_S(t) - A_L(t)][A_S(t) - A_L(t)]^* \tag{8.59}$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-(\Gamma_L+\Gamma_S)t/2}\cos\Delta m t\right]. \tag{8.60}$$

在几倍Ks的寿命的时间范围内，由于$\Gamma_S \gg \Gamma_L$，

$$I(K^0) \simeq \frac{1}{4}\{e^{-\Gamma_S t} + 1 + 2e^{-\Gamma_S t/2}\cos\Delta m t\}, \tag{8.61}$$

$$I(\bar{K}^0) \simeq \frac{1}{4}\{e^{-\Gamma_S t} + 1 - 2e^{-\Gamma_S t/2}\cos\Delta m t\}. \tag{8.62}$$

也就是说，$K^0 - \bar{K}^0$ 按照Δm的频率振荡，如图8.4所示，在$t = 0$时，$I(K^0) = 1$，$I(\bar{K}^0) = 0$；在$t \gg 1/\Gamma_S$时, $I(K^0) = I(\bar{K}^0) = 1/4$，这时候如图8.3所示，$K_S$衰变殆尽，只剩下$K_L$介子，因此$K^0$和$\bar{K}^0$介子的数目相等。

8.2.2 CP破坏

1964年7月，美国普林斯顿大学的维尔·洛根斯登·菲奇和詹姆斯·沃森· 克罗宁[10]等4人宣布他们在实验上发现了中性K介子系统的弱相互作用衰变过程的CP破坏。如图-8.5所示，他们使用美国布鲁克海文国家实验室30GeV的质子束打铍靶，让轰击后产生的中性K介子束流通过长17 米的准直管，由于寿命很短，这个过程中K_S已经衰变干净，只剩下长寿命的K_L。、然后使用双臂谱仪，测量由K_L衰变产生的π介子末态。他们发现长寿命的K_L粒子绝大部分衰变到3π末态，但也有一小部分可以衰变到两个π介子。6个月的实验观测中，他们在22700个K_L衰变事例中看到45个2π衰变事例，CP 不对称性约为0.2% [85]。这是一个令人震惊的发现，在当时引发了很多怀疑和质疑，以至于花费了他们很多时间来澄清和解释。最后的结论是：中性K介子系统在弱相互作用过程中CP变换不变性有约千分之二左右的破坏。

弱相互作用下CP破坏现象发现后，人们尝试了很多的理论模型来解释实验现象，也曾致力于寻找除中性K介子的衰变外还有哪些实验中可以观察到CP 破坏的效应。在早期的各种理论探索中，L. Wolfenstein提出的**超弱相互作用理论** 是最为简洁的理论解释[86]。按照这个理论，CP破坏效应来自于与弱相互作用不同的超弱相互作用，并且CP破坏效应也将只能在中性K介子的衰变中被观察到。除了中性K介子的弱衰变过程，当时确实没有在其它的实验中观察到CP破坏现象。这个理论解释的基本假设是$K_{L,S}$ 是质量本征态，并不等同于CP本征态，也即是说，质量本征态是CP本征态的混合

$$K_L = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}[K_2 + \epsilon K_1] = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[(1+\epsilon)K^0 - (1-\epsilon)\bar{K}^0\right], \tag{8.63}$$

$$K_S = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}[K_1 - \epsilon K_2] = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[(1+\epsilon)K^0 + (1-\epsilon)\bar{K}^0\right], \tag{8.64}$$

[10] Val Logsdon Fitch, 1923.3.10-2015.2.5; James Watson Cronin, 1931.9.29-2016.8.25。他们两人因在实验上发现了K介子系统的CP破坏共同获得1980 年诺贝尔物理学奖。

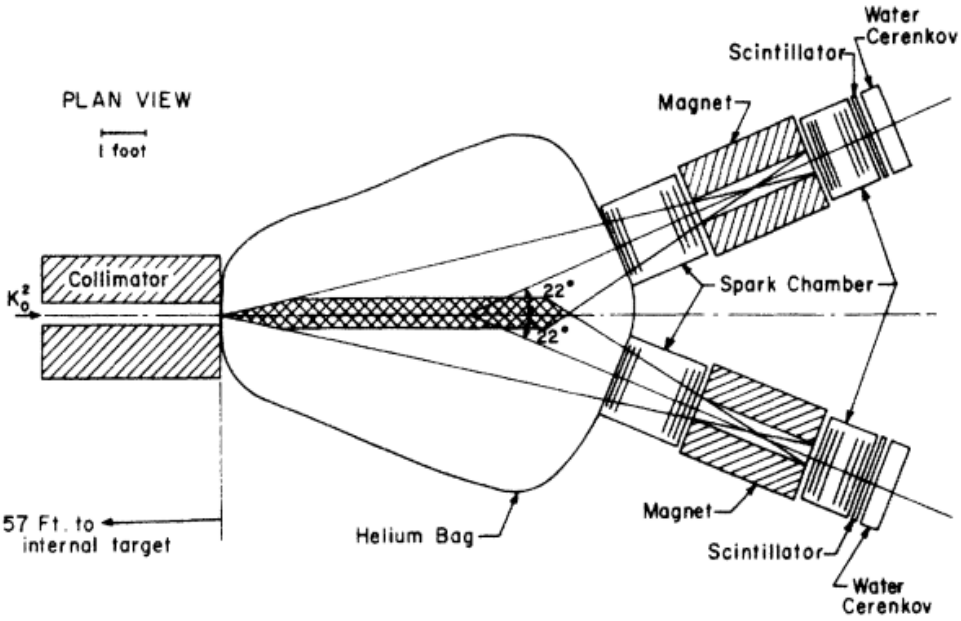


图 8.5: 发现中性K介子系统CP不对称性所使用的实验测量仪器的示意图[85]。

其中$|\epsilon| = 2.228(11) \times 10^{-3}$是一个小量，描写混合所占比例，即CP破坏的大小。如果弱相互作用具有CP变换不变性(i.e. $\epsilon = 0$)，则K_S和K_L都应该是CP变换的本征态，这样K_S只可以衰变到两个π介子末态，而K_L则只能衰变到三个π介子末态。

比较(8.63,8.64)和(8.48,8.49)式，可以得到

$$\xi = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, \tag{8.65}$$

因此CP破坏参数ϵ的大小原则上可以通过本节开始时讨论过的$K^0 - \bar{K}^0$混合的质量差和衰变宽度差的计算得到。

发现CP破坏的$K_L \to \pi\pi$的衰变有两个不同的衰变道，我们需要4个参数(两个振幅，两个相角)来描写[267]：

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \frac{\mathcal{A}(K_L \to \pi^+\pi^-)}{\mathcal{A}(K_S \to \pi^+\pi^-)} = |\eta_{+-}|e^{i\phi_{+-}}, \\ \eta_{00} &= \frac{\mathcal{A}(K_L \to \pi^0\pi^0)}{\mathcal{A}(K_S \to \pi^0\pi^0)} = |\eta_{00}|e^{i\phi_{00}}, \end{aligned} \tag{8.66}$$

根据(8.63,8.64)式的混合公式，ϵ 描写了K介子CP本征态和质量本征态的混合大小，如果这是CP 破坏的唯一来源，那么上面K_L衰变到两个π介子的分支比应该与末态是$\pi^+\pi^-$还是$\pi^0\pi^0$ 无关。实验上测量到的η_{+-}和η_{00}的任何差别将是超出混合CP破坏的衰变中直

接CP破坏的证据。目前实验测量给出的最新结果为[1]：

$$|\eta_{+-}| = 2.232(11)\times 10^{-3}, \quad |\eta_{00}| = 2.220(11)\times 10^{-3} \tag{8.67}$$

$$\phi_{+-} = (43.4\pm 0.5)^\circ, \qquad \Delta\phi = \phi_{00}-\phi_{+-} = (0.34\pm 0.32)^\circ. \tag{8.68}$$

在CPT联合不变下，相位ϕ_{00} 和ϕ_{+-}应该是相等的，因此$\Delta\phi$是否为0的测量会给出CPT破坏的证据[53]。

K介子两体衰变的末态$\pi\pi$介子对的同位旋量子数有0，1，2三种可能。根据角动量守恒，两个π介子之间的轨道角动量为0，由全同粒子对称性要求，波函数必须对称，反对称的同位旋$I=1$被排除，只有$I=0,2$ 的末态有贡献。K介子到2π的衰变振幅可以写为：

$$A(K^+\to\pi^+\pi^0) = \sqrt{\frac{3}{2}}A_2 e^{i\delta_2}, \tag{8.69}$$

$$A(K^0\to\pi^+\pi^-) = \sqrt{\frac{1}{3}}A_2 e^{i\delta_2}+\sqrt{\frac{2}{3}}A_0 e^{i\delta_0}, \tag{8.70}$$

$$A(K^0\to\pi^0\pi^0) = 2\sqrt{\frac{1}{3}}A_2 e^{i\delta_2}-\sqrt{\frac{2}{3}}A_0 e^{i\delta_0}, \tag{8.71}$$

其中的$\mathcal{A}_0$和$\mathcal{A}_2$表示同位旋量子数为$I=0,2$的2π末态，它们分别对应$\Delta I=1/2$和$\Delta I=3/2$的跃迁。弱位相包含在$\mathcal{A}_0$ 和$\mathcal{A}_2$之中。参数$\delta_{0,2}$是对应的强位相，在CP变换下是不变的。由于K_S的衰变速率远大于$K^+\to\pi^+\pi^0$的衰变，因此，由上面的定义可知，$|A_0|\gg|A_2|$，由于$K^+\to\pi^+\pi^0$的衰变完全决定于A_2的大小，这说明$\Delta I=1/2$的弱跃迁振幅大小远大于$\Delta I=3/2$ 的跃迁，这通常被称为$\Delta I=1/2$ 规则 。

利用小量A_2/A_0作微扰展开，只取领头项，可以把CP破坏物理可观测量η_{+-},η_{00}表示为参数ϵ和ϵ'的函数[1, 267]：

$$\eta_{+-} = \epsilon+\frac{\epsilon'}{1+\omega/\sqrt{2}}\approx\epsilon+\epsilon', \tag{8.72}$$

$$\eta_{00} = \epsilon-\frac{2\epsilon'}{1-\sqrt{\omega}}\approx\epsilon-2\epsilon', \tag{8.73}$$

$$\epsilon' = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i(\delta_2-\delta_0)}\mathrm{Im}\left[\frac{A_2}{A_0}\right], \tag{8.74}$$

其中参数$\omega=\mathrm{Re}(\mathcal{A}_2)/\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0)\approx 0.045$。

由图-8.6所示，$K_L\to\pi\pi$的衰变过程可以由两种途径发生，其一是通过(8.63)式所示的混合

$$K_\mathrm{L}\to 2\pi \ \ (\text{via } \mathrm{K}_1), \tag{8.75}$$

这种CP破坏来源于$K^0-\bar{K}^0$的混合，称之为由混合引起的间接(indirect)CP破坏，由(8.74)式中的ϵ描写，其二是ϵ'描写的直接CP破坏($\mathcal{A}\neq\overline{\mathcal{A}}$)[1, 267]。$\epsilon'$是个非常小的物理量，实验

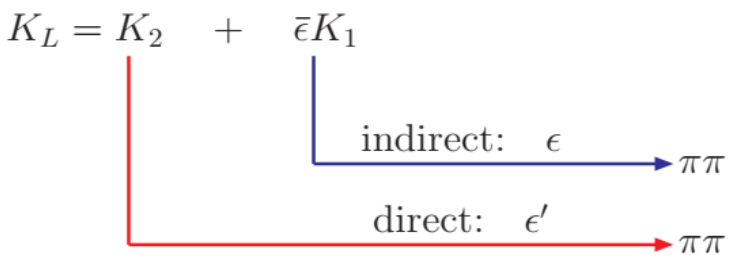


图 8.6: $K_L \to \pi\pi$衰变过程中的直接和间接CP破坏示意图。

上可以通过测量η_{00} 和η_{+-}的比值来得到，而且通过比值也可以减少实验的误差，利用公式(8.72,8.73)，取领头阶近似可得

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) \simeq \frac{1}{6}\left[1-\left|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}\right|^2\right] \simeq \frac{1}{3}\left[1-\left|\frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}}\right|\right]. \tag{8.76}$$

实际上，由于ϵ'和ϵ的相位近似相等，ϵ'/ϵ非常接近于实数。

1964年发现的中性K介子系统的CP破坏是间接CP破坏。标准模型预言了中性K介子系统的直接CP破坏，但由于强相互作用引起的误差大，无法给出准确的理论预言[268]。在实验方面，由于测量ϵ'/ϵ需要对$K_L \to \pi^0\pi^0 \to 4\gamma$做测量，实验难度很高。一直到1988年，NA31合作组才第一次给出K介子系统存在直接CP破坏的证据：$\epsilon'/\epsilon = (3.3 \pm 1.1) \times 10^{-3}$。

1999年： 在欧洲核子中心工作的NA48实验组和在美国费米国家实验室工作的KTeV实验组，在发现K 介子系统的间接CP 破坏35 年之后最终确认发现了K^0介子系统的直接CP破坏:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) = \begin{cases} (18.5 \pm 4.5 \pm 5.8) \times 10^{-4} & \text{NA48}, \\ (28.0 \pm 3.0 \pm 2.8) \times 10^{-4} & \text{KTeV}. \end{cases} \tag{8.77}$$

这个发现和后来在B介子系统发现的直接CP破坏一起，确认了标准模型中弱相互作用的CP破坏性质，CP破坏的“超弱”模型被排除。根据相关实验测量数据所做的拟合得到的世界平均值为[1]：

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right) \approx \frac{\epsilon'}{\epsilon} = (1.66 \pm 0.23) \times 10^{-3}. \tag{8.78}$$

CP破坏效应是否存在还可以通过K_L粒子的半轻子衰变的测量来判断。如果弱相互作用具有CP变换不变性，则在K_L 的各衰变道中由CP 变换互相联系的两个衰变道的衰变分宽度应相同。定义

$$A_{CP}(K_L \to \pi^-\mu^+\nu_\mu) \equiv \frac{\Gamma(K_L \to \pi^-\mu^+\nu_\mu) - \Gamma(K_L \to \pi^+\mu^-\bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(K_L \to \pi^-\mu^+\nu_\mu) + \Gamma(K_L \to \pi^+\mu^-\bar{\nu}_\mu)}, \tag{8.79}$$

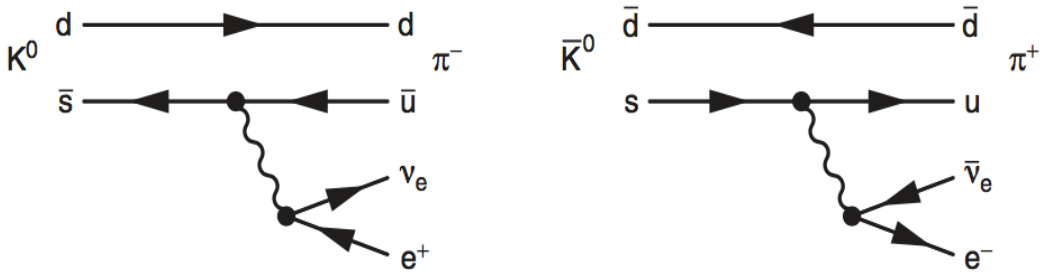


图 8.7: 半轻子弱衰变$K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ 和$\bar{K}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ 的领头阶费曼图。

CP变换不变性要求$A_{CP}(K_L \to \pi^- \mu^+ \nu_\mu)$严格为0。类似地，我们还可以定义$A_{CP}(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e)$。不同于中性$K$介子到$2\pi$ 和3π的强子衰变道需要在CP本征态下描述，半轻子衰变道的末态不是CP本征态，则需要在相互作用表象下按照味道本征态K^0和$\bar{K}^0$ 衰变，如图8.7所示，$K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ 和$\bar{K}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$是可以通过弱作用的带电流发生的，而交换末态的反应$K^0 \not\to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ 和$\bar{K}^0 \not\to \pi^- e^+ \nu_e$则是不能发生的。由于$K^0 - \bar{K}^0$ 混合(8.63,8.64)，

$$\Gamma(K_L \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e) \propto |\langle \bar{K}^0 | K_L \rangle|^2 \propto |1-\epsilon|^2 \simeq 1 - 2Re(\epsilon), \tag{8.80}$$

$$\Gamma(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e) \propto |\langle K^0 | K_L \rangle|^2 \propto |1+\epsilon|^2 \simeq 1 + 2Re(\epsilon). \tag{8.81}$$

因此在只取领头阶贡献的情况下，可以直接得到

$$A_{CP}(K_L \to \pi^- \mu^+ \nu_\mu) = A_{CP}(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e) \simeq 2Re(\epsilon) = 2|\epsilon| \cos\phi_{+-}. \tag{8.82}$$

实验测量给出的最新结果为[1]：

$$A_{CP}(K_L \to \pi^- \mu^+ \nu_\mu) = (0.304 \pm 0.025)\%, \tag{8.83}$$

$$A_{CP}(K_L \to \pi^- e^+ \nu_e) = (0.334 \pm 0.007)\%. \tag{8.84}$$

上述实验结果是支持(8.82)式的理论结果的，因此K_L半轻子弱衰变的千分之几的CP破坏效应也是来源于$K^0 - \bar{K}^0$混合的CP破坏。

除了K介子系统的CP破坏，实验上还在B^0，B^+和B_s衰变中发现了较大的CP破坏效应，标准模型预期D介子衰变中的CP 破坏应该很小，最近在LHCb实验中也发现了不为0的CP破坏。这些观测到的CP破坏效应都与标准模型理论预期在误差范围内相符。理论也预期在重子衰变中也应该有CP破坏效应，但是目前为止还没有确定的实验证据。这些我们将在第十章的重味物理中详细讨论。在第四章我们讨论过中微子振荡需要由中微子质量来解释，因而中微子混合矩阵也会预言较大的CP破坏效应，这也是目前很多中微子实验的研究目标。但是由于中微子实验的精度远低于加速器粒子物理实验，目前还没有测量到任何轻子部分的CP破坏效应。人们也试图在希格斯衰变、顶夸克衰变和中子的电偶极矩中寻找CP破坏效应，这有利于发现超出标准模型CKM 矩阵的CP 破坏来源。

在上一章讨论的强相互作用的量子色动力学理论的拉氏量中，类比于量子电动力学我们选取了最简洁的胶子场强项，但是按照洛伦兹协变性要求，如下CP破坏的项也是可以存在的

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{g_3^2}{16\pi^2}\theta\, Tr(G^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}), \tag{8.85}$$

其中$\tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{\alpha\beta}$。这个$\theta$项可以引起较大的中子电偶极矩，目前实验给出的中子电偶极矩上限为$1.8\times10^{-26}e\,cm(90\%C.L.)$，这个上限给出了强CP破坏的限制为$\theta \le 2\times10^{-10}$，如果强CP破坏项存在，QCD拉氏量中胶子场强的两项差别如此巨大是很难以理解的，这被称为“**强CP 问题** ”。

现代宇宙学理论认为我们的宇宙来源于一次大爆炸。按照现有的粒子物理标准模型理论，正反物质是对称的，但是可观测宇宙范围内都由正物质组成，并不存在反物质世界。1967 年，苏联科学家萨哈罗夫提出了解释宇宙中正反物质不对称的三个必需条件[269]：

1. 存在重子数不守恒的相互作用；
2. 存在C和CP宇称破坏的相互作用；
3. 存在偏离热平衡的状态。

因此，CP破坏是宇宙大爆炸理论中，物质-反物质不对称来源的必要条件之一，但是目前粒子物理实验中发现的CP破坏效应非常小，离解释宇宙中正反物质不对称的要求相差很远。因此，超出标准模型理论的CP破坏机制是宇宙学理论迫切需要的。

另外，CP破坏也是物质世界和反物质世界可以用来交流，以确定对方物质或反物质性质的几乎唯一的实验。假设遥远的地方，有一个新发现的文明世界。在互相访问之前，应该首先搞清楚是否互为反物质。这是非常重要的。但是由于正反粒子的定义，以及正负电荷和左右的定义都是相对的，根本无法沟通。但是通过CP破坏的K_L衰变能区分出电荷的定义。由公式（8.83）知道，衰变几率比其CP 共轭衰变道高千分之几的衰变道中的轻子在地球上是定义为正电荷, 然后才可以确定正反物质和左右的定义。

8.2.3　CKM夸克混合矩阵

1973年，在GIM机制预言的第四个夸克“粲”还没有被实验发现的情况下，日本学者小林诚(M. Kabayashi)和益川敏英(T.Maskawa) 把卡比玻的两代4夸克混合推广到了包含三代6夸克的情形，提出了描写3 个下夸克的弱作用本征态和质量本征态混合的3×3 幺正矩阵[270]

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \tag{8.86}$$

人们通常把该混合矩阵称之为CKM(Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 混合矩阵。这个矩阵可以有多种参数化形式，粒子数据表推荐的“标准参数化形式”为[1]

$$
\begin{aligned}
V_{\rm CKM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \qquad (8.87)
\end{aligned}
$$

其中$c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$。该幺正混合矩阵有4个独立参数：三个旋转角θ_{12}, θ_{23}, θ_{13}和一个CP相位δ。混合矩阵描写的(8.26) 式所表示的任意两种上下夸克之间带电流弱相互作用需要改写为互为复共轭的两项

$$
J^h_\mu = V^*_{ud}\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + V_{ud}\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d. \qquad (8.88)
$$

而由于幺正矩阵中的相角$\delta \neq 0$，上面的两项中相位符号的不同，意味着弱相互作用的CP不守恒。

跟第四章的轻子混合矩阵PMNS不同的是，CKM混合矩阵的非对角元明显比对角元小。这表示夸克味道和质量本征态之间的三个旋转角θ_{12}, θ_{23}, θ_{13}的数值都很小，也就是说，CKM矩阵是比较接近对角化的形式。因此，不同代的夸克之间的弱相互作用相比于同代夸克是压低的，特别是对于第一代和第三代之间的相互作用压低更厉害。为了反映CKM矩阵的近似对角化性质，一般会用比较小的卡比玻角$\lambda = |V_{us}| = 0.2265(5)$作为展开参数，来反映各个矩阵元的相对大小。最常用的是Wolfenstein 的近似表达式[271]。它包含4 个独立参数参数(A, λ, ρ, η)，可以直接显示各个矩阵元的相对大小。在领头阶近似下CKM矩阵可以按照λ参数展开为

$$
V_{\rm CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)\,. \qquad (8.89)
$$

从该表达式可以很容易看出，三个对角元都非常接近于1，而第一代和第二代夸克之间的混合是正比于参数λ 的，第二代和第三代之间的混合则是正比于λ^2的。能够引起CP破坏的相位则只出现在第一代和第三代之间的混合，由于这个混合是λ^3压低的，因此标准模型中的CP破坏是很小的。

由于几率守恒的要求，如果标准模型的夸克只有三代，3×3的CKM矩阵就必须是幺正矩阵。$V^\dagger V = VV^\dagger = I$的幺正性要求，导致每一列或每一行的元素的绝对值平方和为1。每两列或每两行的元素的共轭乘积和为0。三个复数之和为0，可以形成复平面上的一个三角形。按照排列组合，一共可以得到6个三角形，与$b \to d$跃迁对应的幺正性关系式为

$$
V^*_{ub}V_{ud} + V^*_{cb}V_{cd} + V^*_{tb}V_{td} = 0. \qquad (8.90)
$$

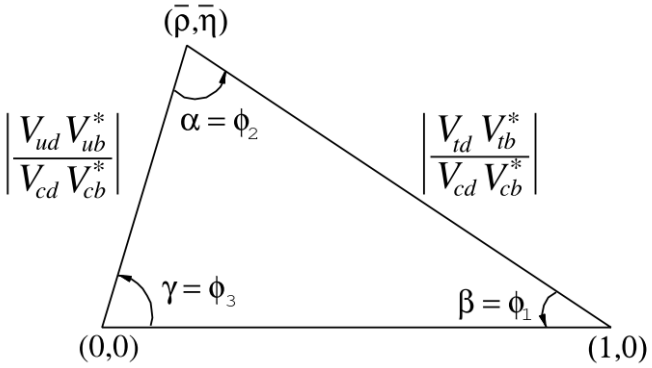


图 8.8:　$(\bar{\rho},\bar{\eta})$复平面上的幺正三角形[1]，其中$\bar{\rho}=\rho(1-\lambda^2/2),\bar{\eta}=\eta(1-\lambda^2/2)$。

与上式对应的三角形就是如图-8.8所示的最著名的“**幺正三角形**”，这个三角形的三个边的长度都是同一个量级$\mathcal{O}(A\lambda^3)$，因此其三个相角α,β,γ 或者ϕ_2,ϕ_1,ϕ_3 [39] 的大小也都是相同量级的，容易被实验独立测量。目前实验上观察到的所有K，D和B介子系统的CP破坏都可以由标准模型的CKM矩阵给出很好的解释。但是按照上一小节所指出，目前发现的CP破坏大小离解释宇宙中正反物质不对称所需要的大小差别很大，因此通过测量幺正三角形的三个边和三个相角来检验CKM矩阵的幺正性是寻找超出标准模型的新CP破坏机制的有效方法，也是曾经的B介子工厂实验和正在运行的LHCb 和Belle-II 实验的重要研究目标。

CKM矩阵的不同参数化形式中，CP破坏相角δ可以出现在9个矩阵元的不同位置，但是独立的相位只有一个。C. Jarlskog在1985年给出了一个与参数化无关的不变量J来描述CP破坏的大小[272]。对于$i\neq k,\ j\neq l$的任意矩阵元乘积$V_{ij}V_{kl}V_{il}^*V_{kj}^*$的虚部都是相等的，如果这个虚部不为0，CKM矩阵就不是实数的，就存在CP破坏。例如在(8.87)式的参数化形式下

$$J=Im(V_{ud}V_{cs}V_{cd}^*V_{us}^*)=c_{12}c_{13}^2c_{23}s_{12}s_{13}s_{23}\sin\delta. \tag{8.91}$$

在Wolfenstein 的参数化形式下，则近似地有$J\simeq A^2\lambda^6\eta$。所有实验数值拟合得到的值为[1]

$$J=(3.08^{+0.15}_{-0.13})\times 10^{-5}. \tag{8.92}$$

这反映标准模型CP破坏程度确实很小。实际上，所有CKM幺正三角形的面积都等于$J/2$ [272]。

8.3　电弱统一理论的基本结构

1964年， 萨拉姆[11] 和J.C. Ward提出了$SU(2)\times U(1)$规范群结构的电弱相互作用统一模型，并估计了W 玻色子的质量[273]。萨拉姆确信电弱统一模型一定是规范理论，由于

[11] A.Salam，1926.1.29-1996.11.21，英籍巴基斯坦物理学家，因建立电弱统一理论的贡献与格拉肖和温伯格分享了1979 年的诺贝尔物理奖。

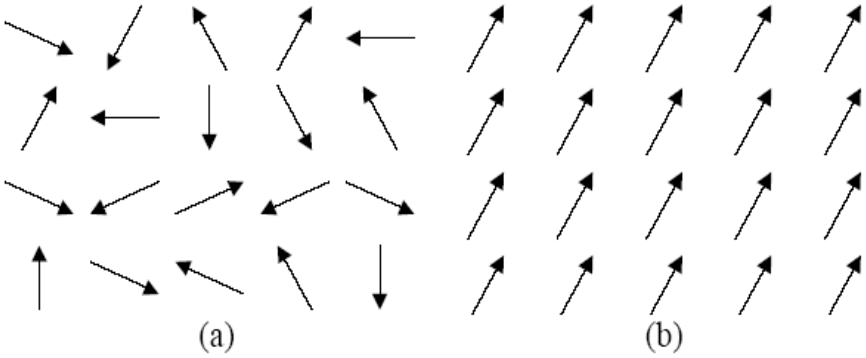


图 8.9: 顺磁相(a)和铁磁相(b)的自旋方向示意图。

实验发现所有的弱作用过程都是短程相互作用，而且比强相互作用的力程还短，因此传递它的规范粒子必须有很重的质量。但是量子场论的可重整化要求，定域规范不变理论所涉及的规范场必须是无质量的。例如之前讨论过的量子电动力学和量子色动力学都没有问题，其规范场量子：光子和胶子本身都是无质量的。而弱作用理论如果引入mA^2 的质量项，则将明显破坏拉氏量的规范不变性，改变理论的高能行为-其后果是破坏理论幺正性，同时理论也是不可重整化的。故为了将弱作用纳入定域规范不变的理论，首先要解决的问题是如何使规范粒子获得质量，却不破坏理论的可重整性。南部阳一郎[12] 在1961年将凝聚态理论中起了重要作用的“对称性自发破缺 ”的概念引入到粒子物理中[164, 165]，为这个问题的解决提供了理论基础。

根据Noether定理，精确的对称性通常会给出精确的守恒定律，在这种情况下体系的拉氏量和真空（即该理论的基态）在相应的变换下都是不变的。但是，事实上有些守恒定律并非精确守恒：比如第三章讨论的同位旋对称性虽然在强相互作用下是严格守恒的，但是由于同一同位旋多重态的强子的（电磁相互作用引起的）质量差别，其同位旋破坏效应是明显的。

另一种情形是系统的拉氏量是有严格的对称性，但系统的基态却不是对称性不变的。一个典型的例子是铁磁体，其拉氏量用自旋－自旋相互作用来描述，在三维旋转下是不变的，即当温度高于铁磁体的相变温度(T_c)时自旋系统是完全杂乱的（顺磁相），因而其分布确实是如图8.9(a) 所示的具有$SO(3)$不变的对称性。但是，其基态，即低于T_c 的温度（铁磁相），自旋按照同一方向排列才是能量最低（图-8.9(b)），而这个方向的选择却是随机的。理论虽然是对称的，真空（基态）必须选择一个方向，不再具有$SO(3)$ 群的对称性。对称性自发破缺为$SO(2)$ ，只有整个系统绕自旋方向旋转的对称性。

类似于上一章的线性σ模型，在粒子物理中，作为一个简单例子，考虑复标量场

[12]Y. Nambu，1921.1.18-2015.7.5，日裔美国理论物理学家。因为他对对称性自发破缺的理论贡献与两位日本物理学家小林诚和益川敏英分享2008年诺贝尔物理奖。

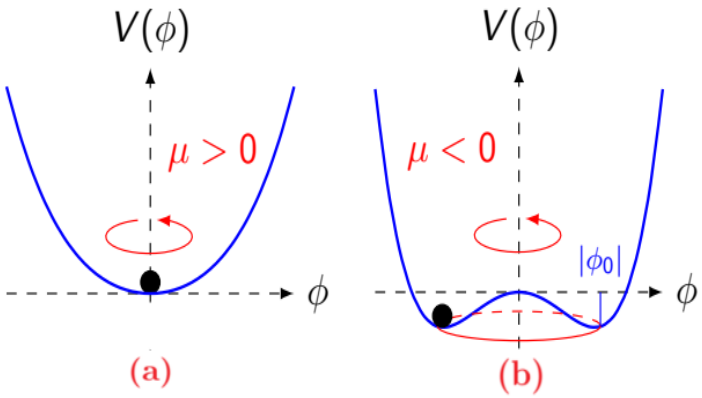


图 8.10:　与严格对称性对应的真空态(a): $\mu^2 > 0$；与自发破缺对称性对应的真空态(b): $\mu^2 < 0$。

的ϕ^4理论，其拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 , \tag{8.93}$$

λ项表示自相互作用。显然$\mathcal{L}$在整体变换

$$\phi \to \phi' = e^{-i\Lambda}\phi, \tag{8.94}$$

下是不变的(Λ与x无关)。该体系的势场密度为

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 . \tag{8.95}$$

势能的最小值或真空态由下列条件确定：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \mu^2 \phi^* + 2\lambda \phi^{*2} \phi = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \mu^2 \phi + 2\lambda \phi^* \phi^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.96}$$

当$\mu^2 > 0$时，$\phi^\dagger = \phi = 0$ 给出全空间的能量最小值(图-8.10(a))。当$\mu^2 < 0$时，$\phi^\dagger = \phi = 0$ 给出局部极大值(图-8.10(b))，而最小值由

$$|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad v = \sqrt{-\mu^2/\lambda} \tag{8.97}$$

给出(图-8.10(b))。前者($\mu^2 > 0$)相应于真空在变换(8.94)下是不变的，故模型具有严格对称性。而后者表示系统具有无穷多个真空态，其中每一个与复平面ϕ上的半径为R的圆周(图-8.10(b)上的虚线园)上的一个点对应，即真空是无穷简并的。在变换(8.94)下，任何一个真空态变为另一个真空态（圆周上的一个点），即真空在$U(1)$群变换下不是不变的，故模型具有自发破缺的$U(1)$对称性。

在量子理论中，ϕ成为算符，(8.97)式对应于不为零的真空期望值:

$$|\langle 0|\phi|0\rangle| = \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0 \tag{8.98}$$

在所有的简并真空态中，物理真空态只能实现其中的一个，而物理的量子场是围绕物理真空的激发。设

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(x)+i\phi_2(x)\right], \tag{8.99}$$

选择物理真空为

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle=v, \qquad \langle 0|\phi_2|0\rangle=0. \tag{8.100}$$

做场量$\phi_1(x)$的平移，即做变换

$$\phi(x)\to\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x)+v+i\phi_2(x)\right), \tag{8.101}$$

则平移后的$\phi(x)$才是物理的量子场。将(8.101)式代入(8.93)式中可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)\left(\partial^\mu\phi_1\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\right)\left(\partial^\mu\phi_2\right)-\lambda v^2\phi_1^2\\ & -v\lambda\phi_1\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)-\frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)^2+\frac{\lambda}{4}v^4.\end{aligned} \tag{8.102}$$

上式中的第三项是$\phi_1(x)$的质量项：$m_{\phi_1}=v\sqrt{2\lambda}$。但场$\phi_2(x)$是无质量的，$\phi_2(x)$ 即为上一章讨论过的戈德斯通粒子。在量子场论中，我们可以把戈德斯通定理不失一般性地表述为[164, 232]:

如果体系的拉氏量在某一个连续对称群G下是不变的，但体系的真空仅仅在一个属于G的子群H下是不变的，那么将存在数目等于破缺生成元个数的零质量的标量粒子。

更明确的讲就是：如果规范对称群G的N个生成元中有M个破缺生成元和$N-M$个保持真空不变的对称生成元，那么和M个破缺生成元相对应，存在着M个零质量的标量粒子。

8.3.1 希格斯机制

引入对称性的自发破缺可以在拉氏量保持对称性的情况下，使得物理体系的对称性破缺，但是戈德斯通定理告诉我们：发生对称性自发破缺后，和每一个破缺生成元相对应的就必有一个零质量的戈德斯通粒子。然而，我们在实验上没有发现这样的粒子。在上一小节和上一章的线性σ模型中的对称性自发破缺都是整体对称性，并不能解决弱相互作用的规范对称性问题。**1964年8月，** 弗朗索瓦·恩格勒[13] 和罗伯特·布劳特[14] 发表了关于规范对称性自发破缺的论文[274]。同年9月和10月，彼得·希格斯[15] 的两篇相关论文发表[275]。这三位学者在他们的论文中提出了一种通过规范对称性自发破缺而使规范粒子

[13]Francois Englert (1932.11.6-)，比利时理论物理学家。1959年在比利时自由大学获得博士学位。2013年诺贝尔物理奖得主。

[14]Robert Brout (1928.6.14 - 2011.5.3)，美国理论物理学家。1953年在美国哥伦比亚大学获得博士学位，比利时自由大学教授。曾经获得沃尔夫奖和Sakurai奖。

[15]Peter Higgs (1929.5.29-)，英国理论物理学家。1954年在伦敦国王学院获得博士学位。2013年诺贝尔物理奖得主。

获得质量的机制：希格斯机制。同年11月，G. Guralnik[16], C. Hagen和T. Kibble发表论文，提出了同样的规范对称性自发破缺机制[276]。把规范场和标量场（亦即希格斯场）放到一起考虑。

类似于量子电动力学和色动力学，规范对称性的保持需要把(8.93)式的偏导数改写为协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{8.103}$$

希格斯场的拉氏量(8.93)式在规范相互作用下变为

$$\mathcal{L}_\mathcal{H} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi). \tag{8.104}$$

在对称性自发破缺的情况下，ϕ场的量子需要作(8.101)式的平移，则(8.104)式第一项展开后会出现

$$\frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu, \tag{8.105}$$

这是一项没有导数的规范场的二次项，显然是规范场的质量项。也就是说，通过对称性自发破缺，规范玻色子获得了质量。

用实部和虚部描写的(8.99)式的复标量场ϕ可以改写为径向大小和角度的形式，因此(8.101)式的平移变换变为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + H(x)\right]\exp\left[i\zeta(x)/v\right]. \tag{8.106}$$

定域规范不变性意味着我们可以选取标量场ϕ的与时空相关的任意相位，而不影响理论的物理内容。如果我们选取相位为$\exp[-i\zeta(x)/v]$，那么就有

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + H(x)\right]. \tag{8.107}$$

把这个平移变换带入拉氏量中，我们就会发现在对称性自发破缺后，ζ场（相当于ϕ_2场的自由度）从拉氏量中消失了。在上一小节的整体对称性破缺中，ζ场代表的是戈德斯通粒子，在这里的特殊规范（幺正规范）下，戈德斯通粒子不再出现。在本书第一章我们曾经指出，零质量的自旋为1的规范玻色子只有两个横向极化的自由度，在对称性自发破缺后，获得质量的自旋为1 的玻色子显然是有包括纵向极化的三个自由度，也就是说，对称性破缺之前，我们有两个标量场自由度和两个规范场自由度，对称性自发破缺之后，希格斯场只有一个自由度，有质量的规范场变成了3个自由度，自由度数目是守恒的。希格斯机制表明：**对称性破缺产生的零质量的戈德斯通粒子可以被规范粒子吃掉，变成他们的纵向分量，使规范粒子获得质量。一次解决两个难题。**

[16]Gerald Guralnik (1936.9.17-2014.4.26)，美国理论物理学家。因对提出希格斯机制的贡献与Englert, Brout, Higgs, Hagen和Kibble获得2010年Sakurai奖

1967年10月，温伯格[17] 在他的那篇著名论文“A model of leptons”[277]中，借助希格斯机制成功地建立了与实验事实相符的电弱统一理论。温伯格在这篇论文的引文[3]中引用了Higgs的3篇论文，Englert和Brout的1篇[274] 还有Guralnik等三人的1篇论文[276]，但他却不经意地把希格斯的3篇论文排在了其他人的前面。读者如果不去查原文的话，根本无法判断希格斯的第一篇论文[275]实际上比Englert/Brout的论文[274]要晚1 个月。最喜剧性的“错误”发生在1971年，温伯格在另一篇相关论文[278]中把希格斯的第一篇论文“Phys. Lett. 12 （1964）132”误引为“Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 132”。在这之后的绝大多数研究人员就把希格斯的论文当作“希格斯机制”的开山之作。温伯格本人直到2012年5月才意识到这个错误，并就此在《纽约书评》杂志上做了公开纠正。习惯上把“通过规范对称性自发破缺而使弱作用规范玻色子($W^{\pm}, Z^0$) 获得质量的机制”称之为“希格斯机制”，一直到欧洲核子研究中心在2012年9月建议把该机制命名为“布劳特-恩格勒-希格斯机制”(BEH Mechanism)。

8.3.2 W、Z规范玻色子

1961年， 萨拉姆和Ward 提出以规范原理作为构造基本相互作用场的量子场论的基础[279]。同年, 格拉肖[18] 提出了$SU(2) \times U(1)$的弱作用规范群，推广了许温格提出的弱作用理论，引入了产生短程中性流的重Z^0 玻色子[280]。

1967年， 温伯格把希格斯机制和$SU(2) \times U(1)$模型放到一起，提出了描写轻子的电磁作用和弱作用统一的理论[277, 281]。同年，萨拉姆在伦敦帝国学院(Imperial College London) 做了关于“电弱模型”的学术报告，独立的提出了电弱相互作用统一模型，并在1968年5月瑞典的学术会议上报告了相关研究成果[282, 283]。萨拉姆首先使用了英文表述：“Electroweak Theory”。

萨拉姆和温伯格都认为他们的“电弱相互作用理论”是可重整的，但是却一直没有证明。这导致了温伯格和萨拉姆的论文发表之后，几乎无人问津，鲜有引用。**1971年：** G. ’t Hooft [19] 和M.J.G. Veltman [20] 完成了对具有自发破缺规范对称性的有质量和无质量的杨-米尔斯规范场可重整性的严格证明[284]，这为电弱统一理论的最后完成奠定了量子场论的理论基础。

1973年： Gargamelle 中微子国际合作组首次在欧洲核子研究中心的$\nu_\mu e$ 和$\nu_\mu N$散射实验中发现了由Z^0玻色子引起的弱中性流存在的证据:

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^-, \qquad \nu_\mu + N \longrightarrow \nu_\mu + N, \tag{8.108}$$

[17]Steven Weinberg (1933.5.3-2021.7.23)，美国物理学家，因建立弱电统一理论而与萨拉姆和格拉肖分享1979年诺贝尔物理学奖。

[18]Sheldon Glashow (1932.12.5 -)，美国物理学家，因建立电弱统一理论的贡献与萨拉姆和温伯格分享了1979年的诺贝尔物理奖。

[19]Gerard ’t Hooft (1942.7.5-)，荷兰物理学家，因证明了Yang-Mills规范场的重整化而与其导师M. Veltman 分享了1999年诺贝尔物理奖。

[20]Martinus J.G. Veltman，1931.6.27 -2021.1.4，荷兰物理学家，因证明了Yang-Mills 规范场的重整化而与G. ’t Hooft 分享1999年诺贝尔物理奖。

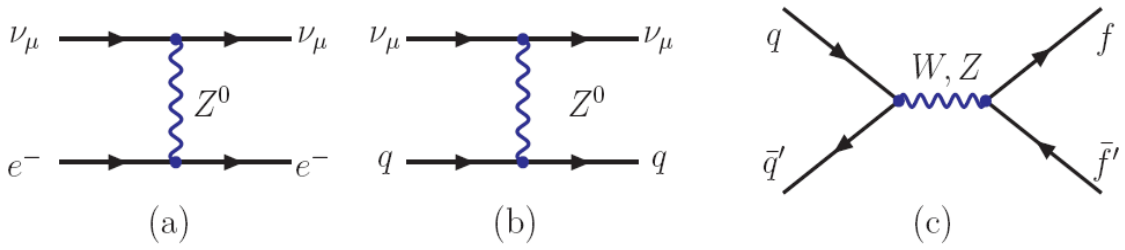


图 8.11:　(a,b) 实验上发现的中性弱流的领头阶费曼图。(c)由交换带电和中性矢量玻色子$W^{\pm}, Z^0$引起的$2 \to 2$ s-道产生过程的领头阶费曼图。

其领头阶费曼图如图8.11(a)和(b)所示。**1974年：** 美国费米实验室的实验也证实了上述的第二个弱中性流反应。这是电弱统一理论的一个重要预言，它的发现使电弱统一理论成为被广泛接受的理论。他们也测量了中性流事例和带电流(图8.11(c))事例的比率，从而估计了温伯格角$\sin^2\theta_W$的值在0.3到0.4之间。起初，物理学家只用一个SU(2)的群来统一电弱相互作用，规范玻色子是$W^{\pm}$和光子。但是这样的理论马上遇到了问题，一是电磁相互作用的宇称可能破坏（同一个群的相互作用性质相同），另外，光子和$W^{\pm}$的质量差别也太大了。中性弱流的发现确立了在SU(2)之外还需要引进一个U(1) 规范场。

中性流的发现促成了人们预言W、Z玻色子的质量大小，并设计实验来探测它们。上一小节我们演示了最简单的U(1)规范场的希格斯机制使得规范场获得质量的情况，**1967年：** T.W.B. Kibble[21] 把希格斯机制推广到非阿贝尔规范场论[285]。为了实现$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$的规范对称性破缺，需要引入一个属于$SU(2)_L$群二重态的复希格斯场，

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \tag{8.109}$$

其中希格斯势$V(\Phi)$和希格斯场的协变导数项$D_\mu\Phi$分别为：

$$V(\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \tag{8.110}$$

$$D_\mu\Phi = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^a W_\mu^a - i\frac{g'}{2}B_\mu\right)\Phi, \tag{8.111}$$

其中的泡利矩阵τ^a是SU(2)群的生成元，$W_\mu^a (a = 1,2,3)$ 和B_μ分别对应于$SU(2)_{\rm L}$ 群和$U(1)_{\rm Y}$ 群的规范场量子，相对应的规范耦合常数分别为g, g'。希格斯场的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - V(\Phi). \tag{8.112}$$

[21]T.W.B. Kibble(1932.12.23-2016.6.2)，英国物理学家。对发现电弱对称性自发破缺和希格斯机制有重要贡献，曾经获得Sukurai奖和狄拉克奖。

在(8.111)式定义的希格斯场协变导数的矩阵分量表达式可以写为

$$(D_\mu\Phi) = \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i}{2}\left(gW_\mu^3 + g'B_\mu\right) & -i\frac{g}{2}\left(W_\mu^1 - iW_\mu^2\right) \\ -i\frac{g}{2}\left(W_\mu^1 + iW_\mu^2\right) & \partial_\mu + \frac{i}{2}\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{8.113}$$

如果我们把希格斯标量场$\Phi(x)$的真空期望值选择在中性分量上：

$$\langle\Phi\rangle_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \tag{8.114}$$

复希格斯标量场$\Phi(x)$有4个独立分量，做如下形式的参数化：

$$\Phi(x) \;=\; \begin{pmatrix} \theta_2(x) + i\theta_1(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) + i\theta_3 \end{pmatrix} = U(\vec{\theta})^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) \end{pmatrix}, \tag{8.115}$$

其中$U(\vec{\theta}) = \exp\left[i\theta_i(x)\tau^i/v\right]$，表示对希格斯场做规范变换。选取幺正规范，则拉氏量中只出现物理场：

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = U(\vec{\theta})\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \tag{8.116}$$

在我们所选取的幺正规范下，(8.110)式的希格斯势表达式可以展开为：

$$V(\Phi') \;=\; \frac{1}{2}m_{\rm H}^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4, \tag{8.117}$$

其中第一项表示希格斯场的质量项

$$m_{\rm H} = \sqrt{2\lambda}\,v, \tag{8.118}$$

第二和第三项分别表示3H 自耦合和4H 自耦合相互作用。可以看出，对称性自发破缺之后，希格斯场的中性自由度获得了质量，其它三个自由度消失了，原来只有四点相互作用的希格斯拉氏量在对称性自发破缺后增加了三点相互作用。

把幺正规范下希格斯场的平移变换(8.116)式带入拉氏量(8.112)中希格斯场的协变导数项可以很容易导出矢量玻色子$W^\pm$ 和Z^0 的质量项：

$$\begin{aligned} (D_\mu\Phi')^\dagger(D^\mu\Phi') \;&=\; \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8}(v+H)^2|W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + \frac{1}{8}(v+H)^2|gW_\mu^3 - g'B_\mu|^2 \\ &=\; \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{4}(v+H)^2W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{g^2+g'^2}{8}(v+H)^2Z_\mu Z_\mu \\ &=\; \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + M_W^2W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{1}{4}g^2HHW_\mu^+W^{-\mu} + gM_WHW_\mu^+W^{-\mu} \\ &+\; \frac{1}{2}M_Z^2Z_\mu Z^\mu + \frac{gM_Z}{2\cos\theta_W}HZ_\mu Z^\mu + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}HHZ_\mu Z_\mu. \end{aligned} \tag{8.119}$$

其中$W^{\pm}$是W^1, W^2经过重新定义的带电弱作用规范场

$$W^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2\right), \quad m_{\mathrm{W}} = \frac{gv}{2}. \tag{8.120}$$

Z_μ和A_μ是相互正交的质量本征态，是对称性破缺之前的弱规范场W_μ^3, B_μ的混合

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = U(\theta_W)\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{8.121}$$

前者Z获得重质量，电磁场则继续保持零质量：

$$Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad m_{\mathrm{Z}} = \frac{v}{2}\sqrt{g^2+g'^2}, \tag{8.122}$$

$$A_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad m_\gamma = 0. \tag{8.123}$$

其中的混合角θ_W被称为温伯格角：

$$\tan(\theta_W) = g'/g, \quad \cos\theta_W = \frac{M_W}{M_Z}, \quad e = g\sin\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{8.124}$$

光子质量保持为0，意味着电弱统一理论的对称性从$SU(2)_L \times U(1)_Y$自发破缺到$U(1)_{em}$，三个规范玻色子$W^{\pm}, Z^0$ 获得质量，其纵向分量恰好“吃掉”了三个希格斯场的戈德斯通粒子自由度，只剩下了一个有质量的希格斯分量，这就是2012 年实验发现的希格斯粒子。(8.119)式也给出了希格斯场和规范玻色子之间的相互作用，包括HWW，HZZ的三点相互作用和HHWW、HHZZ的四点相互作用，这些相互作用的具体费曼规则在附录B中列出。可以看出，其中的三点相互作用大小分别正比于W 玻色子和Z 玻色子的质量。由于W、Z玻色子质量很大，三点相互作用也很大，希格斯衰变到两个W玻色子和两个Z玻色子的衰变道是日内瓦的大型强子对撞机上第一次发现希格斯粒子的主要衰变道。

由(8.14,8.120)式可得真空期望值$v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246$ GeV，完全由费米耦合常数决定，是电弱对称性破缺的能标。在最初的(8.114)式所示的真空期望值选取中，希格斯场$SU(2)_L$二重态的下分量有非零真空期望值，其弱同位旋第三分量为$-1/2$，因此破坏了对称性$SU(2)_L$，其也有不为0的弱超荷，因此其存在也破坏了$U(1)_Y$对称性。但是，由于对称性破缺后，还有一个剩余的$U(1)$对称性没有破缺，因此，必然存在一个使得所选取希格斯场真空期望值的量子数为0的守恒量，这就是弱同位旋和弱超荷组合而成的$U(1)_{em}$的电荷

$$Q = I_3 + Y/2. \tag{8.125}$$

这是对所有标准模型的基本粒子都适用的弱相互作用的**盖尔曼-西岛关系** 。

在矩阵形式下，Z和γ混合的推导为

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{8}|gW_\mu^3 - g'B_\mu|^2 &= \frac{v^2}{8}(W_\mu^3, B_\mu)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(Z_\mu, A_\mu)\begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.126}$$

在这里，我们使用了幺正变换$U(\theta_W)$对质量矩阵做了对角化：

$$U(\theta_W)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}U(\theta_W)^\dagger = \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.127}$$

1983年： 由C. Rubbia[22] 领导的UA1 实验组和P. Darriulat 领导的UA2实验组在CERN的SPS 质子-反质子对撞机实验中发现了带电和中性的中间矢量玻色子$W^\pm$和Z^0

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\to W(\to l + \nu) + X, \\ p + \bar{p} &\to Z^0(\to l^+ + l^-) + X. \end{aligned} \tag{8.128}$$

其领头阶费曼图在图8.11(c)中给出。实验测量得到的$W^\pm$和Z^0玻色子质量与电弱统一理论的预言符合的很好。这是支持电弱统一理论的又一关键实验证据。Simon Van der Meer[23] 对通过高能$p\bar{p}$对撞实验发现$W^\pm$和Z^0玻色子的主要贡献是领导建造了CERN的质子-反质子存储环，发明了对高能反质子束流进行冷却的随机冷却方法(stochastic cooling)，以减少在加速过程中粒子束的横向发散度和能散度，进而有效提高粒子束流密度。Simon Van der Meer 和回旋加速器的发明者欧内斯特·劳伦斯是到目前为止仅有的2位获得诺贝尔物理奖的高能加速器专家。

8.3.3 汤川耦合

由于弱作用拉氏量中只有左手相互作用，因此是左右不对称的，宇称不守恒，其中左手费米子场是弱$SU(2)_{\rm L}$ 的二重态($I = 1/2$)，而右手费米子场是$SU(2)_{\rm L}$ 的单态($I = 0$)，不参与$SU(2)_{\rm L}$的弱规范相互作用。根据式(8.125)的弱盖尔曼-西岛关系，左右手费米子场的弱超荷Y也不同。因此三代轻子和夸克在电弱规范群$SU(2)_{\rm L} \times U(1)_{\rm Y}$下，其表示为：

$$\begin{aligned} Q_{\rm iL} &= \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L, \quad (I, Y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \\ U_{\rm iR} &= u_{\rm R},\ c_{\rm R},\ t_{\rm R}, \quad (I, Y) = \left(0, \frac{4}{3}\right), \\ D_{\rm iR} &= d_{\rm R},\ s_{\rm R},\ b_{\rm R}, \quad (I, Y) = \left(0, -\frac{2}{3}\right), \end{aligned} \tag{8.129}$$

[22] Carlo Rubbia，1934.3.31- ，意大利物理学家，因对发现电弱统一理论所预言的$W^\pm$和Z^0玻色子实验的重要贡献与Simo Van der Meer 分享1984年诺贝尔物理奖。

[23] Simon van der Meer (1925.11.24 - 2011.3.4)，荷兰实验物理学家。因对SPS强子对撞机实验的贡献与C. Rubbia分享了1984年诺贝尔物理奖。

$$
\begin{aligned}
L_{\rm iL} &= \begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, \quad (I,Y)=\left(\frac{1}{2},-1\right),\\
E_{\rm iR} &= e_{\rm R},\ \mu_{\rm R},\ \tau_{\rm R}, \quad (I,Y)=(0,-2),
\end{aligned}
\tag{8.130}
$$

其中(I,Y)表示弱同位旋和弱超荷量子数。实验发现，除了中微子外的所有费米子都是有质量的。但在弱作用拉氏量中费米子的质量项表现为左旋费米子场量和右旋费米子场量的乘积，这样的质量项是弱同位旋二重态，不满足$SU(2)_{\rm L}\times U(1)_{\rm Y}$ 不变性的要求，因而不能出现在电弱统一理论的拉氏量中。这就决定了在电弱对称性破缺之前，所有费米子都是无质量的粒子。

为了使得弱同位旋二重态的左旋费米子和弱同位旋单态的右旋费米子耦合在一起，我们需要引入弱同位旋的二重态–希格斯场，其$(I,Y)=(1/2,-1)$，这三者恰好可以构成$(I,Y)=(0,0)$的项。这样的项代表了希格斯场和费米子的汤川耦合。以第一代费米子为例，相关的拉氏量$\mathcal{L}_{\rm Y}$可以写为：

$$
\mathcal{L}_{\rm Y} = y_e\bar{L}_L\Phi e_R + y_u\bar{Q}_L\Phi^c u_R + y_d\bar{Q}_L\Phi d_R + h.c. \tag{8.131}
$$

其中$\Phi^c = i\tau_2\Phi^\dagger$是希格斯场$\Phi$ 的电荷共轭场。在幺正规范下，希格斯场取真空期望值(8.116)，可以得到对称性破缺后的的拉氏量为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm Y} &= \frac{y_e}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_e,\bar{e}_L)\begin{pmatrix}0\\ v+H\end{pmatrix}e_R + \frac{y_u}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L,\bar{d}_L)\begin{pmatrix}v+H\\ 0\end{pmatrix}u_R\\
&\quad + \frac{y_d}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L,\bar{d}_L)\begin{pmatrix}0\\ v+H\end{pmatrix}d_R + h.c.\\
&= \frac{y_e v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + \frac{y_u v}{\sqrt{2}}(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \frac{y_d v}{\sqrt{2}}(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \cdots,\\
&= \frac{y_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e + \frac{y_u v}{\sqrt{2}}\bar{u}u + \frac{y_d v}{\sqrt{2}}\bar{d}d + \frac{y_e}{\sqrt{2}}H\bar{e}e + \frac{y_u}{\sqrt{2}}H\bar{u}u + \frac{y_d}{\sqrt{2}}H\bar{d}d.
\end{aligned}
\tag{8.132}
$$

由上式可以读出第一代费米子的质量为：

$$
m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{y_u v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{y_d v}{\sqrt{2}}. \tag{8.133}
$$

这样，所有的夸克和带电轻子就都获得了质量，其质量大小正比于它们跟希格斯玻色子的汤川耦合强度。利用费米子质量，上面的拉氏量可以改写为

$$
\mathcal{L}_{\rm Y} = m_e\bar{e}e + m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d + \frac{m_e}{v}H\bar{e}e + \frac{m_u}{v}H\bar{u}u + \frac{m_d}{v}H\bar{d}d. \tag{8.134}
$$

也就是说，希格斯粒子和所有费米子的耦合强度正比于费米子的质量大小。在上一小节中，我们得到的希格斯粒子和W、Z规范玻色子的耦合大小也是正比于W、Z玻色子的质量，因此，希格斯粒子和任何基本粒子之间的相互作用都是正比于相应粒子的静止质量大小，这个一般性结论的原因是，所有粒子的质量都是来源于对称性自发破缺后的希格斯

机制，质量为0的粒子（例如光子）则跟希格斯粒子没有直接的相互作用。在标准模型中，我们有三代费米子，那么重复上面的汤川耦合就可以得到另外两代费米子的汤川耦合和质量。有意思的是，标准模型中最重的顶夸克(173GeV) 的汤川耦合大小非常接近1，比其重的粒子显然会破坏微扰论，是目前理论框架所不允许的。这也从理论上限定了第四代标准模型费米子的存在性。

在最小标准模型中，中微子是没有质量的，因而(8.131)式中没有中微子与希格斯场的相互作用，对于中微子有质量的情况，我们只需要在拉氏量中再加上右手中微子的项：

$$y_\nu \bar{L}_L \Phi^c \nu_R + h.c. \tag{8.135}$$

就可以使得中微子获得质量$m_\nu = \frac{y_\nu v}{\sqrt{2}}$。当然这是狄拉克质量。

8.3.4 费米子的规范相互作用

标准模型理论的粒子谱包含三个部分：夸克和轻子费米子物质场；传递相互作用的规范粒子；引起对称性自发破缺的希格斯玻色子。其中的希格斯场的性质已经在上一节做了简单介绍，这一节我们介绍规范场和费米子场的弱相互作用。

由于都是非阿贝尔规范场，这里的推导与7.1.1节量子色动力学SU(3)群的推导完全类似，我们可以得到SU(2)群的场强张量

$$W^i_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g\epsilon^{ijk} W^j_\mu W^k_\nu . \tag{8.136}$$

电弱统一理论的规范群是$SU(2)_L \times U(1)_Y$，因此规范玻色子动力学项$\mathcal{L}_{\rm G}$为：

$$\mathcal{L}_{\rm G} = -\frac{1}{4} W^i_{\mu\nu} W^{\mu\nu,i} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{8.137}$$

其中U(1)群的场强张量表达式为

$$B_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \,. \tag{8.138}$$

类似于量子色动力学，在拉氏量(8.137)式的第一项中，非阿贝尔群场强的展开式中含有W^a_μ的三次方和四次方项，它们分别对应于非阿贝尔规范场的自耦合项：三线顶点和四线顶点耦合项。

由于费米子左手场有$SU(2)_L$群的规范相互作用，而右手场没有，所以只有左手场有$SU(2)_L$群规范场的协变导数。虽然左右手夸克场和左右手轻子场都有$U(1)_Y$的规范相互作用，但是由(8.129,8.130)式可以看出，这些场所带弱超荷却是不同的，因而它们与规范玻色子相互作用项的具体表达式各不相同：

$$\mathcal{L}_{\rm F} = i\overline{Q}_L \gamma^\mu D_\mu Q_L + + i\overline{U}_R \gamma^\mu D_\mu U_R + i\overline{D}_R \gamma^\mu D_\mu D_R + i\overline{L}_L \gamma^\mu D_\mu L_L + i\overline{E}_R \gamma^\mu D_\mu E_R, \tag{8.139}$$

其中各个费米场的协变导数项为

$$D_\mu Q_L = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g'}{6}B_\mu\right) Q_L, \tag{8.140}$$

$$D_\mu U_R = \left(\partial_\mu - i\frac{2g'}{3}B_\mu\right) U_R\,,$$

$$D_\mu D_R = \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{3}B_\mu\right) D_R\,, \tag{8.141}$$

$$D_\mu L_L = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}B_\mu\right) L_L\,,$$

$$D_\mu E_R = \left(\partial_\mu + ig'B_\mu\right) E_R\,, \tag{8.142}$$

其中τ^i是(4.23)式定义的泡利矩阵。对三代费米子，上述表达式是相同的。

W和B规范场在对称性自发破缺之后，按照(8.120)式，W^1, W^2重新组合为W^+和W^-，因此，在对称性自发破缺之后，我们得到纯左手的带电流弱相互作用

$$\mathcal{L}_{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^\mu P_L e W_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu P_L \nu W_\mu^-]. \tag{8.143}$$

对于夸克场的相互作用与上式类似，只需要考虑夸克混合的CKM矩阵即可。W^3和B按照(8.122,8.123)式组合为Z 和光子。因此，与Z 玻色子耦合的弱中性流来源于左手的W^3和左右手都有相互作用的B场，因此并不是纯左手相互作用，其具体费曼规则见附录B。

(8.112,8.134,8.137,8.139)式表示的四部分拉氏量之和组成了电弱统一理论的总拉氏量[21]：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm G} + \mathcal{L}_{\rm F} + \mathcal{L}_{\rm H} + \mathcal{L}_{\rm Y}. \tag{8.144}$$

类似于量子电动力学和量子色动力学的情况，我们可以很容易从上面的拉氏量得到具体计算的费曼规则，基本粒子的传播子可以从自由拉氏量中场量的二次项系数的倒数作傅里叶变换得到，相互作用顶点可以通过三点或者四点相互作用项的系数乘以i，并考虑交换全同粒子的可能数目得到。在上面考虑自发对称性破缺的时候，我们经常取幺正规范为例，使得讨论物理自由度的数目非常方便，同时在计算物理过程的树图阶时候，也使得费曼图的数目很少，计算简便。但是在计算圈图（高阶）修正的时候，即使会增加费曼图的数量，一个保持协变性的规范却是必须的。因此在附录B中我们列出了R_ξ规范下的所有费曼规则，当其中的规范参数$\xi \to \infty$时，对应于幺正规范的费曼规则，在量子电动力学中经常应用的费曼规范对应于$\xi = 1$的情况；当$\xi = 0$时候，对应于朗道规范。

在上述电弱统一理论的拉氏量中，我们有两个规范群的耦合常数g, g'，对称性破缺后，变为(8.14)式定义的G_F和(8.124)式定义的电荷e。由(8.124)式可知，W, Z玻色子的质量可以由上述两个耦合常数和温伯格角θ_W来得到。因此，M_W，M_Z，G_F，e和θ_W这5个参数中只有三个是独立的，测量其中任意三个参数，都会得到另外三个的数值。需要注意的是，上述参数之间的关系(8.124)式及其推广都是建立在树图基础上的，需要在理论上考虑

其量子（圈图）修正，才能与更高精度实验对比。历史上一个成功的范例是图8.2所示的夸克和W玻色子所组成的箱图对于$K^0-\bar{K}^0$混合的贡献，通过实验测量混合参数与理论计算中混合参数对于粲夸克质量大小的依赖关系，在其实验发现之前就被理论计算所预言反推出粲夸克质量。另一个著名的例子是，顶夸克在1994年被美国费米实验室的Tevatron实验直接发现之前，就通过日内瓦大型正负电子对撞机实验的精确检验数据准确预言其质量是175 ± 11GeV。因此，上述经过高阶修正后的公式和实验测量值之间的对比可以提供标准模型的精确检验，理论和实验的任何偏离会给出超出标准模型的新物理信号。这部分内容我们将在下一章详细讨论。

粒子物理的标准模型包括上一章讲过的强相互作用和这里的电弱统一理论，其群结构是$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$。这里的自由参数包括三个群的耦合常数$g_S, g, g'$，或者等效的$\alpha_S$, G_F, α；希格斯势的两个参数μ和λ，或者等效的希格斯质量m_H和真空期望值v两个参数；最多的自由参数来源于汤川耦合部分，6 个夸克和6个轻子的质量（或者等效的汤川耦合参数），还有4 个CKM 夸克混合矩阵的参数和4个PMNS中微子混合矩阵参数。因此，最小的标准模型一共有25个自由参数；当然，由于没有确切实验证据，这里没有考虑可能的中微子马约拉纳质量参数和强CP破坏的参数θ。所有参数中的14个直接由希格斯场决定，所有的质量参数也都正比于与希格斯的相互作用强度，因此希格斯粒子在标准模型理论中起到了非常关键的作用。25 个自由参数的理论看起来不像一个基本理论，这么多的自由参数一直是标准模型不令人满意的主要理由之一，也是我们寻找超出标准模型的新物理的动机之一。我们将在本书的最后一章讨论这个问题。

8.4 弱衰变过程举例

弱相互作用过程的实验发现具有非常悠久的历史，起源于核辐射中的贝塔衰变，但是很长一段时间之内，弱相互作用过程也仅限于各种原子核的贝塔衰变过程，直到奇异粒子的发现，才有了大量的弱衰变过程。

8.4.1 中间玻色子的两体衰变

W粒子的两体衰变是最简单的弱衰变过程之一，在树图近似下，W粒子衰变到一对轻子的树图费曼图如图-8.12所示，该过程的衰变振幅可以写为

$$\mathcal{M}(W^-\to e^-\bar{\nu}_e) = -i\frac{g}{\sqrt{2}}\epsilon_\mu(p)\bar{u}_e(p_1)\gamma^\mu P_L v_{\bar{\nu}}(p_2). \tag{8.145}$$

其矩阵元平方，并对初态W粒子极化求平均后可得

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{g^2}{6}\cdot\left(-g_{\mu\nu}+\frac{p_\mu p_\nu}{m_{\rm W}^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot tr\left[\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu(1-\gamma_5)\right]\\ &= \frac{g^2}{3}\left(p_1\cdot p_2+2p\cdot p_1\, p\cdot p_2/m_{\rm W}^2\right)\simeq\frac{g^2}{3}m_{\rm W}^2.\end{aligned} \tag{8.146}$$

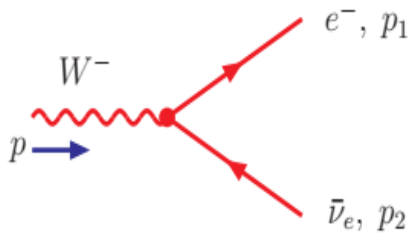


图 8.12:　树图水平的$W^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ 二体衰变过程。

上面的计算中，我们忽略了末态轻子质量的影响，在W静止系，两体相空间体积元很容易计算，最后得到W玻色子在树图水平的衰变宽度为

$$\Gamma(W^- \to e^-\bar{\nu}_e) = \frac{g^2 m_{\rm W}}{48\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{m_{\rm W}^3}{6\pi} = 0.2272{\rm GeV}. \tag{8.147}$$

其中已取$m_{\rm W} = 80.379$ GeV，$G_F = 1.16638 \times 10^{-5}{\rm GeV}^{-2}$。利用下面(8.152)式给出的$W$玻色子的总宽度，可得分支比为10.90%，目前的实验测量值为[1]

$$Br(W^- \to e^-\bar{\nu}_e) = (10.71 \pm 0.16)\,\%, \tag{8.148}$$

实验数值和理论计算结果误差范围内符合。这也表明，W 轻子衰变道的圈图量子修正很小。把电子和电子中微子置换成缪子或者τ 子及其中微子，在同样忽略末态轻子质量的假设下，上面的衰变宽度是一样的。

对于W粒子衰变到一对正反夸克的衰变，如果我们也忽略末态夸克的质量，则计算过程完全相同，唯一需要注意的是夸克质量本征态和弱作用本征态之间的CKM混合矩阵元，和夸克的三种颜色自由度

$$\Gamma(W^+ \to u_i\bar{d}_j) \;=\; \frac{G_F m_{\rm W}^3}{2\pi\sqrt{2}}|V_{ij}|^2, \tag{8.149}$$

由于顶夸克的质量比W粒子重，因此，W粒子衰变的夸克末态只有$u\bar{d}'$和$c\bar{s}'$ 两种可能，d'和s'都是三种下夸克的组合，因此一共是6种组合。由于CKM矩阵幺正性的限制，所有组合的和为

$$\sum_{i,j}\Gamma(W^+ \to u_i\bar{d}_j) \;=\; \frac{G_F m_{\rm W}^3}{\pi\sqrt{2}}, \tag{8.150}$$

由于W衰变到任意夸克和胶子的末态，最后都会强子化到介子或者强子，所以我们认为理论计算的W衰变到各种夸克和胶子的末态之和应该等于实验测量的所有强子末态的宽度之和，这个假设被称为**夸克-强子对偶** 。在这个假设下，上面计算的宽度和应该等于实验测量的W粒子强子末态宽度。再加上三代轻子宽度的和，我们得到在树图近似下W粒子的总宽度为

$$\Gamma_W \;=\; \sum_{i,j}\Gamma(W^+ \to f_i\bar{f}_j) = \frac{3G_F m_{\rm W}^3}{2\pi\sqrt{2}} = 2.045{\rm GeV}. \tag{8.151}$$

这与下述实验观测值[1]在实验误差范围内吻合

$$\Gamma_W = 2.085 \pm 0.042\text{GeV}. \tag{8.152}$$

对于Z玻色子的两体衰变$Z(p) \to f(p_1)\bar{f}(p_2)$，类似于(8.145)式，可以写出其树图水平衰变矩阵元为

$$\mathcal{M}(Z^0 \to f\bar{f}) = -\epsilon_\mu(p,\lambda)\bar{u}(p_1)\gamma^\mu(a - b\gamma_5)v(p_2), \tag{8.153}$$

其中a和b是附录B中Z^0玻色子和相应的费米子的耦合常数。跟W玻色子衰变一样，在忽略掉末态费米子质量的近似下，矩阵元平方后得到Z^0衰变到带电轻子和中微子的宽度为

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \to e^+e^-) &= \Gamma(Z \to \mu^+\mu^-) = \Gamma(Z \to \tau^+\tau^-) \\ &= \frac{G_F m_{\text{Z}}^3}{3\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4} - \sin\theta_W^2 + 2\sin\theta_W^4\right), \end{aligned} \tag{8.154}$$

$$\Gamma(Z \to \nu_i\bar{\nu}_i) = \frac{G_F m_{\text{Z}}^3}{12\pi\sqrt{2}}, \tag{8.155}$$

Z^0衰变到正反夸克对的宽度则需要考虑夸克的三种颜色

$$\Gamma(Z \to u\bar{u}) = \Gamma(Z \to c\bar{c}) = \frac{G_F m_{\text{Z}}^3}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\sin\theta_W^2 + \frac{8}{9}\sin\theta_W^4\right), \tag{8.156}$$

$$\Gamma(Z \to d\bar{d}) = \Gamma(Z \to s\bar{s}) = \Gamma(Z \to b\bar{b}) = \frac{G_F m_{\text{Z}}^3}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\sin\theta_W^2 + \frac{2}{9}\sin\theta_W^4\right), \tag{8.157}$$

跟W玻色子衰变的情况一样，如果我们把Z^0衰变到三种带电轻子、三种中微子和5种夸克对的宽度求和，应该得到树图近似下Z玻色子的总宽度

$$\Gamma_Z = \sum_f \Gamma(Z \to f\bar{f}) = \frac{G_F m_{\text{W}}^3}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{7}{4} - \frac{10}{3}\sin\theta_W^2 + \frac{40}{9}\sin\theta_W^4\right). \tag{8.158}$$

在日内瓦的大型正负电子对撞机上人们非常准确地测量了Z玻色子的衰变总宽度和强子衰变宽度（对应于夸克对的宽度）以及带电轻子对的宽度，而末态为中微子的衰变是测不到的，人们把总宽度减去已经测量到的各种宽度之后，剩余的Z玻色子宽度恰好与三种中微子的宽度公式(8.155)式符合，这是对于中微子只有三代的最直接实验证据，当然这个三代的限制局限于中微子质量小于半个Z玻色子的质量范围。

8.4.2 $\pi^\pm$介子衰变

π介子是质量最轻的介子，只能发生味道改变的弱衰变或者电磁衰变，例如$\pi^\pm$介子的主要弱衰变是如图8.13所示的纯轻子衰变道，在树图阶是通过一个虚的W玻色子衰变到一对末态轻子的。这两个衰变道的具体量子场论计算比之前的W 玻色子两体衰变稍微复杂一些。利用(8.145)式可以把这个衰变在夸克层次写为

$$\mathcal{M}(\bar{u}d \to W^- \to e^-\bar{\nu}_e) = \frac{g^2}{2}\bar{v}_u\gamma_\mu P_L u_d \frac{-iV_{ud}}{q^2 - m_W^2}\bar{u}_e\gamma^\mu P_L v_{\bar{\nu}}. \tag{8.159}$$

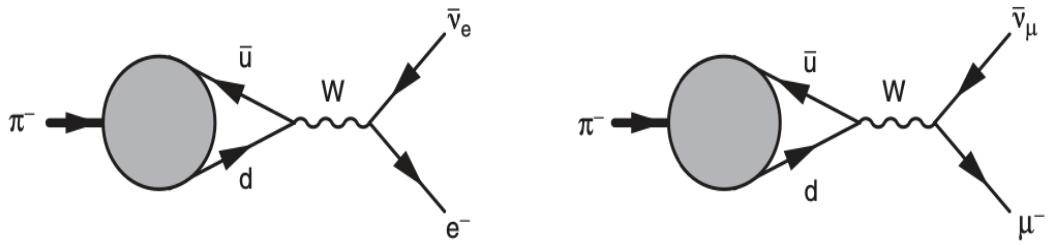


图 8.13: π介子的纯轻子衰变道$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$和$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$衰变过程的树图费曼图。

如果我们忽略远小于m_W^2的q^2，并利用(8.14)式的定义，我们可以得到四费米子的相互作用

$$\mathcal{M}(\bar{u}d \to W^- \to e^-\bar{\nu}_e) \simeq i2\sqrt{2}G_F V_{ud}[\bar{v}_u\gamma_\mu P_L u_d][\bar{u}_e\gamma^\mu P_L v_{\bar{\nu}}]. \tag{8.160}$$

这个四费米子算符包含一个夸克流和一个轻子流，对于π介子衰变来说，QCD相互作用使得π介子通过这个夸克弱流湮灭到QCD的真空，这可以表示为

$$\langle 0|\bar{v}_u\gamma_\mu P_L u_d|\pi\rangle, \tag{8.161}$$

由于π介子的宇称为负，因此只有轴矢量流$\gamma_\mu\gamma_5$有贡献，这个衰变中，只有π介子的四动量是一个四维矢量，因此上述矩阵元一定正比于π介子的四动量q_μ

$$\langle 0|\bar{v}_u\gamma_\mu\gamma_5 u_d|\pi\rangle = if_\pi q_\mu, \tag{8.162}$$

这个比例常数$f_\pi \simeq 132\text{MeV}$，通常称为$\pi$介子的衰变常数，它可以由在上一章中介绍过的格点量子色动力学计算得到。因此，$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$的衰变矩阵元为

$$\mathcal{M}(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e) = -\sqrt{2}G_F V_{ud} f_\pi q_\mu[\bar{u}_e\gamma^\mu P_L v_{\bar{\nu}}]. \tag{8.163}$$

