非线性科学丛书

量子力学中的杨-巴克斯特方程

葛墨林 薛 康 编著



上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

量子力学中的杨-巴克斯特方程

葛墨林　薛　康　编著
蒲富恪　陈式刚　审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是"非线性科学丛书"中的一种，从基本量子力学的观点出发，介绍杨振宁-巴克斯特方程以及量子群的基本概念。全书计分四章，即：RTT关系与杨-巴克斯特方程，杨-巴克斯特方程与二体散射的因式化，Yangian对称性，量子代数的物理意义。本书可供大学物理系、数学系教师、研究生和高年级学生阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

非线性科学丛书

量子力学中的杨-巴克斯特方程

葛墨林　薛　康　编著

蒲富恪　陈式刚　审阅

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号　邮政编码：200233）

各地新华书店经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张：6.875　字数：175 000

1998年12月第1版　1998年11月第1次印刷

印数：1—3200

ISBN 7-5428-1817-3/O·206　　定价：（精装本）14.10元

Advanced Series in Nonlinear Science

Yang-Baxter Equations in Quantum Mechanics

Ge Molin
Nankai Institute of Mathematics,
Tianjin, 300071, China
Center for Advanced Study, TsingHua University,
Beijing, 100084, China

Xue Kang
Department of Physics,
Northeast Teaching University,
Changchun Jilin, 130024, China
Nankai Institute of Mathematics,
Tianjin, 300071, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1998

非线性科学丛书编辑委员会

主　编：郝柏林

副主编：郑伟谋　吴智仁

编　委：（按姓氏笔画为序）

丁邵江　文志英　朱照宣

刘式达　刘寄星　孙义燧

杨清建　李邦河　张洪钧

张景中　陈式刚　周作领

赵凯华　胡　岗　顾　雁

倪皖荪　徐京华　郭柏灵

陶瑞宝　谢惠民　蒲富恪

霍裕平　魏荣爵

非线性科学丛书

出 版 说 明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法. “数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域. 这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域. 其中.非线性科学占有极其重要的位置. 这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升.

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题. 每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧. 诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型. 不过，这些都曾是稀如凤毛鳞角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系.

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化. 一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质. 这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法. 反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质. 到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系.

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在"不可积"的极端,对KAM定理条件的"反面文章",揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用. "非线性"一词曾经是数学中用以区别于"线性"问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步. 于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人员,以集体力量撰写一套"非线性科学丛书"的想法. 在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现.

这套"非线性科学丛书"不是高级科普,也不是大块专著. 它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材. 非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛. 在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者. 从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯.

"非线性科学丛书"的成功,取决于读者和作者的支持. 我们衷心欢迎批评和建议.

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前　言

杨－巴克斯特方程 (YBE) 及其相关理论，来源于低维严格可解量子可积模型与统计模型．在此基础上，量子反散射方法与量子群的研究取得了巨大进展．在有关这些模型的文章与书刊中，许多成果都有详细的介绍．但从完全物理的角度介绍 YBE 及量子群的书刊很少，原因是经过相当长的数学物理研究，再返回物理本源的探求不但是相当费力的事，而且颇不容易做到．本书的目的主要是从基本量子力学的观点出发，介绍 YBE 及量子群 (包括 Yangian 与量子代数) 的基本概念．我们并不追求数学的完整与严格，而以通常熟悉的量子算符的性质为基础，介绍如何向非线性理论推广，并通过具体例子来阐明问题的本质．

由于从完全物理的角度诠释 YBE 与量子群是新的研究课题，因此本书中相当一部分的内容是专为这本书所做的研究成果．另外，为了突出重点，所引用的文献不求其全，但求与本书内容相衔接．

在本书编写过程中，得到郝柏林、蒲富恪、陈式刚、张礼等教授的指导与帮助．他们逐节阅读本书，并提出了许多修改意见，指出了若干问题，对作者有很大帮助．对他们严格的科学态度以及在本书编写、修改过程中的许许多多帮助，在此表示衷心的感谢．本书中一部分内容及观点是我们的初步研究成果，尚须进一步完善与发展．如有不妥之处，希读者不吝指正，以便不断改正、完善．

Abstract

This is an introductory book on the Yang-Baxter equation and applications in Physics. The main topics include: Yang-Baxter equation and its physical meaning, RTT relation , Yangian and its physical implications , quantum Algebras and examples in Physics.

We emphasize how to understand the Yang-Baxter equation and related topicsthrough Physical examples, rather than the mathematical computations. The spin model, Haldane-Shastry model, and some quantum mechanical models are used to explain the essence of the Yang-Baxter equation.

目　录

非线性科学丛书出版说明

前　言

第 1 章　RTT 关系与杨 - 巴克斯特方程.....1

§1　正则对易关系的矩阵直积形式 2

§2　RTT 关系与 YBE.....19

§2.1　RTT 关系与 YBE.....19

§2.2　守恒量集合 24

§2.3　简单的例子：托达格子 26

§3　R- 矩阵与哈密顿量 29

§4　求解 RTT 关系举例：哥尔雅切夫 - 恰波列金陀螺 ...43

第 2 章　杨 - 巴克斯特方程与三体散射的因式化.....50

§5　一维散射矩阵 50

§6　$\check{R}(u)$- 矩阵的一些性质 56

§7　YBE 最简单的解举例 60

§7.1　简单的有理解 60

§7.2　简单的三角解 61

§8　$R(u)$- 矩阵与代数关系、物理说明 67

§8.1　自旋跃迁算子与转移矩阵的关系 67

§8.2　简单的量子代数 74

§8.3　简单 YBE 解的一些性质 77

§8.4　杨 - 巴克斯特化方法 85

§8.5　与概率演化方程的联系 88

第 3 章　Yangian 对称性.....96

§9　RTT 关系的展开式与 Yangian.....98

§10 量子行列式、余乘法 110
§10.1 量子行列式 110
§10.2 余乘法的含义 114
§11 Yangian 的量子力学实现 119
§11.1 三维谐振子 119
§11.2 自旋 - 轨道耦合实现 Yangian 的例子 125
§11.3 Yangian 与磁单极的兼容性 132
§12 Yangian 在一维格点模型的实现 134
§12.1 $\vec{J}$ 的基本实现 135
§12.2 自旋 1/2 长程链与 Yangian 对称性 137
§12.3 一维哈伯模型的 Yangian 对称性 142
§13 氢原子中的 Yangian 对称性 148
§14 Yangian 的长程实现与 C-S 模型 153
第 4 章 量子代数的物理意义 168
§15 相干态平移算子与量子代数 168
§16 霍夫斯塔特模型与量子代数 172
§17 位相量子化与量子代数的玻色表示 175
§18 RTT 关系与量子代数 182
§19 高能 QCD 的可积模型 189
参考文献 197

Content

Preface

Chapter 1 RTT Relations and Yang-Baxter Equations (YBE) 1

§ 1 Matrix-product form of canonical commutation relations 2

§ 2 RTT relations and YBE 19

§ 2.1 RTT relations and YBE 19

§ 2.2 Family of conserved quantities 24

§ 2.3 The simplest example: Toda lattice 26

§ 3 R-matrix and Hamltonian 29

§ 4 Example solving RTT: Goryachev-Chaplygin top 43

Chapter 2 Yang-Baxter Equations and factorization of three-body scattering 50

§ 5 One-dimensional scattering matrices 50

§ 6 Properties of $\check{R}(u)$-matrix 56

§ 7 Examples of simple solutions of YBE 60

§ 7.1 Simple rational solution 60

§ 7.2 Simple trigonometric solution 61

§ 8 $K(u)$ matrix and algebraic relations, physical interpretation 67

§ 8.1 Spin-transition operator and transfer matrix 67

§ 8.2 Simple quautum algebras 74

§ 8.3 Properties of simple solutions of YBE 77

§ 8.4 Yang-Baxterization 85

§ 8.5 Connectivn wiih probability-evolusion equation ... 88

Chapter 3 Yangian symmetry **96**
§ 9 Expansion of RTT relation and Yangian 98
§ 10 Quantum determinant, Co-product 110
§ 10.1 Quantum determinant 110
§ 10.2 Implication of co-product 114
§ 11 Quamtum mechanical realization of Yangian 119
§ 11.1 Three-dimensional oscillator 119
§ 11.2 Spin-orbit coupling and Yangian 125
§ 11.3 Co-existence befween Yangian and monopole ... 132
§ 12 Chain realizations of Yangian 134
§ 12.1 Basic realization of $\vec{J}$ 135
§ 12.2 Long-ranged spin-1/2 chain and Yangian symmetry 137
§ 12.3 Yangian symmetry of one-dimensionae Hubbard model 142
§ 13 Yangian symmetry for Hydrogen atom 148
§ 14 Long-ranged realizations of Yangian and C–S model 153
Chapter 4 Physical meaning of Quantum Algebras **168**
§ 15 Translation operators for coherent state and Quantum Algebra 168
§ 16 Hofstadter model and Quantum Algebra 172
§ 17 Phase quantization and boson representation of Quantum Algebra 175
§ 18 RTT relation and Quantum Algebra 182
§ 19 High energy QCD and integrability 189
References **197**

第 1 章

RTT 关系与杨 - 巴克斯特方程

杨振宁 - 巴克斯特方程 (简称 YBE) 有着丰富的物理背景. 如果按着历史的发展去介绍 YBE, 往往需要相当长的篇幅, 并且, 这些发展的本身常常涉及许多专著, 原因在于 YBE 与解决量子多体问题和统计模型的本征值问题有着密切联系. 我们会解量子力学中的许多单体问题. 当存在非线性相互作用时, 常可以使用微扰方法来求出修正部分. 然而, 当相互作用比较强时, 不可避免地要寻求问题的严格解. 这不但是求解的技术问题, 更重要的是由于严格解的性质与微扰论各阶叠加的结果常常有本质的不同. 对此, 在经典物理中早已了解清楚, 许多拓扑性孤子解就提供了这方面的例证 [1]~[3]. 这里值得强调的是, 长期以来由于人们没有合适的、系统的办法去求解非线性问题, 只好用处理线性问题的方法去近似求解非线性问题, 因而形成了某些传统的观念, 它们有些是近似合理的, 有些则是不正确的. 以 YBE 为中心的有关理论, 是比较系统的处理某些非线性模型的成功理论.

最早引入有实在物理意义的 YBE 是杨振宁 [4]. 他在处理具有 δ- 函数作用势的一维问题时, 为保证多体散射的自恰条件, 得到了 YBE 的原始形式. 在这个模型中, 哈密顿量为

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i<j}^{N} \delta(x_i - x_j),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 为 N 个粒子的坐标, 排在一条线上. 系统的波

函数为 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$, 满足

$$H\psi = E\psi,$$

其中 E 为能量. 这里, ψ 只代表空间波函数, 对费米子, 还应乘以自旋波函数 $\chi(S_1, S_2, \cdots, S_N)$, 其中 S_i 为第 i 个粒子的自旋. 我们知道, 整个费米子体系中, 两个粒子交换后应当是全反对称的, 因而, 在置换群作用下, 如果 ψ 是对称的, χ 必为反对称; 反之, 如果 ψ 是反对称的, χ 必为对称. 根据置换群表示理论, 推广这个概念, 杨振宁建立了该多粒子体系可解的条件, 从而严格地求解了该问题. 尔后, 澳大利亚学者巴克斯特 (R.J.Baxter) 在研究统计模型时, 为了对角化他所定义的转移矩阵, 从不同的角度独立地得到了类似的关系 [5]. 当时这两种形式并未很好地结合起来. 以后, 以法捷也夫 (L.D.Faddeev) 为首的前苏联列宁格勒学派进一步发展了量子反散射方法 [6]~[8], 发现杨振宁与巴克斯特引入的这类关系可以写成一般形式, 这对一大类低维量子可积模型有巨大用途, 定名为杨 – 巴克斯特方程 (简称 YBE), 沿用至今. 有关这方面的发展过程, 可参阅有关文献 [6]~[10].

本书介绍 YBE 及相关问题. 书中尽量用物理直观的方式迅速进入问题的实质, 不追求数学上的严谨性, 而注重物理实用. 读者只需知道一般李代数知识及算符不可对易, 以及矩阵的有关运算, 就足以了解本书的内容了.

§1 正则对易关系的矩阵直积形式

为了避免引出 YBE 前的冗长的准备知识, 首先从量子力学中对易关系出发. 量子力学中有两个最基本的东西, 一是哈密顿量, 二是基本算符间的对易关系 (当然还有海森堡方程). 例如在初等量子力学中, 基本对易关系是坐标与动量间的对易关系. 它们与给

定的哈密顿量一起，决定了系统的动力学性质. 另外，如果系统的所有运动积分 (守恒量) 能够给出，我们就说它是完全可积的. 显然，完全可积性给系统一种限制. 最理想的情况是构造一个理论框架，从它出发，原则上可以同时提供哈密顿量与对易关系. 有了这些原则表达形式，就可以进一步用物理算符实现这些关系，从而可以将哈密顿量具体化. 为此，我们首先从对易关系出发，选择一些特例，建立起 RTT 关系. 在讨论 RTT 关系的普遍性质以后，再举例说明如何得到哈密顿量，以后还要不断回到这点.

在量子力学中，我们非常熟悉一维坐标 x 与相应动量中的海森堡对易关系. 为了方便，以下取 $\hbar = c = 1$, 有

$$[p, x] = -i, \tag{1.1}$$

其中 $p = -i\dfrac{\partial}{\partial x}$. 另一组基本对易关系是角动量类型的对易关系:

$$[L_\alpha, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma. \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

上式中，L 为角动量，相重指标代表求和，$\epsilon_{123} = -\epsilon_{213} = \epsilon_{312} = \cdots = 1$, 即 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 中任意两个指标对调后，要反符号，而按 1,2,3 顺序排列时为 1. 观察 (1.1) 与 (1.2), 它们在形式上相差甚大. 同时，量子力学及相关分支中还有更复杂的对易关系. 可否给出一个概括性更强的对易关系形式，从而有利于从更一般角度讨论算子间的对易关系呢？首先，从最简单的对易关系 (1.1) 与 (1.2) 出发，可以建立一个更广泛的形式，它概括了许多已知的对易关系. 然后，我们发现，这种形式原则上也提供了哈密顿量及其他守恒量的形式，从而建立了整个动力学系统.

我们知道，对易关系的核心，在于算符的先后次序不能随便颠倒. 如果注意到次序的重要性，并将诸如动量、角动量等多种算符放在一起考虑 (角动量自己就有三个分量), 最好的办法是把这些算子排成一个矩阵. 例如，引入一个 2×2 矩阵 L, 它包含四个矩阵

元，每个元都是量子力学的算符. 为了区别两个矩阵排列的顺序，应当再引入一个参数 u, 使得 $L(u)$ 与 $L(v)$ 能有所区分. 下一步就是考虑如果所有算符间都是对易的，自然是先写 $L(u)$ 后写 $L(v)$ 与先 $L(v)$ 后 $L(u)$ 相同. 为了包含不同分量的对易关系，应取矩阵 $L(u)$ 与 $L(v)$ 的直积 $L(u)\otimes L(v)$. 由于 $L(u)$ 是 2×2 矩阵：$L(u)=\begin{pmatrix} L_{11}(u) & L_{12}(u) \\ L_{21}(u) & L_{22}(u) \end{pmatrix}$, 而它的每个元素 $L_{ab}(u)$ 是依赖于参数 u 的算子 $(a,b=1,2)$, 因此称这个 2×2 矩阵所张空间为“辅助空间”. 而每个元素 L_{ab} 则是量子力学的算子.

从矩阵运算规则可知，如果 A 与 B 均为 2×2 矩阵，它们的直积为 4×4 矩阵. 如果 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, 那么

$$A\otimes B=\begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

这时，标识 $A\otimes B$ 的矩阵元有四个指标，即行与列的指标均由两个指标表示. 为了使 4×4 矩阵中元素的组成与相应行、列指标一致，应当有

$$(A\otimes B)_{ij,kl}=A_{jk}B_{jl}. \tag{1.3}$$

例如， $A\otimes B$ 的 21,22 分量应为 a_{22} 与 b_{12} 的乘积. 当 a_{ik} 与 b_{jl} 均为算符时，必须注意在 $A\otimes B$ 中， a_{ik} 在 b_{jl} 的左边，次序不可颠倒. 显然，比较 $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 的差别，引起了对易关系.

为了简单，我们取 $L(u)$ 为如下形式：

$$L(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

其中 u 为任意参数，称为谱参数. a,b,c 与 d 皆为量子力学算子.

现在计算 $L(u)\otimes L(v)$ 与 $L(v)\otimes L(u)$, 有

$$
\begin{aligned}
&L(u)\otimes L(v)\\
&=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\otimes\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+v^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\\
&=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}+v^{-1}\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}\\
&\quad+u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix}a^2&ab&ba&b^2\\ac&ad&bc&bd\\ca&cb&da&db\\c^2&cd&dc&d^2\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

其中 u 与 v 为任意参数.

$$
\begin{aligned}
L(v)\otimes L(u)&=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}+v^{-1}\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}\\
&\quad+u^{-1}\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}+u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix}a^2&ab&ba&b^2\\ac&ad&bc&bd\\ca&cb&da&db\\c^2&cd&dc&d^2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

观察 (1.5) 与 (1.6), 可以看出 u 与 v 的重要性: 它们用最简单的方式区别了 $L(u)\otimes L(v)$ 同 $L(v)\otimes L(u)$. 但是, 由于 (1.5) 与 (1.6) 中并没有出现算符次序颠倒, 尚无法决定其对易关系. 必须引入使诸如 ab 变为 ba,ca 变为 ac, …… 的矩阵, 才能达到这一目的. 观察 (1.5) 与 (1.6), 其 4×4 矩阵形式中左上角为 a^2, 右下角为 d^2, 不涉及次序问题, 因而须引入置换算子. 在 4×4 矩阵表示中, 它有如下形式:

$$
P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{1.7}
$$

容易验证，将 P 自左方作用在 4×4 矩阵上，使其中心两行对调；而如将 P 从右方作用时，则使其中心两列对调. 现在观察，(1.5) 与 (17)、(1.6) 如何搭配，才能产生我们希望的对易关系.

定义一个 4×4 矩阵，它是由 C- 数组成的矩阵：

$$\check{R}(u-v)=I+(u-v)P, \tag{1.8}$$

其中

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

我们要证明关系式

$$\check{R}(u-v)(L(u)\otimes L(v))=(L(v)\otimes L(u))\check{R}(u-v). \tag{1.9}$$

将给出需要的对易关系.

将 (1.8) 的矩阵形式 (P 用 (1.7) 表示) 按普通矩阵乘法乘以 (1.5), 即得到 (1.9) 的左端：

$$\begin{aligned}&\check{R}(u-v)(L(u)\otimes L(v))=\\&\quad I+u^{-1}\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}+v^{-1}\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}\\&\quad+u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix}a^2&ab&ba&b^2\\ac&ad&bc&bd\\cd&cb&da&db\\c^2&cd&dc&d^2\end{pmatrix}\\&\quad+(u-v)\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}a&0&b&0\\c&0&d&0\\0&a&0&b\\0&c&0&d\end{pmatrix}\right.\end{aligned}$$

$$+v^{-1}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} + u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ cd & cb & da & db \\ ac & ad & bc & bd \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix}\Bigg). \quad (1.10)$$

注意 $(u-v)$ 的矩阵系数是将 P 从左作用在 $L(u)\otimes L(v)$ 上，将所有的矩阵的第二行与第三行互换. 但如将 P 从右端作用在 4×4 矩阵上，则将第二列与第三列互换，得

$$\begin{aligned}
&(L(v)\otimes L(u)\check{R}(u-v) = \\
&I + v^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} + u^{-1}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \\
&+ u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ ac & ad & bc & bd \\ ca & cb & da & db \\ c^2 & cd & dc & d^2 \end{pmatrix} \\
&+ (u-v)\Bigg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + v^{-1}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \\
&+u^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} + u^{-1}v^{-1}\begin{pmatrix} a^2 & ba & ab & b^2 \\ ac & bc & ad & bd \\ ca & da & cb & db \\ c^2 & dc & cd & d^2 \end{pmatrix}\Bigg). \quad (1.11)
\end{aligned}$$

由于 $(u-v)u^{-1}v^{-1} = v^{-1} - u^{-1}$, 比较 (1.10) 与 (1.11), 得

$$(v^{-1}-u^{-1})\begin{pmatrix} 0 & [a,b]+b & [b,a]-b & 0 \\ [c,a]+c & [c,b]+d-a & [d,a] & [d,b]-b \\ [a,c]-c & [a,d] & [b,c]-d+a & [b,d]+b \\ 0 & [c,d]-c & [d,c]+c & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.12)$$

于是有对易关系：

$$\begin{aligned} &[a,b]=-b, && [a,d]=0,\\ &[a,c]=c, && [b,d]=-b,\\ &[c,b]=a-d, && [c,d]=c. \end{aligned} \tag{1.13}$$

更一般地，如在一开始即令

$$L(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

则代替 (1.13), 由 (1.9) 得到独立对易关系：

$$\begin{aligned} &[a,c]=c, && [a,d]=0,\\ &[a,b]=-b, && [d,c]=-\lambda c,\\ &[c,b]=\lambda a-d, && [d,b]=\lambda b. \end{aligned} \tag{1.15}$$

从上面的计算可以看出，由于存在置换算子矩阵 P, 导致诸算子 a,b,c 与 d 之间一定的对易关系，它们与这些算子的实现无关. 在 (1.15) 中取特殊情况：

如 $\lambda=0$, $d=0$, 即有

$$[a,c]=c,\quad [a,b]=-b,\quad [c,b]=o,$$

则

$$a=\frac{\partial}{\partial q}=ip,\quad c=e^{q},\quad b=e^{-q}; \tag{1.16}$$

或

$$a=+i\frac{\partial}{\partial q}=-p,\quad c=e^{-iq},\quad b=e^{+iq}, \tag{1.17}$$

都是 (1.16) 的实现，只要 p 与 q 满足海森堡关系 (1.1).

如 $\lambda=1$：

$$a=-L_3,\quad c=L_-,\quad b=L_+,\quad d=L_3; \tag{1.18}$$

或

$$a=L_3,\quad c=L_+,\quad b=L_-,\quad d=-L_3, \tag{1.19}$$

则 (1.15) 变为

$$[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad [L_+, L_-] = 2L_3. \tag{1.20}$$

其中 $L_\pm = L_1 \pm iL_2$, 而 L_α $(\alpha = 1,2,3)$ 满足 (1.2). 当然, 上而角动量也可用自旋 S_α 代替, 因为对易关系并没有差别, 而 (1.20) 与角动量的模无关.

从上而这两个例子可以看出, 给定一个 c- 数矩阵 $\check{R}(u)$, 通过关系 (1.9), 原则上可以确定出 $L(u)$ 中各个矩阵元之间的对易关系. 这里我们遇到了两个完全不同的空间. 2×2 矩阵空间, 称为辅助空间. 而辅助空间中矩阵 $L(u)$ 的每个元素 (例如 a, b, c 与 d) 则是量子力学算符, 作用在希尔伯特空间. 这间个空间是完全无关的. (1.9) 式的作用在于通过 $\check{R}(u)$ 矩阵, 利用 (1.9) 规定了诸算符的对易关系. 在 (1.10) 与 (1.11), 即 (1.10) 间端的计算中, 置换算符起了关键作用.

从物理角度来说, 由于量子力学中粒子的全同性, 自由粒子体系在置换时有确定对称性. $\check{R}(u)$ 的意义在于描述一大类具有相互作用的粒子体系仍有推广的 "置换" 对称性, 以后还将详细讨论这个问题. 局限于置换算子 P, 它很容易用泡利矩阵表示出来 (对自旋 1/2): $S = \frac{1}{2}\sigma$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

利用 $S_\pm = \dfrac{1}{2}\sigma_\pm = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, 易知

$$\begin{aligned} S_+S_- + S_-S_+ &= 2(S_1(1)S_1(2) + S_2(1)S_2(2)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$
\begin{aligned}
S^3 \otimes S^3 &\equiv S^3(1)S^3(2) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}I. \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

上式中，除对角元外皆为 0. 以下凡为 0 的矩阵元一般不再写出，则得

$$
\boldsymbol{S}(1)\cdot\boldsymbol{S}(2) = \frac{1}{2}P - \frac{1}{4}I.
$$

或有

$$
P = P_{12} = 2\boldsymbol{S}(1)\cdot\boldsymbol{S}(2) + \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)) = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}). \qquad (1.24)
$$

在以上诸式中， $\boldsymbol{S}(1)$ 与 $\boldsymbol{S}(2)$ 代表两个不同空间的自旋算子，而两个空间相连写代表直积. 例如自旋 1/2 自旋算子用 2×2 矩阵表示，则 P 用 4×4 矩阵表示. 显然， (1.24) 代表了自旋 (1) 与自旋 (2) 的等效交换算子，因为 $(P_{12})^2 = I$, 将 P_{12} 作用在两个自旋波函数组成的三重态上本征值为 1, 而三重态对 (1) 与 (2) 是对称的. 当将 P_{12} 作用在单重态上，本征值为 -1, 但单态对 (1) 与 (2) 是反对称的. 因此， P_{12} 的作用就如同将两个自旋交换一下. 现在我们对 (1.9) 就有所了解了. 因为 $L(u)$ 是 2×2 矩阵，它一定可以用泡利矩阵展开，即辅助空间属子 $SL(2)$, 它与自旋 1/2 矩阵表示相联系. 现在 P 的作用就相当于交换两个自旋空间. 为了理解 (1.8) 与 (1.9) 的意义，我们将 (1.9) 改写为矩阵元形式 (相重指标

代表求和)：

$$\check{R}(u-v)_{ij,mn}(L(u)\otimes L(v))_{mn,kl}=(L(v)\otimes L(u))_{ij,mn}\check{R}(u-v)_{mn,kl}. \tag{1.25}$$

利用矩阵直积的性质 (1.3), 有

$$\check{R}(u-v)_{ij,mn}L(u)_{mk}L(v)_{nl}=L(v)_{im}L(u)_{jn}\check{R}(u-v)_{mn,kl}. \tag{1.26}$$

引入

$$R(u)_{ij,mn}=\check{R}(u)_{ji,mn}, \tag{1.27}$$

(1.26) 可以写为

$$R(u-v)\overset{1}{L}(u)\overset{2}{L}(v))=\overset{2}{L}(v)\overset{1}{L}(u)R(u-v). \tag{1.28}$$

其中

$$\overset{1}{L}(u)=L(u)\otimes 1,\qquad \overset{2}{L}(u)=1\otimes L(u). \tag{1.29}$$

(1.28) 的证明如下：取 (1.28) 的矩阵元形式,

$$\begin{aligned}
\text{左端}&=R(u-v)_{ij,mn}(L(u)\otimes 1)_{mn,st}(1\otimes L(v))_{st,kl}\\
&=R(u-v)_{ij,mn}L(u)_{ms}\delta_{nt}\delta_{sk}L(v)_{tl}\\
&=R(u-v)_{ij,mn}L(u)_{mk}L(v)_{nl},\\
\text{右端}&=(1\otimes L(v))_{ij,mn}(L(u)\otimes 1)_{mn,st}R(u-v)_{st,kl}\\
&=\delta_{im}L(u)_{jn}L(u)_{ms}\delta_{nt}R(u-v)_{st,kl}\\
&=L(v)_{jn}L(u)_{is}R(u-v)_{sn,kl},
\end{aligned}$$

即 (1.28) 变为

$$R(u-v)_{ij,mn}L(u)_{mk}L(v)_{nl}=L(v)_{jn}L(u)_{im}R(u-v)_{mn,kl}. \tag{1.30'}$$

将上面自由指标 $i\leftrightarrow j$, 右端求和指标 $m\leftrightarrow n$, 上式可改为

$$R(u-v)_{ji,mn}L(u)_{mk}L(v)_{nl}=L(v)_{im}L(u)_{jn}R(u-v)_{nm,kl}. \tag{1.30}$$

将 (1.30) 与 (1.26) 相比较，知 $R(u)$ 与 $\check{R}(u)$ 的差别仅在于 (1.27). 事实上，(1.27) 可用简单形式写出：

$$\check{R}(u) = PR(u), \qquad (P^2 = I) \tag{1.31}$$

上式的证明很简单. 对我们现在讨论的情况来说，i, j 等矩阵指标代表了自旋的标记，即只能为 $+$(代表 $+1/2$) 或 $-$(代表 $-1/2$), 而 (1.8) 形式的 $\check{R}(u)$ 除单位矩阵 I 外，其 uP 部分里，许多矩阵元为 0. 为了具体看出这点，我们具体标出 P 的标号. 它有四个指标，均由 $+, -$ 组合而成：

$$\begin{aligned}
\check{R}(u) &= \begin{array}{c} \\ ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} ++ & +- & -+ & -- \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\check{R}(u)_{++,++} & \check{R}_{++,+-} & \check{R}_{++,-+} & \check{R}_{++,--} \\
\check{R}(u)_{+-,++} & \check{R}_{+-,+-} & \check{R}_{+-,-+} & \check{R}_{+-,--} \\
\check{R}(u)_{-+,++} & \check{R}_{-+,+-} & \check{R}_{-+,-+} & \check{R}_{-+,--} \\
\check{R}(u)_{--,++} & \check{R}_{--,+-} & \check{R}_{--,-+} & \check{R}_{--,--}
\end{pmatrix}
\end{array} \\
&= I + u
\begin{array}{c} \\ ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} ++ & +- & -+ & -- \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

为简单起见，上式的矩阵元中记 $\check{R}(u)$ 为 $\check{R}$, 以下类同. 将 (1.32) 两端相比较，显然只存在 $\check{R}_{++,++}, \check{R}_{+-,+-}, \check{R}_{+-,-+}, \check{R}_{-+,+-}, \check{R}_{-+,-+}, \check{R}_{--,--}$ 六个不为 0 的元素. 这表示对 $\check{R}(u)_{ij,kl}$ 矩阵元来说，只有 $i+j=k+l$ 时才不为 0. 这本质上是自旋守恒的条件，以后我们还要回到这个问题. 这样，在现在讨论的情况，不为 0 的 $\check{R}(u)$- 矩阵元为

$$\check{R}(u) = \begin{pmatrix}
\check{R}_{++,++} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \check{R}_{+-,+-} & \check{R}_{+-,-+} & 0 \\
0 & \check{R}_{-+,+-} & \check{R}_{-+,-+} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \check{R}_{--,--}
\end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

将 $\check{R}(u)_{ij,kl}$ 中的 i 与 j 对调，表示上式第二行与第三行对调，而这正是从左边乘以 P 的结果. 所以 (1.27) 与 (1.31) 在我们讨论的情况是一致的. 这时有

$$R(u) = uI + P, \quad (P^2 = I), \ \check{R}(u) = I + uP. \tag{1.34}$$

由于 P 表示对调，具体讨论时应标出它是对调哪两个“粒子”. 例如 P_{12} 表示粒子 (1) 与粒子 (2) 对换，而 P_{13} 表示将粒子 (1) 与 (3) 对换等. 一个重要的性质是

$$P_{12}P_{13}P_{23} = P_{23}P_{13}P_{12}. \tag{1.35}$$

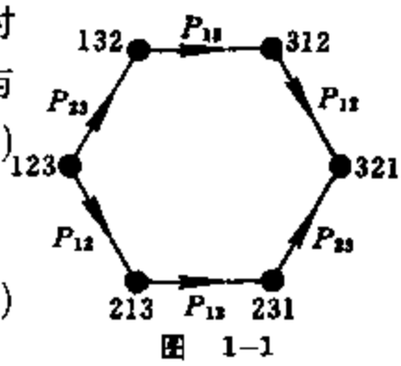


图 1–1

上式很容易由图 1–1 来验证：即从粒子 1,2 与 3 出发，先作 (2↔3)，再作 (1↔3)，最后作 (1↔2) 达到的效果，与先作 (1↔2)、再作 (1↔3)，最后作 (2↔3) 的效果相同. 我们以后还要讨论这种对应全同粒子的交换的物理含义. 由于 $R(u)$ 是 P 与参数 u 的线性组合，容易证明 $R(u)$ 与 P 有相同的关系. 在此之前，先列出有关 P_{12}, P_{13}，以及 P_{23} 之间的一些关系式：

$$P_{13}P_{23} = P_{12}P_{13} = P_{23}P_{12}, \tag{1.36}$$

$$P_{23}P_{13} = P_{13}P_{12} = P_{12}P_{23}. \tag{1.37}$$

将上列关系式用在文字 (1 2 3) 上，即可容易得到证明. 例如，

$$P_{23}P_{12}(1,2,3) = P_{23}(2,1,3) = (3,1,2),$$
$$P_{13}P_{23}(1,2,3) = P_{13}(1,3,2) = (3,1,2),$$

等等. 利用 (1.35)、(1.36) 及 (1.37)，容易证明

$$R(u)_{12}R(u+v)_{13}R(v)_{23} = R(v)_{23}R(u+v)_{13}R(u)_{12}. \tag{1.38}$$

上式即称为杨 - 巴克斯特方程 (YBE). 具体证明可以通过直接计算得出:

$$\begin{aligned}&(u+P_{12})[(u+v)+P_{13}](v+P_{23})\\&\quad=uv(u+v)+v(u+v)P_{12}+uvP_{13}+u(u+v)P_{23}\\&\qquad+(u+v)P_{12}P_{23}+vP_{12}P_{13}+uP_{13}P_{23}+P_{12}P_{13}P_{23}\end{aligned}$$

利用 (1.37), 上式右端倒数第 2,3,4 项可变为

$$(u+v)P_{23}P_{13}+(u+v)P_{12}P_{13}.$$

再考虑到 (1.35), 遂得到 (1.38).

将 (1.38) 与 (1.35) 相比较, 我们看到, 所谓 YBE 只不过是交换算子 P 的推广: R 仍然满足 (在自旋指标空间中) 与 P 相同的关系, 但不成立 $P^2=I$. 与 P 不同之处在于 $(R(u))^2\neq I$, 这样就大大拓宽了 $R(u)$ 的解. 这里, 参数 u 与 v 的出现有根本性的意义, 也是在该参数空间中 $R(u)$ 具有复杂行为的原因. 因为方程 (1.38) 一方面在自旋空间 (辅助空间) 中是个矩阵方程, 另一方面, 它又是 u 与 v 的函数. 以后我们将会知道, u 具有一维动量的意义, 因此, u- 相关的 $R(u)$ 的解同时包含了动力学的内容. 粗略来说, YBE 只不过是包含参数 u 的 (有时还可包含其他参数) 交换算子 P 的一种 "变形" 或推广.

在本节中, 我们沿着文献 [7]~[13] 的作法, 从量子力学对易关系的角度引出了 (1.28) 与 (1.38), 并讨论了它们的最简单的实现. 虽然我们从特例出发, 但许多性质是具有一般性的. 以后我们讨论对易关系, 就从 (1.28) 出发, 它比 (1.1) 、 (1.2) 要广泛得多.

正如一再强调的, $L(u)$ 是 $M\times M$ 矩阵时, R 为 $M^2\times M^2$ 的数量矩阵, 在上面讨论的例子中, $M=2$. $L(u)$ 的每个元素 $L(u)_{ab}$ 是依赖于谱参数 u 的量子算符 $(a,b=1,2,\cdots,M)$, 它们作用在希

尔伯特空间，与辅助矩阵空间是完全独立的. 按 (1.28) 的写法，辅助矩阵 $\overset{1}{L}(u)$ 与 $\overset{2}{L}(v)$ 分属不同的相邻空间. 这又是另一种空间标记方式. 在 (1.28) 意义下，$R(u-v) \equiv R(u-v)_{12}$, 亦即 $R(u)_{12}$ 作用在两个相邻的空间上. 以后我们还要回到这些空间标记方式的讨论.

形如 (1.30) 的关系式中并没有格点的概念. 在实际物理问题中常常讨论具有许多格点的体系. 这时，在每个格点处可以定义量子算子. 最简单的情况是不同格点处的算子可以对易，即属玻色型. 例如：

$$\begin{aligned} &[x_k, p_j] = i\delta_{kj}, && (\hbar = 1) \\ &[x_k^\alpha, L_j^\beta] = i\delta_{kj}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma^j, && (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

其中 k, j 为格点指标，$k, j = 1, 2, 3 \cdots, N$. 这种不同格点处算子间的对易性质反映在矩阵 $L(u)$ 中就是

$$[L_j^{ab}(u), L_k^{cd}(v)] = 0. \tag{1.39}$$

要注意的是，不同格点处算子间对易，并不表示不同格点处的 $L_j(u)$ 对易. 因为在任意格点处 $L_j(u)$ 仍是辅助空间的矩阵 (只不过它的元素是算子)，矩阵间一般是不对易的. 现在我们来证明

$$R(u-v)_{ij,mn}T(u)_{mk}T(v)_{nl} = T(v)_{jm}T(u)_{in}R(u-v)_{nm,kl} \tag{1.40}$$

或

$$R(u-v)\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v) = \overset{2}{T}(v)\overset{1}{T}(u)R(u-v). \tag{1.41}$$

亦即

$$\check{R}(u-v)(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))\check{R}(u-v), \tag{1.42}$$

其中

$$T(u) = L_N(u)L_{N-1}(u) \cdots L_2(u)L_1(u), \tag{1.43}$$

下标 $1,2,\cdots,N$ 表示格点，即 $T(u)$ 表示 N 个格点的 $L_j(u)$ 的矩阵乘积. 具体的意义是所有辅助空间中矩阵元加上格点标号，然后按矩阵乘法将辅助矩阵连乘起来. 有时为了方便，记为

$$T(u)=\prod_{j=1}^{\overrightarrow{N}}L_j(u). \tag{1.44}$$

箭号表示矩阵按序排列，$T(u)$ 称为整体转移矩阵.

为了证明 (1.40)，只需证明 (1.43) 中 $N=2$ 的情况，更多格点时可以按同样方式计算. 由 (1.30) 出发，可将 $N=2$ 的情况写为

$$\begin{aligned}
&R(u-v)_{ij,mn}T(u)_{mk}T(v)_{nl}\\
&=R(u-v)_{ij,mn}L_2(u)_{ms}L_1(u)L_2(v)_{nr}L_1(v)_{rl}\\
&=R(u-v)_{ij,mn}L_2(u)_{ms}L_2(v)_{nr}L_1(u)_{sk}L_1(v)_{kl}\\
&=L_2(v)_{jm}L_2(u)_{in}R(u-v)_{nm,sl}L_1(u)_{sk}L_1(v)_{rl}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(利用(1.30))}\\
&=L_2(v)_{jm}L_2(u)_{in}L_1(v)_{mr}L_1(u)_{ns}R(u-v)_{sr,kl}\\
&=L_2(v)_{jm}L_1(v)_{mr}L_2(u)_{in}L_1(u)_{ns}R(u-v)_{sr,kl}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(利用(1.39))}\\
&=T(v)_{jm}T(u)_{in}R(u-v)_{nm,kl}.
\end{aligned}\tag{1.45}$$

上式的结果正是 (1.40) 式. 由于 $N=2$ 时正确，将 $N=2$ 的 $T(u)$ 再乘以另一个格点的 $L(u)$，用同样的方法可证 $N=3$ 正确. 逐步做下去，易证 (1.40) 对任意 N 正确.

(1.41) 或 (1.42) 称为“RTT 关系”. 它在形式上与 (1.30) 完全一样，只不过 (1.30) 表示的是某一格点处的局域关系，而 (1.40) 表示整体关系. RTT 关系是杨 – 巴克斯特系统理论中的基本关系式，也是本书的出发点，以后将详加研究.

有关 (1.40), 可能提出的两个问题是：一、既然 (1.40) 是基本关系式，那么是否当给定 $R(u-v)$ 时，满足 (1.40) 的 $T(u)$ 一定总可以分解为形如 (1.42) 的形式？也就是说，当在某格点处，给定 $R(u-v)$ 决定出满足 (1.4) 的 $L(u)$, 将它标以格点记号 $L_j(u)$ 然后取 (1.43) 的矩阵乘积，则这样生成的 $T(u)$ 必仍满足 (1.40). 但 (1.43) 是不是 (1.40) 的必要形式呢？答案是否定的. (1.43) 仅是 (1.40) 的充分解. 以后我们要举出例子，指出存在给定 $R(u-v)$ 矩阵时，满足 (1.40) 的 $T(u)$ 矩阵，它不能分解成形如 (1.43) 的形式. 二、当辅助矩阵 $L(u)$ 为 2×2 矩阵并取 (1.43) 形式时，$T(u)$ 具有何种形式？由 (1.19) 与 (1.4) 可知 (1.30) 的最简单的解为

$$L(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}L_3 & L_-\\ L_+ & -L_3\end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

利用泡里矩阵性质，如定义 $S_\pm=1/2(L_1\pm iL_2)$, 则

$$L(u)=I+u^{-1}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.47}$$

其中算符 $\boldsymbol{S}$ 作用在量子空间，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 矩阵表示辅助空间矩阵. 假定 $L(u)$ 作用于第 j 个格点上，则写为

$$L_j(u)=I+u^{-1}\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.48}$$

其中量子算符 $\boldsymbol{S}_j$ 只作用于第 j 个格点上的量子空间，满足

$$[S_j^\alpha,S_k^\beta]=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_j^\gamma\delta_{jk}. \tag{1.49}$$

此时，(1.43) 给出的整体转移矩阵 $T(u)$ 等于

$$T(u)=(I+u^{-1}\boldsymbol{S}_N\cdot\boldsymbol{\sigma})(I+u^{-1}\boldsymbol{S}_{N-1}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdots(I+u^{-1}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

其中乘积表示诸泡里矩阵的矩阵乘积，而不同 j 值的诸 $\boldsymbol{S}_j$ 算子可以对易. 将 $T(u)$ 展开，利用

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta=\delta_{\alpha\beta}+i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma,$$

有

$$
\begin{aligned}
T(u) &= I + u^{-1}\left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{S}_j\right)\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad + u^{-2}\left(i\sum_{i\neq j}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_j^{\alpha}S_k^{\beta}\sigma_{\gamma} + \sum_{i,j}\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j + \cdots\right) \\
&= I + u^{-1}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} + u^{-2}\left(i\sum_{i\neq j}\boldsymbol{S}_j\times\boldsymbol{S}_k\right)\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad + u^{-2}\sum_{i,j}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j + \cdots,
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为所有格点 $\boldsymbol{S}_j$ 之和. 如果 $\boldsymbol{S}_j$ 表示第 j 个格点处的自旋算子, 则 $\boldsymbol{S}$ 表示总自旋算子. 这样形式的 $T(u)$ 满足 (1.40), 其中 $R(u)=u+P$. 由这个例子, 我们可以清楚地了解辅助空间、量子空间以及格点空间的意义.

正如已经强调过的, $T(u)$ 作为 N 个局域转移矩阵连乘, 只是满足 RTT 关系的简单的可能性. 因为给定 $R(u)$, 比较容易求出 $L(u)=I+u^{-1}L^{(1)}$ 形式的解. 将它们连乘, 求出 $T(u)$ 的前几阶也是相对比较容易做到的, 而直接求出 $T(u)$ 的一般形式解就相当困难. 以后通过具体例子, 我们会了解到, $T(u)$ 的连乘形式基本对应近邻相互作用. 而 $T(u)$ 不能表为连乘形式可以对应长程相互作用或高于一维链的模型.

最后需要指出, 给定 $R(u)$ 矩阵求 $T(u)$ 时, $T(u)$ 并不一定总要展开成 u^{-1} 的无穷级数. 如果将 $T(u)$ 写为 u^{-1} 的有限阶多项式, 代入 RTT 关系后, 只要有具体物理意义的解就可以了. 这时将出现 $T(u)$ 的有限项表达式, 它们常常适用于高于一维链的模型, 以后将要介绍的哥尔雅切夫 – 恰波列金 (Goryachev–Chaplygin, 简记为 G–C) 陀螺就属于这种情况 [14]~[16].

§2 RTT 关系与 YBE

§1 中已经讨论了 (1.9) 或 (1.28) 可以作为我们的出发点；并以 (1.34) 为特例，说明欲使 (1.9) 或 (1.28) 自恰，$R(u)$ 应满足 YBE，即 (1.38). 本节主要分析 (1.28) 与 (1.38) 在普遍情况下的正确性及分量形式.

§ 2.1 RTT 关系与 YBE

(1.28) 中的 $R(u_1-u_2)$ 的本质是颠倒 $\overset{1}{T}(u_1)$ 与 $\overset{2}{T}(u_2)$ 所在的空间次序，可记为 $R_{12}(u_1-u_2)$，并将 (1.28) 中的 $L(u)$ 记为 $T(u)$：

$$R_{12}(u_1-u_2)\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2)=\overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1)R_{12}(u_1-u_2), \tag{2.1}$$

其中 $u_i(i=1,2)$ 称为谱参数. 注意，如果 $T(u)$ 为 $M\times M$ 矩阵，则 $\overset{1}{T}(u)=T(u)\otimes I$ 为 $M^2\times M^2$ 矩阵，$R_{12}(u_1-u_2)$ 亦为 $M^2\times M^2$ 矩阵. 我们现在观察矩阵乘积 $\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3)$，记住它的每一个元素都是算符，因而次序不可颠倒. 但从辅助 (矩阵) 空间而言，它们必满足结合律：

$$\overset{1}{T}(u_1)(\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3))=(\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2))\overset{3}{T}(u_3). \tag{2.2}$$

这种从普通量子力学中便认为是自然成立的事，导致出现于 (1.40) 的 R 矩阵必满足如 (1.38) 所示的 YBE 关系. (2.1) 的本质在于将 R_{ii+1}- 矩阵移过 $\overset{i}{T}(u_i)\overset{i+1}{T}(u_{i+1})$ 时，则 $\overset{i}{T}$ 与 $\overset{i+1}{T}$ 颠倒次序，并且 R_{ii+1}- 矩阵仅作用在 i 与 $i+1$ 空间，与其他空间无关. 利用这个性质，我们先将 $R_{12}(u_1-u_2)$ 作用在 (2.2) 的右端：

$$\begin{aligned}R_{12}(u_1-u_2)(\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2))\overset{3}{T}(u_3)&=\overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1)R_{12}(u_1-u_2)\overset{3}{T}(u_3)\\&=\overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1)\overset{3}{T}(u_3)R_{12}(u_1-u_2).\end{aligned}$$

上面 R_{12} 移过 $\overset{3}{T}$ 的原因是，从矩阵空间看 R_{12} 只作用在 1,2 空间，与第 3 空间无关. 而从量子空间而言， R_{12} 是 C- 数矩阵与 $\overset{3}{T}$ 中所有元素对易. 将上面结果再乘以 $R_{13}(u_1-u_2)$, 得

$$\begin{aligned}&R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2)(\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2))\overset{3}{T}(u_3)\\&\quad=\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3)\overset{1}{T}(u_1)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&R_{23}(u_2-u_3)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2)(\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2))\overset{3}{T}(u_3)\\&\quad=\overset{3}{T}(u_3)\overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1)R_{23}(u_2-u_3)R_{13}(u_1-u_3)R_{12}(u_1-u_2).\end{aligned}$$

将上式左端乘以 $(R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}))^{-1}$, 其中 $u_{ij}=u_i-u_j$ $(i,j=1,2.3)$, 并注意到

$$(R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}))^{-1}=R_{23}^{-1}(u_{23})R_{13}^{-1}(u_{13})R_{12}^{-1}(u_{12})$$

与

$$R_{ij}^{-1}(u_i-u_j)\overset{j}{T}(u_j)\overset{i}{T}(u_i)=\overset{i}{T}(u_i)\overset{j}{T}(u_j)R_{ij}^{-1}(u_{ij}),$$

其中 $i\neq j=1,2,3$, 有

$$\begin{aligned}&(R_{12}(u_{12}))R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}))^{-1}R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12})\\&\qquad\cdot(\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3))\\&=R_{23}^{-1}(u_{23})R_{13}^{-1}(u_{13})R_{12}^{-1}(u_{12})\overset{3}{T}(u_3)(\overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1))\\&\qquad\cdot R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12})\\&=R_{23}^{-1}(u_{23})R_{13}^{-1}(u_{13})(\overset{3}{T}(u_3)\overset{1}{T}(u_1))\overset{2}{T}(u_2)R_{12}^{-1}(u_{12})\\&\qquad\cdot R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12})\\&=\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3)(R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}))^{-1}\\&\qquad\cdot R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12})\end{aligned}$$

从而得到

$$[(R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}))^{-1}R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12}),$$
$$\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2)\overset{3}{T}(u_3)] = 0.$$

由于 $\overset{1}{T}\overset{2}{T}\overset{3}{T}$ 是三个辅助空间矩阵的乘积，上式要求对易括号内与 $\overset{1}{T}\overset{2}{T}\overset{3}{T}$ 对易的项为常数 C' 亦即

$$R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12}) = C'R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}).$$

对空间 1,2,3 取行列式，并注意到 $\det(ABC) = \det A\cdot\det B\cdot\det C$，从而确定出 $C' = 1$，即导出杨 -- 巴克斯特方程

$$R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}) = R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12}), \quad (u_{13} = u_{12} + u_{23}) \tag{2.3}$$

其中 $u_{ij} = u_i - u_j$ $(i,j = 1,2,3)$,(2.3) 称为 YBE. 将上述过程与图 1–1 相比较，更容易了解到，$R(u)$ 的本质不过是 (1.35) 的推广：它包括谱参数和解 (2.3) 过程可能允许的其他参数，并且没有 $P^2 = I$ 的限制.

(2.3) 是个较为抽象的形式，所谓辅助空间标号 1,2,3 只不过是 §1 中自旋指标推广成内空间的指标. 例如，R_{12} 表示空间 1 与 2 的直积后混合指标 ij,kl 等. (2.3) 的分量形式为

$$R(u)^{ml}_{ji}R(u+v)^{nt}_{kl}R(v)^{rs}_{nm} = R(v)^{lm}_{kj}R(u+v)^{rn}_{li}R(u)^{st}_{mn}, \tag{2.4}$$

其中，$i,j,k,\cdots = 1,2,3,\cdots,N$; 相重指标代表求和，

$$R(u)^{kl}_{ij} \equiv R(u)_{ij,kl}. \tag{2.5}$$

相应地，$\check{R}(u)$ 满足 $(\check{R}(u)_{ij,kl} = R(u)_{ji,kl} = \check{R}(u)^{kl}_{ij})$:

$$\check{R}(u)^{ml}_{ij}\check{R}(u+v)^{nt}_{lk}\check{R}(v)^{rs}_{mn} = \check{R}(v)^{lm}_{jk}\check{R}(u+v)^{rn}_{il}\check{R}(u)^{st}_{nm}. \tag{2.6}$$

它的空间写法为

$$\check{R}_{12}(u)\check{R}_{23}(u+v)\check{R}_{12}(v)=\check{R}_{23}(v)\check{R}_{12}(u+v)\check{R}_{23}(u). \tag{2.7}$$

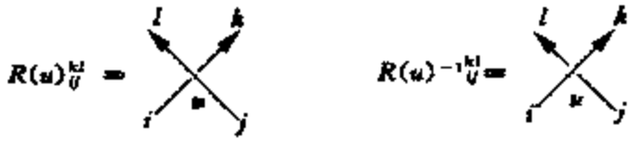


图 2-1

为了具体了解 (2.1) 用空间的记法与 (1.40) 用分量的记法的一致性，可以用图示法. 将 $R(u)$ 用两条直线的交叉表示，且定义

$$R(u)_{ij,kl}\equiv R(u)^{kl}_{ij},$$

则将它表为图 2-1. 图中，它表示粒子占据一个空间由初态具有内部自由度 (例如自旋)i 和另一粒子具有初态内部自由度 j, 以相对快度 (rapidity, 在非相对论时即为速度)u 发生一次碰撞，然后分别变成 k 与 l 指标. 如果反应过程自旋是守恒的，则有 $i+j=k+l$, 否则，没有这个限制. 用空间表示，粒子 1 表示由 i 变为 k 这条直线，称为粒子空间 1, 从 j 到 k 的线称为粒子空间 2, 而两个空间的交叉表示碰撞一下. 注意，这里的 u 绝不代表真实碰撞的角度. 粗略地说，在非相对论模型中， u 代表两个在一维坐标轴上运动的粒子的相对速度.

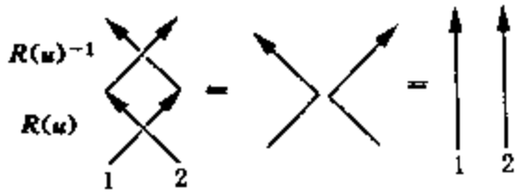


图 2-2

在 $R(u)$ 矩阵与它的逆矩阵的图示中，哪条线在下或上 (undercrossing 与 overcrossing) 是相对的，可以任意选择. 例如选定了 $R(u)$ 为上交叉，则 $R(u)^{-1}$ 定为下交叉，由图 2-2 可见，第二个粒

子的线永远在第一个粒子线的上面，没有两线相套的情况. 于是，两条线可以拉开，最终变成平行线，即单位 I. 这种“形变”性质并不依赖图形的细节，只依赖于交叉点的数目以及交叉为上、下的性质，这是一种拓扑性质. 因而上述连续划出 $R(u)^{-1}R(u)$ 图形等效于 I 的图形，实际为拓扑等价.

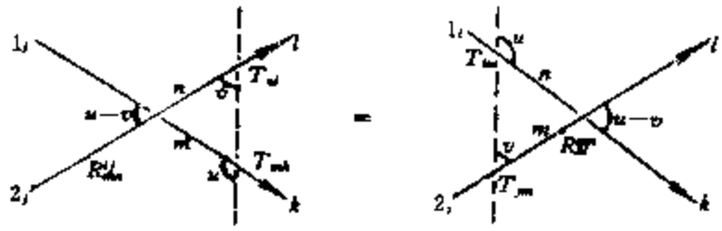


图 2–3

现在我们用图形来表示 (2.1) 或 (1.40). 以 i,j 等表示辅助空间 (例如自旋) 指标. 有图 2–3. 图中虚线 – 实线交叉表示 T– 矩阵，实线 · 实线的交叉代表 R– 矩阵，相交的角度 u-v 是 R 依赖的谱参数. 角度间满足三角形关系与 (1.40) 所示谱参数关系一致. 图 2–3 两端的意义也很明显： (1.40) 的左端以图 2–3 的左端代表，$R(u-v)$ 矩阵代表内部自由度 (例如自旋) i 变为 m,j 变为 n 的分别为粒子 1 与 2 的碰撞；然后分别对 n 与 m 求和，并且沿粒子 1 的线由 m 变为 k, 而对粒子 2 则由 n 变为 l. 它同时也表示了 $R_{12}\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)$ 的关系，亦即 i,m,k 表示粒子 1 的内部指标，而 j,n,l 表示粒子 2 的内部指标. 图 2–3 的右端表示将虚线向左平行移动，移至交叉点之左. 其具体指标分析与左端类似. 由图 2–3 的右端可知，有 $\overset{2}{T}(v)\overset{1}{T}(u)R(u-v)$ 的关系. 由以上分析亦可了解 (1.41) 记法与 (1.40) 记法间的关系.

