CRC Press
Taylor & Francis Group

量子光学导论
——单光子和双光子物理

An Introduction to Quantum Optics
Photon and Biphoton Physics

史砚华 著 徐平 译 谢渊泓 校

教育出版社

CRC Press
Taylor & Francis Group

量子光学导论
——单光子和双光子物理

Liangzi Guangxue Daolun
Danguangzi he Shuangguangzi Wuli

史砚华 著 徐平 译 谢渊泓 校

高等教育出版社·北京

图字：01-2015-6801 号

An Introduction to Quantum Optics: Photon and Biphoton Physics/by Yanhua Shih

© 2011 by Taylor and Francis Group, LLC.
All Rights Reserved.
Authorized translation from the English language edition published by CRC Press, an imprint of Taylor & Francis Group LLC.

Higher Education Press Limited Company is authorized to publish and distribute exclusively the **Chinese (simplified characters)** language edition. This edition is authorized for sale throughout **Mainland China**. No part of the publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher. 本书中文简体翻译版授权由高等教育出版社有限公司独家出版并仅限在中国大陆地区销售。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

Copies of this book sold without a Taylor & Francis sticker on the cover are unauthorized and illegal. 本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签，无标签者不得销售。

图书在版编目 (CIP) 数据

量子光学导论：单光子和双光子物理 / (美) 史砚华著；徐平译. -- 北京：高等教育出版社, 2016. 3

书名原文: An Introduction to Quantum Optics: Photon and Biphoton Physics

ISBN 978-7-04-044763-7

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①史… ②徐… Ⅲ. ①量子光学 Ⅳ. ①O431.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 018870 号

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	24.75		
字　数	450 千字	版　次	2016 年 3 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2016 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	69.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究

物料号　44763-00

献给我的家人

前　言

本书是我在马里兰大学为我的博士生讲授量子光学课程时，授课笔记的一份选稿。我的学生和同事鼓励我把这份授课笔记付梓出版，使之成为一份教材或参考书，它或许能在一个相对基础的介绍性层面上对理解光的量子理论有所帮助。

光子或光量子概念的成功确立，催生了一门崭新的基础物理学科，即量子理论。今天，量子理论已经衍生为现代物理学中主体性原理。据惠勒 (John Archibald Wheeler): “在物理科学中，将很难找到某一个学科，它的基础或它的应用没有受到量子理论的影响。”在经历了整整一个世纪的思索之后，我们对光子到底都知道了些什么呢？光子是一种波：它无质量，在宇宙中极速穿行，它和自身进行干涉。光子是一种粒子：它的动量与能量具有精准定义，它甚至像个粒子般“自旋”。光子既不是波也不是粒子，因为不管我们怎么去想它，我们都会被羁绊于其两种行为的矛盾之中。光子是一种似波的粒子，同时/或者是一种似粒子的波：一个光子永远不可能被分割成几部分，而单光子的干涉现象在现代光学实验室中却很容易看到。这种干涉现象似乎意味着，在发生干涉时，一个光子在穿越干涉仪时同时经历了两条路径。然而，如果干涉仪中两条路径被设置成“可区分的”，光子就会“知道”它该走哪条路，而不是同时经历两条路。显然，光子在面对干涉仪时需要做出一个选择：像波一样选择“两条路”，或像粒子一样只走“某一条路”。令人惊讶的是，似乎光子在进入干涉仪之前不需要做此选择。实验证实，选“某一条路”，及/或选“两条路”可以推迟到光子通过干涉仪之后。更令人惊讶的是，在光子自身湮没后，某一条路径的信息甚至可以被“擦掉” (Scully 的“量子擦除”)。人们对光子的行为试图从不同的理论角度甚至不同的哲学思想去理解、去解释、去辩论，并且设计了不少“假想实验”去辨别它们的正确性。受益于新技术的发展，现在许多历史上的“假想实验”可以得到直接的实证检验了。所有这些“假想实验”中，最具代表意义的恐怕非爱因斯坦–波多尔斯基–罗

森假想实验 (EPR *Gedankenexperiment*, 德文) 莫属。在过去的近二十年里, 我们至少实验性地证实了偶光子 (biphoton) 态[①]的存在。偶光子, 或概念更宽泛一些, 偶粒子 (biparticle) 的行为曾被爱因斯坦–波多尔斯基–罗森 (EPR) 在 1935 年准确预测。在一个偶粒子对中, 虽然其中任意一个子系统的动量和坐标都不确定, 然而, 如果一个子系统的动量值及/或坐标值被测定, 则另一对应子系统的动量值及/或坐标值即可百分之百被确定, 尽管二者之间的距离可以如此之大, 以至于在对两个子系统进行测量的时间间隔内绝对无法得到对方的信息。本书用大量篇幅对与 EPR 实验有关的概念, 特别是对偶粒子和偶光子态作了介绍和探讨。除了分析爱因斯坦对量子力学某些基本问题的考虑, 例如, 对量子力学中 "物理实在" 概念, 对 "因果关系", 和对 "非局域性" 行为的质疑, 本书更着眼于探讨这些有趣又似乎不可理解的现象的物理本源。尤其令人振奋的是近十年来对 "经典" 混沌热光多光子关联的实验研究, 观测到类似于 EPR 偶光子纠缠态的非局域性干涉现象: 两个从热光光源随机产生、随机配对的光子和自己干涉, 产生了非局域的点对点的对应关系, 此非局域性点对点的对应关系已被成功地应用于随机热光的 "鬼" 成像。使我们更加惊讶的是, "鬼" 像不但有趣而且有用。不同于经典成像, 它至少有以下三个特点, (1) 它的 "非局域" 性使得 "鬼" 像相机能够 "看" 到经典相机 "看" 不到的目标; (2) "鬼" 像具有抗干扰能力; (3) 它的空间分辨率主要由光源的张角大小决定。举例: 太阳对地球张角大约为半度, 用太阳为光源, "鬼" 像相机拍摄得到任何地球上的物体, 其空间分辨率可以达到 200 μm, 而无论此物与相机相距多远。尽管人们对于 "鬼" 成像的物理机制仍然争论不休, "鬼" 像相机进入人类的应用只有一步之遥。

无论深入考虑几近 "佯谬" 的基础理论问题, 还是试图理解 "不可思议" 的应用特点, 我们不得不承认, 一个光子, 或一个偶光子对的行为, 显然与我们日常生活中的任何基本标准–实在性、因果性以及局域性格格不入。然而, 从量子理论的观点来看, 所有这些惊讶之处都是可预见的和可解释的。光量子的非经典行为, 是量子干涉的结果, 其中涉及单光子或多光子振幅的线性叠加。单光子或多光子振幅属于非经典概念。如果有两个或多个可能性 (概率) 激发同一个光电探测事件或同一个联合光电探测事件, 对应于每一个可能性 (概率), 量子光学理论用一个量子振幅 (概率振幅) 作为数学表达。而量子振幅的线性叠加是量子世界中一普遍现象。无论对 "量子光场" 或 "经典光场" 进行探测, 量子振幅的叠加都

① 偶光子和偶粒子的定义请参照第六章。偶光子和偶粒子特指处于纠缠态的双光子和双粒子。

会发生，要么有单光子振幅叠加，要么有多光子振幅叠加。虽然对光子的基本概念我们仍然存在着诸多的疑问，光量子理论恐怕已经对量子力学本身产生了最深远的影响。

经典理论从宏观统计的角度出发，认为两个或多个光电探测器的联合探测反映了光强和光强涨落的统计关联，并断言：光的任何二阶或高阶非平庸关联现象皆源于其强度涨落的相关性。当然，经典理论对多光子纠缠态束手无策，但是似乎对“经典热光”的处理游刃有余。人们也把太多的精力放在了“经典反对量子”之类的争论之上。从唯象理论的角度去看，经典理论是成功的。随机热光的非平庸相干现象的确是从光强涨落中测量到的。然而，随机热光的非平庸相干现象是否源于光强涨落的统计关联？答案是否定的。本书介绍并分析了由以上理论推导出的一个著名不等式。此不等式排除了在随机热光中观察到“反关联”的可能性。不幸的是，前不久，一个违反此不等式的“反关联”现象为实验所证实。结论是不言而喻的：从量子理论的观点来看，无论是对纠缠态还是对随机热光态的两个或多个光电探测器的联合探测，都是由两个或多个光子产生一个联合光电探测事件的所有可能的概率振幅叠加的结果。本书采用统一的量子理论诠释了多光子纠缠态和随机热光态的非平庸高阶关联现象。量子理论从微观角度提供了一个多光子干涉的物理模型。此模型既保持了混沌热光产生过程的随机性以及子场在传播过程中的独立性和随机性，又揭示了混沌热光光强涨落统计相关的物理原因。人们似乎对于区分纠缠态多光子干涉与经典统计理论中的光强涨落关联没有太多意见，然而，在理解“经典”热光中的非局域性、多光子干涉图像，却存在相当多的抵触，哪怕我们的测量是在单光子级别进行。本书为量子干涉理论提供了多个实验证据及理论分析。我希望此种努力能帮助读者看到一个光的基本量子干涉图景，它或许反映出隐藏于所有光学观察之后的物理真相。

本书的目的，在于向学生和科学工作者们用一种简单且直接的方式介绍量子光学，连带其基础理论及概念，以及在量子光学领域那些激动人心的事件。与本科目大部分传统课本不同的是，它更注重于实验部分的介绍和分析。本书引入的所有基本概念均来自于对典型实验观测的分析。在分析过程中，揭示出经典光学和量子光学的基本方法。此类尝试，其目的 (1) 帮助学生及年轻的科学工作者们提高其总结、概括及分析、解决量子光学问题的能力，(2) 激励学生及年轻的科学工作者们，在寻求真理时进一步开阔思路，并提高其在物理学领域发展创新的能力。为此，本书试图在量子光学领域里对某些特定的历史的及现代的实验发现提

供非传统性分析。读者或许会发现本书与其它传统书籍有着下列的不同: (1) 本书甚至在讲述经典光学时引进原子跃迁的概念。在介绍经典光学的最初阶段, 原子跃迁被处理为经典光场的子光源或子辐射。尽管没有量子化, 这个尝试为进一步引入光子概念及光量子理论提供了基本物理图像及背景。(2) 本书试图将大量的子辐射间的干涉现象与经典光强和光强涨落的统计关联联系起来, 并区分开来。在光学测量中普遍存在着光强涨落现象。光强涨落的物理原因是什么? 本书给出了一个非经典但或许是更有道理的答案。(3) 本书试图把对多光子纠缠态和对多光子随机热光态的测量用一个统一的理论加以诠释。

为将量子光学的基本概念、工具以及令人振奋的进展介绍给读者, 本书始于麦克斯韦 (Maxwell) 方程, 它对光的相干性提供了一个没有量子化的总的概观。然而, 所有概念和工具均是在对大量子辐射间的叠加的分析过程中被介绍引出, 而每一个子辐射产生于一个原子跃迁。心中建立了这幅图像之后, 我们自然而然地在以下几个章节引入光场量子化的理论和概念, 以及整个量子光学学科的理论。在接下来的章节中, 我们也对经典光学相干和量子光学相干间的相似与不同做了详细的分析与讨论。最后的五章介绍了五个不同类型的量子光学及量子信息的近期研究。作为对量子干涉理论的总结, 最后的章节给出贝尔定理及贝尔不等式的详细分析, 可以看作一个更高层次的总结。我希望不光是给读者介绍量子光学的基本概念、理论以及令人振奋的进展, 而且给予读者以能力, 能够使用从本书学到的概念与工具, 投入到这些有趣而且有用的研究中去。我希望本书能给学生、青年科学工作人员、及所有读者带来帮助。简言之, 由他们来努力去理解、发展以及引领这门正在发生巨大变化的古老的光学学科领域。

本书可能存在这样或那样的问题和错误, 恳请读者提出宝贵意见。

作者借此中文译本对英文第一版原文做了一些修改, 增加了一些新的实验内容和理论探讨, 并改正了一些印刷错误。特此说明。

致　谢

我首先要感谢我的可尊敬的老师和多年合作的同事, Carroll O. Alley, David N. Klyshko, Morton H. Rubin, 及 John A. Wheeler。他们不仅授我以物理学的精彩知识, 而且传我以一个物理学家具有的风骨: 寻求真理, 且只寻求真理。我的感谢还要给予我的学生们, 博士研究生们, 以及合作者们, 为了他们那些令人印象至深的实验性及理论性的研究工作, 这些工作极大地支持了本书的写作。同时, 我也要对他们道歉, 因为版面及时间的限制, 未能将他们的研究发现一一列举出来。这里只选择列出了直接对本书内容及讨论观点有支持的实验和理论。我还想向所有量子光学领域里的其他研究者, 为我没有引证他们的工作, 致歉。最后, 我要感谢徐平教授, 她为翻译本书, 付出了非常辛勤的劳动; 感谢谢渊泓博士的精准校订。他们的工作, 使本书有机会与中文读者见面。

作者简介

史砚华 (Yanhua Shih), 物理学教授, 1987 年从马里兰大学 (University of Maryland, College Park) 物理系获得博士学位。1989 年秋在马里兰大学巴尔的摩 (UMBC) 成立量子光学实验室。他的研究组致力于量子理论基础研究, 是量子光学领域领先的课题组之一。他在多光子纠缠、多光子干涉以及量子成像方面卓著的研究成果受到物理学界以及工程界的高度赞赏, 引起了极大关注。2002 年他获得了量子光学兰姆 (Lamb) 奖。

目　录

前言

致谢

作者简介

第 1 章　光的电磁波理论和测量 · · · · · 1
1.1　光的电磁波理论 · · · · · 1
1.2　经典叠加原理 · · · · · 3
1.3　光的测量 · · · · · 8
1.4　光强: 期望值和涨落 · · · · · 11
1.5　光强的测量: 系综平均和时间平均 · · · · · 13
本章小结 · · · · · 19
推荐读物 · · · · · 19

第 2 章　光的相干性–辐射场的态 · · · · · 20
2.1　光的相干性 · · · · · 20
2.2　时间相干性 · · · · · 26
2.3　空间相干 · · · · · 28
本章小结 · · · · · 32
推荐读物 · · · · · 32

第 3 章　光的衍射和传播 · · · · · 33
3.1　光的衍射 · · · · · 33
3.2　光场的传播 · · · · · 36
本章小结 · · · · · 41

推荐读物 · · · · · 41

第 4 章 光学成像 · · · · · 42
4.1 经典成像系统 · · · · · 44
4.2 透镜的傅里叶变换 · · · · · 47
本章小结 · · · · · 48
推荐读物 · · · · · 49

第 5 章 光的一阶相干性 · · · · · 50
5.1 一阶时间相干性 · · · · · 53
5.1.1 $\Gamma(r_1,t_1;r_2,t_2)$: 混沌热光 · · · · · 53
5.1.2 $\Gamma(r_1,t_1;r_2,t_2)$: 大量的完全重叠及部分重叠的波包 · · · 56
5.1.3 $\Gamma(r_1,t_1;r_2,t_2)$: 一个波包 · · · · · 58
5.1.4 $\Gamma(r_1,t_1;r_2,t_2)$: 两个波包 · · · · · 61
5.1.5 $\Gamma(r_1,t_1;r_2,t_2)$: CW 激光辐射 · · · · · 63
5.2 一阶空间相干性 · · · · · 64
本章小结 · · · · · 67
推荐读物 · · · · · 68

第 6 章 光的二阶相干性 · · · · · 69
6.1 相干光的二阶相干性 · · · · · 71
6.2 混沌热辐射二阶关联和 HBT 干涉仪 · · · · · 73
6.2.1 HBT 干涉仪 I: 二阶时间相干性 · · · · · 77
6.2.2 HBT 干涉仪 II: 二阶空间相干性 · · · · · 80
6.3 热光的近场二阶空间相干性 · · · · · 82
6.4 HBT 现象的物理本质 · · · · · 86
6.5 HBT 关联及探测时间平均 · · · · · 93
6.6 光的 N 阶相干性 · · · · · 96
6.7 热光的 N 阶近场空间相干性 · · · · · 100
本章小结 · · · · · 102
附录 A · · · · · 103
推荐读物 · · · · · 103

第 7 章 光的零拍及差拍测量 · · · · · 105
7.1 光学零拍及差拍测量 · · · · · 105
7.2 平衡零拍探测和差拍探测 · · · · · 107

7.3 独立或耦合热光场的平衡零拍探测 · · ·

第 10 章 量子纠缠 · · · · · 225
10.1 EPR 实验和 EPR 态 · · · · · 226
10.2 直积态、纠缠态和经典关联态 · · · · · 232
10.3 自旋纠缠态 · · · · · 234
10.4 纠缠偶光子态 · · · · · 234
10.5 纠缠偶光子系统的 EPR 关联 · · · · · 239
10.6 纠缠偶光子态中的子系统 · · · · · 246
10.7 色散介质中的偶光子 · · · · · 249
本章小结 · · · · · 252
推荐读物 · · · · · 252

第 11 章 量子成像 · · · · · 254
11.1 偶光子成像 · · · · · 254
11.2 鬼成像 · · · · · 260
11.3 鬼成像和测不准关系 · · · · · 268
11.4 热光鬼成像 · · · · · 274
11.5 鬼成像的经典模拟 · · · · · 280
11.6 抗扰动的鬼成像 · · · · · 285
本章小结 · · · · · 287
推荐读物 · · · · · 288

第 12 章 双光子干涉 I: 偶光子干涉 · · · · · 290
12.1 偶光子干涉是两个光子的干涉吗? · · · · · 292
12.2 正交偏振的偶光子干涉 · · · · · 301
12.3 Franson 干涉仪 · · · · · 304
12.4 偶光子鬼干涉 · · · · · 307
12.5 延迟选择的量子擦除实验 · · · · · 312
本章小结 · · · · · 318
推荐读物 · · · · · 319

第 13 章 双光子干涉 II: 混沌热光 · · · · · 321
13.1 双光子杨氏干涉 · · · · · 321
13.2 非相干混沌热光的双光子反关联 · · · · · 329
13.3 非相干正交偏振混沌热光的双光子干涉 · · · · · 339
本章小结 · · · · · 347
推荐读物 · · · · · 348

第 14 章　贝尔理论和贝尔不等式测量 · · ·

第 1 章

光的电磁波理论和测量

1.1 光的电磁波理论

相干性是光场的基本特性, 在阐述光场的相干特性之前我们先介绍麦克斯韦方程组——光的经典电磁波理论的基石. 麦克斯韦方程组由四个方程组成, 它奠定了一切经典的电磁现象和电磁波动现象的理论基础. 在自由空间, 麦克斯韦方程组有如下形式:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是矢量, 分别表示电场和磁场, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是电位移矢量和磁感应矢量. 它们和电场、磁场有如下关系:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1.1.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

其中 ϵ_0 和 μ_0 分别是自由空间的介电常量和磁导率.

对 (1.1.1) 式取旋度, 并利用 (1.1.2)、(1.1.3) 和 (1.1.5) 式, 根据矢量叉乘恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{1.1.6}$$

得到电场矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ 应满足如下波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1.7}$$

类似的我们可以得到磁场矢量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$, 或者磁感应矢量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 也满足同样的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \tag{1.1.8}$$

其中 $c\equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 是光在自由空间的速度.

(1.1.7) 式和 (1.1.8) 式都是基本的波动方程 (对变量 v):

$$\nabla^2 v-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \tag{1.1.9}$$

现在, 假设 $v(\boldsymbol{r},t)$ 的傅里叶积分形式如下

$$v(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, v(\boldsymbol{r},\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.1.10}$$

它的反变换为

$$v(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, v(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.1.11}$$

将 (1.1.10) 式代入 (1.1.9) 式, 我们很容易发现傅里叶变换 $v(\boldsymbol{r},\omega)$ 也满足亥姆霍兹波动方程

$$\nabla^2 v(\boldsymbol{r},\omega)+k^2 v(\boldsymbol{r},\omega)=0 \tag{1.1.12}$$

其中 $k=\omega/c$ 是波数. 根据边界条件, 波数可以取分立值或者连续值. (1.1.13) 式有大家所熟知的平面波解,

$$v_k(\boldsymbol{r})=v_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.1.13}$$

所以,

$$v_k(\boldsymbol{r},t)=v_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}+\text{c.c.} \tag{1.1.14}$$

v_k 代表模式 $\boldsymbol{k}$ 的复振幅, c.c. 表示其复共轭. 后面为了数学上的简化, 我们将略去 c.c., 除非特别说明.

根据微分方程的线性特性, 平面波的任意线性叠加仍然是 (1.1.9) 式的解. 所以对于波函数 $v(\boldsymbol{r})$, 原则上我们可以找到一组由 $v_k(\boldsymbol{r},t)$ 叠加而成的解. 这就是 "经典的叠加原理".

根据惯例, 物理场强是复数解的实部, 我们可以将平面波形式的电场和磁场写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是不随时间和空间变化的矢量, 通常称为场强.

麦克斯韦方程组中散度方程 (1.1.3) 和 (1.1.4) 要求矢量场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都为纯的横向场, 即和波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直. 旋度方程 (1.1.1) 和 (1.1.2) 对 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 提出了进一步限制: (1) $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$; (2) 在自由空间, 任何时空点的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是同相的, 并且其振幅满足 $|\boldsymbol{E}|=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}|\boldsymbol{H}|$.