上述轻子流部分的矩阵元平方，我们在W玻色子两体衰变中计算过，因此，$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$的衰变宽度为

$$\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2}{8\pi}|V_{ud}|^2 f_\pi^2 m_e^2 m_\pi \left(1 - \frac{m_e^2}{m_\pi^2}\right)^2. \tag{8.164}$$

由轻子的普适性，把上式的m_e 换成m_μ可以直接得到$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$的衰变宽度。

对π介子的两个纯轻子衰变道，由上面的公式(8.164)可知，场论计算出的衰变宽度正比于末态轻子的质量平方，因此有

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2. \tag{8.165}$$

由于m_μ和m_e 的大小相差两个数量级，因而上面的宽度比为10^{-4} 数量级，这与实验观测符合。按照第8.1.2节所讨论的弱作用普适性，π介子与两代轻子的耦合是一样的，由

于$m_e \ll m_\mu$，所以$\pi^- \to e^-\bar{\nu}_e$衰变道比$\pi^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu$ 的相空间要大，但是上述实验和理论计算结果却违反轻子的普适性结论，这个原因来源于弱作用的左手流相互作用结构。带电流拉氏量中电子是左旋的，反中微子是反粒子则是右旋的，在π介子的质心系，如图4.23所示，二者背对背飞出，意味着二者的角动量投影之和为1，因此它们的角动量之和是1，但是π介子的自旋是0，因此角动量不守恒。考虑到中微子几乎没有质量，螺旋度是好量子数。当然电子不是0质量的，按照第一章的讨论，有质量的粒子会有小部分右旋成分，只有这部分才满足角动量守恒的要求，只是被严重压低，压低因子是m_e/m_π，这通常被称为**螺旋度压低** 。

图8.159中的带电轻子线或者夸克线都可以辐射出一个光子，这样π介子的两体纯轻子衰变就变成了三体辐射衰变，根据电动力学的费曼规则，三体衰变比两体衰变多了一个电磁耦合顶点，矩阵元平方后，在相互作用上就多了一个α因子的约100倍的压低。但是由于变成了三体衰变，角动量守恒很容易满足，上述的螺旋度压低的因素也不存在了，三体衰变宽度正比于α和二体衰变宽度正比于轻子质量，起到了类似的压低效应。因此π介子的如下两个稀有衰变道的分支比也在同一量级

$$Br(\pi^+ \to e^+\nu_e) = 1.230(4) \times 10^{-4}, \tag{8.166}$$

$$Br(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu\gamma) = 2.00(25) \times 10^{-4}. \tag{8.167}$$

类似地，对于$K^\pm$介子的纯轻子衰变$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$和$K^+ \to e^+\nu_e$，我们可以得到与(8.164) 式类似的结果，只需要把π的物理量换成相应的K介子，CKM矩阵元换为V_{us}。更一般性地，我们发现，对于$D^\pm$、$D_s^\pm$、$B^\pm$和$B_c^\pm$等介子的纯轻子衰变结果也是类似的，都有严重的螺旋度压低效应。

8.4.3 K介子稀有衰变

K介子是在上世纪40年代被发现的，研究历史悠久，对于K介子的主要衰变道，我们在第三章和第六章介绍过。意大利Frascati的DAΦNE实验从1999年开始运行，一直作为一个$\phi(K)$介子工厂坚持K介子物理的研究。由于K介子质量很低，所有高能量的大型对撞机都会通过次级粒子的形式产生大量的K 介子，因此，K介子的实验数据积累是海量的，其实验研究精度也是各种强子里最高的。对K介子系统的稀有衰变过程也是研究得最清楚的，例如K介子的半轻子三体衰变过程$K \to \pi\nu\bar{\nu}$，纯轻子稀有衰变过程$K_{L,S} \to \mu^+\mu^-$，$K^\pm \to l^\pm\nu_l$以及轻子数改变(Lepton Number Violation) 的$K^+ \to \pi^+\mu^+e^-$等过程。此类K介子稀有衰变过程在理论上都比较干净，对新粒子的圈图贡献又敏感，是进行标准模型精确检验和新物理探索的重要研究领域。

唯象上非常感兴趣的$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$是味道改变的中性流过程，按照弱相互作用理论，中性流不能改变味道，因此该衰变道是如图-8.14 所示非常稀有的半轻子圈图过程，其中的箱图和企鹅图中由三种夸克u, c, t贡献，因此其计算结果分别正比于三种夸克的质量平方和CKM矩阵元$V_{ud}V_{us}^*$，$V_{cd}V_{cs}^*$和$V_{td}V_{ts}^*$。由CKM 的幺正性，这三组CKM矩阵元的和为

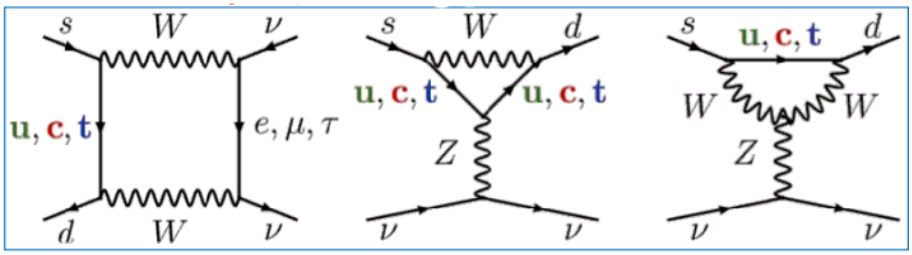


图 8.14: 对$K^- \to \pi^- \nu\bar{\nu}$或者$\bar{K}^0 \to \pi^0 \nu\bar{\nu}$ 衰变过程有主要贡献的单圈Z-企鹅图和箱图。

0，因此如果三种夸克质量相等，这三种圈图的贡献将为 0，这是之前讨论的GIM机制推广到三代的自然结论。实际情况，由于夸克质量并不相等，因此，上述圈图计算的结果将正比于

$$\mathcal{A} \approx \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{2\pi \sin^2\theta_W} [V_{cd}V_{cs}^* X(x_c) + V_{td}V_{ts}^* X(x_t)] \cdot [\bar{s}\gamma^\mu P_L d][\bar{\nu}\gamma_\mu P_L \nu], \tag{8.168}$$

其中u夸克圈图的贡献已经利用CKM矩阵的幺正性包含在了粲和顶夸克圈的贡献X函数中，$x_c = m_c^2/m_W^2$，$x_t = m_t^2/m_W^2$。可以看出，上式中粲夸克的贡献受到x_c的压低影响，而顶夸克的贡献则受到CKM矩阵元分$|V_{td}V_{ts}^*|$的压低影响，因而这两项的贡献在同一量级。经过QCD修正后，这个衰变分支比的标准模型理论预言值在10^{-11} 量级[268, 286, 287]

$$Br(K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu})|_{\rm SM} = (8.60 \pm 0.42) \times 10^{-11}. \tag{8.169}$$

$K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}$衰变道是理论上非常干净的“黄金衰变道”，理论误差很小约为4%。新物理模型中出现的新粒子可以通过圈图内线甚至树图内线对其给出较大的贡献，该过程是探索新物理信号的非常敏感的过程。

如图-8.15所示，对$K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}$的实验测量和理论研究已经做了50 多年，各种相关实验不断取得进展，理论计算的误差也在不断减小。在CERN工作的NA62实验组使用SPS的能量为400GeV的质子束打铍靶，产生K介子流（占二级强子流量的6%），然后测量其衰变。根据该实验在2016-2018的运行周期采集的K^+ 衰变数据，对该道衰变分支比的最新实验测量值为[288]

$$Br(K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu})|_{\rm exp} = \left(10.6^{+4.0}_{-3.4}(stat.) \pm 0.9(syst.)\right) \times 10^{-11} \quad \text{at} \quad 68\% CL. \tag{8.170}$$

这个实验测量结果的信号显示度为3.4σ [288]，在实验误差范围内与标准模型理论预言值符合。

由于$K_L^0 \to \pi^0 \nu\bar{\nu}$ 是一个CP破坏的衰变道，因此一直以来是非常受到关注的。如图-8.14 所示是$\bar{K}^0 \to \pi^0 \nu\bar{\nu}$衰变的领头阶费曼图，把图-8.14中的s和d夸克换为其相应的反

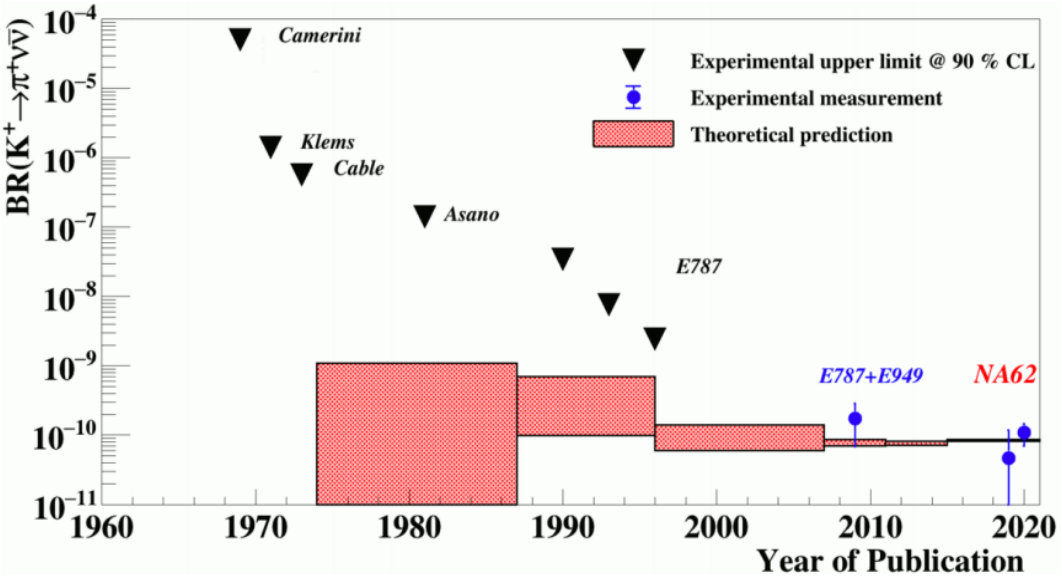


图 8.15: 对$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ 衰变过程的实验研究历史和标准模型理论预言[289]。

夸克则得到$K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}$的领头阶费曼图。由(8.37)式可知，$K_L^0$是$K^0$和$\bar{K}^0$的组合，

$$A(K_L^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}) - A(\bar{K}^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu})] \tag{8.171}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[A(K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}) - A^*(K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu})] \tag{8.172}$$

$$\sim ImA(K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}) \tag{8.173}$$

因此只有当CP破坏的时候，$K_L^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}$ 衰变才会发生。这是少见的测量单个衰变道就能确定直接CP破坏存在的情况。理论上，对该衰变分支比的标准模型理论预言值非常准确[287]

$$Br(K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu})|_{\rm SM} = (2.94 \pm 0.15) \times 10^{-11}. \tag{8.174}$$

实验上，这个衰变道的实验测量则是具有相当的挑战性，衰变末态是π^0的两个光子加上中微子的丢失能量，实验背景非常大。使用在J-PARK固定靶实验2015-2018年运行期间采集的数据，KOTO 实验组对$K^0 \to \pi^0\nu\bar{\nu}$ 衰变道的衰变分支比给出的实验上限为[290, 291]

$$Br(K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu}) < \begin{cases} 3.0 \times 10^{-9} & \text{at} \quad 90\%\text{CL}, \\ 4.9 \times 10^{-9} & \text{at} \quad 90\%\text{CL}, \end{cases} \tag{8.175}$$

NA62实验组基于对$Br(K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu})$的实验测量结果导出的对$Br(K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu})$ 的限制为[292]

$$Br(K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu}) < 7.8 \times 10^{-10}. \tag{8.176}$$

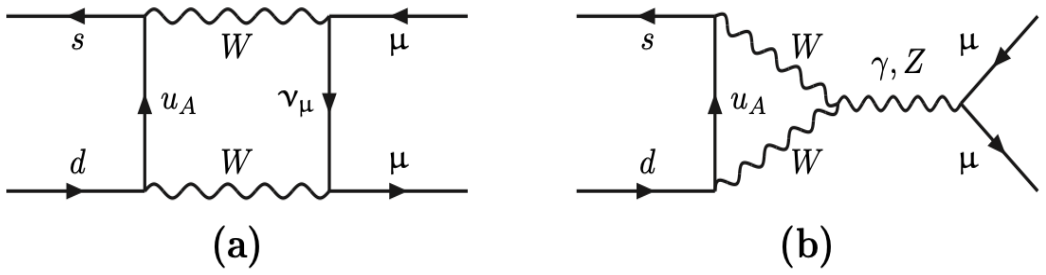


图 8.16:　$K^0 \to \mu^+\mu^-$ 衰变的领头阶费曼图举例。

显然，这个实验上限已经接近理论值。在J-PARK完成2021-2022年的升级改造以后，预计在新的2022-2025运行期间将采集比2015-2018 运行周期多11倍的数据，有可能对该非常稀有的半轻子衰变道的分支比给出检验。

类似于上一小节的带电K介子的纯轻子衰变道，中性K介子的纯轻子衰变道也是螺旋度压低的过程。由于实验上发现的中微子质量无限接近于0，因此π^0或者K^0介子衰变到正反中微子对是禁戒的，而衰变到e^+e^-相对于$\mu^+\mu^-$对则是m_e^2/m_μ^2的压低，因而是忽略不计的。由于中性K介子的纯轻子衰变$K^0 \to \mu^+\mu^-$是味道改变的中性流过程，只能通过如图8.16 所示的圈图发生。这个衰变的领头阶费曼图中的u_A夸克，与$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ 中性流过程类似，是三种夸克u, c, t贡献的和，因此其计算结果分别正比于三种夸克的质量平方和CKM矩阵元$V_{ud}V_{us}^*$，$V_{cd}V_{cs}^*$和$V_{td}V_{ts}^*$。由CKM 矩阵的幺正性，这三组CKM矩阵元的和为 0 ，因此如果三种夸克质量相等，这三种圈图的贡献将为 0 。实际情况，由于夸克质量并不相等，因此，上述圈图计算的结果不为0。$K^0(\bar{K}^0)$ 混合为$K_{S,L}^0 \to \mu^+\mu^-$衰变，其中还有长程贡献是非微扰很难准确计算的，因此理论不确定性较大。对$K_S^0 \to \mu^+\mu^-$ 衰变道，目前的标准模型理论预言值和LHCb实验上限分别为[293, 294]

$$\begin{aligned} Br(K_S^0 \to \mu^+\mu^-)_{\rm SM} &= (5.18 \pm 1.50) \times 10^{-12}, \\ Br(K_S^0 \to \mu^+\mu^-)_{\rm Exp} &< 2.1 \times 10^{-10} \quad \text{at} \quad 90\%\text{CL}. \end{aligned} \tag{8.177}$$

$K_L^0 \to \mu^+\mu^-$衰变分支比的实验测量平均结果列在表8.1中。对该衰变道衰变分支比的标准模型理论值有两个

$$Br(K_L^0 \to \mu^+\mu^-)_{\rm SM} = \begin{cases} (6.85 \pm 0.80_{\rm LD} \pm 0.06_{\rm SD}) \times 10^{-9}, \\ (8.11 \pm 1.49_{\rm LD} \pm 0.13_{\rm SD}) \times 10^{-9}, \end{cases} \tag{8.178}$$

他们分别对应着来自于$K_L^0 \to \gamma\gamma$的长程贡献振幅的相对符号是正还是负。显然，第一个标准模型理论值与实验测量结果符合的更好。

一个更加稀有的衰变道是上述两体纯轻子衰变中再增加一对中微子对末态，这是一个双重弱作用衰变道，标准模型预言的分支比是10^{-16}量级，这么小的分支比是实验不可能观测到的，同时也是对于任何超出标准模型的新物理贡献都会敏感的衰变道。NA62实

表 8.2: 目前实验对轻子味道改变(LFV)和轻子数改变(LNV)的K介子衰变过程分支比给出的最新实验限制。

Mode	Physics Interest	UL(90% CL)	Experiment
$K^+ \to \pi^+\mu^+e^-$	LFV	$< 1.3 \times 10^{-11}$	E777/E865 [296]
$K^+ \to \pi^+\mu^-e^+$	LFV	$< 6.6 \times 10^{-11}$	NA62[297]
$K^+ \to \pi^-\mu^+e^+$	LFV, LNV:$\Delta L_\mu = \Delta L_e = 1$	$< 4.2 \times 10^{-11}$	NA62[297]
$K^+ \to \pi^-e^+e^+$	LNV:$\lvert\Delta L_e\rvert = 2$	$< 2.2 \times 10^{-10}$	NA62 [298]
$K^+ \to \pi^-\mu^+\mu^+$	LNV:$\lvert\Delta L_\mu\rvert = 2$	$< 4.2 \times 10^{-11}$	NA62 [298]
$K^+ \to \pi^-\pi^0e^+e^+$	LNV :$\lvert\Delta L_e\rvert = 2$	$< 8.5 \times 10^{-10}$	NA62 [299]

验组对$K^+ \to \mu^+\nu\nu\bar{\nu}$ 衰变分支比给出的最新上限为[295]

$$Br(K^+ \to \mu^+\nu\nu\bar{\nu}) < 1.0 \times 10^{-6} \quad \text{at} \quad 90\%\text{CL}. \tag{8.179}$$

在第四章我们曾经指出，轻子数按照不同代分别守恒，也讨论了许多实验对轻子味道改变(LFV)和轻子数改变(LNV)的限制，这类过程的发现将是明显的超出标准模型的新物理信号。鉴于庞大的K介子衰变数据，在K 介子半轻子衰变过程中人们也做了这类详细研究，并对相关过程的分支比给出了许多限制，具体结果见表-8.2。

8.5 练习题

1. 用卡比玻的理论比较$\pi^+ \to \pi^0\nu_e e^+$、$K^+ \to \pi^0\nu_e e^+$、$\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ 的相对衰变宽度大小（用卡比玻角表示，忽略相空间的影响）。

2. 画出下列反应的领头阶费曼图，并说明是带电流、中性流、还是同时带电流和中性流相互作用：

   (a) $e^-\bar{\nu}_\mu \to e^-\bar{\nu}_\mu$; (b) $n \to pe^-\bar{\nu}_e$; (c) $\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$; (d) $\mu^-\nu_\mu \to \mu^-\nu_\mu$;
   (e) $e^-\nu_\mu \to e^-\nu_\mu$; (f) $e^-\nu_e \to e^-\nu_e$ (g) $\nu_\mu p \to \nu_\mu p$.

3. 利用$\Delta I = 1/2$规则，推导公式(8.72,8.73)。

4. 标准模型的CKM矩阵的幺正性给出6个幺正三角形，试证明这6个幺正三角形有相同的面积。

5. 考虑图-8.8所示的幺正三角形($V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0$)，在复平面上CKM矩阵元乘积的相位和3个相角之间存在关联关系。由该图导出三个相角(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)的定义式：

$$\phi_1 = \pi - \left(\frac{-V_{td}V_{tb}^*}{-V_{cd}V_{cb}^*}\right), \quad \phi_2 = \left(\frac{V_{td}V_{tb}^*}{-V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad \phi_3 = \left(\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{-V_{cd}V_{cb}^*}\right). \tag{8.180}$$

并证明：$\phi_1+\phi_2+\phi_3=\pi$。

6. 利用附录B中电弱统一理论的费曼规则，计算图8.16所示的$K^0\to\mu^+\mu^-$衰变宽度。

7. 利用附录B中电弱统一理论的费曼规则，计算$\Gamma(K^+\to e^+\nu_e)/\Gamma(K^+\to\mu^+\nu_\mu)$。

8. 考虑处于静止状态的τ轻子的衰变过程：

$$\tau^-\to\pi^-\nu_\tau \tag{8.181}$$

其中τ轻子自旋角动量方向沿z-轴正向，ν_τ和π^-分别沿$\pm z$-轴方向运动。假定当弱带电流是(1) $V-A$流，(2)$V+A$流时，分别画出该衰变过程粒子的自旋角动量分布的示意图。

9. 1) 证明τ轻子衰变过程$\tau^-\to\pi^-\nu_\tau$的树图衰变宽度为

$$\Gamma(\tau^-\to\pi^-\nu_\tau) \;=\; \frac{G_F^2}{16\pi}|V_{ud}|^2 f_\pi^2 m_\tau^3\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2.$$

2) 利用粒子数据表的τ轻子的寿命，计算上述衰变的分支比数值，并与实验数据对比。

10. 在标准模型框架下，研究$\mu^-\to e^-\nu_\mu\bar{\nu}_e$三体衰变

(a) 画出最低阶的树图费曼图，写出衰变振幅。

(b) 计算衰变振幅的模方，写出分支比表达式，并计算分支比。

11. 假设弱作用的相互作用顶点是标量型的，重复8.4.2节的计算，并证明

$$\frac{\Gamma(\pi^-\to e^-\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^-\to\mu^-\bar{\nu}_\mu)} \;\simeq\; 5.5.$$

12. 在标准模型框架下，研究$\tau^-\to e^-\nu_\tau\bar{\nu}_e$三体衰变

(a) 画出最低阶的树图费曼图，写出衰变振幅，写出分支比表达式。

(b) 利用分支比公式，证明，

$$Br(\tau^-\to e^-\nu_\tau\bar{\nu}_e):Br(\tau^-\to\mu^-\nu_\tau\bar{\nu}_\mu):Br(\tau^-\to\nu_\tau+hadrons)\simeq 1:1:3.$$

13. 画出弱衰变$D^0\to K^-\pi^+$和$D^0\to K^+\pi^-$的树图阶费曼图，并解释如下实验观察到的巨大宽度差别

$$\frac{\Gamma(D^0\to K^+\pi^-)}{\Gamma(D^0\to K^-\pi^+)}\simeq 4\times 10^{-3}.$$

14. 画出弱衰变$\pi^0 \to \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$的领头阶费曼图，并解释这个衰变道在中微子质量为0的情况下是禁戒的原因。

15. 推导Z玻色子衰变到两个费米子的宽度公式，并证明

$$R_\mu = \frac{\Gamma(Z \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma(Z \to hadrons)} \simeq \frac{1}{20}.$$

第九章　标准模型精确检验和TeV物理

随着科学的发展，人们对于物理学最前沿的研究向着两个不同方向在不断前进，一个是越来越广阔的宇宙和其起源的研究，另一个是物质最深层次结构的研究。在本书的最后一章我们会提到这两个研究方向也是互相影响互相促进的。粒子物理学作为研究物质最深层次结构的科学，其已经被实验验证的基本理论是标准模型。它是迄今为止公认的描述弱、电、强三种相互作用的成功理论。众所周知，标准模型理论有三根支柱：

1. 夸克、轻子和规范玻色子的物质场，是构成物质世界的基本组元。
2. 三种基本相互作用：电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用。这些“力”把构成物质世界的基本组元“束缚”在一起，形成万事万物。
3. 希格斯玻色子: 通过希格斯机制使规范玻色子$W^{\pm}$和Z获得重质量，通过汤川耦合使带电轻子和夸克获得质量。

在过去的半个世纪中，标准模型理论对“物质世界”的描述经历了众多低能和中、高能物理实验的精确检验，标准模型在理论和实验两个方面均取得了巨大的成功。希格斯粒子的发现补齐了标准模型理论的最后一块短板，使其成为一个得到实验检验的完整理论。但目前仍然存在许多“开放问题”需要通过理论和实验研究来回答。例如[304]：

(1) 它是标准模型的希格斯吗？它是基本粒子还是一个复合粒子？它满足自然性吗？

(2) 有没有第二个希格斯二重态？是否存在带电的希格斯玻色子？

(3) 它是第一个被观察到的超对称粒子吗？

(4) 它确实能够为其它基本粒子提供质量吗？

(5) 它主要产生于顶夸克衰变，还是产生于新的“类矢量”重夸克？

(6) 它是通向另一个“隐身世界”的信使吗？它是产生物质-反物质不对称性的原因吗？

(7) 是它引起宇宙各向异性的膨胀吗？

按照上一章的结论，标准模型至少有25个自由参数，这么多的自由参数都需要给出一个理论解释，另外还存在著名的Majorana中微子质量问题，暗物质和暗能量问题等等。所有这些问题，目前都没有答案！当然，除了这些问题，更为重要的是希格斯的自耦合相互作用和给费米子以质量的汤川耦合这两种不能归类到四种基本相互作用的新相互作用种类的验证问题。

目前存在的这些基本问题使大多数物理学家相信，现在的标准模型理论很可能是在电弱能标$\Lambda_{\rm EW} \approx 246$ GeV 附近的“有效理论”，在更高的能标应当存在超出标准模型的新物理（基本）理论。当然我们现在不知道“新物理”是什么样子，是目前非常“热门”的“超对称模型”还是其它未知模型，这需要国际粒子物理学界继续在“更高能量”和“更高精度”这两个方向上加倍努力!

9.1 标准模型精确检验

按照上一章引入的电弱统一理论，由带电的$W^{\pm}$玻色子引起的过程叫做带电流过程。只有左手费米子和右手反费米子与W玻色子有耦合，即带电流是左手流。所以，宇称$\mathcal{P}$和电荷共轭变换$\mathcal{C}$分别都是100%破坏的。但联合的CP变换仍然是一个好对称性。

在标准模型框架下，存在由光子和Z^0玻色子传递的中性流，光子、Z玻色子与费米子之间的电磁和弱中性流耦合有不同于带电流的特点。所有中性流相互作用顶角都是味道守恒的。顶角类型为$\gamma f \bar{f}$ 或$Z f \bar{f}$。在实验上没有看到味改变的中性流耦合过程，例如$\mu \to e\gamma$或者$Z \to e^{\pm}\mu^{\mp}$。电磁相互作用$\gamma f \bar{f}$ 与费米子电荷Q_f成正比，因此中微子不参与电磁相互作用($Q_\nu = 0$)，但通过弱相互作用与Z玻色子耦合。光子与具有不同手征性的费米子之间的电磁相互作用是一样的。但Z玻色子与左手和右手费米子之间的耦合是不一样的。

9.1.1 标准模型电弱参数的精确测量

1989年，欧洲CERN的正负电子对撞机实验(LEP实验)和美国SLAC的直线正负电子对撞机实验(SLC实验[1])先后投入运行，标准模型精确检验进入了“黄金时期”。到2000年11月LEP-II停止运行，LEP的四个实验组和SLC的SLD实验组在Z^0 和WW 共振区收集到大量的实验数据，实验取得巨大的成功，为标准模型理论精确检验提供了牢固的实验基础[73, 305–307]。

利用实验测量得到的质量$m_{\rm W}$和m_t，与耦合常数G_F和α一起作为输入参数，使用TOPAZ0[310]和ZFITTER[311]程序包做拟合，对其它标准模型参数的拟合结果在表-9.1中给出[306]。表-9.1同时列出了在对标准模型参数做综合分析时所使用的大$-Q^2$实验数据。在第2列数据中的总误差包含了统计误差和系统误差（单独的系统误差见文献[306]的表-1）。在第3列中所列“标准模型结果”是使用所有大-Q^2数据做标准模型拟合得到的结果。从表中可以看出，所有实验测量都基本与标准模型符合，对于标准模型的最大偏离也小于3个标准偏差。

在标准模型框架下，很多物理可观测量的函数表达式通过树图或者圈图对$m_{\rm t}, m_{\rm W}$有较强的直接依赖关系：$\propto m_{\rm W}^2/m_{\rm t}^2$。但对$m_{\rm H}$一般为对数依赖关系：$\propto \log(m_{\rm H}^2/m_{\rm W}^2)$，比

[1] 3.2公里长的斯坦福直线正负电子对撞机SLC是世界上第一台直线对撞机。它利用美国SLAC国家实验室的50GeV的直线加速器，经加速的正负电子束流分别经过两个弧形传输线进入对撞区，1989年实现了对撞，主要运行在Z^0共振峰附近能区：$E_{CM} \approx 91$GeV，运行时间为1989-1998年。

表 9.1: 在综合分析时所使用的实验数据和标准模型参数的拟合结果。(a): LEP-I 数据；(b) SLD 数据($\mathcal{A}_l$ 包含了A_{LR} 和极化轻子的不对称性)；(c) LEP-I 和SLD 重味夸克(b,c夸克)相关数据[306]。

		实验测量值	SM拟合值	偏离(σ)
(a)	LEP-I			
	$M_{\rm Z}$ [GeV]	91.1875 ± 0.0021	91.1874	0.0
	$\Gamma_{\rm Z}$ [GeV]	2.4952 ± 0.0023	2.4959	-0.3
	σ^0_{had} [nb]	41.540 ± 0.037	41.478	1.7
	R^0_l	20.767 ± 0.025	20.742	1.0
	$A^{0,l}_{FB}$	0.0171 ± 0.0010	0.0164	0.7
	+ correlation matrix [73]			
	$\mathcal{A}_l$ ($\mathcal{P}_\tau$)	0.1465 ± 0.0033	0.1481	-0.5
	$\sin^2\theta^{lept}_{eff}$	0.2324 ± 0.0012	0.23139	0.8
(b)	SLD $\mathcal{A}_l$	0.1513 ± 0.0021	0.1481	1.6
(c)	LEP-I/SLD Heavy Flavour			
	R^0_b	0.21629 ± 0.00066	0.21579	0.8
	R^0_c	0.1721 ± 0.0030	0.1723	-0.1
	$A^{0,b}_{FB}$	0.0992 ± 0.0016	0.1038	-2.9
	$A^{0,c}_{FB}$	0.0707 ± 0.0035	0.0742	-1.0
	$\mathcal{A}_b$	0.923 ± 0.020	0.935	-0.6
	$\mathcal{A}_c$	0.670 ± 0.027	0.668	0.1
	+ correlation matrix [73]			

较弱。在直接发现顶夸克和希格斯(Higgs)玻色子以前，我们只能通过对这些可观测物理量的精确测量，来导出对$m_{\rm t}$和$m_{\rm H}$的间接限制。从LEP-I时代开始，人们就是这样把$m_{\rm t}$的下限逐年提高。1994年CDF实验组给出了第一个顶夸克产生证据。1995年，CDF和D0实验组同时宣布发现了顶夸克：CDF 给出的结果是$m_t = 176 \pm 13$ GeV，D0 给出的结果是$m_t = 199 \pm 30$ GeV，他们的结果发表在同一期的美国《物理评论快报》上[312]。对希格斯玻色子质量$m_{\rm H}$，我们经历了非常类似的过程，对其质量的预言范围越来越准确，直到2012年在LHC实验中直接发现希格斯玻色子并测量其质量。

图-9.1中的左图表示根据标准模型和相关实验数据对$m_{\rm t} - m_{\rm W}$取值区域给出的限制。图中的点线闭合围道区域(contour-plot)表示根据LEP-I/SLD实验数据得到的对$m_{\rm W} - m_{\rm t}$取值区域的间接限制。实线闭合围道区域表示根据LEP-II和Tevatron实验数据得到的对$m_{\rm W} - m_{\rm t}$取值区域的直接限制。在这两种情况下的contour-plot的置信度均为68%。基于标准模型的$m_{\rm W} - m_{\rm t}$取值区域与$m_{\rm H}$的取值有关，由该图可以看出，LEP-II和Tevatron实

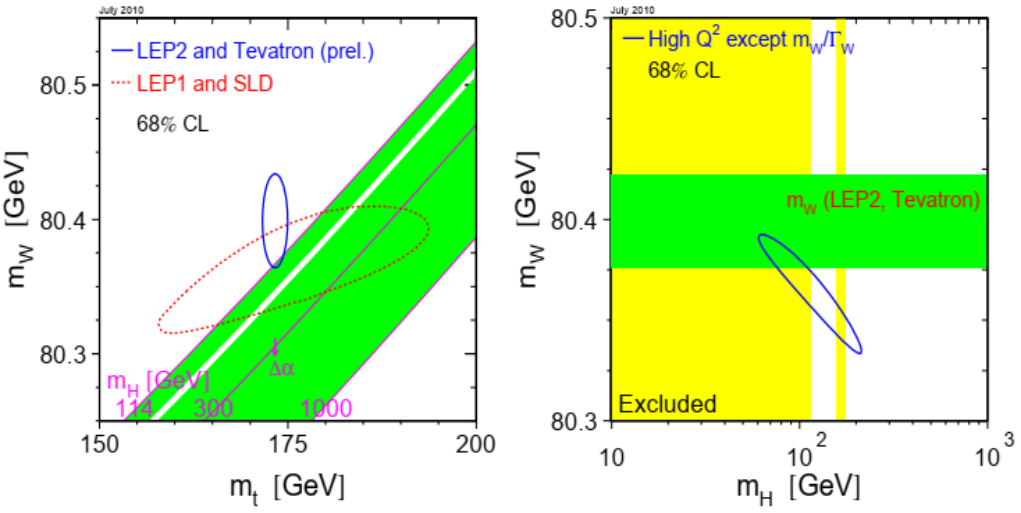


图 9.1: 根据LEP、SLD和Tevatron实验得到的对$m_{\mathrm{W}} - m_{\mathrm{t}}$和$m_{\mathrm{W}} - m_{\mathrm{H}}$取值范围的间接限制(Contour-plot)。

验数据倾向于较轻的希格斯玻色子：$m_{\mathrm{H}} \lesssim 114$ GeV。该图中的阴影(绿色)区域表示仍然被LEP-II和Tevatron实验允许的取值区域：$114.4 < m_{\mathrm{H}} < 157$ GeV，$175 < m_{\mathrm{H}} < 1000$ GeV。$\Delta\alpha$ 旁边的箭头表示质量关联对$\alpha(M_Z^2)$ 取值变化(在± 1个标准偏差内)的依赖性。该图表明，对m_{W}和m_{t}的实验测量值与标准模型理论预期符合的很好。

图-9.1中的右图表示根据标准模型和相关实验数据(大-Q^2 数据，但不包含对m_{W}和Γ_{W}的直接实验测量数据)对$m_{\mathrm{W}} - m_{\mathrm{H}}$取值区域给出的限制。右图的实蓝线闭合围道区域表示根据实验数据得到的对$m_{\mathrm{W}} - m_{\mathrm{H}}$取值区域的限制。右图中的浅阴影(黄色)区域表示被相关实验数据排除的m_{H}取值区域：$10 < m_{\mathrm{H}} < 114.4$ GeV (LEP-II, 95% 置信度)，$158 < m_{\mathrm{H}} < 172$ GeV (Tevatron, 95%置信度)。右图的深阴影(绿色)水平区域表示LEP-II和Tevatron实验得到的对m_{W}的直接实验测量值：$m_{\mathrm{W}} = 80.399 \pm 0.023$ GeV。

1989年LEP实验投入运行，人们也开始了在LEP实验上寻找希格斯粒子的努力。在LEP 实验和Tevatron实验上没有发现希格斯粒子，由这两个实验得到的对m_{H}的直接限制是：$m_{\mathrm{H}} > 114.4$ GeV, 并且不在160 GeV附近。从标准模型精确检验的实验和理论研究得到的间接限制是：$m_{\mathrm{H}} < 158$ GeV (95% C.L.)。由图-9.2可以看到在2009年LHC开始运行时我们所知道的对M_H的实验限制情况。图-9.2中的左图表示根据标准模型和相关实验数据(大Q^2 数据，但不包含Tevatron 对m_{t} 的直接实验测量数据)对$m_{\mathrm{t}} - m_{\mathrm{H}}$ 取值区域给出的限制。左图的深阴影(绿色) 水平带状区域表示Tevatron实验得到的对m_{t} 的直接实验测量值：$m_{\mathrm{t}} = 173.3 \pm 1.1$ GeV。左图中的浅阴影(黄色)区域和图-9.2中右图的浅阴影(黄色)区域相同，均表示在LHC实验结果出来以前已经被Tevatron等相关实验排除的m_{H} 取值区域（95% 的置信度）。左图的实蓝线闭合围道区域表示根据标准模型和实验数据得到

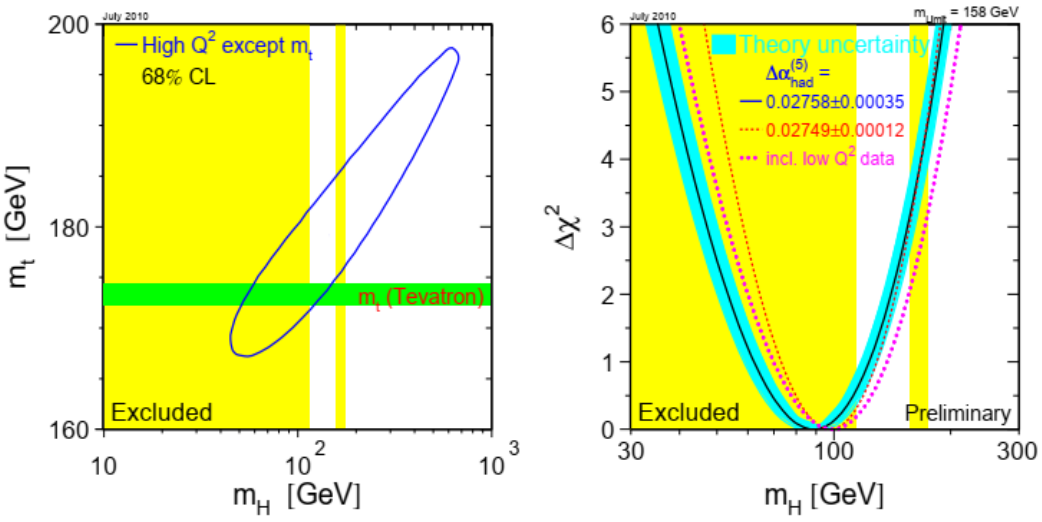


图 9.2:　左图表示根据标准模型和相关实验数据对$m_{\rm t}-m_{\rm H}$取值区域给出的限制。右图表示根据标准模型和相关实验数据给出的$\Delta\chi^2-m_{\rm H}$的函数曲线。

的$m_{\rm W}-m_{\rm H}$ 允许取值区域(68% 的置信度)。

图-9.2 中的右图表示根据标准模型和相关实验数据给出的$\Delta\chi^2=\chi^2-\chi^2_{min}$ *vs.* $M_{\rm H}$的函数曲线。在拟合中使用了全部大-Q^2 数据[306]，实黑线表示根据标准模型和实验数据(其中输入参数$\Delta\alpha^{(5)}_{\rm had}=0.02758(35)$)得到的$\Delta\chi^2-m_{\rm H}$ 曲线，伴随实黑线的蓝带表示由于忽略的高阶效应带来的理论误差。短划线表示在拟合中使用了$\Delta\alpha^{(5)}_{\rm had}=0.02749(12)$得到的结果，点线表示在拟合中包含了小-$Q^2$数据时得到的结果[306]。

在SLC上工作的Mark-II合作组在1989年8月首次报告他们在e^+e^-对撞实验中测量到了Z^0玻色子，1992年实现了e^-束流的极化，Mark-II探测器也更换为SLD探测器。到1998年SLC 停止运行，SLD合作组采集了大约60万(6×10^5)个Z^0产生和衰变事例。尽管SLD的数据量远小于LEP-I的数据量，但由于使用了纵向极化束流，在测量Z^0矢量玻色子与其它粒子之间的耦合强度和特性时有其独特的优势，所以与高数据量但无极化束流的LEP-I实验可以形成竞争与互补。

LEP-I和LEP-II是在CERN建造并运行过的到目前为止最高能量的正负电子对撞机，环形束流管长度为26公里660米，运行时间为1989-2000年。LEP的四个实验组分别为ALEPH，DELPHI，L3 和OPAL。从1989到1995年，LEP-I实验一直运行在“Z^0”共振态峰值附近，和SLC相同作为“Z^0 玻色子工厂”，重点是测量Z^0玻色子产生和衰变的各种可观测物理量：例如各种衰变宽度$\Gamma_{ll},\Gamma_{\nu\bar{\nu}}$ Γ_{had}，温伯格角$\sin^2\theta_W$，前后不对称性$A_{\rm FB}$和比值R_b 等。从1996年开始一直到2000年10月停止运行，LEP-II作为“W玻色子工厂”运行，其质心系能量逐渐由161GeV增加到最后的209GeV。

LEP-I实验的一个重要成果就是证明了轻的中微子$(m_\nu<m_{\rm Z}/2)$只有三代。根据标准

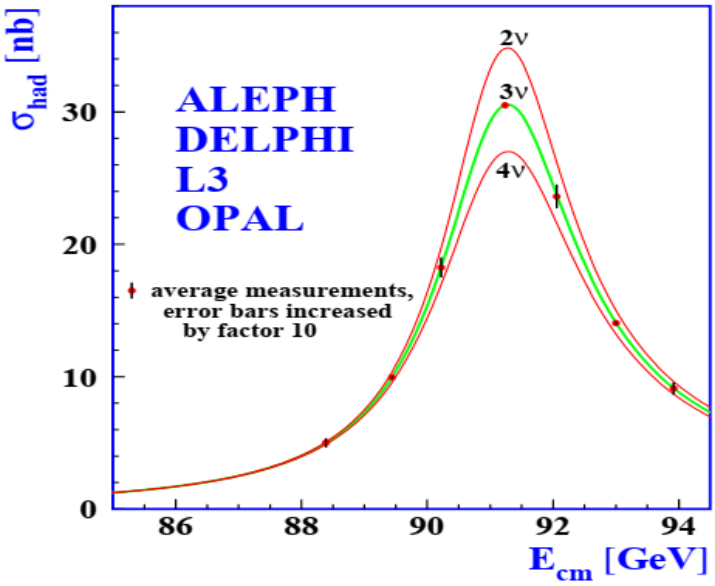


图 9.3: 在LEP-I实验中，在Z^0共振峰附近由四个LEP实验组对强子产生截面σ_{had}的实验测量结果[73]。曲线表示当取中微子代数为$N_\nu = 2, 3, 4$时的标准模型理论预言值。

模型，Z的不可见衰变道只能是$Z \to \nu_i \bar{\nu}_i$ $(i = e, \mu, \tau)$。那么，可以通过实验测量“丢失”的Z玻色子衰变道宽度来确定中微子代的数目是不是“3”。在实验上，中微子的数目N_ν定义为

$$N_\nu = \frac{\Gamma_Z - \Gamma_{ll} - \Gamma_{hadron}}{\Gamma_{\nu\nu}}. \tag{9.1}$$

由于Z^0玻色子衰变到轻子对e^+e^-、$\mu^+\mu^-$和$\tau^+\tau^-$在实验上相对容易测量，那么Z^0玻色子衰变到强子的宽度测量就决定了中微子“代”数目的测量精度。从图-9.3 可以看出，在LEP-I 实验对Z^0玻色子所有衰变宽度的精确测量，可以在很高的精度上确认只有三代轻费米子:

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.008. \tag{9.2}$$

换句话说，如果有第四代中微子，那么其质量也肯定大于$m_Z/2$。

9.1.2 规范玻色子多点耦合的实验检验

通过正负电子对撞机实验和强子$(pp, p\bar{p})$对撞机实验，可以检验标准模型所预言的“三规范玻色子耦合”。在标准模型框架下，$W^\pm$玻色子带有电荷与弱荷，可以与另外两个电中性的规范玻色子γ和Z^0发生3-点耦合。还可以有4点耦合：$WWWW, WW\gamma\gamma$和$WWZZ$。这些3点和4点规范玻色子耦合的费曼规则列在附录B中。注意，相互作用顶点电荷守恒要求W^+W^-总是成对出现。$SU(2)_L$ 规范不变性禁止出现γZZ 之类的只有γ和Z出现的3点或者4点规范玻色子耦合。

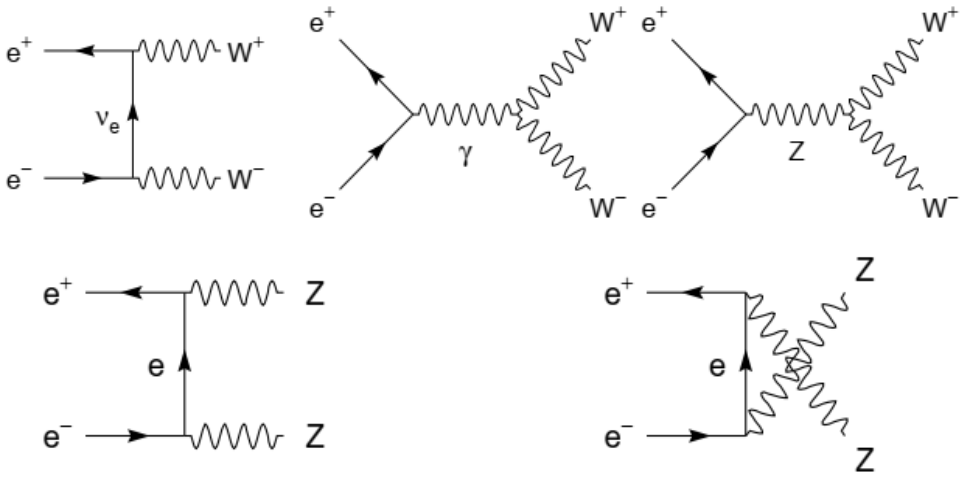


图 9.4: $e^+e^- \to W^+W^-$ 和 $e^+e^- \to ZZ$规范玻色子对产生过程的树图费曼图。

以LEP实验中W玻色子对产生过程$e^+e^- \to W^+W^-$为例，其最低阶费曼图有三个:图-9.4第一行的3个图。对$e^+e^- \to ZZ$过程，最低阶费曼图只有2个(图-9.4第二行)。图-9.5表示对WW(左图)和ZZ(右图)产生截面的不同理论预言值和LEP实验的实验测量结果[73, 306]。从左图中不同的理论预言曲线和不同能标处的LEP实验数据可以看出:

(1) 图-9.5中最上面的(粉红色)点线表示只考虑中微子$\nu-$交换图的贡献时的理论预言值。第二条(深红色) 点线表示考虑$\nu-$交换图和$\gamma-$交换图的贡献，但不考虑$Z-$交换图贡献时的理论预言值。显然，图中的这两条点线表示的产生截面$\sigma(e^+e^- \to W^+W^-)$理论值是发散的，与LEP-II实验结果有很大的偏离，而且在很高质心系能量下也是破坏理论的幺正性的。

(2) 图-9.5左图中的实蓝线表示标准模型理论预言值，包含了由$\nu-$交换, $\gamma-$交换和$Z-$交换的三个图的贡献。图中的误差棒表示LEP-II实验在不同$\sqrt{s}$能标处的实验测量结果。显然，LEP-II实验测量结果与标准模型理论预言值符合的很好。

在LHC等强子对撞机实验中，也可以对“三规范玻色子顶点耦合”进行实验测量，检验实验测量值是否与标准模型理论预言值符合。对WWZ耦合，可以定义比值

$$\frac{\mathcal{L}_{WWZ}}{g_{WWZ}} = i\left[g_1^Z(W^\dagger_{\mu\nu}W^\mu Z^\nu + W_{\mu\nu}W^{\dagger\mu}Z^\nu) + \kappa^Z W^\dagger_\mu W_\nu Z^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{m_{\rm W}^2}W^\dagger_{\rho\mu}W^\mu_\nu Z^{\nu\rho}\right], \qquad (9.3)$$

其中的三个系数g_1^Z, κ^Z和λ可以在Tevatron和LHC实验中抽取。目前得到的实验测量值与标准模型理论预言值符合的很好，在实验误差范围内没有发现偏离。

除了WWZ顶点，LEP和Tevatron上的各个实验组，LHC上的CMS 和ATLAS 实验组还在不同能区对其它所有可能的“三规范玻色子顶点耦合”（γWW 等）做了实验测量。

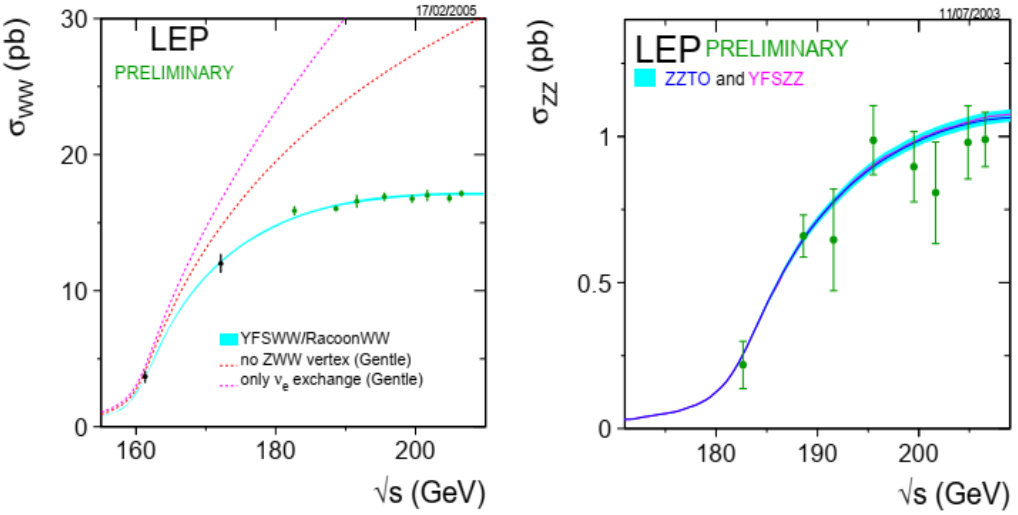


图 9.5: 产生截面$\sigma(e^+e^- \to W^+W^-)$(左图)和$\sigma(e^+e^- \to Z^0Z^0)$(右图)的质心能量依赖性，不同理论预言值(实线和点线)和LEP实验测量结果[73, 306]。

所有实验测量没有发现与标准模型理论值的明显偏离。LHC实验测量结果的精确度已经接近LEP实验，达到百分之几。今后几年的测量精度还会明显提高。PDG2020给出的对$W^{\pm}$和Z规范玻色子质量实验测量结果的世界平均值为[1]

$$m_{\mathrm{Z}} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \quad m_{\mathrm{W}} = 80.379 \pm 0.012 \text{ GeV}. \tag{9.4}$$

和LEP实验相比，通过LHC实验测量m_{W}, M_Z，测量各种类型的“三规范玻色子顶点耦合”的研究有以下几个优点：

(1) 事例数达到百万量级，对m_{W}的实验测量精度比以前也有2倍因子的提高，在不同的x区间和Q^2区域对部分子分布振幅(PDF)的误差控制均有提高。

(2) 在TeV能区，对规范玻色子的三点和四点自相互作用，对与规范玻色子W, Z相关的一些标准模型理论预言做了精确检验，精度已经达到或者接近LEP实验的水平，没有发现明显偏离。

综上所述，LEP实验、SLC实验和其它不同能量的正负电子对撞机实验在$0 < E_{CM} \leq 209$ GeV 的整个能量区间对标准模型的理论预言做了精确检验，在$0.1\% - 1\%$范围内没有发现任何超出标准模型的信号或者证据。

9.2 顶夸克物理

顶夸克质量和金原子接近，是标准模型理论中最重的粒子，但顶夸克是一个基本粒子，没有内部结构。由于其超重的质量，非常接近于电弱对称性自发破缺的尺度，一般

相信其对于超出标准模型的新物理最敏感，在理论和实验两个方面均起着特别重要的作用。顶夸克通过强相互作用获得的QCD质量很小，可以忽略。根据希格斯机制，顶夸克通过与希格斯玻色子的汤川耦合$Ht\bar{t}$获得质量，顶夸克与希格斯粒子之间的汤川耦合很强。另外，由于顶夸克寿命极短: $\tau_t \approx 4.64 \times 10^{-25}s$，来不及形成$(t\bar{t})$或者$(t\bar{q})$束缚态介子或者$(tq_1q_2)$束缚态重子就通过弱作用衰变掉了。

标准模型有三代费米子。在标准模型拉氏量中，各代费米子地位相同，存在普适性。但其它费米子的质量和$m_{\rm t}$相比差别很大：

$$\frac{m_u}{m_{\rm t}} \sim 10^{-5}, \quad \frac{m_e}{m_{\rm t}} \sim 10^{-6}. \tag{9.5}$$

考虑到$y_t \gg y_f \ (f \neq t)$，人们自然要问：顶夸克与很轻的u夸克地位相同吗？和其它轻费米子相比顶夸克与规范玻色子$(\gamma, Z^0, W^{\pm}, gluon)$之间的规范耦合有特殊之处吗？这些问题均需要由实验测量来回答。

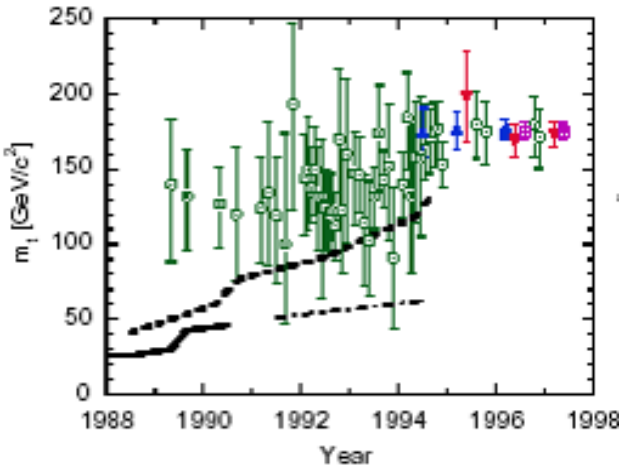


图 9.6:　1988-1998年，通过对“虚修正”的研究得到的对顶夸克质量$m_{\rm t}$的限制(虚线)，以及1995年CDF和D0发现顶夸克以后对$m_{\rm t}$ 的实验测量结果(数据点)。

1977年实验发现第五种夸克以后，由于GIM机制的约束，理论上必然存在第六种夸克，实验物理学家由此开始寻找顶夸克。人们注意到由正反夸克对构成的夸克偶素束缚态$(q\bar{q})$的质量形成一个阶梯，例如

$$(s\bar{s}) \approx 1\text{GeV}, \quad (\text{c}\bar{\text{c}}) \approx 3.1\text{GeV}, \quad (\text{b}\bar{\text{b}}) \approx 9.4\text{GeV}, \tag{9.6}$$

因此猜测$(t\bar{t}) \sim 30$GeV，并建造了几个质心系能量在$30-64$ GeV之间的加速器：例如PETRA，PEP，TRISTAN等，但都没有找到顶夸克或者$(t\bar{t})$束缚态。虽然实验上没有

直接找到顶夸克，但由于重顶夸克可以通过圈图对许多粒子的产生和衰变过程给出比较大的“虚修正”，人们仍然可以通过对相关过程实验测量数据的精确分析，抽出对m_{t}的限制。在1980年代末和90年代初，人们得到的对m_{t}的限制多来自于对高能对撞机实验数据的分析和对$B-\bar{B}$介子混合参数的实验和理论研究。如图-9.6所示，早期对m_{t}的限制比较弱，且有很大的误差，但m_{t}的下限在不断提高。

1994年，在美国费米实验室正反质子对撞机Tevatron 上工作的D0 和CDF 实验组首先给出顶夸克产生的证据。1995年，CDF和D0 两个实验组同时宣布发现了第6味夸克-顶夸克，并对其产生和衰变进行了细致的测量[312, 313] 。

9.2.1 顶夸克的产生

2009年，欧洲核子研究中心的大型强子对撞机LHC实验开始运行，它同时也是一个超级顶夸克工厂! 在LHC 超高能质子-质子对撞实验中，如图-9.7所示，顶夸克的主要产生过程是单产生和对产生$pp \to tX, t\bar{t}$，在唯象上非常重要的还有$pp \to t\bar{t}X$ $(X = H, Z, W, \gamma, \cdots)$ 产生过程和$pp \to t\bar{t}t\bar{t}$四顶夸克产生过程。

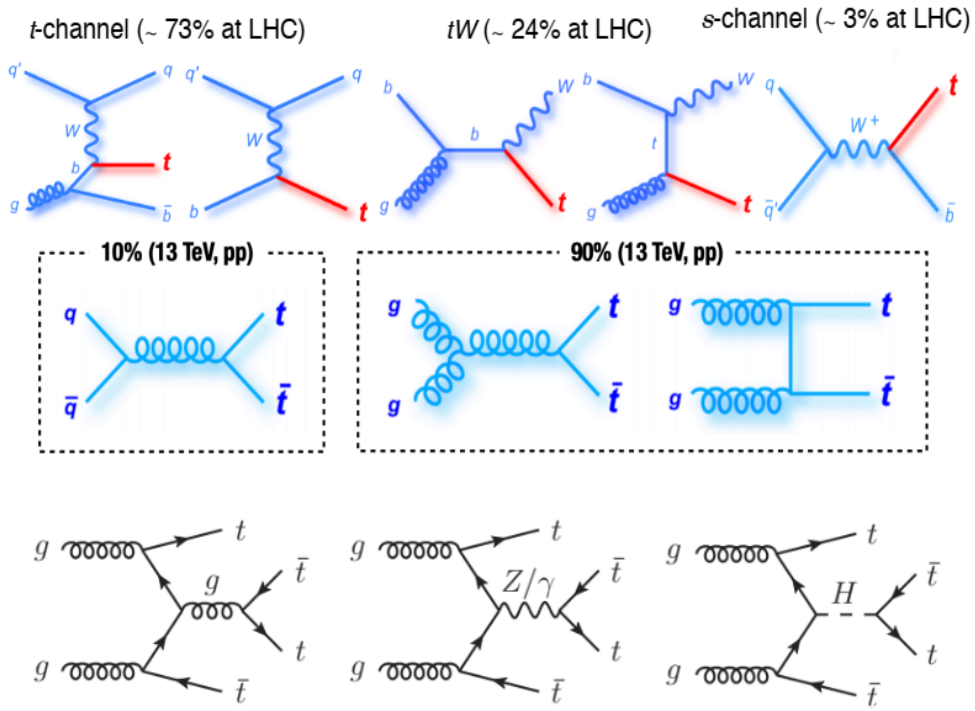


图 9.7: 在LHC实验上单、双顶夸克和四顶夸克产生的主要树图费曼图[314, 315]。

图-9.7第1行所示的5个图，是与LHC上的单顶夸克产生过程相关的领头阶费曼图[314, 315]。如图-9.8所示，主要贡献来自于前2个t-道图，$q'g \to qt\bar{b}$ 和$q'b \to qt$单top产生过程，占总产生截面的$\sim$ 73%[314, 316]。两个tw产生道$bg \to tW$提供大约24%的贡献，而

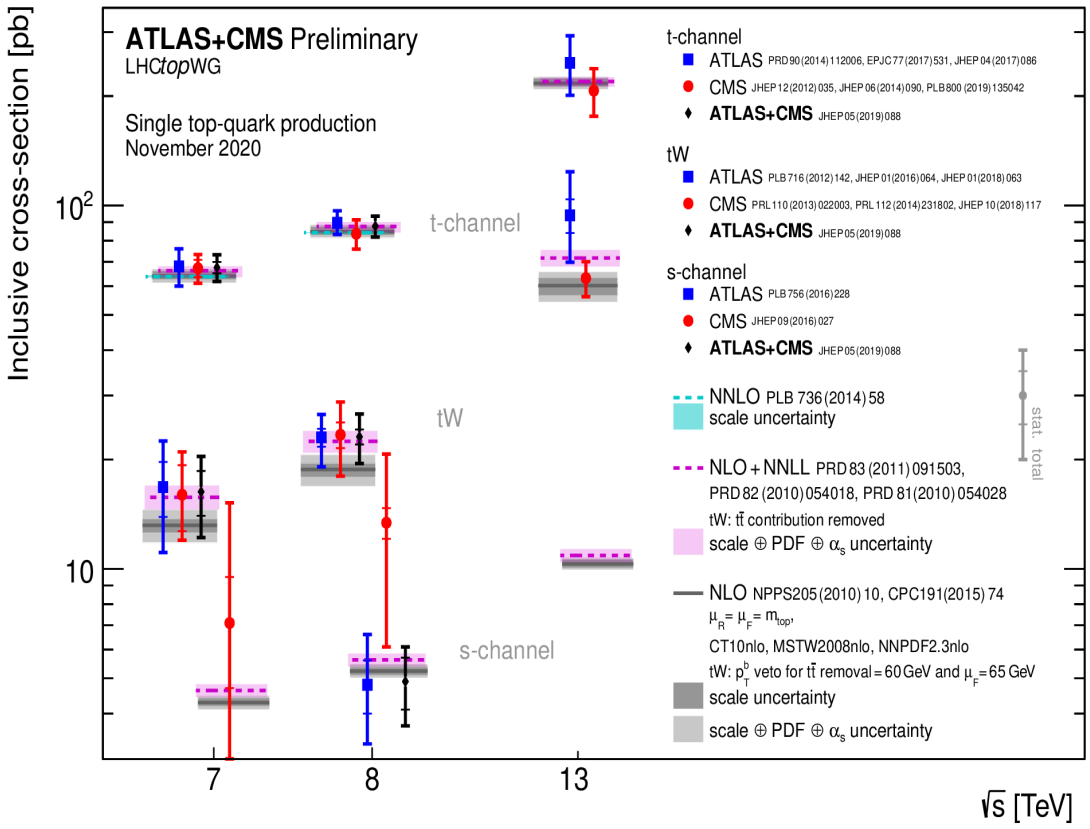


图 9.8:　对各个单顶夸克产生道的产生截面的标准模型理论预言[331] 和ATLAS和CMS实验组的实验测量结果[316, 332]。

第5个s-道$q\bar{q}' \to W \to t\bar{b}$ 只提供大约3%的贡献。由图-9.8可以看出，对各个道产生截面的标准模型理论预言值[331] 与ATLAS 和CMS的直接实验测量结果[332]符合的很好。

图-9.7第2行所示的3个图，是与LHC上$t\bar{t}$顶夸克对产生过程相关的领头阶费曼图，其中右侧的两个$gg \to t\bar{t}$树图提供大约90%的贡献。在Tevatron和LHC强子对撞机实验中，CDF、D0、ATLAS和CMS实验组均对顶夸克对的产生截面做了测量[316, 317]。在标准模型理论框架下，人们也已经在NNLO阶对该产生截面做了计算[318–320]。对$pp/p\bar{p} \to t\bar{t}$产生截面的实验测量有重要的科学意义：

1. 可以对QCD和电弱精确计算结果做精确检验。
2. 可以帮助抽取m_t, y_t和α_s等基本物理参数。
3. 有助于发现可能的新物理信号。

如图-9.9所示，各个实验组在多个不同质心系能标对$pp/p\bar{p} \to t\bar{t}$产生截面的实验测量结果与标准模型理论预言值符合的都很好[314, 316, 317, 321, 322]。

图-9.7第3行所示的3个图，是与LHC上$t\bar{t}t\bar{t}$ 四顶夸克产生过程相关的领头阶费曼图，这3个$gg \to t\bar{t}t\bar{t}$树图过程是四顶夸克稀有产生过程。对四顶夸克的产生截面的标准模型理

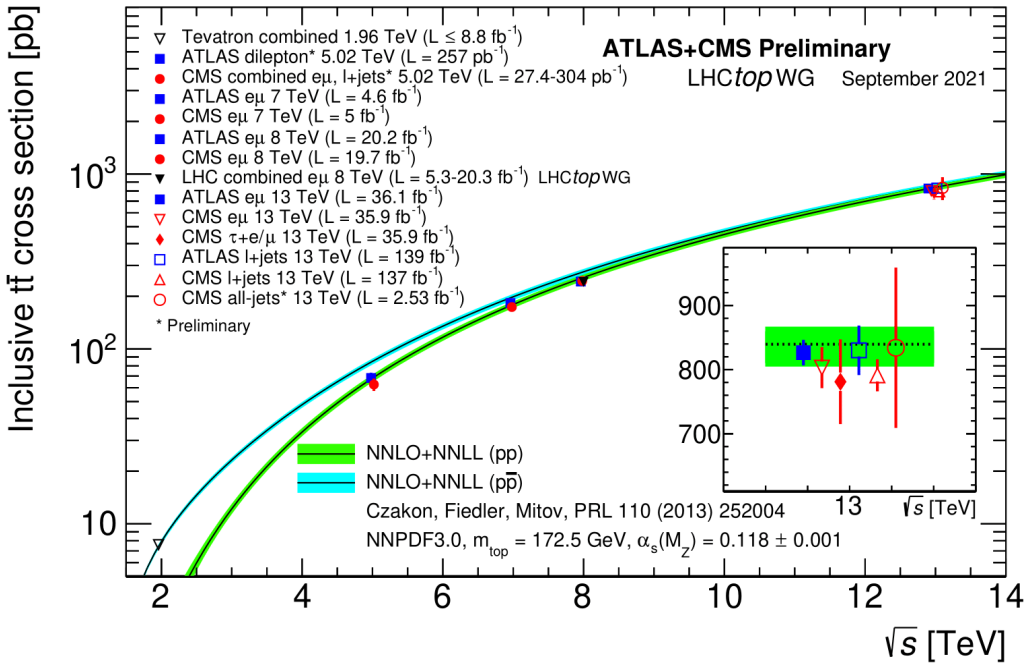


图 9.9: 对产生截面$\sigma(pp/p\bar{p} \to t\bar{t})$的标准模型理论预言值和实验测量结果[314, 316–319, 321, 322]。

论预言值和LHC实验测量结果一致，都很小[323]，

$$\sigma(gg \to t\bar{t}t\bar{t}) = (12 \pm 2.4)\ \text{fb}. \tag{9.7}$$

该截面比$\sigma(pp \to t\bar{t})$小了大约4个量级。但该稀有衰变道对测量汤川耦合y_t和可能的新物理信号确很敏感[315, 323]，ATLAS和CMS实验组均对该产生道做了实验测量。

ATLAS和CMS实验组每年采集大约$10^8 - 10^9$个与顶夸克直接相关的产生和衰变事例[314, 315, 324, 325]。近30年来，Tevatron和LHC实验已经采集了海量的相关实验数据，对大多数唯象上感兴趣的产生和衰变过程的可观测物理量的理论计算精度也已经达到完整次领头阶(NLO)、或者次次领头阶(NNLO)水平[318, 319, 325–327]，Top夸克物理已经进入到精确测量的时代[317, 321, 322, 325–330]。由于强子对撞机的本底复杂，对于顶夸克的精确实验研究有很大的困难，如果有一个正负电子对撞机的质心能量能够达到350GeV，将使得正反顶夸克在质量yu3上成对产生，这样的顶夸克工厂将会使得顶夸克物理的研究达到一个新的高度，并通过这样的研究寻找到超出标准模型的新物理信号。

9.2.2 顶夸克弱衰变

顶夸克质量的实验测量值为[1]：

$$m_t = 172.76 \pm 0.30 GeV; \tag{9.8}$$

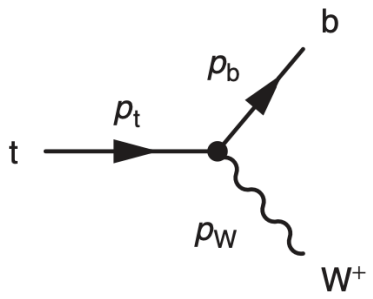


图 9.10:　顶夸克主要衰变$t \to W^+ + b$ 的树图费曼图。

是标准模型最重的基本粒子，它的质量大到足以衰变到一个实的在壳的W粒子。从量纲分析就可以得到$\Gamma(t \to Wb) \sim G_F m_t^3$。由于顶夸克质量$m_t$ 很大，所以，它的衰变宽度很大，最新实验测量平均值为[1]：

$$\Gamma_t = 1.42^{+0.19}_{-0.15}\ \text{GeV}, \quad \frac{\Gamma(t \to Wb)}{\Gamma(t \to Wq(q = d, s, b))} = 0.91 \pm 0.04. \tag{9.9}$$

它的衰变时间$\tau = 1/\Gamma_t$因而就比典型的强作用时间尺度$\tau_{QCD} = 1/\Lambda_{QCD}$ $(\Lambda_{QCD} \approx 0.2GeV)$短了很多，特征寿命为$10^{-24}s$，在可能形成$t\bar{t}$或者$t\bar{q}$介子束缚态以前就发生了衰变，所以不可能有$t\bar{t}$或者$t\bar{q}$介子形成。

如图9.10 所示，顶夸克的主要衰变方式是：$t \to W^+ + b$ （$\bar{t} \to W^- + \bar{b}$）。这个顶夸克两体衰变道在树图阶的计算非常简单，其衰变矩阵元为

$$\mathcal{M} = \frac{g}{\sqrt{2}} V_{tb} \epsilon^*_\mu(p_W) \bar{u}_b(p_b) \gamma^\mu P_L u_t(p_t). \tag{9.10}$$

利用第二章两体衰变的相空间积分公式，忽略相对较小的b夸克质量，我们可以得到

$$\Gamma(t \to W^+ b) = \frac{|p_b|}{8\pi m_t^2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F m_t^3}{8\pi\sqrt{2}} |V_{tb}|^2 \left(1 - x_W^2\right)^2 \left(1 + 2x_W^2\right). \tag{9.11}$$

其中$x_W = m_W/m_t$。考虑正比于α_s的强相互作用的单圈QCD修正，并取极限$V_{tb} \to 1$，上述公式修正为

$$\Gamma(t \to W^+ b) = \frac{G_F m_t^3}{8\pi\sqrt{2}} \left(1 - x_W^2\right)^2 \left(1 + 2x_W^2\right) \left[1 - \frac{2\alpha_s}{3\pi}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{5}{2}\right)\right]. \tag{9.12}$$

实验上，顶夸克衰变末态中的$b, \bar{b}$夸克一般会碎裂成为一个强子喷注，而W粒子会衰变成为一对轻子$(W \to e\nu, \mu\nu, \tau\nu)$ 或者一对强子喷注$(W \to q\bar{q}')$。因此探测器必须能够识别带电轻子和强子并能够测量它们的能量和在空间的运动方向。带电轻子的实验本底较小，因此W粒子衰变到一对轻子末态比较受实验欢迎，但是由于中微子观测不到，为减少本底，要求带电轻子的横动量要大于$20GeV$，通过横动量守恒，可以重建出中微子的动量，而b夸克的强子喷注由于b夸克寿命较长，与轻夸克喷注有不同的实验特征，因此实验鉴别比较容易。

由(8.147)和(8.149)式对比可知，W粒子更容易衰变成为夸克对，实验上同时探测正反顶夸克衰变，其中一个顶夸克衰变出的W 粒子衰变成轻子对，另一个衰变成为夸克对，这样可用的实验事例数比上面全部选轻子对的情况增加到了6倍。实验上要求测到一个带电轻子和至少三个强子喷注（应该有四个）。为了减少本底，要求至少有一个b夸克喷注事例。轻子横动量大于20GeV。

考虑到实验不能直接测量W粒子，而是测量的W粒子的衰变末态，理论上这是一个$t(p)\to W^+(q)b(k_1)$，然后$W^+(q)\to f(k_2)\bar{f}'(k_3)$的级联衰变，$p=k_1+k_2+k_3$。这个级联反应的总衰变振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t\to bf\bar{f}') &= \frac{g_2^2}{2}\frac{V_{tb}^*V_{ff'}}{q^2-m_{\rm W}^2+im_{\rm W}\Gamma_W}\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{m_{\rm W}^2}\right)\\ &\cdot\left[\bar{u}(k_1)\gamma^\mu P_L u(p)\right]\left[\bar{u}(k_2)\gamma^\nu P_L\ v(k_3)\right],\end{aligned}\tag{9.13}$$

那么，在所有末态费米子质量都为0的极限下有

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \Gamma(t\to bW^*)\frac{m_W\Gamma_W}{(s-m_W^2)^2+m_W^2\Gamma_W^2}\frac{\Gamma(W\to ff')}{\pi\Gamma_W},\tag{9.14}$$

其中的顶夸克衰变到离壳W玻色子宽度公式$\Gamma(t\to bW^*)$，可以通过把(9.12)式中的x_W^2置换为s/m_t^2得到，衰变宽度公式$\Gamma(W\to ff')$则在(8.147)和(8.149)式。

顶夸克非常不同于其它的夸克，其质量很大，跟电弱对称性破缺的尺度同一量级，一般相信其应该具有与其它夸克很不同的特殊性，很可能与超出标准模型的新物理有关。因此有很多努力来研究其产生和衰变性质，特别是其稀有衰变道，例如味道改变中性流的过程$t\to cZ,c\gamma$ 和$t\to uZ,u\gamma$，以期望得到与标准模型预期的偏离。但是从实验角度来看却困难重重，顶夸克质量太大，因而实验的产率较低，例如在Tevatron实验中，在10^{10}次$p\bar{p}$碰撞中才会产生一个顶夸克。大型强子对撞机上的顶夸克产率很高，但是由于强子对撞机的信号背景复杂，一个正负电子对撞机的顶夸克工厂实验是必要的。

前面已经提到，由于顶夸克寿命太短，在可能形成介子或者重子束缚态之前就发生了衰变。图-9.11 即为$pp\to t\bar{t}H$ 产生过程和伴随的典型衰变过程的示意图。主要衰变方式是：

$$t\to W^+ + b\to (q+\bar{q}', l^+ + \nu_l)b,\quad \bar{t}\to W^- + \bar{b}\to (\bar{q}+q', l^- + \bar{\nu}_l)\bar{b},\tag{9.15}$$

其中$b,\bar{b}$夸克一般会碎裂成为一个强子喷注，而W粒子会衰变成为一对强子喷注$(q\bar{q}')$ 或者一对轻子$(e\nu,\mu\nu,\tau\nu)$。因此探测器必须能够识别带电轻子和强子并能够测量它们的能量和在空间的运动方向。

W粒子衰变到一对轻子的实验本底较小。 这样末态中就只有两个b夸克的强子喷注和四个轻子（其中中微子观测不到）。为减少本底，要求两个带电轻子的横动量要大于$20GeV$。

另一个选择事例的规则是，一个W粒子衰变成轻子对，另一个衰变成为夸克对。 由于W粒子更容易衰变成为夸克对，$\mathcal{B}(t\to q\bar{q}'b)=(66.5\pm1.4)\%$，事例数增加到了6倍。实

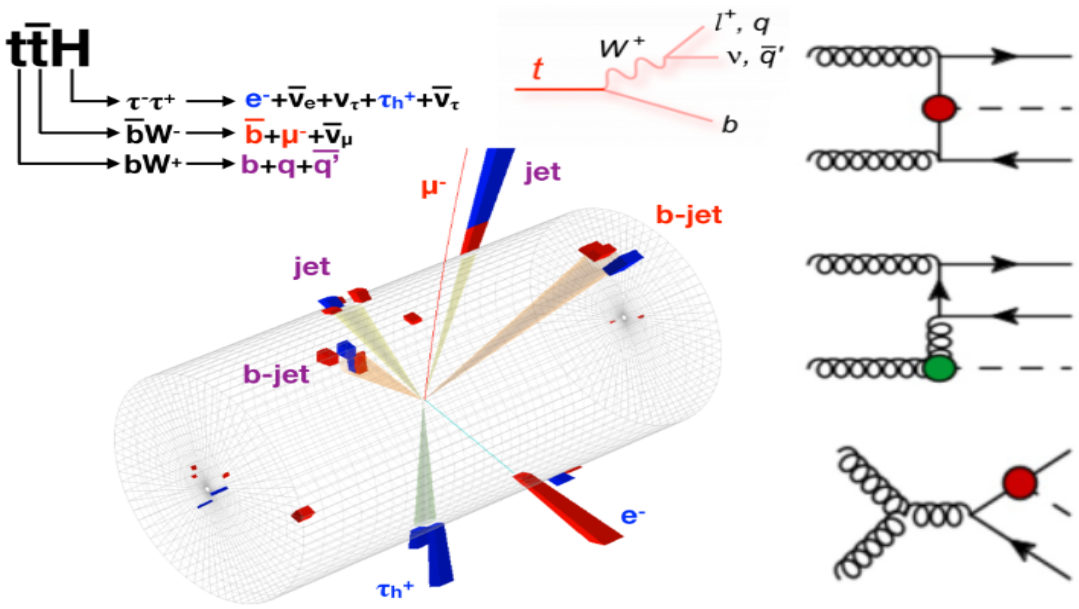


图 9.11:　在LHC强子对撞机上$pp \to t\bar{t}H$的产生和衰变过程示意图[324]。

验上要求测到一个带电轻子和至少三个强子喷注（应该有四个）。为了减少本底，要求至少有一个B介子事例。轻子横动量大于20GeV。

综上所述，对顶夸克各类产生和衰变过程研究的科学意义主要体现在以下几个方面：

(1) 顶夸克非常不同于其它的5个夸克(u,d,c,s,b)。其质量m_t很大，跟电弱对称性破缺的费米能标v同一量级。精确测量顶夸克的质量，衰变宽度等性质，是标准模型精确检验的重要组成部分。

