电弱相互作用理论（基础部分）

李重生

（北京大学物理系）

1. 引言
2. 规范对称性
   2.1 粒子物理中的对称性
   2.2 阿贝尔定域规范对称性
   2.3 非阿贝尔定域规范对称性
   2.4 对称性自发破缺
   2.5 Higgs 机制
3. 电弱统一的标准模型
   3.1 弱相互作用唯象理论简介
   3.2 电弱统一的 Weinberg-Salam 模型
4. 电弱相互作用的重整化
   4.1 W-S 模型的独立参数
   4.2 重整化程序
   4.3 电弱理论的 on-shell 重整化方案
   4.4 费米常数、Weinberg 角和 W 玻色子质量之间的关系
   4.5 正规化，阈修正和重整化群方程（RGE）

前　言

本讲义是作者将在北大为研究生讲授“量子规范场论”的备课笔记的有关章节加以修改、补充而成。在此过程中，得到了作者的研究生杨亚声、刘洪轩和金立刚的大力协助，特别是他们打印了讲义的全文，并帮助作者对讲义做了校订，在此一并表示感谢。由于时间匆忙，错误和不妥之处实所难免，望读者不吝指正，以便今后正式成文时加以修正。

李重生

2000 年 7 月 11 日

第 1 章 引 言

- 按照目前流行的观点，基本粒子的相互作用规律可统一地用标准模型理论来描述，这个理论已经成功地经受了一系列实验的检验，其精度最高已达到0.1% 量级。
- 所谓基本粒子，即不考虑内部结构的类点的粒子。它们可以分为两类，即构成物质世界基本组元的物质粒子，另一类是传递相互作用的中间媒介粒子。前者是自旋为$1/2$的费米子，包括夸克和轻子。后者为自旋为1的矢量介子。除引力之外，人们已经清楚传递电磁相互作用的矢量介子就是光子，传递强相互作用的矢量介子是胶子，而传递弱相互作用的矢量介子是$W^{\pm}$、Z 玻色子。
- 标准模型实际上就是建立在$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$的规范对称性基础之上的量子场论。这里对称群$SU(3)_C$是强相互作用具有的一种颜色规范对称性，而$SU(2)_L \times U(1)_Y$是电弱相互作用所具有的一种规范对称性。电磁相互作用的规范对称性是$U(1)_{em}$，它是$SU(2)_L \times U(1)_Y$的一个子群。
- 上述三种相互作用，其作用力程很不相同。众所周知，电磁相互作用的力程为无穷大，其对应的规范介子-光子的质量为零。而弱相互作用是短程力，其力程大约为$10^{-16}\,\mathrm{cm}$，相应的规范介子很重，其质量大约为$100\mathrm{GeV}$量级。最后，有些特殊的是，尽管传递强相互作用的规范介子-胶子的质量为零，但强相互作用的力程并非无穷大，而是有限的，这是由于夸克被禁闭在强子内部的缘故。事实上，强作用的力程大约为$10^{-13}\,\mathrm{cm}$，它对应于最轻的强子的典型尺度。
- 三种相互作用的强度也有很大差异。电磁相互作用的强度可用耦合常数$\alpha = e^2/4\pi$来描写，在低能下它等于精细结构常数：$\alpha(Q = m_e) = 1/137$。弱作用的耦合强度在低能（$Q << M_W$）近似下，可用费米耦合常数$G_F = 1.167 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$描写。强作用可用跑动耦合常数$\alpha_s = g_s^2/4\pi$描写，在低能端，$\alpha_s(Q \to m_{hadron}) \sim 1$，而在高能极限下，$\alpha_s(Q \to \infty) \to 0$。这表明在高能区，夸克之间的相互作用是极其微弱的，换言之，在短距离处，夸克可看作是近似自由的，通常称之为渐近自由。

- 虽然标准模型理论在解释现有的高能物理实验上取得了很大成功，但并未完全得到实验的检验。事实上，弱规范玻色子的质量不为零（$M_W^{\pm}, M_Z \neq 0$）表明$SU(2)_L \times U(1)_Y$不是真空的对称性，反之，光子质量为零表明$U(1)_{em}$是真空的对称性。因此标准模型的对称性必须按照下列方式自发破缺：

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \to SU(3)_C \times U(1)_{em}$$

在标准模型中可通过所谓的Higgs机制实现上述对称性自发破缺，并使得$W^{\pm}$和Z玻色子以及费米子获得质量，同时预言存在一个中性的标量粒子，即Higgs玻色子。但是这个粒子至今尚未为实验所发现。

本课程旨在讲授标准模型中电弱相互作用部分的基础理论，原则上将不涉及超出标准模型以外的新物理内容。而强相互作用（QCD）部分将由他人在此次暑期学校上另做专门讲授。

第 2 章 规 范 对 称 性

§2.1 粒子物理中的对称性

在粒子物理理论研究中对称性起着重要作用。所谓对称性，简言之，就是一个物理系统在某种变换下具有不变性。存在各种不同类型的对称变换，可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质来对对称性进行分类。在粒子物理学中最常见的对称变换大致可分为如下两类：

1. 离散变换

此时变换参数只取分立值。在粒子物理中最具代表性的分立变换是

空间反演变换：P，电荷共轭变换：C

时间反演变换：T

我们知道对于电磁相互作用和强相互作用，在 P、C、T 分别变换下，它们都保持不变。然而弱相互作用破坏了 P、C 和 CP 对称性。

2. 连续对称性

如果变换参数取连续值，则对应连续变换。一个典型的连续变换是转动变换：$R(\theta)$，这里转动角θ可连续取值。连续变换的类型很多，在粒子物理上最常见的有两类，它们是

- 时空对称性：最具代表性的时空对称性是 Lorentz 变换和时空平移变换下，物理规律保持不变。
- 内部对称性：一种作用在场的内部空间，且使场系统保持不变的对称性。这种对称性是属于场和粒子的独立于时空性质的某种变换，其对称性给出标志粒子态的某些量子数，如电荷、轻子数、重子数和同位旋等。典型的例子是$U(1)_Q$、$U(1)_L$，$U(1)_B$以及$SU(2)_{isospin}$变换等。

3. 内部对称性的分类

有两种不同类型的内部对称性，它们是

- 整体内部对称性：连续变化的参数不依赖于时空坐标。例如$SU(2)$同位旋对称性、$SU(3)$味对称性、$U(1)_B$重子数对称性、$U(1)_L$轻子数对称性。
- 定域（规范）对称性：连续变化的参数与时空坐标有关。例

如$U(1)_{em}$对称性、$SU(2)_L$弱同位旋对称性、$U(1)_Y$弱超荷对称性、$SU(3)_C$颜色对称性等等。

将 Noether 定理和规范原理分别应用于以上两种不同的内部对称性，可得到以下重要的物理结论：

对于整体内部对称性，根据 Noether 定理，将存在相应的一个或多个守恒量。对于定域规范对称性，则必将在体系中引入规范场，即将一个自由的体系变为一个有相互作用的动力学体系，换言之，定域规范对称性决定了相互作用的形式。事实上，在量子电动力学中电磁场与带电物质场的相互作用形式就是由$U(1)$的定域规范对称性所确定的，即所谓的最小耦合原理。这个原理可否推广到其它的相互作用？为了回答这个问题，Salam 和 Ward 最早构造出基于定域规范对称性原理的相互作用量子场论。他们在一篇论文中提出，应该存在通过对所有粒子的自由场拉氏量的动能项做定域规范变换而生成强、弱、以及电磁相互作用项的可能性。

§2.2 阿贝尔（Abelian）定域规范对称性

考虑自由电子$\psi(x)$的拉氏量：

$$L_0=\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi(x) \tag{2.1}$$

显然，(2.1)式具有整体$U(1)$对称性，即在变换：

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=e^{-i\alpha}\psi(x)\\&\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=e^{i\alpha}\bar{\psi}(x)\end{aligned} \tag{2.2}$$

下，它保持不变。

现考虑定域(规范)对称性，即：

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=e^{-i\alpha(x)}\psi(x)\\&\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.1) 式中导数项的变换为：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\partial_{\mu}\psi(x)\to\bar{\psi}'(x)\partial_{\mu}\psi'(x)&=\bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_{\mu}\left(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)\right)\\&=\bar{\psi}(x)\partial_{\mu}\psi(x)-i\bar{\psi}(x)\partial_{\mu}\alpha(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{2.4}$$

上式中，第二项破坏了L_0在变换(2.3)下的不变性。为此，我们必须用一个适当推广量代替$\partial_{\mu}\psi(x)$，使之与$\psi(x)$的变换方式相同，即以协变微商(covariant derivative)D_{μ}代替∂_{μ}，使得：

$$D_\mu\psi(x)\to\left[D_\mu\psi(x)\right]'=e^{-ia(x)}D_\mu\psi(x) \tag{2.5}$$

于是，组合$\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$是规范不变的。这种协变微商可通过引入一个新的矢量场$A_\mu(x)$—规范场，而将其构造为：

$$D_\mu\psi\to\left(\partial_\mu+ieA_\mu\right)\psi \tag{2.6}$$

其中e是一个自由参数，我们最终可确认它实际上就是电荷，因此，如规范场$A_\mu(x)$的变换性质为：

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{2.7}$$

则(2.5)式将成立。现在我们有：

$$L'_0=\bar{\psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu+ieA_\mu\right)\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{2.8}$$

它在定域规范变换下显然是不变的，然而它包含有作为外场的$A_\mu(x)$。为了使$A_\mu(x)$成为一个真实的动力学变量，我们必须在拉氏量中加进涉及$A_\mu(x)$的导数项。这种类型的唯一规范不变的罗仑兹标量是与$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$成正比的，其中

$$F_{\mu\nu}(x)\equiv\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x) \tag{2.9}$$

称为场强张量。于是我们得到量纲为 4 的规范不变的A_μ的导数项为

$$L_A=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

由(2.7)式，不难验证$F_{\mu\nu}$本身就是规范不变的：

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\to F'_{\mu\nu}&=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu=\partial_\mu A_\nu+\frac{1}{e}\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x)\\&\quad-\partial_\nu A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\nu\partial_\mu\alpha(x)\\&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

通过直接计算不难验证协变导数D_μ与$F_{\mu\nu}$有下列关系：

$$D_\mu D_\nu-D_\nu D_\mu=ieF_{\mu\nu}$$

组合(2.8)式和(2.10)式，我们便可写下定域规范不变的动力学拉氏量为

$$L=\bar{\psi}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu+ieA_\mu\right)\psi-m\psi\bar{\psi}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.11}$$

不难看出，上述定域规范不变性的要求在引入规范场的同时，也引入了相互作用项$ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$。它相当于电磁相互作用，其中$A_\mu$就是电磁场，

ψ 即带电费米子场（如电子场）。(2.11)式不含规范场质量项 $M^2 A_\mu A^\mu$，因这种项破坏规范不变性。(2.11)式还有如下特征：

- 光子和任何物质场的耦合由对称群下的变换性质所决定，此即所谓的普适性（universality）。其它的高量纲的规范不变的耦合，如 $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$ 为可重整性要求所排出。

- 拉氏量(2.11)不含规范场的自耦合，由于光子并不携带电荷。

最后归纳起来，在 $U(1)$ 的定域规范变换下，费米子场和规范场的变换方式为

$$\psi(x) \to e^{-i\alpha(x)}\psi(x)$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

§2.3 非阿贝尔定域规范对称性 —杨米尔斯场（Yang-Mills fields）

早在 1932 年 Heisenbarg 曾经指出，质子和中子在核力作用下可看作是简并的，因为它们的质量相近而且电磁相互作用可以忽略，故它们的波函数的任意组合是等价的，即

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \to \psi' = U\psi ,$$

其中 U 是幺正变换（$U^+U = UU^+ = 1$）以保持几率的归一性。并且，如果 $\det|U| = 1$，则 U 代表了 $SU(2)$ 李群：

$$U = \exp\left(-i\frac{\tau^a}{2}\alpha^a\right) \approx 1 - i\frac{\tau^a}{2}\alpha^a$$

这里 τ^a， $a = 1, 2, 3$ 是泡利矩阵。

1954 年 Yang 和 Mills 将上述思想做了推广，在量子场论中引进了定域规范的同位旋不变性的概念。他们认为，中子和质子的差别因此全然成为一个任意的手续。然而，按照传统观点，这种任意性要受到如下制约：一旦在一个时空点选定了什么是中子，什么是质子，那么我们在其它时空点就不再有任何选择的自由了。因此 Yang-Mills 理论与传统理论中所蕴含的定域场概念是不一致的。按照他们的观点，无论在何时何地我们都要保持选择何谓质子何谓中子的自由。要实现这点，我们可以要求规范参数随时空点而变化，即 $\alpha^a \to \alpha^a(x)$，同时假定费米子场是同位旋二重态：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

在$SU(2)$变换下，有

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{\frac{-i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}{2}\right\}\psi(x) \tag{2.13}$$

式中 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$是 pauli 矩阵，满足

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \qquad i, j, k = 1,2,3 \tag{2.14}$$

而$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$是$SU(2)$群变换参数，于是拉氏量

$$L_0 = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) \tag{2.15}$$

在整体$SU(2)$变换下保持不变，这里$\{\theta_i\}$是与时空坐标无关。然而在 local 对称变换下

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(\theta)\psi(x) \tag{2.16}$$

$$U(\theta) = \exp\left\{\frac{-i\vec{\tau}\cdot\theta(x)}{2}\right\} \tag{2.17}$$

L_0不再保持不变，由于导数项变换为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \\ &+ \bar{\psi}(x)U^{-1}(\theta)\left[\partial_\mu U(\theta)\right]\psi(x)\end{aligned} \tag{2.18}$$

仿照 Abelian 情形，引入矢量规范场A_μ^i，$i = 1,2,3$（对应于每个群的生成元），构造规范协变导数（通过最小耦合形式）：

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}\right)\psi \tag{2.19}$$

式中g是类似于e的耦合常数。我们要求$D_\mu\psi$与ψ有相同变换形式，即

$$D_\mu\psi \to (D_\mu\psi)' = U(\theta)D_\mu\psi \tag{2.20}$$

这意味着

$$\begin{aligned}D'_\mu\psi' &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}'_\mu}{2}\right)\left(U(\theta)\psi\right) \\ &= U(\theta)\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}\right)\psi\end{aligned} \tag{2.21}$$

或者

$$\left[\partial_\mu U(\theta)-ig\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}'_\mu}{2}U(\theta)\right]\psi=-igU(\theta)\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}\psi$$

故

$$\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}'_\mu}{2}=U(\theta)\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}U^{-1}(\theta)-\frac{i}{g}\left[\partial_\mu U(\theta)\right]U^{-1}(\theta) \tag{2.22}$$

这就定义了规范场的变换规则。对于无穷小变换：$\vec{\theta}(x)<<1$，

$$U(\theta)\cong 1-i\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}(x)}{2} \tag{2.23}$$

(2.22)式成为

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}'_\mu}{2}&=\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}-i\theta^j A^k_\mu\left[\frac{\tau_j}{2},\frac{\tau_k}{2}\right]-\frac{1}{g}\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\partial_\mu\vec{\theta}\right)\\&=\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\tau^i\theta^j A^k_\mu-\frac{1}{g}\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\partial_\mu\vec{\theta}\right)\end{aligned}$$

或者

$$A^i_\mu{}'=A^i_\mu+\varepsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i \tag{2.24}$$

注意，由(2.21)式，我们可发现协变导数满足条件：

$$D'_\mu=U(\theta)D_\mu U^{-1}(\theta) \tag{2.25}$$

为得到规范场的反对称二秩张量，考虑组合：

$$\left(D_\mu D_\nu-D_\nu D_\mu\right)\psi\equiv ig\left(\frac{\tau^i}{2}F^i_{\mu\nu}\right)\psi \tag{2.26}$$

式中

$$\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}}{2}=\partial_\mu\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\nu}{2}-\partial_\nu\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2}-ig\left[\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2},\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\nu}{2}\right] \tag{2.27}$$

或者

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu+g\varepsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{2.28}$$

由(2.25)式，我们可看到

$$\begin{aligned}\left[\left(D_\mu D_\nu-D_\nu D_\mu\right)\psi\right]'&=\left(D'_\mu D'_\nu-D'_\nu D'_\mu\right)\psi'=\left[U(\theta)D_\mu U^{-1}(\theta)\right.\\&\times U(\theta)D_\nu U^{-1}(\theta)-U(\theta)D_\nu U^{-1}(\theta)U(\theta)D_\mu U^{-1}(\theta)\left.\right]U(\theta)\psi\\&=U(\theta)\left(D_\mu D_\nu-D_\nu D_\mu\right)\psi\end{aligned} \tag{2.29}$$

在(2.29)式两边代入 $F^i_{\mu\nu}$ 的定义式(2.26)，得到：

$$\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}'_{\mu\nu}U(\theta)\psi = U(\theta)\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\psi$$

或者

$$\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}'_{\mu\nu} = U(\theta)\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)U^{-1}(\theta) \tag{2.30}$$

在无穷小变换 $\theta_i << 1$ 下，给出

$$F^{i'}_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu} + \varepsilon^{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu} \tag{2.31}$$

这与 Abelian 情形不同， $F^i_{\mu\nu}$ 并非不变，而是象 $SU(2)$ 的那样变换。然而乘积：

$$Tr\left\{\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}^{\mu\nu}\right)\right\} \propto F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

却是规范不变的：

$$\begin{aligned} Tr\left\{\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}'_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}^{\mu\nu'}\right)\right\} &= Tr\left\{U(\theta)\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)U^{-1}U\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)U^{-1}(\theta)\right\} \\ &= Tr\left\{\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\right)\right\} = Tr\left(\tau^i\tau^j\right)F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ij}F^i_{\mu\nu}F^{j\mu\nu} = \frac{1}{2}F^i_{\mu\nu}F^{j\mu\nu} \end{aligned}$$

我们可将以上讨论归纳如下：

描述 $SU(2)$ 二重态场与规范场 A^i_μ 的拉氏量为：

$$L = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.32}$$

其中

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{2.33}$$

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu}{2}\right)\psi \tag{2.34}$$

在 $SU(2)$ 的定域规范变换下：

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{-i\frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\theta}(x)}{2}\right\}\psi(x) = U(\theta)\psi(x) \tag{2.35}$$

$$\frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu}{2} = \frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}'_\mu}{2} = U(\theta)\left(\frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu}{2}\right)U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U(\theta)\right]U^{-1}(\theta) \tag{2.36}$$

在无穷小变换下：

$$\psi \to \psi' = \psi - i\frac{\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\theta}}{2}\psi \tag{2.37}$$

$$A_\mu^i \to A_\mu^{i'} = A_\mu^i + \varepsilon^{ijk}\theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^i \tag{2.38}$$

以上结果可直接推广到普遍情形，如令群G是某一单纯李群，其生成元满足代数

$$\left[F^a, F^b\right] = iC^{abc}F^c \tag{2.39}$$

其中C^{abc}是全反对称的结构常数。ψ假定是属于表示矩阵为T^a的某一表示，则有

$$\left[T^a, T^b\right] = iC^{abc}T^c \tag{2.40}$$

协变导数因此是

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - igT^a A_\mu^a\right)\psi \tag{2.41}$$

规范场的二秩张量为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ \left(\vec{T}\cdot\vec{F}\right)_{\mu\nu} &= \partial_\mu\left(\vec{T}\cdot\vec{A}_\nu\right) - \partial_\nu\left(\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu\right) - ig\left[\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu, \vec{T}\cdot\vec{A}_\nu\right] \end{aligned} \tag{2.42}$$

拉氏量为

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi \tag{2.43}$$

在群G的如下变换保持不变

$$\begin{cases} \psi(x) \to \psi'(x) = U\left(\vec{T}\cdot\vec{\theta}(x)\right)\psi(x) \equiv U(\theta_x)\psi(x) \\ \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu(x) \to T\cdot\vec{A}'_\mu(x) = U(\theta_z)\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu U^{-1}(\theta_x) - \dfrac{i}{g}\left[\partial_\mu U(\theta_x)\right]U^{-1}(\theta_x) \end{cases} \tag{2.44}$$

在无穷小变换下

$$\begin{cases} \psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) - iT^a\theta^a(x)\psi(x) \\ A_\mu^a(x) \to A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) + C^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \dfrac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \end{cases} \tag{2.45}$$

在(2.43)式中，纯 Yang-Mills 项$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ 中含有A_μ^a的三次和四次项：

$$-gC^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}C^{abc}C^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu}A^{e\nu}$$

它们对应于 non-Abelian 场的自耦合。而拉氏量中项

$$g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi$$

就是规范群G的定域规范不变性所确定的物质场ψ与规范场A_μ^a之间的相互作用，耦合常数g表征了相互作用强度，此外与 Abelian 情形

相同，规范场自作用项$\left(F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right)$中无质量项，这与上节指出的规范场粒子无质量普遍结论相一致。还需指出以下几点：

- 无质量规范场数量等于规范群G的生成元数量。
- 在 Abelian 情形下，规范场与其它物质场的耦合强度无限制，因此电子携带电荷e而其它粒子原则上可携带任何电荷λe（如$\lambda=\pi$，$\frac{1}{3}$，等）。但在非 Abelian 情形下，如$SU(2)$情形，耦合强度将受到严格限制。如二重态ψ与规范场A^a_μ的耦合强度为g，而对于其它二重态ϕ，如耦合强度为λg，则对易关系(2.14)式将要求（由规范不变性）$\lambda^2=\lambda$或$\lambda=1$。从本质上看，这是由于在 non-Abelian 理论中，生成元的归一化性质由非线性的对易关系所确定，故耦合强度g不可能被随意改变。
- 如上所述，对于单纯群G，则只存在一个耦合常数，然而如果群是单纯群G的积，如$SU(2)\times SU(3)$，这里对于每一个单纯群的生成元集合在其对易关系下自身是闭合的，而对于不同群的生成元集合，它们彼此是对易的，则对于每一个因子群将存在其独立的相应的耦合常数。

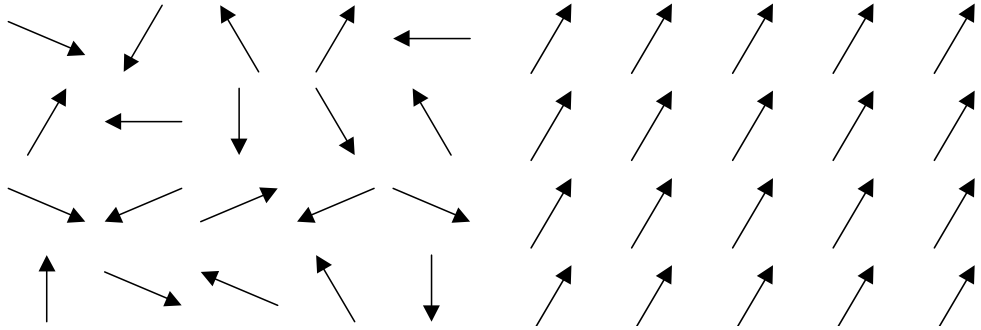
§2.4 对称性的自发破缺：

精确的对称性通常会给出精确的守恒定律。在这种情况下拉氏量和真空（即该理论的基态）都是不变的。但是，事实上有些守恒定律并非精确的，比如同位旋、奇异数等。这些情形可以通过给守恒的拉氏量（L_{sym}）加上一个小的破坏对称性的项（L_{sb}）来描述

$$L=L_{sym}+L_{sb}.$$

另一种情形是系统的拉氏量是不变的，但真空却不是不变的。一个典型的例子是铁磁体，其拉氏量用自旋－自旋相互作用来描述，在三维旋转下是不变的，即当温度高于铁磁体的相变温度（T_C）时自旋系统是完全杂乱的（顺磁相），因而真空也是$SO(3)$不变的（图 2.1(a)）。

但是，对于低于T_C的温度（铁磁相），就会出现自发磁化强度，使得自旋按照某一特定方向排列（图 2.1(b)）。在这种情形下真空不再具有$SO(3)$群的对称性。对称性破缺为$SO(2)$，体现整个系统绕自旋方向旋转的对称性。



(a) (b)

图 2.1：顺磁相(a)和铁磁相(b)的自旋方向示意图

Nambu 于 1961 年将凝聚理论中起了重要作用的“对称性自发破缺”的概念引入到粒子物理中。从前面讨论，我们已经看到，定域规范不变的理论所涉及的规范场是无质量的。对于电磁作用当然毫无问题，因它的规范场，光子本身是无质量的。但由于弱作用的短程性，传递它的规范粒子（称为中间矢量玻色子），必须有质量，故为了将弱作用纳入定域规范不变的理论，首先要解决的问题是如何使规范粒子获得质量。如果我们用引入质量项这种形式来明显破坏规范对称性，则将改变理论的高能行为—其后果是破坏理论幺正性，同时理论也是不可重整化的。这个问题的解决依赖于引入对称性自发破缺的思想。

