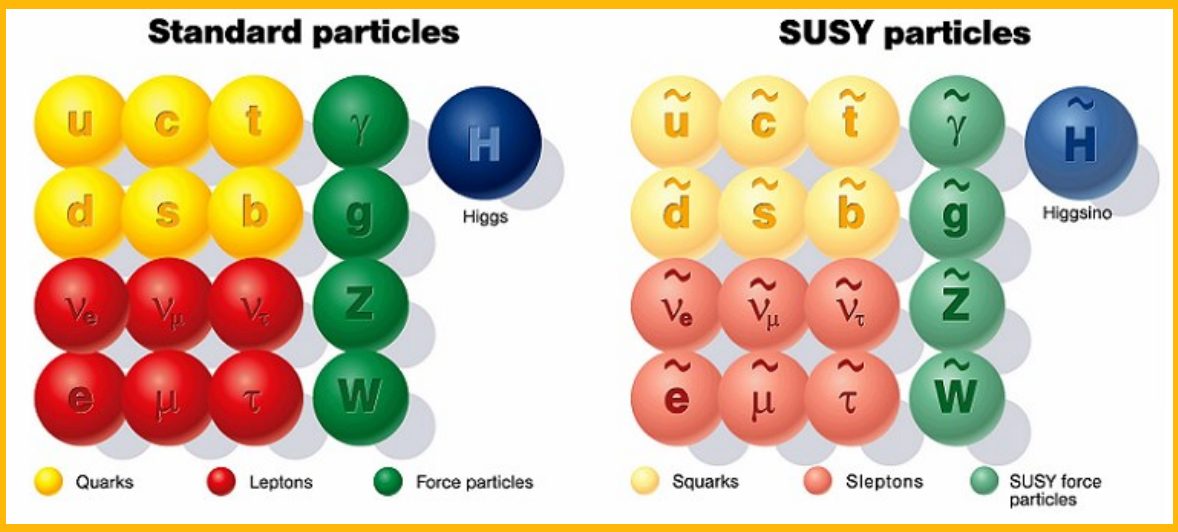


超对称入门

作者：斯蒂芬·马丁

翻译：王雯宇

北京工业大学理论物理研究所
Institute of Theoretical Physics
BJUT

hep-ph/9709356
2016年一月，第七版

超对称入门

作者：斯蒂芬 · 马丁
北伊利诺依大学物理系, DeKalb IL 60115
翻译：王雯宇
北京工业大学

本文做了一个教学性质的超对称理论讲义，读者被假定为熟悉粒子物理标准模型和量子场论，但是对超对称理论知之甚少甚至从未学过。文章的主要内容包括：超对称的理论动机，超对称拉氏量的构造方法，超空间和超场，超对称软破缺相互作用，最小超对称标准模型，物质宇称及其应用，超对称破缺机制，最小超模型粒子质量谱，超粒子衰变，超对称实验信号，最小超模型的扩充等。



†

† 超对称理论是当前理论物理特别是高能物理研究的热门课题。超对称性有极其优美的理论结构，同时具有解决标准模型规范等级问题，实现规范耦合系数统一，提供暗物质候选者等等优良品质。因此超对称唯象模型是超出标准模型新物理模型的主流方向，也是正在运行的大强子对撞机（LHC）以及未来更高能量对撞机探测的重要目标。方兴未艾的暗物质理论和实验探测也把超对称理论做为其研究的首要目标之一。因此超对称理论基础的教学对于理论物理的前沿研究有着重要的意义。

斯蒂芬 · 马丁教授的超对称综述论文《A Supersymmetry Primer》是网上预印本库内著名超对称唯象的讲义（号码：hep-ph/9709356）。文章主要针对粒子物理专业研究生，对超对称理论特别是超对称唯象做了一个系统而全面的教学性质的介绍。其主要内容包括：超对称的理论动机，超对称拉氏量的构造方法，超空间和超场，超对称软破缺相互作用，最小超对称标准模型，物质宇称及其应用，超对称破缺机制，最小超模型粒子质量谱，超粒子衰变，超对称实验信号，最小超模型的扩充等。论文主要特点是大大压缩了超对称基础理论的复杂推导，从量子场论和标准模型理论基础出发，由浅入深，以170页左右的篇幅使读者管中窥豹，见微知著，快速进入超对称唯象研究的前沿。论文自网上公布以来，受到了众多理论物理专业老师和同学的欢迎。马丁教授也不断对论文进行及时更新，使之紧跟前沿，保持鲜明的时效性。论文也因此成为多年来从事新物理唯象同行由学生转变为研究者过程中的首选读物。鉴于此，译者特把最新版的《A Supersymmetry Primer》翻译成中文，以飨读者。希望论文能够获得更广的传播，更期待更多共同志趣者加入超对称唯象前沿研究队伍中来！

2012年希格斯玻色子发现以后，几乎所有的解决希格斯规范等级问题的新物理模型都面临着严峻挑战，很多模型事实上已经被完全排除。超对称理论是众多模型中生命力最顽强的一个。正如论文最后所说：“*简单基于规范等级问题需要在TeV有一个解决方案，以及其它选择已不存在竞争力，我个人对现在开始的更高能量运行的LHC上发现超对称持谨慎的乐观态度*。”译者深以为然，这也是翻译本文的动因之一。愿译文能够对当前高能物理发展有些许贡献。

另外需要补充说明的是，超对称理论部分相关术语国内已经有了翻译，译者也取了其中大部分常用的翻译词汇。但是，还有一些词汇翻译不统一或者没有翻译，所以译者尽其所能将其统一。比如，后缀为“ino“的粒子，可以译为“微子“也可译为“超子“，译者统一译为“超子”。其它种种，不在此枚举。译者也感谢郑州大学王飞教授的校对！由于译者孤陋，翻译难免有不当之处，还请读者多多见谅。更欢迎反馈意见，共同进步！

——译者注

目录

1 引言 **5**

2 插曲：符号约定 **15**

3 超对称拉氏量 **20**

3.1 最简单超对称模型：自由手征超场 20
3.2 手征超多重态相互作用 25
3.3 规范超多重态拉氏量 28
3.4 超对称规范相互作用 29
3.5 小结：怎样构造超对称模型 31

4 超空间和超场 **33**

4.1 超坐标、一般超场、超空间求导和积分 34
4.2 超空间超对称变换 37
4.3 手征协变导数 38
4.4 手征超场 40
4.5 矢量超场 42
4.6 怎样构造超空间拉氏量 43
4.7 手征超场超空间拉氏量 45
4.8 超空间阿贝尔规范拉氏量 47
4.9 超空间一般规范拉氏量 50
4.10 不可重整超对称拉氏量 53
4.11 R对称性 55

5 超对称软破缺相互作用 **57**

6 最小超对称标准模型 **58**

6.1 超势和超对称相互作用 58
6.2 R宇称（也被称为物质宇称）及其应用 62
6.3 最小超模型的软破缺 65
6.4 构造原理的启示 66
6.5 最小超模型的重整化群 71

7 超对称破缺起源 **77**

7.1 超对称自发破缺的一般考虑 77
7.2 法耶-伊利奥普罗斯（D项）超对称破缺 79

7.3 欧雷菲尔塔夫（F项）超对称破缺 . . . 80
7.4 分开的超对称破缺区域的必要性 . . . 84
7.5 哥德斯通超子和引力超子 . . . 85
7.6 普朗克能标中介超对称破缺机制 . . . 88
7.7 规范中介超对称破缺机制 . . . 93
7.8 额外维度和反常中介超对称破缺机制 . . . 98

8 最小超模型质量谱 101
8.1 电弱对称性破缺和希格斯玻色子 . . . 101
8.2 中性超子和荷电超子 . . . 108
8.3 胶超子 . . . 111
8.4 标夸克和标轻子 . . . 112
8.5 小结：最小超模型超粒子谱 . . . 116

9 超粒子衰变 121
9.1 中性超子和荷电超子衰变 . . . 121
9.2 标轻子衰变 . . . 122
9.3 标夸克衰变 . . . 123
9.4 胶超子衰变 . . . 123
9.5 向引力超子/哥德斯通超子的衰变 . . . 124

10 超对称的实验信号 126
10.1 强子对撞机上信号 . . . 126
10.2 正负电子对撞机上信号 . . . 132
10.3 暗物质及其探测 . . . 137

11 超出最小超对称 141
11.1 R宇称破坏 . . . 141
11.2 额外的矢量型手征超多重态 . . . 143
11.3 次最小超对称标准模型 . . . 145
11.4 来自于不可重整项的μ项 . . . 147
11.5 标量质量的额外D项贡献 . . . 150

12 结论 152

声明 153

参考文献 153

“我想，我们走在进步的正确道路上，因为我们一直在实践”

——本杰明 · 富兰克林

1 引言

虽然加入了中微子质量的基本粒子物理标准模型在描述已知现象方面取得了巨大的成功，已经达到了TeV能量级别的实验前沿中也并没有发现明确的超出标准模型新物理的迹象，但是标准模型仍然被认为需要改进或扩充来描述更高能标的物理。引力量子效应显现的能量标度，约化普朗克能标$M_{\rm P}=(8\pi G_{\text{牛顿}})^{-1/2}=2.4\times10^{18}$ GeV，确定存在新的物理机制。仅仅依据自然界不同标度不同物理的现象，电弱能标M_W普朗克能标之间16个数量级能量差别的能区，存在新物理看上去是很明显的。

单纯$M_{\rm P}/M_W$的巨大比例已经是超出标准模型新物理的重要线索，因为这个比例会带来声名狼藉的“规范等级”问题[1]。这其实并不是标准模型自身的问题，而是希格斯粒子质量修正极其严苛地依赖于任何可以想到的超出标准模型新物理。标准模型电中性希格斯场是一个复标量场H，它的经典势为

$$V=m_H^2|H|^2+\lambda|H|^4\,. \tag{1.1}$$

模型需要H在势能极小值获得非零真空期望值，这就要求$\lambda>0$、$m_H^2<0$，得到H的真空期望值$\langle H\rangle=\sqrt{-m_H^2/2\lambda}$。由对弱相互作用性质的实验测量可知$\langle H\rangle$约为174GeV。2012年发现的质量在125GeV的希格斯玻色子[2]-[4]意味着如果标准模型是正确的有效理论的话，希格斯势相应的参数$\lambda=0.126$，$m_H^2=-(92.9\text{ GeV})^2$。（这是在最小减除$\overline{\rm MS}$方案中设置重整化标度为顶夸克质量，同时考虑两圈修正的结果。）而问题在于m_H^2会有来自于和希格斯场有耦合的每一个粒子或者其它物理过程的贡献的，直接的或间接的各种虚效应。

例如，如图1.1a所示，质量为m_f狄拉克费米子f圈图贡献了m_H^2。如果希格斯场与f的拉氏量中耦合项为$-\lambda_f H\overline{f}f$，那么图1.1a所示费曼图贡献的修正为

$$\Delta m_H^2\;=\;-\frac{|\lambda_f|^2}{8\pi^2}\Lambda_{\rm UV}^2+\ldots. \tag{1.2}$$

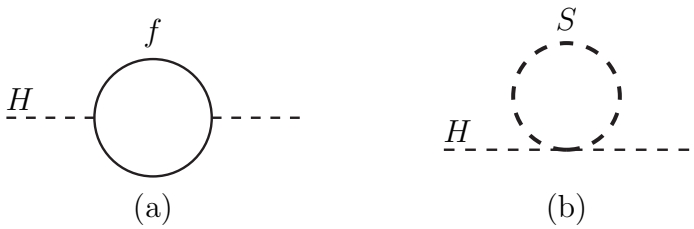


图 1.1: 希格斯粒子质量平方m_H^2的一圈修正，（a）狄拉克费米子圈图f，（b）标量粒子圈图S。

这里$\Lambda_{\rm UV}$是圈图积分正规化的动量紫外截断；通常这个截断应该是新物理出现，可以修正其更高能性质的标度。省略号代表修正项中正比于m_f^2的项，它们一般对紫外截断$\Lambda_{\rm UV}$ 是对数依赖的（根据H的实部和虚部不同而不同）。每一个标准模型的轻子和夸克都可以做为f给出贡献，当f为夸克时，公式（1.2）应该乘以颜色自由度3。最大的修正来自于顶夸克的贡献，此时$\lambda_f \approx 0.94$。那现在就有这样一个问题：如果$\Lambda_{\rm UV}$在普朗克能标，那么m_H^2的量子修正在数值上就比其要求值$(92.9\ {\rm GeV})^2$大了30个数量级。标准模型中只有希格斯玻色子才有这种质量的巨大修正，而其它粒子如费米子和规范玻色子则没有这如公式（1.2）的对$\Lambda_{\rm UV}$的直接依赖。但是标准模型夸克、轻子以及电弱规范玻色子$Z^0, W^\pm$都因$\langle H\rangle$获得质量，所以全部的标准模型粒子都直接或间接地依赖于紫外截断能标$\Lambda_{\rm UV}$。

有人可能会想到选一个不太大的$\Lambda_{\rm UV}$来解决上面的问题，但是这就意味着在$\Lambda_{\rm UV}$标度附近有新物理存在，这不仅要改变圈图中的传播子也要重新做能量截断。在只含有两阶导数的拉格朗日量中做到这一点是非常困难的，而存在高阶导数的拉氏量中往往破坏幺正性或因果律[5]。弦论中，圈图积分在高欧几里德动量p处以$e^{-p^2/\Lambda_{\rm UV}^2}$因子的方式来截断，但是此时的$\Lambda_{\rm UV}$通常认为就在普朗克能标$M_{\rm P}$附近[†] 。

更进一步的是，类似于公式（1.2）的任何重粒子贡献的虚效应都可能会存在，这就引入了重粒子（或者另外的高能物理标度），而不仅仅是能量截断了。需要特别强调的是单纯通过选取某个没有二次发散的正规化方案并*不能*解决规范等级问题。规范等级问题的实质不是因为圈图计算的二次发散，而是对高能标物理的二次方依赖。后者某种程度上和二次发散相关，但这并不是全部。二次发散的消失是一个必要的，但不充分的，规范等级问题是否存在的判据。

例如，假设存在一个质量为m_S 的复标量场S与希格斯场H耦合，拉氏量项为$\lambda_S|H|^2|S|^2$。相应的图 1.1b展示的费曼图给出的贡献为

$$\Delta m_H^2 \;=\; \frac{\lambda_S}{16\pi^2}\left[\Lambda_{\rm UV}^2 - 2m_S^2\ln(\Lambda_{\rm UV}/m_S) + \ldots\right]. \tag{1.3}$$

如果有人不接受$\Lambda_{\rm UV}$的物理解释而采用维数正规化方案来代替能量截断方案，则二次发散项$\Lambda_{\rm UV}^2$就不存在了。然而，正比于*重粒子*质量m_S^2 的项是去不掉的，除非不合理地引入专门的抵消项。这就展示了m_H^2对与H耦合的*重*粒子的依赖性质，如果m_S非常大，则它在标准模型中的物理效应是不退耦的，或者它使得人们理解一个非常小m_H^2变得非常困难。

即使未知的重粒子与标准模型希格斯没有直接耦合，问题仍然是存在的。比如，假若存在一个重粒子，和标准模型夸克和轻子不同，它具有矢量型量子数，可以在不和H有耦合的情况下获得质量m_F，（也就是说存在一个大质量项$m_F\overline{F}F$，不被任何对称性所禁戒，包括$SU(2)_L$弱同位旋对称性。）此时F粒子就不会贡献如图 1.1a所示的费曼图形。但是F如果

[†]有一些有趣的反对规范等级问题存在的观点。它们基于终极截断是电弱能标，而不是明显的普朗克能标，本文没有进行综述。



图 1.2: 通过规范相互作用和标准模型希格斯粒子间接耦合的重费米子F对希格斯粒子质量修正贡献的两圈图形。

和标准模型希格斯场有共同的规范对称性，这种对称性可以是电弱对称性或者一些现在实验还探测不到的在高能标破缺的规范力，那么F就会对m_H^2有贡献。不管哪种情况，如图1.2的两圈图给出的贡献为

$$\Delta m_H^2 \;=\; C_H T_F \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right)^2 \left[a\Lambda_{\rm UV}^2 + 24 m_F^2 \ln(\Lambda_{\rm UV}/m_F) + \ldots\right], \tag{1.4}$$

其中C_H和T_F 是群指标[‡]，数量级为1，g是适当的规范耦合常数。系数a依赖于动量积分的截断方法，在维数正规化方案中完全不会出现，m_F^2贡献项总是不会消失。因子$(g^2/16\pi^2)^2$ 可以非常小（电弱相互作用的数值在10^{-5}量级），但是重点是理论中这些Δm_H^2的贡献既依赖于一个大的质量，又依赖于物理的紫外截断，很有可能在普朗克能标$M_{\rm P}$的量级。因此加入了量子修正的希格斯粒子质量更为"自然地"应该在$M_{\rm P}^2$的量级而不是现在的测量值。甚至一些三圈和更高圈的费曼图也会贡献难以让人接受的项。以上论述不只对重粒子适用，对那些其它高能标物理，如动力学凝聚或者额外紧致维度的任意理论也是适用的。

希格斯场并不必须是基本场，它可以由动力学凝聚产生或者聚集（collective）现象。虽然最简单模型面临一些典型的问题，这些想法当然还是值得深入研究的。特别的，而到目前为止，已经探测到125GeV希格斯玻色子的性质的确符合一个基本的标量场，或者存在一个极端特殊的紫外截断标度，因此所有未发现的粒子和凝聚场的标度比普朗克标度低很多。但是如果希格斯玻色子是一个基本粒子，同时新物理能标远远大于电弱能标，那我们只剩下两个选择：要么我们必须做一个非常奇怪的假定那些重粒子或者凝聚物与希格斯场无（包括间接的和极弱的）耦合，要么Δm_H^2贡献项之间有着非常巨大的抵消。

使得Δm_H^2贡献项之间可以系统地抵消的伎俩对物理学家来说最好就是利用某种对称性。对比可知，公式（1.2）和（1.3）强烈建议玻色子和费米子之间应该有在一种对称性，因为玻色子圈图和费米子圈图对于Δm_H^2的贡献刚好是相反的。（注意如果标量势有底的话，λ_S必须是正的。）如果标准模型中每个夸克和轻子都有两个复标量伙伴且$\lambda_S = |\lambda_f|^2$，则图 1.1a，1.1b的$\Lambda_{\rm UV}^2$ 贡献可以干净地抵消。明确地，还需要理论的更多限制来保证这种抵消持续到更高阶，使得，如图 1.2和公式（1.4）的重费米子贡献也会被重玻色子的两圈效应所抵消。

[‡]特殊情况下，C_H是H的量子力学卡西米尔算符，T_F是$SU(n)$群基础表示中F的邓金因子，归化为狄拉克费米尔$T_F = 1$，魏尔费米子$T_F = 2$。

幸运的是，一旦我们单纯地假设存在联系费米子和玻色子的对称性，这种标量粒子质量修正的抵消机制不仅是可能的，而且是必然的，这种对称性就是*超对称*。

超对称变换可以把一个玻色态转换到费米态，反之亦然。形成这种变换的生成元算子Q必须是一个满足反对易关系的旋量，有关系：

$$Q|\text{玻色子}\rangle = |\text{费米子}\rangle, \qquad Q|\text{费米子}\rangle = |\text{玻色子}\rangle. \tag{1.5}$$

旋量是一个内禀复量，因此$Q^\dagger$（Q的厄米共轭）也是一个对称性生成元。因为$Q^\dagger$、Q是费米型算符，它们都带有自旋角动量量子数$1/2$，所以这种对称性明显是一种时空对称性。这种对称性的形式受到科尔曼-曼都拉定理[7] 的扩充哈格-罗普赞斯基-索尼斯定理[8]（哈罗索定理）的严格限制。像标准模型一样，一个真正的超对称理论应该有手征费米子（左手和右手费米子按照不同的规范对称性来变换）以及由此带来的宇称破坏相互作用可能性。哈罗索定理要求生成元$Q^\dagger$和Q 必须满足以下框架性的对易和反对易关系

$$\{Q, Q^\dagger\} = P^\mu, \tag{1.6}$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0, \tag{1.7}$$

$$[P^\mu, Q] = [P^\mu, Q^\dagger] = 0, \tag{1.8}$$

其中P^μ是时空平移变换的生成元。这里我们无情地去掉了$Q^\dagger$和Q的旋量指标，经过一系列约定之后，在后文的第3.1小节我们会给出公式 (1.6)-(1.8)带指标的准确形式。同时我们应该注意到公式 (1.6)右边出现P^μ 是一点也不奇怪的，因为P^μ在洛伦兹平动和旋转下是按照自旋为1的场变换的，而方程左边的$Q^\dagger$和Q 则按照自旋为$1/2$的场变换。

一个单粒子态的超对称理论构成了超对称代数的不可约表示，被称为*超多重态*（supermultiplets）。每个超多重态中都有费米态和玻色态，通常它们互相被称为对方的超对称伙伴（超伙伴）。如果定义$|\Omega\rangle$ 和$|\Omega'\rangle$ 是由同样的超多重态组成，那么$|\Omega'\rangle$就正比于被若干Q和$Q^\dagger$的组合作用的$|\Omega\rangle$ ，包括时空旋转和平移。质量平方算符$-P^2$与Q和$Q^\dagger$对易，也与时空旋转和平移算符对易，因此在一个超对称不可约态中的粒子一定有相同的$-P^2$的本征值，即相同的质量。

超对称生成元Q和$Q^\dagger$与规范变换生成元也是对易的，所以一个超多重态中的粒子必须是某个规范变换相同的表示，因此而有相同的电荷，弱同位旋和颜色等自由度。

每个超多重态中会有数目相同的费米和玻色自由度。要证明这一点，我们可以考虑算符$(-1)^{2s}$，其中s是自旋角动量。由自旋的统计性质可知$(-1)^{2s}$ 算符作用在玻色态上得到的本征值为+1，作用在费米态上得到的本征值为-1。任意费米型算符会把一个玻色态转换为费米态，反之亦然。因此$(-1)^{2s}$应该与任何费米型算符反对易，当然也包括Q和$Q^\dagger$。现在，对于某个给定的超多重态，考虑具有相同四动量算符p^μ本征值P^μ 的子空间态$|i\rangle$ 。根据公式 (1.8)任何由Q和$Q^\dagger$组合而成的算符作用在$|i\rangle$上的态$|i'\rangle$也具有相同的四动量本征值。因此人

们可以在这个子空间中得到一个完备性关系$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$。现在我们可以对算符$(-1)^{2s}P^\mu$ 求迹（包括每一个不同的自旋螺旋度）。

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle i|(-1)^{2s}P^\mu|i\rangle &= \sum_i \langle i|(-1)^{2s}QQ^\dagger|i\rangle + \sum_i \langle i|(-1)^{2s}Q^\dagger Q|i\rangle \\
&= \sum_i \langle i|(-1)^{2s}QQ^\dagger|i\rangle + \sum_i \sum_j \langle i|(-1)^{2s}Q^\dagger|j\rangle\langle j|Q|i\rangle \\
&= \sum_i \langle i|(-1)^{2s}QQ^\dagger|i\rangle + \sum_j \langle j|Q(-1)^{2s}Q^\dagger|j\rangle \\
&= \sum_i \langle i|(-1)^{2s}QQ^\dagger|i\rangle - \sum_j \langle j|(-1)^{2s}QQ^\dagger|j\rangle \\
&= 0. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

第一步等式直接来源于超对称代数关系 (1.6)；第二个和第三个利用了完备性关系；第四个利用了$(-1)^{2s}$与Q的反对易关系。现在迹$\sum_i \langle i|(-1)^{2s}P^\mu|i\rangle = p^\mu \ \mathrm{Tr}[(-1)^{2s}]$就正比于玻色自由度数$n_B$减去费米自由度数$n_F$ ，因此

$$n_B = n_F \qquad (1.10)$$

在任何$p^\mu \neq 0$的超多重态中成立。

最简单的满足 (1.10)关系的超多重态有一个魏尔费米子（有两个自旋螺旋度，$n_F = 2$）和两个实标量粒子（每个$n_B = 1$）。很自然地可以将两个实标量自由度构造为一个复标量场。下文我们将会看到这个模型给出的超对称代数，费曼规则以及超对称破缺等的形式来。这种二分量魏尔费米子和一个复标量场被称为*手征*、或者*物质*、或者*标量*超多重态。

次简单的超多重态包含一个自旋为1的矢量玻色子。如果理论是可重整的，那么至少在规范对称性自发破缺前，规范玻色子应该是无质量的。无质量自旋为1玻色子有两个螺旋度态，所以玻色自由度数目$n_B = 2$ 。它的超伙伴就是一个零质量自旋1/2的魏尔费米子，因为也只有两个螺旋度态，$n_F = 2$ 。（如果试一下零质量自旋3/2 粒子就知道理论是不可重整的。）规范玻色子必须按照规范群的伴随态表示变换，所以它们的费米型伙伴通常被称为*规范超子*，也必须做相同的变换。通常一个规范群的伴随表示是自共轭的，超规范子的左手和右手态必须有相同的规范变换性质，所以自旋1/2规范超子和自旋1规范玻色子被称为*规范*或者矢量超多重态。

如果我们考虑引力，那么自旋2引力子（有两个螺旋度态，所以$n_B = 2$）有一个自旋-3/2超伙伴被称为引力超子。如果超对称没有破缺，引力超子保持零质量，也具有$n_F = 2$的螺旋度态。

还有更多的可以满足公式 (1.10)的超多重态，但是如果是可重整的相互作用的话，它们

通常是可约化为手征和矢量超多重态的组合[§]。以上情况得除去那些"扩充的"超对称，扩充的超对称理论中有多于一对儿的超对称生成元Q和$Q^\dagger$。虽然这些理论在数学上很有趣，但事实上却明显不具有唯象学意义。理由是扩充超对称四维时空场论中不能存在手征粒子和宇称破坏，而在标准模型中这是不可或缺的。虽然扩充的超对称高维度理论有可能描述真实的物理世界，这需要用适当的方式把额外维度紧致化，扩充超对称四维理论也可以提供有趣的玩具模型和计算工具，本文将不讨论这些可能性。通常一个没有扩充的，有唯象意义的超对称理论被称为$N=1$超对称，其中N指的就是超对称性的数目（$Q, Q^\dagger$对数目）。

在标准模型的超对称扩充中[9]-[11]，每个已知的基本粒子都来自于一个手征或矢量超多重态，并且必须有一个自旋量子数差了$1/2$ 的超伙伴。理解这个理论的有趣的现象学的第一步是要确定怎样把已知基本粒子嵌入超多重态，并给它们以合适的名字。这里一个重要的发现就是标准模型中费米子的左手部分与右手部分有着不同的规范变换，超对称理论中只有手征超多重态中的费米子可以做到这一点。因此标准模型费米子（夸克和轻子）必须从属于手征超多重态，夸克和轻子的玻色超伙伴也因此是自旋0粒子，而非自旋1矢量玻色子。[¶]

因为自旋0粒子是标量，夸克和轻子的超伙伴可以在费米子名字前加上"标"字来命名，因此，它们一般被称为标夸克和标轻子（标量夸克和标量轻子的简称），或者有时称*标费米子*。标准模型中夸克和轻子的左手和右手部分是各自独立两分量魏尔旋量，并有不同的规范变换性质，因此它们也必须有各自的复标量伙伴。标夸克和标轻子的符号和它们的相应的费米子伙伴是一样的，只是上面加一个波浪线(˜)来标记它们是标准模型粒子的超伙伴。例如，电子狄拉克场的左手和右手部分分别叫左手和右手标电子，符号为$\widetilde{e}_L$ ，$\widetilde{e}_R$。时刻要记住的是标电子（自旋0粒子）的"手征性"指的并不是它自身的螺旋度，而是它的超对称伙伴。标缪子和标陶子的命名也是一样的：$\widetilde{\mu}_L$, $\widetilde{\mu}_R$, $\widetilde{\tau}_L$, $\widetilde{\tau}_R$。标准模型中微子（忽略它们极其微小的质量）是右手的，所以标中微子标记为$\widetilde{\nu}$，通常还会加上脚标来标记相应的轻子味道：$\widetilde{\nu}_e$, $\widetilde{\nu}_\mu$, $\widetilde{\nu}_\tau$。最后，$\widetilde{q}_L$, $\widetilde{q}_R$标记所有的标夸克，其中$q = u, d, s, c, b, t$。这些标夸克和标轻子场的规范相互作用与它们对应的标准模型费米子是一样的。左手标夸克$\widetilde{u}_L$ 和$\widetilde{d}_L$和W玻色子有耦合，而$\widetilde{u}_R$和$\widetilde{d}_R$则没有。

因为自旋为0，标量希格斯玻色子明显从属于一个手征超多重态。事实上单单一个手征超多重态是不够的。其中一个原因就是如果只有一个规范希格斯手征超多重态，电弱对称性就会存在规范反常，那相应的量子理论就存在难以成立了。这是因为规范反常抵消的条件是$\mathrm{Tr}[T_3^2 Y] = \mathrm{Tr}[Y^3] = 0$，其中$T_3$和$Y^3$ 分别是弱作用同位旋第三分量和超荷，它们由通常的电荷$Q_{\mathrm{EM}} = T_3 + Y$来归化。运算要遍历理论中所有左手魏尔旋量自由度。标准模型中对

[§]例如，如果一个理论中规范对称性自发破缺而超对称性保持，那么零质量矢量超多重态将"吃掉"一个手征超多重态，得到了一个有质量矢量超多重态，其中物理自由度含有一个有质量矢量玻色子（$n_B = 3$），一个由规范超子和手征费米子组成的狄拉克费米子（$n_F = 4$）以及一个实标量（$n_B = 1$）。

[¶]特别的，人们不能把自旋1/2中微子看成自旋1光子的超伙伴，因为弱相互作用下，中微子从属于一个二重态，而光子是弱同位旋中性的。

名称		自旋0	自旋1/2	$SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$
标夸克, 夸克	Q	$(\widetilde{u}_L \;\; \widetilde{d}_L)$	$(u_L \;\; d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
(×3 代)	$\overline{u}$	$\widetilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	$\overline{d}$	$\widetilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
标轻子，轻子	L	$(\widetilde{\nu} \;\; \widetilde{e}_L)$	$(\nu \;\; e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
(×3 代)	$\overline{e}$	$\widetilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
希格斯, 希格斯超子	H_u	$(H_u^+ \;\; H_u^0)$	$(\widetilde{H}_u^+ \;\; \widetilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 \;\; H_d^-)$	$(\widetilde{H}_d^0 \;\; \widetilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

表 1.1: 最小超对称标准模型的超多重态：自旋0场势复标量场，自旋1/2场势左手魏尔费米子。

已知的夸克和轻子求迹奇迹般地规范反常抵消了。现在一个希格斯手征超多重态的费米子部分一定是一个弱同位旋二重态，超荷为$Y = 1/2$ 或$Y = -1/2$。不管是哪种情况，这个费米部分都对求迹有非零贡献从而带来了反常。两个希格斯超多重态，一个$Y = 1/2$，另一个$Y = -1/2$就可以避免这种情况，双希格斯手征超多重态费米部分对反常的贡献相互抵消了。在第6.1小节我们将看到，还有另外一个完全不同的原因，超对称理论中只有$Y = 1/2$希格斯手征超多重态可以和+2/3上型（上，粲，顶）夸克有汤川耦合来给出必需的夸克质量，只有$Y = -1/2$的希格斯手征超多重态可以和$-1/3$下型（下，奇异，底）夸克和带电轻子有汤川耦合来给出必需的夸克质量。

我们将分别把具有$Y = 1/2$和$Y = -1/2$的$SU(2)_L$二重态复标量场称为H_u和H_d [†]。$T_3 = (1/2, -1/2)$的H_u的弱同位旋分量分别具有电荷$1, 0$，表示为(H_u^+, H_u^0)。相似地，$SU(2)_L$二重态复标量H_d具有$T_3 = (1/2, -1/2)$的分量(H_d^0, H_d^-)。中性与标准模型希格斯玻色子相对应的中性标量是H_u^0和H_d^0的线性组合；在第8.1小节我们将做进一步的讨论。自旋-1/2的超伙伴粒子的系统命名方法是在标准模型名字后面加上“超子”，因此希格斯标量的费米型伙伴被称为希格斯超子。它们构成$SU(2)_L$二重态左手魏尔旋量场，表示为$\widetilde{H}_u$, $\widetilde{H}_d$，其中弱同位旋分量为$\widetilde{H}_u^+$, $\widetilde{H}_u^0$ 以及$\widetilde{H}_d^0$, $\widetilde{H}_d^-$。

现在我们得到了标准模型最小的超对称唯象扩充的所有的手征超多重态。根据它们的标准模型$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$规范群性质，以及通常的$u_L, d_L$ 和ν, e_L ，组成$SU(2)_L$二重态的约定，把所有的手征粒子列于表1.1。 这里我们采用了标准约定，所有的手征超

[†]其它相关文献利用H_1, H_2或者$H, \overline{H}$来代替H_u, H_d。这里使用的符号是为了方便地记住哪个希格斯的真空期望值给出了相关夸克类型的质量。

名称	自旋1/2	自旋1	$SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$
胶超子, 胶子	$\widetilde{g}$	g	(**8**, **1** , 0)
W超子, W 玻色子	$\widetilde{W}^{\pm}$ $\widetilde{W}^{0}$	$W^{\pm}$ W^{0}	(**1**, **3** , 0)
B超子, B 玻色子	$\widetilde{B}^{0}$	B^{0}	(**1**, **1** , 0)

表 1.2: 标准模型最小超对称扩充的规范超多重态.

多重态是左手魏尔旋量，而右手夸克和轻子（包括它们的超伙伴）的共轭列于表1.1。在第3节我们可以看到中这样的约定可以非常方便地构造超对称拉氏量。把每个手征超多重态表示为统一的一个符号是有用的，如表1.1第二列所列。例如，Q表示手征超对称$SU(2)_L$二重态，包含$\widetilde{u}_L, u_L$（弱同位旋分量$T_3 = 1/2$）和$\widetilde{d}_L, d_L$（$T_3 = -1/2$）。$\overline{u}$表示手征超对称$SU(2)_L$单态，包含$\widetilde{u}^*_R, u^\dagger_R$。表1.1只列出了第一代粒子表示，其实夸克和轻子超多重态都有三代。代指标$i = 1, 2, 3$可以在需要的时候加在手征超多重态名字上$(Q_i, \overline{u}_i, \ldots)$，例如$(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) = (\overline{e}, \overline{\mu}, \overline{\tau})$，$\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$ 符号上的横杠只是名字的一部分，并不意味着做任何共轭运算。

希格斯手征超多重态H_d（含有H^0_d, H^-_d, $\widetilde{H}^0_d$, $\widetilde{H}^-_d$）和标准模型左手标轻子和轻子L_i如（$(\widetilde{\nu}$, $\widetilde{e}_L$, ν, e_L）一模一样。有人可能会因此简单假设中微子和标量希格斯做为一对超对称伙伴来构造一个更加经济的超多重态，而不是像现在这样把它们放入不同的态中。这样的话标中微子和希格斯玻色子就是同一个粒子了。这种尝试确实是人们最初构造超对称唯象时的关键点[9]，但是现在我们知道这是不行的。即使忽略了上文所提到的规范反常抵消问题，也会出现其它难以解决的问题，比如轻子数不守恒，至少有一个中微子质量远远在实验限制之外等。因此，所有的标准模型粒子的超伙伴都是新粒子，不能被看作是某个标准模型粒子。

标准模型矢量玻色子明显从属于规范超多重态，它们的费米型超伙伴通常称为规范超子。QCD的$SU(3)_C$颜色规范相互作用通过胶子传递，胶子的自旋1/2颜色八重态超对称伙伴就是胶超子。与上面一样，用一个波浪线来标识标准模型的超对称伙伴，因此胶子和胶超子分别记为g和$\widetilde{g}$。电弱规范对称性$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 通过自旋1规范玻色子W^+, W^0, W^- 和B^0来传递，它们的自旋1/2超伙伴标记为$\widetilde{W}^+, \widetilde{W}^0, \widetilde{W}^-$和$\widetilde{B}^0$，称为*W超子*和*B超子*。电弱对称性破缺后，规范本征态W^0, B^0 混合得到质量本征态Z^0和光子γ。相应的规范超子$\widetilde{W}^0$ 和$\widetilde{B}^0$混合之后的粒子称为Z超子（$\widetilde{Z}^0$）和光超子（$\widetilde{\gamma}$）。如果对称性没有破缺，它们的质量也是m_Z和零。表1.2列出了标准模型最小超对称扩充的规范超多重态。

表1.1和表1.2的手征和规范对称态构成了最小超对称标准模型（最小超模型）的粒子内容。最明显也是最有趣的是，到现在为止，还没有一个标准模型粒子的超伙伴被发现。如果

超对称没有破缺，那么标电子$\widetilde{e}_L$ 、$\widetilde{e}_R$的质量和电子质量$m_e = 0.511...$ MeV 严格相等。对其它超轻子和超夸克也是这样的，同时还应该存在无质量的胶超子和光超子。这样超粒子应该极其易测并早已测到。因此，超对称性在自然界选择的真空态中是明确地*破缺了的对称性*。

超对称性破缺理论的一个重要线索就是回到解决规范等级问题的动机上。超对称性使得每个标准模型狄拉克粒子引入两个复标量场，来抵消公式 (1.2)和(1.3)的二次质量依赖($\Lambda^2_{\rm UV}$)。这种抵消也要求相应的无量纲耦合系数是相互关联的（比如$\lambda_S = |\lambda_f|^2$）。在第3节中我们将会看到，没有破缺的超对称中的确可以存在这些耦合系数之间的关系。事实上，未破缺超对称保证了标量粒子质量平方的二次发散以及对高能标物理的二次依赖在微扰展开的任意阶相消[‡]。现在如果破缺超对称模型仍然可以在超对称性破缺的情况下解决规范等级问题，那么超对称中无量纲耦合系数之间的关系一定是保持的。否则希格斯标量质量会出现以下形式的二次发散的辐射修正

$$\Delta m_H^2 = \frac{1}{8\pi^2}(\lambda_S - |\lambda_f|^2)\Lambda^2_{\rm UV} + \dots . \tag{1.11}$$

由此我们得到了"软的"超对称破缺。这意味着最小超模型的拉氏量可以写为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm SUSY} + \mathcal{L}_{\rm soft}, \tag{1.12}$$

其中$\mathcal{L}_{\rm SUSY}$包含所有的保持超对称性的规范和汤川相互作用，而$\mathcal{L}_{\rm soft}$破坏超对称但是只包含质量项和有正质量量纲的耦合系数。如果没有更多的判据，超对称破缺看上去是一个非常任意的要求。幸运的是在第7节我们将看到超对称破缺机制的理论模型的确能给出$\mathcal{L}_{\rm soft}$相关项。如果把产生软破缺的高能标标记为$m_{\rm soft}$，那么在$m_{\rm soft} \to 0$的极限，那些希格斯粒子质量的非超对称修正必定会消失，由量纲分析可知，它们不会正比于$\Lambda^2_{\rm UV}$。更一般地，这些模型中所有标量粒子质量辐射修正的二次发散项在微扰论各阶保持抵消。修正项也不能长得像$\Delta m_H^2 \sim m_{\rm soft}\Lambda_{\rm UV}$，因为圈图的动量积分在$\Lambda_{\rm UV} \to \infty$时一般总是二次或者对数发散，没有线性发散。因此它们总是具有形式

$$\Delta m_H^2 = m^2_{\rm soft}\left[\frac{\lambda}{16\pi^2}\ln(\Lambda_{\rm UV}/m_{\rm soft}) + \dots\right]. \tag{1.13}$$

这里λ代表各种无量纲耦合系数，省略号表示那些不含$\Lambda_{\rm UV}$的项以及高圈贡献（依赖于$\Lambda_{\rm UV}$对数的幂次）。

因为标准模型粒子和它们的超伙伴粒子的质量劈裂源于$\mathcal{L}_{\rm soft}$的参数$m_{\rm soft}$，公式 (1.13)告诉我们超伙伴的质量不会太大[§]。否则希格斯粒子质量平方的$\mathcal{L}_{\rm soft}$修正项将比非常不自然地远远

[‡]简单理解这点可以回顾到前文所述严格的超对称性要求标量和费米子质量简并。而在任何可重整的场论中，费米子的质量辐射修正最多是对数发散的，因此超对称保持理论的标量粒子质量修正也应该是一样的。

[§]这明显是模糊的和人为的。但是，这样人为的判据，至少在个人层次上，对有限精力和金钱的人选择研究方向是有用的。

大于电弱对称性破缺标度174 GeV的平方，我们也就失去了解决规范等级问题的初衷。标顶夸克、标底夸克、W超子和B 超子对$\Delta m_{H_u}^2$ 和$\Delta m_{H_d}^2$有特别大的贡献，而胶超子质量和其它所有的标夸克、标轻子也通过对标顶夸克和标底夸克的质量修正间接参与进来。在一些并不是太人为改造的超对称破缺模型中，超伙伴粒子质量之间差别不超过一个量级。公式 (1.13) 中取$\Lambda_{\rm UV} \sim M_{\rm P}$ 、$\lambda \sim 1$，我们可以估计$m_{\rm soft}$能量标度，进而估计出至少有若干个最轻超伙伴质量不会大于TeV 的量级。这样就可以使最小超模型希格斯势获得真空期望值，给出m_W, m_Z = 80.4, 91.2 GeV等质量时不会有太大的抵消。虽然这看上去是一个较为模糊的判断标准，但很多理论家坚信并乐观认为欧洲核子中心的大强子对撞机可以发现超对称，在未来能量足够高的正负电子对撞机上可以详尽研究超对称。

然而，需要补充说明的是，在上世纪七十年代早期，解决规范等级问题并不是当时构造超对称的历史动机。超对称代数和超对称场论由于各种其它缘由被提出了，[12]-[15]而那些缘由看上去和最小超模型毫无瓜葛。由完全不同缘由，甚至是纯粹的审美判断，而建立的理论可以解决规范等级问题，这真是非常神奇的!

人们可能会疑问是否有好的理由来说明为什么所有的标准模型粒子和超伙伴刚好足够重到现在还发现不了它们。最小超模型所有的已被发现的粒子，除了125 GeV希格斯，都有一个共同点，它们的质量在电弱对称性破缺消失时必须恢复为零。具体地说，$W^{\pm}, Z^0$ 玻色子和所有的夸克、轻子质量都等于一个无量纲耦合系数乘以希格斯真空期望值$\sim$ 174 GeV，光子和胶子因电磁和色动力学规范对称性而保持零质量。相反，最小超模型中所有未发现粒子有着完全相反的性质，每个粒子的质量都不需要电弱对称性破缺：标夸克、标轻子和希格斯标量属于一般的复标量场，质量项$m^2|\phi|^2$可以存在于任何的规范对称性中；希格斯超子，规范超子质量项存在是因为它们都是规范群费米子实表示。所以从最小超模型角度看，1995年发现的顶夸克是一个非常自然的里程碑，所有之前发现的粒子都因电弱对称性破缺而必须是轻的。由第8.1小节的讨论可知，如果最小超模型成立，那么至少存在一个质量轻于135 GeV的中性希格斯玻色子。这就是顶夸克发现之后剩下的唯一期望。2012年发现的125GeV希格斯玻色子正是这个粒子，而且它并不太重的事实可以作为超对称的一个成功预言。

最小超模型一个重要特征是表1.1和1.2所列的超伙伴不一定是粒子的质量本征态。因为电弱对称性和超对称性破缺后，电弱规范超子和希格斯超子之间就可以混合；相同电荷的标夸克、标轻子和希格斯标量之间也可以。唯一剩下的就是胶超子，因为它是颜色费米子八重态，没有合适的量子数可以与其它粒子混合。对于实验物理学家来说质量和混合无疑是最重要的。一个不太明显的事情是这其实也是大部分超对称理论工作的中心问题和焦点：超对称是如何破缺的？原因就是最小超模型中我们所不知道的部分，大多与$\mathcal{L}_{\rm soft}$ 相关。第3节我们将看到超对称理论结构中很少有任意性。事实上最小超模型中超对称保持部分全部无量纲耦合系数以及质量参数（除了其中一个）都和标准模型实验已测量参数是直接相关的。例如，一个胶超子、标夸克和夸克的耦合系数决定于量子色动力学的耦合常数α_S。相反地，拉氏量

的超对称破缺部分中有许多未知参数，存在明显很大的任意性。每个标准模型与其超伙伴之间的质量劈裂都源于最小超模型拉氏量的超对称破缺部分。软破缺项也会带来大量标准模型所没有的引起CP相位破坏的混合角度。幸运的是，在第6.4小节我们将看到，已经有迹象表明最小超模型的超对称破缺项并不是完全任意的，超伙伴粒子的探测能够测量并限制更多的参数。从理论角度看，真正的挑战在于怎么在一个预言性很强的超对称破缺模型中解释所有的参数。

其它的讨论是如下安排的：第2节给出重要计算约定列表；第3节我们学习怎样构造一个超对称场论的拉氏量；第4节用更优美的超空间形式系统重新构造拉氏量。超对称软破缺在第5节讨论。在第6节我们将介绍特殊情况最小超模型的一般应用，讲解物质宇称的概念，研究软破缺结构的重要性，第7节列出了一些超对称破缺机制的缘由以及相应的各种假设。在第8节我们将学习最小超模型预言的新粒子的质量和混合角。它们的衰变道的讨论放在第9节，同时一些非常有意义的超对称的实验信号在第10节综述。第11节给出标准最小超模型的一些变种，这些讨论缺少了历史的精确性和透视性，读者可以从许多著名书籍[16]-[30]，综述文章[31]-[47]和预印本[48]中获得更多原始材料的指导。

2 插曲：符号约定

本节给出我的符号和约定。四矢量的指标用从中间开始的希腊字母$\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3$来表示。一个粒子的位置和动量的逆变四矢量为

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \qquad\qquad p^\mu = (E, \vec{p}), \tag{2.1}$$

而导数四矢量为

$$\partial_\mu = (\partial/\partial t, \vec{\nabla}). \tag{2.2}$$

时空度规是

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1), \tag{2.3}$$

所以，$p^2 = -m^2$表示一个质量为m的在壳粒子。

相比于四分量狄拉克旋量或马约拉纳旋量，使用两分量魏尔旋量是极其合适的。标准模型拉氏量（及其任何超对称扩充）破坏宇称，每个狄拉克粒子的左手部分和右手部分有着完全不同的规范相互作用。如果用四分量旋量，就得在各个地方使用较为讨厌的左手和右手投影算符：

$$P_L = (1 - \gamma_5)/2, \qquad\qquad P_R = (1 + \gamma_5)/2. \tag{2.4}$$

二分量魏尔旋量的优势在于从一开始就把费米型自由度按照不同的规范量子数来处理，这正是自然界要求我们做的。但是一个更好的理由是构造超对称理论的物质基本砖块是手征超对称多重态，每一个态都只含有一个二分量魏尔旋量。

一些读者可能对二分量费米子约定不太熟悉，这里我来给出它们是如何与四分量旋量之间的相联系的。一个质量为M的四分量狄拉克费米子Ψ_{D}用以下拉氏量来描述

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\overline{\Psi}_{D}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi_{D} - M\overline{\Psi}_{D}\Psi_{D}\,. \tag{2.5}$$

为了达到我们的目的，本文选取4×4γ矩阵特定的2×2方块矩阵表示

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \overline{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma^{0} = \overline{\sigma}^{0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{1} = -\overline{\sigma}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{2} = -\overline{\sigma}^{2} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{3} = -\overline{\sigma}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

在这个表示中，一个四分量狄拉克旋量可以写成两个二分量，复的[†]，反对称量ξ_{α}和$(\chi^{\dagger})^{\dot{\alpha}} \equiv \chi^{\dagger\dot{\alpha}}$，它们带有做特殊区分的旋量指标$\alpha = 1, 2$ 及$\dot{\alpha} = 1, 2$：

$$\Psi_{D} = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha} \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

由此可得

$$\overline{\Psi}_{D} = \Psi_{D}^{\dagger}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{\alpha} & \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

不加点（加点）的从头开始希腊字母表示狄拉克旋量的前（后）两个分量。ξ场被称为“左手魏尔旋量”，$\chi^{\dagger}$被称为“右手魏尔旋量”。这样命名的原因是

$$P_{L}\Psi_{D} = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{R}\Psi_{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

左手旋量的厄米共轭是右手魏尔旋量，

$$\psi^{\dagger}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_{\alpha})^{\dagger} = (\psi^{\dagger})_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.11}$$

反之亦然

$$(\psi^{\dagger\dot{\alpha}})^{\dagger} = \psi^{\alpha}. \tag{2.12}$$

[†]出于某些原因，很多超对称的文献都用一个横杠($\overline{\psi}$)表示一个两分量旋量的共轭，而不是使用一个十字架($\psi^{\dagger}$)。这里，二分量旋量的共轭采用了十字架符号，以与几乎全部的量子场论教科书保持一致。

由此任何特定的费米型自由度可以用左手魏尔旋量（不带点指标），或者完全等价地用右手旋量（带点指标）来表示。在这种约定下，所有的左手魏尔旋量不带十字架标记，而所有的右手魏尔旋量则必须带十字架标记，如公式 (2.8)所示。

带点和不带点的旋量指标的上下是非常重要的。例如，对比公式 (2.5)-(2.9)，我们可以看到公式 (2.7)中定义的σ矩阵的指标上下约定为$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$和$(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}$。这此旋量指标由反对称张量$\epsilon$来上升或下降，其中

$$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = \epsilon_{21} = -\epsilon_{12} = 1, \qquad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0, \tag{2.13}$$

规则为：

$$\xi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta, \qquad \xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad \chi^\dagger_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\chi^{\dagger\dot{\beta}}, \qquad \chi^{\dagger\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\chi^\dagger_{\dot{\beta}}\,. \tag{2.14}$$

这是前后一致的，因为$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \epsilon^{\gamma\beta}\epsilon_{\beta\alpha} = \delta^\gamma_\alpha$，$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}$。

约定相同旋量指标以下方式

$$^{\alpha}{}_{\alpha} \qquad \text{或} \qquad {}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}} \tag{2.15}$$

求和。特别的

$$\xi\chi \equiv \xi^\alpha\chi_\alpha = \xi^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta = -\chi^\beta\epsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha = \chi^\beta\epsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha = \chi^\beta\xi_\beta \equiv \chi\xi \tag{2.16}$$

非常舒服地，后面消去了负号。（两个旋量交换出一个负号，利用ϵ求和约定之后负号就没有了。）$\xi^\dagger\chi^\dagger$ 和$\chi^\dagger\xi^\dagger$ 做相似的约定$\chi^\dagger_{\dot{\alpha}}\xi^{\dagger\dot{\alpha}} = \xi^\dagger_{\dot{\alpha}}\chi^{\dagger\dot{\alpha}}$。实际上这是$\xi\chi$的复共轭

$$(\xi\chi)^* = \chi^\dagger\xi^\dagger = \xi^\dagger\chi^\dagger. \tag{2.17}$$

用类似的方法，我们检验$\xi^\dagger_{\dot{\alpha}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha$有关系

$$(\chi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\xi)^* \;=\; \xi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\chi \;=\; -\chi\sigma^\mu\xi^\dagger \;=\; -(\xi\sigma^\mu\chi^\dagger)^*. \tag{2.18}$$

注意取旋量双线性项的复共轭时，应该交换旋量的顺序。这里旋量被假定是一个经典场论，量子场论的复共轭操作则修改为希尔伯特空间算符的厄米共轭操作。

其它的一些等式在后文是有用的

$$(\chi^\dagger\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\xi^\dagger)^* = \xi\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\chi \;=\; \chi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\xi \;=\; (\xi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\chi^\dagger)^*, \tag{2.19}$$

菲尔兹重排恒等式

$$\chi_\alpha\,(\xi\eta) \;\;=\;\; -\xi_\alpha\,(\eta\chi) - \eta_\alpha\,(\chi\xi), \tag{2.20}$$

约化恒等式

$$\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\,\overline{\sigma}_{\mu}^{\dot{\beta}\beta} \;=\; -2\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}, \tag{2.21}$$

$$\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\,\sigma_{\mu\beta\dot{\beta}} \;=\; -2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tag{2.22}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\,\overline{\sigma}_{\mu}^{\dot{\beta}\beta} \;=\; -2\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tag{2.23}$$

$$\left[\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}+\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\right]_{\alpha}^{\ \beta} \;=\; -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{2.24}$$

$$\left[\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}+\overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\right]^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} \;=\; -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}, \tag{2.25}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\rho} \;=\; -\eta^{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\rho}-\eta^{\nu\rho}\overline{\sigma}^{\mu}+\eta^{\mu\rho}\overline{\sigma}^{\nu}+i\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\overline{\sigma}_{\kappa}, \tag{2.26}$$

$$\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\rho} \;=\; -\eta^{\mu\nu}\sigma^{\rho}-\eta^{\nu\rho}\sigma^{\mu}+\eta^{\mu\rho}\sigma^{\nu}-i\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}\sigma_{\kappa}, \tag{2.27}$$

其中$\epsilon^{\mu\nu\rho\kappa}$是四阶全反对称张量且$\epsilon^{0123}=+1$。

有了以上的约定，公式 (2.5)的狄拉克拉氏量可以写为

$$\mathcal{L}_{\rm Dirac} \;=\; i\xi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi+i\chi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi-M(\xi\chi+\xi^{\dagger}\chi^{\dagger}) \tag{2.28}$$

其中我们扔掉了不影响作用量的全导数项$-i\partial_{\mu}(\chi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\chi)$。

四分量马约拉纳旋量可以在公式 (2.9)狄拉克旋量中要求$\chi=\xi$来得到，使得

$$\Psi_{\rm M}=\begin{pmatrix}\xi_{\alpha}\\ \xi^{\dagger\dot{\alpha}}\end{pmatrix}, \qquad\qquad \overline{\Psi}_{\rm M}=\begin{pmatrix}\xi^{\alpha} & \xi^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

因此质量为M的马约拉纳费米子的四分量旋量形式的拉氏量

$$\mathcal{L}_{\rm Majorana} \;=\; \frac{i}{2}\overline{\Psi}_{\rm M}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi_{\rm M}-\frac{1}{2}M\overline{\Psi}_{\rm M}\Psi_{\rm M} \tag{2.30}$$

可以写成以下更加经济的二分量魏尔旋量的形式

$$\mathcal{L}_{\rm Majorana} \;=\; i\xi^{\dagger}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi-\frac{1}{2}M(\xi\xi+\xi^{\dagger}\xi^{\dagger}). \tag{2.31}$$

注意虽然ξ_{α}是反对易的，但$\xi\xi$和它的复共轭$\xi^{\dagger}\xi^{\dagger}$并不为零，这是因为$\epsilon$的求和约定。查看公式 (2.16)，可知$\xi\xi=\epsilon^{\alpha\beta}\xi_{\beta}\xi_{\alpha}=\xi_2\xi_1-\xi_1\xi_2=2\xi_2\xi_1$。

最一般情况下，任何一个包含自旋1/2费米子理论总是可以写成由左手魏尔旋量ψ_i的运算集合

$$\mathcal{L} \;=\; i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_i+\ldots \tag{2.32}$$

其中省略号表示可能的质量项，规范相互作用项，与标量汤川相互作用项等。这里i要遍历所有可能的规范和味道指标，同时厄米共轭会使其上升或下降。规范相互作用来源于通常的规范协变导数

$$\mathcal{L} \;=\; i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^{\mu}\nabla_{\mu}\psi_i+\ldots \tag{2.33}$$

其中

$$\nabla_\mu \psi_i \;=\; \partial_\mu \psi_i - i g_a A^a_\mu T^{aj}_i \psi_j, \tag{2.34}$$

g_a就是厄米李代数生成元矩阵T^a和矢量场A^a_μ的耦合系数。

狄拉克旋量的右手部分和左手部分是不一样的。任何一个四分量旋量ψ_i

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \chi_i^\dagger \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

以指标i标记味道或者规范表示，组成的双线性项表达式都可以用以下的公式表示任何二分量魏尔旋量形式（反过来也可以）

$$\overline{\Psi}_i P_L \Psi_j = \chi_i \xi_j, \qquad \overline{\Psi}_i P_R \Psi_j = \xi_i^\dagger \chi_j^\dagger, \tag{2.36}$$

$$\overline{\Psi}_i \gamma^\mu P_L \Psi_j = \xi_i^\dagger \overline{\sigma}^\mu \xi_j, \qquad \overline{\Psi}_i \gamma^\mu P_R \Psi_j = \chi_i \sigma^\mu \chi_j^\dagger \quad . \tag{2.37}$$

现在我们就来看在以上约定下标准模型夸克和轻子是如何表述的。全部的魏尔旋量可以按照表1.1所列命名

$$Q_i \;=\; \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\overline{u}_i \;=\; \overline{u},\ \overline{c},\ \overline{t}, \tag{2.39}$$

$$\overline{d}_i \;=\; \overline{d},\ \overline{s},\ \overline{b} \tag{2.40}$$

$$L_i \;=\; \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

$$\overline{e}_i \;=\; \overline{e},\ \overline{\mu},\ \overline{\tau}. \tag{2.42}$$

这里$i = 1, 2, 3$是代指标，场上面的杠是场名字的一部分，并不是任何共轭运算。不带杠的场是狄拉克旋量左手部分，而带杠的场是狄拉克旋量右手部分的共轭。例如：e是表1.1中的e_L，而$\overline{e}$是$e_R^\dagger$，它们两个组成了一个狄拉克旋量

$$\begin{pmatrix} e \\ \overline{e}^\dagger \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

其它的夸克和轻子都以相同的方式组成狄拉克旋量。（忽略中微子质量至少是一个非常好的近似，这种情况下标准模型中微子并不是狄拉克粒子的一部分。）Q_i 和L_i是弱同位旋二重态，通常两个分量放在一起来构造标准模型$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$规范群变换不变的模型。忽略掉所有的颜色和弱同位旋指标，标准模型费米子拉氏量的动能和规范部分为

$$\mathcal{L} \;=\; i Q^{\dagger i} \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu Q_i + i \overline{u}_i^\dagger \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \overline{u}^i + i \overline{d}_i^\dagger \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \overline{d}^i + i L^{\dagger i} \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu L_i + i \overline{e}_i^\dagger \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \overline{e}^i \tag{2.44}$$

其中i是代指标，∇_μ是相应的标准模型规范协变导数。比如

$$\nabla_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = \left[\partial_\mu - igW_\mu^a(\tau^a/2) - ig'Y_L B_\mu\right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

$$\nabla_\mu \overline{e} = \left[\partial_\mu - ig'Y_{\overline{e}} B_\mu\right] \overline{e} \tag{2.46}$$

其中τ^a $(a = 1, 2, 3)$等于泡利矩阵，$Y_L = -1/2$ ，$Y_{\overline{e}} = +1$。弱作用玻色子的规范本征态和质量本征态之间的关系为

$$W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}, \tag{2.47}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

所有其它的夸克和轻子$Y_Q = 1/6$, $Y_{\overline{u}} = -2/3$, $Y_{\overline{d}} = 1/3$ 有着类似的表达式。夸克还有与胶子相互作用的规范协变导数，耦合系数正比于g_3（强相互作用耦合常数$\alpha_S = g_3^2/4\pi$）。Q对应生成元为$T^a = \lambda^a/2$，$\overline{u}$, $\overline{d}$为复共轭表示，生成元为$T^a = -(\lambda^a)^*/2$，其中λ^a为盖尔曼矩阵。

二维费米子约定的更多细节讨论，包括标准模型和超对称理论的散射截面和衰变宽度计算等例子，可以参阅文献 [49]，或者简化版的总结文献[50]。

3 超对称拉氏量

这一节我们来介绍构造超对称拉氏量的方法，目标就是找到写下一般超对称理论允许的所有相互作用和质量项的秘诀，以便后文最小超模型中可以应用到它。本节不使用，出于某种目的更为漂亮和便利的，超场[51]语言，而是使用乍看起来似乎是神秘的特殊机制，相应的超场理论版本在第4节给出。我们首先从考虑一个四维时空的最简单超对称理论开始。

3.1 最简单超对称模型：自由手征超场

四维时空场论中最小的费米场是单个左手两分量魏尔费米子ψ。因为ψ是内禀复量，合理地应该选取一个复标量场ϕ做为其超伙伴。那最简单的作用量就是写下它们各自动能项

$$S = \int d^4x \, \left(\mathcal{L}_{\text{标量}} + \mathcal{L}_{\text{费米}}\right), \tag{3.1.1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{标量}} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi, \qquad \mathcal{L}_{\text{费米}} = i\psi^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \tag{3.1.2}$$

该模型被称为零质量无相互作用维斯祖米诺模型[14]，这就是在引言中所讲的手征超多重态。

超对称变换应该把标量场ϕ变换为与费米场ψ_α相关的量。最简单的可能性就是

$$\delta\phi = \epsilon\psi, \qquad \delta\phi^* = \epsilon^\dagger \psi^\dagger, \tag{3.1.3}$$

其中ϵ^α是一个无穷小反对称二维魏尔旋量，用来参数化超对称变换。在第7.5小节前，我们就把超对称看作一个全局对称性，这意味着ϵ^α是一个常数，同时$\partial_\mu\epsilon^\alpha = 0$。因为$\phi$为质量3/2次方量纲，而$\phi$是质量量纲，$\epsilon$的量纲应该为质量的$-1/2$次方。由公式 (3.1.3)可知，拉氏量标量部分的变换为

$$\delta\mathcal{L}_{\text{标量}} \;=\; -\epsilon\partial^\mu\psi\;\partial_\mu\phi^* - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\;\partial_\mu\phi. \tag{3.1.4}$$

上式需要费米部分变换$\delta\mathcal{L}_{\text{费米}}$抵消，至少也应该抵消为时空全导数，这样作用量才是超对称变换不变的。公式 (3.1.4)与拉氏量费米部分$\mathcal{L}_{\text{费米}}$对比可见，如果可以抵消，$\delta\psi$应该与ϕ 和$\epsilon^\dagger$成线性关系，同时还需要有时空导数。在ϵ常数乘积阶，只有一种可能性：

$$\delta\psi_\alpha \;=\; -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\,\partial_\mu\phi, \qquad\qquad \delta\psi^\dagger_{\dot\alpha} \;=\; i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\,\partial_\mu\phi^*. \tag{3.1.5}$$

在这种猜测下，我们马上可以得到

$$\delta\mathcal{L}_{\text{费米}} = -\epsilon\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\partial_\nu\psi\;\partial_\mu\phi^* + \psi^\dagger\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\epsilon^\dagger\;\partial_\mu\partial_\nu\phi\,. \tag{3.1.6}$$

利用公式 (2.24), (2.25)的泡利矩阵关系和时空偏导数的对易关系($\partial_\mu\partial_\nu \;=\; \partial_\nu\partial_\mu$)可以简化上式。公式(3.1.6) 变为

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\text{费米}} \;\;=\;\; & \epsilon\partial^\mu\psi\;\partial_\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\;\partial_\mu\phi \\ & -\partial_\mu\left(\epsilon\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi\;\partial_\nu\phi^* + \epsilon\psi\;\partial^\mu\phi^* + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\;\partial^\mu\phi\right).\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

其中前两项刚好和标量部分变换$\delta\mathcal{L}_{\text{标量}}$抵消，剩下部分就是个时空全导数。因此我们得到了

$$\delta S = \int d^4x\;\;(\delta\mathcal{L}_{\text{标量}} + \delta\mathcal{L}_{\text{费米}}) = 0, \tag{3.1.8}$$

刚好证实了公式 (3.1.5)的猜测。

由此可见，作用量 (3.1.1)描述的理论的确具有超对称性。我们还得证明超对称代数是封闭的。换句话说，两次超对称变换（由不同的旋量ϵ_1，ϵ_2来参数化）的对易关系是另外一种对称性。把公式 (3.1.5)代入公式 (3.1.3)可得

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2})\phi \;\equiv\; \delta_{\epsilon_2}(\delta_{\epsilon_1}\phi) - \delta_{\epsilon_1}(\delta_{\epsilon_2}\phi) \;=\; i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\;\partial_\mu\phi. \tag{3.1.9}$$

这是一个重要的结果；简单说，就是两次超对称变换的对易关系回到了对场的求导运算。量子力学的海森堡绘景中，$-i\partial_\mu$就是时空平移变换P_μ的生成元，所以公式 (3.1.9)就证实了引言中公式 (1.6)所描述的超对称代数关系。（我们将在本节的最后给出更为清晰的表述，在第4节用另外的办法再次证明这一点。）

如果对费米子ψ来说没有上述关系则理论就没有意义了。公式 (3.1.3)代入公式 (3.1.5)可以得到

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2})\psi_\alpha \;=\; -i(\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)_\alpha\,\epsilon_2\partial_\mu\psi + i(\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger)_\alpha\,\epsilon_1\partial_\mu\psi. \tag{3.1.10}$$

上式可以应用菲尔兹恒等式 (2.20)变换为更为有用的形式，利用$\chi = \sigma^\mu\epsilon_1^\dagger$, $\xi = \epsilon_2$, $\eta = \partial_\mu\psi$，再利用$\chi = \sigma^\mu\epsilon_2^\dagger$, $\xi = \epsilon_1$, $\eta = \partial_\mu\psi$ ，然后每种情况都应用公式 (2.18)可得

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2})\psi_\alpha \;\;=\;\; i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\,\partial_\mu\psi_\alpha + i\epsilon_{1\alpha}\,\epsilon_2^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - i\epsilon_{2\alpha}\,\epsilon_1^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi. \tag{3.1.11}$$

上式最后两项在费米子在壳(3.1.11)即满足运动方程$\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0$时就消失了。剩下和标量场一模一样的时空平移运算。

超对称代数只是在粒子在壳（满足经典场运动方程）时才封闭是令人不安的，这是因为我们希望对称性在场量子化之后也成立。这个问题可用以下技巧来解决：引入一个新的没有动能项的复标量场F。F被称为辅助场，它们只是用来保证对称代数不在壳时也可以成立。F和它的复共轭的拉氏量密度很简单

$$\mathcal{L}_{\text{辅助}} = F^*F\,. \tag{3.1.12}$$

与普通标量场是质量量纲不同，F是质量平方量纲。公式(3.1.12)意味着存在一个并不有趣的运动方程$F = F^* = 0$。然而，我们可以把它们引入超对称变换规则中。根据公式 (3.1.11)可知，一个可以接受的规则是令F变换到ψ运动方程的乘积

$$\delta F = -i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi, \qquad\qquad \delta F^* = i\partial_\mu\psi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\epsilon. \tag{3.1.13}$$

方程右边我们再一次预先取了一个共同因子。现在拉氏量密度辅助场部分的变换为

$$\delta\mathcal{L}_{\text{辅助}} = -i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\;F^* + i\partial_\mu\psi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\epsilon\;F, \tag{3.1.14}$$

上式在场在壳时消失，不在壳时可以任意。现在，ψ和$\psi^\dagger$的变换中加入辅助场项

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\,\partial_\mu\phi + \epsilon_\alpha F, \qquad \delta\psi_{\dot\alpha}^\dagger = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\,\partial_\mu\phi^* + \epsilon_{\dot\alpha}^\dagger F^*, \tag{3.1.15}$$

就可以得到费米部分多出$\delta\mathcal{L}_{\text{费米}}$的贡献，该贡献正好抵消辅助场变换项$\delta\mathcal{L}_{\text{辅助}}$ ，剩下时空全导数项。所以修正之后的理论$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{标量}} + \mathcal{L}_{\text{费米}} + \mathcal{L}_{\text{辅助}}$ 仍然是超对称变换不变的。和前面一样，根据公式 (3.1.3), (3.1.13) 和(3.1.15)，不需要利用场的运动方程，我们就可以得到每个场$X = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$的两次超对称变换

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2})X \;\;=\;\; i(-\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger + \epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\,\partial_\mu X \tag{3.1.16}$$

这样就证明了在拉氏量不在壳时也可以有超对称性。

	ϕ	ψ	F
在壳($n_B = n_F = 2$)	2	2	0
不在壳($n_B = n_F = 4$)	2	4	2

表 3.1: 维斯祖米诺模型自由度计数.

回顾一下，人们就知道引入辅助场F来保证超对称代数不在壳时可以工作的原因了。在壳时，一个复标量场有两个实传播自由度，刚好契合ψ场的两个自旋极化态。不在壳时，魏尔旋量就是一个二分量复量，有四个实自由度。（在壳条件去掉一半的传播自由度，这是因为拉氏量的时间导数项是线性的，正则动量可以通过场量的重组而不用时间导数，同时它又与相空间坐标无关。）要保证玻色型自由度和费米型自由度数目相等，我们就必须再引入有两个实自由度的复场F，同时在壳时又必须消失。表3.1中列出了自由度计数。在第7节我们将看到讨论超对称自发破缺时辅助场尤为重要。

存在连续对称性的作用量总会存在守恒流，超对称也不例外。*超对称流*J^μ_α 是一个反对易的四矢量。因为它是一个具有反对易费米型生成元[52]对称性对应的流，J^μ_α也有旋量指标。根据通常的诺特尔定理，我们可以得到自由场$X = \phi, \phi^*, \psi, \psi^\dagger, F, F^*$的变分表述的超对称流（及其厄米共轭）。

$$\epsilon J^\mu + \epsilon^\dagger J^{\dagger\mu} \;\equiv\; \sum_X \delta X \, \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu X)} - K^\mu, \tag{3.1.17}$$

其中K^μ的发散项是拉氏量密度超对称变换$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$的变分。注意$K^\mu$不是唯一的；它总是被替换为$K^\mu + k^\mu$，其中$k^\mu$是一个满足$\partial_\mu k^\mu = 0$ 的四矢量。例如，任意四矢量a^μ可以组成$k^\mu = \partial^\mu \partial_\nu a^\nu - \partial_\nu \partial^\nu a^\mu$。到现在为止，在以上定义任意性基础上计算可得

$$J^\mu_\alpha = (\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \psi)_\alpha \, \partial_\nu \phi^*, \qquad\qquad J^{\dagger\mu}_{\dot\alpha} = (\psi^\dagger \overline{\sigma}^\mu \sigma^\nu)_{\dot\alpha} \, \partial_\nu \phi. \tag{3.1.18}$$

利用运动方程，可以证明超流及其厄米共轭是流守恒的

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = 0, \qquad\qquad \partial_\mu J^{\dagger\mu}_{\dot\alpha} = 0. \tag{3.1.19}$$

由此我们就可以构造守恒荷

$$Q_\alpha = \sqrt{2} \int d^3\vec{x} \, J^0_\alpha, \qquad\qquad Q^\dagger_{\dot\alpha} = \sqrt{2} \int d^3\vec{x} \, J^{\dagger 0}_{\dot\alpha}, \tag{3.1.20}$$

这就是超对称变换的生成元。（前面的$\sqrt{2}$归化因子是一个历史约定。）作为量子力学算符，它们对任意场X，包含那些在壳时抵消的场，满足关系

$$\left[\epsilon Q + \epsilon^\dagger Q^\dagger, X\right] = -i\sqrt{2}\, \delta X. \tag{3.1.21}$$

这个关系可以由正则对易和反对易关系

$$[\phi(\vec{x}),\pi(\vec{y})] \;=\; [\phi^*(\vec{x}),\pi^*(\vec{y})] \;=\; i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.1.22}$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}),\psi^\dagger_{\dot\alpha}(\vec{y})\} \;=\; (\sigma^0)_{\alpha\dot\alpha}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{3.1.23}$$

来明确证明。其中的正则动量$\pi=\partial_0\phi^*$, $\pi^*=\partial_0\phi$ 是ϕ和ϕ^*的共轭动量，它们的定义源于自由场拉氏量 (3.1.1)。

利用公式 (3.1.21),公式 (3.1.16)可以用正则对易关系

$$\Big[\epsilon_2 Q+\epsilon_2^\dagger Q^\dagger,\,[\epsilon_1 Q+\epsilon_1^\dagger Q^\dagger,\,X]\Big]-\Big[\epsilon_1 Q+\epsilon_1^\dagger Q^\dagger,\,[\epsilon_2 Q+\epsilon_2^\dagger Q^\dagger,\,X]\Big]= 2(\epsilon_1\sigma^\mu\epsilon_2^\dagger-\epsilon_2\sigma^\mu\epsilon_1^\dagger)\,i\partial_\mu X, \tag{3.1.24}$$

来表述。时空动量算符$P^\mu=(H,\vec{P})$，H是哈密顿量，$\vec{P}$是三维空间动量，它们由正则场来表述为

$$H \;=\; \int d^3\vec{x}\left[\pi^*\pi+(\vec{\nabla}\phi^*)\cdot(\vec{\nabla}\phi)+i\psi^\dagger\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi\right], \tag{3.1.25}$$

$$\vec{P} \;=\; -\int d^3\vec{x}\left(\pi\vec{\nabla}\phi+\pi^*\vec{\nabla}\phi^*+i\psi^\dagger\overline{\sigma}^0\vec{\nabla}\psi\right). \tag{3.1.26}$$

P^μ生成的对X场的时空平移变换为

$$[P^\mu,X]=i\partial^\mu X. \tag{3.1.27}$$

利用雅可比恒等式对公式 (3.1.24)各项重新排列可以得到对任意X场有关系

$$\Big[[\epsilon_2 Q+\epsilon_2^\dagger Q^\dagger,\,\epsilon_1 Q+\epsilon_1^\dagger Q^\dagger],\,X\Big] \;=\; 2(\epsilon_1\sigma_\mu\epsilon_2^\dagger-\epsilon_2\sigma_\mu\epsilon_1^\dagger)\,[P^\mu,X], \tag{3.1.28}$$

由此必然得到

$$[\epsilon_2 Q+\epsilon_2^\dagger Q^\dagger,\,\epsilon_1 Q+\epsilon_1^\dagger Q^\dagger] \;=\; 2(\epsilon_1\sigma_\mu\epsilon_2^\dagger-\epsilon_2\sigma_\mu\epsilon_1^\dagger)\,P^\mu. \tag{3.1.29}$$

展开上式，我们就可以得到引言中给出的超对称代数的准确形式

$$\{Q_\alpha,Q^\dagger_{\dot\alpha}\}=-2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu, \tag{3.1.30}$$

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=0, \qquad\qquad \{Q^\dagger_{\dot\alpha},Q^\dagger_{\dot\beta}\}=0. \tag{3.1.31}$$

（当把公式 (3.1.29)的反对易旋量ϵ_1 ，ϵ_2去掉后，对易关系就变成了公式 (3.1.30)和(3.1.31)的反对易关系。）由于超对称性是全局变换（与时空坐标无关），根据公式 (3.1.27)可以直接得到

$$[Q_\alpha,P^\mu]=0, \qquad\qquad [Q^\dagger_{\dot\alpha},P^\mu]=0. \tag{3.1.32}$$

由生成元Q ，$Q^\dagger$表述的超对称代数关系的证明需要用到哈密顿运动方程。但是本节已经在拉氏量层次证明不在壳时超对称可以保持。

3.2 手征超多重态相互作用

类似于最小超模型的真实理论中存在很多手征超多重态，它们都有规范和非规范相互作用。这一小节的任务就是构造手征超多重态中每个粒子的最一般的质量和非规范相互作用。在最小超模型中这些粒子就是夸克，标夸克，轻子，标轻子，希格斯玻色子和希格斯超子。我们将发现这些非规范相互作用，包括质量项，都受到作用量超对称变换不变要求的严格限制。（下一小节再处理规范相互作用。）

我们的起点是一个有许多自由手征超对称组成的拉氏量，每个态用指标i来标记，代表所有的规范和味道自由度。因为我们希望相互作用理论能够在各个场不在壳时也保持超对称，所以每个超多重态含有一个复标量场ϕ_i；一个左手手征魏尔旋量ψ_i；作为物理的自由度，同时又含有一个不传播的复的辅助场F_i。由前一小节可知拉氏量的自由部分可以写为

$$\mathcal{L}_{\text{自由}} \;=\; -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \tag{3.2.1}$$

其中相同的i指标求和（注意不要和旋量指标求和相混淆），约定为ϕ_i，ψ_i 场指标在下，它们的共轭指标在上。在超对称变换

$$\delta\phi_i = \epsilon\psi_i, \qquad \delta\phi^{*i} = \epsilon^\dagger \psi^{\dagger i}, \tag{3.2.2}$$

$$\delta(\psi_i)_\alpha = -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\, \partial_\mu\phi_i + \epsilon_\alpha F_i, \qquad \delta(\psi^{\dagger i})_{\dot\alpha} = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\, \partial_\mu\phi^{*i} + \epsilon^\dagger_{\dot\alpha} F^{*i}, \tag{3.2.3}$$

$$\delta F_i = -i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i, \qquad \delta F^{*i} = i\partial_\mu\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\epsilon\,. \tag{3.2.4}$$

下拉氏量形式不变。

我们现在就来寻找这些场满足超对称的最一般可重整相互作用形式。我们仍然留着辅助场。根据可重整项的量纲幂次计数，每一项的全部场的质量量纲应该小于≤ 4。因此，唯一的可能就是

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2}W^{ij}\psi_i\psi_j + W^i F_i + x^{ij} F_i F_j\right) + \text{c.c.} - U, \tag{3.2.5}$$

其中W^{ij}, W^i, x^{ij}, 和U是标量场ϕ_i, ϕ^{*i}的多项式，量纲分别为质量的1, 2, 0, 和4次方。（含有$F^{*i}F_j$的项已经包含在公式 (3.2.1)中了，相应的系数也由变换规则(3.2.2)-(3.2.4)来决定。）

因为自由部分$\mathcal{L}_{\text{自由}}$已经超对称变换不变，所以我们现在只要求$\mathcal{L}_{\text{int}}$变换不变。这样$U(\phi_i, \phi^{*i})$项就不存在了，因为如果有这样一项，根据变换规则公式 (3.2.2)，$U(\phi_i, \phi^{*i})$将变换到一个标量场和$\epsilon\psi_i$或$\epsilon^\dagger\psi^{\dagger i}$的乘积，没有时空导数项或$F_i$, F^{*i}项。而根据公式 (3.2.2)-(3.2.5)可知拉氏量中没有其它项的超对称变换可以抵消这个结果。相似地，无量纲耦合系数x^{ij}也因为相应项的超对称变换无项可以抵消而必须为零。这样，剩下了唯一的可能

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(-\frac{1}{2}W^{ij}\psi_i\psi_j + W^i F_i\right) + \text{c.c.} \tag{3.2.6}$$

此时，我们没有要求W^{ij}和W^i之间有什么关系。但是很快就会发现它们必须有联系，所以我才选取了相同的字母来表示。注意由公式 (2.16)可知，W^{ij}的$i \leftrightarrow j$是指对称的。

很容易把相互作用项的超对称变分$\mathcal{L}_{\rm int}$分为几个可以各自独立抵消的几个部分。首先我们来看四分量旋量部分

$$\delta\mathcal{L}_{\rm int}|_{\text{四分量旋量}} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi_k}(\epsilon\psi_k)(\psi_i\psi_j) - \frac{1}{2}\frac{\delta W^{ij}}{\delta\phi^{*k}}(\epsilon^\dagger\psi^{\dagger k})(\psi_i\psi_j)\right] + \text{c.c.} \tag{3.2.7}$$

正比于$(\epsilon\psi_k)(\psi_i\psi_j)$的项不能被别的项抵消。但幸运的是，利用菲尔兹变换恒等式公式 (2.20)

$$(\epsilon\psi_i)(\psi_j\psi_k) + (\epsilon\psi_j)(\psi_k\psi_i) + (\epsilon\psi_k)(\psi_i\psi_j) = 0, \tag{3.2.8}$$

因此有且只有$\delta W^{ij}/\delta\phi_k$关于$i,j,k$指标全对称时$\delta\mathcal{L}_{\rm int}$的贡献完全消失。正比于$(\epsilon^\dagger\psi^{\dagger k})(\psi_i\psi_j)$ 的项却没有可以用的恒等式，也就不能够保证贡献抵消，因此W^{ij}不能含有ϕ^{*k}项。换句话说，W^{ij}关于复标量场ϕ_k是全纯的（复解析的）。

综上所述，我们可以写出

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk}\phi_k \tag{3.2.9}$$

其中M^{ij} 是一个费米场的对称矩阵，y^{ijk}是一个标量和两个费米子$\psi_i\psi_j$ 的汤川耦合。而且i,j,k指标交换对称。因此可以方便地把W^{ij}写为

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta\phi_i\delta\phi_j}W \tag{3.2.10}$$