然后我们可以定义一组正交的单位矢量 $(\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{k}})$, 将场强改写为:

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{e}}_1E_0,\qquad \boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{e}}_2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0 \tag{1.1.16}$$

或者

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{e}}_2E_0',\qquad \boldsymbol{H}=-\hat{\boldsymbol{e}}_1\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0' \tag{1.1.17}$$

E_0 和 E_0' 是复常数. 可以看出, 对于任意一组平面波 $(\omega,\boldsymbol{k})$ 都有两个独立的偏振方向 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$. 在处理某些具体问题时, 为了方便可以将场强 E_0 写成振幅 a 和相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的乘积, 或者用复振幅平面里的正交分量表示:

$$\begin{aligned}E_0&=a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\\&=a\ \cos\varphi+\mathrm{i}\ a\ \sin\varphi\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

振幅 a 是正实数. 图 1.1.1 是正交振幅和相位的物理图解. 有趣的是, 电磁场的平面波解和经典的简谐振子非常相似.

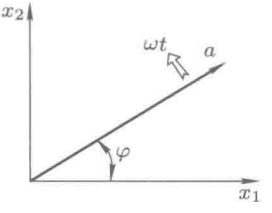


图 1.1.1 频率为 ω 的平面波解的简谐振子图. 正实振幅 a 以 ω 的角速度旋转, 其初始相位为 φ. x_1 和 x_2 轴指的是两正交分量.

1.2 经典叠加原理

既然电磁波方程是线性的微分方程, 我们可以得到如下两个基本推论:

(1) 如果每个 $\boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r},t)$ 是波动方程的解, 其线性叠加

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_j\boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r},t) \tag{1.2.1}$$

也是方程的解. (1.2.1) 式是经典叠加原理的精准诠释. 利用 (1.2.1) 式可以计算和解释很多光学相干现象. 举一个简单的例子, 考虑一个由很多独立子源组成的辐射源. 如果每个子源辐射出的子场为 $\boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r},t)$, $(\boldsymbol{r},t)$ 是位置和时间坐标. 那么测量到的电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 一定是所有子源辐射叠加的结果.

(2) 原则上我们可以将辐射场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 分解成一组波动方程解的线性叠加. 这是用不同的方法, 或从另一个角度去定义经典叠加原理. 比如, 我们可以找到一组平面波将电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 写成如下的叠加形式:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\,E(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{1.2.2}$$

或者

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\,E(\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{1.2.3}$$

注意我们在 1.1 节中已经讨论过, 对于每一个 $\boldsymbol{k}$ 模式的平面波解都有两个独立的偏振状态 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}$. 两个独立偏振状态的相干叠加就会形成一个具有特定偏振的场, 而两个独立偏振状态之间如果是随机相位的话, 叠加的结果就是一个无偏振的场. 在后面的章节中不做特殊说明的话, 我们一般只讨论一个偏振情况. 场的偏振态留待 12 章到 14 章中再讨论.

为了进一步简化数学计算, 我们对 (1.2.3) 式取一维近似, 即只讨论特定传播方向上电场的纵向特征. 目的是通过点探测器处的测量研究场的时间演化行为. 对于点源照明情形, 在远场近似条件下, 电场可以写成

$$E(r,t)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\,E(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-k(\omega)r]} \tag{1.2.4}$$

其中 r 是点源到观察点的距离, $E(\omega)=a(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}$ 是频率为 ω 的平面波模式的频谱复振幅密度 (简称频谱振幅).

根据色散关系, 波数 $k=k(\omega)$ 可以用频率偏移量 ν 来展开,

$$\omega\equiv\omega_0+\nu$$

所以 (1.2.4) 式可以写成以下积分:

$$\begin{aligned}E(r,t)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t-k(\omega_0)r]}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\,E(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t-k(\omega_0)r]}\,\mathcal{F}_\tau\big\{E(\nu)\big\}\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

其中 $\mathcal{F}_\tau\{E(\nu)\}$ 是频谱复振幅 $E(\nu)$ 的傅里叶变换. 在 (1.2.5) 式中, 利用了色散关系的一阶近似:

$$k(\omega)\simeq k(\omega_0)+\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}\nu$$

我们定义

$$\tau \equiv t - \frac{r}{u(\omega_0)}$$

其中色散一阶展开的倒数

$$u(\omega_0) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}|_{\omega_0}}$$

就是波包的群速度. 在真空中有 $\omega = kc$, 载波频率的相速度和波包 (包络) 的群速度都等于 c,

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c$$

(1.2.5) 式进而简化为

$$E(r,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathcal{F}_\tau\big\{E(\nu)\big\} \tag{1.2.6}$$

其中 $\tau \equiv t - r/c$. 在下面的大多数讨论中, 我们假设光在真空中传播, 所以电场采用简化标记如 (1.2.6) 式所示.

在 (1.2.6) 式中电场 $E(r,t)$ 形式上写成 $E(\omega)$ 的傅里叶变换. 所以傅里叶积分 $\mathcal{F}_\tau\{E(\omega)\}$ 最终的函数形式实际上由频谱复振幅 $E(\omega) = a(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}$ 决定. 实振幅 $a(\omega)$ 和相位 $\varphi(\omega)$ 都起重要作用. 如果 $a(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 都是关于 ω 的特定函数, 电场 $E(r,t)$ 就会是关于时间空间的具有明确定义的函数, 反之亦然. 另一方面, 如果 $a(\omega)$ 或者 $\varphi(\omega)$ 随时间快速随机的变化, $E(r,t)$ 就不会具有特定函数分布.

经典光学里, $a(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 可以同时被精确定义, 所以 $E(r,t)$ 是关于时空精确定义的函数. 在本章中我们忽略 $\Delta a(\omega)$ 和 $\Delta\varphi(\omega)$ 的不确定关系. 在下面的讨论中, 我们假设 $a(\omega)$ 具有一定的函数分布而 $\varphi(\omega)$ 的分布可以自由选择. 这时相位 $\varphi(\omega)$ 的变化或者不确定性直接决定了辐射场的相干特性.

我们分两种情况讨论: (I) 相干叠加 (II) 非相干叠加

(I) 相干叠加

(1) $\varphi(\omega) = \varphi_0 =$ 常数

$\varphi(\omega) = \varphi_0$ 取常数相位时, 如果 $a(\nu)$ 是关于频率偏移量 ν 的特定函数, 傅里叶积分 (1.2.5) 式就定义出一个波包:

$$E(r,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t - k(\omega_0)r - \varphi_0]}\,\mathcal{F}_\tau\big\{a(\nu)\big\} \tag{1.2.7}$$

波包的包络线即频谱振幅 $a(\nu)$ 的傅里叶变换, 以群速度 $u(\omega_0)$ 传播. 当波包中心位于 $t = 0$, $r = 0$ 时, 所有叠加的平面波或者说其所有的傅里叶模

式都具有相同初相位 φ_0. 波包里又包含了频率为 ω_0 的简谐振荡的载波, 其相速度为 $\omega_0/k(\omega_0)$. 在真空中, 相速度和群速度都是 c. 而在色散介质中, 群速度和相速度的差别可能就很大了. 在色散介质中, 因为色散原因导致每一个平面波模式 ω 的相速度可能都不同. 在特殊环境里, 这些模式的叠加可能导致一些非常有趣的现象, 比如: 尽管每个模式的相速度都小于光速 c, 但是群速度却可能大于相速度甚至超过光速 c. 群速度大于还是小于相速度, 由材料的一阶色散决定. 波包 (1.2.7) 式的形成是电磁场相干叠加的结果.

对于一些特定分布的 $a(\nu)$, 我们很容易计算傅里叶积分式 (1.2.5). 例如对于高斯分布的频谱

$$E(\nu) = E_0\,\mathrm{e}^{-\sigma^2\nu^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \tag{1.2.8}$$

其变量为 ν, 它对应一个时空域的高斯型波包, 其中 σ 是常数,

$$E(r,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-\tau^2/4\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t - k(\omega_0)r - \varphi_0]} \tag{1.2.9}$$

式中所有常数都归到 E_0 中. 图 1.2.1 表示一个经典的高斯波包. 波包具有很清晰的包络线, 群速度为 $u(\omega_0)$. 在包络线里是以相速度为 $\omega_0/k(\omega_0)$ 传播的频率为 ω_0 的载波.

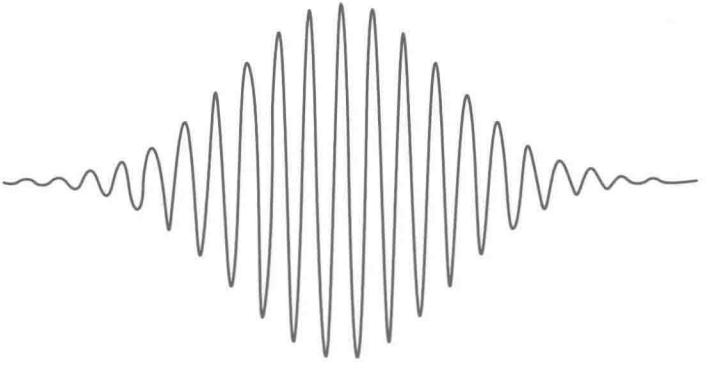


图 1.2.1 高斯波包的示意图. 波包的包络以群速度 $u(\omega_0)$ 在传播, 包络里面的载波频率为 ω_0. 载波传播的相速度为 $\omega_0/k(\omega_0)$. 当波包位于 $t=0$, $r=0$ 时, 它所有的 "傅里叶模式" 都具有相同的初相位 $\varphi(\omega)=\varphi_0$.

另一个有用的例子是均匀频谱,

$$E(\nu) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0} \tag{1.2.10}$$

E_0 是常数. 这时波包的包络就变成一个 δ-函数

$$\mathcal{F}_\tau\big\{E(\nu)\big\} = E_0\,\delta(\tau) \tag{1.2.11}$$

这里所有的常数也归并到 E_0 里. 在处理实际问题时, 我们经常假设 $E(\nu)$ 在一定的频率带宽 $\Delta\nu$ 内是常数

$$E(\nu)=\begin{cases}E_0 & -\Delta\nu/2\leqslant\nu\leqslant\Delta\nu/2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

这时傅里叶变换给出一个 sinc 函数的波包, $\mathrm{sinc}(x)\equiv\sin(x)/x$,

$$E(r,t)=E_0\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\Delta\nu\,\tau}{2}\Big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t-k(\omega_0)r-\varphi_0]} \tag{1.2.12}$$

(2) $\varphi(\omega)=\omega t_0$ 并且 t_0 是常数

$\varphi(\omega)=\omega t_0$ 时, 如果 $a(\nu)$ 具有特定函数形式, (1.2.5) 式的傅里叶积分也给出一个波包:

$$E(r,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0(t-t_0)-k(\omega_0)r]}\,\mathcal{F}_{(\tau-t_0)}\big\{a(\nu)\big\} \tag{1.2.13}$$

这个波包和 (1.2.7) 式非常类似, 只是它的所有傅里叶模式是在 $t=t_0$, $r=0$ 时具有相同相位 $\varphi_0=0$. 这个波包来源于某辐射源在 $t=t_0$ 发射出的一组相干的傅里叶模式的叠加, 我们在 1.4 节会详细讨论这种波包.

(II) 非相干叠加, $\varphi(\omega)$ 是随机数

复频谱振幅的相位分布完全随机时, 即不同简谐振荡模式之间没有特定的相位关系, 即使振幅函数 $a(\omega)$ 具有确定分布, (1.2.5) 式的傅里叶变换给出的将是一个随机函数. 在这种情形下, 每个傅里叶分量或者每个平面波模式 ω 都是一个独立的简谐振子, 具有这种性质的光属于混沌热辐射的范畴. 这种光也叫高斯光, 它们一般是从一些随机过程产生, 要求其相空间完全随机分布. 热光是一个典型的例子, 只是它的频谱, 或振幅 $a(\omega)$, 服从特定的普朗克分布. 我们按照习惯称这类光源为混沌热光.

在上述讨论中, 电场 $E(r,t)$ 被处理成一系列随机或者相干的简谐模式的叠加. 如何叠加则决定了电场的特性. 数学上来说, 电场 $E(r,t)$ 是频谱 $E(\omega)$ 的傅里叶变换, 反之亦然. 这些数学表达式还是由经典的电磁波理论作为支撑的.

现在我们考虑一个更加复杂的叠加情况, 即考虑大量子光源的贡献. 就像遥远的点状发光星体中数万亿的原子跃迁那样, 电场 $E(r,t)$ 是由大量子源的辐射共同决定. 总电场将由多个来自不同子源和不同模式 ω 的电场分量叠加而成:

$$E(r,t)=\sum_{\omega}\sum_{j=1}^{N}a_j(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\omega)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-k(\omega)r]} \tag{1.2.14}$$

a_j, φ_j 分别是指第 j 个子源的电场实振幅和相位. 电场的积分形式 (1.2.14) 形式上写成:

$$E(r,t) \cong \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t - k(\omega_0) r]} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu \, (\sum_{j=1}^{N} a_j(\nu) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu)}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t - k(\omega_0) r]} \, \mathcal{F}_\tau \Big\{ \sum_{j=1}^{N} a_j(\nu) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu)} \Big\} \tag{1.2.15}$$

很明显, 电场 $E(r,t)$ 的特性由子源和傅里叶模式的振幅和相位共同决定. 因此, 光场的相干特性取决于两方面机制: (1) 子源辐射电场的相干和非相干叠加; (2) 傅里叶模式的相干和非相干叠加.

总而言之, 以上讨论的物理基础都是源于麦克斯韦电磁理论. 数学上来说, 电磁波方程是一个线性微分方程. 如果每一个 $E_j(r,t)$ 是波动方程的解, 那么其线性叠加 $E(r,t) = \sum_j E_j(r,t)$ 也是方程的解. 值得注意的是: 物理上来讲, 电场分量的叠加或者干涉都是在特定时空点发生的. 在麦克斯韦电磁波理论的框架之下, 电场不能在不同时空点发生叠加, 即叠加是局域的.

1.3 光的测量

电场 $E(r,t)$ 是不能够用光探测器直接测量的物理量. 粗略地讲, 一个光电探测事件可以简单地分为两步, 先是光子湮没, 然后释放出光电子给出探测器的输出电流. 光电探测器的电流大小和单位时间内湮没的光子总能量成比例关系. 在第 8 章里将详细介绍光子探测的量子理论和电磁场的量子化. 在经典范畴内, 光探测的光电流反映了光在单位时间单位面积内通过的总能量, 即光强. 光强由坡印亭矢量决定

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是电场和磁场强度 (实函数). 在光频段, 坡印亭矢量是一个随时间变化极快的函数, 是电场变化周期的两倍. 然而到目前为止, 没有光电探测器能够分辨如此之快的振动 (10^{-15} s 的量级). 所以实际测量中光强探测都是一定时间内的平均效果. 光电流实际上测量的是坡印亭矢量周期平均后的大小. 为此, 我们定义瞬时光强, 或简称光强, 为:

$$I(\boldsymbol{r},t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \, | \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \, |^2 \tag{1.3.1}$$

这里我们已经假设 $\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{E}$. 采用了 "周期平均理论":

$$\overline{[\mathrm{Re}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]^2} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \, | \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \, |^2 \tag{1.3.2}$$

为了方便, 除了一些定量讨论, 我们将 (1.3.1) 式中的 $\epsilon_0 c/2$ 归并到电场中.

对点光源进行远场测量时, 将 (1.2.4) 式代入 (1.3.1) 式, 得到辐射强度为:

$$I(r,t) = \int\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\, E^*(\omega)\, E(\omega')\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\omega'-\omega)t-(k'-k)r]} \tag{1.3.3}$$

采用 (1.2.5) 式的形式积分, (1.3.3) 式可以写成傅里叶变换的模平方

$$I(r,t) = \left|\, \mathcal{F}_\tau\{E(\nu)\} \,\right|^2 \tag{1.3.4}$$

其中 $E(\nu) = a(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\nu)}$ 是频谱复振幅. 所以, 如果频谱复振幅的傅里叶变换是一个波包, 那么瞬时光强也将是一个时间和空间上的脉冲. 如 (1.2.9) 式的高斯波包, 其光强也是一个高斯脉冲形式:

$$I(r,t) = I_0\, \mathrm{e}^{-\tau^2/2\sigma^2}$$

有意思的是光强变化是和波包的缓变包络函数有关. (1.3.2) 式中的周期平均使得光强中不再含有快变的简谐振荡.

对于多个子源的情形, 将 (1.2.15) 式代入 (1.3.1) 式, 电场强度 (1.2.15) 式的积分形式上写成:

$$I(r,t) = \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \left\{ \sum_{j,k} a_j(\omega)\, a_k(\omega')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau} \tag{1.3.5}$$

(1.3.5) 式的积分形式如下:

$$I(r,t) = \left| \mathcal{F}_\tau \Big\{ \sum_{j=1}^{N} a_j(\nu)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu)} \Big\} \right|^2 \tag{1.3.6}$$

现在我们仔细讨论这种积分形式的光强. 我们先研究单个子源的情况, 也就是回到 (1.3.3) 式或者 (1.3.4) 式. 然后再讨论 (1.3.5) 式或 (1.3.6) 式的多个子源情况.

(I) 单个子源

只有一个子源时, (1.3.3) 式被分成两个积分之和:

$$I(r,t) = \int_{\omega=\omega'} \mathrm{d}\omega \left|\, E(\omega) \,\right|^2 + \int_{\omega\neq\omega'} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\, E^*(\omega)\, E(\omega')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau} \tag{1.3.7}$$

其中 $E(\omega) = a(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(\omega)}$. 第一个积分贡献光强的常数部分. 而第二个积分中包含了不同模式之间所有的交叉项, 因而反映的是干涉效果. 干涉项的贡献可大可小, 它完全取决于光的相干特性. 如果 $\varphi(\omega)$ 是常数, 也

就是说各傅里叶模式相干叠加, 干涉项将起主导作用; 如果 $\varphi(\omega)$ 取随机相位, 也就是说傅里叶模式非相干叠加, 由于相消干涉, 干涉项贡献就变得很小了. 当 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 遍历所有取值时, (1.3.7) 式中的第二项将彻底消失. 在实际物理体系中, 相位因子 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 也许不能取遍所有值, 所以达不到完全的干涉相消, 这一项将随时间变化取随机值, 处于一种不确定状态. 在这种情况下, 第二项积分式就是光强的涨落 δI. 可粗估 (1.3.7) 式中两积分的相对贡献的大小. 假设我们有 N 个模式且都能被探测到, 很容易看出, 第一个积分是 N 项求和, 而第二个积分实际上是 N^2 项求和. 如果求和中的每一项大小相近并且叠加时没有相消干涉时, 对于相当大的模式数 N, N 项求和要远小于 N^2 项求和.

(II) 多子源

当辐射源由多个子源构成时, 我们可以将 (1.3.5) 式和 (1.3.6) 式重写成四个积分相加的形式:

$$
\begin{aligned}
I(r,t)=&\int_{\omega=\omega'}\mathrm{d}\omega\sum_{j=k}a_j^2(\omega)\\
&+\int_{\omega=\omega'}\mathrm{d}\omega\left\{\sum_{j\neq k}a_j(\omega)\,a_k(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega)]}\right\}\\
&+\int_{\omega\neq\omega'}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\left\{\sum_{j=k}a_j(\omega)\,a_j(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_j(\omega')]}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}\\
&+\int_{\omega\neq\omega'}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\left\{\sum_{j\neq k}a_j(\omega)\,a_k(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}
\end{aligned}
\tag{1.3.8}
$$

第一个积分仍然是常数. 第二个积分很有趣, 它讨论的是相同的傅里叶模式中不同子源的叠加情况. 如果所有子源以相同相位 $\varphi_j(\omega)$ 进行相干辐射, 它就是一个非零常数. 在混沌热辐射情况下, 当 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 取所有可能值时, 这一项消失. 实际上相位因子 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 不会取遍所有值, 所以不会出现完全的干涉相消. 这一项会贡献为一个随时间变化的随机量, 成为光强的涨落 δI. 对第三项和第四项进行类似分析, 我们发现其对光强的贡献都取决于是相干还是非相干叠加, 这在下一节里有详细讨论. 让我们来初步估计一下 (1.3.8) 式中四项的相对大小. 假设在叠加中有 M 个子源和 N 个频率 ω 模式, 它们都对测量有贡献, 第一项贡献 $M\cdot N$ 项, 第二项贡献 $M^2\cdot N$ 项, 第三项贡献 $M\cdot N^2$ 项, 第四项贡献 $M^2\cdot N^2$ 项. 如果求和中每一项大小相近且没有干涉相消的话, M 和 N 取值很大时, 第一项和其它三项的差别就很明显了. 如果我们能够获得相干辐射的子源或者相干傅里叶模式的话, 二、三、四中的相长干涉会大大提高光强, $I(r,t)$ 会比随机热光源的强度提高很多量级.

1.4 光强: 期望值和涨落

在经典的电磁波理论中, 某时空点的光强期望值可以通过 (1.3.8) 式计算, 注意要取遍电场的所有可能取值, 包括所有子源和所有傅里叶模式. 一般情况下, 我们定义强度的期望值为

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle \left| E(\boldsymbol{r},t)\right|^2\rangle = \langle \sum_j E_j^*(\boldsymbol{r},t)\sum_k E_k(\boldsymbol{r},t)\rangle \tag{1.4.1}$$

其中 j 和 k 表示叠加项中第 j 个和第 k 个子场. $\langle ...\rangle$ 采用的是统计学符号, 表示测量的数学期望值. 在概率论中, 测量的期望值等于系综测量的平均值. 不难发现考虑电场所有可能取值和求系综平均是等价的. $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 的期望值与测量时的时空坐标有关. 不论是一个时空坐标的非平庸分布函数, 或还是一个时空坐标的常数, 前者随时空坐标变化而后者与时空坐标无关, $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 皆被称为期望函数.

