量子规范场论

刘 川

version 1.0

北京大学物理学院

ChuanLiu

开篇说明

2004 年春，我奉命与郑汉青教授一起教授研究生的规范场论课程。这个课程是一门直接将一年级研究生带入粒子物理前沿（比较其他课程而言）的课程，其重要性不言而喻。这个课程以前多年一直由李重生教授讲授。由于近一两年李老师有另外的教学安排，只好由我和郑汉青共同努力，设法将此课程完成。由于课程中的内容并不都是我十分熟悉的部分，因此，错误和不周之处恐在所难免，欢迎大家批评指正。

由于面对的主要是读完一学期硕士课程的同学，我们的讨论将主要从最基础的部分讲起，力求将规范场论的基本理论和方法讲述清楚。我假设读者都已经选修过量子场论课程。也就是说，应当对于量子电动力学的基本内容有所认识。对于量子场论的基本方法的了解是十分重要的，特别是在第一章。另外，这个讲义编写的时间实在是过于仓促，这也使得讲义中的别字数不胜数，这些只能够在日后不断的完善中加以更正了。

这个讲义可以供本课程的同学免费下载。作者本人（也就是刘川！）对于讲义中的所有内容保有版权。未经作者本人许可，不允许将本讲义的全部或部分翻印后以任何方式销售给任何人；也不允许将其外传给非本课程的学生和教师；不允许将本讲义的部分或全部放在网络上。否则一经发现，作者保留诉诸法律的权利。

最后，我要感谢李重生教授。他给了我他以往多年总结的课程讲义，使我受益非浅；我同时要感谢郑汉青教授，他在多年教学任务繁重的前提下协助我承担本课程的授课任务。没有以上两位教授的帮助和指导，要完成这个艰巨的任务实在是很困难的。同时，我也要感谢我们理论物理所的其他教授和同仁对我们的信任、支持和鼓励。

刘川，二零零三年冬

chuan.liu

目录

封面 1

开篇说明 2

目录 3

第一章　量子力学的游戏 - 序曲 5

1.路径积分的定义 6

2.从久远的过去到遥远的未来 10

3.编时关联函数与生成泛函 14

4.非谐振子的微扰展开 17

5.Wick 转动与欧式空间路径积分 18

第二章　表两场的路径积分 - 回旋曲 21

6.标量场路径积分的定义 21

7.微扰展开与费曼规则 24

8.有效作用量 29

9.连续量子场论的紫外发散和正规化 31

10.重整化 33

11.重整化群方程 36

1.裸重整化群方程 36

2.Callen-Symanzik 方程 37

3.固定点与重整化群流 39

4.维数正规化下的重整化群 40

12.λΦ^4 标量场论的一圈重整化 41

1.格点正规化下一圈图的计算 41

2.维数正规化下一圈图的计算 45

第三章　旋量场的路径积分 - 快板 49

13.旋量场与 Grassmann 代数 49

14.自由旋量场的作用量和生成泛函 50

15.Yukawa 模型 51

１.微扰展开 51
２.大 N 展开 52

第四章　对称性及其破缺 - 小快板 54
１６.整体对称性 54
１７.对称性与 Ward 恒等式 56
１８.整体对称性的自发破缺 58
１９.局域规范对称性 60
２０.规范对称性的自发破缺 64
２１.欧氏空间纯规范场的拓扑结构 65
２２.QCD 的作用量和对称性 67

第五章　规范场及其路径积分量子化 - 行板 70
２３.Fadeev-Popov 量子化方法 70
２４.协变规范下 QCD 的费曼规则 74
２５.背景场方法 75
２６.对称性自发破缺使得量子化 77
２７.BRS 不变性与 Slavnov-Taylor 恒等式 80
２８.QCD 的渐近自由 80
１.纯规范场的一圈 β 一函数 81
２.费米子行列式的计算 83

附录 A　符号与约定 86
参考文献 88

第一章　量子力学的游戏－序曲

量子场论是关于基本粒子及其相互作用的基本理论。从理论体系来讲，它是一个具有明显洛伦兹对称性、相互作用的、多自由度体系的量子理论。体系的动力学自由度－也就是我们称为场的东东－可以按照其在洛伦兹变换下的性质分为标量场、旋量场、矢量场等等。这样一个多自由度体系的动力学可以从它的作用量来确定。一个体系的作用量是其动力学自由度－也就是场－的泛函，它可以写成体系拉氏量的积分。变分法可以给出了这个系统的运动方程。同时，从体系的哈密顿量出发，利用正则量子化方法，我们可以将场量子化从而得到一个量子场论。

将一个经典的力学体系量子化还可以遵循另一种等价的方法。这就是我们这一章中要介绍的路径积分量子化 方法。这种方法首先是美国物理学家费曼（ R.P. Feynman ）引入到量子力学中来的。它可以十分方便地推广到具有多个自由度的场系统。虽然从本质上讲，路径积分量子化和正则量子化是完全等价的，但是路径积分量子化方法在处理某些问题是却显示出突出的优越性。其中一个例子就是我们这个课程的主角－非阿贝尔规范场－的量子化问题。这一章中，我们就从路径积分的定义入手，介绍路径积分量子化的理论方法。本章中我们所研究的对象是一个比起量子场论系统要简单得多的系统。具体地说，我们将讨论一个仅仅有一个自由度的量子力学系统。

¶正则量子化方法是从体系的广义坐标和广义动量出发，并要求它们满足海森堡对易关系从而将体系量子化；[1] 路径积分量子化方法，主要是利用费曼的路径积分表示。这一章中，我们将从一个玩具模型（ toy model ）－一个一维量子力学问题－开始我们的讨论。这样讨论的好处是，它能够揭示路径积分的几乎所有要点，[2] 而且避免了不必要的记号上的以及理论上的复杂性。从这个玩具模型推广到一个标量场论从形式上讲是十分平庸的，我们将在后面一章给出。[3]

[1] 这里我们指的是简单的标量场。如果是旋量场，那么相应的对易关系将被反对易关系所取代。
[2] 除了量子场所特有的性质：重整化、对称性自发破缺等等。
[3] 一个量子力学系统与一个量子场论系统比较而言，真正大大简化的是它的重正化问题。因此，尽管从形式上推广是十分平庸的，但是处理重正化的问题并不平庸，至少对于初学量子场论的同学来说，这是一个跨越。

§1. 路径积分的定义

¶ 我们首先以一个 $0+1$-维场论—也就是一个量子力学问题—为例，来引入路径积分的基本概念。为此我们考虑一个一维量子力学非谐振子，它的哈密顿量为：[4]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(\hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2 + V(\hat{x}) \,, \tag{1.1}$$

其中相互作用势 $V(\hat{x})$ 体现了振子的非谐效应。[5] 我们现在想求这个量子力学系统在初始时刻 $t = t_i$ 处于位置 x_i，在某个终止时刻 $t = t_f$ 时处于 x_f 的跃迁几率幅：

$$\mathcal{Z}[x_f, t_f; x_i, t_i] = \langle x_f, t_f | e^{-iTH} | x_i, t_i \rangle \,, \tag{1.2}$$

其中 $T = (t_f - t_i)$ 是时间间隔。计算这个矩阵元的唯一麻烦在于指数中哈密顿量的含坐标的部分（势能）与含动量的部分（动能）是不可对易的算符。于是，我们只好将时间间隔 T 切成 N 份，当然 $Na = T$：

$$\langle x_f | e^{-iT\hat{H}} | x_i \rangle = \langle x_f | e^{-ia\hat{H}} \cdot e^{-ia\hat{H}} \cdots e^{-ia\hat{H}} | x_i \rangle \,,$$

其中等式右边夹在初态和末态之间的共有 N 个相同的指数因子。然后我们假定 N 足够的大，从而 a 足够的小，这时指数因子上的坐标和动量部分就可以假定是对易的：[6]

$$e^{-ia\hat{H}} \simeq e^{-ia\hat{p}^2/2} e^{-ia[\omega^2\hat{x}^2/2 + V(\hat{x})]} \,.$$

因为上式所造成的误差至少是 $O(a^2)$。剩下的步骤都是十分标准的量子力学惯用伎俩。我们在上面的 N 个因子中间插入一组完备的量子力学本征态。对于这个问题，最为自然的选择显然是坐标算符 $\hat{x}$ 的本征态：$|x_t\rangle\langle x_t|$，其中我们给这些插入的中间态一个下标 t 来区分它们。于是，我们可以将这个矩阵元写成：

$$\langle x_f | e^{-ia\hat{H}} | x_i \rangle \simeq \int \left(\prod_{t=1}^{N-1} dx_t \right) \left[\prod_{t=0}^{N-1} \langle x_{t+1} | e^{-ia\frac{\hat{p}^2}{2}} e^{-ia[\frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2 + V(\hat{x})]} | x_t \rangle \right] \,, \tag{1.3}$$

这里我们约定：$x_0 = x_i$，$x_N = x_f$。利用：$\hat{x}|x_t\rangle = x_t|x_t\rangle$ 以及在坐标表象下动量的表达式：$\hat{p} = -i(\partial/\partial x)$，这个公式中的 N 个因子都是类似的，我们拿出一个代表（而不是三个代表！）来计算：

$$\langle x_{t+1} | e^{-ia\frac{\hat{p}^2}{2}} e^{-ia[\frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2 + V(\hat{x})]} | x_t \rangle = e^{-\frac{ia\omega^2}{2}x_t^2} \left\langle x_{t+1} \left| e^{\frac{ia}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right| x_t \right\rangle \,.$$

[4] 这里为了区分量子力学中的算符和它的本征值（数），我们将在算符的符号上面加一个“^”的符号。

[5] 如果非谐相互作用等于零，问题退化为一个一维谐振子。这个量子力学问题的解可以在任何一本量子力学教科书中找到。

[6] 更为科学的做法是将势能的因子对称地分在含动量因子的左右两边，不过这样做对于我们最终的结果没有本质的影响。

刘川制造

现在我们利用下面这个伟大的（高斯积分）恒等式：

$$e^{\frac{ia}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{\frac{i\xi^2}{2a}+\xi\frac{\partial}{\partial x}}\,, \tag{1.4}$$

我们可以得到：

$$\left\langle x_{t+1}\left|e^{\frac{ia}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right|x_t\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_t e^{\frac{i\xi_t^2}{2a}}\left\langle x_{t+1}\left|e^{\xi_t\frac{\partial}{\partial x}}\right|x_t\right\rangle\,. \tag{1.5}$$

现在注意到上式等式右边的矩阵元就是：$\langle x_{t+1}|x_t+\xi_t\rangle=\delta(x_{t+1}-x_t+\xi_t)$，这些 δ-函数告诉我们相邻的 x_t 之间的差就是 ξ_t。利用这些 δ-函数完成对于所有 ξ_t 的积分我们得到的结果是：[7]

$$\left\langle x_f\left|e^{-iTH}\right|x_i\right\rangle=\int\left(\prod_{t=1}^{N-1}dx_t\right)\exp\left\{ia\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_{t+1}-x_t}{a}\right)^2-\frac{\omega^2-i\epsilon}{2}x_t^2-V(x_t)\right]\right\}\,. \tag{1.6}$$

注意到在这个结果的指数因子在 $a\to 0$ 和$N\to\infty$ 但 $Na=T$ 固定的极限下正好与系统的经典作用量有关。[8] 于是，我们可以形式地将它写成：

$$\mathcal{Z}[x_f,t_f;x_i,t_i]\equiv\langle x_f|e^{-iT\hat{H}}|x_i\rangle=\int\mathcal{D}x e^{iS[x(t)]}\,, \tag{1.7}$$

其中 $S[x(t)]$ 是系统的经典作用量：

$$S[x(t)]=\int_{t_i}^{t_f}dtL[x,\dot{x},t]=\int_{t_i}^{t_f}dt\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{\omega^2}{2}x^2-V(x)\right]\,. \tag{1.8}$$

公式 (1.7) 中的路径积分 $\int\mathcal{D}x$ 代表对于连接 (x_i,t_i) 和 (x_f,t_f) 之间的所有可能路径（不仅仅是满足经典运动方程的经典路径）积分。

需要立即指出的是，公式 (1.7) 中的表达式仅仅是一个形式上的表达式。虽然被积函数在 $a\to 0$ 的极限下可能具有明确的极限，具体地说就是：e^{iS}，但是整个积分一般来说在数学上并没有明确的定义。[9]原因就是前面的积分测度（一个无限维的积分）在这个极限下很难普遍地给出明确数学定义。在数学上有明确定义的公式不是 (1.7)，而是公式 (1.6)。从物理上讲，我们可以将公式 (1.7) 想象成公式 (1.6) 的某种极限；但在数学上讲，对于一般的情形并不能证明这个极限是存在的。即使从物理的方面考虑，引入分立的时间间隔实际上是物理的。因为纯粹连续的时间意味着我们必须对于时间具有无穷精细的分辨率，而这实际上意味着（按照测不准原理）无穷大的能量。

¶ 作为一个示例，让我们来试图计算一下一个一维谐振子跃迁矩阵元的路径积分 $\mathcal{Z}_0[x_f,t_f;x_i,t_i]$。[10] 我们直接从路径积分的分立形式表达式 (1.6) 出发，它的可能的连续

[7]我们在作用量中加上了一个很小的虚部：$\omega^2\to(\omega^2+i\epsilon)$。这样一来，可以证明（分立形式的）路径积分是收敛的。

[8]如果我们假定 x_t 趋向于一个至少一阶可微的函数的话。

[9]可以证明，多数情形下对于路径积分有主要贡献的路径绝大部分是不可微的路径。因此，就连被积函数的指数上面也并不趋于系统的经典作用量。总之，这个表达式仅仅能够当作一个形式的表达式而已，或者说，它是分立形式的表达式的一个缩写。

[10]这实际上是为数不多的几个可以解析计算的例子之一。

刘川制造

形式将在最后对结果取 $a \to 0$ 的极限下得到，如果它存在的话。对于谐振子，其中的非谐势能 $V(x)$ 为零。分立形式的运动方程为：

$$(\hat{\partial}_0^2 + \omega^2 a^2) x_t^{(c)} = 0 \,, \tag{1.9}$$

其中二阶差分算符 $\hat{\partial}_0^2$ 作用于 x_t 的定义为：

$$\hat{\partial}_0^2 x_t \equiv x_{t+1} + x_{t-1} - 2x_t \,, \tag{1.10}$$

对于给定的初始状态 x_i 和终止状态 x_f，我们可以由分立的经典运动方程 (1.9) 确定出唯一的一个经典轨道：$x_t^{(c)}$，它满足 $x_0^{(c)} = x_i$，$x_{N_t}^{(c)} = x_f$。

游戏 1.1 *试证明这一点，并且给出该经典轨道 $x_t^{(c)}$ 所对应的经典作用量 $S[x_t^{(c)}]$，用系统初始和终止的位置 x_i 和 x_f、时间间隔 T、时间分立化的格距 $a = T/N_t$ 来表达。*

我们可以改变路径积分的积分变量：$x_t = x_t^{(c)} + X_t$，其中 X_t 满足边条件：$X_0 = X_{N_t} = 0$。这样一来：$S[x_t] = S[x_t^{(c)}] + S[X_t]$，其中没有 X_t 的线性项，因为 $x_t^{(c)}$ 满足经典的运动方程。于是我们得到：

$$\mathcal{Z}_0[x_f, t_f; x_i, t_i] = e^{iS[x_t^{(c)}]} \int \left(\prod_{t=1}^{N-1} dX_t \right) \exp\left\{ i \sum_{t=0}^{N-1} \frac{1}{2a} X_t \left(-\hat{\partial}_0^2 - \omega^2 a^2 + i\epsilon \right) X_t \right\} . \tag{1.11}$$

由于 X_t 满足边条件 $X_0 = X_{N_t} = 0$，我们可以将它展开成傅立叶级数

$$X_t = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{X}_n \sin\left(\frac{n\pi t}{N} \right) \,, \quad \tilde{X}_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^{N-1} X_t \sin\left(\frac{n\pi t}{N} \right) \,. \tag{1.12}$$

游戏 1.2 *试证明上面的分立傅立叶级数展开式。*

于是我们可以将对于 X_t 的积分化为对于其傅立叶分量 $\tilde{X}_n$ 的积分：

$$\left(\prod_{t=1}^{N-1} dX_t \right) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} d\tilde{X}_n \right) \,, \tag{1.13}$$

其中积分测度变换的雅克比行列式为 1。

游戏 1.3 *按照傅立叶变换式 (1.12)的对称性，证明上面积分测度变换的雅克比行列式为 1。*

虽然傅立叶变换的正变换与逆变换看上去如此对称，但是我们的作用量只有用傅立叶分量 $\tilde{X}_n$ 来表达是才是对角的：

$$S[X_t] = \frac{1}{2a_t} \sum_{n=1}^{N-1} (\hat{p}_n^2 - \omega^2 a^2 + i\epsilon) \tilde{X}_n^2 \,, \tag{1.14}$$

刘川制造

其中我们引入了分立化的（同时也是无量纲的）动量平方：

$$\hat{p}_n^2 = 2\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right] . \tag{1.15}$$

我们发现，如果 $n \ll N$，那么余弦函数的宗量是小量，我们可以展开它得到：$\hat{p}_n^2 \simeq (n\pi/N)^2$，即与连续的动量平方相同。现在，利用对角化的作用量，我们可以计算出路径积分的结果（一堆高斯积分）：

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0[x_f,t_f;x_i,t_i] &= e^{iS[x_t^{(c)}]}\int\left(\prod_{n=1}^{N-1}d\tilde{X}_n\right)\exp\left\{\frac{i}{2a}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{p}_n^2-\omega^2a^2+i\epsilon\right)\tilde{X}_n^2\right\} ,\\ &= e^{iS[x_t^{(c)}]}\prod_{n=1}^{N-1}\left(\frac{2\pi ia}{\hat{p}_n^2-\omega^2a^2+i\epsilon}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{1.16}$$

为了化简这个式子，我们注意到：

$$\eta(\hat{p}_n^2-\omega^2a^2) = 2\eta-\eta\omega^2a^2-2\eta\cos\frac{n\pi}{N} = \left(\eta^2-2\eta\cos\frac{n\pi}{N}+1\right) ,$$

其中 η 满足：$\eta(2-\omega^2a^2)=\eta^2+1$，即：[11]

$$\eta = 1-\frac{\omega^2a^2}{2}+i\omega a\sqrt{1-\frac{\omega^2a^2}{4}} . \tag{1.17}$$

同时利用公式：

$$\prod_{n=1}^{N-1}\left(\eta^2-2\eta\cos\frac{n\pi}{N}+1\right) = \frac{\eta^{2N}-1}{\eta^2-1} . \tag{1.18}$$

游戏 1.4 *试证明上面这个公式。（不一定容易哦！）*

于是我们最后得到：

$$\mathcal{Z}_0[x_f,t_f;x_i,t_i] = e^{iS[x_t^{(c)}]}(2i\pi a)^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{\eta-\eta^{-1}}{\eta^N-\eta^{-N}}\right)^{1/2} . \tag{1.19}$$

¶ 现在我们试图来讨论 $a\to 0$ 但 $aN=T$ 固定的连续极限。我们首先从最终的结果 (1.19) 来看，在 $a\to 0$ 的极限下，显然：

$$\eta \simeq 1+i\omega a\ ,\quad \eta^N \simeq (1+i\omega a)^N \simeq e^{i\omega T} ,$$

于是对于一维的谐振子，我们得到它的跃迁矩阵元如下：

$$\mathcal{Z}_0[x_f,t_f;x_i,t_i] == e^{iS[x_t^{(c)}]}(2i\pi a)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\sin\omega T}} . \tag{1.20}$$

[11] 下面的公式中我们如果取另外一个符号会如何？请大家想一想。

刘川制造

所以，如果我们重新定义积分测度：

$$[\mathcal{D}x] = (2i\pi a)^{\frac{-N}{2}} \prod_{t=1}^{N-1} dx_t \ , \tag{1.21}$$

我们可以得到一个有限的结果：

$$(2i\pi a)^{\frac{-N}{2}} \mathcal{Z}[x_f, t_f; x_i, t_i] = \int [\mathcal{D}x] e^{iS[x_t]} = e^{iS[x_t^{(c)}]} \sqrt{\frac{\omega}{\pi \sin \omega T}} \ . \tag{1.22}$$

这个表达式中

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt x(t)[-\partial_0^2 - \omega^2 + i\epsilon]x(t) \tag{1.23}$$

在连续的情形下，替代分立的傅立叶变换，我们有：

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n \sin\left(\frac{n\pi t}{N_t}\right) \ , \ \ \tilde{X}_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt X(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \ . \tag{1.24}$$

于是，被积函数为：

$$e^{iS[x^{(c)}(t)]} \exp\left(i\frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 + i\epsilon \right] \tilde{X}_n^2 \right) \ .$$

这时我们对于函数 $X(t)$ 的积分的测度必须给出定义。读者可以验明，只要我们适当定义这个测度，我们可以得到与公式 (1.20) 一致的结果。[12]

¶ 虽然对于一维谐振子，我们论证了我们可以试图定义一个测度（实际上是一个分立的测度的极限）从而给出其跃迁矩阵元的路径积分表示，但是对于一般的一维量子力学系统，这个构造并不一定成立。因此，普遍来讲我们还是应当将路径积分的连续形式的表达式想象成分立形式的一种更为紧凑的记号而已。

§2. 从久远的过去到遥远的未来

¶ 为了说明 Minkowski 空间的（实时）路径积分与量子场论的联系，我们首先回顾一下量子场论中十分关注的散射问题。[13] 我们所考虑的量子系统的哈密顿量可以写成：$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$，其中 $\hat{H}_0$ 称为自由的哈密顿量，它反映了没有相互作用的情形。用 Fock 空间的语言来表述，$\hat{H}_0$ 的本征态对应于一堆没有相互作用的自由粒子。我们将假设 $\hat{H}_0$ 的本征态是正交、归一和完备的。在一个典型的散射过程中，实验者首先制备一堆具有确定量子数的、自由的粒子。制备的时候能够确定的量子数一定是那些与自由哈密顿量 $\hat{H}_0$ 对易的算符的本征值。随后，这些制备好的粒子入射到有相互作用的区域发生散

[12] 这里需要用到一个公式：$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2/(n^2\pi^2)) = \sin z/z$。

[13] 对于量子场论和散射矩阵理论熟悉的同学，或者对于理论的严格性不是十分注意的同学可以直接跳过本节，直接进入下一节。

刘川制造

射。散射的产物（或者称为终态）是另一堆粒子，它们在飞离散射区域之后，又可以认为是自由的。

我们可以定义两组完备的态矢量：$|\psi_{\rm in}(\alpha,t)\rangle$ 和 $|\psi_{\rm out}(\beta,t)\rangle$，我们分别称它们为入态（ in states ）和出态（ out states ）； 这些态矢量完全按照自由的 哈密顿量 $\hat{H}_0$ 来演化，同时分别具有固定的量子数 α 和 β。[14] 一个散射问题中的重要事实是，存在两个不同的算符—它们被称为姆勒波算符 （ Mϕller wave operator ），它能够将入态和出态这些按照自由哈密顿量演化的态联系到有相互作用的，也就是按照完全哈密顿量演化的态：[15]

$$|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle=\hat{\Omega}^{(+)}|\psi_{\rm in}(\alpha;t)\rangle\ ,\quad |\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle=\hat{\Omega}^{(-)}|\psi_{\rm out}(\beta;t)\rangle\ , \tag{1.25}$$

其中 $|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle$ 和 $|\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle$ 都是按照完全哈密顿量 $\hat{H}$ 演化的态，[16] 它们分别满足下列的李普曼—施温格方程 （ Lippmann-Schwinger equation ）：

$$|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle = |\psi_{\rm in}(\alpha;t)\rangle+\int_{-\infty}^{t}dt'G_0^{(+)}(t-t')V|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle\ , \tag{1.27}$$

$$|\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle = |\psi_{\rm out}(\beta;t)\rangle+\int_{t}^{\infty}dt'G_0^{(-)}(t-t')V|\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle\ , \tag{1.28}$$

其中 $G_0^{(\pm)}(t)$ 是自由哈密顿量所对应的格林函数。[17] 这两个公式所代表的物理意义正是我们在本节一开头所提到的散射问题的物理图象。态 $|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle$ 代表一个按照完全哈密顿量 $\hat{H}$ 演化的态。它在久远的过去趋向于一个具有确定量子数的入态 $|\psi_{\rm in}(\alpha;t)\rangle$。它的指标 α 表示它在久远的过去所具有的、那些与自由哈密顿量对易的算符所标志的量子数。需要注意的是，这个态在遥远的未来虽然也会趋于按照自由哈密顿量演化的态，但是一般来讲，它并不具有确定的量子数。类似的，态 $|\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle$ 代表一个按照完全哈密顿量 $\hat{H}$ 演化的态。它在遥远的未来趋于一个具有固定量子数 β 的出态。在久远的过去，它虽然也按照自由哈密顿量来演化，但是并不一定具有固定的量子数。[18] 形式上，波算符可

[14] 入态和出态可以是同一组本征态，也可以是不同的一组本征态。例如，入态可以是动量的本征态（平面波）而出态可以选为角动量的本征态（球面波），就像分波法的处理一样。由于入态和出态按照自由哈密顿量演化，所以它们能够具有的量子数所对应的物理量必须与自由的哈密顿量对易（而不是总哈密顿量）。

[15] 并不是所有的物理问题中都可以满足这一点。如果存在完备的入态和出态并且能够存在良好定义的波算符将它们联系到完整哈密顿量演化的态，我们就称这样的系统是一个散射系统。这里我们假设，我们所考虑的系统是一个散射系统。

[16] 与公式 (1.25) 相对应，我们可以证明下列关系：

$$|\psi_{\rm in}(\alpha;t)\rangle=\hat{\Omega}^{(+)\dagger}|\psi^{(+)}(\alpha;t)\rangle\ ,\quad |\psi_{\rm out}(\beta;t)\rangle=\hat{\Omega}^{(-)\dagger}|\psi^{(-)}(\beta;t)\rangle\ , \tag{1.26}$$

只要相互作用的哈密顿量是厄米的。

[17] 或者写得更明确一些：$G^{(\pm)}(t)=\mp i\theta(\pm t)e^{-i\hat{H}_0t}$。

[18] 需要指出的是，根据公式 (1.25) 和公式 (1.26) 并不能说明波算符本身是么正的。具体来说，我们可以证明它们满足：$\Omega^{(\pm)\dagger}\Omega^{(\pm)}=1$，但是倒过来并不一定。事实上，如果完全哈密顿量存在束缚态，它们将上面两个算符倒一下次序，可以证明它不等于单位算符。

刘川制造

以形式地写成：

$$\hat{\Omega}^{(\pm)} = \lim_{t\to\mp\infty} e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0 t}\,, \tag{1.29}$$

¶ 利用相互作用表象中的波算符 $\hat{\Omega}_I^{(+)}(t)$ 可以将相互作用表象中的任意算符与海森堡表象中的相应算符联系起来：

$$\hat{A}_H(t) = [\hat{\Omega}_I^{(+)}(t,t_0)]^{-1}\hat{A}_I(t)\hat{\Omega}_I^{(+)}(t,t_0)\,. \tag{1.30}$$

其中 t_0 是一个参考时间点；[19] 而两点之间的时间演化算符为：

$$\Omega^{(+)}(t_1,t_2) = [\Omega^{(+)}(t_1)][\Omega^{(+)}(t_2)]^{-1} \tag{1.31}$$

这一点可以通过上面的定义以及时间演化算符所满足的方程简单加以验证。

游戏 1.5 *请验证这一点。*

¶ 相互作用表象中的波算符 $\hat{\Omega}_I^{(\pm)}(t)$ 的意义还在于，它实际上就是相互作用表象中态矢量的时间演化算符。也就是说，我们有：

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{\Omega}_I^{(+)}(t)|\psi_I(-\infty)\rangle\,. \tag{1.32}$$

这一点可以从相互作用表象中态矢量的演化方程看出。

我们还发现在相互作用表象中的波算符 $\hat{\Omega}_I^{(+)}(t)$ 满足以下边界条件：

$$\hat{\Omega}_I^{(+)}(-\infty) = 1\,,\quad \hat{\Omega}_I^{(+)}(+\infty) = \hat{S}\,, \tag{1.33}$$

也就是说，在久远的过去，波算符 $\hat{\Omega}_I^{(+)}(t)$ 趋于单位算符，在遥远的未来它趋于所谓的散射算符 $\hat{S}$。散射算符 $\hat{S}$ 在一组完备的入态之间的矩阵元被称为 S-矩阵。 于是，我们可以给出 S-矩阵的一个形式表达式：

$$\hat{S} = T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\hat{V}_I(t)\right)\,. \tag{1.34}$$

上面定义的 S-矩阵在量子场论的散射问题中起着核心的作用。它包含了散射实验中的所有信息（散射的几率幅、截面等等）。同时，它与量子场论中的编时格林函数有着密切的关系。这种关系集中地体现在所谓的约化公式（ reduction formula ）中。[20]约化公式告诉我们只要能够求出基本场（在我们这个量子力学游戏中就是算符 $\hat{x}_H(t)$ ）的各种编时格林函数，我们就可以利用约化公式来求出所有的 S-矩阵的矩阵元，从而得到所有的散射实验的信息。

[19] 在参考点 $t = t_0$ 时刻，一个海森堡表象的算符与相互作用表象的算符相等。具体的物理不依赖于参考点的选取。

[20] 它又被称为 LSZ-约化公式（ Lehmann-Zimmermann-Symanzik reduction formula ）。

刻川制造

¶ 我们现在引入一个含时的（ c-数）外源 $J(t)$，并且取哈密顿量为：$\hat{H}_J(t) = \hat{H} - J(t)\hat{x}$，那么如果我们将外源项看成是“相互作用”，我们知道哈密顿量 $H_J(t)$ 的相互作用表示就是原来哈密顿量的海森堡表示。我们定义系统从真空到真空的散射矩阵元为：

$$Z_H[J(t)] \equiv \langle 0_H|\hat{S}_J|0_H\rangle = \left\langle 0_H \left| T\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} dt J(t)\hat{x}_H(t)\right)\right| 0_H\right\rangle . \tag{1.35}$$

这里 $|0_H\rangle$ 代表哈密顿量 $\hat{H}$ 的严格基态；[21] $\hat{x}_H(t)$ 则代表 $\hat{H}_J$ 的相互作用表象，也就是 $\hat{H}$ 的海森堡表象中的算符。定义式 (1.35) 是一个十分、百分、千分、万分重要的东东。为什么这么说？只要将等式右边的指数函数一展开，考察含有外源 $J(t)$ 的不同幂次的系数，我们发现它们就是量子场论中我们梦寐以求的“编时格林函数”：

$$Z_H[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\cdots\int dt_1\cdots dt_n J(t_1)\cdots J(t_n)\langle 0_H|T[\hat{x}_H(t_1)\cdots\hat{x}_H(t_n)]|0_H\rangle . \tag{1.36}$$

正是由于这个原因，我们又称 $Z_H[J] = \langle 0_H|\hat{S}_J|0_H\rangle$ 为编时格林函数的生成泛函。

¶ 现在我们希望将公式 (1.35) 改写一下。我们假设系统的哈密顿量中相互作用的部分 $V(\hat{x})$ 是绝热地加上的。也就是说，我们设想在久远的过去和遥远的未来，$V(\hat{x}) = 0$。因此，我们知道久远的过去和遥远的未来系统的运动由“自由的”哈密顿量 $\hat{H}_0$ 来描写。[22] 这时，我们可以将 $\hat{H}_J$ 中的 $\hat{V}(\hat{x}) - J(t)\hat{x}$ 整个看成是相互作用。于是，在这个相互作用表象中，以两点编时格林函数为例，我们可以写出（假定 $t_1 > t_2 > t_0$ ）：

$$\langle 0_H|T[\hat{x}_H(t_1)\hat{x}_H(t_2)]|0_H\rangle = \langle 0_H|[\Omega^{(+)}(t_1,t_0)]^{-1}\hat{x}_I(t_1)\Omega^{(+)}(t_1,t_2)\hat{x}_I(t_2)\Omega^{(+)}(t_2,t_0)|0_H\rangle , \tag{1.37}$$