(2) 在所有的汤川耦合当中，希格斯和顶夸克对之间的汤川耦合($t\bar{t}H$)的强度最强，对$t\bar{t}H$和相关过程的研究对希格斯物理研究非常重要。

(3) 因为顶夸克很重，他与很多新物理模型中出现的新粒子有强的相互作用，对通过LHC等高能物理实验寻找并发现新物理信号极其重要。

(4) 对在大横动量区域通过拟合确定夸克、胶子分布函数(PDF)有重要作用。

关于顶夸克物理研究更多的细节，可以参看文献[313, 317–322, 328, 329, 333–341]。

9.3　希格斯物理

在2012年被发现之后，希格斯粒子作为标准模型唯一的基本标量粒子就成为人们检验标准模型和寻找超出标准模型新物理的焦点。这可以通过对其基本性质的研究和其与其它粒子的耦合来得到。实验上主要通过其在对撞机上的产生和衰变来研究。日内瓦的大型

强子对撞机实验是目前唯一能够产生希格斯粒子的实验项目。2009年开始运行以来，通过对希格斯粒子衰变性质的研究，发现其与标准模型理论有很好的符合。在已经取得的研究成果的基础上，这个实验的后续运行期间，还有很多工作要做：

(a) 对希格斯粒子的所有产生道和所有衰变道的的精确测量，检验标准模型的相关理论预言。

(b) 通过对$H \to \gamma\gamma, ZZ$等多体衰变过程末态粒子的角分布的精确测量，来精确测量希格斯玻色子的自旋和宇称量子数。

(c) 对希格斯玻色子与带电轻子对之间的汤川耦合$Hl^+l^-(l = \mu, \tau)$做直接的精确测量。对希格斯玻色子与规范玻色子之间的规范耦合顶角HVV做精确测量。

(d) 对$3H$、$4H$希格斯玻色子自耦合顶点做精确测量。

上面的最后二点尤其重要，因为它牵涉到有关希格斯粒子传递的新种类的相互作用问题和基本粒子内禀质量来源的问题。

另外，对于希格斯性质的精确测量直接与电弱对称性破缺的研究和新物理的研究相关。例如，根据上一章的结论，希格斯粒子的质量正比于真空期望值和希格斯粒子4点自耦合项系数的平方根，因此希格斯粒子的质量大小也决定了希格斯粒子自相互作用大小。一个很大邪恶希格斯质量会使得希格斯粒子的自相互作用在低于普朗克尺度下进入非微扰区。这被称为希格斯势的稳定性问题。现在实验测量到的质量为125GeV的希格斯粒子恰好使得希格斯势处于亚稳定区。希格斯粒子的自相互作用耦合常数λ会在大约$\mathcal{O}(10^{11})$GeV变为负数，这使得希格斯势场的稳定性在高能称为问题，因此预示新物理必须在普朗克尺度之下出现。

9.3.1 希格斯玻色子的主要产生过程

由于希格斯与费米子的耦合与费米子的质量成正比，所以除了顶夸克以外，所有费米子跟希格斯的耦合都很弱。希格斯粒子的产生必须借助于与顶夸克的耦合或者规范玻色子的耦合，而这些粒子都不是LHC对撞机上的加速粒子-质子的组成部分，所以希格斯粒子基本上是次级产生[2] 。如图-9.12所示，在LHC实验中希格斯玻色子的主要产生道有四类[1]：

1. 图(a) 最大贡献的胶子-胶子聚合道(ggF)，$gg \to H$。

2. 图(b) 矢量介子聚合道(VBF)，$qq \to WW/ZZ + q'q' \to Hq'q'$。

[2]原则上,质子内部应该包含所有的基本粒子的成分，例如光子，W和Z 玻色子等等。但这些矢量玻色子和很重的顶夸克在质子中出现的几率很低，完全可以忽略。近年来，在一些部分子分布函数中人们已经开始考虑占比很小的光子的贡献。

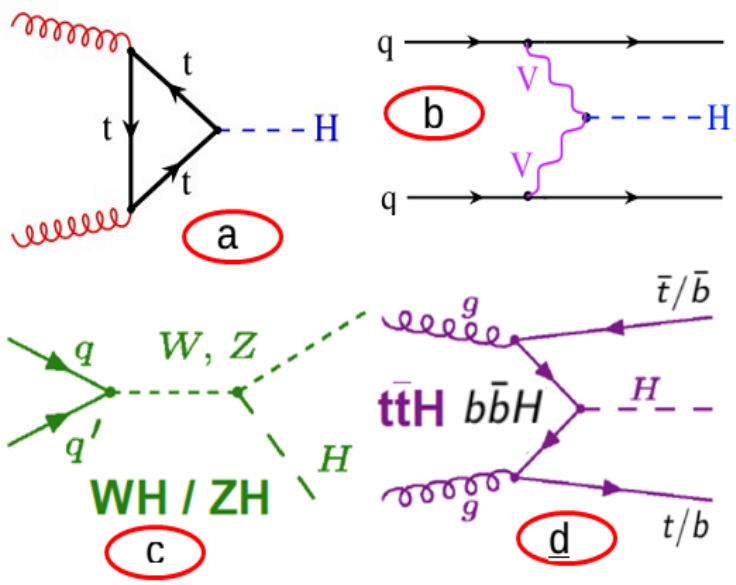


图 9.12: 在LHC实验中希格斯玻色子主要产生过程的费曼图:(a) 胶子聚合道，$gg \to H$；(b) 规范玻色子聚合道，$WW/ZZ \to H$；(c) WH/ZH伴随产生道，$qq' \to WH, ZH$；(d) $gg \to t\bar{t}H, b\bar{b}H$ 产生道。

3. 图(c) 规范玻色子伴随产生道(WH/ZH)，$qq' \to W/Z \to WH, ZH$。

4. 图(d) 顶夸克对、底夸克对伴随产生道($t\bar{t}H$，$b\bar{b}H$)，$gg \to t\bar{t}H$，$b\bar{b}H$。

在表-9.2 中，对于希格斯粒子质量$m_{\rm H} = 125.5 \pm 0.5$ GeV，对撞机质心能量$\sqrt{S} =$ 8和13 TeV，列出了最主要的胶子- 胶子聚合道(ggF)产生截面的标准模型理论预言值[1]。这个希格斯玻色子的最主要产生道的产生截面占总产生截面的$\approx$ 86%。图-9.12(a)所示的圈图中只有最重的顶夸克，其它夸克的贡献是受到夸克质量m_q^2的压低，可以忽略不计。这个圈图的计算受到很大的QCD修正的影响，这个修正在早期考虑了夸克和希格斯粒子质量的全部影响后计算到α_s的次领头阶。在顶夸克质量$m_t \to \infty$的极限下，胶子聚合道的QCD修正计算到了次次次领头阶($\rm N^3LO$)。计算表明，领头阶和次领头阶的QCD修正的贡献在总截面中占到约80%。次次领头阶的贡献则最多到30%的贡献，比较表-9.2上、下两部分数据可以看出，当把QCD计算精度提升到$\rm N^3LO$阶时，对产生截面$\sigma(pp \to H)$的标准模型理论预言中心值将增加大约10%，这表明到α_s^3阶的高阶贡献仍然比较大！这个过程的电弱圈图修正相比于QCD修正要小得多，次领头阶(NLO)的电弱修正相比于领头阶的贡献大约只有5%。

在表-9.2 中，还列出了其他5个产生道的产生截面的标准模型理论预言值[1]。在这里，对电弱修正贡献的计算精度也是次领头阶。在计算中对QCD贡献的计算精度为α_S的次次领头阶(NNLO)和胶子重求和修正的次次领头阶(NNLL)。标准模型理论预言值保持稳定，理论误差约为$5-8$%，主要来源于QCD标度的不确定性和部分子分布函数(PDF)的不确定

表 9.2: 质子-质子对撞机质心系能量$\sqrt{s}=8,13$TeV时，不同希格斯粒子产生道的产生截面的标准模型理论预言[1]。

计算精度: N^{3}LO in QCD and NLO in EW						
	$\sqrt{S}=8$ TeV			$\sqrt{S}=13$ TeV		
产生道	截面[pb]	理论误差	PDF+α_s	截面[pb]	理论误差	PDF+α_s
ggF	21.4	$^{+4.4}_{-6.9}\%$	$\pm3.2\%$	48.6	$^{+4.6}_{-6.7}\%$	$\pm3.2\%$
计算精度: NLLO+NNLL in QCD and NLO in EW						
	$\sqrt{s}=8$ TeV			$\sqrt{s}=13$ TeV		
产生道	截面[pb]	QCD-误差	PDF+α_s	截面[pb]	QCD-误差	PDF+α_s
ggF	19.5	$^{+7.3}_{-8.0}\%$	$\pm3.1\%$	44.1	$^{+7.6}_{-8.1}\%$	$\pm3.1\%$
VBF	1.60	$^{+0.3}_{-0.2}\%$	$\pm2.2\%$	3.78	$^{+0.4}_{0.3}\%$	$\pm2.1\%$
WH	0.703	$^{+0.6}_{-0.9}\%$	$\pm2.0\%$	1.37	$^{+0.5}_{-0.7}\%$	$\pm3.2\%$
ZH	0.421	$^{+2.9}_{-2.4}\%$	$\pm1.7\%$	0.884	$^{+3.8}_{-3.1}\%$	$\pm1.6\%$
$t\bar{t}$H	0.133	$^{+4.1}_{-9.2}\%$	$\pm4.3\%$	0.507	$^{+5.8}_{-9.2}\%$	$\pm3.6\%$
产生道	截面[pb]	QCD-误差+PDF+α_s		截面[pb]	QCD-Scale+PDF+α_s	
$b\bar{b}$H	0.202	$^{+20.7}_{-22.3}\%$		0.488	$^{+20.2}_{-23.9}\%$	

性[1]。由表-9.2 中数据可以读出VBF和其他几类产生道的产生截面对总产生截面的贡献比例：

(a) 矢量玻色子聚合道(VBF=qqH)贡献: $\approx 7.4\%$；

(b) 矢量玻色子伴随产生(WH+ZH)贡献: $\approx 4.4\%$；

(c) b夸克对和t夸克对的伴随产生(bbH+ttH)贡献: $\approx 1.9\%$；

(d) $qb\to tHq$和$qq\to tHb$单个顶夸克伴随产生等其他稀有产生道的贡献: $<0.1\%$。

表-9.2的第2-4列数值分别表示当对撞能量$\sqrt{s}=8$ TeV时标准模型理论预言的中心值，以及理论误差。主要理论误差来源于QCD 标度的不确定性和分布函数(PDF)的不确定性。两个表中的第5-7列数值分别表示当$\sqrt{s}=13$ TeV时标准模型理论预言的中心值和理论误差。由表中数值结果可以看出随着质心能量提高，希格斯粒子产生截面增大，到质心能量13TeV的时候，胶子聚合道还是贡献最大的产生道，所有道的产生截面都几乎增大到8TeV 时候的理论值的两倍。只有顶夸克对伴随产生(ttH)增长最快：在$\sqrt{s}=13$TeV时，有

$$\sigma(pp\to t\bar{t}H)|_{\sqrt{s}=13\text{ TeV}}\approx 3.8\cdot\sigma(pp\to t\bar{t}H)|_{\sqrt{s}=8\text{ TeV}}. \tag{9.16}$$

并且超过了$\sigma(pp \to b\bar{b}H)$。

显然，在LHC实验中，对希格斯产生截面$\sigma(pp \to H + X)$给出最大贡献的是“ggF: 胶子-胶子聚合道”，其它产生道的总贡献只有大约13%。由图-9.12(a)可以看出，来自于两个对撞质子的双胶子聚合，经过一个顶夸克单圈，产生一个希格斯玻色子。在这个单圈图过程中，由于质子分布函数里胶子是组分最大的部分子(见第七章的讨论)，而顶夸克与希格斯的汤川耦合最强($y_t \sim 1$)，即使有圈图压低效应也仍然可以给出最大的贡献。

9.3.2　希格斯工厂实验

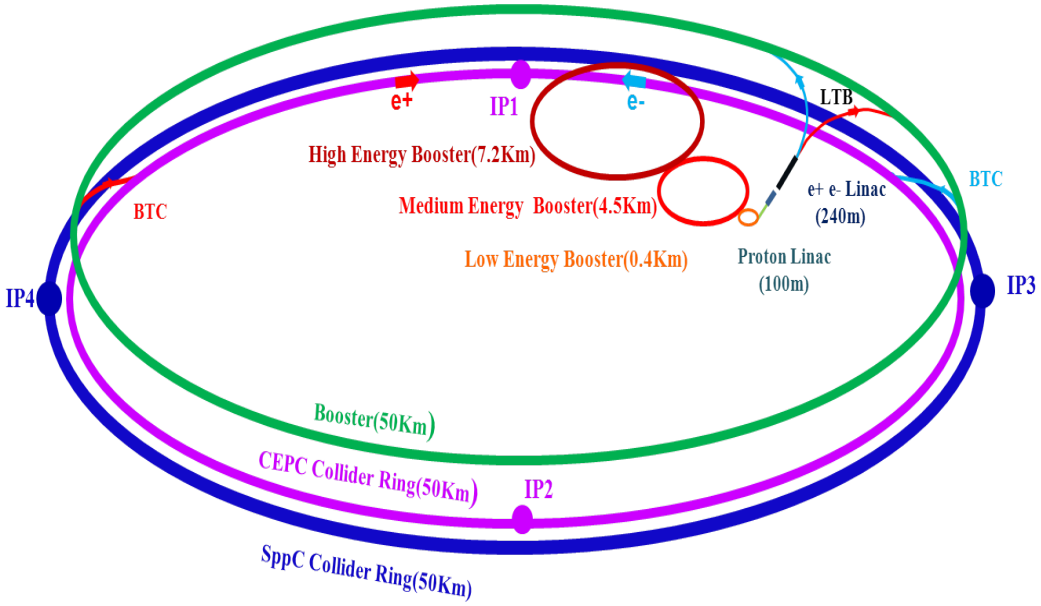


图 9.13:　正在讨论之中的中国正负电子对撞机-质子质子环形对撞机(CEPC-SPPC)的简单结构示意图。

大型强子对撞机的对撞能量很高，是一个发现新物理和新粒子的非常适合的场所，但是对于精确测量希格斯粒子的性质有一些力不从心。虽然大型强子对撞机的第三期运行方案是大幅增加对撞机的亮度，以增加实验数据量，但是过高的亮度意味着对撞点上同时有两对质子对撞机率的增加，实验本底的增加会减弱实验数据量增加的统计效果。对于正负电子对撞机来说，则没有上述的问题，因此一个正负电子对撞机的希格斯工厂是很有必要的，可以对希格斯粒子的各类耦合与性质做细致研究，其精度将远远超过强子对撞机的水平。目前规划的高质心系能量的正负电子对撞机-希格斯工厂主要有三个。最早提议的是中国物理学家提议建造的环形正负电子对撞机(CEPC)！国内高能物理学家在2013年成

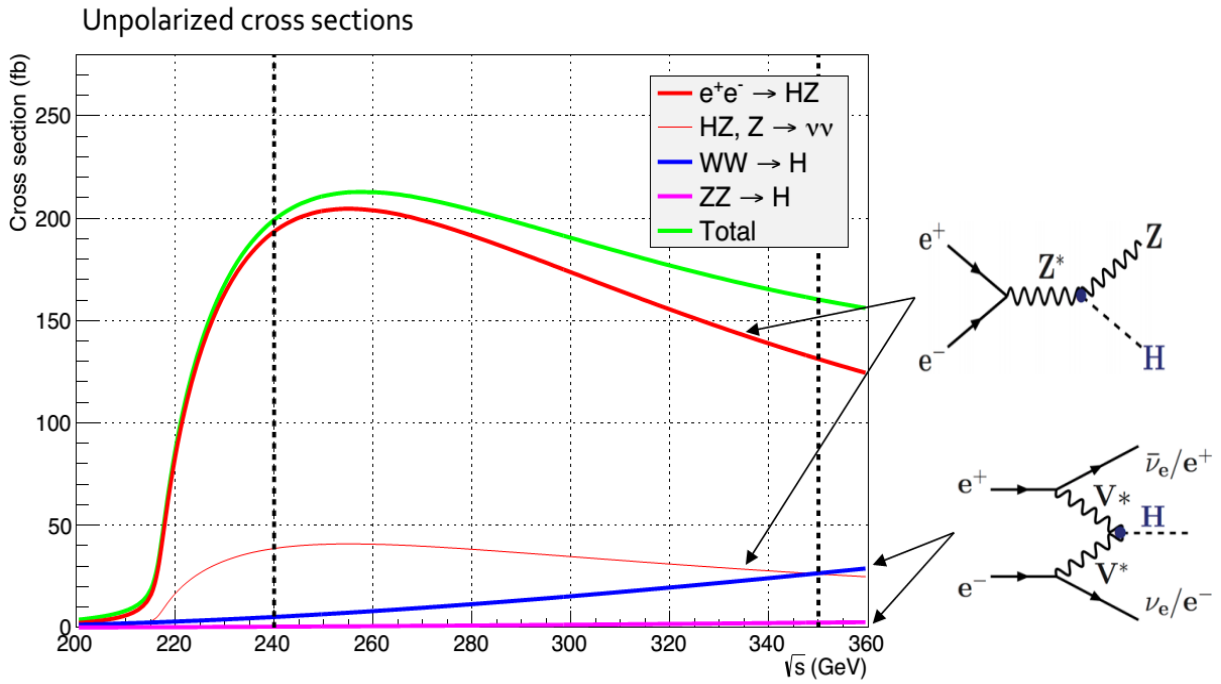


图 9.14: 在Higgs工厂实验中，$e^+e^- \to HZ$等过程的Higgs玻色子产生截面对$\sqrt{s}$的依赖性。右侧是对应过程的最低阶费曼图。

立了多个研究小组开展了对希格斯工厂的前期基础研究。该计划的突出的优点是希格斯工厂建成的隧道可以用于后续的超级质子-质子对撞机(SPPC)，未来成为直接发现新物理的世界最高能量的加速器。该设计方案也得到了国际未来加速器组织(ICFA) 的支持。

图-9.13是CEPC-SPPC的初步示意图，首先通过240米的直线加速器加速正负电子，然后注入400米的低能量储存环，加速后注入4.5公里周长的中级能量储存环，然后加速注入7.2公里的高能储存环，最后注入70-100公里的储存环，达到束流能量125GeV，质心能量为250 GeV。由于希格斯粒子与电子的耦合正比于电子质量，因此希格斯粒子并不能由$e^+e^- \to H$直接共振产生，如图-9.14所示，希格斯粒子主要通过$e^+e^- \to ZH$和WW聚合的$e^+e^- \to \nu_e\bar{\nu}_e W^*W^* \to \nu_e\bar{\nu}_e H$过程产生，$\sqrt{s} = 250$GeV附近是其产生截面最高的对撞能量位置。由图-9.14也可以看出ZZ聚合的$e^+e^- \to e^+e^- Z^*Z^* \to e^+e^- H$过程比WW过程的截面低一个量级，在250-350GeV对撞范围可以忽略。

在完成对Higgs粒子性质的高精度研究之后，我们可以在同一个隧道内将CEPC升级为50-100TeV的超级质子-质子对撞机SPPC，实现高能量的质子对撞。这将是世界上能量最高、性能最先进的加速器。SPPC将提供丰富的新物理发现潜力，推动中国的高能物理研究走在世界高能物理研究的最前沿。

在中国的希格斯工厂实验建议之后，欧洲也提出了两种希格斯工厂的建设方案，其中之一也是环形对撞机方案称为“未来环形对撞机”(FCC)，另一个方案是紧致的直线对撞机方案(CLIC)。两个方案的选址都是在大型强子对撞机附近。另一方面，由于第一章

讨论过的，随着加速器能量的提高，电子的同步辐射能量损失越来越高，因而环形正负电子加速器能量在500GeV 附近就会达到极限，欧洲和日本的加速器物理学家多年来一直在研究高能直线加速器技术。目前这个技术已经成熟，因此日本有计划建造国际直线对撞机(ILC)，本来初期计划的对撞能量设计在500GeV，第二阶段升级到1-2TeV，但是在希格斯粒子发现之后，这个计划的初期对撞能量修改为250GeV，作为一个希格斯工厂；第二步则在350GeV附近，通过$e^+e^- \to t\bar{t}$过程大量产生顶夸克，作为一个顶夸克工厂，而第三步的对撞能量待定。需要指出的是，当正负电子对撞机的质心系能量$\sqrt{s} > 500$GeV时，$e^+e^- \to t\bar{t}H$过程会变得越来越重要。

9.3.3　希格斯粒子的树图衰变

希格斯粒子是标准模型最后一个被实验发现的基本粒子。在其被理论预言四十多年之后才被发现。希格斯粒子实验发现困难的一个原因是其质量很重，但是这个原因并不是最重要的，因为比其更重的顶夸克在1995年就被实验发现了。第二个原因是(8.118) 式表示的希格斯粒子质量正比于希格斯场的耦合常数λ的开方，而这个耦合常数不出现在任何规范场或者费米子场的相互作用中，完全是一个独立的参数，也就是说，在希格斯发现之前，人们很难预测希格斯粒子的质量。第三个原因是希格斯粒子的衰变，虽然其质量很重，衰变道众多，但是其衰变分支比最高的几个衰变道却是实验比较难以测量的。

希格斯玻色子与其它各种粒子的耦合决定着希格斯粒子的产生和它的衰变特性。在第八章，我们已经在电弱统一理论框架下给出了与希格斯粒子相关的拉氏量。在标准模型理论的基础上，粒子物理学家们经过多年努力，目前对QCD贡献的计算精度已经达到次次次领头阶或者次次领头阶对数求和，对电弱贡献的计算精度也达到次领头阶。在本节，我们将讨论希格斯玻色子的各种衰变分支比与末态粒子的角分布。我们首先考察希格斯粒子衰变到两个费米子末态$H \to f\bar{f}$：在8.3.3节，我们给出了希格斯玻色子与费米子对$f\bar{f}$的汤川耦合(8.134)式表明，其与费米子质量成正比

$$g_{Hff} = \frac{m_f}{v} = \frac{m_f}{2m_W} g, \tag{9.17}$$

如图9.15(a)所示的费曼图和费曼规则，可以得到衰变振幅为

$$\mathcal{M} \;=\; \frac{m_f}{2m_W} g\, \bar{u}(p_1) v(p_2). \tag{9.18}$$

把上式的衰变矩阵元平方，并相空间积分，可得树图水平的衰变宽度为：

$$\Gamma(H \to f\bar{f}) = \frac{\mathrm{G_F} m_{\mathrm{H}}}{4\pi\sqrt{2}} N_C^f m_f^2 \sqrt{1 - 4m_f^2/m_{\mathrm{H}}^2}, \tag{9.19}$$

对夸克末态，$N_C^q = 3$。对轻子末态，则有$N_C^l = 1$。因此，对于质量125GeV的希格斯粒子，其最大的费米子末态衰变道为$H \to b\bar{b}$，其次为$H \to \tau^+\tau^-$。但是夸克末态在高能对撞机里表现为喷注，实验本底太大，τ轻子的衰变末态则必然有实验不可测量的中微子，因此费米子末态都不是发现希格斯粒子的首选衰变道。

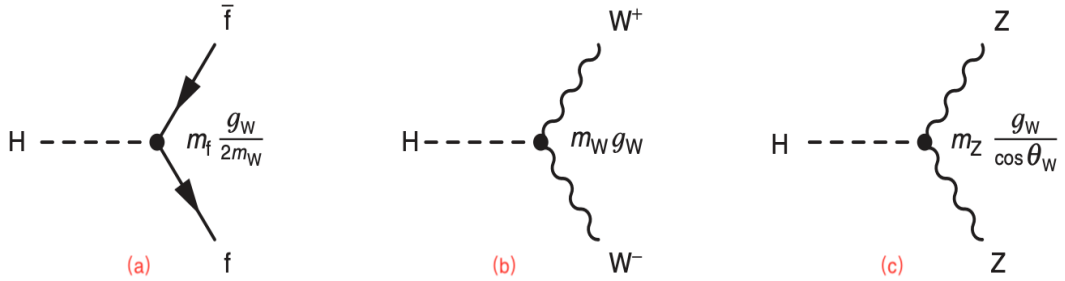


图 9.15: 希格斯粒子的主要衰变道$H \to f\bar{f}$，$H \to W^+W^-$和$H \to ZZ$的树图费曼图。

希格斯粒子的质量小于两倍的W或者Z玻色子的质量，因此不能衰变到两个在壳的W或者Z玻色子，但是由于中间玻色子的质量巨大，希格斯与其耦合常数正比于其质量，希格斯粒子衰变到不在壳的W或者Z玻色子$H \to WW^* \to Wf\bar{f}', H \to ZZ^* \to Zf\bar{f}$仍然是发现希格斯粒子的首选衰变道，其树图费曼图和耦合常数如图9.15(b)和(c)所示。衰变宽度Γ的积分表达式可以写为：

$$\Gamma(H \to W^-W^{+*}(f\bar{f}')) = \int_0^{(m_H-m_W)^2} ds\, \tilde{\Gamma}_{WW}(s)\rho_W(s)Br(W^+ \to f\bar{f}'), \tag{9.20}$$

$$\Gamma(H \to ZZ^*(f\bar{f})) = \int_0^{(m_H-m_Z)^2} ds\, \tilde{\Gamma}_{ZZ}(s)\rho_Z(s)Br(Z \to f\bar{f}). \tag{9.21}$$

其中希格斯粒子衰变到一个在壳和一个不在壳W(Z)粒子的衰变宽度公式以及不在壳W(Z)粒子传播子为

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{WW}(s) &= \frac{\mathrm{G_F}}{8\pi\sqrt{2}m_H^3}\lambda\left(m_W^2, s\right)\left[\lambda^2\left(m_W^2, s\right) + 12s\, m_W^2\right], \\
\rho_W(s) &= \frac{1}{\pi}\frac{m_W\Gamma_W}{(m_W^2 - s)^2 + m_W^2\Gamma_W^2},
\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ZZ}(s) &= \frac{\mathrm{G_F}}{16\pi\sqrt{2}m_\mathrm{H}^3}\lambda\left(m_Z^2, s\right)\left[\lambda^2\left(m_Z^2, s\right) + 12s\, m_Z^2\right], \\
\rho_Z(s) &= \frac{1}{\pi}\frac{m_Z\Gamma_Z}{(m_Z^2 - s)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2},
\end{aligned} \tag{9.23}$$

其中$\lambda(x,y) = \sqrt{(m_H^2 - x - y)^2 - 4xy}$。经积分可得：

$$\Gamma(H \to W^-W^{+*}(f\bar{f}')) = \frac{\mathrm{G_F}m_\mathrm{H}}{8\pi^2\sqrt{2}}m_\mathrm{W}\Gamma(W^+ \to f\bar{f}')\, 3F_{HVV}(m_W/m_H), \tag{9.24}$$

$$\Gamma(H \to ZZ^*(f\bar{f})) = \frac{\mathrm{G_F}m_\mathrm{H}}{8\pi^2\sqrt{2}}m_\mathrm{Z}\Gamma(Z \to f\bar{f})\, 3F_{HVV}(m_Z/m_H). \tag{9.25}$$

函数$F_{HVV}(x)$的表达式为

$$\begin{aligned}
F_{HVV}(x) = &-\frac{1-x^2}{6x^2}\left(2 - 13x^2 + 47x^4\right) - \frac{1}{2}\left(1 - 6x^2 + 4x^4\right)\log x^2 \\
&+ \frac{1 - 8x^2 + 20x^4}{\sqrt{4x^2 - 1}}\arccos\left(\frac{3x^2 - 1}{2x^3}\right).
\end{aligned} \tag{9.26}$$

表 9.3: 标准模型理论预言的希格斯玻色子的主要衰变道分支比和相对误差大小[1]。

衰变道	分支比	相对误差	衰变道	分支比	相对误差
$H \to b\bar{b}$	58.2%	$^{+1.2\%}_{-1.3\%}$	$H \to W^+W^-$	21.4%	$\pm 1.5\%$
$H \to gg$	8.57%	$^{+10.2\%}_{-10.0\%}$	$H \to \tau^+\tau^-$	6.27%	$\pm 1.6\%$
$H \to c\bar{c}$	2.89%	$^{+5.5\%}_{-2.0\%}$	$H \to ZZ$	2.62%	$\pm 1.5\%$
$H \to \gamma\gamma$	0.227%	$\pm 2.1\%$	$H \to Z\gamma$	0.153%	$\pm 5.8\%$
$H \to \mu^+\mu^-$	0.022%	$\pm 1.7\%$			

标准模型框架下理论计算得到的希格斯粒子的衰变总宽度是$\Gamma_H = 4.07$ MeV，相对理论误差约为4%[345, 351]。这个宽度大小比大型强子对撞机实验的质量分辨率小很多，因而是不可能在现有实验上被观测到的。没有总宽度的测量，任何衰变道的绝对分支比测量也是不可能的，除非引入理论计算结果。表9.3给出的是标准模型理论计算出的主要希格斯粒子的衰变道分支比和相对误差大小。可以看出，分支比最大的衰变道依次为$H \to b\bar{b}$、$H \to W^+W^{-*}$、$H \to \tau^+\tau^-$、$H \to c\bar{c}$和$H \to ZZ^*$。由公式(9.22,9.23)可以看出，离壳的W和Z玻色子会压低衰变矩阵元，但是由于W和Z玻色子的质量很大，与希格斯粒子的耦合很大，因而其衰变到不在壳的W和Z玻色子对的分支比还是很大。虽然$H \to W^+W^{-*}$的衰变分支比比$H \to ZZ^*$的分支比几乎大一个量级，但是由于W粒子的夸克衰变末态（喷注）本底太大，轻子末态中有不可测的中微子，因此实验最初发现希格斯粒子时候所用的衰变道是$H \to ZZ^* \to 4\ell$和$H \to \gamma\gamma$。

根据标准模型理论，希格斯粒子与费米子对$f\bar{f}$的汤川耦合与费米子质量成正比，所以希格斯玻色子与轻夸克(u, d, s)和轻的轻子(e, μ, ν)的汤川耦合被强烈压低，在LHC上基本看不到。由表-9.3可以看出，$H \to b\bar{b}$道的分支比最大($\sim 58\%$)。但是QCD强相互作用导致的$b\bar{b}$对产生截面比$H \to b\bar{b}$的产生截面要高10^7倍，QCD本底太强，很难精确测量。对$H \to c\bar{c}$和$H \to gg$ 衰变道，存在同样的极大的QCD强产生本底。由表-9.3中所列分支比数值结果可以看出，对于发现希格斯最重要的WW^*和ZZ^*衰变道，其分支比也只排第2和第5，最干净的双光子道的分支比也比BR$(H \to b\bar{b})$小256倍!

在标准模型理论框架下，希格斯玻色子的主要衰变道很多，LHC实验上观测到的衰变道的最低阶贡献的费曼图如图-9.15所示。在LHC实验的RUN-1阶段观测到事例数最多的是第二类。这由表-9.4所列出的CMS实验组在RUN-1阶段对希格斯粒子的主要衰变道的实验测量结果可以看出。第四列的数值表示实际观察到的(Observed)信号显示度和期望的(expected)信号显示度；第六列的数值表示信号强度：亦即在(9.27)式中定义的$\mu(X)$。

表 9.4: CMS实验组基于第一阶段实验数据对希格斯粒子的主要衰变道的实验测量结果。其中第四列表示实际观察到的信号显示度和期望的信号显示度。第三列的缩写“MET”表示丢失的横动量。

衰变道	积分亮度 pb^{-1}	末态信号	显示度σ Obs.(Exp.)	质量 (GeV)	信号强度 μ
$H \to ZZ \to 4l$	5.1+19.6	4 轻子	6.8(6.7)	125.6 ± 0.5	$0.93^{+0.29}_{-0.25}$
$H \to WW \to 2l2\nu$	4.9+19.5	2L+MET	4.3(5.8)	125 ± 4	$0.72^{+0.20}_{-0.18}$
$H \to \gamma\gamma$	5.1+19.6	2γ	3.2(4.2)	125.4 ± 0.8	$0.78^{+0.28}_{-0.26}$
$H \to b\bar{b}$	5.0+18.9	2b-jets	2.1(2.1)	符合	1.0 ± 0.5
$H \to \tau\bar{\tau}$	4.9+19.7	$\tau - decays$	3.2(3.7)	122 ± 7	0.78 ± 0.27

9.3.4 希格斯衰变的实验测量

Higss粒子的衰变宽度比标准模型理论中其它三个重粒子(top, W, Z)的衰变宽度低了3个量级。这一点实际上不难理解。由于$m_{\mathrm{H}} \approx 125\mathrm{GeV}$，汤川耦合最强的衰变道$H \to t\bar{t}$没有打开。$H \to WW, ZZ$的两体衰变道也没有打开。分支比最大的衰变道$H \to b\bar{b}$的衰变宽度也只有大约2MeV。希格斯玻色子的衰变宽度很窄，这意味着希格斯粒子与其它所有粒子的耦合都比较弱。 这么窄的一个衰变宽度，比LHC实验的质量分辨率低了三个量级，所以是没有希望在LHC上测量到的。

对于希格斯粒子具体衰变道的的测量，我们定义信号强度μ为

$$\mu(X) = \frac{\sigma_{\mathrm{obs}}(X)}{\sigma_{\mathrm{SM}}(X)}, \tag{9.27}$$

即某一物理可观测量“X”的实验测量值与标准模型理论预言值之比，μ对于“1”的偏离程度反应了实验测量值对于标准模型的偏离程度。在希格斯粒子的性质研究中，目前只有大型强子对撞机的实验可以产生希格斯粒子，其产生过程的信号强度和衰变信号强度分别定义为

$$\mu_i = \frac{\sigma(pp \to H + X)_{\mathrm{obs}}}{\sigma(pp \to H + X)_{\mathrm{SM}}}, \qquad \mu_f = \frac{\mathrm{BR}(H \to f)_{\mathrm{obs}}}{\mathrm{BR}(H \to f)_{\mathrm{SM}}}, \tag{9.28}$$

但是由于，这个对撞机实验的能量很高，对撞频率也很高，探测器的电子学系统不可能把所有的信号都记录下来，实验设计了触发系统，只记录可能有用的部分信息。目前实验对于单独的希格斯粒子产生截面和单独的希格斯粒子衰变分支比都难以测量，那么一般定义联合的信号强度为

$$\mu_i^f = \mu_i \cdot \mu_f = \frac{[\sigma(pp \to H + X) \cdot \mathrm{BR}(H \to f)]_{\mathrm{obs}}}{[\sigma(pp \to H + X) \cdot \mathrm{BR}(H \to f)]_{\mathrm{SM}}}. \tag{9.29}$$

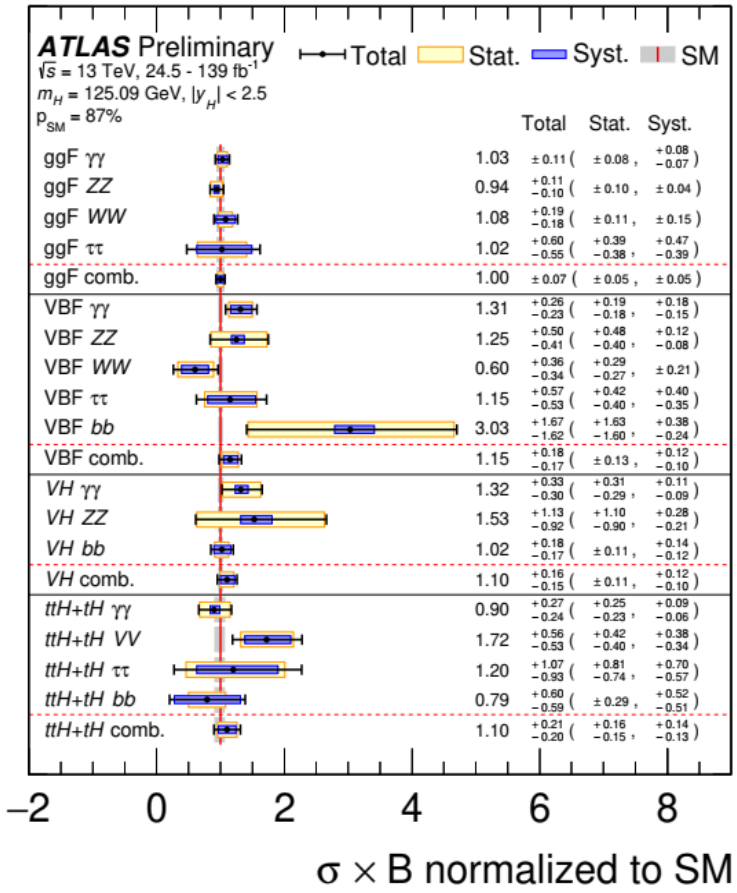


图 9.16: ATLAS合作组对信号强度μ_i^f的实验测量结果[1]。

以$H \to \gamma\gamma$衰变道为例，新定义是

$$\mu^{\gamma\gamma} = \frac{[\sigma(pp \to H + X) \cdot \mathrm{BR}(H \to 2\gamma)]_{\mathrm{obs}}}{[\sigma(pp \to H + X) \cdot \mathrm{BR}(H \to 2\gamma)]_{\mathrm{SM}}}, \tag{9.30}$$

也就是测量希格斯粒子产生截面$\sigma(pp \to H + X)$和希格斯粒子的指定衰变道的衰变分支比$\mathrm{BR}(H \to 2\gamma)$的乘积，并使用对应的标准模型理论值来做归一化。大型强子对撞机上的ATLAS和CMS实验组通过测量此类信号强度μ，可以更好地检验实验测量结果与标准模型理论预言值的一致性。

图-9.16表示ATLAS基于全部数据得到的对信号强度μ的综合实验测量结果。包括对5个主要产生道和5个主要衰变道的乘积$\sigma \cdot \mathrm{BR}$，已经使用对应的标准模型理论值做了归一化[1] 。从图中可以直接读出对4类产生过程的信号强度的综合实验测量值分别为

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{ggF}} &= 1.00 \pm 0.07; \quad \mu_{\mathrm{VBF}} = 1.15^{+0.18}_{-0.17}; \\ \mu_{\mathrm{VH}} &= 1.10^{+0.16}_{-0.15}; \quad \mu_{\mathrm{ttH+tH}} = 1.10^{+0.21}_{-0.20}. \end{aligned} \tag{9.31}$$

表 9.5: 对$H \to \tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, b\bar{b}$衰变道的信号强度的LHC实验(RUN-2) 测量结果[353–369]。

衰变道	衰变分支比	产生道	ATLAS(RUN-2)	CMS(RUN-2)
$H \to \tau\tau$	6.27%	ggF,VBF,t$\bar{t}$H	$0.92^{+0.13}_{-0.12}$[366] $0.93^{+0.13}_{-0.12}$[367]	$1.09^{+0.27}_{-0.26}$[368] $0.80^{+0.10+0.14}_{-0.10-0.13}$ [1]
$H \to \mu\mu$	0.022%	ggF,VBF,VH,t$\bar{t}$H	1.2 ± 0.6 [362]	$1.19^{+0.44}_{-0.42}$[369]
$H \to b\bar{b}$	58.2%	VBF, WH,ZH, t$\bar{t}$H	5.4σ	$1.11^{+0.13+0.16}_{-0.13-0.15}$

更进一步，如果定义$\mu_i = \mu_f = \mu$，在拟合中只取一个参数μ，那么ATLAS合作组基于RUN-1数据或者RUN-2数据得到的整体信号强度(Global signal strength) 分别为[1]

$$\text{ATLAS}: \qquad \mu = 1.09 \pm 0.11 \quad \text{for} \quad \text{RUN1}, \qquad \mu = 1.06 \pm 0.07 \quad \text{for} \quad \text{RUN2}. \tag{9.32}$$

整体信号强度方法是一个可以帮助检验实验测量结果与标准模型理论值是否一致的简单方法。

与ATLAS类似，CMS实验组也基于全部数据得到对信号强度μ_i^f的综合实验测量结果[1, 353, 354]，对全部11个可观测物理量的实验测量结果在2σ范围内与标准模型理论预言值符合。如果在拟合中只取一个自由参数$\mu = \mu_i = \mu_f$，那么CMS合作组基于RUN-2数据得到的整体信号强度为[1, 354]

$$\mu = 1.02 \pm 0.04(\text{stat.}) \pm 0.04(\text{th.}) \pm 0.04(\text{exp.}) = 1.02^{+0.07}_{-0.06}. \tag{9.33}$$

显然，从(9.32,9.33)式所给的整体信号强度数值可以看出，对希格斯粒子的所有已经研究的产生和衰变过程，ATLAS和CMS合作组的实验测量结果与标准模型理论值符合的很好。

对于希格斯粒子和费米子对之间的汤川耦合的测量，目前的分析主要集中在对$H \to b\bar{b}, \tau^+\tau^-$和$\mu^+\mu^-$衰变道的研究，已经对希格斯粒子与第三代带电费米子对$b\bar{b}$和$\tau^+\tau^-$之间的汤川耦合做了精确的测量[355–361]，对$H \to \mu^+\mu^-$衰变道做了初步测量[362]。

由表-9.3中所列标准模型理论预言可知，希格斯粒子到τ轻子对的分支比比较大，$\text{BR}(H \to \tau^+\tau^-) \approx 6.27\%$。对该衰变道，主要根据$\tau$轻子对的质量分布来选择事例信号。但由于$\tau$轻子衰变过程中出现的中微子能量丢失，所以对$\tau$轻子对不变质量$m_{\tau\tau}$的分辨率比较低($\approx 15\%$)。主要的背景事例来源于Drell-Yang过程$Z \to \tau^+\tau^-, e^+e^-$和$W + jets$等过程。对另外两个带电轻子对$H \to \mu^+\mu^-, e^+e^-$衰变道，优势在于末态信号非常清晰，缺点在于分支比太低：

$$\begin{aligned} \text{BR}(H \to \tau^+\tau^-) \quad &: \quad \text{BR}(H \to \mu^+\mu^-) : \text{BR}(H \to e^+e^-) \\ &\approx \quad m_\tau^2 : m_\mu^2 : m_e^2 = 1 : 3.5 \times 10^{-3} : 8.3 \times 10^{-8}. \end{aligned} \tag{9.34}$$

在表-9.5中，列出了基于RUN-2数据ATLAS和CMS实验组得到的对$H\to\tau^+\tau^-,\mu^+\mu^-,b\bar{b}$ 衰变过程信号强度μ^f的实验测量结果[353–369]。对$H\to\tau^+\tau^-$衰变道[355, 366, 368]，如表-9.5所示，ATLAS和CMS考虑了4 类希格斯粒子产生过程(ggF,VBF,VH,ttH)，由此得到的对信号强度$\mu^{\tau\tau}$的最新综合实验测量结果为[1, 366–368]

$$\mu(H\to\tau^+\tau^-)=\begin{cases}0.92^{+0.13}_{-0.12}, & \text{ATLAS},\\ 0.93^{+0.13}_{-0.12}, & \text{ATLAS},\\ 1.09^{+0.27}_{-0.26}, & \text{CMS},\\ 0.80^{+0.10+0.14}_{-0.10-0.13}, & \text{CMS}.\end{cases}\tag{9.35}$$

对$H\to\mu^+\mu^-$衰变道，基于RUN-1数据[370]，实验上没有看到明显的信号，只给出了上限。使用RUN-2数据，如表-9.5所示，ATLAS和CMS合作组均给出了对$H\to\mu^+\mu^-$衰变道信号强度$\mu^{\mu\mu}$ 的初步实验测量结果[362, 369]：

$$\mu(H\to\mu^+\mu^-)=1.2\pm0.6,\text{ATLAS},\qquad \mu(H\to\mu^+\mu^-)=1.19^{+0.44}_{-0.42},\text{CMS.},\tag{9.36}$$

但是，对信号强度$\mu^{\mu\mu}$ 的实验测量精度显然还比较低，需要RUN-3采集更多的数据来提高精度。

对$H\to e^+e^-$衰变道，当取$m_{\rm H}=125$ GeV时，对其衰变分支比的标准模型理论预言值是$\text{BR}(H\to e^+e^-)\approx 5\times10^{-9}$ [351]，显然不可能在LHC实验中对其做测量。CMS合作组基于RUN-1数据做了分析，没有看到信号[370]。如果使用标准模型理论值做为输入，可以导出对分支比的上限为：

$$\text{BR}(H\to e^+e^-)<1.9\times10^{-3}.\tag{9.37}$$

根据LHC实验对$H\to l^+l^-(l=(e,\mu,\tau))$衰变道产生率的实验测量结果，可以看出希格斯玻色子与带电轻子之间的汤川耦合不是普适的。但要证明它们之间的汤川耦合$y_{hl\bar{l}}$与标准模型是否符合，还需要更高的数据量，更好的信号显示度，更少的本底，这就需要专门的希格斯工厂。

$H\to b\bar{b}$是希格斯粒子最主要的衰变道，分支比达到58.2%。但由于LHC实验pp对撞过程中极大的多喷注QCD背景，ggF产生+$H\to b\bar{b}$的模式被强烈压低。对检测$H\to b\bar{b}$衰变最敏感的过程是VH（V=W,Z）伴随产生过程，这时规范玻色子V的轻子衰变道保证了高触发效率和对QCD背景的有效压低[356]。如图-9.17的左图所示，ATLAS合作组只考虑了WH和ZH这两个伴随产生过程和对应的$H\to b\bar{b}$衰变道。ATLAS使用了三种不同的数据分析方法，如图-9.17显示的结果是使用BDT_{VH}多元判断输出分布作为数据拟合输入，得到的对信号强度μ^{bb}_{WH}、μ^{bb}_{ZH}以及μ^{bb}_{VH}的最佳拟合结果[356]：

$$\mu^{bb}_{WH}=0.95^{+0.27}_{-0.25},\qquad \mu^{bb}_{ZH}=1.08^{+0.25}_{-0.23},\qquad \mu^{bb}_{VH}=1.02^{+0.18}_{-0.17}.\tag{9.38}$$

另外，使用对m_{bb}拟合的方法得到了一致的结果[356]

$$\mu^{bb}_{VH}=1.17^{+0.25}_{-0.23}.\tag{9.39}$$

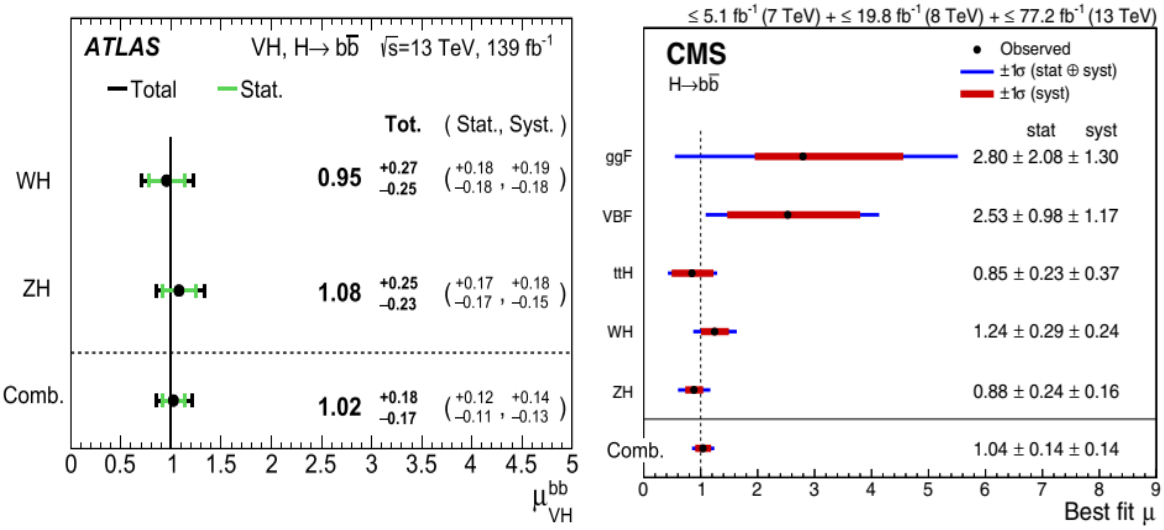


图 9.17: ATLAS和CMS合作组对$H \to b\bar{b}$衰变道信号强度μ^{bb}的最新实验测量结果[356, 358]。

表 9.6: 对$H \to \gamma\gamma, WW^*, ZZ^*$衰变道的信号强度的LHC第二阶段实验测量结果[1]和误差，如果有两个误差的情况，第一个是统计误差，第二个是系统误差。

衰变道	产生道	ATLAS	CMS
$\gamma\gamma$	ggF,VBF,VH,t$\bar{t}$H,tH	1.02 ± 0.13	1.12 ± 0.09
$ZZ^\star$	ggF,VBF,VH,t$\bar{t}$H	1.01 ± 0.11	$0.93^{+0.07+0.07}_{-0.07-0.06}$
$WW^\star$	ggF,VBF,t$\bar{t}$H	1.05 ± 0.13	$1.20^{+0.09+0.13}_{-0.09-0.12}$

另外，如图-9.17的右图所示，CMS同时考虑了WH, ZH, ttH, VBF和ggF这5个产生道和随后的$H \to b\bar{b}$衰变过程, 同时给出了对全部事例的综合分析结果[358]。对精度比较高的WH、ZH道和全部5个道的联合拟合结果为[358]

$$\begin{aligned} \mu^{bb}_{WH} &= 1.24 \pm 0.29(stat.) \pm 0.24(syst.), \qquad \mu^{bb}_{ZH} = 0.88 \pm 0.24(stat.) \pm 0.16(syst.), \\ \mu^{bb} &= 1.04 \pm 0.14(stat.) \pm 0.14(syst.), . \end{aligned} \tag{9.40}$$

从图-9.17的右图可以直接看出，$ggF \to H \to b\bar{b}$ 和$VBF \to H \to b\bar{b}$这两个过程链的统计和系统误差均远大于VH伴随产生过程。ATLAS和CMS的拟合结果是一致的，信号显著度均大于5σ。

9.3.5 $H \to \gamma\gamma$衰变

表9.3中$H \to \gamma\gamma$和$H \to Z\gamma$是希格斯粒子的稀有衰变道，其领头阶贡献是如图9.18第一行所示的电弱圈图。虽然任何费米子都可以贡献到图中的费米子圈，但是由于希格斯粒子的耦合与所耦合的粒子质量成正比，因此只有顶夸克的贡献才是主要的。也是

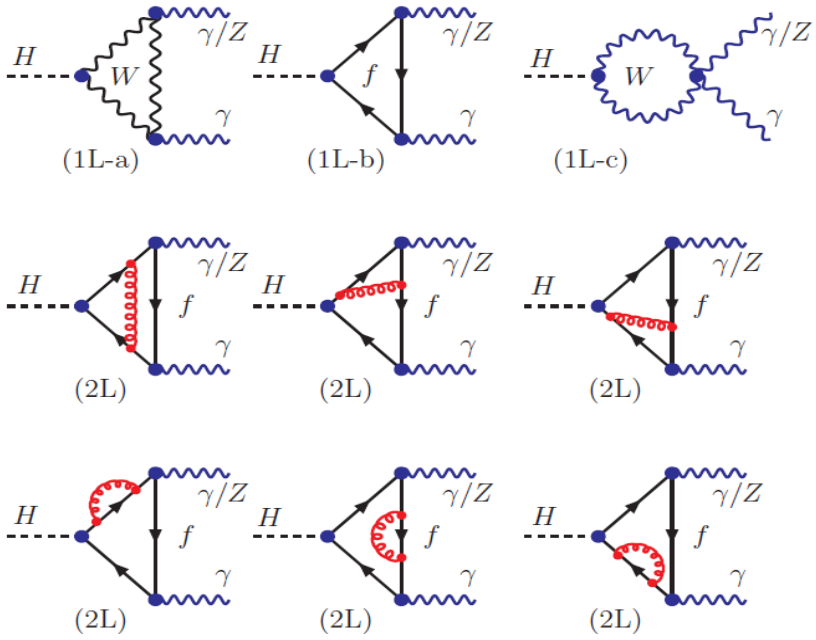


图 9.18:　在标准模型下，$H \to \gamma\gamma(H \to Z\gamma)$的领头阶单圈费曼图(第一行)和领头阶的QCD修正费曼图(第二、第三行)。在圈图中的f表示带电的轻子和夸克。

因为顶夸克的巨大贡献，使得这两个圈图过程的分支比并不是很小，甚至超过了树图的$H \to \mu^+\mu^-$衰变过程。虽然表9.3中的$H \to \gamma\gamma$ 的分支比与$H \to ZZ^*$相比要小，但是与实验直接探测的$H \to ZZ^* \to 4\ell$相比则要大。因此虽然光子在实验中的探测效率比带电轻子要低，双光子衰变道依然是希格斯粒子最重要的衰变道之一。$H \to \gamma\gamma$衰变道既是希格斯玻色子的发现道，也是对其性质(质量、自旋、宇称) 进行精确测量的重要衰变道。

对内线传播子分别为$W^{\pm}$玻色子和带电的重夸克和重轻子的如图-9.18 (第一行)所示的单圈费曼图的计算是很早就完成的理论工作。因此领头阶的衰变宽度$\Gamma(H \to \gamma\gamma)$的标准模型表达式为[371]：

$$\Gamma(H \to \gamma\gamma) = \frac{\mathrm{G_F}\alpha^2 m_{\mathrm{H}}^3}{128\sqrt{2}\pi^3}\left|\sum_f N_c Q_f^2 A_{1/2}^H(\tau_f) + A_1^H(\tau_W)\right|^2, \tag{9.41}$$

其中$\tau_f = m_{\mathrm{H}}^2/(4m_f^2)$, $\tau_W = m_{\mathrm{H}}^2/(4m_W^2)$，形状因子$A_{1/2}^H(\tau_f)$和$A_1^H(\tau_W)$ 分别表示来自于自旋量子数为1/2的费米子单圈图和矢量W玻色子单圈图的贡献。

$$A_{1/2}^H(\tau) = 2[\tau + (\tau-1)f(\tau)]\tau^{-2}, \quad A_1^H(\tau) = -[2\tau^2 + 3\tau + 3(2\tau-1)f(\tau)]\tau^{-2}, \tag{9.42}$$

其中的函数$f(\tau)$的表达式为

$$f(\tau) = \begin{cases} \arcsin^2\sqrt{\tau} & \tau \le 1, \\ -\frac{1}{4}\left[\log\frac{1+\sqrt{1-\tau^{-1}}}{1-\sqrt{1-\tau^{-1}}} - i\pi\right]^2 & \tau > 1. \end{cases} \tag{9.43}$$

由于汤川耦合的性质，内线轻费米子的贡献被强烈压低。对费米子部分，我们只需要考虑重的顶夸克的贡献。对$m_{\rm H}=125.7$ GeV和$m_{\rm t}=174.2$ GeV[1]，$\tau_t\approx 0.13\ll 1$，顶夸克的贡献是实的，$A_t^H\to 4/3$。

$$N_cQ_t^2A_t^H(\tau_t)\approx 1.78. \tag{9.44}$$

对b夸克内线的情况，若取$m_b=4.6$ GeV，那么有

$$\begin{aligned}\tau_b &\approx 186.7\gg 1,\\ A_b^H(\tau_b) &\approx -[\log(4\tau_b)-i\pi]^2/(2\tau_b)\approx -2.7(6.62-i\pi)^2\times 10^{-3}\approx 0.0196\cdot e^{-i\theta_b},\\ N_cQ_b^2A_b^H(\tau_b) &\approx 0.0065\cdot e^{-i\theta_b},\end{aligned} \tag{9.45}$$

其中$\theta_b\approx -25.4°$。显然，b夸克圈图的贡献比顶夸克圈图的贡献低将近三个量级，完全可以忽略。

对W玻色子，$\tau_W\approx 0.6113<1$，其贡献是实的，

$$A_W^H\approx -7.68. \tag{9.46}$$

其大小是顶夸克贡献的4.3倍，起主要作用。对于给定的$m_{\rm H}=125$ GeV，计算得到

$$\Gamma(H\to\gamma\gamma)\approx 9.2\ \text{keV}. \tag{9.47}$$

计算如图-9.18(第二、三行)所示的双圈图，可以得到对顶夸克单圈图贡献的领头阶QCD修正[372]。目前，对于这个$H\to\gamma\gamma$衰变和类似的$H\to gg$衰变的下一阶QCD修正和下一阶电弱修正的理论计算都已经完成，这些高阶修正的大小都小于1%的贡献。如果$H\to\gamma\gamma$衰变的其中一个光子虚的，可以使得这个过程变成三体衰变$H\to\gamma e^+e^-$；或者其中的一个光子换作Z玻色子的$H\to\gamma Z$衰变都在理论上计算到领头阶。这两个过程的理论计算精度不高，对应于其在LHC实验上的测量精度也很差。

$H\to\gamma\gamma$衰变分支比只有0.23%，但$H\to\gamma\gamma$衰变过程的信号非常干净，对$H\to\gamma\gamma$ 衰变过程的特征与分析包含以下几点：

1. 要求必须是两个分离的光子(isolated photon)。
2. 质量重建：根据两个光子的能量测量，并考虑原始顶点，量能器位置的“opening angle”，可能的转换，以及量能器角度(仅ATLAS)。
3. 对数据样本根据S/B的不同做分类，进行质量重建，并做系统误差估计。
4. 主要本底来自于QCD产生：$q\bar{q}\to\gamma\gamma$。根据数据做背景的估计和分析。

在LHC实验中，可以通过对$H \to \gamma\gamma$, $H \to ZZ^* \to 4l$, $H \to WW^* \to 2l2\nu$ 衰变过程末态粒子的角分布来测量初态的母粒子“希格斯”粒子的自旋和宇称。ATLAS和CMS实验组基于对RUN-1数据的分析得到的结论是：希格斯玻色子是标量粒子：$J^P = 0^+$。其它可能取值$J^P = 0^-, 1^\pm, 2^+$均被排除($> 99\%$ CL.)[302]。对于希格斯玻色子通过重矢量玻色子对$(W^\pm, Z^0)$ 衰变到费米子对：$H \to VV^* \to Vf\bar{f}$ $(f = l^-, q \neq t)$，标准模型框架下领头阶的衰变宽度表达式已经在附录-C 中给出。

回到2012年，当ATLAS和CMS实验组宣布发现希格斯粒子的时候对信号强度$\mu^{\gamma\gamma}$的实验测量结果为[300, 301]

$$\mu_{\gamma\gamma} = \begin{cases} 1.55^{+0.33}_{-0.28}, & \text{ATLAS}, \\ 0.77 \pm 0.27, & \text{CMS}, \end{cases} \tag{9.48}$$

到2014年，当ATLAS和CMS实验组使用全部RUN-1数据进行分析，得到的信号强度为[374, 375]：

$$\mu_{\gamma\gamma} = \begin{cases} 1.17 \pm 0.27, & \text{ATLAS}, \quad \mathrm{m_H} = 125.36\ \text{GeV}, \\ 1.13 \pm 0.24, & \text{CMS}, \mathrm{m_H} = 125\ \text{GeV}, \end{cases} \tag{9.49}$$

2012年的结果的中心值与“1”有明显的偏离，而且ATLAS组的结果偏高，CMS组的结果偏低，两个中心值有明显的差距。但这两个组在2014年给出的结果的中心值非常接近，在一个标准偏差内与标准模型符合的很好。也就是说，没有明显的新物理信号的迹象。

由表-9.6可以读出，2021年以来ATLAS和CMS实验组基于全部RUN-2数据对信号强度$\mu^{\gamma\gamma}$ 的实验测量结果为[1, 364, 373]

$$\mu_{\gamma\gamma} = \begin{cases} 1.02 \pm 0.13, & \text{ATLAS}, \quad \mathrm{m_H} = 125.09\ \text{GeV}, \quad \mathcal{L} = 139\text{fb}^{-1}, \\ 1.12 \pm 0.09, & \text{CMS}, \mathrm{m_H} = 125.38\ \text{GeV} \quad \mathcal{L} = 137\text{fb}^{-1}, \end{cases} \tag{9.50}$$

显然，基于RUN-2数据对信号强度$\mu^{\gamma\gamma}$的实验测量精度又有显著的提高。到目前为止，对信号强度$\mu^{\gamma\gamma}$的实验测量结果与标准模型理论预言符合的很好。

9.3.6　希格斯玻色子与新物理探索

根据本节前面的讨论可知，大型强子对撞机实验对希格斯粒子性质(质量，自旋，宇称，汤川耦合，规范耦合等)的实验测量和分析显示，实验测量结果与标准模型理论预言都复合的很好！对所有考虑的道，没有发现明显偏离。例如图-9.19和图-9.20所示的ATLAS和CMS实验组对各个过程产生截面$\sigma(pp \to X)$ 的实验测量结果与标准模型的理论预言值符合的很好[376, 377]。LHC实验升级之后，希格斯物理研究的主要目标是：对希格斯粒子与矢量玻色子$(\gamma, W^\pm, Z^0)$之间的耦合，对希格斯粒子与费米子之间的汤川耦合做精确实验测量，比较实验测量结果与标准模型理论预言值，检查一致性。对3H和4H自耦合过程做初步测量和研究。对多个主要衰变道，测量其信号强度(signal strength) μ，寻找可能存在的偏离或者新物理信号。

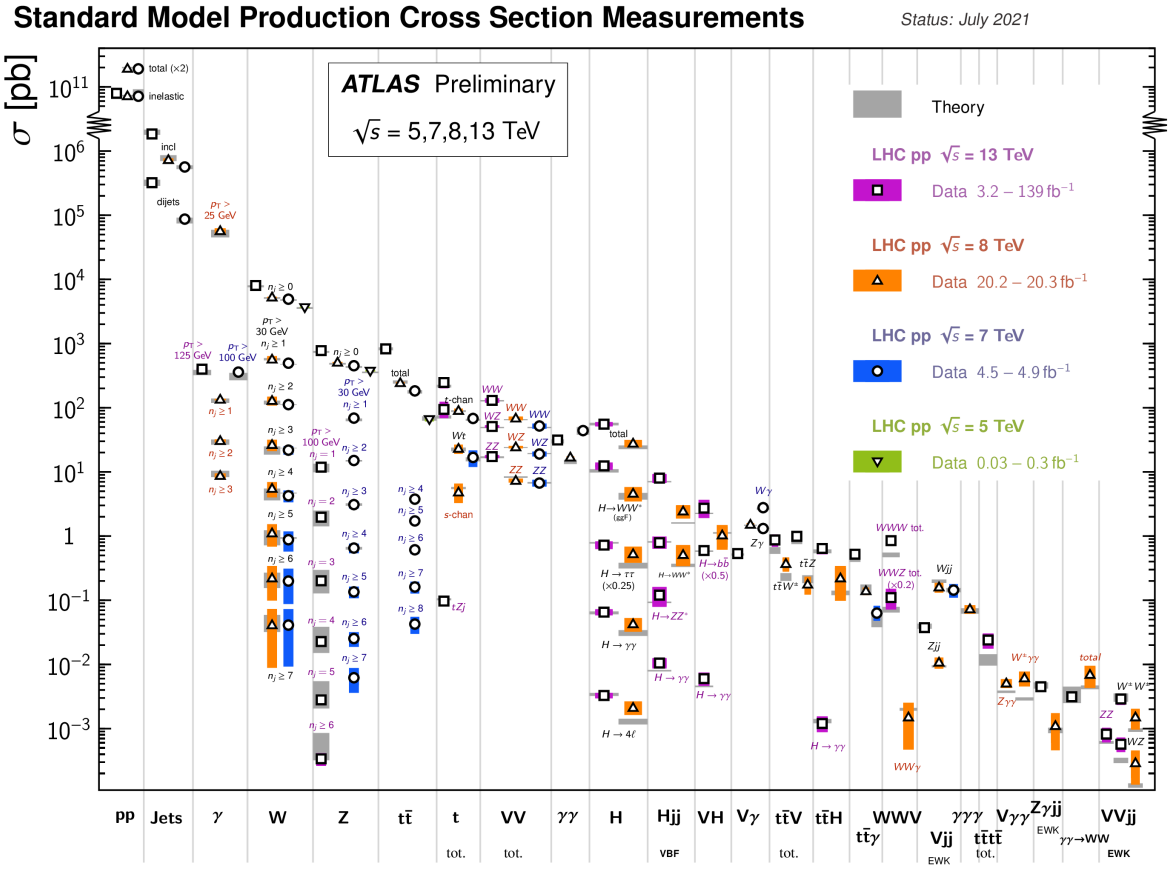


图 9.19: ATLAS实验组对LHC实验各个过程产生截面的实验测量结果和对应的标准模型理论预言值[376]。

但我们知道，标准模型是一个“有效理论”，在高能标应该存在超出标准模型的新物理。由于希格斯粒子与所有有质量的粒子都有耦合，希格斯粒子的质量受到量子修正（圈图中的重粒子）的影响特别大，使得电弱破缺的尺度成为高能量尺度物理的精细调节后的结果，这被称为**自然性问题或者层级问题** 。因此，人们都期待超出标准模型的新物理在TeV能级就会出现，以消除上述“层级”问题。这样的新物理模型在理论上已经建立了很多年，例如，引入玻色子-费米子对称性的超对称模型和引入额外强相互作用以使得希格斯粒子称为复合粒子的“Technicolor”模型等，我们将在本书的最后一节简单介绍这些新物理模型。

以希格斯粒子为例，除了标准模型的中性希格斯玻色子，还有很多超出标准模型的新物理模型预言了其它的“希格斯”粒子的存在[378]。例如在“希格斯二重态”模型和“最小超对称”模型中，就有5个希格斯粒子:

$$\begin{aligned} \text{CP even}: \quad & H^0, \quad h^0; \qquad \text{CP odd}: \ A^0, \\ \text{Charged Higgs}: \quad & H^{\pm}. \end{aligned} \tag{9.51}$$

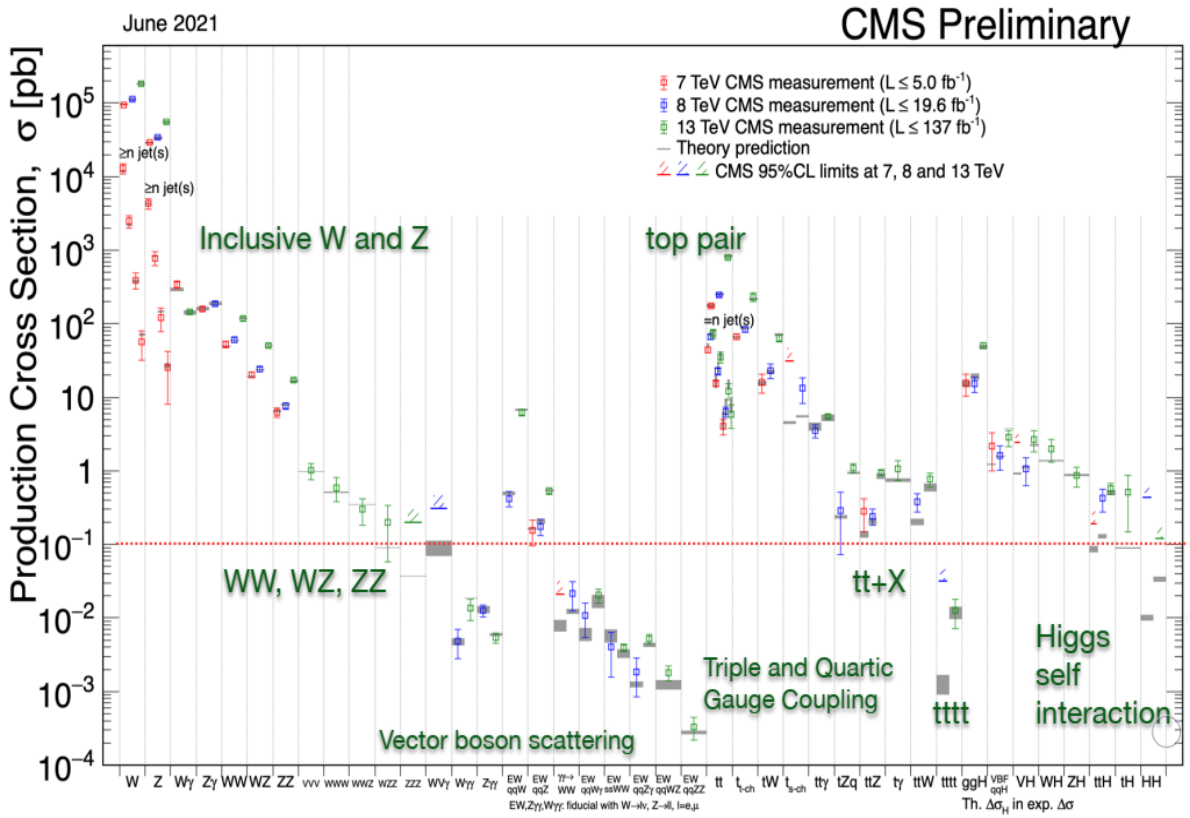


图 9.20: CMS 实验组对LHC实验各个过程产生截面的实验测量结果和对应的标准模型理论预言值[377]。

其中的中性标量粒子H^0/h^0和标准模型希格斯具有相同的量子数。另外还有带电希格斯粒子$H^{\pm}$和赝标量中性粒子A^0。那么，不可避免的问题就是：

(1) 现在LHC实验看到的中性标量希格斯粒子是谁家的“孩子”？目前为止所有实验均支持它是属于标准模型的，但目前的实验数据还不够“精细”，我们需要对其做“DNA”鉴定？

(2) 如何寻找其它的新物理希格斯粒子？如果能够找到一个带电的$H^{\pm}$，就足以确认“新物理”的存在。

探索新物理信号有很多途径，在LHC实验中对希格斯相关产生和衰变过程的研究也是一个发现新物理的“通道”(gateway)，

对许多与标准模型相近的新物理模型（例如双希格斯模型，最小超对称模型等），如果它们满足条件：

1. 存在宽度很窄的CP为偶的标量玻色子；

2. 算符属于标准模型的算符集合；

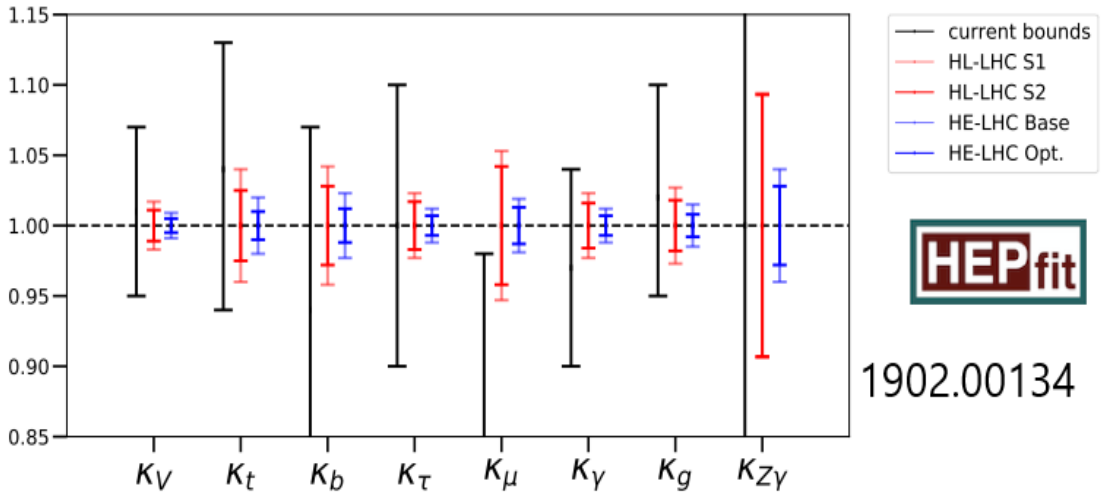


图 9.21: HEPfit根据LHC现在的数据得到的对κ参数的限制（黑色误差棒），以及根据未来的HL-LHC和HE-LHC可能采集的数据(3000fb^{-1})得到的对κ参数的限制（红色、蓝色误差棒）[348]。

3. 希格斯玻色子与费米子之间的汤川耦合与m_f成正比。

那么与“信号强度”类似，我们可以定义与希格斯玻色子的产生和衰变过程相关的κ参数-耦合修饰子（coupling modifier）为[344, 348]

$$\kappa_i = \frac{\sigma_i(i \to H)}{\sigma_i(i \to H)^{\rm SM}}, \quad \text{or} \quad \kappa_f = \frac{\Gamma^f(H \to f)}{\Gamma^f(H \to f)_{\rm SM}}, \tag{9.52}$$

其中5个κ_i是与希格斯粒子的主要产生过程相关的参数

$$\begin{aligned} \kappa_g^2 &= \frac{\sigma_{\rm ggF}(pp \underbrace{\longrightarrow}_{\rm ggF} H)}{\sigma_{\rm ggF}(pp \underbrace{\longrightarrow}_{\rm ggF} H)^{\rm SM}}, \qquad \kappa^2_{\rm VBF} = \frac{\sigma_{\rm VBF}}{\sigma^{\rm SM}_{\rm VBF}}, \\ \kappa^2_{\rm W} &= \frac{\sigma_{\rm W}}{\sigma^{\rm SM}_{\rm W}}, \qquad \kappa^2_{\rm Z} = \frac{\sigma_{\rm Z}}{\sigma^{\rm SM}_{\rm Z}}, \qquad \kappa^2_{\rm ttH} = \frac{\sigma_{\rm ttH}}{\sigma^{\rm SM}_{\rm ttH}}. \end{aligned} \tag{9.53}$$

现在可以测量(detectable) 的6个与希格斯粒子主要衰变过程的衰变宽度$\Gamma_f = \Gamma(H \to f)$相关的$\kappa$参数

$$\begin{aligned} \kappa^2_W &= \frac{\Gamma_{WW^*}}{\Gamma^{\rm SM}_{WW^*}}, \qquad \kappa^2_Z = \frac{\Gamma_{ZZ^*}}{\Gamma^{\rm SM}_{ZZ^*}}, \qquad \kappa^2_{\gamma\gamma} = \frac{\Gamma_{\gamma\gamma}}{\Gamma^{\rm SM}_{\gamma\gamma}}, \\ \kappa^2_{b\bar{b}} &= \frac{\Gamma_{b\bar{b}}}{\Gamma^{\rm SM}_{b\bar{b}}}, \qquad \kappa^2_{\tau^+\tau^-} = \frac{\Gamma_{\tau^+\tau^-}}{\Gamma^{\rm SM}_{\tau\tau}}, \qquad \kappa^2_{\mu^+\mu^-} = \frac{\Gamma_{\mu^+\mu^-}}{\Gamma^{\rm SM}_{\mu^+\mu^-}}. \end{aligned} \tag{9.54}$$