当且仅当测量的子场取遍了其所有可能的复振幅时, 在某个时刻某个位置对光强的一次性测量就得到期望值了. 而实际情况是, 子场也许不能取遍所有可能值, 所以测得光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 和期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 有所差别. 我们将某次测量得到的光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 写成期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 和偏差 $\delta I(\boldsymbol{r},t)$ 两项之和

$$I(\boldsymbol{r},t) = \langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle + \delta I(\boldsymbol{r},t) \tag{1.4.2}$$

对于我们简化的辐射光源模型, 期望值或光强的期望函数 $I(r,t)$ 计算如下

$$\langle I(r,t)\rangle = \langle \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \sum_{j,k} a_j(\omega)\,a_k(\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}\rangle \tag{1.4.3}$$

计算要计及所有子源和傅里叶模式的复振幅 (a 和 φ). 根据 (1.3.8) 式, (1.4.3) 式可以写成四项相加的形式:

$$\begin{aligned}\langle I(r,t)\rangle = {} & \langle \int_{\omega=\omega'} \mathrm{d}\omega \sum_{j=k} a_j^2(\omega)\rangle \\ & + \langle \int_{\omega=\omega'} \mathrm{d}\omega \left\{ \sum_{j\neq k} a_j(\omega)\,a_k(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega)]}\right\}\rangle \\ & + \langle \int_{\omega\neq\omega'} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \left\{ \sum_{j=k} a_j(\omega)\,a_j(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_j(\omega')]}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}\rangle \\ & + \langle \int_{\omega\neq\omega'} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \left\{ \sum_{j\neq k} a_j(\omega)\,a_k(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}\rangle\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

(1.4.4) 式的第一项对光强 $\langle I(r,t)\rangle$ 的贡献是常数, 其它三项的贡献是否为零取决于子场是如何叠加的. 显而易见的是, 相位 φ 起决定作用. 下面我们分析两个极端例子: (1) $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 随机分布和 (2) $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 为常数. 前一种情况各分电场非相干叠加, 而后一种是相干叠加的情况. 现在很多教科书里, 人们通常将光大致分成两类: 相干光和非相干光. 放电发光管辐射出的是非相干光, 而激光是相干光. 光场相干还是不相干其实完全由辐射源的内禀特性决定. 混沌热光源辐射的子场都是不相干的, 而相干辐射源的子场都是相干的.

(1) 混沌热光

早期用来进行光学实验的光源只能是由随机辐射给出的热光源. 热光源的子源是由数万亿的原子或者分子组成, 它们相互独立地随机发生原子跃迁. 每一个子源都在不时地发生任何或者所有可能的辐射. 如果每一子场取遍所有可能的复振幅, 那么 (1.4.4) 式中的第二、三、四项都会干涉相消而对光强没有贡献. $\langle I(t)\rangle$ 就是不随时间变化的常数, 在任意时间 t 测量, 光强总是不变. 这种光场称为稳态光场. 热光是一种典型的稳态场. 然而在实际测量中, 用于叠加的子场不可能取遍所有的复振幅, 所以测量的 t 时刻的瞬时光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 和期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 一定有所偏差, 这种偏差 $\delta I(\boldsymbol{r},t)$ 随时间 t 随机变化. 测量到的光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 在 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 附近随时间不停的涨落. 图 1.4.1 就是点探测器在空间 $\boldsymbol{r}$ 处测到的混沌光的光强 $I(t)$.

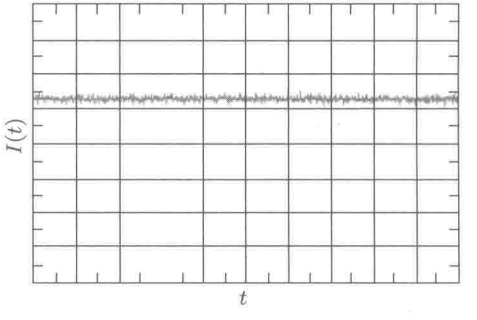


图 1.4.1 一个典型的混沌热光的光强, 是采用一个快响应的点探测器测量得到. $I(t)$ 在一个常数附近随机涨落.

(2) 相干光

自从激光发明以来, 相干光已经成为现代光学测量中主力光源. 这些光源辐射出的光具有很好的相干性, 并且某些情况下其输出光强也会随时间变化. 例如脉冲激光器, 无论是调 Q 还是锁模的, 它们产生的都是

一些具有特定函数分布的波包 $E(\boldsymbol{r},t)$ 或者脉冲光强 $I(\boldsymbol{r},t)$. 光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 不再随时间随机涨落, 而是具有特定函数分布的脉冲. 在这种极端情况下, (1.4.4) 式中所有子场在各时空点都是以常数相位 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')=\varphi_0$ 叠加的. 根据 (1.4.3) 式, 光强的期望值就是所有子源和傅里叶模式贡献的所有子场同相叠加的结果. 实际测量中, 所有子场也许不会完全同相, 因此造成波包和期望值还是会有一定差别. 测量光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 相对期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 也会有涨落, 各个脉冲的光强出现无规涨落. 图 1.4.2 是用一个快响应的光探测器测量的激光脉冲的光强. 每个脉冲都是时间 t 的高斯函数, 但是脉冲和脉冲强度之间有一定涨落.

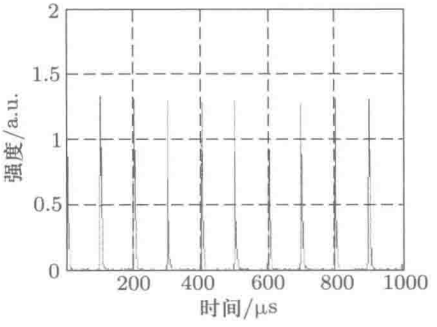


图 1.4.2 测量到的激光脉冲序列. 光强是对于时间 t 的特定函数, 但是各个脉冲的光强存在涨落.

1.5 光强的测量: 系综平均和时间平均

在光的经典理论中, 一个理想的点探测器在时空坐标 $(\boldsymbol{r},t)$ 处测量即时的光强为 $I(\boldsymbol{r},t)$. 假定一个置于 $\boldsymbol{r}$ 处的点探测器在 t 时刻测得 I, 我们会发现测得的值 I 稍微偏离期望值 $\langle I\rangle$

$$I=\langle I\rangle+\delta I \tag{1.5.1}$$

其中 δI 表示偏差. 注意, 由于在这个测量中 $\boldsymbol{r}$ 和 t 都是固定的, 在 $I(\boldsymbol{r},t)$ 中坐标 $(\boldsymbol{r},t)$ 被去掉了. 假设我们不是做一次测量而是在同样的实验条件下对一组相同的辐射场同时做多次独立的测量. 我们会发现每个测量值 I_j 都稍微偏离期望值 $\langle I\rangle$ 并且彼此互不相同. 光强的统计平均定义为

$$\bar{I}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}I_j=\langle I\rangle+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta I_j \tag{1.5.2}$$

其中 I_j 是系综第 j 个组分的瞬时强度. 当 $N \sim \infty$ 时, 平均值 $\bar{I}$ 等于期望值 $\langle I \rangle$,

$$\langle I \rangle = \bar{I} = \lim_{N\sim\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I_j \tag{1.5.3}$$

因为对于大量随机分布的 δI_j 来说, 统计上我们有

$$\lim_{N\sim\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta I_j = 0 \tag{1.5.4}$$

此外, (1.5.3) 式物理意义上也是合理的. 期望值是通过考虑子场的所有值计算得到的. 实际上, 子场不会遍历所有可能取值而是一组特定的复振幅. 而当统计平均的采样次数很多时, 特别是 $N \sim \infty$ 时, 子场当然有机会取到所有可能的复振幅, 因而给出一个等于 $\langle I \rangle$ 的平均值. 一般来说 (1.5.3) 式把期望值 $\langle I \rangle$ 与系综平均的概念联系了起来. 在某些测量中, 例如对一个明亮的热光源进行测量, 一次测量可能包含了足够的子场, 其相位取到所有随机分布于 0 到 2π 之间的值. 在这种情况下, 在光探测器的有限响应时间内, 测得的瞬时光强和其期望值几乎没有区别.

现在我们引入时间平均光强 $\langle I(t) \rangle_T$ 的概念. 在图 1.4.1 中, 我们给出过在一个常数光强附近随时间随机涨落的热光的光强分布 $I(t)$

$$\langle I(t) \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, I(t) \tag{1.5.5}$$

其中 T 是积分时间. $\langle I(t) \rangle$ 和 $\langle I(t) \rangle_T$ 之间的关系是什么呢? 对于混沌热辐射, 容易证明

$$\langle I(t) \rangle_{T\sim\infty} = \langle I(t) \rangle \tag{1.5.6}$$

$T \sim \infty$ 时, 混沌辐射的系综平均强度等于时间平均强度, 它被认为是稳态和各态历经的. 在统计学中, 各态历经是指系综平均等同于系综中一个典型组分的时间平均; 稳态是指系综平均值与时间无关. 既然对于热光来说时间平均和系综平均是等价的, 我们可以利用大量不同时刻 t_j 的 $I(t_j)$ 来计算热光的统计平均强度

$$\bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{j}^{N} I(t_j)$$

显然 $N \sim \infty$ 时 $\bar{I} = \langle I(t) \rangle_T$.

(1.5.6) 式对于混沌热光是成立的. 这种情况与相干辐射的测量不同. 例如对于脉冲激光, 腔模相干叠加产生的波包是一个关于 t 的确定函数. 这时时间平均的结果会与系综平均的不同. 下面我们讨论两种时间平均.

(1) 探测器有限响应时间引起不可避免的时间平均

在实际测量中光探测器 (简称探测器) 和相关电子器件实际会在 $I(\boldsymbol{r},t)$ 上强加一个时间平均. 测量仪器的分辨时间或者说响应时间 t_c 通常远大于光波的几个周期. 例如, 一个快的探测器可能具有纳秒级的响应时间, 这比可见光波的飞秒周期大了 10^6 倍. 探测器的输出电流 $i(t)$ 跟不上任何超过 t_c 的快速变化. 探测过程中会发生不可避免的时间平均. 因此在实验测量中总会有 "周期平均" 之外一个更久的时间平均. 响应时间为 t_c 的探测器的输出电流就是

$$i(\boldsymbol{r},\tilde{t}) \propto \langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle_{t_c} = \int_{t_c} \mathrm{d}t\, |E(\boldsymbol{r},t)|^2 \tag{1.5.7}$$

其中我们引入了一个 "平均" 时间 $\tilde{t}$(或者 "慢" 时间), 它是 t_c 量级的最小时间段. 测量给出的任何有意义的物理信息都不可能超出这个时间尺度. 这个不可避免的分辨时间极限 t_c 通常被称为测量仪器的特征时间. 假设探测器具有特定的响应函数, 我们一般将时间平均写为一个卷积

$$i(\boldsymbol{r},\tilde{t}) \propto \int \mathrm{d}t\, |E(\boldsymbol{r},t)|^2\, \mathcal{D}(\tilde{t}-t) \tag{1.5.8}$$

我们用了归一化函数 $\mathcal{D}(\tilde{t}-t)$ 来模拟探测器的响应分布函数, 其中 $\tilde{t}$ 代表一次探测的**平均时间**. $\mathcal{D}(\tilde{t}-t)$ 通常是高斯函数, 为了简化数学计算, 也常常取为矩形函数, 从而把 (1.5.8) 式变为 (1.5.7) 式. 不管取高斯函数还是矩形函数, 如果 $I(\boldsymbol{r},t)$ 是一个关于时间的确定函数如高斯脉冲, (1.5.8) 式的卷积结果对于 $t_c <$ 脉冲宽度和 $t_c >$ 脉冲宽度的情形都会是不同的. $t_c \ll$ 脉冲宽度时, $\mathcal{D}(\tilde{t}-t)$ 可以近似为一个 δ 函数. 卷积的结果复现出高斯脉冲或者被略微展宽. 另一方面, 如果 $t_c \gg$ 脉冲宽度, 例如在测量飞秒激光脉冲时, 脉冲自身可以近似为 δ 函数. 卷积的结果会是探测器的响应函数,

$$i(\tilde{t}) \propto \int \mathrm{d}t\, \delta(t-t_0)\, \mathcal{D}(\tilde{t}-t) = \mathcal{D}(\tilde{t}-t_0) \tag{1.5.9}$$

两种情况中, 卷积的结果都给出光强关于 $\tilde{t}$ 的时间平均函数.

假定一个矩形的响应函数, 由 (1.5.7) 式, 探测器输出的光电流形式上计算如下:

$$\begin{aligned} i(r,\tilde{t}) &\propto \langle I(r,t)\rangle_{t_c} \qquad (1.5.10)\\ &= \int\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, E^*(\omega)\, E(\omega')\, [\int_{t_c} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')r}\\ &= \int\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, E^*(\omega)\, E(\omega')\, \mathrm{sinc}\, \frac{(\omega-\omega')t_c}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega-\omega')\tilde{t}-(k-k')r]} \end{aligned}$$

其中

$$E(\omega)=\sum_j a_j(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\omega)}$$

这里考虑了若干个子源. 与 (1.3.5) 式的瞬时光强相比, $i(r,\tilde{t})$ 去掉了慢探测器无法跟上的所有拍频. 留下的拍频频率 $\omega-\omega'<2\pi/t_c$ 使得测得的 $i(r,\tilde{t})$ 更为平缓. 探测器的响应时间也就是特征时间 t_c 是一个决定性的物理参数, 必须根据特定的实验要求仔细选取.

在早期的实验中, 主流的光探测器就是人的眼睛, 它的响应时间可达到 1/15 s. 对于 $t_c\sim 1/15$ s 的一个时间平均, (1.5.10) 式里的 sinc 函数可以近似处理为一个 delta 函数 $\delta(\omega-\omega')$. 我们就等效得到一个 $T\sim\infty$ 的时间平均:

$$\begin{aligned}\langle I(r,t)\rangle_{T\sim\infty}&=\int\!\!\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,E^*(\omega)\,E(\omega')\,\delta(\omega-\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega-\omega')\tilde{t}-(k-k')r]}\\&=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\big|\,E(\omega)\,\big|^2\end{aligned}\tag{1.5.11}$$

注意 (1.5.11) 式的时间平均中, (1.3.7) 式的第二个积分 (也就是 (1.4.4) 式中的第三和第四项) 被消去了, 这表明即使 $\mathcal{F}_\tau\{E(\nu)\}$ 是个确定的波包形式, 或者 $|\mathcal{F}_\tau\{E(\nu)\}|^2$ 是个确定的脉冲, 当 $T\sim\infty$ 时, 时间平均获得的光强也是一个常量. 这个结果符合 Parseval 定理:

$$\int_{T\sim\infty}\mathrm{d}t\,\big|\,E(\omega)\,\big|^2=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\big|\,E(\omega)\,\big|^2\tag{1.5.12}$$

应该强调的是 (1.5.11) 式包含了与子源相关的子场的所有交叉项. 考虑到子源, 我们可以将 (1.5.11) 式改写为下面的形式

$$\langle I(r,t)\rangle_{T\sim\infty}=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\big[\sum_j E_j^*(\omega)\sum_k E_k(\omega)\big]\tag{1.5.13}$$

这与 $\sum_j|E_j(\omega)|^2$ 的积分式不同. 上式只有在混沌热光测量中考虑所有随机相位 $\varphi_j-\varphi_k$ 时交叉项才会消去. 在相干光测量中, 特别是 $\varphi_j-\varphi_k$ 取一个常数时, 尽管 (1.4.4) 式中的第三和第四项会完全消去, 但是时间平均不影响第二项的贡献.

由测量装置缓慢的响应时间引起的时间平均是不可避免的, 这将导致测得的光强与混沌热光期望光强的值相同, 然而两类 "平均" 背后的物理机制完全不同. 由探测器缓慢的时间分辨引起的时间平均是物理上强加, 而求期值所得的常数是叠加的结果, 它不能被简单地当成 "平均", 特别是在相干叠加的情况下. 在相干叠加中, 期望值计算得到一个确定的

脉冲. 而在探测器的响应时间远大于脉冲宽度即 $t_c \gg \Delta t$ 的时候, 时间平均会大大展宽脉冲. 例如, 我们先前提到的一个具有纳秒响应时间的光探测器会将一个飞秒脉冲在 $i(\tilde{t})$ 中展宽成纳秒. 当 $t_c \sim \infty$, 在任何情形下时间平均都会得出一个恒定的光电流.

(2) 时间累积测量

当测量需要累积一定时间时, 我们需要对测量值进行平均, 这就是另一种时间积分平均. 光强的时间积分期望值定义为:

$$Q(\boldsymbol{r}) = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}t \, \langle I(\boldsymbol{r}, t) \rangle \tag{1.5.14}$$

这里我们假设测量时间段是从 $t = T_1$ 到 $t = T_2$. 当测量累积时间足够长也就是 $T_2 - T_1 \sim \infty$ 时, 测量总光强 $Q(\boldsymbol{r})$ 是一个常数, 即便对于脉冲光的测量也是如此.

累积测量时的时间平均光强为:

$$\langle I(\boldsymbol{r}) \rangle_T = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}t \, I(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.5.15}$$

不难发现当 $T_2 - T_1 \sim \infty$ 时,

$$\langle I(\boldsymbol{r}) \rangle_T = \frac{Q(\boldsymbol{r})}{T_2 - T_1}$$

一般来说, 因为干涉、衍射等原因, 光强的数学期望值 $\langle I(\boldsymbol{r}, t) \rangle$, 统计平均 $\bar{I}(\boldsymbol{r}, t)$, 时间平均 $\langle I(\boldsymbol{r}, t) \rangle_T$ 很可能都是关于时间、空间的非平庸函数. 以脉冲激光为例, 我们采用二维的 CCD 阵列在某个平面去监测光强随时间和空间的分布关系. 首先, 我们讨论光强的空间分布 $I(\boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\rho}$ 是空间坐标. 一般来说, 我们通常观察到的是一个以激光光轴为中心的对称分布的高斯光斑. 在某 t 时刻的测量值 $I(\boldsymbol{\rho})$ 和其期望值 $\langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle$ 也许会有些偏差. 如果我们不是做一次测量而是同时做大量的独立的测量, 这需要在相同实验条件下有大量相同的激光束和 CCD 阵列, 我们能观察到如下两个结果 (1) 每个 CCD 都给出对称的高斯型的空间分布, 其中心在激光光轴上; (2) 每个观察到的类高斯函数都略微偏离 $\langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle$, 且彼此之间各不相同.

$$I_j(\boldsymbol{\rho}) = \langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle + \delta I_j(\boldsymbol{\rho}) \tag{1.5.16}$$

$I_j(\boldsymbol{\rho})$ 是整个系综测量的第 j 个组分. 统计平均值定义如下:

$$\bar{I}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I_j(\boldsymbol{\rho}), \tag{1.5.17}$$

只有当 $N\sim\infty$ 时, 统计平均 $\bar{I}(\boldsymbol{\rho})$ 才等于数学期望函数 $\langle I(\boldsymbol{\rho})\rangle$

$$\langle I(\boldsymbol{\rho})\rangle=\bar{I}(\boldsymbol{\rho})=\lim_{N\sim\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}I_j(\boldsymbol{\rho}),\tag{1.5.18}$$

因为,

$$\lim_{N\sim\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta I_j(\boldsymbol{\rho})=0\tag{1.5.19}$$

现在我们再来讨论每一个 CCD 单元输出光电流随时间 t 的演变情况. 实际上也就是测量每个横向坐标 $\boldsymbol{\rho}$ 处光强对时间 t 的依赖关系, 即 $I(\boldsymbol{\rho},t)$. 我们会发现: (1) 每一个 CCD 单元都得到随 $t-t_0$ 呈高斯分布的强度分布. t_0 是脉冲的中心, 代表在该时刻光强最大. (2) 各个高斯分布在 $\langle I(\boldsymbol{\rho},t-t_0)\rangle$ 附近略有涨落. 各脉冲的统计平均定义如下

$$\bar{I}(\boldsymbol{\rho},t-t_0)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}I_j(\boldsymbol{\rho},t-t_{0j})\tag{1.5.20}$$

其中 $I_j(\boldsymbol{\rho},t-t_{0j})$ 对应第 j 个脉冲, t_{0j} 是第 j 个脉冲的中心时刻. 当 $N\sim\infty$ 时, 统计平均 $\bar{I}(\boldsymbol{\rho},t-t_0)$ 就是数学期望函数 $\langle I(\boldsymbol{\rho},t-t_0)\rangle$

$$\langle I(\boldsymbol{\rho},t-t_0)\rangle=\bar{I}(\boldsymbol{\rho},t-t_0)=\lim_{N\sim\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}I_j(\boldsymbol{\rho},t-t_{0j})\tag{1.5.21}$$

值得注意的是, 尽管 (1.5.21) 式中的系综平均也涉及多个脉冲平均, 但是它不同于前面定义的时间平均.