此处我们引入一个有用的量

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k, \tag{3.2.11}$$

被称为*超势*。它不是通常所说的标量势。事实上，W也不一定是实的。W只是把标量ϕ_i看作一个复变量的全纯函数。

继续我们的探索，下面我们考虑$\delta\mathcal{L}_{\rm int}$的时空导数项

$$\delta\mathcal{L}_{\rm int}|_{\partial} \;=\; \left(iW^{ij}\partial_\mu\phi_j\,\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger + iW^i\,\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger\right) + \text{c.c.} \tag{3.2.12}$$

第二项源于$(\delta F_i)W^i$，这里我们对其使用了恒等式 (2.18) 。利用公式 (3.2.10)我们可以看到

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right). \tag{3.2.13}$$

因此如果

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i} = M^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k\,, \tag{3.2.14}$$

那公式 (3.2.12)就是一个时空全导数。这也解释了取相同符号的原因。$\delta\mathcal{L}_{\rm int}$剩余项是关于$F_i$和$F^{*i}$的线性项，利用已经得到的$W^i$和$W^{ij}$很容易证明那些项是抵消的。

事实上，超势中还可以引入一个线性项，也不影响前面的讨论

$$W = L^i\phi_i + \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k. \tag{3.2.15}$$

这里L^i具有质量平方的量纲，只会影响拉氏量的标量势。线性项只能是一个规范变换单态，最小超模型中没有单态，所以本节后面内容将忽略掉这一项。但是在第7.1 小节中我们将会看到这种类型的项在超对称自发破缺中扮演非常重要的角色。

综上，我们发现一个非规范相互作用的手征超多重态由一个复标量场的全纯函数，超势W决定。辅助场F_iF^{*i}由它们的经典场运动方程去掉。$\mathcal{L}_{\text{自由}} + \mathcal{L}_{\rm int}$ 中含有辅助场的项为$F_iF^{*i} + W^iF_i + W_i^*F^{*i}$，运动方程为

$$F_i = -W_i^*, \qquad\qquad F^{*i} = -W^i\,. \tag{3.2.16}$$

由此辅助场可以由标量场的代数运算（没有导数项）来表示。替换$\mathcal{L}_{\text{自由}} + \mathcal{L}_{\rm int}$中辅助场之后，我们可以得到拉氏量

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i + i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}\left(W^{ij}\psi_i\psi_j + W^*_{ij}\psi^{\dagger i}\psi^{\dagger j}\right) - W^iW_i^*. \tag{3.2.17}$$

既然不传播的F_i ，F^{*i}已经去掉[†]，公式 (3.2.16)可以得到由超势所决定的标量势

$$\begin{aligned} &V(\phi,\phi^*) = W^kW_k^* = F^{*k}F_k = \\ &M^*_{ik}M^{kj}\phi^{*i}\phi_j + \frac{1}{2}M^{in}y^*_{jkn}\phi_i\phi^{*j}\phi^{*k} + \frac{1}{2}M^*_{in}y^{jkn}\phi^{*i}\phi_j\phi_k + \frac{1}{4}y^{ijn}y^*_{kln}\phi_i\phi_j\phi^{*k}\phi^{*l}\,. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

由于这是对一个绝对值平方的求和，所以标量势已经自动有底。再在公式 (3.2.17)代入一般的超势形式 (3.2.11)，我们就可以得到全部的拉氏量密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i - V(\phi,\phi^*) + i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}M^{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2}M^*_{ij}\psi^{\dagger i}\psi^{\dagger j} \\ & -\frac{1}{2}y^{ijk}\phi_i\psi_j\psi_k - \frac{1}{2}y^*_{ijk}\phi^{*i}\psi^{\dagger j}\psi^{\dagger k}. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

现在我们通过运动方程来看费米子和标量粒子的质量

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi_i \;=\; M^*_{ik}M^{kj}\phi_j + \ldots, \tag{3.2.20}$$

$$i\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i \;=\; M^*_{ij}\psi^{\dagger j} + \ldots, \qquad\qquad i\sigma^\mu\partial_\mu\psi^{\dagger i} \;=\; M^{ij}\psi_j + \ldots. \tag{3.2.21}$$

公式 (3.2.21)中ψ可以由$\psi^\dagger$代替，反之亦然。利用恒等式 (2.24)，(2.25)可得

$$\partial^\mu\partial_\mu\psi_i = M^*_{ik}M^{kj}\psi_j + \ldots, \qquad\qquad \partial^\mu\partial_\mu\psi^{\dagger j} = \psi^{\dagger i}M^*_{ik}M^{kj} + \ldots\,. \tag{3.2.22}$$

[†]因为作用量中F_i ，F^{*i}只有平方项，所以路径积分量子化的结果是一样的

	A_μ	λ	D
在壳($n_B = n_F = 2$)	2	2	0
不在壳($n_B = n_F = 4$)	3	4	1

表 3.2: 每个规范超多重态的实自由度计数。

因此费米子和标量粒子满足同样的波动方程。有着完全一样的质量平方矩阵，$(M^2)_i{}^j = M^*_{ik}M^{kj}$，且本征值非负。当然随后可以把质量矩阵对角化，然后由对角化幺正矩阵重新定义场而得到一系列含有质量简并的复标量和魏尔旋量的手征超场。这样就和引言中一般讨论相一致了。

3.3 规范超多重态拉氏量

规范超多重态中的传播自由度是零质量规范玻色场A^a_μ和二分量魏尔费米子规范超子λ^a。指标a代表规范群的伴随表示指标（胶子和胶超子的$SU(3)_C$颜色中$a = 1, \ldots, 8$，$SU(2)_L$ 弱同位旋中$a = 1, 2, 3$，$U(1)_Y$超荷中$a = 1$）矢量超多重态中场的超对称变换为

$$A^a_\mu \rightarrow A^a_\mu + \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \Lambda^c, \tag{3.3.1}$$

$$\lambda^a \rightarrow \lambda^a + g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c, \tag{3.3.2}$$

其中Λ^a是无穷小规范变换参数，g是规范耦合系数，f^{abc}是规范群的全反对称结构常数。阿贝尔群中$f^{abc} = 0$，相应的规范超子是一个规范单态。量子电动力学的约定如下：$A^\mu = (V, \vec{A})$，其中V和$\vec{A}$是通常的电势和矢势，因此电势和磁场分别为$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_0 \vec{A}$ 和$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$。

在壳的A^a_μ和λ^a_α含有两个玻色型和两个费米型螺旋度自由度，这正是超对称性所要求的。但是，不在壳时，λ^a_α有两个复的，或者四个实的费米型自由度，而A^a_μ只含有三个实的玻色型自由度，有一个自由度是被定域规范变换 (3.3.1)去掉了。所以为了保证不在壳时超对称性，我们需要引入一个实的玻色型辅助场，通常被称为D^a。D^a也是按照规范群的伴随表示变换（公式 (3.3.2)中λ^a 替换为D^a），同时$(D^a)^* = D^a$。和手征辅助场F_i一样，规范辅助场为质量平方量纲，也没有动能项，所以在壳时它也可以由运动方程去消去。表3.2中列出了自由度计数表。

因此规范超多重态的拉氏量密度应该是

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + i\lambda^{\dagger a} \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \tag{3.3.3}$$

其中

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{3.3.4}$$

是通常的杨-米尔斯场强，

$$\nabla_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + g f^{abc} A^b_\mu \lambda^c \tag{3.3.5}$$

是规范超子场的规范协变导数。拉氏量 (3.3.3)是否具有超对称性必须要明确各个场的超对称变换。相应的变换形式应满足三个要求：它们应该与量纲$-1/2$次方无穷小参数$\epsilon, \epsilon^\dagger$满足线性关系；$\delta A^a_\mu$是实的；和手征超多重态中辅助场$F$相似，$\delta D^a$应该为实的且与规范超子运动方程成正比关系。因此我们可以猜测在乘积因子层次上[†]

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^\dagger \overline{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{\dagger a} \overline{\sigma}_\mu \epsilon \right), \tag{3.3.6}$$

$$\delta \lambda^a_\alpha = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \overline{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha \, F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha \, D^a, \tag{3.3.7}$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(-\epsilon^\dagger \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \nabla_\mu \lambda^{\dagger a} \overline{\sigma}^\mu \epsilon \right). \tag{3.3.8}$$

选择$\sqrt{2}$因子是因为保证作用量$\mathcal{L}_{\text{gauge}}$变换不变，而选择的$\lambda^a$相位是为了后文最小超模型。

经过略显复杂的但是直接的运算，可以检验

$$(\delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2}) X = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \nabla_\mu X \tag{3.3.9}$$

其中X是任何一个规范协变场$F^a_{\mu\nu}$, λ^a, $\lambda^{\dagger a}$, D^a。此即两次超对称变换相当于时空导数作用。这就意味着规范超多重态中场的规范不变的组合，像手征超多重态一样（对比公式 (3.1.16)）实现了超对称代数 (3.1.30) -(3.1.31)。检验过程中需要用到恒等式 (2.19), (2.21) 和(2.26)。如果不引入辅助场D^a，超对称代数只能在利用λ^a 和$\lambda^{\dagger a}$运动方程 (3.3.9)之后才能成立。辅助场满足一个平庸的运动方程$D^a = 0$。但是如果把规范超多重态和手征超多重态耦合。运动方程就会改变，我们马上就要来做这一步。

3.4 超对称规范相互作用

现在我们已经为构造含有手征超多重态和规范超多重态的超对称理论做好了准备。假设手征超多重态按照规范群厄米矩阵$(T^a)_i{}^j$表示做规范变换，$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ 。（例如，如果规范群是$SU(2)$群，$f^{abc} = \epsilon^{abc}$，手征超多重态作为$SU(2)$基础表示做变换，T^a是泡利矩阵乘以$1/2$。）因为超对称和规范变换对易，标量，费米子和辅助场一定属于规范群的同一个表示，因此

$$X_i \;\; \rightarrow \;\; X_i + i g \Lambda^a (T^a X)_i \tag{3.4.1}$$

[†]公式 (3.3.6)-(3.3.8)的超对称变换在非阿贝尔规范理论中是非线性的，这是因为作用在规范超子场和规范场强$F^a_{\mu\nu}$上的规范协变导数上有规范场。加上更多的辅助场可以使超对称变换与场成线性关系。利用超语言更容易做到这一点（参看第4.5, 4.8, 和4.9小节）。本节中多出的辅助场都去掉了，这种形式被称为“维斯-祖米诺规范”[53]。

其中$X_i = \phi_i, \psi_i, F_i$。要得到规范变换不变拉氏量，我们需要把通常的时空导数换为规范协变导数

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i - igA^a_\mu (T^a \phi)_i & (3.4.2) \\ \nabla_\mu \phi^{*i} &= \partial_\mu \phi^{*i} + igA^a_\mu (\phi^* T^a)^i & (3.4.3) \\ \nabla_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - igA^a_\mu (T^a \psi)_i. & (3.4.4) \end{aligned}$$

达此目标的最简单方法就是把规范超多重态的矢量和手征超多重态的标量及费米子耦合即可。但是我们必须还是考虑规范对称性是否还允许和规范超子和D^a场相关的相互作用，这些作用可能是超对称性所要求的。既然A^a_μ与ϕ_i和ψ_i耦合，λ^a和D^a与它们耦合也是可能的。

事实上有三种可能相互作用是可重整的（场的量纲小于等于质量的四次方），分别为

$$(\phi^* T^a \psi)\lambda^a, \qquad \lambda^{\dagger a}(\psi^\dagger T^a \phi), \qquad \text{和} \qquad (\phi^* T^a \phi) D^a. \tag{3.4.5}$$

现在手征和规范超多重态拉氏量中加入这些项，同时也引入相应无量纲耦合系数。我们期望这样的瞎折腾可以成功，超对称变换不变或者变出一个时空全导数项。此时只有把物质场的超对称变换中相应的时空导数换成规范协变导数才可能做到这一点。根据规范理论可知这一点也不奇怪。δF_i中必须包括一个战略性选择的项，因此

$$\begin{aligned} \delta \phi_i &= \epsilon \psi_i & (3.4.6) \\ \delta \psi_{i\alpha} &= -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \, \nabla_\mu \phi_i + \epsilon_\alpha F_i & (3.4.7) \\ \delta F_i &= -i\epsilon^\dagger \overline{\sigma}^\mu \nabla_\mu \psi_i \; + \; \sqrt{2} g (T^a \phi)_i \, \epsilon^\dagger \lambda^{\dagger a}. & (3.4.8) \end{aligned}$$

经过一些代数运算我们就可以确定公式 (3.4.5)中各项前面所带系数，最终得到一个可重整的超对称理论的全部拉氏量密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{chiral}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \\ &\quad -\sqrt{2} g (\phi^* T^a \psi)\lambda^a - \sqrt{2} g \lambda^{\dagger a}(\psi^\dagger T^a \phi) + g(\phi^* T^a \phi) D^a. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

这里的$\mathcal{L}_{\text{chiral}}$和第3.2小节中手征超多重态拉氏量（查看公式 (3.2.17)或(3.2.19)）定义一样，只是相应的时空导数全部换为规范协变导数；$\mathcal{L}_{\text{gauge}}$就是公式 (3.3.3)。证明拉氏量 (3.4.9)超对称变换不变必须用到恒等式

$$W^i (T^a \phi)_i = 0. \tag{3.4.10}$$

这是一个保证超势，乃至$\mathcal{L}_{\text{chiral}}$，规范变换不变的必要条件。

拉氏量 (3.4.9)第二行相互作用的强度都是规范耦合系数，这是超对称所要求的，前两项是规范超子和物质场的直接耦合，可以认为它们是由规范玻色子和物质场耦合的“超对称化”得到的，最后一项和$\mathcal{L}_{\text{gauge}}$中的$D^a D^a/2$项给出了一个运动方程

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi). \tag{3.4.11}$$

因此，和辅助场F_i和F^{*i}一样，D^a也可以单纯由标量场代数运算代替。替代之后，我们就得到全部的标量势（记得$\mathcal{L}$中势为$-V$）

$$V(\phi,\phi^*)=F^{*i}F_i+\frac{1}{2}\sum_a D^aD^a=W_i^*W^i+\frac{1}{2}\sum_a g_a^2(\phi^*T^a\phi)^2. \tag{3.4.12}$$

表达式中两类势能项分别称为“F项”和“D项”贡献。公式 (3.4.12)第二项求和符号$\sum_a$要对具有不同耦合系数g_a所有规范群求和。（例如，最小超模型中有三个群$SU(3)_C$, $SU(2)_L$和$U(1)_Y$，耦合系数分别为g_3, g和g'。）因为$V(\phi,\phi^*)$是对平方的求和，所以不管任何场结构，它总是大于或等于零。这是超对称理论中一个有趣且独特的特性，标量势由其它的相互作用来决定：F项由汤川耦合及费米子质量决定，而D项由规范相互作用决定。

利用诺特尔定理（查看公式 (3.1.17)），我们可以得到超对称守恒流

$$\begin{aligned}J^\mu_\alpha &= (\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi_i)_\alpha\,\nabla_\nu\phi^{*i}+i(\sigma^\mu\psi^{\dagger i})_\alpha\,W_i^* \\ &\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\mu\lambda^{\dagger a})_\alpha\,F^a_{\nu\rho}+\frac{i}{\sqrt{2}}g_a\phi^*T^a\phi\,(\sigma^\mu\lambda^{\dagger a})_\alpha,\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

这是公式 (3.1.18)维斯祖米诺模型中超对称流的一般形式。在第7.5小节讨论超对称自发破缺时，将用到该结果。

3.5 小结：怎样构造超对称模型

在一个可重整的超对称场论中，所有粒子的质量和相互作用同由它们的规范变换性质和超势W来决定。由构造方法可知W是复标量场ϕ_i的全纯函数，ϕ_i 在超对称变换下总是变向左手魏尔旋量。在第4节等价的超空间语言中，W被称为手征超场的函数*超场* [51]。一个超场是一个含有相应超多重态中全部玻色型，费米型和辅助场的量，例如$\Phi_i\supset(\phi_i,\psi_i,F_i)$。（这和用若干个场来表示弱同位旋二重态或颜色三重态类似。）一个超场的量子数和量纲和它的标量组合是一样的。在超场形式中，公式 (3.2.15)改为

$$W = L^i\Phi_i+\frac{1}{2}M^{ij}\Phi_i\Phi_j+\frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k, \tag{3.5.1}$$

表示完全一样的物理。应用超场方法可以更加漂亮地得到现在的结果，因为超场方法是在由对易四维时空坐标加上费米型坐标构成的“超空间”中构造拉氏量，这样可以明确显示超对称变换不变性。到现在为止我们故意尽量不引入新的概念，而是采用普通读者更为熟悉和理解的组分场方法来讲解超对称理论。超场方法至少是在研究超对称破缺相关现象时更为合适一些，而其中超势只是拉氏量所要求存在的。因此把超势看作是复标量场ϕ_i或者超场Φ_i的函数都是可以的。

当一个理论的超对称组分确定后，超势就受规范对称性严格限制（查看公式 (3.4.10)）。在任何理论中，只有参数L^i, M^{ij},和y^{ijk}的子集可以是非零的，L^i参数只能是Φ_i 规范单态时才

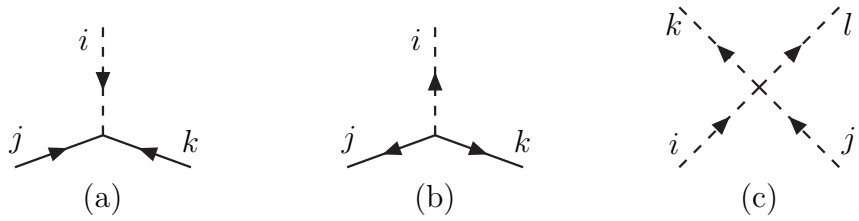


图 3.1: 超对称理论中无量纲非规范相互作用顶角：(a) 标量-费米子-费米子汤川相互作用y^{ijk}, (b) y_{ijk}的复共轭相互作用，和(c) 标量四次相互作用$y^{ijn}y^*_{kln}$。

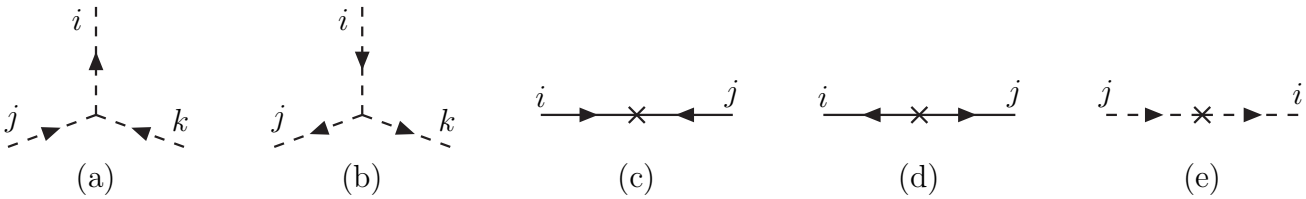


图 3.2: 超对称有量纲耦合系数(a) (标量)^{3}相互作用顶角$M^*_{in}y^{jkn}$及其(b) 共轭相互作用$M^{in}y^*_{jkn}$，(c) 费米子质量项M^{ij}, (d) 费米子质量共轭项M^*_{ij}，(e) 标量质量平方项$M^*_{ik}M^{kj}$。

可以存在。（在最小超模型中没有这一项。）质量矩阵M^{ij}只有在Φ_i，Φ_j互为对方规范变换群表示的共轭时才能存在。（我们将看到在最小超模型中只有一个这样的项。）类似地，汤川耦合y^{ijk}只能是Φ_i, Φ_j和Φ_k可以组成一个规范单态时才可以存在。

公式 (3.2.18), (3.2.19)列出了超势 (3.5.1)（$L^i = 0$）带来的相互作用，对应的费曼图形显示† 在图 3.1和3.2中。图 3.1的汤川耦合会对应公式 (3.2.19)的倒数第二项。 对于每个特定的汤川耦合系数y^{ijk}和$\phi_i\psi_j\psi_k$，必须存在具有完全相等的耦合系数的$\phi_j\psi_i\psi_k$和$\phi_k\psi_i\psi_j$。原因就是第3.2小节所说明的y^{ijk}所有指标交换对称。ϕ和ψ传播在图形中由箭头指向同一点的费米子和玻色子线来表示，而相反指向表示ϕ^*和$\psi^\dagger$的传播。因此存在一个把图 3.1a的复共轭（公式 (3.2.19)的最后一项），这就是图3.1b。另外超对称也要求存在一个带无量纲耦合系数的$\phi_i\phi_j\phi^{*k}\phi^{*l}$项，（查看公式 (3.2.18)）耦合系数为$y^{ijn}y^*_{kln}$。正如引言所讨论的那样，图 3.1a,b的汤川相互作用和图 3.1c的标量相互作用之间的关系是抵消标量粒子质量量子修正二次发散所必须的（对比图 1.1和公式 (1.11)）。

图 3.2显示了理论中仅有的具有质量和质量平方量纲的，可重整的超对称相互作用顶角。 首先图3.2a,b中标量三次方耦合全部来源于超势的质量参数M^{ij}和汤川耦合y^{ijk}，查看公式 (3.2.18)的第二和第i项。费米子和标量粒子的传播子像通常一样由费米子质量M^{ij}和标量粒子质量平方$M_{ij}M^{jk}$来构造。注意图 3.2c,d的箭头方向，费米子质量项M^{ij}和M_{ij}给费米子传播子带来了手征改变的插入项。严格的超对称理论中，标量传播子的方向不会改变。就像

†这里，辅助场由它们的运动方程而消去了（“积分掉”）。我们也可以给出包含辅助场，或者直接的超空间的超场，的费曼规则，虽然这种方式在唯象应用方面并不实用。

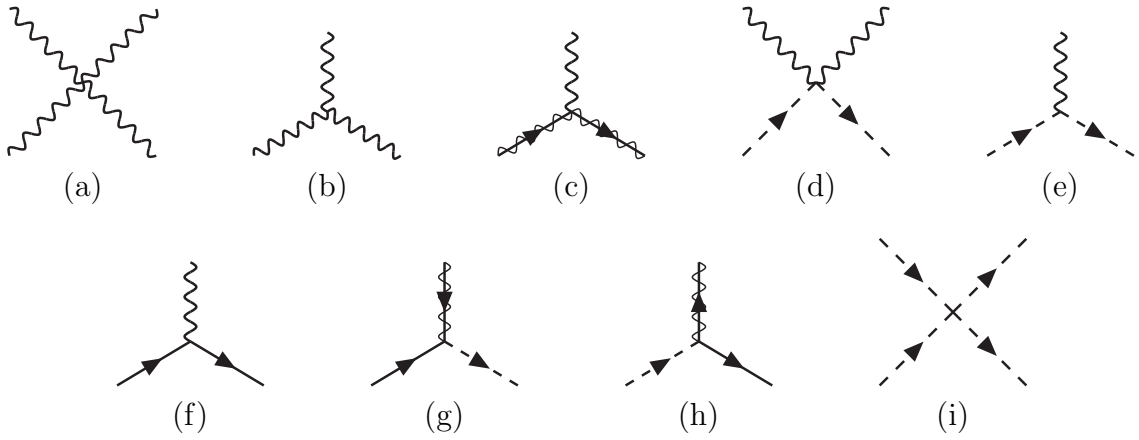


图 3.3: 超对称规范相互作用顶角

图 3.2e显示的一样，当把标量粒子质量平方项插入传播子中时，箭头方向不变。

图 3.3展示了超对称理论的规范相互作用。图3.3a,b,c 只有在非阿贝尔规范理论中才有，比如最小超模型的$SU(3)_C$颜色和$SU(2)_L$弱同位旋作用。 图3.3a和3.3b是由公式 (3.3.3)第一项得到的规范玻色子自相互作用。最小超模型中这些相互作用和标准模型胶子和电弱规范玻色子顶角完全一模一样。（这里我们不讨论鬼场相互作用，它们只是在圈图层次使规范对称性保持一致。）图3.3c,d,e就是标准的规范玻色子与费米子和标量场的相互作用。它们都是由规范协变导数项中得到的，即来源于公式 (3.3.5)和(3.4.2)-(3.4.4)中动能中相应规范项的插入。图3.3c展示的是规范玻色子与规范超子的相互作用，通常费曼图的规范超子由实费米线上再加上波浪线来表示。图 3.3g展示的是规范超子和手征费米子和复标量粒子的耦合（公式 (3.4.9)的第二行第一项），可以认为这是图3.3e 和3.3f 的“超对称化”。顶角中任意两条线换成它们的超对称伙伴就可以使三个顶角进行互换（带$\sqrt{2}$因子）。图3.3h和3.3g一样，只是箭头方向改变，对应于拉氏量中的复共轭项（公式 (3.4.9)第二行第二项）。最后，图3.3i是标量粒子四次方相互作用项（公式 (3.4.12)最后一项），它也是由规范耦合所决定的。

这一节的结果是构造任何超对称理论时都要用到的秘诀。最小超模型中，我们已经知道了规范群，物质粒子和相应的规范变换性质，所需要做的就是构造超势。我们将在第6.1 小节学习这部分内容，在此之前第4节我们将用显见超对称性的超空间和超势形式来重温超对称拉氏量的结构，然后在第5节研究超对称软破缺的一般形式。

4 超空间和超场

本节介绍超空间和超场的基本思想。这些思想是给了一个非常漂亮的理解超对称理论结构的方法，是最简洁地分析和交流超对称形式理论所必须的。然而，严格地说这种方法不是必需的，前文已经在完全没有超空间的超场定义前提下进行超对称的定义和研究。读者如果

只是对标准模型的超对称扩充的唯象感兴趣，特别是第一次阅读此文，建议可以忽略此节。其它节（基本上）与本节内容无关。

4.1 超坐标、一般超场、超空间求导和积分

利用超空间超对称可以有几何表述，一个在通常玻色型时空坐标t, x, y, z上加入四个费米型坐标的流形。超空间中的一个点的坐标为

$$x^\mu,\ \theta^\alpha,\ \theta^\dagger_{\dot\alpha}. \tag{4.1.1}$$

其中θ^α和$\theta^\dagger_{\dot\alpha}$是复的反对易二分量常数旋量，量纲为质量$-1/2$次方。在超空间形式系统中，一个超多重态的各个分量场统一在超场中，超场是超空间坐标的函数。下文将看到超空间的无穷小变换与我们已经找到的组分场语言全局超对称变换是一致的。因此超空间给出了漂亮且显见的超对称场论的变换不变的定义。

含有反对易坐标空间的求导和积分可以通过与通常的对易坐标空间求导积分类比来定义。首先考虑一个热门例子，单个反对易变量η（没有旋量指标）。因为$\eta^2 = 0$，η的幂次展开总是有限的，一个一般的函数关于η是线性的

$$f(\eta) = f_0 + \eta f_1. \tag{4.1.2}$$

f_0和f_1和可以是其它对易式或反对易坐标的函数，但不再是η的函数，其中一个反对易（格罗斯曼奇性）另外的一个对易（格罗斯曼偶性）。定义

$$\frac{df}{d\eta} = f_1. \tag{4.1.3}$$

求导算符$\frac{d}{d\eta}$和每一个格罗斯曼奇性量反对易，所以如果η'与η不同但也反对易，那么

$$\frac{d(\eta'\eta)}{d\eta} = -\frac{d(\eta\eta')}{d\eta} = -\eta'. \tag{4.1.4}$$

为了定义关于η的积分运算，取

$$\int d\eta = 0, \qquad \int d\eta\,\eta = 1, \tag{4.1.5}$$

同时考虑线性性质。这样就定义格罗斯曼变量的伯利森积分[54]

$$\int d\eta\, f(\eta) \ = \ f_1. \tag{4.1.6}$$

对比公式 (4.1.3)和(4.1.6)我们可以看到一个奇特的现象，反对易变量的求导和积分结果是一样的。公式 (4.1.5)的定义源于坐标变换之后积分不变的性质

$$\int d\eta\, f(\eta + \eta') = \int d\eta\, f(\eta), \tag{4.1.7}$$

以及分部积分公式

$$\int d\eta \, \frac{df}{d\eta} = 0, \tag{4.1.8}$$

这和通常对易坐标的微积分基础理论是相似的。反对易的狄拉克δ函数定义的性质为

$$\int d\eta \, \delta(\eta - \eta') \, f(\eta) \;\; = \;\; f(\eta'), \tag{4.1.9}$$

这意味着

$$\delta(\eta - \eta') \;\; = \;\; \eta - \eta'. \tag{4.1.10}$$

超空间中任何超场都可以按照反对易变量幂级数展开，组分就是x^μ的函数。因为θ^α有两个独立分量，$\theta^\dagger_{\dot\alpha}$也一样，最多可以展开到两个$\theta$和两个$\theta^\dagger$，因此幂级数展开是有限的。一个一般超场的形式为

$$S(x,\theta,\theta^\dagger) = a + \theta\xi + \theta^\dagger\chi^\dagger + \theta\theta b + \theta^\dagger\theta^\dagger c + \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta v_\mu + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\eta + \theta\theta\theta^\dagger\zeta^\dagger + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger d. \tag{4.1.11}$$

要看到没有其它独立的贡献可以利用恒等式

$$\theta_\alpha\theta_\beta \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta, \qquad \theta^\dagger_{\dot\alpha}\theta^\dagger_{\dot\beta} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\theta^\dagger\theta^\dagger, \qquad \theta_\alpha\theta^\dagger_{\dot\beta} \;=\; \frac{1}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}(\theta^\dagger\overline{\sigma}_\mu\theta), \tag{4.1.12}$$

它们由公式 (2.13)和(2.21)得到。由此任何贡献都可以写成公式 (4.1.11)形式。其它一些对计算有用的关于反对易坐标的恒等式有

$$(\theta\xi)(\theta\chi) \;\; = \;\; -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\xi\chi), \qquad\qquad (\theta^\dagger\xi^\dagger)\,(\theta^\dagger\chi^\dagger) \;=\; -\frac{1}{2}(\theta^\dagger\theta^\dagger)(\xi^\dagger\chi^\dagger), \tag{4.1.13}$$

$$(\theta\xi)(\theta^\dagger\chi^\dagger) \;\; = \;\; \frac{1}{2}(\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta)(\xi\sigma_\mu\chi^\dagger), \tag{4.1.14}$$

$$\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta \;\; = \;\; -\theta\sigma^\mu\theta^\dagger \;=\; (\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta)^*, \tag{4.1.15}$$

$$\theta\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta \;\; = \;\; -\eta^{\mu\nu}\theta\theta, \qquad\qquad \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\theta^\dagger \;=\; -\eta^{\mu\nu}\theta^\dagger\theta^\dagger. \tag{4.1.16}$$

它们都是由第2节的恒等式而得到的。

一般超场S可以是对易或反对易的，也可以有其它洛伦兹矢量或旋量指标。简单起见，本小节剩余部分只讨论格罗斯曼偶性没有其它指标的超场。因此，在没有更多限制的情况下，一般超场S由8个玻色型场a, b, c, d和v_μ及4个二分量费米型场$\xi, \chi^\dagger, \eta, \zeta^\dagger$组成。所有的这些场都是$x^\mu$的复函数。玻色子和费米子数目相同（每个有8个复数的，或者16个实自由度），但是相比于前面章节的手征和矢量超多重态来说自由度太多了。这就意味着一般超场是超对称的可约表示。后面的第4.4和4.5节，我们将学习怎么对公式 (4.1.11)加以限制而得到手征和矢量超场。

反对易坐标的导数的定义为

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\beta) \;=\; \delta^\beta_\alpha, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\dagger_{\dot\beta}) \;=\; 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot\alpha}}(\theta^\dagger_{\dot\beta}) \;=\; \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot\alpha}}(\theta^\beta) \;=\; 0. \tag{4.1.17}$$

因此，对于反对易旋量ψ_α有关系$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\psi\theta)=\psi_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\psi\theta)=-\psi^\alpha$，另外$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta)=2\theta_\alpha$和$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(\theta\theta)=-2\theta^\alpha$。

为了计算积分，定义

$$d^2\theta \;=\; -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta\epsilon_{\alpha\beta}, \qquad d^2\theta^\dagger \;=\; -\frac{1}{4}d\theta^\dagger_{\dot\alpha}d\theta^\dagger_{\dot\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{4.1.18}$$

这样，利用 (4.1.5)可得

$$\int d^2\theta\,\theta\theta = 1, \qquad \int d^2\theta^\dagger\,\theta^\dagger\theta^\dagger = 1. \tag{4.1.19}$$

因此一般超场的积分就只是把公式 (4.1.11)的$\theta\theta$和$\theta^\dagger\theta^\dagger$相应的分量提取出来即可

$$\int d^2\theta\; S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; b(x)+\theta^\dagger\zeta^\dagger(x)+\theta^\dagger\theta^\dagger d(x), \tag{4.1.20}$$

$$\int d^2\theta^\dagger\; S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; c(x)+\theta\eta(x)+\theta\theta d(x), \tag{4.1.21}$$

$$\int d^2\theta d^2\theta^\dagger\; S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; d(x). \tag{4.1.22}$$

狄拉克δ函数在积分中可以写为

$$\delta^{(2)}(\theta-\theta') = (\theta-\theta')(\theta-\theta'), \qquad \delta^{(2)}(\theta^\dagger-\theta'^\dagger) = (\theta^\dagger-\theta'^\dagger)(\theta^\dagger-\theta'^\dagger), \tag{4.1.23}$$

使得

$$\int d^2\theta\;\delta^{(2)}(\theta)\,S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; S(x,0,\theta^\dagger) \;=\; a(x)+\theta^\dagger\chi^\dagger(x)+\theta^\dagger\theta^\dagger c(x), \tag{4.1.24}$$

$$\int d^2\theta^\dagger\;\delta^{(2)}(\theta^\dagger)\,S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; S(x,\theta,0) \;=\; a(x)+\theta\xi(x)+\theta\theta b(x), \tag{4.1.25}$$

$$\int d^2\theta d^2\theta^\dagger\;\delta^{(2)}(\theta)\delta^{(2)}(\theta^\dagger)\,S(x,\theta,\theta^\dagger) \;=\; S(x,0,0) \;=\; a(x). \tag{4.1.26}$$

和公式 (4.1.8)一样，费米型坐标全导数项积分为0

$$\int d^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\text{任意量}) = 0, \qquad \int d^2\theta^\dagger\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot\alpha}}(\text{任意量}) = 0, \tag{4.1.27}$$

这样使得积分可以采取分部积分方法。

4.2 超空间超对称变换

为了在超空间表述超对称变换，定义以下作用在超场上的微分算符

$$\hat{Q}_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu\theta^\dagger)_\alpha\partial_\mu, \qquad \hat{Q}^\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + (\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \tag{4.2.1}$$

$$\hat{Q}^{\dagger\dot{\alpha}} = i\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot{\alpha}}} - (\overline{\sigma}^\mu\theta)^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \qquad \hat{Q}^\dagger_{\dot{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\dot{\alpha}}} + (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu. \tag{4.2.2}$$

它们遵循通常的导数运算规则，只是和格罗斯曼奇性量交换时出现一个负号，如

$$\hat{Q}_\alpha(ST) = (\hat{Q}_\alpha S)T + (-1)^S S(\hat{Q}_\alpha T) \tag{4.2.3}$$

其中S和T是任意的超场，$(-1)^S$在S为格罗斯曼奇性时等于-1，偶性时等于$+1$。

由无穷小参数ϵ, $\epsilon^\dagger$参数化的超场的超对称变换为[‡]

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon S = -i(\epsilon\hat{Q} + \epsilon^\dagger\hat{Q}^\dagger)S = \Big(\epsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \epsilon^\dagger_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot{\alpha}}} + i[\epsilon\sigma^\mu\theta^\dagger + \epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta]\partial_\mu\Big)S \tag{4.2.4}$$

$$= S(x^\mu + i\epsilon\sigma^\mu\theta^\dagger + i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta,\ \theta+\epsilon,\ \theta^\dagger+\epsilon^\dagger) - S(x^\mu,\ \theta,\ \theta^\dagger), \tag{4.2.5}$$

后面的等式源于ϵ和$\epsilon^\dagger$的一阶泰勒展开。公式(4.2.5) 展示了超对称变换可以看作是超空间坐标平移

$$\theta^\alpha \to \theta^\alpha + \epsilon^\alpha, \tag{4.2.6}$$

$$\theta^\dagger_{\dot{\alpha}} \to \theta^\dagger_{\dot{\alpha}} + \epsilon^\dagger_{\dot{\alpha}}, \tag{4.2.7}$$

$$x^\mu \to x^\mu + i\epsilon\sigma^\mu\theta^\dagger + i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta. \tag{4.2.8}$$

因为$\hat{Q}$, $\hat{Q}^\dagger$是线性微分算符，任何符号公式 (4.2.4) 超对称变换的超场的线性组合或者乘积必然是满足同样的变换规则的超场。

把公式 (4.1.11)的所有分量场的超对称变换推导出来是非常有教育意义和有用的。它们是

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon a = \epsilon\xi + \epsilon^\dagger\chi^\dagger, \tag{4.2.9}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon\xi_\alpha = 2\epsilon_\alpha b - (\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha(v_\mu + i\partial_\mu a), \tag{4.2.10}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon\chi^{\dagger\dot{\alpha}} = 2\epsilon^{\dagger\dot{\alpha}}c + (\overline{\sigma}^\mu\epsilon)^{\dot{\alpha}}(v_\mu - i\partial_\mu a), \tag{4.2.11}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon b = \epsilon^\dagger\zeta^\dagger - \frac{i}{2}\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi, \tag{4.2.12}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon c = \epsilon\eta - \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\chi^\dagger, \tag{4.2.13}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon v^\mu = \epsilon\sigma^\mu\zeta^\dagger - \epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\eta - \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\partial_\nu\xi + \frac{i}{2}\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\nu\chi^\dagger, \tag{4.2.14}$$

[‡]$\sqrt{2}$因子是个约定，并不是广泛使用的，在这里使用只是为了和第3.1小节的超对称变换保持一致。

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon \eta_\alpha = 2\epsilon_\alpha d - i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu c - \frac{i}{2}(\sigma^\nu \overline{\sigma}^\mu \epsilon)_\alpha \partial_\mu v_\nu, \tag{4.2.15}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon \zeta^{\dagger\dot{\alpha}} = 2\epsilon^{\dagger\dot{\alpha}} d - i(\overline{\sigma}^\mu \epsilon)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu b + \frac{i}{2}(\overline{\sigma}^\nu \sigma^\mu \epsilon^\dagger)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu v_\nu, \tag{4.2.16}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon d = -\frac{i}{2}\epsilon^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - \frac{i}{2}\epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \zeta^\dagger. \tag{4.2.17}$$

注意因为公式右边每项都含有一个ϵ或者一个$\epsilon^\dagger$，玻色场总是变换为费米场，反之亦然。

这里的超对称变换看上去并不明显和第3节所找到的变换一样。在后文讨论手征和矢量超场以及相应的拉氏量时，这一点就清晰了。同时我们可以计算公式 (4.2.1)和(4.2.2)的$\hat{Q}$, $\hat{Q}^\dagger$的反对易关系，结果为

$$\left\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}^\dagger_{\dot{\beta}}\right\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu = -2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\hat{P}_\mu, \tag{4.2.18}$$

$$\left\{\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta\right\} = 0, \qquad \left\{\hat{Q}^\dagger_{\dot{\alpha}}, \hat{Q}^\dagger_{\dot{\beta}}\right\} = 0. \tag{4.2.19}$$

这里时空平移变换的微分生成算符为

$$\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu. \tag{4.2.20}$$

因此公式 (4.2.18)-(4.2.19)和公式 (3.1.30), (3.1.31)给出的超对称代数形式一样。

第3.1小节出现的没有戴帽的$Q_\alpha, Q^\dagger_{\dot{\alpha}}, P^\mu$，是作用在希尔波特空间量子态的算符；而本节相应的戴帽的$\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}^\dagger_{\dot{\alpha}}, \hat{P}^\mu$ 是作用在超空间函数的微分算符；理解它们之间概念上的区别是非常重要的。对于海森伯绘景中的任何超场量子力学算复X，两类运算操作由以下公式相联系

$$[X, \epsilon Q + \epsilon^\dagger Q^\dagger] = (\epsilon\hat{Q} + \epsilon^\dagger \hat{Q}^\dagger)X, \tag{4.2.21}$$

$$[X, P_\mu] = \hat{P}_\mu X. \tag{4.2.22}$$

4.3 手征协变导数

像四维时空拉氏量用到时空导数∂_μ一样，为了在超空间构造拉氏量，我们将在后文使用反对易坐标的导数。这个导数也被用作一般超场的限制从而得到和前文一致的超对称变换。然而用$\partial/\partial\theta^\alpha$ 是达不到目的的，这是因为它不是超对称协变的（超协变）

$$\delta_\epsilon\left(\frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha}\right) \neq \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\delta_\epsilon S), \tag{4.3.1}$$

$\partial/\partial\theta^\dagger_{\dot{\alpha}}$ 也一样。这意味着一个对θ_α, $\theta^\dagger_{\dot{\alpha}}$ 求导后的场不再和原来的超场做一样的变换。为了克服这一点，定义如下的手征超协变导数

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\theta^\dagger)_\alpha\partial_\mu, \qquad D^\alpha = -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i(\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu. \tag{4.3.2}$$

对于格罗斯曼偶性的超场S，我们可以定义一个反手征超协变导数

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} S^* \equiv (D_\alpha S)^*, \tag{4.3.3}$$

这意味着

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \theta^\dagger_{\dot{\alpha}}} - i(\overline{\sigma}^\mu \theta)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \qquad \overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \theta^{\dagger\dot{\alpha}}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu. \tag{4.3.4}$$

可以检验

$$\left\{\hat{Q}_\alpha,\, D_\beta\right\} = \left\{\hat{Q}^\dagger_{\dot{\alpha}},\, D_\beta\right\} = \left\{\hat{Q}_\alpha,\, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\hat{Q}^\dagger_{\dot{\alpha}},\, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0. \tag{4.3.5}$$

利用公式 (4.2.4)定义的超对称变换可得

$$\delta_\epsilon \left(D_\alpha S\right) = D_\alpha \left(\delta_\epsilon S\right), \qquad \delta_\epsilon \left(\overline{D}_{\dot{\alpha}} S\right) = \overline{D}_{\dot{\alpha}} \left(\delta_\epsilon S\right). \tag{4.3.6}$$

因此导数D_α和$\overline{D}_{\dot{\alpha}}$确实是超对称协变的，用它们作用在超场上得到的也是超场。这种重要性质使导数$D_\alpha, \overline{D}_{\dot{\alpha}}$ 可以用来定义超协变的超场的限制，也可以用来定义含反对易坐标导数的超空间拉氏量。此导数是线性微分算符，满足和公式 (4.2.3)完全一样的乘积关系。

手征和反手征超协变导数也可检验满足反对易恒等式

$$\left\{D_\alpha,\, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu, \tag{4.3.7}$$

$$\left\{D_\alpha,\, D_\beta\right\} = 0, \qquad \left\{\overline{D}_{\dot{\alpha}},\, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0. \tag{4.3.8}$$

这和公式 (4.2.18)和(4.2.19) 的超对称代数形式完全一样，但我们不能把$D, \overline{D}$和超对称变换微分算符$\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger$ 弄混了。$D, \overline{D}$并不表示一个新的超对称。

读者或许会疑问为什么这里用一个上划线表示$\overline{D}$，而用一个十字架表示$\hat{Q}^\dagger$。理由是十字架和上划线分别是不同类型的共轭。十字架表示的是厄米共轭，就像$\hat{P} = -i\partial_\mu$ 是一个作用在某个内积上的厄米算符。而$\overline{D}$的上划线表示复共轭，就像实微分算符∂_μ一样，$(\partial_\mu \phi)^* = \partial_\mu \phi^*$。回顾一下，如果我们定义一个时空$x^\mu$的函数内积

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^4x\, \psi^*(x) \phi(x), \tag{4.3.9}$$

利用分部积分

$$\langle \psi | \hat{P} \phi \rangle = \left(\langle \phi | \hat{P} \psi \rangle \right)^* \tag{4.3.10}$$

相似地，微分算符$\hat{Q}^\dagger$上的十字架定义为作用于超空间内积的厄米共轭，超空间内积即对复标量在超空间的积分。为了看得更清楚，定义任意两个经典超场$S(x, \theta, \theta^\dagger)$和$T(x, \theta, \theta^\dagger)$的内积

$$\langle T | S \rangle = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\theta^\dagger\, T^* S. \tag{4.3.11}$$

现在可以发现，利用公式 (4.2.1)和(4.2.2)的定义约分超空间分部积分

$$\langle T|\hat{Q}^\dagger_{\dot\alpha}S\rangle = \Big(\langle S|\hat{Q}_\alpha T\rangle\Big)^*. \tag{4.3.12}$$

作为对比，$\overline{D}$的定义和通常时空函数方程$(\partial_\mu\phi)^* = \partial_\mu\phi^*$相似，$\partial_\mu$是实微分算符，$\overline{D}_{\dot\alpha}$则是$D_\alpha$的共轭这不仅仅是一个定义，如果像公式 (4.3.12)一样定义，由D_α定义$D^\dagger_{\dot\alpha}$，可以检验，$D^\dagger_{\dot\alpha}$和上面定义的$\overline{D}_{\dot\alpha}$并不相等。注意量子场论中的$Q^\dagger_\alpha$（没有戴帽）上面的十字架表示希尔伯特空间中的另外一种厄米共轭。

特别注意，利用公式 (4.1.27)

$$\int d^2\theta\, D_\alpha(\text{任意量}) \qquad \text{和} \qquad \int d^2\theta^\dagger\, \overline{D}_{\dot\alpha}(\text{任意量}) \tag{4.3.13}$$

每个都是x^μ的全导数，这使得拉氏量中含有D_α或$\overline{D}_{\dot\alpha}$的项可以使用分部积分。另外一个有用的事实是$D_\alpha$或$\overline{D}_{\dot\alpha}$的三次连续作用结果为0

$$D_\alpha D_\beta D_\gamma(\text{任意量}) = 0 \qquad \text{和} \qquad \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma}(\text{任意量}) = 0. \tag{4.3.14}$$

可以由公式 (4.3.8)得到该关系。实际原因是由于反对易导数的旋量指标只能有两个值。

4.4 手征超场

为了描述一个手征超多重态，考虑一个由如下条件限制的超场$\Phi(x,\theta,\theta^\dagger)$

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi \;=\; 0. \tag{4.4.1}$$

满足这个限制的场称为手征（或者右手手征）超场，它的复共轭Φ^*称为反手征（或右手手征）超场，满足

$$D_\alpha\Phi^* \;=\; 0. \tag{4.4.2}$$

由公式 (4.3.6)可知这两个限制和一般超场的超对称变换规则是一致的。

为了最一般求解限制公式 (4.4.1)，可以定义

$$y^\mu \equiv x^\mu + i\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta, \tag{4.4.3}$$

然后在超空间把坐标变换

$$y^\mu,\ \theta^\alpha,\ \theta^\dagger_{\dot\alpha}. \tag{4.4.4}$$

以此为新坐标变量，手征超协变导数表示为

$$D_\alpha \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i(\sigma^\mu\theta^\dagger)_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \qquad D^\alpha \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + 2i(\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu)^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \tag{4.4.5}$$

$$\overline{D}^{\dot\alpha} \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot\alpha}}, \qquad \overline{D}_{\dot\alpha} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\dot\alpha}}. \tag{4.4.6}$$

从公式(4.4.6)可以明显看出，限制公式 (4.4.1)的解是y^μ和θ的任意函数，该函数不含$\theta^\dagger$。因此我们可以得到展开函数得到

$$\Phi \;=\; \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y), \tag{4.4.7}$$

相似地

$$\Phi^* \;=\; \phi^*(y^*) + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^\dagger(y^*) + \theta^\dagger\theta^\dagger F^*(y^*). \tag{4.4.8}$$

$\sqrt{2}$因子只是个约定，同时$y^{\mu*} = x^\mu - i\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta$。$(y^*, \theta, \theta^\dagger)$坐标表示的超协变导数有时也是有用的

$$D_\alpha \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \qquad\qquad D^\alpha \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \tag{4.4.9}$$

$$\overline{D}^{\dot\alpha} \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta^\dagger_{\dot\alpha}} - 2i(\overline{\sigma}^\mu\theta)^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\mu*}}, \qquad\qquad \overline{D}_{\dot\alpha} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\dot\alpha}} + 2i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\mu*}}. \tag{4.4.10}$$

根据公式 (4.4.7)，手征超场独立的自由度是一个复标量场ϕ，一个二分量费米子ψ，和一个辅助场F，正好是第3.1小节找到的手征超多重态。如果Φ是自由的基础手征超场，因θ，$\theta^\dagger$量纲为质量$-1/2$可以令Φ具有质量量纲，则可以给出分量场的正则量纲。利用反对易坐标的幂级数展开，可以把手征超场写回到初始的$x, \theta, \theta^\dagger$坐标系统中

$$\begin{aligned}\Phi \;=\;& \phi(x) + i\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \theta\theta F(x),\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

$$\begin{aligned}\Phi^* \;=\;& \phi^*(x) - i\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x) + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^\dagger(x) \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\sigma^\mu\partial_\mu\psi^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger F^*(x).\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

在一般情况下，公式 (4.4.7)-(4.4.8)相比于公式 (4.4.11)-(4.4.12)更为方便。

把公式 (4.1.11)和一般情况公式 (4.4.11)对比。我们可以得到前者与后者对应的组分场为

$$a = \phi, \qquad \xi_\alpha = \sqrt{2}\psi_\alpha, \qquad b = F, \tag{4.4.13}$$

$$\chi^{\dagger\dot\alpha} = 0, \qquad c = 0, \qquad v_\mu = i\partial_\mu\phi, \qquad \eta_\alpha = 0, \tag{4.4.14}$$

$$\zeta^{\dagger\dot\alpha} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)^{\dot\alpha}, \qquad d = \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi. \tag{4.4.15}$$

利用$\sqrt{2}\delta_\epsilon\Phi \;=\; -i(\epsilon\hat{Q} + \epsilon^\dagger\hat{Q}^\dagger)\Phi$，或把公式 (4.4.13)-(4.4.15)代入一般超场变换公式 (4.2.9)-(4.2.17)，就可以直接得到ϕ的组分场的超对称变换规则，其结果为

$$\delta_\epsilon\phi \;=\; \epsilon\psi, \tag{4.4.16}$$

$$\delta_\epsilon\psi_\alpha \;=\; -i(\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha\partial_\mu\phi + \epsilon_\alpha F, \tag{4.4.17}$$

$$\delta_\epsilon F \;=\; -i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi, \tag{4.4.18}$$

这和公式 (3.1.3), (3.1.13), (3.1.15)是一致的。

一种构造手征超场（或者反手征超场）的方法是

$$\Phi \;=\; \overline{DD}S \;\equiv\; \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}S, \qquad\qquad \Phi^* \;=\; DDS^* \;\equiv\; D^\alpha D_\alpha S^*, \tag{4.4.19}$$

其中S是任意的一般超场，根据公式 (4.3.14)可知这些场是手征或者反手征是明显的。相反过程也是正确的，对于每个手征超场Φ，总可找到一个超场使得公式 (4.4.19)成立。

另一种构造手征超场的方法是构造一个手征超场Φ_i，而非反手征超场，的函数$W(\Phi_i)$。也就是说手征超场作为复变量是全纯的。根据限制公式 (4.4.1)的微分算符$\overline{D}_{\dot\alpha}$的线性性质及其乘积规则可以得到以上结论。这一点对后文构造超空间拉氏量是非常有用的。

4.5 矢量超场

矢量（或者实的）超场V可以由限制$V = V^*$来获得。这和一般超场公式 (4.1.11)的组分以下的限制是等价的

$$a \;=\; a^*, \qquad \chi^\dagger \;=\; \xi^\dagger, \qquad c \;=\; b^*, \qquad v_\mu \;=\; v_\mu^*, \qquad \zeta^\dagger \;=\; \eta^\dagger, \qquad d = d^*. \tag{4.5.1}$$

同样也有方便且遵循传统的定义

$$\eta_\alpha \;=\; \lambda_\alpha - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\partial_\mu\xi^\dagger)_\alpha, \qquad v_\mu = A_\mu, \qquad d = \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu a. \tag{4.5.2}$$

矢量超场的组分展开就改为

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\theta^\dagger) \;&=\; a + \theta\xi + \theta^\dagger\xi^\dagger + \theta\theta b + \theta^\dagger\theta^\dagger b^* + \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta A_\mu + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\xi^\dagger) \\ &\quad + \theta\theta\theta^\dagger(\lambda^\dagger - \frac{i}{2}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger(\frac{1}{2}D + \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu a). \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

组分场的超对称变换可以由$\sqrt{2}\delta_\epsilon V = -i(\epsilon\hat{Q} + \epsilon^\dagger\hat{Q}^\dagger)V$，或者把 (4.5.1)-(4.5.2) 放入一般超场的变换结果公式 (4.2.9)-(4.2.17)中来获得。其结果为

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon a \;=\; \epsilon\xi + \epsilon^\dagger\xi^\dagger \tag{4.5.4}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon\xi_\alpha \;=\; 2\epsilon_\alpha b - (\sigma^\mu\epsilon^\dagger)_\alpha(A_\mu + i\partial_\mu a), \tag{4.5.5}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon b \;=\; \epsilon^\dagger\lambda^\dagger - i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi, \tag{4.5.6}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon A^\mu \;=\; i\epsilon\partial^\mu\xi - i\epsilon^\dagger\partial^\mu\xi^\dagger + \epsilon\sigma^\mu\lambda^\dagger - \epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\lambda, \tag{4.5.7}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon\lambda_\alpha \;=\; \epsilon_\alpha D + \frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\epsilon)_\alpha(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{4.5.8}$$

$$\sqrt{2}\,\delta_\epsilon D \;=\; -i\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger - i\epsilon^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda \tag{4.5.9}$$

一个超场不能同时既是手征的又是实的，除非它是常数（与x^μ, θ和$\theta^\dagger$无关）。这个结论可以由公式 (4.4.13)-(4.4.15)和公式(4.5.1)得到。但是如果Φ是一个手征超场，$\Phi + \Phi^*$, $i(\Phi - \Phi^*)$以及$\Phi\Phi^*$是实的（矢量）超场。

就像公式 (4.5.3)的约定所提示的，一个矢量超场可以用来表示一个规范超多重态，其中有规范玻色子，规范超子和规范辅助场A^μ, λ, D作为组成部分。（这样的矢量超场必须是无量纲才能使组分场具有正则量纲。）然而V中还有第3.3和3.4小节中没有的组分。它们是一个实标量a，一个两分量费米子ξ，和一个复标量b，它的质量量纲分别是0, 1/2 和1。这些都是多出来的辅助场，可以被"超对称规范"掉。要看清这一点，可以假设V是$U(1)$规范对称性矢量超场，考虑"超对称规范变换"

$$V \;\rightarrow\; V + i(\Omega^* - \Omega), \tag{4.5.10}$$

其中Ω是一个手征超场规范变换参数，$\Omega = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + \ldots$。$V$组分场变换为

$$a \;\rightarrow\; a + i(\phi^* - \phi), \tag{4.5.11}$$

$$\xi_\alpha \;\rightarrow\; \xi_\alpha - i\sqrt{2}\psi_\alpha, \tag{4.5.12}$$

$$b \;\rightarrow\; b - iF, \tag{4.5.13}$$

$$A_\mu \;\rightarrow\; A_\mu + \partial_\mu(\phi + \phi^*), \tag{4.5.14}$$

$$\lambda_\alpha \;\rightarrow\; \lambda_\alpha, \tag{4.5.15}$$

$$D \;\rightarrow\; D. \tag{4.5.16}$$

公式(4.5.14)表明公式 (4.5.10)给出了矢量场的通常的规范变换，参数为$2\mathrm{Re}(\phi)$。现在要求规范变换具有超对称的形式，那么完全独立的选择$\mathrm{Im}(\phi)$, ψ_α, F 也任意地改变了a, ξ_α,和b。因此通常的规范变换只是超对称变换公式 (4.5.10)的特殊情况。

在特殊情况下，超对称规范变换可以把辅助场a, ξ_α和b完全消去。一个超空间矢量超场拉氏量必须是超对称规范变换不变的。公式 (4.5.10) 是阿贝尔群情况，后文会推广到非阿贝尔群情况。当通过超对称规范变换消去a, ξ_α和b后，矢量超场就被称为维斯祖米诺规范，其形式为

$$V_{\text{WZ gauge}} \;=\; \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta A_\mu + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D. \tag{4.5.17}$$

矢量超场简化到维斯祖米诺规范和超空间超对称变换并不能保持一致。这是因为$\sqrt{2}\delta_\epsilon(V_{\text{WZ gauge}})$含有$\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\epsilon A_\mu - \theta\sigma^\mu\epsilon^\dagger A_\mu + \theta\theta\epsilon^\dagger\lambda^\dagger + \theta^\dagger\theta^\dagger\epsilon\lambda$，因此维斯祖米诺规范的矢量超场超对称变换之后不再是维斯祖米诺规范。但是一个超规范变换总是可以使$\delta_\epsilon(V_{\text{WZ gauge}})$恢复到维斯祖米诺规范。采用了维斯祖米诺规范只是部分固定了超规范，仍然留下了做通常规范变换的全部自由度。

4.6 怎样构造超空间拉氏量

到目前为止，我们已经研究了超空间场的结构特征。现在我们转到怎样构造明显具有超对称性作用量的动力学机制上来。一个关键的发现是任意超场的全超空间积分可以自动保持

超对称变换不变，

$$\delta_\epsilon A = 0, \quad \text{对于} \quad A = \int d^4x \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \, S(x, \theta, \theta^\dagger). \tag{4.6.1}$$

这一点可以由公式 (4.2.1), (4.2.2)定义的$\hat{Q}$, $\hat{Q}^\dagger$是超空间坐标$x^\mu, \theta, \theta^\dagger$的全导数求和直接得到，因为$(\epsilon\hat{Q} + \epsilon^\dagger\hat{Q}^\dagger)S$ 积分后自动消失。做为检验公式 (4.2.17)表明超场的$\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$组分的超对称变换是一个时空全导数。

因此，作用量的主要动力学可以来源于公式 (4.6.1)形式的贡献，同时作用量的实数性质要求S应该是一些实的（矢量）超场V。由公式 (4.2.5)，我们可以看到全局超对称不变性原理已经嵌入到对超空间积分的作用量的要求中了。这个要求就是超空间坐标做刚性平移变换之后和超空间积分得到作用量是不变的。要得到拉氏量密度$\mathcal{L}(x)$，积分掉费米型坐标即可。这种方法总是写成如下形式

$$[V]_D \equiv \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \, V(x, \theta, \theta^\dagger) = V(x, \theta, \theta^\dagger)\Big|_{\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger} = \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu a \tag{4.6.2}$$

最后一个等式利用了公式 (4.1.22)和公式 (4.5.3)中V的形式。这就被称为拉氏量的D项贡献（注意$\partial_\mu\partial^\mu a$项全空间$\int d^4x$积分的消失。）。

另外一种类型的作用量的贡献来自于手征超场F项，由公式 (4.4.18)可知F项的超对称变换也是时空全导数。这意味着拉氏量密度可以有以下的形式

$$[\Phi]_F \equiv \Phi\Big|_{\theta\theta} = \int d^2\theta \, \Phi\Big|_{\theta^\dagger=0} = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \, \delta^{(2)}(\theta^\dagger)\, \Phi = F, \tag{4.6.3}$$

最后一个等式利用了公式 (4.4.11)的Φ的形式。公式 (4.6.3)满足$\delta_\epsilon(\int d^4x[\Phi]_F) = 0$。通常手征超场的$F$项是复的，但作用量必须是实的。所以$F$项贡献可以加入它的复共轭来保证作用量实数性质，

$$[\Phi]_F + \text{c.c.} = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \, \left[\delta^{(2)}(\theta^\dagger)\, \Phi + \delta^{(2)}(\theta)\, \Phi^*\right]. \tag{4.6.4}$$

注意，坐标系$(x^\mu, \theta, \theta^\dagger)$和$(y^\mu, \theta, \theta^\dagger)$中手征超场$F$项组分是相同的，这是因为在两种情况下，反对易坐标$\theta\theta^\dagger$ 积分只留下了$\theta\theta$组分。而x^μ和y^μ之间差别在于高阶$\theta^\dagger$项，积分会自动消失。这是一个有用的技巧，因为许多关于手征超场的计算可以简单地使用y^μ坐标系形式。

另一种可能是取手征超场的D项贡献。但是这实际上是在浪费时间，因为

$$[\Phi]_D = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger \, \Phi = \Phi\Big|_{\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger} = \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi, \tag{4.6.5}$$

其中最后一个等式源于公式 (4.4.11)，ϕ是Φ的标量组分。公式(4.6.5)是一个全导数项（复共轭也是），所以加进拉氏量密度中没有作用。

因此，有两种构造超对称拉氏量的方法；取实超场的D项组分；取手征超场的F项组分，同时加上其复共轭。当构造拉氏量时，公式 (4.6.2) 的实超场V和公式 (4.6.4)的手征超场Φ总

是复合的，它们由更基本的超场组成。但是当V是一个阿贝尔矢量超场，Φ是所有对称性的单态时，V和Φ作为基本场也是可以贡献拉氏量的。

利用以下公式

$$\overline{DD}(\theta^\dagger\theta^\dagger) \;=\; DD(\theta\theta) \;=\; -4, \tag{4.6.6}$$

以及公式 (4.1.23)的$\delta^{(2)}(\theta^\dagger) = \theta^\dagger\theta^\dagger$ 可以把拉氏量的D项贡献写成F项贡献的形式。因此通过对$\theta^\dagger$的两次分部积分可得

$$[V]_D \;=\; -\frac{1}{4}\int d^2\theta d^2\theta^\dagger\, V\,\overline{DD}(\theta^\dagger\theta^\dagger) \;=\; -\frac{1}{4}\int d^2\theta d^2\theta^\dagger\,\delta^{(2)}(\theta^\dagger)\,\overline{DD}V + \ldots \tag{4.6.7}$$

$$= \; -\frac{1}{4}[\overline{DD}V]_F + \ldots. \tag{4.6.8}$$

其中...表示关于x^μ的全导数，它们来自于计算过程的两次分部积分。这正如第4.4节所说，$\overline{DD}V$总是一个手征超场。如果V是实的，那么公式 (4.6.8)的虚部就是全导数，所以结果可以重新写为$-\frac{1}{8}[\overline{DD}V]_F + \text{c.c.}$。

4.7 手征超场超空间拉氏量

第4.4节中我们证明了手征超场的组分有着和维斯祖米诺模型场一样的超对称变换。现在我们就有了完整展示二者等价的工具，超空间拉氏量的再构造。考虑一个复合场

$$\begin{aligned}
\Phi^{*i}\Phi_j \;=\;& \phi^{*i}\phi_j + \sqrt{2}\theta\psi_j\phi^{*i} + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^{\dagger i}\phi_j + \theta\theta\phi^{*i}F_j + \theta^\dagger\theta^\dagger\phi_j F^{*i} \\
&+\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta\left[i\phi^{*i}\partial_\mu\phi_j - i\phi_j\partial_\mu\phi^{*i} - \psi^{\dagger i}\overline{\sigma}_\mu\psi_j\right] \\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu(\psi_j\partial_\mu\phi^{*i} - \partial_\mu\psi_j\phi^{*i}) + \sqrt{2}\theta\theta\theta^\dagger\psi^{\dagger i}F_j \\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\sigma^\mu(\psi^{\dagger i}\partial_\mu\phi_j - \partial_\mu\psi^{\dagger i}\phi_j) + \sqrt{2}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\psi_j F^{*i} \\
&+\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\Big[F^{*i}F_j - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_j + \frac{1}{4}\phi^{*i}\partial^\mu\partial_\mu\phi_j + \frac{1}{4}\phi_j\partial^\mu\partial_\mu\phi^{*i} \\
&\quad +\frac{i}{2}\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j + \frac{i}{2}\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\psi^{\dagger i}\Big].
\end{aligned} \tag{4.7.1}$$

其中所有的场都是x^μ（不是y^μ或$y^{\mu*}$）的函数。$i = j$时，公式 (4.7.1)就是一个实（矢量）超场。所有的无质量手征超场的自由场拉氏量可以通过取的$\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$分量来得到

$$[\Phi^*\Phi]_D = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger\,\Phi^*\Phi \;=\; -\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + i\psi^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + F^*F + \ldots. \tag{4.7.2}$$

其中...表示时空全导数项，因为是全空间$\int d^4x$积分所以可以扔掉这些项。公式(4.7.2)就是第3.1小节构造的无质量维斯祖米诺模型。

得到超势相互作用和质量项需知手征超场的乘积也是手征超场。例如

$$\Phi_i\Phi_j = \phi_i\phi_j + \sqrt{2}\theta(\psi_i\phi_j + \psi_j\phi_i) + \theta\theta(\phi_iF_j + \phi_jF_i - \psi_i\psi_j), \tag{4.7.3}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k &= \phi_i\phi_j\phi_k + \sqrt{2}\theta(\psi_i\phi_j\phi_k + \psi_j\phi_i\phi_k + \psi_k\phi_i\phi_j) \\ &\quad + \theta\theta(\phi_i\phi_jF_k + \phi_i\phi_kF_j + \phi_j\phi_kF_i - \psi_i\psi_j\phi_k - \psi_i\psi_k\phi_j - \psi_j\psi_k\phi_i),\end{aligned} \tag{4.7.4}$$

该公式右边的组分场取做公式 (4.4.3)给出的y^μ的函数来简化表示。更一般地，手征超场的任何全纯函数也是手征超场。因此，我们可以用以下公式

$$\mathcal{L}(x) = \left[\Phi^{*i}\Phi_i\right]_D + \left(\left[W(\Phi_i)\right]_F + \text{c.c.}\right), \tag{4.7.5}$$

来构造完全的拉氏量，其中$W(\Phi_i)$可以是手征超场（但不是反手征超场）为复变量的全纯函数。函数$W(\Phi_i)$刚好就是第3.2小节得到的标量组分的函数超势$W(\Phi_i)$。对于$W = \frac{1}{2}M^{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ ，利用公式 (4.7.2), (4.7.3), (4.7.4) 同时积分掉辅助场之后，公式 (4.7.5)的结果就和公式 (3.2.19)完全一样。

由拉氏量 (4.7.5)得到超场的运动方程是非常有教育意义的。而最快的方法就是先根据第4.6节结尾的评论把拉氏量密度写为

$$\mathcal{L}(x) = \int d^2\theta\left[-\frac{1}{4}\overline{DD}\Phi^{*i}\Phi_i + W(\Phi_i)\right] + \int d^2\theta^\dagger\left[W(\Phi_i)\right]^*. \tag{4.7.6}$$

现在对Φ_i变分可以很快得到超场运动方程

$$0 = -\frac{1}{4}\overline{DD}\Phi^{*i} + \frac{\delta W}{\delta\Phi_i}, \tag{4.7.7}$$

及其复共轭

$$0 = -\frac{1}{4}DD\Phi_i + \frac{\delta W^*}{\delta\Phi^{*i}}. \tag{4.7.8}$$

它们和第3.2小节找到的由组分场构造拉氏量的运动方程是等价的。证明这一点，可以把公式 (4.7.7)在$(y^\mu, \theta, \theta^\dagger)$ 坐标写出，公式 (4.7.7)中第一项有简单形式

$$-\frac{1}{4}\overline{DD}\Phi^{*i} = F^*(y) - i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\psi^{\dagger i}(y) + \theta\theta\partial_\mu\partial^\mu\phi^{*i}(y). \tag{4.7.9}$$

因为这是一个手征（不是反手征）超场，可以看到写成y^μ（不是$y^{\mu*}$）的函数是更为简单的，虽然左边的项与Φ^*有关。

另外一种办法，考虑一个全超空间的拉氏量密度V，作用量为

$$A = \int d^4x\int d^2\theta d^2\theta^\dagger\, V, \tag{4.7.10}$$

其中$V(S_i,\, D_\alpha S_i,\, \overline{D}_{\dot\alpha} S_i)$假设为一般动力学超场$S_i$和它们的手征及反手征一阶导数。则超场运动方程可以由作用量变分得到：

$$0 \;=\; \frac{\partial V}{\partial S_i} - D_\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial (D_\alpha S_i)} \right) - \overline{D}_{\dot\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial (\overline{D}_{\dot\alpha} S_i)} \right). \tag{4.7.11}$$

对于手征超场拉氏量 (4.7.5)，可以引入拉格朗日乘子$\Lambda^{*i\dot\alpha}$和Λ_i^α 来对Φ_i和Φ^{*i}分别加以手征和反手征超场限制。由此超空间拉氏量密度为

$$V \;=\; \Lambda^{*i\dot\alpha} \overline{D}_{\dot\alpha} \Phi_i + \Lambda_i^\alpha D_\alpha \Phi^{*i} + \Phi^{*i} \Phi_i + \delta^{(2)}(\theta^\dagger) W(\Phi_i) + \delta^{(2)}(\theta) [W(\Phi_i)]^*. \tag{4.7.12}$$

加入拉格朗日乘子的变分刚好给出了限制条件$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi_i = 0$和$D_\alpha \Phi^{*i} = 0$。对$\Phi_i$，$\Phi^{*i}$运用公式 (4.7.11) 计算可以得到其运动方程

$$0 \;=\; \Phi^{*i} + \delta^{(2)}(\theta^\dagger) \frac{\delta W}{\delta \Phi_i} - \overline{D}_{\dot\alpha} \Lambda^{*i\dot\alpha}, \tag{4.7.13}$$

$$0 \;=\; \Phi_i + \delta^{(2)}(\theta) \frac{\delta W^*}{\delta \Phi^{*i}} - D_\alpha \Lambda_i^\alpha. \tag{4.7.14}$$

现在分别对这两个公式做$-\frac{1}{4}\overline{DD}$和$-\frac{1}{4}DD$作用，利用公式 (4.1.23) 和(4.6.6)，我们可以再次得到公式 (4.7.7)和(4.7.8)。

4.8 超空间阿贝尔规范拉氏量

现在来考虑规范理论的超空间拉氏量，简单起见首先处理$U(1)$情况，非阿贝尔情况下一小节讨论。

公式 (4.5.3)的矢量超场$V(x, \theta, \theta^\dagger)$含有规范势$A^\mu$，定义相应的规范不变的阿贝尔场场强的超场为

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4} \overline{DD} D_\alpha V, \qquad\qquad \mathcal{W}_{\dot\alpha}^\dagger = -\frac{1}{4} DD \overline{D}_{\dot\alpha} V. \tag{4.8.1}$$

这两个场强分别是手征和反手征超场（查看公式 (4.4.19)），同时也是一个有旋量指标反对易超场的例子。它们的量纲为质量3/2次方。要检验$\mathcal{W}_\alpha$是规范不变，可以利用公式 (4.5.10)的规范变换

$$\mathcal{W}_\alpha \;\to\; -\frac{1}{4} \overline{DD} D_\alpha [V + i(\Omega^* - \Omega)] \;=\; \mathcal{W}_\alpha + \frac{i}{4} \overline{DD} D_\alpha \Omega \tag{4.8.2}$$

$$= \; \mathcal{W}_\alpha - \frac{i}{4} \overline{D}^{\dot\beta} \{ \overline{D}_{\dot\beta}, D_\alpha \} \Omega \tag{4.8.3}$$

$$= \; \mathcal{W}_\alpha + \frac{1}{2} \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} \partial_\mu \overline{D}^{\dot\beta} \Omega \tag{4.8.4}$$

$$= \; \mathcal{W}_\alpha \tag{4.8.5}$$

第一个等式是因为Ω^*是反手征的，利用公式 (4.4.2)可以推得该式；第二个和第四个是因为Ω是手征的，推导利用了公式 (4.4.1)；而第三个是由公式 (4.3.7)得到的。

要看$\mathcal{W}_\alpha$的组分场是什么构成，最好是像公式 (4.5.17)一样在特殊的维斯祖米诺规范下同时转换到公式 (4.4.3)定义的$(y^\mu, \theta, \theta^\dagger)$坐标系中来查看。结果是

$$V(y^\mu, \theta, \theta^\dagger) \;=\; \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta A_\mu(y) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(y) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\left[D(y) + i\partial_\mu A^\mu(y)\right]. \quad (4.8.6)$$

现在利用公式 (4.4.5), (4.4.6)可得

$$\mathcal{W}_\alpha(y, \theta, \theta^\dagger) \;=\; \lambda_\alpha + \theta_\alpha D + \frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu} + i\theta\theta(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger)_\alpha, \quad (4.8.7)$$

$$\mathcal{W}^{\dagger\dot{\alpha}}(y^*, \theta, \theta^\dagger) \;=\; \lambda^{\dagger\dot{\alpha}} + \theta^{\dagger\dot{\alpha}}D - \frac{i}{2}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\theta^\dagger)^{\dot{\alpha}}F_{\mu\nu} + i\theta^\dagger\theta^\dagger(\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda)^{\dot{\alpha}}, \quad (4.8.8)$$

其中右边所有的场都分别是y^μ和$y^{\mu*}$的函数，同时

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.8.9)$$

就是通常的组分场强。虽然公式 (4.8.7)，(4.8.8)是在维斯祖米诺规范下得到，它们也是普遍适用的，因为$\mathcal{W}_\alpha$和$\mathcal{W}^{\dagger\dot{\alpha}}$是超规范不变的。

由公式(4.8.7)可知

$$[\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha]_F = D^2 + 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \quad (4.8.10)$$

其中右边所有的场都是x^μ的函数。有趣的是，消去全导数项后，我们可以得到作用量

$$\int d^4x\,\mathcal{L} \;=\; \int d^4x\,\frac{1}{4}[\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha]_F + \text{c.c.} \;=\; \int d^4x\,\left[\frac{1}{2}D^2 + i\lambda^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right], \quad (4.8.11)$$

和公式 (3.3.3)保持一致。另外，V的D项组分的积分在超对称和超规范变换下是不变的，因此可以引入法耶-伊利奥普罗斯项

$$\mathcal{L}_{\text{FI}} \;=\; -2\kappa[V]_D \;=\; -\kappa D, \quad (4.8.12)$$

公式中也扔掉了全导数项。这种类型的量在超对称自发破缺中扮演重要角色，在第7.2小节中我们将讨论这一点。

拉氏量密度 (4.8.10)也可以写成D项而不是F项的形式。因为$\mathcal{W}^\alpha$是一个手征超场，$\overline{D}_{\dot{\beta}}\mathcal{W}^\alpha = 0$，利用公式 (4.8.1)可以把$\mathcal{W}^\alpha$写为

$$\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{DD}(\mathcal{W}^\alpha D_\alpha V). \quad (4.8.13)$$

因此，利用公式 (4.6.8)，A^μ, λ，D的拉氏量可以重新写为

$$\mathcal{L}(x) = \int d^2\theta d^2\theta^\dagger\,\left[\frac{1}{4}\left(\mathcal{W}^\alpha D_\alpha V + \mathcal{W}^\dagger_{\dot{\alpha}}\overline{D}^{\dot{\alpha}}V\right) - 2\kappa V\right]. \quad (4.8.14)$$

下面考虑阿贝尔规范场和手征超场Φ_i的集合的耦合，Φ_i带$U(1)$荷为q_i。像公式 (4.5.10)-(4.5.16)一样，超规范变换可以由一个非动力学的手征超场Ω来参数化。

$$\Phi_i \;\rightarrow\; e^{2igq_i\Omega}\Phi_i, \qquad\qquad \Phi^{*i} \;\rightarrow\; e^{-2igq_i\Omega^*}\Phi^{*i}, \tag{4.8.15}$$

其中g是规范耦合系数。特殊情况下，Ω只是一个实函数$\phi(x)$，与θ和$\theta^\dagger$无关，这样可以重复通常的规范变换$A^\mu \rightarrow A^\mu + 2\partial^\mu\phi$。公式 (4.7.2)的超场动能项$\Phi^{*i}\Phi_i$，并不是超规范不变的

$$\Phi^{*i}\Phi_i \;\rightarrow\; e^{2igq_i(\Omega-\Omega^*)}\Phi^{*i}\Phi_i. \tag{4.8.16}$$

要修复这个问题，我们把拉氏量的手征超场动能项修改为

$$\left[\Phi^{*i}e^{2gq_iV}\Phi_i\right]_D. \tag{4.8.17}$$

其中e^{2gq_iV}因子的规范变换，根据公式 (4.5.10)，刚好抵消了公式 (4.8.16)多出的项。

因为V是无量纲的，所以拉氏量中出现V的e指数是可能的。看上去这似乎是危险的，因为这样的非多项式项通常是不可重整的。然而，V的规范对称性挽救了这一点：高阶项可以由超规范而去掉。特别的，在四维维斯祖米诺规范下来看e^{2gq_iV}，e指数的幂级数展开是简单且有限的。由

$$V^2 \;=\; -\frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger A_\mu A^\mu, \tag{4.8.18}$$

$$V^n \;=\; 0 \qquad (n\geq 3), \tag{4.8.19}$$

得

$$e^{2gq_iV} = 1 + 2gq_i(\theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta A_\mu + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D) - g^2q_i^2\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger A_\mu A^\mu. \tag{4.8.20}$$

利用这个公式，我们可以得到在维斯祖米诺规范及扔掉全导数后

$$\begin{aligned}\left[\Phi^{*i}e^{2gq_iV}\Phi_i\right]_D \;=\;& F^{*i}F_i - \nabla_\mu\phi^{*i}\nabla^\mu\phi_i + i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\nabla_\mu\psi_i - \sqrt{2}gq_i(\phi^{*i}\psi_i\lambda + \lambda^\dagger\psi^{\dagger i}\phi_i)\\ &+gq_i\phi^{*i}\phi_iD,\end{aligned} \tag{4.8.21}$$

其中∇_μ是规范协变时空导数

$$\nabla_\mu\phi_i \;=\; \partial_\mu\phi_i - igq_iA_\mu\phi_i, \qquad\qquad \nabla_\mu\phi^{*i} \;=\; \partial_\mu\phi^{*i} + igq_iA_\mu\phi^{*i}, \tag{4.8.22}$$

$$\nabla_\mu\psi_i \;=\; \partial_\mu\psi_i - igq_iA_\mu\psi_i. \tag{4.8.23}$$

公式(4.8.21)和公式 (3.4.9)的特殊的阿贝尔群情况是一致的。

小结一下，超空间拉氏量

$$\mathcal{L} \;=\; \left[\Phi^{*i}e^{2gq_iV}\Phi_i\right]_D + \left([W(\Phi_i)]_F + \text{c.c.}\right) + \frac{1}{4}\left([\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha]_F + \text{c.c.}\right) - 2\kappa[V]_D \tag{4.8.24}$$

重复出第3.4小节找到的组分场形式拉氏量的一个特殊情况：物质场相互耦合，并与$U(1)$规范对称性耦合。当然还有一个多出的法耶-伊利奥普罗斯参数κ。

4.9 超空间一般规范拉氏量

现在考虑用手征超场Φ_i构成以T_i^{aj}做为生成元的表示R实现的一般规范对称性。

$$\Phi_i \to (e^{2ig_a\Omega^a T^a})_i{}^j \Phi_j, \qquad \Phi^{*i} \to \Phi^{*j}(e^{-2ig_a\Omega^a T^a})_j{}^i. \tag{4.9.1}$$

李代数不可约组分的规范耦合系数为g_a。就像阿贝尔情况，超规范变换参数为手征超场Ω^a。每个李代数生成元有一个矢量超场V^a，其中含有矢量规范玻色子和规范超子。拉氏量因此有以下的超规范不变项

$$\mathcal{L} \;=\; \left[\Phi^{*i}(e^{2g_a T^a V^a})_i{}^j \Phi_j\right]_D. \tag{4.9.2}$$

最好利用表示R来定义矩阵形式的矢量和规范参数超场

$$V_i{}^j \;=\; 2g_a T_i^{aj} V^a, \qquad \Omega_i{}^j \;=\; 2g_a T_i^{aj}\Omega^a, \tag{4.9.3}$$

使得规范理论可以重新写为

$$\Phi_i \to (e^{i\Omega})_i{}^j \Phi_j, \qquad \Phi^{*i} \to \Phi^{*j}(e^{-i\Omega^\dagger})_j{}^i, \tag{4.9.4}$$

