胡曙光编著

规范场论

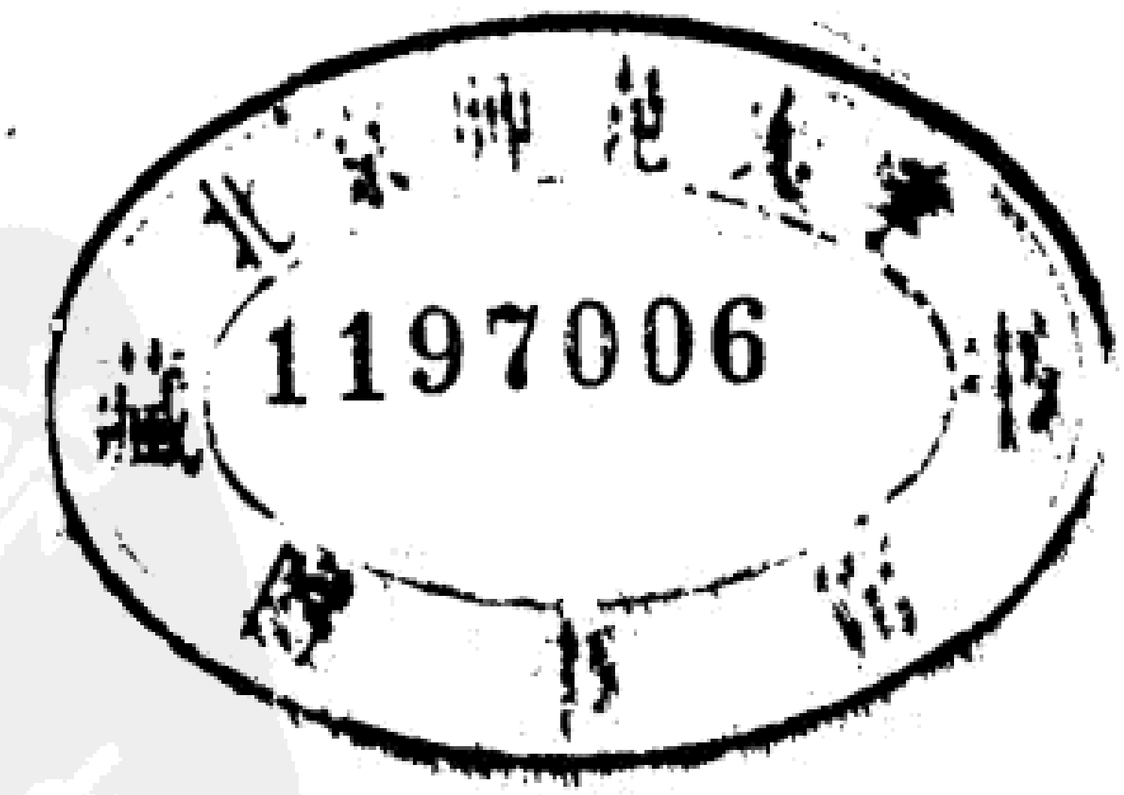
GUIFANCHANG LUN

华东师范大学出版社

规 范 场 论

胡瑶光 编著

O 1154.4



华东师范大学出版社

规 范 场 论

胡瑶光 编著

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）
新华书店上海发行所发行　　江苏如皋印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：13　字数：330千字
1984年3月第一版　1984年3月第一次印刷
印数 1——6,000本

统一书号：13135·011　　定价：1.50元

前　言

基本粒子物理是最活跃的前沿学科之一。随着高能加速器的发展，新粒子不断出现，粒子反应过程呈现新的规律。人们试图从各个不同方面，用各种不同理论，来论述基本粒子的规律。在多种多样的基本粒子理论中，对称性理论居于主导地位。五十年代发现了宇称不尽守恒，完善了基本粒子的时、空对称理论。六十年代建立了幺正对称理论，预言了夸克的存在，进入了基本粒子的夸克时代。七十年代确立了弱电统一规范理论，初创了量子色动力学，开始了规范理论的统治局面。

授予诺贝尔奖金，是肯定科学研究成果的一种重要方式。基本粒子理论研究，获得诺贝尔奖金的，共有六次：1949 年汤川的介子理论；1957 年李政道、杨振宁的宇称不尽守恒；1963 年维格勒(Wigner)的对称群用于物理；1965 年朝永振一郎(Tomonaga)、许温格(Schwinger)、费曼(Feynman)的重整化等场论；1965 年格尔曼(Gell-Mann)的幺正对称理论；1979 年格拉肖(Glashow)、温伯格(Weinberg)、萨拉姆(Salam)的弱电统一规范理论。其中有四项是对称理论。这不是偶然现象，是对称理论在基本粒子理论中所居地位的一种反映。

自然界存在四种相互作用：电磁作用；弱作用；强作用；万有引力。人们早就想把这四种相互作用统一起来，进行描述。为此，进行了多方面的努力。但是，取得成功的，都属规范场论。弱电统一理论是 $SU(2)\times U(1)$ 规范场论。量子色动力学是 $SU_c(3)$ 规范场论。由于弱电统一理论的成功，而量子色动力学又是强作用理论的唯一候选者，所以人们把 $SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$ 叫做标准模

型。在这基础上，人们建立了把弱电强三种相互作用统一起来的大统一理论。人们还企图把万有引力也包括进去，建立统一四种相互作用的超对称、超统一理论。

通常，把基本粒子分成轻子、重子、介子和光子四类。但是，从规范理论的观点看来，基本粒子应该分成新的三种类型：实粒子；规范粒子；Higgs 粒子。实粒子包括轻子和夸克，是基本的费米子。重子和介子是由夸克组成的复合粒子。规范粒子是传递相互作用的矢量粒子，它们是光子、中间玻色子和胶子，还可能有导致质子衰变的 X、Y 粒子。Higgs 粒子具有奇异的性质：当它们以虚质量面目出现时，破坏真空的对称性；当把对称性的破坏由真空转向"实物"时，它们以实质量面目出现，并使其它粒子获得质量；它们的主要责任是使其它粒子获得质量。

把最新科学研究成果，尽快地传播开去是科教工作者的职责。规范场论的研究，取得了重大成就，改变了基本粒子理论的面貌。规范场论正在成为基本粒子理论工作者的必修课程。可是，迄今还缺少系统论述规范场论的专门教材，这对初学者是不利的。鉴于此，作者在几次讲学的基础上，在一些同志的督促下，写成此书。但愿本书能使读者获得一个初步的基础，为进一步学习、研究准备条件。所以，在内容的选取和论述方面，着重基础，着重处理问题的观点和方法。但是，由于作者水平的限制，力不从心，错误之处难免，请读者指正。

本书内容包括四个部分：第一部分由第一、二章组成，在经典场论的基础上，论述规范对称性、破缺对称性和弱电统一规范理论；第二部分由第三、四、五、六章组成，介绍泛函路径积分方法，用它处理规范场的量子化和重整化；第三部分由第七、八、九章组成，是量子色动力学的基础，包括重整化群、算符乘积展开、A-P 方程等理论方法，以及深度非弹散射和 e^+e^- 湮灭等基本内容；第四部分是第十章，是以 SU(5) 为例的大统一理论的导引。

本书主要参考的资料有：E. S. Abers, B. W. Lee 的«规范理论»(Phys. Rep. 9C. No. 1, 1973)；杨炳麟的«量子场论导论»和«微扰量子色动力学及重整化群的应用»；P. Langacker 的"Grand unified theories and proton decay" (Phys. Rep. Vol. 72, No. 4, 1981); A. J. Buras, "Asymptotic freedom in deep inelestic processes in the leading order and beyond"(Rev. Mod. phys. Vol. 52, No. 1, 1980)等等。

本书使用的符号、度规，大致和 J. D. Bjorken, S. D. Drell 的"Relativistic Quantum Fields" 一书中的相同，但 γ_5 差一负号。

殷鹏程教授审阅了原稿，李凌云同志负责编辑，薛晓舟、王勉、潘传增、葛源、杨学恒等许多同志，对本书给予了很大的促进和帮助，蒋元方、沙以高校核了样稿，作者向他们表示感谢！

目　　录

前　言

第一章　场的对称性 ……1

§1. 时空连续变换下的不变性 ……1

§2. 整体规范不变性 ……6

§3. 定域规范不变性 ……9

§4. Higgs场的破缺对称性 ……14

§5. Higgs 机制 ……24

第二章　GWS 弱电统一规范理论 ……33

§1. 费米子的场和流 ……33

§2. 轻子弱电统一规范理论 ……42

§3. 夸克弱电统一规范理论 ……53

§4. 轻子弱过程 ……63

§5. 强子弱过程 ……69

第三章　生成泛函的路径积分表示……76

§1. 转换矩阵元和算符矩阵元 ……78

§2. 格林函数及其生成泛函 ……86

§3. 场的格林函数及其生成泛函 ……95

§4. 连通格林函数及其生成泛函 ……105

§5. 正规顶角及其生成泛函 ……108

§6. $\phi^4(x)$场的生成泛函 ……115

第四章　规范场的量子化 ……124

§1. 正则坐标和动量 ……125

§2. 库伦规范下的生成泛函 ……128

§3. 法捷叶夫-波波夫理论 ……132

§4. 鬼粒子和规范固定项 ……136

§ 5. 规范场的费曼规则 ……143
§ 6. GWS 场的量子化和 R_ξ 规范 ……149
第五章 生成泛函的不变性和恒等式 ……162
§ 1. 函数空间的平移变换和正则关系 ……162
§ 2. 场、源分离变换和费曼规则 ……168
§ 3. 一般变换下的不变性和恒等式 ……176
§ 4. B、R、S 变换和 W、T 恒等式 ……183
第六章 规范理论的重整化 ……194
§ 1. 重整化的一般概念 ……194
§ 2. 重整化常数的计算 ……203
§ 3. 规范场传播子纵分量不需重整 ……214
§ 4. 重整化方程 ……217
§ 5. 规范理论的重整化 ……224
第七章 QCD 和重整化群方程 ……230
§ 1. 颜色自由度 ……230
§ 2. 量子色动力学 ……236
§ 3. 重整化群方程 ……243
§ 4. 随动量变化的参数 ……248
§ 5. 深度非弹散射的结构函数 ……257
§ 6. 渐近自由的夸克模型 ……273
第八章 算符乘积展开及其应用 ……281
§ 1. 自由场算符乘积展开 ……281
§ 2. 再论结构函数 ……293
§ 3. 相互作用场算符乘积的展开 ……306
§ 4. 展开系数的重整化群方程 ……318
§ 5. 展开算符及其反常量纲 ……321
第九章 A–P 方程和分布、碎裂、演化函数 ……333
§ 1. 分布函数及其 A–P 方程 ……334
§ 2. 演化函数 ……340
§ 3. e^+e^- 湮灭为强子的初级近似 ……352

§ 4. e^+e^-湮灭为强子的重整化效应……358
§ 5. 碎裂函数及其 A–P 方程……364
第十章 SU(5)大统一理论 ……373
§ 1. SU(5)规范群和规范场……373
§ 2. 费米场的表示 ……384
§ 3. Higgs 机制 ……390
§ 4. 重整化效应 ……399

第一章　场的对称性

对称理论是基本粒子理论的重要内容。规范不变性是场的一种基本对称性。对称性的破缺是使场获得质量的一种机制。在这一章里，我们着重论述场在内部空间的规范不变性，论述对称性的破缺和使场获得质量的 Higgs 机制。为了便于理解对称理论的观点和方法，我们先介绍场在时空空间连续变换下的不变性，然后再进入主题。

§1. 时空连续变换下的不变性

时空连续变换下的不变性，包括平移不变性和洛仑兹不变性。平移不变性反映时空空间的均匀性，是能量、动量守恒定律的基础。洛仑兹不变性是四维时空转动下的不变性，反映四维时空的各向同性。它包括的三维空间转动下的不变性，是角动量守恒的基础。

时空平移　指时空坐标 x^μ 的平移变换，定义为

$$x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu,$$
$$\delta x^\mu \equiv x^{\mu'} - x^\mu = a^\mu。 \tag{1-1}$$

a^μ 是与 x^μ 无关的常数，$\mu = 0, 1, 2, 3$。

在这变换下，场量 $\phi_\sigma(x)$ 也要发生相应的变化。人们认为：变换前后的场量相等，即

$$\phi_\sigma(x) \to \phi'_\sigma(x') = \phi_\sigma(x), \tag{1-2}$$

$\sigma = 1, 2, \cdots, n$ 是场的分量指标。$\phi'_\sigma(x')$ 由两重变化而成：作为 x 的函数，它随 x 变为 $\phi_\sigma(x')$；由于场本身的性质，它变换为

$\phi'_\sigma(x)$，而且定义本征变换为

$$\delta\phi_\sigma(x)\equiv\phi'_\sigma(x)-\phi_\sigma(x)。$$

由(1-2)式得

$$\phi'_\sigma(x)=\phi_\sigma(x-a)=\phi_\sigma(x)-a^\mu\,\partial_\mu\phi_\sigma(x)。$$

在后一个等式中，我们假定了 a^μ 是小量，并且只取一级近似。因此，场量的本征变化为

$$\delta\phi_\sigma(x)=-a^\mu\,\partial_\mu\phi_\sigma(x)。\tag{1-3}$$

平移不变性 人们认为：时空空间是均匀的，在时空空间各点发生的物理规律应该是相同的。因此，用来描述物理规律的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 或运动方程，在不同的时空点应该具有相同的形式。换句话说，在上述的平移变换下，拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 是不变的，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))&\to\mathscr{L}'(\phi'_\sigma(x'),\ \partial'_\mu\phi'_\sigma(x'))\\&=\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x'),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x'))\\&=\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x)),\end{aligned}\tag{1-4}$$

这是我们在本书中采用的不变性的数学表达式。它不仅表示时空平移不变下的不变性，也表示其它变换下的不变性。当然，对于不同的变换，$\phi'_\sigma(x')$有不同的意义。(1-4)式中的第一个等号表示变换前后的拉格朗日密度的泛函形式一样，第二个等号表示变换前后的拉格朗日密度的大小一样。

能量、动量守恒定律 从以上所述的时空均匀性、平移不变性，可以导出能量、动量守恒定律。由(1-4)式得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-a),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-a))=0,\\&\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))\\&\quad+\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-a),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-a))\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\partial_\mu\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x) + \mathscr{L}\delta x^\mu\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\sigma(x)}(-a^\nu \partial_\nu \phi_\sigma(x)) + \mathscr{L} g^\mu_\nu a^\nu\right]$$

$$= 0。$$

由于 a^ν 是任意的小量，所以从上式得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu} = 0, \tag{1-5}$$

$$T^{\mu\nu} = \mathscr{L} g^{\mu\nu} - \partial^\mu \phi_\sigma(x) \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \phi_\sigma(x)}。 \tag{1-6}$$

(1-5)式表示的连续性方程，就是能量、动量守恒的微分形式。(1-6)式表示的 $T^{\mu\nu}$，就是场的能量、动量张量。对(1-5)式取体积积分，得

$$\int_V \left(\frac{\partial T^{\mu 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T^{\mu 2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial x_3}\right) dV + \int_V \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} dV = 0。$$

应用高斯定理，上式变成

$$\oint_S T^{\mu i} dS_i + \frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 0} dV = 0。 \tag{1-7}$$

这就是能量、动量守恒定律的积分形式。

能量和动量 把(1-7)应用到场所占有的整个空间，在包围整个场的表面上 $T^{\mu i} = 0$，则(1-7)式成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu 0} dV = 0。$$

由此可知

$$P^\mu = \int_V T^{\mu 0} dV$$

是守恒量。我们把它叫做场的四维动量。而

$$-E = \int_V T^{00} dV = \int_V [\mathscr{L} - \dot{\phi}_\sigma(x)\pi_\sigma(x)] dV \tag{1-8}$$

是场的能量。

$$P^i = \int_V T^{i0} dV = -\int_V \pi_\sigma(x)\partial^i \phi_\sigma(x) dV \tag{1-9}$$

是场的动量。以上诸式中的

$$\pi_\sigma(x)\equiv\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{\phi}_\sigma(x)}$$

是和场量 $\phi_\sigma(x)$ 相应的正则动量(密度)。

洛仑兹变换 时空坐标作变换

$$x^\mu\rightarrow x^{\mu'}=a^{\mu\nu}x_\nu,$$

且满足条件

$$x^{\mu'}x'_\mu=x^\nu x_\nu,$$

则称为洛仑兹变换。$a^{\mu\nu}$ 是和 x^μ 无关的变换系数。由上式可知它应该满足条件

$$a^{\mu\nu}a_{\mu\lambda}=g^\nu_\lambda。$$

如果

$$a^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+\epsilon^{\mu\nu},$$

且 $\epsilon^{\mu\nu}$ 是一小量,并满足反对称条件

$$\epsilon^{\mu\nu}=-\epsilon^{\nu\mu},\tag{1-10}$$

那么就是无穷小洛仑兹变换。这时

$$\delta x^\mu=x^{\mu'}-x^\mu=\epsilon^{\mu\nu}x_\nu。\tag{1-11}$$

在无穷小洛仑兹变换下，场量 $\phi_\sigma(x)$ 也应该作一个无穷小变换,即

$$\phi_\sigma(x)\rightarrow\phi'_\sigma(x')=\left(\delta_{\sigma\rho}+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\right)\phi_\rho(x)。\tag{1-12}$$

(1-12)式中的 $S_{\mu\nu,\sigma\rho}$ 是由场量 $\phi_\sigma(x)$ 的性质确定的变换系数,实际上是由相应粒子的自旋确定的变换系数。$\frac{i}{2}$ 是为了使 $S_{\mu\nu,\sigma\rho}$ 的意义更明确而引进的。$\phi'_\sigma(x')$ 也包含两重变换,它的本征变化为

$$\delta\phi_\sigma(x)=\phi'_\sigma(x)-\phi_\sigma(x)。$$

由(1-12)式可知

$$\begin{aligned}\phi'_\sigma(x)&=\phi_\sigma(x-\epsilon x)+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\,\sigma\rho}\phi_\rho(x-\epsilon x)\\&=\phi_\sigma(x)-\epsilon^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\phi_\sigma(x)+\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\sigma\rho}\phi_\rho(x)\\&=\phi_\sigma(x)+\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\delta_{\sigma\rho}+iS_{\mu\nu,\sigma\rho}]\phi_\rho(x),\end{aligned}$$

代入上式得

$$\delta\phi_\sigma(x)=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\delta_{\sigma\rho}+iS_{\mu\nu,\sigma\rho}]\phi_\rho(x)。\quad(1\text{-}13)$$

角动量守恒 在洛仑兹变换下的不变性,可以用

$$\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x'),\ \partial'_\mu\phi'_\sigma(x'))=\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))$$

表示,它反映时空空间的各向同性。由它可知

$$\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-\epsilon x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-\epsilon x))$$

$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\partial_\mu\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\mathscr{L}g^{\mu\nu}\delta x_\nu\right]=0。$$

把(1-11)式和(1-13)式代入上式得

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}[(x_\nu\partial_\lambda-x_\lambda\partial_\nu)\delta_{\rho\sigma}+iS_{\nu\lambda,\sigma\rho}]\phi_\rho(x)+\mathscr{L}g^{\mu\nu}\epsilon_{\nu\lambda}x^\lambda\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{x_\lambda\left(g^\mu_\nu\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\partial_\nu\phi_\sigma(x)\right)\right.$$

$$-x_\nu\left(g^\mu_\lambda\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\partial_\lambda\phi_\sigma(x)\right)$$

$$\left.+i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}S_{\nu\lambda,\sigma\rho}\phi_\rho(x)\right\}=0。$$

$\epsilon^{\nu\lambda}$ 是任意的,因而将(1-6) 式代入就得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}M_{\lambda\nu,\mu}=0,\quad(1\text{-}14)$$

$$M_{\lambda\nu,\mu}=x_\lambda T_{\nu\mu}-x_\nu T_{\lambda\mu}+i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial^\mu\phi_\sigma(x)}S_{\nu\lambda,\sigma\rho}\phi_\rho(x)\quad(1\text{-}15)$$

这就是四维角动量守恒定律和四维角动量张量。而守恒的四维角动量就是

$$J_{\lambda\nu}=\int_V M_{\lambda\nu,0}\,dV。$$

当 $\lambda、\nu=i、j=1,\ 2,\ 3$ 时,就是普通的角动量

$$J_{ij}=\int_V[x_iT_{j0}-x_jT_{i0}+i\pi_\sigma(x)S_{ij,\sigma\rho}\phi_\rho(x)]dV。$$

显然

$$-i\int_V\pi_\sigma(x)S_{ij,\sigma\rho}\phi_\rho(x)dV$$

是自旋角动量。

从以上的论述可知，对称性、不变性和守恒定律是紧密联系着的。Noether 定理早就指出了这种联系。这种联系使对称理论在物理学中占有重要的作用和地位。

§2. 整体规范不变性

作为导引，我们在上一节中讨论了场在时空空间的连续不变性。在讨论中没有使用群论语言。现在，我们开始讨论场在内部空间的对称性，并采用群论方法。内部空间是为了描述粒子场的内部性质，如电荷、重子数、轻子数、同位旋、味道、颜色等，而引入的抽象空间。

规范群 在规范理论中，内部空间的“转动”，用规范群 G 来表示。规范群的元素写作

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]。\tag{1-16}$$

T^α 是群 G 的生成元，满足对易关系

$$[T^\alpha,\ T^\beta]=if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma。\tag{1-17}$$

$f^{\alpha\beta\gamma}$ 是群 G 的结构常数。$\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。$N$ 是群 G 的维数，它等于生成元的个数。θ^α 是群 G 的参数，叫做群参数，也有 N 个。

如果规范群是 SU(n)群，那末 $N=n^2-1$，就有 n^2-1 个生成元 T^α，$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n^2-1$。群元素的表示 $u(\theta)$ 就是幺正、幺模的矩阵。生成元的表示就是厄密、无迹的矩阵。而且，在 n^2-1 个生成元中，有 $n-1$ 个是可以同时对角化的。

如果规范群是 n 维实空间的转动群，那末 $N=\frac{1}{2}n(n-1)$，就有 $\frac{1}{2}n(n-1)$个生成元。它的表示 T^{α}，$\alpha=1, 2, \cdots, \frac{1}{2}n(n-1)$，就是厄密、纯虚、反对称的矩阵。它的基本表示可以写作

$$L_{ij}=-i(E_{ij}-E_{ji}),$$

$$(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$i, j=1, 2, \cdots, n。 \tag{1-18}$$

群的生成元可以用作描写场粒子性质的算符。在具体问题中，要选择什么样的规范群，归根到底要由场粒子的具体性质来确定，要由粒子之间的相互作用规律来确定。例如，在量子电动力学(QED)中，采用 U(1) 群，生成元 $T=Q$ 是电荷算符；在 GWS 弱电统一规范理论中，采用 $SU(2)\times U(1)$ 群，生成元 $T^{i}(i=1, 2, 3)$ 是同位旋算符，生成元 Y 是超荷算符；在量子色动力学(QCD)中，采用 SU(3) 群，生成元 $G^{\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 是颜色算符；在大统一理论中，采用 SU(5) 群，生成元除同位旋算符 $T^{i}(i=1, 2, 3)$、超荷算符 Y、颜色算符 $G^{\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 外，还有十二个既有颜色又有味道的算符 T^{α}_{r} 和 $T^{r}_{\alpha}(\alpha=1, 2, 3; r=4, 5)$。

规范变换 在内部空间的转动下，场量 $\phi_{\sigma}(x)$ 作变换

$$\phi_{\sigma}(x)\rightarrow\phi'_{\sigma}(x)=\exp[-i\theta^{\alpha}T^{\alpha}_{\sigma\rho}]\phi_{\rho}(x), \tag{1-19}$$

这种变换叫做规范变换。当群参数 θ^{α} 是与时空坐标 x 无关的常数时，叫做整体规范变换。当群参数 θ^{α} 是时空坐标 x 的函数 $\theta^{\alpha}(x)$ 时，叫做定域规范变换。整体的意思是说时空各点的场量都作同样的变换；定域的意思是说时空各点作各自不同的变换。在这一节中，我们只讨论 θ^{α} 与 x 无关的整体规范变换。$\sigma、\rho=1, 2, \cdots, n$ 是场在内部空间的分量指标。n 是内部空间的表示的维数。$T^{\alpha}_{\sigma\rho}$ 是生成元 T^{α} 的 n 维表示，是 $n\times n$ 矩阵的矩阵元。n 维表示空间的矢量 $\phi(x)$ 的 n 个分量 $\phi_{\sigma}(x)(\sigma=1, 2, \cdots, n)$ 可以写成

$$\phi(x)=\begin{vmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\\ \vdots\\ \phi_n(x)\end{vmatrix},$$

它在内部空间"转动"下的变换，即规范变换(1–19)式，可以写成

$$\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\phi(x)。\qquad(1–20)$$

由于 θ^α 是与时空坐标 x 无关的常数，场量的时空导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 就象场量 $\phi(x)$一样变换，即

$$\partial_\mu\phi(x)\to\partial_\mu\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\partial_\mu\phi(x)。\qquad(1–21)$$

这是整体规范变换的一个重要特点。

对称、不变和守恒　物理系统在内部空间的对称性，用它的拉格朗日密度在以(1–20)、(1–21)式表示的规范变换下的不变性，即

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))=\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))\qquad(1–22)$$

来描写。和上节一样，我们可以从它导出相应的守恒定律和守恒量。在无穷小变换下，群参数 θ^α 是无穷小量，(1–20)式表示的变换为

$$\phi'(x)=(1-i\theta^\alpha T^\alpha)\phi(x),$$
$$\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=-i\theta^\alpha T^\alpha\phi(x)。$$

由(1–22)式得

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))-\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))$$
$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi(x)}\delta\partial_\mu\phi(x)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi(x)\right]=0。$$

将 $\delta\phi(x)$代入，并考虑到 θ^α 的任意性，就得到

$$\partial^\mu J^\alpha_\mu=0,$$
$$J^\alpha_\mu=-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\partial^\mu\phi(x)}T^\alpha\phi(x)。$$

这就是和所论内部对称性相应的守恒定律。J^α_μ是守恒流，相应的

守恒荷是

$$Q^\alpha=\int_V J_0^\alpha dV=-i\int_V \pi(x)T^\alpha\phi(x)dV。$$

如果所讨论的内部对称性是电荷、重子数或同位旋，则 T^α 就是电荷算符、重子数算符或同位旋算符的表示矩阵，j_μ^α 就是电流、重子流或同位旋流，Q^α 就是电荷、重子数或同位旋。

§3. 定域规范不变性

在上一节中说到，规范变换用规范群

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]$$

来实现。场量按

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\phi(x)$$

的规律变换。当群参数 θ^α 与 x 无关时，时空各点的场按同一数量变换，叫做整体规范变换。当群参数 θ^α 与 x 有关时，θ^α 是 x 的函数 $\theta^\alpha(x)$，时空各点的场按各自的数量变换，叫做定域规范变换。

定域规范变换 在定域规范变换下，场量按

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x) \qquad (1\text{–}23)$$

的规律变换，而场量的导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 的变换

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi(x)\to\partial_\mu\phi'(x)&=\exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\partial_\mu\phi(x)\\&\quad-i\partial_\mu\theta^\beta(x)T^\beta\exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x)\\&\neq\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\partial_\mu\phi(x)\end{aligned} \qquad (1\text{–}24)$$

和场量 $\phi(x)$ 的变换规律不一样。这是和整体规范变换不同的重要特点。显然，把在上一节说到的，在整体规范变换下不变的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))=\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))$$

推广到定域规范(1–23)式、(1–24)式变换，由于 $\partial_\mu\phi(x)$ 和 $\phi(x)$ 不再按同样规律变换，就不再保持不变，即

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x)) \neq \mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))。$$

协变导数 人们设想：宇宙是这样的和谐，内部空间是这样的对称，以致物理系统因而描述它的拉格朗日密度，不仅在整体规范变换下不变，而且在定域规范下也是不变的。由于 θ^α 与 x 无关只是 θ^α 与 x 有关的一个特殊情况，整体规范不变性只是定域规范不变性的一个特例，应该把整体规范变换下不变的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))$ 推广到定域规范不变。怎样推广呢？

如前所述，整体规范不变的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))$，在定域规范变换下不是不变的。原因在于场量导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 和场量 $\phi(x)$ 在整体规范变换下按同样规律(1–20)式和(1–21)式变换；而在定域规范变换下却不按同样规律(1–23)式和(1–24)式变换。由此看来，如果我们把导数 ∂_μ 换成协变导数 D_μ，把场量导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 换成场量协变导数 $D_\mu\phi(x)$，并要求场量协变导数 $D_\mu\phi(x)$ 和场量 $\phi(x)$ 按同样规律变换，即

$$\begin{aligned}
&\phi(x)\to\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x),\\
&D_\mu\phi(x)\to D'_\mu\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]D_\mu\phi(x),
\end{aligned}\qquad (1\text{–}25)$$

那么，由它们构成的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\ D_\mu\phi(x))$，就将是定域规范不变的，

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ D'_\mu\phi'(x))=\mathscr{L}(\phi(x),\ D_\mu\phi(x))。$$

如何选定协变导数 D_μ 呢？

规范场势 由量子电动力学的启示，按照杨–米尔斯的观点，引进规范场势 $A^\alpha_\mu(x)$，定义协变导数

$$\begin{aligned}
&D_\mu(x)\equiv\partial_\mu+A_\mu(x),\\
&A_\mu(x)\equiv -ig\,A^\alpha_\mu(x)T^\alpha。
\end{aligned}\qquad (1\text{–}26)$$

显然，这样引进的规范场和规范群是紧密相连的。相应于每一个生成元 T^α，就有一个规范势 $A^\alpha_\mu(x)$。相应于 $\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 个生成元，就有 N 个规范势。再者，规范场是由把导数变成协变导数 D_μ，按(1–26)式引入的，而 ∂_μ 和 D_μ 都是四维时空的矢量，$A^\alpha_\mu(x)$

就也应该是四维时空的矢量。这意味着和规范场相应的规范粒子的自旋一定是1。光子、中间玻色子、胶子等的自旋都是1。g是相互作用常数。

引入规范场 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$，定义协变导数 D_{μ}，旨在使场量的协变导数 $D_{\mu}\phi(x)$在定域规范变换下有和场量 $\phi(x)$同样的变换规律，从而把在整体规范变换下不变的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\partial_{\mu}\phi(x))$，推广为在定域规范变换下不变的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),D_{\mu}\phi(x))$。这个目的要求确定了规范势 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$ 在规范变换下的变换规律。把(1–26)式代入(1–25)式得

$$(\partial_{\mu}-ig\,A'^{\alpha}_{\mu}(x)T^{\alpha})u(\theta)\phi(x)=u(\theta)(\partial_{\mu}-ig\,A^{\alpha}_{\mu}(x)T^{\alpha})\phi(x)。$$

由此可知

$$A'^{\alpha}_{\mu}(x)T^{\alpha}=u(\theta)A^{\alpha}_{\mu}(x)T^{\alpha}u^{-1}(\theta)+\frac{i}{g}u(\theta)\partial_{\mu}u^{-1}(\theta),\quad(1\text{–}27)$$

这就是规范势的变换规律。

在无穷小变换下

$$u(\theta)\simeq 1-i\theta^{\alpha}T^{\alpha},$$

$$\begin{aligned}A^{\alpha'}_{\mu}T^{\alpha}&=(1-i\theta^{\beta}T^{\beta})A^{\alpha}_{\mu}T^{\alpha}(1+i\theta^{\beta}T^{\beta})\\&\quad+\frac{i}{g}(1-i\theta^{\beta}T^{\beta})\partial_{\mu}(1+i\theta^{\alpha}T^{\alpha})\\&=A^{\alpha}_{\mu}T^{\alpha}-i\theta^{\beta}A^{\alpha}_{\mu}[T^{\beta},\,T^{\alpha}]-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}T^{\alpha}\\&=A^{\alpha}_{\mu}T^{\alpha}-i\theta^{\beta}A^{\alpha}_{\mu}if^{\beta\alpha\gamma}T^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}T^{\alpha}\\&=A^{\alpha}_{\mu}T^{\alpha}+f^{\alpha\beta\gamma}\theta^{\beta}A^{\gamma}_{\mu}T^{\alpha}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}T^{\alpha}。\end{aligned}$$

所以

$$A^{\alpha'}_{\mu}(x)=A^{\alpha}_{\mu}(x)+f^{\alpha\beta\gamma}\theta^{\beta}(x)A^{\gamma}_{\mu}(x)-\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{\alpha}(x)。\quad(1\text{–}28)$$

这就是规范势在无穷小变换下的变换规律。它是和 $\phi(x)$ 场的表示 T^{α} 无关的。

规范场强 仿照电磁场，我们按照

$$F_{\mu\nu}=D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu,$$
$$F_{\mu\nu}=-ig F^\alpha_{\mu\nu}T^\alpha, \tag{1-29}$$

来定义规范场强 $F^\alpha_{\mu\nu}$。把定义 D_μ、A_μ 的(1-26)式代入上式得

$$\begin{aligned}-ig F^\alpha_{\mu\nu}T^\alpha&=(\partial_\mu-ig A^\alpha_\mu T^\alpha)(-ig A^\beta_\nu T^\beta)\\&\quad-(\partial_\nu-ig A^\beta_\nu T^\beta)(-ig A^\alpha_\mu T^\alpha)\\&=-ig\partial_\mu A^\beta_\nu T^\beta+ig\partial_\nu A^\alpha_\mu T^\alpha-g^2 A^\alpha_\mu A^\beta_\nu[T^\alpha,\ T^\beta]\\&=-ig(\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu)T^\alpha-ig^2 f^{\alpha\beta\gamma}A^\alpha_\mu A^\beta_\nu T^\gamma,\end{aligned}$$

由此可知

$$F^\alpha_{\mu\nu}=\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu+g f^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu。 \tag{1-30}$$

这就是规范场强和规范势之间的关系。和电磁场不同，多了由于结构常数 $f^{\alpha\beta\gamma}\neq 0$ 的一项。这是非阿贝尔规范场和阿贝尔规范场的重要差别。

从定义规范场强的(1-29)式来看，$F^\alpha_{\mu\nu}(\alpha=1,2,\cdots,N,\mu、\nu=0,1,2,3)$的个数和生成元的个数、规范势的个数一样，也是 N 个；和规范势不同，它是时空空间的二阶反对称张量。

规范场强在规范变换下的规律，由它的定义式(1-29)和 $A_\mu(x)$ 的变换式(1-27)的另一形式

$$A'_\mu(x)=u(\theta)A_\mu(x)u^{-1}(\theta)+u(\theta)\partial_\mu u^{-1}(\theta)$$

来确定。由于

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu}&=D'_\mu A'_\nu-D'_\nu A'_\mu\\&=(\partial_\mu+A'_\mu)A'_\nu-(\partial_\nu+A'_\nu)A'_\mu\\&=(\partial_\mu+uA_\mu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1})(uA_\nu u^{-1}+u\partial_\nu u^{-1})\\&\quad-(\partial_\nu+uA_\nu u^{-1}+u\partial_\nu u^{-1})(uA_\mu u^{-1}+u\partial_\mu u^{-1})\\&=u[(\partial_\mu+A_\mu)A_\nu-(\partial_\nu+A_\nu)A_\mu]u^{-1}\\&=u(D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu)u^{-1}=uF_{\mu\nu}u^{-1},\end{aligned}$$

可知 $F_{\mu\nu}(x)$的变换规律为

$$F'_{\mu\nu}(x)=u(\theta)F_{\mu\nu}(x)u^{-1}(\theta)。 \tag{1-31}$$

在无穷小变换下

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^{\alpha}T^{\alpha}]\simeq 1-i\theta^{\alpha}T^{\alpha},$$

(1–31)式成为

$$F^{\alpha'}_{\mu\nu}(x)=F^{\alpha}_{\mu\nu}(x)+f^{\alpha\beta\gamma}\theta^{\beta}F^{\gamma}_{\mu\nu}(x)。\qquad(1\text{–}32)$$

拉格朗日密度 虽然，规范势伴随着协变导数进入场量 $\phi(x)$ 的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi(x),\ D_{\mu}\phi(x))$，决定了规范场和 $\phi(x)$场相互作用的形式，但自由的规范场的拉格朗日密度，还有待确定。确定的条件是：它应该是规范不变的。由(1–31)式得

$$F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime}=uF_{\mu\nu}u^{-1}uF^{\mu\nu}u^{-1}=uF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}u^{-1},$$

$$\mathrm{Tr}\,F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime}=\mathrm{Tr}\,uF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}u^{-1}=\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}。$$

这表明 $\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 是规范不变的，可以用来构成规范场的拉格朗日密度。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}&=\mathrm{Tr}[(-ig\,F^{\alpha}_{\mu\nu}T^{\alpha})(-ig\,F^{\mu\nu\beta}T^{\beta})]\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}\mathrm{Tr}(T^{\alpha}T^{\beta})\\&=-g^2F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\beta}T(R)\delta_{\alpha\beta}\\&=-g^2T(R)F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha},\end{aligned}$$

$T(R)$是常数，$F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha}$ 也是规范不变的。所以，仿照电磁场，我们令规范场的自由拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_F=-\frac{1}{4}F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha}。\qquad(1\text{–}33)$$

在上式中不包含 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$的平方项，也不可以把平方项加入上式，因为它是破坏规范不变性的。可是场量的平方项是反映相应粒子的质量的。没有 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$的平方项，就意味着规范场没有质量。光子没有质量，没有 $A_{\mu}(x)$的平方项的理论符合客观实际。中间玻色子是有质量的，没有 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$平方项的理论不能满足实际的要求。如何使规范粒子获得质量呢？人们寄期望于对称性的破缺，求助于 Higgs 场。

§4. Higgs 场的破缺对称性

人们把拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2 \qquad (1\text{–}34)$$

$\mu^2<0$, $\lambda>0$ 的场 $\phi(x)$ 叫做 Higgs 场。它在内部空间可能有多个分量。但是，它在时空空间却只有一个分量，因而也称之为标量场，与之相应的粒子的自旋为 0。它和通常的标量场不同，$\mu^2<0$，且有自相互作用，$\lambda\neq0$。

虚质量和破缺真空 为了便于阐明 Higgs 场的特点，我们先讨论它在内部空间只有一个分量的情况。这时(1–34)式成为

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\cdot\partial^\mu\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4。 \qquad (1\text{–}35)$$

显然，它在内部空间的反射变换 $\phi(x)\to-\phi(x)$ 下是不变的。换句话说，它在内部空间具有反射对称性。

可是，它的真空态却不具有这种对称性。真空态就是能量最低态。场的哈密顿密度就是场的能量密度。把 $\phi(x)$ 看作场的广义坐标，它的广义动量按定义和(1–35)式就是

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial\dot{\phi}(x)}=\dot{\phi}(x)。$$

它的哈密顿密度就是

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x)&=\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathscr{L}(x)\\&=\frac{1}{2}\pi^2(x)+\frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2+\frac{\mu^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4。\end{aligned}$$

由于出现在上式中的场量的时空导数 $\partial_\mu\phi$ 都是平方项，而且系数为正。所以，能量最小的条件为 $\phi(x)=$常数$=\phi$，且

$$V(\phi)=\frac{\mu^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4, \qquad (1\text{–}36)$$

取最小值，即

$$\frac{dV}{d\phi}=\mu^2\phi+\lambda\phi^3=0,\ \frac{d^2V}{d\phi^2}=\mu^2+3\lambda\phi^2>0。$$

由此可知，Higgs 场的能量最低态，即真空态为

$$\phi_0^2=-\frac{\mu^2}{\lambda},$$

$$\phi_0=+\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}\quad 或\quad \phi_0=-\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}。$$

我们令

$$\phi_0=\langle|\phi|\rangle_0=v=+\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{1-37}$$

为 Higgs 场的真空态。此时，场的能量为

$$E_0=V_0=-\frac{\mu^4}{4\lambda}。$$

显然，在内部空间的反射变换下，$\phi_0\to-\phi_0$，即一种真空变为另一种真空。换句话说，选定的真空(1-37)式，在内部空间反射变换下，不是不变的，而是破缺的。

$\mu^2<0$ 意味着相应粒子的质量是虚的。虚质量粒子可能以超光速运动。

由是可知，以(1-35)式描述的 Higgs 场，在内部空间反射变换下，拉格朗日密度是对称的，真空是破缺的；相应粒子的质量是虚的。这是 Higgs 场的一方面的特点。

实质量和破缺 $\mathscr{L}$　Higgs 场还有另一方面的特点。我们把 Higgs 场作一平移，按

$$\phi(x)=\phi'(x)+v \tag{1-38}$$

定义新场 $\phi'(x)$。由于 $\phi_0=v$，所以 $\phi'_0=0$，即 $\langle|\phi'(x)|\rangle_0=0$。显然，这样的真空，在内部空间的反射变换 $\phi'(x)\to-\phi'(x)$ 下是不变的。它具有内部空间的反射对称性。

把(1-38)式代入(1-35)式，就得到新 Higgs 场 $\phi'(x)$ 的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_{\phi'}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi'+\mu^2\phi'^2-\lambda v\phi'^3-\frac{\lambda}{4}\phi'^4。\qquad(1\text{-}39)$$

它在内部空间的反射变换 $\phi'(x)\to-\phi'(x)$下，由于第三项的存在，而不是不变的。我们说它是破缺的。

再者，第二项表明 Higgs 粒子的质量

$$\frac{m^2}{2}=-\mu^2,\quad m=\sqrt{-2\mu^2}$$

是实的。它和通常的质量概念是一致的。

由是可知，以(1-39)式描述的 Higgs 场，在内部空间反射变换下，真空是对称的，拉格朗日密度是破缺的；相应粒子的质量是实的。这是以(1-35)式描述的 Higgs 场的另一方面特点。因此，我们说 Higgs 场具有两面性。

破缺的程度　现在，我们进一步讨论 Higgs 场的性质，论述 Higgs 场破缺的程度。为此，我们讨论比较一般的情况。设想 Higgs 场在内部空间有 n 个实分量(一个复分量包括两个实分量)。令

$$\phi(x)=\begin{vmatrix}\phi_1(x)\\ \phi_2(x)\\ \vdots\\ \vdots\\ \phi_n(x)\end{vmatrix},$$

则　$\phi^+(x)\phi(x)=\tilde{\phi}(x)\phi(x)=\phi_1^2(x)+\phi_2^2(x)+\cdots+\phi_n^2(x)$。

拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi)-\frac{\mu^2}{2}(\phi^+\phi)-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2。\qquad(1\text{-}40)$$

显然，它在 n 维内部空间的转动下是不变的。或者说，它在内部空间具有旋转对称性，即球对称性。

实 n 维空间的转动，可以用 SO(n)群来实现。SO(n) 群的基本表示是 $n\times n$、实正交、归一的矩阵。它有 n^2 个元素。由于有

$\frac{1}{2}n(n-1)$个正交条件和n个归一化条件，独立的元素就只有$n^2-\frac{1}{2}n(n-1)-n=\frac{1}{2}n(n-1)$个。正是这个原因，SO($n$)群有$\frac{1}{2}n(n-1)$个群参数，有$N=\frac{1}{2}n(n-1)$个生成元。这些生成元的基本表示可以写成

$$L_{ij}=-i(E_{ij}-E_{ji}), \qquad (1\text{–}41)$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

E_{ij}是$n\times n$矩阵，它的矩阵元是

$$(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}, \qquad (1\text{–}42)$$

而群元素 $u(\theta)=\exp[-i\theta_{ij}L_{ij}]$。

在此群变换下，Higgs 场的变换为

$$\phi'(x)=u(\theta)\phi(x),$$

$$\phi'^{+}(x)\phi'(x)=\phi^{+}(x)u^{+}(\theta)u(\theta)\phi(x)=\phi^{+}(x)\phi(x),$$

因而(1–40)式是不变的。

仿照前面的讨论，从(1–40)式推知，Higgs 场在

$$\phi^{+}\phi=\phi_1^2+\phi_2^2+\cdots+\phi_n^2=v^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}$$

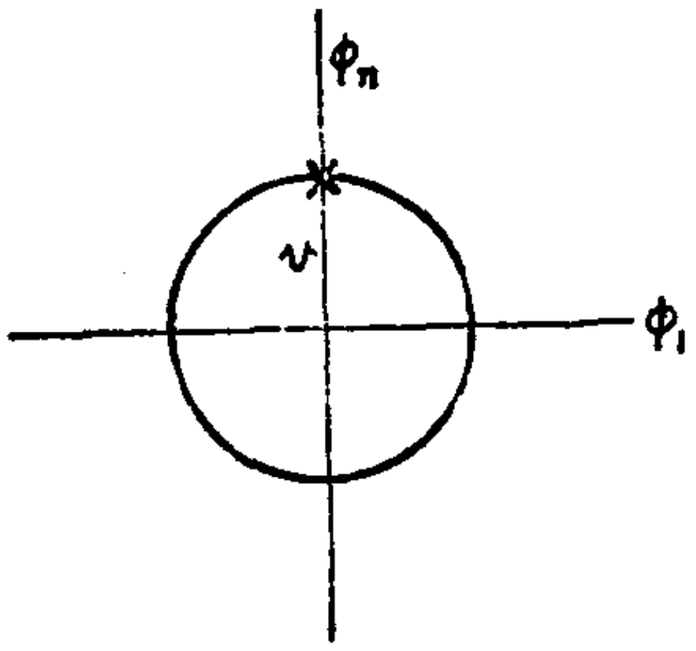
时，取能量最低态。换句话说，它的真空态是

$$\phi_0=\langle|\phi(x)|\rangle_0=v=\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix},$$

$$v^2=v^{+}v=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}。$$

在n维内部空间，以$v=\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$为半径的球面上，它取真空值。如果我们以$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$、$\cdots$、$\phi_n(x)$为$n$维空间的坐标轴（如下图

所示)，并把真空取在 ϕ_n 轴上，即令



$$\phi_0=\langle|\phi(x)|\rangle_0=\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix},$$

显然，这样的真空在 $SO(n)$ 群的转动下不是不变的。

为了进一步分析真空破缺的情况，我们把由(1-41)式、(1-42)式表示的生成元 L_{ij} 分成两组 l_{ij} 和 K_i，而

$$l_{ij}=-i(E_{ij}-E_{ji});\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

$$K_i=-i(E_{in}-E_{ni});\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1。$$

显然

$$l_{ij}\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix}=0,\quad K_i\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix}\neq 0。$$

从而

$$\exp[-il_{ij}\theta_{ij}]\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix},\exp[-i\theta_i K_i]\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\v\end{vmatrix}。$$

这表明，由 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个生成元 l_{ij} 生成的变换，仍然保持真空不变，破坏真空对称的只是 $(n-1)$ 个生成元 K_i。

对称子群和破缺陪集　把上述的真空态 ϕ_0 和生成元 L_{ij} 作一相似变换，那么真空态和生成元的表示形式就将不同，但把保持真空不变的和破坏真空对称的生成元区分开来的性质仍然存在。而

且，这种性质还可以推广到一般情况。所以，在一般情况下，我们可以用

$$v=\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \tag{1-43}$$

表示 Higgs 场的真空态矢量。用

$$L^\alpha,\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1-44}$$

表示规范变换群的生成元。其中

$$l^\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ M,$$

$$l^\beta v=0 \tag{1-45}$$

是保持真空不变的生成元，而

$$K^\gamma,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N-M,$$

$$K^\gamma v\neq 0 \tag{1-46}$$

是破坏真空对称的生成元。可以证明，保持真空不变的生成元构成子群，而破坏真空对称的生成元形成相应的陪集。

由(1-45)式可知

$$[l^\alpha,\ l^\beta]v=l^\alpha l^\beta v-l^\beta l^\alpha v=0。$$

另一方面，从生成元的对易关系得

$$[l^\alpha,\ l^\beta]v=if^{\alpha\beta\gamma}L^\gamma v=0。$$

这表明，$f^{\alpha\beta\gamma}\neq 0$ 时，$L^\gamma v=0$，即 $L^\gamma=l^\gamma$，

$$[l^\alpha,\ l^\beta]=if^{\alpha\beta\gamma}l^\gamma。 \tag{1-47}$$

换句话说，$l^\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$生成的群元素构成子群。我们把它叫做对称子群，意指它是保持 Higgs 场对称的子群。而 $K^\beta(\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ N-M)$生成的群元素形成相应的陪集，我们把它叫做破缺陪集，意指它是破坏 Higgs 场对称的陪集。有时，我们也把 l^α 叫做对称生成元，把 K^β 叫做破缺生成元。

$K^\beta v$的性质 v是真空态矢量，$K^\beta v(\beta=1, 2, \cdots, N-M)$是$N-M$个新的态矢量。它和真空态矢量相互正交，而且自身之间又线性独立。下面还将证明，它是质量算符的本征值为0的态矢量。如前面所述，K^β的矩阵元是纯虚、反对称的，即$K^\beta_{ij}=-K^\beta_{ji}$。因而

$$(v,\ K^\beta v)=v_i K^\beta_{ij} v_j=\frac{1}{2} v_i v_j(K^\beta_{ij}+K^\beta_{ji})=0。\qquad (1\text{–}48)$$

这表明$K^\beta v$与v正交。

令
$$A_{\alpha\beta}=(K^\alpha v,\ K^\beta v)=(v,\ K^\alpha K^\beta v)。$$

由于v是实矢量，K^α是厄密矩阵，故$A_{\alpha\beta}$是实数。又因

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta}-A_{\beta\alpha}&=(v,\ K^\alpha K^\beta v)-(v,\ K^\beta K^\alpha v)\\&=(v,\ [K^\alpha,\ K^\beta]v)=if^{\alpha\beta\gamma}(v,\ L^\gamma v)\\&=if^{\alpha\beta\gamma}(v,\ l^\gamma v)+if^{\alpha\beta\gamma}(v,\ K^\gamma v)=0,\end{aligned}$$

$A_{\alpha\beta}$对于角标α、β是对称的。由此可知$A_{\alpha\beta}$是一实的对称矩阵的矩阵元。矩阵代数告诉我们，实的对称矩阵总是可以对角化的，总可以找到一个正交矩阵0使

$$K^\alpha v\to 0\,K^\alpha v,$$

而由矢量$0K^\alpha v(\alpha=1, 2, \cdots, N-M)$标积构成的矩阵元是对角化的，即

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}=(0\,K^\alpha v,\ 0\,K^\beta v)=A_\alpha\delta_{\alpha\beta}。\qquad (1\text{–}49)$$

这表明，$N-M$个矢量$0K^\alpha v(\alpha=1, 2, \cdots, N-M)$是相互正交的。因而，与它们由一正交变换联系的$N-M$个矢量$K^\alpha v(\alpha=1, 2, \cdots, N-M)$，就是线性独立的。

哥尔斯通(Goldstone)定理 和$N-M$个破缺生成元相应，存在着$N-M$个质量为0的标量粒子。换句话说，有一个破缺生成元，就有一个质量为0的标量粒子。这就是哥尔斯通定理的内容。我们来证明这个定理。

设想Higgs场$\phi(x)$的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-V(\phi)。$$

在无穷小规范变换下，

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha L^\alpha]\simeq 1-i\theta^\alpha L^\alpha,$$

$$\delta\phi=-i\theta^\alpha L^\alpha\phi,$$

$$\delta\phi_i=-i\theta^\alpha L^\alpha_{ij}\phi_j。$$

而 $\mathscr{L}$ 是不变的，因而 $V(\phi)$ 也是不变的，即

$$\delta V=\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\delta\phi_i=-i\theta^\alpha\frac{\partial V}{\partial\phi_i}L^\alpha_{ij}\phi_j=0。$$

由于 θ^α 是任意的，所以

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}L^\alpha_{ij}\phi_j=0。$$

将上式对 ϕ_k 微分得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_k\partial\phi_i}L^\alpha_{ij}\phi_j+\frac{\partial V}{\partial\phi_i}L^\alpha_{ik}=0。$$

将上式中的诸量取真空值，即令

$$\phi_i=v_i,\ \frac{\partial V}{\partial\phi_i}\Big|_{\phi=v}=0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_k\partial\phi_i}\Big|_{\phi=v}=M^2_{ki}>0 \qquad (1\text{-}50)$$

就得到

$$M^2_{ki}L^\alpha_{ij}v_j=0。$$

它的矩阵形式为

$$M^2L^\alpha v=0。 \qquad (1\text{-}51)$$

如前所述，N 个生成元 $L^\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$中，有 M 个对称子群的生成元 $l^\beta(\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$，有 $N-M$ 个破缺生成元 $K^\gamma(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N-M)$。因而，(1-51)式中的 N 个方程中，就有

$$M^2l^\beta v=0,\ l^\beta v=0,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ M; \qquad (1\text{-}52)$$

$$M^2K^\gamma v=0,\ K^\gamma v\neq 0,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N-M。 \qquad (1\text{-}53)$$

(1-52)式表示的 M 个方程，没有什么新的物理意义。(1-53)式就是哥尔斯通定理的数学表示。由定义矩阵 M^2 的(1-50)式可知，M^2_{ij} 就是 V 中二次项 $\phi_i\phi_j$ 的系数，是 ϕ 场的质量平方算符的矩阵元，

即 M^2 是 ϕ 场的质量平方算符。(1–53)式表明，态矢量 $K^\gamma v$ 是算符 M^2 的、本征值为 0 的本征矢量。前面谈到，$N-M$ 个态矢量 $K^\gamma v(\gamma=1,2,\cdots,N-M)$是线性独立的。由此可知，$M^2$ 有 $N-M$ 个(等于破缺生成元的数目)等于零的本征值。总而言之，与破缺生成元相应，存在同等数目的质量为零的标量粒子。这种粒子叫做哥尔斯通粒子。

参数化 既然 $K^\gamma v(\gamma=1, 2, \cdots, N-M)$ 是与 v 正交的、线性独立的矢量，而 ϕ 场又有 n 个独立的分量，那么 v 就是有 $n-(N-M)$ 个独立分量的矢量。我们令 $\eta(x)$ 是与 v 平行的矢量，则 $K^\alpha v$、$K^\alpha \eta$ 就是与 v、η 正交的矢量，它们是线性独立的，而且可以按(1–49)式正交化。为了以后讨论的方便，假设它们是正交化了的，即令

$$(K^\alpha v,\ K^\beta v)=A^2\delta_{\alpha\beta}。 \tag{1–54}$$

我们再令 $\xi^\alpha(x)$ 是沿 $K^\alpha v$ 方向的场分量，那么，就可以用 $\eta(x)$、$\xi^\alpha(x)(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N-M)$来取代场量 $\phi(x)$ 中的 n 个独立的分量，并写成

$$\phi(x)=\exp\left[\frac{i\xi^\alpha(x)K^\alpha}{v}\right](v+\eta(x))。 \tag{1–55}$$

指数上的 v 是 v 矢量的模。场量的这种表现形式叫做参数化。

由(1–55)式得

$$\phi^+(x)=(v^++\eta^+(x))\exp\left[-\frac{i\xi^\alpha(x)\ K^\alpha}{v}\right],$$

$$\phi^+(x)\phi(x)=(v^++\eta^+(x))(v+\eta(x))$$

$$=v^+v+\eta^+(x)\eta(x)+v^+\eta(x)+\eta^+(x)v,$$

$$\partial^\mu\phi(x)=\exp\left[\frac{i\,\xi^\alpha(x)K^\alpha}{v}\right]i\,\partial^\mu\xi^\alpha(x)\frac{K^\alpha}{v}(v+\eta(x))$$

$$+\exp\left[\frac{i\,\xi^\alpha(x)K^\alpha}{v}\right]\partial^\mu\eta(x),$$

$$\partial_\mu \phi^+(x) = (v^+ + \eta^+(x))\left(-i + \partial_\mu \xi^\alpha(x)\frac{K^\alpha}{v}\right)\exp\left[-\frac{i\xi^\alpha(x)K^\alpha}{v}\right]$$

$$+\partial_\mu \eta^+(x)\exp\left[-\frac{i\xi^\alpha(x)K^\alpha}{v}\right],$$

$$\partial_\mu \phi^+(x)\partial^\mu \phi(x) = \partial_\mu \eta^+(x)\partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x)\partial^\mu \xi^\alpha(x)$$

$$+\partial_\mu \eta^+(x)\, i\partial^\mu \xi^\alpha(x)\frac{K^\alpha}{v}(v+\eta(x))$$

$$-i(v^+ + \eta^+(x))\partial_\mu \xi^\alpha(x)\frac{K^\alpha}{v}\partial^\mu \eta(x)。$$

把它们代入(1－40)式中得

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu \eta^+(x)\partial^\mu \eta(x) + \partial_\mu \xi^\alpha(x)\partial^\mu \xi^\alpha(x)$$

$$+\frac{i}{v}\partial_\mu \eta^+(x)\partial^\mu \xi^\alpha(x)K^\alpha(v+\eta(x))$$

$$-\frac{i}{v}(v^+ + \eta^+(x))\partial_\mu \xi^\alpha(x)K^\alpha \partial^\mu \eta(x)\Big]$$

$$-\frac{\mu^2}{2}[v^2 + v^+\eta(x) + \eta^+(x)v + \eta^+(x)\eta(x)]$$

$$-\frac{\lambda}{4}[v^2 + v^+\eta(x) + \eta^+(x)v + \eta^+(x)\eta(x)]^2$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu \eta^+(x)\partial^\mu \eta(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\alpha(x)\partial^\mu \xi^\alpha(x)$$

$$+\mu^2 \eta^+(x)\eta(x) + \cdots \qquad (1\text{–}56)$$

这就是参数化以后，用新场 $\eta(x)$、$\xi^\alpha(x)$表示的拉格朗日密度。显然，它在规范群变换下不再具有不变性。由(1–55)式可知，由于$\phi(x)$场的真空值是 v，新场 $\eta(x)$、$\xi^\alpha(x)$的真空就是零，因而在规范群变换下真空是不变的。由此可知，用(1–56)式描述的 Higgs 场，在规范变换下，真空是对称的，而拉格朗日密度却是破缺的。而且，$\eta(x)$场的质量为$\sqrt{-2\mu^2}$是实的，$\xi^\alpha(x)$场的质量为 0。$\xi^\alpha(x)$场的数目与破缺生成元的数目相同，就是质量为 0 的标量场的数目与破缺生成元的数目相等，即哥尔斯通粒子的数目与破缺生成元的

数目相等。这正是哥尔斯通定理的具体表现。

§5. Higgs 机制

规范场，由于规范不变性的要求，在拉格朗日密度中不能有二次方项，使规范粒子没有质量。这样的理论不能用来描写有质量的中间玻色子。希格斯场具有破缺对称性，和每一个破缺生成元相应，就有一个哥尔斯通粒子。然而，没有质量的自旋为零的粒子，在自然界是不存在的。没有质量的规范粒子和没有质量的哥尔斯通粒子，常常是人们不喜爱的，需要从理论中除去。当人们把规范场和 Higgs 场一起考虑时，就可以达到这个目的。哥尔斯通粒子会被吃掉，规范粒子会获得质量，这就是 Higgs 机制。

整体规范破缺对称 为了便于阐明 Higgs 机制的基本思想，我们先讨论一个简单的例子。设想 Higgs 场在内部空间有两个分量 $\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$，它的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2。$$

用相互共轭的复场

$$\phi(x)=\phi_1(x)+i\phi_2(x),\ \phi^+(x)=\phi_1(x)-i\phi_2(x) \tag{1-57}$$

代替实场 $\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$，则

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2。 \tag{1-58}$$

这场的真空态为

$$\langle|\sqrt{\phi^+\phi}|\rangle_0=v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}。 \tag{1-59}$$

显然，在规范变换下

$$\begin{aligned}\phi(x)&\to e^{-i\theta}\phi(x),\\ \phi^+(x)&\to\phi^+(x)e^{i\theta},\end{aligned} \tag{1-60}$$

(1-58)式表示的拉格朗日密度是不变的，而(1-59)式表示的真空

却由一个方向变到另一个方向，即这场在 U_1 群 $u(\theta)=e^{-i\theta}$ 下是破缺对称的。这时，θ 是与时空坐标 x 无关的常数，破缺对称是整体规范破缺对称。

定域规范破缺对称　如果把 (1–60) 式表示的整体规范变换，推广到定域规范变换

$$\begin{aligned}\phi(x)&\to e^{-i\theta(x)}\phi(x),\\ \phi^+(x)&\to\phi^+(x)e^{i\theta(x)},\end{aligned}\tag{1–61}$$

那么，不管是(1–58)式表示的拉格朗日密度，还是(1–59)式表示的真空，都不是不变的。要使理论保持一定的对称性，就必需修改(1–58)式。

修改的方法是：引进规范场 $A_\mu(x)$，引进协变导数 D_μ，把(1–58)式中的导数换成协变导数

$$\partial_\mu\to D_\mu=\partial_\mu-ie\,A_\mu(x)$$

再加上自由规范场的部分，就得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{2}(\partial_\mu+ie\,A_\mu)\phi^+(\partial^\mu-ie\,A^\mu)\phi-\frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi\\ &-\frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\end{aligned}\tag{1–62}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu。$$

这就是修改后的拉格朗日密度。它包括 Higgs 场和规范场及其相互作用。显然，在(1–61)式表示的 Higgs 场的变换和规范场的变换

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)\tag{1-63}$$

下是不变的。而(1–59)式表示的 Higgs 场的真空，在这变换下却仍要改变方向。这就是(1–62)式表示的理论的定域规范破缺对称性。

参数化　上述的 Higgs 场有两个实分量 $\phi_1(x)$和 $\phi_2(x)$。我们不用 $\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$按(1–57)式表示 $\phi(x)$，而沿真空态矢 v 的方

向引进实场 $\eta(x)$，沿垂直于真空态 v 的方向引进实场 $\xi(x)$，按照参数化

$$\phi(x)=\exp\left[\frac{i\xi(x)}{v}\right](v+\eta(x)),$$
$$\phi^+(x)=\exp\left[-\frac{i\xi(x)}{v}\right](v+\eta(x)) \tag{1-64}$$

的方式来表示 $\phi(x)$。那么，由于(1-59)式，新场的真空值就是零了，即

$$\langle|\eta(x)|\rangle_0=0,\ \langle|\xi(x)|\rangle_0=0。 \tag{1-65}$$

而由(1-62)式表示的拉格朗日密度就变为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{2}(\partial_\mu+ie\,A_\mu)\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{v}\right](v+\eta(x))(\partial^\mu-ie\,A^\mu)\\&\cdot\exp\left[i\frac{\xi(x)}{v}\right](v+\eta(x))-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta(x))^2\\&-\frac{\lambda}{4}(v+\eta(x))^4-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\=&\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\cdot\partial^\mu\eta+\frac{1}{2}\partial_\mu\xi\cdot\partial^\mu\xi+\mu^2\eta^2+\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu\\&+ev\,A^\mu\partial_\mu\xi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\text{三次方以上项。}\end{aligned} \tag{1-66}$$

显然，在(1-61)式和(1-63)式表示的规范变换下，(1-65)式表示的真空就是不变的，而(1-66)式表示的运动规律就不再是不变的了。这就是定域规范破缺对称的又一种表现形式。从(1-66)式看来，$\eta(x)$有实质量 $m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$，规范场 $A_\mu(x)$也有了质量 $m_A=ev$，这是可喜的现象。然而，$\xi(x)$仍然没有质量，仍然是哥尔斯通粒子，而且出现了 $\xi(x)$和 $A_\mu(x)$直接耦合两点顶角，这是人们所不期望有的，应当设法除去。

么正规范　我们利用规范自由度来达到上述目的。规范自由度是指：Higgs 场 $\phi(x)$和规范场 $A_\mu(x)$，在(1-61)式和(1-63)式表示的规范变换下，变成 $\phi'(x)$和 $A'_\mu(x)$时，(1-62)式表示的拉格朗日密度保持不变，即

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu+ie\,A'_\mu(x))\phi^+(x)(\partial^\mu-ie\,A^{\mu\prime}(x))\phi'(x)$$

$$-\frac{\mu^2}{2}\phi^{+\prime}(x)\,\phi'(x)-\frac{\lambda}{4}(\phi^{+\prime}(x)\phi'(x))^2-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime},\quad(1\text{–}67)$$

$$F'_{\mu\nu}=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu。$$

如果我们把按(1–64)式参数化了的 $\phi(x)$和 $A_\mu(x)$一起作一个规范变换，并且令群参数 $\theta(x)=\frac{\xi(x)}{v}$，即令规范变换群元素为

$$u(\theta)=u(\xi)=\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{v}\right],$$

那么

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp\left[-i\frac{\xi(x)}{v}\right]\phi(x)=v+\eta(x),$$

$$\phi^+(x)\to\phi^{+\prime}(x)=\exp\left[+i\frac{\xi(x)}{v}\right]\phi^+(x)=v+\eta(x),\quad(1\text{–}68)$$

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x)。$$

把(1–68)式代入(1–67)式中，就得到

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu+ie\,A'_\mu(x))(v+\eta(x))(\partial^\mu-ie\,A'^\mu(x))(v+\eta(x))$$

$$-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta(x))^2-\frac{\lambda}{4}(v+\eta(x))^4-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime}$$

$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta+\mu^2\eta^2-\lambda v\,\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4$$

$$-\frac{1}{2}e^2A'^2_\mu\eta(2v+\eta)-\frac{1}{2}e^2v^2A'_\mu A^{\mu\prime}-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime}\quad(1\text{–}69)$$

这里，$\xi(x)$场不见了，哥尔斯通粒子和两点耦合方式去除了。从(1-68)式看来，$\xi(x)$场成了 $A'_\mu(x)$场的纵分量，哥尔斯通粒子被规范粒子吃掉了。而吃了哥尔斯通粒子的规范粒子，从(1–69)式的倒数第二项看来，就由无质量变成有质量了，而且它的质量 $m_{A'}=ev$。再者，剩下的 Higgs 粒子 $\eta(x)$，也成为有质量 $m_\eta=\sqrt{-2\mu^2}$ 的实粒子了。当然，(1—69)式表示的运动规律不再是规范对称的。

但 Higgs 场的真空 $\langle|\eta(x)|\rangle_0=0$ 却仍是规范对称的。这是 Higgs 场的又一种表现形式。

尽管 Higgs 场有多种表现形式，而且不同形式有非常不同的特点。甚至有些特点还是难以理解的。但是，整个物理系统的自由度，却是保持不变的。在以(1-62)式描述的系统中，Higgs 粒子在内部空间有两个分量，它们在时空空间都是标量，因而具有两个自由度；规范粒子没有质量，自旋矢量只能取两种指向，故也只有两个自由度。所以，整个系统共具有四个自由度。在以(1-69)式描述的系统中，Higgs 粒子在内部空间只有沿破缺真空方向的一个分量，而在时空空间又是标量，故只剩下一个自由度；规范场不再是横场，而有了纵分量，规范粒子有了质量，自旋矢量就能取三种指向，因而有三个自由度。所以，整个系统仍然具有四个自由度。由一定变换联系着的两个方面，自由度相等，这正是物理理论所要求的。

一般情况 为了进一步理解 Higgs 机制，我们讨论更一般的情况。设想有 n 个实分量 $\phi_i(x), i=1,2,\cdots, n$ 的 Higgs 场 $\phi(x)$，拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^+(x)\cdot\partial^\mu\phi(x)-V(\phi), \tag{1-70}$$

它的真空态矢量为

$$\langle|\sqrt{\phi^+(x)\phi(x)}|\rangle_0=v\neq 0, \tag{1-71}$$

在 N 维群

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha L^\alpha],\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1-72}$$

变换下，(1-70)式是不变的，真空态是破缺对称的。即 N 个生成元 L^α 中，M 个生成元 l^β 保持真空不变

$$l^\beta v=0, \tag{1-73}$$

$N-M$ 个生成元 K^γ 使真空发生变化

$$K^\gamma v\neq 0。 \tag{1-74}$$

这是 θ^α 与时空坐标 x 无关的整体规范变换的情况。

当(1–72)式中的 θ^α 与时空坐标 x 有关时，即在定域规范变换的情况下，Higgs 场的真空仍保持如上所述的特点，它的破缺情况仍由(1–73)式、(1–74)式描写。但 Higgs 场的拉格朗日密度(1–70)式就要进行修改。如 N 个生成元 L^α 相应引进 N 个规范场 $A^\alpha_\mu(x)$。用协变导数 $D_\mu=\partial_\mu-ig\,A^\alpha_\mu(x)L^\alpha$ 代替(1–70)式中的导数，并加上自由规范场部分，就得到所需要的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\phi^+(x)(\overleftarrow{\partial}_\mu+ig\,A^\alpha_\mu(x)L^\alpha)(\partial^\mu-igA^{\mu\beta}(x)L^\beta)\phi(x)$$

$$-V(\phi)-\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha} \tag{1–75}$$

在规范群(1–72)式的变换下它是不变的。不管 θ^α 是否与 x 有关，都是如此。

参数化和幺正规范 (1–75)式描写的规范场和 Higgs 场是不能令人满意的。规范场粒子还没有质量，Higgs 场粒子的质量也还是虚的。为了得到满意的理论，仿照前面说到的精神，还要把 Higgs 场参数化，并选取幺正规范。参数化就是用平行于真空态矢的分量 $\eta(x)$和垂直于真空态矢的分量 $\xi^a(x)$，来作为 Higgs 场 $\phi(x)$在内部空间的分量，并以

$$\phi(x)=\exp[i\xi^\alpha(x)K^\alpha]\cdot(v+\eta(x)) \tag{1–76}$$

的形式表示出来。显然，由于 $\phi(x)$的真空态矢量是 v，场量 $\eta(x)$、$\xi^a(x)$的真空态矢就是 0，在规范变换下是不变的。幺正规范就是把参数化了的 Higgs (1−76) 式和规范场一起作一次特殊的规范变换，选取规范参数 $\theta^\alpha(x)=\xi^\alpha(x)$，使

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp[-i\xi^\alpha(x)K^\alpha]\phi(x)=v+\eta(x),$$

$$A^\alpha_\mu L^\alpha\to A'^\alpha_\mu L^\alpha=\exp[-i\xi^\alpha(x)K^\alpha]A^\beta_\mu L^\beta\exp[i\,\xi^\alpha(x)K^\alpha]$$

$$+\frac{1}{ig}\exp[-i\xi^\alpha(x)K^\alpha]\partial_\mu\exp[i\xi^\alpha(x)K^\alpha]。$$

(1–77)

新的 Higgs 场只剩下和真空态矢 v 平行的分量了。Higgs 场的垂直于真空态矢 v 的分量不见了，变成了规范场的纵分量了。由于理论的规范不变性，用(1–77)式表示的新场代替(1–75)式中的旧场，即以 $\phi'(x)$、$A'^{a}_{\mu}(x)$代替 $\phi(x)$、$A^{a}_{\mu}(x)$，就得到所需要的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(v^{+}+\eta^{+}(x))(\overleftarrow{\partial}_{\mu}+i g\, A^{a}_{\mu}(x)L^{a})(\partial^{\mu}-i g\, A^{\mu a}(x)L^{a})$$

$$\cdot(v+\eta(x))-V(v+\eta(x))-\frac{1}{4}\,F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}。\qquad(1\text{–}78)$$

式中我们略去了 $A^{a}_{\mu}(x)$、$F^{a}_{\mu\nu}(x)$上的($'$)号。但应该注意(1–78)式中的 $A^{a}_{\mu}(x)$、$F^{a}_{\mu\nu}(x)$和(1–75)式中的 $A^{a}_{\mu}(x)$、$F^{a}_{\mu\nu}(x)$是由(1–77)式联系着的，它们之间差一个特殊的规范变换。

由(1–78)式看来，参数化和幺正规范变换的实际效果，只是以平行于真空态矢的分量 $\eta(x)+v$ 代替场量 $\phi(x)$，即

$$\phi(x)\rightarrow v+\eta(x)。\qquad(1\text{–}79)$$

这时 $\eta(x)$的真空态为 0，是规范不变的，而(1–78)式表示的运动规律却是破缺对称的。

对称子群和破缺陪集　从(1–73)式、(1–74)式可知，

$$l^{a}(v+\eta(x))=0,\ K^{\beta}(v+\eta(x))\neq 0。$$

因而，在(1–78)式中的 $A^{a}_{\mu}(x)L^{a}(v+\eta(x))$ 就只剩下 $A^{\beta}_{\mu}K^{\beta}(v+\eta(x))$，而(1–78)式就可写成

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(v^{+}+\eta^{+}(x))(\overleftarrow{\partial}_{\mu}+ig\,A^{\beta}_{\mu}(x)K^{\beta})(\partial^{\mu}-ig\,A^{\mu\beta}(x)K^{\beta})$$

$$\cdot(v+\eta(x))-V(v+\eta(x))-\frac{1}{4}\,F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}。\qquad(1\text{–}80)$$

这意味着和 $\eta(x)$场相互作用的，只有与破缺陪集 K^{β} 相应的规范场 $A^{\beta}_{\mu}(x)$。而与对称子群 l^{α} 相应的规范场 $A^{\alpha}_{\mu}(x)$，和 $\eta(x)$场不发生作用。

质量矩阵　(1–80)式中的第一项为

$$
\begin{aligned}
&(v^+ + \eta^+(x))(\tilde{\partial}_\mu + ig A^\alpha_\mu(x) K^\alpha)(\partial^\mu - ig A^{\mu\beta}(x) K^\beta)(v+\eta(x)) \\
=&\partial_\mu \eta^+(x)\partial^\mu \eta(x) - ig A^{\mu\beta}(x)\partial_\mu \eta^+(x) K^\beta (v+\eta(x)) \\
&+ ig A^\alpha_\mu(x)(v^+ + \eta^+(x)) K^\alpha \partial^\mu \eta(x) \\
&+ g^2 A^\alpha_\mu(x) A^{\mu\beta}(x)[(K^\alpha v,\ K^\beta v) + (K^\alpha v,\ K^\beta \eta(x)) \\
&+ (K^\alpha \eta(x),\ K^\beta v) + (K^\alpha \eta(x),\ K^\beta \eta(x))],
\end{aligned}
$$

而第二项可以展开为

$$
V(v+\eta(x)) = V(v) + \left.\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right|_{\eta=0} \cdot \eta_i + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right|_{\eta=0} \eta_i \eta_j + \cdots。
$$

式中 $V(v)$是 Higgs 场的真空能量，

$$
\left.\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right|_{\eta=0} = 0, \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right|_{\eta=0} = M^2_{ij} > 0, \tag{1-81}
$$

M^2_{ij}是 Higgs 场 $\eta(x)$ 的质量平方矩阵元。把这些代入 (1-80) 式，就得到

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} =& \frac{1}{2}\partial_\mu \eta^+ \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} M^2_{ij}\, \eta_i\, \eta_j - \frac{1}{4} F^\alpha_{\mu\nu} F^{\mu\nu\alpha} \\
&- \frac{1}{2} g^2 (K^\alpha v,\ K^\beta v)\, A^\alpha_\mu A^{\mu\beta} \\
&- \frac{1}{2} g^2 (K^\alpha \eta,\ K^\beta (\eta + 2v))\, A^\alpha_\mu A^{\mu\beta} \\
&+ ig A^\alpha_\mu (v^+ + \eta^+) K^\alpha \partial^\mu \eta \\
&- ig A^{\mu\alpha} \partial_\mu \eta^+ \cdot K^\alpha (v+\eta) + \cdots。
\end{aligned} \tag{1-82}
$$

这表明 M^2_{ij} 确是 $\eta(x)$ 场的质量矩阵元，而

$$
M^{2\alpha\beta} \equiv g^2 (K^\alpha v,\ K^\beta v) \tag{1-83}
$$

却是规范场的质量平方的矩阵元。由于这矩阵元只与破缺生成元有关，所以只有和破缺生成元 K^α 相应的规范场 $A^\alpha_\mu(x)$ 才获得质量。而与对称子群生成元 l^β 相应的规范场 $A^\beta_\mu(x)$，不仅和 Higgs 场 $\eta(x)$无相互作用，也还仍然没有质量。

总的看来，破缺生成元 K^α 在 Higgs 机制中，占有十分重要的作用：$K^\alpha v$ 是哥尔斯通粒子的质量本征态，决定了哥尔斯通粒

子的数目等于破缺生成元的数目；参数化和幺正规范都用到$\exp[i\xi^{\alpha}(x)K^{\alpha}]$因子，消除了哥尔斯通粒子；$g^2(K^{\alpha}v,\ K^{\beta}v)$是规范场质量矩阵元，决定了有质量的规范场的数目也等于破缺生成元的数目。对称子群l^{α}，保持了物理系统的部分对称性，并使相应的规范场$A_{\mu}^{\alpha}(x)$保持没有质量。这些特点，在建立规范理论模型时，要非常重视。

第二章　GWS 弱电统一规范理论

在这一章中，我们使用在上一章论述的规范对称理论和 Higgs 机制，在分析、综合实验规律的基础上，建立 G(Glashow)、W(Weinberg)、S(Salam)弱电统一规范理论，并举例说明应用这些理论来计算物理过程的方法和途径。

§1. 费米子的场和流

从现在的理论观点来看，作为基本粒子的费米子有轻子和夸克。轻子包括：电子 e 及其中微子 ν_e；μ 介子 μ 及其中微子 ν_μ；τ 介子 τ 及其中微子 ν_τ。夸克包括：上夸克 u 和下夸克 d；粲夸克 c 和奇异夸克 s；顶夸克 t 和底夸克 b。可以把它们排列成

$$e、\ \nu_e、\ u、\ d$$

$$\mu、\ \nu_\mu、\ c、\ s$$

$$\tau、\ \nu_\tau、\ t、\ b$$

同一行的元素称为一代，它们共分三代。同一列的元素除质量不同外，在相互作用等许多方面有同样的性质。所以，在讨论过程中，我们常常以一代的元素作为代表，所得结论也适用于其它的代。当然，在基本的费米子中，除了上述的以外，还要加上它们的反粒子。

自由场　基本的费米子都是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，用旋量波函数 $\psi(x)$ 描写。它们的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/-m)\psi(x), \tag{2-1}$$

运动方程为

$$(i\not{\partial}-m)\psi(x)=0。\tag{2-2}$$

式中：$\not{\partial}=\gamma^\mu\partial_\mu$, $\gamma^\mu=(\gamma^0,\ \vec{\gamma})$, $\vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha}$, $\gamma^0=\beta$。在标准表象中

$$\gamma^0=\beta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix},\quad \vec{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{vmatrix},\quad \vec{\gamma}=\begin{vmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{vmatrix}。$$

$\vec{\sigma}$ 是泡里矩阵

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad \sigma_2=\begin{vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{vmatrix},\quad \sigma_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}。$$

再定义 $\gamma_5=\gamma^5=-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$, $\vec{\Sigma}=\begin{vmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{vmatrix}$。

这些矩阵之间有重要关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\tag{2-3}$$

$$\gamma_5\gamma_\mu=-\gamma_\mu\gamma_5,\tag{2-4}$$

$$\gamma_5\vec{\Sigma}=\vec{\Sigma}\gamma_5,\tag{2-5}$$

$$\beta\vec{\gamma}=-\gamma_5\vec{\Sigma},\tag{2-6}$$

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}。\tag{2-7}$$

在动量表象中，旋量波函数 $\psi(p)$ 满足运动方程

$$(\not{p}-m)\psi(p)=0。\tag{2-8}$$

式中 $\not{p}=\gamma^\mu p_\mu$。

手征性(Chirality)　定义手征算符

$$P_L=\frac{1+\gamma_5}{2},\quad P_R=\frac{1-\gamma_5}{2}。$$

它们有正交、单幂、完备性，即

$$P_LP_R=\frac{1+\gamma_5}{2}\,\frac{1-\gamma_5}{2}=\frac{1-\gamma_5^2}{4}=0,$$

$$P_L P_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+2\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = P_L,$$

$$P_R P_R = \frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1-2\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = P_R,$$

$$P_L + P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} = 1。$$

定义手征旋量场

$$\psi_L = P_L\psi = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi,$$

$$\psi_R = P_R\psi = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi,$$

显然

$$\psi = \psi_L + \psi_R。 \tag{2-9}$$

容易证明：ψ_L、ψ_R 是 γ_5 的本征值为 $+1$、-1 的本征态，即

$$\gamma_5\psi_L = \psi_L;\quad \gamma_5\psi_R = -\psi_R。 \tag{2-10}$$

螺旋性(Helicity)　定义涡度算符

$$P_H = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}。 \tag{2-11}$$

有 $P_H^2 = 1$，即它的本征值为 ± 1。可以证明：ψ_L 和 ψ_R 在一般情况下并不是它的本征态，只在 $m=0$ 或动量很大 $m\to 0$ 时才是它的本征态。以 β 左乘(2-8)式得

$$\beta(\gamma^0 E - \vec{\gamma}\cdot\vec{P} - m)\psi = 0,$$

$$\beta\vec{\gamma}\cdot\vec{P}\psi = (E - \beta m)\psi。$$

由(2-6)式得

$$\gamma_5\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}\psi = (-E + \beta m)\psi。$$

根据(2-4)式、(2-5)式、(2-9)式、(2-10)式和 $\gamma_5^2 = 1$，可得

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}(\psi_L - \psi_R) = (-E + \beta m)(\psi_L + \psi_R),$$

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}(\psi_L + \psi_R) = (-E - \beta m)(\psi_L - \psi_R)。$$

联立解之，得

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_L=-E\,\psi_L+m\beta\psi_R,$$
$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_R=E\psi_R-m\beta\psi_L。\qquad(2\text{–}12)$$

这表明：ψ_L、ψ_R 都不是涡度算符(2–11)的本征态。但是，当 $m=0$ 或 $E\gg m$, $m\to 0$, $E\sim|\vec{p}|$ 时，(2–12)式成为

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_L=-E\,\psi_L,$$
$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_R=E\psi_R。$$

即 ψ_L、ψ_R 是涡度算符 P_H 的本征值为 -1、$+1$ 的本征态。因此，我们常常把 ψ_L 叫做左旋态，ψ_R 叫做右旋态。可是应该注意，在许多情况下，这种称呼是名不符实的。

费米 V–A 理论　关于弱相互作用理论，是由费米等人首先提出来的。他们认为四个费米子 ψ_a、ψ_b、ψ_c、ψ_d 的相互作用拉格朗日

$$\mathscr{L}_w\sim\bar{\psi}_a(x)\Gamma\psi_b(x)\cdot\bar{\psi}_c(x)\Gamma'\psi_d(x),$$

即有直接耦合的形式。人们称之为四费米子直接耦合理论。后来经过人们长期分析、综合实验结果，加以理论概括，推出

$$-\mathscr{L}_w=\frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^+J^\mu,$$
$$J_\mu=\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l+g_0\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d+g_1\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s。\qquad(2\text{–}13)$$

这里，我们用粒子符号如轻子 l、ν，夸克 u、d、s，表示粒子的场量如 $\psi_l(x)$、$\psi_\nu(x)$、$\psi_u(x)$、$\psi_d(x)$、$\psi_s(x)$。(2–13)式叫做费米普适 V–A 理论。人们用式中的

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{e}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e\cdot\bar{\nu}_\mu\,\gamma^\mu(1+\gamma_5)\mu$$

来计算过程

$$\mu^-\to e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu,$$

把计算结果和实验比较，定出弱作用耦合常数

$$G=1.01\times10^{-5}/m_p^2,\qquad(2\text{–}14)$$

m_p 是质子质量。

由于质子 p 由$(u、u、d)$夸克组成，中子 n 由$(u、d、d)$夸克组成，(2-13)式中的

$$\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d\sim\bar{p}\gamma_\mu(1+a\gamma_5)n。$$

由于夸克构成强子时，矢量形状因子和轴矢量形状因子不尽相同，因而 $a\neq1$，偏离了 V-A 形式。人们用

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e\cdot g_0\bar{p}\gamma^\mu(1+a\gamma_5)n$$

来计算 β 衰变过程

$$n\to p+e^-+\bar{\nu}_e,$$

把计算结果和实验比较，定出

$$g_0\lesssim1,\ a\approx1.2。\tag{2-15}$$

由于 Λ 超子由$(u、d、s)$夸克组成，质子 p 由$(u、u、d)$夸克组成，(2-13)式中的

$$\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s\sim\bar{p}\gamma_\mu(1+a\gamma_5)\Lambda。$$

人们用 $$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e\cdot g_1\bar{p}\gamma^\mu(1+a\gamma_5)\Lambda$$

来计算过程

$$\Lambda\to p+e^-+\bar{\nu}_e,$$

把计算结果和实验比较得

$$g_1\sim10^{-2}。\tag{2-16}$$

卡比玻(Cabibbo)角 考虑到强子的夸克结构，人们能够用普适费米 V-A 理论(2-13)式来说明弱作用的经验规律。但是对以(2-15)式，(2-16)式表示的 g_0、g_1，却还不十分清楚。1963 年卡比玻在分析、综合实验结果的基础上，指出

$$g_0^2+g_1^2\simeq1。\tag{2-17}$$

并且引进卡比玻角 θ_c，令

$$g_0=\cos\theta_c,\quad g_1=\sin\theta_c,\tag{2-18}$$

使上式得到满足。这样，就使两个待定的常数 g_0、g_1 减少为一个

待定常数 θ_c。现在的实验指出*

$$\theta_c \simeq 13.17^\circ,\ \sin\theta_c \simeq 0.229。$$

利用卡比玻角(2–18)式，可以把(2–13)式写成

$$-\mathscr{L}_w = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^\mu,$$

$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l + \bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d_\theta, \tag{2–19}$$

$$d_\theta = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c。$$

u、d、s 是夸克的质量本征态，d_θ 是夸克的弱作用本征态。

左手流 (2–19)式表示的弱作用流是 V–A 形式，我们把它改写成左手矢量流的形式。根据手征算符的单幂性和 γ_5 与 γ_μ 的反对易性，有

$$\gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2} = \gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\cdot\frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma_5}{2}\gamma_0\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2},$$

又

$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi,\ \bar{\psi}_L = \psi_L^+\gamma_0 = \psi^+\frac{1+\gamma_5}{2}\gamma_0。$$

所以，(2–19)式就可以改写成

$$J_\mu = 2J_{L\mu},$$

$$J_{L\mu} = \bar{\nu}_L\gamma_\mu l_L + \bar{u}_L\gamma_\mu d_{L\theta}, \tag{2–20}$$

$$d_{L\theta} = d_L\cos\theta_c + s_L\sin\theta_c。$$

SU(2)形式 还可以进一步改写(2–20)式。令

$$L = \begin{vmatrix} \nu_L \\ l_L \end{vmatrix},\ q_L = \begin{vmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{vmatrix} \tag{2–21}$$

为同位旋空间的二重态。取同位旋算符

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix},\quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}。$$

(2–20)式就可以写成

$$J_{L\mu} = \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau_1+i\tau_2}{2}L + \bar{q}_L\gamma_\mu\frac{\tau_1+i\tau_2}{2}q_L。 \tag{2–22}$$

---

* 参看 Rev. Mod. Phys. Vol. 53, No. 2, 1981 年, p. 223

尽管弱作用流可以写成(2–19)式、(2–20)式、(2–22)式的不同形式，它们都还是同一经验规律的不同表述。为了进一步作理论上的推广，我们引进同位旋流

$$\vec{J}_{L\mu}=\bar{L}\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}L+\bar{q}_L\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}q_L。\tag{2–23}$$

显然 $$J_{L\mu}=J^1_{L\mu}+iJ^2_{L\mu}。$$

把它代入(2–20)式、(2–19)式得

$$-\mathscr{L}_w=2\sqrt{2}G(J^1_{L\mu}J^{1\mu}_L+J^2_{L\mu}J^{2\mu}_L)。\tag{2–24}$$

(2–24)式、(2–23)式、(2–21)式和(2–19)式一起，以左手同位旋矢量流的形式描写弱作用的经验规律。

从对称性的角度来看，(2–24)式描写的规律是不够好的。在同位旋空间，它只有轴对称性，没有球对称性。即在绕同位旋第三轴的转动下，

$$L(q_L)\to L'(q'_L)=\exp\left[-i\theta^3\frac{\tau^3}{2}\right]L(q_L),$$

(2–24)式表示的 $\mathscr{L}_w$ 是不变的。但在任意的同位旋转动下，

$$L(q_L)\to L'(q'_L)=\exp\left[-i\theta^i\frac{\tau^i}{2}\right]L(q_L),\tag{2–25}$$

(2–24)式表示的 $\mathscr{L}_w$ 却不是不变的。人们设想，弱作用规律可能在同位旋空间具有球对称，因而在(2–24)式中加上

$$J^3_{L\mu}=\bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}L+\bar{q}_L\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}q_L$$

$$=\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L-\bar{l}_L\gamma_\mu l_L+\bar{u}_L\gamma_\mu u_L-\bar{d}_{L\theta}\gamma_\mu d_{L\theta})\tag{2–26}$$

的平方项，使之成为

$$-\mathscr{L}_w=2\sqrt{2}G(J^1_{L\mu}J^{1\mu}_L+J^2_{L\mu}J^{2\mu}_L+J^3_{L\mu}J^{3\mu}_L)=2\sqrt{2}G\vec{J}_{L\mu}\cdot\vec{J}^\mu_L,\tag{2–27}$$

就达到要求。事实上，在无穷小变换下，由(2–25)式得

$$L'(q'_L)=\left(1-i\theta_i\frac{\tau_i}{2}\right)L(q_L),$$

$$\bar{L}'(\bar{q}'_L)=\bar{L}(\bar{q}_L)\left(1+i\theta_i\frac{\tau_i}{2}\right),$$

$$\bar{L}'(\bar{q}'_L)\frac{\tau_j}{2}L'(q'_L)=\bar{L}(\bar{q}_L)\left(1+i\theta_i\frac{\tau_i}{2}\right)\frac{\tau_j}{2}\left(1-i\theta_i\frac{\tau_i}{2}\right)L(q_L)$$

$$=\bar{L}(\bar{q}_L)\left(\frac{\tau^j}{2}+\theta_i\left[\frac{\tau_i}{2},\frac{\tau_j}{2}\right]\right)L(q_L)$$

$$=[\delta_{jk}+\theta_i\varepsilon_{ijk}]\,\bar{L}(q_L)\frac{\tau_k}{2}L(q_L),$$

$$\bar{L}'(\bar{q}'_L)\frac{\vec{\tau}}{2}L'(q'_L)\cdot\bar{L}'(\bar{q}'_L)\frac{\vec{\tau}}{2}L'(q'_L)$$

$$=(\delta_{jk}+\theta_i\varepsilon_{jki})(\delta_{jk'}+\theta_{i'}\cdot\varepsilon_{jk'i'})$$

$$\cdot\,\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_k}{2}L(q_L)\cdot\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_{k'}}{2}L(q_L)$$

$$=(\delta_{kk'}+2\theta_i\varepsilon_{ikk'})\,\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_k}{2}L(q_L)\cdot\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_{k'}}{2}L(q_L)$$

$$=\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_k}{2}L(q_L)\cdot\bar{L}(\bar{q}_L)\frac{\tau_k}{2}L(q_L)。$$

由此可知，由(2-27)式描写的弱作用理论确实是SU(2)不变的，即同位旋守恒的。

GIM 机制和 c 夸克　把(2-24) 式推广到(2-27)式只是理论的设想，是否正确还有待实践的检验。在(2-26)式表示的中性流中，有奇异数改变的中性流

$$\bar{d}_L\gamma_\mu s_L\cos\theta_c\sin\theta_c。\tag{2-28}$$

在(2-27)式中，就有

$$2\sqrt{2}G\bar{d}_L\gamma_\mu s_L\cos\theta_c\sin\theta_c\bar{l}_L\gamma_\mu l_L$$

项。从 K^+、K^0、π^+、π^0 介子的夸克组成 $(u、\bar{s})$、$(d、\bar{s})$、$(u、\bar{d})$、$(u\bar{u}+d\bar{d})$来看，按照上式应该存在过程

$$K^+\to\pi^++e^++e^-,$$

$$K^0\to\mu^++\mu^-。$$

可是，实验指出，这样的过程不存在。换句话说，(2-28)式表示的

奇异数改变的中性流是不存在的，(2–26) 式和(2–27)式描写的规律是不完全正确的。

为了去除奇异数改变的中性流，Glashow, Iliposvlas, Maiani 引进 c 夸克，考虑和 $d_{L\theta}=d_L\cos\theta_c+s_L\sin\theta_c$ 正交的夸克本征态

$$s_{L\theta}=-d_L\sin\theta_c+s_L\cos\theta_c, \tag{2–29}$$

组成新的同位旋二重态

$$q'_L=\begin{vmatrix} c_L \\ s_{L\theta} \end{vmatrix}, \tag{2–30}$$

构成新的左手同位旋矢量流

$$\bar{q}'_L\,\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\,q'_L,$$

把(2–23)式扩展为

$$\vec{J}_{L\mu}=\bar{L}\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}L+\bar{q}_L\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}q_L+\bar{q}'_L\,\gamma_\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\,q'_L, \tag{2–31}$$

保持(2–27)式的形式

$$-\mathscr{L}_w=2\sqrt{2}\,G\,\vec{J}_{L\mu}\cdot\vec{J}^{\mu}_{L}。 \tag{2–32}$$

这样，就构成了新的弱作用理论。这个过程叫做 GIM 机制。在(2–31)式中的中性流为

$$J^3_{L\mu}=\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L-\bar{l}_L\gamma_\mu l_L+\bar{u}_L\gamma_\mu u_L-\bar{d}_L\gamma_\mu d_L+\bar{c}_L\gamma_\mu c_L-\bar{s}_L\gamma_\mu s_L)。 \tag{2–33}$$

奇异数改变的中性流(2–28)式不见了，理论和实验的这个矛盾解决了。但是，它还存在问题。

首先，它破坏幺正性。从这个理论看来，过程的截面 σ 和相互作用常数 G 的平方成正比。σ 的量纲是 $[m]^{-2}$，G 的量纲也是 $[m]^{-2}$。在高能时，粒子质量可以忽略不计，有量纲的参数只有质心系系统能量的平方 s，其量纲为 $[m]^2$。因而，σ 的高能行为是

$$\sigma\sim G^2 s。$$

但是，因为四费米相互作用的形式，确定截面只能有单一的分波，

所以就有幺正限

$$\sigma \sim 1/s_{\circ}$$

由此可见，当 Gs 达到 1 的量级时，高能行为就破坏了幺正限。再者，由于只当相互作用常数的量纲 $[m]^x$，$x \geqslant 0$ 时，理论才可能是可以重整化的，而 G 的 $x=-2<0$，所以这种理论是不可以重整化的。还有，这理论没有和电磁作用统一起来。电磁作用流是

$$J_{\mu}^{em}=-\bar{l}\gamma_{\mu}l+\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_{\mu}u-\frac{1}{3}\bar{d}\gamma_{\mu}d+\frac{2}{3}\bar{c}\gamma_{\mu}c-\frac{1}{3}\bar{s}\gamma_{\mu}s_{\circ}$$

(2–34)

§2. 轻子弱电统一规范理论

在理解了弱作用流和电磁流的特点以后，我们利用第一章阐明的方法，来着手建立弱电统一规范理论。先从轻子开始。

规范群 建立规范理论，先要选定规范群。从上一节的论述来看，这规范群以 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ 为宜。$\mathrm{SU}(2)$的生成元是 T_i，$i=1, 2, 3$，满足对易关系

$$[T_i, T_j]=i\varepsilon_{ijk}T_k{}_{\circ} \tag{2–35}$$

ε_{ijk} 是群的结构常数，是三维全反对称张量，且 $\varepsilon_{123}=1$。群元素是

$$u_2(\vec{\theta})=\exp[-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}]_{\circ}$$

对于 $\mathrm{U}(1)$群，它的生成元不能是电荷 Q。因为 $\mathrm{SU}(2)$二重态的成员如 ν、l，所带电荷不同，不是Q的本征态。所以，我们选取超荷Y为生成元，且定义为

$$\frac{Y}{2}=Q-T_{3\circ} \tag{2–36}$$

U_1的群元素为

$$u_1(\theta)=\exp\left[-i\theta\frac{Y}{2}\right]_{\circ}$$

而 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$的群元素就是

$$u(\theta)=\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}-i\theta\frac{Y}{2}\right]。\tag{2-37}$$

规范场 和规范群的每一个生成元相应就有一个规范场。和SU(2)的生成元 $\vec{T}(T^i,\ i=1,\ 2,\ 3)$ 相应有规范场 $\vec{A}_\mu(x)(A^i_\mu(x),\ i=1,\ 2,\ 3)$。和U(1)的生成元 $\frac{Y}{2}$ 相应有规范场 $B_\mu(x)$。还有相应的规范场强

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mu\nu}&=\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu,\\ B_{\mu\nu}&=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu。\end{aligned}\tag{2-38}$$

它们的自由拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_g=-\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}。\tag{2-39}$$

在规范变换下,

$$\begin{aligned}\vec{A}_\mu\cdot\vec{T}\to\vec{A}'_\mu\cdot\vec{T}=&\exp[-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}]\,\vec{A}_\mu\cdot\vec{T}\exp[i\vec{\theta}\cdot\vec{T}]\\&+\frac{i}{g}\exp[-i\vec{\theta}\cdot\vec{T}]\,\partial_\mu\exp[i\vec{\theta}\cdot\vec{T}],\\ B_\mu\to B'_\mu=&B_\mu-\frac{1}{g'}\partial_\mu\theta,\end{aligned}\tag{2-40}$$

而(2-39)式表示的 $\mathscr{L}_g$ 却是不变的。

轻子场 从上一节的论述来看,弱作用中只有轻子左手场,电磁作用中就既有左手场又有右手场。如果中微子没有质量,只有左手场没有右手场。那么自然的选择是

$$L=\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix},\ l_R。$$

它们分别是SU(2)的二重态和单态,决定它们变换规律的生成元分别是 $\vec{T}=\frac{\vec{\tau}}{2}$ 和 $\vec{T}=0$。对于U(1)群,L 的超荷

$$\frac{Y}{2}=Q-T_3=\begin{vmatrix}0\\ -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

l_R 的超荷 $\qquad \dfrac{Y}{2}=Q-T_3=-1-0=-1$。

所以，在 SU(2)×U(1)规范变换下，

$$L\to L'=\exp\left[-i\vec{\vartheta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+i\frac{\theta}{2}\right]L,$$
$$l_R\to l'_R=e^{i\theta}\,l_R。 \tag{2-41}$$

它们的自由场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_l=i\bar{L}\not{\partial}L+i\bar{l}_R\not{\partial}l_R,$$

在整体规范变换下是不变的。要扩展为在定域规范变换下也不变，就要把导数 ∂_μ 换成协变导数 D_μ，成为

$$\mathscr{L}_{lg}=i\bar{L}\left(\not{\partial}-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\not{A}}+ig'\frac{1}{2}\not{B}\right)L+i\bar{l}_R(\not{\partial}+ig'\not{B})l_R。 \tag{2-42}$$

注意，式中没有质量项，不仅没有 ν 的质量项，也没有 l 的质量项。由于 l 的质量项应比例于

$$\bar{l}l=(\bar{l}_L+\bar{l}_R)(l_L+l_R)=\bar{l}_L l_R+\bar{l}_R l_L,$$

而 l_L、l_R 按不同规律变换，使它不是规范不变的。所以，它不能出现在(2–42)式中。

Higgs 场 为了使规范场和费米场获得质量，我们引进 Higgs 场。利用 Higgs 机制使规范场获得质量。采用汤川耦合方式使费米场获得质量。在 SU(2)×U(1)规范理论中，有四个规范场 $\vec{A}_\mu(x)$、$B_\mu(x)$，而参与弱电相互作用的规范粒子：光子没有质量，三个中间玻色子是有质量的。所以，我们必需使四个生成元中的三个成为破缺生成元，使四个相应规范场中的三个获得质量。为此，Higgs 场的分量不能少于四个。我们选取一个带正电的复场 $\phi^+(x)$，一个中性的复场 $\phi^0(x)$，它们各有两个实分量，共有四个实分量。并且让它和左手场一样，组成 SU(2)的二维表示

$$\phi(x)=\begin{vmatrix}\phi^+(x)\\ \phi^0(x)\end{vmatrix}, \tag{2-43}$$

由生成元 $\frac{\vec{\tau}}{2}$ 决定它的变换性质。在 U(1) 群下，与之相应的生成元为

$$\frac{Y}{2}=Q-T_3=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}。$$

由此推知，它在 SU(2) × U(1) 规范变换下，按

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-i\frac{\theta}{2}\right]\phi(x) \qquad (2\text{-}44)$$

的规律变换。它的协变导数为

$$D_\mu=\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu-ig'\frac{1}{2}B_\mu。$$

它的规范不变的拉格朗日密度是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\phi g}&=\frac{1}{2}\overline{D_\mu\phi}\cdot D^\mu\phi-\frac{\mu^2}{2}\bar{\phi}\phi-\frac{\lambda}{4}(\bar{\phi}\phi)^2\\&=\frac{1}{2}\left|\bar{\phi}^+\ \bar{\phi}^0\right|\left(\partial_\mu+\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+\frac{i}{2}g'B_\mu\right)\\&\quad\cdot\left(\partial^\mu-\frac{i}{2}g\vec{\tau}\,\vec{A}^\mu-\frac{i}{2}g'B^\mu\right)\begin{vmatrix}\phi^+\\\phi^0\end{vmatrix}\\&\quad-\frac{\mu^2}{2}\left|\bar{\phi}^+\ \bar{\phi}^0\right|\begin{vmatrix}\phi^+\\\phi^0\end{vmatrix}-\frac{\lambda}{4}\left(\left|\bar{\phi}^+\ \bar{\phi}^0\right|\begin{vmatrix}\phi^+\\\phi^0\end{vmatrix}\right)^2。\end{aligned} \qquad (2\text{-}45)$$

这里为了避免混淆，我们用—表示厄密共轭。

Higgs 场的真空值为

$$\langle|\sqrt{\bar{\phi}\phi}|\rangle_0=v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}。$$

我们选取真空态为

$$\phi_0=\begin{vmatrix}0\\v\end{vmatrix}。 \qquad (2\text{-}46)$$

这样的真空是破缺对称的。它对于生成元 $T_1=\frac{\tau_1}{2}$、$T_2=\frac{\tau_2}{2}$、

$T_3-\frac{Y}{2}=\frac{\tau_3-Y}{2}$ 是不对称的，对于生成元 $T_3+\frac{Y}{2}=\frac{\tau_3+Y}{2}$ 是对称的。

$$\tau_1\phi_0=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v\\0\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\tau_2\phi_0=\begin{vmatrix}0&-i\\i&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-iv\\0\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$(\tau_3-Y)\phi_0=\begin{vmatrix}0&0\\0&-2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\-2v\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\left(Q=\frac{\tau_3+Y}{2}\right)\phi_0=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\v\end{vmatrix}=0。$$

由是可知，$SU(2)\times U(1)$ 群破缺到 $U(1)$ 群，保持对称的 $U(1)$ 群的生成元是电荷 Q，而不是超荷 $\frac{Y}{2}$。

参数化和幺正规范 以上论述的是 Higgs 场的一方面的性质。为了得到它的另一方面的性质，我们就把它参数化和转到幺正规范，即令

$$\phi(x)=\exp\left[i\,\xi_1(x)\frac{\tau_1}{2}+i\,\xi_2(x)\frac{\tau_2}{2}+i\,\xi_3(x)\frac{\tau_3-1}{2}\right]\begin{vmatrix}0\\v+\eta(x)\end{vmatrix},$$

$$\phi'(x)=\exp\left[-i\,\xi_1(x)\frac{\tau_1}{2}-i\,\xi_2(x)\frac{\tau_2}{2}-i\,\xi_3(x)\frac{\tau_3-1}{2}\right]\phi(x)$$

$$=\begin{vmatrix}0\\v+\eta(x)\end{vmatrix}。$$

当然，规范场和轻子场也要进行相应的、以 $\xi_1(x)$、$\xi_2(x)$、$\xi_3(x)$ 为群参数、以 T_1、T_2、$T_3-\frac{Y}{2}$ 为生成元的幺正规范变换。根据拉格朗日密度的规范不变性，把变换后的场量代替变换前的场量，就得到新的拉格朗日密度。其结果就是

$$\phi(x)\to\begin{vmatrix}0\\v+\eta(x)\end{vmatrix},\qquad(2\text{-}47)$$

其他场量可以不必改写，只要理解为幺正规范变换后的场量就可以了。在(2-45)式中作(2-47)式的代换，就得到

$$\mathscr{L}_{\phi g}=\frac{1}{2}\left|0\ \ v+\eta\right|\left(\tilde{\partial}_\mu+\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+\frac{i}{2}g'B_\mu\right)$$
$$\cdot\left(\partial^\mu-\frac{i}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu-\frac{i}{2}g'B^\mu\right)\left|\begin{matrix}0\\v+\eta\end{matrix}\right|$$
$$-\frac{\mu^2}{2}(v+\eta)^2-\frac{\lambda}{4}(v+\eta)^4$$
$$=\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\cdot\partial^\mu\eta+\mu^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4$$
$$-\frac{g^2}{8}(v+\eta)^2(A_\mu^1-iA_\mu^2)(A^{1\mu}+iA^{2\mu})$$
$$-\frac{1}{8}(v+\eta)^2(g'B_\mu-gA_\mu^3)^2 \qquad (2\text{-}48)$$

温伯格(Weinberg)角和玻色子质量 $\vec{A}_\mu(x)$、$B_\mu(x)$ 都是实场，都只能描写中性粒子。人们推测中间玻色子有带电荷的，因而引入复场

$$W_\mu^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1+iA_\mu^2),\ W_\mu^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1-iA_\mu^2)。\qquad (2\text{-}49)$$

再令

$$Z_\mu=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3-g'B_\mu)。\qquad (2\text{-}50)$$

把它们代入(2-48)式，就得到

$$\mathscr{L}_{\phi g}=\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\,\partial^\mu\eta+\mu^2\eta^2-\lambda v\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4$$
$$-\frac{g^2}{4}(v+\eta)^2W_\mu^+W^{-\mu}-\frac{g^2+g'^2}{8}(v+\eta)^2Z_\mu Z^\mu。(2\text{-}51)$$

由此可知：η、W_μ^+、W_μ^-、Z_μ 都是质量本征态，相应粒子的质量为

$$m_\eta=\sqrt{-2\mu^2},\ m_W=\frac{1}{2}gv,\ m_Z=\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v。\qquad (2\text{-}52)$$

四个规范粒子三个有质量，它们的场量 W_μ^+、W_μ^-、Z_μ 是 $\vec{A}_\mu$、B_μ 的线性组合，如(2-49)式、(2-50)式所示。还有一个质量为0的粒

子应该就是光子，它的场量 A_μ 是 $\vec{A}_\mu$、B_μ 的什么组合呢？我们定义温伯格角 θ_W 为

$$\mathrm{tg}\,\theta_W = \frac{g'}{g},\ \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}},\ \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}。\qquad (2\text{–}53)$$

把它代入(2–50)式得

$$Z_\mu = A^3_\mu \cos\theta_W - B_\mu \sin\theta_W。\qquad (2\text{–}54)$$

这是一种正交变换的形式。另一个变换后的场量自然是

$$A_\mu = A^3_\mu \sin\theta_W + B_\mu \cos\theta_W。\qquad (2\text{–}55)$$

把(2–53)式代入(2–52)式得

$$m_W = m_Z \cos\theta_W,\qquad (2\text{–}56)$$

这就是荷电中间玻色子 W 和中性中间玻色子 Z 的质量关系。

汤川(Yukawa)耦合和费米子质量　当费米子的左手场和右手场的变换性质不一样时，在原始拉格朗日密度如(2–42)式中不能有质量项。它的质量也可以由 Higgs 机制产生。通常，把费米子的左手场、右手场和 Higgs 场一起，以汤川耦合形式组成不变的相互作用拉格朗日密度。然后，参数化并作幺正规范变换，即进行(2–47)式的代换，就得到费米子质量。在现在的情况，令

$$\mathscr{L}_{l\phi} = -G_l(\bar{L}\,\phi\, l_R + \bar{l}_R\,\bar{\phi}\,L)$$

$$= -G_l\left(|\bar{\nu}_L\ \bar{l}_L|\begin{vmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{vmatrix} l_R + \bar{l}_R\,|\,\bar{\phi}^+\ \bar{\phi}^0\,|\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}\right)。$$

可以证明，它既是 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ 变换下的不变量，又是时空空间的标量。这个证明留给读者作为练习。在参数化和幺正规范变换后，即作了(2–47)式的代换后，得

$$\mathscr{L}_{\phi l} = -G_l\left(|\bar{\nu}_L\ \bar{l}_L|\begin{vmatrix}0\\ v+\eta\end{vmatrix} l_R + \bar{l}_R|\ 0\ \ v+\eta\,|\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}\right)$$

$$= -G_l(v+\eta)\bar{l}l。\qquad (2\text{–}57)$$

显然，轻子的质量为

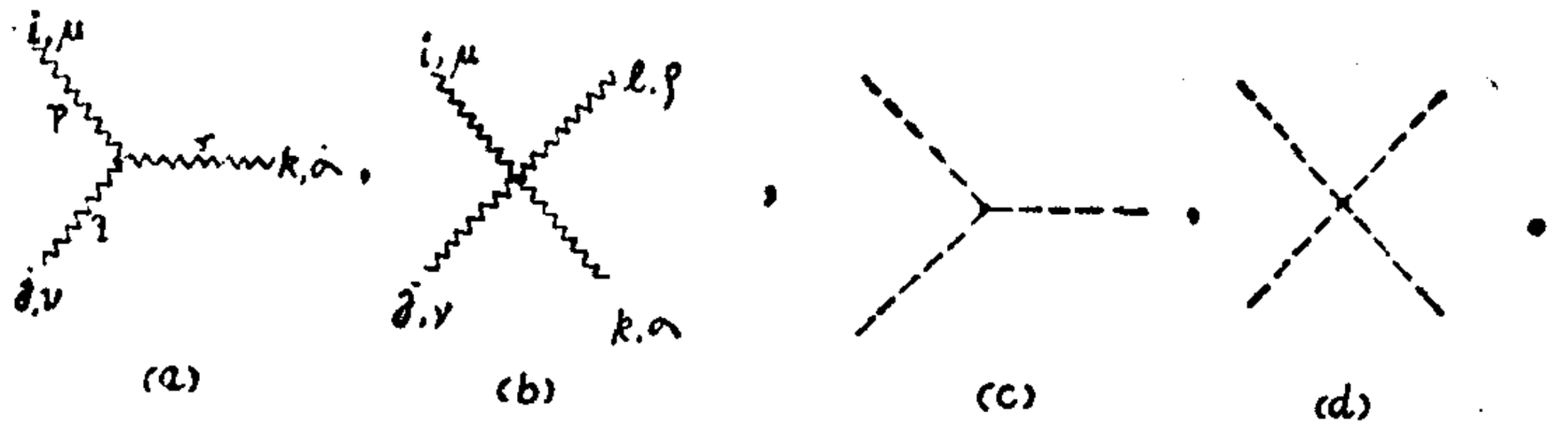
$$m_l = G_l v。\qquad (2\text{–}58)$$

自作用　用(2-39)式、(2-42)式、(2-51)式、(2-57) 式表示的拉格朗日密度，包括规范场、轻子场、Higgs 场的动能项、质量项和作用项。作用有自作用和相互作用。轻子场没有自作用。规范场和 Higgs 场都有自作用，包含在(2-39)式和(2-51)式中，它们是

$$\mathscr{L}_{si}=-g\,\partial_\mu \vec{A}_\nu\cdot\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu-\frac{g^2}{4}(\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)\cdot(\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu)$$

$$-\lambda v\,\eta^3-\frac{\lambda}{4}\eta^4, \tag{2-59}$$

与之相应的顶角是



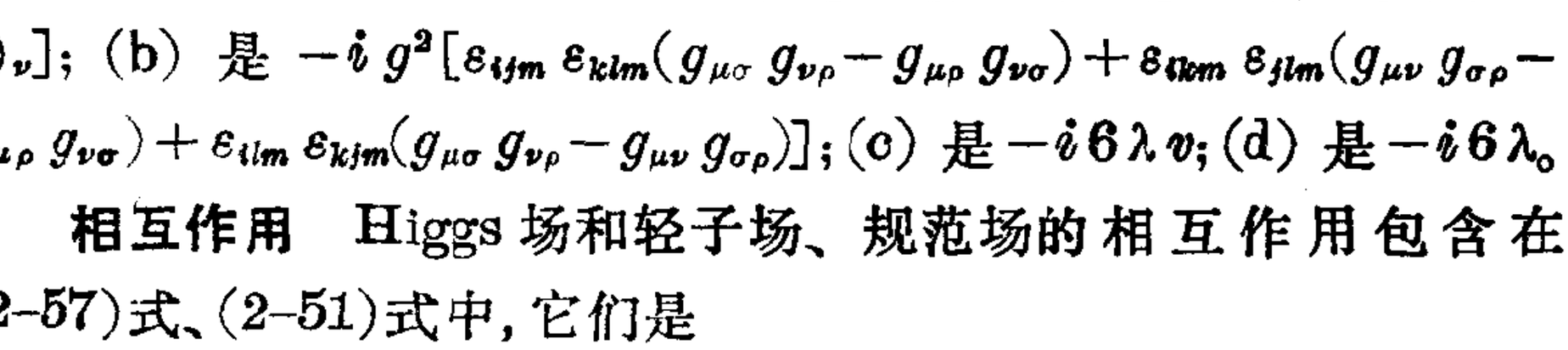
相应的顶角因子：(a) 是 $g\,\varepsilon_{ijk}[g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma+g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu+g_{\sigma\mu}(r-p)_\nu]$；(b) 是 $-i\,g^2[\varepsilon_{ijm}\,\varepsilon_{klm}(g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma})+\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{jlm}(g_{\mu\nu}\,g_{\sigma\rho}-g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma})+\varepsilon_{ilm}\,\varepsilon_{kjm}(g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}\,g_{\sigma\rho})]$；(c) 是 $-i6\lambda v$；(d) 是 $-i6\lambda$。

相互作用　Higgs 场和轻子场、规范场的相互作用包含在(2-57)式、(2-51)式中，它们是

$$\mathscr{L}_{\phi i}=-G_l\,\eta\,\bar{l}\,l-\frac{g^2v}{2}\,\eta\,W_\mu^+\,W^{-\mu}-\frac{g^2}{4}\,\eta^2\,W_\mu^+\,W^{-\mu}$$

$$-\frac{g^2+g'^2}{4}\,v\eta Z_\mu Z^\mu-\frac{g^2+g'^2}{8}\,\eta^2 Z_\mu Z^\mu \tag{2-60}$$

相应的顶角是



相应的顶角因子：（a）是$-iG_l$；（b）是$-i\frac{g^2v}{2}$；（c）是$-i\frac{g^2}{4}$；（d）是$-i\frac{g^2+g'^2}{2}v$；（e）是$-i\frac{g^2+g'^2}{2}$。

轻子和规范场的相互作用包含在(2–42)式中，它们是

$$\mathscr{L}_u=\bar{L}\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{A}-\frac{g'}{2}B\right)L-g'\bar{l}_R B l_R$$

$$=|\bar{\nu}_L\bar{l}_L|\gamma^\mu\left(\frac{g}{2}\begin{vmatrix}A_\mu^3 & A_\mu^1-iA_\mu^2\\ A_\mu^1+iA_\mu^2 & -A_\mu^3\end{vmatrix}-\frac{g'}{2}B_\mu\right)\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}$$

$$-g'\bar{l}_R\gamma^\mu l_R B_\mu$$

$$=|\bar{\nu}_L\bar{l}_L|\frac{\gamma^\mu}{2}\begin{vmatrix}gA_\mu^3-g'B_\mu & g(A_\mu^1-iA_\mu^2)\\ g(A_\mu^1+iA_\mu^2) & -gA_\mu^3-g'B_\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}$$

$$-g'\bar{l}_R\gamma^\mu l_R B_\mu$$

$$=|\bar{\nu}_L\bar{l}_L|\frac{\gamma^\mu}{2}\begin{vmatrix}\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+\\ \sqrt{2}gW_\mu^- & \frac{-2gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu+\frac{g'^2-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\nu_L\\ l_L\end{vmatrix}$$

$$-\bar{l}_R\gamma^\mu l_R\left(\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\right),$$

这里利用了$\vec{A}_\mu$、B_μ和$W_\mu^\pm$、Z_μ、A_μ的关系(2–53)式、(2–54)式、(2–55)式。把上列矩阵乘出来就得到

$$\mathscr{L}_u=\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}_L\gamma^\mu l_L+W_\mu^-\bar{l}_L\gamma^\mu\nu_L)$$

$$+\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu\left(\frac{\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L-\bar{l}_L\gamma^\mu l_L}{2}+\sin^2\theta_W\bar{l}\gamma^\mu l\right)$$

$$-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu\bar{l}\gamma^\mu l。$$

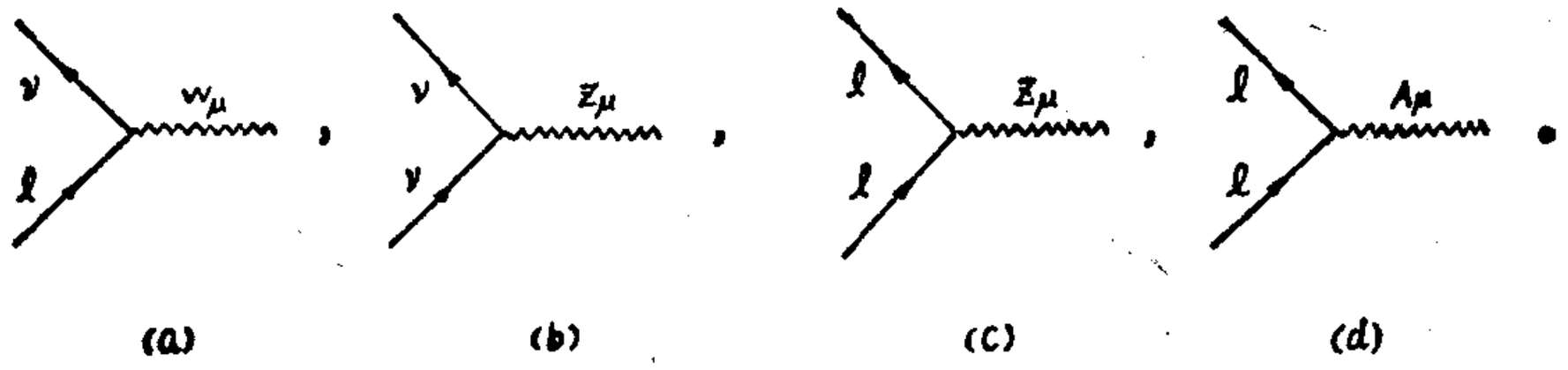
回到轻子的质量本征态，上式成为

$$\mathscr{L}_u=\frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)l+W_\mu^-\bar{l}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu)$$

$$+\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}Z_\mu(\bar{\nu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu+\bar{l}\gamma^\mu(4\sin^2\theta_W-1-\gamma_5)l)$$

$$-\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu \bar{l}\gamma^\mu l。 \tag{2-61}$$

相应的顶角为



(a) (b) (c) (d)

相应的顶角因子：(a) 是 $\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；(b) 是 $\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}$ $\cdot\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；(c) 是 $\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\gamma_\mu(4\sin^2\theta_W-1-\gamma_5)$；(d) 是 $-i\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\gamma_\mu=-ie\gamma_\mu$。

传播子 在(2-39)式、(2-42)式、(2-51)式、(2-57) 式中的动能项和质量项

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0=&-\frac{1}{2}(\partial_\mu W^+_\nu-\partial_\nu W^+_\mu)(\partial^\mu W^{-\nu}-\partial^\nu W^{-\mu})-m_W^2 W^+_\mu W^{-\mu}\\&-\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu)-\frac{1}{2}m_z^2 Z_\mu Z^\mu\\&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu^\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)+\bar{l}(i\not{\partial}-m_l)l\\&+\bar{\nu}i\not{\partial}\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta-\frac{m_\eta^2}{2}\eta^2,\end{aligned} \tag{2-62}$$

确定了轻子、规范粒子、Higgs 粒子的传播子为：

$\frac{p}{l}$ $\frac{i}{\not{p}-m}$；$\frac{p}{\nu}$ $\frac{i}{\not{p}}$；

$\mu\overset{k}{\sim}\nu$ W、Z $\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m}\right)}{k^2-m^2}$，$m=m_W$ 或 m_Z；

μ ~~~ ν (propagator k, A) $\quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}$；$\quad$ ---- (k, η) ---- $\quad \frac{i}{k^2-m_\eta^2}$。

总括以上论述的结果是：(2–59) 式、(2–60) 式、(2–61)式、(2–62)式和与之相应的图形和因子，描述了弱电作用过程的基本规律。根据费曼规则应用它可以计算弱电过程的反应几率。

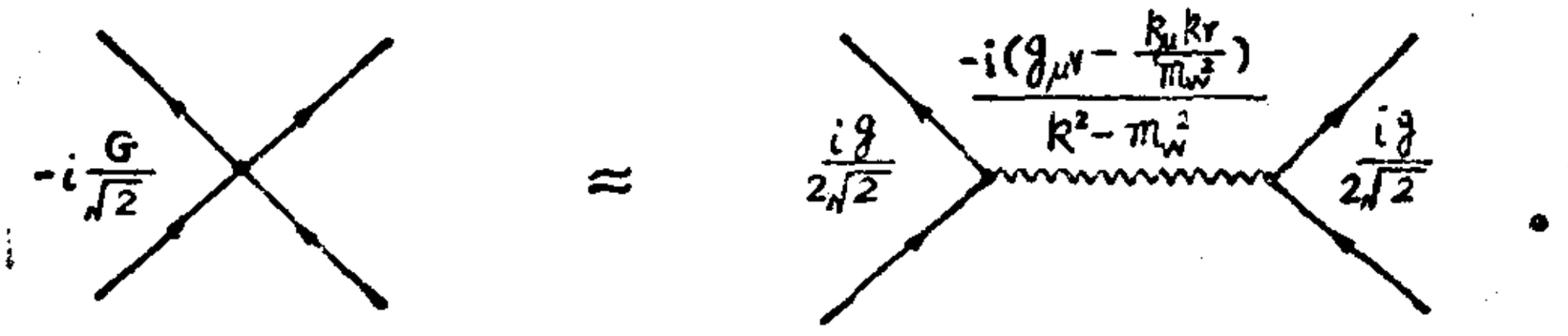
特性参数 在理论中引入的原始参数有 μ、λ、v、g、g'、G_l。它们按照(2–52)式、(2–58)式确定着 Higgs 粒子、中间玻色子、轻子的质量

$$m_\eta=\sqrt{-2\mu},\ m_W=\frac{1}{2}gv,\ m_Z=\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,v,\ m_l=G_l v。$$

λ、g、g'、G_l 还按(2−59)、(2–60)、(2–61)的因子确定着各种顶角的作用强度。μ 和 λ 将由 Higgs 粒子的质量和自作用来决定。轻子的质量取代了 G_l。余下的三个参数 v、g、g'，由于

$$e=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}},\ \mathrm{tg}\,\theta_W=\frac{g'}{g}$$

而换成 v、e、θ_W。e 是已知的。由于四费米子顶角和两个轻子规范顶角等效，即



在低能时得 $$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W^2}=\frac{1}{4v^2}。$$