由于LHC实验质心系能量的限制或者数据量的限制，目前还无法测量(undetectable) 的6个

与希格斯粒子主要衰变过程相关的κ 参数

$$\begin{aligned}\kappa^2_{t\bar{t}} &= \frac{\Gamma(H\to t\bar{t})}{\Gamma(H\to t\bar{t})^{\rm SM}}, \qquad \kappa^2_{c\bar{c}} = \frac{\Gamma_{c\bar{c}}}{\Gamma^{\rm SM}_{c\bar{c}}}, \qquad \kappa^2_{s\bar{s}} = \frac{\Gamma_{s\bar{s}}}{\Gamma^{\rm SM}_{s\bar{s}}}, \qquad \kappa^2_{e^+e^-} = \frac{\Gamma_{e^+e^-}}{\Gamma^{\rm SM}_{e^+e^-}},\\ \kappa^2_{Z\gamma} &= \frac{\Gamma_{Z\gamma}}{\Gamma^{\rm SM}_{Z\gamma}}, \qquad \kappa^2_H = \frac{\Gamma(H\to all)}{\Gamma(H\to all)^{\rm SM}} = \Sigma_f \frac{\mathcal{B}^f_{SM}\cdot\kappa^2_f}{1-\mathcal{B}_{\rm NP}},\end{aligned} \tag{9.55}$$

其中$\mathcal{B}_{\rm NP}$ 表示希格斯粒子到所有新物理粒子的衰变分支比。　在标准模型下，这样定义的$\kappa = 1$。图-9.21表示由HEPfit合作组基于现有的ATLAS和CMS数据，或者未来可能的3000fb^{-1} 数据(HL-LHC, HE-LHC)，经过拟合得到的对各个κ 参数的限制。

在本章，我们对标准模型精确检验的情况，对LHC实验、对根据LHC实验数据分析得到的主要结果做了介绍。新世纪以来，全世界的实验家们和理论家们(多与1万人)做出了巨大的努力寻找超出标准模型的新物理信号[371, 378–385]。在LHC开始运行时，人们曾经对发现新物理（尤其是超对称）信号充满信心。但到目前为止，从LHC实验的现有数据分析中没有看到任何明显的偏离。尽管根据LHC实验，人们已经对许多新物理模型的参数空间给出了种种限制，但仍然令人有些失望！2022年3月，LHC实验开始新的运行周期RUN-3，质心系能量也将提高到原设计最高能量14TeV，我们衷心的希望能够比较幸运地尽早发现新物理存在的确切证据！

通过本章的讨论我们也看到，在大型强子对撞机上对于希格斯粒子的汤川耦合(H$\mu\mu$, Hee, H$c\bar{c}$, etc.)的测量充满了挑战性，这主要是由于强子对撞机上的非常大的QCD本底造成的影响。在本书中，我们也没有讨论希格斯粒子的自耦合(3H, 4H) 相互作用，因为这是LHC实验不可能完成的任务。一般来说，强子对撞机由于对撞能量高，是直接发现新粒子的最佳场所，但是对已经发现的希格斯粒子的性质做高精度研究，对各种可能的非常弱的耦合做高精度测量，就要依赖于正负电子对撞机的希格斯工厂了。

9.4　练习题

1. 试计算希格斯粒子与顶夸克、底夸克和粲夸克的汤川耦合的相对比值大小。

2. 顶夸克主要衰变到一个W玻色子和和一个b夸克，它应该也可以通过同样的树图衰变道W粒子和s夸克，试计算这两个衰变道的相对分支比。

3. 在LHC实验中，top夸克主要的产生道有哪些？画出对应的最低阶（树图或者单圈图）费曼图。写出当质心系能量$\sqrt{S} = 14$ TeV时，top夸克对产生和单top夸克产生的产生截面。

4. 在目前讨论的未来的超高能e^+e^-对撞机实验(例如中国的CEPC)中，top夸克主要的产生道（对产生，单产生）有哪些？画出对应的最低阶（树图或者单圈图）费曼图。

5. 在LHC实验中，希格斯玻色子主要的产生道有哪些？画出对应的最低阶（树图或者单圈图）费曼图。写出当质心系能量$\sqrt{S} = 7,14$ TeV时，希格斯的主要产生过程的产生截面。

6. 在LHC实验中，希格斯玻色子的主要衰变道有哪些？画出对应的最低阶（树图或者单圈图）费曼图。

7. 在树图阶，推导顶夸克$t \to Wb$的衰变宽度公式(9.11)，请给出完整的解析推导。

8. 假设希格斯玻色子的总产生截面为$20pb$，LHC实验的积分亮度为$20fb^{-1}$，估算ATLAS和CMS 合作组各自可能观察到的$H \to \gamma\gamma$和$H \to b\bar{b}$ 事例数。

9. 画出$e^+e^- \to HZ$和$e^+e^- \to H\nu\bar{\nu}$的最低阶费曼图。

10. 理论上可以通过带电轻子的对撞过程：$l^-l^+ \to H$ $(l = e, \mu, \tau)$来直接产生希格斯玻色子。为什么人们对μ子对撞机实验做了很多讨论，却不考虑在正负电子对撞机上实现此类直接产生过程？

11. 在可能的μ子对撞机实验中，可以通过过程$\mu^+\mu^- \to H$直接产生希格斯玻色子，当取$\sqrt{S} = m_H = 125$GeV时，计算如下三个过程的截面：

$$\begin{aligned} &(a) \quad e^+e^- \to H \to b\bar{b}; \\ &(b) \quad \mu^+\mu^- \to H \to b\bar{b}; \\ &(c) \quad \mu^+\mu^- \to \gamma \to b\bar{b}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

第十章　重味物理和CP破坏

对于世界粒子物理学界来说，1964年是一个非常好的“丰收之年”：M. Gell-Mann和G. Zweig分别独立提出了描写强子下一层次结构的“夸克模型”[101, 103]。F. Englert, R. Brout 和P.W. Higgs 分别独立提出电弱对称性破缺的“Higgs机制”[274, 275]。J.W. Cronin 等4人宣布在实验中发现了中性K^0 介子系统的CP破坏[85]。显然，上述重要研究成果对建立标准模型理论具有里程碑的意义，对现代物理学的发展起了极其重要的推动作用！在本书的第六章，我们已经对“夸克模型”做了全面的介绍。在本书的第八和第九章，我们对Higgs机制、标准模型基本理论框架，对Higgs物理和顶夸克物理研究做了全面、系统的介绍，在本章，我们将重点讨论与粲夸克、底夸克相关的重味物理和CP破坏。首先介绍CKM矩阵幺正三角形相角的抽取，介绍D介子系统的混合与CP破坏。然后重点介绍B介子系统的混合与衰变过程，介绍B介子工厂实验、LHC实验和Super-KEKB实验的最新重味物理相关成果，包括对B_S/B_C 介子部分典型衰变过程、对含粲或者含底重味重子最新研究成果的简要介绍。

10.1　CKM矩阵幺正三角形相角

美国和日本的两个B介子工厂实验采集了大约1.7×10^9个B介子对产生和衰变事例。LHC超高能强子对撞机实验实际上也是一个“强子对撞机上的B工厂实验”，可以提供海量(大约10^{11-12}个) b介子($B/B_S/B_C$) 和含b重子的产生和衰变事例。日本的超级B工厂实验和提议中的未来超高能对撞机实验均可以提供海量的含b强子的产生和衰变事例。这些高能物理实验，对重味物理研究提供了强劲的支持和推动。对CKM矩阵与CP破坏的研究是标准模型精确检验的重要组成部分。在标准模型框架下，CKM矩阵的幺正性导致6个幺正三角形，其中一个与$b\to d$跃迁关联的即为大家熟悉的幺正三角形。在本节，我们将详细讨论如何抽取该幺正三角形的3个相角(α,β,γ)，还将讨论与B_S衰变相关的相角β_s的抽取。

根据第8章的讨论，我们知道由CKM矩阵的幺正性可以导出复平面上的6个幺正三角形。其中的3个如图-10.1所示：他们分别对应B介子、B_S^0介子和D介子衰变过程：

$$b\to d\ \ \text{transition}: \qquad V_{ub}V_{ud}^*+V_{cb}V_{cd}^*+V_{tb}V_{td}^*=0, \tag{10.1}$$

$$b\to s\ \ \text{transition}: \qquad V_{ub}V_{us}^*+V_{cb}V_{cs}^*+V_{tb}V_{ts}^*=0, \tag{10.2}$$

$$c\to u\ \ \text{transition}: \qquad V_{cd}V_{ud}^*+V_{cs}V_{us}^*+V_{cb}V_{ub}^*=0, \tag{10.3}$$

其中与方程(10.1)对应的第一个幺正三角形就是唯象上最感兴趣的与$b\to d$跃迁相关的幺正三角形，也就是我们习惯上所称的“幺正三角形”(Unitary triangle)。三个相角(α,β,γ)

的定义可以写为：

$$\alpha = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad \beta = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad \gamma = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \tag{10.4}$$

显然，幺正三角形三个相角满足约束条件：$\alpha+\beta+\gamma = 180°$。

另外，与$B_s^0 - \overline{B}_s^0$混合关联的CP破坏相位是$\phi_s = -2\beta_s$，其标准模型定义为

$$\phi_s = -2\beta_s, \qquad \beta_s = \arg\left(-\frac{V_{ts}V_{tb}^*}{V_{cs}V_{cb}^*}\right). \tag{10.5}$$

表 10.1: 对CKM矩阵三个相角(α,β,γ)的实验测量结果的HFLAV平均值、CKMfitter和UTfit 整体拟合结果、LHCb 和Belle-II 未来预期测量精度[1, 2, 87, 88, 386–389]。

angles	HFLAV [87, 88]	CKMfitter [387]	UTfit [388]	LHCb $50fb^{-1}$	Belle-II $50ab^{-1}$
$\alpha[°]$	$85.2^{+4.8}_{-4.3}$	$91.9^{+1.6}_{-1.2}$	90.1 ± 2.2	$\delta\alpha \sim 0.6°$	$\delta\alpha \sim 0.4°$
$\beta[°]$	22.2 ± 0.7	$23.41^{+1.53}_{-0.68}$	23.8 ± 1.3	precise	$\delta\beta \sim 1°$
$\gamma[°]$	$66.2^{+3.4}_{-3.6}$	$65.5^{+1.1}_{-2.7}$	65.8 ± 2.2	$\delta\gamma \sim 1°$	$\delta\gamma \sim 1.5°$
ϕ_s [rad]	-0.050 ± 0.019	$-0.03696^{+0.00072}_{-0.00084}$	$-0.0370(10)$	-	-

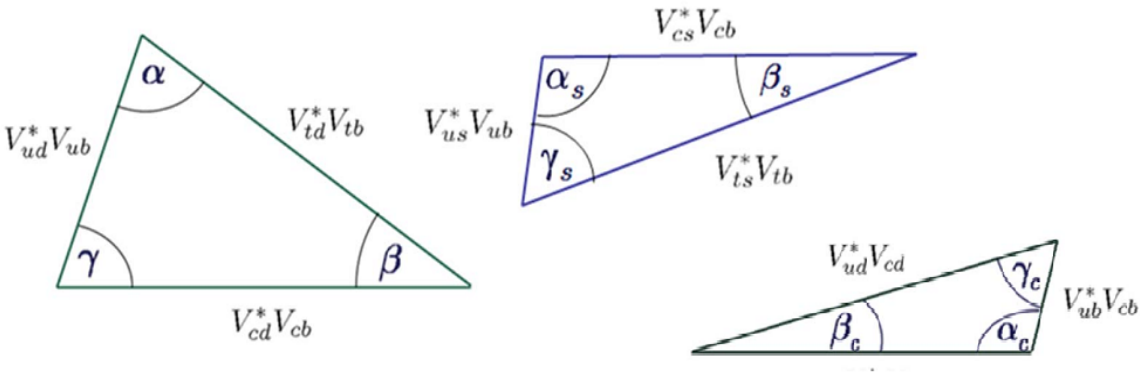


图 10.1: 与(10.1,10.2,10.3)式相对应，分别涉及B介子衰变，B_S^0介子衰变和D介子衰变的三个幺正三角形。

对CKM矩阵幺正三角形的研究一直集中在两个方面：

(1) 随着实验的进展，不断提高对3个相角(α,β,γ)的实验测量精度，验证幺正三角形的幺正性，证明标准模型对夸克混合和CP破坏来源描写的正确性。以日本物理学家M. Kobayashi和T. Maskawa获得2008年诺贝尔物理奖为标志，这一方面任务已经完成。今后要做的是继续提高精度，把精确测量做到极限。如表-10.1所示，对

三个相角(α,β,γ)的直接实验测量的世界平均值的误差大于CKMfitter和UTfit合作组CKM整体拟合结果的误差。从该表还可以看出，目前对三个相角的实验测量误差将由目前的$(\sim 4.8°, 0.7°, \sim 3.6°)$降到未来预期的$(1°, 0.4°, 1.5°)$，这大约需要10年时间。

(2) 通过对相角的精确测量，可以对各种新物理模型的参数空间给出严格的限制。通过寻找高精度实验测量结果与标准模型之间的“偏离”，寻找新物理存在的信号或者证据。新物理探索目前已经逐步发展成为CKM矩阵研究的重要方向。

10.1.1　相角β

在夸克层次，可以通过对$b\to q\bar{q}q'$三体衰变过程的研究来抽取β角。

(1) 第一类衰变过程是如图-10.2所示的$b\to c\bar{c}s$树图衰变过程，对应的遍举衰变过程为$B_d^0\to J/\psi K_s^0$。$b\to c\bar{c}d$也属于此类过程$(B_d^0\to J/\psi\pi^0, D^{(*)+}D^{(*)-}$等等)。

(2) 第二类是企鹅图和其他类型的$b\to q\bar{q}(s,d), c\bar{u}d$衰变过程。对应的遍举衰变过程有很多，例如$B^0\to(\phi,\rho^0,\eta)K^0, D_{CP}^{(*)}h^0$等衰变过程。

由于新物理粒子可以通过圈图对相关过程给出新物理修正，所以通过树图过程和通过企鹅图过程抽取的β角的值可能不一样。可以通过精确测量并比较此类差别，发现新物理存在的信号。

如图-10.2所示，$B_d^0\to J/\psi K_S$衰变道是抽取β角的“黄金道”。该衰变过程的费曼图在夸克层次的衰变是$b\to c\bar{c}s$和$\bar{b}\to c\bar{c}\bar{s}$。对该衰变道，由于企鹅图和树图的弱相角$\phi_D$几乎完全相同，所以有

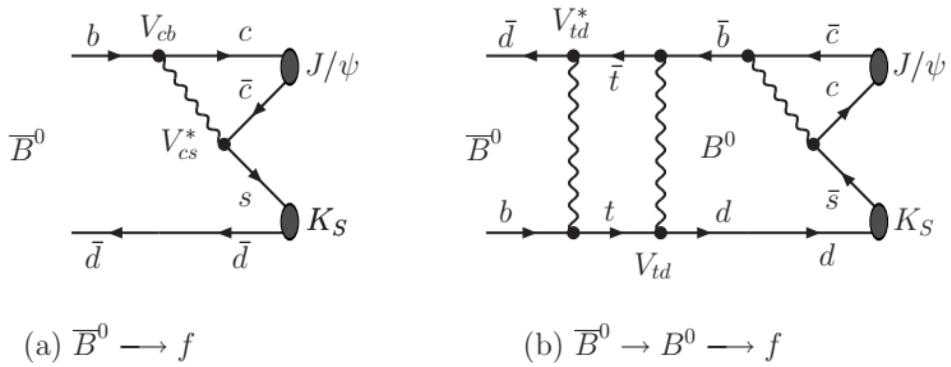
$$a_{CP}(t, J/\psi K_S) = -\sin(2\beta)\sin(\Delta M_d t). \tag{10.6}$$

由于对$B_d\to J/\psi K_S$衰变的强作用的污染最小，CP破坏的效应也大，所以这个道被称之为“黄金道”。在实验上，可通过$J/\psi\to l^+l^-$和$K_S\to\pi^+\pi^-$得到清楚的末态信号。从实验的角度，要测量$a_{CP}(t)$，需要知道B介子衰变的时间，这就需要产生的B介子是运动的，这就是B介子工厂设计中采用具有不同能量的e^+和e^-束流的原因。

$B_d^0\to\phi K_S$纯企鹅图衰变过程也是测量β角的好衰变道。对该道，内线为top夸克的企鹅图起主要作用，内线夸克为u和c夸克的企鹅图导致的污染比较小，可以忽略。因此该道也是一个好道，只是对β的测量精度要稍低一些。如表-10.1所示，HFLAV合作组给出的对β角实验测量结果的世界平均值为[88]

$$\beta = (22.2\pm 0.7)°. \tag{10.7}$$

对相角β的实验测量的主要误差来自统计误差。在未来10年，LHCb和Belle-II实验将能够有效提高实验测量精度。对$B_d^0\to J/\psi K_S^0$衰变过程，标准模型的理论误差很小，可以忽略。对B介子衰变过程的不同衰变道，新物理贡献可以有很大的差别，需要对每一个衰变道做具体的研究。



(a) $\overline{B}^0 \longrightarrow f$ (b) $\overline{B}^0 \to B^0 \longrightarrow f$

图 10.2: $B_d^0 \to J/\Psi K_S^0$衰变过程费曼图。(a) $\bar{B}^0 \to J/\Psi K_S$树图；(b) $\bar{B}^0 \to B^0 \to J/\Psi K_s$混合-衰变费曼图。

10.1.2 相角α

$B \to \rho\rho, \rho\pi, \pi\pi$ 衰变道是抽取相角α 的主要衰变过程，其中$B \to \rho\pi$ 衰变道起主要作用。 由不同的衰变道得到的相角α 的值也有较大的差别。$B^0 \to \pi^+\pi^-$衰变包含树图和企鹅图的贡献。如果$B^0 \to \pi^+\pi^-$仅有$b \to u$树图决定，那么有

$$a_{CP}(t, \pi^+\pi^-) = -\sin(2\alpha)\sin(\Delta M_d t). \tag{10.8}$$

可以进而精确的抽取α角。但是，由于$B^0 \to \pi^+\pi^-$衰变包含树图和企鹅图的贡献，企鹅图会产生直接的CP破坏，从而使得$\bar{A}/A$不是纯相位。这时，含时的CP不对称量为

$$a_{CP}(t, \pi^+\pi^-) = a_{dir}\cos(\Delta M_d t) + \sqrt{1 - a_{dir}^2}\sin(2\alpha + \theta_P)\sin(\Delta M_d t). \tag{10.9}$$

其中$a_{dir} \sim 2\frac{P}{T}\sin(\delta)$, $\theta_P \sim \frac{P}{T}\cos(\delta)$；$T$ 和P 分别表示树图和企鹅图的振幅大小，δ为强位相。对$B^0 \to \pi^+\pi^-$衰变道，$P/T \sim 20\%$，企鹅图的贡献不能忽略。在m_B能标，尽管直接的CP破坏小，但企鹅图产生的θ_P并不小。因此，如何压低企鹅图带来的污染是通过$B \to \pi\pi$衰变道抽取α角的关键。

M. Gronau 和D. London提出利用同位旋对称性[390]来消除企鹅图污染，这是一个模型无关的方法。目前B介子工厂实验和LHCb实验已经对$B^0 \to \pi^+\pi^-$的CP破坏给出了较高精度的实验测量结果[1]：

$$\mathcal{C}_{\rm CP}(B^0 \to \pi^+\pi-) = -0.32 \pm 0.04, \qquad \mathcal{S}_{\rm CP}(B^0 \to \pi^+\pi-) = -0.65 \pm 0.04. \tag{10.10}$$

但对相角α，由$B \to \pi\pi$衰变道给出的限制仍然比较弱。通过考虑$B \to \pi\pi, \rho\pi$和$\rho\rho$衰变过程的同位旋对称性，HFLAV合作组给出的对相角α的世界平均值为[88]

$$\alpha = (85.2^{+4.8}_{-4.3})^\circ. \tag{10.11}$$

10.1.3　相角γ

在幺正三角形的3个相角中，如果在树图阶没有新物理贡献，那么只有γ相角可以通过B介子树图衰变过程对其做精确测量。在实验上，人们可以通过对$b \to c$ 跃迁过程($\propto V_{cb}$) 和对应的CKM压低的$b \to u$跃迁过程($\propto V_{ub}$)之间的干涉效应来测量γ角[389]。在实验上实际测量的是以下几类衰变过程:

$$(a): \quad B^- \to (D^0, \overline{D}^0)(\pi^-, K^-) \quad \text{with} \quad D \to (K^+K^-, \pi^+\pi^-, K^-\pi^+, \pi^-K^+); \tag{10.12}$$

$$(b): \quad B \to (D^{(*)}, \overline{D}^{(*)})X_s \quad \text{with} \quad D^{(*)} \to (2h, 3h, 4h). \tag{10.13}$$

这里(及下面)的D表示$D^0 - \overline{D}^0$的混合态。$B^\pm \to DK^\pm$衰变过程是测量γ相角的“黄金衰变道”。　如图-10.3(a,b)所示，与$b \to c$跃迁关联的是左侧树图振幅$\mathcal{A}_a$，而右侧振幅$\mathcal{A}_b$是受到色和CKM双重压低的：

$$\mathcal{A}_a \quad \propto \quad V_{cb}V_{us}^* \sim A\lambda^3, \qquad \mathcal{A}_b \propto \frac{1}{N_c}V_{ub}V_{cs}^* \sim \frac{1}{3}A\lambda^3\sqrt{\bar{\rho}^2+\bar{\eta}^2}e^{-i\gamma}. \tag{10.14}$$

显然，考虑这两个费曼图的干涉可以抽出相角γ。如果定义$\mathcal{A}_{a,b}$的模的比值和其强相位差为r_B和δ_B，那么有

$$\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_a} = r_B \cdot \exp^{i(\delta_B-\gamma)}, \quad r_B = |\mathcal{A}_b/\mathcal{A}_a| \sim \frac{1}{3}\sqrt{\bar{\rho}^2+\bar{\eta}^2}. \tag{10.15}$$

使用$(\bar{\rho}, \bar{\eta})$的世界平均值[1, 87]可以估算出：$r_B \sim 0.1$。由此可以看出，虽然这些模型无关的方法理论不确定性大大减少，但由于r_B数值太小，对于从实验上同时精确测量出这么小的量和两个振幅的强相角的差δ_B是一个巨大的挑战。

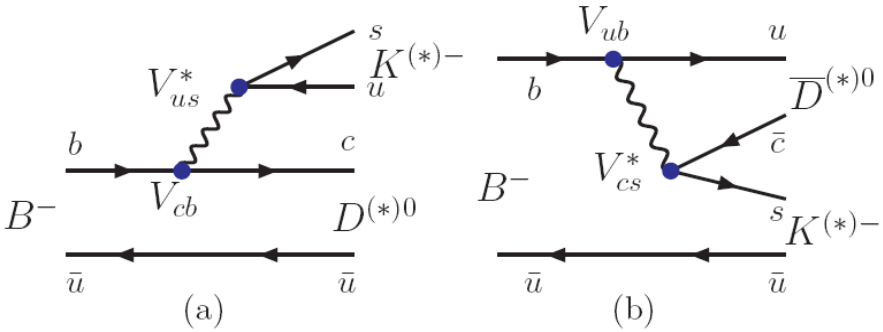


图 10.3:　$B^- \to D^0K^-, \overline{D}^0K^-$ 或者$B^- \to (D^{*0}K^{*-}, \overline{D}^{*0}K^{*-})$衰变过程的费曼图。

常用的抽取γ相角的分析方案有三种：

(1) Gronau-London-Wyler(GLW)方案[391]。在该方案下，人们考虑$B \to DK^\pm$, $D^*K^\pm$, $DK^{*\pm}$ 衰变过程，同时考虑次级“Cabibbo-suppressed”的$D \to f_{CP}$的衰变。末态CP本征态可以是:$f_{CP} = K^+K^-, K_s^0\pi^0$等。

(2) Atwood-Dunietz-Soni(ADS)方案[392]。次级D介子的衰变包含“卡比玻允许”的和“双重卡比玻压低”的衰变道，例如$D \to K^{\pm}\pi^{\mp}$衰变。BaBar 和Belle 实验组已经采用ADS方案对$B^{\pm} \to D^{(*)}K^{\pm}, DK^{*\pm}, DK^{*0}$等过程做了研究。对$B^{-} \to Dh^{-}$, $D^0 \to h^+h^-(h^{\pm} = K^{\pm}, \pi^{\pm})$衰变过程，GLW和ADS 方案的处理方法是相同的。

(3) Giri-Grossman-Soffer-Zupan(GGSZ)方案[393]。采用该方案时，考虑$B^{-} \to Dh^{-}$ 衰变，以及伴随的三体衰变过程$D \to K^0_S K^+ K^=, K^0_S\pi^+\pi^-$，并对$D \to K^0_S K^+ K^-$, $K^0_S\pi^+\pi^-$衰变过程做“Dalitz图”分析。

基于Belle和LHCb等实验组的实验测量结果，HFLAV给出的世界平均值[88]为

$$\gamma = (66.2^{+3.4}_{-3.6})^{\circ}. \tag{10.16}$$

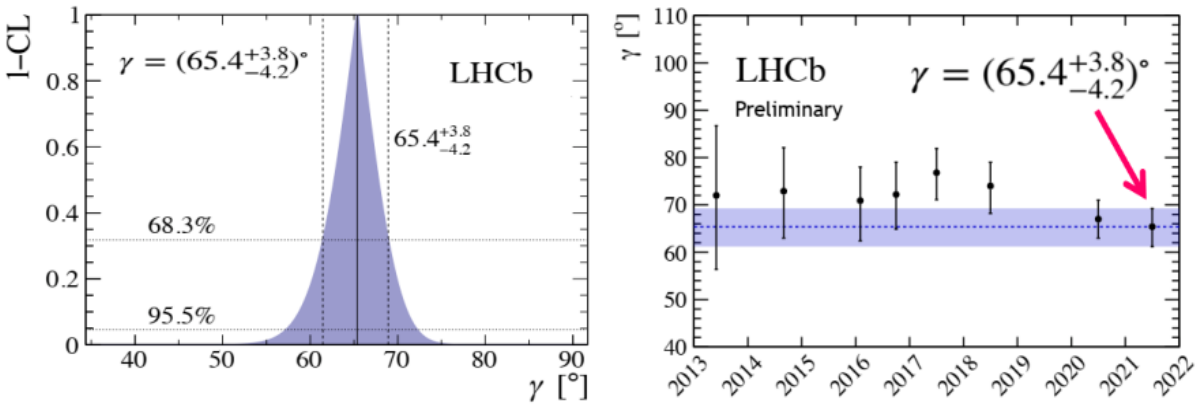


图 10.4: LHCb合作组对相角γ的最新实验测量结果[394]。

对相角γ，两个没有包含在上式平均值中的最新实验测量结果分别来自LHCb[394]，Belle和Belle-II合作组[395]。如图-10.4所示，LHCb实验组基于他们对$B^+ \to D(K^+, \pi^+)$ 衰变过程的研究分析，在2021年给出的对相角γ和混合参数(x_D, y_D)的最精确单个实验测量结果是[394]

$$\gamma = (65.4^{+3.8}_{-4.2})^{\circ}, \tag{10.17}$$

$$x_D = \left(4.00^{+0.52}_{-0.53}\right) \times 10^{-3}, \quad y_D = \left(6.30^{+0.33}_{-0.30}\right) \times 10^{-3}, \tag{10.18}$$

其精度接近HFLAV平均值的精度。

LHCb实验组还基于他们对$B^{\pm} \to D(\to h^{\pm}hc'^{\mp}\pi^0)h^{\pm}$ 衰变过程的研究分析，在2022年给出了对相角γ和参数(r_B, δ_B)的新实验测量结果[396]

$$\begin{aligned} \gamma &= (56^{+24}_{-19})^{\circ}, \\ r_B^{DK} &= \left(9.3^{+1.0}_{-0.9}\right) \times 10^{-2}, \quad \delta_B^{DK} = \left(122^{+19}_{-23}\right)^{\circ}, \end{aligned} \tag{10.19}$$

LHCb的这个关于相角γ的测量结果和(10.17)式的结果符合。

Belle和Belle-II合作组使用他们各自获得的711 fb^{-1}和128 fb^{-1} 的数据，对$B^+ \to D(K^+,\pi^+)$ 衰变过程做了联合分析，在2022年2月给出了对相角γ 和参数$(r_B\delta_B)$的实验测量结果[395]

$$\gamma = (78.4 \pm 11.4 \pm 0.5 \pm 1.0)^\circ, \tag{10.20}$$

$$r_B^{DK} = 0.129 \pm 0.024 \pm 0.001 \pm 0.002, \quad \delta_B^{DK} = (124.8 \pm 13.0)^\circ, \tag{10.21}$$

$$r_B^{D\pi} = 0.017 \pm 0.006 \pm 0.001 \pm 0.001, \quad \delta_B^{D\pi} = (341.0 \pm 17.2)^\circ, \tag{10.22}$$

对相角γ的这个测量结果是到目前为止Belle和Belle-II 最精确的实验测量结果。(10.21)式的结果和LHCb的实验测量结果符合的很好。

显然，从上面的讨论和表-10.1所列的结果易于看出，对相角β的实验测量精度最高，对另外两个相角α和γ的实验测量精度相对差一些，但也在迅速提高。随着Belle-II和LHCb实验组积累更多的数据，不断改进分析方法，测量精度将得到进一步提高。在本章的第10.3.5节，我们将介绍$B_s^0 - \overline{B}_s^0$混合与相位ϕ_s的抽取。

10.1.4　CKM矩阵整体拟合

在本节，我们对CKM矩阵幺正三角形整体拟合的相关工作做简单介绍。目前做CKM矩阵整体拟合的是CKMFitter 合作组和UT*fit* 合作组：

(1) CKMFitter 合作组[386, 387, 397, 398]，其网站地址为：http://ckmfitter.in2p3.fr。CKMFitter 合作组使用基于χ^2分析的频度统计（frequentist statistics based on χ^2 analysis）方法来做拟合，以确定CKM混合矩阵的4个独立参数$(A,\lambda,\bar{\rho},\bar{\eta})$。该合作组使用的拟合程序、最新结果、相关图形，最新的论文和会议报告可以在该网站找到、下载。

(2) UT*fit* 合作组[388, 399, 400]，其网站地址为：http://www.utfit.org/UTfit/。UTfit合作组使用贝叶斯方法(Bayesian approach)来做拟合。该合作组的拟合程序、最新结果、图形，最新的论文和会议报告可以在该网站找到、下载。

这二个国际合作组的主要工作目标有两个：

(1) 收集、整理、更新与CKM矩阵相关的实验测量结果，使用不同的统计分析方法给出最佳拟合值。

(2) 通过比较实验测量数据和理论预言，对标准模型理论做精确检验。通过唯象分析，寻找新物理存在的迹象或信号，或者对新物理模型的自由参数给出限制。

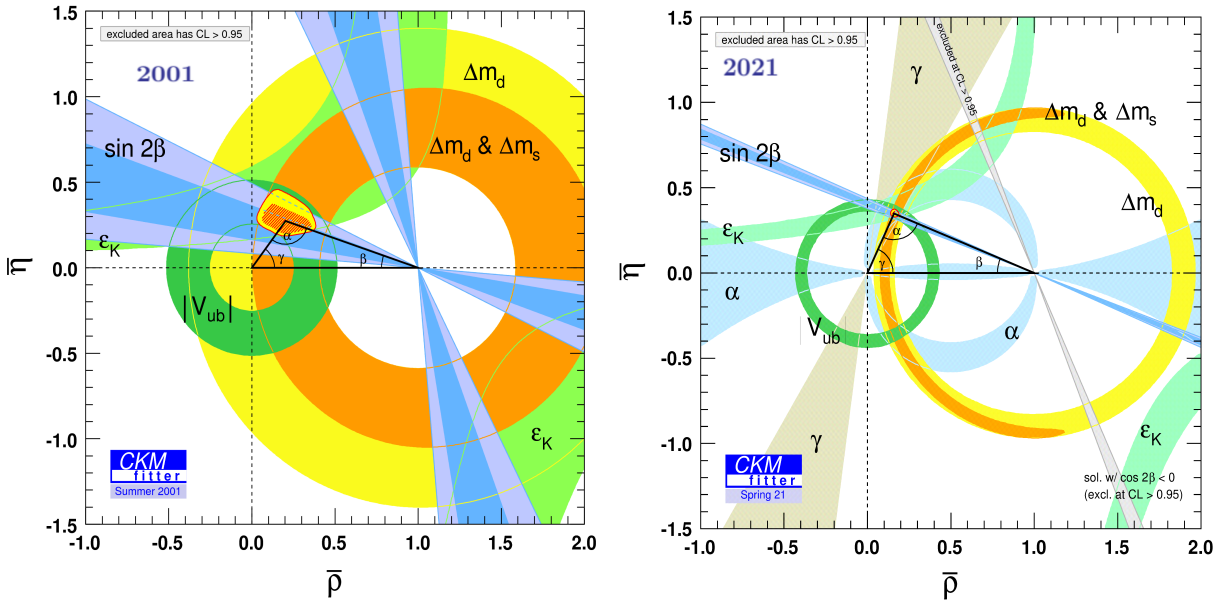


图 10.5: 在2001和2021年，根据当时得到的实验测量数据，由CKMfitter 合作组经拟合分别得到的对$\bar{\rho}-\bar{\eta}$取值的限制。从图中可以看出，20年来对参数$(\bar{\rho},\bar{\eta})$的实验测量精度得到了很大的提高[386, 398]

以幺正三角形为例，CKMfitter 合作组考虑了多个可观测物理量的实验测量值[1, 398]: $|V_{ub}/V_{cb}|$，Δm_d，$\Delta m_d\&\Delta m_s$, ϵ_k 和$\sin(2\beta)$；通过拟合得到了对$\bar{\rho},\bar{\eta}$和CKM相角α,β 和γ的限制。图-10.5表示在$\bar{\rho}-\bar{\eta}$复平面上$(\bar{\rho},\bar{\eta})$ 的可能取值范围。这里考虑的5个实验测量数据均为$\bar{\rho},\bar{\eta}$ 的函数。根据拟合得到的包围幺正三角形顶点的闭合等值线内区域是$(\bar{\rho},\bar{\eta})$的允许区域，排除区域对应的可信度为99%。

关于CKM矩阵的4个Wolfenstein 参数$(\lambda, A, \bar{\rho}, \bar{\eta})$ 的取值，CKMfitter组和UTfit组使用不同的拟合方法，得到的结果分别为[1, 387, 398]

$$\begin{aligned}\text{CKMfitter}: \quad & A=0.8132^{+0.0119}_{-0.0060}, \quad \lambda=0.225000^{+0.00024}_{-0.00022},\\ & \bar{\rho}=0.1566^{+0.0085}_{-0.0048}, \quad \bar{\eta}=0.3475^{+0.0118}_{-0.0054}, \qquad (10.23)\\ \text{UTfit}: \quad & A=0.818\pm0.015, \quad \lambda=0.2255\pm0.0006,\\ & \bar{\rho}=0.124\pm0.024, \quad \bar{\eta}=0.354\pm0.016. \qquad (10.24)\end{aligned}$$

显然,这两个合作组的拟合结果是高度一致的。对CKM矩阵的9个矩阵元的模$|V_{ij}|$的拟合结果为[2]

$$\mathrm{V_{CKM}}=\begin{pmatrix} 0.97435(16) & 0.22500(67) & 0.00369(11) \\ 0.22487(67) & 0.97349(16) & 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074} \\ 0.00857^{+0.00025}_{-0.00018} & 0.04110^{+0.00083}_{-0.00072} & 0.999118^{+0.000031}_{-0.000036} \end{pmatrix}. \qquad (10.25)$$

由拟合得到的Jarlskog 不变量的数值为[2, 387]

$$J = \begin{cases} \left(3.08^{+0.015}_{-0.013}\right) \times 10^{-5}, & \text{PDG2022}, \\ \left(3.044^{+0.0068}_{-0.0084}\right) \times 10^{-5}, & \text{CKMfitter}. \end{cases} \tag{10.26}$$

如果对CKM矩阵采用标准参数化方式，那么对应的4个独立变量的数值结果为[1]

$$\begin{aligned} \sin\theta_{12} &= 0.22650 \pm 0.00048, \quad \sin\theta_{13} = 0.00361^{+0.00011}_{-0.00009}, \\ \sin\theta_{23} &= 0.04053^{+0.00083}_{-0.00061}, \quad \delta = 1.196^{+0.045}_{-0.043}. \end{aligned} \tag{10.27}$$

从图-10.5可以看出：

(1) 显然，不同实验数据对幺正三角形顶点位置的限制是一致的，有共同允许区域。幺正三角形顶点$(\bar{\rho}, \bar{\eta})$在第一象限。

(2) 左右两个图分别表示在2001年和2021年得到的拟合结果。从中可以明显看出，20年来实验测量精度有很大提高。目前的幺正三角形顶点$(\bar{\rho}, \bar{\eta})$的允许区域和20年前相比已经减小很多。

除了对CKM矩阵做整体拟合的CKMFitter和UT*fit* 合作组，目前对全球重味物理实验测量结果做整体加权平均的是HFLAV合作组。HFLAV 合作组[87, 401]的网站地址为：https://hflav.web.cern.ch/。HFLAV合作组收集与重味物理相关的所有实验测量结果，主要涉及粲强子、底强子和τ轻子的产生和衰变过程，并经过统计分析以数值或者图形的形式给出世界平均值，为粒子物理学理论研究和唯象分析提供一组统一的“实验数据”。该合作组的论文和会议报告可以在其网站找到、下载。

10.2　D介子系统的混合与CP破坏

含粲强子包含粲偶素$c\bar{c}$（各种基态和激发态）和D介子$c\bar{q}$ $(q = (u, d, s))$。对粲偶素，我们已经在第6.3节讨论。在本节，我们重点讨论D介子系统的混合与CP破坏。与K^0, B^0介子系统类似，中性D^0介子的两个质量本征态$D_{1,2}$，混合参数(x, y)的定义是

$$\begin{aligned} |D_{1,2}> &= p|D^0> \pm q|\bar{D}^0>, \quad \phi = \arg(q/p), \\ x &= \frac{m_2 - m_1}{\Gamma}, \quad y = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma}, \quad \text{with} \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2). \end{aligned} \tag{10.28}$$

明显的差别在于：K, B介子混合对应下夸克(s,b)的衰变，但如图-10.6所示，D介子混合对应上夸克charm的衰变，内线包含(d,s,b)下夸克传播子，但没有很重的顶夸克传播子。

对于D^0介子系统，其含时CP破坏被定义为[402]

$$\mathcal{A}_{\rm CP}(f;t) = \frac{\Gamma(D^0(t) \to f) - \Gamma(\bar{D}^0(t) \to f)}{\Gamma(D^0(t) \to f) + \Gamma(\bar{D}^0(t) \to f)}, \tag{10.29}$$

其中f表示CP本征态。在$D^0-\bar{D}^0$混合参数的领头阶，时间积分CP破坏的定义为[402, 403]

$$\mathcal{A}_{\rm CP}(f) \;=\; a^{dir}_{\rm CP}(f)+\frac{<t(f)>}{\tau(D^0)}A_\Gamma(f), \tag{10.30}$$

其中$<t(f)>$表示在重建的事例中$D^0\to f$的平均衰变时间，$a^{dir}_{\rm CP}(f)$表示直接CP破坏，$A_\Gamma(f)$表示在$D^0\to f$和$\bar{D}^0\to f$**有效衰变宽度**$\hat{\Gamma}$之间的不对称性

$$A_\Gamma(f)\equiv\frac{\hat{\Gamma}(D^0\to f)-\hat{\Gamma}(\bar{D}^0\to f)}{\hat{\Gamma}(D^0\to f)+\hat{\Gamma}(\bar{D}^0\to f)}. \tag{10.31}$$

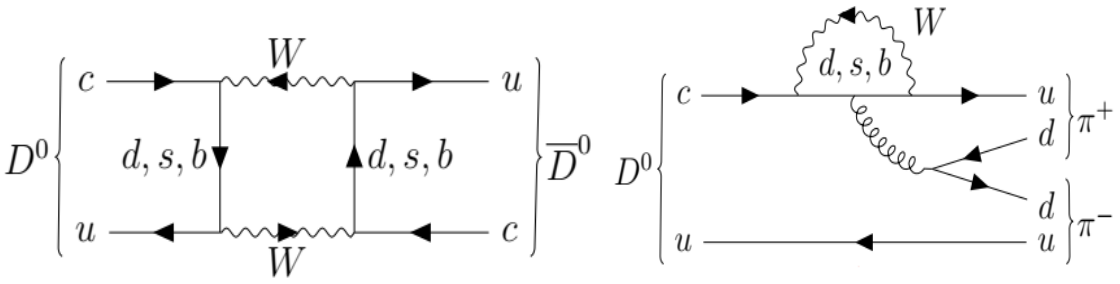


图 10.6: 对$D^0-\bar{D}^0$混合、$D^0\to\pi^+\pi^-$衰变过程有贡献的代表性费曼图。

在标准模型理论框架下，粲强子系统的CP破坏受到强烈的GIM压低[1]和CKM压低：

$$\mathrm{Im}(V_{cn}V^*_{ub}/V_{cs}V^*_{us})\approx-6\times10^{-4}\longrightarrow(x,y,\mathcal{A}_{\rm CP})\sim10^{-3}. \tag{10.32}$$

所以对粲强子系统混合与CP破坏($10^{-3}-10^{-4}$量级) 的实验测量难度很大。一直到2018年，在10^{-3}精度，所有实验均没有发现D介子系统的CP破坏。

另外，由于$m_D\sim1.5$ GeV处在微扰QCD和非微扰QCD的交叉区域，所以D介子系统的混合与衰变过程是非微扰贡献为主的过程，对非微扰QCD贡献的计算难度高、误差大。从另外一个角度来看，因为对D介子系统CP破坏的标准模型贡献很小(tiny)，使其成为探索新物理信号的好过程。到目前为止，对D^0系统的混合和含粲强子的CP破坏，CDF、BaBar、Belle、BESIII和LHCb等实验组对$D^0\to(K\pi,\pi\pi,KK)$等多个衰变道做了实验测量[402, 404–423]。

以$D^0\to(K^+K^-,\pi^+\pi^-)$衰变过程为例，这里的$D^0$介子分别来自于$D^{*+}\to D^0\pi^+$衰变过程和$B\to D^0\mu^-\bar{\nu}_\mu X$半轻子衰变过程，前(后)者称之为$\pi$-tagged ($\mu$-tagged)$D^0$。2011年，LHCb实验组基于0.92 fb^{-1}的实验数据，报告了他们对CP 破坏

$$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}=\mathcal{A}_{\rm CP}(K^+K^-)-\mathcal{A}_{\rm CP}(\pi^+\pi^-)\approx\Delta a^{\rm dir}_{\rm CP}-\frac{\Delta<t>}{\tau(D^0)}A_\Gamma \tag{10.33}$$

的首次实验测量结果[407]

$$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}=-(8.2\pm2.2\pm1.1)\times10^{-3}. \tag{10.34}$$

[1]如图-10.6所示，箱图的夸克传播子为下夸克传播子，$m_d\sim m_s<m_b\ll m^2_{\rm W}$，导致GIM压低。

信号的显示度是3.5σ，被称之为："first evidence of CPV in charm sector"。(10.33)式中的$\Delta a_{\rm CP}^{\rm dir} = a_{\rm CP}^{\rm dir}(K^-K^+) - a_{\rm CP}^{\rm dir}(\pi^-\pi^+)$, $\Delta < t >$ 表示平均衰变时间$< t(K^-K^+) >$和$< t(\pi^-\pi^+) >$之差，A_Γ 已经在(10.31)中定义。

在U-旋对称性极限下，$D^0 \to K^-K^+$和$D^0 \to \pi^-\pi^+$衰变过程的直接CP破坏大小相等，符号相反[424]:

$$\mathcal{A}_{\rm CP}(D^0 \to \pi^+\pi^-) = -\mathcal{A}_{\rm CP}(D^0 \to K^+K^-) \simeq (7.7 \pm 1.5) \times 10^{-4}. \tag{10.35}$$

同时，$A_\Gamma(K^+K^-)$和$A_\Gamma(\pi^+\pi^-)$ 之间的差别一般也可以被忽略。在表-10.2中，我们列出了2011年以来CDF、Belle和LHCb实验组对$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$的实验测量结果。

表 10.2: 2011年以来，LHCb、CDF和Belle实验组对D介子系统的CP破坏$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$的实验测量结果[402, 407–412]。

实验组	年份	数据量	$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$ (10^{-3})	Tag
LHCb	2011	0.92 fb^{-1}	$-8.2 \pm 2.1 \pm 1.1$ [407]	π
CDF	2012	9.7 fb^{-1}	$-6.2 \pm 2.1 \pm 1.0$ [408]	π
Belle	2012	976 fb^{-1}	$-8.7 \pm 4.1 \pm 0.6$ [409]	π
LHCb	2013	1.0 fb^{-1}	$-4.9 \pm 3.0 \pm 1.4$ [410]	μ
LHCb	2014	3 fb^{-1}	$-1.4 \pm 1.6 \pm 0.8$ [411]	μ
LHCb	2016	3 fb^{-1}	$-1.0 \pm 0.8 \pm 0.3$ [412]	π
LHCb	2019	5.9 fb^{-1}	$-1.82 \pm 0.32 \pm 0.09$ [402]	π
LHCb	2019	5.9 fb^{-1}	$-0.9 \pm 0.8 \pm 0.5$ [402]	μ

2019年3月，LHCb基于对RUN2数据(5.9 fb^{-1})的分析，对$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$给出了新的实验测量结果[402]：

$$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP} = \begin{cases} [-1.82 \pm 0.32(stat.) \pm 0.09(syst.)] \times 10^{-3} & \text{for } \pi\text{−tagged } D^0, \\ [-0.9 \pm 0.8(stat.) \pm 0.5(syst.)] \times 10^{-3} & \text{for } \mu\text{−tagged } D^0, \end{cases} \tag{10.36}$$

综合考虑LHCb在2014、2016和2019年的实验测量结果，可以得到以下平均值:

$$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP} = \mathcal{A}_{\rm CP}(K^+K^-) - \mathcal{A}_{\rm CP}(\pi^+\pi^-) = (-1.54 \pm 0.29) \times 10^{-3}. \tag{10.37}$$

LHCb实验组进而宣布他们在5.3σ水平发现了D介子系统的CP破坏[402]。使用[402, 425, 426]

$$\frac{\Delta < t >}{\tau(D^0)} = 0.115 \pm 0.002, \quad A_\Gamma = (-2.8 \pm 2.8) \times 10^{-4} \tag{10.38}$$

作为输入，由(10.33)式可以得到直接CP破坏的值为

$$\Delta a_{\rm CP}^{\rm dir} = (-1.57 \pm 0.29) \times 10^{-3}. \tag{10.39}$$

显然，由于(10.33)式中的第二项非常小($\sim 10^{-5}$)，相对于第一项($\sim 10^{-5}$) 可以忽略，所以$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$和$\Delta a_{\rm CP}^{\rm dir}$的值几乎相同。

在标准模型和新物理模型框架下，许多理论家也对粲强子的混合与衰变做了大量研究[403, 424, 427–437]。仍以$\Delta\mathcal{A}_{\rm CP}$为例，郑海扬、李湘楠与合作者在2012年给出的标准模型理论预言[428, 428, 429]被现在的实验测量结果所证实[402, 435, 437]。对与D介子衰变过程相关的更多的理论计算结果和唯象分析，读者可以看郑海扬等人的论文和会议报告[433–438]。

表 10.3: 基于相关实验测量结果，HFLAV合作组给出的对D^0系统的混合和CP破坏参数的拟合(Fits #4)结果[87]。

参数	平均值	参数	平均值
x	$(0.409^{+0.048}_{-0.049}) \times 10^{-2}$	$\lvert q/p\rvert$	0.995 ± 0.016
y	$(0.615^{+0.056}_{-0.055}) \times 10^{-2}$	ϕ	$-(2.5 \pm 1.2)^0$
$\delta_{K\pi}$	$(7.2^{+7.9}_{-9.2})^0$	$\delta_{K\pi\pi}$	$(23.0^{+21.8}_{-22.9})^0$
R_D	$(0.343 \pm 0.002) \times 10^{-2}$	A_K	$(0.045 \pm 0.137) \times 10^{-2}$
A_D	$-(0.70 \pm 0.36) \times 10^{-2}$	A_π	$-(0.133 \pm 0.137) \times 10^{-2}$

HFLAV合作组还基于各个实验组的D介子混合与衰变相关实验测量数据做了整体拟合。假设D介子系统存在CP破坏，HFLAV合作组定义10个拟合参数(Fits #4)：$x, y, \delta, \delta_{K\pi\pi}, R_D.A_D, A_\pi, A_K, |q/p|$和弱相角$\phi = \arg(q/p)$。其中$\delta$ 和$\delta_{K\pi\pi}$是振幅$\mathcal{A}(\bar{D}^0 \to f)$和$\mathcal{A}(\bar{D}^0 \to f)$ 之间的强相位差，参数(R_D, A_D)的定义[2] 为[87]

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{\Gamma(D^0 \to K^+\pi^-) + \Gamma(\bar{D}^0 \to K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0 \to K^-\pi^+) + \Gamma(\bar{D}^0 \to K^+\pi^-)}, \\ A_D &= \frac{\Gamma(D^0 \to K^+\pi^-) + \Gamma(\bar{D}^0 \to K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0 \to K^+\pi^-) - \Gamma(\bar{D}^0 \to K^-\pi^+)}. \end{aligned} \tag{10.40}$$

HFLAV合作组经过拟合得到的D介子系统的主要混合参数的世界平均值如表-10.3所示[87]。另外，还有许多作者研究了对D介子混合与稀有衰变过程的可能新物理贡献，有兴趣的读者可以阅读参考文献[439–441] 和那里的引文。

10.3 B介子系统的混合与CP破坏

1999年，美国SLAC和日本KEK的两个B介子工厂实验BaBar 和Belle投入运行，B介子物理研究进入黄金时代。2003年，B工厂实验确认发现了B介子系统的直接CP破坏，直

[2] A_π和A_K的稍微复杂的定义可查参考文献[87]。

接促成提出CKM夸克混合矩阵的两位日本物理学家M. Kobayashi和T. Maskawa获得2008年度的诺贝尔物理学奖。在整个运行时间段，BaBar和Belle实验组在$\Upsilon(4S)$能区合计采集了1700兆B介子对的产生和衰变事例，Belle实验组还在$\Upsilon(5S)$能区采集了7.1兆B_S介子对的产生和衰变事例。除了发现B介子系统的CP 破坏，BaBar和Belle 还对B介子系统的各类衰变过程做了系统测量，得到了一批重要结果。

2010年以来，LHC实验(尤其是LHCb合作组)已经采集了大量的各种B介子和b 重子的事例。LHCb合作组重点研究各类B介子和b重子的产生和衰变过程，在重味B物理研究领域具有独特的优势。到目前为止，LHCb实验已经达到或者超过(对大部分衰变道)两个B介子工厂的实验测量精度。对B_S介子的研究，LHCb实验则提供了目前最好的实验测量结果。对B_C介子和含b重子的研究，更是LHCb实验的强项。日本超级B工厂的Belle-II实验组已经在2021年开始物理取数，预计在10年左右的运行期间采集$50ab^{-1}$的$B_{u,d}$介子的产生和衰变事例，数据量将比B介子工厂总数据量高大约两个量级。超级B介子工厂实验是正负电子对撞机实验，与质子-质子对撞的LHC实验有非常不同的特点，所以LHCb和Belle-II的B物理研究形成互补。ATLAS和CMS合作组也有部分成员研究重味物理，可以提供

在本节，我们对B/B_S介子系统的混合与CP破坏的标准模型理论框架做简单介绍[3]。更多的细节，请读者参看相关著作和综述性文献[21, 29–31, 36, 39, 51]。

10.3.1　B介子混合

对中性$B_q^0(q = (d, s))$介子，其味道本征态、CP本征态和质量本征态并不相同。按照PDG的约定[1]，其味道本征态可以简单地写为:

$$B_d^0 = (\bar{b}d), \qquad \bar{B}_d^0 = (b\bar{d}), \qquad B_s^0 = (\bar{b}s), \qquad \bar{B}_s^0 = (b\bar{s})\ . \tag{10.41}$$

它们通过如图-10.7所示的箱图混合。在下面的讨论中，当不明确写出下标时，通常是指包含B_d^0和B_S^0两种情况。

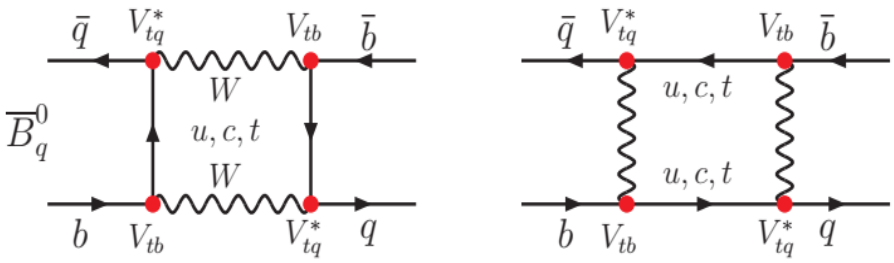


图 10.7:　$B_q^0 - \bar{B}_q^0$ 混合的箱图$(q = (d, s))$。

[3]在叙述中，“b介子”和“b重子”一般是指含b或者$\bar{b}$夸克的介子或者重子和它们的反粒子。

在时刻t, 一个任意的态$\psi(t)$将是B^0和$\bar{B}^0$的线性组合，

$$\psi(t) = a(t)|B^0> + b(t)|\bar{B}^0>, \tag{10.42}$$

并满足含时Schrödinger方程:

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{H}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv (\widehat{\mathbf{M}} - \frac{i}{2}\widehat{\mathbf{\Gamma}})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{10.43}$$

其中$\widehat{\mathbf{M}}$和$\widehat{\mathbf{\Gamma}}$是$2\times 2$的厄米矩阵。CPT不变性要求$M_{11}=M_{22}=m$, $\Gamma_{11}=\Gamma_{22}=\Gamma$。那么，系统的哈密顿量为

$$H = \left(\widehat{\mathbf{M}} - \frac{i}{2}\widehat{\mathbf{\Gamma}}\right) = \begin{pmatrix} m - \frac{i}{2}\Gamma & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* + \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & m - \frac{i}{2}\Gamma \end{pmatrix}. \tag{10.44}$$

非对角的M_{12}和Γ_{12}描述B^0和$\bar{B}^0$之间的混合。将H对角化，得到H的本征值方程，能量本征值和对应的两个质量本征态[39] [4]

$$\begin{aligned} H|B_\pm> &= \lambda_\pm|B_\pm>, \\ |B_\pm> &= p|B^0> \pm q|\bar{B}^0>, \quad \lambda_\pm = H_{11} \pm \sqrt{H_{12}H_{21}} = M_\pm - \frac{i}{2}\Gamma_\pm, \end{aligned} \tag{10.45}$$

其中的混合参数p, q满足归一化关系$|p|^2+|q|^2=1$。我们习惯上取：$|B_{+,-}>=|B_{H,L}>$, $M_{+,-}=M_{H,L}$，$\Gamma_{+,-}=\Gamma_{H,L}$。这里，“H”和“L”分别表示“重”和“轻”。

在标准模型中，$B_q^0-\bar{B}_q^0$混合的强度用质量差ΔM_q来描写。对B介子系统，长距离贡献很小，可微扰计算的箱图贡献起主要作用。另外，对B介子混合，内线夸克为Top的箱图贡献起最主要的作用，其它内线组合情况的箱图贡献很小。对B介子混合情况，有

$$\Delta M_q = M_H^q - M_L^q = 2|M_{12}^{(q)}|\left(1 - \frac{1}{8}\frac{|\Gamma_{12}|^2}{|M_{12}|^2}\sin^2\phi_{12} + \cdots\right), \tag{10.46}$$

$$\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L = 2|\Gamma_{12}|\cos\phi_{12}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{|\Gamma_{12}|^2}{|M_{12}|^2}\sin^2\phi_{12} + \cdots\right), \tag{10.47}$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \frac{2M_{12}^* - i\Gamma_{12}^*}{\Delta M - i\frac{1}{2}\Delta\Gamma} = \frac{M_{12}^*}{|M_{12}|}\left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right)\right], \\ \left|\frac{q}{p}\right| - 1 &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\Gamma_{12}}{M_{12}}\right) \sim 10^{-3}, \end{aligned} \tag{10.48}$$

其中的相位$\phi_{12} = \arg(-M_{12}/\Gamma_{12})$，小量$|\Gamma_{12}/M_{12}|$的高阶小项可以被忽略。非对角质量矩阵元$M_{12}^q$来自于top-箱图贡献的实部，非对角衰变矩阵元$\Gamma_{12}^q$来自于(u,c)-箱图贡献的虚部。

对于B介子混合，由于$\mathrm{Im}(\Gamma_{12}/M_{12}) < \mathcal{O}(10^{-3})$很小，因此在非常好的近似下可以认为比值$q/p$ 是一个纯位相。对箱图进行计算，得到

$$(M_{12}^*)_d \propto (V_{td}V_{tb}^*)^2\,, \qquad (M_{12}^*)_s \propto (V_{ts}V_{tb}^*)^2\,. \tag{10.49}$$

[4]我们使用Buras等人关于q的符号约定[268]。

对CKM矩阵元，取$V_{td}=|V_{td}|\,e^{-i\beta}$, $V_{ts}=-|V_{ts}|\,e^{-i\beta_s}$[其中$\beta_s=\mathcal{O}(10^{-2})$]。那么在非常好的近似下有

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{B_d^0}=e^{-i2\beta},\qquad \left(\frac{q}{p}\right)_{B_S^0}=e^{-i2\beta_s}, \tag{10.50}$$

其中的相角β和β_s即为CKM矩阵元的弱位相。目前的实验测量结果可在“粒子数据表”中直接查到[1]。

在标准模型框架下，ΔM_q可以写为[268]

$$\Delta M_q=\frac{G_{\rm F}^2}{6\pi^2}m_{B_q}(\hat{B}_{B_q}F_{B_q}^2)m_{\rm W}^2S_0(x_t)|V_{tq}^*V_{tb}|^2\hat{\eta}_B, \tag{10.51}$$

其中Inami-Lim函数$S_0(x_t)$ ($x_t=m_t^2/m_W^2$)来自于单圈Box图解析计算，参数$\hat{\eta}_B\approx0.55$吸收了两圈QCD修正。$\hat{B}_q$是重整化群不变的参数，F_{B_q} 是B_q介子的衰变常数，它们与强子矩阵元计算相关：

$$\langle\bar{B}_q|(\bar{b}q)_{V-A}(\bar{b}q)_{V-A}|B_q\rangle=\frac{8}{3}\hat{B}_{B_q}F_{B_q}^2m_{B_q}. \tag{10.52}$$

$\hat{B}_q$和F_{B_q}的不确定性是主要的理论误差来源。

对中性B^0系统，两个混合参数(x,y)的定义和K^0,D^0系统是一样的。但对于B_d^0系统，两个质量本征态的宽度Γ_H和Γ_L几乎相等。对混合参数$y=\Delta\Gamma/(2\Gamma)$的标准模型理论预言为$y_d\leq10^{-2}$。实验上尚未观测到B_d介子寿命差的效应，所以人们通常取近似$y_d=0$。对B_d^0系统，人们起初估计另一个混合参数x_d也很小。但当1987年ARGUS实验组发现大的x_d 时，基于参数x_d和$S_0(m_t^2/m_W^2)$之间的函数依赖关系，人们自然推断出顶夸克应当很重：$m_t\geq80$GeV。这是顶夸克具有重质量的第一个实验信号。对B_d^0系统的主要混合参数，标准模型的理论值和现在的实验测量结果平均值为[87]：

$$\begin{aligned}\Delta M_d^{\rm Exp}&=0.5065\pm0.0019\ \ {\rm ps}^{-1},\quad \Delta M_d^{\rm SM}=0.543\pm0.091\ \ {\rm ps}^{-1},\\ x_d^{\rm Exp}&=0.769\pm0.004,\quad \chi_d^{\rm Exp}=\frac{x_d^2+y_d^2}{2(1+x_d^2)}=0.1858\pm0.0011.\end{aligned} \tag{10.53}$$

对ΔM_d，两者符合的很好。当然，现在的理论结果的误差远远大于实验测量结果的误差。因此，目前的数据还有新物理存在的空间。从圈图计算的角度来看，由于重粒子内线箱图对质量差ΔM_{12}的贡献起主要作用，而现有实验数据对重的新物理粒子的限制较弱，重的新物理粒子存在的可能性比较大，可以引起较强的新物理修正。对Γ_{12}，则是轻粒子内线箱图（例如u,c内线箱图）的贡献起主要作用。

对B_S^0系统的主要混合参数，目前的标准模型理论值和实验测量结果符合的很好，

HFLAV合作组给出的世界平均值为[87, 442]：

$$\Delta\Gamma_s^{\rm SM} = (0.088 \pm 0.020)\ \ {\rm ps}^{-1}, \quad \Delta\Gamma_s^{\rm Exp} = (0.090 \pm 0.005)\ \ {\rm ps}^{-1}. \tag{10.54}$$

$$\Delta M_s^{\rm SM} = (18.3 \pm 2.7)\ \ {\rm ps}^{-1}, \quad \Delta M_s^{\rm Exp} = (17.757 \pm 0.021)\ \ {\rm ps}^{-1}. \tag{10.55}$$

$$\left|\frac{\Delta\Gamma_s}{\Delta M_s}\right|^{\rm SM} = 48.1(1 \pm 0.173) \times 10^{-4}, \quad \left|\frac{\Delta\Gamma_s}{\Delta M_s}\right|^{\rm Exp} = (50.5 \pm 3.1) \times 10^{-4}. \tag{10.56}$$

$$x_s^{\rm Exp} = 26.89 \pm 0.11, \quad \chi_s^{\rm Exp} = 0.499312 \pm 0.000006. \tag{10.57}$$

在比值中，大部分的非微扰量引起的误差被抵消，剩余误差主要来自于QCD修正计算和格点计算。

我们知道，$\Delta\Gamma_d/\Gamma_d = 0.001 \pm 0.010$ 很小[87]，一般可以被忽略。但对比值$\Delta\Gamma_d/\Gamma_d$，标准模型理论值和实验测量值[87, 442] 仍然符合：

$$\left|\frac{\Delta\Gamma_d}{\Gamma_d}\right|^{\rm SM} = 4.94(1 \pm 0.172) \times 10^{-3}, \quad \left|\frac{\Delta\Gamma_d}{\Gamma_d}\right|^{\rm Exp} = 13(1 \pm 10) \times 10^{-3}. \tag{10.58}$$

LHCb实验组通过对$B_S^0 \to D_s^-\pi^+$等多个衰变道的研究，对ΔM_s做了精确测量。2013年以来，LHCb先后报告了4个实验测量结果[444–447]

$$\Delta M_s = 17.768 \pm 0.023(stat) \pm 0.006(syst)\ \ {\rm ps}^{-1}, \ \ {\rm with} \ \ B_S^0 \to D_s^-\pi^+, \tag{10.59}$$

$$\Delta M_s = 17.711^{+0.055}_{-0.057}(stat.) \pm 0.011(syst)\ \ {\rm ps}^{-1}, \ \ {\rm with} \ \ B_S^0 \to J/\psi K^+K^-, \tag{10.60}$$

$$\Delta M_s = 17.694 \pm 0.042\ \ {\rm ps}^{-1}, \ \ {\rm with} \ \ B_S^0 \to J/\psi K^+K^-, \tag{10.61}$$

$$\Delta M_s = 17.757 \pm 0.007(stat) \pm 0.008(syst)\ \ {\rm ps}^{-1}, \ \ {\rm with} \ \ B_S^0 \to D_s^-h^+\pi^+\pi^-. \tag{10.62}$$

2022年，LHCb实验组又使用在RUN-2采集的6fb^{-1}的数据，对$B_S^0/\bar{B}_s^0 \to D_s^-\pi^+$事例做了对时间分布的分析，给出了迄今为止对$\Delta M_s$最精确的单个实验测量值[443]；

$$\Delta M_s|_{\rm LHCb} = 17.7683 \pm 0.0051(stat) \pm 0.0032(syst)\ \ {\rm ps}^{-1}. \tag{10.63}$$

从图-10.8的曲线的变化可以直观地看出$B_s^0 - \overline{B}_s^0$之间由于大的混合导致的$B_S^0 \to D_s^-\pi^+$衰变事例[5]时间分布函数的快速振荡，振荡波形非常清晰、美观！

对LHCb的上述5个实验测量结果做平均，可得到更精确的结果[443]：

$$\Delta M_s|_{\rm LHCb} = 17.7656 \pm 0.0057\ \ {\rm ps}^{-1}. \tag{10.64}$$

这个结果已经优于目前最新的基于Lattice-QCD和QCDSR的标准模型理论预言值[448]

$$\Delta M_s|_{\rm SM} = 18.4^{+0.7}_{-1.2}\ \ {\rm ps}^{-1}. \tag{10.65}$$

[5]LHCb实验组对D_s^-的5种衰变模式采用了不同的标定方法：混合标定，或者不混合标定。

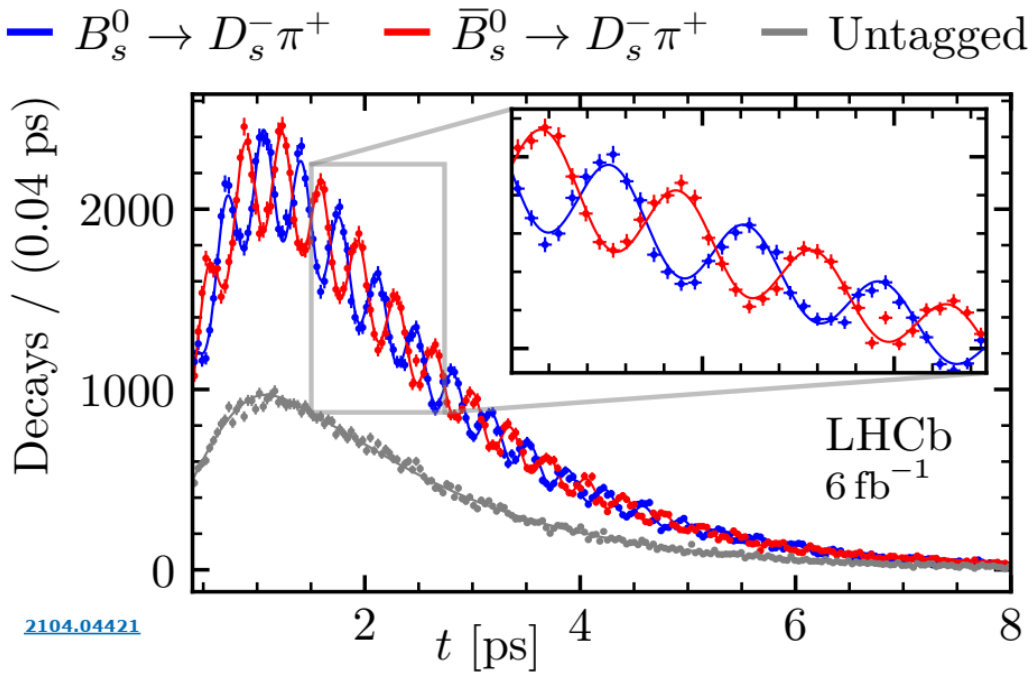


图 10.8: LHCb实验组对采用不同方法标定的$B_S^0/\bar{B}_s^0 \to D_s^-\pi^+$衰变事例的含时分布函数的实验测量结果[443]。

10.3.2　直接CP破坏

对B/B_S介子系统，存在三种类型的CP破坏：(a) B介子衰变中的CP破坏: 直接(direct) CP破坏；(b) 中性B介子混合产生的CP破坏：间接(indirect) CP破坏；　(c) 由混合与衰变的干涉引起的CP破坏: 混合型CP破坏。

由于K介子系统的直接CP破坏很小：$\epsilon' \sim 10^{-6}$，一直到1999年才被实验证实。K介子由于比较轻，只有几个主要的衰变道。但B介子比较重，有很多衰变道。由此所带来的好处是有许多道可供选择，不利因素是大多数道特别是物理上感兴趣的道的衰变分支比很小。为了研究B介子系统的CP破坏，高能物理学界通过广泛的国际合作先后建造了高亮度的B介子工厂(PEP-II, KEK-B)和超级B介子工厂(Super-KEKB)。在LHCb实验中，同样可以对各种含b强子的产生和衰变过程做高精度测量和研究。

由于带电B介子的衰变没有混合，可以通过对带电B介子衰变过程的研究来很好地分离第一类CP破坏：直接CP破坏$\mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay}$。当然，第一类CP破坏也可以通过对中性$B$介子衰变过程来测量。相关的$\mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay}$的定义为

$$\mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay} = \frac{\Gamma(B\to f)-\Gamma(\bar{B}\to\bar{f})}{\Gamma(B\to f)+\Gamma(\bar{B}\to\bar{f})} = \frac{1-\left|\bar{A}/A\right|^2}{1+\left|\bar{A}/A\right|^2}, \tag{10.66}$$

其中

$$A = \langle f|\mathcal{H}^{\rm weak}|B\rangle, \qquad \bar{A} = \langle \bar{f}|\mathcal{H}^{\rm weak}|\bar{B}\rangle\ . \tag{10.67}$$

即

$$\left|\frac{\bar{A}}{A}\right| \neq 1 \Rightarrow direct\ \ CP\ \ violation. \tag{10.68}$$

假设一个衰变过程只包含两个费曼图的贡献A_1和A_2，那么可以把衰变振幅A和其CP共轭$\bar{A}$写为

$$A = \sum_{i=1,2} A_i e^{i(\delta_i+\phi_i)}, \qquad \bar{A} = \sum_{i=1,2} A_i e^{i(\delta_i-\phi_i)}, \tag{10.69}$$

其中A_i表示分振幅的大小是实的，那么我们有

$$\mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay} = \frac{-2A_1A_2\sin(\delta_1-\delta_2)\sin(\phi_1-\phi_2)}{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\delta_1-\delta_2)\cos(\phi_1-\phi_2)}\,. \tag{10.70}$$

由于强相互作用中CP是守恒的，弱相互作用中CP是破坏的，所以对A和$\bar{A}$，强位相δ_i不改变符号，但弱位相ϕ_i改变符号。要得到非零的$\mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay}$，至少应存在两种具有不同弱位相($\phi_i$)和强位相($\delta_i$)的贡献，二者缺一不可。比如说有两个树图，两个企鹅图，或一个树图与一个企鹅图。对于b介子的纯轻子衰变和半轻子衰变，衰变振幅主要由一个图决定，直接CP破坏一般很小，很难观测到。象$B \to K\pi$等两体强子衰变道，它通常包含树图和企鹅图的贡献，有两个不同的弱位相，通过夸克或强子的再散射、末态相互作用或湮灭图可产生强位相差。由于量子场论只能利用微扰论来处理计算物理观测量，对于包含非微扰贡献的强子矩阵元$\langle f|\mathcal{O}_i|B\rangle$计算必须采用因子化方法，以分离出可以计算的微扰部分，达到理论预言一些过程的目的。近年来，人们发展了三种主要的因子化方法：M. Beneke等人的QCD因子化方法[449]，李湘楠等人的PQCD因子化方法[450, 451]和Bauer等人的SCET因子化方法[452, 453]。不同的因子化方法，其强位相来源、大小均不同。它们给出的不同过程的分支比大多接近，但是CP破坏参数预言则有较大的不同。

10.3.3 间接CP破坏

首先考虑由中性B/B_S介子混合产生的间接(indirect)CP破坏。 对B_d^0 系统，由于其质量本征态的寿命基本相等，实验上不能分离出B_L和B_H，只能通过特定的衰变末态来标定B_0和$\bar{B}_0$介子。所以不能象K介子系统那样，通过研究质量本征态$K_L \to 2\pi$衰变道来测量混合中的CP破坏，而只能通过对中性B介子的半轻或双轻子衰变过程的研究来分离间接CP破坏。这时，CP不对称性$a_{SL}(B)$定义为:

$$\begin{aligned} a_{\rm SL}^q(B_q^0) &= \frac{\Gamma(\bar{B}_q(t)\to f)-\Gamma(B_q(t)\to \bar{f})}{\Gamma(\bar{B}_q(t)\to f)+\Gamma(B_q(t)\to \bar{f})} = \frac{1-|q/p|^4}{1+|q/p|^4} \\ &\approx 2\left(1-|\frac{q}{p}|\right) \approx \frac{\Delta\Gamma}{\Delta M}\cdot\tan\phi_{12}, \end{aligned} \tag{10.71}$$

其中$B_q(t)$表示t时刻的中性B_q介子波函数，$f = l^+\nu_l X$表示“flavor-specific”的半轻子末态[6]。参数ϕ_{12} 描写Γ_{12}和M_{12}的相位差。虽然描写$B^0-\bar{B}^0$混合的参数q/p依赖于相位的约

[6] “Flavor-specific”的意思是指只有$B_q \to f$的衰变是允许的，而$\bar{B}_q \to f$的衰变只能通过混合进行：$\bar{B}_q \to B_q \to f$。

定，但其模$|q/p|$却是物理可观测量，

$$\left|\frac{q}{p}\right| \neq 1 \tag{10.72}$$

导致间接CP破坏。在B介子系统中，由于M_{12} 尤其是Γ_{12}有较大的强子矩阵元不确定性，不可能由该类CP破坏中精确地抽出CP破坏相因子。另外，在标准模型下，由于q/p基本上是一个纯相因子，参数$a_{\rm SL}(B)$很小[87, 442, 454]:

$$a_{\rm SL}^{\rm SM}(B_d^0) = -(4.7 \pm 0.6) \times 10^{-4}, \quad a_{\rm SL}^{\rm SM}(B_S^0) = (2.22 \pm 0.27) \times 10^{-5}. \tag{10.73}$$

显然，这两个参数的模均小于10^{-3}，对他们进行实验测量的难度很高。但如果存在新物理贡献，参数a_{SL}^q就可以比较大，有可能被观测到。所以此类衰变过程仍然受到重视。