和

$$\mathcal{L} \;=\; \left[\Phi^{*i}(e^V)_i{}^j \Phi_j\right]_D. \tag{4.9.5}$$

对于这个超规范不变理论，矢量超场非阿贝尔规范变换则必须为

$$e^V \;\to\; e^{i\Omega^\dagger} e^V e^{-i\Omega}. \tag{4.9.6}$$

（这里手征超多重态表示指标隐藏了，V和Ω按照公式 (4.9.3)定义没有指标。）公式(4.9.6)可以利用巴卡-卡姆贝尔-汉斯朵夫公式展开。留下Ω和$\Omega^\dagger$的线性项，结果为

$$V \;\to\; V + i(\Omega^\dagger - \Omega) - \frac{i}{2}[V,\, \Omega + \Omega^\dagger] + i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[V, \left[V, \ldots \left[V,\, \Omega^\dagger - \Omega\right] \ldots\right]\right], \tag{4.9.7}$$

其中求和符号中的第k项是关于k个V矩阵对易子，B_{2k}是伯努利数，定义为

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n. \tag{4.9.8}$$

公式 (4.9.7)等价于

$$V^a \;\to\; V^a + i(\Omega^{a*} - \Omega^a) + g_a f^{abc} V^b (\Omega^{c*} + \Omega^c) - \frac{i}{3} g_a^2 f^{abc} f^{cde} V^b V^d (\Omega^{e*} - \Omega^e) + \ldots \tag{4.9.9}$$

其中利用到了公式 (4.9.3)和$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ 。这个超规范变换在特殊情况$\Omega^{a*} = \Omega^a$时就是通常的规范变换。

因为公式 (4.9.9)右边第二项与V^a无关，我们总可通过适当选择$\Omega^{a*}-\Omega^a$对超规范变换做维斯祖米诺规范，就和阿贝尔情况一样，其结果为

$$(V^a)_{\text{维祖规范}} \;=\; \theta^\dagger\overline{\sigma}^\mu\theta A^a_\mu+\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda^a+\theta\theta\theta^\dagger\lambda^{\dagger a}+\frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D^a. \tag{4.9.10}$$

做了超规范的维斯祖米诺规范后，我们仍然有自由度来做通常的规范变换。在维斯祖米诺规范中，拉氏量贡献 (4.9.5)和第3.4小节中找到的组分语言理论是一致的

$$\begin{aligned}\left[\Phi^{*i}(e^V)_i{}^j\Phi_j\right]_D \;=\;& F^{*i}F_i-\nabla_\mu\phi^{*i}\nabla^\mu\phi_i+i\psi^{\dagger i}\overline{\sigma}^\mu\nabla_\mu\psi_i-\sqrt{2}g_a(\phi^*T^a\psi)\lambda^a-\sqrt{2}g_a\lambda^\dagger(\psi^\dagger T^a\phi)\\ &+g_a(\phi^*T^a\phi)D^a,\end{aligned} \tag{4.9.11}$$

其中∇_μ是公式 (3.4.2)-(3.4.4)定义的规范协变导数。

要得到非阿贝尔矢量超场的动能项和自相互作用项，可以定义场强手征超场

$$\mathcal{W}_\alpha \;=\; -\frac{1}{4}\overline{DD}\left(e^{-V}D_\alpha e^V\right), \tag{4.9.12}$$

这实际上是阿贝尔情况的推广。利用公式 (4.9.6)我们可以看到场强的超规范变换为

$$\mathcal{W}_\alpha \;\;\to\;\; e^{i\Omega}\mathcal{W}_\alpha e^{-i\Omega}. \tag{4.9.13}$$

（证明过程用到了Ω手征，$\Omega^\dagger$反手征，因此$\overline{D}_{\dot\alpha}\Omega=0,\ D_\alpha\Omega^\dagger=0$的条件。）这就意味着$\mathrm{Tr}[W^\alpha W_\alpha]$是一个超规范不变的手征超场。公式 (4.9.12)括号中的项可以展开为

$$e^{-V}D_\alpha e^V \;=\; D_\alpha V-\frac{1}{2}[V,D_\alpha V]+\frac{1}{6}\left[V,[V,D_\alpha V]\right]+\ldots, \tag{4.9.14}$$

同样存在很多矩阵的对易子，只有前两项对维斯祖米诺规范有贡献。

公式 (4.9.12)定义的场强手征超场$\mathcal{W}_\alpha$是R表示的矩阵形式。我们可以把矩阵形式通过以下方法恢复到伴随表示的场强矢量超场$\mathcal{W}^a_\alpha$，$\mathcal{W}_\alpha$写为

$$\mathcal{W}_\alpha=2g_aT^a\mathcal{W}^a_\alpha, \tag{4.9.15}$$

由此可得

$$\mathcal{W}^a_\alpha \;=\; -\frac{1}{4}\overline{DD}\left(D_\alpha V^a-ig_af^{abc}V^bD_\alpha V^c+\ldots\right). \tag{4.9.16}$$

这一项已经清晰显示可以在维斯祖米诺规范下分析其组分，结果是

$$(\mathcal{W}^a_\alpha)_{\text{维祖规范}} \;=\; \lambda^a_\alpha+\theta_\alpha D^a+\frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F^a_{\mu\nu}+i\theta\theta(\sigma^\mu\nabla_\mu\lambda^{\dagger a})_\alpha, \tag{4.9.17}$$

其中$F^a_{\mu\nu}$就是公式 (3.3.4)的非阿贝尔场强，∇_μ就是通常的公式 (3.3.5)的规范协变导数。

规范超多重态场的动能和自相互作用可以从

$$\frac{1}{4k_a g_a^2}\mathrm{Tr}[\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha]_F \;=\; [\mathcal{W}^{a\alpha}\mathcal{W}^a_\alpha]_F, \tag{4.9.18}$$

得到，公式在超对称和超规范变换下都是不变的。这里生成元归一化约定为$\mathrm{Tr}[T^a T^b] = k_a\delta_{ab},$，其中$k_a$在单群表示时通常约定设置为$1/2$。利用维斯祖米诺规范公式 (4.9.17) 很容易分析公式(4.9.18)，其结果为

$$[\mathcal{W}^{a\alpha}\mathcal{W}^a_\alpha]_F \;=\; D^a D^a + 2i\lambda^a\sigma^\mu\nabla_\mu\lambda^{\dagger a} - \frac{1}{2}F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}. \tag{4.9.19}$$

因为公式 (4.9.19)是超规范不变的，相同的形式在维斯祖米诺规范之外也是适用的。

现在我们就可以写下超对称规范理论的一般可重整拉氏量（包括规范不变性允许的手征超多重态的超势。）

$$\mathcal{L} \;=\; \left(\frac{1}{4} - i\frac{g_a^2\Theta_a}{32\pi^2}\right)[\mathcal{W}^{a\alpha}\mathcal{W}^a_\alpha]_F + \mathrm{c.c.} + \left[\Phi^{*i}(e^{2g_a T^a V^a})_i{}^j\Phi_j\right]_D + \left([W(\Phi_i)]_F + \mathrm{c.c.}\right). \tag{4.9.20}$$

这里引入并定义Θ_a，一个CP破坏参数，它的功能是在拉氏量密度中引入一个全导数项

$$\mathcal{L}_{\Theta_a} \;=\; \frac{g_a^2\Theta_a}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}. \tag{4.9.21}$$

在非阿贝尔情况下，这一项可以因为拓扑非平庸的场的构形（瞬子）带来物理效应。对于具有整数缠绕数n的全局非平庸规范构形，规范单群的结果为$\int d^4x\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma} = 64\pi^2 n/g_a^2$，这样它对路径积分的贡献为$\exp(i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\Theta_a}) = e^{in\Theta_a}$。注意对于非阿贝尔规范群，法耶-伊利奥普罗斯项$-2\kappa[V^a]_D$是不允许的，因为它不是一个规范单态。

当超场由维斯祖米诺规范限制，超对称变换在超空间中不能线性实现，但是拉氏量是多项式。因此非多项式的超空间拉氏量看上去是超规范的工艺品。在维斯祖米诺规范下超对称变换也可以被实现，但是是非线性的，正如第3.3小节和第3.4小节所讨论的一样。

规范耦合常数g_a和CP破坏相角Θ_a通常合并为一个全纯耦合系数

$$\tau_a \;=\; \frac{1}{g_a^2} - i\frac{\Theta_a}{8\pi^2}. \tag{4.9.22}$$

（在其它的教材中，有许多不同的τ_a的归一化约定。）然后，把耦合系数g_a吸收到矢量和场强超场的归一化因子中，重新定义

$$\widehat{V}^a \;\equiv\; g_a V^a, \tag{4.9.23}$$

$$\widehat{\mathcal{W}}^a_\alpha \;\equiv\; g_a\mathcal{W}^a_\alpha \;=\; -\frac{1}{4}\overline{DD}\left(D_\alpha\widehat{V}^a - if^{abc}\widehat{V}^b D_\alpha\widehat{V}^c + \ldots\right), \tag{4.9.24}$$

拉氏量的规范部分写为

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{4}\left[\tau_a\widehat{\mathcal{W}}^{a\alpha}\widehat{\mathcal{W}}^a_\alpha\right]_F + \mathrm{c.c.} + \left[\Phi^{*i}(e^{2T^a\widehat{V}^a})_i{}^j\Phi_j\right]_D. \tag{4.9.25}$$

这样归化约定的好处在于当写$\widehat{V}^a$相关项时，规范耦合系数和Θ_a只在公式 (4.9.25) τ_a中出现。有时可以把全纯复耦合系数τ_a看作是手征超场，同时它的标量组分具有期望值。τ_a的F项组分的期望值可以给出规范超子质量，有时这在研究超对称明显软破缺的效果时是有用的。

4.10 不可重整超对称拉氏量

到现在为止我们只是讨论了可重整的超对称拉氏量。但是在低能有效理论中把重粒子积掉总是会剩下不可重整相互作用。此外，不管哪种真实的超对称理论扩充包含引力后得到的超引力理论在量子场论中都是不可重整的。幸运的是，那些不可重整相互作用总会因唯象的目的而可以忽略。这是因为相关耦合系数为质量负量纲，正比于$1/M_{\rm P}$（或者$1/\Lambda_{\rm UV}$，其中$\Lambda_{\rm UV}$是其它与新物理相关的截断能标。）这就意味着它们在能标E相关的可观测效应通常会被$E/M_{\rm P}$（或$E/\Lambda_{\rm UV}$）的幂次压低。对于$E \lesssim 1$TeV的能量，不可重整相互作用的物理效应通常因为太小以致于没有多大意思。

但是，仍然有一些理由需要我们在拉氏量中引入不可重整作用的贡献。首先，一些极其稀有的过程（像质子衰变）可能只有在最小超模型拉氏量中引入不可重整项才能描述；其次，有人可能会对理解极高能标物理感兴趣，此时相关的压低效应就不足以使不可重整项完全忽略。例如，极早期宇宙的研究就是这种情况，或者理解其它规范对称性如何破缺等；第三，不可重整项在理解超对称破缺怎样传递到最小超模型方面扮演重要角色；最后，有时在处理强耦合超对称规范理论时，利用不可重整有效理论是非常有用的，就像利用手征有效拉氏量来理解量子色动力学的强子物理一样。不幸的是，我们这里不能系统地讲解相关理论，而只是简述一些定义不可重整超对称拉氏量的关键元素。更多细节的处理和指导可以查阅参考文献 [16, 18, 20, 21, 23, 29, 30, 32, 34, 35, 47]。

一个含有手征和矢量超场的不可重整规范不变理论可以构造为

$$\mathcal{L} \;=\; \left[K(\Phi_i,\,\tilde{\Phi}^{*j})\right]_D + \left(\left[\frac{1}{4}f_{ab}(\Phi_i)\widehat{\mathcal{W}}^{a\alpha}\widehat{\mathcal{W}}^{b}_{\alpha} \,+\, W(\Phi_i)\right]_F + \text{c.c.}\right), \tag{4.10.1}$$

其中为了保持超规范不变，定义

$$\tilde{\Phi}^{*j} \equiv (\Phi^* e^V)^j, \tag{4.10.2}$$

和上面一样，$V = 2g_a T^a V^a = 2T^a \widehat{V}^a$，场强超场的帽号约定如同公式(4.9.24)。公式(4.10.1)依赖于三个超场函数的耦合。

- 超势W，我们已经在可重整超对称拉氏量中看到了它的特殊情况。更一般地，超势是把手征超场看作复变量的任意全纯函数，当然它必须是规范变换不变的，具有质量的三次方量纲。

- 科勒（Kähler）势K。与超势不同，科勒势是手征和反手征超场的函数，同时也包含超规范变换不变的矢量超场。它是实的，为质量平方量纲。在特殊的可重整理论中，我们没有明确讨论科勒势，因为在树图阶总是$K = \Phi_i \tilde{\Phi}^{i*}$。任何科勒势的手征（或反手征）超场的附加项都对作用量无贡献，这是因为手征超场的D项是一个时空全导数。

- *规范动能函数*$f_{ab}(\Phi_i)$。和超势一样，它自身是一个手征超场，也是一个把手征超场看作复变量的全纯函数。规范动能函数是无量纲的，a, b指标交换对称，同时a, b要遍历模型阿贝尔组分和单规范群的伴随表示指标。对于阿贝尔群的非阿贝尔组分，f_{ab}总是正比于δ_{ab}，但是如果存在有两个或者更多阿贝尔组分，场强超场的规范对称性（查看公式 (4.8.2)-(4.8.5)）允许动能项混合使得f_{ab}一般不与δ_{ab}正比。对于树图阶可重整超对称拉氏量这种特殊情况而言，f_{ab}与手征超场无关，只是等于$\delta_{ab}(1/g_a^2 - i\Theta_a/8\pi^2)$。（规范群有少于两个阿贝尔组分。）更一般地，$f_{ab}$包含规范超多重态和手征超多重态的不可重整耦合。

需要强调的是即使限制模型有手征和规范矢量超场，公式 (4.10.1)仍然不是最一般的不可重整超对称拉氏量。我们也可以引入手征、反手征、时空导数作用在超场上，由此像科勒势就被推广为可以与$D_\alpha\Phi_i$, $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi^{*i}$, $DD\Phi_i$, $\overline{DD}\Phi^{*i}$等相关。这样的项相比于那些没有导数的项在低能时通常会有更多的压低效应，这是因为手征超协变导数具有正质量量纲。我们下面将不讨论这些可能性，只是评论一下超规范不变是怎样保持的，一个手征超场的手征协变导数，$D_\alpha\Phi_i$不是规范协变的，除非它是单态；这里的"协变"指的是超对称变换，不是规范变换。但是，我们可以定义一个"规范协变手征协变"导数∇_α，它对一个手征超场Φ的作用定义为

$$\nabla_\alpha\Phi \equiv e^{-V}D_\alpha(e^V\Phi), \tag{4.10.3}$$

其中隐藏了表示指标i。根据公式 (4.9.6)，e^{-V}的超规范变换是

$$e^{-V} \to e^{i\Omega}e^{-V}e^{-i\Omega^\dagger}, \tag{4.10.4}$$

由此可得

$$e^{-V}D_\alpha(e^V\Phi) \to e^{i\Omega}e^{-V}e^{-i\Omega^\dagger}D_\alpha(e^{i\Omega^\dagger}e^V\Phi) = e^{i\Omega}e^{-V}D_\alpha(e^V\Phi), \tag{4.10.5}$$

等式成立的原因在于$\Omega^\dagger$是反手征，可以被D_α忽略。这就是超规范变换下正确的协变变换规则。所以利用$\nabla_\alpha\Phi_i$代替$D_\alpha\Phi_i$ 作为构造砖块，我们可以在显见超对称条件下，保持规范对称性。相似地。我们可定义以下构造砖块，

$$\overline{\nabla}_{\dot\alpha}\Phi^* \equiv \overline{D}_{\dot\alpha}(\Phi^*e^V)e^{-V}, \tag{4.10.6}$$

$$\nabla\nabla\Phi \equiv e^{-V}DD(e^V\Phi) \tag{4.10.7}$$

$$\overline{\nabla\nabla}\Phi^* \equiv \overline{DD}(\Phi^*e^V)e^{-V} \tag{4.10.8}$$

每一个都具有协变超规范变换规则。

回到公式 (4.10.1)定义的全局超对称不可重整理论，没有另增导数，拉氏量中来自超势的部分为

$$[W(\Phi_i)]_F = W^i F_i - \frac{1}{2} W^{ij}\psi_i\psi_j, \tag{4.10.9}$$

其中

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta \Phi_i}\Big|_{\Phi_i\to\phi_i}, \qquad W^{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j}\Big|_{\Phi_i\to\phi_i}, \tag{4.10.10}$$

在求导之后，这里的超场已经被替换为它们的标量组分。（对比公式 (3.2.6), (3.2.10), (3.2.14)和相关讨论。）积分掉辅助场F_i之后，标量势中来自于超势的部分为

$$V = W^i W^*_j (K^{-1})^j_i, \tag{4.10.11}$$

其中K^{-1}是科勒度规的逆矩阵：

$$K^i_j = \frac{\delta^2 K}{\delta\Phi_i\delta\tilde{\Phi}^{*j}}\Big|_{\Phi_i\to\phi_i,\,\tilde{\Phi}^{*i}\to\phi^{*i}}. \tag{4.10.12}$$

更一般地，积分掉辅助场之后的整个组分场拉氏量由函数W, K和f_{ab}及它们对手征超场的导数来决定。而剩余的手征超场要替换为它们的标量组分。完整形式的拉氏量就这样直接来分析，但是有一些复杂。在超引力中，还有更多的贡献，后文第7.6小节将讨论其中的一部分。

4.11 R对称性

一些超对称拉氏量具有一个全局$U(1)_R$对称性。一个连续的R对称性的定义特征是反对易坐标θ和$\theta^\dagger$ 在变换时分别具有$+1$和-1 的荷，即

$$\theta \;\to\; e^{i\alpha}\theta, \qquad \theta^\dagger \;\to\; e^{-i\alpha}\theta^\dagger \tag{4.11.1}$$

其中α是全局R变换参数。接下来可以得到

$$\hat{Q} \;\to\; e^{-i\alpha}\hat{Q}, \qquad \hat{Q}^\dagger \;\to\; e^{i\alpha}\hat{Q}^\dagger, \tag{4.11.2}$$

这就意味着超对称生成元只有$U(1)_R$荷$+1$和-1由此可知，它们与R对称性生成元不对易

$$[R, Q] = -Q, \qquad [R, Q^\dagger] = Q^\dagger \tag{4.11.3}$$

一个超场的不同组分也因此总是拥有不一样的R荷。

如果一个理论是R对称性不变的，每一个超场$S(x,\theta,\theta^\dagger)$都赋予了$R$荷，标记为$r_S$，由以下变换规则来定义

$$S(x,\,\theta,\,\theta^\dagger) \;\;\to\;\; e^{ir_S\alpha}S(x,\,e^{-i\alpha}\theta,\,e^{i\alpha}\theta^\dagger). \tag{4.11.4}$$

	θ_α	$\theta^\dagger_{\dot\alpha}$	$d^2\theta$	$\hat{Q}_\alpha$	D_α	$\mathcal{W}_\alpha$	A^μ	λ_α	D	W	ϕ	ψ_α	F_Φ
$U(1)_R$ 荷	$+1$	-1	-2	-1	-1	$+1$	0	$+1$	0	$+2$	r_Φ	$r_\Phi-1$	$r_\Phi-2$

表 4.1: 各种量的$U(1)_R$荷。

超场乘积的R荷是对每一个单独的R荷求和。对于一个有R荷r_Φ的手征超场，组分ϕ, ψ和F分别以R荷r_Φ, $r_\Phi-1$和$r_\Phi-2$来变换。

$$\phi \to e^{ir_\Phi\alpha}\phi, \qquad \psi \to e^{i(r_\Phi-1)\alpha}\psi, \qquad F \to e^{i(r_\Phi-2)\alpha}F. \tag{4.11.5}$$

Φ^*的组分带相反的R荷。

规范矢量超场总是不含有$U(1)_R$荷，因为它们是实的。相应地它们的组分R荷是非零的，在维斯祖米诺规范中变换为

$$A^\mu \to A^\mu, \qquad \lambda \to e^{i\alpha}\lambda, \qquad D \to D. \tag{4.11.6}$$

它们分别具有$U(1)_R$荷0, 1和0。因此超对称破缺时出现的马约拉纳质量项$\frac{1}{2}M_\lambda\lambda\lambda$ 也总是会破缺连续$U(1)_R$对称性。超空间积分测度$d^2\theta$和$d^2\theta^\dagger$和手征协变导数D_α 和$\overline{D}_{\dot\alpha}$分别带$U(1)_R$荷为$-2$, $+2$, -1和$+1$。同样规范场强超场$\mathcal{W}_\alpha$带$U(1)_R$荷$+1$。（表4.1列出了各种量的$U(1)_R$荷）不难检验所有上文的规范超场的超对称拉氏量项都自动地且是必须地具有R对称性，包括它们与手征超场的耦合。这对正则科勒势的贡献也是成立的。

但是，为了保持R对称性超场$W(\Phi_i)$必须带$U(1)_R$荷$+2$，同时这也不一定是自动的，而且经常并不能保持。一个简单的玩具例子，对于一个规范单态超场Φ，超势中允许的可重整的项为$W(\Phi) = L\Phi + \frac{M}{2}\Phi^2 + \frac{y}{6}\Phi^3$。如果要具有连续的$U(1)_R$对称性，那么我们只能留下其中的一项：只有$r_\Phi = 2$时$L$项才可以，只有$r_\Phi = 1$时$M$项才可以，只有$r_\Phi = 2/3$时$y$项才可以。最小超模型超势确定不能保持一个全局$U(1)_R$对称性，而是被马约拉纳规范超子质量项和其它超对称破缺效应带来了反常和破缺。

因为连续的R对称性与超对称不对易，同时考虑反常和超对称破缺效应之后最小超模型中也不能保持，有人也许会疑问为什么还要考虑这个R对称性呢。或许最重要的答案是一个全局超对称性自发破缺的模型需要$U(1)_R$ 这个角色，后文第7.3小节将讨论这一点。当然也可以以保持一个连续的、无反常的$U(1)_R$对称性的方式来扩充最小超模型粒子内容，但是付出的代价就是引入狄拉克规范超子质量和更多的希格斯场[55].

另外一种可能性是超势具有分立的Z_n R对称性，这可以通过把公式 (4.11.1)-(4.11.6) 的变换参数α限制为$2\pi/n$的整数倍来得到。所有场的Z_n R荷就是整数模n。但是要注意$n = 2$总是平庸的，任何Z_2 R对称性和相应通常的（非R对称性）Z_2对称性等价，此时每个超场的所有

组分做相同的变换。这是因为当α是π的整数倍时，θ和$\theta^\dagger$的变换就只是改变一下符号而已，这意味着费米场只是改变了一下相对于它们的玻色伙伴的符号。任何理论，任何拉氏量项的费米场的数目总是偶数，所以费米场多出的符号改变是没有效果的。

5 超对称软破缺相互作用

一个真实的唯象模型必须有超对称破缺。从理论的角度讲，如果超对称真的存在的话，我们希望它是一个严格对称性的自发破缺。换句话说，基础模型的拉氏量密度是超对称变换不变的，只是真空态变换改变。这样，超对称就在低能下隐藏起来了，就像标准模型电弱对称性在低能隐藏一样。

人们的确提出了许多自发破缺的超对称模型，我们将在第7节讨论其中一些模型的基本思想。这些模型总是会在高能标引入新粒子和相互作用来扩充最小超模型，而且也没有一个精确的如何构造理论的契约。然而，从具体实践的角度看，忽略自发破缺这件事，在有效的最小超模型拉氏量中引入明显破缺超对称的项，简单参数化模型是极其有用的。就像引言中所讨论的，为了能够在电弱能标和普朗克（或者其它非常大）能标之间自然地保持规范等级，超对称破缺应该是软的（正质量量纲）。这意味着没有无量纲的超对称破缺耦合。

一个一般理论拉氏量的可能的超对称软破缺项有

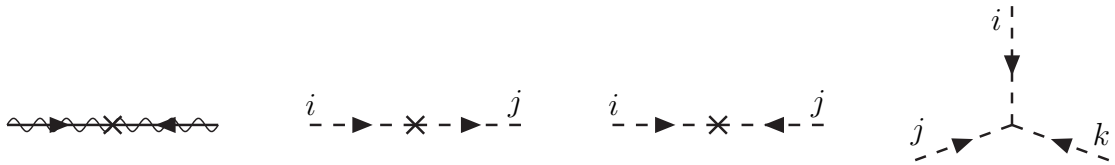
$$\mathcal{L}_{\rm soft} = -\left(\frac{1}{2}M_a\,\lambda^a\lambda^a + \frac{1}{6}a^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + t^i\phi_i\right) + \text{c.c.} - (m^2)^i_j\phi^{j*}\phi_i, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{maybe soft}} = -\frac{1}{2}c_i^{jk}\phi^{*i}\phi_j\phi_k + \text{c.c.} \tag{5.2}$$

它们由每个规范群的规范超子质量M_a，标量质量平方$(m^2)^j_i$，b^{ij}和标量立方耦合a^{ijk}和c_i^{jk}，以及“蝌蚪”耦合t^i组成。最后一项要求ϕ_i是一个规范单态，所以最小超模型中没有这一项。有人也许会疑问为什么没有引入手征超多重态费米子可能的软破缺项，如$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m^{ij}\psi_i\psi_j + \text{c.c.}$？引入这样的项是多余的，它们可以由超势和$(m^2)^i_j$和$c_i^{jk}$的重新定义而被吸收掉。

公式 (5.1)$\mathcal{L}_{\rm soft}$给出的超对称软破缺项可以严格地证明对标量粒子质量的量子修正在微扰论的所有阶的确无二次发散[56]。当引入非全纯的标量立方耦合$\mathcal{L}_{\text{maybe soft}}$后，情况就变得微妙许多。如果理论中手征超多重态是所有规范对称性的单态，那非零c_i^{jk}项会带来二次发散，虽然它的形式上是软的。现在最小超模型中没有规范单态手征超多重态，所以也就没有这个限制了。而且c_i^{jk}项的可能性总是被忽略。真实的原因是很难构造一个c_i^{jk}项不可忽略的超对称自发破缺模型。对于特殊情况，理论中手征超场是规范单态或者是规范群单因子的伴随表示，那将还有由相应的费米子ψ_a和规范超子组成狄拉克质量项[57]-[62]:

$$\mathcal{L} = -M^a_{\rm Dirac}\lambda^a\psi_a + \text{c.c.} \tag{5.3}$$



(a) (b) (c) (d)

图 5.1: 超对称软破缺项：(a) 规范超子质量M_a；(b) 非全纯的标量质量平方$(m^2)^i_j$；(c) 全纯的标量质量平方b^{ij}，(d) 标量立方耦合a^{ijk}。

可以是超对称软破缺项。这是与最少场组成的最小超模型无关的，因为最小超模型没有手征超多重态构成伴随表示。因此我们通常取公式(5.1)作为超对称软破缺拉氏量的一般形式。要了解一些有趣的扩展，参考文献 [57]-[67]。

$\mathcal{L}_{\rm soft}$的各项的确破缺了超对称，这是因为它们只引入了标量和规范超子，并没有引入对应的超伙伴。事实上，$\mathcal{L}_{\rm soft}$的软破缺项可以给出所有标量和规范超子质量，既使是规范玻色子和手征超多重态的费米子零质量（或者相对很轻）。规范超子质量M_a总是规范对称性所允许的。$(m^2)^i_j$的i, j指标使得ϕ_i, ϕ^{j*}相互为对方规范对称变换的复共轭，因此也是允许的。特别的，$i = j$时当然也成立，所以如果超对称破缺了，每一个标量都可合理地由该项而获得质量。剩下的那些项可以或者不可以被对称性所允许。a^{ijk}, b^{ij}, 和t^i项取超势中y^{ijk}, M^{ij} 和L^i项相同的形式（对比公式 (5.1)和公式 (3.2.15)或公式 (3.5.1)），这样当且仅当相应的超势项被规范对称性允许时，a^{ijk}, b^{ij}, 和t^i项也是被允许的。

图 5.1中列出了公式 (5.1)所允许的软破缺项的相应的相互作用费曼图。图 5.1a,c,d的每个相互作用都存在一个箭头反向的图形对应于拉氏量中相关的复共轭项。在下一节中我们将在特殊情况最小超模型中应用这些一般结果。

6 最小超对称标准模型

在第3节和第5节，我们得到了构造一个一般的软破缺超对称理论的秘诀。现在就可以把这些一般结果应用到最小超模型了。最小超模型的粒子内容已经在引言中描述了。在这一节我们将通过构造相应的超势和超对称软破缺项来完成整个模型。

6.1 超势和超对称相互作用

最小超模型超势为

$$W_{\text{最小超模型}} = \overline{u}\mathbf{y_u}QH_u - \overline{d}\mathbf{y_d}QH_d - \overline{e}\mathbf{y_e}LH_d + \mu H_u H_d\,. \tag{6.1.1}$$

这里H_u, H_d, Q, L, $\overline{u}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$是手征超场，对应的就是表1.1所列出的手征超多重态。（就像第3节的做法，它们同样可以被认为是相应的标量场，这里为简捷起见，我们去掉了Q, L, $\overline{u}$,

$\overline{d}$, $\overline{e}$上面的波浪线。）无量纲的汤川耦合参数$\mathbf{y_u}, \mathbf{y_d}, \mathbf{y_e}$是代空间$3 \times 3$ 矩阵。公式 (6.1.1)的所有规范（$SU(3)_C$颜色和$SU(2)_L$弱同位旋）和代指标都被隐藏了。“μ项”是个传统叫法，可以写成$\mu(H_u)_\alpha(H_d)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$，其中$\epsilon^{\alpha\beta}$用来连接$SU(2)_L$弱同位旋指标$\alpha, \beta = 1, 2$，这样可以保持规范不变。相似地，$\overline{u}\mathbf{y_u}QH_u$项可以写成$\overline{u}^{ia}\left(\mathbf{y_u}\right)_i{}^j Q_{j\alpha a}\left(H_u\right)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$ ，其中$i = 1, 2, 3$是代指标，$a = 1, 2, 3$是颜色指标，a在下（上）指标表示$SU(3)_C$的表示$\mathbf{3}(\overline{\mathbf{3}})$。

公式 (6.1.1)的μ项是标准模型希格斯的超对称版本。它是特殊的，因为$H_u^*H_u$或$H_d^*H_d$在超势中是被禁戒的。正如第3.2小节所示，超势是以手征超场（或者等价的标量场）为复变量的全纯函数。从公式 (6.1.1)形式中，我们也可以看到为什么H_u 和H_d都是需要的。它们可以给出汤川耦合，进而给出所有夸克和轻子的质量。因为超势必须是全纯的，汤川耦合项$\overline{u}QH_u$不能被替换为类似$\overline{u}QH_d^*$的形式。相似地，$\overline{d}QH_d$和$\overline{e}LH_d$项也不能被替换为$\overline{d}QH_u^*$和$\overline{e}LH_u^*$等。而相似的汤川项在一般非超对称的双希格斯二重态模型是允许的，但却被超对称结构所禁戒。所以即使不引入引言中提到的规范反常抵消，H_u和H_d也都是需要的。

中性H_u和H_d的标量组分得到真空期望值以后，汤川矩阵决定了通常的夸克和轻子的质量和CKM混合。因为标准模型的顶夸克，底夸克和陶轻子是最重的费米子，所以把每个$\mathbf{y_u}$, $\mathbf{y_d}$和$\mathbf{y_e}$ 矩阵做近似只留下它们的$(3, 3)$代分量

$$\mathbf{y_u} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y_d} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y_e} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix}. \tag{6.1.2}$$

在这个极限下，只有第三代和希格斯场贡献了最小超模型的超势。把超势写成$SU(2)_L$弱同位旋分量的形式是有益的，结果为

$$\begin{aligned} W_{\text{最小超模型}} \;\approx\; & y_t(\overline{t}tH_u^0 - \overline{t}bH_u^+) - y_b(\overline{b}tH_d^- - \overline{b}bH_d^0) - y_\tau(\overline{\tau}\nu_\tau H_d^- - \overline{\tau}\tau H_d^0) \\ & +\mu(H_u^+H_d^- - H_u^0H_d^0). \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

括号中的负号就是因为把$SU(2)_L$指标连接起来的反对称张量$\epsilon^{\alpha\beta}$。其它的负号选择（作为约定）的原因是$y_t\overline{t}tH_u^0$, $y_b\overline{b}bH_d^0$和$y_\tau\overline{\tau}\tau H_d^0$在$H_u^0$, H_d^0 获得真空期望值后，这些项变成了顶夸克，底夸克和陶轻子质量，在公式 (6.1.3)中这些项前面是一个正号。

因为汤川耦合y^{ijk}在一般超对称理论中i, j, k三个指标必须交换对称，所以$\mathbf{y_u}$, $\mathbf{y_d}$ 和$\mathbf{y_e}$不仅带来了标准模型的希格斯-夸克-夸克和希格斯-轻子- 轻子耦合，同时也带来了标夸克-希格斯超子-夸克和标轻子-希格斯超子-轻子相互作用。为了展示这一点，图 6.1a,b,c显示了一些和顶夸克汤川耦合系数y_t相关的相互作用。 它们来自于公式 (6.1.3)的第一项。为了更普遍使用，我们把t_L和$t_R^\dagger$替换为他们的同义符号t 和$\overline{t}$（查看第2节快结束部分的讨论）。在图 6.1b中，我们得到了左手标顶夸克与中性希格斯超子和右手顶夸克的耦合；而图 6.1c则是右手反标顶夸克场（依不同人口味被称为$\widetilde{\overline{t}}$ 或$\widetilde{t}_R^*$）与$\widetilde{H}_u^0$和t_L的耦合。对于这三个相互作用。每个都有一个做$H_u^0 \to H_u^+$ 和$t_L \to -b_L$（带波浪线的也可以）替换的图形，对应了公式 (6.1.3)第一项的第

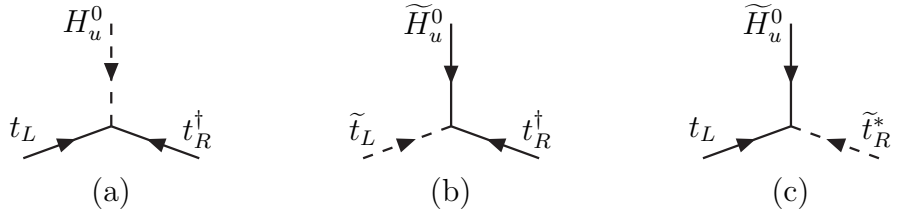


图 6.1: 顶夸克汤川耦合(a) 以及它的“超对称化” (b), (c), 全部具有强度 y_t。

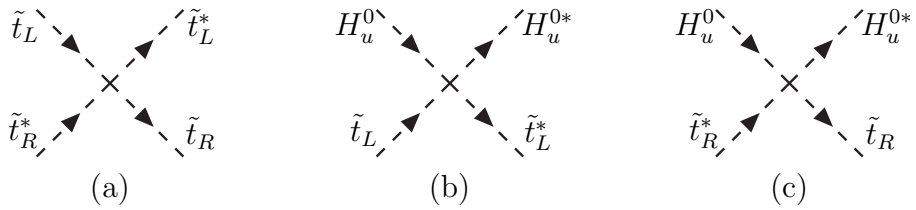


图 6.2: 一些具有强度正比与y_t^2的(标量)^4 相互作用。

二部分。所有这些相互作用都因超对称而要求有相同的强度y_t。这些耦合系数是无量纲的，在引入超对称软破缺之后它们只能得到有限（而且很小）的辐射修正，所以这些相互作用强度也是软破缺超对称的预言。记住一点，图 6.1a,b,c每个图可以由其它的任何一个图把图中两个粒子修改为相应的超伙伴而得到。

从图形 3.1c或者公式 (3.2.18)最后一项可知，还存在有标量四次方相互作用，强度正比于y_t^2，其中的三个展示在图 6.2中。 利用公式 (3.2.18)和公式 (6.1.3)，我们可以看到还有另外的五个，每个顶角可以通过做$\widetilde{t}_L \to \widetilde{b}_L$和 / 或$H_u^0 \to H_u^+$ 替换来得到。这显示了无比经济的超对称理论，很多相互作用都被单个参数所决定。通过类似的办法可知，超势 (6.1.1)中其它的夸克和轻子的汤川耦合，不只带来了希格斯-夸克-夸克和希格斯-轻子-轻子等通常的标准模型的拉氏量项，也带来了标夸克- 希格斯超子- 夸克和标轻子-希格斯超子-轻子项，还有标量四次方耦合（（标夸克）^{4}，（标轻子）^{4}，（标夸克）^{2}（标轻子）^{2}，（标夸克）^{2}（希格斯）^{2}和（标轻子）^{2}（希格斯）^{2}等）。如果需要，它们都可以由上面所列的汤川耦合矩阵项得到。

然而，超势决定的无量纲耦合通常不是唯象学最感兴趣的。这是因为我们已经知道除了那些第三代（顶夸克，底夸克和陶轻子），汤川耦合是非常小的。相反地，最小超模型超粒子的产生和衰变典型地主要由超对称规范耦合相互作用强度所决定，在第9和10节我们将研究这些过程的更多细节。标准模型规范玻色子（光子，$W^\pm$, Z^0和胶子）与最小超模型粒子的耦合完全由拉氏量中动能项的规范不变性所决定。规范超子也和（标夸克，夸克），（标轻子，轻子）以及（希格斯，希格斯超子）对儿耦合，这些一般情况展示在图 3.3g,h和公式 (3.4.9)第二行前两项中。例如，每个标夸克-夸克- 胶超子耦合系数为$\sqrt{2}g_3(\tilde{q}T^a q\tilde{g} + \text{c.c.})$，其中$T^a = \lambda^a/2$ $(a = 1 \ldots 8)$是$SU(3)_C$的生成元矩阵。这个相互作用的费曼图展示在图 6.3a。图 6.3b,c展示了相似的（标夸克，夸克），（轻子，标轻子）和（希格斯，希格斯超子）对

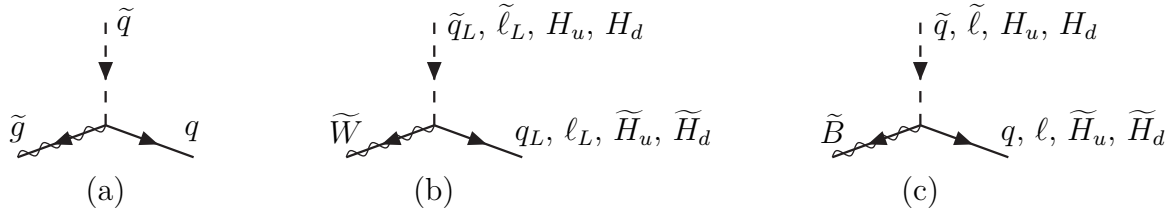


图 6.3: 规范超子、W超子、和B超子与最小超模型（标量，费米子）对的耦合。

与W超子和B超子的耦合，相应的耦合强度分别正比于电弱规范耦合系数g和g'。对于每一个图都存在一个把所有剪头反向的图。注意W超子只与左手标夸克和标轻子耦合，（轻子，标轻子）和（希格斯，希格斯超子）对儿当然不与胶超子有耦合。B超子与每个（标量，费米子）对儿的耦合也正比于表 1.1所列出的弱超荷Y。图 6.3展示的相互作用给出了，当运动学上允许时的，例如$\widetilde{q} \to q\widetilde{g}$、$\widetilde{q} \to \widetilde{W}q'$和$\widetilde{q} \to \widetilde{B}q$等衰变。但是存在一个混乱就是$\widetilde{W}$ 和$\widetilde{B}$ 态不是质量本征态，在第8.2小节我们将看到，这是因为电弱对称性破缺带来的劈裂和混合。

根据公式 (3.4.12)的最后一项，像图 3.3i所展示的，最小超模型中存在的许多标量四次方相互作用有规范不变性和超对称性。其中标量势中就有（希格斯）$)^4$ 项正比于g^2和g'^2。标准模型希格斯势，公式 (1.1)，最后一项在最小超模型中有很多直接推广。在第8.1小节讨论最小超模型希格斯势时刚好有机会进一步明确这些推广。

最小超模型中超对称部分的有量纲的耦合全部依赖于μ，利用公式 (3.2.19)的一般结果，μ提供了希格斯超子费米子质量项

$$-\mathcal{L}_{\text{希格斯超子质量}} = \mu(\widetilde{H}_u^+\widetilde{H}_d^- - \widetilde{H}_u^0\widetilde{H}_d^0) + \text{c.c.}, \tag{6.1.4}$$

以及标量势中希格斯质量平方项

$$-\mathcal{L}_{\text{超对称希格斯质量}} = |\mu|^2(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 + |H_d^0|^2 + |H_d^-|^2). \tag{6.1.5}$$

因为公式 (6.1.5)非负，最低点在$H_u^0 = H_d^0 = 0$，希格斯标量势中不引入一个负的超对称软破缺质量平方项的话，我们将不能理解电弱对称性破缺。因此只有等到我们引入最小超模型软破缺项之后才能对希格斯标量势有明确的处理。但是，现在我们已经看到了一个难题，为了允许希格斯真空期望值在174 GeV量级，同时$|\mu|^2$和还有写下的负的软质量平方项之间不存在太大的抵消，μ应该大体在10^2或10^3 GeV的量级。但是为什么相比于，比如$|\mu|^2$会这么小？特别是为什么它大体应该和m_{soft}^2在同一量级？最小超模型的标量势看上去依赖于两类概念上完全不同的有量纲参数，即超对称保持参数μ和超对称软破缺质量参数。已经测得的电弱对称性破缺能标的数值意味着：如果不存在大的抵消的话，这两类明显无关的质量标度应该在100 GeV 量级左右。这个难题被称为“μ问题”。有一些解决问题的办法，一般是把最小超模型做较复杂的扩充。这些工作大体上走了同样的一条路：μ项被要求或者假设在对称性破缺之前不存在，然后一些新场获得真空期望值后就出现了。这些真空期望值由依赖于超对称软破缺势

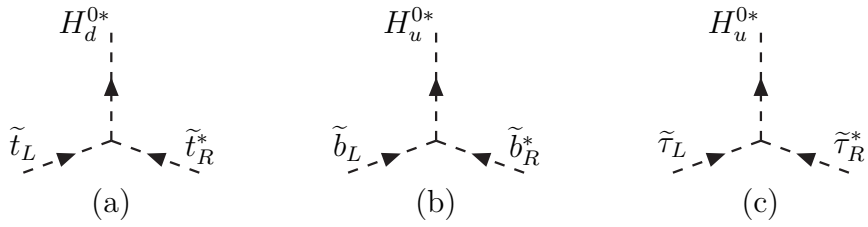


图 6.4: 一些正比与$\mu^* y_t$, $\mu^* y_b$, 和$\mu^* y_\tau$超对称(标量)^3 耦合，当H_u^0和H_d^0获得真空期望值，这些耦合贡献：(a) $\widetilde{t}_L, \widetilde{t}_R$ 混合，(b) $\widetilde{b}_L, \widetilde{b}_R$ 混合，和(c) $\widetilde{\tau}_L, \widetilde{\tau}_R$混合。

的最低点来决定。通过这个方法，有效的μ项不再在概念上与超对称破缺机制存在不同。如果能解释为什么$m_{\rm soft} \ll M_{\rm P}$，我们也就可以理解为什么$\mu$有相同的量级。在第11.3和11.4小节我们将学习三个这样的机制：次最小超对称标准模型，金-尼尔斯（Kim-Nilles）机制[68]和吉尔戴斯-马西洛（Giudice-Masiero）机制[69]。文献 [70]提出了另外一种基于圈图效应的解决方法。然而，从最小超模型的观点看，我们可以仅仅把μ看作是独立参数，不用承担什么特殊的机制。

超势 (6.1.1)中μ项和汤川耦合联立给出了（标量）^{3}（查看公式 (3.2.18)右边第二和第三项）的形式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{超对称(标量)}^3} &= \mu^*(\widetilde{\overline{u}}\mathbf{y_u}\widetilde{u}H_d^{0*} + \widetilde{\overline{d}}\mathbf{y_d}\widetilde{d}H_u^{0*} + \widetilde{\overline{e}}\mathbf{y_e}\widetilde{e}H_u^{0*} \\ &\quad + \widetilde{\overline{u}}\mathbf{y_u}\widetilde{d}H_d^{-*} + \widetilde{\overline{d}}\mathbf{y_d}\widetilde{u}H_u^{+*} + \widetilde{\overline{e}}\mathbf{y_e}\widetilde{\nu}H_u^{+*}) + \text{c.c.} \qquad (6.1.6)\end{aligned}$$

图 6.4展示了其中的一些耦合， 分别正比于$\mu^* y_t$, $\mu^* y_b$和$\mu^* y_\tau$。第8.4小节我们将看到它们在确定标顶夸克，标底夸克和标陶轻子混合的时候扮演重要角色。

6.2 R字称（也被称为物质字称）及其应用

所谓的最小超势 (6.1.1)意味着其形式已足以提供唯象上可行的模型。然而，其中的手征超场还可以写下其它的规范不变和全纯的形式，但是这些项都没有引入到最小超模型中，这是因为它们会破坏重子数(B)或者全轻子数(L)。除了公式 (6.1.1)的规范不变和可重整项外，最一般的超势中还可以有

$$W_{\Delta\text{L}=1} = \frac{1}{2}\lambda^{ijk} L_i L_j \overline{e}_k + \lambda'^{ijk} L_i Q_j \overline{d}_k + \mu'^i L_i H_u \qquad (6.2.1)$$

$$W_{\Delta\text{B}=1} = \frac{1}{2}\lambda''^{ijk} \overline{u}_i \overline{d}_j \overline{d}_k \qquad (6.2.2)$$

其中恢复了代指标$i = 1, 2, 3$。手征超多重态中重子数为Q_i 的B $= +1/3$；$\overline{u}_i, \overline{d}_i$的B $= -1/3$；其它所有超多重态B $= 0$。全轻子数分配为L_i的L $= +1$，$\overline{e}_i$的L $= -1$，其它所有超多重态L $= 0$。因此公式 (6.2.1)的相关项破坏一个单位的全轻子数（包括单个轻子味道），公式 (6.2.2)相关项破坏一个单位的重子数。

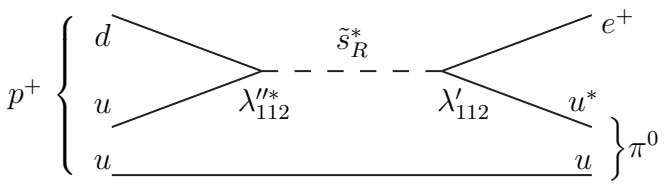


图 6.5: 如果R宇称同时被$\Delta B = 1$和$\Delta L = 1$相互作用破坏，标夸克可以带来灾难性的快速质子衰变。这个例子由一个标奇异（或者底）夸克传递的$p \to e^+\pi^0$过程。

这些可能存在的项看上去是非常讨厌的，因为实验上还没有发现相关B和L破坏的过程。最明确的实验限制来自于没有发现的质子衰变过程，该过程会破坏一个单位的B和L，如果λ'和λ''耦合都存在且没有压低，质子寿命将会非常短。例如，像图 6.5 † 所示的其中一个费曼图会带来$p^+ \to e^+\pi^0$（如图），或者$\mu^+\pi^0$，$\bar{\nu}\pi^+$，$\bar{\nu}K^+$等。依赖于λ' 和λ''的组分哪个最大‡。同样t道标夸克交换图也可以带来e^+K^0, μ^+K^0, $\nu\pi^+$, 或者νK^+等末态，最后两个末态依赖于左右手标夸克的混合。例如，基于量纲分析做粗略估计

$$\Gamma_{p\to e^+\pi^0} \sim m_{\text{质子}}^5 \sum_{i=2,3} |\lambda'^{11i}\lambda''^{11i}|^2/m_{\tilde{d}_i}^4, \tag{6.2.3}$$

如果耦合系数在1的量级，标夸克在1TeV的量级，质子寿命在秒的小数点的量级。相反地，实验得到的质子向轻子+介子的衰变时间大于10^{32}年。因此λ'^{ijk}或λ''^{11k}至少有一个对其每个指标$i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ k = 2, 3$必须极其微小。还有很多其它过程也会给轻子和重子数[71, 72]破坏以很强的限制。

人们可以尝试把B和L守恒作为最小超模型的假设。但是，相对于标准模型情况这明显是一个退步，因为标准模型中这些量子数的守恒不是一个假设，而是一个由于没有可重整的破坏B或L的拉氏量的令人非常愉悦"巧合"结果。此外，把B和L作为自然界基础的对称性是存在一个非常一般的困难，因为研究表明它们由一些非微扰效应而必须破坏[73]（即使这些效应对通常能量的实验来说，计算结果完全可以忽略）。因此人们在最小超模型中加入了新的对称性来禁戒可重整超势中破坏B和L的项，同时又允许公式 (6.1.1)的那些好的项。这个新对称性被称为"R宇称"[11]或者等价地"物质宇称"[74]。

物质宇称由理论中每个粒子的守恒量子数的乘积来定义

$$P_M = (-1)^{3(\text{B}-\text{L})} \tag{6.2.4}$$

这样夸克和轻子超多重态$P_M = -1$，希格斯超多重态H_u，H_d，$P_M = +1$。规范玻色子和规范超子当然不带有重子数或轻子数，所以它们的物质宇称$P_M = +1$ 。要强制加入的对称性原

†在这个图形以及下文其它图形中，简单起见传播子上的箭头都省略掉了，同时省去的还有外线费米子的物理态标签，而不是旋量指标。

‡λ''后两个味道指标必须交换反对称，因为颜色指标是以反对称方式合并的。这是为什么图 6.5所示的对于质子中u, d来说，标夸克可以是$\tilde{s}$ 或者$\tilde{b}$，但不是$\tilde{d}$的原因。

则是只有候选项中所有的场P_M的乘积等于1 才是拉氏量（或超势）所允许的。很容易看出来公式 (6.2.1)、(6.2.2) 中每一项都是被禁戒的，而公式 (6.1.1)的好的且必需的项原则上是允许的。这个分立的对称与超对称对易，一个给定的超多重态中的所有成员都有相同的宇称。物质宇称的优势在于它在原则上可以精确和基础的对称性，而B和L则不是，因为B和L会被非微扰效应所破坏。所以即使最小超模型中物质宇称是守恒的，我们仍然可以期望由于拉氏量的不可重整项模型的重子数和全轻子数会有些许破坏。但是在标准的宇称守恒假设下，最小超模型中是没有破坏B和L的可重整相互作用。

通常物质宇称又会按照R宇称来改造，每个粒子定义为

$$P_R = (-1)^{3(\mathrm{B}-\mathrm{L})+2s} \tag{6.2.5}$$

其中s是一个粒子的自旋。现在，物质宇称守恒和R宇称守恒精确地等价了，这是因为角动量守恒的理论中任何一个相互作用顶角中的粒子$(-1)^{2s}$的乘积总是等于+1。但是在同一个超多重态中的粒子不再有相同的R对称性。一般地，在同一个超多重态中具有不同变换性质的对称性称为R对称性，它与超对称不对易。在一些构造模型的研究中总会出现在4.11节所定义的连续的$U(1)$ R对称性。不要与这里的R宇称混淆了。R宇称是一个分立的Z_2 对称性。事实上，物质宇称版的R宇称已经清晰地表明了它真地没有本征的“R”；换句话说它秘密地和超对称对易。所以名字取得有些不尽人意。同时唯象上R宇称的分配是非常有用的。因为所有的标准模型粒子和希格斯玻色子都是偶R宇称（$P_R = +1$），而所有的标夸克，标轻子，规范超子和希格斯超子都是奇R宇称（$P_R = -1$）。

奇R宇称粒子被称为“超对称粒子”或者简称为“超粒子”，他们带上波浪线以示区别（查看表1.1和1.2）。如果R宇称严格守恒，超粒子和$P_R = +1$粒子之间就没有混合。此外，理论中每个相互作用顶角中$P_R = -1$超粒子数目必须为偶数。这会带来三个非常重要的唯象结果：

- 最轻的$P_R = -1$超粒子，被称为“最轻超对称粒子”或者LSP，必须是绝对稳定的。如果LSP是电中性的，它和通常粒子之间只能有弱作用，因此可以作为宇宙学所要求的非重子暗物质的绝佳候选者[75]。

- 除了LSP外的所有超衰变最终产物中必须含有奇数个LSP（通常就一个）。

- 对撞机实验中，超粒子只能以偶数个数产生（通常一次产生两个）。

我们定义最小超模型保持R宇称或者等价地保持物质宇称。虽然这个决定看上去有很好的唯象学上的动机，因为质子衰变限制和LSP提供了很好的暗物质候选者，但是从理论的角度看有点人为矫作。总之，如果不要求物质宇称守恒，最小超模型就不会承受任何内在的不和谐。更进一步说，标准模型的分立对称性（通常的P宇称，电荷共轭C宇称和时间反演T宇

称等）都不是严格守恒的，人们会公平地问为什么物质宇称要严格守恒？幸运的是，把物质宇称看作一个严格守恒的分立对称性是明智的。一般地，如果能够满足反常相消条件（很像连续的规范对称性），严格守恒的，或者"规范"的分立对称性是可以存在的。一个特别吸引人的方法就是，如果B−L是一个在高能自发破缺的连续对称性的话，严格的分立对称性就可以存在。一个连续的$U(1)_{\rm B-L}$对称性禁戒了可重整的破坏B和L的项[78, 79]，但是规范对称性必须是破缺的，因为没有看到相应的无质量规范玻色子。然而，如果$U(1)_{\rm B-L}$规范对称性只是由带偶数3(B−L)值的标量真空期望值（或者其它参数）所破缺的话，P_M将做为严格守恒的剩余分立子群而自动存活下来。有很多最小超模型的扩充就是按照这个方法来保证R宇称的严格守恒（举例请查阅文献[79, 80]）。

当然可以不把规范分立对称性的严格守恒归之于一个潜在的连续规范对称性，而归于一些比如在弦论中可以发生的其它结构。R宇称破缺也是可能的，或者被一些其它的分立对称性替换。在第11.1小节我们将简单考虑这些最小超模型的变种。

6.3 最小超模型的软破缺

要完成最小超模型，我们需要明确超对称软破缺项。在第5节，我们学习了任意超对称理论中怎样写这些项的一般形式。应用到最小超模型，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\rm soft}^{\text{最小超模型}} \;=\; & -\frac{1}{2}\left(M_3\widetilde{g}\widetilde{g} + M_2\widetilde{W}\widetilde{W} + M_1\widetilde{B}\widetilde{B} + \text{c.c.}\right) \\
& -\left(\widetilde{\overline{u}}\,\mathbf{a_u}\,\widetilde{Q}H_u - \widetilde{\overline{d}}\,\mathbf{a_d}\,\widetilde{Q}H_d - \widetilde{\overline{e}}\,\mathbf{a_e}\,\widetilde{L}H_d + \text{c.c.}\right) \\
& -\widetilde{Q}^\dagger\,\mathbf{m_Q^2}\,\widetilde{Q} - \widetilde{L}^\dagger\,\mathbf{m_L^2}\,\widetilde{L} - \widetilde{\overline{u}}\,\mathbf{m_{\overline{u}}^2}\,\widetilde{\overline{u}}^\dagger - \widetilde{\overline{d}}\,\mathbf{m_{\overline{d}}^2}\,\widetilde{\overline{d}}^\dagger - \widetilde{\overline{e}}\,\mathbf{m_{\overline{e}}^2}\,\widetilde{\overline{e}}^\dagger \\
& - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (bH_uH_d + \text{c.c.})\,. \qquad (6.3.1)
\end{aligned}$$

公式中M_3, M_2和M_1分别是胶超子，W超子和B超子的质量项。这里以及从此以后，我们都将隐藏W超子和胶超子场的伴随表示规范指标，以及手征超多重态场的规范指标。公式 (6.3.1)第二行含有（标量）[3]耦合（公式(5.1)a^{ijk}类型）。每个$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$, $\mathbf{a_e}$都是代空间3×3复矩阵，为质量量纲。它们和超势的汤川耦合一对一相互对应。公式 (6.3.1)的第三行由标夸克和标轻子的质量项，即公式 (5.1)的$(m^2)_i^j$类型项组成。每个$\mathbf{m_Q^2}$, $\mathbf{m_{\overline{u}}^2}$, $\mathbf{m_{\overline{d}}^2}$, $\mathbf{m_L^2}$, $\mathbf{m_{\overline{e}}^2}$ 都是代空间3×3矩阵，可以有复数矩阵元，但是它们必须是厄米的，这样才能保证拉氏量是实的。（为了避免混乱，$\mathbf{m_Q^2}$项中$\mathbf{Q}$等都去掉了波浪线。）最后，公式 (6.3.1)的最后一行是超对称破缺贡献希格斯势：$m_{H_u}^2$、$m_{H_d}^2$就是$(m^2)_i^j$ 类型的项，而b是最小超模型唯一可以存在的，公式 (5.1)中b^{ij}类型的质量平方量纲的项。就像引言中所讨论的，我们期望

$$M_1,\, M_2,\, M_3,\, \mathbf{a_u},\, \mathbf{a_d},\, \mathbf{a_e} \;\sim\; m_{\rm soft}, \qquad (6.3.2)$$

$$\mathbf{m_Q^2},\, \mathbf{m_L^2},\, \mathbf{m_{\overline{u}}^2},\, \mathbf{m_{\overline{d}}^2},\, \mathbf{m_{\overline{e}}^2},\, m_{H_u}^2,\, m_{H_d}^2,\, b \;\sim\; m_{\rm soft}^2, \qquad (6.3.3)$$

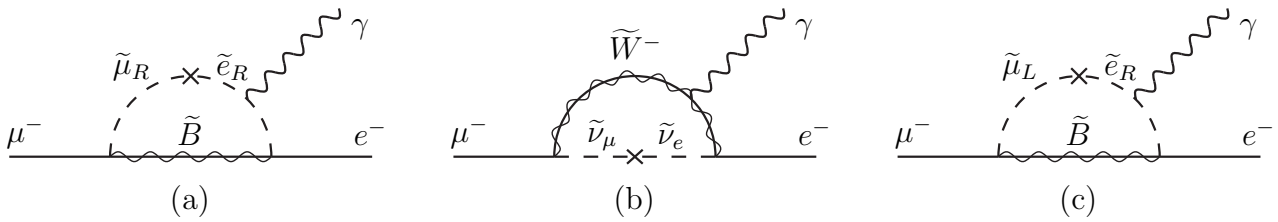


图 6.6: 拥有轻子数破坏超对称软破缺参数（显示为×）模型的一些贡献$\mu^- \to e^-\gamma$过程的图形，图(a), (b), 和(c) 分别贡献对非对角元$\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}}$, $\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{L}}$, 和$\mathbf{a}_{\mathbf{e}}$的限制。

的典型质量标度$m_{\rm soft}$不会远大于10^3 GeV。公式 (5.1)就是最小超模型在保持规范对称性和物质宇称守恒前提下最一般的超对称软破缺拉氏量。

不像拉氏量的超对称保持部分，上面的$\mathcal{L}^{\text{最小超模型}}_{\rm soft}$引入了许多通常标准模型所没有的新参数。仔细数一下[81]可知共有105个质量、不能通过重新定义夸克和轻子超多重态来旋转掉的相位和混合角度、以及通常标准模型没有对应物的项。因此，原则上，超对称破缺（与超对称自身相反地）在拉氏量中引入了巨大的任意性。

6.4 构造原理的启示

幸运的是，现在已经有了非常好的实验证据表明，存在一些非常强的组织原则必须主导超对称软破缺拉氏量。这是因为公式 (6.3.1)中大多数新参数带来了味道混合或者CP破坏过程。这类过程受到了实验的严格限制。[82]-[107].

例如，假设$\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}}$在标量轻子基$(\tilde{e}_R, \tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R)$中是非对角的，$(\tilde{e}_R, \tilde{\mu}_R, \tilde{\tau}_R)$的超伙伴是标准模型$e, \mu, \tau$右手粒子的质量本征态。在这种情况下，标轻子之间相互混合，即使在一些标轻子只是虚粒子的过程中，单轻子数就不守恒了。这种可能性特别强烈的限制来自于$\mu \to e\gamma$过程的实验测量限，$\mu \to e\gamma$可以由图 6.6a 所示的一圈图生成。图中标轻子线上"×"号表示$\mathcal{L}^{\text{最小超模型}}_{\rm soft}$中$-(\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}})_{21}\tilde{\mu}^*_R\tilde{e}_R$的插入，而标轻子-$B$超子顶角由超荷规范耦合（查看图 3.3g,h和公式 (3.4.9)）决定。这个图形的计算结果在文献[84, 87]给出，近似为

$$\mathrm{Br}(\mu \to e\gamma) \;=\; \left(\frac{|m^2_{\tilde{\mu}^*_R\tilde{e}_R}|}{m^2_{\tilde{\ell}_R}}\right)^2 \left(\frac{100\ \mathrm{GeV}}{m_{\tilde{\ell}_R}}\right)^4 10^{-6} \times \begin{cases} 15 & \text{当 } m_{\tilde{B}} \ll m_{\tilde{\ell}_R}, \\ 5.6 & \text{当 } m_{\tilde{B}} = 0.5 m_{\tilde{\ell}_R}, \\ 1.4 & \text{当 } m_{\tilde{B}} = m_{\tilde{\ell}_R}, \\ 0.13 & \text{当 } m_{\tilde{B}} = 2m_{\tilde{\ell}_R}, \end{cases} \tag{6.4.1}$$

其中为了简单起见，$\tilde{e}_R$和$\tilde{\mu}_R$取几乎简并的质量平方$m^2_{\tilde{\ell}_R}$，而近似为质量本征态，$m^2_{\tilde{\mu}^*_R\tilde{e}_R} \equiv (\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}})_{21} = [(\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}})_{12}]^*$ 可以看作是微扰，B超子$\widetilde{B}$ 也近似为质量本征态。这个结果可以和该过程现在的实验上限$\mathrm{Br}(\mu \to e\gamma)_{\rm exp} < 5.7 \times 10^{-13}$ 对比[108]。因此，如果右手标轻子质量平方矩阵$\mathbf{m}^{\mathbf{2}}_{\tilde{\mathbf{e}}}$是"随机的"，所有的矩阵元在同一量级，那么即使是标轻子和B超子质量在1

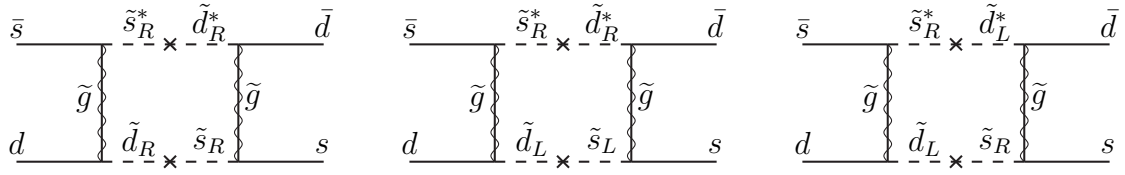


图 6.7: 拥有奇异数破坏超对称软破缺参数（显示为×）模型的一些贡献$K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$混合的图形。这些图形对非对角元(a) $\mathbf{m_d^2}$，(b) $\mathbf{m_d^2}$ 和$\mathbf{m_Q^2}$的合并，和(c) $\mathbf{a_d}$。

TeV，Br($\mu \to e\gamma$)的预言也太大了。对于更轻的超伙伴，$\tilde{\mu}_R, \tilde{e}_R$质量平方混合项的限制会更加严苛。像图 6.6a一样，$\mu \to e\gamma$过程还很依赖于左手标轻子质量平方矩阵$\mathbf{m_L^2}$的非对角元的贡献，相应的费曼图如图 6.6b所示是关于荷电W超子和标中微子的，跟图 6.6a形状一样只是左手标轻子和$\widetilde{B}$或$\widetilde{W}^0$交换了一下。因此标轻子质量平方矩阵中也没有很大的$\widetilde{e}_L, \widetilde{\mu}_L$的混合。

此外，希格斯玻色子获得真空哦期望值后，矩阵$\mathbf{a_e}$可以带来引起左手和右手标轻子不同味道混合的质量平方项。例如，$\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{最小超模型}}$ 含有的$\widetilde{\bar{e}}\mathbf{a_e}\widetilde{L}H_d$+c.c.项意味着存在$-\langle H_d^0\rangle(\mathbf{a_e})_{12}\widetilde{e}_R^*\widetilde{\mu}_L - \langle H_d^0\rangle(\mathbf{a_e})_{21}\widetilde{\mu}_R^*\widetilde{e}_L$ + c.c. 如图 6.6c所示，它们也会贡献$\mu \to e\gamma$过程。因此$(\mathbf{a_e})_{12}$和$(\mathbf{a_e})_{21}$的大小也被实验限制为很小，但是这个限制会强烈依赖于其它模型参数[87]。相似的，$(\mathbf{a_e})_{13}$, $(\mathbf{a_e})_{31}$和$(\mathbf{a_e})_{23}$, $(\mathbf{a_e})_{32}$ 也会被限制，虽然来自于实验测量的Br($\tau \to e\gamma$)和Br($\tau \to \mu\gamma$)限制更弱一些[88]。

标夸克质量平方矩阵也存在重要的实验限制。其中最强的来自于中性K介子系统。如果$\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{最小超模型}}$ 中含有标底夸克和标奇异夸克的混合的话，$K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$混合有效哈密顿量从图 6.7 所示费曼图获得贡献。图 6.7的胶超子-标夸克-夸克顶角都因超对称性而具有颜色相互作用强度。（还有类似的把B超子和W超子互换的图，可以因规范超子质量的大小而变得重要起来。）例如，假设在夸克质量本征基态中有非零右手标下夸克质量平方混合$(\mathbf{m_d^2})_{21}$，同时假定其它图贡献不超出其实验测量值3.5×10^{-12} MeV， 图 6.7a的贡献超对称修正$\Delta m_K \equiv m_{K_L} - m_{K_S}$，文献 [97] 得到的结果为

$$\frac{|\text{Re}[(m^2_{\tilde{s}_R^*\tilde{d}_R})^2]|^{1/2}}{m^2_{\tilde{q}}} \quad < \quad \left(\frac{m_{\tilde{q}}}{1000\text{ GeV}}\right) \times \begin{cases} 0.04 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = 0.5 m_{\tilde{q}}, \\ 0.10 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{q}}, \\ 0.22 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = 2 m_{\tilde{q}}. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

这里为了简单起见取了近似简并的标夸克质量$m_{\tilde{q}}$，$m^2_{\tilde{s}_R^*\tilde{d}_R} = (\mathbf{m_d^2})_{21}$ 看作微扰。相同的限制在相应的下型夸克质量本征态基中，$m^2_{\tilde{s}_R^*\tilde{d}_R}$被$m^2_{\tilde{s}_L^*\tilde{d}_L} = (\mathbf{m_Q^2})_{21}$替代之后也是适用的。在两种类型的味道混合大小差不多时联立会得到更强烈的限制，这是因为多了一个图 6.7b所示的费曼图

形。数值限制为[97]

$$\frac{|\mathrm{Re}[m^2_{\tilde{s}^*_R\tilde{d}_R} m^2_{\tilde{s}^*_L\tilde{d}_L}]|^{1/2}}{m^2_{\tilde{q}}} \;<\; \left(\frac{m_{\tilde{q}}}{1000\,\mathrm{GeV}}\right) \times \begin{cases} 0.0016 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = 0.5 m_{\tilde{q}}, \\ 0.0020 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = m_{\tilde{q}}, \\ 0.0026 & \text{当 } m_{\tilde{g}} = 2 m_{\tilde{q}}. \end{cases} \tag{6.4.3}$$

$\mathbf{a_d}$的非对角元会造成左手和右手标夸克的味道混合，就像上文讨论的标轻子一样，产生的如图 6.7c 所示的过程受到了非常强的限制。更一般地，中性K介子的有效哈密顿系统的Δm_K，ϵ和ϵ'/ϵ 严苛地限制了$\widetilde{d}_{L,R}$, $\widetilde{s}_{L,R}$的全部（单独的和各种联合的）混合，以及关联的CP破坏复相位，这些相位可以在软破缺质量平方项中出现。

相对弱一些的，但仍然有趣的限制来自于$D^0, \overline{D}^0$系统，它们会给$\mathbf{m^2_{\bar{u}}}$, $\mathbf{m^2_Q}$ 和$\mathbf{a_u}$的全部$\tilde{u}, \tilde{c}$混合以限制。$B^0_d, \overline{B}^0_d$和$B^0_s, \overline{B}^0_s$系统会给出全部的$\widetilde{d}, \widetilde{b}$和$\widetilde{s}, \widetilde{b}$源于超对称软破缺的标夸克混合相似的限制。更多的限制来自于$\Delta F = 1$的介子稀有过程，注意这些过程的部分子层次过程为$b \to s\gamma$、$b \to s\ell^+\ell^-$、$c \to u\ell^+\ell^-$、$s \to de^+e^-$和$s \to d\nu\bar{\nu}$ 等，全部这些过程都会因超对称软破缺中味道混合而产生。规范超子和（标量）软耦合也有受到严格的限制，这些限制主要来自于电子和中子的电偶极矩测量[85]。细节的限制可以在文献[82]-[107]找到，但实验给出的重要一课就是超对称软破缺拉氏量不能是任意或者随机的。

只要我们假设超对称破缺是"普适的"则最小超模型所有的这些危险的味道改变和CP破坏效应都可以避开（或者解释）。考虑一个理想极限标夸克和标轻子质量平方矩阵是味相同的，每个在代空间中都正比于3×3单位矩阵

$$\mathbf{m^2_Q} = m^2_Q \mathbf{1}, \quad \mathbf{m^2_{\bar{u}}} = m^2_{\bar{u}} \mathbf{1}, \quad \mathbf{m^2_{\bar{d}}} = m^2_{\bar{d}} \mathbf{1}, \quad \mathbf{m^2_L} = m^2_L \mathbf{1}, \quad \mathbf{m^2_{\bar{e}}} = m^2_{\bar{e}} \mathbf{1}. \tag{6.4.4}$$

这样所有的标夸克和标轻子混合角度被设置成为微小的，因为具有相同电弱量子数的标夸克和标轻子质量简并可以任意互相旋转。超对称理论中包含$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$, $\mathbf{a_e}$在内对味改变中性流的贡献在这个极限下变得非常小了。做更进一步的假设，每个（标量）[3]耦合都正比于相应的汤川耦合矩阵

$$\mathbf{a_u} = A_{u0}\, \mathbf{y_u}, \qquad \mathbf{a_d} = A_{d0}\, \mathbf{y_d}, \qquad \mathbf{a_e} = A_{e0}\, \mathbf{y_e}, \tag{6.4.5}$$

这样可以确保只有第三代标夸克和标轻子有大的（标量）[3] 耦合。最后，假设软破缺项不引入新的复相位就可以避免灾难性的大的CP破坏效应。对于$m^2_{H_u}$ 、$m^2_{H_d}$和m^2_Q, $m^2_{\bar{u}}$等，如果假定了公式 (6.4.4)它们自动不带来CP破坏，因为如果它们不是实数，则拉氏量也不是实的了。通过H_u、H_d超势中费米和标量组分相位的适当旋转，我们也可以把超势的μ和公式 (6.3.1)固定为实数。如果接着假定

$$\mathrm{Im}(M_1),\, \mathrm{Im}(M_2),\, \mathrm{Im}(M_3),\, \mathrm{Im}(A_{u0}),\, \mathrm{Im}(A_{d0}),\, \mathrm{Im}(A_{e0}) \;=\; 0, \tag{6.4.6}$$

理论的CP破坏相位只有通常汤川耦合矩阵的普通CKM相位。公式 (6.4.4)-(6.4.6) 合在一起构成了，通常被称为超对称软破缺普适性的，一个相当弱的假定。加了这些味道和CP保持的最小超模型比最一般情况少了非常多的参数。在通常标准模型规范和汤川耦合之外，有3个规范超子质量，5个实标夸克和标轻子质量平方参数，3个实三次方耦合参数和4个希格斯质量参数（其中一个要出售给已知的电弱破缺标度）。

至少有三类替换普适性假设公式 (6.4.4)-(6.4.6)来压低最小超模型味道改变的解释。它们分别称为软破缺质量的"不相关性"，"校准性"和"R对称性"假定。"不相关性"思想认为超粒子质量极其重，因此它们对如图 6.7a,b所示的味改变和CP破坏图的贡献被大大压低了，就像公式 (6.4.1)-(6.4.3)中所看到的一样。但是在实际过程中，如果没有味相同结构，压低的程度至少需一些标量粒子质量的$m_{\rm soft}$远远大于1 TeV。这看上去直接和引言中所讨论的引入超对称来解决规范等级问题的动机相违背。然而，文献[109, 110]认为这是一种明智的选择。LHC探测结果排除了许多含有轻标夸克模型的事实，也使得这些模型更加吸引人了。也许近似的味相同和重超伙伴质量的联合才是味改变过程压低的真实解释。

"校准性"思想是指标夸克质量平方矩阵没有公式 (6.4.4)的味相同性质，而是在味道空间中按照避免大的味道改变效应的方式和相关的汤川矩阵对准[59, 111]。校准性模型通常需要非常特殊的味道对称性。

第三种可能性是理论具有（近似的）连续$U(1)_R$对称性[55]。这就要求最小超模型，以类似文献[62]的方式，额外引入$SU(3)_c$, $SU(2)_L$和$U(1)_Y$的伴随表示手征超多重态，以及另外一对希格斯手征超多重态。这个理论中规范超子是一个纯狄拉克类型的粒子，如公式 (5.3)所示，也不存在$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$和$\mathbf{a_e}$耦合。这会带来非常有效的味改变过程压低[55, 65]，即使是标夸克和标轻子质量本征态很轻，不简并，而且以标准模型夸克和轻子本征态为基时有大的混合。这个理论会带来独特而有趣的对撞机信号[55, 67]。但是，这里我们将不再进一步讨论这种可能性。

软破缺普适性关系 (6.4.4)-(6.4.6)，或者更强的版本，可以认为是超对称破缺起源的一些特定模型的结果，虽然理论家还没有就那些特定的模型达成共识。不管哪种情况，都指明在非常高能标Q_0的拉氏量存在简单结构或者对称性。如果我们利用这个拉氏量计算在电弱能标附近质量、截面和衰变率等过程，结果将因圈图而出现大的对数项$\ln(Q_0/m_Z)$。就像通常量子场论里的处理方法一样，大多数项可以通过重整化群（RGE）方便地重整求和，这需要把拉氏量的耦合系数和质量项作为跑动参数。因此公式 (6.4.4)-(6.4.6)应该被看作是软破缺参数跑动在标度Q_0处的边界条件，这些条件应该和实验直接测量值之间差别很远。我们必须把所有的软破缺参数、超势参数和规范耦合系数都作RG演化到电弱能标或者人类做实验的标度。

即使在输入能标严格保持公式 (6.4.4)和(6.4.5)在电弱能标也不再成立了。然而，作为一个好的近似，关键的味道和CP保持性质保留下来了。这是因为，在下文第6.5小节我们将看到，源于规范相互作用的RG修正将保持公式 (6.4.4)和(6.4.5)等式。而源于汤川相互作用

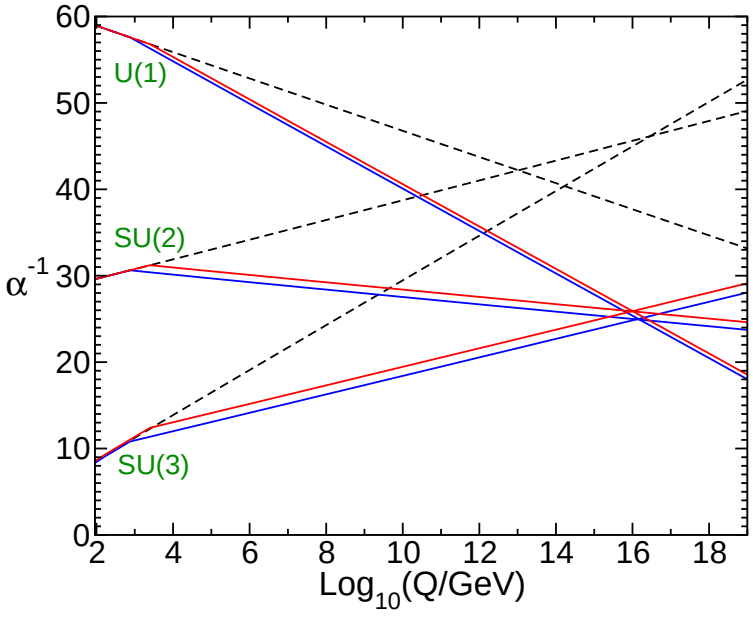


图 6.8: 标准模型（虚线）和最小超模型（实线）规范耦合系数倒数两圈重整化群跑动。在最小超模型情况中，超粒子质量被处理为有共同的阈值在750 GeV和2.5 TeV之间变化，同时$\alpha_3(m_Z)$在0.117和0.120之间变化。

的RG修正除了顶夸克，底夸克和陶轻子味道外会非常小。因此前两代的标夸克和标轻子的（标量）^{3}耦合和标量质量平方混合应该是可以忽略的。此外，RG演化不会引入新的CP破坏相位。因此，如果在输入标度普适性成立，味改变和CP破坏观测量的超对称贡献相比于现在的实验限制（虽然在未来实验中很可能可以测量）是小的且令人接受的。

一个乐观的理由是这样的安排可以在最小超模型实现规范耦合系数的明显统一[112]。规范耦合系数g_1, g_2, g_3的标准模型一圈RG方程是

$$\beta_{g_a} \equiv \frac{d}{dt} g_a = \frac{1}{16\pi^2} b_a g_a^3, \qquad (b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} (41/10,\ -19/6,\ -7) & \text{标准模型} \\ (33/5,\ 1,\ -3) & \text{最小超模型} \end{cases} \tag{6.4.7}$$

其中$t = \ln(Q/Q_0)$，Q是RG标度。最小超模型系数大一些是模型更多粒子进入圈图。g_1的归化在这里选择和把规范群$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$大统一到$SU(5)$或$SO(10)$的规范协变导数保持一致。因此$g_2 = g$，$g_1 = \sqrt{5/3} g'$，$g$、$g'$是通常电弱耦合系数，有关系$e = g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W$。$\alpha_a = g_a^2/4\pi$数值上有个漂亮的性质，即它们的倒数在一圈图层次跑动和标度保持线性关系

$$\frac{d}{dt} \alpha_a^{-1} = -\frac{b_a}{2\pi} \qquad (a = 1, 2, 3) \tag{6.4.8}$$

图6.8，包含了两圈效应，对比了标准模型（虚线）和最小超模型（实线）的α_a^{-1}的演化。不像标准模型，最小超模型只要引入正确的粒子内容就可以确保规范耦合系数在标度$M_U \sim 1.5 \times 10^{16}$ GeV 做到统一。这个统一当然不够完美，三条线相遇的点$\alpha_1(M_U) = \alpha_2(M_U)$，通常由此来定义$M_U$，而$\alpha_3$倾向于比$\alpha_1(M_U) = \alpha_2(M_U)$的一般数值要略微小一些。但是这点小差别可以轻松归于M_U 附近任何新粒子阀值修正。注意，M_U在超伙伴质量变大时缓慢减

小。M_U处的明显的近似的规范耦合系数的统一可能是一种巧合，它被看作是大统一理论（GUT）或者超弦模型的强烈暗示，这两个理论都可以在$M_{\rm P}$能标以下自然地做到规范耦合常数统一。此外，如果这个暗示是重要的话，我们可以合理地期望在最小超模型的耦合和软破缺质量的相似RG 分析中也可以实现大统一。下一节我们将讨论必需的RG方程的形式。

6.5 最小超模型的重整化群

为了能够把输入能标预言的集合翻译成描述电弱能标有意思的物理观测量，我们必须对规范耦合系数、超势参数、软破缺参数利用重整化群方程（RG）进行演化。这样可以确保观测量计算的圈图展开不会存在大的对数项。