§2.4.1 整体对称性的自发破缺和 Goldstone 定理：

考虑复标量场的ϕ^4理论，其拉氏量密度为

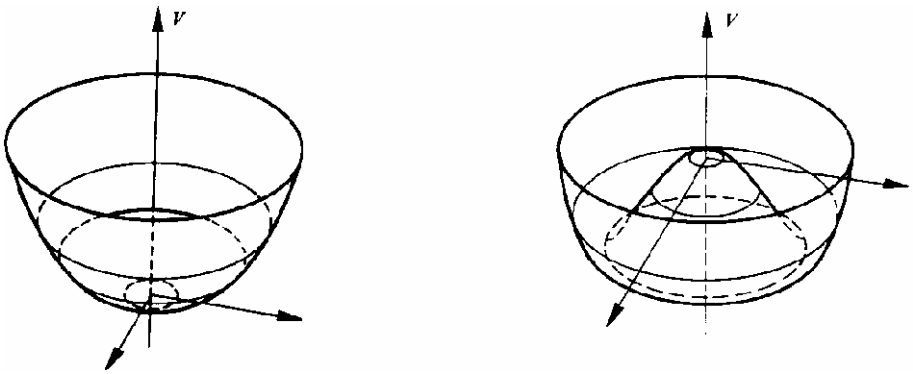
$$L=\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)+\mu^2\phi^*\phi-\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \qquad (2.46)$$

λ项表示自相互作用，在通常标量场论中，$\mu^2(>0)$项是质量项，但现在μ^2仅作为参数，它可以是负的，因而不一定是质量项。显然L在整体规范变换：

$$\varphi\to\varphi'=e^{-i\Lambda}\varphi \qquad (\Lambda\text{与}x\text{无关}) \qquad (2.47)$$

下是不变的。该体系的 Hamiltonian 密度为

$$\mathrm{H}=\pi^*\pi+\nabla\varphi^*\nabla\phi-\mu^2\phi^*\phi+\lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \qquad (2.48)$$



(a) (b)

图 2.2

其中 $\pi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\phi}$ 。能量的最小值或真空由下列条件确定：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi^2 + 2\lambda \phi^{*2} \phi = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial \phi^*} = -\mu^2 \phi + 2\lambda \phi^* \phi^2 = 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

当 $\mu^2 < 0$ 时， $\phi^* = \phi = 0$ 给出能量最小值（图 2.2(a)），而当 $\mu^2 > 0$ 时， $\phi^* = \phi = 0$ 给出局部极大，而最小值由

$$|\phi| = \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \quad \nu \equiv \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$

给出（图 2.2(b)）。前者($\mu^2 < 0$)相应于真空在变换(2.47)下是不变的，即真空是非简并的，故模型具有精确对称性。而后者表示系统具有无穷多个真空态，其中每一个与复平面 ϕ 上的半径为 R 的圆周上的一个点对应，即真空是无穷简并的，在变换(2.47)下，任何一个真空态（即圆周上的某点）变为另一个真空（圆周上另一个点），即真空在 $U(1)$ 群变换下不是不变的，故模型具有自发破缺的 $U(1)$ 对称性。在量子理论中， φ 成为算符，(2.50)式对应于不为零的真空期望值

$$\left| \langle 0 | \varphi | 0 \rangle \right| = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \neq 0 \tag{2.51}$$

这是真空简并的标志，在所有的简并真空中，物理真空只能实现其中的一个，而物理的量子场是围绕物理真空的激发，设

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \tag{2.52}$$

选择物理真空为

$$\langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle = \nu, \quad \langle 0 | \varphi_2 | 0 \rangle = 0 \tag{2.53}$$

现在令

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x)+i\phi_2(x)]=\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\nu \tag{2.54}$$

则有

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle=\langle 0|\phi_2|0\rangle \tag{2.55}$$

$\phi(x)$是物理的量子场，将(2.54)代入(2.46)式，我们可用$\phi(x)$表示L

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1)+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2)-\lambda\nu^2\phi_1^2\\&-\nu\lambda\phi_1(\phi_1^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2+\frac{\lambda}{4}\nu^4\end{aligned} \tag{2.56}$$

由此可看出，$\phi_1(x)$具有质量$\nu\sqrt{2\lambda}$，而场$\phi_2(x)$是无质量的，通常称$\phi_2(x)$为 Goldstone 粒子。实际上，在量子场论中，一个连续的整体对称性的自发破缺场必然导致零质量的 Goldstone 粒子的出现，这是一个普遍性的结论，称为 Goldstone 定理。自发破缺了的对称性当然仍是体系的对称性，但它并不表现为真空态的不变性，而是通过存在 Goldstone 玻色子表现出来。下面给出简要证明。

设L是在由场的变换：

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\exp(-i\alpha^a T^a)\varphi(x) \tag{2.57}$$

所形成的变换群G下不变的，其中T^a是群G的生成元，参数α^a与x无关，由 Noether 定理，相应的流为

$$J^{\mu a}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}T^a\varphi \tag{2.58}$$

具有零散度：

$$\partial_\mu J^{\mu a}=0 \tag{2.59}$$

而相应的荷：

$$Q^a=\int d^3xJ^{0a} \tag{2.60}$$

是守恒的，且满足等时对易关系：

$$[Q^a,\varphi(x)]=T^a\varphi(x) \tag{2.61}$$

在对称性自发破缺情况下，利用上式可以得到

$$\langle 0|[Q^a,\phi(x)]|0\rangle=\langle 0|T^a\phi(x)|0\rangle\neq 0 \tag{2.62}$$

将(2.60)式代入(2.62)，并插入中间态的完备集，有

$$\begin{aligned}\langle 0|[Q^a,\phi(x)]|0\rangle &= \sum_n\int d^3y\Big[\langle 0|J^{0a}(y)|n\rangle\langle n|\phi(x)|0\rangle \\ &\quad -\langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(y)|0\rangle\Big]_{|x^0=y^0} \qquad (2.63)\\ &\neq 0\end{aligned}$$

再利用平移不变性，有

$$J^{0a}(y)=e^{-ip\cdot y}J^{0a}(0)e^{ip\cdot y} \qquad (2.64)$$

其中 p 为平移变换生成元，即能量动量算符。现将(2.64)式代入(2.63)式，得到

$$\begin{aligned}\langle 0|[Q^a,\varphi(x)]|0\rangle &= \sum_n\int d^3y\Big[\langle 0|J^{0a}|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle e^{ip_ny} \\ &\quad -\langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(0)|0\rangle e^{-ip_ny}\Big]_{|x^0=y^0} \\ &= (2\pi)^3\sum_n\delta^{(3)}(\vec{p}_n)\Big[\langle 0|J^{0a}|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle e^{ip_n^0y^0} \\ &\quad -\langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(0)|0\rangle e^{-ip_n^0y^0}\Big]_{|x^0=y^0} \qquad (2.65)\\ &= (2\pi)^3\sum_n\delta^{(3)}(\vec{p}_n)\Big[\langle 0|J^{0a}|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle e^{iM_ny^0} \\ &\quad -\langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(0)|0\rangle e^{-iM_ny^0}\Big]_{|x^0=y^0} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

其中我们已令 $p_n^0=M_n$ 为中间态质量（由于 $\delta^{(3)}(\vec{p}_n)$ 保证了 $E_n=M_n$）现在我们要证明(2.65)式与 y^0 无关。由流守恒关系(2.59)式，有

$$\frac{\partial}{\partial y^0}J^{0a}(y)-\nabla_y\cdot\vec{J}^a(y)=0 \qquad (2.66)$$

对上式作空间积分，得

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\int dyJ^{0a}(y)=\int d^3y\nabla_y\cdot\vec{J}^a(y)=0 \qquad (2.67)$$

利用这个关系，从(2.65)式的左边有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^0}\langle 0|[Q^a,\varphi(x)]|0\rangle &= \frac{\partial}{\partial y^0}\int d^3y\langle 0|[J^{0a}(y),\varphi(x)]|0\rangle \\ &= \int d^3y\langle 0|[\nabla\cdot\vec{J}^a(y),\varphi(x)]|0\rangle \\ &= \int d\vec{\sigma}\cdot\langle 0|[\vec{J}^a(y),\varphi(x)]|0\rangle \qquad (2.68)\\ &= 0\end{aligned}$$

这表明(2.65)式与 y^0 无关。要使(2.65)式与 y^0 无关，则意味着要求对 $\vec{p}_n=0$ 的中间态 $|n>$，必须有 $M_n=0$，这就是无质量的态，即 Goldstone

玻色子。这个定理是独立于微扰论而成立的。

§2.4.2 定域规范对称性的自发破缺和 Higgs 机制

1. 阿贝尔（Abelian）情形：

现要求拉氏量密度(2.46)在$U(1)$定域规范变换

$$\varphi \to \varphi' = e^{-i\Lambda(x)}\varphi \tag{2.69}$$

下保持不变。由前面讨论知道，这必然导致通过协变导数引进规范场A^μ（电磁场），使(2.46)式变为

$$\begin{aligned} L &= \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\varphi_\mu^*\left(\partial^\mu - ieA^\mu\right)\varphi + \mu^2\varphi^*\varphi \\ &- \lambda\left(\varphi^*\varphi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.70}$$

与前面类似，其中μ^2作为参数。当$\mu^2 > 0$，真空仍由(2.50)式给出，它是无穷简并的。我们再次选择物理真空位置为(2.53)，并通过(2.54)式来规定物理的标量场$\phi(x)$，将(2.54)代入(2.70)，得到

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\right)^2 - \lambda v^2\phi_1^2 - evA^\mu\partial_\mu\phi_2 + L_I \end{aligned} \tag{2.71a}$$

其中

$$\begin{aligned} L_I &= eA_\mu\left(\phi_2\partial_\mu\phi_1 - \phi_1\partial_\mu\phi_2\right) + e^2vA_\mu A^\mu\phi_1 \\ &+ \frac{e^2}{2}A_\mu A^\mu\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 \\ &- \lambda v\phi_1\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \frac{\lambda}{4}v^4 \end{aligned} \tag{2.71b}$$

表示A_μ, ϕ_1, ϕ_2之间的相互作用。这个拉氏密度的绝妙之处在于其中第二项（正比于$A_\mu A^\mu$）表明规范粒子获得了质量。此外，场ϕ_1也是有质量的，而场ϕ_2无质量，但存在混合项（正比于$A^\mu\partial_\mu\phi_2$）。这似乎表示传播中的规范场（光子）可能转化为ϕ_2，因此，对ϕ_2的物理解释不是很清楚。

- 么正规范(Unitary gauge)—Abelian case.

为了消除上述混合项（$A^\mu\partial_\mu\phi_2$），我们将复数场φ指数形式地参数化，新的实数场ξ和η定义为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\nu+\eta(x)]\exp(i\xi(x)/\nu)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\nu+\eta(x)+i\xi(x)+.....]\end{aligned}\tag{2.72}$$

自由拉氏密度也取相同形式

$$L_0=\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\eta)^2+(\partial_\mu\xi)^2-\frac{\mu^2}{2}(\eta^2+\xi^2)\right]\tag{2.73}$$

对(2.73)式做正则量子化的条件未改变，$\eta(x)$和$\xi(x)$与$\phi_1(x)$和$\phi_2(x)$有相同的粒子解释。我们现在可以设法消除混合项，这可利用规范自由度来达到这个目的，或者确切地讲，通过固定规范（么正规范）来做到这点。为此做规范变换，并选择 $\Lambda(x)=-\frac{\xi(x)}{\nu}$，于是

$$\begin{aligned}&\varphi'(x)=\exp\left(-i\frac{\xi}{\nu}\right)\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu+\eta(x))\\&A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{g\nu}\partial_\mu\xi(x)=B_\mu(x)\\&(D\phi)'=D'\phi'=(\partial_\mu\phi'-igB_\mu\phi')=\frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_\mu\eta-igB_\mu(\nu+\eta)]\\&F'_{\mu\nu}=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu\end{aligned}\tag{2.74}$$

由于拉氏密度(2.70)式在上述规范变换下保持不变，故(2.70)式可写为

$$\begin{aligned}&L=\frac{1}{2}|\partial_\mu\eta-igB_\mu(\nu+\eta)|^2+\frac{\mu^2}{2}(\nu+\eta)^2-\frac{\lambda}{4}(\nu+\eta)^4\\&-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)^2=L_0+L_I\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}L_0=\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2-\frac{1}{2}\mu^2\eta^2-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)^2+\frac{1}{2}(g\nu)^2B_\mu B^\mu\\L_I=\frac{1}{2}g^2B_\mu B^\mu\eta(2\nu+\eta)-\lambda\nu^2\eta^3-\frac{1}{4}\lambda\eta^4\end{cases}\tag{2.75}$$

很显然，L_0是质量为$M=g\nu$的矢量玻色子以及质量为$m=\mu$的标量介子的自由拉氏量密度，场$\xi(x)$已从拉氏量中消失。这个结果并非令人奇怪，只要我们计算一下自由度数，就可清楚这点。在对称性破缺前，我们有两个标量场ϕ_1和ϕ_2及一个无质量的规范场A_μ（既光子，它只有两个横向极化态）；在对称性破缺后，我们只有一个标量场η和有质量规范场B_μ（它有三个极化态）。因此，无质量规范场A_μ和标量场ξ组合成了有质量的矢量场B_μ。这就是 Abelian 情形下的 Higgs 机制。$\xi(x)$

场叫做 Goldstone 玻色子。

2. 非阿贝尔情形（Non—Abelian Case）

将 Higgs 机制推广到 non-Abelian 情形是直接的。考虑$SU(2)$规范理论，它具有一个复标量场的二重态

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

拉氏量密度为

$$L=(D_\mu\phi)^+(D_\mu\phi)-V(\phi)-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{2.76}$$

其中

$$\begin{aligned}&D_\mu\phi=\left(\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu\right)\phi\\ &F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\\ &V(\phi)=-\mu^2(\phi^+\phi)+\lambda(\phi^+\phi)^2\end{aligned} \tag{2.77}$$

对于$\mu^2>0$，经典势的极小值在

$$\langle 0|\phi^+\phi|0\rangle=\frac{v^2}{2},\qquad v=(\mu^2/\lambda)^{1/2} \tag{2.78}$$

处。我们可以选择与物理的真空对应的期望值形式为：

$$\langle 0|\phi|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} \tag{2.79}$$

如我们定义新场为

$$\phi'=\phi-\langle\phi\rangle_0 \tag{2.80}$$

则$\langle\phi'\rangle_0=0$，而协变导数项将产生矢量玻色场的质量，因为

$$\begin{aligned}(D_\mu\phi)^+(D_\mu\phi)=&\left(\left(\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu\right)(\phi'+\langle\phi\rangle_0)\right)^+\\ &\times\left(\left(\partial^\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu\right)(\phi'+\langle\phi\rangle_0)\right)\end{aligned} \tag{2.81}$$

包含因子

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}g^2\langle\phi\rangle_0^+\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu\langle\phi\rangle_0 &= \frac{1}{4}g^2\langle\phi\rangle_0^+\tau_i\tau_j\langle\phi\rangle_0 A_\mu^i A^{j\mu}\\ &= \frac{1}{4}g^2\langle\phi\rangle_0^+\frac{1}{2}\{\tau_i,\tau_j\}\langle\phi_0\rangle A_\mu^i A^{j\mu}\\ &= \frac{1}{4}g^2\langle\phi\rangle_0^+\langle\phi_0\rangle\vec{A}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g\nu}{2}\right)^2\vec{A}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\end{aligned} \tag{2.82}$$

这时，对应于 $\vec{A}_\mu$ 的质量为：

$$M_A=\frac{1}{2}g\nu \tag{2.83}$$

在标量场部分，我们有

$$\begin{aligned}&\phi^+\phi=\phi^{+'}\phi'+\langle\phi^+\rangle_0\phi'+\phi'^+\langle\phi\rangle_0+\langle\phi^+\rangle_0\langle\phi\rangle_0\\ &(\phi^+\phi)^2=\nu^2\phi'^+\phi'+\left(\langle\phi^+\rangle_0\phi'+\phi'^+\langle\phi\rangle_0\right)^2+.....\end{aligned} \tag{2.84}$$

将 ϕ' 写成 $\phi'=\begin{pmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{pmatrix}$，则 ϕ' 的二次项为

$$\frac{\lambda\nu^2}{2}\left(\phi'_2+\phi'^+_2\right)^2=\frac{\mu^2}{2}\left(\phi'_2+\phi'^+_2\right)^2 \tag{2.85}$$

这表明，只有组合 $(\phi'_2+\phi'^+_2)/\sqrt{2}$ 是有质量的，它代表物理的 Higgs 粒子，而其它三个态 ϕ'_1，ϕ'^+_1 和 $(\phi'_2-\phi'^+_2)/\sqrt{2}$ 代表 Goldstone 粒子，它们将与原始的三个无质量规范玻色子组合而成为三个有质量的矢量玻色子。

- 幺正规范（Unitary gauge）

为了更清楚地看到上述物理图象，我们在么正规范中来讨论这一问题。首先参数化标量二重态

$$\phi(x)=\exp\left\{i\frac{\vec{\tau}}{\nu}\cdot\vec{\xi}(x)\right\}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\nu+\eta(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{2.86}$$

其中 $\langle\xi^a\rangle_0=\langle\eta\rangle_0=0$。我们可定义新场如下

$$\phi'(x)=U(x)\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \nu+\eta\end{pmatrix} \tag{2.87}$$

$$\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{B}_\mu=U(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu U^{-1}(x)-\frac{i}{g}[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x) \tag{2.88}$$

式中

$$U(x)=\exp\left\{-i\frac{\vec{\tau}}{\nu}\cdot\vec{\xi}(x)\right\} \tag{2.89}$$

由规范变换性质，我们有

$$D_\mu\phi=U^{-1}(x)(D_\mu\phi)' \tag{2.90}$$

$$F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}=G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{2.91}$$

其中

$$(D_\mu\phi)'=\left(\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{B}_\mu\right)\phi'=D'_\mu\phi' \tag{2.92}$$

$$G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu B^a_\nu-\partial_\nu B^a_\mu+g\varepsilon^{abc}B^b_\mu B^c_\nu \tag{2.93}$$

于是，在么正规范下，拉氏量密度具有简单的形式

$$L=(D'_\mu\phi')^+(D'^\mu\phi')+\frac{\mu^2}{2}(\nu+\eta)^2-\frac{\lambda}{4}(\nu+\eta)^4-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{2.94}$$

其中第一项含有$\vec{B}_\mu$的二次项

$$\frac{g^2}{8}(0,\nu)\left(\vec{\tau}\cdot\vec{B}_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{B}^\mu\right)\begin{pmatrix}0\\\nu\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{g\nu}{2}\right)^2\vec{B}_\mu\cdot\vec{B}^\mu \tag{2.95}$$

这表明，矢量玻色子质量为$M_B=\frac{g\nu}{2}$。因此最初的$SU(2)$规范对称性完全破缺，所有三个规范场均获得质量。

3. 有质量规范玻色子的数量

由于无质量规范玻色子的个数对应于未破缺规范对称群的生成元的个数，故有质量的规范玻色子的个数（或者 Goldstone 玻色子个数）就等于原始的对称群的生成元个数与剩余的对称群的生成元个数之差。下面我们将就一个普遍情形给出上述结论的一个证明。

考虑一个普遍的拉氏密度，其对称群为G，

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_i+igT^a_{ij}A^a_\mu\phi_j)(\partial^\mu\phi_i-igT^a_{ik}A^{a\mu}\phi_k)\right]\\&-V(\phi_i)-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.96}$$

其中ϕ_i是一组实场，其变换按具有 n 个生成元的规范对称群G的 N 维表示（可能是可约表示）进行

$$\phi_i(x)\to\phi'_i(x)=\phi_i(x)+i\varepsilon^a(x)T^a_{ij}\phi_j(x) \tag{2.97}$$

$$a=1,2,\cdots\cdots,n\text{，}\quad i,j=1,2,\cdots\cdots\cdots,N$$

(2.96)式中势函数$V(\phi_i)$在上述变换下保持不变（如果势函数是在一个更大的群变换下不变，则将存在一些标量粒子，其质量只通过辐射修正获得。通常称之为 pseudo-Goldstone bosons（Weinberg 1972）），故有

$$0=\delta V=\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\delta\phi_i=\varepsilon^a\frac{\partial V}{\partial\phi_i}T^a_{ij}\phi_j$$

或者

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}T^a_{ij}\phi_j=0\,,\quad a=1,2,\cdots\cdots,n \tag{2.98}$$

再对ϕ_k微商，给出

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}T^a_{ij}\phi_j+\frac{\partial V}{\partial\phi_i}T^a_{ik}=0 \tag{2.99}$$

如V在$\phi_i=\nu_i$处有极小值，则有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}|_{\phi_i=\nu_i}\ T^a_{ij}\nu_j=0 \tag{2.100}$$

将V在ν_i附近展开，没有线性项，常数项是无关紧要的，故有

$$V(\phi_i)=V(\nu_i)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}|_{\phi=\nu}\ (\phi_i-\nu_i)(\phi_k-\nu_k)+\cdots\cdots \tag{2.101}$$

因此$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}$在$\phi=\nu$处，正好是质量矩阵：

$$(M^2)_{ik}=\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}|_{\phi=\nu}=(M^2)_{ki} \tag{2.102}$$

于是(2.100)式可改写成

$$(M^2)_{ik}T^a_{ij}\nu_j=(M^2)_{ki}T^a_{ij}\nu_j=0$$

假定G'是G的n'维子群，它有n'个生成元，并保持真空的对称性，则，

$$T^b_{ij}\nu_j=0\,,\quad b=1,2,\cdots,n' \tag{2.103a}$$

而

$$T^c_{ij}\nu_j\neq 0\,,\quad c=n'+1,\cdots,n \tag{2.103b}$$

如我们选择生成元T^a是线性独立的，则以上关系表明，M^2有$(n-n')$个零本征值，换言之，对于$(n-n')$不为零的矢量，其中每一个的M^2本征值均为零。因此$T^c\nu$确实张开一个$(n-n')$维空间，其中$(n-n')$个无质量的态对应着$(n-n')$个无质量的 Goldstone 玻色子。

如我们重新参数化ϕ_i：

$$\phi_i = \exp\{iT_{ij}^c \xi^c(x)/v\}(v_j + \eta_j(x)) \tag{2.104}$$

其中$c = 1,2,...,(n-n')$，并对破缺对称性的生成元求和。$\eta_i(x)$是剩余标量场，它们正交于$\xi^c(x)$。在规范变换$A_\mu \to A'_\mu$下，其中规范函数为$\theta(x) = -iT^c\xi^c(x)/v$，于是拉氏量密度中含有规范场的二次项：

$$\frac{g^2}{2}(T^c v, T^d v)A'^c_\mu A'^{d\mu} \tag{2.105}$$

对角化(2.105)后，就导致$(n-n')$个有质量的矢量玻色子。

在这节中，我们选择了么正规范，使之理论的粒子谱是明显的。在后面，我们将介绍另一种规范，叫可重整的 R 规范，其中 Goldstone 玻色子并不能明显消去，但规范场传播子具有明显好的高能行为，且理论的可重整性也更加明显。

第 3 章 电弱相互作用的标准模型

§3.1 弱相互作用的唯象理论简介

§3.1.1 弱相互作用发展史的扼要回顾

1934：Pauli：中微子存在的建议（为解释 β 衰变的电子连续谱）

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

1934：Fermi：描述 β 衰变的流－流理论的提出

$$L_{Weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n\right)\left(\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_\nu\right)$$

1936：Gamow and Teller：推广费米理论：

$$L_{Weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\sum_i C_i\left(\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n\right)\left(\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu\right)$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma^s = 1,\ \Gamma^p = \gamma_5,\ \Gamma^\nu_\mu = \gamma_\mu,\ \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5 \\ \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \end{cases}$$

1949：Wheller and Tiomno；Lee，Rosenbluth and Yang 等提出 Fermi 弱作用的普适性建议，即对不同的弱作用过程

β －decay： $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

μ －decay： $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

μ －capture： $\mu^- + p \to \nu_n + n$

可用同一耦合常数

$$G_F = \frac{1.03 \times 10^{-5}}{m_p^2}$$

来描写，此即费米耦合常数。

1954：Yng and Mills：在量子场论中首次引入定域 $SU(2)$ 规范不变的概念。

1955：Alvarez and Goldhaber；Birge *et al*：$\theta - \tau$ 之迷：发现“两个”粒子有相同的衰变宽度（$\Gamma_\theta = \Gamma_\tau$）和质量（$M_\theta = M_\tau$），似乎应该是同一个态。但是通过对不同的衰变道的观测，发现其末态宇称相反：

$$\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0, \qquad J^P = 0^+,$$

$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad J^P = 0^+,$$

这暗示在弱过程中宇称可能被破坏。

1956：李政道（Lee）和杨振宁（Yang）提出弱作用宇称不守恒的建议。

1957：吴建雄等：测量 β 衰变中电子的角分布

$$^{60}Co(Polarized) \to {}^{60}Ni + e^- + \bar{\nu}_e$$

发现其衰变率依赖于 pseudo-scalar 量

$$< \vec{J}_{nuc} > \cdot \vec{p}_e$$

1957：Frauenfelder 等：进一步确认在弱作用中宇称不守恒：对在 β 衰变中发射的电子的纵向极化（$\vec{\sigma}_e \cdot \vec{p}_e$）的测量

$$^{60}Co \to e^-(long.\ polar.) + \bar{\nu}_e + X$$

表明弱作用中发射的电子绝大部分是左手的。弱作用中宇称不守恒的确认表明：在弱作用流中必须包含有 γ_5 项

$$L_{Weak} \to \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i C_i \left[\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n\right]\left[\bar{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5)\psi_\nu\right]$$