对本节涉及的几个概念作个小结. 光强的数学期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$、光强的统计平均值 $\bar{I}(\boldsymbol{r},t)$、光强的时间平均值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle_T$ 和光强的涨落值 $\delta I(\boldsymbol{r},t)$ 分别定义如下:

(1) $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 定义为

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=\langle\sum_j E_j^*(\boldsymbol{r},t)\sum_k E_k(\boldsymbol{r},t)\rangle$$

其中需要考虑子场所有可能的复振幅取值.

(2) $\bar{I}(\boldsymbol{r},t)$ 定义如下

$$\bar{I}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}I_j(\boldsymbol{r},t)$$

其中 $I_j(\boldsymbol{r},t)$ 是系综内的第 j 个组分.

(3) $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle_T$ 定义如下

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, I(\boldsymbol{r},t)$$

其中 $I(\boldsymbol{r},t)$ 是 t 时刻测量到的光强值.

(4) $\delta I(\boldsymbol{r},t)$ 定义为

$$\delta I(\boldsymbol{r},t) = I(\boldsymbol{r},t) - \langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$$

讨论光强涨落时, 有必要强调两点:

(a) 在相干辐射的测量中, 我们可能探测到时间 t 的特定波包或脉冲, 比如一个高斯函数. 那么高斯函数本身是否可以认为是强度涨落呢? 答案是否定的, 因为特定分布的强度是可以通过数学期望求出来的, 而所谓强度涨落从统计意义上来讲是随机和不确定的. 所以, 实际上这时候每个高斯分布的涨落才是强度涨落.

(b) 瞬时光强 $I(\boldsymbol{r},t)$ 一般可以写成两部分, 如干涉图案中光强分布 $I(\boldsymbol{r},t) = I_0 + I\cos\omega\tau$, 其中 τ 是绝对的时空坐标, 是 $(\boldsymbol{r},t)$ 的函数. I_0 和 I 是常数. 注意: 虽然形式上瞬时光强也是在常数 I_0 附近涨落, 但是这里第二项 $I\cos\omega\tau$ 绝不能看作涨落 $\delta I(\boldsymbol{r},t)$.

本章小结

本章我们介绍了如下理论和基本概念:

(1) 光的经典电磁波理论基础: 麦克斯韦方程组和电磁波动方程.

(2) 经典叠加原理.

(3) 光的测量: 坡印亭矢量和光强; 光强数学期望值和涨落; 数学期望值和系综平均; 时间平均光强.

(4) 我们已经建立了多子源和多模的简单辐射模型.

推荐读物

[1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1998.

[2] M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Cambridge, 2002.

第 2 章

光的相干性–辐射场的态

2.1 光的相干性

本节我们探讨光的相干性. 当我们说某一辐射相干或非相干时, 意味着什么? 例如, 是什么原因使我们认为放电发光管辐射是非相干光而激光辐射是相干光? 其物理本质何在? 我们将从第 1 章建立的简单辐射模型开始, 对以上问题给予解答. 为了简单起见, 在以下讨论中, 我们考虑对一个点源辐射进行远场测量. 该点源包含了多个子源, 比如数以万亿计的原子跃迁. 我们将着眼于不同子源以及不同傅里叶模式的相干和非相干叠加, 分析如下四种极端情况:

(I) 非相干子源和非相干傅里叶模式

(II) 相干子源和相干傅里叶模式

(III) 非相干子源和相干傅里叶模式

(IV) 相干子源和非相干傅里叶模式

(I) 非相干子源和非相干傅里叶模式: 混沌光

对于混沌光源, 所有子源和傅里叶模式都是独立的, 因而具有随机的相对相位关系 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$. 在考虑所有可取相位 $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')$ 后, 作为非相干叠加的计算结果, 我们发现 (1.4.3) 式中, 只有属于同一个子源并且同一个傅里叶模式 ω 的模式 (以及其复共轭) 被保留下来, 即 $j=k$ 和 $\omega=\omega'$. 这些保留项是 (1.4.3) 式中所示矩阵的对角项

$$\langle I(r,t)\rangle = \langle \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \sum_{j,k} a_j(\omega)\,a_k(\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau}\rangle$$

$$= \int \mathrm{d}\omega \sum_j a_j^2(\omega) \tag{2.1.1}$$

对应于 (1.4.4) 式中的第一项. 如果 $a_j(\omega)$ 是 ω 的有确切定义函数, 那么 (2.1.1) 式可以写成如下形式

$$\langle I(r,t)\rangle = \int \mathrm{d}\omega \sum_j |E_j(\omega)|^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \sum_j I_j(\omega) \tag{2.1.2}$$

这说明该光源的总强度期望值是所有子源强度期望值的总和. 注意, (2.1.1) 式的期望值计算只完成了一部分, 并没有考虑对实正振幅的平均. 这里, 光的相干特性主要由子辐射之间的相对相位决定. 在特定测量中, 我们可能需要考虑对实正振幅的平均, 即根据子源和傅里叶模式不同计及 $a_j^2(\omega)$ 的所有可能取值.

考察 (1.3.8) 式和 (1.4.4) 式, 如果干涉相消不完全的话, 第二、第三和第四项积分会贡献到光强度的变化 δI. 这些贡献可能会随时间而不同, 因而引起光强在其期望值附近的随机涨落. 在 (2.1.1) 式中, 与 $a_j^2(\omega)$ 的变化相比, 由随机相位引起的不完全干涉相消是对 δI 的主要贡献. 这两类贡献的比值可能在 $M \times N$ 量级, 其中 $M \sim \infty$ 是模式数, $N \sim \infty$ 是子源数目.

小节一下, 我们给出了非相干混沌光源简单的经典模型, 其中混沌场的不同子源和不同傅里叶模式的复振幅具有随机分布的相对相位 $\varphi_j(\omega) - \varphi_k(\omega')$. 正是相位的随机性把非相干求和和相干叠加区分开来. 然而, 非相干热光的随机特性并不排除如下可能: (1) 实正振幅 $a(\omega)$ 可能是 ω 的特定分布函数, 例如热光分布; (2) 光强本身可能在平均值 $\bar{I}$ 附近遵循某种特定分布函数 $p(I)$, 比如高斯分布.

(II) 相干子源和相干傅里叶模式

经典辐射模型的第二个极端情形, 考虑的是相干的子源和相干的傅里叶模式. 调 Q 的激光脉冲是很好的例子. (1.4.3) 式和 (1.4.4) 式叠加中所有项都保留下来, 因而光强度的期望函数

$$\begin{aligned}\langle I(r,t)\rangle &= \Big\langle \int \mathrm{d}\nu \sum_j a_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\tau} \int \mathrm{d}\nu' \sum_k a_k(\nu')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu'\tau} \Big\rangle \\ &= \Big| \mathcal{F}_\tau\{\, A(\nu)\,\} \Big|^2 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

其中我们定义 $A(\nu) = \sum_j a_j(\nu)$ 为频率 ω 模式的总振幅. (2.1.3) 式中光强度期望值成为一个明确定义的脉冲.

和混沌热光场不同的是, 这里我们假设子场间相对相位是常数, $\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')=$ 常数. 计算得到的波包或脉冲是子场相长干涉或相干叠加的结果. 至于涨落, 混沌热光场和相干波包对应两个极端. 对于混沌热光场, 涨落源于子场没有取遍其所有可能的相位, 对于相干光场, 涨落源于其子场没有取完全一致的常数相位. 混沌辐射的不完全相消干涉和相干辐射子源的不完全相干叠加是光强度涨落的主要来源.

图 1.4.2 中, 我们给出了用超快光探测器观测到的激光脉冲序列. 每一个脉冲是有明确定义的时间 t 的函数, 而不同的脉冲之间有不确定的随机涨落.

(III) 非相干子源和相干傅里叶模式

在第三个简化模型中, 我们假设独立辐射的子源, 不同子场之间的相对相位任意随机, 而每一个子场的傅里叶模式在 t_{0j} 时刻被相干激发. 基于非相干子源的假设, (1.4.3) 式中只有 $j=k$ 的叠加项才能保留下来, 它包括 (1.4.4) 式中的第一项和第三项,

$$\begin{aligned}
&\langle I(r,t)\rangle \\
&=\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \sum_j a_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_{0j}}\, a_j(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t_{0j}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')\tau} \\
&=\sum_j \left\{\int \mathrm{d}\nu \left[a_j(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t_{0j}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\tau}\right\}\left\{\int \mathrm{d}\nu' \left[a_j(\nu')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu' t_{0j}}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu'\tau}\right\} \\
&=\sum_j \left|\mathcal{F}_{(\tau-t_{0j})}\{\, a_j(\nu)\,\}\right|^2 \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

这一结果明显地反映了子源的非相干特性和傅里叶模式的相干特性. 光强度的期望值 $\langle I(r,t)\rangle$ 是所有独立子场脉冲强度之和, 而每一个子脉冲由于其傅里叶模式的相干叠加成为有明确定义的时空函数.

(2.1.4) 式形式上写成一系列子脉冲之和. 每一个子脉冲对应于 j 子场振幅 $a_j(\nu)$ 的傅里叶变换. 如果子场振幅 $a_j(\nu)$ 是有明确定义的函数, 每一个傅里叶变换将产生一个在时空中明确定义的波包. 现在, 期望值或期望函数 $\langle I(r,t)\rangle$ 由这些明确定义的子脉冲的求和决定. 我们考察以下简单的情形:

(1) 单个脉冲或波包

我们假设光场很弱, 以至于对 $I(r,t)$ 的测量中只涉及一个波包或一个脉冲, 我们仍然沿用 (2.1.4) 式计算其期望值, 而式中只有一个对应的非零 a_j. 对于全同的子源, 例如大量的全同原子跃迁, 我们可以将 (2.1.4)

式简化为

$$\langle I(r,t)\rangle = \left|\mathcal{F}_{(\tau-t_0)}\{a(\nu)\}\right|^2 \tag{2.1.5}$$

期望值或期望函数显然是时间的确定性的函数.

(2) 几个波包或脉冲

如果对 $I(r,t)$ 的测量中涉及几个波包或脉冲, (2.1.4) 式则只取那几个对应的非零项. 此时期望值或期望函数主要由 t_{0j} 的分布决定. 如果所有的 t_{0j} 都很接近, 即 t_{0j} 的间隔远小于波包的宽度, 这些脉冲相加后只是得到一个加宽的振幅更大的脉冲. 否则, 如果 t_{0j} 具有更均匀而且分散的分布, $\langle I(r,t)\rangle$ 则变为一个时空中更加均匀而且分散的函数, 或接近一个常数.

(3) 大量重叠–部分重叠的波包或脉冲

此时 (2.1.4) 式的求和会比较复杂. 这里, 我们探讨一个简化的模型. 假设所有的波包或脉冲具有共同的关于 $t-t_{0j}$ 的函数形式, 波包间或脉冲间分布随机且连续. (2.1.4) 式的不连续求和可以简化成关于 t_0 的从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的连续积分,

$$\begin{aligned}\langle I(r,t)\rangle &\cong \int \mathrm{d}t_0\ |\mathcal{F}_{(\tau-t_{0j})}\{\,a_j(\nu)\,\}|^2 \\ &= \int \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\nu'\,a(\nu)\,a(\nu')\,[\int \mathrm{d}t_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\nu')t_0}\,]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu-\nu')\tau} \\ &\cong N\int \mathrm{d}\nu\,a^2(\nu)\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

其中我们将 t_0 的积分近似积到无穷. 由于我们假设了脉冲是随机并且连续分布的, 求和中包含的脉冲个数和 t_0 积分的宽度成正比, $N\propto T$. 为了和先前的结果相对比, 我们将 (2.1.6) 式重写为

$$\langle I(r,t)\rangle = \int \mathrm{d}\nu \sum_j a_j^2(\nu)$$

有趣的是: 大量随机分布波包的强度期望值和混沌光场的相同.

数学上, 对 t_0 的积分等价于对时间 t 的积分. 这两类求和对应如下两种物理图像: (1) t 时刻的测量涉及大量随机分布的重叠以及部分重叠的波包, 和 (2) 对大量即时测量的时间累积.

为了更好地理解这一观测背后的物理, 我们考察 (1.2.14) 式, 将场写成大量波包的叠加

$$E(r,t) = \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau-t_{0j})}\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{0j})}\{a(\nu)\} \tag{2.1.7}$$

其中 t_{0j} 表示第 j 个波包. 第 j 个经典波包是第 j 组傅里叶模式相干叠加的结果. 波包在时空中的传播具有明确定义的包络, 起始点为 $r=0$ 和 $t=t_{0j}$.

依照 (2.1.7) 式, 我们首先考察两个波包的叠加

$$\begin{aligned} &E(r,t) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau-t_{01})}\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{01})}\{a(\nu)\} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau-t_{02})}\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{02})}\{a(\nu)\} \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

其中第 j ($j=1,2$) 个波包的中心位于时刻 $t=r/c+t_{0j}$, 即第 j 组傅里叶模式具有相同相位 $r=0$, $t=t_{0j}$. 瞬时光强度可以表达为:

$$\begin{aligned} I(r,t) = {} & |\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{01})}\{a(\nu)\}\,|^2 + |\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{02})}\{a(\nu)\}\,|^2 \\ & +2Re\,[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{01}-t_{02})}\mathcal{F}^*_{(\tau-t_{01})}\{a(\nu)\}\cdot\mathcal{F}_{(\tau-t_{02})}\{a(\nu)\}] \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

(2.1.9) 式的第三项是干涉项. 无论是否可以观测到干涉现象, 此项都将会对最终的光强度测量有贡献. 由此项产生的干涉可见度由下面两个因素决定: (1) 波包重叠或不重叠; (2) 相位差 $\omega_0(t_{02}-t_{01})$.

现在我们考虑大量重叠和部分重叠的波包. 此时, 测量的光强度为:

$$\begin{aligned} I(r,t) = {} & \sum_j |\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{0j})}\{a(\nu)\}\,|^2 \\ & +\sum_{j\neq k}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0j}-t_{0k})}\mathcal{F}^*_{(\tau-t_{0j})}\{a(\nu)\}\cdot\mathcal{F}_{(\tau-t_{0k})}\{a(\nu)\}] \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

如果 t_{0j} 取所有可能值, $\omega_0(t_{0j}-t_{0k})$ 则取一组随机值, (2.1.10) 式的第二个求和会消失. 期望强度因而变成:

$$\langle\, I(r,t)\,\rangle = \langle \sum_j |\,\mathcal{F}_{(\tau-t_{0j})}\{a(\nu)\}\,|^2\,\rangle \tag{2.1.11}$$

(2.1.11) 式可以进一步简化为一个与 (2.1.6) 式类似的积分. 对 t_0 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 得到

$$\langle I(r,t)\rangle = \int \mathrm{d}\nu \sum_j a_j^2(\nu)$$

此结果与对混沌光场的测量相同.

(IV) 相干子源和非相干傅里叶模式

我们现在考虑另一类光场的经典模型, 它的子源以相干形式辐射, 而傅里叶模式却是各自独立的且具有随机相位. 连续激光是一个比较接近的例子, 只是激光的腔模一般是分立的, 而不是连续的. 既然傅里叶模式

假设为非相干的, 那么 (1.4.3) 式中只有 $\omega = \omega'$ 的叠加项才能保留下来. 因此光强度的期望值

$$\langle I(r,t)\rangle = \int \mathrm{d}\omega \sum_{j,k} a_j(\omega)\, a_k(\omega) \tag{2.1.12}$$

它包含了 (1.4.4) 式中的第一项和第二项求和. (2.1.12) 式反映了傅里叶模式的非相干特性和子源的相干特性: 测量到的光强度是所有傅里叶模式子强度的总和; 然而, 与子源对应的振幅会相干叠加, 其中包括了所有不同子源间的交叉项. 假设所有子场具有相同振幅 $a(\nu)$, 而且 $a(\nu)$ 是一个有明确定义的函数, 进一步计算 (2.1.12) 式得到

$$\langle I(r,t)\rangle \cong N^2 \int \mathrm{d}\omega\, a^2(\omega) = \int \mathrm{d}\nu\, A^2(\omega) \tag{2.1.13}$$

其中 $A(\omega) = \sum_j a_j(\omega) \simeq N a(\omega)$.

对比 (2.1.1) 式, 我们发现 $\langle I(r,t)\rangle$ 增大了 N 倍. 于是我们得到一个"超级辐射源", 从子源角度看, 它是每一个子源激发的子场振幅相干叠加或相长干涉的结果.

总结一下, 强度测量可能既涉及辐射的相干特性又涉及辐射的统计行为两方面的物理. 强度的期望值或期望函数的计算需要考虑叠加中子场振幅的所有可能取值. 对于一个特定的测量, 其瞬时测量值或测量函数可能会偏离于理论期望值或期望函数. 光场的强度涨落主要来自子场间不可控的相长–相消干涉. 经过大量测量, 强度测量值或强度测量函数的统计平均会接近强度的理论期望值或期望函数. 因此我们说对期望值的计算等价于系综平均. 我们可以将这种由不可控的子场间自由干涉相长–干涉相消引起的涨落处理为宏观唯象统计理论的随机过程.

相干特性: 我们可以粗略地将光分为两类: 非相干混沌光和相干光. 气体放电发光管发射出典型的非相干混沌光, 而激光辐射是典型的相干光. 从上述讨论中我们已经知道, 辐射的相干特性主要由其子场的相干叠加或非相干叠加决定, 子场既可以定义为与子源有关的子辐射场也可以定义为与傅里叶模式有关的子辐射场. 唯象地讲, 激光场是一定时间和空间模式的相干叠加. 对比混沌辐射, 大量模式相干相加后的光强度可以提高许多数量级. 例如, 一个单模连续激光器可以把几 W 的功率集中到一个腔纵模 (实际上, 可能会有几 MHz 的频谱带宽) 和一个 TEM_{00} 空间横模内. 与几 W 辐射角度为 4π 的宽频谱热光源相比, 每个模式 (几兆带宽和衍射极限的单个空间模式) 的光强也许会相差 $\sim 10^{12}$ 之多. 使用激光很容易观测或演示光的干涉以及其它波动现象. 然而, 这并不意

味着具有相同时间、空间模式带宽的激光和热光会有不同的干涉特性. 下面一节中我们会讨论这一点.

强度涨落的统计特性: 瞬时光强 $I(r,t)$ 可能会呈现一个有确定定义的、围绕在期望值或期望函数 $\langle I(r,t)\rangle$ 附近的特定分布函数 $p(I)$. 高斯分布就是一个典型的分布. 高斯分布的 $p(I)$ 大体产生于完全随机的光产生过程.

无论是相干特性还是统计特性都是光场的本征性质, 是由光源事先决定的, 即依赖于光的产生过程. 用量子光学的语言来讲, 光的相干特性和统计特性取决于辐射场的态.

2.2 时间相干性

时间相干意味着两方面的物理内容: (1) 考虑了子场时间关系的相干和非相干叠加; (2) 有相对延迟的场之间的叠加或干涉. 时间相干是辐射的内在特性. 在本节中, 我们将集中讨论 (1) 的物理内涵, 而将 (2) 留到 5.1 节讨论.

到目前为止, 我们的讨论限定为点辐射源. 点源也可能包含大量子源, 例如上万亿的原子跃迁, 它们辐射出大量的球面简谐波, 分别用不同的频率模式和局限于点源内的不同子源来标记. 依照麦克斯韦电磁波理论, 每一个球面谐波都是麦克斯韦波动方程的解. 因此, 在某一个时空点观测到的大量球面谐波子场的全体或部分线性叠加仍然是麦克斯韦波动方程的解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\omega}\sum_{j=1}^{N}\hat{\boldsymbol{e}}\,\frac{E_{0j}(\omega)}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-k(\omega)r]} \tag{2.2.1}$$

其中 $E_{0j}(\omega)=a_{0j}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{0j}(\omega)}$ 是第 j 个子源中激发的 ω 模式的复振幅. 其中子场实振幅分布由 $a_{0j}(\omega)$ 描述, 而谐波子场之间的相位变化或相对时间关系用 $\varphi_{0j}(\omega)$ 表示, 子场的偏振则由单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 表示. 为了简化标记, 在下面的讨论中我们只选取场的一个偏振, 因而忽略掉矢量标记. 这些简谐波或子场在某时空点的相干或非相干叠加主要取决于它们相对的初始相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\omega)}$, 或者说取决于它们的时间特性.

(2.2.1) 式表明每一个子场都具有球面对称性, 这对于点源和无限大的球面边界条件是合理的. 这些球面简谐子场之间无论是非相干、部分相干还是相干叠加都不会对场的横向空间分布产生影响, 但是可能会对叠加场的纵向时间分布产生不同的影响. 例如, 大量不同频率的傅里叶模式的相长–相消干涉, 会导致一个纵向传播的波包, 波包的时间分布 (宽

度和形状) 由子场的频谱分布决定.