由以上讨论，我们简要地介绍了求解问题的步骤：首先求解 (2.4) 或 (2.6), 即求解杨 – 巴克斯特方程 (YBE), 给出 YBE 的某种解. 例如最简单的解为 (1.34) 的 4×4 表示. 然后对该 $R(u)$ 矩阵求

解 RTT 关系 (1.40) 或 (1.41), 即列出 $T(u)$ 矩阵诸矩阵元间的对易关系. 所谓求解这些关系, 是指用物理中熟知的基本算符将 $T(u)$ 表示出来, 至少要表示到 u^{-1} 展开式的前几阶. RTT 关系是法捷也夫学派在建立二次量子化反散射方法理论时提出的, 可参阅文献 [7]~[13]. 后被德林菲尔德 (Drinfeld) 进一步发展成新型对称性理论, 这个理论与上述对应 u^{-1} 不同阶的算子的对易关系有关.

如果 RTT 关系的作用只限于建立对易关系, 那么充其量只是给出引入的算子之间的关系, 其用途也将受到限制. RTT 关系更重要的性质在于它同时给出了该量子系统的守恒量, 包括哈密顿量, 即规定了系统的动力学. 这正是物理性质的要点.

因此, 在进一步分析 YBE 与 RTT 关系之前, 我们先从一般角度讨论它们与建立物理模型间的关系, 这些模型必定是完全量子可积的.

§ 2.2 守恒量集合

在力学中, 只要知道了系统的所有运动积分 (即守恒量), 这个系统就一定是完全可积的. 这个原则也适合量子系统, 包括量子力学与量子场论 (二次量子化理论), 这时称为完全量子可积系统. 现在我们讨论转移矩阵 $T(u)$ 与守恒量族之间的关系.

由 (1.41) 很容易知道, 利用 (1.27), 它可改写为

$$\breve{R}(u-v)(T(u)\otimes T(v)) = (T(v)\otimes T(u))\breve{R}(u-v). \tag{2.8}$$

由于 $\breve{R}(u)$ 是 $M^2\times M^2$ 非异矩阵, 存在逆矩阵, 故

$$(T(u)\otimes T(v)) = (\breve{R}(u-v)^{-1}(T(v)\otimes T(u))\breve{R}(u-v)). \tag{2.9}$$

由于 $\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}\,A\cdot \mathrm{tr}\,B$, 即得

$$[\mathrm{tr}\,T(u), \mathrm{tr}\,T(v)] = 0. \tag{2.10}$$

定义

$$\tau(u) = \mathrm{tr}\, T(u) = \sum_{n=0} u^{-n} \tau^{(n)}, \tag{2.11}$$

其中 tr 表示对辅助空间取矩阵的迹 (例如对自旋 1/2 模型, $T(u)$ 为 2×2 矩阵, 其迹即为 $T(u)_{11} + T(u)_{22}$), 则有

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0. \tag{2.12}$$

注意, 上式中对易括号是量子空间的对易括号, 因为它表示了次序不同而引起的差别. 于是, 有

$$[\tau^{(n)}, \tau^{(m)}] = 0. \tag{2.13}$$

在 (2.11) 中, 我们故意未写出 n 求和的范围, 它可能使 $\{n\}$ 为 $(-\infty, +\infty)$, 可能 $n \geqslant 0$, 也可能 $0 \leqslant n \leqslant$ 正整数, 主要依赖于求解 (2.8) 时, $T(u)$ 取何种形式时是 RTT 关系的严格解. (2.11) 与 (2.12) 告诉我们, 知道了 $T(u)$ 的物理实现, 取其矩阵迹再对谱系数 u 展开, 则给出系统的所有守恒量 $\tau^{(n)}$, 它们彼此可以对易. 可以选择其中某一个或几个的线性组合作为哈密顿量 H, 依其物理意义或经典极限而定. 从 RTT 关系看, 满足 (2.8) 的系统必定量子完全可积, 这是非常简单的事实. 当然, 具体实现起来并不是一件简单的事. 然而, 作为一个理论, 用如此简洁的形式不但规定了量子算子的对易关系, 同时给出了守恒量集合, 而且判定该系统量子可积, 这不能不说是一个非常漂亮的理论. 当然, 取哪个守恒量做为哈密顿量 H, 要根据具体物理模型而定. 因为 RTT 关系极为广泛, 它指出满足这个关系从而决定出的守恒量是系统守恒族的集合. 从这个意义上说, 所有守恒量都是平等的. 但从动力学角度看, 哈密顿量是特殊的. 它属于这个守恒量族的一员. 它可以是 $\tau^{(m)}$ 中的某一项或某些项的组合, 这要视具体模型而定. 当选定了某个守恒量为哈密顿量 H 之后, 其他守恒量自然同它对易, 这

与量子力学中的守恒量定义是完全一致的. 一般说, 选择守恒量的方式可以取 $\mathrm{tr}T(u)$ 的展开式, 亦可取 $\ln \mathrm{tr}T(u)$ 的展开式, 主要看它的经典极限形式而定. 对长程相互作用, 即不只是近邻相互作用模型, 将有另外选择方式, 留待以后讨论.

另外, 当取 $T(u)$ 的展开式 (2.11) 至无穷幂次时, 有无穷多守恒量. 它在物理中相应于一维孤子解的量子对应, 因为经典孤子 (一维) 存在无穷多守恒量. 当 $T(u)$ 展开式为 u^{-1} 有限阶时, 便存在有限个守恒量, 条件是 $T(u)$ 的确是 RTT 的解. 这时守恒量的个数一般应由自由度个数决定.

§ 2.3 简单的例子: 托达格子

由 (1.18) 与 (1.17), 已知

$$L(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p & e^{iq}\\ e^{-iq} & 0\end{pmatrix}$$

满足 RTT 关系. 由 (1.43) 在第 n 个格点处只须标明相应的量子算符只作用在该格点上, 即有

$$L_n(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_n & e^{iq_n}\\ e^{-iq_n} & 0\end{pmatrix}.$$

按 (1.43), 由 $L_n(u)$ 组成整体的转移矩阵

$$T(u)=\prod_{n=1}^{\widehat{N}}L_n(u)=\begin{pmatrix}A(u) & B(u)\\ C(u) & D(u)\end{pmatrix}.$$

设周期边条件, 计算 $T(u)$ 之连乘, 可知 $D(u)=0$. 将 $A(u)$ 写成

$$A(u)=1-u^{-1}A_1+u^{-2}A_2+\cdots,$$

其中

$$A_1=\sum_{n=1}^{N}p_n,\quad A_2=\sum_{n>m}^{N}p_np_m+\sum_{n=1}^{N}\exp\{i(q_{n+1}-q_n)\}.$$

上式是由以下计算得到的.

由于整体转移矩阵 $T(u)$ 是 $L_n(u)$ 的顺序连乘:

$$
\begin{aligned}
T(u)=&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_N&\exp(iq_N)\\\exp(-iq_N)&0\end{pmatrix}\right\}\cdots\\
&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_m&\exp(iq_m)\\\exp(-iq_m)&0\end{pmatrix}\right\}\\
&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_m&\exp(iq_{m-1})\\\exp(-iq_{m-1})&0\end{pmatrix}\right\}\\
&\cdots\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_n&\exp(iq_n)\\\exp(-iq_n)&0\end{pmatrix}\right\}\\
&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+u^{-1}\begin{pmatrix}-p_1&\exp(iq_1)\\\exp(-iq_1)&0\end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}
$$

计算上述连乘积 u^{-1} 展开式的低阶幂次，可知

“常数”项为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

相邻项之间不出现 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 矩阵，当满足周期边条件时，有:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-p_{n+1}&\exp(iq_{n+1})\\\exp(-iq_{n+1})&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_n&\exp(iq_n)\\\exp(-iq_n)&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-p_np_{n+1}+\exp\,i(q_{n+1}-q_n)&-p_n\exp(iq_{n+1})\\\exp(-iq_n)p_{n+1}&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

注意，不同格点处的 p_n 与 q_m 是对易的.

不相邻项之间要乘以矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-p_n&\exp(iq_n)\\\exp(-iq_n)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_m&\exp(iq_m)\\\exp(-iq_m)&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}p_np_m&0\\0&0\end{pmatrix}.\qquad\qquad(|m-n|\neq 1)
\end{aligned}
$$

将这两种情况的贡献加起来， $A(u)$ 中 u^{-2} 项系数为

$$\sum_{n>m}^{N} p_n p_m + \sum_{n=1}^{N} \exp[i(q_{n+1} - q_n)].$$

注意动量二次项包含任意格点相互作用，而坐标项只包含相邻指标，这是由于 $L_n(u)$ 展开式第一项不是 I 而是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的缘故.

由于现在 $D(u) = 0$, $\mathrm{tr}\, T(u) = A(u)$, 与经典理论比较，取哈密顿量为 $\ln \mathrm{tr}\, T(u) = \ln\, A(u)$. 注意：

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots,$$

现在 $x = -u^{-1}A_1 + u^{-2}A_2 + \cdots$, 将 A_1 与 A_2 代入该式，计算下式

$$\ln\ \mathrm{tr}\, T(u) = \ln\ A(u) = \sum_{n=1}^{N} a_n u^{-n}$$

的前两项，则得 u^{-1} 与 u^{-2} 的系数 a_1 与 a_2, 它们是量子力学算符：

$$a_1 = -A_1, \quad a_2 = A_2 - \frac{1}{2}A_1^2.$$

注意到

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n\right)^2 = 2\sum_{n>m}^{N} p_n p_m + \sum_{n=1}^{N} p_n^2,$$

于是得到守恒量为

$$P = -q_1 = \sum_{n=1}^{N} p_n,$$

$$H = a_2 = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}p_n^2 + \exp\left\{i(q_{n+1} - q_n)\right\}\right),$$

$$\cdots\cdots,$$

其中 P 为总动量，而 H 即为托达 (Toda) 格子的哈密顿量. 从这个演示性的例子可以看到，对给定的 $R(u)$ 矩阵，例如 (1.8)，或 (1.34)，最简单的办法就是求 $L(u)=L^{(0)}+u^{-1}L^{(1)}$ 形式的解，其中 $L^{(0)}$ 为对角 $C-$ 数矩阵，而 $L^{(1)}$ 则为具有量子算符为元素的矩阵；然后，将所有量子算符带上 n 指标，形成 $L_n(u)$，再求出 $T(u)$ 的前几阶；最后，利用 $\mathrm{tr}T(u)$ 或 $\ln\mathrm{tr}T(u)$，取 u^{-1} 展开式的前几阶系数作为守恒量. 这些系数是由量子算符构成的，因此各守恒量仍是量子算符. 这种处理方法是典型的量子反散射方法的处理方法 [7]~[13].

§3 $R-$ 矩阵与哈密顿量

上面介绍了获得可积系统的哈密顿量的步骤，即给定 $R-$ 矩阵 (或 $\check{R}-$ 矩阵)，解 $T(u)$，然后求出 $T(u)$ 的对 u^{-1} 幂次展开式的前几项，以通过求 $\ln\mathrm{tr}T(u)$ 的展开式前几项而得到前几项守恒量，包括哈密顿量. 这是一般性的方案. 对某些情况，这个方案可以大大简化. 观察 RTT 关系 (1.30′),$R(u)$ 为 $C-$ 数矩阵，$L(u)$ 的每个元素为量子空间算子，但在 (1.30′) 中并没有明显地写出量子空间矩阵元指标 a,b,c 等，完整的表达式应是

$$\begin{aligned}&R(u)_{ij,nm}(L_{ac}(u+v))_{nt}(L_{cb}(v))_{ms}\\&\quad=(L_{ac}(v))_{jm}(L_{cb}(u+v))_{in}R(u)_{nm,ts}\end{aligned}\tag{3.1}$$

上式中，相重指标代表求和，谱参数关系只要保证当中的等于其前后项谱参数之和即可，可随便表达. 其中明确写出量子空间矩阵元的意思是指 $[A,B]_{ab}=A_{ac}B_{cb}-B_{ac}A_{cb}$ 这类关系，其中 A,B 是 L 的任意矩阵元，而 a,b,c 是量子空间指标. 现在定义一个矩阵 [11]

$$\widehat{R}(u)^{mn}_{ij}=R(u)_{ij,nm},\tag{3.2}$$

$$(L_{ac}(u))_{nt}=\widetilde{R}(u)^{ct}_{na}.\tag{3.3}$$

也就是说， $\check{R}(u)$ 是 $R(u)$ 前两个指标交换，而 $\widehat{R}(u)$ 是 $R(u)$ 的后两个指标交换. 于是， (3.1) 可写为

$$\widehat{R}(u)_{ij}^{mn}\widetilde{R}(u+v)_{na}^{ct}\widetilde{R}(v)_{mc}^{bs}=\widetilde{R}(v)_{ja}^{cm}\widetilde{R}(u+v)_{ic}^{bn}R(u)_{nm}^{st}. \tag{3.4}$$

与 (2.6) 相比较，由于 $\widehat{R}(u)$ 满足与 $\check{R}(u)$ 完全相同的杨－巴克斯特方程，因此， (3.4) 式的最简单的解就是取

$$\widetilde{R}(u)=\widehat{R}(u). \tag{3.5}$$

再一次强调， $\widehat{R}(u)$ 是 YBE 的解，因此实际上从 YBE 解的角度 $\widehat{R}(u)$ 与 $\check{R}(u)$ 的行为并没有什么不同. 这样，转移矩阵的量子空间、辅助空间中的矩阵元其实就可视为 $\widehat{R}(u)$- 矩阵的矩阵元. 特别，当量子空间的指标 $a,b,c,\cdots$ 与 $i,j,k,\cdots$(辅助空间指标) 取值范围相同时，则可定义整体转移矩阵 $T(u)$. 此时将 N 个连乘积的 $(L_{a_1b_1}(u))_{i_1}^{i_2}$ 记为 $\{T^{(N)}(u)_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\}_{i_1}^{N+1}$，则有

$$\begin{aligned}\{T^{(N)}(u)_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\}_{i_1}^{i_{N+1}}&=(L_{a_1b_1}(u))_{i_1}^{i_2}(L_{a_2b_2}(u))_{i_2}^{i_3}\cdots(L_{a_Nb_N}(u))_{i_N}^{i_{N+1}},\\ \boldsymbol{a}&=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,\cdots,b_N\}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

注意 (3.2) 和 (3.5)，则有

$$\{T^{(N)}(u)_a^b\}_{i_1}^{i_{N+1}}=\widehat{R}(u)_{i_1a_1}^{b_1i_2}\widehat{R}(u)_{i_2a_2}^{b_2i_3}\cdots\widehat{R}_{i_{N-1}a_{N-1}}^{b_{N-1}i_N}\widehat{R}(u)_{i_Na_N}^{b_Ni_{N+1}}. \tag{3.7}$$

相重的辅助空间指标均代表求和. 注意， $\widehat{R}$ 矩阵并不颠倒量子空间指标，则得

$$\widehat{R}(u-v)(T^{(N)}(u)_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}}\otimes T^{(N)}(v)_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}})=(T^{(N)}(v)_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}}\otimes T^{(N)}(u)_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}})\widehat{R}(u-v). \tag{3.8}$$

如图 3–1 所示.

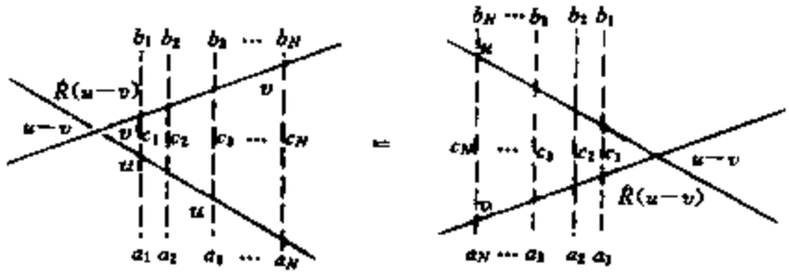


图 3–1

图 3–1 是图 2–3 的扩展，并标出了量子空间. 左、右端为每条线向交叉点另一方平移的结果. 要注意，其中量子指标 a 与 b 均为自由指标. 于是对辅助 (矩阵) 空间取迹，为

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big(T^{(N)}(u)\big)&=\big\{T^{(N)}(u)\big\}^{i_1}_{i_1}=\big(\tau^{(N)}(u)\big)\\&=\widehat{R}(u)^{b_1 i_2}_{i_1 a_1}\widehat{R}(u)^{b_2 i_3}_{i_2 a_2}\cdots\widehat{R}^{b_{N-1} i_N}_{i_{N-1} a_{N-1}}\widehat{R}(u)^{b_N i_1}_{i_N a_N}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

注意，在 YBE 解中，我们要求 $\check{R}(u=0)\equiv\check{R}(0)$ 必须包括 (1.34) 的情况. 在 YBE 意义下 $\widehat{R}(u)$ 与 $\check{R}(u)$ 没有差别，要求

$$\widehat{R}(0)=I\qquad(\check{R}(0)=I).\tag{3.10}$$

当量子空间维数与辅助空间维数相同时，有

$$(T^{(N)}(u)^{i_1}_{i_1})^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}|_{u=0}=\delta^{b_1}_{a_N}\delta^{b_2}_{a_1}\delta^{b_3}_{a_2}\cdots\delta^{b_N}_{a_{N-1}},\tag{3.11}$$

即为两个 N 维单位矩阵的直积 $I\dot{\otimes}I$. 其逆为

$$\big\{(T^{(N)}(u)^{-1})^{i_1}_{i_1}\big\}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}\big|_{u=0}=\delta^{b_1}_{a_2}\delta^{b_2}_{a_3}\cdots\delta^{b_{N-1}}_{a_N}\delta^{b_N}_{a_1},\tag{3.12}$$

其中 $\delta^{b_1}_{a_2}=1$(当 $b_1=a_2$ 时), $\delta^{b_1}_{a_2}=0$(当 $b_1\neq a_2$ 时). 于是，

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\ln\big\{\tau^{(N)}(u)\big\}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}&=\big\{(\tau^{(N)}(u))^{-1}\big\}^{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{c}}\frac{d}{du}\big\{\tau^{(N)}(u)\big\}^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{a}}\big|_{u=0}\\&=\sum_{i=1}^{N}\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\cdots\delta^{b_{i-1}}_{a_{i-1}}\frac{d}{du}\widehat{R}(u)^{b_i b_{i+1}}_{a_i a_{i+1}}\big|_{u=0}\delta^{b_{i+2}}_{a_{i+2}}\cdots\delta^{b_N}_{a_N}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

用空间直积形式写出，则有

$$\frac{d}{du}\ln\tau^{(N)}(u)\big|_{u=0}=\sum_{i=1}^{N}\overset{(1)}{I}\otimes\overset{(2)}{I}\otimes\cdots\otimes\overset{(i-1)}{I}\otimes\frac{d\widehat{R}(u)^{(i,i+1)}}{du}\Big|_{u=0}\otimes\overset{(i+2)}{I}\cdots\otimes\overset{(n)}{I}. \tag{3.14}$$

在一些模型中，其哈密顿量就取为 $\ln\tau^{(N)}(u)$ 展开式的一阶算符系数，这时“局域”哈密顿量为 [5],[12]

$$H_{i,i+1}=\frac{d}{du}\widehat{R}(u)^{(i,i+1)}\big|_{u=1}\quad\left(\text{或 }H_{i,i+1}=\frac{d}{du}\check{R}(u)^{(i,i+1)}\big|_{u=0}\right), \tag{3.15}$$

整个系统的哈密顿量则为

$$H=\sum_{i=1}^{N}H_{i,i+1}. \tag{3.16}$$

再一次强调，从 YBE 形式的角度，$\widehat{R}(u)$ 与 $\check{R}(u)$ 没有什么差别. 因为 (3.15) 的含义是取一个 YBE 的解，将它对谱参数 u 取微商，再令 $u=0$, 就给出其哈密顿密度. 至于取哪个解，则是任意的，对应不同的 H.

(3.15)、(3.16) 是求一类可积系的最简方案，条件是量子空间维数与矩阵空间维数相同，而且 $\ln\tau(u)$ 的一次展开式系数 (仍是量子空间算符) 作为哈密顿量. 作为最简单的例子，将 (1.34) 形式的 $\check{R}(u)$ 代入 (3.15) 中，注意 $\check{R}(u)$– 矩阵是将两个相邻的空间交换，记为 $\check{R}(u)^{(i,i+1)}$, 其中 i 为格点标记. 则在 (1.34) 表示情况，有

$$\check{R}(u)^{(i,i+1)}=I+uP_{i,i+1}. \tag{3.17}$$

$P_{i,i+1}$ 表示 i 与 $i+1$ 格点处自旋的交换，于是

$$H_{i,i+1}=P_{i,i+1},\qquad H=\sum_{i=1}^{N}P_{i,i+1}. \tag{3.18}$$

也就是说，自旋交换算子的总和就是哈密顿量，与 $P_{i,i+1}$ 的具体表示无关. 在自旋为 1/2 时，由 (1.24) 知

$$P_{i,i+1}=\frac{1}{2}\big(1+\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_{i+1}\big), \tag{3,19}$$

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_{i+1}+1\big). \tag{3.20}$$

它仅仅对自旋 1/2 时为正确，也正是通常写的各向同性海森堡链模型. 当自旋不是 1/2 时，用自旋算子表示 $P_{i,i+1}$ 不是件简单的事，比 (3.20) 形式要复杂.

本节介绍的 (3.15) ， (3.16) 是非常实用的. 因为只要找到 (2.4)(或 (2.6)) 的 YBE 的解 ($\widehat{R}(u)$ 或 $\check{R}(u)$)，只要取 $u=0$ 处的斜率，并理解为它是对应于 $(i,i+1)$ 空间的 $H_{i,i+1}$，则立即给出 H. 常常可以把 $\check{R}(u)$ 直接表示为 i 格点与 $(i+1)$ 格点处量子算子的函数，那么 (3.16) 将给出 H 用这些算子直接表达的形式，而不必通过量子空间的表示这一步.

(3.20) 所示的链模型去掉常数项，其哈密顿为

$$\begin{aligned}H_0&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_{i+1}=2\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x+\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y+\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z\big),\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 表示在第 i 个格点处的泡利矩阵. 现在我们讨论它的连续极限. 以前，在孤子理论中有代表性的非线性方程首推非线性薛定谔方程 (Nonlinear Schrodinger Equation, 简称 NSE). 它具有形式

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+2C|\psi(x,t)|^2\psi(x,t), \tag{3.22}$$

其中 C 为作用常数. 在数学物理中，处理这类非线性方程的典型方法是引入 Lax– 对，亦即引入辅助函数矩阵 $\phi(x,t;u)$，使得一对

方程

$$\partial_x \phi(x,t;u) = V(x,t;u)\phi(x,t;u), \tag{3.23}$$

$$\partial_t \phi(x,t;u) = M(x,t;u)\phi(x,t;u) \tag{3.24}$$

的可积条件

$$\partial_x \partial_t \phi = \partial_t \partial_x \phi$$

对任意参数 u 满足. 这样就导致函数矩阵方程

$$\partial_t V(x,t;u) - \partial_x M(x,t;u) + [V(x,t;u), M(x,t;u)] = 0. \tag{3.25}$$

V 与 M 的选择方式非常简单: 它们应使得 (3.25) 与 (3.22) 相一致. 具体说, 可选为

$$V(x,t;u) = i \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u & \sqrt{c}\psi^+ \\ -\sqrt{c}\psi & \frac{1}{2}u \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

$$M(x,t;u) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}u^2 + ic|\psi|^2 & \sqrt{c}(iu\psi^+ - \psi_x^+) \\ -\sqrt{c}(iu\psi + \psi_x) & -\frac{i}{2}u^2 - ic|\psi|^2 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

其中 $\psi_x = \partial_x \psi$. 将 (3.26) 与 (3.27) 代入 (3.25), 对任意 u 的幂次可发现它导致方程 (3.22), 即 NSE. 由经典可积理论可知, (3.27) 可以用基本场量的泊松括号和正则方程代替. 因此, 在哈密顿正则系统中, 可以只考虑 Lax- 对方程中的一个, 即 (3.23). 由于经典可积理论超出本书范围, 我们在承认上述理论基础上, 只考虑 (3.23) 式.

现在我们证明, 当格点间距离 Δ 取连续极限时, $L(u)$ 矩阵 (1.18) 形式的解将趋近 NSE 的 V((3.26) 式) 的量子形式. 由 (1.18) 知, 每个格点 n 处成立

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + u^{-1} \begin{pmatrix} -S_n^3 & S_n^+ \\ S_n^- & S_n^3 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

它是满足 (1.8) 的最简单的解. 其中, 自旋算子满足

$$[S_n^\alpha, S_m^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_n^\gamma \delta_{mn}$$
$$m, n = 1, 2, \cdots, N. \ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \tag{3.29}$$

习惯上, 使用 $S^\pm = S_1 \pm iS_2$, 这时对易关系为

$$[S_m^3, S_n^\pm] = \pm S_n^\pm \delta_{mn}, \tag{3.30}$$
$$[S_m^+, S_n^-] = 2S_n^3 \delta_{mn}. \tag{3.31}$$

现在引入 $S_n^\pm$ 与 S_n^3 用 ψ_n 与 ψ_n^+ 表达的形式. 这里,

$$[\psi_n, \psi_m^+] = \delta_{mn} \cdot 1, \quad N_n = \psi_n^+ \psi_n, \tag{3.32}$$
$$[\psi_n, N_m] = \delta_{nm}\psi, \quad [\psi_n^+, N_m] = -\delta_{mn}\psi^\tau. \tag{3.33}$$

引入

$$S_n^+ = (-i)\frac{2}{\sqrt{\Delta c}}\psi_n^+ \rho(N_n),$$
$$S_n^- = (+i)\frac{2}{\sqrt{\Delta c}}\rho(N_n)\psi_n,$$
$$S_n^3 = \Big(-\frac{2}{\Delta c}\Big)\Big(1 + \frac{\Delta c}{2}N\Big).$$

其中

$$\rho(N_n) = 1 + \beta N_n, \quad \beta = \frac{1}{4}\Delta c \tag{3.35}$$

现在证明 (3.34) 满足 (3.30) 与 (3.31), 即自旋对易关系. 为了计算它, 首先证明以下关系:

$$\begin{aligned}
&\psi_n \rho(N_n) = \rho(N_n + 1)\psi_n, \\
&\psi_n^+ \rho(N_n - 1) = \rho(N_n - 1)\psi_n^+, \\
&\psi_n \rho(N_n - 1) = \rho(N_n)\psi_n, \\
&\psi_n^+ \rho(N_n + 1) = \rho(N_n)\psi_n.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

事实上，由 $\rho^2 = 1 + \beta N$, 有 (以下为方便，略去格点 n 下标)

$$[\psi, \rho^2] = \beta[\psi, N] = \beta\psi.$$

有 $\psi\rho^2(N) = \rho^2(N+1)\psi$. 满足该式的一个最简单的解就是 $\psi\rho(N) = \rho(N+1)\psi$. 它对任意格点 n 成立，即得 (3.36) 的第一式. 可用类似方法证明其他诸式. 利用 (3.36), 直接计算 (3.30) 、 (3.31), 可发现 (3.34) 是正确的选择. 将 (3.34) 代入 (3.28) 中，得 (去掉 n 指标)

$$L(u) = u^{-1} \begin{pmatrix} u + \frac{2}{\Delta c}\left(1 + \frac{\Delta c}{2}N\right) & (-i)\frac{2}{\sqrt{\Delta c}}\psi^+\rho(N) \\ (+i)\frac{2}{\sqrt{\Delta c}}\rho(N)\psi & u - \frac{2}{\Delta c}\left(1 + \frac{\Delta c}{2}N\right) \end{pmatrix}.$$

其中 $N = \psi^+\psi$, $\rho(N) = \left(1 + \dfrac{\Delta c}{4}N\right)^{1/2}$. 稍做整理，得

$$L(u) = \frac{2}{u\Delta c} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\Delta c}{2}u + \frac{\Delta c}{2}\psi^+\psi & i\sqrt{\Delta c}\psi^+\rho \\ (-i)\sqrt{\Delta c}\rho(N)\psi & 1 - \frac{\Delta c}{2}u + \frac{\Delta c}{2}\psi^+\psi \end{pmatrix} \sigma_3, \tag{3.37}$$

其中 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 上式在任意格点 n 处为正确，我们已省略了 n 下标. 以下，我们考虑 $\Delta \to 0$ 时的情况，但这时仍应保持 Δ 为分立，因为只有分立的 Δ 才能保证量子形式. 让我们具体了解这个提法的意义. 在格点情况下，已经要求 ψ_n 与 ψ_n^+ 满足 $[\psi_n, \psi_n^+] = 1$ ($\hbar = 1$), 而在连续情况下， ψ 函数应当用 $\psi(x,t)$ 表示. 因此，应有

$$\psi_n = \Delta^{-1/2} \int_{x_n}^{x_n+\Delta} \psi(x,t)\,dx, \quad \psi_n^+ = \Delta^{-1/2} \int_{x_n}^{x_n+\Delta} \psi^+(x,t)\,dx. \tag{3.38}$$

亦即分立的 ψ_n 应当是连续的 $\psi(x,t)$ 在 Δ 区间的平均值. 当 Δ 很小时，按中值定理， $\int_{x_n}^{x_n+\Delta} \psi\,dx = \overline{\psi(t)} \cdot \Delta$, 其中 $\overline{\psi_n^+(t)}$ 为平均值. 故

有 $\psi_n \sim \Delta^{1/2}$, $\psi_n^+ \sim \Delta^{1/2}$, 也即 $\psi_n^+\psi_n \sim \Delta$. 这样，在 (3.37) 中，$\psi^+\psi$ 项再乘以前面的系数 $\frac{\Delta c}{2}$, 则正比于 Δ^2 数量级，为高阶无穷小，可以丢掉. 于是， $L(u)$ 可简化为

$$L(u)\big|_{\Delta\to 0} = \frac{2}{u\Delta c}\begin{pmatrix} 1+\frac{\Delta c}{2}u & i\sqrt{\Delta c}\psi^+ \\ (-i)\sqrt{\Delta c}\psi & 1-\frac{\Delta c}{2}u \end{pmatrix}\sigma_3. \tag{3.39}$$

上式中已取 $\rho \to 1$, 因为当 $\Delta \to 0$ 时 ρ 与 1 只差二阶无穷小. 由于谱参数 u 是任意的，将 u 换为 $(-iu/c)$, 将它记为 λ, 则有

$$L_n(u)\big|_{\Delta\sim 0} = \Big(\frac{2}{uc\Delta}\Big)\Big(I + i\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2}\lambda & \sqrt{c\Delta}\psi_n^+ \\ -\sqrt{c\Delta}\psi_n & \frac{\Delta}{2}\lambda \end{pmatrix}\Big)\sigma_3. \tag{3.40}$$

其中新的谱参数 $\lambda = -\dfrac{iu}{c}$. 正如前面指出的，从经典意义说，运动方程与谱参数无关， λ 可以任意选取. 在量子理论中，谱参数的重新标度也没什么影响. 由于在 (1.9) 中，当 $L(u)$ 乘以任意常数时，仍不改变 (1.9), 故凡是 $L(u)$ 矩阵前出现公共常数因子时，这个因子可以丢掉. 另外，当 $L(u)$ 作变换

$$L'(u) = L(u)g$$

时，则 (1.9) 从右端施以变换 $g \otimes g$, 有

$$\check{R}(u-v)(L(u)\otimes L(v))(g\otimes g) = (L(v)\otimes L(u))\check{R}(u-v)(g\otimes g)$$

变为

$$\check{R}(u-v)(L(u)g\otimes L(v)g) = (L(v)g\otimes L(u)g)(g^{-1}\otimes g^{-1})\check{R}(u-v)(g\otimes g). \tag{3.41}$$

得到上式时，用到了 $(A\otimes B)(a\otimes b) = Aa\otimes Bb$, 它当矩阵 a 与 b 为数量矩阵时为正确. 由 (3.41) 知，当

$$(g^{-1}\otimes g^{-1})\check{R}(u)(g\otimes g) = \check{R}(u), \tag{3.42}$$

亦即 $\check{R}(u)$ 矩阵为“规范不变”时，则 $L(u)g$ 必仍为 RTT 关系的解. 另外，要提醒的是由于两个独立空间是互相无关的，成立 $(g\otimes g)^{-1}=g^{-1}\otimes g^{-1}$.

在 (3.30) 中， $g=\sigma_3$, $\sigma_3^{-1}=\sigma_3$, 故

$$[\sigma_3\otimes\sigma_3,\check{R}(u)]=0.$$

显然， (1.8) 所示的 $\check{R}(u)$ 满足这个条件. 因此，

$$L_n^{\mathrm{NSE}}(\lambda)=I+i\begin{pmatrix}-\frac{\Delta}{2}\lambda & \sqrt{c\Delta}\psi_n^+\\ -\sqrt{c\Delta}\psi_n & \frac{\Delta}{2}\lambda\end{pmatrix} \tag{3.43}$$

是满足由 (1.8) 所示 $\check{R}(u)$ 所给出的 RTT 关系的局域解. 它并且是 (3.28) 的连续近似形式.

我们已经知道， (3.28) 对应的哈密顿量为

$$\frac{1}{2}H_0=H_{XXX}=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{S}_n\cdot\boldsymbol{S}_{n+1}$$

(见 (3.21) 式). 令格点间矩 $\Delta\to 0$, NSE 的哈密顿量即为 H_{XXX} 的连续极限，因为 $L_n^{\mathrm{NSE}}(\lambda)$ 是 $L_n(u)$ 的连续极限. 当然，在 XXX-模型中，并没有明显的作用常数，然而在 NSE 中出现作用常数 C, 它是在作自旋的 ψ_n 与 ψ_n^+ 表示时引进的自由参数 (见 (3.34)). 通过这个例子，可以看出从 RTT 角度证明不同可积模型联系的一般步骤. 由于在恰当边界条件下， NSE 等价于朗道 - 栗弗席茨方程，而后者的量子形式哈密顿量与 (3.21) 相合，故从 XXX 模型蜕化为 NSE 是必然的. 当然，将 (3.23) 格点化，则它可化为

$$\phi_{n+1}(\lambda)=L_n^{\mathrm{NSE}}(\lambda)\phi_n(\lambda). \tag{3.44}$$

倒回去，便可建立 RTT 关系，也正是 (1.9) 的形式，并具有 $\check{R}(u)$, 它由 (1.8) 所给出，可参阅有关量子反散射方法的著述. 事实上，

历史发展上是先有了经典的 Lax~ 对方程，然后进行量子化，并导致 RTT 关系. 我们只不过为了物理直观而直接从 RTT 出发，从而直接进入量子可积系统，避免了冗长的有关经典理论的讨论.

最后，我们稍微介绍一下 NSE 与一维多体 δ- 函数作用势模型的关系. (3.22) 的哈密顿量为

$$H_{\mathrm{NSE}}=\int(\partial_x\psi\partial_x\psi^*+2c|\psi|^4)\,dx. \tag{3.45}$$

上式中，为强调 ψ 的标量性质，特别记 $\psi^+=\psi^*$. 它是一维场论形式. 讨论量子化时，为求解能量本征值，应解

$$H_{\mathrm{NSE}}|\phi\rangle=E|\phi\rangle. \tag{3.46}$$

状态幅度 $|\phi\rangle$ 应当用一系列动量值表征. 设该动量值分别是 $k_1,k_2,\cdots,k_N$(对应 N 个格点). 用 $\psi^*(x_i)$ 表示在 x_i 点产生算子，$\psi(x_i)$ 表示 x_i 处的消灭算子. 显然，将 $\psi(x_i)$ 作用在真空态应为 0. 这样，一般 $|\phi(k_1,k_2,\cdots,k_N)\rangle$ 可表示为

$$\begin{aligned}|\phi(k_1,k_2,\cdots,k_N)\rangle=\int\prod_{j=1}^{N}dx_j e^{i(\sum_{i=1}^{N}k_ix_i)}\chi(k_1,\cdots,k_N,x_1,\cdots,x_N)\\ \cdot\prod_{k=1}^{N}\psi^*(x_k)|0\rangle.\end{aligned} \tag{3.47}$$

将 (3.47) 代入 (3.46), 发现如果 χ 满足以下方程：

$$H_N=-\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2+2C\sum_{i<j}^{N}\delta(x_i-x_j), \tag{3.48}$$

$$H_N\chi=E\chi, \tag{3.49}$$

则 (3.47) 必满足 (3.46), 且本征值为

$$E=\sum_{i=1}^{N}k_i^2. \tag{3.50}$$

(3.48) 称为具有 δ- 函数作用势的一维多体相互作用哈密顿量. 只要求出 (3.48) 的解 χ, 代入 (3.47), 则必然满足 NSE. 观察 (3.50), 似乎能量是由自由粒子构成的, 实际上不然. 因为将 (3.48) 对角化时, 诸 k_i 不能任意, 它们必然满足一定条件时才能有形如 (3.50) 的解. 这是很自然的, 因为现在有非线性相互作用, 它必然会表现出来. 因为 (3.47)~(3.49), 可以说 NSE 与一维多体 δ- 作用势模型间是等价的. 求解 (3.48), 自然找到 NSE 的解. (3.48) 是一次量子化形式, 亦即是通常量子力学, 而 (3.47) 是二次量子化, 亦即把 $\psi(x_n)$ 又量子化. 但从这个例子看到, 这种二次量子化并没有比一次量子化告诉更多的知识. 这是由于在粒子数守恒时, 量子多体问题与量子场论 (二次量子化理论) 本质上并没有多大区别. 对多数模型来说, 它们是等价的. 当然, 有时, 将场论哈密顿量的本征值问题化为多体本征值问题是极为困难的事, 对有些模型至今未能找到恰当的形式.

最后, 为了让不熟悉贝特假设 (Bethe-Ansatz) 方法的读者了解 (3.50) 中 k_i 应满足的条件, 我们简单给出一点证明. 有关这类计算, 可以在许多书中找到. 我们以下只针对 (3.48) 本征值问题作一点介绍.

先考虑 $N=2$ 的情况. 引入阶梯函数 $\theta(x)=1$ (当 $x>0$ 时); $\theta(x)=0$(当 $x<0$ 时). 则 (3.48) 的波函数可写为

$$\psi(x_1,x_2)=\theta(x_2-x_1)\psi_{12}(x_1,x_2)+\theta(x_1-x_2)\psi_{21}(x_1,x_2).$$

由于是玻色子, 有

$$\psi(x_1,x_2)=\psi(x_2,x_1).$$

因此,

$$\psi_{12}(x_1,x_2)=\psi_{21}(x_2,x_1).$$

而当 $x_1 \neq x_2$ 时， $\psi(x_1, x_2)$ 是平面波，由于 $x_1 = x_2$ 时 $\psi(x_1, x_2)$ 为连续 (其在该点的微商不连续), 有

$$\psi_{12}(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_1x_2+k_2x_1)},$$
$$\psi_{21}(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_2x_1+k_1x_2)} + A_{21}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}.$$

在 $x_1 = x_2$ 时，由于有 δ- 函数存在，波函数会受到影响. 引入质心坐标 x 和相对坐标 y:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = x_2 - x_1,$$

则

$$\psi(x, y) = e^{ikx}\phi(y).$$

其中 $k = k_1 + k_2$, 而 $\phi(y)$ 为

$$\begin{aligned}\phi(y) =& \theta(y)\left(A_{12}e^{i(k_2-k_1)y/2} + A_{21}e^{-i(k_2-k_1)y/2}\right) \\ &+ \theta(-y)\left(A_{12}e^{i(k_2-k_1)y/2} + A_{21}e^{-i(k_2-k_1)y/2}\right).\end{aligned}$$

将它代入 (3.49) 式， $\phi(y)$ 满足定态方程

$$2\Big[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c\delta(y)\Big]\phi(y) = E\phi(y).$$

在 $y = 0$ 处， $\phi(y)$ 的一阶微商必满足

$$\frac{\partial\phi(y)}{\partial y}\Big|_{y=0^+} - \frac{\partial\phi(y)}{\partial y}\Big|_{y=0^-} = C\phi(0).$$

将 $\phi(y)$ 代入后，得到系数应满足的条件:

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = -\frac{C - i(k_2 - k_1)}{C + i(k_2 - k_1)} = e^{i\Delta(k_2-k_1)}.$$

其中函数 $\Delta(k)$ 满足

$$\Delta(k) = i \ln \frac{ik + C}{ik - C}.$$

假定粒子在 $(0, L)$ 中运动，波函数具有周期性边界条件：

$$\psi(0, x_2) = \psi(L, x_2),$$

于是得到

$$A_{12} = A_{21} e^{ik_1 L}, \qquad A_{21} = A_{12} e^{ik_2 L},$$

再由两者之比，得到

$$e^{ik_i L} = e^{i\Delta(k_j - k_i)}. \qquad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2)$$

上式取对数，得

$$k_i L = 2\pi n_i + \sum_{i \neq j}^{N=2} \Delta(k_j - k_i). \qquad n_i = \text{整数}$$

上式虽然是从 $N = 2$ 得到的，经过贝特假设，可以推广到 N. 原因是，只要整个问题可以分解为许多两体散射，则对随便第 i 与第 j 个粒子的碰撞，可将 i 理解为粒子 1，而将 j 理解为粒子 2. 于是，由于两个粒子时将平面波代入薛定谔方程得到的 $E = k_1^2 + k_2^2$ 推广到 $E = \sum_{i=1}^{N} k_i^2$，相应的 k_i 则满足限制条件. 这个条件可改写为

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i + \frac{1}{L} \sum_{i \neq j}^{N} \Delta(k_j - k_i).$$

上式右端第一项的意义很明显，正是 $(0, L)$ 的边条件限制的动量值；第二项则来源于相互作用，且相互作用常数 $C = 0$ 时 $\Delta(k) = 0$；而当 $C > 0$ 时，表示由 i 与 j– 粒子间的碰撞作用引起的附加部

分. 整个作用是非线性的, 所以动量 k_i $(i=1,2,\cdots,N)$ 满足一个超越方程. 如能解出这个方程允许的动量 k_i 的值, 再代入 $E=\sum_{i=1}^{N}k_i^2$ 中, 即得到系统的能量. 这种由两个粒子推广到 N 个粒子的自洽条件就是 YBE.

贝特假设方法的本质, 是将非线性偏微分方程化为代数方程. 求上述微分方程谱问题往往是相当困难的. 但如果能猜到一组基函数, 而整个波函数用这些基函数展开, 代入该微分方程后, 如果它能变为决定展开式系数的代数方程的话, 那么代数方程一定有解. 所以问题的关键是什么样的基函数可以完成这个任务. 这全看具体问题而定. 本问题中, 基函数就是平面波. 所谓贝特假设, 就是指要猜"好"的基函数, 并没有完整的数学定理所告诉我们为什么要这么选. 在本问题中, 容易看到, 由于相互作用是 δ– 函数, 没有碰撞时, 一定是自由的, 故选为平面波. 因此, 解非线性问题时, 贝特假设可理解为傅里叶变换的推广. 贝特假设是解非线性问题的有力工具, 原则上不必限定在一维, 它也是比杨 - 巴克斯特系统更广的理论. 限于篇幅与本书目的, 我们不拟再深入讨论. 尤其是这个方法的缺点 (缺乏更广的对称性等), 由于需要更多的知识才能理解, 这里从略.

§4 求解 RTT 关系举例: 哥尔雅切夫 – 恰波列金陀螺

给定某个 $\check{R}(u)$(或 $R(u)$), 求解 $T(u)$ 并不是一件容易的事. 在 §1 中把 $L(u)$ 取成了很特殊的形式, 即只包含 u^{-1} 的幂次项. 由于 (1.30) 的限制, $L(u)$ 的矩阵元作为量子算符具有很简单的性质, 例如角动量对易关系等. 为了获得更一般幂次的转移矩阵的解, 可以将 $L(u)$ 理解为在第 n 个格点处的局域转移矩阵. 将 N 个局域性的 $L_n(u)$ 连乘, 便决定了一种整体局域转移矩阵 $T(u)$. 它与

$L(u)$ 一样，满足相同的 RTT 关系. 这已在 (1,40)~(1,43) 中讨论过了. 从 RTT 关系的解的角度而言，这种解相当特殊，有时过于简单. 获得更一般解的一般方法应是把 $T(u)$ 用 u^{-1} 展开，代入 RTT 关系，列出每阶的限制方程，再用已知物理算符加以实现. 当展开式为无穷阶时，RTT 关系规定的对易关系为无穷多，以后我们将详细讨论. 这里要指出的是，根据德林菲尔德 (Drinfeld) 定理，u^{-1} 与 u^{-2} 阶的算符间的对易关系是最基本的. 只要满足这两阶所有的关系，那么所有高阶关系将被它们所决定. 这是一件很奇妙的事：无穷阶关系仅由前两阶决定. 这是完全可积性很强的限制的结果.

另一种情况则是当 $T(u)$ 取有限阶展开式而又不能表示成相应阶 $L_n(u)$ 连乘的情况. 这时要直接求解 RTT 关系，比无穷阶的情况要复杂. 因为有无穷展开时，高阶关系由低阶迭代而成，总是一阶一阶地向高扩展，有固定关系式，没有其他限制. 但当 $T(u)$ 展开式有限，即有最高幂次时，相当于强加了截断的条件，又要使它满足 RTT 关系，这样，高阶反过来要影响低阶关系，无法迭代，只能直接猜解. 现在考虑一个有限阶 $T(u)$ 的例子：

$$T(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+u^{-1}T^{(1)}+u^{-2}T^{(2)}+u^{-3}T^{(3)}, \tag{4.1}$$

其中

$$T^{(m)}=\|T^{(m)}_{ab}\|. \qquad a,b=1,2, \quad 1\leqslant m\leqslant 3$$

因为每个 $T^{(n)}$ 有 4 个矩阵元，共有 12 个未知矩阵元，代入 RTT 关系后出现极多关系，这里 $\check{R}(u)$ 仍取简单形式 (1.8). 所谓求解，就是将这 12 个未知元用已知的量子力学基本算符表示出来，并满足 RTT 规定的所有关系. 在 (4.1) 中，右端第一项中不是单位矩阵 I 而是没有右下角元的奇异矩阵. 这是根据 m 有限时，满足 RTT 的 $T(u)$ 实际有解的条件而写出的.

由于 RTT 规定的关系式极多，为了获取充分解，常常事先根据经验预先设定 $T^{(m)}$ 中某些矩阵元为 0, 这将大大简化计算. 这种解绝不是唯一的，本质上是猜解，强烈的依赖于经验. 显然，对同一个 $R(u)$ 矩阵 (1.34), 将 (4.1) 代入 (2.1), 注意到 $T^{(0)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 比较不同 u^{-1} 与 v^{-1} 的幂次的各个关系，可以得到一系列关系. 为了方便，我们列出所有关系式如下：

$$\begin{aligned}
&[T_{11}^{(n)},T_{12}^{(1)}]=-T_{12}^{(n)},\quad [T_{11}^{(n)},T_{21}^{(1)}]=T_{21}^{(n)},\\
&[T_{12}^{(1)},T_{21}^{(n)}]=T_{22}^{(n)}, \qquad\qquad (n=1,2,3)\\
&[T_{22}^{(n)},T_{12}^{(1)}]=[T_{22}^{(n)},T_{21}^{(1)}]=[T_{11}^{(n)},T_{22}^{(1)}]=0;
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
&T_{12}^{(3)}=[T_{12}^{(2)},T_{11}^{(2)}]+T_{11}^{(2)}T_{12}^{(1)}-T_{11}^{(2)}T_{12}^{(2)},\\
&T_{21}^{(3)}=[T_{11}^{(2)},T_{21}^{(2)}]+T_{21}^{(1)}T_{11}^{(2)}-T_{21}^{(2)}T_{11}^{(1)},\\
&[T_{22}^{(2)},T_{12}^{(2)}]+T_{12}^{(1)}T_{22}^{(2)}-T_{12}^{(2)}T_{22}^{(1)}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[T_{21}^{(2)},T_{22}^{(2)}]+T_{22}^{(2)}T_{21}^{(1)}-T_{22}^{(1)}T_{21}^{(2)}=0,\\
&[T_{21}^{(2)},T_{12}^{(2)}]+T_{11}^{(1)}T_{22}^{(2)}-T_{11}^{(2)}T_{22}^{(1)}+T_{22}^{(3)}=0,\\
&[T_{11}^{(2)},T_{22}^{(2)}]=T_{21}^{(2)}T_{12}^{(1)}-T_{21}^{(1)}T_{12}^{(2)};
\end{aligned} \tag{4.3}$$

与

$$\begin{aligned}
&[T_{11}^{(3)},T_{12}^{(3)}]=T_{11}^{(3)}T_{12}^{(2)}-T_{11}^{(2)}T_{12}^{(3)},\\
&[T_{22}^{(3)},T_{12}^{(3)}]=T_{12}^{(3)}T_{22}^{(2)}-T_{12}^{(2)}T_{22}^{(3)},\\
&[T_{21}^{(2)},T_{12}^{(3)}]=T_{11}^{(3)}T_{22}^{(2)}-T_{11}^{(2)}T_{22}^{(3)},\\
&[T_{22}^{(3)},T_{21}^{(3)}]=T_{22}^{(3)}T_{21}^{(2)}-T_{22}^{(2)}T_{21}^{(3)},\\
&[T_{11}^{(3)},T_{21}^{(3)}]=T_{21}^{(3)}T_{11}^{(2)}-T_{21}^{(2)}T_{11}^{(3)},\\
&[T_{11}^{(3)},T_{22}^{(3)}]=T_{21}^{(3)}T_{12}^{(2)}-T_{21}^{(2)}T_{12}^{(3)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

和

$$[T_{ab}^{(n)}, T_{bc}^{(m)}] = [T_{ab}^{(m)}, T_{bc}^{(n)}]. \qquad (m, n \leqslant 3, \quad a, b = 12) \tag{4.5}$$

由于方程过于复杂，为了求充分解，我们先对 $T_{ab}^{(n)}$ 的形式 $(n \leqslant 3)$ 作一些假定，然后用猜解的方式逐个验证这些关系. 结论是，所有这些矩阵元都可以用更基本的算符集合 A 表示出来，A 由以下算子组成：

$$A(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{x}; P, Q),$$

即由转动的角动量 $\boldsymbol{L}$, 坐标 (三维)$\boldsymbol{x}$, 系统质心的动量 P 与质心坐标 Q 表示出来. 由于质心动量 P 和质心坐标 Q 与转动的量对易，而 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 满足通常熟知的对易关系

$$\begin{aligned}
&[P, Q] = -i, \\
&[L_\alpha, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma, \\
&[L_\alpha, x_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma, \\
&[P, \boldsymbol{L}] = [Q, \boldsymbol{L}] = [P, \boldsymbol{x}] = [Q, \boldsymbol{x}] = [x_\alpha, x_\beta] = 0.
\end{aligned} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{4.6}$$

或将其写为 $L_\pm, x_\pm$ 的形式：

$$\begin{aligned}
&[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad [L_+, L_-] = 2L_3, \\
&[L_3, x_\pm] = \pm x_\pm, \quad [L_\pm, x_3] = \pm x_3, \\
&[L_+, x_-] = 2x_3, \quad [L_-, x_+] = -2x_3.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

由于 (4.1) 中 $T^{(0)}$ 项 $T_{22}^{(0)} = 0$, 易知必有 $T_{22}^{(1)} = 0$. 这样，(4.1) 中 $T^{(1)}$ 的形式便与 (1.17) 类似. 唯一可以变动的是在 $T_{12}^{(1)}$ 或 $T_{21}^{(1)}$ 中再引入与 P, Q 完全对易的算子，这样才会与 $T^{(2)}$ 构成不对易集合，引出新的算子. 整个计算十分繁琐，我们只给出结果，具体计算可参阅 [15]. 除了下述矩阵元，其他预先设为 0, 不为 0 的矩阵

元为：

$$
\begin{aligned}
&T_{11}^{(1)}=\alpha P,\quad T_{12}^{(1)}=\beta e^{\tau Q}x_+, T_{21}^{(1)}=\gamma e^{-\tau Q},\\
&T_{11}^{(2)}=-\frac{1}{4}\Big(L^2+3L_3^2+\frac{1}{4}\Big)-\alpha P L_3+fx_-,\\
&T_{22}^{(2)}=\beta\gamma x_+,\quad T_{21}^{(2)}=-\gamma e^{-\gamma Q}L_3,\\
&T_{12}^{(2)}=-\beta e^{\gamma Q}\Big\{\frac{1}{4}[L_+,x_3]_+-x_-(L_3+\alpha P)\Big\},\\
&T_{11}^{(3)}=-\frac{1}{4}(\alpha^{-1}L_3+P)\Big(L^2-L_3^2+\frac{1}{4}\Big)-\frac{1}{4}f[L_-,x_3]_+,\\
&T_{22}^{(3)}=-\frac{1}{4}\beta\gamma[L_+,x_3]_+,\\
&T_{12}^{(3)}=-\beta e^{\gamma Q}\Big\{fx_3^2+\frac{1}{4}\alpha[L_+,x_3]_+(P+\alpha^{-1}L_3)\Big\},\\
&T_{21}^{(3)}=-\frac{1}{4}\gamma e^{-\gamma Q}\Big(L^2-L_3^2+\frac{1}{4}\Big).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

在计算中用到了

$$
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{x}=0,\quad \sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha^2=(\boldsymbol{x})^2=1, \tag{4.9}
$$

上式中 β,γ,τ,f 均为任意常数. 事实上, (4.9) 的成立是代数关系 (4.7) 的必然结果 (当不存在磁单极时). 因为 (4.9) 与 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{x}$ 均对易, 可取为常数. 很容易计算 $\mathrm{tr}\,T(u)=\sum\limits_{\alpha=1}^{2}T(u)_{\alpha\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,T(u)=&1+u^{-1}\alpha P\\
&+u^{-2}\Big\{-\frac{1}{4}(L^2+3L_3^2+\frac{1}{4})-\alpha P L_3+fx_-+\beta\gamma x_+\Big\}\\
&-\frac{1}{4}u^{-3}\Big\{(\alpha P+L_3)(L^2+3L_3^2+\frac{1}{4})+f[L_-,x_3]_+\\
&+\beta\gamma[L_+,x_3]_+\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

其中 $[A,B]_+=AB+BA$. 于是，可以定义守恒量为

$$\begin{aligned}H_p=&\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{4}(L_1^2+L_2^2+4L_3^2)+\alpha PL_3-fx_--\beta\gamma x_+\Big\}+\frac{1}{16}\\G_p=&\frac{1}{4}\Big\{(\alpha P+L_3)\Big(L_1^2+L_2^2+4L_3^2+\frac{1}{4}\Big)\\&+f[L_-,x_3]_++\beta\gamma[L_+,x_3]_+\Big\}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

为了简单，可选 $\beta\gamma=-f$, 则得哈密顿量为

$$H_p=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{4}(L_1^2+L_2^2+4L_3^2)+\alpha PL_3-2fx_1\Big\}+\frac{1}{16},\tag{4.12}$$

其中 α,f 为任意常数. H_p 的意义是一个刚性电磁椭球陀螺仪. 其质心动量为 P, 处于沿 $x_1=x$ 轴的常数电场中. 设想 P 为 y 方向，它是守恒量，质心在上述电场中运动，产生了自身的磁场，因而有 $(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{L}\sim\alpha pL_3$ 项. 这种陀螺仪曾由斯克鲁言 (Sklynin) 研究过，并求得能谱 [12]. 这里只是以它作为一个例子，说明求 RTT 关系的一个显示求解的演示过程. 当然，围绕 G–C 陀螺，仍有有趣的物理问题值得讨论 [16].