注意 CP 对称性仍保持，由于 C 也破坏。

1957：Salam，Lee and Yang，Landau 等提出中微子的二分量理论。它要求中微子要么是左手的要么是右手的。由于已知弱作用中涉及的电子（正电子）是左手（右手），故轻子流应写为

$$J^i_{lept} \equiv \bar{\psi}_e \Gamma^i (1 \pm \gamma_5)\psi_\nu \to \bar{\psi}_e \frac{1+\gamma_5}{2} \Gamma^i (1 \pm \gamma_5)\psi_\nu$$

因此中微子 helicity 的测量是决定弱流结构的关键。如 $\Gamma^i = V$ 或者 A，则 $\{\gamma_5, \Gamma^i\} = 0$，因而中微子应是左手的，否则流将为 0。另一方面，如 $\Gamma^i = S$ 或者 T，则 $[\gamma_5, \Gamma^i] = 0$，因而中微子应是右手的。

1957：Schwinger，Lee and Yang：发展了有关在弱作用中引入中间矢量玻色子的思想。四费米子相互作用是“类点”（Point-like），即 S-波相互作用。分波的幺正性要求这种相互作用所产生的反应截面必须满足

$$\sigma < 4\pi / p_{cm}^2$$

然而，由于 G_F 具有量纲 M^{-2}，故四费米子弱相互作用的截面应满足

$$\sigma \sim G_F^2 p_{cm}^2$$

因此，费米理论当 $p_{cm} \approx 300GeV$ 时将破坏幺正性。这个问题可仿照 QED 那样，通过引入中间矢量玻色子来传递相互作用而得到解决。但这里中间矢量玻色子（IVB）应具有很不同的性质。首先由于 β 衰变要求电荷改变流，故 IVB 应带电。其次，由于弱作用的短程性，IVB 必须具有质量且很重。最后，它们不应具有确定的宇称以允许弱流具有 V-A 结构。引入满足上述特征的 IVB 后，轻子的 Fermi 拉氏量

$$\begin{cases} L_{weak} = \dfrac{G_F}{\sqrt{2}}\left[J^{\alpha}(l)J^{+}_{\alpha}(l^{'}) + h.c.\right] \\ J^{\alpha}(l) = \overline{\psi}_{\nu_l}\Gamma^{\alpha}\psi_l \end{cases}$$

变为

$$L^{W}_{weak} = G_W\left(J^{\alpha}W^{+}_{\alpha} + J^{+\alpha}W^{-}_{\alpha}\right)$$

式中 G_W 为一个新的耦合常数。

下面以 μ 衰变为例，比较在低能极限下两种理论的联系。

对于 Fermi 理论，我们有

$$M_{weak} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}J^{\alpha}(\mu)J_{\alpha}(e)$$

对于 IVB 理论，有

$$M^{W}_{weak} = \left[iG_W J^{\alpha}(\mu)\right]\left[\frac{-i}{k^2 - M^2_W}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2_W}\right)\right]\left[iG_W J^{\beta}_{(e)}\right]$$

在低能情形：$k^2 << M^2_W$，

$$M^{W}_{weak} \to i\frac{G^2_W}{M^2_W}J^{\alpha}(\mu)J_{\alpha}(e)$$

比较两个理论的结果，可以得到关系

$$G^2_W = \frac{M^2_W G_F}{\sqrt{2}}$$

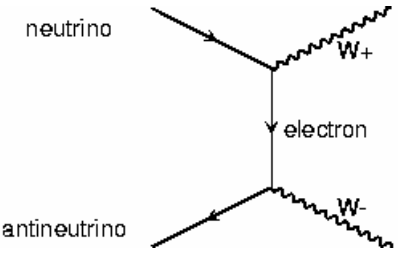
由上式可知 G_W 是无量纲的。然而在高能情形，IVB 理论仍然破坏幺正性。为此，考虑散射过程：$\nu\overline{\nu} \to W^{+}W^{-}$。

在 $W^{\pm}$ 静止系，我们可以定义横向和纵向极化矢量为

$$\varepsilon^{\mu}_{T_1}(0) = (0,1,0,0)$$

$$\varepsilon^{\mu}_{T_2}(0) = (0,0,1,0)$$

$$\varepsilon^{\mu}_{T_L}(0) = (0,0,0,1)$$



在沿 z 方向 boost 后，即对于

$p^\mu=(E,0,0,p)$，横向态不发生改变，然而纵向态矢量变为

$$\varepsilon_L^\mu(p)=\left(\frac{|\vec{p}|}{M_W},\frac{E}{M_W}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)\approx\frac{p^\mu}{M_W}$$

由于纵向极化正比于矢量玻色子动量，故在高能下，纵向振幅提升到“很坏”的行为。事实上，在高能极限下，极化截面 $\nu\bar{\nu}\to W^+W^-$ 行为类似于：

$$\sigma\left(\nu\bar{\nu}\to W_T^+W_T^-\right)\to constant$$

$$\sigma\left(\nu\bar{\nu}\to W_L^+W_L^-\right)\to\frac{G_F^2S}{3\pi}$$

故对于大的质心系能量 S，它们仍然破坏幺正性。

1958：Feynman，Gell-Mann，Marshak and Sudarshan and Sakurai 等提出了普适性 V-A 相互作用理论：

$$J_{lept}^{+\mu}=[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu]$$

1958：Goldhaber 等首次证实中微子是左手的（即螺旋度为负的），这个结果证实弱作用的结构确实是 V-A 型的。

1961：Salam and Ward：提出以规范原理作为构造基本相互作用场的量子场论的基础。

1961：Glashow：首次引入中性中间矢量玻色子（Z^0）。

1963：Cabibbo：引入 Cabibbo 角和强子弱流。

实验上观测到奇异数改变（$\Delta S=1$）的弱衰变被大大压低。例如，中子的宽度远大于 Λ 的宽度：

$$\Gamma_{\Delta S=0}(n_{uud}\to p_{uud}e\bar{\nu})>>\Gamma_{\Delta S=1}(\Lambda_{uds}\to p_{uud}e\bar{\nu})$$

它们给出如下分支比

$$BR(n_{udd}\to p_{uud}e\bar{\nu})=100\%$$

$$BR(\Lambda_{uds}\to p_{uud}e\bar{\nu})\sim 8\times10^{-4}$$

事实上，与轻子弱流类似，强子弱流可写为

$$J_\mu^h=\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u+\bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u$$

式中第一项可解释 $\Delta S=0$ 的跃迁，而第二项解释 $\Delta S=1$ 的过程。为了使强子弱流是普适的，即具有同一耦合常数 G_F，同时又能解释奇异数改变过程被大大压低的实验事实，Cabibbo 引入一个混合角来给出强子弱流中 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=1$ 两部分恰当的权重：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

式中 d'、s'（d、s）是相互作用（质量）本征态。于是 $\bar{d} \leftrightarrow u$ 之间的跃迁是正比于 $G_F \cos\theta_c \approx 0.97 G_F$，而 $\bar{s} \leftrightarrow u$ 是正比于 $G_F Sin\theta_c \approx 0.24 G_F$。因而强子流用新的相互作用本征态来描写，应为

$$\begin{aligned} J_\mu^h &= \bar{d}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)u \\ &= \cos\theta_c \bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + \sin\theta_c \bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u \end{aligned}$$

1964：Bjorken and Glashow：提出 Charm（c）夸克存在的假设。

1964：Higgs 等人提出了一个具有对称性自发破缺的场论模型，其中包含无质量的 Goldstone 粒子和有质量的矢量玻色子。

1964：Christenson，Cronin，Fitch 等：首次在实验上发现 K^0 介子系统中的 CP 破坏证据。

1964：Salam and Ward：提出电弱相互作用统一描写的拉氏量，并估计了 W 玻色子的质量。

1964：Gell-Mann and Zweig：首次将夸克作为一个基本的层次结构来构造强子。

1967：Kibble：推广质量生成的 Higgs 机制到非阿贝尔规范场论。

1967：Weinberg：提出对电弱相互作用统一描写的拉氏量，并估计了 W 和 Z 玻色子的质量。

1968：Salam：重新提出电弱统一相互作用的拉氏量。

1970：Glashow，Iliopoulos and Maiani：引入轻子－夸克的对称性并提出 Charm 夸克的 GIM 机制。

1971：’t Hooft：提出具有自发破缺规范对称性的有质量和无质量的 Yang-Mills 场论可重整性的严格证明。

1973：Kobayashi and Maskawa：提出夸克的 CKM 混合矩阵，从而在标准模型的框架内给出对 CP 破坏起源的解释。

1973：Hasert *et al.* (CERN)：首次在实验上发现弱中性流的存在证据。

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-, \quad \nu_\mu + N \to \nu_\mu + X$$

这是标准模型的一个重要预言，它的发现是标准模型的主要成功。他们也测量了中性流事例和带电流事例的比率，从而估计了 Weinberg 角 $\sin^2\theta_W$ 的值在 0.3 到 0.4 之间。

1974：Fermilab：证实了弱中性流存在于在如下的反应中

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + X$$

1974：Brookhaven，SLAC：发现了 J/ψ（$c\bar{c}$）粒子。

1975：SLAC：发现了 τ 轻子。

1977：Fermilab：首次发现了 Υ（$b\bar{b}$）粒子。

1983：UA1 Collab.；UA2 Collab.：发现带电中间玻色子 $W^{\pm}$ 的存在的证据

$$p + \bar{p} \to W(\to l + \nu) + X$$

所给出的 W 玻色子质量（$M_W = 81 \pm 5GeV$）与标准模型的预言很好地符合。

1983：UA1 Collab.；UA2 Collab.：发现了中性中间玻色子 Z^0 的存在

$$p + \bar{p} \to Z(\to l^+ + l^-) + X$$

这是电弱理论的又一重要证据。

1987：ARGUS Collab.：发现了 $B^0 - \bar{B}^0$ 混合的实验证据。

1989：MARK-II Collab.：实验证明中微子的数目为 3。

1993：LEP Collab.：精确测量了 Z^0 能标上的各种可观测量。

1995：CDF Collab.；D0 Collab.：观测到顶夸克对的产生。

§3.1.2 弱作用唯象理论小结

对上节内容的要点可小结如下：

费米（1934 年）在研究 β 衰变 $n \to pe\bar{\nu}$ 时，提出了四费米子直接耦合理论，他认为 β 衰变可由下列拉氏量描述

$$L_F(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{p}(x)\gamma_\lambda n(x)][\bar{e}(x)\gamma^\lambda \nu(x)] + h.c. \qquad (3.1)$$

其中 Fermion 场由相应粒子的名表示，G_F 是费米耦合常数，它等于（由实验确定）

$$G_F \approx 10^{-5}/m_p^2 \qquad (3.2)$$

m_P 是质子质量。后来经过许多人的努力，特别是 Lee Yang (1956)发现宇称不守恒后，Feynman，Gell-Mann(1958)，Sudarshan 以及 Marshak 和 Sakurai(1958)等人提出了 V-A 型的流-流耦合理论，其有效拉氏量

密度为

$$L_{eff}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda^+(x) J^\lambda(x) + h.c. \tag{3.3}$$

其中流 J_λ 可分解为轻子流和强子流两部分

$$J_\lambda(x) = J_{l\lambda}(x) + J_{h\lambda}(x) \tag{3.4}$$

轻子流可表为

$$J_l^\lambda(x) = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1-\gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1-\gamma_5) \mu \tag{3.5}$$

而强子流可写成

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u} \gamma^\lambda (1-\gamma_5) d_\theta + \bar{c} \gamma^\lambda (1-\gamma_5) S_\theta \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned} d_\theta &= \cos\theta_c d + \sin\theta_c s = d' \\ s_\theta &= \cos\theta_c s - \sin\theta_c d = s' \end{aligned} \tag{3.7}$$

式中 θ_c 是 Cabibbo 角，大约等于 15^o。值得指出的是(3.6)式中第二项，即含 Charm quark 部分是 Glashow 等人于 1970 年建议引进的，当时实验上并未发现 Charm 夸克。但为了抵消奇异数改变的中性流的物理效应，Glashow，Iliopoulous and Maiani 于 1970 年提出在强子弱流中必须存在这项，此即 GIM 机制。关于这点我们在后面还将加以介绍。

V-A 型的流-流耦合理论(3.3)式在 G_F 的领头阶近似下，取得很大成功，它很好地解释了 μ 衰变，β 衰变以及 π 介子和奇异粒子的半轻衰变等许多低能弱作用实验结果。但它存在如下缺陷：

- 对于非轻衰变，这个理论是否可正确描述并不清楚，由于它牵涉到强作用的效应。
- 它不能解释中型 K 介子系统的 CP 破坏。在规范理论之前，解释上述 CP 破坏是用由 Wolfenstein (1964)提出的一种所谓超弱相互作用理论。
- 最后，也是这个理论最重要的缺陷，即它不是一个可重整化的理论，我们不能用微扰理论计算它的高阶修正。原因是费米弱作用常数 G_F 具有量纲 M^{-2}。此外这个理论破坏么正性。即使对于微扰论的最低阶也存在某些过程，如 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$，当我们用拉氏量(3.3)式来计算时会导致破坏么正性的结果。实际上这个缺陷也是源于耦合常数具有量纲 M^{-2} 的缘故，而一个理论的低阶贡献破坏么正性，则高阶效应是不可重整的。

由于上述原因，V-A 流-流耦合理论被认为是一个低能唯象理论，即它只是一个在微扰论的最低阶可用来描述某些低能现象的有效拉氏量。对上述流-流耦合理论的一个改进是引入矢量中间玻色子理论。类似于电磁流，(3.3)式的弱流 $J_\lambda(x)$ 在 Lorentz 变换下按四维矢量那样变换，因此人们猜测，弱作用是由有质量的矢量玻色子 W_μ 传递的（类似于光子 A_μ），其拉氏量可写为

$$L_I = g\left(J_\mu W^\mu + h.c.\right) \tag{3.8}$$

因此四费米子的直接耦合的V-A 理论(3.3)式可看作由 L_I 在第 2 阶产生的低能有效理论（ $k^2 << M_W^2$ ），

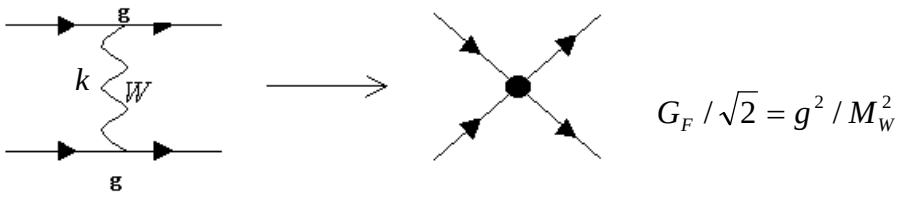


图 3.1

其中 $g^2/M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$，即有质量的中间矢量玻色子传播子贡献了 M_W^{-2} 因子。由于 QED 是规范理论，故人们有理由期望(3.8)式也是一种规范理论，只不过规范玻色子有质量罢了。但是对这种理论进一步深入分析会发现，它虽然改善了上述 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 过程的高能行为，但是对如下过程：

$$\nu + \bar{\nu} \to W^+ + W^-$$

仍旧破坏么正性，此外这个理论虽然耦合常数 g 现在无量纲，但它仍然是不可重整的。原因是由于中间矢量玻色子有质量，它将在传播子中给出 $k_\mu k_\nu / M_W^2$ 项，随着微扰论阶数的升高，这种项使得发散的阶数也升高。详细的研究证明，这样的项是不能消去的，因此简单地引进有质量的中间玻色子还是不足以解决重整化和么正性问题。然而 V-A 型流-流理论在低能区域的成功，促使人们抱着期望，即在某种规范理论中，以适当方式引入规范玻色子的质量项，使得它在低能区可给出四费米子的 V-A 型理论，而在高能区又不破坏么正性，同时也是可重整的。

§3.2 电弱统一的 Weinberg-Salam 模型

§3.2.1 引言

在上节讨论中我们看到弱作用必须涉及到有质量的中间矢量玻色子，但它的质量项又破坏了理论的可重整性。此外，我们还看到，弱作用象电磁作用一样，也具有矢量耦合性质，且耦合常数也具有普适性。因此，人们期望电磁作用和弱作用有可能统一地描写。事实上，早在 1957 年 Schwinger 就首次提出了弱作用和电磁作用统一描述的想法。此后 Glashow 于 1958 年又建议了一种可重整化的弱作用理论，这个理论涉及到与电磁作用的统一描述。1961 年 Glashow 进一步提出了具有 $SU(2)\times U(1)$ 的规范对称性的理论模型，但这个模型不是可重整的，因为中间矢量玻色子(IVB)的质量是用手放进的。类似的尝试于 1964 年由 Salam 和 Ward 也做出过。对称性自发破缺和 Higgs 机制的提出为电弱统一理论的建立完成了最后准备，Weinberg 和 Salam 分别于 1967 年和 1968 年各自独立地提出了由 Higgs 机制产生 IVB 质量的可重整化的电弱统一规范理论，现在人们称这个理论为电弱统一的标准模型理论，即 Weinberg-Salam（W-S）模型或 Glashow-Weinberg-Salam 模型。然而这个模型在提出之初并未得到理论高能物理界的承认，直到 1971 年't Hooft 证明了无论规范对称性是否自发破缺，非阿贝尔规范理论都是可重整的之后，Weinberg-Salam 模型才开始在国际上受到重视。这个理论的核心思想是：弱作用对应于对称性自发破缺的部分，相应的规范玻色子由于 Higgs 机制而获得质量，电磁规范对称性作为剩余对称性保留了下来，Fermions 除中微子外也可通过 Yukawa 耦合由标量场的真空凝聚而获得质量。下面我们将首先讨论纯轻子的 W-S 模型，然后讨论加入夸克的情形。

§3.2.2 纯轻子情形

1. 右手和左手费米子

我们在介绍 Weinberg-Salam 模型之前，先复习一下费米子的 helicity 态的特性。在高能情况下（即 $E >> m$），Dirac 旋量

$$u(p,s)，\text{和}\quad v(p,s)\equiv C\bar{u}^T(p,s)=i\gamma_2 u^*(p,s)$$

是 γ_5 矩阵的本征态。我们把 helicity 为 $+1/2$ 的叫做右手（R）态，helicity 为 $-1/2$ 的叫做左手（L）态，它们满足

$$u_{R/L}=\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)u，\text{和}\quad v_{R/L}=\frac{1}{2}(1\mu\gamma_5)v$$

通常定义 helicity 投影算子为

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5), \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

定义左右手费米子场为

$$\psi_L = P_L\psi, \qquad \psi_R = P_R\psi$$

它们的共轭场为

$$\overline{\psi}_L = (P_L\psi)^+\gamma_0 = \psi^+ P_L{}^+\gamma_0 = \psi^+ P_L\gamma_0 = \psi^+\gamma_0 P_R = \overline{\psi}P_R$$

$$\overline{\psi}_R = \overline{\psi}P_L$$

首先，我们注意到费米子质量项混合了左手和右手费米子成份

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R$$

而另一方面，电磁矢量流则不存在混合项

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$$

最后，对于 V-A 的费米子弱流，可以写成

$$\overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L = \overline{\psi}P_R\gamma^\mu P_L\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu P_L^2\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu P_L\psi = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi$$

由此可以看出，仅左手费米子在弱相互作用中起作用。

2. 规范群的选择

为建立规范模型，首先需要选定对称群。为此，我们先回到由(3.5)式给出的轻子弱流（推广到三代情形）

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu + \bar{\tau}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\tau \\ &= 2\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + 2\bar{\mu}_L\gamma_\mu\nu_{\mu L} + 2\bar{\tau}_L\gamma_\mu\nu_{\tau L} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

这是一个纯左手流。引入弱同位旋二重态符号

$$\Psi_L^e = \begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}_L \qquad \Psi_L^\mu = \begin{pmatrix}\nu_\mu \\ \mu\end{pmatrix}_L \qquad \Psi_L^\tau = \begin{pmatrix}\nu_\tau \\ \tau\end{pmatrix}_L$$

于是(3.9)式可写为

$$J_\mu = 2[\overline{\psi}_L^e\gamma_\mu\tau_-\psi_L^e + \overline{\psi}_L^\mu\gamma_\mu\tau_-\psi_L^\mu + \overline{\psi}_L^\tau\gamma_\mu\tau_-\psi_L^\tau]$$

其中 $\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\tau_{1,2}$ 为泡利矩阵。我们定义轻子的“左手同位旋”流为

$$J_{L\mu}^i = \frac{1}{2}\left[\overline{\psi}_L^e\gamma_\mu\tau^i\psi_L^e + \overline{\psi}_L^\mu\gamma_\mu\tau^i\psi_L^\mu + \overline{\psi}_L^\tau\gamma_\mu\tau^i\psi_L^\tau\right], \quad i = 1,2,3 \qquad (3.10)$$

即

$$J^1_{L\mu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_L & \bar{l}_L\end{pmatrix}\gamma_\mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\bar{l}_L\gamma_\mu\nu_L+\bar{\nu}_L\gamma_\mu l_L\right),$$

$$J^2_{L\mu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_L & \bar{l}_L\end{pmatrix}\gamma_\mu\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}=\frac{i}{2}\left(\bar{l}_L\gamma_\mu\nu_L-\bar{\nu}_L\gamma_\mu l_L\right),\quad (l=e,\mu,\tau)$$

$$J^3_{L\mu}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_L & \bar{l}_L\end{pmatrix}\gamma_\mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L-\bar{l}_L\gamma_\mu l_L\right),$$

则轻子弱流可表为

$$J_\mu=2\left(J^1_{L\mu}-iJ^2_{L\mu}\right),\qquad J^+_\mu=2\left(J^1_{L\mu}+iJ^2_{L\mu}\right)$$

相应于(3.10)式的守恒荷为

$$T^i_L=\int J^i_{L0}(x)d^3x\,,\qquad J^i_{L0}=\frac{1}{2}\bar{\psi}_L\gamma_0\tau^i\psi_L \tag{3.11}$$

容易验证它们满足$SU(2)$代数的对易关系

$$\left[T^i_L,\ T^j_L\right]=i\varepsilon^{ijk}T^k_L \tag{3.12}$$

因此，为构成$SU(2)$代数，必须引入轻子弱流中原来没有的项$J^3_{L\mu}$，不难看出，它对应于中性流。为了在理论中包括电磁作用，必须把对称群扩大。最小的扩大方式是引入一个与$SU(2)$群对易的$U(1)$对称群。由于弱同位旋二重态的两个分量的电荷不同，故这个$U(1)$群不可能是电磁规范群本身，通常称它为弱超荷群，记做$U(1)_Y$。因此 Weinberg 和 Salam 假定描写电弱统一理论的规范对称群为$SU(2)_L\times U(1)_Y$。其中Y表示$U(1)$群的生成元。令y表示相应于Y的量子数，则对于 W-S 理论中三个轻子左手$SU(2)_L$二重态有

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L\quad\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L\quad\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix},\quad y=-1 \tag{3.13}$$

对于三个右手$SU(2)_L$单态

$$e_R\qquad\mu_R\qquad\tau_R,\qquad y=-2 \tag{3.14}$$

其中$e_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$，$e_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$等。由电磁流形状$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_L+\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$可知，为包括电磁作用，带电粒子必须有右手同位旋单态。(3.13)式中同一个$SU(2)_L$表示的各分量有相同的y值，因此满足直乘群的要求

$$\left[T^i_L,\ Y\right]=0 \tag{3.15}$$

由(3.13)式和(3.14)式，容易验证电荷算符 Q 为

$$Q = T_L^3 + \frac{Y}{2} \tag{3.16}$$

(3.16)式表明，现在电荷算符出现在对称群的李代数之中，电磁流是由对称群决定的守恒流，因此这个理论可以包含电磁作用。(3.16)式的形式与强作用的 Gell-Mann-Nishijima 法则相似，所以我们称T_L^i为弱同位旋，Y 称为弱超荷。

对于(3.16)式，我们也可用流代数语言的做进一步说明。

定义

$$\psi_{lL} \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ l \end{pmatrix}_L \qquad (l = e, \mu, \tau)$$

以及$SU(2)$守恒流

$$J_\mu^i \equiv \sum_l \bar{\psi}_{lL} \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^i \psi_{lL} \qquad (i = 1,2,3)$$

轻子弱流J_μ和J_μ^+可表为

$$J_\mu = 2\left(J_\mu^1 - iJ_\mu^2\right), \qquad J_\mu^+ = 2\left(J_\mu^1 + iJ_\mu^2\right)$$