所以，v 由 G 决定，剩下的参数只有 θ_W。实验结果是

$$\sin^2\theta_W\approx 0.22-0.24。$$

再输入 $Gm_p^2=1.01\times10^{-5}$，$e^2=\frac{4\pi}{137}$，$m_p=938\,\mathrm{Mev}$，就可以估计出

$$M_W\sim 76\,\mathrm{Gev},\ M_Z\sim 85\,\mathrm{Gev}。$$

§3. 夸克弱电统一规范理论

我们把夸克纳入GWS统一规范理论，来描写强子的弱电作用过程。规范群仍然是$SU(2)\times U(1)$群。相应的生成元仍然是同位旋T_1、T_2、T_3和超荷$\frac{Y}{2}$。相应的规范场仍然是$\vec{A}_\mu$和B_μ。在按(2–49)式、(2–54)式、(2–55)式转动以后，就成为$W_\mu^{\pm}$、Z_μ和A_μ。Higgs场还是$\phi(x)=(\phi^+(x),\ \phi^0(x))$。取真空态为$\phi_0=(0,\ v)$，在参数化、幺正规范变换后，希格斯场就成为$(0,\ v+\eta(x))$。它是破缺对称的。破缺生成元$T_+=\frac{1}{2}(T_1+iT_2)$、$T_-=\frac{1}{2}(T_1-iT_2)$、$T_3-\frac{Y}{2}$对应于中间玻色子场$W_\mu^-$、$W_\mu^+$、$Z_\mu$。保持对称的生成元$Q=T_3+\frac{Y}{2}$，和光子场$A_\mu$相应。Higgs场使$SU(2)\times U(1)$对称破缺成$U(1)$对称。中微子$\nu$没有质量，用这个Higgs场可以使轻子$l$获得质量。所有夸克都被认为是有质量的，要使它们都获得质量，不引入其他Higgs场，也得增添这个Higgs场的其他形式。在GWS模型中采用的就是后一种方法。这使理论具有最简单的形式。

夸克场　我们考虑四个夸克u、d、c、s的情况。根据第一节中唯象分析的结果，参与弱作用的夸克本征态是u_L、c_L和$d_{L\theta}=d_L\cos\theta_c+s_L\sin\theta_c$、$s_{L\theta}=s\cos\theta_c-d\sin\theta_c$。$\theta_c$是卡比玻角。对于$SU(2)$群，$u_L$和$d_{L\theta}$、$c_L$和$s_{L\theta}$分别组成二重态

$$q_L=\begin{vmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{vmatrix},\quad q'_L=\begin{vmatrix} c_L \\ s_{L\theta} \end{vmatrix},$$

决定它的变换性质的生成元是$\frac{\vec{\tau}}{2}$。对于$U(1)$群，它的超荷

$$\frac{Y}{2}=Q-T_3=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}\\ \\ -\frac{1}{3}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\ \\ -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}。$$

所以，在SU(2)×U(1)群的规范变换下，它的变换规律是

$$q_L(q'_L)\to\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}-i\frac{\theta}{6}\right]q_L(q'_L)。$$

与此相应，它们的协变导数是

$$D_\mu=\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu-i\frac{g'}{6}B_\mu。$$

夸克是有质量的。它们不仅有左手态 u_L、$d_{L\theta}$、c_L、$s_{L\theta}$，还有右手态 u_R、$d_{R\theta}$、c_R、$s_{R\theta}$。在 SU(2)×U(1)群下，左手态有如上所述的性质，右手态呢？它们不出现在第一节分析的、唯象的弱作用理论中，因而自然的假定是：它们是SU(2)单态。在U(1)群下，它们的超荷 $Y/2=Q$，即

$$u_R、c_R\text{ 的 }\frac{Y}{2}=Q=\frac{2}{3};\ d_{R\theta}、s_{R\theta}\text{ 的 }\frac{Y}{2}=Q=-\frac{1}{3}。$$

所以，在SU(2)×U(1)群下，它们的变换规律是

$$u_R(c_R)\to\exp\left[-i\frac{2}{3}\theta\right]u_R(c_R);\quad d_{R\theta}(s_{R\theta})\to\exp\left[i\frac{1}{3}\theta\right]d_{R\theta}(s_{R\theta})。$$

与此相应，它们的协变导数是

$$D_\mu=\partial_\mu-ig'\frac{2}{3}B_\mu;\ D_\mu=\partial_\mu+ig'\frac{1}{3}B_\mu。$$

夸克场是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米场。它们的拉格朗日密度具有狄拉克理论的形式，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{qg}&=i\bar{q}_L\not{D}q_L+i\bar{q}'_L\not{D}q'_L+i\bar{u}_R\not{D}u_R\\&\quad+i\bar{d}_{R\theta}\not{D}d_{R\theta}+i\bar{c}_R\not{D}c_R+i\bar{s}_{R\theta}\not{D}s_{R\theta}\\&=i\left|\bar{u}_L\bar{d}_{L\theta}\right|\left(\not{\partial}-i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\not{A}}-i\frac{g'}{6}\not{B}\right)\begin{vmatrix}u_L\\ d_{L\theta}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$+i\left|\bar{c}_L\ \bar{s}_{L\theta}\right|\left(\partial\!\!\!/-i\frac{g}{2}\ \vec{\tau}\cdot\vec{A}\!\!\!/-i\ \frac{g'}{6}\ B\!\!\!/\right)\left|\begin{array}{c}c_L\\ s_{L\theta}\end{array}\right|$$

$$+i\bar{u}_R\left(\partial\!\!\!/-i\ \frac{2}{3}\ g'\ B\!\!\!/\right)u_R+i\bar{d}_{R\theta}\left(\partial\!\!\!/+i\ \frac{1}{3}\ g'\ B\!\!\!/\right)d_{R\theta}$$

$$+i\bar{c}_R\left(\partial\!\!\!/-i\ \frac{2}{3}\ g'\ B\!\!\!/\right)c_R+i\bar{s}_{R\theta}\left(\partial\!\!\!/+i\ \frac{1}{3}\ g'\ B\!\!\!/\right)s_{R\theta}。\quad (2\text{–}63)$$

Higgs 场　在(2–63)式中，没有夸克的质量项。由于夸克的左手场和右手场在 SU(2) ×U(1) 变换下，具有不同的性质，场的平方项破坏规范不变性，所以在(2–63)式中不能有质量项。但是，夸克是有质量的，要使夸克有质量，也可以采用 Higgs 机制。

在上一节中，我们采用 Higgs 场及其幺正规范形式

$$\phi(x)=\left|\begin{array}{c}\phi^+(x)\\ \phi^0(x)\end{array}\right|\rightarrow\left|\begin{array}{c}0\\ v+\eta(x)\end{array}\right|,\qquad (2\text{–}64)$$

使轻子 l 获得质量，而中微子 ν 保持没有质量。l_L 是 $T_3=-\frac{1}{2}$ 的分量，ν_L 是 $T_3=\frac{1}{2}$ 的分量，用(2–64)式只能使 $T_3=-\frac{1}{2}$ 的分量获得质量。这在轻子的情况是足够的。对于夸克，u_L、c_L 是 $T_3=\frac{1}{2}$ 的分量，$d_{L\theta}$、$s_{L\theta}$ 是 $T_3=-\frac{1}{2}$ 的分量，它们 u、d、c、s 都是有质量的，靠(2–64)式只能使 d、s 获得质量，要使 u、c 也获得质量，就还要想点办法。为此，我们由(2–64)式引进 Higgs 的又一种形式，令

$$\phi'(x)=i\tau_2\phi^*(x)=i\tau_2\left|\begin{array}{c}\phi^{+*}\\ \phi^{0*}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}\phi^{0*}\\ -\phi^{+*}\end{array}\right|\rightarrow\left|\begin{array}{c}v+\eta(x)\\ 0\end{array}\right|。\qquad (2\text{–}65)$$

从(2–64)式、(2–65)式的幺正规范形式看来，它们的差别在于真空的取向不同。

所以要如此定义 $\phi'(x)$，是因为它和 $\phi(x)$ 有同样的变换性质。由于 $|\phi^{0*}-\phi^{+*}|$ 的超荷 $\frac{Y}{2}=Q-T_3=(0,-1)-\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，$\phi'(x)$ 的超荷就是 $-\frac{1}{2}$。这和 $\phi(x)$ 的超荷是等量反号的，因而它

们在 U(1) 变换下互逆变换。但是，在 SU(2) 变换下，

$$\phi(x)\to \exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right]\phi(x),$$

$$\phi'(x)=i\tau_2\phi^*(x)\to i\tau_2\exp\left[i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right]^*\phi^*(x)$$

$$=\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right]i\tau_2\phi^*(x)=\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right]\phi'(x),$$

它们却是同样变换的。这种相似的变换特点，在利用它们来和左右夸克场构成汤川耦合时，会给我们带来方便。

夸克质量 显然，在 $SU(2)\times U(1)$ 变换下不变的，由左右夸克和 Higgs 场 $\phi(x)$、$\phi'(x)$ 构成的汤川耦合标量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{q\phi}=&-G_u(\bar{q}_L\phi' u_R+\bar{u}_R\bar{\phi}' q_L)-G_c(\bar{q}'_L\phi' c_R+\bar{c}_R\bar{\phi}' q'_L)\\&-G_{dd}(\bar{q}_L\phi d_{R\theta}+\bar{d}_{R\theta}\bar{\phi}q_L)-G_{ss}(\bar{q}'_L\phi s_{R\theta}+\bar{s}_{R\theta}\bar{\phi}\,q'_L)\\&-G_{ds}(\bar{q}_L\phi s_{R\theta}+\bar{d}_{R\theta}\bar{\phi}q'_L)-G_{sd}(\bar{q}'_L\phi d_{R\theta}+\bar{s}_{R\theta}\bar{\phi}q_L)\\=&-|\bar{q}_L\ \bar{q}'_L|\phi'\begin{vmatrix}G_u&0\\0&G_c\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u_R\\c_R\end{vmatrix}-|\bar{u}_R\bar{c}_R|\begin{vmatrix}G_u&0\\0&G_c\end{vmatrix}\bar{\phi}'\begin{vmatrix}q_L\\q'_L\end{vmatrix}\\&-|\bar{q}_L\ \bar{q}'_L|\phi\begin{vmatrix}G_{dd}&G_{ds}\\G_{sd}&G_{ss}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d_{R\theta}\\s_{R\theta}\end{vmatrix}-|\bar{d}_{R\theta}\ \bar{s}_{R\theta}|\begin{vmatrix}G_{dd}&G_{ds}\\G_{sd}&G_{ss}\end{vmatrix}\bar{\phi}\begin{vmatrix}q_L\\q'_L\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{2-66}$$

注意，q_L、q'_L、ϕ、ϕ' 都是 SU(2) 二重态。取幺正规范，而

$$|\bar{q}_L\bar{q}'_L|\phi\equiv|\bar{q}_L\phi\,\bar{q}'_L\phi|=\left|\ |\bar{u}_L\bar{d}_{L\theta}|\begin{vmatrix}0\\v+\eta\end{vmatrix},\ |\bar{c}_L\ \bar{s}_{L\theta}|\begin{vmatrix}0\\v+\eta\end{vmatrix}\right|$$

$$=(v+\eta)|\bar{d}_{L\theta}\,\bar{s}_{L\theta}|,$$

$$\bar{\phi}\begin{vmatrix}q_L\\q'_L\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix}\bar{\phi}\,q_L\\\bar{\phi}\,q'_L\end{vmatrix}=\left|\begin{vmatrix}0&v+\eta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u_L\\d_{L\theta}\end{vmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{vmatrix}0&v+\eta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_L\\s_{L\theta}\end{vmatrix}\right|$$

$$=(v+\eta)\begin{vmatrix}d_{L\theta}\\s_{L\theta}\end{vmatrix},$$

$$|\bar{q}_L \bar{q}'_L|\phi' \equiv |\bar{q}_L \phi' \quad \bar{q}'_L \phi'| = ||\bar{u}_L \bar{d}_{L\theta}| \begin{vmatrix} v+\eta \\ 0 \end{vmatrix} |\bar{c}_L \bar{s}_{L\theta}| \begin{vmatrix} v+\eta \\ 0 \end{vmatrix}|$$

$$= (v+\eta)\,|\bar{u}_L \; \bar{c}_L|\,,$$

$$\bar{\phi}' \begin{vmatrix} q_L \\ q'_L \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \bar{\phi}' q_L \\ \bar{\phi}' q'_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |v+\eta, 0| \begin{vmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{vmatrix} \\ |v+\eta, 0| \begin{vmatrix} c_L \\ s_{L\theta} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (v+\eta) \begin{vmatrix} u_L \\ c_L \end{vmatrix}.$$

就得

$$\mathscr{L}_{q\phi} = -(v+\eta)\,|\bar{u}_L \; \bar{c}_L| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_R \\ c_R \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{u}_R \bar{c}_R| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_L \\ c_L \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{d}_{L\theta} \bar{s}_{L\theta}| \begin{vmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{R\theta} \\ s_{R\theta} \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{d}_{R\theta} \bar{s}_{R\theta}| \begin{vmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{L\theta} \\ s_{L\theta} \end{vmatrix}$$

$$= -(v+\eta)\,|\bar{u}_L \; \bar{c}_L| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_R \\ c_R \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{u}_R \; \bar{c}_R| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_L \\ c_L \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{d}_L \; \bar{s}_L| \begin{vmatrix} \cos\theta_c & -\sin\theta_c \\ \sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_R \\ s_R \end{vmatrix}$$

$$-(v+\eta)\,|\bar{d}_R \; \bar{s}_R| \begin{vmatrix} \cos\theta_c & -\sin\theta_c \\ \sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_L \\ s_L \end{vmatrix}.$$

再令

$$\begin{vmatrix} G_d & 0 \\ 0 & G_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_c & -\sin\theta_c \\ \sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{vmatrix}, \quad (2\text{–}67)$$

则

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{q\phi} = & -(v+\eta)\,|\bar{u}_L\ \bar{c}_L| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_R \\ c_R \end{vmatrix} \\ & -(v+\eta)\ |\bar{u}_R\ \bar{c}_R| \begin{vmatrix} G_u & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_L \\ c_L \end{vmatrix} \\ & -(v+\eta)\ |\bar{d}_L\ \bar{s}_L| \begin{vmatrix} G_d & 0 \\ 0 & G_d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_R \\ s_R \end{vmatrix} \\ & -(v+\eta)\ |\bar{d}_R\ \bar{s}_R| \begin{vmatrix} G_d & 0 \\ 0 & G_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_L \\ s_L \end{vmatrix} \\ = & -G_u(v+\eta)\bar{u}u - G_c(v+\eta)\bar{c}c \\ & -G_d(v+\eta)\bar{d}d - G_s(v+\eta)\bar{s}s_\circ \end{aligned} \quad (2\text{–}68)$$

这样，我们就使夸克 u、c、d、s 获得了质量

$$m_u = G_u v,\ m_c = G_c v,\ m_d = G_d v,\ m_s = G_s v_\circ \quad (2\text{–}69)$$

从(2–67)式、(2–69)式看来，卡比玻角 θ_c 是使质量矩阵对角化的转角。这再一次指明：卡比玻角是联系夸克弱电作用本征态 d_θ、s_θ 和质量本征态 d、s 的转角。展开(2–67)式可以得到

$$G_{sd} = G_{ds},\ G_{ss} = G_{dd},$$

即在 d_θ、s_θ 表象中的质量矩阵必需是对称矩阵，而且对角元素相等，否则就不能对角化。对角化以后的矩阵元和对角化以前的矩阵元的关系，也由(2–67)式推知为

$$G_d = 2G_{dd} - 2G_{ds}\sin\theta_c\cos\theta_c,$$

$$G_s = 2G_{ss} + 2G_{ds}\sin\theta_c\cos\theta_c\circ$$

夸克的顶角和传播子　在(2–63)式中，有夸克和规范场的相互作用项

$$\mathscr{L}'_{q\theta} = |\bar{u}_L\ \bar{d}_{L\theta}|\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{A}+\frac{g'}{6}B\right)\left|\begin{matrix}u_L\\ d_{L\theta}\end{matrix}\right|$$

$$+\bar{u}_R\frac{2}{3}g'\,B\,u_R-\bar{d}_{R\theta}\frac{g'}{3}B\,d_{R\theta}+(u\to c,\ d\to s)$$

$$=|\bar{u}_L\ \bar{d}_{L\theta}|\frac{\gamma^\mu}{2}\left|\begin{matrix}g\,A^3_\mu+\frac{g'}{3}B_\mu, & g(A^1_\mu-i\,A^2_\mu)\\ g(A^1_\mu+i\,A^2_\mu), & -g\,A^3_\mu+\frac{g'}{3}\,B_\mu\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}u_L\\ d_{L\theta}\end{matrix}\right|$$

$$+\frac{2}{3}g'\,\bar{u}_R\,\gamma^\mu\,u_R\,B_\mu-\frac{g'}{3}\,\bar{d}_{R\theta}\,\gamma^\mu\,d_{R\theta}\,B_\mu+(u\to c,\ d\to s)$$

$$=|\bar{u}_L\ \bar{d}_{L\theta}|\frac{\gamma^\mu}{2}\left|\begin{matrix}\frac{g^2-\frac{g'^2}{3}}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu+\frac{4}{3}\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,A_\mu, & \sqrt{2}\,gW^+_\mu\\ \sqrt{2}\,gW^-_\mu, & -\frac{g^2+\frac{g'^2}{3}}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu-\frac{2}{3}\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,A_\mu\end{matrix}\right|$$

$$\cdot\left|\begin{matrix}u_L\\ d_{L\theta}\end{matrix}\right|+\frac{2}{3}\left(\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,A_\mu-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\right)\bar{u}_R\,\gamma^\mu\,u_R$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu-\frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\right)\bar{d}_{R\theta}\,\gamma^\mu\,d_{R\theta}+(u\to c, d\to s)_\circ$$

$$=\frac{g}{\sqrt{2}}(W^+_\mu\,\bar{u}_L\,\gamma^\mu\,d_{L\theta}+W^-_\mu\,\bar{d}_{L\theta}\,\gamma^\mu u_L)$$

$$+\frac{2}{3}\,e\,A_\mu\,\bar{u}\,\gamma^\mu\,u-\frac{1}{3}\,e\,A_\mu\,\bar{d}\,\gamma^\mu\,d$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\left(\bar{u}_L\,\gamma^\mu\,u_L-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\,\bar{u}\,\gamma^\mu\,u\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\left(\bar{d}_L\,\gamma^\mu d_L-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\,\bar{d}\,\gamma^\mu\,d\right)$$

$$+(u\to c,\ d\to s)$$

$$=\frac{g}{2\sqrt{2}}(W^+_\mu\,\bar{u}\,\gamma^\mu(1+\gamma_5)d_\theta+W^-_\mu\,\bar{d}_\theta\,\gamma^\mu(1+\gamma_5)u)$$

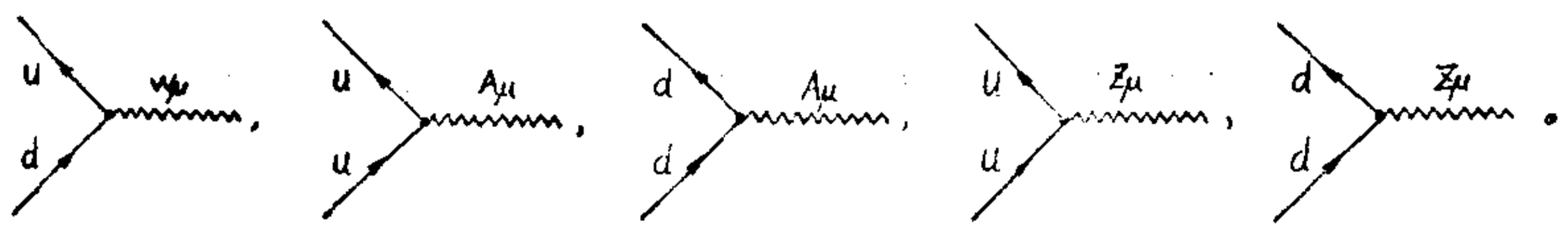
$$+\frac{2}{3}e A_\mu \bar{u}\gamma^\mu u-\frac{1}{3}e A_\mu \bar{d}\gamma^\mu d$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu \bar{u}\gamma^\mu\left(1+\gamma_5-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)u$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu \bar{d}\gamma^\mu\left(1+\gamma_5-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)d$$

$$+(u\to c,\ d\to s)。 \qquad (2\text{-}70)$$

与之相应的顶角为



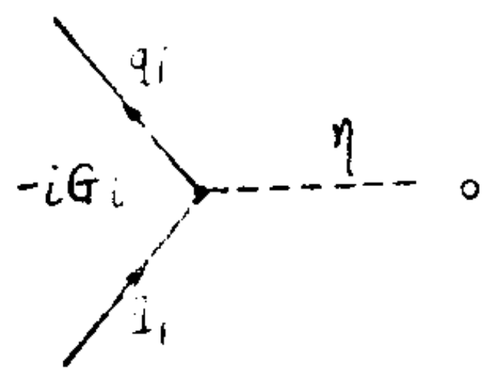
(a) (b) (c) (d) (e)

相应的顶角因子：(a) 是 $\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；(b) 是 $i\frac{2}{3}e\gamma_\mu$；(c) 是 $-i\frac{\theta}{3}\gamma_\mu$；(d) 是 $\frac{i}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\,\gamma_\mu\left(1+\gamma_5-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)$；(e) 是 $\frac{-i}{4}\sqrt{g^2+g'^2}\,\gamma_\mu\left(1+\gamma_5-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)$。还有 $u\to c$、$d\to s$ 的相应顶角及其因子。

在(2-68)式中，有夸克和 Higgs 场作用项

$$\mathscr{L}^i_{q\phi}=-G_i\eta\,\bar{q}_i q_i; \qquad i=u,\ d,\ c,\ s。 \qquad (2\text{-}71)$$

相应的顶角和因子是



在(2-63)式、(2-68)式中，还有夸克场的动能项和质量项

$$\mathscr{L}^0_q=\bar{q}_i(i\partial\!\!\!/-m_i)q_i, \qquad i=u,d,c,s。 \qquad (2\text{-}72)$$

它们决定着夸克的传播子

$$\xrightarrow[q_i]{p}, \qquad \frac{i}{\not{p}-m_i}。$$

总起来说，(2–70)式、(2–71)式、(2–72)式和(2–59)式、(2–60)式、(2–61)式、(2–62)式一起，以及相应的图形和因子，构成了夸克和轻子的 GWS 弱电统一规范理论。利用它们可以计算各种弱电过程。

六夸克模型和广义卡比玻角　但是，上述理论只适用于六个轻子和四夸克的情况。现在人们认为：夸克和轻子有着对应关系，有六个轻子，也有六个夸克。因此，要求把上述理论推广。为此，人们进行了许多工作。其中，在上述理论框架中，把六个夸克包括进来，是比较简便的。

首先假定：夸克 u、c、t 既是质量本征态，也是相互作用本征态；夸克 d、s、b 是质量本征态，但不是弱电相互作用的本征态；弱电相互作用的本征态是 $d_{\theta'}$、$s_{\theta'}$、$b_{\theta'}$，是 d、s、b 的线性组合，即

$$\begin{vmatrix} d_{\theta'} \\ s_{\theta'} \\ b_{\theta'} \end{vmatrix} = A(\theta') \begin{vmatrix} d \\ s \\ b \end{vmatrix},$$

$A(\theta')$是 3×3 幺正矩阵。$n\times n$ 幺正矩阵有 n^2 个独立的矩阵元实参数。其中，可以用 $\frac{1}{2}n(n-1)$个 $\theta_i\left(i=1, 2, \cdots, \frac{1}{2}n(n-1)\right)$ 角的正弦、余弦 $s_i=\sin\theta_i$、$c_i=\cos\theta_i$ 来表示。$2n$ 个左手态和右手态，可以吸收 $2n-1$ 个相对相因子。所以，n^2 个实数还剩下 $n^2-(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$个，可以以任意相因子 $\delta_j\left(j=1, 2, \cdots, \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\right)$ 的形式出现在幺正矩阵中。θ_i 叫做广义卡比玻角。在 $n=2$ 时，$\frac{1}{2}\cdot2(2-1)=1$，有一个卡比玻角 θ；$\frac{1}{2}(2-1)(2-2)=0$，没有任意相因子，这就是前面论述的四夸

克的情况。在六夸克的情况下，$n=3$，$\frac{1}{2}\cdot 3(3-1)=3$，有三个卡比玻角 $\theta_i(i=1,\ 2,\ 3)$；$\frac{1}{2}(3-1)(3-2)=1$，有一个任意的相因子 δ，这时 $A(\theta_i,\ \delta)$ 可以表示为*

$$A(\theta_i,\ \delta)=\begin{vmatrix} c_1 & -s_1c_2 & -s_1s_2 \\ s_1c_3 & c_1c_2c_3+s_2s_3e^{-i\delta} & c_1s_2c_3-c_2s_3e^{-i\delta} \\ s_1s_3 & c_1c_2s_3-s_2c_3e^{-i\delta} & c_1s_2s_3+c_2c_3e^{-i\delta} \end{vmatrix}$$

$c_i=\cos\theta_i$，$s_i=\sin\theta_i$ 和 δ 要由实验确定，δ 表示着 cp 偏离的情况。

把六个夸克 u、$d_{\theta'}$、c、$s_{\theta'}$、t、$b_{\theta'}$ 组成 SU(2) 的三个左手二重态

$$q_{1L}=\begin{vmatrix} u_L \\ d_{\theta' L} \end{vmatrix},\quad q_{2L}=\begin{vmatrix} c_L \\ s_{\theta' L} \end{vmatrix},\quad q_{3L}=\begin{vmatrix} t_L \\ b_{\theta' L} \end{vmatrix};$$

和六个右手单态

$$u_R,\ d_{\theta' R},\ c_R,\ s_{\theta' R},\ t_R,\ b_{\theta' R}。$$

它们在 U(1) 群下，

$$q_{iL}\text{的}\ \frac{Y}{2}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{6},$$

$$u_R、c_R、t_R\text{的}\ \frac{Y}{2}=\frac{2}{3},$$

$$d_{\theta' R}、s_{\theta' R}、t_{\theta' R}\text{的}\ \frac{Y}{2}=-\frac{1}{3}。$$

这就决定了它们在 $SU(2)\times U(1)$ 群下的变换性质，决定了它们的协变导数的形式。这和四夸克时的一样。因此，把 (2-70)式、(2-71)式、(2-72)式及其相应的图形和因子，推广到包括夸克 t、b，就得到六夸克的 GWS 弱电统一规范理论。

---

* P. Langackew, "Grand unified theories and proton decay", phys. Rep. Vol. 72, No. 4, 1981, 7. p. 227.

§4. 轻子弱过程

现在，我们根据 GWS 弱电统一规范理论，应用微扰方法，来计算轻子弱过程，看一看 WGS 理论有些什么特点。过程的微分截面和衰变几率分别是*

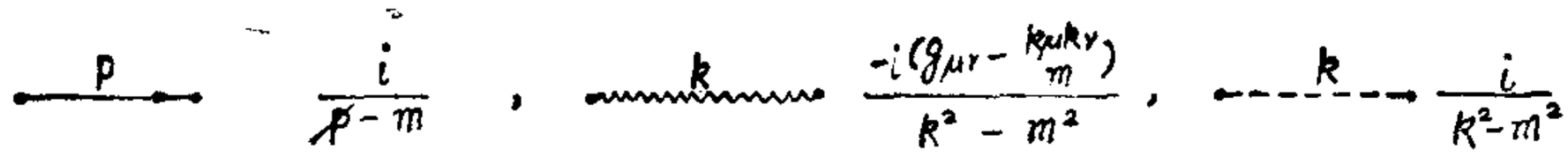
$$d\sigma=(2\pi)^4\delta^4\Big(p_1+p_2-\sum_{i=1}^{n}p_i'\Big)\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{m_1}{E_1}\cdot\frac{m_2}{E_2}\cdot|M|^2$$
$$\cdot\frac{m_1'd^3p_1'}{E_1'(2\pi)^3}\cdot\frac{m_2'd^3p_2'}{E_2'(2\pi)^3}\cdots\cdots\frac{m_n'd^3p_n'}{E_n'(2\pi)^3},$$
$$d\Gamma=d\Big(\frac{1}{\tau}\Big)=(2\pi)^4\delta^4\Big(p-\sum_{i=1}^{n}p_i'\Big)\frac{1}{l!}\ |M|^2$$
$$\cdot\frac{m_1'd^3p_1'}{E_1'(2\pi)^3}\cdot\frac{m_2'd^3p_2'}{E_2'(2\pi)^3}\cdots\cdots\frac{m_n'd^3p_n'}{E_n'(2\pi)^3}。$$

l 是末态中全同粒子的数目。v 是初态粒子的相对速度。M 是不变振幅。在微扰理论中，它根据费曼规则，按照费曼图，由相应因子构成。上式中的外线是费米子，如果外线是玻色子，就要用 $\frac{1}{2E}$ 代替式中的 $\frac{m}{E}$，而且 $d\Gamma$ 中要加一因子 $\frac{1}{E}$。

费曼规则 在不变振幅 M 中，外线因子为



$\bar{u}$、$\bar{v}$、u、v 是旋量波函数，ϵ_μ 是规范粒子的极化矢量。内线因子，即传播子为



* 参看 J. D. Bjorken, S. D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics 的附录 B。

和轻子弱过程有关的拉格朗日密度有

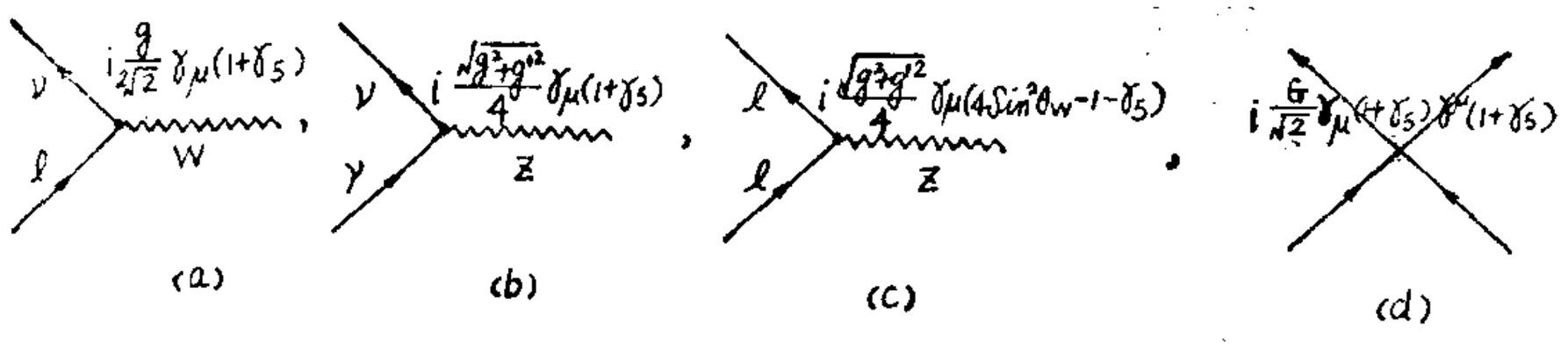
$$\mathscr{L}_w=\frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)l+W_\mu^-\bar{l}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu),$$

$$\mathscr{L}_z=\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}Z_\mu(\bar{\nu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\nu+\bar{l}\gamma^\mu(4\sin^2\theta_W-1-\gamma_5)l),$$

$$-\mathscr{L}_F=\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{l}_1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_1\bar{\nu}_2\gamma^\mu(1+\gamma_5)l_2,$$

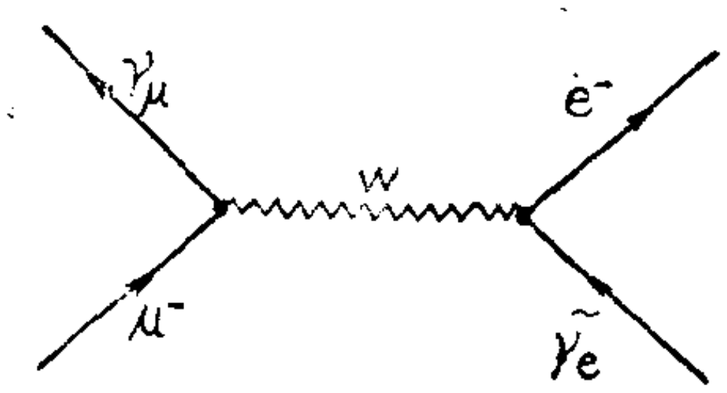
$$l=e,\ \mu,\ \tau;\ \nu=\nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau。 \tag{2-73}$$

与之相应的顶角为



根据这些图形、因子，按照费曼规则，就可以写出相应过程的不变振幅 M。这里，为了便于比较，我们也列出了四费米相互作用顶角 (d)。

例一　　$\mu^-\to e^-+\tilde{\nu}_e+\nu_\mu$



从 GWS 理论来看，在低阶，只有 W 介子以顶角 (a) 的方式对这过程作出贡献，而 Z 介子无贡献。左图是它的费曼图。按照费曼规则写出与之相应的不变振幅是

$$M_W=\bar{u}_e\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)v_{\nu_e}\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\dfrac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right)}{k^2-m_W^2}\bar{u}_{\nu_\mu}$$
$$\cdot\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\nu(1+\gamma_5)u_\mu,$$

$$k=p_\mu-p_{\nu_\mu}=p_e+p_{\nu_e}。$$

由于

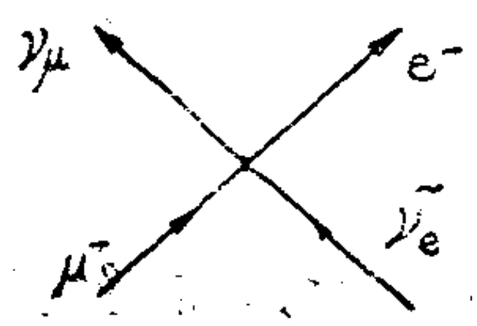
$$\bar{u}_e k(1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} k(1+\gamma_5) u_\mu$$
$$= \bar{u}_e (p_e + p_{\nu_e})(1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} (p_\mu - p_{\nu_\mu})(1+\gamma_5) u_\mu$$
$$= m_e m_\mu \bar{u}_e (1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} (1-\gamma_5) u_\mu,$$

所以
$$M_W = \frac{ig^2}{8} \frac{1}{k^2 - m_W^2} \left(\bar{u}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1+\gamma_5) u_\mu \right.$$
$$\left. - \frac{m_e m_\mu}{m_W^2} \bar{u}_e (1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} (1-\gamma_5) u_\mu \right)。$$

因为 m_e、$m_\mu \ll m_W$，第二项可以略去不计。而衰变过程是低能过程，$k^2 \ll m_W^2$，$k^2 - m_W^2 \simeq -m_W^2$。所以上式成为

$$M_W = \frac{-ig^2}{8 m_W^2} \bar{u}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1+\gamma_5) u_\mu。$$

从四费米点相互作用的观点来看，这个过程的最低阶是一阶的。右图是它的费曼图。按照费曼规则写出它的不变振幅



$$M_F = -i \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) v_{\nu_e} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1+\gamma_5) u_\mu。$$

把它和 M_W 式比较得

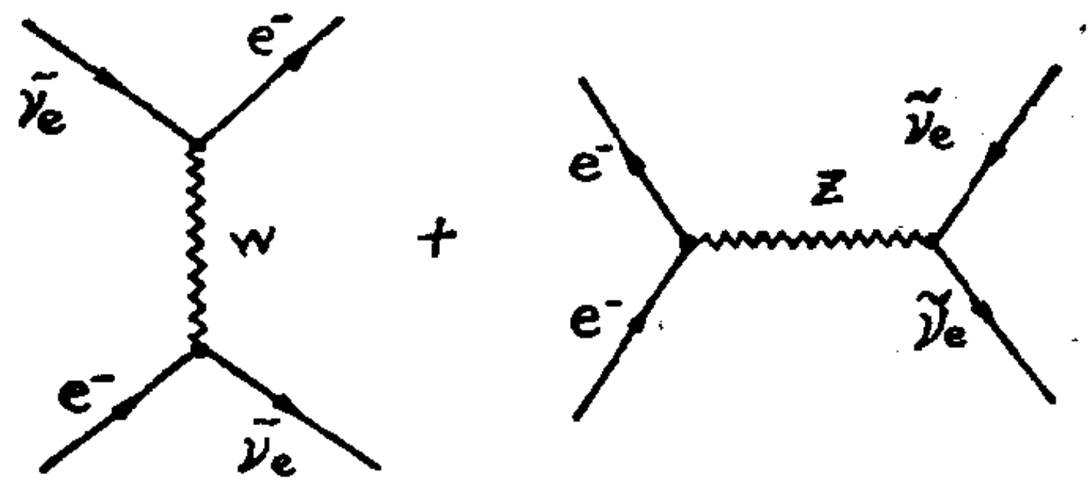
$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2}, \tag{2-74}$$

正是我们在上一节说到的结果。也正是由于这个关系，人们早就推测：中间玻色子有很大的质量。因为 $G \simeq 1.01 \times 10^{-5}/m_p^2$，$g^2 \sim e^2 = \frac{4\pi}{137}$。所以 $m_W^2 \sim 10^2 m_p^2$。

例二
$$\tilde{\nu}_e + e^- \to \tilde{\nu}_e + e^-$$

如果说例一把 GWS 理论和费曼 V-A 理论联系起来，那么例二就把它们区分开来。由这两个理论来论述这一过程，所得结论是不同的，可以由实验来检验比较。

从 GWS 理论来看，决定着这过程的最低阶的费曼图有两个，如下图所示。一个是湮灭为 W 介子，然后再产生；一个是通过交换 Z 介子而散射。相应的不变振幅是



$$M = M_w + M_z,$$

$$M_W = \bar{u}'_e \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1+\gamma_5) v'_{\nu_e} \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right)}{k^2 - m_W^2} \bar{v}_{\nu_e}$$

$$\cdot \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1+\gamma_5) u_e,$$

$$k = p_e + p_\nu = p'_e + p'_\nu,$$

$$M_Z = \bar{v}_\nu \frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4} \gamma_\mu (1+\gamma_5) v'_\nu \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{k'^\mu k'^\nu}{m_Z^2}\right)}{k'^2 - m_Z^2} \bar{u}'_e$$

$$\cdot \frac{i\sqrt{g+g'^2}}{4} \gamma_\nu (4\sin^2\theta_w - 1 - \gamma_5) u_e,$$

$$k' = p_e - p'_e = p'_\nu - p_\nu \circ$$

根据例一的讨论方法和结果：因为 $m_e^2 \ll m_Z^2 \sim m_W^2$，每一式中的第二项可以略去不计；在低能情况下，$k^2 \ll m_W^2$，$k^{2\prime} \ll m_Z^2$，$k^2 - m_W^2 \to -m_W^2$，$k'^2 - m_Z^2 \to -m_Z^2$。所以

$$M_W = -\frac{ig^2}{8m_W^2} \bar{u}'_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) v'_{\nu_e} \cdot \bar{v}_{\nu_e} \gamma^\mu (1+\gamma_5) u_e,$$

$$M_Z = -i\frac{g^2+g'^2}{8m_Z^2} \bar{v}_\nu \gamma_\mu (1+\gamma_5) v'_\nu \cdot \bar{u}'_e \gamma^\mu \left(2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right) u_e \circ$$

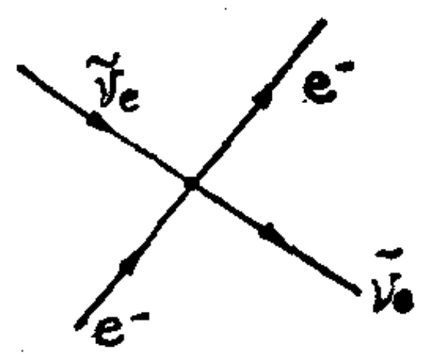
根据(2-74)式和

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W} = \frac{m_W\sqrt{g^2+g'^2}}{g}, \quad \frac{g^2+g'^2}{8m_Z^2} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}, \quad (2\text{-}75)$$

得 $$M_W=-i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}'_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu\bar{v}_\nu\gamma^\mu(1+\gamma_5)u_e,$$

$$M_Z=-i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{v}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu\cdot\bar{u}_e\gamma^\mu\left(2\sin^2\theta_W-\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)u_e。$$

从四费米点相互作用的观点来看，这过程只有如右图所示的一个费曼图。与之相应的不变振幅为



$$M_1=-i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}'_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu\bar{v}_\nu\gamma^\mu(1+\gamma_5)u_e=M_W。$$

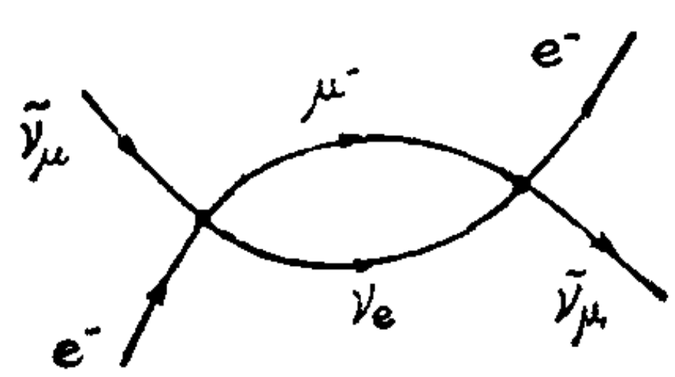
和 GWS 理论比较，少了 M_Z。这就体现了两种理论的差别。

根据菲尔兹换位规则，或者从上图推测 $\bar{u}'_e$ 和 $\bar{v}_\nu$ 的位置互换不引起符号的变化，因而可以推知 GWS 所得的结果为

$$M=M_W+M_Z=-i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}'_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu\bar{v}_\nu\gamma^\mu\cdot\left(2\sin^2\theta_W+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right)u_e。$$

进一步由它算出截面，和实验比较，就可定出 θ_W。

例三 $$e^-+\tilde{\nu}_\mu\to e^-+\tilde{\nu}_\mu$$

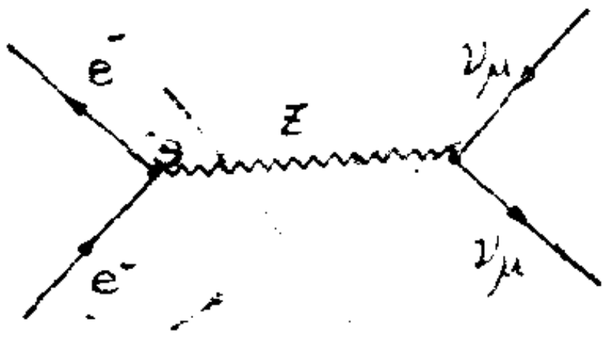


四费米点相互作用是流流相互作用，而每一弱流都由轻子对$(e^-、\nu_e)$或$(\mu^-、\nu_\mu)$构成。不存在$(e^-、\nu_\mu)$构成的弱流。所以，这一过程的最低阶，不是一阶的，而是如左图所示二阶的。相应的不变振幅是

$$M_F=\bar{u}'_e\frac{-iG}{\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{\not k}\gamma_\nu(1+\gamma_5)u_e$$

$$\cdot\bar{v}_{\nu_\mu}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\frac{i}{(\not p'_e-\not p_\nu-\not k)-m_\mu}\frac{-iG}{\sqrt{2}}\gamma^\nu(1+\gamma_5)v'_{\nu_\mu},$$

它是发散的。由于该理论是不可重整化的，因而这表示式是没有意义的。换句话说，费米 V–A 理论不能用于这一过程。退一步讲，丢开它的发散不管，把它看成是有限的。那么，$M_F \sim G^2$，$\sigma \sim G^4$，几率也是很小的。所以，我们说，从费米 V–A 理论看来，这过程是禁戒的。



从 GWS 理论来看，这过程在最低阶以交换 Z 介子发生。上图是它的费曼图。相应的不变振幅是

$$M = \bar{v}_\nu \frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu \frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}\bar{u}'_e \cdot \frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\gamma_\nu(4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma_5)u_e。$$

由于 $m_e \ll m_Z$，传播子分子上的第二项可略去不计。在低能的情况下，$k^2 \ll m_Z^2$，$k^2 - m_Z^2 \to -m_Z^2$。上式就成为

$$M = -i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{v}_\nu\gamma_\mu(1+\gamma_5)v'_\nu \cdot \bar{v}'_e\gamma^\mu\left(2\sin^2\theta_W - \frac{1+\gamma_5}{2}\right)u_e。$$

用它进一步算出截面，和实验比较，就可定出 $\sin\theta_W$。

综上所述，三个例子给我们以启示：例一把 GWS 理论和费米理论联系起来，给出

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{g^2+g'^2}{8m_Z^2}; \tag{2-76}$$

例二把两种理论区分开来，给出测定 $\sin\theta_W$ 的机会，但是两种理论都能给出同样量级的结果，测定 $\sin\theta_W$ 来鉴定两种理论就受到仪器精度的限制；例三断然排除了费米理论的可能性，对它的测定，既可以确定费米理论是否应该修正，又可以较好地确定 $\sin\theta_W$。如第二节末指出，现在的实验值是

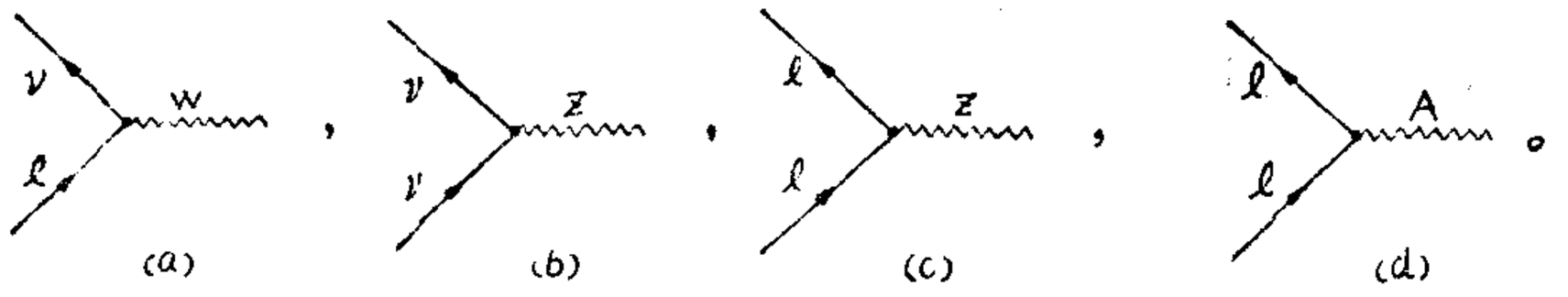
$$\sin^2\theta_W \approx 0.22 - 0.24。$$

§5. 强子弱过程

中微子 ν，只参与弱作用。轻子 $l(e、\mu、\tau)$，参与电磁作用和弱作用。所以，它们在各种过程中的表现，用 GWS 理论可以精确计算出来(至少，原则上是如此)。强子则不同，它们既参与弱电作用，又参与强作用。即使在弱电过程中，它们也受到强作用的影响。在强作用理论还没有完善的今天，要精确计算它们，是不可能的。所以，上一节用来计算轻子过程的费曼规则，不能原样地用来计算强子过程。为此，需要新的理论方法。

相互作用流 在第一节中论述的、唯象的弱作用理论(2-13)式是流流相互作用的形式。电磁相互作用也以流(2-34)式的形式出现。

在上一节论述的费曼规则中，弱电作用顶角(2-73)式为

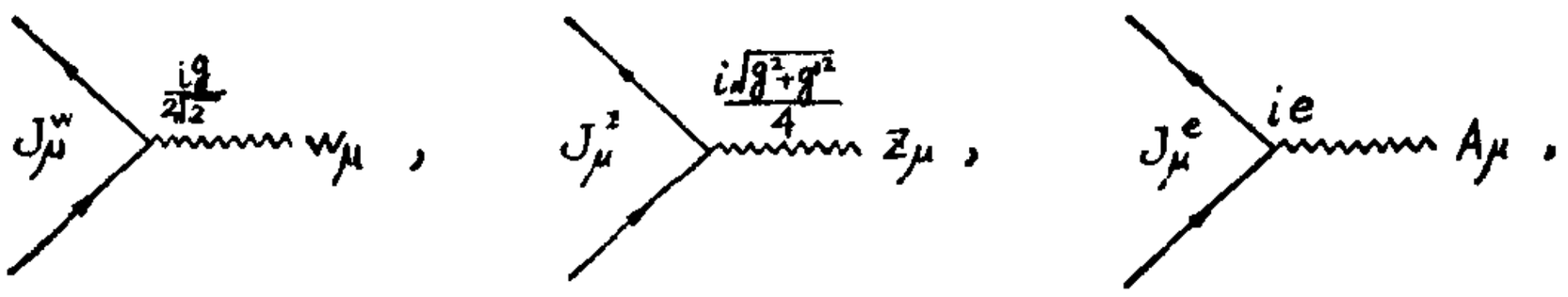


(a) (b) (c) (d)

我们把费米子外线的贡献记作 $\bar{u}、v、u、\bar{v}$；把顶角的贡献写成：(a) 是 $\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；$(b)$ 是 $i\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；$(c)$ 是 $i\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\gamma_\mu(4\sin^2\theta_W-1-\gamma_5)$，$(d)$ 是 $-ie\gamma_\mu$。至于表示夸克弱电作用的(2-70)式也有类似的情况。

从流作用的观点来看，上述的费曼规则，可以改写成另一种形式。把两根外线合写成作用流，顶角部分只保留常数因子，γ 矩阵因子写入流中。(a)的作用流是 $J_\mu^W=\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l$，是与 W 介子耦合的荷电流；顶角因子是 $\frac{ig}{2\sqrt{2}}$。(b)的作用流是 $J_\mu^z=\bar{\nu}\gamma_\mu(1+$

$\gamma_5)\nu$, 是与 Z 介子耦合的中性流; 顶角因子是 $i\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}$。(c) 的作用流是 $J_\mu^z=\bar{l}\gamma_\mu(4\sin^2\theta_w-1-\gamma_5)l$, 也是与 Z 介子耦合的中性流; 顶角因子也是 $i\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}$。(d) 的作用流是 $J_\mu^e=-\bar{l}\gamma_\mu l$, 是电磁流; 顶角因子是 ie。用(2-70)式描写的夸克弱电作用的费曼规则, 也可以作类似的改写。仔细分析一下, 众多的轻子流、夸克流及其顶角, 可以归纳成三种, 可以用统一的公式和图形表示出来。它们是



$$J_\mu^W=\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T^+N,\ J_\mu^Z=\bar{N}\gamma_\mu[2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W]N,\ J_\mu^e=Q\bar{N}\gamma_\mu N。\qquad(2\text{-}77)$$

N、$\bar{N}$ 是外线粒子的旋量、同位旋量波函数。$T^+=T_1+iT_2$ 和 T_3 是它的同位旋算符。Q 是它的电荷算符。用这种费曼规则来讨论问题, 在轻子的情况下, 和上一节论述的是等价的。但是, 它也适用于强子, 在不能采用上一节的方法的情况下, 也可以用它来进行研究。在核子的情况下, 略去卡比玻角因子, 有

$$N=\begin{vmatrix}p\\n\end{vmatrix},\ T^+=\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix},\ T_3=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix},\ Q=\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}。$$

同位旋算符 同位旋算符 T_1、T_2、T_3 是满足对易关系

$$[T_i,\ T_j]=i\varepsilon_{ijk}T_k,\ i、j、k=1,\ 2,\ 3\qquad(2\text{-}78)$$

的算符。ε_{ijk} 是三维反对称张量, 且 $\varepsilon_{123}=1$。由它定义

$$T_+=T_1+iT_2,\ T_-=T_1-iT_2,$$

满足对易关系

$$[T_+, T_-] = 2T_3。 \tag{2-79}$$

它们对本征值为 I、I_3 的本征态 $|I, I_3\rangle$ 的作用为

$$T^2|I, I_3\rangle = I(I+1)|I, I_3\rangle,\ T_3|I, I_3\rangle = I_3|I, I_3\rangle,$$

$$T_+|I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3+1)}\,|I, I_3+1\rangle,$$

$$T_-|I_1\ I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3-1)}\,|I, I_3-1\rangle。 \tag{2-80}$$

这是同位旋算符的数学公式，对任何物理意义下的同位旋都是如此。强作用理论中的同位旋如此，弱作用理论中的同位旋也如此。尽管在不同的物理条件下，同位旋态有不同的物理意义。

下面，我们用 T_1、T_2、T_3 表示作用于旋量、同位旋量波函数 N 的同位旋算符。

我们按照正则量子化方法，把波函数 $N_\alpha(x)$（$\alpha=1, 2$ 表示同位旋分量，未标出自旋旋量分量）量子化，即令

$$\{N_\alpha^+(\vec{x}, t), N_\beta(\vec{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

$$\{N_\alpha(\vec{x}, t),\ N_\beta(\vec{x}'\, t)\} = 0,$$

$$\{N_\alpha^+(\vec{x}, t), N_\beta^+(\vec{x}', t)\} = 0。 \tag{2-81}$$

再引进新的同位旋算符 $\hat{T}_i(i=1, 2, 3)$

$$\hat{T}_i = \int d^3x N^+(x) T_i\, N(x)。$$

可以证明，它们满足(2-78)式的对易关系。

$$[\hat{T}_i\hat{T}_j] = \int d^3x\, d^3x' [N_\alpha^+(x)T^i_{\alpha\beta}N_\beta(x),\ N_\gamma^+(x')T^j_{\gamma\delta}\,N_\delta(x')]$$

$$= T^i_{\alpha\beta}\,T^j_{\gamma\delta}\int d^3x\, d^3x' [N_\alpha^+(x)N_\beta(x)N_\gamma^+(x')N_\delta(x')$$

$$- N_\gamma^+(x')N_\delta(x')N_\alpha^+(x)N_\beta(x)$$

$$+ N_\alpha^+(x)\ N_\gamma^+(x')N_\beta(x)N_\delta(x')$$

$$- N_\alpha^+(x)N_\gamma^+(x')N_\beta(x)N_\delta(x')]$$

$$= T^i_{\alpha\beta}\,T^j_{\gamma\delta}\int d^3x\, d^3x' [N_\alpha^+(x)(\delta_{\beta\gamma}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'))N_\delta(x')$$

$$- N_\gamma^+(x')(\delta_{\alpha\delta}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'))N_\beta(x)]$$

$$= \int d^3x [N^+_\alpha(x) T^i_{\alpha\beta} T^j_{\beta\delta} N_\delta(x) - N^+_\gamma(x) T^j_{\gamma\alpha} T^i_{\alpha\beta} N_\beta(x)]$$

$$= \int d^3x\, N^+(x) [T^i,\ T^j] N(x)$$

$$= \int d^3x\, N^+(x)\, i\, \varepsilon_{ijk} T_k N(x) = i\, \varepsilon_{ijk} \hat{T}_k \circ$$

$N(x)$相对于 T^i 来说是波函数，相对于 $\hat{T}^i$ 来说却是算符，是二次量子化的算符。$N(x)$和 $\hat{T}_i$ 都是算符，满足对易关系

$$[\hat{T}_i,\ N(x)] = -T_i N(x) \circ \tag{2-82}$$

作为练习，读者自己证明这个关系。由这个关系，或者由象(2-79)一样的关系 $[\hat{T}^+,\ \hat{T}^-] = 2\hat{T}^3$，还可以证明

$$\begin{aligned} &[\hat{T}_+,\ \bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_- N] = 2\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_3 N, \\ &[\hat{T}_-,\ \bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_+ N] = -2\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_3 N \circ \end{aligned} \tag{2-83}$$

在二次量子化表象中，N 不是波函数而是算符。核子的态矢为

$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle,\quad |n\rangle = \left|\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle \circ$$

在算符 $\hat{T}_+$、$\hat{T}_-$ 的作用下，有如(2-80)式的关系，即

$$\hat{T}_+|p\rangle = 0,\ \hat{T}_-|p\rangle = |n\rangle,\ \hat{T}_+|n\rangle = |p\rangle,\ \hat{T}_-|n\rangle = 0 \circ \tag{2-84}$$

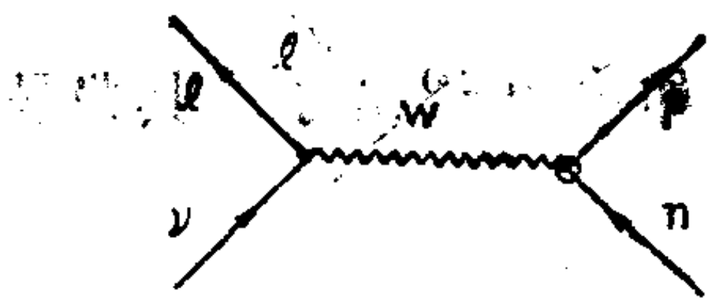
T_+、T_- 对二次量子化的态矢是没有关系的，对 N 却还保持原样的关系，如

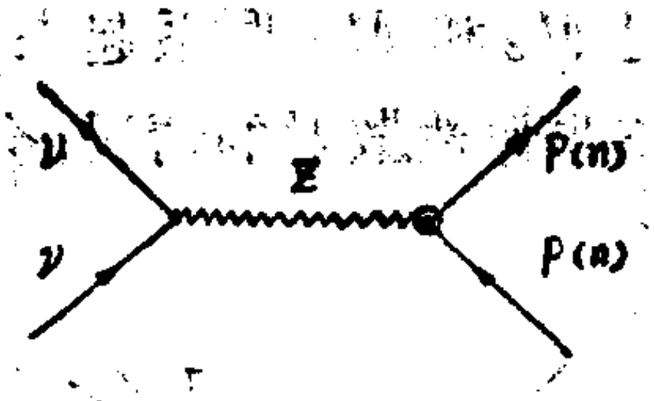
$$\bar{N}\, T_+\, N = |\bar{p}\ \bar{n}| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ n \end{vmatrix} = \bar{p}\, n \circ \tag{2-85}$$

这里的 p、n 既是质子、中子的二次量子化的算符，又含有量子化前的旋量波函数的成分。

ν, N 散射　用中微子 ν 轰击核子，是典型的强子弱过程。它们可以以交换 W 介子或交换 Z 介子两种方式发生。既可以是弹性的，也可以是非弹性的。

在弹性散射的情况，费曼图是





不变振幅是

$$M_W=\bar{u}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\frac{ig}{2\sqrt{2}}\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}\right)}{k^2-m_W^2}$$

$$\cdot\frac{ig}{2\sqrt{2}}\langle p|\bar{N}\gamma_\nu(1+\gamma_5)T_+N|n\rangle$$

$$=\frac{ig^2}{8}\frac{\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right)}{k^2-m_W^2}\bar{u}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\langle p|\bar{p}\gamma_\nu(1+\gamma_5)n|n\rangle,$$

$$k=p_\nu-p_l=p_p-p_n。$$

$$M_Z=\bar{u}_{\nu'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}$$

$$\cdot\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\langle p|\bar{N}\gamma_\nu(2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W)N|p\rangle$$

$$=\frac{i(g^2+g'^2)}{16}\frac{\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}\bar{u}_{\nu'}\cdot\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu$$

$$\cdot\langle p|\bar{N}\gamma_\nu(2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W)N|p\rangle,$$

$$k=p_\nu-p'_{\nu'}=p'_p-p_p。$$

式中出现三个作用流的矩阵元，都是无法精确计算的。

$$\sin^2\theta_W\langle p|\bar{N}\gamma_\mu Q N|p\rangle$$

是电磁流矩阵元，要由质子的电磁形状因子来确定。

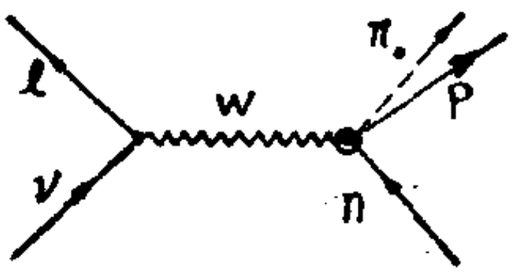
按照(2-83)式、(2-84)式、(2-85)式，有

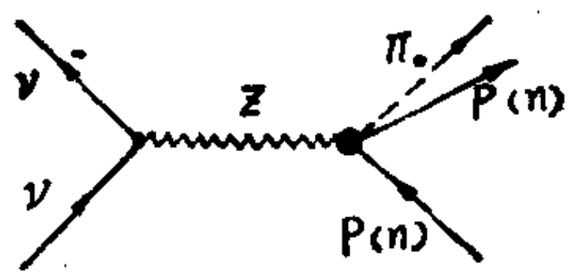
$$\langle p|\bar{N}\gamma_\mu 2T_3(1+\gamma_5)N|p\rangle=-\langle p|[\hat{T}_-,\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_+N]|p\rangle$$

$$=-\langle p|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|n\rangle。$$

这就把 M_Z 和 M_W 联系起来了。

在非弹性散射的情况，会出现介子，如单个 π^0 介子。其费曼图是





相应的不变振幅是

$$M_W=\bar{u}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\frac{ig}{2\sqrt{2}}\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}\right)}{k^2-m_W^2}$$

$$\cdot\frac{ig}{2\sqrt{2}}\langle p\pi^0|\bar{N}\gamma_\nu(1+\gamma_5)T_+N|n\rangle$$

$$=\frac{ig^2}{8}\frac{\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}\bar{u}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\langle p\pi^0|\bar{p}\gamma_\nu(1+\gamma_5)n|n\rangle,$$

$$k=p_\nu-p_l=p_p+p_\pi-p_n。$$

$$M_Z=\bar{u}_{\nu'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\frac{-i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}$$

$$\cdot\frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\langle p\pi^0|\bar{N}\gamma_\nu(2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W)N|p\rangle$$

$$=\frac{i(g^2+g'^2)}{8}\frac{\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2}\right)}{k^2-m_Z^2}\bar{u}_{\nu'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\nu$$

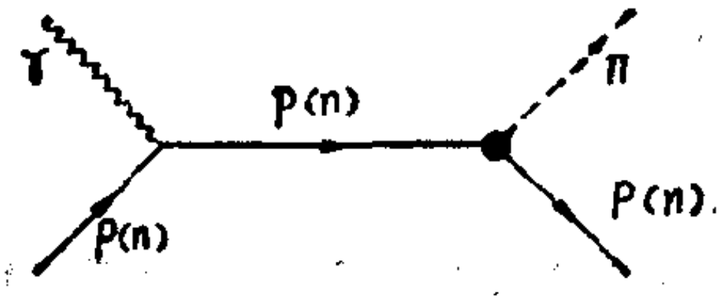
$$\cdot\langle p\pi^0|\bar{N}\gamma_\nu(2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W)N|p\rangle,$$

$$k=p_\nu-p_{\nu'}=p'_p+p_{\pi^0}-p_p。$$

式中三个作用流的矩阵元也是不能精确算出的。但是，

$$\langle p\pi^0|\bar{N}\gamma_\mu Q N|p\rangle\sim\langle\pi^0|\bar{N}\gamma_\mu Q N|0\rangle$$

是电磁流矩阵元，和 π^0 介子的电磁结构有关，且与过程



相联系。而

$$\begin{aligned}
&\langle p\pi^0|\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)2T_3N|p\rangle\\
&=-\langle p\pi^0|[\hat{T}_-,\ \bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_+N]|p\rangle\\
&=-\sqrt{2}\langle\pi^+p|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|p\rangle+\langle p\pi^0|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|n\rangle,\\
&\langle n\pi^0|\bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)2T_3N|n\rangle\\
&=-\langle n\pi^0|[\hat{T}_-,\ \bar{N}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T_+N]|n\rangle\\
&=-\langle p\pi^0|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|n\rangle-\sqrt{2}\langle n\pi^+|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|n\rangle。
\end{aligned}$$

这把 M_Z 和 M_W 联系起来。且

$$\begin{aligned}
\langle p\pi^+|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|p\rangle&\sim\langle n\pi^+|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)n|n\rangle\\
&\sim\langle\pi^+|\bar{p}\gamma_\mu(1+\gamma_5)|0\rangle,
\end{aligned}$$

与 π^+ 介子的电磁形状因子有关。

从以上的论述可知：强子的弱电过程，由于强作用的影响，不能精确计算。但是，使用上述的方法，可以得到诸过程之间的联系，因而也可以得到一些和实验可以比较的结果。

第三章　生成泛函的路径积分表示

第一、二两章的论述，基本上是在经典理论的框架内进行的。费曼规则，是根据量子场论的一般知识直接给出的，没有体现规范不变的特点，也没有予以证明。利用费曼规则来计算过程，也只限于写出最低阶近似的不变振幅，而没有涉及高阶近似，没有讨论发散问题。理论有待深入，有待量子化和重整化。规范场论，不限于GWS 弱电统一模型，还有量子色动力学 (QCD) 和大统一理论 (GUT)。它们已经得到人们的认可，也正被人们广泛深入地研究着。规范场的量子化和重整化，是两个基本的、重要的课题，我们要进行比较深入的讨论。

一般量子理论中采用的量子化方法，是正则量子化方法。规范场的量子化，通常用路径积分量子化方法来进行。在本书中，我们用路径积分来讨论规范场的量子化和重整化。为此，要先介绍泛函路径积分。鉴于路径积分方法已经成为一个有力的理论工具，而许多读者又不熟悉这一方法，所以，我们的论述就要比较广泛、深入一些。

生成泛函指格林函数的生成泛函、正规顶角的生成泛函和超势。格林函数、正规顶角和 S 矩阵元有紧密的联系。描写初态和终态共有 n 个粒子的过程的 S 矩阵元 s_n 为

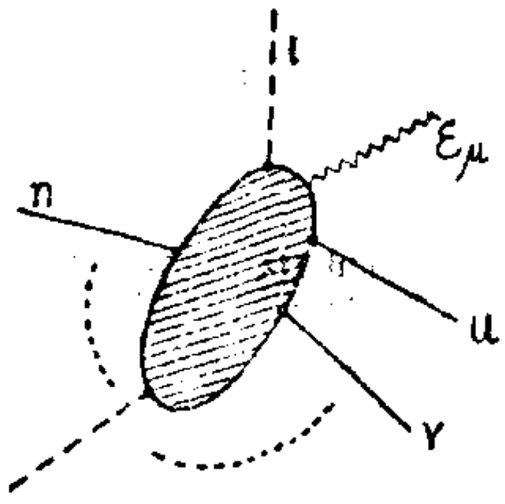
$$s_n=\langle 0|\,b_{m+1}\cdots b_n S\,a_1^+a_2^+\cdots a_m^+\,|0\rangle。\qquad (3\text{–}1)$$

a_i^+ 是初态粒子的产生算符，b_j 是终态粒子的消灭算符，

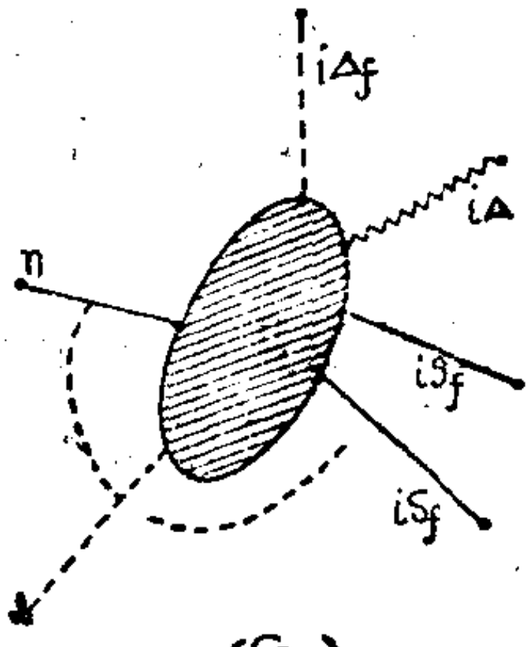
$$S=T\exp\Big[-i\int d^4x\mathscr{H}_i(x)\Big]$$

由系统的相互作用哈密顿密度 $\mathscr{H}_i(x)$ 确定，T 是编时算符。(3–1)

式中的 n 个产生、消灭算符和 S 中的相应算符收缩，就给出费曼图中 n 条外线的因子，如：1，ε_μ，u，v，如(S_n)图所示。由 n 个场量 $\phi_1(x_1)$，$\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)$ 定义的 n 点格林函数 G_n 为



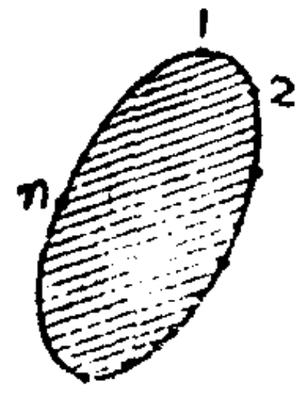
(S_n)



(G_n)

$$G_n=\langle 0|T(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)S)|0\rangle。\qquad(3\text{–}2)$$

这里用的是相互作用表象，因而明显地包含 S 矩阵。在海森堡表象中定义的 G_n，就不显含 S 矩阵。而两者是等价的。(3–2)式中的 n 个场量和 S 矩阵中的相应场量收缩，就给出费曼图中的外传播子，如(G_n) 图所示的 $i\Delta_f$，$iD_{\mu\nu}$，iS_f。当 G_n 是单粒子不可约时，如果把(G_n)图中的 n 条外传播子截掉，就得到 n 点正规顶角图形，如图(Γ_n)所示。如果被截掉的外传播子的动量为零，那么就得到由超势生成的零动量正规顶角的图形。简而言之，把 S 矩阵元的外线换成外传播子就成为格林函数；把单粒子不可约格林函数的外传播子截掉就得到正规顶角，故正规顶角又叫做断腿的格林函数；超势是零动量正规顶角的生成泛函。S 矩阵元、格林函数、正规顶角和超势是描写物理系统的重要的物理量。上面所说的，就是它们的简单、粗略的意义和相互关系。严格的意义，将在以下诸节中逐一详述。



(Γ_n)

§1. 转换矩阵元和算符矩阵元

为讨论格林函数、正规顶角及其生成泛函作准备，我们先讨论转换矩阵元和算符矩阵元。简单起见，讨论一个自由度的系统。所得结果可以推广到多个自由度的系统，推广到无限多个自由度的场论。

正则变量 一个自由度的系统，用正则坐标算符 $\hat{q}$ 和与之共轭的正则动量算符 $\hat{p}$ 描述。它们满足对易关系

$$[\hat{q},\ \hat{p}]=i。 \tag{3-3}$$

这里，取自然单位 $\hbar=c=1$。它们的本征态矢 $|q\rangle$、$|p\rangle$ 满足方程

$$\hat{q}|q\rangle=q|q\rangle,\ \hat{p}|p\rangle=p|p\rangle, \tag{3-4}$$

q、p 是相应的本征值。本征态矢 $|q\rangle$、$|p\rangle$ 分别形成正交、归一的完备组：

$$\langle q|q'\rangle=\delta(q-q'),\qquad \int dq\,|q\rangle\langle q|=1;$$

$$\langle p|p'\rangle=2\pi\delta(p-p'),\ \int dp\,|p\rangle\langle p|=2\pi。 \tag{3-5}$$

它们之间还有转换关系

$$\langle p|q\rangle=e^{-ipq}。 \tag{3-6}$$

运动表象 将算符 $\hat{q}$、$\hat{p}$ 及其本征态矢 $|q\rangle$、$|p\rangle$，用幺正算符 $u=e^{i\hat{H}t}$ 作时间平移，就得到与时间有关的算符 $\hat{q}(t)$、$\hat{p}(t)$ 和态矢 $|q,t\rangle$、$|p,\ t\rangle$，且

$$\hat{q}(t)=e^{i\hat{H}t}\hat{q}e^{-i\hat{H}t},\ \hat{p}(t)=e^{i\hat{H}t}\hat{p}e^{-i\hat{H}t},$$

$$|q,\ t\rangle=e^{i\hat{H}t}|q\rangle,\ |p,\ t\rangle=e^{i\hat{H}t}|p\rangle。 \tag{3-7}$$

$\hat{H}$ 是系统的哈密顿算符。算符、态矢的这种表象，我们称之为运动表象。可以证明：平移以后的、同一时刻的算符和态矢，满足平移以前一样的关系，即

$$[\hat{q}(t),\ \hat{p}(t)]=i;$$

$$\hat{q}(t)\,|q,\ t\rangle = q\,|q,\ t\rangle,\ \langle q(t)\,|q'(t)\rangle = \delta(q-q'),$$

$$\int dq\,|q,\ t\rangle\langle q,\ t\,| = 1;$$

$$\hat{p}(t)\,|p,\ t\rangle = p\,|p,\ t\rangle,\ \langle p,\ t\,|p',\ t\rangle = 2\pi\delta(p-p'),$$

$$\int dp\,|p,\ t\rangle\langle p,\ t\,| = 2\pi;$$

$$\langle p,\ t\,|q,\ t\rangle = e^{-ipq}。 \tag{3-8}$$

这些关系的证明，留给读者作为练习。

转换矩阵元　同一时刻、不同本征值的本征态，如(3-8)式所示，是正交、归一的。不同时刻本征态之间的关系呢？$\langle q',\ t'\,|q,t\rangle$ 叫做转换矩阵元。它表示：系统在时刻 t 处于本征值为 q 的状态 $|q,\ t\rangle$，至时刻 t'，跃迁到本征值为 q' 的状态 $|q',\ t'\rangle$ 的跃迁几率幅。它的大小要由系统的哈密顿 H 或拉格朗日来确定。

$t,\ t_1, t_2,\ \cdots\cdots\ t_n, t'$

为了计算它的大小，我们在 t 到 t' 之间，放置 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ n 个分点，如右图所示，把时间间隔 $t'-t$ 分成 $n+1$ 个小间隔，并令每个小间隔的长度为 $\varepsilon = \dfrac{t'-t}{n+1}$。在每一分点 t_i 上，把

$$\int dq_i\,|q_it_i\rangle\langle q_it_i\,| = 1$$

插入转换矩阵元，使之成为

$$\langle q't'\,|qt\rangle = \int dq_1dq_2\cdots dq_n\langle q't'\,|q_nt_n\rangle\ \langle q_nt_n\,|q_{n-1}t_{n-1}\rangle\cdots\cdots$$

$$\langle q_2t_2\,|q_1t_1\rangle\ \langle q_1t_1\,|qt\rangle。 \tag{3-9}$$

这样就把计算大时间间隔 $t'-t$ 的转换矩阵元 $\langle q't'\,|qt\rangle$ 的问题，变成先计算小间隔 $\varepsilon = t_i - t_{i-1}$ 间的转换矩阵元 $\langle q_it_i\,|q_{i-1}t_{i-1}\rangle$ 的问题。取 n 很大，则 ε 很小。利用 ε 无穷小的性质，得

$$\langle q_it_i\,|q_{i-1}t_{i-1}\rangle = \langle q_i\,|\exp[-i\hat{H}(t_i-t_{i-1})]\,|q_{i-1}\rangle$$

$$\simeq \langle q_i\,|(1-i\varepsilon\hat{H})\,|q_{i-1}\rangle。 \tag{3-10}$$

由于

$$|q_{i-1}\rangle=\int\frac{dp_i}{2\pi}\ |p_i\rangle\langle p_i|q_{i-1}\rangle=\int\frac{dp_i}{2\pi}\exp[-ip_i q_{i-1}]\,|p_i\rangle,$$

得 $$\langle q_i|\hat{H}|q_{i-1}\rangle=\int\frac{dp_i}{2\pi}\exp[-ip_i q_{i-1}]\langle q_i|\hat{H}|p_i\rangle。$$

系统的哈密顿 $\hat{H}$，是系统的正则变量 $\hat{q}$、$\hat{p}$ 的函数 $\hat{H}(\hat{q},\ \hat{p})$。这函数通常是算符乘积的多项式。根据对易关系 (3-3) 式，总可以把 $\hat{H}$ 中的算符 $\hat{q}$ 排在算符 $\hat{p}$ 的左边，使 $\hat{q}$ 向左作用于 $\langle q_i|$，使 $\hat{p}$ 向右作用于 $|p_i\rangle$，以致

$$\langle q_i|\hat{H}(\hat{q},\ \hat{p})|p_i\rangle=\langle q_i|H(q_i,\ p_i)|p_i\rangle=H(q_i p_i)\exp[iq_i p_i]。$$

把以上结果代入(3-10)式，就得到

$$\begin{aligned}\langle q_i t_i|q_{i-1}t_{i-1}\rangle&=\int\frac{dp_i}{2\pi}\exp[ip_i(q_i-q_{i-1})](1-i\varepsilon H)\\&=\int\frac{dp_i}{2\pi}\exp[ip_i(q_i-q_{i-1})-i\varepsilon H_i]。\end{aligned}\qquad(3\text{-}11)$$

注意：式中的 H_i 只是数 q_i、p_i 的普通函数，而不再是算符 $\hat{q}$、$\hat{p}$ 的算符函数。把上式代入(3-9)式，就得到

$$\langle q't'|qt\rangle=\int\prod_{i=1}^{n}dq_i\prod_{i=1}^{n+1}\frac{dp_i}{2\pi}\exp\left\{i\sum_i\varepsilon\left[p_i\frac{q_i-q_{i-1}}{\varepsilon}-H_i\right]\right\}。\qquad(3\text{-}12)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon\to0$，$\frac{q_i-q_{i-1}}{\varepsilon}\to\dot{q}_i$。用符号$[dq]$表示 $\prod_{i=1}^{n}dq_i$，用符号$\left[\frac{dp}{2\pi}\right]$表示 $\prod_{i=1}^{n+1}\frac{dp_i}{2\pi}$，用符号 $\int_t^{t'}dt\,(p\dot{q}-H)$ 表示 $\sum_i\varepsilon\,[p_i\dot{q}_i-H_i]$。那么，(3-12)式就可以用符号表示为

$$\langle q't'|qt\rangle=\int[dq]\left[\frac{dp}{2\pi}\right]\exp\left[i\int_t^{t'}dt(p\dot{q}-H)\right]。\qquad(3\text{-}13)$$

(3-12)式是转换矩阵元的路径积分表达式，(3-13)式是它的符号表示形式。

费曼形式 当系统的哈密顿 $H(q,\ p)$是 p 的二次多项式，如

$H=\frac{p^2}{2}+V(q)$时，(3–12)式中对 p 的积分可以算出

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left\{i\varepsilon\left[p\dot{q}-\frac{p^2}{2}-V\right]\right\},$$

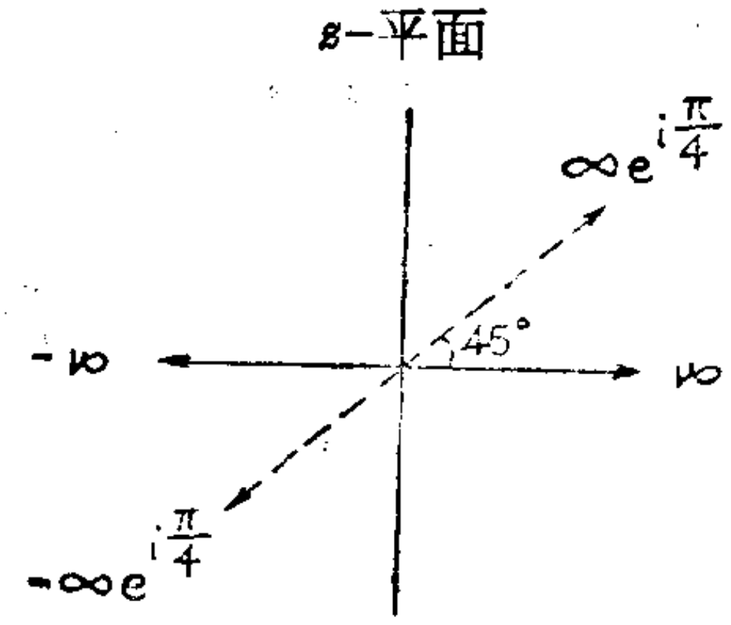
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left[-i\frac{\varepsilon}{2}(p-\dot{q})^2\right]\exp\left[-i\varepsilon\left(V-\frac{\dot{q}^2}{2}\right)\right],\quad(3\text{–}14)$$

$\dot{q}$ 只是表示 $\frac{q_i-q_{i-1}}{\varepsilon}$ 的符号，它不是 p 的函数。因而，上式中的后一指数因子与 p 无关。令 $x=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}(p-\dot{q})$，$dx=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\,dp$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left[-i\frac{\varepsilon}{2}(p-\dot{q})^2\right]=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ix^2},$$

再令 $z=\sqrt{i}\,x=e^{i\frac{\pi}{4}}x$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-ix^2}=\frac{1}{\sqrt{i}}\int_{-\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}^{\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}dze^{-z^2},$$



积分沿如图所示的斜轴进行。由于被积函数是 z–平面的解析函数，在斜轴与实轴之间的区域内当然是解析的。而且，在无穷远处为零。所以，可以用沿实轴的积分代替沿斜轴的积分，即

$$\int_{-\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}^{\infty e^{i\frac{\pi}{4}}}dze^{-z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}dze^{-z^2}=\sqrt{\pi}\,。$$

把以上结果代入(3–13)式，得

$$\int dp\exp\left\{i\varepsilon\left[p\dot{q}-\frac{p^2}{2}-V\right]\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}\exp\left[i\varepsilon\left(\frac{\dot{q}}{2}-V\right)\right]$$

$$=\frac{\pi e^{i\varepsilon L}}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}。$$

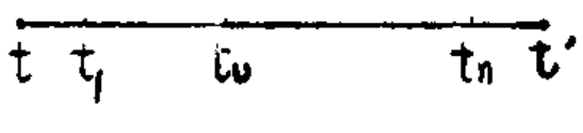
$L=\frac{\dot{q}}{2}-V$ 是系统的拉格朗日。把上式代入(3–12)式，并用(3–

18)式的符号表示，就得到

$$\langle q't'|qt\rangle=\int\Big[\frac{dq}{\sqrt{2\pi i\varepsilon}}\Big]\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。\qquad(3\text{–}15)$$

这就是转换矩阵元的拉格朗日形式，我们称之为费曼形式。它是在特殊情况下导出的。但许多物理系统都符合这种情况。所以，人们常常使用这种情况。不过，有时，拉格朗日 L 要用有效拉格朗日 L_{eff} 来代替。

算符矩阵元 以上讨论的是，系统由量子态 $|q,\ t\rangle$ 跃迁到量子态 $|q',\ t'\rangle$ 的转换矩阵元。现在，我们讨论某些时刻的算符 $\hat{q}(t_1)$、$\hat{q}(t_2)$、$\cdots$、$\hat{q}(t_n)$ 的编时乘积，在上述两个量子态之间的矩阵元，如 $\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$。先讨论一个算符 $\hat{q}(t_0)$ 的简单情况，求出 $\langle q't'|\hat{q}(t_0)|qt\rangle$ 的路径积分表示。



设 $t<t_0<t'$。把时间间隔 $t'-t$，象以前一样分成 $n+1$ 等分，和以前不同，把 t_0 定在一个分点上。在每个分点 i，把 $\int dq_i|q_it_i\rangle\langle q_it_i|=1$ 插入 $\langle q't'|\hat{q}(t_0)|qt\rangle$，得

$$\langle q't'|\hat{q}(t_0)|qt\rangle=\int dq_1\,dq_2\cdots dq_0\cdots dq_n\langle q't'|q_nt_n\rangle\cdots\langle q_it_i|\hat{q}(t_0)|q_0t_0\rangle\cdots\langle q_1t_1|qt\rangle。$$

由于 $\hat{q}(t_0)|q_0t_0\rangle=q_0|q_0t_0\rangle$，令 $q_0=q(t_0)$，则上式为

$$\langle q't'|\hat{q}(t_0)|qt\rangle=\int dq_1\,dq_2\cdots dq_0\cdots dq_nq(t_0)\langle q't'|q_nt_n\rangle\cdots\langle q_it_i|q_0t_0\rangle\cdots\langle q_1t_1|qt\rangle。$$

此式和转换矩阵元的 (3–9) 式的差别，只是多了一个 $q(t_0)$ 因子。因此，仿照前面的论述，把小时间间隔的转换矩阵元的路积分表示式(3–11)式代入，并对 $[dp]$ 积分，就得到

$$\langle q't'|\hat{q}(t_0)|qt\rangle=\int[dq]q(t_0)\exp[i\int_t^{t'}dtL(t)]。$$

这里和以后，我们都略去无关紧要的常数因子 $\left[\frac{1}{2\pi i\varepsilon}\right]$。

再讨论算符乘积 $\hat{q}(t_b)\hat{q}(t_a)$ 的矩阵元 $\langle q't'|\hat{q}(t_b)\hat{q}(t_a)|qt\rangle$ 的路径积分表示。设 $t<t_a<t_b<t'$。把时间间隔 $t'-t$ 分成 $n+1$ 个等分，将 t_b、t_a 取在分点上，在每一分点上把 $\int dq_i\,|q_it_i\rangle\langle q_it_i|=1$ 插入矩阵元，就得到

$$\langle q't'|\hat{q}(t_b)\hat{q}(t_a)|qt\rangle=\int dq_1\cdots dq_a\cdots dq_b\cdots dq_n\langle q't'|q_nt_n\rangle\cdots$$
$$\hat{q}(t_b)|q_bt_b\rangle\cdots\hat{q}(t_a)|q_at_a\rangle\cdots\langle q_1t_1|qt\rangle$$
$$=\int dq_1\cdots dq_a\cdots dq_b\cdots dq_nq(t_b)q(t_a)\langle q't'|q_nt_n\rangle\cdots$$
$$|q_bt_b\rangle\cdots|q_at_a\rangle\cdots\langle q_1t_1|qt\rangle。$$

这里用了 $\hat{q}(t_a)|q_at_a\rangle=q(t_a)|q_a,\ t_a\rangle$ 和 $\hat{q}(t_b)|q_bt_b\rangle=q(t_b)|q_b,\ t_b\rangle$。再把小时间间隔的矩阵元(3–11)式代入，并对 $[dp]$ 积分，就得到

$$\langle q't'|\hat{q}(t_b)\hat{q}(t_a)|qt\rangle=\int[dq]q(t_b)q(t_a)\exp\left[i\int_t^{t'}dtL(t)\right]。$$

如果 $t<t_b<t_a<t'$，用完全同样的方法，得到

$$\langle q't'|\hat{q}(t_a)\hat{q}(t_b)|qt\rangle=\int[dq]q(t_a)q(t_b)\exp\left[i\int_t^{t'}dtL(t)\right]。$$

注意，在积分号下的 $q(t_a)$、$q(t_b)$ 不是算符，而是数。如果算符 $\hat{q}(t_a)$、$\hat{q}(t_b)$ 有对易性，则 $q(t_a)$、$q(t_b)$ 是可对易的 c 数。如果算符 $\hat{q}(t_a)$、$\hat{q}(t_b)$ 有反对易性，则 $q(t_a)$、$q(t_b)$ 是反对易的 c 数。因此，把上述两种情况结合起来，就可以用编时算符以一个公式表示出来，即

$$\langle q't'|T(\hat{q}(t_a)\hat{q}(t_b))|qt\rangle=\int[dq]q(t_a)q(t_b)\exp\left[i\int_t^{t'}dtL(t)\right]。$$

上面的论述，可以推广到任意 n 个算符乘积的情况。当 $t<(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)<t'$ 时，就有

$$\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$=\int[dq]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。\quad (3\text{–}16)$$

算符导数和 T^* 由(3–16)式可得

$$\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$=\int[dq]q(t_1)\cdots q(t_i)\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big],$$

$$\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i+\Delta t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$=\int[dq]q(t_1)\cdots q(t_i+\Delta t_i)\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。$$

两式相减并除以 Δt_i, 得

$$[\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i+\Delta t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$-\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle]\cdot(\Delta t_i)^{-1}$$

$$=\int[dq]q(t_1)\cdots\frac{q(t_i+\Delta t_i)-q(t_i)}{\Delta t_i}\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。$$

注意, 右边的 Δt_i 移在积分号下, 左边的 Δt_i 就不能作这样的移动, 这是它们各自的性质确定的。让上式中的 $\Delta t_i\to 0$, 根据导数的定义, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$=\int[dq]q(t_1)\cdots\dot{q}(t_i)\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。$$

我们按照

$$\langle q't'|T^*(\hat{q}(t_1)\cdots\dot{\hat{q}}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial t_i}\langle q't'\ T(\hat{q}(t_1)\cdots\hat{q}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

来定义算符 $\dot{q}(t_i)$和带 * 号的编时算符 T^*。那么就有

$$\langle q'\,t'\,|\,T^*(\hat{q}(t_1)\cdots\dot{\hat{q}}(t_i)\cdots\hat{q}(t_n))\,|\,qt\rangle$$

$$=\int[dq]q(t_1)\cdots\dot{q}(t_i)\cdots q(t_n)\exp\Big[i\int_t^{t'}dtL(t)\Big]。\quad(3\text{–}17)$$

这在将来的计算中，会带来方便。

外源技术　算符矩阵元$\langle q'\,t'\,|\,T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))\,|\,qt\rangle$和转换矩阵元$\langle q't'\,|\,qt\rangle$之间，由它们的路径积分表示(3–16)式、(3–15)式看来，存在着紧密的关系。利用“外源技术”可以把这种关系用数学公式表示出来。为此，我们引进外源$J(t)$，把它和坐标$q(t)$的乘积$J(t)q(t)$，加于拉格朗日$L(t)$，定义有外源时的转换矩阵元为

$$\langle q't'\,|\,qt\rangle^J\equiv\int[dq]\exp\left\{i\int_t^{t'}dt[L(t)+J(t)q(t)]\right\}。\quad(3\text{–}18)$$

如果在导出(3–15)式时，一开始就假设系统的哈密顿中有外源项$-J(t)\hat{q}(t)$，即令$\hat{H}'=\hat{H}-J\hat{q}$，也可以导出(3–18)式。由此可知，外源的存在，确实也会影响系统的发展。但是，我们对它的兴趣，不在于它的物理性质，而在于它的技术特点。把(3–18)式对$J(t_0)$求导，根据泛函求导公式

$$\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_0)}=\delta(t-t_0)$$

得
$$\frac{\delta}{\delta J(t_0)}\langle q'\,t'\,|\,qt\rangle^J$$

$$=\int[dq]i\int_t^{t'}dt\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_0)}q(t)\exp\left\{i\int_t^{t'}dt[L(t)+J(t)q(t)]\right\}$$

$$=\int[dq]i\int_t^{t'}dt\delta(t-t_0)q(t)\exp\left\{i\int_t^{t'}dt[L(t)+J(t)q(t)]\right\}$$

$$=i\int[dq]q(t_0)\exp\left\{i\int_t^{t'}dt[L(t)+J(t)q(t)]\right\}。$$

当$J(t)\to 0$时，右边就是算符$\hat{q}(t_0)$的矩阵元，所以

$$\langle q't'\,|\,\hat{q}(t_0)\,|\,qt\rangle=\frac{\delta\langle q't'\;\;qt\rangle^J}{i\delta J(t_0)}\Big|_{J=0}。$$

仿此，将(3–18)式对 $J(t_1)$、$J(t_2)$、…、$J(t_n)$ 求 n 次导数，得

$$\frac{\delta^n}{\delta J(t_n)\delta J(t_{n-1})\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\langle q't'|qt\rangle^J$$

$$=i^n\int[dq]\,q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)$$

$$\cdot\exp\{i\int_t^{t'}dt[L(t)+J(t)q(t)]\}。$$

把它和(3–16)式比较，得

$$\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle=\frac{\delta^n\langle q't'|qt\rangle^J}{i^n\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\Big|_{J=0}$$

(3–19)

这就是转换矩阵元和算符矩阵元的关系的一种数学表示。由于 $\langle q't'|qt\rangle^J$ 是外源 J 的泛函，就可以将它在 $J=0$ 的邻域展开为泰勒级数

$$\langle q't'|qt\rangle^J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

$$\cdot\frac{\delta^n\langle q't'|qt\rangle^J}{\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\Big|_{J=0}J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n)。$$

把(3–19)式代入，就得

$$\langle q't'|qt\rangle^J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dt_1dt_2\cdots dt_n\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$$

$$\cdot J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n)。\qquad(3–20)$$

这表明：算符矩阵元 $\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$ 是有外源的转换矩阵元 $\langle q't'|qt\rangle^J$ 的泰勒展开的展开系数。所以，我们可以把 $\langle q't'|qt\rangle^J$ 叫做算符矩阵元的生成泛函或母函数。

§2. 格林函数及其生成泛函

上一节论述的转换矩阵元是量子态 $|qt\rangle$ 和 $|q't'\rangle$ 之间的转换

矩阵元 $\langle q't'|qt\rangle$。算符矩阵元也是算符 $\hat{q}(t_i)$ 在这种量子态之间的矩阵元 $\langle q't'|\hat{q}(t_i)|qt\rangle$。量子态 $|qt_i\rangle$ 是算符 $\hat{q}(t)$ 的、本征值为 q 的本征态。物理上感兴趣的，常常是真空态 $|0\rangle$，是真空态之间的转换矩阵元 $\langle 0|0\rangle^J$，是算符在真空态之间的矩阵元 $\langle 0|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|0\rangle$。真空态是能量最低态，即哈密顿算符 $\hat{H}$ 的、最小本征值 E_0 的本征态，$\hat{H}|0\rangle=E_0|0\rangle$。现在，我们来讨论它们。根据上一节所得结果，来论述它们的意义和相互关系，来导出它们的路径积分表示式。

格林函数 我们把算符的编时乘积在真空态间的平均值即矩阵元，叫做格林函数，并以符号 G 表示。如

$$G_n(t_1, t_2, \cdots, t_n)\equiv\langle 0|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|0\rangle \quad (3\text{–}21)$$

是算符 $\hat{q}(t_i)$的 n 点格林函数。这个定义也适用于不同算符编时乘积的情况。如果算符不只是时间 t 的函数，而且是空间 $\vec{x}$ 的函数，那么它就是场论的格林函数。

设(3–21)式中算符的时间 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是在时间间隔 $t'-t$ 之间，即 $t<(t_1, t_2, \cdots, t_n)<t'$。我们把

$$\int dq\,|qt\rangle\langle qt|=1,\quad \int dq'\,|q't'\rangle\langle q't'|=1$$

插入(3–21)式，得

$$G_n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$=\int dq\,dq'\langle 0|q't'\rangle\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle\langle qt|0\rangle。$$

式中，$\langle qt|0\rangle$ 是真空态在 q 表象中的波函数，$\langle 0|qt\rangle$ 是其复数共轭，写作

$$\phi_0(q, t)\equiv\langle qt|0\rangle=\langle q|0\rangle e^{-iE_0t}=\phi_0(q)e^{-iE_0t},$$

$$\phi_0^*(q', t')\equiv\langle 0|q't'\rangle=\langle 0|q'\rangle e^{iE_0t'}=\phi_0^*(q')e^{iE_0t'}。$$

而 $\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle$ 就是上一节论述的算符矩阵元。由此可知

$$G_n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$$

$$=\int dq\,dq'\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\langle q'\,t'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle。$$

(3–22)

这就把格林函数和算符矩阵元联系起来了，便于利用前节的结果来探讨它的性质。

生成泛函 我们把有外源时真空到真空的转换矩阵元，叫做格林函数的生成泛函，并用符号 Z 表示，即定义

$$Z[J]\equiv\langle 0|0\rangle^J。\qquad (3–23)$$

这定义适用于所有情况。当然，在不同情况下，$|0\rangle$ 表示不同系统的真空态。

设想，在时刻 t 以前，系统处于没有外源的真空态；在时刻 t' 以后，系统也处于没有外源的真空态；只在时间间隔 $t'-t$ 之间系统才受到外源 J 的影响。那么，把

$$\int dq\,|qt\rangle\langle qt|=1,\quad \int dq'\,|q'\,t'\rangle\langle q'\,t'|=1$$

插入(3–23)式，就得到

$$Z[J]=\int dq\,dq'\langle 0|q't'\rangle\langle q'\,t'|qt\rangle^J\langle qt|0\rangle$$

$$=\int dq\,dq'\,\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\langle q'\,t'|qt\rangle^J。\qquad (3–24)$$

式中的 $\langle q't'|qt\rangle^J$ 就是上一节讨论的有外源时的转换矩阵元。

把(3–19)式代入(3–22)式，并考虑(3–24)式，得

$$G_n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$$

$$=\int dq\,dq'\,\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\left.\frac{\delta^n\langle q'\,t'|qt\rangle^J}{i^n\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\right|_{J=0}$$

$$=\frac{\delta^n}{i^n\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}$$

$$\cdot\int dq\,dq'\,\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\langle q'\,t'|qt\rangle^J\big|_{J=0},$$

$$G_n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)=\left.\frac{\delta^n Z[J]}{i^n\delta J(t_n)\cdots\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\right|_{J=0} \tag{3-25}$$

把(3-20)式代入(3-24)式，并考虑到(3-22)式，得

$$\begin{aligned}Z[J]=&\int dq\,dq'\,\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dt_1dt_2\cdots\\&\cdot dt_n\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n)\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dt_1dt_2\cdots dt_n\int dq\,dq'\,\phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{iE_0(t'-t)}\\&\cdot\langle q't'|T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\cdots\hat{q}(t_n))|qt\rangle J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n),\end{aligned}$$

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$$

$$\cdot\int dt_1dt_2\cdots dt_nG_n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)J(t_1)J(t_2)\cdots J(t_n)。 \tag{3-26}$$

由(3-25)式和(3-26)式可知，以(3-23)式定义的 $Z[J]$ 确实是以(3-21)式定义的格林函数 G 的生成泛函或母函数。

格林函数是人们感兴趣的函数。以上论述告诉我们，如果能够算出它的生成泛函 $Z[J]$，就可以由(3-25)式算出系统的各种格林函数。这是多么引人注目的课题啊！由已知泛函求它的泛函导数是简单的运算。问题在于如何计算生成泛函 $Z[J]$。按照(3-24)式，先算出系统的真空波函数 $\phi_0(q)$ 和转换矩阵元 $\langle q't'|qt\rangle^J$，然后再进行积分。这在一些简单情况下是可以算出结果的。在量子力学*中，有这方面的介绍。在许多情况下，这是算不出来的。需要另想办法。

定理 为此，我们先证明一个定理

$$Z[J]=\lim_{\substack{T'\to-i\infty\\T\to i\infty}}\frac{\langle Q'T'|QT\rangle^J}{\phi_0^*(Q)\phi_0(Q')e^{-i(T'-T)E_0}}。 \tag{3-27}$$

---

* 参看 R. P. Feynman: "Quantum Mechanics and Path Integrals." 薛晓舟，鲁公儒：《振子的转换振幅与生成泛函》，新乡师院学报 1981, No. 3,p. 19.

设想，在时间 $t-T$ 间和 $T'-t'$ 间都没有外源，只在 $t'-t$ 间才有外源 J 加入。那么

$$\langle Q'T'|QT\rangle^J=\int dq\,dq'\langle Q'T'|q't'\rangle\langle q't'|qt\rangle^J\langle qt|QT\rangle。\quad (3\text{-}28)'$$

设 $|n\rangle$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，是正交、归一的能量本征态，即

$$\hat{H}|n\rangle=E_n|n\rangle,\ \langle n|m\rangle=\delta_{n,m},\ \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1。$$

插入 $\langle Q'T'|q't'\rangle$ 和 $\langle qt|QT\rangle$，得

$$\langle Q'T'|q't'\rangle=\langle Q'|e^{-i\hat{H}(T'-t')}|q'\rangle=\sum_n\langle Q'|e^{-i\hat{H}(T'-t')}|n\rangle\langle n|q'\rangle$$

$$=\sum_n\langle Q'|n\rangle\langle n|q'\rangle e^{-iE_n(T'-t')}。$$

$\langle Q'|n\rangle$ 是能量为 E_n 的本征态在 Q' 表象中的波函数，$\langle n|q'\rangle$ 是波函数的复数共轭，即

$$\phi_n(Q')=\langle Q'|n\rangle,\ \phi_n^*(q')=\langle n|q'\rangle。$$

由此得 $$\langle Q'T'|q't'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(Q')\phi_n^*(q')e^{-iE_n(T'-t')}。$$

在 $T'\to-i\infty$ 时，因 $E_n-E_0>0$,

$$\langle Q'T'|q't'\rangle=e^{-iE_0(T'-t')}[\phi_0(Q')\phi_0^*(q')$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(Q')\phi_n^*(q')e^{-i(E_n-E_0)(T'-t')}]\to\phi_0(Q')\phi_0^*(q')e^{-iE_0(T'-t')}。$$

同理可得

$$\langle qt|QT\rangle=e^{-iE_0(t-T)}[\phi_0(q)\phi_0^*(Q)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(q)\phi_n^*(Q)e^{-i(E_n-E_0)(t-T)}]。$$

在 $T\to i\infty$ 时，因 $E_n-E_0>0$,

$$\langle qt|Qt\rangle\to\phi_0(q)\phi_0^*(Q)e^{-iE_0(t-T)}。$$

把它们代入(3-28)′式，在 $T\to i\infty$, $T'\to-i\infty$ 时，得

$$\langle Q'T'|QT\rangle^J\to$$

$$\int dq\,dq'\,\phi_0(Q')\phi_0^*(q')\phi_0(q)\phi_0^*(Q)e^{-iE_0(T'-t'+t-T)}\langle q't'|qt\rangle^J。$$

考虑到(3–24)式，得

$$\lim_{\substack{T'\to-i\infty\\T\to i\infty}}\langle Q'T'|QT\rangle^J=\lim_{\substack{T'\to-i\infty\\T\to i\infty}}\phi_0(Q')\phi_0^*(Q)e^{-iE_0(T'-T)}Z[J]。$$

这就证明了定理(3–27)式。

根据定理(3–27)式来计算生成泛函 $Z[J]$，和按照(3–24)式来计算一样，也要先算出系统的真空态波函数和转换矩阵元；然后，与前者不同，不是求积分而是求极限。有时，求极限比求积分容易，似乎定理为计算提供了方便。但是，由于按照(3–18)式来计算转换函数的路径积分，常常碰到困难。所以，定理还没有很好地解决计算问题。

欧氏表示 矩阵元中的常数因子，通常可以用重新定义归一化的态矢量而去除。我们对生成泛函感兴趣，在于用它来计算格林函数，而和计算格林函数有关的只是与外源 J 有关的因子。所以，与 J 无关的因子可以略去。因而上述定理可简写为

$$Z[J]=\lim_{T'\to-i\infty\atop T\to i\infty}\langle Q'T'|QT\rangle^J。$$

把(3–18)式代入上式，得

$$Z[J]=\lim_{\substack{T'\to-i\infty\\T\to i\infty}}\int[dq]\exp\left\{i\int_T^{T'}dt\,[L(t)+J(t)q(t)]\right\}。$$

上式要求：先在实的时间间隔 $T'-T$ 内算出路径积分，然后再把 T、T' 取虚的无穷极限。这样的时间概念十分别扭，于是人们索性把整个时间都延拓到虚轴，令

$$Z[J]=\int[dq]\exp\left\{i\int_{i\infty}^{-i\infty}dt\,[L(t)+J(t)q(t)]\right\}。$$

再令 $\tau=it$，则 $\dot{q}(t)=i\dfrac{dq}{d\tau}$，把上式写成

$$Z[J]_E=\int[dq]\exp\left\{+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[L\left(q,i\frac{dq}{d\tau}\right)+J(\tau)q(\tau)\right]\right\},\tag{3–28}$$

这是生成泛函的欧氏表示式。因为物理上的时间仍然是 t，所以用它来计算格林函数时，还必须在最后结果中，把 τ 按 $\tau=it$ 换成 t，即

$$G_n(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)=\frac{\delta^n Z[J]_E}{\delta J(\tau_n)\cdots\delta J(\tau_2)\delta J(\tau_1)}\bigg|_{J=0,\tau=it}。$$

(3–29)

闵氏表示 人们并不乐意于用(3–28)式、(3–29)式来计算格林函数，而提出假设：把(3–28)式中的 τ 换成 $t=-i\tau$，但仍保持 t 为实数，并在 L 中加上使泛函积分收敛的项如 $i\varepsilon\frac{q^2}{2}$，即令

$$Z[J]=\int[dq]\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[L(t)+J(t)q(t)+\frac{i\varepsilon q^2(t)}{2}\right]\right\}。$$

(3–30)

这就是生成泛函的路径积分表示的闵氏表示式。人们通常采用这种表式来计算格林函数的生成泛函。

谐振子的格林函数生成泛函 谐振子是数学上最简单、物理上最基本的系统。我们以它为例来阐明计算生成泛函的技巧。以上所述的，(3–24)式、(3–27)式、(3–28)式和(3–30)式，用来计算谐振子，都可以算出正确的结果*。限于篇幅，这里只介绍用(3–30)式来计算的方法。

一维谐振子只有一个自由度，用坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 来描写。它的拉格朗日为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{2}\omega^2q^2,\ L=-\frac{1}{2}q\ddot{q}-\frac{1}{2}\omega^2q^2,$$

这里假设谐振子的质量 $m=1$。后一个 L 比前一个 L 少一个全导数项 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(q\dot{q})$。与之相应的作用量只差常数项，不影响物理系

---

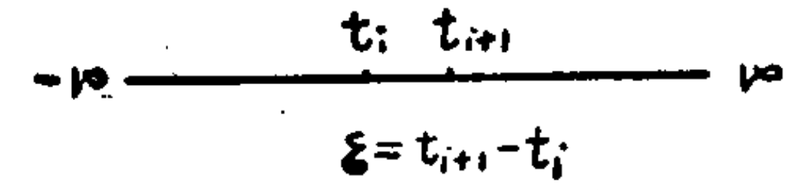
* 参看：基本粒子译文集(第二集)(第十一节)。

统的运动。所以，两者是等价的。我们采用后一种 L，代入(3–30)式，得

$$Z[J]=\int[dq]\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[q\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2-i\varepsilon\right)q-2Jq\right]\right\}。$$

(3–31)

前面我们已经强调指出：(3–13)式只是(3–12)式的符号表示形式。(3–31)式也只是一种算符表示形式。它的实质内容应作如下理解。把时间轴分成无限多个无穷小间隔 $\varepsilon=t_{i+1}-t_i$。在每个时间点 t_i 上，有对应关系



$$q(t)\to q_i,\ J(t)\to J_i,$$

$$\frac{dq}{dt}\to\frac{q_i-q_{i-1}}{\varepsilon},$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}\to\frac{\dfrac{q_{i+1}-q_i}{\varepsilon}-\dfrac{q_i-q_{i-1}}{\varepsilon}}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}(q_{i+1}-2q_i+q_{i-1})$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}(\delta_{i+1,j}-2\delta_{i,j}+\delta_{i-1,j})q_j,$$

$$A(t)=\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2-i\varepsilon\to A_{ij}=\frac{\delta_{i+1,j}-2\delta_{i,j}+\delta_{i-1,j}}{\varepsilon^2}+(\omega^2-i\varepsilon)\delta_{ij}。$$

(3–31)式为

$$Z[J]=\int[dq]\exp\left\{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt[q(t)A(t)q(t)-2J(t)q(t)]\right\}$$

$$=\int\prod_i dq_i\exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_{i,j}\varepsilon[q_iA_{ij}q_j-2J_iq_i]\right\}。$$

指数上是 q_i 的二次型，用一个正交变换把矩阵 A 对角化 $A_{ij}\to A_i\delta_{i,j}$，$q_i\to q_i'$，$J_i\to J_i'$，则

$$\sum(q_iA_{ij}q_j-2J_iq_i)=\sum(A_iq_i'^2-2J_i'q_i'),$$

$$Z[J]=\int\prod_i dq_i' \exp\Big[-\frac{i}{2}\,\varepsilon\sum_i(A_iq_i'^2-2J_i'q_i')\Big]。$$

其中的任一个 i 的积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty}dq_i' \exp\Big[-\frac{i}{2}\,\varepsilon(A_iq_i'^2-2J_i'q_i')\Big],$$

和(3-14)式一样,是高斯型积分。采用同样的方法,可以算出为

$$\int_{-\infty}^{\infty}dq_i' \exp\Big[-\frac{i}{2}\,\varepsilon(A_iq_i'^2-2J_i'q_i')\Big]$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{i\varepsilon A_i}}\exp\Big(\frac{i}{2}\,\varepsilon J_i'A_i^{-1}J_i'\Big)。$$

所以

$$Z[J]=\prod_i\sqrt{\frac{2\pi}{i\varepsilon A_i}}\exp\Big(\frac{i}{2}\,\varepsilon J_i'A_i^{-1}J_i'\Big)$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{i\varepsilon}}^{\infty}\cdot\frac{1}{\sqrt{\prod_i A_i}}\exp\Big(\frac{i}{2}\,\varepsilon\sum_i J_i'A_i^{-1}J_i'\Big),$$

$\sqrt{\frac{2\pi}{i\varepsilon}}^{\infty}$ 是一常数因子,可以略去。再经过一个和以上相反的正交变换,$J_i'\to J_i$, $A_i\delta_{ij}\to A_{ij}$,则

$$\prod_i A_i=\det A,\ \sum_i J_i'A_i^{-1}J_i'=\sum_{i,j}J_iA_{ij}^{-1}J_j。$$

所以

$$Z[J]=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\Big(\frac{i}{2}\,\varepsilon\sum_{i,j}J_iA_{ij}^{-1}J_j\Big)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\Big[\frac{i}{2}\int dtJ(t)A^{-1}(t)J(t)\Big]。$$

令

$$A^{-1}(t)\delta(t-t')=D(t-t'),$$

$$A(t)D(t-t')=\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2-i\varepsilon\Big)D(t-t')=\delta(t-t'),$$

$$D(t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\,\frac{e^{-i\nu t}}{\omega^2-\nu^2-i\varepsilon}。$$

则

$$Z[J]=\exp\left[\frac{i}{2}\int dt\,dt'J(t)D(t-t')J(t')\right]。\qquad(3\text{-}32)$$

这里把 $\det A$ 因子也去掉了，结果使 $Z[0]=1$，即生成泛函归一化了。

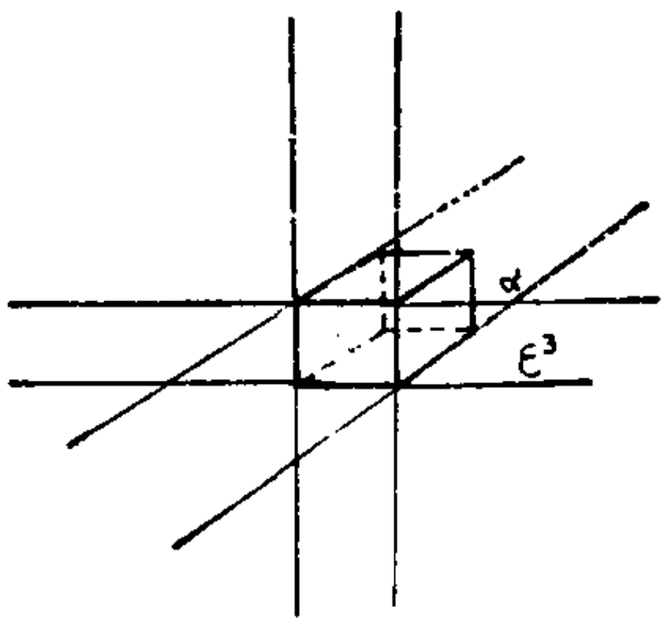
生成泛函求出来了。由它，按照(3-25)式就可以算出格林函数。例如，它的两点格林函数为

$$\begin{aligned}G_2(t_1,\ t_2)&=\frac{\delta^2}{i^2\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\\&\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\int dt\,dt'J(t)D(t-t')J(t')\right]\Big|_{J=0}\\&=\frac{\delta}{i^2\delta J(t_2)}\left\{i\int dt\,dt'\,\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_1)}D(t-t')J(t')\right.\\&\left.\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\int dt\,dt'J(t)D(t-t')J(t')\right]\right\}\Big|_{J=0}\\&=\frac{1}{i^2}\left\{i\int dt\,dt'\,\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_1)}D(t-t')\frac{\delta J(t')}{\delta J(t_2)}\right.\\&\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\int dt\,dt'J(t)D(t-t')J(t')\right]\\&+\left(i\int dt\,dt'\,\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_1)}D(t-t')J(t')\right)\\&\cdot\left(i\int dt\,dt'\,\frac{\delta J(t)}{\delta J(t_2)}D(t-t')J(t')\right)\\&\left.\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\int dtdt'J(t)D(t-t')J(t')\right]\right\}\Big|_{J=0}\\&=\frac{1}{i}D(t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}dv\,\frac{ie^{-ivt}}{v^2-\omega^2+i\varepsilon}。\end{aligned}$$

§3. 场的格林函数及其生成泛函

上面两节论述的是一个自由度的系统，所用的方法是量子力学方法。它们可以很方便地推广到多个自由度的系统，推广到无

限多个自由度的场论。在场论中，物理系统是场，用场量 $\phi(x)$ (简单起见，以标量场为例)描述。在二次量子化以前，它是时空坐标 $X(\vec{x}, t)$的波函数；在二次量子化以后，它是时空坐标函数的算符。在量子力学中，算符，包括坐标算符，都是时间 t 的函数；在量子场论中，场算符和由它构成的其他算符，都是时间 t 和空间 $\vec{x}$ 的函数。这就是量子场论和量子力学的基本联系和差别。我们就是根据这个基本联系和差别，把量子力学的理论推广到量子场论。



我们把场所占有的空间，分割成无限多个大小为 ε^3 的立方小体积，并用 $\alpha=1, 2, \cdots$来标记。如左图所示。这种方法叫做空间格子化。

正则变量 在每一小体积中，取 $\phi(x)$的平均值

$$\phi_\alpha(t)\equiv\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\varepsilon_\alpha^3}dV\phi(\vec{x}, t),\ \alpha=1, 2, 3, \cdots。 \tag{3-33}$$

这样，我们就得到无限多个时间 t 的函数，并把它作为描述场系统的广义坐标。由是可知，场是用无限多个广义坐标 $\phi_\alpha(t)$，$\alpha=1, 2, \cdots$ 描写的无限多个自由度的系统。相应的广义速度为

$$\dot{\phi}_\alpha(t)\equiv\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\varepsilon_\alpha^3}dV\dot{\phi}(\vec{x}, t),\ \alpha=1, 2, 3\cdots。 \tag{3-34}$$

场的拉格朗日是

$$L(t)=\sum_\alpha\varepsilon^3\mathscr{L}_\alpha(\phi_\alpha(t), \phi_{\alpha+s}(t), \dot{\phi}_\alpha(t))。 \tag{3-35}$$

和量子力学时不同，$\mathscr{L}_\alpha$ 中多了 $\phi_{\alpha+s}(t)$，是因为相邻格子之间有着联系。

相应的无限多个广义动量为

$$P_\alpha(t)\equiv\frac{\partial L(t)}{\partial\dot{\phi}_\alpha(t)}=\varepsilon^3\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha}{\partial\dot{\phi}_\alpha}=\varepsilon^3\pi_\alpha(t),$$

$$\pi_\alpha(t)\equiv\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha}{\partial\dot{\phi}_\alpha},\ \alpha=1,\ 2,\ 3,\ \cdots。\tag{3-36}$$

系统的哈密顿是

$$H(t)\equiv\sum_\alpha P_\alpha(t)\dot{\phi}_\alpha(t)-L=\varepsilon^3\sum_\alpha(\pi_\alpha(t)\dot{\phi}_\alpha(t)-\mathscr{L}_\alpha)=\sum_\alpha\varepsilon^3\mathscr{H}_\alpha,$$

$$\mathscr{H}_\alpha(\pi_\alpha(t),\ \phi_\alpha(t),\ \phi_{\alpha+s}(t))\equiv\pi_\alpha(t)\dot{\phi}_\alpha(t)-\mathscr{L}_\alpha,\ \alpha=1,\ 2,\ 3,\ \cdots。\tag{3-37}$$

量子化 在二次量子化以后，它们都是算符。正则共轭的算符 $\hat{\phi}_\alpha(t)$、$\hat{p}_\alpha(t)$，满足对易关系

$$[\hat{\phi}_\alpha(t),\ \hat{\phi}_\beta(t)]=0,\ [\hat{p}_\alpha(t),\ \hat{p}_\beta(t)]=0,$$

$$[\hat{\phi}_\alpha(t),\ \hat{p}_\beta(t)]=i\delta_{\alpha,\beta};$$

$$[\hat{\pi}_\alpha(t),\ \hat{\pi}_\beta(t)]=0,\ [\hat{\phi}_\alpha(t),\ \hat{\pi}_\beta(t)]=i\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon^3},$$

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ \cdots。\tag{3-38}$$

这些对易关系，对于玻色场来说是正确的，对于费米场来说就要把对易括号〔 〕换成反对易括号{ }。

算符 $\hat{\phi}_\alpha(t)$的、本征值为 $\phi_\alpha(t)$的本征态为 $|\phi_\alpha(t)\phi_\beta(t)\cdots\rangle$，且

$$\hat{\phi}_\alpha(t)\,|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t)\cdots\rangle=\phi_\alpha(t)\,|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t)\cdots\rangle,$$

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots。$$

在同一时刻的、不同本征值的本征态是正交、归一、完备的，即

$$\langle\phi'_\alpha(t),\ \phi'_\beta(t),\ \cdots|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t),\ \cdots\rangle$$

$$=\delta(\phi'_\alpha(t)\phi'_\beta(t)\cdots,\ \phi_\alpha(t)\phi_\beta(t)\cdots),$$

$$\int\prod_\alpha d\phi_\alpha(t)\,|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t),\ \cdots\rangle\langle\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t)\cdots|=1。$$

转换矩阵元和算符矩阵元 以上所述和第一节所述是相同的，差别在于把一个自由度扩展成了无限多个自由度。既然基础相同，采用前两节的方法，就可以得到和前两节相同的结果，差别也只是自由度的数目而已！

时刻 t 处于量子态 $|\phi_\alpha(t)\phi_\beta(t)\cdots\rangle$ 的场，在 t' 时跃迁到量子

态 $|\phi'_\alpha(t')\phi'_\beta(t')\cdots\rangle$ 的几率幅，即转换矩阵元 $\langle\phi'_\alpha(t'),\ \phi'_\beta(t')\cdots|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t)\cdots\rangle$。由(3–12)式推知，它的路径积分表示为

$$\langle\phi'_\alpha(t'),\ \phi'_\beta(t'),\ \cdots|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t),\ \cdots\rangle$$

$$=\int\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\ \frac{dp_\alpha(t_i)}{2\pi}$$

$$\cdot\exp\left\{i\sum_{\alpha,i}\varepsilon^4\left[\pi_\alpha(t_i)\dot{\phi}_\alpha(t_i)-\mathscr{H}_\alpha(t_i)\right]\right\}。$$

在 $\mathscr{H}_\alpha(t_i)$ 是 $\pi_\alpha(t)$ 的二次方函数的情况下，对 $P_\alpha(t)=\varepsilon^3\pi_\alpha(t_i)$ 积分，就得到上式的费曼形式

$$\langle\phi'_\alpha(t')\phi'_\beta(t')\cdots|\phi_\alpha(t)\phi_\beta(t)\cdots\rangle$$

$$=\int\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\exp\left\{i\sum_{\alpha,i}\varepsilon^4\mathscr{L}_\alpha[\phi_\alpha(t_i),\dot{\phi}_\alpha(t_i),\ \phi_{\alpha+s}(t_i)]\right\}。$$

式中 $t<t_i<t'$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$\varepsilon=\dfrac{t'-t}{n+1}$。算符 $\hat{\phi}_1(t_1)$、$\hat{\phi}_2(t_2)$、$\cdots$、$\hat{\phi}_m(t_m)$ 在量子态 $|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t),\ \cdots\rangle$、$|\phi'_\alpha(t'),\ \phi'_\beta(t')\cdots\rangle$ 间的矩阵元 $\langle\phi'_\alpha(t')\phi'_\beta(t')\cdots|T(\hat{\phi}_1(t_1)\hat{\phi}_2(t_2)\cdots\hat{\phi}_m(t_m))|\phi_\alpha(t),\phi_\beta(t),\cdots\rangle$ 的路径积分表示式就是

$$\langle\phi'_\alpha(t')\phi'_\beta(t')\cdots|T(\hat{\phi}_1(t_1)\hat{\phi}_2(t_2)\cdots\hat{\phi}_m(t_m))|\phi_\alpha(t),\ \phi_\beta(t),\ \cdots\rangle$$

$$=\int\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\cdot\phi_1(t_1)\phi_2(t_2)\cdot\phi_m(t_m)\exp\left[i\sum_{\alpha,i}\varepsilon^4\mathscr{L}_\alpha(t_i)\right]。$$

格林函数及其生成泛函　如前所述，把上列的两个量子态，都换成真空态，令 $t\to-\infty$，$t'\to\infty$，并加上外源 $J_\alpha(t_i)$，就得到格林函数及其生成泛函的路径积分表示式

$$G_{1,2,\cdots,n}(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)\equiv\langle0|T(\hat{\phi}_1(t_1)\hat{\phi}_2(t_2)\cdots\hat{\phi}_n(t_n))|0\rangle$$

$$=\int\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\phi_1(t_1)\phi_2(t_2)\cdots\phi_n(t_n)\exp\left[i\sum_{\alpha,i}\varepsilon^4\mathscr{L}_\alpha(t_i)\right],$$

(3–39)

$$Z[J]\equiv\langle0|0\rangle^J=\int\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\exp\left[i\sum_{\alpha,i}\varepsilon^4(\mathscr{L}_\alpha(t_i)\right.$$

$$\left.+J_\alpha(t_i)\phi_\alpha(t_i))\right]。$$

(3–40)

式中 $-\infty<t_i<\infty$, $i=1, 2, \cdots$; $\alpha=1, 2, 3, \cdots$。而且

$$G_{1,2,\cdots,n}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{\delta^n\langle 0|0\rangle^J}{(i\varepsilon^4)^n\delta J_1(t_1)\delta J_2(t_2)\cdots\delta J_n(t_n)}\Big|_{J_\alpha(t_i)=0}, \tag{3-41}$$

$$Z[J]=\langle 0|0\rangle^J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\varepsilon^4)^n}{n!}G_{1,2,\cdots,n}(t_1, t_2, \cdots, t_n)\cdot J_1(t_1)J_2(t_2)\cdots J_n(t_n)。$$

极限和符号 以上论述是在时空格子化的基础上进行的，和量子力学有严格的对应关系，差别只在于自由度的数目不同。所得结果也是严格正确的(假定量子力学的结果是正确的，假定由有限自由度推广到无限自由度也不发生数学困难)。所以，在进行严格计算时，我们都采用这种形式。但是，格子化的场和连续的场，还是不同的。我们可以把后者看成是前者的极限情况。

在以上论述中，假设时空格子的边长都是 ε，三维空间格子的体积为 ε^3，四维时空格子的体积为 ε^4。在 $\varepsilon\to 0$ 的极限情况下

$$\varepsilon^3\to dV,\ \varepsilon^4\to d^4x=dV\,dt;$$

$$\phi_\alpha(t)\to\phi(x),\ \dot{\phi}_\alpha(t)\to\dot{\phi}(x),\ \pi_\alpha(t)\to\pi(x);$$

$$\mathscr{L}_\alpha(t)\to\mathscr{L}(x),\ L=\int dV\,\mathscr{L}(x),\ \mathscr{H}_\alpha(t)\to\mathscr{H}(x),$$

$$H=\int dV\,\mathscr{H}(x);$$

$$J_\alpha(t)\to J(x);$$

$$G_{1,2,\cdots,n}(t_1, t_2, \cdots, t_n)\to G^n(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

$$\prod_{\alpha,i}d\phi_\alpha(t_i)\to\prod_X d\phi(x)。$$

再以符号表示

$$[d\phi(x)]=\prod_X d\phi(x),\ \sum_{\alpha,i}\varepsilon^4(\mathscr{L}_\alpha(t_i)+J_\alpha(t_i)\phi_\alpha(t_i))$$

$$=\int d^4x[\mathscr{L}+J(x)\phi(x)],$$

那末，(3-39)式、(3-40)式、(3-41)式就可以用符号表示为

$$G_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\int[d\phi(x)]\phi(x_1)\phi(x_2)$$

$$\cdot\phi(x_n)\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}(x)\right],\qquad(3\text{–}42)$$

$$Z[J]=\int[d\phi(x)]\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}(x)+J(x)\phi(x)]\right\},\qquad(3\text{–}43)$$

$$G_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$=\frac{\delta^n\langle 0|0\rangle^J}{i^n\delta J(x_n)\delta J(x_{n-1})\cdots\delta J(x_2)\delta J(x_1)}\Bigg|_{J=0},\qquad(3\text{–}44)$$