技术性方面，超对称中正规化方案和重整化过程的选择必须非常小心。标准模型中最流行的辐射修正计算的正规化方案是维数正规化（DREG）。其中的时空维度设置为连续的$d = 4 - 2\epsilon$ 。不幸的是，DREG会带来假的超对称破坏，这是因为此时不在壳的情况下规范玻色子的自由度数和规范超子自由度数不再匹配。这种不匹配只有2ϵ，但是到n圈图阶就会乘以一个$1/\epsilon^n$因子。在DREG中，考虑一圈图的有限部分和两圈图的发散部分，无量纲的耦合系数的辐射修正将不能明显保持超对称性（超对称瓦德恒等式）。相反地，我们可以使用另一个稍微不同的被称为维数约化正规化（DRED）的方案。该方案可以保持超对称性[113]。在DRED方案中，所有的动量积分仍然在$d = 4 - 2\epsilon$维时空中进行，但是规范玻色子场A^a_μ的矢量指标μ要遍历全部四维来保持和规范超子自由度的匹配。因此，无量纲耦合系数的跑动采用了修正最小减除($\overline{\rm DR}$)的DRED而不是通常的修正最小减除($\overline{\rm MS}$)的DREG。特别的，在输入能标的边界条件现在就要在超对称保持的方案如$\overline{\rm DR}$中使用。两种方案的一圈图β函数总是一样的，但是必须明确$\overline{\rm MS}$ 方案破坏了超对称，所以这点出发可知$\overline{\rm DR}$是应优先选择的[†]。（NSVZ方案[118]也可以保持超对称）同时还有一些非常有用的属性，但是与物理可观测量计算无明显关系。如果把所有的$\overline{\rm DR}$的耦合系数和质量翻译成$\overline{\rm MS}$方案抵消项，$\overline{\rm MS}$方案保持超对称性也是可能的，虽然不常用[119]-[121]。)

一个一般的且强有力的超对称不可重整定理决定了超对称理论重整化群的形式。该定理要求某特定过程的对数发散总是可以写成波函数重整化项，而不需要进行耦合顶角重整化[‡]。由超场技术可以轻松证明这一点。对于出现在超势 (3.2.15)中的参数，定理推论为

$$\beta_{y^{ijk}} \equiv \frac{d}{dt} y^{ijk} \;=\; \gamma^i_n y^{njk} + \gamma^j_n y^{ink} + \gamma^k_n y^{ijn}, \tag{6.5.1}$$

[†]由于在最新五圈阶结果[114] 出现的模糊性或者不一致性（依赖于具体的方法），即使是DRED方案也可能给不出一个超对称的正规化方法。幸运的是，这些看上去不会带来实际操作的困难[115, 116]。也可以查阅文献 [117]看到一个避免破坏时空维数的有趣建议。

[‡]事实上，在一个积分掉辅助场的超对称规范理论中，顶角重整化的确存在，但是发散求和总是具有波函数重整化形式。这是因为超场的反常量纲，由于规范固定依赖项，使之与费米子和玻色子组分场的反常量纲不同[37]。

$$\beta_{M^{ij}} \equiv \frac{d}{dt}M^{ij} \;=\; \gamma^i_n M^{nj} + \gamma^j_n M^{in}, \tag{6.5.2}$$

$$\beta_{L^i} \equiv \frac{d}{dt}L^{i} \;=\; \gamma^i_n L^{n}, \tag{6.5.3}$$

其中γ^i_j是超场的反常量纲矩阵，通常由微扰圈图展开来计算。（记得$t=\ln(Q/Q_0)$，Q是重整化标度，Q_0是参考标度。）软破缺项的反常量纲和RG方程已经计算到了三圈阶和部分四圈阶，具体可以参考文献 [123]-[128]。也有文献给出了，微扰论所有阶都成立的，那些由超对称的耦合表达的超对称破缺耦合系数RG方程的关系[118, 129]。为了简单起见，这里只明确显示一圈图近似结果。

一般地，在一圈阶

$$\gamma^i_j \;=\; \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}y^{imn}y^*_{jmn} - 2g_a^2 C_a(i)\delta^i_j\right], \tag{6.5.4}$$

其中$C_a(i)$是超场Φ_i的群论二次方卡西米尔不变量，由李代数生成元T^a来定义

$$(T^aT^a)_i{}^j = C_a(i)\delta^j_i \tag{6.5.5}$$

规范耦合系数为g_a。最小超模型超多重态的卡西米尔不变量为

$$C_3(i) = \begin{cases} 4/3 & \text{当 } \Phi_i = Q, \overline{u}, \overline{d}, \\ 0 & \text{当 } \Phi_i = L, \overline{e}, H_u, H_d, \end{cases} \tag{6.5.6}$$

$$C_2(i) = \begin{cases} 3/4 & \text{当 } \Phi_i = Q, L, H_u, H_d, \\ 0 & \text{当 } \Phi_i = \overline{u}, \overline{d}, \overline{e}, \end{cases} \tag{6.5.7}$$

$$C_1(i) = \; 3Y_i^2/5 \;\text{ 对于每个超荷为 } Y_i\text{的 } \Phi_i \;. \tag{6.5.8}$$

对于一个规范耦合系数的一圈重整化，一般形式为

$$\beta_{g_a} = \frac{d}{dt}g_a \;=\; \frac{1}{16\pi^2}g_a^3\Big[\sum_i I_a(i) - 3C_a(G)\Big], \tag{6.5.9}$$

其中$C_a(G)$是群二次方卡西米尔不变量（$U(1)$是0，$SU(N)$是N），$I_a(i)$是手征超场ϕ_i的邓金因子（每个$SU(N)$基础表示归化为$1/2$，$U(1)_Y$归化为$3Y_i^2/5$。）公式(6.4.7)是这种情况的特例。

公式 (5.1)的一般软破缺超对称拉氏量的一圈重整化群方程为

$$\beta_{M_a} \equiv \frac{d}{dt}M_a \;=\; \frac{1}{16\pi^2}g_a^2\Big[2\sum_n I_a(n) - 6C_a(G)\Big]M_a, \tag{6.5.10}$$

$$\beta_{a^{ijk}} \equiv \frac{d}{dt}a^{ijk} \;=\; \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}a^{ijp}y^*_{pmn}y^{kmn} + y^{ijp}y^*_{pmn}a^{mnk} + g_a^2C_a(i)(4M_ay^{ijk} - 2a^{ijk})\right]$$

$$+(i\leftrightarrow k)+(j\leftrightarrow k), \tag{6.5.11}$$

$$\beta_{b^{ij}}\equiv\frac{d}{dt}b^{ij} = \frac{1}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}b^{ip}y^*_{pmn}y^{jmn}+\frac{1}{2}y^{ijp}y^*_{pmn}b^{mn}+M^{ip}y^*_{pmn}a^{mnj} +g_a^2C_a(i)(4M_aM^{ij}-2b^{ij})\Big]+(i\leftrightarrow j), \tag{6.5.12}$$

$$\beta_{t^i}\equiv\frac{d}{dt}t^i = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{2}y^{imn}y^*_{mnp}t^p+a^{imn}y^*_{mnp}L^p+M^{ip}y^*_{pmn}b^{mn}\right], \tag{6.5.13}$$

$$\beta_{(m^2)^j_i}\equiv\frac{d}{dt}(m^2)^j_i = \frac{1}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{2}y^*_{ipq}y^{pqn}(m^2)^j_n+\frac{1}{2}y^{jpq}y^*_{pqn}(m^2)^n_i+2y^*_{ipq}y^{jpr}(m^2)^q_r +a^*_{ipq}a^{jpq}-8g_a^2C_a(i)|M_a|^2\delta^j_i+2g_a^2(T^a)_i{}^j\mathrm{Tr}(T^am^2)\Big]. \tag{6.5.14}$$

把以上结果应用到特殊情况次最小超模型。同时只因第三代汤川耦合像公式 (6.1.2)一样做为近似，这样希格斯和第三代超场反常量纲就是对角化矩阵，根据公式 (6.5.4)在一圈图阶它们是

$$\gamma_{H_u} = \frac{1}{16\pi^2}\left[3y_t^*y_t-\frac{3}{2}g_2^2-\frac{3}{10}g_1^2\right], \tag{6.5.15}$$

$$\gamma_{H_d} = \frac{1}{16\pi^2}\left[3y_b^*y_b+y_\tau^*y_\tau-\frac{3}{2}g_2^2-\frac{3}{10}g_1^2\right], \tag{6.5.16}$$

$$\gamma_{Q_3} = \frac{1}{16\pi^2}\left[y_t^*y_t+y_b^*y_b-\frac{8}{3}g_3^2-\frac{3}{2}g_2^2-\frac{1}{30}g_1^2\right], \tag{6.5.17}$$

$$\gamma_{\overline{u}_3} = \frac{1}{16\pi^2}\left[2y_t^*y_t-\frac{8}{3}g_3^2-\frac{8}{15}g_1^2\right], \tag{6.5.18}$$

$$\gamma_{\overline{d}_3} = \frac{1}{16\pi^2}\left[2y_b^*y_b-\frac{8}{3}g_3^2-\frac{2}{15}g_1^2\right], \tag{6.5.19}$$

$$\gamma_{L_3} = \frac{1}{16\pi^2}\left[y_\tau^*y_\tau-\frac{3}{2}g_2^2-\frac{3}{10}g_1^2\right], \tag{6.5.20}$$

$$\gamma_{\overline{e}_3} = \frac{1}{16\pi^2}\left[2y_\tau^*y_\tau-\frac{6}{5}g_1^2\right]. \tag{6.5.21}$$

（第一代和第二代反常量纲可以由近似公式 (6.1.2)中设置y_t, y_b和y_τ等于0来得到。）把这些公式代入公式 (6.5.1), (6.5.2)可以得到超势参数在重整化标度的跑动

$$\beta_{y_t}\equiv\frac{d}{dt}y_t = \frac{y_t}{16\pi^2}\Big[6y_t^*y_t+y_b^*y_b-\frac{16}{3}g_3^2-3g_2^2-\frac{13}{15}g_1^2\Big], \tag{6.5.22}$$

$$\beta_{y_b}\equiv\frac{d}{dt}y_b = \frac{y_b}{16\pi^2}\Big[6y_b^*y_b+y_t^*y_t+y_\tau^*y_\tau-\frac{16}{3}g_3^2-3g_2^2-\frac{7}{15}g_1^2\Big], \tag{6.5.23}$$

$$\beta_{y_\tau}\equiv\frac{d}{dt}y_\tau = \frac{y_\tau}{16\pi^2}\Big[4y_\tau^*y_\tau+3y_b^*y_b-3g_2^2-\frac{9}{5}g_1^2\Big], \tag{6.5.24}$$

$$\beta_\mu\equiv\frac{d}{dt}\mu = \frac{\mu}{16\pi^2}\Big[3y_t^*y_t+3y_b^*y_b+y_\tau^*y_\tau-3g_2^2-\frac{3}{5}g_1^2\Big]. \tag{6.5.25}$$

规范耦合系数g_1, g_2, g_3的一圈阶RG方程已经在公式 (6.4.7)中列出来了。超对称破缺项的出现不会影响公式 (6.4.7)和公式(6.5.22)-(6.5.25)。做为超对称不需重整定理的结果，所有超对称参数的β函数正比于参数自身。这个结论的后果就是一旦有了可以解释为什么树图

阶μ在10^2到10^3 GeV 的理论，我们就不用害怕μ被一些未知的非常重的粒子给出非常大的辐射修正。所有的μ 的RG修正都直接正比于μ自身以及一些无量纲的耦合系数。

最小超模型中三个规范超子参数的一圈RG方程由规范耦合系数RG方程 (6.4.7)相同的量$b_a^{\text{最小超模型}}$决定：

$$\beta_{M_a} \equiv \frac{d}{dt} M_a \;=\; \frac{1}{8\pi^2} b_a g_a^2 M_a \qquad (b_a = 33/5,\, 1,\, -3) \tag{6.5.26}$$

其中$a = 1, 2, 3$。这意味着三个比例M_a/g_a^2都各自是一个常数（与RG标度无关）。两圈阶会给出小的修正。因为规范耦合系数在$Q = M_U = 1.5 \times 10^{16}$GeV标度统一，所以通常也假定规范超子质量该标度也保持统一[§]，数值由$m_{1/2}$来标记。如果是这样，在任何RG标度存在关系

$$\frac{M_1}{g_1^2} = \frac{M_2}{g_2^2} = \frac{M_3}{g_3^2} = \frac{m_{1/2}}{g_U^2} \tag{6.5.27}$$

两圈阶有（已知的）小修正效应，M_U附近可能有非常大的（未知的）阀值效应。这里g_U在$Q = M_U$处统一的规范耦合系数。文献 (6.5.27)的假定是特别有用的，这是因为规范超子质量强烈地介入所有其它软破缺项的RG方程。我们将马上看到这一点。

下面我们来考虑全纯软破缺参数$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$, $\mathbf{a_e}$的一圈RG方程。在满足公式 (6.4.5)的模型中，在输入标度这些矩阵具有正比于相应的汤川耦合的形式。RG方程将保持这个属性。根据近似公式 (6.1.2)，我们也可以写下，在任意RG标度

$$\mathbf{a_u} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a_d} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_b \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a_e} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\tau \end{pmatrix}, \tag{6.5.28}$$

来定义[¶]跑动参数a_t, a_b和a_τ。在这个近似下，这些参数和b的RG方程为

$$\begin{aligned}
16\pi^2 \frac{d}{dt} a_t \;&=\; a_t\Big[18 y_t^* y_t + y_b^* y_b - \frac{16}{3} g_3^2 - 3 g_2^2 - \frac{13}{15} g_1^2\Big] + 2 a_b y_b^* y_t \\
&\quad + y_t\Big[\frac{32}{3} g_3^2 M_3 + 6 g_2^2 M_2 + \frac{26}{15} g_1^2 M_1\Big], \qquad (6.5.29) \\
16\pi^2 \frac{d}{dt} a_b \;&=\; a_b\Big[18 y_b^* y_b + y_t^* y_t + y_\tau^* y_\tau - \frac{16}{3} g_3^2 - 3 g_2^2 - \frac{7}{15} g_1^2\Big] + 2 a_t y_t^* y_b + 2 a_\tau y_\tau^* y_b \\
&\quad + y_b\Big[\frac{32}{3} g_3^2 M_3 + 6 g_2^2 M_2 + \frac{14}{15} g_1^2 M_1\Big], \qquad (6.5.30) \\
16\pi^2 \frac{d}{dt} a_\tau \;&=\; a_\tau\Big[12 y_\tau^* y_\tau + 3 y_b^* y_b - 3 g_2^2 - \frac{9}{5} g_1^2\Big] + 6 a_b y_b^* y_\tau + y_\tau\Big[6 g_2^2 M_2 + \frac{18}{5} g_1^2 M_1\Big], \qquad (6.5.31) \\
16\pi^2 \frac{d}{dt} b \;&=\; b\Big[3 y_t^* y_t + 3 y_b^* y_b + y_\tau^* y_\tau - 3 g_2^2 - \frac{3}{5} g_1^2\Big] \\
&\quad + \mu\Big[6 a_t y_t^* + 6 a_b y_b^* + 2 a_\tau y_\tau^* + 6 g_2^2 M_2 + \frac{6}{5} g_1^2 M_1\Big]. \qquad (6.5.32)
\end{aligned}$$

[§]在大统一模型中，规范耦合系数和规范超子质量在所有$Q \geq M_U$标度保持统一，因为统一理论中，规范超子全部生存在统一规范群的一个表示中。在很多超弦理论中，这也可以是一个很好的近似。

[¶]重新标定软破缺参数$A_t = a_t/y_t$, $A_b = a_b/y_b$, 和$A_\tau = a_\tau/y_\tau$经常会在文献中使用。本文不使用这个标记，因为这样做不能在不引入可怕复杂性如非多项式RG方程的情况下推广近似公式 (6.1.2), (6.5.28)，同时也因为不管怎样a_t, a_b 和a_τ是事实出现在拉氏量中的耦合系数。

每个软破缺参数的β函数与参数自身不成正比关系，这是因为破坏超对称的耦合系数不再受到超对称不需重整定理的保护。因此，即使a_t, a_b, a_τ, b在输入标度为零，公式 (6.5.29)-(6.5.32)正比于规范超子质量的RG修正也能确保它们在电弱能标非零。

下面我们来考虑最小超模型的标量质量平方项的RG方程。在近似公式 (6.1.2)和(6.5.28)中，前两代标夸克和标轻子只有规范相互作用。这意味着如果标量质量平方在RG 输入能标满足类似 (6.4.4) 的边界条件，那么在任何RG能标重整化时，它们都是接近对角化的，近似形式为

$$\mathbf{m_Q^2} \approx \begin{pmatrix} m_{Q_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{Q_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{Q_3}^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{m_{\bar{u}}^2} \approx \begin{pmatrix} m_{\bar{u}_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{\bar{u}_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\bar{u}_3}^2 \end{pmatrix}, \tag{6.5.33}$$

等等。第一代和第二代标夸克和标轻子由于规范量子数而保持非常接近简并但第三代标夸克和标轻子感受到了大汤川耦合的效应，因而质量平方得到了不同的重整化。第一代和第二代标夸克和标轻子质量平方的一圈RG方程为

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\phi_i}^2 = -\sum_{a=1,2,3} 8C_a(i) g_a^2 |M_a|^2 + \frac{6}{5} Y_i g_1^2 S, \tag{6.5.34}$$

对于每个标量ϕ_i ，$\sum_a$求和遍历三个规范群$U(1)_Y$, $SU(2)_L$和$SU(3)_C$，其中卡西米尔不变量$C_a(i)$如公式 (6.5.6)-(6.5.8)所示，M_a是相应的跑动的规范超子质量参数。同时

$$S \equiv \mathrm{Tr}[Y_j m_{\phi_j}^2] = m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2 + \mathrm{Tr}[\mathbf{m_Q^2} - \mathbf{m_L^2} - 2\mathbf{m_{\bar{u}}^2} + \mathbf{m_{\bar{d}}^2} + \mathbf{m_{\bar{e}}^2}]. \tag{6.5.35}$$

公式 (6.5.34)的一个重要特征是右手正比于规范超子质量平方的项是负的，因此[‖] 当从输入能标RG演化到电弱能标时，标量质量平方增大了。即使这些标量在输入能标质量为零或者很小，由于规范超子质量效应，它们仍然在电弱能标获得了大的正质量平方。

希格斯标量和第三代标夸克和标轻子质量平方参数的RG方程得到和公式 (6.5.34)一样的贡献，但是它们也会大的汤川耦合($y_{t,b,\tau}$)和软破缺耦合($a_{t,b,\tau}$)获得贡献。在一圈阶，只有以下三项的组合会出现

$$X_t = 2|y_t|^2(m_{H_u}^2 + m_{Q_3}^2 + m_{\bar{u}_3}^2) + 2|a_t|^2, \tag{6.5.36}$$

$$X_b = 2|y_b|^2(m_{H_d}^2 + m_{Q_3}^2 + m_{\bar{d}_3}^2) + 2|a_b|^2, \tag{6.5.37}$$

$$X_\tau = 2|y_\tau|^2(m_{H_d}^2 + m_{L_3}^2 + m_{\bar{e}_3}^2) + 2|a_\tau|^2. \tag{6.5.38}$$

希格斯质量平方软破缺参数$m_{H_u}^2$和$m_{H_d}^2$中这些项的贡献为

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_u}^2 = 3X_t - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 + \frac{3}{5} g_1^2 S, \tag{6.5.39}$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_d}^2 = 3X_b + X_\tau - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 - \frac{3}{5} g_1^2 S. \tag{6.5.40}$$

[‖]在大多数已知的真实模型中，正比于S的贡献相对来说很小。

注意X_t, X_b和X_τ通常为正，所以从输入能标RG演化到电弱能标时，它们的效果是降低希格斯质量平方。如果y_t是最大的汤川耦合系数，这是由实验测得顶夸克质量最大，X_t应该比X_b和X_τ大很多。这样可以使$m_{H_u}^2$在电弱能标附近演化出一个负值，从而帮助破坏了$H_u = H_d = 0$ 点的稳定进而招致我们想要的希格斯真空期望值（在第8.1小节将看到实际上是H_u、H_d线性组合的真空期望值）†。因此大的顶夸克汤川耦合可以诱导电弱对称性破缺，因为它会给希格斯质量平方带来负的辐射修正。

第三代标夸克和标轻子质量平方也会获得很依赖于X_t, X_b和X_τ的贡献。它们的RG方程为

$$16\pi^2\frac{d}{dt}m_{Q_3}^2 = X_t + X_b - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{2}{15}g_1^2|M_1|^2 + \frac{1}{5}g_1^2 S, \tag{6.5.41}$$

$$16\pi^2\frac{d}{dt}m_{\overline{u}_3}^2 = 2X_t - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - \frac{32}{15}g_1^2|M_1|^2 - \frac{4}{5}g_1^2 S, \tag{6.5.42}$$

$$16\pi^2\frac{d}{dt}m_{\overline{d}_3}^2 = 2X_b - \frac{32}{3}g_3^2|M_3|^2 - \frac{8}{15}g_1^2|M_1|^2 + \frac{2}{5}g_1^2 S, \tag{6.5.43}$$

$$16\pi^2\frac{d}{dt}m_{L_3}^2 = X_\tau - 6g_2^2|M_2|^2 - \frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2 - \frac{3}{5}g_1^2 S, \tag{6.5.44}$$

$$16\pi^2\frac{d}{dt}m_{\overline{e}_3}^2 = 2X_\tau - \frac{24}{5}g_1^2|M_1|^2 + \frac{6}{5}g_1^2 S. \tag{6.5.45}$$

公式 (6.5.39)-(6.5.45)中，正比于$|M_3|^2$, $|M_2|^2$, $|M_1|^2$和S的项和公式 (6.5.34)相应项是一样的。注意$m_{\overline{u}_3}^2$, $m_{\overline{d}_3}^2$的RG方程中正比于X_t和X_b的项前面系数比希格斯标量的相应项系数要小一些，同时$m_{L_3}^2$和$m_{\overline{e}_3}^2$的RG方程则没有这些项。此外，第三代标夸克质量平方RG演化中从正比于$|M_3|^2$项中获得了一个大的贡献，而希格斯标量则没有。此事实造成了最小超模型中希格斯标量获得真空期望值，而标夸克和标轻子由于有大的正质量平方不能获得真空期望值，这是可以接受的。

检查RG方程(6.5.29)-(6.5.32)、(6.5.34)和(6.5.39)-(6.5.45)可以得到，如果规范超子质量参数M_1, M_2, 和M_3在输入能标不为零，则所有的其它的软破缺项也都将生成。这就意味着一个输入标度规范超子质量主导超对称软破缺拉氏量其它所有效应的模型是可行的。另一方面，如果在树图阶规范超子质量为零，那它们将不会在一圈阶获得质量的任何贡献。在这种情况下规范超子将极其轻，模型在唯象上是不可接受的。

超对称破缺起源的可行模型对最小超模型软破缺的预言，通常就是对公式 (6.4.4)-(6.4.6)的细化。此预言可以做为上文所列RG方程的边界条件。在第8节研究它们对最小超模型质量谱意义之前，下一节我们将先学习做出这些预言的思想是什么。

†人们应该认为"$m_{H_u}^2$"就是符号本身，而不是某些神秘实数的平方。因此$m_{H_u}^2 < 0$没有什么可奇怪的。

7 超对称破缺起源

7.1 超对称自发破缺的一般考虑

最小超模型中超对称是简单地引入明显破缺项破缺的。然而，我们已经看到软破缺参数不是任意的。为了理解公式 (6.4.4), (6.4.5)和(6.4.6)类型的出现原因，必须考虑超对称自发破缺的模型。根据定义，这意味着真空态$|0\rangle$在超对称变换下是改变的，因此$Q_\alpha|0\rangle \neq 0$，$Q_\alpha^\dagger|0\rangle \neq 0$。现在，在全局超对称中，哈密顿算子$H$ 由代数关系 (3.1.30)得与对称生成元的关系

$$H = P^0 = \frac{1}{4}(Q_1Q_1^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 + Q_2Q_2^\dagger + Q_2^\dagger Q_2). \tag{7.1.1}$$

如果超对称在真空态中没有破缺，则$H|0\rangle = 0$，真空零质量。相反地，如果超对称在真空态中自发破缺，则真空必须有正能量，这是因为如果希尔伯特空间有正的规范，则

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|Q_1^\dagger|0\rangle\|^2 + \|Q_1|0\rangle\|^2 + \|Q_2^\dagger|0\rangle\|^2 + \|Q_2|0\rangle\|^2\Big) > 0 \tag{7.1.2}$$

如果时空依赖效应和费米凝聚可以忽略，则$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|V|0\rangle$，其中$V$是公式 (3.4.12)的标量势。因此如果$F_i$和/或$D^a$在真空态期望值不为零超对称将会自发破缺。

任何一个全部F_i和D^a为零的态，将具有零能量，同时也意味着超对称在真实基态没有自发破缺。相反地，保证超对称自发破缺的方法就是找到一个模型，其中场的任何值都不能同时满足$F_i = 0$、$D^a = 0$组成的方程组。这样真实基态就具有了破缺的超对称性，就像我们现在生存的（或许是不同的）真空态一样。然而，另外一种可能是我们现在生存的真空态并不是真实基态（可能保持超对称），而是一个能量稍高的超对称破缺的亚稳态，该亚稳态的寿命至少是在现在宇宙年龄的量级[130]-[132]。有限温度效应的确可以使早期宇宙倾向于超对称破缺全局最低点之上的超对称破缺亚稳态局域极小点[133]。图7.1 定性展示了这三种可能性的标量势。

不管真空是稳态还是亚稳态，全局对称性自发破缺总会带来和破缺对称性生成元具有相同量子数的无质量南部哥德斯通模式。在全局超对称性中，破缺生成元是费米型荷Q_α，所以南部哥德斯通粒子应该是无质量中性魏尔费米子，被称为哥德斯通超子。证明这一点，考虑一个像第3节所示的一般的具有规范和手征超多重态的超对称模型。费米型自由度由规范超子(λ^a)和手征费米子(ψ_i)组成。在一些标量场获得真空期望值后，以(λ^a, ψ_i)为基的费米质量矩阵形式为

$$\mathbf{m}_{\rm F} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g_b(\langle\phi^*\rangle T^b)^i \\ \sqrt{2}g_a(\langle\phi^*\rangle T^a)^j & \langle W^{ji}\rangle \end{pmatrix}. \tag{7.1.3}$$

（这个矩阵的非对角元来自于公式 (3.4.9)第二行的第一项，右下角矩阵元可以从公

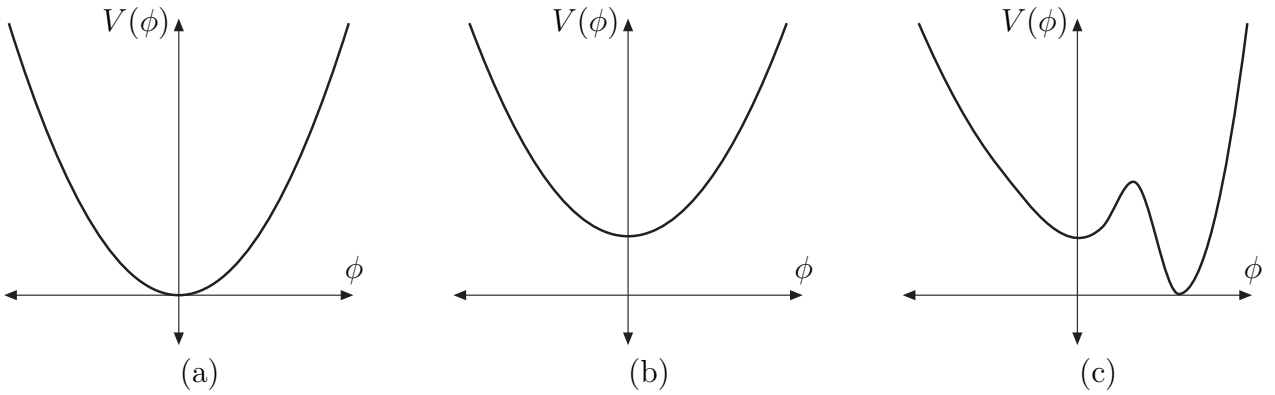


图 7.1: 做为量级参数ϕ函数的标量势能(a) 超对称保持，(b) 自发破缺超对称，和(c) 亚稳态超对称破缺。

式 (3.2.17)得到。）现在可以看到$\mathbf{m}_{\rm F}$会被消去一个矢量

$$\widetilde{G} \;=\; \begin{pmatrix} \langle D^a\rangle/\sqrt{2} \\ \langle F_i\rangle \end{pmatrix}. \tag{7.1.4}$$

$\mathbf{m}_{\rm F}$第一行消去$\widetilde{G}$是由公式 (3.4.10)所示的超势规范不变性决定的；第二行消去是因为条件$\langle \partial V/\partial\phi_i\rangle = 0$ ，这是任何标量势最低点必须满足的。公式(7.1.4)由此正比于哥德斯通超子波函数；有且只有至少一个辅助场获得真空期望值，破缺了超对称时，这是非平庸的。因此我们就证明了如果全局超对称性自发破缺则必须存在一个无质量哥德斯通超子，而其理论中各种费米子组分恰好正比于相应的辅助场的真空期望值。

自发破缺超对称理论中树图阶质量平方存在一个非常有用的求和规则。对于第3节讨论的一般理论类型，实标量自由度的质量平方是以下矩阵的本征值

$$\mathbf{m}_{\rm S}^2 = \begin{pmatrix} W^*_{jk}W^{ik} + g_a^2(T^a\phi)_j(\phi^*T^a)^i - g_aT_j^{ai}D^a & W^*_{ijk}W^k + g_a^2(T^a\phi)_i(T^a\phi)_j \\ W^{ijk}W^*_k + g_a^2(\phi^*T^a)^i(\phi^*T^a)^j & W^*_{ik}W^{jk} + g_a^2(T^a\phi)_i(\phi^*T^a)^j - g_aT_i^{aj}D^a \end{pmatrix}, \tag{7.1.5}$$

这个矩阵可以从以下修改的树图阶势的平方项形式中得到

$$V \;=\; \frac{1}{2}\,(\,\phi^{*j}\;\;\phi_j\,)\,\mathbf{m}_{\rm S}^2\begin{pmatrix}\phi_i\\ \phi^{*i}\end{pmatrix}. \tag{7.1.6}$$

在公式 (7.1.5)中，$W^{ijk} = \delta^3W/\delta\phi_i\delta\phi_j\delta\phi_k$，标量场可以理解为被它们的真空期望值替代了。由此可得实标量质量平方本征值的求和为

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\rm S}^2) \;=\; 2W^*_{ik}W^{ik} + 2g_a^2C_a(i)\phi^{*i}\phi_i - 2g_a\mathrm{Tr}(T^a)D^a, \tag{7.1.7}$$

其中卡西米尔不变量$C_a(i)$如公式 (6.5.5)定义。同时，二分量旋量质量平方由以下矩阵的本征值给出，

$$\mathbf{m}_{\rm F}^\dagger\mathbf{m}_{\rm F} \;=\; \begin{pmatrix} 2g_ag_b(\phi^*T^aT^b\phi) & \sqrt{2}g_b(T^b\phi)_kW^{ik} \\ \sqrt{2}g_a(\phi^*T^a)^kW^*_{jk} & W^*_{jk}W^{ik} + 2g_c^2(T^c\phi)_j(\phi^*T^c)^i \end{pmatrix}, \tag{7.1.8}$$

所以，二分量费米子质量平方求和为

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\mathrm{F}}^{\dagger}\mathbf{m}_{\mathrm{F}}) \;=\; W_{ik}^{*}W^{ik} + 4g_a^2 C_a(i)\phi^{*i}\phi_i. \tag{7.1.9}$$

最后，矢量质量平方是

$$\mathbf{m}_{\mathrm{V}}^{2} \;=\; g_a^2(\phi^{*}\{T^a, T^b\}\phi), \tag{7.1.10}$$

因此

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\mathrm{V}}^{2}) \;=\; 2g_a^2 C_a(i)\phi^{*i}\phi_i. \tag{7.1.11}$$

由以上结果可得树图阶质量平方本征值的超迹，一般定义为对所有自旋j粒子加权求和

$$\mathrm{STr}(m^2) \;\equiv\; \sum_j (-1)^{2j}(2j+1)\mathrm{Tr}(m_j^2), \tag{7.1.12}$$

满足求和规则

$$\mathrm{STr}(m^2) \;=\; \mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\mathrm{S}}^{\mathbf{2}}) - 2\mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\mathrm{F}}^{\dagger}\mathbf{m}_{\mathrm{F}}) + 3\mathrm{Tr}(\mathbf{m}_{\mathrm{V}}^{\mathbf{2}}) \;=\; -2g_a\mathrm{Tr}(T^a)D^a \;=\; 0. \tag{7.1.13}$$

最后一个等式假定对手征超场$U(1)$荷求迹为0。这个关系对最小超对称模型$U(1)_Y$是成立的，同时对任何无反常规范对称性一般也是成立的。求和规则 (7.1.13)在超对称自发破缺模型中经常做为一个有用的检验工具。

7.2 法耶-伊利奥普罗斯（D项）超对称破缺

非零D项超对称破缺可以通过法耶-伊利奥普罗斯机制发生[134]。如果规范对称性包含一个$U(1)$因子，这样如第4.8小节所讨论，我们可以对相应的规范超多重态引入一个辅助场的线性项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FI}} \;=\; -\kappa D, \tag{7.2.1}$$

其中κ是一个直接平方量纲的常数。这一项自身是规范不变和超对称的。（注意对于一个$U(1)$规范对称性，公式 (3.3.8)的超对称变换δD是一个全导数。）如果拉氏量中引入该项，D就可以被迫获得非零真空期望值。要看到这一点，可以考虑公式 (3.3.3)和(3.4.9)标量势的相关部分

$$V = \kappa D - \frac{1}{2}D^2 - gD\sum_i q_i|\phi_i|^2. \tag{7.2.2}$$

这里q_i就是问题中标量场ϕ_i在$U(1)$规范群的荷。法耶-伊利奥普罗斯项的出现把运动方程 (3.4.11)修正为

$$D = \kappa - g\sum_i q_i|\phi_i|^2. \tag{7.2.3}$$

现在假设具有$U(1)$荷的标量场ϕ_i都有非零的超势质量m_i。（规范不变性要求它们成对以相反电荷的形式出现。）这样势将具有形式

$$V = \sum_i |m_i|^2|\phi_i|^2 + \frac{1}{2}(\kappa - g\sum_i q_i|\phi_i|^2)^2. \tag{7.2.4}$$

因为这一项不能等于零，超对称必须是破缺的。可以检验对于非零D项这个最小值总会出现。对于最简单情况，每个i都具有$|m_i|^2 > gq_i\kappa$，最小值点全部在$\phi_i = 0,\ D = \kappa$处，$U(1)$规范对称性没有破缺。做为超对称自发破缺进一步的证据，注意标量此时具有质量平方$|m_i|^2 - gq_i\kappa$，而它们的费米子伙伴具有质量平方$|m_i|^2$。规范超子保持零质量，就像第7.1小节所讨论的，可以理解为它是哥德斯通超子。

对于非阿贝尔规范规范群，类似于公式 (7.2.1) 的形式不再规范不变，因此是不允许的，因此只有$U(1)$ D项可以引起超对称自发破缺。在最小超模型中，有人可能会想象用$U(1)_Y$$D$项的法耶-伊利奥普罗斯项做为超对称破缺的理论源。不幸的是，这是行不通的，因为标夸克和标轻子没有超势质量项。所以，为了使公式 (7.2.3)消失至少其中的一些标量获得非零真空期望值。这会破坏颜色和 / 或电磁，但不是超对称。因此$U(1)_Y$的法耶-伊利奥普罗斯项相比于最小超模型中其它超对称破缺源一定是次要的。有人可能试图用另外的$U(1)$规范对称性的法耶-伊利奥普罗斯项来诱导超对称破缺，这种对称性因为在极高质量标度破缺或者它与标准模型粒子无耦合而是未知的。然而，如果这是超对称破缺的主要源泉，已经证明其很难给出最小超模型所有粒子合适质量，特别是规范超子。无论何种情况，我们将不再进一步讨论D项破缺做为超对称破坏的终极起源（虽然这种可能性并没有被排除[135])）。

7.3 欧雷菲尔塔夫（F项）超对称破缺

超对称自发破缺从根本上起源于非零F项真空期望值的模型，被称为欧雷菲尔塔夫模型，有一个更加光明的唯象学期望。模型的思想是选择一组手征超多重态$\Phi_i \supset (\phi_i, \psi_i, F_i)$和超势$W$使得方程组$F_i = -\delta W^*/\delta\phi^{*i} = 0$在一些紧致域无解。此时$V = \sum_i |F_i|^2$在极小值点将是正的，确保超对称破缺。超对称破缺的极小值点可能是如图7.1(b)所示势的全局极小值点，也可能只是如图7.1(c)所示的局域极小值点。

超对称破缺全局极小值点的最简单的例子有三个手征超多重态$\Phi_{1,2,3}$，超势为

$$W = -k\Phi_1 + m\Phi_2\Phi_3 + \frac{y}{2}\Phi_1\Phi_3^2. \tag{7.3.1}$$

注意W含有一个线性项，k具有质量平方量纲。这些项在相应手征超多重态为规范单态时是允许的。事实上，线性项是可重整超势实现树图阶F项破缺所必需的[†]，否则设置全部$\phi_i = 0$总会使全部$F_i = 0$，从而给出具有超对称性的全局极小值。不失去一般性，我们可以选定k,

[†]来自于强耦合非微扰效应的，超势非多项式项避免了这个要求。

m和y实的且为正（通过场的相位转动）。由公式 (7.3.1)可得标量势为

$$V_{\text{树图}} = |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2, \tag{7.3.2}$$

$$F_1 = k - \frac{y}{2}\phi_3^{*2}, \qquad F_2 = -m\phi_3^*, \qquad F_3 = -m\phi_2^* - y\phi_1^*\phi_3^*. \tag{7.3.3}$$

明显地，$F_1 = 0$和$F_2 = 0$不能同时成立，所以超对称的确破缺了。如果（从现在开始假定）$m^2 > yk$，经典势的绝对极小值点在$F_1 = k$、$V_{\text{树图}} = k^2$，ϕ_1未定，因此极值点$F_1 = k$和$V_{\text{树图}} = k^2$。ϕ_1 树图阶未定的事实是标量势“平坦方向”的例子，这是超对称模型的一个普通特征。‡

由ϕ_1参数化的平坦方向是经典标量场的一个偶然特征，在这种情况下会被量子修正去掉（“抬起来”）。这可以通过计算科尔曼温伯格一圈有效势看出来[138]。在圈图展开中，有效势可以写为

$$V_{\text{eff}} \;=\; V_{\text{树图}} + V_{\text{一圈}} + \ldots \tag{7.3.4}$$

其中一圈贡献为对标量质量平方本征态的超迹，每个本征态标记为n，自旋为s_n

$$V_{\text{一圈}} \;=\; \sum_n (-1)^{2s_n}(2s_n+1)h(m_n^2), \tag{7.3.5}$$

$$h(z) \;\equiv\; \frac{1}{64\pi^2} z^2 \left[\ln(z/Q^2) + a\right]. \tag{7.3.6}$$

这里Q是重整化标度，a是重整化方案依赖的常数§。在$\overline{\text{DR}}$方案中，基于维数约化$a = -3/2$。利用公式 (7.1.5)、(7.1.8)，6个实标量和3个二分量费米态的质量平方本征值可以算出是，做为变化的$x = |\phi_1|^2$的函数，$\phi_2 = \phi_3 = 0$

$$\begin{aligned}
\text{标量：}\quad & 0,\ 0,\ \ m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx - k + \sqrt{4m^2x + (yx-k)^2}\Big),\\
& m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx + k - \sqrt{4m^2x + (yx+k)^2}\Big),\\
& m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx - k - \sqrt{4m^2x + (yx-k)^2}\Big),\\
& m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx + k + \sqrt{4m^2x + (yx+k)^2}\Big),
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\text{费米子：}\quad 0,\ \ m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx + \sqrt{4m^2x + y^2x^2}\Big),\ \ m^2 + \frac{y}{2}\Big(yx - \sqrt{4m^2x + y^2x^2}\Big). \tag{7.3.8}$$

（注意这些质量平方的确满足求和规则 (7.1.13)。）现在把这些质量代入公式 (7.3.6)，我们可以发现一圈有效势全局极小值点在$x = 0$，所以$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$。在该点场空间中理论的树

‡更一般的，平坦方向，也被称为模场，是标量场空间中沿着标量势为零的方向非紧致的线和面。如果超对称没有破缺，最小超模型经典可重整标量势有很多平坦方向[137]。

§事实上，如果选择不能保持超对称的重整化方案，a对不同自旋贡献可以是不同的。例如，在$\overline{\text{MS}}$方案中，对于自旋0和自旋-1/2贡献$a = -3/2$，但是，对于自旋1贡献$a = -5/6$。相关讨论和两圈阶展开可以查看文献 [139]。

图阶质量谱标量粒子简化为

$$0,\ 0,\ m^2,\ m^2,\ m^2-yk,\ m^2+yk, \tag{7.3.9}$$

费米子简化为

$$0,\ m^2,\ m^2 \tag{7.3.10}$$

去简并的标量和费米子是超对称自发破缺明确验证。

公式 (7.3.9)和(7.3.10)自旋0本征态对应复标量ϕ_1和它的费米型伙伴ψ_1。但是，ϕ_1和ψ_1质量为零却有着不同的原因。ϕ_1零质量对应于经典平坦方向的存在，因为任何ϕ_1在树图阶具有相同能量。一圈势抬高了这个平坦方向，所以一旦考虑量子修正ϕ_1就获得了质量。$V_{\text{一圈}}$展开到x的一阶，我们可以看到标量ϕ_1得了一个正定质量平方等于

$$m_{\phi_1}^2=\frac{y^2m^2}{16\pi^2}\left[\ln(1-r^2)-1+\frac{1}{2}\left(r+1/r\right)\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right], \tag{7.3.11}$$

其中$r=yk/m^2$。（在$m_{\phi_1}^2=y^4k^2/48\pi^2m^2$极限下，公式约化为$yk\ll m^2$。）不同的是，魏尔费米子$\psi_1$保持准确的零质量，到微扰论的全部阶，因为它是一个哥德斯通超子，正如第7.1小节所示。

欧雷菲尔塔夫超势 (7.3.1)给出的拉氏量在$U(1)_R$对称性下是不变的（查阅第4.11节），相应的荷为

$$r_{\Phi_1}\ =\ r_{\Phi_2}\ =\ 2,\qquad r_{\Phi_3}\ =\ 0. \tag{7.3.12}$$

这里展示了一个一般结果，尼尔森-西伯格定理[140]表明如果标量势的全局极小值由于非零F项破缺了超对称，同时超势是一般的（包含对称性允许的所有项），那么理论必须具有严格的$U(1)_R$对称性。如果超对称破缺时$U(1)_R$对称性保持，就像上面讨论的欧雷菲尔塔夫模型情况，那么解释规范超子如何获得质量将会是一个问题，因为非零规范超子质量项R荷为2。另一方面，如果$U(1)_R$对称性自发破缺，那么由此得到的赝南部哥德斯通（R轴子）将存在实验性的困难，虽然引力效应可以给予足够大的质量来避免被实验排除[141]。

如果超对称破缺真空只是一个亚稳态，那么我们将不需要严格的$U(1)_R$对称性。这一点可以通过在欧雷菲尔塔夫超势 (7.3.1)中加入一个ΔW 项明显破缺连续R对称性中看出。举个例子，考虑[142]：

$$\Delta W\ \ =\ \ \frac{1}{2}\epsilon m\Phi_2^2, \tag{7.3.13}$$

其中ϵ是一个小的无量纲参数，这样树图阶标量势为

$$V_{\text{树图}}\ =\ |F_1|^2+|F_2|^2+|F_3|^2, \tag{7.3.14}$$

$$F_1=k-\frac{y}{2}\phi_3^{*2},\qquad F_2=-\epsilon m\phi_2^*-m\phi_3^*,\qquad F_3=-m\phi_2^*-y\phi_1^*\phi_3^*. \tag{7.3.15}$$

根据尼尔森-西伯格定理，现在有（两个）具有超对称性极小值，其中

$$\phi_1 = m/\epsilon y, \qquad \phi_2 = \pm\frac{1}{\epsilon}\sqrt{2k/y}, \qquad \phi_3 = \mp\sqrt{2k/y}. \tag{7.3.16}$$

然而，对于足够小的ϵ，$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$的局域超对称破缺极小值仍然存在，并且其在一圈阶有效势中也是稳定的。它和超对称极值之间存在势垒，这种情况定性地如图7.1(c)所示。随着$\epsilon \to 0$，超对称全局极小值在场空间中移动到无穷远，它对超对称局域极小值的影响可以完全忽略。亚稳态由于量子遂穿而产生的寿命可以做到任意大。相同的效应可以在欧雷菲尔塔夫模型的许多其它的微小变形中实现；利用拉氏量中小的附加贡献来去掉连续的R 对称性，稳定的超对称破缺真空转变成了亚稳态。（在一些情况下，拉氏量保持分立R对称性不变。）

欧雷菲尔塔夫超势由手放的质量量纲参数k项来确定超对称破缺$\sqrt{F_1}$的质量标度。这看上去是人为的，因为为了使最小超模型软破缺项在正确的数量级，必须把k设为远小于$M_{\rm P}^2$。找到一个能够生成该标度的机制可以使之更易令人接受。这个任务由超对称动力学破缺来完成，其中小质量标度在超对称破缺时由维数嬗变来产生。换句话说，引入新的具有渐近自由性质的非阿贝尔规范对称性，规范耦合在$M_{\rm P}$标度可以微扰展开，而在一些小一点的标度$\Lambda \sim e^{-8\pi^2/|b|g_0^2}M_{\rm P}$红外变强。其中$g_0$是在$M_{\rm P}$的跑动规范耦合系数，具有一个负的$\beta$函数$-|b|g^3/16\pi^2$。就像在量子色动力学中，$\Lambda$可以非常自然地在普朗克标度以下小很多个数量级。这样超对称最好可以被描述为强耦合理论低能有效理论。超对称仍然是被F场的真空期望值所破缺，但是F场可以是（具有新的强耦合规范量子数的）手征超多重态组成的复合粒子的辅助场。

如果要保持一个稳定的超对称破缺的基态的话，构造通过强耦合动力学破缺超对称模型是不容易的。除了由尼尔森-西伯格定理得到的$U(1)_R$对称性存在外，可以证明利用威腾指标[143, 144]，任何只有矢量型类型的有质量物质场强耦合规范理论不能在其真空基态自发破缺超对称。然而，如果只要求势有一个亚稳态局域极小值点事情就变得简单多了。因特里盖托，西伯格和史证明了[132]具有矢量型物质的超对称杨-米尔斯理论可以有非零F项亚稳破缺超对称真空态，同时亚稳真空态寿命可以任意长。做到这一点的最简单模型是非常经济的，只是一个超对称$SU(N_c)$规范理论，具有N_f种味道的夸克和反夸克超多重态，同时$N_c + 1 \leq N_f < 3N_c/2$。亚稳真空态优势的理解催生了许多新的模型构造可能和思想[132, 142, 145]。

已知的通过强耦合规范理论自发破缺超对称的方法是一个可以变得很大的题目，这已超出了本文的讨论范围。幸运的是，有一些非常精彩的综述，包括最近进展的综述文献[146] 和早一些亚稳真空综述文献[147]。找到终极的超对称破缺原因是未来最重要的目标之一。然而，出于很多目的，我们可以简单假定F项获得真空期望值，不用担心是哪些特别的机制产生了它。对于理解对撞机唯象来说，最直接关心的通常是F项真空期望值和最小超模型场的



图 7.2: 推测的超对称破缺结构方案。

耦合性质。这是我们下一节讨论的课题。

7.4 分开的超对称破缺区域的必要性

现在超对称自发破缺（动力学的或者非动力学的）明确要求我们扩充最小超模型。终极的超对称破缺序参数不能属于任何最小超模型的超多重态；$U(1)_Y$的D项真空期望值不能得到合理的质量谱，没有F项获得真空期望值的规范单态候选者。因此我们必须问什么效应负责超对称自发破缺，同时超对称破缺怎样“传递”给最小超模型粒子。只通过树图阶可重整相互作用在唯象上实现后者是非常困难的，即使加入了包括规范单态的新的超多重态来扩充模型。首先，给出最小超模型规范超子质量一般情况下是有问题的，这是因为第3节结果告诉我们可重整的超对称根本不会有任何（标量）-（规范超子）-（规范超子）耦合项，使其在标量获得真空期望值时变成规范超子质量项。其次，至少有一些最小超模型标夸克和标轻子将会轻得不可接受，因为这样它们早就该被发现了。这一点可以用以下方式来理解，当考虑加入味道对称性限定后存在类似于公式 (7.1.13)的求和规则。举个例子，在轻子味道守恒极限下，标电子质量本征态$\tilde{e}_1$和$\tilde{e}_2$一般是$\tilde{e}_L$和$\tilde{e}_R$的混合物。但是如果它们不与其它标量混合，求和规则就与其它部分退耦，由此可得

$$m^2_{\tilde{e}_1} + m^2_{\tilde{e}_2} = 2m^2_e, \tag{7.4.1}$$

这当然已经被实验所排除。在树图阶和相应味道守恒极限下，类似的求和规则对每个标准模型粒子都成立。原则上，引入味道破坏的混合之后可以突破求和规则，但是以这种方式做成一个可行模型是非常困难的。即使忽略了这个问题，这种类型模型的最小超模型超对称软破缺项也没有明显的理由为什么要满足公式 (6.4.4) 和(6.4.5)味道全同条件。

由于这些原因，我们期望最小超模型软破缺项间接地或者辐射地产生，而不是来自于树图阶与超对称破缺量级参数的可重整耦合。超对称破缺在与最小超模型手征超多重态“可见区域”无（或者只是非常小）直接耦合的粒子“隐藏区域”里明确产生。然而，这两个区域的确共同拥有负责把超对称破缺从隐藏区域传递到可见区域的相互作用，因此而产生了最小超模型。（查看图 7.2） 在这种情形中，可见区域场的物理质量树图阶质量平方求和规则，即使是近似地也不再成立。因此唯象上可行的超伙伴质量谱，原则上是可以做到的。做为

奖励，如果中介相互作用是味道全同的，最小超模型的软破缺项将自动服从如公式 (6.4.4), (6.4.5)和(6.4.6)的条件。

中介相互作用可能性有两个主要竞争的建议。第一个（历史上也是最流行的）是它们是引力的。更加精确地，它们和普朗克标度的新物理，包含引力，相关。在这个"引力中介"或者普朗克标度中介超对称破缺（PMSB）脚本中，如果超对称在隐藏区域由真空期望值$\langle F\rangle$破缺，那么可见区域的软破缺根据量纲分析应该大体上

$$m_{\rm soft} \sim \langle F\rangle/M_{\rm P}, \tag{7.4.2}$$

这是因为我们知道在超对称保持极限$\langle F\rangle \to 0$ $m_{\rm soft}$应该消失，同时在极限$M_{\rm P}\to\infty$（对应于$G_{\text{牛顿}}\to 0$）引力变成无关的了。对于在几百个GeV量级的$m_{\rm soft}$，我们因此期望隐藏区域超对称破缺起源的标度应该大体上$\sqrt{\langle F\rangle}\sim 10^{10}$或$10^{11}$ GeV。

第二种可能性是超对称破缺的味道全同中介相互作用是通常的电弱和QCD规范相互作用。在这个规范中介超对称破缺（GMSB）脚本中，最小超模型软破缺项来自于含有信使粒子的圈图。信使粒子是和超对称破缺真空期望值$\langle F\rangle$耦合的新手征超多重态，同时也有$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$相互作用，这可以提供与最小超模型必需的联系。这样，利用量纲分析，我们可以估计最小超模型软破缺项

$$m_{\rm soft}\sim \frac{\alpha_a}{4\pi}\frac{\langle F\rangle}{M_{\rm mess}} \tag{7.4.3}$$

其中$\alpha_a/4\pi$是包含规范相互作用的费曼图的圈图因子，$M_{\rm mess}$是信使场质量的特征标度。所以如果$M_{\rm mess}$和$\sqrt{\langle F\rangle}$大体上可比，超对称破缺标度可以低至约$\sqrt{\langle F\rangle}\sim 10^4$ GeV（比引力中介情况低很多！）来给出$m_{\rm soft}$正确的数量级。

7.5 哥德斯通超子和引力超子

正如第7.1小节所示，全局超对称自发破缺带来了无质量魏尔费米子，哥德斯通超子。哥德斯通超子是辅助场获得真空期望值的超多重态的费米型组分。

我们可以通过考虑守恒的超对称流 (3.4.13)来推导哥德斯通超子的重要属性。简单起见假设唯一非零辅助场[†] 真空期望值是$\langle F\rangle$，它的超伙伴是$\widetilde{G}$。这样超对称守恒流守恒方案告诉我们

$$0=\partial_\mu J^\mu_\alpha = -i\langle F\rangle(\sigma^\mu\partial_\mu\widetilde{G}^\dagger)_\alpha+\partial_\mu j^\mu_\alpha+\ldots \tag{7.5.1}$$

其中j^μ_α是超对称流中包含所有其它超多重态的部分，省略号表示哥德斯通超子超多重态对$\partial_\mu J^\mu_\alpha$的其他贡献，这些贡献可以忽略。（公式 (7.5.1)第一项来自于公式 (3.4.13)第二项，

[†]更一般的，如果超对称由一些辅助场F_i和D^a的真空期望值自发破缺，那么后文每个地方都应该要做替换$\langle F\rangle\to(\sum_i|\langle F_i\rangle|^2+\frac{1}{2}\sum_a\langle D^a\rangle^2)^{1/2}$。

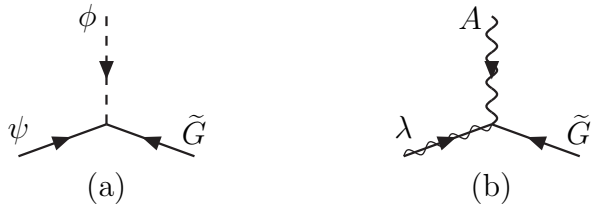


图 7.3: 哥德斯通超子/引力超子$\tilde{G}$和超伙伴对(ϕ,ψ)和(λ,A)的相互作用。

对哥德斯通超子的辅助场利用了运动方程$F_i=-W_i^*$。）哥德斯通超子的运动方程允许我们写下一个有效拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{哥德斯通超子}}=i\widetilde{G}^\dagger\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\widetilde{G}-\frac{1}{\langle F\rangle}(\widetilde{G}\partial_\mu j^\mu+\text{c.c.}),\tag{7.5.2}$$

来描述哥德斯通超子与其它所有费米子-玻色子对的相互作用[148]。特别地，因为$j^\mu_\alpha=(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\psi_i)_\alpha\partial_\nu\phi^{*i}-\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\mu\lambda^{\dagger a}F^a_{\nu\rho}/2\sqrt{2}+\ldots$，存在如图 7.3所示的哥德斯通超子-标量-手征费米子和哥德斯通超子-规范超子-规范玻色子顶角。因为这个推导只依赖于超对称流守恒，公式 (7.5.2)与超对称破缺如何由$\langle F\rangle$ 传递到最小超模型(ϕ_i,ψ_i) 和(λ^a,A^a)的细节无关。乍一看公式 (7.5.2) 的相互作用耦合在$\langle F\rangle$趋于零的极限变大是奇怪的。然而，相互作用项含有两个导数项，它们在超伙伴在壳时总会给出一个正比于超伙伴质量平方差的动能因子，如图 7.3a和7.3b 所示的分别为$m_\phi^2-m_\psi^2$和$m_\lambda^2-m_A^2$。这一项只有在超对称破缺时才非零，因此$\langle F\rangle\to 0$必须消失，相互作用在这个极限也是良好定义的。此外，对于固定的$m_\phi^2-m_\psi^2$和$m_\lambda^2-m_A^2$，如果$m_\phi^2-m_\psi^2$ 不是太大，公式 (7.5.2)的相互作用项在唯象上可以很重要[148]-[151]。

以上评论可以在全局超对称破缺中应用。然而，考虑引力之后，超对称必须是一个局域对称性。这意味着旋量参数ϵ^α（第一次在第3.1小节出现），不再是一个常数，而可以在时空点与点之间变化。得到的局域超对称理论被称为*超引力*。它必须用局域超对称变换把通常广义相对论的时空对称性统一起来[152, 153]。在超引力中，自旋2引力子有一个自旋3/2费米子超伙伴，被称为引力超子，我们表示为$\widetilde{\Psi}^\alpha_\mu$。引力超子有奇性$R$宇称（$P_R=-1$），这可以由宇称定义公式 (6.2.5)看出。它带来矢量指标(μ)和旋量指标(α)，同时在局域超对称变换

$$\delta\widetilde{\Psi}^\alpha_\mu\;=\;\partial_\mu\epsilon^\alpha+\ldots\tag{7.5.3}$$

做非齐次变换。因此引力超子应该被认为是局域超对称变换（对比公式 (3.3.1)）的“规范”场。如果超对称没有破缺，引力子和引力超子都是无质量的，每个都有两个自旋螺旋度态。一旦超对称自发破缺，引力超子通过吸收（“吃掉”）哥德斯通超子而获得质量，此时哥德斯通超子变成了引力超子的纵向（螺旋度$\pm1/2$）组分。这被称为*超希格斯*机制，和规范理论通常的希格斯机制类似，标准模型中$W^\pm$和Z^0吸收了与电弱规范不变性自发破缺相关的南部哥德斯通玻色子而获得质量。有质量的自旋3/2引力超子现在有四个螺旋度态，其中的两个

原属于可能的哥德斯通超子。引力超子的质量传统上被称为$m_{3/2}$，在F项破缺的情况下，估计为[154]

$$m_{3/2} \sim \langle F\rangle/M_{\rm P}, \tag{7.5.4}$$

这是简单地由量纲分析得到的，因为$m_{3/2}$在超对称恢复极限($\langle F\rangle \to 0$)，同时关闭引力($M_{\rm P} \to \infty$)时必须消失。公式 (7.5.4) 意味着引力中介和规范中介模型中引力超子质量有着非常不同的预期，这是因为两类模型通常给出$\langle F\rangle$非常不同的预言。

在普朗克标度中介超对称破缺情况中，引力超子质量和最小超模型粒子质量（对比公式 (7.4.2)和(7.5.4)）是可比的。因此$m_{3/2}$预期至少在100GeV左右。它的相互作用将是引力强度，因此引力超子在对撞机上不会扮演什么角色，但是它对宇宙学是非常重要的。如果它是LSP，由于其稳定及原初密度可以轻松超过临界密度，引力超子会导致宇宙过早进入物质为主阶段。即使它不是LSP，除非其密度在暴涨末期稀释掉或者衰变足够快，否则引力超子会带来很多问题。

做为对比，规范中介超对称破缺模型预言的引力超子比最小超模型超粒子要轻很多，因为$M_{\rm mess} \ll M_{\rm P}$。这一点可以通过对比公式 (7.4.3)和(7.5.4)看出来。这种情况下引力超子几乎确定是LSP，所有的最小超模型超粒子将最终衰变到含有引力超子的末态。简单地，有人可能会预期这些衰变极其缓慢。然而，这并不一定是正确的，因为引力超子继承了它吸收的非引力相互作用的哥德斯通超子。这意味着引力超子，更为准确地说是其纵向（哥德斯通超子）组分，可以在对撞机物理实验中扮演重要角色。引力超子质量通常可以在运动学上被忽略，就像它的横向（螺旋度$\pm 3/2$）组分，真的只有引力相互作用，可以被忽略一样。因此对撞机物理中人们可以把哥德斯通超子和引力超子的纵向部分（螺旋度$\pm 1/2$）用同样的符号$\widetilde{G}$来表示。利用有效拉氏量 (7.5.2)，我们可以计算任何超粒子$\widetilde{X}$到它的标准模型伙伴X加哥德斯通超子 / 引力超子$\widetilde{G}$的衰变率

$$\Gamma(\widetilde{X} \to X\widetilde{G}) = \frac{m_{\widetilde{X}}^5}{16\pi\langle F\rangle^2}\left(1 - m_X^2/m_{\widetilde{X}}^2\right)^4. \tag{7.5.5}$$

该公式对应于图 7.3a和图7.3b，即$(\widetilde{X}, X) = (\phi, \psi)$或者$(\lambda, A)$。一个$(1 - m_X^2/m_{\widetilde{X}}^2)^2$因子来自于用来做在壳末态分析的公式 (7.5.2)相互作用项的导数项，另外一个这样的因子来自于$m_{3/2} \ll m_{\widetilde{X}}, m_X$，情况下的运动相空间积分。

如果含有哥德斯通超子和$\langle F\rangle$超多重态的动能项是正则形式，同时要求树图阶真空能量消失，那么估计公式 (7.5.4)会变化为

$$m_{3/2} = \langle F\rangle/\sqrt{3}M_{\rm P}. \tag{7.5.6}$$

这种情况下，公式 (7.5.5)可以重新写为

$$\Gamma(\widetilde{X} \to X\widetilde{G}) = \frac{m_{\widetilde{X}}^5}{48\pi M_{\rm P}^2 m_{3/2}^2}\left(1 - m_X^2/m_{\widetilde{X}}^2\right)^4, \tag{7.5.7}$$

这是为什么这个公式有时会被列出的原因，虽然该公式并不是一般情况下都成立，因为用到了假定 (7.5.6)。如果固定其它质量，对于更小的$\langle F\rangle$，或者等价的更小的$m_{3/2}$，衰变密度会更大。如果$\widetilde{X}$是不同标准模型粒子X 超伙伴的混合物，则公式 (7.5.5)的分宽度应该乘以一个等于相应混合角度余弦平方的压低因子。如果$m_{\widetilde{X}}$在100GeV或者以上量级，同时$\sqrt{\langle F\rangle} \lesssim \mathrm{n}\times 10^6$ GeV （根据公式 (7.5.6)对应于大体上小于1 keV的引力超子。），那么$\widetilde{X} \to X\tilde{G}$衰变可以足够快到在现代对撞机探测器上被发现。这将带来一些有趣的唯象信号，在第9.5 和10节我们将做进一步的讨论。

现在我们转向最小超模型软破缺项产生方法的系统化分析。

7.6 普朗克能标中介超对称破缺机制

考虑超对称自发破缺区域主要通过引力强度相互作用与我们的最小超模型相连接的模型，还要包括超引力效应[156, 157]。令X是F项辅助场破缺超对称的手征超场，同时首先考虑一个全局超对称性有效拉氏量，两个区域间起沟通作用的是第4.10节所讨论的不可重整项，这些项是普朗克标度压低的。超势，科勒势，和动能函数，按照大的$M_{\rm P}$展开，为

$$W = W_{\text{最小超模型}} - \frac{1}{M_{\rm P}}\left(\frac{1}{6}y^{Xijk}X\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \frac{1}{2}\mu^{Xij}X\Phi_i\Phi_j\right) + \ldots, \tag{7.6.1}$$

$$K = \Phi^{*i}\Phi_i + \frac{1}{M_{\rm P}}(n_i^j X + \overline{n}_i^j X^*)\Phi^{*i}\Phi_j - \frac{1}{M_{\rm P}^2}k_i^j XX^*\Phi^{*i}\Phi_j + \ldots, \tag{7.6.2}$$

$$f_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{g_a^2}\Big(1 - \frac{2}{M_{\rm P}}f_a X + \ldots\Big). \tag{7.6.3}$$

这里Φ_i表示最小超模型及其扩充的手征超场，y^{Xijk}, k_i^j, n_i^j, $\overline{n}_i^j$和f_a是无量纲耦合系数，而μ^{Xij}具有质量量纲。选定科勒势的领头项给出正则归化的动能项。矩阵k_i^j必须是厄米的，同时$\overline{n}_i^j = (n_j^i)^*$，这样才能保证拉氏量是实的。为了找到由此得到的低能有效理论的超对称软破缺项，我们可以应用第4节的超空间公式，通过做替换

$$X \to \theta\theta F, \qquad X^* \to \theta^\dagger\theta^\dagger F^*, \tag{7.6.4}$$

把X处理为“假粒子”，其中F表示$\langle F_X\rangle$。积分掉辅助场Φ_i后得到的超对称破缺拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm soft} = {} & -\frac{F}{2M_{\rm P}}f_a\lambda^a\lambda^a - \frac{F}{6M_{\rm P}}y^{Xijk}\phi_i\phi_j\phi_k - \frac{F}{2M_{\rm P}}\mu^{Xij}\phi_i\phi_j - \frac{F}{M_{\rm P}}n_i^j\phi_j W^i_{\text{最小超模型}} + \text{c.c.} \\ & -\frac{|F|^2}{M_{\rm P}^2}(k_j^i + n_p^i\overline{n}_j^p)\phi^{*j}\phi_i,\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

其中ϕ_i和λ^a是最小超模型区域标量和规范超子场。现在如果假定$\sqrt{F} \sim 10^{10}$或10^{11} GeV ，公式 (7.6.5)就有着和公式 (5.1)一样的形式，最小超模型软破缺项在$m_{\rm soft} \sim F/M_{\rm P}$ 的量级，或许是几百个GeV的量级。特别的，如果我们把可见区域超势写为

$$W_{\text{最小超模型}} = \frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \frac{1}{2}\mu^{ij}\Phi_i\Phi_j, \tag{7.6.6}$$

那么这个区域的软破缺项，按照公式 (5.1)的符号约定是

$$M_a = \frac{F}{M_{\rm P}} f_a, \tag{7.6.7}$$

$$a^{ijk} = \frac{F}{M_{\rm P}} (y^{Xijk} + n_p^i y^{pjk} + n_p^j y^{pik} + n_p^k y^{pij}), \tag{7.6.8}$$

$$b^{ij} = \frac{F}{M_{\rm P}} (\mu^{Xij} + n_p^i \mu^{pj} + n_p^j \mu^{pi}), \tag{7.6.9}$$

$$(m^2)_j^i = \frac{|F|^2}{M_{\rm P}^2} (k_j^i + n_p^i \overline{n}_j^p). \tag{7.6.10}$$

注意公式 (5.2)$\mathcal{L}_{\text{maybe soft}}$形式的耦合是不能由公式 (7.6.5)得到的。虽然它们的确可以如预期生成，最大的来源是不可重整的科勒势项，科勒势导致

$$\mathcal{L} = -\frac{|F|^2}{M_{\rm P}^3} x_i^{jk} \phi^{*i} \phi_j \phi_k + \text{c.c.}, \tag{7.6.11}$$

其中x_i^{jk}是无量纲的。这就解释了为什么，至少在这个模型机制中，公式 (5.2)的耦合系数c_i^{jk}量级为$|F|^2/M_{\rm P}^3 \sim m_{\rm soft}^2/M_{\rm P}$，因此可以被忽略掉。

原则上，f_a, k_j^i, n_i^j, y^{Xijk}和μ^{Xij}参数应该由基本的潜在理论来决定，而我们所熟悉的爱因斯坦等效原理描述的引力的味道全同性，自身并没有告诉我们这些参数的任何形式。因此，在这个框架下，$\mathcal{L}_{\rm soft}$中近似的味道全同性要求是一个新的假定，同时如果没有更深的结构味道全同性并不能得到保证。此外，在不可重整拉氏量中假定动能项的和规范相互作用具有“最小的”归化形式，做这样令人注目的简化在历史上是非常流行的。特殊地，人们总是假定三个规范超子有一个共同的$f_a = f$，对于所有的标量$k_i^j = k\delta_i^j$和$n_i^j = n\delta_i^j$是一样的，k和n是实的，同时其它的耦合系数正比于相应的超势参数，因此$y^{Xijk} = \alpha y^{ijk}$、$\mu^{Xij} = \beta\mu^{ij}$，$\alpha$和$\beta$是普适无量纲实常数。这样$\mathcal{L}_{\rm soft}^{\text{最小超模型}}$的软破缺项全部仅由四个参数

$$m_{1/2} = f\frac{\langle F\rangle}{M_{\rm P}}, \quad m_0^2 = (k+n^2)\frac{|\langle F\rangle|^2}{M_{\rm P}^2}, \quad A_0 = (\alpha+3n)\frac{\langle F\rangle}{M_{\rm P}}, \quad B_0 = (\beta+2n)\frac{\langle F\rangle}{M_{\rm P}}. \tag{7.6.12}$$

来决定。由这四个参数可以得到在重整化标度$Q \approx M_{\rm P}$处的公式 (6.3.1)的参数

$$M_3 = M_2 = M_1 = m_{1/2}, \tag{7.6.13}$$

$$\mathbf{m_Q^2} = \mathbf{m_{\bar u}^2} = \mathbf{m_{\bar d}^2} = \mathbf{m_L^2} = \mathbf{m_{\bar e}^2} = m_0^2\,\mathbf{1}, \qquad m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2 = m_0^2, \tag{7.6.14}$$

$$\mathbf{a_u} = A_0\mathbf{y_u}, \qquad \mathbf{a_d} = A_0\mathbf{y_d}, \qquad \mathbf{a_e} = A_0\mathbf{y_e}, \tag{7.6.15}$$

$$b = B_0\mu. \tag{7.6.16}$$

纯理论基础上由上文假定得到这组参数是否是具有良好动因仍然存在争议，但是从唯象的角度看它们是非常漂亮的。这个架构成功地避免了第6.4小节所讨论的危险的味道改变和CP破坏类型。特别地，公式 (7.6.14) 和(7.6.15)分别就是公式 (6.4.4)和(6.4.5)的加强版。如果$m_{1/2}$, A_0和B_0，都有相同的复相位，则公式 (6.4.6)也被满足。

公式(7.6.13)-(7.6.16)也是极具预言性的，至少原则上是这样的，（当然，除非把B_0和其它参数以非平庸方式联系，否则公式 (7.6.16)是无实质内容的。）正如第6.4和6.5小节所讨论的，它们应该是应用为在$M_{\rm P}$标度的RG边界条件。软破缺参数RG演化到电弱标度使我们可以仅由五个参数$m_{1/2}$, m_0^2, A_0, B_0和μ（加上最小超模型中已测量到的规范和汤川耦合。）来预言全部最小超模型的质量谱，一个流行的近似是用统一标度$M_U \approx 1.5 \times 10^{16}$ GeV替换$M_{\rm P}$做为起点进行RG跑动。理由是这样做更为实用；显见的规范耦合的统一给了我们一个很强的提示；我们已经知道了一些有关RG方程演化到$M_{\rm P}$行为，但是不幸的是M_U 和$M_{\rm P}$标度之间是什么却少有指导。忽略这些效应的误差正比于圈图压低因子乘以$\ln(M_{\rm P}/M_U)$ 。这些修正有希望被M_U标度的m_0^2, $m_{1/2}$, A_0 和B_0重新定义部分吸收掉，但是很多情况下会带来难以预言的其它重要效应。

以上两段描述的框架已经是主体的超对称唯象和实验研究课题，同时也是对撞机实验探测限的基准脚本。有时称之为软破缺项的最小超引力(MSUGRA)或者受限的最小超对称标准模型(CMSSM)脚本。

特定的引力中介超对称破缺更有预言性，这些模型中$m_{1/2}$, m_0^2, A_0和B_0相互联系同时也和引力超子质量$m_{3/2}$相联系。举三种流行的软破缺项的模型例子

- 膨胀子主导：[159] $\quad m_0^2 = m_{3/2}^2, \quad m_{1/2} = -A_0 = \sqrt{3} m_{3/2}.$
- 波罗依爱: [160] $\quad m_0^2 = m_{3/2}^2, \quad A_0 = (3-\sqrt{3}) m_{3/2}, \quad m_{1/2} = \mathcal{O}(m_{3/2}).$
- “无标度”: [161] $\quad m_{1/2} \gg m_0, A_0, m_{3/2}.$

膨胀子主导在超弦理论的特定的极限下会出现。在做出高度预言的同时，它也可以轻松推广为其它极限[162]。波罗依爱模型具有的优势在于可以在隐藏区域构造一个最简单可行性超对称破缺模型，但是模型好像是特殊设定的，与更高级理论框架如超弦理论无关。“无标度”极限可以在超弦低能极限出现，其中规范超子质量标度在树图阶是未定的（名字也是）。这意味着规范超子质量在$M_{\rm P}$附近主导了其它超对称破缺源。就像在第6.5小节所看到的，规范超子质量给标夸克，标轻子和希格斯质量平方参数RG演化以足够的量使它们在电弱标度有可以接受的唯象。然而最近的无标度版本，也可以在输入标度给出有意义的A_0和m_0^2。很多情况下，B_0也可以由其它参数给出，但这太依赖于模型假定。对于唯象研究，$m_{1/2}$, m_0^2, A_0和B_0只是在对超对称破缺机制欠缺了解的情况下方便的，但不完美的（可能明显误导的）参数化方案。在更为漂亮的世界中，实验搜寻可以用类似于数量更多的公式 (6.4.4)-(6.4.6)，15个质量量纲味道全同参数空间来实施和汇报，但是因为实际操作的原因，这样高维参数空间很难进行综合的模拟。

现在让我们对超引力模型中超对称软破缺项的出现做一个稍微细节的回顾。不依赖于规范动能函数的标量势部分可以如下找到。首先，我们可以由科勒势和超势项定义实的无量纲

的科勒函数，其中科勒势和超势的手征超场替换为其标量组分：

$$G \;=\; K/M_{\rm P}^2 + \ln(W/M_{\rm P}^3) + \ln(W^*/M_{\rm P}^3). \tag{7.6.17}$$

很多文献中利用了$M_{\rm P} = 1$的单位，简化了表述使得$M_{\rm P} = 1$极限下全局超对称一致性变得稍微有点模糊了。对于G，我们可以构造关于标量场及其复共轭的导数：$G^i = \delta G/\delta\phi_i$; $G_i = \delta G/\delta\phi^{*i}$; 和$G_i^j = \delta^2 G/\delta\phi^{*i}\delta\phi_j$，如第3.2小节所示，指标$i$上升（下降）对应于对$\phi_i$ (ϕ^{*i})的导数。注意$G_i^j = K_i^j/M_{\rm P}^2$，通常被称为科勒度规，不依赖于超势。这个矩阵的逆表示为$(G^{-1})_i^j$，或者等价地$M_{\rm P}^2(K^{-1})_i^j$，使得$(G^{-1})_i^k G_k^j = (G^{-1})_k^j G_i^k = \delta_i^j$。用以上这些量为基础，超引力中通常可重整全局超对称中标量势的F项贡献的一般推广[152, 153]结果为

$$V_F \;=\; M_{\rm P}^4\, e^G\Big[G^i(G^{-1})_i^j G_j - 3\Big] \tag{7.6.18}$$

它可以重新写为

$$V_F \;=\; K_i^j F_j F^{*i} - 3e^{K/M_{\rm P}^2} WW^*/M_{\rm P}^2, \tag{7.6.19}$$

其中

$$F_i \;=\; -M_{\rm P}^2\, e^{G/2}\,(G^{-1})_i^j G_j \;=\; -e^{K/2M_{\rm P}^2}\,(K^{-1})_i^j\Big(W_j^* + W^* K_j/M_{\rm P}^2\Big), \tag{7.6.20}$$

$K^i = \delta K/\delta\phi_i$、$K_j = \delta K/\delta\phi^{*j}$。$F_i$是超引力中超对称破缺序参数（推广了可重整全局超对称的辅助场情况）。换句话说，如果一个或更多F_i获得真空期望值局域超对称将破缺。引力超子吸收未来将变为哥德斯通超子的部分而获得质量平方

$$m_{3/2}^2 \;=\; \langle K_j^i F_i F^{*j}\rangle/3M_{\rm P}^2. \tag{7.6.21}$$

取最小的科勒势$K = \phi^{*i}\phi_i$，可得$K_i^j = (K^{-1})_i^j = \delta_i^j$，所以公式 (7.6.19) 和(7.6.20)按照$1/M_{\rm P}$展开到第一阶刚好重复出了结果$F_i = -W_i^*$和$V = F_i F^{*i} = W^i W_i^*$，这正是第3.2小节构造的可重整的全局超对称理论（查看公式 (3.2.16)-(3.2.18)）。公式 (7.6.21)也重复出了公式 (7.5.4)引用的引力超子表达式。

标量势 (7.6.18)不包括来自于规范相互作用D项贡献。而D项贡献的形式为

$$V_D \;=\; \frac{1}{2}{\rm Re}[f_{ab}\,\widehat{D}^a\widehat{D}^b], \tag{7.6.22}$$

其中$\widehat{D}^a = f_{ab}^{-1}\widetilde{D}^b$，

$$\widetilde{D}^a \equiv -G^i(T^a)_i{}^j\phi_j = -\phi^{*j}(T^a)_j{}^i G_i = -K^i(T^a)_i{}^j\phi_j = -\phi^{*j}(T^a)_j{}^i K_i, \tag{7.6.23}$$

是超对称破缺量级参数。后三个等式来自于W和K的规范不变性。注意树图阶全局超对称情况下$f_{ab} = \delta_{ab}/g_a^2$、$K^i = \phi^{*i}$，公式 (7.6.22)重复出了第3.4小节可重整全局超对称D项标量势的结果，其中$\widehat{D}^a = g_a D^a$（不对a求和）。完全标量势为

$$V = V_F + V_D, \tag{7.6.24}$$

它只通过公式 (7.6.17)G的组合依赖于W和K。关于费米子和矢量粒子超引力拉氏量中有很多其它贡献，可以在文献 [152, 153]中找到，它们也只依赖于f_{ab}和G。这就允许我们可以前后一致地重新定义W和K使得后文没有单纯的全纯或者反全纯的项出现。

与全局超对称情况不同，超引力标量势*不是*必然非负，这是因为公式 (7.6.18)的-3项。因此原则上，超对称破缺可以有正的，负的，或者零真空能。实验宇宙学结果[163]要求一个正的真空能量与观测宇宙的标量因子的加速相联系，

$$\rho_{\rm vac}^{\text{观测}} = \frac{\Lambda}{8\pi G_{\text{牛顿}}} \approx (2.3\times 10^{-12}\ {\rm GeV})^4, \tag{7.6.25}$$

但是这个密度与其联系的超对称破缺标度相比也是明确微小的。因此，对撞机上粒子物理的超引力效应一个中肯的近似是真空能量是0，这个简单假定是诱人的。然而，令人讨厌的是，不清楚为什么在一个超对称破缺的真空中标量势项应该在极小值点合谋给出$\langle V\rangle \approx 0$。一个简单估计，没有巨大相消情况下，给出$\langle V\rangle$应该在$|\langle F\rangle|^2$ 的量级，因此至少大体上普朗克标度中介破缺给出$(10^{10}\ {\rm GeV})^4$或者规范中介破缺给出$(10^4\ {\rm GeV})^4$。此外，经典$\rho_{\rm vac} = \langle V\rangle$，前者是大距离尺度测量值，而后者是一个和有效场论联系的大尺度，该尺度与熟悉的高能物理可比或者更小。因此，如果不强行要求解释$\rho_{\rm vac}$的微小数值，$\langle V\rangle \approx 0$是否真的可以做为合适的要求条件是一点也不清楚的。但是，如果要求$\langle V\rangle \approx 0$做为限制，公式 (7.6.19)-(7.6.21)告诉我们$\langle K^i_j F_i F^{*j}\rangle = 3M_{\rm P}^4 e^{\langle G\rangle} = 3e^{\langle K\rangle/M_{\rm P}^2}|\langle W\rangle|^2/M_{\rm P}^2$ ，一个等价的引力超子质量公式因此是$m_{3/2} = e^{\langle G\rangle/2}M_{\rm P}$。

如果我们假定一个最小的科勒势，同时把ϕ_i场分为可见区域最小超模型的φ_i和隐藏区域为我们破缺超对称的X （以及其它不需要明确处理的场）。换句话说，假设超势和科勒势具有形式

$$W = W_{\rm vis}(\varphi_i) + W_{\rm hid}(X), \tag{7.6.26}$$

$$K = \varphi^{*i}\varphi_i + X^*X. \tag{7.6.27}$$

现在我们进一步假定隐藏区域场的动力学提供了非零真空期望值

$$\langle X\rangle = xM_{\rm P}, \qquad \langle W_{\rm hid}\rangle = wM_{\rm P}^2, \qquad \langle \delta W_{\rm hid}/\delta X\rangle = w'M_{\rm P}, \tag{7.6.28}$$

这里定义了无量纲参数x，以及质量量纲参数w, w' [†]。要求$\langle V\rangle = 0$给出$|w' + x^*w|^2 = 3|w|^2$，以及

$$m_{3/2} = |\langle F_X\rangle|/\sqrt{3}M_{\rm P} = e^{|x|^2/2}|w|. \tag{7.6.29}$$