但J_μ^i不能生成电磁流（由于弱同位二重态的两个分量的电荷不同）

$$J_\mu^{em} = Q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -\bar{l}\gamma_\mu l = -\bar{l}_L\gamma_\mu l_L - \bar{l}_R\gamma_\mu l_R$$

故必须包括进一个新的$U(1)$群守恒流Y_μ，它有不同$U(1)_{em}$的守恒荷，在$SU(2)$变换下保持不变，同时在$SU(2)\times U(1)$变换下也不变，这个守恒流可以表为

$$\frac{1}{2}Y_\mu = \sum_l \left(\frac{1}{2} x_l \bar{\psi}_{lL} \gamma_\mu I \psi_{lL} + \frac{y_l}{2} \bar{l}_R \gamma_\mu l_R \right)$$

其中I是2×2单位矩阵，故上式第一项是$SU(2)$不变的，第二项只含右手分量，故是$SU(2)$单态。于是电磁流可写成

$$\begin{aligned} J_\mu^{em} &= \sum \left[\frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_{lL}\gamma_\mu\nu_{lL} - \bar{l}_L\gamma_\mu l_L\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_{lL}\gamma_\mu\nu_{lL} + \bar{l}_L\gamma_\mu l_L\right) - \bar{l}_R\gamma_\mu l_R \right] \\ &= J_\mu^3 + \frac{Y_\mu}{2} \end{aligned}$$

其中已令$x_l = -1$（左手超荷），$y_l = -2$（右手超荷）。故上式两边的守恒荷也应相等，于是便给出了(3.16)式。

归纳起来，规范对称群是$SU(2)_L \times U(1)_Y$，它们的群元素如下

$$SU(2)_L : U(\theta) = \exp\left\{\frac{-i\vec{\theta}\cdot\vec{t}}{2}\right\}$$

$$U(1)_Y : U(\theta) = \exp\left\{-i\theta'\frac{Y}{2}\right\}$$

$$SU(2)_L \times U(1)_Y : U(\theta) = \exp\left\{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{t}}{2} - i\theta'\frac{Y}{2}\right\}$$

3. 规范场

与规范群的每一个生成元相应引入一个规范场，对应 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群的四个生成元 T_L^i 及 Y，W-S 模型有四个规范场 W_μ^i 及 B_μ。它们的拉氏量密度 L_g 为

$$L_g = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \qquad (3.17)$$

其中

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W^i + g\varepsilon^{ijk}W_\mu^j W_\nu^k$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

4. 轻子场

按上面的讨论，下列轻子的自由场拉氏量密度

$$L_l = i\overline{\psi}_L^e\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L^e + i\overline{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R + (e\to\mu)\text{项} + (e\to\tau)\text{项} \qquad (3.18)$$

既在整体 $SU(2)_L$ 变换

$$\psi_L \to e^{-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{t}}{2}}\psi_L$$

$$R \to R \qquad (R = e_R, \mu_R, \tau_R)$$

下不变，也在整体 $U(1)_Y$ 变换

$$\psi_L \to e^{-i\beta\frac{Y}{2}}\psi_L = e^{i\frac{\beta}{2}}\psi_L$$

$$R \to e^{-i\beta\frac{Y}{2}}R = e^{i\beta}R$$

下不变。因此 L_l 在整体 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 变换下保持不变。

现在我们进一步要求 L_l 在定域 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 变换下也保持不变，这就要求把普通导数 ∂_μ 改为协变导数 D_μ

$$D_\mu\psi_L^e = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i\right)\psi_L^e$$

$$D_\mu e_R = \left(\partial_\mu + ig'B_\mu\right)e_R$$

于是

$$L_l = i\bar{\psi}_L^e \not{D}\psi_L^e + i\bar{e}_R \not{D} e_R + (e \to \mu)\text{项} + (e \to \tau)\text{项} \qquad (3.19)$$

注意，式中没有质量项，因为它正比于$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$，在$SU(2)$变换下不可能是不变的。由于$SU(2)$是要规范化的，故我们不能破坏这种对称性。所以，轻子的质量只能来自于$SU(2)$的自发破缺。同时我们从规范场的拉氏量密度(3.17)式也可看到，它同样未含质量项。为使轻子场和规范场获得质量，我们将借助 Higgs 机制来实现对称性自发破缺。

5. 对称性自发破缺—Higgs 机制

在(3.17)式中，有四个规范玻色子，都是零质量的，其中一个带电荷$+1$，一个带电荷-1，另外两个是中性的。实验上只有光子是零质量，为使其它三个规范玻色子获得质量必须使规范群$SU(2)_L \times U(1)_Y$自发破缺。按 Higgs 机制，当规范场和基本标量场（Higgs 场）相互作用时，若有对称性自发破缺存在，则 Goldstone 玻色子和规范玻色子将以特殊的机制结合起来，使规范玻色子获得质量，而相应的 Goldstone 玻色子将变成规范玻色子的纵向自由度，这就消除了零质量的 Goldstone 玻色子，同时一个中性的标量粒子也将获得质量，这就是所谓的 Higgs 机制。因此必须有三个 Goldstone 粒子，分别带电荷± 1，0。另一方面，只有标量场属于$SU(2)_L$二重态时，它才能与左手费米子二重态及右手费米子单态组成$SU(2)_L$不变的 Yukawa 耦合。这就要求引入一个$SU(2)_L$二重态的 Higgs 复标量场

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

其中各分量的电荷量子数（$Q_{\phi^+} = 1, Q_{\phi^0} = 0$）可通过要求 Yukawa 耦合项的电荷守恒而得到，再利用(3.16)式可得到 Higgs 场的超荷为$Y = 1$。于是，满足$SU(2)_L \times U(1)_Y$规范不变的 Higgs 场的协变导数为

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - i\frac{g'}{2}B_\mu - i\frac{g}{2}\tau^i W_\mu^i)\Phi \qquad (3.21)$$

因此 Higgs 场的拉氏量密度为

$$L_H = (D_\mu \Phi)^+ (D_\mu \Phi) - V(\Phi) \qquad (3.22)$$

其中

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda(\Phi^+ \Phi)^2 \qquad (3.23)$$

Higgs 场与轻子场的 Yukawa 耦合为

$$L_{H-L} = f^{(e)}\left(\bar{\psi}_L^e \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^+ \psi_L^e\right) + f^{(\mu)}\left(\bar{\psi}_L^\mu \Phi \mu_R + \bar{\mu}_R \Phi^+ \psi_L^\mu\right) + f^{(\tau)}\left(\bar{\psi}_L^\tau \Phi \tau_R + \bar{\tau}_R \Phi^+ \psi_L^\tau\right) \tag{3.24}$$

于是，包含规范场，轻子场和 Higgs 场及轻子场和 Higgs 场的 Yukawa 耦合的总的拉氏量密度为

$$L = L_g + L_l + L_H + L_{H-l} \tag{3.25}$$

如前所讨论，当 $\mu^2 > 0$， $\lambda > 0$ 时，Φ 场有对称性自发破缺，并且其真空期望值为

$$\langle \Phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v = \left(\mu^2 / \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.26}$$

显然对 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的生成元 T_L^i 及 Y，

$$T_L^i \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0, \qquad Y \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0$$

而

$$Q \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \left(T_L^3 + \frac{Y}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

由此可知，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺，但仍保留一个以生成元为电荷的电磁 $U(1)_{em}$ 规范不变性

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em}$$

6. 在么正规范中的粒子谱和相互作用

相应于破缺对称性的生成元 T_1， T_2 和 $(T_3 - Y/2) = 2T_3 - Q$ 的规范玻色子，应该获得质量。为看清这点，我们可将 Higgs 二重态参数化

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\equiv U^{-1}(\zeta) \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \eta(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \exp\left(i \vec{\zeta}(x) \cdot \vec{\tau} / v\right) \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \eta(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &\approx < \Phi >_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_2 + i\zeta_1 \\ \eta(x) - i\zeta_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2}\omega^+ \\ v + \eta(x) - iz^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 $\omega^\pm$ 和 z^0 是 Goldstone 玻色子。因此原来的两个复数场 Φ^+, Φ^0 现在用 4 个实场 $\zeta_i(x)$ 和 $\eta(x)$ 来表示。它们的真空期望值（VEV）为

$$\langle 0 | \zeta_i | 0 \rangle = \langle 0 | \eta | 0 \rangle = 0 \tag{3.28}$$

为了显示粒子谱，我们通过 $SU(2)_L$ 的规范变换来过渡到么正规范，

$$\Phi' = U(\zeta)\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\nu+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

或者

$$\Phi'(x) = \frac{\nu+\eta(x)}{\sqrt{2}}\chi\,, \qquad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

当然，轻子场，规范场也均须做规范变换，但拉氏量密度(3.25)式的形式保持不变，但是现在对应 Goldstone 的场 $\zeta_i(x)$ 在规范变换后消失了。

下面我们用变换后的新场来表示拉氏量(3.25)式。首先，

$$L_H = (D_\mu\Phi')^{+}(D^\mu\Phi') - V(\Phi') \tag{3.30}$$

式中

$$D_\mu\Phi' = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}'_\mu - i\frac{g'}{2}B'_\mu\right)\left[\frac{\nu+\eta(x)}{\sqrt{2}}\right]\chi \tag{3.31}$$

$$V(\Phi') = \mu^2\eta^2 + \lambda\nu\eta^3 + \frac{\lambda}{4}\eta^4\,, \tag{3.32}$$

以及

$$\begin{aligned} L_{H-l} &= f^{(e)}\left(\overline{\psi}_L^{e'}\Phi' e_R' + \bar{e}_R'\Phi^{+'}\psi_L^{e'}\right) + (e\to\mu)\text{项} + (e\to\tau)\text{项} \\ &= f^{(e)}\left[(\bar{\nu}_e', \bar{e}')_L\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\eta(x)+\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R' + \bar{e}_R'\left(0, \frac{\eta(x)+\nu}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \nu_e' \\ e \end{pmatrix}_L\right] \\ &\quad + (e\to\mu)\text{项} + (e\to\tau)\text{项} \\ &= \frac{f^{(e)}}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_L'\bar{e}_R'\eta + \bar{e}_L' e_R'\nu + \bar{e}_R' e_L'\eta + \bar{e}_R e_L\nu\right] \\ &\quad + (e\to\mu)\text{项} + (e\to\tau)\text{项} \\ &= \frac{f^{(e)}}{\sqrt{2}}\bar{e}' e'\eta + \frac{f^{(2)}\nu}{\sqrt{2}}\bar{e}' e' + (e\to\mu)\text{项} + (e\to\tau)\text{项} \end{aligned} \tag{3.33}$$

由(3.32)和(3.33)式可以看到：

a. 物理的 Higgs 标量粒子获得质量

$$m_H = \sqrt{2}\mu = (2\lambda)^{1/2}\nu \tag{3.34}$$

b. 轻子 e、μ 和 τ 获得质量

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{(2)} v, \qquad m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{(\mu)} v$$
$$m_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{(\tau)} v \tag{3.35}$$

而中微子ν_e和ν_μ及ν_τ未获得质量。

c. 规范玻色子质量

从(3.30)式中的$(D_\mu \Phi')^2$项可获得矢量玻色子的质量项

$$\begin{aligned}
&\frac{v^2}{2}\chi^+\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu' + \frac{g'}{2}B_\mu'\right)\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^{\mu\prime} + \frac{g'}{2}B'^{\mu}\right)\chi \\
&= \frac{v^2}{8}\left\{g^2\left[(W_\mu'^{1})^2 + (W_\mu'^{2})^2\right] + (gW_\mu'^{3} - g'B'_\mu)^2\right\} \\
&\equiv m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu
\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中

$$m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} = \frac{g^2 v^2}{8}\left[(W'^{1}_{\ \mu})^2 + (W'^{2}_{\ \mu})^2\right] \tag{3.37}$$

因此

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W'^{1}_{\ \mu} \mu i W'^{2}_{\ \mu}\right) \tag{3.38}$$

以及

$$m_W^2 = g^2 v^2 / 4 \tag{3.39}$$

对于中性矢量玻色子，由于$U(1)_{em}$来破缺 $Q\langle\Phi\rangle_0 = 0$，故相应的规范玻色子（光子）仍未获得质量，而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8}\left(gW'^{3}_{\ \mu} - g'B'_\mu\right)^2 \\
&= \frac{v^2}{8}\left(W'^{3}_{\ \mu}, B'_\mu\right)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W'^{3\mu} \\ B'^{\mu} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(Z_\mu, A_\mu\right)\begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中我们已通过下列正交变换对角化了质量矩阵

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W'^{3}_{\ \mu} \\ B'_\mu \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

或者

$$\begin{pmatrix} W'^{3}_{\mu} \\ B'_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mu} \\ A_{\mu} \end{pmatrix}$$

其中

$$tg\theta_W = \frac{g'}{g}, \tag{3.42}$$

$$m_Z^2 = v^2\left(g^2 + g'^2\right)/4 = \frac{v^2 g^2}{4}\left(1 + \frac{g'^2}{g^2}\right) = \frac{v^2 g^2}{4\cos^2\theta_W} \tag{3.43}$$

或者

$$m_Z = \frac{vg}{2}\frac{1}{\cos\theta_W} \tag{3.44}$$

这表明中性矢量玻色子 Z_μ 获得质量，$m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}$，而由(3.42)式定义的角 θ_W 称作 Weinberg 角。我们可以定义一个无量纲的参数

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2\cos^2\theta_W}$$

它体现了中性和带电有效拉氏量的相对强度（$J^{0\mu}J^0_\mu / J^{+\mu}J^-_\mu$），

$$\rho = \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W M_Z^2} / \frac{g^2}{8M_W^2}$$

在标准模型中，在树图水平上 ρ 参数为1，这并非模型的规范不变性所导致的一个普遍结果，而是标准模型给出的一个成功预言。事实上，利用(3.39)式和(3.42)及(3.43)式，可得到 ρ 参数的值为

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2\cos^2\theta_W} = \frac{1}{\frac{v^2}{4}\left(g^2 + g'^2\right)\frac{1}{1+\left(g'/g\right)^2}} = 1 \tag{3.45}$$

对于有任意个 Higgs 多重态 ϕ_i 的模型，假定 ϕ_i 的同位旋为 T_i，同位旋第三分量为 T_i^3，以及真空期望值为 v_i，则该模型的 ρ 参数为

$$\rho = \frac{\Sigma_i\left[T_i\left(T_i+1\right) - \left(T_i^3\right)^2\right]v_i^2}{2\Sigma_i\left(T_i^3\right)^2 v_i^2},$$

可以证明，对于任意个二重态，其值均为1。因此，ρ 参数是对模型的 Higgs 部分的同位旋结构的一个很好的检验。正如后面我们将看到，它对辐射修正是敏感的。

d. 带电流、中性流和电磁流

从轻子的拉氏量 L_l，可得规范场与轻子相互作用部分为

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}_L^e \gamma_\mu \left(\frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}'_\mu - \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \psi_L^e - \bar{e}_R g' \gamma_\mu B'_\mu e_R + (e \to \mu)\text{项} + (e \to \tau)\text{项} \\
&= g\left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_L^e \vec{\tau} \gamma_\mu \psi_L^e \right) \vec{W}'^\mu + \frac{1}{2} g' \left(-\bar{\psi}_L^e \gamma_\mu \psi_L^e - 2\bar{e}_R \gamma_\mu e_R \right) B'^\mu \\
&\quad + (e \to \mu)\text{项} + (e \to \tau)\text{项} \\
&\equiv \left(g J_\mu^1 W'^{1\mu} + g J_\mu^2 W'^{2\mu} \right) + \left(g J_\mu^3 W'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu \right)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

由(3.46)式我们可直接得到

(i) 带电流相互作用

$$\begin{aligned}
L_{cc} &= g J_\mu^1 W'^{1\mu} + g J_\mu^2 W'^{2\mu} \\
&= \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(J_\mu^- W^{-\mu} + J_\mu^+ W^{+\mu} \right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

其中$W_\mu^\pm$由(3.38)式给出，而

$$\begin{aligned}
J_\mu^- \equiv J_\mu &= 2\left(J_m^1 - i J_\mu^2 \right) \\
&= \bar{\psi}_L^e \left(\tau^1 - i\tau^2 \right) \gamma_\mu \psi_L^e + (e \to \mu)\text{项} + (e \to \tau)\text{项} \\
&= 2\bar{\psi}_L^e \tau^- \gamma_\mu \psi_L^e + (e \to \mu)\text{项} + (e \to \tau)\text{项} \\
&= \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu + \bar{\tau} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\tau
\end{aligned} \tag{3.48}$$

这正好是(3.9)式中的轻子弱流。同理可表明流$J_\mu^+ \equiv 2\left(J_\mu^1 + i J_\mu^2 \right)$也是轻子弱流。按如（图 3.1）所示的低能四费米子相互作用，我们可得到有效拉氏量密度为（W^+的动量$k^2 \to 0$）

$$L_{eff}^{cc} = \frac{-g^2}{8} J_\mu^- \left(\frac{1}{M_W^2} \right) J^{+\mu} = \frac{-g^2}{8M_W^2} J_\mu^- J^{+\mu} \tag{3.49}$$

这正是(V-A)型流-流理论的有效拉氏量，与(3.3)式比较后得到

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \tag{3.50}$$

由(3.39)式，得

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2g^2 v^2} = \frac{1}{2v^2}$$

于是

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \approx 246\text{GeV}$$

(ii) 中性流及电磁流

由(3.46)式可得到

$$
\begin{aligned}
L_{NC} &= gJ_\mu^3 W'^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B'^\mu \\
&= gJ_\mu^3 \left(\cos\theta_W Z^\mu + \sin\theta_W A^\mu\right) + gtg\theta_W \left(J_\mu^{em} - J_\mu^3\right) \\
&\quad \times \left(\cos\theta_W A^\mu - \sin\theta_W Z^\mu\right) \\
&= g\sin\theta_W J_\mu^{em} A^\mu \\
&\quad + \left(g\cos\theta_W J_\mu^3 - gtg\theta_W \sin\theta_W J_\mu^{em} + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} J_\mu^3 \right) Z^\mu \\
&= eJ_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W}\left(J_\mu^3 - \sin^2\theta_W J_\mu^{em}\right) Z^\mu \\
&= eJ_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^0 Z^\mu
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

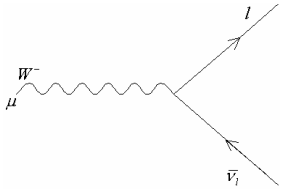
式中

$$
\begin{aligned}
& e = g\sin\theta_W, \\
& J_\mu^0 = J_\mu^3 - \sin^2\theta_W J_\mu^{em} \\
&\quad = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu T_L^3 (1-\gamma_5)\psi - \sin^2\theta_W Q \bar{\psi}\gamma_\mu \psi \\
&\quad = \bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\left(T_L^3 - 2\sin^2\theta_W Q_f\right) - T_L^3\gamma_5}{2}\psi, \\
& \frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^0 Z^\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\left(T_L^3 - 2\sin^2\theta_W Q_f\right) - T_L^3\gamma_5}{2\cos\theta_W \sin\theta_W}\psi Z^\mu \\
&\qquad = e\bar{\psi}\gamma_\mu \left(v_f - a_f\gamma_5\right)\psi Z^\mu,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

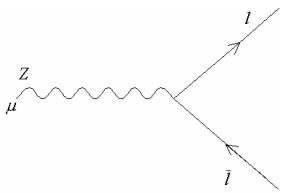
其中

$$
v_f \equiv \frac{T_f^3 - 2Q_f \sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W \sin\theta_W}, \quad a_f \equiv \frac{T_f^3}{2\cos\theta_W \sin\theta_W} \tag{3.53}
$$

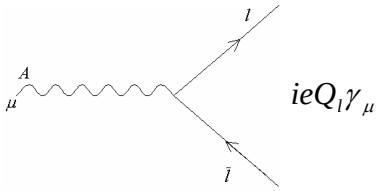
以上三种相互作用的顶点可用费曼图表示如下：



$$\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$



$$ie\gamma_\mu\left(v_f - a_f\gamma_5\right)$$



e. 关于质量谱的小结

总的说来，在 W-S 模型中，$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性自发破缺到 $U(1)_{em}$。除轻子 e、ν_e、μ、ν_μ、τ、ν_τ 外，该模型还有如下几种物理粒子：两个带电中间玻色子 $W^{\pm}$，一个中性中间玻色子 Z^0，一个光子 A 和一个中性 Higgs 标量粒子 η。其中规范玻色子 $W^{\pm}$ 和 Z^0 获得了质量，带电轻子 e、μ、τ 也获得质量，剩下中微子 ν_e、ν_μ、ν_τ 和光子是无质量的。

f. 关于 m_W， m_Z 质量的讨论

根据前面讨论，我们已建立起如下关系：

$$m_W = \frac{\nu g}{2}, \quad m_Z = \frac{\nu g}{2\cos\theta_W}, \quad e = g\sin\theta_W$$

或者

$$m_W = \frac{e\nu}{2\sin\theta_W}, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W}$$

利用

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}},$$

$$\nu = \left(\sqrt{2}G_F\right)^{-1/2} = 246.22\text{GeV},$$

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} = 0.3028211$$

我们有

$$m_W = \frac{37.2802}{\sin\theta_W}(GeV),$$

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W} = \frac{2m_W\sin\theta_W}{2\sin\theta_W\cos\theta_W} = \frac{74.5604}{\sin 2\theta_W}(GeV)$$

由 Weinberg 角的实验值：$\sin^2\theta_W = 0.2259$，可得到

$$m_W = 78.44GeV, \quad m_Z = 89.15GeV$$

而它们目前的实验值为

$$m_W = (80.41 \pm 0.09)GeV \quad (p\bar{p})$$
$$= (80.37 \pm 0.09)GeV \quad (\text{LEP})$$
$$m_Z = (91.1867 \pm 0.0021)GeV \quad (\text{LEP})$$

由此可知，理论值和实验值存在大约百分之几的偏离，特别是m_W，理论与实验偏离较大一点，这表明理论值精度有待进一步提高。

以上对W的质量的理论预言只是在树图水平上给出的，未考虑辐射修正。为了在理论上比较精确地预言W的质量，至少应包含单圈辐射修正效应。下面给出一个简要的讨论，在后面章节中将有详细介绍。

在前面我们曾在树图水平上，通过比较 Fermi 理论结果与 W-S 理论结果给出了关系

$$m_W^2\left(1-\frac{m_W^2}{m_Z^2}\right)=\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F}$$

在考虑了对费米 V-A 理论的单圈电磁辐射修正以后，可给出μ轻子的衰变宽度为

$$\frac{1}{\tau_\mu}=\frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}\left(1-\frac{8m_e^2}{m_\mu^2}\right)\left[1+\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{25}{4}-\pi^2\right)\right]$$

在 W-S 模型中，包括了单圈电弱辐射修正以后，给出的μ轻子的衰变宽度为

$$\frac{1}{\tau_\mu}=\frac{\alpha^2}{384\pi^2}\frac{m_\mu^5}{m_W^4 S_W^4}\left(1-\frac{8m_\theta^2}{m_\mu^2}\right)\left[1+\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{25}{4}-\pi^2\right)\right]\times\frac{1}{(1-\Delta r)^2}$$

比较两者得出

$$m_W^2\left(1-\frac{m_W^2}{m_Z^2}\right)=\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\frac{1}{1-\Delta r}$$

或者

$$m_W=\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\right)^{1/2}\frac{1}{S_W}(1+\Delta r)$$

通过具体的单圈辐射修正计算，可算出Δr，于是得到包含了单圈辐射修正的W玻色子和Z玻色子的质量为

$$m_W\approx 81.2\pm 0.7GeV\,,\qquad m_Z\approx 92.3\pm 0.7GeV$$

由此可看出，现在理论值已经接近实验值。

7. 规范固定项

在么正规范下物理谱变得很简单：$W^\pm$和Z^0变得有质量了，而无质量的 Goldstone 粒子不出现在谱中。

在这种规范下，矢量玻色子的传播子为

$$P^V_{\mu\nu}(V)=\frac{-i}{q^2-M_V^w}\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{M_V^2}\right)$$

注意，因为有正比于$q_\mu q_\nu$的项存在，当$q\to\infty$时$P^V_{\mu\nu}(V)$并不象$\sim 1/q^2$那样变化。这种性质会带来某些不良后果。首先，在高能区，包含矢量玻色子传播子的不变振幅的发散项相消变得非常复杂。更糟糕的是，这将使理论的可重整性的证明变得很难，因为需要对圈图做幂次计算分析。