现在我们已经将复杂的算符 $\hat{x}_H(t)$ 换成了按照自由哈密顿量演化的算符 $\hat{x}_I(t)$。但是，上面这个编时格林函数中的量子态仍然是完全哈密顿量的本征态：$|0\rangle_H$。我们需要的是将它与自由哈密顿量的真空（入）态 $|0;in\rangle$ 联系起来。为此，我们考虑完全的哈密顿量的时间演化算符作用于 $\hat{H}_0$ 的真空态上的结果。我们有：

$$e^{-i\hat{H}T}|0\rangle = e^{-iE_0T}|0_H\rangle\left(\langle 0_H|0\rangle\right) + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_nT}|n_H\rangle\left(\langle n_H|0\rangle\right) ,$$

其中 $E_0 = \left(\langle 0_H|\hat{H}|0_H\rangle\right)$ 是完全哈密顿量的基态能量；E_n （其中 $n > 0$ ）对应于完全哈密顿量的激发态能量。于是我们发现，如果我们令 $T \to \infty(1 - i\epsilon)$，上面的展开式中将只有 $n = 0$ 的一项起主导作用。于是我们得到：

$$|0_H\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0T}\langle 0_H|0\rangle\right)^{-1} e^{-i\hat{H}T}|0\rangle , \tag{1.38}$$

[21] 注意，我们用 $|0_H\rangle$ 来表示完全哈密顿量 $\hat{H}$ 的严格基态；用 $|0\rangle$ 来表示自由哈密顿量 $\hat{H}_0$ 的基态（真空），并且取它的能量为能量零点：$\hat{H}_0|0\rangle = 0$。

[22] 也就是说，我们再一次假定我们的问题构成一个散射问题。

刘川制造

这个结果又被称为 Gell-Mann-Low 定理。它所对应的物理图象实际上是假设系统的相互作用可以看成是“绝热地”加上的。利用 Gell-Mann-Low 的这个结果并且将时间平移一个 t_0 我们有：

$$\begin{aligned}|0_H\rangle &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle\right)^{-1}e^{-i\hat{H}(T+t_0)}|0\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle\right)^{-1}e^{-i\hat{H}(T+t_0)}e^{i\hat{H}_0(T+t_0)}|0\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle\right)^{-1}\Omega^{(+)}(t_0,-T)|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.39}$$

其中在倒数第二行，我们插入了 $\hat{H}_0$ 的时间演化因子，但是由于 $\hat{H}_0|0\rangle=0$，所以它不改变原先的等式。于是，对于 $t_1>t_2>t_0$ 我们得到两点编时格林函数的表达式为：

$$\begin{aligned}\langle 0_H|T[\hat{x}_H(t_1)\hat{x}_H(t_2)]|0_H\rangle &= \left(e^{-iE_0(T-t_0)}\langle 0|0_H\rangle\right)^{-1}\langle 0|\Omega^{(+)}(T,t_0) \\ &\times\ [\Omega^{(+)}(t_1,t_0)]^{-1}\hat{x}_I(t_1)\Omega^{(+)}(t_1,t_2)\hat{x}_I(t_2)\Omega^{(+)}(t_2,t_0) \\ &\times\ \Omega^{(+)}(t_0,-T)|0\rangle\left(e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle\right)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

为了将上式中的讨厌的因子去掉，我们将它除以 $1=\langle 0_H|0_H\rangle$，我们得到：

$$\langle 0_H|T[\hat{x}_H(t_1)\hat{x}_H(t_2)]|0_H\rangle = \frac{\langle 0|\Omega^{(+)}(T,t_1)\hat{x}_I(t_1)\Omega^{(+)}(t_1,t_2)\hat{x}_I(t_2)\Omega^{(+)}(t_2,-T)|0\rangle}{\langle 0|\Omega^{(+)}(T,-T)|0\rangle}\,,$$

这可以用编时指数表达出来。于是，如果我们对于普遍的生成泛函 (1.35)，我们得到：

$$Z_H[J(t)]\equiv\langle 0_H|\hat{S}_J|0_H\rangle = \frac{\langle 0|T\left[\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt[\hat{H}_I(t)-J(t)\hat{x}_I(t)]\right)\right]|0\rangle}{\langle 0|T\left[\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\hat{H}_I(t)\right)\right]|0\rangle}\,. \tag{1.41}$$

这个伟大的等式左边是从严格“真空”到严格“真空”的有源散射矩阵元，它实际上包含了无源系统（ $J=0$ ）的所有编时格林函数，也就是所谓的编时格林函数的生成泛函；在等式右边，它等于两个跃迁矩阵元之比：分母上是不含外源的时间演化算符在自由哈密顿量真空之间的跃迁矩阵元；分子上是含有外源的时间演化算符在自由哈密顿量真空之间的跃迁矩阵元。如果我们能够计算得出等式右边的结果，我们就得到了系统所有的编时格林函数。按照量子场论中的约化公式，我们就可以进一步得到任何一个具体散射过程的跃迁几率。

§3. 编时关联函数与生成泛函

¶ 在第 §2 小节的末尾，我们得到了系统编时格林函数的生成泛函的一个重要表达式 (1.41)。这个公式就是指引我们前进的灯塔。这个公式告诉我们，我们真正需要的就是从真空到真空的跃迁矩阵元，中间也许间杂着若干个算符的编时乘积。路径积分的方法告

刻川制造

诉我们，这种跃迁矩阵元可以方便的写成路径积分的形式，只不过在散射问题中，我们需要的出态和末态是真空而已。从真空到真空的跃迁矩阵元可以写成：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}x e^{iS_c[x]} \,. \tag{1.42}$$

如果中间插有海森堡表象中的算符，它也可以写成路径积分的形式，只不过在路径积分的被积函数中应当加上相对应的因子。记住，我们的路径积分是如何引入的。我们是将时间间隔 T （它是趋于无穷的）分成许多小段，每一小段插入坐标的本征态。因此，如果我们在某两个时刻各自多插入一个坐标算符，那么它也将被那个时刻的 x_t 所替代。我们仍然以两点编时格林函数为例，按照公式 (1.41) 算符 x 的两点、编时关联函数 （它又被称为编时格林函数）可以用路径积分写为：[23]

$$\langle T[\hat{x}_H(t_2)\hat{x}_H(t_1)]\rangle \equiv \langle 0_H|T[\hat{x}_H(t_2)\hat{x}_H(t_1)]|0_H\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int \mathcal{D}x\, x_{t_2}x_{t_1}e^{iS[x_t]} \,, \tag{1.43}$$

其中 $\mathcal{Z}$ 代表公式 (1.42) 中的路径积分。类似地，我们可以定义算符 $\hat{x}$ 的多点编时关联函数：

$$\langle T[\hat{x}_H(t_n)\cdots\hat{x}_H(t_1)]\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int \mathcal{D}x\, x_{t_n}\cdots x_{t_1}e^{iS[x_t]} \,, \tag{1.44}$$

如果我们愿意，我们还可以考虑其他算符的关联函数。由基本算符（在目前这个简单的例子中就是算符 $\hat{x}$ ）构成的算符称为复合算符（ composite operator ）。例如，算符 $\hat{x}^2(t)$ 和 $\hat{x}\hat{\partial}^2\hat{x}(t)$ 都是复合算符。复合算符的编时关联函数的定义也是类似的，例如我们可以定义：

$$\langle T[\hat{x}_H^2(t_n)\cdots\hat{x}_H^2(t_1)]\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int \mathcal{D}x\, x_{t_n}^2\cdots x_{t_1}^2e^{iS[x_t]} \,. \tag{1.45}$$

这里需要指出路径积分的一个重要特点，在上述编时关联函数的定义中，等式左边是用算符形式写出的。一般来说，不同时刻的算符是不可对易的；等式右边是利用路径积分形式表达的，这里的算符都换成了它们的本征值（纯粹的数），因此在等式右边的路径积分下，乘积 $x_{t_n}\cdots x_{t_1}$ 中各个因子的次序可以随便换，完全不影响路径积分的值。这一特点正是路径积分的一大优势。

¶ 为了使得我们的公式看起来更像连续时空的情形，我们将做如下的约定，对于分立的求和，我们都写成连续的积分；类似地，我们将引入泛函偏微商：

$$\sum_t a \Leftrightarrow \int dt \,, \quad \frac{\partial}{a\partial J_t} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta J(t)} \,. \tag{1.46}$$

这样一来，我们的结果都可以写成连续的形式。但是大家心里应当清楚，真正有确切定义的是相应的分立形式，连续的形式仅仅是为了符号上的方便而已。

[23] 在这个课程中，我们将完全等价地使用关联函数和格林函数两个词。从它们最初的定义来说，关联函数更多地用于统计物理的文献中；格林函数则更多地用在粒子物理的文献中。由于两者可以用 Wick 转动（参见第 §5 节）联系在一起，我们将不加区别地使用这两个词语。

刘川制造

为了能够方便地计算各种算符的关联函数，我们可以在路径积分的形式下引入关联函数的生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$：

$$\mathcal{Z}[J]=\int \mathcal{D}x e^{iS[x_t]+i\int dt J(t)x(t)}\,, \tag{1.47}$$

其中函数 J_t 称为“外源”。如果用正则量子化的语言来说，$\mathcal{Z}[J]$ 就是含有外源的系统从自由哈密顿量真空到真空的跃迁矩阵元，也就是公式 (1.41) 中等号右边的分子。生成泛函的用处就在于：一旦我们知道了 $\mathcal{Z}[J]$ 作为“外源” $J(t)$ 的函数，我们就可以通过对外源进行泛函偏微商来得到合适的关联函数。例如，我们前面引入的两点编时关联函数可以写成：

$$\langle T[\hat{x}_H(t_2)\hat{x}_H(t_1)]\rangle=\frac{1}{i^2\mathcal{Z}}\frac{\delta^2\mathcal{Z}[J]}{\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\bigg|_{J=0}\,. \tag{1.48}$$

很显然，多点的编时关联函数只需要对于生成泛函求更多次的微商，最后令外源等于零就可以得到。换句话说，函数 $\mathcal{Z}[J]$ 包含了算符 $\hat{x}_H(t)$ 的任意点编时关联函数的信息。所以，如果给定一个算符 $\hat{x}_H(t)$ 的一个任意泛函：$F[\hat{x}_H(t)]$，它的编时关联函数可以形式地写成：

$$\langle T\{F[\hat{x}_H(t)\}\rangle=\frac{1}{\mathcal{Z}[J]}F\left[\frac{\delta}{i\delta J(t)}\right]\cdot\mathcal{Z}[J]\bigg|_{J=0}\,. \tag{1.49}$$

也就是说，编时格林函数中的每一个算符 $\hat{x}_H(t)$，在路径积分表示下都可以形式地代换为一个偏微商算符 $(\delta/i\delta J(t))$ 作用于生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$。

¶ 作为一个特例，让我们来计算谐振子情形下的生成泛函。我们有：

$$\mathcal{Z}_0[J]=\int \mathcal{D}x\,\exp\left(\frac{i}{2}x(t)K_0(t,s)x(s)+iJ(t)x(t)\right)\,, \tag{1.50}$$

其中我们已经使用了矩阵的记号，重复的矩阵指标代表求和（积分）；$(K_0)_{ts}$ 称为拉氏量的核，它是下列矩阵：

$$(K_0)_{ts}=\left(-\frac{1}{a^2}\hat{\partial}_0^2-\omega^2+i\epsilon\right)_{ts}\,. \tag{1.51}$$

我们可以对指数上的量进行配方：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x(t)(K_0)_{ts}x(s)+J(t)x(t) &= \frac{1}{2}\left(x(t)-J(s)(K_0^{-1})_{st}\right)(K_0)_{tu}\left(x(u)-(K_0^{-1})_{uv}J(v)\right)\\ &- \frac{1}{2}J(s)(K_0^{-1})_{sv}J(v)\,,\end{aligned}$$

其中 (K_0^{-1}) 代表矩阵 K_0 的逆矩阵。将此式带入 $\mathcal{Z}_0[J]$ 的表达式，并且将对于 $x(t)$ 的积分变量平移，我们得到：

$$\mathcal{Z}_0[J]=\exp\left(-\frac{i}{2}J(s)K_0^{-1}(s,v)J(v)\right)\mathcal{Z}_0[0]\,, \tag{1.52}$$

其中 $\mathcal{Z}_0[0]$ 为外源等于零时的谐振子生成泛函，也就是谐振子的跃迁矩阵元 (1.19)。利用这个结果，我们可以很简单地得到谐振子的关联函数：

$$\langle T[\hat{x}_H(t)\hat{x}_H(s)\rangle=i(K_0^{-1})_{ts}\,. \tag{1.53}$$

刻川制造

§4. 非谐振子的微扰展开

¶ 下面我们来讨论一下非谐振子的情形。一个具有形如 $V(\hat{x})=\frac{\lambda}{4!}\hat{x}^4$ 非谐相互作用的非谐振子的生成泛函可以用路径积分表达为：

$$\mathcal{Z}[J]=\int \mathcal{D}x e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int dt x^4(t)}\exp\left(\frac{i}{2}x(t)K_0(t,s)x(s)+iJ(t)x(t)\right)\,. \tag{1.54}$$

按照前面的讨论，我们可以将 $\exp(-i\frac{\lambda}{4!}\int dt x^4(t))$ 中的 $x(t)$ 换成对于 $J(t)$ 的偏微商：

$$\mathcal{Z}[J]=e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int dt\frac{\delta^4}{\delta J^4(t)}}\mathcal{Z}_0[J]\,. \tag{1.55}$$

如果我们假定耦合参数 λ 是小的，我们可以将对它进行展开，我们形式地得到：

$$\mathcal{Z}[J]=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^n\left(\int dt\frac{\delta^4}{\delta J^4(t)}\right)^n\right]\mathcal{Z}_0[J]\,, \tag{1.56}$$

其中 $\mathcal{Z}_0[J]$ 为谐振子的生成泛函 (1.52)。这个式子就是非谐振子的生成泛函的微扰展开式。类似地，我们可以写出编时关联函数的微扰展开式。例如，对于非谐振子的两点编时关联函数我们有：

$$\langle T[\hat{x}_H(t_2)\hat{x}_H(t_1)]\rangle=\frac{\left((-i)^2\frac{\delta^2}{\delta J(t_2)\delta J(t_1)}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^n\left(\int dt\frac{\delta^4}{\delta J^4(t)}\right)^n\right\}\cdot\mathcal{Z}_0[J]\Big|_{J=0}}{\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^n\left(\int dt\frac{\delta^4}{\delta J^4(t)}\right)^n\right\}\cdot\mathcal{Z}_0[J]\Big|_{J=0}}\,. \tag{1.57}$$

其他编时格林函数也可以类似地得到。这个展开式可以用所谓的费曼图方便地表示出来。

游戏 1.6 *验明上面关于两点编时关联函数的展开式可以用费曼图表示出来。*

¶ 需要指出的是，上面得到的关于非谐振子的微扰展开式 (1.56)（以及相应的编时关联函数的微扰展开式）作为耦合参数 λ 的一个幂级数并不是收敛的！事实上，对于非谐振子，我们可以证明这个级数一定是发散的。我们知道：任何幂级数都有一个收敛半径，我们可以证明对于非谐振子的微扰展开式而言，它的收敛半径是 0。也就是说，在复平面上 $\lambda=0$ 是一个本性奇点。

游戏 1.7 *从非谐振子的生成泛函的（分立的）定义出发，同时将参数 λ 变为 $i\lambda$，证明这时分立形式的路径积分发散，无论 $|\lambda|$ 多么小。从而说明非谐振子的生成泛函在 $\lambda=0$ 有一个本性奇点。*

尽管这些微扰展开式都是发散的级数，我们仍然可以利用它们。这些级数在数学上被称为渐近级数或渐近展开。一个任意函数 $f(z)$ 的渐近展开在数学上记为：

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\,. \tag{1.58}$$

刘川制造

它的含义是：对于固定的一个整数 n，如果我们将级数的前 $(n+1)$ 项的部分和记为 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$，那么它满足：$z^{-n}|f(z)-S_n(z)|$ 在 $|z|$ 趋于零时也趋于零：$\lim_{|z|\to 0}z^{-n}|f(z)-S_n(z)|=0$。利用渐进展开的语言，我们可以说：非谐振子的微扰展开式是关于耦合参数 λ 的一个渐近展开式。虽然这个特性我们是在这个玩具模型中发现的，但实际上我们目前所了解的所有量子场论的微扰展开式都属于这个类型；也就是说这些微扰展开都是发散的渐近展开式。[24] 这个事实告诉我们：一个量子场论体系的物理性质总是有一些是不能用微扰展开来计算的。这类性质我们可以笼统地成之为体系的非微扰性质。要研究这些非微扰性质，就必须利用其他非微扰的手段。遗憾的是，虽然量子场论已经诞生了七十年了，我们对于量子场论的非微扰性质的研究手段还是十分有限的。

§5. Wick 转动与欧式空间路径积分

¶ 如果我们将时间旋转到纯虚的轴上，我们会得到另一类十分重要的路径积分。如果在公式 (1.6) 中我们令 $(ia_t)=a_\tau$，$(iT)=N_t(ia_t)=N_ta_\tau=\beta$，那么这个公式变为：

$$\left\langle x_f\left|e^{-\beta H}\right|x_i\right\rangle=\int\left(\prod_{t=1}^{N-1}dx_t\right)\exp\left\{-a_\tau\sum_{\tau=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\tau+1}-x_\tau}{a_\tau}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}x_\tau^2+V(x_\tau)\right]\right\}.$$

由于各个 x_τ 的积分是沿着实轴的，我们发现上面这个表达式只要在 $\Re(a_\tau)>0$ 的情况下就是收敛的。最为简单的情况就是令 $a_\tau>0$ 为一个正的实数。我们发现等式左边与我们在统计物理中的正则系综的配分函数类似，只要我们令初始的坐标 x_i 与末态 x_f 相同并且对其积分，我们就得到系统的正则配分函数 $Z=Tre^{-\beta\hat{H}}$：

$$Z=\int\left(\prod_{\tau=0}^{N_t-1}dx_\tau\right)\exp\left\{-a_\tau\sum_{\tau=0}^{N_t-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\tau+1}-x_\tau}{a_\tau}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}x_\tau^2+V(x_\tau)\right]\right\},\tag{1.59}$$

其中我们要求 x_τ 满足周期边条件，即：$x_{N_t}=x_0$。它也可以形式地写为：

$$Z=\int\mathcal{D}x e^{-S_E[x_t]},\tag{1.60}$$

其中 $S_E[x_t]$ 称为 Euclidean 空间的作用量：

$$S_E[x_t]=a_\tau\sum_{t=0}^{N_t-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_{t+1}-x_t}{a_\tau}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}x_\tau^2+V(x_\tau)\right],\tag{1.61}$$

¶ 从原先的时间演化算符 $e^{-iT\hat{H}}$ 的矩阵元出发，经过变换：$(ia_t)=a_\tau$，我们从原先的实时间变为了虚时间。因此，公式 (1.59) 又被称为虚时路径积分，或称为 Euclidean

[24] 量子电动力学的微扰展开式（这大概是我们最自豪的微扰展开式了）是发散的这个事实首先是 Dyson 证明的。随后，人们发现只要理论中存在使得作用量有限的经典解（例如标量场中的 kink，规范场中的 instanton 等等），那么微扰展开式就一定是发散的。

刘川制造

空间的路径积分；而原先的时间演化算符 $e^{-iT\hat{H}}$ 的矩阵元的路径积分就被称为实时路径积分，或称为 Minkowski 空间的路径积分。从实时路径积分到虚时路径积分之间的变换被称为 Wick 转动。

¶ Wick 转动也可以从连续形式的作用量看出。我们以一维谐振子为例，它的连续时间的作用量由 (1.23) 给出。其中对于实时的积分可以从实轴上旋转到沿虚轴进行。当时间间隔 $T \to \infty$ 时，关于 $X(t)$ 的傅立叶级数变为一个傅立叶积分。同样的经典的作用量可以写出对于傅立叶模式的积分。Wick 转动之所以能够进行，恰恰是由于使得算符 $(p_0^2 - \omega^2 + i\epsilon) = 0$ 的谱 p_0 都位于 p_0 复平面的第二和第四象限。所以，对于 p_0 的积分可以从实轴旋转到虚轴进行。

¶ 在 Euclidean 空间，我们可以构造 Euclidean 空间的编时关联函数，它们也就是海森堡算符的编时乘积的正则系综平均值：

$$\langle T[\hat{x}_H(\tau_2)\hat{x}_H(\tau_1)]\rangle \equiv \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}x x_{\tau_2} x_{\tau_1} e^{-S_E[x_\tau]} \,. \tag{1.62}$$

为了方便地计算它们，我们可以类似地定义生成泛函：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x_\tau] + \sum_\tau J_\tau x_\tau} \,. \tag{1.63}$$

利用这个生成泛函，我们可以将 Euclidean 空间的两点编时关联函数表达成：

$$\langle T[\hat{x}_H(\tau_2)\hat{x}_H(\tau_1)]\rangle \equiv \frac{1}{Z[J]}\frac{\partial^2 Z[J]}{\partial J_{\tau_2}\partial J_{\tau_1}}\bigg|_{J=0} \,. \tag{1.64}$$

¶ 对于一个谐振子，它的 Euclidean 空间的配分函数是可以明确计算出来的。一个谐振子的 Euclidean 空间的生成泛函也可以直接得到：

$$Z_0[J] = \exp\left(\frac{1}{2}J_s(K_0^{-1})_{sv}J_v\right) Z_0[0] \,, \tag{1.65}$$

其中 $(K_0) = (-\hat{\partial}_0^2 + \omega^2 a_0^2)$，$Z_0[0]$ 代表谐振子（无外源的）的正则配分函数。

¶ 如果我们的 Euclidean 空间的作用量可以写成谐振子的作用量 $S_E^{(0)}[x_t]$ 再加上一个弱的相互作用项；例如，形如 $\frac{\lambda}{4!}x^4$ 的非谐项，那么我们可以类似地构造出生成泛函以及相应的编时关联函数的微扰展开式。这些微扰展开仍然可以利用 Euclidean 空间的费曼图来表达。同样的，这些微扰展开式实际上是关于耦合参数 λ 的，发散的渐近展开式。

游戏 1.8 *对于 $V(x) = \frac{\lambda}{4!}x^4$ 的非谐振子，试讨论其 Euclidean 空间的费曼规则。*

¶ Euclidean 空间的虚时跃迁矩阵元的路径积分可以写成：

$$\begin{aligned} Z[x_f,\tau_f;x_i,\tau_i] &= \int \mathcal{D}x e^{-S_E[x_\tau]} \,, \\ S_E[x_\tau] &= \sum_{\tau\sigma}\frac{1}{2a_\tau}x_\tau\left(-\hat{\partial}_0^2 + \omega^2 a_\tau^2\right)_{\tau\sigma} x_\sigma + \sum_\tau V(x_\tau) \,. \end{aligned} \tag{1.66}$$

刘川制造

现在我们来讨论所谓的长时间极限：$\tau_f \to +\infty$，$\tau_i \to -\infty$，因此 $\beta = (\tau_f - \tau_i) \to \infty$。这时，上述矩阵元可以写成：

$$\langle x_f, \tau_f | e^{-\beta \hat{H}} | x_i, \tau_i \rangle = \sum_n \langle x_f | n \rangle e^{-\beta E_n} \langle n | x_i \rangle \, ,$$

其中 $|n\rangle$ 代表哈密顿量 $\hat{H}$ 的严格本征态，其能量为 E_n。由于哈密顿量总是有下界的，与它的最低的本征值对应的量子态我们定义为系统的真空态：$|0\rangle$。于是我们看到，如果虚时间隔 β 很大，对于上述跃迁矩阵元的贡献最主要的由真空到真空的跃迁矩阵元给出：

$$\langle x_f, \tau_f | e^{-\beta \hat{H}} | x_i, \tau_i \rangle \simeq \langle x_f | 0 \rangle \langle 0 | x_i \rangle \langle 0 | e^{-\beta \hat{H}} | 0 \rangle \, , \tag{1.67}$$

也就是说，从出态到末态的跃迁矩阵元就是从“真空”到“真空”的跃迁矩阵元在乘以相应的真空态的波函数。

类似的，虚时的编时关联函数也可以近似为：

$$\lim_{\beta \to \infty} \langle T[\hat{x}_H(\tau_2) \hat{x}_H(\tau_1)] \rangle = \frac{{}_H\langle 0 | T[\hat{x}_H(\tau_2) \hat{x}_H(\tau_1)] | 0 \rangle_H}{{}_H\langle 0 | 0 \rangle_H} \, . \tag{1.68}$$

于是我们得到（假定 $\tau_2 > \tau_1$ ）：

$$\langle T[\hat{x}_H(\tau_2) \hat{x}_H(\tau_1)] \rangle \simeq \sum_n |\langle 0 | \hat{x} | n \rangle|^2 e^{-(\tau_2 - \tau_1)(E_n - E_0)} \, . \tag{1.69}$$

所以我们看到，在大的时间间隔下，真正对于编时关联函数起主要贡献的只是从真空到真空的跃迁矩阵元。[25]

游戏 1.9 *验证上述规则。*

这个结论在 Wick 转动以后的虚时跃迁矩阵元中体现得最为直接。

相关的阅读

本章主要讨论了量子力学系统的路径积分表述。这部分内容许多标准的教科书中都有。经典的讨论可以参考 Feynman 的书 [11]。第 §2 节中的内容涉及面比较广：有关波算符以及形式散射理论，可以参考 R. Newton 的经典著作 [4]；有关相互作用表象的讨论，可以参考标准的量子场论的教科书，例如 [2, 3]。格林函数、关联函数以及 Wick 转动和欧氏空间的路径积分表示以及它们与统计物理的关系，可以参考 Ramond 的量子场论书 [7] 以及格点场论的书 [10]。

[25] 如果用统计物理的语言，大的虚时间隔意味着低温（ $\beta = 1/(k_B T)$ ）。

刘川制造

第二章　　标量场的路径积分 — 回旋曲

有了前面一章关于一个自由度的量子力学系统路径积分的讨论，我们在这一节中将把路径积分的方法推广到多个自由度，这样就自然得到了标量场的路径积分表述。这一章中，我们将给出标量场论的路径积分表示；同时，利用路径积分的语言，我们可以更好地理解标量场论的重整化问题，这是本章的一个重点，也是难点之一。

§6. 标量场路径积分的定义

一个符合洛伦兹对称性的相对论性标量场的拉格朗日密度可以写成：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2-V(\phi)\,, \tag{2.1}$$

与之相应的哈密顿密度是：

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})+\frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{x}))^2+\frac{m^2}{2}\phi(\mathbf{x})^2+V(\phi(\mathbf{x}))\,. \tag{2.2}$$

系统的总哈密顿量是哈密顿密度的三维体积分：$\hat{H}=\int d^3\mathbf{x}\mathcal{H}(\mathbf{x})$。这个系统中我们可以取场 ϕ 是对角的表象。这个表象中的基矢可以取为：$|\{\phi(\mathbf{x})\}\rangle$。这时，量子场 $\phi(\mathbf{x})$ 满足：

$$\hat{\phi}(\mathbf{x})|\{\phi(\mathbf{x})\}\rangle=\phi(\mathbf{x})|\{\phi(\mathbf{x})\}\rangle\,. \tag{2.3}$$

而相应的正则动量 $\pi(\mathbf{x})$ 则可以写成：

$$\hat{\pi}(\mathbf{x})=-i\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}\,, \tag{2.4}$$

我们关心的是：如果系统在 $t=t_i$ 时处于 $\phi^{(i)}(\mathbf{x})$，在 $t=t_f$ 时跃迁到 $\phi^{(f)}(\mathbf{x})$ 的矩阵元：

$$Z[\phi^{(f)},t_f;\phi^{(i)},t_i]=\langle\{\phi^{(f)}(\mathbf{x})\},t_f|e^{-iTH}|\{\phi^{(i)}(\mathbf{x})\},t_i\rangle\,. \tag{2.5}$$

其中 $T=(t_f-t_i)$ 为时间间隔。这样的矩阵元被称为薛定谔泛函（Schrödinger functional），它可以看成是初始场 $\phi^{(i)}$ 和末态场 $\phi^{(f)}$ 的泛函。

¶ 初看起来，一个标量量子场系统是我们前面讨论的单自由度量子力学系统的直接推广。从原始的（或者说：天真的）含义来讲，量子场的自由度数目是（不可数的）无穷

大，因为只要 $\mathbf{x}$ 不同，每一个 $\phi(\mathbf{x})$ 都是独立的自由度，而不同的 $\mathbf{x}$ 的数目是（不可数的）无穷大。学习过量子场论的同学都清楚地知道，这样的一个推广会带来一个重要的问题，那就是紫外发散。[1] 因此，公式 (2.5) 所定义的薛定谔泛函其实仅仅具有形式上的意义。它没有确切的数学定义。所以，虽然我们在开始量子场论的讨论的最初总是叫嚣我们伟大的场论是具有无穷多自由度的量子系统，其实这只是我们头脑中的幻象而已。[2]

破除这种幻象的一个办法是设想我们的场 $\phi(\mathbf{x})$ 并不是定义在每一个空间点的，而是定义在空间的一个格子上，格距为 a。[3] 我们还可以取一个足够大的方盒子，它的三边各有 L 个格点。于是我们就有了一个具有 L^3 个自由度的量子系统。

于是，我们研究的标量场论的哈密顿量可以写成：

$$\hat{H} = a^3 \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2a^2}(\hat{\partial}_i\phi_{\mathbf{x}})(\hat{\partial}_i^*\phi_{\mathbf{x}}) + \frac{m^2}{2}\phi_{\mathbf{x}}^2 + V(\phi_{\mathbf{x}})\,, \tag{2.6}$$

其中 $\hat{\partial}_i$ 和 $\hat{\partial}_i^*$ 表示向前和向后的差分算符，它们的定义是：

$$\hat{\partial}_i\phi_{\mathbf{x}} = \phi_{\mathbf{x}+\hat{i}} - \phi_{\mathbf{x}}\,,\quad \hat{\partial}_i^*\phi_{\mathbf{x}} = \phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}-\hat{i}}\,, \tag{2.7}$$

于是，完全仿照量子力学玩具中推导路径积分的方式，我们可以将时间间隔 T 分为 N_t 小份，每一份的间隔为：$a = T/N_t$。然后，我们可以在中间插入完备基：$|\phi_x\rangle\langle\phi_x|$，这样我们自然引入了四维时空指标 $x = (x^0, \mathbf{x})$，这里 x^0 标志不同的时间片。我们强调指出，这个推导与第 (§1) 小节中我们对量子力学玩具的推导步骤完全一样，所不同的是，在量子力学玩具中我们只有一个变量 x；这里我们有 N 多个变量 $\phi_{\mathbf{x}}$，其他的地方完全相同。我们得到时间演化算符的跃迁矩阵元（薛定谔泛函）的路径积分的形式为：[4]

$$\begin{aligned} Z[\phi^{(f)}, t_f; \phi^{(i)}, t_i] &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}\,, \\ S[\phi_x] &= a^4 \sum_x \frac{1}{2a^2}(\hat{\partial}^\mu\phi_x)(\hat{\partial}_\mu^*\phi_x) - \frac{m^2}{2}\phi_x^2 - V(\phi_x)\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中积分的测度 $\mathcal{D}\phi = \prod_{x,0<x^0<N_t} d\phi_x$，也就是说对 $0 < x^0 < N_t$ 的所有时间片上的每个场积分。在时间片 $x^0 = 0$ 和时间片 $x^0 = N_t$ 处，场 ϕ_x 满足指定的 Dirichlet 边条件：$\phi_x|_{x^0=0} = \phi_{\mathbf{x}}^{(i)}$，$\phi_x|_{x^0=N_t} = \phi_{\mathbf{x}}^{(f)}$。