通过这个例子，看出以下几点：

1. 给定 $\breve{R}(u)$ 或 $R(u)$, 由 RTT 关系给出的一系列关系规定了算符 $T_{ab}^{(m)}$ 的对易关系. 但具体实现这样关系的方式有无穷多种. 所谓“解” RTT 关系，是指将众多上述关系用最简单的“基本”对易关系及“基本”算符予以实现. 换言之，复杂的众多关系 (4.2)~(4.5) 只不过是基本关系 (4.6) 中算子组合而成.

2. 完成上述过程后，即可用适当方式定义守恒量族. 当 $T(u)$ 用 u^{-1} 展开至 m 幂次时，除了 $m=0$ 平凡情况外，必存在 $m-1$ 个彼此对易的集合 (2.1). 在许多情况下， m 可能是无穷大，这时将存在无穷多个守恒量. 但无论 m 有限或无限，其所有的守恒量均可由 $T(u)$ 给出，亦即由 RTT 关系导致的系统必为完全可积.

3. $m=\infty$ 是一维孤子行为特点，因为这时孤子存在无穷多守恒量. 而 m 有限，一般对应非孤子行为，相应的有限展开转移矩阵导致的守恒量自然为有限个. 用以实现 $T^{(m)}$ 的物理算子也不限于一维. 本例中，基本算符就是三维空间角动量、坐标等组合而成.

最后要指出，(4.6) 所示的对易关系是相当广泛的，它们可以用通常量子力学算符实现，也可以用量子场论实现. 除了质心部分是海森堡代数之外，$\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 组成了三维欧氏空间转动－平移代数，即 $E(3)$ 代数. 因此，可以说，G–C 陀螺本质上是 $E(3)$ 代数通过 RTT 关系而实现的一种映射. 这种映射行为是有限转移矩阵 $T(u)=\sum\limits_{n=0}^{m}u^{-n}T^{(n)}$ (m 有限) 的共同特点.

第 2 章

杨 - 巴克斯特方程与三体散射的因式化

本书第 1 章简要介绍了有关 RTT 与量子力学中对易关系之间的联系，核心是存在一个 $R(u)$- 矩阵. 现在集中讨论它的含义. 我们将要阐明， $\check{R}(u)$- 矩阵其实就是一维动量空间的无反射散射矩阵.

§5 一维散射矩阵

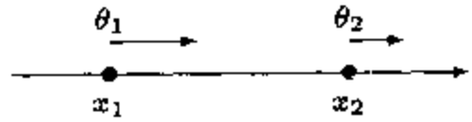
假设在一维空间中有粒子，它带有内部自由度 (以 i 标记). 设粒子具有的快度为 θ, 并设其质量为 m, 能量为 $\mathcal{E}$, 动量为 p, 则快度 θ 定义为

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^2 = p^2 + m^2, \quad (c = 1) \\ &\mathcal{E} = m\mathrm{ch}\,\theta, \quad p = m\mathrm{sh}\,\theta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

因为 $\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta = 1$, 故能量、动量关系得以保持. 当 $v/c \ll 1$ (c 为光速) 时， θ 就是速度，因此快度是速度在相对论中的一种推广形式. 设粒子的波函数为 $\Psi_i(\theta)$, 它表示该粒子具有内部自由度 i(自旋或同位旋等) 以及快度 θ. 现在两个粒子间发生碰撞，碰撞前处在 x_1 处的 θ_1 一定大于处在 x_2 处的快度 θ_2, 在碰撞后则相反，这就是弹性散射. 在碰撞后两者交换了动量，令 θ_1 对应的动量为 $k_1\hbar$, 而与 θ_2 对应的动量为 $k_2\hbar$, 则如图 5–1 所示.

碰撞前波函数

$$\Psi_{入} \sim e^{i(k_1x_1+k_2x_2)};$$



碰撞后波函数

$$\Psi_{出} \sim e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}.$$

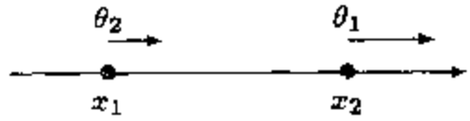


图 5-1

注意图 5-1 中 $\theta_i(i=1,2)$ 代表相应动量 p_i 所对应的快度，由 (5.1) 给出. k_i 为波矢 ($p_i=\hbar k_i$), 现在取 $\hbar=1$, 故 k_i 也就是动量，它们都是一维的，所表示的碰撞是弹性的，并且没有反射. 上面所表出的入射与出射波函数仅是非相对论碰撞时的示意形式，此时 θ_i 正是相应 i 粒子的速度. 在相对论碰撞时，两个粒子的 $(1+1)$ 维动量 $P=(\mathcal{E},p)$ 平方是 $(1+1)$ 维洛仑兹不变量，这里坐标是一维的，而相应于时间分量的 p_0 则为能量. 两个粒子碰撞前后的不变量为

$$S=(P_1+P_2)^2=(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)^2-(p_1+p_2)^2.$$

由于 $\mathcal{E}_i=m\mathrm{ch}\,\theta_i$, $p_i=m\mathrm{sh}\,\theta_i$ $(i=1,2)$, 代入上式，得

$$S=2m^2+2(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2-p_1p_2)=2m^2+2m^2(\mathrm{ch}\,\theta_1\mathrm{ch}\,\theta_2-\mathrm{sh}\,\theta_1\mathrm{sh}\,\theta_2).$$

由于 $\mathrm{ch}(\theta_1-\theta_2)=\mathrm{ch}\,\theta_1\mathrm{ch}\,\theta_2-\mathrm{sh}\,\theta_1\mathrm{sh}\,\theta_2$, 故有

$$S=2m^2(1+\mathrm{ch}(\theta_1-\theta_2)).$$

也就是说，在相对论碰撞中，动量和能量可以互相转换；但在整个系统中，$\mathrm{ch}(\theta_1-\theta_2)$ 却是洛仑兹不变量. 在碰撞时，两个粒子不但可以交换动量，也可以交换内部自由度，例如自旋等. 所以，当交换快度 θ_1 与 θ_2 时，两个渐近波函数间可相差某个矩阵 [4],[17](相

重指标代表求和):

$$\Psi_i(\theta_1)\Psi_j(\theta_2) = S_{ij}^{kl}(\theta_1-\theta_2)\Psi_k(\theta_2)\Psi_l(\theta_1). \tag{5.2}$$

上式表示两个粒子散射前后相差一个 $S-$ 矩阵，由于洛仑兹不变性，它必须依赖于 $\theta_1-\theta_2$，相重内部指标表示求和. 例如当 i,j 表示自旋 $\frac{1}{2}$ 时，如有 $i=+, j=-$ 入射，则末态一定会有 $+-,-+$ 的组合出现. 由于 $\Psi_i(\theta_1)$ 与 $\Psi_j(\theta_2)$ 为量子算符，将来要作用在某个态上，因此必须有

$$(\Psi_i(\theta_1)\Psi_j(\theta_2))\Psi_k(\theta_3) = \Psi_i(\theta_1)(\Psi_j(\theta_2)\Psi_k(\theta_3)). \tag{5.3}$$

它表明先发生 j,k 碰撞，再与“自旋 i”的碰撞，应当等于具有“自旋” k 粒子与先前发生 i,j 碰撞后，再撞的结果. 这就是算子的结合律. 如三个粒子情况它成立，则再多的算子的结合律均可以得到保证. 我们来看结合律会导致什么结果.

由 (5.3) 的左端，有

$$\begin{aligned}
&(\Psi_i(\theta_1)\Psi_j(\theta_2))\Psi_k(\theta_3) = S(\theta_1-\theta_2)_{ij}^{mn}\Psi_m(\theta_2)\Psi_n(\theta_1)\Psi_k(\theta_3)\\
&= S(\theta_1-\theta_2)_{ij}^{mn}\Psi_m(\theta_2)S(\theta_1-\theta_3)_{nk}^{st}\Psi_s(\theta_3)\Psi_t(\theta_1)\\
&= S(\theta_1-\theta_2)_{ij}^{mn}S(\theta_1-\theta_3)_{nk}^{st}\Psi_m(\theta_2)\Psi_s(\theta_3)\Psi_t(\theta_1)\\
&= S(\theta_1-\theta_2)_{ij}^{mn}S(\theta_1-\theta_3)_{nk}^{st}S(\theta_2-\theta_3)_{ms}^{pr}\\
&\quad\cdot\Psi_p(\theta_3)\Psi_k(\theta_2)\Psi_t(\theta_1).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

上式中 S_{nk}^{st} 为 $C-$ 数矩阵元，所以它可以任意移过算子 Ψ_m 等. 重复上面作法，从 (5.3) 右端出发不断改变 Ψ_i, Ψ_j 与 Ψ_k 的次序，得

$$\begin{aligned}
&\Psi_i(\theta_1)(\Psi_j(\theta_2)\Psi_k(\theta_3))\\
&\quad= S(\theta_2-\theta_3)_{jk}^{mn}S(\theta_1-\theta_3)_{im}^{ps}S(\theta_1-\theta_2)_{sn}^{rt}\\
&\qquad\cdot\Psi_p(\theta_3)\Psi_r(\theta_2)\Psi_t(\theta_1).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

比较 (5.4) 与 (5.5) 右端，遂得

$$S(u)_{ij}^{mn}S(u+v)_{nk}^{st}S(v)_{ms}^{pr} = S(v)_{jk}^{mn}S(u+v)_{im}^{ps}S(u)_{sn}^{rt}. \qquad (5.6)$$

其中 $u=\theta_1-\theta_2$, $v=\theta_2-\theta_3$, $u+v=\theta_1-\theta_3$.

将 (5.6) 与 (2.6) 相比较，易知

$$S(u) = \check{R}(u). \qquad (5.7)$$

所以，$\check{R}(u)$ 的物理意义是一维无反射的弹性散射 $S-$ 矩阵. 它的图示如下：

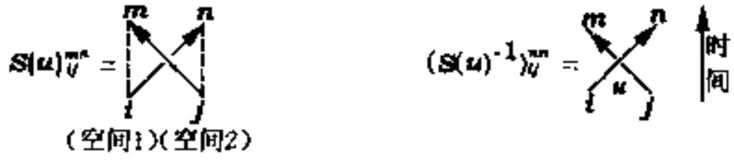


图 5–2

(5.6) 的图示为：

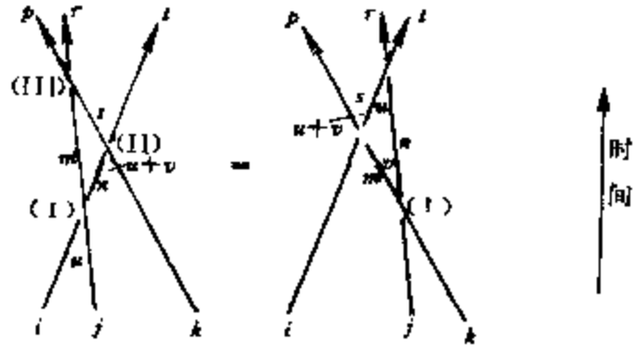


图 5–3

亦即入态三个粒子“自旋”分别为 i,j,k, 而出态为 p,r,t, 这种三体碰撞通过三个两 - 两散射矩阵实现. 为了保证动量守恒，将任一条线平行移动，不增、减交点及保证上、下线相交规则，就是 (5.6).

这里要指出，与图 1–1 不同，与 S_{ij}^{mn} 相联系的空间的标号是观察者认同的空间标号，即与碰撞历史无关. 固定空间 1 与 2, 发

生如图 5–2 所示的碰撞之后，粒子由内度自由度 j 变为具有 m，这时粒子处于观测地点所属的第 1 空间. 所以 i 与 m 属于空间 1，而 j 与 n 属于第 2 空间，类似地，图 5–3 中，i 与 p 属于空间 1，j 与 r 属于空间 2，而 k 与 t 则属于空间 3.

由这样的观测空间约定，图 5–3(I) 处之交叉点代表 $S_{12}(u_{12})$，其中 $u_{12}=u_1-u_2$，图中用 u 代表. 而随时间演化，在 (II) 处交叉则代表发生在固定空间 2 与 3 间发生的碰撞，以 $S_{23}(u_{23})$ 表示，其中 $u_{23}=u_2-u_3=u+v$. 最后，又在固定空间 1 与 2 中发生碰撞，以 $S_{12}(u_3-u_1)$ 代表 (III)，这时 $u_3-u_1=v$，因为快度 (这里以 u 表示) 是与粒子相联系的. 其实 S_{12} 与 S_{23} 的宗量可以任意写，只要保证 $S_{12}(u)S_{23}(u+v)S_{12}(v)$ 中两端宗量之和等于当中的宗量即可. 同理，图 5–3 的右端可写为 $S_{23}(u)S_{12}(u+v)S_{23}(u)$，图 5–3 正是表示

$$S_{12}(u)S_{23}(u+v)S_{12}(v)=S_{23}(v)S_{12}(u+v)S_{23}(u).$$

因为 $R(u)^{kl}_{ij}=\check{R}(u)^{kl}_{ji}=S(u)^{kl}_{ji}$，所以 $R(u)^{kl}_{il}$ 的图形也是图 5–2 所示. $R(u)$ 与 $S(u)$ 的差别在于，$R(u)$ 的内部空间的指标是“随粒子跑的”：

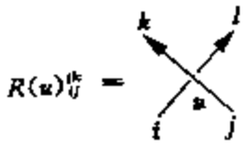


图 5–4

即 i 与 l 联结，j 与 k 联结. 这样，如把 i 这条线叫空间 (粒子空间) 1，则 j 这个空间叫空间 2，不同空间的线不能联结. 从这个角度看，将图 5–3 中 i,j 与 k 的线记为空间 1,2 与 3，则可表示如图 5–5 所示的三体散射矩阵的分解图形.

图 5–4 正是图 1–1，它的意义已详细解释过了.

图 5–5 表示三体碰撞的 S– 矩阵能够分解成为三个两体散射的条件：粒子 1 与粒子 2 先碰撞，再由粒子 1 与粒子 3 相碰，最

后由 2 与 3 碰，应当等于 2 与 3 先碰、 3 与 1 再碰，最后 1 与 2 再碰. 考虑动量守恒引起的图示角度关系，可简示为图 5–5.

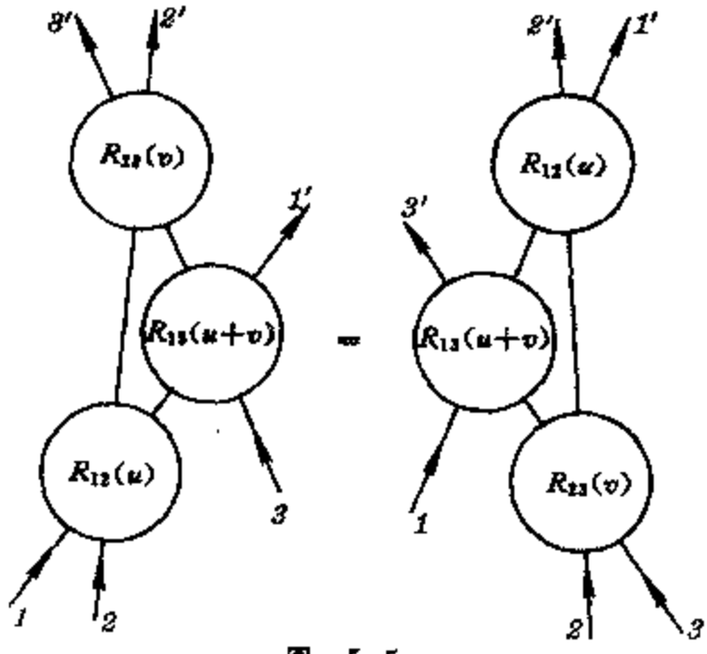


图 5-5

在图 5–5 中， 1,2,3 表示三个粒子的空间. 这种分解称为 S– 矩阵的因式化. 事实上，如果将三体碰撞 S– 矩阵分解为三个两体 S– 矩阵，那么只有如图 5–5 所示的两种可能，它们必须相等，否则便不能作这种分解了. 这种因式化是认为不存在三体直接作用，因而多体散射都是通过许多两体散射而进行的. 因此， YBE 的本质是假设多体散射都可以分解为两体散射，因为只要三体散射能够因式化，可以证明多体散射必可因式化.

同样地，图 5–3 也可以用 $\check{R}(u)$– 矩阵说明. $\check{R}(u)=S(u)$ 是表示从空间观察点的角度确定的碰撞矩阵. 可以这样理解：在空间沿时间方向划三条虚线，代表三个固定空间；当粒子线跑到那个空间，便记为那个空间的标号. 碰撞后，便忘掉了历史，只记处于那个固定的空间. 这样，第 1 个空间与第 2 个空间交叉一下，便记为 $\check{R}_{12}(u)$, 其中 u 为两线夹角变量. 因为只有相邻的两个空间交叉 (散射一次), 所以只存在 $\check{R}_{12}(u)$ 、 $\check{R}_{23}(u)$, 不会存在 $\check{R}_{13}(u)$. 例如

在图 5-3 中 ip 间的虚线为空间 1, jr 间如连一虚线则代表空间 2, kt 间为空间 3. 其左端点 (Ⅰ) 表示 $\check{R}_{12}(u)$, 而 (Ⅱ) 处表示 2 与 3 空间交叉, 即 $\check{R}_{23}(u+v)$, 但 (Ⅲ) 点处发生 $\check{R}_{12}(v)$. 对其右端, 也同样记法, 故得

$$\check{R}(u=0)=I, \tag{5.8}$$

$$R(u=0)=P. \tag{5.9}$$

由于 $\check{R}(u)=S(u)$, 以后我们把 $u\to\infty$ 时的极限值记为

$$\lim_{u\to\infty}\check{R}(u)=\lim_{u\to\infty}S(u)\equiv S. \tag{5.10}$$

它显然是两体 S- 矩阵的渐近行为. 稍将空间扩展一下, 可以由 S 定义辫子群, 不过本书不拟多讨论这方面问题, 这是一个很大的领域, 可参阅 [18] 、 [19].

§6 $\check{R}(u)$- 矩阵的一些性质

既然 $\check{R}(u)$ 是两体散射的 S- 矩阵, 它便具有许多相应的性质. 我们注意到 $\check{R}(u)$ 满足矩阵方程, 这是个很宽的限制, 凡是保证 (2.7) 形式的解全是 YBE 的解. 我们强调以下几点:

1. 显然, $\check{R}(u)$(或 $R(u)$) 乘以任意函数都仍是 YBE 的解. 因为函数不是矩阵, 它与 $\check{R}(u)$ 可换, 两边可以消去, 所以 YBE 的解可以添加任意包括依赖于 u,v 的函数. 当然, 当 $\check{R}(u)$ 作适当的相似变换后必仍是 YBE 的解, 一般说, 这些相似变换矩阵可不依赖于谱参数.

目前已知的许多 $R(u)$ 矩阵具有如下性质:

$$(R(u))^{-1}=\rho(u)R(-u),\qquad (\check{R}(u))^{-1}=\rho(u)\check{R}(-u), \tag{6.1}$$

其中 $\rho(u)$ 为标量函数. 有时使用新的谱参数 x:

$$\begin{aligned} x &= e^{-u}, \quad (\check{R}(x))^{-1} = \check{R}(x^{-1}), \\ \check{R}(x=1) &= I, \quad \check{R}(x=0) = S. \end{aligned} \tag{6.2}$$

2. $R(u)$- 矩阵的矩阵元 $R(u)_{ij}^{kl}$ 的指标视空间维数而取值. 如 $i,j=1,2,\cdots,M$, 则 $R(u)$ 为 $M^2\times M^2$ 矩阵, 或者说 $R(u)$ 占据两个空间. 从 S- 矩阵语言说, i,j 为入态的 "自旋" 分量, 而 k,l 为出态的分量. 最简单的物理限制是取

$$i+j=k+l, \tag{6.3}$$

即反应前后 "自旋" 守恒. 这个概念可以推得很广, 我们不再对复杂情况讨论. 类似 (6.3) 形式的限制是来自对称性的限制. 在物理中, 任意 S- 矩阵都应受到对称性的限制, 不仅是由于 (6.3) 类型的限制大大减少了 $R(u)$- 矩阵元的个数, 而且由于这样才对应真实物理情况. 现在的计算机技术可以对 M 不大的情况, 例如 $M=2$ 时求出 $R(u)$ 的一些解, 但在物理上用途不大, 主要是缺乏对称性. 另外, 要强调, 谱参数 u 的作用非常重要, 以后我们将看到它具有动量的意义. 因此, 没有谱参数依赖关系的解, 只能作为过渡手段使用, 并没有太多的物理后果. 这种解比较适合讨论对称性与拓扑结构. 所谓拓扑, 就是与细节无关的整体性质. 比如上 (下) 交叉的个数就与橡皮筋的细节无关.

3. 当 $u\to\infty$ 时, $\check{R}(u)$ 的极限 S 不依赖于谱参数, 满足

$$S_{12}S_{23}S_{12}=S_{23}S_{12}S_{23}. \tag{6.4}$$

上式称为 "辫子关系" [18],[19], 用图 6–1 表示. 在图 6–1 中, 对固定的空间 1,2,3, 凡线交叉一次, 表示渐近碰撞一次. 在碰撞时两条 "躲" 开, 表示了 "不可入" 性. 上交叉为 S, 而下交叉为 S^{-1}. 辫子关系表示在保持交叉次 (上、下) 数不变时, 线可以像橡皮筋那

样变化. S 的解由于不包含谱参数 u, 求解较为简单, 它仅由 (6.4) 以及内部指标的对称性决定, 有些像过去解薛定谔方程时的自旋三重态与单态部分, 即无径向部分.

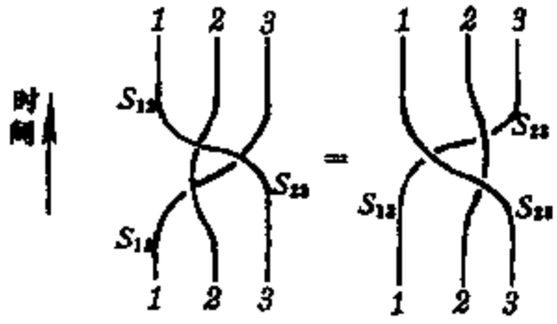


图 6–1

作为 $M^2 \times M^2$ 的矩阵 S, 满足一切矩阵运算的规则, 并且它应是非异的, 即存在逆矩阵. 往往 S 有一定数目的分立的本征值 (可以相重)$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 这时必有

$$(S-\lambda_1)(S-\lambda_2)\cdots(S-\lambda_m) = \prod_{i=1}^{m}(S-\lambda_m) = 0,$$

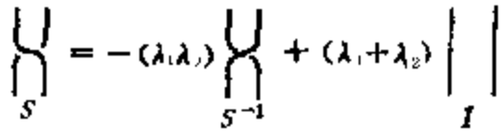
或

$$S^m - \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)S^{m-1} + \left(\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j\right)S^{m-2} - \cdots + (-1)^m\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i\right)I = 0. \tag{6.5}$$

有时, 为了方便, 我们不写出单位矩阵 I. 最简单的例子是 $m=2$, 这时有

$$(S-\lambda_1)(S-\lambda_2) = 0, \quad S^2 - (\lambda_1+\lambda_2)S + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$S + \lambda_1\lambda_2 S^{-1} = (\lambda_1+\lambda_2)I. \tag{6.6}$$

它表示:



(6.7)

图 6–2

特例为 $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$. 于是有 $S = P$, $P^2 = I$. 即回到置换算符. 因为这时有 $P = P^{-1}$, 即 $P^2 = I$. 实际上 S 是 P 的推广, 不满足 (1.36) 与 (1.37), 只满足 (6.4) 以及附加的形如 (6.5) 的非奇异矩阵条件.

当 S 具有两个独立的本征值时, 除了 S 应当满足 (6.4) 外, 还应满足 (6.6). 其意义很明显: 这时所有的上交叉 (over crossing) 均可表示为下交叉 (under crossing) 与不交叉 (I) 的组合. 我们知道, 一些互相缠绕的图形主要是由许多线的交叉构成, 而上交叉与下交叉相接后变为不交叉 (即 $SS^{-1} = I$). 由 (6.6), 总可以把上交叉变为下交叉与不交叉, 这些操作继续下去, 便可能把许多交叉图形解开. 从物理角度而言, 许多交叉图形表示动量为无穷大的多次碰撞. 而消除一次上交叉即减少一次碰撞. 如果这个复杂的图形可以简化为没有交叉, 便等价于没有碰撞, 这个多粒子系统的行为就等价于无碰撞的自由粒子行为了. 显然, 用图表示, $SS^{-1} = I$ 为:



(6.8)

图 6–3

在求解 (6.4) 时, 解得的矩阵往往依赖于一个或几个参数. 但要注意, 可能有些参数是非本质的, 有意义的是独立的、不可用变换消除的参数. 这些在数学上已有标准的讨论.

§7 YBE 最简单的解举例

对 YBE 解的研究已有众多文献. 我们只举一些简单的但在物理上十分重要的例子. 大体上, YBE 的解有四种类型: 有理解、三角解、椭圆解与本征波茨 (potts) 模型解. 前三者脱胎于经典理论, 第四种类型与 Z_N 对称有关. 我们只关心有理解与三角解 (单周期解).

§ 7.1 简单的有理解

在第 1 章已经介绍过, 最简单的有理解为

$$R(u) = uI + P, \quad \check{R}(u) = I + uP. \tag{7.1}$$

其中 P 不限于 4 维表示, $P_{i,i+1}$ 表示内空间 i 与 $i+1$ 的互换, $P^2 = I$.

$$R(-u)R(u) = (1-u^2)I, \quad (R(u))^{-1} = \left(\frac{1}{1-u^2}\right)R(-u),$$
$$\rho(u) = (1-u^2)^{-1}.$$

关于这种 $R(u)$- 矩阵与哈密顿量的联系, 已在 (3.20) 中讨论过.

由于 (3.3) 、 (3.5), 同时 $\widehat{R}(u)$ 在 YBE 解意义下与 $\check{R}(u)$ 没有区别, 以后我们只使用 $\check{R}(u)$ 记号. 于是, 有

$$(L_{ab}(u))_{ij} = \check{R}(u)^{bj}_{ia} = R(u)^{bj}_{ai}. \tag{7.2}$$

而 (7.2) 给出

$$R(u) = uI + P$$

当 a, b 与 i, j 同维数时, 有

$$\|(P_1^1)_i^j\| = P_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(I+\sigma_3),$$

所以

$$P_1^1 = \frac{1}{2}I + S_3,\quad P_1^2 = S_-,\quad P_2^1 = S_+,\quad P_2^2 = \frac{1}{2}I - S_3.$$

其中 I 为 2×2 单位矩阵. 将 u 提出作为公因子, 可以丢掉, 可得量子矩阵

$$\|L_{ab}(u)\| = L(u) = I + u^{-1}\begin{pmatrix} S_3 & S_+ \\ S_- & -S_3 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

注意, (1.14) 中 $\lambda = 1$ 时, 取如上的 a, b, c, d 亦为 (7.2) 的解. 这里 $S_\pm, S_3$ 为量子算符, I 的存在不影响对易关系. 所以, 有理的 $R(u)$ 矩阵实际上已包含了转移矩阵的信息. 这种作法的缺点是, 算符是通过具体表示实现的, 而且一般表示的维数比较低. 但用算符表示后则具有一般性.

§ 7.2 简单的三角解

单周期最简单解有以下形式:

$$R(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} ++ & +- & -+ & -- \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\mathrm{sh}\,u & \mathrm{sh}\,\gamma & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\,\gamma & \alpha\mathrm{sh}\,u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(u+\gamma) \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{matrix}. \tag{7.5}$$

其中 u 为谱参数, α, γ 为任意常数, 有时也使用 $x = e^u$, $q = e^\gamma$ (或 $x = e^{iu}$, $q = e^{i\gamma}$, 这时将 sh 换为 sin). 上面只有六个元素不为 0, 故称为六顶角模型的 $R(u)$- 矩阵. 上面也标出了矩阵的标号: 自旋 $\pm\frac{1}{2}$ 记为 $\pm$. 证明 (7.5) 满足 (1.38) 即 YBE 有许多方法, 最直接的就是按 $i, j, k = +, -$ 去直接计算 (1.38) 两端的各个矩阵元相等. 我们关心的是它有什么物理后果.

首先看 (7.5) 的有理极限： $u \to \gamma u$ 且 $\gamma \to 0$, 则当 $\alpha = 1$ 时：

$$R(u) \to \gamma \begin{pmatrix} u+1 & & & \\ & u & 1 & \\ & 1 & u & \\ & & & u+1 \end{pmatrix} = \gamma(u+P). \tag{7.6}$$

因为多一个公共因子 γ 并不影响 YBE, 可见有理解 (7.6) 是 (7.5) 的有理极限. 当然, 并非所有的有理解都可以将三角解取有理极限而得到. 由 (7.5) 得

$$\begin{aligned} R(u) &= \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\,\gamma & \alpha^{-1}\mathrm{sh}\,u & 0 \\ 0 & \alpha \mathrm{sh}\,u & \mathrm{sh}\,\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(u+\gamma) \end{pmatrix} \end{array} \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}^{11} & & & \\ & R_{12}^{12} & R_{12}^{21} & \\ & R_{21}^{12} & R_{21}^{21} & \\ & & & R_{22}^{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

观察 (2.6) 可知, 当如 (7.7) 标号时, 作变换

$$\check{R}(u)_{ij}^{ml} \to e^{\mu(m+i-l-j)u} \check{R}(u)_{ij}^{ml} \tag{7.8}$$

时, 如 $i+j=m+l$ 成立, 则 (2.6) 不变, 其中 μ 为任意常数. 因为在 (7.8) 变换下, (2.6) 式左端多出因子为

$$\begin{aligned} & e^{\mu\{u(m+i-l-j)+(u+v)(n+l-t-k)+v(r+m-s-n)\}} \\ &= e^{\mu\{u(m+n+i-j-t-k)+v(m+l+r-t-k-s)\}}, \end{aligned}$$

注意 (2.6) 左端有 $m+n=r+s$, $m+l=i+j$, 并注意三个入射指标之和等于出射指标之和： $i+j+k=r+s+t$, 于是在变换 (7.8) 下, (2.6) 左端多出指数因子为

$$e^{\mu\{2u(i-t)+2v(r-k)\}}.$$

现在看 (2.6) 右端在变换 (7.8) 下多出的因子. 它为:

$$e^{\{v(e+j-m-k)+(u+v)(r+i-n-l)+u(s+n-t-m)\}}$$
$$= e^{\mu\{v(j-m-k+r+i-n)+u(r+i-l+s-t-m)\}}.$$

由于在 (2.6) 右端 $m+n=s+t$, $m+l=j+k$, 同于上面理由, 它可化为

$$e^{\mu\{v(i+j+k-r-s-t+2r-2k)+u(r+s+t-i-j-k+2i-2t)\}}$$
$$= e^{\mu\{2u(i-t)+2v(r-k)\}}$$

因面 (2.6) 两端多出的因子相同, 可以消去.

现在将这种不变性质应用于 (7.7) 式. 观察其中 $\check{R}(u)^{12}_{12}$ 项, 按 (7.8) 变换时该项将多出因子 $e^{-2\mu u}$, 选 $\mu=\frac{1}{2}$, 则多出因子 e^{-u}. 同理, $R(u)^{21}_{21}=\mathrm{sh}\,\gamma$ 项在变换 (7.8) 下多出因子为 e^{u}, 于是 (7.7) 变换为

$$\check{R}(u)=\begin{pmatrix} sh(u+\gamma) & & & & \\ & e^{-u}\mathrm{sh}\,\gamma & \alpha^{-1}\mathrm{sh}\,u & & \\ & \alpha\mathrm{sh}\,u & e^{u}\mathrm{sh}\,\gamma & & \\ & & & \mathrm{sh}(u+\gamma) & \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

这里和以前的约定一样, 未写出的矩阵元为 0. (7.9) 也可直接验证满足 YBE.

(7.7) 中的任意常数 α 的出现, 可视为对 $\alpha=1$ 的 $\check{R}(u)$ 矩阵做变换的结果:

$$\check{R}(u)=U(\alpha)\check{R}(u)|_{\alpha=1}U^{-1}(\alpha), \tag{7.10}$$

其中

$$U(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & \alpha^{-\frac{1}{2}} & \\ & \alpha^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

这个变换也可称为“规范变换”，它并不改变 YBE.

按 (3.15)、(3.16) 我们可以由 (7.7) 得到相应的哈密顿量 H. 对占有某个固定的格点及其相邻格点的 $\check{R}(u)$ 取微商，得：

$$\frac{\partial \check{R}(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\gamma \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

由于

$$\frac{1}{4}\sigma_+ \otimes \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

$$\frac{1}{4}\sigma_- \otimes \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

将 (7.12) 用 (7.13) 表示，则得

$$\frac{\partial \check{R}(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} = \mathrm{ch}\,\gamma I + \frac{1}{2}[\alpha(\sigma_- \otimes \sigma_+) + \alpha^{-1}(\sigma_+ \otimes \sigma_-)] + \mathrm{ch}\,\gamma(\sigma_3 \otimes \sigma_3). \tag{7.14}$$

这里 $\otimes$ 表示两个相邻空间直积. 将第一个空间标以 n, 则第二个空间为 $(n+1)$ 空间，由 (3.15), 当 $\alpha = 1$ 时，并丢掉常数项，得到局域哈密顿量

$$H^0_{n,n+1} = \frac{1}{2}(\sigma^-_n \sigma^+_{n+1} + \sigma^+_n \sigma^-_{n+1}) + \mathrm{ch}\,\gamma \sigma^3_n \sigma^3_{n+1}. \tag{7.15}$$

即有哈密顿量为

$$H_0 = \sum_{n=1}^{N} H_{n,n+1} = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 + \mathrm{ch}\gamma \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3), \quad (7.16)$$

这正是通常的 XXZ 海森堡磁链模型.

当 $\alpha \neq 1$ 时，相应的哈密顿量变为

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2}(\alpha^{-1}\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \alpha \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+) + \mathrm{ch}\,\gamma(\sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3) \right\} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2}(\alpha^{-1} S_n^+ S_{n+1}^- + \alpha S_n^- S_{n+1}^+) + \mathrm{ch}\,\gamma(S_n^3 S_{n+1}^3) \right\} \quad (7.17) \end{aligned}$$

为了说明 α 的物理意义，考虑有外加沿 z 轴的常磁场 B_0 的情况. 如果想象将链闭合在 x–y 平面，那么每个格点处自旋矢量 $\boldsymbol{S}^{\pm}$ 将绕 z 轴旋进，S_n^3 保持不变，而 S_n^x, S_n^y 作转动变换，写成 $S_n^{\pm}$，即作相应规范变换

$$S_n^+ \to e^{i(2\pi/N)nB_0} S_n^+, \; S_n^- \to e^{-i(2\pi/N)nB_0} S_n^-, \; S_n^3 \to S_n^3, \quad (7.18)$$

其中指数因子写成 $i(2\pi/N)n$ 形式是为了保证周期条件.

在周期边值条件下，量子化磁通量所相应的势因子为 $\alpha = e^{i(2\pi/N)B_0}$，这就是说，(7.7) 形式的 $\check{R}(u)$ 导致了沿 z 轴 (常磁场) 量子化磁通相应的规范变换. 它等价于 (7.16) 哈密顿量的本征波函数的边界条件不是周期性的，而是“扭曲的”，即在格点 1 与 N 间相差 $e^{i\Phi}$，Φ 为磁通量.

再看形如 (7.9) 的 $\check{R}(u)$ 导致的哈密顿量的特点. 重复上面的作法，将 (7.9) 对 u 取微商，再令 $\alpha = 1, u = 0$, 有

$$\frac{\partial \check{R}(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \mathrm{ch}\,\gamma \end{pmatrix} + \mathrm{sh}\gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

上式右端未列出的矩阵元为 0. 重复泡利矩阵直积的运算，注意到

$$\frac{1}{2}(1\otimes\sigma_3-\sigma_3\otimes 1)=\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&0&\\&0&1&\\&&&0\end{pmatrix},$$

则得

$$H_{n,n+1}=H^0_{n,n+1}+H^1_{n,n+1}\ (I_n\text{为第 }n\text{ 个空间中的单位矩阵}),$$

上式中 $H^0_{n,n+1}$ 由 (7.15) 给出，而

$$H^1_{n,n+1}=\mathrm{sh}\,\gamma(I_n\sigma^3_{n+1}-\sigma^3_nI_{n+1}),$$

其中 I_n 为第 n 个格点处的单位矩阵.

$$H=H_0+\mathrm{sh}\,\gamma\sum_{n+1}^{N}(I_n\sigma^3_{n+1}-\sigma^3_nI_{n+1}),\tag{7.20}$$

其中 H_0 由 (7.16) 给出，在上式右端第二项求和时，中间项均消掉，最后得到：（注意 $I_n\sigma^3_{n+1}$ 可记为 $I_1I_2\cdots I_n\sigma^3_{n+1}I_{n+2}\cdots I_N$）

$$\begin{aligned}&H=H_0+\mathrm{sh}\,\gamma(I_1,I_2\cdots I_{N-1}\sigma^3_N-\sigma^3_1I_2\cdots I_N),\\&H=\sum_{n+1}^{N}\left\{\sigma^1_n\sigma^1_{n+1}+\sigma^2_n\sigma^2_{n+1}+\mathrm{ch}\,\gamma\sigma^3_n\sigma^3_{n+1}\right\}+\mathrm{sh}\,\gamma(\sigma^3_N-\sigma^3_1).\end{aligned}\tag{7.21}$$

它的物理意义非常明确：(7.9) 与 (7.7) 间 ($\alpha=1$) 相应的哈密顿量的差别在于前者导致了边界项. 当要求周期性边界条件时 $\sigma^3_N=\sigma^3_1$，该项消失. 当然，如果要求无穷长链，即 $N\to\infty$ 时两端处自旋消失 $\sigma^3_N\to 0$, $\sigma^3_1\to 0$, 那么这个边界项也会消失. 讨论边界条件对物理过程的影响是大家普遍关注的课题，近几年来有关带边界项的 YBE 解及有关后果的讨论比较多，并获得了具有相当重要物理意义的结果.

§8 $R(u)$- 矩阵与代数关系、物理说明

§ 8.1 自旋跃迁算子与转移矩阵的关系

将 (7.4) 与 (1.19) 比较，可见两者是一致的. 当然，由于对易关系 (1.15) 仅规定了算符间的相对关系，采用 (1.18) 也是等价的. 由 (1.43) 已经知道，多个格点处局域 $L_n(u)$ 矩阵的乘积可以构成整体转移矩阵 $T(u)$，它仍满足同样的 RTT 关系. 现在取 $L(u)$ 具有 (1.18) 形式：

$$L_n(u) = I + u^{-1}\begin{pmatrix} -S_3 & S_+ \\ S_- & S_3 \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

则

$$T(u) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} \left(I_n + u^{-1}\begin{pmatrix} -S_n^3 & S_n^+ \\ S_n^- & S_n^3 \end{pmatrix} \right). \tag{8.2}$$

它对 u^{-1} 展开式的前三项为 (由 (1.50))：

$$\begin{aligned} T(u) =& I + u^{-1}\begin{pmatrix} -I^3 & I^+ \\ I^- & I^3 \end{pmatrix} + u^{-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}^2 - J^3) & J^+ \\ J^- & \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}^2 + J^3) \end{pmatrix} \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{8.3}$$

其中

$$\begin{aligned} &I^{\pm} = I^1 \pm iI^2, \quad \boldsymbol{I} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{S}_n, \\ &J^{\pm} = J^1 \pm iJ^2, \quad \boldsymbol{J} = (-i)\sum_{n>m}^{N} (\boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_m), \end{aligned} \tag{8.4}$$

或

$$J^{\pm} = \mp \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij} S_i^{\pm} S_j^3, \quad J_3 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{N} \epsilon_{ij} S_i^{+} S_j^{-} \tag{8.5}$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i < j \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } i > j \text{ 时.} \end{cases}$$

显然，I 表示所有格点的自旋总和，而 J 则为自旋算子的张量积，它显然越出了通常李代数的范畴. 为了说明 (8.5) 中 J 的物理意义，我们考虑两个格点的最简单情况.

考虑两个自旋 1/2 的系统，其三重态与单态波函数分别对易 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ 形式分解的两部分：

$$\begin{aligned} &\Psi_{1,1} = |\underset{1\,2}{\uparrow\uparrow}\rangle, \\ &\Psi_{1,0} = \frac{1}{2}(|\underset{1\,2}{\uparrow\downarrow}\rangle + |\underset{1\,2}{\downarrow\uparrow}\rangle), \quad \Psi_{0,0} = \frac{1}{2}(|\underset{1\,2}{\uparrow\downarrow}\rangle - |\underset{1\,1}{\downarrow\uparrow}\rangle), \\ &\Psi_{1,-1} = |\underset{1\,1}{\downarrow\downarrow}\rangle \end{aligned} \tag{8.6}$$

$S = 1$ $\qquad\qquad$ $S = 0$

其中 Ψ_{S,S_z} 表示相应于总自旋 S、投影为 S_z 的态，箭号下面的数字表示粒子. 现在问一个问题：在通常李代数范畴内，只能用 $I^{\pm}$ 改变 S_z 的值，即只能在 $S = 1$ 里升降. 这在李代数中是个很普遍的情况：李代数线性算子不改变表示的权. 那么怎样的算子能将 $S = 1$ 的态改变为 $S = 0$ 的态，即在三重态与单态间引起跃迁呢？答案是：(8.5) 给出的 J 算子就起着这样的作用. 观察图 8-1,

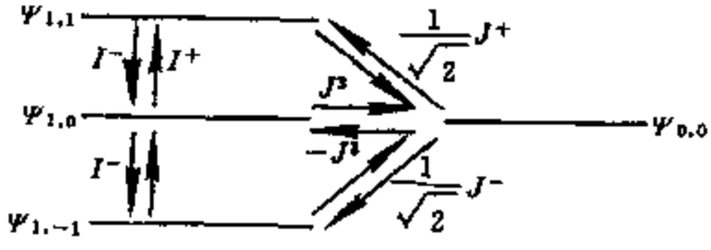


图 8-1

其中

$$O^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}J^{\pm}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1^{\pm}S_2^3-S_2^{\pm}S_1^3)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(S_2^{\pm}S_1^3-S_1^{\pm}S_2^3),$$
$$J^3=S_1^+S_2^--S_2^+S_1^-. \tag{8.7}$$

很容易验证图 8–1, 例如

$$Q^+\Psi_{1,-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}J^+|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(S_2^+S_1^3-S_1^+S_2^3)|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle.$$

为方便, 将态归一为 $S_m^3|\underset{m}{\downarrow}\rangle=-|\underset{m}{\downarrow}\rangle$, $S_m^3|\underset{m}{\uparrow}\rangle=|\underset{m}{\uparrow}\rangle$, $S_m^+|\underset{m}{\downarrow}\rangle=|\underset{m}{\uparrow}\rangle$, $S_m^-|\underset{m}{\uparrow}\rangle=|\underset{m}{\downarrow}\rangle$ 等, 有: (注意, $S_m^+|\underset{m}{\uparrow}\rangle=S_m^-|\underset{m}{\downarrow}\rangle=0$)

$$\begin{aligned}
Q^+\Psi_{1,-1}=&(-1)\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)|\uparrow\downarrow\rangle=\Psi_{0,0},\\
Q^+\Psi_{0,0}=&\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(S_2^+S_1^3-S_1^+S_2^3)(|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle-|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\uparrow\rangle)=|\uparrow\uparrow\rangle=\Psi_{1,1},\\
J^3\Psi_{0,0}=&(S_1^+S_2^--S_2^+S_1^-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle-|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(-|\downarrow\uparrow\rangle-|\uparrow\downarrow\rangle)=-\Psi_{1,0},\\
J^3\Psi_{1,0}=&\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1^+S_2^--S_2^+S_1^-)(|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle+|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(-|\downarrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\rangle)\\
=&\Psi_{00}.
\end{aligned}$$

因此, J 实际上是两个自旋 1/2 组成的系统的跃迁算子, 它实现了自旋单态与三重态间的转变. 从这个例子可以看出, 算子 J 的本质是改变李代数表示的权, 也就是量子力学中的跃迁算子. 再看三个自旋 1/2 组成的系统中权的变更情况.

三个粒子，每个粒子自旋为 1/2 时，有 [19]：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\otimes 0,$$
$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}}_{\text{来自两个粒子自旋为 1 的态}}\oplus\frac{1}{2}\,.$$

由于全同粒子对称性的要求，取线性组合后，定义

$$O_S^\alpha=\hat{J}_{23}^\alpha+\hat{J}_{13}^\alpha,\quad(\alpha=\pm,3)\ (S\text{表示对称，图 8-2 中实线})$$
$$O_A^\alpha=3i(2\hat{J}_{12}^\alpha-\hat{J}_{23}^\alpha+\hat{J}_{13}^\alpha).\ (A\text{表示反对称，图 8-2 中虚线})$$

上式中，为了方便，记

$$\begin{aligned}\hat{J}_{ij}^{\pm}&=\mp\frac{1}{2}(S_i^{\pm}S_j^3-S_j^{\pm}S_i^3),\\ \hat{J}_{ij}^{3}&=S_i^+S_j^--S_j^+S_i^-,\end{aligned}\qquad i<j,\ i,j=1,2,3,\tag{8.8}$$

而用以标志总自旋 S,S_z 与两个粒子态原来的合自旋 s 的态记为 $|S,S_z;s\rangle$：

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2};1\rangle=|\underset{113}{\uparrow\uparrow\uparrow}\rangle,$$
$$|\frac{3}{2},\frac{1}{2};1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\underset{123}{\downarrow\uparrow\uparrow}\rangle+|\underset{123}{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle+|\underset{123}{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle),$$
$$|\frac{3}{2},-\frac{1}{2};1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle),$$
$$|\frac{3}{2},-\frac{3}{2};1\rangle=|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle,$$
$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2};1\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle),$$
$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle-2|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2};0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle),$$
$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle),$$
$$I^{\pm} \equiv I^{\pm}_{123}.$$

上式中，自旋的次序依次为 1,2 与 3. 可以直接验证下式关系：

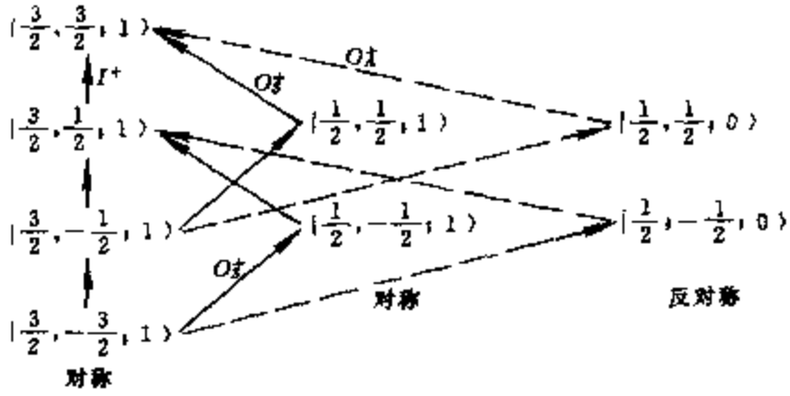


图 8-2

四个粒子时，先将两个粒子组成自旋三重态与单态，再取其自身的直积：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 1\otimes 0,$$
$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = (1\oplus 0)\otimes(1\oplus 0) = \underbrace{2\oplus 1\oplus 0}_{\text{由 1.1 构成}}\oplus 1\oplus 1\oplus 0.$$

上式右端第一个三重态 1 由 0,1 构成，而第二个三重态则由 1,0 构成. 同是单态前面的由 1, 1 构成，而最后的则有 0,0 构成，保留这些作为态的分类，则有：（前面两个数字表示 $2S, S_Z$）

$$|4,-2,1,1\rangle = |\underset{1234}{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}\rangle,$$
$$|4,-1,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|4,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|4,1,1,1\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + 1\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle),$$

$$|4,2,1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle;$$

$$|2,-1,0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle),$$

$$|2,1,0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,0,0,1\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,-1,1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,1,1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle);$$

$$|2,0,1,0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,0,0,0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle),$$

$$|2,-1,1,1\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,0,1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|2,1,1,1\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle),$$

$$|0',0,1,1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + 2|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - 1\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle).$$

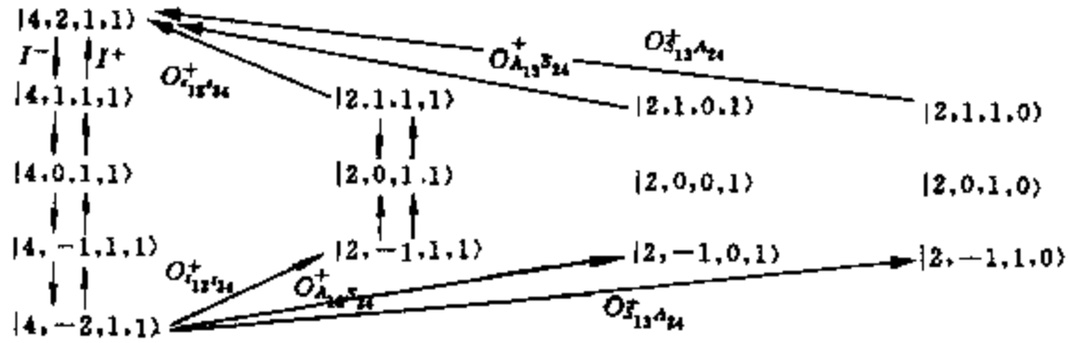
引入算符：　$(\alpha = \pm, 3)$

$$O^{\alpha}_{S_{13}S_{24}} = \hat{J}^{\alpha}_{12} - \hat{J}^{\alpha}_{23} + \hat{J}^{\alpha}_{34} + \hat{J}^{\alpha}_{14},$$

$$O^{\alpha}_{S_{12}A_{34}} = 2\hat{J}^{\alpha}_{13} + \hat{J}^{\alpha}_{12} + \hat{J}^{\alpha}_{23} - \hat{J}^{\alpha}_{34} + \hat{J}^{\alpha}_{14},$$

$$O^{\alpha}_{A_{13}S_{24}} = 2\hat{J}^{\alpha}_{24} - \hat{J}^{\alpha}_{12} + \hat{J}^{\alpha}_{23} + \hat{J}^{\alpha}_{34} + \hat{J}^{\alpha}_{14}. \tag{8.9}$$

不同态的跃迁见下图.



所有逆向变换为 O^{-}, 横向均为相应的 O^{3}.

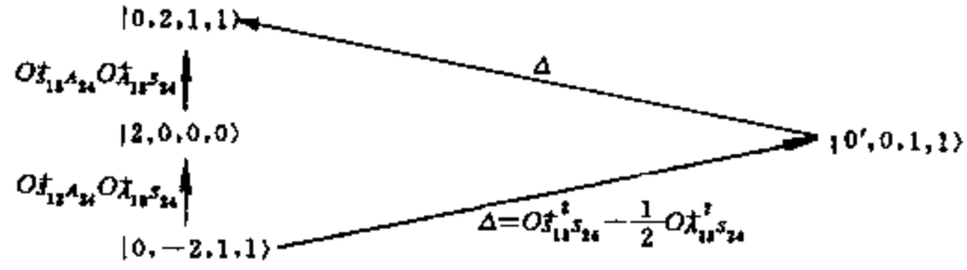


图 8–3

通过以上的演示性例子，可以看出，$T(u)$ 对 u^{-1} 展开式的 u^{-2} 阶的矩阵形式算符 $T^{(2)}$ 有深刻的物理意义：它的矩阵元由算符 J 组成. J 的作用是改变李代数的权，引起自旋多重态之间跃迁. 以后我们看到，J 与自旋算符 $I = S$(它自身组成 $SL(2)$ 代数)

组成更大的代数，它是无穷维的，但由 I 与 J 生成. 这种代数不再是李代数，称为 Yangian，是著名数学家德林菲尔德 (Drinfeld) 首先提出的 [20]，按德氏定义， Yangian 与量子代数组成了量子群，它是数学上已知的霍波夫 (Hopf) 代数的某种变形. 德氏因而获得菲尔茨奖. 本书 § 11~§ 14 将仔细介绍 Yangian 及量子代数的物理实现，有关其表示论可参见文献 [21].

本节讨论的仅仅是由 YBE 最简的有理解 $R(u) = u + P$(P 为置换算子) 所引出的新的代数关系的一个特例，仅是在讨论其较为普遍性质之前，从物理角度作了很初步的了解. 以下转而讨论 YBE 最简单的三角解所引出的代数，即量子代数的最简单形式.