对这个问题的一个解决方法是在原始拉氏量加上规范固定项，

$$L_{gf}=-\frac{1}{2}\left(2G_W^+G_W^-+G_Z^2G_A^2\right)$$

其中，

$$G_W^\pm=\frac{1}{\sqrt{\xi_W}}\left(\partial^\mu W_\mu^\pm \mu i\xi_W M_W\omega^\pm\right),$$

$$G_Z=\frac{1}{\sqrt{\xi_Z}}\left(\partial^\mu Z_\mu-\xi_Z M_Z z\right),$$

$$G_A=\frac{1}{\sqrt{\xi_A}}\partial^\mu A$$

这里$\omega\pm$和z是 Goldstone 玻色子。这就是所谓R_ξ规范。

注意到，例如，

$$-\frac{1}{2}G_Z^2=-\frac{1}{2\xi_Z}\left(\partial_\mu Z^\mu-\xi_Z M_Z z\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}Z_\mu\left(\frac{1}{\xi_Z}\partial^\mu\partial\nu Z_\nu\right)-\frac{1}{2}\xi_Z M_Z^2 z^2+M_Z z\partial^\mu Z_\mu$$

其中，最后一项混合了 Goldstone 粒子（z）和矢量玻色子（$\partial^\mu Z_\mu$），它被来标量拉氏量中的完全相同的项所抵消。

在R_ξ规范下，矢量玻色子的传播子可以表示为

$$P^{R_\xi}_{\mu\nu}(V)=\frac{-i}{q^2-M_V^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi_V)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2-\xi_V M_V^2}\right]$$

在这种规范下，质量为$\sqrt{\xi_V}M_V$的 Goldstone 粒子将留在粒子谱中，它们的传播子的形式为

$$P^{R_\xi}(GB)=\frac{i}{q^2-\xi_V M_V^2}$$

而物理的 Higgs 粒子的传播子不变。

在极限$\xi_V\to\infty$下，Goldstone 玻色子消失，并回到么正规范。其它

规范选择，比如朗道规范（$\xi_V \to 0$），费曼规范（$\xi_V \to 1$），均为 R_ξ 规范所包含。因此，所有的物理过程都不应当依赖于参数 ξ_V。

8. 对 $\sin^2\theta_W$ 的低能测量

Weinberg 角的值并不能为标准模型所预言，而必须从实验中得到。一旦我们测量了 θ_W（当然，还包括 e），则 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 耦合常数 g 和 g' 的值就可以确定。

在低能区，$\sin^2\theta_W$ 的值可以从各种不同的反应得到，例如：

- 中微子－轻子的弹性散射截面

$$\begin{matrix} \nu_\mu & \nu_\mu \\ \bar{\nu}_\mu + e \to & \bar{\nu}_\mu + e \end{matrix}$$

其中包含了 t 道 Z 交换的贡献，其散射截面为

$$\sigma = \frac{G_F^2 M_e E_\nu}{2\pi}\left[\left(g_V^e \pm g_A^e\right)^2 + \frac{1}{3}\left(g_V^e \mp g_A^e\right)^2\right]$$

电子与 Z 的矢量和轴矢量耦合常数分别为

$$g_V^e = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W\ ,\quad g_A^e = -\frac{1}{2}$$

前者是依赖于 $\sin^2\theta_W$ 的。对 ν_e 反应，我们可通过做代换 $g_{V,A}^e \to \left(g_{V,A}^e + 1\right)$ 而得到相应的反应截面，因为在此情形下还存在 W 交换的贡献。当测量了比值 $\sigma(\nu_\mu e)/\sigma(\bar{\nu}_\mu e)$ 后，系统不确定性相消，便可得到 $\sin^2\theta_W = 0.221 \pm 0.008$。

- 中微子和同位旋标量靶（N）的深度非弹散射。中性流（NC）和带电流（CC）的散射截面的比值为

$$R_{\nu(\bar{\nu})} \equiv \frac{\sigma^{NC}\left[\nu(\bar{\nu})N\right]}{\sigma^{CC}\left[\nu(\bar{\nu})N\right]}$$

它对 $\sin^2\theta_W$ 的依赖为

$$R_{\nu(\bar{\nu})} \approx \frac{1}{2} - \sin^2\theta_W + \frac{5}{9}\left[1 + r(1/r)\right]\sin^4\theta_W$$

其中 $r \equiv \sigma^{CC}(\bar{\nu}N)/\sigma^{CC}(\nu N) \approx 0.44$。对这些反应的测量得到 $\sin^2\theta_W = 0.226 \pm 0.004$。

- 原子宇称破坏的测量。在铯、钍和铋中，以 Z^0 为媒介的电子－核子相互作用，可用一个有效相互作用哈密顿量表示为

$$H = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} Q_W \gamma_5 \rho_{nuc}$$

这里Q_W是依赖于 Weinberg 角的“弱荷”，

$$Q_W \approx Z\left(1-4\sin^2\theta_W\right)-N$$

其中$Z(N)$是质子（中子）的数目。这种测量给出$\sin^2\theta_W = 0.220 \pm 0.003$。

除此之外，对 Weinberg 角更精确的测量来自高能反应，例如在Z^0能区的电子－正电子对撞实验中。

9. $e^+e^- \to W^+W^-$散射截面

以$e^+e^- \to W^+W^-$的过程为例，我们可以看到标准模型是如何保持散射截面的么正性的，该过程的有关费曼图如下，

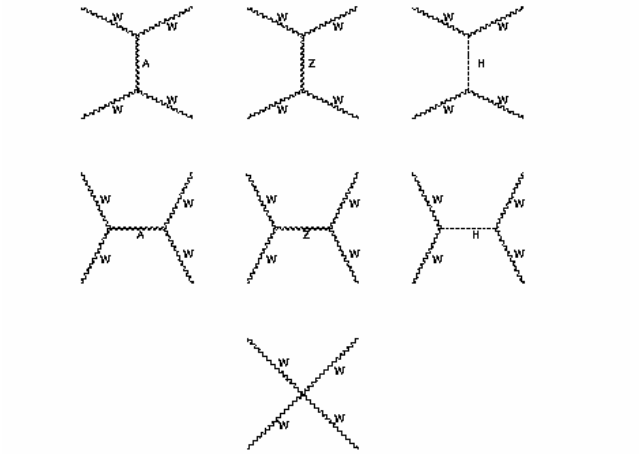


图 3.2

第一个图是t 道中微子交换，第二个图是s道光子交换。这两个图形出现于任何包含了带电中间矢量玻色子的理论。然而，标准模型引入了两个新的贡献：中性流贡献（Z 交换）和 Higgs 玻色子交换（H ）。

中微子图形的领头的p 波发散正比于s，与过程$\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$类似。然而在这里，它正好被光子（A ）和Z 的贡献之和完全抵消。这种精确相消是理论的规范结构的直接结果。

然而s波散射振幅是正比于$\left(m_f\sqrt{s}\right)$的，因而在高能仍然是发散的。这个剩余的发散将被 Higgs 交换图所抵消。从而，标量玻色子的存在提供了s波贡献，并有正比于费米子质量的耦合常数，这是理论不可缺少的部分。用 Quigg 的话来说，

“如果 Higgs 玻色子并不存在，我们就必须创造一个非常类似于它的东西。” (“*If the Higgs boson did not exist, we should have to invent something very much like it.*”)

§3.2.3 加入夸克情形

以上有关轻子的 W-S 模型的讨论很容易推广到三代夸克情形。但是与轻子情形不同的是，夸克无论是 $SU(2)_L$ 的二重态或是单态均含有质量，因此它们的质量生成机制与轻子情形比较要复杂一些，特别是在一般的情况下，不同代的夸克还可能出现混合，下面我们先归纳一下三代夸克的基本特征，然后从夸克—Higgs 的 Yukawa 耦合介绍起。

三代夸克 u,d,c,s,t,b 分别构成 $SU(2)_L$ 的左手二重态：

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

及右手单态：$u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R$。其中所有上夸克(u,c,t)-u 类有电荷 $2/3$，所有下夸克(d,s,b)-d 类有电荷 $-1/3$，均以正电子电荷 e 为单位(电子电荷为 $-e$)。

对于左手二重态夸克，超荷为

$$Y(q_L) = 2Q(q_L) - 2T_3(q_L) = \begin{cases} \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}, & \text{对于}u\text{类夸克} \\ -\dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{1}{3}, & \text{对于}d\text{类夸克} \end{cases}$$

对于右手单态夸克，超荷为

$$Y(q_R) = 2Q(q_R) - 2T_3(q_R) = \begin{cases} \dfrac{4}{3} - 0 = \dfrac{4}{3}, & \text{对于}u\text{类夸克} \\ -\dfrac{2}{3} - 0 = -\dfrac{2}{3} & \text{对于}d\text{类夸克} \end{cases}$$

我们用如下符号来表示三代左手及右手夸克

$$Q_{iL} \equiv \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right)$$

$$u_{iR} \equiv (u_R, c_R, t_R), \qquad d_{iR} \equiv (d_R, s_R, b_R)$$

或者

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, \quad u_{iR}, \quad d_{iR} \qquad (i = 1,2,3)$$

为了同时生成 u-类夸克和 d-类夸克质量，除了需要引入 $Y=1$ 的 Higgs 场 Φ 外，还需要它的共轭场

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^{+*} \\ \Phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^{-} \\ \Phi^{0*} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi^{0*} \\ -\Phi^{-} \end{pmatrix}$$

$$Y(\tilde{\Phi}) = -1$$

在么正规范下，

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta(x) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v+\eta(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 夸克-Higgs 场的 Yukawa 耦合

最一般的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不变的夸克-Higgs Yukawa 耦合为

$$L_{H-q} = f_{ij}^{(d)} \bar{d}_{iR}(\Phi^+ Q_{jL}) + f_{ij}^{(u)} \bar{u}_{iR}(\tilde{\Phi}^+ Q_{jL}) + h.c. \qquad (3.54)$$

这个相互作用项共计含 18 个复耦合系数 $f_{ij}^{(d)}, f_{ij}^{(u)}$，但矩阵$\left(f_{ij}^{(d)}\right)$，$\left(f_{ij}^{(u)}\right)$不一定是对称的或厄米的。在 CP 变换下，(3.54)式变换为它的厄米共轭态，但不改变相应的耦合系数。因此 CP 的运算等价于在(3.54)式中对耦合系数分别做如下代换

$$f_{ij}^{(d)} \leftrightarrow f_{ij}^{(d)*}, \qquad f_{ij}^{(u)} \leftrightarrow f_{ij}^{(u)*} \qquad (3.55)$$

如果 CP 是(3.54)的对称性，则意味着矩阵$\left(f_{ij}^{(d)}\right)$，$\left(f_{ij}^{(u)}\right)$是实的，即

$$f_{ij}^{(d)} = f_{ij}^{(d)*}, \qquad f_{ij}^{(u)} = f_{ij}^{(u)*} \qquad (3.56)$$

然而并不存在一条基本原理要求条件(3.56)式必须满足。

由 Φ 及 $\tilde{\Phi}$ 的真空期望值，可分别得到 u-类夸克和 d-类夸克的质量项，

$$\begin{aligned} &(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)_R M^u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_L + h.c. \\ &(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3)_R M^d \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_L + h.c. \end{aligned} \qquad (3.57)$$

其中

$$M_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} f_{ij}^{(u)}, \qquad M_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} f_{ij}^{(d)} \qquad (3.58)$$

是代空间的夸克质量矩阵，每一个矩阵含有 9 个复数矩阵元，这些矩

阵一般并非是厄米的。我们知道，对于夸克场作么正变换将不改变场的反对易关系。此外，我们可以证明，对任何一个复数矩阵，总可以通过左乘和右乘一个适当的么正矩阵使其对角化，且有非负对角元，即对任一复数矩阵 M，存在非奇异的么正矩阵 A 和 B，使得

$$A^{-1}MB = D$$

其中 D 是对角矩阵，具有非负对角元。为了证明这一点，注意到 M^+M 是厄米的，具有实的非负本征值，MM^+ 亦然。M^+M 的本征值和 MM^+ 相同。所以，存在非奇异的矩阵 A 和 B 使得

$$A^+MM^+A = D^2$$

$$B^+M^+MB = D^2$$

这些方程的解是

$$M = ADB^+，\text{或者 } A^+MB = D$$

因此，在破缺电弱对称性之前，我们可以通过对手征夸克场做适当么正的变换，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{L,R} = U_{L,R} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R} \qquad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_{L,R} = D_{L,R} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R} \tag{3.59}$$

而将质量矩阵 M^u 和 M^d (对称性破缺后)对角化，

$$U_R^{-1}M^uU_L = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

$$D_R^{-1}M^dD_L = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

其中 U_R, U_L, D_R 和 D_L 是么正矩阵。从(3.59)式可看出弱作用本征态 (u_1, u_2, u_3) 和 (d_1, d_2, d_3) 分别是质量本征态 (u, c, t) 和 (d, s, b) 的线性迭加，且均保持着相同的手征性（即左手态由左手态迭加，右手态由右手态迭加）。

利用以上结果，我们可重新将(3.54)式用质量本征态表示为

$$
\begin{aligned}
L_{H-q} &= \left(\bar{d}_1,\bar{d}_2,\bar{d}_3\right)_R M^d \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&+ \left(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\right)_R M^u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&= \left(\bar{d},\bar{s},\bar{b}\right)_R D_R^+ M^d D_L \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&+ \left(\bar{u},\bar{c},\bar{t}\right)_R U_R^+ M^u U_L \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&= \left(\bar{d},\bar{s},\bar{b}\right)_R \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&+ \left(\bar{u},\bar{c},\bar{t}\right)_R \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&= \sum_i \left(m_d^i \bar{d}_R^i d_L^i + m_u^i \bar{u}_R^i u_L^i\right)\left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right) + h.c. \\
&= \sum_i \left(m_d^i \bar{d}^i d^i + m_u^i \bar{u}^i u^i\right)\left(1+\frac{\eta(x)}{v}\right)
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

其中第一项为夸克的质量项($m_d^i \bar{d}^i d^i + m_u^i \bar{u}^i u^i$)，第二项即夸克—Higgs 的 Yukawa 耦合项。

2. 带电流，中性流和电磁流

- 将夸克的弱作用带电流用质量本征态来表示，则有

$$
\begin{aligned}
J_\mu^+ &= \left(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\right)_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_L = \left(\bar{u},\bar{c},\bar{t}\right)_L U_L^+ D_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \\
&= \left(\bar{u},\bar{c},\bar{t}\right)_L \gamma_\mu V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

其中，$V = U_L^+ D_L$ 是 3×3 的么正矩阵，通常叫 CKM（Cabibbo-Kobayashi-Maskawa）混合矩阵。

- 对于电磁流和中性流

$$J_\mu^{em} = \sum_{f=u,\cdots t} eQ_f \bar{f}\gamma_\mu f = \sum_{f=u,\cdots t} eQ_f \left[\bar{f}_L\gamma_\mu f_L + \bar{f}_R\gamma_\mu f_R\right]$$

$$J_\mu^0 = \sum_{f=u,\cdots t}\left\{\bar{f}_L\gamma^\mu\left(T_L^3 - Q_f \sin^2\theta_W\right)\bar{f}_L + \bar{f}_R\gamma^\mu\left(-Q_f \sin^2\theta_W\right)f_R\right\}$$

显然，由于它们的双线性形式均不改变味，故不存在夸克混合。事实上，由下列关系可看出这点

$$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)_L\gamma^\mu\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_L = (\bar{u},\bar{c},\bar{t})_L\gamma^\mu U_L^+U_L\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_L = (\bar{u},\bar{c},\bar{t})_L\gamma^\mu\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_L$$

$$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)_R\gamma^\mu\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_R = (\bar{u},\bar{c},\bar{t})_R\gamma^\mu U_R^+U_R\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_R = (\bar{u},\bar{c},\bar{t})_R\gamma^\mu\begin{pmatrix}u\\c\\t\end{pmatrix}_R$$

对于 d-类夸克同样可写出以上表示式。

- 味的混合

由（3.63）式，夸克带电弱流为

$$J_\mu^+ \sim (\bar{u},\bar{c},\bar{t})_L\gamma_\mu V\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}_L$$

按约定，我们认为混合在$T_L^3 = -\frac{1}{2}$的 d-类夸克之间进行，即

$$\begin{pmatrix}d'\\s'\\b'\end{pmatrix}_L = V\begin{pmatrix}d\\s\\b\end{pmatrix}_L \tag{3.64}$$

因此夸克的弱作用的本征态为

弱同位旋二重态：$\begin{pmatrix}u\\d'\end{pmatrix}_L,\begin{pmatrix}c\\s'\end{pmatrix}_L,\begin{pmatrix}t\\b'\end{pmatrix}_L$

弱同位旋单态：$u_R, c_R, t_R, d_R, s_R, b_R$

- GIM 机制

我们现在再来回顾所谓的 GIM 机制。首先考察在引入了 Cabibbo 角后的强子中性流。用u和d'夸克来描述的强子中性流为

$$\begin{aligned}J_\mu^h &= \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + \bar{d}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)d'\\ &= \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + \cos^2\theta_C\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d + \sin^2\theta_C\bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s\\ &\quad + \cos\theta_C\sin\theta_C\left[\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s + \bar{s}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d\right]\end{aligned}$$

我们注意到上式最后一项产生了和通常弱相互作用同等强度的味改

变中性流（FCNC）。但实际观察到的 FCNC 过程是非常小的。比如，带电 K 介子通过带电流衰变的分支比为

$$BR\left(K^+_{u\bar{s}} \to W^+ \to \mu^+\nu\right) \approx 63.5\%$$

而包含 FCNC 的过程却仅为

$$BR\left(K^+_{u\bar{s}} \to \pi^+_{u\bar{d}}\nu\bar{\nu}\right) \approx 4.2\times10^{-10}$$

$$BR\left(K^L_{d\bar{s}} \to \mu^+\mu^-\right) \approx 7.2\times10^{-9}$$

1970 年，Glashow，Iliopoulos 和 Maiani 提出了 GIM 机制。他们考虑第四个不同味的夸克，即 charm（c），这个额外夸克的引入完善了夸克(u,d,c,s)和轻子(ν_e,e,ν_μ,μ)之间的对称性，并告诉我们夸克应构成弱同位旋二重态：

$$L_U \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u \\ \cos\theta_C d + \sin\theta_C s \end{pmatrix}_L$$

$$L_C \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} c \\ -\sin\theta_C d + \cos\theta_C s \end{pmatrix}_L$$

下面我们将看到，这正好与上面介绍的在味混合后的弱同位旋二重态的第一、二代相同。因此强子的中性流还得到一个新的正比于

$$\bar{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)c + \bar{s}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)s'$$

的贡献项，因而可以抵消掉产生 FCNC 过程的项。

3. CKM 混合矩阵

为了弄清(3.63)式中矩阵V的意义，我们先略去第三代夸克$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$，于是

$$J^+_\mu \propto (\bar{u},\bar{c})_L\gamma_\mu V\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L$$

其中V是2×2的么正矩阵，它的一般形式是

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times[SU(2)\text{矩阵}]$$

第一个因子可略去，因为它可以吸收到重新定义u和c的相因子中去。与欧拉角α,β,γ的转动相应的一个$SU(2)$矩阵，其最一般的形式为

$$V = e^{i\alpha\tau_3/2}e^{i\beta\tau_2/2}e^{-i\gamma\tau_3/2}$$

它的第一个和最后一个因子可以分别吸收进重新定义的（d,s）和（u,c）的相因子中。因此，我们可以取

$$V = e^{i\beta\tau_2/2} \xrightarrow{\beta/2=\theta} e^{i\theta\tau_2} = \cos\theta + i\tau_2 \sin\theta$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

其中 θ 是一个要由实验确定的任意角度，它就是在前面讨论过的 Cabibbo 角，其实验值为 $\theta \approx 1/4$。由于 V 是实的，所以拉氏量仍是实的，而且在时间反演下是不变的，所以根据 CPT 定理，它在 CP 下也是不变的。这表明，在只有两代夸克的 W-S 模型中不能解释 CP 破坏的实验现象(K 介子系统)。

在三代夸克的情况下，V 可通过重新定义夸克场的相位而约化为一个 $SU(3)$ 矩阵，因此它是 $e^{i\theta_1\lambda_1},\cdots,e^{i\theta_8\lambda_8}$ 之乘积，其中 λ_i 是 Gell-Mann 矩阵。它们中的 λ_3 和 λ_8 被取为对角矩阵，所以，有 8 个自由参数 $\theta_1,\cdots,\theta_8$。我们可以将 V 写成如下形式

$$V = e^{i\lambda_3\theta_3}e^{i\lambda_8\theta_8}Ue^{i\lambda_3\theta'_3}e^{i\lambda_8\theta'_8} \tag{3.65}$$

式中 U 是一个只含 4 个参数的 $SU(3)$ 矩阵，从而可以用除 λ_3,λ_8 之外的任何四个生成元构成。为了方便，我们选取它们为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5$ 和 λ_7。注意到 $[\lambda_2,\lambda_5]=i\lambda_7$，所以 λ_2,λ_5 和 λ_7 生成一个转动群。因此，可以用带有三个任意参量的三个正交矩阵和一个带有一个任意参数且行列式为1的么正矩阵一起构成矩阵 V：

$$V = R_2\tilde{U}R_1R_3$$

其中

$$\tilde{U} = e^{-i\delta/3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix},\quad R_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix},\qquad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

式中 $c_i \equiv \cos\theta_i, s_i \equiv \sin\theta_i$。$\tilde{U}$ 中的总相因子可吸收到夸克场中去，因此

$$V=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_2&s_2\\0&-s_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1&s_1&0\\-s_1&c_1&0\\0&0&e^{i\delta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_3&s_3\\0&-s_3&c_3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}c_1&s_1c_3&s_1s_3\\-s_1c_2&c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta}&c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\s_1s_2&-c_1s_2c_3-c_2s_3e^{i\delta}&-c_1s_2s_3+c_2c_3e^{i\delta}\end{pmatrix} \tag{3.66}$$

对 CKM 矩阵，利用么正性条件可以给出如下一般性的关系

$$\sum_{k=d,s,b}V_{ik}^{*}V_{jk}=\delta_{ij}\ ,\qquad i,j=u,c,t\ 。$$

从上述 9 个关系式中我们写下一个最有用的关系式

$$V_{ud}V_{ub}^{*}+V_{cd}V_{cb}^{*}+V_{td}V_{tb}^{*}=0\ , \tag{3.67}$$

该关系式可在复平面上形象地表示为一个三角形，叫做么正三角形。目前这个么正三角形关系式在文献上频繁地被讨论，因为它同时将几个重要矩阵元联系起来构成一个特殊关系，从而可用来检验标准模型及探索新物理。CKM 矩阵还可按 Woflenstein 的建议参数化为如下形式

$$V=\begin{pmatrix}V_{ud}&V_{us}&V_{ub}\\V_{cd}&V_{cs}&V_{cb}\\V_{td}&V_{ts}&V_{tb}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda^2/2&\lambda&\lambda^3A(\rho-i\eta)\\-\lambda&1-\lambda^2/2&\lambda^2A\\\lambda^3A(1-\rho-i\eta)&-\lambda^2A&1\end{pmatrix}+O(\lambda^4),$$

式中 $\lambda=\sin\theta_c$（θ_c 即 Cabibbo 角），高于 λ^3 的项可被忽略。λ,A,ρ,η 四个参数与原来的四个参数之间满足一定关系。

现回到 CKM 矩阵的原来形式，通过适当选择夸克场的符号（相当于相因子），可对转动角和相因子做出如下限制

$$0\le\theta_i\le\frac{\pi}{2}\ ,\qquad -\pi\le\delta\le\pi$$

如 $\delta\neq0$，则带电流可产生 CP 破坏效应。在文献中 CKM 矩阵有时也采用另一种参数形式，即用 $\delta+\pi$ 代替 δ，及用 $-\theta_1$ 代替 θ_1。

最后我们指出，当 $\theta_2=\theta_3=0$，$\delta=0$ 时，V 化为两代夸克情形的 Cabibbo 转动矩阵，

$$V=\begin{pmatrix}c_1&s_1&0\\-s_1&c_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

这里 θ_1 对应于 Cabibbo 角。

§3.2.4 电弱标准模型的拉氏量

这里我们总览一下电弱标准模型，并且给出一个完整的拉氏量。

1. 规范玻色子+标量场

由规范玻色子和标量场的拉氏量，可给出光子，W，Z 和 Higgs 玻色子的自由拉氏量。此外还给出矢量玻色子之间的三粒子和四粒子耦合、和与 Higgs 玻色子的耦合，以及 Higss 玻色子的自耦合。

$$\begin{aligned} L_{gauge}+L_{scalar} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}W^{+}_{\mu\nu}W^{-\mu\nu}+M_W^2W^{+}_{\mu}W^{-\mu} \\ & -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}+M_Z^2Z_{\mu}Z^{\mu}+\frac{1}{2}\partial_{\mu}H\partial^{\mu}H-\frac{1}{2}M_H^2H^2 \\ & +W^{+}W^{-}A+W^{+}W^{-}Z \\ & +W^{+}W^{-}AA+W^{+}W^{-}ZZ+W^{+}W^{-}AZ+W^{+}W^{-}W^{+}W^{-} \\ & +HHH+HHHH \\ & +W^{+}W^{-}H+W^{+}W^{-}HH+ZZH+ZZHH \end{aligned}$$