游戏 2.1 *请验证表达式 (2.8)。*

[1] 这个问题在自由场论中可以回避，但是在有相互作用的量子场论中必定存在。

[2] 更为详细的讨论涉及到标量场论的正规化和重整化，参见后面 §9 和 §11 中的讨论。

[3] 这不仅仅是一个数学的工具，而是有着重要的物理基础的。它意味着任何的量子场论都只是在一定时空尺度之上定义的。不存在可以一直有效到零尺度（无限高时空分辨率）的量子场论。

[4] 这里 Minkowski 空间中四维形式的差分算符的定义为：$\hat{\partial}_\mu\phi_x = \phi_{x+\hat{\mu}} - \phi_x$，$\hat{\partial}_\mu^*\phi_x = \phi_x - \phi_{x-\hat{\mu}}$，与三维空间中的定义 (2.7) 类似。同样的，四维的逆变指标（上标）和协变指标（下标）之间的变换规则也与连续的 Minkowski 时空中的变换规则相同。

刻川制造

¶ 为了使得符号上更接近于连续的情形，我们约定：[5]

$$\phi_x = \phi(x)\,,\quad \int d^4x = a^4\sum_x\,,\quad \partial_\mu\partial^\mu = (1/a^2)\hat{\partial}^*_\mu\hat{\partial}^\mu\,, \tag{2.9}$$

这样一来，公式 (2.8) 中的作用量就可以写成纯粹连续的形式：

$$S[\phi_x] = \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - \frac{m_0^2}{2}\phi(x)^2 - V(\phi)\right)\,.$$

类似的，我们可以定义所谓的泛函微商：

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \equiv a^{-3}\frac{\partial}{\partial\phi(\mathbf{x})}\,, \tag{2.10}$$

这样一来，我们显然有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{y}) &= \delta_{\mathbf{xy}}\,,\\ \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{y}) &= a^{-3}\delta_{\mathbf{xy}} \equiv \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

有了这些约定，我们以下的公式将直接写成连续时空的形式，但是读者应当心里清楚：它们在数学上实际代表的是分立时空的形式。

¶ 我们将下面直接讨论与散射问题相关的跃迁矩阵元。这时，时间间隔 $T\to\infty(1-i\epsilon)$，我们只需要从真空到真空的跃迁矩阵元。为此，我们可以定义标量场的生成泛函：

$$\mathcal{Z}[J] = \int\mathcal{D}\phi\exp\left(iS[\phi] + i\int d^4x J(x)\phi(x)\right)\,. \tag{2.12}$$

所有的编时格林函数可以由对外源的合适微商得到。例如：

$$\langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[J]}\frac{\delta^2\mathcal{Z}[J]}{(i)^2\delta J(x)\delta J(y)}\bigg|_{J=0}\,. \tag{2.13}$$

因此，我们可以毫不夸张地说，标量场的生成泛函 (2.12) 包含了标量场论所有与场粒子散射有关的信息。它就是我们需要的一切！事实上，这个表达式（分立形式的）可以看成是标量场论的一个非微扰定义。

¶ 一种方便地处理标量场论的办法是将上面定义的闵氏空间中的生成泛函的路径积分进行 Wick 转动，利用：$x_0 = -i\bar{x}_0$，$d^4x = -id^4\bar{x}$，$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = -\bar{\partial}_\mu\phi\bar{\partial}_\mu\phi$，这样我们就得到了欧氏空间的生成泛函：[6]

$$\mathcal{Z}_E[J] = \int\mathcal{D}\phi\exp\left(-S_E[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)\right)\,, \tag{2.14}$$

[5] 在联系时空偏微商时有一定的不确定性，因为在分立的时空中，存在向前差分和向后差分。这一点对于标量场论没有关系，因为我们可以将其作用量分部积分一次，从而其作用量只依赖两者的缩并：$\hat{\partial}^*_\mu\hat{\partial}^\mu$。

[6] 然后我们在不至于引起误会的情形下，略去了欧氏空间坐标和偏微商上面的一横。

刘川制造

其中的欧氏空间的作用量（能量）可以写成：

$$S_E[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \right) . \tag{2.15}$$

¶ 对于自由的标量场论，我们可以计算出它的生成泛函的具体表达式：

$$\mathcal{Z}_0[J] = \exp\left(-\frac{i}{2} J(x)[K_0^{-1}]_{xy} J(y) \right) , \tag{2.16}$$

其中自由场的核的表达式为：

$$[K_0]_{xy} = \left(-\hat{\partial}^2 - m_0^2 + i\epsilon \right)_{xy} . \tag{2.17}$$

自由标量场的两点编时格林函数实际上就是上述核的逆。利用平移不变性，我们可以将它在傅立叶空间写成：

$$(K_0)^{-1}_{xy} = \langle T[\phi(x)\phi(y)] \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \frac{i}{\hat{k}^2 - m_0^2 + i\epsilon} , \tag{2.18}$$

其中在动量空间的积分实际上代表的是下列分立的求和：[7]

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \frac{1}{\Omega} \sum_k , \tag{2.19}$$

这里 $\Omega = N_t V/a^3$ 为总的自由度数目，而 $\hat{k}^2 = (4/a^2)[\sin^2(k_0 a/2) - \sum_{i=1}^3 \sin^2(k_i a/2)]$。

如果我们是在欧氏空间，那么相应的生成泛函是：

$$\mathcal{Z}_{E0}[J] = \exp\left(\frac{1}{2} J(x)[K_{E0}^{-1}]_{xy} J(y) \right) , \tag{2.20}$$

其中欧氏空间中的两点传播子为：

$$(K_{E0})^{-1}_{xy} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \frac{1}{\hat{k}_E^2 + m_0^2} , \tag{2.21}$$

而 $\hat{k}_E^2 = (4/a^2)\sum_\mu \sin^2(k_\mu a/2) = (2/a^2)\sum_\mu (1 - \cos(k_\mu a))$。

§7. 微扰展开与费曼规则

¶ 如果耦合参数 λ_0 是小的，标量场论生成泛函的路径积分表达式 (2.12) 可以进行微扰展开：

$$\mathcal{Z}[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i\lambda_0}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{i^4 \delta J(x)^4} \right)^n \mathcal{Z}_0[J] , \tag{2.22}$$

[7] 如果我们格子的总体积趋于无穷大，这个求和就趋于在倒格子空间中第一布里渊区中的积分。

刘川制造

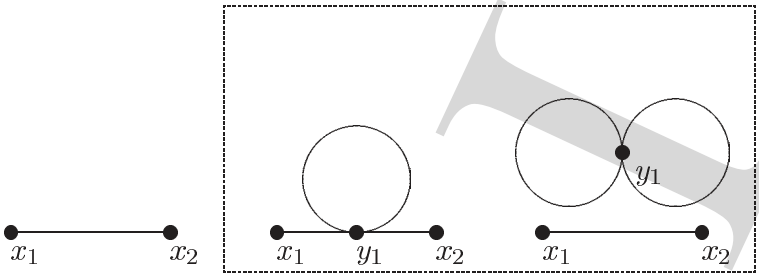


图 2.1：标量场论的两点编时格林函数 (2.23) 中分子部分（花括号中的量）所对应的费曼图表示，这里坐标 y_1 需要对全时空求和（积分）。这里给出的是准到相互作用的零阶（第一个图）和一阶（虚线框中）的贡献。这些图中既包含连接图的贡献，还包含非连接图的贡献。

其中 $\mathcal{Z}_0[J]$ 为自由标量场的生成泛函 (2.16)。当然，类似于第 (1) 章中的讨论，这个微扰展开式仍然必须理解为一个发散的、渐近展开式。

¶ 类似地，编时格林函数也可以表达成微扰展开的形式。例如，对于公式 (2.13) 中的两点编时格林函数我们有：

$$\langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[J]}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i\lambda_0}{4!}\int d^4x\frac{\delta^4}{i^4\delta J(x)^4}\right)^n \frac{\delta^2\mathcal{Z}_0[J]}{i^2\delta J(x)\delta J(y)}\right\}\Bigg|_{J=0}, \quad (2.23)$$

其中的生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$ 应当用公式 (2.22) 的微扰展开式代入。

¶ 以上的微扰展开可以用所谓的费曼图来表示，与这些图形对应的是所谓的费曼规则。以两点编时格林函数为例，我们在图 2.1 中，画出了标量场论中两点编时格林函数分子上的量（也就是公式 (2.23) 中花括号中的量）最低的两阶贡献所对应的费曼图。第一个图是正比于 $(\lambda_0)^0$，就是不含相互作用的、自由标量场论中的两点格林函数；在虚线框中是考虑了相互作用的一阶，也就是正比于 (λ_0) 的贡献，其中的第一个图是所谓的连接图（ connected diagram ），或者又称为连通图；第二个图是一个不连接图（ disconnected diagram ），或者称为不连通图。在图 2.2 中，我们画出了相互作用的二阶对于两点格林函数的分子的贡献。到相互作用的第二阶，一共包含六个费曼图，其中三个是连接图，三个是非连接图。

游戏 2.2 *验证到相互作用的第二阶，我们的确有这些图。*

刘川制造

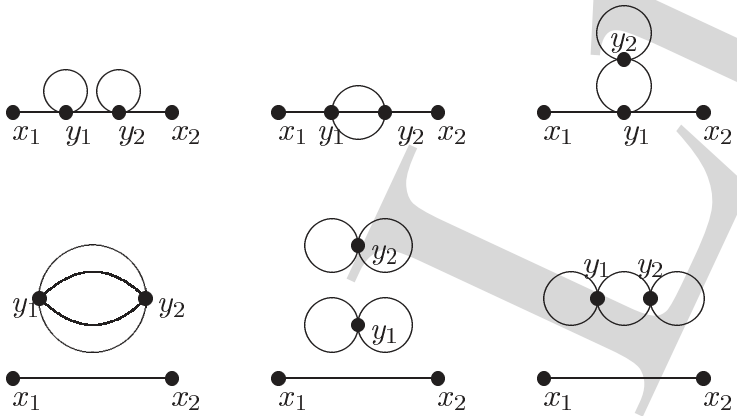


图 2.2：标量场论的两点编时格林函数 (2.23) 中分子部分（花括号中的量）所对应的费曼图表示，这里坐标 y_1 和 y_2 需要对全时空求和（积分）。本图给出的是准到相互作用的二阶的贡献。它既包含连接图（第一行三个图）的贡献，也包含非连接图（第二行三个图）的贡献。

¶ 标量场论的生成泛函 $Z[J]$ 以及相应的编时格林函数的费曼图表示中既包含连接图，又包含非连接图。一个重要的关系就是，如果我们取生成泛函 $\mathcal{Z}[J]$ 的对数，那么它将仅仅包含连接图。对于两点编时格林函数，我们可以验明，公式 (2.23) 中分子部分（花括号中的量）如果除以分母，则将只含有连接图的贡献。在低阶，这个结论可以通过简单地考察验明。对于任意阶，也可以通过数学归纳法普遍证明。于是，由于非连接图被分母上的贡献正好消去，在计算编时格林函数时，我们可以仅仅考虑连接图的贡献。

游戏 2.3 *到相互作用的第二阶，验证这个结论。*

¶ 在坐标空间的编时格林函数的费曼图的规则可以总结如下：

费曼规则.1 *$\lambda\phi^4$ 标量场论的费曼规则（坐标空间）：*

- *对于 n 点连通编时格林函数 $\langle T[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]\rangle$，标出相应的时空点：$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$，在每一个时空点引出一条线（外腿）。*
- *到相互作用的第 m 阶，分别在 m 个时空点：$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 处引入 m 个相互作用的顶点，每个顶点引出四条（对应于 ϕ^4 的相互作用）线。*
- *将上述外腿的线（n 条）以及相互作用顶点的线（$4m$ 条）以各种可能的拓扑形式*

刻川制造

两两相连。相互作用的 m 阶对于 n 点编时格林函数贡献就等于所有可能的、拓扑不等价的连接图的贡献之和。

- *每一条从时空点 x 到时空点 y 的连线都对应于一个标量场的自由传播子 $(K_0)^{-1}_{xy}$，它的具体形式由公式 (2.18) 给出。*
- *每一个相互作用顶点都对应于一个因子 $(-i\lambda_0)$。*
- *如果图中存在对称（等价）的连线，必须将该图乘以一个对称因子。*
- *对于所有的相互作用的顶点的时空坐标（也就是 y_1，y_2，$\cdots$，y_m ）求和（积分）。*

¶ 由于我们的时空具有（分立的）平移不变性，我们可以将所有的场进行（分立的）傅立叶变换。一般来说，一个 n-点连通格林函数 $G_c(x_1,\cdots,x_n)$，我们可以定义其动量空间的对应物：[8]

$$\tilde{G}_c(p_1,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)=\int d^4x_1\cdots d^4x_n e^{-i\sum_i p_i\cdot x_i}G_c(x_1,\cdots,x_n)\,, \tag{2.24}$$

我们可以得到在动量空间中的费曼规则：

费曼规则.2 *$\lambda\phi^4$ 标量场论的费曼规则（动量空间）：*

- *对于动量空间的连接 n 点编时格林函数 $\tilde{G}_c(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，标出相应的 n 个外点。从每一个外点引出一条外腿，它们分别对应于流入动量为 p_1，p_2，$\cdots$，p_n。*
- *到相互作用的第 m 阶，分别引入 m 个相互作用顶点，每个顶点引出四条（对应于 ϕ^4 的相互作用）线。*
- *将上述外腿的线（ n 条）以及相互作用顶点的线（ $4m$ 条）以各种可能的拓扑形式两两相连。相互作用的 m 阶对于动量空间的 n 点格林函数贡献就等于所有可能的、拓扑不等价的连接图的贡献之和。*
- *每一条线中都具有一个相应的四动量，每一个顶点处流入的四动量总和为零（可以相差 $2\pi/a$ ）。*
- *每一条从点 x 到点 y 的连线都对应于一个标量场的自由传播子，它的具体形式为：*

$$\frac{i}{\hat{p}^2-m_0^2+i\epsilon}\,, \tag{2.25}$$

其中 p 为该线中流动的四动量。

[8]公式 (2.24) 中的 δ-函数在分立的时空中应当理解为：$\delta^4(k)=\frac{1}{\Omega}\sum_k e^{ik\cdot x}=a^{-4}\delta_{k0}$，其中 Ω 是系统的四维体积。

刘川制造

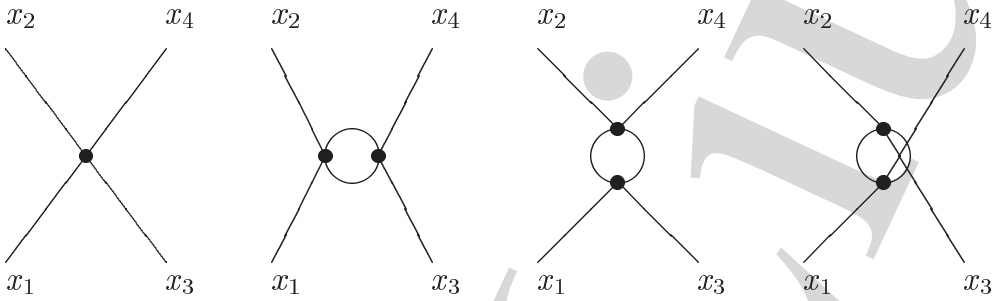


图 2.3 : 标量场论的四点编时格林函数所对应的费曼图表示。本图给出的是准到相互作用的二阶的连接图的贡献。

- *每一个相互作用顶点都对应于一个因子* $(-i\lambda_0)$。
- *如果图中存在对称（等价）的连线，必须将该图乘以一个对称因子。*
- *对于所有的内线动量求和（积分）。*

游戏 2.4 *验证这些费曼图的规则。*

¶ 作为这些规则的一个练习，我们在图 2.3 中画出了 $\lambda\phi^4$ 标量场论中到相互作用的第二阶的四点编时格林函数所对应的单粒子不可约（即所谓的 one particle irreducible 或简称为 1PI ）图。读者不难根据前面给出的费曼图规则写出这些图所对应的表达式。在一个连接费曼图中，我们挑选其中的任意一条非外腿将其剪断，如果剪断后整个费曼图仍然是一个连接图，这个费曼图就被称为单粒子不可约的；否则就被称为单粒子可约的。类似的，我们可以定义任意的 n 粒子不可约图。用这种语言，一个不连接图是一个 0 粒子可约图，而连接图则是 0 粒子不可约图。一般说来，一个图之所以成为单粒子不可约的是因为它包含圈，也就是说某两个顶点之间有不止一条线相连。这样的图就被称为圈图。显然，圈图一定是单粒子不可约的。如果一个图中任意两点之间的连线都只有一条，它就被称为树图。树图一般来说是单粒子可约的，唯一的例外是这个树图中的所有顶点之间的连线都是外腿（例如图 2.3 中的第一个图）。

¶ 如果我们在欧氏空间中研究标量场论，那么前面的费曼规则只需要作两点修改：

费曼规则.3 *$\lambda\phi^4$ 欧氏空间标量场论的费曼规则（欧氏空间）：与标量场论在闵氏空间中的相同，只是进行如下改动：*

- *每一个标量场的自由传播子* $(K_0)^{-1}_{xy}$，*它的具体形式由公式 (2.21) 给出。*
- *每一个相互作用顶点都对应于一个因子* $(-\lambda_0)$。

刘川制造

§8. 有效作用量

¶ 如果我们从理论的生成泛函出发：

$$\mathcal{Z}[J]=\int\mathcal{D}\phi\exp\left(iS[\phi_x]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)\right)\ . \tag{2.26}$$

在微扰论中，它产生了标量场论的所有费曼图。现在我们取它的对数：

$$\mathcal{Z}_c[J]=(-i)\log\mathcal{Z}[J]\ , \tag{2.27}$$

那么可以证明，$\mathcal{Z}_c[J]$ 产生了理论中所有的连接图，或者说它是所有连接图的生成泛函：

$$i\mathcal{Z}_c[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_nG_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\ , \tag{2.28}$$

这里 $G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\langle T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]\rangle_c$ 是理论的 n-点连接格林函数。例如，对于两点连通格林函数，按照公式 (2.13) 我们有：

$$\begin{aligned}\langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle_c &= \frac{\delta^2(i\mathcal{Z}_c[J])}{i\delta J(x)i\delta J(y)}\bigg|_{J=0}\ ,\\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}[J]}\frac{\delta^2\mathcal{Z}[J]}{i\delta J(x)i\delta J(y)}\bigg|_{J=0}-\frac{1}{\mathcal{Z}[J]}\frac{\delta\mathcal{Z}[J]}{i\delta J(x)}\frac{1}{\mathcal{Z}[J]}\frac{\delta\mathcal{Z}[J]}{i\delta J(x)}\bigg|_{J=0}\\ &= \langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle-\langle T[\phi(x)]\rangle\langle T[\phi(x)]\rangle\ .\end{aligned} \tag{2.29}$$

现在我们定义：

$$\begin{aligned}\bar\phi(x) &\equiv \frac{\delta\mathcal{Z}_c[J]}{\delta J(x)}\ ,\\ \Gamma[\bar\phi] &\equiv Z_c[J]-\int d^4x\bar\phi(x)J(x)\ .\end{aligned} \tag{2.30}$$

这个定义的含义是：我们必须从第一个式子中确定出 $J(x)$ 作为 $\bar\phi(x)$ 的泛函，带入到第二个式子中，最后的泛函 $\Gamma[\bar\phi]$ 是作为 $\bar\phi$ 的泛函。它被称为系统的有效作用量。这样的变换读者应当不陌生，它被成为勒让德变换。在经典分析力学中拉格朗日量与哈密顿量之间的变换，还有热力学中内能与自有能之间的变换都是勒让德变换。利用这个定义很容易证明：

$$J(x)=-\frac{\delta\Gamma[\bar\phi]}{\delta\bar\phi(x)}\ , \tag{2.31}$$

游戏 2.5 *请验证公式 (2.31)。*

因此，如果有了泛函 Γ，我们也可以通过勒让德变换得到泛函 $\mathcal{Z}$。泛函 $\Gamma[\bar\phi]$ 之所以被称为有效作用量，是因为对于自由场论，我们可以轻易证明：$\Gamma[\bar\phi]$ 的用 $\bar\phi$ 表达的函数形式与自由标量场论的作用量用 ϕ_x 的函数表达形式完全相同。

刘川制造

游戏 2.6 *试验证这一点。*

如果我们的标量场论不是自由场论，那么 $\Gamma[\bar{\phi}]$ 中还包含了由于相互作用带来的影响。它可以看成是系统的一个等效的作用量，因此被成为有效作用量。对于标量场论来说，我们有：

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \int d^4x \left[-V_{eff}(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} F(\bar{\phi}) \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} + \cdots \right] , \tag{2.32}$$

其中的 $V_{eff}(\bar{\phi})$ 被称为标量场系统的有效势。

¶ 我们可以证明，有效作用量 $\Gamma[\bar{\phi}]$ 实际上是所有单粒子不可约图的生成泛函：

$$\Gamma[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \bar{\phi}(x_1) \cdots \bar{\phi}(x_n) , \tag{2.33}$$

其中的展开系数：$\Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)$ 实际上包含了所有去外腿的（ amputed ）、单粒子不可约（ 1PI ） n-点图的贡献。这些函数被称为 n-点顶点函数 （ n-point vertex function ），又被称为正当顶点（ proper vertex ）。 由于所有的图都可以由顶点函数再加上单粒子的传播子组成，所以在微扰论的分析中，只需要将这些顶点函数的性质讨论清楚就可以了。[9] 一个重要的特例就是两点顶点函数，它实际上就是两点传播子的逆。例如，对于自由标量场论，在动量空间我们有：

$$\tilde{\Gamma}_0^{(2)}(p) \equiv \tilde{\Gamma}_0^{(2)}(p, -p) = iG_0(p)^{-1} = \hat{p}^2 - m_0^2 , \tag{2.34}$$

游戏 2.7 *利用 $\delta\bar{\phi}(x)/\delta\bar{\phi}(y) = \delta^4(x-y)$，从公式 (2.30) 出发并结合公式 (2.31) 证明，两点连通格林函数与两点顶点函数互为逆，即：*

$$-\delta^4(x-y) = \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_c}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\bar{\phi}(z) \delta\bar{\phi}(y)} , \tag{2.35}$$

其中等式右边隐含着对 z 积分（求和）。从此出发证明公式 (2.34)。

¶ 在欧氏空间，标量场论的连接生成泛函的定义为：

$$\mathcal{Z}_{Ec}[J] = -\log \mathcal{Z}_E[J] , \tag{2.36}$$

类似的，我们可以利用勒让德变换来定义有效作用量：

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x) &\equiv -\frac{\delta \mathcal{Z}_{Ec}[J]}{\delta J(x)} , \quad J(x) = \frac{\delta \Gamma[\bar{\phi}]}{\delta\bar{\phi}(x)} , \\ \Gamma[\bar{\phi}] &\equiv \mathcal{Z}_{Ec}[J] + \int d^4x \bar{\phi}(x) J(x) . \end{aligned} \tag{2.37}$$

[9] 这是从图形的几何来看。相应的代数说法就是：一旦有了所有的顶点函数，我们就有了泛函 $\Gamma[\bar{\phi}]$，然后利用勒让德变换，我们就可以得到 $\mathcal{Z}_c[J]$，从而得到所有的连通图。

刻川制造

同样的，$\mathcal{Z}_{Ec}$ 和 Γ_E 分别是欧氏空间中连通关联函数和无外腿单粒子不可约关联函数的生成泛函：

$$-\mathcal{Z}_{Ec}[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n G^{(n)}_{Ec}(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)\,, \tag{2.38}$$

$$\Gamma_E[\bar{\phi}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}_{E}(x_1,\cdots,x_n)\bar{\phi}(x_1)\cdots\bar{\phi}(x_n)\,, \tag{2.39}$$

做为一个特例，动量空间的两点顶点函数是：

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{E0}(p) = G_{E0}(p)^{-1} = \hat{p}^2 + m_0^2\,. \tag{2.40}$$

§9. 连续量子场论的紫外发散和正规化

¶ 到目前为止，我们还没有认真计算过任何费曼图。特别是圈图。在我们进行这类计算之前，让我们先来谈一下会出现的问题。

如果我们采用分立形式的路径积分（以及相应的分立形式的传播子），那么在微扰论的每一阶都没有发散。[10] 这样的理论我们称为已经正规化（regularized）了。什么是没有正规化的理论？回答是：什么也不是！换句话说根本不存在这样的东东！但是，设想我们完全照搬前面的推导，纯粹形式地假定我们的场是定义在每一个时空点上的，我们可以纯粹形式地写出这样一个空想的理论的路径积分和生成泛函，尽管这些东东其实都是没有定义的。那么，我们得到了什么呢？或者说在我们的幻象中得到了什么呢？我们得到的是一个形式上连续的量子场论的路径积分表达。在这个理论中，我们的自由两点传播子不是公式 (2.18)，而是一个纯粹连续的表达式：[11]

$$(K_0)^{-1}_{xy} = \langle T[\phi(x)\phi(y)]\rangle = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(x-y)}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,, \tag{2.41}$$

这个表达式与我们前面分立时空中的表达式 (2.18) 的区别是：被积函数中我们用连续的 $k^2 = k_\mu k^\mu$ 替代了分立形式的 $\hat{k}^2$；另外，我们的积分是遍及无穷四维闵氏时空，而不是有限的求和（有限体积）或仅仅限于第一布里渊区的积分（无限体积）。与此相应，我们的费曼规则中对于各个顶点坐标的求和也都要换成对于时空点的积分。我们发现，在微扰论的固定一阶，很多的圈图会出现发散。具体地说，那些在动量空间中对于能动量的积分的上限都是无穷大，这对应于时空中无限小的分辨率（也就是说，我们认为每一个连续的时空点都有一个场的自由度）。正是这些能动量的积分使得某些圈图发散。由于这些发散是由于高的能动量引起的，它被称为紫外发散。

¶ 为了衡量一个特定的费曼图中紫外发散的程度，我们可以引入发散度的概念。发散度的确定在动量截断正规化和格点正规化中可以看得十分清晰。树图是没有发散的；但

[10] 当然，如果我们将所有阶的贡献相加，这个级数仍然是发散的。它仅仅是一个渐进展开。
[11] 醉心于连续场论的读者终于看到了一个他们想看到，但是一直看不到的公式。

刘川制造

是许多的圈图都会出现发散。例如，对于两点格林函数，一圈图（所谓的蝌蚪图）的贡献是发散的。如果我们用的是动量截断正规化，那么这个一圈图中含有正比于 Λ^2 的贡献，我们称这种发散为平方发散。如果我们用的是格点正规化，那么这个一圈图中会含有正比于 a^-2 的贡献，也是（按照质量量纲的）平方发散。对于四点格林函数，其单粒子不可约的一圈图是对数发散的，即在动量截断正规化中存在正比于 $\log\Lambda$ （相应的，在格点正规化中是正比于 $\log a$ ）的贡献。并不是所有的圈图都是发散的，有些圈图可能是收敛的。

¶ 尽管紫外发散是由于我们不正确地、纯形式地滥用路径积分的结果，但是这一点在量子场论发展的初期并没有被人们认识到。于是，执着于连续时空量子场论的人们为了解决紫外发散的问题，他们又在他们的量子场论中引入一个称为截断（ cutoff ）的家伙。当然，如何引入截断可谓是仁者见仁，智者见智啦。一个比较直接的办法就是让所有的能动量的大小都小于某个值，称为 Λ。这种截断被称为动量截断（ sharp momentum cutoff ）。一个比较聪明的引入截断的方法归功于 t'Hooft 和 Veltmann，这两位得 Nobel 的大牛的方法是将我们时空的维数 $D=4$ 看成是一个（复的）变量。如果 D 足够的小，显然所有的圈图中的积分都可以收敛。所以，我们可以令 $D=4-\epsilon$，只要我们的 ϵ 不等于零，经过适当的解析延拓，我们就可以得到不发散的结果。另一位得 Nobel 的大牛 Schwinger，他喜欢用一种称为正规时间的正规化方法。[12]另外还有所谓 Pauli-Villars 正规化方法、点分离（ point splitting ）、热核（ heat kernel ）等等五花八门的方法。最后，我们提出一种重要的方法，那就是格点正规化方法，这其实也就是我们前面推导路径积分一直采用的方法。我们将量子场定义在时空的格点上。这种正规化方法的好处在于，它可以完全严格地给出理论的非微扰的定义。

现在让我们再来总结一下所谓的正规化。正规化是什么呢？我们首先有一个虚幻的、没有严格数学定义的、但由于我们的执着却不愿放弃的理论，它被冠以连续时空量子场论的名号。我们发现，它实际上仅仅是个幻象，一个典型的例子就是在微扰论中有 N 多个圈图紫外发散。于是我们只好引入一个我们起先不愿引入的截断。这样以来，我们的量子场论似乎有了一个严格的数学定义。[13]这就是所谓的正规化。怎么样？这个逻辑是不是有点怪异？原因就在于，如果我们的出发点是一个现实的东东，那么正规化本身就在其中，不需要再引入。我们需要再引入正规化，完全是由于我们的出发点是一个幻象，引入了正规化以后才变为现实。因此，一言以蔽之：某种形式的正规化是量子场论理论体系中不可缺的组成部分，[14] 不存在无需正规化的量子场论！

¶ 截断的引入暂时带走了紫外发散，换句话说，我们的理论被正规化了，但是它也带

[12]Schwinger 的品味总是与众不同，好像他之外，其他人都不喜欢这个方法。

[13]如果我们引入的截断是格点截断，我们的理论还有了一个非微扰的定义。对于其他的截断，我们仅仅得到了一个微扰的定义。

[14]这里我们不包括自由场论，以及一些本身就不含有紫外发散的量子场论。这些模型其实是存在的，只是它们似乎与物理现实不符合，换句话说，目前我们发现的相互作用（引力除外）似乎都是由含有紫外发散的量子场论描述的。因此，从这个意义上说，正规化是量子场论不可或缺的组成部分。

刻川制造

来了新的问题。首先，即使从微扰展开来看，每一个特定的费曼图的值显然依赖于你用什么截断。不同截断的共同点是当截断趋于无穷时，含有紫外发散的图都发散。显然，我们所期望得到的物理结果不可能依赖于截断这样一个人为的东东。其次，没有任何一个截断是无懈可击的。特别需要指出的是，截断往往会破坏理论原有的对称性。而我们大家都清楚，对称性对于量子场论是何等地重要。

我们前面说明了正规化对于一个现实的、有相互作用的量子场论是何等地重要。但是，任何一个人都会意识到：仅仅有了正规化又是远远不够的。一个最为基本的常识就是物理的结果不可能敏感地依赖于截断的选取。要完成这个使命，物理学家发明了另外一套武功，称为重整化。这个概念我们要在下一节简要地讨论。我们可以用下面这句话来概括这一节得到结论：正规化对于量子场论来说，就像金钱对于人类一样，它不是万能的；但是没有它可是万万不能的。

§10. 重整化

¶ 重整化是量子场论中的重要核心概念。这是一个比起正规化来更为复杂、同时其逻辑也更怪异的家伙。量子场论系统与普通量子力学系统的重要区别就是，量子场论处理的是一个具有多自由度的量子体系。当其自由度数目趋于无穷时，特别是趋于不可数的无穷时，就会出现有限自由度系统所没有的特殊现象，这就是紫外发散和重整化。所以，夸张一点说：量子场论比量子力学多的那一点点内容，就是重整化。[15] 另一方面，这又是一个比较难于理解的概念。人们对于重整化问题的认识，如果从时间的发展顺序来看，遵循了一种十分古怪的逻辑。这是物理学发展史中常见的现象。历史往往是不太符合逻辑的。因此，如果完全按照历史的发展顺序来讲述重整化的概念，实际上可能会使得这个本来已经比较复杂的概念更难于理解。这一节中，我们试图来从一个比较符合逻辑的角度来介绍重整化，希望能够对大家有所帮助。[16]