§ 8.2 简单的量子代数

由 (7.2) 以及由 $R(u)$ 矩阵得到 $L_{ab}(u)$ 的过程，看出一个简单的规则：将 $R(u)$ 矩阵分为 N^2 块 (设 $R(u)$ 为 $N^2 \times N^2$ 维矩阵)，例如对 4×4 的 $R(u)$- 矩阵，即从中心分成四块，其每一块采用 11,12,21,22 的标准标号，则为量子空间的算子 L_{ab}. 这可以从 (7.2) 直接读出. (7.2) 的性质对 YBE 而言是普遍的性质. 现在用它来讨论简单的三角解 (7.9). 注意，令 $\alpha = 1$，将其中间的两行或两列互换，变为 $R(u)$ 矩阵：

$$R(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\, u & e^{-u}\mathrm{sh}\,\gamma & 0 \\ 0 & e^{u}\mathrm{sb}\,\gamma & \mathrm{sh}\, u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sh}(u+\gamma) \end{pmatrix}. \qquad (8.10)$$

引入变量 $x = e^u, q = e^\gamma$，则有

$$
\begin{aligned}
R(u) &= x\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} - x^{-1}\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(q-q^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} q^{1/2}\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & q-q^{-1} \\ 0 & 0 \end{matrix} & q^{1/2}\begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{1/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\quad -x^{-1}\begin{pmatrix} q^{-1/2}\begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{1/2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ -(q-q^{-1}) & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & q^{-1/2}\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \qquad (8.11)
\end{aligned}
$$

引入算子：

$$
\begin{aligned}
K &= \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad k^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{1/2} \end{pmatrix}, \\
X^+ &= \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \qquad (8.12)
$$

则有

$$
\begin{aligned}
L(u) =& x\begin{pmatrix} q^{1/2}K & 0 \\ (q-q^{-1})X^+ & q^{1/2}K^{-1} \end{pmatrix} \\
& - x^{-1}\begin{pmatrix} q^{-1/2}K^{-1} & -(q-q^{-1})X^- \\ 0 & q^{-1/2}K \end{pmatrix}. \qquad (8.13)
\end{aligned}
$$

注意， $K, X^{\pm}$ 均为量子空间算符的 2×2 矩阵表示，现在求它们的对易关系. 由于 (8.12), 以及

$$
\begin{aligned}
K^2 &= q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
K^{-2} &= q^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

现在把 K 视为一个整体生成元，则 σ_3 不再是基本的，它等于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}}. \tag{8.14}$$

应用 (8.14) 及 (8.12), 立即得到

$$KX^{\pm} + K^{-1} = q^{\pm 1}X^{\pm}, \qquad [X^+, X^-] = \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}}. \tag{8.15}$$

引入

$$K = q^{X_3} = e^{\gamma X_3}, \tag{8.16}$$

得到

$$\begin{aligned} &[X_3, X^{\pm}] = \pm X^{\pm}, \\ &[X^+, X^-] = \frac{q^{2X_3} - q^{-2X_3}}{q - q^{-1}} \equiv [2X_3]_q. \end{aligned} \tag{8.17}$$

显然，当 $q \to 1$ ($\gamma \to 0$) 时 $[X^+, X^-] = 2X_3$ 正是通常角动量对易关系. (8.15) 是最简单的量子代数. 量子代数与 Yangian 都属于 Drinfeld 引入的量子群. 关于量子代数的物理意义，下面要专门介绍. 我们在本节只作一点说明.

从 (8.12) 可以看出，形如 (8.15) 的 $q-$ 变形的对易关系在这个例子中来自 K 的形式. 它不再是简单的 σ_3, 而是变了形的. 这个变形是由参数 q 引起的. 但追究起来，$q \neq 1$(即 γ 不趋于 0) 是 (7.7) 不同于 (7.1) 的关键. 因为当 $q \to 1$, 并取有理极限时 $R(u) \to u + P$, 而已经知道 $u + P$ 与 $L(u)$ 具有 (7.4), 即与李代数的性质相联系. 当 $u + P$ 作 $q-$ 变形时，即 YBE 的解允许有一新参量 q 时，其 $L(u)$ 算子仍存在代数结构，只不过将 e^{S_3} 变为 K. 这就是量子代数 (8.15) 的源起. 在 $R(u) = u + P$ 时，由 YBE 导致的哈密顿量 (3.20) 与李代数的生成元相对易. 现在形如 (7.9) 的 $R(u)$ 导致形如 (7.21) 的哈密顿量. 可以想到 (7.21) 也会与满足 (8.15) 的生成元 $X^{\pm}, K$ 对易，这点可以直接验证. 但要注意，必须有边界项，

否则不对易，因而哈密顿量 $R(u)$- 矩阵与 $L(u)$- 矩阵算符必须彼此相配. 此外，所谓 q- 变形，在这个简单的例子里只不过把 e^{S_3} 变为 $e^{\gamma S_3}(S_3=\frac{1}{2}\sigma_3, q=e^{\gamma})$. 当然，严格的量子代数定义还包含其他规定，这里就不多讨论了. 以后，我们将通过具体物理量实现 (8.15). 在许多情况下 $q=e^{i\Phi}$, Φ 是磁通量，当 Φ 不量子化时 q 可为任意值 (多数是相位因子), 当 Φ 量子化时 q 为 1 的根. q 为单位根的情况有特别的物理兴趣.

我们已经看到， YBE 至少有两种典型的解：有理解与三角解. 与这些解相应，有理解对应 Yangian 对称性，而三角解对应量子代数对称性质. 尽管 Yangian 与量子代数表现形式有很大不同，但它们在数学上属于同一种代数结构，即由德林菲尔德定义的量子群. 事实上，YBE 的三角解引出了 q 变形仿射代数，而 Yangian 有时也许可视为它的有理极限. 但这些已超出本事的范围了.

§ 8.3 简单 YBE 解的一些性质

我们在本章已经遇到了 YBE 最简单的解 (7.9) 以及当 $\alpha=1$ 时它的有理形式 $I+uP$. 在 $u\to\infty$ 时， (取 $\alpha=1$) 由 (7.9) 有

$$\check{R}(u)\big|_{u\to\infty}=\left(\frac{e^u}{2}\right)\begin{pmatrix}q&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&q-q^{-1}&0\\0&0&0&q\end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

其中 $q=e^{\gamma}$ 为任意参数. 事实上，此时 ($\alpha=1$ 时)$\check{R}(u)$ 可分解为

$$\check{R}(u)\equiv\check{R}(x)=xS-x^{-1}S^{-1}, \tag{8.19}$$

其中 $x=e^u$, $w=q-q^{-1}$; 且

$$S=\begin{pmatrix}q&&&\\&0&1&\\&1&w&\\&&&q\end{pmatrix},\quad S^{-1}=\begin{pmatrix}q^{-1}&&&\\&-w&1&\\&1&0&\\&&&q^{-1}\end{pmatrix}. \tag{8.20}$$

上式中未标出的矩阵元为 0. 注意， $\check{R}(x)$ 定义中可以相差任意常数公因子，很容易证实 (8.19) 给出正确的 $\check{R}(x)$ 形式.

有两个问题是我们感兴趣的. 一个是 S 代表什么东西？另一个是知道 $\check{R}(u)$(或用 x 表示 e^u, 记为 $\check{R}(x)$) 的渐近行为，如何用简单的办法决定出 $\check{R}(x)$ 来. 我们先讨论第一个问题.

从 (8.20) 出发，考虑 S 对角化的过程. 首先解出 S 的本征值，很容易知道它有两个分立的本征值： q 与 $-q^{-1}$. 由于 S 是 4×4 矩阵，应有四个本征值，其中三个相同，均为 q, 另一个则为 $-q^{-1}$. 由此容易找到将 S 对角化的矩阵，使

$$U^{-1}SU=\begin{pmatrix} -q & & & \\ & q & & \\ & & -q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

上式中诸本征值的排列是为了以后方便， (8.21) 右端非对角元为 0. 矩阵 U 和 U^{-1} 分别为

$$U=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\begin{pmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{pmatrix} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

$$U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\begin{pmatrix} 1 & q \\ -q & 1 \end{pmatrix} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.23}$$

在 U 与 U^{-1} 中，未列出的矩阵元为 0. 易证 $UU^{-1}=I$. (8.21) 式可以表示为：

$$U^{-1}SU=qI_1+(-q^{-1})I_2, \tag{8.24}$$

其中

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},\quad I_2\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.25}$$

显然有

$$S = qUI_1U^{-1} - q^{-1}UI_2U^{-1}. \tag{8.26}$$

现在定义两个算子

$$P_i(q) = UI_iU^{-1}. \qquad (i = 1, 2) \tag{8.27}$$

于是，$(\lambda_1(q) = q,\ \lambda_2(q) = -q^{-1})$ 有

$$S = \lambda_1(q)P_1(q) + \lambda_2(q)P_2(q). \tag{8.28}$$

现在讨论 P_1 与 P_2 的性质. 易知：

$$P_1(q) + P_2(q) = U(I_1 + I_2)U^{-1} = UU^{-1} = I, \tag{8.29}$$

$$P_1(q)P_2(q) = U(I_1I_2)U^{-1} = 0. \tag{8.30}$$

满足这两个性质的算子称为投影算子，它们把 4×4 矩阵分解成为两个独立（“直交”）部分，每部分对应不同的分立本征值. 由 (8.22) 与 (8.23) 可知，当 q 为实数时，有 $U^{-1} = U^T$，其中 U^T 为 U 的转置. 这时 (8.28) 有很简单的意义. 由 (8.22) 、 (8.23) 与 (8.27) 易得 P_1 与 P_2 的具体矩阵形式：

$$P_1(q) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & q^2 \end{pmatrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.31}$$

$$P_2(q) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix} q^2 & -q \\ -q & 1 \end{pmatrix} & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

容易验证，(8.31) 与 (8.32) 满足 (8.29) 与 (8.30). 为了了解 $P_1(q)$ 与 $P_2(q)$ 的意义，先考虑 $q = 1$ 的情况.

$$P_1(q = 1) = P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.33}$$

$$P_2(q=1)=P_2=\begin{array}{c} \\ ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ++ & +- & -+ & ++ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{8.34}$$

记住我们对 4×4 矩阵行、列指标的约定 (如 (8.34) 所示), 其中 "$+$" 代表自旋向上的态, 而 "$-$" 代表自旋为下, 即 $-\frac{1}{2}$ 的态. 于是, 两个粒子自旋态有四个可能: $|++\rangle,|+-\rangle,|-+\rangle$ 和 $|--\rangle$. 由 (8.33) 与 (8.34) 可知, 这里 P_1 与 P_2 正是两个自旋 1/2 直积后分解为总自旋为 1 与 0 的投影算子:

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0.$$

这些投影算子与克莱伯施 - 哥当系数有密切关系:

$$P_i=C_iC_i^T. \qquad (i=1,2,\text{ 对 } i \text{ 不求和}) \tag{8.35}$$

不管相因子, 由 (8.33) 与 (8.34) 易知

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.36}$$

$$C_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.37}$$

将 C_1 与 C_2 分别作用在两粒子波函数 Ψ 上:

$$\Psi=\begin{pmatrix} |++\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{pmatrix}, \tag{8.38}$$

由 $C_1\Psi$ 可得自旋三重态 (对称) 波函数:

$$\begin{aligned}\psi_{1,1} &= |++\rangle,\\ \psi_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1+-\rangle + |1-+\rangle),\\ \psi_{1,-1} &= |--\rangle;\end{aligned} \tag{8.39}$$

而由 $(-C_2)\Psi$ 得到两粒子自旋单态波函数 (反对称态):

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \tag{8.40}$$

事实上, (8.39) 三个波函数的系数 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及 (8.40) 中的系数 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 正是两个自旋 1/2 耦合的克莱伯施 - 哥当系数. 我们在第 1 章也已用到了这些波函数. 以上这些都是初等李代数的结果, 重温这个过程对我们理解 (8.28) 非常有启发.

比较 (8.31) 与 (8.33),(8.32) 与 (8.34), 可以看到, $P_i(q)$ 正是 P_i 的 q- 变形, 前者当 $q=1$ 时即蜕化为后者. 相应地, 由

$$P_i(q) = C_i(q)C_i(q)^T \tag{8.41}$$

可知, q 变形克莱伯施 - 哥当系数为

$$C_1(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{q^{-1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{q^{1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.42}$$

$$C_2(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{q^{1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{q^{-1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.43}$$

相应地, 将 $C_1(q), -C_2(q)$ 作用在 Ψ 态上, 得

q- 三重态:

$$|++\rangle, \left(\frac{1}{q+q^{-1}}\right)^{1/2}(q^{-1/2}|+-\rangle + q^{1/2}|-+\rangle), |--\rangle \qquad (8.44)$$

q- 单态:

$$\left(\frac{1}{q+q^{-1}}\right)^{1/2}(q^{1/2}|+-\rangle - q^{-1/2}|-+\rangle). \qquad (8.45)$$

因此, S 的构成可以由李代数结构变形加以理解. 首先 S 仍为 $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}$ 的基本结构, 它仍由两个 q 变形的投影算子构成, $P_i(q)$ 则由 q 变形克莱伯施 - 哥当系数组成. 然后, 将相应 $P_i(q)$ 乘以 q 变形本征值 $\lambda_i(q)$, 并注意相应于自旋对称态有正号, 而对反对称态 (总自旋单态) 则有负号. 剩下的事就是确定 $\lambda_i(q)$ 的值, 这需要借助已有的数学定理.

设两个李代数表示的权均为 Λ , 由 Λ 决定其表示的维数. 例如计算自旋 $\frac{1}{2}$ 的情况, $\Lambda=\frac{1}{2}$. 则两个权为 Λ 表示的直积可以分解为若干个子表示的直和:

$$\Lambda\otimes\Lambda=\bigoplus_{l=0}^{M}E_l. \qquad (8.46)$$

上式中, $\oplus$ 代表直和, l 为直积分解后诸表示的权, 与 E_l 相应, 存在投影算子. E_l 中有的是反对称的, 有的是对称的. q- 变形后, 相应本征值为

$$\lambda_l(q)=(-1)^{\sigma_l}q^{-(2C_\Lambda-C_{E_l})}. \qquad (8.47)$$

其中 C_Λ 为表示 Λ 的卡斯米尔算子的本征值, 而 C_{E_l} 为分解后子表示 E_l 的卡斯米尔算子的本征值. $(-1)^{\sigma_l}$ 为 ±1, 视表示 E_l 是对称 (取 $+$), 或反对称 (取 $-$) 而定.

举两个自旋 $\frac{1}{2}$ 直积为例. 这时 $\Lambda=\frac{1}{2}$, 即 $S=\frac{1}{2}$, 相应 $C_\Lambda=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4}$. 分解后, 总自旋可为 1 或 0, 前者 $C_1=1(1+1)=2$,

后者 $C_0=0$. C_1 对应自旋三重态为 $\sigma_l=2$(取 $\sigma_l=l+1$), C_0 为反对称态, 对应 -1. 于是,

$$\begin{aligned}\lambda_1(q)&=q^{-(2\cdot\frac{3}{4}-2)}=q^{1/2},\\ \lambda_2(q)&=-q^{-(2\cdot\frac{3}{4}-0)}=-q^{-3/2}.\end{aligned}\tag{8.48}$$

但由 (8.21) 知道 (8.20) 两个独立本征值为 q 与 $-q^{-1}$, 现在我们指出它们之间只差一个常因子. 将 (8.48) 代入 (8.28), 遂有

$$\begin{aligned}S'&=q^{1/2}P_1(q)-q^{-3/2}P_2(q)\\ &=q^{-1/2}(qP_1(q)-q^{-1}P_2(q))=q^{-1/2}S.\end{aligned}\tag{8.49}$$

也就是说, 用 (8.48) 决定出的 S 与用 (8.26) 表示的 S 仅相差一个公共常因子, 这是无关紧要的. 因为杨 - 巴克斯特系统所有方程中都可以允许 S 相差一个公共因子.

投影算子有很简单的图示 [18],[19]. 由于现在存在两个投影算子,它们之和为单位矩阵,因此只需要考虑其中的一个,例如 $P_2(q)\equiv U$. 以后, 为了方便, 略去 U 对 q 的依赖关系 (即 $U=U(q)$) 的记法, 只记为 U. 由于 $P_1(q)=I-U$, 则

$$\begin{aligned}S&=\lambda_1(q)b,\\ b&=I+iU,\quad i=\frac{\lambda_2(q)}{\lambda_1(q)}-1.\end{aligned}\tag{8.50}$$

显然, b 与 S 只相差一个公因子, 它们满足同一方程

$$b_{12}b_{23}b_{12}=b_{23}b_{12}b_{23},\tag{8.51}$$

其中 b_{12} 表示固定空间 1 与 2 时的上交叉, 而 b_{23} 为空间 2 与 3 间的上交叉. 这个关系称为辫子关系, 它是 YBE 的 $u\to\infty$ 时的渐近形式. 辫子关系的解称为辫子群表示, 简称为 BGR(英文字 Braid Group Representaion 的缩写). 由于形如 (8.50) 的 b 表示两个相邻

空间中发生的交叉，因此相应的 b_{12} 与 b_{23} 一定满足 (8.51). 因此要记住投影算子 U 也应发生于相邻空间，即相应于 b_{12} 和 b_{23} 则分别有 U_{12} 与 U_{23}. 为了记号简单，我们记为

$$U_{12} \equiv U_1, \qquad U_{23} \equiv U_2.$$

它们具有同样形式，但发生在不同空间. 由于投影算子的性质，必有

$$(U_1)^2 = U_1, \qquad (U_2)^2 = U_2. \tag{8.52}$$

它的图示见图 8-4. 图中虚线表示固定空间. 记住三个相邻空间依次固定，用 U_1 与 U_2 的图示 (图 8-5) 可知.



图 8-4

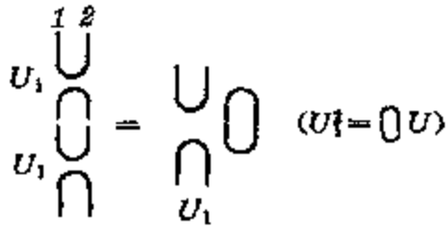


图 8-5

如将圈归一化为 1, 则有两个 U_1 接起来变为一个 U_1. 对 U_2 也同样成立，只不过将固定空间理解为 2 与 3. 与在考虑 $U_1U_2U_1$. 利用图 8-6, 将操作于固定空间 1 与 2,2 与 3, 然后 1 与 2 所产生的 U_1, U_2, U_1 联结起来，将弯线拉直，遂得

$$U_1U_2U_1 = U_1. \tag{8.53}$$

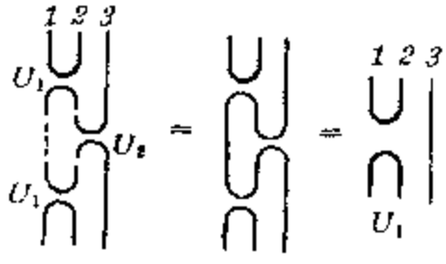


图 8-6

同理，

$$U_2U_1U_2 = U_2. \tag{8.54}$$

注意，图中 U_1 乘以第 3 空间中的一条线，代表乘以单位 I. 因此，由图示得到上式. 满足 (8.52)~(8.54) 关系的算子 U, 有一大类解，它包括投影算子为特例. 数学上，将由 (8.52)~(8.54) 定义的代数，属于“谭波 - 里伯代数”.

我们知道了如何构造投影算子 $P_l(q)$ 以及相应本征值 $\lambda_l(q)$, 无需太多的计算就可以得到 S. 它是 YBE 当谱参数取极限值时的渐近形式. 现在剩下的问题是：已知这种渐近形式 S, 如何决定出 $\check{R}(x)$ 矩阵本身？对两个分立本征值情况，从一般性的讨论可知，一大类形如 (8.28) 的 S 通过一定的手续可以导出相应的 $\check{R}(x)$. 这个过程称为杨 - 巴克斯特化 (Yang-Baxterization). 以下简要介绍这个过程. 当然，这个方法可以推广到更广的情况，为了简单，只介绍两个本征值情况.

§ 8.4 杨 - 巴克斯特化方法

现在的命题是：形如 (8.50) 的 BGR 满足辫子关系 (8.51), 将 b 视为 $\check{R}(x=0)$ $(x=e^u)$ 的渐近行为，导求 YBE 的解. 在求解过程中，希望投影算子不变，而相应的 YBE 解具有形式

$$\check{R}(x) = F(x)(I + G(x)U). \tag{8.55}$$

现在的问题是由已知 (8.50) 的 i, 如何确定 $G(x)$? 这个例子虽然是具有两个分立本征值的辫子群表示的特例，却有代表性.

已知 U 满足 (8.52)~(8.54), 将 (8.55) 代入杨 - 巴克斯特方程

$$\check{R}_1(x)\check{R}_2(xy)\check{R}_1(y) = \check{R}_2(y)\check{R}_1(xy)\check{R}_2(x), \tag{8.56}$$

并满足初始条件

$$\check{R}(x=0) = b \quad \text{或} \quad F(0) = \lambda_1,\ G(0) = i, \tag{8.57}$$

得

$$i^2[G(x)+G(y)+G(x)G(y)-G(xy)] = (1+i)G(x)G(y)G(xy). \tag{8.58}$$

它是依赖于 x 和 y 的双变量的函数. 取 $x=1$, 有

$$i^2G(1)(1+G(y))=(1+i)G(1)(G(y))^2. \tag{8.59}$$

由于 (8.59) 对任意 y 成立, 移项后得

$$G(1)=0. \tag{8.60}$$

将 (8.58) 对 x 微商, 并取 $x=1$, 得

$$i^2\{\alpha[1+G(y)]-yG'(y)\}=(1+i)\alpha(G(y))^2, \tag{8.61}$$

其中 $\alpha=G'|x=1$. (8.61) 可改写为

$$\frac{dy}{y}=\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\frac{dG(y)}{1+G(y)-\delta(G(y))^2}. \qquad (\delta=i+i^{-1}) \tag{8.62}$$

它是一阶微分方程, 并具有 (8.60) 的初始条件, 很易直接积分, 得

$$G(x)=\frac{i(1-x^\eta)}{1+(1+i)x^\eta}, \quad \eta=-\Big(\frac{i+2}{i}\Big)\alpha. \tag{8.63}$$

依然将 x^η 记为 x, 得

$$\breve{R}(x)=\rho_1(x)P_1(q)+\rho_2(x)P_2(q), \tag{8.64}$$

其中

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)}=\frac{(\lambda_2/\lambda_1)+x}{1+(\lambda_2/\lambda_1)x}. \tag{8.65}$$

这样, 具有两个分立本征值 λ_1 与 λ_2 的辫子群表示, 当它们满足 (8.52)~(8.54) 时, 必可通过 (8.65) 产生杨 – 巴克斯特方程的解 $\breve{R}(x)$. 这是最简单的杨 – 巴克斯特化的实现. 当分立本征值个数增加时, 辫于群表示常常满足更复杂的代数关系, 但具有 (8.65) 形式的递推关系是完全类似的. 对于任意自旋情况, (8.65) 可推广成完全相

似的形式. 两个权为 J 的李代数表示直接相乘分解后，有 $2J+1$ 个不可约的权： $2J, 2J-1, \cdots, 2, 1, 0$. 其相应分解式为

$$\Lambda_J \otimes \Lambda_J = \bigoplus_{j=0}^{2J} \Lambda_j, \tag{8.66}$$

其中 Λ_J 为自旋 J 的表示. 相应地，

$$\check{R}(x) = \sum_{j=0}^{2J} \rho_j(x) P_j(q). \tag{8.67}$$

因为 $\check{R}(x)$ 可相差任意公共常数，故可令 $\rho_0(x) = 1$. 类似于 (8.65)，相邻的本征值间存在关系：

$$\frac{\rho_{j+1}(x)}{\rho_j(x)} = \frac{\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} + x}{1 + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} x}, \tag{8.68}$$

从而

$$\rho_j(x) = \prod_{n=1}^{j} \frac{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} + x}{1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} x}. \tag{8.69}$$

对于 $SU(2)$ 情况，由于 (8.47) 式，(8.69) 的意义很容易理解. 这时本征值的比值 $\lambda_n/\lambda_{n-1} = -q^{n(n+1)}/q^{(n-1)n} = -q^{2n}$，其中 n 为小于 j 的权，负号来自相邻的角动量态具有相反的宇称，即相反的对称性. 显然，角动量 n 的态如果是对称的 (反对称的)，那么 $n \pm 1$ 的态便一定是反对称 (对称) 的. 于是，角动量为 j 的本征值可表为

$$\rho_j(x) = \prod_{n=1}^{j} \frac{x - q^{2n}}{1 - q^{2n} x}. \tag{8.70}$$

为了方便，将 x(谱参数) 与 q(变形参数) 写成指数形式 $x = e^{2u}$，

$q=e^{\gamma}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{e^{2u}-e^{2\gamma n}}{1-e^{2\gamma n}\cdot e^{2u}} &= e^{-2n\gamma}\cdot\frac{e^{2u}-e^{2n\gamma}}{e^{-2n\gamma}-e^{2u}}\\ &= e^{-2n\gamma}\cdot\frac{e^{u+n\gamma}}{e^{u-n\gamma}}\cdot\frac{e^{u-n\gamma}-e^{-(u-n\gamma}}{e^{-(u+n\gamma)}-e^{u+n\gamma}}\\ &= (-1)\frac{\mathrm{sh}(u-n\gamma)}{\mathrm{sh}(u+n\gamma)}.\end{aligned}$$

即有: (对 $SU(2)$)

$$\rho_j(x=e^{2u})=\prod_{n=1}^{j}(-1)\frac{\mathrm{sh}(u-n\gamma)}{\mathrm{sh}(u+n\gamma)}=(-1)^j\prod_{n=1}^{j}\frac{\mathrm{sh}(u-n\gamma)}{\mathrm{sh}(u+n\gamma)}. \quad (8.71)$$

当考虑如 (7.6) 式所示的有理极限时, 即 $u\to\gamma u$, $\gamma\to 0$, 则 (8.71) 变为

$$\rho_j(u)\to\rho_j^{\text{有理}}(u)=\prod_{n=1}^{j}(-1)\cdot\frac{u-n}{u+n}=\prod_{n=1}^{j}\frac{n-u}{n+u}, \quad (8.72)$$

$$\rho_0(u)=1.$$

将 (8.71) 代入 (8.67), 遂得到与 $SU(2)$ 相联系的有理 $\check{R}(u)$ 的表达式. 值得指出的是, 这样得到的 $\check{R}(u)$ 不限于自旋为 1/2, 它对任意自旋情况都是正确的.

最后要指出, 按 (3.15)、(3.16), 由 $\check{R}(u)$ 可以决定哈密顿量, 例如 (7.12) 已提供了一个例子. 将谱参数 u 用 $x=e^u$ 代替, 这时可取哈密顿量为 $\frac{\partial\check{R}(x)}{\partial x}\big|_{x=1}$. 对任意自旋情况, 将 (8.71) 代入 (8.67), 再取 $\check{R}(x)$ 在 $x=1$ 处的微商值, 即可定出相应的哈密顿量. 以后我们还要回到这个问题.

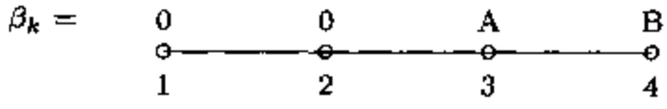
§ 8.5 与概率演化方程的联系

设在格点数为 L 的一维链上有 $L-1$ 个分割间距, 上面任意格点记为 $k(1\leqslant k\leqslant L)$. 而每个格点 k 处存在 N 个态, 用 β_k 表

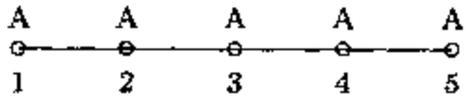
示，$\beta_k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. 这种态可代表“自旋”量子态，也可以代表其他物理内容. 例如

$$\begin{aligned}
\beta_k = \quad & 0: \quad \text{空格 (没有分子)} \\
& 1: \quad \text{代表有分子 A} \\
& 2: \quad \text{代表有分子 B} \\
& \cdots\cdots \\
& N-1: \quad \text{代表有分子 W}
\end{aligned}$$

在某个 t 时刻，给定一套 β_k 的值，即给定了一种组态. 例如 $L = 4, N = 3$ 时，$\beta_1 = \beta_2 = 0$: 空格，$\beta_3 = 1$: A, $\beta_4 = 2$: B, 则此时组态为



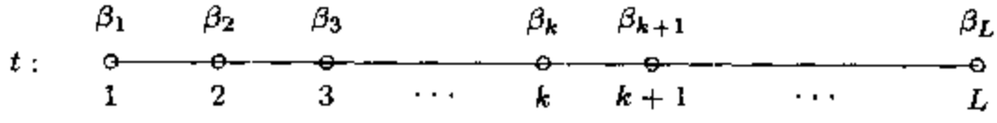
这种组态相应存在的概率为 $P(0, 0, A, B)$. 再如 $P(1, 1, 1, 1, 1)$ 则代表下面组态的概率 $(L = 5)$:



等等. 一般地，在某个时刻 t, 第 k 个格点上出现 β_k 态的概率记为

$$P(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_k, \cdots \beta_L; t).$$

这个概率函数可用如下图表示:



由于在 t 时刻，各格点处的态完全是随机的，下一个时刻，各格点处的态可以是另外一种样子. 一般说，这两者之间的关系是相当复杂的，甚至不能计算. 现在假定这种态随时间的演化是以近邻方式进行的，即存在如下关系 [22]:

$$\begin{aligned}
&P(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_k,\beta_{k+1},\cdots,\beta_L;t+\Delta t)\\
&=P(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,\beta_{k+1},\cdots,\beta_L;t)+\sum_{k=1}^{L-1}\cdot\sum_{\substack{\gamma_k=0,\\ \gamma_{k+1}=0}}^{N-1}\Gamma_{\beta_k\beta_{k+1}}^{\gamma_k\gamma_{k+1}}\Delta t\\
&\quad\cdot P(\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\gamma_k,\gamma_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_L;t). \qquad (8.73)
\end{aligned}$$

如果假定了周期边界条件，即有 L 格点与第 1 格点状态相重. 设 $\Gamma_{\beta_k\beta_{k+1}}^{\gamma_k\gamma_{k+1}}$ 不依赖于 t.(8.73) 表示组态随时间演化过程只是各种相邻的一对组态的各种可能的组性组合. 由于 Δt 很小，上式可化为微分方程. 为简单，$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_k,\cdots,\beta_L$ 表示为 $\{\beta\}$, 则 (8.73) 写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P(\{\beta\};t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{L-1}\sum_{\gamma_k,\gamma_{k+1}=0}^{N-1}\Gamma_{\beta_k\beta_{k+1}}^{\gamma_k\gamma_{k+1}}\\
&\cdot P(\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\gamma_k,\gamma_{k+1},\beta_{k+2},\cdots\beta_L;t). \qquad (8.74)
\end{aligned}$$

将上式左、右端均对 $(\beta_1,\cdots,\beta_L)$ 求和，因为对所有组态求和总概率不应随时间改变，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\{\beta\}}P(\{\beta\};t)=0.$$

右端 $\sum_{\substack{\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}\\ \beta_{k+2},\cdots,\beta_L}} P(\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\gamma_k,\gamma_{k+1}\beta_{k+2},\cdots,\beta_L;t)\geqslant 0$ (对任意 γ_k,γ_{k+1}), 故应有

$$\sum_{\beta_k,\beta_{k+1}}\Gamma_{\beta_k\beta_{k+1}}^{\gamma_k\gamma_{k+1}}=0. \qquad (8.75)$$

它是总概率不随 t 改变的结果. 为了说明 (8.75) 的意义, 考虑 β 与 γ 只取 0,1 两个态的情况. 此时 Γ_{kl}^{ij} $(ij,k,l=0,1)$ 为一个 4×4 矩阵. i,j 代表 γ_k,γ_{k+1} 为初始态, 记为列指标; 而 k,l 代表 β_k,β_{k+1} 即为 "跃迁" 后的态, 记为行指标. 由 (8.75) 得

$$\begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Gamma(*1) & \Gamma_{00}^{01} & \Gamma_{00}^{10} & \Gamma_{00}^{11} \\ \Gamma_{01}^{00} & \Gamma(*2) & \Gamma_{01}^{10} & \Gamma_{01}^{11} \\ \Gamma_{10}^{00} & \Gamma_{10}^{01} & \Gamma(*3) & \Gamma_{10}^{11} \\ \Gamma_{11}^{00} & \Gamma_{11}^{01} & \Gamma_{11}^{10} & \Gamma(*4) \end{pmatrix} \end{array}. \tag{8.76}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma(*1) &= -(\Gamma_{01}^{00}+\Gamma_{10}^{00}+\Gamma_{11}^{00}), \\ \Gamma(*2) &= -(\Gamma_{01}^{01}+\Gamma_{10}^{01}+\Gamma_{11}^{01}), \\ \Gamma(*3) &= -(\Gamma_{01}^{10}+\Gamma_{10}^{01}+\Gamma_{11}^{01}), \\ \Gamma(*4) &= -(\Gamma_{01}^{11}+\Gamma_{10}^{11}+\Gamma_{11}^{11}). \end{aligned}$$

如果用 0 代表真空, 1 代表分子 (或某种粒子态)A, 则 Γ 这个矩阵的每个元素代表一个过程. 例如:

$\Gamma_{10}^{00}=\Gamma_{\mathrm{A}0}^{00}$: $0+0\to \mathrm{A}+0$ 产生

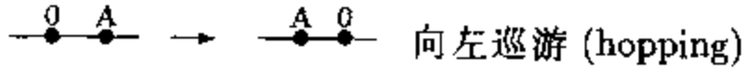
$\Gamma_{00}^{01}=\Gamma_{00}^{0\mathrm{A}}$: $0+\mathrm{A}\to 0+0$ 消灭

$\Gamma_{01}^{00}=\Gamma_{0\mathrm{A}}^{00}$: $0+0\to 0+\mathrm{A}$ 产生 (另一格点处)

$\Gamma_{00}^{11}=\Gamma_{00}^{\mathrm{AA}}$: $\mathrm{A}+\mathrm{A}\to 0+0$ 湮没

$\Gamma_{11}^{00}=\Gamma_{\mathrm{AA}}^{00}$: $0+0\to \mathrm{A}+\mathrm{A}$ 对生

$\Gamma_{10}^{01}=\Gamma_{0\mathrm{A}}^{\mathrm{A}0}$: $0+\mathrm{A}\to \mathrm{A}+0$



向左巡游 (hopping)

$\Gamma_{01}^{10}=\Gamma_{\mathrm{A}0}^{0\mathrm{A}}$: $\mathrm{A}+0\to 0+\mathrm{A}$



向右巡游

$\Gamma_{10}^{11}=\Gamma_{\mathrm{A}0}^{\mathrm{AA}}$: $\mathrm{A}+\mathrm{A}\to \mathrm{A}+0$ 左凝结 (Coagulation)

(即两个分子凝结成一个分子)

$\Gamma_{01}^{11} = \Gamma_{0A}^{AA}$: $A + A \to 0 + A$ 右凝结

$\Gamma_{10}^{101} = \Gamma_{AA}^{A0}$: $A + 0 \to A + A$ 左消凝结 (Decoagulation)

$\Gamma_{11}^{01} = \Gamma_{AA}^{0A}$: $0 + A \to A + A$ 右消凝结

所有上面所列字母的顺序，表示格点的顺序. 所谓“分子”，可代表任何态，例如“真空” 0 可代表声子，而 A 代表激子 (exciton)，等等. 当存在一定对称性时，如左巡游与右巡游没有差别时，则有 $\Gamma_{10}^{01} = \Gamma_{01}^{10}$，等等.

由 (8.75) 的概率守恒条件，可知矩阵 Γ 有一个重要性质：在形如 (8.76) 矩阵中，每个列中所有元素之和为 0. 它对 $N^2 \times N^2$ 矩阵也是如此.

有了以上的准备，让我们推导迁移方程 (transport). 设在 L 个格点上有某种态的组态，例如在第 k 个格点上有 β_k 态，用

$$|\beta_1, \cdots, \beta_k, \cdots, \beta_L\rangle$$

表示. 在 t 时刻具有该形式组态的概率为 $P(\beta; t)$, 定义一个概率态 (不是量子态)

$$|\mathcal{P}\rangle = \sum_{\{\beta\}} P(\{\beta\}; t)|\{\beta\}\rangle. \tag{8.77}$$

则有

$$\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t} = \sum_{\{\beta\}} \frac{\partial P(\{\beta\}; t)}{\partial t}|\{\beta\}\rangle. \tag{8.78}$$

将 (8.74) 代入 (8.78), 遂得

$$\begin{aligned}\frac{\partial|P\rangle}{\partial t} = &\sum_{\{\beta\}} \sum_{k=1}^{L-1} \sum_{\gamma_k, \gamma_{k+1}=0}^{N-1} \Gamma_{\beta_k \beta_{k+1}}^{\gamma_k \gamma_{k+1}} \\ &\cdot P(\beta_1, \cdots, \beta_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots, \beta_2) \\ &\cdot |\beta_1, \cdots, \beta_k, \beta_{k+1}, \cdots, \beta_L\rangle. \end{aligned} \tag{8.79}$$

为了方便，将 $\Gamma^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}$ 方阵写成矩阵形式. 首先，引入 $N\times N$ 矩阵，它作用在第 k 个格点上，表为 $E^{\alpha\beta}_k$，它具有性质

$$\text{在第 } k \text{ 个格点上：}\ (E^{\alpha\beta})_{\sigma\rho}=\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}, \tag{8.80}$$

而不同格点处的 $E^{\alpha\beta}$ 可进行类似的运算. 易证，有 (相重指标代表求和)

$$\Gamma^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}=\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(E^{\gamma\alpha}_k\otimes E^{\delta\beta}_{k+1})^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}\equiv-(H_{k,k+1})^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}. \tag{8.81}$$

因为

$$\begin{aligned}(E^{\gamma\alpha}_k\otimes E^{\delta\beta}_{k+1})^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}&=(E^{\gamma\alpha}_k)_{\gamma_k\beta_k}(E^{\delta\beta}_{k+1})_{\gamma_{k+1}\beta_{k+1}}\\&=\delta_{\gamma\gamma_k}\delta_{\alpha\beta_k}\cdot\delta_{\delta\gamma_{k+1}}\delta_{\beta\beta_{k+1}},\end{aligned}$$

再乘以 $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$，对相重指标求知，即得 (8.81) 式的左端. 显然，矩阵 $\Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}E^{\gamma\alpha}_k\otimes E^{\delta\beta}_{k+1}$ 是 $N^2\times N^2$ 方阵，它依赖于格点 k 与 $k+1$. 将它定义为 $-H_{k,k+1}$. 以后我们知道，它起着哈密顿量的作用：

$$H=\sum_{k=1}^{L-1}H_{k,k+1}. \tag{8.82}$$

将 (8.81) 代入 (8.79)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t}=-\sum_{\{\beta\}}\sum_{k=1}^{L-1}\sum_{\gamma_k,\gamma_{k+1}=0}^{N-1}&(H_{k,k+1})^{\gamma_k\gamma_{k+1}}_{\beta_k\beta_{k+1}}\\&\cdot P(\beta_1,\cdots,\gamma_k,\gamma_{k+1},\cdots,\beta_L;t)\cdot|\{\beta\}\rangle.\end{aligned} \tag{8.83}$$

在 (8.83) 中，由于对指标 γ_k,γ_{k+1} 求和，可以记为 $(HP)_{k,k+1}$，再对格点 k 求和，可形式地记为

$$\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t}=-\sum_{\{\beta\}}\sum_{k=1}^{L-1}(H_{k,k+1}P)(\beta_1,\cdots,\beta_L)|\{\beta\}\rangle. \tag{8.84}$$

其中 $H_{k,k+1}P$ 后面强调了它对 $\{\beta\}$ 的依赖关系，如果我们将矩阵 $H_{k,k+1}P(\beta_1,\cdots,\beta_L)$ 型乘积同时理解为也对格点求和，那么形式上可以把 (8.84) 的左端记为

$$\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t}=-\sum_{\{\beta\}}(\mathcal{H}P)_{\beta_1\cdots\beta_L}|\beta_1\cdots\beta_2\rangle, \tag{8.85}$$

$$\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t}=-\mathcal{H}|\mathcal{P}\rangle. \tag{8.86}$$

其中 $\mathcal{H}$ 可以理解为作用在 $P\{\beta\};t)$ 上的算符. 需要强调指出，(8.86) 完全是形式上的记法，它的具体含义是 (8.83).

为了理解概率守恒与杨－巴克斯特方程的关系，我们举 (3.17) 为例. 因简单的 $\check{R}(u)^{k,k+1}=I+uP_{k,k+1}$，故 $H_{k,k+1}=P_{k,k+1}$，其中 $P_{k,k+1}$ 表示第 k 个格点处自旋与第 $k+1$ 格点处自旋的交换算子的矩阵表示. 最简单的自旋 1/2 情况对应 P 的 4×4 矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&1&\\&1&0&\\&&&1\end{pmatrix}=I+\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&1&\\&1&-1&\\&&&0\end{pmatrix}. \tag{8.87}$$

观察上式右端 P-I 的形式，易见它满足 Γ^{ij}_{kl} 的要求：每一列所有的元素之和为 0. 因此，由

$$\begin{pmatrix}0&&&\\&-1&1&\\&1&-1&\\&&&0\end{pmatrix}=P_{k,k+1}-I=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}_{k+1}-1)=2\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_{k+1}-\frac{1}{2},$$

(见 (3.19) 与 (3.21)) 上式在 4×4 矩阵下面标记了由第 k 空间与第 $k+1$ 空间直乘而得的矩阵.

于是，在这个模型中，

$$H^0_{k,k+1}=\frac{1}{2}-2\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_{k+1},\quad H^0=\sum_{k=1}^{L-1}H_{k,k+1}, \tag{8.88}$$

而 $P(\beta_1,\cdots,\beta_L)$ 中态 $\beta_k=0,1$，即只有两个态．将 (8.88) 代入 (8.83) 中，对所有自旋态求和，原则上可以决定 $|\mathcal{P}\rangle$．因为在这个例子中，不同格点处的 $H_{k,k+1}$ 形式是相同的，因而 (8.83) 可简化为

$$\frac{\partial|\mathcal{P}\rangle}{\partial t}=H^0|\mathcal{P}\rangle. \tag{8.89}$$

在这个例子中，我们并不关心 H^0 自己本征值问题，亦即不关心它的量子空间行为，而是关心在 (8.83) 意义下它在辅助空间的行为：因为现在 H^0 仅仅作为一个满足 (8.75) 条件的矩阵出现，再由 (8.89) 决定概率函数的演化行为．要注意，$\mathcal{P}$ (或 $P(\beta_1,\cdots,\beta_L)$) 是概率，并不是量子力学中的波函数．一般说 $H_{k,k+1}$ 会明显地依赖于格点 k，这时 (8.83) 形式是不能简化的，仅当 $H_{k,k+1}$ 矩阵形式不依赖于 k 时，问题会大大简化．满足 (8.75) 条件的可能性很多，从杨－巴克斯特方程导出的哈密顿量仅仅是众多满足 (8.83) 方程的可能性之一．形如 (8.75)、(8.89) 的主方程具有广泛的物理应用．

在介观物理中，有些模型，例如无序介观环模型，其输送过程即由 (8.86) 描述，而作变数替换后，$\mathcal{H}$ 可表为与杨－巴克斯特方程有关的哈密顿量，即卡洛杰惹－萨则兰德模型 (Calogero–Sutherland model)．它是一种长程相互作用模型，可以由杨－巴克斯特方程有关理论导出．因为涉及内容较多，我们不再这里介绍，但在第 3 章将会涉及这个模型．

第 3 章

Yangian 对称性

在第 1 章中，给定了简单形式的 $\check{R}(u)$- 矩阵 (1.8)，我们证明了形如 (1.4) 的简单形式的 $L(u)$ 满足 RTT 关系 (1.9)，条件是 $L(u)$ 的各个算符满足 (1.13) 所规定的对易关系，即 (1.18) 或 (1.19). 这两种形式的实现实际是一样的. 如果将角动量算符记为 $(\boldsymbol{L}=\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}$, (1.19) 是用 $\boldsymbol{S}=(S_1,S_2,S_3)$ 实现 (1.13)，而 (1.18) 则用 $(S_1,-S_2,-S_3)$ 来实现，即将 $\boldsymbol{S}$ 绕第 1 轴旋转 π 而得. 对于 (1.19)，我们得到 (1.47) 形式的 $L(u)$. 而对于 (1.18)，有

$$\begin{aligned} L(u) &= I+u^{-1}\begin{pmatrix} -S_3 & S_+ \\ S_- & -S_3 \end{pmatrix} \qquad (1.46') \\ &= I+u^{-1}(-S_3\sigma_3-S_2\sigma_2+S_1\sigma_1). \end{aligned}$$

现在引入新的矩阵 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=(\sigma_1,-\sigma_2,-\sigma_3)$. 易证 $\boldsymbol{\tau}$ 满足与 $\boldsymbol{\sigma}$ 完全相同的性质 (例如，相同的对易关系，每个分量平方为单位矩阵，等等), 即有

$$\tau_\alpha\tau_\beta=\delta_{\alpha\beta}+i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau_\gamma,$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma=1,2,3$. 因而

$$L(u)=I+u^{-1}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\tau}. \qquad (1.47')$$

这时，当选择 (1.18) 时，即有局域转移矩阵：

$$L_j(u)=I+u^{-1}\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{\tau},$$

因而有整体转移矩阵 (与 (1.50) 相应)：

$$T(u)=I+u^{-1}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\tau}+u^{-2}\left\{\left(i\sum_{j\neq j}^{N}\boldsymbol{S}_j\times\boldsymbol{S}_k\right)\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{S}^2\right\}+\cdots,\quad(1.50')$$

其中 $\boldsymbol{S}=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{S}_j$ 为总自旋. 注意 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\tau}=0$, 故有

$$\mathrm{tr}\,T(u)=I+u^{-2}\boldsymbol{S}^2+\cdots.$$

因此，以下我们将不再区分 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$, 因为它们只是基选择的不同，并不改变结果.

以上的讨论只告诉我们如何从局域转移矩阵生成整体转移矩阵，从而由李代数 $\boldsymbol{S}_j(u^{-1}$ 的系数) 生成更复杂的张量算子 $\boldsymbol{J}=i\sum_{j\neq k}^{N}\boldsymbol{S}_j\times\boldsymbol{S}_k$. 现在提出一个问题：给定某个 $\check{R}(u)$- 矩阵，一般情况 $\boldsymbol{T}(u)$ 应有如下展开形式：

$$T(u)=\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n}T^{(n)},\qquad(9.1)$$

其中 $T^{(n)}$ 为 $M\times M$ 矩阵 (当 $\check{R}(u)$ 为 $M^2\times M^2$ 矩阵)：

$$T^{(n)}=\|T_{ab}^{(n)}\|,\qquad(a,b=1,2,\cdots,M)$$

并且 $T_{ab}^{(n)}$ 均为量子算符，即彼此不对易. 如将 (9.1) 代入 RTT 关系 (1.41), 那么最一般的对易关系是什么样子呢？

为了更清楚地说明问题，我们仍取 $\check{R}(u)$- 矩阵如 (1.8) 所示. 这时最简单的情况是自旋 1/2 的特例，即 P 为 4×4 矩阵，从而 $T(u)$ 为 2×2 矩阵，即 $a,b=1,2$, 则有

$$T(u)=T^{(0)}+u^{-1}\begin{pmatrix}T_{11}^{(1)}&T_{12}^{(1)}\\T_{21}^{(1)}&T_{22}^{(1)}\end{pmatrix}+u^{-2}\begin{pmatrix}T_{11}^{(2)}&T_{12}^{(2)}\\T_{21}^{(2)}&T_{22}^{(2)}\end{pmatrix}+\cdots.$$

从第 1 章讨论可知，有

$$T_{11}^{(1)} = -S_3, \quad T_{12}^{(1)} = S_+, \quad T_{21}^{(1)} = S_-, \quad T_{22}^{(1)} = S_3.$$

但是诸 $T_{ab}^{(n)}$ $(n \geq 2)$ 应满足一系列对易关系，它们是相当复杂的. 这就引起一个问题：是否所有 $T_{ab}^{(n)}$(对不同 n) 都引出独立的代数结构呢？在数学上，德林菲尔德 (V.G.Drinfeld) 已经证明 [20], 对于任何有理解形式的 $\check{R}(u)$- 矩阵，只有 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 是独立的，而高于 $n > 2$ 的 $T^{(n)}$ 原则上可以由它们决定出来. $T^{(1)}$ 具有单李代数结构，而 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 并不形成李代数；但 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 的矩阵元在一个更大的集合意义下是封闭的. $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 中的独立生成元构成的集合称为 Yangian(暂译为 “杨振宁代数”，或 “杨氏代数”), 这个命名是在 1985 年由德林菲尔德提出的，他强调这样作是为了纪念杨振宁教授在有关杨 - 巴克斯特方程研究的开创性贡献.

在本章，我们首先对形如 (1.8) 的 $\check{R}(u)$- 矩阵求解 RTT 关系，列出诸 $T_{ab}^{(n)}$ 所遵守的对易关系. 然后针对 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 给出 Yangian 的定义，并举出它的物理实现的若干例子，最后讨论它的物理应用. Yangian 本来属于数学上霍普夫代数中的一类 (Hopf Algebra), 也是比较抽象的数学结果. 我们将不使用某些数学名词，而是从具体物理算符实现加以简述. 我们将会看到， Yangian 包含了极为丰富的物理内容，它甚至早已存在于通常量子力学之中，只不过过去人们没有越出李代数的框架因而失之交臂. 从量子力学角度理解 Yangian, 可能是最直观而有效的途径了.

§9 RTT 关系的展开式与 Yangian

(9.1) 式的 $T^{(n)}$ 为 2×2 矩阵 (当 $\check{R}$ 取 (1.8) 形式时), 它的每

个矩阵元 $T_{ab}^{(n)}$ 为量子算符：

$$T^{(n)}=\begin{pmatrix} T_{11}^{(n)} & T_{12}^{(n)} \\ T_{21}^{(n)} & T_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad T^{(0)}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

将上式代入 (1.42), 得

$$(u-v)[T_{bc}(u),T_{ad}(v)]+T_{ac}(u)T_{bd}(v)-T_{ac}(v)T_{bd}(u)=0, \quad (9.2)$$

其中 $a,b,c,d=1,2$. 即有

$$[T_{bc}^{(n+1)},T_{ad}^{(m)}]-[T_{bc}^{(n)},T_{ad}^{(m+1)}]+T_{ac}^{(n)}T_{bd}^{(m)}-T_{ac}^{(m)}T_{bd}^{(n)}=0. \quad (9.3)$$

观察上式，取 $a=b,c=d$, 然后固定 n, 让 m 跑遍所有指标，易得

$$[T_{ab}^{(n)},T_{ab}^{(m)}]=0.$$

在 (9.3) 中交换 m 与 n, 再交换 a 与 b,c 与 d, 再与 (9.3) 相比较，可得

$$[T_{ab}^{(n)},T_{cd}^{(m)}]=[T_{ab}^{(m)},T_{cd}^{(n)}]. \quad (9.4)$$

为了方便，引入以下记号：

$$\begin{aligned} &T_0^{(n)}=T_{22}^{(n)}+T_{11}^{(n)}, \quad T_3^{(n)}=T_{22}^{(n)}-T_{11}^{(n)}, \\ &T_+^{(n)}=T_{12}^{(n)}, \qquad\qquad T_-^{(n)}=T_{21}^{(n)}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

则在 (9.3) 中取 $m=0,1,2$ 时，分别得到关系式：

$$\begin{aligned} &[T_\alpha^{(1)},T_\alpha^{(1)}]=[T_\alpha^{(1)},T_\alpha^{(2)}]=0, \quad (\alpha=\pm,3) \\ &[T_3^{(1)},T_\pm^{(k)}]=[T_3^{(k)},T_\pm^{(1)}]=\pm 2T_\pm^{(k)}, \\ &[T_+^{(1)},T_-^{(k)}]=[T_+^{(k)},T_-^{(1)}]=T_3^{(k)}; \quad (k=1,2) \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$
\begin{aligned}
&[T_0^{(1)}, T_\alpha^{(k)}] = [T_0^{(k)}, T_\alpha^{(1)}] = 0, \qquad (\alpha = \pm, 3, 0;\ k = 1, 2)\\
&[T_0^{(2)}, T_\pm^{(2)}] = \pm(T_3^{(1)} T_\pm^{(2)} - T_3^{(2)} T_\pm^{(1)}),\\
&[T_0^{(2)}, T_3^{(2)}] = 2(T_+^{(1)} T_-^{(2)} - T_+^{(2)} T_-^{(1)});
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_\pm^{(n+1)} = \frac{1}{2}(\pm[T_3^{(2)}, T_\pm^{(n)}] + T_0^{(n)} T_\pm^{(1)} - T_0^{(1)} T_\pm^{(n)}),\\
&T_3^{(n+1)} = [T_+^{(n)}, T_-^{(2)}] + \frac{1}{2}(T_0^{(n)} T_3^{(1)} - T_0^{(1)} T_3^{(n)});\\
&\qquad\qquad (n \geq 2).
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

$$
[T_\alpha^{(n)}, T_\alpha^{(m)}] = 0 \quad (\alpha = \pm, 3, 0; m, n \geq 2) \tag{9.9}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&[T_\alpha^{(m)}, T_\beta^{(n)}] = [T_\alpha^{(n)}, T_\beta^{(m)}], \quad (\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = \pm, 3, 0; m < n, n > 2)\\
&[T_0^{(n+1)}, T_\pm^{(m)}] - [T_0^{(n)}, T_\pm^{(m+1)}] \pm (T_3^{(m)} T_\pm^{(n)} - T_3^{(n)} T_\pm^{(m)}) = 0,\\
&[T_0^{(n+1)}, T_3^{(m)}] - [T_0^{(n)}, T_3^{(n+1)}] + 2(T_+^{(m)} T_-^{(n)} - T_+^{(n)} T_-^{(m)}) = 0,\\
&[T_3^{(n+1)}, T_\pm^{(m)}] - [T_3^{(n)}, T_\pm^{(n+1)}] \pm (T_0^{(m)} T_\pm^{(n)} - T_0^{(n)} T_\pm^{(m)}) = 0,\\
&[T_+^{(n+1)}, T_-^{(m)}] - [T_+^{(n)}, T_-^{(m+1)}] + \frac{1}{2}(T_0^{(m)} T_3^{(n)} - T_0^{(n)} T_3^{(m)}) = 0.\\
&\qquad\qquad (m < n, n > 2)
\end{aligned}
\tag{9.10}
$$

但是,上面许多关系不是独立的.经过复杂的计算,可以由 (9.6)~(9.9) 推出 (9.10). 最后, 不等价的独立关系式为 (9.6)~(9.9).