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_nG_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)。$$

这就是在文献中经常见到的表示形式。但是，严格计算还得按格子化的形式(3–40)式来进行。

$\phi^4(x)$场　我们以 ϕ^4 场为例，阐明如何根据(3–40)式来计算场的生成泛函，如何按(3–44)式由生成泛函计算格林函数。ϕ^4 场是数学上简单，而物理上又感兴趣的场。它的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)-\frac{\mu^2}{2}\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4\rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2+\mu^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2\right)\phi。\qquad(3\text{–}45)$$

后者比前者只差一散度项，给出同样的作用量，物理上是等价的。

四维格子化　在前面的论述中，我们把时间轴分割成长度为 ε 的小段，又把空间分隔成体积为 ε^3 的小格。综合起来，就是把四维时空分成四维体积为 ε^4 的四维小格子。我们用 σ、$\rho=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，来为这些四维小格子编号。与连续函数相应，定义小格中的场量。对于第 ρ 小格有：

$$\phi(x)\rightarrow\phi_\rho\equiv\frac{1}{\varepsilon^4}\int_{\varepsilon_\rho^4}d^4x\phi(x),$$

$$J(x)\to J_\rho=\frac{1}{\varepsilon^4}\int_{\varepsilon^4_\rho}d^4xJ(x),$$

$$\partial_\mu\phi(x)\to\frac{\phi_{\rho+1_\mu}-\phi_\rho}{\varepsilon_\mu}=\left(\frac{\delta_{\rho+1_\mu,\sigma}-\delta_{\rho,\sigma}}{\varepsilon_\mu}\right)\phi_\sigma,$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi(x)\to\frac{\dfrac{\phi_{\rho+1_\mu}-\phi_\rho}{\varepsilon_\mu}-\dfrac{\phi_\rho-\phi_{\rho-1_\mu}}{\varepsilon_\mu}}{\varepsilon^\mu}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu}(\delta_{\rho+1_\mu,\sigma}-2\delta_{\rho,\sigma}+\delta_{\rho-1\mu,\sigma})\phi_\sigma。$$

式中，1_μ 表示沿 μ 方向与 ρ 小格相邻的小格；ε_μ、ε^μ 的大小都是 ε，而方向沿 μ 轴；$\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3$。令

$$A_{\sigma\rho}\equiv-\frac{1}{\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu}(\delta_{\rho+1_\mu,\sigma}-2\delta_{\rho,\sigma}+\delta_{\rho-1\mu,\sigma})-\mu^2\delta_{\rho,\sigma}-i\varepsilon\delta_{\rho,\sigma},$$

则自由拉格朗日为

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{2}\phi(x)(\partial^2+\mu^2-i\varepsilon)\phi(x)\to\frac{1}{2}\phi_\sigma A_{\sigma\rho}\phi_\rho,$$

$$A\equiv-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon\to A_{\sigma\rho}。$$

自由场的生成泛函　把如上格子化了的量代入(3-40)式，就得到自由场的生成泛函

$$Z[J]_0=\int\prod_\sigma d\phi_\sigma\exp\left[\frac{i\varepsilon^4}{2}\sum_{\sigma,\rho}(\phi_\sigma A_{\sigma\rho}\phi_\rho+2J_\rho\phi_\rho)\right]。$$

显然，$A_{\sigma\rho}$ 是一个实的对称矩阵，可以用一个正交矩阵使它对角化，即令

$$\phi_\rho\to\phi'_\rho=\sum_\sigma O_{\rho\sigma}\phi_\sigma,\ J_\rho\to J'_\rho=\sum_\sigma O_{\rho\sigma}J_\sigma,$$

$$A_{\rho\sigma}\to A'_{\rho\sigma}=\sum_{\lambda,s}O_{\rho\lambda}A_{\lambda s}O^+_{s\sigma}=A'_\rho\delta_{\rho\sigma},$$

$$\sum_\lambda O_{\sigma\lambda}O_{\rho\lambda}=\delta_{\sigma\rho}。$$

则得　$Z[J]_0=\int\prod_\sigma d\phi'_\sigma\exp\left[\frac{i}{2}\varepsilon^4\sum_\rho(A'_\rho\phi'^2_\rho+2J'_\rho\phi'_\rho)\right]。$

其中的任一因子都是高斯积分，可以算出为

$$\int d\phi_\sigma \exp\left[\frac{i}{2}\varepsilon^4(A'_\sigma\phi'^2_\sigma+2J'_\sigma\phi'_\sigma)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{i\varepsilon^4 A'_\sigma}}\exp\left[-\frac{i}{2}\varepsilon^4(J'_\sigma A'^{-1}_\sigma J'_\sigma)\right]。$$

所以 $$Z[J]=\frac{1}{\sqrt{\det A'}}\exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^4\sum_\sigma J'_\sigma A'^{-1}_\sigma J'_\sigma\right)。$$

这里略去了常数因子。再由正交变换把 A'、$J'\to A$, J, 得

$$Z[J]_0=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^4\sum_{\sigma,\rho}J_\rho A^{-1}_{\rho\sigma}J_\sigma\right)。$$

再略去与 J 无关的因子, 在 $\varepsilon\to 0$ 时, 上式成为

$$Z[J]_0=\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)J(y)\right]。$$

(3–46)

自由传播子 两点格林函数 $G_2(x_1, x_2)$叫做传播子。由自由场的生成泛函, 按(3–44)式导出的两点格林函数叫做自由传播子。

把(3–46)式代入(3–44)式得

$$G_2(x_1, x_2)=\frac{\delta^2}{i^2\delta J(x_1)\delta J(x_2)}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)J(y)\right]\Big|_{J=0}$$

$$=\frac{\delta}{i^2\delta J(x_1)}\left\{-i\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)\delta^4(y-x_2)\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)J(y)\right]\right\}\Big|_{J=0}$$

$$=\frac{1}{i^2}\left\{-i\int d^4x d^4y\delta^4(x-x_1)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)\delta^4(y-x_2)\right.$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)J(y)\right]$$

$$\left.+\left(-i\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)\delta^4(y-x_2)\right)\right.$$

$$\cdot\left(-i\int d^4x\,d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)\delta^4(y-x_1)\right)$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)A^{-1}(x)\delta^4(x-y)J(y)\right]\Big\}\Big|_{J=0}$$

$$=iA^{-1}(x_1)\delta^4(x_1-x_2)=i(-\partial_{x_1}^2-\mu^2+i\varepsilon)^{-1}\frac{1}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot\int d^4k e^{ik(x_1-x_2)}=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}。$$

所以，自由标量场的传播子为

$$i\Delta_f(x_1-x_2)\equiv G_2(x_1-x_2)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}。$$

(3–47)

动量表象中的自由传播子为

$$i\Delta_f(k)=\frac{i}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}。\qquad(3–48)$$

自作用场的生成泛函　把 ϕ^4 场的拉格朗日密度 (3–45) 式代入(3–43)式，得到包括自作用在内的生成泛函

$$Z[J]=\int[d\phi(x)]\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\phi(x)(\partial^2+\mu^2-i\varepsilon)\phi(x)\right.\right.$$

$$\left.\left.-2J(x)\phi(x)+\frac{\lambda}{2}\phi^4(x)\right]\right\}。$$

目前，可以精确算出的路径积分，还只限于高斯积分。这个积分包含 $\phi(x)$的四次方，是无法精确计算的，只能作近似计算。我们把 $\phi^4(x)$的因子分出，把上式写成

$$Z[J]=\int[d\phi(x)]\exp\left[-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\cdot\phi^4(x)\right]$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x[\phi(x)(\partial^2+\mu^2-i\varepsilon)\phi(x)-2J(x)\phi(x)]\right\}$$

$$=\int[d\phi(x)]\exp\left[-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4\right]$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x[\phi(x)(\delta^2+\mu^2-i\varepsilon)\phi(x)-2J(x)\phi(x)]\right\}$$

$$= \exp\Big[-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\Big(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\Big)^4\Big]\int [d\phi(x)]$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{i}{2}\int d^4x\,[\phi(x)(\partial^2+\mu^2-i\varepsilon)\phi(x)-2J(x)\phi(x)]\Big\}$$

$$= \exp\Big[-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\Big(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\Big)^4\Big]Z[J]_0$$

$$= \Big[1-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\Big(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\Big)^4+\cdots\Big]$$

$$\cdot\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y J(x)\Delta_f(x-y)J(y)\Big]_0$$

$$Z[J] = \Big[1-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\Big(-i\int d^4y\Delta_f(x-y)J(y)\Big)^4+\cdots\Big]$$

$$\cdot\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y J(x)\Delta_f(x-y)J(y)\Big]_0 \qquad (3\text{–}49)$$

这就是 ϕ^4 场的格林函数生成泛函的微扰展开式。我们假设自作用常数 λ 是小量。当 $\lambda=0$ 时，就得到自由场的 $Z[J]_0$。

四点格林函数 原则上可以从 (3–49) 式算出各种格林函数。但是，由于计算繁琐，且得不到比普通微扰方法更有意义的结果。所以，我们不作深入讨论。作为应用举例，计算四点格林函数。它是

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4}{i^4\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}$$

$$\cdot\Big\{\Big[1-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\Big(-i\int d^4y\Delta_f(x-y)J(y)\Big)^4+\cdots\Big]$$

$$\cdot\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_f(x-y)J(y)\Big]\Big\}_{J=0}$$

$$= i\Delta_f(x_1-x_2)i\Delta_f(x_3-x_4)+i\Delta_f(x_1-x_3)i\Delta_f(x_2-x_4)$$

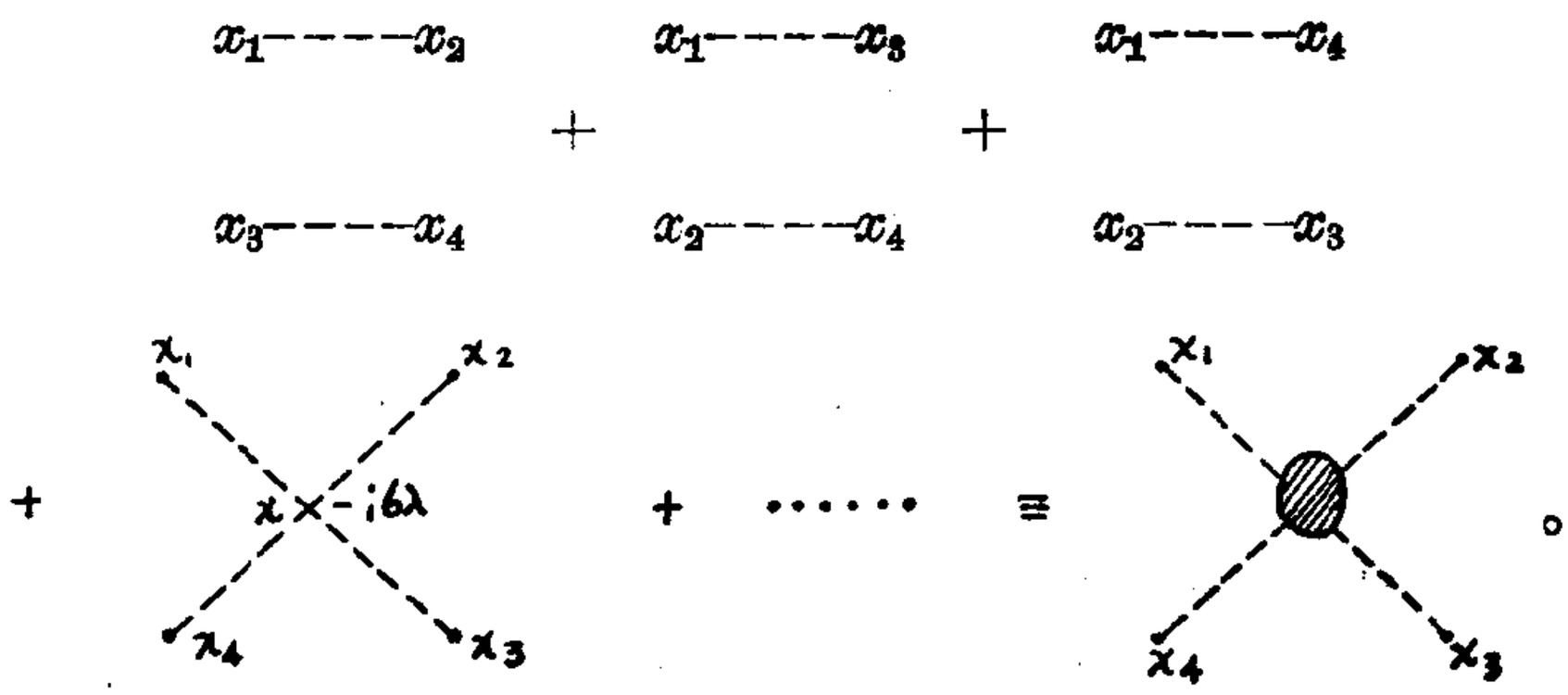
$$+i\Delta_f(x_1-x_4)i\Delta_f(x_2-x_3)-i6\lambda\int d^4x i\Delta_f(x-x_1)$$

$$\cdot i\Delta_f(x-x_2)i\Delta_f(x-x_3)i\Delta_f(x-x_4)+O(\lambda^2)。 \qquad (3\text{–}50)$$

用费曼图表示，就是

$$x\text{----}y,\ i\Delta_f(x-y)。$$

$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$:



§4. 连通格林函数及其生成泛函

连通格林函数是这样一种格林函数，它的费曼图是连通的。由(3–39)式定义、按(3–41)式计算的格林函数是由连通格林函数组成的。从(3–50)式及其费曼图看来，由

$$G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \langle | T(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)) | \rangle$$

定义，按

$$G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n Z[J]}{i^n \delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{3–51}$$

计算的格林函数有复杂结构：1．它是许多项之和；2．每一项是多个连通格林函数的乘积，有一项是单个连通格林函数；3．有些项是同类的，它们包含同样多个相同的连通格林函数，差别只在于顶角的编号不同。

同类项的数目 格林函数的复杂结构，从(3–51)式也可以推测出来。由(3–49)式看来，$Z[J]$可以展开为J的多项式。对$G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$有贡献的，只是正好包含$n$个$J$乘积的那些项。这就显示出格林函数的上述的复杂结构。不仅这样，还可以

由此推出同类项的数目。设想在某一类的某一项中有：m_1 个一点格林函数 $G_1^c(\cdot)$，m_2 个两点连通格林函数 $G_2^c(\cdot\cdot)$，m_3 个三点连通格林函数 $G_3^c(\cdots)\cdots$，m_l 个 l 点连通格林函数 $G_l^c(\cdots\cdot)$。由于 n 点格林函数的每一项，都只有 n 点。所以 1、m_1、2、m_2、3、m_3、$\cdots$、l、m_l 应该满足条件

$$1\cdot m_1+2\cdot m_2+3\cdot m_3+\cdots l\cdot m_l=n。\tag{3-52}$$

$Z[J]$中有 n 个 J 的项，对 n 个 J 微分，有 $n!$ 种微法，因而得到 $n!$ 项。l 点连通格林函数是由 l 个 J 对 J 微分 l 次得到的，有 $l!$ 种微法，因而有 $l!$ 种只是 l 点排列不同的连通格林函数。m_l 个 l 点连通格林函数，就有只是点的排列不同的 $(l!)^{m_l}$ 个。所以，由 m_l 个 G_1^c、m_2 个 G_2^c、m_3 个 G_3^c、……、m_l 个 G_l^c 构成的同类项，共有

$$\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}(3!)^{m_3}\cdots(l!)^{m_l}}$$

个。由此可知，$G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的复杂结构，可以用公式表示为

$$G_n(\cdots\cdots)=\sum_{(m_l)}\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_l!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(l!)^{m_l}}\cdot[G_1^c(\cdot)]^{m_1}[G_2^c(\cdot\cdot)]^{m_2}\cdots[G_l^c(\cdots)]^{m_l}。\tag{3-53}$$

$m_l!$ 因子是由 m_l 个 G_l^c 的不同排列产生的。$\{m_l\}$ 表示对满足(3-52)式的各种 1、m_1、2、m_2、$\cdots$、l、m_l 值的组合。

连通格林函数的生成泛函 把(3-53)式代入(3-44)式得

$$Z[J]=\sum_n\frac{i^n}{n!}\cdot\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_nG_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)$$

$$=\sum_{n,(m_l)}\frac{i^n}{m_1!m_2!\cdots m_l!(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots(l!)^{m_l}}\cdot\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n[G_1^c(\cdot)]^{m_1}[G_2^c(\cdot\cdot)]^{m_2}\cdots[G_l^c(\cdots)]^{m_l}J(x_1)\cdot J(x_2)\cdots J(x_n)=\sum_{n,(m_l)}\frac{1}{m_1!}\left[\frac{i}{1!}\int d^4x_1G_1^c(x_1)J(x_1)\right]^{m_1}$$

$$\cdot\frac{1}{m_2!}\left[\frac{i^2}{2!}\int d^4x_1d^4x_2G_2^c(x_1,\ x_2)J(x_1)J(x_2)\right]^{m_2}\cdots$$

$$\cdot\frac{1}{m_l!}\left[\frac{i^l}{l!}\int d^4x_1\cdots d^4x_lG_l^c(x_1\cdots x_l)J(x_1)\cdots J(x_l)\right]^{m_l}。$$

对于确定的 n，$\{m_l\}$表示满足(3-52)式的各种可能组合，而 $n=0$，1，2，…是任意的正整数。所以，上式可以写为

$$Z[J]=\left(\sum_{m_1}\frac{1}{m_1!}\left[\frac{i}{1!}\int d^4x_1G_1^c(x_1)J(x_1)\right]^{m_1}\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{m_2}\frac{1}{m_2!}\left[\frac{i^2}{2!}\int d^4x_1d^4x_2G_2^c(x_1,\ x_2)J(x_1)J(x_2)\right]^{m_2}\right)\cdots\cdots$$

$$=\exp\left[\frac{i}{1!}\int d^4x_1G_1^c(x_1)J(x_1)\right]$$

$$\cdot\exp\left[\frac{i^2}{2}\int d^4x_1d^4x_2G_2^c(x_1,\ x_2)J(x_1)J(x_2)\right]\cdots\cdots$$

$$=\exp\left[i\sum_l\frac{i^{l-1}}{l!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_lG_l^c(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l)\right.$$

$$\left.\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_l)\right]。$$

令

$$Z[J]=e^{iW[J]},\tag{3-54}$$

则

$$W[J]=\sum_l\frac{i^{l-1}}{l!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_lG_l^c(x_1,x_2,\cdots,x_l)J(x_1)$$

$$\cdot J(x_2)\cdots J(x_l),\tag{3-55}$$

$$G_l^c(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l)=\left.\frac{\delta^lW[J]}{i^{l-1}\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_l)}\right|_{J=0}。$$

所以，我们把 $W[J]$叫做连通格林函数 $G_l^c(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l)$ $(l=1,2,\cdots)$ 的生成泛函。(3-54)式表示连通格林函数生成泛函 $W[J]$和格林函数生成泛函 $Z[J]$的关系。通常，我们先按照(3-40)式算出 $Z[J]$，然后再由(3-54)式算出 $W[J]$。

自由 ϕ^4 场的例　前面我们已经算出了自由 ϕ^4 场的格林函数生成泛函(3-46)式、(3-47)式

$$Z[J_0]=\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y J(x)\Delta_f(x-y)J(y)\Big],$$

$$i\Delta_f(x-y)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}。$$

把它和(3-54)式比较，就得到自由 ϕ^4 场的连通格林函数的生成泛函

$$W[J_0]=-\frac{1}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_f(x-y)J(y)。$$

把它代入(3-55)式，就得到自由 ϕ^4 场的唯一的连通格林函数

$$\begin{aligned}G_2^c(x_1,\,x_2)&=\frac{\delta^2W[J]_0}{i\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\\&=\frac{-1}{i}\int d^4x\,d^4y\,\delta^4(x-x_1)\Delta_f(x-y)\delta^4(y-x_2)\\&=i\Delta_f(x_1-x_2)。\end{aligned}$$

当 $\mu^2>0$ 时，它就是标量场的自由传播子。

§5. 正规顶角及其生成泛函

在热力学中，利用热力学函数，如内能 U、自由能 F、热力势 Φ、熵 S 等，来描述系统的热力学性质，研究系统过程的规律。这些热力学函数，具有各自的特点，便于描述各自不同的独特过程，而它们之间又按一定的变换关系相互联系。例如，以状态参量 p(压强)、V(体积)、T(温度)表征的系统，热力学规律可以表示为

$$dU=TdS-pdV。$$

经过变换 $\Phi=U+pV$ 后，又可以表示为

$$d\Phi=TdS+Vdp。$$

如由变换 $F=U-TS$，则可以表示为

$$dF=-SdT-pdV。$$

同是热力学定律，采用不同的热力学函数，就有不同的表示形式，可以用来描写不同的热力学过程。

在力学中也有类似情况。以坐标 q、速度 $\dot{q}$ 为变量时，就用拉格朗日 $L(q, \dot{q})$ 及其运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0,$$

来描述系统的运动规律。如果把速度 $\dot{q}$ 换成动量

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

变量就是 q 和 p，描述系统运动规律的就是哈密顿

$$H(q, p)=p\dot{q}-L$$

及其运动方程

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}。$$

总之，由于多方面的需要，描写系统状态和规律的函数，不局限于一个，而希望有多个。在量子场论的生成泛函中，也是如此。除格林函数生成泛函和连通格林函数生成泛函外，还有正规顶角生成泛函和超势。

场变量 $\phi(x)$ 不管是格林函数的生成泛函 $Z[J]$，还是连通格林函数的生成泛函 $W[J]$，它们都是外源 $J(x)$ 的泛函，它们的变量都是外源 $J(x)$。现在，我们把变量 $J(x)$ 换成场变量

$$\phi(x)\equiv\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}。\tag{3-56}$$

根据(3-54)式和格林函数及其生成泛函的意义，得

$$\phi(x)=\frac{1}{i}\frac{\delta \ln Z[J]}{\delta J(x)}=\frac{1}{iZ[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle^{J}。$$

这表明：场变量 $\phi(x)$ 是有外源时的场算符 $\hat{\phi}(x)$ 的真空期待值。显然，它和场算符 $\hat{\phi}(x)$ 的本征值 $\phi(x)$ $(\hat{\phi}(x)|\phi(x)\rangle=\phi(x)|\phi(x)\rangle)$，是意义不同的两个函数。但是，我们常常用同样的符号表示它们，这是应该注意区分的。

对于具有破缺对称的场，如 Higgs 场，在没有外源时，它的真

空平均值就不等于零，而等于 v，即

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle^{J\neq 0}=\phi(x),\ \langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle^{J=0}=v。\qquad (3\text{–}57)$$

对于非破缺对称的场，没有外源时的真空平均值为 0，即

$$\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle^{J\neq 0}=\phi(x);\ \langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle^{J=0}=0。$$

由此看来，场变量 $\phi(x)$ 标志着外源 $J(x)$ 对真空破缺的情况，(3–56)式决定着它和外源的依赖关系。

正规顶角及其生成泛函　按照 (3–56) 式把变量函数 $J(x)$ 变换成 $\phi(x)$ 的同时，我们把连通格林函数的生成泛函 $W[J]$ 变换成正规顶角的生成泛函

$$\Gamma[\phi]\equiv W[J]-\int d^4xJ(x)\phi(x)。\qquad (3\text{–}58)$$

由(3–57)知，$J=0$ 时，$\phi(x)=v$。我们将 $\Gamma[\phi]$ 在 $\phi=v$ 的邻域展开

$$\Gamma[\phi]=\sum_n\frac{1}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n\frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)\cdots\delta\phi(x_n)}\Big|_{\phi=v}$$
$$\cdot(\phi(x_1)-v)(\phi(x_2)-v)\cdots(\phi(x_n)-v),$$

并把

$$\Gamma_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\equiv\frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)\cdots\delta\phi(x_n)}\Big|_{\phi=v}\qquad (3\text{–}59)$$

叫做 n 点正规顶角。

$\Gamma_1(x)$　由(3–59)式、(3–58) 式定义的正规顶角的意义如何呢？为了理解它的物理意义，我们将(3–58)式对 $\phi(x)$ 求导

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}=\int d^4y\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}-\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y)$$
$$-\int d^4yJ(y)\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)}=\int d^4y\phi(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}-\int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y)$$
$$-\int d^4yJ(y)\delta^4(y-x)=-J(x),$$

得

$$\Gamma_1(x)=-J(x),\qquad (3\text{–}60)$$

即一点正规顶角就是负的外源 $-J(x)$。当 $J=0$ 时，$\phi=v$，

$$\Gamma_1(x)\Big|_{\phi=v}=\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi=v}=0。\qquad(3\text{–}61)$$

(3–60)式与(3–56)式相应,以又一种方式确定了外源 $J(x)$ 和场变量 $\phi(x)$ 之间的变换关系。(3–61)式可以用来确定场在没有外源时的真空破缺值。这和经典物理中,用势函数的极值来确定能量最低态,是相对应的。

$\Gamma_2(x,\ y)$ 将(3–60)式对 $J(y)$ 求导,得

$$\int d^4z\,\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(x)}\cdot\frac{\delta\phi(z)}{\delta J(y)}$$

$$=\int d^4z\,\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(z)}\cdot\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)}=-\delta^4(x-y)。\qquad(3\text{–}62)$$

当 $J=0$, $\phi=v$ 时,上式成为

$$\int d^4z\Gamma_2(x,\ z)\Delta_f(z-y)=\delta^4(x-y)。\qquad(3\text{–}63)$$

这表明,$\Gamma_2(x,\ y)$ 和 $\Delta_f(y,\ x)$ 互逆,即

$$\Gamma_2(x,\ y)=\Delta_f^{-1}(x,\ y)。$$

两点正规顶角和传播子有互为倒数的关系。如果在(3–63)式的两边都乘上 $\Delta_f(y',\ x)$,并对 x 积分得

$$\int d^4xd^4z\Delta_f(y'-x)\Gamma_2(x,\ z)\Delta_f(z-y)=\Delta_f(y'-y)。$$

这显示正规顶角是截去外腿的格林函数,即



$\Gamma_3(i,j,k)$ 为了进一步讨论正规顶角的意义,简单起见,我们把连续坐标 $x,y\cdots$ 换成不连续的指标 $i,\ j\cdots$,把积分变成求和,而且按照相对论中常用的规则,重复指标就包含了求和。这样,(3–62)式就可以写成

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}=-\delta_{is}.$$

将它对 J_l 求导得

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta\phi_k}{\delta J_l}\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}+\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j}\cdot\frac{\delta^3W}{\delta J_j\delta J_s\delta J_l}=0,$$

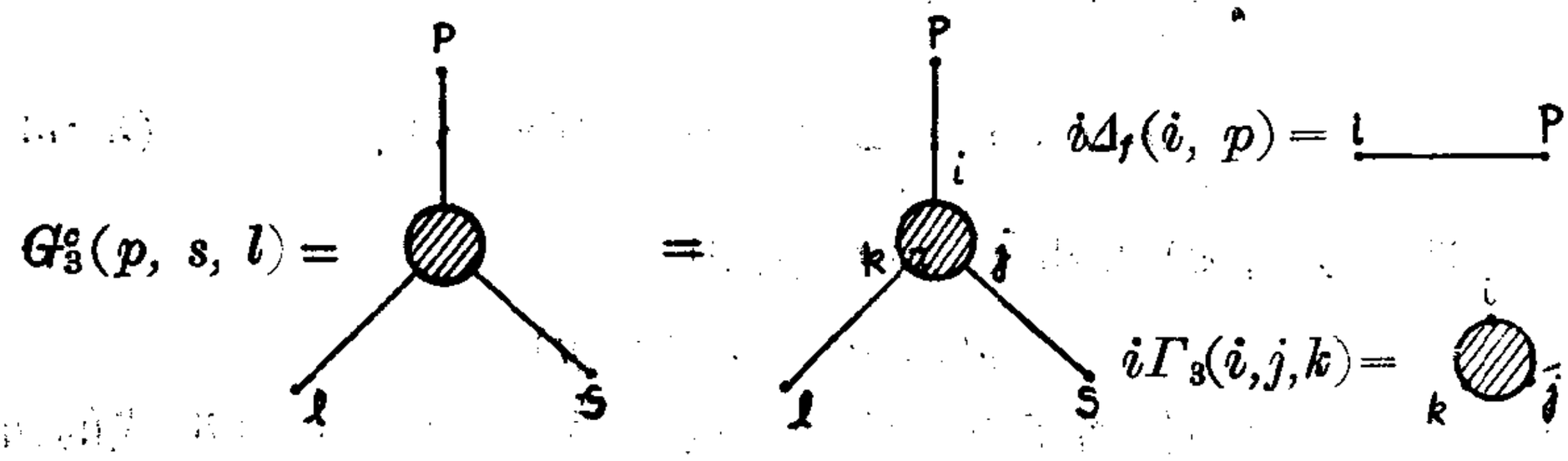
$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_k\delta J_l}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}-\left(\frac{\delta^2W}{\delta J_i\delta J_p}\right)^{-1}\frac{\delta^3W}{\delta J_p\delta J_s\delta J_l}=0,$$

$$\frac{\delta^3W}{i^2\delta J_p\delta J_s\delta J_l}=\frac{i\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta^2W}{i\delta J_i\delta J_p}\cdot\frac{\delta^2W}{i\delta J_k\delta J_l}\cdot\frac{\delta^2W}{i\delta J_j\delta J_s}.\tag{3-64}$$

当 $J=0$, $\phi=v$ 时, 上式成为

$$G_3^c(p,\ s,\ l)=i\Gamma_3(i,\ j,\ k)\cdot i\Delta_f(i,\ p)\cdot i\Delta_f(j,\ s)\cdot i\Delta_f(k,\ l),$$

相应的费曼图是



这清楚表明: $i\Gamma_3$ 是截去了三条外腿的连通格林函数 G_3^c, 而且是单粒子不可约的 (1PI), 即截断任一条内线都不可能分成两个图形。

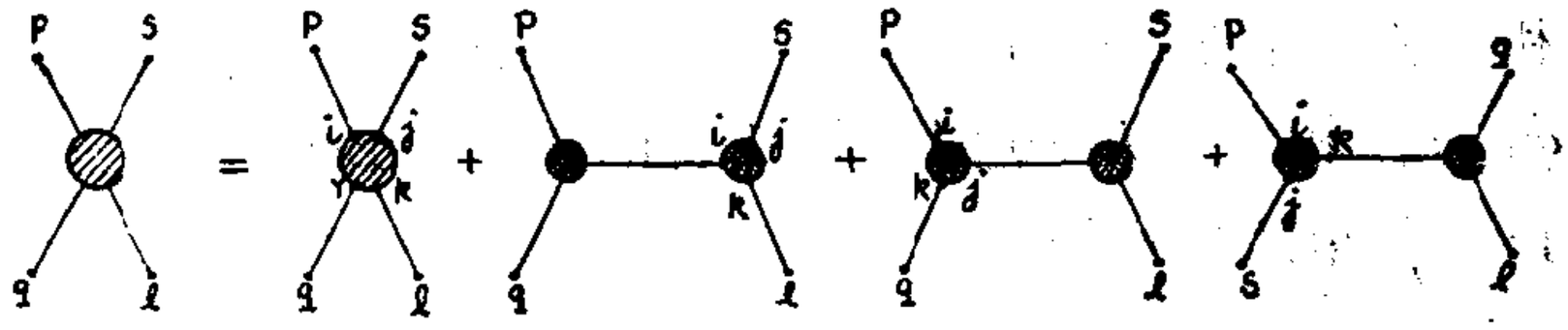
$\Gamma_4(i,\ j,\ k,\ r)$ 将(3-64)式对 J_q 微分得

$$\frac{\delta^4W}{\delta J_p\delta J_s\delta J_l\delta J_q}=\frac{\delta^4\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k\delta\phi_r}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_r\delta J_q}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_k\delta J_l}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}$$
$$\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_i\delta J_p}+\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta^3W}{\delta J_i\delta J_p\delta J_q}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_k\delta J_l}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}$$
$$+\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_i\delta J_p}\cdot\frac{\delta^3W}{\delta J_k\delta J_l\delta J_q}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_j\delta J_s}$$
$$+\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_i\delta J_p}\cdot\frac{\delta^2W}{\delta J_k\delta J_l}\cdot\frac{\delta^3W}{\delta J_j\delta J_s\delta J_q}.$$

当 $J=0$, $\phi=v$ 时, 上式成为

$$G_4^c(p,\ s,\ l,\ q)=iG_4(i,\ j,\ k,\ r)\cdot i\Delta_f(i,\ p)\cdot i\Delta_f(j,\ s)$$
$$\cdot i\Delta_f(k,\ l)\cdot i\Delta_f(r,\ q)+iG_3(i,\ j,\ k)\cdot G_3^c(i,\ p,\ q)\cdot i\Delta_f(j,\ s)$$
$$\cdot i\Delta_f(k,\ l)+iG_3(i,\ j,\ k)\cdot i\Delta_f(i,\ p)\cdot G_3^c(j,\ s,\ q)$$
$$\cdot i\Delta_f(k,\ l)+iG_3(i,\ j,\ k)\cdot i\Delta_f(i,\ p)\cdot i\Delta_f(j,\ s)$$
$$\cdot G_c^3(k,\ l,\ q)。$$

相应的费曼图是



$$iG_4(i,\ j,\ k,\ r=$$ 

这再一次说明：正规顶角函数 iG_4 是截去了外腿的连通格林函数 G_4^c, 而且是单粒子不可约的(1PI)。推而广之, 用数学归纳法可以证明, 上述论断对任意 n 点正规顶角都是正确的。

动量表象 在不只一个场变量的情况下, 我们把 n 点正规顶角写成 $G^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, i_1, i_2, $\cdots$, i_n 标志的可能是不同的场变量。这正规顶角是在坐标表象中写出的。物理上需要的, 常常是动量表象中的表示式。为此, 我们将它作福里叶变换

$$\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_nG^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)e^{ix_ip_i}。$$

物理过程总是能量、动量守恒的。这种守恒定律和时空均匀性相联系, 用时空平移不变性来反映。因此, G_n 中的 n 个时空坐标, 必需是 $n-1$ 个坐标差的形式。令

$$x=x_1,\ y_i=x_i-x_1,\ i=2,\ 3,\ \cdots,\ n,$$

则上式为

$$\int d^4x d^4y_2\cdots d^4y_n\Gamma^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n)\exp(ix\Sigma p_i+iy_ip_i)$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)\cdot\int d^4y_2\cdots d^4y_n\Gamma^n_{i_1,i_2,\cdots i_n}(y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n)e^{iy_ip_i}$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)\tilde{\Gamma}^n_{i_1,i_2\cdots,i_n}(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)。\qquad(3\text{–}65)$$

式中的 $\delta^4(\sum p_i)$ 正是能量、动量守恒的体现。$\tilde{\Gamma}^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)$是动量表象中的 n 点正规顶角，被截去的外腿的动量为：$p_1, p_2,\ \cdots,\ p_n$。

和 $J\neq 0$ 时的场算符的真空平均值，即场变量 $\phi_{i_1}(x_1)$、$\phi_{i_2}(x_2)$、$\cdots$、$\phi_{i_n}(x_n)$ 相应，$J=0$ 时的场算符的真空平均值为 v_{i_1}, v_{i_2}, $\cdots$, v_{i_n}。正规顶角的生成泛函就是

$$\Gamma[\phi]=\sum_{n,i_\alpha}\frac{1}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n\Gamma^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$\cdot(\phi_{i_1}(x_1)-v_{i_1})(\phi_{i_2}(x_2)-v_{i_2})\cdots(\phi_{i_n}(x_n)-v_{i_n})。$$

用福里叶变换可以把它转到动量表象，但其形式是复杂的。

零动量顶角和超势　在场变量 $\phi_\alpha(x)$ 与时空坐标 x 无关的情况下，上式在动量表象中有简单的形式。设想我们可以控制外源 $J(x)$，使得不仅在 $J=0$ 时 v_α 为常数，而且在 $J\neq 0$ 时 ϕ_α 也是与时空坐标无关的常数。那末上式就成为

$$\Gamma[\phi]=\sum_{n,i_\alpha}\frac{1}{n!}\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n\Gamma^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$\cdot[(\phi_{i_1}-v_{i_1})(\phi_{i_2}-v_{i_2})\cdots(\phi_{i_n}-v_{i_n})]$$

$$=\sum_{n,i_\alpha}\frac{1}{n!}\int d^4xd^4y_2\cdots d^4y_n\Gamma^n_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n)$$

$$\cdot[(\phi_{i_1}-v_{i_1})(\phi_{i_2}-v_{i_2})\cdots(\phi_{i_n}-v_{i_n})]$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(0)\sum_n\frac{1}{n!}\tilde{\Gamma}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

$$\cdot(\phi_{i_1}-v_{i_1})(\phi_{i_2}-v_{i_2})\cdots(\phi_{i_n}-v_{i_n})。$$

$\tilde{\Gamma}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 叫做零动量正规顶角，是截掉了 n 条动量

$p=0$ 的外腿的连通格林函数。这时，按照

$$\Gamma[\phi]=-(2\pi)^4\delta^4(0)V(\phi) \tag{3-66}$$

定义超势 $V(\phi)$。显然

$$V(\phi)=-\sum_{n,i_\alpha}\frac{1}{n!}\tilde{\Gamma}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)(\phi_{i_1}-v_{i_1})\cdot(\phi_{i_2}-v_{i_2})\cdots(\phi_{i_n}-v_{i_n}),$$

$$\tilde{\Gamma}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=-\left.\frac{\delta^n V(\phi)}{\delta\phi_{i_1}\delta\phi_{i_2}\cdots\delta\phi_{i_n}}\right|_{\phi_\alpha=v_\alpha}。 \tag{3-67}$$

这表明，超势 $V(\phi)$ 是零动量正规顶角的生成泛函。

§6. $\phi^4(x)$ 场的生成泛函

格林函数生成泛函 $Z[J]$、连通格林函数生成泛函 $W[z]$、正规顶角生成泛函 $\Gamma[\phi]$ 和超势 $V(\phi)$，都是描述量子场的特征泛函。$Z[J]$ 的路径积分表示(3-43)式，和诸泛函之间的关系 (3-54) 式、(3-56)式、(3-58)式、(3-66)式，是计算它们的方法和途径。由于路径积分，只有高斯型的才能精确算出。所以，除自由场外，凡是有相互作用的场，都只能用微扰方法作近似计算。在第三节中，我们以 ϕ^4 为例，介绍了一种近似计算的方法。现在，我们还是以 ϕ^4 为例，系统地介绍近似计算诸生成泛函的另一种方法。这些方法也可以用来计算其他的量子场。

$\phi^4(x)$ 场　一个实标量的 ϕ^4 场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\phi(x)\ (-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi(x)-\frac{\lambda}{4}\phi^4(x),$$

作用量是

$$S=\int d^4x\mathscr{L}(x)=\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi(x)\ (-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi(x)-\frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\right]。 \tag{3-68}$$

作用量是场量 $\phi(x)$ 的泛函 $S[\phi]$，可以将它在某个确定函数 $\phi_0(x)$

的邻域展开，即令

$$S[\phi]=S[\phi_0]+\int d^4x\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}(\phi(x)-\phi_0(x))+\frac{1}{2}\int d^4xd^4y$$
$$\cdot\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))+\cdots。$$

把它代入(3–43)式得

$$Z[J]=\int[d\phi]\exp\left\{iS[\phi_0]+i\int d^4x\left[\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}\right.\right.$$
$$\cdot(\phi(x)-\phi_0(x))+J(x)\phi(x)\left.\right]+\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}$$
$$\left.\cdot(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))\right\}+\cdots$$

路径积分是对 $\phi(x)$进行的，$\phi_0(x)$与 $\phi(x)$无关，与积分无关。所以，上式可以写成

$$Z[J]=\exp\left\{iS[\phi_0]+i\int d^4xJ(x)\phi_0(x)\right\}\int[d\phi]\exp\left\{i\int d^4x\right.$$
$$\cdot\left(\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}+J(x)\right)(\phi(x)-\phi_0(x))+\frac{i}{2}\int d^4xd^4y$$
$$\left.\cdot\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))+\cdots\right\}。\tag{3–69}$$

式中的 $J(x)$和 $\phi_0(x)$都是可以任意给定的函数，我们如何选择它们来使计算简化？

鞍点近似　我们选取 ϕ_0 满足方程

$$\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)}+J(x)=0,\tag{3–70}$$

使(3–69)式变成

$$Z[J]=\exp\left\{iS[\phi_0]+i\int d^4xJ(x)\phi_0(x)\right\}\int[d\phi]\exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))+\cdots\right\}。\tag{3–71}$$

按(3–70)式选取的 $\phi_0(x)$ 叫做鞍点，按(3–71)式计算的 $Z[J]$ 等叫做鞍点近似下的生成泛函。

对于 ϕ^4 场，把(3–68)式代入(3–70)式，得

$$(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_0(x)-\lambda\phi_0^3(x)=-J(x)。$$

设想 λ 是微小的，用微扰方法求解上式，令

$$\phi_0(x)=\phi_{00}(x)+\lambda\phi_{01}(x)+\cdots,$$

代入上式得

$$(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)(\phi_{00}(x)+\lambda\phi_{01}(x)+\cdots)$$
$$-\lambda(\phi_{00}(x)+\lambda\phi_{01}(x)+\cdots)^3=-J(x),$$

按 λ 的不同幂次分解成方程

$$(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_{00}(x)=-J(x),$$
$$(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_{01}(x)=\phi_{00}^3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots。$$

和这些方程相应的格林函数为

$$(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\Delta_f(x-y)=\delta^4(x-y),$$
$$\Delta_f(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}。$$

所以，其解为

$$\phi_{00}(x)=-\int d^4y\Delta_f(x-y)J(y),$$
$$\phi_{01}(x)=-\int d^4y\Delta_f(x-y)\left[\int d^4z\Delta_f(y-z)J(z)\right]^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots。$$

由此可知，ϕ^4 场的鞍点为

$$\phi_0(x)=v-\int d^4y\Delta_f(x-y)J(y)-\lambda$$
$$\cdot\int d^4y\Delta_f(x-y)[d^4z\Delta_f(y-z)J(z)]^3+\cdots\cdots。\quad(3–72)$$

$v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ 是鞍点齐次方程的解，即 Higgs 场的 $J=0$ 时的真空

平均值。

树图近似 取 $S[\phi]\sim S[\phi_0]$，(3-71) 式中的积分因子 ~ 1。这种近似叫做树图近似。在这近似下，ϕ_4 场的格林函数生成泛函为

$$Z_0[J]=\exp[iS[\phi_0]+i\int d^4xJ(x)\phi_0(x)]$$

$$=\exp\left\{i\int d^4x[\phi_0(x)\frac{1}{2}(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_0(x)\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{4}\phi_0^4(x)+J(x)\phi_0(x)]\right\}。$$

由(3-54)式和上式推知，ϕ^4 场的连通格林函数的生成泛函为

$$W_0[J]=S[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x)$$

$$=\int d^4x[\phi_0(x)\frac{1}{2}(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_0(x)$$

$$-\frac{\lambda}{4}\phi_0^4(x)+J(x)\phi_0(x)]。$$

按照(3-56)式引进场变量

$$\phi(x)=\frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)}=\int d^4y\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta\phi_0(y)}\cdot\frac{\delta\phi_0(y)}{\delta J(x)}$$

$$+\int d^4yJ(y)\frac{\delta\phi_0(y)}{\delta J(x)}+\phi_0(x)=\phi_0(x)。$$

在鞍点近似下，上式中的前两项由于鞍点方程而相消，这时的场变量就等于鞍点。再由(3-58)式推知正规顶角的生成泛函为

$$\Gamma_0[\phi_0]=W_0[J]-\int d^4xJ(x)\phi_0(x)=S[\phi_0]$$

$$=\int d^4x\left[\phi_0(x)\frac{1}{2}(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_0(x)-\frac{\lambda}{4}\phi_0^4(x)\right]。$$

树图近似的正规顶角生成泛函等于作用量，这是一个重要的结果！

当 $\phi_0(x)$ 为常数时，

$$\Gamma_0[\phi_0]=\left(-\frac{\mu^2}{2}\phi_0^2-\frac{\lambda}{4}\phi_0^4\right)(2\pi)^4\delta^4(0),$$

按(3-66)式，ϕ^4 场的有效势，即超势为

$$V_0(\phi)=\frac{\mu^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4。$$

这和经典势是一样的。

费曼规则 树图近似的正规顶角生成泛函等于作用量，这个对所有场都适用的重要结果，可以用来导出量子场的费曼规则，而无需进行复杂的路径积分。费曼规则包含传播子和顶角。顶角就是正规顶角，传播子等于两点顶角的逆。现在，我们以 ϕ^4 场为例，来阐明导出费曼规则的方法。ϕ^4 场的树图正规顶角生成泛函即作用量为

$$\begin{aligned}\Gamma_0[\phi]&=S[\phi]\\&=\int d^4x\left[\ \phi(x)\frac{1}{2}(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi(x)\ -\frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\ \right]。\end{aligned}$$

两点正规顶角，因

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}&=\int d^4z[\delta^4(x-z)(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(z-y)\\&\qquad-3\lambda\phi^2(z)\delta^4(z-x)\delta^4(z-y)]\\&=(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(x-y)-3\lambda\phi^2(x)\delta^4(x-y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,2}(x,y)&=(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(x-y)\\&\qquad-3\lambda v^2\delta^4(x-y)。\end{aligned}$$

由(3-63)式得

$$\begin{aligned}\Delta_f^0(x,y)&=(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon-3\lambda v^2)^{-1}\delta^4(x-y)\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-\mu^2-3\lambda v^2+i\varepsilon}\\&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+2\mu^2+i\varepsilon}。\end{aligned}$$

乘以 i，就是传播子。动量表象中的传播子为

$$i\Delta_f^0(k)=\frac{i}{k^2-\mu^2-3\lambda v^2+i\varepsilon}=\frac{i}{k^2+2\mu^2+i\varepsilon}=$$

这表明：$\mu^2>0$, $v=0$ 时，ϕ^4 场就是有自作用的、质量为 μ 的普通的标量场；$\mu^2<0$, $v^2=-\frac{\mu^2}{\lambda}>0$ 时，ϕ^4 场就是质量为 $\sqrt{-2\mu^2}$ 的 Higgs 场。

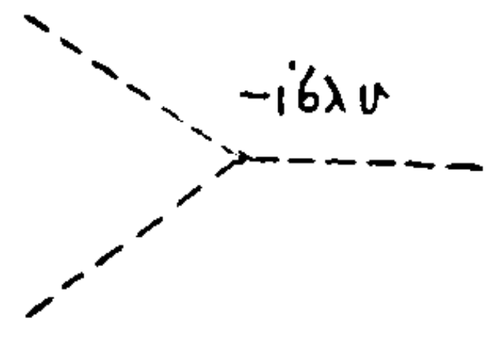
三点正规顶角，因

$$\frac{\delta^3\Gamma_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)}=\int d^4t(-6\lambda\phi(t)\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z))$$

$$=-6\lambda\phi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z),$$

而

$$\Gamma_{03}=-6\lambda v\int d^4t\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)$$

$=$ 

这表明：普通的 ϕ^4 标量场 $\mu^2>0, v=0$，三点顶角是不存在的；$\mu^2<0$, $v=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ 的 Higgs 场的三点顶角的作用强度为 $-i6\lambda v$。

四点正规顶角，因

$$\frac{\delta^4\Gamma_0}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(s)}$$

$$=\int d^4t(-6\lambda\delta^4(t-x)\delta^4(t-y)\delta^4(t-z)\delta^4(t-s))$$

$$=-6\lambda\int d^4t\,d^4k_1\,d^4k_2\,d^4k_3\,d^4k_4\cdot\frac{1}{(2\pi)^{16}}$$

$$\cdot\exp[ik_1(t-x)+ik_2(t-y)+ik_3(t-z)+ik_4(t-s)],$$

$$\Gamma_4^0=-6\lambda(2\pi)^4\delta^4(\sum k_i)\int d^4k_1\,d^4k_2\,d^4k_3\,d^4k_4$$

$$\cdot\frac{\exp\left[-i(k_1x+k_2y+k_3z+k_4t)\right]}{(2\pi)^{16}}=$$



这结果和经典的一样。

单圈近似 按照(3-71)式计算生成泛函时，如果只考虑 S 的二次导数项，那么就是单圈近似。在这近似下，格林函数的生成泛函为

$$Z_1[J]=e^{iW_0[J]}\int[d\phi]\exp\left\{i\int d^4x\,d^4y\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}[\phi(x)-\phi_0(x)][\phi(y)-\phi_0(y)]\right\}。$$

路径积分的因子，是高斯积分，可以用前面介绍过的、格子化、对角化等方法计算出来。计算结果中和 $\phi_0(x)$，因而和 $J(x)$ 有关的因子为

$$\left[\det\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\exp\left\{\ln\left[\det\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|\right\}。$$

所以格林函数生成泛函就是

$$Z_1[J]=\exp\left\{iW_0[J]-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|\right\}。$$

连通格林函数生成泛函就是

$$W_1[J]=W_0[J]+\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|。$$

将外源 J 变换到场变量

$$\phi_1(x)\equiv\frac{\delta W_1[J]}{\delta J(x)}=\frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)}$$
$$+\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|,$$

$$\phi_1(x)=\phi_0(x)+\varepsilon,$$

$$\varepsilon=\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|。$$

ε 是一个复杂的因子，但总把它看作小量。

这时，正规顶角的生成泛函是

$$\Gamma_1[\phi_1]=W_1[J]-\int d^4xJ(x)\phi_1(x)$$

$$=W_0[J]+\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|$$

$$-\int d^4xJ(x)\cdot\phi_1(x)。$$

按 $\varepsilon=\phi_1(x)-\phi_0(x)$ 作展开

$$S[\phi_1]+\int d^4xJ(x)\phi_1(x)=S[\phi_0]+\int d^4xJ(x)\phi_0(x)$$

$$+\int d^4x\left[\frac{\delta S}{\delta\phi_0(x)}+J(x)\right]\varepsilon+O(\varepsilon^2)=W_0[J]+O(\varepsilon^2)。$$

所以

$$\Gamma[\phi_1]=S[\phi_1]+\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right|+O(\varepsilon^2)。$$

(3-73)

为了要完成上列计算，关键在于计算由 S 二阶导数构成的矩阵元，x、y 是它的行列指标。对于 ϕ^4 场

$$S[\phi_0]=\int d^4x\left[\phi_0(x)\frac{1}{2}(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\phi_0(x)-\frac{\lambda}{4}\phi_0^4(x)\right],$$

$$\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}=(-\partial^2-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(x-y)-3\lambda\phi_0^2(x)\delta^4(x-y)$$

$$=(-\partial_x^2-\mu^2+i\varepsilon)[\delta^4(x-y)-3\lambda\phi_0^2(y)$$

$$\cdot(-\partial_x^2-\mu^2+i\varepsilon)^{-1}\delta^4(x-y)]。$$

略去与 $\phi_0(x)$ 无关的因子，得

$$\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}=\delta^4(x-y)-3\lambda\Delta_f(x-y)\phi_0^2(y)。$$

这就是以 x、y 为行列指标的矩阵元。显然，第一项是单位矩阵的矩阵元，第二项是正比于小量 λ 的矩阵元。这矩阵的对数展开为

$$\ln\left|\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right| = -\sum_n \frac{1}{n}\left|3\lambda\Delta_f(x-y)\phi_0^2(y)\right|^n 。$$

它的迹，就是

$$\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right| = -\sum_n \frac{(3\lambda)^n}{n}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n$$
$$\cdot[\Delta_f(x_1-x_2)\phi_0^2(x_2)\Delta_f(x_2-x_3)\phi_0^2(x_3)\cdots\Delta_f(x_n-x_1)\phi_0^2(x_1)] 。 \tag{3-74}$$

当 $\phi_0(x)$ 与时空坐标无关时，就有

$$\mathrm{Tr}\ln\left|\frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}\right| = -\sum_n \frac{(3\lambda\phi_0^2)^n}{n}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n$$
$$\cdot[\Delta_f(x_1-x_2)\cdots\Delta_f(x_{n-1}-x_n)\Delta_f(x_n-x_1)]$$
$$= -\sum_n \frac{(3\lambda\phi_0^2)^n}{n}\int d^4x_1\cdots d^4x_n d^4k_1\cdots d^4k_n$$
$$\cdot\frac{\exp[ik_1(x_1-x_2)\cdots+ik_n(x_n-x_1)]}{(2\pi)^{4n}(k_1^2-\mu^2+i\varepsilon)\cdots(k_n^2-\mu^2+i\varepsilon)} = -\sum_n \frac{(3\lambda\phi_0^2)^n}{n}$$
$$\cdot\int\frac{d^4k_1 d^4k_2\cdots d^4k_n\,\delta^4(k_1-k_2)\delta^4(k_2-k_3)\cdots\delta^4(k_n-k_1)}{(k_1^2-\mu^2+i\varepsilon)\cdots(k_n^2-\mu^2+i\varepsilon)}$$
$$= -(2\pi)^4\delta^4(0)\sum_n\frac{(3\lambda\phi_0^2)^n}{n}\int d^4k\left(\frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\right)^n 。 \tag{3-75}$$

把(3-74)式代入(3-73)式就得到单圈近似的正规顶角

$$\Gamma_1[\phi_1] = S[\phi_0+\varepsilon] - \frac{i}{2}\sum_n\frac{(3\lambda)^n}{n}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n$$
$$\cdot[\Delta_f(x_1-x_2)\phi_0(x_2)\cdots\Delta_f(x_n-x_1)\phi_0(x_1)] 。 \tag{3-76}$$

而其超势就是

$$V_1(\phi_0) = \frac{\mu^2}{2}\phi_0+\frac{\lambda}{4}\phi_0^4+\frac{i}{2}\sum_n\frac{(3\lambda\phi_0^2)^n}{n}\int d^4k\frac{1}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)^n} 。 \tag{3-77}$$

这和经典势是不一样的，多了后面一项。显然，它是量子效应。

第四章　规范场的量子化

在生成泛函的路径积分表示中，出现的都是经典的量：经典的坐标和动量；经典的拉格朗日函数和哈密顿量。但是，由它导出的格林函数，正规顶角等却是算符的平均值，描写系统的量子过程。而且，由它还可以导出正则对易关系和算符的运动方程。所以，这种形式的理论体系，叫做路径积分量子化。我们利用这种路径积分的量子化方法，来讨论规范场的量子性质，即用路径积分把规范场量子化。在这一章中，我们要写出规范场的生成泛函的路径积分表示，导出描写量子过程的费曼规则。

由上一章的论述可知：把场量 $\phi(x)$ 看作广义坐标，

$$\pi(x)=\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

就是相应的广义动量。这系统的格林函数的路径积分表示就是

$$Z[J]=\int[d\phi]\,[d\pi]\exp\left\{i\int d^4x[\pi\dot{\phi}-\mathscr{H}+J\phi]\right\}。$$

如果哈密顿密度 $\mathscr{H}(x)$ 有恰当的形式，对 $\pi(x)$ 的积分便可以积出，上式就取费曼形式

$$Z[J]=\int[d\phi]\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}(x)\right]。$$

由是可知，要写出某一系统的格林函数的生成泛函的路径积分表示，首先要确定这一系统的广义坐标和广义动量。因此，我们要写出规范场的生成泛函的路径积分表示，首先要确定规范场的场量中，哪些是正则坐标，哪些是相应的正则动量？

§1. 正则坐标和动量

我们以 SU(2) 规范场为例，来说明如何确定正则坐标和动量。SU(2) 规范场的规范势 $\vec{A}_\mu(x)$，在同位旋空间有三个分量，是同位旋空间的矢量，用箭头表示；在时空空间有四个分量，用 $\mu=0, 1, 2, 3$ 表示。规范场强 $\vec{F}_{\mu\nu}(x)$，也是同位旋矢量，也用箭头表示；在时空空间却是二阶反对称张量，有六个分量。在这众多的分量中，哪些是独立的，可以选作正则坐标呢？ 在未确定之前，可以暂且把它们都看作是独立的。

拉格朗日密度和方程 因此，系统的拉格朗日密度就设想为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot(\partial^\mu\vec{A}^\nu-\partial^\nu\vec{A}^\mu+g\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu)。\quad(4\text{–}1)$$

式中的标积和矢积是同位旋矢量的运算。把它代入拉格朗日运动方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vec{F}_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{\partial\vec{F}_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}}=0;\qquad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vec{A}_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dfrac{\partial\vec{A}_\mu}{\partial x_\lambda}}=0,$$

就得到

$$\vec{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu,\quad(4\text{–}2)$$

$$\partial^\nu\vec{F}_{\mu\nu}=g\vec{F}_{\mu\nu}\times\vec{A}^\nu。\quad(4\text{–}3)$$

其中，我们把含时间导数的

$$\vec{F}_{0i}=\partial_0\vec{A}_i-\partial_i\vec{A}_0+g\vec{A}_0\times\vec{A}_i,\quad(4\text{–}4)$$

$$\partial^0\vec{F}_{i0}=\partial^j\vec{F}_{ij}+g\vec{F}_{i0}\times\vec{A}^0-g\vec{F}_{ij}\times\vec{A}^j\quad(4\text{–}5)$$

叫做运动方程。把不含时间导数的

$$\vec{F}_{ij}=\partial_i\vec{A}_j-\partial_j\vec{A}_i+g\vec{A}_i\times\vec{A}_j,\quad(4\text{–}6)$$

$$\partial^i\vec{F}_{i0}=g\vec{F}_{i0}\times\vec{A}^i\quad(4\text{–}7)$$

叫做约束方程，$i, j=1, 2, 3$。

独立的正则变量　就时空分量来说，四个 $\vec{A}_\mu$、六个 $\vec{F}_{\mu\nu}$ 满足上列的运动方程和约束方程，便不都是独立的。由 (4–1) 式可知，$\mathscr{L}$ 中有 $\vec{A}_i$ 的时间导数 $\dot{\vec{A}}_i$，且

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vec{A}}_i}=\vec{F}_{0i}, \tag{4–8}$$

即 $\vec{A}_i$ 和 $\vec{F}_{0i}$ 有正则共轭的关系。把 $\vec{A}_i$ 看作正则坐标，$\vec{F}_{0i}$ 就是与之相应的正则动量。但是，它们还受到约束方程 (4–7) 式的限制，故不都是独立的。在规范理论中，由于规范不变性，还应该加上规范条件，如库伦规范条件

$$\partial^i \vec{A}_i=0。 \tag{4–9}$$

这样看来，由 (4–8) 式确定的三对共轭坐标，受到 (4–7) 式和 (4–9) 式的限制，就只有两对是独立的。库伦规范 (4–9) 式是横向条件，所以，独立的正则共轭变量为

$$\vec{A}_i^T,\ \vec{F}_{0i}^T=\vec{E}_i。$$

T 表示横向分量，即 $\partial^i \vec{A}_i=0$，$\partial^i \vec{E}_i=0$。

因变量　$\vec{A}_i$ 满足 (4–9) 式，只有横向分量，没有纵向分量。$\vec{F}_{0i}^T$ 是与 $\vec{A}_i$ 相应的共轭动量，是 $\vec{F}_{0i}$ 的横向分量，不是 $\vec{F}_{0i}$ 的全部。$\vec{F}_{0i}$ 还有纵向分量 $\vec{F}_{0i}^L$，$\partial_i \vec{F}_{0j}^L-\partial_j \vec{F}_{0i}^L=0$。旋度为 0 的矢量，总可以用标量的梯度来表示。所以，令 $\vec{F}_{0i}^L=-\partial_i \vec{f}$。$\vec{f}$ 是同位旋空间的矢量，是四维时空的标量。因而

$$\vec{F}_{0i}=\vec{F}_{0i}^T+\vec{F}_{0i}^L=\vec{E}_i-\partial_i \vec{f}。 \tag{4–10}$$

$\vec{E}_i$ 和 $\vec{A}_i$ 一起是独立的、共轭的正则变量。$\vec{f}$ 是因变量。它可以用 $\vec{E}_i$、$\vec{A}_i$ 确定。由 (4–7) 式得

$$\partial_i \vec{F}_{0i}=\partial_i(\vec{E}_i-\partial_i \vec{f})=-\partial_i^2 \vec{f}=g(\vec{E}_i-\partial_i \vec{f})\times \vec{A}_i,$$

$$(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}=g\vec{A}_i\times\vec{E}_i。 \tag{4–11}$$

这就是用 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 确定 $\vec{f}$ 的方程。

把 (4–4) 式和 (4–10) 式分别代入 (4–7) 式的两边，得

$$\partial^i(\partial_0 \vec{A}_i-\partial_i \vec{A}_0+g\vec{A}_0\times\vec{A}_i)=g(\vec{E}^i-\partial^i \vec{f})\times\vec{A}_i。$$

由于(4–9)式，上式成为

$$(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{A}_0=\partial_i^2\vec{f}。\qquad(4\text{–}12)$$

这就是用 $\vec{f}$ (因而用 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$) 确定因变量 $\vec{A}_0$ 的方程。

还有三个因变量 $\vec{F}_{ij}$，根据约束方程(4–6)式用 $\vec{A}_i$ 直接确定。

因变量方程的解 因变量 $\vec{f}$ 和 $\vec{A}_0$ 满足同样的微分方程(4–11)式和(4–12)式。它们的差别只是有不同的、已知的非齐次项(4–12 中的 $\vec{f}$ 由 4–11 用 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 确定)。因而有相同的格林函数方程

$$(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{\vec{D}}(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{A}_i)=\vec{\vec{I}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y})。\qquad(4\text{–}13)$$

$\vec{\vec{D}}$、$\vec{\vec{I}}$ 是用并矢式表示的同位旋空间的二阶张量。$\vec{\vec{D}}$ 是待求的格林函数，$\vec{\vec{I}}$ 是单位并矢。

当 g 很小时，如弱电作用耦合常数那样，则方程(4–13)式可以用微扰方法求解。令

$$\vec{\vec{D}}=\vec{\vec{D}}_0+g\vec{\vec{D}}_1+\cdots,$$

代入(4–13)式，得

$$(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)(\vec{\vec{D}}_0+g\vec{\vec{D}}_1+\cdots)=\vec{\vec{I}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y})。$$

按 g 的不同幂次分解为

$$\partial_i^2\vec{\vec{D}}_0=\vec{\vec{I}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),$$
$$\partial_i^2\vec{\vec{D}}_1=-\vec{A}_i\partial_i\times\vec{\vec{D}}_0,$$
$$\cdots\cdots。$$

这就是人所熟知的泊松方程，其解为

$$\vec{\vec{D}}_0(\vec{x},\ \vec{y})=\frac{\vec{\vec{I}}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|},$$

$$\vec{\vec{D}}_1(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{A}_i)=\int d^3z\vec{\vec{D}}_0(\vec{x},\ \vec{z})\cdot\vec{A}^i(\vec{z})\partial_{y_i}\times\vec{\vec{D}}_0(\vec{z},\ \vec{y})$$
$$=\int d^3z\,\frac{\vec{\vec{I}}}{4\pi|\vec{x}-\vec{z}|}\cdot\vec{A}^i(\vec{z})\partial_{y_i}\times\frac{\vec{\vec{I}}}{4\pi|\vec{z}-\vec{y}|}。$$

在求得了 (4–13) 方程的解 $\vec{\vec{D}}$ 以后，就可以直接写出 (4–11) 和

(4–12)方程的解，为

$$\vec{f}(\vec{x})=\int d^3y\,\vec{D}(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{A}_i)\cdot g\vec{A}_i(\vec{y})\times\vec{E}_i(\vec{y}),$$

$$\vec{A}_0(\vec{x})=\int d^3y\,\vec{D}(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{A}_i)\cdot\partial_y^2\vec{f}(\vec{y})。$$

这就是用自变量 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 确定的因变量 $\vec{f}(\vec{x})$、$\vec{A}_0(\vec{x})$。

§2. 库伦规范下的生成泛函

在库伦规范下，共轭的正则坐标和动量是 $\vec{A}_i$ 和 $\vec{E}_i$，$i=1,\ 2,\ 3$。它们满足横向条件 $\partial_i\vec{A}_i=0$，$\partial_i\vec{E}_i=0$。由此，按照上一章的论述，就可以写下 SU(2) 规范场的格林函数的生成泛函

$$Z_c[J]=\int[d\vec{A}_i]\,[d\vec{E}_i]\exp\left\{i\int d^4x[\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i-\mathscr{H}+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i]\right\}\quad(4\text{–}14)$$

角标 c 表示库伦规范。

横向条件 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 是横向的，$\partial_i\vec{A}_i=0$，$\partial_i\vec{E}_i=0$。我们把 $\delta(\partial_i\vec{A}_i)$、$\delta(\partial_i\vec{E}_i)$ 插入(4–14)式，来表征这一性质，得

$$Z_c[J]=\int[d\vec{A}_i]\,[d\vec{E}_i]\,\delta(\partial_i\vec{A}_i)\,\delta(\partial_i\vec{E}_i)$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x[\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i-\mathscr{H}+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i]\right\}。\quad(4\text{–}15)$$

哈密顿的表示式 (4–15) 式的路径积分是对正则变量 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 的积分，因而被积函数如哈密顿

$$\int d^3x\mathscr{H}(x)=\int d^3x[\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i-\mathscr{L}],$$

就要写成它们的函数表达式。为此，我们首先计算

$$\int d^3x\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i=\int d^3x\vec{E}_i\cdot[\vec{F}_{0i}+\partial_i\vec{A}_0-g\vec{A}_0\times\vec{A}_i]$$

$$=\int d^3x\vec{E}_i\cdot[\vec{E}_i-\partial_i\vec{f}+(\partial_i+g\vec{A}_i\times)\vec{A}_0]。$$

利用部分积分，并考虑到 $\partial_i\vec{E}_i=0$，$\partial_i\vec{A}_i=0$，和任一矢量散度的体

积积分为0，由上式得到

$$\int d^3x\vec{E}_i\cdot\vec{A}_i=\int d^3x[\vec{E}_i^2+g\vec{E}_i\times\vec{A}_i\cdot\vec{A}_0]$$

$$=\int d^3x[\vec{E}_i^2-(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}\cdot\vec{A}_0]$$

$$=\int d^3x[\vec{E}_i^2-\vec{f}\cdot(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{A}_0]$$

$$=\int d^3x[\vec{E}_i^2-\vec{f}\cdot\partial_i^2\vec{f}]$$

$$=\int d^3x[\vec{E}_i^2+(\partial_i\vec{f})^2]。$$

再者，由于

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\vec{F}_{0i}\cdot\vec{F}_{0i}-\frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{F}_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{E}_i-\partial_i\vec{f})^2-\frac{1}{2}\vec{B}_i^2,$$

$$\vec{B}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\vec{F}_{jk}。$$

所以

$$\int d^3x\mathscr{L}=\int d^3x\,\frac{1}{2}[(\vec{E}_i-\partial_i\vec{f})^2-\vec{B}_i^2]$$

$$=\int d^3x\,\frac{1}{2}[\vec{E}_i^2+(\partial_i\vec{f})^2-\vec{B}_i^2]。$$

因而，系统的哈密顿为

$$\int d^3x\,\mathscr{H}=\int d^3x\,\frac{1}{2}[\vec{E}_i^2+(\partial_i\vec{f})^2+\vec{B}_i^2]。$$

和电磁场相比，$\frac{1}{2}\vec{E}_i^2$ 是横向电场能量，$\frac{1}{2}\vec{B}_i^2$ 是磁场能量，$\frac{1}{2}(\partial_i\vec{f})^2$ 是纵向电场(库伦场)能量。把它们代入(4-15)式得

$$Z_c[J]=\int[d\vec{A}_i][d\vec{E}_i]\delta(\partial_i\vec{A}_i)\delta(\partial_i\vec{E}_i)\exp\left\{i\int d^4x\left[\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i-\frac{1}{2}\vec{E}_i^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}(\partial_i\vec{f})^2-\frac{1}{2}\vec{B}_i^2+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i\right]\right\}。\qquad(4\text{-}16)$$

$\vec{f}$ 参数化 $\vec{B}_i$ 是正则坐标 $\vec{A}_i$ 的函数，由 (4-6) 式确定。$\vec{f}$ 是正则变量 $\vec{A}_i$、$\vec{E}_i$ 的函数，是方程(4-11)

$$(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}=g\vec{A}_i\times\vec{E}_i$$

的解，有比较复杂的形式。我们避开这一复杂性，而把

$$\int d[\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}]\delta[\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}-g\vec{A}_i\times\vec{E}_i]=1$$

插入(4-16)式，得

$$\begin{aligned}Z_0[J]=\int[d\vec{A}_i][d\vec{E}_i]\delta(\partial_i\vec{A}_i)\delta(\partial_i\vec{E}_i)d[(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}]\\ \cdot\delta[(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}-g\vec{A}_i\times\vec{E}_i)]\\ \cdot\exp\left\{i\int d^4x\left[\vec{E}_i\cdot\dot{\vec{A}}_i-\frac{1}{2}\vec{E}_i^2-\frac{1}{2}(\bar{\partial}_i\vec{f})^2\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{1}{2}\vec{B}_i^2+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i\right]\right\},\end{aligned}$$

使 $\vec{f}$ 参数化。如果将 $\vec{E}_i$ 换成 $\vec{F}_{0i}=\vec{E}_i-\partial_i\vec{f}$，则 $d\vec{E}_i=d\vec{F}_{0i}$，

$$\begin{aligned}Z_0[J]=\int[d\vec{A}_i][d\vec{F}_{0i}]d[(\partial_i^2+g\vec{A}_i\partial_i\times)\vec{f}]\delta(\partial_i\vec{A}_i)\\ \cdot\delta(\partial_i\vec{F}_{0i}+\partial_i^2\vec{f})\delta(\partial_i^2\vec{f}-g\vec{A}_i\times\vec{F}_{0i})\\ \cdot\exp\left\{i\int d^4x\left[\vec{F}_{0i}\cdot\dot{\vec{A}}_i-\frac{1}{2}\vec{F}_{0i}^2-\frac{1}{2}\vec{B}_i^2+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i\right]\right\}。\end{aligned}$$

(4-17)

det M_0 (4-17)式中的指数上不再包含 $\vec{f}$，指数前有两个包含 $\partial_i^2\vec{f}$ 的 δ 函数和一积分。我们取这积分消除一个 δ 函数，得

$$\begin{aligned}Z_0[J]=\int[d\vec{A}_i][d\vec{F}_{0i}]\delta(\partial_i\vec{A}_i)\delta(\partial_i\vec{F}_{0i}+g\vec{A}_i\times\vec{F}_{0i})\\ \times\det M_0\exp\left\{i\int d^4x\left[\vec{F}_{0i}\cdot\dot{\vec{A}}_i-\frac{1}{2}\vec{F}_{0i}^2-\frac{1}{2}\vec{B}_i^2+\vec{J}_i\cdot\vec{A}_i\right]\right\},\end{aligned}$$

(4-18)

$$M_c^{\alpha\beta}(x,\ y)\equiv\frac{\delta\left[\partial_{x_i}^2 f^\alpha(x)+g\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}A_i^{\beta'}(x)\partial_{x_i}f^\gamma(x)\right]}{\delta\left[\partial_{y_i}^2 f^\beta(y)\right]}$$

$$=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_i^\gamma(x)\frac{\partial_{x_i}}{\partial_{y_i}^2}\delta^4(x-y),$$

$$M_c^{\alpha\beta}(x,\ y)=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_i^\gamma(x)\partial_{y_i}G(\vec{x}-\vec{y})\delta(x_0-y_0),$$

$$\partial_{x_i}^2 G(\vec{x}-\vec{y})=\delta^3(\vec{x}-\vec{y})。\qquad(4\text{–}19)$$

$M_c^{\alpha\beta}(x,\ y)$是矩阵 M_c的矩阵元。$\det M_c$是矩阵 M_c的行列式。由(4–19) 可知：M_c是同位旋空间的 3×3 矩阵，α、$\beta=1,\ 2,\ 3$；是时空空间的无限维矩阵，$-\infty\leqslant x,\ y\leqslant\infty$。

协变形式 (4–18) 式的形式不是协变的。我们扩充积分元 $[d\vec{A}_i]\to[d\vec{A}_\mu]$，$[d\vec{F}_{0i}]\to[d\vec{F}_{\mu\nu}]$，就可以将它变成协变形式。利用 δ 函数的性质，就可以达到目的。实际上，由于

$$\delta(\partial_i\vec{F}_{0i}+g\vec{A}_i\times\vec{F}_{0i})=\int\left[\frac{d\vec{A}_0}{2\pi}\right]\exp\left\{i\int d^4x\vec{A}_0\cdot[\partial_i\vec{F}_{0i}+g\vec{A}_i\times\vec{F}_{0i}]\right\}$$

$$=\int\left[\frac{d\vec{A}_0}{2\pi}\right]\exp\left\{i\int d^4x\vec{F}_{0i}[-\partial_i\vec{A}_0+g\vec{A}_0\times\vec{A}_i]\right\},$$

$$\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\,\vec{B}_i^2\right]=\exp\left[-i\int d^4x\,\frac{1}{4}(\partial_i\vec{A}_j-\partial_j\vec{A}_i+g\vec{A}_i\times\vec{A}_j)^2\right]$$

$$=\int[d\vec{F}_{ij}]\exp\left\{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{F}_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\cdot(\partial_i\vec{A}_j-\partial_j\vec{A}_i+g\vec{A}_i\times\vec{A}_j)\right]\right\}。$$

代入(4–18)式，就得到

$$Z_c[J]=\int[d\vec{A}_\mu]\,[d\vec{F}_{\mu\nu}]\,\delta(\partial_i\vec{A}_i)\det M_c\exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot(\partial^\mu\vec{A}^\nu-\partial^\nu\vec{A}^\mu+g\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu)+\vec{J}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\right]\right\}。$$

这里，把 $\vec{J}_i$ 和 $\vec{J}_0=0$ 合成为 $\vec{J}_\mu$。

费曼形式 上式中对 $[d\vec{F}_{\mu\nu}]$ 的积分是高斯型的，可以积出，为

$$Z_c[J]=\int[d\vec{A}_\mu]\delta(\partial_i\vec{A}_i)\det M_c$$
$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2+\vec{J}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\right]\right\}。$$
(4-20)

§3. 法捷叶夫-波波夫理论

粗心的读者，在把上一章论述的路径积分量子化方法用于规范场时，会把 $\vec{A}_\mu$ 看作正则坐标，把拉格朗日密度写成

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2$$

的形式，把格林函数的生成泛函自然地写作

$$Z[J]=\int[d\vec{A}_\mu]\exp\left\{i\int d^4x\right.$$
$$\left.\cdot\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2+\vec{J}_\mu\cdot\vec{A}^\mu\right]\right\}。$$
(4-21)

这和(4-20)式相差 $\delta(\partial_i\vec{A}_i)$、$\det M_c$ 两个因子，是十分错误的。这两个因子是规范场的富有特色的部分，$\delta(\partial_i\vec{A}_i)$ 来自规范条件，$\det M_c$ 也和规范条件紧相联系。

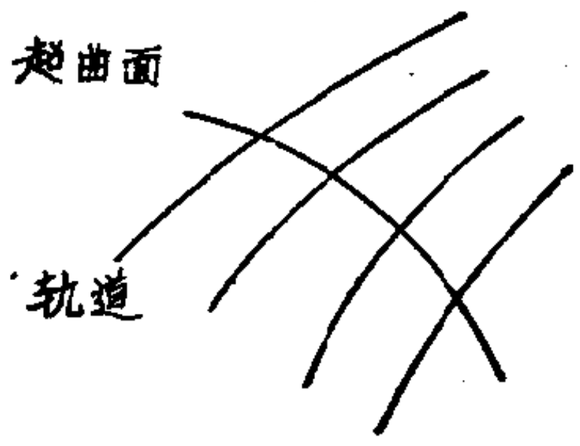
F-P 设想 上一节导出 (4-20) 式的方法是严格的，但也是繁难的，而且选用了库伦规范。在任意规范下，如何把规范场量子化仍然是个问题。

法捷叶夫(Faddeev)和波波夫(Popov)分析了规范场的特点，提出了把规范场量子化的简便方法。规范场的拉格朗日密度是规范不变的。对 $[d\vec{A}_\mu]$ 的积分是在 $\vec{A}_\mu(x)$ 所张的整个函数空间进行的。由规范变换

$$\vec{A}^u_\mu(x)=\vec{A}_\mu(x)+\vec{u}\times\vec{A}_\mu(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu\vec{u}$$
(4-22)

联系着的点，在函数空间划出一条轨道。不能由规范变换联系着的 $\vec{A}_\mu(x)$，处于不同的轨道上。沿着同一条轨道积分时，$\mathscr{L}$ 是常数，积分贡献为轨道体积。这样的无限多个轨道体积是发散的，应该除去。F-P 提出了除去轨道体积的方法，建立了 F-P 理论。他们建议，把在函数 $\vec{A}_\mu(x)$ 空间的积分，限制在由规范条件，如

$$F^\alpha[A^\alpha_\mu]=0,\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{4-23}$$



确定的超曲面上。假设每条轨道只与超曲面相交一次（在 u 很小时，不出现 Glibov 不定性，就是如此），用对超曲面的积分代替对整个函数空间的积分，就能够除去轨道的影响。为此，法捷叶夫-波波夫利用规范条件(4-23)式，按照

$$\Delta_F[A^\alpha_\mu]\cdot\int[dg]\delta(F^\alpha[A^{\alpha g}_\mu])=1 \tag{4-24}$$

定义函数 $\Delta_F[A^\alpha_\mu]$。g 是群元素，$\vec{u}$ 是它的无穷小参数。把 (4-24) 式插入(4-21)式，就得到

$$Z_F[0]=\int[dA^\alpha_\mu]\Delta_F[A^\alpha_\mu]\int[dg]\delta(F^\alpha[A^{\alpha g}_\mu])\exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}\right)。 \tag{4-25}$$

规范不变的因子 在上式中的三个因子：$\mathscr{L}$、$[dA^\alpha_\mu]$ 和 $\Delta_F[A^\alpha_\mu]$，是规范不变的。$\mathscr{L}$ 是按照规范不变的要求来确定的。按照(4-24)式的定义，得

$$(\Delta_F[A^{\alpha g}_\mu])^{-1}=\int[dg]\delta(F^\alpha[A^{\alpha g_1 g}_\mu])=\int[d(g_1 g)\delta(F^\alpha[A^{\alpha g_1 g}_\mu])$$

$$=\int[dg']\delta(F^\alpha[A^{\alpha g'}_\mu])=(\Delta_F[A^\alpha_\mu])^{-1}。$$

这证明 $\Delta_F[A^\alpha_\mu]$ 是规范不变的。在规范变换下

$$A_\mu^\alpha(x)\to A_\mu^{\alpha g}(x)=A_\mu^\alpha(x)+\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u^\beta(x)A_\mu^\gamma(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu u^\alpha(x),$$

$$[dA_\mu^\alpha]\to[dA_\mu^{\alpha g}]=J[dA_\mu^\alpha]。$$

J 是 Jacobin 行列式，其矩阵元为

$$\frac{\delta A_\mu^{\alpha g}(x)}{\delta A_\nu^\beta(g)}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}\delta^4(x-y)-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u^\gamma(x)\delta^4(x-y)\delta_{\mu\nu}。$$

它在 SU(2) 空间是 3×3 矩阵，α, β, $\gamma=1$, 2, 3，对角线上元素为 1，非对角线上有一级小量 $u^\gamma(x)$；在时空空间为 4×4 的单位矩阵，μ、$\nu=0$, 1, 2, 3；另一方面，它又是时空坐标的无限维的单位矩阵。因此，$J=1+0(u^2)=1$。这表明 $[dA_\mu^\alpha]$ 也是规范不变的。

再者 $Z_F[0]$ 是 $[dA_\mu^\alpha]$ 的积分表示，在积分变数的变换下总是不变的，因而也是规范不变的。我们将(4–25)式中的诸量作一群元素为 g^{-1} 的规范变换，就得

$$Z_F[0]=\int[dA_\mu^{\alpha g^{-1}}]\Delta_F[A_\mu^{\alpha g^{-1}}]\cdot[dg]\delta(F^\alpha[A_\mu^{\alpha g^{-1}g}])\exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}^{g^{-1}}\right)$$

$$=\int[dg]\cdot\int[dA_\mu^\alpha]\Delta_F[A_\mu^\alpha]\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])\exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}\right)。$$

这样，就使后一因子与群元素无关，对群元素的积分就是群空间的体积。把分离出来的群体积 $\int[dg]$ 丢掉，再在 $\mathscr{L}$ 上加上外源，就得到格林函数的生成泛函

$$Z_F[J]=\int[dA_\mu^\alpha]\Delta_F[A_\mu^\alpha]\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}+J_\mu^\alpha A^{\alpha\mu}]\right\}。\tag{4–26}$$

和自然表示(4–21)式相比，多了两个因子 $\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])$ 和 $\Delta_F[A_\mu^\alpha]$，$\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])$表示选取的规范条件，$\Delta_F[A_\mu^\alpha]$ 按照(4–24)式由规范条件确定。

库伦规范 (4–26) 式是在任意规范条件 $F^\alpha[A_\mu^\alpha]=0$ 下导出的，是否正确，有待检验。(4–20) 式是在库伦规范条件 $\partial_i A_i^a=0$

下，用严格的方法导出的。(4–26)式如果正确，就应该在库伦规范下导致和(4–20)式同样的结果。在库伦规范下

$$F^{\alpha}[A_{\mu}^{\alpha}]=0\rightarrow\partial_{i}A_{i}^{\alpha}=0;\quad\delta(F^{\alpha}[A_{\mu}^{\alpha}])\rightarrow\delta(\partial_{i}A_{i}^{\alpha}),$$

$$F^{\alpha}[A_{\mu}^{\alpha g}]\rightarrow\partial_{i}A_{i}^{\alpha g}=\partial_{i}\Big[A_{i}^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u^{\beta}A_{i}^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial_{i}u^{\alpha}\Big]$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{i}u^{\beta}A_{i}^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial_{i}^{2}u^{\alpha}。$$

$$(\Delta_{c}[A_{\mu}^{\alpha}])^{-1}=\int[du]\delta\Big(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{i}u^{\beta}A_{i}^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial_{i}^{2}u^{\alpha}\Big)=(\det M_{c})^{-1},$$

$$M_{c}^{\alpha\beta}(x,\ y)\equiv\frac{\delta\Big(\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}\partial_{i}u^{\beta'}(x)A_{i}^{\gamma}(x)-\frac{1}{g}\partial_{i}^{2}u^{\alpha}(x)\Big)}{\delta u^{\beta}(y)}$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{x_{i}}\delta^{4}(x-y)\cdot A_{i}^{\gamma}(x)-\frac{1}{g}\partial_{i}^{2}\delta^{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)$$

$$=-\frac{1}{g}\partial_{i}^{2}[\delta_{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_{i}^{\gamma}(x)$$

$$\cdot\partial_{x_{i}}G(\vec{x}-\vec{y})\delta(x_{0}-y_{0})],$$

除掉无关紧要的因子外，和(4–20)式中的 $M_{c}^{\alpha\beta}(x-y)$ 一样。这就表明 (4–26) 式和 (4–20) 式在库伦规范下是一致的，初步证明了(4–26)式的正确性。

朗道规范 F–P 理论不仅技巧上比较简明，而且实用性比较宽广。它不仅实用于库伦规范，也实用于其它规范。例如，在朗道规范下

$$F^{\alpha}[A_{\mu}^{\alpha}]=0\rightarrow\partial^{\mu}A_{\mu}^{\alpha}=0,$$

$$F^{\alpha}[A_{\mu}^{\alpha g}]\rightarrow\partial^{\mu}A_{\mu}^{\alpha g}=\partial^{\mu}\Big[A_{\mu}^{\alpha}+\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}u^{\beta'}A_{\mu}^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial^{\mu}u^{\alpha}\Big]$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}\partial^{\mu}u^{\beta'}A_{\mu}^{\gamma}-\frac{1}{g}\partial^{2}u^{2},$$

$$(\Delta_L[A_\mu^\alpha])^{-1}=\int[du]\delta\left(\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}\partial^\mu u^{\beta'}A_\mu^\gamma-\frac{1}{g}\partial^2u^2\right)=(\det M_L)^{-1},$$

$$M_L^{\alpha\beta}(x,\ y)\equiv\frac{\delta\left(\varepsilon^{\alpha\beta'\gamma}\partial_{x_\mu}u^{\beta'}(x)A_\mu^\gamma(x)-\frac{1}{g}\partial_x^2u^\alpha(x)\right)}{\delta u^\beta(y)}$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\gamma(x)\partial_{x_\mu}\delta^4(x-y)-\frac{1}{g}\delta_{\alpha\beta}\partial_x^2\delta^4(x-y)$$

$$=-\frac{1}{g}\partial_x^2[\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\gamma(x)\partial_{x_\mu}D_f(x-y)],$$

(4–27)

$$\partial^2D_f(x-y)=\delta^4(x-y)。$$

除去无关紧要的常数因子，就得

$$M_L^{\alpha\beta}(x,\ y)=\delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-y)-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\gamma(x)\partial_\mu D_f(x-y)。$$

这时，格林函数的生成泛函就是

$$Z_L[J]=\int[dA_\mu^\alpha]\delta(\partial_\mu A^{\alpha\mu})\det M_L\exp\left\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}+J_\mu^\alpha A^{\alpha\mu}]\right\}。$$

(4–28)

§4. 鬼粒子和规范固定项

为了从生成泛函(4–26)式导出格林函数，导出费曼规则，要把 $\delta(F^\alpha[A_\mu^\alpha])$、$\det M_F=\Delta_F[A_\mu^\alpha]$ 两个因子写成指数形式，把它们附加于 $\mathscr{L}$，使 $\mathscr{L}$ 扩充为有效的拉格朗日密度 $\mathscr{L}_{eff}$。为此，我们先介绍有限维格拉斯曼代数的简单知识*。

代数元素 由 $2n$ 个满足条件

$$\{C_i,\ C_j\}=\{C_i,\ C_j^+\}=\{C_i^+,\ C_j^+\}=0 \qquad (4–29)$$

的元素 C_i, C_j^+, i, $j=1$, 2, $\cdots$, n 生成的代数，叫做格拉斯曼代数。显然，$C_i^2=0$, $C_j^{+2}=0$。由这 $2n$ 个元素可以构成 2^{2n} 个不为

* B. L. Young, "Introduction to Quantum field theory", p. 35.

零的单项式

$$1,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n;\quad C_1^+,\ C_2^+,\ \cdots,\ C_n^+;$$
$$C_1C_2\cdots C_1C_1^+\cdots C_nC_n^+\cdots C_1^+C_n^+\cdots;$$
$$C_1C_2\cdots C_nC_1^+C_2^+\cdots C_n^+,$$

从简单的排列组合的计算就可以证明。实际上，由 $2n$ 个元素中取 m 个不同元素的取法有 P_m^{2n} 种，所有各种取法之和为

$$1+P_1^{2n}+P_2^{2n}+\cdots P_{2n}^{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}。$$

这就是构成不为零的单项式的可能方法。

左、右导数 取任一单项式 $C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_j}$，对 C_k 求导。除采用一般的求导规则外，还要考虑到它们之间的反对易性。所以，定义左导数为

$$\frac{\partial}{\partial C_k}[C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_j}]=\delta_{k,l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_j}-\delta_{k,l_2}C_{l_1}\cdots C_{l_j}$$
$$+\cdots+(-1)^{j-1}\delta_{k,l_j}C_{l_1}\cdots C_{l_{j-1}}。\tag{4-30}$$

同理，定义右导数为

$$[C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_j}]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial C_k}=C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_{j-1}}\delta_{k,l_j}+C_{l_1}C_{l_2}\cdots C_{l_j}(-1)\delta_{k,l_{j-1}}$$
$$+\cdots+C_{l_2}\cdots C_{l_j}(-1)^{j-1}\delta_{k,l_1}。$$

这意味着：在求左(右)导数时，先把待求元素移至左(右)边，移动时交换位置的次数为 p，就得 $(-1)^p$ 因子；然后求导得到 δ_{k,l_i}。

积分 在只有一个元素 C 时，可能的函数是

$$f(C)=a+bc,$$

a、b 是任意的数。将这函数对 C 积分 $\int f(C)dC$，我们要求：象普通函数 $f(x)$ 的积分，有平移不变性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x+d)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

一样，它也有平移不变性

$$\int f(C+\alpha)dC=\int f(C)dC。$$

那么
$$\int[a+b(C+\alpha)]dC=\int[a+bC]dC,$$

$$\int b\alpha\,dC=b\alpha\int dC=0,$$

$$\int dC=0,\qquad(4\text{–}31)$$

$$\int CdC=1。$$

后一式附加了归一化的假设。(4–31)式就是反对易数的积分的基本公式。推广到多个元素的情况，就是

$$\int dC_i=0,\qquad(4\text{–}32)$$

$$\int C_idC_j=\delta_{ij}。$$

对于积分微元 dC_i 也有如 C_i 一样的反对易关系

$$\{dC_i,\ dC_j\}=0,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n。\qquad(4\text{–}33)$$

从(4–32)式看来，格拉斯曼反对易数的积分和求导是等价的，这和普通的微分、积分有本质的不同。

根据(4–32)式，显然

$$\int\prod_{i=1}^{2n}C_i\prod_{j=1}^{2n}dC_j=(-1)^{(2n-1)+(2n-2)+\cdots+2+1}=(-1)^{n(2n-1)}$$

$$=(-1)^n。\qquad(4\text{–}34)$$

线性变换　设想有另一组格拉斯曼代数的元素 $\tilde{C}_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$。$\tilde{C}_i$ 和 C_i 之间按线性变换

$$C_i=a_{ij}\tilde{C}_j\qquad(4\text{–}35)$$

联系。由于元素的反对易性，有

$$\prod_{i=1}^{2n}C_i=\prod_{i=1}^{2n}a_{ij}\tilde{C}_j=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{2nj_{2n}}\varepsilon_{j_1j_2\cdots j_{2n}}\prod_{j=1}^{2n}\tilde{C}_j。$$

$\varepsilon_{j_1j_2\cdots j_{2n}}$ 是 $2n$ 阶的反对称张量，且 $\varepsilon_{1,2,\cdots,2n}=1$。把 a_{ij} 看作矩阵 A

的元素，就有

$$\det A = a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{2nj_{2n}}\delta_{j_2j_3\cdots j_{2n}}$$

所以

$$\prod_{i=1}^{2n} C_i = \det A \prod_{j=1}^{2n} \tilde{C}_j \tag{4-36}$$

另一方面，既然 $\tilde{C}_j$, $j=1, 2, \cdots, 2n$ 也是格拉斯曼代数的元素，它们也要遵循(4-32)式、(4-34)式表示的积分规律，所以

$$\int \prod_{i=1}^{2n} \tilde{C}_i \prod_{j=1}^{2n} d\tilde{C}_j = (-1)^n = \int \prod_{i=1}^{2n} C_i \prod_{j=1}^{2n} dC_j。$$

把(4-36)式代入，得

$$\int \prod_{i=1}^{2n} \tilde{C}_i \prod_{j=1}^{2n} d\tilde{C}_j = \int \det A \prod_{i=1}^{2n} \tilde{C}_i \prod_{j=1}^{2n} dC_j,$$

$$\prod_{j=1}^{2n} d\tilde{C}_j = \det A \prod_{j=1}^{2n} dC_j。$$

按照一般积分的换元法则，有

$$\prod_{j=1}^{2n} dC_j = J(A) \prod_{j=1}^{2n} d\tilde{C}_j,$$

$J(A)$是 Jacobin 行列式。和上式比较，得

$$J(A) = (\det A)^{-1}。 \tag{4-37}$$

这也是和一般情况 ($J(A) = \det A$) 不一样的，富有格拉斯曼代数特点的东西。

高斯积分　格拉斯曼代数的高斯积分

$$G = \int \exp\left(\sum_{i,j=1}^{n} C_i^+ A_{ij} C_j\right) dC_1 dC_1^+ dC_2 dC_2^+ \cdots dC_n dC_n^+$$

也具有独特的风格。取一个变换，使以 A_{ij} 为元素的矩阵 A 对角化

$$A \to v' A u^+, \quad C \to uC, \quad C^+ \to C^+ u^+, \quad A_{ij} \to \lambda_i \delta_{ij}$$

则

$$G = \int \exp\left(\sum_{i=1}^{n} C_i'^+ \lambda_i C_i'\right) dC_1' dC_1'^+ dC_2' dC_2'^+ \cdots dC_n' dC_n'^+$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i C_i'^+ C_i') dC_1' dC_1'^+ dC_2' dC_2'^+ \cdots dC_n' dC_n'^+ = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i。$$

所以 $$G=\det A。 \tag{4-38}$$

鬼粒子 上一节的论述告诉我们,(4-26)式中的

$$\Delta_F[A^\alpha_\mu]=\det M_F,$$

M_F是一个群空间的有限维矩阵,一个时空空间的无限维矩阵。它的矩阵元是 $M^{\alpha\beta}_F(x,\ y)$, $\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 且

$$M^{\alpha\beta}_F(x,\ y)=\frac{\delta F^\alpha[A^{\alpha q}_{\mu'}(x)]}{\delta u^\beta(y)}, \tag{4-39}$$

$$F^\alpha[A^\alpha_\mu]=0。$$

我们可以利用(4-38)式,引进鬼场 $C^+_\alpha(x)$、$C_\beta(y)$, $\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 令

$$\det M_F=\int[dC_\beta(y)]\,[dC^+_\alpha(x)]$$

$$\cdot\exp\left[i\int d^4xd^4yC^+_\alpha(x)M^{x\beta}_F(x,\ y)C_\beta(y)\right], \tag{4-40}$$

则(4-26)式成为

$$Z_F[J,\ \eta]=\int[dA^\alpha_\mu]\,[dC_\alpha]\,[dC^+_\beta]\,\delta(F^\alpha[A^\alpha_\mu])$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}+J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}+\eta^+_\alpha C_\alpha+C^+_\alpha\eta_\alpha]\right.$$

$$\left.+i\int d^4xd^4yC^+_\alpha M^{xy}C_\beta\right\}。 \tag{4-41}$$

这里,我们把鬼场和规范场等同看待,也引入了与之相应的外源 $\eta_\alpha(x)$、$\eta^+_\alpha(x)$,它们也应该是反对易的 C 数。显然,这样引进的鬼场 $C_\alpha(x)$、$C^+_\alpha(x)$, $\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N$, 是群空间的 N 维矢量,是时空空间的标量。但是,它们是反对易 C 数,不象普通标量粒子那样服从玻色统计,而是象旋量粒子那样服从费米统计。因此,无以名之,名之曰鬼粒子。

对于 U(1) 场,规范变换为

$$A_\mu(x)\to A^q_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu u(x)。$$

取朗道规范 $$\partial^\mu A_\mu = 0,$$

$$\partial^\mu A^g_\mu = \partial^\mu\left(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu u\right) = -\frac{1}{g}\partial^2 u。$$

则 $$M_L(x, y) = -\frac{1}{g}\partial^2\delta^4(x-y),$$

M_L 是时空空间的无限维的单位矩阵 $\left(\text{乘以常数 } -\frac{1}{g}\partial^2\right)$，不包含规范场。所以，可以从生成泛函中略去，没有必要引入鬼粒子。

对于 SU(2) 场，在朗道规范下，

$$M^{\alpha\beta}_L(x, y) = \delta^{\alpha\beta}\partial^2_x\delta^4(x-y) - g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A^\gamma_\mu(y)\partial_{x_\mu}\delta^4(x-y)。$$

故格林函数的生成泛函为

$$Z_F[\vec{J}, \vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \int[d\vec{A}_\mu][d\vec{C}][d\vec{C}^+]\delta(\partial^\mu\vec{A}_\mu)$$
$$\cdot \exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L} + \vec{C}^+\partial^2\vec{C} - g\partial^\mu\vec{C}^+\cdot\vec{A}_\mu\times\vec{C}\right.$$
$$\left.+\vec{J}^\mu\vec{A}_\mu + \vec{\eta}^+\vec{C} + \vec{C}^+\cdot\vec{\eta}]\right\}。 \qquad (4\text{–}42)$$

规范固定项 由定义 $\Delta_F[A^\alpha_\mu]$ 的(4–24)式

$$\Delta_F[A^\alpha_\mu]\int[dg]\delta(F^\alpha[A^{\alpha g}_\mu]) = 1$$

和计算的(4–39)式可知，把规范条件作一变换

$$F^\alpha[A^\alpha_\mu] = 0 \to F^\alpha[A^\alpha_\mu] - P^\alpha(x) = 0,$$

$P^\alpha(x)$ 是与规范变换无关的任意函数，则 $\Delta_F[A^\alpha_\mu]$ 不变，生成泛函中的反映规范条件的因子，可以作变换

$$\delta(F^\alpha[A^\alpha_\mu]) \to \delta(F^\alpha[A^\alpha_\mu] - P^\alpha(x)),$$

而生成泛函就成为

$$Z_F[J, \eta, \eta^+] = \int[dA^\alpha_\mu][dC_\alpha][dC^+_\alpha]\delta(F^\alpha[A^\alpha_\mu] - P^\alpha(x))$$
$$\cdot \exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L} + J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu} + \eta^+_\alpha C_\alpha + C^+_\alpha\eta_\alpha]\right.$$
$$\left.+i\int d^4xd^4yC^+_\alpha M^{\alpha\beta}(x, y)C_\beta\right\}。$$

把上式乘以 $\exp\left\{-\frac{i}{2\alpha}\int d^4x\,[P^\alpha(x)]^2\right\}$，并对 $[dP^\alpha(x)]$ 积分，就得到

$$Z_F[J,\ \eta,\ \eta^+]=\int[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L}-\frac{1}{2\alpha}(F^\alpha[A_\mu^\alpha])^2\right.\right.$$

$$\left.+J_\mu^\alpha A^{\alpha\mu}+\eta_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\eta_\alpha\right]$$

$$\left.+i\int d^4xd^4yC_\alpha^+M^{\alpha\beta}(x,\ y)C_\beta\right\}。$$

这可以写成

$$Z_F[J,\ \eta,\ \eta^+]=\int[dA_\mu^\alpha]\,[dC^\alpha]\,[dC_\alpha^+]$$

$$\cdot\exp\left\{iS_{eff}+i\int d^4x[J_\mu^\alpha A^{\alpha\mu}+\eta_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\eta_\alpha]\right\},$$

$$S_{eff}=S+S_{鬼}+S_{圈},$$

$$S=\int d^4x\mathscr{L}(x),$$

$$S_{鬼}=\int d^4x\,d^4yC_\alpha^+(x)M_F^{\alpha\beta}(x,\ y)C_\beta(y),$$

$$S_{圈}=-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\,(F^\alpha[A_\mu^\alpha])^2。\qquad(4\text{–}43)$$

S 是规范场的作用量，$S_{鬼}$ 是鬼粒子场的作用量，$S_{圈}$ 是规范固定项的作用量。不管是 $S_{鬼}$ 还是 $S_{圈}$ 都和所选择的规范有关。α 叫做规范参数：$\alpha=0$ 叫做朗道规范，$\alpha=1$ 叫做费曼规范，$\alpha=\infty$ 叫做幺正规范。

对于 SU(2) 场

$$S_{eff}=S+S_{鬼}+S_{圈},$$

$$S=-\frac{1}{4}\int d^4x\,[\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_u\times\vec{A}_\nu]^2$$

$$S_{\text{规}} = \int d^4x[\vec{C}^+\partial^2\vec{C} - g\partial^\mu\vec{C}^+ \cdot \vec{A}_\mu \times \vec{C}],$$

$$S_{\text{固}} = -\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu \vec{A}_\mu)^2。 \tag{4-44}$$

§5. 规范场的费曼规则

在得到了规范场的格林函数的生成泛函以后，就可以由它导出相应的费曼规则。在上一章的最后一节中谈到，树图近似下的正规顶角生成泛函等于作用量。这个结论是普遍适用的，只要把作用量换成有效作用量就行。

树图顶角生成泛函 由于这一结论的重要性，我们再就一般情况论述一下。设有任意的规范场

$$Z[J, \eta, \eta^+] = \int [dA^\alpha_\mu][dC_\alpha][dC^+_\alpha]$$
$$\cdot \exp\left\{iS_{eff} + i\int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu} + \eta^+_\alpha C_\alpha + C^+_\alpha \eta_\alpha]\right\}。$$

将指数上的函数在算符 $\hat{A}^\alpha_\mu$, $\hat{C}_\alpha$, $\hat{C}^+_\alpha$ 有外源时的真空期待值 $A^\alpha_{0\mu}$, $C_{0\alpha}$, $C^+_{0\alpha}$ 的邻域展开

$$S_{eff}[A^\alpha_\mu, C_\alpha, C^+_\alpha] = S_{eff}[A^\alpha_{0\mu}, C_{0\alpha}, C^+_{0\alpha}] + \int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}_0 + \eta^+_\alpha C_{0\alpha}$$
$$+ C^+_{0\alpha}\eta] + \int F[A^\alpha_\mu - A^\alpha_{0\mu}, C_\alpha - C_{0\alpha}, C^+_\alpha - C^+_{0\alpha}]d^4x,$$

则

$$Z[J, \eta, \eta^+] = \exp\left\{iS_{eff}[A^\alpha_{0\mu}, C_{0\alpha}, C^+_{0\alpha}]\right.$$
$$\left. + i\int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}_0 + \eta^+_\alpha C_{0\alpha} + C^+_{0\alpha}\eta]\right\}$$
$$\cdot \int [dA^\alpha_\mu][dC_\alpha][dC^+_\alpha]$$
$$\cdot \exp\left\{i\int d^4x F[A^\alpha_\mu - A^\alpha_{0\mu}, C_\alpha - C_{0\alpha}, C^+_\alpha - C^+_{0\alpha}]\right\},$$

在树图近似下，略去后面的乘积因子，即令

$$Z_0[J,\ \eta,\ \eta^+]=\exp\Big\{iS_{eff}[A^\alpha_{0\mu},\ C_{0\alpha},\ C^+_{0\alpha}]$$

$$+i\int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}_0+\eta^+_\alpha C_{0\alpha}+C^+_{0\alpha}\eta_\alpha]\Big\}。$$

这是树图近似的格林函数的生成泛函，而连通格林函数的生成泛函，按定义 $Z=e^{iW}$ 为

$$W_0[J,\ \eta,\ \eta^+]=S_{eff}[A^\alpha_{0\mu},\ C_{0\alpha},\ C^+_{0\alpha}]$$

$$+\int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}_0+\eta^+_\alpha C_{0\alpha}+C^+_{0\alpha}\eta]。$$

由 $W[J,\ \eta,\ \eta^+]$ 按照

$$\frac{\delta W}{\delta J^\alpha_\mu}=A^\alpha_{0\mu},\quad \frac{\delta W}{\delta \eta^+_\alpha}=C_{0\alpha},$$

$$\frac{\delta W}{\delta \eta_\alpha}=-C^+_{0\alpha}$$

把变数 $J,\ \eta,\ \eta^+$ 换成 $A^\alpha_{0\mu},\ C_{0\alpha},\ C^+_{0\alpha}$（如上一章论述的，它们就是算符 $\hat{A}^\alpha_\mu$、$\hat{C}_\alpha$、$\hat{C}^+_\alpha$ 在外源不为零时的真空期待值）。再按照

$$\Gamma[A^\alpha_{0\mu},\ C_{0\alpha},\ C^+_{0\alpha}]=W[J,\ \eta^+,\ \eta]$$

$$-\int d^4x[J^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}_0+\eta^+_\alpha C_{0\alpha}+C^+_{0\alpha}\eta_\alpha]$$

把 $W[J,\ \eta,\ \eta^+]$ 换成正规顶角的生成泛函。显然，在树图近似下，就有

$$\Gamma[A^\alpha_\mu,\ C_\alpha,\ C^+_\alpha]=S_{eff}[A^\alpha_\mu,\ C_\alpha,\ C^+_\alpha]。\qquad(4\text{–}45)$$

这里，我们略去了角标 0。但必需注意 $A^\alpha_\mu,\ C^\alpha,\ C^+_\alpha$ 是外源不为零时的相应算符的真空期待值。这一普遍结论 (4–45) 式，为我们导出费曼规则提供了方便。

在 SU(2) 规范场的情况下，树图顶角生成泛函为

$$\Gamma=S_{eff}=S+S_{\text{鬼}}+S_{\text{■}},$$

$$S=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu+g\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2\right]$$

$$=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu)^2-\frac{1}{2}g(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu)\right.$$

$$\left.\cdot\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu-\frac{g^2}{4}(\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{1}{2}\vec{A}_\mu\cdot(\partial^2g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)\vec{A}_\nu-\frac{1}{2}g(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu)\right.$$

$$\left.\cdot\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu-\frac{g^2}{4}(\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2\right]$$

$$S_{鬼}=\int d^4x[C_\alpha^+\partial^2C_\alpha-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_\alpha^+A_\mu^\beta C_\gamma],$$

$$S_{固}=\int d^4x\left[-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu\vec{A}_\mu)^2\right]=\int d^4x\vec{A}_\mu\cdot\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{2\alpha}\vec{A}_\nu。\quad(4\text{–}46)$$

由(4–46)式就可以导出 SU(2) 场的费曼规则。

规范场的传播子 根据上一章的(3–63)式，传播函数和两点正规顶角互逆。令 $D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x,\ y)$ 表示规范场的传播函数，$\Gamma_{\nu\lambda}^{\beta\gamma}(y,\ z)$ 表示规范场的两点正规顶角，那么就有

$$\int d^4yD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x,\ y)\Gamma^{\beta\gamma\nu}{}_\lambda(y,\ z)=\delta^{\alpha\gamma}g_{\mu\lambda}\delta^4(x-z)。$$

而
$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\beta\gamma}(y,\ z)=\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu^\beta(y)\delta A_\lambda^\gamma(z)}\Big|_{A_\mu^\alpha,C_\alpha,C_\alpha^+=0}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A_\nu^\beta(y)\delta A_\lambda^\gamma(z)}\int d^4x\left[\frac{1}{2}A_\mu^\alpha(\partial^2g^{\mu\sigma}-\partial^\mu\partial^\sigma)A_\sigma^\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\alpha}A_\mu^\alpha\partial^\mu\partial^\sigma A_\sigma^\alpha\right]$$

$$=\int d^4x\delta^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)\left(\partial^2g^{\mu\sigma}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\partial^\mu\partial^\sigma\right)\delta^{\alpha\gamma}g_{\lambda\sigma}\delta^4(x-z)$$

$$=\delta^{\beta\gamma}\left(\partial^2g^{\nu\lambda}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\nu\partial^\lambda\right)\delta^4(y-z)。$$

代入上式得

$$\int d^4y D_{\mu\nu}^{\lambda\beta}(x,\ y)\delta^{\beta\gamma}\left(\partial^2 g^{\nu\lambda}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\nu\partial^\lambda\right)\delta^4(y-z)$$

$$=\delta^{\alpha\gamma}g_\mu{}^\lambda\delta^4(x-z),$$

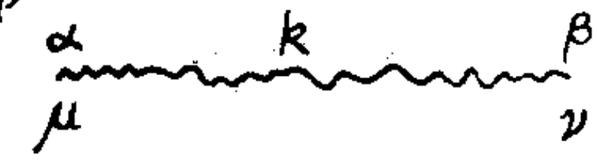
$$\left(\partial^2 g^{\nu\lambda}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\nu\partial^\lambda\right)D_{\mu\nu}^{\alpha\gamma}(x,\ z)=\delta^{\alpha\gamma}g_\mu{}^\lambda\delta^4(x-z)。$$

所以

$$D_{\mu\nu}^{\alpha\gamma}(x,\ z)=\frac{\delta^{\alpha\gamma}}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{-\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2+i\varepsilon}e^{ik(x-z)}。$$

动量表象中的规范场的传播子为

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)=\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}=$$



。

(4-47)

鬼场的传播子　令 $G^{\alpha\beta}(x,\ y)$ 表示鬼的传播函数，$\Gamma^{\beta\gamma}(y,\ z)$ 表示鬼的两点正规顶角，则有

$$\int d^4y G^{\alpha\beta}(x,\ y)\Gamma^{\beta\gamma}(y,\ z)=\delta^{\alpha\gamma}\delta^4(x-z)。$$

而

$$\Gamma^{\beta\gamma}(y,\ z)=\frac{\delta^2\Gamma}{\delta C_\beta(y)\delta C_\gamma^+(z)}\bigg|_{A_\mu,C_\alpha,C_\alpha^+=0}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta C_\beta(y)\delta C_\gamma^+(z)}\int d^4x C_\alpha^+(x)\partial^2 C_\alpha(x)$$

$$=\int d^4x\delta^{\alpha\gamma}\delta^4(x-z)\partial^2\delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-y)$$

$$=\delta^{\beta\gamma}\partial^2\delta^4(y-z)。$$

代入上式得　$\int d^4y G^{\alpha\beta}(x,\ y)\delta^{\beta\gamma}\partial^2\delta^4(y-z)=\delta^{\alpha\gamma}\delta^4(x-z),$

$$\partial^2 G^{\alpha\beta}(x,\ z)=\delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-z)。$$

所以　$$G^{\alpha\beta}(x,\ z)=\frac{\delta^{\alpha\beta}}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x-z)}}{-(k^2+i\varepsilon)}。$$

在动量表象中的鬼传播子为

$$G^{\alpha\beta}(k)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}=\quad \alpha \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim} \beta \quad 。 \tag{4-48}$$

鬼顶角　按定义，鬼和规范场相互作用的三点顶角

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta\gamma}(x,\ y,\ z)=\frac{\delta^3\Gamma}{\delta C_{\alpha}(x)\delta C_{\beta}^{+}(y)\delta A_{\mu}^{\gamma}(z)}\Big|_{A_{\mu},C_{\alpha},C_{\alpha}^{+}=0}$$

$$=\frac{\delta^3}{\delta C_{\alpha}(x)\delta C_{\beta}^{+}(y)\delta A_{\mu}^{\gamma}(z)}$$

$$\cdot\int d^4t(-g\varepsilon^{\lambda\sigma\rho}\partial^{\nu}C_{\lambda}^{+}(t)A_{\nu}^{\sigma}(t)C_{\rho}(t))$$

$$=\int d^4t(-g\varepsilon^{\lambda\sigma\rho}\delta^{\lambda\beta}\partial_{y\nu}\delta^4(y-t)\delta^{\sigma\gamma}g_{\mu\nu}\delta^4(z-t)\delta^{\alpha\rho}\delta^4(x-t))$$

$$=-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{y\mu}\delta^4(y-x)\delta^4(z-x)$$

$$=-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{y\mu}\int d^4td^4pd^4qd^4r\ \frac{e^{ip(x-t)+iq(y-t)+ir(z-t)}}{(2\pi)^{12}}$$

$$=-ig\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(2\pi)^4\int\delta^4(p+q+r)d^4pd^4qd^4rq_{\mu}\frac{e^{ipx+iqy+irz}}{(2\pi)^{12}}。$$

所以，动量表象中的鬼顶角为

$$i\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta\gamma}(p,\ q,\ r)=g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}q_{\mu}=\quad \mu \overset{\gamma}{\sim\!\sim\!\sim} \begin{matrix}\beta,q\\ \diagup\\ \diagdown\\ \alpha,p\end{matrix} \quad 。 \tag{4-49}$$

规范场的三点顶角　按定义，规范场自相互作用的三点顶角

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(x,\ y,\ z)=\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_{\mu}^{\alpha}(x)\delta A_{\nu}^{\beta}(y)\delta A_{\lambda}^{\gamma}(z)}\Big|_{A_{\mu},C_{\alpha},C_{\alpha}^{+}=0}$$

$$=\frac{\delta^3}{\delta A_{\mu}^{\alpha}(x)\delta A_{\nu}^{\beta}(y)\delta A_{\lambda}^{\gamma}(z)}$$

$$\cdot\int d^4tg\varepsilon^{abc}\partial_{\rho}A_{\sigma}^{a}(t)A_{\sigma}^{b}(t)A_{\rho}^{c}(t)$$

$$=g\,\varepsilon^{ab\cdot}\int d^4t[(\partial_{x\rho}\delta^{\alpha a}\delta_{\sigma\mu}\delta^4(x-t))(\delta^{\beta b}\delta_{\nu\sigma}\delta^4(y-t))$$

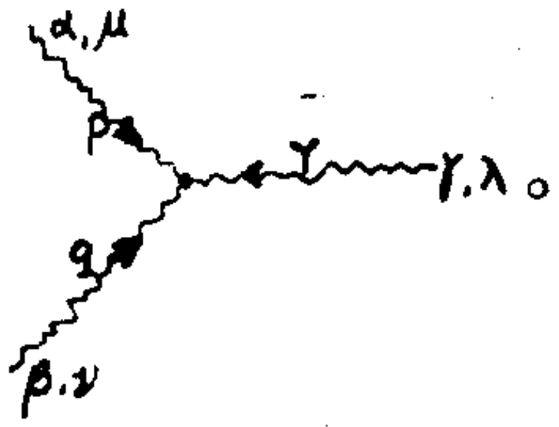
$$\cdot(\delta^{\gamma c}\delta_{\lambda\rho}\delta^4(z-t))+(\partial_{y\rho}\delta^{\beta a}\delta_{\nu\sigma}\delta^4(y-t))$$

$$\cdot(\delta^{\gamma b}\delta_{\lambda\sigma}\delta^4(z-t))(\delta^{\alpha a}\delta_{\mu\rho}\delta^4(x-t))$$
$$+(\partial_{z\rho}\delta^{\gamma a}\delta_{\lambda\sigma}\delta^4(z-t))(\delta^{\alpha b}\delta_{\mu\sigma}\delta^4(x-t))$$
$$\cdot(\delta^{\beta c}\delta_{\nu\rho}\delta^4(y-t))+(\partial_{x\rho}\delta^{\alpha a}\delta_{\sigma\mu}\delta^4(x-t))$$
$$\cdot(\delta^{\gamma b}\delta_{\lambda\sigma}\delta^4(z-t))(\delta^{\beta c}\delta_{\nu\rho}\delta^4(y-t))$$
$$+(\partial_{y\rho}\delta^{\beta a}\delta_{\nu\sigma}\delta^4(y-t))(\delta^{\alpha b}\delta_{\mu\sigma}\delta^4(x-t))$$
$$\cdot(\delta^{\gamma c}\delta_{\lambda\rho}\delta^4(z-t))+(\partial_{z\rho}\delta^{\gamma a}\delta_{\lambda\sigma}\delta^4(z-t))$$
$$\cdot(\delta^{\beta b}\delta_{\nu\sigma}\delta^4(y-t))(\delta^{\alpha a}\delta_{\mu\rho}\delta^4(x-t))]$$
$$=g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\int d^4t\,[\partial_{x\lambda}\delta_{\mu\nu}+\partial_{y\mu}\delta_{\nu\lambda}+\partial_{z\nu}\delta_{\lambda\mu}-\partial_{x\nu}\delta_{\mu\lambda}$$
$$-\partial_{y\lambda}\delta_{\mu\nu}-\partial_{z\mu}\delta_{\nu\lambda}]\delta^4(x-t)\delta^4(y-t)\delta^4(z-t)。$$

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(x,\ y,\ z)=g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{(2\pi)^{12}}$$
$$\cdot\int d^4td^4pd^4qd^4r\,[\partial_{x\lambda}\delta_{\mu\nu}+\partial_{y\mu}\delta_{\nu\lambda}$$
$$+\partial_{z\nu}\delta_{\lambda\mu}-\partial_{x\nu}\partial_{\lambda\mu}-\partial_{y\lambda}\delta_{\mu\nu}-\partial_{z\mu}\delta_{\nu\lambda}]$$
$$\cdot e^{ip(x-t)+iq(y-t)+ir(z-t)}$$
$$=ig\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\int d^4pd^4qd^4r\,\frac{\delta^4(p+q+r)}{(2\pi)^8}$$
$$\cdot[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu$$
$$+\delta_{\lambda\mu}(r-p)_\nu]e^{ipx+iqy+irz}。$$

所以，在动量表象中规范场的三点顶角为

$$i\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(p,\ q,\ r)=-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(r-p)_\nu]$$

$=$ 

。 (4-50)

规范场的四点顶角 按定义，规范场自相互作用的四点顶角

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\mu\nu\lambda\rho}(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{\delta^4\Gamma}{\delta A^\alpha_\mu(x)\delta A^\beta_\nu(y)\delta A^\gamma_\lambda(z)\delta A^\delta_\rho(t)}\Bigg|_{A_\mu,C_\alpha,C^+_\alpha=0}$$

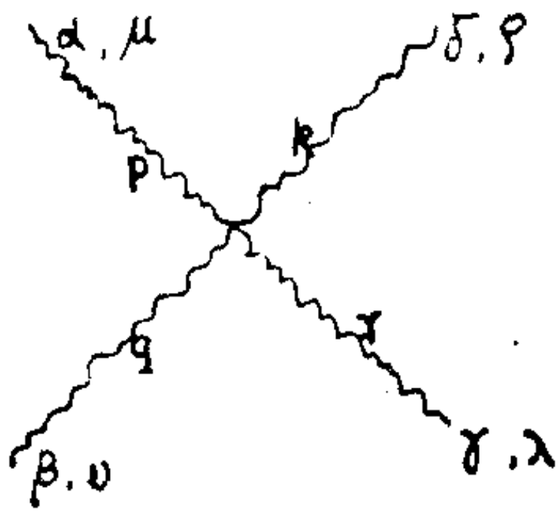
$$=\frac{\delta^4}{\delta A^\alpha_\mu(x)\delta A^\beta_\nu(y)\delta A^\gamma_\lambda(z)\delta A^\delta_\rho(t)}$$

$$\cdot\int d^4S\Big(-\frac{g^2}{4}\varepsilon^{eab}\varepsilon^{ecd}A^a_\alpha(s)A^b_\gamma(s)A^c_\alpha(s)A^d_\gamma(s)\Big),$$

利用象前面一样的计算方法，可以算出所需的结果。但是由于有 $4!=24$ 种求导方式，计算是冗长的，可以得到 24 项，合并以后除以 4，就得六项。这里，我们不予计算，留给读者作为练习。

在动量表象中，计算结果是

$$i\Gamma^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\ q,\ r,\ k)=-ig^2[\varepsilon^{\alpha\beta\sigma}\varepsilon^{\gamma\delta\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$
$$+\varepsilon^{\alpha\gamma\sigma}\varepsilon^{\beta\delta\sigma}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})+\varepsilon^{\alpha\delta\sigma}\varepsilon^{\beta\gamma\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]$$

$=$ 

。 (4–51)

§6. GWS 场的量子化和 R_ξ 规范

在第二章中，我们在经典理论的框架内论述了 GWS 弱电统一规范理论，而且按一般量子场论的知识给出了相应的费曼规则。显然，我们疏忽了规范场的特点，没有给出规范固定项和鬼粒子项。现在，我们用路径积分量子化方法，把它量子化，给出正确的费曼规则。

从上一节的论述可知，在树图近似下，正规顶角的生成泛函等于有效作用量。在 GWS 理论中，有

$$\Gamma=S_{eff}=S_{规}+S_{希}+S_{费}+S_{圆}+S_{鬼}。$$

规范场的作用量 GWS理论是 $SU(2)\times U(1)$ 规范理论。规范场为 $\vec{A}_\mu(x)$、$B_\mu(x)$。它们的作用量为

$$S_{规}=\int d^4x\left[\frac{1}{2}\vec{A}_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)\vec{A}_\nu-\frac{1}{2}g(\partial_\mu\vec{A}_\nu-\partial_\nu\vec{A}_\mu)\right.$$
$$\left.\cdot\vec{A}^\mu\times\vec{A}^\nu-\frac{g^2}{4}(\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu)^2\right]$$
$$+\int d^4x\frac{1}{2}B_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)B_\nu。$$

把 $\vec{A}_\mu(x)$、$B_\mu(x)$ 变换到质量本征态 $W^\pm_\mu(x)$、$Z_\mu(x)$、$A_\mu(x)$，即作变换

$$W^+_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu-iA^2_\mu),\quad W^-_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu+iA^2_\mu),$$
$$Z_\mu=A^3_\mu\cos\theta_W-B_\mu\sin\theta_W,\quad A_\mu=A^3_\mu\sin\theta_W+B_\mu\cos\theta_W,$$

就得到规范场的作用量为

$$S_{规}=\int d^4x\left[W^+_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)W^-_\nu+\frac{1}{2}Z_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)Z_\nu\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}A_\mu(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu\right]+ig\int d^4x\left[(\partial_\nu W^+_\mu)W^-_\nu(Z_\mu\cos\theta_W\right.$$
$$\left.+A_\mu\sin\theta_W)-(\partial_\nu W^+_\mu)(Z_\nu\cos\theta_W+A_\nu\sin\theta_W)W^-_\mu\right.$$
$$\left.+(\partial_\nu W^-_\mu)(Z_\nu\cos\theta_W+A_\nu\sin\theta_W)W^+_\mu\right.$$
$$\left.-(\partial_\nu W^-_\mu)W^+_\nu(Z_\mu\cos\theta_W+A_\mu\sin\theta_W)\right.$$
$$\left.+(\partial_\nu Z_\mu\cos\theta_W+\partial_\nu A_\mu\sin\theta_W)W^+_\mu W^-_\nu\right.$$
$$\left.-(\partial_\nu Z_\mu\cos\theta_W+\partial_\nu A_\mu\sin\theta_W)W^-_\mu W^+_\nu\right]$$
$$+g^2\int d^4x\left[\frac{1}{2}(W^+_\mu W^{+\mu})(W^-_\nu W^{-\nu})-\frac{1}{2}(W^+_\mu W^{-\mu})^2\right.$$
$$\left.+((W^+_\mu Z^\mu)(W^-_\nu Z^\nu)-(W^+_\mu W^{-\mu})(Z_\mu Z^\mu))\cos^2\theta_W\right.$$
$$\left.+((W^+_\mu A^\mu)(W^-_\nu A^\nu)-(W^+_\mu W^{-\mu})(A_\mu A^\mu))\sin^2\theta_W\right.$$
$$\left.+((W^+_\mu Z^\mu)(W^-_\nu A^\nu)+(W^-_\mu Z^\mu)(W^+_\nu A^\nu)\right.$$
$$\left.-2(W^+_\mu W^{-\mu})(Z_\mu A^\mu))\sin\theta_W\cos\theta_W\right]。\qquad(4\text{-}52)$$

Higgs 场的作用量 由第二章的论述可知

$$S_{希}=\int d^4x\left[\frac{1}{2}(D_\mu\phi(x))^+(D^\mu\phi(x))-V(\phi^+(x)\phi(x))\right],$$

$$\phi(x)=v+\phi'(x),\quad v=\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix},$$

v 是 $\phi(x)$ 场的真空平均值，$\phi'(x)$ 的真空平均值为零。

$$D_\mu=\partial_\mu-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu-ig'\frac{1}{2}B_\mu。$$

所以

$$S_{希}=\int d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi'^{+}+i\frac{g}{2}(\phi'+v)^{+\vec{\tau}}\cdot\vec{A}_\mu+i\frac{g'}{2}(\phi'+v)^+B_\mu\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(\partial^\mu\phi'-i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu(\phi'+v)-i\frac{g'}{2}B^\mu(\phi'+v)\right)-V(\phi'+v)\right]$$
$$=\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi'^{+}\partial^\mu\phi'-\frac{i}{4}\partial_\mu\phi'^{+}(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu+g'B^\mu)(\phi'+v)\right.$$
$$+\frac{i}{4}(\phi'+v)^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+g'B_\mu)\partial^\mu\phi'$$
$$\left.+\frac{1}{8}(\phi'+v)^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+g'B_\mu)(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu+g'B^\mu)(\phi'+v)\right]。$$

其中

$$\frac{1}{8}v^+(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+g'B_\mu)(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu+g'B^\mu)v$$
$$=-\frac{1}{8}|0,\ v|\begin{vmatrix}2eA_\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+\\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -\sqrt{g^2+g'^2}Z_\mu\end{vmatrix}$$
$$\cdot\begin{vmatrix}2eA^\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z^\mu & \sqrt{2}gW^{+\mu}\\ \sqrt{2}gW^{-\mu} & -\sqrt{g^2+g'^2}Z^\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\ v\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}g^2v^2W_\mu^+W^{-\mu}+\frac{g^2+g'^2}{8}v^2Z_\mu Z^\mu \qquad (4\text{–}53)$$

是使规范场获得质量的项。而

$$-\frac{i}{4}\partial_\mu\phi'^{+}(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}^\mu+g'B^\mu)v+\frac{i}{4}v^{+}(g\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu+g'B^\mu)\partial^\mu\phi' \tag{4-54}$$

是需要依靠选择适当的规范条件去除的项。其他项就是 Higgs 场 $\phi'(x)$ 及其与规范场相互作用的部分

$$-\frac{1}{2}|\bar{\phi}'^{+},\ \bar{\phi}'^{0}|\begin{vmatrix}\partial^2\phi'^{+}\\ \partial^2\phi'^{0}\end{vmatrix}-\frac{i}{4}|\partial^\mu\bar{\phi}'^{+},\partial^\mu\bar{\phi}'^{0}|$$

$$\cdot\begin{vmatrix}2eA_\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu & \sqrt{2}\,gW_\mu^{+}\\ \sqrt{2}\,gW_\mu^{-} & -\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\phi'^{+}\\ \phi'^{0}\end{vmatrix}$$

$$+\frac{i}{4}|\bar{\phi}'^{+},\ \bar{\phi}'^{0}|\begin{vmatrix}2eA_\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu & \sqrt{2}\,gW_\mu^{+}\\ \sqrt{2}\,gW_\mu^{-} & -\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\partial^\mu\phi'^{+}\\ \partial^\mu\phi'^{0}\end{vmatrix}+\frac{1}{8}|\bar{\phi}'^{+},\ \bar{\phi}'^{0}|$$

$$\cdot\begin{vmatrix}2eA_\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu & \sqrt{2}\,gW_\mu^{+}\\ \sqrt{2}\,gW_\mu^{-} & -\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}2eA^\mu+\dfrac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z^\mu & \sqrt{2}\,gW^{+\mu}\\ \sqrt{2}\,gW^{-\mu} & -\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\phi'^{+}\\ \phi'^{0}+2v\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\bar{\phi}'^{+}\partial^2\phi'^{+}-\frac{1}{2}\bar{\phi}'^{0}\partial^2\phi'^{0}-\frac{i}{4}\partial^\mu\bar{\phi}'^{+}$$

$$\cdot\left[\left(2eA_\mu+\frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\right)\phi'^{+}+\sqrt{2}\,gW_\mu^{-}\phi'^{0}\right]$$

$$-\frac{i}{4}\partial^\mu\bar{\phi}'^{0}\left(\sqrt{2}\,gW_\mu^{-}\phi'^{+}-\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu\phi'^{0}\right)$$

$$+\frac{i}{4}\Big[\overline{\phi}'^{+}\Big(2eA_\mu+\frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\Big)+\overline{\phi}'^{0}\sqrt{2}\,gW_\mu^-\Big]\partial^\mu\phi'^{+}$$

$$+\frac{i}{4}[\overline{\phi}'^{+}\sqrt{2}\,gW_\mu^+-\overline{\phi}'^{0}\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu]\partial^\mu\phi'^{0}$$

$$+\overline{\phi}'^{+}\Big[\Big(2eA_\mu+\frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu\Big)\Big(2eA^\mu+\frac{g^2-g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z^\mu\Big)$$

$$+2g^2W_\mu^+W^{-\mu}\Big]\phi'^{+}+\overline{\phi}'^{+}\Big[2\sqrt{2}\,egA^\mu W_\mu^+$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,gg'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}W_\mu^+Z^\mu\Big]\phi'^{0}+\overline{\phi}'^{0}\Big[2\sqrt{2}\,egW_\mu^-A^\mu$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,gg'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}W_\mu^-Z^\mu\Big]\phi'^{+}$$

$$+\overline{\phi}'^{0}[2g^2W_\mu^+W^{-\mu}+(g^2+g'^2)Z_\mu Z^\mu]\phi'^{0}。\qquad(4\text{–}55)$$

第一、二项是 Higgs 场的动能，第三、四、五、六项是 Higgs 场与规范场的三点作用顶角，第七、八、九、十项是希格斯场与规范场作用的四点顶点。

R_ξ 规范　在有效作用量中，如 (4–43) 式所示，包括规范固定项

$$S_{\text{固}}=\int d^4x\Big[-\frac{1}{2\xi}(F^i[A_\mu^i])^2-\frac{1}{2\xi}(F[B_\mu])^2\Big]。$$

这里，把(4–43)式中的规范参数 α 换成了 ξ，以便和文献中使用的符号一致。

为了消去 Higgs 场中出现的 (4–54) 式的项，我们选取 R_ξ 规范，即令

$$F^i[A_\mu^i]=\partial^\mu A_\mu^i+i\frac{g}{2}\xi\Big(\phi'^{+}\frac{\tau^i}{2}v-v^{+}\frac{\tau^i}{2}\phi'\Big),$$

$$F[B_\mu]=\partial^\mu B_\mu+i\frac{g'}{4}\xi(\phi'^{+}v-v^{+}\phi')。\qquad(4\text{–}56)$$

显然

$$-\frac{1}{2\xi}(F^i[A^i_\mu])^2=-\frac{1}{2\xi}\Big[(\partial^\mu A^i_\mu)^2+ig\xi\partial^\mu A^i_\mu \cdot\Big(\phi^{+\prime}\frac{\tau^i}{2}v-v^+\frac{\tau^i}{2}\phi'\Big)-\frac{g^2}{4}\xi^2 \cdot\Big(\phi'^+\frac{\tau^i}{2}v-v^+\frac{\tau^i}{2}\phi'\Big)^2\Big],$$

$$-\frac{1}{2\xi}(F[B_\mu])^2=-\frac{1}{2\xi}\Big[(\partial^\mu B_\mu)^2+i\frac{g'}{2}\xi\partial^\mu B_\mu \cdot(\phi'^+v-v^+\phi')-\frac{g'^2}{4}\xi^2(\phi'^+v-v^+\phi')^2\Big]。$$

其中 $-\frac{i}{4}g\partial_\mu A^{i\mu}(\phi'^+\tau^iv-v^+\tau^i\phi')-\frac{i}{4}g'\partial_\mu B^\mu(\phi'^+v-v^+\phi')$ 和(4–54)式一起合成散度项，对作用量的贡献为零，即彼此相互抵消。余下的项

$$-\frac{1}{2\xi}[(\partial_\mu A^{i\mu})^2+(\partial_\mu B^\mu)^2] \tag{4–57}$$

是通常的规范固定项，对规范场的传播子产生象上一节所说的作用；

$$\frac{\xi}{8}\Big[g^2\Big(\phi'^+\frac{\tau^i}{2}v-v^+\frac{\tau^i}{2}\phi'\Big)^2+g'^2(\phi'^+v-v^+\phi')^2\Big] \tag{4–58}$$

对 Higgs 场的质量产生影响。

鬼粒子 由(4–43)式可知，还存在鬼粒子作用量

$$S_{鬼}=\int d^4x\,d^4y[(C^+_i(x)M^{ij}(x,\ y)C_j(y)+C^+(x)M(x,\ y)C(y)+C^+_i(x)M^i(x,\ y)C(y)+C^+(x)M^i(x,\ y)C_i(y)]。$$

$C_i(x)$、$C^+_i(x)$ 是和 $A^i_\mu(x)$ 相应的鬼场，$C(x)$、$C^+(x)$ 是和 $B_\mu(x)$ 相应的鬼场。

$$M^{ij}(x,\ y)=\frac{\delta F^i[A^{ig}_\mu(x)]}{\delta u^j(y)},$$

$$M^i(x,\ y)=\frac{\delta F^i[A^{ig}_\mu(x)]}{\delta u(y)}=\frac{\delta F[B^g_\mu(x)]}{\delta u^i(y)},$$

$$M(x,\ y)=\frac{\delta F[B_\mu^g(x)]}{\delta u(y)}。$$

$u^i(x)$ 是 SU(2) 群的群参数, $u(x)$ 是 U(1) 群的群参数。

在 SU(2)×U(1) 群的变换下

$$A_\mu^{ig}=A_\mu^i+\varepsilon^{ijk}u^jA_\mu^k-\frac{1}{g}\partial_\mu u^i,$$

$$B_\mu^g=B_\mu-\frac{1}{g'}\partial_\mu u,$$

$$\phi^g=\phi-i\frac{g}{2}u^i\tau^i\phi-i\frac{g'}{2}u\phi,$$

$$\phi'^g=\phi'-i\left(\frac{g}{2}u^i\tau^i+\frac{g'}{2}u\right)(\phi'+v)。$$

因而

$$M^{ij}(x,\ y)=\frac{\delta}{\delta u^j(y)}\Big\{\varepsilon^{ij'k}\partial^\mu u^{j'}(x)\cdot A_\mu^k(x)-\frac{1}{g}\partial^2u^i(x)$$

$$-\xi\frac{g^2}{4}\Big[(u^{j'}(x)\tau^{j'}(\phi'+v))^+\frac{\tau^i}{2}v$$

$$+v^+\frac{\tau^i}{2}(u^{j'}(x)\tau^{j'}(\phi'+v))\Big]\Big\}$$

$$=\varepsilon^{ijk}\partial^\mu\delta^4(x-y)\cdot A_\mu^k(x)-\frac{\delta_{ij}}{g}\partial^2\delta^4(x-y)$$

$$-\xi\frac{g^2}{2}\Big[(\phi'+v)^+\frac{\tau^j}{2}\cdot\frac{\tau^i}{2}v$$

$$+v^+\frac{\tau^i}{2}\frac{\tau^j}{2}(\phi'+v)\Big]\delta^4(x-y)$$

$$=-\frac{1}{g}\Big[\delta_{ij}\partial^2-g\varepsilon^{ijk}A_\mu^k\partial^\mu+\frac{\xi}{2}g^2$$

$$\cdot\Big((\phi'+v)^+\frac{\tau^j}{2}\frac{\tau^i}{2}v$$

$$+v^+\frac{\tau^i}{2}\frac{\tau^j}{2}(\phi'+v)\Big)\Big]\delta^4(x-y),$$

$$M(x,\ y)=\frac{\delta}{\delta u(y)}\Big\{-\frac{1}{g'}\partial^2 u(x)$$
$$-\frac{g'^2}{8}\xi u(x)((\phi'+v)^+v+v^+(\phi'+v))\Big\}$$
$$=-\frac{1}{g'}\partial^2\delta^4(x-y)-\frac{g'^2}{8}\xi\delta^4(x-y)$$
$$\cdot(\phi'^+v+v^+\phi'+2v^+v)$$
$$=-\frac{1}{g'}\Big[\partial^2+\frac{g'^3}{8}\xi(\phi'^+v+v^+\phi'+2v^+v)\Big]\delta^4(x-y),$$
$$M^i(x,\ y)=\frac{\delta}{\delta u(y)}\Big\{-\frac{gg'}{4}\xi u(x)\Big[(\phi'+v)^+\frac{\tau^i}{2}v$$
$$+v^+\frac{\tau^i}{2}(\phi'+v)\Big]\Big\}$$
$$=\frac{\delta}{\delta u^i(y)}\Big\{-\frac{gg'}{8}\xi[(\phi'+v)^+\tau^j u^j(x)v$$
$$+v^+\tau^j u^j(x)(\phi'+v)]\Big\}$$
$$=-\frac{gg'}{8}\xi[\phi'^+\tau^i v+v^+\tau^i\phi'+2v^+\tau^i v]\delta^4(x-y)。$$

略去无关紧要的常数，就得到

$$S'_{\text{鬼}}=\int d^4x\Big\{C_i^+\Big[\delta_{ij}\partial^2-g\varepsilon^{ijk}A_\mu^k\partial^\mu+\frac{\xi}{8}g^3((\phi'+v)^+\tau^j\tau^i v$$
$$+v^+\tau^i\tau^j(\phi'+v))\Big]C_j+C^+\Big[\partial^2+\frac{\xi}{8}g'^3((\phi'+v)^+v$$
$$+v^+(\phi'+v))\Big]C+C_i^+\frac{\xi}{8}g^2g'((\phi'+v)^+\tau^i v$$
$$+v^+\tau^i(\phi'+v))C+C^+\frac{\xi}{8}gg'^2$$
$$\cdot((\phi'+v)^+\tau^i v+v^+\tau^i(\phi'+v))C_i\Big\}。\qquad(4\text{-}59)$$

其中，有鬼的动能项和质量项，也有鬼和规范场、Higgs 场的相互作用项。

对于轻子场、夸克场及其与规范场的相互作用，和第二章所得结果是一样的，即仍有(2-61)式、(2-70)式、(2-72)式的形式。

费曼规则 (2-61)式、(2-70)式、(2-72)式、(4-52)式、(4-53)式、(4-55)式、(4-57)式、(4-58)式、(4-59)式一起，就构成了 GWS 弱电统一理论在 R_ξ 规范下的有效作用量。在树图近似下，它就是正规顶角的生成泛函。利用前面论述的方法，就可以导出费曼规则。计算的方法是一般的，计算的过程是冗长的。这里，我们只给出计算所得的结果*：

$$\psi_i,\ iS_f(p)=\frac{i}{\not p-m_i}=\quad \xrightarrow{\ p\ }\quad ;$$

$$\gamma,\ iD_{\mu\nu}(k)=\frac{-i\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]}{k^2}=\quad \mu\sim\overset{k}{\sim}\nu\ ;$$

$$W^\pm,\ iD^\pm_{\mu\nu}(k)=\frac{-i\left[g_{\mu\nu}+\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu}{k^2/\xi-M_W^2}\right]}{k^2-M_W^2}=\quad \mu\sim\overset{k}{\sim}\nu\ ;$$

$$Z,\ iD^z_{\mu\nu}(k)=\frac{-i\left[g^{\mu\nu}+\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\Big)}{k^2/\xi-M_Z^2}\right]}{k^2-M_Z^2}=\quad \mu\sim\overset{k}{\sim}\nu\ ;$$

$$\phi^\pm,\ i\Delta_f^\pm(k)=\frac{i}{k^2-\xi M_W^2}=\quad ---\overset{k}{---}\ ;$$

$$\phi_1,\ i\Delta_f'(k)=\frac{i}{k^2-2\mu^2}=\quad ---\overset{k}{---}\ ;$$

$$\phi_2,\ i\Delta_f^2(k)=\frac{i}{k^2-\xi M_Z^2}=\quad ---\overset{k}{---}\ ;$$

$$C^\pm,\ i\Delta^\pm(k)=\frac{-i}{k^2-\xi M_W^2}=\quad \overset{k}{\sim\sim\sim}\ ;$$

---

* 参阅 Ling-Fong Li: "Introduction to gauge theories of electromagnetic and weak interactions" p. 145～146.