¶ 重整化的目的就是要将所计算的物理量中对于截断的敏感依赖去掉，因为这种依赖显然是非物理的。只有那些不同正规化（截断）所共同的东东才可能是物理的。那么在不同的正规化（截断）下，我们量子场论中的那些格林函数有那些性质是相同的，又有那些是不同的呢？回答实际上也是很简单的：格林函数在高能动量的区域的性质会敏感地依赖于正规化（截断）；它们在低能动量区域的性质将不会敏感地依赖于正规化（截断）。注意，这里的“高”或者“低”是相对于截断的能标来说的。因此，格林函数在高能区，或者说紫外的性质会敏感地依赖于截断，从而不可能是物理的；它在低能区

[15] 另外一个重要的内容就是对称性。实际上对称性与重整化是紧密联系在一起的。换句话说，系统的重整化性质实际上很大程度由其对称性决定。

[16] 我们试图在进行直接的一圈计算之前，先概括地介绍正规化与重整化。这样的讲述方法有它的优点，也有它的问题。它的优点在于，读者可以不必一上来就陷入到许多烦杂的具体圈图计算中而忽略了重整化概念的本质。其缺点是第一次读时，会感到许多讨论相当泛泛，没有具体的实例。一个好的方法是先阅读这一节，然后具体讨论一个实例（例如，本节后面的两节），然后再回来阅读本节。这样可能效果会更好。

刘川制造

（红外）的性质将不会敏感地依赖于截断，换句话说它对于不同的正规化（截断）是普适的。由于我们真正物理上能够测量的区域恰恰是（相对于截断来说的）低能（红外）区域，因此我们的结论是：格林函数的低能性质是物理的、普适的，这些性质将不敏感地依赖于正规化（截断）的选取；格林函数的高能性质将会明显地依赖于正规化（截断）的选取，从而不是物理的。换句话说，如果我们的能量标度已经接近了截断的尺度，那么这样的量子场论将不再是一个好的理论，它完全没有任何预言性，因为所有它计算的结果都与正规化的细节有关。我们可以将上面这个重要的认识概括为：高能（紫外）与低能（红外）的物理实际上是互相脱耦的；或者换到坐标空间，我们说小尺度与大尺度的物理是脱耦的。这就是重整化背后真正起作用的原因，也是理解重整化的关键。

¶ 现在让我们回到我们的 $\lambda\phi^4$ 标量场论。假定利用某种方法－这个方法可以是微扰论，也可以是其他方法－我们可以计算出这个理论的动量空间的两点顶点函数 $\Gamma^{(2)}(p;\Lambda;m_0^2,\lambda_0)$ 和四点顶点函数 $\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4;\Lambda;m^2,\lambda_)$，它们都是理论中的参数 m_0^2－我们称之为裸质量平方－和 λ_0－我们称之为裸耦合参数－的函数。[17] 同时，这些函数显然也依赖于截断 Λ，[18] 而且，如果固定 m_0^2 和 λ_0，那么当 $\Lambda\to\infty$ 时，这两个函数表观上都是紫外发散的。[19] 我们前面说过，当动量 p（以及相应的 p_i，$i=1,2,3,4$）比起截断 Λ 小很多时，$\Gamma^{(2)}$ 和 $\Gamma^{(4)}$ 是物理的！例如，我们可以定义三个量：

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(p;\Lambda;m_0^2,\lambda_0) &\sim Z_R^{-1}\left[p^2+m_R^2\right]\,,\ p^2<<\Lambda^2\,,\\ \Gamma^{(4)}(0,0,0,0;\Lambda;m_0^2,\lambda_)) &= Z_R^{-2}\lambda_R\,.\end{aligned}\tag{2.42}$$

我们再强调一遍：m_R^2，λ_R 是表征格林函数在低能区行为的，因此它们是可测量的物理量。它们不应当敏感地依赖于截断，同时在截断 $\Lambda\to\infty$ 时是不发散的。为了写得更为简洁，我们引入一个重整化的标量场：

$$\phi_R(x)=Z_R^{-1/2}\phi(x)\,,\tag{2.43}$$

相应地，我们称原来的场 $\phi(x)\equiv\phi_0(x)$ 为裸场。按照路径积分的语言，将所有的场都乘以一个常数相当于对积分变量做了一个变换而已，不会改变物理。[20]于是对应于重整化场的 n-点顶点函数满足：$\Gamma_R^{(n)}=Z_R^{n/2}\Gamma_0^{(n)}$，其中 $\Gamma_0^{(n)}$ 表示裸场的顶点函数。于是，公式 (2.42) 可以等价地写成：

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(2)}(p;\Lambda;m_0^2,\lambda_0) &\sim p^2+m_R^2\,,\ p^2<<\Lambda^2\,,\\ \Gamma_R^{(4)}(0,0,0,0;\Lambda;m_0^2,\lambda_)) &= \lambda_R\,.\end{aligned}\tag{2.44}$$

[17]为了讨论方便，我们这里利用了欧氏空间中的顶点函数。同时，为了简化记号，我们略去了顶点函数的下标 E。对于闵氏空间中的重整化，完全可以进行类似的讨论。

[18]虽然我们用了符号 Λ，但是并不意味着一定是动量截断正规化。例如，对于格点正规化，你可以认为 $\Lambda=\pi/a$。

[19]如果读者一定想知道具体的函数形式，可以参考下一节微扰论中的具体公式。这一点在那里可以清楚地看到。

[20]波函数重整化中实际上包含有紫外发散的项。

刻川制造

注意到对于 $\lambda_0 = 0$ 的自由标量场论，我们有：$Z_R = 1$，$m_R^2 = m_0^2$，$\lambda_R = \lambda_0$。对于有相互作用的标量场论，它们可以是裸参数 m_0^2 和 λ_0 的复杂函数。如果 λ_0 很小，那么这种函数关系可以利用微扰论来逐阶地加以确定。普遍地，这种关系可以写成：

$$\begin{aligned} m_0^2 &= Z_R^{-1}(m_R^2 + \delta m^2)\,, \\ \lambda_0 &= Z_R^{-2}(\lambda_R + \delta\lambda)\,, \\ Z_R &= 1 + \delta Z\,, \end{aligned} \tag{2.45}$$

我们称参数 m_R^2 为系统的重整化质量的平方；称参数 λ_R 为系统的重整化耦合参数；称参数 Z_R 为波函数重整化常数。

考察公式 (2.44) 我们发现，等式的右边在 $\Lambda \to \infty$ 时是不发散的，因为它们是物理量。而函数 $\Gamma_R^{(2)}$ 和函数 $\Gamma_R^{(4)}$ 具有表观紫外发散。要调和这个矛盾，唯一的可能性就是 m_0^2，λ_0，Z_R 也含有表观紫外发散，但是当它们被代入到表观发散的函数 $\Gamma_R^{(2)}$ 和函数 $\Gamma_R^{(4)}$ 中后，两种表观紫外发散的部分正好相抵消，以至于公式 (2.44) 中等号右边的量是不含有紫外发散的、可测量的物理量。具体地说，函数 δm^2，$\delta\lambda$ 和 δZ 本身实际上包含着表观紫外发散的贡献，它们分别被称为质量、耦合参数和波函数重整化的抵消项（counter term）。注意，所谓的“表观紫外发散的部分相消”实际上是一个很含糊的词语。将一个紫外发散的量分为“发散的部分”和“有限的部分”是不唯一的。因此，公式 (2.44) 纯粹是我们的定义。它不是唯一的。我们完全可以采用其他的定义，只要紫外发散的部分仍然相消就可以了。正因为如此，它往往被称为标量场论的重整化条件（renormalization conditions）。一套完整的、自恰当重整化条件统称为一个重整化方案（renormalization prescription）。

¶ 至此，我们的任务还没有结束。我们的重整化条件 (2.44) 只是告诉了我们，标量场论的两点顶点函数、它对于动量平方的微商和四点顶点函数（如果用重整化的场）在零动量处是有限的。事实上，它们分别被定义为：重整化质量平方，1 和重整化耦合参数。我们的理论中还有其他的顶点函数。它们原则上还可能存在表观紫外发散。但是经验（以及实验物理学家）告诉我们，所有的顶点函数，在低能时都是有限的。[21]于是你说：没关系，我们可以仿照上面的方法，定义其他的顶点函数为有限。例如，对于六点顶点函数，如果它还包含有紫外发散，我们可以定义：$\Gamma_R^{(6)}(0) = \lambda_{6R}$，实验和经验告诉我们它是有限的。类似地，可以定义 N 多个参数，或者说加上 N 多个重整化条件。不错，这样做没有什么问题，你的确可以将所有的可以测量的物理量都定义为有限。但唯一的问题是：如果你新引入的这些重整化的参数是完全独立的参数，即与原先的参数 m_R^2，λ_R 没有关系，或者说虽然有关系，但是你实际上无法确定；那么你会发现：为了能够用你的理论来描写低能区的物理，你实际上需要 N 多个参数。这实际上意味着你的理论完全没有预言性（如果 N 足够大），那你还忙活什么呀！一个没有预言的理论根本不是物理理论。

[21] 因为原则上它们都是可以测量的量。任何真实的测量都测不出发散的结果，对吧？

刘川制造

现在看来我们似乎已经走头无路了。但是，我要告诉大家一个奇迹：对于标量场论来说，如果我们研究低能区的物理，那么只要引入了重整化条件 (2.44)，它的所有低能区顶点函数都是有限的！不仅如此，所有其他的顶点函数也都可以用已经引入的两个参数 m_R^2 和 λ_R 来表达。

如果一个量子场论系统，可以完全通过引入有限多个低能参数来描写，同时理论中所有物理量都不出现紫外发散，我们就称这样的量子场论为可重整的。因此，上面提到的这个奇迹就是说：$\lambda\phi^4$ 型的量子标量场论是一个可重整的量子场论，或者说这个理论具有可重整性。可重整理论的好处就是：这样的理论在低能区一定具有预言性。[22]

我们将不会普遍地证明标量场论是可重整的这个奇迹。在后面一节的具体微扰计算中，我们将以一圈图为例来演示这一点。

¶ 利用重整化的场，重整化质量和重整化耦合参数，我们可以将 $\lambda\phi^4$ 标量场论的（欧氏空间）拉氏量写成：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_R\partial_\mu\phi_R+\frac{m_R^2}{2}\phi_R^2+\frac{\lambda_R}{4!}\phi_R^4\\ &+ \frac{\delta Z}{2}\partial_\mu\phi_R\partial_\mu\phi_R+\frac{\delta m^2}{2}\phi_R^2+\frac{\delta\lambda}{4!}\phi_R^4\,.\end{aligned}\tag{2.46}$$

用这个形式来表达我们发现：场 ϕ_R 的顶点函数在低能区，如果用参数 m_R^2，λ_R 来表达，将不含有紫外发散。而且，如果在低能区系统的重整化耦合参数 λ_R 是小的，那么在低能区我们的标量场论实际上可以近似地看成一个自由场论，只是与场的激发所对应当粒子的质量不是原先的裸质量 m_0，而是重整化的质量 m_R。需要特别指出的是：λ_R 是小的并不意味着 λ_0 是小的。也就是说，既便 λ_0 很大，只要 λ_R 很小，我们就可以在低能区利用微扰论来进行计算。这种微扰论被称为重整化微扰论，相应的，对于裸的耦合参数 λ_0 的微扰论又被称为裸微扰论。

§11. 重整化群方程

¶ 一个理论是可重整的是一个很强的限制。从这个事实出发，我们可以得到一系列有意义的结果，其中最为重要的就是所谓的重整化群方程。

§11.1. 裸重整化群方程

我们还是回到我们的 $\lambda\phi^4$ 标量场论。我们前面论述了，如果我们利用重整化的场和参数来表达，那么重整化的顶点函数将不会敏感地依赖于截断 Λ。具体地说，我们有：[23]

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i;m_R,\lambda_R,m_R/\Lambda)=\Gamma_R^{(n)}(p_i;m_R,\lambda_R,0)+\mathcal{O}\left(\Lambda^{-2}(\log\Lambda)^k\right)\,,\tag{2.47}$$

[22] 当然，这不是说人们一定知道如何计算，只是说原则上是可计算的。
[23] 这个结论在微扰论的 k 圈成立。

刻川制造

这个等式的右边的项被统称为标度性破坏（scaling violations）的项。它在 $\Lambda \to \infty$ 时趋于零。

我们的标量场论原先有两个参数：m_0^2，λ_0 以及一个隐含的参数，那就是截断 Λ。我们已经论证过，它实际上是不可或缺的。不过可重整性告诉我们低能的物理结果都不敏感地依赖于截断，只要我们的低能物理量都用重整化的参数 m_R^2，λ_R 来表达。由于重整化的耦合参数是无量纲的，因此它只能够依赖于无量纲的组合，即：$\lambda_R = \lambda_R(\lambda_0, m_R/\Lambda)$。让我们考虑二维参数空间 (λ_0, m_0^2) 中具有相等的 λ_R（比方说都等于 0.1）的点构成的曲线。显然，在这个曲线上不同的点所对应的 λ_0 不同，由于它们的 λ_R 相同，因此这条曲线上不同的点实际上对应于不同的 m_R/Λ。也就是说，不同的点实际上对应于在固定的 λ_R 下，改变 m_R/Λ 的情况。

现在我们就来研究，在固定的 λ_R 情形下，改变截断 Λ 时，我们的顶点函数如何变化。我们显然有：

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \Gamma_R^{(n)}(p_i; m_R, \lambda_R, m_R/\Lambda) = \mathcal{O}\left(\Lambda^{-2}(\log \Lambda)^k\right) \sim 0 \,. \tag{2.48}$$

这里我们忽略了标度性破坏的项。另一方面，我们有：

$$\Gamma_R^{(n)} = Z_R^{n/2}(\lambda_0, m_R/\Lambda) \Gamma_0^{(n)}(\lambda_0, m_R, m_R/\Lambda) \,,$$

因此，如果我们截断足够高，我们有：

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta_B \frac{\partial}{\partial \lambda_0} - n\gamma_B\right) \Gamma_0^{(n)} = 0 \,, \tag{2.49}$$

其中的系数 β_B，γ_B 的定义为：

$$\begin{aligned} \beta_B(\lambda_0, m_R/\Lambda) &= \Lambda \frac{\partial \lambda_0}{\partial \Lambda}\Big|_{\lambda_R} \,, \\ \gamma_B(\lambda_0, m_R/\Lambda) &= -\frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial \log Z_R}{\partial \Lambda}\Big|_{\lambda_R} \,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

方程 (2.49) 被称为（裸的）重整化群方程，公式 (2.50) 中定义的两个函数统称为重整化群系数。这个重整化群方程告诉我们：对于固定的重整化耦合参数 λ_R，如果我们改变截断 Λ，那么裸的顶点函数是不变的，只要我们相应地调整 λ_0 和 Z_R。这样的性质我们称为标度性。实际上可以证明重整化群系数仅仅依赖于裸的耦合参数（除去标度性破坏的项）。特别是所谓的 β-函数 $\beta_B(\lambda_0)$，它给出了固定重整化耦合参数 λ_R 下，裸的耦合参数随截断的变化行为。

§11.2. Callen-Symanzik 方程

¶ 同样的问题可以换一个角度来考察。我们现在保持裸的耦合参数 λ_0 固定，来考察重整化的顶点函数 $\Gamma_R^{(n)}$ 在改变截断 Λ 时的变化，我们有：

$$m_R \frac{d}{dm_R} \Gamma_R^{(n)}\Big|_{\lambda_0} = m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Gamma_R^{(n)} + m_R \frac{\partial \lambda_R}{\partial m_R}\Big|_{\lambda_0} \frac{\partial \Gamma_R^{(n)}}{\partial \lambda_R} \,.$$

刘川制造

另一方面，

$$m_R \left.\frac{d\Gamma_R^{(n)}}{dm_R}\right|_{\lambda_0} = m_R \left.\frac{d}{dm_R}\left(Z_R^{n/2}\Gamma_0^{(n)}\right)\right|_{\lambda_0}$$
$$= \frac{n}{2} m_R \left.\frac{\partial \log Z_R}{\partial m_R}\right|_{\lambda_0} \Gamma_R^{(n)} + Z_R^{n/2} m_R \left.\frac{\partial \Gamma_0^{(n)}}{\partial m_R}\right|_{\lambda_0} ,$$

于是我们得到：

$$\left(m_R\frac{\partial}{\partial m_R} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda_R} - n\gamma\right)\Gamma_R^{(n)} = \Delta\Gamma_R^{(n)} , \tag{2.51}$$

这个方程也被称为重整化群方程，它又被称为 Callen-Symanzik 方程，其中各个量的定义为：

$$\beta(\lambda_R, m_R/\Lambda) = m_R \left.\frac{\partial \lambda_R}{\partial m_R}\right|_{\lambda_0} ,$$
$$\gamma(\lambda_R, m_R/\Lambda) = \frac{1}{2} m_R \left.\frac{\partial \log Z_R}{\partial m_R}\right|_{\lambda_0} , \tag{2.52}$$
$$\Delta\Gamma_R^{(n)} = Z_R^{n/2} m_R \left.\frac{\partial \Gamma_0^{(n)}}{\partial m_R}\right|_{\lambda_0} . \tag{2.53}$$

这个公式中的 β-函数和 γ-函数与我们前面的定义完全类似，只不过都换成了重整化的参数；这里的物理量 $\Delta\Gamma_R^{(n)}$ 代表了 n-点顶点函数再加上一个零动量的 $m_R^2\phi_R^2$ 算符插入。同样可以证明，β-函数和 γ-函数对于 m_R/Λ 的依赖仅仅存在于标度破坏的项中。

¶ 我们这里得到了两种重整化群方程：一个是对应于裸参数的方程 (2.49)，另一个是对应于重整化参数的 Callen-Symanzik 方程 (2.51)。同时，我们得到了两套重整化群系数。β 和 β_B 原则上是不同的函数，但是在微扰论中，它们却是联系在一起的。为此，我们考虑 λ_R 固定的情形，那么：

$$\Lambda\frac{d}{d\Lambda}\lambda_R = \left(\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda} - \beta_B(\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\right)\lambda_R(\lambda_0, m_R/\Lambda) = 0 .$$

其中的第一项实际上就是 $\beta(\lambda_R)$，因为：

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\lambda_R(\lambda_0, m_R/\Lambda) = m_R\frac{\partial}{\partial m_R}\lambda_R(\lambda_0, m_R/\Lambda) = \beta(\lambda_R) .$$

于是，我们得到：

$$\beta_B(\lambda_0)\frac{\partial\lambda_R}{\partial\lambda_0} = \beta(\lambda_R) . \tag{2.54}$$

如果在重整化微扰论中我们能够计算出：

$$\beta(\lambda_R) = \beta_1\lambda_R^2 + \beta_2\lambda_R^2 + \cdots , \tag{2.55}$$

同时记住在微扰论的领头阶：$\lambda_0 = \lambda_R$，于是我们有：

$$\beta_B(\lambda_R) = \hat{\beta}_1\lambda_0^2 + \hat{\beta}_2\lambda_R^2 + \cdots , \tag{2.56}$$

刻川制造

带入到 (2.54)，我们有：

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 \ , \ \ \hat{\beta}_2 = \beta_2 \ , \ \ \hat{\beta}_3 \neq \beta_3 \ . \tag{2.57}$$

换句话说，在微扰论中，两种 β-函数的一圈和二圈系数相同，但是一般来说，更高圈的系数并不相同。

§11.3. 固定点与重整化群流

¶ 前面定义的重整化群系数，特别是 β-函数，可以告诉我们在截断趋于无穷时（或者更确切地说：m_R/Λ 趋于零时）耦合参数的变化规律。当我们改变截断时，量子场论系统的参数在参数空间中的变化被称为重整化群流（ RG flow ）。 例如，利用重整化的 β-函数的定义 (2.52)，我们可以解出：

$$\frac{m_R}{\Lambda} = C \exp \int^{\lambda_R} \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} \ , \tag{2.58}$$

其中我们假设我们已经知道了 $\beta(\lambda_R$ 的形式。注意，这个解是在一个固定的 λ_0 下获得的。因此，在 $(m_0/\Lambda, \lambda_0)$ 的参数空间中，如果我们沿着固定 λ_0 的直线运动，这条直线上不同的点具有不同的 m_0/Λ，同时也具有不同的 m_R/Λ。公式 (2.58) 告诉了我们在这条直线上运动时，不同的 m_R/Λ 与相应的 λ_R 之间的函数关系。这条直线上 $m_R/\Lambda \to 0$ 的点就对应于我们的低能区物理。所以，如果我们开始所在的点对应的 $\beta(\lambda_R) > 0$，那么我们要得到低能区物理就必须沿着直线相更小的 λ_R 运动；反之，如果我们所在的点对应的 $\beta(\lambda_R) < 0$，我们为了得到低能区物理，就必须向 λ_R 更大的区域运动；如果我们开始所在的点正好对应于 $\beta(\lambda_R) = 0$，那么当我们改变截断时 λ_R 将保持不变。这样的点被称为量子场论的固定点（ fixed points ），它们对于量子场系统的低能行为起决定性的作用。

如果我们假定函数 $\beta(\lambda_R$ 只有简单的零点，那么上面的分析还告诉我们：如果一个零点处的斜率是正的，那么在取低能物理极限的过程中，固定点附近的所有点会汇聚到这个固定点，这样的固定点被称为红外固定点；反之，如果一个零点处的斜率是负的，那么在取低能物理极限的过程中，固定点附件的所有点会远离这个固定点，这样的固定点被称为紫外固定点。显然，我们关心的低能物理区域是由红外固定点的性质决定的。

¶ 类似的，我们可以利用裸的 β-函数 $\beta_B(\lambda_0)$ 来进行研究。由于：

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \log(m_R/\Lambda)} = -\beta_B(\lambda_0, m_R/\Lambda) \ , \tag{2.59}$$

多了一个负号，因此情况正好相反：在 λ_0 轴上，红外固定点会排斥附件的点；紫外固定点会汇聚附近的点。这实际上告诉我们，裸的参数 λ_0 实际上是定义在紫外的。

¶ 我们看到，重整化群方程实际上反映了一个量子场系统在标度变换下的变化规律。这种变换实际上构成了一个半群，这就是所谓的重整化群。 它告诉我们，体系的各种顶点函数实际上在重整化群变换下具有简单的变换规则；与此同时，量子场系统的参数也随着标度的变换而在参数空间中形成跑动。粗略的来说，当我们的重整化标度达到截断

刘川制造

的尺度时，我们的跑动耦合参数就趋于其裸的值；而当我们的重整化标度跑向低能（红外）时，我们的跑动耦合参数就趋于实验上可以直接测量的值，这些可以直接测量的值就可以被定义为重整化的耦合参数。

§11.4. 维数正规化下的重整化群

¶ 重整化群方程实际上反映了一个量子场系统在标度变换下的变化规律，这种变换在动量截断、或者格点正规化中可以通过改变 Λ 来实现。但是对于维数正规化，我们似乎并没有引入一个有量纲的标度。但实际上，在维数正规化中，我们必定会引入一个有量纲的参数。以我们讨论过的 $\lambda\phi^4$ 理论为例，在 $D=4-2\epsilon$ 维空间，我们（重整化的、欧氏空间的）的拉氏量应当写成：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!}\phi^4\,. \tag{2.60}$$

需要注意的是这个拉氏量的相互作用部分。由于我们现在处在 $D=4-2\epsilon$ 维，因此，为了保证作用量是无量纲的，我们的标量场的（质量）量纲为：$1-\epsilon$。相应的，ϕ^4 项前面的系数的量纲应当是：2ϵ。为此，我们如果保持 λ 仍然为无量纲的，我们就必须引入一个因子 $\mu^{2\epsilon}$，其中 μ 是一个具有质量量纲的任意能标。因此，任何一个紫外的截断都必定会引入一个有量纲的标度。在动量截断中，这个有量纲的标度就是 Λ；在格点正规化中，这个有量纲的标度就是格距 a。在维数正规化中，看起来我们似乎没有引入有量纲的标度，但是，参数 μ 的引入实际上就是一个有量纲的标度，它实际上与截断，也就是 ϵ 是同时出现的。有了这个有量纲的截断，我们就可以研究物理的顶点函数对于标度变换（或者说对于截断的变化）的依赖，这就是我们前面讨论的重整化群方程。维数正规化比较特别的地方就是它引入标度的方式比较间接（通过 ϵ 与 μ 的交互作用）。

¶ 任何物理的 n 点顶点函数 $\Gamma^{(n)}$ 应当不依赖于重整化能标 μ。利用：$\Gamma_R^{(n)}=Z_R^{n/2}\Gamma_0^{(n)}$ 以及裸的顶点函数不依赖于 μ，我们得到：

$$\mu\frac{d}{d\mu}\Gamma_R^{(n)}=\frac{n}{2}\mu\frac{\partial\log Z_R}{\partial\mu}\Gamma_R^{(n)}\,.$$

另一方面，利用锁链法则

$$\mu\frac{d}{d\mu}\Gamma_R^{(n)}=\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}\right]\Gamma_R^{(n)}\,,$$

我们得到：

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}+\frac{n}{2}\gamma\right]\Gamma_R^{(n)}=0\,, \tag{2.61}$$

其中我们定义的重整化群系数：

$$\begin{aligned}\beta &= \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\,,\\ \gamma_m &= -\frac{1}{m^2}\mu\frac{\partial m^2}{\partial\mu}\,,\\ \gamma &= \mu\frac{\partial\log Z_R}{\partial\mu}\,.\end{aligned} \tag{2.62}$$

刻川制造

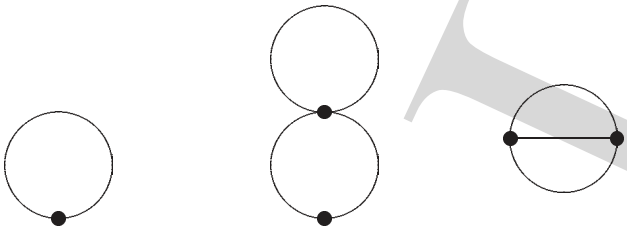


图 2.4 : 标量场论的两点顶点函数 $\Gamma^{(2)}(p^2)$ 所对应的费曼图。

这些系数可以在重整化的微扰论中逐阶进行计算。最为简单的方法，就是首先得到裸的参数作为重整化参数以及标度 μ 的函数，然后利用裸的参数不依赖于 μ 的事实，就可以确定这些系数。

§12. $\lambda\phi^4$ 标量场论的一圈重整化

¶ 这一节中，我们将以 $\lambda\phi^4$ 标量场论为例，来说明其正规化和重整化的具体步骤。我们将采用欧氏空间中的场论形式来进行讨论，其闵氏空间的对应是直接了当的。同时，我们的具体计算将仅仅限于一圈水平。

§12.1. 格点正规化下一圈图的计算

¶ 首先，我们来考虑两点顶点函数 $\Gamma^{(2)}(p^2)$，它是与质量重整化以及波函数重整化联系在一起的。在微扰论中，质量重整化的领头阶贡献来自一圈图，波函数重整化的领头阶则来自于两圈图。这些图我们显示在图 2.4 中，其中第一、第二个图分别只贡献质量的重整化（一圈和二圈）；第三个图贡献于波函数重整化。按照前面的动量空间的费曼规则，我们可以写出：[24]

$$\Gamma^{(2)}(p) = \hat{p}^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} J_1(m_0) - \frac{\lambda_0^2}{4} J_1(m_0) J_2(m_0) - \frac{\lambda^2}{6} I_3(m_0, p) \,, \tag{2.63}$$

[24]为了简化记号，我们略去了顶点函数 Γ 上面的弯弯；同时也略去了下标 E。

刘川制造

如果我们采用格点正规化方法，那么：[25]

$$\begin{aligned} J_n(m_0) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_0(p)^n \,, \\ I_3(m_0,p) &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} G_0(k_1)G_0(k_2)G_0(p-k_1-k_2) \,, \end{aligned} \tag{2.64}$$

其中动量空间的自由传播子为：

$$G_0(p) = \frac{1}{\hat{p}^2 + m_0^2} \,. \tag{2.65}$$

对于格点正规化，上式中定义的圈积分的区域是倒格点的第一布里渊区：$(-\pi/a, \pi/a)$。因此这些积分是收敛的。[26]

游戏 2.8 *请验证公式 (2.63)。*

类似的，我们可以写出四点顶点函数，对应的费曼图显示在图 2.3 中。我们得到的结果是：

$$\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = -\lambda_0 + \frac{\lambda^2}{2}\left[I_2(m_0,p_1+p_2) + I_2(m_0,p_1+p_3) + I_2(m_0,p_1+p_4)\right] \,, \tag{2.66}$$

其中一圈积分 I_2 的定义为：

$$I_2(m_0,p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_0(k)G_0(p-k) \,. \tag{2.67}$$

¶ 现在，我们可以进行一圈重整化。我们现在加上重整化条件 (2.44)。由于对于两点顶点函数，一圈图仅仅提供与动量无关的项，因此到一圈水平，只有质量重整化；波函数无需重整化。即：

$$Z_R = 1 + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \,, \tag{2.68}$$

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} J_1(m_0) + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \,. \tag{2.69}$$

到一圈水平（ $\mathcal{O}(\lambda_0)$ ），重整化的两点顶点函数为：

$$\Gamma_R^{(2)} = \hat{p}^2 + m_R^2 \,. \tag{2.70}$$

同样，四点顶点函数的重整化条件给出：

$$\lambda_R = \lambda_0 - \frac{3}{2}\lambda_0^2 J_2(m_0) + \mathcal{O}(\lambda_0^3) \,. \tag{2.71}$$

[25] 如果我们不是采用格点正规化方法，那么我们应当用相应的连续时空的传播子，同时引入某种截断。

[26] 对于连续的正规化方法，这个积分的区域是整个四维（对于维数正规化，是 D 维）无穷时空。如果不引入截断，这些积分是发散的。这正是我们说的，对于格点正规化，截断已经存在了；而对于连续的正规化方法，我们必须引入截断。

刘川制造

¶ 公式 (2.69) 和公式 (2.71) 给出了重整化的质量、耦合参数与裸的质量、耦合参数之间的关系。对于格点正规化，它们与圈积分有关。只要格距 a 是有限的，这些圈积分都是有限的。但是，如果对于固定的 m_0，λ_0，我们令 a 趋于零，这些积分都会（紫外）发散。重整化的思想是：我们要寻求这样一种极限过程：格距 a 趋于零，同时裸的耦合参数 m_0，λ_0 本身也趋于无穷，而且它们趋于无穷的方式使得其发散的部分正好与圈积分中发散的部分相抵消，以至于重整化的参数保持固定。

前面定义的圈积分的具体形式可以通过下列展开式获得：

$$\begin{aligned} J_1(z) &= r_0 + z^2\left(\frac{1}{16\pi^2}\log z^2 + r_1 + \mathcal{O}(z^2)\right), \\ J_2(z) &= -r_1 - \frac{1}{16\pi^2}(1+\log z^2) + \mathcal{O}(z^2), \end{aligned} \tag{2.72}$$

其中的 $r_0 = 0.154933390$，$r_1 = -0.030345755$ 为两个数值积分。

游戏 2.9 *请验证展开式 (2.72)。*

因此，我们的质量和耦合参数的重整化条件可以写成：

$$\begin{aligned} m_R^2 &= m^2 + \frac{\lambda_0}{2}\frac{r_0}{a^2} + \frac{\lambda_0 m_0^2}{32\pi^2}\log(m_0^2a^2) + \frac{\lambda_0}{2}r_1 m_0^2 + \mathcal{O}(\lambda_0^2), \\ \lambda_R &= \lambda_0 + \frac{3\lambda_0^2}{32\pi^2}\log(m_0^2a^2) + \frac{3\lambda_0^2}{2}\left(\frac{1}{16\pi^2} + r_1\right) + \mathcal{O}(\lambda_0^3). \end{aligned} \tag{2.73}$$