上式中矢量玻色子的自耦合项是被 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 规范不变性严格限制的，并且对于标准模型预言的任何小的偏离都将破坏不同费曼图之间的高能行为的精确相消，因为它们会导致散射截面随着能量增长的反常增长。因此仔细的研究矢量玻色子的自相互作用是检验标准模型的一个重要方面。

2. 轻子+Yukawa

轻子和相应的 Yukawa 耦合项给出了轻子的自由拉氏量和轻子同规范玻色子(γ，W，Z)的耦合及其轻子的质量，同时也给出了有质量轻子同 Higgs 玻色子的耦合。

$$\begin{aligned} L_{leptons}+L^{l}_{yuk} = & \sum_{l=e,u,\tau}\bar{l}(i\partial\!\!\!/-m_l)l+\sum_{\nu_l=\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}\bar{\nu}_l(i\partial\!\!\!/)\nu_l \\ & +\bar{l}lA+\bar{\nu}_llW^{+}+\bar{l}\,\nu_lW^{-}+\bar{l}lZ+\bar{\nu}_l\nu_lZ \\ & +\bar{l}lH \end{aligned}$$

即使中微子有质量，它们的 Dirac 质量项也容易纳入标准模型之中，其过程类似于夸克质量项的导出。

3. 夸克+Yukawa

夸克和相应的 Yukawa 耦合项，给出了自由 Dirac 项和夸克与规范玻色子及 Higgs 的耦合

$$L_{quarka} + L_{Yuk}^{q} = \sum_{q=u,\ldots t} \bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - m_q\right)q + \bar{q}qA + \bar{u}d'W^{+} + \bar{d}'uW^{-} + \bar{q}qZ + \bar{q}qH$$

除了上式中传播子和耦合项外，在通常的 R_ξ 规范下，还要考虑来自 Goldstone 和鬼场的贡献。Faddeev-Popov 鬼场对于抵消掉规范玻色子的非物理自由度(类时和纵向自由度)的贡献是重要的。

§3.2.5 反常的抵消

在电弱统一理论这样的规范理论中，由于规范对称是手征性的，一般存在着产生反常的费曼图，例如 $Z \to \gamma\gamma$ 、 $Z \to W^{+}W^{-}$ 和 $\gamma \to W^{+}W^{-}$ 等。为了得到自洽可重整化的理论，与规范场耦合的流必须没有反常。因此如果理论中存在一些反常项，它们必须相互消去。在本节中我们将讨论规范理论没有反常或反常消去的条件。在这一类更普遍的图形中，沿三角形圈的费米子种类可能发生变化，结果使得这个圈图的几个费米子传播子，一般地有着不同的质量。但是因为反常与质量无关，使得抵消只依赖于费米子的量子数。对一个特殊的过程，反常抵消的条件是

$$Tr\left[\left(V_1V_2 + V_2V_1\right)A\right] = 0 \tag{3.68}$$

其中 V_1 和 V_2 是两个矢量顶点处的电荷矩阵，而 A 是轴矢顶点出现的轴矢荷矩阵。下面我们将表述一个反常相消的普遍规则，而不去对每种情况逐一地证明条件(3.68)式。

考虑任何一个规范理论。设费米子多重态由列矢量 ψ 表示，它的元素都是狄拉克旋量。与规范场耦合的守恒流是

$$j_a^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}t_a\psi \tag{3.69}$$

其中 $t_a\left(a = 1,\Lambda\ ,N\right)$ 是规范群的生成元，由作用于 ψ 的矩阵表示。如果 ψ 的左手分量和右手分量在规范群作用下变换方式不同，则对左手和右手分量作用的 t_a 将由不同的矩阵 t_a^L 和 t_a^R 表示。因此，我们可以写成

$$j_a^{\mu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}t_a^R\left(1+\gamma_5\right)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}t_a^L\left(1-\gamma_5\right)\psi \tag{3.70}$$

在任何其三个顶点都含有这些流的三角图中，费米子圈图必定或者完全是左手的或者完全是右手的，因为左手与右手之间没有任何耦合。如果一个特殊的左手圈图是可允许的，那么相应的右手圈图也是允许的，后者的贡献与前者只区别于 $\gamma^{\mu}\gamma_5$ 顶点的符号上。这样，没有起源

于规范作用的反常条件，对于所有的a,b,c，为

$$Tr\left[\left\{t_a^L,t_b^L\right\}t_c^L\right]=Tr\left[\left\{t_a^R,t_b^R\right\}t_c^R\right]=0 \qquad (3.71)$$

当然，该理论还可能有其它引起反常的守恒流（例如，与非规范的整体对称性有关的）。但是，正如轴矢顶角函数Γ_5^μ的反常与量子电动力学的可重整性无关一样，它们也不会使该理论成为不可重整的。

现在我们对 W-S 模型检验一下(3.71)式。它有四个生成元t_0和$t_k(k=1,2,3)$，满足

$$[t_0,t_k]=0,\quad Trt_0=Trt_k=0$$

我们还记得

$$t_k^R\equiv 0, t_k^L=\frac{1}{2}\tau_k$$

而左手二重态的两个生成元有相同的t_0。容易证明，对于左手和右手的表示都有

$$Tr\left[\left\{t_i,t_j\right\}t_k\right]=0,$$

$$Tr\left[\left\{t_i,t_j\right\}t_0\right]=0,$$

$$Tr\left(t_it_0^2\right)=0$$

剩下有待检验的只有t_0^3的迹如何。利用 W-S 模型的粒子谱的量子数特征，通过直接计算，我们发现（记住夸克有颜色）

$$Tr\left(t_0^L\right)^3=Tr\left(t_0^R\right)^3=-\frac{2}{9}$$

于是，W-S 模型中所有的反常都抵消了。

使抵消得以发生的充分条件是

——反常不依赖于质量

——反常没有任何辐射修正

因此，抵消完全是一个费米子代内的量子数安排的结果。

由于 W-S 模型中三代费米子的多重态结构完全相同，所以每个代内所有的反常相互抵消。发生这些抵消的必然性就是对这种标准的代结构的最好的理论支持。它强烈地暗示者第三代中当时尚未观测到的成员即ν_τ和t应当存在。更一般地讲，所有的反常相抵消的要求对于可能的物理模型加上了严格的限制。

第 4 章　电弱相互作用的重整化

§4.1 W-S 模型的独立参数

电弱统一理论含有较多的为理论本身所不能确定的参数，除 CKM 矩阵的四个独立参数外，它们是：

- g, g'—$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的耦合常数
- μ^2, λ—Higgs 场的势函数中的参数
- g_f—费米子-Higgs Yukawa 耦合常数（如中微子无质量，则共计有 9 个）

利用前面我们已知的关系

$$v = \sqrt{\mu^2 / \lambda}\ ,\quad M_H = \mu\sqrt{2}\ ,$$

$$M_W = \frac{1}{2} g v\ ,\quad M_Z = \frac{1}{2} v\sqrt{g^2 + g'^2}\ ,$$

$$m_f = g_f v\ ,$$

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(或 g = \frac{e}{S_W}, g' = \frac{e}{C_W} \right), \tag{4.1}$$

可将上述参数用一组物理的参数取代，即

$$(g, g', \mu, \lambda, g_f) \to (e, M_W, M_Z, M_H, m_f) \tag{4.2}$$

这样做的好处在于后者是实验的直接可观测量（至少原则上如此，尽管对于轻夸克质量实验难以直接测量）。

§4.2 重整化程序

- 选择一组独立的参数；
- 将裸量（裸参数和场）写成重整化量和重整化常数两部分；
- 选择重整化条件（减除方案）来固定重整化常数；
- 对有关的费曼图（高阶，至少单圈）用适当的正规化手续进行计算，并用重整化参数来表达物理量；
- 选择一组输入参数（如实验值或用手放）来固定独立的重整化参数的值；

- 计算作为输入参数的函数的物理量的预言（理论预言)。

在固定重整化常数时，通常存在几种方案，如 MS，$\overline{MS}$，on-mass-shell-scheme 等。一般地，用不同的重整化方案对同一物理量做重整化计算，往往给出的预言有不可忽略的差异。因此不同的人或研究组如采用不同的重整化方案对同一物理量进行计算，很难进行比较。为了改变这种状况，国际学术界同行已达成共识，在电弱理论中一般采用 on-mass-shell-scheme，并将(e, M_Z, M_W, M_H, m_f)作为独立重整化参数。

§4.3 电弱理论中的 on-mass-shell 重整化方案

它是 QED 的 on-shell 方案的自然推广，在 QED 中独立重整化参数是(α, m_f)。在电弱理论中，独立的重整化参数将大大增加。

§4.3.1 参数的重整化

1. 独立重整化参数是

$$(e_0, M_{Z0}, M_{W0}, M_{H0}, m_{f0}), \tag{4.3}$$

式中下标“0”表明是裸参数。

2. 将裸参数表为重整化和相应的重整化常数（或抵消项）之和

$$\begin{cases} e_0 = Z_e e = (1+\delta Z_e)e = e + \delta e \\ M_{Z0}^2 = M_Z^2 + \delta M_Z^2, M_{W0}^2 = M_W^2 + \delta M_W^2 \\ M_{H0}^2 = M_H^2 + \delta M_H^2, m_{f0} = m_f + \delta m_f \end{cases} \tag{4.4}$$

注意 $\sin\theta_W \equiv S_W$ 和 $SU(2)$耦合常数 g 并非独立参数。在 Z，W 玻色子质量固定后，S_W 由下式确定

$$S_W^2 \equiv 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \tag{4.5}$$

这个定义独立于具体过程并适用于微扰论的所有阶（Sirlin，1980）。而 g 由下式确定

$$g = \frac{e}{S_W} \tag{4.6}$$

因此，一旦电荷，W，Z 玻色子质量被重整化，则 S_W(及C_W)和 g 的重整化由下面关系给出，

$$\begin{cases} S_{W0} = S_W + \delta S_W \\ C_{W0} = C_W + \delta C_W \\ g_0 = g + \delta g \end{cases} \tag{4.7}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\delta S_W}{S_W} = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_W^2}{S_W^2}\left(\dfrac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \dfrac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) \\ \dfrac{\delta C_W}{C_W} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \dfrac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) \\ \dfrac{\delta g}{g} = \dfrac{\delta e}{e} - \dfrac{1}{2}\dfrac{C_W^2}{S_W^2}\left(\dfrac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \dfrac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) \end{cases} \tag{4.8}$$

在上述重整化参数中α, M_Z, M_W, m_t可由实验测定，尽管M_W, m_t的测量还不是很精确。但是M_W可由精确费米耦合常数G_μ, M_Z, α及修正效应确定：

在 tree level 水平：

$$M_W^2\left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu} \tag{4.9}$$

在 one-loop 水平上：

$$M_W^2\left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\frac{1}{1-\Delta r} \tag{4.10}$$

Δr的表达式在下面介绍，作为一个好的近似，它等于

$$\Delta r \sim -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{3C_W^2}{4S_W^2}\frac{m_t^2}{M_W^2} \tag{4.11}$$

由(4.9)式或(4.10)-(4.11)式，我们可用α, G_μ, M_Z和m_t来确定M_W。目前已知的有关实验值如下：

$$\begin{cases} G_\mu = 1.16639(2)\times 10^{-5} GeV^{-2} \\ \alpha\left(q^2 = 0\right) = 1/137.0359895(61) \\ \alpha\left(M_Z\right) = 1/128.8 \\ M_Z = 91.187(7) GeV \\ m_t = 175 GeV \end{cases}$$

此外，M_H值实验还未测出，通常将其作为用手放的参数值而输入重整化的物理量。此外轻夸克(m_u, m_d, m_s)及重夸克(c, b)可用流代数估计值作为输入量。

Δr 由 μ 衰变的电弱辐射修正确定：

$$\Delta r = 2\frac{\delta e}{e} - \frac{C_W^2}{S_W^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) + \frac{\Sigma_T^W(0) - \delta M_W^2}{M_W^2} + (Vertex, box) \qquad (4.12)$$

$\Sigma_T^W(q^2)$是W 玻色子的极化张量的横向部分。$\Delta r(e, M_W, M_Z, M_H, m_t)$是圈图及抵消项的组合，最后结果是有限量。领头阶近似可表为：

$$\Delta r \sim -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{N_C C_W^2}{4S_W^4}\frac{m_t^2}{M_W^2}$$

§4.3.2 场的重整化

为了得到有限的传播子和相互作用顶点，拉氏量中的裸场也必须用重整化场来重新定义。其结果是将裸拉氏量分解为重整化拉氏量和抵消项两部分。上述程序可表示为

$$\text{对于场：}\quad \phi_i \to \sqrt{Z_i}\phi_i = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_i\right)\phi_i \qquad (4.13)$$

其中，ϕ_i 代表拉氏量中含有的所有场。于是裸 L_0 分解为

$$L_0 = L + \delta L$$

从 L 和 δL 我们可分别导出树图水平的费曼规则和抵消项费曼规则（含传播子及顶点）。对于 W-S 模型，我们给出如下场的重整化定义，

$$\begin{aligned}
&\psi_{j0}^L = \left(Z_L^j\right)^{1/2}\psi_j^L = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_L^j\right)\psi_j^L \\
&\psi_{j0}^R = \left(Z_R^j\right)^{1/2}\psi_j^R = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_R^j\right)\psi_j^R \\
&H_0 = Z_H^{1/2}H = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_H\right)H \qquad (4.14) \\
&W_0^{\pm} = Z_W^{1/2}W^{\pm} = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_W\right)W^{\pm} \\
&\begin{pmatrix} Z_0^\mu \\ A_{\gamma 0}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{ZZ}^{1/2} & Z_{ZA}^{1/2} \\ Z_{AZ}^{1/2} & Z_{AA}^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A_\gamma^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A_\gamma^\mu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{cases}
Z_0^\mu = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ}\right)Z^\mu + \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}A_\gamma^\mu \\
A_{\gamma 0}^\mu = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right)A_\gamma^\mu + \frac{1}{2}\delta Z_{AZ}Z^\mu
\end{cases}$$

§4.3.3 重整化条件及重整化常数的确定

在上面引入的重整化常数由重整化条件加以固定。我们采用的重整化条件包括电荷重整化条件及 on-shell 条件，前者与 QED 完全相同，所谓 on-shell 条件是指

① 物理的质量等于传播子的极点的实部，即等于重整化的单粒子不可约两点 Green 函数的实部的零点；

② 在传播子极点处的留数（residues）等于 1。

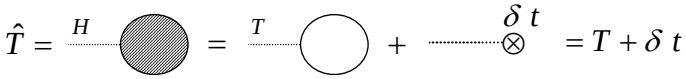
条件②使得我们可略去所有外线含有自能修正的图形，这就大大减少了在微扰论高阶计算中所需考虑的图形。下面我们将应用上述条件在单圈水平上分别固定重整化常数，包括场的重整化常数、质量重整化常数以及电荷重整化常数。

我们的基本出发点是应用单粒子不可约两点 Green 函数来将 on-shell 条件具体化，从而给出一系列约束关系（对重整化常数），并由这些约束关系解出重整化常数的具体表达式。对于电荷重整化，我们推广 QED 的电荷重整化，并采用下列关系作为重整化条件

$$\hat{\Gamma}_{\mu}^{\gamma ee}\left(k^2=0, p=q=m_e\right)=ie\gamma_{\mu} \tag{4.15}$$

1. Higgs-tadpole 图形重整化

设 Higgs 场的 1 点(one-point)重整化 Green 函数及未重整化 Green 函数以及相应抵消项表为 $\hat{T},T,\delta t$，即



则

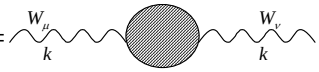
$$\hat{T}H=\left(T+\delta t\right)H=0 \tag{4.16}$$

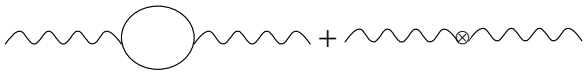
由此给出 $\delta t=-T$。作为这个条件的结果，在实际计算中我们不需要考虑 tadpoles 图形。

2. 质量重整化常数和场的重整化常数

选择't Hooft-Feynman 规范，定义如下 1PI 两点函数：

- 对于 W 玻色子：

$-i\hat{\Sigma}^{W}_{\mu\nu}(k)=$ 

$=$ 

$=-i\Sigma^{W}_{\mu\nu}(k)+\left(-i\delta\Sigma^{W}_{\mu\nu}(k)\right)$

其中

$$\Sigma^{W}_{\mu\nu}(k)=\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Sigma^{W}_{T}\left(k^2\right)+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Sigma^{W}_{L}\left(k^2\right)$$

$$\delta\Sigma^{W}_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}\left[-\delta M^2_W+\left(k^2-M^2_W\right)\delta Z_W\right]$$

由重整化条件①、②我们有，

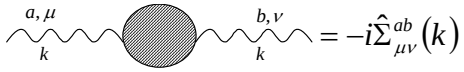
$$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{W}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M^2_W}=0$$

$$\lim_{k^2\to M^2_W}\frac{1}{k^2-M^2_W}\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{W}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)=0$$

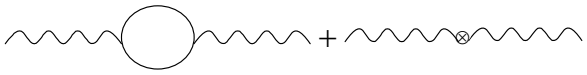
这表明，重整化条件①、②可用数学式简洁地用横向部分写成

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{W}_{T}\left(M^2_W\right)=0\\ \mathrm{Re}\dfrac{\partial\hat{\Sigma}^{W}_{T}\left(k^2\right)}{\partial k^2}|_{k^2=M^2_W}=0\end{cases}\tag{4.17}$$

- 对于 Z 玻色子，光子 A 及其混合的重整化 1PI 两点函数，我们有：



$=-i\hat{\Sigma}^{ab}_{\mu\nu}(k)$

$=$ 

$=-i\Sigma^{ab}_{\mu\nu}(k)+\left(-i\delta\Sigma^{ab}_{\mu\nu}(k)\right)$

其中

$$\begin{cases}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}(k)=\left(g_{\mu\nu}-\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Sigma^{ab}_{T}\left(k^2\right)+\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Sigma^{ab}_{L}\left(k^2\right)\\ a,b=A,Z,\qquad M^2_A=0,\end{cases}$$

$$\delta\Sigma^{AA}_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}\left[\delta Z_{AA}k^2\right]$$

$$\delta\Sigma^{AZ}_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\left(k^2-M^2_Z\right)\delta Z_{ZA}+\frac{1}{2}\delta Z_{AZ}k^2\right]$$

$$\delta\Sigma^{ZZ}_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}\left[-\delta M^2_Z+\left(k^2-M^2_Z\right)\delta Z_{ZZ}\right]$$

类似的，重整化条件①、②可表为

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{ZZ}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M_Z^2}=0$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AZ}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)|_{k^2=0}=0$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AZ}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)|_{k^2=M_Z^2}=0$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AA}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)|_{k^2=0}=0$$

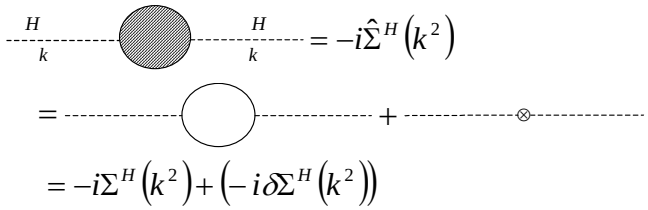
$$\lim_{k^2\to M_Z^2}\frac{1}{k^2-M_Z^2}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{ZZ}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)=0$$

$$\lim_{k^2\to 0}\frac{1}{k^2}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AA}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{\nu}(k)=0$$

或者，简洁地用横向部分表为

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{ZZ}_{T}(M_Z^2)=0, & \mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AZ}_{T}(M_Z^2)=0\\ \mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AZ}_{T}(0)=0, & \mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{AA}_{T}(0)=0\\ \mathrm{Re}\dfrac{\partial\hat{\Sigma}^{ZZ}_{T}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_Z^2}=0, & \mathrm{Re}\dfrac{\partial\hat{\Sigma}^{AA}_{T}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=0}=0\end{cases}\qquad(4.18)$$

- 对于 Higgs 场的重整化 1PI 两点函数，我们有



其中

$$\delta\Sigma^{H}(k^2)=-\delta M_H^2+(k^2-M_H^2)\delta Z_H$$

重整化条件现在为

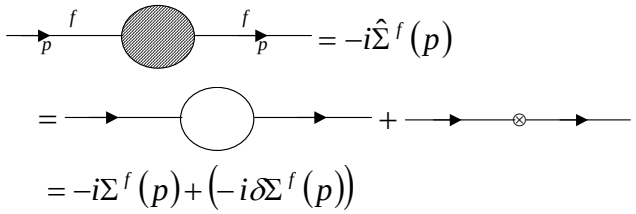
$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{H}(k^2)|_{k^2=M_H^2}=\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{H}(M_H^2)=0$$

$$\lim_{k^2\to M_H^2}\frac{1}{k^2-M_H^2}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{H}(k^2)=0$$

或者

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}^{H}(M_H^2)=0\\ \mathrm{Re}\dfrac{\partial\hat{\Sigma}^{H}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_H^2}=0\end{cases}\qquad(4.19)$$

- 对于费米子，重整化的 1PI 两点函数，我们有（不考虑混合情形）



其中

$$\Sigma^f(p) = m_f\Sigma_S^f(p^2) + \not{p}p_L\Sigma_L^f(p^2) + \not{p}p_R\Sigma_R^f(p^2)$$

$$\delta\Sigma^f(p) = \delta m_f + m_f\frac{1}{2}\delta Z_L^f + m_f\frac{1}{2}\delta Z_R^f - \not{p}p_L\delta Z_L^f - \not{p}p_R\delta Z_R^f$$

故有

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^f(p) &= m_f\left[\Sigma_S^f(p^2) + \frac{\delta m_f}{m_f} + \frac{1}{2}\delta Z_L^f + \frac{1}{2}\delta Z_R^f\right] \\ &\quad + \not{p}p_L\left[\Sigma_L^f(p^2) - \delta Z_L^f\right] + \not{p}p_R\left[\Sigma_R^f(p^2) - \delta Z_R^f\right] \\ &= m_f\hat{\Sigma}_S^f(p^2) + \not{p}p_L\hat{\Sigma}_L^f(p^2) + \not{p}p_R\hat{\Sigma}_R^f(p^2)\end{aligned}$$

由重整化条件可给出

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^f(p)u(p)|_{p^2=m_f^2} = 0$$

$$\mathrm{Re}\,\bar{u}(p)\hat{\Sigma}^f(p)|_{p^2=m_f^2} = 0$$

$$\lim_{p^2\to m_f^2}\frac{\not{p}+m_f}{p^2-m_f^2}\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^f(p)u(p) = 0$$

$$\lim_{p^2\to m_f^2}\bar{u}(p)\hat{\Sigma}^f(p)\frac{\not{p}+m_f}{p^2-m_f^2} = 0$$

其中$u(p)$，$\bar{u}(p)$是外线费米子的旋量波函数。上述条件可化为

$$\begin{cases} m_f\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_L^f(m_f^2) + m_f\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_S^f(m_f^2) = 0 \\ m_f\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_R^f(m_f^2) + m_f\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_S^f(m_f^2) = 0 \\ \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_R^f(m_f^2) + \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_L^f(m_f^2) \\ \quad + 2m_f^2\frac{\partial}{\partial p^2}\left[\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_R^f(p^2) + \mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_L^f(p^2) + 2\,\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}_S^f(p^2)\right]|_{p^2=m_f^2} = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

由重整化条件(4.17)-(4.20)式可得到规范玻色子（W, Z, A）、Higgs场以及费米子场的重整化常数如下：

$$
\begin{cases}
\delta M_W^2 = \mathrm{Re}\,\Sigma_T^W\left(M_H^2\right), & \delta Z_W = -\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial\Sigma_T^W\left(k^2\right)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=M_W^2} \\
\delta M_Z^2 = \mathrm{Re}\,\Sigma_T^{ZZ}\left(M_Z^2\right), & \delta Z_{ZZ} = -\mathrm{Re}\,\dfrac{\partial\Sigma_T^{ZZ}\left(k^2\right)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=M_Z^2} \\
\delta Z_{AZ} = -2\dfrac{\mathrm{Re}\,\Sigma_T^{AZ}\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2}, & \delta Z_{ZA} = 2\dfrac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2} \\
\delta Z_{AA} = -\dfrac{\partial\Sigma_T^{AA}\left(k^2\right)}{\partial k^2}\Big|_{k^e=0}, & \\
\delta M_H^2 = -\mathrm{Re}\,\Sigma^H\left(M_H^2\right), & \delta Z_H = \mathrm{Re}\,\dfrac{\partial\Sigma^H\left(k^2\right)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=M_H^2} \\
\delta m_f = -m_f\,\mathrm{Re}\left[\Sigma_S^f\left(m_f^2\right)+\dfrac{1}{2}\Sigma_L^f\left(m_f^2\right)+\dfrac{1}{2}\Sigma_R^f\left(m_f^2\right)\right] & \\
\delta Z_L^f = \mathrm{Re}\,\Sigma_L^f\left(m_f^2\right)+m_f^2\dfrac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}\left[\Sigma_L^f\left(p^2\right)+\Sigma_R^f\left(p^2\right)+2\Sigma_S^f\left(p^2\right)\right]\Big|_{p^2=m_f^2} & \\
\delta Z_R^f = \mathrm{Re}\,\Sigma_R^f\left(m_f^2\right)+m_f^2\dfrac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}\left[\Sigma_L^f\left(p^2\right)+\Sigma_R^f\left(p^2\right)+2\Sigma_S^f\left(p^2\right)\right]\Big|_{p^2=m_f^2} &
\end{cases}
\tag{4.21}
$$