C_Z, $i\Delta^Z(k)=\dfrac{-i}{k^2-\xi M_Z^2}=$  ;

C_γ, $i\Delta^\gamma(k)=\dfrac{-i}{k^2}=$ 。

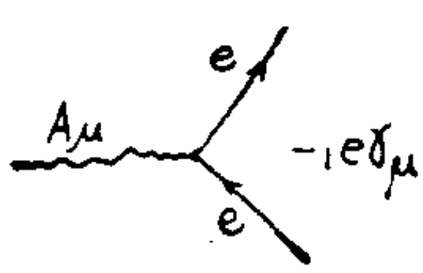
这里，令 $\phi'=\begin{vmatrix}\phi_+\\ \phi_1+i\phi_2\end{vmatrix}$；$C^\pm$ 是与 $W^\pm$ 相应的鬼场，由 C^1、C^2 按

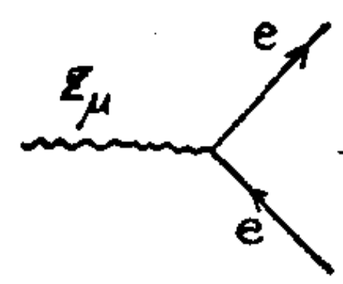
$$C^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}[C^1\pm iC^2]$$

构成；C_Z、C_γ 是与 Z、A 相应的鬼场，由转动

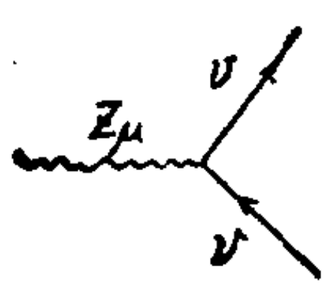
$$C_Z=C^3\cos\theta_W-C\sin\theta_W,\ C_\gamma=C^3\sin\theta_W+C\cos\theta_W$$

得到。诸场之间的相互作用顶角为：

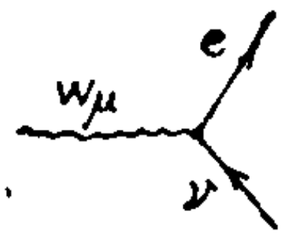


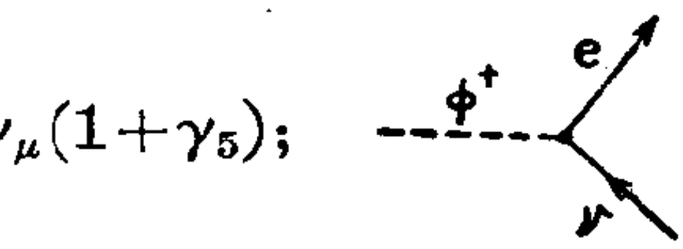
$-ie\delta_\mu$ ；


$\dfrac{ig}{\cos\theta_W}\left[-\dfrac{1}{4}\gamma_\mu(1+\gamma_5)+\sin^2\theta_W\gamma_\mu\right]$；

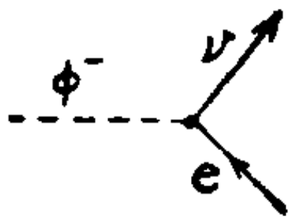


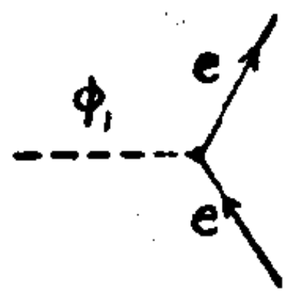
$\dfrac{ig}{\cos\theta_W}\dfrac{1}{4}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；



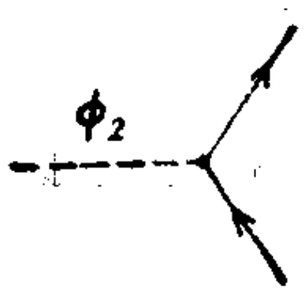
$\dfrac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1+\gamma_5)$；


$\dfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\dfrac{m_e}{M_W}(1+\gamma_5)$；



$\dfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\dfrac{m_e}{M_W}(1-\gamma_5)$；


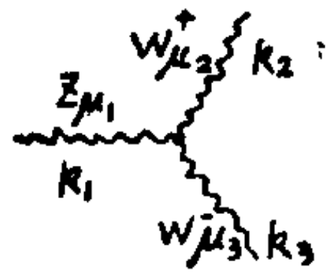
$\dfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\dfrac{m_e}{M_W}$；



$\dfrac{g}{2\cos\theta_W}\dfrac{m_e}{M_W}\gamma_5$；

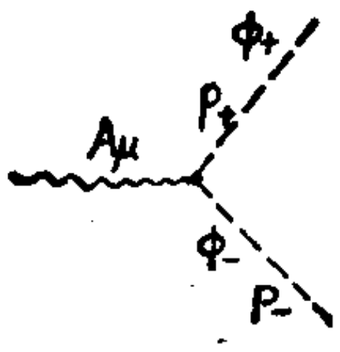


$$-ie[g_{\mu_1\mu_2}(k_1-k_2)_{\mu_3}+g_{\mu_2\mu_3}(k_2-k_3)_{\mu_1}+g_{\mu_3\mu_1}(k_3-k_1)_{\mu_2}];$$

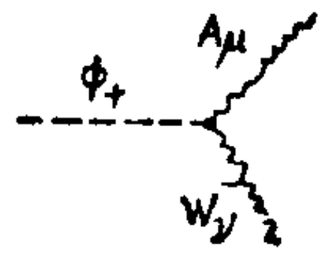


$$-ig\cos\theta_W[g_{\mu_1\mu_2}(k_1-k_2)_{\mu_3}+g_{\mu_2\mu_3}(k_2-k_3)_{\mu_1}$$

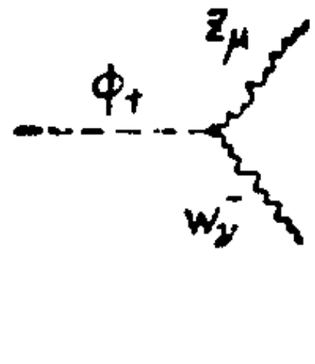
$$+g_{\mu_3\mu_1}(k_3-k_1)_{\mu_2}];$$



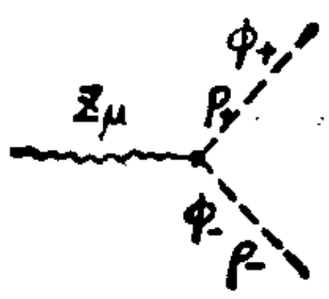
$$-ie(P_- - P_+)_\mu;$$



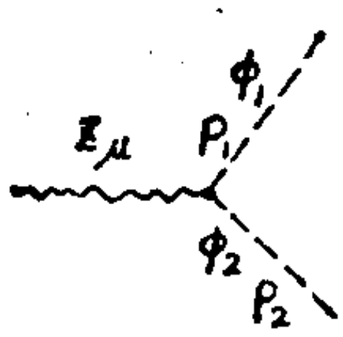
$$ieg_{\mu\nu}M_W;$$



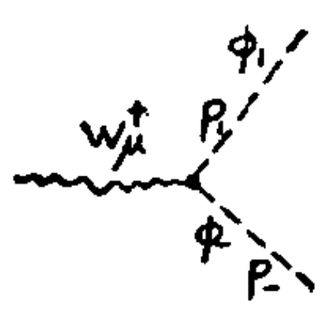
$$igM_W g_{\mu\nu}\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W};$$



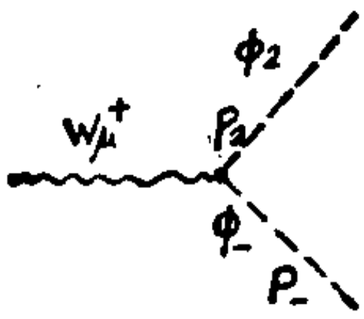
$$\frac{-ig}{\cos\theta_W}\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta_W\right)(P_- - P_+)_\mu;$$



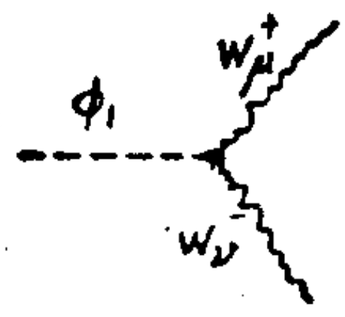
$$\frac{g}{2\cos\theta_W}(P_2-P_1)_\mu;$$



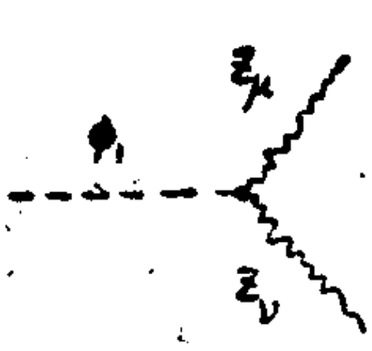
$$\frac{ig}{2}(P_1-P_-)_\mu;$$



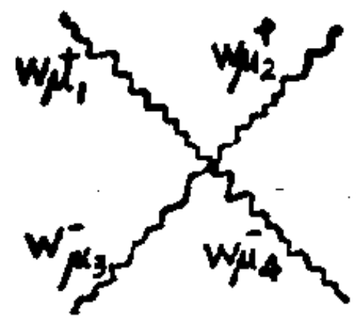
$$\frac{-g}{2}(P_2-P_-)_\mu;$$



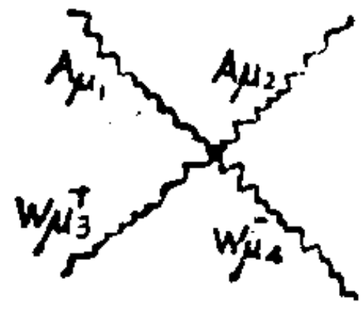
$$igM_W g_{\mu\nu};$$



$$\frac{igM_W}{\cos\theta_W}\, g_{\mu\nu};$$



$$ig^2 S_{\mu_1\mu_2,\,\mu_3\mu_4};$$



$$-ie^2 S_{\mu_1\mu_2,\,\mu_3\mu_4};$$



$$-ig^2\cos\theta_W S_{\mu_1\mu_2,\,\mu_3\mu_4};$$

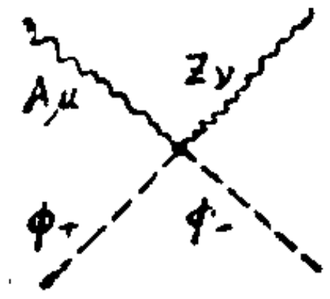
$$(S_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\equiv 2g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$



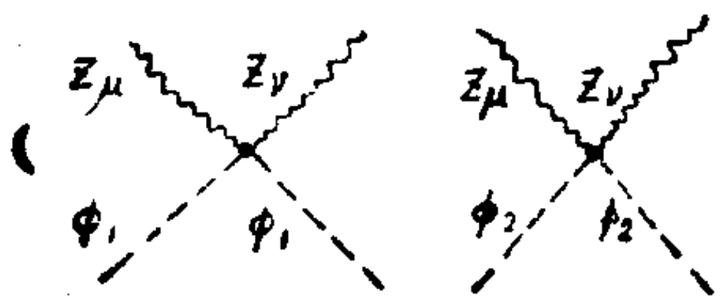
$$2ie^2 g_{\mu\nu};$$



$$\frac{ig^2}{2\cos^2\theta_W}(1-2\sin^2\theta_W)\, g_{\mu\nu};$$



$$ig^2\,\mathrm{tg}\,\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\, g_{\mu\nu};$$



$$\frac{ig^2}{2\cos^2\theta_W}\, g_{\mu\nu};$$



$$\frac{ig^2\sin^2\theta_W}{2}\, g_{\mu\nu};$$



$$\frac{ig^2}{2}\, g_{\mu\nu};$$



$$\frac{-g^2\sin^2\theta_W}{2}\,g_{\mu\nu i}$$



$$\frac{-ig^2\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\,g_{\mu\nu i}$$



$$\frac{-g^2\sin^2\theta_W}{2\cos\theta_W}\,g_{\mu\nu\bullet}$$

第五章　生成泛函的不变性和恒等式

我们以 $\phi_i(x)$泛指各种场(费米场、规范场、Higgs 场、鬼场)，泛指场的各个分量。不同的 i 表示不同的场，或场的不同分量。用 $\phi_i(x)$, $i=1, 2, \cdots$ 描述的场，它们的格林函数的生成泛函是

$$Z[J_i]=\int[d\phi_i]\exp\{\int id^4x[\mathscr{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)+J_i\phi_i]\}。\quad (5\text{-}1)$$

这是一种对易或反对易 C 量函数 $\phi_i(x)$的泛函积分，并且被积函数是指数形式。它对外源 $J_i(x)$的各种泛函导数，给出各种量子场的格林函数。大家知道，积分是不会由于变换积分变量而改变的。因此，把上列泛函积分变量 $\phi_i(x)$，换成新的变量 $\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x)$时，生成泛函将不改变。我们把它叫做生成泛函的不变性。由这种不变性，也可以推出相应的、诸量子格林函数间的一些恒等式。

§1. 函数空间的平移变换和正则关系

首先，我们讨论函数空间的平移变换，导出正则的对易关系和运动方程。

平移变换　定义函数空间的平移变换为

$$\phi_i(x)\to\phi_i'(x)=\phi_i(x)+\omega_i(x)。$$

各个以不同的 i 标志的不同的场，分别各自移动任一小量 $\omega_i(x)$。假设诸 $\omega_i(x)$ 是时空空间的任意函数，但在包围被积体积的超曲面上为零。

雅各宾(Jacobien)行列式　在平移变换下，函数空间的积分

体积元变换为

$$[d\phi_i]\to[d\phi_i']=J[d\phi_i]。$$

雅各宾行列式 J 的矩阵元为

$$\frac{\delta\phi_i'(x)}{\delta\phi_j(y)}=\delta_{ij}\,\delta^4(x-y),$$

是函数空间的对角矩阵，也是时空空间的对角矩阵，而且是单位矩阵。所以，行列式 $J=1$。

作用量 在平移变换下，作用量(实际上是有效作用量)不是不变的，而是

$$\int d^4x\,\mathscr{L}(\phi_i,\ \partial_\mu\phi_i)\to\int d^4x\,\mathscr{L}(\phi_i',\ \partial_\mu\phi_i')$$

$$=\int d^4x\Big[\mathscr{L}(\phi_i,\ \partial_\mu\phi_i)+\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}\,\delta\phi_i+\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}\,\delta\partial_\mu\phi_i\Big]$$

$$=\int d^4x\Big[\mathscr{L}(\phi_i,\ \partial_\mu\phi_i)+\Big(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\,\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}\Big)\omega_i\Big]。$$

生成泛函 根据变换积分变量不改变积分结果，即根据生成泛函的不变性，生成泛函的路径积分表示可以写成

$$Z[J_i]=\int[d\phi_i]\exp\Big\{i\int d^4x\Big[\mathscr{L}+J_i\phi_i+\Big(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\,\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}+\delta_i\Big)\omega_i\Big]\Big\}。$$

由于 $\omega_i(x)$是小量函数，上式展开为

$$Z[J_i]=\int[d\phi_i]\Big[1+i\int d^4x\,\omega_i(x)\Big(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\,\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}+J_i\Big)\Big]$$

$$\cdot\exp\Big\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}+J_i\phi_i]\Big\}。$$

恒等式 生成泛函的不变性，意味着 $Z[J_i]$与 $\omega_i(x)$无关。将上式对 $\omega_i(x)$微分，就得到

$$\int[d\phi_i]\Big[\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\,\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}+J_i\Big]\exp\Big\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}+J_i\phi_i]\Big\}$$

$$=0。$$

将上式对 $J_{i_\alpha}(x_\alpha)$, $\alpha=1, 2, \cdots, n$, 微分 n 次, 就得到

$$\int [d\phi_i]\left[\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}+J_i\right]\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\cdots\phi_{i_n}(x_n)$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}+J_i\phi_i]\right\}$$

$$=i\int[d\phi_i]\sum_{i_\alpha}\delta_{i,i_\alpha}\delta^4(x-x_\alpha)\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\cdots$$

$$\cdot\phi_{i_{\alpha-1}}(x_{\alpha-1})\phi_{i_{\alpha+1}}(x_{\alpha+1})\cdots\phi_{i_n}(x_n)\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}+J_i\phi_i]\right\}。$$

按照第三章的论述, 上式是一些量子格林函数的路径积分表示式, 而且, 相应的量子格林函数, 即算符的真空平均值为

$$\left\langle 0\left|T^*\left[\left(\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\hat{\phi}_i(x)}-\partial_\mu\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\partial_\mu\hat{\phi}_i(x)}\right)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\hat{\phi}_{i_2}(x_2)\cdots\hat{\phi}_{i_n}(x_n)\right]\right|0\right\rangle$$

$$=i\sum_{i_\alpha}\delta_{i,i_\alpha}\delta^4(x-x_\alpha)\langle 0|T[\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\hat{\phi}_{i_2}(x_2)\cdots$$

$$\cdot\hat{\phi}_{i_{\alpha-1}}(x_{\alpha-1})\hat{\phi}_{i_{\alpha+1}}(x_{\alpha+1})\cdots\hat{\phi}_{i_n}(x_n)]|0\rangle, \tag{5-2}$$

这就是由平移不变性导出的恒等式, 实际上是一个算符方程。

拉格朗日方程 令 t 固定, $t_1, t_2, \cdots, t_m\to\infty$; $t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n\to-\infty$, 考虑到

$$\langle 0|\phi(\vec{x}, \infty)=\langle \text{out}|, \ \phi(\vec{x}, -\infty)|0\rangle=|\text{in}\rangle,$$

则算符方程(5-2)式为

$$\left\langle \text{out}, m\left|\left(\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\hat{\phi}_i(x)}-\partial_\mu\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\partial_\mu\hat{\phi}_i(x)}\right)\right|n-m, \text{in}\right\rangle=0。$$

由于 m 和 $n-m$ 是任意取的, 所以上式成立的条件就是

$$\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\hat{\phi}_i(x)}-\partial_\mu\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\partial_\mu\hat{\phi}_i(x)}=0。 \tag{5-3}$$

这是算符形式的拉格朗日方程, 和经典的形式一样。但是, 和经典的又有所不同, 这里的 $\hat{\mathscr{L}}$ 是 $\hat{\mathscr{L}}_{eff}$, 它包括了迭加于 $\hat{\mathscr{L}}$ 之上的量子修正。

SU(2)规范场的运动方程 SU(2) 规范场的有效拉格朗日算

符为

$$\hat{\mathscr{L}}_{eff}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\nu-\partial_\nu\hat{A}^\alpha_\mu)^2-\frac{1}{2}\,g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\nu-\partial_\nu\hat{A}^\alpha_\mu)\hat{A}^\beta_\mu\hat{A}^\gamma_\nu$$
$$-\frac{1}{4}\,g^2\varepsilon^{e\alpha\beta}\varepsilon^{e\gamma\delta}\hat{A}^\alpha_\mu\hat{A}^\beta_\nu\hat{A}^\gamma_\mu\hat{A}^\delta_\nu-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu\hat{A}^\alpha_\mu)^2$$
$$+\hat{C}^+_\alpha\partial^2\hat{C}_\alpha-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu\hat{C}^+_\alpha\cdot\hat{A}^\beta_\mu\hat{C}_\gamma。$$

设想算符求导规则象 C 数左导数一样，那么就有

$$\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\hat{A}^i_\rho}=-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\nu-\partial_\nu\hat{A}^\alpha_\mu)\hat{A}^\beta_\mu\delta^{\gamma i}g^{\nu\rho}$$
$$-g^2\varepsilon^{e\alpha\beta}\varepsilon^{e\gamma\delta}\hat{A}^\alpha_\mu\hat{A}^\beta_\nu\hat{A}^\gamma_\mu\delta^{\delta i}g^{\nu\rho}-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu\hat{C}^+_\alpha\delta^{\beta i}g_{\mu\rho}\hat{C}_\gamma$$
$$=-g\varepsilon^{\alpha\beta i}(\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\rho-\partial_\rho\hat{A}^\alpha_\mu)\hat{A}^\beta_\mu-g^2\varepsilon^{e\alpha\beta}\varepsilon^{e\gamma i}\hat{A}^\alpha_\mu\hat{A}^\beta_\rho\hat{A}^\gamma_\mu$$
$$-g\varepsilon^{\alpha i\gamma}\partial^\rho\hat{C}^+_\alpha\hat{C}_\gamma;$$

$$\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\partial_\sigma\hat{A}^i_\rho}=-(\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\nu-\partial_\nu\hat{A}^\alpha_\mu)g^{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\delta^{i\alpha}-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}g^{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\delta^{i\alpha}\hat{A}^\beta_\mu\hat{A}^\gamma_\nu$$
$$-\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\hat{A}^\alpha_\nu\delta^{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\delta^{i\alpha}$$
$$=-(\partial_\sigma\hat{A}^i_\rho-\partial_\rho\hat{A}^i_\sigma)-g\varepsilon^{i\beta\gamma}\hat{A}^\beta_\sigma\hat{A}^\gamma_\rho-\frac{1}{\alpha}\partial_\sigma\hat{A}^i_\rho;$$

$$\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\hat{C}^+_\alpha}=\partial^2\hat{C}_\alpha,\qquad\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\partial^\mu\hat{C}^+_\alpha}=-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\hat{A}^\beta_\mu\hat{C}_\gamma;$$

$$\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\hat{C}_\alpha}=-\partial^2\hat{C}^+_\alpha+g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu\hat{C}^+_\beta\hat{A}^\gamma_\mu,\qquad\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}_{eff}}{\delta\partial^\mu\hat{C}_\alpha}=0。$$

所以，SU(2)规范场的运动方程为

$$\partial^2\hat{A}^i_\rho-\partial_\rho\partial_\sigma\hat{A}^i_\sigma+\frac{1}{\alpha}\partial^2\hat{A}^i_\rho+g\varepsilon^{i\alpha\beta}(\partial_\rho\hat{A}^\alpha_\sigma-\partial_\sigma\hat{A}^\alpha_\rho)\hat{A}^\beta_\sigma$$
$$+g\varepsilon^{i\alpha\beta}\partial_\rho\hat{C}^+_\alpha\hat{C}_\beta-g^2\varepsilon^{e\alpha\beta}\varepsilon^{e\gamma i}\hat{A}^\alpha_\sigma\hat{A}^\beta_\rho\hat{A}^\gamma_\sigma=0;$$
$$\partial^2\hat{C}_\alpha+g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(\partial^\mu\hat{A}^\beta_\mu\hat{C}_\gamma+\hat{A}^\beta_\mu\partial^\mu\hat{C}_\gamma)=0;$$
$$\partial^2\hat{C}^+_\alpha-g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu\hat{C}^+_\beta\cdot\hat{A}^\gamma_\mu=0。\qquad(5\text{–}4)$$

这些方程，比起经典的运动方程来复杂许多。要求解它们，即使不是不可能的，也是十分繁难的。

对易关系 如果在方程(5-2)中，令 t 和 t_1 固定，t_2, t_3, …, $t_m \to \infty$, t_{m+1}, t_{m+2}, …, $t_n \to -\infty$, 那么(5-2)式就成为

$$\left\langle \text{out},\ m-1 \left| T^* \left\{ \left(\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\phi}_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \partial_\mu \hat{\phi}_i(x)} \right) \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right\} \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$= i\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)\langle \text{out},\ m-1 | n-m,\ \text{in}\rangle_\circ \qquad (5\text{-}5)$$

如果上式中包含时间导数的只是第二项(玻色场就是如此)，则

$$\left\langle \text{out},\ m-1 \left| T^* \left(\partial_t \frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)} \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right) \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$= \partial_t \left\langle \text{out},\ m-1 \left| T^* \left(\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)} \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right) \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle_\circ$$

如果圆括号内无时间导数

$$\left(\pi_i = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{\phi}_i} \right),$$

则上式等于

$$\partial_t \left\langle \text{out},\ m-1 \left| T \left(\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)} \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right) \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$= \left\langle \text{out},\ m-1 \left| T \left(\partial_t \frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)} \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right) \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$\mp \delta(t-t_1) \left\langle \text{out},\ m-1 \left| \left[\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)}, \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right]_\pm \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle,$$

+ 号表示反对易子，相应于费米算符；− 号表示对易子，相应于二者中至少其一是玻色算符。把这些代入(5-5)式，就得到

$$\left\langle \text{out},\ m-1 \left| T \left\{ \left(\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\phi}_i(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \partial_\mu \hat{\phi}_i(x)} \right) \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right\} \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$\pm \delta(t-t_1) \left\langle \text{out},\ m-1 \left| \left[\frac{\delta \hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta \hat{\dot{\phi}}_i(x)}, \hat{\phi}_{i_1}(x_1) \right]_\pm \right| n-m,\ \text{in} \right\rangle$$

$$= i\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)\langle \text{out},\ m-1 | n-m,\ \text{in}\rangle_\circ$$

由于 n、m 是任意的，上式成立的条件是任意态矢 $\langle \text{out}, m-1|$ 与 $|n-m, \text{in}\rangle$ 间的算符为

$$T\left\{\left(\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\hat{\phi}_i(x)}-\partial_\mu\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\partial_\mu\hat{\phi}_i(x)}\right)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\right\}$$

$$\pm\delta(t-t_1)\left[\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\dot{\hat{\phi}}_i(x)},\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\right]_{\pm}=i\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)。$$

考虑到拉格朗日方程(5-3)式，上式第一项为零。所以

$$\delta(t-t_1)\left[\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\dot{\hat{\phi}}_i(x)},\ \hat{\phi}_{i_1}(x_1)\right]_{\pm}=\pm i\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)。$$

按照定义

$$\hat{\pi}_i(x)=\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}(x)}{\delta\dot{\hat{\phi}}_i(x)},$$

上式就成为

$$\delta(t-t_1)[\hat{\pi}_i(x),\ \hat{\phi}_{i_1}(x_1)]_{\pm}=\pm i\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)。\qquad(5\text{-}5)$$

这就是算符的正则对易关系。对于玻色场，是人所熟知的。

费米子的反对易关系　自由费米子的拉格朗日算符

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{L}}(x)&=\hat{\bar{\psi}}(x)(i\partial\!\!\!/-m)\hat{\psi}(x)\\&=i\hat{\psi}^+(x)\dot{\hat{\psi}}(x)+\hat{\bar{\psi}}(x)(i\gamma^i\partial_i-m)\hat{\psi}(x),\end{aligned}$$

这时

$$\left\langle\text{out},\ m-1\left|T^*\left\{\left(\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\bar{\psi}}(x)}-\partial_\mu\frac{\delta\hat{\mathscr{L}}}{\delta\partial_\mu\dot{\bar{\psi}}(x)}\right)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\right\}\right|n-m,\ \text{in}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}&=\langle\text{out},\ m-1|T^*\{(i\partial\!\!\!/-m)\hat{\psi}(x)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\}|n-m,\ \text{in}\rangle\\&=\langle\text{out},\ m-1|T\{(i\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial}-m)\hat{\psi}(x)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\}|n-m,\ \text{in}\rangle\\&\quad+i\partial_t\langle\text{out},\ m-1|T\{\gamma_0\hat{\psi}(x)\hat{\phi}_{i_1}(x_1)\}|n-m,\ \text{in}\rangle\\&=i\langle\text{out},\ m-1|\delta(t-t_1)[\gamma_0\hat{\psi}(x),\ \hat{\phi}_{i_1}(x_1)]_{\pm}|n-m,\ \text{in}\rangle。\end{aligned}$$

$$\delta(t-t_1)[\hat{\psi}(x),\ \hat{\phi}_{i_1}(x_1)]_{\pm}=\delta_{i,i_1}\delta^4(x-x_1)\gamma_0。$$

当 $\hat{\phi}_{i_1}(x_1)=\hat{\bar{\psi}}(x_1)$ 时，$i=i_1$，

$$\{\hat{\psi}(x),\ \hat{\psi}^+(x_1)\}_{t=t_1}=\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_1);$$

当 $\hat{\phi}_{i_1}(x_1)=\hat{\psi}(x_1)$ 时，$i\neq i_1$，

$$\{\hat{\psi}(x),\ \hat{\psi}(x_1)\}=0;$$

当 $\hat{\phi}_{i_1}(x_1)=\hat{\phi}(x_1)$ 玻色场时，

$$[\hat{\psi}(x),\ \hat{\phi}(x_1)]=0。$$

§2. 场、源分离变换和费曼规则

生成泛函是场量的路径积分，格林函数是生成泛函对外源的导数。因而，如果能够把生成泛函中的场量和外源分离开来，使它们的积分和求导互不相关，那么，在不进行或不能进行路径积分的情况下，也可以对外源求导，算出格林函数，导出费曼规则。实际上，利用生成泛函在积分变量变换下的不变性，就可以达到场源分离的目的，不进行路径积分，算出费曼规则。我们以 QED 为例，进行论述。

有效作用量 在 QED 的情况下，既不需要 Higgs 场，也不出现鬼场，包括规范固定项在内的有效作用量为

$$\begin{aligned}S_{eff}=\int d^4x\Big[&\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/+eA\!\!\!/-m)\psi\\&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2\Big]\\=\int d^4x\Big[&\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi+\frac{1}{2}A_\mu\Big(\partial^2 g^{\mu\nu}\\&-\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)\partial^\mu\partial^\nu\Big)A_\nu+e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi\Big]。\end{aligned}\tag{5-6}$$

与此相应的格林函数的生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[J,\ \bar{\eta},\ \eta]=\int[dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar{\psi}]\exp\Big\{i\int d^4x\Big[&\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi\\&+\frac{1}{2}A_\mu\Big[\partial^2 g^{\mu\nu}-\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)\partial^\mu\partial^\nu\Big]A_\nu+e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi\\&+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\Big]\Big\}。\end{aligned}\tag{5-7}$$

相互作用项 (5–6)式、(5–7)式中的 $e\bar{\psi}\not{A}\psi$ 是相互作用项，包含三个场量，使(5–7)式的积分是非高斯型的，不能积出；在场源分离变换下，它反而会使场源混合，制造困难。所以，只能另作处理。象在(3–49)式中处理 ϕ^4 那样，把它移至前面，再作替换

$$A_\mu \to \frac{\delta}{i\delta J_\mu}, \quad \psi \to \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} \to \frac{\delta}{-i\delta\eta},$$

即令

$$\begin{aligned} Z[J,\ \bar{\eta},\ \eta] &= \int [dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar{\psi}] \exp\left[i\int d^4x\, e\bar{\psi}\not{A}\psi\right] \\ &\cdot \exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi+\frac{1}{2}A_\mu\left(\partial^2 g^{\mu\nu}\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right\} \\ &= \exp\left[\int d^4x\, e\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu}\cdot\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\cdot\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta}\right)\right] \\ &\cdot \int [dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar{\psi}] \exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi\right.\right. \\ &+\frac{1}{2}A_\mu\left(\partial^2 g^{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu \\ &\left.\left.+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right\}。 \end{aligned}$$

$D(x)$、$K_{\mu\nu}(x)$及其逆 $S_f(x-y)$、$D_{\mu\nu}(x-y)$ 令

$$D(x)=i\not{\partial}-m, \quad K^{\mu\nu}(x)=\partial^2 g^{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu, \qquad (5\text{–}8)$$

$$D(x)S_f(x-y)=\delta^4(x-y),$$

$$K^{\mu\nu}(x)D_{\nu\lambda}(x-y)=g^\mu_\lambda\delta^4(x-y)。$$

后两式是定义 $S_f(x-y)$、$D_{\mu\nu}(x-y)$的微分方程

$$(i\not{\partial}-m)S_f(x-y)=\delta^4(x-y),$$

$$\left(\partial^2 g^{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)D_{\nu\lambda}(x-y)=g^\mu_\lambda\delta^4(x-y),$$

即 $S_f(x-y)$是 $D(x)$的格林函数，$D_{\mu\nu}(x-y)$ 是 $K_{\mu\nu}(x)$的格林函

数。显然，它们的解是

$$S_f(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{\not p-m+i\epsilon},$$

$$D_{\mu\nu}(x-y)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\,\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2-i\epsilon}\,e^{-ik(x-y)}。$$

(5–9)

采用(5–8)式的符号，生成泛函就可以表示为

$$Z[J,\ \bar\eta,\ \eta]=\exp\left[\int d^4x\,e\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta_\beta}\right)\right]$$

$$\cdot\int[dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar\psi]\exp\left\{i\int d^4x\left[\bar\psi D\psi\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}A_\mu K^{\mu\nu}A_\nu+J_\mu A^\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right]\right\}。\qquad(5\text{–}10)$$

变数变换 为了使上式中被积函数的场源混合项 $J_\mu A^\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta$ 分离开来，我们作变换

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\int d^4yD_{\mu\nu}(x,\ y)J^\nu(y),$$

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\psi(x)-\int d^4yS_f(x,\ y)\eta(y),$$

$$\bar\psi(x)\to\bar\psi'(x)=\bar\psi(x)-\int d^4y\bar\eta(y)S_f(y,\ x)。$$

这是一种特殊的平移变换。显然，雅可宾行列式等于 1，

$$[dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar\psi]\to[dA'_\mu]\,[d\psi']\,[d\bar\psi']=[dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar\psi]。$$

(5–10)式中被积函数指数上的项变换为

$$\int d^4x\left[\bar\psi D\psi+\frac{1}{2}A_\mu K^{\mu\nu}A_\nu+J_\mu A^\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right]\to$$

$$\int d^4x\left[\bar\psi(x)-\int d^4y\bar\eta(y)S_f(y,\ x)\right]$$

$$\cdot D(x)\left[\psi(x)-\int d^4yS_f(x,\ y)\eta(y)\right]$$

$$+\int d^4x\,\frac{1}{2}\Big[A_\mu(x)-\int d^4y D_{\mu\nu}(x,y)J^\nu(y)\Big]$$

$$\cdot K^{\mu\lambda}(x)\Big[A_\lambda(x)-\int d^4y\,D_{\lambda\rho}(x,\ y)J^\rho(y)\Big]$$

$$+\int d^4x J^\mu(x)\Big[A_\mu(x)-\int d^4y\,D_{\mu\nu}(x,\ y)J^\nu(y)\Big]$$

$$+\int d^4x\,\bar{\eta}(x)\Big[\psi(x)-\int d^4y S_f(x,\ y)\eta(y)\Big]$$

$$+\int d^4x\Big[\bar{\psi}(x)-\int d^4y\,\bar{\eta}(y)S_f(y,x)\Big]\eta(x)$$

$$=\int d^4x\Big[\bar{\psi}(x)D(x)\psi(x)-\int d^4y\,\bar{\eta}(y)\delta^4(y-x)\psi(x)$$

$$-\bar{\psi}(x)\int d^4y\,\delta^4(x-y)\eta(y)$$

$$+\int d^4y\,d^4z\bar{\eta}(y)\delta^4(y-x)S_f(x,\ z)\eta(z)\Big]$$

$$+\int d^4x\,\frac{1}{2}\Big[A_\mu(x)K^{\mu\lambda}(x)A_\lambda(x)$$

$$-\int d^4y\,g^\lambda_\nu\,\delta^4(x-y)J^\nu(y)A_\lambda(x)$$

$$-A_\mu(x)\int d^4y\,g^\mu_\rho\,\delta^4(x-y)J^\rho(y)$$

$$+\int d^4y\,d^4z\,D_{\mu\nu}(x,\ y)J^\nu(y)g^\mu_\rho\,\delta^4(x-z)J^\rho(z)\Big]$$

$$+\int d^4x\Big[J^\mu(x)A_\mu(x)-\int d^4y\,J^\mu(x)D_{\mu\nu}(x,\ y)J^\nu(y)\Big]$$

$$+\int d^4x\Big[\bar{\eta}(x)\psi(x)-\int d^4y\,\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)\Big]$$

$$+\int d^4x\Big[\bar{\psi}(x)\eta(x)-\int d^4y\bar{\eta}(y)S_f(y,\ x)\eta(x)\Big]$$

$$=\int d^4x\Big[\bar{\psi}(x)D(x)\psi(x)-\bar{\eta}(x)\psi(x)-\bar{\psi}(x)\eta(y)$$

$$+\int d^4y\,\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)\Big]$$

$$+\int d^4x\,\frac{1}{2}\Big[A_\mu(x)K^{\mu\nu}(x)A_\nu(x)-J^\mu(x)A_\mu(x)$$

$$-A_\mu(x)J^\mu(x)+\int d^4y\,J^\mu(x)D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)$$

$$+\int d^4x\left[J^\mu(x)\,A_\mu(x)-\int d^4y\,J^\mu(x)D_{\mu\nu}(x,\ y)J^\nu(y)\right]$$

$$+\int d^4x\left[\bar{\eta}(x)\,\psi(x)-\int d^4y\,\bar{\eta}(x)S_f(x,y)\eta(y)\right]$$

$$+\int d^4x\left[\bar{\psi}(x)\,\eta(x)-\int d^4y\,\bar{\eta}(y)S_f(y,x)\eta(x)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\bar{\psi}(x)D(x)\psi(x)+\frac{1}{2}A_\mu(x)\,K^{\mu\nu}(x)\,A_\nu(x)\right]$$

$$-\int d^4x\,d^4y\left[\bar{\eta}(x)\,S_f(x,\ y)\,\eta(y)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}J^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)\right]。$$

这样就把场和源分离开来了。代入(5–10)式就得到

$$Z[J,\ \bar{\eta},\ \eta]=\exp\left[\int d^4x e\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta}\right)\right]$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x\,d^4y\left[\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}J^\mu(x)D_{\mu\nu}(x,\ \ y)J^\nu(y)\right]\right\}$$

$$\cdot\int[dA_\mu]\,[d\psi]\,[d\bar{\psi})\exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}(x)D(x)\psi(x)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}A_\mu(x)\,K^{\mu\nu}(x)\,A_\nu(x)\right]\right\}。$$

后一因子与外源无关，它是场量的路径积分，不管它是否可以计算出来，我们都可以弃之不顾，而令

$$Z[J,\ \bar{\eta},\ \eta]=\exp\Big[\int d^4x\, e\Big(\frac{\delta}{\delta J_\mu}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta}\Big)\Big]$$

$$\cdot\exp\Big\{-i\int d^4x\,d^4y\Big[\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)$$

$$+\frac{1}{2}\,J^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)\Big]\Big\}。\qquad (5\text{–}11)$$

e是质子电荷,是小量,上式可以按它展开为

$$Z[J,\ \bar{\eta},\ \eta]=\Big[1+e\int d^4x\Big(\frac{\delta}{\delta J_\mu}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta}\Big)+\cdots\Big]$$

$$\cdot\exp\Big\{-i\int d^4x\,d^4y\Big[\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)$$

$$+\frac{1}{2}\,J^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)\Big]\Big\}。\qquad (5\text{–}12)$$

从它就可以导出QED的费曼规则。

传播子 按定义,费米场的自由传播子为

$$\frac{\delta^2 Z}{i^2\delta\eta_\alpha(y)\delta\bar{\eta}_\beta(x)}\Big|_{J,\eta,\bar{\eta},e=0}=i(S_f(x,\ y))_{\beta\alpha}。$$

由(5–9)式可知,在动量表象中,费米传播子为

$$iS_f(p)=\frac{i}{\not p-m}=\quad \xrightarrow{\ p\ }\ 。$$

按定义,规范场的自由传播子为

$$\frac{\delta^2 Z}{i^2\delta J_\mu(x)\delta J_\nu(y)}\Big|_{J,\eta,\bar{\eta},e=0}=iD_{\mu\nu}(x,\ y)。$$

和(5–9)式比较得

$$iD_{\mu\nu}(k)=\frac{-i\Big(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big)}{k^2+i\epsilon}=\ \mu\overset{k}{\sim\!\sim\!\sim}\nu\ 。$$

三点顶角 由于

$$\int d^4z\Big(\frac{\delta}{\delta J_\mu(z)}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(z)}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(z)}\Big)$$

$$\cdot \exp\left\{-i\int d^4x\,d^4y\left[\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}J^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)\right]\right\}$$

$$=(-i)\int d^4x\,d^4y\,d^4z[\delta^{\beta\gamma}\,\delta^4(z-x)S_f(x,\ y)_{\gamma\delta}\,\eta_\delta(y)]\gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

$$\cdot(+i)\int d^4u\,d^4v\,[\bar{\eta}_\sigma(u)S_f(u,\ v)_{\sigma\rho}\,\delta^{\alpha\rho}\,\delta^4(z-v)]$$

$$\cdot(-i)\int d^4r\,d^4s[\,\delta^{\mu\nu}\,\delta^4(r-z)\,D_{\nu\lambda}(r,\ s)J^\lambda(s)]+\cdots$$

$$=(-i)^3\int d^4z\,d^4u\,d^4y\,d^4s[\bar{\eta}_\sigma(u)S_f(u,\ z)_{\sigma\alpha}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

$$\cdot S_f(z,\ y)_{\beta\delta}\eta_\delta(y)\,D_{\mu\lambda}(z,\ s)J^\lambda(s)+\cdots$$

$$=(-i)^3\int d^4u\,d^4v\,d^4r d^4s[\bar{\eta}(u)S_f(u,\ v)\gamma^\mu$$

$$\cdot S_f(v,\ r)\eta(r)\,D_{\mu\lambda}(v,\ s)\,J^\lambda(s)]+\cdots。$$

代入(5–12)式得

$$Z[J,\ \eta,\ \bar{\eta}]=\left[1+ie\int d^4u\,d^4v\,d^4r\,d^4s(\bar{\eta}(u)S_f(u,\ v)\gamma^\mu\right.$$

$$\left.\cdot S_f(v,\ r)\,\eta(r)\,D_{\mu\lambda}(v,\ s)\,J^\lambda(s))+\cdots\right]$$

$$\cdot\exp\left\{-i\int d^4x\,d^4y\left[\bar{\eta}(x)S_f(x,\ y)\eta(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}J^\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x,\ y)\,J^\nu(y)\right]\right\}。$$

按定义,三点格林函数为

$$\frac{\delta^3 Z}{i^3\,\delta\eta_\alpha(x)\delta\bar{\eta}_\beta(y)\delta J_\mu(z)}\Bigg|_{J,\eta,\bar{\eta},e^3=0}$$

$$=\frac{\delta\left(ie\int d^4u\,d^4v\,d^4r\,d^4s\bar{\eta}(u)S_f(u,v)\gamma^\mu S_f(v,r)\eta(r)\,D_{\mu\lambda}(v,s)J^\lambda(s)\right)}{i^3\,\delta\eta_\alpha(x)\,\delta\eta_\beta(y)\,\delta J_\mu(z)}$$

$$= ie\int d^4u\,d^4v\,d^4r\,d^4s\,\delta^{\beta\sigma}\,\delta^4(u-y)S_f(u,\ v)_{\sigma\rho}\,\gamma^{\nu}_{\rho\gamma}$$

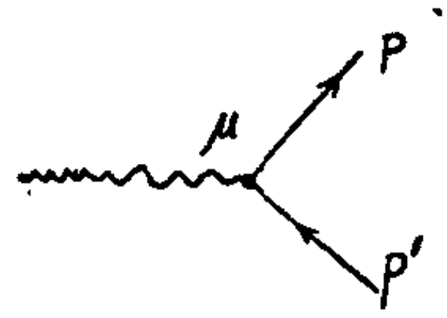
$$\cdot S_f(v,\ r)_{\gamma\delta}\,\delta^{\alpha\delta}\,\delta^4(x-r)D_{\nu\lambda}(v,\ s)\delta^{\mu\lambda}\,\delta^4(z-s)$$

$$= ie\int d^4v\,S_f(y,\ v)_{\beta\rho}\,\gamma^{\nu}_{\rho\gamma}S_f(v,\ x)_{\gamma\alpha}D_{\nu\mu}(v,\ z)$$

$$= -e\int d^4v\,(iS_f(y,\ v)\gamma^{\nu}_{i}\,S_f(v,\ x))_{\beta\alpha}iD_{\nu\mu}(v,\ z)。$$

截掉三条外腿,就得到三点顶角

$\Gamma_\mu(p,\ p';\ k) = -ie\gamma_\mu$ =



。

闭合费米子回路 (5–12)式中的 e^2 项为

$$e^2\int d^4u\,d^4v\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(u)}\cdot\frac{\delta}{\delta r_\alpha(u)}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(u)}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\delta}{\delta J_\nu(v)}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\sigma(v)}\,\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\rho(v)}\right)$$

$$\cdot\exp\left\{-i\int d^4r\,d^4s\left[\bar{\eta}(r)\,S_f(r,\ s)\eta(s)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\,J^\mu(r)D_{\mu\nu}(r,\ \ s)J^\nu(s)\right]\right\}$$

$$= e^2\int d^4u\,d^4v\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(u)}\,\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(u)}\,\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(u)}\right)$$

$$\cdot\left(-i\int d^4s S_f(v,\ s)_{\rho\delta}\,\eta_\delta(s)\right)\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\left(-i\int d^4r\,\bar{\eta}_\gamma(r)S_f(r,\ v)_{\gamma\sigma}\right)$$

$$\cdot\left(-i\int d^4t\,J^\mu(t)\,D_{\mu\nu}(t,\ v)\right)$$

$$\cdot\exp\left\{-i\int d^4r\,d^4s\left[\bar{\eta}(r)S_f(r,\ s)\eta(s)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\,J^\mu(r)D_{\mu\nu}(r,\ \ s)J^\nu(s)\right]\right\}+\cdots$$

$$= e^2 \int d^4u\, d^4v (iS_f(v,\ u)_{\rho\alpha}) \gamma^{\nu}_{\sigma\rho} \gamma^{\mu}_{\alpha\beta} (-iS_f(u,\ v)_{\beta\sigma})$$

$$\cdot \left(-i\int d^4t\, J^{\lambda}(t) D_{\lambda\nu}(t,\ v)\right)\left(-i\int d^4r\, D_{\mu\lambda}(r,\ u)\, J^{\lambda}(u)\right)$$

$$\cdot \exp\left\{-i\int d^4r\, d^4s \left[\bar{\eta}(r) S_f(r,\ s)\eta(s)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} J^{\mu}(r) D_{\mu\nu}(r,\ s) J^{\nu}(s)\right]\right\} + \cdots$$

$$= e^2 \int d^4u\, d^4v [-\mathrm{Tr}(iS_f(u,\ v)\gamma^{\nu} iS_f(v,\ u)\gamma^{\mu})]$$

$$\cdot \left(-i\int d^4r\, D_{\mu\lambda}(r,\ u) J^{\lambda}(u)\right)\left(-i\int d^4t\, J^{\lambda}(t) D_{\lambda\nu}(t,\ v)\right)$$

$$\cdot \exp\left\{-i\int d^4r\, d^4s \left[\bar{\eta}(r) S_f(r,\ s)\eta(s)\right.\right.$$

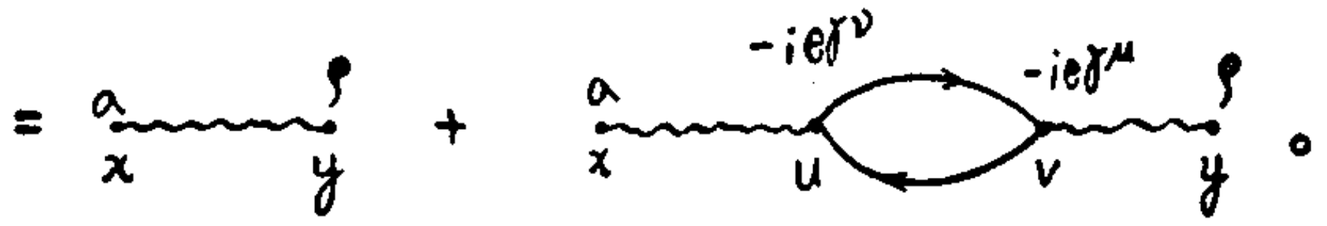
$$\left.\left. + \frac{1}{2} J^{\mu}(r) D_{\mu\nu}(r,\ s) J^{\nu}(s)\right]\right\} + \cdots .$$

所以，规范场二级近似的传播子为

$$\left.\frac{\delta^2 Z}{i^2 \delta J_{\sigma}(x) \delta J_{\rho}(y)}\right|_{J,\eta,\bar{\eta},e^4=0}$$

$$= iD_{\sigma\rho}(x,\ y) + \int d^4u\, d^4v\, iD_{\sigma\nu}(x,\ v)$$

$$\cdot [-\mathrm{Tr}(iS_f(u,\ v)(-ie\gamma^{\nu}) iS_f(v,\ u)(-ie\gamma^{\mu})] iD_{\mu\rho}(u, y)$$



由此可知，对于闭合费米子回路，除一般费曼规则外，要多加一个(−Tr)因子。

§3. 一般变换下的不变性和恒等式

从前面的论述可知，泛函路积分方法的效力，在于采用了外源

技术，也在于积分变数变换下的不变性。为了进一步利用泛函路积分方法，我们进一步扩展外源技术，并讨论一般积分变数变换下的不变性，以及由它导出的恒等式。

扩展的生成泛函　在通常的生成泛函

$$Z[J_i]=\int[d\phi_i]\exp\left\{i\int d^4x\,[\mathscr{L}(\phi_i,\ \partial_\mu\phi_i)+J_i\phi_i]\right\}$$

中，只包含了场量 $\phi_i(x)$ 和由 $\phi_i(x)$、$\partial_\mu\phi_i(x)$ 构成的有效拉氏量 $\mathscr{L}$，以及和场 $\phi_i(x)$相应的外源 $J_i(x)$。$Z[J_i]$对 J_i的导数就是格林函数，就是算符 $\hat{\phi}_i(x)$的编时乘积的真空期待值。可是，在基本粒子的相互作用理论中，粒子常常以流的形式出现，以矢量流 $V^\alpha_\mu(x)$、轴矢量流 $A^\alpha_\mu(x)$、标量流 $S^\alpha(x)$、膺标量流 $P^\alpha(x)$的形式参加作用。所以，常常需要了解流算符 $\hat{V}^\alpha_\mu(x)$、$\hat{A}^\alpha_\mu(x)$、$\hat{S}^\alpha(x)$、$\hat{P}^\alpha(x)$的编时乘积的真空期待值。$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，是群的指标。为此，我们引进和这些流相应的外源 $v^\alpha_\mu(x)$、$a^\alpha_\mu(x)$、$s^\alpha(x)$、$p^\alpha(x)$，并把生成泛函扩充为

$$Z[J_i,\ v^\alpha_\mu,\ a^\alpha_\mu,\ s^\alpha,\ p^\alpha]=\int[d\phi_i]\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L}+J_i\phi_i+v^\alpha_\mu V^{\alpha\mu}+a^\alpha_\mu A^{\alpha\mu}+s^\alpha S^\alpha+p^\alpha P^\alpha\right]\right\}。\quad(5\text{–}13)$$

因为格林函数是它对外源的导数在外源为零时的值，所以，任意伴随着相应外源而加入的项，在计算的物理结果中是不出现的。

一般变换　前两节讨论的变换，都属平移变换，第一节讨论的是一般的平移变换，第二节讨论的是特殊的平移变换。但是，积分变数 $\phi_i(x)$的变换，不限于平移变换，可以是任意的变换，例如，可以是变换

$$\phi_i(x)\to\phi'_i(x)=\phi_i(x)+\delta\phi_i(x),$$

$$\delta\phi_i=\omega^\alpha F^\alpha_i(\phi_j,\ \partial_\nu\phi_j)+\partial_\mu\omega^\alpha G^{\alpha\mu}_i(\phi_j,\ \partial_\nu\phi_j),$$

$$\delta\partial_\mu\phi_i=\partial_\mu\omega_\alpha F^\alpha_i(\phi_j,\ \partial_\nu\phi_j)+\omega_\alpha\partial_\mu F^\alpha_i(\phi_j,\ \partial_\nu\phi_j)$$

$$+\partial_\mu\partial_\nu\omega_\alpha G^{\alpha\nu}(\phi_j,\ \partial_\lambda\phi_j)+\partial_\nu\omega_\alpha\cdot\partial_\mu G^{\alpha\nu}(\phi_j,\ \partial_\lambda\phi_j)。$$

(5–14)

这里，$F_i^\alpha(\phi_j,\ \partial_\mu\phi_j)$和 $G_i^{\alpha\mu}(\phi_j,\ \partial_\nu\phi_j)$是 ϕ_j、$\partial_\mu\phi_j$ 的任意泛函；$\omega_\alpha(x)$及其导数是四维时空边界上为零的任意的小量函数。

在(5–14)式的变换下，作为 ϕ_i、$\partial_\mu\phi_i$ 的泛函的作用量 S 和流 V_μ^α、A_μ^α、S^α、P^α，也要发生相应的变化

$$S\to S'=S+\delta S,$$

$$V_\mu^\alpha\to V_\mu^{\alpha\prime}=V_\mu^\alpha+\delta V_\mu^\alpha,$$

$$A_\mu^\alpha\to A_\mu^{\alpha\prime}=A_\mu^\alpha+\delta A_\mu^\alpha,$$

$$S^\alpha\to S^{\alpha\prime}=S^\alpha+\delta S^\alpha,$$

$$P^\alpha\to P^{\alpha\prime}=P^\alpha+\delta P^\alpha。\qquad(5–15)$$

函数空间的积分体积元的变换为

$$[d\phi_i]\to[d\phi_i']=J[d\phi_i]。\qquad(5–16)$$

所有这些变化，都是小量 $\omega_\alpha(x)$ 的泛函，即 $\delta S(\omega_\alpha)$、$\delta V_\mu^\alpha(\omega_\alpha)$、$\delta A_\mu^\alpha(\omega_\alpha)$、$\delta S^\alpha(\omega_\alpha)$、$\delta P^\alpha(\omega_\alpha)$、$J(\omega_\alpha)$。

不变性和恒等式　在积分变数的变换(5–14)式，以及相应的变换(5–15)式、(5–16)式下，生成泛函 (5–13) 式是不变的。把(5–14)式、(5–15)式、(5–16)式代入(5–13)式就得到

$$Z[J_i,\ v_\mu^\alpha,\ a_\mu^\alpha,\ s^\alpha,\ p^\alpha]=\int[d\phi_i]J\exp\Big\{i(S+\delta S)$$

$$+i\int d^4x\,[J_i(\phi_i+\delta\phi_i)+v^{\alpha\mu}(V_\mu^\alpha+\delta V_\mu^\alpha)+a^{\alpha\mu}(A_\mu^\alpha+\delta A_\mu^\alpha)$$

$$+s^\alpha(S^\alpha+\delta S^\alpha)+p^\alpha(P^\alpha+\delta P^\alpha)]\Big\}。$$

由于 $\omega_\alpha(x)$是小量，$J(\omega)$、$\delta S(\omega)$、$\delta\phi_i(\omega)$、$\delta V_\mu^\alpha(\omega)$、$\delta A_\mu^\alpha(\omega)$、$\delta S^\alpha(\omega)$、$\delta P^\alpha(\omega)$也是小量。将上式展开，取一级小量，就得到

$$Z=\int[d\phi_i]\Big[J+i\delta S+i\int d^4x(J_i\delta\phi_i+v_\mu^\alpha\delta V_\alpha^\mu+a_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu+s^\alpha\delta S^\alpha$$

$$+\ p^{\alpha}\,\delta P^{\alpha})\Big]\exp\Big\{iS+i\int d^4x[J_i\phi_i+v_{\mu}^{\alpha}V_{\alpha}^{\mu}+a_{\mu}^{\alpha}A_{\alpha}^{\mu}$$

$$+s^{\alpha}S^{\alpha}+p^{\alpha}\,P^{\alpha}]\Big\}。$$

由于 Z 的不变性，Z 是与 $\omega_\alpha(x)$ 无关的泛函，所以将上式对 $\omega_\alpha(x)$ 求导，就得到相应的恒等式

$$\int[d\phi_i]\frac{\delta}{\delta\omega_\alpha(x)}\Big[J+i\delta S+i\int d^4x(J_i\delta\phi_i+v_{\mu}^{\alpha}\delta V_{\alpha}^{\mu}+a_{\mu}^{\alpha}\delta A_{\alpha}^{\mu}$$

$$+s^{\alpha}\delta S^{\alpha}+p^{\alpha}\delta P^{\alpha})\Big]\exp\Big\{iS+i\int d^4x[J_i\phi_i+v_{\mu}^{\alpha}V_{\alpha}^{\mu}+a_{\mu}^{\alpha}A_{\alpha}^{\mu}$$

$$+s^{\alpha}S^{\alpha}+p^{\alpha}\,P^{\alpha}]\Big\}=0。\qquad(5\text{–}17)$$

这恒等式是一般的，在不同的具体情况下有不同的具体表示。我们以 SU(3) 规范场和费米场为例，来说明它的意义。

有效作用量　包括规范场、费米场、鬼场在内的，SU(3) 理论的有效作用量为

$$S_{eff}=S+S_{费}+S_{鬼},$$

$$S=\int d^4x\left[\bar{\psi}(x)i\Big(\not{\partial}-ig\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\not{B}^{\alpha}(x)\Big)\psi(x)-m\bar{\psi}\psi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu^{\alpha}-\partial_\nu B_\mu^{\alpha}+gf^{\alpha\beta\gamma}B_\mu^{\beta}B_\nu^{\gamma})^2\right],$$

$$S_{规}=-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x\,(\partial^\mu B_\mu^{\alpha})^2,$$

$$S_{鬼}=\int d^4x[C_{\alpha}^{+}\partial^2 C_{\alpha}-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_{\alpha}^{+}\cdot B_\mu^{\beta}\cdot C_\gamma]。\qquad(5\text{–}18)$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$；$\lambda^{\alpha}$ 是盖尔曼矩阵，满足对易关系

$$[\lambda^{\alpha},\ \lambda^{\beta}]=2if^{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\gamma},\ \{\lambda^{\alpha}\ ,\ \lambda^{\beta}\}=2d^{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\gamma};\qquad(5\text{–}19)$$

$f^{\alpha\beta\gamma}$，$d^{\alpha\beta\gamma}$ 是 SU(3) 的结构常数。

相互作用流　由费米场构成的，参与相互作用的矢量流、轴矢量流 标量流、膺标量流为

$$V_\mu^\alpha(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),\ A_\mu^\alpha(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),$$

$$S^\alpha(x)=\bar{\psi}(x)\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),\quad P^\alpha(x)=i\bar{\psi}(x)\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x)。$$

(5–20)

它们都是群空间的矢量，都有 $\alpha=1, 2, \cdots, 8$ 个分量。

格林函数生成泛函　包括流及其外源在内的、扩展的生成泛函为

$$\begin{aligned}&Z[\eta,\ \bar{\eta},\ \rho,\ \bar{\rho},\ J_\mu^\alpha,\ v_\mu^\alpha,\ a_\mu^\alpha,\ s^\alpha,\ p^\alpha]\\&=\int[d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dC]\,[d\bar{C}]\,[dB_\mu^\alpha]\,e^{iS_{eff}}\\&\cdot\exp\Big\{i\int d^4x[\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+\rho_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\rho_\alpha+J_\mu^\alpha B_\alpha^\mu\\&+v_\mu^\alpha V_\alpha^\mu+a_\mu^\alpha A_\alpha^\mu+s^\alpha S^\alpha+p^\alpha P^\alpha]\Big\}。\end{aligned}\tag{5–21}$$

注意，在这个实例中，我们用 $B_\mu^\alpha(x)$ 表示规范场，而以 $A_\mu^\alpha(x)$ 表示轴矢量流。

手征变换　我们将生成泛函路径积分表示中的积分变量，作一手征变换，即令

$$\psi(x)\to\psi'(x)=\left(1+i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\right)\psi(x),$$

$$\delta\psi(x)=i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x);$$

$$\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)\left(1+i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\right),$$

$$\delta\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}(x)i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2};$$

$$\delta C_\alpha^+=0,\ \delta C_\alpha=0,\ \delta B_\mu^\alpha=0。\tag{5–22}$$

$\omega_\alpha(x)$ 是四维时空边界上为零的小量函数。

在这变换下，雅可宾行列式矩阵的不为零的矩阵元为

$$K(x,\ y)=\frac{\delta\psi'(x)}{\delta\psi(y)}=\frac{\delta\bar{\psi}'(x)}{\delta\bar{\psi}(y)}$$

$$=\delta^4(x-y)+i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\delta^4(x-y)。$$

在时空空间是单位矩阵,在旋量空间和群空间为矩阵

$$K=I+i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}。$$

由于这矩阵是旋量场、即反对易 C 数的变换矩阵,所以雅可宾行列式

$$J=(\det K)^{-1}=\exp(-\ln\det K)=e^{-\mathrm{Tr}\ln K}$$

$$=1-\mathrm{Tr}\ln K=1-\mathrm{Tr}(K-1)=1。\qquad(5\text{-}23)$$

这是因为 ω^α 是小量,且

$$\mathrm{Tr}(K-1)=\mathrm{Tr}\left(i\omega^\alpha\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\right)=i\omega^\alpha\,\mathrm{Tr}\gamma_5\cdot\mathrm{Tr}\,\frac{\lambda^\alpha}{2}=0。$$

所以,变换前后函数空间积分的体积元相等。

在手征变换下,流的变化为

$$\delta V_\mu^\alpha=\delta\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\delta\psi$$

$$=\bar{\psi}i\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}i\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi$$

$$=i\omega^\beta\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\left[\frac{\lambda^\alpha}{2},\ \frac{\lambda^\beta}{2}\right]\psi=i\omega^\beta\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 if^{\alpha\beta\gamma}\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi$$

$$=-f^{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta A_\mu^\gamma,$$

$$\delta A_\mu^\alpha=\delta\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\delta\psi$$

$$=i\bar{\psi}\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi$$

$$=i\omega^\beta\bar{\psi}\gamma_\mu\left[\frac{\lambda^\alpha}{2},\ \frac{\lambda^\beta}{2}\right]\psi=-f^{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta V_\mu^\gamma,$$

$$\delta S^\alpha=\delta\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}\delta\psi=\bar{\psi}i\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi$$

$$+\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}\,i\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi=d^{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta P^\gamma,$$

$$\begin{aligned}\delta P^\alpha&=i\delta\bar{\psi}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\,\delta\psi\\&=-\bar{\psi}\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\,\gamma_5\,\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi-\bar{\psi}\gamma_5\,\frac{\lambda^\alpha}{2}\,\omega^\beta\gamma_5\,\frac{\lambda^\beta}{2}\,\psi\\&=-d^{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta S^\gamma\text{。}\end{aligned}\qquad(5\text{–}24)$$

而有效作用量的变化为

$$\begin{aligned}\delta S_{eff}=\delta S=\int d^4x\Big[&\delta\bar{\psi}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}B\!\!\!/^\alpha-m\Big)\psi\\&+\bar{\psi}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}B\!\!\!/^\alpha\Big)\delta\psi\Big]\\=\int d^4x\Big[&\bar{\psi}i\omega^\beta\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}B\!\!\!/^\alpha-m\Big)\psi\\&+\bar{\psi}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}B\!\!\!/^\alpha-m\Big)i\omega^\beta\gamma_5\,\frac{\lambda^\beta}{2}\,\psi\Big]\\=\int d^4x\omega_\alpha(x)&\,[\partial^\mu A^\alpha_\mu-2mP^\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu B^{\gamma\mu}]\text{。}\end{aligned}\qquad(5\text{–}25)$$

不变性和恒等式　生成泛函(5–21)式在上述的变换下是不变的，因而有和(5–17)式相当的恒等式

$$\begin{aligned}\int[d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dC]\,[dC^+]\,[dB^\alpha_\mu]\,\frac{\delta}{\delta\omega_\alpha(x)}\Big[&1+i\delta S\\&+i\int d^4x[\bar{\eta}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\eta+v^\alpha_\mu\delta V^{\alpha\mu}+a_{\mu\alpha}A^{\alpha\mu}+s^\alpha\delta S^\alpha+p^\alpha\delta P^\alpha]\\&\cdot\exp[iS_{eff}+\text{外源项}]=0\text{。}\end{aligned}$$

把(5–22)式、(5–24)式、(5–25)式代入上式，得

$$\begin{aligned}\int[d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dC]\,[dC^+]\,[dB^\alpha_\mu]\,\Big[&\partial^\mu A^\alpha_\mu-2mP^\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu B^{\gamma\mu}\\&+i\bar{\eta}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi+i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\eta+f^{\alpha\beta\gamma}v^\beta_\mu A^{\gamma\mu}+f^{\alpha\beta\gamma}a^\beta_\mu V^{\gamma\mu}\\&-d^{\alpha\beta\gamma}s^\beta P^\gamma+d^{\alpha\beta\gamma}p^\beta S^\gamma\Big]\exp[iS_{eff}+\text{外源项}]=0\text{。}\end{aligned}\qquad(5\text{–}26)$$

当外源等于零时，和(5–26)式相应的格林函数就是

$$\langle 0|\left[\partial^\mu \hat{A}^\alpha_\mu(x)-2m\hat{P}^\alpha(x)-gf^{\alpha\beta\gamma}\hat{A}^\beta_\mu(x)\hat{B}^{\gamma\mu}(x)\right]|0\rangle=0。$$

在量子电动力学的情况下，$f^{\alpha\beta\gamma}=0$，上式成为

$$\langle 0|\left(\partial^\mu \hat{A}_\mu(x)-2m\hat{P}(x)\right)|0\rangle=0。\qquad (5\text{–}26)$$

这就是轴矢量流部分守恒(PCAC)的一种表示式。

将(5–26)式对外源 $v^\beta_\nu(y)$、$v^\gamma_\lambda(z)$求导，得

$$\int[d\psi][d\bar{\psi}][dC][dC^+][dB^\alpha_\mu]\Big\{f^{\alpha\beta\delta}A^{\delta\nu}(x)\delta^4(x-y)iV^{\gamma\lambda}(z)$$

$$+f^{\alpha\gamma\delta}A^{\delta\lambda}(x)\delta^4(x-z)iV^{\beta\nu}(y)-V^{\beta\nu}(y)V^{\gamma\lambda}(z)$$

$$\cdot\Big[\partial^\mu A^\alpha_\mu(x)-2mP^\alpha(x)-gf^{\alpha\rho\sigma}A^\beta_\mu(x)B^{\sigma\mu}(x)+i\bar{\eta}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi$$

$$+i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\eta+f^{\alpha\sigma\rho}v^\sigma_\mu A^{\rho\mu}+f^{\alpha\sigma\rho}a^\sigma_\mu V^{\rho\mu}-d^{\alpha\sigma\rho}s^\beta P^\rho$$

$$+d^{\alpha\sigma\rho}p^\sigma P^\rho\Big]\Big\}\cdot\exp[iS_{eff}+\text{外源项}]=0。$$

当外源为零时，上式成为

$$\int[d\psi][d\bar{\psi}][dC][dC^+][dB^\alpha_\mu]\Big\{i\delta^4(x-y)f^{\alpha\beta\delta}A^\delta_\nu(x)V^\gamma_\lambda(y)$$

$$+i\delta^4(x-z)f^{\alpha\gamma\delta}A^\delta_\lambda(x)V^\beta_\nu(y)-[\partial^\mu A^\alpha_\mu(x)-2mP^\alpha(x)$$

$$-gf^{\alpha\rho\sigma}A^\rho_\mu(x)B^{\sigma\mu}(x)]V^\beta_\nu(y)V^\gamma_\lambda(z)\Big\}\exp(iS_{eff})=0。$$

与此相应的格林函数是

$$\langle 0|T^*[(\partial^\mu \hat{A}^\alpha_\mu(x)-2m\hat{P}^\alpha(x)-gf^{\alpha\rho\sigma}\hat{A}^\rho_\mu(x)\hat{B}^{\sigma\mu}(x))\hat{V}^\beta_\nu(y)\hat{V}^\gamma_\lambda(z)]|0\rangle$$

$$=i\delta^4(x-y)f^{\alpha\beta\delta}\langle 0|T[\hat{A}^\delta_\nu(x)\hat{V}^\gamma_\lambda(y)]|0\rangle$$

$$+i\delta^4(x-z)f^{\alpha\gamma\delta}\langle 0|T[\hat{A}^\delta_\lambda(x)\hat{V}^\beta_\nu(y)]|0\rangle。\qquad (5\text{–}27)$$

这就是推广的 PCAC 的表示式。

§4. B、R、S 变换和 W、T 恒等式

在以上论述的变换中，有效作用量是变化的。所以，它并不反

映物理上的什么对称性。物理上有较大兴趣的，常常是保持作用量不变的，反映某种对称性的变换。在规范理论中，作用量是规范不变的。但是，规范固定项和鬼粒子项不是规范不变的，因而有效作用量也不是规范不变的。大家知道，在 QED 中，由理论的规范不变性，导致 W(Ward)、T(Takahashi)恒等式，使重整化常数 $Z_1=Z_2$，给理论的重整化带来方便。在非阿贝尔规范理论中，出现鬼粒子，破坏规范不变性，使重整化碰到困难。幸喜 Becchi、Rouet、Stora 找到了一种使有效作用量不变的变换，代替规范不变性，导致新形式的 W、T 恒等式，也给理论的重整化带来方便。我们称这种变换为 B、R、S 变换。

有效作用量 我们考虑包括费米场 ψ、规范场 A_μ^α 和相应的鬼场 C_α、C_α^+ 的系统。它们的有效作用量为

$$S_{eff}=S+S_{\blacksquare}+S_{\blacksquare},$$

$$S=\int d^4x\left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}A\!\!\!/^\alpha-m\right)\psi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\right],$$

$$S_{\blacksquare}=\int d^4x\frac{-1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2,$$

$$S_{\blacksquare}=\int d^4xC_\alpha^+\partial^\mu(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta),\quad D_\mu^{\alpha\beta}=\partial_\mu\delta^{\alpha\beta}-gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\gamma。\quad (5\text{–}28)$$

这系统的 S 是规范不变的，但 $S_{\blacksquare}+S_{\blacksquare}$ 却不是规范不变的，因而 S_{eff} 不是规范不变的。

B、R、S 变换 Becchi、Rouet、Stora 定义如下的变换

$$\psi\longrightarrow\psi'=\psi-i\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha\psi,\qquad \delta\psi=-i\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha\psi;$$

$$\bar{\psi}\longrightarrow\bar{\psi}'=\bar{\psi}+i\bar{\psi}\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha,\qquad \delta\bar{\psi}=i\bar{\psi}\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha;$$

$$A_\mu^\alpha\to A_\mu^{\alpha'}=A_\mu^\alpha-\frac{1}{g}\xi D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta,\quad \delta A_\mu^\alpha=-\frac{1}{g}\xi D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta;$$

$$C_\alpha \to C'_\alpha = C_\alpha + \frac{\xi}{2} f^{\alpha\beta\gamma} C_\beta C_\gamma, \qquad \delta C_\alpha = \frac{\xi}{2} f^{\alpha\beta\gamma} C_\beta C_\gamma,$$

$$C^+_\alpha \to C^+_{\alpha'} = C^+_\alpha - \frac{\xi}{\alpha g} \partial^\mu A^\alpha_\mu, \quad \delta C^+_\alpha = -\frac{\xi}{\alpha g} \partial^\mu A^\alpha_\mu。 \qquad (5\text{–}29)$$

ξ 和 C_α、C^+_α、ψ、$\bar{\psi}$ 一样，是反对易的 C 数，即

$$\xi C^\alpha = -C^\alpha \xi, \ \xi\psi = -\psi\xi, \ \xi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\xi, \ \xi^2 = 0。$$

ξ 也是一个小量。由于 ξ 和 C^α 都是反对易的 C 数，ξC^α 就是对易的 C 数，这就保证了 ψ、$\bar{\psi}$、A^α_μ、C_α、C^+_α 变换后的对易或反对易性质和变换前一样。由于 ξ 是小量，$\omega^\alpha = \xi C^\alpha$ 也是小量，所以，对于 ψ、$\bar{\psi}$、A^α_μ 来说，上述的 B、R、S 变换，实质上就是一个群参数 $\omega^\alpha = \xi C^\alpha$ 的无穷小的规范变换。因而作用量 S 在这个变换下是不变的。

有效作用量不变　可以证明，$S_{规}+S_{非}$ 在 B、R、S 变换下也是不变的，因而有效作用量 $S_{eff} = S + S_{规} + S_{非}$ 也是不变的。

在 B、R、S 变换下

$$\delta(S_{规}+S_{非}) = \int d^4x \, \delta\Big[-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^\alpha_\mu)^2 + C^+_\alpha \partial^\mu (D^{\alpha\beta}_\mu C_\beta)\Big]$$

$$= \int d^4x \Big[-\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A^\alpha_\mu)\partial^\nu \delta A^\alpha_\nu + \delta C^+_\alpha \partial^\mu (D^{\alpha\beta}_\mu C_\beta)$$

$$+ C^+_\alpha \partial^\mu \delta(D^{\alpha\beta}_\mu C_\beta)\Big]。$$

把(5–29)式代入，前两式相互抵消，因而

$$\delta(S_{规}+S_{非}) = \int d^4x \, C^+_\alpha \partial^\mu \delta(D^{\alpha\beta}_\mu C_\beta)。$$

由于

$$(\delta D^{\alpha\beta}_\mu) C_\beta = [\delta(\partial_\mu \delta^{\alpha\beta} - g f^{\alpha\beta\gamma} A^\gamma_\mu)] C_\beta = -g f^{\alpha\beta\gamma} \delta A^\gamma_\mu \cdot C_\beta$$

$$= f^{\alpha\beta\gamma}(\xi D^{\gamma\delta}_\mu C_\delta) C_\beta = f^{\alpha\beta\gamma} \xi (\partial_\mu C_\delta \delta^{\gamma\delta} - g f^{\gamma\delta\rho} A^\rho_\mu C_\delta) C_\beta$$

$$= f^{\alpha\beta\gamma} \frac{\xi}{2} \partial_\mu (C_\gamma C_\beta) - g f^{\alpha\beta\gamma} f^{\gamma\delta\rho} \xi C_\delta C_\beta A^\rho_\mu$$

$$= -\frac{\xi}{2} f^{\alpha\beta\gamma} \partial_\mu (C_\beta C_\gamma)$$

$$-g\frac{\xi}{2}(f^{\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta\rho}-f^{\alpha\delta\gamma}f^{\gamma\beta\rho})C_\delta C_\beta A_\mu^\rho$$

$$=-\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(C_\beta C_\gamma)-g\frac{\xi}{2}(f^{\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta\rho}+f^{\alpha\delta\gamma}f^{\gamma\rho\beta})C_\delta C_\beta A_\mu^\rho$$

$$=-\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu(C_\beta C_\gamma)+g\frac{\xi}{2}f^{\alpha\rho\gamma}f^{\gamma\beta\delta}C_\delta C_\beta A_\mu^\rho$$

$$=\partial_\mu\delta^{\alpha\beta}\left(-\frac{\xi}{2}f^{\beta\gamma\delta}C_\gamma C_\delta\right)-gf^{\alpha\beta\rho}A_\mu^\rho\left(-\frac{\xi}{2}f^{\beta\gamma\delta}C_\gamma C_\delta\right)$$

$$=(\partial_\mu\delta^{\alpha\beta}-gf^{\alpha\beta\rho}A_\mu^\rho)\left(-\frac{\xi}{2}f^{\beta\gamma\delta}C_\gamma C_\delta\right)=-D_\mu^{\alpha\beta}\delta C_\rho,$$

所以

$$\delta(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)=0,$$

$$\delta(S_{\text{■}}+S_{\text{鬼}})=d^4xC_\alpha^+\partial^\mu\delta(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)=0。\qquad(5\text{–}30)$$

这就证明了，S_{eff} 在 B、R、S 变换下是不变的。由此看来，B、R、S 变换实际上是推广的规范变换，是令规范参数 $u^\alpha=\xi C^\alpha$，且定义了 C_α 和 C_α^+ 的变换。

场量的二次变化为零　B. R. S 变换还有一个重要的性质，就是场量的二次变化为零。这从(5–29)式看来是显而易见的。因为一次变化有一因子 ξ，两次变化有因子 ξ^2，而 $\xi^2=0$，所以二次变化为零。不仅如此，除开 ξ 因子，场量 ψ、$\bar{\psi}$、A_μ^α、C_α 的二次变化也是零。实际上，

$$\delta\psi=-i\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha\psi,$$

$$\delta(\delta\psi)=\delta\left(-i\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C^\alpha\psi\right)\sim\delta(\lambda^\alpha C^\alpha\psi)=\lambda^\alpha\delta C^\alpha\psi+\lambda^\alpha C^\alpha\delta\psi$$

$$=\lambda^\alpha\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}C_\beta C_\gamma\psi+\lambda^\alpha C^\alpha\left(-i\xi\frac{\lambda^\beta}{2}C_\beta\right)\psi$$

$$=\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha C_\beta C_\gamma\psi+i\frac{\xi}{2}\cdot\frac{1}{2}[\lambda^\alpha,\ \lambda^\beta]C_\alpha C_\beta\psi$$

$$=\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha C_\beta C_\gamma\psi-\frac{\xi}{2}f^{\alpha\beta\gamma}C_\alpha C_\beta\lambda_\gamma\psi=0;$$

$$\delta\bar{\psi}=i\bar{\psi}\xi\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha,$$

$$\delta(\delta\bar{\psi})=\delta\Big(i\bar{\psi}\xi\,\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\,C_{\alpha}\Big)\sim\delta(\bar{\psi}\lambda^{\alpha}C_{\alpha})=\delta\bar{\psi}\lambda^{\alpha}C_{\alpha}+\bar{\psi}\lambda^{\alpha}\delta C_{\alpha}$$

$$=i\bar{\psi}\xi\,\frac{\lambda^{\beta}}{2}\,C_{\beta}\lambda^{\alpha}C_{\alpha}+\bar{\psi}\lambda^{\alpha}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}C_{\gamma}$$

$$=\bar{\psi}\,\frac{\xi}{2}\,i\,\frac{1}{2}[\lambda^{\beta},\,\lambda^{\alpha}]C_{\beta}C_{\alpha}+\bar{\psi}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\alpha}C_{\beta}C_{\gamma}$$

$$=-\bar{\psi}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\beta\alpha\gamma}\lambda^{\gamma}C_{\beta}C_{\alpha}+\bar{\psi}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\alpha\beta\gamma}\lambda^{\alpha}C_{\beta}C_{\gamma}=0;$$

$$\delta A_{\mu}^{\alpha}=-\frac{1}{g}\,\xi D_{\mu}^{\alpha\beta}C_{\beta},$$

$$\delta(\delta A_{\mu}^{\alpha})=\delta\Big(-\frac{1}{g}\,\xi D_{\mu}^{\alpha\beta}C_{\beta}\Big)\sim\delta(D_{\mu}^{\alpha\beta}C_{\beta})=0;$$

$$\delta C_{\alpha}=\frac{\xi}{2}\,f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}C_{\gamma},$$

$$\delta(\delta C_{\alpha})=\delta\Big(\frac{\xi}{2}\,f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}C_{\gamma}\Big)\sim\delta(f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}C_{\gamma})$$

$$=f^{\alpha\beta\gamma}\delta C_{\beta}C_{\gamma}+f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}\delta C_{\gamma}$$

$$=f^{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\beta\sigma\rho}C_{\sigma}C_{\rho}C_{\gamma}+f^{\alpha\beta\gamma}C_{\beta}\,\frac{\xi}{2}\,f^{\gamma\sigma\rho}C_{\sigma}C_{\rho}$$

$$=f^{\alpha\beta\gamma}f^{\beta\sigma\rho}\,\frac{\xi}{2}\,C_{\sigma}C_{\rho}C_{\gamma}-f^{\alpha\gamma\beta}f^{\beta\sigma\rho}\,\frac{\xi}{2}\,C_{\sigma}C_{\rho}C_{\gamma}$$

$$=\xi f^{\alpha\beta\gamma}f^{\beta\sigma\rho}C_{\sigma}C_{\rho}C_{\gamma}$$

$$=-\frac{\xi}{3}[f^{\alpha\gamma\beta}f^{\beta\sigma\rho}+f^{\alpha\sigma\beta}f^{\beta\rho\gamma}+f^{\alpha\rho\beta}f^{\beta\gamma\sigma}]C_{\sigma}C_{\rho}C_{\gamma}=0.$$

(5-31)

这就证明了它们确实是二次变化为零。

格林函数的生成泛函 和 ψ、$\bar{\psi}$、A_{μ}^{α}、C_{α}、C_{α}^{+} 相应，引入外源 $\bar{\eta}$、η、J_{μ}^{α}、ζ_{α}^{+}、ζ_{α}。由于 $\delta\psi$、$\delta\bar{\psi}$、δA_{μ}^{α}、δC_{α}(可以看作，比由(5-29)式定义的少一 ξ 因子，有相反的对易性质)在 B、R、S 变换下是不变的，为了计算方便，我们也引入相应的外源 $\overline{K}$、K、v_{μ}^{α}、V_{α}(与 ψ、$\bar{\psi}$、A_{μ}^{α}、C_{α} 有相反的对易性质)。这样，就可以把格林函数的生成泛函写

成

$$Z[\bar{\eta}、\eta、J^{\alpha}_{\mu}、\zeta^{+}_{\alpha}、\zeta_{\alpha}、\overline{K}、K、\omega^{\alpha}_{\mu}、V_{\alpha}]$$

$$=\int[d\psi][d\bar{\psi}][dA^{\alpha}_{\mu}][dC_{\alpha}][dC^{+}_{\alpha}]\exp[iS_{eff}]$$

$$\cdot\exp i\int d^4x[\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J^{\alpha}_{\mu}A^{\mu}_{\alpha}+\zeta^{+}_{\alpha}C_{\alpha}+C^{+}_{\alpha}\zeta_{\alpha}+\overline{K}\delta\psi$$

$$+\delta\bar{\psi}K+\omega^{\alpha}_{\mu}\delta A^{\mu}_{\alpha}+V^{\alpha}\delta C_{\alpha}]。 \tag{5-32}$$

在(5-29)式定义的 B、R、S 变换下，这生成泛函当然是不变的。如上所述，S_{eff}、$\delta\psi$、$\delta\bar{\psi}$、δA^{α}_{μ}、δC_{α} 是不变的。可以证明，函数空间积分的体积元也是不变的。实际上，雅可宾行列式的、不为零的矩阵元是

$$\frac{\delta\psi'(x)}{\delta\psi(y)}=\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\left[\psi(x)-i\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x)\psi(x)\right]$$

$$=\delta^4(x-y)-i\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x)\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta\psi'(x)}{\delta C_{\alpha}(y)}=\frac{\delta}{\delta C_{\alpha}(y)}\left[\psi(x)-i\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x)\psi(x)\right]$$

$$=i\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\delta^4(x-y)\psi(x),$$

$$\frac{\delta\bar{\psi}'(x)}{\delta\psi(y)}=\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}\left[\bar{\psi}(x)+i\bar{\psi}(x)\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x)\right]$$

$$=\delta^4(x-y)+i\delta^4(x-y)\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x),$$

$$\frac{\delta\bar{\psi}'(x)}{\delta C_{\alpha}(y)}=\frac{\delta}{\delta C_{\alpha}(y)}\left[\bar{\psi}(x)+i\bar{\psi}(x)\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}C_{\alpha}(x)\right]$$

$$=i\bar{\psi}(x)\xi\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta A'^{\alpha}_{\mu}(x)}{\delta A^{\beta}_{\nu}(y)}=\frac{\delta}{\delta A^{\beta}_{\nu}(y)}\left[A^{\alpha}_{\mu}(x)-\frac{1}{g}\xi(\partial_{\mu}\delta^{\alpha\gamma}-gf^{\alpha\gamma\delta}A^{\delta}_{\mu}(x))C_{\gamma}(x)\right]$$

$$=\delta^4(x-y)\delta^{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}-\xi f^{\alpha\beta\gamma}\delta_{\mu\nu}C_{\gamma}(x)\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta A'^{\alpha}_{\mu}(x)}{\delta C_{\beta}(y)}=\frac{\delta}{\delta C_{\beta}(y)}\left[A^{\alpha}_{\mu}(x)-\frac{1}{g}\xi(\partial_{\mu}\delta^{\alpha\gamma}-gf^{\alpha\gamma\delta}A^{\delta}_{\mu}(x))C_{\gamma}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{g}\,\xi D_\mu^{\alpha\beta}(x)\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta C'_\alpha(x)}{\delta C_\beta(y)} = \frac{\delta}{\delta C_\beta(y)}\Big[C_\alpha(x) + \frac{\xi}{2} f^{\alpha\gamma\delta} C_\gamma(x) C_\delta(x)\Big]$$

$$= \delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-y) - \xi f^{\alpha\beta\gamma} C_\gamma(x)\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta C_\alpha^{+\prime}(x)}{\delta C_\beta^+(y)} = \frac{\delta}{\delta C_\beta^+(y)}\Big[C_\alpha^+(x) - \frac{\xi}{\alpha g}\,\partial^\mu A_\mu^\alpha(x)\Big] = \delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-y),$$

$$\frac{\delta C_\alpha^{+\prime}(x)}{\delta A_\mu^\beta(y)} = \frac{\delta}{\delta A_\mu^\beta(y)}\Big[C_\alpha^+(x) - \frac{\xi}{\alpha g}\,\partial^\mu A_\mu^\alpha(x)\Big]$$

$$= -\frac{\xi}{\alpha g}\,\delta^{\alpha\beta}\partial^\mu\delta^4(x-y)。$$

由此可知，矩阵对角线上的元素都是1，非对角线上不为零的元素都有 ξ 因子，而 $\xi^2=0$，所以，$J=1$。

W、T 恒等式　格林函数的生成泛函是用路径积分 (5–32) 式表示的，在 B、R、S 变换下当然是不变的。考虑到 (5–30) 式、(5–31)式和 $J=1$，这个不变性可以写成

$$\int [d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\exp[iS_{eff}]\Big\{\exp\Big\{i\int d^4x\Big[\bar{\eta}(\psi+\delta\psi)$$

$$+(\bar{\psi}+\delta\bar{\psi})\eta + J_\mu^\alpha(A_\alpha^\mu+\delta A_\alpha^\mu) + \zeta_\alpha^+(C_\alpha+\delta C_\alpha) + (C_\alpha^+ + \delta C_\alpha^+)\zeta_\alpha$$

$$+\overline{K}\delta\psi + \delta\bar{\psi}K + u_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu + V_\alpha\delta C_\alpha\Big]\Big\}$$

$$-\exp\Big\{i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu + \zeta_\alpha^+ C_\alpha + C_\alpha^+\zeta_\alpha + \overline{K}\delta\psi$$

$$+\delta\bar{\psi}K + u_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu + V_\alpha\delta C_\alpha]\Big\}\Big\} = 0,$$

$$\int [d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dA_\nu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\exp\Big\{iS_{eff} + i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$$

$$+J_\mu^\alpha A_\alpha^\nu + \zeta_\alpha^+ C_\alpha + C_\alpha^+\zeta_\alpha + \overline{K}\delta\psi + \delta\bar{\psi}K + u_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu + V_\alpha\delta C_\alpha]\Big\}$$

$$\cdot\Big\{\exp\Big\{i\int d^4x[\bar{\eta}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\eta + J_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu + \zeta_\alpha^+\delta C_\alpha + \delta C_\alpha^+\zeta_\alpha]\Big\} - 1\Big\}$$

$$= 0。$$

把曲括号中的量展开，取一级小量，上式就成为

$$\int[d\psi][d\bar{\psi}][dA_\mu^\alpha][dC_\alpha][dC_\alpha^+]\int d^4x[\bar{\eta}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\eta+J_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu$$

$$+\zeta_\alpha^+\delta C_\alpha+\delta C_\alpha^+\zeta_\alpha]\exp[iS_{eff}+\text{外源项}]=0。\qquad(5\text{-}33)'$$

把 $\delta\psi$、$\delta\bar{\psi}$、δA_μ^α、δC_α 换成相应的外源导数

$$\delta\psi\to\frac{\delta}{i\delta\bar{K}},\quad \delta\bar{\psi}\to\frac{-\delta}{i\delta K},\quad \delta A_\mu^\alpha\to\frac{\delta}{i\delta u_\mu^\alpha},$$

$$\delta C_\alpha\to\frac{\delta}{i\delta V_\alpha},\quad \delta C_\alpha^+=-\frac{\xi}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^\alpha\to-\frac{\xi}{\alpha g}\partial^\mu\left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu^\alpha}\right),$$

并移至场量积分号外，就得到

$$\left[\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{K}}+\bar{\phi}\frac{\delta}{\delta K}\eta+J_\alpha^\mu\frac{\delta}{\delta u_\mu^\alpha}+\zeta_\alpha^+\frac{\delta}{\delta V_\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{\xi}{\alpha g}\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^\alpha}\right)\zeta_\alpha\right]Z=0。$$

因为每一项中都包含 ξ 因子，故可约去，上式写成

$$\left[\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{K}}+\bar{\phi}\frac{\delta}{\delta K}\eta+J_\mu^\alpha\frac{\delta}{\delta u_\mu^\alpha}+\zeta_\alpha^+\frac{\delta}{\delta V_\alpha}+\frac{1}{\alpha g}\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^\alpha}\right)\zeta_\alpha\right]$$

$$\cdot Z[\eta,\ \bar{\eta},\ J_\mu^\alpha,\ \zeta^+,\zeta,u_\mu^\alpha,V_\alpha,K,\ \bar{K}]=0。$$

(5-33)

这就是以格林函数生成泛函 Z 表示的 W、T 恒等式。

把 $Z=e^{iW}$ 代入上式，就得到以连通格林函数生成泛函 W 表示的 W、T 恒等式

$$\left[\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{K}}+\frac{\delta}{\delta K}\eta+J_\mu^\alpha\frac{\delta}{\delta U_\mu^\alpha}+\zeta_\alpha^+\frac{\delta}{\delta V_\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha g}\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^\alpha}\right)\zeta_\alpha\right]W[\eta,\ \bar{\eta},\ J_\mu^\alpha,\ \zeta^+,\ \zeta,\ U_\mu^\alpha,\ V_\alpha,\ K,\bar{K}]=0。$$

(5-34)

将外源 $\eta(x)$、$\bar{\eta}(x)$、$J_\mu^\alpha(x)$、$\zeta_\alpha^+(x)$、$\zeta_\alpha(x)$变量，按照

$$\bar{\psi}(x)=-\frac{\delta W}{\delta\eta(x)},\ \psi(x)=\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}(x)},\ A_\mu^\alpha(x)=\frac{\delta W}{\delta J_\mu^\alpha(x)},$$

$$C_\alpha(x)=\frac{\delta W}{\delta\zeta_\alpha^+(x)},\qquad C_\alpha^+(x)=-\frac{\delta W}{\delta\zeta_\alpha(x)},$$

换成新的变量 $\bar{\psi}(x)$、$\psi(x)$、$A_\mu^\alpha(x)$、$C_\alpha(x)$、$C_\alpha^+(x)$。如第三章所述，它们是相应算符在外源不为零时的真空期待值。将连通格林函数的生成泛函 $W[\eta,\ \bar{\eta},\ J_\mu^\alpha,\ \zeta^+,\ \zeta,\ U_\mu^\alpha,\ V_\alpha,\ K,\ \bar{K}]$，按照

$$\begin{aligned}\Gamma[\bar{\psi},\ \psi,\ A_\mu^\alpha,\ C_\alpha,\ C_\alpha^+,\ U_\mu^\alpha,\ V_\alpha,\ K,\ \bar{K}]&=W[\eta,\ \bar{\eta},\ J_\mu^\alpha,\ \zeta_\alpha^+,\ \zeta_\alpha,\ U_\mu^\alpha,\ V_\alpha,\ K,\ \bar{K}]\\&-\int d^4x[\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi+J_u^\alpha A_\alpha^\mu+\zeta_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\zeta_\alpha],\end{aligned}$$

换成正规顶角的生成泛函 $\Gamma[\bar{\psi},\ \psi,\ A_\mu^\alpha,\ C_\alpha,\ C_\alpha^+,\ U_\mu^\alpha,\ V_\alpha,\ K,\ \bar{K}]$。显然，

$$\bar{\eta}(x)=\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)},\quad \eta(x)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)},\quad J_\mu^\alpha(x)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^\alpha(x)},$$

$$\zeta_\alpha^+(x)=\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha(x)},\qquad \zeta_\alpha(x)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha^+(x)},$$

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{K}}=\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{K}},\qquad \frac{\delta W}{\delta K}=\frac{\delta\Gamma}{\delta K},$$

$$\frac{\delta W}{\delta U_\mu^\alpha}=\frac{\delta\Gamma}{\delta U_\mu^\alpha},\qquad \frac{\delta W}{\delta V_\alpha}=\frac{\delta\Gamma}{\delta V_\alpha}。$$

把它们代入(5–34)式，就得到

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{K}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta K}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^\alpha}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta U_\alpha^\mu}\\&+\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta V_\alpha}\mp\frac{1}{\alpha g}\partial^\mu A_\mu^\alpha\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha^+}=0。\end{aligned}\tag{5–35}$$

这就是用正规顶角生成泛函表示的 W、T 恒等式。

鬼方程　在(5–32)式中，明显表示出包含鬼 C_α^+ 的项，就可以写成

$$\begin{aligned}Z=&\int[d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\\&\cdot\exp\left\{i\int d^4x[C_\alpha^+\partial^\mu(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)+C_\alpha^+\zeta_\alpha+\cdots]\right\}。\end{aligned}$$

作一个平移变换

$$C_\alpha^+ \to C_\alpha^{+\prime} = C_\alpha^+ + \omega_\alpha,$$

$$\psi、\bar{\psi}、A_\mu^\alpha、C_\alpha \text{不变。}$$

由 Z 的不变性，可以得到

$$Z = \int [d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]$$

$$\cdot i\int d^4x\,\omega_\alpha(x)\,[\partial^\mu(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)+\zeta_\alpha]\exp\{i\int d^4x[\cdots]\}。$$

对 $\omega_\alpha(x)$ 求导，得

$$\int [d\psi]\,[d\bar{\psi}]\,[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\,\{\partial^\mu(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)+\zeta_\alpha\}$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x\,[\cdots]\right\}=0。 \qquad (5\text{–}36)'$$

考虑到 $$D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta \to -g\delta A_\mu^\alpha \to ig\frac{\delta}{\delta U_\mu^\alpha},$$

上式成为

$$\left[\zeta_\alpha + ig\partial^\mu\left(\frac{\delta}{\delta U_\mu^\alpha}\right)\right]Z=0, \qquad (5\text{–}36)$$

这就是用 Z 表示的鬼方程。

把 $Z=e^{iW}$ 代入上式，就得到用 W 表示的鬼方程

$$\zeta_\alpha - g\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta U_\mu^\alpha}=0。 \qquad (5\text{–}37)$$

考虑到 $$\zeta_\alpha = -\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha^+}, \qquad \frac{\delta W}{\delta U_\mu^\alpha}=\frac{\delta\Gamma}{\delta U_\mu^\alpha},$$

就有用 Γ 表示的鬼方程

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta C_\alpha^+}+g\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta U_\mu^\alpha}=0。 \qquad (5\text{–}38)$$

除去规范固定项　按照

$$\hat{\Gamma}=\Gamma+\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2$$

定义不包括规范固定项的正规顶角生成泛函 $\hat{\Gamma}$。把它代入(5–35)

式和(5-38)式，得

$$\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\psi}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\bar{K}}+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta K}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\bar{\psi}}+\left(\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta A_\mu^\alpha}+\frac{1}{\alpha}\partial^\mu(\partial^\nu A_\nu^\alpha)\right)\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta U_\mu^\alpha}$$
$$+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta C_\alpha}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta V_\alpha}+\frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^\alpha)\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta O_\alpha^+}=0,$$

$$\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta O_\alpha^+}+g\partial^\mu\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta U_\mu^\alpha}=0。\tag{5-39}$$

把后式代入前式，并不计散度项，就得到

$$\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\psi}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\bar{K}}+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta K}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\bar{\psi}}+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta A_\mu^\alpha}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta U_\mu^\alpha}+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta C_\alpha}\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta V_\alpha}=0。\tag{5-40}$$

这就是用去除了规范固定项的正规顶角生成泛函 $\hat{\Gamma}$ 表示的 W、T 恒等式。在文献中，常常写作

$$\hat{\Gamma}*\hat{\Gamma}=0。$$

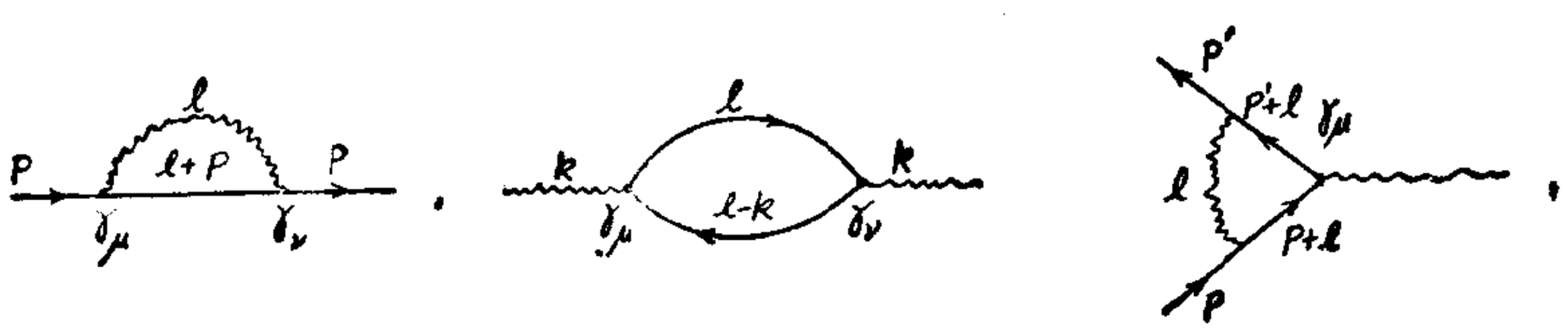
第六章　规范理论的重整化

场论中使用的计算方法，取得较大成就的，还只有微扰理论。但是，对物理过程的高阶微扰计算，其结果总是发散的。因此，在场论中，如何处理发散的问题，就成为基本的、重要的课题。经过人们的长期努力，形成了一套处理发散问题的方法，称之为重整化方法。重整化方法包括两个步骤。首先，把发散积分中的发散部分分离出来，并把它看作有限积分的极限情况，这叫做正规化。然后，把理论中出现的场量、参数重新定义，用抵消项消除正规化了的发散部分，使计算结果成为有限、有意义，这叫做重整化。

§1. 重整化的一般概念

在场论中，用微扰方法计算过程时，先画出和过程有关的费曼图，再按费曼规则写出相应的 S 矩阵元，然后计算反应截面或衰变几率。如果限于最低阶的树图近似，计算就是简便的。如果近似包括圈图，就会出现回路积分，就会碰到发散困难。

费曼积分　我们把这种包括回路的发散积分叫做费曼积分。例如，在 QED 中，电子自能、真空极化、顶角中的回路积分为



$$-i\Sigma(p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}(ie\gamma_\mu)\frac{i}{\not l+\not p-m}(ie\gamma_\nu)\frac{-ig^{\mu\nu}}{l^2},$$

$$ie^2\pi_{\mu\nu}(k) = -\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big[(ie\gamma_\mu)\frac{i}{l-k-m}(ie\gamma_\nu)\frac{i}{l-m}\Big],$$

$$\Lambda_\mu(p,\ p') = \int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\ \frac{-ig_{\nu\lambda}}{l^2}(ie\gamma_\nu)\frac{i}{\not p+\not l-m}$$

$$\cdot\gamma_\mu\frac{i}{\not p+\not l-m}(ie\gamma_\lambda)\,。 \tag{6-1}$$

从量纲分析看来，它们分别是线性发散、二次发散、对数发散的发散积分。这发散是由于积分限的∞而引起的，所以叫做紫外发散。这里，我们不讨论红外发散问题。

在一般情况下，一个费曼图有：I_b条玻色子内线，I_f条费米子内线，E_b条玻色子外线，E_f条费米子外线，V_i个i型顶角。这图形共有：$I=I_b+I_f$条内线，$E=E_b+E_f$条外线，$V=\sum_i V_i$个顶角。每条内线，有一个四维动量积分d^4k，k是该内线的四维动量。I条内线，就有I个四维动量积分$\prod_{i=1}^{I}d^4k_i$。每个顶角，有一个保证能量、动量守恒的δ函数$\delta^4(\cdots)$。V个顶角，就有V个$\delta^4(\cdots)$函数。这V个$\delta^4(\cdots)$除一个留作保证整个过程的能量、动量守恒外，$V-1$个将被积分除去。所以，I个四维积分$\prod_{i=1}^{I}d^4k_i$，积掉$V-1$个，以去除$V-1$个$\delta^4(\cdots)$外，还留下

$$L=I-V+1 \tag{6-2}$$

个回路积分$\prod_{i=1}^{L}d^4l_i$。所谓费曼积分，就是和I条内线相应的I个传播子，和V个顶角相应的顶角因子的乘积的，对L个回路的回路积分。

如果用$\Delta_j(l,\ p)$表示第j条内线的传播子，用$\Gamma_k(l,\ p,\ g)$表示第k个顶角的顶角因子，用d^4l_i表示第i个回路的回路积分。那么，和这个费曼图相应的费曼积分就是

$$F(p)=\int\prod_{i=1}^{L}d^4l_i\prod_{j=1}^{I}\Delta_j(t,\ p)\prod_{k=1}^{V}\Gamma_k(l,\ p,\ g)。 \tag{6-3}$$

p 表示外线的动量。

表观发散度 (6-3)式的费曼积分，是很难计算的。在不进行计算的情况下，人们要问：它是收敛的，还是发散的？如果是发散的，它发散的程度如何？在一个给定的理论中，基本的发散图形有多少？人们希望有一个简便、可靠的方法，来进行判断。从量纲分析入手，引进表观发散度 $D(F)$，可以部分达到目的。

以质量 m 作为量纲的基准，费米子内线$\left(\sim\frac{1}{p}\right)$的量纲是 -1，I_f 条费米子内线的量纲就是 $-I_f$；玻色子内线$\left(\sim\frac{1}{p^2}\right)$的量纲是 -2，I_b 条玻色子内线的量纲就是 $-2I_b$；如果一个 i 型顶角有 d_i 次导数，它的量纲就是 d_i，V_i 个 i 型顶角的量纲就是 V_id_i，V 个顶角的量纲就是 $\sum_i V_id_i$；每个回路积分的量纲为 4，L 个回路积分的量纲就是 $4L=4(I_b+I_f-V+1)$。所以，一个有 $I=I_f+I_b$ 条内线，有 $V=\Sigma V_i$ 个顶角，有 $L=I-V+1$ 个回路的费曼积分 $F(p)$(6-3)式的量纲就是

$$D(F)=4L-I_f-2I_b+\sum_i V_id_i$$

$$=\sum_i V_id_i+3I_f+2I_b-4V+4。\qquad (6\text{-}4)$$

由于发散(指紫外发散)是因 $l\to\infty$ 而引起的，量纲的级次越高发散的程度就越高，所以 $D(F)$ 反映出积分发散的程度。但是，这种分析是表面的，没有涉及图形内部的具体结构，不能确切表示真实的具体情况，因而我们把 $D(F)$ 叫做表观发散度。当 $D(F)\geqslant 0$ 时，我们说它是表观发散的：$D(F)=0$ 时叫做对数发散；$D(F)=1$ 时叫做线性发散；$D(F)=2$ 时叫做平方发散……。当 $D(F)<0$ 时，我们说它是表观收敛的。实际上，也有 $D(F)<0$ 时发散或 $D(F)\geqslant 0$ 时收敛的情况。只当某个费曼图的 $D(F)$ 及其所有子图的 $D(F_i)$ 都小于 0 时，这图形的费曼积分才肯定是收敛的。这个

规律叫做温伯格(Weinberg)定理。

顶角指数 大家知道，传播子的形式是理论无关的。在不同的理论中，同类粒子的传播子有同样的形式，如费米子的传播子都是 $i/\not{p}-m$。但是，顶角因子却是理论有关的。在不同的理论中，有不同的顶角因子。所以，费曼积分的发散情况，也应该是与理论的顶角形式有关的。

如果一个 i 型顶角有 b_i 条玻色子线，有 f_i 条费米子线，有 d_i 次导数。那末，这个顶角因子的量纲就是 $b_i+\frac{3}{2}f_i+d_i$。我们定义顶角指数为

$$\delta_i=b_i+\frac{3}{2}f_i+d_i-4。\tag{6-5}$$

它反映出 i 型顶角的量纲情况。

因为，一条外线和一个顶角相连，一条内线和两个顶角相连，而一个 i 型顶角和 b_i 条玻色子线、f_i 条费米子线相连，所以

$$E_b+2I_b=\sum_i V_i b_i,$$

$$E_f+2I_f=\sum_i V_i f_i。$$

把它和(6-5)式一起代入(6-4)式，得

$$D(F)=\sum_i V_i\delta_i-E_b-\frac{3}{2}E_f+4。\tag{6-6}$$

这表明：一个费曼积分(6-3)式的表观发散度，由该图形的外线数 E_b、E_f，和它所含顶角的性质 δ_i 及数目 V_i 等确定，而与内线没有直接关系。这是很有意义的情况。对于确定的物理过程，外线的数目 E_b、E_f 是确定的。相应于不同级次的图形的发散情况，表现在 $\sum_i V_i\delta_i$ 上。

顶角指数 δ_i，从它的定义(6-5)式可知，完全由理论的具体形式，由相互作用拉氏量 $\mathscr{L}_i$ 的具体形式来决定。实际上，作用量

$$S_i=\int d^4x g_i \mathscr{L}_i$$

是没有量纲的。由 b_i 条玻色子线、f_i 条费子线和 d_i 次导数构成的 i 形顶角的 $\mathscr{L}_i$ 的量纲是 $b_i+\frac{3}{2}f_i+d_i$。如果 i 型顶角的相互作用常数 g_i 的量纲是 d_{g_i}，那么就有

$$d_{g_i}+b_i+\frac{3}{2}f_i+d_i-4=0, \tag{6-7}$$

把它和(6-5)式比较，就得到

$$\delta_i=-d_{g_i}。 \tag{6-8}$$

这表明：顶角指数表征顶角相互作用常数的量纲。

可重整化的必要条件 把(6-8)式代入(6-6)式，得

$$D(F)=4-E_b-\frac{3}{2}E_f-\sum_i V_i d_{g_i}。 \tag{6-9}$$

这表明：表观发散度 $D(F)$ 和相互作用常数的量纲 d_{g_i} 有着紧密的联系。相互作用常数的量纲，在一定程度上，决定着理论的是否可以重整化。当 $d_{g_i}\geqslant 0$ 时，表观发散($D(F)\geqslant 0$)的图形，使 $D(F)\geqslant 0$ 的 E_b、E_f 可取的数目，是有限的。因而，理论就可能是可以重整的。如果 $d_{g_i}<0$，表观发散的图形，使 $D(F)\geqslant 0$ 的(E_b、E_f、V_i)的组合数目，是无限的。因而，理论就不可能是可以重整的。由此可知，相互作用常数 g_i 的量纲 $d_{g_i}\geqslant 0$ 是该理论可以重整化的必要条件。电磁相互作用常数 e 的量纲 $d_e=0$，非阿贝尔规范理论的相互作用常数 g 的量纲 $d_g=0$，都满足可以重整化的必要条件。实际上，规范理论是可以重整的。费米弱作用耦合常数 G 的量纲 $d_G=-2<0$，不满足可以重整化的必要条件，所以费米弱作用理论是不可以重整的。

正规化 发散积分是没有意义的。怎样使它有意义呢？把没有意义的发散积分，做成是某个有意义的积分的极限，这种方法叫做正规化。在长期的实践中，人们提出了多种多样的正规化方法。

概括起来，共有三类。这三类是和积分包括积分变量、积分限、被积函数三部分相对应的。在积分限上想办法，把发散积分做成有限积分的极限，如作代换

$$\int_0^\infty dlf(l)\to\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^\Lambda dlf(l),$$

这种正规化方法叫做截割。当 Λ 有限时，积分是有限的。当 $\Lambda\to\infty$ 时，就成为原来的发散积分。

在被积函数上想办法，把发散积分正规化的方法，叫做正规子方法。因为被积函数是由传播子和顶角组成的，如果把其中的某个传播子，如把

$$\frac{1}{l^2-m^2}$$

加上一个质量为 M 的正规子的传播子

$$\frac{1}{l^2-M^2},$$

并作代换

$$\frac{1}{l^2-m^2}\to\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{l^2-m^2}-\frac{1}{l^2-M^2}\right]$$

$$\to\lim_{M\to\infty}\frac{m^2-M^2}{(l^2-m^2)(l^2-M^2)}。$$

那么，当 $l\to\infty$ 时，前者 $\to\frac{1}{l^2}$，后者 $\to\frac{1}{l^4}$，使对 l 的积分的表观发散度降低两次。这样，就可以使对 l 的积分成为有限，而把发散转给 $M\to\infty$。对于费米子传播子也可用类似方法进行。如作代换

$$\frac{1}{l-m}\to\lim_{M_i\to\infty}\left[\frac{1}{l-m}+\sum_i\frac{C_i}{l-M_i}\right],$$

选择适当的 C_i，也可以达到正规化的目的。这种方法，首先由包里(Pauli)，维勒斯(Villars)提出，故也叫做包里、维勒斯方法。

在积分变量的维数上想办法，使发散积分正规化的方法，叫做维数正规化。动量空间本来是四维的。一个回路的积分是四维积分，如

$$\int d^4l f(l)。$$

如果把四维空间延拓到 n 维，则回路积分就成为 n 维积分

$$\int d^nl f(l)。$$

由于被积函数的量纲，由传播子和顶角的量纲组成，不因空间维数的改变而改变。所以，整个积分的量纲，即它的表观发散度，在上述变换下，降低了 $4-n$。选择适当的 n，就可以使积分成为有限。这时

$$\int d^4l f(l) \to \lim_{\varepsilon=4-n\to 0} \int d^nl f(l)。$$

这个方法是特荷夫(t'Hooft)首先提出来的。它不牵涉到质量问题。在无质量理论如 QCD 中，不能应用正规子方法，却能用它进行处理。当然，对于有质量的理论，也可以用它来处理。

采用上述的正规化方法，可以把费曼积分(6-3)式分解为有限部分 $F^f(p)$ 和发散部分 $F^d(p)$，

$$F(p)=F^f(p)+F^d(p)。$$

在 QED 中，基本的发散图形就是如(6-1)式所示的电子自能、真空极化和顶角。人们用上述方法进行计算，得到结果为*：

$$\Sigma(p)=A+B(\not p-m)-C(\not p-m)^2,$$

$$\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})(\pi(0)+\pi_0(k^2)),$$

$$\Lambda_\mu(p,\ p')=L\gamma_\mu+\Lambda_{0\mu}(p,\ p')。 \qquad (6\text{-}10)$$

A、B、$\pi(0)$、L 是发散的，C、$\pi_0(k^2)$，$\Lambda_{0\mu}(p,\ p')$ 是有限的。发散或有限是指当 $\Lambda\to\infty$ 或 $\varepsilon\to 0$ 时的极限情况。当 Λ 或 ε 未取极限，而取有限值时，上述诸量都是有限的。

重整化 正规化只是把费曼积分，分离成有限部分和发散部分，而且在取极限以前发散部分也暂时是有限的、有意义的。这只是为重整化准备了条件。重整化就是要使用重新定义场量、质量、

* 参看 Bing-Lin Young: *Introduction to Quantum field Theory*.