¶ 上面得到的重整化的参数和裸的参数之间的关系 (2.73) 也可以反解出来。也就是说，我们可以将裸的参数用重整化的参数来表达：

$$\begin{aligned} m_0^2 &= m_R^2 - \frac{\lambda_R}{2}J_1(m_R) + \mathcal{O}(\lambda_R^2), \\ \lambda_0 &= \lambda_R + \frac{3}{2}\lambda_R^2 J_2(m_R) + \mathcal{O}(\lambda_R^3). \end{aligned} \tag{2.74}$$

注意，这个展开式是按照 λ_R 来进行的微扰展开，而不再是按照 λ_0 的展开。也就是说，即使 λ_0 不再是小的，只要重整化的耦合参数 λ_R 足够的小，我们就预期重整化的微扰展开是不错的近似。按照重整化的耦合参数进行的展开被称为重整化的微扰论（renormalized perturbation theory）。

利用重整化的场和重整化的耦合参数，我们可以写出重整化的两点和四点顶点函数。对于两点顶点函数，我们就得到了：$\Gamma_R^{(2)}(p) = \hat{p}^2 + m_R^2$。对于四点顶点函数，我们得到的结果是：

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{2}[I_2(m_R,p_1+p_2) + I_2(m_R,p_1+p_3) \\ &+ I_2(m_R,p_1+p_4)] - \frac{3\lambda_R^2}{2}I_2(m_R,0) + \mathcal{O}(\lambda_R^3), \end{aligned} \tag{2.75}$$

显然，这个四点顶点函数对于所有的动量都是有限的。

刘川制造

¶ 重整化的微扰论实际上是我们真正关心的，因为在重整化的微扰论中，量子场系统的低能物理量都被表达称重整化的参数的函数，这些低能物理量以及它们所依赖的重整化的参数才是直接可以实验测量的。因此，从唯象学的角度来说，重整化的微扰论是可以直接与实验结果联系在一起的。

但是，如果从理解重整化的概念角度来看，从重整化的微扰论出发来理解是一种有点怪怪的逻辑。[27] 这个逻辑是这样的：首先，我们假定我们系统的拉氏量是完全用重整化的参数（质量和耦合参数）和重整化的场来表达的。[28] 然后，我们假定（重整化的）耦合参数是小的，我们利用我们津津乐道的费曼图来进行计算。不算不知道，一算吓一跳。我们发现这些一圈图都是紫外发散的。不够聪明的人，或者虽然足够聪明但不够圆滑的人也许就放弃了。但是，有些人不愿放弃。他们发现这些发散的部分似乎都具有类似的结构。具体地说，他们发现，如果在原先的拉氏量中加上一些所谓的“抵消项”（ counter terms ）。并且让这些抵消项本身含有紫外发散的部分，而且它们的紫外发散部分正好与我们前面计算出的圈积分中的紫外发散部分相消。这个想法虽然不错，但实际上是一个很危险的做法。为什么呢？我们说我们的理论完全是由拉氏量来决定的。因此，如果随便在拉氏量中加上其他的项，等于完全改变了理论本身。也就是说，你如果在我们原先的 $\lambda\phi^4$ 标量场论的随便加上其他的项，它就不是 $\lambda\phi^4$ 标量场论了。但是，这些“聪明人”发现，他们可以仅仅加上原先拉氏量中就有的那些项。这样一来，通过重新定义参数和场，我们的拉氏量将仍然具有 $\lambda\phi^4$ 理论的形式，只不过，所有的场和参数都不再是原先（重整化）的场和参数，而变成了裸的场和参数。同时，如果用原先重整化的场和参数表达，理论的所有顶点函数将不在发散。或者说，圈积分的发散被加上的抵消项消除；又或者说，这些紫外发散的部分被吸收到裸的场和裸的参数的定义之中了。这个过程可以在微扰论的每一阶进行。这就是所谓的微扰重整化。注意，并不是随便写下一个理论都一定能够完成这个程序。能够做到这一点的理论，就被称为微扰可重整的理论。例如，我们的 $\lambda\phi^4$ 标量场论就是微扰可重整的理论。同学们学过的量子电动力学（ QED ）也是微扰可重整的。

¶ 下面我们来讨论一下标量场论的重整化群系数。按照第 §11.2 节中重整化的 β-函数的定义 (2.52)，我们可以得到：

$$\beta(\lambda_R, am_R) = 6\lambda_R^2 m_R^2 J_3(am_R) + \mathcal{O}(\lambda_R^3)\,. \tag{2.76}$$

游戏 2.10 *试验证这个结果。*

[27] 不是说不可以，而是说更不容易理解。

[28] 尽管最初我们不这么叫，或者说，我们没有意识到（因此，我们可能没有明显地在这些参数和场的符号上加上下标 R ），但实际上这些参数和场是重整化的参数和场，因为在我们的头脑中，它们是与系统的低能物理性质联系在一起的、可以直接测量的物理参数。

刻川制造

对于大的截断（或者称为连续极限），$am_R \to 0$，我们可以略去 β-函数对于 am_R 的依赖（标度破坏的项）而得到：[29]

$$\beta(\lambda_R) = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R^2 + \mathcal{O}(\lambda_R^3)\,. \tag{2.78}$$

按照第 §11.2 节中的讨论，裸的 β-函数的微扰展开的前两阶系数与重整化的 β-函数的展开系数完全相同。

¶ 我们知道，β-函数完全确定了理论的耦合参数在连续极限下（或者说在 $m_R/\Lambda \to 0$ 的极限下）的行为。利用 β-函数 (2.78) 积分后给出：

$$\frac{1}{\lambda_R} \sim \frac{3}{16\pi^2}\log\frac{C}{am_R} + \cdots\,. \tag{2.79}$$

这是一个有点出乎我们意料的结果。它告诉我们 $\lambda_R = 0$ 是理论的一个红外固定点。也就是说，当我们将截断趋于无穷时，标量场系统的耦合参数实际上对数地趋于零。换句话说，如果我们认认真真地将截断趋于无穷大，我们将得到一个“自由场论”！标量场论的这个性质被称为平庸性。平庸性的存在意味着，为了得到一个有相互作用的标量场论，我们必须在理论中保持一个有限的（尽管可以很大）的截断 Λ。而且，上面的关系式还告诉我们，重整化的相互作用耦合参数 λ_R 越强，就要求 am_R 越大，或者说截断 Λ 相对于物理质量 m_R 就越低，从而理论对于截断的依赖就越强。也就是说，平庸性说明：不存在极强相互作用的、连续的（无截断影响的）普适的标量场论。一个无截断影响的，或者说截断影响很弱的标量场论一定是弱耦合的。[30] 虽然我们这里仅仅是从一圈计算来得到的这个结果，但是非微扰的研究也证实了这样一个图象。而且这个图象不仅仅对于一个分量的标量场论成立，对于多个分量的标量场论也同样是成立的。

§12.2. 维数正规化下一圈图的计算

¶ 一个值得讨论的正规化是所谓的维数正规化。这时，我们的时空维数被解析延拓倒 $D = 4 - 2\epsilon$ 维。我们得到的结果中将含有形如：$1/\epsilon$ 这样的极点，它提醒着我们，如果我们试图将 ϵ 趋于零，我们会得到紫外发散的结果。一般说来，利用维数正规化来计算一圈图可以按照以下步骤进行：

[29] 要计算这个表达式中的 $\mathcal{O}(\lambda_R^3)$ 的贡献需要计算理论的二圈图。我们这里不去计算它，我们仅仅给出其结果：

$$\beta(\lambda_R) = \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R^2 - \frac{17}{768\pi^4}\lambda_R^3 + \mathcal{O}(\lambda_R^4)\,. \tag{2.77}$$

[30] 如果利用两圈的 β-函数 (2.77)，那么似乎我们可以存在一个非平庸的 β-函数的零点。但是，这个零点实际上是非物理的。更高级的（三圈）微扰计算以及详细的非微扰研究（格点计算）表明，这个零点实际上是不存在的（而且他也是个紫外固定点，不是红外固定点）。

刘川制造

- 利用费曼参数化公式：[31]

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1 dx\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}\,, \tag{2.81}$$

  将分母上若干个因子写成一个因子。

- 对积分四动量 l 平移，使得分母的因子中只含有 l^2。

- 如果计算是在闵氏空间中进行的，我们还需要对积分进行 Wick 转动：$l^2=-l_E^2$，然后利用下列公式完成积分：

$$\int\frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(l^2)^\alpha}{(l^2+m^2)^\beta}=\frac{(m^2)^{\omega+\alpha-\beta}}{(4\pi)^\omega}\frac{\Gamma(\alpha+\omega)\Gamma(\beta-\alpha-\omega)}{\Gamma(\omega)\Gamma(\beta)}\,. \tag{2.82}$$

- 对于 $\epsilon\to 0$ 的极限，利用：

$$\Gamma(\epsilon)\sim\frac{1}{\epsilon}-\Gamma_E+\mathcal{O}(\epsilon)\,. \tag{2.83}$$

  可以得到所有的紫外发散的部分。

游戏 2.11 *利用 Γ 函数的性质：$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ 以及展开式 (2.83) 导出：*

$$\Gamma(-1+\epsilon)=-\frac{1}{\epsilon}-\gamma_E-1+\mathcal{O}(\epsilon)\,. \tag{2.84}$$

并且由此得到普遍的 $\Gamma(-n+\epsilon)$ 的展开式，其中 n 是一个非负整数。

¶ 下面我们利用重整化的微扰论和维数正规化来计算 $\lambda\phi^4$ 理论的一圈结果。首先，在 $D=4-2\epsilon$ 维空间，我们（重整化的、欧氏空间的）的拉氏量应当写成：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{4!}\phi^4\,. \tag{2.85}$$

需要注意的是这个拉氏量的相互作用部分。由于我们现在处在 $D=4-2\epsilon$ 维，因此，为了保证作用量是无量纲的，我们的标量场的（质量）量纲为：$1-\epsilon$。相应的，ϕ^4 项前面的系数的量纲应当是：2ϵ。为此，我们如果保持 λ 仍然为无量纲的，我们就必须引入一个因子 $\mu^{2\epsilon}$，其中 μ 是一个具有质量量纲的任意能标。这里我们顺便提一下所有紫外发散正规化的一个共性。任何一个紫外的截断都必定会引入一个有量纲的截断。在动量截断中，这个有量纲的截断就是 Λ；在格点正规化中，这个有量纲的截断就是格距 a。在维数正规化中，看起来我们似乎没有引入有量纲的截断，但是，参数 μ 的引入实际上就是一

[31] 这里给出的是最常用到的两个传播子的情形。对于任意多个因子的情形，我们有：

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}=\int_0^1\left(\prod_{i=1}^n dx_i\right)\delta\left(1-\sum_{i=1}^n x_i\right)\frac{1}{[\sum_{i=1}^n a_i x_i]^n}\,. \tag{2.80}$$

刻川制造

个有量纲的量，它实际上与截断，也就是 ϵ 是同时出现的。有了这个有量纲的截断，我们就可以研究物理的顶点函数对于标度变换（或者说对于截断的变化）的依赖，这就是我们前面讨论的重整化群方程。维数正规化比较特别的地方就是它引入标度的方式比较间接（通过 ϵ 与 μ 的交互作用）。

按照理论的费曼规则，我们不难写出重整化的两点和四点顶点函数：

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2+m^2+\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{1}{k^2+m^2}+\delta m^2\,, \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= -\lambda+\frac{\lambda^2}{2}[I_2(m,p_1+p_2)+I_2(m,p_1+p_3)\\ &+ I_2(m,p_1+p_4)]-\delta\lambda\,,\end{aligned} \tag{2.87}$$

其中我们引入了符号：$2\omega\equiv D=4-2\epsilon$，而积分 $I_2(m,p)$ 的定义为：

$$I_2(m,p)=\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{1}{(k^2+m^2)((p-k)^2+m^2)}\,. \tag{2.88}$$

请大家特别注意上面两个式子中的抵消项的贡献，按照重整化的微扰论的精神，我们必须在原来重整化的拉氏量之外加上这些抵消项，才能够消去计算中出现的紫外发散。如果我们现在加上我们的重整化条件 (2.44)，我们就可以确定抵消项 δm^2 和 $\delta\lambda$。我们得到的顶点函数的结果是

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_R(p) &= p^2+m^2\,,\\ \Gamma^{(4)}_R(p_1,p_2,p_3,p_4) &= -\lambda+\frac{\lambda^2}{2}[I_2(m,p_1+p_2)+I_2(m,p_1+p_3)\\ &+ I_2(m,p_1+p_4)]-\frac{3\lambda_R^2}{2}I(m,0)+\mathcal{O}(\lambda^3)\,,\end{aligned} \tag{2.89}$$

其中的积分 $I_2(m,p)$ 由公式 (2.88) 给出。

游戏 2.12 *验证这个结果。*

读者可以发现，尽管这里出现的圈积分 $I_2(m,p)$ 本身是发散的（包含 $1/\epsilon$ 的极点），但是，上面公式中的四点顶点函数是有限的。

¶ 最后，让我们来讨论重整化群方程。前面已经谈到，重整化群方程实际上反映了顶点函数在标度变换下的变化规律。在维数正规化中，这个标度是通过参数 μ 引入到理论中的。我们的重整化群方程为（即方程 (2.61) ）：

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}+\frac{n}{2}\gamma\right]\Gamma^{(n)}_R=0\,, \tag{2.90}$$

其中的重整化群系数的定义由公式 (2.62) 给出。利用维数正规化中圈积分的具体表达式，我们不难得出裸的 λ_0，m_0^2 作为重整化的 λ，m^2 以及重整化标度 μ 的函数关系。然后利用这些裸的参数实际上根本与 μ 无关，我们就可以得到到微扰论的一圈的所有重整化群系数。特别的，我们得到的 β-函数与我们前面利用其他正规化方法计算的结果相同。

游戏 2.13 *验证这个结果。*

刘川制造

相关的阅读

本章主要讨论了标量场论的路径积分表示。然后，我们运用这种表示讨论了标量场论的正规化和重整化问题。这是量子场论中最为重要，同时又是最难以理解的概念。我们希望通过对于简单的标量场论的分析，同学们能够对重整化以及重整化群的概念有所理解。这些概念将是我们后面讨论规范场，特别是规范场的重整化的基础。我们对于圈图的具体计算没有很仔细地写出中间的步骤，希望大家能够将这些中间步骤补上。我们试图从有严格定义的、分立形式的路径积分出发来讨论标量场的所有问题。这种利用格点正规化的方法的更为详细的讨论可以参考 Montvay 的书 [10]。关于普遍的、非微扰的重整化群流以及重整化与凝聚态统计物理中临界现象的深刻联系，隆重推荐 Wilson 和 Kogut 的文章 [13]。关于有效作用量、维数正规化以及连续时空的重整化群的讨论，大家可以参考 Ramond 和 Collins 的书 [7]。其他方式的正规化和重整化方案，可以参看 [2, 3]。

Chuan Liu

刘川制造

第三章　旋量场的路径积分 — 快板

前面处理的量子场论系统都是所谓的玻色自由度，也就是说描写它们的量子场是标量场。我们知道自然界的基本组成是旋量场，或者说是费米场。这一章中我们就来简要介绍一下在路径积分量子化体系中是如何处理费米场的。我们的讨论将是十分简略的，仅仅是叙述主要的结论，同时说明这些结果是合理的，但是并不会过多地留意于严格的证明。

另外一点需要指出的是，我们前面的讨论都是从分立的路径积分的严格定义出发，来讨论标量场的微扰论、重整化等问题。原则上讲，对于费米场（以及后面的规范场）我们也应当这样来做。但为了简化我们的讨论，我们将直接采用连续时空中形式的路径积分表示。对于所有的费曼规则，我们也将直接给出连续时空中的形式。当然读者们心里应当记住：所有这一切只有在进行了正规化、重整化之后才具有真实的物理意义。在一些需要注意的地方，我们会尽量提醒大家。

§13. 旋量场与 Grassmann 代数

¶ 旋量场描写的是费米子，它们与玻色子最大的区别是遵从泡利不相容原理。这意味着在正则量子化的理论体系中，我们必须要求它的产生湮灭算符满足反对易关系。如果采用路径积分量子化的方法，这要求旋量场的场变量必须能够反应出这个本质的区别。我们这里不想严格地去论述如何实现这一点，而只是指出结论：只需要将旋量场变量在所谓的 Grassmann 数域中取值，我们前面用于标量场的路径积分量子化的方法可以完全移植到旋量场。

所谓 Grassmann 代数，是指一些反对易的数构成的数域。它们的任何两个数之间是反对易的。也就是说，如果我们有两个 Grassmann 数：ξ_i 和 ξ_j，那么一定有：$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$。做为一个特例，对于任意一个 Grassmann 数 ξ，我们一定有：$\xi^2 = \xi\xi = 0$。由于这个条件，依赖于一个 Grassmann 变量 ξ 的函数只能具有如下简单的形式：$f(\xi) = f_0 + f_1\xi$。

我们还可以定义函数对于 Grassmann 数的微分和积分：

$$\int d\xi\xi = \partial_\xi\xi = 1\,, \quad \int d\xi = 0\,, \tag{3.1}$$

这个约定再加上线性的要求就可以完全确定函数对于 Grassmann 数的微分与积分。量子场论中最为重要的一个 Grassmann 积分（可能也是唯一一个）是：

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi}_i M_{ij}\psi_j} = \det M \,, \tag{3.2}$$

这里符号 $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_i (d\bar{\psi}_i d\psi_i)$ 是积分的测度。

在费米场的路径积分表示中，费米场的每一个分立都将在 Grassmann 代数中取值。以我们熟悉的狄拉克场为例，每一个 $\psi_\alpha(x)$ 都是一个 Grassmann 变量，其中 α 是它的旋量指标（从 1 到 4 ），x 是四维时空坐标。特别需要强调的是：每一个 $\bar{\psi}_\alpha(x)$ 也是一个 Grassmann 变量，并且它是与 ψ 完全独立的 Grassmann 变量。[1]

§14. 自由旋量场的作用量和生成泛函

¶ 一个自由旋量场的作用量几乎可以完全由对称性得到。首先，由于一个旋量场是一个 Grassmann 数，所以旋量场的作用量（标量）一定要由偶数个旋量场构成；事实上自由的旋量场作用量由两个旋量场构成，我们称作用量对于旋量场是双线性（ bilinear ）的。[2] 考虑到洛伦兹群的表示，同时要求宇称是好的对称性，我们的自由费米子作用量一定可以写成狄拉克作用量的形式：

$$S_0[\bar{\psi},\psi] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \,. \tag{3.3}$$

其中 $\partial\!\!\!/ = \partial_\mu \gamma^\mu$。

要量子化这个系统，我们将它的作用量放到指数上并且对所有的费米子场 $\bar{\psi}(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行积分（路径积分）。需要注意的是，现在这些费米子场的每一个独立分量都取值于 Grassmann 数域。我们定义费米子系统的配分函数为：

$$\mathcal{Z}_0[\bar{J},J] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{iS_0[\bar{\psi},\psi]+i\int d^4x\left(\bar{J}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)J(x)\right)} \,. \tag{3.4}$$

正如玻色场的情形一样，为了计算的方便我们引入了外源 $\bar{J}(x)$ 和 $J(x)$，它们也都是 Grassmann 变量（场）。类似地，对于自由的狄拉克场，我们可以对于指数上配方，从而得到：

$$\mathcal{Z}_0[\bar{J},J] = \mathcal{Z}_0[0,0]e^{-i\bar{J}(x)[i\partial_\mu\gamma^\mu - m]^{-1}_{xy}J(y)} \,. \tag{3.5}$$

这就是自由狄拉克费米子的生成泛函。正如标量场论中的情况一样，如果我们对其中的外源求（泛函）微商，就可以得到费米子的传播子，也就是费米子的两点编时

[1] 我们强调这一点是因为在正则量子化中，ψ 和 $\bar{\psi}$ 是靠厄米共轭联系起来的。但是在路径积分量子化中，它们却是完全独立的。其中一个原因就是在 Grassmann 代数中一般来说无法厄米共轭的操作。

[2] 由四个旋量场构成的项实际上代表了旋量场之间的相互作用。一个典型的例子就是费米的所谓 4-费米子理论。这是电弱相互作用标准模型之前，人们关于弱相互作用的最成功的理论。自由的旋量场作用量只包含两个旋量场。

刻川制造

格林函数。这里我们需要注意的一点是：我们约定对于所有上面不含 bar 的场，例如：$J(x)$，$\psi(x)$ 的泛函微商，都必须将微商符号移到它所作用的量的左边，再向右作用；对于所有上面含有 bar 的场，则约定必须将其移到所作用的量的右边，再向左边作用。具体地说，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta J(x)}J(y) &= \delta^4(x-y)\,,\\ -\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\bar{J}(y) &= \bar{J}(y)\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} = \delta^4(x-y)\,,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中第二行交换两个 Grassmann 数时必须出一个符号。有了这个约定，我们发现，对于计算编时格林函数，我们有如下的对应规则：

$$\bar{\psi}(x) \Leftrightarrow \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\,,\quad \psi(x) \Leftrightarrow \left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right)\,, \tag{3.7}$$

由此，我们不难从 $\mathcal{Z}_0$ 的具体表达式求出自由狄拉克场的传播子：

$$\begin{aligned}G_0(x,y) &= \langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\rangle = \left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\mathcal{Z}_0[\bar{J},J]\\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot(x-y)}\frac{i}{\not{k}-m+i\epsilon}\,,\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中我们没有明确写出旋量的指标。

§15. Yukawa 模型

¶ 如果我们将一个狄拉克旋量场与一个标量场耦合，就可以得到一个有相互作用的标量—旋量理论。这个模型的（连续闵氏空间的）拉氏量可以写成：[3]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\\ &+ \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi + g\phi\bar{\psi}\psi\,,\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中第一行给出的就是 $\lambda\phi^4$ 纯标量场的拉氏量；第二行的第一项是自由费米子的拉氏量；最后一项反映了标量场与旋量场的耦合。这一项被称为 Yukawa 相互作用项，其中的参数 g 被称为 Yukawa 耦合参数；相应的，这个场论模型被称为 Yukawa 模型。

Yukawa 模型不是一个可以简单求解的模型。当然，存在许多研究这个模型的近似方法。我们下面就简要地来介绍一下。

[3]按照前一章的语言，这里写出的是用理论的重整化参数写出的拉氏量，也就是不包含抵消项的拉氏量。这里的场和参数都是重整化的场和参数。系统完整的拉氏量等于这里写出的拉氏量再加上抵消项的拉氏量构成。这个完整的拉氏量可以用裸的场和参数写出。

刘川制造

§15.1. 微扰展开

¶ 如果系统的（重整化的）耦合参数 λ 和 g 都是小的，那么我们可以利用重整化的微扰论来研究 Yukawa 模型。到微扰论的固定一阶，格林函数可以用一些费曼图来表示。这些费曼图具有一定的规则。纯标量场的费曼规则我们已经在前一章给出了。目前，我们必须加上与费米子有关的费曼规则：

费曼规则.4 *Yukawa 模型的费曼规则（闵氏空间）：在标量场论的闵氏空间费曼规则之外，在加上如下与费米子有关的部分：*

- *每一个狄拉克场的自由传播子在动量空间中由* $[i/(\not{k} - M + i\epsilon)]$ *给出，其中* k *是该传播子中流动的四动量。*
- *每一个标量场与费米子相互作用顶点都对应于一个因子* $(-ig)$。
- *如果图中存在费米子圈，那么该图的贡献应当乘以一个负号。*

有兴趣的同学，可以仿照我们在纯标量场中所作的一样，计算一下 Yukawa 模型的一圈重整化的结果。

¶ 另外一个值得考虑的问题就是费米子的引入对于原来纯标量场的影响。这个问题可以利用路径积分，形象地加以研究。Yukawa 模型的真空到真空跃迁矩阵元可以写成：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(iS_b[\phi] + i\int d^4x\bar{\psi}(i\not{\partial} - M + g\phi)\psi\right) . \tag{3.10}$$

这里 $S_b[\phi]$ 是纯玻色场（标量场）的作用量。注意到与费米子场有关的作用量对于费米场仍然是双线性的，因此我们可以利用 Grassmann 积分的性质，完成对于费米子的积分。这个过程又被称为“把费米子积掉”。这个的结果是一个所谓的费米子行列式：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_b[\phi]} \det\left[i\not{\partial} - M + g\phi\right] , \tag{3.11}$$

我们可以利用：$\det A = e^{Tr\log A}$ 将上式中的费米子行列式写到指数上并与 $S_b[\phi]$ 合并：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{eff}}[\phi]} \\ S_{\text{eff}}[\phi] &= S_b[\phi] - iTr\log\left[i\not{\partial} - M + g\phi\right] . \end{aligned} \tag{3.12}$$

因此我们看到，费米子对于标量场系统的影响，可以看成是将原先标量场的作用量 $S_b[\phi]$ 变成了一个等效的作用量：$S_{\text{eff}}[\phi]$。这个等效作用量中除了原先的纯标量场作用量以外，又加上了一项：$Tr\log\left[i\not{\partial} - M + g\phi\right]$，这一项可以看成是费米子圈对于标量场的影响。如果耦合参数 g 很小，我们可以展开其中的对数函数：

$$\begin{aligned} Tr\log\left[i\not{\partial} - M + g\phi\right] &= Tr\log\left(i\not{\partial} - M\right) + Tr\left((i\not{\partial} - M)^{-1}g\phi\right) \\ &- \frac{1}{2}Tr\left((i\not{\partial} - M)^{-1}g\phi(i\not{\partial} - M)^{-1}g\phi\right) + \cdots . \end{aligned} \tag{3.13}$$

刘川制造

这个展开式的第一项是与 ϕ 无关的常数；第二项是正比于 ϕ 的项；第三项是 ϕ 的二次项，等等。当然，实际计算这些项的系数时候会遇到紫外发散。我们必须引入截断，然后进行计算。利用计算出来的结果并且加上适当的重整化条件，我们就可以将这个模型的低能区顶点函数用重整化的参数来表达。Yukawa 模型的一个重要特性是：*它是一个可重整的理论*。因此，在外加了适当的重整化条件后，我们的低能顶点函数，用重整化参数表达以后，将不再包含紫外发散的问题（除去所谓的标度性破坏的项以外）。

§15.2. 大 N 展开

相关的阅读

本章简要讨论了旋量场的路径积分。从洛伦兹群的表示出发讨论旋量场作用量的构造以及它们的路径积分，大家可以参考 Ramond 的书 [7]。我们在旋量场的情形下没有再采用有严格数学定义的、分立形式的路径积分表示，其主要原因是在格点上的费米子是一个比较专门的题目，会涉及到许多新的问题，其中有些（例如，涉及手征性的问题）目前仍没有解决。有兴趣的同学可以参考 Montvay 的书 [10] 以及他的书中所引的文献。

Chuan Li

刘川制造

第四章　对称性及其破缺－小快板

本章中我们将讨论在量子场论中起重要作用的对称性问题。对于一个复杂的量子场论系统来说，对称性在很多时候往往是唯一可以利用的工具。严格的对称性可以给我们很重要的、严格的结果。当然，不是所有的对称性都是严格的。物理学家之所以热爱对称性，一个重要的原因就在于他们可以砸碎（ break ）它，这称为对称性的破缺。

对称性按照类型来分，又可以将它们分为：整体对称性（ global symmetry ）和局域对称性（ local symmetry ）。局域对称性的存在必须引入相应的规范场。这是一种矢量场，也是我们这个课程着重要研究的对象。正因为如此，局域对称性又被称为规范对称性。

如果一个对称性不是严格地成立，而仅仅是近似地成立，我们就称这个对称性被破缺了，或者称其为破缺的对称性。[1] 对称性的破缺是一个十分重要的概念。对于一个经典系统，或者对于一个有限自由度的量子系统，对称性的原因只可能有一个，那就是其哈密顿量中存在不满足对称性的项－我们称之为破缺项；相应的这样的对称性的破缺被称为明显破缺（ explicit breaking ）。对于一个无穷自由度的量子场系统，对称性破缺除了上面提到的明显破缺之外，还可以有另外两类：一类称为自发破缺（ spontaneous breaking ），还有一类称为反常破缺（ anomalous breaking ）。这一章中，我们将着重介绍对称性的自发破缺，因为这是量子场这样的无穷多自由度系统所特有的。

§16. 整体对称性

¶ 作为整体对称性的一个例子，让我们来讨论一个具有 N 个（实）分量的标量场论。它的拉氏量可以写成：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a-\frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a-\frac{\lambda}{4!}(\phi^a\phi^a)^2\,. \tag{4.1}$$

这里 $\phi^a(x)$，$a=1,2,\cdots,N$ 是一个 N 分量的标量场。这个理论的拉氏量具有一个整体的 $O(N)$ 对称性。也就是说，如果我们取一个 $O(N)$ 转动：$R\in O(N)$，并且

[1] 当然，如果一个对称性连近似成立都称不上，我们就说系统根本没有这个对称性。

令：$\phi'^a(x) = R_{ab}\phi^b(x)$，那么显然有：

$$\mathcal{L}[\phi'] = \mathcal{L}[\phi] \,. \tag{4.2}$$

我们称这个理论具有 $O(N)$ 整体对称性。所谓整体，是指在变换场的时候，在不同时空点的场所用到的变换矩阵是相同的，也就是说 R_{ab} 是一个常矩阵，不依赖于时空坐标。不难发现，如果变换矩阵 $R_{ab}(x)$ 依赖于时空坐标，那么这个模型的拉氏量中的动能项不是不变的。这个场论模型通常被称为 $O(N)$-标量场模型，或简称为 $O(N)$-模型。它的一个特例，具体来说就是 $O(4)$-标量场模型构成了最小标准模型的一个重要组成部分。

¶ 我们再举一个费米子场的例子。我们假定我们有 N 个狄拉克场：$\psi_i(x)$，其中 $i = 1, 2, \cdots, N$ 是一个内部空间（姑且称之为“味空间”）的指标。那么：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i \,, \tag{4.3}$$

具有一个 $SU(N)$ 对称性。具体来说，令：

$$\psi'_i(x) = U_{ij}\psi_j(x) \,, \quad \bar{\psi}'_i(x) = \bar{\psi}'_j U^\dagger_{ji} \,, \tag{4.4}$$

其中 $U \in SU(N)$，那么大家可以轻易看出：费米子的拉氏量是不变的，也就是说理论具备一个整体的 $SU(N)$ 对称性。[2]

¶ 我们上面所列举的例子所对应的对称性都是所谓的连续对称性。在量子场论中，连续对称性一般可以用一个李群（Lie group）来描述，例如上面提到的 $O(N)$ 和 $SU(N)$ 群。一个李群的群元素可以用其生成元来表示：[3]给定一个李群 G，它的一个元素 $g \in G$ 可以表达为：

$$g(\theta) = e^{i\theta^a T^a} \,, \tag{4.5}$$

这里 θ^a 是标志群元素的连续参量（转动角度）；T^a 是李群的生成元。不同的李群其生成元的个数也不同。$O(N)$ 群有 $N(N-1)/2$ 个生成元；而 $SU(N)$ 群有 $N^2 - 1$ 个生成元。一个李群的群元素（解析地）依赖于一些连续参量 θ^a。在李群的单位元附近，李群的性质完全由其生成元的性质所确定。李群的所有生成元 T^a 张成一个矢量空间，它称为这个李群的相应李代数。李代数的性质，完全由李群的生成元之间的对易关系所确定：

$$[T^a, T^b] = iC_{abc}T^c \,, \tag{4.6}$$

其中 C_{abc} 被称为该李代数的结构常数。

¶ 如果一个对称变换所对应的群元素无限接近于群的单位元，或者说参数 θ^a 为无穷小，我们称这样的变换为无穷小对称变换。以 $O(N)$ 模型为例，对于一个无穷小的对称变换，场 $\phi(x)$ 的改变为：

$$\delta\phi(x) = i\theta^a T^a \phi(x) = \theta^a \delta_a \phi(x) \,, \tag{4.7}$$