在前面一节中我们已经提出用来区分辐射场的四个经典模型:

(I) 非相干子源和非相干傅里叶模式

(II) 相干子源和相干傅里叶模式

(III) 非相干子源和相干傅里叶模式

(IV) 相干子源和非相干傅里叶模式

从相干的概念来说, 辐射 (I) 一定是时间非相干的; 辐射 (II) 一定是时间相干的. 辐射 (III) 非常有趣. 弱光条件下在某个时空点进行测量总会给出一个波包, 它源于每个独立子源激发的大量傅里叶模式之间的相干的相长–相消干涉. 此时, 我们有理由认为辐射 (III) 是时间相干的. 然而, 当光强变强时, 大量重叠或部分重叠的独立波包之间的非相干叠加会将辐射变为时间非相干的. 辐射 (IV) 非常特别. 一方面, 子源的相干性促使子场中相同频率的简谐波相长叠加, 从而建立起一个增强的傅里叶模式; 另一方面, 不同频率傅里叶模式间的非相干叠加阻止了波包的形成. 如果辐射源只激发单频模式, 或者从多模中隔离出单个频率用来观测, 我们可以将辐射 (IV) 判断为时间相干的. 然而, 如果测量中不可避免地涉及多个傅里叶模式, 我们则必需考虑到辐射 (IV) 的非相干特性.

对于点源和自由传播, 当所有子源激发的子场到达观测时空点时, 它们经历的光路相同. 不同频率模式之间的相长–相消干涉导致波包 (光场) 或脉冲 (光强) 产生. 例如, 辐射 (II) 的相干叠加激发出一个波包

$$\begin{aligned} E(r,t) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 r)}}{r} \int \mathrm{d}\nu \sum_j a_j(\nu)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau} \\ &= \mathcal{F}_\tau \Big\{ \sum_j a_j(\nu) \Big\} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 r)}}{r} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

代表了具有某种包络的球面简谐波传播. 包络是场的频谱分布函数的傅里叶变换, 在自由空间中, 其传播速度和球面简谐波的相速度一样. 有趣的是: 我们发现相干的相长–相消干涉可以把连续波 (或模式) 变为脉冲, 在脉冲内强度大大提高了. 当然, 辐射的能量是守恒的. 脉冲内能量的增加 (相长干涉) 是以脉冲外能量减少 (相消干涉) 为代价的.

远场观测中, 球面波的波包可以近似为测量点附近的平面波波包:

$$E(\boldsymbol{r},t) \simeq \mathcal{F}_\tau \Big\{ \sum_j a_{0j}(\nu) \Big\} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t - \boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r})} \tag{2.2.3}$$

其中我们已经将场写成带偏振的矢量场, 对于 $r \sim \infty$, 取 $a_{0j}(\nu) = a_j(\nu)/r$ 近似为常数.

(2.2.3) 式的平面波近似在前面章节中使用过.

2.3 空间相干

和时间相干类似, 空间相干也涉及两方面的物理内容: (1) 从空间分离的子源激发出的子场之间的相干或非相干叠加; (2) 空间分离的场之间的叠加或干涉. 空间相干也是辐射的内在特性. 本节中我们将集中讨论 (1), 而将 (2) 留到 5.2 节.

现在我们不再考虑点源, 而是考虑具有有限尺寸的辐射源, 例如图 2.3.1 中的 1 维辐射源. 我们转向关心辐射的空间行为. 准确地说, 我们的兴趣在于: 已知光源或者另一个横向平面的光场的空间分布, 来推导其它任意一个横向观测平面的光场分布. 和点源相比, 空间扩展源的几何形状使得物理和数学变得复杂了. 对于点辐射源的自由辐射传播 (直接的点对点传播) 情形, 所有子源与观测点的光程相同. 然而, 对于空间扩展源, 空间分离的子场到达观测点时经历不同的光程, 此时叠加更为复杂.

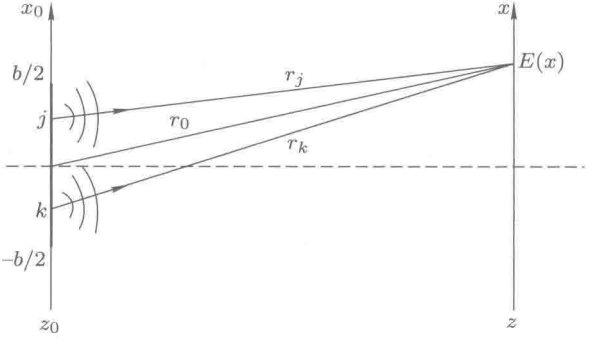


图 2.3.1 有限大小的 1 维辐射源, 包含大量沿着 x_0 轴分布的子源.

为了使空间相干的物理和数学容易理解, 我们将讨论分为三步: (1) 子源间的空间相干特性的研究. 它涉及从大量相干或非相干子源辐射出来的子场的叠加 (2.3 节); (2) 单个空间模式经过孔径时的衍射研究, 它涉及大量的从此模式波前的每一点所衍生的次级子波的叠加 (3.1 节); (3) 已知其空间分布的场从一个平面到另一个平面的传播, 它涉及 (1) 和 (2) 两方面的物理和数学 (3.2 节).

下面, 我们讨论图 2.3.1 中的 1 维辐射源, 它由大量沿着 x_0 轴从 $x_0 = -b/2$ 到 $x_0 = b/2$ 随机分布的子源组成. 为了简化数学, 我们假设单频辐射 ($\omega =$ 为常数) 并限定我们的讨论为一个偏振②. 设想源所在平面为

② 下面几节中我们将沿用这一假设, 否则会有特殊说明.

$z_0 = 0$, 观测平面 $z =$ 常数和源平面 $z_0 = 0$ 平行且相距为 z. 我们的兴趣在于知道光传播到达 $z =$ 常数的平面后如何分布. 总的来说, 我们需要计算出在观测平面沿着 x 轴的光强度分布或期望值 $\langle I(x,t)\rangle$. 和点源情况不同, 此时 x_0 轴上的每一个点状子源激发的子场会经历不同光路到达 x 轴上的某一观测点. 在观测点 (x,t) 的场 $E(x,t)$ 则是这些子场叠加的结果:

$$E(x,t) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \frac{E(x_0)}{r} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)} \tag{2.3.1}$$

其中 $E(x_0) = a(x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)}$ 是由 x_0 处子源激发的子场的复振幅. 在 (2.3.1) 式中, 我们已经将每一个子场处理为中心在每一个相应子源的球面波, 其中

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2}$$

于是强度期望值 $\langle I(x,t)\rangle$ 写为

$$\langle\, I(x,t)\,\rangle = \langle \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{d}x_0' \, \frac{a(x_0)}{r} \frac{a(x_0')}{r'} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\varphi(x_0) - \varphi(x_0')]} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[r - r']} \,\rangle \tag{2.3.2}$$

其中 $r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2}$, $r' = \sqrt{z^2 + (x - x_0')^2}$.

我们将分析两种极端情形: 混沌子源和相干子源. 由于使用了单频近似, $\langle I(x,t)\rangle$ 的值将不随时间而变化. 要记住: 如果涉及多频, 则需要考虑不同频率模式之间的干涉和由此带来的时间相干性.

情形 (I): 混沌子源

混沌子源情形, $\varphi(x_0) - \varphi(x_0')$ 为随机数. 考虑其所有的可能取值, 对 (2.3.2) 式的积分只会保留 $x_0 = x_0'$ 的项. 对 (x,t) 点的强度期望值计算 $\langle I(x,t)\rangle$ 成为每一个坐标为 x_0 的点子源发出的子强度的平庸求和:

$$\langle\, I(x,t)\,\rangle = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \frac{a^2(x_0)}{r^2} \simeq \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, I_{x_0}(x) \tag{2.3.3}$$

因此, 混沌子源情形, 我们期望观测到的是沿着 x 轴均匀分布的光场, 即 $\langle I(x,t)\rangle \sim$ 为常数 (对空间和时间的常数), 条件是 x 不要离开光轴太远.

在某些情形下, (2.3.3) 式也可以写成对辐射源张角的积分形式, 注意, 张角是从观测者的角度而定义的. 例如, 图 2.3.1 中 1 维孔径的张角大小 $\Delta\theta$ 定义为连接观测点 x 和源点 $x_0 = b/2$ 以及 $x_0 = -b/2$ 的两条线之间的夹角. (2.3.3) 式可以写成关于张角 θ 的积分形式

$$\langle\, I(x,t)\,\rangle = \int_{-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\Delta\theta}{2}} \mathrm{d}\theta \, I(\theta) \sim I_0 \tag{2.3.4}$$

如果观测点 x 离光轴不远, 或者 $I(\theta) \sim$ 为常数, I_0 可以近似为常数.

在辐射的时间特性的讨论中, 我们发现混沌热辐射子源会产生时间上随机分布的辐射. 现在我们已经发现横向空间分布的混沌子源具有类似行为. 其中的物理是很简单的: 对于一个混沌光源, 每一个子源都是独立辐射的. 从这些混沌子源发出的子强度 (而不是子场) 在任意一个观测的时空点进行简单相加.

情形 (II): 相干子源

在相干子源情形下, 我们分析如下两种特殊的情形:

(A) $\varphi(x_0) = \varphi_0$

当分布在 x_0 轴上的所有子场的初始相位 $\varphi(x_0)$ 为常数时, 空间点 x 处的光场是大量中心位于 x_0 点的球面简谐波的相干叠加的结果. (2.3.2) 式变为

$$\langle I(x,t)\rangle = \left| \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \frac{a(x_0)}{r} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)} \right|^2 \tag{2.3.5}$$

其中 $r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2}$ 是 x 和 x_0 的函数 (这里 z 为选定常数). (2.3.5) 式中的相干叠加导致观测平面的衍射图案, 意味着一个相长–相消的干涉过程. 无论远场或近场观测面上的衍射分布都不难通过数值计算获得. 然而, 并不是任意平面上都能得到解析解. 现在我们来考虑远场观测, 采用远场夫琅禾费 (Fraunhofer) 近似

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2} \simeq r_0 - \vartheta \, x_0 \tag{2.3.6}$$

其中角度 ϑ 在图 2.3.1 中有定义, 而 $\vartheta \simeq x/r_0 \simeq x/(z - z_0)$. 将 (2.3.6) 式代入 (2.3.5) 式, 衍射分布图形可以近似为

$$\langle I(x,t)\rangle \simeq \left| \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - k r_0(x)]}}{r_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, a_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vartheta x_0} \right|^2 = I_0 \, \mathrm{sinc}^2 \, \frac{k\vartheta b}{2} \tag{2.3.7}$$

其中 b 是 1 维光源的宽度, 在以上积分中我们把 $a(x_0)$ 处理为常数 $a(x_0) \simeq a_0$, 这对于随机分布是合理的.

(2.3.7) 式给出了一个标准的 1 维孔径的夫琅禾费衍射图样, 它是沿着 x_0 轴分布的点子源激发的大量子场相干叠加的结果. 子场在图案内 (sinc 函数的非零点) 相长叠加, 在图案外 (sinc 函数为零) 相消叠加. 有趣的是: 虽然每个子源向着所有方向辐射球面波, 但是当子源相干辐射时, 我们只能在其特定张角 $\Delta\vartheta \sim \lambda/b$ 范围内观测到光场. 对于可见光, 横向大小超过几 mm 的相干光源将辐射出接近准直的光, 其发散角在 $\Delta\vartheta \sim 10^{-3}$ 弧度的量级, 这可以等效处理为准直辐射.

(B) $\varphi(x_0) = k_{x_0} x_0$

在特定的实验条件下, 子场的复振幅可能含有相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{x_0}x_0}$, 其中 k_{x_0} 为常数. 这个相位因子表示位于任意坐标 x_0 处的子源与位于坐标 $x_0 + \Delta x_0$ 处的子源的辐射将保持 $\Delta\varphi = k_{x_0}\Delta x_0$ 的相位差. (2.3.7) 式变为

$$\begin{aligned}\langle I(x,t)\rangle &\simeq \left| \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - kr_0(x)]}}{r_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0\, a_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{x_0}x_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vartheta x_0} \right|^2 \\ &= I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{(k_{x_0} - k\vartheta)b}{2} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

(2.3.8) 式给出和 (2.3.7) 式类似的远场夫琅禾费衍射图样, 只是沿着传播方向有一个角度偏移 $\theta_0 = k_{x_0}/k$.

(2.3.7) 式和 (2.3.8) 式定义了横向坐标空间上的一个波包, 它是孔径函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned} E(x,t) &\simeq \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - kr_0(x)]}}{r_0(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0\, A(x_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x_0} \\ &= \mathcal{F}_{k_x}\Big\{A(x_0)\Big\} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - kr_0(x)]}}{r_0(x)} \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

其中 $A(x_0)$ 称为 "孔径函数", $k_x \sim k\vartheta$ 是沿着 x 方向的横向波矢, 也称为 "空间频率".

图 2.3.1 中 1 维光源的孔径函数 $A(x_0)$ 通常被写为

$$A(x_0) = \begin{cases} a_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)} & -b/2 \leqslant x_0 \leqslant b/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中, (2.3.7) 式中 $\varphi(x_0) = \varphi_0 =$ 常数, (2.3.8) 式中 $\varphi(x_0) = k_{x_0}x_0$.

沿着 1 维孔径分布的场的正实振幅用 $a(x_0)$ 描述, 而沿着 1 维孔径分布的相位变化用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)}$ 表示. 此波包包含一个 "载波" 球面波和一个横向的 1 维 "包络" $\mathcal{F}_{k_x}\{A(x_0)\}$. 包络限定了 k_x 的取值范围, 意味着经过 1 维孔径的光传播方向将受到限制. 波包的形成是空间相干子源激发的大量相干子场的相长–相消干涉的结果.

(2.3.9) 式中, 横向坐标 x_0 和横向波矢 k_x 是傅里叶共轭变量, 显然远场的观测平面等效于孔径函数的傅里叶变换面. 基于傅里叶变换, 我们可以引入一个空间变量 x_0 和 k_x(或 p_x) 的经典 "不确定关系"

$$\Delta x_0\, \Delta k_x \geqslant 2\pi \quad \text{或} \quad \Delta x_0\, \Delta p_x \geqslant h, \tag{2.3.10}$$

其中 p_x 是横向动量, h 是普朗克常量.

(2.3.10) 式定义了一个空间相干辐射源的 "衍射极限". TEM_{00} 模的激光束是典型的空间相干光, 一个理想的激光束应该满足 "衍射极限" 传播: 激光束的口径越大, 发散角就越小.

有趣的是: 我们发现纵向的时间波包和横向的空间波包有类似之处. 辐射的时间相干产生了时间波包, 带来时间上的相长–相消干涉; 辐射的空间相干导致空间波包, 带来空间上的相长–相消干涉. 两种情形中, 辐射能量在相长干涉区大大提高, 这是以相消干涉区能量大大减少为代价的.

本章小结

本章中, 我们首先将相干的概念分类. 实际上, 光学中有两种不同的相干定义: (1) 基于辐射或辐射源的相干和非相干决定的光学性质; (2) 时间延迟的或空间分离的电磁场之间的可观测或不可观测的干涉. 本章中, 我们所有的讨论都集中在 (1).

为了详细说明相干特性或辐射场的状态, 我们引入了一个具有多辐射子源和多辐射模式的简单模型. 基于这个简单模型, 并假设远场点辐射源, 辐射的相干特性被划分成四种极端情形:

(I) 非相干子源和非相干傅里叶模式

(II) 相干子源和相干傅里叶模式

(III) 非相干子源和相干傅里叶模式

(IV) 相干子源和非相干傅里叶模式

在第三种情形的讨论中, 我们引入了产生于子源的单波包、几个波包和大量重叠–部分重叠波包的概念. 虽然, 我们没有引入光子的概念, 没有将每一个子场写成特定的原子跃迁, 但是这样做的目的是很明显的.

随后, 光学相干被扩展至非点状光源, 引入了空间相干和空间波包的概念. 并将时间相干和空间相干进行对比和区分.

推荐读物

[1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company, Englewood, 2005.

第 3 章

光的衍射和传播

3.1 光的衍射

为了演示衍射花样中的最小条纹宽度, 我们需要如图 2.3.1 所示的空间相干光源, 其相位满足 $\varphi(x_0)=\varphi_0$ 或者 $\varphi(x_0)=k_{x_0}x_0$. 处于 TEM_{00} 模的激光光束是个好选择. 在激光发明之前, 人们往往利用准直器来模拟上述光源. 准直器由小孔或线光阑以及透镜构成, 如图 3.1.1 所示. 小孔放置在透镜的主焦点上并用发光管照明. 小孔的作用是模拟点光源. 透镜将对小孔出来的球面波波阵面引入合适的相位延迟使它变成平的波阵面. 这样, 球面波就变成准直性很好的光束了. 利用这种准直光束可以研究 1 维的宽度为 b 的光阑的衍射现象, 以确定衍射能够达到的最小条纹宽度. 图 3.1.1 是其实验装置示意图. 将准直好的光束垂直入射到 1 维光阑上, 在透过物体后的任意 $z=$ 常数的观察平面上, 光强是如何分布的呢?

光阑处的辐射场可以近似为平面波. 根据惠更斯原理, 初级波阵面上的每一点都是次级球面子波的波源. 因此, 在 1 维光阑平面上, 每一点都可以处理为带常数相位 $\varphi(x_0)=\varphi_0$ 的子波, 子波相干叠加后在观测平面得到,

$$E(x,t)=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x_0\,\frac{E_0}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kr)} \tag{3.1.1}$$

其中 $E_0=a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}=A(x_0)$ 是复振幅, $r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2}$. 子波的相长–相消干涉导致了观测平面上的衍射图案. 根据 (3.1.1) 式, 我们可以数值计算出任意观测平面上的衍射图案. 远场衍射称为夫琅禾费 (Fraunhofer) 衍射, 近场衍射称为菲涅耳 (Fresnel) 衍射. 在夫琅禾费远场近似下, 将 (2.3.6)

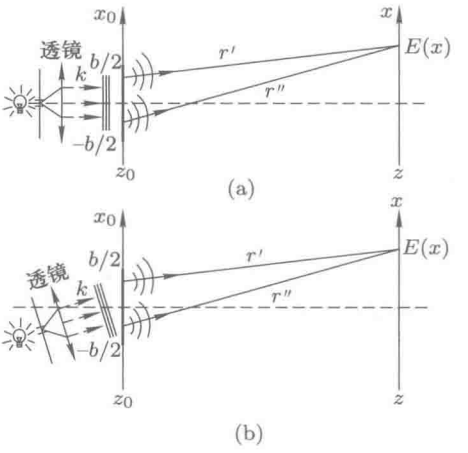


图 3.1.1 单缝衍射的实验装置示意图. (a) 垂直入射到 1 维光阑上的光传播到近场或者远场的一个任意观测平面. (b) 入射光以非正入射 $\theta_0 \neq 0$ 照射到 1 维光阑上. 在两种装置中, 都是由于子波的相干叠加形成了衍射图案, 远场衍射被称为夫琅禾费衍射, 近场衍射被称为菲涅耳衍射.

式代入到 (3.1.1) 式, 按照类似图 2.3.1 中相干子源的处理方法, 我们可以得到和 (2.3.7) 式一样的夫琅禾费衍射图案.

$$\begin{aligned}\langle I(x,t)\rangle &\simeq \left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-kr_0(x)]}}{r_0}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x_0\,A(x_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x_0}\right|^2\\ &= I_0\,\mathrm{sinc}^2\frac{k\vartheta b}{2}\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

其中 $\theta \simeq x/(z-z_0)$.

图 3.1.1b 是另一个利用准直光束检测最小衍射条纹宽度的例子. 这个实验装置与图 3.1.1a 略有不同. 准直光束不再是垂直入射到光阑上, 而是以 $\theta_0 \neq 0$ 的角度入射. 这时沿着光阑 x_0 轴的子波的振幅具有一个相对的相位因子 $\varphi(x_0) = k_{x_0}x_0$, 其中 $k_{x_0} = k\theta_0$ 是入射波矢的 x 分量. 很显然, 这个相位因子对 x_0 的积分是有贡献的. 如 (3.1.1) 式中所示, 各子波传播到观测平面的复振幅为 $E_0 = a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{x_0}x_0} = A(x_0)$ 然后进行相干叠加. 在夫琅禾费远场近似下, 同样按照类似图 2.3.1 中相干子源的处理方法, 我们可以得到和 (2.3.8) 式相同的夫琅禾费衍射图案:

$$\begin{aligned}\langle I(x,t)\rangle &\simeq \left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-kr_0(x)]}}{r_0}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x_0\,A(x_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x_0}\right|^2\\ &= I_0\,\mathrm{sinc}^2\frac{(k_{x_0}-k_x)b}{2}\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

其中 $k_x = k\theta \simeq x/(z - z_0)$, $\theta_0 = k_{x_0}/k$ 是准直光束的入射角度.

我们现在可以得出结论, 远场夫琅禾费衍射分布就是物体孔径函数的傅里叶变换

$$E(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - kr_0(x)]}}{r_0(x)} \mathcal{F}_{k_x}\{A(x_0)\} \tag{3.1.4}$$

一般来说 $A(x_0) = a(x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)}$. 孔径函数满足 $\varphi(x_0) = \varphi_0$ (如图 3.1.1a 所示) 以及满足 $\varphi(x_0) = k_{x_0}x_0$ (如图 3.1.1b 所示) 时的情况, 分别和相干子源 (A) 及 (B) 对应. 比较图 2.3.1 和图 3.1.1 中的物理条件, 我们会得到很有趣的结论. 在图 2.3.1 中存在大量分立的向 4π 立体角辐射球面波的分立子源. 在图 3.1.1 中, 我们假设只有一个点源, 并且用准直器进行很好的准直. 尽管其物理条件完全不同, 我们在两种实验配置下却观测到了相同的衍射图案, 表现出相同的相消或者相长干涉. 所以, 点源的波前显然可以看作大量的空间上分立的相干子源. 我们认为点源辐射尽管在时间上可能不相干但是在空间却是相干的.