(9.6) 与 (9.7) 描述了 $T_{ab}^{(k)}(k = 1, 2)$ 所满足的对易关系, 而 (9.8) 是 $T^{(n)}(n > 2)$ 的递推关系. (9.9) 则反映了对高阶 $T^{(n)}$ 的限制. 值得特别指出的是 (9.9) 中 $\alpha \neq 0$ 的情况, 利用 (9.8), 代入到 (9.9) 后, 它等价于

$$\begin{aligned}&[T_{\pm}^{(m)},[T_3^{(2)},T_{\pm}^{(n)}]]\pm[T_{\pm}^{(m)},T_0^{(n)}]T_{\pm}^{(1)}=0,\\&2[T_3^{(m)},[T_+^{(n)},T_-^{(2)}]]+[T_3^{(m)},T_0^{(n)}]T_3^{(1)}=0.\end{aligned}\quad(m,n\geq 2)\qquad(9.11)$$

它在 $m=n=2$ 时，利用 (9.7), 可化为

$$[T_{\pm}^{(2)},[T_3^{(2)},T_{\pm}^{(2)}]]=(T_3^{(1)}T_{\pm}^{(2)}-T_3^{(2)}T_{\pm}^{(1)})T_{\pm}^{(1)},\qquad(9.12)$$

$$[T_3^{(2)},[T_+^{(2)},T_-^{(2)}]]=(T_+^{(1)}T_-^{(2)}-T_+^{(2)}T_-^{(1)})T_3^{(1)}.\qquad(9.13)$$

利用 (9.6), 求 $T_{\pm}^{(1)}$ 与 (9.13) 的对易括号，推出

$$\begin{aligned}&2[T_{\pm}^{(2)},[T_+^{(2)},T_-^{(2)}]]\pm[T_3^{(2)},[T_3^{(2)},T_{\pm}^{(2)}]]\\&=2(T_+^{(1)}T_-^{(2)}-T_+^{(2)}T_-^{(1)})T_{\pm}^{(1)}\pm(T_3^{(1)}T_{\pm}^{(2)}-T_3^{(2)}T_{\pm}^{(1)})T_3^{(1)}.\end{aligned}\qquad(9.14)$$

(9.12)~(9.14) 十分重要, 它们与 (9.6) 规定了 $T_{\alpha}^{(2)}$ 与 $T_{\beta}^{(2)}$ $(\alpha=\pm,3)$ 间的关系.

(9.6),(9.12)~(9.14) 组成了 $T^{(n)}$ 当 $n=1,2$ 时 (即前两阶) 的代数关系, 它们间有明确的对易关系. 为了更明显地表示出这些关系，定义 (h 为任意常数)：

$$\begin{aligned}&T_{\pm}^{(1)}=I_{\pm},\quad T_3^{(1)}=2I_3,\\&T_{22}^{(1)}=-T_{11}^{(1)}=I_3,\\&T_{\pm}^{(2)}=(-2h)J_{\pm},T_3^{(2)}=(-\frac{4}{h})J_3,\end{aligned}\qquad(9.15)$$

则 (9.6),(9.12) 与 (9.13) 给出

$$\begin{aligned}&[I_{\alpha},J_{\alpha}]=0,\quad(\alpha=\pm,3)\\&[I_3,I_{\pm}]=\pm I_{\pm},\quad[I_+,I_-]=2I_3;\end{aligned}\qquad(9.16)$$

$$
\begin{aligned}
&[I_3, J_\pm] = [J_3, I_\pm] = \pm J_\pm, \\
&[I_+, J_-] = [J_+, I_-] = 2J_3;
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

$$
[J_\pm, [J_3, J_\pm]] = \frac{h^2}{4}(I_3 J_\pm - J_3 I_\pm) I_\pm, \tag{9.18}
$$

$$
[J_3, [J_+, J_-]] = \frac{h^2}{4}(I_+ J_- - J_+ I_-) I_3; \tag{9.19}
$$

与

$$
\begin{aligned}
&\{J_\pm, [J_+, J_-]] + 2[J_3, [J_3, J_\pm]] \\
&\quad = \frac{h^2}{4}\{I_\pm J_- J_\mp) I_\pm + 2(I_3 J_\pm - J_3 I_\pm) J_3\}.
\end{aligned}
\tag{9.20}
$$

(9.16)~(9.20) 定义了一个复杂的代数, 为了方便, 将 (9.16) 与 (9.17) 写成分量形式:

$$
[I_\lambda, I_\mu] = i\epsilon_{\lambda\mu\nu} I_\nu = C_{\lambda\mu\nu} I_\nu, \tag{9.21}
$$

$$
[I_\lambda, J_\mu] = i\epsilon_{\lambda\mu\nu} J\nu = C_{\lambda\mu\nu} J_\nu. \tag{9.22}
$$

其中 $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$; 相重指标代表求和. (9.21) 式表明 $\{I_\lambda\}$ 自己组成李代数, 即通常角动量对易关系. (9.22) 式表明算子集合 $\{J_\lambda\}$ 已经越出了李代数: J 与 I 的对易关系正比于 J. 这种类型的关系在量子力学中并不奇怪, 因为坐标 (或动量) 与角动量的对易关系就正比于坐标 (或动量). 然而, 满足 (9.22) 的 J 有无穷多可能性, (9.18)~(9.20) 规定了进一步的限制. 它们表明, 除了雅可比恒等式以外, 由于两个 J_α 算子 ($\alpha = 3, \pm$) 不具有封闭性, 这种代数结构是在更广的意义下封闭的. (9.18) 与 (9.19) 显示出三个 J_α 算子的两重对易关系封闭于两个 I_μ 、 I_ν 与一个 $J_\lambda (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$ 的 "立方" 形式组合. 在讨论它们一般形式之前, 我们首先证明 (9.20) 是

不独立的. 它是 (9.16), (9.17) 与 (9.18)(或 9.19)) 的后果. 具体证明是较为直接的, 只用到基本运算. 为了读者了解这类计算的特点, 我们给出一些计算过程.

首先证明

$$I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3) = (I_3 J_\pm - J_3 I_\pm) I_\pm,$$
$$J_3(J_- I_+ - I_- J_+) = (I_+ J_- - J_+ I_-) J_3.$$

证明 不断应用 (9.16) 与 (9.17),

$$\begin{aligned}
&I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3)\\
&= J_\pm I_\pm I_3 - I_\pm I_\pm J_3) \quad ([I_\pm, J_\pm] = 0)\\
&= J_\pm(I_3 I_\pm + [I_\pm, I_3]) - I_\pm(J_3 I_\pm + [I_\pm, J_3])\\
&= J_\pm(I_3 I_\pm \mp I_\pm) - I_\pm(J_3 I_\pm \mp J_\pm)\\
&= J_\pm I_3 I_\pm - I_\pm J_3 I_\pm\\
&= (I_3 J_\pm + [J_\pm, I_3]) I_\pm - (J_3 I_\pm + [I_\pm, J_3]) I_\pm\\
&= (I_3 J_\pm \mp J_\pm) I_\pm - (J_3 I_\pm \mp J_\pm) I_\pm\\
&= (I_3 J_\pm - J_3 I_\pm) I_\pm.
\end{aligned}$$

于是, (9.18) 可以写为 $(\lambda = \dfrac{h^2}{4})$:

$$[J_\pm, [J_3, J_\pm]] = \lambda I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3), \tag{9.18'}$$

或

$$[J_\pm, A] = \lambda I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3).$$

其中 $A = [J_3, J_\pm]$. 对上式左、右端均取与 $I_\mp$ 的对易关系:

$$[I_\mp, [J_\pm, A]] = \lambda[I_\mp, I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3)],$$

左端满足雅可比等式:

$$[I_{\mp},[J_{\pm},A]]=-[A,[I_{\mp},J_{\pm}]]-[J_{\pm},[A,U_{\mp}]],$$

利用 (9.17) 知 $[I_{\mp},J_{\pm}]=\mp 2J_3$, 有

$$\text{左端}=\pm 2[A,J_3]-[J_{\pm},[A,I_{\mp}]].$$

现在计算 $[A,I_{\mp}]$. 利用 $[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b$, 易知

$$\begin{aligned}[A,I_{\mp}]&=[[J_3,J_{\pm}],I_{\mp}]\\&=[(J_3J_{\pm}-J_{\pm}J_3),I_{\mp}]\\&=(J_3[J_{\pm},I_{\mp}]+[J_3,I_{\mp}]J_{\pm})-(J_{\pm}[J_3,I_{\mp}]+[J_{\pm},I_{\mp}]J_3)\\&=\pm[J_{\pm},J_{\mp}].\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\pm(2[[J_3,J_{\pm}],J_3]-[J_{\pm},[J_{\pm},J_{\mp}]])\\&=\mp(2[J_3,[J_3,J_{\pm}]]+[J_{\pm},[J_{\pm},J_{\mp}]]).\\\text{左端}&=\lambda([I_{\mp},I_{\pm}(J_{\pm}I_3-I_{\pm}J_3)])\\&=\lambda([I_{\mp},I_{\pm}](J_{\pm}I_3-I_{\pm}J_3)+I_{\pm}[I_{\mp},(J_{\pm}I_3-I_{\pm}J_3)]).\end{aligned}$$

不断应用 (9.16) 与 (9.17), 得

$$\text{右端}=\lambda\{\mp 2I_3(J_{\pm}I_3-I_{\pm}J_3)\mp I_{\pm}(I_{\pm}J_{\mp}-J_{\pm}I_{\mp})\}.$$

于是,

$$\begin{aligned}&2[J_3,[J_3,J_{\pm}]]+[J_{\pm},[J_{\pm},J_{\mp}]]\\&=\lambda\{2I_3(J_{\pm}I_3-I_{\pm}J_3+I_{\pm}(I_{\pm}J_{\mp}-J_{\pm}I_{\mp})\}\\&=\lambda\{2(I_3J_{\pm}-J_3I_{\pm})I_3+(J_{\mp}I_{\pm}-I_{\mp}J_{\pm})I_{\pm}\}.\end{aligned}$$

因为

$$J_{\mp}I_{\pm} - I_{\mp}J_{\pm} = I_{\pm}J_{\mp} + [J_{\mp}, I_{\pm}] - J_{\pm}I_{\mp} - [I_{\mp}, J_{\pm}]$$
$$= I_{\pm}J_{\mp} - J_{\pm}I_{\mp},$$

故得 (9.20) 式. 由以上计算过程可以看出, 利用雅可比等式、 I_α 与 J_β 间的对易关系 (9.21) 、 (9.22) 以及对易括号的基本运算, 可以进行本节的所有运算, 不需要更复杂的数学.

因此, 形式如 (1.8) 的 $\check{R}(u)$- 矩阵所决定的转移矩阵 $T(u)$ 展开式中 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 部分由李代数关系 (9.16)(或 (9.21)) 与含 J_α 的关系决定, 而含 J_α 的关系则由 (9.17)(或 (9.22)) 与 (9.18),(9.19) 决定. 对易关系集合 (9.16)~(9.20) 定义了一个复杂的代数, 它连同以后介绍的余乘积 (co-product), 定义了与 $SL(2)$ 李代数相联系的 Yangian, 记为 $\mathrm{Y}(SL(2))$. 为了与德林菲尔德原始形式相比较, 以下我们证明, (9.18)~(9.20) 可以写为更紧缩的形式 [20] :

$$[J_\lambda, [J_\mu, I_\nu]] - [I_\lambda, [J_\mu, J_\nu]] = \lambda a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\}, \qquad (9.23)$$

其中

$$a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4!}C_{\lambda\alpha\sigma}C_{\mu\beta\tau}C_{\nu\gamma\rho}C_{\sigma\tau\rho},$$
$$\{x_1, x_2, x_3\} = \sum_{i\neq j\neq k} x_i x_j x_k;$$

以及

$$[[J_\lambda, J_\mu], [I_\sigma, J_\tau]] + [[J_\sigma, J_\tau], [I_\lambda, J_\mu]]$$
$$= \lambda(a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}C_{\sigma\tau\nu} + a_{\sigma\tau\nu\alpha\beta\gamma}C_{\lambda\mu\nu})\{I_\alpha, I_\beta, J_\gamma\}, \qquad (9.24)$$

相重指标代表求和.

在我们以上讨论的情况，群结构常数 $C_{\lambda\mu\nu}$ 有简单的形式：

$$C_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu} \quad (\lambda\mu\nu = 1,2,3). \tag{9.25}$$

这时 (9.23) 式自然满足：两端均为 0. 因此，只有 (9.21), (9.22) 与 (9.24) 是独立的. 现在证明在 (9.25) 情况下，(9.24) 与 (9.18)～(9.20) 一致. 先证明此时 (9.23) 恒等.

当 $\lambda,\mu,\nu = 1,2,3$ 时，令

$$\begin{aligned} F &= [J_\lambda,[J_\mu,I_\nu]] - [I_\lambda,[I_\mu,J_\nu]] \\ &= [J_\lambda[J_\mu,I_\nu]] + [J_\nu,[I_\lambda,J_\mu]] + [J_\mu,[J_\nu,I_\lambda]], \\ F &= +i\epsilon_{\mu\nu\sigma}[J_\lambda,J_\sigma] + i\epsilon_{\lambda\mu\nu}[J_\nu,J_\sigma] + i\epsilon_{\nu\lambda\sigma}[J_\mu,J_\sigma]. \end{aligned}$$

当 λ,μ,ν 中有任意一对指标相同时，例如 $\lambda = \mu$ 时，由于 $\epsilon_{\mu\nu\sigma} + \epsilon_{\nu\mu\sigma} = 0$, 即有 $F = 0$; 而当 $\lambda \neq \mu \neq \nu$, 即三个指标均不相等时，因为它们只能等于 1, 2 与 3(例如 $\lambda = 1,\mu = 2,\gamma = 3$ 时), 则在全反对称张量求和号中 J_σ 必与对易括号中另一个 $J_\alpha(\alpha = \lambda,\gamma$ 或 $\mu)$ 相同，因此每项必为 0. 例如 $\lambda = 1,\mu = 2,\gamma = 3$ 时，$F = i\epsilon_{23\sigma}[J_1,J_\sigma] + i\epsilon_{12\sigma}[J_3,J_\sigma] + i\epsilon_{31\sigma}[J_2,J_\sigma] = 0.$

现在看 (9.23) 的左端. 当 $C_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ 时，分以下几种情况讨论：

$\lambda \neq \mu \neq \nu$ 时，

$$\begin{aligned} a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha,I_\beta,I_\gamma\} = \frac{i^3}{24}(&\epsilon_{\lambda\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\epsilon_{\nu\lambda\mu}\epsilon_{\nu\lambda\mu}\{I_\mu,I_\nu,I_\lambda\} \\ &\epsilon_{\lambda\nu\mu}\epsilon_{\mu\lambda\nu}\epsilon_{\nu\mu\lambda}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\{I_\nu,I_\lambda,I_\mu\}) = 0; \end{aligned}$$

$\lambda = \mu \neq \nu$ 时，

$$\begin{aligned} a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha,I_\beta,I_\gamma\} = \frac{i^3}{24}(&\epsilon_{\lambda\sigma\nu}\epsilon_{\mu\nu\sigma}\epsilon_{\nu\sigma\lambda}\epsilon_{\nu\sigma\lambda}\{I_\mu,I_\nu,I_\lambda\} \\ &+ \epsilon_{\lambda\nu\sigma}\epsilon_{\mu\sigma\nu}\epsilon_{\nu\sigma\lambda}\epsilon_{\sigma\nu\lambda}\{I_\nu,I_\lambda,I_\mu\}) = 0; \end{aligned}$$

$\lambda \neq \mu = \nu, \lambda = \nu \neq \nu$ 时，证明过程相同.

$\lambda = \mu = \nu$ 时，

$$a_{\lambda\lambda\lambda\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\} = \frac{i^3}{24}\{\epsilon_{\lambda\tau\sigma}\epsilon_{\lambda\sigma\tau}\epsilon_{\lambda\alpha\lambda}\epsilon_{\sigma\tau\lambda}\{I_\tau, I_\sigma, I_\alpha\}|_{\alpha=\tau,\sigma} + i^3\epsilon_{\lambda\sigma\tau}\epsilon_{\lambda\tau\sigma}\epsilon_{\lambda\alpha\lambda}\epsilon_{\tau\sigma\lambda}\{I_\sigma 0, I_\tau, I_\alpha\}|_{\alpha=\tau,\sigma}\} = 0;$$

因此，当诸下标皆为 1, 2, 3 时，且 $C_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ 时 (9.23) 为恒等式. 这是个很特殊的情况.

进一步，我们计算 (9.24) 式，看当 $C_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ 这一特殊情况时，它化简成什么样子. 仍然区分指标间有相等或不等的各种情况. 令 (9.24) 的左端为 G, 则有

当 $\lambda = \mu$ 或 $\sigma = \tau$ 时： $G = 0$, 同理可直接验证右端

$$(a_{\lambda\lambda\nu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\tau\sigma\nu} + a_{\tau\sigma\nu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\lambda\nu})\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\} = 0.$$

当 $\lambda = \tau$ 时，

$$G = i\begin{cases} 2\epsilon_{\mu\lambda\rho}[J_\rho, [J_\lambda, J_\mu]], & (\sigma = \mu), \\ \epsilon_{\lambda\mu\sigma}([J_\mu, [J_\lambda, J_\mu]] - [J_\sigma, \{J_\lambda, J_\sigma]], & (\sigma \neq \mu). \end{cases}$$

而 (9.24) 的右端此时等于

$$i\lambda(a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\sigma\nu} + a_{\lambda\sigma\nu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\nu\nu})\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\}$$
$$= \frac{i\lambda}{24}\begin{cases} 2\epsilon_{\lambda\mu\rho}(\{I_\mu, J_\rho, I_\lambda\} - \{I_\rho, I_\lambda, J_\mu\}), & (\sigma = \mu), \\ \epsilon_{\lambda\sigma\mu}(\{I_\sigma, I_\lambda, J_\sigma\} - \{I\mu, I_\lambda, J_\mu\} \\ \quad +\{I_\mu, I\mu, J_\lambda\} - \{I_\sigma, I_\sigma, J_\lambda\}), & (\sigma \neq \mu). \end{cases}$$

注意到 $\{I_\alpha, I_\beta, J_\gamma\}$ 是三者的对称集合，可得

$$[J_\nu, [J_\lambda, J_\mu]] = \frac{\lambda}{4}(J_\mu I_\lambda - I_\mu J_\lambda)I_\nu, \quad (\lambda \neq \mu \neq \nu),$$
$$[J_\mu, [J_\lambda, J_\mu]] - [J_\nu, [J_\lambda, J_\nu]] = \frac{\lambda}{4}(I_\nu J_\lambda I_\nu) - I_\mu J_\lambda I_\mu + I_\mu I_\lambda J_\mu - I_\nu I_\lambda J_\nu), \qquad (\lambda \neq \mu \neq \nu). \qquad (9.26)$$

上式中，诸相重指标不求和，且 $\lambda,\mu,\gamma=1,2,3$. 当 $\lambda=\sigma,\mu=\tau$ 或 $\mu=\sigma$ 时，结果与 $\lambda=\tau$ 情况相同. (9.26) 式是对指标 1, 2, 3 而言的，对任意算子，引入

$$A_{\pm}=A_1\pm iA_2,\quad (A=I\text{ 或}J),$$

则 (9.26) 可表为 5 个关系式：

$$\begin{aligned}
&[J_3,[J_1,J_2]]=\frac{\lambda}{4}(J_2I_1-I_2J_1)I_3\\
&\Rightarrow[J_3,[J_+,J_-]]=\frac{\lambda}{4}(J_-I_+-I_-J_+)I_3,\\
&[J_+,[J_3,J_+]]\\
&=[J_1,[J_3,J_1]]-[J_2,[J_3,J_2]]+i([J_1,[J_3,J_2]]+[J_2,[J_3,J_1]])\\
&=\frac{\lambda}{4}I_+(J_+I_3-I_+J_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[J_-,[J_3,J_-]]\\
&=[J_1,[J_3,J_1]]-[J_2,[J_3,J_2]]-i([J_1,[J_3,J_2]]+[J_2,[J_3,J_1]])\\
&=\frac{\lambda}{4}I_-(J_-I_3-I_-J_3),\\
&2[J_3,[J_3,J_+]]+[J_+,[J_+,J_-]]\\
&=2(i[J_1,[J_2,J_1]]+[J_2,[J_1,J_2]])+[J_3,[J_3,J_+]]\\
&=\frac{\lambda}{4}(2I_3(J_+I_3-I_+J_3)+I_+(J_+I_--I_+J_-)),\\
&2[J_3,[J_3,J_+]]+[J_-,[J_-,J_+]]\\
&=2(-i[J_1,[J_2,J_1]]+[J_2,[J_1,J_2]])+[J_3,[J_3,J_-]]\\
&=\frac{\lambda}{4}(2I_3(J_-I_3-I_-J_3)+I_-(J_-I_+-I_-J_+)).
\end{aligned}$$

注意到 $J_3(J_-I_+-I_-J_+)=(I_+J_--J_+I_-)J_3$ 等关系式，它们正是 (9.18)～(9.20) 诸式.

在本节我们用 RTT 关系得到了 I_α 与 $J_\alpha(\alpha=\pm,3)$ 满足的对易关系 [20], 并证明了这些对易关系 ((9.16)~(9.20)) 正是德林菲尔德在 1985 年提出的 $\mathrm{Y}(SL(2))$ 中诸关系 (9.21)~(9.24) 的具体形式 (当 $C_{\lambda\mu\nu}=i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$). 实际上, 德林菲尔德开始定义 Yangian 时, 就是引入了形如 (9.21),(9.22),(9.23) 与 (9.24) 诸关系式, 来定义 I_α 与 J_α 的对易关系. 对一般形式的李代数, 它们都是正确的 [20]. 我们现在只讨论 $C_{\lambda\mu\nu}=i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ 特殊情形. 所以 (9.23) 为恒等式, 进而对易关系简化为 (9.21), (9.22) 与 (9.24) 三者. 其中 (9.21) 表明 I_α 为 Yangian 的子代数, 它自己是封闭的. 在现在例子中, 它就是角动量算符. 所谓 $\mathrm{Y}(SL(2))$, 只不过除了 I_α 以外, 再引入另一组独立算子 $J_\alpha(\alpha=\pm,3)$, 它满足 (9.22) 与 (9.24), 这显然超出了李代数的框架.

凡是对易关系满足 (9.21)~(9.24) 的集合 $\{I_\lambda,J_\lambda\}$, 如果还存在下面 §10.2 讨论的余乘法的话, 就叫做 Yangian. 当 (9.21) 定义的李代数为 g 时, 它记为 $\mathrm{Y}(g)$. Yangian 是李代数的推广, 并具有一系列很好的性质, 以后我们会看到, 它极富物理含义, 并可以通过具体物理实现体现出来. 观察这些对易关系, 它们并不限制一次量子化或二次量子化的实现, 而且与具体表示无关. 因此, 它们可以代表许多可能的物理对象. 此外, 由本节讨论可以看出, Yangian 与 RTT 关系有密切的联系, 这点已由德林菲尔德在 1988 年作了一般性的讨论 [20]. 他的讨论虽相当数学化, 但作为 $SL(2)$ 代数的例子, 我们在本节已经具体地作了计算. 从中可以看出 RTT 关系与 Yangian 的深刻联系.

在 § 10 将定义余乘法 (Co-product). 余乘法与 (9.21)~(9.24) 所示对易关系结合, 便定义了 Yangian. 不过要事先指出的是, 如果像本节的作法, 从解 RTT 关系途经得到形如 (9.16)~(9.20) 类型的对易关系的话, 那么余乘法的定义是平凡的, 即此时必然已定义好了余乘法. 这时 (9.16)~(9.20) 事实上已定义了 Yangian, 这个道

理将在下节说明.

最后要强调,所有高阶的 $T_\alpha^{(m)}(m>2,\alpha=\pm,3,0)$ 由 (9.8)~(9.9) 决定. 对 $\alpha=\pm,3$, 当已知低一阶的 $T_0^{(n)}$ 时, $T_\alpha^{(m)}$ 由 $T_\alpha^{(1)},T_\alpha^{(2)}$ 与 $T_\alpha^{(n)}$ 决定. $T_0^{(2)}$ 由 (9.7) 限制. 于是我们看到, 从低阶 $T_\alpha^{(m)}$ 矩阵元决定高阶的过程可简述如下: 首先由 (9.16) 引入一个李代数 (I_α), 再由 (9.17)~(9.19) 引入 J_α(即 $T_\alpha^{(2)},\alpha=\pm,3$). 有了 I_α 与 J_α(即 Yangian 对易关系被满足), 由 (9.7) 限制出 $T_0^{(2)}$. 注意 $T_0^{(2)}$ 只是在很特殊的情况下属于李代数 (例如为卡斯米尔算子) 或 Yangian. 在一般情况下, $T_0^{(2)}$ 可以不属于 Yangian. 选择出满足 RTT 的 $I_\alpha,J_\alpha(\alpha=\pm,0)$ 与 $T_0^{(2)}$, 代入 (9.8), 即可限制出 $T_\alpha^{(3)}(\alpha=\pm,0)$. 为限制出 $T_\alpha^{(4)}$, 应对已知的 $T_\alpha^{(3)},I_\alpha,J_\alpha$, 选择满足 (9.9) 的 $T_0^{(3)}$, 再代入 (9.8) 以决定 $T_\alpha^{(4)}$. 决定 $T_\alpha^{(5)}$ 的过程与 $T_\alpha^{(4)}$ 类似. 演示这个过程的最好例子是讨论霍旦 - 沙斯垂 (Haldane-Shastry) 模型. 不过, 这个过程相当复杂, 就不在这里介绍了, 可参阅 [28],[29].

§10 量子行列式, 余乘法

§ 10.1 量子行列式

如前所述, 转移矩阵 $T(u)$ 是 2×2 矩阵:

$$T(u)=\begin{pmatrix}T_{11}(u) & T_{12}(u)\\ T_{21}(u) & T_{22}(u)\end{pmatrix}.$$

但 $T_{ab}(u)(a,b=1,2)$ 不是数, 而是算符. 对通常的矩阵可以定义行列式, 但现在各个矩阵元是算符. 如何推广 "行列式" 的概念, 定义一个新的行列式 (称为 "量子行列式", 记为 $\widetilde{\det}\,T(u)$) 呢? 在数量矩阵中, 行列式是与定义该矩阵的逆矩阵相关的. 在矩阵元为算符情况下, 为了定义逆矩阵, 必须要求 $\widetilde{\det}\,T(u)$ 与任何矩阵元

$T_{ab}(v)$ 都对易，亦即

$$[\widetilde{\det}\ T(u), T_{ab}(v)] = 0. \tag{10.1}$$

以下我们证明：

$$\widetilde{\det}\ T(u) = T_{11}(u)T_{22}(u-1) - T_{12}(u)T_{21}(u-1) \tag{10.2}$$

满足 (10.1). 当然，可以把 $u-1$ 换为 $u-a$, 其中 a 为常数，(10.2) 仍成立.

证明 选任一元素为例.

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{\det}\ T(u), T_{11}(v)] \\
&= T_1(u)[T_{22}(u-1), T_{11}(v)] - T_{12}(u)[T_{21}(u-1), T_{11}(v)] \\
&\quad - [T_{12}(u), T_{11}(v)]T_{21}(u-1) \\
&= (u-v-1)^{-1}T_{11}(u)(T_{12}(v)T_{21}(u-1) - T_{12}(u-1)T_{21}(v)) \\
&\quad - (u-v-1)^{-1}T_{12}(u)(T_{11}(v)T_{21}(u-1) - T_{11}(u-1)T_{21}(v)) \\
&\quad - (u-v)^{-1}(T_{11}(u)T_{12}(u) - T_{11}(v)T_{12}(u))T_{21}(u-1) \\
&= (u-v-1)^{-1}(u-v)^{-1}\{(u-v)[T_{11}(u), T_{12}(u)] \\
&\quad + T_{11}(u)T_{12}(u) - T_{11}(v)T_{12}(u)\}T_{21}(u-1) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{10.3}$$

注意，将 $T(u)$ 代入 RTT 关系后，对 u 与 v 不作展开，得 (即 (9.2) 式)

$$(u-v)[T_{bc}(u), T_{ad}(u)] + T_{ac}(u)T_{bd}(u) - T_{ac}(v)T_{bd}(u) = 0. \tag{10.4}$$

(10.3) 正是 (10.4) 结果. 事实上，将 (10.4) 对 u, v 展开后，得到 (9.3) 式，利用 (10.4), 取 $a = b = c = 1, d = 2$, 易知 (10.3) 右端

为 0. 同理可证 $\widetilde{\det}\ T(u)$ 与 $T_{ab}(v)$ 的所有分量对易. 显然，由于 $\mathrm{tr}\ T(u) = T_{11}(u) + T_{22}(u)$, 有

$$[\widetilde{\det}\ T(u), \mathrm{tr}\, T(v)] = 0. \tag{10.5}$$

将 $\widetilde{\det}\ T(u)$ 展开：

$$\widetilde{\det}\ T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} C_n. \tag{10.6}$$

与 (2.11) 相应，现在存在两类守恒族：来源于 $\mathrm{tr}\ T(u)$ 的 (2.11), 与来源于 $\widetilde{\det}\ T(u)$ 的 C_n.

$$[C_m, C_n] = 0, \tag{10.7}$$

且

$$[C_m, \tau^{(n)}] = 0, \quad [\tau^{(n)}, \tau^{(m)}] = 0. \tag{10.8}$$

这里要强调的是，C_m 与 Yangian 对易，但 $\tau^{(m)}$ 与 Yangian 一般不对易：

$$[\tau^{(m)}, T_{ab}^{(n)}] \neq 0. \quad (n \geq 2) \tag{10.9}$$

当然，通过 (10.2), C_m 与 $\tau^{(n)} (n \leq m)$ 以及诸 $T_{ab}^{(m-1)}$ 有一定关系. 例如 [15],[23] :

$$C_n = T_0^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m+k=n \\ m,k \neq 0}} C_{m,k} T_0^{(m)} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{m+k+s=n \\ m,k \neq 0}} C_{m,s} A^{(k,m)}, \tag{10.10}$$

其中 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} C_{m,k} &= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!k!}, \\ A^{(k,m)} &= \frac{1}{2}(T_3^{(k)} T_3^{(m)} - T_0^{(k)} T_0^{(m)}) + T_+^{(k)} T_-^{(m)} \\ &\quad + T_-^{(k)} T_+^{(m)}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

从本节讨论可见，存在两种守恒量族：由 tr $T(u)$(或 ln tr $T(u)$) 展开式形成的 $\tau^{(n)}$ 与从 $\widetilde{\det}\ T(u)$ 的展开式构成的 C_n. 因为 $\tau^{(n)} = T_0^{(n)}, C_n$ 与 $T_0^{(n)}$ 的关系由 (10.10) 决定. $\tau^{(n)}$ 一般不与 $T_{ab}^{(m)}$ 对易 ($n \geq 2$), 而 C_n 则与 $T_{ab}^{(m)}$ 对易，这里 $T_{ab}^{(m)}$ 可为转移矩阵 $T(u)$ 展开式的任意矩阵元. 唯一例外的情况是 $\tau^{(1)} = C_1$, 它与任意 $T_{ab}^{(m)}$ 对易. 由于引出了这两类守恒量，尤其是 C_n 的出现，它与过去量子反散射方法的作法有所不同，我们在这里作一些说明.

首先，在许多模型中，加上了限制条件

$$\widetilde{\det}\ T(u) = 1.$$

这时，必有

$$C_0 = 1, \quad C_m = 0\ (m \geq 1).$$

这时，由 (10.10), 实际限制了 $T_0^{(m)}(m \geq 2)$ 以及 $C_1 = T_0^{(1)} = 0$. 例如，将 (9.5) 代入 (10.11), 易得

$$C_2 = T_0^{(2)} - \frac{1}{2}(2I_3^2 + I_+I_- + I_-I_+) = T_0^{(2)} - \boldsymbol{I}^2 = 0.$$

即有

$$T_0^{(1)} = C_1 = 0, \quad T_0^{(2)} = \boldsymbol{I}^2,$$

它与 (8.4) 的特例相吻合. 显然，在加上量子行列式为 1 的条件后，便无所谓 C_n 守恒量的存在了. 也就是说，这类模型只存在于 $\mathrm{tr}T(u)$ 类型的守恒族.

在不加这种限制条件时，代数关系本质上是 $gl(2)$, 这时 $T(u)$ 展开式写为 (N 可趋于 ∞):

$$T(u) = I_+ \sum_{n=1}^{N} u^{-n} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T_0^{(n)} - T_3^{(n)}) & T_+^{(n)} \\ T_-^{(n)} & \frac{1}{2}(T_0^{(n)} + T_3^{(n)}) \end{pmatrix}$$

它显然具有 $\mathrm{tr}\ T(u) = 2 + \sum_{n=1}^{N} u^{-n} T_0^{(n)}$. 由于 (10.10), 我们知道, 这时 C_n 与 $\tau^{(n)}$ 是有对应关系的, 并且 C_n 的数目与 τ_n 一样多, C_n 也是完全守恒族. 其实, 如果选取 $\tau^{(n)}$ 作为守恒族也没什么不可以的, 但常常形式相当复杂, 更麻烦的是 $\tau^{(n)}$ 不与 Yangian 对易. 这时, 如果选取 C_n 为守恒量, 它们的形式往往反而简单, 而且与 Yangian 对易. 现在已知的许多长程相互作用模型就以 C_n 为守恒量, 不但形式简洁, 而且具有 Yangian 对称性, 并反映物理实际.

另一个问题是, 既然 C_n 与 I_α, J_α 对易, 按舒尔 (Schur) 引理, C_n 必为常数, 那么如何与守恒量族相联系呢? 有一种可能: C_n 不能用 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 这些生成元表示出来, 但可以用组成 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 的更基本的算子表示出来. 例如, 当 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 都用产生, 消灭费来子算符表示出来的时候. 以 $C_{i\sigma}^{+}$ 与 $C_{i\sigma}$ 分别表示在第 i 个格点产生自旋 $S_z = \sigma$ 与相应的消灭算子, 则 C_n 用 $C_{i\sigma}^{+}$ 与 $C_{j\sigma}$ 表示. 这时因为 C_n 与 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ 生成元整体对易, 但又不能用 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ 表示出来, 所以不违背舒尔引理. 也就是说, C_n 在李代数 (及其扩展) 意义下是个常数, 但在费米子表示空间中是个算符. 目前许多长程相互作用模型的哈密顿量族来自 C_n, 就是这个道理. 像以前一样, 何时选择 C_n 作为守恒族, 何时选 $\tau^{(n)}(= T_0^{(n)})$ 为守恒族, 何时选某个 C_m 作为哈密顿量等, 要看具体物理问题而定.

§ 10.2 余乘法的含义

上面介绍了量子行列式, 它是 Yangian 的不变量. 在第 2 章中我们着重讨论了 $\mathrm{Y}(SL(2))$ 的基本生成元 I_α 与 $J_\alpha(\alpha = \pm, 3)$ 的对易关系. 注意到现在 Yangian 包含了李代数生成元组成的张量空间, 例如 (8.4) 中 $\boldsymbol{J}$ 的实现中出现了 $\boldsymbol{S}_n \times \boldsymbol{S}_m$, 可以想象更多格点处自旋算子相乘时会出现更复杂的张量积. 为了保证这些张量

积的结合律等性质，必须引入一种体现张量积性质的运算，称为余乘法 (co-product), 用 Δ 表示. Δ 的一个重要性质是分配律:

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B). \tag{10.12}$$

可以用转移矩阵来定义 Δ 运算 (注意，下式中的直积 $\otimes$ 是量子空间乘积，不要与 (1.5),(1.6) 辅助矩阵直积相混):

$$\Delta(T_{mn}(u)) = \sum_k (T_{mk}(u) \otimes T_{kn}(u)), \tag{10.13}$$

其中 T_{mn} 为转移矩阵 $T(u)$ 的矩阵元. 在我们讨论的例子里, $m, n = a, b = 1, 2$. 注意 (10.13) 对任意 u 成立, 所以, 可以考虑它对 u^{-1}, u^{-2} 的展开式, 即将 (8.4) 具体代入 (10.13), 并取 $h = 2$, 对 $\widetilde{\det}\, T(u) = 1$ (即称为 $\mathrm{Y}(SL(2))$ 的例子，有

$$\Delta(T_{ab}(u)) = \sum_{c=1,2} (T_{ac}(u) \otimes T_{cb}(u). \tag{10.14}$$

由于 I 对应 u^{-1} 展成的算符系数, 而 J 对 u^{-2} 阶, 故只须将 (10.14) 展开至 u^{-1} 与 u^{-2} 即可:

$$\Delta(T_{ab}^{(0)}) = \sum_c (T_{ac}^{(0)} \otimes T_{cb}^{(0)}), \tag{10.15}$$

$$\Delta(T_{ab}^{(1)}) = \sum_c (T_{ac}^{(1)} \otimes T_{cb}^{(0)} + T_{ac}^{(0)} \otimes T_{cb}^{(1)}), \tag{10.16}$$

$$\Delta(T_{ab}^{(2)}) = \sum_c (T_{ac}^{(2)} \otimes T_{cb}^{(0)} + T_{ac}^{(0)} \otimes T_{cb}^{(2)} + T_{ac}^{(1)} \otimes T_{cb}^{(1)}) \tag{10.17}$$

(10.15) 给出 $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, 自然成立. 后两式变为

$$\Delta(T_{ab}^{(1)}) = T_{ab}^{(1)} \otimes 1 + 1 \otimes T_{ab}^{(1)}, \tag{10.18}$$

$$\Delta(T_{ab}^{(2)}) = T_{ab}^{(2)} \otimes 1 + 1 \otimes T_{ab}^{(2)} + \sum_c (T_{ac}^{(1)} \otimes T_{cb}^{(1)}). \tag{10.19}$$

注意 $T_0^{(n)}=T_{11}^{(n)}+T_{22}^{(n)}, T_3^{(n)}=T_{22}^{(n)}-T_{11}^{(n)}$, 将 (9.15) 代入，得

$$\Delta(I_\alpha)=I_\alpha\otimes 1+1\otimes I_\alpha,\ (\alpha=\pm,3), \tag{10.20}$$

$$\begin{aligned}\Delta(J_\pm)=&J_\pm\otimes 1+1\otimes J_\pm\mp\frac{h}{2}(I_3\otimes I_\pm-I_\pm\otimes I_3)\\&-\frac{h}{4}(I_\pm\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_\pm),\end{aligned} \tag{10.21}$$

$$\begin{aligned}\Delta(J_3)=&J_3\otimes 1+1\otimes J_3+\frac{h}{4}(I_+\otimes I_--I_-\otimes I_+)\\&-\frac{h}{4}(I_3\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_3),\end{aligned}$$

与

$$\Delta T_0^{(1)}=T_0^{(1)}\otimes 1+1\otimes T_0^{(1)}, \tag{10.22}$$

$$\begin{aligned}\Delta(T_0^{(2)})=&T_0^{(2)}\otimes 1+1\otimes T_0^{(2)}+2I_3\otimes I_3+\\&I_+\otimes I_-+I_-\otimes I_++\frac{1}{2}T_0^{(1)}\otimes T_0^{(1)}.\end{aligned} \tag{10.23}$$

当选 $T_0^{(1)}=0, T_0^{(2)}=I^2$ 代入，并注意 (10.20) 与 (10.21) 可写为

$$\begin{aligned}\Delta(I_\lambda)=&I_\lambda\otimes 1+1\otimes I_\lambda,\\\Delta(J_\lambda)=&J_\lambda\otimes 1+1\otimes J_\lambda+\frac{h}{2}i\epsilon_{\lambda\mu\nu}I_\nu\otimes I_\mu\\&-\frac{h}{4}(I_\lambda\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_\lambda).\end{aligned} \tag{10.24}$$

其中 $\lambda,\mu,\nu=1,2,3$, 以及

$$\begin{aligned}\Delta(I_2)&=\Delta(I_3^2+\frac{1}{2}I_+I_-+\frac{1}{2}I_-I_+)\\&=(\Delta I_3)\Delta(I_3)+\frac{1}{2}\Delta(I_+)\Delta(I_-)+\frac{1}{2}\Delta(I_-)\Delta(I_+)\\&=I^2\otimes 1+1\otimes I^2+2I_3\otimes I_3+I_+\otimes I_-+I_-\otimes I_+.\end{aligned} \tag{10.25}$$

最后便得到德林菲尔德最初给出的余乘法定义：

$$\begin{aligned}\Delta(I_\lambda) &= I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda, \\ \Delta(J_\lambda) &= J_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes J_\lambda + \frac{h}{2} C_{\lambda\mu\nu} I_\nu \otimes I_\mu.\end{aligned} \tag{10.26}$$

在我们的例子中，$C_{\lambda\mu\nu} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$. 一般情况下，$C_{\lambda\mu\nu}$ 为该半单李代数的全反对称张量. 当 $h = 2$ 时为 Yangian.

现在可以对 Yangian 下一个定义：

满足 (9.21)~(9.24) 与 (10.26)($C_{\lambda\mu\nu}$ 不一定等于 $i\epsilon_{\lambda\mu\nu}$) 诸关系式的算符集合称为 Yangian. (注意现在的 h 是德林菲尔德文章 [20] 中的 (-2) 倍). 以上定义当 $\widetilde{\det}\, T(u) = 1$ 时正确. 显然，$\widetilde{\det}\, T(u) \neq 1$ 时，不同 $T_0^{(2)}$ 会导致不同的余乘法.

对易关系与余乘法是定义 Yangian 的两个要素. 原则上，也可以改变对易关系及余乘法，使之仍满足 Hopt 代数，这点从 Yangian 与 RTT 关系的联系就可以看出来.

最后，已知 $\widetilde{\det}\, T(u)$,$T(u)$ 的逆矩阵为

$$T(u)^{-1} = (\widetilde{\det}\, T(u))^{-1} \begin{pmatrix} T_{22}(u-1) & -T_{12}(u-1) \\ -T_{21}(u-1) & T_{11}(u-1) \end{pmatrix}. \tag{10.27}$$

以上用最简单的方式介绍了 Yangian 对称性的基本导出. 可以看到，用 RTT 关系是最可靠而全面地导出 Yangian 的一种方式. 上述理论显得比较抽象. 通过以下的例子，我们会看到它具有丰富的物理内容. 关于 Yangian 较为物理的讨论，可参见文献 [24].

在本节最后，我们强调一下余乘法的意义. 它由 (10.12) 与 (10.13) 规定. 这种运算的规定是有原因的，一个直观的原因是它保证了 RTT 关系在量子张量空间中的不变性. 我们举例说明.

回忆一下我们以前所作的事情是这样几个步骤：

给定 $\check{R}(u)$- 矩阵：

$$\check{R}(u) = I + uP.$$

将

$$T(u)=\begin{pmatrix} T_{11}(u) & T_{12}(u) \\ T_{21}(u) & T_{22}(u) \end{pmatrix}$$

代入 RTT 关系

$$\check{R}(u-v)(T(u)\otimes T(v))=(T(v)\otimes T(u))\check{R}(u-v), \tag{1.42}$$

遂得到

$$(u-1)[T_{bc}(u),T_{ad}(v)]=T_{ac}(v)T_{bd}(u)-T_{ac}(u)T_{bd}(v). \tag{9.2}$$

也就是说, 现在特例中, (9.2) 就是 RTT 关系, 每一个矩阵元 $T_{bc}(u)$ 都是量子空间算子, (9.2) 的对易括号就是在量子空间的对易关系. (10.13) 的意思是余乘法的运算将量子空间算子变为量子空间的张量积. 将 Δ 分别作用在 (9.2) 的左端与右端, 利用 (10.12) 及

$$[T_{ab}(u),T_{ab}(v)]=0,$$

则得到

$$\begin{aligned}&\Delta([T_{bc}(u),T_{ad}(v)])=\Delta T_{bc}(u))\Delta T_{ad}(v)-\Delta(T_{ad}(v)\Delta(T_{bc}(u))\\&=(T_{bn}(u)\otimes T_{nc}(u))(T_{am}(v)\otimes T_{md}(v))\\&\quad-(T_{an}(v)\otimes T_{nd}(v))(T_{bm}(u)\otimes T_{mc}(u)).\end{aligned}$$

上式相重代表求和. 再强调一下这里 $\otimes$ 表示量子空间的直积, 不要与辅助矩阵空间的直积相混. 不同量子空间算符次序可以颠倒 (对易), 但同一空间中算符次序不可颠倒, 故有

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD.$$

因而有

$$\begin{aligned}\Delta([T_{bc}(u),T_{ad}(v)])=&[T_{bn}(u),T_{am}(v)]\otimes T_{nc}(u)T_{md}(v)\\&+T_{am}(v)T_{bn}(u)\otimes[T_{nc}(u),T_{md}(v)].\end{aligned}$$

利用 (9.3), 很易得到

$$
\begin{aligned}
&(u-v)\Delta([T_{bc}(u),T_{ad}(v)])\\
&=(T_{an}(v)T_{bm}(u)-T_{an}(u)T_{bm}(v)\otimes T_{nc}(u)T_{md}(v)\\
&\quad+T_{am}(v)T_{bn}(u)\otimes(T_{mc}(v)T_{nd}(u)-T_{mc}(u)T_{nd}(v))\\
&=T_{an}(v)T_{bm}(u)\otimes T_{nd}(u)T_{md}(v)-T_{an}(u)T_{bm}(v)\otimes T_{nd}(u)T_{md}(v)\\
&\quad+T_{am}(v)T_{bn}(u)\otimes T_{mc}(v)-T_{am}(v)T_{bn}(u)\otimes T_{mc}(u)T_{nd}(v)\\
&=(T_{am}(v)\otimes T_{mc}(v))(T_{bn}(u)\otimes T_{nd}(u))\\
&\quad-T_{an}(u)\otimes T_{mc}(u))(T_{bn}(v)\otimes T_{nd}(v))\\
&=\Delta T_{ac}(v))\Delta(T_{bd}(u)-\Delta(T_{ac}(u))\Delta T_{bd}(v)).
\end{aligned}
$$

它正是将 Δ 作用在 (9.2) 式右端的结果:

$$
\begin{aligned}
&\Delta(T_{ac}(v)T_{bd}(u))-\Delta(T_{ac}(u)T_{bd}(v))\\
&=\Delta(T_{ac}(v))\Delta(T_{bd}(u))-\Delta(T_{ac}(u))\Delta(T_{bd}(v)).
\end{aligned}
$$

因此, 这样定义的 Δ 使得 RTT 关系在量子算符的张量空间仍成立. (2.1) 所示的 RTT 关系中直积是对辅助矩阵空间进行的, 所有关于量子算符的运算仍在量子算符的矢量空间中进行. 但引入余乘法 Δ 之后, RTT 关系也保证了量子算符张量空间运算的自洽性.

§ 11 Yangian 的量子力学实现

§ 11.1 三维谐振子

首先考虑一个最简单的例子: 三维各向同性谐振子. 其哈密顿

量为：

$$H_0 = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{x}^2. \tag{11.1}$$

这个哈密顿量与角动量平方算子 $\boldsymbol{L}^2$ 对易：

$$[H_0, \boldsymbol{L}^2] = 0, \tag{11.2}$$

并可以立即写为对角形式：

$$H_0 = \omega\sum_{j=1}^{3}\left(a_j^+ a_j + \frac{3}{2}\right) = \omega\sum_{j=1}^{3}\left(N_j + \frac{3}{2}\right), \tag{11.3}$$

其中

$$a_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}x_j - \frac{i}{\sqrt{\omega}}p_j\right), \quad a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}x_j + \frac{i}{\sqrt{\omega}}p_j\right), \tag{11.4}$$

$$[a_j, a_k] = [a_j^+, a_k^+] = 0, \quad [a_j, a_k^+] = \delta_{jk}. \tag{11.5}$$

因为

$$[N_i, a_j^+] = a_j^+\delta_{ij}, \qquad [N_i, a_j] = -a_j\delta_{ij}, \tag{11.6}$$

所以，产生算符 a^+ 是哈密顿量 H_0 的上升算子 (即 shift 算子)，定义：

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mp ia_2), \quad a_\pm^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ \pm ia_2^+), \tag{11.7}$$

则角动量算子为

$$L_\pm = \pm\sqrt{2}(a_3^+ a_\mp - a_\pm^+ a_3), \quad L_3 = N_+ - N_-. \tag{11.8}$$

其中 $N_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha (\alpha = \pm, 3)$. 由 (11.6) 知 a_α^+ 是 N_α 或能量本征态的移动算符 (shift operator)，但它并不是角动量平方 $\boldsymbol{L}^2$ 的移动算符. 然而， H_0 与 $\boldsymbol{L}^2$ 又存存共同本征态，因此需要定义一个新的移动算符. 对各向同性三维谐振子与库仑势这种移动算子，已在文

献 [25] 中详细讨论. 我们现在一方面将它扩展，另一方面将这种移动算子与 Yangian 联系起来.

引入算符 [24]：

$$O(f) = L_+V_- - L_-V_+ + fV_3 - \frac{4}{f+4}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{V})L_3, \tag{11.9}$$

其中 f 为某一参数， L_α 为角动量算符，而 $\boldsymbol{V}$ 为算符，满足

$$[L_\mu, V_\nu] = i\hbar\epsilon_{\mu\nu\lambda}V_\lambda, \tag{11.10}$$

$$[L_\mu, L_\nu] = i\hbar\epsilon_{\mu\nu\lambda}L_\lambda. \tag{11.11}$$

由于 $L_+V_- - L_-V_+$ 正比于 $(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})_3$，我们很容易计算 $\boldsymbol{L}$ 与 $O(f)$ 的对易关系. 利用 (11.10) 易知：

$$\begin{aligned}
&[L_\mu, (\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})_\nu] = i\hbar\epsilon_{\mu\nu\lambda}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})_\lambda,\\
&[\boldsymbol{L}^2, (\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})] = 2\hbar^2\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V} + 2i\hbar(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{L},\\
&[\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}] = 0, \quad [L_3, \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}] = 0.
\end{aligned}$$

这些公式都可以在钱伯初、曾谨言编著的《量子力学精选与剖析》书中找到 [25]. 于是，有

$$[\boldsymbol{L}^2, O(f)] = (f+4)O(f) + V_3(4\boldsymbol{L}^2 - f^2 - 6f - 8), \tag{11.12}$$

$$[L^3, O(f)] = 0. \tag{11.13}$$

为了确定 f，要求 $(4\boldsymbol{L}^2 - f^2 - 6f - 8)|l,m\rangle = 0$. 即有

$$f_\pm(l) = -3 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)} = -3 \pm (2l+1).$$

即

$$f_+(l) = 2(l-1), \quad f_-(l) = -2(l+2). \tag{11.14}$$

这时，

$$[\boldsymbol{L}^2, O_\pm(l)] = (f_\pm(l)+4)O_\pm(l) \equiv \alpha_\pm(l)O_\pm(l). \tag{11.15}$$

将上式作用在本征态 $|l,m\rangle$ 上，则有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}^2 O_\pm(l)|l,m\rangle - l(l+1)O_\pm(l)|l,m\rangle = \alpha_\pm(l)O_\pm(l)|l,m\rangle,\\
&\boldsymbol{L}^2 O_\pm(l)|l,m\rangle = [l(l+1)+f_\pm(l)+4]O_\pm(l)|l,m\rangle\\
&\qquad\qquad \equiv \beta_\pm(l)O_\pm(l)|l,m\rangle,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_+(l) &= l(l+1)+4+2(l-1) = (l+1)(l+2),\\
\beta_-(l) &= l(l+1)+4-2(l+2) = (l-1)l.
\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{L}^2(O_\pm(l)|l,m\rangle) = \begin{cases}(l+1)(l+2)\\ (l-1)l\end{cases} \quad (O_\pm(|l,m\rangle)), \tag{11.16}$$

亦即

$$O_\pm(l)|l,m\rangle = |l\pm 1,m\rangle. \tag{11.17}$$

$\boldsymbol{V}$ 的最简单的实现，就是取 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{a}^+$，则由于 (11.4) 知此时有 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}=0$(以后可知道，这相当于没有磁单极的假设). 具体计算表明

$$[H, O_+(l)] = \omega O_+(l). \tag{11.18}$$

亦即 $O_+(l)$ 同时将能态 $\omega\hbar(2n+l+3/2)$ 变为 $\omega\hbar(2n+l+3/2+1)$，即为能谱移动算子. 由于我们的讨论都是将所有算子作用在 $|l,m\rangle$ 本征态上的，因而 $\boldsymbol{V}$ 算符的选择可以大大简化. 现在考虑一个问题：如果只限于算子作用在本征态上，那么 $\boldsymbol{V}$ 算符只须满足 (11.10) 就可以保证移动的要求. 但是，这样做是太简化了，因为这时并没

有体现出 V 的算符关系的全部性质，也没有表现出这种移动保证了可积性这一性质. 现在定义一组新的算子：

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{L},\quad J_{\pm}=\boldsymbol{L}^2a_{\pm}^{+},\quad J_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{L}^2a_3^{+}. \tag{11.19}$$

亦即在产生 (或消灭算符，或坐标，或动量均可) 算符一侧 (左、右侧皆可) 乘以 $\boldsymbol{L}^2$ 算符，它不改变 (11.17), 因为 $\boldsymbol{L}^2$ 与 L_α 均对易. 但这样定义的 J 却有重要性质：$\{\boldsymbol{I},J\}$ 满足 Yangian. 事实上，只要

$$\begin{aligned}
&[I_\alpha,I_\beta]=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}I_\gamma,\\
&[I_\alpha,K_\beta]=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}K_\gamma, \qquad\qquad \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,\\
&[K_\alpha,K_\beta]=0,
\end{aligned} \tag{11.20}$$

则

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}^2\boldsymbol{K} \tag{11.21}$$

必满足：

$$\begin{aligned}
&[J_{\pm},[J_3,J_{\pm}]]=4K^2(I_3J_{\pm}-J_3I_{\pm})I_{\pm},\\
&[J_3,[J_+,J_-]]=4K^2(I_+J_--J_+I_-)I_3,\\
&[J_{\pm},[J_+,J_-]]\pm 2[J_3[J_3,J_+]]\\
&\quad=4K^2\{(I_+J_--J_+I_-)I_{\pm}\pm 2(I_3J_{\pm}-J_3I_{\pm})I_3\}.
\end{aligned} \tag{11.22}$$

它们可沿用 (11.10) 及相关角动量关系等直接证明. 由于

$$[\boldsymbol{L}^2,K^2]=[\boldsymbol{K},K^2]=0,$$

可以选 K^2 为常数，例如 $K=1/(4h)$, 则 (11.22) 与 (9.18)~(9.20) 完全一致. 这说明只要算符 $\boldsymbol{K}$ 满足 (11.20), 则 (11.21) 与 I 必满足 Yangian $\mathrm{Y}\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{J}\}$. 一般说，满足 (11.20)~(11.22) 所示的关系的

集合 —— Yangian 中， I 的部分构成李代数，而 J 自己不易写出对易关系，但在这个特例中， (11.21) 给出的 J 却可以具体计算对易关系. 由于 $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$,

$$\begin{aligned}[L^2,K_\beta]&=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(L_\alpha K_\gamma+K_\gamma L_\alpha)\\&=2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\alpha K_\gamma-2K_\beta,\\[J_\alpha,J_\beta]&=[L^2,L^2K_\beta]K_\alpha+L^2[K_\alpha,L^2K_\beta],\end{aligned}$$

由于 $[K_\alpha,K_\beta]=0$, 经过计算，可得

$$[J_\alpha,J_\beta]=2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L^2[(L\cdot K)K_\gamma-L_\gamma K^2]. \tag{11.23}$$

注意，可以证明

$$\begin{aligned}&[(L\cdot K),L]=[(L\cdot K),K]=0,\\&[K^2,L]=[K^2,K]=0.\end{aligned}$$

即 K^2 与 $L\cdot K=K\cdot L$ 是 L 与 K 算子集合的卡斯米尔算子，可视为常数. 引入

$$L\cdot K=Sk,\quad k=|K|, \tag{11.24}$$

则有

$$[J_\alpha,J_\beta]=2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(skJ_\gamma-K^2L^2L_\gamma). \tag{11.25}$$

显然，由于 (11.20) 中 K 的引入与 L^2 的出现，造成了不封闭的代数，不断做下去，则满足 (11.22). 这个例子说明，在最初等量子力学中，早就存在 Yangian, 只不过常常为了避免无穷维代数而尽量不使用它而已. 易证，如不取 (11.21) 形式，而取 $J'=KL^2$, 那么 $\{I,J'\}$ 也必满足 Yangian 的所有关系式，即也是 Yangian 的实现. 在坐标 - 动量体系中， K 可取为 r 或动量算子 p. 有趣的是这两种取法之差即 (L^2K-KL^2) 却是有限代数. 它有深刻的物理含义，即氢原子中的隆格 - 林茨向量 (Runge-Lenz Vector).