相互作用常数的办法，把分离出来的发散部分，在取极限以前就消除掉。这样，就可以使整个计算结果成为有限的。目前，在基本粒子理论中，通常采用的重整化方法，是所谓的相乘重整化方法。先用乘以重整化常数 Z 的办法，来重新定义场量和参数。再把拉氏量分成基本项和抵消项。然后，按基本项进行微扰计算，用抵消项消除其中的发散部分。我们仍然以 QED 为例，来予以说明。

首先，用裸量 $\psi^0(x)$、$A^0_\mu(x)$、e_0、m_0 写出它的拉格朗日密度或作用量

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}^0(i\partial\!\!\!/-m_0)\psi^0-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^0_\nu-\partial_\nu A^0_\mu)^2+e_0\bar{\psi}^0A\!\!\!/^0\psi^0。\quad(6\text{–}11)$$

再把裸量重整化，即令

$$m=m_0+\delta m=\frac{m_0}{Z_m},\qquad e_0=\frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}}e,$$

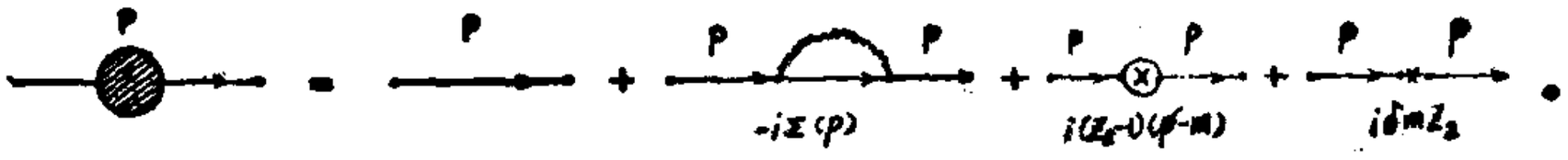
$$\psi_0=\sqrt{Z_2}\psi,\quad \bar{\psi}_0=\sqrt{Z_2}\bar{\psi},\quad A^0_\mu=\sqrt{Z_3}A_\mu。$$

m、e、ψ、$\bar{\psi}$、A_μ 是重整化的量，Z_1、Z_2、Z_3、Z_m 叫做重整化常数。由于规范不变性，有 W、T 恒等式 $Z_1=Z_2$。把它们代入(6–11)式，就得到用重整化量表示的拉格朗日密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2+e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi\\&-(Z_2-1)\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi-(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2\\&+(Z_2-1)e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi+Z_2\delta m\bar{\psi}\psi。\end{aligned}\quad(6\text{–}12)$$

第一行的项，和原来的(6–11)式诸项有完全相同的形式，只是把裸量换成了重整化的量。它们叫做基本项。第二行和第三行的项叫做抵消项。在作树图近似时，采用基本项就可以得到有限的结果。在作高阶微扰计算时，先按基本项用正规化方法，算出有限部分和发散部分；再选择适当的重整化常数 Z，用抵消项消除发散部分，得到有限的结果。下面给出按(6–12)式的基本项算出的二阶结果，用抵消项消除发散部分的情况。

二阶近似的费米子传播子的费曼图是



与之相应的传播子是

$$i\bar{S}_f(p)=\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}[-i\Sigma(p)]\frac{i}{\not p-m}$$

$$+\frac{i}{\not p-m}[i(Z_2-1)(\not p-m)]\frac{i}{\not p-m}$$

$$+\frac{i}{\not p-m}i\delta mZ_2\frac{i}{\not p-m}$$

$$=\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}(-i)[A+B(\not p-m)-C(\not p-m)^2]$$

$$\cdot\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}[i(Z_2-1)(\not p-m)]\frac{i}{\not p-m}$$

$$+\frac{i}{\not p-m}i\delta mZ_2\frac{i}{\not p-m}。$$

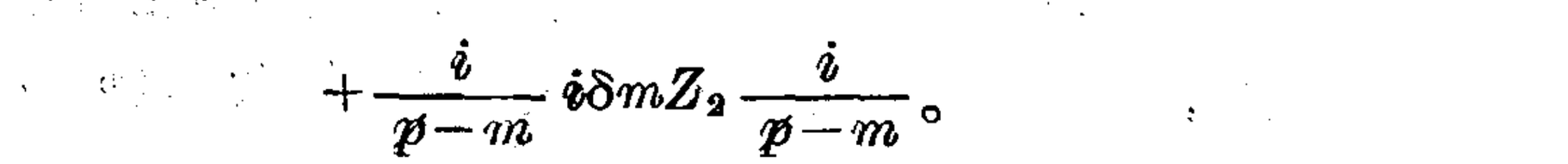
如果按照 $\delta mZ_2=A,\quad Z_2-1=B$

来选择重整化常数 Z_2 和 δm。那么，二阶近似的费米子传播子

$$i\bar{S}_f(p)=\frac{i}{\not p-m}+iC$$

就是有限的。

二阶近似的光子传播子的费曼图是



与之相应的传播子是

$$i\bar{D}_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2\pi_{\sigma\rho}(k)\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}$$

$$+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}i(Z_3-1)k^2g_{\sigma\rho}\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}$$

$$=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2[\pi(0)+\pi_c(k^2)]k^2g_{\sigma\rho}\cdot\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}$$

$$+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}i(Z_3-1)k^2g_{\sigma\rho}\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}。$$

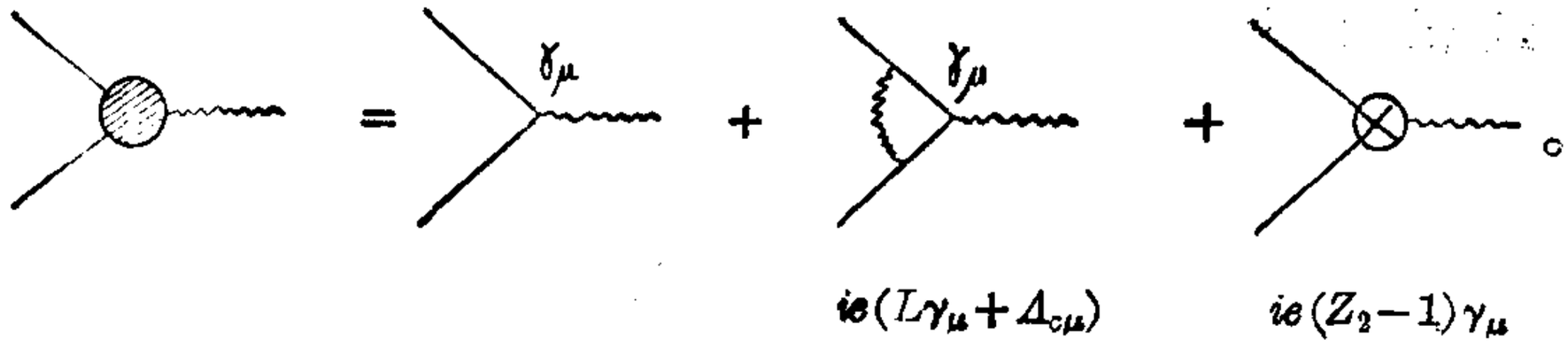
如果按照 $$Z_3-1=-e^2\pi(0)$$

选择重整化常数 Z_3，那么，二阶近似的光子传播子

$$i\bar{D}_{\mu\nu}(k)=\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2}ie^2\pi_c(k)k^2g_{\sigma\rho}\frac{-ig_{\rho\nu}}{k^2}$$

就是有限的。

二阶近似的顶角的费曼图是



与之相应的顶角因子是

$$ie\Gamma_\mu=ie\gamma_\mu+ie(L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu})+ie(Z_2-1)\gamma_\mu。$$

按照计算结果

$$L=Z_1^{-1}-1=Z_1^{-1}(1-Z_1)\simeq 1-Z_1=1-Z_2,$$

顶角因子中第二项的发散部分和第三项抵消，因而

$$ie\Gamma_\mu=ie\gamma_\mu+ie\Lambda_{c\mu}$$

就是有限的。

§2. 重整化常数的计算

在(6-12)式中，我们令

$$\text{裸量} = \text{重整化常数} \times \text{重整化的量}。 \tag{6-13}$$

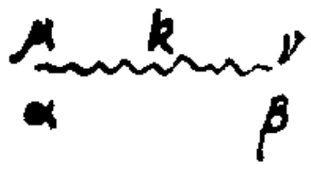
裸量是既不能测量又无法计算的。但是，可以认为它们是被给定的。在上一节中，我们由传播子、顶角的计算结果，按照重整化消除发散的需要，来选择重整化常数 Z。这样，(6-13)式就成为用裸量和重整化常数，来定义重整化量的公式。这种方法可以进一步推广并使之公理化。

重整化常数的定义　在规范理论中，有效作用量为

$$\begin{aligned} S=\int d^4x\Big\{&\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu+gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu)^2 \\ &+g\bar{\psi}\frac{\lambda^\alpha}{2}A\!\!\!/^\alpha\psi-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^\alpha_\mu)^2+C^+_\alpha\partial^2C_\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C^+_\alpha A^\beta_\mu C_\gamma\Big\} \\ &+\text{抵消项}。 \end{aligned} \tag{6-14}$$

按照第四章论述的量子化理论，在树图近似下，它们的自由传播子和最低顶角为

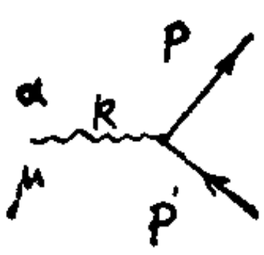
$$\xrightarrow{\ p\ } = iS_f(p)=\frac{i}{\not p-m};$$



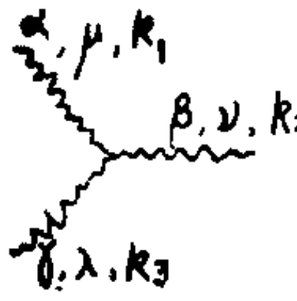
$$=iD^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(k)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]}{k^2};$$



$$=iG^{\alpha\beta}(q)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}}{q^2};$$



$$=iI\!\!\Gamma^\alpha_\mu(p,\ p';\ k)=ig\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2};$$



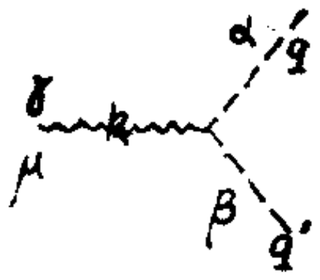
$$=iI\!\!\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)=gf^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda$$

$$+g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu+g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu];$$



$$= iI^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\mu\nu\lambda\rho} = -ig^2[f^{\alpha\beta\sigma}f^{\sigma\gamma\delta}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$

$$+f^{\alpha\gamma\sigma}f^{\beta\delta\sigma}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$
$$+f^{\alpha\delta\sigma}f^{\beta\gamma\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})];$$



$$= iI^{\alpha\beta\gamma}_{\mu}(q,\ q',\ k) = gf^{\alpha\beta\gamma}q_{\mu}. \qquad (6\text{–}15)$$

我们再根据(6–15)式，用正规化方法来计算高阶的传播子和顶角 $i\bar{S}_f(p)$、$i\bar{D}^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(k)$、$i\bar{G}^{\alpha\beta}(q)$、$i\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu}(p,\ p',\ k)$、$i\bar{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)$、$i\bar{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma}_{\mu}(q,\ q',\ k)$。然后按照

$$i\bar{S}_f(p)\big|_{p^2=-\mu^2} = Z_2 iS_f(p) = Z_2\frac{i}{\not p - m}\bigg|_{p^2=-\mu^2};$$

$$i\bar{D}^{\alpha\beta T}_{\mu\nu}(k)\big|_{k^2=-\mu^2} = Z_3 iD^{\alpha\beta T}_{\mu\nu}(k)\big|_{k^2=-\mu^2}$$
$$= Z_3\cdot\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\left[g_{\mu\nu}-\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]}{k^2}\bigg|_{k^2=-\mu^2};$$

$$i\bar{G}^{\alpha\beta}(q)\big|_{q^2=-\mu^2} = \tilde{Z}_3 iG^{\alpha\beta}(q)\big|_{q^2=-\mu^2} = \tilde{Z}_3\frac{-i\delta^{\alpha\beta}}{q^2}\bigg|_{q^2=-\mu^2};$$

$$i\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu}(p,\ p';\ k)\big|_{p^2=p'^2=-\mu^2} = \frac{1}{Z_1^f}i\Gamma^{\alpha}_{\mu}(p,\ p';\ k)\bigg|_{p^2=p'^2=-\mu^2}$$
$$= \frac{1}{Z_1^f}ig_0\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2};$$

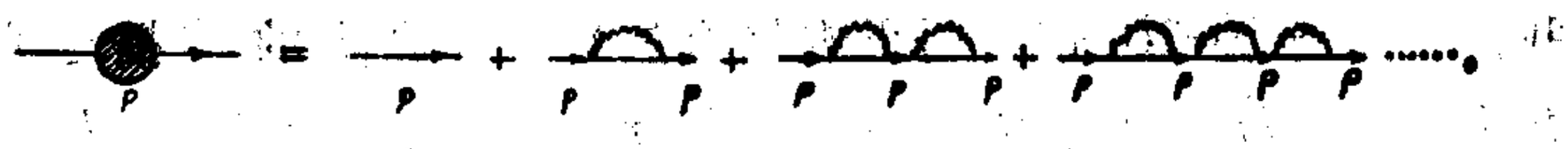
$$i\bar{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)\big|_{k_i^2=-\mu^2} = \frac{1}{Z_1}i\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)\bigg|_{k_i^2=-\mu^2}$$
$$= \frac{g_0}{Z_1}f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu];$$

$$i\bar{\Gamma}^{\alpha\beta\gamma}_{\mu}(q,\ q',\ k)\big|_{q^2=k^2=-\mu^2} = \frac{1}{\tilde{Z}_1}i\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu}(q,\ q',\ k)\bigg|_{q^2=k^2=-\mu^2}$$
$$= \frac{1}{\tilde{Z}_1}g_0 f^{\alpha\beta\gamma}q_\mu\Big|_{q^2=-\mu^2} \qquad (6\text{–}16)$$

定义重整化常数 Z。$p^2=q^2=k^2=-\mu^2$ 叫做重整化点。规范场传播子中的 T 表示横向分量，后面将证明纵向分量是不需要重整化的。显然，这样定义的重整化常数，不仅和计算方法、近似程度有关，也和重整化点 μ 有关。

下面以 Z_2 的计算为例，来说明计算的方法和步骤。由(6-16)式的第一式可知，Z_2 的计算归结为费米子传播子的计算。

链近似 我们在链近似下计算费米子的传播子。这时，相应的费曼图为



在这近似下的传播子为

$$i\bar{S}_f(p)=\frac{i}{\not p-m_0}+\frac{i}{\not p-m_0}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}$$

$$+\frac{i}{\not p-m_0}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}+\cdots$$

$$=\frac{i}{\not p-m_0}\Big[1+(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}$$

$$+(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not p-m_0}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{i}{\not p-m_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{\Sigma(p)}{\not p-m_0}}=\frac{i}{\not p-m_0-\Sigma(p)}。\qquad(6\text{-}17)$$

$\Sigma(p)$的计算 上式指出，链近似下的传播子的计算，归结为 $\Sigma(p)$ 的计算。按定义 $\Sigma(p)$ 为



$$=-i\Sigma(p)=\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\Big(ig\mu^{\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\Big)\frac{i}{\not l+\not p-m_0}$$

$$\cdot\Big(ig\mu^{\varepsilon}\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\Big)\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\Big[g^{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{l^\mu l^\nu}{l^2}\Big]}{l^2}。\qquad(6\text{-}18)$$

这里的计算，采用维数正规化方法。n 是动量空间的维数。$\varepsilon=2-\frac{n}{2}$，当 $n=4$ 时，$\varepsilon=0$；$\varepsilon\to0$ 时，$n\to4$。μ^ε 是为了使 g 保持无量纲而引入的。μ 是质量量纲的量。

在动量空间是四维的时候，费米场的量纲为 $d_\psi=\frac{3}{2}$，玻色场的量纲为 $d_A=1$，相互作用常数 g 是没有量纲的。当空间是 n 维的时候，$m\bar{\psi}\psi$ 的量纲为 n，ψ 的量纲 $d_\psi=\frac{n-1}{2}$；m^2A^2 的量纲为 n，A 的量纲 $d_A=\frac{n-2}{2}$；$g\bar{\psi}\psi A$ 的量纲为 n，g 的量纲为 $d_g=n-2\frac{n-1}{2}-\frac{n-2}{2}=2-\frac{n}{2}=\varepsilon$。如果以 $g\mu^\varepsilon\bar{\psi}\psi A$ 代替 $g\bar{\psi}\psi A$，那末 g 就保持没有量纲。

(6–18)式可以写成

$$-i\Sigma(p)=\frac{1}{(2\pi)^n}(g\mu^\varepsilon)^2\frac{\lambda^\alpha\lambda^\beta}{4}\delta^{\alpha\beta}I,$$

$$I=\int d^nl\left\{-\frac{\gamma_\mu(\not l+\not p+m_0)\gamma^\mu}{l^2[(l+p)^2-m_0^2]}\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\frac{\not l(\not l+\not p+m_0)\not l}{(l^2)^2[(l+p)^2-m_0^2]}\right\}。\qquad(6\text{–}19)$$

这样，就把计算 $\Sigma(p)$ 的问题，转成计算 I 的问题。

γ 矩阵的乘积　在(6–19)式中的分子，是多个 γ 矩阵的乘积。根据 γ 矩阵的基本对易关系

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$$

和延拓到 n 维空间的度规张量

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{vmatrix}1&&&&\\&-1&&&\\&&0&&\\&&&-1&\\&&&&\ddots\\&&&&&-1\end{vmatrix},\quad g^\mu_\mu=g^{\mu\nu}g_{\nu\mu}=n,$$

可以证明下列关系

$$\gamma_\mu\gamma^\mu=n,\quad \not l\not l=l^2,$$
$$\gamma_\mu\not l\gamma^\mu=(2-n)\not l,$$
$$\not l\not p\not l=2(l\cdot p)\not l-l^2\not p。$$

利用这些关系,可以化简(6–19)式中的分子,使(6–19)式成为

$$I=\int d^nl\left\{\frac{-(2-n)(\not l+\not p)-nm_0+(1-\alpha)(\not l-\not p+m_0)}{l^2[(l+p)^2-m_0^2]}\right.$$
$$\left.+\frac{2(1-\alpha)(l\cdot p)\not l}{(l^2)^2[(l+p)^2-m_0^2]}\right\}。\qquad (6–20)$$

分母的乘积化成和方 (6–20)式中的分母是多个因子的乘积,可以化成这些因子之和的方。利用并合公式

$$\frac{1}{A^mB^n}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^1dx\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+n}},\qquad (6–21)$$
$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)。$$

令 $$A=(l+p)^2-m_0^2,\quad B=l^2,$$

则(6–20)式可以写成

$$I=\int_0^1dx\int d^nl\left\{\frac{-(2-n)(\not l+\not p)+(1-\alpha)(\not l-\not p+m_0)-nm_0}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{4(1-x)(1-\alpha)(l\cdot p)\not l}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^3}\right\}。\qquad (6–22)$$

其中 $$p_x=-xp,\quad \Delta=m_0^2x-xp^2。$$

按照分子包含 l 的级次,把(6–22)式分成三个积分

$$I=I_1+I_2+I_3,$$
$$I_1=\int_0^1dx\int d^nl\frac{(n+\alpha-3)\not p+(1-n-\alpha)m_0}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^2},$$
$$I_2=\int_0^1dx\int d^nl\frac{l_\mu}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^2}[(n-\alpha-1)\gamma^\mu],$$
$$I_3=\int_0^1dx\int d^nl\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^3}[4(1-x)(1-\alpha)p^\mu\gamma^\nu]。$$
$$(6–23)$$

(6–23)式中的三个积分，都归结为分子上不包含积分变量 l 的积分

$$I^k=\int_0^1 dx\int d^nl\,\frac{1}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^k}。\tag{6-24}$$

分子上包含积分变量 l 的积分，可以由对上式的微分得到。这是因为

$$\frac{\partial}{\partial p_{x\mu}}\int d^nl\,\frac{1}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^k}=\int d^nl\,\frac{2kl_\mu}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^{k+1}}。$$

坐标平移　设想空间维数 $n<2k$，(6–24)式中的积分

$$\int d^nl\,\frac{1}{(l^2-2p_x\cdot l-\Delta)^k}$$

就是收敛的。将积分变量 l 作平移变换

$$l\to l'=l-p_x,$$

上列积分就成为

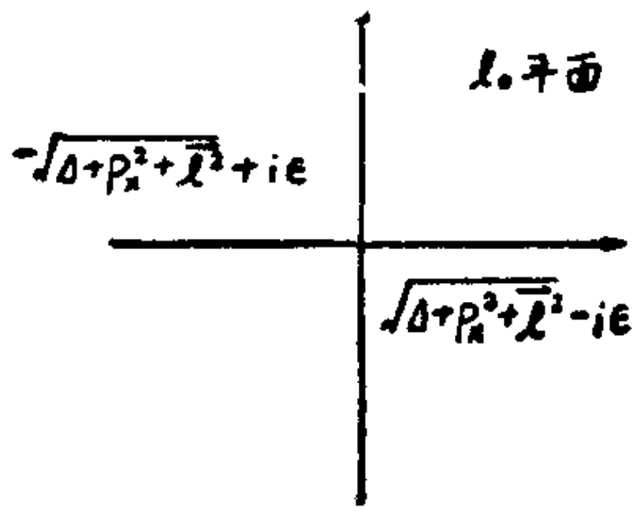
$$\int d^nl'\,\frac{1}{[l'^2-(\Delta+p_x^2)]^k}。\tag{6-25}$$

威克(Wick)转动　积分变量 l' 是 n 维空间的矢量。l_0 是时间分量，$\vec{l}$ 是 $n-1$ 维空间的空间分量。$l'^2=l_0^2-\vec{l}^2$ 是 n 维空间(闵可夫斯基空间)两点间距离的平方。上列积分的被积函数是它的函数，积分难以进行。我们要把它转变为欧几里德空间距离的平方，以便进行积分。

把 l_0 延拓为复数，则被积函数

$$\frac{1}{l_0^2-(\Delta+p_x^2+\vec{l}^2)+i\epsilon}$$

在 l_0 复平面上，如右图所示，有两个极点



$$l_0=\pm[\sqrt{\Delta+p_x^2+\vec{l}^2}-i\epsilon]。$$

这两个极点在第二、第四象限。被积函数在第一、第三象限是解析的，而且在 ∞ 远处为 0。所以，我们根据科西定理，可以把上列沿实轴的积分，转变成沿虚轴的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{l_0^2-(\Delta+p_x^2+\vec{l}^2)+i\epsilon} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dl_0 \frac{1}{l_0^2-(\Delta+p_x^2+\vec{l}^2)+i\epsilon}。$$

令 $$l_0 = iL_0, \quad \vec{l} = \vec{L},$$

则上式成为 $$-i\int_{-\infty}^{\infty} dL_0 \frac{1}{L_0^2+\vec{L}^2+\Delta+p_x^2-i\epsilon}。$$

(6–25)式就等于

$$i(-1)^k \int d^nL \frac{1}{(L^2+\Delta+p_x^2-i\epsilon)^k}。 \tag{6–26}$$

它和(6–25)式不同，L 是 n 维欧几里德空间的矢量，$L^2=L_0^2+\vec{L}^2$ 是两点间距离的平方。

n 维球坐标 在 n 维欧几里德空间，可以取 n 维球坐标 L、θ_1、θ_2、…、θ_{n-1}。L 是球的半径；$0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$，$i=2$，3，…，$n-1$，是球的角坐标。这时，$n$ 维欧几里德空间的体积元，可以写成

$$d^nL = L^{n-1}dL\,d\Omega_n,$$

$$d\Omega_n = (\sin\theta_{n-1})^{n-2}d\theta_{n-1}\cdot(\sin\theta_{n-2})^{n-3}d\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2\,d\theta_2\cdot d\theta_1。$$

$d\Omega_n$ 是 n 维欧几里德空间的立体角元。由于

$$\int_0^{\pi}\sin^k\theta\,d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{K+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K}{2}+1\right)},$$

n 维欧几里德空间的立体角为

$$\int d\Omega_n = 2\pi(\sqrt{\pi})^{n-2} \cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}+1\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}。$$

所以，(6-26)式的积分就是

$$i(-1)^k \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{dL \cdot L^{n-1}}{[L^2+\Delta+p_x^2]^k}$$

$$= i(-1)^k \sqrt{\pi}^n \frac{\Gamma\left(K-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(K)} \cdot \frac{1}{(\Delta+p_x^2)^{k-\frac{n}{2}}}。 \tag{6-27}$$

总之，(6-25)式、(6-26)式、(6-27)式表明

$$\int d^n l \frac{1}{[l^2-2p_x \cdot l-\Delta]^k}$$

$$= i(-1)^k \sqrt{\pi}^n \frac{\Gamma\left(K-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(K)} \frac{1}{(\Delta+p_x^2)^{k-\frac{n}{2}}}。 \tag{6-28}$$

将它对 $p_{x\mu}$ 求导，得

$$\int d^n l \frac{l_\mu}{[l^2-2p_x \cdot l-\Delta]^k}$$

$$= i(-1)^k \sqrt{\pi}^n \frac{\Gamma\left(K-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(K)} \frac{p_{x\mu}}{(\Delta+p_x^2)^{k-\frac{n}{2}}}。 \tag{6-29}$$

再将它对 $p_{x\nu}$ 求导，得

$$\int d^n l \frac{l_\mu l_\nu}{[l^2-2p_x \cdot l-\Delta]^k}$$

$$= i(-1)^k \sqrt{\pi}^n \left[\frac{\Gamma\left(K-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(K)} \frac{p_{x\mu} \cdot p_{x\nu}}{(\Delta+p_x^2)^{k-\frac{n}{2}}} - \frac{\Gamma\left(K-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(K)} \frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+p_x^2)^{k-1-\frac{n}{2}}} \right]。 \tag{6-30}$$

把(6-28)式、(6-29)式、(6-30)式代入(6-23)式，得

$$I_1=i\sqrt{\pi}^n[(n+\alpha-3)\not{p}+(1-n-\alpha)m_0]\int_0^1 dx\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}},$$

$$I_2=i\sqrt{\pi}^n(\alpha+1-n)\int_0^1 dx\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}}x\not{p},$$

$$I_3=i\sqrt{\pi}^n 4(1-\alpha)\int_0^1 dx(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{4(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}}\not{p}-\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{2(\Delta+p_x^2)^{3-\frac{n}{2}}}x^2\not{p}^3\not{p}\right].$$

因为
$$(1-x)x^2p^2=-x(\Delta+p_x^2)+x^2m_0^2,$$

所以

$$I_3=i\sqrt{\pi}^n(1-\alpha)\int_0^1 dx\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot\left[(1-nx+3x)\not{p}-\frac{4\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2(\Delta+p_x^2)}x^2m_0^2\not{p}\right].$$

把 I_1、I_2、I_3 加起来得

$$I=i\sqrt{\pi}^n\int_0^1 dx\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$\cdot\left[(1-n-\alpha)m_0+(n-2)(1-2x+\alpha x)\not{p}\right.$$

$$\left.-2(1-\alpha)\left(2-\frac{n}{2}\right)\frac{x^2m_0^2\not{p}}{\Delta+p_x^2}\right].$$

极限情况 物理空间是4维的。因此，$n\to4$，$\varepsilon=2-\frac{n}{2}\to0$

是物理上的要求。在这种极限情况下，

$$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{2-\frac{n}{2}}\to\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{(\Delta+p_x^2)^{2-\frac{n}{2}}}=\exp\left[-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(\Delta+p_x^2)\right]\to 1-\varepsilon\ln(\Delta+p_x^2),$$

$$\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta+p_x)^{2-\frac{n}{2}}}\to\frac{1}{\varepsilon}-\ln(\Delta+p_x^2),$$

$$I=i\sqrt{\pi^n}\int_0^1 dx\Big\{[(1-n-\alpha)m_0+(n-2)(1-2x+\alpha x)\not p]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon}-\ln(\Delta+p_x^2)\right]-2(1-\alpha)\frac{x^2m_0^2\not p}{(\Delta+p_x^2)}\Big\}$$

$$=i\sqrt{\pi^n}\int_0^1 dx\Big\{\Big[2\alpha x\Big(\frac{1}{\varepsilon}-\ln(\Delta+p_x^2)\Big)-2(1-\alpha)\frac{x^2m_0^2}{\Delta+p_x^2}\Big]\not p$$

$$-(3+\alpha)\Big(\frac{1}{\varepsilon}-\ln(\Delta+p_x^2)\Big)m_0\Big\}.$$

把它代入(6-19)式，就得到

$$\Sigma(p)=A\not p+Bm_0,$$

$$A(p^2,\ m_0,\ g_0,\ \varepsilon)=-g_0^2\frac{\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)$$

$$\cdot\int_0^1 dx\Big\{\alpha\Big(\frac{1}{\varepsilon}-2x\ln(\Delta+p_x^2)\Big)-\frac{2(1-\alpha)x^2m_0^2}{\Delta+p_x^2}\Big\},$$

$$B(p^2,\ m_0,\ g_0,\varepsilon)=g_0^2\frac{\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)(3+\alpha)$$

$$\cdot\int_0^1 dx\left[\frac{1}{\varepsilon}-\ln(\Delta+p_x^2)\right].\qquad(6\text{-}31)$$

重整化常数　把(6-31)式代入(6-17)式，得

$$i\tilde{S}_f(p)=\frac{i}{(1-A)\not p-(1+B)m_0}.$$

把它和(6-16)式比较，得

$$\frac{1}{(1-A)\not{p}-(1+B)m_0}_{p^2=-\mu^2}=Z_2\frac{1}{\not{p}-m},$$

$$Z_2(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon)=1+A(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon),$$

$$m=Z_2(1+B)m_0=(1+A(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon)$$
$$+B(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon))m_0,$$

$$Z_m=1-A(\mu,\ g_0,\ \varepsilon,\ m_0)-B(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon),$$

$$A(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon)$$
$$=-\frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)\int_0^1 dx\Big[\frac{\alpha}{\varepsilon}-2\alpha x\ln(m_0^2x+x\mu^2-x^2\mu^2)$$
$$-\frac{2(1-\alpha)x^2m_0^2}{m_0^2x+x\mu^2-x^2\mu^2}\Big]\approx-\frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)\frac{\alpha_0}{\varepsilon}+\cdots$$

$$B(\mu,\ g_0,\ m_0,\ \varepsilon)$$
$$=\frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)\int_0^1 dx(3+\alpha)\Big[\frac{1}{\varepsilon}-\ln(m_0^2x+x\mu^2-x^2\mu^2)\Big]$$
$$\approx\frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{16\pi^2}C_2(R)\frac{3+\alpha_0}{\varepsilon}+\cdots$$

$$C_2(R)=\frac{\lambda^\alpha\lambda^\beta}{4}\delta^{\alpha\beta}。\qquad (6\text{–}31)'$$

§3. 规范场传播子纵分量不需重整

在上一节定义重整化常数的(6–16)式中，对于规范场传播子$D_{\mu\nu}^{\alpha\beta T}(k)$，我们加了一个角标$T$，指明它是横分量，而不包括纵分量。这是因为纵分量不需重整。现在，我们来证明这一点。

规范场的自由传播子是

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\Big[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big]}{k^2}。$$

它可以分成横分量与纵分量：

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta T}(k)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\left[g_{\mu\nu}-\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]}{k^2},\quad ik_\nu D_{\mu\nu}^{\alpha\beta T}(k)=0;$$

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\alpha\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2},\quad k_\nu iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)=-i\delta^{\alpha\beta}\alpha\frac{k_\mu}{k^2}\neq 0;$$

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)=iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta T}(k)+iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k),$$

$$k_\nu iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)=k_\nu iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)=-i\delta^{\alpha\beta}\frac{k_\mu}{k^2}\neq 0。$$

规范场的重整化的传播子 $iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)_r$，它的表示式是很复杂的。尽管在一般情况下，难以算出它的具体表示式，但是，总可以分为横向部分和纵向部分：

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)_r=iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta T}(k)_r+iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)_r,$$

$$k_\nu iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)_r=k_\nu iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)_r,$$

而且可以证明

$$iD_{\mu\nu}^{\alpha\beta L}(k)_r=\frac{-i\delta^{\alpha\beta}\alpha\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}。$$

这就是规范场传播子纵分量不需重整的含意。

现在，我们用 W、T 恒等式和鬼方程来予以证明。在用 (5–33)′ 式、(5–36)′ 式表示的 W、T 恒等式和鬼方程中，不包括费米场时，就有如下的形式

$$\int[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\,\{J_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu+\zeta_\alpha^+\delta C_\alpha+\delta C_\alpha^+\zeta_\alpha\}$$

$$\cdot\exp\left\{iS_{eff}+i\int d^4x\,[J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu+\zeta_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\zeta_\alpha+U_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu+V_\alpha\delta C_\alpha]\right\}$$

$$=0,\qquad(6\text{–}32)$$

$$\int[dA_\mu^\alpha]\,[dC_\alpha]\,[dC_\alpha^+]\,\{\zeta^\alpha+\partial^\mu(D_\mu^{\alpha\beta}C_\beta)\}$$

$$\cdot\exp\left\{iS_{eff}+i\int d^4x\,[J_\mu^\alpha A_\alpha^\mu+\zeta_\alpha^+C_\alpha+C_\alpha^+\zeta_\alpha+U_\mu^\alpha\delta A_\alpha^\mu+V_\alpha\delta C_\alpha]\right\}$$

$$=0。\qquad(6\text{–}33)$$

将(6–32)式取对 $J^{\alpha}_{\mu}(x)$、$\zeta_{\beta}(y)$的导数,并令外源为零,得

$$\int [dA^{\alpha}_{\mu}]\,[dC_{\alpha}]\,[dC^{+}_{\alpha}]\,\{C^{+}_{\beta}(y)\delta A^{\alpha}_{\mu}(x)+\delta C^{+}_{\beta}(y)A^{\alpha}_{\mu}(x)\}\exp[iS_{eff}]$$

$$=0。$$

把 $$\delta A^{\alpha}_{\mu}(x)=-\frac{\xi}{g}D^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)C_{\gamma}(x),\quad \delta C^{+}_{\beta}(y)=-\frac{\xi}{\alpha g}\partial^{\nu}A^{\beta}_{\nu}(y)$$

代入上式,得

$$\int [dA^{\alpha}_{\mu}]\,[dC_{\alpha}]\,[dC^{+}_{\alpha}]\left\{C^{+}_{\beta}(y)D^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)C_{\gamma}(x)+\frac{1}{\alpha}\partial^{\nu}A^{\beta}_{\nu}(y)\cdot A^{\alpha}_{\mu}(x)\right\}\exp[iS_{eff}]=0。$$

按照第三章的论述,和上式相应的算符方程为

$$\langle 0|T^{*}(\partial^{\nu}\hat{A}^{\beta}_{\nu}(y)\cdot\hat{A}^{\alpha}_{\mu}(x))|0\rangle+\alpha\langle 0|T^{*}(\hat{C}^{+}_{\beta}(y)\hat{D}^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)\hat{C}_{\gamma}(x))|0\rangle=0。\qquad(6\text{–}34)$$

将(6–33)式取对 $\zeta_{\beta}(y)$ 的导数,并令外源为零,得

$$\int [dA^{\alpha}_{\mu}]\,[dC_{\alpha}]\,[dC^{+}_{\alpha}]\,\{\delta^{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)+iC^{+}_{\beta}(y)\partial^{\mu}(D^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)C_{\gamma}(x))\}$$

$$\cdot\exp[iS_{eff}]=0。$$

和它相应的算符方程为

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)+i\langle 0|T^{*}(\hat{C}^{+}_{\beta}(y)\partial^{\mu}(\hat{D}^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)\hat{C}_{\gamma}(x)))|0\rangle=0。\qquad(6\text{–}35)$$

考虑到 T^{*} 算符的意义是指对时间的导数应该移至平均作用之外,(6–34)式、(6–35)式可以写成

$$\partial_{y\nu}\langle 0|T(\hat{A}^{\beta}_{\nu}(y)\hat{A}^{\alpha}_{\mu}(x))|0\rangle+\alpha\langle 0|T^{*}(\hat{C}^{+}_{\beta}(y)\hat{D}^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)\hat{C}_{\gamma}(x))|0\rangle=0,$$

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)+\partial_{x_{\mu}}i\langle 0|T^{*}(\hat{C}^{+}_{\beta}(y)\hat{D}^{\alpha\gamma}_{\mu}(x)\hat{C}_{\gamma}(x))|0\rangle=0。$$

把第一式代入第二式,得

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{4}(x-y)-\frac{i}{\alpha}\partial_{x_{\mu}}\partial_{y_{\nu}}\langle 0|T(\hat{A}^{\beta}_{\nu}(y)\hat{A}^{\alpha}_{\mu}(x))|0\rangle=0。$$

考虑到,两点格林函数就是完全传播子

$$iD^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x,\ y)_r \equiv \langle 0|T(\hat{A}^{\alpha}_{\mu}(x)\hat{A}^{\beta}_{\nu}(y))|0\rangle,$$

则上式就是 $\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}iD^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x,\ y)_r = -i\alpha\delta^{\alpha\beta}\delta^4(x-y)$。

在动量表象中，上式是

$$k_\mu k_\nu iD^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(k)_r = -i\alpha\delta^{\alpha\beta}。$$

由此可知，完全传播子的纵向分量为

$$iD^{\alpha\beta L}_{\mu\nu}(k)_r = \frac{-i\delta^{\alpha\beta}\alpha\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}。\tag{6-36}$$

这表明：完全传播子的纵向分量和自由传播子的一样。换句话说，规范场传播子的纵向分量是不需重整的。值得注意，规范场传播子的纵分量是和规范固定项紧密联系的。因此，规范固定项是重整化无关的，

$$-\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu A^{\alpha}_{\mu_0})^2 = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^{\alpha}_{\mu})^2,\tag{6-37}$$

$$A^{\alpha}_{\mu_0} = \sqrt{Z_3}\,A^{\alpha}_{\mu},\quad \alpha_0 = Z_3\alpha。$$

在讨论规范场的重整化时，避开规范固定项是适当的。

§4. 重整化方程

在第一节中，我们以 QED 为例，说明了相乘重整化，用抵消项消除发散的重整化方法。现在，我们进一步论述这种方法：用与 BRS 不变性相应的 W、T 恒等式，来建立抵消项应该满足的重整化方程；用重整化方程的解的性质，来阐明相乘重整化的特点。

逐级近似 在重整化过程中，需要处理的发散图形，都可以归结为 1PI(单粒子不可约)图形，即正规顶角图形。它们的生成泛函是 Γ。

在树图近似下，正规顶角的生成泛函

$$\Gamma_0[S_0] = S_0,$$

S_0 是系统的有效作用量。如在第四章末论述的那样，用 Γ_0 生成

的正规顶角，就是由它导出的费曼规则，都是有限的。但是，如果用 S_0 来建立单圈近似的正规顶角生成泛函

$$\Gamma[S_0]=\Gamma_0[S_0]+\Gamma_1[S_0]=S_0+\Gamma_1[S_0],$$

那末由它生成的正规顶角就包括有发散的部分。S_0 生成的正规顶角仍然是有限的。$\Gamma_1[S_0]$ 生成的正规顶角有有限的，也有发散的。设想

$$\Gamma_1[S_0]=\Gamma_1'[S_0]+\Gamma_1''[S_0],$$

$\Gamma_1'[S_0]$ 生成的正规顶角是有限的，$\Gamma_1''[S_0]$ 生成的正规顶角是发散的。

我们在作用量 S_0 上，加上抵消项 ΔS_0，令

$$S_1=S_0+\Delta S_0。$$

用它来建立正规顶角的生成泛函 $\Gamma[S_0+\Delta S_0]$，并取单圈近似

$$\begin{aligned}\Gamma[S_0+\Delta S_0]&\simeq\Gamma_0[S_0+\Delta S_0]+\Gamma_1[S_0+\Delta S_0]\\&\simeq S_0+\Delta S_0+\Gamma_1[S_0]\\&=S_0+\Delta S_0+\Gamma_1'[S_0]+\Gamma_1''[S_0]。\end{aligned}$$

如果选取抵消项

$$\Delta S_0=-\Gamma_1''[S_0],$$

那末，在单圈近似下，

$$\Gamma[S_0+\Delta S_0]=S_0+\Gamma_1'[S_0]$$

生成的正规顶角就都是有限的。这时，在双圈近似下

$$\Gamma[S_0+\Delta S_0]=S_0+\Gamma_1'[S_0]+\Gamma_2[S_0+\Delta S_0],$$

$\Gamma_2[S_0+\Delta S_0]$ 因而 $\Gamma[S_0+\Delta S_0]$ 生成的正规顶角也有发散的。

我们再在作用量 $S_1=S_0+\Delta S_0$ 上，加上抵消项 ΔS_1，令

$$S_2=S_1+\Delta S_1=S_0+\Delta S_0+\Delta S_1。$$

用它来建立正规顶角的生成泛函 $\Gamma[S_0+\Delta S_0+\Delta S_1]$，在双圈近似下

$$\begin{aligned}&\Gamma[S_0+\Delta S_0+\Delta S_1]\\&\quad=S_0+\Gamma_1'[S_0]+\Delta S_1+\Gamma_2'[S_1]+\Gamma_2''[S_1],\end{aligned}$$

选取 $$\Delta S_1 = -\Gamma_2^d[S_1],$$
它们生成的正规顶角就都是有限的。

重复上述的做法，就可以建立在逐级近似下为有限的正规顶角的生成泛函。在无穷级近似下为有限的正规顶角生成泛函就是重整化了的理论。然而，这样的论述，还只是形式的，还不知道怎样确定 $\Gamma^d[S]$，怎样确定 ΔS？

W、T 恒等式和鬼方程 为了确定 $\Gamma^d[S]$，从而确定

$$\Delta S = -\Gamma^d[S], \tag{6-38}$$

我们利用第五章末导出的 W、T 恒等式(5-40)和鬼方程(5-39)式。为了论述的方便，我们用 $\phi_i(i=1, 2, \cdots)$ 表示场量 ψ、$\bar{\psi}$、A_μ^a、C_a，用 U_i 表示和它们的 BRS 变化 $\delta\phi_i$ 相应的外源 $\bar{K}$、K、U_μ^a、V_α。注意，在 $\delta\phi_i$ 中去除了 ξ 因子后，它的对易性质就和 ϕ_i 的相反，因而 U_i 的对易性质和 ϕ_i 的相反。所以，U_i 和 ϕ_i 二者中，有一个是反对易的，有一个是对易的。为了方便，我们假设 U_i 是反对易的 C 数，ϕ_i 是对易的 C 数。这样，W、T 恒等式和鬼方程(5-40)式、(5-39)式，就可以写成

$$\sum_i \frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta U_i}\cdot\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\phi_i} = 0, \tag{6-39}$$

$$\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta C_\alpha^+} + g\partial^\mu\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta U_\mu^\alpha} = 0, \tag{6-40}$$

$$\hat{\Gamma} = \Gamma + \frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^a)^2。$$

Γ 是正规顶角生成泛函，$\hat{\Gamma}$ 是去除了规范固定项的正规顶角的生成泛函。

定义

$$A*B \equiv \sum_i\left(\frac{\delta A}{\delta U_i}\frac{\delta B}{\delta\phi_i} + \frac{\delta A}{\delta\phi_i}\frac{\delta B}{\delta U_i}\right)。 \tag{6-41}$$

据此，(6-39)式可以简写成

$$\hat{\Gamma}*\hat{\Gamma} = 0。 \tag{6-42}$$

(6-42)式、(6-40)式是由 BRS 不变性导出的、严格的 W、T 恒等式和鬼方程，是规范理论必需满足的方程式。我们利用它来提供选择抵消项(6-38)式的依据，用它来建立重整化方程。

重整化方程 既然(6-42)式、(6-40)式是 $\hat{\Gamma}$ 必需满足的方程式，各级近似下的 $\hat{\Gamma}$ 就都必需满足它们。在树图近似下，由作用量 S_0 建造的正规顶角生成泛函

$$\Gamma[S_0]\simeq S_0,$$

$$\hat{\Gamma}[S_0]\simeq \hat{S}_0 - S_0 + \frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A^a_\mu)^2,$$

当然满足(6-42)式和(6-40)式，

$$\hat{S}_0 * \hat{S}_0 = 0, \tag{6-42)'}$$

$$\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta C^+_a} + g\partial^\mu \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U^a_\mu} = 0。 \tag{6-40)'}$$

前面说到，用 S_0 建造的 $\Gamma[S_0]$ 在单圈近似下是发散的。如果用 $S_0+\Delta S_0$ 建造 $\Gamma[S_0+\Delta S_0]$，在单圈近似下，

$$\Gamma[S_0+\Delta S_0] = S_0 + \Delta S_0 + \Gamma^1_1[S_0] + \Gamma^d_1[S_0],$$

选取

$$\Delta S_0 = -\Gamma^d_1[S_0],$$

则

$$\Gamma[S_0+\Delta S_0] = S_0 + \Gamma^1_1[S_0]$$

是有限的。这时，由 S_0 构造的 $\Gamma[S_0]$ 为

$$\Gamma[S_0] = S_0 + \Gamma^1_1[S_0] + \Gamma^d_1[S_0],$$

虽然是发散的，但也仍然要满足(6-42)式、(6-40)式，即

$$(\hat{S}_0 + \hat{\Gamma}^1_1[S_0] + \hat{\Gamma}^d_1[S_0]) * (\hat{S}_0 + \hat{\Gamma}^1_1[S_0] + \hat{\Gamma}^d_1[S_0]) = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta C^+_a}(\hat{S}_0 + \hat{\Gamma}^1_1[S_0] + \hat{\Gamma}^d_1[S_0]) + g\partial^\mu \frac{\delta}{\delta U^a_\mu}(\hat{S}_0 + \hat{\Gamma}^1_1[S_0] + \hat{\Gamma}^d_1[S_0]) = 0。$$

在零级(指树图)近似下，$\hat{S}_0$ 满足(6-42)′式、(6-40)′式。在一级(指单圈)近似下，上式可导致

$$\hat{S}_0 * (\hat{\Gamma}^1_1[S_0] + \hat{\Gamma}^d_1[S_0]) = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta C_\alpha^+}(\hat{\Gamma}_1^l[S_0]+\hat{\Gamma}_1^d[S_0])+g\partial^\mu\frac{\delta}{\delta U_\mu^\alpha}(\hat{\Gamma}_1^l[S_0]+\hat{\Gamma}_1^d[S_0])=0。$$

其中有有限部分 $\Gamma_1^l[S_0]$ 和发散部分 $\Gamma_1^d[S_0]$，它们应该分别满足上述方程。所以

$$\hat{S}_0*\hat{\Gamma}_1^d[S_0]=0, \tag{6-43}$$

$$\frac{\delta\hat{\Gamma}_1^d[S_0]}{\delta C_\alpha^+}+g\partial^\mu\frac{\delta\hat{\Gamma}_1^d[S_0]}{\delta U_\mu^\alpha}=0。 \tag{6-44}$$

这就是在单圈近似下，用来确定抵消项 $\Delta S_0=-\Gamma_1^d[S_0]$ 的方程。在双圈近似下，按照前面的论述，只需把上式中的 $\hat{S}_0\to\hat{S}_1$，$\hat{\Gamma}_1^d[S_0]\to\hat{\Gamma}_2^d[S_1]$，就得到确定抵消项 $\Delta S_1=-\Gamma_2^d[S_1]$ 的方程。如此类推就可以得到逐级(以致无穷)抵消项应该满足的方程。由此可知，(6-43)式、(6-44)式是确定抵消项的一般方程。所以，我们把它叫做重整化方程。

一般解 重整化方程(6-43)式、(6-44)式的一般解是

$$\Delta S_0=-\Gamma_1^d[S_0]=\sum_\tau a_\tau G_\tau+\hat{S}_0*F。 \tag{6-45}$$

G_τ 是规范不变的泛函，a_τ 是相应的系数，F 是要由物理条件确定的任意泛函。我们证明：(6-45)式是(6-43)式、(6-44)式的解。

G_τ 是规范不变的泛函，就不包含鬼项，因而不是 C_α^+ 和 U_μ^α 的函数，当然满足(6-44)式。再者

$$\hat{S}_0*G_\tau=\sum_i\left(\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta\phi_i}\frac{\delta G_\tau}{\delta U_i}+\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta U_i}\frac{\delta G_\tau}{\delta\phi_i}\right)$$

$$=\sum_i\frac{\delta G_\tau}{\delta\phi_i}\delta\phi_i=\delta G_\tau=0。$$

第一个等式是根据定义。第二个等式的成立是由于：规范不变的 G_τ 不包含鬼项，因而不是 U_i 的函数；U_i 是与 $\delta\phi_i$ 相应的外源，$\hat{S}_0=\sum U_i\delta\phi_i+\cdots$。由于 BRS 变换是一种特殊的规范变换，所以 $\delta G_\tau=0$。这就证明了，只要 G_τ 是规范不变的，它就一定是重整化方程(6-43)式、(6-44)式的解。所以 $\sum_\tau a_\tau G_\tau$ 是重整化方程的解。

按定义 $\hat{S}_0 * F = \sum_i \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right)$,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_0 * (\hat{S}_0 * F) = \hat{S}_0 * \sum_i & \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right) \\
= \sum_{i,j} & \left[\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_j} \frac{\delta}{\delta U_j} \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_j} \frac{\delta}{\delta \phi_j} \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right) \right] \\
- \sum_{i,j} & \left[\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_j} \left(\frac{\delta^2 \hat{S}_0}{\delta U_j \delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta^2 F}{\delta U_j \delta U_i} \right. \right. \\
& \left. + \frac{\delta^2 \hat{S}_0}{\delta U_j \delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} - \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta^2 F}{\delta U_j \delta \phi_i} \right) \\
& + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_j} \left(\frac{\delta^2 \hat{S}_0}{\delta \phi_j \delta \phi_i} \frac{\delta F}{\delta U_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_i} \frac{\delta^2 F}{\delta \phi_j \delta U_i} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\delta^2 \hat{S}_0}{\delta \phi_j \delta U_i} \frac{\delta F}{\delta \phi_i} + \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_i} \frac{\delta^2 F}{\delta \phi_j \delta \phi_i} \right) \right] .
\end{aligned}$$

由于 U_i、U_j 的反对易性，包含 F 的二次导数的项都相互抵消。余下的四项为

$$\begin{aligned}
& \sum \left[\frac{\delta}{\delta \phi_i} \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_j} \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_j} \right) \frac{\delta F}{\delta U_i} - \frac{\delta}{\delta U_i} \left(\frac{\delta \hat{S}_0}{\delta \phi_j} \frac{\delta \hat{S}_0}{\delta U_j} \right) \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right] \\
& = \sum \left[\frac{\delta}{\delta \phi_i} (\hat{S}_0 * \hat{S}_0) \frac{\delta F}{\delta U_i} - \frac{\delta}{\delta U_i} (\hat{S}_0 * \hat{S}_0) \frac{\delta F}{\delta \phi_i} \right] = 0 .
\end{aligned}$$

所以 $$\hat{S}_0 * (\hat{S}_0 * F) = 0 .$$

这就证明了：不管 F 是什么函数，$\hat{S}_0 * F$ 都是方程(6–43)式的解。

由于 $\hat{S}_0$ 是鬼方程的解，要使 $\hat{S}_0 * F$ 也是鬼方程(6–44)式的解，就需要 F 也满足鬼方程

$$\frac{\delta F}{\delta C_\alpha^+} + g \partial^\mu \frac{\delta F}{\delta U_\mu^\alpha} = 0 .$$

这表明 F 中包含有

$$\int d^4x (g \partial_\mu C_\alpha^+ + U_\mu^\alpha) A_\alpha^\mu \qquad (6\text{–}46)$$

的项。C_α^+ 应该和 U_μ^α 以线性迭加的形式出现在 F 中。

如(6–46)式所示，与场量 A_μ^α 的 BRS 变化 δA_μ^α 相应的流 U_μ^α，以和 A_μ^α 相乘的形式 $U_\mu^\alpha A_\alpha^\mu$ 出现在 F 中。那么，从对称的原则推知，与场量 ϕ_i 的 BRS 变化 $\delta\phi_i$ 相应的流 U_i，也应该以 $U_i\phi_i$ 的形式出现在 F 中。所以，有

$$F=\int d^4x\{b_A A_\mu^\alpha(U_\alpha^\mu+g\partial^\mu C_\alpha^+)+\sum_{i\neq A}b_i\phi_i U_i\}, \qquad (6\text{–}47)$$

b_A、b_i 是常数系数，通常取小量。

解的意义 得到了重整化方程的解(6–45)式，就得到了抵消项 ΔS_0。把它加于 S_0，就得到使正规顶角成为有限的，有意义的作用量

$$S_0+\Delta S_0=S_0+\sum_\tau a_\tau G_\tau+\hat{S}_0*F$$

$$=\hat{S}_0-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2+\sum a_\tau G_\tau+\hat{S}_0*F$$

$$=\hat{S}_0+\sum_i\left(\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta\phi_i}\frac{\delta F}{\delta U_i}+\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta U_i}\frac{\delta F}{\delta\phi_i}\right)+\sum a_\tau G_\tau$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu)^2。$$

令 $$A_\mu^\alpha\to A_\mu^{\alpha'}=A_\mu^\alpha+\frac{\delta F}{\delta U_\mu^\alpha}=A_\mu^\alpha+b_A A_\mu^\alpha=(1+b_A)A_\mu^\alpha=Y_A A_\mu^\alpha,$$

$$U_\mu^\alpha+g\partial_\mu C_\alpha^+\to U_\mu^{\alpha'}+g\partial_\mu C_\alpha^{+\prime}=U_\mu^\alpha+g\partial_\mu C_\alpha^+-\frac{\delta F}{\delta A_\mu^\alpha}$$

$$=(1-b_A)(U_\mu^\alpha+g\partial_\mu C_\alpha^+)=Y_A^{-1}(U_\mu^\alpha+g\partial_\mu C_\alpha^+),$$

$$U_\mu^{\alpha'}=Y_A^{-1}U_\mu^\alpha,\quad C_\alpha^{+\prime}=Y_A^{-1}C_\alpha^+;$$

$$\phi_i\to\phi_i'=\phi_i+\frac{\delta F}{\delta U_i}=\phi_i+b_i\phi_i=(1+b_i)\phi_i=Y_i\phi_i,$$

$$U_i\to U_i'=U_i-\frac{\delta F}{\delta\phi_i}=U_i-b_iU_i=(1-b_i)U_i=Y_i^{-1}U_i。$$

则

$$\hat{S}_0[\phi_i,\ U_i]\to\hat{S}_0[\phi_i',\ U_i']$$

$$-\hat{S}_0[\phi_i, U_i]+\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta\phi_i}(\phi_i'-\phi_i)-\frac{\delta\hat{S}_0}{\delta U_i}(U_i'-U_i),$$

$$S_0+\Delta S_0=\hat{S}_0[\phi_i', U_i']+\sum a_\tau G_\tau[\phi_i']-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^a)^2。$$

(6–48)

这表明：抵消项 $\hat{S}_0*F$ 的作用，是使变量作变换

$$A_\mu^{a'}=Y_A A_\mu^a,\quad U_\mu^{a'}=Y_A^{-1}U_\mu^a,\quad O_a^{+\prime}=Y_A^{-1}O_a^+,$$
$$\phi_i'=Y_i\phi_i,\quad U_i'=Y_i^{-1}U_i;\tag{6–49}$$

抵消项 $\sum a_\tau G_\tau$ 才是通常所谓的抵消项；规范固定项是重整化无关的，保持原有的形式不变。

§5. 规范理论的重整化

现在，我们采用上一节论述的方法，把规范理论重整化。先写出 BRS 不变的有效作用量，它是树图正规顶角的生成泛函。再加上重整化方程的解，构成新的作用量，由它建造的正规顶角生成泛函，生成的正规顶角，在单圈近似下是有限的。逐级使用这种方法，就可以得到重整化的规范理论。

BRS 不变的有效作用量 在有效作用量中，首先包括规范不变的作用量

$$S_{gi}=\int d^4x\Big[\bar{\psi}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^a}{2}A\!\!\!/^a-m\Big)\psi$$
$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\Big],$$

其次是规范固定项和鬼粒子项

$$S_{\text{规}}=-\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu^a)^2,$$

$$S_{\text{鬼}}=\int d^4x[O_\alpha^+\partial^2 C_\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu O_\alpha^+A_\mu^\beta C_\gamma]。$$

由第五章第四节的论述可知：$S_{gi}+S_{\text{规}}+S_{\text{鬼}}$ 是 BRS 变换下不

变的；而且，除去$\left(-\frac{\xi}{g}\right)$因子后的场量的 BRS 变换

$$\delta A_\mu^\alpha = (\partial_\mu \delta^{\alpha\beta} - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma) C_\gamma,$$

$$\delta \psi = i g \frac{\lambda^\alpha}{2} C_\alpha \psi,$$

$$\delta \bar{\psi} = -i g \bar{\psi} \frac{\lambda^\alpha}{2} C_\alpha,$$

$$\delta C_\alpha = -\frac{1}{2} g f^{\alpha\beta\gamma} C^\beta C^\gamma,$$

也是 BRS 变换下不变的。引进相应的外源 U_μ^α、$\overline{K}$、K、V_α，构成新的作用量

$$S_e = \int d^4x \Big[U_\mu^\alpha (\partial^\mu \delta^{\alpha\beta} - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma) C_\gamma + i g \overline{K} \frac{\lambda^\alpha}{2} C_\alpha \psi$$

$$- i g \bar{\psi} \frac{\lambda^\alpha}{2} C^\alpha K - \frac{1}{2} g f^{\alpha\beta\gamma} V_\alpha C_\beta C_\gamma \Big],$$

加于以上诸作用量之上，就构成总的 BRS 变换下不变的有效作用量

$$S_0 = \int d^4x \Big[\bar{\psi} \Big(i \partial\!\!\!/ + g \frac{\lambda^\alpha}{2} A\!\!\!/^\alpha - m \Big) \psi$$

$$- \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2 - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2$$

$$+ C_\alpha^+ \partial^2 C_\alpha - g f^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu C_\alpha^+ A_\mu^\beta C_\gamma + U_\mu^\alpha (\partial^\mu \delta^{\alpha\beta} - g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma) C_\gamma$$

$$+ i g \overline{K} \frac{\lambda^\alpha}{2} C_\alpha \psi - i g \bar{\psi} \frac{\lambda^\alpha}{2} C_\alpha K - \frac{1}{2} g f^{\alpha\beta\gamma} V_\alpha C_\beta C_\gamma \Big]。$$

(6-50)

用它们建造的正规顶角生成泛函，在树图近似下，就等于它们自己，生成的正规顶角都是有限的。但是，在高一级近似下，生成的正规顶角就将有发散的。

附加作用量 为了生成在高阶近似下保持有限的正规顶角，就要把重整化方程(6-43)式、(6-44)式的解(6-45)式

$$\sum a_\tau G_\tau + \hat{S}_0 * F$$

加于 S_0，构成新的作用量。

根据上一节的论述，G_τ 应该是规范不变的。在现在的情况下，规范不变的只有 S_{int} 中的三项：

$$\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}A\!\!\!/^\alpha\right)\psi,\quad m\bar{\psi}\psi,\quad -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2。$$

因而，规范不变的附加项就是

$$\sum_\tau a_\tau G_\tau=\int d^4x\left[a_k\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}A\!\!\!/^\alpha\right)\psi-a_m m\bar{\psi}\psi\right.$$
$$\left.-a_g\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\right]。\quad (6\text{-}51)$$

根据(6-47)式，现在的

$$F=\int d^4x[b_A A_\mu^\alpha(U_\alpha^\mu+g\partial^\mu C_\alpha^+)+b_\psi\bar{K}\psi+b_{\bar{\psi}}\bar{\psi}K+b_V V_\alpha C_\alpha],$$

附加项就是 $\hat{S}_0*F$。根据(6-48)式、(6-49)式，它附加于 $S_0+\sum a_\tau G_\tau$ 的作用，就是用

$$A_\mu^{\alpha'}=Y_A A_\mu^\alpha,\quad U_\mu^{\alpha'}=Y_A^{-1}U_\mu^\alpha,\quad C_\alpha^{+\prime}=Y_A^{-1}C_\alpha,\quad Y_A=1+b_A;$$
$$\psi'=Y_\psi\psi,\quad \bar{K}'=Y_\psi^{-1}\bar{K},\quad Y_\psi=1+b_\psi;$$
$$\bar{\psi}'=Y_{\bar{\psi}}\bar{\psi},\quad K'=Y_{\bar{\psi}}^{-1}K,\quad Y_{\bar{\psi}}=1+b_{\bar{\psi}};$$
$$V'_\alpha=Y_V V_\alpha,\quad C'_\alpha=Y_V^{-1}C_\alpha,\quad Y_V=1+b_V \quad (6\text{-}52)$$

代替 $\hat{S}_0$ 中的 A_μ^α、U_μ^α、C_α^+、ψ、$\bar{K}$、$\bar{\psi}$、K、V_α、C_α。对于(6-51)式 G_τ 中的量，由于只要求 G_τ 是规范不变的，所以，一开始就可以写成用(6-52)式带撇的量的表示式。令

$$Y_k=1+a_k,\quad Y_m=1+a_m,\quad Y_g=1+a_g,$$

则(6-51)式应该写成

$$\sum_\tau a_\tau G_\tau=\int d^4x\left[(Y_k-1)Y_\psi Y_{\bar{\psi}}\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}A\!\!\!/^\alpha\right)\psi\right.$$
$$-(Y_m-1)Y_\psi Y_{\bar{\psi}}m\bar{\psi}\psi$$
$$\left.-\frac{1}{4}(Y_g-1)Y_A^2(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\right]。$$
$$(6\text{-}53)$$

重整化的作用量 按照上一节论述的理论，由(6-48)式、(6-49)式表示的作用量，建成的生成泛函，可以生成高一级近似为有限的正规顶角，所以我们把这样的作用量叫做重整化的作用量。在现在的情况下，它们的具体表示是

$$
\begin{aligned}
S=\int d^4x\Big[&Y_\psi Y_{\bar\psi}\bar\psi\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}Y_A A\!\!\!/^\alpha\Big)\psi-Y_\psi Y_{\bar\psi}m\bar\psi\psi\\
&-\frac{1}{4}Y_A^2(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\\
&+(Y_A Y_V)^{-1}(C_\alpha^+\partial^2 C_\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_\alpha^+ Y_A A_\mu^\beta C_\gamma\\
&+U_\mu^\alpha(\partial^\mu\delta^{\alpha\beta}-gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\gamma)C_\beta)\\
&+igY_V^{-1}\bar K\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha\psi-igY_V^{-1}\bar\psi\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha K\\
&-\frac{1}{2}gf^{\alpha\beta\gamma}Y_V^{-1}V_\alpha C_\beta C_\gamma-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2\\
&+(Y_k-1)Y_\psi Y_{\bar\psi}\bar\psi\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}Y_A A\!\!\!/^\alpha\Big)\psi\\
&-(Y_m-1)Y_\psi Y_{\bar\psi}m\bar\psi\psi\\
&-\frac{1}{4}(Y_g-1)Y_A^2(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\Big]。
\end{aligned}
$$

将第一、二行和第七、八、九行合并，得

$$
\begin{aligned}
S=\int d^4x\Big[&Y_2 Y_\psi Y_{\bar\psi}\bar\psi\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^\alpha}{2}Y_A A\!\!\!/^\alpha\Big)\psi-Y_m Y_\psi Y_{\bar\psi}m\bar\psi\psi\\
&-\frac{1}{4}Y_g Y_A^2(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\beta A_\nu^\gamma)^2\\
&+(Y_A Y_V)^{-1}(C_\alpha^+\partial^2 C_\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_\alpha^+ Y_A A_\mu^\beta C_\gamma\\
&+U_\mu^\alpha(\partial^\mu\delta^{\alpha\beta}-gf^{\alpha\beta\gamma}Y_A A_\mu^\gamma)C_\beta)+igY_V^{-1}\bar K\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha\psi\\
&-igY_V^{-1}\bar\psi\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha K-\frac{1}{2}gY_V^{-1}f^{\alpha\beta\gamma}V_\alpha C_\beta C_\gamma\\
&-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^\alpha)^2\Big]。
\end{aligned}
\tag{6-54}
$$

裸量和重整化常数　如果认为上式中的场量、质量、作用常数、规范参数都是重整化了的量，并且认为用裸量表示的作用量和(6-54)式有同样的形式且相等，即

$$S=\int d^4x\Big[\bar{\psi}_0\Big(i\partial\!\!\!/+g_0\frac{\lambda^a}{2}A\!\!\!/_0^a\Big)\psi_0-m_0\bar{\psi}_0\psi_0$$
$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{0\nu}^\alpha-\partial_\nu A_{0\mu}^\alpha+g_0f^{\alpha\beta\gamma}A_{0\mu}^\beta A_{0\nu}^\gamma)^2$$
$$+C_\alpha^{0+}\partial^2C_\alpha^0-g_0f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_\alpha^{0+}A_{0\mu}^\beta C_\gamma^0$$
$$+\bar{U}_{0\mu}^\alpha(\partial^\mu\delta^{\alpha\beta}-g_0f^{\alpha\beta\gamma}A_{0\mu}^\gamma)C_\beta^0$$
$$+ig_0\bar{K}_0\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha^0\psi_0-ig_0\bar{\psi}_0\frac{\lambda^\alpha}{2}C_\alpha^0K$$
$$-\frac{1}{2}g_0f^{\alpha\beta\gamma}V_\alpha^0C_\beta^0C_\gamma^0-\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu A_{0\mu}^\alpha)^2\Big]。\qquad(6\text{–}55)$$

按照第一节的论述，裸量和重整化的量之间由重整化常数联系，即

$$\psi_0=\sqrt{Z_2}\psi,\quad \bar{\psi}_0=\sqrt{Z_2}\bar{\psi},\quad A_{0\mu}^\alpha=\sqrt{Z_3}A_\mu^\alpha,$$
$$C_\alpha^0=\sqrt{\tilde{Z}_3}C_\alpha^0,\quad C_\alpha^{0+}=\sqrt{\tilde{Z}_3}C_\alpha^+,$$
$$U_{0\mu}^\alpha=\sqrt{Z_U}U_\mu^\alpha,\quad V_\alpha^0=\sqrt{Z_V}V_\alpha,$$
$$\bar{K}_0=\sqrt{Z_K}\bar{K},\quad K_0=\sqrt{Z_K}K,$$
$$g_0=Z_gg,\quad m_0=Z_mm,\quad \alpha_0=Z_\alpha\alpha_。\qquad(6\text{–}56)$$

比较(6-54)式、(6-55)式、(6-56)式，由第一、二行得到

$$Z_2=Y_KY_\psi Y_{\bar{\psi}},\quad Z_3=Y_gY_A^2,\quad Z_m=Y_mY_\psi Y_{\bar{\psi}}Z_2^{-1}=Y_mY_K^{-1},$$
$$,\ Z_1^\psi=Y_KY_\psi Y_{\bar{\psi}}Y_A,\quad Z_1=Y_gY_A^3。\qquad(6\text{–}57)$$

由第三、四行的比较，得

$$\tilde{Z}_3=(Y_AY_V)^{-1},\quad Z_U=\tilde{Z}_3,\quad \tilde{Z}_1=Y_V^{-1}。\qquad(6\text{–}58)$$

S、T 恒等式　裸常数 g_0 和重整化作用常数 g，在(6-54)式、(6-55)式中七次出现，它们决定着七种不同耦合的强度。它们在重整化以前是同一个裸作用常数 g_0，重整化以后是不是同一个作用常数 g 呢？换句话说，它们的重整化常数 Z_g 是不是相等呢？如果按出现在(6-54)式、(6-55)式中的先后次序，用 $Z_g^i(i=1,2,\cdots,7)$

表示七种可能的重整化常数，那末由比较(6-54)式、(6-55)式可知，它们满足七个方程：

$$Z_1^{\psi}=Z_2Z_3^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^1, \qquad Z_{\psi}=Z_3^{\frac{3}{2}}\cdot Z_0^2,$$

$$Z_1=Z_3Z_3^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^3, \qquad Z_1=Z_U^{\frac{1}{2}}\cdot Z_3^{\frac{1}{2}}Z_3^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^4,$$

$$Z_1=Z_K^{\frac{1}{2}}\cdot Z_3^{\frac{1}{2}}Z_2^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^5, \quad Z_1=Z_K^{\frac{1}{2}}Z_3^{\frac{1}{2}}Z_2^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^6,$$

$$Z_1=Z_3Z_V^{\frac{1}{2}}\cdot Z_0^7。 \tag{6-59}$$

由前四式推知：

$$Z_0^1=\frac{Z_1^{\psi}}{Z_2Z_3^{\frac{1}{2}}}, \quad Z_0^2=\frac{Z_1}{Z_3^{\frac{3}{2}}}, \quad Z_0^3=Z_0^4=\frac{Z_1}{Z_3Z_3^{\frac{1}{2}}}。 \tag{6-60}$$

而(6-57)式、(6-58)式表明：

$$\frac{Z_1^{\psi}}{Z_2}=Y_A, \quad \frac{Z_1}{Z_3}=Y_A, \quad \frac{Z_1}{Z_3}=Y_A,$$

即有 S(Slovnov)、T(Tayor)恒等式

$$\frac{Z_1^{\psi}}{Z_2}=\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{Z_1}{Z_3}。 \tag{6-61}$$

由(6-60)式、(6-61)式可知

$$Z_0^1=Z_0^2=Z_0^3=Z_0^4=Z_0,$$

这是S、T恒等式的结果，也是S、T恒等式重要意义的表现。正因为如此，规范理论的重整化才有可能。

(6-59)式后三式中的 Z_K、Z_V 是没有明确定义的。为了使理论协调一致，必需使 $Z_0^5=Z_0^6=Z_0^7=Z_0$，这就要求选择

$$Z_K=Z_3Z_3Z_2^{-1}, \quad Z_V=Z_3^{\frac{1}{2}}。$$

实际上，外源 U_{μ}^{α}、$\overline{K}$、K、V_{α} 是为了处理问题方便而引入的，在计算所得的结果中，终究要令其为零。因而，它们的重整化，是没有实际意义的。所以，对规范理论的重整化，具有重大作用的，是S、T恒等式(6-61)式。

第七章 QCD 和重整化群方程

基本粒子之间有电磁作用、弱作用和强作用。目前认为，描述这三种相互作用的理论，都是规范理论。GWS 弱电统一规范理论，很好地反映了弱电过程的规律，人们公认它是正确的理论。量子色动力学(QCD)，在解释强作用的硬过程方面，取得了很大的成功。但是，在阐述强作用的软过程方面，进展缓慢，在囚禁问题上，还缺少解决的办法。所以，人们认为：它是强作用理论的、最可能的候选者，但还不是一个很成功的理论。在本书中，我们只介绍 QCD 及其在硬过程方面的应用。重整化群、算符乘积展开和 A、P 方程是把 QCD 用于硬过程的有力工具，我们将着重论述。

§1. 颜色自由度

目前认为，基本粒子有三类：基本费米子，规范粒子和 Higgs 粒子。基本费米子也可以叫做实粒子，它们包括六种轻子 (e、ν_e、μ、ν_μ、τ、ν_τ) 和六种夸克 (u、d、s、c、b、t)。这六种夸克，我们常说成是一种夸克的六种不同味道，或嘈说它们是六种不同味道的夸克，用 $q_r(r=u、d、s、c、b、t)$ 表示。中微子只参与弱作用。轻子参与弱电作用，但不参与强作用。夸克却既参与弱电作用，也参与强作用。在研究强作用的过程中发现，夸克不仅有味道，也有颜色，有三种不同的颜色(R、G、B)。而且，决定着它们的弱电作用的是它们的味道，决定着它们的强作用的是它们的颜色。所以，人们常用 $q_r^\alpha(\alpha=\mathrm{R}、\mathrm{G}、\mathrm{B};\ r=u、d、s、c、b、t)$ 来表示既有味道又有颜色的夸克。

至今还没有直接看到过夸克，按照囚禁理论，单个夸克是永远看不到的。那么，怎么知道它有颜色，而且有三种颜色呢？

强子的统计性质 在强子的结构模型中，重子由三个夸克(qqq)组成，介子由两个正反夸克$(q\bar{q})$组成。$\left(\frac{3}{2}\right)^+$重子$SU_f(3)$十重态中的三个粒子$\Delta^{++}(uuu)$、$\Delta^-(ddd)$、$\Omega^-(sss)$的每一个，都是由三个味道相同的夸克组成的，因此，它们的波函数都是味道对称的波函数。它们的每一个，都是由自旋为$\frac{1}{2}$的三个夸克组成的，自旋为$\frac{3}{2}$的重子，显然其轨道角动量为零。所以，它们的波函数既是自旋对称的波函数，也是空间对称的(S波的)波函数。这样看来，它们的波函数，对于味道、自旋、空间是完全对称的。可是，它们的自旋都是半整数，都应该服从费米-狄拉克统计，它们的波函数应该是反对称的。

为了解决上述困难，人们提出了多种多样的解释。经过研究讨论，人们认为，最好的办法，还是给夸克增加一个自由度。这个自由度就叫做颜色。而且认为，一个夸克可以具有三种不同的颜色；重子是由三个颜色不同的夸克组成的，是无色的；介子是由颜色相反的夸克组成的，也是无色的。用群论的语言来说，夸克是$SU_c(3)$的3重态，三个夸克组成

$$3\times3\times3=1+8+8+10$$

的，一个单态，两个八重态，一个十重态。而我们看到的重子，都是其中的单态。它们的波函数可以写为

$$|\text{baryon}\rangle\sim\sum_{R,G,B}\varepsilon_{ijk}|q_iq_jq_k\rangle。$$

如Δ^{++}粒子的波函数为

$$\left|\Delta^{++},\ J_z=+\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{R,G,B}\varepsilon_{ijk}\left|u_i^{\uparrow}u_j^{\uparrow}u_k^{\uparrow}\right\rangle。$$

显然，这波函数，对于自旋、空间、味道都是对称的，对于颜色是反

对称的，因而是反对称的，服从费米-狄拉克统计。这就解决了上述困难。

夸克是 $SU_c(3)$ 三重态 3，反夸克是 $SU_c(3)$ 共轭三重态 3^*，一对正反夸克组成

$$3\times 3^* = 1+8$$

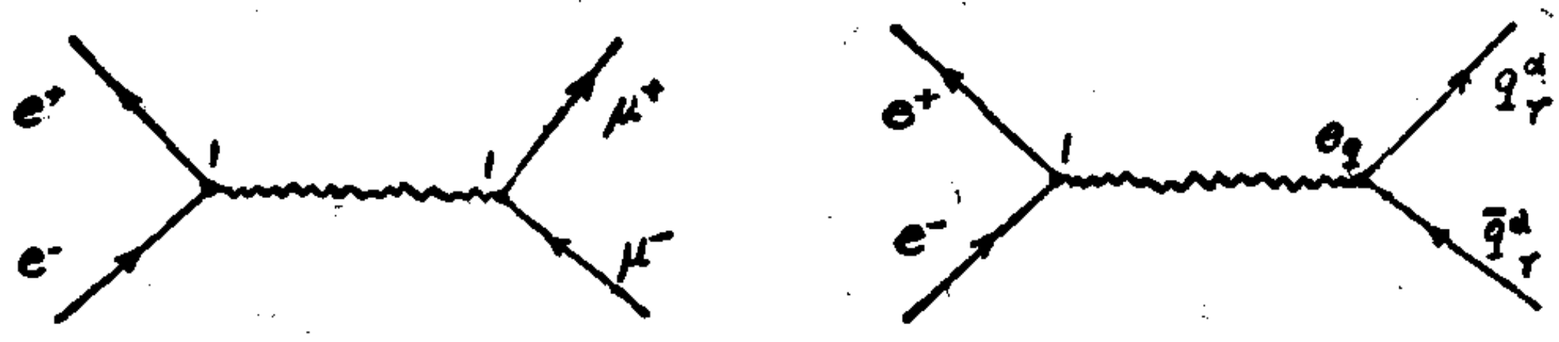
的，一个单态和一个八重态。我们看到的介子都是其中的单态，它们的波函数可以写为

$$\left|\text{meson}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{R,G,B}\left|q_i\bar{q}_i\right\rangle 。$$

反应截面比 R e^+e^- 对碰，由于电磁作用，它可以成为 $\mu^+\mu^-$；也可以成为夸克对 $q\bar{q}$，而 $q\bar{q}$ 由强作用形成强子。所以，在实验上就看到两类过程

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-,\quad e^+ + e^- \to \text{强子}。$$

与这两类过程相应的费曼图为



它们的差别只在第二个顶角上，μ 介子的电荷数为 1，夸克的电荷数为 e_q。因而，这两类过程的反应截面之比是

$$R_{e^+e^-} = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_q e_q^2 。 \tag{7-1}$$

在低能区，在不足以产生 c 夸克的情况下，只需要考虑三种味道的夸克 u、d、s，它们的电荷数分别是 $\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$。如果它们都只有一种颜色，那么(7-1)式的

$$\sum_q e_q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}。$$

如果它们有三种颜色，那么(7-1)式的

$$\sum_q e_q^2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 2。$$

实验表明，$R\sim 2-2.5$，支持有三种颜色的理论。

在高能区，在能够产生 c 夸克但还不能够产生 b、t 夸克的情况下，需要考虑四种夸克 u、d、s、c，它们的电荷数分别是 $\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$。如果它们都只有一种颜色，那么(7-1)式的

$$\sum_q e_q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}。$$

如果它们有三种颜色，那么(6-1)式的

$$\sum_q e_q^2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}。$$

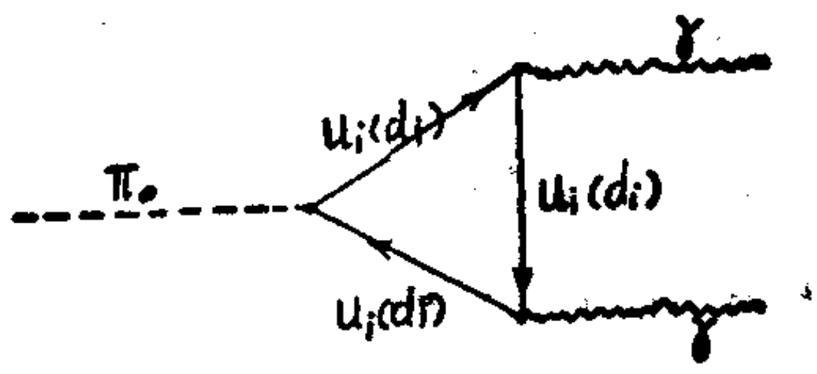
实验表明，$R\sim 5.5$，倾向有三种颜色的理论。

不管在高能区还是在低能区，理论和实验之间还存在较大的差别，人们认为这可能是由于重轻子或别的因素对 R 产生的影响。

$\pi^0\to 2\gamma$ 的衰变 从强子由夸克组成的结构模型来看，π^0 介子由 u、d 夸克对组成，它的波函数为

$$|\pi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_c}}\sum_i (u_i\bar{u}_i - d_i\bar{d}_i)。$$

N_c 是夸克颜色种类的数目，$\sum_i$ 表示对所有颜色取和。从这种观点看来，$\pi_0\to 2\gamma$ 过程的费曼图为



人们算出和此图相应的衰变几率为*

---

* Phys. Rep. V. 69, N. 8, (1981) p. 200.

$$\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}=\frac{m_\pi^3}{64\pi}\left(\frac{2\alpha}{\pi f_\pi}N_c s\right)^2。\tag{7-2}$$

α 是电磁作用精细结构常数，$f_\pi\simeq 93\,\mathrm{Mev}$ 是一个膺标耦合常数，m_π 是 π 介子质量，

$$s=(I_3)_u e_u^2+(I_3)_d e_d^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}。$$

如果采用实验数据 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}=(7.95\pm 0.55)\mathrm{eV}$，那么(7-2)式指出

$$N_c=3.06\pm 0.10。$$

这表明，夸克有三种颜色。

e^+e^- 反应截面比 R，$\pi_0\to 2\gamma$ 衰变几率 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}$，由实验结果推测，都表明夸克有三种颜色。所以，人们说这两种实验是看到夸克有三种颜色的实验。当然，这种看到，只是间接的。

阿德勒 (Alder) **反常**　在第五章中，表示推广的 PCAC 的 W、T 恒等式(5-27)式，在所讨论的问题中 $f^{\alpha\beta\gamma}=0$ 的情况下，成为

$$\partial^\mu\langle 0|T(\hat{A}_\mu^\alpha(x)\hat{V}_\nu^\beta(g)\hat{V}_\lambda^\gamma(z))|0\rangle$$
$$=2m\langle 0|T(\hat{P}^\alpha(x)\hat{V}_\nu^\beta(y)\hat{V}_\lambda^\gamma(z))|0\rangle,$$

$$A_\mu^\alpha(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),\ V_\mu^\alpha(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),$$
$$P^\alpha(x)=i\bar{\psi}(x)\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x)。$$

取它们的福里叶变换

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(k_1,\ k_2,\ k_3)$$
$$=-i\int d^4xd^4yd^4z\langle 0|T(\hat{A}_\mu^\alpha(x)\hat{V}_\nu^\beta(y)\hat{V}_\lambda^\gamma(z))|0\rangle$$
$$\cdot\exp[ik_1x+ik_2y+ik_3z],$$

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(k_1,\ k_2,\ k_3)$$
$$=-i\int d^4xd^4yd^4z\langle 0|T(\hat{P}^\alpha(x)\hat{V}_\nu^\beta(y)\hat{V}_\lambda^\gamma(z))|0\rangle$$
$$\cdot\exp[ik_1x+ik_2y+ik_3z],$$

就有

$$\partial k_1^\mu \Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3) = 2m\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)。 \qquad (7\text{-}3)$$

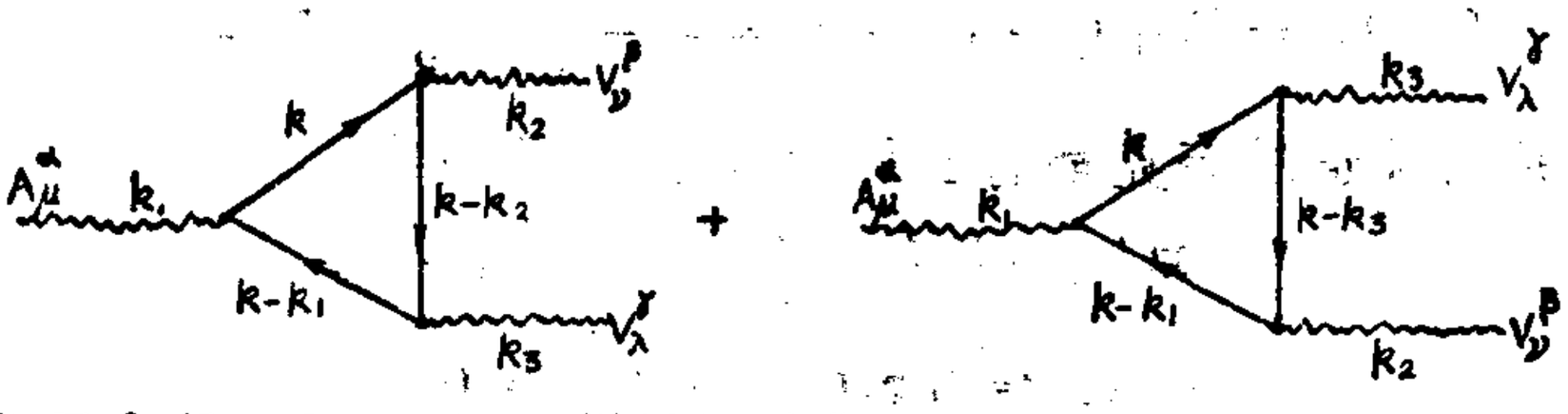
可是，如果用微扰理论来计算 $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)$、$\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)$，就会得到和(7-3)式不同的结果

$$\partial k_1^\mu \Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3) = 2m\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3) - \frac{1}{2\pi^2}\varepsilon_{\nu\lambda\sigma\rho}k_2^\sigma k_3^\rho D^{\alpha\beta\gamma},$$

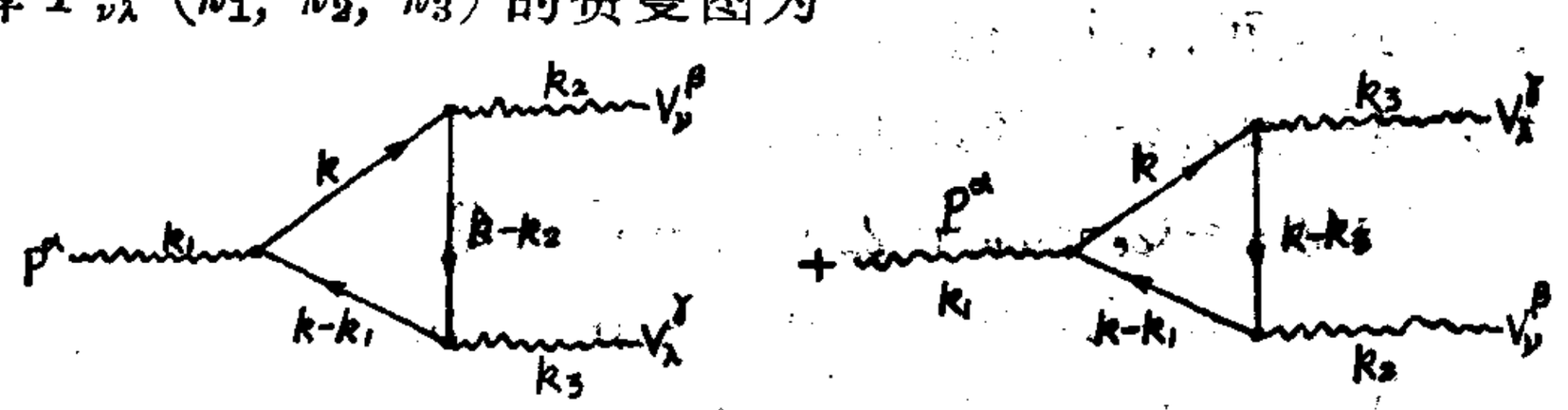
$$D^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha\{\lambda^\beta,\ \lambda^\gamma\})。 \qquad (7\text{-}4)$$

这叫做阿德勒反常。$\varepsilon_{\nu\lambda\sigma\rho}$ 是四维反对称张量，$\varepsilon_{0123}=1$。$D^{\alpha\beta\gamma}$ 是决定反常与否的因子。

在最低阶近似下，计算 $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)$ 的费曼图为



计算 $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{\nu\lambda}(k_1,\ k_2,\ k_3)$ 的费曼图为*



人们认为：W、T 恒等式(7-3)式是正确的。在一个正确的理论中，应该没有阿德勒反常，$D^{\alpha\beta\gamma}=0$。在 QED 和 QCD 中，没有轴矢流参与的过程，故不出现反常。在 GWS 弱电统一规范 $SU_L(2)\times U(1)$ 理论中，有手征性，既有矢量流也有轴矢量流，可能出现反常，必需消除，以保证理论可以重整化。$D^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha\{\lambda^\beta,\ \lambda^\gamma\})$ 中的 $\frac{\lambda^\alpha}{2}$ 是费米子的生成元的表示矩阵。在 $SU_L(2)\times U(1)$ 中，$\lambda^\alpha=\tau^\alpha$ 或 $Y=2Q-\tau_3$。当 λ^α，λ^β，$\lambda^\gamma=\tau^\alpha$，$\tau^\beta$，$\tau^\gamma$ 时，$\mathrm{Tr}(\tau^\alpha\{\tau^\beta,$

---

* Ling-Fong Li: "Introduction to gauge theories of electromagnetic and weak interactions", p. 147.

$\tau^\gamma\}) = \delta^{\beta\gamma}\mathrm{Tr}\tau^\alpha = 0$，不存在反常。当 λ^α，λ^β，$\lambda^\gamma = \tau^\alpha$，$Y$，$Y$ 时，$\mathrm{Tr}(\tau^\alpha\{Y, Y\}) \sim Q^2\mathrm{Tr}\tau^\alpha + \mathrm{Tr}Q\cdot\delta^{\alpha\beta} \sim \delta^{\alpha\beta}\mathrm{Tr}Q$。当 λ^α，λ^β，$\lambda^\gamma = Y$，Y，Y 时，$\mathrm{Tr}(Y\{Y, Y\}) \sim \mathrm{Tr}Q$。当 λ^α，λ^β，$\lambda^\gamma = \tau^\alpha$，$\tau^\beta$，$Y$ 时，$\mathrm{Tr}(Y\{\tau^\alpha, \tau^\beta\}) \sim \delta^{\alpha\beta}\mathrm{Tr}Q$。所以，GWS 弱电统一规范理论，是否出现阿德勒反常，是否可以重整化，其判据就是

$$\mathrm{Tr}Q = 0 \tag{7-5}$$

是否满足。

在四轻子和四夸克的 GWS 理论中，

$$\mathrm{Tr}Q_{轻子} = Q_e + Q_\mu + Q_{\nu_e} + Q_{\nu_\mu} = -1 - 1 + 0 + 0 = -2,$$

$$\mathrm{Tr}Q_{夸克} = Q_u + Q_d + Q_s + Q_c = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

只当每种味道的夸克都有三种颜色时，上式改成

$$\mathrm{Tr}Q_{夸克} = 3(Q_u + Q_d + Q_s + Q_c) = 2,$$

才使

$$\mathrm{Tr}Q = \mathrm{Tr}(Q_{轻子} + Q_{夸克}) = 0,$$

没有反常，理论可以重整化。

在六轻子和六夸克的理论中，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}Q_{轻子} &= Q_e + Q_{\nu_e} + Q_\mu + Q_{\nu_\mu} + Q_\tau + Q_{\nu_\tau} \\ &= -1 + 0 - 1 + 0 - 1 + 0 = -3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}Q_{夸克} &= 3(Q_u + Q_d + Q_c + Q_s + Q_b + Q_t) \\ &= 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 3,\end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}Q = \mathrm{Tr}(Q_{轻子} + Q_{夸克}) = 0,$$

没有反常，理论可以重整化。

由此可见，为了消除阿德勒反常，为了使 GWS 理论可以重整化，要求夸克必需有三种颜色。

§2. 量子色动力学

由上一节的论述可知，夸克有三种颜色，由夸克构成的强子是

没有颜色的。用群论的语言来讲，夸克是颜色 $SU_c(3)$ 群的 3 重态，重子是由三个夸克的 3 重态合成的颜色单态，介子是由一对夸克的 3 重态和 3^* 重态合成的颜色单态。换句话说，夸克及其组成的强子有 $SU_c(3)$ 的对称性。这个 $SU_c(3)$ 对称性和盖尔曼的幺正对称性，在数学上是等价的，都是 $SU(3)$ 群；在物理上却是严格不同的，$SU_c(3)$ 是颜色对称性，幺正对称是味道对称性。不仅如此，人们进一步推断，幺正对称仅仅是一种整体对称性，而 $SU_c(3)$ 却还是一种定域对称性。

有效作用量 按照第一章的论述，由整体对称扩展到定域对称，就意味着存在规范场。夸克具有 $SU_c(3)$ 的定域对称性，就意味着 $SU_c(3)$ 是一个定域规范群。它的群元素是

$$u(\theta)=\exp\left[-i\theta^\alpha\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。$$

$\theta^\alpha(x)$ 是与时空坐标有关的群参数，$\frac{\lambda^\alpha}{2}$ $(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 是 3 维表示的生成元，λ^α 是盖尔曼矩阵，满足对易关系

$$\left[\frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^\beta}{2}\right]=if^{\alpha\beta\gamma}\frac{\lambda^\gamma}{2}, \quad \left\{\frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^\beta}{2}\right\}=d^{\alpha\beta\gamma}\frac{\lambda^\gamma}{2}。 \tag{7-6}$$

λ^α 的具体形式常常写成

$$\lambda_1=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \lambda_2=\begin{vmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \quad \lambda_4=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{vmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{vmatrix}, \quad \lambda_6=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{vmatrix},\quad \lambda_8=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}。\tag{7-7}$$

把这具体表示代入对易关系(7-6)式，就可以得到结构常数 $f^{\alpha\beta\gamma}$、$d^{\alpha\beta\gamma}$ 的具体数值。

和八个生成元 $\frac{\lambda^\alpha}{2}(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 相应，有八个规范场 $A^\alpha_\mu(x)$ 和

$$F^\alpha_{\mu\nu}=\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu+gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu。\tag{7-8}$$

$A^\alpha_\mu(x)$ 叫做规范势，$F^\alpha_{\mu\nu}(x)$ 叫做规范场强。我们把这八个规范场叫做胶子场，它们的量子叫做胶子。

按照前几章的论述，描写夸克和胶子及其相互作用的作用量是

$$S=\int d^4x\left[\bar{q}^i_r\left(i\not{\partial}\delta_{ij}+g\frac{\lambda^\alpha_{ij}}{2}\not{A}^\alpha-m^r_i\delta^{rs}_{ij}\right)q^j_s\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}F^\alpha_{\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^\alpha_\mu)^2+C^+_\alpha\partial^2C_\alpha-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C^+_\alpha A^\beta_\mu C_\gamma\right]。\tag{7-9}$$

q^i_r 是夸克场，$i,\ j=1,\ 2,\ 3$ 是颜色指标，$r,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ N_f$ 是味指标，$m^r_i\delta^{rs}_{ij}$ 是夸克的质量矩阵，C_α、C^+_α 是鬼场，α 是规范参数。(7-9)式表示的作用量，就是量子色动力学的理论基础。目前的研究表明，在描述强作用的硬过程方面，它是一个较好的理论。

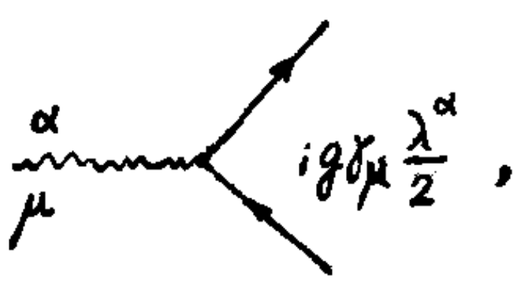
费曼规则 (7-9)式中除去规范固定项和鬼粒子项，就成为经典色动力学的作用量。规范固定项和鬼粒子项，是用路径积分量子化方法引进的，体现了量子效应。包括规范固定项和鬼粒子项的(7-9)式，就是量子色动力学的作用量。在树图近似下，它就是

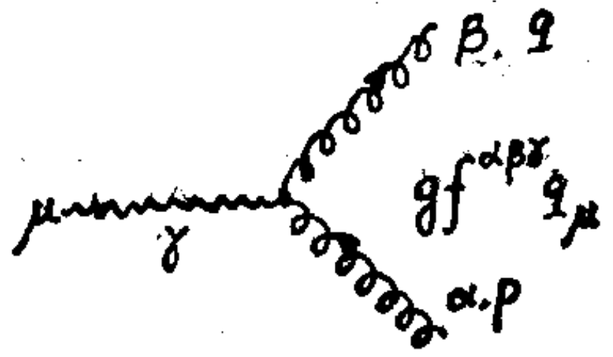
正规顶角的生成泛函，由它按照第四章论述的方法，就可以导出量子色动力学的费曼规则。其中，传播子是

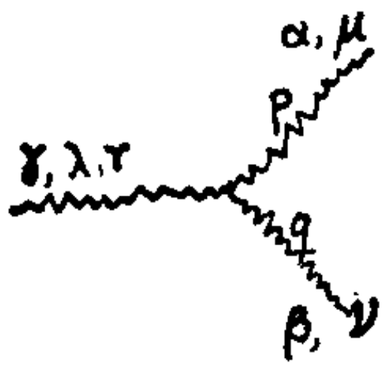
$$q_r^i:\ iS_f(p)=\frac{i}{\not p-m_r^i}=\xrightarrow{\ p\ },\quad C_a:\ iG^{ab}(k)=\frac{-i\delta^{ab}}{k^2}=\ a\ \overset{k}{\sim\sim\sim}\ b\ ,$$

$$A_\mu^a:\ iD_{\mu\nu}^{ab}(k)=\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2}=\ \mu,a\ \overset{k}{\sim\sim\sim}\ \nu,b\ .$$

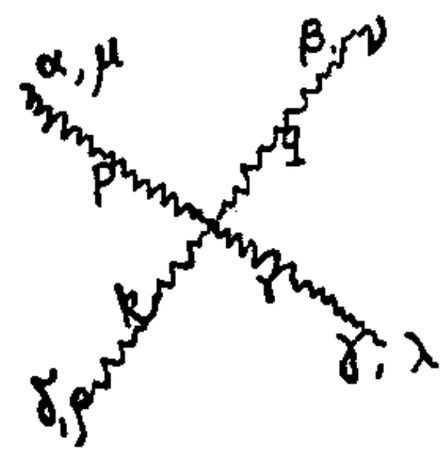
相互作用顶角是







$$-gf^{abc}[g_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+g_{\nu\lambda}(q-\gamma)_\mu+g_{\lambda\mu}(r-p)_\nu],$$



$$-ig^2[f^{ab\sigma}f^{\gamma\delta\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})+f^{a\gamma\sigma}f^{b\delta\sigma}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})+f^{ab\sigma}f^{\beta\gamma\sigma}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})]。$$

(7-10)

胶子场的三点顶角和四点顶角表明，胶子和光子不同，胶子带色荷有自相互作用，而光子不带电荷无自相互作用。胶子和夸克的相互作用顶角中的 λ^α 是 $SU_c(3)$ 的生成元，只和夸克的颜色波函数发生作用，而和夸克的味道无关。所以，这种相互作用，只可能改变夸克的颜色，不可能改变夸克的味道。如(7-7)式所示，$\lambda^\alpha(\alpha=1, 2, 4, 5, 6, 7)$是非对角的，相应顶角的作用，会改变夸克的颜色；$\lambda^\alpha(\alpha=3, 8)$是对角矩阵，相应顶角的作用，仍然保持夸克的颜色

不变。用作用流的语言来说，和胶子 $A_\mu^\alpha(\alpha=1, 2, 4, 5, 6, 7)$ 耦合的夸克流 $\bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} q(\alpha=1, 2, 4, 5, 6, 7)$是荷色流；和胶子 A_μ^α $(\alpha=3, 8)$ 耦合的夸克流 $\bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} q(\alpha=3, 8)$是颜色中性流。

重整化 利用(7-10)式表示的费曼规则，可以计算硬的 QCD 过程。在树图近似下，可以得到有限的结果。然而，在有圈图的情况下，所得结果就将是发散的。所以，必需进行重整化。按照第六章的论述，作为规范理论的 QCD，可以采用相乘重整化方法，用抵消项消除发散。

首先，认为(7-9)式对于裸量总是成立的，即有

$$S=\int d^4x \left[\bar{q}_0\left(i\partial\!\!\!/+g_0\frac{\lambda^\alpha}{2}A_0^\alpha-m_0\right)q_0\right.$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{0\nu}^\alpha-\partial_\nu A_{0\mu}^\alpha+g_0 f^{\alpha\beta\gamma}A_{0\mu}^\beta A\chi_{0\nu})^2$$

$$\left.-\frac{1}{2\alpha_0}(\partial^\mu A_{0\mu}^\alpha)^2+C_{0\alpha}^+\partial^2 C_{0\alpha}-g_0 f^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C_{0\alpha}^+ A_{0\mu}^\beta C_{0\gamma}\right]。 \tag{7-11}$$

再用相乘(质量是相加)重整化方法，定义重整化的量为

$$q_0=\sqrt{Z_2}\,q,\quad A_{0\mu}^\alpha=\sqrt{\tilde{Z}_3}\,A_\mu^\alpha,\quad C_{0\alpha}=\sqrt{\tilde{Z}_3}C_\alpha,\quad C_{0\alpha}^+=\sqrt{\tilde{Z}_3}C_\alpha^+,$$

$$m=m_0+\delta m,\quad g_0=Z_1 Z_3^{-\frac{3}{2}}g=Z_1^* Z_2^{-1}Z_3^{-\frac{1}{2}}g=\tilde{Z}_1\tilde{Z}_3^{-1}Z_3^{-\frac{1}{2}}g,$$

$$\alpha_0=Z_3\alpha。 \tag{7-12}$$

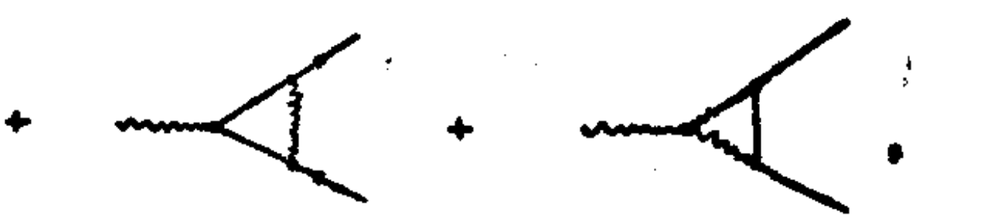
g_0和 g 有三个等式相联系，是由于存在 W、T 恒等式 (6-61) 式的缘故。规范参数 α 的重整化常数是 Z_3，是由于规范固定项不需重整的要求。

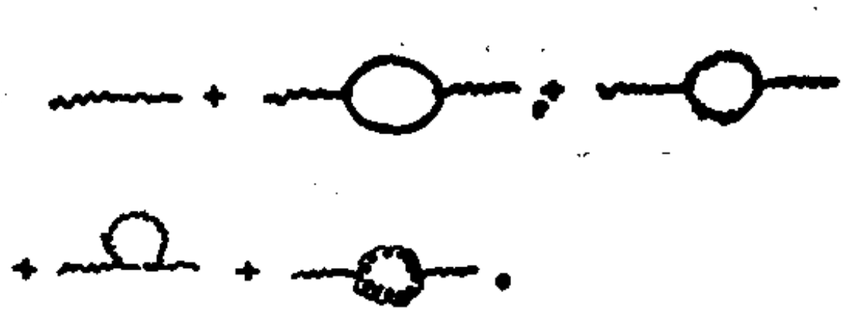
把用裸量表示的重整化量(7-12)式代入(7-11)式，并把所得结果分成基本项和抵消项。而且基本项和裸量表示的 S 有同样的形式，只是以重整化量代换裸量而已。于是，我们就得到重整化的作用量

$$
\begin{aligned}
S=\int d^4x\Big[&\bar{q}\Big(i\partial\!\!\!/+g\frac{\lambda^a}{2}A\!\!\!/^a-m\Big)q-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\\
&-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2+C^+_a\partial^2C_a-gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C^+_\alpha A^\beta_\mu C_\gamma\\
&+(Z_2-1)\bar{q}(i\partial\!\!\!/-m)q+Z_2\delta m\bar{q}q+(Z_1^\psi-1)g\bar{q}\frac{\lambda^a}{2}A\!\!\!/^a q\\
&-\frac{1}{4}(Z_3-1)(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2-\frac{1}{2}(Z_1-1)gf^{\alpha\beta\gamma}(\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu)\\
&\times A^\beta_\mu A^\gamma_\nu-\frac{1}{4}(Z_1^2Z_3^{-1}-1)g^2f^{\alpha\beta\gamma}f^{\alpha\sigma\rho}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu A^\mu_\sigma A^\nu_\rho\\
&+(Z_3-1)C^+_\alpha\partial^2C_\alpha-(Z_1-1)gf^{\alpha\beta\gamma}\partial^\mu C^+_\alpha A^\beta_\mu C_\gamma\Big]. \qquad (7\text{-}13)
\end{aligned}
$$

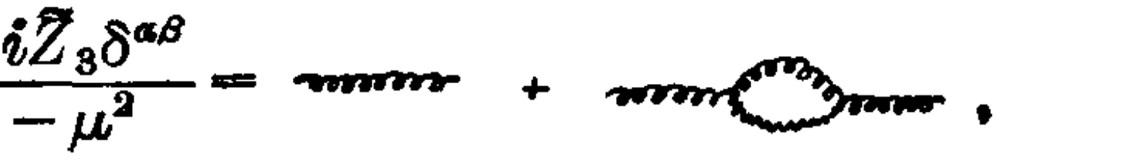
重整化常数Z和δm，在单圈或链近似下，可以按如下图形计算：

$\frac{Z_2 i}{p\!\!\!/-m}=$  ,

$\frac{ig\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}}{Z_1^\psi}=$  .

$\frac{-iZ_3(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{-\mu^2})}{-\mu^2}$ 

$\frac{-gf^{\alpha\beta\gamma}[\delta_{\mu\nu}(p-q)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu+\delta_{\lambda\mu}(r-p)_\nu]}{Z_1}$



$\frac{-iZ_3\delta^{\alpha\beta}}{-\mu^2}=$,

$\frac{gf^{\alpha\beta\gamma}q_\rho}{Z_1}=$  . (7–14)

计算结果是*

$$Z_2=1-\frac{g_0^2}{16\pi^2}\alpha_0 C_2(R)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\delta m=\frac{g_0^2 m_0}{16\pi^2}3C_2(R)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$Z_1^{\psi}=1-\frac{g_0^2}{16\pi^2}\left[\alpha_0 C_2(R)+\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha_0}{4}\right)C_2(G)\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$Z_3=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha_0\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$Z_1=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{17}{6}-\frac{3\alpha_0}{2}\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\tilde{Z}_3=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha_0}{2}\right)C_2(G)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\tilde{Z}_1=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}(-\alpha_0)C_2(G)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)。\qquad(7\text{–}15)$$

式中，N_f是夸克味道的数目，g_0、m_0、α_0是裸的耦合常数、质量、规范参数，Λ^2是动量切割，$-\mu^2$是重整化点，$C_2(G)$、$T(R)$、$C_2(R)$是由下式确定的量

$$\sum_{\alpha,\beta}f^{\alpha\beta\gamma}f^{\alpha\beta\delta}=C_2(G)\delta_{\gamma\delta},$$

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda^\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda^\beta}{2}\right)=T(R)\delta_{\alpha\beta},$$

$$C_2(R)=\frac{rT(R)}{d(R)}。\qquad(7\text{–}16)$$

r是群的维数，等于生成元的个数。$d(R)$是表示的维数。在SU(N)群的N维表示中，

$$C_2(G)=N,\quad C_2(N)=\frac{N^2-1}{2N},\quad T(N)=\frac{1}{2}。\qquad(7\text{–}17)$$

---

* W.Marciomo d H. pagels: Quantum Chromodynamics, phys. Report. V. 36c, N. 3. (1978), p. 183.

§3. 重整化群方程

由(7-15)式可知，重整化常数Z是裸参数(g_0、m_0、α_0)、截割(Λ)和重整化点($p^2=-\mu^2$)的函数$Z(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, \mu)$。当我们用微扰方法以裸参数来计算某一物理量$F$时，所得结果，应该和裸量有关，和截割有关，和参与过程的粒子动量有关。换句话说，求重整化的物理量F_u，应该是g_0、m_0、α_0、Λ(或ε)、p的函数$F_u(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, p)$。按照定义，求重整化的量，除以相应的重整化常数，并取极限$\Lambda\to\infty$(或$\varepsilon\to 0$)，就得到重整化的量，即

$$F_r=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{F_u(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, p)}{Z(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, \mu)}。\qquad (7\text{-}18)$$

重整化的量F_r，应该是重整化参数(g、m、α)的函数。从(7-18)式看来，它也应该是重整化点μ和物理动量p的函数。按照Hepp定理*，(7-18)式的极限存在，F_r与截割无关。即$F_r=F_r(g, m, \alpha, \mu, p)$。由此可知，不管是重整化的物理量$F_r$，还是重整化常数，都是重整化点$\mu$的函数。重整化参数($g$、$m$、$\alpha$)，也是重整化的物理量，也是重整化点$\mu$的函数。重整化点$\mu$是任意选取的，是可以变化的。重整化点的变换构成群，叫做重整化群。重整化物理量随重整化点变化的方程，叫做重整化群方程。

正规顶角的重整化 在粒子物理的重整化理论中，需要处理的物理量，都可以归结为正规顶角。我们考虑和n_f条费米子外线，n_b条玻色子外线相连的一般的正规顶角Γ^n($n=n_f+n_b$)。用裸量以微扰方法进行计算时，得到的未重整化正规顶角Γ_u^n，应该是裸量(g_0、m_0、α_0)、截割(Λ)和相连外动量$p(p_1, p_2, \cdots, p_n)$的函数$\Gamma_u^n(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, p)$。

由第三章的论述可知，n点正规顶角Γ^n，是截去了n条外腿

---

* K. Hepp, Acta. phys. Austrica, 17(1963)85.