在远场近似下, 夫琅禾费衍射就是孔径函数的傅里叶变换. 其实严格的傅里叶变换应该是通过凸透镜实现的. 图 3.1.2 示意性地给出了这

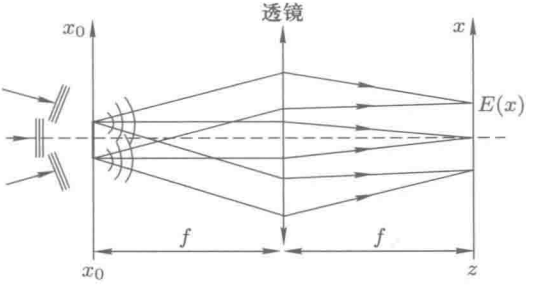


图 3.1.2 实现傅里叶变换的装置示意图. 光通过位于凸透镜前焦面的光阑, 汇聚到透镜的后焦面上形成远场的衍射图案. 透镜的后焦面被称为傅里叶变换平面. 观测到的衍射图案表示孔径函数的傅里叶变换.

种傅里叶变换的实验装置. 假设孔径函数 $\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0) = A(\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{\rho}_0)}$, 其中 $\boldsymbol{\rho}_0$ 是衍射物平面上的二维横向坐标, $A(\boldsymbol{\rho}_0)$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{\rho}_0)}$ 分别是孔径坐标 $\boldsymbol{\rho}_0$ 处光场的振幅和相位. 观测平面位于透镜的后焦面上. 观测平面上的光场是衍射物处波前上每一点激发的次级波源相干叠加的结果. 观测到的衍射图案代表了孔径函数的傅里叶变换

$$E(\boldsymbol{\rho}) \propto \mathcal{F}_{\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{\rho}}{f}}\{\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\} \tag{3.1.5}$$

其中 $(\omega/c)(\boldsymbol{\rho}/f)$ 和 $\boldsymbol{\rho}_0$ 是傅里叶变换的共轭变量. (3.1.5) 式清楚地解释了衍射中相长–相消干涉的本质. 任何一组从次级波源中发射出的平行光

束将汇聚到透镜后焦面上特定的点, 并且这组平行光线到达该点所经历的光程相等, 所以在该点发生了相长干涉. 换句话说, 透镜的傅里叶变换平面上的任意一点都代表了物面上次级波源辐射出的特定平面波的相长干涉. 这在第 4 章中成像部分会给出详细的计算.

3.2 光场的传播

这一节, 我们将继续讨论光场传播时的横向特性. 准确地说, 我们本节研究的是当已知 $z_0 = 0$ 平面上光场分布 $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 时, 求任意 $z =$ 常数的平面上的光场分布 $E(\boldsymbol{r}, t)$. 我们假设 $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 由一个任意的光源产生, 可以是点源也可以是体光源. $z =$ 常数的观测面到 $z_0 = 0$ 的距离为任意值, 可以是在远场也可以是在近场. 那么基于麦克斯韦电磁波理论, 并且假设我们知道 $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 的分布, 我们能够得到观察面上的电场分布 $E(\boldsymbol{r}, t)$ 或强度分布 $I(\boldsymbol{r}, t)$ 吗? 答案是肯定的, 我们可以借助格林函数或称场传播函数描述每个模式从 $z_0 = 0$ 平面传播到 $z =$ 常数的观察面的传播情况.

除非 $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 在感兴趣的时空范围内没有解析表达式, $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 一般都可以用傅里叶积分表示:

$$E(\boldsymbol{r}_0, t_0) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0} \tag{3.2.1}$$

其中 $v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 是在一定边界条件下亥母霍兹波动方程的解. 不同的边界条件下, 麦克斯韦波动方程给出不同解, 即不同的傅里叶模式 $v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$, 可能是一系列平面波或者球面波. 在 (3.2.1) 式中, $E(\boldsymbol{k}) = a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{k})}$ 是傅里叶模式 $\boldsymbol{k}$ 的复振幅. 原则上, 我们应该能找到合适的格林函数来描述每一个模式从 $z_0 = 0$ 面逐点进行傅里叶积分到达观察面的传播情况,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r}, t) &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\, g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, t - t_0)\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0} \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_0, t_0)\, g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, t - t_0) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 $E(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_0, t_0) = E(\boldsymbol{k})\, v_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$. 每一个模式都是从 $z_0 = 0$ 平面传播到 $z =$ 常数的平面, 观察面的电场 $E(\boldsymbol{r}, t)$ 就是这些模式相互叠加的结果.

用一个如图 3.2.1 中所示的简单例子来引入格林函数的概念. 光场通过沿着 x_0 轴的 1 维光阑传播并到达观测面. 假设已知 z_0 平面上或者沿着 x_0 轴的光场分布, 求解远场 $z =$ 常数平面上或者沿着 x_0 轴的光场

分布. 为了简化数学计算, 我们进一步假设 $z_0 = 0$ 平面上的光场是大量分立平面波的叠加, 如图 3.2.1 所示. 尽管 z_0 平面上的光场 $E(x_0, z_0, t_0)$ 是相干或非相干叠加的结果, 但是基于麦克斯韦电磁波理论, 我们可以独立处理每个平面波, 研究各自如何从 z_0 平面传播到 z 平面. 平面波的传播或衍射已经在 3.1 节中讨论过. 考虑每个平面波贡献沿着 x_0 轴的复振幅为 $a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_j + k_{jx_0} x_0)}$, 其中 $a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ 是第 j 个模式的复振幅常数, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{jx_0}x_0}$ 代表由第 j 个入射波矢在 x_0 方向的分量 k_{jx_0} 所引起的相对相位延迟. 于是沿着 x 轴的光场 $E(x,t)$ 为

$$
\begin{aligned}
E(x,z,t) &= \sum_{\boldsymbol{k}_j} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_j t - k_j r_0(x)]}}{r_0(x)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, a_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_j + k_{jx_0} x_0)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x_0} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}_j} a_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_j t - k_j r_0(x)]}}{r_0(x)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jx_0} - k_x)x_0} \right\} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}_j} g(\boldsymbol{k}_j; z - z_0, t - t_0) \, E(\boldsymbol{k}_j; x_0, z_0, t_0)
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

其中

$$
g(\boldsymbol{k}_j; z - z_0, t - t_0) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_j (t - t_0) - k_j r_0(x)]}}{r_0(x)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jx_0} - k_x)x_0} \tag{3.2.4}
$$

是第 j 个模式从 $z_0 = 0$ 平面传播到观察面的格林函数. 正如我们先前所讨论的, 空间波包代表了 x_0 轴上从 $-b/2$ 到 $b/2$ 的 1 维光阑的远场夫琅禾费衍射图案.

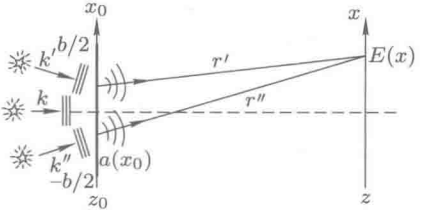


图 3.2.1 举例说明格林函数的定义. $z_0 = 0$ 平面上的光场是从遥远星体上发出来的平面波进行相干或非相干叠加的结果, 平面波的波矢 $\boldsymbol{k}$ 都不相同. 如果 $z =$ 常数的观察面在远场区域, 那么我们所感兴趣的格林函数是将每个模式从 $z_0 = 0$ 平面一点一点的传播到远场 $z =$ 常数的观察面.

这个例子很简单, 其物理图像是很清楚的. 第 j 模式的平面波被 1 维光阑衍射后传播到远场 $z =$ 常数的平面后可以看作一个空间波包. 尺寸更小 (更大) 的光阑会使得 j 模式的传播方向受到更大 (更小) 角度的衍

射. 当 $b\sim 0$ 时, 平面波变成中心在点状光阑处的球面波; 当 $b\sim\infty$, 格林函数给出衍射后是一个特定方向的平面波, 其传播角度为 $\vartheta = k_{jx_0}/k$, 这是一个没有受到干扰的平面波. 需要注意的是, 以上结论只对远场成立, 对近场是不成立的. 下面给出近场菲涅耳近似.

对于特定的实验装置, 光的传播应该要拆分成多步完成, $g = g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_N$, 在这种情况下

$$E(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}_0,t_0)\, g_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0,t_1-t_0) \times g_2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,t_2-t_1)\cdots\times g_N(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{N-1},t-t_{N-1}) \tag{3.2.5}$$

其中 N 代表传播分成多少步. 不同的传播路径导致最终的格林函数 $g(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,t-t_0)$ 可能完全不同. 无论每个傅里叶模式的格林函数在形式上如何复杂, 它的作用都是完成从时空点 $(\boldsymbol{r}_0,t_0)$ 到 $(\boldsymbol{r},t)$ 的传播.

在特定实验装置中, 为了方便起见, 可以将 (3.2.2) 式写成下述形式

$$E(\boldsymbol{\rho},z,t) = \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0,z-z_0,t-t_0)\, E(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho}_0,z_0,t_0) \tag{3.2.6}$$

其中 $(\boldsymbol{\rho},\, z)$ 是时空的横向和纵向坐标, $(\boldsymbol{\kappa},\, \omega)$ 是动量的横向和纵向坐标. (3.2.6) 式中格林函数将光场的每个模式从 $z_0=0$ 的 σ_0 面传播到 $z=$ 常数的 σ 面. (3.2.6) 式中我们作了简化处理, 认为光场只有一个偏振方向, 如果不是单一偏振, 我们应该遵循矢量求和法则对不同偏振进行叠加.

图 3.2.2 表示光场从有限大小光阑 A 所在平面 σ_0 自由传播到观测面 σ 的情形. 基于图 3.2.2, 我们可以计算出自由空间传播和衍射的格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho},z)$.

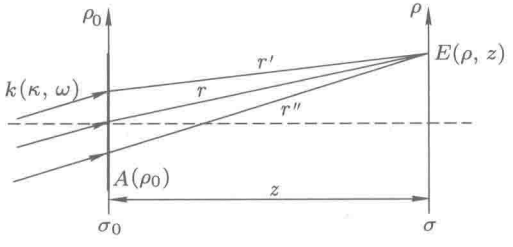


图 3.2.2 自由空间菲涅耳传播的示意图. 复振幅 $\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)$ 包含实函数 $A(\boldsymbol{\rho}_0)$ 和相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$ 两部分. 相位部分与 σ_0 面上的横向波矢 $\boldsymbol{\kappa}$ 有关. 注意图中只画了某一个波矢 $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\kappa},\omega)$.

根据惠更斯-菲涅耳原理, 时空点 $(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 处的光场是 σ_0 平面上每一点所产生的次级球面波线性叠加的结果, 如图 3.2.2 所示,

$$E(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\; E(\boldsymbol{\kappa}, \omega; 0, 0) \int_{\sigma_0} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, \frac{\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)}{r}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kr)} \tag{3.2.7}$$

其中我们令平面 σ_0 上的 $z_0 = 0$、$t_0 = 0$, 并定义 $r = \sqrt{z^2 + |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2}$. 在 (3.2.7) 式中, $\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)$ 是复振幅, 或者称为 σ_0 面光场的相对分布. 像我们前面所讨论的, 它往往就是一个简单的关于横向坐标 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的孔径函数.

在近场菲涅耳傍轴近似下, 当 $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2 \ll z^2$ 时, 可以用 z 和 $\boldsymbol{\rho}$ 对 r 一阶展开:

$$r = \sqrt{z^2 + |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2} \simeq z\left(1 + \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2}{2z^2}\right) \tag{3.2.8}$$

于是 $E(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 可以近似为

$$E(\boldsymbol{\rho}, z, t) \simeq \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\; E(\boldsymbol{\kappa}, \omega; 0, 0) \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, \frac{\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)}{z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz}|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz}|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2}$ 称作菲涅耳相位因子.

假设复振幅 $\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)$ 由实函数 $A(\boldsymbol{\rho}_0)$ 和相位 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$ 组成, 满足 $\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0) = A(\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$. 复振幅与 σ_0 平面上的横向波矢和坐标都有关系, 图 3.2.2 就是一个典型的例子. 我们可以将 $E(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 写成如下形式:

$$\begin{aligned} &E(\boldsymbol{\rho}, z, t) \\ &= \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\; E(\boldsymbol{\kappa}, \omega; 0, 0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, A(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz}|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|^2} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

忽略时间相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 后, 我们得到自由空间菲涅耳传播的空间格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}, z)$ 为

$$g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z} \int_{\sigma_0} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, A(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\, G(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|, \frac{\omega}{cz}) \tag{3.2.10}$$

其中我们定义了一个高斯函数 $G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta/2)|\alpha|^2}$, 也称菲涅耳相位因子. 通过简单验算不难发现高斯函数 $G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta)$ 有如下性质:

$$\begin{aligned} G^*(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta) &= G(|\boldsymbol{\alpha}|, -\beta) \\ G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta_1 + \beta_2) &= G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta_1)\, G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta_2) \\ G(|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2|, \beta) &= G(|\boldsymbol{\alpha}_1|, \beta)\, G(|\boldsymbol{\alpha}_2|, \beta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2} \\ \int \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\; G(|\boldsymbol{\alpha}|, \beta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}} &= \mathrm{i}\frac{2\pi}{\beta}\, G(|\boldsymbol{\gamma}|, -\frac{1}{\beta}) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

其中这组公式的最后一个 (3.2.11) 式就是高斯函数 $G(|\boldsymbol{\alpha}|,\beta)$ 的傅里叶变换. 我们将会看到, 利用高斯函数这些性质会大大简化格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho},z)$ 的计算.

现在, 我们假设在 σ_0 和 σ 之间插入一个无穷大平面 σ'. 这就相当于连续经过两次距离为 d_1 和 d_2 的菲涅耳传播. 那么连续两次菲涅耳传播和 (3.2.10) 式所示直接菲涅耳传播应该具有相同的格林函数:

$$\begin{aligned}
&g(\omega,\boldsymbol{\kappa};\boldsymbol{\rho},z)\\
&=C^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(d_1+d_2)}}{d_1d_2}\int_{\sigma'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)G(|\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{cd_1})G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|,\frac{\omega}{cd_2})\\
&=C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{cz})
\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

其中 C 是一个归一化常数. 对 (3.2.12) 式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0$、$\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'$ 的双重积分得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{cd_1})\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|,\frac{\omega}{cd_2})\\
&=\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(\boldsymbol{\rho}_0,\frac{\omega}{cd_1})\,G(\boldsymbol{\rho},\frac{\omega}{cd_2})\\
&\quad\times\int_{\sigma'}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\,G(\boldsymbol{\rho}',\frac{\omega}{c}(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2})\cdot\boldsymbol{\rho}'}\\
&=\frac{\mathrm{i}2\pi c}{\omega}\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(\boldsymbol{\rho}_0,\frac{\omega}{cd_1})\,G(\boldsymbol{\rho},\frac{\omega}{cd_2})\\
&\quad\times G(|\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2}|,\frac{\omega}{c}(\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}))\\
&=\frac{\mathrm{i}2\pi c}{\omega}\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{c(d_1+d_2)})
\end{aligned}$$

其中我们用到了 (3.2.11) 式, $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'$ 的积分限取为无穷. 将这一结果代入到 (3.2.12) 式得到

$$\begin{aligned}
&g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho},z)\\
&=C^2\frac{\mathrm{i}2\pi c}{\omega}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(d_1+d_2)}}{d_1+d_2}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{c(d_1+d_2)})\\
&=C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{cz})
\end{aligned}$$

由此得出归一化常数 C 的取值为 $C=-\mathrm{i}\omega/2\pi c$. 所以, 自由空间菲涅耳传播的归一化格林函数为:

$$g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho},z)=\frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z}\int_{\sigma_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0)\,G(|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{\omega}{cz})\tag{3.2.13}$$

本章小结

辐射光源从某时空点辐射出相干光或非相干光. 光学测量在另一个单独远场或近场的时空区. 我们感兴趣的是, 如何从光场在光源的初始分布 $E(\boldsymbol{r}_0, t_0)$, 推算出其在测量区域的分布 $E(\boldsymbol{r}, t)$. 这一章主要有两个目的: (1) 引入衍射和格林函数的概念; (2) 强调电磁波经典叠加原理, 特别是计算了大量空间模式的叠加特性.

本章中有两个结果比较重要:

(1) 远场夫琅禾费衍射图案就是孔径函数的傅里叶变换

$$E(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - k r_0(x)]}}{r_0(x)} \mathcal{F}_{k_x}\{A(x_0)\}$$

(2) 自由空间菲涅耳近场传播的归一化格林函数为

$$g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}, z) = \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z}}{z} \int_{\sigma_0} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0 \, \tilde{A}(\boldsymbol{\rho}_0) \, G(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0|, \frac{\omega}{cz})$$

推荐读物

[1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company, Englewood, 2005.

[2] E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley, 2001.

第 4 章

光学成像

在光的电磁波理论提出之前, 经典光学成像已经得到长足的发展. 早期的几何光学理论给出了物平面和像平面间之间点对点关系的唯象解释. 在这些理论中, 光被处理为一束光线, 成像由光线的特殊传播方式决定. 后来的经典成像理论也就是物理光学认为光就是波, 它们会传播到某时空点并发生干涉. 成像被认为是相长–相消干涉的结果. 光是类似波的光线或者类似光线的波.

图 4.0.1 是标准的成像装置示意图. 物体自身发光或者被其它光源照亮. 成像透镜会将物平面上这些随机辐射或者散射的光成像到像平面上. 物像平面之间遵从 "高斯薄透镜成像公式"

$$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_o}=\frac{1}{f} \tag{4.0.1}$$

其中 s_o 是物体和成像透镜间的距离, s_i 是成像透镜和像平面间的距离, f 是成像透镜的焦距.

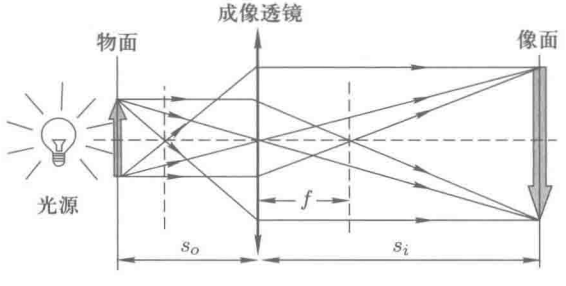


图 4.0.1 成像: 透镜将物成像到像平面, 像面由高斯薄透镜成像公式 $1/s_i+1/s_o=1/f$ 确定. 像的概念建立在物、像平面之间存在点对点对应关系的基础之上.

这个等式定义了两个有点对点对应关系的平面: 物平面和像平面. 从物平面某个点发出的任何辐射将成像到像平面上一个唯一的点. 从图 4.0.1 不难看出, 这种点对点对应关系实际上是相长–相消干涉的结果. 物平面上某一点辐射的所有的光, 将经过等光程传播后到达像平面上特定一点, 实现相长干涉. 而那些经过不等光程的光将在像平面上其它点发生相消干涉. 成像透镜成功地实现了这种相长–相消干涉.

物平面和像平面之间完美的点对点关系可产生完美的像. 我们用 δ 函数刻画物平面和像平面之间完美的点对点关系. 数学上描述观察到的像就是物体分布函数 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$ (孔径函数) 和 δ 函数的卷积. 像是物体的再现, 并且带有一定的放大因子, 可以是放大的也可以是缩小的.

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) = \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \left|A(\boldsymbol{\rho}_o)\right|^2 \delta(\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}) \tag{4.0.2}$$

其中 $I(\boldsymbol{\rho}_i)$ 是像平面上的光强分布,

$\boldsymbol{\rho}_o$ 和 $\boldsymbol{\rho}_i$ 分别是物平面和像平面上的横向坐标,

$m = s_i/s_o$ 是成像的放大因子.

然而实际情况是, 受限于成像系统的有限尺寸, 我们不可能得到完美的点对点对应关系. 相长–相消不完全会将点对点关系变成点对斑对应关系. 卷积式 (4.0.2) 中的 δ 函数变成点扩展函数:

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) = \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \left|A(\boldsymbol{\rho}_o)\right|^2 \mathrm{somb}^2[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}|] \tag{4.0.3}$$

其中 sombrero 函数, 也称为艾里斑, 定义如下:

$$\mathrm{somb}(x) = \frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x},$$

其中 $\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数, R 是成像透镜的半径, R/s_o 是成像系统的数值孔径.

Sombrero 点扩展函数 (或称艾里斑) 给出了像平面上来自物面上 $\boldsymbol{\rho}_o$ 的光场产生的光斑大小. 根据 (4.0.3) 式不难判断, 增加成像透镜口径或者采用更短波长都会使得点扩展函数变窄, 从而提高成像的空间分辨率. 像平面上有限光斑的大小就是成像系统的空间分辨率.

需要强调的是, 我们不要将成像和 "投影" 混淆起来. X 光拍照是一种投影. 投影得到的是物体的影子而不是物体的像. 图 4.0.2 示意了投影和成像的差别. 影子和物体的对应关系本质上由光线的传播方向确定, 它没有一个特定的像平面. 在物体后面任意平面都可以观察到影子. 投影的形成非常简单, 是光被物体遮挡的结果. 无论从物理基础和实际应用

角度来看, 投影和成像有天壤之别. 投影无法利用瑞利 (Rayleigh) 判据定义其空间分辨率.