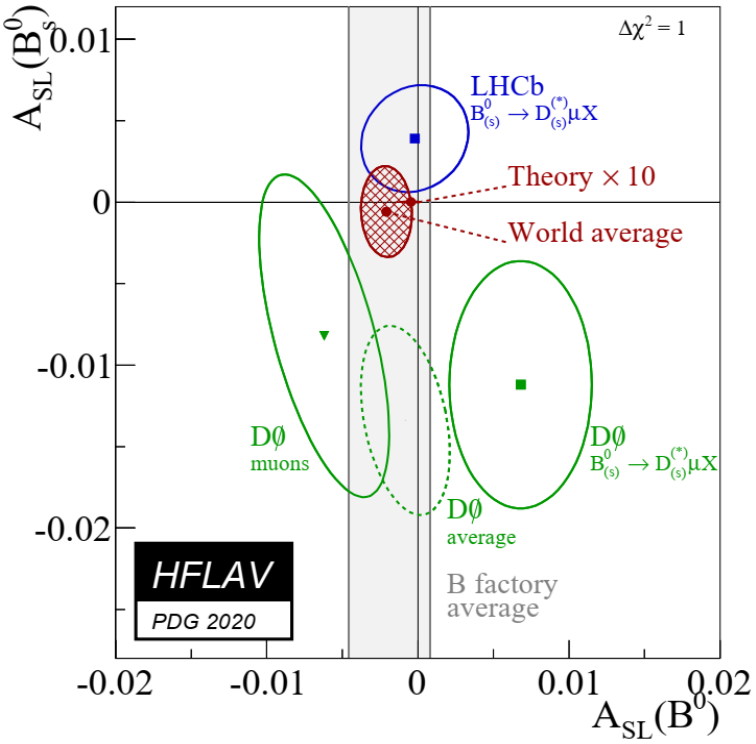


图 10.9: B介子工厂实验，D0和LHCb实验组对参数$a_{\rm SL}^d$ (横坐标) 和$a_{\rm SL}^s$ (纵坐标)的实验测量结果[87, 455, 456]。标准模型的理论预言值很接近(0,0)点，误差棒已经放大十倍。

如图-10.9所示，D0实验组、B介子工厂实验和LHCb合作组都对参数$a_{\rm SL}^d$ 和$a_{\rm SL}^s$ 做了实验测量。显然，这些实验测量结果的误差都比较大，其中D0的结果和标准模型理论预言有$\sim 3\sigma$的偏离。BaBar实验和LHCb实验的测量结果和标准模型一致。HFLAV合作组给出的平均值为[87]

$$a_{\rm SL}^d = -(2.1 \pm 1.7) \times 10^{-3}, \quad a_{\rm SL}^s = -(0.6 \pm 2.8) \times 10^{-3}. \tag{10.74}$$

10.3.4 混合型CP破坏

最后，我们通过对中性B介子衰变过程的研究来讨论第三类CP破坏: 由混合与衰变的干涉引起的CP破坏。对B_d^0介子的衰变过程，可以取近似$\Delta\Gamma_d = 0$。对B_s^0介子的衰变过程，一般需要保留$\Delta\Gamma_s$。最有意思的两体强子衰变过程是末态为CP 本征态的衰变道。对这种类型的衰变，其CP破坏通常比较大，可以通过对这些道的研究抽取幺正三角形的相角。由于存在$B_q^0 - \bar{B}_q^0$混合，初始$(t = 0)$时纯的B_q^0介子可以通过两个不同的过程衰变到末态f_{CP}

$$\begin{aligned} B_q^0(0) &\longrightarrow B_q^0(t) \longrightarrow f_{CP}\,, \\ B^0(0) &\longrightarrow \bar{B}^0(t) \longrightarrow f_{CP}\,. \end{aligned} \tag{10.75}$$

这两个衰变过程发生干涉，产生第三类CP破坏。

当末态是CP本征态$(f = f_{CP})$时，对B_d^0介子衰变和B_S^0介子衰变过程，时间相关的CP不对称性$a_{CP}(t)$分别被定义为[1]

$$\mathcal{A}(t)|_{B^0} = \frac{\Gamma(\bar{B}^0(t) \to f) - \Gamma(B^0(t) \to f)}{\Gamma(\bar{B}^0(t) \to f) + \Gamma(B^0(t) \to f)} = \mathcal{S}_f \sin(\Delta M_d t) - \mathcal{C}_f \cos(\Delta M_d t), \tag{10.76}$$

$$\mathcal{A}(t)|_{B_S^0} = \frac{\Gamma(\bar{B}_s^0(t) \to f) - \Gamma(B_s^0(t) \to f)}{\Gamma(\bar{B}_s^0(t) \to f) + \Gamma(B_s^0(t) \to f)} = \frac{\mathcal{S}_f \sin(\Delta M_s\, t) - \mathcal{C}_f \cos(\Delta M_s\, t)}{\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma_s}{2}t\right) + \mathcal{H}_f \sinh\left(\frac{\Delta\Gamma_s}{2}t\right)}, \tag{10.77}$$

其中的ΔM_q 和$\Delta\Gamma_q$分别表示B_q^0介子的两个质量本征态的质量差和宽度差，已经在前节定义。上式中的直接CP破坏$\mathcal{C}_f = \mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm decay}$，混合引起的CP破坏$\mathcal{S}_f = \mathcal{A}_{\rm CP}^{\rm mix}$ 和第三个CP破坏量$\mathcal{H}_f$ 的定义分别为[1]:

$$\mathcal{C}_f = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2}, \quad \mathcal{S}_f = \frac{2{\rm Im}\lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2}, \quad \mathcal{H}_f = \frac{2{\rm Re}\lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2}, \tag{10.78}$$

其中的三个CP破坏物理量满足归一化关系: $|\mathcal{A}_f|^2 + |\mathcal{S}_f|^2 + |\mathcal{H}_f|^2 = 1$，CP破坏参数$\lambda$ 包含了计算(10.78)式的不对称性所需的所有信息，其定义为

$$\lambda_f = \frac{q}{p}\frac{\bar{A}_f}{A_f} = \eta_f\, e^{i\phi}\frac{A(\bar{B}_q \to f)}{A(B_q \to f)} \tag{10.79}$$

其中$\eta_f = \pm 1$来自于定义$CP|f_{CP}>= \eta_f|f_{CP}>$，弱相角$\phi_d = -2\beta$，$\phi_s = -2\beta_s$。

一般地说，对一个衰变过程的振幅$A(B_q^0 \to f)$，将有多个部分同时给出贡献。这些不同的部分可以是树图、QCD企鹅图或电弱企鹅图，它们一般具有不同的强和弱位相。如果对于给定的一个衰变振幅，这些部分的贡献的大小差不多，那么由于强子矩阵元计算比较大的不确定性，就难于精确地抽出CP破坏相因子。

10.3.5 相位ϕ_s

在标准模型框架下，可以通过对与$b \to c\bar{c}s$跃迁相关的B_S^0介子衰变过程的研究来精确测量相位ϕ_s。在许多B_S^0介子的相关衰变道中，$B_S^0 \to J/\psi\phi \to (\mu^+\mu^-) + (KK)$ 衰变过程是

测量ϕ_s 的“黄金衰变道”。基于$B_s^0-\overline{B}_s^0$混合，ϕ_s被定义为相位差

$$\phi_s=\arg\left(\frac{M_{12}^s}{\Gamma_{12}^s}\right)=\phi_{\rm mix}-2\phi_D, \tag{10.80}$$

其中的M_{12}^s和Γ_{12}^s是描写$B_s^0-\overline{B}_s^0$混合的哈密顿量的非对角矩阵元，已经在第10.3.1节定义。如图-10.10c所示，$\phi_{\rm mix}$表示由于混合产生的弱位相，ϕ_D表示$B_S^0\to f_{CP}$直接衰变振幅的弱位相。

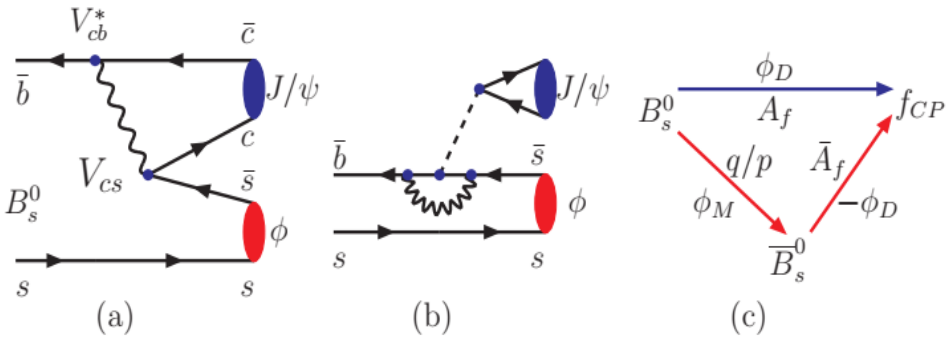


图 10.10:　(a,b) 对$B_S^0\to J/\psi\phi$衰变过程的树图贡献和色单态中性流(虚线)企鹅图贡献；(c) 示意图：$B_S^0\to f_{CP}$的直接衰变和通过混合导致的的衰变。

在本节，我们讨论LHCb，ATLAS和CMS合作组对相位ϕ_s 的实验测量结果[389, 446, 456–461]。在标准模型下，如图-10.10所示，对$B_S^0\to J/\psi\phi$衰变过程的贡献分别来自于树图贡献和企鹅图贡献，还有图-10.10没有包含的交换图贡献和企鹅湮灭图贡献[461]。计算表明，树图(T) 贡献是最主要的，企鹅图(P) 贡献远远小于树图贡献，交换图(E)贡献和企鹅湮灭图(PA)贡献又远小于企鹅图贡献。当忽略后三种很小的贡献时，对ϕ_s的标准模型理论值可以定义为[387]：

$$\phi_s|^{\rm SM} \;=\; -2\beta_s+\delta\phi_s^{\rm P+E+PA}\simeq -2\beta_s. \tag{10.81}$$

这里的β_s就是(10.5)式所定义的标准模型的β_s。可以看出，对ϕ_s的标准模型理论预言值本身很小：$\sim -2^\circ$，其理论误差也很小：$\sim 2\%$。所以ϕ_s对可能的新物理贡献非常敏感。

为了测量相位ϕ_s，LHCb、ATLAS和CMS等实验组主要考虑了B_S^0介子的如下衰变链

$$B_S^0/\overline{B}_s^0\to J/\psi\phi,\quad J/\psi\to(\mu^+\mu^-,e^+e^-),\phi\to(K^+K^-,\pi^+\pi^-). \tag{10.82}$$

他们通过对时间相关的末态粒子角分布的拟合分析抽取ϕ_s和其它可观测物理量(Γ_s等) 的数值[446, 457–459]：

$$\text{ATLAS}: \quad \phi_s=-0.087\pm0.036\pm0.021[rad],\ \text{with data } 99.7\ \text{fb}^{-1}, \tag{10.83}$$

$$\text{CMS}: \quad \phi_s=-0.021\pm0.044\pm0.010[rad],\ \text{with data } 116.1\ \text{fb}^{-1}, \tag{10.84}$$

$$\text{LHCb}: \quad \phi_s=-0.00\pm0.28\pm0.07[rad],\ \text{for } J/\psi\to e^+e^- \text{ mode}, \tag{10.85}$$

$$\text{LHCb}: \quad \phi_s=-0.042\pm0.025[rad],\ \text{with RUN1}+\text{RUN2 data}, \tag{10.86}$$

其中(10.83)式的结果是ATLAS合作组对$B_S^0 \to J/\psi\phi$衰变过程全部数据$(4.9 + 14.3 + 80.5\ \text{fb}^{-1})$的综合分析结果[87, 458]。(10.84)式的结果是CMS合作组对其全部RUN-1和RUN-2数据$(19.7 + 96.4\ \text{fb}^{-1})$的综合分析结果[459]。(10.85)式的结果表示LHCb合作组对$B_S^0 \to J/\psi(\to e^+e^-)\phi(\to K^+K^-)$衰变过程的分析结果[457]。(10.86)式的结果表示LHCb合作组对除了$B_S^0 \to J/\psi(\to e^+e^-)\phi(\to K^+K^-)$衰变过程以外，所有其他$B_S^0$衰变道的综合分析结果[446]。从数据分析角度，LHCb得到的两组结果的系统误差是相互独立的，可以相互验证。

如图-10.11所示，HFLAV合作组基于全部已有实验数据[7] 得到的对$\phi_s - \Delta\Gamma_s$的世界平均值为[87, 387]

$$\phi_s = -0.050 \pm 0.019(rad), \quad \Delta\Gamma_s = 0.082 \pm 0.005\ \text{ps}^{-1}. \tag{10.87}$$

由于B_S^0衰变事例的迅速增加，对ϕ_s的实验测量精度也将迅速提高。目前的实验测量结果和标准模型理论预言值符合的很好[387, 462]

$$\phi_s|^{\text{CKMfitter}} = -0.03696^{+0.00072}_{-0.00084}(rad), \qquad \Delta\Gamma_s|^{\text{SM}} = 0.091 \pm 0.013\ \text{ps}^{-1}. \tag{10.88}$$

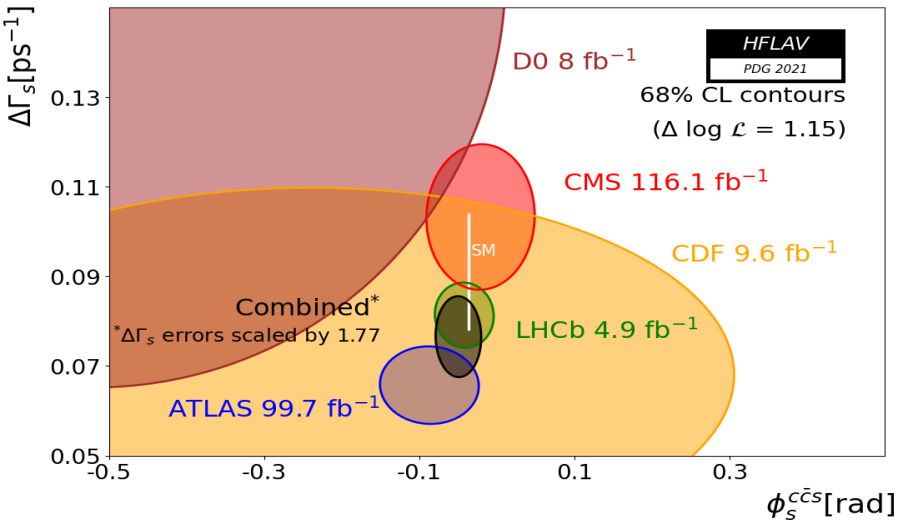


图 10.11: 各个实验组给出的对$\phi_s - \Delta\Gamma_s$的限制。其中的小黑椭圆表示HFLAV合作组给出的综合限制[87]。

10.4 B介子典型衰变过程

10.4.1 低能有效哈密顿量方法

对B介子混合与各种衰变过程的计算，目前人们已经建立了一套“低能有效哈密顿量方法”[268]。其核心是算符乘积展开、威尔逊系数(Wilson coefficients)的计算与重整化群演化，以及强子矩阵元的计算。在标准模型理论框架下，大体上分为以下三个步骤[39]：

[7]不包含最新的LHCb对$B_S^0 \to J/\psi(e^+e^-)\phi$衰变道的实验测量结果[457]。

1. 首先利用算符乘积展开方法，把有效哈密顿量$\mathcal{H}_{eff}$展开成定域四夸克算符和磁矩算符的线性迭加。在$m_{\rm W}$标度计算单圈费曼图，积分掉很重的规范玻色子$W^{\pm}, Z^0$和顶夸克，得到完整振幅$\mathcal{A}_{full}$。按照五夸克有效理论计算衰变振幅到所要求的阶得到有效理论的振幅$\mathcal{A}_{eff}$，并对场量等做重整化，消除发散。通过匹配(matching) 得到$m_{\rm W}$标度的威尔逊系数$C(m_{\rm W})$。

2. 利用重整化常数确定算符的反常量纲。求解威尔逊系数所满足的重整化群方程，将$m_{\rm W}$标度的威尔逊系数演化到低能标$\mu \sim m_b$:

$$\mathbf{C}(\mu) = \mathbf{U}(\mu, m_{\rm W})\mathbf{C}(m_{\rm W}). \tag{10.89}$$

   其中$\mathbf{C}(\mu)$和$\mathbf{C}(m_{\rm W})$是“10×1”的列矢量，$\mathbf{U}(\mu, m_{\rm W})$是“$10 \times 10$”的演化矩阵[268]。

3. 采用因子化方法，计算强子矩阵元$< f|O_i|B_q >$，得到衰变振幅，进而计算衰变分支比、CP破坏和角分布等可观测物理量，给出标准模型理论预言。

以$B \to M_1M_2$两体强子非粲衰变过程为例，在考虑了树图和单圈图QCD和电弱贡献以后，其夸克层次的衰变过程是$b \to qV^* \to qq'\bar{q}'(q^{(\prime)} = (u, d, s)\ )$，弱作用低能有效哈密顿量$\mathcal{H}_{eff}$的表达式可以写为[268]：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{eff} \;=\; & \frac{G_F}{\sqrt{2}}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2} C_i(\mu)\left[V_{ub}V_{uq}^* O_i^u(\mu) + V_{cb}V_{cq}^* O_i^c(\mu)\right] - V_{tb}V_{tq}^* \sum_{j=3}^{10} C_j(\mu)O_j(\mu) \\ & -V_{tb}V_{tq}^*\left[C_{7\gamma}(\mu)O_{7\gamma}(\mu) + C_{8g}O_{8g}(\mu)\right]\Bigg\} + \text{H.c.},\end{aligned} \tag{10.90}$$

其中$q = d, s$, $G_F = 1.16639 \times 10^{-5} GeV^{-2}$ 是费米常数。$O_i(i = 1, \cdots, 10)$是定域4-夸克算符，$O_{7\gamma}$和O_{8g} 是电磁偶和色磁偶算符，$C_i(\mu)$是经过重整化群演化以后得到的在能标μ处附近的威尔逊系数。在标准模型理论框架下，可以写出$B \to M_1M_2$两体强子非粲衰变过程的振幅：

$$\mathcal{A}(B \to M_1M_2) =< M_1M_2|\mathcal{H}_{eff}|B >= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_i V_i\, C_i(\mu)\langle M_1M_2|O_i(\mu)|B\rangle. \tag{10.91}$$

其中V_i是与具体衰变过程相对应的CKM矩阵元，$M_{1,2}$是两个末态强子，$C_i(\mu)$是威尔逊系数，它们的表达式（在NLO阶）是已知的[268]。这样，$B \to M_1M_2$衰变过程的衰变振幅的计算就可以归结为哈密顿量中有效算符强子矩阵元$\langle M_1M_2|O_i(\mu)|B\rangle$的计算。对B介子衰变过程, 能标$\mu_b \approx m_b$ 处在微扰和非微扰的交叉地带，给B物理的研究带来很大的困难。到目前为止，我们仍然没有找到一种完全自洽的方法，从QCD第一原理出发去计算强子矩阵元$\langle M_1M_2|O_i(\mu)|B\rangle$。其内在原因是QCD的色禁闭-强子化过程-是非微扰的。我们不得不采用因子化方法来做计算。常用的三种基于QCD动力学的因子化方法已经在前面提到。当然还有其它的方法，例如基于$SU(3)_F$味道对称性的方法。但这些方法缺乏动力学

基础，误差不易控制。在本节，我们不对具体过程做解析计算，只介绍一些唯象上感兴趣的几个典型衰变道的标准模型理论预言和实验测量结果。对具体解析计算感兴趣的读者可以参看相关专著[36, 39, 51]。

10.4.2 B介子两体纯轻子衰变过程

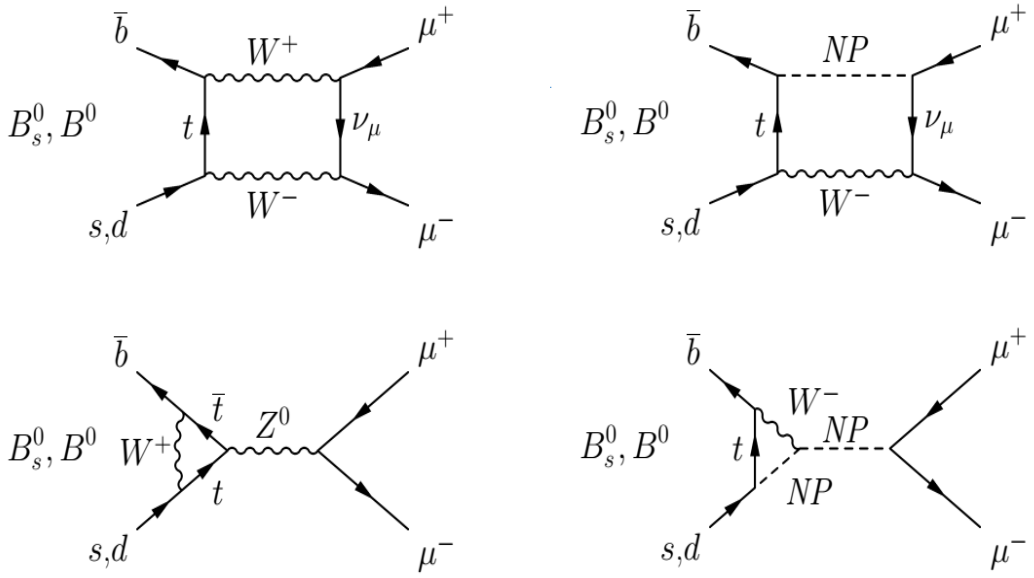


图 10.12: 在标准模型(左侧两个费曼图)和新物理模型(右侧两个费曼图)框架下对$B^0_{s,d} \to \mu^+\mu^-$纯轻子衰变过程有贡献的典型单圈费曼图。

在图-10.12中，我们给出了在标准模型和新物理模型框架下对$B^0_{s,d} \to \mu^+\mu^-$纯轻子衰变过程有贡献的典型单圈费曼图。考虑这些费曼图的可能贡献，经过计算可以得到$B^0_q \to \mu^+\mu^-$的衰变分支比的表达式:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(B^0_q \to \mu^+\mu^-) &= \frac{G_F^2\alpha^2}{64\pi^3} f_{B_q}^2 \tau_{B_q} m_{B_q}^3 |V_{tb}V_{tq}^*|^2 \sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{m_{B_q}^2}} \\ &\times \left\{ \left(1-\frac{4m_\mu^2}{m_{B_q}^2}\right) |C_S - C_S'|^2 + \left| (C_P - C_P') + 2\frac{m_\mu}{m_{B_q}} (C_{10} - C_{10}') \right|^2 \right\} ,\end{aligned} \tag{10.92}$$

其中$q = s, d$，$C_{S,P}$和C_{10}表示标准模型的威尔逊系数。在标准模型下，$C_{S,P}$很小，可以忽略。威尔逊系数C_{10}其主要作用。$C'_{S,P}$和C'_{10}表示对威尔逊系数的新物理修正。新物理粒子可以通过圈图在m_W能标处对威尔逊系数给出修正，进而影响对衰变分支比的理论预言。

如图-10.12所示，在标准模型下的纯轻子衰变过程$B^0_{s,d} \to \mu^+\mu^-$ 是纯圈图过程：包含电弱“企鹅图”贡献和“箱图”贡献，所以他们是被强烈压低的稀有衰变过程，对标量算符和赝标量算符的贡献敏感，对可能的新物理贡献敏感。在新物理模型下，新粒子导致的圈图贡献可以对分支比给出大的增强。例如，在双希格斯模型(2HDM) 和最小超对称模型

框架下，新物理对分支比的贡献就正比于$\tan^6(\beta)/m_A^4$，对大的$\tan\beta \sim 50$ 取值，新物理增强可以达到1-2个量级。反过来说，对这些衰变道分支比的精确测量，可以对任何新物理模型的参数空间给出严格的限制。

对$B_q^0 \to \mu^+\mu^-$的衰变分支比，论文[463]的作者使用计算程序"Flavio"得到的标准模型理论预言值为[8]:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(B_S^0 \to \mu^+\mu^-)^{\rm SM} &= (3.67 \pm 0.15) \times 10^{-9},\\ \mathcal{B}(B^0 \to \mu^+\mu^-)^{\rm SM} &= (1.14 \pm 0.12) \times 10^{-10},\end{aligned} \tag{10.93}$$

主要的理论误差来源于B介子衰变常数f_B和f_{B_S}的不确定性。为了有效降低输入参数误差的传递带来的影响，人们通常定义依赖同类输入参数的物理量的比值，例如可以定义分支比比值R_μ [21, 465]：

$$R_\mu = \frac{\mathcal{B}(B_S^0 \to \mu^+\mu^-)}{\mathcal{B}(B^0 \to \mu^+\mu^-)} = \frac{\tau_{B^0}}{\tau_{B_S^0}} \cdot \frac{\hat{B}_d}{\hat{B}_s}\frac{\Delta M_s}{\Delta M_d} = (34.89 \pm 0.35), \tag{10.94}$$

其中$\hat{B}_d/\hat{B}_s = 1.00(1)$来自于格点QCD和QCD求和规则，比值$R_\mu$ 的理论误差只有大约1%。这个"Golden-relation"可以帮助我们检验对稀有衰变过程$B_{s,d} \to \mu^+\mu^-$和质量差$\Delta M_{s,d}$的大小约为20%的新物理效应，其对新物理的灵敏度和稀有衰变道$K \to \pi^+\nu\bar{\nu}$的灵敏度相近。

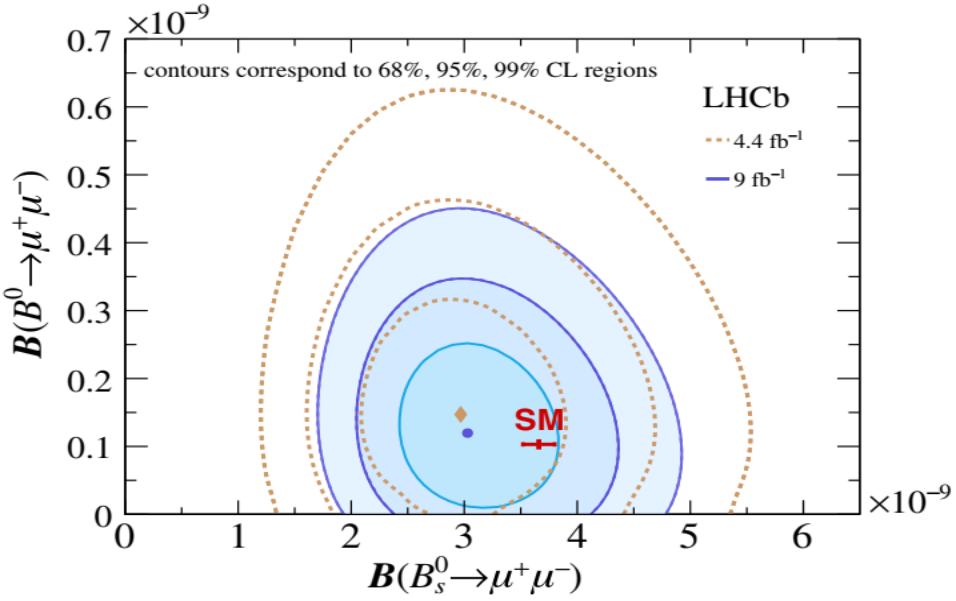


图 10.13: LHCb实验组给出的对$B_{s,d}^0 \to \mu^+\mu^-$衰变分支比的二维剖面似然图[470]。

ATLAS，CMS和LHCb实验组对$B_{s,d} \to \mu^+\mu^-$稀有衰变过程的分支比做了测量[9] [466–470]。由于B^0和B_S^0质量接近，对他们衰变分支比的实验测量是关联的，给出的实验测量

[8]数值计算中使用的最主要的输入参数取值为：CKM 矩阵元：$V_{cb} = (42.21\pm0.78)\times10^{-3}$, $V_{ub} = (3.73\pm0.14)\times10^{-3}$；衰变常数[464]：$f_{B_S} = 230.3 \pm 1.3$ MeV, $f_B = 190.0 \pm 1.3$ MeV.

[9]由于探测器优化设计和触发判据设计的不同，对所研究的$B_q^0 \to \mu^+\mu^-$纯轻子衰变过程，LHCb的$1fb^{-1}$的数据相当于ATLAS/CMS实验组$\sim 10fb^{-1}$的数据。

值是二维似然(two-dimensional likelyhoods) 结果。近30年来的高能物理实验的测量精度取得了巨大的进展。对非常稀有的B介子纯轻子衰变分支比的测量范围提高了6个量级。

图-10.13表示LHCb实验组基于不同数据量(4.4 fb^{-1}, 9 fb^{-1}) 给出的对$B^0_{s,d} \to \mu^+\mu^-$衰变分支比的二维剖面似然图[470]。图中圆点表示实验测量中心值，误差棒表示标准模型理论预言值，两组各三条似然等值线分别对应68%, 95% 和99%置信度的取值区域，数值结果为：

$$\mathcal{B}(B^0_S \to \mu^+\mu^-)^{\rm exp} = (3.09^{+0.46}_{-0.43}(stat.)^{+0.15}_{-0.11}(syst.)) \times 10^{-9}, \tag{10.95}$$

$$\mathcal{B}(B^0 \to \mu^+\mu^-)^{\rm exp} = \begin{cases} \left(1.20^{+0.83}_{-0.74}(stat.) \pm 0.14(syst.)\right) \times 10^{-10}, \\ < 2.6 \times 10^{-10} \text{ at } 95\% \text{ C.L.}. \end{cases} \tag{10.96}$$

由图-10.13可以直观看出，LHCb实验测量结果与标准模型理论预言值在一个标准偏差范围内符合。

对纯轻子衰变过程$B_{s,d} \to \tau^+\tau^-, e^+e^-$，由标准模型关系式[21]

$$\frac{\mathcal{B}(B^0_q \to l^+l^-)}{\mathcal{B}(B^0_q \to \mu^+\mu^-)} = \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{m^2_{B_q}}} \cdot \frac{m_l^2}{m_\mu^2} \tag{10.97}$$

可以导出标准模型理论预言值：

$$\mathcal{B}(B^0_S \to \tau^+\tau^-)^{\rm SM} = 7.69 \times 10^{-7}, \quad \mathcal{B}(B^0 \to \tau^+\tau^-)^{\rm SM} = 7.59 \times 10^{-7}, \tag{10.98}$$

$$\mathcal{B}(B^0_{s,d} \to e^+e^-)^{\rm SM} \approx 8.50 \times 10^{-14}. \tag{10.99}$$

目前的实验上限分别为[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B^0_S \to \tau^+\tau^-)^{\rm exp} &< 6.8 \times 10^{-3}, \text{ at } 95\% \text{ C.L.}, \\ \mathcal{B}(B^0 \to \tau^+\tau^-)^{\rm exp} &< 2.1 \times 10^{-3}, \text{ at } 95\% \text{ C.L.}, \end{aligned} \tag{10.100}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B^0_S \to e^+e^-)^{\rm exp} &< 9.4 \times 10^{-9}, \text{ at } 90\% \text{ C.L.}; \\ \mathcal{B}(B^0 \to e^+e^-)^{\rm exp} &< 2.5 \times 10^{-9}, \text{ at } 90\% \text{ C.L.}. \end{aligned} \tag{10.101}$$

纯轻子衰变过程$B^+ \to \tau^+\nu_\tau$是一个$B^+ \to W^* \to \tau^+\nu_\tau$树图为主的湮灭图过程，其衰变分支比的标准模型表达式为[21]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B^+ \to \tau^+\nu_\tau)^{\rm SM} &= \frac{G_F^2 m_{B^+} m_\tau^2}{8\pi}\left(1 - \frac{m_\tau^2}{m^2_{B^+}}\right)^2 f^2_{B^+}\tau_{B^+}|V_{ub}|^2 \\ &= (0.87 \pm 0.01)\left|\frac{V_{ub}}{3.7 \times 10^{-3}}\right|^2 \times 10^{-4}. \end{aligned} \tag{10.102}$$

基于BaBar和Belle实验测量结果的世界平均值为[2]

$$\mathcal{B}(B^+ \to \tau^+\nu_\tau)^{\rm exp} = (1.09 \pm 0.24) \times 10^{-4}. \tag{10.103}$$

标准模型理论预言和实验测量结果符合的很好。当然，实验误差仍然比较大，期望在Belle-II实验中大幅度降低该误差。对$B^+ \to (e^+\nu_e, \mu^+\nu_\mu)$衰变分支比的实验上限和取值区间为[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B^+ \to \mu^+\nu_\mu)^{\rm exp} &< 8.6 \times 10^{-7}, \text{ at } 90\% \text{ C.L.}, \\ \mathcal{B}(B^+ \to e^+\nu_e)^{\rm exp} &< 9.8 \times 10^{-7}, \text{ at } 90\% \text{ C.L.}. \end{aligned} \tag{10.104}$$

10.4.3　B介子半轻子衰变过程与“反常”

众所周知，B_q介子$(q = u, d, s, c)$的半轻子衰变过程对标准模型精确检验和新物理探索均具有重要科学意义。此类过程末态产物中只有一个强子，它不会与末态中的轻子对发生强相互作用，大幅度降低了标准模型理论计算的误差。如图-10.14所示，这些B介子半轻子衰变过程可以分为两大类：

1. 通过味道改变中性流(FCNC)$b \to (d, s)$实现的过程：例如$B_q \to (K, K^*, \phi)(l^+l^-, \nu\bar{\nu})$半轻子衰变过程。

2. 通过带电流(CC)：$b \to (u, c)$ 实现的过程：例如$B_q \to (D, D^*, J/\psi, \eta_c)l^-\bar{\nu}_l$ 半轻子衰变过程。

这些B介子半轻子衰变过程理论上干净。再通过定义一些衰变分支比比值(例如$R_{K^{(*)}}$，$R(D^{(*)})$等)，可以把主要的理论误差(跃迁形状因子等)大部分相互抵消掉，使得标准模型理论预言值的准确程度达到$1-3\%$的量级。从新物理探索的角度，此类衰变过程对涉及新粒子的树图或者圈图新物理贡献很敏感，也是寻找新物理信号的“黄金道”。

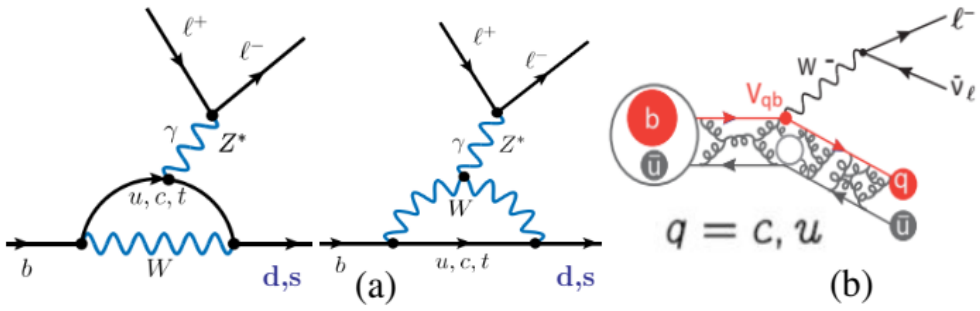


图 10.14: B介子半轻子衰变过程代表性费曼图：(a) $b \to (d, s)$ 味道改变中性流过程；(b) $b \to (u, c)$ 味道改变带电流过程。

B介子半轻子衰变过程的衰变振幅依赖于$B \to M$跃迁形状因子(Form factor)。由于涉及到非微扰部分的贡献，对$B_q \to M_i$ 跃迁形状因子的计算成了B 介子半轻子衰变过程理论计算中最困难的部分。现在一般采用QCD求和规则[471]、重夸克有效理论[472]、格点QCD [472]、微扰QCD因子化方法[450, 451]以及相对论或者光前夸克模型等来计算形状

因子。由于半轻子衰变至少是三体衰变，因而形状因子都是q^2 的函数，其中q^2 是发射出去的轻子对的不变质量。在所有计算形状因子的方法中，重夸克有效理论和格点QCD计算方法都是在大q^2 区域，也就是末态介子零反冲的区域计算结果可靠。而其它大部分理论或者模型计算是在$q^2 \sim 0$区域，也就是小q^2区域的计算才可靠。因而对于重夸克介子的半轻子衰变，就需要结合两方面的结果才能对整个衰变分支比做出准确理论预言。

在B介子工厂和LHC实验中，BaBar、Belle 和LHCb 实验组已经对B介子半轻子衰变过程的分支比、CP破坏和极化分量等物理可观测量做了系统测量[473–493]。ATLAS和CMS合作组也报告了他们对这些物理量的实验测量结果[494–496]。

为了提高标准模型理论预言精度，人们定义了多个衰变分支比的比值，其中唯象上讨论最多的几个比值是$R_{K^{(*)}}$ 和$R(D^{(*)})$，其定义是：

$$R_{K^{(*)}} = \frac{\int_{q^2_{min}}^{q^2_{max}} \frac{d\mathcal{B}(B\to K^{(*)}\mu^+\mu^-}{dq^2} dq^2}{\int_{q^2_{min}}^{q^2_{max}} \frac{d\mathcal{B}(B\to K^{(*)}e^+e^-}{dq^2} dq^2}, \tag{10.105}$$

$$R(D^{(*)}) = \frac{\mathcal{B}(B\to D^{(*)}\tau^-\bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(B\to D^{(*)}\mu^-\bar{\nu}_\mu)}, \tag{10.106}$$

对上述比值，对包含不同轻子末态分支比的QCD修正相互抵消，标准模型理论预言的精度可以达到$1\% \sim 3\%$。对上述比值和极化参数P_5'等其他多个可观测物理量，BaBar、Belle和LHCb等多个实验组的实验测量结果和标准模型理论值[87, 489, 490]之间可能存在$2 \sim 4\sigma$的偏离，通常称之为“反常”。近十年来，人们已经从不同角度对这些反常做了系统的研究。

我们首先介绍R_K和R_{K^*}反常。 在标准模型理论中，规范玻色子$(W^\pm, Z, \gamma)$与轻子之间的相互作用与轻子的味道$(l_i = (e, \mu, \tau))$无关，称之为“轻子味普适性”(Lepton flavor universality)。对(10.105)式所定义的两个分支比比值R_K和R_{K^*}，标准模型的理论值为[87]

$$R_K^{\rm SM} = R_{K^*}^{\rm SM} = 1.00 \pm 0.01({\rm QED}), \tag{10.107}$$

目前已知的BaBar、Belle和LHCb合作组对这两个比值的主要实验测量结果如图-10.15所示，详细的具体数值结果在表-10.4给出。

2012年，BaBar首先给出了对R_K和R_{K^*}的实验测量结果，这些实验测量结果(误差比较大)和标准模型理论值符合！2021年，Belle合作组基于他们采集的711 fb^{-1}的数据，对$B \to (K, K^*)(\mu^+\mu^-, e^+e^-)$半轻子衰变过程做了研究和分析，测量了衰变分支比和比值(R_K, R_{K^*}) [474, 479]。从表-10.4的数值结果和图-10.15(a,b)上部的误差棒可以直观看出，BaBar和Belle合作组对比值R_K和R_{K^*}的全部实验测量结果[473, 474, 479]和标准模型理论值在一个标准偏差范围内符合的都很好。

2017和2019年，LHCb合作组基于他们采集的3 fb^{-1}和5 fb^{-1}的数据，分别对比值R_K和R_{K^*} 做了初步测量[475, 480]，发现他们与标准模型理论值有$2.1 - 2.5\sigma$的偏离。2022年，LHCb合作组使用9 fb^{-1}的数据，对$B \to (K^{(*)}, K_S^0)(\mu^+\mu^-, e^+e^-)$半轻子衰变过程做了系

表 10.4: 实验组对R_K和R_{K^*}的实验测量结果[473–475, 478–481, 484]。

Ratios	Values	q^2-range	Collaboration
R_K	$0.74^{+0.40}_{-0.31} \pm 0.06$	$q^2 \in [0.10, 8.12]$ GeV^2	BaBar 2012 [473]
	$1.00^{+0.31}_{-0.25} \pm 0.07$	whole q^2 range	BaBar 2012 [473]
	$0.85^{+0.30}_{-0.24} \pm 0.01$	$q^2 \in [4.00, 8.12]$ GeV^2	Belle 2021 [474]
	$1.03^{+0.28}_{-0.24} \pm 0.01$	$q^2 \in [1.0, 6.0]$ GeV^2	Belle 2021 [474]
	$1.10^{+0.16}_{-0.15} \pm 0.02$	whole q^2 range	Belle 2021 [474]
	$0.846^{+0.060+0.016}_{-0.054-0.014}$	$q^2 \in [1.1, 6.0]$ GeV^2	LHCb 2019 [475]
	$0.846^{+0.044}_{-0.041}$	$q^2 \in [1.1, 6.0]$ GeV^2	LHCb 2022 [481]
$R_{K^0_S}$	$0.66^{+0.20+0.02}_{-0.14-0.04}$	$q^2 \in [1.1, 6.0]$ GeV^2	LHCb 2022 [478]
R_{K^*}	$1.06^{+0.48}_{-0.33} \pm 0.08$	$q^2 \in [0.10, 8.12]$ GeV^2	BaBar 2012 [473]
	$1.13^{+0.34}_{-0.26} \pm 0.10$	whole q^2 range	BaBar 2012 [473]
	$0.94^{+0.17}_{-0.14} \pm 0.08$	$q^2 \in [0.045, 19]$ GeV^2	Belle 2021 [479]
	$0.66^{+0.11}_{-0.07} \pm 0.03$	$q^2 \in [0.045, 1.1]$ GeV^2	LHCb 2017 [480]
	$0.69^{+0.11}_{-0.07} \pm 0.03$	$q^2 \in [1.1, 6.0]$ GeV^2	LHCb 2017 [480]
	$0.70^{+0.18+0.03}_{-0.13-0.04}$	$q^2 \in [0.045, 6.0]$ GeV^2	LHCb 2022 [478]

统研究。为了有效降低系统误差，尤其是对正负电子对和缪子对的探测器反应差别(difference in the detector response) 带来的系统误差，LHCb引入控制衰变道$B^0 \to J/\psi(e^+e^-, \mu^+\mu^-)K^0_S$和$B^+ \to J/\psi(e^+e^-, \mu^+\mu^-)K^{*+}$，并重新定义了分支比比值[478, 481]：

$$R_K = \frac{\mathcal{B}(B^+ \to K^+\mu^+\mu^-)}{\mathcal{B}(B^+ \to J/\psi(\mu^+\mu^-)K^+)} \Big/ \frac{\mathcal{B}(B^+ \to K^+e^+e^-)}{\mathcal{B}(B^+ \to J/\psi(e^+e^-)K^+)}, \tag{10.108}$$

$$R^{-1}_{K^{(*)}} = \frac{\mathcal{B}(B \to K^{(*)}e^+e^-)}{\mathcal{B}(B \to J/\psi(e^+e^-)K^{(*)})} \Big/ \frac{\mathcal{B}(B \to K^{(*)}\mu^+\mu^-)}{\mathcal{B}(B \to J/\psi(\mu^+\mu^-)K^{(*)})}, \tag{10.109}$$

(10.109)式中的$K^{(*)}$分别表示K^0_S或者K^{*+}介子末态。如表-10.4所示，LHCb在论文[478]报告的实验测量结果为

$$R_{K^{*+}} = 0.70^{+0.18}_{-0.13}(stat.)^{+0.03}_{-0.04}(syst.), \quad \text{for} \quad q^2 \in [0.045, 6.0] \text{ GeV}^2, \tag{10.110}$$

$$R_{K^0_S} = 0.66^{+0.20}_{-0.14}(stat.)^{+0.02}_{-0.04}(syst.), \quad \text{for} \quad q^2 \in [1.1, 6.0] \text{ GeV}^2, \tag{10.111}$$

两者相对于标准模型理论值“1”的偏离度分别为1.4σ和1.5σ，如图-10.15(b)下部的两个误差棒所示。

LHCb在论文[481]报告的实验测量结果为

$$R_K = 0.846^{+0.042}_{-0.039}(stat.)^{+0.013}_{-0.012}(syst.) = 0.846^{+0.044}_{-0.041}, \text{ for } q^2 \in [1.1, 6.0] \text{ GeV}^2. \tag{10.112}$$

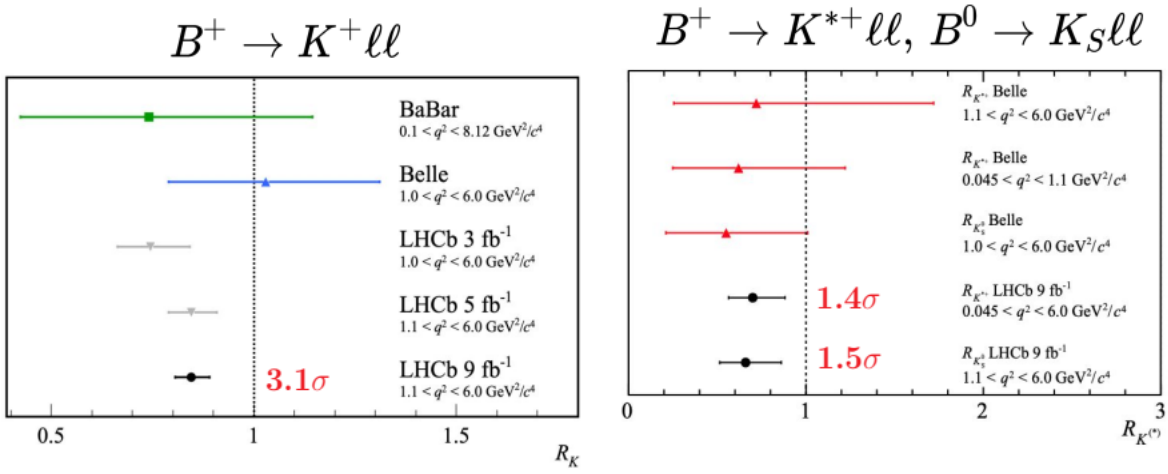


图 10.15: BaBar、Belle和LHCb实验组对R_K和R_{K^*}的代表性实验测量结果[478, 479, 481]。

LHCb目前对R_K的测量精度已经达到5.2%，是到目前为止最精确的实验测量结果，其与标准模型理论值的偏离为3.1σ [481]，对应图-10.15(a)最下面那个误差棒。这个结果被称之为轻子味普适性(LFU)破缺的第一个信号(evidence)! **要确认或者否定这个R_K反常，LHCb需要RUN-3更高的数据量。**

Belle-II合作组已经开始测量$B \to K^{(*)}l^+l^-$衰变分支比，精度已接近PDG2020。根据Belle-II的白皮书[29]，由表-10.5可以看出，Belle基于原来采集的0.711 ab^{-1}的数据量达到的精度约为30%，远低于目前LHCb已经实现的测量精度。但当Belle-II数据量接近50 ab^{-1}时，可以把测量精度提高大约一个量级，可以帮助我们证实或者排除现在看到的反常信号。

表 10.5: 对R_K和R_{K^*}的实验测量，Belle合作组现在达到的精度，Belle-II实验组预期达到的精度[29]。

Ratios (q^2-range)	Belle 0.711 ab^{-1}	Belle-II 5 ab^{-1}	Belle-II 50 ab^{-1}
R_K ($q^2 \in [1.0, 6.0]$ GeV^2)	28%	11%	3.6%
R_K ($q^2 > 14.4$ GeV^2)	30%	12%	3.6%
R_{K^*} ($q^2 \in [1.0, 6.0]$ GeV^2)	26%	10%	3.2%
R_{K^*} ($q^2 > 14.4$ GeV^2)	24%	9.2%	2.8%

对$B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$半轻子衰变过程，在B^0介子静止系$B^0 \to K^{*0}(\to K^+\pi^-)\mu^+\mu^-$四体衰变末态粒子角分布如图-10.16所示。如果只考虑$K^{*0} \to K^+\pi^-$的P波贡献, 那么其CP平

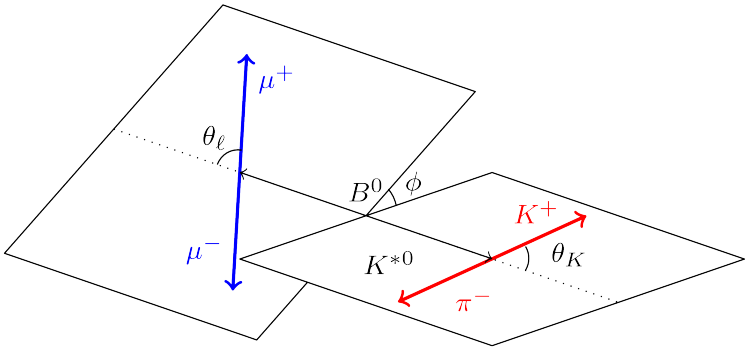


图 10.16: 在B^0介子静止系$B^0 \to K^{*0}(\to K^+\pi^-)\mu^+\mu^-$四体衰变末态粒子角分布示意图。

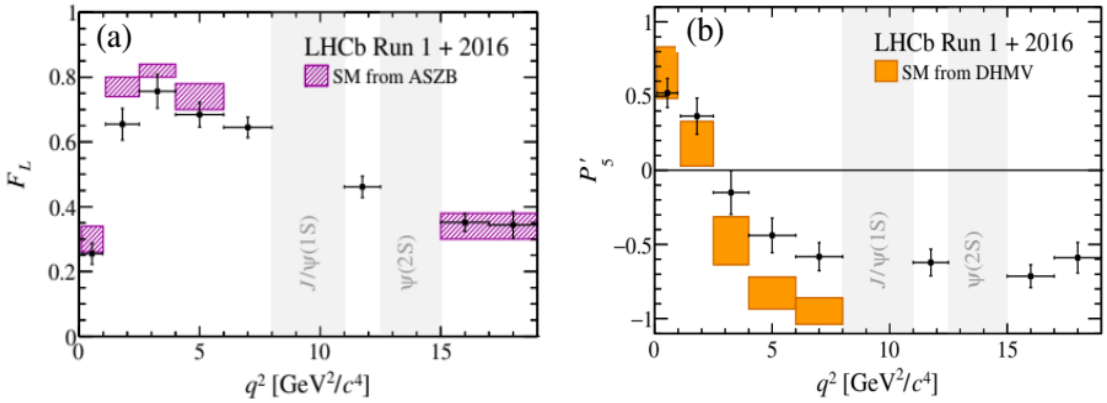


图 10.17: LHCb实验组对纵向极化分量$F_{\rm L}$和极化参数P_5'的实验测量结果[497]，以及标准模型理论预言值[500]。

均的微分截面可以写成如下形式[497–499]

$$\begin{aligned}\frac{1}{d(\Gamma+\bar{\Gamma})/dq^2}\frac{d^4(\Gamma+\bar{\Gamma})}{dq^2\,d\vec{\Omega}}\Big|_{\rm P} &= \frac{9}{32\pi}\Big[\frac{3(1-F_{\rm L})}{4}\sin^2\theta_k + F_{\rm L}\cos^2\theta_k + \frac{1-F_{\rm L}}{4}\sin^2\theta_k\cos 2\theta_l \\ &-F_{\rm L}\cos^2\theta_k\cos 2\theta_l + S_3\sin^2\theta_k\sin^2\theta_l\cos 2\phi + S_4\sin 2\theta_k\sin 2\theta_l\cos\phi \\ &+S_5\sin 2\theta_k\sin\theta_l\cos\phi + \frac{4}{3}A_{\rm FB}\sin^2\theta_k\cos\theta_l + S_7\sin 2\theta_k\sin\theta_l\sin\phi \\ &+S_8\sin 2\theta_k\sin 2\theta_l\sin\phi + S_9\sin^2\theta_k\sin^2\theta_l\sin 2\phi\Big],\end{aligned} \tag{10.113}$$

其中$F_{\rm L}$是K^*的纵向极化分量，$A_{\rm FB}$是双缪子系统的前后不对称性。$(\theta_k, \theta_l, \phi)$ 表示如图-10.16 所示的3个相位角。人们还使用(10.113)式中的极化参数的特定比值定义一组新的优化参数，以抵消或者有效降低由$B \to K^*$ 跃迁形状因子误差导致的理论误差：

$$P_1 = \frac{2S_3}{1-F_{\rm L}}, \quad P_2 = \frac{2}{3}\frac{A_{\rm FB}}{1-F_{\rm L}}, \quad P_3 = \frac{-S_9}{1-F_{\rm L}}, \tag{10.114}$$

$$P'_{4,5,6} = \frac{S_{4,5,6}}{\sqrt{F_{\rm L}(1-F_{\rm L})}}, \quad P'_7 = \frac{S_7}{\sqrt{F_{\rm L}(1-F_{\rm L})}}. \tag{10.115}$$

LHCb使用4.7 fb^{-1}数据，对这些极化参数做了实验测量[497] 。

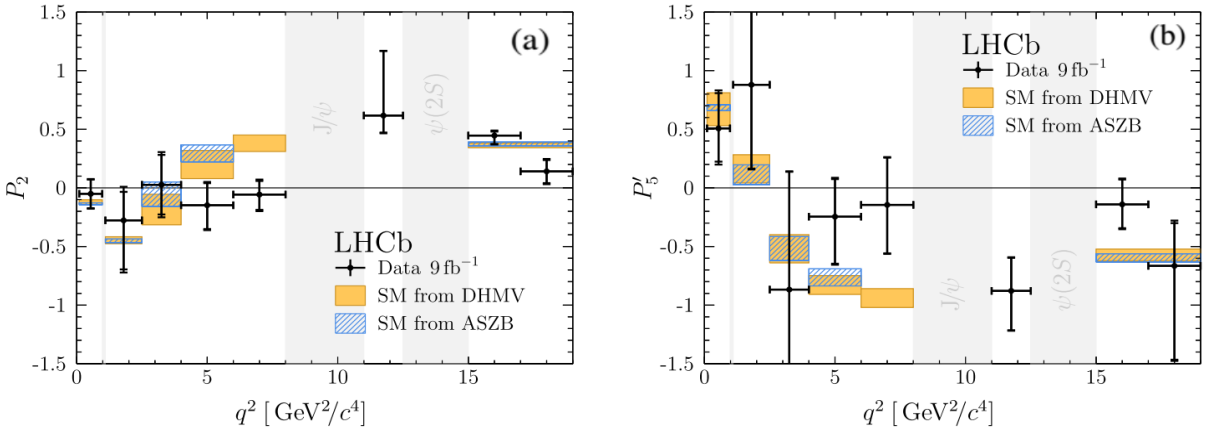


图 10.18: LHCb实验组对P_2和P_5'的实验测量结果[501]，以及标准模型理论预言值[500, 502]。

LHCb还使用全部9 fb^{-1}的实验数据，对$B^+ \to K^{*+}(\to K^0_S\pi^+)\mu^+\mu^-$半轻子衰变过程做了测量[501]。该衰变道与前面测量的$B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$衰变道有同位旋对称性。对该衰变道，微分截面和各个物理可观测量的定义相同。

LHCb发现对$F_{\rm L}$、$A_{\rm FB}$、S_i和P_i等绝大部分参量的实验测量结果与标准模型理论预言[500, 502] 符合的很好，在个别q^2分区的最大偏离也小于2σ [497, 501] 。但对P_2和P_5'，如图-10.17所示，LHCb的两次实验测量结果显示[497, 501] ：

1. 在大部分q^2分区，LHCb对P_2和P_5'的实验测量结果与标准模型理论预言值仍然符合的很好：偏离小于2σ。

2. 在图-10.17(b)的第4和第5个q^2分区，亦即$4.0 < q^2 < 6.0$ GeV^2 和$6.0 < q^2 < 8.0$ GeV^{2}区域，LHCb的实验测量结果[497]与标准模型理论预言值[500]的偏离分别为2.5σ和2.9σ：

$$< P_5' > |_{[4.0,6.0]} = \begin{cases} -0.439 \pm 0.111 \pm 0.036, & \text{LHCb}, \\ -0.832^{+0.094}_{-0.099}, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.116}$$

$$< P_5' > |_{[6.0,8.0]} = \begin{cases} -0.583 \pm 0.090 \pm 0.030, & \text{LHCb}, \\ -0.934^{+0.077}_{-0.101}, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.117}$$

与标准模型理论的整体偏离达到3.3σ [497]。

3. 在图-10.18(a)的第5个q^2分区，亦即$6.0 < q^2 < 8.0$ GeV^2 区域，LHCb对参数p_2的实验测量结果与标准模型理论预言值的偏离约为3.1σ：

$$< P_2 > |_{[6.0,8.0]} = \begin{cases} -0.06^{+0.12}_{-0.13} \pm 0.05, & \text{LHCb}, \\ 0.38 \pm 0.07, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.118}$$

对P_5'，如图-10.18(b)所示，由于新的实验测量结果的误差大，所以即使在第5个$6.0 < q^2 < 8.0$ GeV^2 区域，实验测量结果和标准模型理论值之间的差别也小于2σ:

$$< P_5' > |_{[6.0,8.0]} = \begin{cases} -0.15^{+0.40}_{-0.41} \pm 0.06, & \text{LHCb}, \\ -0.934^{+0.077}_{-0.101}, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.119}$$

人们期待LHCb减小对$B^+ \to K^{*+}(\to K^0_S\pi^+)\mu^+\mu^-$半轻子衰变过程实验测量的误差。

2012年以来，$R(D)$和$R(D^*)$反常成为理论和实验研究热点。 2012年，BaBar 实验组基于全部数据$(426 + 40\ \text{fb}^{-1}\ )$，使用强子标定方法，对半轻子衰变过程 $B \to (D, D^*)\tau\bar{\nu}_\tau$ 做了改进的重新分析，报告了他们对相关衰变分支比比值 $R(D)$ 和 $R(D^*)$ 的实验测量结果 [485]：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(D) &= \frac{\mathcal{B}(B \to D\tau\nu)}{\mathcal{B}(B \to Dl\nu)} = 0.440 \pm 0.072, \\ \mathcal{R}(D^*) &= \frac{\mathcal{B}(B \to D^*\tau\nu)}{\mathcal{B}(B \to D^*l\nu)} = 0.332 \pm 0.030, \end{aligned} \tag{10.120}$$

其中$l^- = (e^-, \mu^-)$。在数据分析中作者已经考虑了同位旋对称性关系 $\mathcal{R}(D^0) = \mathcal{R}(D^+) = \mathcal{R}(D)$ 和 $\mathcal{R}(D^{*0}) = \mathcal{R}(D^{*+}) = \mathcal{R}(D^*)$。但 BaBar 的实验测量结果比基于重夸克有效理论得到的标准模型理论预言值[472]有明显的偏离：

$$\mathcal{R}(D)^{SM} = 0.296 \pm 0.016\ , \quad \mathcal{R}(D^*)^{SM} = 0.252 \pm 0.003. \tag{10.121}$$

BaBar的分析表明，对比值$R(D)$和$R(D^*)$r的实验测量结果与标准模型理论预言值的偏离分别为2.0σ和2.7σ，总的偏离约为3.4σ [472]。

BaBar的实验结果公布后，引起了粒子物理学界的广泛关注。人们从不同角度入手研究这个反常，包括考虑可能的新物理贡献的影响，例如来自双希格斯二重态模型中的荷电希格斯玻色子的新物理贡献等[503]。我们在标准模型框架下，采用微扰QCD(PQCD)因子化方法，对$B \to D^{(*)}l\nu$半轻子衰变过程做了研究，得到了与实验数据符合的PQCD理论预言，在标准模型框架下对$R(D^{(*)})$反常给出了解释[504]。

如表-10.6所示，在BaBar之后，Belle和LHCb合作组基于各自获得的不同数据，采用不同的末态标定方法和数据分析方法，对比值$R(D)$和$R(D^*)$做了系统的实验测量。在B介子工厂和超级B介子工厂实验中，BaBar、Belle和Belle-II合作组可以基于完整的事例运动学和能量丢失重建，对所研究的$B \to D^{(*)}l\nu$半轻子衰变过程做强子标定或者轻子标定，可以同时测量比值$R(D)$和$R(D^*)$。但LHCb实验研究的是由超高能质子-质子对撞产生的B介子以及其半轻子衰变过程，可以使用其非常好的对B介子产生和衰变顶点(vertex) 的定位来压低主要背景，但对中微子流则无法直接重建。目前LHCb只测量了比值$R(D^*)$。

2015年，使用RUN-1运行期间采集的$3\ \text{fb}^{-1}$的数据，LHCb合作组对比值$R(D^*) = \mathcal{B}(\bar{B}^0 \to D^{*+}\tau^-\bar{\nu}_\tau)/\mathcal{B}(\bar{B}^0 \to D^{*+}\mu^-\bar{\nu}_\mu)$ 做了实验测量，结果为[482]

$$R(D^*) = 0.336 \pm 0.027(sts.) \pm 0.030(syst.). \tag{10.122}$$

表 10.6: 各个实验组对比值$R(D)$和$R(D^*)$的实验测量结果[482, 483, 485, 491–493]，HFLAV的世界平均值[87]。

Collab.	$R(D)$	$R(D^*)$	B-meson; Tagging Method
BaBar 2012 [485]	0.440(58)(42)	0.332(24)(18)	B^0, B^+; hadronic, $\tau \to l\nu\nu$
Belle 2015 [491]	0.375(64)(26)	0.293(38)(15)	B^0, B^+; hadronic, $\tau \to l\nu\nu$
Belle 2017 [492]	-	0.270(35)(27)	B^0, B^+; hadronic
Belle 2020[493]	0.307(37)(16)	0.283(18)(14)	B^0, B^+; semileptonic
LHCb 2015 [482]	-	0.336(27)(30)	B^0; muonic-tag, $\tau \to \mu\nu\nu$
LHCb 2018 [483]	-	0.291(19)(26)(13)	B^0; $\tau \to 3\pi\nu$
HFLAV 2021[87]	0.339(26)(14)	0.295(10)(10)	World averaged value

如图-10.19所示，这个LHCb15的结果与标准模型理论值之间的偏离为1.7σ。

2018年，仍然基于3 fb^{-1}的数据，LHCb合作组对比值$R(D^*)$做了新的研究[483] 。和2015年的缪子标定方法不同，这一次LHCb使用了$\tau^+ \to 3\pi\bar{\nu}_\tau$ 的强子标定和新的分析方法。

$$B^0 \to D^{*-}(\to \pi^- K^+ \pi -)\tau^+ \bar{\nu}_\tau, \text{ with } \tau^+ \to (\pi^+\pi^+\pi^-) + \bar{\nu}_\tau. \tag{10.123}$$

LHCb使用$B^0 \to D^{*-}3\pi$衰变道作为参考道，直接测量比值

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^*) = \frac{\mathcal{B}(\mathcal{B}' \to \mathcal{D}^{*-}\tau^+\nu_\tau)}{\mathcal{B}(\mathcal{B}' \to \mathcal{D}^{*-}\ni\pi)}, \tag{10.124}$$

然后由关系式

$$R(D^*) = \mathcal{K}(\mathcal{D}^*) \times \frac{\mathcal{B}(\mathcal{B}' \to \mathcal{D}^{*-} \to \mathcal{D}^{*-}\ni\pi)}{\mathcal{B}(\mathcal{B}' \to \mathcal{D}^{*-}\mu^+\nu_\mu)}, \tag{10.125}$$

得到比值$R(D^*)$[483]

$$R(D^*) \quad = \quad 0.291 \pm 0.019(stat.) \pm 0.026(syst.) \pm 0.013(ext), \tag{10.126}$$

其中的第3个误差来自于参考道$\mathcal{B}(B^0 \to D^{*-}3\pi)$ 和$\mathcal{B}(B^0 \to D^{*-}\mu^+\nu_\mu)$ 的误差。根据LHCb的两次实验测量结果得到的综合限制为

$$R(D^*) = 0.310 \pm 0.016(stat.) \pm 0.021(syst.), \tag{10.127}$$

比标准模型理论值大2.2σ。

如表-10.6所示，2015年以来，Belle合作组已经基于他们在B介子工厂获得的全部772$\times 10^6$ B介子对产生和衰变事例，3次报告了他们对比值$R(D^{(*)})$的实验测量结果[491–493]。

在B介子工厂实验中，高能电子流($E_e = 8$ GeV) 与较低能量的正电子流($E_{\bar{e}} = 3.5$ GeV) 对撞，产生矢量介子$\Upsilon(4S)$。由于$E_{\rm cm} \approx m(\Upsilon(4S)) \approx 2m_B$，$\Upsilon(4S)$产生时在质心系

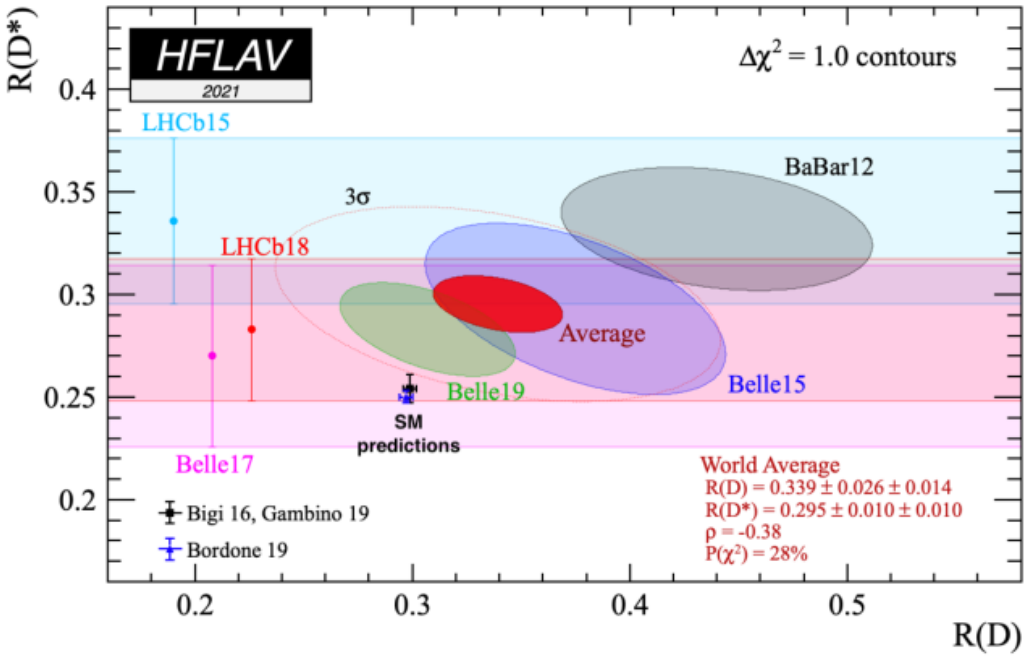


图 10.19: 对比值$R(D)$和$R(D^*)$，各个实验组给出的实验测量结果，标准模型理论值，HFLAV给出的世界平均值[87]。

几乎是静止的，然后迅速衰变($\tau(\Upsilon(4S)) \approx 10^{-23}s$) 为沿z轴正向(电子流方向) 高速飞行的$B^0 - \overline{B}^0$ (B^+B^-)介子对:

$$e^- + e^+ \to \underbrace{\Upsilon(4S)}_{1^-} \to \underbrace{B^0}_{0^-} + \underbrace{\overline{B}^0}_{0^-}, \quad \text{or} \quad B^+ + B^-. \tag{10.128}$$

由于角动量守恒，末态B介子对为量子纠缠态：如果一侧为B^0 (B^+)，那么另一侧一定是$\bar{B}^0$ (B^-)，一直到其中之一衰变。在所有可能的次级衰变道中，我们选择物理上感兴趣的一侧B介子的$B \to f$ 衰变作为信号道B_{sig}，把另一侧的B介子衰变作为“标定”(tagging) 衰变道。

我们以Belle合作组2020年的工作[493]为例，对Belle的分析方法做简单介绍。对更多细节，读者可以阅读参考文献[493, 506]。Belle合作组使用了全部772×10^6 B介子对(包括$B^{0,+}$及其反粒子)的产生和衰变事例，采用半轻子标定方法，同时测量比值$R(D)$和$R(D^*)$。比值的定义式和拟合表达式为

$$R(D^{(*)}) = \frac{\mathcal{B}(\bar{B} \to D^{(*)}\tau^-\bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(\bar{B} \to D^{(*)}l^-\bar{\nu}_l)} = \frac{1}{2\mathcal{B}(\tau^- \to l^-\bar{\nu}_l\nu_\tau)} \frac{\epsilon_{sig}}{\epsilon_{norm}} \frac{N_{sig}}{N_{norm}} \tag{10.129}$$

其中$l^- = (e^-, \mu^-)$，$\epsilon_{sig(norm)}$表示信号事例(参考事例)的探测效率，$N_{sig(norm)}$表示信号事例(参考事例)的数目，$\mathcal{B}(\tau^-\bar{\nu}_l\nu_\tau)$表示对$l^- = e^-, \mu^-$两种情况下衰变分支比世界平均值的平均值。在$B_{tag}$一侧，根据对半轻子末态$(D, D^*)l\bar{\nu}_l$的重建来重建$B_{tag}$。对应每一个选定的$B_{tag}$事例，在剩下的粒子径迹和簇射中寻找并挑选味道相反的信号$D^{(*)}l$。在B_{sig}一侧，

人们只重建纯轻子衰变道$\tau \to l\nu\bar{\nu}$，定义4类不同的数据样本$(D^+, D^0)l^-$和$(D^{*+}, D^{*0})l^-$。最后得到的结果是

$$\begin{aligned} R(D^*) &= 0.283 \pm 0.018(stat.) \pm 0.014(syst.), \\ R(D) &= 0.307 \pm 0.037(stat.) \pm 0.016(syst.). \end{aligned} \tag{10.130}$$

上述比值分别在0.2σ和1.1σ范围内和标准模型理论值符合。二者的综合结果在0.8σ水平与标准模型理论值符合。综合考虑Belle合作组3次实验测量结果[491–493]，他们的平均值为

$$R(D^*) = 0.283 \pm 0.018, \quad R(D) = 0.326 \pm 0.034. \tag{10.131}$$

比值$R(D)$和$R(D^*)$之间的关联度为-0.47，Belle 综合测量结果与标准模型理论值之间的偏离只有1.6σ[493]。

对$R(D)$和$R(D^*)$反常，最新的标准模型的理论值和HFLAV给出的实验测量结果的世界平均值为[87, 489]

$$R(D) = \begin{cases} 0.339 \pm 0.026 \pm 0.014, & \text{HFLAV average}, \\ 0.299 \pm 0.003, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.132}$$

$$R(D^*) = \begin{cases} 0.295 \pm 0.010 \pm 0.010, & \text{HFLAV average}, \\ 0.258 \pm 0.005, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.133}$$

两个比值的实验测量结果与标准模型理论预言值之间的整体偏离约为3.1σ[87, 489]。

Belle-II 在2019年3月开始物理取数，在2022年秋季第一次停机时预计采集的数据量为510 fb^{-1}，接近Belle的全部$\Upsilon(4S)$数据量711 fb^{-1}。Belle-II合作组正在做相关数据分析，同时使用强子标定和半轻子标定方法来处理数据，给出对比值$R(D^{(*)})$的实验测量结果[505]。Belle-II的总数据量预期为50 ab^{-1}，对B介子系统各类反常的研究，对比值$R(D^{(*)})$和其它类似比值$R(X)$的精确实验测量是Belle-II的重点研究目标，我们期待他们的新结果!