现在我们假设可以把标量势按照无量纲数$w/M_{\rm P}$, $w'/M_{\rm P}$, $\varphi_i/M_{\rm P}$等级数展开，保留只依赖于可见区域场φ_i领头阶结果是

$$V = (W^*_{\rm vis})_i (W_{\rm vis})^i + m_{3/2}^2\varphi^{*i}\varphi_i$$

[†]这么做只是和为了和流行的例子一致，就像刚才提到的，我们不接受其相关后果。

$$+e^{|x|^2/2}\left[w^*\varphi_i(W_{\rm vis})^i\ +\ (x^*w'^*+|x|^2w^*-3w^*)W_{\rm vis}+{\rm c.c.}\right]. \tag{7.6.30}$$

这里一个技巧是每个地方我们把可见区域超势$W_{\rm vis}$重新标定为$e^{-|x|^2/2}W_{\rm vis}$，这是为了使公式 (7.6.30)第一项成为通常的，恰当的，归化的，全局超对称的F项贡献。下一项就是公式 (7.6.14)中普通的软破缺质量平方项，其中

$$m_0^2\ =\ |\langle F_X\rangle|^2/3M_{\rm P}^2\ =\ m_{3/2}^2. \tag{7.6.31}$$

公式 (7.6.30)第二行刚好给出公式 (7.6.15)，(7.6.16)中软破缺的（标量）^{3} 和（标量）^{2}全纯耦合形式，其中

$$A_0\ =\ -x^*\langle F_X\rangle/M_{\rm P},\qquad B_0\ =\ \Big(\frac{1}{x+w'^*/w^*}-x^*\Big)\langle F_X\rangle/M_{\rm P} \tag{7.6.32}$$

因为$\varphi_i(W_{\rm vis})^i$对于$W_{\rm vis}$的立方项等于$3W_{\rm vis}$，对于$W_{\rm vis}$的平方项等于$2W_{\rm vis}$。（如果转动移走x, w, w'的复相位。公式 (7.6.32)会导致$B_0=A_0-m_{3/2}$，但有很多效应可以破坏这个预言。）第7.6小节提到的波罗依爱模型刚好就是这个练习的特殊情况，其中$W_{\rm hid}$被假定为与X成线性关系。

然而，为什么W和K必须有公式 (7.6.26)和公式 (7.6.27)的简单形式是没有理由的。一般地，超势和科勒势会有如公式 (7.6.1) 和(7.6.2)一样和最小超模型耦合的X项。如果把这种项塞入公式 (7.6.18)，我们就得到了如公式 (7.6.5)形式的一般的软破缺项。只有做了特殊假定（像公式 (7.6.26), (7.6.27)）我们才得到了唯象上令人满意的结果，公式 (7.6.12)-(7.6.16)。因此超引力自身并不能保证软破缺项的普适性，或者味道全同性。

7.7 规范中介超对称破缺机制

在规范中介超对称破缺(GMSB)模型中[165, 166]，通常的规范相互作用，而不是引力，负责最小超模型软破缺项的出现。它的基本思想是引入一些新的手征超多重态，称为信使，与超对称破缺终极源相耦合，同时也通过通常的$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$规范玻色子和规范超子和最小超模型的（标）夸克，（标）轻子及希格斯（超子）间接耦合。当然，仍然存在最小超模型和超对称破缺之间的引力沟通，但是现在这些效应与规范相互作用相比就相对不重要了。

相比于普朗克标度中介，GMSB可以完全理解为可重整框架的圈图效应。最简单的这类模型中，信使场是一组左手手征超多重态$q,\overline{q},\ell,\overline{\ell}$，$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$的变换为

$$q\sim(\mathbf{3},\mathbf{1},-\frac{1}{3}),\quad \overline{q}\sim(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1},\frac{1}{3}),\quad \ell\sim(\mathbf{1},\mathbf{2},\frac{1}{2}),\quad \overline{\ell}\sim(\mathbf{1},\mathbf{2},-\frac{1}{2}). \tag{7.7.1}$$

超多重态中含有信使夸克$\psi_q,\psi_{\overline{q}}$和标量夸克$q,\overline{q}$以及信使轻子$\psi_\ell,\psi_{\overline{\ell}}$ 和标量轻子$\ell,\overline{\ell}$。所有的这些粒子必须有很大质量使其现在还没有被发现。假定它们和规范单态S通过超势

$$W_{\rm mess}\ =\ y_2S\ell\overline{\ell}+y_3Sq\overline{q}, \tag{7.7.2}$$

相耦合。S的标量组分和它的辅助场（F项）组分都被假定为获得了真空期望值，分别表示为$\langle S\rangle$ 和$\langle F_S\rangle$。这一点可以由把S放入欧雷菲尔塔夫类型模型[165]，或者动力学机制[166]中来实现。而其准确的产生机制是一个有趣且重要的问题，有很多可能的答案但现在还不清楚哪个是最好的。这里我们认为S参与了超势的另一个部分，称为$W_{\rm breaking}$，它提供必需的超对称自发破缺。我们将忽略超对称破缺的准确机制而进行简单参数化。

现在让我们来考虑信使费米子和玻色子的质量谱。费米型信使场对类似于公式 (3.2.19)获得质量项

$$\mathcal{L} \;=\; -y_2\langle S\rangle\psi_\ell\psi_{\overline{\ell}} - y_3\langle S\rangle\psi_q\psi_{\overline{q}} + \text{c.c.} \tag{7.7.3}$$

同时，它们的标量信使伙伴$\ell,\overline{\ell}$和$q,\overline{q}$具有类似于公式 (3.2.18)的标量势（忽略掉D项贡献，其对下面的讨论无影响。）

$$V \;=\; \left|\frac{\delta W_{\rm mess}}{\delta\ell}\right|^2 + \left|\frac{\delta W_{\rm mess}}{\delta\overline{\ell}}\right|^2 + \left|\frac{\delta W_{\rm mess}}{\delta q}\right|^2 + \left|\frac{\delta W_{\rm mess}}{\delta\overline{q}}\right|^2 + \left|\frac{\delta}{\delta S}(W_{\rm mess}+W_{\rm breaking})\right|^2 \tag{7.7.4}$$

现在假设在势的极小值点

$$\langle S\rangle \;\neq\; 0, \tag{7.7.5}$$

$$\langle \delta W_{\rm breaking}/\delta S\rangle \;=\; -\langle F_S^*\rangle \;\neq\; 0, \tag{7.7.6}$$

$$\langle \delta W_{\rm mess}/\delta S\rangle \;=\; 0. \tag{7.7.7}$$

把S和F_S替换为它们的真空期望值，我们可以得到信使标量轻子的势

$$\begin{aligned} V \;=\;& |y_2\langle S\rangle|^2(|\ell|^2+|\overline{\ell}|^2) + |y_3\langle S\rangle|^2(|q|^2+|\overline{q}|^2) \\ & - \left(y_2\langle F_S\rangle\ell\overline{\ell} + y_3\langle F_S\rangle q\overline{q} + \text{c.c.}\right) \\ & + \text{四次方项.} \end{aligned} \tag{7.7.8}$$

公式 (7.7.8)的第一行表示和公式 (7.7.3)并行的超对称质量项，而第二行由超对称软破缺质量构成。复标量信使因此获得质量平方矩阵等于

$$\begin{pmatrix} |y_2\langle S\rangle|^2 & -y_2^*\langle F_S^*\rangle \\ -y_2\langle F_S\rangle & |y_2\langle S\rangle|^2 \end{pmatrix} \tag{7.7.9}$$

其质量本征值为$|y_2\langle S\rangle|^2 \pm |y_2\langle F_S\rangle|$。用完全一样的方法，标量$q,\overline{q}$可以获得质量$|y_3\langle S\rangle|^2 \pm |y_3\langle F_S\rangle|$。

到此为止，我们已经找到了超对称破缺效应是把每个信使超多重态对劈裂分开为

$$\ell,\overline{\ell}: \qquad m^2_{\text{费米}} = |y_2\langle S\rangle|^2, \qquad m^2_{\text{标量}} = |y_2\langle S\rangle|^2 \pm |y_2\langle F_S\rangle|, \tag{7.7.10}$$

$$q,\overline{q}: \qquad m^2_{\text{费米}} = |y_3\langle S\rangle|^2, \qquad m^2_{\text{标量}} = |y_3\langle S\rangle|^2 \pm |y_3\langle F_S\rangle|. \tag{7.7.11}$$

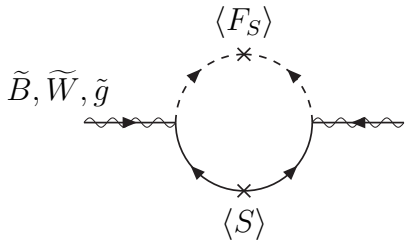


图 7.4: 规范中介超对称破缺模型中含有虚信使粒子一圈图贡献的最小超模型规范超子质量。

$\langle F_S\rangle \neq 0$时信使质量谱明显超对称破缺可以通过辐射修正传递到最小超模型超粒子中。最小超模型中规范超子由图 7.4所示一圈费曼图获得质量。 圈图中标量和费米子线是信使场。记得图 7.4的相互作用顶角是规范耦合强度，即使它们没有牵扯到规范玻色子；可以对比一下图 3.3g。用这个方法，规范中介提供的$q, \overline{q}$信使圈图给出胶超子和B超子质量，$\ell, \overline{\ell}$ 信使圈图给出W超子和B超子场质量。计算一圈图，得到的最小超模型规范超子质量归化为第6.4小节讨论过的α_a后结果为[166]

$$M_a \;=\; \frac{\alpha_a}{4\pi}\Lambda, \qquad\qquad (a=1,2,3), \tag{7.7.12}$$

这里我们引入了一个质量参数

$$\Lambda \;\equiv\; \langle F_S\rangle/\langle S\rangle\,. \tag{7.7.13}$$

（注意，如果$\langle F_S\rangle$是0，则$\Lambda = 0$，信使标量将和它们的费米型超伙伴简并，因此对最小超模型规范超子质量没有贡献。）相比之下，相应的最小超模型规范玻色子不会得到相应的质量改变，因为它们被规范不变性保护。所以超对称破缺已经成功地传递到最小超模型（“可见区域”）。做为一个好的近似，公式 (7.7.12)做为规范超子跑动质量在RG标度Q_0保持成立，Q_0对应于重信使粒子的平均典型质量，大体在$M_{\rm mess} \sim y_I\langle S\rangle$（$I = 2, 3$）的量级。跑动质量参数接着可以RG演化到电弱标度预言在未来实验测量的物理质量。

最小超模型标量质量在一圈图阶不会获得任何辐射修正。它们质量的领头阶贡献来自于图 7.5所示两圈图，其中有信使费米子（粗实线）和信使标量（粗虚线）以及在圈附近转圈的通常的规范玻色子和规范超子。 计算这些圈图可以得到最小超模型每个标量ϕ_i的质量平方为

$$m^2_{\phi_i} \;=\; 2\Lambda^2\left[\left(\frac{\alpha_3}{4\pi}\right)^2 C_3(i) + \left(\frac{\alpha_2}{4\pi}\right)^2 C_2(i) + \left(\frac{\alpha_1}{4\pi}\right)^2 C_1(i)\right], \tag{7.7.14}$$

其中$C_a(i)$是和公式 (6.5.5)-(6.5.8)一样的二次卡西米尔不变量。公式 (7.7.14)的质量平方是正的（幸运的！）

$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$, $\mathbf{a_e}$项首先在两圈阶产生，然后相比于规范超子又受到额外因子$\alpha_a/4\pi$的压低。因此，做为一个非常好的近似，在信使标度

$$\mathbf{a_u} = \mathbf{a_d} = \mathbf{a_e} = 0, \tag{7.7.15}$$

相比于 (6.4.5)这是稍显加强的条件。再次，公式 (7.7.14) 和(7.7.15)可以应用在一个与圈图中跑动的信使场平均质量相等的RG标度。然而，RG方程演化到电弱标度会生成正比于相应汤

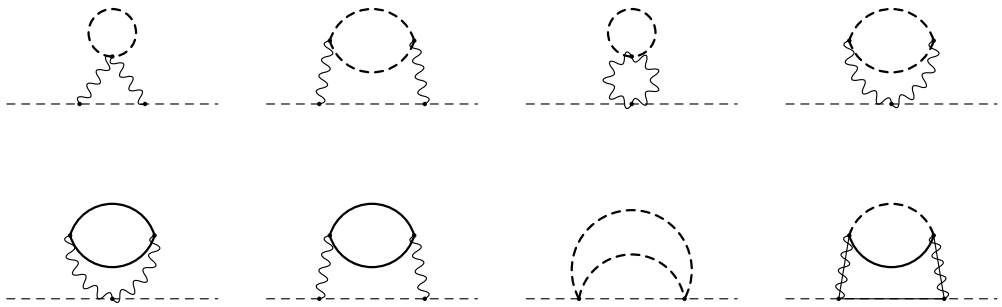


图 7.5: 规范中介超对称破缺模型中最小超模型标量质量平方领头阶来自于这些两圈图。粗虚线是信使标量，实线是信使费米子，波浪线是通常的标准模型规范玻色子，波浪线和实线重叠的线是最小超模型规范超子。

川矩阵和非零规范超子质量的非零$\mathbf{a_u}$, $\mathbf{a_d}$和$\mathbf{a_e}$，正如第6.5小节所示。做公式 (6.1.2)近似，这些矩阵只有第三代标夸克和标轻子是大的。参数b也可以在信使标度附近取作零，但这是非常模型依赖的，无论如何当RG演化到电弱标度后b将是非零的。实际操作中，b可以在做正确的电弱对称性破缺的要求下由其它参数来固定，这将在后面的第8.1小节中讨论。

因为规范超子在一圈阶产生，标量质量平方贡献在两圈阶出现，公式 (7.7.12) 和(7.7.14)都对应$m_{\rm soft}$的估计公式 (7.4.3)，其中$M_{\rm mess} \sim y_I\langle S\rangle$。方程(7.7.12) 和(7.7.14)在小的$\langle F_S\rangle/y_I\langle S\rangle^2$极限下成立，对应于信使超多重态之间的质量劈裂小于信使整体的质量标度的情况。按照$\langle F_S\rangle/y_I\langle S\rangle^2$展开的次领头阶修正结果[167]-[169]是非常小的，除非有信使有大的质量劈裂。

到现在为止，我们描述的模型总是被称为规范中介超对称破缺的最小模型。现在让我们把它推广为一个更加复杂信使区域。假设$q, \overline{q}$和$\ell, \overline{\ell}$被一组信使$\Phi_I, \overline{\Phi}_I$所替换，超势为

$$W_{\rm mess} \;=\; \sum_I y_I S \Phi_I \overline{\Phi}_I. \tag{7.7.16}$$

这里的横杠表示的是左手手征超场$\overline{\Phi}_I$按照左手手征超场Φ_I的复共轭表示来变换。它们一起称为构成标准模型规范群的"矢量型"（自共轭）表示。和前面一样，每对Φ_I和$\overline{\Phi}_I$的费米型组分得到质量平方$|y_I\langle S\rangle|^2$，它们的标量伙伴混合而得到质量平方$|y_I\langle S\rangle|^2 \pm |y_I\langle F_S\rangle|$ 。引入的最小超模型规范超子质量现在是

$$M_a \;=\; \frac{\alpha_a}{4\pi}\Lambda \sum_I n_a(I) \qquad (a=1,2,3) \tag{7.7.17}$$

其中$n_a(I)$是每个$\Phi_I+\overline{\Phi}_I$的邓金因子，归一化为$SU(3)_C$的$\mathbf{3}+\overline{\mathbf{3}}$中$n_3=1$，$SU(2)_L$二重态对$n_2=1$。对于它$U(1)_Y$，每个具有弱超荷$\pm Y$的信使$n_1 = 6Y^2/5$。计算$n_1$时，我们必须记得加上$SU(3)_C$或者$SU(2)_L$多重态每个分量的贡献。举个例子，$q+\overline{q}$的$(n_1,n_2,n_3)=(2/5,0,1)$，$\ell+\overline{\ell}$的$(n_1,n_2,n_3) = (3/5,1,0)$。因此，对于最小超模型$\sum_I(n_1,n_2,n_3)$之和为$(1,1,1)$，这样公式 (7.7.17)就和公式 (7.7.12)保持一致了。根据一般群理论基础，n_2 和n_3必须是整数，n_1总是一个整数乘以$1/5$ ，如果分数电荷是禁闭的话。

现在一般规范中介构架中最小超模型标量质量为

$$m_{\phi_i}^2 \;=\; 2\Lambda^2 \left[\left(\frac{\alpha_3}{4\pi}\right)^2 C_3(i) \sum_I n_3(I) + \left(\frac{\alpha_2}{4\pi}\right)^2 C_2(i) \sum_I n_2(I) + \left(\frac{\alpha_1}{4\pi}\right)^2 C_1(i) \sum_I n_1(I) \right]. \quad (7.7.18)$$

把公式 (7.7.17)和(7.7.18)写为简单求和的过程中，我们隐含假定了信使粒子近似地质量相等，即

$$M_{\rm mess} \;\approx\; y_I \langle S \rangle. \quad (7.7.19)$$

如果y_I并不是太互不相同，公式(7.7.18)仍然是一个不坏的近似。这是因为最小超模型质量谱对于固定的Λ 只是（由于RG跑动）对数依赖于y_I。然而，如果信使质量中存在着大的劈裂等级，每个单独信使多重态对规范超子和标量质量平方的贡献应该在信使多重态标度真的合并。接着利用RG演化把各种贡献跑动到电弱或者TeV标度；上面显示的单个信使对规范超子和标量质量的贡献可以被认为是这个RG跑动的阀值修正。

远低于大统一标度的信使质量将影响规范耦合的跑动，因此可能会预期破坏图 6.8所示的明显的统一。然而，如果信使进入包含标准模型规范群的$SU(5)$全局对称性[†] 的完整多重态，同时质量基本相等，当外推到相同标度M_U时规范耦合仍然可以统一（但是在M_U标度得到了一个更大的统一规范耦合系数数值）。因为这些原因，一类流行的模型由安排信使构成$SU(5)\mathbf{5}+\overline{\mathbf{5}}$的$N_5$个副本来得到，结果为

$$\sum_I n_1(I) = \sum_I n_2(I) = \sum_I n_3(I) = N_5\,. \quad (7.7.20)$$

方程式 (7.7.17)和(7.7.18)因此约化为

$$M_a \;=\; \frac{\alpha_a}{4\pi}\Lambda N_5, \quad (7.7.21)$$

$$m_{\phi_i}^2 \;=\; 2\Lambda^2 N_5 \sum_{a=1}^{3} C_a(i) \left(\frac{\alpha_a}{4\pi}\right)^2, \quad (7.7.22)$$

这是因为现在有N_5个最小信使区域粒子的副本在圈图附近跑动。举个例子，最小模型 (7.7.1)对应$N_5 = 1$。$SU(5)\mathbf{10}+\overline{\mathbf{10}}$的单个副本有邓金因子$\sum_I n_a(I) = 3$，因此可以被替换为$\mathbf{5}+\overline{\mathbf{5}}$的3个副本。（其它信使多重态的组合也可以保持明显的规范耦合统一。）注意，规范超子质量标度像N_5，而标量质量标度像$\sqrt{N_5}$。这意味着在非最小模型中对于更大的N_5，标轻子和标夸克将趋向于相对轻于规范超子。然而如果N_5太大，规范耦合系数在M_U处统一之前将会发散。举例，对于在10^6 GeV或者更低的信使N_5 需要≤ 4。

[†]这个$SU(5)$对称性可以由也可以不由大统一能标局域规范对称性给出，就目前我们的目的来说，它只是被用作一个经典框架，因为全局$SU(5)$对称性在规范中介发生的（非常低的）信使粒子标度有效理论中只是一个近似。

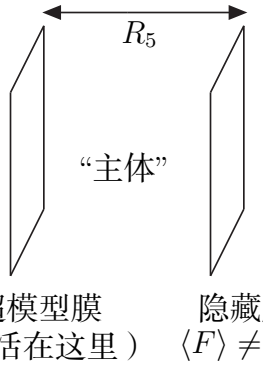


图 7.6: 这里展示一个简单例子，和最小超模型分开的超对称破缺区域可以发生在一个隐藏的空间维度中。两个膜是一个5维时空中平行的4维时空超表面。

上文所述基本的规范中介脚本还有许多其它的可能推广；参阅文献 [168]-[171]可以找到例子。这些模型吸引人的通常特征是标夸克和标轻子质量只依赖于它们的规范量子数，自动导致压低味道改变效应所需的标夸克和标轻子质量简并。但是规范中介模型最独特的唯象预言可能是引力超子是LSP这件事。它对宇宙学和对撞机物理会有重要后果，在第9.5小节和第10节我们将进一步讨论此事。

7.8 额外维度和反常中介超对称破缺机制

把最小超模型和超对称破缺区域严肃地按照图 7.2所示布局分开是可能的。假定存在卡鲁扎-克莱因[172] 或者弯曲类型的额外空间维度，因此一个物理距离分开了可见和隐藏区域†，这样就可以得到相关机制。这个一般的思想催生了很多可能性，这里很难把它们做细节性分类。举个例子，弦理论建议六个这样的额外维度，具有惊人数量的解决方案。

有许多流行的模型研究这种额外维中介超对称模型（首字母缩写XMSB是诱人的），这些模型只用单个隐藏额外维度，其中最小超模型手征超多重态禁锢在一个四维膜上而超对称破缺区域禁锢在相距R_5的平行膜上，如图 7.6所示，由五维主体（Bulk）分开。利用此图做为展示，公式 (7.6.5)中正比于y^{Xijk}和k^i_j的危险的味道改变项会受到一个类似于$e^{-R_5M_5}$因子的压低，其中R_5是第五维的尺度，M_5是五维基本（普朗克）标度，同时假定最小超模型手征超多重态禁锢在它们的膜上。因此要求$R_5M_5 \gg 1$是足够的，换句话说等五维的尺寸（或者，更一般地，紧致化空间的体积）比基本长度标度要相对大些。因此味道破坏效应压低不需要任何精细调节或极端等级，因为它是指数型的。

一个可能性是最小超模型规范超多重态在主体中传播，因此传递了超对称破缺[173]-[176]。传递中介对规范超子来说是直接的，即

$$M_a \sim \frac{\langle F\rangle}{M_5(R_5M_5)}, \tag{7.8.1}$$

但对包含标量的软破缺项却是圈图压低的。这意味着该思想的最简单版本，常被称为“规范超子中介”，其中的超对称软破缺由规范超子质量主导。其唯象因此和第7.6小节提到的PMSB模

†在上下文中，“隐藏的”经常会被替换为“隐退的”。

型的“无标度”边界条件情况非常相似。标量质量平方和标量立方耦合系数来源于重整化群跑动到电弱标度。记住规范超子质量主导是消灭味道破坏的真正主要因素，所以相比于任何特定模型的证明，这一点是更加坚实的。

也可能规范多重态也被禁锢在最小超模型膜上，那么超对称破缺的传递完全归于超引力效应。这就导致了反常中介超对称破缺（AMSB）[177]，这样命名的原因是得到的最小超模型软破缺项可以理解为局域超共形不变性（标度不变性的推广）的破坏。在一种超引力形式系统中[153]，牛顿常数（或者等价的，普朗克质量标度）被设定为非动力学手征超多重态（称为“共形补偿者”）标量场分量ϕ的真空期望值。做为规范固定，这个场获得真空期望值$\langle\phi\rangle = 1$，自发破缺了局域超共形不变性。现在，由于超对称自发破缺$\langle F\rangle \neq 0$，举一个隐藏膜的例子，辅助场组分也获得非零真空期望值即

$$\langle F_\phi\rangle \sim \frac{\langle F\rangle}{M_{\rm P}} \sim m_{3/2}. \tag{7.8.2}$$

非动力学共形补偿者场ϕ取作无量纲，这样F_ϕ就具有了质量量纲。

经典极限下，最小超模型区域仍然没有超对称破缺，这是由于额外维度提供的指数压低[‡]。然而，耦合系数的跑动表明存在超共形（标度）不变性的反常破坏。凭借非零的β函数和最小超模型膜耦合和场的反常量纲，超共形不变反常破坏会带来超对称破缺。得到的软破缺项为[177]（从现在开始用F_ϕ表示它的真空期望值）：

$$M_a = F_\phi \beta_{g_a}/g_a, \tag{7.8.3}$$

$$(m^2)^i_j = \frac{1}{2}|F_\phi|^2 \frac{d}{dt}\gamma^i_j = \frac{1}{2}|F_\phi|^2 \left[\beta_{g_a}\frac{\partial}{\partial g_a} + \beta_{y^{kmn}}\frac{\partial}{\partial y^{kmn}} + \beta_{y^*_{kmn}}\frac{\partial}{\partial y^*_{kmn}}\right]\gamma^i_j, \tag{7.8.4}$$

$$a^{ijk} = -F_\phi \beta_{y^{ijk}}, \tag{7.8.5}$$

其中反常量纲γ^i_j归化到和公式 (6.5.4)和(6.5.15)-(6.5.21)一样。就像上一小节的GMSB脚本一样，规范超子质量在一圈阶产生，而标量质量平方在两圈阶产生。同样，前两代近似味道全同，因为非平庸的味道结构只能来源于最小超模型汤川耦合。

AMSB脚本有若干独特特征。首先，不需要设定应该在哪个重整化标度用公式 (7.8.3)-(7.8.5) 做为边界条件。这是因为在每个重整化标度，准确地，到微扰论任意阶它们都成立。换句话说，公式 (7.8.3)-(7.8.5)不仅仅是软破缺项重整化群方程的边界条件，而是最终的答案。（不用引入超引力的推导，这些AMSB的重整化群轨道也可以单独由重整化群不变性属性来得到。）事实上，即使理论中存在必须退耦的重超多重态，边界条件在任意退耦标度以上和以下都是成立的。AMSB显著的紫外物理不敏感性确保低能最小超模型软破缺味道破坏的消失。另外一个有趣的预言是这些模型的引力超子质量$m_{3/2}$确定远远大于最小超模型软破缺项的标度$m_{\rm soft}$，因为后者相比公式 (7.8.2)是圈图压低的。

[‡]反常中介破缺也可以在不调用额外维度情况下实现。最小超模型软破缺项味道破坏的压低可以利用红外固定点附近强耦合共形理论来做到[178]。

AMSB的最小超模型软破缺项中只剩下唯一的未知数参数，F_ϕ。不幸的是，这个典型的可证伪性已经被证伪了。第一代标夸克和标轻子质量平方的主要贡献为

$$m_{\tilde{q}}^2 = \frac{|F_\phi|^2}{(16\pi^2)^2}\left(8g_3^4+\ldots\right), \tag{7.8.6}$$

$$m_{\tilde{e}_L}^2 = -\frac{|F_\phi|^2}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{3}{2}g_2^4+\frac{99}{50}g_1^4\right), \tag{7.8.7}$$

$$m_{\tilde{e}_R}^2 = -\frac{|F_\phi|^2}{(16\pi^2)^2}\frac{198}{25}g_1^4. \tag{7.8.8}$$

标夸克有大的正质量平方，到标轻子却是负质量平方，所以AMSB的最简单形式是不可行的。从公式 (7.8.4) 右边可以看出这些符号直接来自于那些强和电弱规范相互作用的β函数。

紫外物理不敏感性使得通过偏转AMSB轨道来解决标轻子负质量问题并不容易。额外超引力的贡献会有大的偏离[180]，但一般也会以味道全同性为代价。修改AMSB的一种方法是引入另外的超多重态，这些多重态含有的超对称破缺的质量劈裂大于它们的平均质量[181]。另外一种方法是把AMSB和规范超子中介联合[182]。其它的一些建议可以参考文献[183]。最后，有一个或许不太有良好动机的解决方案即在某些标度对所有的标量质量平方加入一个公共参数m_0^2，同时选定它是大到允许标电子具有高于CERN的LEP正负电子对撞机探测限的正质量平方。这允许在非常舒服参数化的框架中

$$F_\phi,\ m_0^2,\ \tan\beta,\ \arg(\mu), \tag{7.8.9}$$

研究唯象，其中$|\mu|$和b由下一节的正确电弱对称性破缺的要求来确定。（一些文献中用$m_{3/2}$或$M_{\rm aux}$表示F_ϕ。）最小超模型规范超子质量在领头非平庸阶不被临时加入的m_0^2所影响

$$M_1 = \frac{F_\phi}{16\pi^2}\frac{33}{5}g_1^2 \tag{7.8.10}$$

$$M_2 = \frac{F_\phi}{16\pi^2}g_2^2 \tag{7.8.11}$$

$$M_3 = -\frac{F_\phi}{16\pi^2}3g_3^2 \tag{7.8.12}$$

这意味着$|M_2| \ll |M_1| \ll |M_3|$，因此最中性超子实际上主要是$W$超子为主，而最轻荷电荷子只有200MeV量级左右，依赖于μ和$\tan\beta$的具体数值。$\widetilde{C}_1^\pm \to \widetilde{N}_1\pi^\pm$衰变生成一个非常软的派介子，在对撞机上带来了独特且困难的信号[184]-[188]。

另外一大类超对称破缺利用了额外维度几何或拓扑属性。在斯契克-史瓦西机制中[189]，对称性由假定紧致空间的费米和玻色场不同的边界条件来破缺。超对称模型中额外维度的尺寸由一个模（一个零质量或近似零质量的激发态），称为半径子，来参数化。辐射子手征超场多重态的F项组分可以获得真空期望值，这可以成为最小超模型超对称破缺的源。这两种思想经常是互相联系的。沿着这条线提出的很多模型可以参考文献[190]。这些机制也可以联合规范超子中介和AMSB。看上去各种可能性还没有被完全探究。

8 最小超模型质量谱

8.1 电弱对称性破缺和希格斯玻色子

在最小超模型中，电弱对称性破缺稍微有点复杂，这是由于模型有两个复标量希格斯二重态$H_u = (H_u^+,\, H_u^0)$ 和$H_d = (H_d^0,\, H_d^-)$，而不像通常的标准模型只有一个。最小超模型希格斯场经典标量势为

$$\begin{aligned} V &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)(|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) \\ &\quad + [b\,(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + \text{c.c.}] \\ &\quad + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 + \frac{1}{2}g^2|H_u^+ H_d^{0*} + H_u^0 H_d^{-*}|^2. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

正比于$|\mu|^2$的项来自于F项（查看公式 (6.1.5)）。正比于g^2和g'^2的项是D项贡献，来自于一般公式 (6.3.1)，但是经过了一些重排。最后正比于g^2和g'^2的项就是重新写了公式 (3.4.12) 的后三项。理论的完全标量势也含有很多关于标夸克和标轻子场的项，可以在这里忽略掉，因为它们因大的正质量平方而不会获得真空期望值。

根据实验，我们现在必须要求这个势的极小值应该把电弱对称性破缺为电磁学$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\rm EM}$，可以利用规范变换的自由度使得问题简化。首先$SU(2)_L$规范变换自由度允许我们转掉可能的弱同位旋二重态组分之一的标量场的真空期望值，所以不失去一般性前提下可以选取势能极小值点$H_u^+ = 0$。可以检验满足$\partial V/\partial H_u^+ = 0$的势能极小值点也必须有$H_d^- = 0$。这是非常好的，因为这意味着由于希格斯标量的荷电组分不能获得真空期望值，势能极小值点电磁作用必不破缺。设置$H_u^+ = H_d^- = 0$后，剩下的需要考虑的标量势为

$$\begin{aligned} V &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)|H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)|H_d^0|^2 - (b\,H_u^0 H_d^0 + \text{c.c.}) \\ &\quad + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

这个势中唯一依赖于场相位的是b项。因此，重新定义H_u和H_d的相位可以吸收b的相位，我们可以取b为实的和正的。接着势V的极小值点要求$H_u^0 H_d^0$也是实的和正的，因此$\langle H_u^0\rangle$和$\langle H_d^0\rangle$必须有相反的相位。我们可以由此利用$U(1)_Y$规范变换在不失去一般性的前提下使它们成为实的且正的，因为H_u和H_d具有相反的弱超荷$(\pm 1/2)$。这样CP宇称就不能被希格斯标量势自发破缺了，因为真空期望值和b同时被选定为实的做为约定。这意味着希格斯标量质量本征态，至少在树图阶可以被设定为良好定义的CP本征态。（其它耦合的CP破坏相位可以在希格斯部分诱导出圈图压低的CP破坏，但这并不改变$\langle H_u^0\rangle$和$\langle H_d\rangle$总可以选定为实的和正的的事实。）

为了使最小超模型标量势可行，我们必须首先确保标量场场量任意大数值的标量势有底，使得V将真正具有极小值。（回忆第3.2节和3.4节的讨论，纯超对称性理论中标量势可以自动非负而有底，但是既然现在引入了超对称破缺，我们必须要小心。）V的标量

四次方相互作用将对几乎全部任意大数值的$H_u^0 H_d^0$保持稳定。但是，对于场空间中特殊的方向$|H_u^0| = |H_d^0|$，V的四次方贡献（公式 (8.1.2)的第二行）恒等于0。这样场空间的方向称为D平坦方向，因为沿着该方向标量势中来自于D项的部分消失了。为了使势有底，我们需要标量势平方项部分沿D平坦方向为正。这个要求导致

$$2b < 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2. \tag{8.1.3}$$

注意b项总是喜欢造成电弱对称性破缺。要求在$H_u^0 = H_d^0 = 0$附近H_u^0和H_d^0的线性组合有负质量平方可以得到

$$b^2 > (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2). \tag{8.1.4}$$

如果这个不等式不成立，则$H_u^0 = H_d^0 = 0$就是势的稳定极小值点（或者根本就没有极小值点），电弱对称性破缺也就不会发生。

有趣的是，如果$m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$，公式 (8.1.3)和(8.1.4)不能同时满足。在MSUGRA或GMSB边界条件得到模型中，$m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$被假定为输入标度树图阶成立，但是$m_{H_u}^2$RG方程的X_t贡献（公式 (6.5.39)）自然地在把它电弱标度变负或者小一些$m_{H_u}^2 < m_{H_d}^2$。除非这个效应重要，否则电弱对称性破缺参数将会非常小。因此，这些模型中电弱对称性破缺实际上是由量子修正发动的。这个机制因此被称为辐射电弱对称性破缺。注意，虽然负值的$|\mu|^2 + m_{H_u}^2$对满足公式 (8.1.4)有帮助，但它并不是严格必须的。此外，即使$m_{H_u}^2 < 0$，也可以不会有电弱对称性破缺，如果$|\mu|$太大或者b太小的话。$m_{H_u}^2$来自于RG方程的大的负贡献仍然是确保软破缺项简单边界条件模型电弱对称性破缺的重要因素。实现这一点多数极自然地有一个大的顶夸克汤川耦合，为这些模型有提供了一个动机[191, 157]。

已经展示了H_u^0和H_d^0获得真空期望值的必要条件，我们现在可以要求它们与发现的电弱对称性破缺，$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{\rm EM}$类似。写下

$$v_u = \langle H_u^0 \rangle, \qquad\qquad v_d = \langle H_d^0 \rangle. \tag{8.1.5}$$

这些真空期望值和已知的Z^0质量和电弱规范耦合相联系

$$v_u^2 + v_d^2 = v^2 = 2m_Z^2/(g^2 + g'^2) \approx (174\,\text{GeV})^2. \tag{8.1.6}$$

真空期望值的比例传统上写为

$$\tan\beta \equiv v_u/v_d. \tag{8.1.7}$$

$\tan\beta$的数值没有被现在的实验固定，但它在计算上依赖于最小超模型拉氏量的参数。因为$v_u = v\sin\beta$，$v_d = v\cos\beta$约定为实的和正的，$0 < \beta < \pi/2$，后文有一个更强的要求。现在

我们可以写下势 (8.1.2)满足公式 (8.1.6)和(8.1.7)的极小值的条件$\partial V/\partial H_u^0 = \partial V/\partial H_d^0 = 0$

$$m_{H_u}^2 + |\mu|^2 - b\cot\beta - (m_Z^2/2)\cos(2\beta) \;=\; 0, \tag{8.1.8}$$

$$m_{H_d}^2 + |\mu|^2 - b\tan\beta + (m_Z^2/2)\cos(2\beta) \;=\; 0. \tag{8.1.9}$$

很容易检验这些方程的确满足必要条件公式 (8.1.3)和(8.1.4)。这使我们可以由$\tan\beta$来估计两个拉氏量参数b和$|\mu|$，但确定不了μ的相位。取$|\mu|^2, b, m_{H_u}^2$和$m_{H_d}^2$做为输入参数，m_Z^2和$\tan\beta$做为求解以上两个方程的输出参数，可以得到

$$\sin(2\beta) \;=\; \frac{2b}{m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 + 2|\mu|^2}, \tag{8.1.10}$$

$$m_Z^2 \;=\; \frac{|m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2|}{\sqrt{1-\sin^2(2\beta)}} - m_{H_u}^2 - m_{H_d}^2 - 2|\mu|^2. \tag{8.1.11}$$

注意$\sin(2\beta)$总是正的。如果$m_{H_u}^2 < m_{H_d}^2$，像通常假定的，$\cos(2\beta)$是负的，否则为正的。

做为旁白，公式 (8.1.10)和(8.1.11)强调了第6.1小节已经提到的“μ问题”。没有巨大抵消的情况下，所有的输入参数应该和m_Z^2或者二倍m_Z^2同量级。然而，在最小超模型中，μ 是一个超势中出现的保持超对称的参数，而$b, m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$是超对称破缺参数。这就导致了广泛传播的信念：最小超模型在非常高能标必须引入一个把有效数值的μ和超对称破缺机制以某种方式联系的机制；查看第11.3和11.4节和文献 [70]可以找到例子。

即使μ的数值由超对称来设定，公式 (8.1.11)所需的抵消，在考虑超伙伴直接寻找限制后，具体模型框架分析时总会是显著的。举个例子，按大的$\tan\beta$展开，公式 (8.1.11)变为

$$m_Z^2 = -2(m_{H_u}^2 + |\mu|^2) + \frac{2}{\tan^2\beta}(m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2) + \mathcal{O}(1/\tan^4\beta). \tag{8.1.12}$$

最小超模型典型的可行答案的$-m_{H_u}^2$和$|\mu|^2$都远远大于m_Z^2，以至于大的抵消是需要的。特别的，为了避免希格斯质量不太小于其观测值（查看公式 (8.1.24)）需要的大顶夸克质量平方，将对$m_{H_u}^2$贡献。因此在最小超模型中所需的抵消可以在几个百分点的级别，甚至更坏。不可能客观地判断这一点是否是令人不安的，但是随着超伙伴LHC限的增高，它的确带来了主观上的担心。

公式 (8.1.8)-(8.1.11)是基于树图阶势的，同时包含了跑动的可重整拉氏量参数，这些参数依赖于重整化方案的选择。实际操作中，为了得到数值稳定结果，我们必须至少要包含一圈阶修正。为了做到这一点，我们可以计算做为真空期望值为函数的有效势ΔV的圈图修正$V_{\rm eff}(v_u, v_d) = V + \Delta V$。这样做的影响就是对公式 (8.1.8)-(8.1.11)做简单参数替换

$$m_{H_u}^2 \to m_{H_u}^2 + \frac{1}{2v_u}\frac{\partial(\Delta V)}{\partial v_u}, \qquad m_{H_d}^2 \to m_{H_d}^2 + \frac{1}{2v_d}\frac{\partial(\Delta V)}{\partial v_d}, \tag{8.1.13}$$

同时求导时把v_u和v_d作实数变量处理，就可以得到主导完全有效势真空期望值的方程。最小超模型ΔV的结果现在已经到了两圈阶[139, 192]。最重要的修正来自于标顶夸克和顶夸克的

一圈图，经验表明重整化标度选定在大体上标顶夸克平均质量处，树图阶近似的适用性和微扰论的收敛性会得到改进。

最小超模型希格斯场由两个$SU(2)_L$二重态，或者8个实的，标量自由度构成。当电弱对称性破缺后，其中的三个成为了自许的南部哥德斯通玻色子$G^0, G^\pm$，它们会成为Z^0和$W^\pm$有质量矢量的纵向模式。剩下五个希格斯标量质量本征态由两个CP偶性中性标量h^0和H^0，一个CP奇性中性标量A^0和电荷+1标量H^+及其共轭电荷−1标量H^-构成。（这里我们定义$G^- = G^{+*}$，$H^- = H^{+*}$，同时约定h^0轻于H^0。）规范本征态可以由质量本征态场表述为

$$\begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_u \\ v_d \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} R_\alpha \begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} R_{\beta_0} \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} \tag{8.1.14}$$

$$\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_d^{-*} \end{pmatrix} = R_{\beta_\pm} \begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} \tag{8.1.15}$$

其中正交转换矩阵选定为

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{8.1.16}$$

$$R_{\beta_0} = \begin{pmatrix} \sin\beta_0 & \cos\beta_0 \\ -\cos\beta_0 & \sin\beta_0 \end{pmatrix}, \qquad R_{\beta_\pm} = \begin{pmatrix} \sin\beta_\pm & \cos\beta_\pm \\ -\cos\beta_\pm & \sin\beta_\pm \end{pmatrix}, \tag{8.1.17}$$

使得势的平方项部分具有对角化的质量平方：

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} m_{h^0}^2 (h^0)^2 + \frac{1}{2} m_{H^0}^2 (H^0)^2 + \frac{1}{2} m_{G^0}^2 (G^0)^2 + \frac{1}{2} m_{A^0}^2 (A^0)^2 \\ &\quad + m_{G^\pm}^2 |G^+|^2 + m_{H^\pm}^2 |H^+|^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{8.1.18}$$

接下来，鉴于v_u, v_d使树图阶势最小[†]，我们可以得到$\beta_0 = \beta_\pm = \beta$, $m_{G^0}^2 = m_{G^\pm}^2 = 0$，以及

$$m_{A^0}^2 = 2b/\sin(2\beta) = 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 \tag{8.1.19}$$

$$m_{h^0,H^0}^2 = \frac{1}{2}\Big(m_{A^0}^2 + m_Z^2 \mp \sqrt{(m_{A^0}^2 - m_Z^2)^2 + 4 m_Z^2 m_{A^0}^2 \sin^2(2\beta)} \Big), \tag{8.1.20}$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_{A^0}^2 + m_W^2 . \tag{8.1.21}$$

树图阶混合角度确定为

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = -\left(\frac{m_{H^0}^2 + m_{h^0}^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2} \right), \qquad \frac{\tan 2\alpha}{\tan 2\beta} = \left(\frac{m_{A^0}^2 + m_Z^2}{m_{A^0}^2 - m_Z^2} \right), \tag{8.1.22}$$

传统上角度选为负的；这样$-\pi/2 < \alpha < 0$（如果$m_{A^0} > m_Z$）。希格斯质量本征态与标准模型夸克轻子以及电弱矢量玻色子，还有和各种超粒子的耦合的费曼规则在文献 [193, 194, 195]细节性地计算出来了。

[†]真空期望值v_u, v_d附近展开经常并不在数图势极小值点，反而是在圈图修正有效势极小值点。这种情况下，β, β_0, 和$\beta_\pm$稍有不同。

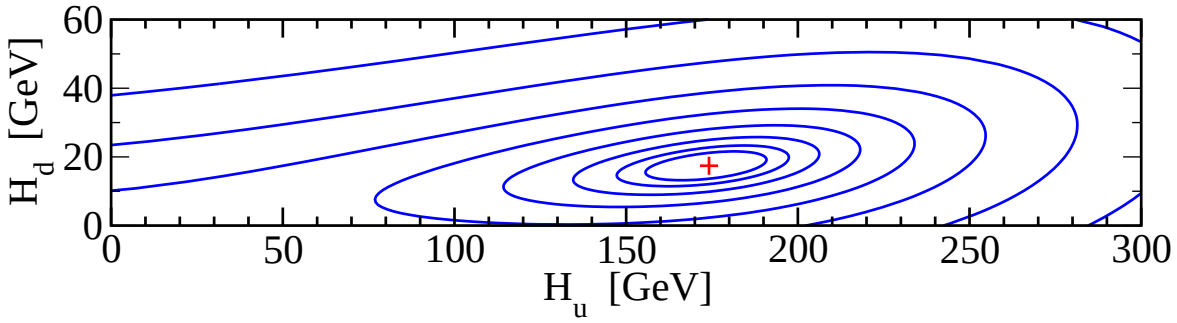


图 8.1: 一个典型参数为$\tan\beta \approx -\cot\alpha \approx 10$的希格斯势等高线图。势极小值点标记为+，图中曲线为等高线。沿着变浅方向$H_u^0/H_d^0 \approx 10$的振荡对应于质量本征态h^0，而沿着垂直的陡峭方向的振荡对应的是质量本征态H^0。

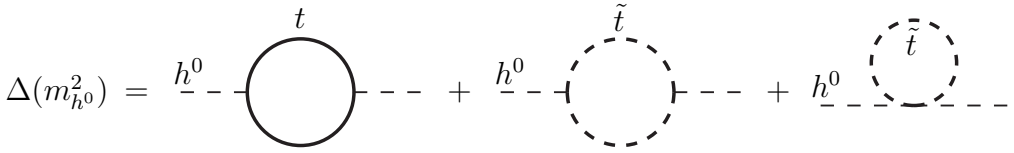


图 8.2: 顶夸克和标顶夸克对最小超模型最轻希格斯质量平方的一圈图贡献。由于超对称软破缺带来的不完全的抵消，导致了重标夸克极限下$m_{h^0}^2$大的正修正。

原则上，A^0, H^0和$H^\pm$质量可以任意大，因为它们随着$b/\sin(2\beta)$而增大。相比之下，h^0的质量有上限。根据公式 (8.1.20)，我们可以得到树图阶[196]：

$$m_{h^0} \;<\; m_Z|\cos(2\beta)| \tag{8.1.23}$$

这对应于势的一个表面方向，沿着$(H_u^0 - v_u, H_d^0 - v_d) \propto (\cos\alpha, -\sin\alpha)$的方向。这个表面方向存在可以追溯到超对称性的事实：D项通过电弱规范耦合平方给出的希格斯四次耦合比较小。对于一个典型情况：$\tan\beta \approx -\cot\alpha \approx 10$，势的等高线图如图8.1所示。 如果树图不等式(8.1.23)是坚实的，最小超模型希格斯玻色子会已经在上世纪的CERN LEP2正负电子对撞机上发现了，同时其质量也明显不会达到观测数值125GeV。然而，h^0质量平方遭受到的量子修正相对来说猛烈了一些‡。如图 8.2 所示，最大的贡献典型地来自于顶夸克和标夸克圈图。

在标顶夸克质量$m_{\tilde{t}_1}$, $m_{\tilde{t}_2}$远大于顶夸克质量m_t的极限，公式 (8.1.20)$m_{h^0}^2$ 最大的辐射修正是

$$\Delta(m_{h^0}^2) \;=\; \frac{3}{4\pi^2}\cos^2\alpha\; y_t^2 m_t^2 \left[\ln(m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}/m_t^2) + \Delta_{\text{阈值}}\right], \tag{8.1.24}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{阈值}} \;=\;& c_t^2 s_t^2 [(m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2)/m_t^2] \ln(m_{\tilde{t}_2}^2/m_{\tilde{t}_1}^2) \\ &+ c_t^4 s_t^4 \left[(m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2)^2 - \frac{1}{2}(m_{\tilde{t}_2}^4 - m_{\tilde{t}_1}^4)\ln(m_{\tilde{t}_2}^2/m_{\tilde{t}_1}^2)\right]/m_t^4,\end{aligned} \tag{8.1.25}$$

‡一般的，一圈单粒子不可约蝌蚪图也应该被考虑。但是，如果真空期望值v_u和v_d取在圈图修正的有效势极小值点的话（看上一个角注），它们和数图蝌蚪图严格抵消，因此蝌蚪图全部都可以被忽略。

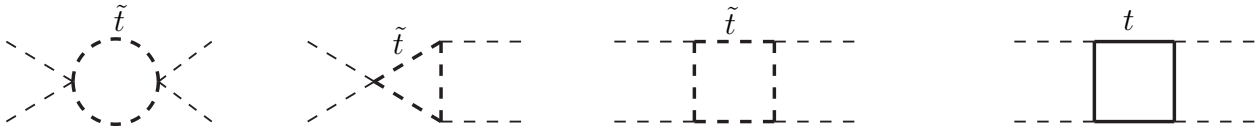


图 8.3: 低能标准模型希格斯有效势四次方相互作用的贡献。前三个图是一圈标顶夸克给出的低能有效理论希格斯四次耦合的阈值贡献。最后一个图，顶夸克圈图，给出的低能有效希格斯四次耦合的重整化圈跑动正比于y_t^4。

公式中$c_{\tilde{t}}$和$s_{\tilde{t}}$等于标顶夸克混合角度的余弦和正弦，由后文公式 (8.4.19)定义。一种理解公式 (8.1.24)的思路是：考虑在等于其质量几何平均的重整化标度积分掉标顶夸克得到了低能有效的标准模型。这样，$\Delta_{\text{阈值}}$ 来自于超对称希格斯四次方耦合的有限阀值修正，如图 8.3前三个图形所示。 公式 (8.1.24)的$\ln(m_{\tilde{t}_1}m_{\tilde{t}_2}/m_t^2)$来自于希格斯四次方耦合（ 由于图 8.3的最后一个图形 ）的重整化群跑动到顶夸克质量标度，这个标度被发现是一个好的评估标准模型有效理论$m_{h^0}^2$的重整化标度。对于小的或者适度的顶夸克混合，对数跑动项是最大的，但$\Delta_{\text{阈值}}$也可以很重要。希格斯有效四次方耦合的修正增加了希格斯势的陡峭度，因此也抬高了m_{h^0}简单树图阶预言。

公式 (8.1.25)中正比于$c_{\tilde{t}}^2 s_{\tilde{t}}^2$的项确定为正，而正比于$c_{\tilde{t}}^4 s_{\tilde{t}}^4$的项确定为负。因此，对于固定的顶夸克质量，可能的$h^0$质量的最大值在标顶夸克有足够大的混合时发生，$c_{\tilde{t}}^2 s_{\tilde{t}}^2 = m_t^2/[m_{\tilde{t}_2}^2 + m_{\tilde{t}_1}^2 - 2(m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2)/\ln(m_{\tilde{t}_2}^2/m_{\tilde{t}_1}^2)]$或者1/4，无论哪个都是小的。这经常被称为最小超模型希格斯区域的“最大混合”脚本。（ 被最大化的不是混合，而是由标顶夸克混合修正的m_{h^0}。 ）计算表明公式 (8.1.24)方括号内数值总是小于$\ln(m_{\tilde{t}_2}^2/m_t^2) + 3$。

方程式(8.1.24)已经显示了m_{h^0}可以轻松超过Z玻色子质量，$m_{h^0} = 125$ GeV的观测原则上也可以实现。然而上面是高度简化的报告；在一组模型参数下要给出希格斯标量质量合理准确预言，我们必须包含剩下的一圈修正甚至两圈和三圈的主要贡献[197]-[217]。所有m_{h^0}预言相关的理论不确定性，在给出所有的超对称软破缺参数输入后，仍然是非常大的，特别是当标顶夸克很重，不确定性在几个GeV的量级。查阅文献[218]可以得到一个最近的综述。

包含这些修正后，在发现125GeV希格斯玻色子很早以前人们就估计最小超模型中

$$m_{h^0} \lesssim 135\,\text{GeV} \tag{8.1.26}$$

这个预言中假定所有对$m_{h^0}^2$有贡献的圈图的超粒子质量不超过1TeV，同时这个上限随着标顶夸克质量对数增长。然而，在很多有小的或适度的标顶夸克混合的特定模型框架中，公式 (8.1.26)的上限是很难让人忍受的，甚至容纳一个和观测值$m_{h^0} = 125$ GeV一样大的数值都会面临严重挑战，除非标顶夸克极端重或者高度混合。不幸的是，很难准确说清楚这件事情，这是因为超对称参数空间的高维度和m_{h^0}预言的理论误差。

最小超模型中，夸克和轻子的质量和CKM混合不仅由超势的汤川耦合决定，而且也由参数$\tan\beta$决定。这是因为顶，粲和上夸克质量矩阵正比于$v_u = v\sin\beta$，而底，奇异和下夸克以

及荷电轻子获得质量正比于$v_d = v\cos\beta$。在树图阶

$$m_t \;=\; y_t v\sin\beta, \qquad m_b \;=\; y_b v\cos\beta, \qquad m_\tau = y_\tau v\cos\beta. \tag{8.1.27}$$

这些关系不只对物理奇点质量也对跑动质量成立，对t, b [219]就非常大。包含这些修正后，我们就可以把汤川耦合与$\tan\beta$和已知的费米子质量及CKM混合相联系。现在就清楚了为什么我们没有忽略y_b和y_τ即使$m_b, m_\tau \ll m_t$。做第一个近似，$y_b/y_t = (m_b/m_t)\tan\beta$，$y_\tau/y_t = (m_\tau/m_t)\tan\beta$，因此如果$\tan\beta$远大于1，$y_b$和$y_\tau$是不能被忽略的。事实上，有很好的理论动机来考虑有大$\tan\beta$的模型。例如，基于大统一$SO(10)$规范群的模型可以在统一标度统一顶，底和陶汤川耦合；模型要求$\tan\beta$大体刚好在m_t/m_b的量级[220, 221]。

注意如果有人试图使$\sin\beta$太小，则y_t将会非微扰性地变大。要求y_t在电弱标度以上不会发飙（变得特别大），我们可以得到$\tan\beta \;\gtrsim\; 1.2$左右。依赖于顶夸克质量，QCD 耦合和其它细节。原则上，如果要求y_b和y_τ不变得不可微扰计算，$\cos\beta$也会有一个限制。这会给一个大体上限$\tan\beta \;\lesssim\; 65$。然而事情会有些复杂，因为底夸克质量在大$\tan\beta$ 极限下会得到重要的一圈非QCD修正[221]。在输入标度$m^2_{H_u} = m^2_{H_d}$的一些模型中，要求y_b不要超过y_t太多会给$\tan\beta$一个更强的上限。（否则，公式 (6.5.39)和(6.5.40)中X_b会大于X_t，使人预期在最电弱标度$m^2_{H_d} < m^2_{H_u}$，势极小值点$\langle H^0_d\rangle > \langle H^0_u\rangle$，这将和大$\tan\beta$假设相矛盾。）参数$\tan\beta$也直接影响最小超模型超粒子的质量和混合。这将在下文看到。

写下最小超模型中性希格斯玻色子树图耦合角度β和α的依赖关系是有趣的。玻色型耦合正比于

$$h^0W^+W^-, \quad h^0ZZ, \quad ZH^0A^0, \quad W^\pm H^0H^\mp \;\propto\; \sin(\beta-\alpha), \tag{8.1.28}$$

$$H^0W^+W^-, \quad H^0ZZ, \quad Zh^0A^0, \quad W^\pm h^0H^\mp \;\propto\; \cos(\beta-\alpha), \tag{8.1.29}$$

费米子耦合正比于

$$h^0b\bar{b}, \quad h^0\tau^+\tau^- \;\propto\; -\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \;=\; \sin(\beta-\alpha) - \tan\beta\cos(\beta-\alpha), \tag{8.1.30}$$

$$h^0t\bar{t} \;\propto\; \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \;=\; \sin(\beta-\alpha) + \cot\beta\cos(\beta-\alpha), \tag{8.1.31}$$

$$H^0b\bar{b}, \quad H^0\tau^+\tau^- \;\propto\; \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \;=\; \cos(\beta-\alpha) + \tan\beta\sin(\beta-\alpha), \tag{8.1.32}$$

$$H^0t\bar{t} \;\propto\; \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \;=\; \cos(\beta-\alpha) - \cot\beta\sin(\beta-\alpha), \tag{8.1.33}$$

$$A^0b\bar{b}, \quad A^0\tau^+\tau^- \;\propto\; \tan\beta, \tag{8.1.34}$$

$$A^0t\bar{t} \;\propto\; \cot\beta. \tag{8.1.35}$$

一个重要的情况，经常被称为“退耦极限”，发生于$m_{A^0} \gg m_Z$时。此时m_{h^0}的树图预言满足上文提到的上限，即$m^2_{h^0} \approx m^2_Z\cos^2(2\beta)$+圈图修正。$A^0$, H^0和$H^\pm$粒子将会非常重且近似简并，

构成了一个从足够低能过程退耦的弱同位旋二重态。角度α非常接近$\beta-\pi/2$，其中

$$\cos(\beta-\alpha) = \sin(2\beta)\cos(2\beta)\, m_Z^2/m_{A^0}^2 + \mathcal{O}(m_Z^4/m_{A^0}^4), \tag{8.1.36}$$

$$\sin(\beta-\alpha) = 1 - \mathcal{O}(m_Z^4/m_{A^0}^4), \tag{8.1.37}$$

使得h^0与夸克、轻子和电弱规范玻色子的耦合与通常的无超对称标准模型希格斯玻色子几乎是一样的。辐射修正改变了这些树图阶预言，但模型构造经验表明h^0表现得和类标准模型希格斯玻色子近乎难以区分是极常见的，即使m_{A^0}并不太大。LHC发现的125GeV希格斯玻色子的测量，到现在为止，和标准模型预言是一致的，同时认为这个粒子是h^0也是合理的。然而，我们需要记住h^0仍然可能在测量上偏离标准模型希格斯玻色子。包含辐射修正效应之后，对于适度大的m_{A^0}最重要的效应是相比于标准模型数值来说可能的$h^0b\bar{b}$耦合的抬高。

8.2 中性超子和荷电超子

希格斯超子和电弱规范超子由于电弱对称性破缺而相互混合。中性希格斯超子（$\widetilde{H}_u^0$和$\widetilde{H}_d^0$）和中性规范超子（$\widetilde{B}$, $\widetilde{W}^0$）联合形成四个质量本征态称为中性超子。荷电希格斯超子（$\widetilde{H}_u^+$，$\widetilde{H}_d^-$）和W超子（$\widetilde{W}^+$和$\widetilde{W}^-$）混合形成两个质量本征态电荷为±1，称为*荷电超子*。我们将把[†]中性超子和荷电超子质量本征态表示为$\widetilde{N}_i$ $(i=1,2,3,4)$和$\widetilde{C}_i^{\pm}$ $(i=1,2)$。约定它们按照上升排序标记，使得$m_{\widetilde{N}_1} < m_{\widetilde{N}_2} < m_{\widetilde{N}_3} < m_{\widetilde{N}_4}$以及$m_{\widetilde{C}_1} < m_{\widetilde{C}_2}$。最轻中性超子，$\widetilde{N}_1$，经常被假定为LSP，除非有更轻的引力超子或者$R$宇称不守恒，因为$\widetilde{N}_1$是最小超模型中唯一的好的暗物质候选者。在这一小节，我们将描述最小超模型中性超子和荷电超子的质量谱和混合。

在规范本征态基$\psi^0=(\widetilde{B},\widetilde{W}^0,\widetilde{H}_d^0,\widetilde{H}_u^0)$中，拉氏量的中性超子部分是

$$\mathcal{L}_{\text{中性超子质量}} = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T\mathbf{M}_{\widetilde{N}}\psi^0 + \text{c.c.}, \tag{8.2.1}$$

其中

$$\mathbf{M}_{\widetilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -g'v_d/\sqrt{2} & g'v_u/\sqrt{2} \\ 0 & M_2 & gv_d/\sqrt{2} & -gv_u/\sqrt{2} \\ -g'v_d/\sqrt{2} & gv_d/\sqrt{2} & 0 & -\mu \\ g'v_u/\sqrt{2} & -gv_u/\sqrt{2} & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.2.2}$$

矩阵元M_1和M_2直接来自于最小超模型软破缺拉氏量（查看公式 (6.3.1)）而$-\mu$项是超对称希格斯超子质量项（查看公式 (6.1.4)）。正比于g,g'的项是希格斯-希格斯超子-规范超子耦合的结果（查看公式 (3.4.9) 和图 3.3g,h），其中希格斯标量由它们的真空期望值所替换（公

[†]其它经常用到的符号为中性超子$\widetilde{\chi}_i^0$或者$\widetilde{Z}_i$，荷电超子$\widetilde{\chi}_i^{\pm}$或者$\widetilde{W}_i^{\pm}$。

式 (8.1.6), (8.1.7) ）。矩阵也可以写为

$$\mathbf{M}_{\widetilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -c_\beta\, s_W\, m_Z & s_\beta\, s_W\, m_Z \\ 0 & M_2 & c_\beta\, c_W\, m_Z & -s_\beta\, c_W\, m_Z \\ -c_\beta\, s_W\, m_Z & c_\beta\, c_W\, m_Z & 0 & -\mu \\ s_\beta\, s_W\, m_Z & -s_\beta\, c_W\, m_Z & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.2.3}$$

这里我们引入了简写$s_\beta = \sin\beta$, $c_\beta = \cos\beta$, $s_W = \sin\theta_W$及$c_W = \cos\theta_W$。质量矩阵$\mathbf{M}_{\widetilde{N}}$可以被一个幺正矩阵$\mathbf{N}$对角化得到质量本征态

$$\widetilde{N}_i = \mathbf{N}_{ij}\psi_j^0, \tag{8.2.4}$$

使得

$$\mathbf{N}^*\mathbf{M}_{\widetilde{N}}\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\widetilde{N}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{\widetilde{N}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\widetilde{N}_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{\widetilde{N}_4} \end{pmatrix} \tag{8.2.5}$$

具有正的对角元。这些是$\mathbf{M}_{\widetilde{N}}$的本征值数值，或者等价地$\mathbf{M}^\dagger_{\widetilde{N}}\mathbf{M}_{\widetilde{N}}$ 本征值的平方根。$\mathbf{N}_{ij}$的指标(i,j)是（质量，规范）本征态标签。质量本征态和混合矩阵$\mathbf{N}_{ij}$可以通过求解四次方程，由参数M_1, M_2, μ和$\tan\beta$以解析形式给出，但是结果太复杂也没有启发性。

一般情况下，上面公式的参数M_1, M_2和μ可以有任意的复相位。$\widetilde{B}$和$\widetilde{W}$相位的重新定义使我们可以约定M_1和M_2都是实的和正的。这种约定后，μ的相位就是一个真的物理参数，也不能够转动掉。（我们已经使用了重新定义希格斯场相位的自由度，因为已经选取b, $\langle H_u^0\rangle$和$\langle H_d^0\rangle$是实的和正的，来保证公式 (8.2.3)的非对角元正比于m_Z项是实的。）然而，如果μ 不是实的，就会存在可能的灾难性的低能物理CP破坏效应，包括电子和中子的电偶极矩等。因此，通常（虽然并不是严格强制的，因为引入（标量）[3]耦合和胶超子质量相位后会有非平庸抵消的可能。）假定μ与M_1, M_2, b, $\langle H_u^0\rangle$以及$\langle H_d^0\rangle$ 实且正的相位约定属于一个集合，也是实的。这种限制下μ的符号仍然是未定的。

满足公式 (6.5.27)的模型中，在电弱标度有一个漂亮的预言

$$M_1 \approx \frac{5}{3}\tan^2\theta_W\, M_2 \approx 0.5 M_2 \tag{8.2.6}$$

如果这个关系成立，中性超子的质量和混合角度只依赖于三个未知参数。这个假定理论上足够令人信服使其在多数唯象研究中使用，但是这只是一个假定，有一天实验会检验它。

存在一个非常可能的极限：电弱对称性破缺效应可以被看作是中性超子质量矩阵的一个小的微扰。如果

$$m_Z \ll |\mu \pm M_1|, |\mu \pm M_2|, \tag{8.2.7}$$

中性超子质量本征态几乎是一个"类B超子"$\widetilde{N}_1 \approx \widetilde{B}$，一个"类W超子"$\widetilde{N}_2 \approx \widetilde{W}^0$ 和"类希格斯超子"$\widetilde{N}_3, \widetilde{N}_4 \approx (\widetilde{H}_u^0 \pm \widetilde{H}_d^0)/\sqrt{2}$，其质量本征态为

$$m_{\widetilde{N}_1} = M_1 - \frac{m_Z^2 s_W^2 (M_1 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_1^2} + \dots \tag{8.2.8}$$

$$m_{\widetilde{N}_2} = M_2 - \frac{m_W^2 (M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots \tag{8.2.9}$$

$$m_{\widetilde{N}_3}, m_{\widetilde{N}_4} = |\mu| + \frac{m_Z^2 (I - \sin 2\beta)(\mu + M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2)}{2(\mu + M_1)(\mu + M_2)} + \dots, \tag{8.2.10}$$

$$|\mu| + \frac{m_Z^2 (I + \sin 2\beta)(\mu - M_1 c_W^2 - M_2 s_W^2)}{2(\mu - M_1)(\mu - M_2)} + \dots \tag{8.2.11}$$

其中已经取了M_1、M_2为实的且正的约定，同时假定μ是实的符号$I = \pm 1$。质量本征态的角标签可能会因依赖于参数的数值而需要重新排列；以上标签$\widetilde{N}_1$、$\widetilde{N}_2$是特别假定了$M_1 < M_2 \ll |\mu|$。导致了一个类B超子LSP的这个极限，经常来自于MSUGRA模型给出的边界条件，模型倾向于要求该极限而使得电弱对称性破缺可行。

荷电超子谱可以用相似的方法来分析。在规范本征态基中$\psi^{\pm} = (\widetilde{W}^+, \widetilde{H}_u^+, \widetilde{W}^-, \widetilde{H}_d^-)$，拉氏量中荷电超子质量项为

$$\mathcal{L}_{\text{荷电超子质量}} = -\frac{1}{2}(\psi^{\pm})^T \mathbf{M}_{\widetilde{C}} \psi^{\pm} + \text{c.c.} \tag{8.2.12}$$

$M_{\widetilde{C}}$的2×2方块形式

$$\mathbf{M}_{\widetilde{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}^T \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{8.2.13}$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} M_2 & g v_u \\ g v_d & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} s_\beta m_W \\ \sqrt{2} c_\beta m_W & \mu \end{pmatrix}. \tag{8.2.14}$$

质量本征态和规范本征态通过2×2矩阵$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$互相联系，关系为

$$\begin{pmatrix} \widetilde{C}_1^+ \\ \widetilde{C}_2^+ \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \widetilde{W}^+ \\ \widetilde{H}_u^+ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1^- \\ \widetilde{C}_2^- \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \widetilde{W}^- \\ \widetilde{H}_d^- \end{pmatrix}. \tag{8.2.15}$$

注意正电荷左手费米子的混合矩阵和负电荷左手费米子的是不同的。选定它们使得

$$\mathbf{U}^* \mathbf{X} \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\widetilde{C}_1} & 0 \\ 0 & m_{\widetilde{C}_2} \end{pmatrix}, \tag{8.2.16}$$

具有正的矩阵元$m_{\widetilde{C}_i}$。因为只是2×2矩阵，不难解析求解质量

$$m^2_{\widetilde{C}_1}, m^2_{\widetilde{C}_2} = \frac{1}{2}\Big[|M_2|^2 + |\mu|^2 + 2m_W^2 \mp \sqrt{(|M_2|^2 + |\mu|^2 + 2m_W^2)^2 - 4|\mu M_2 - m_W^2 \sin 2\beta|^2} \Big]. \tag{8.2.17}$$

这些是4×4矩阵$\mathbf{M}^{\dagger}_{\widetilde{C}}\mathbf{M}_{\widetilde{C}}$的（双重简并的）本征值，或者等价地，$\mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{X}$的本征值，因为

$$\mathbf{V}\mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{X}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{U}^{T} = \begin{pmatrix} m^2_{\widetilde{C}_1} & 0 \\ 0 & m^2_{\widetilde{C}_2} \end{pmatrix}. \tag{8.2.18}$$

（但是它们不是$\mathbf{X}$本征值的平方。）在具有实M_2和μ的公式 (8.2.7)极限下，荷电超子质量本征态由一个类W超子$\widetilde{C}^{\pm}_1$和一个类希格斯超子$\widetilde{C}^{\pm}_2$构成，质量为

$$m_{\widetilde{C}_1} = M_2 - \frac{m^2_W(M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \ldots \tag{8.2.19}$$

$$m_{\widetilde{C}_2} = |\mu| + \frac{I m^2_W(\mu + M_2 \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \ldots . \tag{8.2.20}$$

这里同样以假定$M_2 < |\mu|$来做标签，同时I是μ的符号。有趣的是，以上近似公式显示$\widetilde{C}_1$和中性超子$\widetilde{N}_2$简并，但这不是一个准确的结果。它们的类希格斯超子同伴$\widetilde{N}_3$, $\widetilde{N}_4$和$\widetilde{C}_2$质量在$|\mu|$的量级。$M_1 \approx 0.5 M_2 \ll |\mu|$的情况在第7节的边界条件得到的可行模型中是常见的，它也在很多唯象研究中做为一个典型框架来分析。然而，再怎样强调也不过分的是这种情况并不是强制的。

关于中性超子和荷电超子的费曼规则可以如上讨论的最小超模型拉氏量的$\mathbf{N}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$得到；它们收集在文献 [31], [193]中。基于二分量旋量符号的费曼规则也已经在文献[49]给出。实际操作中，中性超子和荷电超子质量和混合角度最好由数值计算得到。注意以上讨论都是树图阶质量。这些质量的圈图修正可以是重要的，且已经在文献 [222]中在一圈阶系统地进行了计算，部分二圈结果在文献[223, 224]中。

8.3 胶超子

胶超子是颜色八重态费米子，所以不与任何其它最小超模型粒子混合，即使R宇称是破坏的。在鉴于此点，它在最小超模型所有超粒子中是独特的。在MSUGRA或GMSB边界条件模型中，胶超子质量参数M_3与B超子和W超子质量参数M_1和M_2由公式 (6.5.27)相联系，因此

$$M_3 \;=\; \frac{\alpha_s}{\alpha}\sin^2\theta_W\, M_2 \;=\; \frac{3}{5}\frac{\alpha_s}{\alpha}\cos^2\theta_W\, M_1 \tag{8.3.1}$$

到小的两圈修正，在任意RG标度都成立。这导致了一个粗略的预言在TeV标度。

$$M_3 : M_2 : M_1 \approx 6 : 2 : 1 \tag{8.3.2}$$

因此假设胶超子比轻中性超子和荷电超子质量大很多是合理的（即使很多模型中并没有要求规范超子质量统一条件）。

做更加精确的估计，我们可以考虑M_3是一个真正的跑动质量参数，毫无疑问地依赖于RG标度Q，因为胶超子是一个强相互作用粒子，M_3随着Q跑动相当快（查看公

式 (6.5.26) ）。物理上一个更为有用的量是RG标度无关的质量$m_{\tilde{g}}$，即重整化了的胶超子传播子的奇点位置。包含胶子交换和夸克标夸克圈的一圈修正之后的胶超子传播子，$\overline{\rm DR}$方案中由跑动质量给出的奇点质量为[120]

$$m_{\tilde{g}} = M_3(Q)\Big(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi}[15 + 6\ln(Q/M_3) + \sum A_{\tilde{q}}]\Big) \tag{8.3.3}$$

其中

$$A_{\tilde{q}} \;=\; \int_0^1 dx\, x \ln[x m_{\tilde{q}}^2/M_3^2 + (1-x)m_q^2/M_3^2 - x(1-x) - i\epsilon]. \tag{8.3.4}$$

公式 (8.3.3)求和遍历全部12个标夸克-夸克超多重态，同时忽略了标夸克混合的小效应（做为检验，要求公式 (8.3.3)$m_{\tilde{g}}$ 不依赖于Q可以给出公式 (6.5.26)$M_3(Q)$的一圈RG方程 ）。公式 (8.3.3)正比于α_s的修正项可以非常重要，因为胶超子是强相互作用，还由于它是八重态而有一个大的群因子（ 公式 (8.3.3)中的15 ），同时也因为它与所有的标夸克夸克对儿耦合。胶超子奇点质量的领头两圈修正已经在文献[225, 223, 226]中给出，同时也已经写入了最新版本的SOFTSUSY程序[231]中了。它们通常把预言又提高了1或者2%。

8.4 标夸克和标轻子

原则上，任何具有相同电荷，R宇称，颜色量子数的标量都可以互相混合。这意味着如果软破缺项完全任意，最小超模型应该是由上型标夸克($\widetilde{u}_L$, $\widetilde{c}_L$, $\widetilde{t}_L$, $\widetilde{u}_R$, $\widetilde{c}_R$, $\widetilde{t}_R$)，下型标夸克($\widetilde{d}_L$, $\widetilde{s}_L$, $\widetilde{b}_L$, $\widetilde{d}_R$, $\widetilde{s}_R$, $\widetilde{b}_R$)和荷电标轻子($\widetilde{e}_L$, $\widetilde{\mu}_L$, $\widetilde{\tau}_L$, $\widetilde{e}_R$, $\widetilde{\mu}_R$, $\widetilde{\tau}_R$)6×6 质量平方矩阵，和一个标中微子($\widetilde{\nu}_e$, $\widetilde{\nu}_\mu$, $\widetilde{\nu}_\tau$)3×3矩阵的对角化得到标夸克和标轻子质量本征态，幸运的是软破缺参数味道全同性的一般假设公式 (6.4.4)和(6.4.5) 预言了大部分这些混合角度非常小(6.5.41)-(6.5.45)。由于RG方程的大汤川耦合(y_t, y_b, y_τ) 和软破缺耦合(a_t, a_b, a_τ) 的效应，第三代标夸克和标轻子与它们的第一和第二代相比可以有着非常不同的质量。此外，($\widetilde{t}_L$, $\widetilde{t}_R$), ($\widetilde{b}_L$, $\widetilde{b}_R$)和($\widetilde{\tau}_L$, $\widetilde{\tau}_R$)对儿可以有重要的混合。相比之下，第一和第二代标夸克和标轻子汤川耦合可以忽略，所以它们最终形成7个近乎简并的无混合对儿($\widetilde{e}_R, \widetilde{\mu}_R$), ($\widetilde{\nu}_e, \widetilde{\nu}_\mu$), ($\widetilde{e}_L, \widetilde{\mu}_L$), ($\widetilde{u}_R, \widetilde{c}_R$), ($\widetilde{d}_R, \widetilde{s}_R$), ($\widetilde{u}_L, \widetilde{c}_L$), ($\widetilde{d}_L, \widetilde{s}_L$)。正如第6.4节所讨论的，这可以避免虚超粒子对味道改变过程灾难性巨大的贡献。

让我们首先考虑第一和第二代标夸克和标轻子的谱。在很多包含MSUGRA（ 公式 (7.6.14) ）和GMSB（ 公式 (7.7.14) ）边界条件的模型中，它们的质量平方可以方便地参数化，在好的近似下，结果为

$$m_{Q_1}^2 = m_{Q_2}^2 = m_0^2 + K_3 + K_2 + \frac{1}{36}K_1, \tag{8.4.1}$$

$$m_{\overline{u}_1}^2 = m_{\overline{u}_2}^2 = m_0^2 + K_3 \qquad + \frac{4}{9}K_1, \tag{8.4.2}$$

$$m_{\overline{d}_1}^2 = m_{\overline{d}_2}^2 = m_0^2 + K_3 \qquad + \frac{1}{9}K_1, \tag{8.4.3}$$

$$m_{L_1}^2 = m_{L_2}^2 = m_0^2 \qquad + K_2 + \frac{1}{4}K_1, \tag{8.4.4}$$

$$m_{\bar{e}_1}^2 = m_{\bar{e}_2}^2 = m_0^2 \qquad + K_1. \tag{8.4.5}$$

一个关键点是相同的K_3, K_2和K_1在公式 (8.4.1)-(8.4.5)每个地方都出现，这是因为所有的手征超多重态都和同样的规范超子有相同的规范耦合。K_1前面不同的系数刚好对应每个标量弱超荷平方的各种值。

在MSUGRA模型中，m_0^2是公式 (7.6.14)中出现的相同的共同标量质量平方。在"无标度"极限下它可以很小，但也可以成为标量质量的主导来源。K_3, K_2和K_1贡献归于正比于规范超子质量的RG跑动[†]。明确地，它们可以由求解公式 (6.5.34)得到一圈阶结果：

$$K_a(Q) = \left\{ \begin{array}{c} 3/5 \\ 3/4 \\ 4/3 \end{array} \right\} \times \frac{1}{2\pi^2} \int_{\ln Q}^{\ln Q_0} dt \; g_a^2(t) \, |M_a(t)|^2 \qquad (a = 1, 2, 3). \tag{8.4.6}$$

这里Q_0是应用MSUGRA边界条件的RG输入标度，Q应该取作正在考虑的标夸克和标轻子附近，这里应该是小于1TeV左右。跑动参数$g_a(Q)$和$M_a(Q)$遵从公式 (6.4.7)和(6.5.27)。如果输入标度近似是明显的规范耦合统一标度$Q_0 = M_U \approx 1.5 \times 10^{16}$ GeV，数值计算可得对在电弱标度的Q

$$K_1 \approx 0.15 m_{1/2}^2, \qquad K_2 \approx 0.5 m_{1/2}^2, \qquad K_3 \approx (4.5 \text{ 至 } 6.5) m_{1/2}^2. \tag{8.4.7}$$

这里$m_{1/2}$是在统一标度共同的规范超子质量参数。注意$K_3 \gg K_2 \gg K_1$这是规范耦合系数g_3, g_2和g_1相对大小的直接后果。K_3大的不确定度部分是由于QCD耦合常数的实验不确定度，部分是由于选择Q的不确定度，因为K_3在低于1TeV时跑动非常快。如果规范耦合和规范超子在M_U 和$M_{\rm P}$之间统一，就像GUT模型中发生的一样，$M_U < Q < M_{\rm P}$ 的RG跑动效应可以由m_0^2的重新定义吸收掉。否则，相比于公式 (8.4.6)大体随$\ln(M_U/1 \text{ TeV})$改变的大贡献，还会增加一个大体正比于$(M_{\rm P}/M_U)$的不确定度。

在规范中介模型中，相同的参数化公式 (8.4.1)-(8.4.5)也成立，但是m_0^2总是零。在输入标度Q_0，每个最小超模型标量质量平方得到只依赖于其规范相互作用的贡献，正如公式 (7.7.14)。不难看出这些贡献和公式 (8.4.1)-(8.4.5)中K_1, K_2和K_3具有完全一样的模式。随后的标量质量平方向电弱标度的演化只是给出了K_1, K_2和K_3参数更多的贡献。相比于MSUGRA模型，GMSB模型中给这些参数有意义的估计是有一些困难的，因为我们不知道信使质量（多少）标度（可以有多个标度）以及信使场多重态数目。然而，在规范中介情况中，我们可以非常一般地期望K_3/K_2, K_3/K_1和K_2/K_1比例的数值应该比公式 (8.4.7)大。原因有二：首先，规范中介模型中标夸克质量平方在输入标度已经大于标轻子质量平方，而不是有一个共同数值m_0^2。此外，在规范中介情况中，输入标度Q_0 典型地远小于$M_{\rm P}$或M_U，使得

[†]由公式 (6.5.35)定义的S量在MSUGRA和GMSB边界条件中输入标度都为零，在RG演化中保持很小。

在电弱标度附近RG演化具有更多权重，因为此时$g_3 > g_2 > g_1$和$M_3 > M_2 > M_1$的效应已经显现。

一般地，人们会期望标夸克应该比标轻子重很多，规范中介超对称破缺模型相比于MSUGRA模型更是如此。对于任何特定选择的模型，这个效应可以轻松地由数值RG 方程计算量化。即使在一些不能整齐地归入第7节所列的破缺类型的模型中$m_{\rm squark} > m_{\rm slepton}$的等级也是趋向于成立的，因为胶超子对标夸克的RG贡献总会出现且通常很大，这是由于QCD规范耦合比电弱相互作用大。

不管模型类型如何，标夸克和标轻子也总存在一个"超精细"劈裂，这是由电弱对称性破缺产生的。每个标夸克和标轻子中质量平方会得到贡献ϕ，Δ_ϕ来自于$SU(2)_L$和$U(1)_Y$ D项四次方相互作用（查看公式 (3.4.12)最后一项）形式（标夸克）^{2}（希格斯）^{2}和（标轻子）^{2}（希格斯）^{2}，在中性希格斯标量H_u^0和H_d^0获得真空期望值时会给出相关贡献。给定$\tan\beta$后它们就与模型无关了：

$$\Delta_\phi \;=\; \frac{1}{2}(T_{3\phi}g^2 - Y_\phi g'^2)(v_d^2 - v_u^2) \;=\; (T_{3\phi} - Q_\phi \sin^2\theta_W)\cos(2\beta)\, m_Z^2, \tag{8.4.8}$$