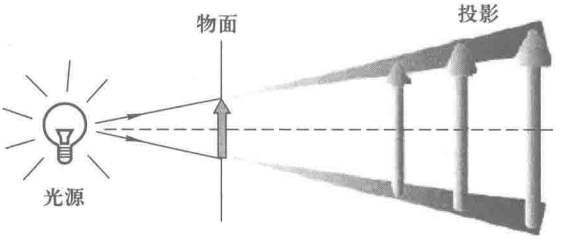


图 4.0.2 投影: 光源照射到一物体上, 没有成像系统, 没有确定的像平面, 看到的只是物体的投影, 或物体的影子.

4.1 经典成像系统

在麦克斯韦电磁波的理论框架下, 我们现在开始计算点对斑函数并分析成像机制. 据 3.2 节的讨论, 像平面上的光场 $E(\boldsymbol{\rho}_i, z_i, t)$ 可以写成

$$E(\boldsymbol{\rho}_i, z_i, t) = \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, E(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_o, z_0 = 0, t_0 = 0)\, g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_i, z_i, t) \tag{4.1.1}$$

其中 $E(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_o, z_0 = 0, t_0 = 0)$ 是物平面上横向波矢为 $\boldsymbol{\kappa}$, 频率为 ω 的模式的复振幅, $g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_i, z_i, t)$ 是格林函数.

在 (4.1.1) 式中, 像前面一样, 我们取 $z_0 = 0$ 和 $t_0 = 0$. 为了简化数学计算, 在下面分析和计算中, 我们假设 $\omega =$ 是常数并且光场只有一个偏振方向. 如有特殊情况再作说明.

图 4.1.1 是一个简化的实验装置, 其格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}, z)$ 写为:

$$\begin{aligned} & g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_i, s_o + s_i) \\ = & \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \left\{ A(\boldsymbol{\rho}_o)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} \right\} \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}s_o}}{s_o} G(|\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o|, \frac{\omega}{cs_o}) \right\} \\ & \times \left\{ G(|\boldsymbol{\rho}_l|, -\frac{\omega}{cf}) \right\} \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}s_i}}{s_i} G(|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{cs_i}) \right\} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_o$, $\boldsymbol{\rho}_l$ 和 $\boldsymbol{\rho}_i$ 分别是物平面、透镜平面和像平面上的二维坐标矢量. 第一个大括号里包含了物体的孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 和物平面上每个横向模式 $\boldsymbol{\kappa}$ 所带的相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_o}$, 如图 3.2.2 所示. 第二个和第四个大括号各项分别描述了从物平面到透镜平面, 透镜平面到探测平面的自由空间菲涅耳传播–衍射. 菲涅耳传播包含了球面波函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(z_j - z_k)}/(z_j - z_k)$ 和菲涅耳

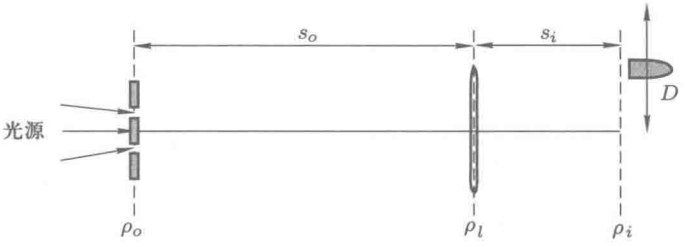


图 4.1.1 一个典型的成像系统. 有限大小的透镜用来产生物体的缩小像, 空间分辨率是有限的.

相位因子 $G(|\boldsymbol{\alpha}|,\beta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta/2)|\boldsymbol{\alpha}|^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\boldsymbol{\rho}_j-\boldsymbol{\rho}_k|^2/2c(z_j-z_k)}$. 第三个大括号里是由透镜引入的相位因子 $G(|\boldsymbol{\rho}_l|,-\frac{\omega}{cf})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cf}|\boldsymbol{\rho}_l|^2}$.

利用高斯函数的性质, (4.1.2) 式可以简化为下述形式:

$$\begin{aligned}&g(\boldsymbol{\kappa},\omega;\boldsymbol{\rho}_i,z=s_o+s_i)\\&=\frac{-\omega^2}{(2\pi c)^2 s_o s_i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(s_o+s_i)}\,G(|\boldsymbol{\rho}_i|,\frac{\omega}{cs_i})\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\,A(\boldsymbol{\rho}_o)\,G(|\boldsymbol{\rho}_o|,\frac{\omega}{cs_o})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_o}\\&\times\int_{lens}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\,G(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{\omega}{c}[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}-\frac{1}{f}])\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{s_i})\cdot\boldsymbol{\rho}_l}\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

由高斯薄透镜成像公式 (4.1.1) 可确定成像面. 所以对于半径为 R 的有限尺寸透镜, (4.1.3) 式中的第二重积分简化得到该成像系统的点扩展函数,

$$\mathrm{somb}(x)=\frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x}\quad\text{其中}\quad x=[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}|]$$

其中 $\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数, $m=s_i/s_o$ 是成像系统的放大率.

将 (4.1.3) 式中的结果代入到 (4.1.1) 式, 可以得到经典的光场自相关, 也称像平面的光强.

$$I(\boldsymbol{\rho}_i,z_i,t)=\langle\,E^*(\boldsymbol{\rho}_i,z_i,t)\,E(\boldsymbol{\rho}_i,z_i,t)\,\rangle\tag{4.1.4}$$

其中 $\langle\cdots\rangle$ 表示系综平均. 通常假设经典成像中使用单色光.

情形 (I): 非相干成像

当 $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}'$ 时, 系综平均 $\langle E^*(\boldsymbol{\kappa},\omega)\,E(\boldsymbol{\kappa}',\omega)\rangle$ 不为零. 取 $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}'$ 和 $E(\boldsymbol{\kappa})\sim$ 常数, 对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}$ 积分得到

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{\rho}_o-\boldsymbol{\rho}_o')}\simeq\delta(\boldsymbol{\rho}_o-\boldsymbol{\rho}_o')$$

像为:

$$I(\boldsymbol{\rho}_i)\propto\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\,|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2\,\mathrm{somb}^2[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}|]\tag{4.1.5}$$

于是我们得到放大因子为 m 的非相干成像. 它是物体孔径函数的模平方和点扩展函数的模平方的卷积. 像的空间分辨率因而由 somb^2 函数的宽度决定.

情形 (II): 相干成像

假设物体被相干波包照亮, 相干波包是大量相干平面波线性叠加的结果. 我们将每个模式的波矢写成矢量求和的形式: $\boldsymbol{k} = k_z\hat{z_0} + \boldsymbol{\kappa}$, 其中 $k_z\hat{z_0}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 分别是纵向和横向波矢. 波包的横向部分近似成

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, E(\boldsymbol{\kappa})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} \simeq \mathcal{F}_{\boldsymbol{\rho}_o}\{E(\boldsymbol{\kappa})\}$$

进一步假设 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\rho}_o}\{E(\boldsymbol{\kappa})\} \sim$ 是常数. 也就是假设光均匀照亮整个开孔. 因此像平面上的强度分布为

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) \propto \Big| \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\, A(\boldsymbol{\rho}_o)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cs_o}|\boldsymbol{\rho}_o|^2} \mathrm{somb}\big[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}|\big] \Big|^2 \tag{4.1.6}$$

于是我们得到放大因子为 m 的相干成像. 它是物体孔径函数乘以菲涅耳相位因子后与点扩展函数卷积的模平方.

当 $s_i < s_o$ 并且 $s_o > f$ 时, (4.1.5) 式和 (4.1.6) 式给出倒立的缩小的实像. 对于两种情况, somb 函数越窄, 成像的空间分辨率就越高. 所以, 使用短波长可以提高成像系统的空间分辨率.

点扩展函数决定了像平面斑点的大小进而决定了成像装置的空间分辨率. 所以我们不能得到无限缩小的像. 人们普遍采用瑞利判据来判断成像的空间分辨率. 假设物平面上有两个近邻的点, 当其中一个的点扩展函数的中心落在另一个点扩展函数的第一个极小值处, 这时该邻近两物点认为是不可区分的. 图 4.1.2 定性地描述了这种情况. 下面我们进行定量计算. 我们考虑在物平面 $= 0$ 处有一点状物. 对理想的成像系统, 此点在像平面 $= 0$ 处会有一唯一对应像点, 即两者间有点对点关系. 然而实际情况中我们必须考虑点对斑的关系. 像平面上斑点是由点扩展函数大小所决定的. 瑞利判据用点扩展函数的第一个极小来定义点扩展函数的大小, 即:

$$\frac{R\omega}{c\, s_i}\Delta|\boldsymbol{\rho}_i| \simeq 3.83 \quad \text{或} \quad \Delta|\boldsymbol{\rho}_i| \simeq 1.22\frac{\pi c\, s_i}{R\omega} \tag{4.1.7}$$

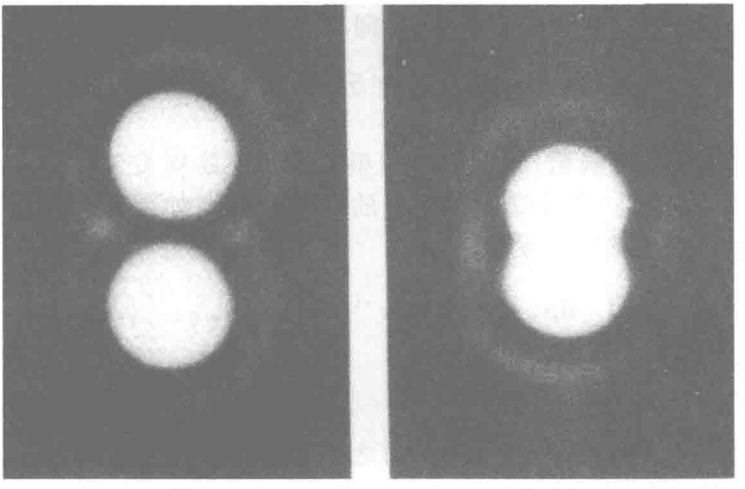
现在我们再考虑物平面上另一个邻近点 $\boldsymbol{\rho}_o = \boldsymbol{a}$. 为了区分 $\boldsymbol{\rho}_o = \boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_o = 0$ 的像, $m|\boldsymbol{a}|$ 的值不能比 $\Delta|\boldsymbol{\rho}_i|$ 小. 由此得到:

$$m|\boldsymbol{a}| \geqslant \frac{\pi c\, s_i}{R\omega}$$

其中 $m = |\boldsymbol{\rho}_i|/|\boldsymbol{\rho}_o| = s_i/s_o$ 是成像的放大因子. 于是我们得到最小可分辨的角度或者说能分辨的角度极值:

$$\Delta\theta_{\min} \simeq \frac{|\boldsymbol{a}|}{s_o} \simeq 1.22\,\frac{\pi c}{R\omega} = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \tag{4.1.8}$$

其中 D 是透镜系统的直径. 从 (4.1.3) 式和 (4.1.8) 式可以明显看出, 使用大尺寸的成像透镜和短波长的光源将导致更窄的点扩展函数及更小的最小可区分角度, 也就是更高的空间分辨率. 为了提高空间分辨率, 光刻工艺中一直在努力寻找更短的波长. 然而, 由于受透镜截止波长的限制, 波长不能太短, 否则透镜就不能工作了.



(a) (b)

图 4.1.2 (a) 没有重叠的像. 两个邻近点物的像可区分. (b) 有重叠的像. 点扩展函数的中心落入另一个点扩展函数的第一个极小处. 按照瑞利判据, 这种情况被定义为不可区分.

当成像系统的直径和光源波长固定后, (4.1.3) 式和 (4.1.8) 式实际给出了该成像系统衍射的极限分辨率. 衍射极限在经典光学和量子力学里都是基本概念. 如果违背了衍射极限, 那么就一定是违背了不确定度关系.

4.2 透镜的傅里叶变换

3.1 小节描述了傅里叶变换的光学实现方法, 在这里我们继续作一些类似的计算. 图 3.1.2 示意性地给出这种简单的傅里叶变换装置, 即由物和凸透镜构成. 物位于凸透镜前焦面, 被准直性很好的光照射. 衍射光

经由透镜收集和汇聚后在其后焦面形成远场衍射图案. 我们将会发现该衍射图案就是孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 的傅里叶变换. 如果取 $s_o = f$ 和 $s_i = f$ 并完成 (4.1.3) 式中的积分, 图 4.0.1 就变成图 3.1.2 了. 我们先对透镜积分. 为了简化数学计算, 假设透镜的积分限是无穷. 和成像分辨率的计算不同, 这次计算的目的是找出傅里叶变换关系, 所以透镜可以作无穷大近似. 使用 (3.2.11) 式中所列高斯函数的性质, (4.1.3) 式中对透镜的积分将给出 $\boldsymbol{\rho}_o$ 的函数. 后面继续对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o$ 进行积分:

$$\int_{\text{lens}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \, G(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{cf}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{f}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{f})\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \propto C\, G(|\boldsymbol{\rho}_o|, -\frac{\omega}{cf}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{cf}\boldsymbol{\rho}_o\cdot\boldsymbol{\rho}}$$

所有常数包括相位因子 $G(|\boldsymbol{\rho}|, -\frac{\omega}{cf})$ 都归并到 C. 将这一结果代入到 (4.1.3) 式中, 并假设照射光束准直性很好, 即 $\boldsymbol{\kappa} = 0$, 我们对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o$ 求积分得到:

$$E(\boldsymbol{\rho}) \propto \int_{\text{obj}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A(\boldsymbol{\rho}_o) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{cf}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} = \mathcal{F}_{(\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{\rho}}{f})}\{A(\boldsymbol{\rho}_o)\} \tag{4.2.1}$$

它就是物体孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 的傅里叶变换, 共轭变量为 $(\omega/c)(\boldsymbol{\rho}/f)$. $(\omega/c)(\boldsymbol{\rho}/f)$ 实际上是透镜后焦面上的横向波矢. 如果照明的准直光束 $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$, 远场衍射图案会发生平移:

$$E(\boldsymbol{\rho}) \propto \int_{\text{obj}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A(\boldsymbol{\rho}_o) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{cf}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} = \mathcal{F}_{(\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{\rho}}{f}-\boldsymbol{\kappa})}\{A(\boldsymbol{\rho}_o)\} \tag{4.2.2}$$

本章小结

经典成像给出物平面和像平面之间存在的点对点关系. 任何从物平面上某个点发出的辐射都将汇聚到像平面上的唯一一个点. 这种点对点的成像关系是光场相长–相消干涉的结果. 物平面上的点物辐射出来的光波经历等光程传播后, 在像平面上某点发生相长干涉. 而经过不等光程传播的光将在像平面上其它点发生相消干涉. 成像透镜使得相长–相消干涉成为可能.

本章是另一个熟悉经典叠加原理很好的练习. 这个练习并不是只适用于成像. 原则上, 我们可以计算任一和物面平行的平面上的辐射场以及光强的分布. 比如, 我们已经给出了傅里叶变换平面上的辐射场分布 $E(\boldsymbol{\rho})$, 它是物体孔径函数的傅里叶变换.

本章得出关于成像的重要结论有:

$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}$$

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) \propto \int_{\text{obj}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2 \, \mathrm{somb}^2[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}|]$$

和

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) \propto \left| \int_{\text{obj}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A(\boldsymbol{\rho}_o) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cs_o}|\boldsymbol{\rho}_o|^2} \operatorname{somb}\left[\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}\left|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right|\right] \right|^2$$

推荐读物

[1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts & Company, Englewood, 2005.

[2] E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley, 2001.

第 5 章

光的一阶相干性

在光的经典理论中, 引入一阶相干的概念是为了对时间延迟或空间分离的电磁波之间的干涉进行定量处理. 当干涉条纹出现 100% 的调制时, 我们定义参与叠加的辐射场一阶相干. 若没有出现可以观察到的干涉条纹, 则定义叠加的辐射场为一阶不相干. 如果干涉条纹的调制小于 100% 但大于 0, 那么称叠加的辐射场具有部分相干性. 一阶相干度越高, 我们看到的干涉可见度就越高. 虽然这里也定义为 "相干性", 但是无论是一阶空间相干或是一阶时间相干, 与我们在先前章节所讨论的光源的相干性都是不同的概念. 对于频谱带宽为 $\Delta\omega$ 和空间频率为 $\Delta\boldsymbol{\kappa}$ 或 Δk_x (Δk_y) 的激光光源和热光光源, 它们通过干涉仪出现的干涉现象是相同的, 所以通过测量一阶相干度是不能区分激光和热光的. 虽然说激光是相干光, 但是当延迟超过一定限度后我们也观察不到干涉现象. 同样的, 虽然热光被认为是非相干光, 但是在 "白光" 条件 (干涉仪两臂取近似相等光程时) 我们仍然可以观察到干涉条纹. 希望读者能够特别注意这一点.

为了引入一阶相干度的概念, 我们考虑如图 5.0.1 所示的典型杨氏干涉实验. 上、下两个小孔 P_1 和 P_2 分别位于坐标 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 处. 我们利用一个点状探测器在远场观测平面 Σ 上的扫描或利用由多个点状探测器组成的阵列进行探测. 光源是遥远星球发出的光, 我们既可以将它处理为点光源也可以将它处理为具有一定角宽度的扩展光源. 光源、小孔和观测面相对于光轴对称分布, 如图 5.0.1 所示.

时空坐标点 $P_1(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $P_2(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处的辐射场经过一定的传播时间后在观测平面 Σ 内的各点进行叠加, 从而形成干涉条纹. 能否观察到干涉是由辐射场的内禀属性决定的: (1) 能够观察到干涉所允许的最大光学延时由光场的频谱带宽决定, 带宽 $\Delta\omega$ 越宽, 两叠加光场之间允许的时

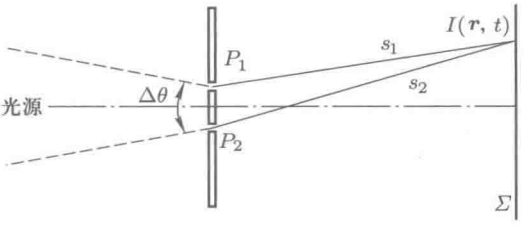


图 5.0.1　杨氏双缝实验示意图, 用来测量远处点光源发出辐射的时间相干性.

间延迟越短; (2) 两叠加光场之间的最大横向空间间距由空间频率带宽 $|\Delta\boldsymbol{\kappa}|$ 决定, 带宽 $|\Delta\boldsymbol{\kappa}|$ 越宽, 两光场间允许的空间间距越小. 上述两类干涉现象 (1) 和 (2) 分别定义了辐射场的时间相干性和空间相干性. 虽然常用非相干光和相干光来区分热光和激光, 但是时间相干性和空间相干性的概念对二者都是适用的.

时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处的光强期望值 $I(\boldsymbol{r},t)$ 为:

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle \left|E(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \rangle = \langle \left| E_1(\boldsymbol{r},t) + E_2(\boldsymbol{r},t) \right|^2 \rangle \tag{5.0.1}$$

其中 $E_1(\boldsymbol{r},t)$ 和 $E_2(\boldsymbol{r},t)$ 分别指从上下两小孔 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 处传播到观测面 Σ 上时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 的光场. 显然, $E(\boldsymbol{r},t)$ 是 $E_1(\boldsymbol{r},t)$ 和 $E_2(\boldsymbol{r},t)$ 的线性叠加. 出于习惯, 我们通常把 $E_1(\boldsymbol{r},t)$ 和 $E_2(\boldsymbol{r},t)$ 形式上分别表达为由在早先时刻 t_1 通过上小孔 $\boldsymbol{r}_1$ 的光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$, 和在早先时刻 t_2 通过下小孔 $\boldsymbol{r}_2$ 的光场,

$$\begin{aligned} E_j(\boldsymbol{r},t) &= E[(\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j), t] = E(\boldsymbol{r}_j, t - \frac{s_j}{c}) \\ &\equiv E(\boldsymbol{r}_j, t_j) \end{aligned} \tag{5.0.2}$$

其中 $j = 1, 2$, $t_j \equiv t - s_j/c$ (真空中), s_1 (s_2) 表示上 (下) 小孔到探测器的光程. 注意, 虽然我们形式上把场写成为 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 这并不意味着在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的测量. (5.0.1) 式也相应地在形式上表达为

$$\begin{aligned} &\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle = \langle \left|E(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \rangle = \langle \left| E(\boldsymbol{r}_1,t_1) + E(\boldsymbol{r}_2,t_2) \right|^2 \rangle \\ &= \langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle + \langle E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \\ &\quad + \langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle + \langle E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \end{aligned} \tag{5.0.3}$$

其中 $t_1 = t - s_1/c$, $t_2 = t - s_2/c$ 是观察时刻 t 之前上下两小孔 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 辐射对应的时刻. 我们可以看出 (5.0.3) 式中的前两项分别对应时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 两小孔处的光场强度. 第三和第四项包含了时空点 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ (或

$(\boldsymbol{r}_1,t_1))$ 处光场和时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ (或 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$) 处共轭光场的互乘积, 它们是观测面上干涉图案的来源. 光探测器的光电流随扫描位置呈现正弦变化.