另外两个已经有实验测量结果的分支比比值是$R(J/\psi)$和$R(\Lambda_c)$ [484, 507]。对这两个比值的理论计算和实验测量对轻子数普适性检验和新物理探索同样有重要科学意义。比值的定义为

$$R(J/\psi) = \frac{\mathcal{B}(B_C^+ \to J/\psi\tau^+\nu_\tau)}{\mathcal{B}(B_C^+ \to J/\psi\mu^+\nu_\mu)}, \text{ with } \tau^+ \to \mu^+\nu_\mu\bar{\nu}_\tau, \tag{10.134}$$

$$R(\Lambda_c) = \frac{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+\tau^-\bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+\mu^-\bar{\nu}_\mu)}, \text{ with } \tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau. \tag{10.135}$$

2018年，LHCb第一次报告了对$R(J/\psi)$的实验测量结果[484]

$$R(J/\psi) = \begin{cases} 0.71 \pm 0.17(stat.) \pm 0.18(syst.), & \text{LHCb}, \\ 0.25 \pm 0.03, & \text{SM prediction}, \end{cases} \tag{10.136}$$

尽管两个中心值之间有明显差别，但由于实验误差大($\sim 35\%$)，实验测量结果与标准模型理论值[490]之间的偏离仍然小于2σ。作者对$B_C^- \to (\eta_c, J/\psi) l^- \bar{\nu}$衰变过程做了系统研究，除了$R(J/\psi)$，还定义了比值$R(\eta_c)$和极化分量$P_\tau$，在PQCD因子化框架下给出了理论预言[508]。人们期望LHCb和其他实验组对$R(J/\psi)$、$R(\eta_c)$和其它相关可观测物理量做进一步的精确测量。

和$R(D^{(*)})$的实验测量相比较，对$R(\Lambda_c)$ 的实验测量有两个主要差别：

1. B和D^*是自旋为0，1的介子，但Λ_b和Λ_c均为自旋$s = 1/2$的重子。

2. 在标准模型下，描写$\Lambda_b \to \Lambda_c$重重跃迁的形状因子为$(f_{1,2,3}, g_{1,2,3})$，和$B \to D^{(*)}$ 跃迁的形状因子有很大区别。对重味重子跃迁形状因子的计算误差大，低于重味介子跃迁形状因子计算的准确度。

涉及重味重子的衰变，标准模型理论计算的误差主要来源于$\Lambda_b \to \Lambda_c$ 跃迁形状因子的计算，人们已经做了很大努力来降低理论误差[509–511]。2018年以来，人们基于重夸克有效理论，并包含了$\mathcal{O}(\Lambda^2_{\rm QCD}/m_c^2)$幂次修正以后给出的标准模型理论值为[509, 510]

$$R(\Lambda_c)|^{\rm SM} = 0.324 \pm 0.004. \tag{10.137}$$

2022年，基于RUN-1采集的3 fb^{-1}的数据，LHCb合作组采用$\tau^- \to 3\pi(\pi^0)\nu_\tau$ 和$\Lambda_c \to pk^-\pi^+$ 强子标定方法和三维拟合方法，对衰变分支比$\mathcal{B}(\Lambda_b^+ \to \Lambda_c \tau^+ \nu_\tau)$ 做了实验测量。LHCb首先对比值

$$\mathcal{K}(\Lambda_c^+) = \frac{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ 3\pi)}, \tag{10.138}$$

做了实验测量，然后使用外部输入得到$R(\Lambda_c)$：

$$R(\Lambda_c) = \mathcal{K}(\Lambda_c^+) \cdot \left(\frac{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ 3\pi)}{\mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu)} \right) \Big|_{\rm ext.}. \tag{10.139}$$

在计算中使用的外部输入包含了CDF、LHCb和DELPHI的实验测量结果[1, 87, 512]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu) &= (6.2 \pm 1.4)\%, \\ \mathcal{B}(\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ 3\pi) &= (6.14 \pm 0.94) \times 10^{-3}, \end{aligned} \tag{10.140}$$

最后得到对衰变分支比和比值$R(\Lambda_c)$ 的首个实验测量结果

$$\mathcal{B}(\Lambda_b^+ \to \Lambda_c \tau^+ \nu_\tau) = [1.50 \pm 0.16(stat.) \pm 0.25(syst.) \pm 0.23(ext.)] \times 10^{-2}, \tag{10.141}$$

$$R(\Lambda_c) = 0.242 \pm 0.026(stat.) \pm 0.040(syst.) \pm 0.059(ext.), \tag{10.142}$$

其中第三个误差来自于使用的外部分支比误差。对分支比$\mathcal{B}(\Lambda_b^+ \to \Lambda_c \tau^+ \nu_\tau)$ 实验测量结果的显示度达到6.1σ。虽然对比值$R(\Lambda_c)$的LHCb测量结果的中心值比标准模型理论值小，但

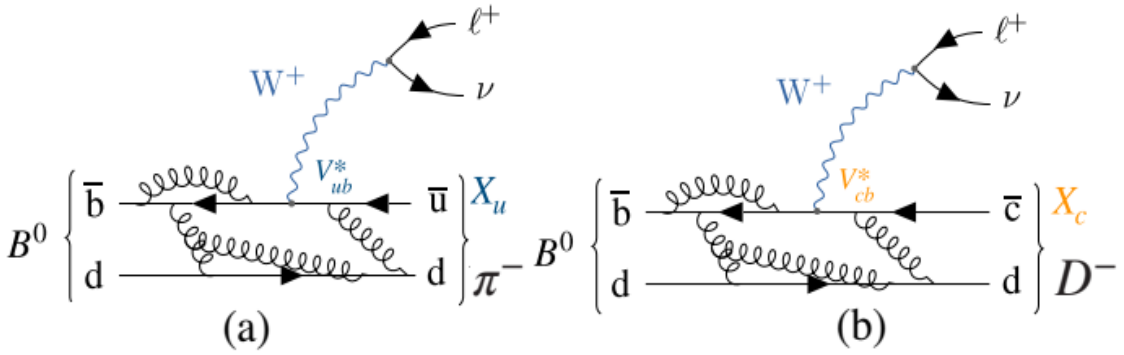


图 10.20: (a) CKM压低的$B^0 \to X_u l^+ \nu_l$ (inclusive) 和$B^0 \to \pi^- l^+ \nu_l$ (exclusive) 半轻子衰变过程；(b) CKM允许的$B^0 \to X_c l^+ \nu_l$ (inclusive) 和$B^0 \to D^- l^+ \nu_l$ (exclusive) 半轻子衰变过程。

考虑到目前的实验测量误差仍然比较大($\sim 31\%$)，所以实验测量结果和标准模型理论在一个标准偏差范围内是符合的。从新物理的角度，使比值$R(\Lambda_c)$变大的新物理模型受到严格限制[510, 511]。

另外一类与B介子半轻子衰变过程相关的“反常”就是所谓的“V_{ub}&V_{cb}-puzzle”[386]。图-10.20(a)是CKM压低的树图，既可以表示B介子的遍举(inclusive) 轻子衰变过程$B^0 \to X_u l^+ \nu_l$，也可以表示对应的单举(exclusive) 过程$B^0 \to (\pi^-, \rho^-) l^+ \nu_l$。因为B介子的无粲半轻子衰变过程在理论上比B介子强子衰变过程干净很多，在衰变分支比方面又比纯轻子衰变分支比($\mathcal{B}(B^- \to \tau^- \bar{\nu}_\tau, \mu^- \bar{\nu}_\mu)$) 高2 $\sim$ 3个量级，所以该衰变道是测量CKM矩阵元V_{ub}的最佳衰变道。图-10.20(b)则是CKM允许的树图，可以表示遍举含粲过程$B^0 \to X_c l^+ \nu_l$，也可以表示对应的单举过程$B^0 \to (D^-, D^{*-}) l^+ \nu_l$，该衰变道也是测量CKM矩阵元$V_{cb}$的优秀衰变道。事实上，我们既可以通过遍举和单举过程抽出$|V_{ub}|$和$|V_{cb}|$，从理论计算和实验测量的角度，这两种方法各有自己的特点[513]。对矩阵元$|V_{ub}|$和$|V_{cb}|$，由遍举过程抽取的实验测量值均比由单举过程抽取的实验值大，差别大约为2σ。

对遍举(inclusive)半轻子衰变过程$B \to X_c l^+ \nu_l$，计算其总衰变宽度的理论基础是算符乘积展开(OPE) 和由此导出的重夸克展开(HQE)。可以通过计算与拟合得到轻子能量矩$< E_e >$分布，强子不变质量矩$< M_X >$分布, 轻子对的N阶q^2矩$< q^{2n} >$ ($n = 1, 2, 3, 4$)和其它参量，进而确定计算总衰变宽度所需要的各个非微扰参数(例如：$\mu_\pi^2, \mu_G^2(m_b), \rho_D^3, \rho_{LS}^3, \cdots$)，最后抽出对应的矩阵元$|V_{cb}|$。

对单举(exclusive)半轻子衰变过程$B \to D^{(*)} l^+ \nu_l$，需要计算$B \to D^{(*)}$跃迁的多个强子矩阵元$F_+(q^2), F_0(q^2), V(q^2), A_{0,1,2}(q^2), F_T(q^2)$ 和$T_{1,2,3}$ 。传统的QCD求和规则等方法在小q^2区域准确度高，但格点QCD的计算在$q^2 = q^2_{max}$端点处准确。所以人们一般使用z-级数参数化方法[10]做拟合外推，使得形状因子$F_i(q^2)$的取值覆盖整个q^2取值区域：

[10]常用的3种参数化方法：(1) 经典的极点参数化方法; (2) Caprini-Lellouch-Neubert (CLN) 参数化方法[514]; (3)

$0 \le q^2 \le q^2_{max}$。近期的格点QCD计算已经向$q^2 < q^2_{max}$区域移动[516]，可以进一步降低形状因子计算的理论误差。经单举过程确定的$|V_{cb}|$的相对误差也是大约2%。

对CKM矩阵元$|V_{cb}|$，各个组的实验测量结果，HFLAV合作组和PDG给出的世界平均值分别为[1, 87, 516–525]

$$|V^{\rm incl}_{cb}| = \begin{cases} (42.21 \pm 0.78) \times 10^{-3}, & \\ (42.16 \pm 0.51) \times 10^{-3}, & < E_l >, < M_X >, \\ (41.69 \pm 0.63) \times 10^{-3}, & < q^2 >, \\ (42.19 \pm 0.78) \times 10^{-3}, & \text{PDG2022,}. \end{cases} \tag{10.143}$$

$$|V^{\rm excl}_{cb}| = \begin{cases} (38.5 \pm 0.8) \times 10^{-3}, & \bar{B} \to D^* l \bar{\nu}_l, \text{ LQCD, CLN,} \\ (38.40 \pm 0.74) \times 10^{-3}, & \bar{B} \to D^* l \bar{\nu}_l, \text{ LQCD, BGL,} \\ (38.7 \pm 1.0) \times 10^{-3}, & \bar{B} \to D^* l \bar{\nu}_l, \text{ LQCD, BGL,} \\ (40.1 \pm 1.0) \times 10^{-3}, & \bar{B} \to D l \bar{\nu}_l, \text{ LQCD, BGL,} \\ (41.7 \pm 1.6) \times 10^{-3}, & B^0_S \to D^{(*)-}_s \mu^+ \nu_\mu, \text{ LQCD, BGL,} \\ (39.10 \pm 0.50) \times 10^{-3}, & \text{HFLAV} \\ (39.4 \pm 0.8) \times 10^{-3}, & \text{PDG2022.} \end{cases} \tag{10.144}$$

由数值结果可以看出，遍举方法测量的$|V_{cb}|$的相对误差为$\sim$ 2%，误差主要来源于现在还没有计算的高阶微扰和非微扰贡献。基于$\bar{B} \to D^* l \bar{\nu}_l$ ($\bar{B} \to D l \bar{\nu}_l$) 衰变道测量得到$|V_{cb}|$的相对误差为$\sim$ 2% ($\sim$ 3%)，理论误差和实验误差的大小基本相同，理论误差主要来源于对形状因子计算的误差。

BaBar和Belle合作组和理论家们使用类似的方法抽取CKM矩阵元$|V_{ub}|$[87, 513, 526–532]。精度最高的衰变道是单举衰变过程$\bar{B} \to \pi l \bar{\nu}_l$，误差约为4%，理论误差和实验误差大小相近。对单举$\bar{B} \to X_u l \bar{\nu}_l$衰变过程，关键的问题是来自$b \to c$跃迁的背景事例太大，人们采用各种方法压低与$b \to c$跃迁相关的背景，目前达到的测量精度约为7%，理论误差和实验误差的影响相近。

对矩阵元$|V_{ub}|$测量的部分最新结果和HFLAV合作组给出的世界平均值如图-10.21 所示，部分数值结果为[1, 87, 513, 517, 518, 526, 527]

$$|V^{\rm incl}_{ub}| = \begin{cases} (4.10 \pm 0.28) \times 10^{-3}, & B \to X_u l^+ \nu_l, \text{ Belle} \\ (4.19 \pm 0.18) \times 10^{-3}, & \text{HFLAV : GGOU,} \\ (4.13 \pm 0.26) \times 10^{-3}, & \text{PDG2022,} \end{cases} \tag{10.145}$$

$$|V^{\rm excl}_{ub}| = \begin{cases} (2.96 \pm 0.29) \times 10^{-3}, & B \to \rho l \nu, \\ (2.99 \pm 0.35) \times 10^{-3}, & B \to \omega l \nu, \\ (3.88 \pm 0.45) \times 10^{-3}, & B \to \pi e^+ \nu_e, \text{ Belle II, LQCD} \\ (3.67 \pm 0.15) \times 10^{-3}, & B \to \pi l \nu, \text{ HFLAV, LQCD + LCSR} \end{cases} \tag{10.146}$$

Boyd-Grinstein-Lebed (BGL) 模型无关的参数化方法[515]。

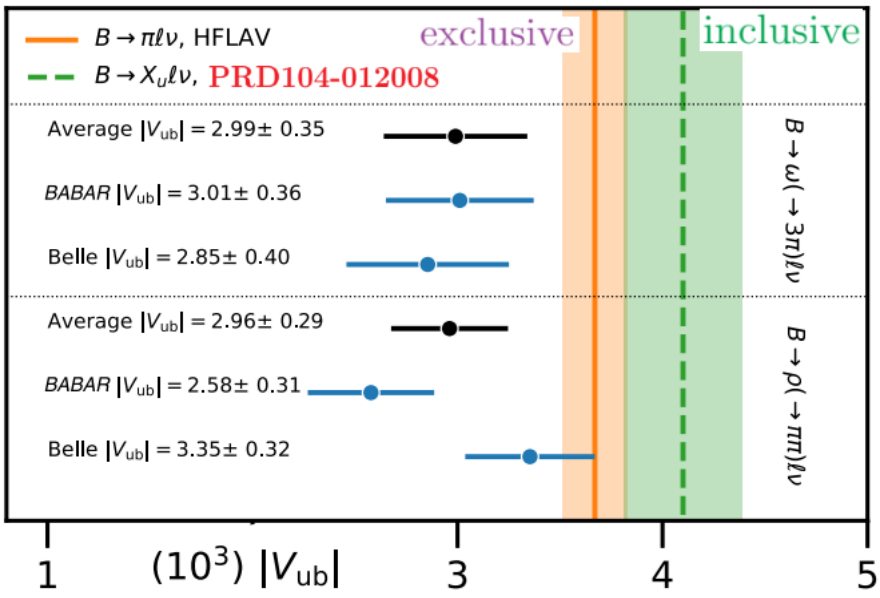


图 10.21: 对矩阵元$|V_{ub}|$的部分新实验测量结果，HFLAV平均值[87, 513, 527]。

最近，LHCb合作组还报告了对CKM矩阵元比值$|V_{ub}|/|V_{cb}|$的实验测量结果。以$B_S^0 \to D_s^- \mu^+ \nu_\mu$作为基准道，LHCb首次测量了$B_S^0 \to K^- \mu^+ \nu_\mu$的衰变分支比，同时定义并测量了分支比比值[533]

$$\begin{aligned} R_{\rm BF} &\equiv \frac{\mathcal{B}(B_S^0 \to K^- \mu^+ \nu_\mu)}{\mathcal{B}(B_S^0 \to D_s^- \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{N_K}{N_{D_s}} \frac{\epsilon_{D_s}}{\epsilon_K} \times \mathcal{B}(D_s^- \to K^+ K^- \pi^-) \\ &= \begin{cases} (1.66 \pm 0.08 \pm 0.07 \pm 0.05) \times 10^{-3}, & q^2 < 7\ {\rm GeV}^2, \\ \left(3.25 \pm 0.21^{+0.16}_{-0.17} \pm 0.09\right) \times 10^{-3}, & q^2 > 7\ {\rm GeV}^2, \end{cases} \end{aligned} \tag{10.147}$$

其中的3个误差分别表示统计误差、系统误差和由分支比$\mathcal{B}(D_s^- \to K^+ K^- \pi^-)$的误差导致的误差。

基于$R_{\rm BF}$，CKM矩阵元比值$|V_{ub}|/|V_{cb}|$可以由下式定义[518, 533]：

$$\frac{|V_{ub}|^2}{|V_{cb}|^2} = R_{\rm BF} \frac{{\rm FF}_{\rm D_s}}{{\rm FF}_{\rm K}}, \tag{10.148}$$

其中${\rm FF}_{\rm D_s}$和${\rm FF}_{\rm K}$分别表示$B_S^0 \to (D_s, K)$的跃迁形状因子的数值。在$q^2 < 7\ {\rm GeV}^2$和$q^2 > 7\ {\rm GeV}^2$区域分别使用基于LCSR [534]和LQCD[535] 参数化得到的跃迁形状因子的数值，LHCb得到的结果为[518, 533]

$$|V_{ub}|/|V_{cb}| = \begin{cases} 0.0607 \pm 0.0021 \pm 0.0030({\rm FF}), & q^2 < 7\ {\rm GeV}^2, \\ 0.0946 \pm 0.0041 \pm 0.0068({\rm FF}), & q^2 > 7\ {\rm GeV}^2, \end{cases} \tag{10.149}$$

其中第2项误差表示来自形状因子的误差，第1项误差包含其它各项误差(统计、系统和D_s)。

LHCb合作组还通过对重味重子的半轻子衰变过程$\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$和$\Lambda_b^0 \to p\mu^- \bar{\nu}_\mu$的研究，并使用BESIII的测量结果$\mathcal{B}(\Lambda_c^+ \to pK^-\pi^+) = (6.28 \pm 0.32)\%$ [536]作为输入，给出了对比值$|V_{ub}|/|V_{cb}|$的实验测量结果[518, 537–539]

$$|V_{ub}|/|V_{cb}| = \begin{cases} 0.079 \pm 0.004 \pm 0.004(\Lambda_b), & \Lambda_b^0 \to p\mu\bar{\nu}, \\ 0.084 \pm 0.007, & B_S, \text{ and } \Lambda_b \text{ decays}, \end{cases} \tag{10.150}$$

如果分别考虑通过遍举和单举过程出来的结果，那么有[518]

$$|V_{ub}|/|V_{cb}| = \begin{cases} 0.098 \pm 0.006, & \text{inclusive}, \\ 0.094 \pm 0.005, & \text{exclusive}, \end{cases} \tag{10.151}$$

同时考虑B, B_S和Λ_b的半轻子衰变过程，得到[518]

$$|V_{ub}|/|V_{cb}| = 0.091 \pm 0.005, \quad \text{average}. \tag{10.152}$$

最后，对CKM矩阵元$|V_{ub}|$和$|V_{cb}|$，由CKMfitter和UTfit合作组给出的最新“Global-fit”的结果分别为[387, 388]：

$$|V_{ub}|_{fit} = \begin{cases} \left(3.667^{+0.088}_{-0.073}\right) \times 10^{-3}, & \text{CKMfitter}, \\ (3.675 \pm 0.095) \times 10^{-3}, & \text{UTfit}, \end{cases} \tag{10.153}$$

$$|V_{cb}|_{fit} = \begin{cases} \left(41.45^{+0.35}_{-0.61}\right) \times 10^{-3}, & \text{CKMfitter}, \\ (42.00 \pm 0.59) \times 10^{-3}, & \text{UTfit}. \end{cases} \tag{10.154}$$

关于CKM矩阵元$|V_{ub}|$和$|V_{cb}|$更多的细节，读者可以参看综述论文[518]和那里的引文。

10.4.4　B介子强子衰变过程简介

在味物理和CP破坏研究领域，B介子的强子衰变过程是非常重要的一类衰变过程。早期的Tevatron实验对B介子的部分强子衰变道做了初步测量。1999以来，在B介子工厂实验和LHC实验中已经对几百个$B/B_S/B_C$介子的两体强子衰变过程做了系统测量。例如，通过对4个$B \to K\pi$衰变道的实验研究，BaBar和Belle在2003年确认发现了B介子系统的CP破坏。2009年以来，在LHC上工作的各个实验组，均对B介子和重味重子做了研究。尤其是重点研究B物理的LHCb实验组，他们对$B_q \to M_1 M_2$两体强子衰变过程的分支比和CP破坏做了系统实验测量，一方面验证了BaBar和Belle的B介子工厂实验测量结果，同时发现了B_S系统的CP破坏，对B_S介子的典型两体强子衰变过程做了实验测量，同时还对$B/B_S \to h_1 h_2 h_3$ $(h_i = \pi, K)$等一批B介子三体强子衰变过程做了研究，给出了初步的实验测量结果。在KEKB正负电子对撞机升级到Super-KEKB以后，Belle-II实验在2019年开始物理运行。在整个RUN-I期间，Belle-II合作组已经对部分B介子的两体和三体强子衰变过程做了初步测量，部分实验测量结果的精度已经超过Belle实验。

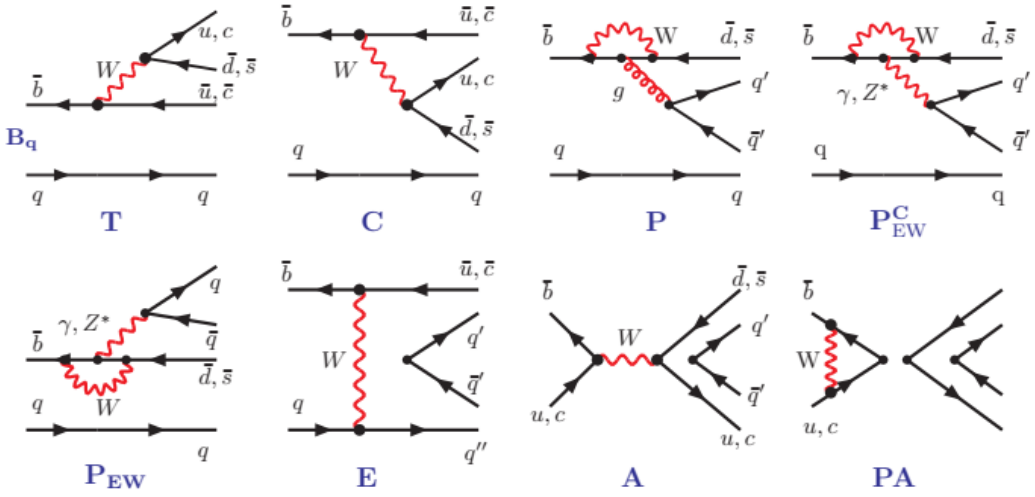


图 10.22: 对B_q介子两体强子衰变过程$B_q \to M_1 M_2$ $(q^{(\prime)} = (u, d, s, c))$有贡献的主要费曼图[540–542]。

众所周知，对B介子强子衰变过程理论计算的难点在于“强子矩阵元的计算”。过去的30年，人们已经在“因子化”方面取得了许多重要进展。由简单因子化方法和推广的因子化方法出发，发展了基于QCD的三种主要因子化方法：QCD因子化方法[449]，PQCD因子化方法[450, 451]和SCET因子化方法[452, 453]。研究者基于不同的“因子化方案”或者各种味对称性，已经对B介子的两体强子衰变过程做了全面、系统的研究[540–552]。不同的因子化方法，其强位相来源、大小均可能不同。对相同衰变过程，人们对其衰变分支比给出的理论预言大多接近，但对其CP破坏的理论预言则经常有较大的差别。

在标准模型理论框架下，我们采用有效哈密顿量方法[21, 268]计算B介子的两体强子衰变过程。在本章的第-10.4.1节，我们已经列出了有效哈密顿量$\mathcal{H}_{eff}$的具体表达式(10.90)，并在(10.91)式定义了B介子两体强子衰变过程的振幅$\mathcal{A}(B \to M_1 M_2)$。

图-10.22表示对$B_q \to M_1 M_2$ 两体强子衰变过程提供主要贡献的费恩曼图。其中“T”和“C”表示树图(外W发射图)和色压低树图(内W发射图)；“P”表示QCD胶子企鹅图；“$P_{\rm EW}$”和“$P^C_{\rm EW}$”分别表示电弱企鹅图(外γ, Z传播子)和色压低电弱企鹅图(内γ, Z传播子)；“E”和“A”分别表示交换图和电弱湮灭图；“PA”表示QCD和电弱企鹅湮灭图[540–542] [11]。对于某一个选定的衰变道，可能只有图-10.22中的部分费恩曼图有贡献，而且不同费曼图的贡献大小可能有量级的差别。一般情况下，树图“T”、“C”和QCD企鹅图“P”的贡献是主要的！电弱企鹅图“$P_{\rm EW}$”的贡献次之，“$P^C_{\rm EW}$”的贡献被进一步色压低($\propto 1/N_c$)。最后三类交换图和湮灭图的贡献一般是最小的。例如，$B^0_S \to \pi^+\pi^-$和$B^0_d \to K^+K^-$是纯湮灭稀有衰变过程，只有湮灭图有贡献，其衰变分支比在10^{-7}量级。

在本节，作者将以$B \to PP$ 两体非粲强子衰变过程为例，对B介子的两体非粲强子衰

[11]一般把“E”、“A”和“PA”统称为湮灭图。

表 10.7: 对21个$B \to PP$两体非粲强子衰变过程分支比(单位是10^{-6})的理论预言值[550, 551, 553–557] 和实验测量结果世界平均值[2]。

Mode	PQCD[551]	PQCD	QCDF[550]	PDG2022 [2]
$B^0 \to \pi^+\pi^-$	$7.3^{+2.4}_{-1.7}$	$5.39^{+1.88}_{-1.33}$ [553]	$7.0^{+0.8}_{-1.0}$	5.12 ± 0.19
$B^0 \to \pi^0\pi^0$	$0.23^{+0.08}_{-0.06}$	$0.61^{+0.21}_{-0.17}$ [553]	$1.1^{+1.2}_{-0.5}$	1.59 ± 0.26
$B^+ \to \pi^0\pi^+$	$4.2^{+1.3}_{-1.0}$	$4.45^{+1.43}_{-1.05}$ [553]	$5.9^{+2.6}_{-1.6}$	5.5 ± 0.4
$B^0 \to K^+\pi^-$	$17.1^{+5.2}_{-3.7}$	$21.7^{+7.4}_{-5.3}$ [554]	$19.3^{+11.4}_{-7.8}$	19.6 ± 0.5
$B^0 \to K^0\pi^0$	$7.4^{+2.1}_{-1.5}$	$9.3^{+3.2}_{-2.3}$ [554]	$8.6^{+5.4}_{-3.6}$	9.9 ± 0.5
$B^+ \to K^0\pi^+$	$20.3^{+6.3}_{-4.4}$	$24.1^{+8.3}_{-6.0}$ [554]	$21.7^{+13.4}_{-9.1}$	23.7 ± 0.8
$B^+ \to K^+\pi^0$	$12.3^{+3.8}_{-2.7}$	$14.0^{+4.7}_{-3.5}$ [554]	$12.5^{+6.8}_{-4.8}$	12.9 ± 0.5
$B^0 \to K^0\eta$	$4.6^{+2.2}_{-1.4}$	$1.13^{+1.95}_{-1.01}$ [555]	$1.5^{+1.7}_{-1.1}$	$1.23^{+0.27}_{-0.24}$
$B^0 \to K^0\eta'$	$52.3^{+15.1}_{-10.8}$	$66.5^{+25.9}_{-19.4}$ [555]	$70.9^{+59.1}_{-29.8}$	66 ± 4
$B^+ \to K^+\eta$	$6.7^{+2.9}_{-1.9}$	$2.36^{+2.63}_{-1.56}$ [555]	$2.2^{+2.0}_{-1.3}$	2.4 ± 0.4
$B^+ \to K^+\eta'$	$52.0^{+15.1}_{-10.8}$	$67.3^{+26.0}_{-19.4}$ [555]	$74.5^{+63.6}_{-31.6}$	70.4 ± 2.5
$B^0 \to K^0\bar{K}^0$	$1.5^{+0.5}_{-0.3}$	$2.02^{+0.72}_{-0.51}$ [554]	$2.1^{+1.3}_{-0.8}$	1.21 ± 0.16
$B^0 \to K^+K^-$	$0.05^{+0.06}_{-0.04}$	$0.16^{+0.06}_{-0.05}$ [556]	0.1 ± 0.04	0.078 ± 0.015
$B^+ \to K^+\bar{K}^0$	$1.6^{+0.5}_{-0.3}$	$2.27^{+0.81}_{-0.56}$ [554]	$1.8^{+1.1}_{-0.7}$	1.31 ± 0.17
$B^0 \to \pi^0\eta$	$0.20^{+0.06}_{-0.04}$	$0.19^{+0.04}_{0.06}$ [557]	$0.36^{+0.13}_{-0.11}$	0.41 ± 0.17
$B^0 \to \pi^0\eta'$	$0.20^{+0.05}_{-0.03}$	$0.15^{+0.05}_{-0.03}$ [557]	$0.42^{+0.28}_{-0.15}$	1.2 ± 0.6
$B^+ \to \pi^+\eta$	$2.6^{+0.9}_{-0.7}$	$4.1^{+1.3}_{-1.1}$ [557]	$5.0^{+1.5}_{-0.9}$	4.02 ± 0.27
$B^+ \to \pi^+\eta'$	$2.0^{+0.7}_{-0.5}$	$2.8^{+0.9}_{-0.7}$ [557]	$3.8^{+1.6}_{-0.8}$	2.7 ± 0.9
$B^0 \to \eta\eta$	$0.37^{+0.12}_{-0.10}$	$0.09^{+0.06}_{-0.05}$ [557]	$0.32^{+0.15}_{-0.08}$	$< 1, \mathrm{CL} = 90\%,$
$B^0 \to \eta\eta'$	$0.29^{+0.09}_{-0.08}$	$0.59^{+0.39}_{-0.26}$ [557]	$0.36^{+0.27}_{-0.13}$	$< 1.2, \mathrm{CL} = 90\%,$
$B^0 \to \eta'\eta'$	$0.42^{+0.16}_{-0.13}$	$0.08^{+0.05}_{-0.04}$ [557]	$0.22^{+0.16}_{-0.08}$	$< 1.7, \mathrm{CL} = 90\%.$

变过程做简单介绍和讨论。首先，在表-10.7列出了基于QCDF和PQCD因子化方案给出的对21个$B \to PP$两体非粲强子衰变过程分支比的理论预言值[546, 550, 551]。在表-10.8中，列出了对$B \to (\pi\pi, K\pi, K\eta^{(\prime)})$两体非粲强子衰变过程CP破坏的理论预言值[550, 551]。其中C_f和S_f分别表示对应衰变过程$B \to f$的直接CP破坏和由混合引起的CP破坏，已经在(10.78)式中定义[12]。在这两个表格的最后一列，列出了对相关物理量实验测量结果的世界平均值(PDG2022) [2]。对最新的世界平均值，读者还可以参考HFLAV 合作组在他们最新论文中给出的结果[88]。

对$B \to PP$两体非粲强子衰变过程，出现过多个所谓的“反常”：例如$\pi\pi$反常、$K\eta'$反常和$K\pi$反常，成为长期的研究热点。对$B \to \pi\pi$衰变道，吕才典与合作者基于PQCD因子化方法，在2001年预言[450]: (a) $B^0 \to (\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0)$衰变过程的直接CP破坏大，可以

[12]注意：对直接CP破坏C_f，我们的定义和PDG2022[2]相同，但和论文[550]中对C_f的定义差一个“−”号。对CP破坏S_f，大家使用相同的定义。在表-10.8中，已经对QCDF对C_f理论预言值的符号按照PDG2022的定义做了调整。

表 10.8: 对部分$B \to PP$ 两体非粲强子衰变过程的CP破坏(单位是10^{-2})的理论预言值[549–551, 554, 555]和实验测量结果的世界平均值[2]。

Mode	PQCD[551]	PQCD	QCDF[550]	PDG2022 [2]
$B^0 \to \pi^+\pi^-$	$-12.8^{+3.5}_{-3.3}$	-18^{+7}_{-6} [549]	$-17.0^{+4.5}_{-8.8}$	$C_{\pi^+\pi^-} = -31.4 \pm 3.0$
	-36.4 ± 1.5	-42 ± 5 [549]	$-69^{+20.6}_{-13.5}$	$S_{\pi^+\pi^-} = -67.0 \pm 3.0$
$B^0 \to \pi^0\pi^0$	$-80.2^{+5.2}_{-6.7}$	-63^{+9}_{-15} [549]	$-57.2^{+33.7}_{-40.4}$	$C_{\pi^0\pi^0} = -33 \pm 22$
	$53.5^{+9.2}_{-8.9}$	...	...	...
$B^+ \to \pi^+\pi^0$	0.1 ± 0.1	0 [549]	$0.11^{+0.06}_{-0.03}$	3 ± 4
$B^0 \to K^+\pi^-$	$-5.4^{+2.2}_{-2.3}$	-8.1 ± 1.7 [554]	$-7.4^{+4.6}_{-5.0}$	-8.34 ± 0.32
$B^0 \to K^0_S\pi^0$	$-7.7^{+0.2}_{-0.1}$	$-8.9^{+1.4}_{-1.0}$ [554]	$10.6^{+6.2}_{-5.7}$	$C_{\pi^0 K^0} = 0 \pm 13$
	71.9 ± 0.6	...	$79.0^{+7.2}_{-5.7}$	$S_{\pi^0 K^0} = 58 \pm 17$
$B^+ \to K^0_S\pi^+$	-0.1 ± 0.1	0.4 ± 0.2 [554]	$0.28^{+0.09}_{-0.10}$	-1.7 ± 1.6
$B^+ \to K^+\pi^0$	$2.3^{+1.6}_{-1.8}$	2.1 ± 1.6 [554]	$4.9^{+6.3}_{-5.8}$	3.0 ± 1.3
$B^0 \to K^0_S\eta$	$-7.9^{+0.2}_{-0.1}$	-16^{+8}_{-14} [555]	$-23.6^{+16.0}_{-29.0}$	...
	70.0 ± 0.3	$66.7^{+3.7}_{-8.5}$ [555]	$79.0^{+8.9}_{-8.5}$	...
$B^0 \to K^0_S\eta'$	$2.7^{+0.1}_{-0.2}$	3.3 ± 0.3 [555]	$-3.0^{+1.0}_{-0.9}$	$C_{\eta' K^0} = -6 \pm 4$
	69.8 ± 0.2	70 ± 3 [555]	67.0 ± 1.4	$S_{\eta' K^0} = 63 \pm 6$
$B^+ \to K^+\eta$	$-7.8^{+1.3}_{-1.1}$	-23^{+15}_{-19} [555]	$-14.5^{+18.6}_{-28.1}$	-37 ± 8
$B^+ \to K^+\eta'$	$-1.8^{+0.9}_{-1.1}$	-5.5 ± 1.9 [555]	$0.45^{+1.4}_{-1.1}$	0.4 ± 1.1

达到30%；(b) 对$B^+ \to \pi^+\pi^0$衰变道，由于没有湮灭图贡献，企鹅图贡献又很小，所以其CP破坏很小可以忽略。这两点关于CP破坏的理论预言，在2004年就得到B介子工厂实验的证实。由表-10.8中的最新结果可以看出，对三个$B \to \pi\pi$衰变道CP破坏的理论预言(符号和大小) 和实验测量结果符合的很好。对$B \to (\pi^+\pi^-, \pi^+\pi^0)$这两个衰变道的衰变分支比，理论预言值和实验符合的很好。但对$\mathcal{B}(B^0 \to \pi^0\pi^0)$，早期的理论预言值约为$10^{-7}$，明显小于实验测量结果，这就是所谓的“$\pi\pi$-puzzle”。如表-10.7所示，在考虑了NLO贡献和Glauber胶子的贡献以后，PQCD的理论值增强为$(0.6^{+0.21}_{-0.17}) \times 10^{-6}$ [553] 。在选择合适的自由参数以后，基于QCDF因子化的理论值增强为$(1.1^{+1.2}_{-0.5}) \times 10^{-6}$ [550] ，在误差范围内符合实验测量结果。

对四个$B \to K\eta^{(\prime)}$衰变道，由表-10.7和表-10.8所列出的数值结果可以看出，对这些衰变道的衰变分支比和CP破坏的基于PQCD和QCDF因子化的理论计算结果和实验测量结果符合的都很好。历史上的“$K\eta'$反常”是指实验发现$B \to K\eta'$衰变道的衰变分支远远大于$B \to K\eta$的衰变分支比。1998年，CLEO报告的首次实验测量结果为[558]:

$$\mathcal{B}(B^+ \to K^+\eta') = (65^{+15}_{-14} \pm 9) \times 10^{-6}, \qquad \mathcal{B}(B^+ \to K^+\eta) < 14 \times 10^{-6}, \tag{10.155}$$

$$\mathcal{B}(B^0 \to K^0\eta') = (47^{+27}_{-20} \pm 9) \times 10^{-6}, \qquad \mathcal{B}(B^0 \to K^0\eta) < 33 \times 10^{-6}. \tag{10.156}$$

过去的20多年，各个实验组已经对$\mathcal{B}(B \to K\eta^{(\prime)})$做了精确测量。由表-10.7所列对各个衰

变分支比实验测量结果的世界平均值可以算出对应衰变分支比的比值为

$$R_1 = \frac{\mathcal{B}(B^0 \to K^0\eta')}{\mathcal{B}(B^0 \to K^0\eta)} \approx 53.7 \qquad R_2 = \frac{\mathcal{B}(B^+ \to K^+\eta')}{\mathcal{B}(B^+ \to K^+\eta)} \approx 29.3. \tag{10.157}$$

对大比值$R_{1,2}$的理论解释主要基于两点[555, 559]：

1. 如果采用在(??)式所定义的“味道本征基”：$\eta_q = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$，$\eta_s = s\bar{s}$，并且取混合角$\phi = \pi/2$，那么可以把$\eta - \eta'$介子的FKS混合[117] 写成如下形式

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_q - \eta_s), \qquad \eta' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_q + \eta_s). \tag{10.158}$$

   对于$B \to K\eta'$ 衰变，干涉项$2|M(\eta_q)M(\eta_s)^*|$ 和主项$|M(\eta_q)|^2 + |M(\eta_s)|^2$的符号相同，提供一个很大的增强。对于$B \to K\eta$衰变，干涉项的符号和主项的符号相反，导致一个大的抵消效应。具体的数值计算证实了这一点[555]。

2. 当然，单独的由于干涉项导致的增强和抵消效应还不足以解释(10.157)式所显示的差别。对这两个衰变过程的次领头阶贡献和其它可能参与混合的强子均可以提供新的影响，帮助我们很好地解释实验测量结果。例如，作者在PQCD因子化框架下对$B \to K\eta^{(\prime)}$衰变过程做了系统研究[555]，分别考虑了经典的$\eta - \eta'$混合[117]、$\eta - \eta' - G$混合方案[560] 和$\eta - \eta' - G - \eta_c$ 三种混合方案[561] [13]，计算了四个衰变道的分支比。

   在表-10.9中，我们列出了在$\eta - \eta'$和$\eta - \eta' - G$混合方案下得到的数值结果。从表-10.9可以看出：(a) 在领头阶，$R_i \sim 10 - 20$，主要来源于干涉项对$B \to K\eta'$衰变过程的增强和对$B \to K\eta$衰变过程的抵消效应；(b) 对$B \to K\eta$衰变过程，NLO贡献提供的分支比的增强比较小。但对$B \to K\eta'$衰变过程，NLO贡献提供的分支比的增强约为100%，使得我们可以解释实验测量结果。(c) 相对于$\eta - \eta'$混合方案的结果，基于$\eta - \eta' - G$混合方案得到的对四个衰变分支比的理论计算结果和实验测量结果的符合程度得到了优化。

第三个受到长期关注的是$K\pi$反常。由图-10.22可以看出，对四个$B \to K\pi$ 衰变过程，主要的相关费曼图包括与夸克层次$\bar{b} \to \bar{s}(u\bar{u}, d\bar{d})$跃迁相对应的QCD和电弱企鹅图，以及和$\bar{b} \to \bar{u}(u\bar{s})$跃迁相对应的树图和色压低树图。对于$B \to K\pi$衰变过程，QCD企鹅图给出主要贡献，树图、色压低树图、电弱企鹅图和湮灭图的贡献一般依次减小。由于四个$B \to K\pi$ 衰变道的末态介子K和π均为由前3味轻夸克$q = (u, d.s)$及其反夸克$\bar{q}$组成的轻强子，可以使用$SU(3)_F$味对称性来分析这些衰变道。但是考虑到$SU(3)_F$味对称性一般有20%左右的破缺，相关分析的精确度不高。但对$B^0 \to K^+\pi^-$和$B^+ \to K^+\pi^0$这两个衰变

[13] 郑海扬等人的混合方案中的G表示赝标量胶子球(glueball)[560]。除了可能的胶球贡献，赵强等人的混合方案还考虑了可能的η_c介子的贡献[561]。对更多的细节详见论文[555]中的介绍、讨论和计算。

表 10.9: 在$\eta-\eta'$和$\eta-\eta'-G$混合方案下，对四个$B\to K\eta^{(\prime)}$ 衰变过程衰变分支比(单位是10^{-6}) 的PQCD理论预言值[555]。最后一列是PDG2022给出的世界平均值[2]。

	$\eta-\eta'$ 混合[117]		$\eta-\eta'-G$ 混合[560]		
Channel	LO	NLO	LO	NLO	PDG [2]
$B^0\to K^0\eta$	2.1	$2.6^{+2.6}_{-1.7}$	0.9	$1.1^{+2.0}_{-1.0}$	$1.23^{+0.27}_{-0.24}$
$B^0\to K^0\eta'$	27.9	$57.2^{+23.7}_{17.0}$	35.2	$66.5^{+25.9}_{-15.4}$	66 ± 4
$B^+\to K^+\eta$	3.8	$4.0^{+3.8}_{-2.2}$	2.0	$2.4^{+2.6}_{-1.5}$	2.4 ± 0.4
$B^+\to K^+\eta'$	30.3	$58.7^{+24.0}_{-17.2}$	38.9	$67.3^{+26.0}_{-19.4}$	70.4 ± 2.5

道，他们的差别仅在与旁观者夸克是u夸克还是d夸克，满足同位旋对称性。根据同位旋对称性，这两个道的CP破坏的大小和符号应该一致：

$$\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^0)-\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^0)\approx 0. \tag{10.159}$$

但目前的实验测量结果为[562]

$$[\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^0)-\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^-)]|_{\rm exp}=(11.5\pm1.4)\times10^{-2}, \tag{10.160}$$

与0有大约8σ的偏离。通过多年的研究，在考虑了增强的色压低树图贡献、次领头阶贡献和非微扰贡献以后，人们已经基于不同的因子化方法对该反常给出了合理的解释[550, 551, 554]。根据在表-10.8中给出的数值结果可得到：

$$\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^0)-\mathcal{A}_{\rm CP}(B^+\to K^+\pi^-)=\begin{cases}(10.2\pm1.2\times10^{-2}, & \text{PQCD},\\ (12.3\pm3.8)\times10^{-2}, & \text{QCDF}.\end{cases} \tag{10.161}$$

显然，上述理论计算结果和实验测量结果符合的很好。

当然，人们还在许多新物理模型中考虑了对$B\to K\pi$衰变过程可能的新物理修正的影响[563]。2005年，M. Gronau考虑了各种误差影响，构建了同时涉及四个$B\to K\pi$衰变过程的精确同位旋求和规则[564]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm CP}(K^+\pi^-)+\mathcal{A}_{\rm CP}(K^0\pi^+)\frac{\mathcal{B}(K^0\pi^+)}{\mathcal{B}(K^+\pi^-)}\frac{\tau_0}{\tau_+} &= \mathcal{A}_{\rm CP}(K^+\pi^0)\frac{2\mathcal{B}(K^+\pi^0)}{\mathcal{B}(K^+\pi^-)}\frac{\tau_0}{\tau_+}\\ &\quad+\mathcal{A}_{\rm CP}(K^0\pi^0)\frac{2\mathcal{B}(K^0\pi^0)}{\mathcal{B}(K^+\pi^-)},\end{aligned} \tag{10.162}$$

上式中的$\tau_{0,+}$表示$B^{0,+}$介子的寿命，$\mathcal{B}(K\pi)$表示对应衰变道的衰变分支比。对上式的实验检验工作目前仍在进行之中[562, 565]，其中的难点在于目前对$\mathcal{B}(B^0\to K^0_S\pi^0)$的实验测量误差大。Belle-II实验可以同时精确测量这四个衰变道的分支比和CP破坏，人们期待Belle-II 可以优化数据采集和分析，能够尽快提供对该衰变道衰变分支比和CP破坏的精确实验测量结果[566]，进而对(10.162)式是否成立做出精确检验。

对更多$B/B_S/B_C\to M_1M_2$ $(M_i=P,V,A,S,T)$)两体非粲和含粲强子衰变过程的研究，对B介子三体衰变过程的研究，读者可以参看论文[551, 552, 567, 568]和那里的引文。

10.4.5　重味重子和奇异强子态简介

尽管对重味重子的理论和实验研究目前仍处于初期阶段，但随着实验上不断报告的双粲重子的产生和衰变事例，以及对Λ_b重子的产生和衰变的研究，对重味重子的理论和实验研究成为重味物理新的热点研究领域。双粲重子Ξ_{cc}^{++}的发现，成为理论和实验合作研究的一个范例。对目前的研究现状的细节，读者可以参看论文[124, 128, 130, 132, 137, 569–571]和那里的引文。

过去20年，人们不断发现新的强子态。如图-10.23所示，到2022年7月，在LHC工作的ATLAS，CMS和LHCb实验组先后发现了67个新强子态[572]。在表-10.10中，按照被LHC实验发现的时间顺序，我们列出了前21个被发现的新强子态[145, 146, 218, 573–579]，其中$q = (u, d)$。

大部分新强子态被称之为“奇异强子态”(exotics)。在第六章，我们已经对各类的奇异强子态的可能夸克结构，主流的理论模型和解释做了较为详细的介绍。重点介绍了对可能的胶子球、四夸克态、五夸克态和双重子态的理论研究和实验探测现状。对此类新强子态的发现和研究将是今后很长一段时间强子物理的重点研究领域。

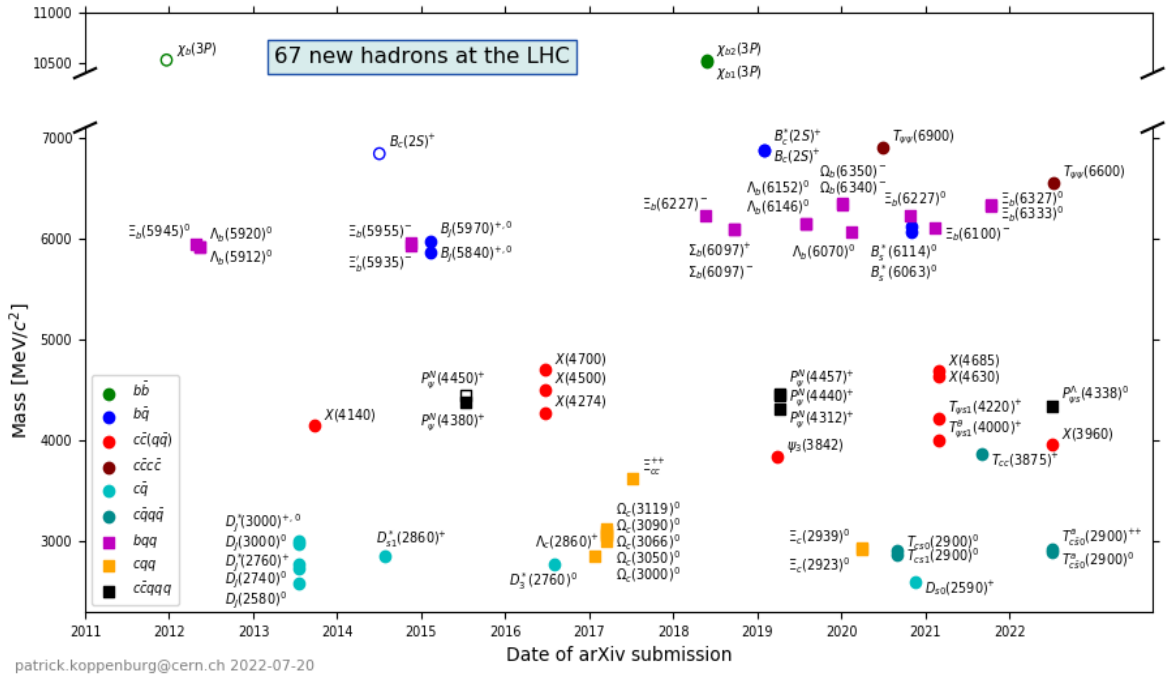


图 10.23:　在LHC工作的ATLAS，CMS和LHCb实验组发现的67个新强子态[572]。

10.5　练习题

1. 在标准模型的“退耦”定理中，质量越重的新物理粒子对于低能过程的影响越小，这也是重整化可以有效进行的基础，但是对于$B - \bar{B}$等介子混合中，却是越重的粒子贡献越大，在顶夸克发现之前就准确预言了其质量，为什么？

表 10.10: 被ATLAS，CMS和LHCb实验组先后发现的前21个新强子态[572]。

No.	Particle	Mass [MeV]	Quarks	Collaboration	Note
1	$\chi_b(3P)$	10530 ± 10	$b\bar{b}$	ATLAS [573]	后来细化为$\chi_{b1,b2}(3P)$
2	$\Xi_b(5945)^0$	5945 ± 3	bsu	CMS [146]	
3	$\Lambda_b(5920)^0$	5919.8 ± 0.7	bud	LHCb [574]	
4	$\Lambda_b(5912)^0$	5912.0 ± 0.7	bud	LHCb [574]	
5-6	$D_J^*(3000)^{+0}$	3008 ± 4	$c\bar{q}$	LHCb [575]	
7	$D_J(3000)^0$	2972 ± 9	$c\bar{u}$	LHCb [575]	
8	$D_J^*(2760)^+$	2772 ± 4	$c\bar{d}$	LHCb [575]	
9	$D_J(2740)^0$	2737 ± 12	$c\bar{u}$	LHCb [575]	
10	$D_J(2580)^0$	2580 ± 6	$c\bar{u}$	LHCb [575]	
11	$X(4140)$	4148 ± 7	$c\bar{c}(s\bar{s})$	CMS [576]	可能是4夸克态
12	$B_C(2S)^+$	6842 ± 6	$\bar{b}c$	ATLAS [577]	后来细化为两个态
13	$D_{s1}^*(2860)^+$	2859 ± 27	$c\bar{s}$	LHCb [578]	注1
14	$\Xi_b(5955)^-$	5955.3 ± 0.5	bsd	LHCb [145]	
15	$\Xi_b(5935)^-$	5935.0 ± 0.5	bsd	LHCb [145]	
16-17	$B_J(5970)^{+,0}$	5969 ± 6	$\bar{b}q$	LHCb [579]	注2
18-19	$B_J(5840)^{+,0}$	5863 ± 9	$\bar{b}q$	LHCb [579]	注2
20	$P_\psi^N(4450)^+$	4449.8 ± 3.0	$c\bar{c}uud$	LHCb [218]	$P_c(4450)^+$，注3
21	$P_\psi^N(4380)^+$	4380 ± 30	$c\bar{c}uud$	LHCb [218]	$P_c(4380)^+$

注1：窄$D_s(2860)^-$强子后来细化为两个态：自旋为1的宽共振态和自旋为3的窄态。前者被认为是一个新强子。

注2：实验发现了带电和中性强子。这里所列质量是中性态质量，比较重的强子可能是CDF看到的$B_J(5970)$。

注3：$P_c(4450)^+$后来被细化为(resolved into)$P_c(4440)^+$和$P_c(4457)^+$ [2]。

2. 对于B、D、K等介子的弱衰变，正反粒子衰变的分支比的不同，我们定义为CP破坏，为什么不是C破坏？对于$B^* \to B\gamma$的电磁衰变中，B^* 和$\bar{B}^*$的衰变分支比如果有不同，反映的是C还是CP破坏？

3. 考虑$B^0 - \bar{B}^0$的混合，证明(10.48)和(10.49)式。

4. 证明$K \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$衰变末态是CP为偶的态。考虑$K \to 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$三体衰变末态，那么这两个末态的CP量子数为何？

5. 如果假定在一个世界上有$m_\pi = 0$，那么你认为那里的人们能够发现CP破坏吗？

6. 另外，如果假定$m_\pi = 200$ MeV而不是$m_\pi \approx 130$ MeV，那么这对$\theta - \tau$之谜有什么影响，对发现CP破坏有什么影响？

7. 考虑赝标量场(P)、标量场(S)、矢量场(V_μ)和轴矢量场(A_μ)，如果把一个简单哈密顿

量$\mathcal{H}$写成如下形式

$$\mathcal{H} = (aS + bP)(aS + bP)^\dagger + (cV_\mu + dA_\mu)(cV_\mu + dA_\mu)^\dagger, \tag{10.163}$$

那么，在什么条件下，$\mathcal{H}$在C, P, T, CP和CPT变换下是不变的。

8. 证明：(a) 如果任意两种夸克的质量是简并的(相同)，那么3×3的CKM矩阵就可以是实矩阵; (b) 如果CKM矩阵的任意一个矩阵元等于0，那么刻意调整CKM矩阵元的相位，把CKM矩阵变换成实矩阵。

9. 考虑$K \to \pi\pi$衰变过程，其衰变宽度可以写为

$$\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^0) = \frac{p_\pi}{8\pi m_K^2}|\mathcal{A}(K^+ \to \pi^+\pi^0)|^2. \tag{10.164}$$

根据K^+, K_S介子的寿命，以及$K_S \to \pi^+\pi^-$和$K^+ \to \pi^+\pi^0$衰变分支比的实验数据[1]，导出

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(K^+ \to \pi^+\pi^0) &\approx 1.8 \times 10^{-8} \ \text{GeV};\\
\mathcal{A}(K^0 \to \pi^+\pi^-) &\approx 27.5 \times 10^{-8} \ \text{GeV};\\
\mathcal{A}(K^0 \to \pi^0\pi^0) &\approx 26.4 \times 10^{-8} \ \text{GeV}.
\end{aligned} \tag{10.165}$$

10. 使用实验测量值：$M(\Upsilon(4S)) = 10.5800\text{GeV}$, $m_B = 5.2792$ GeV和$c\tau = 468\mu m$作为输入参数：

    (a) 在正负电子束流能量相同的对撞机上，由$e^+e^- \to \Upsilon \to B^0\bar{B}^0$产生的B 介子对在产生时处于静止状态，计算在$B^0$介子衰变前它飞行的距离。

    (b) 在日本的B介子工厂实验中，$E(e^-) = 9$ GeV, $E(e^+) = 3$ GeV，计算这时产生的B^0介子在衰变前飞行的距离。为什么日本和美国的B介子工厂的正负电子束流能量都设计成是不相等的。

附录 A　狄拉克方程与狄拉克矩阵

为了方便学生学习，我们把本书所用到的定义、公式和规则在此附录中给出。

A.1　4维时空γ矩阵公式

在4维时空，4×4 的狄拉克(Dirac)矩阵满足如下的反对易关系：

$$\begin{aligned}\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} &= \gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}\mathbf{I}_4,\quad \gamma_\mu=(\gamma_0,-\gamma),\quad \gamma^\mu=(\gamma^0,\gamma),\\ \{\gamma_\mu,\gamma_5\} &= 0,\quad \gamma_5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,\quad \gamma_5=-\frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho.\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

左手和右手投影矩阵$\mathbf{L},\mathbf{R}$可以写为：

$$\mathbf{L}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5),\quad \mathbf{R}=\frac{1}{2}(1+\gamma_5).\tag{A.1.2}$$

一个有用的恒等式是：

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda=g_{\alpha\beta}\gamma_\lambda+g_{\beta\lambda}\gamma_\alpha-g_{\alpha\lambda}\gamma_\beta+i\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^\mu\gamma_5.\tag{A.1.3}$$

其中$\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}$表示四阶全反对称张量：$\epsilon^{0123}=1$(详见下面定义)。

由(A.1.3)式可以导出下面的表达式：

$$[[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_\lambda]=-4\left(g_{\mu\lambda}\gamma_\nu-g_{\nu\lambda}\gamma_\mu\right)=i4\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\rho\gamma_5,\tag{A.1.4}$$

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_5=\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}[\gamma^\lambda,\gamma^\rho],\quad [\not a,\not b][\not a,\not b]=4[(ab)^2-a^2b^2].\tag{A.1.5}$$

其中$(ab)=(a\cdot b)$。由(A.1.1)式，可以证明

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\mu &= 4\mathbf{I}_4,\quad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu=-2\gamma_\alpha,\\ \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu &= 4g_{\alpha\beta}\mathbf{I}_4,\qquad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma^\mu=-2\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha,\\ \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta}\gamma^\mu &= 0,\quad \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\nu\gamma^\mu=2\gamma_\nu\sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{A.1.6}$$

另外，下面的关系式也成立：

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{I}_4\right)=4,\quad \mathrm{Tr}\left(\not a\not b\right)=4\mathrm{a}\cdot\mathrm{b},\quad \mathrm{Tr}\left(\text{odd }\#\ \ \gamma'\mathrm{s}\right)=0,\tag{A.1.7}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\not a\not b\not c\not d\right)=4\left(a\cdot b\,c\cdot d-a\cdot c\,b\cdot d+a\cdot d\,b\cdot c\right).\tag{A.1.8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\not a\not b\not c\not d\not e\not f\right) = {}& 4a\cdot b\ (c\cdot d\,e\cdot f-c\cdot e\,d\cdot f+c\cdot f\,d\cdot e)\\ & -4a\cdot c\ (b\cdot d\,e\cdot f-b\cdot e\,d\cdot f+b\cdot f\,d\cdot e)\\ & +4a\cdot d\ (b\cdot c\,e\cdot f-b\cdot e\,c\cdot f+b\cdot f\,c\cdot e)\\ & -4a\cdot e\ (b\cdot c\,d\cdot f-b\cdot d\,c\cdot f+b\cdot f\,c\cdot d)\\ & +4a\cdot f\ (b\cdot c\,d\cdot e-b\cdot d\,c\cdot e+b\cdot e\,c\cdot d)\,.\end{aligned}\tag{A.1.9}$$

也可以把(A.1.9)式写成比较好记的形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_5}\gamma^{\mu_6}\right] &= 4\Big\{(12)\big[(34)(56)-(35)(46)+(36)(45)\big]\\ &\quad -(13)\big[(24)(56)-(25)(46)+(26)(45)\big]\\ &\quad +(14)\big[(23)(56)-(25)(36)+(26)(35)\big]\\ &\quad -(15)\big[(23)(46)-(24)(36)+(26)(34)\big]\\ &\quad +(16)\big[(23)(45)-(23)(35)+(25)(34)\big]\Big\}, \qquad \text{(A.1.10)}\end{aligned}$$

其中$(ij)=g^{\mu_i\mu_j}$。

和γ_5矩阵相关的几个“求迹”关系式为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\right) &= 0, \quad \text{for} \quad n=0,1,2,3;\\ \mathrm{Tr}\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\right) &= -\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)=-4\mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=4\mathrm{i}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad \text{(A.1.11)}\\ \mathrm{Tr}\left(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right) &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma=4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma, \qquad \text{(A.1.12)}\\ \mathrm{Tr}\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) &= -4i\left[g_{\mu\nu}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}-g_{\mu\rho}\epsilon_{\nu\sigma\alpha\beta}+g_{\nu\rho}\epsilon_{\mu\sigma\alpha\beta}\right.\\ &\quad \left.+g_{\sigma\alpha}\epsilon_{\mu\nu\rho\beta}-g_{\sigma\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}+g_{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right], \qquad \text{(A.1.13)}\\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &= -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}1, & for\ \ even\ \ permu.\ \ of\ \ 0,1,2,3;\\ -1, & for\ \ odd\ \ permutation;\\ 0, & otherwise;\end{cases} \qquad \text{(A.1.14)}\end{aligned}$$

张量ϵ 可以通过“缩并”来化简：

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}=-6\delta^\sigma_\tau,\\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho'\sigma'} &= -2\left(g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}-g^{\rho\sigma'}g^{\rho'\sigma}\right),\\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\beta} &= -\begin{vmatrix}\delta^\lambda_\mu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\lambda_\alpha\\ \delta^\rho_\mu & \delta^\rho_\nu & \delta^\rho_\alpha\\ \delta^\sigma_\mu & \delta^\sigma_\nu & \delta^\sigma_\alpha\end{vmatrix}, \qquad \text{(A.1.15)}\\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau} &= -\begin{vmatrix}\delta^\lambda_\mu & \delta^\lambda_\nu & \delta^\lambda_\alpha & \beta^\lambda_\alpha\\ \delta^\rho_\mu & \delta^\rho_\nu & \delta^\rho_\alpha & \beta^\rho_\alpha\\ \delta^\sigma_\mu & \delta^\sigma_\nu & \delta^\sigma_\alpha & \beta^\sigma_\alpha\\ \delta^\tau_\mu & \delta^\tau_\nu & \delta^\tau_\alpha & \beta^\tau_\alpha\end{vmatrix}, \qquad \text{(A.1.16)}\\ g_{\alpha\mu}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} &+ g_{\alpha\nu}\epsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}+g_{\alpha\lambda}\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}+g_{\alpha\rho}\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}=0. \qquad \text{(A.1.17)}\end{aligned}$$

对任意的洛仑兹矢量$(a_\mu,b_\mu,\cdots)$，有

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}a_\mu b_\nu c_\alpha d_\beta=-\det\begin{vmatrix}a^0 & b^0 & c^0 & d^0\\ a^1 & b^1 & c^1 & d^1\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}a_0 & b_0 & c_0 & d_0\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}. \qquad \text{(A.1.18)}$$

对实的矢量玻色子的极化态的求和：

$$massless: \quad \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{*}(p,\lambda)\epsilon_{\nu}(k,\lambda) = -g_{\mu\nu}, \quad in \ \ Feynman \ \ gauge, \tag{A.1.19}$$

$$massive: \quad \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{*}(p,\lambda)\epsilon_{\nu}(k,\lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{M_V^2}. \tag{A.1.20}$$

对任意多条实光子外线，(A.1.19)式的代换成立。如果只有一条零质量的胶子外线，上式亦成立。但是，对于有2条或者更多条胶子外线，且出现三胶子顶点的情况，(A.1.19)式不成立。对这种情况，必须引入非物理的“鬼”(ghost)粒子[13]。

在导出上述关系式的时候，我们使用了“求迹”的下述性质：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\mathbf{AB}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BA}\right), \\ \mathrm{Tr}\left(\mathbf{ABC}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\mathbf{CAB}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BCA}\right), \\ \mathrm{Tr}\left(\mathrm{c}_1\mathbf{A} + \mathrm{c}_2\mathbf{B}\right) &= c_1\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\right) + \mathrm{c}_2\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}\right), \end{aligned} \tag{A.1.21}$$

其中$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$ 是矩阵，c_1, c_2是常数。

当取$N = 4$，并采用标准的狄拉克表象时，狄拉克矩阵γ^{μ}, γ_5 的表达式可以写成

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.1.22}$$

其中$\mathbf{I}_2$ 是2×2的单位矩阵，泡利矩阵σ_i满足如下对易和反对易关系：

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \epsilon_{ijk}: \text{totally} \ \ \text{antisymmetric}, \epsilon_{123} = 1, \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}, \qquad \sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \mathrm{Tr}(\sigma_\mathrm{i}\sigma_\mathrm{j}) &= 2\delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned} \tag{A.1.23}$$

其2×2矩阵表示可以写为：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.1.24}$$

完整性关系为:

$$\sum_i (\sigma_i)_{ab}(\sigma_i)_{cd} = 2\left(\delta_{bc}\delta_{ad} - \frac{1}{2}\delta_{ba}\delta_{cd}\right). \tag{A.1.25}$$

对γ_5和$\sigma_{\mu\nu}$矩阵，我们使用的定义是：

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.1.26}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] \tag{A.1.27}$$

其中

$$\gamma_5^2 = \mathbf{I}_4, \qquad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu) = 0. \tag{A.1.28}$$

在文献[13, 48]中，关于γ_μ矩阵的定义在狄拉克表象下是一样的。关于γ_5，4×4矩阵是一样的，但写成 4 个γ矩阵乘积时的定义不一样．使用相关公式时要注意。

自旋矩阵$\mathbf{S}$，波函数或者狄拉克矩阵的电荷共轭和厄米共轭的定义为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad S^i = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}, \quad i = 1,2,3, \\
\Psi^c &= C\Psi^\dagger, \quad C\gamma_\mu C^\dagger = -\gamma_\mu^*, \quad C = -\gamma_2, \\
(\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma^{\mu\nu}, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5,
\end{aligned} \tag{A.1.29}$$

其它一些计算中可能用到的“求迹”表达式为[590]:

$$\mathrm{Tr}[[\not{a},\not{b}]\not{c}\not{d}\mathbf{L}] = 4[(\mathrm{ad})(\mathrm{bc}) - (\mathrm{ac})(\mathrm{bd}) + \mathrm{i}\epsilon^{\mathrm{abcd}}] = \frac{1}{2}[[\not{a},\not{b}][\not{c},\not{d}]\mathbf{L}], \tag{A.1.30}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\gamma_\mu\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\nu\mathbf{L}] = 2[\mathrm{p}_\mu\mathrm{k}_\nu + \mathrm{k}_\mu\mathrm{p}_\nu - (\mathrm{pk})\mathrm{g}_{\mu\nu}] + 2\mathrm{i}\,\epsilon_{\mathrm{p}\mu\mathrm{k}\nu}, \tag{A.1.31}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\gamma_\mu\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\nu\mathbf{R}] = 2[\mathrm{p}_\mu\mathrm{k}_\nu + \mathrm{k}_\mu\mathrm{p}_\nu - (\mathrm{pk})\mathrm{g}_{\mu\nu}] - 2\mathrm{i}\,\epsilon_{\mathrm{p}\mu\mathrm{k}\nu}, \tag{A.1.32}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\gamma_\mu\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\nu\mathbf{R}] = \mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\gamma_\mu\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\nu\mathbf{L}] = -2\mathrm{mm}'\mathrm{g}_{\mu\nu}, \tag{A.1.33}$$

其中$\epsilon^{abcd} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}a_\mu b_\nu c_\alpha d_\beta$，$\epsilon_{p\mu k\nu} = \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\alpha k^\beta$，以此类推。

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\mathbf{L}] = \mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\mathbf{R}] = -2\mathrm{mm}', \tag{A.1.34}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\mathbf{R}] = \mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\mathbf{L}] = 2(\mathrm{pk}), \tag{A.1.35}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\mu\mathbf{L}] = \mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\mu\mathbf{R}] = 2\mathrm{mk}_\mu, \tag{A.1.36}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\mu\mathbf{R}] = \mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')\gamma_\mu\mathbf{L}] = -2\mathrm{m}'\mathrm{p}_\mu, \tag{A.1.37}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\mathbf{L}] = -8\mathrm{mm}'[\mathrm{g}_{\mu\rho}\mathrm{g}_{\nu\lambda} - \mathrm{g}_{\mu\lambda}\mathrm{g}_{\nu\rho} + \mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{A.1.38}$$

$$\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\mathbf{R}] = -8\mathrm{mm}'[\mathrm{g}_{\mu\rho}\mathrm{g}_{\nu\lambda} - \mathrm{g}_{\mu\lambda}\mathrm{g}_{\nu\rho} - \mathrm{i}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{A.1.39}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\mathbf{L}(\not{k}-\mathrm{m}')[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\mathbf{R}] = \\
&\quad 8\Big[(p_\mu k_\lambda + k_\mu p_\lambda)g_{\nu\rho} - (p_\nu k_\lambda + k_\nu p_\lambda)g_{\mu\rho} - (p_\mu k_\rho + k_\mu p_\rho)g_{\nu\lambda} + (p_\nu k_\rho + k_\nu p_\rho)g_{\mu\lambda} \\
&\quad +(pk)(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + i(p_\mu\epsilon_{k\nu\lambda\rho} - p_\nu\epsilon_{k\mu\lambda\rho} - k_\lambda\epsilon_{p\rho\mu\nu} + k_\rho\epsilon_{p\lambda\mu\nu})\Big],
\end{aligned} \tag{A.1.40}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[(\not{p}+\mathrm{m})[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\mathbf{R}(\not{k}-\mathrm{m}')[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\mathbf{L}] = \\
&\quad 8\Big[(p_\mu k_\lambda + k_\mu p_\lambda)g_{\nu\rho} - (p_\nu k_\lambda + k_\nu p_\lambda)g_{\mu\rho} - (p_\mu k_\rho + k_\mu p_\rho)g_{\nu\lambda} + (p_\nu k_\rho + k_\nu p_\rho)g_{\mu\lambda} \\
&\quad +(pk)(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) - i(p_\mu\epsilon_{k\nu\lambda\rho} - p_\nu\epsilon_{k\mu\lambda\rho} - k_\lambda\epsilon_{p\rho\mu\nu} + k_\rho\epsilon_{p\lambda\mu\nu})\Big],
\end{aligned} \tag{A.1.41}$$

其中$\epsilon_{k\nu\lambda\rho} = \epsilon_{\alpha\nu\lambda\rho}k^\alpha$，$\epsilon_{p\rho\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\rho\mu\nu}p^\alpha$，以此类推。

A.2　N维时空γ矩阵公式

在N-维时空，狄拉克矩阵满足：

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}\mathbf{I}_N \tag{A.2.1}$$

其中$\mathbf{I}_N$ 是N-维时空的单位矩阵，μ 和ν 的取值范围是从0 到N-1。另外，有下述关系式[590]：

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= N\mathbf{I}_N,\\
\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu &= (2-N)\gamma_\alpha,\\
\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu &= 4g_{\alpha\beta}\mathbf{I}_N+(N-4)\gamma_\alpha\gamma_\beta,\\
\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\mu &= -2\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha-(N-4)\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda,\\
\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu &= 2(\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\alpha+\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\beta)+(N-4)\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\rho.
\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu &= 4[\mathbf{0}]+(N-4)[\mathbf{2}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\beta\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu &= 8N[(N-2)[\mathbf{0}]+(4-N)^2[\mathbf{2}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda &= 4(2-3N)[\mathbf{1}]+(6-N)[\mathbf{3}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda &= 8(2-3N)(4-N)[\mathbf{1}]+(6-N)^2[\mathbf{3}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho &= 16N[\mathbf{0}]+8(3N-4)[\mathbf{2}]+(N-8)[\mathbf{4}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma_\beta\gamma_\alpha\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho &= 128N(N-2)[\mathbf{0}]\\
&\quad +16(3N-4)(N-6)[\mathbf{2}]+(N-8)^2[\mathbf{4}],
\end{aligned} \tag{A.2.3}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\otimes\gamma_\nu\gamma_\mu &= 2N[\mathbf{0}]-[\mathbf{2}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha &= 4(1-N)[\mathbf{1}]+[\mathbf{3}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\otimes\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha &= 2(3N-2)[\mathbf{1}]-[\mathbf{3}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\alpha &= 8N[\mathbf{0}]+6(N-2)[\mathbf{2}]-[\mathbf{4}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\alpha &= 8N(2-N)[\mathbf{0}]+2(5N-8)[\mathbf{2}]-[\mathbf{4}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\alpha &= -16(2N-1)[\mathbf{1}]+8(3-N)[\mathbf{3}]+[\mathbf{5}],\\
\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\otimes\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha &= 8(4-N)(3N-2)[\mathbf{1}]+2(7N-18)[\mathbf{3}]-[\mathbf{5}],
\end{aligned} \tag{A.2.4}$$

其中符号$[\mathbf{0}]\cdots[\mathbf{5}]$的定义为:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{0}] &= \mathbf{I}\otimes\mathbf{I},\\
[\mathbf{1}] &= \gamma^{\mu}\otimes\gamma_{\mu},\\
[\mathbf{2}] &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\otimes\gamma_{\mu}\gamma_{\nu},\\
[\mathbf{3}] &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\otimes\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda},\\
[\mathbf{4}] &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\otimes\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho},\\
[\mathbf{5}] &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\otimes\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}.
\end{aligned}\tag{A.2.5}$$

上面这些等式可以由关系式$\{\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\}=2g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=N$导出。

在N维时空，一般地说自旋空间的维数是$2^{N/2}$ (N为偶数)或者$2^{(N-4)/2}$ (N为奇数)，使得$\mathrm{Tr}(\mathbf{I}_{\mathrm{N}})=\mathrm{F(N)}=4+\mathrm{f(N)}$，在$N\to 4$的极限下，有$f(N)\to 0$。可以证明伴随$f(N)$引进的其它项在$N\to 4$的极限下不影响$f(N)\to 0$。所以我们可以定义极限：$\lim_{N\to 4} f(N)\equiv 0$。所以，对N-维时空的单位矩阵$\mathbf{I}_N$的“求迹”可以定义为

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{I}_{\mathrm{N}})=4,\tag{A.2.6}$$

进而导致

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\right) &= 4g_{\alpha\beta}, &\text{(A.2.7)}\\
\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho}\right) &= 4\left(g_{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}-g_{\alpha\lambda}g_{\beta\rho}+g_{\alpha\rho}g_{\beta\lambda}\right). &\text{(A.2.8)}\\
\mathrm{Tr}\left(\text{odd \# of }\gamma'\mathrm{s}\right) &= 0. &\text{(A.2.9)}
\end{aligned}$$

由(A.2.7) 和(A.2.8)式可得：

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})=4\mathrm{a}\cdot\mathrm{b},\qquad \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})=4\left(\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}\;\mathrm{c}\cdot\mathrm{d}-\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}\;\mathrm{b}\cdot\mathrm{d}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\;\mathrm{b}\cdot\mathrm{c}\right).\tag{A.2.10}$$

其中符号”slash” 在N-维时空中的定义为：

$$\not{a}=a\cdot\gamma=g_{\mu\nu}a_{\mu}\gamma_{\nu}=a_0\gamma_0-a_1\gamma_1-\cdots-a_{N-1}\gamma_{N-1}.\tag{A.2.11}$$

计算Box-图时用到的变换公式($D=4-2\epsilon$)：

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\gamma_{\nu}\gamma_{\alpha}\otimes\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha} &= (16-4\epsilon)\;\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\mu}(1-\gamma_5),\\
\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\gamma_{\nu}\gamma_{\alpha}\otimes\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5)\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} &= (4-8\epsilon)\;\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\mu}(1-\gamma_5),\\
\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5) &= (16-4\epsilon)\;\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\mu}(1-\gamma_5),\\
\gamma_{\alpha}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) &= (4-8\epsilon)\;\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\otimes\gamma^{\mu}(1-\gamma_5).
\end{aligned}\tag{A.2.12}$$

几个有用的“求迹”表达式：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{1}\gamma^{\nu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{2}\right]=2\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\not{\mathrm{p}}_{1}\gamma^{\nu}\not{\mathrm{p}}_{2}\right]+8\mathrm{i}\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\ \mathrm{p}_{1\alpha}\mathrm{p}_{2\beta},\\
&\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\not{\mathrm{p}}_{1}\gamma^{\nu}\not{\mathrm{p}}_{2}\right]\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_{\mu}\not{\mathrm{p}}_{3}\gamma_{\nu}\not{\mathrm{p}}_{4}\right]=32\left[(\mathrm{p}_{1}\cdot\mathrm{p}_{3})(\mathrm{p}_{2}\cdot\mathrm{p}_{4})+(\mathrm{p}_{1}\cdot\mathrm{p}_{4})(\mathrm{p}_{2}\cdot\mathrm{p}_{3})\right],\\
&\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\not{\mathrm{p}}_{1}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\not{\mathrm{p}}_{2}\right]\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_{\mu}\not{\mathrm{p}}_{3}\gamma_{\nu}\gamma^{5}\not{\mathrm{p}}_{4}\right]\\
&\qquad\qquad=-32\left[(p_{1}\cdot p_{3})(p_{2}\cdot p_{4})-(p_{1}\cdot p_{4})(p_{2}\cdot p_{3})\right],\\
&\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{1}\gamma^{\nu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{2}\right]\mathrm{Tr}\left[\gamma_{\mu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{3}\gamma_{\nu}(1-\gamma^{5})\not{\mathrm{p}}_{4}\right]\\
&\qquad\qquad=256(p_{1}\cdot p_{3})(p_{2}\cdot p_{4}).
\end{aligned}
\tag{A.2.13}
$$

在计算过程振幅的模方$|\mathcal{M}|^2$时，经常要（在四维时空）计算如下形式的两个“Trace”的乘积与收缩：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T} &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}(\mathrm{C}_{1}-\mathrm{C}_{2}\gamma^{5})\right]\mathrm{Tr}\left[\gamma_{\theta}\gamma_{\mu}\gamma_{\phi}\gamma_{\nu}(\mathrm{C}_{3}-\mathrm{C}_{4}\gamma^{5})\right]\\
&= 16\left[C_{1}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}+g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}-g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)-iC_{2}\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}\right]\\
&\quad\cdot\left[C_{3}\left(g_{\theta\mu}g_{\phi\nu}+g_{\theta\nu}g_{\mu\phi}-g_{\theta\phi}g_{\mu\nu}\right)-iC_{4}\epsilon^{\theta\mu\phi\nu}\right]\\
&= 32\left[C_{1}C_{3}\left(\delta_{\theta}^{\alpha}\delta_{\phi}^{\beta}+\delta_{\phi}^{\alpha}\delta_{\theta}^{\beta}\right)+C_{2}C_{4}\left(\delta_{\theta}^{\alpha}\delta_{\phi}^{\beta}-\delta_{\phi}^{\alpha}\delta_{\theta}^{\beta}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{A.2.14}
$$

由全反对称四阶张量ϵ和度规张量$g_{\mu\nu}$的性质，可以证明该式。对于标准模型框架下$V-A=\gamma_{\mu}(1-\gamma_{5})$的情况，有$C_1=C_2=C_3=C_4=1$，与$\delta_{\phi}^{\alpha}\delta_{\theta}^{\beta}$成正比的项相互抵消，所以上式为：

$$
\mathrm{T}_{SM}=64\ \delta_{\theta}^{\alpha}\delta_{\phi}^{\beta}.
\tag{A.2.15}
$$

A.3　菲尔兹重排

我们用4×4 的单位矩阵和γ 矩阵可以构造出16个独立的完备的狄拉克矩阵:

$$
\Gamma_{S}=1,\quad \Gamma_{V}=\gamma_{\mu},\quad \Gamma_{T}=\sigma_{\mu\nu},\quad \Gamma_{A}=\gamma_{\mu}\gamma_{5},\quad \Gamma_{P}=\gamma_{5},
\tag{A.3.1}
$$

其中$\mu>\nu$。可以证明狄拉克矩阵满足下面的关系：

$$
\sum_{i}g_{i}\left(\Gamma_{i}\right)_{\alpha\beta}\left(\Gamma_{i}\right)_{\gamma\delta}=\sum_{j}\hat{g}_{j}\left(\Gamma_{j}\right)_{\alpha\delta}\left(\Gamma_{j}\right)_{\gamma\beta}.
\tag{A.3.2}
$$