其中$T_{3\phi}$, Y_ϕ和Q_ϕ是ϕ属于左手的手征超多重态的弱同位旋第三分量，弱超荷和电荷。例如，$\Delta_{\tilde{u}_L} \;=\; (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W)\cos(2\beta)\, m_Z^2$, $\Delta_{\tilde{d}_L} \;=\; (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W)\cos(2\beta)\, m_Z^2$, $\Delta_{\tilde{u}_R} \;=\; (\frac{2}{3}\sin^2\theta_W)\cos(2\beta)\; m_Z^2$。这些$D$项贡献典型地比$m_0^2$ 以及K_1, K_2, K_3的贡献小，但不应该被忽略。它们会把标轻子和标夸克$SU(2)_L$二重态分开。包含这些贡献之后，第一代标夸克和标轻子质量现在是

$$m^2_{\tilde{d}_L} \;=\; m_0^2 + K_3 + K_2 + \frac{1}{36}K_1 + \Delta_{\tilde{d}_L}, \tag{8.4.9}$$

$$m^2_{\tilde{u}_L} \;=\; m_0^2 + K_3 + K_2 + \frac{1}{36}K_1 + \Delta_{\tilde{u}_L}, \tag{8.4.10}$$

$$m^2_{\tilde{u}_R} \;=\; m_0^2 + K_3 \qquad + \frac{4}{9}K_1 + \Delta_{\tilde{u}_R}, \tag{8.4.11}$$

$$m^2_{\tilde{d}_R} \;=\; m_0^2 + K_3 \qquad + \frac{1}{9}K_1 + \Delta_{\tilde{d}_R}, \tag{8.4.12}$$

$$m^2_{\tilde{e}_L} \;=\; m_0^2 \qquad + K_2 + \frac{1}{4}K_1 + \Delta_{\tilde{e}_L}, \tag{8.4.13}$$

$$m^2_{\tilde{\nu}} \;=\; m_0^2 \qquad + K_2 + \frac{1}{4}K_1 + \Delta_{\tilde{\nu}}, \tag{8.4.14}$$

$$m^2_{\tilde{e}_R} \;=\; m_0^2 \qquad\qquad + \; K_1 \; + \Delta_{\tilde{e}_R}, \tag{8.4.15}$$

第二代标夸克和标轻子公式是一样的。左手标夸克和标轻子质量劈裂由一个模型无关的求和规则支配

$$m^2_{\tilde{e}_L} - m^2_{\tilde{\nu}_e} \;=\; m^2_{\tilde{d}_L} - m^2_{\tilde{u}_L} \;=\; g^2(v_u^2 - v_d^2)/2 \;=\; -\cos(2\beta)\, m_W^2. \tag{8.4.16}$$

在$\tan\beta > 1$的允许范围内，由求和规则可得$m_{\tilde{e}_L} > m_{\tilde{\nu}_e}$, $m_{\tilde{d}_L} > m_{\tilde{u}_L}$，同时劈裂数值受电弱对称性破缺限制。

下面让我们来考虑标顶夸克质量，因为它们有一些不可忽略的贡献。首先，$\widetilde{t}_L^*\widetilde{t}_L$和$\widetilde{t}_R^*\widetilde{t}_R$质量平方项分别恰好等于$m_{Q_3}^2+\Delta_{\tilde{u}_L}$ 和$m_{\overline{u}_3}^2+\Delta_{\tilde{u}_R}$，这和第一和第二代标夸克是一样的。其次，每个$\widetilde{t}_L^*\widetilde{t}_L$ 和$\widetilde{t}_R^*\widetilde{t}_R$还有等于$m_t^2$的贡献。它们来自于$F$项标量势$y_t^2H_u^{0*}H_u^0\widetilde{t}_L^*\widetilde{t}_L$和$y_t^2H_u^{0*}H_u^0\widetilde{t}_R^*\widetilde{t}_R$项（查看图 6.2b和 6.2c）的希格斯场替换为其真空期望值。（当然，所有标夸克和标轻子都有相似的贡献，但除了标顶夸克情况外其它项都太小而不用去关心了。）第三，标量势F项的形式$-\mu^* y_t\widetilde{\overline{t}}\widetilde{t}H_d^{0*}+\text{c.c.}$也有贡献；查看公式 (6.1.6) 和图 6.4a。当H_d^0由其真空期望值代替后变为$-\mu^* v y_t\cos\beta\,\widetilde{t}_R^*\widetilde{t}_L+\text{c.c.}$。最后，标量势的软破缺（标量）[3]耦合$a_t\widetilde{\overline{t}}\widetilde{Q}_3H_u^0+\text{c.c.}$也有贡献（查看公式 (6.3.1) 第二行第一项，和公式 (6.5.28)），当H_u^0获得真空期望值后变为$a_t v\sin\beta\,\widetilde{t}_L\widetilde{t}_R^*+\text{c.c.}$。把所有这些放在一起，我们就得到了标顶夸克的质量平方矩阵，在规范本征态$(\widetilde{t}_L,\,\widetilde{t}_R)$基中为

$$\mathcal{L}_{\text{标顶夸克质量}}=-\begin{pmatrix}\widetilde{t}_L^* & \widetilde{t}_R^*\end{pmatrix}\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{t}}}^{\mathbf{2}}\begin{pmatrix}\widetilde{t}_L\\ \widetilde{t}_R\end{pmatrix} \tag{8.4.17}$$

其中

$$\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{t}}}^{\mathbf{2}}=\begin{pmatrix}m_{Q_3}^2+m_t^2+\Delta_{\tilde{u}_L} & v(a_t^*\sin\beta-\mu y_t\cos\beta)\\ v(a_t\sin\beta-\mu^* y_t\cos\beta) & m_{\overline{u}_3}^2+m_t^2+\Delta_{\tilde{u}_R}\end{pmatrix}. \tag{8.4.18}$$

厄米矩阵可以由一个幺正矩阵对角化为质量本征态

$$\begin{pmatrix}\widetilde{t}_1\\ \widetilde{t}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{\tilde{t}} & -s_{\tilde{t}}^*\\ s_{\tilde{t}} & c_{\tilde{t}}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{t}_L\\ \widetilde{t}_R\end{pmatrix}. \tag{8.4.19}$$

这里$m_{\tilde{t}_1}^2<m_{\tilde{t}_2}^2$是公式 (8.4.18)的本征值，同时$|c_{\tilde{t}}|^2+|s_{\tilde{t}}|^2=1$。如果公式 (8.4.18)非对角元是实的，那么$c_{\tilde{t}}$和$s_{\tilde{t}}$就是标顶夸克混合角$\theta_{\tilde{t}}$的余弦和正弦，$\theta_{\tilde{t}}$ 可以选定范围为$0\le\theta_{\tilde{t}}<\pi$。由于公式 (6.5.41)和 (6.5.42)中大的正比于X_t的RG效应，在MSUGRA，GMSB和类似的模型中可以得到在电弱标度$m_{\overline{u}_3}^2<m_{Q_3}^2$，同时这两个量通常都比前两代标夸克质量平方显著地小很多。公式 (8.4.18)对角元可以轻微缓解这个效应，但只是轻微地，同时非对角元典型地引起大混合，而大混合总是会减小轻标顶夸克质量平方。因此，模型总会预言$\widetilde{t}_1$是最轻标夸克，同时它是$\tilde{t}_R$组分为主。

非常相似的分析也可以应用在标底夸克和荷电标陶子上，在它们各自的规范本征态基$(\widetilde{b}_L,\,\widetilde{b}_R)$ 和$(\widetilde{\tau}_L,\,\widetilde{\tau}_R)$中质量平方矩阵为

$$\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{b}}}^{\mathbf{2}}=\begin{pmatrix}m_{Q_3}^2+\Delta_{\tilde{d}_L} & v(a_b^*\cos\beta-\mu y_b\sin\beta)\\ v(a_b\cos\beta-\mu^* y_b\sin\beta) & m_{\overline{d}_3}^2+\Delta_{\tilde{d}_R}\end{pmatrix}, \tag{8.4.20}$$

$$\mathbf{m}_{\tilde{\tau}}^{\mathbf{2}}=\begin{pmatrix}m_{L_3}^2+\Delta_{\tilde{e}_L} & v(a_\tau^*\cos\beta-\mu y_\tau\sin\beta)\\ v(a_\tau\cos\beta-\mu^* y_\tau\sin\beta) & m_{\overline{e}_3}^2+\Delta_{\tilde{e}_R}\end{pmatrix}. \tag{8.4.21}$$

它们可以对角化得到和公式 (8.4.19)完全一样的质量本征态$\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2$和$\widetilde{\tau}_1,\widetilde{\tau}_2$。

标底夸克和标陶子区域混合的数值和重要性依赖于$\tan\beta$有多大。如果$\tan\beta$不太大（在实际操作中，这通常意思是小于10左右，依赖于具体情境），标底夸克和标陶子不能从混合项和X_b与X_τ的RG效应中获得很大的效应。这是因为根据公式 (8.1.27)$y_b, y_\tau \ll y_t$。这种情况下质量本征态和规范本征态$\widetilde{b}_L$, $\widetilde{b}_R$, $\widetilde{\tau}_L$和$\widetilde{\tau}_R$几乎一样。后面三个，以及$\widetilde{\nu}_\tau$，将和它们的第一和第二代具有相同$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$量子数几乎简并。然而，即使是在小$\tan\beta$情况，$\widetilde{b}_L$将会感受到大的汤川耦合效应，因为它和$\widetilde{t}_L$在同一个二重态中。特别的，根据公式 (6.5.41)我们可以看到在输入标度向电弱标度RG演化时，X_t 会降低$m^2_{Q_3}$。因此$\widetilde{b}_L$的质量可以比$\widetilde{d}_L$和$\widetilde{s}_L$的质量显著小很多。

对于大数值$\tan\beta$，公式 (8.4.20)和(8.4.21)的混合可以非常重要，因为y_b, y_τ和a_b, a_τ不再可以忽略。就像标顶夸克情况一样，轻标底夸克和标陶子质量本征态（表示为$\widetilde{b}_1$和$\widetilde{\tau}_1$）可以比它们的第一和第二代对应部分显著地轻很多。此外，$\widetilde{\nu}_\tau$几乎比简并的$\widetilde{\nu}_e$, $\widetilde{\nu}_\mu$显著地轻很多。

第三代标夸克和标轻子应该都是正质量平方的要求带来了对$a_t^* \sin\beta - \mu y_t \cos\beta$，$a_b^* \cos\beta - \mu y_b \sin\beta$和$a_\tau^* \cos\beta - \mu y_\tau \sin\beta$ 数值的限制。如果它们太大，公式 (8.4.18), (8.4.20)或(8.4.21)的小的质量本征值会变负，这意味着标夸克或者荷电标轻子获得真空期望值，破坏了$SU(3)_C$或者电磁相互作用。由于这明显是不可接受的，我们就可以给（标量）^{3}耦合，或者等价地MSUGRA模型的参数A_0以限制。即使所有的质量平方本征值为正，大（标量）^{3}耦合的出现可以给标量势一个全局极小值点，使得标夸克和/或荷电标轻子真空期望值非零，这和保持$SU(3)_C$和电磁作用的真空是是不连通的[227]。然而我们不能简单确定，存在不连通的全局极小真空本身是否真的就意味着模型参数被排除，因为由我们的"好"真空向"坏"真空点的遂穿寿命很容易比宇宙年龄长。

标夸克和标轻子的辐射修正是可能重要的，文献 [222]给出了一圈阶修正。对于标夸克，领头两阶修正可以在文献 [229, 226]中找到，同时也已经写入了最新版本的SOFTSUSY 代码中[231]。

8.5 小结：最小超模型超粒子谱

在最小超模型中，不包括引力超子情况下有32个未发现粒子质量。上文，在一些输入标度潜在的软破缺项模型前提下，解释了这些粒子质量和混合角度的计算方法。表8.1列出了最小超模型质量本征态，表中只假定了第一和第二代标夸克与标轻子的混合是可以忽略的。这些粒子之间以及它们与标准模型夸克，轻子和规范玻色子相互作用全部费曼规则可以在文献 [31, 193] 中找到。基于二分量旋量符号的费曼规则也可以在文献[49]中找到。

特定的模型可以用非常少的参数预言最小超模型质量和混合。例如，MSUGRA模型中，没有被实验测量的自由参数只有m_0^2, $m_{1/2}$, A_0, μ和b 在GMSB模型中，自由参数有标度Λ，信使质量标度$M_{\rm mess}$，最小信使各份数目整数N_5，哥德斯通超子衰变常数$\langle F\rangle$和希格斯质量参

名称	自旋	P_R	规范本征态	质量本征态
希格斯玻色子	0	$+1$	$H_u^0\ H_d^0\ H_u^+\ H_d^-$	$h^0\ H^0\ A^0\ H^\pm$
标夸克	0	-1	$\widetilde{u}_L\ \widetilde{u}_R\ \widetilde{d}_L\ \widetilde{d}_R$ $\widetilde{s}_L\ \widetilde{s}_R\ \widetilde{c}_L\ \widetilde{c}_R$ $\widetilde{t}_L\ \widetilde{t}_R\ \widetilde{b}_L\ \widetilde{b}_R$	（相同） （相同） $\widetilde{t}_1\ \widetilde{t}_2\ \widetilde{b}_1\ \widetilde{b}_2$
标轻子	0	-1	$\widetilde{e}_L\ \widetilde{e}_R\ \widetilde{\nu}_e$ $\widetilde{\mu}_L\ \widetilde{\mu}_R\ \widetilde{\nu}_\mu$ $\widetilde{\tau}_L\ \widetilde{\tau}_R\ \widetilde{\nu}_\tau$	（相同） （相同） $\widetilde{\tau}_1\ \widetilde{\tau}_2\ \widetilde{\nu}_\tau$
中性超子	1/2	-1	$\widetilde{B}^0\ \widetilde{W}^0\ \widetilde{H}_u^0\ \widetilde{H}_d^0$	$\widetilde{N}_1\ \widetilde{N}_2\ \widetilde{N}_3\ \widetilde{N}_4$
荷电超子	1/2	-1	$\widetilde{W}^\pm\ \widetilde{H}_u^+\ \widetilde{H}_d^-$	$\widetilde{C}_1^\pm\ \widetilde{C}_2^\pm$
胶超子	1/2	-1	$\widetilde{g}$	(相同)
哥德斯通超子（引力超子）	1/2 (3/2)	-1	$\widetilde{G}$	（相同）

表 8.1: 最小超对称标准模型中未被发现的粒子（忽略了前两代标费米子的混合）。

数μ和b。

在软破缺项RG跑动到电弱标度后，我们可以希望标量势给出正确的电弱对称性破缺。这使我们可以如公式 (8.1.9)-(8.1.8)一样由$\tan\beta$来处置参数$|\mu|$和b。因此在合理的近似下，MSUGRA模型的全部质量谱只有五个未知参数：m_0^2, $m_{1/2}$, A_0, $\tan\beta$和$\mathrm{Arg}(\mu)$决定，而最简单规范中介超子对称破缺模型中，我们可以选取参数Λ, $M_{\rm mess}$, N_5, $\langle F\rangle$, $\tan\beta$和$\mathrm{Arg}(\mu)$。两种框架极具预言性。当然，非常有可能两种机制的最小形式并没有抓住超对称破缺的关键物理。

图8.4展示了基于在标度$Q_0 = 1.5\times 10^{16}$ GeV加入MSUGRA边界条件的样本模型的标量和规范超子RG演化。（这个展示需要的参数是$m_0 = 300$ GeV, $m_{1/2} = -A_0 = 1000$ GeV, $\tan\beta = 15$，但是这些参数的选择更多是为了图8.4的美观，而不是为了真实物理。这里的目标是理解定性趋势，而不是猜测正确数值。）规范超子质量跑动是标记为M_1, M_2和M_3的实线。标记为H_u和H_d的点虚线是$(\mu^2+m_{H_u}^2)^{1/2}$和$(\mu^2+m_{H_d}^2)^{1/2}$的跑动数值，它们在希格斯势中出现。其它的线是标夸克和标轻子的跑动质量，其中虚线是第三代参数$m_{\widetilde{d}_3}^2$, $m_{Q_3}^2$, $m_{\widetilde{u}_3}^2$, $m_{L_3}^2$和$m_{\widetilde{e}_3}^2$的平方根（从上到下），而实线是第一和第二代标费米子的。注意，如上文所述，由于大顶夸克汤川耦合效应$\mu^2+m_{H_u}^2$负向跑动，由此提供电弱对称性破缺。在电弱标度，

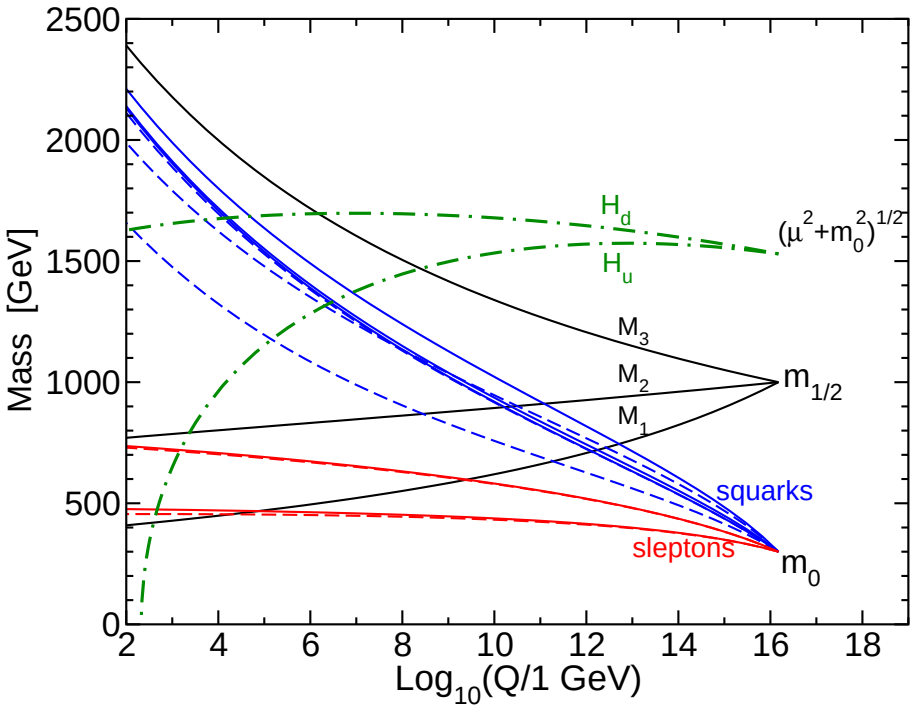


图 8.4: 在能标$Q_0 = 1.5 \times 10^{16}$GeV输入的MSUGRA边界条件的最小超模型标量和规范超子质量参数的RG演化。参数$\mu^2 + m_{H_u}^2$跑动到负值，引起了电弱对称性破缺。

拉氏量的软破缺数值可以用来计算物理质量，截面和粒子衰变率，以及其它观测量如暗物质丰度和稀有过程率等。有很多公开的程序做这些工作，包括辐射修正，举例可以查阅文献[230]-[239],[208]。

图8.5展示了由不同类型模型假定得到的最小超模型质量谱样本的典型定性草图。第一个，图8.5(a)是m_0^2比$m_{1/2}^2$相对小一些的MSUGRA的输出结果（与图 8.4)相似）。模型主要特征为有一个几乎退耦的希格斯区域，一个类B超子$\widetilde{N}_1$ LSP，几乎简并的类W超子$\widetilde{N}_2, \widetilde{C}_1$ 和类希格斯超子$\widetilde{N}_3, \widetilde{N}_4, \widetilde{C}_2$。胶超子是最重超伙伴。标夸克都远重于标轻子，最轻标费米子是标陶子。（第二代标夸克和标轻子和它们的第一代几乎简并，所以没有分开展示。）模型参数的变化有重要且预言性的效应。例如，其它参数固定增大$\tan\beta$通常会趋向于使$\tilde{b}_1$和$\tilde{\tau}_1$相比于其它粒子质量下降。增大m_0^2 趋向于挤压标夸克和标轻子谱同时相比于中性超子，荷电超子和胶超子抬高了其位置。这展示在图8.5(b)中，其中换成$m_0^2 \gg m_{1/2}^2$。在这个模型中，最重荷电超子和中性超子是类W超子的。

第三个草图，图 8.5(c)，来自于典型最小GMSB模型，其中$N_5 = 1$ 这里我们看到强相互作用超粒子和弱相互作用超粒子间的等级非常大。改变信使标度或Λ不能减小标夸克和标轻子之间的质量劈裂。因为这里没有一个类似的通用的m_0^2贡献。增加信使场的数量趋向于降低标夸克和标轻子相对于规范超子的质量，但是仍然保持着完整的标夸克和标轻子之间的等级。展示的模型中，LSP是几乎静质量零的引力超子，NLSP是类B超子中性超子，但对信使场数目大的模型来说，NLSP 可以是标陶子，或者另外联合NLSP $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{e}_L$, $\tilde{\mu}_L$，依赖于$\tan\beta$的

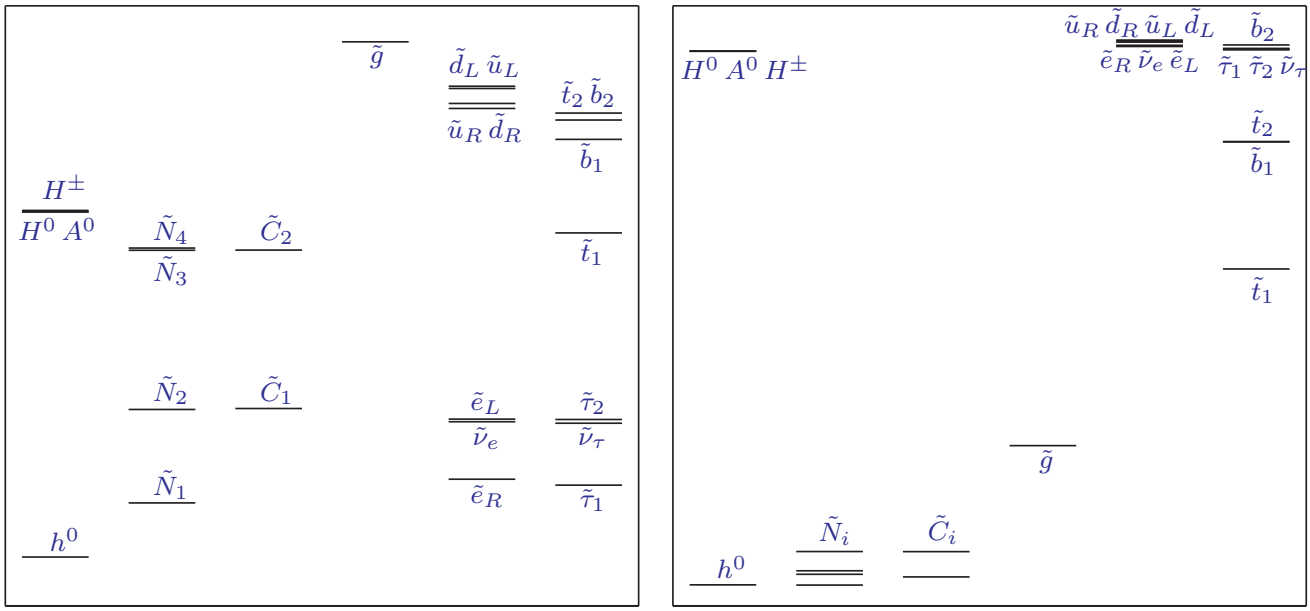


图 8.5: 最小超模型未发现粒子四个质量谱样本，分别为(a) MSUGRA模型中$m_0^2 \ll m_{1/2}^2$, (b) MSUGRA模型中$m_0^2 \gg m_{1/2}^2$, (c) GMSB模型中$N_5 = 1$, 和(d) GMSB模型中$N_5 = 3$。四种情况的质量标度不相等，它们被故意省略了。展示这些质量谱只是为了娱乐！不保证，不表示，也不意味着它们和真实世界相符。

选择。

第四个草图， 8.5(d)是一个具有非最小信使区域，$N_5 = 3$，典型的GMSB模型LSP也是几乎零质量的引力超子，但是这次NLSP是最轻标陶子。最重超伙伴是胶超子，最重荷电超子和中性超子是类W超子的。

太严重地依赖给出最小超模型质量和混合谱的特定脚本可能是错误的。以上展示仅仅只是可行的可能性的极微小部分。然而，要记住一些一般的趋势在各种不同的模型中重复发生。的确，有许多关于最小超模型谱的可能特征的传说，部分是基于理论的偏见，部分是由于许多已知可行软破缺的超对称理论内在的限制。我们评论这些特征主要是因为它们表示了很多超对称理论家的主要成见。了解这些是有用的，即使是某人很聪明地保持了怀疑态度。例如，许多很可能是：

- LSP是最轻中性超子$\widetilde{N}_1$ ，除非引力超子更轻或者R宇称不守恒。如果$M_1 < M_2, |\mu|$倾向于类B超子，在很多良好动机模型中，$\widetilde{N}_1$质量是$\widetilde{N}_2$和$\widetilde{C}_1$质量的0.5倍。如果，相反地，$|\mu| < M_1, M_2$，则LSP $\widetilde{N}_1$有大的希格斯超子组分，$\widetilde{N}_2$和$\widetilde{C}_1$不是太重。同时，如果$M_2 \ll M_1, |\mu|$，则LSP将是类W超子中性超子，一个荷电超子只稍微重一点点。

- 胶超子将远远重于轻的中性超子和荷电超子。在"标准"规范超子质量关系 (6.5.27)情况中这当然是正确的；更一般地，胶超子质量参数在它向红外RG演化时会增长相对快些，因为QCD耦合大于电弱规范耦合。所以即使规范超子质量边界条件公式 (7.6.13)或(7.7.12)有大的修正，胶超子质量参数M_3多半可能会以大于M_1和M_2方式出现。

- 第一和第二代标夸克几乎简并，同时远远重于标轻子。这是因为每个标夸克质量都从含胶超子圈图得了相同的大的正定辐射修正。由于公式 (8.4.9)-(8.4.15)参数化为K_2的效应，左手标夸克$\widetilde{u}_L$, $\widetilde{d}_L$, $\widetilde{s}_L$和$\widetilde{c}_L$很可能重于它们的右手配对$\widetilde{u}_R$, $\widetilde{d}_R$, $\widetilde{s}_R$和$\widetilde{c}_R$。

- 在MSURA模型中，前两代标夸克质量不能轻于胶超子质量的0.8倍左右。在如第7.7节所讨论的最简单规范中介模型中如果信使夸克对儿数目$N_5 \leq 4$则前面两代标夸克质量不能轻于胶超子质量的0.6倍左右。MSUGRA情况是因为胶超子质量由于RG演化进入了标夸克质量；规范中介情况是因为胶超子和标夸克质量由于公式 (7.7.17) 和(7.7.18)而粘在了一起。

- 轻标顶夸克$\widetilde{t}_1$和标底夸克$\widetilde{b}_1$可能是最轻标夸克。这是因为公式 (6.5.41)-(6.5.43)的标顶夸克和标底夸克混合效应和X_t和X_b的效应都趋向于压低轻标顶夸克和标底夸克质量。

- 最轻荷电标轻子可能是一个标陶子$\widetilde{\tau}_1$。由于大的陶子汤川耦合，质量差$m_{\widetilde{e}_R} - m_{\widetilde{\tau}_1}$在$\tan\beta$大时可能也很大。对于小一点的$\tan\beta$，$\widetilde{\tau}_1$ 主要是$\widetilde{\tau}_R$，同时不会比$\widetilde{e}_R$, $\widetilde{\mu}_R$ 轻很多。

- 左手荷电标轻子$\widetilde{e}_L$和$\widetilde{\mu}_L$可能重于它们的右手配对$\widetilde{e}_R$和$\widetilde{\mu}_R$。这是由于公式 (8.4.13)的K_2效应。（也要注意由于数值巧合$\sin^2\theta_W \approx 1/4$，$\Delta_{\tilde{e}_L} - \Delta_{\tilde{e}_R}$是正的但非常小。）

应该记住这些成见都可能被真实世界推翻。最重要的点在于通过测量最小超模型粒子质量和混合角度，我们将能得到区分超对称破缺起源和中介的互相竞争理论的大量信息。

9 超粒子衰变

这一节包含了假定R宇称守恒前提下，最小超模型中超粒子衰变模式的简单定性综述。我们将依次考虑中性超子、荷电超子、标电子、标夸克和胶超子的可能衰变。如果，就像经常被假定的，最轻中性超子$\widetilde{N}_1$是LSP，那么所有的衰变链最后都结束在含有$\widetilde{N}_1$的末态。第9.5小节讨论了以引力超子/哥德斯通超子为LSP的其他可能性。为了简化表示，这一节我们总不区分粒子和反粒子的名字和标签，正文和（由电荷和颜色守恒决定的）一致性可以避免模糊性。

9.1 中性超子和荷电超子衰变

让我们首先考虑可能的两体衰变，如第8.2节所示，每个中性超子和荷电超子都至少有少许电弱规范超子$\widetilde{B}$, $\widetilde{W}^0$和$\widetilde{W}^\pm$的混合物。所以如图 6.3b,c所示，$\widetilde{N}_i$ 和$\widetilde{C}_i$ 继承了与（标量，费米子）对儿弱强度的耦合。如果标轻子或标夸克足够轻，中性超子或荷电超子因此可以衰变到轻子+标轻子或者夸克+标夸克。在标轻子可能轻于标夸克的范围内，轻子+标轻子末态是最可能的。中性超子或荷电超子也可以衰变到更轻的中性超子或者荷电超子加上希格斯标量或者一个电弱规范玻色子，因为它们继承了它们组分的规范超子-希格斯超子-希格斯超子（查看图 6.3b,c）和规范超子-规范超子-矢量玻色子耦合。因此，最小超模型中性超子和规范超子的可能两体衰变模式为

$$\widetilde{N}_i \to Z\widetilde{N}_j,\ \ W\widetilde{C}_j,\ \ h^0\widetilde{N}_j,\ \ \ell\tilde{\ell},\ \ \nu\tilde{\nu},\ \ [A^0\widetilde{N}_j,\ \ H^0\widetilde{N}_j,\ \ H^\pm\widetilde{C}_j^\mp,\ \ q\tilde{q}], \tag{9.1.1}$$

$$\widetilde{C}_i \to W\widetilde{N}_j,\ \ Z\widetilde{C}_1,\ \ h^0\widetilde{C}_1,\ \ \ell\tilde{\nu},\ \ \nu\tilde{\ell},\ \ [A^0\widetilde{C}_1,\ \ H^0\widetilde{C}_1,\ \ H^\pm\widetilde{N}_j,\ \ q\tilde{q}'], \tag{9.1.2}$$

其中利用了中微子，荷电轻子和夸克的一般符号ν, ℓ, q。括号内的末态是更多运动学不太可能的模式。（因为$m_{h^0} = 125$ GeV，它最有可能出现在这些衰变中。）对于更重的中性超子和荷电超子（$\widetilde{N}_3$, $\widetilde{N}_4$ 和$\widetilde{C}_2$），公式 (9.1.1) 和(9.1.2)中一个或更多两体衰变在运动学上允许。同样，如果有重要的希格斯超子组分的中性超子和荷电超子向第三代夸克-标夸克对儿的衰变道打开了，根据图 6.1b,c所示相互作用，它们可能被顶夸克汤川耦合大大抬高。

有可能所有的这些两体模式对于给定的中性超子和荷电超子，特别是$\widetilde{C}_1$和$\widetilde{N}_2$ ，在运动学上是不允许的。这种情况下，它们可以通过和出现在两体衰变 (9.1.1)和(9.1.2)中一样的（但

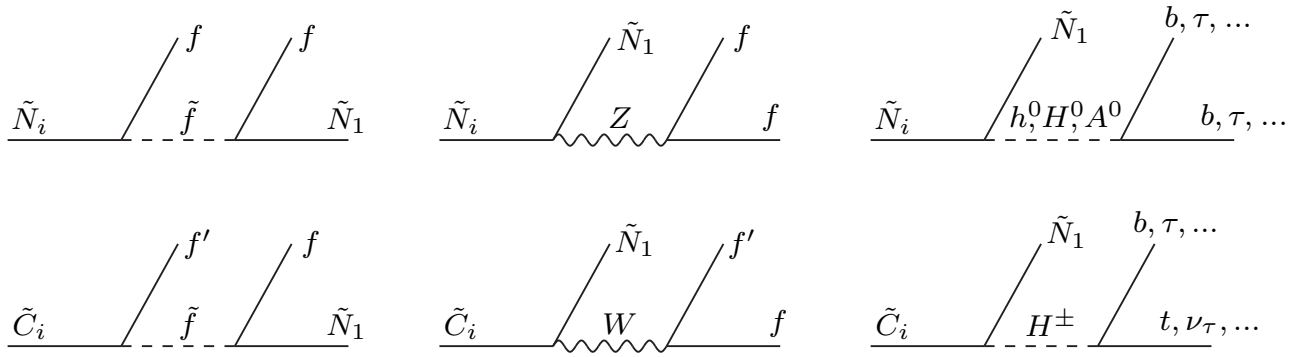


图 9.1: 末态含有$\tilde{N}_1$的中性超子和规范超子衰变费曼图。每种情况的中介标量或者矢量玻色子可以在壳（使得事实上存在一个二体衰变）或者不在壳，依赖于超粒子质量。

现在不在壳）规范玻色子，希格斯标量，标轻子和标夸克得到三体衰变

$$\widetilde{N}_i \to f f \widetilde{N}_j, \quad \widetilde{N}_i \to f f' \widetilde{C}_j, \quad \widetilde{C}_i \to f f' \widetilde{N}_j, \quad \text{和} \quad \widetilde{C}_2 \to f f \widetilde{C}_1, \tag{9.1.3}$$

这里f是轻子或夸克的一般标记，其中f和f'区分同一个$SU(2)_L$二重态的成员（当然，每个衰变中每个f或f'事实上必须是一个反粒子）。荷电超子和中性超子向各种末态的衰变宽度可以在文献 [240]-[242]中找到。

含有$\widetilde{N}_1$末态的中性超子和荷电超子的费曼图上看最可能重要的图显示在图 9.1中。 在很多情况下，衰变

$$\widetilde{C}_1^\pm \to \ell^\pm \nu \widetilde{N}_1, \qquad \widetilde{N}_2 \to \ell^+ \ell^- \widetilde{N}_1 \tag{9.1.4}$$

在唯象上可能特别的重要，因为轻子末态可以得到非常干净的信号。如果中介标轻子是相对轻的，这些衰变则会更加可能，即使是它们不在壳。不幸的是，被抬高的标陶子混合，在模型中普遍地对$\widetilde{N}_2$和$\tilde{C}_1$ 可以给出大的末态为陶子的分支比，而不是电子和缪子。这是为什么好的陶子鉴别技术对发现和研究超对称非常有用的原因之一。

其它情况中，末态无孤立轻子衰变更有用，这样可以使得它不用在本底事件中区分标准模型过程W玻色子轻子衰变引起丢失能量。因此有趣的衰变是含有夸克部分子末态，其中有

$$\widetilde{C}_1 \to j j \widetilde{N}_1, \qquad \widetilde{N}_2 \to j j \widetilde{N}_1, \tag{9.1.5}$$

其中j表示一个喷注。如果第二个衰变由一个在壳的希格斯产生，它们将通常是b喷注，这些喷注会重建一个125 GeV的不变质量。

9.2 标轻子衰变

标轻子可以有向一个轻子和荷电超子和中性超子的两体衰变，这是由于它们的规范超子混合组分，也可以在图 6.3b, c所示耦合中直接看出来。因此，二体衰变

$$\widetilde{\ell} \to \ell \widetilde{N}_i, \quad \widetilde{\ell} \to \nu \widetilde{C}_i, \quad \widetilde{\nu} \to \nu \widetilde{N}_i, \quad \widetilde{\nu} \to \ell \widetilde{C}_i \tag{9.2.1}$$

可以具有弱相互作用强度。特别的，如果$\widetilde{N}_1$是LSP，则直接衰变

$$\tilde{\ell} \to \ell \widetilde{N}_1 \quad \text{和} \quad \tilde{\nu} \to \nu \widetilde{N}_1 \tag{9.2.2}$$

（几乎[†]）总是运动学允许的。然而，如果标轻子足够重，以下两体衰变

$$\tilde{\ell} \to \nu \widetilde{C}_1, \quad \tilde{\ell} \to \ell \widetilde{N}_2, \quad \tilde{\nu} \to \nu \widetilde{N}_2, \quad \text{和} \quad \tilde{\nu} \to \ell \widetilde{C}_1 \tag{9.2.3}$$

可以是重要的，右手标轻子与$SU(2)_L$规范超子无耦合，所以它们典型地喜欢直接衰变$\widetilde{\ell}_R \to \ell \widetilde{N}_1$，如果$\widetilde{N}_1$是类$B$超子的话。相比之下，如果运动学上允许同时$\widetilde{C}_1$和$\widetilde{N}_2$主要是$W$超子的话，左手标轻子可能喜欢公式 (9.2.3)的衰变而不是如公式 (9.2.2)直接向LSP的衰变。这是因为图 6.3b所示标轻子- 轻子-W超子相互作用正比于$SU(2)_L$规范耦合系数g，而图 6.3c所示的标轻子-轻子-B超子正比于一个非常小的$U(1)_Y$耦合系数g'。这些衰变度的公式可以在文献 [241]中找到。

9.3 标夸克衰变

如果运动学上允许$\tilde{q} \to q\tilde{g}$，它通常将是主导的，因为图 6.3a所示夸克-标夸克-胶超子顶角是QCD强度的。否则，标夸克可以向一个夸克加一个中性超子或者荷电超子衰变：$\tilde{q} \to q\widetilde{N}_i$或$q'\widetilde{C}_i$。直接到LSP的衰变$\tilde{q} \to q\widetilde{N}_1$ 总是运动学上喜欢的，同时对于右手标夸克来说，如果$\widetilde{N}_1$主要是W超子$\tilde{q} \to q\widetilde{N}_i$将是主导的。然而，左手标夸克反而会强烈喜欢衰变到重的荷电超子和中性超子，例如$\tilde{q} \to q\widetilde{N}_2$ 或者$q'\widetilde{C}_1$，这是因为相关的标夸克- 夸克W超子耦合系数远大于标夸克-夸克-B超子耦合。标夸克向类希格斯超子荷电超子和中性超子是不重要的，除非是标顶夸克和标底夸克情况，这两种情况有大的汤川耦合。标夸克衰变到的胶超子，荷电超子和中性超子将会接着衰变，除非达到含有$\widetilde{N}_1$的末态。非常大量且复杂衰变链可能性的结果称为级联衰变[243]。

有可能$\tilde{t}_1 \to t\tilde{g}$和$\tilde{t}_1 \to t\widetilde{N}_1$的衰变在运动学上都是不允许的。如果是这样，轻标顶夸克可以只由$\tilde{t}_1 \to b\widetilde{C}_1$衰变到荷电超子，或者有三体衰变$\tilde{t}_1 \to bW\widetilde{N}_1$。如果这个衰变也不允许，它只能有味道压低的向粲夸克的衰变$\tilde{t}_1 \to c\widetilde{N}_1$，以及四体衰变$\tilde{t}_1 \to bff'\widetilde{N}_1$。这些衰变可以非常低[244]，使得最轻标顶夸克相对对撞机物理相关时间标度可以是准稳定的，同时也能强子化为束缚态。

9.4 胶超子衰变

胶超子只能通过一个标夸克，在壳或者虚的，来进行衰变。如果两个衰变$\tilde{g} \to q\tilde{q}$道打开了，它们将是主导的，这还是因为图 6.3a所示相关的胶超子-夸克-标夸克耦合具有QCD强

[†]如果质量差$m_{\tilde{\tau}_1} - m_{\widetilde{N}_1}$小于$m_\tau$会有例外产生。

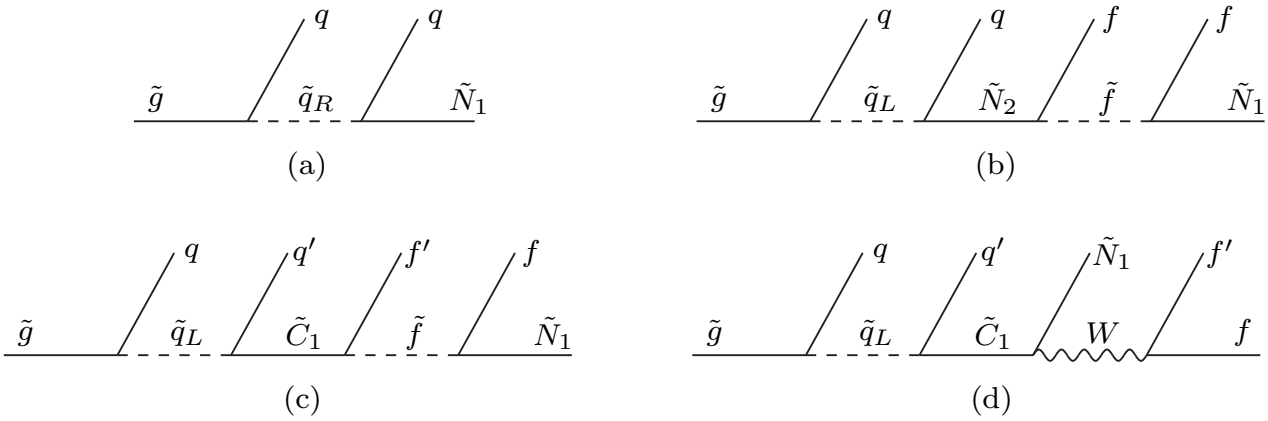


图 9.2: 一些末态有一个中性超子LSP的胶超子级联衰变可能例子。图形的标夸克可以在壳或者不在壳，依赖于理论的质量谱。

度。因为标顶夸克和标底夸克可以轻松地比其它标夸克轻很多，非常有可能$\tilde{g} \to t\tilde{t}_1$和/或$\tilde{g} \to b\tilde{b}_1$是胶超子仅有的两体衰变模式，这种情况下它们将比其它所有过程都重要。如果所有标夸克都比胶超子重，胶超子只能由不在壳标夸克衰变，如$\tilde{g} \to qq\widetilde{N}_i$和$qq'\widetilde{C}_i$。末态标夸克中性超子和荷电超子将会如上文所讨论的进行衰变，所以有很多胶超子衰变链。一级可能性展示在图 9.2中了。 级联衰变不同末态分支比可以很小且非常依赖于模型参数。

最简单的胶超子衰变，包括图 9.2所示的所有过程，末态可以有0，1或者2个荷电轻子（另外的是两个或更多强子喷注）。一个重要的特征是当确定存在一个荷电轻子时，必定存在具有完全一样可能性的电荷过程。这是因为胶超子是马约拉纳粒子，并不"知道"电荷；对于每个含有轻子荷的图形，总会有把每个粒子替换为其反粒子的相等图形。

9.5 向引力超子/哥德斯通超子的衰变

大多数超对称唯象都明显地或者不同原因地假定最轻中性超子是LSP。这是因为引力中介软破缺模型的典型情况。然而，在规范中介模型（和"无标度"模型）中，LSP反而是引力超子。就像在第7.5节看到的，一个非常轻的引力超子可能和对撞机物理相关因为它含有纵向组分哥德斯通超子，哥德斯通超子和所有的超粒子-粒子对$(\widetilde{X}, X)$耦合。公式 (7.5.5)的$\widetilde{X} \to X\tilde{G}$的衰变率通常不会快到足以和以上所列其它超子$\widetilde{X}$的衰变可比，除非$\widetilde{X}$是次轻超对称粒子（NLSP）。因为NLSP没有其它衰变，只能衰变到它的超伙伴和引力超子LSP。

原则上，有轻哥德斯通超子的最小超模型中任何超粒子都可以是NLSP，但大多数规范中介超对称破缺模型中中性超子或荷电超子扮演了这个角色。这点的论据可以由公式 (7.7.17)和(7.7.18)很快看出来；因为$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_3$，那些只有$U(1)_Y$相互作用粒子趋向于得到最小的质量。具有这个属性的规范本征态是B超子和右手标轻子$\tilde{e}_R$, $\tilde{\mu}_R$, $\tilde{\tau}_R$，因此，适当的质

量本征态是可以接受的NLSP候选者。

首先假设在轻哥德斯通超子模型中$\widetilde{N}_1$是NLSP。因为$\widetilde{N}_1$含有光超子组分（B超子和中性W超子的线性组合的超伙伴是光子），由公式 (7.5.5)可知它衰变到光子＋哥德斯通超子 / 引力超子，分宽度为

$$\Gamma(\widetilde{N}_1 \to \gamma\widetilde{G}) \;=\; 2\times 10^{-3}\,\kappa_{1\gamma}\left(\frac{m_{\widetilde{N}_1}}{100\ \mathrm{GeV}}\right)^5\left(\frac{\sqrt{\langle F\rangle}}{100\ \mathrm{TeV}}\right)^{-4}\ \mathrm{eV}. \tag{9.5.1}$$

这里$\kappa_{1\gamma} \equiv |\mathbf{N}_{11}\cos\theta_W + \mathbf{N}_{12}\sin\theta_W|^2$是$\widetilde{N}_1$的“光超子组分”，中性超子混合矩阵$\mathbf{N}_{ij}$由公式 (8.2.5)定义。我们已经把$m_{\widetilde{N}_1}$和$\sqrt{\langle F\rangle}$归化到（非常粗略的）规范中介模型极小值期望值了。这个宽度比味道末态压低相互作用衰变要小很多，但是它仍然足够大到允许$\widetilde{N}_1$在离开对撞机探测器前衰变，如果规范中介模型中$\sqrt{\langle F\rangle}$ 低于几千个TeV，或者等价地当公式 (7.5.4)成立时$\sqrt{\langle F\rangle}$低于一个keV的话。事实上，根据公式 (7.5.4)实验室系具有能量E的$m_{3/2}$的平均衰变宽度为

$$d = 9.9\times 10^{-3}\,\frac{1}{\kappa_{1\gamma}}\,(E^2/m^2_{\widetilde{N}_1}-1)^{1/2}\left(\frac{m_{\widetilde{N}_1}}{100\ \mathrm{GeV}}\right)^{-5}\left(\frac{\sqrt{\langle F\rangle}}{100\ \mathrm{TeV}}\right)^{4}\ \mathrm{cm}, \tag{9.5.2}$$

它可以是从低于毫米到几千公里之间任意值，依赖于超对称破缺的标度$\sqrt{\langle F\rangle}$。（在其它引力超子为LSP的模型中，包括一定的“无标度”模型[245]，把$\langle F\rangle$ 替换为$\sqrt{3}m_{3/2}M_{\mathrm{P}}$相同公式仍然可用。）

当然，$\widetilde{N}_1$不是纯光超子，而是也含有Z玻色子和中性希格斯标量超伙伴组分。因此，也存在[150] $\widetilde{N}_1 \to Z\widetilde{G},\, h^0\widetilde{G},\, A^0\widetilde{G}$或者$H^0\widetilde{G}$等衰变，相应衰变宽度在文献 [151]中给出。在这些衰变中，最后两个不太可能在运动学上允许，只有$\widetilde{N}_1 \to \gamma\widetilde{G}$模式对引力超子LSP保证是在运动学上允许的。此外，即使这些道打开了，根据公式 (7.5.5)$\widetilde{N}_1 \to Z\widetilde{G}$和$\widetilde{N}_1 \to h^0\widetilde{G}$ 衰变遭受了分别正比于$(1-m_Z^2/m^2_{\widetilde{N}_1})^4$和$(1-m^2_{h^0}/m^2_{\widetilde{N}_1})^4$强运动学压低，仍然，在$\langle F\rangle$不太大的情况下这些衰变在唯象学中扮演重要角色，$\widetilde{N}_1$有可观的$Z$超子或希格斯超子组分，同时$m_{\widetilde{N}_1}$比$m_Z$和$m_{h^0}$显著地大。

荷电轻子是另一个可能的LSP候选者。事实上，多于一个标轻子可以做为有效的NLSP，如果它们质量足够接近使得每个粒子，运动学上除了向哥德斯通超子衰变之外无其它衰变模式的话，即使其中一个稍微轻点。在GMSB模型中，由于规范耦合的味道全同性，$\widetilde{e}_R$, $\widetilde{\mu}_R$和$\widetilde{\tau}_R$的质量平方是相等的。然而这不是全部的故事，因为我们必须考虑$\widetilde{e}_L$, $\widetilde{\mu}_L$和$\widetilde{\tau}_L$的混合以及重整化群跑动。这些效应由于微小的电子和缪子汤川耦合而对$\widetilde{e}_R$和$\widetilde{\mu}_R$非常小，因此我们可以很一般地把他们处理为简单的，无混合的质量本征态。相比之下，$\widetilde{\tau}_R$通常和$\widetilde{\tau}_L$很显著的混合，正比于陶子汤川耦合。这意味着轻标陶子质量本征态$\widetilde{\tau}_1$由主要依赖于$\tan\beta$的量压到低于$\widetilde{e}_R$和$\widetilde{\mu}_R$。如果$\tan\beta$不太大，则标陶子混合效应离去而使得标轻子质量本征态$\widetilde{e}_R$, $\widetilde{\mu}_R$, 和$\widetilde{\tau}_1$在

低于$m_\tau \approx 1.8$ GeV范围内简并，因此它们就表现为有效的联合NLSP。特别的，这意味着即使标陶子稍微轻点，三体标轻子衰变$\tilde{e}_R \to e\tau^\pm\tilde{\tau}_1^\mp$ 和$\tilde{\mu}_R \to \mu\tau^\pm\tilde{\tau}_1^\mp$运动学上是不允许的，三个最轻标轻子唯一允许的衰变是$\tilde{e}_R \to e\widetilde{G}$，$\tilde{\mu}_R \to \mu\widetilde{G}$和$\tilde{\tau}_1 \to \tau\widetilde{G}$。这种情况被称为“标轻子联合NLSP”脚本。

对于大一点的$\tan\beta$，轻标陶子本征态$\tilde{\tau}_1$比$\tilde{e}_R$, $\tilde{\mu}_R$和$\widetilde{N}_1$轻超过了1.8 GeV。这意味着$\widetilde{N}_1 \to \tau\tilde{\tau}_1$, $\tilde{e}_R \to e\tau\tilde{\tau}_1$和$\tilde{\mu}_R \to \mu\tau\tilde{\tau}_1$ 道打开了。对于这样$\tilde{\tau}_1$就是单独的NLSP，其它所有最小超模型超对称粒子运动学上允许衰变到它。这被称为“标陶子NLSP”脚本。

不管哪种情况，标轻子NLSP可以有依据公式 (7.5.5)的衰变如$\widetilde{\ell} \to \ell\widetilde{G}$，宽度和衰变长度恰好公式 (9.5.1)和(9.5.2)给出，其中要做$\kappa_{1\gamma} \to 1$和$m_{\widetilde{N}_1} \to m_{\widetilde{\ell}}$。因此，至于中性超子NLSP情况，$\widetilde{\ell} \to \ell\widetilde{G}$衰变可以快或者非常慢，依赖于超对称破缺的标度。

如果$\sqrt{\langle F\rangle}$大于大体10^3 TeV（或者引力超子重于一个keV左右），NLSP寿命长到它将逃出典型的对撞机探测器。这样，如果$\widetilde{N}_1$ 是NLSP，从对撞机物理的观点看，它和LSP是一样的。然而$\widetilde{N}_1$向引力超子的衰变对宇宙学仍然是重要的，因为一个不稳定的$\widetilde{N}_1$显然不是一个好的暗物质候选者，而引力超子LSP却可以是。另一方面，如果NLSP是一个长寿命荷电标轻子，我们就可以在对撞机探测器内看到它的径迹（或者衰变扭结）[150]。有质量荷电NLSP的出现可以由在探测器内测量一个径迹的反常长的飞行时间或者高电离率来确定。

10 超对称的实验信号

到现在为止，超对称的实验研究不幸地还是停留在设置限制上。正如第6.4节所评论的，存在标准模型稀有的或者禁戒的，但是超粒子圈图有贡献的过程给出超对称的间接信号。这些包括$\mu \to e\gamma$, $b \to s\gamma$，中性介子混合，中子和电子的偶极矩等。也存在标准模型预言的虚超粒子效应如R_b（Z衰变到$b\bar{b}$对的强子化分支比）[246]和缪子的反常磁矩[247]，它们排除了一些可能的模型。最小超模型的扩充（包括，但不限定为GUT模型）可以轻松预言质子衰变和中子反中子震荡在可以观测的范围内，即使是R宇称严格守恒。然而，把任何这些过程的确定结果明确无误地归于超对称是不可能的。也没有超粒子直接探测和它们量子数和相互作用的证明。在这一节我们将给一些超对称直接探测可能信号的不完全的和定性的综述。LHC数据和分析在这个课题进展非常快，使得任何细节的和特定的讨论都会以周或者月的时间标度变成过时的。LHC最近的实验结果可以在ATLAS和CMS物理结果的网站上找到。

10.1 强子对撞机上信号

在本文的撰写过程中，CERN的大型强子对撞机（LHC）已经排除了超对称大量的参数空间，它是基于质心能$\sqrt{s}$和亮度共计为$\sqrt{s} = 7$ TeV 5 fb^{-1}，$\sqrt{s} = 8$ TeV 20 fb^{-1}和$\sqrt{s} = 13$ TeV 4 fb^{-1}的质子质子对撞数据分析的。在很多MSUGRA和类似的模型中，质量大于1TeV 以

上的胶超子和标夸克已经被LHC 数据排除，取代费米实验室$\sqrt{s} = 1.96$ TeV对撞机Tevatron $p\overline{p}$的CDF和D0探测器结果。将来计划增加的LHC积分亮度表明，如果超对称是引言所讨论的规范等级问题的答案的话，LHC在未来几年有好的机会找到超对称的直接证据。

在强子对撞机上，超粒子对儿由部分子电弱强度对撞产生的过程如图 10.1所示为

$$q\overline{q} \;\to\; \widetilde{C}_i^+\widetilde{C}_j^-,\;\; \widetilde{N}_i\widetilde{N}_j, \qquad u\overline{d} \to \widetilde{C}_i^+\widetilde{N}_j, \qquad d\overline{u} \to \widetilde{C}_i^-\widetilde{N}_j, \tag{10.1.1}$$

$$q\overline{q} \;\to\; \widetilde{\ell}_i^+\widetilde{\ell}_j^-,\;\; \widetilde{\nu}_\ell\widetilde{\nu}_\ell^* \qquad u\overline{d} \to \widetilde{\ell}_L^+\widetilde{\nu}_\ell \qquad d\overline{u} \to \widetilde{\ell}_L^-\widetilde{\nu}_\ell^*. \tag{10.1.2}$$

由具有QCD强度反应的过程如图 10.2和10.3所示为

$$gg \;\to\; \widetilde{g}\widetilde{g},\;\; \widetilde{q}_i\widetilde{q}_j^*, \tag{10.1.3}$$

$$gq \;\to\; \widetilde{g}\widetilde{q}_i, \tag{10.1.4}$$

$$q\overline{q} \;\to\; \widetilde{g}\widetilde{g},\;\; \widetilde{q}_i\widetilde{q}_j^*, \tag{10.1.5}$$

$$qq \;\to\; \widetilde{q}_i\widetilde{q}_j. \tag{10.1.6}$$

(10.1.1)和(10.1.2)过程在s道中获得来自于电弱矢量玻色子的贡献；(10.1.1)的那些过程也有t道标夸克交换贡献，在大多数模型中这是不重要的。(10.1.3)-(10.1.6)的过程获得适当的标夸克或胶子t道交换的贡献，同时(10.1.3)和(10.1.5)5也有胶子s道贡献。粗略近似下，对于产生重粒子所需的强部分子对撞，有人可能认为Tevatron是夸克-反夸克对撞机，而LHC是胶子-胶子和胶子-夸克对撞机。然而，这些过程总是各种类型部分子对撞机结果的遍举联合，通常不能干净地分开。

在Tevatron对撞机上，荷电超子和中性超子产生过程（主要由价夸克湮灭到虚玻色子中介）趋向于有更大的截面，除非标夸克或胶超子相当轻（低于300GeV左右，这已经被LHC明确排除了）。在$\widetilde{C}_1$和$\widetilde{N}_2$主要是$SU(2)_L$规范超子，$\widetilde{N}_1$主要是B超子的典型模型中，(10.1.1)中最小的产生截面属于$\widetilde{C}_1^+\widetilde{C}_1^-$ 和$\widetilde{C}_1\widetilde{N}_2$道，因为它们分别与$\gamma, Z$和$W$玻色子有显著的耦合，同时也是因为运动学。在LHC上，情况典型地反过来了，由胶子胶子和胶子夸克融合产生的胶超子和标夸克通常是主导的。在两个对撞机上，都可以有荷电超子或中性超子伴随标夸克或胶超子联合产生，但是大多数模型预言的截面（混合了强和电弱相互作用强度）比(10.1.1)-(10.1.6)中过程小很多。(10.1.2)所示标电子对产生在Tevatron上非常小，但在LHC[248]上可能最终是可观测的。强子对撞机上超粒子的截面可以在文献 [249]中找到，同时也被合并放入了计算机程序包括[230], [250]-[256]。

超粒子衰变末态中有两个中性超子LSP，它们会逃出探测器。LSP带走了至少$2m_{\widetilde{N}_1}$的丢失能量，但是在强子对撞机上只能确定为对撞束流横向动量的丢失能量组分，通常表示为$\not{E}_T$或者$E_T^{\rm miss}$ （虽然$\not{\vec{p}}_T$或$\vec{p}_T^{\rm miss}$可能在逻辑上更合适），是可以观测的。因此，超对称在强子对撞机上一般可观测信号是n轻子+m喷注+$\not{E}_T$，其中n或m可以是0。这些信号有重要的标

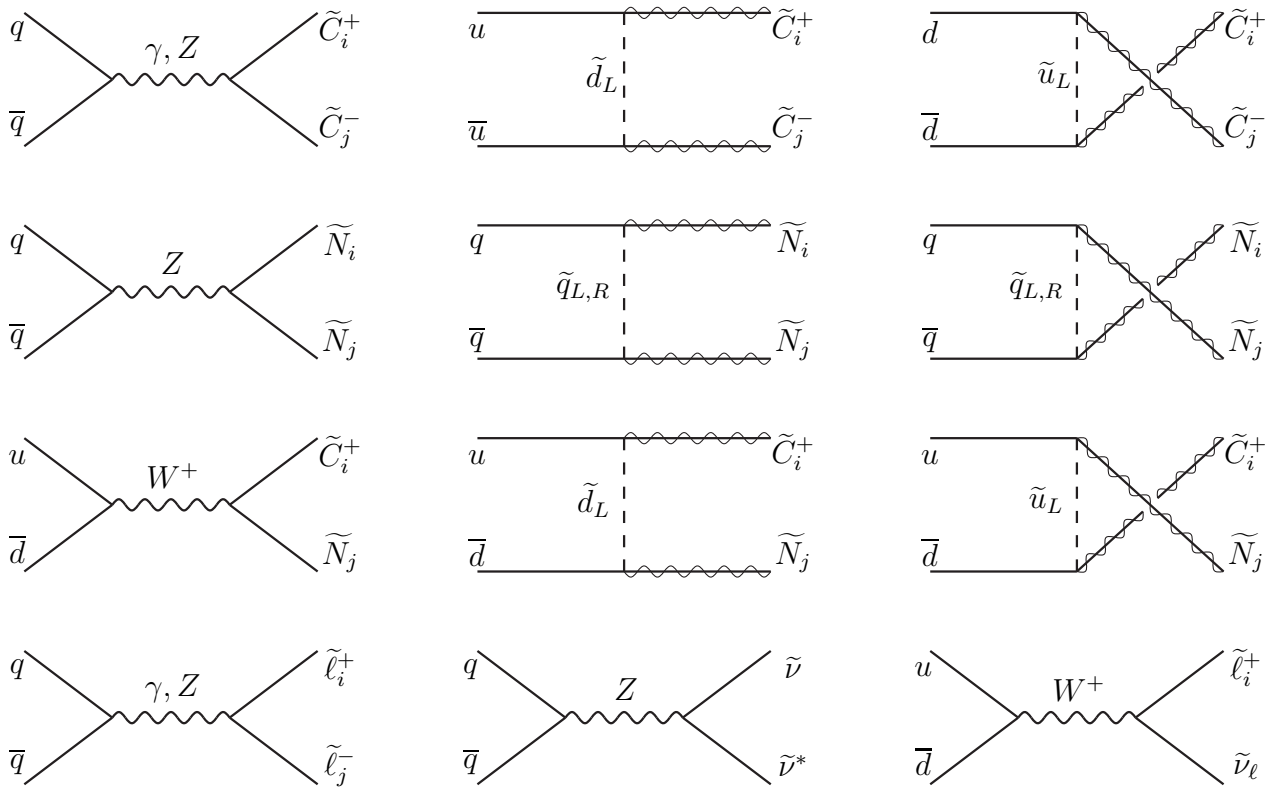


图 10.1: 强子对撞机上夸克反夸克电弱湮灭产生的超粒子费曼图。由于荷电超子和中性超子t道图只由它们的规范超子组分与无质量初态夸克耦合，所以用实线上面加上波浪线来表示。

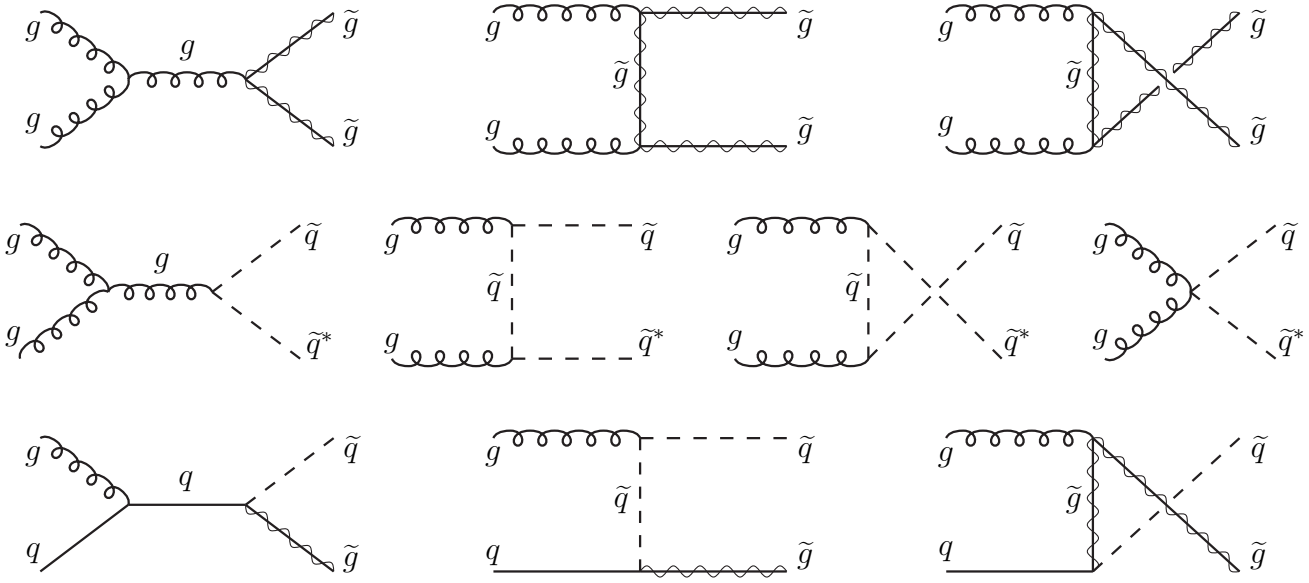


图 10.2: 强子对撞机上胶子胶子和胶子夸克融合产生胶超子和标夸克的费曼图。

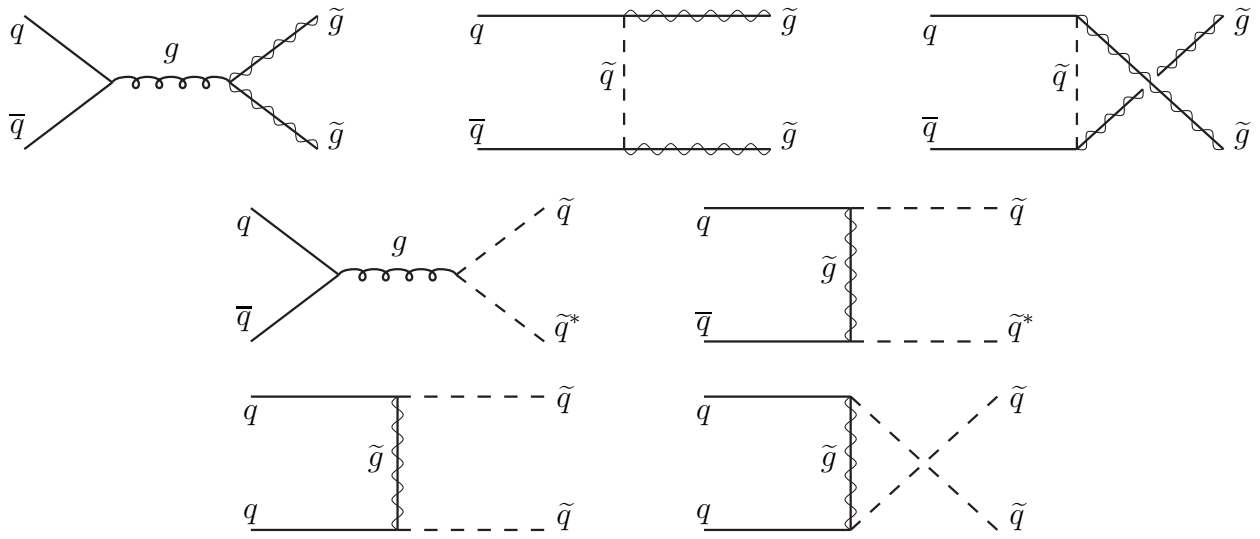


图 10.3: 强子对撞机上夸克反夸克和夸克夸克强散射产生胶子和标夸克的费曼图。

准模型本底，特别是包含可以衰变到中微子的W和Z玻色子的产生过程，它们会提供$\not{E}_T$。因此为了降低本底确定特定信号区域的截断是重要的。当然，最理想的截断选择依赖于哪些超子产生及其如何衰变，事实上却又不能事先知道。依赖于要寻找的特定物，通过要求至少有n个高能喷注，同时对H_T变做截断，H_T典型地定义每个事例喷注和轻子最大的几个（或全部）p_T的求和，本底可以得到进一步压低。（不幸的是，H_T没有标准的定义。）不同的信号区域可以由事例要求的喷注数量，这些喷注的最小的p_T截断，H_T定义包括的喷注数量，以及其它精细细节来定义。或者，可以对$m_{\rm eff} \equiv H_T + \not{E}_T$ 而不是H_T来截断。另外一种截断是要求$\not{E}_T$与H_T或$m_{\rm eff}$的比例有最小值，也经常在寻找中使用；本底相比于超对称信号来说其比例趋向于一个更小的数值。LHC寻找已经采用了更多复杂的运动学观测量，如M_{T2} [257], α_T [258]，和剃刀变量[259]。

超对称在强子对撞机上的经典$\not{E}_T$信号是有喷注和$\not{E}_T$没有单独轻子的事例。后面的要求压低了标准模型过程W轻子衰变本底，同时如果相关的超粒子的无轻子末态衰变道有大的分支比时，很明显这种要求是最有效的。最重要的可能本底是

- 探测器对喷注能量的误测，
- W+喷注，其中W衰变到$\ell\nu$，此时荷电轻子丢失或者被喷注吸收，
- Z+喷注，其中$Z \to \nu\bar{\nu}$，
- $t\bar{t}$产生，其中$W \to \ell\nu$，此时荷电轻子丢失。

我们必须选择足够高的$\not{E}_T$截断来压低这些本底，同时辅助高效触发。要求至少一个高p_T喷注也可以满足触发要求。另外，首要（QCD）本底可以由要求的横向方向与喷注的横向方向不

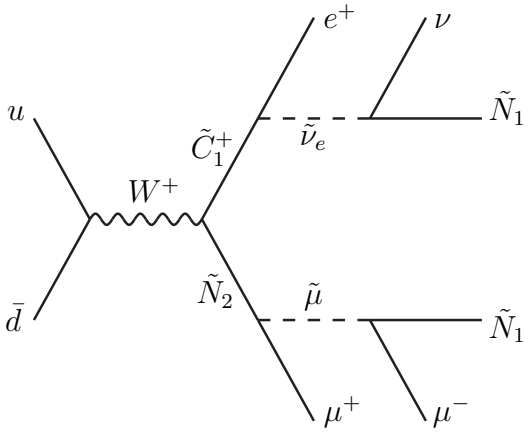


图 10.4: 强子对撞机上一个干净的（没有高p_T强子喷注）三轻子完全费曼图形，它们来自与一个在壳中性超子和荷电超子的产生以及随后的轻子衰变。这种情况导致了$\mu^+\mu^- e^+ + \not{E}_T$。

要靠得太近来压低。喷注+$\not{E}_T$信号是LHC上寻找超对称第一证据的首选可能性。它可以从每种类型的超粒子对儿产生中获得重要贡献，除了超轻子外。

LHC另外一个重要的可能性是单轻子加喷注加$\not{E}_T$信号[260]。它会有可能大的标准模型本底，本底来自于$W \to \ell\nu$的产生，或者伴随着喷注或顶夸克衰变。然而，这个本底可以对横向质量变量$m_T = \sqrt{2p_T^\ell \not{E}_T[1-\cos(\Delta\phi)]}$做截断来压低，其中$\Delta\phi$是丢失横向动量和轻子之间的方向角的差别。对于$W$衰变，即使在考虑探测器分辨率之后它也必须总是小于100 GeV，所以要求$m_T > 100$GeV的截断几乎抹掉了LHC上这些本底的贡献。单轻子加喷注信号在各种超粒子产生模式中可以有极其巨大的产生率，同时可以给出LHC一个好的发现或者确认信号。

相同电荷的双轻子信号[261]具有相对小本底的优势。如果胶超子有大的分支比向强子加上荷电超子，荷电超子接下来衰变到末态一个荷电轻子，一个中微子和$\widetilde{N}_1$，信号就可以产生。因为胶超子对电荷一无所知，如第9.4节所讨论。每个胶超子衰变产生的相同荷电轻子有完全相等的可能性。这意味着胶超子对产生或胶超子-标夸克产生总会导致两个相同电荷轻子（与味道无关）加上喷注和$\not{E}_T$事例。这个信号也可以在标夸克对产生中产生，例如，如果标夸克有$\tilde{q} \to q\tilde{g}$衰变的话。强子对撞机上的物理本底非常小，因为单独轻子对最大的标准模型源是W^+W^-和$t\bar{t}$产生，它们只能给出相反电荷的双轻子。尽管有刚刚提到的本底，相反电荷双轻子对信号，例如来自于标轻子对产生，或者重超伙伴的富标轻子衰变，接下来衰变$\tilde{\ell} \to \ell\widetilde{N}_1$，也最终在LHC上给出可观测信号。

三轻子信号[262]是另一种可能的发现模式，特征为三个轻子加上$\not{E}_T$，和可能的强子喷注。在Tevatron上，它最可能来自于电弱$\widetilde{C}_1\widetilde{N}_2$的产生及随后依据公式 (9.1.4)所示进行衰变。这样事例的类型费曼图形如图 10.4所示。它也可以来自于$\tilde{g}\tilde{g}$, $\tilde{q}\tilde{g}$ 或者$\tilde{q}\tilde{q}$产生过程，其中的一个胶超子或者标夸克通过$\widetilde{C}_1$而另一个通过$\widetilde{N}_2$ 以各种不同方式进行衰变。 这是在LHC 更有可能的信号源，至少在大多数基于MSUGRA或类似模型的样本是这样的。在这种情况下，在三个轻子和$\not{E}_T$之外衰变中还有非常高p_T喷注。这些信号依赖于如公式 (9.1.4)$\widetilde{N}_2$有显著的分支比到轻子三体衰变。而与其竞争的两体衰变模式$\widetilde{N}_2 \to h^0\widetilde{N}_1$和$\widetilde{N}_2 \to Z\widetilde{N}_1$有时被称为“搅局者”模式，因为如果运动学上允许它们将是主导的，毁坏了三轻子信号。这是由于如果$\widetilde{N}_2$由一个在壳的h^0 或者Z^0衰变，末态很可能包含了喷注（特别是h^0情况的底夸克喷注）而不是单独轻

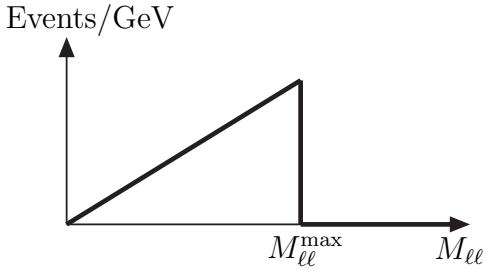


图 10.5: 在事例$\widetilde{N}_2 \to \ell\widetilde{\ell} \to \ell^+\ell^-\widetilde{N}_1$中双轻子不变质量分布的理论形状。没有考虑截断和探测器效应。结束点在$M_{\ell\ell}^{\max} = m_{\tilde{N}_2}(1 - m_{\tilde{\ell}}^2/m_{\tilde{N}_2}^2)^{1/2}(1 - m_{\tilde{N}_1}^2/m_{\tilde{\ell}}^2)^{1/2}$.

子。虽然三轻子信号丢失了，超对称事例即$\widetilde{N}_2 \to h^0\widetilde{N}_1$及随后的$h^0 \to b\bar{b}$也可以最终在LHC上有用，特别是我们已经知道了$M_{h^0} = 125$ GeV。

我们也应该清楚在特定参数范围内出现的有趣信号。以上所列信号的末态轻子可能主要是陶子，所以显著的成分可以被确认为强τ喷注。这是因为大多数基于输入标度轻子普适性的模型预言了$\tilde{\tau}_1$比标电子和标缪子轻。相似地，超对称事例也喜欢底夸克喷注，有时是由于$\tilde{t}_1$相对轻而通过包含了顶夸克的衰变产生，有时是因为期望$\tilde{b}_1$比前两代标夸克轻，有时候两种原因都有。在这些情况下，每个事例至少有四个可能的可标记为b喷注。其它量不变，$\tan\beta$越大，超对称事例中τ和b强喷就越重要。

在得到超对称存在证据之后，LHC数据可以被用来分析衰变运动学提取超粒子质量。中性超子LSP总是逃出探测器，没有可能的真实质量峰。然而，各种质量的组合可以用运动边界和其它重建技术来测量。举一个特别好的可能性，假定次轻中性超子衰变实轻子两级过程$\widetilde{N}_2 \to \ell\widetilde{\ell} \to \ell^+\ell^-\widetilde{N}_1$，那么得到的双轻子不变质量分布如图 10.5所示。 它的特征是存在一个陡峭边界，允许相应的$\widetilde{N}_2$, $\widetilde{\ell}$, $\widetilde{N}_1$质量组合[263, 264, 265]的精确测量，截断会弯曲其形状，特别在低端。这个分析有重要的本底，例如来自于$t\bar{t}$产生过程的本底。然而，来自$\widetilde{N}_2$的信号具有相同味道而对本底不同味道都有贡献。因此，通过$[e^+e^-] + [\mu^+\mu^-] - [e^+\mu^-] - [\mu^+e^-]$组合可以扣除本底提高边界。

利用其它运动学分布在LHC 上也可以重建其它重超粒子质量组合[265]-[272]。例如，可以考虑胶超子衰变链$\tilde{g} \to q\tilde{q}^* \to q\bar{q}\widetilde{N}_2$，随后进行如上的$\widetilde{N}_2 \to \ell\widetilde{\ell}^* \to \ell^+\ell^-\widetilde{N}_1$衰变。通过选择靠近上段所定的质量边界的事例，我们可以重建$jj\ell^+\ell^-$系统的不变质量峰，这个峰和胶超子质量密切相关。举另一个例子，$\tilde{q}_L \to q\widetilde{N}_2$及随后的$\widetilde{N}_2 \to h^0\widetilde{N}_1$衰变过程用以在$h^0 \to b\bar{b}$峰附近选择事例分析。存在一个非常宽的$jb\bar{b}$不变质量分布，其极大值可以与$m_{\tilde{N}_2}$, $m_{\tilde{N}_1}$和$m_{\tilde{q}_L}$相关因为$m_{h^0} = 125$ GeV已知。还有其它相似的机会，依赖于特定的超粒子谱。这些技术可以把超粒子质量差定得比单独一个粒子质量精确很多，使得未被发现的LSP质量可以被限制但不能精确测量。†

在2012年125 GeV希格斯玻色子发现之后，现在的h^0最小超模型剩余的希格斯玻色子也

†一个可能的例外是标顶夸克运动学上不允许有保持味道的两体衰变，这要求$m_{\tilde{t}_1} < m_{\tilde{N}_1} + m_t$和$m_{\tilde{t}_1} < m_{\tilde{C}_1} + m_b$。此时$\tilde{t}_1$寿命足够长道形成束缚态。标量标夸克偶素可能在LHC由它的稀有$\gamma\gamma$ 衰变看到，这会允许通过一个非常窄的双光子不变质量谱的峰（被探测器的分辨率限制）来进行一个独特的质量精确测量。[273, 274].