3. 电荷重整化常数

经典电荷 e_{CL} 可由 Thomson 散射截面

$$\sigma_{Th} = \frac{e_{CL}^4}{6\pi m_e^2}$$

确定。在 QED 中，Compton 散射 $e+\gamma\to e+\gamma$ 在树图近似下的经典极限 $\left(k^2=0,k^0\to 0\right)$ 情形，其截面与 σ_{Th} 是一致的。因此出现于顶角 $ee\gamma$ 中的电荷 e 与经典电荷 e_{CL} 应相等，故 QED 中的电荷重整化条件可表述为

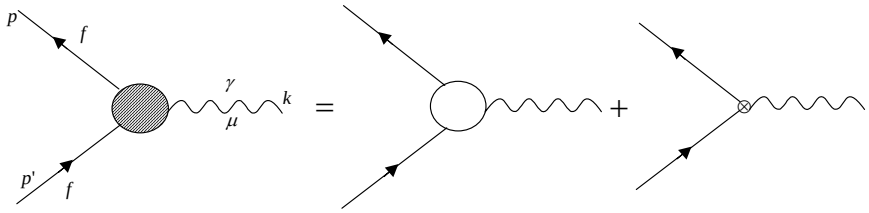
重整化电荷=经典电荷

或在经典极限下顶角 $ee\gamma = ie\gamma_\mu$。在标准模型中我们采用条件(4.15)式重整化电荷。下面就单圈情形从普遍的 $ff\gamma$ 顶角（ f 为任意费米子）出发，导出电荷重整化常数表达式。

设重整化的单圈顶角为

$$\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma ff}\left(p,p'\right) = -ieQ_f\gamma_\mu + ie\hat{\Lambda}_\mu^{\gamma ff}\left(p,p'\right)$$

其中



$$= ie\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p')$$

对于 one-shell 的外线费米子，它可表为（一般形式）

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p') &= \gamma_{\mu}\hat{\Lambda}_{V}^{f}(k^2) - \gamma_{\mu}\gamma_5\hat{\Lambda}_{A}^{f}(k^2) \\ &+ \frac{(p+p')_{\mu}}{2m_f}\hat{\Lambda}_{S}^{f}(k^2) + \frac{(p-p')_{\mu}}{2m_f}\gamma_5\hat{\Lambda}_{P}^{f}(k^2)\end{aligned} \tag{4.22}$$

于是，重整化条件可写为

$$\bar{u}(p)\hat{\Gamma}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p)u(p)|_{p^2=m_e^2} = ie\bar{u}(p)\gamma_{\mu}u(p),$$

或者

$$\bar{u}(p)\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p')u(p) = 0$$

由(4.22)式，当 $p = p'$ 时 $\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p')$ 为

$$\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p') = \gamma_{\mu}\hat{\Lambda}_{V}^{f}(0) - \gamma_{\mu}\gamma_5\hat{\Lambda}_{A}^{f}(0) + \frac{p_{\mu}}{m}\hat{\Lambda}_{S}^{f}(0)$$

利用 Gordon 恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{(p'+p)^{\mu}}{2m} + i\frac{\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}}{2m}\right]u(p)$$

当 $p' \to p$ 时，有

$$\bar{u}(p)\gamma^{\mu}u(p) = \bar{u}(p)\frac{p^{\mu}}{m}u(p)$$

于是重整化条转化件为

$$\begin{aligned}\bar{u}(p)\hat{\Lambda}_{\mu}^{\gamma ff}(p,p')u(p) &= \bar{u}(p)\gamma_{\mu}\left[\hat{\Lambda}_{V}^{f}(0) + \hat{\Lambda}_{S}^{f}(0)\right]u(p) \\ &- \bar{u}(p)\gamma_{\mu}\gamma_5\hat{\Lambda}_{A}^{f}(0)u(p) = 0\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $\hat{\Lambda}_{V}^{f}(0)$, $\hat{\Lambda}_{S}^{f}(0)$, $\hat{\Lambda}_{A}^{f}(0)$ 均包含 one-loop 的抵消项。为确定抵消项的形式，我们做如下推演：

设

$$\hat{\Lambda}_{V}^{f}(0) = \Lambda_{V}^{f}(0) + \delta_V,\quad \hat{\Lambda}_{S}^{f}(0) = \Lambda_{S}^{f}(0),\quad \hat{\Lambda}_{A}^{f}(0) = \Lambda_{A}^{f}(0) + \delta_A,$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{u}(p)\hat{\Lambda}_\mu^{ff}(p,p)u(p)&=\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\left[\Lambda_V^f(0)+\Lambda_S^f(0)\right]\\&+\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\delta_V-\bar{u}(p)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)\Lambda_A^f(0)-\bar{u}(p)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)\delta_A\end{aligned}\tag{4.24}$$

另一方面，对外线及电荷做重整化给出

$$\begin{aligned}&ie(-Q_f)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)+ie\bar{u}(p)\gamma_\mu(v_f-a_f\gamma_5)u(p)\\&\Rightarrow ie(1+\delta Z_e)(-Q_f)\bar{u}(p)\left(1+\frac{1}{2}\delta Z_L^f P_R+\frac{1}{2}\delta Z_R^f P_L\right)\gamma_\mu\left(1+\frac{1}{2}\delta Z_L^f P_L+\frac{1}{2}\delta Z_R^f P_R\right)\\&\quad\times u(p)\left(1+\frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right)+ie\bar{u}(p)\gamma_\mu(v_f-a_f\gamma_5)u(p)\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\\&=ie(-Q_f)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)+ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\left\{-Q_f\left[\delta Z_e+\delta Z_L^f P_L+\delta Z_R^f P_R+\frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right]\right\}\\&+ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)v_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}-ie\bar{u}(p)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)a_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\\&=ie(-Q_f)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)+ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p)\left[-Q_f\left(\delta Z_e+\delta Z_V^f+\frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right)+v_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\right]\\&-ie\bar{u}(p)\gamma_\mu\gamma_5 u(p)\left[-Q_f\delta Z_A^f+a_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\right]\end{aligned}\tag{4.25}$$

比较(4.24)和(4.25)可知抵消项为

$$\begin{cases}\delta_V=-Q_f\left(\delta Z_e+\delta Z_V^f+\frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right)+v_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\\\delta_A=-Q_f\delta Z_A^f+a_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\end{cases}\tag{4.26}$$

其中

$$\delta Z_V^f=\frac{1}{2}\left(\delta Z_L^f+\delta Z_R^f\right),\quad \delta Z_A^f=\frac{1}{2}\left(\delta Z_L^f-\delta Z_R^f\right)$$

将(4.26)代入(4.24)并利用重整化条件(4.23)，给出

$$\begin{cases}\Lambda_V^f(0)+\Lambda_S^f(0)-Q_f\left(\delta Z_e+\delta Z_V^f+\frac{1}{2}Z_{AA}\right)+\frac{1}{2}v_f\delta Z_{ZA}=0 & (a)\\\Lambda_A^f(0)-Q_f\delta Z_A^f+\frac{1}{2}a_f\delta Z_{ZA}=0 & (b)\end{cases}\tag{4.27}$$

当 $f=e$ 时，条件(4.27a)即可固定电荷重整化常数，而(4.27b)式就是规范不变性导致的 Ward 恒等式。此外，同样由 Ward 恒等式，我们还有

$$\Lambda_V^f(0)+\Lambda_S^f(0)-Q_f\delta Z_V^f+a_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}=0\tag{4.28}$$

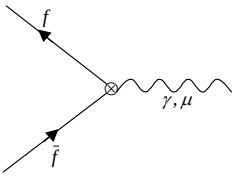
将(4.28)式代入(4.27a)式，利用 $v_f - a_f = -Q_f \frac{S_W}{C_W}$，得到

$$-Q_f\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right) + \frac{1}{2}(v_f - a_f)\delta Z_{ZA} = -Q_f\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right)$$
$$-\frac{1}{2}Q_f \frac{S_W}{C_W}\delta Z_{ZA} = 0$$

于是

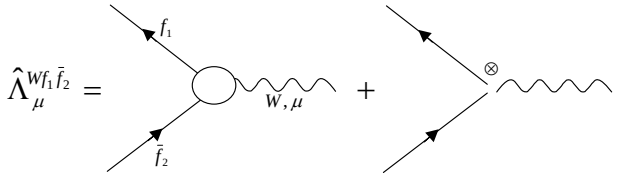
$$\begin{aligned}\delta Z_e &= -\frac{1}{2}\delta Z_{AA} - \frac{1}{2}\frac{S_W}{C_W}\delta Z_{ZA} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=0} - \frac{S_W}{C_W}\frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2}\end{aligned} \tag{4.29}$$

由以上推导我们可看出 $\gamma f\bar{f}$ 顶角抵消项的一般形式为



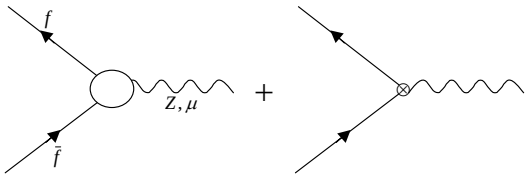
$$\begin{aligned}&= \delta\Gamma_\mu^{\gamma f\bar{f}} \\ &= ie\gamma_\mu\delta_V - ie\gamma_\mu\gamma_5\delta_A \\ &= -ieQ_f\gamma_\mu\left(\delta Z_e + \delta Z_V^f + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right) + iev_f\gamma_\mu\frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ &\quad - ie\gamma_\mu\gamma_5\left(-Q_f\delta Z_A^f + a_f\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\right) \\ &= -ieQ_f\gamma_\mu\left(\delta Z_e + \delta Z_V^f - \gamma_5\delta Z_A^f + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right) \\ &\quad + ie\gamma_\mu(v_f - a_f\gamma_5)\frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ &= -ieQ_f\gamma_\mu\left(\delta Z_V^f - \gamma_5\delta Z_A^f - \frac{1}{2}\frac{S_W}{C_W}\delta Z_{ZA}\right) \\ &\quad + ie\gamma_\mu(v_f - a_f\gamma_5)\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\end{aligned} \tag{4.30}$$

此外，我们写下带电流和中性流的重整化顶角



$$= \Lambda_\mu^{Wf_1\bar{f}_2} + ie\frac{1}{\sqrt{2}S_w}\gamma_\mu\left(\delta Z_e - \frac{\delta S_W}{S_W} + \frac{1}{2}\delta Z_W + \frac{1}{2}\delta Z_L^{f_1} + \frac{1}{2}\delta Z_L^{f_2}\right)P_L \tag{4.31}$$

$\hat{\Lambda}_\mu^{Zf\bar{f}}$ =



$$
\begin{aligned}
&= \Lambda_\mu^{Zf\bar{f}} - ie\gamma_\mu\left(v_f - a_f\gamma_5\right)\frac{C_W}{2S_W}\delta Z_{ZA} - ieQ_f\gamma_\mu\frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\
&+ ie\gamma_\mu\left(v_f - a_f\gamma_5\right)\delta Z_V^f - ie\gamma_\mu\gamma_5\left(v_f - a_f\gamma_5\right)\delta Z_A^f
\end{aligned}
\qquad (4.32)
$$

电磁流、中性流和带电流的顶角可统一地表示为

$$i\gamma_\mu\left(C_0^- P_L + C_0^+ P_R\right) = \Gamma_\mu^0$$

其中

$\gamma f\bar{f}$: $C_0^- \equiv C_0^+ \equiv -Q_f e$

$Zf\bar{f}$: $C_0^- \equiv e\left(v_f + a_f\right),\ C_0^+ \equiv e\left(v_f - a_f\right)$

$W^+\bar{u}_i d_j$: $C_0^- \equiv \frac{e}{\sqrt{2}S_W}V_{ij},\ C_0^+ \equiv 0$

$W^-\bar{d}_j u_i$: $C_0^- \equiv \frac{e}{\sqrt{2}S_W}V_{ji}^+,\ C_0^+ \equiv 0$

$W^+\bar{\nu}_i l_j$: $C_0^- \equiv \frac{e}{\sqrt{2}S_W}\delta_{ij},\ C_0^+ \equiv 0$

$W^-\bar{l}_j \nu_i$: $C_0^- \equiv \frac{e}{\sqrt{2}S_W}\delta_{ij},\ C_0^+ \equiv 0$

在单圈水平，上述重整化的顶角可表为

$$\hat{\Gamma}_\mu^{Vf_1\bar{f}_2} = \Gamma_\mu^{Vf_1\bar{f}_2} + \delta\Gamma_\mu^{Vf_1\bar{f}_2}$$

对于带电流$(Wf_1\bar{f}_2)$顶角抵消项为

$$\delta\Gamma^{Wf_1\bar{f}_2} = i\gamma_\mu\left(\delta C^- P_L + \delta C^+ P_R\right)$$

其中

$$\delta C^+ = 0\,,$$

$$\delta C^- = C_0^-\left(\delta Z_e - \frac{\delta S_W}{S_W} + \frac{1}{2}\delta Z_W + \frac{1}{2}\delta Z_L^{f_1} + \frac{1}{2}\delta Z_L^{f_2}\right)$$

对于电磁流和中性流$(\gamma, Zf\bar{f})$顶角抵消项为

$$\delta\Gamma^{Zf\bar{f}} = i\gamma_\mu\left(\delta C^- P_L + \delta C^+ P_R\right)$$

$\gamma f\bar{f}$：

$$\begin{cases}\delta C^- = C_0^-\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} + \delta Z_L^f\right) + e\left(v_f + a_f\right)\frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \delta C^+ = C_0^+\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} + \delta Z_R^f\right) + e\left(v_f - a_f\right)\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}\end{cases}$$

$Zf\bar{f}$：

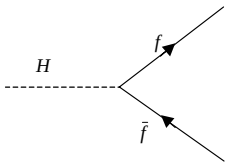
$$\begin{cases}\delta C^+ = C_0^+\left[\frac{\delta C_0^+}{C_0^+} + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} + \frac{1}{2}\left(\delta Z_R + \delta Z_R^+\right)\right] - \frac{1}{2}eQ^f Z_{AZ} \\ \delta C^- = C_0^-\left[\frac{\delta C_0^-}{C_0^-} + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} + \frac{1}{2}\left(\delta Z_L^f + \delta Z_L^{f+}\right)\right] - \frac{1}{2}eQ^f Z_{AZ}\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\delta C_0^+ = -e\frac{S_W}{C_W}Q_f\left(\delta Z_e + \frac{1}{C_W^2}\frac{\delta S_W}{S_W}\right) = C_0^+\left(\delta Z_e + \frac{1}{C_W^2}\frac{\delta S_W}{S_W}\right) \\ \frac{\delta C_0^+}{C_0^+} = \delta Z_e + \frac{1}{C_W^2}\frac{\delta S_W}{S_W}\end{cases}$$

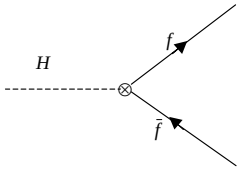
$$\begin{cases}\delta C_0^- = e\frac{I_f^3}{S_W C_W}\left[\delta Z_e + \frac{S_W^2 - C_W^2}{C_W^2}\frac{\delta S_W}{S_W}\right] + \delta C_0^+ \\ C_0^- \equiv e\left(v_f + a_f\right) = e\frac{I_f^3 - S_W^2 Q_f}{S_W C_W} = e\frac{I_f^3}{S_W C_W} + C_0^+\end{cases}$$

Higgs 粒子与费米子耦合及其抵消项分别为



$$i\left(C_0^- P_L + C_0^+ P_R\right)$$

$$C_0^- \equiv -\frac{em_f}{2S_W m_W}, \qquad C_0^+ \equiv -\frac{em_f}{2S_W m_W}$$



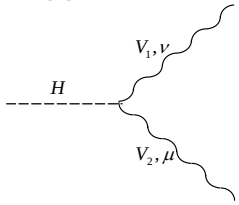
$$i\left(\delta C^- P_L + \delta C^+ P_R\right)$$

$$\begin{cases}\delta C^- = C_0^-\left(\frac{\delta C_0^-}{C_0^-} + \frac{1}{2}\delta Z_H + \delta Z_L^f\right) \\ \delta C^+ = C_0^+\left(\frac{\delta C_0^+}{C_0^+} + \frac{1}{2}\delta Z_H + \delta Z_R^f\right)\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \delta C_0^- = C_0^- \left(\delta Z_e + \dfrac{\delta m_f}{m_f} - \dfrac{\delta S_W}{S_W} - \dfrac{\delta m_W}{m_W} \right) \\ \delta C_0^+ = C_0^+ \left(\delta Z_e + \dfrac{\delta m_f}{m_f} - \dfrac{\delta S_W}{S_W} - \dfrac{\delta m_W}{m_W} \right) \end{cases}$$

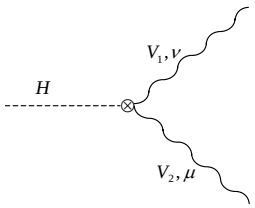
Higgs 和规范玻色子的耦合及其抵消项为



$$ig_{\mu\nu} C_0$$

$$HW^+W^-: \quad C_0 = \frac{em_W}{S_W}$$

$$HZZ: \qquad C_0 = \frac{em_W}{S_W C_W^2}$$



$$ig_{\mu\nu} \delta C$$

$$HW^+W^-: \ \delta C = C_0 \left(\frac{\delta C_0}{C_0} + \frac{1}{2} \delta Z_H + \delta Z_W \right)$$

其中

$$\delta C_0 = C_0 \left(\delta Z_e + \frac{\delta m_W}{m_W} - \frac{\delta S_W}{S_W} \right)$$

$$HZZ: \qquad \delta C = C_0 \left(\frac{\delta C_0}{C_0} + \frac{1}{2} \delta Z_H + \delta Z_{ZZ} \right)$$

其中

$$\delta C_0 = C_0 \left(\delta Z_e + \frac{\delta m_W}{m_W} + \frac{2S_W^2 - C_W^2}{C_W^2} \frac{\delta S_W}{S_W} + \frac{1}{2} \delta Z_H + \delta Z_{ZZ} \right)$$

§4.4 费米常数、Weinberg 角和 W 玻色子质量之间的关系

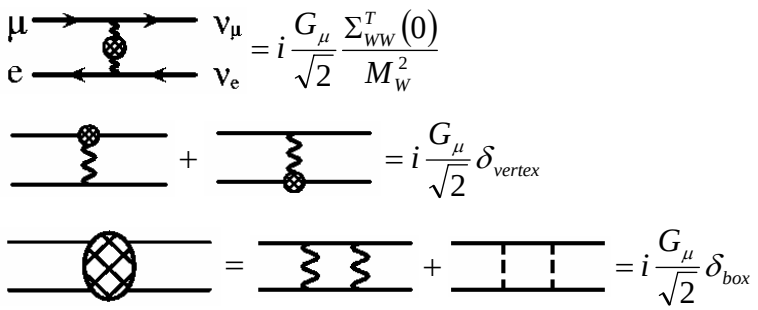
基于前面的结果，我们可以导出重整化的费米常数、Weinberg角和W玻色子质量之间的关系。以μ衰变为例，在远低于W玻色子质量的能标下考虑W玻色子的媒介作用，裸的有效拉氏量具有形式

$$L_{eff}=\frac{G_{\mu b}}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_b^{\nu_\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_b^{\mu}\bar{\psi}_b^{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_b^{\nu_e} \tag{4.33}$$

按重整化惯例可将其写为

$$L_{eff}=\frac{G_\mu+\delta G_\mu}{\sqrt{2}}Z_L^{\nu_\mu\frac{1}{2}}Z_L^{\mu\frac{1}{2}}Z_L^{e\frac{1}{2}}Z_L^{\nu_e\frac{1}{2}}\bar{\psi}^{\nu_\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi^{\mu}\bar{\psi}^{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi^{\nu_e} \tag{4.34}$$

正规顶角函数除$(V-A)(V-A)$形状之外，一般还包含其它双线性乘积流。但在SM中这些项被小的电子和μ子质量所压低，因此可安全地忽略它们。正规顶角函数包含如下贡献：



$$= i\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\frac{\Sigma_{WW}^T(0)}{M_W^2}$$

$$= i\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\delta_{vertex}$$

$$= i\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\delta_{box}$$

从而重整化的耦合可以写为

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{\delta G_\mu}{G_\mu}+\frac{1}{2}\left(\delta Z_L^{\mu}+\delta Z_L^{e}+\delta Z_L^{\nu_\mu}+\delta Z_L^{\nu_e}\right)+\frac{\Sigma_{WW}^T(0)}{M_W^2}+\delta_{vertex}+\delta_{box}\right] \tag{4.35}$$

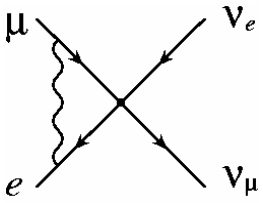
μ轻子衰变率早先曾用有效QED理论计算，它包含了电磁修正，其结果为

$$\tau_\mu^{-1}=\frac{G_\mu^2m_\mu^2}{192\pi^3}\left(1-\frac{8m_e^2}{m_\mu^2}\right)\left[1-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{25}{4}-\pi^2\right)\right] \tag{4.36}$$

在m_μ能标计算α，可包含其领头阶的两圈修正。通常将(4.36)式作为G_μ的定义式。从而，由(4.35)式可以确定抵消项δG_μ，

$$\begin{aligned}&\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{\delta G_\mu}{G_\mu}+\frac{1}{2}\left(\delta Z_L^{\mu}+\delta Z_L^{e}+\delta Z_L^{\nu_\mu}+\delta Z_L^{\nu_e}\right)+\frac{\Sigma_{WW}^T(0)}{M_W^2}+\delta_{vertex}+\delta_{box}\right]\\&\qquad=\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\left[1+\delta_{QED}\right]\end{aligned} \tag{4.37}$$

δ_{QED}包含了有效理论中的电磁修正，



$$= i\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\delta_{QED}$$

因此有

$$\frac{\delta G_\mu}{G_\mu} = -\frac{\Sigma_{WW}^T(0)}{M_W^2} - \delta_{VB} \tag{4.38}$$

其中 δ_{VB} 表示非QED的波函数、顶角和方框图修正：

$$\delta_{VB} = \frac{1}{2}\left(\delta Z_L^\mu + \delta Z_L^e + \delta Z_L^{\nu_\mu} + \delta Z_L^{\nu_e}\right) + \delta_{vertex} + \delta_{box} - \delta_{QED} \tag{4.39}$$

现在已经准备好了确定重整化的Weinberg角所需的条件。树图的表达式给出裸参数之间的关系如下，

$$\sqrt{2}G_{\mu b} = \frac{\pi\alpha_b}{M_{Zb}^2 s_b^2 c_b^2}$$

把裸参数替换为重整化的参数加抵消项，有

$$\sqrt{2}\left(G_\mu + \delta G_\mu\right) = \frac{\pi\alpha(1+\Delta\alpha)}{\left(M_Z^2 + \delta M_Z^2\right)\left(s^2 + \delta s^2\right)\left(c^2 + \delta c^2\right)} \tag{4.40}$$

将其展开到第一阶，并运用 $\delta c^2 = -\delta s^2$，得

$$s^2c^2\left[1 + \delta s^2\left(\frac{c^2 - s^2}{c^2 s^2}\right)\right] = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}\left[1 + \Delta\alpha - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta G_\mu}{G_\mu}\right] \tag{4.41}$$

其中 $s = \sin\theta_W$， $c = \cos\theta_W$ 由质壳重整化条件，上式右边我们已经运用了重整化的参数，包括在Thomphson散射中测定的电荷、在LEP测得的物理 Z 玻色子极点质量以及由 μ 衰变寿命给出的费米常数。所有这些物理量均包含了相应抵消项。将(4.21)式、(4.29)和(4.38)所给出的抵消项代入，就有

$$s^2c^2\left[1 + \delta s^2\left(\frac{c^2 - s^2}{c^2 s^2}\right)\right] =$$
$$\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}\left[1 + \Sigma_{\gamma\gamma}^{T'}(0) + 2\frac{s}{c}\frac{\Sigma_{\gamma Z}^T(0)}{M_Z^2} - \mathrm{Re}\frac{\Sigma_{ZZ}^T\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2} + \frac{\Sigma_{WW}^T(0)}{M_W^2} + \delta_{VB}\right] \tag{4.42}$$

现在我们来确定单圈水平的 s^2 的含意，并由此导致确定抵消项 δs^2 的重整化条件。

迄今为止所碰到的所有抵消项均包含“有限”的部分和“无限”的部分。计算费曼图时会遇到发散。必须运用一个正规化方法来控制这些发散。我们采用的是维数正规化方法。按照维数正规化，积分因为被