[2]其实这个理论的拉氏量是 $U(N)$ 对称的，而不仅仅是 $SU(N)$ 对称的。

[3]为了简单起见，我们只讨论在群的单位元附近的群元素。同时，为了简化讨论我们假定该李群是半单纯的。

刘川制造

其中 $\delta_a\phi(x) = iT^a\phi(x)$。如果这是一个理论的对称性，我们一定要求在此无穷小变换下，系统的拉氏量的改变为：

$$\delta\mathcal{L} = \theta_a\delta_a\mathcal{L} = \theta_a\partial^\mu Y^a_\mu \,. \tag{4.8}$$

注意，这里我们假定拉氏量可以发生一个全导数的变化，因为它保证作用量是不变的。常见到的情形是 $Y^a_\mu = 0$，也就是说拉氏量本身在无穷小对称变换下是不变的。对于这个对称性，我们可以定义经典的 Nöther 流：

$$j^a_\mu(x) = \delta_a\phi(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} - Y^a_\mu(x) \,. \tag{4.9}$$

于是很容易验证：体系的经典运动方程要求 Nöther 流守恒：

$$\partial^\mu j^\mu_a(x) = 0 \,. \tag{4.10}$$

因此，利用李群和李代数的语言，我们发现对应于每一个李群的生成元都有一个相对应的守恒流（ Nöther 流）。例如，对于狄拉克场的 $SU(N)$ 整体对称性，我们有：

$$\delta\psi_i(x) = i\delta\theta^a T^a_{ij}\psi_j(x) \,, \delta\bar{\psi}_i(x) = \bar{\psi}_j(x)(-i\delta\theta^a T^a_{ji}) \,,$$

其中的 $\delta\theta^a$ 为无穷小的参数。我们得到相应的守恒流可以取为：

$$j^a_\mu(x) = \bar{\psi}T^a\gamma_\mu\psi \,. \tag{4.11}$$

¶ 最后我们指出：整体对称性也可以是分立对称性。例如我们在讨论 $\lambda\phi^4$ 标量场论时，它实际上具有一个 Z_2 的分立整体对称性。也就是说，描写这个对称操作的对称群是一个分立群，而不是李群。

§17. 对称性与 Ward 恒等式

¶ 一个量子场系统一旦有了一种经典的对称性，我们就可以得出一系列关于其格林函数之间的有用关系。这一类的关系被称为 Ward 恒等式。[4]

为了简化我们的讨论，我们只研究一个具有连续对称性的标量场理论，例如公式 (4.1) 所给出的 $O(n)$-模型。在一个无穷小的对称变换下，我们的场的变换可以写成：$\delta_a\phi^A = i(T^a)_{AB}\phi^B(x)$。如果我们在路径积分中对被积分的场 $\phi(x)$ 作一个变换：

$$\phi(x) \to \phi(x) + \epsilon_a(x)\delta_a\phi(x) \,, \tag{4.12}$$

注意，这里的参数 $\epsilon_a(x)$ 是依赖于时空坐标的函数。因此，在这个变换下作用量并不是不变的，因为只有在整体对称性变换下，作用量才是不变的。如果我们假定这个变换不改

[4]这个关系是 Ward 首先在 QED 中得到的（ 1950 年）。在其他的理论中，也可以得到类似的关系。我们统称它们为 Ward 恒等式。

刻川制造

变路径积分的积分测度，[5] 那么标量场论的生成泛函可以写成：

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi+\epsilon_a\delta_a\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)} ,$$

将这个式子展开到线性项，我们得到：

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)} \left[\int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)\right.\right. \\ + & \left.\left. \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi(x))}\partial^\mu[\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)] + J(x)\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

注意到上式中含 $\partial^\mu[\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)]$ 的项可以拆成两项：

$$\partial^\mu[\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)] = \partial^\mu[\epsilon_a(x)]\delta_a\phi(x)] + \epsilon_a(x)\partial^\mu[\delta_a\phi(x)] .$$

这样一来等式 (4.13) 可以化为：

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)} \times \\ \times & \left[\int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta_a\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi(x))}\partial^\mu[\delta_a\phi(x)]\right)\epsilon_a(x)\right. \\ - & \left. \epsilon_a(x)\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi(x))}\delta_a\phi(x)\right) + J(x)\epsilon_a(x)\delta_a\phi(x)\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

这个式子第二行的圆括号中的量恰恰正比于系统的拉氏量在一个整体对称性变换下的改变，因此它一定等于某个量的散度；于第三行的第一项合并正好是系统的 Nöther 流的散度。于是我们得到：

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)} \times \left[\int d^4x\epsilon_a(x)\left(-\partial^\mu j^a_\mu(x) + J(x)\delta_a\phi(x)\right)\right] = 0 .$$

或者对于 $\epsilon_a(x)$ 泛函微商得到：

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]+i\int d^4xJ(x)\phi(x)} \left(-\partial^\mu j^a_\mu(y) + J(y)\delta_a\phi(y)\right) = 0 , \tag{4.15}$$

其中的 y 是任意一个时空点。这个伟大的等式实际上包含了一系列的恒等式。要得到这些恒等式，我们只需要对外源 $J(x)$ 求泛函微商，再令外源为零得到。例如，一次泛函微商给出：

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu}\langle 0|Tj^a_\mu(y)\phi_A(x)|0\rangle = -i\delta^{(4)}(x-y)\langle 0|\delta_a\phi_A(x)|0\rangle . \tag{4.16}$$

这就是所谓的 Ward 恒等式。我们可以取两次对于外源的泛函微商，结果是：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_\mu}\langle 0|Tj^a_\mu(y)\phi_A(x)\phi_B(z)|0\rangle &= -i\delta^{(4)}(x-y)\langle 0|\delta_a\phi_A(y)\phi_B(z)|0\rangle \\ &- i\delta^{(4)}(z-y)\langle 0|\phi_A(x)\delta_a\phi_B(y)|0\rangle . \end{aligned} \tag{4.17}$$

[5] 如果积分测度同时也发生改变，那么下面推导出来的 Ward 恒等式会出现附加的项，这些项可以称为反常项（ anomoly ），我们这里不去涉及。

刘川制造

公式 (4.16) 如果对空间积分可以得到守恒荷的关系：

$$\langle 0|[Q_a, \phi(x)]|0\rangle = -i\langle 0|\delta_a \phi(x)|0\rangle \,. \tag{4.18}$$

这里需要注意的是：如果存在对称性的自发破缺，那么这个等式不能成立。原因是在导出这个公式中我们扔掉的在无穷远表面上的积分不等于零，其根本原因是这时存在零质量的粒子（ Goldstone 粒子）。

§18. 整体对称性的自发破缺

¶ 对于一个量子场系统，如果它的作用量（拉氏量）具有某种对称性，但是系统的（严格的）真空却不具备这种对称性，这时我们就称这种对称性被自发破缺了。

首先需要指出的一点是：对称性自发破缺只可能发生在具有无穷多自由度的系统；一个有限多自由度的量子体系的对称性是不可能自发破缺的。作为一个例子，让我们来考察一个欧氏空间中的 $\lambda\phi^4$ 标量场论。这个理论的完整的（裸的）拉氏量为：

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \tag{4.19}$$

如前所说，这个理论具有一个分立的 Z_2 对称性。也就是说，$\phi \Leftrightarrow -\phi$ 是理论的一个对称操作。这个对称性使得

$$\langle\phi(x)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\int \mathcal{D}\phi\phi(x)e^{-S_E[\phi]} = 0 \,. \tag{4.20}$$

如果运用正则量子化的语言，上面这个关系实际上相当于：$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$。也就是说真空也具有 Z_2 对称性。显然，如果我们的量子场系统具有有限多自由度，就像我们处理分立形式的标量场路径积分时一样，那么公式 (4.20) 是严格成立的。也就是说，对于有限多自由度系统，其对称性不可能自发破缺。

但是对于自由度数目趋于无穷的系统，情况就不同了。一个直接的例子就是考虑模型 (4.19) 在耦合参数 $\lambda_0 > 0$ 很小的情况；同时我们假定参数 $m_0^2 < 0$。这时，系统的相互作用势被称为双势井势（ double well potential ）， 也就是说，$V(\phi) = m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4$ 的极小值并不位于 $\phi = 0$ 的位置，而是处于 $\phi = \pm v$ 的位置，其中：

$$v^2 = -\frac{6m_0^2}{\lambda_0} \,, \tag{4.21}$$

换句话说，系统倾向于停留在 $\langle\phi\rangle = v$ 或者 $\langle\phi\rangle = -v$ 的位置。也就是说，系统的真空不满足：$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$，这时我们称系统发生了对称性的自发破缺，而 v 被称为真空期望值（ vacuum expectation value, or VEV ）。

¶ 为什么自由度数目是无穷的系统可以发生对称性自发破缺？或者问一个自由度数目很大（但仍有限）的系统，当它的自由度数目趋于无穷时，它是怎么从对称性不破缺的情形过渡到对称性破缺的情形的？

刘川制造

对于我们上面提到的简单标量场模型，利用微扰论可以得到如下的答案。对于一个有限多自由度系统，例如我们可以取我们的标量场位于一个三维的格子上，格距是 a，而总的格点数目（体积）是 V。对于任何一个有限的 V，对称性都不会自发破缺。如果自由度数目趋于无穷，同时系统的势能又具有双势井的形式，我们发现系统的 ϕ 会倾向于停留在 $\pm v$ 的两个极小值附近。事实上，如果耦合参数足够小，我们可以构造中心位于 $+v$ 和 $-v$ 附近的高斯分布，我们将这两个态记为：$|+\rangle$ 和 $|-\rangle$。它们可以相当好地近似体系哈密顿量的本征态。但是，它们还不是真正的本征态。真正的系统的本征态实际上是它们的组合：$(|+\rangle+|-\rangle)/\sqrt{2}$ 和$(|+\rangle-|-\rangle)/\sqrt{2}$。这两个态分别对应于具有正的和负的 ϕ 宇称。这两个态几乎是简并的，其能量差与系统的总能量的比正比于 $V^{-1/3}$。因此，在 V 是有限的情形下的物理图象是这样的：系统会比较长时间地停留在一个极小点附近；但是只要等足够长的时间，系统就会量子隧穿到另外一个极小。系统会在另一个极小停留较长时间，然后又会隧穿回来。因此，只要等待无穷长的时间，我们发现：$\langle\phi\rangle=0$，也就是说，系统停留在两个极小的几率是相同的。可以证明，系统在两个极小之间的隧穿几率是按照体积的指数压低的。也就是说，如果体积趋于无穷大，那么系统的隧穿几率将趋于零，这时，如果系统初始位于一个极小附近，它再也无法隧穿了。这就是我们所说的：无穷系统的对称性自发破缺。

游戏 4.1 *假定可以利用微扰论，试验证上面讨论的这个图象。*

¶ 上面举的例子是分立对称性的自发破缺问题。在量子场论中，我们还会遇到连续对称性的自发破缺问题。这里最为重要的是所谓的 **Goldstone** 定理。如果一个量子场系统的拉氏量具有某种由李群描写的连续对称性，但是系统的真空却不具备这种对称性，也就是说对于这个李群的某些生成元 T^a，$T^a|0\rangle\neq 0$（也就是说，在这些生成元所产生的无穷小变换下，系统的真空不是不变的），那么我们称量子场系统的对称性发生了自发破缺。我们称这些生成元为破缺的生成元，相应的，其他的生成元被称为未破缺的生成元。对于连续对称性的自发破缺，我们有下面重要的定理：

定理 1 (Goldstone, 1961) *如果一个量子场系统的连续对称性发生自发破缺，那么该量子场系统中一定产生了物质量的标量粒子；所产生的标量粒子的种类正好等于所破缺的生成元的个数。*

这个定理中提到的，对称性自发破缺后产生的无质量粒子被称为 Goldstone 粒子。

作为一个例子，我们考虑前面提到的 $O(N)$ 模型（参见公式 (4.1) 所给出的拉氏量）。如果系统的 $m^2<0$，那么这个系统的 $O(N)$ 对称性会自发破缺到 $O(N-1)$。为了简单起见，我们假定量子场的第 N 个分量的平均值不为零：

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}\phi^1(x)\\ \phi^2(x)\\ \vdots\\ \sigma(x)+v\end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

刘川制造

$O(N)$ 群的生成元可以表示为：$T^{ij}=-T^{ji}$，其中 $i,j=1,2,\cdots,N$，同时 $i\neq j$，它们分别生成了在 i-j 平面内的转动。显然，对于对称性自发破缺后，所有的 T^{iN} 作用在真空上不再是不变的，因此它们是破缺的生成元；而所有的 T^{ij}，$i\neq j<N$ 仍然是对称操作，它们构成了未破缺的生成元，与它们对应的是尚未破缺的 $O(N-1)$ 群。所以，我们有 $(N-1)$ 种无质量的 Goldstone 粒子。将分解 (4.22) 带入到拉氏量 (4.1) 中，读者不难验证用新的场：ϕ^1，ϕ^{N-1}，σ 所表达的拉氏量具有一种有质量的粒子和 $(N-1)$ 种无质量的粒子，与 Goldstone 定理预言相同。

游戏 4.2 *试验证这一点。*

Goldstone 定理的证明可以在很多教科书中找到，我们这里就不再饶舌了。

¶ 作为 Goldstone 定理的一个有趣的应用，我们来提一下在凝聚态物理中十分有名的一个定理。这个定理被称为 Mermin-Wagner 定理。它指出，对于一个二维系统，如果系统具有一个连续的对称性，那么不可能存在一个破缺该对称性的一个二阶相变。这个定理被这两位用来论证二维的 XY 模型（它具备一个 $U(1)$ 连续对称性）不可能存在二阶相变。这个定理实际上与我们这里介绍的 Goldstone 定理是相关联的。因为如果一个二维体系的连续对称性被自发破缺了（存在一个对称性破缺的二阶相变），那么按照 Goldstone 定理，体系中一点出现了零质量的 Goldstone 粒子。于是，这个体系在低能（相应地，在凝聚态物理中是低温）时，就可以近似地由一个无质量标量场论来描写。但是这在二维是不可能的，因为在二维不存在良好定义的、无质量的标量场论，因为这时红外发散 使得理论根本无法存在。

§19. 局域规范对称性

¶ 考虑一个自由的狄拉克场，它的（闵氏空间的）拉氏量为：

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi\,, \tag{4.23}$$

我们知道它具有一个整体的 $U(1)$ 对称性，即在变换：

$$\psi'(x)=e^{i\theta}\psi(x)\,,\quad \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-i\theta}\,, \tag{4.24}$$

下，拉氏量保持不变。与这个整体对称性相应的守恒荷就是电荷（如果我们认为场 ψ 描写了电子、正电子）。现在我们试图将这个整体的 $U(1)$ 对称性推广到局域的 $U(1)$ 对称性。也就是说，我们要求的变换是：

$$\psi'(x)=e^{i\theta(x)}\psi(x)\,,\quad \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-i\theta(x)}\,. \tag{4.25}$$

这样的一个变换被称为局域 $U(1)$ 变换，或者称为 $U(1)$ 规范变换。显然，在 $U(1)$ 规范变换变换下，自由狄拉克场的拉氏量不再是不变的。现在我们如果坚持要求 $U(1)$ 规范变换是一个对称性，我们就必须修改我们的拉氏量。事实上，下面的拉氏量满足这个要求：

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi=\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/-m)\psi\,, \tag{4.26}$$

刻川制造

其中我们引入了一个矢量规范场：$A_\mu(x)$，并定义与它相应的协变导数为：

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \,, \tag{4.27}$$

其中参数 e 为耦合参数。我们要求矢量场在 $U(1)$ 规范变换下的变换规则为：

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \,. \tag{4.28}$$

读者不难证明：拉氏量 (4.26) 在 $U(1)$ 规范变换 (4.25) 和 (4.28) 下保持不变。我们称拉氏量 (4.26) 具有 $U(1)$ 规范对称性；我们引入的矢量场 $A_\mu(x)$ 被称为 $U(1)$ 规范场；相应的公式 (4.25) 和 (4.28) 被称为 $U(1)$ 规范变换；群 $U(1)$ 被称为这个规范变换的规范群。这个拉氏量和这些变换对于大家应当不陌生，它就是量子电动力学（ QED ）的拉氏量和相应的规范变换。这里我们看到，从自由的狄拉克场出发，QED 的拉氏量可以通过将与电荷相应的整体对称性局域化（规范化）得到。

¶ 由于 $U(1)$ 群是一个阿贝尔群，因此 $U(1)$ 规范场又被称为阿贝尔规范场。 杨振宁先生的一大贡献，就是将上面阐述的原则推广到了一般的、非阿贝尔规范群。虽然这个推广一般来说可以运用到任意的群，我们从实际的运用考虑，将主要讲述 $SU(N)$ 群。为此，我们从一个具有整体 $SU(N)$ 对称性的自由拉氏量出发：

$$\mathcal{L} = \bar\psi_i(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i \,. \tag{4.29}$$

它显然具有一个 $SU(N)$ 整体对称性。现在我们要将它推广到局域（规范）对称性。也就是说，我们的变换为：

$$\psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x) \,, \quad \bar\psi'_i(x) = \bar\psi'_j U^\dagger_{ji}(x) \,, \tag{4.30}$$

其中 $U(x) \in SU(N)$。我们修改拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \bar\psi(iD\!\!\!/ - m)\psi \,, \tag{4.31}$$

其中协变导数（或称协变微商）定义为：

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \,. \tag{4.32}$$

这里的矢量场 $A_\mu(x)$ 是取值于李代数 $su(N)$ 的。于是，我们可以验证，如果规范场 $A_\mu(x)$ 按照下列方式变换：

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \,, \tag{4.33}$$

那么拉氏量 (4.31) 具有规范不变性；相应的规范群为 $SU(N)$；公式 (4.30) 和 (4.30) 一起称为规范变换；在李代数中取值的矢量场 $A_\mu(x)$ 称为相应的规范场。协变导数的引入使得：

$$(D_\mu\psi)' = U(x)D_\mu\psi(x) \,, \tag{4.34}$$

刘川制造

如果规范变换相应的群元素处于规范群的单位元的无穷小邻域之内，那么我们令 $\theta(x)=\theta^a(x)T^a$，它是一个取值于李代数的无穷小元素，规范变换 (4.30) 和 (4.30) 可以写成：

$$\begin{aligned}\delta\psi &= i\theta\psi\ ,\ \delta\bar{\psi}=\bar{\psi}(i\theta)\ ,\\ \delta A_\mu &= -\frac{1}{g}D_\mu\theta\ .\end{aligned}\tag{4.35}$$

其中对于 $\theta(x)$ 的协变导数的定义为：

$$D_\mu\theta(x)=\partial_\mu\theta(x)-ig\left[A_\mu,\theta\right]\ .\tag{4.36}$$

从数学上讲，这个协变导数与公式 (4.32) 中定义的协变导数实际上是同一个东东，只是公式 (4.32) 中的协变导数是在群的基本表示中的形式；公式 (4.36) 则是协变导数在群的伴随表示（ adjoint representation ）中的形式。

¶ 规范场从数学上讲相当于是内部空间中的联结（ connection ），它可以看成是生长在底空间上的纤维丛（ fiber bundle ）。任何一个流形上的联结定义好了，就可以研究它的“曲率”。它由该流形上的两个协变导数的对易子给出，我们定义：

$$F_{\mu\nu}=-\frac{1}{ig}[D_\mu,D_\nu]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu,A_\nu]\ .\tag{4.37}$$

我们称它为规范场的场强张量。读者可以轻易验证，$F_{\mu\nu}(x)$ 在规范变换下的变换规则是：

$$F'_{\mu\nu}(x)=U(x)F_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x)\tag{4.38}$$

¶ 前面我们讨论了如何从自由的狄拉克场出发，将其整体对称性局域化（规范化），我们就得到了规范不变的费米场与规范场相互作用的拉氏量。我们现在还需要规范不变的纯规范场的拉氏量。它可以由场强张量简单地构造出来：

$$\mathcal{L}_g=-\frac{1}{2}Tr\left[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right]\tag{4.39}$$

游戏 4.3 *试验证它是规范不变的。*

将纯规范场的拉氏量与费米子的拉氏量相加，我们就得到了费米子与一个规范场相互作用体系的总拉氏量：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_f+\mathcal{L}_g=\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi+\frac{1}{2}Tr\left[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right]\ .\tag{4.40}$$

游戏 4.4 *试验证对于 $U(1)$ 规范场，这就是 QED 的拉氏量。*

¶ 由于规范场取值于规范群所对应的李代数，所以它可以用李代数的生成元来展开。以 $SU(N)$ 规范群为例，我们有：

$$A_\mu(x)=A^a_\mu(x)T^a\ ,\tag{4.41}$$

刻 川 制 造

其中 T^a，$a=1,2,\cdots,N^2-1$ 是 $su(N)$ 李代数的生成元，它们是无迹的、厄米的、$N\times N$ 矩阵。我们称 $A^a_\mu(x)$ 为规范场 $A_\mu(x)$ 的分量。这样一来，分量场 $A^a_\mu(x)$ 都是实的。对于李代数的（基本表示中的）生成元我们将取如下的归一化条件：

$$Tr(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}\,, \tag{4.42}$$

类似的，我们可以将场强张量按照李代数的生成元展开：

$$F_{\mu\nu}(x)=F^a_{\mu\nu}(x)T^a\,, \tag{4.43}$$

其中的分量可以用规范势的分量场表达为：

$$F^a_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A^a_\nu(x)-\partial_\nu A^a_\mu(x)+gC_{abc}A^b_\mu(x)A^c_\nu(x)\,. \tag{4.44}$$

这个公式中的二次项来源于两个规范势的对易子，$C^a{}_{bc}$ 是 $su(N)$ 李代数的结构常数。[6] 利用场强张量的分量，我们可以将规范场自身的拉氏量写为：

$$\mathcal{L}_g=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(x)F^{a\mu\nu}(x)\,. \tag{4.45}$$

这样一来，利用实的场强分量写出来的拉氏量的形式与我们在电动力学中所熟悉的形式完全一致。这就是为什么我们在公式 (4.39) 中取前面的系数为 1/2。

利用分量形式的规范场，我们可以将无穷小的规范变换 (4.35) 写成：

$$\begin{aligned}\delta\psi &= i\theta^aT^a\psi\,,\ \delta\bar\psi=\bar\psi(i\theta^aT^a)\,,\\ \delta A^a_\mu &= \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^a)+C_{abc}A^b_\mu\theta^c\,.\end{aligned} \tag{4.46}$$

¶ 最后，让我们谈一下非阿贝尔规范场与阿贝尔规范场的区别。我们知道，一个纯阿贝尔规范场（例如电磁场）实际上是一个自由场。但是，对于纯非阿贝尔规范场，即使没有它与费米子的相互作用，它自身也存在自相互作用。这可以从纯规范场的作用量 (4.39) 中看出来。这个拉氏量中不仅仅包含有场的二次项（自由项），同时也包含场的三次和四次项（相互作用项）。这些相互作用项是规范对称性所要求的。换句话说，如果没有了这些项，规范对称性就不成立了。同样是由于规范对称性，相互作用的三次项与四次项的系数不是相互独立的，而是都由一个耦合参数 g 来描写。规范对称性是一个很强的对称性，它几乎唯一地确定了相互作用量子场系统的拉氏量的形式。这里我们特别指出：规范场的质量项一般来说是破坏规范对称性的。因此，如果我们的量子场论中要保持规范对称性，理论的拉氏量中就不能够有直接的质量项。[7] 如果需要给以规范场质量，必须通过其他方法，例如下面要讨论的规范对称性的自发破缺。

[6] 一个李代数的结构常数决定了李代数生成元之间的对易关系：$[T^a,T^b]=iC_{abc}T^c$。

[7] 对于阿贝尔规范场，实际上直接加上质量项是可以处理的。对于电磁场，这样的拉氏量被称为 Proca 拉氏量。之所以可以这样而不破坏规范对称性是由于阿贝尔规范场是一个自由场。因此，我们可以将其横向的场分量与纵向的场分量完全分开，互相之间没有相互作用。对于非阿贝尔规范场，这一点是不可能做到的。

刘川制造

§20. 规范对称性的自发破缺

¶ 在第 §18 节中，我们讲述了整体对称性自发破缺的 Goldstone 定理。这一节中，我们将回答同样的问题，只不过现在自发破缺的对称性是一个局域的（或者说规范的）对称性。这时会出现一种特别的、也是十分重要的现象，那些在整体对称性自发破缺中出现的无质量的 Goldstone 粒子，会被原先无质量的规范场所吸收，成为规范场的纵向自由度；与此同时，原先的无质量的规范场也会获得质量。这个机制被称为 **Anderson-Higgs 机制**（Anderson-Higgs mechanism）。[8]

我们首先以一个简单的模型来说明这一点。这就是所谓的 $U(1)$-Higgs 模型。它描写的是一个复的标量场（因此是有电荷的）与一个 $U(1)$ 规范场（不妨看成是电磁场）相互作用的量子系统。它的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^* (D^\mu \Phi) - \frac{\lambda}{4}\left(|\Phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{4.47}$$

其中的协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$，场强张量 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。这个模型也被称为**标量电动力学**（scalar quantum electrodynamic）。[9]

现在我们假设 $v^2 > 0$，从而这个系统的 $U(1)$ 规范对称性发生了自发破缺。具体地说，我们令：

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x)) e^{i\xi(x)/v} \,, \tag{4.48}$$

那么我们将它带入带入到拉氏量 (4.47) 中，就可以得到用场 $\sigma(x)$，$\xi(x)$，$A_\mu(x)$ 表达的拉氏量。现在我们做一个规范变换：

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{v}\partial_\mu \xi(x) \,, \tag{4.49}$$

我们的拉氏量可以利用新的规范场来表达。如果我们仅仅关注于场的二次项，我们得到：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) - \frac{m^2}{2}\sigma^2 - \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A_\mu + \cdots \,, \tag{4.50}$$

其中的 $\cdots$ 代表了场的相互作用项，而参数 $m^2 = \lambda v^2$ 就是标量场的质量平方。我们看到，场 $\xi(x)$ 被完全吸收到新的规范场 $A'_\mu(x)$ 中去了；它实际上称为了新的规范场的纵向分量，而原先的规范场是不包含纵向分量的；与此同时，原先没有质量的规范场也获得了质量：

$$M_A^2 = e^2 v^v \,. \tag{4.51}$$

[8] 这个机制在粒子物理中往往被称为 Higgs 机制。因为，它是 Higgs 等人首先在粒子物理中提及的（1960年）。但是，类似的现象在凝聚态物理中早已经被 Anderson 所讨论（1958年）。

[9] 如果不是在四维，而是在三维（或更低维），同时将 $\Phi(x)$ 看成是超导体的序参量；那么这个拉氏量所给出的就是超导体的朗道理论。

刻川制造

这就是我们前面提到的 Anderson-Higgs 机制。[10]

¶ 虽然我们这里讨论的例子涉及的是一个阿贝尔的规范场（$U(1)$ 规范场），但是类似的机制实际上对于非阿贝尔规范场也是适用的。具体的例子我们将在讨论非阿贝尔规范场的量子化时给出（参见第 §26 节）。Anderson-Higgs 机制的主要物理意义在于，它为我们提供了一个让规范场，特别是非阿贝尔规范场获得质量的有效途径。它的好处就在于，这种机制获得的质量可以不破坏理论的可重整性。

§21. 欧氏空间纯规范场的拓扑结构

¶ 这一节中我们来介绍一下纯规范场的拓扑性质。这些性质实际上是与有限作用量的经典运动方程的解联系在一起的。

为此，我们首先来考察纯规范场的经典运动方程。一个纯规范场系统，它的欧氏空间的拉氏量为（即公式 (4.39) 但变到欧氏空间）：

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} Tr\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] , \tag{4.52}$$

其中的规范场场强张量 $F_{\mu\nu}$ 与规范势的联系是（即公式 (4.37) ）：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] . \tag{4.53}$$

对规范场的作用量变分并令其等于零，我们就可以得到的规范场的经典运动方程（或者说经典场方程）：

$$[D_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 , \tag{4.54}$$

这个方程可以看成是电动力学中麦克斯韦方程的非阿贝尔推广。

游戏 4.5 *试导出规范场的经典运动方程 (4.54)。*

可以证明，使得总能量（作用量）有限的解在欧氏空间的无穷远一定是纯规范解，也就是说，这样的解在无穷远一定满足：$F_{\mu\nu} = 0$。那么纯规范条件要求，在欧氏空间的无穷远处我们一定有：

$$A_\mu(x) = \partial_\mu g(x) g^{-1}(x) . \tag{4.55}$$

这里 $g(x)$ 是相应规范群中的一个元素，它可以是空间坐标的函数。

为了明确起见，我们讨论规范群是 $SU(2)$ 的情形。因为四维欧氏空间的无穷远处在拓扑上等价于一个三维球面 S_3。另一方面，任意一个 $SU(2)$ 群的元素 $g(x)$ 都可以表达为：

$$g(x) = u_0(x) + i\sigma^i u_i(x) , \tag{4.56}$$

[10] 在超导体的朗道理论中，Anderson-Higgs 机制使得在超导相中的电磁场实际上获得了质量，也就是说，$U(1)$ 的规范不变性被自发破缺了。一个有质量的电磁场的具体体现就是，在超导相中，磁矢势是随空间指数衰减的。换句话说，磁场不能够穿透超导体，这被称为迈斯纳效应。

刘川制造

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵；u_0，u_i 同时满足：$u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_3^2\equiv 1$。因此，一个 $SU(2)$ 群的流形也等价于一个三维球面 S_3。所以，我们的群元素 $g(x)$ 可以看成是从三维球面（四维欧氏空间的无穷远处）到三维球面（ $SU(2)$ 群流形）的一个映射。我们知道：这样的一个映射可以分为不同的等价类，用数学的语言来说，就是分成不同的同伦类（ homotopy class ）。这些不同的类由一个不同的整数—被称为缠绕数—来描写。

$$n=\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}\,, \tag{4.57}$$

其中我们定义了场强张量的对偶（ dual ）：

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\,. \tag{4.58}$$

拓扑学的考虑告诉我们，公式 (4.57) 中这个怪怪的积分，竟然积分后一定等于一个整数 n，这个整数实际上就反应了三维球面到自身的映射的缠绕次数。这一点可以从下面的事实看的更清楚。可以验证，公式 (4.57) 中的被积函数实际上是一个完全偏微分：

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu K_\mu\,, \\ K_\mu &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^a_\nu(\partial_\rho A^a_\sigma-\frac{1}{3}\epsilon_{abc}A^b_\rho A^c_\sigma)\,. \end{aligned} \tag{4.59}$$

游戏 4.6 *验证这一点。*

因此，公式 (4.57) 中的四维积分就化为四维欧氏空间的无穷远处（三维球面）的边界的积分。在这个边界面上，函数 K_μ 正好反映了映射的缠绕次数。[11]

一个规范场的缠绕数实际上给出了这个规范场的作用量的一个下限。因为我们有：

$$\begin{aligned} 0 &\le \int d^4x(F^a_{\mu\nu}\pm\tilde{F}^a_{\mu\nu})(F^a_{\mu\nu}\pm\tilde{F}^a_{\mu\nu}) \\ &= 2\int d^4x\left[F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\pm F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu}\right]\,, \end{aligned} \tag{4.60}$$

因此，我们得到：

$$S_E=\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\ge\frac{8\pi^2|n|}{g^2}\,. \tag{4.61}$$

我们看到，非平庸的规范场的拓扑结构使得作用量取值有了一个正的下限。上面的等号成立的条件是规范场满足：

$$F_{\mu\nu}=\pm\tilde{F}_{\mu\nu}\,, \tag{4.62}$$

这样的规范场被称为自对偶（ self-dual ）的和反自对偶（ anti-self-dual ）的。

[11] 我们这里讨论的是所谓的第三同伦类，用拓扑学的记号可以写成：$\pi_3(SU(2))=Z$。它告诉我们流形 $SU(2)$ 的第三同伦群与整数同构（一一对应）。

刻川制造

§22. QCD 的作用量和对称性

¶ 前几节我们讨论了整体对称性、规范对称性以及它们的自发破缺问题。这一节中，我们介绍一下目前公认的、描写强相互作用的量子场论—量子色动力学（ QCD ）—的作用量，同时我们简要地讨论一下它所具备的对称性。