(传播子)的 n 点格林函数。传播子是两点格林函数，是两个场量的真空期待值。n 点格林函数是 n 个场量乘积的真空期待值。场量的重整化为 $\phi_0 = Z^{\frac{1}{2}}\phi_r$，传播子的重整化为 $G_u^2 = ZG_r^2$，n 点格林函数的重整化为 $G_u^n = Z^{\frac{n}{2}}G_r^n$。所以，重整化的正规顶角 Γ_r^n 和未重整化的正规顶角 Γ_u^n 之间，应该存在关系

$$\Gamma_u^n(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, p) = Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n(g, m, \alpha, \mu, p)。$$

(7-19)

$n = n_f + n_b$，Z_2 是费米场的重整化常数，Z_3 是玻色场的重整化常数。

正规顶角的量纲 正规顶角的生成泛函，在树图近似下，等于作用量。所以，它的量纲，和作用量的一样，等于零。按定义

$$\Gamma[\phi] = \sum \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\phi_{i_1}(x_1) \cdot \phi_{i_2}(x_2)\cdots\phi_{i_n}(x_n)。$$

而费米场的量纲为 $\frac{3}{2}$，玻色场的量纲为 1。由此可知，$\Gamma^n(x)$ 的量纲是

$$d_n(x) = -\frac{3}{2}n_f - n_b + 4n。$$

动量表象中的正规顶角 $\Gamma^n(p)$ 和坐标表象中的正规顶角之间，有福里叶变换关系

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\cdots+p_n)\Gamma^n(p_1 p_2\cdots p_n) = \int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n \Gamma^n(x_1 x_2\cdots x_n)\exp[i\tilde{p}_i x_i]。$$

所以，$\Gamma^n(p)$ 的量纲是

$$d_n(p) = 4 + d_n(x) - 4n = 4 - \frac{3}{2}n_f - n_b。$$

重整化常数 Z 是没有量纲的量。因而，不管是 $\Gamma_u^{n_f+n_b}(g_0, m_0, \alpha_0, \Lambda, p)$ 还是 $\Gamma_r^{n_f+n_b}(g, m, \alpha, \mu, p)$，其量纲都是 $4-\frac{3}{2}n_f-n_b$。

重整化点变换群 设想重整化点的变换为

$$\mu \to \bar{\mu} = \mu e^{t}, \tag{7-20}$$

t 是由 $-\infty \to \infty$ 的实数。e^{t} 是群元素，e^{-t} 是逆元素，e^{0} 是单位元素，$e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2}$ 仍是群元素，$e^{t_1}(e^{t_2} \cdot e^{t_3}) = (e^{t_1}e^{t_2})e^{t_3}$。显然，由(7-20)式定义的变换构成群，我们称之为重整化点变换群。

重整化点变换群方程 (7-19)式左边的 Γ_r^n 是与重整化点 μ 无关的量，等式右边的 $Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n$ 也应该是与重整化点 μ 无关的。换句话说，虽然 Z_2、Z_3、Γ_r^n 分别都是重整化点 μ 的函数，但是它们的乘积 $Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n$ 却是与 μ 无关的，在重整化点变换群(7-20)式的变换下是不变的。描述这种不变性的方程，叫做重整化点变换群方程。

其代数方程为

$$\begin{aligned} & Z_2(\bar{\mu})^{-\frac{n_f}{2}} Z_3(\bar{\mu})^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n(\bar{g}, \bar{m}, \bar{\alpha}, \bar{\mu}, p) \\ &= Z_2(\mu)^{-\frac{n_f}{2}} Z_3(\mu)^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n(g, m, \alpha, \mu, p)。 \end{aligned} \tag{7-21}$$

将(7-19)式取对 μ 的导数并乘以 μ，得

$$\begin{aligned} & -\frac{n_f}{2} Z_2^{-\frac{n_f}{2}-1} \mu \frac{\partial Z_2}{\partial \mu} Z_3^{-\frac{n_b}{2}} \Gamma_r^n - \frac{n_b}{2} Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z^{-\frac{n_b}{2}-1} \mu \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} \Gamma_r^n \\ & + Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}} \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r^n = 0。 \end{aligned}$$

注意，重整化常数 Z 只是 μ 的显函数，而不是 μ 的隐函数，$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial u}$。但是，由于 g、m、α 都是 μ 的函数，所以 Γ_r^n 既是 μ 的显函数，又是 μ 的隐函数，而且

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r^n(g, m, \alpha, \mu, p) \\ &= \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \\ & \cdot \Gamma_r^n(g, m, \alpha, \mu, p) \end{aligned}$$

代入上式并消去 $Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}}$ 因子，就得到

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g}+\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{n_f}{2}\mu\frac{\partial\ln Z_2}{\partial\mu}-\frac{n_b}{2}\mu\frac{\partial\ln Z_3}{\partial\mu}\right)\Gamma_r^n=0。\qquad(7\text{-}22)$$

这就是重整化点变换群的微分方程。

把 μ 固定，按照(7-20)式，$\bar{\mu}$ 是 t 的函数 $\bar{\mu}(t)$，因而 $\bar{g}$、$\bar{m}$、$\bar{\alpha}$、$Z(\bar{\mu})$ 也都是 t 的函数 $g(t)$、$m(t)$、$\alpha(t)$、$Z(t)$。而且 Γ_r^n 既是 t 的显函数，又是 t 的隐函数 $\Gamma_r^n(g(t)、m(t)、\alpha(t), t, p)$。(7-21)式可以写成

$$Z_2(t)^{-\frac{n_f}{2}} Z_3(t)^{-\frac{n_b}{2}}\Gamma_r^n(g(t)、m(t)、\alpha(t), t, p)$$

$$=Z_2^{-\frac{n_f}{2}} Z_3^{-\frac{n_b}{2}}\Gamma_r^n(g, m, \alpha, \mu, p)。$$

Z_2、Z_3、g、m、α 表示 $t=0$ 时的固定的 μ 的函数。将上式对 t 求导，右边与 t 无关而为零，左边为

$$\left(-\frac{n_f}{2}Z_2(t)^{-\frac{n_f}{2}-1}\frac{\partial Z_2(t)}{\partial t}Z_3(t)^{-\frac{n_b}{2}}-\frac{n_b}{2}Z_2(t)^{-\frac{n_f}{2}}Z_3^{-\frac{n_b}{2}-1}\frac{\partial Z_3(t)}{\partial t}\right)$$

$$\cdot\Gamma_r^n+Z_2^{-\frac{n_f}{2}}Z_3^{-\frac{n_b}{2}}\frac{d}{dt}\Gamma_r^n=0,$$

$$\frac{d}{dt}\Gamma_r^n-\left(\frac{n_f}{2}\frac{\partial\ln Z_2}{\partial t}+\frac{n_b}{2}\frac{\partial\ln Z_3}{\partial t}\right)\Gamma_r^n=0。$$

令

$$\gamma_\psi(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln Z_2(t)}{\partial t},\quad \gamma_A(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln Z_3(t)}{\partial t},\qquad(7\text{-}23)$$

则上式写成

$$\frac{d\Gamma_r^n}{dt}=(n_f\gamma_\psi(t)+n_b\gamma_A(t))\Gamma_r^n。\qquad(7\text{-}24)$$

这就是重整化点变换群的参数微分方程。

将(7-24)式对 t 积分，由 $t=0$ 积到 $t=t$，得

$$\Gamma_r^n(g(t),\ m(t),\ \alpha(t),\ \mu e^t,\ p)$$

$$=\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)\exp\left[\int_0^t(n_f\gamma_\psi(t)+n_b\gamma_A(t))dt\right]。$$

(7-25)

这就是方程(7-24)式的解。

量纲标度变换群 我们把所有有质量量纲[m]的量，都作同样的标度变换

$$[m]\to[m']=[m]e^{t'},\qquad (7\text{-}26)'$$

$-\infty\leqslant t'\leqslant\infty$。显然，这样的变换也构成群，我们称之为量纲标度变换群。在这变换下，没有量纲的量如 g、α 是不变的；有质量量纲的量如 m、μ、p，都作同样的变换

$$m\to m'=me^{t'},\ \mu\to\mu'=\mu e^{t'},\ p\to p'=pe^{t'}。$$

$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)$ 作为函数，在变数作如上变换下，作变换

$$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)\to\Gamma_r^n(g,\ me^{t'},\ \alpha,\ \mu e^{t'},\ pe^{t'})。$$

另一方面，由于它的量纲是 $4-\frac{3}{2}n_f-n_b$，在(7-26)′式的变换下，作变换

$$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)\to\exp\left[\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)t'\right]\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)。$$

显然，二者应该相等，即

$$\Gamma_r^n(g,\ me^{t'},\ \alpha,\ \mu e^{t'},\ pe^{t'})$$

$$=\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ p)\exp\left[\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)t'\right],$$

$$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ pe^{t'})$$

$$=\Gamma_r^n(g,\ me^{-t'},\ \alpha,\ \mu e^{-t'},\ p)\exp\left[\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)t'\right]。$$

(7-26)

这是量纲标度变换群的结果。把 (7-25) 式代入 (7-26) 式，得

$$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ pe^{t'})$$

$$=\Gamma_r^n(g(t),\ m(t)e^{-t'},\ \alpha(t),\ \mu e^{t-t'},\ p)\exp\left[\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)t'\right.$$

$$\left.-\int_0^t(n_f\gamma_\psi(t)+n_b\gamma_A(t))dt\right]。$$

令 $t'=t$，上式成为

$$\Gamma_r^n(g,\ m,\ \alpha,\ \mu,\ pe^t)$$

$$=\Gamma_r^n(g(t),\ m(t)e^{-t},\ \alpha(t),\ \mu,\ p)\exp\left[\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)t\right.$$

$$\left.-\int_0^t(n_f\gamma_\psi(t)+n_b\gamma_A(t))dt\right]。\qquad(7\text{–}27)$$

这就是一般文献所说的，重整化群方程的解。这解的引人之处在于：t 是标志动量变化的参量，(2–27)式把动量为 p 时的物理量 $\Gamma_r^n(p)$、g、m、α 和动量为 pe^t 时的物理量 $\Gamma_r^n(pe^t)$、$g(t)$、$m(t)$、$\alpha(t)$联系起来，揭示了物理量随动量变化的情况。

$\left(4-\frac{3}{2}n_f-n_b\right)$是 Γ^n 的量纲。由(2–27)式看来，$\gamma_\psi(t)$、$\gamma_A(t)$和它处于同样的地位，所以人们称之为反常量纲。人们还把

$$\beta(g(t))\equiv\frac{\partial g(t)}{\partial t}\qquad(7\text{–}28)$$

叫做 β 参数，用它描述 $g(t)$ 随 t 变化的规律。

§4. 随动量变化的参数

起初，我们从重整化的论述中知道，重整化了的参数 g、m、α 是重整化点 μ 的函数。经过上一节的讨论，得到重整化群方程的解(7–27)式。从中看到，g、m、α 实质上是动量 pe^t 的函数 $g(t)$、$m(t)$、$\alpha(t)$。由(7–23)式、(7–28)式定义的反常量纲 γ 和 β 参数，都是 g 的函数，因而也随着动量 pe^t 而变化，也是动量的函数

$\gamma(g(t))$、$\beta(g(t))$。我们要进一步论述它们随动量变化的情况。

由于 $\bar{\mu}=\mu e^t$，对于 $\bar{\mu}$ 的任意函数 $F(\bar{\mu})$，有

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}F=\mu\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\mu}}F=\bar{\mu}\frac{\partial F}{\partial\bar{\mu}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F=\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\bar{\mu}}F=\bar{\mu}\frac{\partial F}{\partial\mu},$$

$$\mu\frac{\partial F}{\partial\mu}=\frac{\partial F}{\partial t}。\tag{7-29}$$

这公式在以下的计算中，常常要用到。

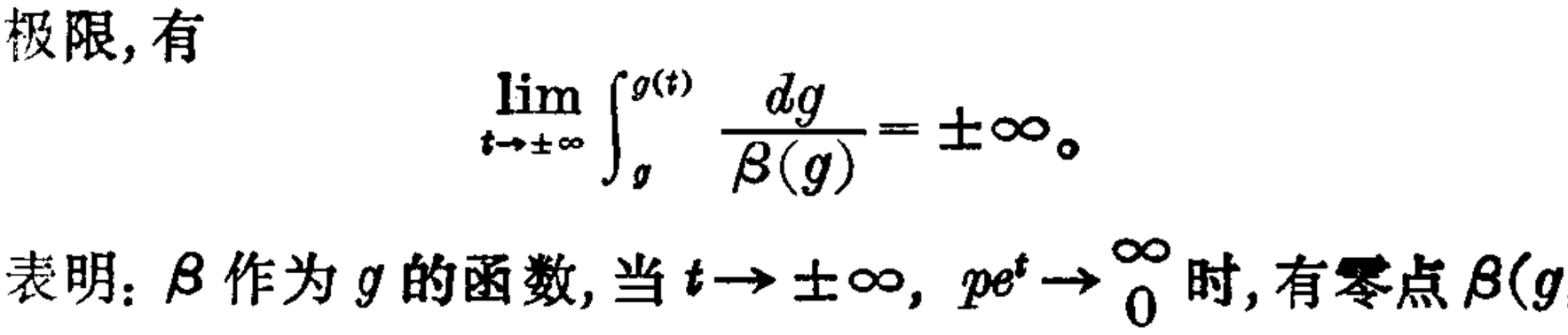
β 参数　我们先讨论由 (7-28) 式定义的 β 参数。显然 $\beta>0$ 时，有效耦合常数 $g(t)$ 随着动量的增大而增大；$\beta<0$ 时，有效耦合常数 $g(t)$ 随着动量的增大而减小。将 (7-28) 式对 t 积分，由 $t=0$ 积到 $t=t$，得

$$t=\int_g^{g(t)}\frac{dg}{\beta(g)}。$$

取极限，有

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_g^{g(t)}\frac{dg}{\beta(g)}=\pm\infty。$$

这表明：β 作为 g 的函数，当 $t\to\pm\infty$，$pe^t\to\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}$ 时，有零点 $\beta(g_\pm)=0$，$g_\pm=g(\pm\infty)$。由于 $t\to\infty$ 意味着动量 $\to\infty$，故 g_+ 叫做紫外固定点；$t\to-\infty$ 意味着动量 $\to0$，故 g_- 叫做红外固定点。这些固定点 $g_\pm$ 可能在 g 的原点，即 $g_\pm=0$；也可能不在原点，即 $g_\pm\neq0$。用图形表示如下：



曲线上的箭头表示动量增长的方向。(a)图是红外固定点在原点，表示动量趋于零时，相互作用常数 g 趋于零，即理论是红外自由

的，QED 就是这种情况。(*b*) 图是紫外固定点在原点，表示动量趋于∞时，相互作用常数 g 趋于零，即理论是渐近自由的，QCD 就是这种情况。(*c*) 图是紫外固定点在 $g_+\neq 0$ 处；(*d*) 图是红外固定点在 $g_-\neq 0$ 处，这样的理论叫做固定点理论，也有人做过研究。

有效耦合常数 随动量变化的耦合常数 $g(t)$ 也叫做有效耦合常数。现在，我们在单圈近似下，利用(7-12)式、(7-15)式和(7-29)式，来进行计算。由(7-29)式和(7-12)式，有

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\mu\frac{\partial g}{\partial \mu}=2\frac{\partial g}{\partial \ln\mu^2}=2g_0\frac{\partial Z_g^{-1}}{\partial \ln\mu^2}$$

$$=-\frac{2g_0}{Z_g^2}\frac{\partial Z_g}{\partial \ln\mu^2}=-2g\frac{\partial \ln(Z_1Z_3^{-\frac{3}{2}})}{\partial \ln\mu^2}。\qquad (7\text{-}30)$$

由(7-15)式，有

$$Z_1Z_3^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left\{\left[\left(\frac{17}{6}-\frac{3\alpha_0}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{13}{3}-\alpha_0\right)\right]C_2(G)\right.$$

$$\left.-\frac{8}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right)T(R)N_f\right\}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)$$

$$=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[-\frac{22}{6}C_2(G)+\frac{4}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\ln(Z_1Z_3^{-\frac{3}{2}})=\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[-\frac{11}{3}C_2(G)+\frac{4}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\frac{\partial\ln(Z_1Z_3^{-\frac{3}{2}})}{\partial\ln\mu^2}=\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]。$$

把它代入(7-30)式，得*

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]。$$

将上式积分，　$t:0\to t$，　$g:g\to g(t)$，得

$$\frac{1}{g^2(t)}-\frac{1}{g^2}=\frac{t}{24\pi^2}[11C_2(G)-4T(R)N_f],$$

---

* 这里作了代换 $g_0\to g(t)$。在往后的计算中，常常假定这种代换是近似正确的。

$$g^2(t)=\frac{g^2}{1+\dfrac{11C_2(G)-4T(R)N_f}{24\pi^2}g^2t} \tag{7-31}$$

令

$$Q=Q_0e^t,\qquad t=\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2},$$

则(7-31)式为

$$g^2(Q^2)=\frac{g^2(Q_0^2)}{1+\dfrac{11C_2(G)-4T(R)N_f}{48\pi^2}g^2(Q_0^2)\ln\dfrac{Q^2}{Q_0^2}}。$$

(7-32)

这就是耦合常数 g 随动量 Q 变化的公式。

在 QCD 的情况下，规范群是 $SU_c(3)$，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，

$$g^2(Q^2)=\frac{g^2(Q_0^2)}{1+\dfrac{33-2N_f}{48\pi^2}g^2(Q_0^2)\ln\dfrac{Q^2}{Q_0^2}}, \tag{7-33}$$

只要 $N_f\leqslant 16$，就有

$$\lim_{Q^2\to\infty}g^2(Q^2)=0。$$

这表明：当动量很大，距离很近时，夸克、胶子间的相互作用趋于零。人们称之曰渐近自由。

在 QED 的情况下，规范群是 U(1) 群，$C_2(G)=0$，$T(R)=1$，$N_f=1$，

$$g^2(Q^2)=\frac{g^2(Q_0^2)}{1-\dfrac{1}{12\pi^2}g^2(Q_0^2)\ln\dfrac{Q^2}{Q_0^2}}, \tag{7-34}$$

$$\lim_{Q^2\to 0}g^2(Q^2)=0。$$

这表明：当动量很小，距离很大时，带电粒子间的相互作用为零。这正是人们习见的电磁现象。

由于(7-32)中的 $T(R)$ 项是由规范粒子和费米子的作用引起的，而 $C_2(G)$ 项是由规范粒子的自作用引起的。因而，涉及的理

论究竟是渐近自由的，还是渐远自由的？ 要看是规范粒子的自作用超过它和费米子的相互作用，还是不及它和费米子的相互作用。

回到(7-31)式的导数，就是 β 参数

$$\beta(g)=\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]。$$

(7-35)

它的固定点在原点，就是图(*a*)、(*b*)表示的情况。而且，当规范场的自作用大于它与费米场的作用，$11C_2(G)>4T(R)N_f$ 时，$\beta<0$，就是(*b*)图表示的情况，理论是渐近自由的。QCD 理论中，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，$N_f\leqslant 16$ 时，就是如此。当规范场的自作用小于它与费米场的作用，$11C_2(G)<4T(R)N_f$ 时，$\beta>0$，就是(*a*) 图表示的情况，理论是红外自由的。对于 QED，$C_2(G)=0$，$T(R)=1$，$N_f=1$，就是如此。

有效规范参数 随动量改变的规范参数 $\alpha(t)$，我们称之为有效规范参数。现在，我们也利用(7-12)式、(7-15)式和(7-29)式来进行计算。由(7-29)式和(7-12)式，有

$$\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}=\mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}=2\frac{\partial\alpha}{\partial\ln\mu^2}=2\alpha_0\frac{\partial Z_3^{-1}}{\partial\ln\mu^2}=-2\alpha\frac{\partial\ln Z_3}{\partial\ln\mu^2}。$$

由(7-15)式，有

$$Z_3=1+\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha_0\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\ln Z_3=\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha_0\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

$$\frac{\partial\ln Z_3}{\partial\ln\mu^2}=-\frac{g_0^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha_0\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]。$$

把它代入上式，得

$$\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}=\frac{g^2}{16\pi^2}\alpha\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right].$$

再把(7-85)式的结果代入上式,得

$$\frac{d\alpha}{dg}=\frac{-\alpha\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]}{g\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]},$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)N_f\right]}$$

$$=-\frac{dg}{g\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]},$$

$$\frac{d\alpha}{C_2(G)\alpha^2+\left[\frac{8}{3}T(R)N_f-\frac{13}{3}C_2(G)\right]\alpha}$$

$$=\frac{dg}{g\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]}.$$

将上式积分, $t:0\to t$, $g:g\to g(t)$, $\alpha:\alpha\to\alpha(t)$, 得

$$\frac{\alpha(t)}{C_2(G)\alpha(t)+\left[\frac{8}{3}T(R)N_f-\frac{13}{3}C_2(G)\right]}$$

$$=\frac{\alpha}{C_2(G)\alpha+\left[\frac{8}{3}T(R)N_f-\frac{13}{3}C_2(G)\right]}$$

$$\cdot\left(\frac{g(t)}{g}\right)^{\frac{\frac{8}{3}T(R)N_f-\frac{13}{3}C_2(G)}{\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f}},$$

$$\alpha(g(t)) = \left[\frac{8}{3}\,T(R)N_f - \frac{13}{3}\,C_2(G)\right]$$

$$\cdot\left\{\frac{C_2(G)\alpha+\left[\frac{8}{3}\,T(R)N_f-\frac{13}{3}\,C_2(G)\right]}{\alpha}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{g}{g(t)}\right)^{\frac{\frac{8}{3}T(R)N_f-\frac{13}{3}C_2(G)}{\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f}} - C_2(G)\right\}^{-1}。 \tag{7-36}$$

在QCD的情况下，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，令$N_f=3$，则

$$\alpha(g(t)) = \frac{9}{\frac{9-3\alpha}{\alpha}\left(\frac{g(t)}{g}\right)+3} = \frac{3}{\frac{3-\alpha}{\alpha}\,\frac{g(t)}{g}+1}。 \tag{7-37}$$

如果把(7-31)式的值代入，就得

$$\alpha(t) = \frac{3}{\frac{3-\alpha}{\alpha}\left(1+\frac{9}{8\pi^2}\,g^2t\right)^{-\frac{1}{2}}+1},$$

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)\to 3。$$

在QED的情况下，$C_2(G)=0$，$T(R)=1$，$N_f=1$，则

$$\alpha(g(t)) = \alpha\left(\frac{g}{g(t)}\right)^2, \tag{7-38}$$

把(7-31)式的值代入，就得

$$\alpha(t) = \alpha\left[1-\frac{1}{6\pi^2}\,g^2t\right]$$

$$\lim_{t\to-\infty}\alpha(t) = +\infty。$$

上述的结果是令人不安的。在文献中，大都回避这一问题的讨论。幸喜，物理过程是规范无关的，选取适当的规范，就可以去除这种不安。

有效质量 随动量改变的质量$m(t)$，叫做有效质量。由(7-29)式、(7-12)式有

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t}=\mu\frac{\partial m}{\partial \mu}=2\frac{\partial m}{\partial \ln \mu^2}=2m_0\frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial \ln \mu^2}$$
$$=-2m\frac{\partial \ln Z_m}{\partial \ln \mu^2}。$$

由(7–15)式,得

$$Z_m^{-1}=1+\frac{\delta m}{m_0}=1+\frac{g_0^2}{16\pi^2}3C_2(R)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$
$$\ln Z_m=-\frac{g_0^2}{16\pi^2}3C_2(R)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$
$$\frac{\partial \ln Z_m}{\partial \ln \mu^2}=\frac{g_0^2}{16\pi^2}3C_2(R)。$$

代入上式,得

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t}=-\frac{3g^2}{8\pi^2}mC_2(R),$$
$$\frac{dm}{m}=-\frac{C_2(R)}{8\pi^2}\frac{3g^2}{\beta(g)}dg。$$

把(7–35)式的β代入,得

$$\frac{dm}{m}=\frac{6C_2(R)}{\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]}\frac{dg}{g}。$$

将上式积分,t: $0\to t$, g: $g\to g(t)$, m: $m(g(t))\to m(g)$, 得

$$\ln\frac{m(t)}{m(0)}=\frac{3C_2(R)}{\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f}\ln\frac{g^2(t)}{g^2}。\quad(7\text{–}39)$$

在QCD的情况下, $C_2(G)=3$, $T(R)=\frac{1}{2}$, $C_2(R)=\frac{4}{3}$, 令$N_f=3$, 由(7–39)式,得

$$m(g(t))=m(g)\left(\frac{g^2(t)}{g^2}\right)^{\frac{4}{11-\frac{2}{3}N_f}}=m(g)\left(\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(0)}\right)^{\frac{4}{11-\frac{2}{3}N_f}}。$$

把(7–33)式代入,得

$$m(Q)=m(Q_0)\left[1+\frac{33-2N_f}{48\pi^2}g^2(Q_0)\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right]^{-\frac{4}{11-\frac{2}{3}N_f}},$$

$$\lim_{Q^2 \to \infty} m(Q) = 0。$$

这表明：夸克的质量是渐近于无的。这是胶子自作用超过它和夸克作用的效应，不是相对论效应。

在QED的情况下，$C_2(G)=0$，$T(R)=1$，$N_f=1$，$C_2(R)=1$，由(7-39)式，得

$$m(g(t)) = m(g)\left(\frac{g^2(t)}{g^2}\right)^{-\frac{9}{4}}。$$

把(7-34)式的值代入，得

$$m(Q) = m(Q_0)\left[1-\frac{1}{12\pi^2} g^2(Q_0)\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right]^{\frac{9}{4}},$$

$$\lim_{Q^2 \to 0} m(Q) \to \infty。$$

这表明：带电粒子是远离变胖。这是光子和带电粒子作用的效应。

反常量纲 把(7-15)式表示的重整化常数Z_2、Z_3，代入由(7-23)式定义的反常量纲，就得到在单圈近似下的、费米场和规范场的反常量纲

$$\gamma_\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln Z_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_2}{\partial \mu} = \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \ln \mu^2} = \frac{g^2}{16\pi^2}\alpha C_2(R),$$

$$\gamma_A = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln Z_3}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_3}{\partial \mu} = \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \ln \mu^2}$$

$$= -\frac{g^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)N_f\right]。 \qquad (7-40)$$

在QCD的情况下，$C_2(R)=\frac{4}{3}$，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，则

$$\gamma_\psi = \frac{g^2}{12\pi^2}\alpha,$$

$$\gamma_A = -\frac{g^2}{32\pi^2}\left[(13-3\alpha) - \frac{4}{3}N_f\right]。$$

在QED的情况下，$C_2(R)=1$，$C_2(G)=0$，$T(R)=1$，$N_f=1$，则

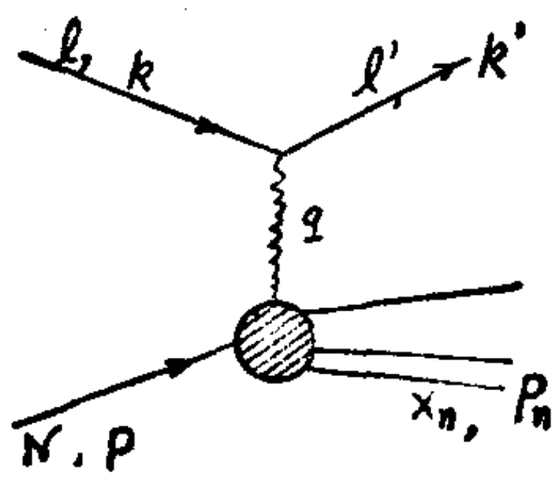
$$\gamma_\psi = \frac{\alpha}{16\pi^2} g^2,$$

$$\gamma_A = \frac{g^2}{12\pi^2}。$$

§5. 深度非弹散射的结构函数

QCD 的相互作用常数 g 随动量改变的公式(7–33)式指出，夸克有渐近自由的性质。这个重要的理论结果，需要用实验来检验。为此，我们来讨论深度非弹散射过程，讨论描述深度非弹散射过程的结构函数，以便把理论计算的结果和实验测量的数据联系起来。

深度非弹散射过程 用轻子 l 去轰击核子 N，当轻子的能量 E 很大于粒子的质量 $m(E \gg m)$，轻子的德布洛依波长很小于核子的线度时，就将发生深度非弹散射



(F)

$$l + N \to l' + X_n。$$

l' 是散射后的轻子，X_n 是散射产生的一个或多个强子。右图是表示该过程的费曼图。

如果用 $J^l_\mu(0)$ 表示轻子流算符，用 $J^h_\mu(0)$ 表示强子流算符，用 g_l 表示轻子顶角作用常数，用 g_h 表示强子顶角作用常数，用 $iD_{\mu\nu}(q)$ 表示传播子，那么按照费曼规则，这过程的散射矩阵元就是

$$M = \langle k'\sigma' | J^l_\mu(0) | k\sigma \rangle i g_l i D^{\mu\nu}(q) i g_h \langle p_n, s_n | J^h_\nu(0) | p, s \rangle。 \tag{7–41}$$

相应的微分散射截面，就是*

---

* J. D. Bjorken, S. D. Drell: "Relativistic Quantum Mechanics", p.285.

$$d\sigma=\frac{1}{4mE}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\frac{1}{2\eta}$$
$$\cdot\Sigma|M|^2(2\pi)^4\delta^4(p+k-k'-p_n)。\qquad(7\text{–}42)$$

此式是在实验室坐标系中写下的。由于深度非弹 $m_e\to 0$, $E=|\vec{k}|$, $v=1$。Σ 是对初、末态粒子的自旋求和。如果初态轻子是 e、μ、τ, 则 $\eta=2$。如果初态轻子是 ν_e、ν_μ、ν_τ, 则 $\eta=1$。

把(7–41)式代入(7–42)式, 得

$$d\sigma=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{4mE}\frac{d^3k'}{2E'}g_l^2g_h^2D^{\mu\lambda}(q)D^{\nu\rho}(q)L_{\lambda\rho}W_{\mu\nu},$$

$$L_{\lambda\rho}=\frac{1}{\eta}\sum_{\sigma,\sigma'}\langle k'\sigma'|J_\lambda^l(0)|k\sigma\rangle\langle k\sigma|J_\rho^{l+}(0)|k'\sigma'\rangle,$$

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi}\Sigma\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\langle p,\ s|J_\mu^{h+}(0)|p_n,\ s_n\rangle$$
$$\cdot\langle p_n,\ s_n|J_\nu^h(0)|p,\ s\rangle(2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)。\qquad(7\text{–}43)$$

标量变数 如图(*F*)所示, k 是入射轻子 l 的动量, k' 是出射轻子 l' 的动量, p 是初态核子的动量, $p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i$ 是终态强子的动量,

$$q=k-k'\qquad(7\text{–}44)$$

是轻子传递给强子的动量, 也是传播子的动量。初、末四个粒子(X_n 看作一个粒子)的动量 k、k'、p、p_n, 由于能量、动量守恒定律的限制, 只有三个是独立的。三个独立的四维动量, 可以组成六个洛仑兹变换下不变的标量。四个四维动量有四个质壳条件。所以, 独立的可变标量只有两个。通常, 我们取

$$Q^2=-q^2,\quad \nu=\frac{p\cdot q}{m}\qquad(7\text{–}45)$$

两个, 用作标量变数。有时, 用

$$x=\frac{Q^2}{2m\nu}=\frac{Q^2}{2p\cdot q}\quad 或\quad \omega=\frac{1}{x}\qquad(7\text{–}46)$$

代替 ν, 作为标量变数。

由定义和 $m_l\simeq 0$, 有

$$Q^2=-q^2=-(k-k')^2=-k^2+2k\cdot k'-k'^2=2k\cdot k'$$
$$=2k_0k'_0(1-\cos\theta)\geqslant 0。$$

这正是选用 Q^2 而不选用 q^2 的原因。

由于重子数守恒，X_n 中至少要有一个重子，

$$p_n^2=(p+q)^2=m^2+2p\cdot q+q^2\geqslant m^2,$$
$$2p\cdot q-Q^2\geqslant 0,$$

所以

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant\omega\leqslant\infty。\tag{7-47}$$

Q^2 的意义是显然的。对于 ν，在实验室坐标系中 $p\cdot q=mq_0$，$\nu=q_0$，就是轻子传递给强子的能量。

作用顶角和轻子流　要由(7-43)式计算深度非弹散射过程的截面，就要知道决定该过程的动力学机制，就要知道 (F) 图中顶角上的相互作用。轻子只参与弱电相互作用，轻子顶角是电磁相互作用顶角或弱作用顶角。连接轻子顶角和强子顶角的传播子，是光子传播子或中间玻色子传播子。强子除参与弱电作用外，还参与强作用。所以 (F) 图的强子顶角，是受到强作用影响的、电磁相互作用顶角或弱作用顶角。

描述弱电过程的，是 GWS 弱电统一规范理论。按照第二章(2-73)式，弱电相互作用顶角有三种类型：电磁作用；荷电流作用；中性流作用。这三种相互作用的作用常数是

$$e;\quad \frac{g}{2\sqrt{2}};\quad \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{4}。\tag{7-48}$$

这三种相互作用的作用流是

$$J_\mu^e=Q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi;\ J_\mu^W=\bar{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)T^+\psi;$$
$$J_\mu^Z=\bar{\psi}\gamma_\mu[2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W]\psi。\tag{7-49}$$

T^+、T_3 是费米表示的同位旋矩阵，Q 是它的电荷数。传播这三种相互作用的是光子、荷电中间玻色子 W、中性中间玻色子 Z，相应的传播子是

$$iD^{e}_{\mu\nu}(q)=\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)}{q^2};$$

$$iD^{W}_{\mu\nu}(q)=\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}\right)}{q^2-m_W^2};$$

$$iD^{Z}_{\mu\nu}(q)=\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\dfrac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}\right)}{q^2-m_Z^2}。\tag{7-50}$$

m_W 是 W 介子的质量，m_Z 是 Z 介子的质量。

无论是轻子顶角还是强子顶角，作用常数 g_l、g_h 都由 (7–48) 式表示。依具体情况选用三者中的一个。但是，作用流，其算符虽然都以(7–49)式表示，但矩阵元却有重大的差别。对于轻子：

$$\begin{aligned}
l^e_\mu&=\langle k',\ \sigma'|Q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi|k,\ \sigma\rangle=\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu u_\sigma(k);\\
l^W_\mu&=\langle k'\sigma'|\bar{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi T^+|k\sigma\rangle\\
&=\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\sigma(k);\\
l^Z_\mu&=\langle k'\sigma'|\bar{\psi}\gamma_\mu[2T_3(1+\gamma_5)-4Q\sin^2\theta_W]\psi|k\sigma\rangle\\
&=\begin{cases}\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(1+\gamma_5)u_\sigma(k)\\ \bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(4\sin^2\theta_W-(1+\gamma_5))u_\sigma(k)。\end{cases}
\end{aligned}\tag{7-51}$$

在以上诸式中，都用 $u_\sigma(k)$、$\bar{u}_{\sigma'}(k')$ 表示轻子的旋量波函数。就其数学形式来说，是完全相同的。就其物理内容来说，是有重大差别的。在 l^e_μ 中的 $u_\sigma(k)$、$\bar{u}_{\sigma'}(k')$ 表示同一种带电轻子的旋量波函数。在 l^w_μ 中的 $u_\sigma(k)$、$\bar{u}_{\sigma'}(k')$，一个是带电轻子，一个是相应的中微子。在 l^z_μ 中的 $u_\sigma(k)$、$\bar{u}_{\sigma'}(k')$，第一行是中微子，第二行是带电轻子。如果参与过程的是反中微子，那么相应的 γ_5 就要换成 $-\gamma_5$。

从(7–51)式看来，轻子流可以用一个统一的公式表示为

$$l_\mu=\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_\sigma(k)。\tag{7-52}$$

在不同情况下，a、b 有不同的值：

带电粒子电磁作用：

$$a=1,\ b=0;$$

中微子变为带电轻子：

$$a=1,\ b=1;$$

反中微子变为反轻子：

$$a=1,\ b=-1;$$

中微子中性流过程：

$$a=1,\ b=1;$$

反中微子中性流过程：

$$a=1,\ b=-1;$$

带电轻子中性流过程：

$$a=4\sin^2\theta_W-1,\ b=-1。$$

按照(7–52)式，(7–43)式就是

$$\begin{aligned}L_{\mu\nu}&=\frac{1}{\eta}\sum l_\mu l_\nu^+=\frac{1}{\eta}\sum_{\sigma,\sigma'}\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_\sigma(k)\bar{u}_\sigma(k)\gamma_\nu\\&\cdot(a+b\gamma_5)u_{\sigma'}(k')\\&=\frac{1}{\eta}\mathrm{Tr}\left(\sum_{\sigma'}u_{\sigma'}(k')\bar{u}_{\sigma'}(k')\gamma_\mu(a+b\gamma_5)\sum_\sigma u_\sigma(k)\bar{u}_\sigma(k)\gamma_\nu\right.\\&\left.\cdot(1+\gamma_5)\right)\\&=\frac{1}{\eta}\mathrm{Tr}(k'\gamma_\mu(a+b\gamma_5)k\gamma_\nu(a+b\gamma_5))\\&=\frac{4}{\eta}[(a^2+b^2)(k_\mu k'_\nu+k'_\mu k_\nu-k\cdot k'g_{\mu\nu})-2iab\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k'^\lambda k^\rho]。\end{aligned}\tag{7–53}$$

初态是电子时 $\eta=2$，是中微子时 $\eta=1$。

强子流张量　虽然，强子弱电作用流算符，也具有如(7–49)式的形式。但是，由于强作用的影响，它的矩阵元就没有象轻子流那样简单的形式。在不知道强作用机制的情况下，就不能把它具体计算出来，只能从一般的理论考虑来进行推测。我们来讨论(7–43)式表示的强子流张量

$$W_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle$$
$$\cdot\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle(2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)$$
$$=\frac{1}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\int d^4y\exp[i(p+q-p_n)y]$$
$$\cdot\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$=\frac{1}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\int d^4y e^{iqy}\langle p,\ s|e^{ipy}J_\mu^+(0)$$
$$\cdot e^{-ip_ny}|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$=\frac{1}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\int d^4y e^{iqy}\langle p,\ s|e^{i\hat{p}y}J_\mu^+(0)$$
$$\cdot e^{-i\hat{p}y}|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle,$$

$\hat{p}$ 表示动量算符。由于算符的平移变换

$$J_\mu^+(y)=e^{i\hat{p}y}J_\mu^+(0)e^{-i\hat{p}y},\tag{7-54}$$

上式可以写成

$$W_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$
$$\cdot\sum_{s,s_n}\langle p,\ s|J_\mu^+(y)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle。$$

由于

$$\int d^4y e^{iqy}\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(y)|p,\ s\rangle$$
$$=\int d^4y e^{iqy}\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|e^{ip_ny}J_\mu^+(0)e^{-ipy}|p,\ s\rangle$$
$$=(2\pi)^4\delta^4(p_n-p+q)\langle p,s|J_\nu(0)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,s_n|J_\mu^+(0)|p,s\rangle,$$
$$p_n^2=(p-q)^2=p^2-2p\cdot q+q^2=p^2-Q^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\leqslant m^2$$

是物理上不允许的，故恒等于零。所以 $W_{\mu\nu}$ 可以写成

$$W_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$
$$\cdot\sum_{s,s_n}[\langle p,\ s|J_\mu^+(y)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$-\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(y)|p,\ s\rangle]。$$

由于中间态的完备性

$$\sum_n \int \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \sum_{s_n} |p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n| = 1,$$

上式又可以写成

$$W_{\mu\nu}(p,\ q) = \frac{1}{8\pi} \int d^4 y e^{iqy} \sum_s \langle p,\ s|\,[J_\mu^+(y),\ J_\nu(0)]\,|p,\ s\rangle 。$$

(7–55)

结构函数 由(7–43)式定义的、由(7–55)式表示的强子流张量 $W_{\mu\nu}$, 是二阶张量。它是核子动量 p 和传递动量 q 的函数。因此，它应该是由 p_μ、q_μ、$g_{\mu\nu}$、$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 构成的二阶张量。由 p_μ、q_μ、$g_{\mu\nu}$、$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 可以构成的二阶张量有

$$p_\mu p_\nu,\ q_\mu q_\nu,\ p_\mu q_\nu,\ q_\mu p_\nu,\ g_{\mu\nu},\ \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\lambda q^\rho$$

六个。为了讨论问题的方便，人们不直接使用上述六个二阶张量，而采用它们的六种组合

$$-\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right),\quad \frac{1}{m^2}\left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\nu\right),\quad q_\mu q_\nu,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\lambda q^\rho,\quad (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu),\quad (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu)。$$

而强子流张量就是这六种二阶张量的线性组合

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(p,\ q) = & -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1 \\ & + \frac{1}{m^2}\left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\nu\right) W_2 \\ & - i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p^\lambda q^\rho}{2m^2} W_3 + \frac{1}{m^2} q_\mu q_\nu W_4 \\ & + \frac{1}{m^2}(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) W_5 + \frac{1}{m^2}(p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) W_6。 \end{aligned}$$

(7–56)

显然 $W_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6)$ 是标量变数 Q^2、ν (或 x, 或 ω) 的函数

$$W_i(Q^2,\ \nu),\ W_i(Q^2,\ x),\ W_i(Q^2,\ \omega),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6。$$

(7–57)

我们把它叫做强子的结构函数。因为，由它可以窥视强子内部结构的情况。

如(7–43)式表示的那样，在 $d\sigma$ 中，$W_{\mu\nu}$ 和 $L^{\mu\nu}$ (因而 l_μ) 连在一起，而

$$l_\mu q^\mu = \bar{u}\gamma_\mu(a+b\gamma_5)uq^\mu = \bar{u}(k')(\not{k}-\not{k}')(a+b\gamma_5)u(k)$$

$$= -\bar{u}(k')\not{k}'(a+b\gamma_5)u(k)+\bar{u}(k')(a-b\gamma_5)\not{k}u(k)。$$

根据狄拉克方程和不计轻子质量

$$\not{k}u(k)=m_l u(k)=0,\ \bar{u}(k')\not{k}'=m_l\bar{u}(k')=0,$$

$$l_\mu q^\mu=0。$$

所以，W_4、W_5、W_6 的项将不出现在 $d\sigma$ 中，因而

$$W_{\mu\nu}(p,\ q)=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)W_1$$

$$+\frac{1}{m^2}\left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right)W_2$$

$$-i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p^\lambda q^\rho}{2m^2}W_3。 \qquad (7–58)$$

在空间反射下，第三项改变符号。电磁相互作用是宇称守恒的，因此 W_3 项将不出现在电磁过程中。

如(7–49)式所示，由于 ψ 的量纲是 $\frac{3}{2}$，J_μ 的量纲就是 3。在我们的计算中，将态矢量正交、归一化为

$$\langle p',\ s'|p,\ s\rangle=\delta_{s,s'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')2E,$$

它的量纲是 -2，态矢量的量纲是 -1。d^4y 的量纲是 -4。由此可知，(7–55)式表示的 $W_{\mu\nu}(p,\ q)$ 是没有量纲的，按 (7–56) 式、(7–58)式定义的结构函数也是没有量纲的。

在 $q\to -q$，$\mu\rightleftarrows\nu$ 变换下，由(7–55)式表示的

$$W_{\mu\nu}(p,\ q)\to W_{\nu\mu}(p,\ -q)$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{-iqy}\sum_s\langle p,\ s|\ [J_\nu^+(y),\ J_\mu(0)]\ |p,\ s\rangle$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,\ s|\ [J_\nu^+(-y),\ J_\mu(0)]\ |p,\ s\rangle$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,\ s|\ [J_\nu^+(0),\ J_\mu(y)]\ |p,\ s\rangle$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,\ s|\ [J_\mu(y),\ J_\nu^+(0)]\ |p,\ s\rangle$$

$$\equiv-\overline{W}_{\mu\nu}(p,\ q)。$$

上式中定义的 $\overline{W}_{\mu\nu}(p,\ q)$ 和由(7–55)式定义的 $W_{\mu\nu}(p,\ q)$，在于

$$J\to J^+。$$

由(7–49)式可知，电磁流和中性流是厄密的

$$J^e=J^{e+},\quad J^z=J^{z+},$$

在 $J\to J^+$ 下不变，即

$$\overline{W}_{\mu\nu}(p,\ q)=W_{\mu\nu}(p,\ q),$$

所以

$$W_{\nu\mu}(p,\ -q)=-W_{\mu\nu}(p,\ q)。$$

在荷电流的情况下，$J\to J^+$，相当于中微子过程换成反中微子过程，即 $\overline{W}_{\mu\nu}(p,\ q)$ 描述反中微子过程，因而

$$W_{\nu\mu}^{(\nu)}(p,\ -q)=-W_{\mu\nu}^{(\overline{\nu})}(p,\ q)。$$

由(7-58)式定义的结构函数，其系数在 $q\to-q$，$\mu\rightleftarrows\nu$ 下是不变的。因而，上述的 $W_{\mu\nu}$ 的变换关系，实质上就是结构函数的变换关系，即当 $\nu\to-\nu$，$x\to-x$，$\omega\to-\omega$ 时，

$$\begin{aligned}&J^e、J^z:\ W_i(Q^2,\ -\nu)=-W_i(Q^2,\ \nu),\\&J^w:\ \ W_i^{(\nu)}(Q^2,\ -\nu)=-W_i^{(\overline{\nu})}(Q^2,\ \nu),\end{aligned}\qquad(7\text{–}59)$$

$$i=1,\ 2,\ 3。$$

Bjorken 极限、光锥极限和 Scaling 现象　按照

$$G_1(Q^2,\ x)=W_1(Q^2,\ x),\ G_2(Q^2,\ x)=\frac{\nu}{m}W_2(Q^2,\ x),$$

$$G_3(Q^2,\ x)=\frac{\nu}{m}W_3(Q^2,\ x)$$

定义标度函数 $G_i(Q^2,\ x)$。实验指出：在 Bjorken 极限

$$Q^2\to\infty,\quad \nu\to\infty,\quad x\text{ 有限} \tag{7-60}$$

下，标度函数有标度行为，或者说有 Scaling 现象

$$G_i(Q^2,\ x)\to F_i(x)\text{。} \tag{7-61}$$

即 $G_i(Q^2,\ x)$ 与 Q^2 无关，仅仅是 x 的函数。进一步精确的实验指出，$G_i(Q^2,\ x)$ 和 Q^2 也有稍许关系，这叫做 Scaling 偏离，或者标度偏离。

Bjorken 极限(7-60)式是用动量变数 Q^2、ν、x 描述的。动量和坐标具有共轭的关系。用动量变数表示的 Bjorken 极限，也应该可以用坐标变数来表示。为此，我们取实验室坐标系，则核子的动量 p 和传播动量 q 为

$$p=(m,\ 0,\ 0,\ 0),\quad q=(\nu,\ 0,\ 0,\ \sqrt{\nu^2+Q^2})\text{。}$$

这里，设想传播子是沿第三轴运动的。$q^2=-Q^2$ 是传播子的有效质量(虚粒子的质量)。显然，在 Bjorken 极限下

$$q_+\equiv q_0+q_3=\nu+\sqrt{\nu^2+Q^2}\simeq\nu+\nu\left(1+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\nu^2}+\cdots\right)\to 2\nu,$$

$$q_-\equiv q_0-q_3=\nu-\sqrt{\nu^2+Q^2}\simeq\nu-\nu\left(1+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\nu^2}+\cdots\right)\to-\frac{Q^2}{2\nu}$$

$$=-mx\text{。}$$

由于

$$q_0y_0-q_3y_3=\frac{1}{2}(q_0+q_3)(y_0-y_3)+\frac{1}{2}(q_0-q_3)(y_0+y_3),$$

即 $y_-\equiv y_0-y_3$ 与 q_+ 有共轭关系，$y_+\equiv y_0+y_3$ 与 q_- 有共轭关系。

所以，在 Bjorken 极限下

$$y_-\sim\frac{1}{q_+}\to\frac{1}{2\nu}$$

$$y_+\sim\frac{1}{q_-}\to-\frac{2\nu}{Q^2},$$

$$y_+y_- = y_0^2 - y_3^2 \sim \frac{1}{q_+} \cdot \frac{1}{q_-} \to - \frac{1}{Q^2} \to 0。$$

在任意坐标下，就是

$$y^2 = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \to 0, \tag{7-62}$$

这表明：Bjorken 极限，用坐标语言来说，就是光锥极限。(7-61)式表示的 Scaling 现象，就是结构函数在光锥附近的行为。

虚康普顿散射的 T 张量 为了进一步讨论 Scaling 现象，我们引入和虚康普顿散射相联系的 T 张量

$$T_{\mu\nu}(p,\ q) = \frac{i}{8\pi} \int d^4y e^{iqy} \sum_s \langle p,\ s | T(J_\mu^+(y) J_\nu(0)) | p,\ s \rangle。$$

(7-63)

它是虚康普顿散射



矩阵元的强子流部分。

把(7-63)式和(7-55)式比较，二者的差别在于：一个是流算符的对易子，一个是流算符的编时乘积。所以，它们的张量结构具有相同的形式，即有

$$T_{\mu\nu}(p,\ q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) T_1 + \frac{1}{m^2}\left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\nu\right) T_2 - i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p^\lambda q^\rho}{2m^2} T_3。$$

(7-64)

$T_i (i=1,\ 2,\ 3)$ 也是标量变数 Q^2、ν (或 x, 或 ω)的函数

$$T_i(Q^2,\ \nu),\ i=1,\ 2,\ 3。 \tag{7-65}$$

二者之间也有紧密的联系。J_μ 是由两个费米算符构成的玻色算符。按照编时乘积的定义，有

$$T(J_\mu^+(y)J_\nu(0))=\theta(y_0)(J_\mu^+(y)J_\nu(0))$$
$$+\theta(-y_0)(J_\nu(0)J_\mu^+(y)),$$

$$T_{\mu\nu}=\frac{i}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s[\theta(y_0)\langle p,\ s|J_\mu^+(y)J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$+\theta(-y_0)\langle p,\ s|J_\nu(0)J_\mu^+(y)|p,\ s\rangle]。$$

把完备的中间态

$$\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s_n}|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|=1$$

插入两个流算符之间，并考虑到时空平移(7–54)式，得

$$T_{\mu\nu}=\frac{i}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\cdot\sum_{s,s_n}\int d^4y e^{iqy}$$
$$\cdot\{\theta(y_0)\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle e^{i(p-p_n)y}$$
$$+\theta(-y_0)\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(0)|p,\ s\rangle e^{i(p_n-p)y}\}$$
$$=\frac{i}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\int_{-\infty}^{\infty}d^3y$$
$$\cdot\left\{\int_0^\infty dy_0\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle e^{i(p+q-p_n)y}\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^0 dy_0\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(0)|p,\ s\rangle e^{i(p_n+q-p)y}\right\}$$

$$=\frac{i}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\cdot$$
$$\sum_{s,s_n}\left\{\frac{-\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{p}_n)}{i(p_0+q_0-p_{n_0}+i\varepsilon)}\langle p,s|J_\mu^+(0)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,s_n|J_\nu(0)|p,s\rangle\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^3(\vec{p}_n+\vec{q}-\vec{p})}{i(p_{n_0}+q_0-p_0-i\varepsilon)}\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\right.$$
$$\left.\cdot\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(0)|p,\ s\rangle\right\}(2\pi)^3$$

利用公式 $$\frac{1}{x\pm i\epsilon}=p\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x)$$

$\left(p\frac{1}{x}\text{表示主值部分}\right)$，则上式写成

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\cdot$$
$$\sum_{s,s_n}\Big\{\Big[\,P\frac{-1}{p_0+q_0-p_{n_0}}+i\pi\delta(p_0+q_0-p_{n_0})\Big]\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{p}_n)$$
$$\cdot\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle_{q_0+i\varepsilon}$$
$$+\Big[\,P\frac{1}{p_{n_0}+q_0-p_0}+i\pi\delta(p_{n_0}+q_0-p_0)\Big]\delta^3(\vec{p}_n+\vec{q}-\vec{p})$$
$$\cdot\langle p,s|J_\nu(0)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,s_n|J_\mu^+(0)|p,\ s\rangle_{q_0-i\varepsilon}\Big\}(2\pi)^3。$$

它的虚部为

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}=\frac{1}{16\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$
$$\cdot\sum_{s,s_n}[(2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)\langle p,\ s|J_\mu^+(0)|p_n,\ s_n\rangle$$
$$\cdot\langle p_n,s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle_{q_0+i\varepsilon}$$
$$+(2\pi)^4\delta^4(p_n+q-p)\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,s_n\rangle$$
$$\cdot\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(0)|p,\ s\rangle_{q_0-i\varepsilon}]。$$

方括号中的两项来自 q_0 平面的两方：用 $q_0+i\varepsilon$ 表示的一项，来自 q_0 实轴的上方；用 $q_0-i\varepsilon$ 表示的一项，来自 q_0 实轴的下方。作为对 $T_{\mu\nu}$ 的虚部的贡献来说，由于

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}|_{q_0\to q_0+i\varepsilon}=-\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}|_{q_0\to q_0-i\varepsilon},$$

在 $\epsilon\to 0$ 时，而相差一负号。所以

$$\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}=\frac{1}{16\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\cdot$$
$$\sum_{s,s_n}[(2\pi)^4\delta^4(p+q-p_n)\langle p,s|J_\mu^+(0)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$-(2\pi)^4\delta^4(p_n+q-p)\langle p,s|J_\nu(0)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,s_n|J_\mu^+(0)|p,s\rangle]$$
$$=\frac{1}{16\pi}\sum_n\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\sum_{s,s_n}\int d^4y e^{iqy}$$
$$\cdot[\langle p,\ s|J_\mu^+(y)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|p,\ s\rangle$$
$$-\langle p,\ s|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu^+(y)|p,\ s\rangle]$$
$$=\frac{1}{16\pi}\int d^4y e^{iqy}\langle p,\ s|[J_\mu^+(y),\ J_\nu(0)]p,\ s\rangle。$$

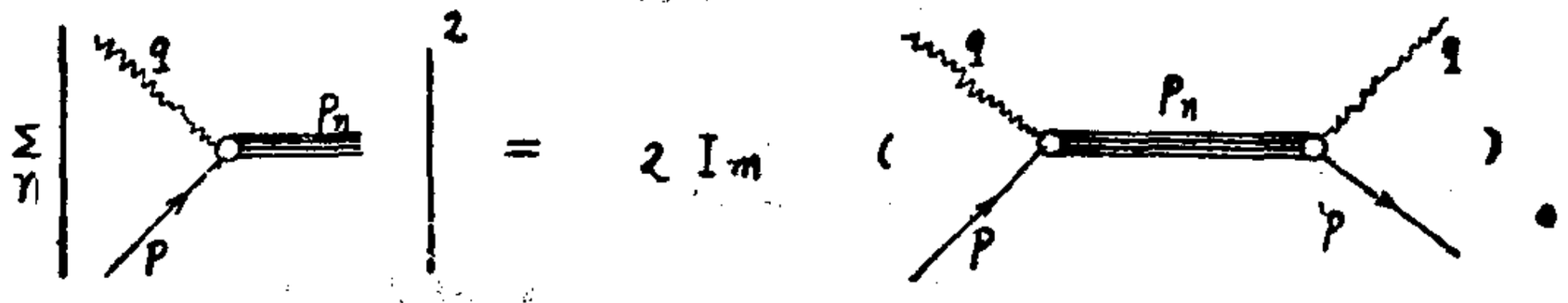
和(7-55)式比较,得

$$W_{\mu\nu}=2\,\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}。\tag{7-66}$$

从(7-58)式、(7-64)式可知,它们有同样的张量形式,因而

$$W_i(Q^2,\ \nu)=2\,\mathrm{Im}\,T_i(Q^2,\ \nu)。\tag{7-67}$$

(7-66)式、(7-67)式表示的是结构函数 W_i 和 T 张量间的重要关系。这关系可以用费曼图表示为



$T_i(Q^2,\ \omega)$ 的解析性 既然 $T_{\mu\nu}(p,\ q)$、$T_i(Q^2,\ \omega)$ 是虚康普顿散射的散射幅,那么它包含的传播子

$$\frac{1}{(p\pm q)^2-M_n^2}$$

在 $(p\pm q)^2=M_n^2$ 时有奇异性。当中间态是一个核子时,在

$$(p\pm q)^2=m^2\pm 2\,p\cdot q+q^2=m^2-Q^2(1\mp\omega)=m^2,$$

$$\omega=\pm 1$$

处有极点。当中间态是一个核子加一个介子时,在

$$(p\pm q)^2=m^2-Q^2(1\mp\omega)\geqslant(m+m_\pi)^2,$$

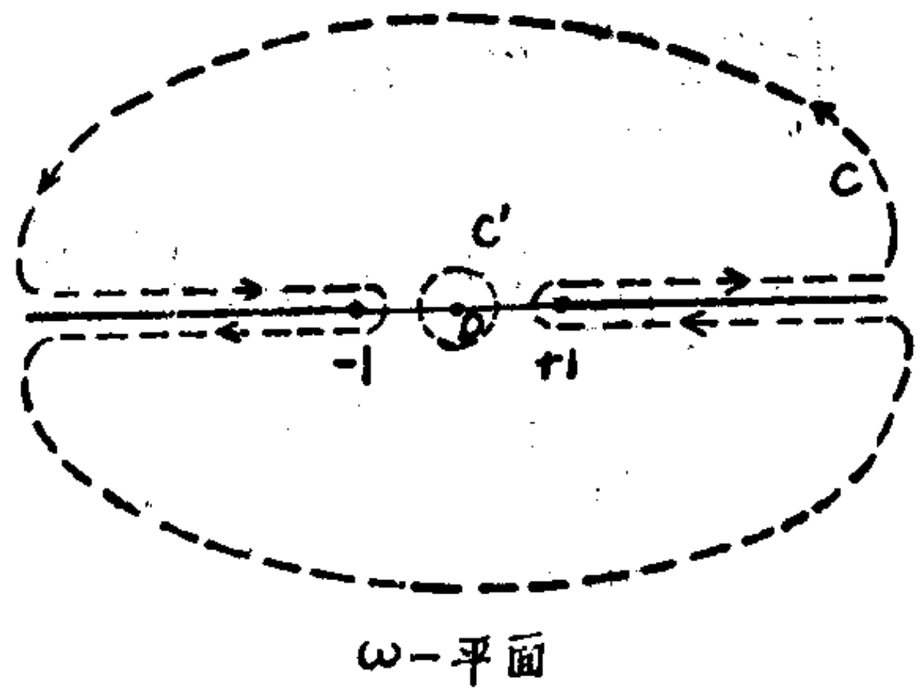
$$|\omega|\geqslant 1+\frac{2mm_\pi+m_\pi^2}{Q^2}\to 1$$

处有割线。由此可知,$T_i(Q^2,\ \omega)$ 在 ω 平面上,在 $|\omega|\geqslant 1$ 处有割线,在此割线以外却是解析的,可以展开为 ω 的级数

$$T_i(Q^2,\ \omega)=\sum_n A_{in}E_{in}(Q^2)\omega^n。\tag{7-68}$$

结构函数的矩 既然,$T_i(Q^2,\ \omega)$ 在 ω 平面上有割线 $|\omega|\geqslant 1$,那么 $\frac{T_i}{\omega^{n+1}}$ 在 ω 平面,除割线 $|\omega|\geqslant 1$ 外,还有极点 $\omega=0$,如下图

所示。它在ω平面上，沿c的回路积分和沿c'的回路积分是相等的，即



$$\oint_{c'} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega = \oint_{c} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}。$$

而对c的回路积分

$$\oint_{c} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega = \int_{-\infty}^{-1} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{-1}^{-\infty} \frac{T_i^*(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{1}^{\infty} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{\infty}^{1} \frac{T_i^*(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega。$$

这里，T_i表示实轴上的取值，T_i^*表示实轴下的取值；假设在∞远处T_i有限，$\frac{T_i}{\omega^{n+1}}$为零，因而积分为零。上式写成

$$\oint_{c} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega = \int_{-\infty}^{-1} \frac{T_i(Q^2,\ \omega) - T_i^*(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{1}^{\infty} \frac{T_i(Q^2,\ \omega) - T^*(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega = 2i\left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{Im}\,T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega\right]$$

把(7-67)式代入，就得到

$$\oint_{c} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega = i\left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{W_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega + \int_{1}^{\infty}\int \frac{W_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega\right] = i\int_{1}^{\infty} \frac{W_i(Q^2,\ \omega) + (-1)^{n+1} W_i(Q^2,\ -\omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega。$$

利用(7-59)式，上式成为

$$\oint_c \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega$$

$$=i\begin{cases}\int_1^\infty [1+(-1)^n]\dfrac{W_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega & (J^e_\mu,\ J^Z_\mu)\\ \int_1^\infty \dfrac{W_i^{(\nu)}(Q^2,\ \omega)+(-1)^n W_i^{(\bar\nu)}(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}} & (J^W_\mu)\end{cases}。$$

对 c' 的回路积分

$$\oint_{c'} \frac{T_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega$$

$$=\oint_{c'}\sum_k \frac{A_{ik}E_{ik}(Q^2)\omega^k}{\omega^{n+1}}\,d\omega = 2\pi i\,A_{in}E_{in}(Q^2)。$$

把二者相等起来，就得到

$$A_{in}E_{in}(Q^2)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\int_1^\infty [1+(-1)^n]\dfrac{W_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega & (J^e_\mu,\ J^Z_\mu)\\ \dfrac{1}{2\pi}\int_1^\infty \dfrac{W_i^{(\nu)}(Q^2,\ \omega)+(-1)^n W_i^{(\bar\nu)}(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\,d\omega。 & (J^W_\mu)\end{cases}$$

(7-69)

把变数由 ω 换成 x，得

$$A_{in}E_{in}(Q^2)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}[1+(-1)^n]\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}W_i(Q^2,\ x) & (J^e_\mu、\ J^Z_\mu)\\ \dfrac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}[W_i^{(\nu)}(Q^2,\ x)+(-1)^n W_i^{(\bar\nu)}(Q^2,\ x)]。\end{cases}$$

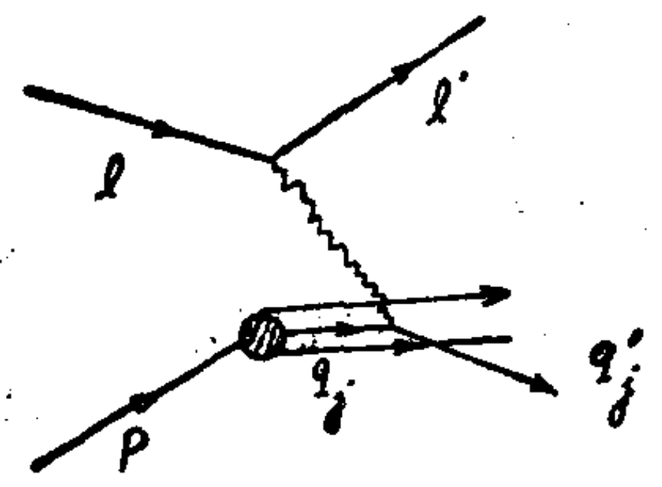
(J^W_μ)

(7-70)

左面是 T_i 按 $\omega\left(\text{或}\ \frac{1}{x}\right)$ 的展开系数，右面是结构函数的矩。左面的量可以由理论来推测，右面的量可以用实验进行测量。这样，(7-70)式就为理论与实验比较提供了条件。

§6. 渐近自由的夸克模型

深度非弹散射的结构函数 $W_1(Q^2, x)$，和强子的内部结构有关，要从强子的结构模型来进行研究。强子由夸克组成。夸克之间存在由胶子传播的作用。这作用具有如(7-33)式所示的渐近自由的性质。当光子或中间玻色子的动量 $Q^2 \gg m_N^2$ 时，它的波长很小于核子的线度。它对强子的作用，深入强子内部，直接施加于夸克。而夸克和夸克之间的强作用，由于渐近自由的性质，实际很弱，以致可以忽略不计。这时，轻子对强子的散射过程，就可以归结为轻子对自由夸克的散射过程，如右图所示。设想：在核子中，找到动量在 $z \to z+dz$ 间的 j 类夸克的几率为 $f_j(z)$；轻子和这自由夸克的弹性散射的结构函数为 $W_i^{(l,q_j)}(z)$。那么，轻子和强子的深度非弹散射的结构函数，就是



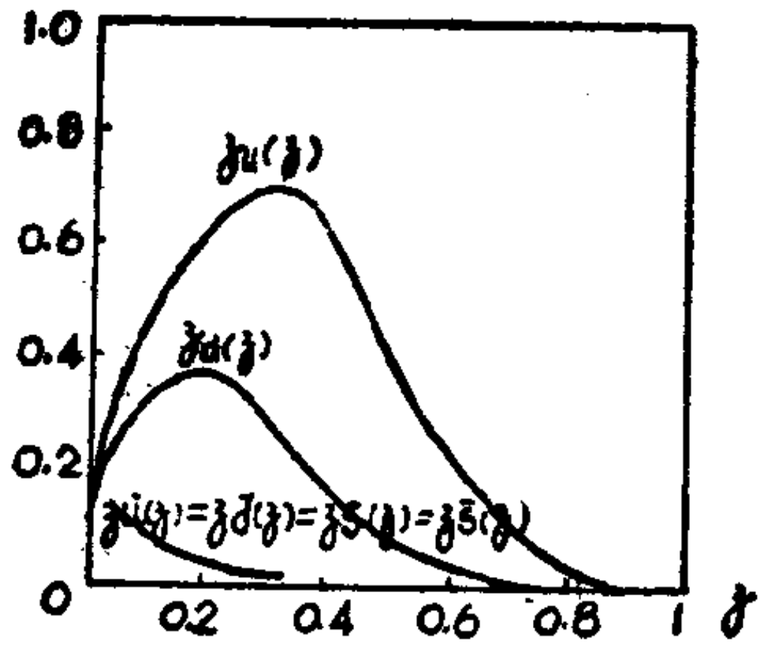
$$W_i^{(l,N)}(Q^2, x) = \sum_j \int_0^1 W_i^{(l,q_j)}(z) f_j(z) dz。 \qquad (7\text{-}71)$$

z 是夸克占有强子动量的分数。

夸克的分布函数　设想：强子的动量很大，处于强子中的自由夸克的动量也很大，而且沿强子运动方向的分量比垂直强子运动方向的分量大得多，以致后者可以忽略不计。这样，当强子的动量为 P 时，夸克的动量就是 $p=zP$ 而且方向一致。所以 $z(0<z<1)$ 就是夸克占有强子动量的分数，$f_j(z)dz$ 就是 j 夸克动量分数为 $z \to z+dz$ 时出现在强子中的几率。

从现代强子的夸克结构模型来看，夸克有六种：u、d、s、c、b、t。我们用 $u(z)$、$d(z)$、$s(z)$、$c(z)$、$b(z)$、$t(z)$ 表示质子中这六种夸克的分布几率，用 $\bar{u}(z)$、$\bar{d}(z)$、$\bar{s}(z)$、$\bar{c}(z)$、$\bar{b}(z)$、$\bar{t}(z)$ 表示相应的反

夸克的分布几率。由于 u、d 夸克互换等于质子、中子互换，所以，质子中 u 夸克的分布几率 $u(z)$ 等于中子中 d 夸克的分布几率，质子中 d 夸克的分布几率 $d(z)$ 也就是中子中 u 夸克的分布几率。目前的理论，还没有能力给出质子中夸克的分布几率。人们根据实验材料推测，质子中夸克分布的几率，有如左图所示的形式。



目前的理论，虽然还不能给出分布几率的具体形式，但是还是可以给出一些限制条件。人们认为质子由两个 u 夸克和一个 d 夸克组成，这就要求

$$\int_0^1 dz[u(z)-\bar{u}(z)]=2,$$

$$\int_0^1 dz[d(z)-\bar{d}(z)]=1,$$

$$\int_0^1 dz[s(z)-\bar{s}(z)]=0,$$

$$\int_0^1 dz[c(z)-\bar{c}(z)]=0,$$

$$\int_0^1 dz[t(z)-\bar{t}(z)]=0,$$

$$\int_0^1 dz[b(z)-\bar{b}(z)]=0。 \tag{7-72}$$

z 是夸克占有强子动量的分数，

$$\int_0^1 dz\cdot z[u(z)+\bar{u}(z)+d(z)+\bar{d}(z)+s(z)+\bar{s}(z)$$

$$+c(z)+\bar{c}(z)]=1-\varepsilon$$

就是 u、d、s、c 夸克占有的强子动量。它不等于 1，而等于 $1-\varepsilon\simeq 1-0.5=0.5$，表明：强子的动量，不全由它包含的夸克所占有，而

有一半旁落。所以，人们把夸克分成价夸克和海夸克，把质子包含的两个 u 夸克和一个 d 夸克叫做价夸克，把其它的都叫做海夸克，胶子也归之于海。目前实验 $\varepsilon\sim0.5$，表明：强子的动量，一半被价夸克占有，一半落入海中。

夸克作用流 在 $Q^2\gg m_N^2$ 时，夸克是渐近自由的，可以不计强作用的影响，只与轻子发生弱电作用。作用顶角如(7–48)式所示，作用流算符如 (7–49) 式所示。作用流的矩阵元则和 (7–52) 式相似，为

$$q_\mu=\langle p',\ s'|J_\mu(0)|\ p,\ s\rangle=\bar{u}_{s'}(p')\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_s(p),$$

$$J^e_\mu:\ a=Q_j,\ b=0;$$

$$J^W_\mu:\ a=1,\ b=1;$$

$$J^z_\mu:\ a=2T_3-4Q_j\sin^2\theta_w,\ b=2T_3。\qquad(7\text{–}73)$$

Q_j 是 j 夸克的电荷数，T_3 是 j 夸克的同位旋第三分量。把(7–73)式代入(7–43)式，就得到夸克作用流张量

$$W^{(j,q_j)}_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi z}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}\sum_{s,s'}\bar{u}_s(p)\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_{s'}(p')$$
$$\cdot\bar{u}_{s'}(p')\gamma_\nu(a+b\gamma_5)u_s(p)(2\pi)^4\delta^4(p+q-p')$$
$$=\frac{1}{4z}\int d^4p'\delta(p'^2)\delta^4(p+q-p')\sum_{s,s'}\bar{u}_s(p)\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_{s'}(p')$$
$$\cdot\bar{u}_{s'}(p')\gamma_\nu(a+b\gamma_5)u_s(p),$$

z 的出现是由于(7–43)式的 $d\sigma$ 中的 m 是核子质量，对于夸克质量则应是 zm。

夸克的结构函数 将上式对终态夸克动量 p' 积分得

$$W^{(j,q_j)}_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{4z}\delta((p+q)^2)$$
$$\cdot\sum_{s,s'}\bar{u}_s(p)\gamma_\mu(a+b\gamma_5)u_{s'}(p')\bar{u}_{s'}(p')\gamma_\nu(a+b\gamma_5)u_s(p)$$
$$=\frac{1}{4z}\delta(p^2+2p\cdot q+q^2)$$
$$\cdot\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)\gamma_\mu(a+b\gamma_5)(\not{p}'+m)\gamma_\nu(a+b\gamma_5)]。$$

由于是深度非弹过程, $Q^2 \gg m^2$, $p^2 = z^2 m^2$, 式中的 m 项都可以略去不计, 因而

$$W_{\mu\nu}^{(l,q)}(p,\ q) = \frac{1}{4z}\delta(2p\cdot q + q^2)$$
$$\cdot \mathrm{Tr}[\not{p}\gamma_\mu(a+b\gamma_5)\not{p}'\gamma_\nu(a+b\gamma_5)]$$
$$= \frac{1}{4z}\delta(2p\cdot q + q^2)$$
$$\cdot \mathrm{Tr}[(a^2+b^2)\not{p}\gamma_\mu\not{p}'\gamma_\nu + 2ab\not{p}\gamma_\mu\not{p}'\gamma_\nu\gamma_5]$$
$$= \frac{1}{z}\delta(2p\cdot q(z-x))$$
$$\cdot [(a^2+b^2)(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p\cdot p')$$
$$- 2iab\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p^\lambda p'^\rho]。$$

考虑到 $p' = p+q$, $p = zP$, 上式又可以写成

$$W_{\mu\nu}^{(l,q)} = \frac{1}{z}\delta(2p\cdot q(z-x))[(a^2+b^2)(2z^2 p_\mu p_\nu + zp_\mu q_\nu + zq_\mu p_\nu$$
$$- zg_{\mu\nu}p\cdot q) - 2iab\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}zp^\lambda q^\rho],$$

$\delta(2p\cdot q(z-x))$ 意味着 $-2z\dfrac{p\cdot q}{q^2} = 1$,

$$z(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) = -2z^2\frac{p\cdot q}{q^2}(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu),$$

$$2z^2\frac{(p\cdot q)^2}{(q^2)^2}\ q_\mu q_\nu + z\frac{p\cdot q}{q^2}\ q_\mu q_\nu = 0。$$

把它们加入上式, 得

$$W_{\mu\nu}^{(l,q)} = \frac{\delta(z-x)}{z2m\nu}\Big[\ (a^2+b^2)$$
$$\cdot\left(2z^2 p_\mu p_\nu - 2z^2\ \frac{p\cdot q}{q^2}(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + 2z^2\frac{(p\cdot q)^2}{(q^2)^2}\ q_\mu q_\nu\right)$$
$$+ (a^2+b^2)(-zp\cdot q)\ \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) - 2iab\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}zp^\lambda q^\rho\ \Big]$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{(a^2+b^2)}{2}\delta(z-x)$$
$$+\frac{1}{m^2}\left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right)\frac{m}{\nu}z\delta(z-x)(a^2+b^2)$$
$$-i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{p^\lambda q^\rho}{2m^2}2ab\frac{m}{\nu}\delta(z-x)。$$

把它和定义结构函数的(7-58)式比较，就得到夸克结构函数

$$W_1^q(z) = \frac{a^2+b^2}{2}\delta(z-x),$$
$$W_2^q(z) = \frac{m}{\nu}(a^2+b^2)z\delta(z-x),$$
$$W_3^q(z) = 2\frac{m}{\nu}ab\delta(z-x)。 \tag{7-74}$$

强子的结构函数　把(7-74)式代入(7-71)式，就得到强子的结构函数

$$W_1^N = \sum_j \int_0^1 dz \frac{a_j^2+b_j^2}{2}\delta(z-x)f_j(z)$$
$$= \sum_j \frac{a_j^2+b_j^2}{2}f_j(x),$$
$$W_2^N = \sum_j \int_0^1 dz \frac{m}{\nu}(a_j^2+b_j^2)z\delta(z-x)f_j(z)$$
$$= \sum_j \frac{m}{\nu}x(a_j^2+b_j^2)f_j(x),$$
$$W_3^N = \sum_j \int_0^1 dz 2\frac{m}{\nu}a_jb_j\delta(z-x)f_j(z)$$
$$= \sum_j 2\frac{m}{\nu}a_jb_jf_j(x)。 \tag{7-75}$$

按照(7-61)式定义的标度函数，在这情况下，就是

$$G_1^N = \sum_j \frac{a_j^2+b_j^2}{2}f_j(x) = F_1^N(x),$$
$$G_2^N = \sum_j (a_j^2+b_j^2)xf_j(x) = F_2^N(x),$$
$$G_3^N = \sum_j 2a_jb_jf_j(x) = F_3^N(x)。 \tag{7-76}$$

它们都只和 ω 有关，与 Q^2 无关。渐近自由夸克的理论，和实验结果定性地一致。QCD 得到了初步的检验。

(7-76)式是弱电过程中标度结构函数的一般表示式。现在，我们来看看，在具体过程中，它的具体形式。

在电磁过程中，$a=Q_i$, $b=0$。和 l, $p\to l', p'$ 相应的夸克过程为

$$l,(u,\ d,\ s,\ c,\ \bar{u},\ \bar{d},\ \bar{s},\ \bar{c})\to l',(u',\ d',\ s',\ c',\bar{u}',\bar{d}',\bar{s}',\bar{c}')。$$

强子的标度结构函数是

$$F_1^{lp}(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{4}{9}[u(x)+\bar{u}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]+\frac{1}{9}[d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]\right\},$$

$$F_2^{lp}(x)=\frac{4}{9}x[u(x)+\bar{u}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]+\frac{1}{9}x[d(x)+\bar{d}(x)+s(x)+\bar{s}(x)],$$

$$F_3^{lp}(x)=0,\quad F_2^{lp}(x)=2xF_1^{lp}(x)。$$

和 l, $n\to l'$, n 相应的夸克过程也是

$$l,(u,\ d,\ s,\ c,\ \bar{u},\ \bar{d},\ \bar{s},\ \bar{c})\to l',(u',\ d',\ s',\ c',\ \bar{u}',\ \bar{d}',\ \bar{s}',\ \bar{c}')。$$

但是，中子中 u 夸克的分布函数和质子中 d 夸克的一样，是 $d(x)$；中子中 d 夸克的分布函数和质子中 u 夸克的一样，是 $u(x)$；其它夸克的分布函数，中子中的和质子中的一样。所以，其标度结构函数是

$$F_1^{ln}(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{4}{9}[d(x)+\bar{d}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]+\frac{1}{9}[u(x)+\bar{u}(x)+s(x)+\bar{s}(x)]\right\},$$

$$F_2^{ln}(x)=\frac{4}{9}x[d(x)+\bar{d}(x)+c(x)+\bar{c}(x)]+\frac{1}{9}x[u(x)+\bar{u}(x)+s(x)+\bar{s}(x)],$$

$$F_3^{\bar{\nu}n}(x)_e=0,\quad F_2^{\bar{\nu}n}(x)_e=2xF_1^{\bar{\nu}n}(x)_e。$$

在荷电流过程中，$a=1$, $b=\pm1$。和 ν, $\bar{p}\to l$, $\bar{n}$ 相应的夸克过程是 ν, $(\bar{u}, d)\to l$, $(\bar{d}, u)$。和 $\bar{\nu}$, $\bar{n}\to\bar{l}$, $\bar{p}$ 相应的夸克过程却是 $\bar{\nu}$, $(\bar{d}, u)\to\bar{l}$, $(\bar{u}, d)$。但是，由于夸克分布函数有 $u(x)$、$d(x)$ 交换关系，因而强子的结构函数是相等的，

$$F_1^{\nu p}(x)_{c.c}=F_1^{\bar{\nu}n}(x)_{c.c}=\bar{u}(x)+d(x),$$

$$F_2^{\nu p}(x)_{c.c}=2xF_1^{\nu p}(x)_{c.c}=F_2^{\bar{\nu}n}(x)_{c.c}=2xF_1^{\bar{\nu}n}(x)_{c.c}$$

$$=2x[\bar{u}(x)+d(x)],$$

$$F_3^{\nu p}(x)_{c.c}=F_3^{\bar{\nu}n}(x)_{c.c}=2[d(x)-\bar{u}(x)]。$$

和 $\bar{\nu}$, $p\to\bar{l}$, n、ν, $\bar{n}\to l$, $\bar{p}$ 相应的夸克过程是 $\bar{\nu}$, $(u, \bar{d})\to\bar{l}$, $(d, \bar{u})$、ν, $(d, \bar{u})\to l$, $(u, \bar{d})$，其强子结构波函数，按照上述的同样理由，是相等的

$$F_1^{\bar{\nu}p}(x)_{c.c}=F_1^{\nu n}(x)_{c.c}=u(x)+\bar{d}(x),$$

$$F_2^{\bar{\nu}p}(x)_{c.c}=F_2^{\nu n}(x)_{c.c}=2xF_1^{\bar{\nu}p}(x)_{c.c}=2xF_1^{\nu n}(x)_{c.c}$$

$$=2x[u(x)+\bar{d}(x)],$$

$$F_3^{\bar{\nu}p}(x)_{c.c}=F_3^{\nu n}(x)_{c.c}=2[-u(x)+\bar{d}(x)]。$$

在中性流过程中，$a=2T_3-4Q_j\sin^2\theta_W$, $b=2T_3$。和 ν, $p\to\nu'$, p'、$\bar{\nu}$, $p\to\bar{\nu}'$, p' 相应的夸克过程为

$$\nu(\bar{\nu}),\ (u,\ d,\ s,\ c,\ \bar{u},\ \bar{d},\ \bar{c},\ \bar{s})$$

$$\to\nu(\bar{\nu}),\ (u,\ d,\ s,\ c,\ \bar{u},\ \bar{d},\ \bar{c},\ \bar{s})。$$

其强子结构函数是

$$F_1^{\nu p}(x)_{n.c}=F_1^{\bar{\nu}p}(x)_{n.c}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)^2+1\right][u(x)+c(x)+\bar{u}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2+1\right]$$

$$\cdot[d(x)+s(x)+\bar{d}(x)+\bar{s}(x)];$$

$$F_2^{\nu p}(x)_{n.c}=F_2^{\bar{\nu}p}(x)_{n.c}=2xF_1^{\nu p}(x)_{n.c}=2xF_1^{\bar{\nu}p}(x)_{n.c};$$

$$F_3^{\nu p}(x)_{n.c}=F_3^{\bar{\nu}p}(x)_{n.c}$$

$$=2\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)[u(x)+c(x)-\bar{u}(x)-\bar{c}(x)]$$

$$+2\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)[d(x)+s(x)-\bar{d}(x)-\bar{s}(x)]。$$

在以上诸式中，作代换$u(x)\rightleftarrows d(x)$，$\bar{u}(x)\rightleftarrows\bar{d}(x)$，就得到$\nu(\bar{\nu})$，$n$过程的强子结构函数

$$F_1^{\nu n}(x)_{n.c}=F_1^{\bar{\nu}n}(x)_{n.c}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)^2+1\right][d(x)+c(x)+\bar{d}(x)+\bar{c}(x)]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)^2+1\right]$$

$$\cdot[u(x)+s(x)+\bar{u}(x)+\bar{s}(x)];$$

$$F_2^{\nu n}(x)_{n.c}=F_2^{\bar{\nu}n}(x)_{n.c}=2xF_1^{\nu n}(x)_{n.c}=2xF_1^{\bar{\nu}n}(x)_{n.c};$$

$$F_3^{\nu n}(x)_{n.c}=F_3^{\bar{\nu}n}(x)_{n.c}$$

$$=2\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)[d(x)+c(x)-\bar{d}(x)-\bar{c}(x)]$$

$$+2\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)[u(x)+s(x)-\bar{u}(x)-\bar{s}(x)]。$$

第八章　算符乘积展开及其应用

在基本粒子的理论计算中，常常要处理算符乘积的问题。例如，在上一章(7-55)式表示的 $W_{\mu\nu}$ 和(7-63)式表示的 $T_{\mu\nu}$ 中，就都有弱电作用流的乘积。对于不参与强作用的轻子，对于可以略去强作用的自由夸克，用一般的微扰理论，就可以算出这些弱电作用流乘积的结果。对于深受强作用影响的粒子，弱电作用流乘积的计算，就显得艰深繁难。微扰计算，或者无能为力，或者不能完全解决问题，还要借助其他方法。微扰计算的方法，也是多种多样的。级数展开，是人们常用的方法。算符乘积是不是也可以作级数展开呢？在一定条件下，也是可以的。在这一章中，我们要论述的正是这个问题。算符乘积的级数展开，和一般的级数展开是不同的。在一般的级数展开中，都有一组正交、完备的函数系，如球函数、柱函数等。而算符乘积的展开，却缺少一组正交、完备的函数系，只有少数几个展开函数。所以，我们把它叫做展开，而不叫做级数展开。也可以叫做级数展开，那只是说它和级数展开有相近似的意义。

§1. 自由场算符乘积展开

自由场是人们所熟悉的。自由场算符乘积的展开，也是比较容易理解的。我们先对它进行论述，以便理解算符乘积展开的意义和方法。这对于深入理解量子场论的内容，对于进一步论述相互作用场算符乘积的展开，都会有帮助的。

场的平面波解　大家知道，自由场的场量，如实标量场 $\phi(x)$，

旋量场 $\psi(x)$，都可以分解为平面波

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}[a(\vec{k})e^{-ikx}+a^+(\vec{k})e^{ikx}],$$

$$[a(\vec{k}),a(\vec{k}')]=[a^+(\vec{k}),a^+(\vec{k}')]=0,\ [a(\vec{k}),a^+(\vec{k}')]=\delta^3(\vec{k}-\vec{k}');$$

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s[b(p,s)u(p,s)e^{-ipx}+d^+(p,s)v(p,s)e^{ipx}],*$$

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s[b^+(p,s)\bar{u}(p,s)e^{ipx}+d(p,s)\bar{v}(p,s)e^{-ipx}],$$

$$\{b(p,s),b(p',s')\}=\{b^+(p,s),b^+(p',s')\}=0,$$

$$\{b(p,s),b^+(p',s')\}=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),$$

$$\{d(p,s),d(p',s')\}=\{d^+(p,s),d^+(p',s')\}=0,$$

$$\{d(p,s),d^+(p',s')\}=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'),$$

$$\{b(p,s),d(p',s')\}=\{b(p,s),d^+(p',s')\}$$

$$=\{b^+(p,s),d(p',s')\}=\{b^+(p,s),d^+(p',s')\}=0,$$

$$(\not{p}-m)u(p,s)=0,\ (\not{p}+m)v(p,s)=0,$$

$$\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s)=\not{p}+m,\ \sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s)=\not{p}-m。$$

(8-1)

为了讨论问题的方便，我们把场量分成正频部分和负频部分：

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x),$$

$$\phi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}a(\vec{k})e^{-ikx},$$

$$\phi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}a^+(k)e^{ikx};$$

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x),$$

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s b(p,s)u(p,s)e^{-ipx},$$

---

* 这展开式和一般书中不同，以 $\frac{1}{\sqrt{2E}}$ 代替 $\sqrt{\frac{m}{E}}$，对 $m\to 0$ 的计算是方便的。

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s d^+(p,\ s)v(p,\ s)e^{ipx},$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s d(p,\ s)\bar{v}(p,\ s)e^{-ipx},$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E}}\sum_s b^+(p,\ s)\bar{u}(p,\ s)e^{ipx}。$$

(8-2)

注意，正频部分总是和粒子（或反粒子）的消灭算符联系在一起，负频部分总是和粒子（或反粒子）的产生算符联系在一起。所以，场量上的（+）号意味着粒子或反粒子的消灭，（－）号意味着粒子或反粒子的产生。

标量场算符的乘积　由正规乘积的定义

$$:\phi(x)\phi(y):=:(\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(y)):$$
$$=\phi^+(x)\phi^+(y)+\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)$$
$$+\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x)$$

可知，二标量场算符的乘积可以展开为

$$\phi(x)\phi(y)=:\phi(x)\phi(y):+[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)],$$
$$\phi(y)\phi(x)=:\phi(y)\phi(x):+[\phi^{(+)}(y),\ \phi^{(-)}(x)]。\quad(8\text{-}3)$$

算符的对易关系是 C 数。按正规乘积排列的算符，消灭算符总是在产生算符的右边，因而其真空平均值总是零。所以，由上式取真空平均值，得

$$[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)]=\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle,$$
$$[\phi^{(+)}(y),\ \phi^{(-)}(x)]=\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle。$$

我们用符号来表示它们，令

$$[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)]=\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$
$$=-i\Delta^-(x-y,\ m)=\overbrace{\phi(x)\phi(y)}^{*},$$
$$[\phi^{(+)}(y),\ \phi^{(-)}(x)]=\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$$
$$=i\Delta^+(x-y,\ m)=\overbrace{\phi(y)\phi(x)}^{*},$$

$$\langle 0|[\phi(x),\ \phi(y)]|0\rangle = -i\Delta(x-y,\ m),$$

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = i\Delta_f(x-y,\ m) = \overbrace{\phi(x)\phi(y)}. \tag{8-4}$$

显然，按上式定义的四个函数之间，存在如下关系

$$\Delta(x-y,\ m) = \Delta^-(x-y,\ m) + \Delta^+(x-y,\ m),$$

$$\Delta_f(x-y,\ m) = -\theta(x_0-y_0)\Delta^-(x-y,\ m) + \theta(y_0-x_0)\Delta^+(x-y,\ m)。 \tag{8-5}$$

把场量的平面波解(8-2)式代入(8-4)式，得

$$\Delta^-(x,\ m) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ikx},$$

$$\Delta^+(x,\ m) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{ikx},$$

$$\Delta(x,\ m) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\epsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{ikx},$$

$$\Delta_f(x,\ m) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2+i\epsilon}, \tag{8-6}$$

$$\theta(k_0) = \begin{cases} 1, & k_0>0 \\ 0, & k_0<0, \end{cases} \qquad \epsilon(k_0) = \theta(k_0)-\theta(-k_0)。$$

由(8-6)式可知，Δ^-、Δ^+、Δ、Δ_f 都是奇异函数。人们对它进行了系统的研究*。它们作为 x、m 的函数，解析的表示形式是很复杂的，在光锥附近，它们可近似表示为

$$\Delta^-(x,\ m) \sim \frac{-i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2-ix_0\varepsilon},$$

$$\Delta^+(x,\ m) \sim \frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2+ix_0\varepsilon},$$

$$\Delta(x,\ m) \sim \frac{-i}{4\pi^2}\left[\frac{1}{x^2-ix_0\varepsilon}-\frac{1}{x^2+ix_0\varepsilon}\right],$$

$$\Delta_f(x,\ m) \sim \frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2-i\varepsilon}。 \tag{8-7}$$

---

* Bing Lin Young, "Application of Perturhative Quantum Chromodynamics and Renormalization Group", p. 63.

旋量场算符的乘积　基于正规乘积的定义

$$:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y):=:(\psi_\alpha^{(+)}(x)+\psi_\alpha^{(-)}(x))(\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)+\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)):$$
$$=\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)+\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)$$
$$+\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)-\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\psi_\alpha^{(+)}(x)$$

可以推知，两个旋量场算符的乘积，可以展开为

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)=:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y):+\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\ \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}。$$

同理　$\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)=:\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x):+\{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y),\ \psi_\alpha^{(-)}(x)\}$。

我们定义

$$S^-_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=i\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\ \bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\}=i\overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)},$$

$$S^+_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=i\{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y),\ \psi_\alpha^{(-)}(x)\}=i\overbrace{\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)},$$

$$S_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=i\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(y)\},$$

$$S_{f\alpha\beta}(x-y,\ m)=-i\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle。\qquad(8\text{–}8)$$

显然，它们之间有如(8–5)式所示的关系

$$S(x-y,\ m)=S^-(x-y,\ m)+S^+(x-y,\ m),$$

$$S_f=-\theta(x_0-y_0)S^-(x-y,\ m)+\theta(y_0-x_0)S^+(x-y,\ m)。\qquad(8\text{–}9)$$

由(8–8)式可知，S 上的 −、+ 号，意味着正、反粒子算符的收缩。这也是 Δ 上 −、+ 号的起因。

把(8–2)式代入(8–8)式，得

$$S^-_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p\,d^3p'}{\sqrt{2E\,2E'}}\sum_{s,s'}\{b(p,\ s),\ b^+(p',\ s')\}$$
$$\cdot u(p,\ s)\bar{u}(p',\ s')e^{-ipx+ip'y}$$
$$-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}\sum_s u(p,\ s)\bar{u}(p,\ s)e^{-ip(x-y)}$$
$$=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}(\not{p}+m)e^{-ip(x-y)}$$
$$=(i\not{\partial}_x+m)\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}e^{-ip(x-y)}$$
$$=(i\not{\partial}_x+m)\Delta^-(x-y,\ m)。$$

同理，得

$$S^{+}_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\alpha\beta}\Delta^{+}(x-y,\ m),$$
$$S_{\alpha\beta}(x-y,\ m)=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y,\ m),$$
$$S_{f\alpha\beta}(x-y,\ m)=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{\alpha\beta}\Delta_f(x-y,\ m)。 \qquad (8\text{–}10)$$

S 函数和 Δ 函数一样，也都是奇异函数。它们的解析表示式也是很繁杂的。把表示 Δ 函数在光锥附近 $x^2\sim0$ 的行为的 (8–7) 式，代入(8–10)式，就得到

$$S^{-}(x,\ m)\sim\frac{-1}{2\pi^2}\frac{x^\mu\gamma_\mu}{(x^2-i\epsilon x_0)^2},$$
$$S^{+}(x,\ m)\sim\frac{1}{2\pi^2}\frac{x^\mu\gamma_\mu}{(x^2+i\epsilon x_0)^2},$$
$$S(x,\ m)\sim\frac{i}{\pi}x^\mu\gamma_\mu\delta'(x^2)\epsilon(x_0),$$
$$S_f(x,\ m)=\frac{1}{2\pi^2}\frac{x^\mu\gamma_\mu}{(x^2-i\epsilon)^2}。 \qquad (8\text{–}11)$$

它表示费米算符收缩的光锥行为。

作用流算符 在电磁作用的理论计算中，碰到的是流算符。需要进行讨论的，是流算符乘积展开。为此，我们先定义流算符。为了便于推广，我们定义味空间的 $SU_f(3)$ 矢量流算符

$$V^a_\mu(y)=:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi_c(y):, \qquad (8\text{–}12)$$

和轴矢量流算符

$$A^a_\mu(y)=:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi_c(y):。 \qquad (8\text{–}13)$$

c 表示颜色。我们假设流算符是颜色单态，是 $SU_f(3)$ 味空间的矢量八重态。$\lambda^\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$是盖尔曼矩阵。它有如(7–7) 式表示的形式。

用(7–49)式表示的、GWS理论的电磁流，是(8–12)式、(8–13)式的线性组合。由于

$$T^+=\frac{1}{2}(\lambda^1+i\lambda^2),\ T_3=\frac{\lambda^3}{2},\ Q=\frac{\lambda^3}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\lambda^8}{2},$$

所以

$$J^e_\mu=V^3_\mu+\frac{1}{\sqrt{3}}V^8_\mu,\ J^W_\mu=(V^1_\mu+A^1_\mu)+i(V^2_\mu+A^2_\mu),$$

$$J^Z_\mu=(2-4\sin^2\theta_W)V^3_\mu+2A^3_\mu-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W V^8_\mu。\qquad(8\text{-}14)$$

矢量流算符乘积 按(8-12)式的定义,矢量流算符乘积为

$$V^\alpha_\mu(y)V^\beta_\nu(0)=:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\sigma(y)::\bar\psi_{\sigma'}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):。$$

按照威克(Wick)定理,它可以展开为,包括所有可能的正粒子收缩 $\overbrace{\psi\quad\bar\psi}$ 和反粒子收缩 $\overbrace{\bar\psi\quad\psi}$ 的正规乘积之和,即

$$V^\alpha_\mu(y)V^\beta_\nu((0)=:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\sigma(y)\bar\psi_{\sigma'}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):$$

$$+:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\overbrace{\psi_\sigma(y)\bar\psi_{\sigma'}}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):$$

$$+:\overbrace{\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\sigma(y)\bar\psi_{\sigma'}}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):$$

$$+:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\overbrace{\psi_\sigma(y)\bar\psi_{\sigma'}}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):。$$

按照(8-8)式,正粒子收缩用 S^- 表示,反粒子收缩用 S^+ 表示,上式可以写成

$$V^\alpha_\mu(y)V^\beta_\nu(0)=:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\sigma(y)\bar\psi_{\sigma'}(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):$$

$$-i:\bar\psi_\sigma(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}S^-(y,\ m)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_\sigma(0):$$

$$+i:\bar\psi_\sigma(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\sigma(y):$$

$$-N_\sigma\mathrm{Tr}\left[S^-(y,\ m)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。\qquad(8\text{-}15)$$

在光锥附近 $y^2\to0$,第一项是有限的,第二、三、四项是奇异

的，由(8–11)式可以确定它们的奇异性。

$$\text{第四项} = -\frac{N_0}{4\pi^4}\frac{y^\sigma y^\rho}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\sigma\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\gamma_\rho\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。$$

由于

$$\mathrm{Tr}\,\frac{\lambda^\alpha}{2}\,\frac{\lambda^\beta}{2}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta},$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho)=4(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}),$$

所以

$$\text{第四项}=\frac{N_0\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)。\tag{8–16}$$

$$\text{第二项}+\text{第三项}=\frac{i}{2\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}$$
$$\cdot\left[:\bar\psi_0(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_0(0):-:\bar\psi_0(0)\gamma_\nu\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\lambda^\beta}{2}\gamma_\sigma\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_0(y):\right]。$$

令

$$S_{\mu\sigma\nu\rho}=g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma},\tag{8–17}$$

并考虑到

$$\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu=S_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5,$$
$$\lambda^\alpha\lambda^\beta=(d^{\alpha\beta\gamma}+if^{\alpha\beta\gamma})\lambda^\gamma,$$

则

$$\text{第二项}+\text{第三项}=\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}$$
$$\cdot\left\{:\bar\psi_0(y)\left[S_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5\right](d^{\alpha\beta\gamma}+if^{\alpha\beta\gamma})\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):\right.$$
$$\left.-:\bar\psi_0(0)\left[S_{\nu\sigma\mu\rho}\gamma^\rho+i\varepsilon_{\nu\sigma\mu\rho}\gamma^\rho\gamma_5\right](d^{\beta\alpha\gamma}+if^{\beta\alpha\gamma})\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):\right\}$$
$$=\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}\left\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[:\bar\psi_0(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):\right.\right.$$
$$\left.-:\bar\psi_0(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):\right]+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}$$
$$\cdot\left[:\bar\psi_0(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):-:\bar\psi_0(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):\right]$$

$$+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):+:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y)\right]$$

$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\left[:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):\right.$$

$$\left.+:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):\right]\Big\}_0$$

令

$$\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):-:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):,$$

$$\sum^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):+:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):,$$

$$\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):-:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):,$$

$$\sum_1^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_0(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(0):+:\bar{\psi}_0(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_0(y):,\tag{8-18}$$

则

$$\text{第二项}+\text{第三项}=\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+i\,d^{\alpha\beta\gamma}\,\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\,\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$-f^{\alpha\beta\gamma}\,\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)\}_0\tag{8-19}$$

把(8-16)式、(8-19)式代入(8-15)式，就得到在光锥附近 $y^2\sim0$，

$$V_\mu^\alpha(y)V_\nu^\beta(0)\simeq\frac{N_0\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)$$

$$+\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\tau\nu\rho}\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)\}_0\tag{8-20}$$

同理可得

$$V_\nu^\beta(0)V_\mu^\alpha(y)\simeq\frac{N_0\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\frac{1}{(y^2+iy_0\varepsilon)^4}(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)$$

$$+\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2+iy_0\varepsilon)^2}\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_n^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)\},$$

而两个矢量流算符的对易子，就是

$$[V_\mu^\alpha(y),\ V_\nu^\beta(0)]=\frac{N_c\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\Big[\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}$$

$$-\frac{1}{(y^2+iy_0\varepsilon)^4}\Big](y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)$$

$$+\frac{i}{4\pi^2}\Big[\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}-\frac{1}{(y^2+iy_0\varepsilon)^2}\Big]$$

$$\cdot y^\sigma\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho\gamma}(y,\ 0)-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)\}。\qquad(8\text{–}21)$$

轴矢量流算符乘积　按照 (8–13) 式的定义，轴矢量流算符的乘积为

$$A_\mu^\alpha(y)\,A_\nu^\beta(0)=:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)::\bar\psi_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):。$$

按照威克定理，把它展开为包括所有可能正粒子收缩和反粒子收缩的正规乘积之和，即

$$A_\mu^\alpha(y)\,A_\nu^\beta(0)=:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)\bar\psi_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$+:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\overbrace{\psi_c(y)\bar\psi_{c'}(0)}^{*}\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$+:\overbrace{\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)\bar\psi_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0)}^{*}:$$

$$+:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\overbrace{\psi_c(y)\bar\psi_{c'}(0)}^{*}\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$-:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)\bar\psi_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$-i:\bar\psi_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}S^-(y;\ m)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_c(0):$$

$$+i:\bar{\psi}_c(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y):$$

$$-N_c\mathrm{Tr}\left[S^-(y,\ m)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。$$

考虑到 S 中包含 γ^σ，而 $\gamma_5\gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_5=-\gamma^\sigma\gamma_\mu$，上式成为

$$A^\alpha_\mu(y)A^\beta_\nu(0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)\bar{\psi}_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$-i:\bar{\psi}_c(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}S^-(y,\ m)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_c(0):$$

$$+i:\bar{\psi}_c(0)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y):$$

$$-N_c\mathrm{Tr}\left[S^-(y,\ m)\gamma_\nu\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。\qquad(8\text{–}22)$$

把它和(8–15)式比较，可知，除第一项不同外，第二、三、四项完全一样。第一项是有限的，而且在 $(y,\ \mu,\ \alpha)\rightleftarrows(0,\ \nu,\ \beta)$ 下不变。所以，在任何情况下，

$$[A^\alpha_\mu(y),\ A^\beta_\nu(0)]=[V^\alpha_\mu(y),\ V^\beta_\nu(0)],\qquad(8\text{–}23)$$

在光锥极限下

$$A^\alpha_\mu(y)A^\beta_\nu(0)=V^\alpha_\mu(y)V^\beta_\nu(0)。\qquad(8\text{–}24)$$

由此可知，它们可以用(8–21)式和(8–20)式表示。

矢量流和轴矢量流的算符乘积　按照(8–12)式和(8–13)式的定义，矢量流和轴矢量流算符的乘积为

$$V^\alpha_\mu(y)A^\beta_\nu(0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_\rho(y)::\bar{\psi}_{\rho'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{\sigma'}(0):。$$

按照威克定理，把它展开为，包含所有可能的正粒子收缩和反粒子收缩的正规乘积之和，即

$$V^\alpha_\mu(y)A^\beta_\nu(0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_c(y)\bar{\psi}_{c'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$+:\bar{\psi}_c(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\overbrace{\psi_c(y)\bar{\psi}_{c'}(0)}^{*}\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{c'}(0):$$

$$+:\overline{\overline{\psi}_o(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_o(y)\overline{\psi}_{o'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{o'}(0)}:$$

$$+:\overline{\psi}_o(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\overline{\psi_o(y)\overline{\psi}_{o'}(0)}\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{o'}(0):$$

$$-:\overline{\psi}_o(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_o(y)\overline{\psi}_{o'}(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_{o'}(0):$$

$$-i:\overline{\psi}_o(y)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}S^-(y,\ m)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}\psi_o(0):$$

$$+i:\overline{\psi}_o(0)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi_o(y):$$

$$-N_o\mathrm{Tr}\left[S^-(y,\ m)\gamma_\nu\gamma_5\frac{\lambda^\beta}{2}S^+(-y,\ m)\gamma_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]。$$

它和(8–15)式表示的 $V^\alpha_\mu(y)V^\beta_\nu(0)$ 的差别，在于替换

$$\gamma_\nu\to\gamma_\nu\gamma_5,\ \gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\to\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_5。\tag{8–25}$$

由于

$$\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu=S_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5,$$

$$\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_5=S_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\gamma^\rho,$$

上述的替换，就等效于替换

$$S_{\mu\sigma\nu\rho}\rightleftarrows i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}。$$

在(8–20)式、(8–21)式中，这替换又等价于

$$\Delta^{\gamma\rho}(y,\ 0)\rightleftarrows\Delta^{\gamma\rho}_a(y,\ 0),\ \sum^{\gamma\rho}(y,\ 0)\rightleftarrows\sum^{\gamma\rho}_a(y,\ 0)。\tag{8–26}$$

所以，在光锥极限下，$y^2\sim0$，有

$$V^\alpha_\mu(y)A^\beta_\nu(0)\simeq\frac{N_o\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)$$

$$+\frac{i}{4\pi^2}\frac{y^\sigma}{(y^2-iy_0\varepsilon)^3}\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}_a(y,\ 0)$$

$$+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum\nolimits^{\rho\gamma}_a(y,\ 0)$$

$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum\nolimits^{\rho\gamma}(y,\ 0)\},\tag{8–27}$$

$$[V^{\alpha}_{\mu}(y),\ A^{\beta}_{\nu}(0)] = \frac{N_c\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\left[\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^4}-\frac{1}{(y^2+iy_0\varepsilon)^4}\right]$$
$$+\frac{i}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(y^2-iy_0\varepsilon)^2}-\frac{1}{(y^2+iy_0\varepsilon)^2}\right]y^{\sigma}\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}_{a}(y,0)$$
$$+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum\nolimits^{\rho\gamma}_{a}(y,\ 0)$$
$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum\nolimits^{\rho\gamma}(y,\ 0)\}。 \tag{8-28}$$

对于 $A^{\alpha}_{\mu}(y)V^{\beta}_{\nu}(0)$，它和 $V^{\alpha}_{\mu}(y)V^{\beta}_{\nu}(0)$ 的差别，在于替换

$$\gamma_{\mu}\to\gamma_{\mu}\gamma_5,\ \gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\nu}\to\gamma_{\mu}\gamma_5\gamma_{\sigma}\gamma_{\nu}=\gamma_{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma_{\nu}\gamma_5。$$

后者和(8–25)式一致。所以，在其展开的四项中，除第一项外．第二、三、四项都与 $V^{\alpha}_{\mu}(y)A^{\beta}_{\nu}(0)$ 的相同。因而，总有

$$[A^{\alpha}_{\mu}(y),\ V^{\beta}_{\nu}(0)]=[V^{\alpha}_{\mu}(y),\ A^{\beta}_{\nu}(0)]。 \tag{8-29}$$

在光锥极限下，$y^2\to 0$，有

$$A^{\alpha}_{\mu}(y)V^{\beta}_{\nu}(0)=V^{\alpha}_{\mu}(y)A^{\beta}_{\nu}(0)。 \tag{8-30}$$

对于流算符的编时乘积，可以利用一般量子场论中介绍的威克定理，把它展开为包括所有可能的收缩的正规乘积之和，然后代入传播子的表示式，如光锥极限下的 (8–11) 式，就可以计算出来。我们把它留给读者，作为练习。

§2. 再论结构函数

在第七章的第五节中，我们用 (7–55) 式定义了强子作用流张量 $W_{\mu\nu}(p,\ q)$，用(7–58)式定义了强子的结构函数 $W_i(Q^2,\ \nu)$。在第六节中，从自由夸克模型，对它进行了讨论，得到了显示标度行为的结果 $F_i(x)$。现在，我们应用上一节得到的、自由场算符乘积的展开公式，再来进行论述，看看有什么情况，从中学习算符乘积展开的理论方法。

基本公式　我们需要应用的基本公式有(8–21)式、(8–23)式、(8–28)式、(8–29)式。(8–21)式、(8–28)式中的第一项，不包含算符，不反映相互作用，对强子的结构函数没有影响，因而可以除去。因为

$$\frac{1}{y^2 \mp i y_0 \varepsilon} = P\,\frac{1}{y^2} \pm i\pi\delta(y^2)\epsilon(y_0),$$

$$\frac{1}{y^2 - i y_0 \varepsilon} - \frac{1}{y^2 + i y_0 \varepsilon} = i\,2\pi\delta(y^2)\epsilon(y_0),$$

$$\frac{1}{(y^2 - i y_0 \varepsilon)^n} - \frac{1}{(y^2 + i y_0 \varepsilon)^n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dy^2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{y^2 - i y_0 \varepsilon} - \frac{1}{y^2 + i y_0 \varepsilon}\right]$$

$$= i\,2\pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dy^2}\right)^{n-1}[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]。$$

所以，(8–21)式、(8–23)式、(8–28)式、(8–29)式就改写成

$$[V_\mu^\alpha(y),\ V_\nu^\beta(0)] = \frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

$$\cdot\,[d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0) + i d^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+ i f^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum{}^{\rho\gamma}(y,\ 0) - f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum{}_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)]$$

$$= [A_\mu^\alpha(y),\ A_\nu^\beta(0)],$$

$$[V_\mu^\alpha(y),\ A_\nu^\beta(0)] = \frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

$$\cdot\,[d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0) + i d^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$

$$+ i f^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\sum{}_a^{\rho\gamma}(y,\ 0) - f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum{}^{\rho\gamma}(y,\ 0)]$$

$$= [A_\mu^\alpha(y),\ V_\nu^\beta(0)]。 \qquad (8\text{–}31)$$

其中，算符 Δ 和 Σ 由(8–18)式表示，不为零的结构常数 d 和 f 如下表*所示。

klm	118	146	157	228	247	256	338	344
d_{klm}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$

klm	355	366	377	448	558	668	778	888
d_{klm}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

* 李政道：场论导引和粒子物理。

klm	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{klm}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(8–32)

对于 k、l、m 的任一个轮换，d_{klm}、f_{klm} 的值不变。

电磁过程 用电子 e 去轰击核子 N，就发生由电磁作用决定的散射过程。这时，强子流张量是电磁流张量，如 (7–55) 式所示，为

$$W_{\mu\nu}^{(eN)}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,s|\left[J_\mu^e(y),\ J_\nu^e(0)\right]|p,\ s\rangle。$$

(8–33)

电磁流 J_μ^e 和 $SU_f(3)$ 流 V_μ^a 的关系，如(8–14)式所示，为

$$J_\mu^e=V_\mu^3+\frac{1}{\sqrt{3}}V_\mu^8。$$

所以

$$\left[J_\mu^e(y),\ J_\nu^e(0)\right]=\left[V_\mu^3(y)+\frac{1}{\sqrt{3}}V_\mu^8(y),V_\nu^3(0)+\frac{1}{\sqrt{3}}V_\nu^8(0)\right]$$

$$=[V_\mu^3(y),\ V_\nu^3(0)]+\frac{1}{3}[V_\mu^8(y),\ V_\nu^8(0)]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\{[V_\mu^3(y),\ V_\nu^8(0)]+[V_\mu^8(y),\ V_\nu^3(0)]\}。$$

把(8–31)式、(8–32)式代入，得

$$[V_\mu^3(y),\ V_\nu^3(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+\frac{i}{\sqrt{3}}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)\right],$$

$$[V_\mu^8(y),\ V_\nu^8(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)-\frac{i}{\sqrt{3}}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)\right],$$

$$[V^3_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]+[V^8_\mu(y),\ V^3_\nu(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{3}}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 3}(y,\ 0)+i\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho 3}(y,\ 0)\right],$$

$$[J^e_\mu(y),\ J^e_\nu(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]\cdot\left\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+\frac{2}{3}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)\right]+\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\frac{2i}{3\sqrt{3}}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)+\frac{2i}{3}\Delta_a^{\rho 3}(y,\ 0)\right]\right\}。$$

把它们代入(8-33)式,以夸克代替核子,就得

$$W^{(eq)}_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{1}{48\pi^2}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\left\langle s,\ p\left|\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]\cdot\left\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)\right]+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\Delta_a^{\rho 3}(y,\ 0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)\right]\right\}\right|s,\ p\right\rangle。$$

由于,u 夸克的 $T_3=\frac{1}{2}$, $\lambda^8=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故有

$$\sum_s\left\langle s,\ p\left|\left[\Delta_a^{\rho 3}(y,\ 0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)\right]\right|p,\ s\right\rangle$$

$$=\sum_s\left\langle s,\ p\left|\frac{N_c}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)[\bar\psi(y)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0)-\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(y)]\right|p,\ s\right\rangle$$

$$=\frac{2}{3}N_c\sum_s\langle s,\ p|e^{ipy}\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0)-e^{-ipy}\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0)|p,\ s\rangle$$

$$=\frac{2}{3}N_c(e^{ipy}-e^{-ipy})\sum_s\langle s,\ p|\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0)|p,\ s\rangle$$

$$=\frac{2}{3}N_c(e^{ipy}-e^{-ipy})\sum_s\bar u(p,\ s)\gamma^\rho\gamma_5 u(p,\ s)$$

$$=\frac{2}{3}N_c(e^{ipy}-e^{-ipy})\mathrm{Tr}[\sum_s u(p,\ s)\bar u(p,\ s)\gamma^\rho\gamma_5]$$

$$=N_c(e^{ipy}-e^{-ipy})\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\rho\gamma_5]=0。$$

同理，有

$$\sum_s \left\langle s,\ p \left| \left[\Delta^{\rho 3}(y,0) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^{\rho 8}(y,0) \right] p,\ s \right\rangle \right.$$

$$= -\frac{8}{3} N_c (e^{ipy} - e^{-ipy}) p^\rho .$$

所以，

$$W_{\mu\nu}^{(eq)}(p,\ q) = \frac{1}{18\pi^2} N_c p^\rho \int d^4y e^{iqy} (e^{ipy} - e^{-ipy}) \partial^\sigma [\delta(y^2)\epsilon(y_0)] S_{\mu\sigma\nu\rho}$$

$$= \frac{-i}{18\pi^2} N_c p^\rho \Big[(q^\sigma + p^\sigma) \int d^4y e^{i(q+p)y} \delta(y^2)\epsilon(y_0)$$

$$- (q^\sigma - p^\sigma) \int d^4y e^{i(q-p)y} \delta(y^2)\epsilon(y_0) \Big] S_{\mu\sigma\nu\rho} .$$

利用公式

$$\int d^4y \delta(y^2)\epsilon(y_0) e^{ikx} = i(2\pi)^2 \delta(k^2)\epsilon(k_0),$$

上式可以写成

$$W_{\mu\nu}^{(eq)}(p,\ q) = \frac{2}{9} N_c p^\rho [(q^\sigma + p^\sigma)\delta((q+p)^2)\epsilon(p_0+q_0)$$

$$- (q^\sigma - p^\sigma)\delta((p-q)^2)\epsilon(p_0-q_0)] S_{\mu\sigma\nu\rho} .$$

考虑到夸克动量是核子动量的 z 倍，在上式中应以 $zp \to p$，分母上以 $m \to zm$，即 $1 \to z$。u 夸克的电荷 $Q_u = \frac{2}{3}$。由于能量、动量守恒的要求，第二项为零。因而，上式成为

$$W_{\mu\nu}^{(eq)}(zp,\ q) = \frac{1}{2} Q_q^2 N_c S_{\mu\sigma\nu\rho} p^\rho (q^\sigma + zp^\sigma)\delta(q^2 + 2zp\cdot q)$$

$$= \frac{1}{2z} Q_q^2 N_c \frac{1}{2p\cdot q} [(q+zp)_\mu p_\nu + p_\mu (q+zp)_\nu$$

$$- g_{\mu\nu} p\cdot(q+zp)]\delta(z-x)$$

$$= \frac{Q_q^2}{2z} N_c \frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}$$

$$\cdot \left[2z \left(p_\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q_\nu \right) \right.$$

$$\left. - p\cdot q \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \right] .$$

设想夸克 q 在核子中的分布函数为 $f_q(z)$，那么核子的结构函数就是

$$W_1^{(eN)}(Q^2, x)=\sum_q\int dz\, f_q(z)\frac{Q_q^2}{2}N_0\delta(z-x)=\frac{N_0}{2}\sum_q Q_q^2 f_q(x),$$

$$W_2^{(eN)}(Q^2, x)=\sum_q\int dz\, f_q(z)Q_q^2\, N_0\frac{m}{\nu}z\delta(z-x)$$

$$=xN_0\frac{m}{\nu}\sum_q Q_q^2 f_q(x)。$$

这和上一章得到的结果是一致的，也显示了标度行为。

荷电弱过程 用中微子 $\nu(\bar{\nu})$ 去轰击核子 N，会发生荷电弱过程，其强子作用流张量为

$$W_{\mu\nu}^{(\nu N)}(p, q)=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p, s|[J_\mu^{w+}(y), J_\nu^w(0)]|p, s\rangle。\tag{8-34}$$

荷电弱流和 $SU_f(3)$ 味流的关系，如(8-14)式所示，为

$$J_\mu^w=(V_\mu^1+A_\mu^1)+i(V_\mu^2+A_\mu^2)。$$

因而

$$[J_\mu^{w+}(y), J_\nu^w(0)]=[V_\mu^1(y)+A_\mu^1(y)-iV_\mu^2(y)-iA_\mu^2(y),$$
$$V_\nu^1(0)+A_\nu^1(0)+iV_\nu^2(0)+iA_\nu^2(0)]。$$

如(8-31)式所示，V、A 互换不变，上式中的十六个对易子，就可以简化为八个，即

$$\begin{aligned}[J_\mu^{w+}(y), J_\nu^w(0)]&=2[V_\mu^1(y), V_\nu^1(0)]\\&+2[V_\mu^1(y), A_\nu^1(0)]+2i[V_\mu^1(y), V_\nu^2(0)]\\&+2i[V_\mu^1(y), A_\nu^2(0)]-2i[V_\mu^2(y), V_\nu^1(0)]\\&-2i[V_\mu^2(y), A_\nu^1(0)]+2[V_\mu^2(y), V_\nu^2(0)]\\&+2[V_\mu^2(y), A_\nu^2(0)]。\end{aligned}$$

由(8-32)式可知，含两个(1, 2)角码而不等于零的 d、f，只有

$$f_{123}=-f_{213}=1,\ d_{118}=d_{228}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

上述的八个对易子又可归并为四个，即

$$[J_\mu^{w+}(y),\ J_\nu^w(0)]=4[V_\mu^1(y),\ V_\nu^1(0)]$$
$$+4[V_\mu^1(y),\ A_\nu^1(0)]+4i[V_\mu^1(y),\ V_\nu^2(0)]$$
$$+4i[V_\mu^1(y),\ A_\nu^2(0)]。$$

按照(8-31)式

$$[V_\mu^1(y),\ V_\nu^1(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)],$$

$$[V_\mu^1(y),\ A_\nu^1(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)],$$

$$[V_\mu^1(y),\ V_\nu^2(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[iS_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho 8}(y,\ 0)-\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho 3}(y,\ 0)],$$

$$[V_\mu^1(y),\ A_\nu^2(0)]=\frac{1}{4\pi}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[iS_{\mu\sigma\nu\rho}\sum_a^{\rho 3}(y,\ 0)-\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\sum^{\rho 8}(y,\ 0)]。$$

而

$$\sum_s\langle p,\ s|\Delta_a^{\rho 8}(y,\ 0)|p,\ s\rangle$$
$$=N_c\sum_s\left\langle p,s\left|:\bar\psi(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^8}{2}\psi(0):-:\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^8}{2}\psi(y):\right|p,\ s\right\rangle$$
$$=N_c\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})\sum_s\langle p,\ s|:\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0):|p,s\rangle$$
$$=N_c\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})\sum_s\bar u(p,\ s)\gamma^\rho\gamma_5u(p,\ s)$$
$$=N_c\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\rho\gamma_5]=0,$$

$$\sum_s\langle p,\ s|\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)|p,\ s\rangle=N_c\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\rho]$$
$$=N_c\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})4p^\rho,$$

●●●●

$$\sum_s \langle p,\ s|\Sigma_n^{\rho 3}(y,\ 0)|p,\ s\rangle = -N_c \sum_s \Big\langle p,\ s\Big| :\bar\psi(y)\gamma^\rho\gamma_5 \frac{\lambda^3}{2}\psi(0): + :\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5 \frac{\lambda^3}{2}\psi(y): \Big| p,\ s\Big\rangle$$

$$-N_c \frac{\bar\lambda^3}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\sum_s \langle p,s|:\bar\psi(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0):|p,\ s\rangle$$

$$-N_c \frac{\bar\lambda_3}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\sum_s \bar u(p,\ s)\gamma^\rho\ \gamma_5 u(p,\ s)$$

$$-N_c \frac{\bar\lambda_3}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\rho\gamma_5]=0,$$

$$\sum_s \langle p,\ s|\Sigma^{\rho 8}(y,\ 0)|p,\ s\rangle = -N_c \frac{\bar\lambda_8}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\rho]$$

$$-N_c \frac{\bar\lambda_3}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})4p^\rho\ 。$$

$\bar\lambda_3$、$\bar\lambda_8$ 是 λ_3、λ_8 的一个矩阵元，是相应场的本征值。把它们代入(8-34)式，并以夸克 q 代替核子 N，就得到

$$W_{\mu\nu}^{(vq)}(p,\ q) = \frac{N_c}{8\pi^2}\int d^4y e^{iqy}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

$$\cdot\left\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\frac{\bar\lambda^8}{2\sqrt{3}}(e^{ipy}-e^{-ipy})-\frac{\bar\lambda_3}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\right]4p^\rho\right.$$

$$\left.+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\frac{\bar\lambda^8}{2\sqrt{3}}(e^{ipy}-e^{-ipy})-\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}+e^{-ipy})\right]4p^\rho\right\}。$$

如前面所述的理由，能量、动量守恒要求有 e^{-ipy} 的项贡献为零，所以

$$W_{\mu\nu}^{(vq)}(p,\ q) = \frac{N_c}{2\pi^2}\left(\frac{\bar\lambda^8}{2\sqrt{3}}-\frac{\bar\lambda^8}{2}\right)p^\rho$$

$$\cdot\int d^4y e^{i(q+p)y}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y,\ 0)][S_{\mu\sigma\nu\rho}+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}]$$

$$-\frac{N_c}{2\pi^2}\left(\frac{\bar\lambda^8}{2\sqrt{3}}-\frac{\bar\lambda^8}{2}\right)p^\rho(-i)(q^\sigma+p^\sigma)(S_{\mu\sigma\nu\rho}+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho})$$

$$\cdot\int d^4y e^{i(q+p)y}[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$

• ••• •

$$=\frac{-iN_c}{2\pi^2}\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{2\sqrt{3}}-\frac{\bar{\lambda}^3}{2}\right)p^\rho(q^\sigma+p^\sigma)\,(S_{\mu\sigma\nu\rho}+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho})$$

$$\cdot i(2\pi)^2\delta((q+p)^2)\epsilon(q_0+p_0)$$

$$=N_c\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)\delta(q^2+2p\cdot q)\epsilon(q_0+p_0)$$

$$\cdot p^\rho(q^\sigma+p^\sigma)\,(S_{\mu\sigma\nu\rho}+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho})。$$

考虑到夸克动量是核子动量的 z 倍，式中应作代换 $p\to zp$，分母上 $1\to z$，则 p 理解为核子动量，而

$$W_{\mu\nu}^{(\nu q)}(zp,\ q)=N_c\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)\frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}\epsilon(q_0+p_0)$$

$$\cdot[p_\mu(q_\nu+zp_\nu)+(q_\mu+zp_\mu)p_\nu-g_{\mu\nu}p\cdot(zp+q)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}q^\sigma p^\rho]$$

$$=N_c\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)\frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}$$

$$\cdot[2zp_\mu p_\nu+p_\mu q_\nu+q_\mu p_\nu-g_{\mu\nu}p\cdot q-i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho]$$

$$=N_c\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)\frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}$$

$$\cdot\left[2z\left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right)\right.$$

$$\left.-p\cdot q\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)-i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}q^\sigma p^\rho\right]。$$

设夸克分布函数为 $f_q(z)$，则核子结构函数为

$$W_1^{(\nu N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\,f_q(z)\,\frac{N_c}{2}\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)\delta(z-x)$$

$$=\frac{N_c}{2}\sum_q\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)f_q(x),$$

$$W_2^{(\nu N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\,f_q(z)\,N_c z\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{2}-\bar{\lambda}^3\right)\frac{m}{\nu}\delta(z-x)$$

$$=N_c x\sum_q\left(\frac{\bar{\lambda}^8}{\sqrt{3}}-\bar{\lambda}^3\right)f_q(x)\frac{m}{\nu},$$

$$W_8^{(\nu N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\, f_q(z)\,N_0\left(\frac{\bar\lambda^8}{2}-\bar\lambda^3\right)\frac{m}{\nu}\delta(z-x)$$

$$=N_0\sum_q\left(\frac{\bar\lambda^8}{\sqrt{3}}-\bar\lambda^3\right)f_q(x)\frac{m}{\nu}。$$

它们也呈现了标度无关的行为。

中性流过程　用中微子 ν (或 $\bar\nu$)去轰击核子 N, 用电子 e 去轰击核子 N, 也会发生由中性流控制的弱作用过程,其强子作用流张量为

$$W_{\mu\nu}^{(lN)}(p,\ q)=\frac{1}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,\ s|[J_\mu^z(y),\ J_\mu^z(0)]|p,\ s\rangle。\tag{8-35}$$

中性流和 $SU_f(3)$ 味流的关系,如(8-14)式所示,为

$$J_\mu^Z=(2-4\sin^2\theta_W)V_\mu^3+2A_\mu^3-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W V_\mu^8。$$

因而

$$[J_\mu^Z(y),\ J_\nu^Z(0)]=(2-4\sin^2\theta_W)^2[V_\mu^3(y),\ V_\nu^3(0)]$$
$$+2(2-4\sin^2\theta_W)[V_\mu^3(y),\ A_\nu^3(0)]+4[A_\mu^3(y),\ A_\nu^3(0)]$$
$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(2-4\sin^2\theta_W)[V_\mu^3(y),\ V_\nu^8(0)]$$
$$+2(2-4\sin^2\theta_W)[A_\mu^3(y),\ V_\nu^3(0)]$$
$$-\frac{8}{\sqrt{3}}[A_\mu^3(y),\ V_\nu^8(0)]\sin^2\theta_W$$
$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(2-4\sin^2\theta_W)[V_\mu^8(y),\ V_\nu^3(0)]$$
$$-\frac{8}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W[V_\mu^8(y),\ A_\nu^3(0)]$$
$$+\frac{16}{3}\sin^4\theta_W[V_\mu^8(y),\ V_\nu^8(0)]。$$

由于(8-31)式表示的 V、A 交换的不变性,上式可以合并为

$$[J_\mu^Z(y),\ J_\nu^Z(0)]=(8-8\sin^2\theta_W+16\sin^4\theta_W)[V_\mu^3(y),\ V_\nu^3(0)]$$
$$+4(2-4\sin^2\theta_W)[V_\mu^3(y),\ A_\nu^3(0)]$$

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(2-4\sin^2\theta_W)\{[V^3_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]$$
$$+[V^8_\mu(y),\ V^3_\nu(0)]\}$$
$$-\frac{8}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\{[A^3_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]+[V^8_\mu(y),\ A^3_\nu(0)]\}$$
$$+\frac{16}{3}\sin^4\theta_W[V^8_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]。$$

由(8-32)式可知,对上式有贡献的结构常数,为

$$d_{888}=d_{828}=d_{883}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad d_{888}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

再根据(8-31)式,得

$$[V^3_\mu(y),\ V^3_\nu(0)]=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}_a(y,\ 0)],$$
$$[V^3_\mu(y),\ A^3_\nu(0)]=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}_a(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)],$$
$$[V^3_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]+[V^8_\mu(y),\ V^3_\nu(0)]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 3}(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 3}_a(y,\ 0)],$$
$$[A^3_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]+[V^8_\mu(y),\ A^3_\nu(0)]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\frac{2}{\sqrt{3}}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 3}_a(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 3}(y,\ 0)],$$
$$[V^8_\mu(y),\ V^8_\nu(0)]=\frac{-1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)]$$
$$\cdot[S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho 8}_a(y,\ 0)]。$$

按照前面的计算,有

$$\sum_s\langle p,\ s|\Delta^{\rho 3}_a(y,\ 0)|p,\ s\rangle=0,\quad \sum_s\langle p,\ s|\Delta^{\rho 8}_a(y,\ 0)|p,\ s\rangle=0。$$

$$\sum_s \langle p,\ s|\Delta^{\rho 3}(y,\ 0)|p,\ s\rangle = N_c\,\frac{\bar\lambda^3}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})4p^\rho,$$

$$\sum_s \langle p,\ s|\Delta^{\rho 8}(y,\ 0)|p,\ s\rangle = N_c\,\frac{\bar\lambda^8}{2}(e^{ipy}-e^{-ipy})4p^\rho。$$

把它们代回 (8–35)式，考虑到包含 e^{-ipy} 的项无贡献，就得到

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p,\ q) &= \frac{N_c}{2\sqrt{3}\,\pi}\int d^4y e^{i(q+p)y}\cdot p^\rho\partial^\sigma[\delta(y^2)\epsilon(y_0)] \\
&\quad\cdot\Big\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[\Big(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\Big)\bar\lambda^8 \\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^3\Big] \\
&\quad+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^8-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar\lambda^8\Big]\Big\} \\
&= \frac{-iN_c}{2\sqrt{3}\,\pi}p^\rho(q^\sigma+p^\sigma)\int d^4y e^{i(q+p)y}\delta(y^2)\epsilon(y_0) \\
&\quad\cdot\Big\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[\Big(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\Big)\bar\lambda^8 \\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^3 \\
&\quad+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^8-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar\lambda^3\Big]\Big\} \\
&= \frac{2\pi N_c}{\sqrt{3}}p^\rho(q^\sigma+p^\sigma)\delta(q^2+2p\cdot q) \\
&\quad\cdot\Big\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[\Big(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\Big)\bar\lambda^8 \\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^3\Big] \\
&\quad+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Big[(1-2\sin^2\theta_W)\bar\lambda^8-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar\lambda^3\Big]\Big\}。
\end{aligned}$$

对于本征值为 $\bar\lambda^8$、$\bar\lambda^3$ 的夸克，它的动量是核子动量的 z 倍，把上式中的 $p\to z$，分母上 $1\to z$，则用核子动量 p 表示的、夸克的结构函数张量为

$$W_{\mu\nu}^{(lq)}(zp,\ q)=\frac{2\pi N_c}{\sqrt{3}}\frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}p^\rho(q^\sigma+zp^\sigma)$$

$$\cdot\left\{S_{\mu\sigma\nu\rho}\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^8\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^8\right]$$

$$\left.+i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\left[(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^8-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar{\lambda}^8\right]\right\}$$

$$=\frac{2\pi N_c}{\sqrt{3}}\frac{\delta(z-x)}{2p\cdot q}\left\{2z\left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right)\right.$$

$$\cdot\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^8\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^8\right]$$

$$-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)p\cdot q\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^8\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right]$$

$$\left.-i\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho\left[(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^8-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar{\lambda}^3\right]\right\}.$$

由此可知,夸克的结构函数为

$$W_1^{(l,q)}(z,\ x)=\frac{\pi N_c}{\sqrt{3}}\delta(z-x)\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^8\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right],$$

$$W_2^{(l,q)}(z,\ x)=\frac{\pi N_c}{\sqrt{3}}2x\frac{m}{\nu}\delta(z-x)$$

$$\cdot\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^8\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right],$$

$$W_3^{(1,q)}(z,\ x)=\frac{2\pi N_c}{\sqrt{3}}\delta(z-x)\frac{m}{\nu}$$
$$\cdot\left[(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar{\lambda}^3\right]。$$

设想，夸克在核子中的分布函数为$f_q(z)$，则核子的结构函数为

$$W_1^{(1,N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\,f_q(z)W_1^{(1,q)}(z,\ x)$$
$$=\sum_q\frac{\pi N_c}{\sqrt{3}}f_q(x)\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^3\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right],$$
$$W_2^{(1,N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\,f_q(z)W_2^{(1,q)}(z,\ x)$$
$$=\sum_q\frac{\pi N_c}{\sqrt{3}}\ 2x\frac{m}{\nu}f_q(x)$$
$$\cdot\left[\left(1-\sin^2\theta_W+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right)\bar{\lambda}^3\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right],$$
$$W_3^{(1,N)}(Q^2,\ x)=\sum_q\int dz\,f_q(z)W_3^{(1,q)}(z,\ x)$$
$$=\sum_q\frac{2\pi N_c}{\sqrt{3}}\ \frac{m}{\nu}f_q(x)\left[(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\lambda}^3\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\theta_W\bar{\lambda}^3\right]。$$

§3. 相互作用场算符乘积的展开

算符乘积，按照威克定理，可以展开为包含所有可能收缩的正规乘积之和。自由场的收缩，是已知的奇异函数，可以在近距离处或光锥附近，展开成级数。在一定近似下，取其一定的奇异部分

就可以算出有一定意义的结果。可是，对于相互作用场，它们的收缩是未知的，不能采用上述办法来处理。为此，威尔逊 (Wilson)* 提出了设想，人们称之为威尔逊算符乘积展开。

近距展开和光锥展开 由第一节的论述可知，自由场的算符乘积，可以展开为包含所有可能收缩的正规乘积之和。其中的每一项，都包括两个因子，一个是算符的正规乘积，一个是发散的 C 数。设想，这种情况可以推广到相互作用场的算符乘积。设想算符 $\hat{A}(x)$ 和算符 $\hat{B}(y)$ 的乘积 $\hat{A}(x)\hat{B}(y)$，在 $x\to y$ 时，可以展开为

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y)\simeq\sum_n C_n(x-y)\hat{D}_n\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)。\qquad (8\text{-}36)$$

$\hat{D}_n\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$，$n=1, 2, \cdots$ 是一组定域算符，有如一般级数展开中的正交完备系。和自由场的情况相似，当 $x\to y$ 时，它们是有限的。$C_n(x-y)$ 是和算符 $\hat{D}_n$ 相应的系数，叫做威尔逊系数，当 $x\to y$ 时，它们是发散的。如果，d_A、d_B、d_{D_n} 分别是算符 $\hat{A}(x)$、$\hat{B}(y)$、$\hat{D}$ 的，以质量为基准的量纲，那末，按照各项量纲相等的原则，系数 $C_n(x-y)$ 的量纲就是 $d_A+d_B-d_{D_n}$。当 $x\to y$ 时，$C_n(x-y)$ 就按照

$$C_n(x-y)\sim\left[\frac{1}{(x-y)}\right]^{d_A+d_B-d_{D_n}}(\ln(x-y)^2)^{\prime}\qquad (8\text{-}37)$$

的规律发散。这表明：(8-36)式中诸展开系数的发散情况，是不相同的；算符 $\hat{D}_n$ 的量纲越小，系数 C_n 的发散程度越大；在一定的近似下，取量纲小的几个算符 $\hat{D}_n$，就可以得到有一定意义的结果。

设想算符 $\hat{A}(x)$ 和算符 $\hat{B}(y)$ 的乘积 $\hat{A}(x)\hat{B}(y)$，在光锥附近 $(x-y)^2\to 0$ 时，可以展开为

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y)\simeq\sum_n \tilde{C}_n(x-y)\tilde{D}_n(x, y)。\qquad (8\text{-}38)$$

$\tilde{D}_n(x, y)$，$n=1, 2, \cdots$ 是一组双定域算符，也象一般级数展开中

---

* Phys. Rev. 179(1969), p. 1499.