是LHC的寻找目标。重希格斯玻色子可以由以下衰变来寻找

$$A^0/H^0 \;\to\; \tau^+\tau^-,\; \mu^+\mu^-,\; b\bar{b},\; t\bar{t}, \tag{10.1.7}$$

$$H^0 \;\to\; h^0h^0, \tag{10.1.8}$$

$$A^0 \;\to\; Zh^0 \;\to\; \ell^+\ell^- b\bar{b}, \tag{10.1.9}$$

它们的期望结果依赖于模型参数而改变。荷电玻色子在LHC上，也可以在顶夸克衰变中出现，如果$m_{H^+} < m_t$的话。如果反过来$m_{H^+} > m_t$，我们可以找

$$bg \to tH^- \qquad \text{或者} \qquad gg \to t\bar{b}H^-, \tag{10.1.10}$$

每种情况来自于$H^- \to \tau^-\bar{\nu}_\tau$或者$H^- \to \bar{t}b$衰变，或者这些过程的电荷共轭。更多细节的希格斯寻找计划和实验结果可以在ATLAS和CMS物理结果的网站上找到。

在以上讨论的超粒子信号可以得到显著改进情况下，这一段落简捷地考虑一下LSP是哥德斯通超子 / 引力超子的可能性。如果NLSP是一个快速衰变的中性超子，则$\widetilde{N}_1 \to \gamma\tilde{G}$过程中逃出的引力超子给出两个高能量的，单独光子加上$\not{E}_T$，而不仅仅是$\not{E}_T$。因此在强子对撞机上信号是$\gamma\gamma + X + \not{E}_T$，其中$X$是任意的轻子加喷注。与此事例相关的标准模型本底非常小。如果$\widetilde{N}_1$的衰变长度足够长，它可以是可测的，因为光子不是回指向事例顶角上。这将是特别有用的，因为它会给出超对称破缺标度$\sqrt{\langle F\rangle}$的一个测量；查看公式 (7.5.5)和第9.5小节讨论。如果$\widetilde{N}_1$在探测器外衰变，那只能得到如上文讨论的中性超子LSP脚本的通常的轻子+喷注+$\not{E}_T$信号。

在NLSP是荷电标轻子情况中，相比于中性超子LSP信号，$\tilde{\ell} \to \ell\tilde{G}$会对每个事例提供两个多出的轻子。如果$\tilde{\tau}_1$显著地轻于其它荷电轻子$\tilde{e}_R$，因此它是有效的单独NLSP，那么事例总会有陶子对儿。如果标轻子NLSP是长寿命的，我们可以在探测器寻找一对非常重荷电径迹或者长飞行时间的事例。因为标轻子对产生通常比(10.1.1)-(10.1.6)其它过程的截面小很多，所以产生过程中每个相同事例顶角通常都伴随着轻子和 / 或喷注，这对确证候选事例极其有用。也很可能$\tilde{\ell} \to \ell\tilde{G}$的衰变长度在探测器上可测，荷电粒子径迹出现一个宏观扭结。这将又是一条由公式 (7.5.5)测量超对称破缺标度的方法。

10.2 正负电子对撞机上信号

在正负电子对撞机上，所有的超粒子（除了胶超子）都可以如图 10.6-10.10所示　在树图阶反应产生

$$e^+e^- \to \widetilde{C}_i^+\widetilde{C}_j^-,\;\; \widetilde{N}_i\widetilde{N}_j,\;\; \tilde{\ell}^+\tilde{\ell}^-,\;\; \tilde{\nu}\tilde{\nu}^*,\;\; \tilde{q}\tilde{q}^*, \tag{10.2.1}$$

超粒子产生的重要相互作用呈图 6.3b,c所示的规范超子-费米子-标量耦合和通常的矢量玻色子相互作用。截面因此只由电弱规范耦合和超粒子混合决定。文献 [241]计算了相关过程，同时计算机程序[230], [250]-[253], [275] 给出其数值结果。

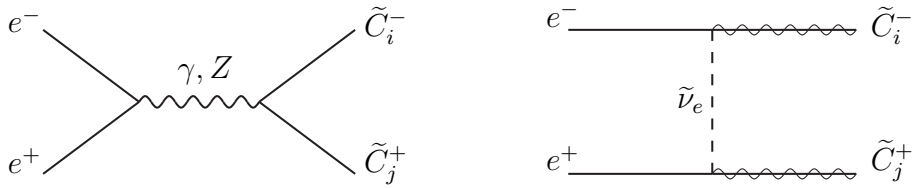


图 10.6: 正负电子对撞机上荷电超子对产生图形。

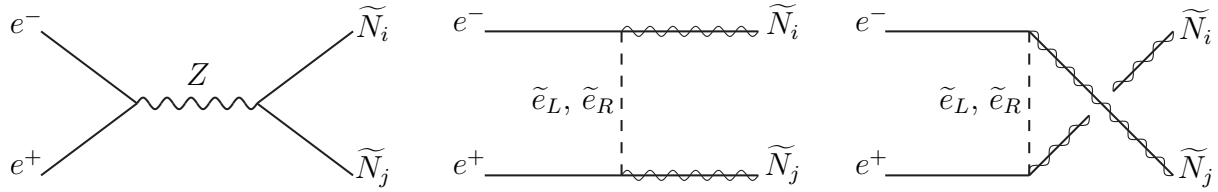


图 10.7: 正负电子对撞机上中性超子对产生图形。

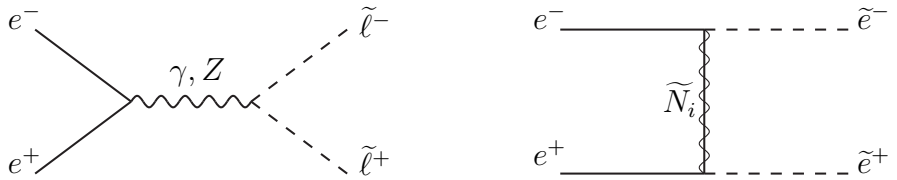


图 10.8: 正负电子对撞机上荷电轻子对产生图形。

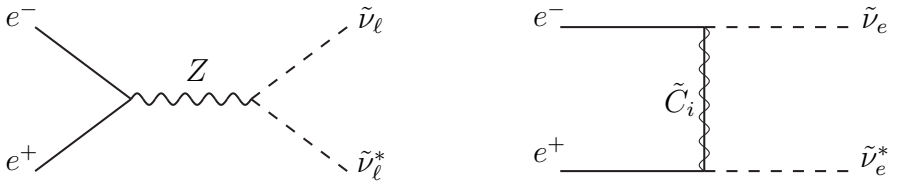


图 10.9: 正负电子对撞机上标中微子对产生图形。

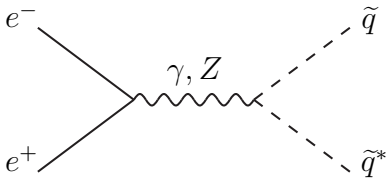


图 10.10: 正负电子对撞机上标夸克产生图形。

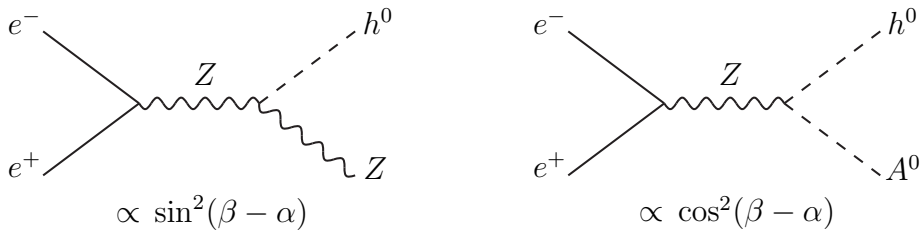


图 10.11: 正负电子对撞机上中性希格斯标量玻色子产生图形。

公式 (10.2.1)中所有过程都由s道Z玻色子交换获得贡献，对于荷电超子，还有s道光子贡献。在$\widetilde{C}_i^+\widetilde{C}_j^-$, $\widetilde{N}_i\widetilde{N}_j$, $\widetilde{e}_R^+\widetilde{e}_R^-$, $\widetilde{e}_L^+\widetilde{e}_L^-$, $\widetilde{e}_L^\pm\widetilde{e}_R^\mp$和$\widetilde{\nu}_e\widetilde{\nu}_e^*$产生中，也有$t$道图形分别交换一个虚标中微子，标电子，中性超子，中性超子，中性超子和荷电超子。如果交换超粒子不太重的话，t道贡献会显著起来。例如，如果标中微子不太重的话，类W超子$\widetilde{C}_1^+\widetilde{C}_1^-$ 对产生典型地承受了s道γ, Z交换图和t道$\tilde{\nu}_e$ 交换图的毁坏性干涉。在标轻子情况下，标缪子和标陶子对产生只有s道图，而标电子产生也有t道中性超子交换图贡献，如图 10.8所示。因为这些原因正负电子对撞机上标电子产生截面可以显著地大于标缪子或标陶子。

超粒子对产生如第9节所讨论的。如果LSP是最轻中性超子，它将总会逃出探测器，因为没有强或电磁相互作用。每个事例将有两个LSP离开探测器，所以丢失能量($\not{E}$)至少应为$2m_{\widetilde{N}_1}$。例如，在$\widetilde{C}_1^+\widetilde{C}_1^-$产生情况中，可能的信号包括一对非共线轻子和$\not{E}$，或者一个轻子或一对喷注加$\not{E}$，或者多个喷注加$\not{E}$。这些信号的重要性依赖于荷电超子的竞争性末态的分支比，$\widetilde{C}_1 \to \ell\nu\widetilde{N}_1$ 和$qq'\widetilde{N}_1$，在标轻子对产生情况中，信号应该是两个高能的非共线同味轻子加$\not{E}$。标准模型的非共线轻子加$\not{E}$和轻子加喷注加$\not{E}$信号本底可能会很大，主要来自于W^+W^-产生，一个或两个都做轻子衰变。然而，这些和其它标准模型本底可以由角度截断和如果可能的束流极化来控制。不难构建超粒子对的其它可能信号，对重的荷电超子、中性超子和标夸克来说变得非常复杂。

最小超模型中希格斯玻色子也可以在正负电子对撞机上产生，其中在低能有趣的主要过程如图 10.11所示

$$e^+e^- \to h^0Z, \qquad e^+e^- \to h^0A^0, \tag{10.2.2}$$

在树图阶，第一个过程截面由相应的标准模型截面乘以一个$\sin^2(\beta-\alpha)$因子得到，如第8.1小节所述在退耦极限$m_{A^0} \gg m_Z$下趋向于1。另外过程是互补的，因为（在运动学上）它的截面是相同的只是乘了一个$\cos^2(\beta-\alpha)$，当然m_{A^0}不太大时变得显著起来。如果$\sqrt{s}$足够大（注意质量关系公式 (8.1.21)），还有过程

$$e^+e^- \to H^+H^-, \tag{10.2.3}$$

其截面在树图阶，由$m_{H^\pm}$来固定，同时也有

$$e^+e^- \to H^0Z, \qquad e^+e^- \to H^0A^0, \tag{10.2.4}$$

它们截面分别正比于$\cos^2(\beta-\alpha)$和$\sin^2(\beta-\alpha)$。同样，在足够高$\sqrt{s}$时，来自于W^+W^-融合过程

$$e^+e^- \to \nu_e\bar{\nu}_e h^0 \tag{10.2.5}$$

提供了研究希格斯玻色子衰变的最佳方法，它们可以和标准模型预言不同[193, 194, 195]。

CERN LEP正负电子对撞机在2000年11月前一直在做寻找，其质心能量达到了209 GeV，没有给出超伙伴产生的可靠证据。得到的荷电超粒子质量限[276]大体上在束流能量一半的量级，还要减去探测和鉴别效率本底，以及阀值附近截面的压低等效应。当研究的超粒子质量和LSP（或者一个衰变中产生的另一个超粒子）质量差小于几个GeV时限制会弱一些，因为此时可用的可见能量对探测和鉴别来说太小了。尽管强的限制来自于LHC，LEP给出的限制仍然是相关的，特别当超对称粒子间质量差小的时候。

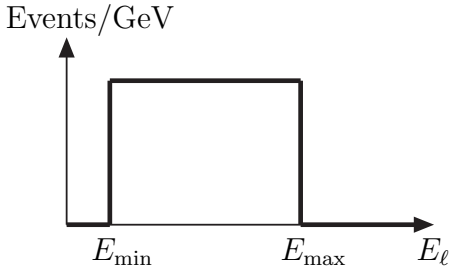
例如，LEP显示了限制如果$m_{\tilde{\ell}_R} - m_{\tilde{N}_1} > 10$ GeV，同时$\ell_R \to \ell\widetilde{N}_1$分支比在每个情况中都是100%，则在95%置信度上$m_{\tilde{e}_R} > 99$ GeV, $m_{\tilde{\mu}_R} > 95$ GeV。标陶子限制是弱的，而且有些强烈地依赖于中性超子LSP质量。LEP对荷电超子质量限制当质量差$m_{\tilde{C}_1} - m_{\tilde{N}_1} > 3$ GeV时近似为$m_{\tilde{C}_1} > 103$ GeV，假定荷电超子主要通过一个虚W粒子衰变，或者有相似的分支比的话。对于100 MeV $< m_{\tilde{C}_1} - m_{\tilde{N}_1} < 3$ GeV情况限制减小到约$m_{\tilde{C}_1} > 92$ GeV。对于小的质量差$0 < m_{\tilde{C}_1} - m_{\tilde{N}_1} < 100$ MeV，限制又是约$m_{\tilde{C}_1} > 103$ GeV，因为荷电超子寿命足够长到可以衰变顶角移位或者通过探测器留下径迹。这些限制都假定标中微子约重于200 GeV，使得它不会由图 10.6所示s和t道图形的干涉显著地压低产生截面。如果标中微子轻一些，限制就降低了，特别是当$m_{\tilde{C}_1} - m_{\tilde{\nu}}$是正但小时，使得$\widetilde{C}_1 \to \tilde{\nu}\ell$衰变为主而释放很少可见能量。更多细节可LEP运行的其它有价值限制可以在文献[276]和[277]中找到。

如果超对称是规范等级问题的答案，如上节所讨论的，那么LHC可以有能力为其展示强烈证据，同时测量一些超粒子质量差。然而，仍然保留了很多问题。竞争的理论也可以给出丢失能量。全部超粒子质量标度可能不会由其中一个超粒子的质量来得到。超粒子产生将是遍举的和互相重叠的，可能很难分开。将来的具有足够大$\sqrt{s}$的正负电子对撞机应该可以解决这些问题，同时更为可靠地证明超对称的确可以排除其它候选模型。特别的，耦合系数，自旋，规范量子数以及超粒子质量将可测量。

在正负电子对撞机上，如果有足够的亮度，公式 (10.2.1)过程都可以检查到它们的运动学极限。（在标中微子对产生情况下，可以假设一些衰变是可见的，而不仅仅是$\tilde{\nu} \to \nu\widetilde{N}_1$）。证实粒子的属性可以利用极化束流和相对干净正负电子对撞机环境来实现。例如，考虑标轻子的产生和衰变过程$e^+e^- \to \tilde{\ell}^+\tilde{\ell}^-$及随后的$\tilde{\ell} \to \ell\widetilde{N}_1$。得到的轻子将（在考虑初态辐射显著但可算的效应，轫制辐射，截断以及探测器效率和分辨率后）有一个如图 10.12所示的平的能量分布。 通过测量这个分布的结束点，我们可以精确且唯一地解决$m_{\widetilde{\ell}_R}$和$m_{\widetilde{N}_1}$。存在有大的$W^+W^- \to \ell^+\ell'^-\nu_\ell\bar{\nu}_{\ell'}$本底，但是可以由角度截断使之可控，因为本底的正（负）电荷轻子趋向于沿着正（负）电子束流方向出射。同样，因为本底有不相关的轻子味道，是可以去除的。改变电子束流极化可以进一步压低本底，同时也将控制右手和左手标轻子产生的变化，最后得到电弱量子数。

更一般地，在一个给定正负电子对撞能量上的遍举超粒子产生过程将给出轻子和喷注各种运动学叠加边界的一个特殊位置，同时双轻子和双喷注的能量和不变质量有可区分的分

图 10.12: 正负电子对撞机事例$e^+e^- \to \widetilde{\ell}^+\widetilde{\ell}^- \to \ell^+\ell^-\widetilde{N}_1\widetilde{N}_1$中轻子能量分布的理论形状。没有考虑截断，初态辐射，韧致辐射或者探测器效应。结束电在$E_{\rm max,min} = \frac{\sqrt{s}}{4}(1-m^2_{\widetilde{N}_1}/m^2_{\widetilde{\ell}})[1\pm(1-4m^2_{\widetilde{\ell}}/s)^{1/2}]$, 这样可以对$\widetilde{\ell}$和$\widetilde{N}_1$进行精确重建。



布。通过改变束流极化以及改变束流能量，这些观测量可以给出超粒子的质量和耦合的信息。例如，在右手极化电子束流的理想极限下，如果$\widetilde{C}_1$是纯W超子，反应过程

$$e^-_R e^+ \to \widetilde{C}_1^+\widetilde{C}_1^- \tag{10.2.6}$$

会被压低，因为在图 10.6所示的第一个图形中右手电子只和γ, Z的线性组合$U(1)_Y$ 规范玻色子耦合，而W超子只和正交的$SU(2)_L$规范玻色子耦合，第二个图形中电子-标中微子-荷电超子耦合含有纯左手电子。因此，极化束流截面能用来确定荷电W超子和荷电希格斯超子的混合。更多超粒子质量的精确信息可以由阈值附近以分立小间隔方式改变束流能量来获得，在强子对撞机上没有这个选项。阈值以上产生截面的上升提供了自旋和"手性"的信息，因为$\tilde{\ell}^+_R\tilde{\ell}^-_R$ 和$\tilde{\ell}^+_L\tilde{\ell}^-_L$的产生截面是$p$波，因此阈值以上以$\beta^3$形式上升，其中$\beta$是其中一个产生粒子的速度。相比之下，$\tilde{e}^\pm_L\tilde{e}^\mp_R$和荷电超子和中性超子对产生率是$s$波，因此阈值以上应该以$\beta$ 形式上升。通过测量末态轻子和喷注相对于束流轴的角分布，超粒子的自旋是可以推断的，这些将给出已经大于的新物理是否的确是超对称以严格检验。

沿着这条线的更多细节的样本可以在文献 [279]-[283] 中找到。一般地，未来正负电子对撞机将提供一个完美的方法来检验超对称软破缺及测量模型参数，如果能量足够的话，此外，正负电子对撞机上$e^+e^- \to h^0Z$, h^0A^0, H^0Z, H^0A^0, H^+H^-和$h^0\nu_e\bar{\nu}_e$ 过程应该有能力检验超对称希格斯区域。

如果规范中介模型引力超子是LSP，由于第9.5小节提到的衰变，情况定性会好一些。如果最轻中性超子是NLSP同时$\widetilde{N}_1 \to \gamma\tilde{G}$可以在探测器内发生，那么即使是$e^+e^- \to \widetilde{N}_1\widetilde{N}_1$过程也可导致两高能光子加丢失能量的引入注目的信号[149]-[151]。$\gamma\gamma\not{E}$有很显著的本底，但是可以轻松由截断去掉。公式 (10.2.1)其它的超粒子对产生模式每个都导致和中性超子做LSP情况一样的信号，但现在多了两个高能光子，这应该会使得实验任务变得非常容易。如果$\widetilde{N}_1 \to \gamma\tilde{G}$的衰变长度比探测器尺寸大很多，信号恢复到和中性超子LSP脚本一样情况。在$\widetilde{N}_1 \to \gamma\tilde{G}$衰变长度的中间范围，我们可以看到一个或者两个在宏观距离上从事例顶角移位了的光子。

如果NLSP是一个荷电标轻子$\widetilde{\ell}$，那么$e^+e^- \to \widetilde{\ell}^+\widetilde{\ell}^-$及随后的快速$\widetilde{\ell} \to \ell\tilde{G}$衰变将在每个事例中给出两个相同味道的高能轻子，同时还有和中性超子LSP脚本$\widetilde{C}_1^+\widetilde{C}_1^-$或$\widetilde{\ell}^+\widetilde{\ell}^-$产生过程的非共线轻子不同的能量分布。非NLSP超粒子对产生将给出明白无误的信号，它们和中性超子NLSP情况一样但是有两个多出的高能轻子（不必要相同味道）。一个更为严重的可能性

是NLSP是个衰变非常慢的标轻子[150]，如果标轻子NLSP寿命如此长以至于它可以在探测器外衰变，那么标轻子对产生将导致的事例的特征为一对荷电粒子径迹具有背离它们非常大质量的高电离率。如果标轻子在探测器内衰变，那么我们可以在荷电粒子径迹上找大的角度扭曲，或者一个宏观影响参数。也可能由测量对撞机内反常长的飞行时间来确认重荷电NLSP的存在。

在中性超子和标轻子NLSP脚本中，如第9.5小节所讨论的，$\widetilde{G}$衰变长度的测量提供了一个测量超对称破缺标度$\sqrt{\langle F\rangle}$的机会。

10.3 暗物质及其探测

实验宇宙学证据现在已经固化一种观点，即在一些可接受的假定下，冷暗物质密度是[163, 277]

$$\Omega_{\rm DM}h^2 \approx 0.120, \tag{10.3.1}$$

其中统计误差在2%左右，系统误差还不清楚。这里$\Omega_{\rm DM}$是非重子物质除以导致空间平坦各项同性宇宙临界密度的平均值，h是哈勃常数，单位为100 km sec^{-1} Mpc^{-1}，观测值为$h^2 \approx 0.46$，其中误差在3%左右。翻译到非常大距离标度平均的冷暗物质密度数值为

$$\rho_{\rm DM} \approx 1.2 \times 10^{-6}\,{\rm GeV/cm^3}. \tag{10.3.2}$$

具有R宇称的超对称一个漂亮特征是稳定电中性LSP可以是冷暗物质。有三个明显的候选者：最轻标中微子，引力超子和最轻中性超子。标中微子LSP给出宇宙学上有意义的暗物质密度已经由直接探测大大排除了[284]（然而，可以看看文献[285]）。如果引力超子是LSP，正如很多规范中介超对称破缺模型一样，来自于暴涨结束之后重加热过程或者其它超粒子衰变引力超子可以是暗物质，但是即使有正确的宇宙学残密度度，它们也是不能直接测量的，它们相互作用太弱了。因此超对称暗物质最吸引人期望的直接探测，是基于最轻中性超子是LSP的思想的[75, 288]。

在早期宇宙中，超粒子和通常标准模型粒子处于热平衡状态。随着宇宙变冷和膨胀，重超粒子不能产生了，同时它们最终湮灭或衰变到中性超子LSP。一些LSP 对湮灭到无超粒子末态。如果还有其它超粒子只是轻微重一些，那么它们将处于和LSP数目可比的热平衡态，它们联合湮灭对决定最终的暗物质密度也是很重要的[289, 290]。最终，密度下降，湮灭率相比于宇宙膨胀变小了，此时$\widetilde{N}_1$经历了"冻结"，这个小的湮灭率和随后宇宙膨胀的稀释决定了今天观测的密度。

为了得到今天观测暗物质密度，热平均有效湮灭截面乘以LSP的相对速度应该在大约[288]

$$\langle\sigma v\rangle \sim 1\,{\rm pb} \sim \alpha^2/(150\,{\rm GeV})^2, \tag{10.3.3}$$

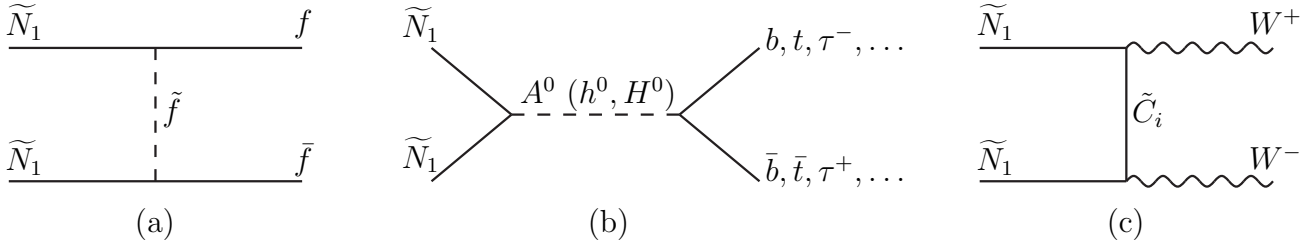


图 10.13: 中性超子暗物质LSPs湮灭截面的贡献(a) t道标轻子和标夸克交换过程，(b) 通过希格斯玻色子的近共振湮灭（ A^0贡献s波, h^0, H^0贡献p波 ）, 以及(c) t道荷电超子交换过程。

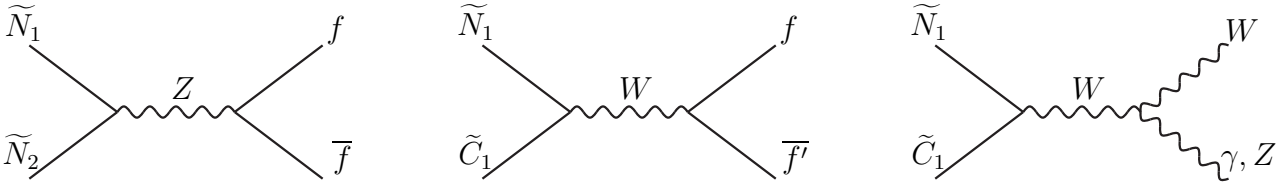


图 10.14: 暗物质$\widetilde{N}_1$ LSPs与稍微重些的$\widetilde{N}_2$和$\tilde{C}_1$联合湮灭的一些贡献。全部三个图形在LSP类希格斯超子时特别重要，最后两个图在LSP类W超子时是重要的。

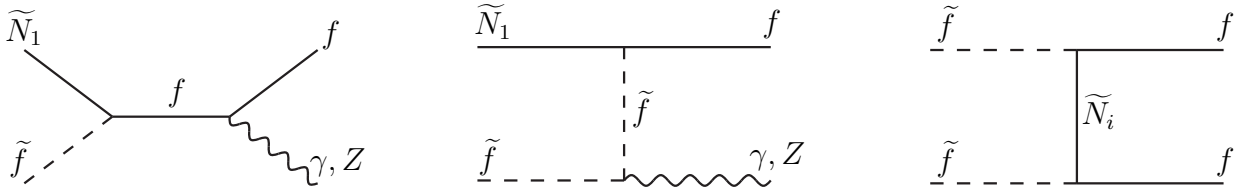


图 10.15: 暗物质$\widetilde{N}_1$ LSPs与稍微重些的标费米子联合湮灭的一些贡献，在一些流行的模型中可行的粒子多数是标陶子（或者标顶夸克）。

所以中性超LSP自然地，非常粗糙地，给出正确的（电弱）相互的和质量。更多细节和精确的估计可以由公开可用的计算机程序[238, 239]得到，使得超对称破缺的特定候选模型预言可以和公式 (10.3.1)对比。一些对中性超子LSP对湮灭典型重要的图形展示在图 10.13中。依赖于$\widetilde{N}_1$的质量，各种过程包括了$\widetilde{N}_1\widetilde{N}_1 \to ZZ$, Zh^0, h^0h^0或者甚至$W^\pm H^\mp$, ZA^0, h^0A^0, h^0H^0, H^0A^0, H^0H^0, A^0A^0或者H^+H^-也可以变得重要。一些图形可以导致或者LSPs和稍微重的超粒子联合湮灭，如图 10.14和10.15所示。

如果$\widetilde{N}_1$主要是希格斯超子或W超子，则图 10.13c湮灭图和图 10.14 提供的联合湮灭机制典型地太高效以至于不能有足够的冷暗物质密度，除非LSP非常重，有1个TeV或者更重。这和通常的以超对称为规范等级问题答案的思想是不一致的；另一方面，它与LHC设置的超粒子质量下限是一致的。但是。对于轻类希格斯超子或者W超子LSP，援引非热平衡机制可以提供正确的暗物质丰度[187, 294]。

在很多超对称破缺模型中一个重复发生的特征就是最轻中性超子主要是B超子。现在发现很多没有被LEP排除的具有类B超子的参数空间，预言的残留密度太高，或者因为LSP耦合

太小，或者超粒子太重，或者二者兼有，导致了湮灭截面太小。为了避免这一点，$\langle\sigma v\rangle$必须有显著的贡献。相关可能性可以定性地由对湮灭强烈贡献的图来分类。

首先，如果至少有一个标费米子不太重，图 10.13a所示图形可以非常有效地压低暗物质密度。在类B超子$\widetilde{N}_1$模型中，最重要的这种贡献通常来自于$\tilde{e}_R$, $\tilde{\mu}_R$和$\tilde{\tau}_1$标轻子交换。这些过程可以正确运行参数空间区域总是以行话"大块区域"引用。因为在确定$\Omega_{\rm DM}h^2$和最高能量LEP寻找以前，它对应了小于临界密度的暗物质残留密度的主要允许区域。但是， 10.13a图形在p波压低，所以那些足够轻到可以减小足够多残留密度的标轻子，在很多模型中，也足够轻到被LEP或者LHC寻找排除，或者在其它限制上有困难。在第7.6小节描述的MSUGRA框架中，可行的大块区域是m_0和$m_{1/2}$分别比100 GeV和250 GeV 轻，依赖于其它参数。在MSUGRA中，参数空间这个部分现在已经被LHC彻底地排除了。如果中性超子对湮灭末态反而是$t\bar{t}$，那就没有p波压低。这就典型地需要一个低于约150 GeV 重于LSP标顶夸克，还要一个在m_t和$m_t + 100$ GeV之间的$m_{\tilde{N}_1}$，这种情况在MSUGRA框架中不会发生，但是当胶超子和W超子质量参数比例，M_3/M_2比统一预言公式 (8.3.1)小若干量级时，该情况可以是自然的[295]。

第二种类B超子LSP湮灭给出正确密度的方法是当$2m_{\tilde{N}_1} \approx m_{A^0}$或者$m_{h^0}$或者$m_{H^0}$，如图 10.13b所示，使得截面在一个共振奇点上。A^0的共振湮灭是s波，所以比p波h^0和H^0共振更有效率。因此，最通常的实验方法是利用通过A^0湮灭。因为$A^0b\bar{b}$耦合正比于$m_b \tan\beta$，这将会通常需要一个大的$\tan\beta$。（通过h^0湮灭也是可能的，如果LSP质量接近$m_{h^0}/2 = 62.5$ GeV。）发生的参数空间区域总是倍称为"A漏斗"或者"希格斯漏斗"或者"希格斯共振区域"。

第三个有效的湮灭是当$\widetilde{N}_1$混合有显著的希格斯超子或W超子组分时获得的。此时 10.13c和联合湮灭图 10.14都是重要的[292]。在参数空间"焦点"区域，$|\mu|$不是太大，具有显著希格斯超子组分的LSP可以给出正确的残留丰度，即使是非常重的标夸克和标轻子。这是以重整化群的聚焦属性为动机的，此时MSUGRA模型允许$|\mu|^2 \ll m_0^2$。事实上，在MSUGRA模型中，标夸克被要求非常重，典型地是几个TeV。在LHC结果排除了低于1 TeV的标夸克之后，这种可能性是吸引人的。通过适当选择M_1/M_2，也可以在LSP安排足够的W超子来完成这个工作[301]。

第四种可能性，参数空间的"标费米子联合湮灭区域"，当标费米子刚好只比LSP[289]重小于几个GeV时可以得到这个区域。在很多模型框架中，最自然地标费米子是标陶子[302]，但也可以是最轻标顶夸克[303]。在冻结时间显著的标费米子密度和LSP将联合存在，因此含有标费米子自身或者LSP的湮灭，包括了图 10.15 所示的类型，将会稀释超粒子密度以及最终的暗物质密度。

必须要记住，"不能"由标准热退耦机制正确预言残留暗物质丰度的最小超模型拉氏量参数集合并没有被对撞机物理排除。这是因为简单扩充可以完全改变暗物质残留丰度预言不会改变对撞机预言太多或者一点也没有。例如，如果一个模型预言了中性超子暗物质残留丰

度太小我们只需要假定存在另一个稳定中性粒子（甚至是完全无关的），或者由一些非热平衡机制如后平衡的重粒子衰变等提供了暗物质。如果预言的中性超子暗物质丰度看上去太大，我们可假定R宇称轻微破缺，所以讨厌的LSP在核合成之前退耦；这将需要其它非特定的暗物质候选者。或者暗物质LSP可能是最轻中性超子的衰变产物。一种可能性是引力超子LSP[287]，另外一个例子为了解决强CP问题引入不可见的轴子来扩充模型，此时LSP可以是非常弱相互作用的轴超子[304]（轴子的费米型超对称伙伴）。这种情况下，中性超子衰变之后的暗物质密度可以减少到和它们简单预言值相比差一个因子$m_{\rm LSP}/m_{\widetilde{N}_1}$，如果没有LSP 残留密度其它的源的话。中性超子LSP正确残留密度也可以假定它们在中性超子冻结之后核合成之前宇宙重加热过程中非热退耦产生[305]。最后，在不强制解释明显的宇宙学常数的前提下，看上去标准宇宙学仍然需要做一些现在还没想到的改进。

如果中性超子LSP真的构成了冷暗物质，那么它们在我们附近局域质量密度应该在0.3 GeV/cm^{3}的量级（远大于大尺度密度平均值，公式 (10.3.2)）来解释我们自己银河系的动力学。LSP中性超子可以直接地通过它们与普通物质的弱相互作用，或者间接地通过它们正在进行的湮灭来测量。然而，暗物质晕存在着显著的密度不确定性，以及结块，所以即使拉氏量参数准确已知，信号率也将非常不明确，甚至可能会有好几个量级的差别。

$\widetilde{N}_1$的直接探测依赖于探测器内它们和重原子核的弹性散射。在部分子阶，$\widetilde{N}_1$可以通过s道虚标夸克，或者t道希格斯或者Z 玻色子交换来与夸克作用。也可以通过一圈图和胶子散射。由中性希格斯标量中介的散射被小的汤川耦合压低，但是当标夸克很重，它和具有大原子数原子核中夸克保持一致因而给出了主要贡献。在这些弹性对撞中传递给原子核的能量典型地在每个事例数十个keV量级。存在自然辐射和宇宙线本底，它们可以由屏蔽和脉冲形状分析来降低。有大量各种现在和未来的实验对一些，但不是全部，预言了残留暗物质丰度在公式 (10.3.1)范围内的最小超模型参数空间敏感。

另外，更间接地，探测中性超子LSP的方法是通过正在进行的湮灭。这可以在密度大大抬高的空间区域中发生。如果LSP由于重复与普通物质弹性散射而失去能量它们可以最终在大质量天体如太阳或地球内部聚集。这种情况下，中性超子对湮灭末态导致了中微子是最重要的过程，因为没有其它粒子可以从湮灭发生物体中心逃出。特别地，来自于$\widetilde{N}_1\widetilde{N}_1 \to W^+W^-$或者$ZZ$（或者可能是$\widetilde{N}_1\widetilde{N}_1 \to \tau^+\tau^-$或$\nu\overline{\nu}$虽然它们是$p$波压低的）的缪子中微子及其反中微子将长距离飞行，可以被中微子望远镜探测到。中微子在探测器内部或下面的土壤，水或冰中会经历荷电流弱作用，导致回指向太阳或地球中心的向上飞行高能缪子。

另外可能性是中性超子LSP在银河系中心（或者晕）湮灭产生的重标准模型粒子级联衰变给出高能光子。这些光子可以在空气切伦柯夫望远镜或者太空探测器上探测。银河系晕中中性超子LSP湮灭产生大量的可测量的正电子和反质子也有有趣的可能信号。

这些可能性的更多信息，以及可以检验它们的各种实验，可以在文献 [288]及其相关引用

文献中找到。

11 超出最小超对称

这一节我将简捷地列出一些我喜欢的上述最小超模型基本图像的变种。首先，R宇称破坏的可能性在第11.1小节中考虑。另外一个扩充最小超模型的明显方法是引入新手征超多重态，对应的标量和费米子全部足够重来避免已被发现。这要求新的手征超多重态必须构成一个标准模型规范群的实表示；它们可以由圈图修正给希格斯玻色子质量以显著为正的效应，这将在第11.2小节进行描述。然而，正如第11.3小节讨论的，加入粒子最简单的可能性是仅把它们放入一个单态手征超多重态中；它可以在树图阶提升希格斯玻色子质量。得到的模型也很吸引人，因为第6.1和8.1小节所述这可以解决μ问题。另外两种解决μ问题方法，如11.4小节所讨论的，基于包括不可重整超势项和科勒势项。最小超模型也可以引进在高能自发破缺的新的规范对称性方式来扩充。这里的可能性包括大统一模型如$SU(5)$ 或者$SO(10)$或者E_6，它们统一了标准模型规范相互作用，带来了重要的稀有过程如质子衰变和$\mu \to e\gamma$。超弦理论也通常会在高能标扩大标准模型规范群。一个或者更多阿贝尔子群可以在TeV标度以下存活，导致了Z'有质量矢量玻色子。这些可能性有巨量的文献，但我将只关注仅加了单个$U(1)$因子模型的相关模型，此类模型被假定为在可见未来对撞能量以上的极高能自发破缺。如第11.5小节所述，破缺的规范对称性仍然在低能超对称软破缺拉氏量中留下了印迹。

11.1 R宇称破坏

在前文中，R宇称（或者等价的物质宇称）是最小超模型严格的对称性。这个假定排除了可重整的质子衰变，同时预言LSP应该是稳定的，尽管如此，R宇称也不是永恒的。由于质子衰变的威胁，人们期望如果R宇称破坏，则可重整拉氏量中B破坏或L破坏耦合是允许的，但不是同时，如第6.2小节解释。单独R宇称破坏耦合也有上限[72]。

一种建议是物质宇称替换为另外的分立对称性，该对称性仍然可以在可重整拉氏量阶禁戒质子衰变。Z_2和Z_3可能性在文献 [306]进行了分类编目，文献中发现，如果最小超模型中不加入新粒子，分立对称性是代（family）不依赖的，同时它也可以在超势阶定义，物质宇称外只有一个候选者。这个可能性就是Z_3分对称性[306]，它最初被称为“重子宇称”但是更为合适地应该引用为“重子三位一体”。任何具有重子数B和超荷Y的重子三位一体定义为

$$Z_3^{\mathrm{B}} = \exp\left(2\pi i[\mathrm{B} - 2Y]/3\right). \tag{11.1.1}$$

该式总是一个1的立方根，因为$\mathrm{B} - 2Y$对每个最小超模型粒子都是整数。该对称性原则会使拉氏量（或者超势）的任意项粒子的重子三位一体必须是1。这个对称性在可重整阶保持了重子数而允许轻子数破坏；换句话说，它允许有公式 (6.2.1)的超势项而禁戒公式 (6.2.2)相关

项。事实上，重子三位一体性守恒有着非凡的属性即绝对禁戒质子衰变。理由很简单，即重子三位一体要求B只能以3单位倍数（即使是在不可重整相互作用中）破坏，而任何质子衰变都破坏1个单位的B，因此这是明显不可能的。相似地，重子三位一体守恒预言了中子反中子震荡实验寻找将是零结果，因为它们会破坏2个单位的重子数。然而重子三位一体守恒不允许LSP衰变。如果最小超模型加入一些新手征超多重态（对应的粒子现在看来非常重），人们可以在物质宇称和重子三位一体性外造出很多新的分立对称性候选者。其中一些将允许超势B破坏，而允许公式 (6.2.1)轻子数破坏超势项。

另外的思想是物质宇称是更基础的超势的严格对称性，但是它由一个$P_R = -1$的标量真空期望值而自发破缺。一种可能性是一个最小超模型标中微子获得真空期望值，因为标中微子带有L=1，然而$SU(2)_L$二重态标中微子有很强的限制$\langle\tilde{\nu}\rangle \ll m_Z$，它来自于要求相应的中微子没有大质量。理解为什么会有这个小的真空期望值是有一些困难的，因为产生它的标量势包括了在$m^2_{\rm soft}$平方量级的标中微子软破缺质量平方项。人们可以再引入一个新的的规范单态手征超多重态来绕过这一点。标量组分可以有大的真空期望值，L=-1可以在最小超模型[309]低能有效超势中诱导L破坏项（一般也有B破坏项）。

在任何情况下，如果R宇称破坏，超对称对撞机寻找会彻底改变。新耦合在通常的超粒子对产生过程外，在对撞机上还带来了单超粒子产生机制。首先，我们可以有s道单标费米子产生。在正负电子对撞机上，公式 (6.2.1)的λ耦合给出了$e^+e^- \to \tilde{\nu}$。在LHC上，单标中微子或荷电标轻子产生，$q\bar{q} \to \tilde{\nu}$或者$\tilde{\ell}$由λ'耦合中介，单标夸克产生$qq \to \tilde{\bar{q}}$由公式 (6.2.2)λ'' 耦合中介。

其次，我们可以有t道标费米交换，给出和标准模型费米子联合的规范超子产生。在正负电子对撞机上，$e^+e^- \to \widetilde{C}_i\ell$可以由$t$道$\tilde{\nu}_e$中介，$e^+e^- \to \widetilde{N}_i\nu$ 可以由t道标电子中介，如果适当的λ耦合出现的话。在LHC上，我们可找部分过程$q\overline{q} \to$（$\widetilde{N}_i$或$\widetilde{C}_i$或$\tilde{g}$）+（ℓ或者ν），由t道标夸克交换中介，如果λ'耦合出现的话。如果是λ''耦合出现，则$qq \to$（$\widetilde{N}_i$或$\widetilde{C}_i$或$\tilde{g}$）+q，又是由t道标夸克交换，给出可能的产生机制。

接下来考虑超粒子衰变。在很多情况下，R宇称破坏已经被实验限制，或者除了在更为特定的模型，R宇称破坏比电弱规范耦合小[72]。如果是这样，像第9节，重一些的超粒子将通常衰变到含有LSP末态，这样它将衰变到三个标准模型费米子。要寻找的对撞机信号依赖于R宇称破坏的类型。

如公式 (6.2.1)λ类型的轻子数破坏项将导致衰变末态有两个相反电荷，同时可能具有不同味道，轻子和一个中微子，如图 11.1a,b所示。 λ'类型耦合将带来$\widetilde{N}_1$衰变到一个喷注对和一个荷电轻子或中微子，如图 11.1c,d,e所示。L破坏LSP衰变信号将因此总包括荷电轻子或者大的丢失能量，或者二者兼有。

另一方面，如果公式 (6.2.2)λ''项出现，那么将存在B破坏衰变$\widetilde{N}_1 \to qq'q''$，过程来自于如图 11.1f所示图形。在这种情况下，超对称事例将经常有许多强子化活动，同时只有当衰变链

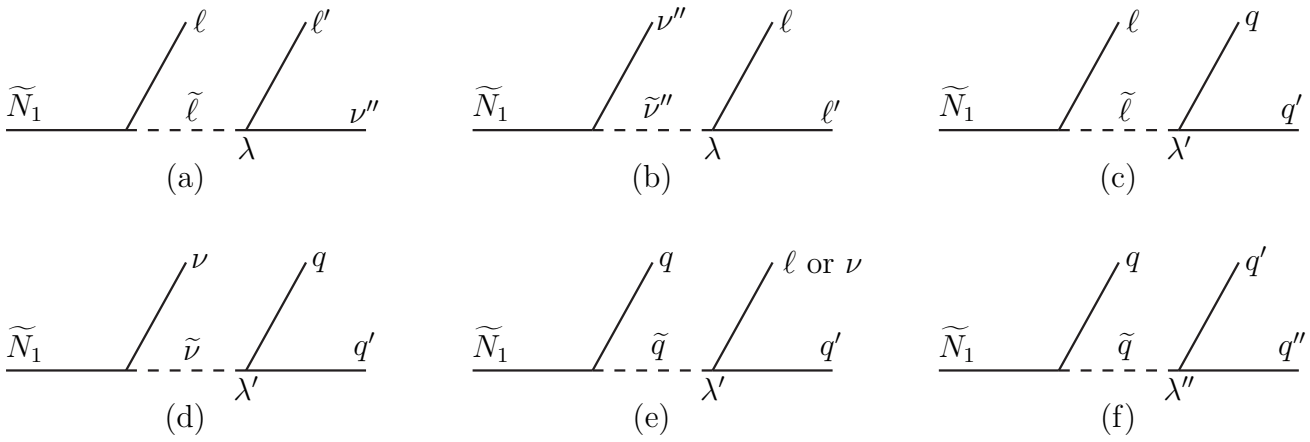


图 11.1: R宇称破坏模型的$\widetilde{N}_1$ LSP的衰变，其中(a)-(e)过程轻子数破坏[查看公式 (6.2.1)]，(f) 过程重子数破坏[查看公式 (6.2.2)]。

其它部分碰巧包括中微子时才有丢失能量物理信号。

也还有其它的可能性。LSP衰变不必是$\widetilde{N}_1$。非LSP超粒子，原则上可以直接衰变到标准模型夸克和轻子去，如果R宇称破坏耦合足够大的话。t道标费米子交换可以产生一对标准模型费米子，导致间接超粒子信号。或者，如果R宇称破坏耦合足够小，LSP将通常在对撞机外衰变，模型将会很难或者不可能与R宇称守恒情况区分。实验限制的概况和未来展望可以在文献[72]找到。

11.2 额外的矢量型手征超多重态

一个有趣的扩充最小超模型的方法是加入额外的手征超多重态粒子。现在已经清楚新场必须构成一个标准模型规范群的矢量型（自共轭）表示。否则，唯一的方法就是新费米子具有的质量足够大到避免被发现，这将会带来和希格斯真空期望值耦合的极其巨大的汤川耦合。这些耦合接着会导致LHC上125 GeV希格斯玻色子产生截面非常大的修正，同时对电弱精确观测量也有很大修正，两个都与观测冲突。相比之下，额外的手征超多重态具有最小超模型矢量型量子数不会导致这类问题，同时在它们很轻的模型中也帮助把最轻希格斯提高到125 GeV [310]-[314]。

如果新的手征超多重态生活在$SU(2)_L$或者$SU(3)_c$或者具有$U(1)_Y$荷的基础表示中，那么它们必须成对以相反规范量子数形式出现。如果我称这样的对Φ_i和$\overline{\Phi}_i$，那么存在允许的超势项形式为

$$W = M_i \Phi_i \overline{\Phi}_i, \tag{11.2.1}$$

其与标准模型希格斯玻色子没有任何相互作用。注意这样的电弱单态质量项可以在任何给出最小超模型μ项的机制中产生。三个这样的可能机制在后文第11.3和11.4小节中描述。不管是何种机制，假设它以相同方式产生和μ的数值相同量级的质量M_i，如TeV标度，是合理的。

因为新矢量型粒子具有几乎电弱单态质量，它们不会影响希格斯玻色子产生和衰变，同时从精确电弱观测量包含Z和W自能及标准模型费米子中退耦。为了使新的最轻粒子不会成为早期宇宙热退耦产生稳定残留物，我们可以假设Φ_i或者$\overline{\Phi}_i$在一个最小超模型夸克和轻子手征超场有相同的规范量子数，允许与希格斯玻色子有小的混合。这个小混合允许新的矢量型费米子可以衰变到标准模型费米子。

如果它们的确在TeV标度，新粒子可以在LHC上对产生，或者通过胶子融合或者通过s道W或Z玻色子图。因此我们可以寻找顶夸克，底夸克和 / 或陶轻子的表亲；称为t', b'和τ'。这些费米子将会有依赖于它们与标准模型费米子混合项选择的衰变模式。在低能实验中最小化可能的味道问题的最容易方法是假定它们主要与第三代粒子混合。这样相关的衰变是

$$t' \to Zt, \quad h^0 t, \quad W^+ b, \tag{11.2.2}$$

$$b' \to Zb, \quad h^0 b, \quad W^- t, \tag{11.2.3}$$

$$\tau' \to Z\tau, \quad h^0 \tau, \quad W^- \nu, \tag{11.2.4}$$

这些过程的分支比依赖于汤川耦合混合的类型。可能性和得到的分支比在文献[313]进行了细节性地讨论。如果新粒子和标准模型费米子混合的汤川耦合大于约10^{-6}，这些两体衰变将在对撞机内很快发生。这些费米态的标量伙伴很可能非常重，因为它们质量有超对称软破缺贡献。另外，对于给定质量，标量产生截面趋向于比费米子低，因此很可能的矢量型费米子首先被发现。

为了提高希格斯玻色子质量，我们可以在新手征超多重态和最小超模型希格斯场之间引入汤川耦合。做为一个例子，假设存在额外矢量型手征超多重态具有如下的$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$表示:

$$\mathcal{Q} = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6), \qquad \overline{\mathcal{Q}} = (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -1/6), \tag{11.2.5}$$

$$\mathcal{U} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, +2/3), \qquad \overline{\mathcal{U}} = (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3). \tag{11.2.6}$$

允许的超势项包括

$$W = M_{\mathcal{Q}} \mathcal{Q}\overline{\mathcal{Q}} + M_{\mathcal{U}} \mathcal{U}\overline{\mathcal{U}} + k H_u \mathcal{Q}\overline{\mathcal{U}} \tag{11.2.7}$$

其中$M_{\mathcal{Q}}$和$M_{\mathcal{U}}$是如公式 (11.2.1)的电弱单态质量，k是汤川耦合，它可以大且对矢量型态质量只有次要的贡献。$k \approx 1.05$处存在一个红外稳定准固定点，给其数值一个自然的期望[313]。如果新的标量质量大于新的费米子质量，该耦合将给最轻希格斯玻色子质量传递一个正的一圈贡献。（这和顶夸克 / 标顶夸克区域的一圈贡献类似。）有一些简单假定，该贡献的近似公式，如下[312]:

$$\Delta(m_{h^0}^2) = \frac{3}{4\pi^2} k^4 v^2 \sin^4\beta \left[\ln(x) - \frac{1}{6}(5 - 1/x)(1 - 1/x) \right] \tag{11.2.8}$$

这里$x = M_S^2/M_F^2$，同时假定$\mathcal{Q}, \overline{\mathcal{Q}}, \mathcal{U}$和$\overline{\mathcal{U}}$的标量近似互相简并，平均质量为$M_S$，新费米子近似平均质量$M_F \approx M_{\mathcal{Q}} \approx M_{\mathcal{U}}$，$kv_u$是这些质量的小微扰，同时新标量混合是小的。这里也假定了希格斯玻色子在如第8.1小节结尾所述的退耦极限。对于$x > 1$ ，公式 (11.2.8)是正定且随x 单调递增。例如$x = 4$，希格斯玻色子质量修正可以大约是10 GeV。（放松这些假定之后希格斯质量修正的结果可以在文献[313]中找到；标量部分的混合增加了希格斯质量修正。）注意即使在非常大的M_F极限下，只要保持了等级$x > 1$，$m_{h^0}^2$的贡献是不退耦的。尽管$m_{h^0}^2$存在非退耦效应，对精确电弱观测量的贡献的确以平方形式（像m_W^2/M_F^2）退耦，因此这是非常良性的[313]。

额外矢量型夸克对希格斯质量的正的贡献对挽救有困难给出125 GeV希格斯玻色子的超对称理论是一条可以接受的方法。例如，GMSB模型典型地预言了非常低的m_{h^0}，除非全部超粒子都在LHC探测范围之外，因为它们要求小的标顶夸克混合。然而，GMSB模型包括有大汤川耦合的额外矢量型夸克之后允许最小超模型超伙伴可以和它们直接实验限制一样轻，同时仍然允许$m_{h^0} = 125$ GeV [315]-[317]。

11.3 次最小超对称标准模型

最小超模型物质内容最简单的扩充可以由加入一个新的、甚至可以保持物质宇称的规范单态手征超多重态。得到的模型[318]-[322] 经常被称为次最小超对称标准模型或者次最小超模型或者(M+1)SSM最一般可重整超势为

$$W_{\text{次最小超模型}} \;=\; W_{\text{最小超模型}} + \lambda S H_u H_d + \frac{1}{3}\kappa S^3 + \frac{1}{2}\mu_S S^2, \tag{11.3.1}$$

其中S即表示新的手征超多重态也表示其标量组分。$W_{\text{次最小超模型}}$ 中也可以有一个S的线性项，但是全局超对称中它总可以由一个常数移动重新定义S移去。超对称软破缺拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{次最小}} \;=\; \mathcal{L}_{\text{soft}}^{\text{最小超模型}} - (a_\lambda S H_u H_d - \frac{1}{3}a_\kappa S^3 + \frac{1}{2}b_S S^2 + tS + \text{c.c.}) - m_S^2|S|^2. \tag{11.3.2}$$

蝌蚪耦合t在超引力[323]中可能会承受危险的平方发散，除非在高能它被高度压低或者由另外的对称性禁戒。

次最小超模型的一个长处就是它可以给出第6.1小节和第8.1小节提到问题一个解决方法。为了理解这一点，假定[†]我们没有$\mu_S = \mu = 0$使得超势中完全没有质量项或有量纲参数，同时也设置超对称软破缺拉氏量相应的$b_S = b = 0$ 及$t = 0$。如果适当选择λ, κ, a_λ和a_κ，那么S, H_u^0 和H_d^0将会被诱导唯象上可以接受的真空期望值。通过这些场的相位变换，全部三个$s \equiv \langle S\rangle$, $v_u = v\sin\beta = \langle H_u^0\rangle$, $v_d = v\cos\beta = \langle H_d^0\rangle$ 可以是实的且正的。在这种约定下，$a_\lambda + \lambda\kappa^* s$和$a_\kappa + 3\lambda^*\kappa v_u v_d/s$将也是实的且正的。

[†]更加经济的情况$t \sim m_{\text{soft}}^3$，λ和a_λ非零也是可行且有趣的[322]。

然而，一般地，这个理论会有不可接受的大CP破坏。这可以由假定与约定s, v_u, 和v_d实的且正的一样约定λ, κ, a_λ和a_κ也全部是实的；如果超对称软破缺中介机制没有引入新CP破坏相位的话这是自然地，同时下文将以此假定发展开讨论。为了相对于标量场变化的相位有一个稳定的极小值点，要求$a_\lambda + \lambda\kappa s > 0$ 同时$a_\kappa(a_\lambda + \lambda\kappa s) + 3\lambda\kappa a_\lambda v_u v_d/s > 0$。（一个明显充分但不是必要的，达到这两个条件的方法是假定$\lambda\kappa > 0$, $a_\kappa > 0$及$a_\lambda > 0$。）

$H_u H_d$有效的μ项会在公式 (11.3.1)中出现，即

$$\mu_{\rm eff} \;=\; \lambda s. \tag{11.3.3}$$

它由无量纲耦合和$m_{\rm soft}$量级的软破缺项决定，而不再是概念上与超对称破缺无关的自由参数。有了以上约定，$\mu_{\rm eff}$的符号（或者更一般的相位）和λ同号。不像公式 (8.1.8)和(8.1.9)希格斯势的极小值条件现在为

$$\begin{aligned}
m_{H_u}^2 + \lambda^2(s^2 + v^2\cos^2\beta) - (a_\lambda + \lambda\kappa s)s\cot\beta - (m_Z^2/2)\cos(2\beta) &= 0, &(11.3.4)\\
m_{H_d}^2 + \lambda^2(s^2 + v^2\sin^2\beta) - (a_\lambda + \lambda\kappa s)s\tan\beta + (m_Z^2/2)\cos(2\beta) &= 0, &(11.3.5)\\
m_S^2 + \lambda^2 v^2 + 2\kappa^2 s^2 - a_\kappa s - (\kappa\lambda + a_\lambda/2s)v^2\sin(2\beta) &= 0. &(11.3.6)
\end{aligned}$$

在公式 (8.1.13)之外，有效势的辐射修正效应可以由做替换$m_S^2 \to m_S^2 + [\partial(\Delta V)/\partial s]/2s$来包含进来。

可以引入对称性使得超势$W_{\text{次最小超模型}}$和$V_{\rm soft}^{\text{次最小超模型}}$中有量纲的项为零。最简单的方法可以注意新超势和拉氏量在Z_3分立对称性下是不变的，其中手征超多重态中的每个场做变换$\Phi \to e^{2\pi i/3}\Phi$，同时所有规范和规范超子场是惰性的。加入这个对称性的确去掉了μ, μ_S, b, b_S和t。然而，如果这个对称性是严格的，那么因为它必须由S, H_u和H_d真空期望值自发破缺，早期宇宙电弱对称性相变过程中会产生畴壁[321]。它们可以主导宇宙能量密度，同时导致没有观测到的微波背景辐射各向异性。人们提出了一些避免这个问题的方法，包括畴壁形成之后的后暴胀，在高能把分立对称性嵌入连续的规范对称性，或者允许拉氏量的高量纲项或者极小μ项明显破缺分立对称性。

除了最小超模型粒子外，次最小超模型还含有一个$P_R = +1$实标量，一个$P_R = +1$赝标量，和一个$P_R = -1$魏尔旋量“单态超子”。这些场自身没有规范相互作用，所以它只能通过和最小超模型中性场混合与标准模型粒子作用。实标量和最小超模型h^0和H^0混合，赝标量与A^0混合。由动力学场S替换μ的一个效应就是最轻希格斯质量平方被提高了，在树图阶数量限为

$$\Delta(m_{h^0}^2) \;\le\; \lambda^2 v^2\sin^2(2\beta). \tag{11.3.7}$$

多出的贡献来自于标量势的$|F_S|^2$。这个效应是受限的，因为如果要求λ在大统一质量以下跑动没有朗道奇点则有一个上限$\lambda \lesssim 0.8$。同样，中性希格斯标量相比于标准模型，减小了和

电弱规范玻色子的耦合，这是由于它和单态的混合。因为LHC发现的希格斯玻色子表现的属性极像标准模型希格斯玻色子，因此看上去希格斯不太可能和单态场s有大的混合。这意味着可能有一个现在还没有看到的中性希格斯标量几乎是电弱单态，甚至轻于125 GeV。

R宇称奇性单态超子S和最小超模型四个中性超子混合，所以现在真的有五个中性超子。单态超子可以是LSP，依赖于模型参数，因此也可以暗物质[320]。中性超子质量矩阵在规范本征态基$\psi^0 = (\widetilde{B}, \widetilde{W}^0, \widetilde{H}_d^0, \widetilde{H}_u^0, \widetilde{S})$中是

$$\mathbf{M}_{\widetilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -g'v_d/\sqrt{2} & g'v_u/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & M_2 & gv_d/\sqrt{2} & -gv_u/\sqrt{2} & 0 \\ -g'v_d/\sqrt{2} & gv_d/\sqrt{2} & 0 & -\lambda s & -\lambda v_u \\ g'v_u/\sqrt{2} & -gv_u/\sqrt{2} & -\lambda s & 0 & -\lambda v_d \\ 0 & 0 & -\lambda v_u & -\lambda v_d & 2\kappa s \end{pmatrix}. \tag{11.3.8}$$

（对比公式 (8.2.2)）对于小的v/s和$\lambda v/\kappa s$，单态希格斯标量和单态超子的混合效应是小的，同时它们几乎退耦。在这种情况下，次最小超模型的唯象和最小超模型几乎不可区分。对大一点λ，混合就变重要且超粒子和希格斯标量的实验信号可以发生很大的改变[319]-[322], [236]。

11.4 来自于不可重整项的μ项

上一小节描述了次最小超模型可以解决μ问题。另外一种解决办法就是由不可重整拉氏量项生成μ。如果不可重整项在超势中，则被称为金-尼尔斯机制[68]，如果是在科勒势中，则被称为吉尔戴斯-马西洛机制[69]。

注意当μ设为0，最小超模型超势有一个全局$U(1)$派斯-奎因对称性，相应的荷列于表11.1。这个对称性不能成为拉氏量严格的对称性，因为存在$SU(3)_c$反常。但是如果所有派斯-奎因破缺源都很小，那么必将得到一个赝标-南部-哥德斯通玻色子、轴子。如果破缺标度很低，那么轴子将会被天文观测排除，所以我们必须引入另外的派斯-奎因对称性明显破缺。这是上节次最小超模型中发生的事。另一方面，如果派斯-奎因破缺使得轴子衰变常数在范围

$$10^9\,\text{GeV} \lesssim f \lesssim 10^{12}\,\text{GeV}, \tag{11.4.1}$$

那么得到的轴子是DFSZ类型的，它和现在的限制相一致。这是一个诱人的可能性，因为它把解决强CP问题和超对称破缺相链接。

为了展示金-尼尔斯机制，考虑不可重整超势

$$W = \frac{\lambda_\mu}{2M_\text{P}} S^2 H_u H_d, \tag{11.4.2}$$

	H_u	H_d	Q	L	$\overline{u}$	$\overline{d}$	$\overline{e}$
派斯-奎因荷	$+1$	$+1$	-1	-1	0	0	0

表 11.1: 最小超模型手征超场派斯-奎因荷。因为可以对它们加入任意弱超荷或B−L的倍数，这些荷不是唯一的。

其中S是一个$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$单态手征超场，$\lambda_\mu$是一个无量纲耦合系数，由普朗克常数$M_{\rm P}$归化。由表11.1可知$S$有派斯奎因荷$-1$。如果$S$得到真空期望值参数化量级为

$$\langle S\rangle \sim \sqrt{m_{\rm soft} M_P}, \tag{11.4.3}$$

那么派斯-奎因对称性自发破缺给出DFSZ类型不可见轴子，衰变常数$f \sim \langle S\rangle$自动地在公式 (11.4.1)范围内。低能有效理论将含有通常的μ项为

$$\mu = \frac{\lambda_\mu}{2M_P}\langle S^2\rangle \sim m_{\rm soft}, \tag{11.4.4}$$

同时解决了μ问题和强CP问题。在拉氏量中自然地也可以有无量纲的、全纯的超对称破缺项，形式为

$$-\mathcal{L}_{\rm soft} = \frac{a_b}{M_P} S^2 H_u H_d + \text{c.c.}, \tag{11.4.5}$$

其中a_b在$m_{\rm soft}$的量级。最小超模型b项将出现

$$b = \frac{a_b}{M_P}\langle S^2\rangle, \tag{11.4.6}$$

同时将会在$m^2_{\rm soft}$的量级，正是电弱对称性破缺所要求的。

为了确保自发破缺有一个稳定真空，我们可以用许多不同的方法，引入另外的不可重整超势项[325]-[328]。例如，我们可以取

$$W = \frac{\lambda_S}{4M_P} S^2 S'^2, \tag{11.4.7}$$

其中S'是一个手征超场，派斯-奎因荷为+1。这会带来在大场强稳定S和S'的标量势

$$V_S \;=\; |F_S|^2 + |F_{S'}|^2 \;=\; \frac{|\lambda_S|^2}{4M_P^2}|SS'|^2(|S|^2 + |S'|^2). \tag{11.4.8}$$

也存在如下的超对称软破缺拉氏量

$$-\mathcal{L}_{\rm soft} = V_{\rm soft} = m_S^2|S|^2 + m_{S'}^2|S'|^2 - \left(\frac{a_S}{4M_P} S^2 S'^2 + \text{c.c.}\right), \tag{11.4.9}$$

其中m_S^2和$m_{S'}^2$在$m_{\rm soft}^2$的量级，a_S在$m_{\rm soft}$的量级。如果m_S^2和$m_{S'}^2$为负或者a_S足够大则完全势$V_S+V_{\rm soft}$将有公式 (11.4.3)量级的适当真空期望值。例如，简单起见，$m_S^2=m_{S'}^2$，当$|a_S|^2-12m_S^2|\lambda_S|^2>0$时势将有非平庸极小值点，而当$|a_S|^2-16m_S^2|\lambda_S|^2>0$时该局域极小值点为势的全局极小值点。

一个赝标量自由度，S和S'的混合物是轴子，具有非常小质量。给出轴子的手征超多重态其它部分将具有$m_{\rm soft}$量级的质量，但是与最小超模型的耦合是高度压低的。但是，如果这个手征超多重态的一个费米型成员（单态超子可以被称为"轴超子"$\tilde{a}$，可以和最小超模型中性超子$\tilde{N}_i$混合）比所有最小超模型奇R宇称粒子轻，那么它可以是LSP暗物质。如果它的残密密度主要来自于自许为LSP$\tilde{N}_i$的衰变，且轴超子是稳定的话，那么今天的$\Omega_{\rm DM}h^2$可以由$\tilde{N}_i$残留密度得到（但是还需要乘以一个压低因子$m_{\tilde{a}}/m_{\tilde{N}_1}$.）。也可能$\tilde{N}_i$向$\tilde{a}$的双边在对撞机探测器内发生，极其稀有且有宏观衰变长度，但刚好可以在足够大的超伙伴对产生事例中提供一个信号[328]。

以上框架有一些变种。不可重整超势可以有刚要性的项$S^3S'+SS'H_uH_d$，该类型最原始模型在文献[325]中，或者文献[327]中的$S^3S'+S^2H_uH_d$项，或者文献[328]中的$SS'^3+S^2H_uH_d$，每一个都需要对规范单态安排不同的派斯-奎因荷，但是具有定性相似的行为。我们也可以在中间标度引入多于两个的场来破缺派斯-奎因对称性。

吉尔戴斯-马西洛机制则依赖于最小超模型希格斯通常的正则项之外的科勒势的不可重整贡献。

$$K=H_uH_u^*+H_dH_d^*+\Big(\frac{\lambda_\mu}{M_P}H_uH_dX^*+\text{c.c.}\Big)+\ldots. \tag{11.4.10}$$

这里λ_μ是无量纲耦合参数，X具有派斯-奎因荷+2，是一个由其辅助场F负责超对称自发破缺的手征超场。吉尔戴斯和马西洛展示了在超引力中，科勒势中这些项的出现将总会给出非零的μ，具有一个自然的$m_{\rm soft}$量级的数值。也可以相似地出现在$m_{\rm soft}^2$量级的b。μ和b的实际数值依赖于隐藏区域场（包含X）对完整超势和科勒势的贡献；细节可以查阅文献[69]。这些项没有其它直接的唯象学效应，所以没有对潜在理论的追求的话，把未来实验结果和它们联系起来是困难的。

一种理解吉尔戴斯-马西洛类模型中μ项起源的方法是考虑M_P以下包含了一个如公式 (11.4.10)形式的不可重整科勒势的低能有效理论。即使没有在基本理论中出现，这个项会从辐射修正中出现[329]。如果X的辅助场获得了真空期望值，那么我们可以得到

$$\mu=\frac{\lambda_\mu}{M_P}\langle F_X^*\rangle. \tag{11.4.11}$$

如果参数化$\langle F_X^*\rangle\sim m_{\rm soft}M_P$，其实这是普朗克标度中介超对称破缺模型隐藏区域$F$项的典型长度，此时$\mu$将会在正确的数量级上。低能超对称软破缺区域的$b$项可以在给出这个有效场论图像的科勒势$K=\frac{\lambda_b}{M_P^2}Y^*ZH_uH_d$形式项中出现，其中$\langle F_Y^*\rangle\sim\langle F_Z\rangle\sim m_{\rm soft}M_P$。然而，这

不是必须的，因为$\mu \neq 0$时，低能非零b可以在阈值效应和重整化群跑动中产生。我们也可以把Y、Z场等同于X场，代价是明显破缺了派斯-奎因对称性。

11.5 标量质量的额外D项贡献

另外一种扩充最小超模型的方法是包括另外的规范相互作用。最简单的规范扩充仅引入一个新的阿贝尔规范对称性，称为$U(1)_X$。如果它在很高质量标度破缺，那么相应的规范玻色子和规范超子将都会很重且在TeV标度及以下物理中退耦。然而，既然最小超模型场带$U(1)_X$荷，在任意高能标的$U(1)_X$破缺仍然会在最小超模型软破缺项上留下一个告密者[330]。

来看下这是怎么工作的，让我们考虑一个$U(1)_X$破缺模型的标量势。假定最小超模型标量，表示为ϕ_i，带有$U(1)_X$ 荷x_i。我们也引入一对手征超多重态S_+和S_-，$U(1)_X$荷归化分别为$+1$和-1。这些场在标准模型规范群$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$单态，使得得到真空期望值时，它们只是破缺了$U(1)_X$。一个明显的猜测是超势含有$S_+$和$S_-$形式为$W = MS_+S_-$，其中$M$是一个超对称性质量。然而，除非$M$为零或者非常小，它将给出标量势半正定平方项形式$V = |M|^2(|S_+|^2 + |S_-|^2)$，这将会强制极小值点在$S_+ = S_- = 0$ 处。因为我们想证S_+和S_-获得真空期望值，所以这是不可接受的。因此我们假定M是0（或者很小），同时超势的领头阶贡献反而来自于不可重整项，如

$$W \;=\; \frac{\lambda}{2M_{\rm P}} S_+^2 S_-^2. \tag{11.5.1}$$

这样辅助场运动方程是$F^*_{S_+} = -\partial W/\partial S_+ = -(\lambda/M_{\rm P})S_+S_-^2$和$F^*_{S_-} = -\partial W/\partial S_- = -(\lambda/M_{\rm P})S_-S_+^2$，同时标量势相应的贡献是

$$V_F \;=\; |F_{S_+}|^2 + |F_{S_-}|^2 \;=\; \frac{|\lambda|^2}{M_{\rm P}^2}\Big(|S_+|^4|S_-|^2 + |S_+|^2|S_-|^4\Big). \tag{11.5.2}$$

另外，还有必须考虑的超对称破缺项

$$V_{\rm soft} \;=\; m_+^2|S_+|^2 + m_-^2|S_-|^2 - \left(\frac{a}{2M_{\rm P}} S_+^2 S_-^2 + \text{c.c.}\right). \tag{11.5.3}$$

含有m_+^2和m_-^2的项是S_+和S_-的质量平方项。它们可以来自于普朗克能标的最小超引力框架，但是由于S_+ 和S_-不同的相互作用，一般地它们将进行不同的重整化。在公式 (11.5.1)中没有麻烦地写下来相互作用是因为它们相关的场不获得真空期望值。最后一项是一个与公式 (5.1a项相似的“软破缺”项，a在$m_{\rm soft}$的量级。耦合系数$a/2M_{\rm P}$确定是无量纲的，但是由于起源和微小数值它应该被处置为软破缺的。这样的项在超引力拉氏量和通常软破缺完全一样的方式出现。通常我们可以忽略它们，但是这次它在规范对称性破缺机制中扮演了关键角色。含有S_+和S_-项的标量势为

$$V = \frac{1}{2}g_X^2\Big(|S_+|^2 - |S_-|^2 + \sum_i x_i|\phi_i|^2\Big)^2 + V_F + V_{\rm soft}. \tag{11.5.4}$$

第一项包含了$U(1)_X$ D项的平方（查看公式 (3.4.11)和(3.4.12)）g_X是$U(1)_X$的规范耦合。标量势 (11.5.4)具有近乎平坦方向，因为D项部分在$\phi_i = 0$和任意$|S_+| = |S_-|$时消失。不失一般性情况下，为了最小化标量势我们可以取a和λ都是实的且正的。由于$a^2 - 6\lambda^2(m_+^2 + m_-^2) > 0$，在平坦方向附近有势的极小值

$$\langle S_+\rangle^2 \approx \langle S_-\rangle^2 \approx \left[a + \sqrt{a^2 - 6\lambda^2(m_+^2 + m_-^2)}\right] M_{\rm P}/6\lambda^2 \tag{11.5.5}$$

（其中$\langle\phi_i\rangle = 0$），因此$\langle S_+\rangle \approx \langle S_-\rangle \sim \mathcal{O}(\sqrt{m_{\rm soft} M_{\rm P}})$）。当$a^2 - 8\lambda^2(m_+^2 + m_-^2) > 0$时也有势全局极小值。注意$m_+^2 + m_-^2 < 0$是充分但不必要的条件。$V_F$贡献是极大场强时稳定标量势的原因。$S_+$ 和S_-的典型真空期望值在10^{10} GeV量级左右。因此$U(1)_X$规范玻色子和规范超子，质量在$g_X\langle S_\pm\rangle$的量级，在对撞机物理上无角色。

然而，由于$m_+^2 \neq m_-^2$，$\langle S_+\rangle = \langle S_-\rangle$也必须有小的偏离。在$\partial V/\partial S_+ = \partial V/\partial S_- = 0$的势极小值点，真空期望值的领头阶差别是

$$\langle S_+\rangle^2 - \langle S_-\rangle^2 = -\langle D_X\rangle/g_X \approx (m_-^2 - m_+^2)/2g_X^2, \tag{11.5.6}$$

这里假定了$\langle S_+\rangle$和$\langle S_-\rangle$远远大于其差别。通过利用势极小值点展开的运动方程做替换积分掉S_+和S_-，我们可以发现每个最小超模型ϕ_i得到通常其它来源的软破缺项之外的质量平方修正

$$\Delta m_i^2 = -x_i g_X \langle D_X\rangle\,. \tag{11.5.7}$$

公式 (11.5.7)的D项修正大体上最多在$m_{\rm soft}^2$的量级，因为它们全部正比于$m_-^2 - m_+^2$。既然产生了所需的大真空期望值的对称性破缺，公式 (11.5.7)的结果事实上并不依赖于超势不可重整项的选择；这是一个一般特征。公式 (11.5.7)最重要的特征是每个最小超模型标量质量平方得到了正比于其自发破缺规范群荷x_i的修正，其中有一个普适因子$g_X\langle D_X\rangle$。也就是说，超对称软破缺项m_+^2和m_-^2 已经被回收到$U(1)_X$的一个非零D项中了，然后在最小超模型标量质量谱上只留下了它的"指纹"。从TeV物理角度看，$g_X\langle D_X\rangle$量可以简单地取作参数而不用关心$U(1)_X$是如何破缺的。典型地荷x_i是有理数且并不都有相同符号，使得特定的$U(1)_X$候选者可以在标夸克和标轻子谱中留下差别明显的质量劈裂。既然荷是代不依赖的，具有相同电弱量子数的标夸克和标轻子保留了简并，保持了味道混合效应的自然压低。

上文讨论的另外的$U(1)_X$规范对称性可以单独存在，或者也可以嵌入一个更大的非阿贝尔规范群。如果潜在普朗克能标的理论的规范群含有多于一个新的$U(1)$因子，那么每个都会有像公式 (11.5.7)的贡献。另外的$U(1)$规范群因子在超弦理论，以及大统一群$SO(10)$和E_6中非常常见，因此相应D项修正的存在是乐观的。一旦我们仅仅假定了高能存在另外$U(1)$群，假定这样的最小超模型标量质量的D项贡献消失是不自然的，除非有严格对称性强制$m_+^2 = m_-^2$。唯一问题是D项贡献的大小和通常最小超引力和RG贡献相比是否是显著的。因此，理解最小超模型的超粒子的尝试应该需要考虑来自于另外规范群D项的可能性。

12 结论

在这个讲义中，我试图传达一些做为超出标准模型新物理的超对称的主要特征。超对称最优良的品质是，尽管现在还缺少直接的实验证据，但我们已经知道了它的很多意义。标准模型粒子与它们的超伙伴的相互作用，以及由于超对称破缺引起的质量混合效应都可以由超对称来确定。即使是面临着的许多突出的重要问题，特别的至高问题"超对称如何破缺？"也已经是相当清楚了，即它之所以可以是这样，那也是对称性强大预言能力的体现。

撰写此文时，LHC已经进行了基于$\sqrt{s} = 7$ 5 fb^{-1} TeV，$\sqrt{s} = 8$ TeV 20 fb^{-1}和$\sqrt{s} = 13$ TeV 4 fb^{-1}的寻找。这些寻找并没有找到超伙伴的任何证据，因此给大量模型的标夸克和胶超子质量以非常高的下限。ATLAS和CMS使用的最早的策略现在看来是过于简单和乐观的，包括了有新参数m_0^2, $m_{1/2}$, A_0, $\tan\beta$和Arg(μ) 的MSUGRA脚本，以及有新参数Λ, $M_{\rm mess}$, N_5, $\langle F\rangle$, $\tan\beta$和Arg(μ) 的GMSB脚本。但是，超对称唯一不可或缺的思想就是简单的费米子和玻色子之间的对称性。自然界可以，或者也可以不，足够仁慈地在已被理论家深入研究的某些特定模型中实现这个美妙的思想。LHC实验合作组报告的更多最新寻找彻查了更一般的超对称参数空间，包括R宇称破坏模型，以及那些有小质量差或具有软可见能量的衰变模式而使得超对称探测更加困难的模型。

虽然缺少超粒子直接证据是令人失望的，但它至少和发现$m_{h^0} = 125$ GeV是保持一致的。如上文所注，这个最轻希格斯质量的数值指出标顶夸克非常重，至少在小的和适当的标顶夸克混合的最小超模型中是这样的。在许多模型框架中，标顶夸克质量通过辐射修正与其它标夸克和胶超子关联。因此，仅基于信息$m_{h^0} = 125$ GeV，我们就可以猜测超对称不会太早被LHC发现，同时或许即使$\sqrt{s} = 13$或14 TeV，超粒子的发现也不被看好，这与早期期望相悖。一个更加乐观的推论是最小超模型可能被可以抬高h^0质量的另外的粒子或者相互作用加强了。这正如第11.2和11.3小节所讨论的例子。

在当前125 GeV希格斯已被发现以及LHC的7和8TeV运行缺少其它特别（exotic）物理证据的情况下，也许不值一提的是大多数已有的解决规范等级问题其它理论的状况比超对称差多了。事实上，许多超对称理论的竞争者现在已经认为被消灭了。因此，简单基于规范等级问题需要在TeV有一个解决方案，以及其它选择已不存在竞争力，我个人对现在开始的更高能量运行的LHC上发现超对称持谨慎的乐观态度。

如果超对称被实验证实，那将不是一个结束，而是高能物理的又一个开始。看上去那将会给出一些现在我们只能猜测的问题和挑战。超粒子质量测量，产生截面和衰变模式将排除一些超对称破缺模型，同时给其它模型以借鉴。我们将有能力检验R宇称守恒理论，超对称与暗物质关系，及其与宇宙学其它方面包括重子产生和暴胀联系的可能性。其它基本问题，如μ参数的起源和相当奇特的汤川耦合等级结构可能会在超对称伙伴发现之后变成物理学家的关注焦点。理解超对称和电弱标度之间的精确关联将会确定打开一个通往更深层次基本物理

的窗口。

声明

This is an extended and revised version of a chapter in the volume *Perspectives on Supersymmetry* (World Scientific, 1998) at the kind invitation of Gordy Kane. I am thankful to him and to James Wells for many helpful comments and suggestions on this primer. I am also indebted to my other collaborators on supersymmetry and related matters: Ben Allanach, Sandro Ambrosanio, Nima Arkani-Hamed, Diego Castaño, Ray Culbertson, Yanou Cui, Michael Dine, Manuel Drees, Herbi Dreiner, Tony Gherghetta, Howie Haber, Ian Jack, Tim Jones, Chris Kolda, Graham Kribs, Nilanjana Kumar, Tom LeCompte, Stefano Moretti, David Morrissey, Steve Mrenna, Jian-ming Qian, Dave Robertson, Roberto Ruiz de Austri, Scott Thomas, Kazuhiro Tobe, Mike Vaughn, Graham Wilson, Youichi Yamada, James Younkin, 2890 members of ATLAS, and especially Pierre Ramond, for many illuminating and inspiring conversations. Corrections to previous versions have been provided by Daniel Arnold, Howie Baer, Jorge de Blas, Meike de With, Herbi Dreiner, Paddy Fox, Hajime Fukuda, Peter Graf, Gudrun Hiller, Graham Kribs, Bob McElrath, Matt Reece, Verónica Sanz, Frank Daniel Steffen, Shufang Su, John Terning, Keith Thomas, Scott Thomas, Sean Tulin, and Robert Ziegler. I will be grateful to receive further corrections at `spmartin@niu.edu`, and a list of them is maintained at `http://www.niu.edu/spmartin/primer`. I thank the Aspen Center for Physics, Fermilab, the Kavli Institute for Theoretical Physics in Santa Barbara, and SLAC for their hospitality, and the students of the 2013 and 2005 ICTP Summer Schools on Particle Physics, the 2011 TASI Summer School, the 2010 PreSUSY Summer School in Bonn, the 2008 CERN/Fermilab Hadron Collider Physics Summer School, and PHYS 686 at NIU in Spring 2004, for asking interesting questions. This work was supported in part by the U.S. Department of Energy, and by National Science Foundation grants PHY-9970691, PHY-0140129, PHY-0456635, PHY-0757325, PHY-1068369, and PHY-1417028.

参考文献

[1] S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 974 (1976), Phys. Rev. D **19**, 1277 (1979); E. Gildener, Phys. Rev. D **14**, 1667 (1976); L. Susskind, Phys. Rev. D **20**, 2619 (1979); G. 't Hooft, in *Recent developments in gauge theories*, Proceedings of the NATO Advanced Summer Institute, Cargese 1979, (Plenum, 1980).

[2] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], "Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC," Phys. Lett. B **716**, 1 (2012) [1207.7214], S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], "Observation of a new

boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC," Phys. Lett. B **716**, 30 (2012) [1207.7235].

[3] The ATLAS and CMS Collaborations, "Measurements of the Higgs boson production and decay rates and constraints on its couplings from a combined ATLAS and CMS analysis of the LHC pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV," September 15, 2015, ATLAS-CONF-2015-044 and CMS-PAS-HIG-15-002.

[4] G. Aad *et al.* [ATLAS and CMS Collaborations], "Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in *pp* Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments," Phys. Rev. Lett. **114**, 191803 (2015) [1503.07589].

[5] D.A. Eliezer and R.P. Woodard, Nucl. Phys. B **325**, 389 (1989).

[6] S. Dimopoulos and S. Raby, Nucl. Phys. B **192**, 353 (1981); E. Witten, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981); M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, Nucl. Phys. B **189**, 575 (1981); S. Dimopoulos and H. Georgi, Nucl. Phys. B **193**, 150 (1981); N. Sakai, Z. Phys. C **11**, 153 (1981); R.K. Kaul and P. Majumdar, Nucl. Phys. B **199**, 36 (1982).

[7] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251;

[8] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).

[9] P. Fayet, Phys. Lett. B **64**, 159 (1976).

[10] P. Fayet, Phys. Lett. B **69**, 489 (1977), Phys. Lett. B **84**, 416 (1979).

[11] G.R. Farrar and P. Fayet, Phys. Lett. B **76**, 575 (1978).

[12] P. Ramond, Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971); A. Neveu and J.H. Schwarz, Nucl. Phys. B **31**, 86 (1971); J.L. Gervais and B. Sakita, Nucl. Phys. B **34**, 632 (1971).

[13] Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971).

[14] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70** (1974) 39.

[15] D.V. Volkov and V.P. Akulov, Phys. Lett. B **46**, 109 (1973).

[16] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton Univ. Press, 1992).

[17] P.P. Srivastava, *Supersymmetry and Superfields and Supergravity; an Introduction*, (Adam-Hilger, 1986).

[18] P.C. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, (World Scientific, 1990).

[19] R.N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-Lepton Physics*, Springer-Verlag, New York 1992.

[20] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, (Institute of Physics Publishing, 1994).

[21] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace*, (IOP 1998).

[22] P. Ramond, *Journeys Beyond the Standard Model*, (Frontiers in Physics, Perseus Books 1999).

[23] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 3: Supersymmetry*, (Cambridge University Press, 2000).

[24] M. Drees, R. Godbole and P. Roy, *Theory and Phenomenology of Sparticles*, (World Scientific, 2004).

[25] H. Baer and X. Tata, *Weak Scale Supersymmetry*, (Cambridge University Press, 2006).

[26] P. Binetruy, *Supersymmetry*, (Oxford University Press, 2006).

[27] J. Terning, *Modern Supersymmetry: Dynamics and Duality* (Oxford University Press, 2006).

[28] M. Dine, *Supersymmetry and String Theory: Beyond the Standard Model* (Cambridge University Press, 2007)

[29] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*, (Cambridge University Press, 2012)

[30] M. Shifman, *Advanced topics in quantum field theory: a lecture course*, (Cambridge University Press, 2012)

[31] H.E. Haber and G.L. Kane, "The Search For Supersymmetry: Probing Physics Beyond The Standard Model," Phys. Rept. **117**, 75 (1985).