让我们回到移动算子 $O_{\pm}(l)$. 由 (11.9) 与 (11.14), 可定义:

$$O_{\pm}(l)=I_{+}J_{-}-I_{-}J_{+}+f_{\pm}(l)J_{3}-\frac{4}{f_{\pm}(l)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_{3}. \quad (11.26)$$

其中

$$f_{+}(l)=2(l-1), \qquad f_{-}(l)=-2(l+2). \quad (11.27)$$

亦即将 (11.9) 中的 $\boldsymbol{V}$ 换为 $\boldsymbol{J}$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 满足 Yangian, 这时 (11.26) 具有较为一般的移动算子的性质. 在通常量子力学中可以举出不少 Yangian 的例子. 作为典型, 我们已举出 (11.21), 另外还有 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{L}$. 前者与三维谐振子的移动算子相联系, 而后者与自由运动相对论粒子不同自旋态间的跃迁相联系.

§ 11.2 自旋 - 轨道耦合实现 Yangian 的例子

自由 Dirac 方程中会出现自旋 - 轨道耦合的情况. 其哈密顿的典型分量常为 [26]:

$$H_{D}=H_{0}+H_{I}=\begin{pmatrix}H_{0}+\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L} & 0\\ 0 & H_{0}-\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\end{pmatrix}, \quad (11.28)$$

$$H_{0}=\frac{1}{2}(P^{2}+r^{2}), \quad (11.29)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵, $\boldsymbol{L}$ 为轨道角动量, λ 为常数, $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}$ 为三维动量与坐标. 易知:

$$\begin{aligned}&[H_{0},\boldsymbol{L}]=[H_{0},\boldsymbol{\sigma}]=0, \quad [H_{0},H_{1}]=0,\\ &[H_{0},\boldsymbol{L}^{2}]=[H,\boldsymbol{L}^{2}]=0;\end{aligned} \quad (11.30)$$

其总角动量为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad (11.31)$$

$$[\sigma_{\alpha},\sigma_{\beta}]=2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_{\gamma}, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3) \quad (11.32)$$

而 $\boldsymbol{L}$ 则满足 (11.11). 易证

$$[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}, I_\alpha]=0, \text{ 即 } [H_1, \boldsymbol{I}]=0, \tag{11.33}$$

$$[\boldsymbol{L}^2, I_\alpha]=0. \tag{11.34}$$

可见，该体系中 $\{H_0, H_1, \boldsymbol{I}^2, I_3, \boldsymbol{L}^2\}$ 为互相对易集合. 由于 H_I 中的典型项

$$H_1=\lambda\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}=\lambda\Big(\boldsymbol{I}^2-\boldsymbol{L}^2-\frac{3}{4}\Big), \tag{11.35}$$

所以标记的量子态为 $|n,l,j,m\rangle\equiv|\phi\rangle$：

$$\begin{aligned}
&H_0|n,l,j,m\rangle=(2n+l+3/2)|n,l,k,m\rangle,\\
&\boldsymbol{L}^2|\phi\rangle=l(l+1)|\phi\rangle,\quad (l=0,1,2,\cdots)\\
&\boldsymbol{I}^2|\phi\rangle=j(j+1)|\phi\rangle,\quad (j=l\pm1/2)\\
&I_3|\phi\rangle=m|\phi\rangle,\qquad (m=-j,-j+1,\cdots j)
\end{aligned} \tag{11.36}$$

因而

$$H_1|n,l,j,m\rangle=\lambda[j(j+l)-l(l+1)-3/4]|n,l,j,m\rangle. \tag{11.37}$$

故

$$H|n,l,j,m\rangle=E_{nlj}|n,l,j,m\rangle, \tag{11.38}$$

$$E_{nlj}=2n+l+3/2+\lambda\begin{cases} l, & j=l+1/2;\\ -l-1, & j=l-1/2.\end{cases} \tag{11.39}$$

它对 m 是简并的，但将通常谐振子对 l 的简并解除. 现引入记号：

$$L_\pm=L_1\pm iL_2,\quad \sigma_\pm=\frac{1}{2}(\sigma_1\pm i\sigma_2),\quad I_\pm=I_1\pm iI_2, \tag{11.40}$$

即得：

$$\begin{aligned}
&[I_\alpha, L_\alpha]=0,\quad (\alpha=\pm,3)\\
&[I_3, I_\pm]=\pm I_\pm,\quad [I_+, I_-]=2I_3.
\end{aligned} \tag{11.41}$$

利用 L 与 σ, 可定义新的算子 J, 它与 I 满足 Yanian[24]:

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \mp(\sigma_{\pm}L_3 - \frac{1}{2}\sigma_3 L_{\pm}), \\ J_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_+ L_- - \sigma_- L_+), \end{aligned} \tag{11.42}$$

证明 首先, 易证:

$$\begin{aligned} &[I_\alpha, J_\alpha] = 0, \\ &[I_3, J_{\pm}] = [J_2, I_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \\ &[I_{\pm}, J_{\mp}] = \pm 2J_3. \end{aligned} \tag{11.43}$$

直接计算, 可得 ($[A,B]_+ \equiv AB + BA$):

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] &= \mp\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{\pm}[L_+, L_-]_+ + \sigma_{\mp}L_{\pm}^2 + \frac{1}{2}\sigma_3[L_3, L_{\pm}]_+ + \frac{1}{2}L_{\pm}\Big), \\ [J_+, J_-] &= -\Big(\frac{1}{2}\sigma_+[L_3, L_-]_+ + \frac{1}{2}\sigma_-[L_3, L_{\pm}] + \sigma_3 L_3^2 + \frac{1}{2}L_3\Big). \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} [J_{\pm}, [J_3, J_{\pm}]] &= \frac{1}{2}\Big\{\sigma_{\pm}\sigma_{\mp}L_3 L_{\pm}^2 - \sigma_{\mp}\sigma_{\pm}L_{\pm}^2 L_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_{\pm}\sigma_3 L_3[L_3, L_{\pm}]_+ - \sigma_3\sigma_{\pm}[L_3, L_{\pm}] + L_3) \\ &\quad \pm \frac{1}{2}\sigma_{\pm}L_{\pm} - \frac{1}{4}(\sigma_3\sigma_{\pm}L_{\pm}[L_+, L_-]_+ - \sigma_{\pm}\sigma_3[L_+, L_1] + L_{\pm}) \\ &\quad \pm \sigma_{\mp}L_{\pm}^3 - \frac{1}{4}[L_{\pm}, [L_3, L_{\pm}]_+]\Big\} \\ &= \mp\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{2}\sigma_{\pm}([L_3, [L_3, L_{\pm}]_+]_+ + \frac{1}{2}[L_{\pm}, [L_+, L_-]_+]_+ - L_{\pm}) \\ &\quad - \sigma_{\mp}L_{\pm}^3 - \frac{1}{2}\sigma_3[L_3, L_{\pm}^2]_+ - \frac{3}{2}L_{\pm}^2\Big\}. \end{aligned}$$

由于

$$[L_3,[L_3,L_\pm]_+]+\frac{1}{2}[L_\pm,[L_+,L_-]_+]_+ - L_\pm$$
$$= 4L_\pm L_3^2 + 2L_\pm L_\mp L_\pm \pm 4L_\pm L_3 - L_\pm,$$
$$[L_3,L_\pm^2]_+ = L_3L_\pm^2 + L_\pm^2 L_3 = 2L_\pm L_3 L_\pm,$$

从而有

$$[J_3,[J_+,J_-]] = \frac{1}{2}\Big\{\sigma_+\Big([L_-,L_3^2]_+ - \frac{1}{2}L_-\Big) + \sigma_-\Big([L_+,L_3^2]_+ - \frac{1}{2}L_+\Big)$$
$$- \sigma_3 L_3([L_+,L_-]-1) - ([L_+,L_1]_+ + 2L_3^2)\Big\}.$$

另一方面，经过计算，有

$$I_\pm(I_3J_\pm - J_3I_\pm) = \mp I_\pm\Big\{\sigma_\pm L_3^2 - \frac{1}{2}\sigma_3 L_3 L_\pm \pm \frac{1}{2}\sigma_\pm L_3 - \frac{1}{4}L_\pm$$
$$+ \frac{1}{2}(\sigma_\pm L_\mp L_\pm - \sigma_\mp L_\pm^2 - \sigma_\mp L_\pm L_\pm)\Big\}$$
$$= \mp\Big\{\sigma_\pm L_\pm\Big(L_3^2 + \frac{1}{2}L_\mp L_\pm \pm \frac{1}{2}L_3\Big)$$
$$- \frac{1}{2}\sigma_\mp L_\pm^3 - \frac{1}{2}\sigma_3 L_\pm\Big(L_3L_\pm \mp \frac{1}{2}L_\pm\Big)$$
$$- \frac{1}{2}L_\pm^2 - \frac{1}{4}L_\pm^2 \mp \frac{1}{4}\sigma_3 L_\pm^2$$
$$\pm \frac{1}{2}\sigma_\pm\Big(L_3L_\pm \mp \frac{1}{2}L_\pm\Big) - \frac{1}{2}\sigma_\pm L_\pm\Big\}.$$

经过相当的计算，并利用这些结果，可以证明 (11.41),(11.42) 的确满足 (11.22) 中 $4K^2=1$ 的关系式. 这说明按 (11.42) 定义的 J 确与 I(总角动量) 组成 Yangian. 将 (11.41), (11.42) 代入 (11.9), 并令

$$V = J, \tag{11.44}$$

则

$$O_{\pm}(j) = I_+J_- - I_-J_+ + f_{\pm}(j)J_3 - \frac{4}{f_{\pm}(j)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_3, \tag{11.45}$$

$$f_+(j) = 2(j-1), \qquad f_-(j) = -2(j+2). \tag{11.46}$$

从而有

$$[H_1, O_{\pm}(j)]|n,l,j,m\rangle = \lambda(f_{\pm}(j)+4)O_{\pm}(j)|n,l,j,m\rangle. \tag{11.47}$$

遂得到：

$$\begin{aligned} H_1(O_+(j)|n,e,j,m\rangle &= \lambda\Big\{(j+1)(j+2) - l(l+1) - \frac{3}{4}\Big\}|n,l,j,m\rangle, \\ H_1(O_-(j)|n,l,j,m\rangle &= \lambda\Big\{(j-1)j - l(l+1) - \frac{3}{4}\Big\}|n,l,j,m\rangle, \end{aligned} \tag{11.48}$$

当然，$O_{\pm}(j)$ 也可以用 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 表示出来. 注意，现在仍有 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}=0$，遂有

$$\begin{aligned} O_+(j) =& \sigma_+L_-\Big(L_3 + j - \frac{1}{2}\Big) + \sigma_-L_+\Big(L_3 - j + \frac{1}{2}\Big) \\ & - \sigma_3(\boldsymbol{L}^2 - L_3^2) + L_3, \\ O_-(j) =& \sigma_+L_-\Big(L_3 - j - \frac{3}{2}\Big) + \sigma_-L_+\Big(L_3 + j + \frac{3}{2}\Big) \\ & - \sigma_3(\boldsymbol{L}^2 - L_3^2) + L_3. \end{aligned} \tag{11.49}$$

为了表示 $O_{\pm}(j)$ 对 H_1 部分的跃迁作用，利用角动量与自旋态的乘积态：

$$\sigma_3|\pm\frac{1}{2}\rangle = \pm|\pm\frac{1}{2}\rangle, \quad \sigma_{\pm}|\pm\frac{1}{2}\rangle = 0, \quad \sigma_{\pm}|\mp\frac{1}{2}\rangle = |\pm\frac{1}{2}\rangle,$$

当 $n=l=0$ 时，$j=\dfrac{1}{2}, m=\pm\dfrac{1}{2}$，态

$$|0,0,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle = |0,0,0\rangle|\pm\frac{1}{2}\rangle,$$

这时能量二重简并 $(m=\pm\frac{1}{2})$, 其态为

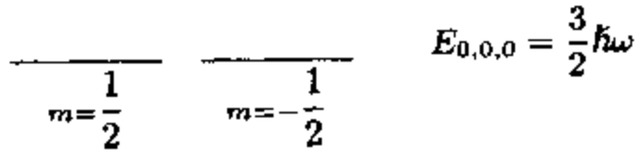


图 11–1

一般说,

$$O_+\Big(j=l-\frac{1}{2}\Big)|n,l=j+\frac{1}{2},j,m\rangle\sim|n,l=j+\frac{1}{2},j+1,m\rangle,$$
$$O_-\Big(j=l+\frac{1}{2}\Big)|n,l=j-\frac{1}{2},j,m\rangle\sim|n,l=j-\frac{1}{2},j-1,m\rangle, \tag{11.50}$$

且

$$O_\pm\Big(j=l\pm\frac{1}{2}\Big)|n,j\mp\frac{1}{2},j,m\rangle=0,$$

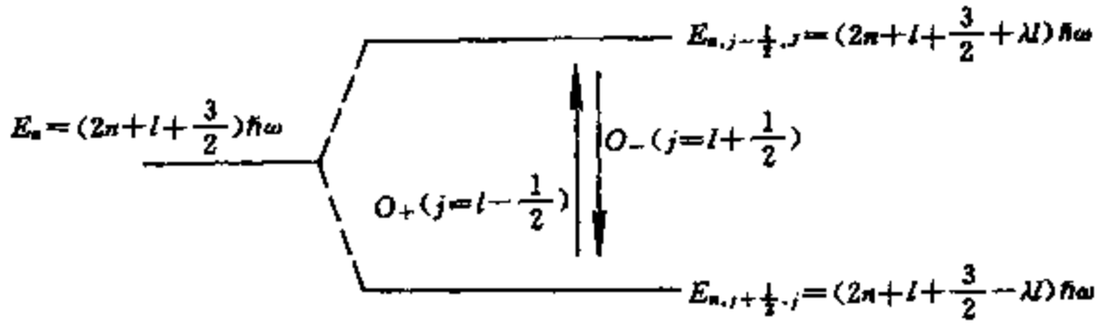


图 11–2

至于 E_0 间不同能级的跃迁, 可沿用 (11.10) 中的方式进行.

值得指出的是, (11.9) 中 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}$ 时, $O_\pm(l)$ 即可作为移动算子. 在三维谐振子例子中, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{K}$. 但在自旋 – 轨道耦合例子中, 取 J 为 (11.42) 即 $\sim\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{L}$ 的形式, 但移动算子均具有 (11.9) 统一的形式. 如果说, 在前者 $\boldsymbol{L}^2$ 可以作用在 $\boldsymbol{L}^2$ 本征态中将 $\boldsymbol{L}^2$ 的本征值提出去的话, 那么后者便不存在这种简化方案了. 此外, 即使在三维谐振子例子里, 除了由 L_α 形成的代数关系外, 尚有扩大的流代数关系 (11.25), 这是个很有兴趣的问题, 因为这是这种算子所特有的.

从以上两个例子已经可以看出，给定一个量子力学能谱，寻找移动算子 $O_{\pm}(j)$，使得从基态出发遍及各种能级，这实际需要 Yangian 算子. 上面的例子虽然特殊，但它的移动角动量平方本征值的本质是一般的. 例如，考虑 $2M$ 个自旋 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子，这时，$2M$ 个自旋 $\frac{1}{2}$ 会形成最高权为 M，最低权为 0 的许多不同权的态，而且每个权的重数为相应的组合数，用简单的图表示

$$\underbrace{\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{2}}_{2M}=0\oplus 1\oplus 2\oplus\cdots\oplus(M-1)\oplus M. \tag{11.51}$$

例如 $(M-1)$ 权态有 C_M^1 重简并，等等.

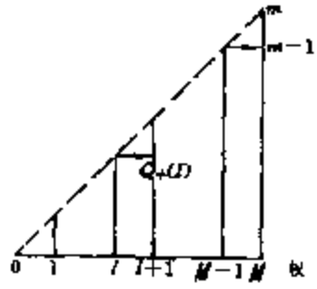


图 11-3

为了保持 m 不变，$O_{+}(l)$ 的作用如图 11-2 所示，即水平移动一个单位 $(\hbar)$，如诸自旋 $\frac{1}{2}$ 是排列在格点上，则每个权态有相应的简并度，$O_{\pm}(l)$ 算子现在还不能区分这种简并度，因而与贝特假设 (Bethe-Ansaty) 方法尚无直接联系，但局域 Yangian 与它有关.

以上已经看到，这里的例子与第 2 章 § 8 的例子都说明：李代数算子只能在同一个权内变动态，而 Yangian 却以一种特定方式将不同权之间的态相联系，它正是量子力学中跃迁算子的推广. 因为不同角动量态间的选择定则是由偶极跃迁所决定的，而 (11.21) 中的 $\boldsymbol{K}$ 也可以选为动量 $\boldsymbol{P}$ 或矢量坐标 $\boldsymbol{r}$，但从代数关系上看，应当把整个 $\boldsymbol{V}$ 换为 $\boldsymbol{J}$，即取为 (除 $\boldsymbol{I}$ 之外) 满足 Yangian 的算子. 从这个角度理解量子力学会有很多新的物理内容.

§ 11.3 Yangian 与磁单极的兼容性

在上面举出的 Yangian 例子中，都假设了 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}=0$. 这是一种很特殊的实现. 如上所述， $\boldsymbol{I}$ 就是角动量，它遵从角动量对易关系. 现在提一个问题，如果存在电磁势 $\boldsymbol{A}(c=1,c$ 为光速)，那必有动量 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-\mathrm{ze}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\pi}$(z 为原子序数)，然而显然简单的 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\pi}$ 肯定不再遵从角动量对易关系，需要再加上某个矢量才有可能仍保证 (11.11) 的标准关系. 仔细计算表明，不是任意的 $\boldsymbol{A}$ 都能找到相应的补偿矢量， $\boldsymbol{A}$ 与该补偿矢量是互相决定的. 直接验证表明，下面的方式是自恰的 [27]：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}-\mathrm{ze}\,\boldsymbol{A})-q\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{11.52}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为磁单极的矢量势. 由于有奇异性，它在三维球的不同区域取值不同，将包含北极以及比赤道多些的区域叫做 R_a，而将包含南极与赤道以北多些的区域叫做 R_b，显然 R_a 与 R_b 有相重区域. R_a 与 R_b 称为坐标邻域.

在球坐标中，该势形式为 [27]：

$$A_\gamma=A_\theta=0,$$

$$A_\phi=\frac{1}{r}f(\theta),\quad f(\theta)=\frac{g(\sigma-\cos\theta)}{\sin\theta}\begin{cases}\sigma=1, & R_a;\\ \sigma=-1, & R_b.\end{cases} \tag{11.53}$$

显然

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}A_\phi+\cot\theta A_\phi\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\frac{g}{r}=g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{11.54}$$

$g=\mathrm{ze}\,g.$

由高斯定理，知道磁通量必为 $4\pi g$(用高斯制). 因此， g 的意义是磁单极的荷. 它与通常磁力线是封闭的情况不同. 相应地，有 (11.52) 必满足 (11.11)，即通常角动量对易关系. 由 (11.52)，可知

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}=-qr. \tag{11.55}$$

与 (11.24) 比较，选 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{r}$ 时，有 $s=-q$. 所以通常量子力学教科书中选 (11.55) 右端为 0，相当于磁单极不存在的情况. 在 $s\neq 0$ 时，由于 (11.52) 定义的角动量 $\boldsymbol{L}$ 与不存在电磁场 $\boldsymbol{A}$、不存在补偿项 $g\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 时的角动量性质完全一样，所以，当选择 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{r}$ 时，$k=r$, 在 (11.26) 中自动出现了磁荷的贡献. 并仍保持 (11.22) 的正确性. 也就是说，当存在磁单极时 ($g\neq 0$, 从而 $s\neq 0$),Yangian 的实现 (11.21) 仍然正确，而此时移动算子 (11.9) 中，$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{V}$ 项代表磁单极的贡献. 这时移动算子移动了有磁单极时的能级与角动量. 这里不再赘述.

最后，为了方便不熟悉形如 (11.52) 的 L_α 运算的读者，我们简单地证明它的确满足角动量对易关系. 由 (11.52), $L_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 可写为 ($\hbar=1$)：

$$L_\alpha=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\beta\pi_\gamma-qn_\alpha.$$

其中

$$\pi_\gamma=(\boldsymbol{p}-\mathrm{ze}\boldsymbol{A})_\gamma=p_\gamma-\mathrm{ze}A_\gamma,\quad n_\alpha=x_\alpha/\gamma,$$
$$\gamma^2=x_\alpha x_\alpha,\quad \boldsymbol{\gamma}=(x_1,x_2,x_3).$$

$$\begin{aligned}
[L_\alpha,\pi_\beta]&=[(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p})_\alpha,p_\beta]-\mathrm{ze}\,[(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{p})_\alpha,A_\beta]\\
&\quad-\mathrm{ze}[(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{A})_\alpha,p_\beta]-q[n_\alpha,p_\beta]\\
&=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma-\mathrm{ze}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}x_\mu[p_\nu,A_\beta]-\mathrm{ze}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}x_\mu[A_\nu,p_\beta]\\
&\quad-(\mathrm{ze})i\epsilon_{\alpha\mu\nu}\delta_{\mu\beta}A_\nu-iq\partial_\beta\Big(\frac{x_\alpha}{\gamma}\Big)\\
&=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(p_\gamma-\mathrm{ze}\,A_\gamma)+i\mathrm{ze}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}x_\mu(\partial_\nu A_\beta-\partial_\beta A_\nu)-iq\partial_\beta\Big(\frac{x_\alpha}{\gamma}\Big)\\
&=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\pi_\gamma+i\mathrm{ze}\,\epsilon_{\alpha\mu\nu}x_\mu\epsilon_{\nu\beta\sigma}(\nabla\times\boldsymbol{A})_\sigma-iq\partial_\beta\Big(\frac{x_\alpha}{\gamma}\Big)\\
&=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\pi_\gamma+i\mathrm{ze}\,\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-i\mathrm{ze}\,x_\beta(\nabla\times\boldsymbol{A})_\alpha-iq\partial_\beta\Big(\frac{x_\alpha}{\gamma}\Big).
\end{aligned}$$

注意 $\nabla \times \boldsymbol{A} = g\dfrac{\boldsymbol{\gamma}}{\gamma^3}$, 上式简单变为

$$[L_\alpha, \pi_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\pi_\gamma. \qquad (q = \mathrm{ze}\, g) \tag{11.56}$$

因为 $[L_\alpha, \gamma^2] = 0$, 故有

$$\begin{aligned}
[L_\alpha, L_\beta] &= [L_\alpha, \epsilon_{\beta\mu\nu}x_\mu\pi_\nu] - \frac{q}{\gamma}[L_\alpha, x_\beta] \\
&= \epsilon_{\beta\mu\nu}[i\epsilon_{\alpha\mu\sigma}x_\sigma\pi_\nu + ix_\mu\epsilon_{\alpha\nu\rho}\pi_\rho] - iq\epsilon_{\alpha\beta\sigma}\frac{x_\sigma}{\gamma} \\
&= i[(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\alpha\nu})x_\sigma\pi_\nu + (\delta_{\beta\rho}\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\beta\alpha}\delta_{\rho\mu}) \\
&\qquad \cdot x_\mu\pi_\rho] - iq\epsilon_{\alpha\beta\sigma}\frac{x_\sigma}{\gamma} \\
&= i\epsilon_{\alpha\beta\sigma}[\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\pi}]_\sigma - iq\epsilon_{\alpha\beta\sigma}\frac{x_\sigma}{\gamma} \\
&= i\epsilon_{\alpha\beta\sigma}L_\sigma.
\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\pi}$ 是正则动量, (11.56) 的结果是显然的. 将形如 (11.52) 的带有磁势的角动量代入 (11.21), 取 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\gamma}$, 则同样定义 Yangian. 这实际上是最简单的“规范化”了的 Yangian. 我们知道, 所谓 Yangian, 只不过比李代数大一些: 用一种特定方式引入除李代数生成元之外的一组 (或若干组) 新的生成元, 以生成无穷维代数. 在李代数中引入规范场的方式, 是把动量 $\boldsymbol{p}$ 变为正则动量 $\boldsymbol{\pi}$. 如果 Yangian 中的 $\boldsymbol{J}$ 仍由 $\boldsymbol{I}$ 等构成, 那么规范化了 $\boldsymbol{I}$, 也就规范化了 $\boldsymbol{J}$, 条件是规范化后的 $\boldsymbol{I}$ 仍须满足与规范化之前的相同的对易关系, 存在磁单极就属于这种情况.

§ 12 Yangian 在一维格点模型的实现

在一维格点上, 由于不同格点处自旋算子 S_i^α (i 为格点指标, $i = 1, 2, \cdots, N$, α 为自旋指标, $\alpha = 1, 2, 3$) 互相对易:

$$[S_i^\alpha, S_j^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_{ij}S_i^\alpha, \tag{12.1}$$

因此，相应于前面定义的李代数算子 I^α 即为

$$I^\alpha = S^\alpha = \sum_{i=1}^{N} S_i^\alpha. \tag{12.2}$$

由于 (12.1) 显见有

$$[I^\alpha, I^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} I^\gamma. \tag{12.3}$$

所有一维格点上实现 Yangian 的 I 部分都是从 (12.2) 出发的，只是 J 的形式不同而已.

§ 12.1 J 的基本实现

如 (8.4) 讨论的，如果在某个格点处成立如 (8.2) 的简单的局域转移矩阵，那么把所有 $L_n(u)$ 乘起来便构成整体转移矩阵 $T(u)$. 取 u^{-2} 展开式的系数，按 (9.1) 与 (9.15), 即

$$\begin{aligned} T(u) =& I + u^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 + I_3) & I_+ \\ I_- & \frac{1}{2}(c_1 - I_3) \end{pmatrix} \\ &+ u^{-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T_0^{(2)} + J_3) & J_+ \\ J_- & \frac{1}{2}(T_0^{(2)} - J_3) \end{pmatrix} + \cdots \end{aligned} \tag{12.4}$$

(已选 $h = -2$), 在 $\widetilde{\det} T(u) = 1$ (即 $\mathrm{Y}(SL(2))$) 时 $T_0^{(2)} = I^2$, 将 (12.4) 与 (8.2) 相结合， J 必然由诸 S_i 的直积得到：

$$J = (-i) \sum_{j \neq k}^{N} (S_j \times S_k) \tag{12.5}$$

或

$$J_\alpha = (-i)\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{j \neq k}^{N} S_j^\beta S_k^\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{12.6}$$

即 (12.2) 与 (12.6) 组成了 Yangian 的自旋 1/2 的表示形式 (见 (8.4)). 直接验算可以证明这种组合 $\{I, J\}$ 满足 (9.16)~(9.20), 其中

$S_j^{\pm} = S_j^1 \pm iS_j^2$. 这种用自旋 1/2 算子组成的 Yangian 是最基本的实现，正如用自旋 1/2 算子实现 $SL(2)$ 李代数一样. 由于无论 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 均可用 $\boldsymbol{S}_i$ 实现，而 $\boldsymbol{S}_i$ 可以用费米子算符实现 (或用玻色子算符实现), 因而 Yangian 可用诸格点的费米子算符实现.

注意费米子算符性质：

$$\begin{aligned} &a_j^+ = C_{j\uparrow}^+,\ a_j = C_{j\uparrow},\ b_j^+ = C_{j\downarrow}^+,\ b_j = C_{j\downarrow}, \\ &[C_{j\sigma}^+, C_{j\sigma'}]_+ = \delta_{ij}\delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\sigma, \sigma' = \uparrow, \downarrow) \end{aligned} \tag{12.7}$$

其中 $[A, B]_+ = AB + BA$, 为了避免与泊松括号混淆，我们不使用 $\{\ ,\ \}$. 容易验证，

$$\begin{aligned} &S^+ = \sum_{j=1}^N a_j^+ b_j,\ S^- = \sum_{j=1}^N b_j^+ a_j, \\ &S^3 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N (a_j^+ a_j - b_j^+ b_j), \\ &I_j^+ = a_j^+ b_j,\ I_j^- = b_j^+ a_j,\ I_j^3 = \frac{1}{2}(a_j^+ a_j - b_j^+ b_j) \end{aligned} \tag{12.8}$$

必满足 (12.1). 由 (12.6) 知：

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \mp \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij} S_i^{\pm} S_j^3, \\ J_3 &= \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^N \epsilon_{ij} S_i^+ S_j^-, \end{aligned} \tag{12.9}$$

其中

$$\epsilon_{ij} = 1\ (i < j);\quad -1(i > j);\quad 0(i = j).$$

利用 (12.8), 可将 J 用费米算符写出:

$$J_+ = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\epsilon_{ij}a_i^+b_i(a_j^+a_j - b_j^+b_j),$$

$$J_- = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\epsilon_{ij}b_i^+a_i(a_j^+a_j - b_j^+b_j), \tag{12.10}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\epsilon_{ij}a_i^+b_ib_j^+a_j.$$

从上面费米子表示可以看出, I 描述的是在固定格点上的某种转动行为, 而 J 则描述从一格点迁移到另一个格点的行为. 因此 I 一定组成封闭代数, 而包含 J 的代数一定是不封闭的: 它把某处的自旋移到任意远处. 这里要特别强调, 杨 - 巴克斯特系统保证了量子可积性质, 但并不保证其哈密顿量一定与 Yangian 对易. 这完全是另外一件事. 相反, 如果哈密顿量与 Yangian 对易, 也不一定保证是量子可积的, 这是因为这些性质是因具体实现而异的. 然而, 如果哈密顿量由 $\widetilde{\det}\,T(u)$ 生成, 则必与 Yangian 对易; 如果由 $\mathrm{tr}\,T(u)$ 生成, 则不一定. 例如 XXX 模型的哈密顿量由 $\ln \mathrm{tr}\,T(u)$ 生成: $H_{XXX} \sim \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}$, 易证 $[H_{XXX}, I] = 0$, 但 $[H_{XXX}, J] \neq 0$, 即 XXX 链不具有 Yangian 对称性.

§12.2 自旋 1/2 长程链与 Yangian 对称性

保持 (12.2) 不变, 将 (12.9) 改为

$$J_\pm = \mp\sum_{i\neq j}^{N}W_{ij}S_i^\pm S_j^3, \quad J_3 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}W_{ij}S_i^+S_j^-.$$
$$(W_{ij} = -W_{ji}) \tag{12.11}$$

将它代入 (9.16)~(9.20), 特别是 J 所满足的关系式中, 发现只要

W_{ij} 满足一定的关系，即 W_{ij} 具有某种特定形式时，(12.11) 定义的 J_α $(\alpha=\pm,3)$ 与 (12.2) 形式的 I_α 必满足 Yangian 的对易关系. 这个关系式就是 [28]

$$\Delta_{ijk}=W_{ij}W_{jk}+W_{jk}W_{ki}+W_{ki}W_{ij}=-1, \tag{12.12}$$

其中 i,j,k 彼此均不相同，并且上式中相重指标不求知. 在证明 (12.12) 之前，我们先讨论 (12.12) 的解.

首先，它有一个平凡解：

$$W_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i<j \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } i=j \text{ 时;}\\ -1, & \text{当 } i>j \text{ 时.}\end{cases}$$

它正是 (12.6) 形式的 J_α 的基本自旋表示形式. 感兴趣的是 W_{ij} 的参数解：

$$W_{ij}=\frac{z_i+z_j}{z_{ij}}. \quad (z_{ij}=z_i-z_j) \tag{12.13}$$

实际上，将 (12.13) 代入 (12.12), 得

$$\begin{aligned}\Delta_{ijk}=&\frac{1}{z_{ij}z_{jk}z_{ki}}\{(z_i+z_j)(z_j+z_k)z_{ki}\\ &+(z_i+z_k)(z_i+z_k)z_{ij}+(z_i+z_k)(z_i+z_j)z_{jk}\}\\ =&\frac{1}{z_{ij}z_{jk}z_{ki}}\{z_j^2(z_k-z_i)+z_k^2(z_i-z_j)+z_i^2(z_j-_k)\}=-1.\end{aligned}$$

当选择 $z_n=e^{in(2\pi/N)}$，则 $W_{mn}=\dfrac{e^{im(2\pi/N)}+e^{-in(2\pi/N)}}{e^{im(2\pi/N)}-e^{in(2\pi/N)}}$. 分子、分母同时提出因子 $e^{i(m+n)\pi/N}$，易得

$$W_{mn}=i\mathrm{ctg}\frac{(m-n)\pi}{N}. \tag{12.14}$$

下面我们对自旋 1/2 情况，证明 (12.12). 注意到 W_{ij} 的反对称性 $W_{ij}=-W_{ji}$，我们需要将 (12.11) 代入熟知的 (9.18) 与 (9.19) 两

式： $(h^2/4=1)$

$$[J_\pm,[J_3,J_\pm]]=(I_3J_\pm-J_3I_\pm)I_\pm, \tag{A}$$

$$[J_3,[J_+,J_-]]=(I_+J_--J_+I_-)I_3. \tag{B}$$

由于

$$[J_3,J_+]=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}W_{ij}W_{kl}[S_i^+S_j^-,S_k^+S_l^3],$$

注意到

$$[S_i^+S_j^-,S_k^+S_l^3]=-\delta_{il}S_k^+S_i^+S_j^- -2\delta_{jk}S_i^+S_j^3S_l^3+\delta_{jl}S_i^+S_k^+S_j^-,$$

可计算出

$$[J_3,J_\pm]=\mp\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}W_{ij}\{2W_{jk}S_i^\pm S_j^3S_k^3+(W_{jk}+W_{ki})S_k^\pm S_i^+S_j^-\},$$

$$[J_+,J_-]=\sum_{i,j,k}W_{ij}\{2W_{jk}S_i^3S_j^3S_k^3+(W_{jk}+W_{ki})S_i^+S_j^-S_k^3\}.$$

进一步得到

$$\begin{aligned}[J_+,[J_3,J_+]]=&-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\{2(2W_{ji}W_{il}W_{lk}-W_{jl}W_{ij}W_{jk}\\&-W_{ik}W_{jl}W_{kj}+W_{jk}W_{kj}W_{kl})S_i^+S_j^+S_k^3S_l^3\\&+W_{ij}(W_{jk}+W_{ki})(W_{li}+W_{lk}-W_{lj})S_i^+S_k^+S_l^+S_j^-\},\end{aligned}$$

$$(I_3J_+-J_3I_+)I_+=-\sum_{i,j,k,l}W_{ij}(S_l^+S_i^+S_j^3S_k^3+\frac{1}{2}S_i^+S_k^+S_l^+S_j^-).$$

取两者之差，先考虑 $\sum_{i\neq j}\{\cdots\}$ 项中其他指标可以相等时，可化为要求下式

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}W_{ij}(W_{ij}^2-1)\{&S_i^+S_j^+(S_i^3)^2-\frac{1}{2}((S_i^+)^3\\&+2(S_i^+)^2S_j^++S_i^+(S_j^+)^2)S_j^-\}\end{aligned}$$

为 0. 当 $W_{ij}^2 \neq 1$(非平凡解) 时，由于自旋 1/2 模型必有 $(S_i^{\pm})^2 = 0$, $(S_i^3)^2 \sim 1$, W_{ij} 对 i,j 反对称，但 $S_i^+ S_j^+$ 为对称，故这部分为 0.

再考虑 $\sum_{i\neq j\neq k} \cdots$ 部分，这时 i,j,k 指标互不相等，但 l 可能等于其中的一个，此时两者之差为 0 的条件为：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k}(W_{ij}W_{jk}+W_{jk}W_{ki}+W_{ki}W_{ij})\cdot\{2W_{ki}S_i^+S_j^+S_i^3S_k^3 \\
&\qquad -2W_{jk}S_i^+S_j^+(S_k^3)^2+(W_{jk}-W_{ij})S_i^+S_k^+S_j^+S_j^-\} \\
&\quad=\sum_{i\neq j\neq k}\{(W_{ik}-W_{ij}+W_{jk})S_i^+S_j^+S_i^3S_k^3+W_{ik}S_i^+S_j^+(S_k^3)^2 \\
&\qquad +W_{ij}S_i^+S_k^+S_j^+S_j^-\}.
\end{aligned}$$

显然，当 (12.12) 满足时，上式两端相等，因为 $W_{ki} = -W_{ik}$. 因此 (A) 式成立.

同理可证 (B) 式成立. 剩下的还可证明 (A) 式与 (B) 式两端当 $i \neq j \neq k \neq l$ 时的求和项 $\sum_{i\neq j\neq k\neq l}\{\cdots\}$ 也成立. 它要求关系式 (对 (A)):

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k\neq l}\{2[W_{ji}(W_{ik}W_{kl}+W_{kl}W_{li}+W_{li}W_{ik}) \\
&\quad -W_{ik}(W_{jk}W_{kl}+W_{kl}W_{lj}+W_{lj}W_{jk})]S_i^+S_j^+S_k^3S_l^3 \\
&\quad +[W_{lk}(W_{ij}W_{jk}+W_{jk}W_{ki}+W_{ki}W_{ij}) \\
&\quad +W_{jk}(W_{ij}W_{jl}+W_{jl}W_{li}+W_{li}W_{ij})]S_i^+S_k^+S_l^3S_j^-\} \\
&=\sum_{i\neq j\neq k\neq l}\{W_{il}S_i^+S_j^+S_k^3S_l^3+\frac{1}{2}W_{ij}S_i^+S_k^+S_l^+S_j^-\}.
\end{aligned}$$

它在 (12.12) 成立时是成立的. 同理可证明对 (B) 式的相应关系式也都对，为节省篇幅，这里不再一一列出.

这样，我们就证明了 (12.11) 当 W_{ij} 满足 (12.12) 时与 $I_\alpha =$

$\sum_{i=1}^{N} I_i^\alpha$ 满足 Yangian. 当取 W_{jk} 满足 (12.14) 时，有

$$J_\alpha = -i\sum_{j\neq k}^{N} \mathrm{ctg}\frac{(j-k)\pi}{N}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_j^\beta S_k^\gamma. \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3) \tag{12.15}$$

与 (9.15) 形式相比较，在 (12.15) 中 W_{jk} 随格点差而异，因此我们看到 W_{ij} 描述了长程相互作用，而不再是近邻相互作用. 长程相互作用具有与近邻相互作用不同的特性，尤其在相变性质方面可能会破坏一些对近邻模型成立的某些结论. 霍旦与沙斯垂 (Haldane-Shastry) 等人发现存在与该 Yangian 对易的哈密顿族 [29]. 例如这个族中第一个哈密顿量为

$$H_2 = \sum_{i\neq j}(z_i z_j / z_{ij} z_{ji})(P_{ij} - 1), \tag{12.16}$$

其中 z_i 满足 (12.13), 而 P_{ij} 为第 i 格点与第 j 格点处自旋的交换算子，即

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j + I) \\ &= 2\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j + \frac{1}{2}I. \end{aligned} \tag{12.17}$$

经过计算，可以证明 [28],[29]

$$[H_2, I_\alpha] = [H_2, J_\alpha] = 0. \qquad (\alpha = \pm, 3) \tag{12.18}$$

还可以引进更高阶的守恒量 H_3, H_4. 它们彼此对易并且与 H_2 均对易，而且 H_m 均与 Yangian 对易 $(m = 2,3,4)$. 更进一步，这个模型对 $SU(n)$ 的基本表示也成立. 对自旋 1/2 模型 (12.16) 及其推广而言，霍旦 - 沙斯垂并没有证明它与 RTT 关系的联系，这个问题近来已获解决 [23].

此时哈密顿量为:

$$H_H = -\sum_{i=1}^{N}(a_i^+ a_{i+1} + a_{i+1}^+ a_i + b_i^+ b_{i+1} + b_{i+1}^+ b_i) - U\sum_{i=1}^{N}\left(a_i^+ a_i - \frac{1}{2}\right)\left(b_i^+ b_i - \frac{1}{2}\right). \tag{12.19}$$

即包含了巡游 (hopping) 项与同一格点不同自旋态粒子间相互作用, U 为任意参数 (耦合强度). 文献 [30] 指出, 这种哈密顿量具有 Yangian 对称性, 其中 I 仍由 (12.8),(12.2) 给出, 而

$$\begin{aligned} J_+ &= \sum_{i,j}\theta_{i,j}a_i^+ b_j - U\sum_{i\neq j}\epsilon_{ij}I_i^+ I_j^3, \\ J_- &= \sum_{i,j}\theta_{i,j}b_i^+ a_j + U\sum_{i\neq j}\epsilon_{i,j}I_i^- I_j^3, \\ J_3 &= \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i,j}\theta_{i,j}(a_i^+ a_j - b_i^\tau b_j) + U\sum_{i,j}\epsilon_{i,j}I_i^+ I_j^-\Big\}, \end{aligned} \tag{12.20}$$

其中

$$\theta_{i,j} = \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1};$$
$$\epsilon_{i,j} = 1(i<j),\ \ -1(i>j),\ \ 0(i=j).$$

ϵ_{ij} 项 (即 U 后部分) 其实就是 (12.9) 形式的 Yangian. 现在多了前面的巡游项, 即从一个格点通过向邻近格点的迁移而到达任意格点处, 由此亦可看到 Yangian 一定是无穷维代数, 因为巡游是不封闭的. 证明 (12.8) 与 (12.20) 满足 Yargian 是相当繁的, 处处要注意费米算符的反对易关系. 在键长 $N\to\infty$ 时同时成立

$$[H_H, I] = 0, \qquad [H_H, J] = 0, \tag{12.21}$$

其中 (12.21) 中的 J 由 (12.20) 实现，即 H_H 与 Yangian 对易 ($N \to \infty$ 时)，或者说 Yangian 是无穷长链哈伯模型的对称性．这个概念还可以推广到长程的一维哈伯模型，参见文献 [31].

哈伯模型这种新型简并度的物理意义尚待进一步探讨．要指出的是当 $U = 0$ 时，代数是蜕化的，因为在计算中 U 的地位相当于 (9.18)~(9.20) 中右端 h 的地位．在我们记号中，一般取 $h = -2$，以对应德林菲尔德定理，不能取为 0．大 U 极限下哈伯模型的行为已很好地解决 [32]，当然亦可用 η- 对方法讨论 [33].

为了使读者熟悉有关哈伯模型 Yangian 对称性的计算，以下我们简要给出 (12.21) 的计算过程．首先我们证明 (12.20) 确实满足 Yangian，然后证明 (12.19) 确实与 J_α ($\alpha = \pm, 3$) 对易．对具体计算不感兴趣的读者可以略去以下计算过程，而不会影响对其他章节的讨论.

证明 (12.20) 满足 Yangian 如下：

由 (12.7) 所示的费米子对易关系以及 (12.8)，已知 $I_\alpha = \sum_{i=1}^{N} I_i^\alpha$ ($\alpha = \pm, 3$) 满足通常自旋算子对易关系． Yangian 由 I_α 与 J_α 组成，因此，证明 J_α 与 I_α 满足 Yangian，只须证明它们满足

$$[J_\pm, [J_3, J_\pm]] = \lambda I_\pm (I_3 J_\pm - J_3 I_\pm), \tag{9.18'}$$

$$[J_3, [J_+, J_-]] = \lambda I_3 (I_+ J_- - J_+ I_-). \tag{9.19'}$$

很容易证明它们与 (9.18)、(9.19) 是一致的，原因是 $I_\pm$ 与 $J_\mp$ 的对易关系是 $2J_3$，在相减时消去.

将 (12.20) 代入，可计算得

$$[J_3, J_\pm] = A_\pm + UB_\pm + U^2 C_\pm,$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_+ =& \sum_{i,k,l} \theta_{ij}\theta_{jk} a_i^+ b_k,, \\
B_+ =& -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\theta_{ij}\Big\{(\epsilon_{jk}+\epsilon_{ik})a_i^+ b_j I_k^3 + \frac{1}{2}(3\epsilon_{kj}-\epsilon_{ki})I_k^+ a_i^+ a_j \\
&+ \frac{1}{2}(\epsilon_{kj}-3\epsilon_{ki})I_k^+ b_i^+ b_j\Big\}, \\
C_+ =& \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\epsilon_{ij}\{2\epsilon_{jk}I_i^+ I_j^3 I_k^3 + (\epsilon_{ki}-\epsilon_{kj})I_i^+ I_k^+ I_j^-\}; \\
A_- =& -(A_+)^+, \quad B_- = -(B_+)^+, \\
C_- =& -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\epsilon_{ij}\{2\epsilon_{jk}I_i^- I_j^3 I_k^3 + (\epsilon_{ki}-\epsilon_{kj})I_i^- I_k^- I_j^+\}.
\end{aligned}
$$

利用雅可比等式，可知有

$$[J_+, J_-] = [[J_3, J_-], I_+],$$

并将 $[J_+, J_-]$ 表为

$$[J_+, J_-] = A_3 + UB_3 + U^2 C_3,$$

可算出

$$
\begin{aligned}
A_3 =& \sum_{i,j,k}\theta_{ij}\theta_{jk}(a_i^+ a_k - b_i^+ b_k), \\
B_3 =& -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\theta_{ij}\{(\epsilon_{jk}+\epsilon_{ik})(b_i^+ a_j I_k^+ - a_i^+ b_j I_k^-) \\
&+ 2(\epsilon_{ij}-W_{jk})(a_i^+ a_j - b_i^+ b_j)I_k^3\}, \\
C_3 =& -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\epsilon_{ij}\{2\epsilon_{jk}I_i^3 I_j^3 I_k^3 + (\epsilon_{ki}-\epsilon_{kj})I_i^- I_j^+ I_k^3\}.
\end{aligned}
$$

在此基础上，可算出

$$[J_+,[J_3,J_+]]=\mathcal{A}+U\mathcal{B}+U^2\mathcal{C}+U^3\mathcal{D},$$

$$\mathcal{A}=0,$$

$$\mathcal{B}=0,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}=&-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\theta_{jl}\Big\{(\overline{\Delta}_{ijk}+\overline{\Delta}_{ikl}+\epsilon_{kl}\epsilon_{li}+\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\\&+\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}-\epsilon_{jk}\epsilon_{il})I_i^+a_j^+b_lI_k^3\\&+I_i^+I_k^+\Big[\Big(\epsilon_{il}(\epsilon_{ik}+\epsilon_{kl})+\frac{1}{2}(\epsilon_{jk}-3\epsilon_{lk})\\&\cdot\Big(\epsilon_{ki}+\frac{1}{2}(\epsilon_{il}-\epsilon_{ij})\Big)\Big)a_j^+a_l+(\epsilon_{ij}(\epsilon_{ki}-\epsilon_{kj})\\&+\frac{1}{2}(3\epsilon_{jk}-\epsilon_{lk})\Big(\epsilon_{ki}-\frac{1}{2}(\epsilon_{il}-\epsilon_{ij})\Big)\Big)b_j^+b_l\Big]\Big\}\\&-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\theta_{jk}(\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}+\epsilon_{jk}\epsilon_{ki})I_i^+a_j^+b_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}=&\frac{1}{2}\sum_{ijkl}\{2(\epsilon_{jl}-\epsilon_{kl})\overline{\Delta}_{ijk}I_i^+I_j^+I_k^3I_l^3\\&+(\epsilon_{jl}-\epsilon_{jk})\overline{\Delta}_{ikl}I_i^+I_j^+I_k^+I_l^-\},\end{aligned}$$

其中

$$\overline{\Delta}_{ijk}=\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}+\epsilon_{jk}\epsilon_{ki}+\epsilon_{ki}\epsilon_{ij}.$$

另一方面，有

$$I_+(I_3J_+-J_3I_+)=D_++UE_+.$$

得到

$$D_+=\sum_{ijkl}\theta_{jl}\Big\{I_i^+a_j^+b_lI_k^3+\frac{1}{2}I_i^+I_k^+(b_j^+b_l+a_j^+a_l)\Big\},$$

$$E_+=-\sum_{i,j,k,l}\epsilon_{jl}\Big\{I_i^+I_j^+I_l^3I_k^3+\frac{1}{2}I_i^+I_k^+I_j^+I_l^-\Big\}.$$

比较 D_+ 与 C, E_+ 与 D, 分别考察 $\sum_{i\neq j\neq k\neq l}$, $\sum_{i\neq j\neq k}$ 及 $\sum_{i\neq j}$ 各项, 发现

$$D_+ = C,$$
$$E_+ = D.$$

从而

$$[J_+,[J_3,J_+]] = U^2 I_+(I_3 J_- - J_3 I_+).$$

再利用 $([J_+,[J_3,J_+]])^+$ 可导出左端为 J_- 的关系式.

下面再证明 (12.19) 具有 Yangian 对称性.

(12.19) 可以写为

$$\begin{aligned} H =& -\sum_i \theta_{ij}(a_i^+ a_j + b_i^+ b_j) \\ & -U\Big(\sum_i \Big(a_i^+ a_i b_i^+ b_i - \frac{1}{4}\Big) - \frac{N}{2}\Big), \\ \theta_{ij} =& \delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j}. \end{aligned}$$

可直接证明

$$\Big[\sum_i \theta_{ij}(a_i^+ a_j + b_j^+ b_j), I_+\Big] = \sum_i \theta_{ij}(a_i^+ b_j - a_i^+ b_j) = 0,$$
$$\Big[\sum_i a_i^+ a_i b_i^+ b_i, I_+\Big] = \sum_i (a_i^+ b_i - a_i^+ b_i) = 0.$$

故有 $[H, I_+] = 0$. 由 $[H, I_-] = -[H, I_+]^+$ 以及雅可比等式, 易证 $[H, I_-] = 0$, $[H, I_3] = 0$, 因此, H 与 I 对易. 为证明 H 与 Yangian 对易, 只须再证明 $[H, J] = 0$ 即可. 以 J_+ 为例 (对 J_-, J_3, 可类似

地证明):

$$
\begin{aligned}
[H, J_+] = &-\left[\sum_{i,j}^{N}\theta_{ij}(a_i^+a_j + b_i^+b_j), \sum_{k,l}^{N}\theta_{kl}a_k^+b_l\right] \\
&+ U\left\{\left[\sum_{i,j}^{N}\theta_{ij}(a_i^+a_j + b_i^+b_j), \sum_{k,l}^{N}\epsilon_{kl}I_k^+I_l^3\right]\right. \\
&\left.-\left[\sum_{i}^{N}a_i^+a_ib_i^+b_i, \sum_{j,k}^{N}\theta_{jk}a_j^+b_k\right]\right\} \\
&+ U^2\left[\sum_{i}^{N}a_i^+a_ib_i^+b_i, \sum_{j.k}^{N}\epsilon_{jk}I_j^+I_k^3\right].
\end{aligned}
$$

当链长 $N \to \infty$ 时，经具体计算，可证明 U 的零次幂与二次幂项系数为 0, 其 U 的一次幂的系数为

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{i,j}\theta_{ij}(a_i^+a_j + b_i^+b_j), \sum_{k,l}\epsilon_{k,l}I_k^+I_l^3\right] \\
&= \sum_{i,j,k}\theta_{ij}\{(\epsilon_{j,k} - \epsilon_{i,k})a_i^+b_jI_k^3 + \frac{1}{2}(\epsilon_{j.k} - \epsilon_{k.i})I_k^+(a_i^+a_j - b_i^+b_j)\} \\
&= \sum_{i,k}\{(\epsilon_{i+1,k} - \epsilon_{i,k})a_i^+b_{i+1}I_k^3 + (\epsilon_{i-1,k} - \epsilon_{i,k})a_i^+b_{i-1}I_k^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{k,i+1} - \epsilon_{k,i})I_k^+(a_i^+a_{i+1} - b_i^+b_{i+1}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\epsilon_{k,i-1} - \epsilon_{k,i})I_k^+(a_i^+a_{i+1} - b_i^+b_{i-1}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i}\{a_i^+b_{i+1}(b_ib_i^+ - b_i^+b_i) - a_i^+b_{i+1} + a_i^+b_{i-1}(b_i^+b_i - b_ib_i^+) \\
&\quad + a_i^+b_{i-1} - a_i^+b_{i-1}a_{i+1}^+a_{i+1} + a_i^+b_{i-1}a_{i-1}^+a_{i-1}\} \\
&= \sum_{i}a_i^+\{(b_{i+1} - b_{i-1})b_i^+b_i - b_{i+1}a_{i+1}^+a_{i+1} + b_{i-1}a_{i-1}^+a_{i-1}\}.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&-\Big[\sum_i a_i^+ a_i b_i^+ b_i, \sum_{j,k} \theta_{jk} a_j^+ b_k\Big] \\
&= -\sum_{i,j} \theta_{ij}\{a_i^+ b_j b_i^+ b_i - a_i^+ b_j a_j^+ a_j\} \\
&= -\sum_i a_i^+\{b_{i+1}(b_i^+ b_i - a_{i+1}^+ a_{i+1}) - b_{i-1}(b_i^+ b_i - a_{i-1}^+ a_{i-1})\} \\
&= -\sum_i a_i^+\{(b_{i+1} - b_{i-1}) b_i^+ b_i - b_{i+1} a_{i+1}^+ a_{i+1} + b_{i-1} a_{i-1}^+ a_{i-1}\}.
\end{aligned}
$$

因此，在 $N \to \infty$(即无穷长链) 时，由於整个链内 $i \to i \pm 1$ 代换下不变，故 u 的一次幂系数为 0, 即 $[H, J_\alpha] = 0$, $\alpha = \pm, 3$.