延拓到$n=4-2\varepsilon$维而变得不再发散了。从而发散体现为$1/\varepsilon$的极点。我们可以通过要求抵消项为“纯发散”（即正比于$1/\varepsilon$）而定义一个重整化的量。这样的重整化方案被称为$\overline{MS}$方案（被减除的量除极点项外，还包含常数$\ln 4\pi-\gamma_E$），而重整化的量被被称为$\overline{MS}$参数，它是依赖于$\overline{MS}$重整化标度Q的。由(4.42)式可以得到$\overline{MS}$重整化的Weinberg角满足关系

$$\hat{s}^2\left(Q^2\right)\hat{c}^2\left(Q^2\right)=\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}\left[1+\Delta\hat{\alpha}-\mathrm{Re}\frac{\hat{\Sigma}_{ZZ}^T\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2}+\frac{\hat{\Sigma}_{WW}^T(0)}{M_W^2}+\hat{\delta}_{VB}\right] \tag{4.43}$$

这里，符号“∧”表示$\overline{MS}$的重整化量。定义

$$\Delta\hat{r}_Z=\Delta\hat{\alpha}-\mathrm{Re}\frac{\hat{\Sigma}_{ZZ}^T\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2}+\frac{\hat{\Sigma}_{WW}^T(0)}{M_W^2}+\hat{\delta}_{VB} \tag{4.44}$$

因此，领头阶不可约修正可用$\Delta\hat{r}_Z$表示为

$$\hat{s}^2\hat{c}^2=\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}\left[\frac{1}{1-\Delta\hat{r}_Z}\right] \tag{4.45}$$

为了计算W玻色子的质量，引入$\overline{MS}$方案下的ρ参数定义，

$$\hat{\rho}=\frac{1}{\hat{c}^2}\frac{M_W^2}{M_Z^2}=\frac{\hat{M}_Z^2}{\hat{M}_W^2}\frac{M_W^2}{M_Z^2}=1+\Delta\hat{\rho} \tag{4.46}$$

利用$\hat{M}_W^2=M_W^2+\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{WW}^T\left(M_W^2\right)$以及$\hat{M}_Z^2=M_Z^2+\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{ZZ}^T\left(M_Z^2\right)$，得

$$\Delta\hat{\rho}=\mathrm{Re}\left[\frac{\hat{\Sigma}_{ZZ}^T\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2}-\frac{\hat{\Sigma}_{WW}^T\left(M_W^2\right)}{M_W^2}\right] \tag{4.47}$$

在树图水平上我们有

$$c_0^2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}}\right) \tag{4.48}$$

可以将(4.45)式展开得到

$$\hat{c}^2=c_0^2\left(1-\frac{s_0^2}{c_0^2-s_0^2}\Delta\hat{r}_Z\right) \tag{4.49}$$

然后，利用$M_W^2=\hat{c}^2\hat{\rho}M_Z^2$，就可以给出$W$玻色子极点质量的预言

$$M_W^2=\frac{c_0^2M_Z^2}{1-\Delta\hat{\rho}+\frac{s_0^2}{c_0^2-s_0^2}\Delta\hat{r}_Z} \tag{4.50}$$

由于W玻色子的质量是一个物理量，在所考虑的阶上这个修正是不依

赖于重整化方案的。特别是，$\Delta\rho + s_0^2/(s_0^2 - c_0^2)\Delta r_Z$ 是一个物理可观测量。这个组合项是规范不变的，且与重整化标度无关，因而无论是否带有符号“∧”，都是一样的。

§4.5 正规化，阈修正和重整化群方程（RGE）

前面我们应用质壳重整化条件确定了质量、波函数和电荷抵消项。这些抵消项由两点、三点和四点图组成，这些图相应于用来测量输入参数的各种物理过程。在标准模型的最小超对称扩充模型（MSSM）中，各种图形从标准模型粒子的超对称伙伴获得了额外的贡献，但是抵消项的形式依然保持不变。

计算抵消项和其它费曼图时所产生的发散必须被正规化。为了保持 Ward（或 Salavnov-Taylor）恒等式，所采用的正规化方法应该保持裸拉氏量的对称性，即使这些对称性是自发破缺的。维数正规化不破坏规范对称性，因此在规范理论的正规化中得到广泛运用。按照维数正规化，时空被延拓到 $n = 4 - 2\varepsilon$ 维。当 $n < 4$ 时，例如积分

$$\int \frac{d^n k}{k^4}$$

显然是紫外收敛的。发散仅表现为 $1/\varepsilon$ 的极点。

在维数正规化中，时空和（非标量）场的维数被推广到 n 维。因而规范场 A_μ 的下标从 0 变到 $n-1$。狄拉克代数也是 n 维的，例如 $\gamma_\mu\gamma^\mu = n$，$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (2-n)\gamma_\nu$，等等。

在超对称理论中，将场的维数推广到 n 维会带来问题。超对称理论要求一个多重态中的质壳玻色子和费米子的自由度数目相等。将一个四维规范超对称多重态推广到 n 维将使这个自由度数不再相等，因而通常的维数正规化破坏了超对称性。从而不得不在微扰论的每一阶添加抵消项以恢复超对称性。对超对称理论，现已找到一种新的正规化方法，称为维数减除方法（dimensional reduction）。在这种正规化中，时空被推广到 n 维而场量保持不变。从而规范场的下标从 0 变到 3，而且狄拉克代数是 4 维的。维数减除方法有一个潜在的问题，即在计算微扰论高阶效应时维数减除方法会带来某些不确定性。尚不清楚这些不确定性是否会对物理可观测量的计算带来影响。即使真的有影响，也可能找到一个自洽的约定来给出确定的结果。另外，QCD 中标准的质量因子化在维数减除中看来会遭到破坏。但这种情形目前还不是很清楚，因为迄今还没有用维数减除方法对有质量 QCD 的共线和红外发散的处理方法做完整的考察。这里强调的是，这些是有待

进一步研究的基本问题。但就我们眼下的目标而言，对所涉及的超对称修正，至少在一圈或两圈水平，维数减除方法是行之有效的，并且它保持了规范对称性和超对称性。以下将使用维数减除方法。

通过使用质壳条件可以确定质量、波函数、电荷和费米常数的抵销项。如上节所述，在某些情形下使用最小减除（minimal subtraction）方案来确定重整化的量及其抵销项是方便的。在最小减除方案中，使用了朴素的维数正规化，而且抵销项被定义为“纯粹发散”项，它们正比于$1/\varepsilon^n$。通常下标“MS”被用来表示一个在最小减除方案中的重整化量。在修正的最小减除方案（$\overline{MS}$）中，抵消项被定义为不仅包含极点项，而且还包含与极点项一起出现的n维积分的产物，即常数项$(\ln 4\pi - \gamma_E)$。在标准模型中，$\overline{MS}$方案常用于 Weinberg 角和强耦合常数的的重整化。这些重整化量不是物理可观测量。它们是与模型有关的，而且依赖于重整化标度。对这些量的来自重粒子的贡献并不退耦。尽管如此，它们是与过程无关的，因而在给定模型中它们对于比较不同实验的测量的涵义是很有用的。

在以下讨论中，我们将采用维数减除方法来正规化积分，且采用$\overline{MS}$重整化方案，由此给出的减除量被称为$\overline{DR}$重整化量。我们也用符号“∧”标记一个$\overline{DR}$重整化量。

例如，考虑电荷重整化。对裸电荷采用$\overline{DR}$减除，就得到了重整化的$\overline{DR}$电荷。

$$e_b = e + \delta e \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e_b} - (\delta e)_\infty = \hat{e}(Q^2) = e + \delta e - (\delta e)_\infty$$
$$= e\left(1 + \frac{1}{2}\hat{\Pi}^{T'}_{\gamma\gamma}(0) + \frac{s}{c}\frac{\hat{\Pi}^{T}_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}\right) \tag{4.51}$$

其中下标∞表示含$(1/\varepsilon + \ln 4\pi - \gamma_E)$的部分。

§4.5.1 单圈积分

现在来讨论费曼图的计算。对每一个$n \le 3$的n点图，要计算单圈费曼图仅仅需要确定一个标量函数。各种张量积分都可以用这些标量函数表出。对这些函数，除了所采用的度规是$(1,-1,-1,-1)$，并且在某些情况下会差一个负号之外，我们采用 Passarino 和 Veltman 的定义。

对一点图，有

$$Q^{4-n}\int \frac{d^n q}{(2\pi)^n}\frac{1}{(q^2 - m^2 + i\,\varepsilon)} \equiv \frac{i}{16\pi^2}A_0(m^2) \tag{4.52}$$

重整化标度Q对保证n维耦合常数的无量纲性是必须的。此积分等于

$$A_0\left(m^2\right)=m^2\left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}}+1+\ln\frac{Q^2}{m^2}\right) \tag{4.53}$$

其中$1/\hat{\varepsilon}=1/\varepsilon+\ln 4\pi-\gamma_E$。两点标量积分定义为

$$\begin{aligned}&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{1}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]}\\&\equiv\frac{i}{16\pi^2}B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\end{aligned} \tag{4.54}$$

这个函数可以写为

$$B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)=\frac{1}{\hat{\varepsilon}}-\int_0^1dx\ln\frac{(1-x)m_1^2+xm_2^2-x(1-x)p^2}{Q^2} \tag{4.55}$$

矢量两点函数定义为

$$\begin{aligned}&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{q^\mu}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]}\\&\equiv\frac{i}{16\pi^2}B_1\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)p^\mu\end{aligned} \tag{4.56}$$

B_1可以用费曼参数积分表示为

$$B_1\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)=\frac{1}{2\hat{\varepsilon}}-\int_0^1dxx\ln\frac{(1-x)m_1^2+xm_2^2-x(1-x)p^2}{Q^2} \tag{4.57}$$

张量两点函数定义为

$$\begin{aligned}&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{q^\mu q^\nu}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]}\\&=\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\left[B_{21}\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)p^\mu p^\nu+B_{22}\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)g^{\mu\nu}\right]\end{aligned} \tag{4.58}$$

矢量和张量两点函数可以用A_0和B_0表示为

$$\begin{aligned}&B_1\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\\&=\frac{1}{2p^2}\left\{A_0\left(m_2^2\right)-A_0\left(m_1^2\right)+\left(p^2+m_1^2-m_2^2\right)B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}&B_{21}\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\\&=\frac{1}{3p^2}\left\{2A_0\left(m_2^2\right)-A_0\left(m_1^2\right)+\left(p^2+\frac{m_1^2-5m_2^2}{4}\right)B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\right.\\&-\frac{m_2^2-m_1^2}{p^2}\left[A_0\left(m_2^2\right)-A_0\left(m_1^2\right)+\left(\frac{3}{4}p^2+m_1^2-m_2^2\right)B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\right]\\&\left.-\frac{1}{2}\left(m_1^2+m_2^2-\frac{1}{3}p^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$
\begin{aligned}
&B_{22}\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\\
&=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}\left(A_0\left(m_1^2\right)+A_0\left(m_2^2\right)\right)+\left(m_1^2+m_2^2-\frac{1}{2}p^2\right)B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\right.\\
&+\frac{m_2^2-m_1^2}{2p^2}\left[A_0\left(m_2^2\right)-A_0\left(m_1^2\right)-\left(m_2^2-m_1^2\right)B_0\left(p^2,m_1^2,m_2^2\right)\right]\\
&\left.+m_1^2+m_2^2-\frac{1}{3}p^2\right\}
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

三点标量积分依赖于三个外线动量以及三条内线的质量。因此函数的变量为$\left(k^2,p_1^2,p_2^2,m_1^2,m_2^2,m_3^2\right)$，其中$m_1$是在$k$和$p_1$之间的内线粒子的质量，而$m_2$是$p_1$和$p_2$之间的内线粒子的质量。三点标量函数为

$$
\begin{aligned}
&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{1}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p_1)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]\left[(q-p_1-p_2)^2-m_3^2+i\,\varepsilon\right]}\\
&\quad\equiv\frac{i}{16\pi^2}C_0
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

矢量和张量三点函数积分定义为

$$
\begin{aligned}
&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{q^\mu}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p_1)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]\left[(q-p_1-p_2)^2-m_3^2+i\,\varepsilon\right]}\\
&\quad\equiv\frac{i}{16\pi^2}\left[C_{11}p_1^\mu+C_{12}p_2^\mu\right]
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{q^\mu q^\nu}{\left(q^2-m_1^2+i\,\varepsilon\right)\left[(q-p_1)^2-m_2^2+i\,\varepsilon\right]\left[(q-p_1-p_2)^2-m_3^2+i\,\varepsilon\right]}\\
&\quad\equiv\frac{i}{16\pi^2}\left[C_{21}p_1^\mu p_1^\nu+C_{22}p_2^\mu p_2^\nu+C_{23}\left(p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu\right)+C_{24}g^{\mu\nu}\right]
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

C函数的解析表达式可以参看有关文献。计算这些函数时会涉及大数相消的情况，因此在实现算法时需要非常的小心。在国际上，有一个名为 FF 的 FORTRAN 程序包提供了对这些积分的准确计算。

熟悉这些函数的定义和一般性质比关注其一般形式更为重要。例如，注意到，每个函数在$1/\hat{\varepsilon}$的留数和$\ln Q^2$的系数相同。当计算一个物理量（比如W玻色子的质量）时，$1/\hat{\varepsilon}$发散被抵消掉。这种抵消精确地相应于对重整化标度依赖性的抵消。

Passarino-Veltman 函数在其某一参数很大时的极限情形在工作中是有用的。例如，考虑B_0函数，从式（4.55）可以看出，当$M>>m$时，

$$
B_0\left(M^2,m^2,m^2\right)=\frac{1}{\hat{\varepsilon}}-\ln\frac{M^2}{Q^2}+const+O\left(\frac{m^2}{M^2}\right)
\tag{4.65}
$$

这个表达式对 M 和 m 的任意次序都成立。$2B_1$ 也有相同的形式。

例子：顶夸克质量的 SUSY-QCD 修正

利用 Passarino-Veltman 函数使得计算费曼图变得很容易。例如，考虑对顶夸克质量的 QCD 修正。色因子为

$$T^a_{ik}T^a_{kj} = C_2(R)\delta_{ij} = \frac{N_c^2-1}{2N_c}\delta_{ij} = \frac{4}{3}\delta_{ij} \tag{4.66}$$

而对有关自能图的计算可得

$$\begin{aligned} -i\Sigma(\not p) &= -\left(\frac{4g_s^2}{3}\right)Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(2\pi)^n}\frac{\gamma_\mu(\not q+m_t)\gamma^\mu}{\left[(q^2-m_t^2)+i\varepsilon\right]\left[(q-p)^2+i\varepsilon\right]} \\ &= -\frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{4g_s^2}{3}\right)\left[-2\not pB_1(p^2,m_t^2,0)+4m_tB_0(p^2,m_t^2,0)\right] \end{aligned} \tag{4.67}$$

根据式(4.21)有 $\delta m = -\frac{1}{2}m\left[\Sigma_L(m^2)+\Sigma_R(m^2)\right]-m\,\mathrm{Re}\,\Sigma_S(m^2)$，因而胶子对 δm_t 贡献为

$$\delta m_t = -\frac{g_s^2}{6\pi^2}\left[2B_0(m_t^2,m_t^2,0)-B_1(m_t^2,m_t^2,0)\right]m_t \tag{4.68}$$

从(4.55)式和(4.57)式，可以给出

$$B_0(m^2,m^2,0) = \frac{1}{\hat\varepsilon}+\ln\frac{Q^2}{m^2}+2 \tag{4.69}$$

$$B_1(m^2,m^2,0) = \frac{1}{2\hat\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{m^2}+\frac{3}{2} \tag{4.70}$$

进而，在 $\overline{DR}$ 重整化下胶子对顶夸克质量的贡献为

$$\delta\hat m_t = -\frac{\alpha_s}{3\pi}\left[3\ln\left(\frac{Q^2}{m_t^2}\right)+5\right]m_t \tag{4.71}$$

顶夸克质量是一个输入参数，故其抵消项是依赖于重整化标度和重整化方案的。而一个物理量的预言是抵消项和正规顶角函数的组合，它是与重整化标度和重整化方案无关的。

作为第二个例子，考虑 squark/gluino 对顶夸克自能的贡献。如果忽略了 squark 的混合，左手 stop 的贡献为

$$\begin{aligned} -i\Sigma(\not p) &= \frac{8g_s^2}{3}Q^{4-n}\int\frac{d^nq}{(4\pi)^n}\frac{P_R(\not q+m_{\tilde g})P_L}{\left[q^2-m_{\tilde g}^2+i\varepsilon\right]\left[(q-p)^2-m_{\tilde t_L}^2+i\varepsilon\right]} \\ &= \frac{8g_s^2}{3}\left(\frac{i}{16\pi^2}\right)B_1(p^2,m_{\tilde g}^2,m_{\tilde t_L}^2)\not pP_L \end{aligned} \tag{4.72}$$

于是

$$\Sigma_L\left(p^2\right)=-\frac{g_s^2}{6\pi^2}B_1\left(p^2,m_{\tilde{g}}^2,m_{\tilde{t}_L}^2\right) \tag{4.73}$$

包括了右手 stop 的贡献后，得到对 δm_t 贡献为

$$\delta m_t=\frac{\alpha_s}{3\pi}\mathrm{Re}\left(B_1\left(m_t^2,m_{\tilde{g}}^2,m_{\tilde{t}_L}^2\right)+B_1\left(m_t^2,m_{\tilde{g}}^2,m_{\tilde{t}_R}^2\right)\right)m_t \tag{4.74}$$

从(4.57)式可以看出，在 $m_{\tilde{t}}>>m_{\tilde{g}},m_t$ 的极限下，函数 B_1 变为

$$B_1\left(m_t^2,m_{\tilde{g}}^2,m_{\tilde{t}}^2\right)=\frac{1}{2\hat{\varepsilon}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{m_{\tilde{t}}^2}\right)+\frac{1}{4}+O\left(\frac{m_{\tilde{g}}^2,m_t^2}{m_{\tilde{t}}^2}\right) \tag{4.75}$$

经过 $\overline{DR}$ 重整化，对顶夸克质量的 SUSY-QCD 修正，在极限 $m_{\tilde{t}}=m_{\tilde{t}_L}=m_{\tilde{t}_R}>>m_t,m_{\tilde{g}}$ 下，为

$$\delta\hat{m}_t=\frac{\alpha_s}{3\pi}\left[-3\ln\left(\frac{Q^2}{m_t^2}\right)-5+\ln\left(\frac{Q^2}{m_{\tilde{t}}^2}\right)+\frac{1}{2}+O\left(\frac{m_{\tilde{g}}^2,m_t^2}{m_{\tilde{t}}^2}\right)\right]m_t \tag{4.76}$$

极点质量与跑动 $\overline{DR}$ 质量的关系为

$$m_t=\hat{m}_t(Q)-\delta\hat{m}_t \tag{4.77}$$

§4.5.2 阈修正和 RGE（重整化方程）

上面计算了对顶夸克质量的 SUSY-QCD 修正。在标准模型中顶夸克质量是一个输入参数，而不是一个理论预言。因而其修正是依赖于重整化标度 Q 的，为了得到一个有限的结果，我们必须采用一个重整化的程序。这里采用的是 $\overline{DR}$ 重整化。

我们已经看到修正(4.76)式包含了对数项。如果对数项修正很大，微扰论的计算就不可靠了，因为微扰级数的展开系数含有形如 $(\alpha/\pi)\log(M/m)$ 的项。幸运的是，对这些对数项，我们可以对微扰级数的所有阶求和，而重整化群方程可用于这个目的。

顶夸克质量的重整化群方程可以由(4.76)式导出。既然顶夸克极点质量是独立于重整化标度的，于是有

$$\frac{dm_t}{d\ln Q^2}=0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{d\hat{m}_t}{d\ln Q^2}=-\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{8}{3}\hat{g}_s^2(Q)+\ldots\right)\hat{m}_t(Q) \tag{4.78}$$

其中省略号表示来自其它的规范耦合和 Yukawa 耦合的圈图贡献。RGE 涉及到依赖于 Q 的 $\overline{DR}$ 顶夸克质量和依赖于 Q 的 $\overline{DR}$ 规范和 Yukawa 耦合。对这些耦合也一样存在 RG 方程，它们组成了一组联立的微分方程。对这些方程组很难精确求解，但对它们进行数值求解

是容易的。

现在来考察(4.76)式中的对数和非对数修正是如何与 RGE 发生关系的。为简单起见，我们令 $m_{\tilde{g}} = m_t$。如果 $m_{\tilde{t}} >> m_t$，则不存在一个单一的标度能使得修正(4.76)式是小的。在标度 m_t 上，stop 圈的贡献正比于 $\ln(m_{\tilde{t}} / m_t)$。在标度 $Q = m_{\tilde{t}}$ 上，胶子圈图（QCD）贡献同样包含了大的对数项。这时需利用 RGE 对这些对数项求和。假定知道了顶夸克的极点质量，现在要确定顶夸克在上述 stop 质量标度上的跑动质量。为对(4.76)式中的对数项求和，首先在标度 m_t 上利用胶子修正的表达式。注意到在此标度上并不存在对数项，因而

$$\hat{m}_t(m_t) = \left(1 - \frac{5\hat{\alpha}_s(m_t)}{3\pi}\right) m_t \tag{4.79}$$

现在求解 RGE 以给出在 stop 质量标度上的跑动质量。顶夸克质量完整的 RGE 涉及到所有规范和 Yukawa 耦合的修正，因而只能数值求解。但是，如果只保留强耦合的修正而将其它修正全部忽略，这时便可直接求解 RGE。在 stop 质量标度以下的有效理论中，只有胶子对顶夸克的 RGE 有贡献。因此，由(4.76)式可得到相应的 RGE 为

$$\frac{d\hat{m}_t(t)}{dt} = -\frac{\hat{g}_s^2(t)}{4\pi^2}\hat{m}_t(t) \tag{4.80}$$

其中 $t = \ln Q^2$。在单圈水平，强耦合常数的 RGE 方程为

$$\frac{d\hat{g}_s(t)}{dt} = \frac{b_3}{16\pi^2}\hat{g}_s^3(t) \tag{4.81}$$

此方程的解为

$$\hat{g}_s^{-2}(Q_2) = \hat{g}_s^{-2}(Q_1) - \frac{b_3}{8\pi^2}\ln\left(\frac{Q_2^2}{Q_1^2}\right) \tag{4.82}$$

可将(4.81)式代入(4.80)式来求解 $\hat{m}_t(t)$，得到

$$\hat{m}_t(Q) = \hat{m}_t(m_t)\left(\frac{\hat{\alpha}_s(m_t)}{\hat{\alpha}_s(Q)}\right)^{\frac{2}{b_3}} \tag{4.83}$$

这个表达式包括了胶子修正的对数项的求和。在顶夸克质量和 stop 质量之间的任意标度上，这个关系都是一个很好的近似。为了确定 stop 质量标度以上的顶夸克的跑动质量，必须包含 stop 的圈图修正。为避免大的对数项破坏微扰论，我们在 stop 质量标度上计算 stop 修正。在这个标度上，stop 的圈图修正的对数项为零。在 stop 质量标度上，跑动顶夸克质量为

$$\hat{m}_t(m_{\tilde{t}}) = \left[\left(1-\frac{5\hat{\alpha}_s(m_t)}{3\pi}\right)\left(\frac{\hat{\alpha}_s(m_t)}{\hat{\alpha}_s(m_{\tilde{t}})}\right)^{2/b_3} + \frac{\hat{\alpha}_s(m_{\tilde{t}})}{3\pi}\left(\frac{1}{2}+O\left(\frac{m_t^2}{m_{\tilde{t}}^2}\right)\right)\right] m_t \qquad (4.84)$$

由此，通过求解完整的最小超对称模型的 RGE，我们可以跑动顶夸克的质量到更的高标度上。注意，由于 squark 的贡献，在 stop 质量标度以上顶夸克质量的 RGE 和强耦合常数的 RGE 都将发生改变。

这个例子表明了如何使用 RGE 对大的对数项求和，它也说明了 RGE 与阈修正的对数和非对数项之间的相互关系。

参考文献

1. 戴元本，相互作用的规范理论，科学出版社，1987。
2. （美）黄克孙，夸克，轻子与规范场（中译本），北师大出版社，1988。
3. Cheng, Ta-Pei and Li, Ling-Fong, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1983.
4. Bailin, D. and Love, A., *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol, 1986.
5. Ryder, Lewis H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
6. Peskin , Michael E. and Schroeder, Daniel V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.
7. G. Passarino, M. Veltman, *Nucl. Phys.* B160, 151 (1979).
8. W. F. L. Hollik, Preprint, DESY 88-188 (1988).
9. A. Denner, *Fortschr. Phys.* 41, 4 (1993).
10. Damien M. Pierce, hep-ph/9805497 (1998).
11. M. Herrero, hep-ph/9812242 (1998).
12. S. F. Novaes, hep-ph/0001283 (2000).