其中的指标(i,j) 依次取$S,V,T,A,$ 和P，系数g_i 与$\hat{g}_j$的变换关系为：

$$
\begin{bmatrix}\hat{g}_{S}\\ \hat{g}_{V}\\ \hat{g}_{T}\\ \hat{g}_{A}\\ \hat{g}_{P}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 4 & 12 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -2 & 0 & -2 & 1\\ 1 & -4 & 12 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{S}\\ g_{V}\\ g_{T}\\ g_{A}\\ g_{P}\end{bmatrix}
\tag{A.3.3}
$$

常用的Fierz 变换公式:

$$\bar{a}(V\pm A)b\,\bar{c}(V\pm A)d = \bar{a}(V\pm A)d\,\bar{c}(V\pm A)b, \tag{A.3.4}$$

$$\bar{a}(V-A)b\,\bar{c}(V+A)d = -2\bar{a}(S+P)d\,\bar{c}(S-P)b, \tag{A.3.5}$$

$$\bar{a}(V+A)b\,\bar{c}(V-A)d = -2\bar{a}(S-P)d\,\bar{c}(S+P)b. \tag{A.3.6}$$

如表-A.1所示,用2个双旋量$\bar{a},b$和16个狄拉克矩阵可以构造5种类型的洛仑兹不变的双线性协变流(归一化为1)。用4个双旋量$\bar{a},b,\bar{c},d$和狄拉克矩阵可以构造5种类型的洛仑兹标量。

表 A.1: 用旋量波函数和狄拉克矩阵构造的洛仑兹协变量，以及5种类型的洛仑兹标量。

协变量	协变性质	自由度	洛仑兹标量
$\bar{a}b$	scalar	1	$(\bar{a}b)\ (\bar{c}d)$
$\bar{a}\gamma_5 b$	pseudo-scalar	1	$(\bar{a}\gamma_5 b)\ (\bar{c}\gamma_5 d)$
$\bar{a}\gamma_\mu b$	vector	4	$(\bar{a}\gamma_\mu b)\ (\bar{c}\gamma^\mu d)$
$\bar{a}i\gamma_\mu\gamma_5 b$	Axial-vector	4	$(\bar{a}i\gamma_\mu\gamma_5 b)\ (\bar{c}i\gamma_\mu\gamma_5 d)$
$\bar{a}\sigma_{\mu\nu}b$	tensor	6	$(\bar{a}\sigma_{\mu\nu}b)\ (\bar{c}\sigma^{\mu\nu}d)$

由Γ_i的几何性质，可以证明

$$\frac{1}{4}\sum_i (\Gamma_i)_{\alpha\beta}\left(\Gamma^i\right)_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}. \tag{A.3.7}$$

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$是任意的4×4矩阵，那么，用$A_{\rho\alpha}B_{\nu\gamma}$ 乘上式可得

$$\frac{1}{4}\sum_i A_{\rho\alpha}(\Gamma_i)_{\alpha\beta}B_{\nu\gamma}\left(\Gamma^i\right)_{\gamma\delta} = A_{\rho\delta}B_{\nu\beta},$$

$$A_{\rho\delta}B_{\nu\beta} = \frac{1}{4}\sum_i (A\Gamma_i)_{\rho\beta}\left(B\Gamma^i\right)_{\nu\delta}. \tag{A.3.8}$$

由于16个Γ_i构成完全集合，乘积$\mathbf{A}\Gamma_i$可以展开成Γ_i 的线性组合。用$\bar{a}_\rho, b_\delta, \bar{c}_\nu$和$d_\beta$ 乘(A.3.8)式可得

$$\bar{a}_\rho A_{\rho\delta}b_\delta\ \bar{c}_\nu B_{\nu\beta}d_\beta = \frac{1}{4}\sum_i \bar{a}_\rho (A\Gamma_i)_{\rho\beta}\,d_\beta\ \bar{c}_\nu\left(B\Gamma^i\right)_{\nu\delta}b_\delta. \tag{A.3.9}$$

也就是说，旋量波函数b和d交换了位置。(A.3.4)式就是这样一个关系式。

在文献[48] 中定义的Fierz-Machael 重排为：

$$\overline{u}_3\Lambda_i u_2\ \overline{u}_1\Lambda_i u_4 = \sum_{j=1}^{5}\lambda_{ij}\bar{u}_1\Lambda_j u_2\ \bar{u}_3\Lambda_j u_4, \tag{A.3.10}$$

其中$\Lambda_i=(1,\gamma_\mu,\sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2},\gamma_\mu\gamma_5,\gamma_5)$，$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$,

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.3.11}$$

关于“菲尔兹重排”更多的讨论，可见文献[590]。

附录 B　标准模型的费恩曼规则与$SU(3)_c$规范群

1949年，美国物理学家费恩曼教授提出一种形象、直观的图示方法，来描写粒子散射、反应、产生和衰变过程。在量子场论中，费恩曼图和理论计算有密切的联系。可以根据一个过程的费恩曼图和相应的费恩曼规则，很方便的写出跃迁矩阵元，进而计算相关物理量。

B.1　标准模型理论的费恩曼规则

外线: 对初态和末态粒子，有下述因子：

1. 自旋为0的玻色子: 1;

2. 自旋为1的玻色子: $\epsilon_\mu(\lambda)$; 这里的$\epsilon_\mu(\lambda)$表示螺旋度为λ的矢量玻色子的极化矢量。对于一个零质量的沿$\hat{z}$-轴传播的矢量玻色子，其4-动量k_μ可以写为：

$$k_\mu = (k_0, 0, 0, k_3) \tag{B.1.1}$$

其中$k_0 = |k_3|$，对螺旋度$\lambda = \pm 1$的分量，其极化矢量$\epsilon_\mu(\lambda)$ 可以写为

$$\epsilon_\mu(\lambda = +1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)\,, \qquad \epsilon_\mu(\lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)\,. \tag{B.1.2}$$

极化矢量满足正交归一关系: $\mathbf{k}\cdot\epsilon = 0, \epsilon^2 = -1$。

对于质量为M，动量为k_μ的重矢量玻色子，有$k_0^2 = k_3^2 + M^2$，其纵向极化态为

$$\epsilon_\mu^L(\lambda = 0) = \frac{1}{M}(k_3, 0, 0, k_0)\,. \tag{B.1.3}$$

在计算涉及光子的非极化截面时，根据Ward恒等式，可以做下面的代换

$$\sum_{polarization} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \tag{B.1.4}$$

对零质量的非阿贝尔规范粒子，还必须考虑“鬼粒子”的贡献。对有质量的非阿贝尔规范粒子，还必须另外考虑“格尔斯通玻色子”的贡献[8]。

3. 我们约定时间轴以向右为正；对自旋为1/2 的费米子(正时间方向) 或者反费米子(反时间方向)，其在初态或者末态的波函数的约定如图-B.1所示。

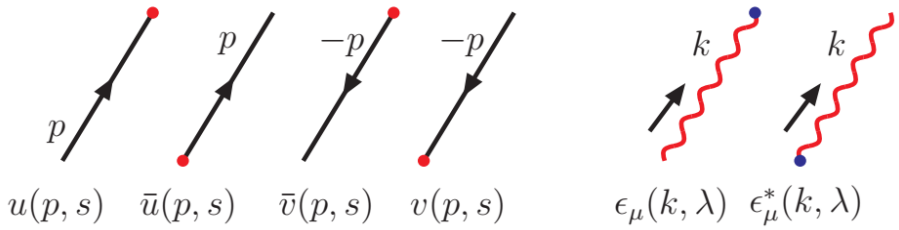


图 B.1: 费米子外线和光子外线示意图和约定。

内线(传播子): 标准模型中费米子和规范玻色子的传播子为：

$$f(q): \quad \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}, \tag{B.1.5}$$

$$A_\mu(q)\to A_\nu(q): \quad \frac{-i}{q^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right), \tag{B.1.6}$$

$$W^\pm_\mu(q)\to W^\pm_\nu(q): \quad \frac{-i}{q^2-m_W^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+\frac{(\xi-1)q_\mu q_\nu}{q^2-\xi m_W^2}\right), \tag{B.1.7}$$

$$Z_\mu(q)\to Z_\nu(q): \quad \frac{-i}{q^2-m_Z^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+\frac{(\xi-1)q_\mu q_\nu}{q^2-\xi m_Z^2}\right), \tag{B.1.8}$$

$$g^a_\mu(q)\to g^b_\nu(q): \quad \frac{-i\delta^{ab}}{q^2+i\epsilon}\left(g_{\mu\nu}+(\xi-1)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right), \tag{B.1.9}$$

其中ξ为R_ξ 规范的规范参数。对于反粒子使用同样的传播子，但改变其四动量符号。

根据我们在第8章的讨论并参考文献[21, 591]，把希格斯二重态定义为

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v+H(x)+i\phi_z\right)\end{pmatrix}, \tag{B.1.10}$$

其中$\phi^\pm$ 和ϕ_z是3个将被规范玻色子$W^\pm$和Z^0 “吃掉”的赝格尔斯通玻色子(pseudo-Goldstone bosons)，H就是实验上发现的$J^P=0^+$希格斯玻色子。H、$\phi^\pm$和ϕ_z 的传播子形式为

$$H(q): \quad \frac{i}{q^2-m_H^2+i\epsilon}, \tag{B.1.11}$$

$$\phi^\pm(q): \quad \frac{i}{q^2-\xi m_W^2+i\epsilon}; \qquad \phi_z(q): \frac{i}{q^2-\xi m_Z^2+i\epsilon}. \tag{B.1.12}$$

另外，电弱相互作用的“鬼粒子”和胶子“鬼粒子”的传播子表达式为[41, 45]

$$\omega^\pm(q): \frac{-i}{q^2-\xi m_W^2+i\epsilon}; \qquad \omega_z(q): \frac{-i}{q^2-\xi m_Z^2+i\epsilon}; \qquad \omega_\gamma(q): \frac{-i}{q^2+i\epsilon}, \tag{B.1.13}$$

$$c_a(q)\to c_b(q): -\frac{\delta_{ab}}{q^2}. \tag{B.1.14}$$

其中ξ表示规范参数。

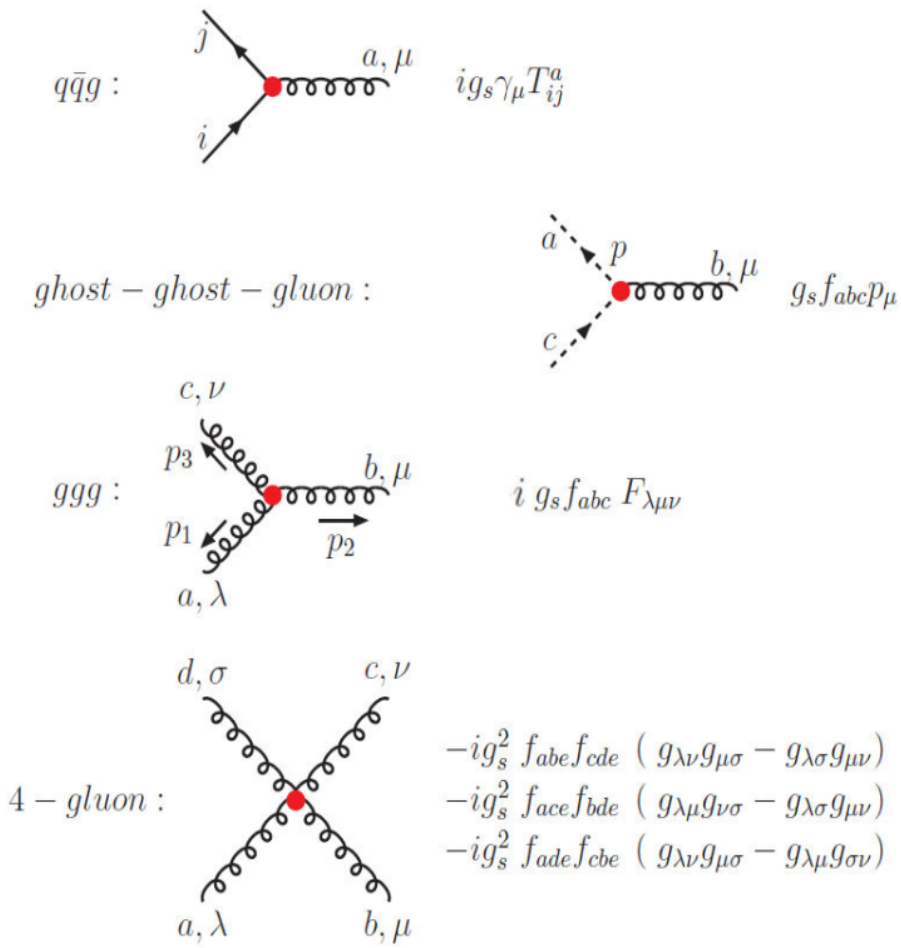


图 B.2: QCD强相互作用中三线和四线顶点的费恩曼规则[41]。

顶点因子: 对每一个顶点（三条、或更多条内线、外线），有一个依赖于相互作用拉氏量结构的顶点因子。对圈图有

(a) 对每一个内线动量为k的圈，存在一个对动量k的所有可能取值范围的积分: $\int d^4k/(2\pi)^4$ 。

(b) 对每一个闭合费米圈，乘上一个“-1”因子;

(c) 对每一个包含n条全同玻色子线的闭合圈，乘上一个对称化因子：“$1/n!$”。

在N维时空，对应每一个内动量为k的圈，有积分：$\int d^Nk/(2\pi)^N$。对每一个闭合费米子圈的积分，同样乘上一个“-1”因子。对每一个闭合的由n个全同玻色子构成的圈的积分，同样乘一个“$1/n!$”因子。

QCD强相互作用的三线和四线费恩曼规则如图-B.2所示。 在QCD中，表示费米子外线的狄拉克旋量波函数$u(p,s),v(p,s)$，胶子外线的极化矢量$\epsilon_\mu(\lambda)$，和QED中的定义相同。

$q\bar{q}g$ 和鬼-鬼-胶子顶点，三胶子和四胶子顶点对应的费恩曼规则在图-B.2中所示。图-B.2中的系数f_{abc}是$SU(3)_c$的结构常数，系数$F_{\lambda\mu\nu}(p_1,p_2,p_3)$的解析表达式为

$$F_{\lambda\mu\nu}(p_1,p_2,p_3) = g_{\lambda\mu}(p_1-p_2)_\nu + g_{\mu\nu}(p_2-p_3)_\lambda + g_{\nu\lambda}(p_3-p_1)_\mu. \tag{B.1.15}$$

注意：在不同文献中给出的费恩曼规则可能有差别。本附录的QCD费恩曼规则与文献[13]所给表达式相同。

标准模型电弱相互作用的三线和四线顶点费恩曼规则如图-B.3所示。 这里的参数$\xi = 1, 0, \infty$ 分别对应't Hooft-Feynman 规范，朗道规范和幺正规范。在图-B.3中的玻色线动量均指向中心点，费恩曼规则的两个参数$S_{\mu\nu\lambda}$和$S_{\mu\nu,\lambda\rho}$的表达式分别为[41]

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\lambda} &= g_{\mu\nu}(p_1-p_2) + g_{\nu\lambda}(p_2-p_3) + g_{\lambda\mu}(p_3-p_1), \\ S_{\mu\nu,\lambda\rho} &= 2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}. \end{aligned} \tag{B.1.16}$$

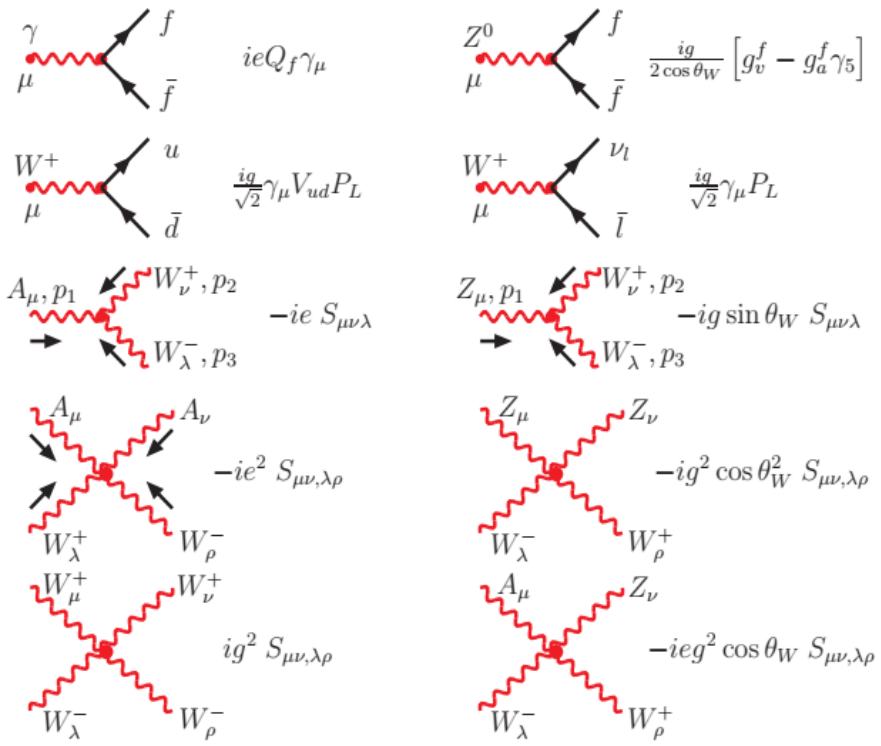


图 B.3: 在文献[21, 41]中给出的标准模型电弱相互作用三线和四线顶点费恩曼规则。其中$g_v^f = T_3^f - 2Q_f\sin\theta_W^2$, $g_a^f = T_3^f$; $T_3^f = \pm 1/2$是轻子和夸克的同位旋第三分量量子数。$L = (1-\gamma_5)/2$是左手投影算符。

标准模型中与希格斯玻色子相关的三线和四线费恩曼规则如图-B.4和图-B.5所示。 在第8章，我们已经对标准模型的希格斯机制做了介绍和讨论。为了实现$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$的规范对称性自发破缺，如(8.86)式所示，把希格斯标量场的真空期望值选择在中

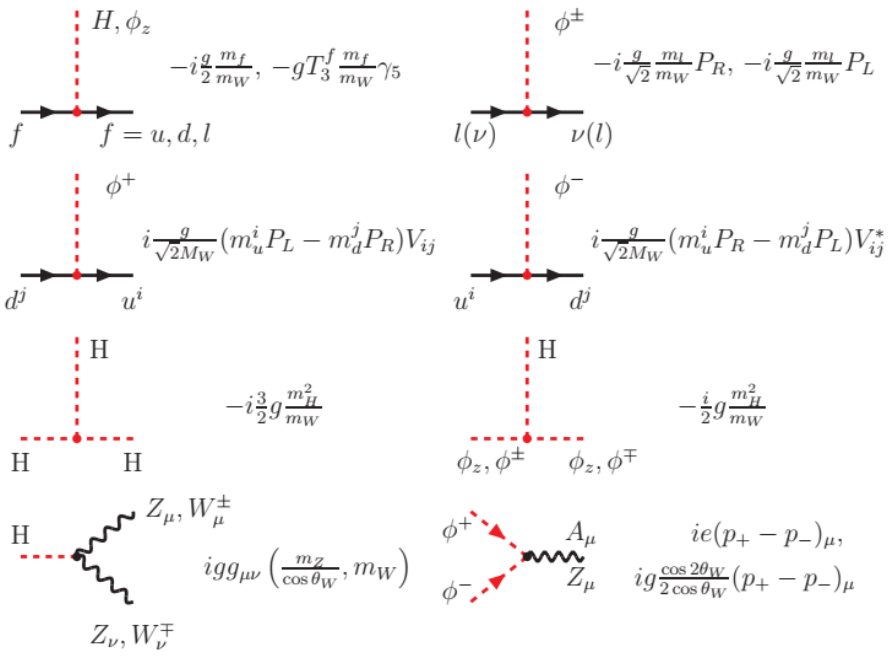


图 B.4: 标准模型中包含希格斯玻色子的部分三线顶点的费恩曼规则[21, 591]，其中$T_3^f = \pm 1/2$是轻子和夸克的同位旋第三分量量子数。

性分量上。进而通过Yukawa耦合$H\bar{f}f$使费米子获得质量，通过规范对称性自发破缺使$W^\pm$和Z^0玻色子获得质量，同时保持光子场A_μ无质量。

图-B.4显示了涉及希格斯玻色子的三线顶点的费恩曼规则[21, 591]。以该图第一行两个3线顶点费恩曼图为例，对应的三线耦合顶点和费恩曼规则表达式为

$$\begin{aligned}
&\bar{f}Hf: \quad -i\frac{g}{2}\frac{m_f}{m_W}; && \bar{u}^i\phi_z u^j: \quad -\frac{g}{2}\frac{m_{u^i}}{m_W}\gamma_5\delta_{ij},\\
&\bar{d}^i\phi_z d^j: \quad \frac{g}{2}\frac{m_{d^i}}{m_W}\gamma_5\delta_{ij}; && \bar{l}^i\phi_z l^j: \quad \frac{g}{2}\frac{m_{l^i}}{m_W}\gamma_5\delta_{ij}, \qquad \text{(B.1.17)}\\
&\bar{\nu}_i\phi^+ l_j: \quad -i\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_l}{m_W}R\delta_{ij}; && \bar{\nu}\phi^+ l: \quad -i\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_l}{m_W}R\delta_{ij},\\
&\bar{l}_i\phi^- \nu_j: \quad -i\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_l}{m_W}L\delta_{ij}; && \bar{l}\phi^- \nu: \quad -\frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_l}{m_W}L\delta_{ij}, \qquad \text{(B.1.18)}
\end{aligned}$$

其中$f = (q, l)$, $i, j = (1, 2, 3)$表示代指标，$L, R = (1 \mp \gamma_5)/2$是手征投影算符，$V_{ij}$是CKM矩阵元。图-B.4中没有包含的另外4个包含希格斯玻色子的三线顶点的费恩曼规则如下[591]：

$$\begin{aligned}
&H(p)\phi^\mp(k)W_\mu^\pm: \quad \mp\frac{g}{2}(k-p)_\mu; && H(p)\phi_z(k)Z_\mu: \quad \frac{g}{2\cos\theta_W}(k-p)_\mu,\\
&\phi^\mp A_\mu W_\nu^\pm: \quad iem_W g_{\mu\nu}; && \phi^\mp Z_\mu W_\nu^\pm: \quad -igm_Z\sin^2\theta_W g_{\mu\nu}, \qquad \text{(B.1.19)}
\end{aligned}$$

其中四动量p, k均指向顶点。

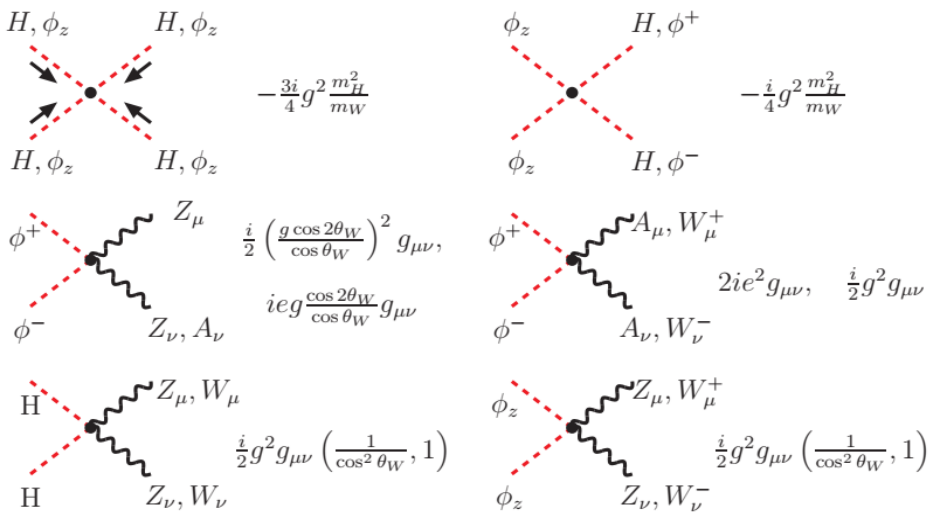


图 B.5: 标准模型中包含希格斯玻色子的部分四线顶点的费恩曼规则[21, 591]。

图-B.5显示了主要的涉及希格斯玻色子的四线顶点的费恩曼规则[21, 591]。与该图中每个四线顶点费恩曼图对应的费恩曼规则表达式为

$$(4H, 4\phi_z): \quad -\frac{3i}{4}g^2\frac{m_H^2}{m_W}; \qquad (\phi_z\phi_z HH, \phi_z\phi_z\phi^+\phi^-): \quad -\frac{i}{4}g^2\frac{m_H^2}{m_W}, \tag{B.1.20}$$

$$\phi^+\phi^- Z_\mu Z_\nu: \quad \frac{i}{2}g^2\frac{\cos 2\theta_W}{\cos\theta_W}g_{\mu\nu}; \qquad \phi^+\phi^- Z_\mu A_\nu: \quad ieg\frac{\cos 2\theta_W}{\cos\theta_W}g_{\mu\nu}, \tag{B.1.21}$$

$$\phi^+\phi^- A_\mu A_\nu: \quad 2ie^2 g_{\mu\nu}; \qquad \phi^+\phi^- W_\mu W_\nu: \quad \frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}, \tag{B.1.22}$$

$$HHZ_\mu Z_\nu: \quad \frac{i}{2}\frac{g^2}{\cos^2\theta_W}g_{\mu\nu}; \qquad \phi_z\phi_z Z_\mu Z_\mu: \quad \frac{i}{2}\frac{g^2}{\cos^2\theta_W}g_{\mu\nu}; \tag{B.1.23}$$

$$HHW_\mu W_\nu: \quad \frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}; \qquad \phi_z\phi_z W_\mu W_\nu: \quad \frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}, \tag{B.1.24}$$

和图-B.5左上角的费恩曼图中的直接显示相同，所有其它费恩曼图中的4条粒子线的4动量p_i均指向中心点。

其它没有包含在图-B.5中但出现在论文[591]中的四线顶点和对应的费恩曼规则如下：

$$\phi^\mp W_\mu^\pm HZ_\nu: \quad -ig^2\frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}g_{\mu\nu}; \qquad \phi^\pm W_\mu^\mp \phi_z Z_\nu: \quad \mp g^2\frac{\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}g_{\mu\nu}, \tag{B.1.25}$$

$$\phi^\pm W_\mu^\mp HA_\nu: \quad \frac{i}{2}egg_{\mu\nu}; \qquad \phi^\mp W_\mu^\pm \phi_z A_\nu: \quad \mp\frac{1}{2}egg_{\mu\nu}, \tag{B.1.26}$$

$$\phi^+\phi^-\phi^+\phi^-: \quad -\frac{i}{2}g^2\frac{m_H^2}{m_W^2}; \qquad \phi^+ HH\phi^-: \quad -\frac{i}{4}g^2\frac{m_H^2}{m_W^2}. \tag{B.1.27}$$

对论文[591]所给的费恩曼规则表达式中出现的$\eta_i = \pm 1$因子，我们的取值和文献[21]相同:

$$\eta = \eta_s = \eta_e = \eta' = -1; \qquad \eta_z = \eta_Y = \eta_\theta = +1. \tag{B.1.28}$$

B.2　$\mathrm{SU(3)_C}$色规范群

3×3的$SU(3)_c$ 色矩阵$\mathbf{T}_a$满足对易关系

$$[\mathbf{T}_a,\mathbf{T}_b]=if_{abc}\mathbf{T}_c, \tag{B.2.1}$$

其中f_{abc}是反对称的$SU(3)_c$ 结构常数，非零的f_{abc}为

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=-f_{367}=1/2, \\ f_{458} &= f_{678}=\sqrt{3}/2, \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

对$SU(3)_c$规范群，有8个$\mathbf{T}_a$。这8个3×3的Gell-Mann矩阵[13]已经在(5.155) 式中给出。考虑$\mathbf{T}_a$满足的反对易关系，

$$\{\mathbf{T}_a,\mathbf{T}_b\}=\frac{1}{3}\delta_{ab}+d_{abc}\,\mathbf{T}_c, \tag{B.2.3}$$

其中的全对称的结构常数d_{abc}已经在(5.159)式中给出。

矩阵$\mathbf{T}_a$还满足下面的关系

$$\mathbf{T}_a\mathbf{T}_b = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\delta_{ab}+(d_{abc}+if_{abc})\mathbf{T}_c\right], \tag{B.2.4}$$

$$(\mathbf{T}^a)_{ij}(\mathbf{T}^a)_{kl} = \frac{1}{2}\left[\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right], \tag{B.2.5}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_\mathrm{a}) = 0, \tag{B.2.6}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_\mathrm{a}\mathbf{T}_\mathrm{b}) = T_F\delta_{ab}=\frac{1}{2}\delta_{ab}, \tag{B.2.7}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_\mathrm{a}\mathbf{T}_\mathrm{b}\mathbf{T}_\mathrm{c}) = \frac{1}{4}(d_{abc}+if_{abc}), \tag{B.2.8}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_\mathrm{a}\mathbf{T}_\mathrm{b}\mathbf{T}_\mathrm{a}\mathbf{T}_\mathrm{c}) = -\frac{1}{12}\delta_{bc}. \tag{B.2.9}$$

结构常数满足如下的Jacobi 恒等式

$$f_{abe}f_{ecd}+f_{cbe}f_{aed}+f_{dbe}f_{ace} = 0, \tag{B.2.10}$$

$$f_{abe}d_{ecd}+f_{cbe}d_{ced}+f_{dbe}d_{ace} = 0. \tag{B.2.11}$$

另外，

$$f_{abe}f_{ecd}=\frac{2}{3}(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc})+(d_{ace}d_{bde}-d_{bce}d_{ade}). \tag{B.2.12}$$

可以定义8×8 的矩阵$\mathbf{F}_a$ 和$\mathbf{D}_a$：

$$(\mathbf{F}_a)_{bc} = -if_{abc}, \qquad (\mathbf{D}_a)_{bc}=d_{abc}, \tag{B.2.13}$$

这样，Jacobi 恒等式(B.2.10) 和(B.2.11) 变成

$$[\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b] = if_{abc}\mathbf{F}_c, \qquad [\mathbf{F}_a, \mathbf{D}_b] = if_{abc}\mathbf{D}_c. \tag{B.2.14}$$

另外，$f_{abb} = 0$ 和$d_{abb} = 0$ 意味着

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{F}_\mathrm{a}) = 0, \qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{D}_\mathrm{a}) = 0. \tag{B.2.15}$$

下面是一些有用的关系式：

$$f_{acd}f_{bcd} = C_A\delta_{ab} = 3\delta_{ab}, \quad f_{acd}d_{bcd} = 0, \quad d_{acd}d_{bcd} = \frac{5}{3}\delta_{ab}, \tag{B.2.16}$$

$$f_{abc}T_bT_c = \frac{i}{2}C_AT_a, \quad T_aT_bT_a = \left[-\frac{C_A}{2} + T_aT_a\right]T_b, \quad T_aT_a = C_F, \tag{B.2.17}$$

$$\mathbf{F}_a\mathbf{F}_a = 3, \quad \mathbf{F}_a\mathbf{D}_a = 0, \quad \mathbf{D}_a\mathbf{D}_a = 5/3, \tag{B.2.18}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{F}_\mathrm{a}\mathbf{F}_\mathrm{b}) = 3\delta_{ab}, \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{F}_\mathrm{a}\mathbf{D}_\mathrm{b}) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{D}_\mathrm{a}\mathbf{D}_\mathrm{b}) = 5/3\cdot\delta_\mathrm{ab}, \tag{B.2.19}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{F}_\mathrm{a}\mathbf{F}_\mathrm{b}\mathbf{F}_\mathrm{c}) = i3/2\cdot f_{abc}, \qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{D}_\mathrm{a}\mathbf{F}_\mathrm{b}\mathbf{F}_\mathrm{c}) = 3/2\cdot d_{abc}, \tag{B.2.20}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{D}_\mathrm{a}\mathbf{D}_\mathrm{b}\mathbf{F}_\mathrm{c}) = i5/6\cdot f_{abc}, \qquad \mathrm{Tr}(\mathbf{D}_\mathrm{a}\mathbf{D}_\mathrm{b}\mathbf{D}_\mathrm{c}) = -1/2\cdot d_{abc}, \tag{B.2.21}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{F}_\mathrm{a}\mathbf{F}_\mathrm{b}\mathbf{F}_\mathrm{a}\mathbf{F}_\mathrm{c}) = 9/2\delta_{bc}, \qquad \sum_{aj}\mathbf{T}^a_{ij}\mathbf{T}^a_{jk} = C_F\delta_{ik}, \tag{B.2.22}$$

其中$C_A = 3$ and $C_F = 4/3$。

在处理B介子衰变的强子矩阵元计算时，经常要做色指标的交换，用到色指标恒等式(B.2.5)

$$\delta_{il}\delta_{kj} = \frac{1}{N_c}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\sum_{a=1}^{8}\mathbf{T}^a_{ij}\mathbf{T}^a_{kl} \tag{B.2.23}$$

其中i, j, k, l是色指标。采用简单因子化方案时，不可因子化部分对应上式右边的第二项-色八重态项。该项一般被扔掉。

附录 C　电磁学关系式和物理常数表

本附录所列电磁学关系式表和物理常数表均摘自2020年版的“粒子数据表”[1]。

表 C.1: 电磁学关系式表[1]。

物理量	高斯单位制(CGS)	国际单位制(SI)
Conversion factors: 电荷: 电势: 磁场:	 2.99792458×10^9 esu (1/299.792458) statvolt (erg/esu) 10^4gauss $= 10^4$ dyne/esu	 $= 1\ C = 1$ A s $= 1\ V = 1$J C^{-1} $= 1$ T $= 1$ N A^{-1}m^{-1}
	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$
组合关系	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$
线性介质	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ 1 1	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ $\epsilon_0 = 8.854187\ldots \times 10^{-12}$Fm^{-1} $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$NA^{-2}
	$\mathbf{E} = -\nabla\mathbf{V} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{E} = -\nabla\mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
	$V = \sum_{\mathrm{i}} \frac{q_i}{r_i} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$ $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\oint \frac{Idl}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\mathrm{i}} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$ $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{Idl}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$
	$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$ $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E})$	$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$ $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E})$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755\cdots \times 10^9$mF^{-1}; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$NA^{-2}; $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2.99792\cdots \times 10^8$ms^{-1}		

表 C.2: 物理常数表[1]。

物理量	符号、定义式	数值	误差(ppb)
真空中光速	C	299 792 458 ms^{-1}	exact
普朗克常数	h	6.626 069 57(29) Js	44
	$\hbar$	1.054 571 726(47) Js	44
		=6.582 119 28(15)$\times 10^{-22}$ MeV s	22
电子电荷绝对值	e	1.602 176 565 (35)$\times 10^{-19}$C	
		=4.803 204 50(11)$\times 10^{-10}$ esu	22
换算常数	$\hbar c$	197.326 9718(44) MeV fm	22
	$(\hbar c)^2$	0.389 379 338(17) GeV^2 mbarn	44
电子质量	m_e	0.510 998 928(11) MeV	22,44
		=9.109 382 91(40)$\times$ 10^{-31}kg	
质子质量	m_p	938.272 046(21) MeV	22,44
		=1.672 621 777(74)$\times$ 10^{-27}kg	
中子质量	m_n	939.565 379(21) MeV	
氘核质量	m_D	1875.612 859(41) MeV	22
自由空间介电常数	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	8.854 187 817...$\times$ 10^{-12} Fm^{-1}	exact
自由空间磁导率	$\mu_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$4\pi\times$ 10^{-7} N A^{-2}	exact
精细结构常数	α	1/137.035 999 074(44)	0.32
经典电子半径	r_e	2.817 940 3267(27) $\times 10^{-15}$ m	0.97
玻尔半径	$a_\infty = r_e\alpha^{-2}$	0.529 177 210 92 (17)$\times 10^{-10}$ m	0.32
Thomson截面	$\sigma_{rmT} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$	0.665 245 8374(13) barn	1.9
玻尔磁子	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 8066(38)$\times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	0.65
核磁子	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 2605(22)$\times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	0.71
引力常数	G_N	6.673 84(80)$\times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.2×105
引力加速度	g_N	9.806 65 m s^{-2}	exact
阿伏伽德罗常数	N_A	6.022141 29(27)$\times 10^{23}$ mol^{-1}	44
玻尔兹曼常数	κ	1.380 6488(13)$\times 10^{-23}$ J K^{-1}	910
维恩位移定律常数	$b = \lambda_{\max}$ T	2.897 7721(26)$\times 10^{-3}$ m K	910
斯蒂芬-玻尔兹曼常数	$\sigma = \pi^2\kappa^4/60\hbar^3c^2$	5.670 373(21)$\times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	3600
费米耦合常数	$G_F/(\hbar c)^3$	1.166 3787(6)$\times 10^{-5}$ GeV^{-2}	500
W玻色子质量	m_W	80.385 (15) GeV/c^2	1.9×10^5
Z玻色子质量	m_Z	91.1876(21)GrV/c^2	2.3×10^4
强相互作用常数	$\alpha_s(m_Z)$	0.1185 (6)	5.1×10^6
部分其它常数	$\pi = 3.141592653589\ldots$, $e = 2.719281828459\ldots$, $\gamma = 0.577215664901\ldots$		
部分换算关系	1 in =0.0254 m, $1\mathring{A} = 10^{-10}$ m, 0^0C=273.15 K, 1 barn = $10^{-28}m^2$		

参考文献

[1] Zela P A, et al. (Particle Data Group), **Review of Particle Physics** , **Prog. Theor. Exp. Phys.**, 2020 (**2020**): 083C01. web page: http://pdg.lbl.gov。

[2] Workman R L, et al. (Particle Data Group), **Review of Particle Physics** , **Prog. Theor. Exp. Phys.**, 2022 (**2022**): 083C01.

[3] 戴元本，**相互作用规范场理论**. 2 版，北京：科学出版社，2005.

[4] 汪容，**量子规范理论**. 北京：中国科学技术出版社，2008.

[5] 胡瑶光，**规范场论**. 上海：华东师范大学出版社，1985.

[6] 黄涛、王伟，量子场论导引，第二版，北京大学出版社，2021.

[7] 郑汉青，**量子场论** ，上、下册，北京大学出版社，2021.

[8] Peskin M E, Schroeder D V. **An Introducation to Quantum Field Theory** . Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[9] Weinberg S. **The Quantum Theory of Fields: Vol. I, II, III.** Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[10] Schwarts M D. **Quantum Field Theory and the Standard Model** . Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[11] Donoghue J F, Golowich E, Holstein B R. **Dynamics of the Standard Model. 2nd ed.** Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[12] Bardin D Y, Passarino G. **The standard model in the making: Precision study of the electroweak interactions** . Oxford: Clerendon Press, 1999.

[13] Field R D. **Applications of perturbative QCD** , Boston: Addison-Wesley, 1989.

[14] Collins J. **Foundations of perturbative QCD** , Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[15] Kovchegov Y V, and Levin E. **Quantum charomodynamics at high energy** , Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[16] 黄涛，**量子色动力学引论**. 北京：北京大学出版社，2012.

[17] 黄涛，王伟 等著，**量子色动力学专题** ，北京: 科学出版社，2018.

[18] 何汉新，**量子色动力学及其应用** ，合肥: 中国科大出版社，2020.

[19] Leader E, Predazzi E. **An introduction to gauge theories and modern particle physics.** Vol. I and II, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[20] Burgess C P，Moore G D. **The Standard Model: A Primer** , Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[21] Buras A J. **Gauge theory of weak decays: the standard model and the expedition to new physics summits** , Cambridge: Cambridge University Press, 2020.

[22] 唐孝威，**粒子物理实验方法**. 北京: 高等教育出版社，1982.
徐克尊，**粒子探测技术**. 上海: 上海科学技术出版社，1981.

[23] 谢一冈，**粒子探测器与数据获取** . 北京: 科学出版社，2003.

[24] Cao Zhen, **An ultra-high-energy γ-ray telescope at 4410 m** , **Nature Astron.** 2021 (**5**): 849。
Cao Zhen et al., (LHAASO Collaboration), **Discovery of the ultra-high energy γ-ray source LHAASO J2108+5157** , arXiv: 2106.09865 [astro-ph.HE].

[25] M. Aguilar et al., (AMS Collaboration)，**Properties of a New Group of Cosmic Nuclei: Results from the Alpha Magnetic Spectrometer on Sodium, Aluminum, and Nitrogen** , **Phys. Rev.Lett.**2021 (**127**): 021101;
Samuel C.C. Ting, **Latest results from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station** , PoS ICRC2015 (2016) 036.

[26] 王贻芳，**北京谱仪(BESIII)的设计与研制**. 上海: 上海科学技术出版社，2011.

[27] Chao Kuang-Ta and Wang Yi-Fang (BESIII Collaboration), **Physics at BESIII** , **Int. J. Mod. Phys. A** , 2009 (**24**):S1-794.

[28] A.J. Bevan, **The physics of heavy flavours at Super-B** , **J.Phys. G 39** (2012) 023001.

[29] Kou E et al.. Belle-II Collaboration, **The Belle-II Physics Book** , **Prog. Theor. Exp. Phys.**(2019): 123C01. Erratum: **Prog. Theor. Exp. Phys.**(2020): 029201.

[30] Brodzicka J. et al, for Belle Collaboration, **Physics achievements from the Belle experiment** , **Prog. Theor. Exp. Phys.**, 2012 (**2012**): 04D001.

[31] Ed. A.J. Bevan, B. Golob, Th. Mannel, S. Prell, and B.D. Yabsley, **The physics of the B factory** , **Eur. Phys. J. C 74** (2014) 3026.

[32] Krokovny P. **The Belle-II prospects for charmonium and bottomonium studies** , talk given at Lomonosov 2021, Aug. 19-27, Moscow Russia.

[33] Giudice, G F (ed.) **Fifty years of research at CERN : from past to future** , CERN-2006-004;
S. Gilanloni (Ed.), D. Manglunki (Ed.), **Fifty years of the CERN proton synchrotron** , Vol. I, CERN-2011-004; Vol.II, CERN-2013-005, arXiv: 1309.6923 [hep-ex].

[34] 章乃森，**粒子物理学(上、下册)**. 北京: 科学出版社，1987.

[35] 郑志鹏，**北京谱仪II 正负电子物理** . 合肥: 中国科学技术大学出版社，2009.

[36] 杜东生，**CP不守恒**. 北京: 北京大学出版社，2012.

[37] 杜东升，杨茂志，**粒子物理导论** ，第一版，北京: 科学出版社，2015.1；第二版，北京: 科学出版社，2017.6.

[38] 邢志忠，周顺. **Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology.** 杭州: 浙江大学出版社，Springer, 2011.

[39] 肖振军，**B介子物理学**. 北京: 科学出版社，2013.

[40] 肖振军，吕才典，**粒子物理学导论** ，第一版，北京: 科学出版社，2016.3.

[41] Cheng T P，Li L F, **Gauge Theory of Elementary Particle Physics,** Oxford Express, 1984-1996.

[42] Martin B R, Shaw G, **Particle Physics. 3rd ed.** New York: John Willey & Sons, 2008.

[43] Martin B R, **Nuclear and Particle Physics: An Introduction. 2nd ed.** New York: John Willey & Sons, 2009.

[44] Griffiths D J, **Introduction to Elementary Particles. 2ed ed** , New York: Wiley-VCH, 2008; **粒子物理导论-中文翻译版** ，王青译，北京：机械工业出版社，2019.

[45] Pal P B, **An introductory course of particle physics** , CRS Press, 2014.

[46] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum et al., **The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model** , **Phys. Rep. 887**, 1 (2020).

[47] B. Abi et al., Muon g-2 Collaboration, **Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm** , **Phys. Rev.Lett.126**, 141801 (2021).

[48] Barger V D, Phillips R J N. **Collider Physics. 2ed ed.** Boston, Addison-Wesley Pub. 1997.

[49] Halzen F, Martin A D. **Quarks and Leptons: An introductory course in Modern Particle Physics,** New York: John Willey & Sons, 1984.

[50] Roberts R D. **The structure of the proton,** Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[51] Bigi I I, Sanda A I. **CP violation. 2E.** , Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
Branco G, Lavoura L, Silva J. **CP Violation** , Oxford: Oxford Science Pub., Clarendon Press, 1999.

[52] Thomson M. **Modern Particle Physics** , Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[53] Nagashima Y. **Elementary Particle Physics: Vol.1: Quantum Field Theory and particles** . New York: Wiley, 2010.
Nagashima Y. **Elementary Particle Physics: Vol.2 Foundations of the Standard Model** . New York: Wiley, 2013.

[54] Braibant S, Giacomelli G, Spurio M. **Particles and Fundamental Interactions：An Introduction to Particle Physics** . New York: Springer, 2012;
Particles and Fundamental Interactions：题解 . New York: Springer, 2012.

[55] Boyarkin O M. **Introduction to physics of elementary particles** . New York: Nova Science Pub. 2007;
Boyarkin O M. **Advanced particle Physics: The SM and Beyond Vol.1 and Vol.2** . New York: CRC Press, 2011.

[56] Ali A, Maiani L Polosa A D. **Multiquark hadrons** , Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[57] Khodjamirian A. **Hadron form factors: from basic phenomenology to QCD Sum Rules** , CRS Press, 2020.

[58] S. K. Choi et al., Belle Collaboration, **Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B \to K^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}J/\psi$ decays** , **Phys. Rev.Lett.91** (2003) 262001;
G. Gokhroo et al., Belle Collaboration, **Observation of a near-threshold $D^{0}\bar{D}^{0}\pi^{0}$ enhancement in $B \to D^{0}\bar{D}^{0}\pi^{0}K$ decays** , **Phys. Rev.Lett.97** (2006) 162002.

[59] Chen H X, Chen W, Liu X, and Zhu S L, The hidden-charm pentaquark and tetraquark states , **Phys. Rep.** 2016 (**639**): 1.

[60] Olsen S. L. Skwarnicki T and Zieminska D. **Nonstandard heavy mesons baryons: Experimental evidence** , **Rev. Mod. Phys.**, **90** (2018) 015003.

[61] Guo F K, Hanhart C, Meibner U G, Wang Q , Zhao Q, Zou B S, Hadronic molecules , **Rev. Mod. Phys.**2018 (**90**): 015004.

[62] S. K. Choi et al., Belle Collaboration, **Observation of a resonance-like structure in the $\pi^{\pm}\psi'$ mass distribution in exclusive $B \to K\pi^{\pm}\psi'$ decays** , **Phys. Rev.Lett.100**, 142001 (2008).

[63] B.C. Maglic, L.W. Alvarez, A.H. Rosenfeld and M.L. Stevenson, **Evidence for a T=0 three pion resonance** , **Phys. Rev.Lett.7** (1961) 178.

[64] A. Pevsner et al., **Evidence for a three pion resonance near 550 MeV** , **Phys. Rev.Lett.7** (1961) 421.

[65] M. Chretien et al., **Evidence for spin zero of the η from the two Gamma ray decay mode** , **Phys. Rev.Lett.9** (1962) 127.

[66] J. Chadwick, **Intensitätsverteilung im magnetischen spektrum von β-strahlen von Radium B + C** , Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (in German) 16 (1914) 383 – 391.

[67] C.D. Ellis, **A Preliminary Investigation of the Intensity distribution in the β-Ray spectra of Radium B and C** , Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 21 (1922)274 – 280.

[68] C.D. Anderson, **The apparent existence of easily deflectable positives** , Science 76 (1932) 238;
C.D. Anderson, **The positive electron** , Phys. Rev. **43** (1933) 491.

[69] Kinoshita T, Nio M. **Improved α^4 term of the muon anomalous magnetic moment. Phys. Rev. D** , 2004(**70**): 113001;
Passera M. **The Standard Model Prediction of the Muon Anomalous Magnetic Moment. J.Phys. G** , 2005(**31**): R75;
Laporta S, Remiddi E. **The analytical value of the electron $(g-2)$ at order α^3 in QED. Phys. Lett. B** , 1996 (**379**): 283;
Czarnecki A, Skrzypek M. **The muon anomalous magnetic moment in QED: three-loop electron and tau contributions. Phys. Lett. B** , 1999(**449**): 354;
Erler J, Luo M. **Hadronic Loop Corrections to the Muon Anomalous Magnetic Moment. Phys. Rev.Lett.**, 2001 (**87**) 071804.

[70] Kinoshita T, Nio M. **Tenth-order QED contribution to the lepton $g-2$: Evaluation of dominant α^5 terms of muon $g-2$. Phys. Rev. D** , 2006(**73**): 053007.

[71] Aoyama T, Kinoshita T and Nio M. **Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron** , Atoms **7**, 01 (2019) 28.

[72] BES Collaboration, Bai J Z. et al. **Measurement of the total cross-section for hadronic production by e^+e^- annihilation at energies between 2.6-GeV - 5-GeV. Phys. Rev.Lett.**, 2002 (**84**): 594;
BES Collaboration, Bai J Z. et al. **Measurements of the cross-section for $e^+e^- \to$ hadrons at center-of-mass energies from 2-GeV to 5-GeV** , **Phys. Rev.Lett.**, 2002 (**88**): 101802.

[73] The ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and SLD Collaborations, (S. Schael et al.,) **Precision electroweak measurements on the Z resonance** , **Phys. Rep. 427** (2006) 257-454. arXiv:hep-ex/0509008.

[74] Drell S D, Yan T M. **Massive lepton-pair production in hadron-hadron collisions at high energies. Phys. Rev.Lett.**, 1970(**25**): 316; Erratum-ibid. 1970(**25**): 902.

[75] Gonzalez-Garcia C. **Neutrinos** , Lectures given at CERN Accademic Training, CERN, 2013.

[76] Wang Y F. **Recent Results and Future Prospects of Reactor Neutrino Experiments,** talk given at NuFACT 2014, Aug.27, 2014, Glasgow, UK.

[77] Zhi-Zhong Xing, **Flavor structures of charged fermions and massive neutrinos** , **Phys. Rep.** , 2020 (**854**): 1-147.

[78] An F P, et al. (Daya Bay Collaboration), **Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay** , **Phys. Rev.Lett.**2012 (**108**):171803。

[79] Noether E. **Invariant Variation problem.** talk given at the meeting of the Könighche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen by Felix Klein for E. Noether, July 16, 1918; **Math.Phys. Klasse**, 1918: 235.

[80] Yang C N. **Rules for the dematerialization of a partile into two photons** , Phys.Rev。 **77** (1950) 242-245.

[81] 汪容，双光子系统的波函数和偏振态 ，物理学报，Vol.15 No.2 (1959) 55-62.

[82] 李炳安，邓越凡，杨振宁. 中国现代科学家传记. 第三集，北京：科学出版社，1992.

[83] Lee T D, Yang C N. **Question of Parity Conservation in Weak Interactions.** **Phys. Rev.**, 1956 (**104**): 254.

[84] Wu C S, Ambler E, Hayward R W, Hoppers D D, Hudson R P. **Experimental test of parity conservation in beta decay.** **Phys.Rev.**, 1957(**105**): 1413.

[85] Christenson J H, Cronin J W, Fitch V L, Turlay R. *Evidence for the 2 π Decay of the k_2^0 Meson.* **Phys. Rev.Lett.**, 1964(**13**): 138.

[86] Wolfenstein L. **Violation of CP Invariance and the Possibility of Very Weak Interactions.** **Phys. Rev.Lett.**, 1964(**13**): 562.

[87] Amhis Y. *et al.*, (Heavy Flavor Averaging Group), **Averages of b-hadron, c-hadron, and τ-lepton properties as of 2018** . **Eur. Phys. J. C** , 2021 (**81**): 226. updated results and plots available at https://hflav.web.cern.ch.

[88] Amhis Y. *et al.*, (Heavy Flavor Averaging Group), **Averages of b-hadron, c-hadron, and τ-lepton properties as of 2021** . arXiv: 2206. 07501 [hep-ex]. updated results and plots available at https://hflav.web.cern.ch

[89] Abel C, Afach S, Ayres N J, et al., **Measurement of the Permanent Electric Dipole Moment of the Neutron** , **Phys. Rev.Lett.124** (2020) 081803.

[90] Colladay D, Kostelecky V A. **CPT violation and the standard model.** **Phys. Rev. D** , 1997 (**55**): 6760;

[91] Kostelecky V A. **CPT, T, and Lorentz violation in neutral-meson oscillations.** **Phys. Rev. D** , 2001 (**64**): 076001;
Aubert B. et al., BaBar collaboration, **Limits on the decay-rate difference of neutral B mesons and on CP, T, and CPT violation in $B^0 - \bar{B}^0$ oscillations.** **Phys. Rev. D** , 2004 (**70**): 012007.

[92] Babusci D. et al. KLOE-2 Collaboration. **Test of CPT and Lorentz symmetry in entangled neutral kaons with the KLOE experiment.** **Phys. Lett. B** , 2014 (**730**): 89.

[93] Edwards B R, Kostelecky A. **Searching for CPT Violation with Neutral-Meson Oscillations** , **Phys. Lett. B 795** (2019) 620.

[94] Karan A, Nayak A K. **Behaviour of observables for neutral meson decaying to two vectors in the presence of T, CP and CPT violation in mixing only** , **Phys. Rev. D 101** (2020) 015027.

[95] J. van Tilburg and M. van Veghel, *CPT* **violation searches and new opportunities.** **Phys. Lett. B** , 2015 (**742**): 236.

[96] M. Gell-Mann, **The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry** , California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (1961), doi:10.2172/4008239;

[97] M. Gell-Mann, **Symmetries of baryons and mesons** , Phys. Rev. **125** (1962) 1067-1084.

[98] Y. Ne'eman, **Derivation of strong interactions from a gauge invariance** , Nucl. Phys. **26** (1961) 222-229.

[99] S. Okubo, **Note on unitary symmetry in strong interactions** , Prog.Theor.Phys. **27** (1962) 949-966.

[100] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, **The eightfold way: A review with a collection of reprints** , W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964.

[101] Gell-Mann M. **A Schematic Model of Baryons and Mesons.** **Phys.Lett.**, 1964 (**8**): 214.

[102] Gell-Mann M. **Nonleptonic weak decays and the Eightfold way.** **Phys. Rev.Lett.**, 1964 (**12**): 155.

[103] Zweig G. **An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking.** CERN Report 8182/TH.401 (Jan.17, 1964);
Zweig G. **An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking II** , CERN Report 8419/TH.412, (Feb.21, 1964);
Lichtenberg D B, Rosen S P. (Editor), **Developments in the Quark Theory of Hadrons.** , A Reprint Collection, Volume I: 1964-1978. Nonantum, MA: Hadronic Press, 1980: 22.

[104] H. Fritzsch and M. Gell-Mann (editors), **Fivty years of quarks.** World Scientific, 2015.

[105] Greenberg O W. **Spin and Unitary Spin Independence in a paraquark model of baryons and mesons.** **Phys. Rev.Lett.**, 1964 (**13**): 598.

[106] Fritzsch H, Gell-Mann M, Leutwyler H. **Advantages of the Color Octet Gluon Picture.** **Phys. Lett. B** , 1973 (**47**): 365.

[107] Greiner W , Schäfer A. **Quantum Chromodynamics. 3rd ed.** New York: Springer, 2007;
Ellis R K, Sturling W J, Webber B R. **QCD and Collider Physics.** , Cambridge: Cambridge University Press, 1996;
Muta T. **Foundations of Quantum Chromodynamics. 3rd ed.** Singapore: World Scientific, 2009.

[108] E. Feynman and C.N. Yang, **Are mesons elementary particles ?** , Phys. Rev. **76** (1949) 1739-1743.

[109] S. Sakata, **On a composite model for the new particles** , **Prog. Theor. Phys.16** (1956) 686-688.

[110] G. M. Pjerrou et al., **Resonance in the ($\Xi\pi$) system at 1.53 GeV** , **Phys. Rev.Lett.9** (1962) 114.

[111] L. Bertanza et al., **Possible Resonances in the $\Xi\pi$ and KK systems** , **Phys. Rev.Lett.9** (1962) 180.

[112] V.E. Barnes et al., **Observation of a hyperon with strangeness minus three** , **Phys. Rev.Lett.12** (1964) 204-206.

[113] V.E. Barnes et al., **Confirmation of the existence of the Ω^- hyperon** , Phys. Lett. **12** (1964) 134.

[114] R.N. Cahn and G. Goldhaber, **The experimental foundations of particle physics-2ed Edition** , Cambridge University Press, 2009.

[115] 张会，鲍淑清，**夸克模型的提出者–盖尔曼** ，《现代物理知识》1996年第1期，40-45页。微信公众号“中科院高能所”，2017年3月7日。

[116] L. Hoddeson, L. Brown, M. Riordan and M. Dresden (Editors), **The rise of the Standard Model: Particle physics in the 1960s and 1970s** , 1997, Cambridge Universiy Press, UK.

[117] Feldmann T, Kroll P, Stech B. **Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons.** **Phys. Rev. D** , 1998 (**58**): 114006;
Feldmann T, Kroll P, Stech B. **Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons: the sequel.** **Phys. Lett. B** , 1999 (**449**): 339.

[118] Gasiorowicz S, and Rosner J. L. **Hadron spectra and quarks** , American Journal of Physics, 1981 (**49**): 954.

[119] Okubo S. **Phi meson and unitary symmetry model.** **Phys. Lett.**, 1963 (**5**):165;
Iizuka J. **Systematics and phenomenology of meson family.** **Prog. Theor. Phys. Suppl.**, 1966 (**37**): 21.

[120] Glashow S L, Iliopoulos J, Maiani L. **Weak Interactions with Lepton - Hadron Symmetry.** **Phys. Rev. D** . 1970 (**2**): 1285.

[121] Aubert J J. et al. **Experimental observation of a heavy particle J.** **Phys. Rev.Lett.**, 1974 (**33**): 1404;
Augustin J E. et al. **Discovery of a narrow resonance in e^+e^- annihilation.** **Phys. Rev.Lett.**, 1974 (**33**): 1406;
Bacci C. et al. **Preliminary result of Frascati (ADONE) on the nature of a 3.1 Gev particle in e^+e^- annihilation.** **Phys. Rev.Lett.**, 1974 (**33**): 1408.

[122] Samuel C.C. Ting, **The discovery of the J particle: A personal recollection** , **Rev. Mod. Phys.**, **49** (1977)235.

[123] S.W. Herb et al., **Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions** , **Phys. Rev.Lett.39** (1977) 252.

[124] F.S. Yu, H.Y. Jiang, C.D. Lü, W. Wang and Z.X. Zhao, **Discovery potentials of doubly charmed baryons** , **Chin. Phys. C** 42 (2018) 051001.

[125] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++}** , **Phys. Rev.Lett.119** (2017) 112001.

[126] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Measurement of the lifetime of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++}** , **Phys. Rev.Lett.121** (2018) 052002.

[127] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **First Observation of the Doubly Charmed Baryon Decay $\Xi_{cc}^{++} \to \Xi_c^+\pi^+$** , **Phys. Rev.Lett.121** (2018) 162002.

[128] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Precision measurement of the Ξ_{cc}^{++}** , **JHEP 02** (2020) 049.

[129] W. Wang, F.S. Yu and Z.X. Zhao, **Weak decays of doubly charmed baryons: the $\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2}$ case** , **Eur. Phys. J. C 77** (2017) 781.

[130] W. Wang, Z.P. Xing and J. Xu, **Weak decays of doubly charmed baryons: SU(3) analysis** , **Eur. Phys. J. C 77** (2017) 800.

[131] N. Sharma and R. Dhir, **Estimates of W-exchange contributions to Ξ_{cc} decays** , **Phys. Rev. D 96** (2017) 113006.

[132] H.Y. Cheng and Y.L. Shi, **Lifetimes of doubly charmed baryons** , **Phys. Rev. D 98** (2018) 113005.

[133] Fu-Sheng Yu, **Weak decays of doubly charmed baryons** , talk given at Hadron 2019, Aug. 16-21, 2019, Guilin China.

[134] M. Mattson et al., SELEX Collaboration, **First observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{+}** , **Phys. Rev.Lett.89** (2002) 112001.

[135] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Search for the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{+}** , Sci. China Phys. Mech. Astron. **63** (2020) 221062.

[136] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of excited Ω_c^0 baryons in $\Omega_b^- \to \Xi_c^+ K^-\pi^-$ decays** , **Phys. Rev. D 104** (2021) L091102.

[137] E. Klempt and J.M. Richard, **Baryon spectroscopy** , **Rev. Mod. Phys.82** (2010) 1095.

[138] S. Chatrchyan et al., CMS Collaboration, **Measurement of Λ_b cross section and the $\bar{\Lambda}_b$ to Λ_b ratio with $J/\psi\Lambda$ decays in pp collisions at ps = 7 TeV** , **Phys. Lett. B 714** (2012) 136.

[139] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Study of the productions of Λ_b^0 and $\bar{B}^0$ hadrons in pp collisions and first measurement of the $\Lambda_b^0 \to J/\psi p K^-$ branching fraction** , **Chin. Phys. C 40** (2016) 011001.

[140] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Measurement of B^0, B_s^0, B^+ and Λ_b^0 production asymmetries in 7 and 8 TeV proton-proton collisions** , **Phys. Lett. B 774** (2017) 139.

[141] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of two resonances in the $\Lambda_b^0\pi^+$ systems and precise measurement of $\Sigma_b^{\pm}$ and $\Sigma_b^{*\pm}$ properties** , **Phys. Rev.Lett.122** (2019) 012001.

[142] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Isospin amplitudes in $\Lambda_b^0 \to J/\psi\Lambda(\Sigma^0)$ and $\Xi_b^0 \to J/\psi\Xi^0(\Lambda)$ decays** , **Phys. Rev.Lett.124** (2020) 111802.

[143] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **First observation of the decay $\Lambda_b^0 \to \eta_c(1S)pK^-$** , **Phys. Rev. D 102** (2020) 112012.

[144] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of $\Lambda_b^0 - \bar{\Lambda}_b^0$ production asymmetry in proton-proton collisions at ps = 7 and 8 TeV** , **JHEP 10** (2021) 060.

[145] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of two new Ξ_b^- baryon resonances** , **Phys. Rev.Lett.114** (2015) 062004.

[146] S. Chatrchyan et al., CMS Collaboration, **Observation of a New Ξ_b baryon** , **Phys. Rev.Lett.108** (2012) 252002.

[147] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Measurement of the properties of the Ξ_b^{*0} baryon** , **JHEP 05** (2016) 161.

[148] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of a new Ξ_b^- state** , **Phys. Rev. D 121** (2018) 072002.

[149] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of a new Ξ_b^0 state** , **Phys. Rev. D 103** (2021) 012004.

[150] A. M. Sirunyan et al., CMS Collaboration, **Observation of a new excited beauty strange baryon decaying to $\Xi_b^-\pi^+\pi^-$ state** , **Phys. Rev. D 126** (2021) 252003.

[151] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of wo new excited Ξ_b^0 states decaying to $\Lambda_b^0 K^-\pi^+$** , arXiv: 2110.04497 [hep-ex].

[152] V. M. Abazov et al., D0 Collaboration, **Observation of the doubly strange b baryon Ω_b^-** , **Phys. Rev.Lett.101** (2008) 232002.

[153] T. Aaltonen et al., CDF Collaboration, **Observation of the Ω_b^- baryon and measurement of the properties of the Ξ_b^- and Ω_b^- baryons** , **Phys. Rev. D 80** (2009) 072003

[154] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **First observation of excited Ω_b^- states** , **Phys. Rev.Lett.124** (2020) 082002.

[155] Y.R. Liu, H.X. Chen, W. Chen, X. Liu, and S.L. Zhu, **Pentaquark and tetraquark states** , **Prog. Part.& Nucl. Phys. 107** (2019) 237.

[156] J. R. Zhang and M. Q. Huang, **Doubly heavy baryons in QCD sum rules** , **Phys. Rev. D 78** (2008) 094007.

[157] J. W. Zhang, X. G. Wu, T. Zhong, Y. Yu and Z.-Y. Fang, **Hadronic production of the doubly heavy baryon Ξ_{bc} at LHC** , **Phys. Rev. D 83** (2011) 034026.

[158] M. H. Weng, X. H. Guo and A.W. Thomas, **Bethe-Salpeter equation for doubly heavy baryons in the covariant instantaneous approximation** , **Phys. Rev. D 83** (2011) 056006.

[159] X. H. Hu, R.H. Li and Z. P. Xing, **A comprehensive analysis of weak transition form factors for doubly heavy baryons in the light front approach** , **Eur. Phys. J. C 80** (2020) 320.

[160] Y. J. Shi, W. Wang and Z. X. Zhao, **QCD Sum Rules analysis of weak decays of doubly-heavy baryons** , **Eur. Phys. J. C 80** (2020) 568.

[161] Z. X. Zhao, **Weak decays of doubly heavy baryons: the $1/2 \to 3/2$ case** , **Eur. Phys. J. C 78** (2017) 756.

[162] A.S. Gerasimov and A.V. Luchinsky, **Weak decays of doubly heavy baryons: decays to a system of π mesons** , **Phys. Rev. D 100** (2019) 073015.

[163] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Search for the doubly heavy Ξ_{bc}^0 baryon via decays to D^0pK^-** , **JHEP 11** (2020) 095.

[164] Y. Nambu, **Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity** , **Phys.Rev. 117** (1960) 648-663.
Y. Nambu, **Axial vector current conservation in weak interactions** , **Phys. Rev.Lett.4** (1960) 380-382.

[165] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, **Dynamical Model Of Elementary Particles Based On An Analogy With Superconductivity. I** , **Phys.Rev. 122** (1961) 345-358.
Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, **Dynamical Model Of Elementary Particles Based On An Analogy With Superconductivity. II** , **Phys.Rev. 124** (1961) 246-254.

[166] R. L. Jaffe, **Multiquark hadrons. I. The Phenomenology Of $Q^2\bar{Q}^2$ mesons** , **Phys. Rev. D 15** (1977) 267; **Multiquark hadrons. II. Methods** , **Phys. Rev. D 15** (1977) 281 .

[167] Y. Chen et al., **Glueball spectrum and matrix elements on anisotropic lattices** , **Phys. Rev. D 73**, 014516 (2006).

[168] F.E. Close and A. Kirk, **Scalar glueball-$q\bar{q}$ mixing above 1 GeV and implications for lattice QCD** , **Eur. Phys. J. C 21** (2001) 531.

[169] L. Faddeev, A.J. Niemi and U. Wiedner, **Glueballs, closed fluxtubes, and $\eta(1440)$** , **Phys. Rev. D 70**, 114033 (2004).

[170] N. Isgur, R. Kokoski and J. Paton, **Gluonic excitations of mesons: Why they are missing and where to find them** , **Phys. Rev.Lett.54** (1985) 869.

[171] T. Barnes et al., **QQG hybrid mesons in the MIT bag model** , **Nucl. Phys. B 224** (1983) 241.

[172] D. Acosta et al., CDF Collaboration, **Observation of the narrow state $X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-$ in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV** , **Phys. Rev.Lett.93** (2004) 072001.

[173] V.M. Abazpv et al., D0 Collaboration, **Observation and properties of the $X(3872)$ decaying to $J/\psi\pi^+\pi^-$ in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV** , **Phys. Rev.Lett.93** (2004) 162002.

[174] B. Aubert, et al., BaBar Collaboration, **Study of the $B \to J/\psi K^-\pi^+\pi^-$ decay and measurement of the $B \to X(3872)K^-$ branching fraction** , **Phys. Rev. D 71** (2005) 071103.

[175] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of X(3872) production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV** , **Eur. Phys. J. C 72** (2012) 1972.

[176] M. Ablikim et al., BESIII Collaboration, **Observation of $e^+e^- \to \gamma X(3872)$ at BESIII** , **Phys. Rev.Lett.112** (2014)092001.

[177] M. Suzuki, **The X(3872) boson: molecule or charmonium** , **Phys. Rev. D 72** (2005) 114013.

[178] C.E. Thomas, F.E. Close, **Is X(3872) a molecule?** **Phys. Rev. D 78** (2008) 034007.

[179] P. Wang and X.G. Wang, **Study on X(3872) from effective field theory with pion exchange interaction** , **Phys. Rev.Lett.111** (2013) 042002.

[180] V. Baru, E. Epelbaum, A.A. Filin, F.-K. Guo, H.W. Hammer, C. Hanhart, U.-G. Meissner and A.V. Nefediev, **Remarks on study of X(3872) from effective field theory with pion-exchange interaction** , **Phys. Rev. D 91** (2015) 034002.

[181] N. Li, S.-L. Zhu, **Isospin breaking, coupled-channel effects and diagnosis of X(3872)** , **Phys. Rev. D 86** (2012) 074022.

[182] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen and C.M. Zanetti, **QCD sum rules for the X(3872) as a mixed molecule-charmoniun state** , **Phys. Rev. D 80** (2009) 056002.

[183] M. Nielsen and C.M. Zanetti, **Radiative decay of the X(3872) as a mixed molecule-charmonium state in QCD sum rules** , **Phys. Rev. D 82** (2010) 116002.

[184] B.-K. Wang, W.-Z. Deng and X.-L. Chen, **Dynamical study of the possible molecular state X(3872) with the s-channel one gluon exchange interaction** , **Chin. Phys. C 34** (2010) 1052.

[185] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa and V. Riquer, **Diquark-antidiquarks with hidden or open charm and the nature of X(3872)** , **Phys. Rev. D 71** (2005) 014028.

[186] W. Chen, S.-L. Zhu, **The vector and axial-vector charmonium-like states** , **Phys. Rev. D 83** (2011) 034010.

[187] J. Vijande, E. Weissman, N. Barnea and A. Valcarce, **Do $c\bar{c}n\bar{n}$ bound states exist** ? **Phys. Rev. D 76** (2007) 094022.

[188] W. Chen, H.-y. Jin, R.T. Kleiv, T.G. Steele, M. Wang and Q. Xu, **QCD sum-rule interpretation of x(3872) with $J^{PC} = 1^{++}$ mixtures of hybrid charmonium and $\bar{D}D^*$ molecular currents** , **Phys. Rev. D 88** (2013) 045027.

[189] F.S. Navarra and M. Nielsen, **$X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-$ and $X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$ decay widths from QCD sum rules** , **Phys. Lett. B 639** (2006) 272 – 277.

[190] A. Espositoa, A. Pillonib and A.D. Polosa, **Multiquark resonances** , **Phys. Rep. 668** (2017) 1-97.

[191] A. Hosaka, T. Iijima, K. Miyabayashi, Y. Sakai and S. Yasui, **Exotic hadrons with heavy flavors: X, Y, Z, and related states** , **Prog. Theor. Exp. Phys.2016**, 062C01 (2016).

[192] R.F. Lebeda, R.E. Mitchellb and E.S. Swanson, **Heavy-quark QCD exotica** , **Prog. Part.**& **Nucl. Phys. 93** (2017)143-194.

[193] A. Ali, J.S. Lange and S. Stone, **Heavy-quark QCD exotica** , **Prog. Part.**& **Nucl. Phys. 97** (2017)123-198.

[194] N. Brambilla, S. Eidelman, C. Hanhart, A. Nefediev, C.P. Shen, C. E. Thomas, A. Vairo, and C.Z. Yuan, **The XYZ states: experimental and theoretical status and perspectives** , **Phys. Rep. 873** (2020)1-154.

[195] F.K. Guo, X.H. Liu, and S. Sakai, **Threshold cusps and triangle singularities in hadronic reactions** , **Prog. Part.**& **Nucl. Phys. 102** (2020)103757.

[196] G. Yang, J. Ping, and J. Segovia, **Tetra- and penta-quark structures in the constituent quark model** , Symmetry **12** (2020) 1869.

[197] Ablikim M. et al., BESIII Collaboration. **Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+e^- \to \pi^+\pi^- J/\psi$ at $\sqrt{s} = 4.26$ GeV.** **Phys. Rev.Lett.**, 2013 (**110**): 252001。

[198] Liu Z Q. et al., Belle Collaboration. **Study of $e^+e^- \to \pi\pi J/\psi$ and observation of a charged charmoniumlike state at Belle.** **Phys. Rev.Lett.**, 2013 (**110**): 252002.

[199] M. Ablikim, et al., BESIII Collaboration, **Observation of $Z_c(3900)^0$ in $e^+e^- \to \pi^0\pi^0 J/\psi$** , **Phys. Rev.Lett.115** (2015) 112003.

[200] M. Ablikim, et al., BESIII Collaboration, **Observation of a neutral structure near the $D\bar{D}^*$ mass threshold in $e^+e^- \to (D\bar{D}^*)^0\pi^0$ at $\sqrt{s} = 4.226$ and 4.257 GeV** , **Phys. Rev.Lett.115** (2015) 222002.

[201] 李培荣，吕晓睿，郑阳恒，**发现新型四夸克态$Z_{cs}(3985)$** ，现代物理知识，2021，第3期，37-39页。

[202] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of new resonance decaying to $J/\psi K^+$ and $J/\psi\phi$** , **Phys. Rev.Lett.127** (2021) 082001.

[203] T. Xiao, S. Dobbs, A. Tomaradze, K. Seth, **Observation of the charged hadron$Z_c^{\pm}(3900)$ and evidence for the neutral $Z_c^0(3900)$ in $e^+e^- \to \pi\pi J/\psi$ at $\sqrt{s} = 4170$ MeV** , **Phys. Lett. B 727** (2013) 366.

[204] K. Chilikin et al., Belle Collaboration, **Observation of a new charged charmoniumlike state in $\bar{B}^0 \to J/\psi K^-\pi^+$ decays** , **Phys. Rev. D 90**, 112009 (2014).

[205] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Evidence for exotic hadron contributions to $\Lambda_b^0 \to J/\psi p\pi^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.117**, 082003 (2016). R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Model-Independent observation of exotic contributions to $B^0 \to J/\psi K^+\pi^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.122**, 152002 (2019).

[206] K. Chilikin et al., Belle Collaboration, **Experimental constraints on the spin and parity of the $Z(4430)^+$** , **Phys. Rev. D 88**, 074026 (2013).

[207] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of the resonant character of the $Z(4430)^-$ state** , **Phys. Rev.Lett.112**, 222002 (2014).

[208] M. Ablikim et al., BESIII Collaboration, **Observation of a near-threshold structure in the K^+ recoil-mass spectra in $e^+e^- \to K^+(D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0)$** , **Phys. Rev.Lett.**, **126** (2021) 102001.

[209] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of an exotic narrow doubly charmed tetraquark** , **Nat. Phys. 18** （2022）751.

[210] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Study of the doubly charmed tetraquark T_{cc}^+** , **Nat. Commun. 13** (2022) 3351.

[211] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of structure in the J/ψ-pair mass spectrum** , Sci. Bull. **65** (2020 1983).

[212] A. Bondar et al., Belle Collaboration, **Observation of two charged bottomoniumlike resonances in $\Upsilon(5S)$ decays** , **Phys. Rev.Lett.108**, 122001 (2012).

[213] D. Diakonov, V. Petrov and M. Polyakov, **Exotic anti-decuplet of baryons: prediction from chiral solitons** , Z. Phys. A **359** (1997) 305-314.

[214] T. Nakano et al., LEPS Collaboration, **Evidence for a narrow $S = +1$ baryon resonance in photoproduction from the neutron** , **Phys. Rev.Lett.91** (2003) 012002.

[215] S. Chekanov et al., ZEUS Collaboration, **Evidence for a narrow baryonic state decaying to $K_S^0 p$ and $K_S^0\bar{p}$? in deep inelastic scattering at HERA** , **Phys. Lett. B 591** (2004) 7.