[32] H.P. Nilles, "Supersymmetry, Supergravity And Particle Physics," Phys. Rept. **110**, 1 (1984).

[33] M.F. Sohnius, Phys. Rept. **128**, 39 (1985).

[34] S.J. Gates, M.T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, [hep-th/0108200].

[35] P. Van Nieuwenhuizen, "Supergravity," Phys. Rept. **68** (1981) 189.

[36] R. Arnowitt, A. Chamseddine and P. Nath, *N=1 Supergravity*, (World Scientific, 1984).

[37] D.R.T. Jones, "Supersymmetric gauge theories", in *TASI Lectures in Elementary Particle Physics 1984*, ed. D.N. Williams, TASI publications, Ann Arbor 1984.

[38] H.E. Haber, "Introductory low-energy supersymmetry", TASI-92 lectures, [hep-ph/9306207].

[39] M.E. Peskin, "Duality in supersymmetric Yang-Mills theory," TASI-96 lectures, [hep-th/9702094].

[40] J.D. Lykken, "Introduction to Supersymmetry", TASI-96 lectures, [hep-th/9612114].

[41] M.A. Shifman, "Nonperturbative dynamics in supersymmetric gauge theories", Prog. Part. Nucl. Phys. **39**, 1 (1997) [hep-th/9704114].

[42] P. Argyres, "Introduction to Supersymmetry", 1996 lectures notes (2-component), and "An Introduction to Global Supersymmetry", 2001 lectures notes (4-component).

[43] M.A. Luty, "2004 TASI lectures on supersymmetry breaking," [hep-th/0509029].

[44] I. Aitchison,"Supersymmetry and the MSSM: an elementary introduction," [hep-ph/0505105].

[45] D.J.H. Chung et al., Phys. Rept. **407**, 1 (2005) [hep-ph/0312378].

[46] H. Murayama, "Supersymmetry phenomenology," ICTP Summer School Lectures 1999, [hep-ph/0002232].

[47] D. Bertolini, J. Thaler and Z. Thomas, "Super-Tricks for Superspace," TASI 2012 lecture notes, [1302.6229].

[48] S. Ferrara, editor, *Supersymmetry*, (World Scientific, 1987).

[49] H.K. Dreiner, H.E. Haber, and S.P. Martin, "Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry", Phys. Rept. **494**, 1 (2010) [hep-ph/0812.1594]. The published version uses the $+---$ metric, but an otherwise identical version using the $-+++$ metric is available from `http://www.niu.edu/spmartin/spinors`

[50] S. P. Martin, "TASI 2011 lectures notes: two-component fermion notation and supersymmetry," [1205.4076].

[51] A. Salam and J.A. Strathdee, Nucl. Phys. B **76**, 477 (1974); S. Ferrara, J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **51**, 239 (1974).

[52] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **49**, 52 (1974); J. Iliopoulos and B. Zumino, Nucl. Phys. B **76**, 310 (1974).

[53] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **78**, 1 (1974).

[54] E. Berezin, "The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1960.

[55] G.D. Kribs, E. Poppitz and N. Weiner, Phys. Rev. D **78**, 055010 (2008) [hep-ph/0712.2039].

[56] L. Girardello and M.T. Grisaru Nucl. Phys. B **194**, 65 (1982).

[57] J. Polchinski and L. Susskind, Phys. Rev. D **26**, 3661 (1982).

[58] D.R.T. Jones, L. Mezincescu and Y.P. Yao, Phys. Lett. B **148**, 317 (1984);

[59] L.J. Hall and L. Randall, Phys. Rev. Lett. **65**, 2939 (1990).

[60] M. Dine and D. MacIntire, Phys. Rev. D **46**, 2594 (1992) [hep-ph/9205227].

[61] I. Jack and D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **457**, 101 (1999) [hep-ph/9903365].

[62] P.J. Fox, A.E. Nelson and N. Weiner, JHEP **0208**, 035 (2002) [hep-ph/0206096].

[63] Z. Chacko, P.J. Fox and H. Murayama, Nucl. Phys. B **706**, 53 (2005) [hep-ph/0406142].

[64] I. Antoniadis, K. Benakli, A. Delgado and M. Quiros, Adv. Stud. Theor. Phys. **2**, 645 (2008) [hep-ph/0610265].

[65] A.E. Blechman and S.P. Ng, JHEP **0806**, 043 (2008) [hep-ph/0803.3811].

[66] S.D.L. Amigo, A.E. Blechman, P.J. Fox and E. Poppitz, JHEP **0901**, 018 (2009) [hep-ph/0809.1112].

[67] T. Plehn and T.M.P. Tait, J. Phys. G **36**, 075001 (2009) [hep-ph/0810.3919].

[68] J.E. Kim and H. P. Nilles, Phys. Lett. B **138**, 150 (1984);

[69] G.F. Giudice and A. Masiero, Phys. Lett. B **206**, 480 (1988);

[70] G. Dvali, G.F. Giudice and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **478**, 31 (1996) [hep-ph/9603238].

[71] F. Zwirner, Phys. Lett. B **132**, 103 (1983); S. Dawson, Nucl. Phys. B **261**, 297 (1985); R. Barbieri and A. Masiero, Nucl. Phys. B **267**, 679 (1986); S. Dimopoulos and L. Hall, Phys. Lett. B **207**, 210 (1988); V. Barger, G. Giudice, and T. Han, Phys. Rev. D **40**, 2987 (1989); R. Godbole, P. Roy and X. Tata, Nucl. Phys. B **401**, 67 (1993) [hep-ph/9209251]; G. Bhattacharyya and D. Choudhury, Mod. Phys. Lett. A **10**, 1699 (1995) [hep-ph/9503263];

[72] For reviews, see G. Bhattacharyya, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **52A**, 83 (1997) [hep-ph/9608415]; H.K. Dreiner, "An introduction to explicit R-parity violation," [hep-ph/9707435]; B. Allanach, A. Dedes and H.K. Dreiner, Phys. Rev. D **69**, 115002 (2004) [hep-ph/0309196]; M. Chemtob, Prog. Part. Nucl. Phys. **54**, 71 (2005) [hep-ph/0406029]. R. Barbier *et al.*, Phys. Rept. **420**, 1 (2005) [arXiv:hep-ph/0406039].

[73] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).

[74] S. Dimopoulos and H. Georgi, Nucl. Phys. B **193**, 150 (1981); S. Weinberg, Phys. Rev. D **26**, 287 (1982); N. Sakai and T. Yanagida, Nucl. Phys. B **197**, 533 (1982); S. Dimopoulos, S. Raby and F. Wilczek, Phys. Lett. B **112**, 133 (1982).

[75] H. Goldberg, Phys. Rev. Lett. **50**, 1419 (1983); J. Ellis, J. Hagelin, D.V. Nanopoulos, K. Olive, and M. Srednicki, Nucl. Phys. B **238**, 453 (1984).

[76] L. Krauss and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1221 (1989).

[77] L.E. Ibáñez and G. Ross, Phys. Lett. B **260**, 291 (1991); T. Banks and M. Dine, Phys. Rev. D **45**, 1424 (1992) [hep-th/9109045]; L.E. Ibáñez, Nucl. Phys. B **398**, 301 (1993) [hep-ph/9210211].

[78] R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D **34**, 3457 (1986); A. Font, L.E. Ibáñez and F. Quevedo, Phys. Lett. B **228**, 79 (1989);

[79] S.P. Martin Phys. Rev. D **46**, 2769 (1992) [hep-ph/9207218], Phys. Rev. D **54**, 2340 (1996) [hep-ph/9602349].

[80] R. Kuchimanchi and R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D **48**, 4352 (1993) [hep-ph/9306290], Phys. Rev. Lett. **75**, 3989 (1995) [hep-ph/9509256]; C.S. Aulakh, K. Benakli and G. Senjanović, Phys. Rev. Lett. **79**, 2188 (1997) [hep-ph/9703434]; C.S. Aulakh, A. Melfo and G. Senjanović, Phys. Rev. D **57**, 4174 (1998) [hep-ph/9707256].

[81] S. Dimopoulos and D. Sutter, Nucl. Phys. B **452**, 496 (1995) [hep-ph/9504415].

[82] J. Ellis and D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **110**, 44 (1982); R. Barbieri and R. Gatto, Phys. Lett. B **110**, 211 (1982); B.A. Campbell, Phys. Rev. D **28**, 209 (1983).

[83] M.J. Duncan, Nucl. Phys. B **221**, 285 (1983); J.F. Donahue, H.P. Nilles and D. Wyler, Phys. Lett. B **128**, 55 (1983); A. Bouquet, J. Kaplan and C.A. Savoy, Phys. Lett. B **148**, 69 (1984); M. Dugan, B. Grinstein and L.J. Hall, Nucl. Phys. B **255**, 413 (1985); F. Gabbiani and A. Masiero, Nucl. Phys. B **322**, 235 (1989); J. Hagelin, S. Kelley and T. Tanaka, Nucl. Phys. B **415**, 293 (1994).

[84] L.J. Hall, V.A. Kostalecky and S. Raby, Nucl. Phys. B **267**, 415 (1986); F. Gabbiani and A. Masiero, Phys. Lett. B **209**, 289 (1988); R. Barbieri and L.J. Hall, Phys. Lett. B **338**, 212 (1994) [hep-ph/9408406]; R. Barbieri, L.J. Hall and A. Strumia, Nucl. Phys. B **445**, 219 (1995) [hep-ph/9501334].

[85] J. Ellis, S. Ferrara and D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **114**, 231 (1982); W. Buchmüller and D. Wyler, Phys. Lett. B **121**, 321 (1983); J. Polchinski and M.B. Wise, Phys. Lett. B **125**, 393 (1983); F. del Aguila, M.B. Gavela, J.A. Grifols and A. Méndez, Phys. Lett. B **126**, 71 (1983) [Erratum-ibid. B **129**, 473 (1983)]; D.V. Nanopoulos and M. Srednicki, Phys. Lett. B **128**, 61 (1983), T. Ibrahim and P. Nath, Phys. Rev. D **58**, 111301 (1998) [Phys. Rev. D **60**, 099902 (1999)] [hep-ph/9807501].

[86] S. Bertolini, F. Borzumati, A. Masiero and G. Ridolfi, Nucl. Phys. B **353**, 591 (1991); R. Barbieri and G.F. Giudice, Phys. Lett. B **309**, 86 (1993) [hep-ph/9303270].

[87] J. Hisano et al., Phys. Lett. B **357**, 579 (1995) [hep-ph/9501407].

[88] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **477**, 321 (1996) [hep-ph/9604387].

[89] J.L. Hewett and J.D. Wells, Phys. Rev. D **55**, 5549 (1997) [hep-ph/9610323].

[90] Y. Grossman, Y. Nir and R. Rattazzi, [hep-ph/9701231].

[91] S. Pokorski, J. Rosiek and C. A. Savoy, Nucl. Phys. B **570**, 81 (2000) [hep-ph/9906206];

[92] S. Abel, S. Khalil and O. Lebedev, Nucl. Phys. B **606**, 151 (2001) [hep-ph/0103320].

[93] M. Misiak, S. Pokorski and J. Rosiek, "Supersymmetry and FCNC effects," [hep-ph/9703442].

[94] J.A. Bagger, K.T. Matchev and R.J. Zhang, Phys. Lett. B **412**, 77 (1997) [hep-ph/9707225].

[95] Y. Nir and M.P. Worah, Phys. Lett. B **423**, 319 (1998) [hep-ph/9711215].

[96] M. Ciuchini et al., Nucl. Phys. B **523**, 501 (1998) [hep-ph/9711402].

[97] M. Ciuchini et al., JHEP **9810**, 008 (1998) [hep-ph/9808328].

[98] A. Masiero and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **83**, 907 (1999) [hep-ph/9903363].

[99] S. Khalil, T. Kobayashi and A. Masiero, Phys. Rev. D **60**, 075003 (1999) [hep-ph/9903544].

[100] A.J. Buras et al., Nucl. Phys. B **566**, 3 (2000) [hep-ph/9908371].

[101] F. Borzumati, C. Greub, T. Hurth and D. Wyler, Phys. Rev. D **62**, 075005 (2000) [hep-ph/9911245].

[102] A.J. Buras, P. Gambino, M. Gorbahn, S. Jager and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **592**, 55 (2001) [hep-ph/0007313].

[103] P.H. Chankowski and L. Slawianowska, Phys. Rev. D **63**, 054012 (2001) [hep-ph/0008046].

[104] T. Besmer, C. Greub and T. Hurth, Nucl. Phys. B **609**, 359 (2001) [hep-ph/0105292].

[105] G. Burdman, E. Golowich, J. Hewett and S. Pakvasa, Phys. Rev. D **66**, 014009 (2002) [hep-ph/0112235].

[106] A.J. Buras, P.H. Chankowski, J. Rosiek and L. Slawianowska, Nucl. Phys. B **659**, 3 (2003) [hep-ph/0210145].

[107] M. Ciuchini, E. Franco, A. Masiero and L. Silvestrini, Phys. Rev. D **67**, 075016 (2003) [Erratum-ibid. D **68**, 079901 (2003)] [hep-ph/0212397].

[108] J. Adam *et al.* [MEG Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, 201801 (2013) [1303.0754].

[109] A.G. Cohen, D.B. Kaplan and A.E. Nelson, Phys. Lett. B **388**, 588 (1996) [hep-ph/9607394].

[110] J.D. Wells, "Implications of supersymmetry breaking with a little hierarchy between gauginos and scalars," [hep-ph/0306127], Phys. Rev. D **71**, 015013 (2005) [hep-ph/0411041]. "Split supersymmetry", as in N. Arkani-Hamed and S. Dimopoulos, JHEP **0506**, 073 (2005) [hep-th/0405159]; G.F. Giudice and A. Romanino, Nucl. Phys. B **699**, 65 (2004) [Erratum-ibid. B **706**, 65 (2005)] [hep-ph/0406088], abandons the motivation of supersymmetry as a solution to the hierarchy problem. The most logical and sublime refinement of this line of thinking is found in P.J. Fox *et al.*, "Supersplit supersymmetry," [hep-th/0503249].

[111] Y. Nir and N. Seiberg, Phys. Lett. B **309**, 337 (1993) [hep-ph/9304307].

[112] P. Langacker, "Precision Tests Of The Standard Model," in Proceedings of the PASCOS90 Symposium, (World Scientific, 1990); J. Ellis, S. Kelley, and D. Nanopoulos, Phys. Lett. B **260**, 131 (1991); U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, Phys. Lett. B **260**, 447 (1991); P. Langacker and M. Luo, Phys. Rev. D **44**, 817 (1991); C. Giunti, C.W. Kim and U.W. Lee, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1745 (1991);

[113] W. Siegel, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979); D.M. Capper, D.R.T. Jones and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B **167**, 479 (1980).

[114] W. Siegel, Phys. Lett. B **94**, 37 (1980); L. V. Avdeev, G. A. Chochia and A. A. Vladimirov, Phys. Lett. B **105**, 272 (1981); L.V. Avdeev and A.A. Vladimirov, Nucl. Phys. B **219**, 262 (1983).

[115] I. Jack and D.R.T. Jones, "Regularisation of supersymmetric theories", [hep-ph/9707278]

[116] D. Stöckinger, JHEP **0503**, 076 (2005) [hep-ph/0503129]; A. Signer and D. Stöckinger, Phys. Lett. B **626**, 127 (2005) [hep-ph/0508203].

[117] D. Evans, J.W. Moffat, G. Kleppe, and R.P. Woodard, Phys. Rev. D **43**, 499 (1991); G. Kleppe and R.P. Woodard, Phys. Lett. B **253**, 331 (1991), Nucl. Phys. B **388**, 81 (1992) [hep-th/9203016]; G. Kleppe, Phys. Lett. B **256**, 431 (1991).

[118] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983), Phys. Lett. B **166**, 329 (1986); J. Hisano and M. Shifman, Phys. Rev. D **56**, 5475 (1997) [hep-ph/9705417].

[119] I. Antoniadis, C. Kounnas and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **119**, 377 (1982); G.A. Schuler, S. Sakakibara and J.G. Korner, Phys. Lett. B **194**, 125 (1987); Y. Yamada, Phys. Lett. B **316**, 109 (1993) [hep-ph/9307217].

[120] S.P. Martin and M.T. Vaughn, Phys. Lett. B **318**, 331 (1993) [hep-ph/9308222].

[121] I. Jack, D.R.T. Jones and K.L. Roberts, Z. Phys. C **62**, 161 (1994) [hep-ph/9310301], Z. Phys. C **63**, 151 (1994) [hep-ph/9401349].

[122] A. Salam and J. Strathdee, Phys. Rev. D **11**, 1521 (1975); M.T. Grisaru, W. Siegel and M. Rocek, Nucl. Phys. B **159**, 429 (1979).

[123] D.R.T. Jones, Nucl. Phys. B **87**, 127 (1975); D.R.T. Jones and L. Mezincescu, Phys. Lett. B **136**, 242 (1984).

[124] P.C. West, Phys. Lett. B **137**, 371 (1984); D.R.T. Jones and L. Mezincescu, Phys. Lett. B **138**, 293 (1984); J.E. Bjorkman and D.R.T. Jones, Nucl. Phys. B **259**, 533 (1985).

[125] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and H. Takeshita, Prog. Theor. Phys. **68**, 927 (1982) [Erratum-ibid. **70**, 330 (1983)], Prog. Theor. Phys. **71**, 413 (1984); N.K. Falck Z. Phys. C **30**, 247 (1986).

[126] S.P. Martin and M.T. Vaughn, Phys. Rev. D **50**, 2282 (1994) [hep-ph/9311340]; Y. Yamada, Phys. Rev. D **50**, 3537 (1994) [hep-ph/9401241]; I. Jack and D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **333**, 372 (1994) [hep-ph/9405233]; I. Jack, D.R.T. Jones, S.P. Martin, M.T. Vaughn and Y. Yamada, Phys. Rev. D **50**, 5481 (1994) [hep-ph/9407291].

[127] I. Jack, D.R.T. Jones and C.G. North, Nucl. Phys. B **473**, 308 (1996) [hep-ph/9603386], Phys. Lett. B **386**, 138 (1996) [hep-ph/9606323]; P.M. Ferreira, I. Jack, D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **387**, 80 (1996) [hep-ph/9605440].

[128] P.M. Ferreira, I. Jack, D.R.T. Jones and C.G. North, Nucl. Phys. B **504**, 108 (1997) [hep-ph/9705328]; I. Jack, D.R.T. Jones and A. Pickering, Phys. Lett. B **435**, 61 (1998) [hep-ph/9805482].

[129] I. Jack and D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **415**, 383 (1997) [hep-ph/9709364]; L.V. Avdeev, D.I. Kazakov and I.N. Kondrashuk, Nucl. Phys. B **510**, 289 (1998) [hep-ph/9709397]; N. Arkani-Hamed, G. F. Giudice, M. A. Luty and R. Rattazzi, Phys. Rev. D **58**, 115005 (1998) [hep-ph/9803290]; I. Jack, D.R.T. Jones and A. Pickering, Phys. Lett. B **432**, 114 (1998) [hep-ph/9803405].

[130] J.R. Ellis, C.H. Llewellyn Smith and G.G. Ross, Phys. Lett. B **114**, 227 (1982).

[131] S. Dimopoulos, G.R. Dvali, R. Rattazzi and G.F. Giudice, Nucl. Phys. B **510**, 12 (1998) [hep-ph/9705307]. M.A. Luty and J. Terning, Phys. Rev. D **62**, 075006 (2000) [hep-ph/9812290]. T. Banks, [hep-ph/0510159].

[132] K.A. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, JHEP **0604**, 021 (2006) [hep-th/0602239].

[133] S.A. Abel, C.S. Chu, J. Jaeckel and V.V. Khoze, JHEP **0701**, 089 (2007) [hep-th/0610334]. S.A. Abel, J. Jaeckel and V. V. Khoze, JHEP **0701**, 015 (2007) [hep-th/0611130]. N.J. Craig, P.J. Fox and J.G. Wacker, Phys. Rev. D **75**, 085006 (2007) [hep-th/0611006]. W. Fischler, V. Kaplunovsky, C. Krishnan, L. Mannelli and M.A.C. Torres, JHEP **0703**, 107 (2007) [hep-th/0611018].

[134] P. Fayet and J. Iliopoulos, Phys. Lett. B **51**, 461 (1974); P. Fayet, Nucl. Phys. B **90**, 104 (1975).

[135] However, see for example P. Binétruy and E. Dudas, Phys. Lett. B **389**, 503 (1996) [hep-th/9607172]; G. Dvali and A. Pomarol, Phys. Rev. Lett. **77**, 3728 (1996) [hep-ph/9607383]; R.N. Mohapatra and A. Riotto, Phys. Rev. D **55**, 4262 (1997) [hep-ph/9611273]; N. Arkani-Hamed, M. Dine and S.P. Martin, Phys. Lett. B **431**, 329 (1998) [hep-ph/9803432]. A non-zero Fayet-Iliopoulos term for an anomalous $U(1)$ symmetry is commonly found in superstring models: M. Green and J. Schwarz, Phys. Lett. B **149**, 117 (1984); M. Dine, N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **289**, 589 (1987); J. Atick, L. Dixon and A. Sen, Nucl. Phys. B **292**, 109 (1987).

[136] L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. B **96**, 331 (1975).

[137] M.A. Luty and W.I. Taylor, Phys. Rev. D **53**, 3399 (1996) [hep-th/9506098]. M. Dine, L. Randall and S.D. Thomas, Nucl. Phys. B **458**, 291 (1996) [hep-ph/9507453].

T. Gherghetta, C.F. Kolda and S.P. Martin, Nucl. Phys. B **468**, 37 (1996) [hep-ph/9510370].

[138] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).

[139] S.P. Martin, Phys. Rev. D **65**, 116003 (2002) [hep-ph/0111209],

[140] A.E. Nelson and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **416**, 46 (1994) [hep-ph/9309299].

[141] J. Bagger, E. Poppitz and L. Randall, Nucl. Phys. B **426**, 3 (1994) [hep-ph/9405345].

[142] K.A. Intriligator, N. Seiberg and D. Shih, JHEP **0707**, 017 (2007) [hep-th/0703281].

[143] E. Witten, Nucl. Phys. B **202**, 253 (1982);

[144] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, Nucl. Phys. B **241**, 493 (1984), Nucl. Phys. B **256**, 557 (1985);

[145] For example, see: S. Franco and A.M. Uranga, JHEP **0606**, 031 (2006) [hep-th/0604136]. H. Ooguri and Y. Ookouchi, Nucl. Phys. B **755**, 239 (2006) [hep-th/0606061]. T. Banks, [hep-ph/0606313]. S. Franco, I. Garcia-Etxebarria and A.M. Uranga, JHEP **0701**, 085 (2007) [hep-th/0607218]. R. Kitano, Phys. Lett. B **641**, 203 (2006) [hep-ph/0607090]. A. Amariti, L. Girardello and A. Mariotti, JHEP **0612**, 058 (2006) [hep-th/0608063]. M. Dine, J.L. Feng and E. Silverstein, Phys. Rev. D **74**, 095012 (2006) [hep-th/0608159]. E. Dudas, C. Papineau and S. Pokorski, JHEP **0702**, 028 (2007) [hep-th/0610297]. H. Abe, T. Higaki, T. Kobayashi and Y. Omura, Phys. Rev. D **75**, 025019 (2007) [hep-th/0611024]. M. Dine and J. Mason, Phys. Rev. D **77**, 016005 (2008) [hep-ph/0611312]. R. Kitano, H. Ooguri and Y. Ookouchi, Phys. Rev. D **75**, 045022 (2007) [hep-ph/0612139]. H. Murayama and Y. Nomura, Phys. Rev. Lett. **98**, 151803 (2007) [hep-ph/0612186]. C. Csaki, Y. Shirman and J. Terning, JHEP **0705**, 099 (2007) [hep-ph/0612241]. O. Aharony and N. Seiberg, JHEP **0702**, 054 (2007) [hep-ph/0612308]. D. Shih, JHEP **0802**, 091 (2008) [hep-th/0703196]. A. Giveon, A. Katz, Z. Komargodski and D. Shih, JHEP **0810**, 092 (2008) [hep-th/0808.2901].

[146] K.A. Intriligator and N. Seiberg, Class. Quant. Grav. **24**, S741 (2007) [hep-ph/0702069]. M. Dine and J.D. Mason, Rept. Prog. Phys. **74**, 056201 (2011) [hep-th/1012.2836].

[147] L. Randall, "Models of dynamical supersymmetry breaking," [hep-ph/9706474]; A. Nelson, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **62**, 261 (1998) [hep-ph/9707442]; G.F. Giudice and R. Rattazzi, Phys. Rept. **322**, 419 (1999) [hep-ph/9801271]; E. Poppitz and S.P. Trivedi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **48**, 307 (1998) [hep-th/9803107]; Y. Shadmi and Y. Shirman, Rev. Mod. Phys. **72**, 25 (2000) [hep-th/9907225].

[148] P. Fayet, Phys. Lett. B **70**, 461 (1977), Phys. Lett. B **86**, 272 (1979), and in *Unification of the fundamental particle interactions* (Plenum, 1980).

[149] N. Cabibbo, G.R. Farrar and L. Maiani, Phys. Lett. B **105**, 155 (1981); M.K. Gaillard, L. Hall and I. Hinchliffe, Phys. Lett. B **116**, 279 (1982) [Erratum-ibid. B **119**, 471 (1982)]; J. Ellis and J.S. Hagelin, Phys. Lett. B **122**, 303 (1983); D.A. Dicus, S. Nandi and J. Woodside, Phys. Lett. B **258**, 231 (1991); D.R. Stump, M. Wiest, and C.P. Yuan, Phys. Rev. D **54**, 1936 (1996) [hep-ph/9601362]. S. Ambrosanio, G. Kribs, and S.P. Martin, Phys. Rev. D **56**, 1761 (1997) [hep-ph/9703211].

[150] S. Dimopoulos, M. Dine, S. Raby and S.Thomas, Phys. Rev. Lett. **76**, 3494 (1996) [hep-ph/9601367]; S. Dimopoulos, S. Thomas and J. D. Wells, Phys. Rev. D **54**, 3283 (1996) [hep-ph/9604452].

[151] S. Ambrosanio et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3498 (1996) [hep-ph/9602239], Phys. Rev. D **54**, 5395 (1996) [hep-ph/9605398].

[152] P. Nath and R. Arnowitt, Phys. Lett. B **56**, 177 (1975); R. Arnowitt, P. Nath and B. Zumino, Phys. Lett. B **56**, 81 (1975); S. Ferrara, D.Z. Freedman and P. van Nieuwenhuizen,

Phys. Rev. D **13**, 3214 (1976); S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B **62**, 335 (1976); D.Z. Freedman and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D **14**, 912 (1976); E. Cremmer et al., Nucl. Phys. B **147**, 105 (1979); J. Bagger, Nucl. Phys. B **211**, 302 (1983).

[153] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. van Proeyen, Nucl. Phys. B **212**, 413 (1983).

[154] S. Deser and B. Zumino, Phys. Rev. Lett. **38**, 1433 (1977); E. Cremmer et al., Phys. Lett. B **79**, 231 (1978).

[155] H. Pagels, J.R. Primack, Phys. Rev. Lett. **48**, 223 (1982); T. Moroi, H. Murayama, M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **303**, 289 (1993).

[156] A.H. Chamseddine, R. Arnowitt and P. Nath, Phys. Rev. Lett. **49**, 970 (1982); R. Barbieri, S. Ferrara and C. A. Savoy, Phys. Lett. B **119**, 343 (1982); L.E. Ibáñez, Phys. Lett. B **118**, 73 (1982); L.J. Hall, J.D. Lykken and S. Weinberg, Phys. Rev. D **27**, 2359 (1983); N. Ohta, Prog. Theor. Phys. **70**, 542 (1983).

[157] J. Ellis, D.V. Nanopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **121**, 123 (1983); L. Alvarez-Gaumé, J. Polchinski, and M. Wise, Nucl. Phys. B **221**, 495 (1983).

[158] P. Moxhay and K. Yamamoto, Nucl. Phys. B **256**, 130 (1985); K. Grassie, Phys. Lett. B **159**, 32 (1985); B. Gato, Nucl. Phys. B **278**, 189 (1986); N. Polonsky and A. Pomarol, N. Polonsky and A. Pomarol, Phys. Rev. Lett. **73**, 2292 (1994) [hep-ph/9406224].

[159] V. Kaplunovsky and J. Louis, Phys. Lett. B **306**, 269 (1993) [hep-th/9303040]; R. Barbieri, J. Louis and M. Moretti, Phys. Lett. B **312**, 451 (1993) [Erratum-ibid. B **316**, 632 (1993)] [hep-ph/9305262]; A. Brignole, L.E. Ibáñez and C. Muñoz, Nucl. Phys. B **422**, 125 (1994) [Erratum-ibid. B **436**, 747 (1995)] [hep-ph/9308271].

[160] J. Polonyi, Hungary Central Research Institute report KFKI-77-93 (1977) (unpublished).

[161] For a review, see A.B. Lahanas and D.V. Nanopoulos, Phys. Rept. **145**, 1 (1987).

[162] For a review, see A. Brignole, L.E. Ibáñez and C. Muñoz, "Soft supersymmetry-breaking terms from supergravity and superstring models", [hep-ph/9707209].

[163] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], "Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters," [1502.01589].

[164] K. Choi, J.E. Kim and H.P. Nilles, Phys. Rev. Lett. **73**, 1758 (1994) [hep-ph/9404311]; K. Choi, J.E. Kim and G.T. Park, Nucl. Phys. B **442**, 3 (1995) [hep-ph/9412397]. See also N.C. Tsamis and R.P. Woodard, Phys. Lett. B **301**, 351 (1993); Nucl. Phys. B **474**, 235 (1996) [hep-ph/9602315]; Annals Phys. **253**, 1 (1997) [hep-ph/9602316]; Annals Phys. **267**, 145 (1998) [hep-ph/9712331]. and references therein, for discussion of nonperturbative quantum gravitational effects on the effective cosmological constant. This work suggests that requiring the tree-level vacuum energy to vanish may not be correct or meaningful. Moreover, perturbative supergravity or superstring predictions for the vacuum energy may not be relevant to the question of whether the observed cosmological constant is sufficiently small.

[165] M. Dine and W. Fischler, Phys. Lett. B **110**, 227 (1982); C.R. Nappi and B.A. Ovrut, Phys. Lett. B **113**, 175 (1982); L. Alvarez-Gaumé, M. Claudson and M. B. Wise, Nucl. Phys. B **207**, 96 (1982).

[166] M. Dine, A. E. Nelson, Phys. Rev. D **48**, 1277 (1993) [hep-ph/9303230]; M. Dine, A.E. Nelson, Y. Shirman, Phys. Rev. D **51**, 1362 (1995) [hep-ph/9408384]; M. Dine, A.E. Nelson, Y. Nir, Y. Shirman, Phys. Rev. D **53**, 2658 (1996) [hep-ph/9507378].

[167] S. Dimopoulos, G.F. Giudice and A. Pomarol, Phys. Lett. B **389**, 37 (1996) [hep-ph/9607225];

[168] S.P. Martin Phys. Rev. D **55**, 3177 (1997) [hep-ph/9608224];

[169] E. Poppitz and S.P. Trivedi, Phys. Lett. B **401**, 38 (1997) [hep-ph/9703246].

[170] P. Meade, N. Seiberg and D. Shih, Prog. Theor. Phys. Suppl. **177**, 143 (2009) [hep-ph/0801.3278].

[171] L.M. Carpenter, M. Dine, G. Festuccia and J.D. Mason, Phys. Rev. D **79**, 035002 (2009) [hep-ph/0805.2944]. M. Buican, P. Meade, N. Seiberg and D. Shih, JHEP **0903**, 016 (2009) [hep-ph/0812.3668]. T.T. Dumitrescu, Z. Komargodski, N. Seiberg and D. Shih, JHEP **1005**, 096 (2010) [hep-ph/1003.2661].

[172] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125**, 136 (1983), Phys. Lett. B **125**, 139 (1983); L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [hep-ph/9905221]; Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064], For accessible reviews of recent work on extra dimensions in general, see C. Csaki, "TASI lectures on extra dimensions and branes," [hep-ph/0404096]; A. Pérez-Lorenzana, J. Phys. Conf. Ser. **18**, 224 (2005) [hep-ph/0503177]; R. Sundrum, "To the fifth dimension and back. (TASI 2004)," [hep-th/0508134]. G.D. Kribs, "TASI 2004 Lectures on the Phenomenology of Extra Dimensions," [hep-ph/0605325].

[173] E.A. Mirabelli and M.E. Peskin, Phys. Rev. D **58**, 065002 (1998) [hep-th/9712214].

[174] D.E. Kaplan, G.D. Kribs and M. Schmaltz, Phys. Rev. D **62**, 035010 (2000) [hep-ph/9911293]; Z. Chacko, M.A. Luty, A.E. Nelson and E. Ponton, JHEP **0001**, 003 (2000) [hep-ph/9911323].

[175] M. Schmaltz and W. Skiba, Phys. Rev. D **62**, 095005 (2000) [hep-ph/0001172]; Phys. Rev. D **62**, 095004 (2000) [hep-ph/0004210].

[176] The gaugino mediation mechanism can be "deconstructed", replacing the extra dimension by a lattice of gauge groups, as in C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean and G.D. Kribs, Phys. Rev. D **65**, 015003 (2002) [hep-ph/0106044]; H.C. Cheng, D.E. Kaplan, M. Schmaltz and W. Skiba, Phys. Lett. B **515**, 395 (2001) [hep-ph/0106098].

[177] L. Randall and R. Sundrum, Nucl. Phys. B **557**, 79 (1999) [hep-th/9810155]; G.F. Giudice, M.A. Luty, H. Murayama and R. Rattazzi, JHEP **9812**, 027 (1998) [hep-ph/9810442].

[178] M.A. Luty and R. Sundrum, Phys. Rev. D **65**, 066004 (2002) [hep-th/0105137], Phys. Rev. D **67**, 045007 (2003) [hep-th/0111231].

[179] I. Jack, D.R.T. Jones and A. Pickering, Phys. Lett. B **426**, 73 (1998) [hep-ph/9712542]. I. Jack and D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **465**, 148 (1999) [hep-ph/9907255],

[180] J.A. Bagger, T. Moroi and E. Poppitz, JHEP **0004**, 009 (2000) [hep-th/9911029]; M.K. Gaillard and B.D. Nelson, Nucl. Phys. B **588**, 197 (2000) [hep-th/0004170]; A. Anisimov, M. Dine, M. Graesser and S. D. Thomas, Phys. Rev. D **65**, 105011 (2002) [hep-th/0111235], JHEP **0203**, 036 (2002) [hep-th/0201256]; M. Dine et al., Phys. Rev. D **70**, 045023 (2004) [hep-ph/0405159].

[181] A. Pomarol and R. Rattazzi, JHEP **9905**, 013 (1999) [hep-ph/9903448].

[182] D.E. Kaplan and G.D. Kribs, JHEP **0009**, 048 (2000) [hep-ph/0009195]; Z. Chacko and M.A. Luty, JHEP **0205**, 047 (2002) [hep-ph/0112172]; R. Sundrum, Phys. Rev. D **71**, 085003 (2005) [hep-th/0406012].

[183] Z. Chacko, M.A. Luty, I. Maksymyk and E. Ponton, JHEP **0004**, 001 (2000) [hep-ph/9905390]; E. Katz, Y. Shadmi and Y. Shirman, JHEP **9908**, 015 (1999) [hep-ph/9906296]; I. Jack and D.R.T. Jones, Phys. Lett. B **482**, 167 (2000) [hep-ph/0003081]; M. Carena, K. Huitu and T. Kobayashi, Nucl. Phys. B **592**, 164 (2001) [hep-ph/0003187]; B.C. Allanach and A. Dedes, JHEP **0006**, 017 (2000) [hep-ph/0003222]; N. Arkani-Hamed, D.E. Kaplan, H. Murayama and Y. Nomura, JHEP **0102**, 041 (2001) [hep-ph/0012103]; N. Okada, Phys. Rev. D **65**, 115009 (2002) [hep-ph/0202219]; R. Harnik, H. Murayama and A. Pierce, JHEP **0208**, 034 (2002) [hep-ph/0204122]; A.E. Nelson and N.T. Weiner, [hep-ph/0210288]; O.C. Anoka, K.S. Babu and I. Gogoladze, Nucl. Phys. B **686**, 135

(2004) [hep-ph/0312176]; R. Kitano, G.D. Kribs and H. Murayama, Phys. Rev. D **70**, 035001 (2004) [hep-ph/0402215].

[184] C.H. Chen, M. Drees and J.F. Gunion, Phys. Rev. D **55**, 330 (1997) [Erratum-ibid. D **60**, 039901 (1999)] [hep-ph/9607421].

[185] S.D. Thomas and J.D. Wells, Phys. Rev. Lett. **81**, 34 (1998) [hep-ph/9804359].

[186] J.L. Feng et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 1731 (1999) [hep-ph/9904250]; J.L. Feng and T. Moroi, Phys. Rev. D **61**, 095004 (2000) [hep-ph/9907319].

[187] T. Gherghetta, G.F. Giudice and J.D. Wells, Nucl. Phys. B **559**, 27 (1999) [hep-ph/9904378].

[188] J.F. Gunion and S. Mrenna, Phys. Rev. D **62**, 015002 (2000) [hep-ph/9906270]. Phys. Rev. D **64**, 075002 (2001) [hep-ph/0103167], R. Rattazzi, A. Strumia and J. D. Wells, Nucl. Phys. B **576**, 3 (2000) [hep-ph/9912390]. F.E. Paige and J.D. Wells, "Anomaly mediated SUSY breaking at the LHC," [hep-ph/0001249]; H. Baer, J.K. Mizukoshi and X. Tata, Phys. Lett. B **488**, 367 (2000) [hep-ph/0007073].

[189] J. Scherk and J.H. Schwarz, Phys. Lett. B **82**, 60 (1979); Nucl. Phys. B **153**, 61 (1979).

[190] I. Antoniadis, Phys. Lett. B **246**, 377 (1990); I. Antoniadis, C. Muñoz and M. Quirós, Nucl. Phys. B **397**, 515 (1993) [hep-ph/9211309]; G.R. Dvali and M. A. Shifman, Nucl. Phys. B **504**, 127 (1997) [hep-th/9611213]; A. Pomarol and M. Quirós, Phys. Lett. B **438**, 255 (1998) [hep-ph/9806263]; I. Antoniadis, S. Dimopoulos, A. Pomarol and M. Quirós, Nucl. Phys. B **544**, 503 (1999) [hep-ph/9810410]; A. Delgado, A. Pomarol and M. Quirós, Phys. Rev. D **60**, 095008 (1999) [hep-ph/9812489]; Z. Chacko and M. A. Luty, JHEP **0105**, 067 (2001) [hep-ph/0008103]; T. Gherghetta and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **602**, 3 (2001) [hep-ph/0012378]; D. Marti and A. Pomarol, Phys. Rev. D **64**, 105025 (2001) [hep-th/0106256]; R. Barbieri, L.J. Hall and Y. Nomura, Nucl. Phys. B **624**, 63 (2002) [hep-th/0107004]; D.E. Kaplan and N. Weiner, [hep-ph/0108001]; J. Bagger, F. Feruglio and F. Zwirner, JHEP **0202**, 010 (2002) [hep-th/0108010]; T. Gherghetta and A. Riotto, Nucl. Phys. B **623**, 97 (2002) [hep-th/0110022].

[191] L.E. Ibáñez and G.G. Ross, Phys. Lett. B **110**, 215 (1982).

[192] S.P. Martin, Phys. Rev. D **65**, 116003 (2002) [hep-ph/0111209], Phys. Rev. D **66**, 096001 (2002) [hep-ph/0206136].

[193] J.F. Gunion and H.E. Haber, Nucl. Phys. B **272**, 1 (1986), Nucl. Phys. B **278**, 449 (1986), Nucl. Phys. B **307**, 445 (1988). (Errata in [hep-ph/9301205].)

[194] J.F. Gunion, H.E. Haber, G.L. Kane and S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide*, (Addison-Wesley 1991), (Errata in [hep-ph/9302272].)

[195] H. E. Haber, "Higgs boson masses and couplings in the minimal supersymmetric model," hep-ph/9707213.

[196] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and S. Takeshita, Prog. Theor. Phys. **67**, 1889 (1982); R.A.Flores and M. Sher, Annals Phys. **148**, 95 (1983).

[197] H.E. Haber and R. Hempfling, Phys. Rev. Lett. **66**, 1815 (1991); Y. Okada, M. Yamaguchi and T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **85**, 1 (1991), Phys. Lett. B **262**, 54 (1991); J. Ellis, G. Ridolfi and F. Zwirner, Phys. Lett. B **257**, 83 (1991), Phys. Lett. B **262**, 477 (1991).

[198] G. Gamberini, G. Ridolfi and F. Zwirner, Nucl. Phys. B **331**, 331 (1990); R. Barbieri, M. Frigeni and F. Caravaglio, Phys. Lett. B **258**, 167 (1991); A. Yamada, Phys. Lett. B **263**, 233 (1991), Z. Phys. C **61**, 247 (1994); J.R. Espinosa and M. Quirós, Phys. Lett. B **266**, 389 (1991); A. Brignole, Phys. Lett. B **281**, 284 (1992); M. Drees and M.M. Nojiri, Nucl. Phys. B **369**, 54 (1992), Phys. Rev. D **45**, 2482 (1992). H.E. Haber and R. Hempfling, Phys. Rev. D **48**, 4280 (1993) [hep-ph/9307201]; P.H. Chankowski,

S. Pokorski and J. Rosiek, Phys. Lett. B **274**, 191 (1992); Phys. Lett. B **281** (1992) 100; R. Hempfling and A.H. Hoang, Phys. Lett. B **331**, 99 (1994) [hep-ph/9401219]; J. Kodaira, Y. Yasui and K. Sasaki, Phys. Rev. D **50**, 7035 (1994) [hep-ph/9311366]; J.A. Casas, J.R. Espinosa, M. Quirós and A. Riotto, Nucl. Phys. B **436**, 3 (1995) [Erratum-ibid. B **439**, 466 (1995)] [hep-ph/9407389]; M. Carena, M. Quirós and C. Wagner, Nucl. Phys. B **461**, 407 (1996) [hep-ph/9508343]. H.E. Haber, R. Hempfling and A.H. Hoang, Z. Phys. C **75**, 539 (1997) [hep-ph/9609331].

[199] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Phys. Rev. D **58**, 091701 (1998) [hep-ph/9803277]; Phys. Lett. B **440**, 296 (1998) [hep-ph/9807423]; Eur. Phys. J. C **9**, 343 (1999) [hep-ph/9812472].

[200] R.J. Zhang, Phys. Lett. B **447**, 89 (1999) [hep-ph/9808299]. J.R. Espinosa and R.J. Zhang, JHEP **0003**, 026 (2000) [hep-ph/9912236]; Nucl. Phys. B **586**, 3 (2000) [hep-ph/0003246].

[201] A. Pilaftsis and C.E.M. Wagner, Nucl. Phys. B **553**, 3 (1999) [hep-ph/9902371]. M. Carena, J.R. Ellis, A. Pilaftsis and C.E.M. Wagner, Nucl. Phys. B **586**, 92 (2000) [hep-ph/0003180]; Nucl. Phys. B **625**, 345 (2002) [hep-ph/0111245].

[202] M. Carena et al., Nucl. Phys. B **580**, 29 (2000) [hep-ph/0001002].

[203] J.R. Espinosa and I. Navarro, Nucl. Phys. B **615**, 82 (2001) [hep-ph/0104047].

[204] G. Degrassi, P. Slavich and F. Zwirner, Nucl. Phys. B **611**, 403 (2001) [hep-ph/0105096]; A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich and F. Zwirner, Nucl. Phys. B **631**, 195 (2002) [hep-ph/0112177]; Nucl. Phys. B **643**, 79 (2002) [hep-ph/0206101].

[205] S.P. Martin, Phys. Rev. D **67**, 095012 (2003) [hep-ph/0211366]; Phys. Rev. D **70**, 016005 (2004) [hep-ph/0312092]; Phys. Rev. D **71**, 016012 (2005) [hep-ph/0405022].

[206] A. Dedes, G. Degrassi and P. Slavich, Nucl. Phys. B **672**, 144 (2003) [hep-ph/0305127].

[207] B. C. Allanach, A. Djouadi, J. L. Kneur, W. Porod and P. Slavich, JHEP **0409**, 044 (2004) [hep-ph/0406166].

[208] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, "FeynHiggs: A program for the calculation of the masses of the neutral CP-even Higgs bosons in the MSSM," Comput. Phys. Commun. **124**, 76 (2000) [hep-ph/9812320]; G. Degrassi, S. Heinemeyer, W. Hollik, P. Slavich and G. Weiglein, Eur. Phys. J. C **28**, 133 (2003) [hep-ph/0212020]. S. Heinemeyer, W. Hollik, H. Rzehak and G. Weiglein, Eur. Phys. J. C **39**, 465 (2005) [hep-ph/0411114], T. Hahn, W. Hollik, S. Heinemeyer and G. Weiglein, "Precision Higgs masses with FeynHiggs 2.2," [hep-ph/0507009]. S. Heinemeyer, W. Hollik, H. Rzehak and G. Weiglein, Phys. Lett. B **652**, 300 (2007) [0705.0746]. T. Hahn, S. Heinemeyer, W. Hollik, H. Rzehak and G. Weiglein, Phys. Rev. Lett. **112**, no. 14, 141801 (2014) [1312.4937].

[209] S. Borowka, T. Hahn, S. Heinemeyer, G. Heinrich and W. Hollik, Eur. Phys. J. C **74**, no. 8, 2994 (2014) [1404.7074], Eur. Phys. J. C **75**, no. 9, 424 (2015) [1505.03133].

[210] W. Hollik and S. Paßehr, Phys. Lett. B **733**, 144 (2014) [1401.8275], JHEP **1410**, 171 (2014) [1409.1687].

[211] G. Degrassi, S. Di Vita and P. Slavich, Eur. Phys. J. C **75**, no. 2, 61 (2015) [1410.3432].

[212] S. P. Martin, Phys. Rev. D **75**, 055005 (2007) [hep-ph/0701051].

[213] R. V. Harlander, P. Kant, L. Mihaila and M. Steinhauser, Phys. Rev. Lett. **100**, 191602 (2008) [Phys. Rev. Lett. **101**, 039901 (2008)] [arXiv:0803.0672 [hep-ph]].

[214] P. Kant, R. V. Harlander, L. Mihaila and M. Steinhauser, JHEP **1008**, 104 (2010) [1005.5709].

[215] P. Draper, G. Lee and C. E. M. Wagner, Phys. Rev. D **89**, no. 5, 055023 (2014) [1312.5743].

[216] E. Bagnaschi, G. F. Giudice, P. Slavich and A. Strumia, JHEP **1409**, 092 (2014) [1407.4081].

[217] J. P. Vega and G. Villadoro, JHEP **1507**, 159 (2015) [1504.05200].

[218] P. Draper and H. Rzehak, "A Review of Higgs Mass Calculations in Supersymmetric Models," [1601.01890].

[219] R. Tarrach, Nucl. Phys. B **183**, 384 (1981); H. Gray, D.J. Broadhurst, W. Grafe and K. Schilcher, Z. Phys. C **48**, 673 (1990); H. Arason et al., Phys. Rev. D **46**, 3945 (1992).

[220] L.E. Ibáñez and C. Lopez, Phys. Lett. B **126**, 54 (1983); V. Barger, M.S. Berger and P. Ohmann, Phys. Rev. D **47**, 1093 (1993) [hep-ph/9209232]; P. Langacker and N. Polonsky, Phys. Rev. D **49**, 1454 (1994) [hep-ph/9306205]; P. Ramond, R.G. Roberts, G.G. Ross, Nucl. Phys. B **406**, 19 (1993) [hep-ph/9303320]; M. Carena, S. Pokorski and C. Wagner, Nucl. Phys. B **406**, 59 (1993) [hep-ph/9303202]; G. Anderson et al., Phys. Rev. D **49**, 3660 (1994) [hep-ph/9308333].

[221] L.J. Hall, R. Rattazzi and U. Sarid, Phys. Rev. D **50**, 7048 (1994) [hep-ph/9306309]; M. Carena, M. Olechowski, S. Pokorski and C.E.M. Wagner, Nucl. Phys. B **426**, 269 (1994) [hep-ph/9402253]. R. Hempfling, Phys. Rev. D **49**, 6168 (1994); R. Rattazzi and U. Sarid, Phys. Rev. D **53**, 1553 (1996) [hep-ph/9505428].

[222] D. Pierce and A. Papadopoulos, Phys. Rev. D **50**, 565 (1994) [hep-ph/9312248], Nucl. Phys. B **430**, 278 (1994) [hep-ph/9403240]; D. Pierce, J.A. Bagger, K. Matchev, and R.-J. Zhang, Nucl. Phys. B **491**, 3 (1997) [hep-ph/9606211].

[223] S.P. Martin, Phys. Rev. D **72**, 096008 (2005) [hep-ph/0509115].

[224] R. Schofbeck and H. Eberl, Phys. Lett. B **649**, 67 (2007) [hep-ph/0612276]; R. Schofbeck and H. Eberl, Eur. Phys. J. C **53**, 621 (2008) [hep-ph/0706.0781].

[225] Y. Yamada, Phys. Lett. B **623**, 104 (2005) [hep-ph/0506262],

[226] S.P. Martin, Phys. Rev. D **74**, 075009 (2006) [hep-ph/0608026].

[227] M. Claudson, L.J. Hall and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. B **228**, 501 (1983); J.A. Casas, A. Lleyda, C. Muñoz, Nucl. Phys. B **471**, 3 (1996) [hep-ph/9507294]; T. Falk, K.A. Olive, L. Roszkowski, and M. Srednicki Phys. Lett. B **367**, 183 (1996) [hep-ph/9510308]; H. Baer, M. Brhlik and D.J. Castaño, Phys. Rev. D **54**, 6944 (1996) [hep-ph/9607465]. For a review, see J.A. Casas, "Charge and color breaking," [hep-ph/9707475].

[228] A. Kusenko, P. Langacker and G. Segre, Phys. Rev. D **54**, 5824 (1996) [hep-ph/9602414].

[229] S.P. Martin, Phys. Rev. D **71**, 116004 (2005) [hep-ph/0502168].

[230] F.E. Paige, S.D. Protopescu, H. Baer and X. Tata, "ISAJET 7.69: A Monte Carlo event generator for p p, anti-p p, and e+ e- reactions," [hep-ph/0312045].

[231] B.C. Allanach, "SOFTSUSY: A C++ program for calculating supersymmetric spectra," Comput. Phys. Commun. **143**, 305 (2002) [hep-ph/0104145]. B. C. Allanach, A. Bednyakov and R. Ruiz de Austri, Comput. Phys. Commun. **189**, 192 (2015) [1407.6130]. B. C. Allanach, S. P. Martin, D. G. Robertson and R. R. de Austri, "The Inclusion of Two-Loop SUSYQCD Corrections to Gluino and Squark Pole Masses in the Minimal and Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model: SOFTSUSY3.7," arXiv:1601.06657 [hep-ph].

[232] A. Djouadi, J.L. Kneur and G. Moultaka, "SuSpect: A Fortran code for the supersymmetric and Higgs particle spectrum in the MSSM," [hep-ph/0211331].

[233] W. Porod, "SPheno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e+ e- colliders," Comput. Phys. Commun. **153**, 275 (2003) [hep-ph/0301101]. W. Porod and F. Staub, Comput. Phys. Commun. **183**, 2458 (2012) [1104.1573].

[234] M. Muhlleitner, A. Djouadi and Y. Mambrini, "SDECAY: A Fortran code for the decays of the supersymmetric particles in the MSSM," Comput. Phys. Commun. **168**, 46 (2005) [hep-ph/0311167].

[235] A. Djouadi, J. Kalinowski and M. Spira, "HDECAY: A program for Higgs boson decays in the standard model and its supersymmetric extension," Comput. Phys. Commun. **108**, 56 (1998) [hep-ph/9704448].

[236] U. Ellwanger, J.F. Gunion and C. Hugonie, JHEP **0502**, 066 (2005) [hep-ph/0406215], U. Ellwanger and C. Hugonie, "NMHDECAY 2.0: An updated program for sparticle masses, Higgs masses, couplings and decay widths in the NMSSM," [hep-ph/0508022].

[237] J.S. Lee et al., "CPsuperH: A computational tool for Higgs phenomenology in the minimal supersymmetric standard model with explicit CP violation," Comput. Phys. Commun. **156**, 283 (2004) [hep-ph/0307377], Comput. Phys. Commun. **180** (2009) 312 [0712.2360], Comput. Phys. Commun. **184**, 1220 (2013) [1208.2212].

[238] P. Gondolo et al., "DarkSUSY: A numerical package for dark matter calculations in the MSSM," [astro-ph/0012234]. JCAP **0407**, 008 (2004) [astro-ph/0406204].

[239] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov and A. Semenov, Comput. Phys. Commun. **149**, 103 (2002) [hep-ph/0112278], "MicrOMEGAs: Version 1.3," [hep-ph/0405253].

[240] A. Bartl, H. Fraas and W. Majerotto, Nucl. Phys. B **278**, 1 (1986); Z. Phys. C **30**, 441 (1986); Z. Phys. C **41**, 475 (1988); A. Bartl, H. Fraas, W. Majerotto and B. Mösslacher, Z. Phys. C **55**, 257 (1992). For large $\tan\beta$ results, see H. Baer, C.-h. Chen, M. Drees, F. Paige and X. Tata, Phys. Rev. Lett. **79**, 986 (1997) [hep-ph/9704457];

[241] H. Baer et al., Int. J. Mod. Phys. A **4**, 4111 (1989).

[242] H.E. Haber and D. Wyler, Nucl. Phys. B **323**, 267 (1989); S. Ambrosanio and B. Mele, Phys. Rev. D **55**, 1399 (1997) [Erratum-ibid. D **56**, 3157 (1997)] [hep-ph/9609212]; S. Ambrosanio et al., Phys. Rev. D **55**, 1372 (1997) [hep-ph/9607414].

[243] H. Baer et al., Phys. Lett. B **161**, 175 (1985); G. Gamberini, Z. Phys. C **30**, 605 (1986); H.A. Baer, V. Barger, D. Karatas and X. Tata, Phys. Rev. D **36**, 96 (1987); R.M. Barnett, J.F. Gunion and H.A. Haber, Phys. Rev. D **37**, 1892 (1988).

[244] K. Hikasa and M. Kobayashi, Phys. Rev. D **36**, 724 (1987).

[245] J. Ellis, J.L. Lopez, D.V. Nanopoulos Phys. Lett. B **394**, 354 (1997) [hep-ph/9610470]; J.L. Lopez, D.V. Nanopoulos Phys. Rev. D **55**, 4450 (1997) [hep-ph/9608275].

[246] M. Boulware and D. Finnell, Phys. Rev. D **44**, 2054 (1991); G. Altarelli, R. Barbieri and F. Caravaglios, Phys. Lett. B **314**, 357 (1993); J.D. Wells, C. Kolda and G.L. Kane Phys. Lett. B **338**, 219 (1994) [hep-ph/9408228]; G. Kane, R. Stuart, and J.D. Wells, Phys. Lett. B **354**, 350 (1995) [hep-ph/9505207]. D. Garcia and J. Sola, Phys. Lett. B **357**, 349 (1995) [hep-ph/9505350]. J. Erler and P. Langacker, Phys. Rev. D **52**, 441 (1995) [hep-ph/9411203]; X. Wang, J. Lopez and D.V. Nanopoulos, Phys. Rev. D **52**, 4116 (1995) [hep-ph/9506217]; P. Chankowski and S. Pokorski, Nucl. Phys. B **475**, 3 (1996) [hep-ph/9603310].

[247] P. Fayet, "Supersymmetry, particle physics and gravitation", in *Unification of the fundamental particle interactions* (Plenum, 1980); J.A. Grifols and A. Mendez, Phys. Rev. D **26**, 1809 (1982); J.R. Ellis, J.S. Hagelin and D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **116**, 283 (1982); R. Barbieri and L. Maiani, Phys. Lett. B **117**, 203 (1982); D.A. Kosower, L.M. Krauss and N. Sakai, Phys. Lett. B **133**, 305 (1983); T.C. Yuan, R. Arnowitt, A.H. Chamseddine and P. Nath, Z. Phys. C **26**, 407 (1984); I. Vendramin, Nuovo Cim. A **101**, 731 (1989); T. Moroi, Phys. Rev. D **53**, 6565 (1996) [Erratum-ibid. D **56**, 4424 (1997)] [hep-ph/9512396].

[248] F. del Aguila and L. Ametller, Phys. Lett. B **261**, 326 (1991); H. Baer, C-H. Chen, F. Paige and X. Tata, Phys. Rev. D **49**, 3283 (1994) [hep-ph/9311248],

[249] P. Harrison and C. Llewellyn-Smith, Nucl. Phys. B **213**, 223 (1983) [Erratum-ibid. B **223**, 542 (1983)]; G. Kane and J.L. Leveille, Phys. Lett. B **112**, 227 (1982); S. Dawson, E. Eichten and C. Quigg, Phys. Rev. D **31**, 1581 (1985); H. Baer and X. Tata, Phys. Lett.

B **160**, 159 (1985); Significant next-to-leading order corrections have been computed in W. Beenakker, R. Hopker, M. Spira and P.M. Zerwas, Phys. Rev. Lett. **74**, 2905 (1995) [hep-ph/9412272], Z. Phys. C **69**, 163 (1995) [hep-ph/9505416], Nucl. Phys. B **492**, 51 (1997) [hep-ph/9610490]. W. Beenakker et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 3780 (1999) [hep-ph/9906298].

[250] T. Sjöstrand *et al.*, Comput. Phys. Commun. **135**, 238 (2001) [hep-ph/0010017]. T. Sjöstrand, L. Lonnblad, S. Mrenna and P. Skands, "PYTHIA 6.3: Physics and manual," [hep-ph/0308153]. S. Mrenna, Comput. Phys. Commun. **101**, 232 (1997) [hep-ph/9609360].

[251] A. Pukhov *et al.*, "CompHEP: A package for evaluation of Feynman diagrams and integration over multi-particle phase space," [hep-ph/9908288]. E. Boos *et al.* [CompHEP Collaboration], "CompHEP 4.4: Automatic computations from Lagrangians to events," Nucl. Instrum. Meth. A **534**, 250 (2004) [hep-ph/0403113]. A. Pukhov, "CalcHEP 3.2: MSSM, structure functions, event generation, batchs, and generation of matrix elements for other packages," [hep-ph/0412191].

[252] J. Fujimoto *et al.*, Comput. Phys. Commun. **153**, 106 (2003) [hep-ph/0208036]; "Automatic one-loop calculation of MSSM processes with GRACE," Nucl. Instrum. Meth. A **534**, 246 (2004) [hep-ph/0402145].

[253] S. Moretti et al., "Implementation of supersymmetric processes in the HERWIG event generator," JHEP **0204**, 028 (2002) [hep-ph/0204123]. G. Corcella *et al.*, "HERWIG 6.5 release note," [hep-ph/0210213].

[254] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **73**, 055005 (2006) [hep-ph/0512260].

[255] G.C. Cho *et al.*, Phys. Rev. D **73**, 054002 (2006) [hep-ph/0601063].

[256] J. Alwall, M. Herquet, F. Maltoni, O. Mattelaer and T. Stelzer, JHEP **1106**, 128 (2011) [arXiv:1106.0522 [hep-ph]].

[257] C. G. Lester and D. J. Summers, Phys. Lett. B **463**, 99 (1999) [hep-ph/9906349]. A. Barr, C. Lester and P. Stephens, J. Phys. G **29**, 2343 (2003) [hep-ph/0304226].

[258] L. Randall and D. Tucker-Smith, Phys. Rev. Lett. **101**, 221803 (2008) [0806.1049]. CMS Collaboration, "SUSY Searches with dijet Events", CMS PAS SUS-08-005, and "Search strategy for exclusive multi-jet events from supersymmetry at CMS", CMS-PAS-SUS-09-001.

[259] C. Rogan, "Kinematical variables towards new dynamics at the LHC," [1006.2727]. S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Rev. D **85**, 012004 (2012) [1107.1279].

[260] H. Baer, C.h. Chen, F. Paige and X. Tata, Phys. Rev. D **52**, 2746 (1995) [hep-ph/9503271], Phys. Rev. D **53**, 6241 (1996) [hep-ph/9512383]; H. Baer, C.h. Chen, M. Drees, F. Paige and X. Tata, Phys. Rev. D **59**, 055014 (1999) [hep-ph/9809223].

[261] V. Barger, Y. Keung and R.J.N. Phillips, Phys. Rev. Lett. **55**, 166 (1985); R.M. Barnett, J.F. Gunion, and H.E. Haber, Phys. Lett. B **315**, 349 (1993) [hep-ph/9306204]; H. Baer, X. Tata and J. Woodside, Phys. Rev. D **41**, 906 (1990).

[262] R. Arnowitt and P. Nath, Mod. Phys. Lett. A **2**, 331 (1987); H. Baer and X. Tata, Phys. Rev. D **47**, 2739 (1993); H. Baer, C. Kao and X. Tata Phys. Rev. D **48**, 5175 (1993) [hep-ph/9307347]; T. Kamon, J. Lopez, P. McIntyre and J.T. White, Phys. Rev. D **50**, 5676 (1994) [hep-ph/9406248]; H. Baer, C.-h. Chen, C. Kao and X. Tata, Phys. Rev. D **52**, 1565 (1995) [hep-ph/9504234]; S. Mrenna, G.L. Kane, G.D. Kribs and J.D. Wells, Phys. Rev. D **53**, 1168 (1996) [hep-ph/9505245]. K.T. Matchev and D.M. Pierce, Phys. Lett. B **467**, 225 (1999) [hep-ph/9907505]; Phys. Rev. D **60**, 075004 (1999) [hep-ph/9904282].

[263] H. Baer, C. h. Chen, F. Paige and X. Tata, Phys. Rev. D **50**, 4508 (1994) [hep-ph/9404212].

[264] I. Hinchliffe et al., Phys. Rev. D **55**, 5520 (1997) [hep-ph/9610544].

[265] ATLAS Collaboration, Chapter 20 of "ATLAS detector and physics performance. Technical design report. Vol. II," CERN-LHCC-99-15, May 1999;

[266] F.E. Paige, "Supersymmetry signatures at the CERN LHC," TASI-97 lectures, [hep-ph/9801254]; "SUSY signatures in ATLAS at LHC," [hep-ph/0307342].

[267] H. Bachacou, I. Hinchliffe and F. E. Paige,
Phys. Rev. D **62**, 015009 (2000) [hep-ph/9907518]; I. Hinchliffe and F. E. Paige, Phys. Rev. D **61**, 095011 (2000) [hep-ph/9907519].

[268] B.C. Allanach, C.G. Lester, M.A. Parker and B.R. Webber, JHEP **0009**, 004 (2000) [hep-ph/0007009].

[269] B.K. Gjelsten et al., "A detailed analysis of the measurement of SUSY masses with the ATLAS detector at the LHC", ATLAS Note ATL-PHYS-2004-007, in [271].

[270] M. Chiorboli and A. Tricomi, "Squark and Gluon Reconstruction in CMS", CMS Note 2004-029, in [271].

[271] G. Weiglein *et al.* [LHC/LC Study Group], "Physics interplay of the LHC and the ILC," [hep-ph/0410364].

[272] K. Kawagoe, M.M. Nojiri and G. Polesello, Phys. Rev. D **71**, 035008 (2005) [hep-ph/0410160].

[273] M. Drees and M.M. Nojiri, Phys. Rev. Lett. **72**, 2324 (1994) [hep-ph/9310209], Phys. Rev. D **49**, 4595 (1994) [hep-ph/9312213].

[274] S.P. Martin, Phys. Rev. D **77**, 075002 (2008) [hep-ph/0801.0237]. S.P. Martin and J.E. Younkin, Phys. Rev. D **80**, 035026 (2009) [hep-ph/0901.4318]. Y. Kats and M. D. Schwartz, JHEP **1004**, 016 (2010) [hep-ph/0912.0526]. J.E. Younkin and S.P. Martin, Phys. Rev. D **81**, 055006 (2010) [hep-ph/0912.4813].

[275] S. Katsanevas and P. Morawitz, "SUSYGEN-2.2: A Monte Carlo event generator for MSSM sparticle production at e+ e- colliders," Comput. Phys. Commun. **112**, 227 (1998) [hep-ph/9711417]. N. Ghodbane, "SUSYGEN3: An event generator for linear colliders," [hep-ph/9909499].

[276] The LEP SUSY Working Group (LEPSUSYWG) combines results from the ALEPH, DELPHI, L3, and OPAL detector collaborations. Legacy limits and analysis details are available from `http://www.cern.ch/lepsusy`.

[277] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], "Review of Particle Physics," Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014), `http://pdg.lbl.gov/`

[278] The LEP Higgs Working Group results are available at `http://lephiggs.web.cern.ch/`.

[279] J.L. Feng and D.E. Finnell, Phys. Rev. D **49**, 2369 (1994) [hep-ph/9310211]; J.L. Feng and M.J. Strassler, Phys. Rev. D **51**, 4661 (1995) [hep-ph/9408359]; J.L. Feng, M.E. Peskin, H. Murayama and X. Tata, Phys. Rev. D **52**, 1418 (1995) [hep-ph/9502260]; M.M. Nojiri, K. Fujii and T. Tsukamoto, Phys. Rev. D **54**, 6756 (1996) [hep-ph/9606370]; A. Bartl et al.,
Z. Phys. C **76**, 549 (1997) [hep-ph/9701336]; S.Y. Choi et al., Eur. Phys. J. C **14**, 535 (2000) [hep-ph/0002033]; G. Moortgat-Pick, A. Bartl, H. Fraas and W. Majerotto, Eur. Phys. J. C **18**, 379 (2000) [hep-ph/0007222]; H. Baer, C. Balazs, J.K. Mizukoshi and X. Tata, Phys. Rev. D **63**, 055011 (2001) [hep-ph/0010068].

[280] T. Tsukamoto et al., Phys. Rev. D **51**, 3153 (1995);

[281] H. Baer, R. Munroe and X. Tata, Phys. Rev. D **54**, 6735 (1996) [Erratum-ibid. D **56**, 4424 (1997)] [hep-ph/9606325].

[282] E. Accomando *et al.* [ECFA/DESY LC Physics Working Group], Phys. Rept. **299**, 1 (1998) [hep-ph/9705442].

[283] T. Abe *et al.* [American Linear Collider Working Group], "Linear collider physics resource book for Snowmass 2001. 2: Higgs and supersymmetry studies," [hep-ex/0106056].

[284] D.O. Caldwell et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 510 (1988), Phys. Rev. Lett. **65**, 1305 (1990); D. Reusser et al., Phys. Lett. B **255**, 143 (1991); M. Mori et al. (The Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. D **48**, 5505 (1993).

[285] L.J. Hall, T. Moroi and H. Murayama, Phys. Lett. B **424**, 305 (1998) [hep-ph/9712515]; N. Arkani-Hamed, L.J. Hall, H. Murayama, D.R. Smith and N. Weiner, Phys. Rev. D **64**, 115011 (2001) [hep-ph/0006312]; D.R. Smith and N. Weiner, Phys. Rev. D **64**, 043502 (2001) [hep-ph/0101138]; D. Hooper, J. March-Russell and S.M. West, Phys. Lett. B **605**, 228 (2005) [hep-ph/0410114].

[286] L.M. Krauss, Nucl. Phys. B **227**, 556 (1983); D.V. Nanopoulos, K.A. Olive and M. Srednicki, Phys. Lett. B **127**, 30 (1983).

[287] J.L. Feng, A. Rajaraman and F. Takayama, Phys. Rev. Lett. **91**, 011302 (2003) [hep-ph/0302215], Phys. Rev. D **68**, 063504 (2003) [hep-ph/0306024]; J.R. Ellis, K.A. Olive, Y. Santoso and V.C. Spanos, Phys. Lett. B **588**, 7 (2004) [hep-ph/0312262]; J.L. Feng, S.f. Su and F. Takayama, Phys. Rev. D **70**, 063514 (2004) [hep-ph/0404198].

[288] For reviews, see G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest Phys. Rept. **267**, 195 (1996) [hep-ph/9506380]; K.A. Olive, "TASI Lectures on Dark matter," [astro-ph/0301505]; J.L. Feng, "Supersymmetry and cosmology," [hep-ph/0405215]; M. Drees, "Neutralino dark matter in 2005," [hep-ph/0509105]. J.L. Feng, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **48**, 495 (2010) [arXiv:1003.0904 [astro-ph.CO]].

[289] K. Griest and D. Seckel, Phys. Rev. D **43**, 3191 (1991).

[290] P. Gondolo and G. Gelmini, Nucl. Phys. B **360**, 145 (1991).

[291] S. Mizuta and M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **298**, 120 (1993) [hep-ph/9208251]; S. Mizuta, D. Ng and M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **300**, 96 (1993) [hep-ph/9210241];

[292] J. Edsjo and P. Gondolo, Phys. Rev. D **56**, 1879 (1997) [hep-ph/9704361];

[293] M. Drees, M.M. Nojiri, D.P. Roy and Y. Yamada, Phys. Rev. D **56**, 276 (1997) [Erratum-ibid. D **64**, 039901 (2001)] [hep-ph/9701219].

[294] T. Moroi and L. Randall, Nucl. Phys. B **570**, 455 (2000) [hep-ph/9906527]; B. Murakami and J.D. Wells, Phys. Rev. D **64**, 015001 (2001) [hep-ph/0011082];

[295] S.P. Martin, Phys. Rev. D **75**, 115005 (2007) [hep-ph/0703097]. Phys. Rev. D **76**, 095005 (2007) [hep-ph/0707.2812]. S.P. Martin, Phys. Rev. D **78**, 055019 (2008) [hep-ph/0807.2820].

[296] M. Drees and M.M. Nojiri, Phys. Rev. D **47**, 376 (1993) [hep-ph/9207234].

[297] P. Nath and R. Arnowitt, Phys. Rev. Lett. **70**, 3696 (1993) [hep-ph/9302318]; A. Djouadi, M. Drees and J.L. Kneur, Phys. Lett. B **624**, 60 (2005) [hep-ph/0504090].

[298] J.L. Feng, K.T. Matchev and F. Wilczek, Phys. Lett. B **482**, 388 (2000) [hep-ph/0004043].

[299] K.L. Chan, U. Chattopadhyay and P. Nath, Phys. Rev. D **58**, 096004 (1998) [hep-ph/9710473].

[300] J.L. Feng, K.T. Matchev and T. Moroi, Phys. Rev. Lett. **84**, 2322 (2000) [hep-ph/9908309]; Phys. Rev. D **61**, 075005 (2000) [hep-ph/9909334].

[301] A. Birkedal-Hansen and B.D. Nelson, Phys. Rev. D **64**, 015008 (2001) [hep-ph/0102075].

[302] J.R. Ellis, T. Falk and K.A. Olive, Phys. Lett. B **444**, 367 (1998) [hep-ph/9810360]; J.R. Ellis, T. Falk, K.A. Olive and M. Srednicki, Astropart. Phys. **13**, 181 (2000) [Erratum-ibid. **15**, 413 (2001)] [hep-ph/9905481].

[303] M.E. Gomez, G. Lazarides and C. Pallis, Phys. Rev. D **61**, 123512 (2000) [hep-ph/9907261]; C. Boehm, A. Djouadi and M. Drees, Phys. Rev. D **62**, 035012 (2000) [hep-ph/9911496]; J.R. Ellis, K.A. Olive and Y. Santoso, Astropart. Phys. **18**, 395 (2003) [hep-ph/0112113]; C. Balazs, M. Carena and C.E.M. Wagner, Phys. Rev. D **70**, 015007 (2004) [hep-ph/0403224].

[304] T. Goto and M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **276**, 103 (1992); L. Covi, H.B. Kim, J.E. Kim and L. Roszkowski, JHEP **0105**, 033 (2001) [hep-ph/0101009]; L. Covi, L. Roszkowski, R. Ruiz de Austri and M. Small, JHEP **0406**, 003 (2004) [hep-ph/0402240].

[305] G.B. Gelmini and P. Gondolo, Phys. Rev. D **74**, 023510 (2006) [hep-ph/0602230]; G.B. Gelmini, P. Gondolo, A. Soldatenko and C.E. Yaguna, Phys. Rev. D **74**, 083514 (2006) [hep-ph/0605016].

[306] L.E. Ibáñez and G. Ross, Nucl. Phys. B **368**, 3 (1992). The analysis has been extended to larger discrete groups in H.K. Dreiner, C. Luhn and M. Thormeier, Phys. Rev. D **73**, 075007 (2006) [hep-ph/0512163].

[307] D.J. Castaño and S.P. Martin, Phys. Lett. B **340**, 67 (1994) [hep-ph/9408230].

[308] C. Aulakh and R. Mohapatra, Phys. Lett. B **119**, 136 (1982); G.G. Ross and J.W.F. Valle, Phys. Lett. B **151**, 375 (1985); J. Ellis et al., Phys. Lett. B **150**, 142 (1985); D. Comelli, A. Masiero, M. Pietroni, and A. Riotto, Phys. Lett. B **324**, 397 (1994) [hep-ph/9310374].

[309] A. Masiero and J.W.F. Valle, Phys. Lett. B **251**, 273 (1990); J.C. Romão, C.A. Santos and J.W.F. Valle, Phys. Lett. B **288**, 311 (1992).

[310] T. Moroi and Y. Okada, Mod. Phys. Lett. A **7**, 187 (1992); Phys. Lett. B **295**, 73 (1992).

[311] K. S. Babu, I. Gogoladze and C. Kolda, "Perturbative unification and Higgs boson mass bounds," hep-ph/0410085.

[312] K. S. Babu, I. Gogoladze, M. U. Rehman and Q. Shafi, Phys. Rev. D **78**, 055017 (2008) [0807.3055].

[313] S. P. Martin, Phys. Rev. D **81**, 035004 (2010) [0910.2732].

[314] P. W. Graham, A. Ismail, S. Rajendran and P. Saraswat, Phys. Rev. D **81**, 055016 (2010) [0910.3020].

[315] M. Endo, K. Hamaguchi, S. Iwamoto and N. Yokozaki, Phys. Rev. D **84**, 075017 (2011) [1108.3071];
Phys. Rev. D **85**, 095012 (2012) [1112.5653]; JHEP **1206**, 060 (2012) [1202.2751].

[316] J. L. Evans, M. Ibe and T. T. Yanagida, "Probing Extra Matter in Gauge Mediation Through the Lightest Higgs Boson Mass," [1108.3437].

[317] S. P. Martin and J. D. Wells, Phys. Rev. D **86**, 035017 (2012) [1206.2956].

[318] H.P. Nilles, M. Srednicki and D. Wyler, Phys. Lett. B **120**, 346 (1983); J. Frère, D.R.T. Jones and S. Raby, Nucl. Phys. B **222**, 11 (1983); J.P. Derendinger and C.A. Savoy, Nucl. Phys. B **237**, 307 (1984);

[319] J.C. Romão, Phys. Lett. B **173**, 309 (1986). J. Ellis et al., Phys. Rev. D **39**, 844 (1989); M. Drees, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 3635 (1989); U. Ellwanger, Phys. Lett. B **303**, 271 (1993); [hep-ph/9302224]; U. Ellwanger, M. Rausch de Traubenberg, and C.A. Savoy, Phys. Lett. B **315**, 331 (1993) [hep-ph/9307322], Z. Phys. C **67**, 665 (1995) [hep-ph/9502206], Nucl. Phys. B **492**, 21 (1997) [hep-ph/9611251]; T. Elliott, S.F. King and P.L. White, Phys. Rev. D **49**, 2435 (1994) [hep-ph/9308309], Phys. Lett. B **351**, 213 (1995) [hep-ph/9406303]; F. Franke, H. Fraas and A. Bartl, Phys. Lett. B **336**, 415 (1994) [hep-ph/9408217]; S.F. King and P.L. White, Phys. Rev. D **52**, 4183 (1995) [hep-ph/9505326]; U. Ellwanger and C. Hugonie, Eur. Phys. J. C **25**, 297 (2002) [hep-ph/9909260]; B.A. Dobrescu and

K.T. Matchev, JHEP **0009**, 031 (2000) [hep-ph/0008192]; D.J. Miller, R. Nevzorov and P.M. Zerwas, Nucl. Phys. B **681**, 3 (2004) [hep-ph/0304049]; U. Ellwanger, J.F. Gunion, C. Hugonie and S. Moretti, [hep-ph/0305109]; U. Ellwanger, J.F. Gunion and C. Hugonie, JHEP **0507**, 041 (2005) [hep-ph/0503203]; S.Y. Choi, D.J. Miller and P.M. Zerwas, Nucl. Phys. B **711**, 83 (2005) [hep-ph/0407209]; R. Dermisek and J.F. Gunion, Phys. Rev. Lett. **95**, 041801 (2005) [hep-ph/0502105].

[320] R.A. Flores, K.A. Olive and D. Thomas, Phys. Lett. B **245**, 509 (1990), Phys. Lett. B **263**, 425 (1991); S.A. Abel, S. Sarkar and I.B. Whittingham, Nucl. Phys. B **392**, 83 (1993) [hep-ph/9209292]. A. Menon, D.E. Morrissey and C.E.M. Wagner, Phys. Rev. D **70**, 035005 (2004) [hep-ph/0404184]; D.G. Cerdeño et al., JHEP **0412**, 048 (2004) [hep-ph/0408102]; G. Belanger et al., JCAP **0509**, 001 (2005) [hep-ph/0505142].

[321] S.A. Abel, S. Sarkar and P.L. White, Nucl. Phys. B **454**, 663 (1995) [hep-ph/9506359]; S.A. Abel, Nucl. Phys. B **480**, 55 (1996) [hep-ph/9609323]; C. Panagiotakopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **446**, 224 (1999) [hep-ph/9809475].

[322] C. Panagiotakopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **469**, 145 (1999) [hep-ph/9908351]; C. Panagiotakopoulos and A. Pilaftsis, Phys. Rev. D **63**, 055003 (2001) [hep-ph/0008268]; A. Dedes, C. Hugonie, S. Moretti and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **63**, 055009 (2001) [hep-ph/0009125].

[323] H.P. Nilles, M. Srednicki and D. Wyler, Phys. Lett. B **124**, 337 (1983); U. Ellwanger, Phys. Lett. B **133**, 187 (1983); J. Bagger and E. Poppitz, Phys. Rev. Lett. **71**, 2380 (1993) [hep-ph/9307317]; V. Jain, Phys. Lett. B **351**, 481 (1995) [hep-ph/9407382]; J. Bagger, E. Poppitz and L. Randall, Nucl. Phys. B **455**, 59 (1995) [hep-ph/9505244].

[324] M. Dine, W. Fischler, M. Srednicki, Phys. Lett. **B104**, 199 (1981). A. R. Zhitnitsky, Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 260 (1980).

[325] H. Murayama, H. Suzuki and T. Yanagida, Phys. Lett. B **291**, 418 (1992).

[326] E.J. Chun, J.E. Kim and H.P. Nilles, Nucl. Phys. B **370**, 105 (1992).

[327] K. Choi, E.J. Chun and J.E. Kim, Phys. Lett. B **403**, 209 (1997) [hep-ph/9608222].

[328] S.P. Martin, Phys. Rev. D **62**, 095008 (2000) [hep-ph/0005116].

[329] L.J. Hall, J.D. Lykken and S. Weinberg, Phys. Rev. D **27**, 2359 (1983);

[330] M. Drees, Phys. Lett. B **181**, 279 (1986); J.S. Hagelin and S. Kelley, Nucl. Phys. B **342**, 95 (1990); A.E. Faraggi, J.S. Hagelin, S. Kelley, and D.V. Nanopoulos, Phys. Rev. D **45**, 3272 (1992); Y. Kawamura and M. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **91**, 949 (1994); Y. Kawamura, H. Murayama and M. Yamaguchi, Phys. Lett. B **324**, 52 (1994) [hep-ph/9402254], Phys. Rev. D **51**, 1337 (1995) [hep-ph/9406245]; H.-C. Cheng and L.J. Hall, Phys. Rev. D **51**, 5289 (1995) [hep-ph/9411276]; C. Kolda and S.P. Martin, Phys. Rev. D **53**, 3871 (1996) [hep-ph/9503445].