§ 13 氢原子中的 Yangian 对称性

前面介绍了简单 Yangian 的量子力学实现. 其实，我们熟悉的氢原子问题中就存在 Yangian 对称性，只不过由於通常太过於限制在李代数范畴内讨论问题，面未发觉它面已. 熟知的氢原子的哈密顿量为

$$
H = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^2 - \frac{k}{r}, \qquad r = |\boldsymbol{r}|, \tag{13.1}
$$

其中 k 为常数 (例如 Ze), 氢原子问题中存在两个守恒矢量，一个是角动量，满足对易关系：

$$
[L_\alpha, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\tau. \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{13.2}
$$

另一个是隆格 - 林茨 (Runge-Lenz) 矢量 (有的文献称为泡利 - 林茨 (Pauli-Lenz) 矢量):

$$
\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{L}) + \frac{k}{r}\boldsymbol{r}. \tag{13.3}
$$

可以证明：

$$[H, \boldsymbol{A}] = [H, \boldsymbol{L}] = 0. \tag{13.4}$$

有关运算是基本的，都可以在文献 [25] 中找到. 为了方便，引入

$$\boldsymbol{B} = \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A}, \tag{13.5}$$

则有

$$[B_\alpha, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\sigma}B_\sigma, \quad [B_\alpha, B_\beta] = iH\epsilon_{\alpha\beta\sigma}L_\sigma, \tag{13.6}$$

利用这些关系式，我们引入两个矢量，一个仍是角动量 $\boldsymbol{L}$, 另一个叫做 $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} + F\boldsymbol{L}. \tag{13.7}$$

其中

$$[F, \boldsymbol{L}] = [F, \boldsymbol{A}] = [F, H] = 0. \tag{13.8}$$

亦即 F 为卡斯米尔算子. 经过计算，可得

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{\left(2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}k^2\right)L_\sigma + 2FJ_\sigma\right\}. \tag{13.9}$$

进一步，可得

$$\begin{aligned} [J_\pm, [J_3, J_\pm]] &= (-4H)I_\pm(I_3J_\pm - J_3I_\pm), \\ [J_3, [J_+, J_-]] &= (-4H)I_3(I_+J_- - J_+I_-). \end{aligned} \tag{13.10}$$

显然，当取 $-4H =$ 常数时， $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 组成 Yangian, 记为 $\mathrm{Y}(Sl(2))$. 因而，有 (注意 (13.8))

$$[H, \mathrm{Y}(Sl(2))] = 0. \tag{13.11}$$

在通常量子力学教科书中，总是把 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 组合起来，形成两组互相对易的 $SU(2)$, 於是氢原子具有 $SU(2) \otimes SU(2) \sim SO(4)$ 对称

性. 现在这个例子告诉我们, 如果取两者的矢量积, 那么我们遇到了无穷维代数, 由於满足 Yangian 的 $\boldsymbol{J}$ 矢量加上任意倍数的 $\boldsymbol{I}$ 矢量仍满足 Yangian 关系, 因此, (13.7) 中的关键部分是 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$. 我们知道, 由于 $SO(4)$ 对称性, 氢原子有有限的守恒量: H, L^2 与 L_3. 因此, 可以预料氢原子具有 Yangian 对称性. 但从 RTT 关系, 必定得出有限个守恒量.

由以前介绍, 知道转移矩阵可以用谱参数 u 展开. 引用记号 $T(u)=I+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u^{-n}T^{(n)}$, $T^{(n)}=\|T_{ab}^{(n)}\|$ $(a,b=1,2$, 因为现在只讨论 2×2 矩阵) 以及 $T_0^{(n)}=T_{11}^{(n)}+T_{22}^{(n)}$, $T_3^{(n)}=T_{22}^{(n)}-T_{11}^{(n)}$, $T_+^{(n)}=T_{12}^{(n)}$, $T_-^{(n)}=T_{21}^{(n)}$, 则

$$T(u)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}u^{-n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}T_0^{(n)}-\frac{1}{2}T_3^{(n)}&T_+^{(n)}\\T_-^{(n)}&\frac{1}{2}T_0^{(n)}+\frac{1}{2}T_3^{(n)}\end{pmatrix},\tag{13.12}$$

当取 $R(u)=u+P$ 时, 将 (13.12) 代入 RTT 关系后, 得

$$[I_\alpha,I_\beta]=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}I_\gamma,\tag{13.13}$$

$$[I_\alpha,J_\beta]=i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma,\tag{13.14}$$

$$[J_\pm,[J_3,J_\pm]]=\lambda^{-2}I_\pm(J_\pm I_3-I_\pm J_3),\tag{13.15}$$

$$[J_3,[J_+,J_-]]=\lambda^{-2}I_3(I_+J_--J_+I_-).\tag{13.16}$$

其中

$$\begin{aligned}T_3^{(1)}&=2I_3,\\T_\pm^{(1)}&=I_\pm,\end{aligned}\tag{13.17}$$

$$\begin{aligned}T_3^{(2)}&=2\lambda J_3,\\T_\pm^{(2)}&=\lambda J_\pm.\end{aligned}\tag{13.18}$$

λ 为任意常数；以及

$$[T_0^{(2)}, T_\pm^{(2)}] = \pm(T_3^{(1)}T_\pm^{(2)} - T_3^{(2)}T_\pm^{(1)}), \tag{13.19}$$

$$[T_0^{(2)}, T_3^{(2)}] = 2(T_+^{(1)}T_-^{(2)} - T_+^{(2)}T_-^{(1)}), \tag{13.20}$$

$$T_\pm^{(3)} = \frac{1}{2}\{\pm[T_3^{(2)}, T_\pm^{(2)}] + T_0^{(2)}T_\pm^{(1)} - T_0^{(1)}T_\pm^{(2)}\}, \tag{13.21}$$

$$T_3^{(3)} = [T_+^{(2)}, T_-^{(2)}] + \frac{1}{2}(T_0^{(2)}T_3^{(1)} - T_0^{(1)}T_3^{(2)}); \tag{13.22}$$

还有 $n > 3$ 的更高阶关系式. (13.13)~(13.16) 决定了 Yangian. 与 (13.10) 相比, $\lambda = -4H$. 也就是说，对每个能量本征值 $\sim \frac{1}{n^2}$，均有 Yangian 对称性，即每个能级上有 Yangian 对称性，对应着角动量态的简并. 由 Yangian 算子组成的角动量移动算子，将第 n 个能级的角动量 $l \to l+1$. 与三维谐振子不同的是，三维谐振子的哈密顿量与角动量移动等子不对易，因此在移动 l 的同时也移动了主量子数. 现在氢原子的哈密顿量与角动量移动算子对易，因而只移 l 而不改变 n.

现在回到 (13.21). 为了强调卡斯米尔算子的性质，我们将 λ 写为 G, 它同哈密顿量、角动量以及隆格 - 林茨向量均对易. 经过计算，可得

$$T_\pm^{(3)} = \pm\{(2G^2\rho + T_0^{(2)})I_\pm + \beta J_\pm\}, \tag{13.23}$$

$$T_3^{(3)} = (2G^2\rho + T_0^{(2)})I_3 + \beta J_3. \tag{13.24}$$

其中

$$\rho = 2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}K^2, \quad \beta = 4G^2F - T_0^{(1)}G. \tag{13.25}$$

由于 $C_1 = T_0^{(1)}$ (C_1 为量子行列式对 u^{-1} 展开的系数), 它与 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{A}$ 均对易，而 $T_0^{(2)}$ 遵从 (13.19) 与 (13.20), 将 (13.20) 、 (13.21) 代

入，得

$$\begin{aligned}&[T_0^{(2)}, J_\pm] = \pm 2(I_3 J_\pm - J_3 I_\pm),\\ &[T_0^{(2)}, J_3] = I_+ J_- - J_+ I_-.\end{aligned} \tag{13.26}$$

我们现在选取满足 (13.26) 与 $T_\alpha^{(3)} = 0$ $(\alpha = \pm, 3)$ 的 $T_0^{(2)}$ 的解. 选取

$$T_0^{(1)} = 4GF \tag{13.27}$$

及

$$T_0^{(2)} = -2G^2\Big(2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}K^2\Big), \tag{13.28}$$

我们发现, $T_0^{(1)}$ 及 $T_0^{(2)}$ 即满足所有要求. 与 Yangian 的归一化相应, 选取 $G = (-2H)^{1/2}$, 则得

$$\begin{aligned}&T_\pm^{(1)} = L_\pm, \quad T_3^{(1)} = 2L_3, \quad T_0^{(1)} = H,\\ &T_\pm^{(2)} = i\epsilon(2H)^{-1/2} J_\pm, \quad T_3^{(2)} = 2i\epsilon(2H)^{-1/2} J_3,\\ &T_0^{(2)} = 2L^2 + H^{-1}(F^2 + \frac{1}{2}K^2).\end{aligned} \tag{13.29}$$

这里已经由惯例选择了 $T_0^{(1)} = C_1 = H$. 由上式, 可用标准公式算出 $(C_1 = H)$

$$\begin{aligned}&C_2 = \frac{1}{2}K^2 H^{-1} - \frac{1}{2}H - \frac{1}{8}H^2,\\ &C_m = C_m(H) \qquad (m > 2).\end{aligned} \tag{13.30}$$

即所有量子行列式的展开式皆为氢原子哈密顿量的函数, 由于 Yangian 的特性 (13.7), 使得存在特别的 $T_0^{(2)}$ 的解, 它保证 $T_\alpha^{(3)} = 0$, 即 $T(u)$ 只有展开式的有限项. 它对应有限守恒量为 $H_1 L^2$ 与 L_3. 这种由 RTT 关系限定的严格可积性与氢原子的所有已知性质相一致. 这并不奇怪, 因为 RTT 关系描述相当宽的一大类量子可积系统, 尤其对许多非线性系统更是具有普遍性. 将它应用于像氢原子这么简单的量子可积系统, 自然应当没有问题. 通过这个例子可以

看出，在基础量子力学中存在许多深刻的东西．当我们获知一些新的东西的时候，常常误以为它超出了量子力学的范畴，然而许多事实告诉我们，我们仍然生活在量子力学的世界当中，许多新颖的物理与数学迄今很难超出量子力学的范畴．

§14 Yangian 的长程实现与 C-S 模型

上面介绍的 J 的实现，是通过自旋算子 (或组成它们的产生－消灭算子) 的矢量积实现的．在一些特殊情况下，J 可以通过更简单的方式来实现．在讨论这种新的实现之前，我们先从另外一个角度讨论守恒量的有关问题．所谓守恒量族，就是有 M 个量 (M 可以趋于无穷大)，它们当中的任意两个之间都是彼此对易的．我们先沿波里克劳尼克斯 (Polychronikos) 的方案 [34] 建立起一个守恒族，然后再建立它与杨－巴克斯特系统的关系．

先定义算子 D_i，它作用在第 i 个格点上．再引入坐标置换算子 k_{ij}，它对 i,j 是对称的，即 $k_{ij}=k_{ji}$．当它作用在任意带有 i 指标的“矢量” V_i 上时，满足

$$\begin{aligned} &V_kK_{ij}=K_{ij}V_k, \qquad (k\neq i,\ k\neq j)\\ &V_iK_{ij}=K_{ij}V_j \qquad \text{(相重指标不求和)} \end{aligned} \tag{14.1}$$

$(i,j=1,2,\cdots,N)$．在形式上，K_{ij} 的矩阵形可以理解为当作用在矢量分量 $V_k(i\neq k,j\neq k)$ 时为单位矩阵，而作用在 V_i 或 V_j 上时为第 i 行、j 列矩阵元为 1 且第 j 行、i 列矩阵元也为 1 的矩阵．所说的算符 D_i 定义如下：

$$[D_i,D_j]=\lambda(D_i-D_j)K_{ij}. \qquad \text{(相重指标不求和)} \tag{14.2}$$

定义

$$H^{(2)}=\sum_{i=1}^{N}D_i^2,\qquad H^{(m)}=\sum_{i=1}^{N}(D_i)^m, \tag{14.3}$$

现在证明

$$[H^{(1)},H^{(2)}]=0. \tag{14.4}$$

证明

$$\begin{aligned}[H^{(1)},H^{(2)}]&=\sum_{i,j}[D_i,D_j^2]=\sum_{i,j}([D_i,D_j]D_j+D_j[D_i,D_j])\\&=\lambda\sum_{i,j}((D_i-D_j)K_{ij}D_j+D_j(D_i-D_j)K_{ij})\\&=\lambda\sum_{i,j}((D_i-D_j)D_i+D_j(D_i-D_j))K_{ij}=0.\end{aligned}$$

由于 $\sum_{i,j}(D_i^2-D_j^2)K_{ij}$ 中 $K_{ij}=K_{ji}$, 故为 0. 同样, $\sum_{i,j}(D_jD_i-D_jD_i)K_{ij}=0$.

为了简明地说明问题, 我们举一个例子. 引入.

$$D_i=p_i+\sum_{i\neq j}V_{ij}\cdot K_{ij},\quad V_{ij}=V(x_i-x_j),\quad ip_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{14.5}$$

则有

$$\begin{aligned}[D_i,D_j]=&[p_i,\sum_{k\neq j}V_{jk}K_{jk}]+\sum_{k\neq i}[V_{ik}K_{ik},p_j]\\&+\sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}[V_{ik}K_{ik},V_{jl}K_{jl}]\\=&\sum_{k\neq j}[p_i,V_{jk}K_{jk}]-(i\leftrightarrow j)\\&+\sum_{\substack{k\neq i\\l\neq j}}[V_{ik}K_{ik},V_{jl}K_{jl}].\end{aligned} \tag{14.6}$$

注意 $V_{jk} \equiv V(x_j - x_k)$ 只依赖于 x_j 和 x_k, 所以将 p_i 作用在 V_{jk} 及其以后的某个函数上的时候, 由于 $i \neq j$, 只有 $i = k$ 时才不为 0. 同时注意微商算子 $[p_i, M]$ 的意义是 $[p_i, M]f$, 即作用在某个函数 f 上面, 即 $[p_i, M]f = p_i(Mf) - M(p_i f) = (p_i M)f + M(p_i f) - M(p_i f) = (P_i M)f$ 或 $[p_i M] = p_i M$. 但在形式上, 它等价于 $[p_i, M] = p_i M - M p_i$, 其中 p_i 作用于它右边所有的量. 于是,

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq j}[p_i, V_{jk}K_{jk}] &= [p_i, V_{ji}K_{ji}] = p_i V_{ji}K_{ji} - V_{ji}K_{ji}p_i \\ &= p_i V_{ji}K_{ij} - V_{ji}p_j K_{ij} \\ &\qquad\qquad (\text{因为} K_{ij} = K_{ji}, p_j K_{ij} = K_{ij}p_i) \\ &= \{(p_i V_{ji}) + (V_{ji}p_i - V_{ji}p_j)\}K_{ij}.\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}&\sum_{k\neq j}[p_i, V_{jk}K_{jk}] - (i \leftrightarrow j) \\ &\quad = \{(p_i V_{ji}) - (p_j V_{ij}) + (V_{ij} + V_{ji})(p_i - p_j)\}K_{ij} \\ &\quad = (V_{ij} + V_{ji})(p_i - p_j)K_{ij}. \qquad (14.7)\end{aligned}$$

上式中, 由于 $(p_i - p_j)$ 将来作用在函数上未必是反对称的, 故形式上保留它, 面 $(p_i V_{ji}) - (p_j V_{ij}) = 0$, 因为 $V_{ij} = V(x_i - x_j)$.

再计算 $\sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}[V_{ik}K_{ik}, V_{jl}K_{jl}]$. 由于 $i \neq j$, 它不为 0 的项只有三种情况: $k = l$, $k = j$, 及 $l = i$. 注意 "矢量" 移过 K_{ik} 时要换下标, 即使 K_{jk} 自己也是如此. 得

$$\begin{aligned}l = k\text{项}: \sum_k [V_{ik}K_{ik}, V_{jk}K_{jk}] &= V_{ik}K_{ik}V_{jk}K_{jk} - V_{jk}K_{jk}V_{ik}K_{ik} \\ &= V_{ik}V_{ji}K_{ik}K_{jk} - V_{jk}V_{ij}K_{jk}K_{ik} \\ &= (V_{ik}V_{ji}K_{jk} - V_{jk}V_{ij}K_{ik})K_{ij}.\end{aligned}$$

上式用到了 $K_{ik}K_{jk}=K_{jk}K_{ji}=K_{jk}K_{ij}$. 类似的计算给出

$$k=j\text{项}:\ \sum_{l\neq j}[V_{ij}K_{ij},V_{jl}K_{jl}]=\sum_{k\neq j}[V_{ij}K_{ij},V_{jk}K_{jk}]$$
$$=\sum_{k\neq j}(V_{ij}V_{ik}K_{ik}-V_{jk}V_{ik}K_{jk})K_{ij}.$$
$$l=i\text{项}:\ \sum_{k\neq i}[V_{ik}K_{ik},V_{ji}K_{ji}]=\sum_{k\neq i}(V_{ik}V_{jk}K_{ik}-V_{ji}V_{jk}K_{jk})K_{ij}.$$

于是,

$$[D_i,D_j]=\{(V_{ij}+V_{ji})(p_i-p_j)$$
$$+\sum_{k\neq i,j}[(V_{ij}V_{ik}-V_{jk}V_{ij}+V_{ik}V_{jk})K_{ik}$$
$$-(V_{jk}V_{ik}-V_{ik}V_{ji}+V_{ji}V_{jk})K_{jk}]\}K_{ij} \tag{14.8}$$

右端第二项正是互为 $(i\leftrightarrow j)$ 并相减. 现在强加两组条件给 V_{ij}:

$$V_{ij}+V_{ji}=\lambda, \tag{14.9}$$
$$V_{ij}V_{ik}-V_{jk}V_{ij}+V_{ik}V_{jk}=\lambda V_{ik},(\text{相重指标不求和}) \tag{14.10}$$

则将有 $[D_i,D_j]=\lambda(D_i-D_j)K_{ij}$. 这两组限制条件限制了 $V_{ij}\equiv V(x_i-x_j)$ 的形式. 满足这些条件的函数比较多. 为了验证方便, 引入

$$x_{ij}=x_i-x_j=x,\quad x_i-x_k=y=x_{ik}, \tag{14.11}$$

则 $x_{jk}=x_j-x_k=y-x$. 于是, 两个条件变为

$$V(x)+V(-x)=\lambda, \tag{14.12}$$
$$V(x)V(y)+V(y)V(y-x)-V(y-x)V(x)=\lambda V(y). \tag{14.13}$$

满足这两个条件的最简单的例子是

$$\lambda=0:\qquad V(x)=-V(-x),$$
$$V(y-x)=\frac{V(x)V(y)}{V(x)-V(y)} \tag{14.14}$$
$$\text{或}\ \frac{1}{V(y-x)}=\frac{1}{V(y)}-\frac{1}{V(x)}.$$

它的解可选为

$$V(x)=\frac{1}{x}\ \text{ 或 }\ V(x_i-x_j)=V_{ij}=\frac{1}{x_i-x_j}. \tag{14.15}$$

此时 $[D_i,D_j]=0$.

另外一个充分解是：当 $\lambda\neq 0$ 时，

$$V_{ij}=V(x_i-x_j)\equiv V(x)=\frac{\lambda}{2}\frac{e^x}{\operatorname{sh}x}. \tag{14.16}$$

其中 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. 实际上，由于 (14.13) 可写为

$$V(y-x)=\frac{V(y)(\lambda-V(x))}{V(y)-V(x)}, \tag{14.17}$$

将 (14.16) 直接代入 (14.17), 立即得到 (14.17) 的右端等于 $\dfrac{\lambda}{2}\dfrac{e^{(y-x)}}{\operatorname{sh}(y-x)}$, 亦即等于左端.

(14.9) 与 (14.10) 的形式不太对称，现在引入

$$\overline{V}_{ij}=\frac{1}{2}(V_{ij}-V_{ji}), \tag{14.18}$$

由 (14.9) 知

$$V_{ij}=\overline{V}_{ij}+\frac{1}{2}\lambda, \tag{14.19}$$

将 (14.18) 代入 (14.9) 与 (14.10), 它们将用以下两个等价条件代替:

$$\overline{V}_{ij} = -\overline{V}_{ji}, \tag{14.20}$$

$$\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk} + \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki} + \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij} = -\frac{1}{4}\lambda^2. \tag{14.21}$$

此时 (14.16) 导致

$$\overline{V}_{ij} = \frac{\lambda}{2}\mathrm{cth}\, x = \frac{\lambda}{2}\mathrm{cth}(x_i - x_j) \equiv \frac{\lambda}{2}\mathrm{cth}\, x_{ij}, \tag{14.22}$$

其中 $\mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$. 将 (14.22) 代入 (14.21), 可直接验证两端相等.

当 $\lambda \neq 0$, 除了 (14.16) 形式的解之外, 还有其他形式的满足 (14.12) 与 (14.13) 的解. 例如:

$$\begin{aligned} V(x) &= \begin{cases} \lambda, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases} \\ &= \lambda\theta(x). \end{aligned} \tag{14.23}$$

其中阶梯函数的定义是 $\theta(x) = 1$ $(x > 0)$, $\theta(x) = 0$ $(x < 0)$. 相应地, 有

$$\begin{aligned} \overline{V}(x) &= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ -\dfrac{\lambda}{2}, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases} \\ &= \lambda\epsilon(x). \end{aligned} \tag{14.24}$$

其中 $\epsilon(x) = \frac{1}{2}$ $(x > 0)$, $\epsilon(x) = -\frac{1}{2}$ $(x < 0)$.

由 $\overline{V}(x)$ 可以定义相应的算子

$$\overline{D}_i = p_i + \sum_{i \neq j} \overline{V}_{ij} K_{ij}. \quad (\overline{V}_{ij} = -\overline{V}_{ji}) \tag{14.25}$$

它与 D_i 的关系是

$$D_i = \overline{D}_i + \frac{1}{2}\lambda \sum_{i \neq j} K_{ij}. \tag{14.26}$$

可以证明 $\overline{D}_i$ 与 D_i 有相似的性质，例如 $\overline{D}_i$ 具有 (14.21) 形式的对易关系等.

哈密顿量定义为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \overline{D}_i^2. \tag{14.27}$$

将 (14.23) 代入 (14.27), 得

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} P_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} [\overline{V}_{ij}(p_i + p_j)K_{ij} + (p_i \overline{V}_{ij})K_{ij}] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq k}} \overline{V}_{ij} K_{ij} \overline{V}_{ik} K_{ik}. \end{aligned} \tag{14.28}$$

现在分别处理各项. $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^2$ 是系统的动能项. 由于 $\overline{V}_{ij}$ 为反对称，$(p_i + p_j)K_{ij}$ 对 i 与 j 对称，故该项为 0. (14.28) 右端最后一项分两种情况：$j = k$ 与 $j \neq k$. 后一种情况表示 i, j, k 互不相等. 由于 $j = k$ 时 K_{ij} 移过 $\overline{V}_{ij}$ 时，变为 $\overline{V}_{ji} = -\overline{V}_{ij}$, 而 $K_{ij}^2 = 1$, 于是有

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} [(p_i \overline{V}_{ij})K_{ij} - (\overline{V}_{ij})^2] + W, \tag{14.29}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq k} \overline{V}_{ij} \overline{V}_{jk} K_{ij} K_{jk}. \tag{14.30}$$

现在证明 (14.30) 式可以与 (14.21) 相联系，因而可将 W 项视为常数项. 事实上，(14.30) 可以写为对称形式. 步骤如下：将求和指

标 $i \to j,\ j \to k,\ k \to i$:

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq k \\ k \neq j}} \overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}K_{ij}K_{jk} \overset{i\to j, j\to k, k\to i}{=\!=\!=} \sum \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{jk}K_{ki}.$$

再将右端 $K_{ki} = K_{ik}$ 移过 K_{jk}, 则 K_{ik} 变为 K_{ij}, 故有

$$\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}K_{ij}K_{jk} = \sum \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{ij}K_{jk}.$$

再对上式作同样操作：将求和指标仍然换为 $i \to j, j \to k, k \to i$, 然后将最右端的 K_{ki} 移过次右端的 K_{jk}, 则有

$$\sum \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{ij}K_{jk} = \sum \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij}K_{jk}K_{ki} = \sum \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij}K_{ij}K_{jk}.$$

由于这三者相同，故有

$$W = \frac{1}{6} \sum_{\substack{i \neq j, i \neq k \\ j \neq k}}^{N} (\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk} + \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki} + \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij})p_{ij}p_{jk}. \tag{14.31}$$

与 (14.13) 一致，当选 (14.21) 时，得

$$W = -\frac{\lambda^2}{24} \sum_{\substack{i \neq j, i \neq k \\ j \neq k}}^{N} P_{ij}P_{jk} = (\text{常数})\ C. \tag{14.32}$$

于是，在 (14.20) 、 (14.21) 下得到哈密顿量：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{N} [(p_i\overline{V}_{ij})K_{ij} - (\overline{V}_{ij})^2] + C. \tag{14.33}$$

为以后方便，引入常数

$$\lambda = 2il. \tag{14.34}$$

对三种情况，得到哈密顿量分别为：

(i) $l=0$,

$$\overline{V}_{ij}=V_{ij}=\frac{i\alpha}{x_{ij}}=\frac{i\alpha}{x_i-x_j}, \tag{14.35}$$

其中 α 为任意参数. 此时 (14.33) 变为

$$h=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{\alpha(\alpha-K_{ij})}{(x_i-x_j)^2}+\text{const.} \tag{14.36}$$

常数项可以丢掉，将 K_{ij} 作用在对称 (反对称) 波函数上，则可换为 ±1, 即有哈密顿量：

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{\alpha(\alpha\mp1)}{(x_i-x_j)^2}. \tag{14.37}$$

(ii) 由 (14.24),$\overline{V}(x)=il\epsilon(x)$ 时, 由於 $\epsilon'(x)=\delta(x)$, 而 $(\overline{V}(x))^2=\frac{\lambda^2}{4}$ (除 $x=0$ 点外), 故有 (丢掉常数项):

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2+2c\sum_{i\neq j}^{N}\delta(x_i-x_j), \tag{14.38}$$

其中 $l=4c$, c 为任意常数. 当 $c>0$ 时，为排斥作用. (14.38) 表示具有 δ- 函数互作用势的一维多体问题的哈密顿量. 这种互作用在粒子碰撞时才产生，当 $c\to\infty$ 时，这个模型接近於费米子行为. 杨振宁教授就是在讨论 (14.38) 时提出了杨 - 巴克斯特方程，特别是 (14.38) 具有反对称性质的波函数的情况，它奠定了以后有关讨论的基础.

(iii) 由 (14.22), 取 $\overline{V}(x)=il\operatorname{cth}x$(或 $il\operatorname{ctg}x$), 由 (14.33) 丢掉常数项，有

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}P_i^2+\sum_{i\neq j}^{N}\frac{l(l\mp1)}{\sin^2(x_i-x_j)}. \tag{14.39}$$

上面已将 K_{ij} 换为 ± 1(本征值) 了. 或用 $\mathrm{sh}^2 x$ 表出:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} P_i^2 + \sum_{i\neq j}^{N} \frac{l(l\mp 1)}{\mathrm{sh}^2(x_i - x_j)}. \tag{14.40}$$

(14.39) 称为卡洛杰惹 – 萨则兰德 (Culogero-Sutherland) 模型 [35], 它比 (14.36) 具有明显的周期行为.

(14.36) 、 (14.39) 与 (14.40) 具有明显的长程互作用性质, 即不是邻近互作用, 相距很远的两点之间仍有互作用, 当然不同点作用的效果是不同的. 将 (14.38) 、(14.39) 形式的哈密顿量对角化, 是很重要的问题, 但限於篇幅和本书的目的, 我们不再赘述. 这方面的书刊与文章很多, 可参考有关文献.

以上介绍了卡洛杰惹 · 萨则兰德模型 (简记为 C–S 模型). 现在我们讨论它与 YBE 的关系 [36] . 首先针对一般情况引入生成元 I^{ab} $(a,b = 1,2,\cdots,n)$, 它对 a,b 是反对称的:

$$I^{ab} = -I^{ba},$$

并满足对易关系

$$[I_i^{ab}, I_j^{cd}] = \delta_{ij}(\delta_{bc} I_i^{ad} - \delta_{ad} I_i^{cb}), \tag{14.41}$$

其中 i 为格点指标, 不同格点的生成元间对易. (14.41) 是 $SL(2)$ 对易关系向 $SL(n)$ 的推广. 事实上, 当 $a,b,c,d = 1,2,3$ 时, 它就是通常角动量对易关系. 为了看出这点, 引入与 I^{ab} 对偶的算子

$$I^{ab} = \epsilon_{abf} I_f, \tag{14.42}$$

上式相重指标代表求和. 将 (14.42) 代入 (14.41), 注意 $\epsilon_{abf}\epsilon_{abg} = 2\delta_{fg}$, 则

$$4[I_p, I_q] = \epsilon_{acp}\epsilon_{cdq}\epsilon_{adf} I_f - \epsilon_{dbp}\epsilon_{cdq}\epsilon_{bcf} I_f.$$

再利用 $\epsilon_{cap}\epsilon_{cdq} = \delta_{ad}\delta_{pq} - \delta_{aq}\delta_{pd}$, 立即得到

$$[I_a, I_b] = 2\epsilon_{abc}I_c.$$

引入 $I_a = -2iS_a$, 则上式变为

$$[S_a, S_b] = i\epsilon_{abc}S_c.$$

它正是通常角动量的对易关系. 仿照以前作法，我们从 $R(u)$- 矩阵出发，

$$R(u) = u + \lambda P_{12}, \tag{14.43}$$

其中 12 表示 12 空间的置换. 这个置换算子用矩阵 E_{ab} 表达最为方便. E_{ab} 是个 $M \times M$ 矩阵，它的矩阵元为：

$$(Eab)\alpha\beta = \delta_{a\alpha}\delta_{b\beta}. \tag{14.44}$$

也就是说，矩阵 E_{ab} 的不为 0 的矩阵元仅在第 α 行第 β 列处，数值为 1, 用 E_{ab} 矩阵很容易将置换算子 P_{12} 表达出来，具体形式为

$$P = \sum_{a,b} E_{ba} \otimes E_{ab}, \tag{14.45}$$

其中，下标相重代表求和，事实上， P 的矩阵元为

$$P_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \sum_{a,b} (E_{ba} \otimes E_{ab})_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \tag{14.46}$$

上式右端依矩阵直积法则为

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \sum_{a,b} (E_{ba})_{\alpha\gamma}(E_{ab})_{\beta\delta} = \sum_{a,b} \delta_{ba}\delta_{a\gamma}\delta_{a\beta}\delta_{b\delta} \\ &= \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{14.47}$$

显然，当 $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ 时， (14.47) 给出 (1.7) 的形式.

由 (1.51) 将 RTT 关系写为

$$R(u-v)\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)=\overset{2}{T}(v)\overset{1}{T}(u)R(u-v), \tag{14.48}$$

其中 $\overset{1}{T}(u)=T(u)\otimes I$, $\overset{2}{T}(u)=I\otimes T(u)$. 将

$$R(u)=u+\lambda\sum_{a,b}E_{ab}\otimes E_{ba} \tag{14.49}$$

以及 $T(u)$ 的展开式 [37]

$$T(u)=I+\lambda\sum_{a,b}E_{ba}\sum_{n=0}^{\infty}T_{ab}^{(n)}u^{-(n+1)} \tag{14.50}$$

代入 (14.48) 中，可比较不同 u 幂次的关系，得到转移矩阵 $T(u)$ 的展开式的各阶对易关系. 由於辅助空间用 E_{ab} 矩阵展开才可能与形如 (14.49) 的 $R(u)$– 矩阵相配，在 (14.50) 中已将 $T(u)$ 用 E_{ba} 展开，并同时用谱参数的负幂次展开，诸 $T_{ab}^{(n)}$ 为算子. 将 (14.50) 代入 (14.48), 经过计算得到关系式

$$\sum_{a,b}\sum_{c,d}E_{ba}E_{dc}\sum_{n=0}^{\infty}\{u^{-n-1}f_1^{(n)}-v^{-n-1}f_2^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty}u^{-n-1}v^{-m-1}f_3^{(n,m)}\}=0. \tag{14.51}$$

其中

$$f_1^{(n)}=\delta_{bc}T_{ad}^{(n)}-\delta_{ad}T_{cb}^{(n)}-[T_{ab}^{(n)},T_{cd}^{(0)}], \tag{14.52}$$

$$f_2^{(n)}=\delta_{bc}T_{ad}^{(n)}-\delta_{ad}T_{cb}^{(n)}-[T_{ab}^{(0)},T_{cd}^{(n)}], \tag{14.53}$$

$$f_3^{(n,m)}=\lambda(T_{ad}^{(n)}T_{cb}^{(m)}-T_{ad}^{(m)}T_{cb}^{(n)} + [T_{ab}^{(n+1)},T_{cd}^{(m)}]-[T_{ab}^{(n)},T_{cd}^{(m+1)}]). \tag{14.54}$$

RTT 关系要求

$$f_1^{(n)} = f_2^{(n)} = f_3^{(n,m)} = 0. \tag{14.55}$$

易知，(14.52) 与 (14.53) 等价. 因此，我们要寻求满足 (14.52) 与 (14.54) 的 $T_{ab}^{(m)}$ 的算符表示.

首先观察 $f_3^{(n,0)} = 0$, 它导致

$$\delta_{bc}T_{ad}^{(n+1)} - \delta_{ad}T_{cb}^{(n+1)} = \lambda(T_{ad}^{(0)}T_{cb}^{(n)} - T_{ad}^{(n)}T_{cb}^{(0)}) + [T_{ab}^{(n)}, T_{cd}^{(1)}]. \tag{14.56}$$

它表明已知 $T_{ab}^{(0)}$ 和 $T_{ab}^{(n)}$, 便可迭代而得到 $T_{ab}^{(n+1)}$. 因此，最基本的是要找到 $T_{ab}^{(0)}$ 与 $T_{ab}^{(1)}$ 的形式. 为了解它们，必须先引入代数的基. 对不同格点 i 与 j, 引入量子算符基底 I_i^{ab}, 它们满足 (14.41) 所示关系.

我们要寻找的形式是 [36]:

$$T_{ab}^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} I_i^{ab}, \tag{14.57}$$

$$T_{ab}^{(1)} = \sum_{i-1}^{N} I_i^{ab} D_i, \tag{14.58}$$

其中 (14.57) 正就是通常李代数，也即相当于 Yangian 中的 $\{I_\lambda\}$. 而 (14.58) 就是 Yangian 中的 $\{J_\lambda\}$, 它的特点是引入一个未知的依赖于格点 i 的算子 D_i, 然后代入 RTT 关系决定出 D_i 应满足的代数关系. 换言之，将找出 D_i 满足何种关系时，$T^{(0)}$ 与 $T^{(1)}$ 必满足 Yangian 关系. 注意现在展开式 (14.50) 用 $u^{-(n+1)}$, 因而现在的 $T^{(0)}$ 正是第 2 章中的 $T^{(1)}$, 而现在的 $T^{(1)}$ 正是第 2 章中讨论的 $T^{(2)}$.

首先将 (14.57),(14.58) 与 (14.41) 代入 $f_1^{(1)}$, 得

$$\sum_i \sum_j I_i^{ab}[D^i, I_j^{cd}] = 0. \tag{14.59}$$

为了找到充分解，假定以下更严的条件：

$$\sum_i I_i^{ab}[D^i, I_j^{cd}] = 0. \qquad (\text{对任意 } j) \tag{14.60}$$

于是，$T_{ab}^{(2)}$ 满足

$$\delta_{bc}T_{ad}^{(2)} - \delta_{ad}T_{cb}^{(2)} = \sum_{i\neq j} I_i^{ab}I_j^{cd}\{\lambda\sum_{k,l} I_i^{kl}I_j^{lk}(D_j - D_i) + [D_i, D_j]\} + \sum_i(\delta_{bc}I_i^{ad}D_i^2 - \delta_{ad}I_i^{cb}D_i^2). \tag{14.61}$$

上式的充分解为

$$T_{ab}^{(2)} = \sum_i I_i^{ab}D_i^2, \tag{14.62}$$

其成立条件为

$$[D_i, D_j] = \lambda\sum_{a,b} I_j^{ab}I_i^{ba}(D_i - D_j). \tag{14.63}$$

引入算子

$$K_{ij} = \sum_{a,b} I_j^{ab}I_i^{ba}, \tag{14.64}$$

则有 [34],[35](因为 λ 是任意常数，为方便，将 $(-\lambda)$ 记为 λ)：

$$[D_i, D_j] = \lambda(D_i - D_j)K_{ij}. \tag{14.65}$$

上述结论仅对完全对称性波函数成立．我们不拟过多停留在这个地方，仅仅指出当 (14.65) 满足时，进一步计算表明 $f_3^{(n,m)} = 0$ 也被满足．

因此，对于对称波函数来说，(14.57) 与 (14.58) 引出了长程相互作用模型的 Yangian 的一种新的实现．更进一步的计算表明，系统的哈密顿量可以由 $T(u)$ 的量子行列式的 u^{-3} 展开式的系数

决定. 去掉常数项后, 正是由 (14.27) 决定. 而 D_i 与 $\overline{D}_i$ 关系则由 (14.26) 决定. 因为计算过于复杂, 不再详述.

我们的结论是, 类似 (14.36) 、 (14.39) 、 (14.40) 等形式的长程相互作用模型, 都可以由 RTT 关系得到. 其中的关键是新的算子 D_i 的出现, 它的对易关系式 (14.65) 由 RTT 决定. 其几何意义可以想象为 J_{ab} 由 I_i^{ab} 在不同格点的希尔伯特空间的线性组合决定. 对给定李代数, D_i 的实现不但决定了 Yangian, 而同时决定了哈密顿量的构成. 由于哈密顿量来自 $T(u)$ 的量子行列式 $\widetilde{\det}T(u)$, 它必定与 $T_{ab}^{(n)}$ 对易, 因此, 这类模型必具有 Yangian 对称性. 这些讨论可参阅文献 [28],[29],[36].

最后要指出, 某些时间为一维、坐标为二维的可积模型可以分解为两个独立的 C–S 模型 [38],[39]. 例如文献 [38],[39] 所作的讨论, 就是这种情况. 由以上分析, 可以看到, 这种可分解的 $(2+1)$ 维模型必具有 Yangian 对称性.

第 4 章

量子代数的物理意义

在第 2 章中，对有理形式的 $R(u)$- 矩阵及其导致的 Yangian 代数，简单三角 $R(u)$- 矩阵及其导致的量子代数 (8.15) 分别作了介绍. 第 3 章则主要介绍了 Yangian. 本章集中讨论简单的量子代数，目的不在于数学结构，而在于了解它的简单而深刻的物理含义. 为了了解 (8.15) 的本质，关键在于了解这种 q- 变形是如何由物理引起的. 为了说明这点，我们先考虑一个例子. 有关量子代数的书很多，可参阅 [40]~[46] 、 [21], 我们只限于介绍物理实质.

§15 相干态平移算子与量子代数

在通常量子力学中有动量算子 $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$, 它与坐标满足海森堡对易关系. 现在考虑二维情况. 设电子在二维平面运动，常数磁场垂直于该平面，则该平面的力学动量为 $\boldsymbol{\pi}$: ($c = \hbar = 1$, 电子电荷为 $-e$)

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A}, \tag{15.1}$$

其中 $\boldsymbol{P} = (-i\partial_x, -i\partial_y)$, $\boldsymbol{A} = (A_x(x,y), A_y(x,y))$ 且

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x = B_0. \tag{15.2}$$

引入

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_x \pm i\pi_y), \tag{15.3}$$

则易知

$$[\pi^-, \pi^+] = eB_0. \tag{15.4}$$

引入玻色算符

$$b^+ = \frac{\pi^+}{(eB_0)^{1/2}}, \quad b = \frac{\pi^-}{(eB_0)^{1/2}}, \tag{15.5}$$

则有

$$[b, b^+] = 1. \tag{15.6}$$

从量子力学教科书 (例如 [47] 、 [48]) 中知道，可引入平移算子，它是么正的：

$$U(\alpha) = \exp(\alpha\pi^+ - \alpha^*\pi^-), \tag{15.7}$$

其中 α 为复数， α^* 为其复共轭. 因为 $\pi^- \sim b$, 而 $b|0\rangle = 0$, 其中 $|0\rangle$ 为真空态，所以 $\exp(\alpha\pi^+)|0\rangle = U(\alpha)|0\rangle$. 定义

$$U(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle, \tag{15.8}$$

则对应于相干态. 一个重要性质是计算 $U(\alpha)U(\beta)$ 与 $U(\beta)U(\alpha)$ 的差别. 注意公式： (当 $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ 时)

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{15.9}$$

现在由于 (15.4), 所以当 A, B 分别为 $(\alpha\pi^+ - \alpha^*\pi^-)$ 与 $(\beta\pi^+ - \beta^*\pi^-)$ 时，很容易算出 [47],[48].

$$\frac{1}{2}[(\alpha\pi^+ - \alpha^*\pi^-), (\beta\pi^+ - \beta^*\partial_i^-)] = -ieB_0(\mathrm{Re}\,\alpha \cdot \mathrm{Im}\,\beta - \mathrm{Im}\alpha \cdot \mathrm{Re}\beta).$$

因为矢量 $\boldsymbol{\alpha} = (\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Im}\alpha)$, $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{Re}\beta, \mathrm{Im}\beta)$, 故圆括号内相当于由矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所夹成的平行四边形的面积 S, 而 B_0S 为磁通量，电

荷与基本磁通量 ϕ_0 有关系： $e=2\pi/\phi_0$, 故有以 $2\pi/\phi_0$ 为单位的磁通 Φ 表示的相因子出现：

$$U(\alpha)U(\beta)=q^2U(\beta)U(\alpha), \tag{15.10}$$

$$q=e^{-i\Phi(\alpha,\beta)}. \tag{15.11}$$

它的意义是明显的：由于存于穿过平而的磁通量，它使得该平面挖了一个洞，成为多连通区. 不同的平移自然效果不同，达到同一点时，相差一个相因子，它当然与磁通量 Φ 有关. 注意在 Φ 可以取任意磁通量值时，(15.10) 没有什么新意，它只不过是 (15.4) 式的指数形式. 但当磁通量量子化时，即

$$q^N=1, \tag{15.12}$$

q 为单位根时，(15.7) 有独立的意义，这时 $U(\alpha)$ 不由许多无穷小移动形成，因而一般再无法定义无穷小算子. 也就是说 $U(\alpha)$ 与 $\pi^{\pm}$ 不再是简单的李群与李代数的关系，$U(\alpha)$ 有独立的意义.

由于平移算子满足 [49]

$$\begin{aligned} &U(-\alpha)=(U(\alpha))^{-1}, \\ &U(-\alpha)U(\alpha)=U(\alpha)U(-\alpha)=1, \end{aligned} \tag{15.13}$$

现在引入算符：

$$\begin{aligned} &X^+=(q-q^{-1})^{-1}(U(-\alpha)+U(-\beta)), \\ &X^-=-(q-q^{-1})^{-1}(U(\alpha)+U(\beta)), \\ &q^{-1}K^2=U(-\alpha)U(\beta),\ \ qK^{-2}=U(-\beta)U(\alpha), \end{aligned} \tag{15.14}$$

利用 (15,10), 很容易证明：

$$[X^+,X^-]=\frac{K^2-K^{-2}}{q-q^{-1}},\quad KX^{\pm}K^{-1}=q^{\pm}X^{\pm}, \tag{15.15}$$

亦即正是 (8,15). 也就是说，相干态平移算子的线性组合 (特定形式) 及一定的乘积组合形成量子代数，所谓 q 变形，就是置入外磁场后，平移算子的整体行为受到影响. 当磁通量为量子化时，q 为单位根. 导致 (15,10) 形式的 $U(\alpha)$ 不是唯一的，(15.7) 仅仅是一种可能性.

在平面上定义

$$t(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{a}), \tag{15.16}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为平移参数，

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} + e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\pi} + e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}, \tag{15.17}$$

$$\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_3 = \nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{15.18}$$

$\boldsymbol{\Pi}$ 称为磁平移算子 [50]. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的特殊性，仍有

$$t(\boldsymbol{a})t(\boldsymbol{b}) = \exp(-i\Phi)t(\boldsymbol{b})t(\boldsymbol{a}). \tag{15.19}$$

因此通过将 U 换为 t，并重新定义 q，同样可以用磁平移算子来实现量子代数. 用磁平移算子实现量子代数的好处是可以计算它与某些哈密顿量的对易关系. 例如朗道能级的哈密顿为

$$H_L = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2 = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2 = \frac{1}{2m}(\pi_1^2+\pi_2^2). \tag{15.20}$$

现在计算 $[H_L,\boldsymbol{\Pi}]$，例如 $[H_L,\Pi_1]$. 由于

$$\Pi_1 = \pi_1 + eB_0y, \qquad \Pi_2 = \pi_2 - eB_0x, \tag{15.21}$$

且 π_1 与 π_1 对易，故只要计算 $[\pi_2,\Pi_1]$. 由于

$$[\pi_2,\Pi_1] = [\pi_2,\pi_1] + eB_0[\pi_2,y] = ieB_0 - ieB_0 = 0,$$

可知 $[H_2,\Pi_1]=0$. 对第二个分量也有相同结果，故有

$$[H_L,\boldsymbol{\Pi}] = 0. \tag{15.22}$$

因此必有 $[H_L, U(\boldsymbol{a})] = 0$ 其中 $U(\boldsymbol{a})$ 由 (15.16) 给出. 所以有一个有意思的结论 [51]:

$$[H_L, X^{\pm}] = [H_L, K] = 0. \tag{15.23}$$

也就是说, 朗道能级的哈密顿量具有量子代数 (记为 $U_q(SL(2))$) 对称性. 其实这个事实在凝聚态理论中早已熟知: H_L 与磁平移算子对易. 我们现在多一点结论, 就是, 通过 (15.14) 可以论断, 这种对易的更有效的描述是 H_L 具有量子代数的对称性. 这当然是在磁场存在时诱导出的一种新型简并度. 尤其是当磁通量量子化时, 这种量子代数允许存在一种有限维循环表示, 此时这种新简并度便等于这种表示的维数.

最后要指出两点. 由 (15.14), 平移算子可以组成量子代数的生成元 $X^{\pm}, K$, 但反之不行. 原因是海森堡 - 外尔代数一般说比量子代数更基本. 另一点是 q 为单位根时, 我们不能简单用指数形式 $U(\alpha)$ 对 α 微商在原点的值定义代数生成元. 这是与李群 - 李代数关系非常不同的一点.

§16 霍夫斯塔特模型与量子代数

在 xy 平面格子内运动的布洛赫电子, 当磁场垂直于该平面时, 其哈密顿量为 [49]:

$$H_w = \sum_{\langle n,m \rangle} e^{iA_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}} C_{\boldsymbol{n}}^{+} C_{\boldsymbol{m}}. \tag{16.1}$$

其中 $\langle n, m \rangle$ 表示近邻相互作用, $C_{\boldsymbol{n}}^{+}$ 与 $C_{\boldsymbol{m}}$ 为相应格子上费米子产生与消灭算符. 为简化上式, 已令巡游 (hopping) 振幅 $t_{n,m} = 1$. $A_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}$ 为规范势, 实际是小格子上穿出的磁通量, 将所有格子全算

在内，则有

$$\Pi_{\text{格子}} \exp(iA_{n,m}) = \exp(i\Phi). \tag{16.2}$$

设磁场 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_3$, B_0 为常数， $A_{n,m} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot(n\times m)$, Φ 为磁通量. 以上有关 (16.1) 的物理性质等，可参阅 [51]. 引入态：

$$|j\rangle = C_j^+|0\rangle, \tag{16.3}$$

定义平移算子：

$$T_\mu(j) = \exp(iA_{j,j+\mu})|j\rangle\langle j+\mu|, \tag{16.4}$$

$$T_\mu = \sum_j T_\mu(j) = \sum_j \exp(iA_{j,j+\mu})|j\rangle\langle j+\mu|. \tag{16.5}$$

上式表明，从 j 向 $j+\mu$ 的巡游过程，伴以相应格子穿透的磁通量的变化. 现在计算连续两个平移算子的作用：（将 μ 换为 n 或 m）

$$\begin{aligned} T_nT_m = &\sum_{j,k} \exp(i(A_{j,j+n} + A_{k,k+m}) \\ &\cdot |j\rangle\langle j+n|k\rangle\langle k+m|. \end{aligned} \tag{16.6}$$

由于态矢正交归一，有

$$\langle j+n|k\rangle = \delta_{k,j+n},$$

得

$$\begin{aligned} T_nT_m &= \sum_j \exp(i(A_{j,j+n} + A_{j+n,j+m+n}))|j\rangle\langle j+m+n|, \\ T_nT_m &= \sum_j \exp(i(A_{j,j+m} + A_{j+m,j+m+n}))|j\rangle\langle j+m+n|. \end{aligned} \tag{16.7}$$

$A_{j,j+m}$ 表示由 j 与 $j+m$ 两个矢量夹成的面积乘以 B_0. 因而,

$$\begin{aligned} T_n T_m &= \sum_j \exp\Big(i\frac{B_0}{2}e_3\cdot\{j\times n + n\times j + n\times m \\ &\quad + j\times(n+m)\}\Big)\cdot|j\rangle\langle j+m+n| \\ &= \exp\Big(\frac{i}{2}B_0 e_3\cdot(n\times m)\Big)\sum_j \exp\Big(\frac{i}{2}B_0 e_3\cdot\{j\times(n+m)\}\Big) \\ &\quad \cdot|j\rangle\langle j+(m+n)| \\ &= \exp\Big(\frac{i}{2}B_0 e_3\cdot(n\times m)\Big)T_{n+m}. \end{aligned} \tag{16.8}$$

或

$$T_n T_m = \exp\Big(\frac{i}{2}\Phi\Big)T_{m+n}, \qquad T_m T_n = \exp\Big(-\frac{i}{2}\Phi\Big)T_{m+n}. \tag{16.9}$$

选 n 沿 x 方向, m 沿 y 方向, 并组成周期性格子, 此时 q 为常数, 则得

$$T_x T_y = q^2 T_y T_x, \quad q = \exp\Big(\frac{i}{2}\Phi\Big). \tag{16.10}$$

也就是说, T_x 与 T_y 组成了平移算子对易关系. 将哈密顿量用 T_x, T_y 表示出来 (x, y 分别表示沿 x 与 y 轴的位移):

$$\begin{aligned} H &= (-i)\sum_{\mu=\pm x,\pm y}\sum_j \exp(iA_{j,j+\mu})|j\rangle\langle j+\mu| \\ &= T_x + T_{-x} + T_y + T_{-y}. \end{aligned} \tag{16.11}$$

这种将哈密顿量用平移算子表出, 并进而用量子代数生成元写出的形式是首先在文献 [49] 中提出的. 由于 (16.11) 右端正好是 $T_{\pm x}$

与 $T_{\pm y}$ 的相加形式，仿照以上作法，可定义

$$\begin{aligned} &T_{-x}+T_{-y}=(q-q^{-1})X^{+},\\ &T_{x}+T_{y}=-(q-q^{-1})X^{-},\\ &T_{-x}T_{y}=q^{2}K^{-2},\quad T_{-y}T_{x}=q^{-2}K^{2}. \end{aligned} \tag{16.12}$$

则 $X^{\pm}$ 与 $K^{\pm 1}$ 满足简单的量子代数关系 (15.15). 这个模型之有兴趣的地方除了它是最简单的模型外，是它可以用量子代数的生成元表示出来[50]:

$$H=i(q-q^{-1})(X^{-}-X^{+}), \tag{16.13}$$

并引起以后一系列的研究工作.

从这节的例子可以看到，各种平移算子的物理实现本质上就是简单的量子代数的物理实现. 当然，这种实现还是停留在量子力学的物理内容，它们多数已在凝聚态理论中早有讨论. 不过现在新的知识是，它们原来都是量子群的实现. 显然这种实现不是唯一的. 我们在 § 17 将举出另一种实现. 此外，上面的讨论尚可以进一步发展，这里不再赘述.