[216] J.Z. Bai et al., BES Collaboration, **Evidence for a narrow baryonic state decaying to $K^0_S p$ and $K^0_S \bar{p}$? in deep inelastic scattering at HERA** , **Phys. Rev. D 70** (2004) 012004.

[217] K. Hicks, **Experimental Search for Pentaquarks** , **Prog. Part.& Nucl. Phys. 55** (2005) 647-676.

[218] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of $J/\psi p$ resonances consistent with pentaquark States in $\Lambda^0_b \to J/\psi K^- p$ decaysa** , **Phys. Rev.Lett.115** (2015) 072001.

[219] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of the two-peak structure of the $P_c(4450)^+$** , **Phys. Rev.Lett.122** (2019) 222001.

[220] X.K. Dong, F.K. Guo and B.S. Zou, **A survey of heavy-heavy hadronic molecules** , **Commun. Theor. Phys. 73** (2021) 125201.

[221] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Evidence of a $J/\psi\Lambda$ structure and observation of excited Ξ^- states in the $\Xi^-_b \to J/\psi\Lambda K^-$ decay** , Sci. Bull. **6** (2021) 1278.

[222] Santopinto E, Giachino A. **Compact pentaquark structures** , **Phys. Rev. D** 2017; 96: 014014.

[223] Shen C-W, Wu J-J, Zou B-S. **Decay behaviors of possible $\Lambda_{c\bar{c}}$ states in hadronic molecule pictures** , **Phys. Rev. D** 2019;100: 056006.

[224] Xiao C-W, Nieves J, Oset E. **Prediction of hidden charm strange molecular baryon states with heavy quark spin symmetry** , **Phys. Lett. B** 2019;799: 135051.

[225] Wang B, Meng L, Zhu S-L. **Spectrum of the strange hidden charm molecular pentaquarks in chiral effective field theory** . **Phys. Rev. D** 2020;101: 034018.

[226] Chen H-X, Geng L-S, Liang W-H, et al. **Looking for a hidden-charm pentaquark state with strangeness S=-1 from Ξ^-_b decay into $J/\psi K^-\Lambda$** , **Phys. Rev. C** 2016; 93: 065203.

[227] R.P. Feynman, **The behavior of hadron collisions at extreme energies** , in **High Energy Collisions: Third International Conference at Stony Brook** , N.Y. Gordon and Breach (Eds). pp.237.
R.P. Feynman, **Photon hadron interactions** , Advanced Book Program, Benjamin, New York, 1972.

[228] J. D. Bjorken, **Asymptotic sum rules at infinite momentum** , **Phys.Rev. 179** (1969) 1547.

[229] J. D. Bjorken and E. Paschos, **Inelastic electron-proton and γ-proton scattering and the structure of the nucleon** , **Phys.Rev. 185** (1969) 1975.

[230] H. Abramowicz et al., (H1 and ZEUS Collaboration), **Combination of Measurements of Inclusive Deep Inelastic e$^\pm$p Scattering Cross Sections and QCD Analysis of HERA Data** , **Eur. Phys. J. C 75** (2015) 580.

[231] D.J. Gross and F. Wilczek, **Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories** , **Phys. Rev.Lett.30**(1973)1343; **Asymptotically free gauge theories. I** , **Phys. Rev. D 8**(1973)3633;
H. D. Politzer, **Reliable perturbative results for strong interactions?** , **Phys. Rev.Lett.30** (1973)1346; **Asymptotic freedom: An approach to strong interactions** , **Phys. Rep. 14**(1974) 129-180.

[232] J. Goldstone, **Nuovo Cimento**, **19** (1961)154;
J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, **Broken symmetries** , **Phys.Rev. 127** (1962) 675.

[233] G. 't Hooft, **A Planar Diagram Theory for Strong Interactions** , **Nucl. Phys. B 72** (1974) 461.

[234] K.G. Wilson, **Confinement of Quarks** , **Phys. Rev. D 10** (1974) 2445.

[235] D.J. Gross, **Nobel lecture: The discovery of asymptotic freedom and the emergence of QCD** , **Rev. Mod. Phys.77** (2005)837.

[236] S. Coleman and D.J. Gross, **Price of asymptotic freedom** , **Phys. Rev.Lett.31** (1973) 851.

[237] 刘川，《格点量子色动力学导论》，北京大学出版社，2017.

[238] E.V. Shuryak, **Quantum chromodynamics and the theory of superdense matter** , Phys. Rep. 61 (1980) 71.

[239] F. Carminati *et al.* [ALICE], **ALICE: Physics performance report, volume I** , **J.Phys. G 30** (2004), 1517-1763.

[240] B. Alessandro *et al.* [ALICE], **ALICE: Physics performance report, volume II** , **J.Phys. G 32** (2006), 1295-2040.

[241] E. D. Bloom et al., **High energy inelastic e-p scattering at 6^0 and 10^0** , **Phys. Rev.Lett.23** (1969) 930.

[242] M. Breidenbach et al., **Observaed behavior of high inelastic electro-proton scattering** , **Phys. Rev.Lett.23** (1969) 935.

[243] M. Riordan, **The hunting of the quark** , New York: 1987, p. 149.

[244] J.T. Friedman and H.W. Kendall, **Deep inelastic electron scattering** , Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** (1972) 203.

[245] A. Bodek et al., **Experimental studies of the neutron and proton electromagnetic structure functions** , **Phys. Rev. D 20** (1979) 1471.

[246] T.J. Hou et al., CTEQ-TEA Collaboration, **CTEQ-TEA parton distribution functions and HERA Run I and II combined** , **Phys. Rev. D 95** (2017) 034003.

[247] T.J. Hou et al., CTEQ-TEA Collaboration, **New CTEQ global analysis of quantum chromodynamics with high-precision data from the LHC** , **Phys. Rev. D 103** (2021) 014013.

[248] S. Dulat, T.-J. Hou, J. Gao, M. Guzzi, J. Huston, P. Nadolsky, J. Pumplin, C. Schmidt, D. Stump, and C.-P. Yuan, **New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics** , **Phys. Rev. D 93** (2016) 033006.

[249] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, **Deep inelastic e p scattering in perturbation theory** , Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438;
L. N. Lipatov, **The parton model and perturbation theory** , Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 94;
G. Altarelli and G. Parisi, **Asymptotic freedom in parton language** , **Nucl. Phys. B 126** (1977) 298.

[250] G. Curci, W. Furmanski and R. Petronzio, **Evolution of parton densities beyond Leading order: the nonsinglet case** , **Nucl. Phys. B 175** (1980) 27;
W. Furmanski and R. Petronzio, **Singlet parton densities beyond leading order** , **Phys. Lett. B 97** (1980) 437.

[251] S. Moch, J. A. M. Vermaseren and A. Vogt, **The three loop splitting functions in QCD: the nonsinglet case** , **Nucl. Phys. B 688** (2004) 101,
A. Vogt, S. Moch and J. A. M. Vermaseren, **The three-loop splitting functions in QCD: the singlet case** , **Nucl. Phys. B 691** (2004) 129.

[252] S. Alekhin, J. Blümlein, and S. Moch，**The ABM parton distributions tuned to LHC data** , **Phys. Rev. D 89** (2014) 054028.

[253] P. Jimenez-Delgado and E. Reya, **Delineating parton distributions and the strong coupling** , **Phys. Rev. D 89** (2014) 074049.

[254] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski, R.S. Thorne, **Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs** , **Eur. Phys. J. C 75** (2015) 132;

[255] S. Bailey, T. Cridge, L. A. Harland-Lang, A. D. Martin and R. S. Thorne, **Parton distributions from LHC, HERA, Tevatron and fixed target data: MSHT20 PDFs** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 341.

[256] T. Cridge,, L. A. Harland-Lang, A. D. Martin and R. S. Thorne, **An investigation of the α_s and heavy quark mass dependence in the MSHT20 global PDF analysis** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 744.

[257] A. Buckley et al., **LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era** , **Eur. Phys. J. C 75** (2015) 132; arXiv:1412.7420[hep-ph].

[258] R.D. Ball et al., NNPDF Collaboration, **Parton distributions from high-precision collider data** **Eur. Phys. J. C 77** (2017) 663.

[259] R.D. Ball et al., NNPDF Collaboration, **An open-source machine learning framework for global analyses of parton distributions** , Eur. Phys. J. C81 (2021) 10, 958, arXiv:2109.02671.

[260] T.J. Hou et al., CTEQ-TEA Collaboration, **CT14 intrinsic charm parton distribution functions from CTEQ-TEA global analysis** , **JHEP 02** (2018) 059.

[261] C.N. Yang and R.L. Mills, **Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance** , **Phys.Rev. 96** (1954) 191-195.

[262] J.S. Schwinger, **A Theory of the Fundamental Interactions** , **Annals Phys. 2** (1957) 407. T.D. Lee and Chen-Ning Yang, **Possible Nonlocal Effects in μ Decay** , **Phys.Rev. 108** (1957) 1611.

[263] M. Goldhaber, L. Grodzins and A.W. Sunyar, **Helicity of Neutrinos** , **Phys.Rev. 109** (1958) 1015.

[264] R. Bayes et al., TWIST Collaboration, **Experimetnal Constraints on Left-Right Symmetric Models from Muon Decay** , **Phys. Rev.Lett.106** (2011) 041804.

[265] Cabibbo N. **Unitary Symmetry and Leptonic Decays.** **Phys. Rev.Lett.**, 1963(**10**): 531; **Unitary Symmetry and Nonleptonic Decays.** **Phys. Rev.Lett.**, 1964 (**12**): 62;

[266] J.D. Bjorken and S.L. Glashow, **Elementary Particles and SU(4)** , **Phys.Lett. 11** (1964) 255-257.

[267] B. Winstein and L. Wolfenstein, **The search for direct CP violation** , **Rev. Mod. Phys.65** (1993)1113.

[268] G. Buchalla, A.J. Buras and M.E. Lautenbacher, **Weak decays beyond leading logarithms, Rev. Mod. Phys.68** (1996)1125.

[269] A. D. Sakharov, **Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe,** Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967) 32.

[270] Kobayashi M, Maskawa T. **CP violation in the renormalizable theory of weak interaction.** **Prog. Theor. Phys.**, 1973 (**49**): 652.

[271] Wolfenstein L. **Parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix.** **Phys. Rev.Lett.**, 1983 (**51**): 1945.

[272] C. Jarlskog, **Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation** , **Phys. Rev.Lett.55** (1985) 1039.

[273] A. Salam and J.C. Ward, **Electromagnetic and weak interactions** , **Phys.Lett. 13** (1964) 168-171.

[274] F. Englert and R. Brout, **Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons** , **Phys. Rev.Lett.13** (1964) 321.

[275] P.W. Higgs, **Broken symmetries, massless particles and gauge fields** , **Phys. Lett. 12** (1964) 132.
P.W. Higgs, **Broken symmetries and the masses of gauge bosons** , **Phys. Rev.Lett.13** (1964) 508.

[276] G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, **Global conservation laws and massless particles** , **Phys. Rev.Lett.13** (1964) 585.

[277] S. Weinberg, **A Model of Leptons** , **Phys. Rev.Lett.19** (1967) 1264-1266.

[278] S. Weinberg, **Physical processes in a convergent theory of the weak and electromagnetic interactions** , **Phys. Rev.Lett.27** (1971)1688.

[279] A. Salam, **Some speculations on the new resonances** , **Rev. Mod. Phys.33** (1961) 426-430.
Renormalizability of gauge theories , **Phys.Rev.** 127 (1962) 331-334.
A. Salam and J.C. Ward, **Vector field associated with the unitary theory of the Sakata model** , **Nuovo Cim. 20** (1961) 419-421.

[280] S.L. Glashow, **Partial Symmetries of Weak Interactions** , **Nucl.Phys. 22** (1961) 579-588.

[281] S. Weinberg, **Precise relations between the spectra of vector and axial vector mesons** , **Phys. Rev.Lett.18** (1967) 507-509.

[282] A.Salam, **Weak and Electromagnetic Interactions** , talk given at the 8th Nobel Symposium, 19-25 May 1968, Lerum, Sweden. published in **Conf.Proc. C**680519 (1968) 367-377.

[283] T. Kibble, **Prehistory of the Higgs** , talk given in Higgs Hunting 2014, July 21-23, 2014, Orsay, France.

[284] Gerard 't Hooft, M.J.G. Veltman, **Regularization and Renormalization of Gauge Fields** , **Nucl. Phys. B 44** (1972) 189-213.

[285] T.W.B. Kibble, **Symmetry breaking in nonAbelian gauge theories** , **Phys.Rev. 155** (1967) 1554-1561.

[286] A.J. Buras, D. Buttazzo, J. Girrbach-Noe and R. Knegjens, **$K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ and $K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu}$ in the Standard Model: status and perspectives** , **JHEP 11** (2015) 033.

[287] A.J. Buras, and E. Venturini, **Searching for new physics in rare K and B decays without $|V_{cb}|$ and $|V_{ub}|$ uncertainties** , arXiV: 2109.11032 [hep-ph].

[288] E. Cortina Gil et al., (NA62 Collaboration), **Measurement of the very rare $K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ decay** , **JHEP 06** (2021) 093.

[289] F. Bucci, (NA62 Collaboration), **The most recent results from NA62** , talk given at La Thuile 2022, 6-12 March, 2022, La Thuile, Italy.

[290] J.K. Ahn et al., (KOTO Collaboration), **Search for $K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu}$ and $K_L \to \pi^0 X^0$ decays at the J-PARC KOTO experiment** , **Phys. Rev.Lett.122** (2019) 021802.

[291] J.K. Ahn et al., (KOTO Collaboration), **Study of $K_L \to \pi^0\nu\bar{\nu}$ decay at the J-PARC KOTO experiment** , **Phys. Rev.Lett.126** (2021) 121801.

[292] E. Cortina Gil et al., (NA62 Collaboration), **An investigation of the very rare $K^+ \to \pi^+\nu\bar{\nu}$ decay** , **JHEP 11** (2020) 042.

[293] G. D' Ambrosio and T. Kitahara, **Direct CP Violation in $K \to \mu^+\mu^-$** , **Phys. Rev.Lett.119** (2017) 201802.

[294] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Constraints on the $K^0_S \to \mu^+\mu^-$ branching fraction** , **Phys. Rev.Lett.125** (2020) 231801.

[295] E. Cortina Gil et al., (NA62 Collaboration), **Search for K^+ decays to a muon and invisible particles** , **Phys. Lett. B 816** (2021) 136259.

[296] A. Sher et al., (BNL 865 Collaboration), **Improved upper limit on the decay $K^+ \to \pi^+\mu^+e^-$** , **Phys. Rev. D 72** (2005) 012005.

[297] R. Aliberti et al., (NA62 Collaboration), **Search for lepton number and flavor violation in K^+ and π^0 decays** , **Phys. Rev.Lett.127** (2021) 131802.

[298] E. Cortina Gil et al., (NA62 Collaboration), **Search for lepton number violatingK^+ decays** , **Phys. Lett. B 797** (2019) 134794.

[299] C. Lazzeroni, **Rare decays of strange, charm and beauty mesons** , talk given at LP 2021, 10-14 Jan. 2022 (on line).

[300] ATLAS Collaboration, **Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC** , **Phys. Lett. B 716** (2012) 1-29.

[301] CMS Collaboration, **Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC** , **Phys. Lett. B 716** (2012) 30-61.

[302] ATLAS Collaboration, **Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data** , **Phys. Lett. B 726** (2013) 120-144.

[303] ATLAS Collaboration, **Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC** , **Phys. Lett. B 726** (2013) 88-119.

[304] J. M. Lindert, **Standard model theory** , talk given at EPS-HEP 2021, Hamberg, July 27, 2021;
S. Dawson, **Higgs and electroweak theory** ,

[305] The ALEPH, CDF, D0, DELPHI, L3, OPAL, SLC Collaborations, the LEP Electroweak Working Group, the Tevatron Electroweak Working Group, and the SLD electroweak and heavy flavour groups, **Precision Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model** , arXiv:0911.2604 [hep-ex], CERN, 2009

[306] The ALEPH, CDF, D0, DELPHI, L3, OPAL, SLD Collaborations, the LEP Electroweak Working Group, the Tevatron Electroweak Working Group, and the SLD electroweak and heavy flavour groups, **Precision Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model** , arXiv:1012.2367v2 [hep-ex]; CERN-PH-EP/2010-095, http://www.cern.ch/LEPEWWG/.

[307] The ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations, and LEP Electroweak Collaborations, (S. Schael et al.), **Electroweak Measurements in Electron-Positron Collisions at W-Boson-Pair Energies at LEP** , **Phys. Rep. 532** (2013) 119-244.

[308] The Tevatron Electroweak Working Group for the CDF and the D0 Collaborations, **Combination of CDF and D0 Results on the Mass of the Top Quark** , arXiv:1007:3178 [hep-ex].

[309] T. A. Aaltonen et al. (CDF, D0), **Combination of CDF and D0 W-Boson mass measurements** , **Phys. Rev. D 88** (2013) 052018.

[310] G. Montagna et al., **TOPAZ0 4.0 - A new version of a computer program for evaluation of de-convoluted and realistic observables at LEP 1 and LEP 2** , **Comput.Phys.Commun. 117** (1999) 278-289.

[311] A. Akhundov, A. Arbuzov, S. Riemann and T. Riemann, **The ZFITTER project** , **Phys. Part. Nucl. 45** (2014)529-549.

[312] A. Abe et al. (CDF Collaboration), Evidence for top quark production in $\bar{p}p$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV , **Phys. Rev. D 50**, 2966 (1994);
A. Abe et al. (CDF Collaboration), Evidence for top quark production in $\bar{p}p$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV , **Phys. Rev.Lett.73**, 225 (1994);
F. Abe et al. (CDF Collaboration), Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab, Phys. Rev. Lett. **74**, 2626 (1995).
S. Abachi et al. (D0 Collaboration), Observation of the Top Quark, Phys. Rev. Lett. **74**, 2632 (1995);
M. Weber, D0 Collab., **Top quark physics review** , talk presented at Aspen 2005, Feb.13, 2005.

[313] C. Campagnari and M. Franklin, **The discovery of the top quark** , **Rev. Mod. Phys.69** (1997) 137-212.

[314] S.Mitra, **Top properties at the LHC** , talk given at Standard Model at the LHC 2021, 26-30 April, 2021.

[315] E.Cortezon, **ATLAS/CMS latest results on $t(t)X$ ($X = tt, bb, Z, W, \gamma$)** , talk given at Standard Model at the LHC 2021, 26-30 April, 2021.

[316] W. Wagner et al., LHC Top Working geoup,
https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/LHCPhysics/LHCTopWG

[317] S. Menke, **Top production and decay** , talk given at LHCP 2021, 7-12 June, 2021.

[318] P. Nason, S.Dawson and R.K. Ellis, **The Total Cross-Section for the Production of Heavy Quarks in Hadronic Collisions** , **Nucl. Phys. B 303** (1988) 607;
W. Beenakker, H. Kuijf, W.L. van Neerven and J. Smith, **QCD Corrections to Heavy Quark Production in $p\bar{p}$ Collisions** , **Phys. Rev. D 40** (1989)54.

[319] M. Czakon, P. Fiedler and A. Mitov, **The total top quark pair production cross-section at hadron colliders through $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$** , **Phys. Rev.Lett.110** (2013) 252004.

[320] 李重生，**Production and decay of top quark via FCNC couplings beyond leading order** , 邀请学术报告，2018年11月17日，南京师范大学。

[321] M. Owen, **Latest ATLAS & CMS Top cross-section measurements** , talk given at Standard Model at the LHC 2021, 27 April, 2021.

[322] M. Worek, **Theoretical aspects of Top-quark physics** , talk given at LHCP 2021, 7-12 June, 2021.

[323] R. Frederik, D. Pagani and M. Zaro, **Large NLO corrections in $t\bar{t}W^{\pm}$ and $t\bar{t}t\bar{t}$ hadroproduction from supposedly subleading EW contributions** , **JHEP 02** (2018) 031.

[324] T. Strebler, **ATLAS and CMS latest results on ttH and tH)** , talk given at Standard Model at the LHC 2021, 26-30 April, 2021.

[325] D. Pagani, **Status-and-perspectives of precision predictions for tt+X (X=H,tt,bb, Z, W, γ)** , talk given at Standard Model at the LHC 2021, 26-30 April, 2021.

[326] U. Husemann, **Top-quark physics: Status and prospects** , **Prog. Part.& Nucl. Phys. 95** (2017) 48-97.

[327] J. Erler and M. Schott, **Electroweak precision tests of the Standard Model after the discovery of the Higgs boson** , **Prog. Part.& Nucl. Phys. 106** (2019) 68-119.

[328] M. M. Llacer, **Search for CP violation in single top quark events with the ATLAS detector at LHC** , Ph.D Thesis, CERN-THESIS-2014-070.

[329] M. Franchini, **Measurements of $t\bar{t}$ differential CS at the ATLAS experiment in pp collisions at $\sqrt{s} = 7, 8$ TeV** , Ph.D Thesis, CERN-THESIS-2014-052.

[330] C.A. Gottardo, **Top quark rare production and decay processes** , talk given at LHCP 2021, 7-12 June, 2021.

[331] N. Kidonakis, **Next-to-next-to-leading-order collinear and soft gluon corrections for t-channel single top quark production** , **Phys. Rev. D 83** (2011) 091503;
M. Brucherseifer, F. Caola and K. Melnikov, **On the NNLO QCD corrections to single-top production at the LHC** , **Phys. Lett. B 736** (2014) 58.

[332] M. Aaboud et al., The ATLAS and CMS Collaborations, **Combinations of single-top-quark production cross-section measurements and $|f_{LV}V_{tb}|$ determinations at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS experiments** , **JHEP 05** (2019) 088.

[333] Q.H. Cao, S.L. Chen, Y.D. Liu and X.P. Wang, **What can We Learn from Triple Top-Quark Production?** **Phys. Rev. D 100** (2019) 055035.

[334] Q.H. Cao, H.R. Jiang and G.J. Zeng, **Single top quark production with and without a Higgs boson** , **Chin. Phys. C 45** (2021) 093110.

[335] 司宗国, **Top quark physics at hadron colliders** , 会议报告，2010年12月17 日，三亚。

[336] Gudrun Heinrich, **Collider physics at the precision frontier** , **Phys. Rep. 922** (2021) 1-69.

[337] Q.H. Cao, S.L. Chen, Y.D. Liu, R. Zhang and Y. Zhang, **Limiting top quark-Higgs boson interaction and Higgs-boson width from multitop productions** , **Phys. Rev. D 99** (2019) 113003.

[338] 杨李林, **Top quark physics and Top-Higgs interplay** , 在第14届TeV物理会议上的报告，2019年4月，南京师范大学。

[339] H.M. Gray, **Exploring the Standard Model with ATLAS and CMS** , Lectures given at ASP2014, Aug. 3-23, 2014, Dakar, Senegal.

[340] C.S. Li, R.J. Oakes and T.C. Yuan, **QCD corrections to $t \to W^+ b$** , **Phys. Rev. D 43** (1991) 3759.

[341]] 何红建, **Higgs Boson: the unique window to new physics** , 在第14届TeV 物理会议上的报告，2019年4月，南京师范大学。

[342] S. Dittmaier et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), **Handbook of LHC Higgs cross sections: 1. Inclusive observables** , CERN Report 2011-002, [arXiv:1101.0593].

[343] S. Dittmaier et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), **Handbook of LHC Higgs cross sections: 2. Differential distributions** , CERN Report 2012-002, [arXiv:1201.3084].

[344] J. R. Andersen et al., (LHC Higgs Cross Section Working Group), **Handbook of LHC Higgs cross sections: 3. Higgs properties** , CERN Report 2013-004, [arXiv:1307.1347].

[345] D. de Florian (Eds) et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), **Handbook of LHC Higgs cross sections: 4. Deciphering the nature of the Higgs sector** ，CERN Report 2017-002-M, [arXiv:1610.07922].

[346] LHC Higgs working group, **SM Higgs production CS's at $\sqrt{s} = 8, 13$ TeV (update in CERN Report 4 2016)** ,
web page: https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/LHCPhysics/WebHome

[347] J. Bendavid, **Higgs and standard model experimental measurements at the LHC** , Lectures given at the CERN-FermiLab HCP Summaer School, Aug. 25-27, 2021.

[348] M. Cepada et al., **Higgs Physics at the HL-LHC and HE-LHC** , Report from Working Group 2 on the Physics of the HL-LHC, and Perspectives at the HE-LHC, CERN-LPCC-2018-04; arXiv: 1902.00134V2 [hep-ph].

[349] ATLAS Collaboration, **Measurement of the Higgs boson mass in the $H \to ZZ^* \to 4l$ decay channel with $\sqrt{s} = 13$ TeV pp collisions using the ATLAS detector at the LHC** , ATLAS-CONF-2020-005.

[350] A.M. Sirunyan ey al., CMS Collaboration, **A measurement of the Higgs boson mass in the diphoton decay channel** , **Phys. Lett. B 805** (2020)135425.

[351] A. Denner et al., LHC Higgs cross section working group, **Standard model Higgs-boson branching ratios with uncertainties** , **Eur. Phys. J. C 71** (2011) 1753.

[352] M. Carena et al., the reversed version of the review " Status of Higgs boson physics " , in Vol.1, page 203-260 of PDG 2020 (Update version).

[353] ATLAS Collaboration, **A combination of measurements of Higgs boson production and decay using up to 139 fb^{-1} of p p collision data at $\sqrt{s} = 13$s TeV collected with the ATLAS experiment** , ATLAS-CONF-2020-027.

[354] CMS Collaboration, **Combined Higgs boson production and decay measurements with up to 137 fb^{-1} of proton-proton collision data at $\sqrt{s} = 13$s TeV** , CMS-PAS-HIG-19-005.

[355] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Cross-section measurements of the Higgs boson decaying into a pair of τ-leptons in proton - proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , **Phys. Rev. D 99** (2019) 072001.

[356] G. Aad et al., (ATLAS Collaboration), **Measurements of and WH and ZH production in the $H \to b\bar{b}$ decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 178.

[357] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Search for Higgs bosons produced via vector-boson fusion and decaying into bottom quark pairs in $\sqrt{s} = 13$ TeV pp collisions with the ATLAS detector** , **Phys. Rev. D 98** (2018) 052003.

[358] A.M. Sirunyan et al., (CMS Collaboration), **Observation of Higgs boson decay to bottom quarks** , **Phys. Rev.Lett.121** (2018) 121801.

[359] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Evidence for the associated production of the Higgs boson and a top quark pair with the ATLAS detector** , **Phys. Rev. D 97** (2018) 072003.

[360] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Search for the standard model Higgs boson produced in association with top quarks and decaying into a $b\bar{b}$ pair in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , **Phys. Rev. D 97** (2018) 072016.

[361] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Observation of Higgs boson production in association with a top quark pair at the LHC with the ATLAS detector** , **Phys. Lett. B 784** (2018) 173.

[362] G. Aad et al., (ATLAS Collaboration), **ATLAS Collaboration, Search for the dimuon decay of the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector** , **Phys. Lett. B 812**(2021) 135980.

[363] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration), **Higgs boson production cross-section measurements and their EFT interpretation in the 4 decay channel at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , **Eur. Phys. J. C 80** (2020) 957. Erratum: **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 29, Erratum: **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 398.

[364] ATLAS Collaboration, **Measurement of the properties of Higgs boson production at $\sqrt{s} = 13$s TeV in the $H \to \gamma\gamma$ channel using 139 fb^{-1} of pp collision data with the ATLAS experiment** , ATLAS-CONF-2020-026.

[365] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Measurements of gluon-gluon fusion and vector-boson fusion Higgs boson production cross-sections in the $H \to WW^\star \to e\nu\mu\nu$ decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , **Phys. Lett. B 789** (2019) 508.

[366] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Measurements of Higgs boson production cross-sections in the $H \to \tau^+\tau^-$ decay channel in p p collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , ATLAS-CONF-2021-044.

[367] G. Aad et al., (ATLAS Collaboration), **Measurements of Higgs boson production cross-sections in the $H \to \tau^+\tau^-$ decay channel in p p collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector** , arXiv: 2201.08269 [hep-ex].

[368] CMS Collaboration, **Observation of the Higgs boson decay to a pair of τ leptons** , **Phys. Lett. B 779**(2018) 283.

[369] A.M. Sirunyan et al., (CMS Collaboration), **Evidence for Higgs boson decay to a pair of muons** , **JHEP 01** (2021) 148.

[370] CMS Collaboration, **Search for a standard model-like Higgs boson in the $\mu^+\mu^-$ and e^+e^- decay channels at the LHC** , **Phys. Lett. B 744** (2015) 184.

[371] A. Djouadi, **The Anatomy of Electroweak Symmetry Breaking Tome I: The Higgs boson in the Standard Model** , **Phys. Rep. 457** (2008) 1-216.
A. Djouadi, **The Anatomy of Electroweak Symmetry Breaking Tome II: The Higgs boson in the Minimal Supersymmetric Standard Model** , **Phys. Rep. 459** (2008) 1-241.

[372] H.Q. Zheng and D.D. Wu, **First-order QCD corrections to the decay of the Higgs boson into two photons** , **Phys. Rev. D 42** (1990) 3760;
M. Spira et al., **Higgs boson production at the LHC** , **Nucl. Phys. B 453** (1995) 17;
J. Fleischer et al., **Analytical result for the two-loop QCD correction to the decay $H \to 2\gamma$** , **Phys. Lett. B 584** (2004) 294.

[373] A. M. Sirunyan et al. (CMS Collaboration), **Measurements of Higgs boson production cross sections and couplings in the diphoton decay channel at $\sqrt{s} = 13$ TeV** , **JHEP 07** (2021) 027.

[374] G. Aad et al., (ATLAS Collaboration), **Measurement of the Higgs boson mass from the $H \to \gamma\gamma$ and $H \to ZZ \to 4l$ channels with the ATLAS detector using $25fb^{-1}$ of pp collision data** , **Phys. Rev. D 90**, 052004 (2014).

[375] V. Khachatryan et al., (CMS Collaboration), **Observation of the diphoton decay of the Higgs boson and measurement of its properties** , **Eur. Phys. J. C 74** (2014)3076; arXiv:1407.0558 [hep-ex].

[376] ATLAS Collaboration, **Standard Model summary plots July 2021** , ATL-PHYS=-PUB-2021-032.

[377] G. H. de Monchenault, **Highlights and perspectives from the CMS experiments** , LHCP 2021, 7-12 June 2021 (on line).

[378] E. Bagnaschi, G.F. Giudice, P. Slavich, A. Strumia, **Higgs Mass and Unnatural Supersymmetry** , **JHEP 09** (2014) 092.

[379] A. Djouadi et al., **The post-Higgs MSSM scenario: Habemus MSSM ?** , **Eur. Phys. J. C 73** (2013) 2650.

[380] A. Djouadi et al., **Fully covering the MSSM Higgs sector at the LHC** , **JHEP 06** (2015) 168.

[381] G. Aad et al., (ATLAS Collaboration), **Combined measurements of Higgs boson production and decay using up to 80fb^{-1} of proton - proton collision data at $\sqrt{s} = 13$ TeV collected with the ATLAS experiment** , **Phys. Rev. D 101** (2020) 012002.

[382] C. Borschensky et al., **Squark and gluino production cross sections in pp collisions at $\sqrt(s) = 13, 14, 33$ and 100 TeV** , **Eur. Phys. J. C 74** (2014) 3174.

[383] W. Beenakker et al., **NNLL-fast: predictions for coloured supersymmetric particle production at the LHC with threshold and Coulomb resummation** , **JHEP 12** (2016) 133.

[384] F. Wang, W.Y. Wang, L. Wu, J.M. Yang and M,C Zhang, **Probing degenerate heavy Higgs boson with vector-like particle** , **Int. J. Mod. Phys. A 32** (2017) 1745005.

[385] W. Abdallah et al., LHC Reinterpretation Forum, **Reinterpretation of LHC Results for New Physics: Status and recommendations after Run 2** , SciPost Phys. **9** (2020) 022.

[386] CKMfitter Group (J. Charles et al.), **Eur. Phys. J. C 41**, 1-131 (2005) [hep-ph/0406184], updated results and plots available at: http://ckmfitter.in2p3.fr.

[387] CKMfitter Group (J. Charles et al.), **Updated results on the CKM matrix** ，Jan.10，2022.

[388] M. Bona et al., (UTfit Collaboration), **The unitarity triangle fit in the standard model and hadronic parameters from lattice QCD: a reappraisal after the measurements of Δm_s and $\mathcal{B}(By\tau\nu_\tau)$** , **JHEP 10** (2006) 081, updated results: http://utfit.org

[389] T.Jakoubek, **CPV & mixing in beauty sector: experimental overview** , talk given at LHCP 2022, 16-20 May, 2022 (on line).

[390] M. Gronau and D. London, **Isospin analysis of CP asymmetries in B decays** , **Phys. Rev.Lett.65** (1990)3381.

[391] M. Gronau and D. London, **How to determine all the angles of the unitarity triangle from $B^0_d \to DK_s$ and $B^0_s \to D\phi$** , **Phys. Lett. B 253** (1991) 483;
M. Gronau and D. Wyler, **On determining a weak phase from CP asymmetries in charged B decays** , **Phys. Lett. B 265** (1991) 172.

[392] Atwood D, Dunietz I, Soni A, **Enhanced CP violation with $B \to KD^0(\bar{D}^0)$ modes and extraction of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Angle γ** , **Phys. Rev.Lett.**, 1997 (**78**): 3257;
Atwood D, Dunietz I, Soni A, **Improved methods for observing CP violation in $B \to KD$ and measuring the CKM phase γ** , **Phys. Rev. D** , 2001 (**63**): 036005.

[393] A. Giri, Y. Grossman, A. Soffer, and J. Zupan, **Determining γ using $B^\pm \to DK^\pm$ with multibody D decays** , **Phys. Rev. D** , 2003 (**68**): 054018.

[394] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Simultaneous determination of CKM angle γ and charm mixing parameters** , **JHEP 12** (2021) 141.

[395] F. Abudinen et al., (Belle and Belle-II collaboration), **Combined analysis of Belle and Belle II data to determine the CKM angle ϕ_3 using $B^+ \to D(K^0_S h^+ h^-)h^+$ decays** , **JHEP 02** (2022) 063.

[396] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Constraints on the CKM angle γ from $B^\pm \to Dh^\pm$ decays using $D \to h^\pm hc'^\mp \pi^0$ final states** , arXiv: 2112.10617 [hep-ex].

[397] J. Charles, et al.,(CKMfitter Group), **Predictions of selected flavour observables within the Standard Model** , **Phys. Rev. D 84** (2011) 033005.

[398] Wen-Bin Qian, (CKMfitter Group), **Recent CKMfitter updates on global fits of the CKM matrix** , talk given at the CKM 2021, 22-26 Nov, 2021 (on line).

[399] F. Derrari, (UTfit Collaboration), **Last results in the unitarity triangle fits with UTfit** , talk given at the CKM 2021, 22-26 Nov, 2021 (on line).

[400] M. Bona, (UTfit Collaboration), **Status of the Unitary triangle** , talk given at LHCP 2022, 16-21 May, 2022 (on line).

[401] U. Egede, (HFLAV Group), **Heavy flavor averaging group** , talk given at the CKM 2021, 22-26 Nov, 2021 (on line).

[402] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Observation of CP Violation in Charm Decays** , **Phys. Rev.Lett.122** (2019) 211803.

[403] M. Gersabeck et al., **On the interplay of direct and indirect CP violation in the charm sector** , **J.Phys. G 39** (2012) 045005.

[404] J.P. Lees et al., (BaBar collaboration), **Measurement of $D^0 - \bar{D}^0$ mixing and CP violation in two-body D^0 decays** , **Phys. Rev. D 87** (2013) 012004.

[405] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **Measurement of $y_{\rm CP}$ in $D^0 - \bar{D}^0$ oscillation using quantum correlations in $e^+e^- \to D^0\bar{D}^0$ at $\sqrt{s} = 3.773$ GeV** , **Phys. Lett. B 744** (2015) 339.

[406] M. Staric et al., (Belle collaboration), **Measurement of $D^0 - \bar{D}^0$ mixing and search for CP violation in $D^0 \to K^+K^-, \pi^+\pi^-$ decays with the full Belle data set** , **Phys. Lett. B 753** (2016) 412.

[407] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Evidence for CP Violation in time-integrated $D^0 \to h^-h^+$ decay rates** , **Phys. Rev.Lett.108** (2012) 111602.

[408] T. Aaltonen et al., (CDF collaboration), **Measurement of the difference in CP-violating asymmetries in $D^0 \to K^+K^-$ and $D^0 \to \pi^+\pi^-$ decays at CDF** , **Phys. Rev.Lett.109** (2012) 111801.

[409] B. R. Ko, for the Belle Collaboration, **Direct CP violation in charm at Belle** , talk given at ICHEP 2012, July 4-11 2012, Melbourne, Australia. arXiv：1212.1975 [hep-ex].

[410] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Search for direct CP violation in $D^0 \to h^-h^+$ modes using semileptonic B decays** , **Phys. Lett. B 723** (2013) 33.

[411] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Measurement of CP asymmetry in $D^0 \to K^+K^-$ and $D^0 \to \pi^+\pi^-$ decays** , **JHEP 07** (2014) 041.

[412] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Measurement of the difference of time-integrated CP asymmetries in $D^0 \to K^-K^+$ and $D^0 \to \pi^-\pi^+$ decays** , **Phys. Rev.Lett.116** (2016) 191601.

[413] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Updated measurement of decay-time-dependent CP asymmetries in $D^0 \to K^+K^-$ and $D^0 \to \pi^+\pi^-$ decays** , **Phys. Rev. D 101** (2020) 012005.

[414] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Search for time-dependent CP violation in $D^0 \to K^+K^-$ and $D^0 \to \pi^+\pi^-$ decays** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 072010.

[415] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Measurement of the charm mixing parameter $y_{CP} - y_{CP}^{K\pi}$ using two-body D^0 meson decays** , aeXiV: 2202.09102 [hep-ex].

[416] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Observation of the mass difference between neutral charm-meson eigenstates** , **Phys. Rev.Lett.127** (202) 211803.

[417] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Search for CP violation in $D^+_{(s)} \to h^+\pi^0$ and $D^+_{(s)} \to h^+\eta$ decays** , **JHEP 06** (2021) 019.

[418] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Measurement of branching fractions and CP asymmetries for $D_s^+ \to K^+(\eta,\pi^0)$ and $D_s^+ \to \pi^+(\eta,\pi^0)$ decays at Belle** , **Phys. Rev. D 103** (2021) 112005.

[419] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **First observation of $D^+ \to \eta\mu^+\nu_\mu$ and measurement of its decay dynamics** , **Phys. Rev.Lett.124** (2020) 231801.

[420] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **Measurement of the $D \to K^-\pi^+\pi^+\pi^-$ and $D \to K^-\pi^+\pi^0$ coherence factors and average strong-phase differences in quantum-correlated $D\bar{D}$ decays** , **JHEP 05** (2021) 164.

[421] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **Amplitude analysis and branching-fraction measurement of $D_s^+ \to K_S^0\pi^+\pi^0$** , **JHEP 06** (2021) 181.

[422] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **Study of the decay $D^+ \to K^*(892)^+K_S^0$ in $D^+ \to K^+K_S^0\pi^0$** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 012006.

[423] N. Ablikim et al., (BESIII collaboration), **First Measurement of Polarizations in the Decay $D^0 \to \omega\phi$** , **Phys. Rev.Lett.128** (2022) 011803.

[424] Z. Z. Xing, **A U-spin prediction for the CP-forbidden transition $e^+e^- \to D^0\bar{D}^0 \to (K^+K^-)_D(\pi^+\pi^-)_D$** , **Mod. Phys. Lett. A 34** (2019) 1950238.

[425] A. L. Kagan and M. D. Sokoloff, **Indirect CP violation and implications for $D^0\bar{D}^0$ and $B_s\bar{B}_s$ mixing** , **Phys. Rev. D 80** (2009) 076008.

[426] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), **Measurement of the CP violation parameter A_Γ in $D^0 \to K^+K^-$ and $D^0 \to \pi^+\pi^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.118** (2017) 261803.

[427] H. Y. Cheng and C. W. Chiang, **Direct CP violation in two-body hadronic charmed meson decays** , **Phys. Rev. D 85** (2012) 034036.

[428] H. Y. Cheng and C. W. Chiang, **Branching ratios and direct CP asymmetries in $D \to PP$ decays** , **Phys. Rev. D 86** (2012) 014014.

[429] H. N. Li, C. D. Lü and F.S. Yu, **Branching ratios and direct CP asymmetries in $D \to PP$ decays** , **Phys. Rev. D 86** (2012) 036012.

[430] D. Wang, F. S. Yu and H. N. Li, **CP asymmetries in charm decays into neutral kaons** , **Phys. Rev.Lett.119** (2017) 181802.

[431] A. Dery and Y. Nir, **Implications of the LHCb discovery of CP violation in charm decays** , **JHEP 12** (2019)104.

[432] I. Bediaga and C. Göbel, **Direct CP violation in beauty and charm hadron decays** , **Prog. Part.**& **Nucl. Phys. 114** (2020) 103808.

[433] T. Hadavizadeh, **Mixing and CP violation in charm decays at LHCb** , talk given at Moriond QCD 2021, 27 March - 3rd April 2021 (on line); arXiv:2105.08884[hep-ex].

[434] H. Y. Cheng and C.W. Chiang, **Revisiting CP violation in $D \to PP$ and VP decays** , **Phys. Rev. D 100** (2019) 093002.

[435] H. Y. Cheng and C.W. Chiang, **Direct CP violation in charmed meson decays within the standard model** , talk given at CKM2021, 22-26 Nov. 2021 (on line); arXiv:2112.14398 [hep-ex].

[436] 于福升, **Implications on observation of charm CPV** , 在”第14届TeV物理国际研讨会“上的报告，2019.04.19.

[437] 于福升, **粲物理十年黄金发展期** , 在”BESIII粲强子物理研讨会“上的报告，2020.11.07，南华大学。

[438] H. Y. Cheng and C.W. Chiang, **CP violation in quasi-two-body $D \to VP$ decays and three-body D decays mediated by vector resonances** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 073003.

[439] L. Callibi, T.J. Li, Y. Li and B.Zhu, **Simple model for large CP violation in charm decays, B-physics anomalies, muon g-2 and dark matter** , **JHEP 10** (2020) 070.

[440] R. Bause, H. Gisbert, M. Golz and G. Hiller, **Exploiting CP asymmetries in rare charm decays** , **Phys. Rev. D 101** (2020) 115006.

[441] 李营，**Flavour Physics and CP Violation** ，在中国PQCD合作组组会上的报告，2020.8.13-14（线上）。

birthday

[442] T. Jubb, M. Kirk, A. Lenz and G. Tetlalmatzi-Xolocotzi, **On the ultimate precision of meson mixing observables** , **Nucl. Phys. B 915** (2017) 431.

[443] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Precision Precise determination of the $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ oscillation frequency** , Nature Physics **18** (2022) 54.

[444] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Precision measurement of the $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ oscillation frequency with the decay $B_s^0 \to D_s^- \pi^+$** , **New J. Phys. 15** (2013) 053021.

[445] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Precision measurement of CP violation in $B_s^0 \to J/\psi K^+ K^-$** , **Phys. Rev.Lett.114** (2015) 041801.

[446] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Updated measurement of time-dependent CP-violating observables in $B_s^0 \to J/\psi K^+ K^-$** , **Eur. Phys. J. C 79** (2019) 706; Erratum ibid. C**80** (2020) 601.

[447] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Measurement of the CKM angle γ and $B_s^0 - \overline{B}_s^0$ mixing frequency with $B_s^0 \to D_s^{\mp} h^{\pm} \pi^{\pm} \pi^{\mp}$ decays** , **JHEP 03** (2021) 137; Erratum ibid. C**80** (2020) 601.

[448] L. Di Luzio, M. Kirk, A. Lenz and T. Rauh, **ΔM_s theory precision confronts flavour anomalies** . **JHEP 12** (2019) 009.

[449] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, and C.T. Sachrajda, **QCD factorization for $B \to \pi\pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit,** **Phys. Rev.Lett.83** (1999) 1914.

[450] Y. Y. Keum, H. n. Li and A. I. Sanda, **Penguin enhancement and $B \to K\pi$ decays in perturbative QCD** , **Phys. Rev. D 63**, 054008 (2001);
Y. Y. Keum and H. n. Li, **Nonleptonic charmless B decays: Factorization versus perturbative QCD,** **Phys. Rev. D 63**, 074006 (2001);
H. n. Li, **QCD aspects of exclusive B meson decays** , **Prog. Part.**& **Nucl. Phys. 51** (2003) 85; and references therein.

[451] C. D. Lü, K. Ukai and M. Z. Yang, **Branching ratio and CP violation of $B \to \pi\pi$ decays in the perturbative QCD approach** , **Phys. Rev. D 63**, 074009 (2001).

[452] C.W. Bauer, S. Fleming, and M. Luke, **Summing Sudakov logarithms in $B \to X_s\gamma$ in effective field theory** , **Phys. Rev. D 63** (2001) 014006;
C.W. Bauer, S. Fleming, D. Pirjol, and I.W. Stewart, **An effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decay** , **Phys. Rev. D 63** (2001) 114020.

[453] M. Beneke and D. Yang, **Heavy-to-light B meson form factors at large recoil energy: Spectator-scattering corrections,** **Nucl. Phys. B 736** (2006)34.

[454] M. Artuso, G. Borissov and A. Lenz, **CP violation in the B_s^0 system** , **Rev. Mod. Phys.88** (2016) 045002.

[455] J.P. Lee et al., (BaBar Collaboration), **Measurement of the flavour-specific CP-violating asymmetry a^s_{SL} in B^0 decays** , **Phys. Lett. B 728** (2014) 607.

[456] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **Measurement of the CP asymmetry in $B^0_s - \overline{B}^0_s$ mixing** , **Phys. Rev.Lett.117** (2016) 061803.

[457] R. Aaij et al., (LHCb collaboration), **First measurement of the CP-violating phase in $B^0_s \to J/\psi(\to e^+e^-)\phi$ decays** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 1026.

[458] G. Aad et al., (Atlas collaboration), **Measurement of the CP-violating phase ϕ_s in $B^0_s \to J/\psi\phi$ decays in ATLAS at 13 TeV** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 342.

[459] G. Aad et al., (CMS collaboration), **Measurement of the CP-violating phase ϕ_s in $B^0_s \to J/\psi\phi$ decays in ATLAS at 13 TeV** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 342.

[460] O. Ozcelik (on behalf of LHCb, Atlas and CMS Collaborations), **CP violation and mixing in B and charm decays** , LHCb-TALK-2022-079, talk given at the LHCP 2022, 16-21 May, 2022 (on line).

[461] M.R. Lamas (on behalf of LHCb, Atlas and CMS Collaborations), **CP violation in the B^0_s system** , talk given at the FPCP 2022, 23-29 May, 2022 (on line).

[462] A. Lenz and G. Tetlalmatzi-Xolocotzi, **Model-independent bounds on new physics effects in non-leptonic tree-level decays of B-mesons** , **JHEP 07** (2020) 177.

[463] W. Altmannshofer and P. Stangl, **New physics in rare B decays after Moriond 2021** , **Eur. Phys. J. C 81** (2021) 952.

[464] S. Aoki et al., (Flavour Lattice Averaging Group Collaboration), **FLAG Review 2019: Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)** . **Eur. Phys. J. C 80** (2020) 113.

[465] A. J. Buras, **Relations between $\Delta M_{s,d}$ and $B_{s,d} \to \mu^+\mu^-$ in models with minimal flavour violation** , **Phys. Lett. B 566** (2003) 115 – 119.

[466] M. Aaboud et al., (ATLAS Collaboration), **Study of the rare decays of B^0_s and B^0 mesons into muon pairs using data collected during 2015 and 2016 with the ATLAS detector** , **JHEP 04** (2019) 098.

[467] A.M. Sirunyan et al., (CMS Collaboration), **Measurement of properties of $B^0_s \to \mu^+\mu^-$ decays and search for $B^0 \to \mu^+\mu^-$ with the CMS experiment** , **JHEP 04** (2020) 188.

[468] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of the $B^0_s \to \mu^+\mu^-$ branching fraction and effective lifetime and search for the $B^0 \to \mu^+\mu^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.118** (2017) 191801.

[469] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of the $B^0_s \to \mu^+\mu^-$ decay properties and search for the $B^0 \to \mu^+\mu^-$ and $B^0_s \to \mu^+\mu^-\gamma$ decays** , **Phys. Rev. D 105** (2022) 012010.

[470] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Analysis of Neutral B-Meson Decays into Two Muons** , **Phys. Rev.Lett.128** (2022) 041801.

[471] X.G. Wu and Tao Huang, **Heavy and light meson wavefunctions** , **Chin. Sci. Bull. 59**(2014) 3801;
Zuo-Hong Li, **Form factors for Bmeson weak decays in QCD light cone sum rules with a chiral current correlator** , **Chin. Sci. Bull. 59**(2014) 3771;
Y.M. Wang and Y.L. Shen, **QCD corrections to $B \to \pi$ form factors from light-cone sum rules** , arXiv: 1506.00887 [hep-ph].

[472] A.V. Manohar, M.B. Wise, **Heavy Quark Physics** ,Cambridge University Press, 2007;
S. Fajfer, J.F. Kamenik, and I. Nisandzic, **On the $B \to D^* \tau \nu_\tau$, Sensitivity to New Physics** , **Phys. Rev. D 85** (2012) 094025;
J.A. Bailey et al., Fermilab Lattice and MILC Collaborations, **Update of $|V_{cb}|$ from the $\bar{B} \to D^* l \nu$ form factor at zero recoil with three-flavor lattice QCD** , **Phys. Rev. D 89** (2014)114504.

[473] J.P. Lees et al. (BaBar Collaboration), **Measurement of branching fractions and rate asymmetries in the rare decays $B \to K^{(*)} l^+ l^-$** , **Phys. Rev. D 86**(2012) 032012.

[474] A. Abdesselam et al. (Belle Collaboration), **Test of lepton flavor universality and search for lepton flavor violation in $B \to K l^+ l^-$ decays** , **JHEP 03**(2021) 105.

[475] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Search for lepton-universality violation in $B^+ \to K^+ l^+ l^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.122** (2019) 191801.

[476] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Branching fraction measurements of the rare $B_s^0 \to \phi \mu^+ \mu^-$ and $B_s^0 \to f_2'(1525) \mu^+ \mu^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.127** (2021) 151801.

[477] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Search for the decay $B^0 \to \phi \mu^+ \mu^-$** , **JHEP 05** (2022) 067.

[478] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Tests of lepton universality using $B^0 \to K_S^0 l^+ l^-$ and $B^+ \to K^{*+} l^+ l^-$ decays** , **Phys. Rev.Lett.128** (2022) 191802.

[479] A. Abdesselam et al. (Belle Collaboration), **Test of lepton-flavor universality in $B \to K^* l^+ l^-$ decays at Belle** , **Phys. Rev.Lett.126** (2021) 161801.

[480] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Test of lepton universality with $B^0 \to K^{*0} l^+ l^-$ decays** , **JHEP 08** (2017) 055.

[481] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Test of lepton universality in beauty-quark decays** , Nature Physics **18** (2022) 277.

[482] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of the ratio of branching fractions $\mathcal{B}(\bar{B}^0 \to D^{*+} \tau^- \bar{\nu}_\tau)/\mathcal{B}(\bar{B}^0 \to D^{*+} \mu^- \bar{\nu}_\mu)$ and $B^0 \to D^{*-} \mu^+ \nu_\mu$** , **Phys. Rev.Lett.115** (2015) 111803.

[483] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of the ratio of the $B^0 \to D^{*-} \tau^+ \nu_\tau$ and $B^0 \to D^{*-} \mu^+ \nu_\mu$ branching fractions using three-prong τ-lepton decays** , **Phys. Rev.Lett.120** (2018) 171802.

[484] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of the ratio of branching fractions $\mathcal{B}(B_c^+ \to J/\psi \tau^+ \nu_\tau)/\mathcal{B}(B_c^+ \to J/\psi \mu^+ \nu_\mu)$** , **Phys. Rev.Lett.120** (2018) 121801.

[485] J.P. Lees et al., BaBar Collaboration, **Evidence for an excess of $B \to D^{(*)} \tau \bar{\nu}_\tau$ decays** , **Phys. Rev.Lett.109** (2012) 101802.

[486] Z. Ligeti and C. Murgui, **Flavors of future surprises?** , talk given at "Flavor at the Crossroads", Apr. 21, 2021, KITP, UCSB, US.

[487] Y. Amhis and G. Inguglia, **What additional LFU ratios will add** , talk given at "Beyond the Flavor anomalies III", Apr. 27, 2022.

[488] M. Mulder, **Considerations on b-hadron production and tree-level decays for theory and experiment** , talk given at "Flavor at the Crossroads", Apr. 24, 2022, Mainz.

[489] F.U. Bernlochner, M. F. Sevilla, D.J. Robinson and G. Wormse , **Semitauonic b-hadron decays: A lepton flavor universality laboratory** , **Rev. Mod. Phys.94** (2021) 015003.

[490] T.D. Cohen, H. Lamm and R.F. Lebed, **(2019), Precision Model-independent bounds from global analysis of $b \to c l \nu$ form factors** , **Phys. Rev. D 100** (2019) 094503.

[491] M. Huschle et al. (Belle Collaboration), **Measurement of the branching ratio of $\bar{B} \to D^{(*)}\tau^-\bar{\nu}_\tau$ relative to $\bar{B} \to D^{(*)}\mu^-\bar{\nu}_\mu$ decays with hadronic tagging at Belle** , **Phys. Rev. D 92** (2015) 072014.

[492] S. Hirose et al. (Belle Collaboration), **Measurement of the τ lepton polarization and $R(D^*)$ in the decay $\bar{B} \to D^*\tau^-\bar{\nu}_\tau$** , **Phys. Rev.Lett.118** (2018) 211801.

[493] G. Caria et al. (Belle Collaboration), **Measurement of $R(D)$ and $R(D^*)$ with a semileptonic tagging method** , **Phys. Rev.Lett.124** (2020) 161803.

[494] M. Aaboud et al. (ATLAS Collaboration), **Angular analysis of $B_d^0 \to K^*\mu^+\mu^-$ decays in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector** , **JHEP 10** (2018) 047.

[495] V. Khachatryan et al. (CMS Collaboration), **Angular analysis of the decay $B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$ from pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV** , **Phys. Lett. B 753** (2016) 424.

[496] A. M. Sirunyan et al. (CMS Collaboration), **Measurement of angular parameters from the decay $B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$ in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV** , **Phys. Lett. B 781** (2018) 517.

[497] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of CP-averaged observables in the $B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$ decay** , **Phys. Rev.Lett.125** (2020) 011802.

[498] W. Altmannshofer et al., **Symmetries and asymmetries of $B \to K^*\mu^+\mu^-$ decays in the Standard Model and beyond** , **JHEP 01** (2009) 019.

[499] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Angular analysis of the $B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$ decay using 3 fb^{-1} of integrated luminosity** , **JHEP 02** (2016) 104.

[500] S. Descotes-Genon, L. Hofer, J. Matias and J. Virto, **On the impact of power corrections in the prediction of $B \to K^*\mu^+\mu^-$ observables** , **JHEP 12** (2014) 125;
S. Descotes-Genon, L. Hofer, J. Matias and J. Virto, **Global analysis of $b \to sll$ anomalies** , **JHEP 06** (2016) 092;
B. Capdevila, A. Crivellin, S. Descotes-Genon, J. Matias and J. Virto, **Patterns of new physics in $b \to sl^+l^-$ transitions in the light of recent data** , **JHEP 01** (2018) 093;
A. Khodjamirian, T. Mannel, A. A. Pivovarov and Y. M. Wang, **Charm-loop effect in $B \to K^{(*)}l^+l^-$ and $B \to K^*\gamma$** , **JHEP 09** (2010) 089.

[501] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Angular analysis of the $B^+ \to K^{*+}\mu^+\mu^-$ decay** , **Phys. Rev.Lett.126** (2021) 161802.

[502] W. Altmannshofer and D. M. Straub, **New physics in $b \to s$ transitions after LHC run 1** , **Eur. Phys. J. C 75** (2015) 382.

[503] S. Fajfer, J.F. Kamenik, I. Nisandzic and J. Zupan, **Implications of lepton flavor universality violations in B Decays** , **Phys. Rev.Lett.109** (2012) 161801.

[504] Y.Y. Fan, W.F. Wang, S. Cheng, and Z.J. Xiao, **Semileptonic decays $B \to D^{(*)}l\nu$ in the pQCD factorization approach** , **Chin. Sci. Bull. 59** (2014) 125.

[505] R. Cheaib, on behafl of Belle、Belle-II and LHCb collaborations, **Overview of $R(D)$ and $R(D^*)$** , talk given at the FPCP 2022, May 23-27, 2022, Mississippi, USA.

[506] G. Caria, **Measurement of $R(D)$ and $R(D^*)$ with a semileptonic tag at Belle experiment** , Doctoral Thesis, University of Moburoan June, 2019.

[507] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Observation of the decay $\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+\tau^-\bar{\nu}_\tau$** , **Phys. Rev.Lett.128** (2022) 191803.

[508] W.F. Wang, Y.Y. Fan and Z.J. Xiao, **Semileptonic decays $B_c \to (\eta_c, J/\psi)l\nu$ in the perturbative QCD factorization** , **Chin. Phys. C 37** (2013) 093102; X.Q. Hu, S.P. Jin and Z.J. Xiao, **Semileptonic decays $B_c \to (\eta_c, J/\psi)l\bar{\nu}_l$ in the "PQCD+Lattice" factorization** , **Chin. Phys. C 40** (2020) 023104.

[509] F. U. Bernlochner, Z. Ligeti, D. J. Robinson, and W. L. Sutcliffe, $\Lambda_b \to \Lambda_c$ **semileptonic decays and tests of heavy quark symmetry** , **Phys. Rev.Lett.121** (2018) 202001.

[510] F. U. Bernlochner, Z. Ligeti, D. J. Robinson, and W. L. Sutcliffe, **Precise predictions for** $\Lambda_b \to \Lambda_c$ **semileptonic decays** , **Phys. Rev. D 99** (2019) 055008.

[511] A. Datta, S. Kamali, S. Meinel, and A. Rashed, **Phenomenology of** $\Lambda_b \to \Lambda_c \tau \bar{\nu}_\tau$ **using lattice QCD calculations** , **JHEP 08** (2017) 131.

[512] J. Abdallah et al. (DELPHI Collaboration), **Measurement of the** Λ_b^0 **decay form-factor** , **Phys. Lett. B 585** (2004) 63.

[513] L. Cao et al. (Belle Collaboration), **Measurements of partial branching fractions of inclusive** $B \to X_u l^+ \nu_l$ **decays with hadronic tagging** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 012008.

[514] I. Caprini, L. Lellouch and M. Neubert, **Dispersive bounds on the shape of** $\bar{B} \to D^{(*)} l \bar{\nu}$ **form factors** , **Nucl. Phys. B 530** (1998) 153.

[515] C. G. Boyd, B. Grinstein and R. F. Lebed, **Model independent determination of** $\bar{B} \to D l \bar{\nu}, D^* l \bar{\nu}$ **form factors** , **Nucl. Phys. B 461** (1996) 493;
C. G. Boyd, B. Grinstein and R. F. Lebed, **Precision corrections to dispersive bounds on form factors** , **Phys. Rev. D 56** (1997) 6895.

[516] A. Bazavov et al., (MILC Collaboration), **Semileptonic form factors for** $B \to D^* l \nu$ **at nonzero recoil from 2 + 1-flavor lattice QCD** , arXiv: 2105.14019 [hep-lat].

[517] F. Bernlochner, V_{ub} **and** V_{cb} **determinations** , review talk given at FPCP 2022, May 23-27, 2022, Mississippi, USA.

[518] A.X. El-Khadra and P. Urquijo，**Semileptonic b-hadron decays, determination of** V_{cb}, V_{ub} , RPP mini-review No. 76 in PDG 2022.

[519] R. van Tonder et al. (Belle Collaboration), **Measurement of** q^2 **moments of inclusive** $B \to X_c l^+ \nu_l$**l decays with hadronic tagging** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 112011.

[520] A. Alberti, P. Gambino and K. J. Healey, **Precision determination of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa element** V_{cb} , **Phys. Rev.Lett.114** (2014) 061802.

[521] M. Bordone, B. Capdevila and P. Gambino, **Three loop calculations and inclusive** V_{cb} , **Phys. Lett. B 822** (2021) 136679.

[522] M. Fael, K. Schönwald and M. Steinhauser, **Third order corrections to the semileptonic** $b \to c$ **and the muon decays** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 016003.

[523] F. Bernlochnera et al., **First extraction of inclusive** V_{cb} **from** q^2 **moments** , arXiv: 2205.10274 [hep-ph].

[524] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Measurement of** $|V_{cb}|$ **with** $B_s^0 \to D_s^{(*)-} \mu^+ \nu_\mu$ **decays** , **Phys. Rev. D 101** (2020) 072004.

[525] R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), **Precise measurement of the** f_s/f_d **ratio of fragmentation fractions and of** B_s^0 **decay branching fractions** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 032005.

[526] F. Abudinén et al., (Belle-II Collaboration), **Study of exclusive** $B \to \pi e^+ \nu_e$ **decays with hadronic full-event-interpretation tagging in** $189.3\,\mathrm{fb}^{-1}$ **of Belle II data** arXiv: 2206.08102[hep-ex].

[527] F.U. Bernlochner, M.T. Prim and D.J. Robinson, $B \to \rho l \bar{\nu}$ **and** $\omega l \bar{\nu}$ **in and beyond the Standard Model: Improved predictions and** $|V_{ub}|$, **Phys. Rev. D 104** (2021) 034032.

[528] P. del Amo Sanchez et al. (BABAR Collaboration), **Study of $B \to \pi l\nu$ and $B \to \rho l\nu$ decays and determination of $|V_{ub}|$** , **Phys. Rev. D 83** (2011) 032007。

[529] J. P. Lees et al. (BABAR Collaboration), **Branching fraction measurement of $B \to \omega l\nu$ decays** , **Phys. Rev. D 87**, (2013) 032004; 87 (2013) 099904(E).

[530] A. Sibidanov et al. (Belle Collaboration), **Study of exclusive $B \to X_u l\nu$ decays and extraction of $|V_{ub}|$ using full reconstruction tagging at the Belle experiment** , **Phys. Rev. D 88** (2013) 032005.

[531] A. Bharucha, D.M. Straubc and R. Zwicky, **$B \to V l^+ l^-$ in the Standard Model from light-cone sum rules** , **JHEP 08** (2016) 098.

[532] Jon A. Bailey et al., Fermilab Lattice and MILC Collaborations, **$|V_{ub}|$ from $B \to \pi l\nu$ decays and (2+1)-flavor lattice QCD** , **Phys. Rev. D 92** (2015) 012024.

[533] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), **First 0bservation of the decay $B_s^0 \to K^-\mu^+\nu_\mu$ and a measurement of $|V_{ub}|/|V_{cb}|$** , **Phys. Rev.Lett.126** (2021) 081804.

[534] A. Khodjamirian and A. V. Rusov, **$B_s \to Kl\nu_l$ and $B_s \to \pi(K)l^+l^-$ decays at large recoil and CKM matrix elements** , **JHEP 08** (2017) 112.

[535] A. Bazavov et al. (Fermilab Lattice and MILC Collaborations), **$B_s \to Kl\nu$ decay from lattice QCD** , **Phys. Rev. D 100** (2019) 034501.

[536] M. Ablikim et al. (BESIII Collaboration), **Measurements of absolute hadronic branching fractions of the Λ_c^+ baryon** , **Phys. Rev.Lett.116** (2016) 052001.

[537] W. Detmold, C. Lehner and S. Meinel, **$\Lambda_b \to pl^-\bar{\nu}_l$ and $\Lambda_b to \Lambda_c l^-\bar{\nu}_l$ form factors from lattice QCD with relativistic heavy quarks** , **Phys. Rev. D 92** (2015) 034503.

[538] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), **Determination of the quark coupling strength $|V_{ub}|$ using baryonic decays** , Nature Phys. **11** (2015) 743.

[539] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), **Measurement of the shape of the $\Lambda_b^0 \to \Lambda_c^+\mu^-\bar{\nu}_\mu$ differential decay rate** , **Phys. Rev. D 96** (2017) 112005.

[540] M. Gronau, O.F. Hernandez, D. London and J.L. Rosner, **Decays of B mesons to two pseudoscalars** , **Phys. Rev. D 50** (1994) 4529.

[541] M. Gronau, O.F. Hernandez, D. London, and J.L. Rosner, **Decays of B mesons to two pseudoscalars in SU(3) symmetry** , **Phys. Rev. D 52** (1995) 6356.

[542] M. Gronau, O.F. Hernandez, D. London, and J.L. Rosner, **Electroweak penguin diagrams and two body B decays** , **Phys. Rev. D 52** (1995) 6374.

[543] A. Ali, G. Kramer and C. D. Lü, **Experimental tests of factorization in charmless nonleptonic two-body B decays** , **Phys. Rev. D 58** (1998) 94009.

[544] A. Ali, G. Kramer and C. D. Lü, **CP-violating asymmetries in charmless nonleptonic decays $B \to PP, PV, VV$ in the factorization approach** , **59** (1999) 014005.

[545] Y. H. Chen, H. Y. Cheng, B. Tseng and K. C. Yang, **Charmless hadronic two-body decays of B_u and B_d mesons** , **Phys. Rev. D 60** (1999) 094014.

[546] M. Beneke and M. Neubert, **QCD factorization for $B \to PP$ and $B \to PV$ decays** , **Nucl. Phys. B 675** (2003) 333.

[547] M. Beneke, J. Rohrer and D.S. Yang, **Branching fractions, polarisation and asymmetries of $B \to VV$ decays** , **Nucl. Phys. B 774** (2007) 64.

[548] Y. Li, C.D. Lü, Z.J. Xiao and X.Q. Yu, **Branching ratio and CP asymmetry of $B_s \to \pi^+\pi^-$ decays in the perturbative QCD approach** , **Phys. Rev. D 70** (2004) 034009.

[549] H.n. Li, S. Mishima and A.I. Sanda, **Resolution to the $B \to \pi K$ puzzle** , **Phys. Rev. D 72** (2005) 114005.

[550] H. Y. Cheng, C. W. Chiang and A. L. Kuo, **Updating $B \to PP, VP$ decays in the framework of flavor symmetry** , **Phys. Rev. D 91** (2015) 014011;
H. Y. Cheng and C. K. Chua, **Revisiting charmless hadronic $B_{u,d}$ decays in QCD factorization** , **Phys. Rev. D 80** (2009) 014008;
H. Y. Cheng and C. K. Chua, **Charmless $B \to K_h\eta^{(\prime)}$ decays with $K_h = K, K^*, K_0^*(1430), K_2^*(1430)$** , **Phys. Rev. D 82** (2010) 034014.

[551] J. Chai, S. Cheng, Y. H. Ju, D. C. Yan, C. D. Lü and Z. J. Xiao, **Charmless two-body B meson decays in perturbative QCD factorization approach** , **Chin. Phys. C 46** (2022) in press; arXiv: 2207.04190 [hep-ph].

[552] J. Hua, H. n. Li, C. D. Lü, W. Wang and Z. P. Xing, **Global analysis of hadronic two-body B decays in the perturbative QCD approach** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 016025

[553] X. Liu, H. n. Li and Z. J. Xiao, **Transverse-momentum-dependent wave functions with Glauber gluons in $B \to \pi\pi, \rho\rho$ decays** , **Phys. Rev. D 91** (2015) 114019

[554] X. Liu, H. n. Li and Z. J. Xiao, **Resolving the $B \to K\pi$ puzzle by Glauber-gluon effects** , **Phys. Rev. D 93** (2016) 014024.

[555] Y. Y. Fan, W. F. Wang, S. Cheng and Z. J. Xiao, **Anatomy of $B \to K\eta^{(\prime)}$ decays in different mixing schemes and effects of next-to-leading order contributions in the perturbative QCD approach** , **Phys. Rev. D 87** (2013) 094003.

[556] Z. J. Xiao, W. F. Wang and Y. Y. Fan, **Revisiting the pure annihilation decays $B_s \to \pi^+\pi^-$ and $B^0 \to K^+K^-$: The data and the perturbative QCD predictions** , **Phys. Rev. D 85** (2012) 094003.

[557] X. Liu, H. n. Li and Z. J. Xiao, **$B \to \pi\eta(\prime), \eta(\prime)\eta(\prime)$ and NLO contributions in the PQCD approach** , **Chin. Phys. C 33** (2009) 722..

[558] B. H. Behrens et al. (CLEO Collaboration), **Two-body B meson decays to η and η': Observation of $B \to \eta' K$** , **Phys. Rev.Lett.80** (1998) 3710.

[559] H. J. Lipken, **Interference effects in $K\eta$ and $K\eta'$ decay modes of heavy mesons. Clues to understanding weak transitions and CP violation** , **Phys. Lett. B 254** (1991) 247.

[560] H. Y. Cheng, H. n. Li and K. F. Liu, **Pseudoscalar glueball mass from $\eta - \eta' - G$ mixing** , **Phys. Rev. D 78** (2009) 014024.

[561] Y. D. Tsai, H. n. Li, and Q. Zhao, **η_c mixing effects on charmonium and B meson decays** , **Phys. Rev. D 85** (2012) 034002.

[562] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), **Measurement of CP violation in the decay $B^+ \to K^+\pi^0$** , **Phys. Rev.Lett.126** (2021) 091802.

[563] N. B. Beaudry, A. Datta, D. London, A. Rashedb and J. S. Rouxa, **The $B \to K\pi$ puzzle revisited** , **JHEP 01** (2018) 074.

[564] M. Gronau, **A precise sum rule among four $B \to K\pi$ CP asymmetries** , **Phys. Lett. B 627** (2005) 82.

[565] D. Manuzzi, **CP violation in B mesons** , talk given at FPCP 2022, May 23-27, 2022, Mississippi, USA.

[566] F. Abudinén et al., **B-flavor tagging at Belle-II** , **Eur. Phys. J. C 82** (2022) 283.

[567] Y. Li, D. C. Yan, J. Hua, R. Zhou and H. n. Li, **Global determination of two-meson distribution amplitudes from three-body B decays in the perturbative QCD approach** , **Phys. Rev. D 104** (2021) 096014.

[568] Z.J. Xiao and X. Liu, **The two-body hadronic decays of B_c meson in the perturbative QCD approach: a short review** , **Chin. Sci. Bull. 59** (2014) 3748.

[569] C. D. Lu, Y. M. Wang, H. Zou, A. Ali and G. Kramer, **Anatomy of the pQCD approach to the baryonic decays $\Lambda_b \to p\pi, pK$** , **Phys. Rev. D 80** (2009) 034011.

[570] J. J. Han，Y. Li, H. n. Li, Y. L. Shen, Z. J. Xiao and F. S. Yu, **$\Lambda_b \to p$ transition form factors in perturbative QCD** , **Eur. Phys. J. C 82** (2022) 686.

[571] F. S. Yu, **重味重子研究的机遇** ，在第四届重味物理与量子色动力学研讨会上的报告(线上)，2022年07月28日，湖南大学。

[572] LHCb collaboration, P. Koppenburg, **List of hadrons observed at the LHC** , LHCb-FIGURE-2021-001, 2021, and 2022 updates.

[573] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration), **Observation of a new χ_b state in radiative transitions to $\Upsilon(1S)$ and $\Upsilon(2S)$ at ATLAS** , **Phys. Rev.Lett.108** (2012) 015001.

[574] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of excited Λ_b^0 baryons** , **Phys. Rev.Lett.109** (2012) 172003.

[575] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Study of D_J meson decays to $D^+\pi^-$, $D^0\pi^+$ and $D^{*+}\pi^-$ final states in pp collisions** , **JHEP 09** (2013) 145.

[576] CMS Collaboration, **Observation of a peaking structure in the $J/\psi\phi$ mass spectrum from $B^\pm \to J/\psi\phi K^\pm$ decays** , **Phys. Lett. B 734** (2014) 261.

[577] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration), **Observation of an excited $B_c^\pm$ meson state with the ATLAS detector** , **Phys. Rev.Lett.113** (2014) 212004.

[578] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Observation of Overlapping Spin-1 and Spin-3 $\bar{D}^0K^-$ resonances at mass 2.86 GeV/c^2** , **Phys. Rev.Lett.113** (2014) 162001.

[579] R. Aaij et al., LHCb Collaboration, **Precise measurements of the properties of the $B_1(5721)^{0,+}$ and $B_2^*(5747)^{0,+}$ states and observation of $B^{+,0}\pi^{-,+}$ mass structures** , **JHEP 04** (2015) 024.

[580] 赵强，**探索物质的基本结构：我国高能物理发展历程的启示**，在南华大学“岳麓论坛”的学术报告，2021年11月25日。

[581] A.Crivellin, **Anomalies in particle physics** , talk given at SUSY 2022, 27 June-2 July 2022, Ioannina, Greece.

[582] A. Crivellin, M. Hoferichter and C.A. Manzari, **Fermi constant from muon decay versus electroweak fits and Cabibbo-Kobayashi-Maskawa unitarity** , **Phys. Rev.Lett.127** (2021) 071801.

bibitemcpc45-045106 H.L. Li, H.Y. Song, S.F. Su, W. Su and J.M. Yang, **MSSM at future Higgs factories** , **Chin. Phys. C 45** (2021) 045106.

bibitemjhep2101-045 T. Han, S.L. Li, S.F. Su, W. Su and Y.C. Wu, **Comparative studies of 2HDMs under the Higgs boson precision measurements** , **JHEP 01** (2021) 045.

[583] 苏淑芳, **Precision Higgs physics** , talk given at SUSY 2022, 27 June-2 July 2022, Ioannina, Greece.

[584] 武雷, **Di-Higgs and new physics at the LHC** , talk given at Di-Higgs workshop at T.D. Li Institute, 27 Nov. 2020, 上海交通大学。

[585] W. Altmannshofer, **Review of lepton flavor universality violation** , talk given at LF(U)V workshop 2022, July 4-6, 2022, University of Zurich, Switzerland.

[586] R. Fleischer, R. Jaarsma, G. T. Xolocotzi and A. Crivellin, **Mapping out the space for new physics with leptonic and semileptonic $B_{(c)}$ decays** , **Eur. Phys. J. C 81** (2022) 658.

[587] F.P. An et al., Daya Bay Collaboration, **Spectral measurement of electron antineutrino oscillation amplitude and frequency at Daya Bay** , **Phys. Rev.Lett.112** (2014) 061801.

[588] F.P. An et al., Daya Bay Collaboration, **Independent measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} via neutron capture on hydrogen at Daya Bay** , **Phys. Rev. D 90** (2014) 071101.

[589] 张肇西, **超级Z-工厂上的物理** , 中国科学:物理学,力学,天文学, **42**(2012)716 – 730.

[590] Toru Goto, **Formulae for Supersymmetry: MSSM and more** , Version at March 1, 2022, 1168 pages; http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ goto/

[591] J. C. Romao and J. P. Silva, **A resource for signs and Feynman diagrams of the standard model** , **Int. J. Mod. Phys. A 27** (2012) 1230025.