的正交完备系。也和自由场的情况相似，当 $(x-y)^2\to 0$ 时，它们是有限的。$\tilde{C}_n(x-y)$ 是和算符 $\tilde{D}_n$ 相应的系数，也叫做威尔逊系数，当$(x-y)^2\to 0$ 时，它们是发散的。$\tilde{D}_n(x,\ y)$ 还可以展开为

$$\tilde{D}_n(x,\ y)=\sum_l (x-y)^{\mu_1}(x-y)^{\mu_1}\cdots(x-y)^{\mu_l}\tilde{D}_{nl}(y),$$

$$\tilde{D}_{nl}(y)\sim\left.\frac{\partial^l \tilde{D}_n(x,\ y)}{\partial x_{\mu_1}\partial x_{\mu_2}\cdots\partial x_{\mu_l}}\right|_{x=y}$$

(8–38)式就可以写成

$$\hat{A}(x)\hat{B}(y)\simeq\sum_{n,l}\tilde{C}_n(x-y)\,(x-y)^{\mu_1}(x-y)^{\mu_1}\cdots(x-y)^{\mu_l}\tilde{D}_{nl}(y)。$$

(8–39)

设 d_A、d_B、d_{nl} 是算符 $\hat{A}(x)$、$\hat{B}(y)$、$\hat{D}_{nl}(y)$ 的量纲，按照各项量纲相等的原则，由 (8–39) 式可知，$\tilde{C}_{n,l}$ 的量纲是 $d_A+d_B-d_{nl}+l$。当 $(x-y)^2\to 0$ 时，

$$\tilde{C}_{nl}(x-y)\sim\left[\frac{1}{(x-y)^2}\right]^{\frac{1}{2}(d_A+d_B-d_{nl}+l)}(\ln(x-y)^2)^p。$$

(8–40)

这表明：诸展开系数的发散程度是不一样的；算符 $\tilde{D}_{nl}$ 的

$$\tau=d_{nl}-l$$

越小，相应系数 $\tilde{C}_{nl}$ 的发散程度越大。d_{nl} 是算符 $\tilde{D}_{nl}$ 的量纲，l 是算符 $\tilde{D}_{nl}$ 的自旋，τ 叫做算符 $\tilde{D}_{nl}$ 的挠度。挠度 τ 越小的算符，相应系数的发散程度越大。在一定近似下，将 AB 表示为挠度 τ 小的几个算符的和，就可以得到有一定意义的结果。

光锥展开和近距展开有重大差别：光锥展开系数的发散程度由算符的挠度确定，近距展开系数的发散程度由算符的量纲确定。

流算符T乘积的展开　自由场的流算符乘积在光锥附近的展开，如(8–20)式所示，是两部分之和。第一部分，不包含算符，或者说包含单位算符 I。I 的量纲为零，自旋为零，因而挠度也为零。

这一部分不显示相互作用，对结构函数没有影响，因而除去不计。第二部分，每项包含一个算符 Δ 或 Σ。从(8–18)式看来，不管是 Δ 还是 Σ，它们都由两个旋量乘积组成，有流算符的形式，量纲为 3，自旋为 1，挠度为 2。这表明，自由场的流算符乘积在光锥附近的展开，起首要作用的是挠度 $\tau=2$ 的算符。可以设想，在相互作用场流算符乘积的展开中，也应该如此。所以，当我们考虑把流算符 J_μ 的编时乘积

$$T(J_\mu^+(y)J_\nu(0)), \tag{8–41}$$

在光锥附近展开时，首先选用的是挠度 $\tau=2$ 的算符。我们用 $\hat{D}_{\sigma_1\sigma_1\cdots\sigma_n}$、$\hat{D}_{\alpha\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}$、$\hat{D}_{\alpha\beta\sigma_1\cdots\sigma_n}$ 表示自旋为 n、$n+1$、$n+2$，挠度都是 $\tau=2$ 的算符。按照挠度＝量纲－自旋的定义，它们的量纲分别是 $n+2$, $n+3$, $n+4$。

(8–41) 式表明，它是 y 的函数，是时空空间的二阶张量。因而，它的展开式的每一项，也应该如此。这些二阶张量，可以由 y_μ、∂^μ、$g_{\mu\nu}$、$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 构成。由于

$$T_{\mu\nu}(p,\ q)=\frac{i}{8\pi}\int d^4y e^{iqy}\sum_s\langle p,\ s|T(J_\mu^+(y)J_\nu(0)|p,\ s\rangle \tag{8–42}$$

是由 p_μ、q_μ、$g_{\mu\nu}$、$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 构成的二阶张量，有如(7–64)式所示的形式。而且，由(8–41)式构成 (8–42) 式后，∂^μ 将换成 q^μ。所以，可以设想，由 ∂^μ、$g_{\mu\nu}$、$\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}$ 构成的，和

$$-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right),\ \left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}q_\nu\right),\ \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p^\sigma q^\rho$$

相应的二阶张量，有

$$(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu),\ (g_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho+g_\mu^\sigma g_\nu^\rho\partial^2-g_\mu^\rho\partial^\sigma\partial_\nu-g_\nu^\rho\partial^\sigma\partial_\mu),\ \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\partial^\rho$$

的形式。σ、ρ 将和算符 $\hat{D}$ 中的 p_σ、p_ρ 收缩。

J_μ 的量纲为 3，$T(J_\mu^+(y)J_\nu(0))$ 的量纲为 6，展开式中每一项的量纲也应该是 6。我们希望把每一项的量纲，都明显写出来，而让未知的系数的量纲为 0。

基于以上论述的有关量纲、挠度、张量结构的分析，在光锥附近 $y^2\sim 0$，流算符 T 乘积可以展开为

$$T(J^+_\mu(y)J_\nu(0))\simeq(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\sum_j\frac{C^j_{1,n}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}\hat{D}^j_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}(0)y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]$$
$$+(g_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho+g^\sigma_\mu g^\rho_\nu\partial^2-g^\rho_\mu\partial^\sigma\partial_\nu-g^\rho_\nu\partial^\sigma\partial_\mu)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\sum_j C^j_{2,n+2}(y^2-i\epsilon)\hat{D}^j_{\sigma\rho\sigma_1\cdots\sigma_n}(0)y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]$$
$$+(\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\partial_\rho)\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\sum_j\frac{C^j_{3,n+1}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}\hat{D}^j_{\sigma\sigma_1\cdots\sigma_n}(0)y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]。\tag{8-43}$$

算符矩阵元 (8-43) 式中的算符 $\hat{D}$ 都是挠度 $\tau=2$ 的，高挠度算符的贡献都被略去。算符 $\hat{D}$ 的矩阵元

$$\frac{1}{2}\sum_s\langle p,\ s|D^j_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}(0)|p,\ s\rangle,$$

是由 p_σ、$g_{\sigma\rho}$ 组成的 n 阶张量，有

$$p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n},\ g_{\sigma_1\sigma_2}p_{\sigma_3}p_{\sigma_4}\cdots p_{\sigma_n},\ g_{\sigma_1\sigma_2}g_{\sigma_3\sigma_4}p_{\sigma_5}\cdots p_{\sigma_n},\ \cdots$$

的形式。其系数只能是 $p^2=m^2$ 的函数，是不变的常数。如果还考虑到 $\hat{D}$ 在(8-43)式、(8-42) 式中的地位，可以推知：$g_{\sigma_1\sigma_2}$ 的项和 $p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}$ 的项的量级之比为：m^2/q^2。在光锥附近，它 $\to 0$。所以，略去质量效应，令 $m^2\to 0$，则

$$\frac{1}{2}\sum_s\langle p,\ s|D^j_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}(0)|p,\ s\rangle=A^j_n p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}。\tag{8-44}$$

计算公式 当把(8-43)式代入(8-42)式，进行计算时，需要用到如下所示的公式：

$$\int d^4y e^{iqy}y^\sigma f(y^2)=-i\frac{\partial}{\partial q^\sigma}\int d^4y e^{iqy}f(y^2),$$

$$\int d^4y e^{iqy}f(y^2)y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}=(-i)^n\frac{\partial^n}{\partial q^{\sigma_1}\partial q^{\sigma_2}\cdots\partial q^{\sigma_n}}\int d^4y e^{iqy}f(y^2)。$$

由于$\int d^4 y e^{iqv} f(y^2)$是$q$的标量函数，即是$q^2$的函数，所以

$$\frac{\partial}{\partial q^\sigma}\int d^4 y e^{iqv} f(y^2) = 2q^\sigma \frac{\partial}{\partial q^2}\int d^4 y e^{iqv} f(y^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^\rho \partial q^\sigma}\int d^4 y e^{iqv} f(y^2) = \frac{\partial}{\partial q^\rho}\left[2q^\sigma \frac{\partial}{\partial q^2}\int d^4 y e^{iqv} f(y^2)\right]$$

$$= 2\delta^{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial q^2}\int d^4 y e^{iqv} f(y) + 4q^\sigma q^\rho \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^2 \int d^4 y e^{iqv} f(y)。$$

上式和(8–44)式相乘时，有$p_\sigma p_\rho$乘右边两项，得

$$2m^2 \frac{\partial}{\partial q^2}\int d^4 y e^{iqv} f(y) + 4(p\cdot q)^2 \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^2 \int d^4 y e^{iqv} f(y),$$

其量级之比，为

$$m^2 : \frac{2(p\cdot q)^2}{q^2} = m^2 : \frac{q^2}{x^2} = m^2 x^2/q^2,$$

在光锥附近，$q^2\sim\infty$，x有限，上列比式~ 0。所以，在忽略质量效应$m^2\sim 0$时，

$$\frac{\partial^2}{\partial q^\sigma \partial q^\rho}\int d^4 y e^{iqv} f(y^2) \simeq 4q^\sigma q^\rho \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^2 \int d^4 y e^{iqv} f(y^2),$$

$$\int d^4 y e^{iqv} f(y^2) y^{\sigma_1} y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}$$

$$= (-2i)^n q^{\sigma_1} q^{\sigma_2}\cdots q^{\sigma_n}\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^n \int d^4 y e^{iqv} f(y^2)。 \qquad (8–45)$$

$T_{\mu\nu}$张量 现在，我们把(8–43)式代入(8–42)式，来计算$T_{\mu\nu}$张量。其第一项是

$$\frac{i}{8\pi}\int d^4 y e^{iqv}\ (g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu)$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \sum_j \frac{C^j_{1,n}(y^2 - i\epsilon)}{y^2 - i\epsilon} \sum_s \langle p,s|\hat{D}^j_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}(0)|p,s\rangle y^{\sigma_1} y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]$$

$$= (-q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu)\frac{i}{4\pi}\int d^4 y e^{iqv}$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \sum_j \frac{C^j_{1,n}(y^2 - i\epsilon)}{y^2 - i\epsilon} A^j_n p_{\sigma_1} p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n} y^{\sigma_1} y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right] + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) q^2 \sum_{n,j} A_n^j (2p\cdot q)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n$$

$$\cdot \frac{1}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \frac{O_{1,n}^j (y^2 - i\epsilon)}{y^2 - i\epsilon}$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \sum_{n,j} A_n^j \left(-\frac{2p\cdot q}{q^2} \right)^n \frac{(-1)^n}{4\pi} (q^2)^{n+1}$$

$$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iqy} \frac{O_{1,n}^j (y^2 - i\epsilon)}{y^2 - i\epsilon},$$

令

$$E_{1,n}^j (q^2) = \frac{(-1)^n}{4\pi} (q^2)^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iqy} \frac{O_{1,n}^j (y^2 - i\epsilon)}{y^2 - i\epsilon} \,. \tag{8-46}$$

$$t_L = \sum_n \omega^n \sum_j A_n^j E_{1,n}^j (q^2), \tag{8-47}$$

则

$$\text{第一项} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) t_L \,。 \tag{8-48}$$

第二项是

$$\frac{i}{8\pi} \int d^4 y e^{iqy} \left(g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho + g_\mu^\sigma g_\nu^\rho \partial^2 - g_\mu^\rho \partial^\sigma \partial_\nu - g_\nu^\rho \partial^\sigma \partial_\mu \right)$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \sum_j O_{2,n+2}^j (y^2 - i\epsilon) \sum_s \langle p, s | \hat{D}_{\sigma\rho\sigma_1\cdots\sigma_n}^j (0) | p, s \rangle y^{\sigma_1} y^{\sigma_2} \cdots y^{\sigma_n} \right.$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} q^\sigma q^\rho + g_\mu^\sigma g_\nu^\rho q^2 - g_\mu^\rho q^\sigma q_\nu - g_\nu^\rho q^\sigma q_\mu \right) \frac{i}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy}$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \sum_j O_{2,n+2}^j (y^2 - i\epsilon) A_{n+2}^j p_\sigma p_\rho p_{\sigma_1} \cdots p_{\sigma_n} y^{\sigma_1} y^{\sigma_2} \cdots y^{\sigma_n} + O\left(\frac{m^2}{q^2} \right) \right.$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} (p\cdot q)^2 + p_\mu p_\nu q^2 - (p\cdot q) p_\mu q_\nu - (p\cdot q) p_\nu q_\mu \right)$$

$$\cdot \sum_{n,j} \left(\frac{2pq}{-q^2} \right)^n A_{n+2}^j \frac{(-1)^n}{4\pi} (q^2)^n \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iqy} O_{2,n+2}^j (y^2 - i\epsilon) \,。$$

令

$$E_{2,n+2}^j (q^2) = \frac{(-1)^n}{4\pi} (q^2)^{n+2} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \right)^n \int d^4 y e^{iqy} O_{2,n+2}^j (y^2 - i\epsilon) \,, \tag{8-49}$$

$$t_2=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n\sum_j A^j_{n+2}E^j_{2,n+2}(q^2), \tag{8-50}$$

则

第二项

$$=-\left[g_{\mu\nu}(p\cdot q)^2+p_\mu p_\nu q^2-(p\cdot q)\,(p_\mu q_\nu+q_\mu p_\nu)\right]\frac{1}{(q^2)^2}\,t_2。 \tag{8-51}$$

第三项是

$$\frac{-i}{8\pi}\int d^4y e^{iqv}(\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\partial_\rho)$$

$$\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\sum_j\frac{O^j_{3,n+1}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}\sum_s\langle p,s|\hat{D}^j_{\sigma\sigma_1\cdots\sigma_n}(0)|p,s\rangle y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]$$

$$=i\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}q_\rho\frac{i}{4\pi}\int d^4y e^{iqv}$$

$$\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^{n-1}\sum_j\frac{O^j_{3,n+1}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}\,A^j_{n+1}p_\sigma p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}y^{\sigma_1}y^{\sigma_2}\cdots y^{\sigma_n}\right]$$

$$+O\left(\frac{m^2}{q^2}\right)$$

$$=i\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}p_\sigma q_\rho\sum_{n=0}^{\infty}\sum_j A^j_{n+1}\left(\frac{2p\cdot q}{-q^2}\right)^n\frac{(-1)^n}{4\pi}(q^2)^n\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^n$$

$$\cdot\int d^4y e^{iqv}\frac{O^j_{3,n+1}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}。$$

令

$$E^j_{3,n+1}(q^2)=\frac{(-1)^n}{4\pi}(q^2)^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^n\int d^4y e^{iqv}\frac{O^j_{3,n+1}(y^2-i\epsilon)}{y^2-i\epsilon}, \tag{8-52}$$

$$t_3=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n\sum_j A^j_{n+1}E^j_{3,n+1}(q^2), \tag{8-53}$$

则

$$第三项=-i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p^\sigma q^\rho\frac{1}{q^2}\,t_3。 \tag{8-54}$$

把三项加起来就得到张量

$$T_{\mu\nu}(p,\ q)=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)t_L$$

$$-\left[g_{\mu\nu}(p\cdot q)^2+p_\mu p_\nu q^2-(p\cdot q)(p_\mu q_\nu+q_\mu p_\nu)\right]\frac{1}{(q^2)^2}\ t_2$$

$$+i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p^\sigma q^\rho\frac{1}{q^2}\ t_3$$

$$=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\left(t_L+\frac{(p\cdot q)^2}{(q^2)^2}\ t_2\right)$$

$$-\frac{1}{q^2}\left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}\ q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}\ q_\nu\right)t_2$$

$$+i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p^\sigma q^\rho\frac{1}{q^2}\ t_3$$

$$=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\left(t_L+\frac{\omega^2}{4}\ t_2\right)$$

$$+\frac{\omega}{2m\nu}\left(p_\mu-\frac{p\cdot q}{q^2}\ q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{p\cdot q}{q^2}\ q_\nu\right)t_2$$

$$-i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}p^\sigma q^\rho\frac{\omega}{2m\nu}\ t_3,\qquad(8\text{–}55)$$

把它和(7–64)式比较，就得到

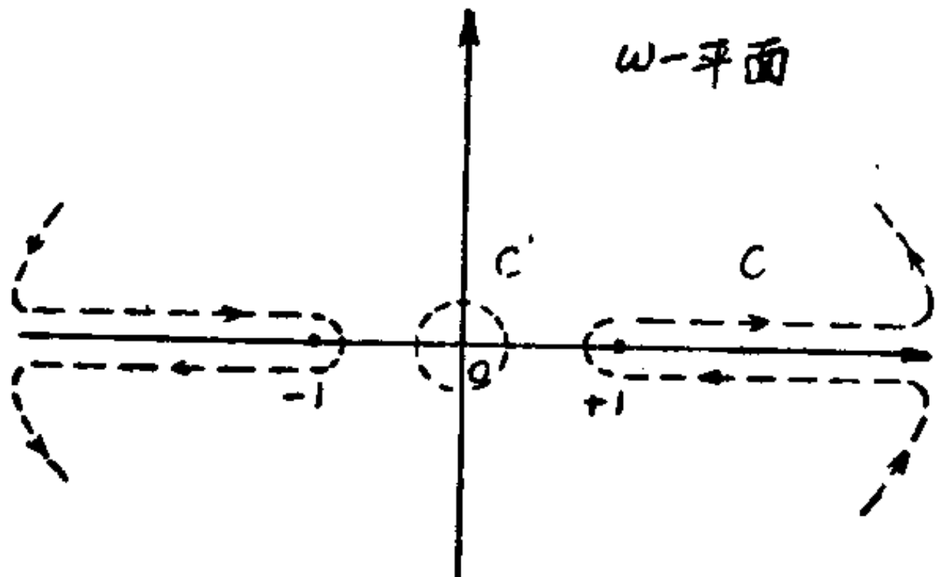
$$t_L=T_1-\frac{\omega}{2}\left(\frac{\nu}{m}T_2\right),\ t_2=\frac{2}{\omega}\left(\frac{\nu}{m}T_2\right),\ t_3=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\nu}{m}T_3\right)。\qquad(8\text{–}56)$$

既然，t_L、t_2、t_3 是 T_1、T_2、T_3 的线性组合，它们就有同样的解析性质。换句话说，$t_L(Q^2,\ \omega)$、$t_2(Q^2,\ \omega)$、$t_3(Q^2,\ \omega)$ 作为 Q^2、ω 的函数，在 ω 复平面上，有如 T_1、T_2、T_3 的解析性质。按照第七章第五节末的论述，T_1、T_2、T_3 在 ω 平面上，除割线 $|\omega|\leqslant 1$ 外，处处解析。所以，由(8–47)式、(8–50)式、(8–53)式表示的 t_L、t_2、t_3，在 ω 复平面上，有割线

$$|\omega|\leqslant 1,$$

如下图所示。仿照第七章第五节末的论述，我们对 $t_i(i=L,\ 2,\ 3)$ 取回路积分

$$\oint_{c'}\frac{t_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\ d\omega=\oint_c\frac{t_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\ d\omega。$$



对于 t_L,

$$\oint_{C'} \frac{t_L(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega = \oint_{C'} \frac{\sum_k \omega^k \sum_j A_k^j E_{1,k}^j(Q^2)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$
$$= \sum_j 2\pi i A_n^j E_{1,n}^j(Q^2),$$

$$\oint_{C} \frac{t_L(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega = \oint_{C} \frac{T_1(Q^2,\ \omega) - \frac{\omega}{2}\frac{\nu}{m} T_2(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{T_1 - T_1^* - \frac{\omega}{2}\frac{\nu}{m}(T_2 - T_2^*)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$+ \int_{1}^{\infty} \frac{T_1 - T_1^* - \frac{\omega}{2}\frac{\nu}{m}(T_2 - T_2^*)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{2i\,\mathrm{Im}\,T_1 - \omega\frac{\nu}{m} i\,\mathrm{Im}\,T_2}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$+ \int_{1}^{\infty} \frac{2i\,\mathrm{Im}\,T_1 - \omega\frac{\nu}{m} i\,\mathrm{Im}\,T_2}{\omega^{n+1}}\, d\omega。$$

考虑到(7–67)式, $W_i = 2\,\mathrm{Im}\,T_i$, 上式成为

$$\oint_{C} \frac{t_L(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$= i\int_{-\infty}^{-1} \frac{W_1 - \omega\frac{\nu}{m} W_2}{\omega^{n+1}}\, d\omega + i\int_{1}^{\infty} \frac{W_1 - \omega\frac{\nu}{m} W_2}{\omega^{n+1}}\, d\omega。$$

再考虑到 W_i 的交叉对称性 (7–59) 式, $W_i(Q^2, -\omega) = -W_i(Q^2, \omega)$, 上式可写成

$$\oint_c \frac{t_L(Q^2, \omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = i\int_{+1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^n]\left[W_1 - \omega\frac{\nu}{m} W_2\right]}{\omega^{n+1}} d\omega,$$

换成标度函数

$$G_1 = W_1,\ G_2 = \frac{\nu}{m} W_2,\ G_3 = \frac{\nu}{m} W_3,$$

最后得到

$$\sum_j A_n^j E_{1,n}^j(Q^2) = \frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty} \frac{[1+(-1)^n][G_1 - \omega G_2]}{\omega^{n+1}} d\omega。$$

(8–57)

对于 t_2,

$$\oint_{c'} \frac{t_2(Q^2, \omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \oint_{c'} \frac{\sum_k \omega^k \sum_j A_{k+2}^j E_{2,k+2}^j(Q^2)}{\omega^{n+1}} d\omega$$

$$= 2\pi i \sum_j A_{n+2}^j E_{2,n+2}^j(Q^2),$$

$$\oint_c \frac{t_2(Q^2, \omega)}{\omega^{n+1}} d\omega = \oint_c \frac{2\left(\frac{\nu}{m} T_2\right)}{\omega^{n+2}} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{4i\frac{\nu}{m}\operatorname{Im} T_2}{\omega^{n+2}} d\omega + \int_1^{\infty} \frac{4i\frac{\nu}{m}\operatorname{Im} T_2}{\omega^{n+2}} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{2i\frac{\nu}{m} W_2}{\omega^{n+2}} d\omega + \int_1^{\infty} \frac{2i\frac{\nu}{m} W_2}{\omega^{n+2}} d\omega$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2\,i[1+(-1)^n]\frac{\nu}{m} W_2}{\omega^{n+2}} d\omega,$$

$$\sum_j A_{n+2}^j E_{2,n+2}^j(Q^2) = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{[1+(-1)^n] G_2}{\omega^{n+2}} d\omega。 \quad (8–58)$$

对于 t_3,

$$\oint_{c'} \frac{t_3(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega = \oint_{c'} \frac{\sum_k \omega^k \sum_j A^1_{k+1} E^1_{3,k+1}(Q^2)}{\omega^{n+1}}\, d\omega$$

$$= 2\pi i \sum_j A^1_{n+1} E^1_{3,n+1}(Q^2),$$

$$\oint_c \frac{t_3(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}\, d\omega = \oint_c \frac{\frac{\nu}{m} T_3(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+2}}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{2i\frac{\nu}{m}\,\mathrm{Im}\,T_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega + \int_1^{\infty} \frac{2i\frac{\nu}{m}\,\mathrm{Im}\,T_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{i\frac{\nu}{m} W_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega + \int_1^{\infty} \frac{i\frac{\nu}{m} W_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega$$

$$= i\int_1^{\infty} \frac{[1+(-1)^n]\frac{\nu}{m} W_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega,$$

$$\sum_j A^1_{n+1} E^1_{3,n+1}(Q^2) = \frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty} \frac{[1+(-1)^n] G_3}{\omega^{n+2}}\, d\omega。 \quad (8\text{–}59)$$

(8–57)式、(8–58)式、(8–59) 式的右边都是结构函数的矩，是可以由实验测定的。其左边，A^1_n 是按(8–44) 式由展开算符 $\hat{D}^1_n$ 的性质确定的常数，在不知算符的确切形式时，是无法计算的。而 $E^1_{i,n}(Q^2)$，是按 (8–46) 式、(8–49) 式、(8–52) 式由算符展开系数 $C^1_{i,n}(y^2)$ 确定的函数，是动量表象中的展开系数。重要的是，$E^1_{i,n}(Q^2)$ 和结构函数 $G_i(Q^2,\ x)$不同，$E^1_{i,n}(Q^2)$仅仅是动量 Q^2 的函数，$G_i(Q^2,\ x)$不仅和 Q^2 有关，也和 x 有关，因而和强子的动量 p 有关。$p^2=m^2$，不能随 $Q^2\to\infty$，而 $\to\infty$。所以，$G_i(Q^2,\ x)$ 不能直接用重整化群方程来讨论，而 $E^1_{i,n}(Q^2)$ 却可以用重整化群方程来探讨它随 Q^2 变化的规律。

§4. 展开系数的重整化群方程

(8-57)式、(8-58)式、(8-59)式，用强子流 T 张量的展开系数 $E^i_{i,n}(Q^2)$，来表示结构函数的矩。如果知道了 E 随 Q^2 变化的关系，就可以由此得知结构函数的矩随 Q^2 变化的关系，就可以知道深度非弹散射的标度行为。人们经过长期的研究，虽然还不能精确算出 $A^i_n E^i_{i,n}(Q^2)$ 的形式，但是导出了它们应该满足的重整化群方程，得到了它们随 Q^2 变化的规律，知道了它们偏离标度的行为。在这一节中，我们导出一般的算符乘积展开系数的重整化群方程，求出方程的解，阐明解的意义。

算符乘积的重整化群方程 设想有算符 $\hat{A}(y)$、$\hat{B}(0)$，它们是重整化了的，它们和裸算符 $\hat{A}_0(y)$、$\hat{B}_0(0)$ 之间有相乘重整化的关系

$$\hat{A}_0(y)=z_A\hat{A}(y),\ \hat{B}_0(0)=z_B\hat{B}(0)。\tag{8-60}$$

设想态矢量 $|\phi\rangle$ 也是相乘重整化的，

$$|\phi_0\rangle=\sqrt{z_\phi}\,|\phi\rangle。$$

那么，算符乘积在态矢量间的平均值

$$\langle\phi_0|\hat{A}_0(y)\hat{B}_0(0)|\phi_0\rangle=z_\phi z_A z_B\langle\phi|\hat{A}(y)\hat{B}(0)|\phi\rangle,$$

就是重整化点变换群

$$\mu\to\bar{\mu}=\mu e^t\tag{8-61}$$

变换下的不变量，

$$\frac{d}{dt}[z_\phi z_A z_B\langle\phi|\hat{A}(y)\hat{B}(0)|\phi\rangle]=0。$$

按照第六章的论述，重整化常数 z 是重整化点 μe^t、切割 Λ 和裸参数的函数；重整化了的算符矩阵元 $\langle\phi|\hat{A}(y)\hat{B}(0)|\phi\rangle$ 是重整化点 μe^t 和重整化参数 g、m、α 的函数；而 g、m、α 又是重整化点 μe^t 的函数。因而，上式成为

$$\left[\frac{\partial \ln z_\phi}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_A}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_B}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}+\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\langle\phi|\hat{A}(y)\hat{B}(0)|\phi\rangle=0。 \tag{8-62}$$

展开算符的重整化群方程 将算符乘积 $\hat{A}(y)\hat{B}(0)$用算符 $\hat{D}_n$ 展开为

$$\hat{A}(y)\hat{B}(0)=\sum_n C_n(y)\hat{D}_n(0)。 \tag{8-63}$$

设想算符 $\hat{D}_n(0)$也是相乘重整化的

$$\hat{D}_{n_0}(0)=z_{D_n}\hat{D}_n(0)。$$

那末它在态矢量 $|\phi_0\rangle$ 间的平均值

$$\langle\phi_0|\hat{D}_{n_0}(0)|\phi_0\rangle=z_\phi z_{D_n}\langle\phi|\hat{D}_n(0)|\phi\rangle,$$

在重整化点变换群(8–61)式的变换下,也是不变的,因而

$$\left[\frac{\partial \ln z_\phi}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_{D_n}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}+\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\langle\phi|\hat{D}_n(0)|\phi\rangle=0。 \tag{8-64}$$

展开系数的重整化群方程 (8–63)式中的展开系数 C_n, 是 y 的函数,已被明显标示出来。实际上,由于算符 $\hat{A}$、$\hat{B}$、$\hat{D}$ 都是重整化的,都是重整化点 μe^t 和重整化参数 g、m、α 的函数,所以 C_n 不只是 y 的函数,也是 μe^t、g、m、α 的函数 $C_n(y, g, m, \alpha, \mu)$。将(6–63)式取态矢量 $|\phi\rangle$ 间的平均值,得

$$\langle\phi|\hat{A}(y)\hat{B}(0)|\phi\rangle=\sum_n C_n(y, g, m, \alpha, \mu)\langle\phi|\hat{D}_n(0)|\phi\rangle。$$

将它代入(8–62)式,得

$$\sum_n\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}+\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+\frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)C_n\right]\langle\phi|\hat{D}_n(0)|\phi\rangle$$

$$+\sum_n C_n\left[\left(\frac{\partial \ln z_\phi}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_A}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_B}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}+\frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \alpha}+\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}\right)\right]\langle\phi|\hat{D}_n(0)|\phi\rangle=0。$$

将它代入(8–64)式,得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+\frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \ln z_A}{\partial t}+\frac{\partial \ln z_B}{\partial t}-\frac{\partial \ln z_{D_n}}{\partial t}\right]C_n=0。$$

令 $$\gamma_A=\frac{\partial \ln z_A}{\partial t},\quad \gamma_B=\frac{\partial \ln z_B}{\partial t},\quad \gamma_{D_n}=\frac{\partial \ln z_{D_n}}{\partial t}$$

则 $$\frac{d}{dt}C_n(y,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=(\gamma_{D_n}-\gamma_A-\gamma_B)C_n(y,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)。$$

这就是坐标表象 y 中的，展开系数的重整化群方程。作福里叶变换，就得到动量表象中的重整化群方程

$$\frac{d}{dt}E_n(Q,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=(\gamma_{D_n}-\gamma_A-\gamma_B)E_n(Q,\ g,\ m,\ \alpha,\mu)。\tag{8-65}$$

重整化群方程的解 将上式对 t 积分，$t:0\to t$，$\mu:\mu\to\mu e^t$，$g:g\to g(t)$，$m:m\to m(t)$，$\alpha:\alpha\to\alpha(t)$，得

$$E_n(Q,\ g(t),\ m(t),\ \alpha(t),\ \mu e^t)$$

$$=E_n(Q,\ g,\ m,\ \alpha,\mu)\exp\left[\int_0^t(\gamma_{D_n}-\gamma_A-\gamma_B)dt\right]。\tag{8-66}$$

在量纲标度变换群

$$[m]\to[m']=[m]e^t$$

的变换下，$$Q\to Qe^t,\ m\to me^t,\ \mu\to\mu e^t,$$

$$E_n(Qe^t,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=e^{d_n t}E_n(Q,\ g,\ me^{-t},\ \alpha,\ \mu e^{-t})。\tag{8-67}$$

把(8-66)式代入上式，得

$$E_n(Qe^t,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=E_n(Q,\ g(t),\ m(t)e^{-t},\ \alpha(t),\ \mu)$$

$$\cdot\exp\left[\ d_n t-\int_0^t(\gamma_{D_n}-\gamma_A-\gamma_B)dt\ \right]。$$

考虑到 $\beta(g)=\frac{dg}{dt}$，上式可以写成

$$E_n(Qe^t,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=E_n(Q,\ g(t),\ m(t)e^{-t},\ \alpha(t),\ \mu)$$

$$\cdot\exp\left[\ d_n t-\int_g^{g(t)}\frac{\gamma_{D_n}-\gamma_A-\gamma_B}{\beta}dg\ \right],\tag{8-68}$$

d_n 是 E_n 的量纲。这就是展开系数的、重整化群方程的一般解。

在 $d_n=0$, $\gamma_A=0$, $\gamma_B=0$, $\gamma_{D_n}=\gamma^0_{D_n}g^2+\cdots$, $\beta=-\beta_0 g^3+\cdots$ 的情况下,(8–68)式成为

$$E_n(Qe^t,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)$$
$$=E_n(Q,\ g(t),\ m(t)e^{-t},\ \alpha(t),\ \mu)\left[\frac{g^2(t)}{g^2}\right]^{\frac{\gamma^0_{b_n}}{2\beta_0}}。$$

对于 QCD, 如(7–33)式所示

$$\beta_0=\frac{1}{16\pi^2}\left[11-\frac{2}{3}N_f\right],\quad \frac{g^2(t)}{g^2}=\frac{1}{1+\frac{33-2N_f}{24\pi^2}g^2t},$$

$$t=\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2},$$

上式成为

$$E_n(Q,\ g,\ m,\ \alpha,\ \mu)=E_n(Q_0,\ g(t),\ m(t)e^{-t},\ \alpha(t),\ \mu)$$
$$\cdot\left[1+\frac{33-2N_f}{48\pi^2}g^2\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right]^{-\frac{\gamma^0_{b_n}}{2\beta_0}}。$$

在 Bjorken 极限下,不顾规范参数 α,

$$E_n(Q^2,\ g,\ m,\ \mu)$$
$$=E_n(Q_0,\ 0,\ 0,\ \mu)\left[\frac{33-2N_f}{48\pi^2}g^2\right]^{-\frac{\gamma^0_{b_n}}{2\beta_0}}\left[\ln\frac{Q^2}{Q_0}\right]^{-\frac{\gamma^0_{L_n}}{2\beta_0}}。$$

把它代入(8–57)式、(8–58)式、(8–59)式,得到

$$\int_1^\infty\frac{G_i(Q^2,\ \omega)}{\omega^{n+1}}d\omega-\int_0^1 x^{n-1}G_i(Q^2,\ x)dx\sim\left[\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right]^{-\frac{\gamma^0_{b_n}}{2\beta_0}}。\tag{8–69}$$

这表明:结构函数的标度行为,是以对数方式偏离的。这个结论,已经由实验所证实。

§5. 展开算符及其反常量纲

由(8–68)式、(8–69)式可知,展开系数、结构函数的矩随动量

变化的行为，和展开算符的反常量纲有关。然而，在上一节的论述中，没有涉及展开算符的具体形式，当然也不知道它的反常量纲。如何确定算符乘积的展开算符，如何计算它的反常量纲呢？如前所述，展开系数在光锥附近的发散程度，由算符的挠度确定，算符挠度愈小系数发散程度越高。所以，选择展开算符，第一个要考虑的因素，是它的挠度。其次是从算符乘积在时空空间、颜色空间、味空间的变换性质，来确定展开算符在这些空间的表示。在确定了展开算符以后，就可以按照相乘重整化的方法，来计算它的重整化常数，进而计算它的反常量纲。

算符的挠度和表示 从QCD的观点来看，基本的算符是夸克的费米算符 ψ、$\bar{\psi}$ 和胶子的玻色算符 A_μ、$F_{\mu\nu}$，其它算符是由它们组合而成的。它们的量纲、自旋、挠度及其在颜色空间、味空间的表示如下表所示。

算符	量纲	自旋	挠度	色	味
A^a_μ, $D_\mu=\partial_\mu-igA^a_\mu\frac{\lambda^a_c}{2}$	1	1	0	8	1
$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{\alpha\beta\gamma}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu$	2	1	1	8	1
$D^\mu F_{\mu\nu}$	3	1	2	8	1
$\mathrm{Tr}^{(c)}(F^a_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_{n-1}}F_{a\mu_n})$	$n+2$	n	2	1	1
ψ	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	3
$\bar{\psi}\psi$	3	0	3	1	1
$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	3	1	2	1	1
$\bar{\psi}\gamma_\mu D_\nu\psi$	4	2	2	1	1
$\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_n}\psi$	$n+2$	n	2	1	1
$\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_n}\frac{\lambda^a}{2}\psi$	$n+2$	n	2	1	8
$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\,\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$	6	2	4	1	1
$\mathrm{Tr}^c(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi F^a_\nu D_\sigma F_{a\rho})$	8	4	4	1	1

二挠度算符 在深度非弹散射问题中，涉及的弱电作用流 J_μ 的乘积，如(8-41)式的 $T(J^+_\mu(y)J_\nu(0))$ 的展开。J_μ 是颜色单态，

是味空间的 8 重态。所以，展开算符应该是颜色单态，是味空间的

$$8\times 8=1+8+8+10+10+27$$

等多重态。上表表明：挠度 $\tau=0$，1 的算符，都不是颜色单态，因而都不能选作展开算符；挠度最低的颜色单态，只有三类，它们是非味单态，是味的八重态

$$\hat{D}^{(\alpha)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\frac{i^{n-1}}{n!}S\left[\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_n}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi-\text{trace term}\right],$$

(8–70)

和味单态

$$\hat{D}^{(f)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\frac{i^{n-1}}{n!}S\left[\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_n}\psi-\text{trace term}\right],\qquad(8\text{–}71)$$

$$\hat{D}^{(a)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\frac{i^{n-2}}{n!}S\left[\mathrm{Tr}^{(c)}(F^\alpha_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_{n-1}}F_{\alpha\mu_n})-\text{trace term}\right]。$$

(8–72)

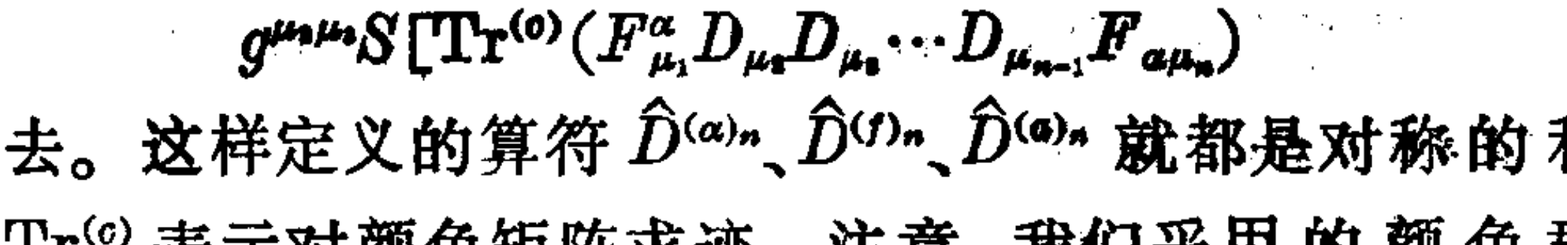
式中，S 是表示使张量指标对称化的符号，$n!$ 等于对称化后的项的数目。trace term 是指任一对张量指标收缩的项，如

$$g^{\mu_1\mu_2}S\left[\mathrm{Tr}^{(c)}(F^\alpha_{\mu_1}D_{\mu_2}D_{\mu_3}\cdots D_{\mu_{n-1}}F_{\alpha\mu_n})\right.$$

应该减去。这样定义的算符 $\hat{D}^{(\alpha)_n}$、$\hat{D}^{(f)_n}$、$\hat{D}^{(a)_n}$ 就都是对称的和无迹的。$\mathrm{Tr}^{(c)}$ 表示对颜色矩阵求迹。注意，我们采用的颜色群和味群都是 SU(3) 群，分别用 $\mathrm{SU}_c(3)$ 和 $\mathrm{SU}_f(3)$ 表示，它们的生成元分别用 $\frac{\gamma^\alpha_c}{2}$ 和 $\frac{\lambda^\alpha}{2}$ 表示。

显然，由于 $D_\mu=\partial_\mu-igA^\alpha_\mu\frac{\lambda^\alpha_c}{2}$ 包含两项，(8–70) 式、(8–71) 式、(8–72) 式的每一项中都包含多项，用费曼图表示为

$\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_1}\cdots D_{\mu_n}\psi$



$$F^{\alpha}_{\mu_1} D_{\mu_2} \cdots D_{\mu_{n-1}} F_{\alpha\mu_n}$$



(8–73)

由此可知，它们都可以按照渐近自由的强耦合常数 g，作微扰展开。当然，在非渐近自由的情况下，上列展开仍然成立，但后项未必比前项小，未必能忽略不计。当我们计算算符 $\hat{D}$ 的重整化常数、反常量纲时，假定 g 是渐近自由的，因而可以采用微扰计算的方法。

费曼规则 我们采用第四章论述的路径积分量子化方法，来导出诸算符顶角的费曼规则。把诸算符的时空积分，看作作用量，看作树图近似下的正规顶角生成泛函，就可以导出所需要的费曼规则。

为了便于计算，引入一个任意的四维单位矢量

$$\Delta_\mu,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad \Delta_\mu\Delta^\mu=1。$$

把这个四维单位矢量乘以(8–70)式、(8–71)式、(8–72) 式，就可以去除 trace term，得到

$$\hat{D}^{(\alpha)_n}(x)=\Delta^{\mu_1}\Delta^{\mu_2}\cdots\Delta^{\mu_n}\hat{D}^{(\alpha)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$$

$$=i^{n-1}\bar{\psi}(x)\not{\Delta}(\Delta^\mu D_\mu)^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),$$

$$\hat{D}^{(f)_n}(x)=\Delta^{\mu_1}\Delta^{\mu_2}\cdots\Delta^{\mu_n}\hat{D}^{(f)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$$

$$=i^{n-1}\bar{\psi}(x)\not{\Delta}(\Delta^\mu D_\mu)^{n-1}\psi(x),$$

$$\hat{D}^{(a)_n}(x)=\Delta^{\mu_1}\Delta^{\mu_2}\cdots\Delta^{\mu_n}\hat{D}^{(a)_n}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$$

$$=i^{n-2}\mathrm{Tr}^c[(\Delta^\mu F^\alpha_\mu)(\Delta^\nu D_\nu)^{n-2}(\Delta^\lambda F_{\alpha\lambda})]。$$

把上式对 d^4x 积分，并看作是树图正规顶角的生成泛函

$$\Gamma_{(\alpha)_n}=i^{n-1}\int d^4x\bar{\psi}(x)\not{\Delta}\,(\Delta\cdot D(x))^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\psi(x),$$

$$\Gamma_{(f)n}=i^{n-1}\int d^4x\bar{\psi}(x)\Delta(\Delta\cdot D(x))^{n-1}\psi(x),$$

$$\Gamma_{(a)n}=i^{n-2}\mathrm{Tr}^c\int d^4x(\Delta\cdot F^\mu(x))(\Delta\cdot D(x))^{n-2}(\Delta\cdot F_\mu(x))。$$

按照第四章论述的方法，将它们对场量求导，然后令场量为零，就得到相应顶角的费曼规则。

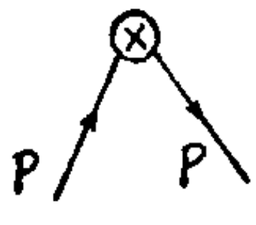
$$\left.\frac{\delta^2\Gamma_{(a)n}}{\delta\psi_\sigma(y)\delta\bar{\psi}_\rho(z)}\right|_0=i^{n-1}\int d^4x\delta^4(x-z)\left[\Delta(\partial)^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]_{\rho\sigma}\delta^4(x-y)$$

$$=i^{n-1}\int d^4x\,d^4p\,d^4p'\frac{e^{ip(x-z)}}{(2\pi)^4}$$

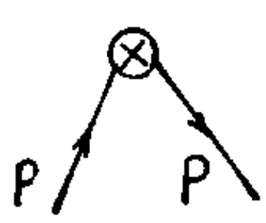
$$\cdot\left[\Delta(\partial)^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]_{\rho\sigma}\frac{e^{-ip'(x-y)}}{(2\pi)^4}$$

$$=\int d^4x\,d^4p\,d^4p'\ \frac{e^{ip(x-z)}}{(2\pi)^4}\left[\Delta(\Delta\cdot p')^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]_{\rho\sigma}\frac{e^{-ip'(x-y)}}{(2\pi)^4}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\left[\Delta(\Delta\cdot p)^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]_{\rho\sigma}e^{ip(y-z)}。$$



$$=\Delta(\Delta\cdot p)^{n-1}\frac{\lambda^\alpha}{2},$$



$$,\ =\Delta(\Delta\cdot p)^{n-1}。$$

(8–74)

$$\left.\frac{\delta^3\Gamma_{(a)n}}{\delta A_\mu^c(x)\delta\psi_\sigma(y)\delta\bar{\psi}_\rho(z)}\right|_0$$

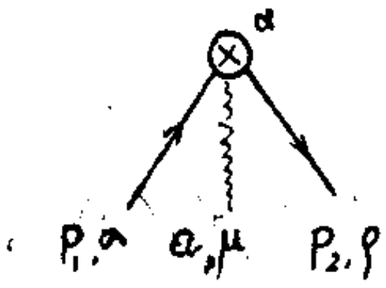
$$=i^{n-1}\int d^4t\delta^4(t-z)\left[\Delta(\partial)^j\left(-ig\frac{\lambda_c^a}{2}\Delta_\mu\right)\right.$$

$$\left.\cdot\partial^4(t-x)\ \frac{\lambda^\alpha}{2}(\partial)^{n-2-j}\right]_{\rho\sigma}\delta^4(t-y)$$

$$=\sum_j i^{n-1}\int d^4t\,d^4p_1\,d^4p_2\,d^4k\ \frac{e^{ip_1(t-z)}}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot\left[\Delta(\partial)^j\left(-ig\frac{\lambda_c^a}{2}\Delta_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}\right)\frac{e^{ik(t-x)}}{(2\pi)^4}(\partial)^{n-2-j}\right]_{\rho\sigma}\frac{e^{-ip_2(t-y)}}{(2\pi)^4}$$

$$=\sum_j\int\frac{d^4p_1\,d^4p_2}{(2\pi)^8}\left[\Delta(\Delta\cdot p_1)^j(\Delta\cdot p_2)^{n-2-j}g\Delta_\mu\frac{\lambda_c^a}{2}\frac{\lambda^\alpha}{2}\right]_{\rho\sigma}e^{ip_1(x-z)-ip_2(x-y)},$$



$$= \sum_{j=0}^{n-2} \Delta_\mu \not{\Delta} (\Delta \cdot p_1)^j (\Delta \cdot p_2)^{n-2-j} g \left(\frac{\lambda_c^a}{2} \frac{\lambda^\alpha}{2} \right)_{\rho\sigma} , \tag{8-75}$$

对于单态 $\frac{\lambda^\alpha}{2} \to 1$。

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma_{(a)n}}{\delta A_\mu^\alpha(y) \delta A_\nu^\beta(z)} \right|_0$$

$$= 2\, i^{n-2} \mathrm{Tr}^c \int d^4x [(\not{\Delta} \delta_\mu^\lambda - \Delta_\mu \partial^\lambda) \delta^4(x-y)$$

$$\cdot T_c^\alpha (\not{\Delta})^{n-2} (\not{\Delta} \delta_{\lambda\nu} - \Delta_\nu \partial_\lambda) T_c^\beta \delta^4(x-z)]$$

$$= 2\, i^{n-2} \mathrm{Tr}^c \int d^4x\, d^4k\, d^4k' \left[(\not{\Delta} \delta_\mu^\lambda - \Delta_\mu \partial^\lambda) \frac{e^{ik(x-y)}}{(2\pi)^4} T_c^\alpha (\not{\Delta})^{n-2} \right.$$

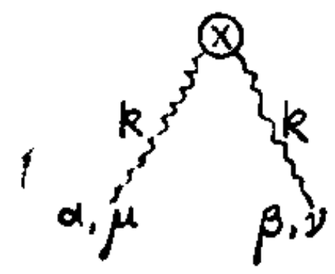
$$\left. \cdot (\not{\Delta} \delta_{\lambda\nu} - \Delta_\nu \partial_\lambda) \frac{e^{-ik'(x-z)}}{(2\pi)^4} T_c^\beta \right]$$

$$= 2\, \mathrm{Tr}^c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [(\Delta \cdot k \delta_\mu^\lambda - \Delta_\mu k^\lambda) (\Delta \cdot k)^{n-2}$$

$$\cdot (\Delta \cdot k \delta_{\lambda\nu} - \Delta_\nu k_\lambda) T_c^\alpha T_c^\beta e^{-ik(y-z)}$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [g_{\mu\nu} (\Delta \cdot k)^n + \Delta_\mu \Delta_\nu k^2 (\Delta \cdot k)^{n-2}$$

$$- \Delta_\mu k_\nu (\Delta \cdot k)^{n-1} - k_\mu \Delta_\nu (\Delta \cdot k)^{n-1}] e^{ik(y-z)} 。$$



$$= \delta_{\alpha\beta} [g_{\mu\nu} (\Delta \cdot k)^n + \Delta_\mu \Delta_\nu k^2 (\Delta \cdot k)^{n-2}$$

$$- \Delta_\mu k_\nu (\Delta \cdot k)^{n-1} - k_\mu \Delta_\nu (\Delta \cdot k)^{n-1}] 。 \tag{8-76}$$

$$\left. \frac{\delta^3 \Gamma_{(a)n}}{\delta A_\mu^\alpha(y) \delta A_\nu^\beta(z) \delta A_\lambda^\gamma(t)} \right|_{A=0}$$

$$= i^{n-2}\, \mathrm{Tr}^{(c)} \int d^4x \{ [(\partial^\sigma \Delta_\mu - \not{\Delta} \delta_\mu^\sigma) T^\alpha \delta^4(x-y) \sum_j (\not{\Delta})^j$$

$$\cdot (-igT^\beta \Delta_\nu) \delta^4(x-z) (\not{\Delta})^{n-3-j} (\not{\Delta} \delta_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Delta_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\nu - \partial \delta^\sigma_\nu) T^\beta \delta^4(x-z) \sum_j (\partial)^j (-igT^\gamma \Delta_\lambda) \delta^4(x-t)$$

$$\cdot (\partial)^{n-3-j} (\partial \delta_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Delta_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\lambda - \partial \delta^\sigma_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t) \sum_j (\partial)^j (-igT^\alpha \Delta_\mu) \delta^4(x-y)$$

$$\cdot (\partial)^{n-3-j} (\partial \delta_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Delta_\nu) T^\beta \delta^4(x-z)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\nu - \partial \delta^\sigma_\nu) T^\beta \delta^4(x-z) \sum_j (\partial)^j (-igT^\alpha \Delta_\mu) \delta^4(x-y)$$

$$\cdot (\partial)^{n-3-j} (\partial \delta_{\sigma\lambda} \partial_\sigma \Delta_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\lambda - \partial \delta^\sigma_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t) \sum_j (\partial)^j (-igT^\beta \Delta_\nu) \delta^4(x-z)$$

$$\cdot (\partial)^{n-3-j} (\partial \delta_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Delta_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\mu - \partial \delta^\sigma_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y) \sum_j (\partial)^j (-igT^\gamma \Delta_\lambda) \delta^4(x-t)$$

$$\cdot (\partial)^{n-3-j} (\partial \delta_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Delta_\nu) T^\beta \delta^4(x-z)]$$

$$+[gf^{\alpha\alpha\beta} \delta^\sigma_\mu \Delta_\nu T^\alpha \delta^4(x-y) \delta^4(x-z) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Delta_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t)$$

$$+gf^{\alpha\beta\gamma} \delta^\sigma_\nu \Delta_\lambda T^\alpha \delta^4(x-z) \delta^4(x-t) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Delta_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y)$$

$$+gf^{\alpha\gamma\alpha} \delta^\sigma_\lambda \Delta_\mu T^\alpha \delta^4(x-t) \delta^4(x-y) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Delta_\nu) T^\beta \delta^4(x-z)$$

$$+gf^{\alpha\beta\alpha} \delta^\sigma_\nu \Delta_\mu T^\alpha \delta^4(x-z) \delta^4(x-y) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma \Delta_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t)$$

$$+gf^{\alpha\alpha\gamma} \delta^\sigma_\mu \Delta_\lambda T^\alpha \delta^4(x-y) \delta^4(x-t) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Delta_\nu) T^\beta \delta^4(x-z)$$

$$+gf^{\alpha\gamma\beta} \delta^\sigma_\lambda \Delta_\nu T^\alpha \delta^4(x-t) \delta^4(x-z) (\partial)^{n-2} (\partial \delta_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Delta_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y)]$$

$$+[(\partial^\sigma \Delta_\mu - \partial \delta^\sigma_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\beta\gamma} T^\alpha \Delta_\nu \delta_{\sigma\lambda} \delta^4(x-z) \delta^4(x-t)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\nu - \partial \delta^\sigma_\nu) T^\beta \delta^4(x-z) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\gamma\alpha} T^\alpha \Delta_\lambda \delta_{\sigma\mu} \delta^4(x-t) \delta^4(x-y)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\lambda - \partial \delta^\sigma_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\alpha\beta} T^\alpha \Delta_\mu \delta_{\sigma\nu} \delta^4(x-y) \delta^4(x-z)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\mu - \partial \delta^\sigma_\mu) T^\alpha \delta^4(x-y) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\gamma\beta} T^\alpha \Delta_\lambda \delta_{\sigma\nu} \delta^4(x-t) \delta^4(x-z)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\lambda - \partial \delta^\sigma_\lambda) T^\gamma \delta^4(x-t) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\beta\alpha} T^\alpha \Delta_\nu \delta_{\sigma\mu} \delta^4(x-z) \delta^4(x-y)$$

$$+(\partial^\sigma \Delta_\nu - \partial \delta^\sigma_\nu) T^\beta \delta^4(x-z) (\partial)^{n-2} gf^{\alpha\alpha\gamma} T^\alpha \Delta_\mu \delta_{\sigma\lambda} \delta^4(x-y) \delta^4(x-t)]\}$$

$$= i^{n-2} \mathrm{Tr}^{(0)} \int d^4x \, \frac{d^4p \, d^4q \, d^4r}{(2\pi)^{12}} \, e^{-i[p(x-y)+q(x-z)+k(x-t)]}$$

$$\cdot \{[(-ip^\sigma \Delta_\mu + i\Delta \cdot p \delta^\sigma_\mu) T^\alpha \sum_j (i\Delta \cdot p)^j (-igT^\beta \Delta_\nu)$$

$$\cdot (-i\Delta \cdot k)^{n-3-j} (-i\Delta \cdot k \delta_{\sigma\lambda} + ik_\sigma \Delta_\lambda) T^\gamma$$

$$+(-i\dot{q}^{\sigma}\Delta_{\nu}+i\Delta\cdot q\delta_{\nu}^{\sigma})T^{\beta}\sum_{j}(i\Delta\cdot q)^{j}(-igT^{\gamma}\Delta_{\lambda})$$

$$\cdot(-i\Delta\cdot p)^{n-3-j}(-i\Delta\cdot p\delta_{\sigma\mu}+ip_{\sigma}\Delta_{\mu})T^{\alpha}$$

$$+(-ik^{\sigma}\Delta_{\lambda}+i\Delta\cdot k\delta_{\lambda}^{\sigma})T^{\gamma}\sum_{j}(i\Delta\cdot k)^{j}(-igT^{\alpha}\Delta_{\mu})$$

$$\cdot(-i\Delta\cdot q)^{n-3-j}(-i\Delta\cdot q\delta_{\sigma\nu}+iq_{\sigma}\Delta_{\nu})T^{\beta}$$

$$+(-iq^{\sigma}\Delta_{\nu}+i\Delta\cdot q\delta_{\nu}^{\sigma})T^{\beta}\sum_{j}(i\Delta\cdot q)^{j}(-igT^{\alpha}\Delta_{\mu})$$

$$\cdot(-i\Delta\cdot k)^{n-3-j}(-i\Delta\cdot k\delta_{\sigma\lambda}+ik_{\sigma}\Delta_{\lambda})T^{\gamma}$$

$$+(-ik^{\sigma}\Delta_{\lambda}+i\Delta\cdot k\delta_{\lambda}^{\sigma})T^{\gamma}\sum_{j}(i\Delta\cdot k)^{j}(-igT^{\beta}\Delta_{\nu})$$

$$\cdot(-i\Delta\cdot p)^{n-3-j}(-i\Delta\cdot p\delta_{\sigma\mu}+ip_{\sigma}\Delta_{\mu})T^{\alpha}$$

$$+(-ip^{\sigma}\Delta_{\mu}+i\Delta\cdot p\delta_{\mu}^{\sigma})T^{\alpha}\sum_{j}(i\Delta\cdot p)^{j}(-igT^{\gamma}\Delta_{\lambda})$$

$$\cdot(-i\Delta\cdot q)^{n-3-j}(-i\Delta\cdot q\delta_{\sigma\nu}+iq_{\sigma}\Delta_{\nu})T^{\beta}]$$

$$+[gf^{\alpha\alpha\beta}\delta_{\mu}^{\sigma}\Delta_{\nu}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot k)^{n-2}(-i\Delta\cdot k\delta_{\sigma\lambda}+ik_{\sigma}\Delta_{\lambda})T^{\gamma}$$

$$+gf^{\alpha\beta\gamma}\delta_{\nu}^{\sigma}\Delta_{\lambda}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot p)^{n-2}(-i\Delta\cdot p\delta_{\sigma\mu}+ip_{\sigma}\Delta_{\mu})T^{\alpha}$$

$$+gf^{\alpha\gamma\alpha}\delta_{\lambda}^{\sigma}\Delta_{\mu}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot q)^{n-2}(-i\Delta\cdot q\delta_{\sigma\nu}+iq_{\sigma}\Delta_{\nu})T^{\beta}$$

$$+gf^{\alpha\beta\alpha}\delta_{\nu}^{\sigma}\Delta_{\mu}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot k)^{n-2}(-i\Delta\cdot k\delta_{\sigma\lambda}+ik_{\sigma}\Delta_{\lambda})T^{\gamma}$$

$$+gf^{\alpha\alpha\gamma}\delta_{\mu}^{\sigma}\Delta_{\lambda}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot q)^{n-2}(-i\Delta\cdot q\delta_{\sigma\nu}+iq_{\sigma}\Delta_{\nu})T^{\beta}$$

$$+gf^{\alpha\alpha\beta}\delta_{\mu}^{\sigma}\Delta_{\nu}T^{\alpha}(-i\Delta\cdot k)^{n-2}(-i\Delta\cdot k\delta_{\sigma\lambda}+ik_{\sigma}\Delta_{\lambda})T^{\gamma}]$$

$$+[(-ip^{\sigma}\Delta_{\mu}+i\Delta\cdot p\delta_{\mu}^{\sigma})T^{\alpha}(i\Delta\cdot p)^{n-2}gf^{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha}\Delta_{\nu}\delta_{\sigma\lambda}$$

$$+(-iq^{\sigma}\Delta_{\nu}+i\Delta\cdot q\delta_{\nu}^{\sigma})T^{\beta}(i\Delta\cdot q)^{n-2}gf^{\alpha\gamma\alpha}T^{\alpha}\Delta_{\lambda}\delta_{\sigma\mu}$$

$$+(-ik^{\sigma}\Delta_{\lambda}+i\Delta\cdot k\delta_{\lambda}^{\sigma})T^{\gamma}(i\Delta\cdot k)^{n-2}gf^{\alpha\alpha\beta}T^{\alpha}\Delta_{\mu}\delta_{\sigma\nu}$$

$$+(-ip^{\sigma}\Delta_{\mu}+i\Delta\cdot p\delta_{\mu}^{\sigma})T^{\alpha}(i\Delta\cdot p)^{n-2}gf^{\alpha\gamma\beta}T^{\alpha}\Delta_{\lambda}\delta_{\sigma\nu}$$

$$+(-ik^{\sigma}\Delta_{\lambda}+i\Delta\cdot k\delta_{\lambda}^{\sigma})T^{\gamma}(i\Delta\cdot k)^{n-2}gf^{\alpha\beta\alpha}T^{\alpha}\Delta_{\nu}\delta_{\sigma\mu}$$

$$+(-ip^{\sigma}\Delta_{\mu}+i\Delta\cdot p\delta_{\mu}^{\sigma})T^{\alpha}(i\Delta\cdot p)^{n-2}gf^{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha}\Delta_{\nu}\delta_{\sigma\lambda}]\}$$

$$=\int\frac{d^{4}p\,d^{4}q\,d^{4}k}{(2\pi)^{8}}\delta^{4}(p+q+k)e^{i(px+qx+kt)}$$

$$\cdot\{g\mathrm{Tr}(T^{\alpha}T^{\beta}T^{\gamma})[\sum_{j}(-\Delta\cdot p)^{j}\Delta_{\nu}(\Delta\cdot k)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot p\Delta\cdot kg_{\mu\lambda}+(p\cdot k)\Delta_{\mu}\Delta_{\lambda}-\Delta\cdot pk_{\mu}\Delta_{\lambda}-\Delta\cdot kp_{\lambda}\Delta_{\mu})$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot q)^j\Delta_\lambda(\Delta\cdot p)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot q\Delta\cdot p g_{\mu\nu}+(q\cdot p)\Delta_\nu\Delta_\mu-\Delta\cdot q p_\nu\Delta_\mu-\Delta\cdot p q_\mu\Delta_\nu)$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot k)^j\Delta_\mu(\Delta\cdot q)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot k\Delta\cdot q g_{\nu\lambda}+(k\cdot q)\Delta_\lambda\Delta_\nu-\Delta\cdot k q_\lambda\Delta_\nu-\Delta\cdot q k_\nu\Delta_\lambda)]$$

$$+g\mathrm{Tr}(T^\beta T^\alpha T^\gamma)\,[\sum_j(-\Delta\cdot q)^j\Delta_\mu(\Delta\cdot k)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot q\Delta\cdot k g_{\nu\lambda}+(q\cdot k)\Delta_\nu\Delta_\lambda-\Delta\cdot q k_\nu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k q_\lambda\Delta_\nu)$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot k)^j\Delta_\nu(\Delta\cdot p)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot k\Delta\cdot p g_{\mu\lambda}+(k\cdot p)\Delta_\lambda\Delta_\mu-\Delta\cdot k p_\lambda\Delta_\mu-\Delta\cdot p k_\mu\Delta_\lambda)$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot p)^j\Delta_\lambda(\Delta\cdot q)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot p\Delta\cdot q g_{\mu\nu}+(p\cdot q)\Delta_\mu\Delta_\nu-\Delta\cdot p q_\mu\Delta_\nu-\Delta\cdot q p_\nu\Delta_\mu)]$$

$$-i\frac{g}{2}f^{\alpha\beta\gamma}[(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\nu(\Delta\cdot k g_{\mu\lambda}-k_\mu\Delta_\lambda)$$

$$+(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\lambda(\Delta\cdot p g_{\mu\nu}-p_\nu\Delta_\mu)+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\mu(\Delta\cdot q g_{\nu\lambda}-q_\lambda\Delta_\nu)]$$

$$-i\frac{g}{2}f^{\beta\alpha\gamma}[(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\mu(\Delta\cdot k g_{\nu\lambda}-k_\nu\Delta_\lambda)$$

$$+(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\nu(\Delta\cdot p g_{\mu\lambda}-p_\lambda\Delta_\mu)+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\lambda(\Delta\cdot q g_{\mu\nu}-q_\mu\Delta_\nu)]$$

$$-i(-1)^n\frac{g}{2}f^{\alpha\beta\gamma}[(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\nu(p_\lambda\Delta_\mu-\Delta\cdot p g_{\mu\lambda})$$

$$+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\lambda(q_\mu\Delta_\nu-\Delta\cdot q g_{\mu\nu})+(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\mu(k_\nu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k g_{\nu\lambda})]$$

$$-i(-1)^n\frac{g}{2}f^{\alpha\gamma\beta}[(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\lambda(p_\nu\Delta_\mu-\Delta\cdot p g_{\mu\nu})$$

$$+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\mu(q_\lambda\Delta_\nu-\Delta\cdot q g_{\nu\lambda})+(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\nu(k_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k g_{\mu\lambda})]\}$$

$$=\int\frac{d^4p\,d^4q\,d^4k}{(2\pi)^8}\delta^4(p+q+k)e^{i(py+qx+kt)}$$

$$\cdot\left\{\frac{g}{4}[(1-(-1)^n)d^{\alpha\beta\gamma}+i(1+(-1)^n)f^{\alpha\beta\gamma}]\right.$$

$$\cdot[\sum_j(-\Delta\cdot p)^j\Delta_\nu(\Delta\cdot k)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot p\Delta\cdot k g_{\mu\lambda}+(p\cdot k)\Delta_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot p k_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k p_\lambda\Delta_\mu)$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot q)^j\Delta_\lambda(\Delta\cdot p)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot q\Delta\cdot p g_{\mu\nu}+(q\cdot p)\Delta_\nu\Delta_\mu-\Delta\cdot q p_\nu\Delta_\mu-\Delta\cdot p q_\mu\Delta_\nu)$$

$$+\sum_j(-\Delta\cdot k)^j\Delta_\mu(\Delta\cdot q)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot k\Delta\cdot q g_{\nu\lambda}+(k\cdot q)\Delta_\lambda\Delta_\nu-\Delta\cdot k q_\lambda\Delta_\nu-\Delta\cdot q k_\nu\Delta_\lambda)]$$

$$-i\frac{g}{2}[1+(-1)^n]f^{\alpha\beta\gamma}[(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\lambda(\Delta\cdot p g_{\mu\nu}-p_\nu\Delta_\mu)$$

$$+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\mu(\Delta\cdot q g_{\nu\lambda}-q_\lambda\Delta_\nu)+(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\nu(\Delta\cdot k g_{\mu\lambda}-k_\mu\Delta_\lambda)]$$

$$+i\frac{g}{2}[1+(-1)^n]f^{\alpha\beta\gamma}[(\Delta\cdot p)^{n-2}\Delta_\nu(\Delta\cdot p g_{\mu\lambda}-p_\lambda\Delta_\mu)$$

$$+(\Delta\cdot q)^{n-2}\Delta_\lambda(\Delta\cdot q g_{\mu\nu}-q_\mu\Delta_\nu)+(\Delta\cdot k)^{n-2}\Delta_\mu(\Delta\cdot k g_{\nu\lambda}-k_\nu\Delta_\lambda)]\Big\}$$

$$=\int\frac{d^4p\,d^4q\,d^4k}{(2\pi)^8}\delta^4(p+q+k)e^{i(py+qz+kt)}$$

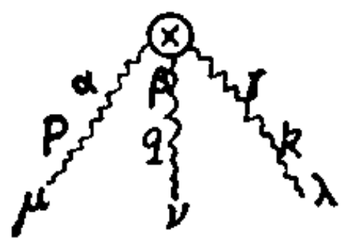
$$\cdot\Big\{\frac{g}{4}[(1-(-1)^n)d^{\alpha\beta\gamma}+i(1+(-1)^n)f^{\alpha\beta\gamma}]$$

$$\cdot[\sum_j(-\Delta\cdot p)^j\Delta_\nu(\Delta\cdot k)^{n-3-j}(\Delta\cdot p\Delta\cdot k g_{\mu\lambda}+(p\cdot k)\Delta_\mu\Delta_\lambda$$

$$-\Delta\cdot p k_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k p_\lambda\Delta_\mu)]-\frac{ig}{2}(1+(-1)^n)f^{\alpha\beta\gamma}$$

$$\cdot[(\Delta\cdot p)^{n-1}(g_{\mu\nu}\Delta_\lambda-g_{\mu\lambda}\Delta_\nu)-(\Delta\cdot p)^{n-2}(\Delta_\mu p_\nu\Delta_\lambda-\Delta_\mu\Delta_\nu p_\lambda)]$$

$$+\begin{pmatrix}p&q&k\\q&k&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&\nu&\lambda\\\nu&\lambda&\mu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p&q&k\\k&p&q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&\nu&\lambda\\\lambda&\mu&\nu\end{pmatrix}\Big\}。$$



$$=\frac{g}{4}[(1-(-1)^n)d^{\alpha\beta\gamma}+i(1+(-1)^n)f^{\alpha\beta\gamma}]$$

$$\cdot[\sum_j(-\Delta\cdot p)^j\Delta_\nu(\Delta\cdot k)^{n-3-j}$$

$$\cdot(\Delta\cdot p\Delta\cdot k g_{\mu\lambda}+(p\cdot k)\Delta_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot p k_\mu\Delta_\lambda-\Delta\cdot k p_\lambda\Delta_\mu)]$$

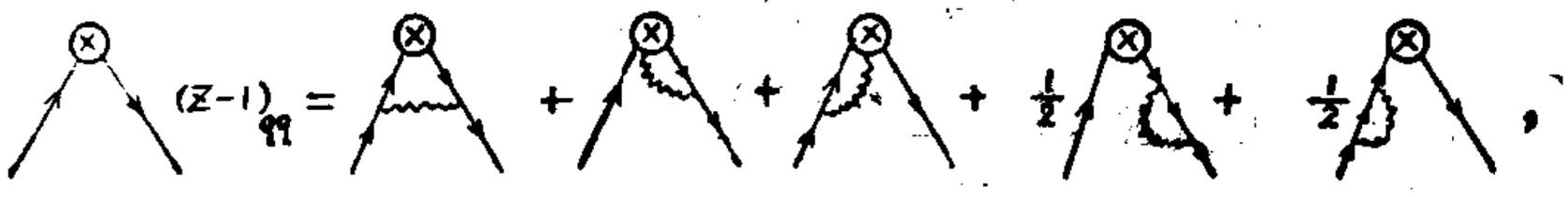
$$-\frac{ig}{2}(1+(-1)^n)f^{\alpha\beta\gamma}[(\Delta\cdot p)^{n-1}(g_{\mu\nu}\Delta_\lambda-g_{\mu\lambda}\Delta_\nu)$$

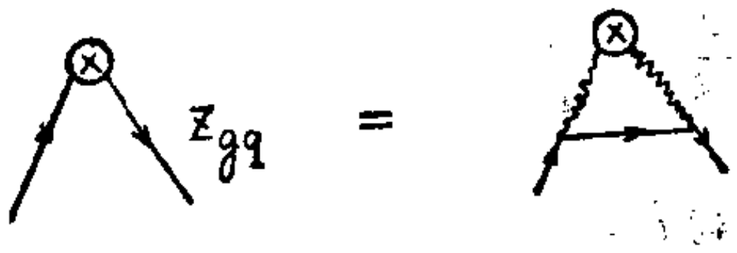
$$-(\Delta\cdot p)^{n-2}(\Delta_\mu p_\nu\Delta_\lambda-\Delta_\mu\Delta_\nu p_\lambda)]$$

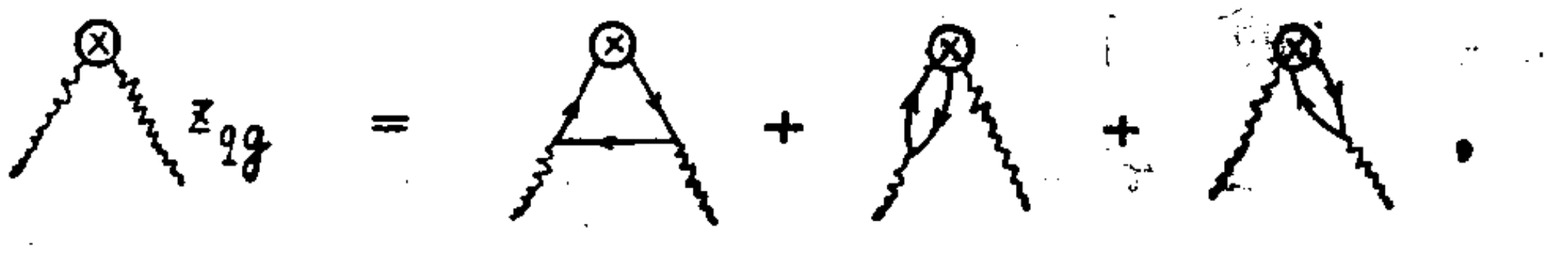
$$+\begin{pmatrix}p&q&k\\q&k&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&\nu&\lambda\\\nu&\lambda&\mu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p&q&k\\k&p&q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&\nu&\lambda\\\lambda&\mu&\nu\end{pmatrix}。\qquad(8\text{–}77)$$

对于 g^2 以上顶角的费曼规则，可以用类似方法导出。有兴趣的读者，可以进行练习。

反常量纲 根据费曼规则 (8-74) 式、(8-75) 式、(8-76) 式、(8-77)式、(7-10)式，按照如下的图形









应用微扰方法，就可以算出单圈近似下的重整化常数 z_{qq}、z_{gq}、z_{qg}、z_{gg}。对于味单态的展开算符 $\hat{D}^{(f)n}$ 和 $\hat{D}^{(a)n}$，重整化时，有混合

$$\hat{D}_r^{(f)n}=z_{qq}^{-1}\hat{D}_0^{(f)n}+z_{gq}^{-1}\hat{D}_0^{(a)n},\ \hat{D}_r^{(a)n}=z_{qg}^{-1}\hat{D}_0^{(f)n}+z_{gg}^{-1}\hat{D}_0^{(a)n},$$

故有四个重整化常数。对于味的非单态展开算符 $\hat{D}^{(\alpha)n}$，重整化时，无混合

$$\hat{D}_r^{(\alpha)n}=z_{qq}^{-1}\hat{D}_0^{(\alpha)n},$$

故只有一个重整化常数，乃单态算符重整化常数之一。

将计算所得的重整化常数 z，代入

$$\gamma=\mu\frac{\partial \ln z}{\partial \mu},$$

就可以算出反常量纲。在单圈近似下*，

---

* A. J. Buras. Rev. Mod. Phys. V. 52, N. 1, (1980) p. 222.

$$\gamma = \frac{g^2}{16\pi^2}\gamma_0,$$

$$\gamma_{qq}^{(0)n} = 2C_2(R)\left[1-\frac{2}{n(n+1)}+4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right],$$

$$\gamma_{qg}^{(0)n} = -2T(R)N_f\frac{4(n^2+n+2)}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\gamma_{gq}^{(0)n} = -C_2(R)\frac{4(n^2+n+2)}{n(n^2-1)},$$

$$\gamma_{gg}^{(0)n} = 2C_2(G)\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{n(n-1)}-\frac{4}{(n+1)(n+2)}+4\sum_{j}\frac{1}{j}\right]$$

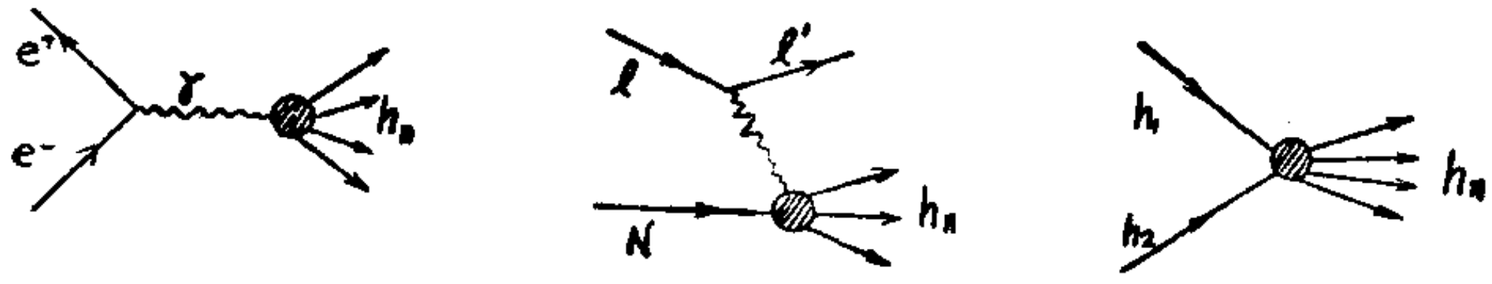
$$+\frac{8}{3}T(R)N_f。 \tag{8-78}$$

N_f 是夸克味的数目。$SU_c(3)$ 时，

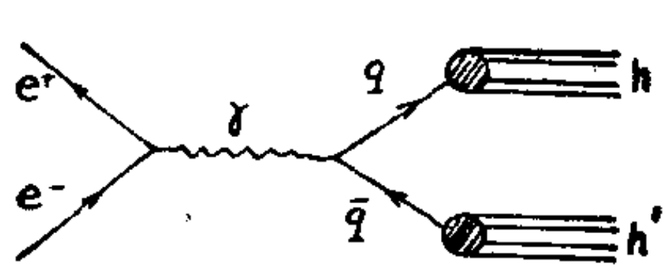
$$T(R)=\frac{1}{2},\ C_2(R)=\frac{4}{3},\ C_2(G)=3。$$

第九章　A–P 方程和分布、碎裂、演化函数

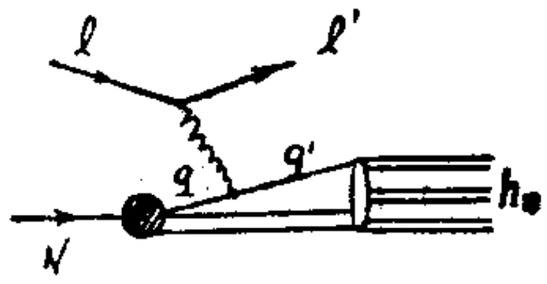
目前，涉及的强子过程，大抵分成三类：电子对湮灭为强子，轻子和强子的深度非弹散射，强子和强子的高能碰撞，可以用图形



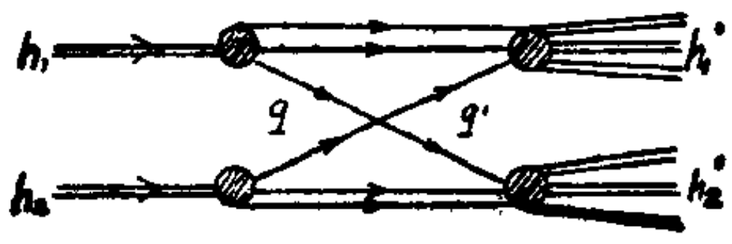
表示。从强子由夸克组成的结构模型来看，每种过程，都经历了夸克的作用、演化和碎裂。在电子对湮灭为强子的过程中，如图所示



电子对先湮灭为光子，光子再转化为夸克对，夸克演化后碎裂为强子。在轻子和强子的深度非弹散射过程中，如图所示



轻子深入强子内部，和强子中的夸克交换光子或中间玻色子，夸克演化再碎裂为强子。在强子和强子的高能碰撞中，如图所示



强子中的夸克演化并相互碰撞，然后再演化而碎裂为强子。

夸克在强子中的分布用分布函数 $q(x, Q^2)$ 描写。夸克碎裂为强子的几率，用碎裂函数 $D(x, Q^2)$ 表征。ω 是强子中的夸克占有强子动量的分数，或者是夸克碎裂成的强子占有夸克动量的分数。Q^2 是相互作用能量的大小。不管是分布函数 $q(x, Q^2)$，还是碎裂函数 $D(x, Q^2)$，都不仅和动量分数 x 有关，也随相互作用能量的大小 Q^2 而变。它们随 Q^2 变化的规律，由演化函数 $P(x)$ 策动，按照 A–P 演化方程进行。

§1. 分布函数及其 A–P 方程

由上一章的(8–68)式、(8–69)式等的论述可知，结构函数的矩

$$M_n(t)=\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}G(x, t), \quad t=\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}$$

偏离标度的行为，可以写成

$$M_n(t)=M_n(0)\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(t)}\right]^{-\frac{\gamma_n^0}{2\beta_0}},$$

$$\alpha_s(t)=\frac{g^2(t)}{4\pi}=\frac{\alpha_s(0)}{1+2\beta_0\frac{g^2}{16\pi^2}t}。$$

这种行为，已经得到实验的证实。然而，它是怎么发生的呢？

分布函数的矩　从强子的夸克结构模型来看，如(7–71)式所示，强子的结构函数 $W_i^{(l,N)}(Q^2, x)$，由夸克的结构函数 $W_i^{(l,q)}(x, z)$ 和分布函数 q_j 之积组成。$W_i^{(l,q)}(x, z)$ 可以按照渐近自由夸克模型进行计算，得到如(7–74)式所示的结果。如果认为，夸克分布函数 q_j 只是 z 的函数 $q_j(z)$，则强子的结构函数，如(7–76)所示，只和 x 有关，显示标度行为。如果认为，夸克分布函数 q_j 不仅和 z 有关，也随 Q^2 变化，则强子的结构函数

$$W_i^{(l,N)}(Q^2,\ x)=\sum_j\int_0^1 W_i^{(l,q_j)}(x,\ z)q_j(Q^2,\ z)dz,$$

就显示偏离标度的行为。从这观点看来，结构函数的矩的偏离标度的行为，是由于夸克分布函数与 Q^2 有关引起的，是夸克分布函数的矩

$$M_n(t)=\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}q(x,\ t) \tag{9-1}$$

偏离标度的表现。换句话说，可以设想，分布函数的矩

$$M_n(t)=M_n(0)\left[\frac{\alpha_s(0)}{\alpha_s(t)}\right]^{\frac{2B_n}{\beta_0}}。 \tag{9-2}$$

强子中的夸克，不是一成不变的。由于QCD的作用，它不断地放射胶子和吸收胶子，不断地进行演化。QCD的作用常数，是随动量 Q^2 跑动的，是 $t=\frac{1}{2}\ln Q^2/Q_0^2$ 的函数 $g(t)$。这影响着夸克放射、吸收胶子的演化过程，使夸克在强子中的分布发生变化，以致 q_j 不仅和动量分数 z 有关，也是 t 的函数 $q_j(z,\ t)$。正是这种机制，使分布函数的矩具有如上所述的、偏离标度的行为。

将(9-2)式对 t 求导，得

$$\frac{dM_n(t)}{dt}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}B_nM_n(t)。 \tag{9-3}$$

这就是分布函数的矩 $M_n(t)$ 应该满足的微分方程。

卷积和矩方程　设函数 $A(x)$ 是函数 $B(x)$、$C(x)$ 的卷积

$$A(x)=\int_x^1\frac{dy}{y}B(y)C\left(\frac{x}{y}\right), \tag{9-4}$$

则它们的矩

$$A_n=\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}A(x),\qquad B_n=\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}B(x),$$

$$C_n=\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}C(x) \tag{9-5}$$

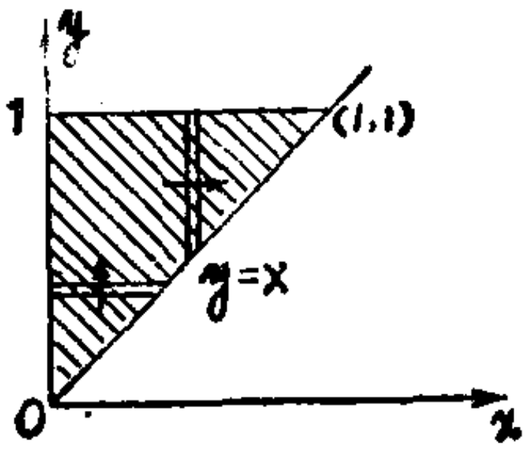
满足方程

$$A_n = B_n C_n 。 \tag{9-6}$$

反过来说，(9–6)式是(9–4)式的一种表示形式。

现在，我们证明上述的论断。对(9–4)式取矩

$$\int_0^1 dx \cdot x^{n-1} A(x) = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} \int_x^1 \frac{dy}{y} B(y) C\left(\frac{x}{y}\right) 。$$



上式右边的积分区域是如左图所示的三角形面积，而且积分的次序是先 y 后 x。把积分次序更改为先 x 后 y，则上述积分为

$$\int_0^1 dx \cdot x^{n-1} A(x)$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y dx \cdot x^{n-1} B(y) C\left(\frac{x}{y}\right) 。$$

将积分变数 y、x 换成 y、$z = \frac{x}{y}$，则上式成为

$$\int_0^1 dx \cdot x^{n-1} A(x) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz (yz)^{n-1} B(y) C(z)$$

$$= \int_0^1 dy \cdot y^{n-1} B(y) \cdot \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} C(z),$$

$$A_n = B_n C_n 。$$

这就证明了(9–4)式和(9–5)式的等价性。

A–P 方程　设(9–2)式中的 B_n 为某函数 $P(x)$ 的矩

$$B_n = \int_0^1 dx \cdot x^{n-1} P(x), \tag{9-7}$$

并考虑到(9–1)式，则(9–3)式可以写成

$$\int_0^1 dx \cdot x^{n-1} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$$

$$= \frac{\alpha_s(t)}{\pi} \int_0^1 dy \cdot y^{n-1} q(y, t) \cdot \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} P(z) 。$$

根据(9–4)式和(9–6)式的等价性，和(9–3)式等价的方程是

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, t) P\left(\frac{x}{y}\right) 。 \tag{9-8}$$

利用 δ-函数，上式可以写成

$$\frac{\partial q(x,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\delta(x-yz)q(y,\ t)P(z),$$

再加上恒等式

$$q(x,\ t)=\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\delta(x-yz)\delta(1-z)q(y,\ t),$$

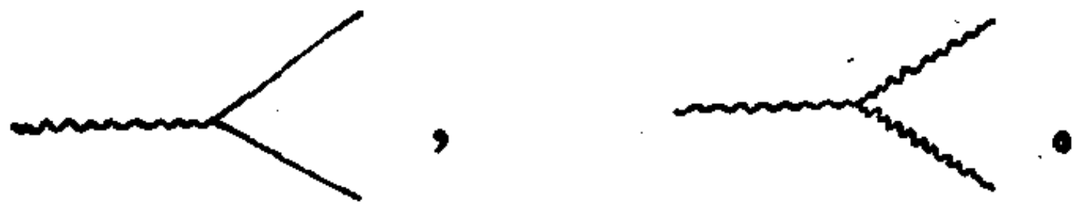
就得到

$$q(x,\ t)+dq(x,\ t)=\int_0^1 dy\int_0^1 dz\,\delta(x-yz)q(y,\ t)$$

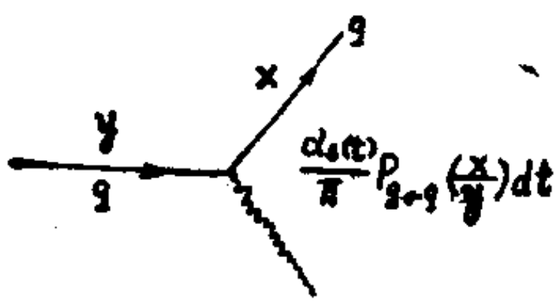
$$\cdot\left[\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P(z)\,dt\right],$$

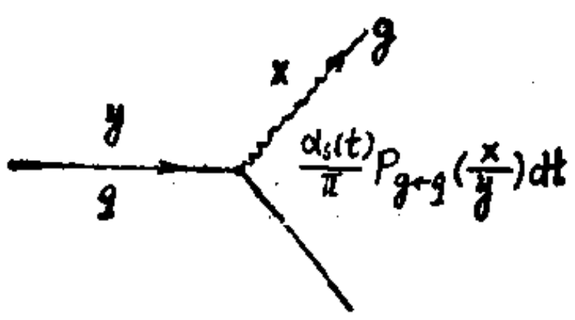
此式可以显示函数 $P(z)$ 的意义。$q(y,\ t)$ 是作用能量为 t 时，动量分数为 y 的分布函数。$q(x,\ t)+dq(x,\ t)$ 是作用能量为 $t+dt$ 时，动量分数为 $x-yz$ 的分布函数。因而 $\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P(z)dt$ 就可以理解为：当作用能量由 t 变为 $t+dt$ 时，使分布函数 $q(y,\ t)$ 演化为 $q(x,\ t)+dq(x,\ t)$ 的演化几率。所以，我们把 $P(z)$ 叫做演化函数，把(9-8)式叫做演化方程。

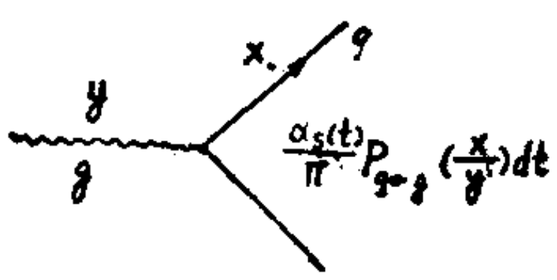
在 QCD 中，有费米子和胶子相互作用的三点顶角，也有三胶子相互作用顶角

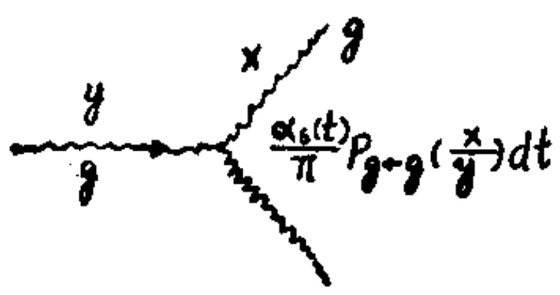


它们使夸克演化为夸克和胶子，使夸克演化为胶子和夸克，使胶子演化为夸克对，使胶子演化为胶子对。与此相应，就有四个演化函数 $P_{q\leftarrow q}(z)$、$P_{g\leftarrow q}(z)$、$P_{q\leftarrow g}(z)$、$P_{g\leftarrow g}(z)$。当作用能量由 t 变到 $t+dt$ 时，其演化几率和费曼图为









(9–9)

设 $q(x,\ t)$ 和 $g(x,\ t)$ 分别是夸克和胶子的分布函数。由以上的论述推测，描述这些分布函数演化规律的演化方程为

$$\frac{\partial q_i(x,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[q_i(y,\ t)P_{q\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\ t)P_{q\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)\right],$$

$$\frac{\partial g(x,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[\sum_{i=1}^{2N_f}q_i(y,\ t)P_{g\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)+g(y,\ t)P_{g\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)\right]。\tag{9–10}$$

这方程是由 Altarelli–Parisi 提出来的，所以叫做 A–P 方程。

演化函数的性质　实际上，(9–9)式可以看作演化函数的定义。在下一节中，我们将由它导出演化函数的具体表示式。现在，我们从物理上的假定和要求，来论述演化函数的一些性质。

首先，我们假定，演化函数是与味道无关的。在不计及夸克质量的情况下，这个假定是成立的。

当夸克演化为夸克时，演化几率为 $\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{q\leftarrow q}(z)dt$。

由于重子数守恒，要求总的演化几率为一，即

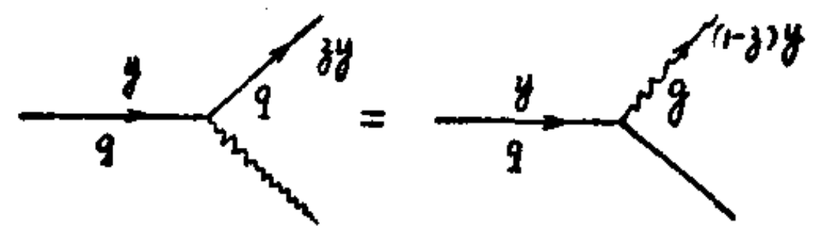
$$\int_0^1 dz\left[\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{q\leftarrow q}(z)dt\right]=1。$$

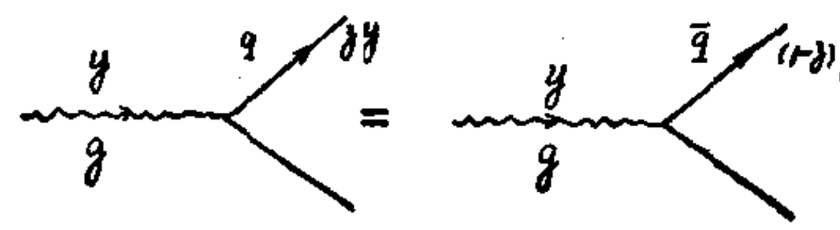
因而

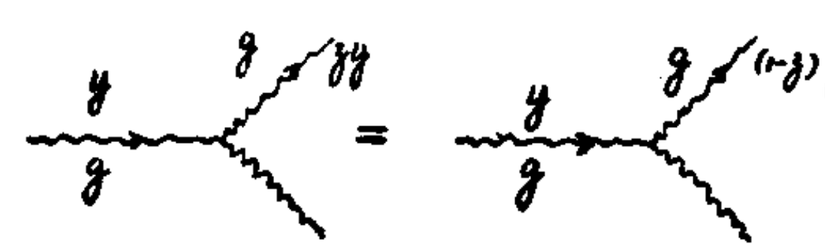
$$\int_0^1 dz\,P_{q\leftarrow q}(z)=0。\tag{9–11}$$

这也是夸克数守恒的一种表示形式。当胶子演化为胶子时，其演化几率也是 $\delta(1-z)+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{g\leftarrow g}(z)dt$。但是，胶子数目并无守恒的要求，所以胶子演化为胶子的演化函数 $P_{g\leftarrow g}(z)$，无需满足如(9–11)式的要求。

再者，我们假定，在每一个作用顶角上，动量是守恒的。那末，诸演化函数间，在 $z<1$ 时，就有如下的关系

$P_{q\leftarrow q}(z)=P_{g\leftarrow q}(1-z)$，

$P_{q\leftarrow g}(z)=P_{q\leftarrow g}(1-z)$，

$P_{g\leftarrow g}(z)=P_{g\leftarrow g}(1-z)$，

由于 $q_j(x,\ t)dx$ 是 j 夸克动量在 $x\to x+dx$ 间的分布几率，$g(x,\ t)dx$ 是胶子动量在 $x\to x+dx$ 间的分布几率，而强子的动量在演化过程中是不变的，故

$$\int_0^1 dx\cdot x\cdot\left[\sum_{i=1}^{2N_f}q_i(x,\ t)+g(x,\ t)\right]=1。$$

将上式对作用能量 t 求导，得

$$\int_0^1 dx\cdot x\left[\sum_{i=1}^{2N_f}\frac{\partial q_i(x,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial g(x,\ t)}{\partial t}\right]=0。$$

将演化方程(9–10)式代入上式，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\cdot x\int_x^1\frac{dy}{y}\Bigg\{&\left[\sum_{i=1}^{2N_f}q_i(y,t)P_{q\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)\right.\\&+2N_f g(y,\ t)P_{q\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg]+\left[\sum_{i=1}^{2N_f}q_i(y,\ t)P_{g\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)\right.\\&\left.+g(y,\ t)P_{g\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)\right]\Bigg\}=0。\end{aligned}$$

交换积分的次序，得

$$\int_0^1 \frac{dy}{y}\left\{\sum_{i=1}^{2N_f} q_i(y,\ t)\int_0^y dx\cdot x\left[P_{q\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)+P_{g\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)\right]\right.$$
$$\left.+g(y,\ t)\int_0^y dx\cdot x\left[2N_f P_{q\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)+P_{g\leftarrow g}\left(\frac{x}{y}\right)\right]\right\}=0。$$

将积分变数 y、x 换成 y、$z=\frac{x}{y}$，得

$$\int_0^1 dy\, y\left\{\sum_{i=1}^{2N} q_i(y,\ t)\int_0^1 dz\cdot z[P_{q\leftarrow q}(z)+P_{g\leftarrow q}(z)]\right.$$
$$\left.+g(y,\ t)\int_0^1 dz\cdot z\cdot[2N_f P_{q\leftarrow g}(z)+P_{g\leftarrow g}(z)]\right\}=0。$$

不管 $q_i(y,\ t)$、$g(y,\ t)$ 取什么值，上式都应该成立。所以，有

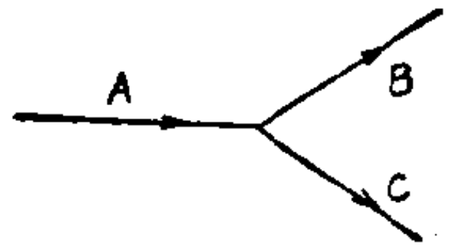
$$\int_0^1 dz\cdot z\cdot[P_{q\leftarrow q}(z)+P_{g\leftarrow q}(z)]=0,$$
$$\int_0^1 dz\cdot z\cdot[2N_f P_{q\leftarrow g}(z)+P_{g\leftarrow g}(z)]=0。\qquad (9\text{–}13)$$

这是强子动量守恒的一种表示形式。

§2. 演 化 函 数

在上一节中，我们引进了演化函数，从演化方程(9–10)式看出了它的意义，用(9–9)式给予定义，由物理要求确定了它的一些性质(9–11)式、(9–12)式、(9–13)式。现在，我们按照它的定义(9–9)式，来计算它的具体表示式。

基本公式 由上一节的论述可知，如(9–9)式定义的那样，演化函数表示在三点顶角



A 演化为 B 的几率。当 B 是和 A 不同的粒子时，它就是 A 演化为 B 的几率；当 B 是和 A 相同的粒子时，它比 A 演化为 B 的几率差

$-\delta(1-z)$的项。

和三点顶角相应的矩阵元是

$$\langle BC\left|\int d^4x\mathscr{H}_i(x)\right|A\rangle=\langle BC\left|\int_{-\infty}^{0}dt\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\mathscr{H}_i(x)\right|A\rangle。$$

它和一般的 s 矩阵元不同，对 t 的积分不是由 $-\infty\to\infty$，而是由 $-\infty\to0$。这是由于 $|BC\rangle$ 并非终态，而是演化过程中的一个状态。将 $\mathscr{H}_i$ 中的场算符，仍按平面波展开，收缩掉产生、消灭算符，析出运动学因子，得

$$\frac{gV_{A\to BC}}{(2\pi)^{9/2}\sqrt{2E_A2E_B2E_C}}\int_{-\infty}^{0}dt\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\exp\left[i(p_A-p_B-p_C)x\right]$$

$$=\frac{-igV_{A\to BC}}{(2\pi)^{9/2}\sqrt{2E_A2E_B2E_C}}\frac{(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_A-\vec{p}_B-\vec{p}_C)}{E_A-E_B-E_C-i\varepsilon}。$$

$V_{A\to BC}$ 是动量空间的顶角因子。对于夸克、胶子三点顶角

$$V_{qqg}=\bar{u}(p',s')\gamma^\mu\varepsilon_\mu\frac{\lambda^\alpha}{2}u(p,s),\qquad(9\text{–}14)$$

ε_μ 是胶子极化矢量。对于三胶子顶角

$$V_{g\to gg}=f^{\alpha\beta\gamma}[(\epsilon_A\cdot\epsilon_B)(k_A+k_B)\cdot\epsilon_C+(\epsilon_B\cdot\epsilon_C)(-k_B+k_C)\cdot\epsilon_A$$

$$+(\epsilon_C\cdot\epsilon_A)(-k_C-k_A)\cdot\epsilon_B],\qquad(9\text{–}15)$$

ϵ_A、ϵ_B、ϵ_C 是三胶子的四维极化矢量，k_A、k_B、k_C 是四维动量。由上述矩阵元推知，由 $A\to B$ 的演化几率为

$$dF_{BA}(z)dz=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\frac{|V_{A\to BC}|^2}{(E_A-E_B-E_C)^2}\frac{d^3p_B}{2E_A2E_B2E_C}。$$

为了计算方便，我们把四维动量表示为 $p(p_0,p_3,\vec{p}_\perp)$，而且采用坐标系使其第三轴和 $\vec{p}_A$ 平行，即令

$$p_A=(p,p,0),\quad p_B=\left(zp+\frac{p_\perp^2}{2zp},zp,\vec{p}_\perp\right),$$

$$p_C=\left((1-z)p+\frac{p_\perp^2}{2(1-z)p},(1-z)p,-\vec{p}_\perp\right)。$$

z、$(1-z)$是 B、C 纵动量的分数。它们的横动量 $\vec{p}_\perp$ 和质量m是小量，以致它们的能量，如

$$E_B=\sqrt{z^2p^2+p_\perp^2+m_b^2}\approx zp\left(1+\frac{p_\perp^2}{2z^2p^2}+\cdots\right)$$

$$\approx zp+\frac{p_\perp^2}{2zp}。$$

按照这种规定，可以算出

$$E_A-E_B-E_C=p-\left(zp+\frac{p_\perp^2}{2zp}\right)-\left((1-z)\,p+\frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}\right)$$

$$=-\frac{p_\perp^2}{2z(1-z)\,p},$$

$$E_AE_BE_C=p\left(zp+\frac{p_\perp^2}{2zp}\right)\left((1-z)p+\frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}\right)$$

$$\approx z(1-z)p^3+\frac{z^2+(1-z)^2}{2z(1-z)}\,pp_\perp^2,$$

$$d^3p_B=pd\,z\cdot d^2p_\perp=2\pi pp_\perp dz\,dp_\perp=\pi p\,dz\,dp_\perp^2,$$

$$\frac{d^3p_B}{(E_A-E_B-E_C)^2 8E_AE_BE_C}\approx\frac{z(1-z)}{2p_\perp^4}\,\pi\,dz\,dp_\perp^2$$

$$=\frac{z(1-z)}{2p_\perp^2}\,\pi\,dz\,d\ln p_\perp^2,$$

$$dF_{BA}(z)\,dz=\frac{g^2}{16\pi^2}\,z(1-z)\frac{|V_{A\to BC}|^2}{p_\perp^2}\,dz\,d\ln p_\perp^2。$$

考虑到 B、C 粒子的横动量 $p_\perp^2$ 是和作用能量 Q^2 成比例的

$$p_\perp^2=CQ^2,$$

$$\ln p_\perp^2=\ln C+\ln Q^2=\ln C+\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}+\ln Q_0^2$$

$$=2t+\ln C+\ln Q_0^2,$$

$$d\ln p_\perp^2=2dt,$$

则上式可以写成

$$dF_{BA}(z)\,dz=\frac{\alpha_s}{2\pi}\,z(1-z)\frac{|V_{A\to BC}|^2}{p_\perp^2}\,dz\,dt,$$

和定义演化函数的(9-9)式比较，得

$$P_{B\leftarrow A}(z)=\frac{1}{2}\,z(1-z)\frac{|V_{A\to BC}|^2}{p_\perp^2}。\qquad(9\text{-}16)$$

这就是计算演化函数的基本公式。注意，当 $B\neq A$ 时，或者当 $B=A$，$z\neq 1$ 时，上式才是正确的。当 $B=A$，$z=1$ 时，上式右边要减去 $-\delta(1-z)$ 项，才和左边相等。

夸克演化函数 首先，我们按照(9–16)式，来计算夸克演化为胶子的演化函数 $P_{g\leftarrow q}(z)$。夸克演化为胶子的过程，由夸克胶子三点顶角确定，其费曼图是



相应的顶角因子，即不变振幅，如(9–14)式所示，为

$$V_{q\to gq}=\bar{u}(p',\ s')\gamma^{\mu}\frac{\lambda^{a}}{2}u(p,\ s)\epsilon_{\mu}(k,\ \lambda)。$$

$\epsilon_{\mu}(k,\ \lambda)$是胶子的极化矢量。胶子无质量，是横向极化的 $k\cdot\epsilon=0$。我们取库仑规范

$$\epsilon_0=0,\quad \vec{\epsilon}\cdot\vec{k}=0。\tag{9–17}$$

它有两个独立的分量，因而有两个独立的极化矢量 $\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 1)$、$\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 2)$，通常可以选取

$$\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 2)=\frac{\vec{k}_3\times\vec{k}}{|\vec{k}_3\times\vec{k}|},\quad \vec{\epsilon}(\vec{k},\ 1)=\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 2)\times\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}。\tag{9–18}$$

这时，

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^{i}(\vec{k},\ \lambda)\epsilon^{j}(\vec{k},\ \lambda)=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}。\tag{9–19}$$

不变振幅平方的计算，要对初始夸克的颜色、自旋求平均，对末态胶子的极化、颜色和夸克的自旋、颜色求和，即

$$\overline{\Sigma}|V_{q\to gq}|^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N_C}\sum_{s,s',\lambda,\alpha}\bar{u}(p',\ s')\frac{\lambda^{a}}{2}$$
$$\cdot\epsilon(k,\ \lambda)u(p,\ s)\bar{u}(p,\ s)\frac{\lambda^{a}}{2}\epsilon(k,\ \lambda)u(p',\ s')$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{N_C}\sum_{a}\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda^{a}}{2}\frac{\lambda^{a}}{2}\right)$$
$$\cdot\mathrm{Tr}\left[\sum_{s'}u(p',\ s')\bar{u}(p',s')\gamma^{\mu}\sum_{s}u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma^{\nu}\right]$$

$$\cdot\sum_{\lambda}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda)$$

$$=\frac{1}{2}C_2(R)\,\mathrm{Tr}[p'\gamma^\mu p\gamma^\nu]\sum_{\lambda}\epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon_\nu(k,\lambda)$$

$$=\frac{1}{2}C_2(R)\sum_{\lambda}\mathrm{Tr}[p'\not\epsilon p\not\epsilon]$$

$$=2C_2(R)\sum_{\lambda}[(p'\cdot\epsilon)(p\cdot\epsilon)+(p\cdot\epsilon)(p'\cdot\epsilon)$$

$$-(\epsilon\cdot\epsilon)(p\cdot p')]$$

$$=4C_2(R)[p\cdot p'+\sum_{\lambda}(p\cdot\epsilon)^2]\circ$$

其中：

$$p=(p,\ p,\ 0),\quad k=\left(zp+\frac{p_\perp^2}{2zp},\ zp,\ \vec{p}_\perp\right),$$

$$p'=\left((1-z)p+\frac{p_\perp^2}{2(1-z)p},\ (1-z)p,\ -\vec{p}_\perp\right),$$

$$\sum_{\lambda}(\epsilon\cdot\epsilon)=-\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 1)\cdot\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 1)-\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 2)\cdot\vec{\epsilon}(\vec{k},\ 2)$$

$$=-2,$$

$$p\cdot p'=p_0p_0'-\vec{p}\cdot\vec{p}'=p\left[(1-z)p+\frac{p_\perp^2}{2(1-z)p}\right]-(1-z)p^2$$

$$=\frac{p_\perp^2}{2(1-z)},$$

$$\sum_{\lambda}(p\cdot\epsilon)^2=p_ip_j\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\vec{k}^2|}\right)=\vec{p}^2-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{k})^2}{\vec{k}^2}$$

$$=\vec{p}^2-\frac{z^2p^4}{z^2p^2+p_\perp^2}\approx\frac{p_\perp^2}{z^2}\circ$$

所以

$$\overline{\Sigma}|V_{A\to BC}|^2=4C_2(R)\left[\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1}{z^2}\right]p_\perp^2$$

$$=2C_2(R)\frac{1+(1-z)^2}{(1-z)z^2}\,p_\perp^2\circ$$

把它代入基本公式((9-16)式)，就得到

$$P_{q\leftarrow q}(z)=\frac{1+(1-z)^2}{z}C_2(R)\circ\qquad(9\text{-}20)$$

(9–20)式是夸克演化为胶子的演化函数。根据(9–12)式，将(9–20)式中的 z 换成 $1-z$，就得到 $z\neq 1$ 时的夸克演化为夸克的演化函数

$$P_{q\leftarrow q}(z)=\frac{1+z^2}{1-z}C_2(R)。$$

显然，在 $z=1$ 时，上式是奇异的，不能全面反映夸克变夸克的演化。根据前面的论述，要在上式中减去 $\delta(1-z)$ 的项，才会得到夸克演化为夸克的演化函数，即

$$P_{q\leftarrow q}(z)=\frac{1+z^2}{1-z}C_2(R)-D\delta(1-z)。$$

D 是待定的常数。我们可以用(9–11)式来确定。把上式代入(9–11)式，得

$$D=C_2(R)\int_0^1 dz\frac{1+z^2}{1-z}=C_2(R)\left[\int_0^1 dz\frac{2}{1-z}-\int_0^1 dz(z+1)\right]$$

$$=C_2(R)\left[-\frac{3}{2}+\int_0^1 dz\frac{2}{1-z}\right]。$$

令

$$\frac{1+z^2}{(1-z)_+}=\frac{1+z^2}{1-z}-\delta(1-z)\int_0^1 dz\frac{2}{1-z},$$

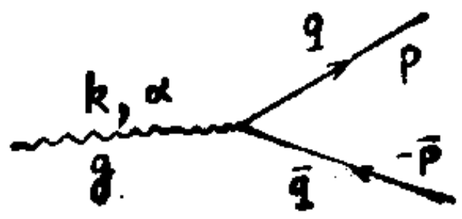
$$\int_0^1 dz\frac{F(z)}{(1-z)_+}=\int_0^1 dz\frac{F(z)-F(1)}{1-z},$$

则得到

$$P_{q\leftarrow q}=\frac{1+z^2}{(1-z)_+}C_2(R)+\frac{3}{2}C_2(R)\delta(1-z)。\qquad(9\text{–}21)$$

这就是 z 取任意值时的，夸克演化为夸克的演化函数。

胶子演化为夸克　现在，再根据基本公式(9–16)式，仍按照夸克、胶子三点顶角，来计算胶子演化为夸克的演化函数。其费曼图是



相应的不变振幅是

$$V_{g\to q\bar{q}}=\bar{u}(p,\ s)\gamma^{\mu}\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\ v(\bar{p},\ \bar{s})\epsilon_{\mu}(k,\ \lambda)。$$

其中

$$k=(k,\ k,\ 0),\ \ p=\left(zk+\frac{p_{\perp}^{2}}{2zk},\ zk,\ \vec{p}_{\perp}\right),$$

$$\bar{p}=\left((1-z)k+\frac{p_{\perp}^{2}}{2(1-z)k},\ (1-z)k,\ -\vec{p}_{\perp}\right)。$$

仍取库仑规范

$$\epsilon_0=0,\ \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}=0,\ \sum_{\lambda}\epsilon_i(k,\ \lambda)\epsilon_j(k,\ \lambda)=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}。$$

对于一定颜色分量 α 的胶子的极化取平均，对于终态夸克对的自旋求和，得

$$\overline{\Sigma}|V_{g\to q\bar{q}}|^2=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,s,\bar{s}}\bar{u}(p,\ s)\cdot(k,\ \lambda)\frac{\lambda^{\alpha}}{2}$$

$$\cdot v(\bar{p},\ \bar{s})\bar{v}(\bar{p},\ \bar{s})\not{\epsilon}(k,\ \lambda)\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\ u(p,\ s)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\right)^2\mathrm{Tr}\left[\sum_{s}u(p,\ s)\bar{u}(p,\ s)\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\lambda}\not{\epsilon}(k,\ \lambda)\sum_{s}v(\bar{p},\ \bar{s})\bar{v}(\bar{p},\ \bar{s})\not{\epsilon}(k,\ \lambda)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\not{p}\sum_{\lambda}\not{\epsilon}\not{\bar{p}}\not{\epsilon}\right]$$

$$=\sum_{\lambda}[(p\cdot\epsilon)(\bar{p}\cdot\epsilon)+(\bar{p}\cdot\epsilon)(p\cdot\epsilon)$$

$$-(\epsilon\cdot\epsilon)(p\cdot\bar{p})]=2\left[(p\cdot\bar{p})+\sum_{\lambda}(p\cdot\epsilon)^2\right]。$$

其中

$$p\cdot\bar{p}=p_0\bar{p}_0-\vec{p}\cdot\vec{\bar{p}}=\left(zk+\frac{p_{\perp}^{2}}{2zk}\right)\left[(1-z)k+\frac{p_{\perp}^{2}}{2(1-z)k}\right]$$

$$-z(1-z)k^2+p_{\perp}^{2}=\left[\frac{1-z}{2z}+\frac{z}{2(1-z)}+1\right]p_{\perp}^{2},$$

$$\sum_{\lambda}(p\cdot\epsilon)^2=-\sum_{\lambda}p_ip_j\epsilon_i\epsilon_j=-p_ip_j\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}\right)$$

$$=-\vec{p}^2+\frac{(\vec{p}\cdot\vec{k})^2}{\vec{k}^2}=-z^2k^2-p_\perp^2+z^2k^2$$

$$=-p_\perp^2。$$

代入得 $$\overline{\sum}|V_{g\to q\bar{q}}|^2=\frac{z^2+(1-z)^2}{z(1-z)}p_\perp^2。$$

把它代入基本公式(9–16)式,就得到胶子演化为夸克的演化函数

$$P_{q\leftarrow g}(z)=\frac{1}{2}[z^2+(1-z)^2]。\qquad(9\text{–}22)$$

胶子演化为胶子 胶子演化为胶子的作用,是三胶子顶角



相应的不变振幅是

$$V_{g\to gg}=f^{\alpha\beta\gamma}[(\epsilon\cdot\epsilon_1)(k+k_1)\cdot\epsilon_2+(\epsilon_1\cdot\epsilon_2)(-k_1+k_2)\cdot\epsilon$$
$$+(\epsilon_2\cdot\epsilon)(-k_2-k)\cdot\epsilon_1]。$$

其中

$$k=(k,\ k,\ 0),\ k_1=\left(zk+\frac{k_\perp^2}{2zk},\ zk,\ \vec{k}_\perp\right),$$

$$k_2=\left((1-z)k+\frac{k_\perp^2}{2(1-z)k},\ (1-z)k,\ -\vec{k}_\perp\right)。$$

我们仍然取库仑规范

$$\epsilon_0=0,\ \vec{\epsilon}\cdot\vec{k}=0;\ \epsilon_0^1=0,\ \vec{\epsilon}^1\cdot\vec{k}_1=0;\ \epsilon_0^2=0,\ \vec{\epsilon}^2\cdot\vec{k}_2=0,$$

$$\sum_{\lambda}\epsilon_i(k,\ \lambda)\epsilon_j(k,\ \lambda)=\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}\right),$$

$$\sum_{\lambda_1}\epsilon_i^1(k_1,\ \lambda)\epsilon_j^1(k_1,\ \lambda)=\left(\delta_{ij}-\frac{k_i^1k_j^1}{\vec{k}_1^2}\right),$$

$$\sum_{\lambda_2}\epsilon_i^2(k_2,\ \lambda)\epsilon_j^2(k_2,\ \lambda)=\left(\delta_{ij}-\frac{k_i^2k_j^2}{\vec{k}_2^2}\right)。$$

则

$$V_{g\to gg}=f^{\alpha\beta\gamma}[(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{k}+k_1)\cdot\vec{\epsilon}_2+(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon}_2)(-\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}$$
$$-(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1]。$$

取上式平方，并对初态胶子的极化、颜色平均，对终态胶子的极化、颜色求和，得

$$\overline{\Sigma}|V_{g\to gg}|^2=\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}f^{\alpha\beta\gamma}f^{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}[(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{\epsilon}_2$$
$$+(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(-\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}-(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1]^2$$
$$=C_2(G)\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}\{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)^2[(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{\epsilon}_2]^2$$
$$+(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)^2[(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}]^2$$
$$+(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})^2[(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1]^2$$
$$-2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)[(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{\epsilon}_2][(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}]$$
$$-2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})[(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{\epsilon}_2][(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1]$$
$$+2(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})[(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}][(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1]\}。$$

其中

$$(\vec{k}+\vec{k}_1)\cdot\vec{\epsilon}_2=[(1+z)\vec{k}+\vec{k}_\perp]\cdot\vec{\epsilon}_2=\left[\vec{k}_2+\left(1+\frac{1+z}{1-z}\right)\vec{k}_\perp\right]\cdot\vec{\epsilon}_2$$
$$=\frac{2}{1-z}\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2,$$
$$(\vec{k}+\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}_1=[(2-z)\vec{k}-\vec{k}_\perp]\cdot\vec{\epsilon}_1=\left[\vec{k}_1-\left(1+\frac{2-z}{z}\right)\vec{k}_\perp\right]\cdot\vec{\epsilon}_1$$
$$=-\frac{2}{z}\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1,$$
$$(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{\epsilon}=[(2z-1)\vec{k}+2\vec{k}_\perp]\cdot\vec{\epsilon}=2\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon},$$
$$\sum_{\lambda,\lambda_1}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)^2=\sum_{\lambda,\lambda_1}\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_i^1\epsilon_j^1=\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_i^1k_j^1}{\vec{k}_1^2}\right)$$
$$=1+\frac{(\vec{k}\cdot\vec{k}_1)^2}{k^2k_1^2}=2,$$
$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)^2=\sum_{\lambda,\lambda_2}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_2)^2=2,$$
$$\sum_{\lambda}(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon})^2=\sum_{\lambda}k_\perp^ik_\perp^j\epsilon_i\epsilon_j=k_\perp^ik_\perp^j\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec{k}^2}\right)=k_\perp^2,$$

$$\sum_{\lambda_1}(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1)^2=\sum_{\lambda_2}(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2)^2=k_\perp^2。$$

把以上诸式代回原式，得

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}|V_{g\to gg}|^2=\frac{1}{2}C_2(G)\Big\{&2\Big[\frac{4}{(1-z)^2}+4+\frac{4}{z^2}\Big]k_\perp^2\\&-\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}\Big[\frac{8}{1-z}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon})\\&+\frac{8}{z(1-z)}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2)\\&-\frac{8}{z}(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1)\Big]\Big\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2)=\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}\epsilon_i\epsilon_i^1\epsilon_j^2\epsilon_j k_\perp^k\epsilon_k^1 k_\perp^s\epsilon_s^2\\&=k_\perp^k k_\perp^s\sum_{\lambda}\epsilon_i\epsilon_j\sum_{\lambda_1}\epsilon_i^1\epsilon_k^1\sum_{\lambda_2}\epsilon_j^2\epsilon_s^2\\&=k_\perp^k k_\perp^s\Big(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\Big)\Big(\delta_{ik}-\frac{k_i^1k_k^1}{k_1^2}\Big)\Big(\delta_{js}-\frac{k_j^2k_s^2}{k_2^2}\Big)\\&=k_\perp^k k_\perp^s\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{js}=k_\perp^2,\\&\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon})\\&=\sum_{\lambda,\lambda_1,\lambda_2}(\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{\epsilon}_2)(\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon})(\vec{k}_\perp\cdot\vec{\epsilon}_1)=k_\perp^2。\end{aligned}$$

把它们代回原式，得

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}|V_{g\to gg}|^2=\frac{1}{2}C_2(G)k_\perp^2\Big[&\frac{8}{(1-z)^2}+8+\frac{8}{z^2}\\&-\frac{8}{(1-z)}+\frac{8}{z(1-z)}-\frac{8}{z}\Big]\\=4C_2(G)k_\perp^2\frac{1}{z(1-z)}\Big[&\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}\\&+z(1-z)\Big]。\end{aligned}$$

代入基本公式(9–16)式，就得到 $z\neq1$ 时的胶子演化为胶子的演化函数

$$P_{g\leftarrow g}(z)=2C_2(G)\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right]。$$

当 $z=1$ 时，它是奇异的。完全的胶子演化为胶子的演化函数，应该扣除 $-\delta(1-z)$ 的项，即

$$P_{g\leftarrow g}(z)=2C_2(G)\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right]$$
$$-D\delta(1-z),$$

D 是待定系数。我们用(9-13)式来确定它。把上式和(9-22)式代入(9-13)式，得

$$\int_0^1 dz\cdot z\left\{2N_f\frac{1}{2}[z^2+(1-z)^2]+2C_2(G)\left[\frac{z}{1-z}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right]-D\delta(1-z)\right\}=0,$$

$$D=\int_0^1 dz\left\{N_f[2z^3-2z^2+z]+2C_2(G)\left[\frac{1}{1-z}\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1+z)+(1-z)+z^2(1-z)\right]\right\}$$
$$=\int_0^1 dz\frac{1}{1-z}2C_2(G)+\frac{1}{3}N_f-\frac{11}{6}C_2(G)。$$

所以，完全的胶子演化为胶子的演化函数为

$$P_{g\leftarrow g}(z)=2C_2(G)\left[\frac{z}{(1-z)_+}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}\left(11-\frac{2}{C_2(G)}N_f\right)\delta(1-z)\right]。\qquad(9\text{-}23)$$

演化函数的矩　按照(9-7)式的定义，把(9-20)式、(9-21)式、(9-22)式、(9-23)式代入，就可以算出四个演化函数的矩。

$$B_{qq}^n=\int_0^1 dz\cdot z^{n-1}P_{q\leftarrow q}(z)=\int_0^1 dz\cdot z^{n-1}\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\delta(1-z)\right]C_2(R)$$
$$=C_2(R)\left[\frac{3}{2}+\int_0^1 dz\frac{z^{n-1}}{(1-z)_+}+\int_0^1 dz\frac{z^{n+1}}{(1-z)_+}\right]。$$

由于

$$\int_0^1 dz \frac{z^n}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{z^n-1}{(1-z)} = -\int_0^1 dz [z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots 1]$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

所以

$$B_{qq}^n = C_2(R)\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{n(n+1)}-2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right]。 \qquad (9\text{–}24)$$

同理

$$B_{gq}^n = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} P_{g\leftarrow q}(z) = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1}\left[\frac{1+(1-z)^2}{z}\right]C_2(R)$$

$$= C_2(R)\,\frac{n^2+n+2}{n(n^2-1)}, \qquad (9\text{–}25)$$

$$B_{qg}^n = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} P_{q\leftarrow g}(z) = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)}, \qquad (9\text{–}26)$$

$$B_{gg}^n = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} P_{g\leftarrow g}(z) = \int_0^1 dz \cdot z^{n-1} 2C_2(G)\left[\frac{z}{(1-z)_+}\right.$$

$$\left.+\frac{1-z}{z}+z(1-z)+\frac{1}{12}\left(11-\frac{2}{C_2(G)}N_f\right)\delta(1-z)\right],$$

$$B_{gg}^n = C_2(G)\left[-2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+\frac{2}{n(n-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(n+1)(n+2)}+\frac{11}{6}-\frac{1}{3C_2(G)}N_f\right]。 \qquad (9\text{–}27)$$

把(9–24)式,(9–25)式、(9–26)式、(9–27)式和(8–78)式比较,就可以看出,演化函数的矩和展开算符的反常量纲之间,有着紧密的联系

$$B_{qq}^n = -\frac{\gamma_{qq}^n}{4}, \quad B_{qg}^n = -\frac{\gamma_{qg}^n}{8N_f},$$

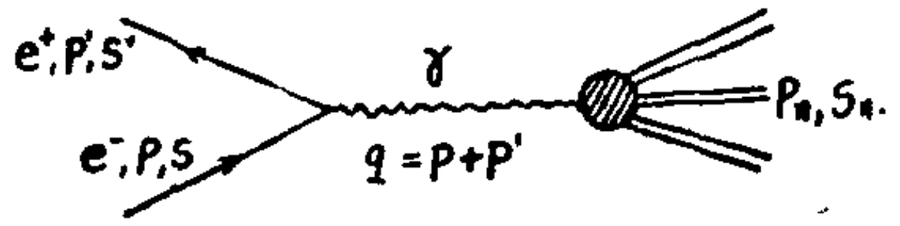
$$B_{gq}^n = -\frac{\gamma_{gq}^n}{4}, \quad B_{gg}^n = -\frac{\gamma_{gg}^n}{4}。 \qquad (9\text{–}28)$$

这种联系，是在最低阶的计算中导出的，我们推测在高阶计算中也成立。它反映了两种理论方法的等效性。

§3. e^+e^- 湮灭为强子的初级近似

e^+e^- 湮灭为强子，和深度非弹散射一样，也是一个高能反应的典型过程。和深度非弹散射不同，它只有一个非例外动量 $q=p+p'$，便于理论处理。在这一节和下一节中，我们用自由夸克的初级微扰，用自由算符的乘积展开，用重整化群方法，来进行论述。一方面了解这过程的性质和特点，另一方面重温一些重要的理论，还为引进碎裂函数及其 A–P 方程准备条件。

反应截面 e^+e^- 湮灭为强子的过程，其费曼图为



相应的不变振幅为

$$M^h_{e^+e^-}=e^2\bar{v}(p',\ s')\gamma^\mu u(p,\ s)\frac{-i}{q^2}\langle p_n,\ s_n|J^{em}_\mu(0)|0\rangle。$$

其中，$J^{em}_\mu(0)$ 是强子电磁流算符。因为是高能过程，电子质量 $m\sim 0$，$\not{p}u\sim 0$，$\bar{v}\not{p}'\sim 0$，$\bar{v}\not{q}u\sim 0$。所以光子传播子

$$\frac{-i\left(g_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)}{q^2}\sim\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}。$$

反应截面

$$\sigma_{e^+e^-}=\frac{e^4}{2q^2}\left(\frac{1}{q^2}\right)^2 L^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}。\tag{9–29}$$

其中

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{4}\sum_{s,\,s'}\bar{v}(p',\ s')\gamma^\mu u(p,\ s)\bar{u}(p,s)\gamma^\nu v(p',\ s'),\tag{9–30}$$

$$\rho_{\mu\nu}=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\langle 0|J_\mu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|0\rangle$$
$$\cdot(2\pi)^4\delta^4(p_n-q),\tag{9–31}$$

$$\frac{1}{2q^2}=\frac{1}{4E_0E_0'},\quad I'=\left|\frac{\vec{p}}{E}-\frac{\vec{p}'}{E'}\right|=4\left|\frac{\vec{p}}{E}\right|=2,$$

$$q^2=(E+E')^2=4E^2。$$

运动学因子的计算，在 e^+e^- 质心系中进行。

电磁流张量 (9–30)式是轻子电磁流张量

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{4}\sum_{s,s'}\bar{v}(p',s')\gamma^\mu u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma^\nu v(p',s')$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\sum_{s'}v(p',s')\bar{v}(p',s')\gamma^\mu\sum_{s}u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma^\nu\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu]=[p'^\mu p^\nu+p^\mu p'^\nu-g^{\mu\nu}(p\cdot p')]。$$

作代换

$$p,\ p'\to q=p+p',\ d=p-p',$$

得

$$L^{\mu\nu}=\frac{1}{2}[q^\mu q^\nu-d^\mu d^\nu-g^{\mu\nu}q^2]。\qquad(9\text{–}32)$$

(9–31)式是强子流张量

$$\rho_{\mu\nu}=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\langle 0|J_\mu(0)|p_n,\ s_n\rangle$$

$$\cdot\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|0\rangle(2\pi)^4\delta^4(p_n-q)$$

$$=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$\cdot\int d^4y e^{i(q-p_n)y}\langle 0|J_\mu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|0\rangle$$

$$=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$\cdot\int d^4y e^{iqy}\langle 0|J_\mu(y)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|0\rangle$$

$$=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}\int d^4y e^{iqy}\{\langle 0|J_\mu(y)|p_n,s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\nu(0)|0\rangle$$

$$-\langle 0|J_\nu(0)|p_n,\ s_n\rangle\langle p_n,\ s_n|J_\mu(y)|0\rangle\}$$

$$=\int d^4y e^{iqy}\langle 0|[J_\mu(y),\ J_\nu(0)]|0\rangle。\qquad(9\text{–}33)$$

这张量只是 q 的函数，只能由 q_μ、$g_{\mu\nu}$ 构成，所以有

$$\rho_{\mu\nu}=(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\rho(q^2)$$

的形式。显然

$$q^\mu\rho_{\mu\nu}=0,$$

这是电磁流守恒的要求。再者

$$\rho^\mu_\mu=g^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}=-3q^2\rho(q^2),$$

$$d^\mu d^\nu\rho_{\mu\nu}=-d^2q^2\rho(q^2)=(q^2)^2\rho(q^2)=-\frac{1}{3}q^2\rho^\mu_\mu.$$

所以

$$L^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}=\frac{1}{2}[q^\mu q^\nu-d^\mu d^\nu-g^{\mu\nu}q^2)\rho_{\mu\nu}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{q^2}{3}\rho^\mu_\mu\right)-\frac{1}{2}q^2\rho^\mu_\mu=-\frac{2}{3}q^2\rho^\mu_\mu,$$

$$\sigma_{e^+e^-}=-\frac{8\pi^2\alpha^2}{3q^4}\rho^\mu_\mu(q^2)。\tag{9-34}$$

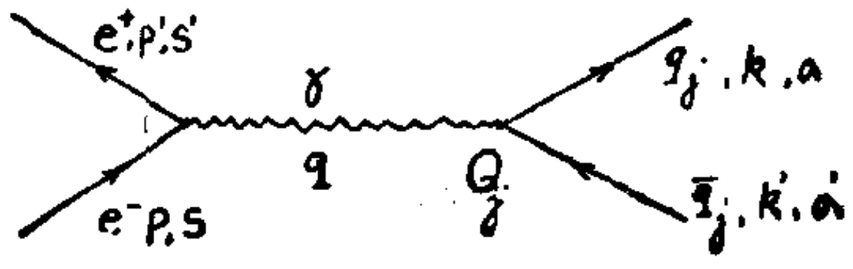
自由夸克近似　在以上的计算中，采用的近似，只是轻子的质量为 0。这在高能的情况下，是正确的。所以，(9-34)式可以看作是精确的计算公式。但是，其中的

$$\rho^\mu_\mu=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3p_i}{(2\pi)^32E_i}\langle0|J_\mu(0)|p_n,\ s_n\rangle$$

$$\cdot\langle p_n,\ s_n|J^\mu(0)|0\rangle(2\pi)^4\delta^4(p_n-q)$$

$$=\int d^4ye^{iqy}\langle0|[J^\mu(y),\ J_\mu(0)]|0\rangle,$$

由于强作用的影响，一般是算不出来的。现在，我们设想，e^+e^- 湮灭为强子的过程是这样进行的：e^+e^- 先经过电磁作用，湮灭为夸克对；然后，夸克对以百分之百的几率碎裂成各种可能的强子。所以，e^+e^- 湮灭为各种强子的内含(incluoive)截面，就等于 e^+e^- 湮灭为各种夸克对的截面。其费曼图是



相应的夸克顶角的电磁流矩阵元是

$$\langle q_j\bar{q}_j|J_\mu(0)|0\rangle=Q_j\bar{u}(k,\sigma)\gamma_\mu v(k',\sigma'),$$

而流张量

$$\rho_\mu^\mu=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\frac{1}{(2\pi)^6}$$
$$\cdot\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}\sum_{\delta,\sigma'}\bar{u}(k,\sigma)\gamma^\mu v(k',\sigma')\bar{v}(k',\sigma')$$
$$\cdot\gamma_\mu u(k,\sigma)(2\pi)^4\delta^4(k+k'-q)$$
$$=N_c\sum_{j=1}^{N_f}(Q_j^2)\frac{1}{(2\pi)^6}$$
$$\cdot\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}\mathrm{Tr}[\not{k}\gamma^\mu\not{k}'\gamma_\mu](2\pi)^4\delta^4(k+k'-q)$$
$$=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\frac{-8}{(2\pi)^2}\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}(k\cdot k')\delta^4(k+k'-q)$$
$$=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\frac{-q^2}{\pi^2}\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}\delta^4(k+k'-q)$$
$$=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\frac{-1}{\pi^2}\int d^3k\delta(2k_0-q)=-\frac{q^2}{2\pi}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2。$$

式中，N_c是夸克的颜色种数，N_f是夸克味道种数。把上式代入(9–34)式，就得到 e^+e^- 湮灭为强子的总截面

$$\sigma_{e^+e^-}^h=\frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2。\tag{9–35}$$

令 $N_c=1$, $N_f=1$, $Q_j=1$, 就得到 e^+e^- 湮灭为 $\mu^+\mu^-$ 的截面

$$\sigma_{e^+e^-}^{\mu^+\mu^-}=\frac{4\pi\alpha^2}{3q^2},$$

二者之比

$$R=\frac{\sigma_{e^+e^-}^h}{\sigma_{e^+e^-}^{\mu^+\mu^-}}=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2。$$

这正是我们讨论夸克颜色自由度时采用的(7–1)式。

高能近距行为　高能，可以用 $q^2\to\infty$ 表示。在

$$\rho_{\mu\nu}=\int d^4ye^{iqy}\langle 0|[J_\mu(y),J_\nu(0)]|0\rangle$$

中，用质心坐标时，

$$\vec{q}=0,\ q=q_0,\ e^{iqy}=e^{iq_0y_0},$$

$q=q_0\to\infty$，$y_0\sim\frac{1}{q_0}\to 0$。由于因果关系，要求

$$y^2=y_0^2-\vec{y}^2\geqslant 0,$$

所以 $$q\to\infty,\ |y_\mu|\to 0。$$

这表明：e^+e^- 过程的高能行为，就是近距离行为。

自由算符展开 由于 e^+e^- 过程的高能行为就是近距离行为，所以我们可以把算符$[J_\mu(y),\ J_\nu(0)]$，作近距离展开，来进行计算。

把流算符看作自由场算符时，它在光锥附近的展开，如(8-21)式所示，为

$$[V_\mu^a(y),\ V_\nu^\beta(0)]=\frac{N_c\delta_{\alpha\beta}}{2\pi^4}\left[\frac{1}{(y^2-iy_0\epsilon)^4}-\frac{1}{(y^2+iy_0\epsilon)^4}\right]$$
$$\cdot(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)+\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(y^2-iy_0\epsilon)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(y^2+i\epsilon y_0)^2}\right]y^\sigma\{d^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)$$
$$+id^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)+if^{\alpha\beta\gamma}S_{\mu\sigma\nu\rho}\Sigma^{\rho\gamma}(y,0)$$
$$-f^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\Sigma_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)\}。$$

其中

$$\Delta^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(0):-:\bar{\psi}_c(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(y):,$$

$$\Sigma^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(0):+:\bar{\psi}_c(0)\gamma^\rho\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(y):,$$

$$\Delta_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(0):-:\bar{\psi}_c(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(y):,$$

$$\Sigma_a^{\rho\gamma}(y,\ 0)=:\bar{\psi}_c(y)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(0):+:\bar{\psi}_c(0)\gamma^\rho\gamma_5\frac{\lambda^\gamma}{2}\psi_c(y):$$

是算符，是正规乘积的算符，在真空态间的平均值为零。

所以

$$\langle 0|\,[J_\mu(y),\ J_\nu(0)]\,|0\rangle$$
$$=\frac{2N_c}{2\pi^4}\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\left[\frac{1}{(y^2-iy_0\epsilon)^4}-\frac{1}{(y^2+iy_0\epsilon)^4}\right](y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu),$$

它是高能近似，即近距离近似下的表示式。此式本是光锥近似，再作近距离展开，等式不变。

由于

$$\frac{1}{(y^2-iy_0\epsilon)^4}-\frac{1}{(y^2+iy_0\epsilon)^4}=\frac{(-1)^3}{3!}$$
$$\cdot\left(\frac{d}{dy^2}\right)^3\left[\frac{1}{y^2-iy_0\epsilon}-\frac{1}{y^2+iy_0\epsilon}\right]=\frac{-i\pi}{3}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0),$$

(3)表示三次导数。所以

$$\langle 0|\,[J_\mu(y),\ J_\nu(0)]\,|0\rangle$$
$$=\frac{-iN_c}{3\pi^3}\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\delta^{(3)}(y)\epsilon(y_0)\,(y^2g_{\mu\nu}-2y_\mu y_\nu)\,。$$

把上式代入(9-33)式，就得到

$$\rho_\mu^\mu=\frac{-i2N_c}{3\pi^3}\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\int d^4ye^{iqy}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0)y^2\,。$$

由于

$$\int d^4ye^{iqy}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0)y^2$$
$$=-g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\int d^4ye^{iqy}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0),$$

再利用公式

$$\int d^4ye^{iqy}\delta^{(n)}(y^2)\epsilon(y_0)=i(2\pi)^2\frac{2^{-2n}}{\Gamma(n)}(q^2)^{n-1}\theta(q^2)\epsilon(q_0),$$

$$\int d^4ye^{iqy}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0)=i(2\pi)^2 2^{-7}(q^2)^2\theta(q^2)\epsilon(q_0),$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\nu}[q^2]^2=g^{\mu\nu}4\,[2q_\mu q_\nu+q^2g_{\mu\nu}]=24q^2,$$

$$\int d^4ye^{iqy}\delta^{(3)}(y^2)\epsilon(y_0)y^2=-i(2\pi)^2\cdot 2^{-4}\cdot 3q^2\theta(q^2)\epsilon(q_0)\,。$$

所以

$$\rho_\mu^\mu=-\frac{N_c}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2q^2,$$

$$\sigma^{h}_{e^+e^-}=\frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2。$$

这和由自由夸克近似所得结果(9–35)式是一样的。

§4. e^+e^- 湮灭为强子的重整化效应

在上一节中，我们从自由夸克的观点，用微扰方法，计算了 e^+e^- 湮灭为强子的截面，得到(9–35)式的结果。然后，自由场算符乘积的展开，也得到同样的结果。但是，微扰计算是最低阶的，算符乘积展开没有考虑相互作用，都没有考虑胶子的影响，也没有考虑重整化效应。现在，我们用重整化群的方法，来讨论它的重整化效应。

ρ 张量和 π 张量 在第八章中，用重整化群方法，讨论深度非弹过程的强子结构函数时，我们引用了和 W 张量紧密相关的 T 张量，导出了用 T 的算符乘积展开系数表示结构函数的矩的(8–57)式、(8–58)式、(8–59)式，从 T 的重整化效应，得到了结构函数的矩偏离标度的行为(8–69)式。与此相似，为了理解 ρ 张量的性质，我们引进和 ρ 张量密切相关的 π 张量。

在 e^+e^- 湮灭为强子的截面

$$\sigma^{h}_{e^+e^-}=-\frac{8\pi^2\alpha^2}{3q^4}\rho^{\mu}_{\mu} \tag{9–36}$$

中，出现的 ρ 张量为

$$\rho_{\mu\nu}=\int d^4y e^{iqy}\langle 0|[J_\mu(y),\ J_\nu(0)]|0\rangle。 \tag{9–37}$$

它有

$$\rho_{\mu\nu}(q)=(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\rho(q^2) \tag{9–38}$$

的形式。

我们定义 π 张量为

$$\pi_{\mu\nu}(q)=i\int d^4y e^{iqy}\langle 0|T(J_\mu(y)J_\nu(0))|0\rangle。 \tag{9–39}$$

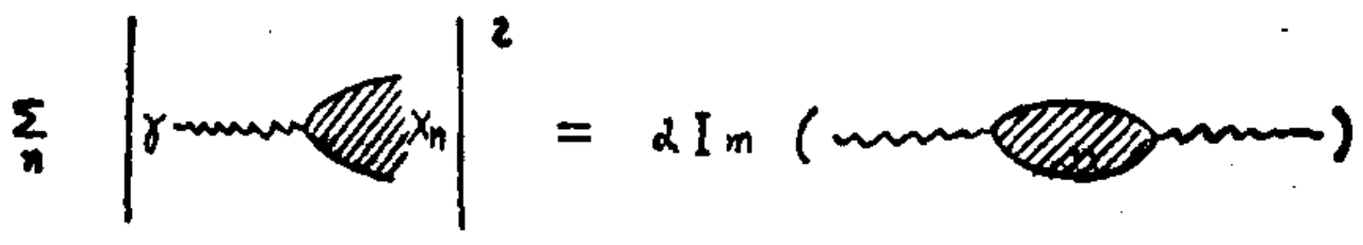
显然，它也有

$$\pi_{\mu\nu}(q)=(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\pi(q^2) \tag{9-40}$$

的形式。实际上，当我们讨论光子场的真空极化时，就要碰到 π 张量。在费曼图



中，它代表阴影部分。根据光学定理

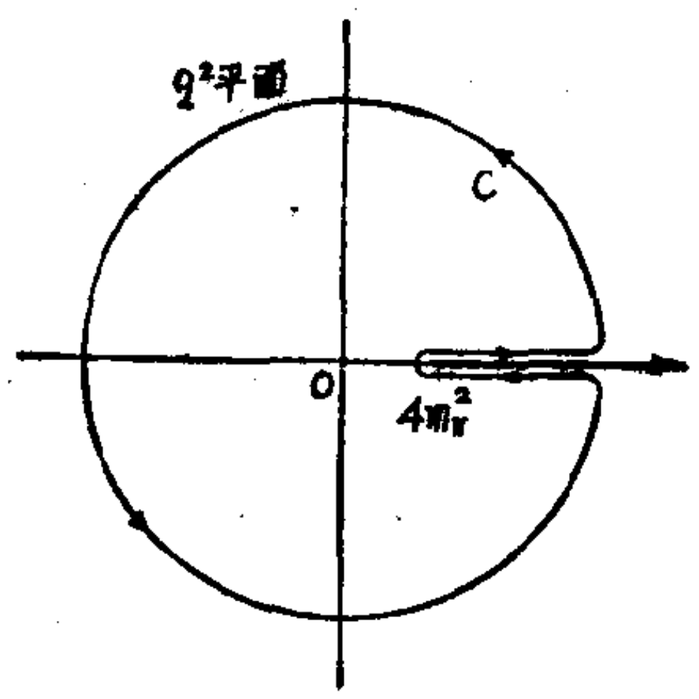


可以推知，ρ 和 π 之间存在着

$$\rho(q^2)=2\,\mathrm{Im}\,\pi(q^2) \tag{9-41}$$

的关系。这关系可以应用第八章的方法予以严格证明。

π 的解析性 在上述的真空极化图形中，物理上允许的能量最低的中间态，是两个 π 介子的状态，最低的能量是 $q^2=4m_\pi^2$。所以，$\pi(q^2)$ 在 q^2 平面上，有一条从 $4m_\pi^2$ 到 ∞ 的割线，如图所示。由于 $\pi(q^2)$ 在 q^2 平面上，除割线 $4m_\pi^2\to\infty$ 以外处处解析。所以，根据科西定理，可以把它用沿 C 的回路积分表示为



$$\pi(q^2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C dq'^2\,\frac{\pi(q'^2)}{q'^2-q^2}。$$

假设 $\pi(q'^2)$ 在 C 圆上的值，随着圆的半径 $\to\infty$ 而 $\to 0$，那末上式右边的积分，就只剩下沿割线上下的积分

$$\pi(q^2)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{4m_\pi^2+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}+\int_{\infty-i\varepsilon}^{4m_\pi^2-i\varepsilon}\right)dq'^2\,\frac{\pi(q'^2)}{q'^2-q^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{4m_\pi^2}^{\infty}dq'^2\,\frac{\pi(q'^2)-\pi^*(q'^2)}{q'^2-q^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{4m_\lambda^2}^{\infty} dq'^2 \, \frac{2\,\mathrm{Im}\,\pi(q'^2)}{q'^2 - q^2}。$$

把(9-41)式代入上式，就得到

$$\pi(q^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{4m_\lambda^2}^{\infty} dq'^2 \, \frac{\rho(q'^2)}{q'^2 - q^2}。 \tag{9-42}$$

重整化 按照光子极化费曼图，应用微扰方法，可以算出 π。它既是 q^2 的函数，也是裸参数 g_0、m_0 的函数，还和正规化参数有关。用维数正规化方法进行计算时，它就和维数参数 $\varepsilon = 2 - \frac{n}{2}$ 有关。即 $\pi = \pi_u(q^2, g_0, m_0, \varepsilon)$，$u$ 表示未重整化。当 $\varepsilon \to 0$ 时，它是发散的。所以，需要重整化。

(9-39)式和(9-40)式是它的定义式。电磁流是守恒流，相乘重整化常数 $z=1$，反常量纲 $\gamma=0$。所以，π_u 不能用相乘重整化的方法来重整化。我们采用特荷夫('t Hooft)的最小减除方法，来把它重整化。把 $\pi_u(q^2, g_0, m_0, \varepsilon)$ 中的发散项减去，留下有限部分，作为重整化的量，即令

$$\pi_r(q^2, g, m, \mu) = \pi_u(q^2, g_0, m_0, \varepsilon) - \mu^{-2\varepsilon} C(g, \varepsilon)。 \tag{9-43}$$

g 是重整化了的偶合常数，m 是重整化了的质量，μ 是具有质量量纲的重整化参数，也叫做重整化点。C 是 π_u 中的发散部分，即

$$C(g, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(g)}{\varepsilon^n} \tag{9-44}$$

是单极点、双极点……之和。$C_n(g)$ 是 n 极点的留数，是可以用微扰方法进行计算的。例如，人们计算了单极点的留数，得到*

$$C_1(g) = C_1^{(0)} + C_1^{(1)} g^2 + \cdots, \quad C_1^{(0)} = \frac{1}{12\pi^2} N_c \sum_{j=1}^{N_f} Q_j^2,$$

$$C_1^{(1)} = \frac{C_1^{(0)}}{4\pi^2}。 \tag{9-45}$$

---

* Bing-Lin Young: "Application of Perturbative Quantum Chromodynamics and Renormalization Group", p. 155-163.