参与强相互作用的基本单元称为夸克（ quark ）， 它们由狄拉克场来描写。人们目前已经发现了形形色色的夸克。也就是说，我们需要不只一个狄拉克场来描写这些夸克。具体地说，我们需要 $3\times 6=18$ 个狄拉克场，来描述自然界所有的夸克。为了区别这些夸克，人们想象它们由 3 种颜色（ color ）和 6 种味道（ flavor ）。 这三种颜色具体叫什么没关系，[12] 六种味道分别称为：u，d，c，s，t，b。[13] 在量子场论中，为了方便我们将描写夸克的旋量场标记为：$\psi_{aA}(x)$，其中 $a=1,2,3$ 标志不同的颜色；$A=u,d,s,c,b,t$ 代表味道。

量子色动力学 （ Quantum Chromodynamics, QCD ）是关于夸克之间相互作用的量子规范理论。具体来说，它假设夸克之间的强相互作用是一个在色空间的规范相互作用；与其相应的规范场是一个 $SU(3)$ 规范场。具体来说，QCD 的拉氏量可以写成：

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{D}-M)\psi-\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\,. \tag{4.63}$$

这里的协变导数 $D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu(x)$，其中规范场 $A_\mu(x)$ 取值于 $su(3)$ 李代数；场强张量则是按照规范场场强的标准定义 (4.37)。这个公式中我们没有明确写出夸克场的味道指标，但是协变导数应当是在味道空间平庸的（也就是说在味道空间是单位矩阵）；相应的，我们只有一个规范耦合参数 g，它适用于所有味道。质量 M 在色空间是平庸的，它在味道空间是对角的，但是并不平庸（六种味道的夸克所对应的质量可以不同）。

¶ 显然，上面给出的 QCD 拉氏量具有色空间的 $SU(3)$ 规范对称性。所以我们说，强相互作用是一个规范理论，与它相应的规范场（在量子化以后）所对应的粒子称为胶子（ gluon ） 目前的实验事实是我们相信，强相互作用的这个色规范对称性是没有被破缺的。也就是说，它是一个严格的规范对称性。

如果 QCD 的拉氏量中夸克质量等于零，也就是说，如果所有的夸克都是无质量的话，那么QCD 拉氏量还具有一个十分重要的整体对称性—手征对称性。大家都知道，对于一个无质量的狄拉克费米子，我们可以将它的左手部分和右手部分完全分开：

$$\mathcal{L}_f=\bar{\psi}_L(i\not{D})\psi_L+\bar{\psi}_R(i\not{D})\psi_R\,, \tag{4.64}$$

注意，只有相应味道的夸克质量为零时，我们才能够将这个味道的夸克拉氏量写成左右手分离的形式。如果存在夸克质量项，那么它会使得左右手耦合起来，从而不能分开。由于自然界中只有三类轻的夸克：u，d，s 可以近似看成是无质量的，因此我们下面主要讨论这三种轻夸克。

[12] 例如：红、绿、蓝

[13] 这纯粹是一种习惯的约定。如果愿意，你也可以称它们为：酸、甜、苦、辣、咸、涩。

刘川制造

由于夸克拉氏量 (4.64) 中左右手是独立的，因此，这个理论在味空间具有一个 $U_L(3)\times U_R(3)$ 的整体对称性。

游戏 4.7 *试验证这一点。*

我们知道：$U_L(3)\times U_R(3)=U(1)\times U(1)\times SU(3)_L\times SU_R(3)$，其中的一个 $U(1)$ 对称性所对应的守恒荷就是重子数 B；另外一个 $U(1)$ 所对应的是味空间平庸轴矢流，它实际上被反常（ anomaly ）破缺了， 因此不再是好的对称性。所以，系统真正生下来的对称性是：$U_B(1)\times SU(3)_L\times SU_R(3)$。

实验还告诉我们，即使是这个对称性仍然不是 QCD 的真正对称性。因为 QCD 真空将上面的 $SU(3)_L\times SU_R(3)$ 破缺到 $SU_V(3)$。这是一个整体对称性的自发破缺。因此按照 Goldstone 定理，一定会产生 8 个无质量的 Goldstone 粒子。在现实世界中，我们所考虑的三种轻夸克的质量虽然很小，但是并严格不是零。因此，这个对称性自发破缺所产生的 Goldstone 粒子也不是严格无质量的，而是质量非常的轻，我们称它们为赝 Goldstone 粒子。在实验中，它们被对应为 π 介子（有三个：π^+，π^0，π^- ）、K 介子（有四个：$K^\pm$，K^0，$\bar{K}^0$ ）和 η 介子。

如前所说，三种轻夸克的质量实际上并不严格是零。特别是 s 夸克，它的质量明显地高于另外两个轻夸克 u 和 d。因此，上面提到的对称性破缺实际上是两种破缺，即自发破缺（来自 QCD 真空）和明显破缺（来自夸克的质量项）联合作用的结果。一个更为好的近似是仅仅考虑两种最轻味道的轻夸克。这时的手征对称性破缺的方式为：$SU_L(2)\times SU_R(2)\to SU_V(2)$，这时，由于 u 和 d 夸克质量更接近于零，我们期待这个破缺中，自发破缺将起更为重要的作用。于是，按照 Goldstone 定理，这个破缺过程所产生的赝 Goldstone 粒子应当比起 $SU(3)$ 的情形更接近于无质量的真正 Goldstone 粒子。实验的结果也的确如此，$SU(2)$ 手征对称性破缺时产生的三个赝 Goldstone 粒子正好是三个 π 介子，它们正是 $SU(3)$ 情形下 8 个赝 Goldstone 粒子中最轻的。

¶ 手征对称性是研究低能 QCD 时十分重要的工具。所谓的手征微扰论正是它的集中体现。手征微扰论不是我们这个课程所讨论的重点，有兴趣的同学可以研修其他课程或参考相关文献。

¶ 最后，让我们指出手征对称性与规范场的拓扑性质之间的一个重要联系。考虑一个给定的规范场 $A_\mu(x)$，我们来考虑在这个规范场的背景下，零质量的狄拉克方程的解：

$$i\not{D}\psi(x)=0\,, \tag{4.65}$$

可以证明，这样的解一定可以取成 γ_5 的本状态，

游戏 4.8 *验证这一点。*

我们称它们具有确定的手性。具有 $\gamma_5=+1$ 的那些解称为具有正手性的零模；具有 $\gamma_5=-1$ 的那些解称为具有负手性的零模。如果具有正手性的独立零模个数为 n_+；具有

刻川制造

负手性的独立零模个数为 n_-；那么两者的差：$n_+ - n_-$ 被称为狄拉克算子 $i\not{D}$ 的指标。一个重要的结论就是，对于任意的平滑的规范场，狄拉克算子的指标等于改规范场的拓扑荷（参见公式 (4.57) 的讨论）：

$$n_+ - n_- = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x Tr[F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}]\,. \tag{4.66}$$

这个重要的结论被称为 Atiya-Singer 指标定理。

相关的阅读

本章简要讨论了量子场系统的对称性问题。我们重点讨论了规范对称性的推广，得到了非阿贝尔规范场的作用量。同时，我们也对对称性的破缺，特别是自发破缺进行了讨论。对称性对于量子场论来说是至关重要的，它是理解量子场论的核心。有关量子场论中的对称性，推荐 Coleman 的书 [5]。另外，所有量子场论的教科书中都会涉及对称性的讨论 [2, 3, 6]。关于李群的性质，一本不错的入门书籍是 Georgi 的书 [12]，如果你不太在意数学上的严格，这已经足够了。

刘川制造

第五章　规范场及其路径积分量子化 — 行板

前一章我们讨论的量子场系统的对称性。特别重要的是，我们将规范对称性推广到了非阿贝尔规范群的情形，得到了费米子与规范场相互作用的、规范不变的拉氏量。这一章中，我们来讨论规范场的量子化问题和量子规范场的性质。尽管对于象 QED 这样的阿贝尔规范场论，可以采用正则量子化；也可以采用路径积分量子化。对于一般的非阿贝尔规范场来说，路径积分量子化就显得更加简洁了。

§23. Fadeev-Popov 量子化方法

¶ 按照路径积分量子化的标准步骤，我们将规范场的作用量放在指数上并且对所有的“场”进行积分，我们就号称完成了量子化：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iS_{eff}[A_\mu]\right) . \tag{5.1}$$

不幸的是，这个方案完全无法用于实际的计算。其中最主要的一个原因是由于规范对称性造成的多余的规范备份。

为了说明其中的原因，我们注意到公式 (5.1) 中的被积函数在规范变换下是不变的。具体来说，如果我们的规范群为 G，我们取一个规范变换：$g(x) = e^{i\theta(x)} \in G$，那么变换以后的规范势为（参见第 §19 节中的公式 (4.33) ）：

$${}^{g}A_\mu(x) = g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu g(x))g^{-1}(x) . \tag{5.2}$$

如果 $\theta(x)$ 是无穷小的李代数元素，那么无穷小的规范变换形式为（参见第 §19 节中的公式 (4.35 ）：

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}D_\mu\theta . \tag{5.3}$$

显然，对于每一个 $A_\mu(x)$，都存在无穷多组 ${}^{g}A_\mu(x)$，而且这无穷多组的规范势所对应的被积函数 $e^{iS_{\text{eff}}[A]}$ 是相同的。于是，当我们对每一个规范势积分（泛函）积分时，

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{eff}}[A_\mu]} = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}\hat{A}_\mu e^{iS[\hat{A}_\mu]} = \int \mathcal{D}\hat{A}_\mu e^{iS[\hat{A}_\mu]} \cdot \int \mathcal{D}g \sim \infty ,$$

其中我们用 $\hat{A}_\mu(x)$ 来表示用规范变换联系在一起的所有规范势中的一个代表。上面公式中的第二步我们利用了作用量 $S_{\text{eff}}[A_\mu]$ 的规范不变性，因此它与 g 无关；最后，由于对

$g(x)$ 的积分本身是发散的，因此这个结果发散。[1]

为了消除上面提到的，由于无穷多的规范备份造成的发散，我们必须对理论实施规范固定。所谓规范固定，就是从规范势的无穷多个规范备份中，仅仅取出一个代表来，换句话说，我们要求规范势满足一个附加的条件，这个条件就被称为规范固定条件。选择不同的规范固定条件就被称为选择了不同的规范。如果我们的规范场所对应的规范群（假定为一个李群）的生成元是 T^a，相应的规范势按照生成元展开的分量为 $A^a_\mu(x)$，那么我们对每一个规范势的分量都需要一个规范固定条件。我们可以将这种条件普遍地写成：

$$F^a[A_\mu(x)] = f^a(x)\ . \tag{5.4}$$

其中 $f^a(x)$ 是与 $A^a_\mu(x)$ 无关的任意函数。

¶ 我们现在定义一个泛函 $\Delta_{FP}[A_\mu]$：

$$\Delta^{-1}_{FP}[A_\mu(x)] \equiv \int \mathcal{D}g \prod_{x,a} \delta\left(F^a[\,{}^g A_\mu(x)] - f^a\right)\ . \tag{5.5}$$

这个古里古怪的东东 $\Delta_{FP}[A_\mu(x)]$ 被称为 **Fadeev-Popov** 行列式。它最为重要的一个性质（可能也是唯一的性质）就是：它是规范不变的。为了证明这一点，我们注意到：如果我们进行一个由 $g'(x) \in G$ 所描写的规范变换，Fadeev-Popov 行列式变为：$\Delta^{-1}_{FP}[{}^{g'}A_\mu(x)]$。按照定义式，相当于等号右边的 *delta*-函数中，规范固定条件泛函的宗量变为 ${}^{g'g}A_\mu(x)$。但是，群的测度 $\mathcal{D}g = \mathcal{D}g'g$，因此改变一下积分变量我们发现，它就等于 $\Delta^{-1}_{FP}[A_\mu(x)]$，即它是规范不变的。

我们再来解释一下，为什么称它为行列式。原因只有一个：它的的确确是一个（泛函）的 Jacobi 行列式。为此，我们假定我们的规范变换的群元素可以写成：$g(x) = e^{i\theta^a(x)T^a}$，那么我们可以将对于（单位元附近的）群元素的积分写成对于参数 θ^a 的积分：$\mathcal{D}g(x) = \mathcal{D}\theta^a(x)$，于是我们有：

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}_{FP}[A_\mu(x)] &= \int \left[\prod_{x,a} d\theta^a(x)\delta\left(F^a[\,{}^g A_\mu(x)] - f^a(x)\right)\right] \\
&= \int \left[\prod_{x,a} dF^a(x)\delta\left(F^a(x) - f^a(x)\right)\left\{\frac{\delta(\theta^1(x),\cdots)}{\delta(F^1(x),\cdots)}\right\}\right] \\
&= \det\left(\frac{\delta\theta^a(x)}{\delta^b F(y)}\right)_{F=f}\ .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

[1] 实际上，这依赖于测度 $\mathcal{D}g$ 的定义。如果我们暂时不考虑由于时空的连续性带来的测度定义问题（也就是说，假想时空是分立的），那么我们可以采用群上的 Haar 测度。这样一来，积分 $\int dg(x)$ 对于紧致群实际上是收敛的。但是，我们这里讨论的量子化实际上是建立在鞍点近似基础上的微扰量子化，因此我们对于群元素的积分实际上用的是局域的（局域在群的单位元附近的）Haar 测度，同时将其延展到无穷，从而造成了发散。因此，即使对于紧致群，微扰量子化中对于规范备份的积分也是发散的，必须引入规范固定条件。

刘川制造

这里的最后一个等号定义了一个泛函的行列式。因此，我们有：

$$\Delta_{FP}[A_\mu(x)] = \det\left(\frac{\delta F^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right)_{F=f} . \tag{5.7}$$

我们看到：Fadeev-Popov 行列式是规范固定函数对于无穷小规范变换的（泛函）行列式。

¶ 现在注意到：Fadeev-Popov 行列式的定义式 (5.5) 实际上给出了一种将 1 表达成一堆复杂东东的方法：

$$1 = \int \mathcal{D}g\Delta_{FP}[A_\mu(x)]\delta\left(F^a[{}^gA_\mu(x)]\right) . \tag{5.8}$$

Fadeev 和 Popov 的过人之处，就在于他们善于把 1 写成极其复杂的东东，而一般的聪明人往往只会将右边这些复杂的东东化简为 1；愚蠢的人甚至连这一点也做不到。好，现在我们将这个宝贵的、有些古怪的 1 写进我们的路径积分 (5.1) 中：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}g\mathcal{D}A_\mu\Delta_{FP}[A_\mu]\delta\left[F({}^gA_\mu)\right] e^{iS_{\rm eff}[A_\mu]} . \tag{5.9}$$

现在，我们将积分变量 $\mathcal{D}A_\mu$ 变成：$\mathcal{D}\,{}^gA_\mu$；注意，由于 Fadeev-Popov 行列式是规范不变的；指数上的作用量也是规范不变的；对于群元素的积分 $\mathcal{D}g$ 也是规范不变的，因此上式化为：[2]

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu\Delta_{FP}[A_\mu]\delta\left[F(A_\mu) - f\right] e^{iS_{eff}[A_\mu]} \cdot \int \mathcal{D}g\,, \tag{5.10}$$

也就是说，我们将对于群的积分完全分离出来了。这个对于群元素的积分尽管是发散的，我们将它吸收到路径积分的测度的定义之中。或者说得更为直接一些，我们将它彻底扔掉，得到规范场论的路径积分为：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu\Delta_{FP}[A_\mu]\delta\left[F(A_\mu) - f\right] e^{iS_{eff}[A_\mu]} . \tag{5.11}$$

这就是 Fadeev-Popov 量子化的结果：在生成泛函路径积分的被积函数中，除了原先的 $e^{iS_{\rm eff}}$ 因子以外，还多出了两个因子：一个是规范固定因子（一个 δ-泛函数）$\delta\left[F(A_\mu) - f\right]$，它限制了多余的规范备份的出现；另一个是 Fadeev-Popov 行列式因子，它反映了规范固定的 δ-函数中，规范固定函数与无穷小规范变换参数之间的积分转换的 Jacobi 行列式。

¶ 下面我们具体来讨论协变规范中的量子化问题，在其他规范下的量子化，可以按照类似的方法进行，其结果也可以在有关的书籍中查到。协变规范（ covariant gauge ）是一个特殊的规范选择， 它的规范固定条件是：[3]

$$F^a[A_\mu(x)] = \partial_\mu A^a_\mu(x) = f^a(x) . \tag{5.12}$$

[2]这些公式中的 $\delta[F(A_\mu)]$ 是 $\prod_{x,a}\delta[F(A_\mu(x))]$ 的一个简化记号。
[3]又称为洛伦兹规范。

刘川制造

这个规范又被称为：郎道规范或者洛伦兹规范。[4]这时，Fadeev-Popov 行列式中的矩阵可以明确地给出。为了得到明显的表达式，我们首先注意到在一个无穷小规范变换下，$A^c_\mu(x)$ 的变换为：

$$\delta A^a_\mu(x) = \frac{1}{g} D^{ab}_\mu \theta^b = \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a + C_{abc} A^b_\mu(x)\theta^c(x) \tag{5.13}$$

其中伴随表示中的协变导数为：

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu + g C_{acb} A^c_\mu \,. \tag{5.14}$$

游戏 5.1 *利用公式 (5.3)，验证上面这个公式。*

因此，我们可以取：

$$M^{cd}_{xy} = -\left(\partial^\mu D^{ab}_\mu\right)_{xy} \,. \tag{5.15}$$

一个泛函的行列式总是觉得不爽。为此，我们利用两个 Grassmann 玻色场将它写成指数上积分的形式。具体的说，就是把公式 (3.2) 倒过来用：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{D}A_\mu \delta\left[F(A_\mu) - f\right] e^{iS_{eff}[A_\mu] + \bar{c}^a_x M^{ab}_{xy} c^b_y} \,. \tag{5.16}$$

这里所引进的 Grassmann 场 $\bar{c}^a(x)$，$c^a(x)$ 是在 Grassmann 代数中取值的玻色（无旋量结构）场。从规范群的角度来说，它们在群的伴随表示中变换，换句话说，对于指标 a 的每一个可能取值，我们都必须引入两个场：$\bar{c}^a(x)$，$c^a(x)$。显然，这些场不可能对应于真实的粒子，因为它们明显违反自旋—统计定理。好在它们仅仅出现在圈中（记住，所谓的行列式，可以看成是费米子的圈）。因此，这些场被称为 **Fadeev-Popov** 鬼场。[5] 与这些鬼场相应的虚拟粒子[6] 被称为鬼粒子。

下一个目标，我们准备将公式 (5.16) 中的 δ-函数设法去掉。具体的做法是这样的：我们将公式 (5.16) 乘以 $e^{(i/2\xi)\int d^4x f^a(x) f^a(x)}$ 并且对 $f^a(x)$ 积分，利用其中的 δ-函数，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\mathcal{D}A_\mu e^{i(S_{\text{eff}}[A_\mu] + S_{GF}[A_\mu] + S_{FPG}[A_\mu])} \\
S_{GF} &= \frac{1}{2\xi}\int d^4x (\partial^\nu A^a_\nu(x))(\partial^\mu A^a_\mu(x)) \,, \\
S_{FPG} &= \int d^4x (\partial^\mu \bar{c}^a)(D^{ab}_\mu c^b) \,.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

在得到这个最终公式的过程中，我们引入了一个任意参数：ξ，它被称为规范固定参数；相应的作用量 S_{GF} 被称为规范固定项。尽管量子化的路径积分中出现了规范固定参数，

[4]另外一些经常用的规范有：库仑规范、轴向规范以及与对称性自发破缺联系的 $R-\xi$ 规范。

[5]最先意识到需要引入鬼场的实际上是 Feynman。它首先发现，在一个非阿贝尔规范场中，如果计算到一圈图，只有引入了鬼场才能够消去一圈图中破坏么正性的项。

[6]也就是说，它们并不对应于理论的 Hilbert 空间中真正的哈密顿量的本状态。

刘川制造

但实际上最终的物理结果是不依赖于规范固定参数 ξ 的。这一点可以从具体的计算中加以检验。作用量 S_{FPG} 被称为 **Fadeev-Popov** 鬼项。

¶ 至此，我们基本上已经完成了非阿贝尔规范场在协变规范下的量子化。公式 (5.17) 就是我们最终的结论。我们看到，为了能够正确地量子化一个非阿贝尔的规范场，我们必须引入规范固定条件。这样我们可以将对于规范群的无穷积分完全分离。剩下的路径积分中出现了两个附加的项：一个是我们所选取的规范固定条件所对应的 δ-函数，它进而被我们利用一个高斯积分吸收到了所谓的规范固定项中；另一个就是 Fadeev-Popov 行列式，它进而被我们用鬼场吸收到 Fadeev-Popov 鬼项之中。经过规范固定以后，我们的路径积分没有了多余的规范备份，因此适合于进行微扰展开。[7]需要指出的是：经过规范固定，我们理论的规范不变性变得不明显了（尽管它实际上还是）。事实上，要证明它仍然是规范不变的，需要利用其他的手段，例如后面提到的 Slavnov-Taylor 等式。

§24. 协变规范下 QCD 的费曼规则

¶ 从经过规范固定后的规范场的路径积分出发，得到规范场的费曼规则实际上是直接了当的，尽管中间的步骤有一些罗嗦。为了明确起见，我们直接讨论量子色动力学（ QCD ）的费曼规则。对于 QCD，我们的有效拉氏量为：

$$S_{\text{eff}}[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \log\det(i\not{D} - m)\,, \tag{5.18}$$

为了方便，我们将原先积掉的夸克场恢复，再加上规范固定项和 Fadeev-Popov 鬼项，我们可以写出量子色动力学的路径积分表示：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{QCD} &= \int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar c\mathcal{D}c\mathcal{D}A_\mu e^{i(S_f[\bar\psi,\psi,A_\mu]+S_g[A_\mu]+S_{GF}[A_\mu]+S_{FPG}[A_\mu])}\\
S_f[\bar\psi,\psi,A_\mu] &= \int d^4x\bar\psi(i\not{D}-m)\psi\,,\\
S_g[A_\mu] &= -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\,,\\
S_{GF} &= \frac{1}{2\xi}\int d^4x(\partial^\nu A^a_\nu(x))(\partial^\mu A^a_\mu(x))\,,\\
S_{FPG} &= \int d^4x(\partial^\mu\bar c^a)(D^{ab}_\mu c^b)\,.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

我们现在所需要做的，只是将公式 (5.17) 中的所有作用量—包括规范固定作用量 S_{GF} 和鬼项 S_{FPG}—展开成规范场 A_μ 和其他费米场的多项式。其中的 A_μ 的二次项相当于规范场的自由传播子；三次项（正比于 g ）和四次项（正比于 g^2 ）则看成是相互作用。由

[7]我们号称我们利用规范固定的方法，去掉了理论中多余的规范备份。但是实际上我们并没有真正做到这一点。Gribov 证明了，实际上这样的规范固定最多只是在规范群的单位元附近去掉了规范备份。从群流形的整体来看，仍然可能存在多余的规范备份。这种现象被称为 Gribov 不确定性（ Gribov ambiguity ）。

刻川制造

于规范固定项是规范场的二次项，因此它只是修正了规范场的传播子，对相互作用顶点没有贡献。从 S_f 就可以得到规范场与费米子相互作用的顶点（当然，还有自由费米子的传播子）。鬼项 S_{FPG} 的形式告诉了我们鬼场的自由传播子以及它们与规范场的相互作用顶点。把所有这一切总结起来，我们就得到了 QCD 的费曼规则（动量空间）。

费曼规则.5 *量子色动力学的费曼规则（动量空间）：*

- *对于一条连接指标 (μ,a) 和指标 (ν,b)、动量为 k 的规范场传播子 $\langle TA^a_\mu A^b_\nu\rangle$ （其中 μ，ν 表示洛伦兹指标，a，b 表示色指标），我们有：*

$$-i\delta_{ab}\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right], \tag{5.20}$$

  这里参数 ξ 是规范固定参数。

- *对于每一条连接指标 a，b 的鬼场传播子 $\langle Tc^a\bar{c}^b\rangle$，我们有：*

$$\frac{i\delta_{ab}}{k^2+i\epsilon}, \tag{5.21}$$

  其中 k 是其中流的动量。

- *对三规范场相互作用顶点，如果它们的指标分别为：(μ,a)，(ν,b)，(ρ,c)，流出的四动量分别为：p，q，k，我们都写下一个因子：*

$$gC_{abc}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\left[\eta_{\mu\nu}(p-q)_\rho+\eta_{\nu\rho}(q-k)_\mu+\eta_{\rho\mu}(k-p)_\nu\right]. \tag{5.22}$$

- *对四规范场相互作用顶点，如果它们的指标分别为：(μ,a)，(ν,b)，(ρ,c)，(σ,d)，流出的四动量分别为：p，q，k，l，我们都写下一个因子：*

$$-ig^2(2\pi)^4\delta^4(p+q+k+l)[C_{eab}C_{ecd}\eta_{\mu[\rho}\eta_{\sigma]\nu}+C_{eac}C_{edb}\eta_{\mu[\sigma}\eta_{\nu]\rho}+C_{ead}C_{ebc}\eta_{\mu[\nu}\eta_{\rho]\sigma}]. \tag{5.23}$$

  这里括在方括号内的两个指标表示要反对称化。例如：$\eta_{\mu[\rho}\eta_{\sigma]\nu}=(\eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu}-\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu})$。

- *对于一个指标是 (μ,a) 的规范场（流出四动量为 k ）与反鬼场 $\bar{c}^b$ （流出四动量为 p ）和鬼场 c^c （流入四动量为 q ）的顶点，我们有因子：*

$$-gC_{abc}p_\mu(2\pi)^4\delta^4(k+p-q). \tag{5.24}$$

- *对于每一个费米子传播子，我们写下一个自由狄拉克费米子的传播子：$i/(\not{p}-m)$。*

- *对每一个规范场 $A^a_\mu(k)$ 与反夸克场 $\bar{\psi}_{A\alpha}(p)$，夸克场 $\psi_{B\beta}(q)$ 的相互作用顶点，我们写下因子：*

$$ig(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}T^a_{AB}(2\pi)^4\delta^4(q-p-k). \tag{5.25}$$

在上述 QCD 的规则中，C_{abc} 就是 $SU(3)$ 群的结构常数，而 T^a 就是大家熟知的（或者不熟知的） Gell-Mann 矩阵（参见本讲义后面的附录）。

刘川制造

§25. 背景场方法

¶ 现在我们讨论量子规范场论中另外一种常用的方法：背景场（ background field ）量子化方法。这种方法有时候又被称为选取背景场规范（ background gauge ）。

背景场量子化方法的出发点是将规范势 $A_\mu(x)$ 写成经典的背景场 $B_\mu(x)$ 和一个需要量子化的量子场 $Q_\mu(x)$ 之和：

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) + Q_\mu(x)\,. \tag{5.26}$$

对于规范势 A_μ 的路径积分现在可以写成对于量子场 Q_μ 的路径积分。注意，规范场 $B_\mu(x)$ 是一个纯经典的场，不需要量子化。它被因此称为背景场。我们的量子化的（用路径积分的语言来说就是所积分的变量）是场 $Q_\mu(x)$。这种量子化被称为在背景场 B_μ 上的量子化。如果背景场 $B_\mu(x)=0$，我们就得到前一节讨论的量子化方法，也就是在平庸背景上的量子化。所以，背景场量子化方法可以看成是前面讨论的量子化方法的推广。我们需要量子化的规范场的生成泛函可以写成：

$$\mathcal{Z}[J,B] = \int \mathcal{D}Q_\mu \det\left(M[Q_\mu,B_\mu]\right) e^{iS_{\rm eff}[B_\mu+Q_\mu]-\frac{1}{2\xi}\int d^4x G^a G^a + i\int d^4x J^a_\mu Q^a_\mu}\,. \tag{5.27}$$

其中 $J^a_\mu(x)$ 是我们引入的外源；$\det(M[Q_\mu,B_\mu])$ 是背景场量子化的 Fadeev-Popov 行列式；$G^a[B_\mu,Q_\mu]$ 是背景场量子化选取的固定规范的函数。一个通常的选择是：

$$G^a = D_\mu[B_\mu]^{ab}Q^b_\mu(x) = \partial^\mu Q^a_\mu + gC_{abc}B^b_\mu Q^c_\mu\,. \tag{5.28}$$

可以证明，生成泛函 (5.27) 在下列无穷小规范变换下是不变的：

$$\begin{aligned}
\delta B^a_\mu &= \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a - C_{abc}\theta^b B^c_\mu\,,\\
\delta J^a_\mu &= -C_{abc}\theta^b J^c_\mu\,,\\
\delta Q^a_\mu &= -C_{abc}\theta^b Q^c_\mu\,.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

游戏 5.2 *验证这一点。*

利用这个无穷小变换的形式，不难证明这时的 Fadeev-Popov 行列式所对应的矩阵为：

$$M^{ab}_{xy} = \frac{\delta G^a(x)}{\delta\theta^b(y)} = \Box\delta^{ab} - g\overleftarrow{\partial}_\mu C_{acb}(B^c_\mu + Q^c_\mu) + gC_{acb}B^c_\mu\partial_\mu + g^2C_{ace}C_{edb}B^c_\mu(B^d_\mu+Q^d_\mu)\,. \tag{5.30}$$

利用鬼场，我们可以将它写成作用量的形式：

$$S_{FGG} = \bar{c}^a(x)M^{ab}_{xy}c^b(y)\,. \tag{5.31}$$

很显然，我们可以得到另外一套费曼规则，它称为背景场量子化（或背景场规范）下的费曼规则。

刻川制造

¶ 现在我们回忆第 §8 节中的讨论：如果有了一个生成泛函，我们可以取它的对数，然后经过勒让德变换，可以定义一个有效作用量。对于规范场，我们可以类似的操作。具体来说，我们定义：

$$\bar{A}_\mu = \delta Z_c[B,J]/\delta J_\mu \,, \tag{5.32}$$

其中 $\mathcal{Z}_c = (-i)\log \mathcal{Z}[B_\mu, J_\mu]$ 为连接图的生成泛函。我们的有效作用量为：

$$\tilde{\Gamma}[\bar{A}_\mu, B_\mu] = \mathcal{Z}_c[B_\mu, J_\mu] - \int d^4x J^a_\mu \bar{A}^a_\mu \,. \tag{5.33}$$

它是所有单粒子不可约图的生成泛函。特别重要的是：

$$\Gamma[B_\mu] \equiv \tilde{\Gamma}[\bar{A}_\mu \equiv 0, B_\mu] \,. \tag{5.34}$$

被称为背景场下的有效作用量。它的一个重要性质就是它一定是对于背景场 B_μ 规范不变的。[8]

游戏 5.3 *试验证这个结论。*

背景场方法的方便之处在于，系统关于背景场的有效作用量一定是规范不变的。因此，可以很容易地发现，如果展开到背景场 B_μ 的四次项，那么 $\Gamma[B_\mu]$ 的形式一定与我们给出的普遍的非阿贝尔规范场的作用量形式完全相同。这可能是讨论规范场一圈重整化最为方便的方法。

§26. 对称性自发破缺时的量子化

¶ 如果我们讨论的规范对称性被自发破缺了，那么在量子化规范场的时候，需要注意一些特别的地方。我们并不打算进行完全普遍的讨论，而是针对高能物理中具体的例子来介绍。为此，本节中我们讨论一个 $O(N)$ 规范对称性的自发破缺问题。[9]

我们的模型的标量场部分的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}(D_\mu \phi^a)(D^\mu \phi^a) - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^a\phi^a - v^2\right)^2 \,. \tag{5.35}$$

为了符号上更为简洁，我们会用 $\boldsymbol{\phi}$ 来标记整个（ N 个分量的矢量）标量场。这个拉氏量显然具有一个 $O(N)$ 规范对称性。

游戏 5.4 *试验证这一点。*

对于 $O(N)$ 群，我们将它的生成元取为：

$$T^{\alpha\beta}_{ij} = -T^{\beta\alpha}_{ij} = (-i)\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\right) \,, \tag{5.36}$$