§ 17 位相量子化与量子代数玻色表示

在通常量子力学的量子化过程中，常常把泊松括号换成 $\frac{1}{i\hbar}[\,,\,]$，这个对应关系在许多问题中是正确的. 但是在讨论位相量子化时，却发生了问题. 在力学中，当作正则变换后，可积系统会有作用变量 J 与角变量 ϕ，它们的泊松括号 $\{J,\phi\}=1$，在进行量子化时 J 为粒子数 $\widehat{N}$，而 $\phi\to\widehat{\phi}$ 为位相. 但在某个粒子数态 $|n\rangle$ 的平均值中，$\langle n|[\widehat{N},\widehat{\phi}]|n\rangle=0$. 两者显然不存在对应关系. 为解决这个问题，曾有过许多理论，有代表性的是萨斯坎德－格劳果尔 (Susskind–Glogower, 简称 S–G)[52] 与皮格－巴涅特 (Pegg-Barnett)[53](P–B)

理论. 简单说, S-G 理论定义了不满足么正关系的指数算符, 但保持了玻色粒子个数为任意这一物理要求. 而 P-B 理论则保证了么正性质, 但限制了玻色子填充个数有最大值, 因而不是真实玻色子. 我们要指出, P-B 理论就是量子代数的当 $q^P = 1$ 时的循环表示. 首先, 将相位本征态 $|\phi_m\rangle$ 用粒子数态展开, 并假定其填充数有最高限制 S:

$$|\phi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{S} e^{in\phi_m} |n\rangle, \tag{17.1}$$

其中为了正交、归一, 选

$$\phi_m = \phi_0 + \frac{2m\pi}{S+1}, \tag{17.2}$$

ϕ_0 为任意实常数, m = 整数. 易知

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | \Phi_m \rangle &= (S+1)^{-1} \sum_{l,k=0}^{S} e^{i(l\phi_m - k\phi_n)} \langle l|k\rangle \\ &= (S+1)^{-1} \sum_{k=0}^{S} e^{ik(\phi_m - \phi_n)} = (S+1)^{-1} \sum_{k=0}^{S} q^{k(m-n)},\end{aligned}$$

其中

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{S+1}\right), \quad q^P = 1, \quad P = S+1. \tag{17.3}$$

由于 $\sum_{n=0}^{S} q^n = 0$, 易知

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{mn}, \tag{17.4}$$

因而

$$|n\rangle = (S+1)^{-1/2} \sum_{m=0}^{S} e^{-in\phi_m} |\phi_m\rangle. \tag{17.5}$$

位相算符为

$$\widehat{\phi}=\sum_{m=0}^{S}\phi_m|\phi_m\rangle\langle\phi_m|. \tag{17.6}$$

即 $|\phi_m\rangle$ 为 $\widehat{\phi}$ 的本征态. 将 $e^{i\widehat{\phi}}$ 作用在 $|n\rangle$ 上，有

$$\begin{aligned}e^{i\widehat{\phi}}|n\rangle =&(S+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{S}e^{-in\phi_m}e^{i\widehat{\phi}}|\phi_m\rangle\\ =&(S+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{S}e^{-i(n-1)\phi_m}|\phi_m\rangle.\end{aligned}$$

与 (17.5) 相比较，得

$$e^{i\widehat{\phi}}|n\rangle=|n-1\rangle.\ \ (n\geqslant 1) \tag{17.7}$$

但如果 $e^{i\widehat{\phi}}$ 作用在真空态 $|0\rangle$ 上，却有不同结果：

$$\begin{aligned}\exp(i\widehat{\phi})|0\rangle&=(S+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{S}\exp(i\widehat{\phi})|\phi_m\rangle\\ &=(S+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{S}e^{i(S+1)\phi_0}e^{-iS\phi_m}|\phi_m\rangle.\end{aligned}$$

另一方面，

$$|S\rangle=(S+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{S}e^{-iS\phi_m}|\phi_m\rangle.$$

故导出

$$\exp(i\widehat{\phi})|0\rangle=\exp\{i(S+1)\phi_0\}|S\rangle. \tag{17.8}$$

同理可证：

$$\exp(i\widehat{\phi})|S\rangle=\exp\{-i(S+1)\phi_0\}|0\rangle. \tag{17.9}$$

列出所有关系式，为

$$\exp(i\widehat{\phi})|n\rangle = |n-1\rangle, \quad (n \neq 0)$$
$$\exp(i\widehat{\phi})|0\rangle = \exp\{i(S+1)\phi_0\}|S\rangle,$$
$$\exp(-i\widehat{\phi})|n\rangle = |n+1\rangle, \quad (n \neq S) \tag{17.10}$$
$$\exp(i\widehat{\phi})|S\rangle = \exp\{-i(S+1)\phi_0\}|0\rangle,$$
$$\exp(i\widehat{\phi})\exp(-i\widehat{\phi}) = \exp(-i\widehat{\phi})\exp(i\widehat{\phi}) = 1. \tag{17.11}$$

需要强调，这里 (17.11) 不是显然的，它是以存在 S 这个粒子数最高值为代价的. 另一点是我们要求粒子数 $n \geqslant 0$ 才导致以上结果. 如果在 (17.1) 中的展开式中对 n 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和，那么什么也不会发生，即没什么困难，但代价是要解释 n 的负值. 一些文献便将负电荷的负号搬到 n 为负值上来，作成了等效理论. (17.10) 用图表示如下：

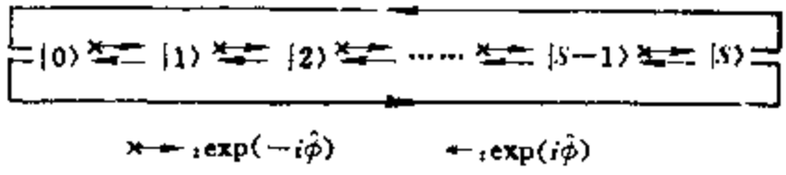


图 17–1

从图 17–1 看出，将 $e^{i\widehat{\phi}}$ 不断作用，形成了一种循环行为. 它完全不同于周期边值条件，而且在最高态 $|s\rangle$ 上如再作用以 $e^{i\widehat{\phi}}$，则回到最低态，反之亦然. 以上介绍的基本上是 P-B 理论的内容. 现在我们用另一种语言描述它，并将会看到，P–B 理论正就是量子代数的一种实现.

定义算子 [54]：

$$q^{\widehat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}|n\rangle, \qquad (P = s+1) \tag{17.12}$$

η 为任意复数，亦可为 0. 即有

$$e^{i\widehat{\phi}}q^{\widehat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}e^{i\widehat{\phi}}|n = \begin{cases} q^{\eta}e^{iP\phi_0}|S\rangle, & \text{当 } n=0 \text{ 时;} \\ q^{n+\eta}|n-1\rangle, & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时,} \end{cases} \tag{17.13}$$

$$q^N e^{i\widehat{\phi}}|n\rangle = \begin{cases} q^{\eta} e^{iP\phi_0} q^{-1}|s\rangle, & \text{当 } n=0 \text{ 时;} \\ q^{n+\eta} q^{-1}|n-1\rangle, & \text{当 } n\neq 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{17.14}$$

将两者比较，有

$$e^{i\widehat{\phi}} q^{\widehat{N}} = q q^{\widehat{N}} e^{i\widehat{\phi}}. \tag{17.15}$$

还可以独立证明

$$q^{\widehat{N}} e^{-i\widehat{\phi}} = q e^{-i\widehat{\phi}} q^{\widehat{N}}. \tag{17.16}$$

由 (17.15) 与 (17.16) 即可导致 $e^{-i\widehat{\phi}} e^{i\widehat{\phi}} = e^{i\widehat{\phi}} e^{-i\widehat{\phi}} = 1$ 这个不显然的关系，且它们与 (17.11) 自恰，即保证了 $e^{i\widehat{\phi}}$ 的么正性. 由于算符可分解为“模”与“位相”，可定义算符：

$$a^+ = [\widehat{N}]^{1/2} e^{-i\widehat{\phi}}, \quad a = e^{i\widehat{\phi}} [\widehat{N}]^{1/2}, \tag{17.17}$$

其中

$$[\widehat{N}] = \frac{q^{\widehat{N}} - q^{-\widehat{N}}}{q - q^{-1}}; \tag{17.18}$$

或

$$e^{i\widehat{\phi}} = a[\widehat{N}]^{-1/2}, \quad e^{-i\widehat{\phi}} = [\widehat{N}]^{-1/2} a^+. \tag{17.19}$$

易由 (17.19) 与 (17.16) 得知

$$a^+ a = [\widehat{N}], \qquad a a^+ = [\widehat{N}+1]. \tag{17.20}$$

直接计算，得

$$\begin{aligned} a a^+ - q a^+ a &= [\widehat{N}+1] - q[\widehat{N}] \\ &= \frac{q^{\widehat{N}+1} - q^{-\widehat{N}-1}}{q - q^{-1}} - q\frac{q^{\widehat{N}} - q^{-\widehat{N}}}{q - q^{-1}} = \frac{q^{-\widehat{N}+1} - q^{-\widehat{N}-1}}{q - q^{-1}} = q^{-\widehat{N}}. \end{aligned}$$

即

$$a a^+ - q a^+ a = q^{-\widehat{N}}, \quad a a^+ - q^{-1} a^+ a = q^{\widehat{N}}. \tag{17.21}$$

利用 (17.19) 、 (17.10) 、 (17.11), 得

$$
\begin{aligned}
&a|n\rangle = ([n+\eta])^{1/2}|n-1\rangle, \quad (n \neq 0)\\
&1|0\rangle = [\eta]^{1/2} e^{i(s+1)\phi_0}|S\rangle;\\
&a^+|n\rangle = ([n+\eta+1])^{1/2}|n+1\rangle, \quad (n \neq S)\\
&a^+|S\rangle = ([\eta])^{1/2} e^{-i(S+1)\phi_0}|0\rangle;\\
&q^{\widehat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}|n\rangle,\ q = \exp(2\pi i P),\ P \neq S+1
\end{aligned}
\tag{17.22}
$$

与图 17 1 一样, 现在算子 a^+ 与 a 满足 q- 变形的玻色对易关系 (17.15) 、 (17.16) 与 (17.21) , 它们作用在态上为循环行为. 要注意的是, a 与 a^+ 的对易关系为 q- 变形的, 且 $\widehat{N}$ 本征值为

$$
[\widehat{N}]|n\rangle = [n]|n\rangle = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}|n\rangle,
$$

但态 $|n\rangle$ 仍是通常的粒子的态矢量.

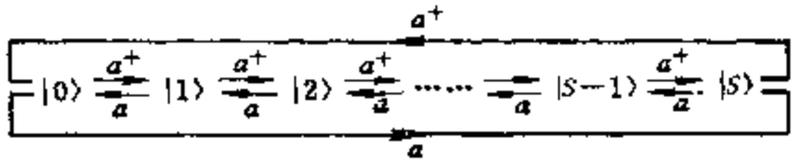


图 17-2

亦即由于 $q^P = 1$, 现在 P-B 理论实际定义了 q- 变形玻色算符, 它们与态 $|n\rangle$ 形成了循环表示, 态的个数为 $p = s+1$ 个.

形如 (17.21) 的 q- 变形玻色表示实际上是量子代数的一种实现. 这个问题曾由三组人不约而同提出 [53],[57], 我国青年学者作出了很好的贡献 [57]. 实际上, 假设有两种变形的玻色子, 它们彼此对易, 自己遵从 (12.21) 的对易关系:

$$
\begin{aligned}
&a_i a_i^+ - q a_i^+ a_i = q^{-\widehat{N}_i},\\
&a_i a_i^+ - q^{-1} a_i^+ a_i = q^{\widehat{N}_i},
\end{aligned}
\qquad (i = 1, 2) \tag{17.23}
$$

则由 $a_1^{\pm}, a_2^{\pm}(a_i^- \equiv a_i)$ 可以与通常玻色子组成自旋类似地组成 q-

变形的 $SL(2)$ 算子，即

$$\begin{aligned} &X^+ = a_1^+ a_2, \quad Z^- = a_2^+ a_1, \quad J_3 = \frac{1}{2}(\widehat{N}_1 - \widehat{N}_2), \\ &[a_1^\pm, a_2^\pm] = 0, \quad K = q^{J_3}. \end{aligned} \tag{17.24}$$

其中 N_i 为粒子数本征态 $|N_i\rangle$ 的本征值. 计算 X^+ 与 X^- 的对易关系，为 (应用 (17.21), 它对 1 与 2 下指标均成立):

$$\begin{aligned} [X^+, X^-] &= a_1^+ a_2 a_2^+ a_1 - a_2^+ a_1 a_1^+ a_2 \\ &= a_1^+ a_1 (q a_2^+ a_2 + q^{-\widehat{N}_2}) - a_2^+ a_2 (q a_1^+ a_1 + q^{-\widehat{N}_1}) \\ &= [\widehat{N}_1] q^{-\widehat{N}_2} - [\widehat{N}_2] q^{-\widehat{N}_1} \\ &= \frac{\left\{ (q^{\widehat{N}_1} - q^{-\widehat{N}_1}) q^{-\widehat{N}_2} - (q^{-\widehat{N}_2} - q^{\widehat{N}_2}) q^{-\widehat{N}_1} \right\}}{(q - q^{-1})} \\ &= \frac{\left\{ q^{(\widehat{N}_1 - \widehat{N}_2)} - q^{-(\widehat{N}_1 - \widehat{N}_2)} \right\}}{(q - q^{-1})} \\ &= \frac{q^{2J_3} - q^{-2J_3}}{q - q^{-1}} = \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

注意以前已经定义过的 $k = q^{J_3}$, 上式中 $\widehat{N}_i$ 为通常玻色粒子数算子. 上式正是量子代数 $U_q(SL(2))$ 的对易关系式 (连同 $X^\pm$ 与 K 的交换关系). 于是我们看到， P–B 理论涉及的是其中一类 q– 变形玻色子的循环表示. 事实上，从物理角度来说，原来量子代数的引入是与形如 (7.16) 的 XXZ 模型相联系的. 在那里 q– 变形 (由 $\mathrm{ch}\gamma$ 引起， $q_* = e^\gamma$) 是由 $S_i^3 S_{i+1}^3$ 的势引起的，而在平移算子的例子里 q 是由外磁场 B_0 的引入而引起的，现在这个例子则是由相因子的本征值带有循环性质而引起的. 无论那种情况，都是由于相互作用. 尤其这种相互作用带有某种非线性性质时更是如此. 从这个意义上说，所谓量子代数实际上是说，如果没有相互作用时已存在某种对称性，有了相互作用后，对一类模型仍存在推广的这种

对称性. 而构成这种对称性的方式相当简单: 只须把原来对称性作 q- 变形, 其中 q 体现了这种相互作用的某种效应. 从这种理解出发, 我们甚至不一定限于量子代数自身, 而只从玻色表示出发, 有时会更有效地处理具体问题. 从数学上说, 用玻色表示可以把量子代数系统描述一遍, 而且更直观、方便、有效 [54]~[57].

针对相位量子化, 如本节开头所述, S-G 理论是真实玻色子, P-B 理论并非真实玻色子. 那么在 P-B 理论中令 $S \to \infty$ 时, 是否就变为真实玻色子描述了呢? K. Fujikawa 讨论了这一问题 [58], 发现即使在 P B 理论中令 $S \to \infty$, 它的拓扑性质也与 S-G 理论大不相同, 亦即是本质上极为不同的理论 (数学上用 dim ker 区分). 这就提出一个很本质的问题: 在通常场论中, 我们常常要先固定一个量 Λ(例如积分上限), 然后 $\Lambda \to \infty$, 要问的是: 这种取极限方式与直接取 $\Lambda = \infty$ 是技术上的差别还是本质差别呢? 这就涉及正规化的问题. 这个例子告诉我们, 循环表示的物理本性即使在 $S \to \infty$ 时也大大不同于不循环的 $S \to \infty$ 理论. 它们在拓扑结构上有本质的不同. 如何发展这个概念, 尤其是类比于量子场论中的作法, 是个比较难但有意义的课题.

最后, 上述量子代数循环表示的方案可以用以处理 § 16 问题, 亦可处理整数量子霍尔效应存在弱势的问题, 可参阅 [51], 也许, 新型对称性的应用可以帮助解决更多的问题.

在结束本节时, 要指出本节讨论的位相量子化方案仅仅是众多理论中的一个. 当前有关位相量子化的观点很不一致, 甚至相反, 还需要更深入的讨论, 才可能达到正确的了解.

§ 18 RTT 关系与量子代数

在 § 15 中我们讨论了用 (15.10) 类型的关系式建立量子代数

的例子. 现在问一个问题：这种作法是偶然的，还是有它深刻的理论基础的？本节将回答这个问题. 答案是：(15.10) 类型的关系是 RTT 关系最简单的解，其中 $R(u)$- 矩阵由 (8.10) 给出. 显然，这种 RTT 关系是三角解 $R(u)$- 矩阵的形式. 我们也借这个例子说明解三角形式 RTT 关系的一般步骤. 再强调一下，本书不在于追求数学的严格与完整，旨在建立从物理角度理解杨 - 巴克斯特系统的基本概念. 因此，我们将用尽量直观的方式求解问题.

取 $R(u)$- 矩阵为 6 顶角简单形式 (8.10)，即 (8.11). 我们要求解 RTT 关系 (1.26)，或用 x 代替谱参数 u，$x = e^{iu}$ 的 RTT 关系 ($y = e^{iv}$)：

$$\check{R}(xy^{-1})(L(x) \otimes L(y)) = (L(y) \otimes L(x)\check{R}(xy^{-1}). \tag{18.1}$$

由 (8.19) 可知，$\check{R}(x)$ 可写为

$$\check{R}(x) = x\check{R}_+ + x^{-1}\check{R}_-. \tag{18.2}$$

其中

$$\check{R}_+ = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad \check{R}_- = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \tag{18.3}$$

$$(W = q - q^{-1}), \quad S \equiv \check{R}_+.$$

现在寻求 $L(x)$ 的一种最简单的形式的解：

$$L(x) = xL_+ + x^{-1}L_-. \tag{18.4}$$

注意这种形式是充分的，但不必要，这对我们的讨论已足够了. 将 (18.3)、(18.4) 代入 (18.1)，并比较 x 与 y 的各阶幂次，并注意

$\check{R}_+\check{R}_- = I$, $\check{R}_+ - \check{R}_- \approx I$, 得到下列独立关系 [59]:

$$S(L_\pm \otimes L_\pm) = (L_\pm \otimes L_\pm)S. \tag{18.5}$$

$$S(L_+ \otimes L_-) = (L_- \otimes L_+)S. \tag{18.6}$$

这样,我们就不必关心谱参数依赖关系,而只须解矩阵方程 (18.5)、(18.6) 即可, 这大大地简化了计算. 这种已知 S 求解 $L_\pm$ 矩阵元间对易关系的方案, 是由法捷也夫 - 列什希罕 - 塔克塔金 (Faddeev-Reshetikhin-Tathtajan) 首先提出的 [59], 以后称为 F-R-T 方案. 将 (18.5)、(18.6) 写成分量形式; 例如对任意 2×2 矩阵, 有

$$S_{ij,mn}B_{mk}A_{nl} = A_{im}B_{jn}S_{mn,kl}, \tag{18.7}$$

其中相同指标代表求和, $i,j,m,n,k,l = 1,2$. 将 S 中不同的元素代入则决定了相应的关系, 其中 B,A 可取 L_+, L_-. 例如取 $m=n=k=l=1$ 或 2 时, 因为 $S_{22,22}=q$, $S_{11,11}=q$, 则得 ($1=+, 2=-$):

$$[(L_\sigma)_{ii}, (L_{\sigma'})_{jj}] = 0. \qquad (\sigma,\sigma' = \pm,\ i,j = 1,2, \text{不求和})$$

照这样做下去, 例如:

$$S_{11,mn}(L_\pm)_{mk}(L_\pm)_{nl} = (L_\pm)_{1m}(L_\pm)_{1n}S_{mn,kl}$$

变为

$$(L_\pm)_{11}(L_\pm)_{1n}S_{1n,kl} + (L_\pm)_{12}(L_\pm)_{1n}S_{2n,kl} = q(L_\pm)_{1k}(L_\pm)_{1l}.$$

当 $k=l=1$ 时, 得

$$(L_\pm)_{11}(L_\pm)_{11}q = q(L_\pm)_{11}(L_\pm)_{11},$$

$k=1$, $l=2$ 时:

$$(L_\pm)_{11}(L_\pm)_{11} = q(L_\pm)_{11}(L_\pm)_{12},$$

等等一系列关系式. 因为在 RTT 关系中出现了 $L^{\sigma}_{12}L^{\sigma}_{21}=0\,(\sigma=\pm)$, 故要求 L_+ 与 L_- 具有以下形式:

$$L_+=\begin{pmatrix} L^+_{11} & L^+_{12}\\ 0 & L^+_{22}\end{pmatrix},\quad L_-=\begin{pmatrix} L^-_{11} & 0\\ L^-_{21} & L^-_{22}\end{pmatrix}. \tag{18.8}$$

将这个形式直接代入 (18.5) 与 (18.6) 中, 并直接计算, 则由 R-F-T 得到 (相重不求和)

$$\begin{aligned}
&[L^{\sigma}_{ii},L^{\sigma}_{jj}]=0,\quad (i,j=1,2,\ \sigma=\pm)\\
&L^{\sigma}_{ii}L^{+}_{12}=q^{\sigma\epsilon(i)}L^{+}_{12}L^{\sigma}_{ii},\\
&L^{\sigma}_{ii}L^{-}_{21}=q^{-\sigma\epsilon(i)}L^{-}_{21}L^{\sigma}_{ii},\\
&[L^{+}_{12},L^{-}_{21}]=(q-q^{-1})(L^{-}_{22}L^{+}_{11}-L^{+}_{22}L^{-}_{11}),\\
&\epsilon(1)=-1,\quad \epsilon(2)=+1.
\end{aligned} \tag{18.9}$$

上式表明 $L^{\pm}$ 中的对角元互相对易. 观察 (18.9), 可知满足 (18.9) 最简单的形式为

$$\begin{aligned}
L^+&=\begin{pmatrix} K & (Q-Q^{-1})X^+\\ 0 & K^{-1}\end{pmatrix},\\
L^-&=\begin{pmatrix} K^{-1} & 0\\ -(Q-Q^{-1})X^- & K\end{pmatrix}.
\end{aligned}\qquad (Q=q^{-1}) \tag{18.10}$$

将 (18.10) 代入 (18.9), 发现 $K^{\pm1}$, $X^{\pm}$ 必须满足:

$$KX^{\pm}K^{-1}=Q^{\pm1}X^{\pm},\quad [X^+,X^-]=\frac{K^2-K^{-2}}{Q-Q^{-1}}. \tag{18.11}$$

这正是量子代数关系. 因为 q 是任意的, 取 q^{-1} 或 q 没有什么不同. 但 (18.9) 还有另外形式的解 [60]:

$$L^+=\begin{pmatrix} L^+_{11} & L^+_{12}\\ 0 & L^+_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_+A & (g_+B+g_-A)C\\ 0 & f_+B\end{pmatrix}, \tag{18.12}$$

$$L^-=\begin{pmatrix} L^-_{11} & 0\\ L^-_{21} & L^-_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_-B & 0\\ (h_+B+h_-A)C^{-1} & f_-A\end{pmatrix}. \tag{18.13}$$

其中 A,B,C 为算符，而 $d_{\pm},g_{\pm},g_{\pm},f_{\pm}$ 为常数，(18.9) 要求成立以下关系：

$$[A,B]=0,\quad g_-h_-=f_-d_+,\quad g_+h_+=f_+d_-,$$
$$AC=q^{-1}CA,\quad BC=qCB.$$

最简单的解为选择所有系数均为 1，且

$$B=A^{-1},\quad BC=qCB. \tag{18.14}$$

它正是 (15.10) 类型的关系．当 $q^P=1$ 时，(18.14) 所示的关系称为海森堡－外尔 (Heisenberg–Weyl) 关系 (H–W)，它恒可变换为简单的与 $SL(2)$ 相联系的量子代数关系 (18.11)．这已在 §15 看到了．我们看到，给定 $R(u)$- 矩阵、解 RTT 关系，找到所有矩阵元素作为量子力学算符间的对易关系，其过程是比较复杂的，但结果却如此之简单．从 (18.13) 看，即使选择所有系数为 1，量子代数仍允许存在可对易的两套 H–W 关系，例如一套可以通过通常平移算子实现，而另一套可通过磁平移算子实现 (因为两者是对易的，参见 (15.17) 的证明过程)．因而从量子代数要求上说，这两种平移算子是构成量子可积系统的基本操作．至此，我们已经了解，§15 中的作法虽是简单的物理实现，却是具有严格的量子代数的数学基础的结果．

作为与 $SL(2)$ 相联系的量子代数之物理实现的一个练习，让我们考虑两维谐振子模型．其哈密顿量为

$$H_0=\omega_1a^+a+\omega_2b^+b,\qquad(\hbar=1)$$

上式中已丢掉零点振动能，a 与 b 为互相对易的两种玻色子算子，满足 $[a,a^+]=[b,b^+]=1$．由于 $[H_0,a^+]=\omega_1a^+$，故有

$$[H_0,a^+]|E\rangle=H_0a^+|m,n\rangle-a^+H_0|m,n\rangle=\omega_1a^+|m,n\rangle,$$

其中 $|E\rangle = |m,n\rangle$ 为 H_0 本征态，m 为 a- 类粒子的粒子数，而 n 表示 b- 类粒子的粒子数. 易知

$$H_0(a^+|m,n\rangle) = [\omega_1(m+1)+\omega_2 n](a^+|m,n\rangle),$$

亦即 $a^+|m,n\rangle \approx |m+1,n\rangle$, 这个结果是显然的. 这里 a^+ 可以解释为能量平移算子，因为 $[H_0,a^+] \approx a^+$.

现在问一个问题：在两频率谐振子中，可能会发生两个独立振子间的跃迁，它的平移算子是什么？利用算符关系式

$$[AB,C] = A[B,C]+[A,C]B, \quad [A,BC] = [A,B]C + B[A,C],$$

容易证明

$$[H_0,a^+b] = (\omega_1-\omega_2)a^+b.$$

将它作用在态 $|m,n\rangle$ 上，有

$$H_0(a^+b|m,n\rangle) - a^+b(H_0|m,n\rangle) = (\omega_1-\omega_2)(a+b|m,n\rangle).$$

由于 $H_0|m,n\rangle = \omega_1 m + \omega_2 n$, 故有

$$H_0(a^+b|m,n\rangle) = [\omega_1(m+1)+\omega_2(n-1)](a^+b|m,n\rangle).$$

亦即

$$a^+b|m,n\rangle \approx |m+1,n-1\rangle.$$

同理，$b^+a|m,n\rangle \approx |m-1,n+1\rangle$, 即保证了总粒子数守恒.

引入 $\Psi = \binom{a}{b}$. $\Psi^+ = (a^+,b^+)$, 则哈密顿量可写为：

$$H_0 = \Psi^+\begin{pmatrix}\omega_1 & 0\\ 0 & \omega_2\end{pmatrix}\Psi = (\omega_1\omega_2)^{1/2}\Psi^+\begin{pmatrix}q^{1/2} & 0\\ 0 & q^{-1/2}\end{pmatrix}\Psi.$$

同时，

$$a^+b = \Psi^+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Psi, \qquad b^+a = \Psi^+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Psi,$$

其中 $q=\omega_1/\omega_2$. 现在引入算子

$$K=\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$X^+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $H_0 \approx \Psi^+ K \Psi$, 平移算子 (产生 a- 粒子与 b- 粒子间的谱跃迁) 则为 $\Psi^+ X^{\pm} \Psi$. 我们问： $X^{\pm}$ 与 K 之间满足什么代数关系？由 §8 的讨论 (见 (8.12) 式) 易知它们就满足最简单的量子代数关系. 这里虽然只用到了最简单的 2×2 表示, 但问题的本质是清楚的：双谐振子哈密顿量及其不同种类粒子间跃迁算子是量子代数生成元的二次量子化算符. 这里关键在于 $\omega_1 \neq \omega_2$ 两个频率的出现. 正是由于 K 的形式, 才导致量子代数形式对易关系 (8.15). 显然, 这对 q- 变形并没什么“量子”变形的意义, 它只反映了两个振子频率不相等这一事实.

这个例子表明, 讨论双谱谐振子可以有两种观点, 一种是通常的作法, 就是用 $SU(2)$ 生成元 $\sigma_{\pm}$ 与 σ_3, 因为任意 2×2 矩阵都可以用泡里矩阵和单位矩阵展开. 另一种就是用 $\sigma_{\pm}$, 但另一个生成元不用 σ_3, 而使用 K, 这时 $\sigma_{\pm}$ 与 K 的关系便满足 (8.15) 或 (8.17) 形式, 即 q- 变形形式的量子代数对易关系. 现在的例子只涉及 2×2 的最简单表示, 因此变形 (8.15) 或 (8.17) 实际上是 $SU(2)$ 对易关系的另一种写法而已. 但是对任意表示, 或者说对算符关系, (8.15) 是完全不同于 $SU(2)$ 对易关系的新的形式, 即量子代数对易关系. 所以, 虽然这个例子是平凡的引出量子代数对易关系的一种演示性的过程, 但它却涉及了 q- 变形的本质：由于生成元中包含了一个参数 q, 或交换次序时出现 q, 使得独立基矢 (生成元) 的选择发生了变化, 从而使整个对易关系也发生 q- 变形. q 这个参数通常与物理问题中的具体量有关, 例如频率比, 势的作用强度, 磁通等等, 视具体物理问题而定.

§19 高能 QCD 的可积模型

在高能物理中，人们一直重视高能电子与核子的碰撞问题. 当入射电子能量很高时，由于电子相对核子而言具有点粒子的性质，因此它深入到核子内部时可以起到探针的作用. 由于整个问题是相对论不变的，其运动学基本变量为质心系总能量平方和四维动量转移的平方，分别以 S 与 Q^2 表示. 例如考虑如图 19–1 的散射，其中 P 与 P' 分别表示入射与出射的电子四维动量，P_i 与 P_i' 分别表示散射前与散射后 i– 粒子的四维动量，q 表示交换某个光子的四维动量. 由四维动量守恒知

$$p + P_i = p' + P_i', \quad p + q = p'.$$

因此有 $P_i' = P_i - q$. 取两端的四维平方，得

$$P_i^2 = P_i^2 - 2(P_i q) + q^2 = P_i^2 - 2(P_i^0 q^0 - \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{q}) + q^2,$$

其中 P_i^0 与 q^0 分别是 P_i– 粒子和虚光子的能量，而 $\boldsymbol{P}_i$ 与 $\boldsymbol{q}$ 则为相应动量. 当 P_i– 粒子为自由粒子时，由相对论知 $P_i^2 = (P_i^0)^2 - (\boldsymbol{P}_i)^2 = m_i^2$ $(c = 1)$，因此

$$2(P_i q) = q^2.$$

在实验室坐标系，碰撞前 P_i 粒子为静止，即有 $\boldsymbol{P}_i = 0$，而 $q^0 = \varepsilon - \varepsilon'$，即为碰撞前后 P_i– 粒子的能量差，从而在实验系有 $(P_i q) = m_i(\varepsilon - \varepsilon') \equiv m_i \nu$，其中 ν 为 P_i– 粒子在实验系中碰撞前后的能量差. 从而有

$$2m_i \nu = q^2.$$

现在假定 $P_i = x_i P$ (P 为核子四维动量) 或 $P_i^2 = m_i^2 = x_i^2 P^2 = x_i^2 M^2$，其中 M 为核子质量，亦即 P_i 为核子总动量的 x_i 部分. 这

时想象把核子分成若干部分，每一部分是自由的，且具有静止质量 $m_i = x_i M$，这时

$$x = \frac{q^2}{2M\nu}. \qquad (m = xM)$$

显然 $0 < x \leqslant 1$ 表示了这样一个图象：将核子分成 $1/x$ 份，它们之间无互作用，每个部分独立地与电子散射，整个散射结果就是电子与所有“部分粒子”散射的和．这个“部分”称为部分子，已有很长的研究历史．以上散射图象称为自由部分子模型，x 称为布约肯变量．这种自由部分子模型最早是由费曼提出来的．

由上可见，x^{-1} 基本上是将核子分成部分子的个数．显然，当 x 不太小时，部分子的个数并不多．它们的互作用比较弱，可以看作是自由的，并且自由部分子模型与实验比较符合．但是，当 x 很小时，例如 $x \approx 10^{-5}$ 时，核子内包含了约 10 万个部分子，它们已相当密集，这时部分子间互相交换胶子作用比较强烈，应当用色动力学计算，算出 QCD 的修正．现在想象与自由部分子完全不同的另一个极限情况．在自由部分子模型中，当电子与一个部分子散射时，能量与动量并不向其他部分子转移，即部分子间互为自由．但另一极端情况是，由于 QCD 部分子间耦合非常紧，以致于当一个部分子被散射时，它所获得的能量与动量迅速地分散到其他部分子．这种模型最早是由利帕托夫 (Lipatov) 提出的．

经过相当的推导，利帕托夫证明，具有 QCD 非微扰互作用的模型可以用一种特殊形式的海森堡磁链模型描述．我们可以作一个非常粗略的想象．自由部分子模型颇像一条线，它分成若干部分，彼此独立．交换的光子与其中某个部分子互作用时，其他部分子不受影响．而利帕托夫模型则相反，它颇像一条具有强耦合的特殊海森堡磁链．当虚光子与其中一部分作用时，由于彼此间的强耦合，实际是整个链同它互作用，于是 QCD 作用现在等效地用一个特殊海森堡链代表．

以下我们考虑具有任意自旋值的海森堡链问题. 由 (8.71), 我们知道, 任意自旋 $\check{R}(x)$- 矩阵 (如 (8.67) 所示) 的本征值由 (8.71) 给出, 它的有理极限则由 (8.72) 给出. 假定 (8.66) 中对应 A_j 表示的权为 j, 那么投影算子的意义是 $\check{R}(x)$ 由 $2J+1$ 个独立的子方块构成, 每个子方块都对应着 q- 变形的以 j 为权的子表示. 换言之, 在这个对角子方块表示中, $\check{R}(x)$ 是对角化的, 本征值为 $\rho_j(x)$, 它依赖于权 j. 由 (8.70) 式, 为了方便, 引入新变量 $x=q^{2\mu}$, 则有

$$\rho_{n+1}(x)=\frac{q^{2\mu}-q^{2(n+1)}}{1-q^{2(n+2)}\cdot q^{2\mu}}\rho_n(x)=\frac{q^{\mu-(n+1)}-q^{-[\mu-(n+1)]}}{q^{-(\mu+n+1)}-q^{\mu+n+1}}\rho_n(x).$$

注意 $[A]=\frac{q^A-q^{-A}}{q-q^{-1}}$, 即有

$$\rho_{n+1}(x)=(-1)\frac{[\mu-(n+1)]}{[\mu+(n+1)]}\rho_n(x),$$

或

$$\rho_n(x)=(-1)\frac{[\mu-n]}{[\mu+n]}\rho_{n-1}(x)=\frac{[n-\mu]}{[n+\mu]}\rho_{n-1}(x). \tag{19.1}$$

这个递推关系导致有用 [ ] 表示的连乘式. 注意对 q- 变形的连乘积仍成立 q- 变形的 Γ_q- 函数, 即有

$$\Gamma_q(z+1)=[z]\Gamma_q(z), \tag{19.2}$$
$$[n]!=[n][n-1]\cdots[2][1]. \quad ([1]=1)$$

由于

$$[\mu-1][\mu-2]\cdots[\mu-n]=\frac{\Gamma_q(\mu)}{\Gamma_q(\mu-n)},$$
$$[n+\mu][n+\mu-1]\cdots[1+\mu]=\frac{\Gamma_q(n+\mu+1)}{\Gamma_q(\mu+1)},$$

$$\rho_n(x)=(-1)^n\frac{\Gamma_q(\mu)\Gamma_q(\mu+1)}{\Gamma_q(\mu-n)\Gamma_q(\mu+n+1)}\rho_0(x), \tag{19.3}$$

其中 $\Gamma_q(n+1)=[n][n-1]\cdots[1]=[n]!\rho_0(x)$ 可以选为 1, 这是因为由 (8.72), 当 $\check{R}(x)$ 差一公因子时, 总可以选择某一本征值为 1. 为了决定 $\check{R}(x)$, 应当将 (19.3) 代入 (8.67), 严格进行计算, 以获得结果. 但这样做非常繁琐, 我们用一种不严格但可以接受的方法来定出 $\check{R}(x)$, 由于 (19.3) 中的 n 从 0 取到 $2J$, 它就是每个方块的权 (总自旋). 前面已经指出, 投影算子 P_n 的作用是从乘积后分解式 (8.67) 中挑出权 $j=n$ 的子空间, 因而这里的 n 就代表总角动量算符 J^2 在该子空间的本征值. (19.3) 中的 n 就是在这种对角表象中的 J 算子本征值 $n(n+1)$ 中的 n. 过渡到算符形式, 即 $n\to\widehat{J}$, 那么就不限于 $n\times n$ 的子块了, 而是作用在整个大块矩阵的基上. 这时 $\rho_n\to\rho(x,\widehat{J})$ 本身就是 $\check{R}(x)$ 算子, $\check{R}(x)$ 算子的矩阵元就是 $\check{R}(x)$- 矩阵, 去掉无关的 $(-1)^n$ 因子, 再把 n 换为 $\widehat{J}$, 则得

$$\check{R}_q(x)=\frac{\Gamma_q(\mu)\Gamma_q(\mu+1)}{\Gamma_q(\mu-\widehat{J})\Gamma_q(\mu+\widehat{J}+1)}. \tag{19.4}$$

有意思的是当 $q\to 1$ 时的有理形式, 这时

$$\lim_{q\to 1}\Gamma_q(\mu)=\Gamma(\mu), \tag{19.5}$$

即 q- 变形 Γ- 函数的有理极限为通常的 Γ- 函数, 于是, 有理 $\check{R}$ 算符为

$$\check{R}=\lim_{q\to 1}\check{R}_q(x)=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\widehat{J})\Gamma(\mu+\widehat{J}+1)}. \tag{19.6}$$

它表示 "任意" 自旋时的 $\check{R}$- 算符, 它的矩阵元即为过去讨论过的 $\check{R}$- 矩阵, 我们用非常不严格的叙述的办法得到 (19.6), 它是文献 [61] 结果的特殊情况. 该文献中只讨论了有理情况, 他们证明, 在自旋 s 任意时, $\check{R}$ 算符由下式给出:

$$\check{R}^s=\frac{\Gamma(i\lambda-2s)\Gamma(i\lambda+2s+1)}{\Gamma(i\lambda-\widehat{J})\Gamma(i\lambda+\widehat{J}+1)}, \tag{19.7}$$

其中 $i\lambda$ 为谱参数，就是我们的 μ，而 s 为任意格点处 $\boldsymbol{S}_i^2$ 的本征值量子数，$\boldsymbol{S}_i^2 = s(s+1)$. J_{ij} 为任意格点 i 与 j 处自旋之和平方的本征值，即

$$J_{ij}(J_{ij}+1) = (\boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{S}_j)^2 = 2s(s+1) + 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j. \tag{19.8}$$

以 J_{ij} 本征值代入 (19.7)，遂有

$$\check{R}_{ij}^s = \frac{\Gamma(i\lambda - 2s)\Gamma(i\lambda + 2s + 1)}{\Gamma(i\lambda - J_{ij})\Gamma(i\lambda + J_{ij} + 1)}, \tag{19.9}$$

这里 i, j 应理解为与第 i, j 格点所联系的量子空间，与 (19.6) 相比较，我们所得到的 $\check{R}$- 算子实际上是自旋 $s = 0$ 的 R_{ij}(它在量子空间为算子)，这时有

$$J_{ij}(J_{ij}+1) = 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \qquad s_i^2 = s(s+1) = 0. \tag{19.10}$$

乍一看很奇怪，我们已熟悉了 $s = \frac{1}{2}, 1, \cdots$，但现在出现了 $s = 0$，或等效地 $s = -1$，这是新的现象，我们可以这样理解，$s = 0$(或 -1) 的意义是由对 s 进行解析延拓而定义的，它的维数必然不是有限的，即必须为无限维，以后会看到，这样的“怪”东西有重要的物理用途.

本节中我们故意通过杨 - 巴克斯特化的方法不严格得到 (19.9) ($s = 0$)，目的是指出，量子空量的 $\check{R}$ 算符也可以从 $\rho_j(x)$ 得到，从而引出了 $s = 0$ 的 $\check{R}$ 算符，并将它与哈密顿量联系. 同时也获得了 (19.4) 三角形式的 $\check{R}$ 算符，它在将来粒子物理中或许会有用途.

通常的杨 - 巴克斯特化方法到 (8.72) 就为止了. 上面的叙述表明，将本征值换为算符的作法会更简便地得到量子空间的 $\check{R}$ 算符，而由它会直接得到哈密顿量. 这就不必先讨论辅助空间，取迹，再决定哈密顿量了. 这种简化方案是个重要技巧，因为一下子就直接从杨 - 巴克斯特方程的解过渡到量子空间的哈密顿量，下面通过例子说明这点.

上面已经在量子空间中表示了 $\check{R}_{ij}$ 算子，由 (3.15) 、 (3.16) 便可以决定其哈密顿量. 现在取 $\log \check{R}$ 的微商作为哈密顿量. 将 (19.9) 代入 (3.15), 遂得

$$H_{jk} = \frac{d}{d(i\lambda)} \log \check{R}^s_{jk}|_{i\lambda=0}. \quad (i\lambda = \mu) \tag{19.11}$$

定义 ψ– 函数:

$$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \tag{19.12}$$

则易知有 [62].[63]:

$$H_{jk} = -\psi(-J_{jk}) - \psi(J_{jk}+1) + 2\psi(1), \tag{19.13}$$

$$H = \sum_j H_{j,j+1}, \tag{19.14}$$

$$(J_{jk}+1)J_{jk} = 2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k + 2s(s+1).$$

换言之，如将 H_{jk} 用 $\boldsymbol{s}_j \cdot \boldsymbol{s}_k$ 展开，则具有形式:

$$H_{jk} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k)^n. \tag{19.15}$$

由于 $\boldsymbol{S}_i$ 必须满足通常 $SL(2)$ 对易关系 (1.20), 现在要求 $s=0$, 必须引入非线性实现. 通常说李代数表示维数有限是对线性表示 (例如矩阵表示) 而言的，对非线性表示，没有这个限制. 简单的非线性表示可用低于代数生成元个数的变量实现. 例如对 $SL(2)$, 它有三个独立算子 $S^{\pm}, S^3$. 如用三个独立生成元实现. 可以是线性的. 但如用一个变量 (及其对偶) 实现也可以，必定是非线性表示. 容易验证，对任意格点 k, 已知 (z 为任意复数)[63] 可以以非线性方式实现 $S^{\pm}_k$ 、 S^3_k 的对易关系:

$$\begin{aligned} S^+_k &= z_k^2 \partial_k - 2sz_k, \\ S^-_k &= -\partial_k, \quad S^3_k = z_k \partial_k - s. \end{aligned} \tag{19.16}$$

即满足对易关系要求：

$$\begin{aligned}&[S_j^3, S_k^{\pm}] = \pm S_j^{\pm}\delta_{jk},\\&[S_j^+, S_k^-] = 2S_j^3\delta_{jk},\\&S_j^{\pm} = S_j^1 \pm iS_j^2.\end{aligned} \tag{19.17}$$

它对任意 S 成立，现在我们取 $s=0$, 由 (19.10)、(19.16) 易知，当 $s=0$,

$$J_{jk}(J_{jk}+1) = 2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k = -(z_j - z_k)^2\partial_j\partial_k. \tag{19.18}$$

也就是说，H 的本征值问题是一个极为复杂的无穷阶微分方程本征值问题. (19.14) 表示选取近邻作用. (19.13) 表明 H 是 $s=0$ 的量子可积的哈密顿量在 (19.9) 中，算符 $\widehat{J}$(或它量子空间本征值 J_{jk}) 出现在分母上，很不方便，利用公式 ([64] 中的 (8.325)) 知：

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma)} = \prod_{k=0}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+k}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+k}\right)\right\}. \tag{19.19}$$

现在令 $\mu=\beta=i\lambda$, $\alpha=i\lambda+1$, $\gamma=J$, 则有

$$\begin{aligned}\check{R}(\lambda) &= \frac{\Gamma(i\lambda)\Gamma(i\lambda+1)}{\Gamma(i\lambda-J)\Gamma(i\lambda+J+1)} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+k+1+\widehat{J})(\mu+k-\widehat{J})}{(\mu+1+k)(\mu+k)}\\&= \prod_{k=0}^{\infty}\left\{1-\frac{\widehat{J}(\widehat{J}+1)}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\right\}.\end{aligned} \tag{19.20}$$

也即出现在 $\check{R}$ 中的不是 $\widehat{J}$ 自己，而是它的本征值，

$$J_{jk}(J_{jk}+1) = 2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k.$$

(19.14)、(19.13) 决定的哈密顿量有重要的物理意义. 它描述了高能 QCD(色动力学), 当部分子 (parton) 密度很高时 ($x \sim 10^{-5}$,

x 为布约肯变量，大体表示部分子动量在重子中所占份额) 的散射行为. 如所熟知，当部分子密度不大时，电子与重子内部分子的散射是互不干涉的，亦即部分子是自由的. 当一个部分子被散射时，并没有能量传给相邻的部分子，这就是自由部分子模型. 然而，当 x 很小，即部分子数目极大时，可以想象其密度很高，彼此间有胶子的强烈作用. 这时也许有另一种极端情况，即部分子作用较强，一旦某个部分子被散射后，这种作用会立即传给相邻的子，动量会立即分散. 这种模型就像磁链一样，一旦一个格点自旋运动发生变化，由于有耦合，相邻的自旋就会分散这个变化. 现在 $s=0$ 的磁链就是这种图象的一种实现. 因此，(19.13) 是另一种极端模型. 有意义的是，利帕托夫 [62] 首先用 QCD 的费曼图相加，得到 (19.13) 类型的哈密顿量，尔后，法捷也夫 – 柯尔切夫斯基 (Faddeev-Korchemsky)[63] 从杨 – 巴克斯特方程及可积系统论证了这个模型，并在格点数很低时 (例如 $N=2$), 求解了贝特假定 (Bethe-Ansatz) 方程，将杨 – 巴克斯特可积系统与高能 QCD 物理联系起来，是一个很有意义的发展，它不但将两个领域联系起来，而且将 YBE 处理非线性互作用的强有力工具引入新的物理领域，期望能解决过去基于线性方案而无法处理的大量课题. 当然这还只是迈出了第一步. 如何将 YBE 与高能物理中的非微扰效应联系并得出与实验比较的结果，是个诱人而困难的课题.

参 考 文 献

[1] 谷超豪等，《孤立子理论与应用》，科技出版社，1990.

[2] 郭柏灵，庞小峰，《孤立子》，科学出版社，1987.

[3] Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Hamiltonian Methods in The Theory of Solitons, Springer-Verlag,1987.

[4] Yang C.N, Phys, Rev. Lett. 19 (1967)1312~1314. Phys, Rev 168 (1968) 1920~1923.

[5] Baxter R.J, Exactly Solved Methods in Statistical Mechanics, Academic Press London. 1982.

[6] 有关杨－巴克斯特方程早期文献总汇，见 Jimho M.(Ed), Yang-Baxter Equation in Integrable Systems, World Scientific, Singapore, 1991.

[7] Faddeev L.D., Integrable models in $1+1$ dimensional QFT, Les Houches Lectures 1982, Elsevier, Amsterdam (1984), 536~608.

[8] Korepin V.E., Bogoliuhov N.M., Izergin A.G., Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Function, Cambridge University Press, 1993.

[9] Kulish P.P. and Sklyanin E.K., Lecture Notes in Physics, 151 (1982), 61~119.

[10] Takhtajan L.A., Lectures on Quantum Groups, Nankai Lectures on Mathematical Physics, Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quautum Field Theory,Eds Ge M.-L,Zhao B.-H., World Scientific, Singapore, 1989.

[11] De Vega H.J., Inter. J. Mod. Phys., A4 (1989) 237, A5 (1990) 1611.

[12] Sklyanin E.K., Quantum Groups and Quantum Integrable Sys-

tems, Nankai Lectures on Matkematical Physics, World Scientific, Singapore, 1991, 63~68.

[13] Faddeev L.D., Lectures on Quantun Inverse Scattening Method, Nankai Lectures on Mathematical Physics, August, 1987. World Scientific, Singapore, 23~70.

[14] Komarov I.V., Theor. Mat. Fiz 50 (1982)402, Komarov I.V. and Zalipaev V.V., J. Phys, A17 (1984)31 以及所引用文献. E.k. Sklyanin, 见文献 [12].

[15] Ge M.-L, Xue K. and Wang Y.W., Phys. Lett., A200 (1995) 139~143, Chen G.Z and Ge M.-L., Phys. Lett., A200 (1995) 62~66. Ge M.-L and Xue K., J. Phys. A29 (1996) 6881~6894.

[16] Chen J.L. Ge M.-L and Wang Z.F., $t-j$ Model and the Reduction of q-G-C Top. Nankai Reports, 1997, Tianjin Ge M.-L and Xue K., The Physical Meaning of q-G-C Top, Nankai Reports, 1997, Tianjin.

[17] A.B. Zamolodchikov and Zamolodchikov Al.B., Ann. Phys., 120(1979) 253~291.

[18] Yang C.N.and Ge M-L. (eds). Braid Group. Knot Theory and Statistical Mechanics, World Scientific. Singapore 1989, II,1994.

[19] Kauffman L. H., Knots in Physics, World Scientific, Singapore, 1991.

[20] Drinfeld V.G., Soviet Math. Dokl. 32 (1985)254~258. Quantum Groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, USA, 1986. 269~291. Soviet Math. Dokl, 35 (1988), 212~216.

[21] Chari V. and Pressley A., Yangian and R-Matrices. L'Enseignement Mathématique, 36(1990). 267~302. A Guide to Quantum

Groups, Cambridge University Press. 1994.

[22] Alcaraz F.C. and Rittenberg V., Phys. Lett. B314 (1993)377 ~380 Alcaraz F.C., Dasmahapatra S., Rittenberg V., N-species stochastic models with boundaries and quadratic algebras, SISSA 38/97/EP, NSF-ITP-97-034, Aug. 1997.

[23] Wang Z.F., Ge M.L., Xue K., J. Phys A30(1997) 5023~5036.

[24] Ge M L. and Xue K., Yangian in Physics, Nankai Workshop on Physical Applications of Yang-Baxter Systems, 1997. Augst.

[25] De Lange O.L. and Roab R.E., Operator Methods in Quantum Mechanics, Oxford , 1991. 钱伯初、曾谨言，量子力学习题精选与剖析，科学出版社.

[26] Cho Y.M., Nuovo Cimento 23 (1975) 550~555. H.Vi, Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 813~820.

[27] Wu T.T. and Yang C.N., Phys. Rev. D12 (1975) 3845 Nucl Phys., B107 (1976) 365.

[28] Haldane F.D., Physics of the ideal semion gas: Spinons and Quantum Symmetries of the Integrable Haldane-Shastry Spin Chain. Proceedings of the 16th Taniguchi Symposium on Condensed Matter Physics. Kashikojima, Japan, ed. by O. Okiji and N. Kawakami, Springer, 1994.

[29] Haldane F.D.M. Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 635 Haldane F.D.M. Ha Z.N.C, Talstra J.C. Bernard D. and Pasquier V., Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2021. Shastry S. Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 639.

[30] Uglov D.B. and Korepin V.E, Phys. Lett. A190(1994)238.

[31] Göhmann F. and Inozemtsev V., Phys. Lett. A214(1996) 161~ 166.

[32] Wang D.F., Liu J.T. and Coleman P. Phys. Rev. B46 (1992)

6639. Wang D.F. and Gruber C., Phys. Rev. B49 (1994) 15712, B50(1994)3103.

[33] Y.L.Shen and Ge M. L., Phys, Rev. B52 (1995) 11670.

[34] Polychronakos A., Phys Rev. Lett., 69 (1992) 703.

[35] Calogero F., J. Math, Phys. 10 (1969) 2191. Sutherland B., J. Math. Phys. 12 (1971) 246, 12 (1971) 251 Hikami K. and Wadati M., J. Phys, Soc. Jpn. 62 (1993) 469.

[36] Ge M.L. and Wang Y.W., Phys Rev. 51E (1995) 2919.

[37] Bernard D., Gaudin m., Haldane F.D.M. and Pasquier V. J. Phys A26 (1993) 5219.

[38] Pang G.D., Pu F.C. and Zhao B-H., Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 322F.

[39] Yan M.-L, and Zhao B.-H, Phys. Lett. A168 (1992) 25~27.

[40] Shnider S. and Sternberg. S., Quantum Groups, from Coalgebras to Drinfeld algebras, a quided tour, P-International Press, 1993.

[41] 神保道夫 (m.Jimbo), 量子群与杨 -Baxter 方程 (日文),Springer-Verlag, 东京， 1990.

[42] 马中骐，《杨 - 巴克斯特方程和量子包络代数》，科学出版社， 1993.

[43] 一系列 Nankai Lectures on Mathematical Physics, World Scientific 出版，例如：

· Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory, 1990.

· Quantum Group and Quantum Integrable Systems ,1991.

· Quantum Integrable Statistical Models and Knot Theory, 1992.

· New Developments of Integrable Systems and Long-Ronged Interaction modols. 1994.

· Statistical Models, YBE and Related Topics, 1995.

[44] Zachos C and Cutright (eds), Quantum Groups, World Scientific, 1991, Argonne International Workshop, Proceedings.

[45] Fuchs J., Affine Lie Algebras and Quantum Groups, Cambridge University Press, 1992.

[46] Biedenharn L.C and Löhe Symmetries of Quantum Groups, Coupling Coefficients, Lect. Notes Pbys, 379 (1991) 193. Biedenharn L.C., Lect. Notes Phys.,375 (1991) 61. De Concini and Kac V.G., Dixmier, Progress in Math. 92. 1990, 471~506.

[47] 曾谨言，《量子力学》，科学出版社， 1981.

[48] 王育　、葛墨林，《大学物理中的前沿问题》，兰州大学出版社， 1987.

[49] Wiegmann, P.B., Zabrodin A.Z., Phys Rev. Lett. 72. (1994) 1890. Hatsugai Y. Kohmoto.M., Wu Y.S. Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 1134.

[50] 李正中，《固体理论》，高等教育出版社 Ishihara A., Condensed Matter Physics, Oxford, 1991.

[51] Chen G.H., Ge M.L., Phys. Rev. B54 (1996)7654~7657

[52] Susskind L., and Glogower J. Physics, 1 (1964) 41.

[53] Pegg D.T. and Barnett S.M., Phys Rev. A39 (1989) 1665

[54] 孙昌璞，博士论文：量子代数的 q- 变形玻色子实现理论及其对杨 –Baxter 方程的应用，南开大学， 1992 年 4 月. Fu H.C. and Ge M.L., Phase Quantigation and Cyclic Representation of Quantum Groups. 在南开国际工作会议上的报告，1993, 天津、会议主题为： Integrable models and Long-Ranged Interection Models.

[55] Biedenharn L.C., J.Phys. A22 (1989) L 873.

[56] Macfarlan A.J., J. Phys. A22 (1989) 4581.

[57] Sun C.P. and Fu H.C., J. Phys. A22 (1989) L983.

[58] Fujikawa K., Phys. Rev. A52 (1995) 3299. 在南开国际会议上报告， 1997 年 8 月，天津.

[59] Faddeev L.D., Reshetikhin N Yu and Takhtajan L.A, Braid Group, knot theory and statistical mechanics, World Scientific, Singapore, 1989, Eds. C.N.Yang and Mm.L.Ge.

[60] Bashanov V.V., Stroganov Yu. G., Chiral Potts Models as a descendant of the six-vertex model. 参阅 [6].

[61] Tarasov V.O., Takhtajan L.A. and Faddeev L.D., Theor. Math. Phys. 57 (1983) 163.

[62] Lipatov L.N., Phys. Lett. B251 (1990) 284, B309 (1993) 394, JETP Lett. 59 (1994) 596

[63] Faddeev L.D. and Korchemsky G.P., Phys. Lett. B342 (1995) 311~322. Korchemsky G.P., Bethe Ansatz for QCD Pomeron, ITP-SB-94-62, hep-ph/9501232, 1994.

[64] Gradshteyn L.S. and Ryzhik I.m., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press., 1980.