在四维时空中，电磁流的量纲是 3，$\pi(q^2)$是没有量纲的量。在 n 维时空中，$m\bar{\psi}\psi$ 的量纲为 n，$\bar{\psi}\psi$ 的量纲为 $n-1$，电磁流的量纲也是 $n-1$，$\pi(q^2)$ 的量纲为 $2(n-1)-n=2=n-4=-2\varepsilon$。在(9–43)式中，$C$ 前面有 $\mu^{-2\varepsilon}$ 因子，使得 $C(g, \varepsilon)$为没有量纲的量。当然，它的诸极点的留数，也是没有量纲的量。

重整化群方程 将(9–43)式对 μ 求导，得

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g}+\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m}\right)\pi_r(q^2, g, m, \mu)$$

$$=-\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g}\right)[\mu^{-2\varepsilon}C(g, \varepsilon)]$$

$$=\mu^{-2\varepsilon}\left[2\varepsilon C(g, \varepsilon)-\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g}C(g, \varepsilon)\right]$$

$$=\mu^{-2\varepsilon}\left[2C_1(g)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2C_{n+1}-\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial C_n}{\partial g}\right)\frac{1}{\varepsilon^n}\right]。$$

上式左边是与 ε 无关的量，右边也应该如此，即当 $\varepsilon\to 0$ 时也应该与 ε 无关。这只有当

$$2C_{n+1}-\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial C_n}{\partial g}=0, \quad n=1, 2, \cdots$$

时，才会如此。这时，重整化群方程成为

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g}+\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m}\right)\pi_r(q^2, g, m, \mu)$$

$$=2C_1(g),$$

$$\frac{d}{dt}\pi_r(q^2, g(t), m(t), \mu e^t)=2C_1(g(t))。$$

这方程的解是

$$\pi_r(q^2, g(t), m(t), \mu e^t)=\pi_r(q^2, g, m, \mu)+\int_0^t 2C_1(g(t))dt。$$

考虑到 π、C_1、g 是没有量纲的量，q、m、μ 都是质量量纲，在量纲标度变换下，

g, π, O_1 不变, q, m, $\mu \to qe^t$, me^t, μe^t,

上式可以写成

$$\pi_r(q^2, g, m, \mu) = \pi_r(q_0^2, g(t), m(t)e^{-t}, \mu) - \int_0^t 2O_1(g(t))dt,$$

$$q^2 = q_0^2 e^{2t}。$$

由于 $$O_1(g) = O_1^0 + O_1^1 g^2, \quad dt = \frac{dg}{\beta},$$

$$\beta = -b_0 g^3, \quad \frac{g^2}{g(t)^2} = 1 + 2b_0 g^2 t,$$

$$\int_0^t O_1(g(t))dt \simeq O_1^0 t + O_1^1 \frac{1}{2b_0} \ln(1 + 2b_0 g^2 t)$$

$$\simeq \frac{O_1^0}{2} \ln \frac{q^2}{q_0^2} + \frac{O_1^1}{2b_0} \ln\left[1 + b_0 g^2 \ln \frac{q^2}{q_0^2}\right]。$$

所以

$$\pi_r(q^2, g, m, \mu) = \pi_r(q_0^2, g(t), m(t)e^{-t}, \mu) - O_1^0 \ln \frac{q^2}{q_0^2}$$

$$- \frac{O_1^1}{b_0} \ln\left[1 + b_0 g^2 \ln \frac{q^2}{q_0^2}\right]。 \tag{9-46}$$

当 $t \to \infty$ 时, $g(t) \to 0$, $m(t)e^{-t} \to 0$, 上式成为

$$\pi_r(q^2, g, m, \mu) = \pi_r(q_0^2, 0, 0, \mu) - O_1^{(0)} \ln \frac{q^2}{q_0^2}$$

$$- \frac{O_1^{(1)}}{b_0} \ln\left[1 + b_0 g^2 \ln \frac{q^2}{q_0^2}\right]。$$

重整化效应 把(9-42)式代入上式, 就得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dq'^2 \frac{\rho(q'^2)}{q'^2 - q^2} = \pi_r(q_0^2, 0, 0, \mu) - O_1^{(0)} \ln \frac{q^2}{q_0^2}$$

$$- \frac{O_1^{(1)}}{b_0} \ln\left[1 + b_0 g^2 \ln \frac{q^2}{q_0^2}\right]。 \tag{9-47}$$

式中, q_0^2 是实参数, q^2 是复变量。在物理区, q^2 应该取实值, 且在割线上。为了使上式有意义, 我们令

$$q^2 \to q^2 + i\epsilon,$$

即令 q^2 由上半平面趋于实轴。这时

$$\frac{1}{2\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dq'^2\,\frac{\rho(q'^2)}{q'^2-q^2-i\epsilon}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dq'^2\left[P\,\frac{\rho(q'^2)}{q'^2-q^2}+i\pi\delta(q'^2-q^2)\rho(q'^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dq'^2 P\,\frac{\rho(q'^2)}{q'^2-q^2}+\frac{i}{2}\rho(q^2),$$

$$-C_1^{(0)}\ln\frac{q^2+i\epsilon}{q_0^2}=-C_1^{(0)}\int_{q_0^2}^{q^2} dq'^2\,\frac{1}{q'^2+i\epsilon}$$

$$=-C_1^{(0)}\int_{q_0^2}^{q^2}\frac{dq'^2}{q'^2}+iC_1^{(0)}\pi\int_{q_0^2}^{q^2} dq'^2\delta(q'^2)$$

$$=-C_1^{(0)}\ln\frac{q^2}{q_0^2}+i\pi C_1^{(0)},$$

$$-\frac{C_1^{(1)}}{b_0}\ln\left[1+b_0g^2\ln\frac{q^2+i\epsilon}{q_0^2}\right]$$

$$=-\frac{C_1^{(1)}}{b_0}\ln\left[1+b_0g^2\left(\ln\frac{q^2}{q_0^2}-i\pi\right)\right]$$

$$=-\frac{C_1^{(1)}}{b_0}\ln\left[\left(1+b_0g^2\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)\left(1-\frac{i\pi b_0g^2}{1+b_0g^2\ln\frac{q^2}{q_0^2}}\right)\right]$$

$$=-\frac{C_1^{(1)}}{b_0}\ln\left(1+b_0g^2\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)+i\pi C_1^{(1)}g^2(t)。$$

由(9–47)式左右两边的虚数部分相等，得到

$$\rho(q^2,\ g,\ m,\ \mu)=2\pi\,C_1^{(0)}+2\pi C_1^{(1)}g^2(t)+\cdots,$$

把(9–45)式代入，得

$$\rho(q^2,\ g)=\frac{1}{6\pi}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\left[1+\frac{g^2(t)}{4\pi^2}+\cdots\right]。\qquad(9\text{–}48)$$

把它代入(9–38)式、(9–36)式，得

$$\rho_\mu^\mu=-3q^2\rho=-\frac{q^2}{2\pi}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\left[1+\frac{g^2(t)}{4\pi^2}+\cdots\right],$$

$$\sigma_{e^+e^-}^{h}=\frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\left[1+\frac{g^2(t)}{4\pi^2}+\cdots\right]。\qquad(9\text{–}49)$$

第一项和上一节得到的结果一样，第二项就是计算到双圈图的高阶修正，我们称之为重整化效应。与此相应，e^+e^- 湮灭为强子和 e^+e^- 湮灭为 $\mu^+\mu^-$ 的比率

$$R(t)=N_c\sum_{j=1}^{N_f}Q_j^2\left[1+\frac{g^2(t)}{4\pi^2}+\cdots\right]。\tag{9-50}$$

这结果可以和实验进行比较。

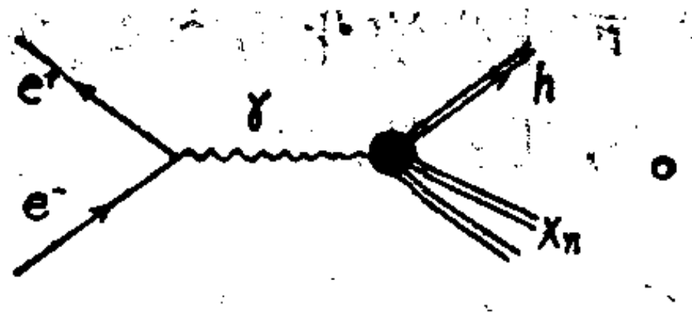
§5. 碎裂函数及其 A-P 方程

(9-49)式表示的、e^+e^- 湮灭为强子的截面，是总截面，是湮灭为一切可能强子的内含截面。在以上的论述中，我们认为：e^+e^- 先经电磁作用湮灭为夸克对，然后这夸克对或者直接碎裂为强子，或者辐射胶子后再碎裂为强子。不管是直接碎裂为强子，还是辐射胶子后再碎裂为强子，由于是内含过程，它们碎裂为一切可能强子的几率总是一。所以，作微扰计算时，只需要算出 e^+e^- 湮灭为夸克、胶子的几率就够了。但是，对于单举(或者双举)过程，我们需要计算，e^+e^- 湮灭为一个(或者两个)确定强子和其它强子的截面。那末，只计算 e^+e^- 湮灭为夸克、胶子的几率就不够了，还需计算夸克、胶子碎裂为一个(或者两个)确定强子和其它强子的几率。

碎裂函数 夸克，或者胶子，碎裂为某个强子的几率，用碎裂函数 $D_a^h(z,\ t)$ 来描述。a 表示夸克或胶子，h 表示某个强子，z 表示强子 h 占有夸克或胶子 a 的动量的分数，$t=\frac{1}{2}\ln Q^2/Q_0^2$ 是作用能量的参数。夸克，或者胶子，碎裂为某个强子时，还可能伴随着产生其它强子。$D_a^h(z,\ t)$ 中包括了所有可能的伴随效应。因此，它只和具体的夸克或胶子 a、强子 h 有关，和强子 h 占有夸克或胶子 a 的动量分数 z 有关，和作用能量 t 有关。

电子对湮灭为强子 h 和其他强子 X_n 的过程为

$e^+ + e^- \to h + X_n$,



用 E_h 表示强子 h 的能量，Q 是 e^+e^- 的质心能量，也是虚光子 γ 的四维动量，$z=2E_h/Q$ 就是强子 h 占有 e^+e^- 一半能量的分数。我们用

$$\sigma^h(z,\ t)=\frac{d\sigma^h}{dz}(e^+e^-\to h(z)+X_n,\ t)$$

表示 e^+e^- 湮灭为强子 h 动量分数在 $z\to z+dz(dz=1)$ 间的截面。用

$$\frac{d\sigma^j}{dy}=N_c\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)Q_j^2\delta(1-y),$$

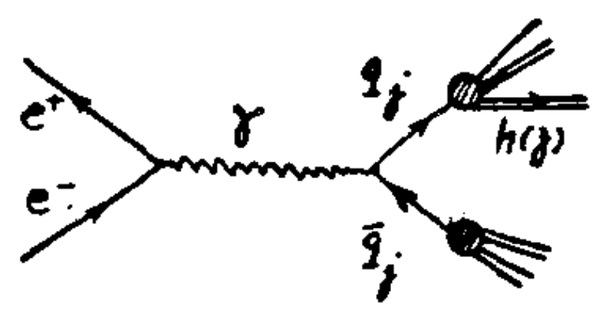
$$\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)=\frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}$$

表示如(9–35)式所示的、e^+e^- 湮灭为 j 夸克对的几率。那末，按照几率的运算规则，就有

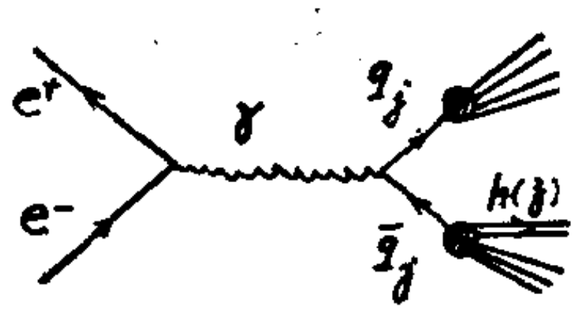
$$\frac{d\sigma^h(z,\ t)}{dz}=\sum_{j=1}^{N_f}\int_z^1\frac{dy}{y}\cdot\frac{d\sigma^j(y,\ t)}{dy}\cdot\left[D_{q_j}^h\left(\frac{z}{y},\ t\right)+D_{\bar{q}_j}^h\left(\frac{z}{y},\ t\right)\right],\tag{9–51}$$

相应的费曼图是

$\sum_j$ (



+

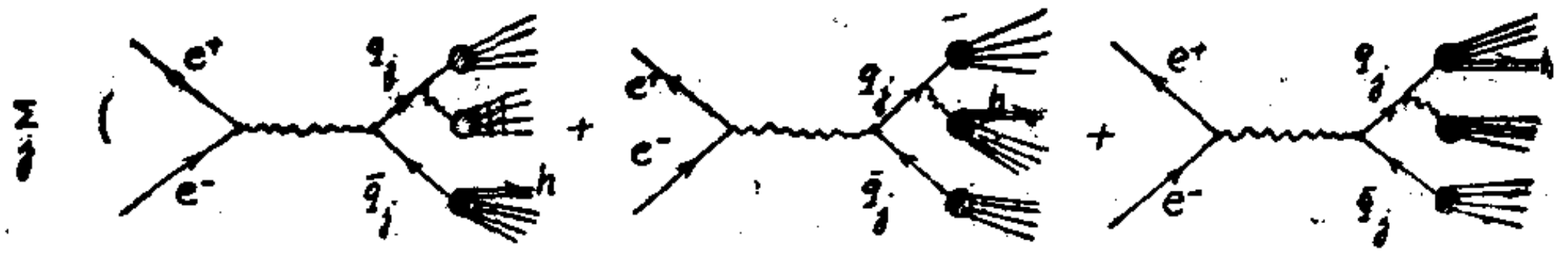


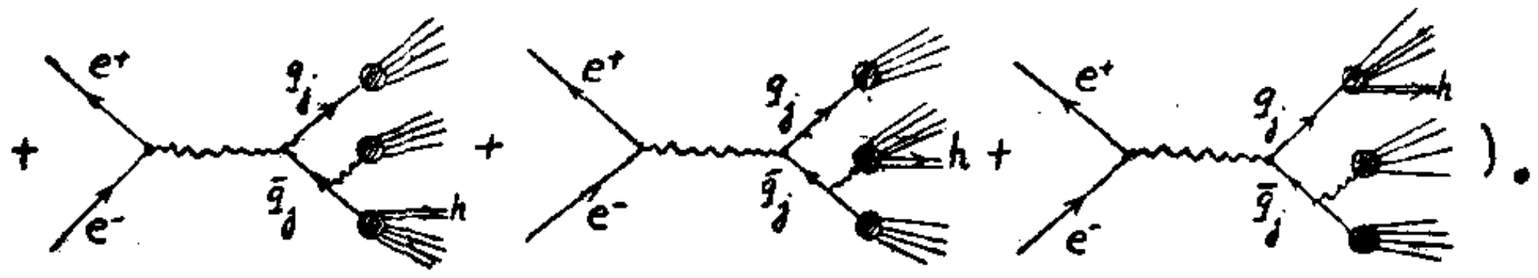
)。

实际上，(9–51)式及其相应的费曼图，是夸克 q_j 碎裂为强子 h 的碎裂函数的定义。

A–P 方程　(9–51)式表示的是：电子对先湮灭为夸克对，然后夸克或反夸克直接碎裂为强子。这是最低阶的过程，在作用能量参数 t 不大时，这种描述是好的。当作用能量增大时，夸克可能演化为夸克和胶子。那么，由 e^+e^- 湮灭成的夸克对，除直接碎裂

为强子外，还可能先演化为夸克、胶子，再碎裂为强子。因此，除上述的费曼图外，还要加上





与此相应，(9–51)式的右边，应该把第一、六两个图形的贡献包括进去了，而且还要加上第二到五的四个图形的贡献

$$\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\sum_{j=1}^{N_f}\int_x^1\frac{dx}{x}\int_x^1\frac{dy}{y}\frac{d\sigma^j(y,\ t)}{dy}\left\{P_{q\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)\left[D_{q_j}^h\left(\frac{z}{x}\right)+D_{\bar{q}_j}^h\left(\frac{z}{x}\right)\right]+2P_{g\leftarrow q}\left(\frac{x}{y}\right)D_g^h\left(\frac{z}{x}\right)\right\}dt。\tag{9–52}$$

此式的写出是基于 $\frac{d\sigma^j}{dy}$、D_a^h、$\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{b\leftarrow a}dt$ 的几率的意义，以及几率的相乘规则。换句话说，是物理机制的数学表示，和写出(9–51)式的基础是相同的。

在(9–52)式中，作变数变换

$$y,\ x\to y,\ x'=\frac{x}{y},$$

则成为

$$\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\sum_{j=1}^{N_f}\int_x^1\frac{dy}{y}\frac{d\sigma^j(y,\ t)}{dy}\int_{\frac{x}{y}}^1\frac{dx'}{x'}\left\{P_{q\leftarrow q}(x')\left[D_{q_j}^h\left(\frac{z}{yx'}\right)+D_{\bar{q}_j}^h\left(\frac{z}{yx'}\right)\right]+2P_{g\leftarrow q}(x')D_g^h\left(\frac{z}{yx'}\right)\right\}dt。$$

把上式加于(9–51)式的右边，就得到包括单胶子修正的、e^+e^- 湮灭为强子 h 的截面

$$\frac{d\sigma^h(z,\ t)}{dz}=\sum_{j=1}^{2N_f}\left\{\int_z^1\frac{dy}{y}\frac{d\sigma^j(y,\ t)}{dy}\left\{D_q^h\left(\frac{z}{y},\ t\right)\right.\right.$$

$$+\int_{\frac{z}{y}}^1\frac{dx}{x}\left[\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{q\leftarrow q}(x)\,dt\,D_q^h\left(\frac{z}{yx},\ t\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{g\leftarrow q}(x)\,dt\,D_g^h\left(\frac{z}{yx},\ t\right)\right]\right\}。$$

这意味着

$$dD_q^h\left(\frac{z}{y},\ t\right)=\int_{\frac{z}{y}}^1\frac{dx}{x}\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\left[P_{q\leftarrow q}(x)D_q^h\left(\frac{z}{yx},\ t\right)\right.$$

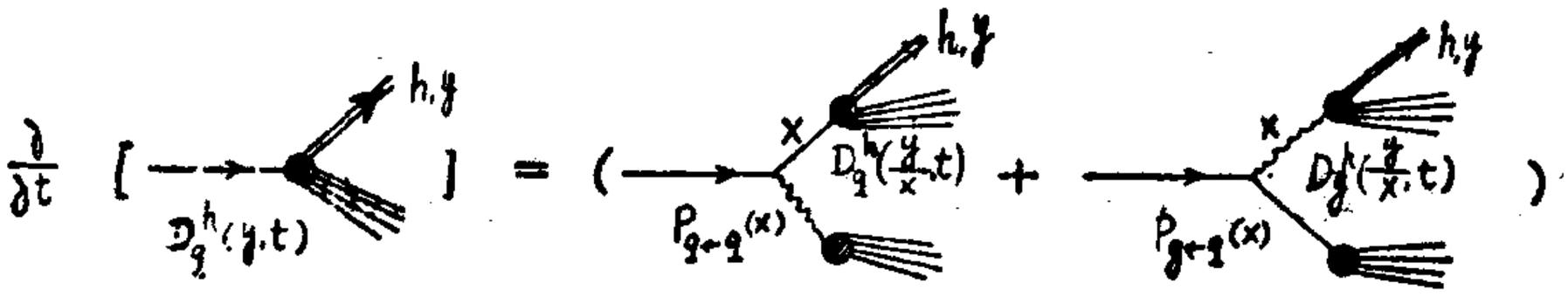
$$\left.+P_{g\leftarrow q}(x)D_g^h\left(\frac{z}{yx},\ t\right)\right]dt。$$

由此，我们就得到

$$\frac{\partial D_q^h(y,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_y^1\frac{dx}{x}\left[P_{q\leftarrow q}(x)D_q^h\left(\frac{y}{x},\ t\right)\right.$$

$$\left.+P_{g\leftarrow q}(x)D_g^h\left(\frac{y}{x},\ t\right)\right]。\qquad(9\text{–}53)$$

这是夸克碎裂为强子的碎裂函数随作用能量 t 变化的 A–P 方程。可以用费曼图表示为

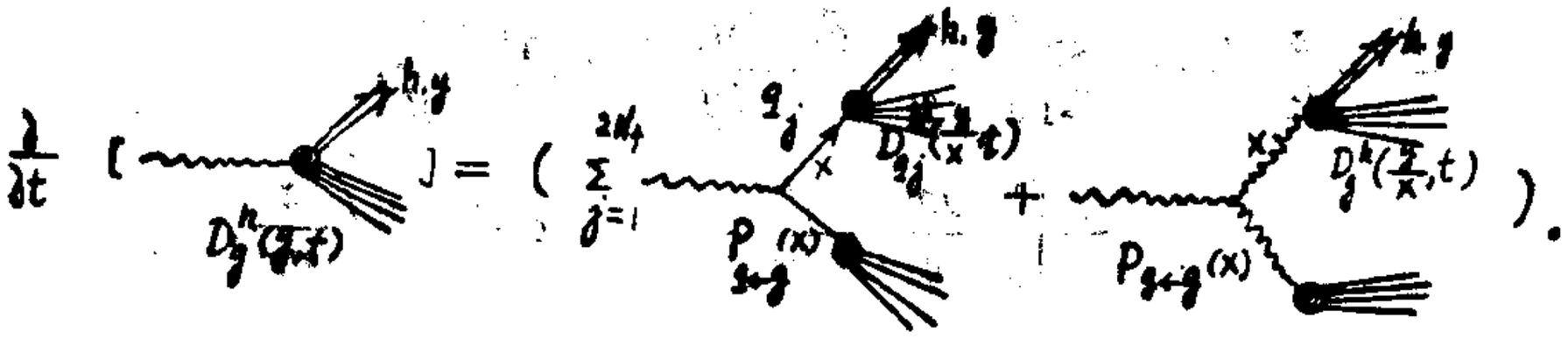


按照同样的推测，胶子碎裂为强子的碎裂函数随 t 变化的 A–P 方程为

$$\frac{\partial D_g^h(y,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_y^1\frac{dx}{x}\left[\sum_{j=1}^{2N_f}P_{q\leftarrow g}(x)D_q^h\left(\frac{y}{x},\ t\right)\right.$$

$$\left.+P_{g\leftarrow g}(x)D_g^h\left(\frac{y}{x},\ t\right)\right],\qquad(9\text{–}54)$$

其费曼图为



(9–53)式和(9–54)式是 $2N_f+1$ 个碎裂函数的、联立的积分微分方程。在一般情况下，只能从它们在某 t 时的已知值，用数值方法，计算它们在其他 t 时的值。但是，对于非单态的碎裂函数

$$D_\Delta^h(y,\ t)\equiv\sum_{j=1}^{N_f}D_{q_j}^h(y,\ t)-\sum_{j=1}^{N_f}D_{\bar{q}_j}^h(y,\ t),$$

由(9–53)式可以导出

$$\frac{\partial D_\Delta^h(y,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}\int_y^1\frac{dx}{x}\left[P_{q\leftarrow q}(x)D_\Delta^h\left(\frac{x}{y},\ t\right)\right]。\qquad(9\text{–}55)$$

这是非联立的积分微分方程，可以求出解析的解。考虑它们的矩

$$B_{q\leftarrow q}^n\equiv\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}P_{q\leftarrow q}(x)=-\frac{1}{4}\gamma_{qq}^{(0)n},$$

$$D_\Delta^h(n,\ t)\equiv\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}D_\Delta^h(x,\ t),$$

由(9–55)式推知，满足微分方程

$$\frac{\partial D_\Delta^h(n,\ t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}B_{q\leftarrow q}^nD_\Delta^h(n,\ t)。$$

其解为 $D_\Delta^h(n,\ t)=D_\Delta^h(n,\ 0)\exp\left[-\frac{\gamma_{qq}^{(0)n}}{4\pi}\int_0^t\alpha_s(t)dt\right]$。

将

$$\alpha_s(t)=\frac{\alpha_s}{1+8\pi b_0\alpha_s t},$$

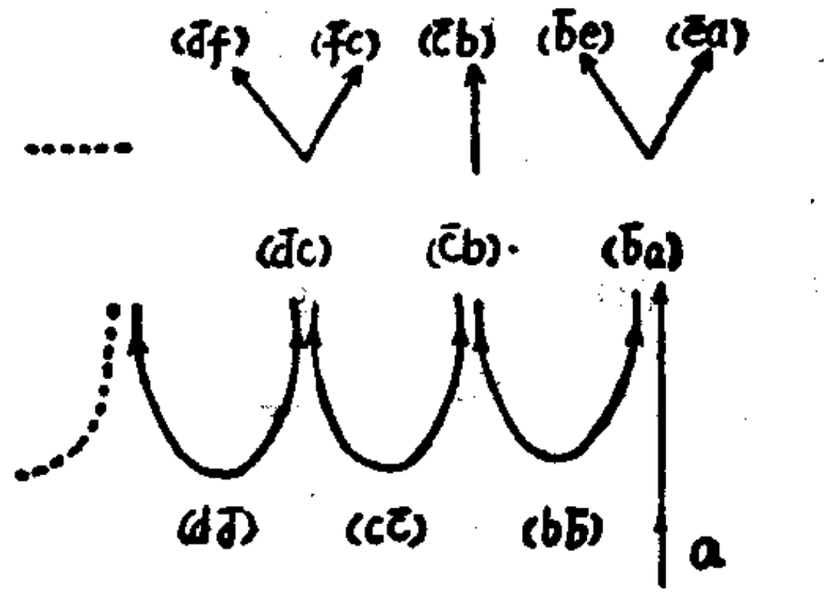
$$\int_0^t\alpha_s(t)dt=\int_0^t\frac{\alpha_s}{1+8\pi b_0\alpha_s t}dt=\frac{1}{8\pi b_0}\ln(1+8\pi b_0\alpha_s t)$$

代入，得

$$D_\Delta^h(n,\ t)=D_\Delta^h(n,\ 0)\left[1+b_0g^2\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right]^{-\frac{\gamma_{qq}^{(0)n}}{32\pi^2b_0}}。\qquad(9\text{–}56)$$

它的标度行为，也是对数偏离的。

链模型　(9-53)式、(9-54)式描述的，碎裂函数 $D_a^h(y,\ t)$ 随作用能量参数 t 变化的规律。如上所述，碎裂函数，还是动量分数 y 的函数，也和夸克的味道或胶子以及强子的类别有关。这里，我们介绍菲尔德和费曼论述这些问题的链模型*。



这模型认为：具有一定动量的夸克，沿某方向运动时，将激发胶子场，扰动夸克对，形成介子。如图所示，夸克 a 向上运动，激发胶子场，扰动海中的夸克对 $(b\bar{b})$、$(c\bar{c})$、$(d\bar{d})$…等，形成介子 $(\bar{b}a)$、$(\bar{c}b)$、$(\bar{d}c)$…等。这些新形成的介子，有的是稳定的，如 $(\bar{c}b)$；有的是不稳定的，如 $(\bar{b}a)$、$(\bar{d}c)$，它们将衰变为稳定的介子，如 $(\bar{b}a)\to(\bar{e}a)+(\bar{b}e)$，$(\bar{d}c)\to(\bar{f}c)+(\bar{d}f)$。当然，这些可能形成的介子，形成的几率是不一样的。实验上观察到的介子，是它们的统计平均效应。这就是链模型中，夸克碎裂为介子的机制。

链模型进一步假定：a 夸克的动量为 1；当它扰动夸克对，与 $\bar{b}$ 夸克形成第一个介子 $(\bar{b}a)$ 后，把动量 $y\to y+dy$ 留给其他粒子的几率为 $f(y)dy$。显然，形成的第一个介子的动量是 $1-y\to1-y+dy$，形成的几率是 $f(1-y)dy$。如果我们用 $D(z)dz$ 表示，在整个过程中，形成某个介子(不管它是第几个)，其动量在 $z\to z+dz$ 之间的几率，那末，根据几率运算规则和上述的机制，我们就得到积分方程

$$D(z)=f(1-z)+\int_z^1\frac{dy}{y}f(y)D\left(\frac{z}{y}\right)。\qquad(9\text{-}57)$$

右边的第一项来自第一个形成的介子的贡献，第二项来自后来形成的介子的贡献。

当 $f(z)$ 为已知时，(9-57)式就是碎裂函数随动量分数 z 变化

---

* R. D. Field, R. P. Feynman: Nucl. Phys. B136, (1978) p. 1-76.

的积分方程。这方程的解是

$$D(z)=f(1-z)+\int_z^1\frac{dy}{y}g(y)f\left(1-\frac{z}{y}\right),$$

$$f(n)\equiv\int_0^1 dz\cdot z^{n-1}f(z),\quad g(n)\equiv\int_0^1 dz\cdot z^{n-1}g(z),$$

$$g(n)=\frac{f(n)}{1-f(n)}。\tag{9-58}$$

(9-57)式、(9-58)式是碎裂函数 D 和动量分数 z 的函数关系。对于产生的是什么介子，这介子是由什么味道的夸克碎裂而成的，并没有涉及。为此，链模型还假定：由 a 夸克激发的胶子场，扰动夸克对 $(b\bar{b})$、$(c\bar{c})$、$(d\bar{d})\cdots$的几率，分别是 γ_b、γ_c、$\gamma_d\cdots$；在以这几率被扰动后，它们可以自由结合形成介子。如果用 $D_q^{a\bar{b}}(z)$ 表示由 q 夸克碎裂成介子$(a\bar{b})$的碎裂函数，那么根据几率的运算规则和以上的论述，就有

$$D_q^{(a\bar{b})}(z)=\delta_{qa}\gamma_b f(1-z)+\int_z^1\frac{dy}{y}f(y)\sum_c\gamma_c D_c^{(a\bar{b})}\left(\frac{z}{y}\right)。$$

用 γ_q 乘上式，并对所有的夸克 q 取和，得

$$\sum_q\gamma_q D_q^{(a\bar{b})}(z)=\gamma_a\gamma_b f\ (1-z)+\int_z^1\frac{dy}{y}f(y)\sum_q\gamma_q D_q^{(a\bar{b})}\left(\frac{z}{y}\right)。$$

这里用到了 $\sum_q\gamma_q=1$。将上式与(9-57)式比较，得

$$\sum_q\gamma_q D_q^{(a\bar{b})}(z)=\gamma_a\gamma_b D(z),$$

$$\int_z^1\frac{dy}{y}f(y)\sum_q\gamma_q D_q^{(a\bar{b})}\left(\frac{z}{y}\right)=\gamma_a\gamma_b[D(z)-f(1-z)]。$$

所以

$$D_q^{(a\bar{b})}(z)=\delta_{qa}\gamma_b f(1-z)+\gamma_a\gamma_b[D(z)-f(1-z)]。\tag{9-59}$$

令

$$h=(a\bar{b}),\quad A_q^h=\delta_{qa}\gamma_b,\quad B^h=\gamma_a\gamma_b,\tag{9-60}$$

则(9-59)式可以写成

$$D_q^h(z)=A_q^h f(1-z)+B^h[D(z)-f(1-z)]。\tag{9-61}$$

这就是链模型中，q 夸克碎裂为 h 强子，其动量在 z 处的几率密

度。式中，A_q^h、B^h 由(9-60)式决定，$D(z)$ 由(9-58)式计算，$f(z)$ 和 γ_q 是由实验结果推测而给定的。

三夸克模型 在 C 夸克域能以下的实验，用三夸克 u、d、s 模型，就可以给予解释。令

$$S=s\bar{s},\quad N=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d}),$$

则介子包含的夸克，可以写成：

$$\pi^+、\rho^+=(u\bar{d});\ \pi^0、\rho^0=(N);\ \pi^-、\rho^-=(d\bar{u});$$

$$k^+、k^{*+}=(u\bar{s});\ k^0、k^{*0}=(d\bar{s});$$

$$k^-、k^{*-}=(s\bar{u});\ \bar{k}^0、\bar{k}^{*0}=(s\bar{d});$$

$$\eta、\omega=(S\cos\theta_M+N\sin\theta_M);\ \eta'、\phi=(-S\sin\theta_M+N\cos\theta_M)。$$

θ_M 是混合角，可取 $\theta_M=\theta_{ps}=45°$，$\theta_M=\theta_\gamma=90°$。

假定扰动 u 夸克对的几率和扰动 d 夸克对的几率一样，都是 γ，那末扰动 s 夸克对的几率就是 $1-2\gamma$。这时，由 u、d、s 夸克碎裂为上述诸强子的参数 A_q^h 和 B^h，就可以用表表示如下。

	A_u^h	A_d^h	A_s^h	B^h
π^+、ρ^+	γ	0	0	γ^2
π^0、ρ^0	$\frac{1}{2}\gamma$	$\frac{1}{2}\gamma$	0	γ^2
π^-、ρ^-	0	γ	0	γ^2
k^+、k^{*+}	$1-2\gamma$	0	0	$\gamma(1-2\gamma)$
k^0、k^{*0}	0	$1-2\gamma$	0	$\gamma(1-2\gamma)$
k^-、k^{*-}	0	0	γ	$\gamma(1-2\gamma)$
$\bar{k}^0$、$\bar{k}^{*0}$	0	0	γ	$\gamma(1-2\gamma)$
η、ω	$\frac{1}{2}\gamma\sin^2\theta_M$	$\frac{1}{2}\gamma\sin^2\theta_M$	$(1-2\gamma)\cos^2\theta_M$	$\gamma^2\sin^2\theta_M+(1-2\gamma)^2\cos^2\theta_M$
η'、ϕ	$\frac{1}{2}\gamma\cos^2\theta_M$	$\frac{1}{2}\gamma\cos^2\theta_M$	$(1-2\gamma)\sin^2\theta_M$	$\gamma^2\cos^2\theta_M+(1-2\gamma)^2\sin^2\theta_M$

菲尔德和费曼令

$$f(z)=1-a+3az^2,$$

代入(9–58)式, 得

$$f(n)=\frac{1-a}{n}+\frac{3a}{n+2},\quad g(n)=\frac{n(n+2)}{2-2a+2an-n-n^2},$$

$$g(z)=\frac{\frac{3}{z}+4a(1-a)z^{2-2a}}{3-2a},$$

$$zD(z)=\frac{3}{3-2a}+\frac{3az^2}{2a-1}+\frac{2a(2a^2-3a-2)z^{3-2a}}{(3-2a)(2a-1)}。$$

再令 $a=0.88$, $\gamma=0.4$, 由(9–61)式计算 $D_q^h(z)$, 并用来计算反应截面, 得到和实验符合得尚好的结果。

北郁夫和中村量空*令

$$f(z)=1-b-a+2bz+3az^2,$$

$$a=1.16,\ b=-0.18,\ \gamma=0.4,$$

得到的结果, 和实验符合得更好一些。

---

* 北郁夫, 中村量空:"素粒子论研究"。V.60, No. 5, (1930), 2. p. 321.

第十章　SU(5)大统一理论

把各种相互作用理论统一起来，是人们长期怀有的愿望。弱电统一规范理论的成功，使这种愿望更趋强烈。人们作了许多尝试，建立弱电强三种相互作用的统一理论，并称之为大统一理论。人们还企图建立包括引力在内的统一理论，并称之为超对称、超统一理论。

弱电统一理论，是$SU(2)\times U(1)$规范理论，得到了实验的证实，并以授予诺贝尔奖的形式，予以肯定。量子色动力学，是$SU_c(3)$规范理论，取得了一定的成就，被认为是强作用理论的唯一的候选者。所以，人们把描述弱电强三种相互作用的理论$SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$，叫做标准模型。标准模型，是三个独立的规范群的直积，有三个独立的相互作用常数，不是统一理论。弱电统一理论$SU(2)\times U(1)$，破缺成$U_e(1)$以后，仍保持两个独立的常数e和θ_w，因而也并非真正统一。人们想用只有一个相互作用常数，而又包含子群$SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$的较大的群，来建立大统一理论。在这方面的努力，取得较大成就的，有$SU(5)$大统一理论和$SO(10)$大统一理论。在这一章里，我们论述$SU(5)$大统一理论，揭示大统一理论的基本内容和方法。有兴趣进一步研究的读者，可以参阅有关文献。

§1. SU(5)规范群和规范场

标准模型的规范群，是$SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$，是$2\times1\times1=4$秩的，有四个可以同时对角化的生成元。大统一理论采用的

规范群，应该包含子群 $SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$，其秩不能小于4。SU(5)的秩正好等于4，正好有四个可以同时对角化的生成元。居尔吉、格拉肖(Georgi-Glashow)* 首先用 SU(5) 来建立大统一理论。

SU(5)生成元 SU(n)群，是 $n-1$ 秩群，有 n^2-1 个生成元。SU(5)群，是四秩群，有24个生成元。在写出它的生成元的具体表示时，要考虑到它包括子群 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$，包括子群 $U_Q(1)$。换句话说。在SU(5)生成元的具体表示中，要显出 $SU_c(3)$、$SU(2)$、$U_Y(1)$、$U_Q(1)$ 生成元的具体表示。生成元的表示是多种多样的，我们需要写出的，只是它的基本表示。SU(5)的基本表示是5维表示，其子群 $SU_c(3)$、$SU(2)$、$U_Y(1)$ 或 $U_Q(1)$ 的表示也要写成5维的形式。根据这些考虑，我们把SU(5)的24个生成元的基本表示写成：

$$T_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 24,$$

$$T_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},\qquad T_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&-i&0&0&0\\i&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$T_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},\qquad T_4=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

---

* H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974), p. 438.

$$T_5=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T_6=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_7=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T_8=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_9=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T_{10}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_{11}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T_{12}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_{13}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T_{14}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_{15}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},\quad T_{16}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$T_{17}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&0&0&0\\0&i&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},\quad T_{18}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$T_{19}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-i&0\\0&0&i&0&0\\0&0&0&0&0\end{vmatrix},\quad T_{20}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{vmatrix},$$

$$T_{21}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&0\\0&0&i&0&0\end{vmatrix},\quad T_{22}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{vmatrix},$$

$$T_{23}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-i\\0&0&0&i&0\end{vmatrix},\quad T_{24}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-4\end{vmatrix}。$$

(10-1)

显然，在这 24 个生成元的矩阵表示中，T_1、T_2、…、T_8 就是盖尔曼的八个矩阵，就是 SU(3)的生成元；T_{22}、T_{23} 是两个泡里矩阵，是

SU(2)的两个生成元；其它的非对角矩阵，都具有推广的泡里矩阵的形式；而四个对角矩阵，可以合写成

$$\left|\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{\sqrt{2K(K+1)}} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right|_{K},$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} -K & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{array}\right|,$$

$$K=1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1),\ n=5。$$

这 24 个矩阵，都是厄密的、无迹的，而且正交规一化为

$$\mathrm{Tr}(T_iT_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}。$$

$SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$的生成元 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$是 SU(5)的子群，它们的生成元都可以表示成 5×5 矩阵的形式。$SU_c(3)$的生成元，就是盖尔曼的八个矩阵

$$\frac{\lambda_i}{2}=T_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8。\tag{10-2}$$

SU(2)的两个生成元

$$\frac{\tau_1}{2}=T_{22},\quad \frac{\tau_2}{2}=T_{23},\tag{10-3}$$

其第三个生成元

$$\frac{\tau_3}{2}=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|\tag{10-4}$$

是 T_{15}、T_{24} 的线性组合

$$\frac{\tau_3}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}T_{24}-\frac{\sqrt{6}}{4}T_{15}。\tag{10-5}$$

$U_Y(1)$的生成元，应该和$SU_c(3)$、$SU(2)$对易，因而有

$$Y-\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

的形式。由 $\mathrm{Tr}Y=0,\quad \mathrm{Tr}(Y)^2=\frac{1}{2}$

的要求，得 $3a+2b=0,\ 3a^2+2b^2=\frac{1}{2}$

解之得 $a=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{20}},\quad b=\sqrt{\frac{3}{20}},$

$$Y=\sqrt{\frac{6}{10}}\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix},\tag{10-6}$$

它也是T_{15}、T_{24}的线性组合

$$Y=-\frac{5}{2\sqrt{10}}T_{15}-\frac{\sqrt{6}}{4}T_{24}。\tag{10-7}$$

$U_e(1)$的生成元 $U_e(1)$是$SU(2)\times U_Y(1)$的子群，其生成元也可以表示成5×5矩阵的形式。为了和夸克、轻子的电荷直接联系，而把$U_Y(1)$的生成元规一化为

$$Y=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \qquad (10\text{-}6)'$$

它包括两个部分

$$Y=Y_3+Y_2,\ Y_3=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Y_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

满足条件

$$\mathrm{Tr}\,Y=0,\ \mathrm{Tr}(Y_2)^2=\frac{1}{2}。$$

我们定义 $U_e(1)$ 的生成元为

$$Q=\frac{\tau_3}{2}+Y=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}。 \tag{10-8}$$

它是 5×5 的形式，而且 $\mathrm{Tr}\,Q=0$，可以看作 SU(5) 的一个子群的生成元。

SU(5)规范场 按照规范理论，与规范群的每个生成元相应，就存在一个规范场，即有

$$T_i,\ A_i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 24,$$

共 24 个规范场，它们都是时定坐标的函数 $A_i(x)$。我们用

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{24}T_iA_i(x) \tag{10-9}$$

来定义 $A(x)$，它是 5×5 矩阵，有 24 个独立的元素

$$A_b^a(x),\ a,\ b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5,\ \sum_{a=1}^{5}A_a^a(x)=0。 \tag{10-10}$$

所以，在作为 SU(5) 规范场方面，$A_b^a(a、b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 和 $A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 24)$ 是等价的。把(10-1)式代入(10-9)式，得

$$A=\begin{vmatrix}
\frac{A_3}{\sqrt{2}}+\frac{A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right) & \frac{A_1-iA_2}{\sqrt{2}} & \frac{A_4-iA_5}{\sqrt{2}} & \frac{A_9-iA_{10}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{11}-iA_{12}}{\sqrt{2}} \\
\frac{A_1+iA_2}{\sqrt{2}} & \frac{-A_3}{\sqrt{2}}+\frac{A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right) & \frac{A_6-iA_7}{\sqrt{2}} & \frac{A_{16}-iA_{17}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{13}-iA_{14}}{\sqrt{2}} \\
\frac{A_4+iA_5}{\sqrt{2}} & \frac{A_6+iA_7}{\sqrt{2}} & \frac{-2A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right) & \frac{A_{18}-iA_{19}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{20}-iA_{21}}{\sqrt{2}} \\
\frac{A_9+iA_{10}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{16}+iA_{17}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{18}+iA_{19}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-3A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right) & \frac{A_{22}-iA_{23}}{\sqrt{2}} \\
\frac{A_{11}+iA_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{13}+iA_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{20}+iA_{21}}{\sqrt{2}} & \frac{A_{22}+iA_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{-4A_{24}}{\sqrt{20}}
\end{vmatrix}.$$

我们令

$$G_1^1=\frac{A_3}{\sqrt{2}}+\frac{A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right),$$

$$G_2^1=\frac{A_1-iA_2}{\sqrt{2}},$$

$$G_3^1=\frac{A_4-iA_5}{\sqrt{2}},$$

$$G_1^2=\frac{A_1+iA_2}{\sqrt{2}},$$

$$G_2^2=\frac{-A_3}{\sqrt{2}}+\frac{A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right),$$

$$G_3^2=\frac{A_6-iA_7}{\sqrt{2}},$$

$$G_1^3=\frac{A_4+iA_5}{\sqrt{2}},$$

$$G_2^3=\frac{A_6+iA_7}{\sqrt{2}},$$

$$G_3^3=\frac{-2A_8}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right),$$

$$X_1=\frac{A_9+iA_{10}}{\sqrt{2}},\quad X_2=\frac{A_{16}+iA_{17}}{\sqrt{2}},\quad X_3=\frac{A_{18}+iA_{19}}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{X}_1=\frac{A_9-iA_{10}}{\sqrt{2}},\quad \overline{X}_2=\frac{A_{16}-iA_{17}}{\sqrt{2}},\quad \overline{X}_3=\frac{A_{18}-iA_{19}}{\sqrt{2}},$$

$$Y_1=\frac{A_{11}+iA_{12}}{\sqrt{2}},\quad Y_2=\frac{A_{13}+iA_{14}}{\sqrt{2}},\quad Y_3=\frac{A_{20}+iA_{21}}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{Y}_1=\frac{A_{11}-iA_{12}}{\sqrt{2}},\quad \overline{Y}_2=\frac{A_{13}-iA_{14}}{\sqrt{2}},\quad \overline{Y}_3=\frac{A_{20}-iA_{21}}{\sqrt{2}},$$

$$W^+=\frac{A_{22}-iA_{23}}{\sqrt{2}},\qquad W^-=\frac{A_{22}+iA_{23}}{\sqrt{2}},$$

$$W^3=-\frac{3}{2}\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{5}{2\sqrt{10}}A_{24},$$

$$B=-\frac{\sqrt{15}}{2}\left(\frac{A_{15}}{\sqrt{6}}+\frac{A_{24}}{\sqrt{10}}\right)。\tag{10-11}$$

则 A 的矩阵，可以写成

$$A=\begin{vmatrix} G_1^1 & G_2^1 & G_3^1 & \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 & \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 & \bar{X}_3 & \bar{Y}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \dfrac{W^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & \dfrac{-W^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{3B}{\sqrt{30}} \end{vmatrix}。\tag{10-12}$$

其矩阵元可以写成

$$A_b^a(a、b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5),\ A_\beta^\alpha=G_\beta^\alpha(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3),$$
$$A_\alpha^r=(X,\ Y)(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ r=4,\ 5),$$
$$A_s^r=(W^+、W^-、W^3、B)(r,\ s=4,\ 5)。\tag{10-13}$$

根据规范场和生成元对应的规则，可以看出：$G_\beta^\alpha(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$是 $SU_c(3)$群的规范场，是胶子场；$A_s^r(r,\ s=4,\ 5)$中的 W^+、W^-、W^3 是 $SU(2)$群的规范场，相应的生成元是 $\frac{\tau^-}{2}$、$\frac{\tau^+}{2}$、$\frac{\tau_3}{2}$；B 是 $U_Y(1)$ 群的规范场，相应的生成元是 Y。

总之，$SU(5)$中的 24 个规范场 $A_b^a(a,\ b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$，12 个 $A_\beta^\alpha(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$ 和 $A_s^r(r,\ s=4,\ 5)$ 是子群 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$的规范场 $G_\beta^\alpha(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$、$W^+$、$W^-$、$W^3$、$B$；12 个 A_α^r、$A_r^\alpha(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ r=4,5)$是新的、在 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$中没有的规范场 X_i、Y_i、$\bar{X}_i$、$\bar{Y}_i(i=1,\ 2,\ 3)$。它们的性质、特点有待阐明。

SU(5)自由规范场的拉格朗日函数密度为

$$\mathscr{L}_g=-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}=-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^a_b(F^{\mu\nu})^b_a,$$

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu+gf^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu,$$

$$(F_{\mu\nu})^a_b=\partial_\mu(A_\nu)^a_b-\partial_\nu(A_\mu)^a_b-\frac{ig}{\sqrt{2}}[(A_\mu)^a_c(A_\nu)^c_b-(A_\nu)^a_c(A_\mu)^c_b]。$$

(10–14)

§2. 费米场的表示

就目前的认识来说，基本的费米子有三代：u、d 夸克和电子 e 及其中微子 ν_e，为第一代；c、s 夸克和 μ 介子及其中微子 ν_μ，为第二代；b、t 夸克和 τ 介子及其中微子 ν_τ，为第三代。每种夸克，都有三种颜色。每种夸克和轻子，都有左手态和右手态。每种中微子都只有左手态。这样，每一代中，都有十五种费米子。如果中微子有质量，就也有右手态，每一代中就将有十六种费米子。用符号表示出来，就是：u^1_L、u^2_L、u^3_L、d^1_L、d^2_L、d^3_L、e^-_L、ν_{eL}，u^1_R、u^2_R、u^3_R、d^1_R、d^2_R、d^3_R、e^-_R；c^1_L、c^2_L、c^3_L、s^1_L、s^2_L、s^3_L、μ_L、$\nu_{\mu L}$，c^1_R、c^2_R、c^3_R、s^1_R、s^2_R、s^3_R、μ_R；b^1_L、b^2_L、b^3_L、t^1_L、t^2_L、t^3_L、τ_L、$\nu_{\tau L}$，b^1_R、b^2_R、b^3_R、t^1_R、t^2_R、t^3_R、τ_R。三代有类似的性质，因而我们可以只论述第一代，把所得结果推及第二代和第三代。

右(左)手的电荷共轭态，和左(右)手态是等价的。而且，它们的波函数间存在关系

$$\psi^c_R=c\bar{\psi}^T_L,\ \psi^c_L=c\bar{\psi}^T_R。\qquad(10\text{–}15)$$

c 是电荷共轭变换算符，在标准表象中常取 $c=i\gamma_2\gamma_4$。所以，在理论讨论中，人们有时用右(左)手的电荷共轭态来代替左(右)手态。

具体表示 一代十五个费米子应该填充 SU(5) 的什么表示呢？SU(5)的基本表示是 5 维表示，只能填充五个粒子。由于电荷算符(10–8)式的要求，我们令

$$\mathbf{5}^*:\ \psi_{La}=\begin{vmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{vmatrix}_L, \quad \mathbf{5}:\ (\psi_R^c)^a=c\bar{\psi}_{La}^T=\begin{vmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^+ \\ -\nu_e^c \end{vmatrix}_R 。 \tag{10-16}$$

这是一种表示的两种形式，在具体应用中，可以任选一种。把(10-8)式和(10-16)式代入

$$[Q,\ \psi]=-q\psi \tag{10-17}$$

就可以证实，(10-16)式的填充是允许的。例如

$$[Q,\ \psi]_1=Q_1^a\psi_a=Q_1^1\psi_1=-q_1\psi_1,$$

$$\psi_{L1}=d_1^c,\ \ q_1=-Q_1^1=-\left(-\frac{1}{3}\right)=+\frac{1}{3}。$$

还有十个费米子，不能再填入两个五重态。但可以填入一个十重态。由(10-8)式和(10-17)式的要求，可以写成

$$\mathbf{10}:\ \psi_L^{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{vmatrix}_L 。 \tag{10-18}$$

实际上，共轭态 $\mathbf{5}^*$ 用(10-8)式的 Q，则非共轭态 **10** 就该用 $-Q$，由(10-17)式就可以导出

$$[Q,\ \psi]^{ab}=Q_c^a\psi^{cb}-\psi^{ca}Q_c^b=(Q_a^a+Q_b^b)\psi^{ab}=q\psi^{ab},$$

$$q^{ab}=Q_a^a+Q_b^b。$$

这和(10-18)式中的电荷数是一致的。

子群表示　在 SU(5) 中的 $\mathbf{5}^*$ 表示 $\psi_{La}(a=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$，可以分解为：$\psi_{L\alpha}(\alpha=1,\ 2,\ 3)$ 和 $\psi_{Lr}(r=4,\ 5)$。$\psi_{La}(\alpha=1,\ 2,\ 3)$ 是 $SU_c(3)$ 的 $\mathbf{3}^*$ 表示，是 SU(2) 的单态，其 $U_Y(1)$ 的 $Y=\frac{1}{3}$。$\psi_{Lr}(r=$

4, 5)是 $SU_c(3)$ 的单态, 是 SU(2) 的 $\mathbf{2}^*$ 表示, 其 $u_Y(1)$ 的

$$Y=-\frac{1}{2}。$$

ψ_{La}、ψ_{Lr} 在 $SU_c(3)$、SU(2) 中的变换性质, 从它们的角标就可以直接看出来。至于它们在 $U_Y(1)$ 中的本征值, 由公式

$$[Y,\ \psi]=-y\psi$$

可以计算。实际上

$$[Y,\ \psi]_a=Y_a^b\psi_b=-y\psi_a,$$

$$y_a=-Y_a^a,$$

$$y_a=-\left(-\frac{1}{3}\right),\quad y_r=-\left(+\frac{1}{2}\right)。$$

再者, 从

$$Y=Q-\frac{\tau_3}{2},$$

$$y_a=-Y_\alpha^\alpha=-Q_\alpha^\alpha=\frac{1}{3},\quad y_r=-Q_r^r+\frac{\tau_3}{2}=-\frac{1}{2},$$

也得到同样结果。

上述的分解, 可以用符号表示为

$$\mathbf{5}^*=\left(\mathbf{3}^*,\ \mathbf{1},\ \frac{1}{3}\right)+\left(\mathbf{1},\ \mathbf{2}^*,\ -\frac{1}{2}\right),\qquad(10\text{–}19)$$

$$\psi_{La}\qquad\psi_{La}\qquad\qquad\psi_{Lr}。$$

括号( )中的第一个数字指 $SU_c(3)$ 表示, 第二个数字指 SU(2) 表示, 第三个数字指 $U_Y(1)$ 的 Y 值。

由于 $l_L^r=(\nu_e,\ e^-)_L^T$, 如第二章所述, 是 SU(2) 的 **2** 表示, 且 $\varepsilon_{45}=-\varepsilon_{54}=1$, 因而 $\psi_{Lr}=\varepsilon_{rs}l_L^s=(e^-,\ -\nu_e)_L^T$ 是 $\mathbf{2}^*$ 表示。这正是 (10–16)式中 ν_e 前出现负号的原因。

在 SU(5) 中的 **10** 表示 $\psi_L^{ab}(a、b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$, 可以分解为: $\psi_L^{\alpha\beta}(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$, $\psi_L^{\alpha r}(\alpha=1,\ 2,\ 3;\ r=4,\ 5)$, ψ_L^{45}。

$$\psi_L^{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u_\gamma^e,$$

是 $SU_c(3)$ 的 $\mathbf{3}^*$ 表示, 是 SU(2) 单态, 其 $U_Y(1)$ 的

$$Y=-\frac{2}{3}。$$

(10–18)式中 ω_r 前的正负号，也由此确定。ψ_L^{ar} 是 $SU_c(3)$的 **3** 表示，是 SU(2)的 **2** 表示，其 $U_Y(1)$的 $Y=\frac{1}{6}$。ψ_L^{45} 是 $SU_c(3)$ 单态，是 SU(2)单态，其 $U_Y(1)$的 $Y=1$。

$\psi_L^{\alpha\beta}$、ψ_L^{ar}、ψ_L^{45} 在 $SU_c(3)$、SU(2) 中的表示性质，是显然可见的。它们在 $U_Y(1)$中的 Y 值，把(10–8)式、(10–18)式代入

$$[-Y,\ \psi]=-y\psi$$

中，就可以得到。实际上

$$[-Y,\ \psi]^{ab}=-Y_c^a\psi^{cb}+\psi^{ca}Y_c^b=-y\psi^{ab},$$

$$y^{ab}=Y_a^a+Y_b^b,$$

$$y^{\alpha\beta}=2\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3},\quad y^{ar}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$y^{45}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1。$$

当然，从

$$Y=Q-\frac{\tau_3}{2}$$

可以得到同样的结果。

这样的分解，可以用符号表示为

$$\mathbf{10}=\left(\mathbf{3}^*,\ \mathbf{1},\ -\frac{2}{3}\right)+\left(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \frac{1}{6}\right)+(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ 1)\qquad(10\text{–}20)$$

ψ_L^{ab}　　$\psi_L^{\alpha\beta}$　　ψ_L^{ar}　　ψ_L^{45}

拉格朗日密度　按照规范理论的一般原则，费米场的、规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_f=i(\bar{\psi}_R^c)_a(\not{D}\psi_R^c)^a+i(\bar{\psi}_L)_{ab}(\not{D}\psi_L)^{ab}。\qquad(10\text{–}21)$$

其中，协变导数为

$$(D_\mu\psi_R^c)^a=[\partial_\mu\delta_b^a-ig_5(T^iA_\mu^i)_b^a](\psi_R^c)^b$$

$$=\left[\partial_\mu\delta_b^a-\frac{ig_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)_b^a\right](\psi_R^c)^b,$$

$$(D_\mu\psi_L)^{ab}=[\partial_\mu\psi_L^{ab}-ig_5(T^iA_\mu^i)_e^a\psi_L^{eb}-ig_5(T^iA_\mu^i)_e^b\psi_L^{ae}]$$

$$=\partial_\mu\psi_L^{ab}-\frac{ig_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)_e^a\psi_L^{eb}-\frac{ig_5}{\sqrt{2}}(A_\mu)_e^b\psi_L^{ae}。\quad(10\text{–}22)$$

g_5 是 SU(5) 的耦合常数，第一式中的 c 表示电荷共轭。把(10–22)式代入(10–21)式，得

$$\mathscr{L}_f=(\bar\psi_R^c)_a\left[i\partial\!\!\!/\delta_b^a+\frac{g_5}{\sqrt{2}}A\!\!\!/_b^a\right](\psi_R^c)^b$$

$$+(\bar\psi_L)_{ae}\left[i\partial\!\!\!/\delta_b^a+\frac{2g_5}{\sqrt{2}}A\!\!\!/_b^a\right]\psi_L^{be}。\qquad(10\text{–}23)$$

利用关系式

$$\psi_L^{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u_{L\gamma}^c,\ \bar\psi_R^c\gamma_\mu\chi_R^c=-\bar\chi_L\gamma_\mu\psi_L,$$

并把(10–12)式、(10–16)式、(10–18)式代入(10–23)式，得到费米场和规范场相互作用部分的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_{fg}=g_5\sum_{i=1}^{8}\left[\bar u G^i\frac{\lambda^i}{2}u+\bar dG^i\frac{\lambda^i}{2}d\right]$$

$$+g_5\sum_{i=1}^{3}\left[|\bar u\bar d|_LW_i\frac{\tau^i}{2}\begin{vmatrix}u\\d\end{vmatrix}_L+|\bar\nu_e\bar e^-|_LW_i\frac{\tau^i}{2}\begin{vmatrix}\nu_e\\e_-\end{vmatrix}_L\right]$$

$$+\sqrt{\frac{3}{5}}g_5\left[-\frac{1}{2}(\bar\nu_LB\!\!\!/\nu_L-\bar e_LB\!\!\!/e_L+\bar u_LB\!\!\!/u_L-\bar d_LB\!\!\!/d_L)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\bar uB\!\!\!/u-\frac{1}{3}\bar dB\!\!\!/d-\bar eB\!\!\!/e\right]$$

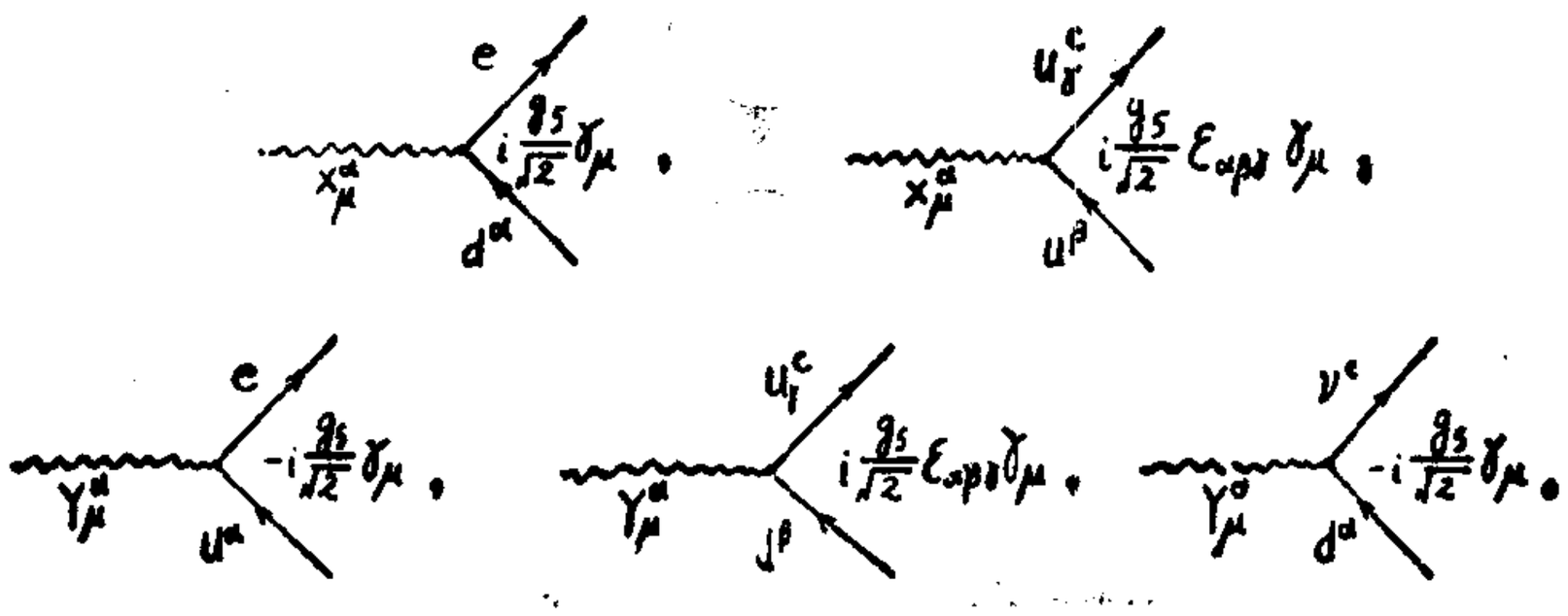
$$+\frac{g_5}{\sqrt{2}}\{\bar X_\mu^\alpha[\bar d_{R\alpha}\gamma^\mu e_R^+-\bar d_{L\alpha}\gamma^\mu e_L^+-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar u_L^{c\gamma}\gamma^\mu u_L^\beta]$$

$$+\bar Y_\mu^\alpha[-\bar d_{R\alpha}\gamma^\mu\nu_R^c-\bar u_{L\alpha}\gamma^\mu e_L^+-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar u_L^{c\gamma}\gamma^\mu d_L^\beta]+\text{h.c}\}。$$

(10–24)

显然，其中的第一项是夸克与胶子的 $SU_c(3)$ 规范相互作用，第二项是夸克、轻子与 SU(2) 规范场的相互作用，第三项是夸克、轻子与 $U_Y(1)$ 规范场的相互作用，第四项是夸克、轻子与 X 规范场的相互作用，第五项是夸克、轻子与 Y 规范场的相互作用。

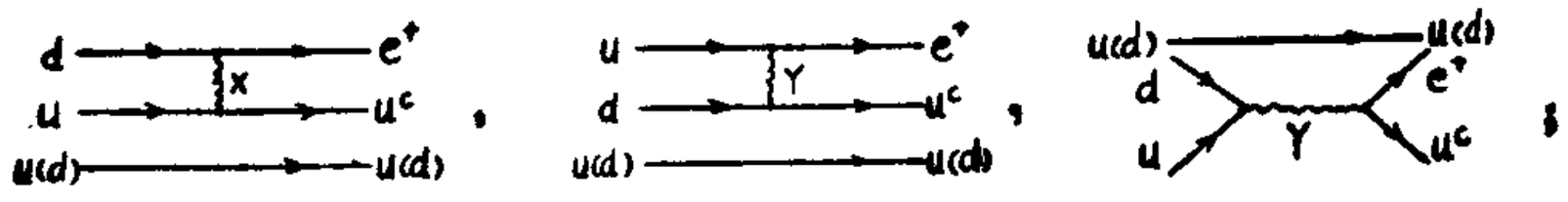
费曼规则　根据(10–24)式，利用前面论述过的方法，就可以导出费米场和 SU(5)规范场相互作用顶角的费曼规则。其中，第一项是 $SU_c(3)$相互作用，是量子色动力学的内容，已经在第七章中论述过了；第二、三项，是 $SU(2)\times U_Y(1)$相互作用，是 GWS 弱电统一理论的基础，已经在第二章中予以阐明。只有第四、五两项是新的，我们把相应的费曼规则写出如下：



(10–25)

质子衰变　上列相互作用顶角的基本特点是：规范场 X_μ^α、Y_μ^α，既可以使正夸克变为反夸克，也可以使夸克变为轻子。因而，通过 X_μ^α、Y_μ^α的中介，质子 p 和束缚中子 n 可以衰变为介子和轻子，其费曼图是

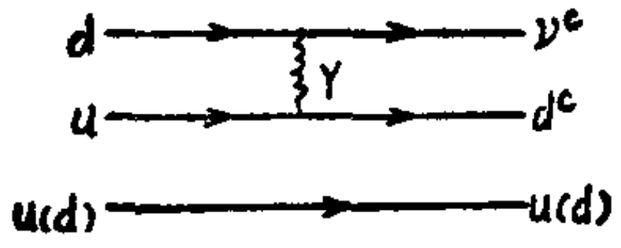
$$p\to e^+,\ M^0,\qquad n\to e^+,\ M^-,$$



$$p\to e^+,\ M^0,$$



$$p\to\bar{\nu},\ M^+,\qquad n\to\bar{\nu},\ M_0,$$



人们对质子衰变进行了一些观察，获得的数据表明：质子的寿命 $\tau_p > 10^{30}$ 年。这要求中介质子衰变的 X、Y 规范场的质量 M_X、$M_Y \geqslant 10^{14}$ Gev。M_X、M_Y 比 M_W、M_Z 大十二个数量级，差距是巨大的！

§3. Higgs 机制

规范场和费米场的拉格朗日密度(10–14)式和(10–21)式中，不包含质量项。这是规范不变的要求，这是左右不对称的结果。但是，二十四个规范粒子中，中介弱电作用的三个中间玻色子 $W^{\pm}$、Z_0 有近 100 Gev 的质量，中介质子衰变的十二个规范粒子 X^{α}、$\bar{X}^{\alpha}$、Y^{α}、$\bar{Y}^{\alpha}$($\alpha=1, 2, 3$) 有 $\gtrsim 10^{14}$ Gev 的质量。而且，费米子中，除中微子可能没有质量外，其他的夸克和轻子都是有质量的。这些有质量粒子的质量怎样产生？在大统一理论中，人们借助 Higgs 场，依靠 Higgs 机制，使规范场和费米场获得质量。Higgs 场和规范场的耦合是规范耦合，和费米场的耦合是汤川耦合。

Higgs 场　X、Y 粒子的质量 m_X、$m_Y \geqslant 10^{14}$ Gev，$W^{\pm}$、Z 的粒子的质量 m_W、$m_Z \simeq 10^2$ Gev，相差十二个数量级。这使得采用一个 Higgs 场多重态，来同时给予 X、Y、$W^{\pm}$、Z 以质量，遇到困难。在 SU(5)大统一理论中，采用两个 Higgs 多重态：一个是 24 重态 ϕ_b^a($a, b=1, 2, \cdots, 5$)，$\sum_a \phi_a^a = 0$；一个是 5 重态 H^a($a=1, 2, \cdots, 5$)。

24 重态的势能取作

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\,\mathrm{Tr}(\phi^2) + \frac{1}{4}\lambda_1(\mathrm{Tr}(\phi^2))^2 + \frac{1}{2}\lambda_2\,\mathrm{Tr}(\phi^4) - g\,\mathrm{Tr}\,\phi, \tag{10–26}$$

ϕ 是 5×5 矩阵。$\mathrm{Tr}\phi=\sum_a \phi_a^a=0$，是为了计算方便加于上式的。现在我们来求它的极小值，即真空平均值。为此，将上式对 ϕ_β^α 求导，得

$$\frac{\delta V(\phi)}{\delta\phi_\beta^\alpha}=\frac{\delta}{\delta\phi_\beta^\alpha}\Big[-\frac{\mu^2}{2}\phi_b^a\phi_a^b+\frac{\lambda_1}{4}(\phi_b^a\phi_a^b)^2$$
$$+\frac{\lambda_2}{2}\phi_b^a\phi_c^b\phi_d^c\phi_a^d-g\phi_a^a\Big]$$
$$=-\mu^2\phi_\alpha^\beta+\lambda_1(\phi_b^a\phi_a^b)\phi_\alpha^\beta+2\lambda_2\phi_a^\beta\phi_b^a\phi_\alpha^b-g\delta_\alpha^\beta。$$

极值条件是上式为零，即

$$-\mu^2\phi_\alpha^\beta+\lambda_1(\phi_b^a\phi_a^b)\phi_\alpha^\beta+2\lambda_2\phi_a^\beta\phi_b^a\phi_\alpha^b-g\delta_\alpha^\beta=0。$$

ϕ_α^β 即 Higgs 场的真空平均值。我们将它对角化，即令

$$\phi_b^a=v_b\delta_b^a,$$

则上式成为

$$-\mu^2 v_\alpha+\lambda_1\sum_a v_a^2\cdot v_\alpha+2\lambda_2 v_\alpha^3=g。\qquad(10\text{–}27)$$

它最多有三个独立的解，而且还要满足无迹的条件 $\sum_\alpha v_\alpha=0$。由于 SU(5) 包括子群 $SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$，而且我们希望通过这个 Higgs 场，把 SU(5) 破缺到 $SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$，所以令这 Higgs 场的真空平均值为

$$\langle\phi_b^a\rangle_0=\begin{vmatrix} v & & & & \\ & v & & & \\ & & v & & \\ & & & -\frac{3}{2}v & \\ & & & & -\frac{3}{2}v \end{vmatrix},\qquad(10\text{–}28)$$

把它代入(10–27)式，得

$$-\mu^2 v+\lambda_1\frac{15}{2}v^3+2\lambda_2 v^3=g,$$

$$\mu^2\frac{3}{2}v-\lambda_1\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{2}v^3-2\lambda_2\left(\frac{3}{2}v\right)^3=g。$$

由上式消去任意常数 g, 得

$$v^2=\frac{2\mu^2}{15\lambda_1+7\lambda_2}。\qquad(10\text{–}29)$$

Higgs 场 5 重态的势能取作

$$V(H)=-\frac{\mu_0^2}{2}H^+H+\frac{\lambda}{4}(H^+H)^2。\qquad(10\text{–}30)$$

H^a, $H_a^+(a=1, 2, \cdots, 5)$是互相厄米的。将上式对(H^+H)求导, 得

$$\frac{\delta V(H)}{\delta(H^+H)}=-\frac{\mu_0^2}{2}+\frac{\lambda}{2}(H^+H)。$$

在

$$\langle H^+H\rangle_0=\frac{\mu_0^2}{\lambda}$$

时取极值。我们设想: 通过 24 维表示的 Higgs 场 ϕ_b^a, 把 SU(5) 破缺到 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$; 再通过 5 维表示的 Higgs 场 H^a, 把 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$ 破缺到 $U_e(1)$。后一个破缺机制和 GWS 中的是相同的, 所以, 我们取 H^a 的真空平均值为

$$\langle H^a\rangle_0=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\\frac{v_0}{\sqrt{2}}\end{vmatrix},\quad v_0^2=\frac{2\mu_0^2}{\lambda}。\qquad(10\text{–}31)$$

在以上的论述中, 我们设想 Higgs 场的 24 维表示 ϕ_b^a 和 5 维表示 H^a 是没有混合的。如果它们之间存在相互作用, 有混合。那末它们的势能, 除(10–26)式、(10–30)式外, 还需加上如

$$V(\phi, H)=\alpha H^+H\mathrm{Tr}(\phi^2)+\beta H^+\phi^2H+\gamma H^+\phi H\qquad(10\text{–}32)$$

之类的项, 问题的讨论就比较复杂了。这里, 我们不深入讨论, 有兴趣的读者, 可参阅有关文献*。

* P. Langacker: "Grand unified theories and proton decay", Phys. Rep. V. 72, No. 4, 1981, 6, p. 268.

Higgs 场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=(D^{\mu}\phi)^{+}{}^{a}_{b}(D_{\mu}\phi)^{b}_{a}+(D^{\mu}H)^{+}_{a}(D_{\mu}H)^{a}-V(\phi)-V(H)。$$

(10–33)

$V(\phi)$就是(10–26)式所示的ϕ的势能，$V(H)$就是(10–30)所示的H的势能，在(10–33)中还可能加上(10–32)式所示的相互作用能。

$$(D_{\mu}\phi)^{b}_{a}=\partial_{\mu}\phi^{b}_{a}-\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A_{\mu})^{b}_{c}\phi^{c}_{a}+\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A_{\mu})^{c}_{a}\phi^{b}_{c},$$

$$(D^{\mu}\phi)^{+a}_{b}=\partial^{\mu}\phi^{+a}_{b}+\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A^{+\mu})^{a}_{c}\phi^{+c}_{b}-\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A^{+\mu})^{c}_{b}\phi^{+a}_{c},$$

$$(D_{\mu}H)^{a}=\partial_{\mu}H^{a}-\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A_{\mu})^{a}_{b}H^{b},$$

$$(D^{\mu}H)^{+}_{a}=\partial^{\mu}H^{+}_{a}+\frac{i}{\sqrt{2}}g_5(A^{+\mu})^{b}_{a}H^{+}_{b}。$$

(10–33)式中，$(\partial^{\mu}\phi^{+a}_{b})(\partial_{\mu}\phi^{b}_{a})+(\partial^{\mu}H^{+}_{a})(\partial_{\mu}H^{a})$是 Higgs 场的动能项。除掉动能项和势能项以外，就是 Higgs 场和规范场的相互作用项。

显然，(10–33)式表示的$\mathscr{L}$，在规范变换

$$\phi^{a}_{b}\rightarrow\phi'^{a}_{b}=u^{a}_{c}\phi^{c}_{d}u^{+d}_{b},$$

$$H^{a}\rightarrow H'^{a}=u^{a}_{b}H^{b},$$

$$A_{\mu}\rightarrow A'_{\mu}=uA_{\mu}u^{+}-\frac{1}{g}u\partial_{\mu}u^{+}$$

下，是不变的。

X、Y 的质量　(10–33)式中，有ϕ和A的相互作用项

$$\frac{g_5^2}{2}[2\,\mathrm{Tr}(A^{+}\phi^{+}A\phi)-\mathrm{Tr}(A^{+}A\phi\phi^{+})-\mathrm{Tr}(AA^{+}\phi^{+}\phi)]。$$

将ϕ场作一平移，令

$$\phi=\phi_0+\phi',$$

ϕ_0 为(10–28)式所示的真空平均值，则 ϕ' 的真空平均值为零。这时，上式就成为

$$\frac{g_5^2}{2}[2\,\mathrm{Tr}(A^+(\phi_0^+ + \phi'^+)A(\phi_0+\phi'))$$
$$-\mathrm{Tr}(A^+A(\phi_0+\phi')(\phi_0^+ + \phi'^+))$$
$$-\mathrm{Tr}(AA^+(\phi_0^+ + \phi'^+)(\phi_0+\phi'))]。 \qquad (10\text{–}34)$$

其中，不包含 ϕ' 的项

$$\frac{g_5^2}{2}[2\,\mathrm{Tr}(A^+\phi_0^+A\phi_0) - \mathrm{Tr}(A^+A\phi_0\phi_0^+) - \mathrm{Tr}(AA^+\phi_0^+\phi_0)],$$

是规范场的平方项，是规范场的质量项。如(10–28)式所示，ϕ_0 是对角矩阵，其矩阵元 $\phi_{0b}^a = v_b\delta_b^a$，上式为

$$\mathrm{Tr}M^2 = \frac{g_5^2}{2}[2(A^+)_b^a(\phi_0^+)_c^b(A)_d^c(\phi_0)_a^d - (A^+)_b^a(A)_c^b(\phi_0)_d^c(\phi_0^+)_a^d$$
$$-(A)_b^a(A^+)_c^b(\phi_0^+)_d^c(\phi_0)_a^d]$$
$$=\frac{g_5^2}{2}[2(A^+)_b^a v_a\delta^{bc}(A)_d^c v_c\delta^{da} - (A^+)_b^a(A)_c^b v_d\delta^{cd}v_c\delta^{da}$$
$$-(A)_b^a(A^+)_c^b v_d\delta^{cd}v_c\delta^{da}]$$
$$=\frac{g_5^2}{2}[2v_av_b(A^+)_b^a(A)_a^b - v_a^2(A^+)_b^a(A)_a^b - v_a^2(A)_b^a(A^+)_a^b]$$
$$=-\frac{g_5^2}{2}(v_a-v_b)^2(A^+)_b^a(A)_a^b。$$

这表明：规范场 A_a^b 的质量为

$$M_a^b = \frac{g_5}{\sqrt{2}}|v_a - v_b|,\ a,\ b=1,\ 2,\ \cdots,\ 5。$$

由(10–28)式可知，当 a、$b=1,\ 2,\ 3$ 或 $a,\ b=4,\ 5$ 时，上式都是零，只当 a(或 b)$=1,\ 2,\ 3$，b(或 a)$=4,\ 5$ 时，上式才不为零，且等于 $\frac{5}{2\sqrt{2}}vg_5$，即

$$M_r^\alpha = \frac{5}{2\sqrt{2}}vg_5,\ \alpha=1,\ 2,\ 3,\ r=4,\ 5,$$

这正是 X、Y 场的质量。由此可知

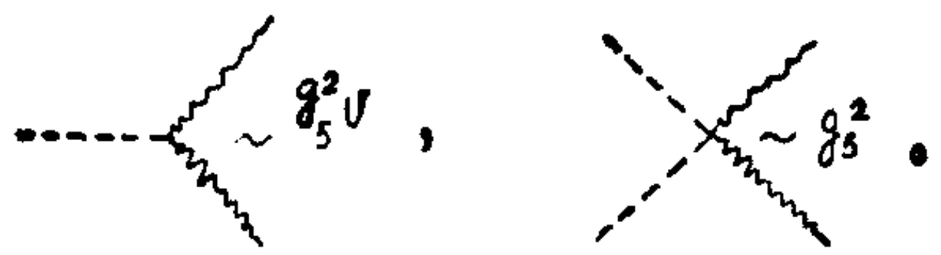
$$M_X = M_Y = \frac{5}{2\sqrt{2}} g_5 v。 \tag{10-35}$$

如前所述，M_X、$M_Y \sim 10^{14}$ Gev，设想 g_5 的量级为 1，则 $v \sim 10^{14}$ Gev，真空破缺的程度是巨大的!

(10-34)式中，含 ϕ' 的项

$$\begin{aligned}
&\frac{g_5^2}{2}[2\,\mathrm{Tr}(A^+\phi_0^+A\phi' + A^+\phi'^+A\phi_0 + A^+\phi'^+A\phi') \\
&\quad -\mathrm{Tr}(A^+A(\phi_0\phi'^+ + \phi'\phi_0^+ + \phi'\phi'^+)) \\
&\quad -\mathrm{Tr}(AA^+(\phi_0^+\phi' + \phi'^+\phi_0 + \phi'^+\phi'))] \\
&= \frac{g_5^2}{2}\{\sum_a v_a[A\phi'A^+ + A^+\phi'^+A - \phi'^+A^+A - \phi'AA^+]_a^a \\
&\quad +\mathrm{Tr}[2A^+\phi'^+A\phi - A^+A\phi'\phi'^+ - AA^+\phi'^+\phi']\} \\
&= \frac{g_5^2}{2}\Big[v(A\phi'A^+ + A^+\phi'^+A - \phi'^+A^+A - \phi'AA^+)_\alpha^\alpha \\
&\quad -\frac{3}{2}v(A\phi'A^+ + A^+\phi'^+A - \phi'^+A^+A - \phi'AA^+)_r^r \\
&\quad +\mathrm{Tr}(2A^+\phi'^+A\phi - A^+A\phi'\phi'^+ - AA^+\phi'^+\phi')\Big],
\end{aligned}$$

是 ϕ' 和 A 的三点相互作用和四点相互作用，其强度 $\sim g_5^2 v$ 和 $\sim g_5^2$。



在(10-33)式中，还有含导数的作用项

$$\frac{-i}{\sqrt{2}} g_5\,\mathrm{Tr}[(\partial^\mu\phi^+)(A_\mu\phi - \phi A_\mu) + (\phi^+A^{+\mu} - A^{+\mu}\phi^+)(\partial_\mu\phi)]。$$

其中的两点作用，由选择幺正规范可以去掉，剩下的只是三点相互作用，其强度 $\sim g_5 K_\mu$，K_μ 是 Higgs 粒子的动量。



W、Z 介子的质量 (10–33)式中的

$$(D^\mu H)^+_a (D_\mu H)^a$$

$$= \left(\partial^\mu H^+_a + \frac{i}{\sqrt{2}} g_5 (A^+_\mu)^b_a H^+_b\right)\left(\partial_\mu H^a - \frac{i}{\sqrt{2}} g_5 (A_\mu)^a_b H^b\right)$$

$$= (\partial^\mu H^+_a)(\partial_\mu H^a)$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} g_5 [(\partial^\mu H^+_a)(A_\mu)^a_b H^b - (A^+_\mu)^b_a H^+_b (\partial_\mu H^a)]$$

$$+ \frac{1}{2} g_5^2 (A^{+\mu})^b_a H^+_b (A_\mu)^a_c H^c 。$$

作平移 $$H = H_0 + H' 。$$

H_0 是 Higgs 场的真空平均值, 如(10–31)式所示,

$$H^a_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \delta_{a5} 。$$

H' 是真空平均值为零的 Higgs 场, 如取幺正规范,

$$H'_a = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \delta_{a5},$$

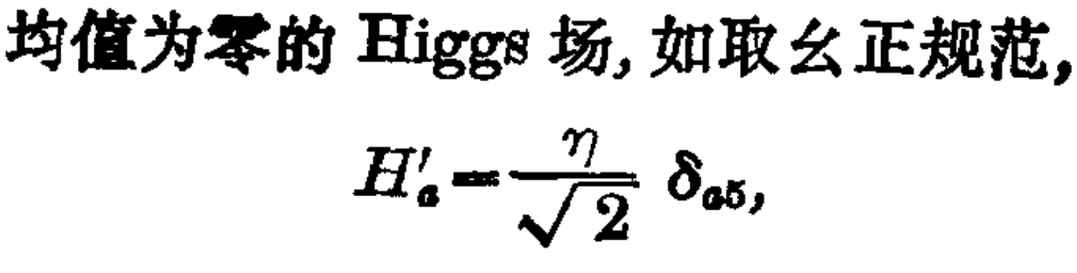
则上式成为

$$\frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{4} g_5^2 (A^+_\mu)^5_a (v_0 + \eta)(v_0 + \eta)(A^\mu)^a_5 。$$

显然, 第一项是 η 粒子的动能项, 而

$$\frac{1}{2} g_5^2 v_0 \eta (A^+_\mu)^5_a (A^\mu)^a_5 + \frac{1}{4} g_5^2 \eta^2 (A^+_\mu)^5_a (A^\mu)^a_5$$

是 Y、W、Z 粒子和 η 粒子的三点作用和四点作用



另一项 $$\frac{1}{4}g_5^2v_0^2(A_\mu^+)_\alpha^5(A^\mu)_5^\alpha$$

就是规范场的质量项。$\alpha=1,2,3$ 是 Y 粒子，$\alpha=4$ 是 W 粒子，$\alpha=5$ 是

$$Z_\mu=-\frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^3+\frac{3}{\sqrt{30}}B_\mu。\tag{10-36}$$

它们的质量相同，是

$$m_W=m_Z=m_Y=\frac{1}{2}g_5v_0。\tag{10-37}$$

由于 $m_W\sim m_Z\sim10^2$ Gev，$g_5\sim1$，因而 $v_0\sim10^2$ Gev。H 的真空破缺，比 ϕ 的低十二个数量级。Y 介子从 H 破缺获得的质量，加于从 ϕ 破缺获得的质量之上，是一个小的修正，使它和 X 的质量区别开来。

(10-36)式定义的 Z_μ，比在第二章中定义的，要差一规一化常数 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$。乘上这一常数，并与(2-54)式比较，得

$$\cos^2\theta_W=\frac{5}{8},\quad \sin^2\theta_W=\frac{3}{8}。\tag{10-38}$$

这是 SU(5)预言的、在大统一点 $M^2\sim10^{14}$ Gev，温伯格角的数值。与实验值 $\sin^2\theta_W=0.23\pm0.015$ 比较，它显得太大。

费米子的质量 在 SU(5)大统一理论中，如上一节所述，费米子属 5^* 维表示 $\psi_{L\alpha}$ 和 10 维表示 ψ_L^{ab}，

$$\psi_{L\alpha}=\begin{vmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{vmatrix}_L,\quad (\psi_R^c)^\alpha=\begin{vmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^+ \\ -\nu_e^c \end{vmatrix}_R,$$

$$\psi_L^{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{vmatrix}_L . \quad (10\text{–}39)$$

按照群表示理论，由它们的直积合成的表示分解为

$$5^* \times 5^* = 10 + 15,$$

$$5^* \times 10 = 5 + 45,$$

$$10 \times 10 = 5^* + 45^* + 50。$$

这意味着：由 ψ_{La}、ψ_L^{ab} 构成的双旋量，属于 10 维、15 维、5 维、45 维、50 维表示；这些双旋量，只能和 10 维、15 维、5 维、45 维、50 维表示的 Higgs 场，合成 SU(5)不变的汤川耦合。由此可知，24 维表示的 Higgs 场 ϕ_b^a，不能和 ψ_{La}、ψ_L^{ab} 构成的双旋量

$$\psi_{La}^T C\psi_{Lb},\ \psi_{La}^T C\psi_L^{bc},\ \psi_L^{Tab}\psi_L^{cd} \quad (10\text{–}40)$$

合成 SU(5)不变的汤川耦合；5^* 维表示的 Higgs 场 H_a 可以和 ψ_{La}、ψ_L^{ab} 的双旋量合成 SU(5)不变的汤川耦合。换句话说，24 维表示的 Higgs 场 ϕ_b^a 不能使费米子获得质量，费米子的质量要由 H_a 产生。

H^a 和(10–40)式中的两个双旋量，可以合成 SU(5)不变的汤川耦合

$$\psi_{La}^T C\psi_L^{ab}H_b^+,\ \varepsilon_{abcde}\psi_L^{Tab}C\psi_L^{cd}H^e。$$

选取幺正规范，令

$$H^a=(H_0+H')^a=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_0+\eta)\delta_5^a,$$

则费米子和 Higgs 场的汤川耦合项为

$$A(\psi_{La}^T C\psi_L^{ab}H_b^+ + \text{h.c}) = A(\bar{\psi}_{Ra}^c\psi_L^{ab}H_b^+ + \text{h.c})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}(v_0+\eta)(\bar{\psi}_{Ra}^c\psi_L^{a5} + \text{h.c})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}(v_0+\eta)\,(-\bar{d}_{1R}d^1_L-\bar{d}_{2R}d^2_L-\bar{d}_{3R}d^3_L-\bar{e}^+_Re^+_L+\text{h.c})$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}(v_0+\eta)\,(-\bar{d}d-\bar{e}^+e^+),$$

$$B\left(\frac{1}{2!2!}\,\varepsilon_{abcde}\psi^{Tab}_L C^{-1}\psi^{cd}_L H^e+\text{h.c}\right)$$

$$= \frac{B}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2!2!}\,(v_0+\eta)\,\varepsilon_{abcd5}(\psi^{Tab}_L C^{-1}\psi^{cd}_L+\text{h.c})$$

$$= \frac{B}{\sqrt{2}}(v_0+\eta)\,(-u^{cT}_L C^{-1}u_L-u^T_L C^{-1}u^c_L+\text{h.c})$$

$$= \sqrt{2}\,B(v_0+\eta)\,(-\bar{u}_Ru_L+\text{h.c})$$

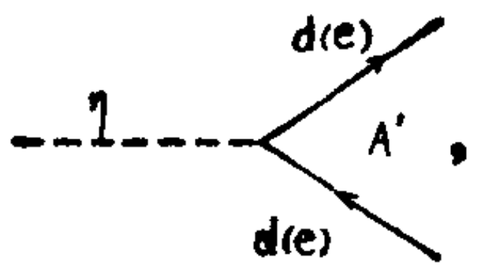
$$= \sqrt{2}\,B(v_0+\eta)\,(-\bar{u}u)\,。$$

由此可知，费米子的质量为

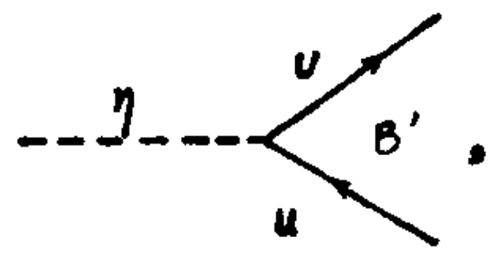
$$m_d=m_e=A'v_0,\quad m_u=B'v_0, \tag{10-41}$$

A'、B' 是两个待定的常数。所以，上式只告诉我们：费米子有质量，但不知它究竟等于多少。上式令人惊奇的结果是，d 夸克和电子 e 有同样的质量。当然，这只是在大统一点 $M\sim10^{14}$ Gev 以上的情况。

另一方面，夸克、轻子还和 Higgs 粒子 η 有三点相互作用



，



，

其强度分别是 A' 和 B'。

§4. 重整化效应

在标准模型中，规范群是 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$，有三个耦合常数 g_s、g、g'。在SU(5)大统一理论中，只有一个耦合常数 g_5。

g_s、g、g' 和 g_5 之间是怎样的关系呢？(10–38)式指出，$\sin^2\theta_W=\frac{3}{8}$，而实验值为 $\sin^2\theta_W\sim 0.23\pm 0.015$，这如何理解呢？(10–41)式表明，在一代费米子中，$m_d=m_e$；在另两代中，同样有 $m_s=m_\mu$，$m_b=m_\tau$。这和实验也是矛盾的，应该怎么解释呢？人们认为，由于重整化效应，耦合常数 g_i、温伯格角 θ_W、质量 m_i 等，都随作用能量 Q^2 而变化。由 SU(5)大统一理论导出的结果，只在 $Q^2\gtrsim M_X^2$，对称性质尚未破缺时，才是正确的。当 $Q^2\ll M_X^2$ 时，对称性破缺，SU(5)子群 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$、$U_e(1)$ 的诸常数，将独立地随 Q^2 而变化，偏离 SU(5)导出的结论，接近实验探知的情况。

作用常数 g_i 的重整化　我们用 g_i 表示 SU(i) 群中出现的相互作用常数。按照重整化群理论，它们随 Q^2 变化的规律，如(7–31)式所示，是

$$\frac{1}{g_i^2(Q^2)}-\frac{1}{g_i^2(Q_0^2)}=\frac{1}{48\pi^2}[11C_2(G)-4T(R)N_f]\ln\frac{Q^2}{Q_0^2},$$

$C_2(G)$、$T(R)$是群参数，N_f 是夸克味。对于 U(1)群，$C_2(G)=0$，$T(R)=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{1}{g_1^2(Q^2)}-\frac{1}{g_1^2(Q_0^2)}=-\frac{N_f}{24\pi^2}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}。$$

对于 SU(2)群，$C_2(G)=2$，$T(R)=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{1}{g_2^2(Q^2)}-\frac{1}{g_2^2(Q_0^2)}=\frac{1}{24\pi^2}[11-N_f]\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}。$$

对于 SU(3)群，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{1}{g_3^2(Q^2)}-\frac{1}{g_3^2(Q_0^2)}=\frac{1}{24\pi^2}\left[\frac{33}{2}-N_f\right]\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}。$$

对于 SU(5)群，$C_2(G)=5$，$T(R)=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{1}{g_5^2(Q^2)}-\frac{1}{g_5^2(Q_0^2)}=\frac{1}{24\pi^2}\left[\frac{55}{2}-N_f\right]\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}。$$

如果把 Q^2、Q_0^2 取在两个对称破缺点上，即令 $Q^2=m_X^2$，$Q_0^2=m_W^2$，那么就有

$$\frac{1}{g_1^2(M_X)}-\frac{1}{g_1^2(M_W)}=-\frac{N_f}{12\pi^2}\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{1}{g_2^2(M_X)}-\frac{1}{g_2^2(M_W)}=\frac{1}{12\pi^2}[11-N_f]\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{1}{g_3^2(M_X)}-\frac{1}{g_3^2(M_W)}=\frac{1}{12\pi^2}\left[\frac{33}{2}-N_f\right]\ln\frac{M_X}{M_W}。$$

人们认为，在大统一点 $Q^2=M_X^2$ 上，所有 g_i 都是相等的

$$g_1^2(M_X)=g_2^2(M_X)=g_3^2(M_X)=g_5^2(M_X);\qquad(10\text{–}42)$$

在大统一点后 $Q^2>M_X^2$，只剩下一个统一的作用常数；在大统一点下 $Q^2\ll M_X^2$，诸 $g_i(Q^2)$ 各自变化。所以，有

$$\frac{1}{g_5^2(M_X)}-\frac{1}{g_1^2(M_W)}=-\frac{N_f}{12\pi^2}\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{1}{g_5^2(M_X)}-\frac{1}{g_2^2(M_W)}=\frac{1}{12\pi^2}[11-N_f]\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{1}{g_5^2(M_X)}-\frac{1}{g_3^2(M_W)}=\frac{1}{12\pi^2}\left[\frac{33}{2}-N_f\right]\ln\frac{M_X}{M_W}。$$

(10–43)

电荷 e 和温伯格角 θ_W　把(10–42)式和(10–24)式比较，从(10–24)式的第一项看出，$g_3=g_s$ 是强作用常数；从(10–24)式的第二项看出，$g_2=g$ 是弱电作用的 SU(2) 常数；从第三项看出，$g'=\sqrt{\frac{3}{5}}g_1$ 是弱电作用 $U_Y(1)$ 的作用常数。总之，(10–43)式中的 g_1、g_2、g_3 和 $SU_c(3)\times SU(2)\times U_Y(1)$ 的 g_s、g、g' 之间的关系是

$$g_s=g_3,\ g=g_2,\ g'=\sqrt{\frac{3}{5}}g_1。$$

按照定义

$$e^2=\frac{g^2g'^2}{g^2+g'^2}=\frac{\frac{3}{5}\,g_1^2g_2^2}{g_2^2+\frac{3}{5}\,g_1^2},$$

$$\sin^2\theta_W=\frac{g'^2}{g^2+g'^2}=\frac{\frac{3}{5}\,g_1^2}{g_2^2+\frac{3}{5}\,g_1^2}。\qquad(10\text{–}44)$$

在大统一点，按(10–42)式为

$$e^2=\frac{3}{8}\,g_5^2,\quad \sin^2\theta_W=\frac{3}{8},$$

这正是(10–38)式的结果。在一般情况下，就由(10–44)式表示。由(10–44)式可以推知

$$g_1^2=\frac{5}{3}\,\frac{e^2}{\cos^2\theta_W},\quad g_2^2=\frac{e^2}{\sin^2\theta_W}。$$

把它们代入(10–43)式，并令

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi},\ \alpha_s=\frac{g_s^2}{4\pi},\quad \alpha_5=\frac{g_5^2}{4\pi},$$

就得到

$$\frac{\frac{3}{5}\cos^2\theta_W(M_W)}{\alpha(M_W)}=\frac{1}{\alpha_5(M_X)}+\frac{N_f}{3\pi}\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{\sin^2\theta_W(M_W)}{\alpha(M_W)}=\frac{1}{\alpha_5(M_X)}+\frac{N_f-11}{3\pi}\ln\frac{M_X}{M_W},$$

$$\frac{1}{\alpha_s(M_W)}=\frac{1}{\alpha_5(M_X)}+\frac{N_f-\frac{33}{2}}{3\pi}\ln\frac{M_X}{M_W}。\qquad(10\text{–}45)$$

(10–45)式中，$\alpha(M_W)$、$\alpha_s(M_W)$可以由实验测定，三个方程确定着三个未知参数$\sin^2\theta_W$、M_X、$\alpha_5(M_X)$。其中

$$\sin^2\theta_W(M_W)=\frac{1}{6}+\frac{5}{9}\,\frac{\alpha(M_W)}{\alpha_s(M_W)}。$$

取 $\alpha(M_W)=\frac{1}{128.5}$, $\alpha_s(M_W)\simeq 0.18$, 则

$$\sin^2\theta_W(M_W)\simeq 0.20。$$

大统一点 由(10–45)式, 还可以求得

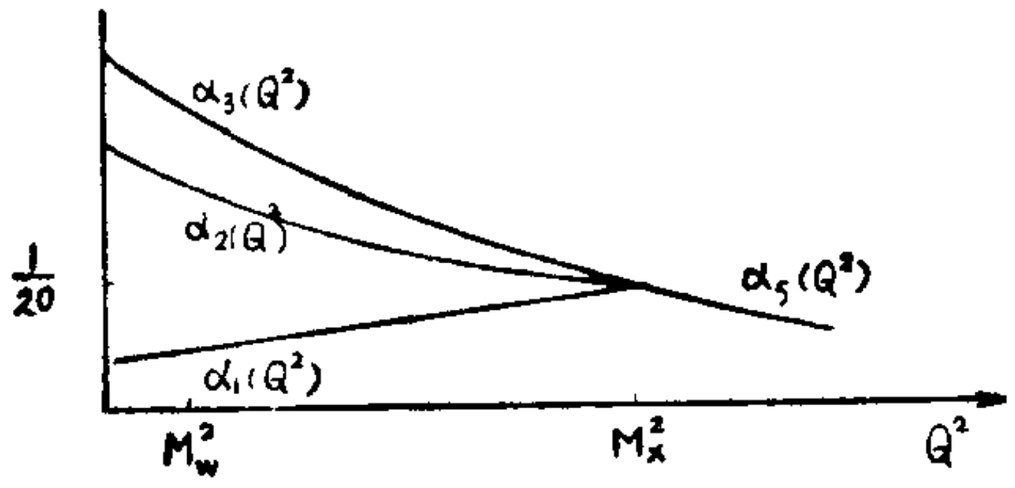
$$\ln\frac{M_X}{M_W}=\frac{\pi}{11}\left[\frac{1}{\alpha(M_W)}-\frac{8}{3\alpha_s(M_W)}\right],$$

$$\frac{1}{\alpha_5(M_X)}=\frac{1}{3\alpha(M_W)}\left[\frac{3}{2}-\frac{N_f}{11}\right]+\frac{1}{9\alpha_s(M_W)}\left[\frac{8N_f}{11}-3\right]。$$

把 $\alpha(M_W)\simeq\frac{1}{128.5}$, $\alpha_s(M_W)\simeq 0.18$, $N_f=6$ 代入, 得

$$M_X\simeq 10^{14}\,\mathrm{Gev},\ \alpha_5(M_X)\simeq\frac{1}{20}。$$

这结果和质子寿命要求的是基本相符的。 据此, 人们可以定性地画出诸 $\alpha_i(Q^2)$ 随 Q^2 变化的关系, 为



重整化质量 前面说到, 在大统一点以上 $Q^2\geqslant M_X^2$, d 夸克质量和电子质量相等 $m_d=m_e$, 同样 $m_s=m_\mu$, $m_b=m_\tau$。在大统一点以下 $Q^2<M_X^2$, 这些等式将不存在。它们之间应该有怎样的关系呢?

在第 7 章中, 计算费米子的传播子, 即费米子自能时得知, 规范粒子给费米子以附加质量

$$\delta m=\frac{g_0^2 m_0}{16\pi^2}3C_2(R)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)。$$

如果费米子同时参与多种作用, 则多种规范粒子都将给费米子以附加质量, 费米子的附加质量就是

$$\delta m=\sum_i \delta m_i=\sum_i \frac{g_{i0}^2 m_0}{16\pi^2}3C_2(R_i)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right),$$

g_{i0} 是第 i 种规范场的裸作用常数, $C_2(R_i)$ 是第 i 种规范群的群参数, δm_i 是第 i 种规范场给以费米子的附加质量。这时, 费米子的重整化质量为

$$m=m_0+\delta m=m_0\left[1+\sum_i \frac{3g_{i0}^2}{16\pi^2}C_2(R_i)\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right],$$

质量重整化常数为

$$Z_m=\frac{m_0}{m}=\left[1-\sum_i \frac{3g_{i0}^2}{16\pi^2}C_2(R_i)\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right],$$

而
$$\frac{dm}{dt}=\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}=-m\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\ln\mu}=-\sum_i\frac{3g_i^2}{8\pi^2}C_2(R_i)m,$$

$$\frac{dm}{m}=-\sum_i\frac{3g_i^2}{8\pi^2}C_2(R_i)dt。$$

另一方面, 按(7-31)式, 有

$$\frac{dg_i}{dt}=-\frac{g_i^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f\right]。$$

把它代入上式, 得

$$\frac{dm}{m}=\sum_i\frac{6C_2(R_i)}{\frac{11}{3}C_2(G_i)-\frac{4}{3}T(R_i)N_f}\frac{dg_i}{g_i},$$

积分之, 得

$$\ln\frac{m(Q^2)}{m(Q_0^2)}=\sum_i\frac{6C_2(R_i)}{\frac{11}{3}C_2(G_i)-\frac{4}{3}T(R_i)N_f}\ln\frac{g_i(Q^2)}{g_i(Q_0^2)}。$$

这就是在单圈近似时, 费米子质量在多种规范场影响下的变化规律。

令 $Q^2=M_X^2$, $Q_0^2=M_r^2$, M_r 是 $\Upsilon(b\bar{b})$ 粒子的质量 ~9.5Gev。

则

$$\ln\frac{m(M_X)}{m(M_r)}=\sum_i\frac{3C_2(R_i)}{\frac{11}{3}C_2(G_i)-\frac{4}{3}T(R_i)N_f}\ln\frac{g_i^2(M_X)}{g_i^2(M_r)}。$$

对于 τ 介子，它只参与电磁作用和弱作用

$$\ln\frac{m_\tau(M_X)}{m_\tau(M_r)}=\sum_{i=1,2}\frac{3C_2(R_i)}{\frac{11}{3}C_2(G_i)-\frac{4}{3}T(R_i)N_f}\ln\frac{g_i^2(M_X)}{g_i^2(M_r)},$$

对于 b 夸克，它既参与电磁作用和弱作用，也参与强作用

$$\ln\frac{m_b(M_X)}{m_b(M_r)}=\sum_{i=1,2,3}\frac{3C_2(R_i)}{\frac{11}{3}C_2(G_i)-\frac{4}{3}T(R_i)N_f}\ln\frac{g_i^2(M_X)}{g_i^2(M_r)}。$$

$i=1$ 表 $U_Y(1)$ 群，$i=2$ 表 $SU(2)$ 群，$i=3$ 表 $SU_c(3)$ 群。将两式相减，并考虑到 $m_\tau(M_X)=m_n(M_X)$，得

$$\ln\frac{m_b(M_r)}{m_\tau(M_r)}=-\frac{3C_2(R)}{\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)N_f}\ln\frac{g_i^2(M_X)}{g_i^2(M_r)}。$$

$c_2(G)=3$，$T(R)=\frac{1}{2}$，$C_2(R)=\frac{4}{3}$，上式为

$$\frac{m_b(M_r)}{m_\tau(M_r)}=\left[\frac{\alpha_s(M_X)}{\alpha_s(M_r)}\right]^{-\frac{12}{33-2N_f}},$$

令 $N_f=6$，$\alpha_s(M_X)\simeq\frac{1}{20}$，$\alpha_s(M_r)\simeq0.2$，$m_\tau=1.8\,\mathrm{Gev}$。则 $m_b\simeq5\,\mathrm{Gev}$。这结果是很好的，和 b 夸克的组分质量相近。

[General Information]
书名=规范场论
作者=胡瑶光
页数=405
SS号=10071493
出版日期=1984年03月第1版

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
前言
第一章　场的对称性
　　１．　时空连续变换下的不变性
　　２．　整体规范不变性
　　３．　定域规范不变性
　　４．　Ｈｉｇｇｓ场的破缺对称性
　　５．　Ｈｉｇｇｓ机制
第二章　ＧＷＳ弱电统一规范理论
　　１．　费米子的场和流
　　２．　轻子弱电统一规范理论
　　３．　夸克弱电统一规范理论
　　４．　轻子弱过程
　　５．　强子弱过程
第三章　生成泛函的路径积分表示
　　１．　转换矩阵元和算符矩阵元
　　２．　格林函数及其生成泛函
　　３．　场的格林函数及其生成泛函
　　４．　连通格林函数及其生成泛函
　　５．　正规顶角及其生成泛函
　　６．　φ４（ｘ）场的生成泛函
第四章　规范场的量子化
　　１．　正则坐标和动量
　　２．　库伦规范下的生成泛函
　　３．　法捷叶夫－波波夫理论
　　４．　鬼粒子和规范固定项
　　５．　规范场的费曼规则
　　６．　ＧＷＳ场的量子化和Ｒ１规范
第五章　生成泛函的不变性和恒等式
　　１．　函数空间的平移变换和正则关系
　　２．　场、源分离变换和费曼规则
　　３．　一般变换下的不变性和恒等式
　　４．　Ｂ、Ｒ、Ｓ变换和Ｗ、Ｔ恒等式
第六章　规范理论的重整化
　　１．　重整化的一般概念
　　２．　重整化常数的计算
　　３．　规范场传播子纵分量不需重整
　　４．　重整化方程
　　５．　规范理论的重整化
第七章　ＱＯＤ和重整化群方程
　　１．　颜色自由度
　　２．　量子色动力学
　　３．　重整化群方程

４．　随动量变化的参数
５．　深度非弹散射的结构函数
６．　渐近自由的夸克模型
第八章　算符乘积展开及其应用
１．　自由场算符乘积展开
２．　再论结构函数
３．　相互作用场算符乘积的展开
４．　展开系数的重整化群方程
５．　展开算符及其反常量纲
第九章　Ａ－Ｐ方程和分布、碎裂、演化函数
１．　分布函数及其Ａ－Ｐ方程
２．　演化函数
３．　ｅ？ｅ－湮灭为强子的初级近似
４．　ｅ？ｅ－湮灭为强子的重整化效应
５．　碎裂函数及其Ａ－Ｐ方程
第十章　ＳＵ（５）大统一理论
１．　ＳＵ（５）规范群和规范场
２．　费米场的表示
３．　Ｈｉｇｇｓ机制
４．　重整化效应
附录页