[8] 详细的讨论可以参考相关文献 [14]。

[9] 粒子物理中的标准模型所对应的是 $N=4$ 的情形，因为我们知道：$O(4) \sim SU(2)\otimes SU(2)$。

刘川制造

换句话说，现在的生成元的指标是一对反对称的（因此不相等的）整数：α，β，其中 $\alpha,\beta=1,\cdots,N$。因此，一个 $O(N)$ 群的元素 g 可以写为：

$$g=e^{i\theta^{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}}\,. \tag{5.37}$$

为了符号上更为简洁，我们会用 $\boldsymbol{\phi}$ 来标记整个（ N 个分量的矢量）标量场。

发生了对称性自发破缺后，我们可以选取场的真空期望值为：

$$\langle\boldsymbol{\phi}\rangle=\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\v\end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

对于这样的真空期望值，大家可以验证：破缺的生成元为 $T^{N\alpha}$，未破缺的生成元为 $T^{\alpha\beta}$，也就是说，我们有：

$$T^{N\alpha}\cdot\mathbf{v}\neq 0\,,\ T^{\alpha\beta}\cdot\mathbf{v}=0\,, \tag{5.39}$$

其中 α，β 都不等于 N，并且 $\alpha\neq\beta$。

游戏 5.5 *验证这一点。*

我们于是可以将我们的标量场参数化为：

$$\boldsymbol{\phi}(x)=e^{i\pi^{\alpha}(x)T^{N\alpha}/v}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\v+\sigma(x)\end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

如果场 $\rho(x)$，$\pi^{\alpha}(x)$ 是小的，令：$\boldsymbol{\phi}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)+\mathbf{v}$，我们得到：

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\pi^1(x)\\\pi^2(x)\\\vdots\\\sigma(x)\end{pmatrix}+\cdots\,, \tag{5.41}$$

其中 $\cdots$ 表示场的高阶项。

¶ 将展开式 (5.41) 带入到拉氏量 (5.35) 中，仅仅关注于场的二次项（自由的项），我们得到：

$$\mathcal{L}^{(2)}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})-\frac{g^2}{2}\mathbf{v}^TA^\mu A_\mu\mathbf{v}-i\frac{g}{2}\left[\mathbf{v}^TA_\mu\partial^\mu\boldsymbol{\phi}-(\partial^\mu\boldsymbol{\phi})^TA_\mu\mathbf{v}\right]\,. \tag{5.42}$$

这里的正比于 $A^\mu A_\mu$ 的项实际上相当于规范场的质量项。但是由于未破缺的生成元作用于 $\mathbf{v}$ 恒等于零，因此这一项实际上仅仅对于规范场在破缺生成元方向的分量，也就是

刻川制造

说 $A_\mu^{N\alpha}$ 才不为零。这说明，在对称性破缺后，所有破缺了的生成元方向的规范场都获得了质量，其质量的大小等于 gv，同时这些方向的规范场也获得了纵向分量；而未破缺的生成元方向的规范场仍然是无质量的，它们仅有横向分量。这就是非阿贝尔规范场情形的 Anderson-Higgs 机制。它与我们前面（参见第§20节）讨论的阿贝尔规范场的 Anderson-Higgs 机制是完全类似的。对于非阿贝尔的情形需要注意的一点是，二次拉氏量中存在着 $\partial_\mu\phi A^\mu$ 的交叉项。这样的项在我们前面讨论的阿贝尔的情形是不存在的。我们可以在规范场的量子化过程中取一个特殊的规范来将这些讨厌的交叉项消去。常用的就是所谓 $R-\xi$ 规范。与它相应的规范固定作用量为：

$$\mathcal{L}_{GF}=-\frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^{\alpha\beta}+ig\xi\mathbf{v}^T T^{\alpha\beta}\boldsymbol{\phi}-ig\xi\boldsymbol{\phi}^T T^{\alpha\beta}\mathbf{v}\right)^2 . \tag{5.43}$$

游戏 5.6 *验证这样的规范可以去掉上面提到的交叉项。*

显然，在 $R-\xi$ 规范下，我们的费曼规则也需要进行适当的修正。具体来说，我们得到的费曼规则为：

费曼规则.6 *自发破缺的 $O(N)$ 规范场与标量场耦合的费曼规则（$R-\xi$ 规范）：*

- *对于一条连接指标 (μ,a) 和指标 (ν,b)、动量为 k 的规范场传播子 $\langle TA_\mu^a A_\nu^b\rangle$（其中 μ，ν 表示洛伦兹指标，a，b 表示色指标），我们有：*

$$\frac{-i\delta_{ab}}{p^2-m^2+i\epsilon}\left[\eta_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi m^2+i\epsilon}\right] , \tag{5.44}$$

  这里参数 ξ 是规范固定参数。

- *对于每一条连接指标 a，b 的鬼场传播子 $\langle Tc^a\bar{c}^b\rangle$，我们有：*

$$\frac{i\delta_{ab}}{k^2-\xi m^2+i\epsilon} , \tag{5.45}$$

  其中 k 是其中流的动量。

- *对于每一个动量为 p 的标量场中 Goldstone 粒子的传播子，我们写下：$i/(p^2-\xi m^2)$。*

也就是说，从形式上看，规范场的纵向分量获得了质量平方：$m^2=g^2v^2$；鬼场和 Goldstone 粒子（它也可以看成是规范场的纵向分量）获得质量平方 ξm^2。

游戏 5.7 *验证这些费曼规则。*

刘川制造

§27. BRS 不变性与 Slavnov-Taylor 恒等式

¶ 在我们量子化非阿贝尔规范场的过程中，我们必须定规范。这样一来，理论的规范不变性就变得不太明显了。Slavnov 和 Taylor 首先推导出体现规范不变性的 Ward 恒等式（参见第 §17 节），这个等式后来被称为 Slavnov-Taylor 恒等式。Slavnov 和 Taylor 原先的推导实际上是比较罗嗦的。后来，Becchi，Rouet 和 Stora 发现了一种对称性，这个对称性就是后来被称为 BRS 不变性。

BRS 不变性实际上是一种超对称性，它的对称变换中的参数必须在 Grassmann 代数中取值。如果 $\delta\lambda$ 是一个无穷小的 Grassmann 参数，我们令 $\theta^a(x) = c^a(x)\delta\lambda$，它是一个玻色型的无穷小变量。以 $\theta^a(x)$ 为规范变换的变换参数，我们就得到了无穷小的 BRS 变换：

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm BRS}\psi &= -ig(c^a\delta\lambda)T^a\psi = igT^a c^a\psi\delta\lambda\,,\\
\delta_{\rm BRS}\bar\psi &= ig\bar\psi T^a c^a\delta\lambda\,,\\
\delta_{\rm BRS}A^a_\mu &= (\partial_\mu c^a + gC_{abc}c^bA^c_\mu)\delta\lambda\,,\\
\delta_{\rm BRS}c^a &= -\frac{1}{2}gC_{abc}c^bc^c\delta\lambda\,,\delta_{\rm BRS}\bar c^a = \frac{1}{\xi}F^a\delta\lambda\,,
\end{aligned}\tag{5.46}$$

其中的 F^a 是量子化中所采用的规范固定条件；ξ 是规范固定参数。由于上面这个无穷小的 BRS 变换就是一个规范变换，所以原先的规范场拉氏量一定是不变的；另外我们可以直接验证：

$$\delta_{\rm BRS}(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG}) = 0\,,.\tag{5.47}$$

因此，经过规范固定的拉氏量在 BRS 变换下不变。这就是所谓的 BRS 不变性。

¶ 利用经典的 Nöther 定理，我们可以发现与 BRS 对称性相应的（在 Grassmann 代数中取值的）守恒流为：

$$j^\mu_{\rm BRS} = g\bar\psi\gamma^\mu T^a\psi c^a - F^{\mu\nu}_a D_\nu c^a - \frac{1}{\xi}\partial\cdot A^a D^\mu c^a - \frac{g}{2}(\partial^\mu\bar c^a)c^bc^cC_{abc}\,.\tag{5.48}$$

现在，我们可以利用第 §17 节中推导 Ward 恒等式的方法来给出 BRS 不变性所对应的 Ward 恒等式。例如：

$$\langle 0|T[\partial_\mu c^a(x) + gC_{adc}c^d(x)A^c_\mu(x)]\bar c^b(y)|0\rangle = \frac{1}{\xi}\langle 0|TA^a_\mu(x)[\partial\cdot A^b(y)]|0\rangle\,.\tag{5.49}$$

这个等式就是一系列 Slavnov-Taylor 恒等式中的一个。这些等式在讨论规范理论的重整化问题中会起重要作用，尽管这里我们不去涉及。

§28. QCD 的渐近自由

¶ 作为讨论规范理论量子化的最后一个问题，我们来简要讨论一下 QCD 的一圈重整化问题。为了简化我们的讨论，我们假定规范群是 $SU(3)$ 群；同时，我们假定有 N_f 个味

刻 川 制 造

的、同质量的夸克。我们要计算这样的一个含有费米子的规范理论中一圈的重整化群系数，特别是所谓的 β-函数。这个一圈的计算实际上包含两类：一类是费米子（夸克）的圈，另一类是规范场的圈。一个直接的计算方法就是按照所有可能的费曼图来逐个进行计算。当然，我们必须利用前面给出的 QCD 的费曼规则（参见第 §24 节所给出的规则）。

¶ 另外一种计算方法（实际上是更为优美的一种方法，但是在不熟悉的时候可能会显得过于复杂）是利用我们在第 §25 节中发展的背景场的方法。为了能够说明这种方法的运用，我们将采用这种方法来计算 QCD 的一圈图。

在背景场方法中，我们将规范场 $A_\mu(x)$ 写为：$A_\mu(x)=B_\mu(x)+Q_\mu(x)$，其中 $B_\mu(x)$ 为经典的背景场；$Q_\mu(x)$ 是量子化的规范场。于是，QCD 的生成泛函可以写成（参见公式 (5.27)）：

$$\mathcal{Z}[J,B]=\int\mathcal{D}Q_\mu\det\left(M[Q_\mu,B_\mu]\right)e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[B_\mu+Q_\mu]-\frac{1}{2\xi}F^aF^a+J^a_\mu Q^a_\mu\right)}\det[i\not{D}-m]^{N_f}\ . \tag{5.50}$$

这个公式中的第一个行列式代表背景场量子化情况下的 Fadeev-Popov 行列式；第二个行列式则来源于将 N_f 个味的夸克积掉后的贡献。我们下面的计算将分为两个组成部分：首先，我们将不考虑夸克场的行列式的影响，利用背景场量子化的方法计算纯规范场的一圈 β-函数；然后，我们计算夸克贡献的费米子行列式，它将可以表达成规范场 $A_\mu(x)$ 的算符的形式。

§28.1. 纯规范场的一圈 β-函数

¶ 我们的出发点是纯规范场在背景场中的生成泛函：

$$\mathcal{Z}[J,B]=\int\mathcal{D}Q_\mu\det\left[\frac{\delta G^a}{\delta\theta^b}\right]e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[B_\mu+Q_\mu]-\frac{1}{2\xi}G^aG^a+J^a_\mu Q^a_\mu\right)}\ . \tag{5.51}$$

由此，我们可以定义连接图的生成泛函 $\mathcal{Z}_c[J,B]=-i\log\mathcal{Z}[J,B]$。有效作用量的定义为：

$$\Gamma[\bar{Q}]=\mathcal{Z}_c[J,B]-\int d^4xJ^a_\mu(x)\bar{Q}^a_\mu(x)\ , \tag{5.52}$$

其中 $\bar{Q}^a_\mu(x)=\delta\mathcal{Z}_c/\delta J^a_\mu$。

一个重要的观察就是：由于量子的规范场 Q 以及鬼场仅仅出现在内部的圈中，因此它们可以完全不重整化。因此，需要进行重整化的只是规范耦合参数 g，背景场 B_μ 和规范固定参数 ξ：

$$g_0=Z_gg\ ,\quad B_{\mu,0}=Z_B^{1/2}B_\mu\ ,\quad \xi_0=Z_\xi\xi\ . \tag{5.53}$$

由于对于背景场的规范对称性，我们发现 Z_g 和 Z_B 必定有如下简单的关系：

$$Z_g=Z_B^{-1/2}\ . \tag{5.54}$$

另一方面，所有物理量最后都不依赖于规范固定参数 ξ，因此它的重整化其实也是不用具体计算的。至此我们看到，在背景场方法中，我们仅仅需要计算背景场的波函数重整化

刘川制造

常数 Z_B，也就是说，我们只需要计算背景场的两点函数就足够了。这就是利用背景场方法的最大优势。

我们下面的计算将采用维数正规化（ dimensional regularization ）和最小减除方案（ minimal subtraction ）。按照 β-函数的定义和关系 (5.53) 以及 (5.54) 我们得到：

$$\beta = -g\mu\frac{\partial \log Z_g}{\partial \mu} = \frac{g}{2}\mu\frac{\partial \log Z_B}{\partial \mu} . \tag{5.55}$$

如果在 $4-2\epsilon$ 维时空，我们发现到一圈水平 β-函数可以表达为：

$$\beta = -\frac{g^2}{2}\frac{\partial Z_B^{(1)}}{\partial g} , \tag{5.56}$$

其中的系数 $Z_B^{(1)}$ 是背景场的波函数重整化常数中到一圈水平的、发散部分的系数：

$$Z_B = 1 + Z_B^{(1)}\frac{1}{\epsilon} . \tag{5.57}$$

因此，我们仅仅需要计算出背景场的两点函数的所有一圈贡献中的发散部分。

¶ 为了能够具体地写出这些贡献，我们首先需要相应的费曼规则。

费曼规则.7 *背景场规范的费曼规则（动量空间）：*

- *对一个背景场和两个量子规范场的相互作用顶点，如果它们的指标分别为：(μ,a)，(ν,b)，(ρ,c)，流出的四动量分别为：p，q，k，我们都写下一个因子：*

$$gC_{abc}(2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\left[\eta_{\mu\nu}(q-p+\frac{1}{\xi}k)_\rho + \eta_{\nu\rho}(k-q)_\mu + \eta_{\rho\mu}(p-k-\frac{1}{\xi}q)_\nu\right] . \tag{5.58}$$

- *对于一个指标是 (μ,a) 的背景场与反鬼场 $\bar{c}^b$ （流出四动量为 p ）和鬼场 c^c （流入四动量为 q ）的顶点，我们有因子：*

$$-gC_{abc}(p+q)_\mu . \tag{5.59}$$

注意，这里列出的不是所有的费曼规则，我们仅仅列出了计算 Z_B 所需要的。完整的费曼规则有兴趣的同学可以参考 [14]。

¶ 对一圈图稍作分析我们立刻发现，到一圈水平对于背景场的两点函数贡献的只有两个费曼图：它们分别对应于量子的规范场（ 也就是 Q_μ ）和鬼场的圈。利用上面给出的费曼规则，我们立刻发现鬼场的圈对于 Z_B 贡献的发散部分为：

$$\frac{ig^2C_A\delta^{ab}}{16\pi^2}\left(\frac{1}{3\epsilon}\right)\left[\eta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu\right] , \tag{5.60}$$

而量子的规范场圈图的贡献为：

$$\frac{ig^2C_A\delta^{ab}}{16\pi^2}\left(\frac{10}{3\epsilon}\right)\left[\eta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu\right] . \tag{5.61}$$

刻川制造

这里我们用了符号：$C_A\delta^{ab}=C_{acd}C_{bcd}$，它是规范群的一个 Casimir 算子。对于 $SU(N_c)$ 群，我们有：$C_A=N_c$。注意，上面的两个贡献都自动地正比于 $(\eta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)$，这正是有效作用量对于背景场是规范不变的要求。如果我们将这两个贡献相加，并且利用公式 (5.56)，我们立刻得到了纯规范场的 β-函数：

$$\beta=-\frac{11C_A}{3}\frac{g^3}{16\pi^2}\,. \tag{5.62}$$

§28.2. 费米子行列式的计算

¶ 上面计算的 β-函数没有考虑夸克圈的贡献。这部分贡献来源于将夸克积掉以后的费米子行列式。计算包含背景场的费米子行列式最有效的方法就是所谓的热核方法（ heat kernel method ），我们这一小节就加以介绍。 我们首先注意到，费米子的行列式的对数可以写为：

$$\log\det[i\gamma_\mu D_\mu-m]=\frac{1}{2}\log\det[(i\gamma^\mu D_\mu-m)(-i\gamma^\nu D_\nu-m)]\,,. \tag{5.63}$$

这样一来，如果我们定义：

$$\mathcal{A}=(i\gamma^\mu D_\mu-m)(-i\gamma^\nu D_\nu-m) \tag{5.64}$$

我们可以用如下公式来计算它的行列式：[10]

$$\log\det(\mathcal{A})=-\int_0^{i\infty}dtt^{-1}Tr(e^{-t\mathcal{A}})\,, \tag{5.65}$$

利用矩阵 $\bar{\mathcal{A}}$ 的具体形式，我们发现：

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= D^\mu D_\mu+\sigma\,,\\ \sigma &= \frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu][D^\mu,D^\nu]+m^2\,,.\end{aligned} \tag{5.66}$$

这里需要注意的是，公式 (5.65) 中的求迹运算，需要对于时空坐标、狄拉克指标和色指标都进行，因为矩阵 $e^{-t\bar{\mathcal{A}}^2}$ 实际上是坐标空间、狄拉克旋量空间和色空间的矩阵。矩阵 $e^{-t\mathcal{A}}$ 常常被称为热核（heat kernel）。 费米子行列式的对数中紫外发散的部分在这种表示中体现在被积函数在 $t=0$ 附近有奇点。为此，我们设热核在 $D=2\omega=4-2\epsilon$ 维空间中两个时空点 x 和 y 之间的矩阵元为：

$$\langle x|e^{-t\mathcal{A}}|y\rangle=\frac{i}{(4\pi t)^\omega}\exp\left(\frac{z^2}{4t}\right)H_{xy}(t)\,, \tag{5.67}$$

其中 $z=x-y$ 为两个时空点的坐标差。注意，其中函数 $H_{xy}(t)$ 前面的这一堆因子正好对应于算符 $e^{-t\Box}$ 的矩阵元，函数 $H_{xy}(t)$ 则反映了规范场和常数项对于热核矩阵元的修正。

[10]首先是 Schwinger 利用这种方法来处理紫外发散的。

刘川制造

可以轻易证明函数 $H_{xy}(t)$ 满足如下的微分方程：

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{t}z^\mu D_\mu H+D^\mu D_\mu H+\sigma H=0\,, \tag{5.68}$$

以及边条件：$H_{xx}(0)=1$。对于任意的规范场，要普遍地求解这个微分方程几乎是不可能的。但是如果我们仅仅关心它在 $t=0$ 附近的解的行为，那么我们可以逐阶地展开求解：

$$H_{xy}(t)=H^{(0)}_{xy}+tH^{(1)}_{xy}+t^2H^{(2)}_{xy}+\cdots\,, \tag{5.69}$$

这样一来，我们发现微分方程 (5.68) 可以化为如下的递推关系：

$$(n+1+z^\mu D_\mu)H^{(n+1)}+(D^\mu D_\mu+\sigma)H^{(n)}=0\,,\quad z^\mu D_\mu H^{(0)}=0\,. \tag{5.70}$$

在上面的展开式 (5.69) 中，$H^{(0)}$，$H^{(1)}$，$H^{(2)}$ 分别会在行列式的公式中产生在 $D=0$，$D=2$，$D=4$ 处的极点。由于我们仅仅关心其中的紫外发散的部分，经过一些计算，我们发现在 $D=4$ 处发散的部分为：

$$\frac{i}{2}\log\det\mathcal{A}=\frac{1}{2(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\int dx tr H^{(2)}_{xx}\,. \tag{5.71}$$

¶ 要求出矩阵 $H^{(2)}_{xx}$ 的形式需要一些技巧和耐心。出发点是矩阵 $H^{(n)}_{xy}$ 所满足的递推关系 (5.70)。取 $n=1$ 同时令 $x=y$ （也就是 $z=0$ ）我们得到：

$$H^{(2)}_{xx}=-\frac{1}{2}D_\mu D^\mu H^{(1)}_{xx}-\frac{\sigma}{2}H^{(1)}_{xx}\,. \tag{5.72}$$

所以，我们需要 $D_\mu D^\mu H^{(1)}_{xx}$。要得到这个量，我们在利用递推关系 (5.70)，取 $n=0$ 得到：

$$(1+z^\mu D_\mu)H^{(1)}_{xy}=-(D^\mu D_\mu+\sigma)H^{(0)}_{xy}\,,$$

将算符 $D^\mu D_\mu$ 作用于这个等式的两边然后再令 $z=0$，我们就得到：[11]

$$3D^\mu D_\nu H^{(1)}_{xx}=-D^\mu D_\mu(D^\nu D_\nu+\sigma)H^{(0)}_{xx}\,. \tag{5.73}$$

类似的，我们得到：

$$\begin{aligned} D_\mu H^{(0)}_{xx} &= 0\,,\\ D_\mu D_\nu H^{(0)}_{xx} &= \frac{1}{2}[D_\mu,D_\nu]\,,\\ (D^\mu D_\mu)^2 H^{(0)}_{xx} &= \frac{1}{2}[D_\mu,D_\nu][D^\mu,D^\nu]\,. \end{aligned} \tag{5.74}$$

于是，我们可以将上面的结果总结起来，得到：

$$H^{(2)}_{xx}=\frac{1}{12}[D_\mu,D_\nu][D^\mu,D^\nu]+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{1}{6}[D^\mu,[D_\mu,\sigma]]\,. \tag{5.75}$$

[11] 注意，决不能先在递推关系中令 $z=0$，然后再将微分算符作用在上面，这样得到的结果将是错误的。具体到这个公式，错误的推导等式左边缺少一个因子 3。

刻川制造

¶ 好，现在我们可以将得到的 $H^{(2)}_{xx}$ 的结果带回到公式 (5.71) 中，从而得到费米子行列式的表达式。完成其中的求迹（这包括对于狄拉克矩阵的求迹和对于色矩阵的求迹），我们发现费米子行列式相当于贡献一个正比于 $-\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ 的作用量。因此，到一圈水平，夸克圈对于背景场的波函数重整化的贡献中的发散部分可以写成

$$-\frac{ig^2\delta^{ab}}{16\pi^2}\left(\frac{2N_f}{3\epsilon}\right)\left[\eta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu\right]\ . \tag{5.76}$$

于是，将这个贡献与前面纯规范场的贡献结合起来，我们就得到了 QCD 的一圈 β-函数：

$$\beta_{QCD}=-\frac{g^3}{48\pi^2}\left(33-2N_f\right)\ . \tag{5.77}$$

其中我们已经取了 $N_c=3$。从这个伟大的式子我们发现，只要费米子的味道数目 $N_f<17$，QCD 的一圈 β-函数就是负的。这意味着对于 QCD 这样一个理论，如果我们不断增加能量的标度 μ，它的耦合参数就会变小；如果能量的标度趋于无穷，耦合参数也趋于零（自由场论）。这个现象被称为渐近自由（asympotic freedom）。渐近自由性质是 QCD 所具有的十分重要的性质。它意味着在高能区，我们可以利用微扰论来研究 QCD 的性质。这种方法称为微扰 QCD。当然，渐近自由的性质也可以倒过来说，在低能区随着能量的降低，QCD 的跑动耦合参数会趋于无穷大，这被称为红外奴役（infrared slavery）。它意味着在低能区 QCD 的理论研究必须采取非微扰的方法。

相关的阅读

本章简要讨论了规范场的路径积分量子化问题。对于非阿贝尔规范场，也可以利用正则量子化，这时往往是取一个特定的规范（例如，库仑规范）。正则量子化的步骤可以进行，但是最后要证明理论仍然具有规范对称性则是不简单的。背景场量子化方法是一个十分行之有效的方法，特别是讨论一圈重整化、规范反常等问题时是很有用的。可惜时间不允许我们这个课程作十分细致的讨论。QCD 的渐近自由是 QCD 十分重要的特性，它是理解 QCD 高能行为的关键。所有这些讨论在标准的量子场论教科书（比较新的）中都有介绍，大家可以参考 [2, 3]。

刘川制造

附录 A　　符号与约定

¶ 在这个附录中，我们简要总结一下这个讲义中的某些符号约定。首先，我们的闵氏时空的度规的定义采用：

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{Diag}(+1, -1, -1 - 1)\ ,. \tag{A.1}$$

因此，两个四矢量 A^μ，B^μ 的内积为：

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^i B^i = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\ . \tag{A.2}$$

特别的，一个四矢量的平方 $A^2 = A \cdot A$。对于欧氏时空中的四矢量，我们将不区分其上标或下标（通常写为下标）。

闵氏空间的狄拉克 γ-矩阵由下列性质定义：

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\ . \tag{A.3}$$

另外，我们定义 γ_5 为：

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ . \tag{A.4}$$

它与每一个 γ-矩阵都反对易。利用 γ_5 可以定义左手和右手的投影算符 P_L，P_R，相应地可以定义左手和右手的旋量：

$$P_{L/R} = (1 \mp \gamma_5)/2\ ,\ \ \psi_{L/R} = P_{L/R}\psi\ ,\ \ \bar{\psi}_{L/R} = \bar{\psi} P_{R/L}\ . \tag{A.5}$$

欧氏空间的狄拉克 γ-矩阵与闵氏空间的 γ-矩阵之间的联系为：

$$\gamma_i^{(E)} = -i\gamma_i^{(M)}\ ,\ \ \gamma_0^{(E)} = \gamma_0^{(M)}\ . \tag{A.6}$$

这样的定义使得欧氏空间的 γ-矩阵都是厄米的：

$$(\gamma_\mu^{(E)})^\dagger = \gamma_\mu^{(E)}\ , \tag{A.7}$$

并且满足下列基本反对易关系：

$$\{\gamma_\mu^{(E)}, \gamma_\nu^{(E)}\} = 2\delta_{\mu\nu}\ . \tag{A.8}$$

Chuan Liu

类似地，我们定义：

$$\gamma_5^{(E)} = \gamma_0^{(E)}\gamma_1^{(E)}\gamma_2^{(E)}\gamma_3^{(E)} \,. \tag{A.9}$$

它与所有的 γ_μ 反对易。在不至于混淆的情形下，我们会略写这些 γ-矩阵的上标 (E) 或 (M)。

对于我们经常用到的 $SU(2)$ 群，我们定义通常的 Pauli 矩阵：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,,\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{A.10}$$

按照我们对于李群生成元的归一化选择：

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \,, \tag{A.11}$$

对于 $SU(2)$ 群，我们可以选：

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \,. \tag{A.12}$$

这样一来，每一个 $SU(2)$ 群的元素在其基本表示中可以写成 $U(\theta) = e^{i\theta^a\sigma^a/2}$。对于 $SU(3)$ 群，我们可以选通常的 Gell-Mann 矩阵：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \,,\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \,.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

对于 $SU(3)$ 群，我们可以选：

$$T^a = \frac{\lambda_a}{2} \,. \tag{A.14}$$

每一个 $SU(3)$ 群的元素在其基本表示中可以写成 $U(\theta) = e^{i\theta_a\lambda_a/2}$。Gell-Mann 矩阵满足下列的反对易关系和对易关系：

$$\begin{aligned}
\{\lambda_a, \lambda_b\} &= \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c \,, \\
[\lambda_a, \lambda_b] &= 2iC_{abc}\lambda_c \,,
\end{aligned} \tag{A.15}$$

其中 C_{abc} 为群的结构常数。对于 $SU(3)$ 群，C_{abc}，d_{abc} 可以从相关书中查出（如果果真需要的话）。

刘川制造

参考文献

[1] 戴元本，《相互作用的规范理论》，科学出版社，1999。

[2] Michael Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995.

[3] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., 1980.

[4] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd Ed. Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] Sidney Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[6] John Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[7] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd Ed., Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.

[8] George Sternman, *Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[9] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, New York, 1984.

[10] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[11] Richard P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[12] Howard Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin/Cummings, Reading Massachusetts, 1982.

[13] K. G. Wilson and J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion*, Phys. Rep. C12, 75, 1974.

Chuan Liu

[14] L. F. Abbott, *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B185, 189, 1981.

Chuan Liu

刘川制造

索引

$O(N)$-模型, 52
$R-\xi$ 规范, 74
S-矩阵, 9
1PI 图, 25

Anderson-Higgs 机制, 59, 74
Atiya-Singer 指标定理, 64

Callen-Symanzik 方程, 35

Fadeev-Popov 鬼场, 68
Fadeev-Popov 鬼项, 69
Fadeev-Popov 行列式, 66

Gell-Mann-Low 定理, 11
Goldstone 定理, 54
Goldstone 粒子, 55
Grassmann 代数, 46
Gribov 不确定性, 69

Higgs 机制, 59

Mermin-Wagner 定理, 55

Nöther 流, 52

Pauli-Villars 正规化, 29

QCD 的拉氏量, 63

伴随表示, 57

背景场方法, 71
背景场规范, 71
本性奇点, 14
编时格林函数, 12
标度性, 34
标度性破坏, 33
标量电动力学, 60

波函数重整化常数, 32
波算符, 8
不连接图, 22
不连通图, 22

场强张量, 57
出态, 8

纯规范场的拉氏量, 58

单粒子不可约图, 25
抵消项, 32
点分离正规化, 29

顶点函数, 27
动量截断, 29
对称性, 51
对称性破缺, 51

反常, 63
反自对偶, 62
非微扰定义
  标量场论的, 20
非微扰性质, 15
非谐振子, 3
费曼规则, 22
  $R-\xi$ 规范的, 74
  QCD 的, 70
  Yukawa 模型的, 49
  标量场论的
    动量空间的, 24
    欧氏空间的, 25

Chuan Liu

坐标空间的, 23
费曼图, 22
非谐振子的, 14
分立对称性, 53

格点正规化, 29

固定点, 36
红外的, 36
紫外的, 36
关联函数, 12
Minkowski 空间的, 12
编时, 12
两点, 12
闵氏空间的, 12
规范, 66
规范变换, 56
规范不变, 56
规范场, 56
阿贝尔的, 56
规范场的分量, 58
规范对称性, 51, 56
规范固定, 66
规范固定参数, 68
规范固定条件, 66
规范固定项, 68
规范群, 56
鬼粒子, 68

海森堡表象, 9
红外发散, 55

渐近级数, 14
渐近展开, 14
胶子, 63
截断, 29

局域对称性, 51

可重整性, 33
夸克, 62

郎道规范, 68
勒让德变换, 26
李代数, 52
的结构常数, 52
李代数的结构常数, 58
李普曼－施温格方程, 8
李群, 52

联结, 57
连接图, 22
连通图, 22
连续对称性, 52
量子色动力学, 62

路径积分量子化, 2
裸场, 31
裸微扰论, 33
洛伦兹规范, 68

泡利不相容原理, 46

平庸性, 42

圈图, 25
热核正规化, 29
入态, 8

散射算符, 9
散射问题, 7
生成泛函
编时格林函数的, 10
生成元, 52

守恒流, 52
树图, 25

双势井势, 54

外源, 47

微扰可重整性, 41
味道, 62

刘川制造

纤维丛, 57
相互作用表象, 9

协变导数, 57
    伴随表示中的, 57
协变规范, 67

颜色, 62

有效势, 27
有效作用量, 26

真空期望值, 54
整体对称性, 51, 52
正当顶点, 27
正规化, 28
正规时间正规化, 29
正则量子化, 2

重整化, 30
重整化的微扰论, 40
重整化方案, 32
重整化群, 36
重整化群方程
    裸的, 34
重整化群流, 36
重整化群系数
    裸的, 34
重整化条件, 32
重整化微扰论, 33
重整化质量, 32
重整化耦合参数, 32

紫外发散, 28
自对偶, 62
自发破缺, 53

Chuan Liu

刘川制造