瞬时干涉图样 $I(\boldsymbol{r},t)$ 会不时地涨落, 其大小总是在 (5.0.3) 式所示的期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 附近. 我们在 1.4 节已经讨论过, $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 的计算要遍历所有可能光场取值. 我们将 (5.0.3) 式的 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 分为两部分:

(1) $\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle$ 和 $\langle E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$;

(2) $\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$ 和 $\langle E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$

我们定义

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)&\equiv\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\\ \Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)&\equiv\langle E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\end{aligned}\tag{5.0.4}$$

及

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&\equiv\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\\ \Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)&\equiv\langle E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\end{aligned}\tag{5.0.5}$$

分别为自相干函数和互相干函数. 显然有

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\Gamma^*(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)\tag{5.0.6}$$

与经典统计学联系起来看, (5.0.4) 式的自相干函数和 (5.0.5) 式的互相干函数分别对应于光场的自关联函数和互关联函数. 物理上来说, $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 决定了干涉的可见度, 这在后面会进行定量描述. (5.0.4) 式中定义的自相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_j,t_j)$ $(j=1,2)$ 代表强度期望值或期望函数, 这在 1.4 节中已经讨论过. 利用互相干函数和自相干函数, (5.0.3) 式中 $I(\boldsymbol{r},t)$ 的期望值可以写为

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\tag{5.0.7}$$

其中我们引入了简化符号 $\Gamma_{11}=\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)$, $\Gamma_{22}=\Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)$, $\Gamma_{12}=\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和 $\Gamma_{21}=\Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)$.

现在我们引入归一化的复一阶相干度, 将 (5.0.7) 式写为下面的形式

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle&=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+2\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}\;Re\;\gamma_{12}\\&=\langle I_1\rangle+\langle I_2\rangle+2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}\,|\gamma_{12}|\cos(\omega\tau)\end{aligned}\tag{5.0.8}$$

其中 $\tau=\tau_1-\tau_2=(t_1-t_2)-(z_1-z_2)/c=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$. (5.0.8) 式中我们定义了归一化的复数一阶相干度

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\equiv\frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)}{\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)}}\tag{5.0.9}$$

$$= \frac{\langle\ E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\ \rangle}{\sqrt{\langle\ |E(\boldsymbol{r}_1,t_1)|^2\ \rangle\langle\ |E(\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2\rangle}}$$

其中 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\neq 0$ 并且 $\Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)\neq 0$. 很容易发现

$$0\leqslant|\gamma_{12}|\leqslant 1 \tag{5.0.10}$$

所以 $|\gamma_{12}|$ 和干涉条纹可见度的关系是

$$V\equiv\frac{I_{\mathrm{MAX}}-I_{\mathrm{MIN}}}{I_{\mathrm{MAX}}+I_{\mathrm{MIN}}}=\frac{2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}}{\langle I_1\rangle+\langle I_2\rangle}\,|\gamma_{12}| \tag{5.0.11}$$

对干涉仪进行优化时, 人们往往设计 $\langle I_1\rangle=\langle I_2\rangle=I_0/2$, 此时 $|\gamma_{12}|$ 与干涉可见度完全等价:

$$V=|\gamma_{12}|$$

所以观测面上光强的期望值为

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle=I_0\left[1+V\cos(\omega\tau)\right] \tag{5.0.12}$$

我们根据 $|\gamma_{12}|$ 的值来定义时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处的辐射场相干、部分相干还是不相干:

$$\begin{array}{ccc} \text{相干场} & \text{若} & |\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|=1 \\ \text{部分相干场} & \text{若} & 0<|\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|<1 \\ \text{不相干场} & \text{若} & |\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|=0 \end{array}$$

在接下来的两节中, 我们就几个简化的模型计算并讨论互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 以及复的一阶相干度 $\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 这些模型是根据时间和空间相干性选取的.

5.1 一阶时间相干性

本节中我们讨论光场的一阶时间相干性. 考虑图 5.1.1 中的杨氏双缝实验. 光源是一个远处的点光源 $\boldsymbol{r}=0$, 它包含了大量不相干或相干的子源.

5.1.1 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$: 混沌热光

与 1.4 节中的热辐射模型类似, 我们假设 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 都包含了大量的不相干的子电场, 它们来自大量独立的随机辐射的子源. $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的互相干函数应为

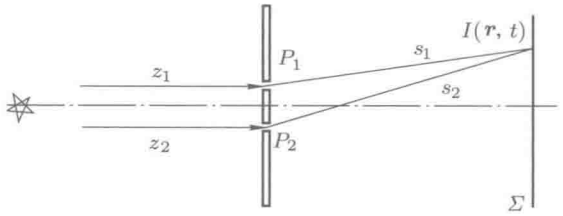


图 5.1.1 杨氏双缝实验示意图, 用来测量远处点光源发出辐射的时间相干性.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\Big\langle\sum_{j,k}\int \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'\, a_j(\omega)a_k(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{[(\omega t_1-\omega' t_2)-[k(\omega)z_1-k'(\omega')z_2]]\}}\Big\rangle\\
&\simeq\sum_j\int \mathrm{d}\omega\, a_j^2(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega(t_1-t_2)-k(\omega)(z_1-z_2)]} \qquad (5.1.1)\\
&\simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathcal{F}_\tau\Big\{\sum_j a_j^2(\nu)\Big\}
\end{aligned}
$$

其中, 期望值运算或系综平均考虑了子场求和中的所有可能相位. 在 (5.1.1) 式中, 我们仍定义 $\tau_1=t_1-z_1/c$、$\tau_2=t_2-z_2/c$ 及 $\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$. 考虑一个简化情形即所有分电场的频谱分布 $a^2(\omega)$ 都相同, 此时很容易得出如下结论: 为了使得互相干函数 Γ_{12} 不为零, 即干涉具有一定可见度, 其时间延迟 τ 和频谱带宽 $\Delta\omega$ 必定满足 $\Delta\omega\,\tau\leqslant 2\pi$.

计算互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 也可以直接将 $E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的傅里叶变换形式即 (1.2.15) 式, 代入 (5.0.5) 式,

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0(t_1-t_2)-k_0(z_1-z_2)]}\\
&\quad\times\Big\langle\,\mathcal{F}^*_{\tau_1}\Big\{\sum_j a_j(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j(\nu)}\Big\}\,\mathcal{F}_{\tau_2}\Big\{\sum_j a_j(\nu')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu')}\Big\}\,\Big\rangle\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_0(t_1-t_2)-k_0(z_1-z_2)]}\\
&\quad\times\Big\langle\int\!\!\int \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\nu'\sum_{j,k} a_j(\nu)\,a_k(\nu')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_k(\nu')]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu\tau_1-\nu'\tau_2)}\,\Big\rangle\\
&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathcal{F}_\tau\Big\{\sum_j a_j^2(\nu)\Big\} \qquad (5.1.2)
\end{aligned}
$$

其中, 求期望值运算中我们还是要考虑随机相对相位 $\varphi_j(\nu)-\varphi_k(\nu')$ 的所有可能取值, 这样积分只能保留 $\nu=\nu'$ 和 $j=k$ 的对角项. 当互相干函数 Γ_{12} 不为零即有明显干涉现象时, 我们同样发现时间延迟 τ 和频谱带宽 $\Delta\omega$ 一定满足关系式 $\Delta\omega\,\tau\leqslant 2\pi$.

利用 (5.1.1) 式或 (5.1.2) 式的结果, 只保留非零项, 光强期望值 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$ 可以写成如下形式:

$$\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle \simeq \sum_j \int \mathrm{d}\omega \left|E_j(\omega;z_1,t_1)+E_j(\omega;z_2,t_2)\right|^2 \tag{5.1.3}$$

(5.1.3) 式表明观测到的干涉图样是大量各自独立的子干涉图样 $I_j(\omega;\boldsymbol{r},t)$ 之和, 而子干涉图样 $I_j(\omega;\boldsymbol{r},t)$ 是由第 j 个子源的 ω 傅里叶模式产生的. 在 $\tau=0$ 附近, 所有子干涉图样几乎重合, 这时候很容易观察到光强的强度调制 ($V(0)\cong 100\%$). 当点探测器远离 $\tau=0$ 的位置, 即 $|\tau|$ 值增大时, 子干涉图样之间相位差增加, 不再重合. 错开了的子干涉图样使得观测面上光强分布趋于均匀, 干涉可见度由 100% 逐渐降为 0, 意味着观测面光强分布成为常数. 干涉可见度 $V(\tau)$ 由最大相位差 $\Delta\omega\tau$ 决定, 其中 $\Delta\omega=\omega_{\max}-\omega_{\min}$ 是光场频带宽度. 如果 $\Delta\omega\tau\ll 2\pi$, 即相位差没有大到足以使不同 ω 的子干涉图样明显错开, 我们仍然可以观察到干涉. 然而当相位差继续增大时, 这些傅里叶模式的子干涉图样会明显分开, 干涉的可见度降到了零. 换句话说, 对一个特定的频谱带宽 $\Delta\omega$, 若时间延迟 $\tau\ll 2\pi/\Delta\omega$, 则称 t 和 $t+\tau$ 处的光场时间相干, 否则定义为时间不相干, 也就是不能观察到干涉.

从 (5.1.3) 式中我们还可以得出结论: 每个子源的每个傅里叶模式只与它自身干涉. 然而不可忽略的是: (5.1.3) 式实际上是所有子源的所有傅里叶模式间干涉的结果, 只不过那些不同子源的不同傅里叶模式之间发生了相消干涉. 正是这种相消干涉才有了 (5.1.1) 式和 (5.1.2) 式, 所以这才有了 "每个子源的每个傅里叶模式只与它自身干涉" 的说法. 在下面的讨论中我们应该始终牢记这一点.

只有 "光场遍历所有可能取值" 时才会发生完全的干涉相消. 一次测量一般不会出现完全相消, 干涉图样会以一种不确定的方式在 (5.1.3) 式的期望值附近随机涨落. 对于完美的干涉仪, 这种涨落可能是观察到的主要现象.

概括地说, 对于远场的点热光源, 互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是时间延迟 $\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$ 的函数, 也就是说热光场的时间关联函数不随时间变化, 即对于任意时刻 t 都相同. 这正是稳态场的特性. 稳态场的时间互关联函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 通常写为 $\Gamma_{12}(\tau)$. 与 (2.1.1) 式中的热辐射强度期望值相比较, 我们发现 $\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle=\Gamma_{11}(0)$ 及 $\langle I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle=\Gamma_{22}(0)$. 图 5.0.1 中杨氏双缝实验观测面上的光强期望函数

就是

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle &= \Gamma_{11}(0)+\Gamma_{22}(0)+2\,\mathrm{Re}\,\Gamma_{12}(\tau) \\ &= \Gamma_{11}(0)+\Gamma_{22}(0)+2\sqrt{\Gamma_{11}(0)\,\Gamma_{22}(0)}\ \mathrm{Re}\ \gamma_{12}(\tau)\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

其中 $\Gamma_{11}(0)$ 与 $\Gamma_{22}(0)$ 由 (2.1.1) 式计算得到, 而 $\Gamma_{12}(\tau)$ 由 (5.1.2) 式计算得到. 从 (5.1.4) 式和 (5.1.2) 式可以看出最大干涉发生在 $\tau=0$ 附近. $\tau=2\pi/\Delta\omega$ 时干涉开始变得不可见. 在 (5.1.4) 式中归一化的复一阶时间相干度定义为

$$\gamma_{12}(\tau)\equiv\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)]^{\frac{1}{2}}\,[\Gamma_{22}(0)]^{\frac{1}{2}}}$$

时间延迟

$$\tau=\frac{2\pi}{\Delta\omega}\equiv\tau_c \tag{5.1.5}$$

定义为光场的相干时间, 随之, $c\tau_c$ 定义为光场的相干长度. 当 $|\gamma(\tau)|=1$ 时, 对应于 $\tau\ll\tau_c$, 称相隔 τ 的光场为时间相干; 当 $0<|\gamma(\tau)|<1$ 时, 对应于 $0<\tau<\tau_c$, 称为时间上部分相干; 而 $|\gamma(\tau)|=0$ 时, 对应于 $\tau\geqslant\tau_c$, 称为时间不相干. 因此当我们说一个热辐射源具有 τ_c 的相干时间或 $c\tau_c$ 的相干长度时, 意思是说我们能够观察到时间延迟为 $\tau<\tau_c$ 的任意光场之间的一阶干涉.

5.1.2 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$: 大量的完全重叠及部分重叠的波包

与 1.4 节的热辐射模型类似, 我们假设所测辐射场是由大量子源辐射出的波包叠加的结果. 在这个模型里, 子源独立地随机辐射, 然而, 第 j 组所有傅里叶模式则由第 j 个子源于时间 t_{0j} 同时或同相产生. 当 $a_j(\nu)$ 是一个对于频率有明确定义的函数时, 从第 j 个子源产生的傅里叶模式的相干叠加就会得到一个在时空上有明确定义的波包. 我们可以用参量 t_{0j} 来标记第 j 个子源产生的波包. 在这个模型里, 我们假设位于时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 的光子探测事件就是对这些大量随机分布的波包的测量, 而光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 则是 N 个完全重叠或部分重叠的波包叠加的结果. 将 (1.2.7) 式, 即 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的形式积分波包, 代入 $\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$, 互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 可写为

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \Big\langle\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_{1j}}\,\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_{2k}}\,\mathcal{F}_{\tau_{2k}}\{a(\nu)\}\Big\rangle \\ &= \Big\langle\sum_{j=k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\Big\rangle\end{aligned}$$

$$+\langle \sum_{j\neq k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0[(t_{2k}-t_{1j})+\tau]}\, \mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\, \mathcal{F}_{\tau_{2k}}\{a(\nu)\}\rangle \quad (5.1.6)$$

其中以 j 和 k 标示第 j 和第 k 个波包. 我们还定义了 $\tau_{1j}=(t-t_{0j})-s_1/c-z_1/c=\tau_1-t_{0j}$、$\tau_{2k}=(t-t_{0k})-s_2/c-z_2/c=\tau_2-t_{0k}$ 及 $\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$. 为了方便起见, 我们将这个求和拆为两部分. 如果波包是随机分布的, 即初始生成时间 t_{0j} 和 t_{0k} 取任意值, 当取叠加中所有 $t_{0j}-t_{0k}$ 的可能取值时, 求和的第二部分 $(j\neq k)$ 就消失了. 这一结果表明只有波包与其自身的干涉才能被观察到. 而导致 "两个不同波包之间不能干涉" 的物理机理, 却正是大量的不同波包之间的叠加或干涉, 只要这些波包之间的相位差随机地取遍了从 0 到 2π 的所有可能值.

采用与 1.4 节相同的处理方法, 现在我们将这个求和近似为一个 t_0 的积分. 互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 近似为

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\sum_j \mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\rangle\\ &\simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\int_\infty \mathrm{d}t_0\ \mathcal{F}^*_{(\tau_1-t_0)}\{a(\nu)\}\ \mathcal{F}_{(\tau_2-t_0)}\{a(\nu)\}\\ &=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\,\mathcal{F}_\tau\{a^2(\nu)\}\end{aligned} \quad (5.1.7)$$

其中

$$\tau_1=(t-t_0)-(z_1+s_1)/c$$
$$\tau_2=(t-t_0)-(z_2+s_2)/c$$
$$\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$$

两个波包, $\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}$ 和它的延迟共轭项 $\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}$ 在时空上的重叠程度量化地决定了互相干函数的取值以及由互相干函数推断出的干涉可见度. 这个积分在 $\tau=\tau_1-\tau_2=0$ 时有一个最大值. 当 $\tau\geqslant 2\pi/\Delta\omega$ 时辐射场变为一阶不相干. 同样,

$$\tau_c=2\pi/\Delta\omega$$

称为光场的相干时间. 相干时间其实正是波包的时间宽度.

将 (2.1.11) 式和 (5.1.7) 式代入 $\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle$, 我们得到观测面上的光强期望函数为,

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle \simeq \int \mathrm{d}t_0 \Big\{&\big|\mathcal{F}_{\tau_1-t_0}\{a(\nu)\}\big|^2+\big|\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\{a(\nu)\}\big|^2\\ &+2\,\mathrm{Re}\big[\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_0}\{a(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\big]\Big\}\end{aligned} \quad (5.1.8)$$

(5.1.8) 式表示大量单独的子干涉图样的累加, 每一个单独的子干涉图样对应于一个单独的波包. 可以由 (5.1.8) 式再次得出每个波包只与其自身

干涉的结论. 由于共同的相对延迟 τ, 所有子干涉图样构成同样的正弦调制函数. 完全相同的子干涉图样 $I_j(\boldsymbol{r}, t-t_{0j})$ 在观测面上累加. 对于大量随机且连续分布 t_{0j} 的子图样, 最终测得的干涉图样与前面讨论过的混沌热光模型相同.

(5.1.7) 式中关于 t_0 的积分数学上等价于波包的时间积分, 也就是等价于波包的自关联或自卷积:

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau}\int_\infty \mathrm{d}t\ \mathcal{F}^*_{\tau_1}\{E(\nu)\}\ \mathcal{F}_{\tau_2}\{E(\nu)\}\\ &= \int_\infty \mathrm{d}t'\, E^*(t')\,E(t'-\tau)\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

利用 Wiener-Khintchine 定理, 我们得到

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \int_\infty \mathrm{d}t\, E^*(t)\,E(t-\tau) = \int_\infty \mathrm{d}\nu\,|E(\nu)|^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau}$$

5.1.3 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$: 一个波包

我们假设在时间段 $\Delta t \geqslant \tau_c$ 内只测量到一个波包, 这种实验条件可利用一个单光子水平的弱光源或一个激光脉冲来实现. 不论哪种情形, 波包经路径 s_1 (通过小孔 P_1) 及路径 s_2 (通过小孔 P_2) 被分为两部分后在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处叠加. 我们进一步假设用一台理想的点探测器来监测光强 $I(\boldsymbol{r},t)$, 经典理论允许光探测器对任意能量水平的光做出响应, 即使光所携带的能量小于一个光子. $(\boldsymbol{r},t)$ 处的瞬时光强计算为

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{r},t) &= \left|\mathcal{F}_{(\tau_1-t_0)}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_1-t_0)} + \mathcal{F}_{(\tau_2-t_0)}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_2-t_0)}\right|^2\\ &= \left|\mathcal{F}_{(\tau_1-t_0)}\{a(\nu)\}\right|^2 + \left|\mathcal{F}_{(\tau_2-t_0)}\{a(\nu)\}\right|^2\\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}^*_{(\tau_1-t_0)}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{(\tau_2-t_0)}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\right]\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

其中 $a(\nu)$ 仍是波包的频率为 ω 的傅里叶模式的振幅, $\tau_1 = t_1 - z_1/c$、$\tau_2 = t_2 - z_2/c$. t_0 是波包的初始生成时间. 从 (5.1.10) 式容易看出当两个波包在观测点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处重叠时, 是有可能观察到干涉图样的. 最大相长干涉发生于两个波包完全重叠时, 即 $\tau = \tau_1 - \tau_2 \sim 0$. 对于 $\tau > 2\pi/\Delta\omega$ 的情况, 两个傅里叶变换不能同时取非零值, (5.1.10) 式的第三项消失, 因而当时间延迟大于波包的时间宽度时, 我们观察不到干涉. 显然, 光场的相干时间等于波包的宽度, $\tau_c = 2\pi/\Delta\omega$.

下面, 我们考虑涉及大量波包的测量情形, 分别就单光子波包和相干激光脉冲进行计算.

情况 (I): 单光子水平的波包

虽然光的麦克斯韦电磁波理论并不排除一个在单光子水平的波包也会发生干涉的可能性, 但是如果测量只涉及一个光子, 那么我们除了能够在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 测量到一次光电转换外, 其它的信息都无从得知. 因此在这种情况下, 我们需要对大量波包进行长时间累计测量. 假设我们有无数独立的原子跃迁, 它们辐射出大量不交叠的波包, 每个波包的初始生成时间都不相同, 记为 t_{0j}. 每个波包引发的光电流 $i_j(t)$ 会给电子积分器持续充电. 经过一个一个波包的累积, 光电流持续对积分器充电后能够达到一个可观测水平. 一阶时间互相干函数应为

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \langle \sum_j \int_{\Delta T} \mathrm{d}t\, \mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau} \rangle \\ &\simeq N\int_{\Delta T} \mathrm{d}t\, [\mathcal{F}^*_{\tau_1}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2}\{a(\nu)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}] \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

其中 $a_j(\nu)$ 是第 j 个波包的 ω 频率傅里叶模式的振幅,

$\tau_{1j} = \tau_1 - t_{0j} = (t-t_{0j}) - (s_1+z_1)/c,$

$\tau_{2j} = \tau_2 - t_{0j} = (t-t_{0j}) - (s_2+z_2)/c,$

$\tau = \tau_{1j} - \tau_{2j} = (s_2-s_1)/c + (z_2-z_1)/c,$

t_{0j} 是第 j 个波包的初始生成时间. 与通常一样, 在 (5.1.11) 式中我们假定测量中涉及的所有波包具有相同的 $a(\omega)$ 分布. ΔT 足够长时, 一阶时间相干度可以近似为:

$$\gamma_{12}(\tau) \simeq \mathcal{F}_\tau\{a^2(\nu)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau} \tag{5.1.12}$$

在 (5.1.12) 式中, 对时间积分的计算既可以使用与 (2.1.6) 式类似的方法, 也可以采用 Wiener-Khintchine 定理.

有趣的是我们发现这种情形下光场的一阶相干时间或相干长度与前面讨论过的混沌热光模型一样

$$\tau_c = 2\pi/\Delta\omega$$

尽管这里的干涉机理是在一分为二的波包之间引入时间延迟后的重叠-非重叠, 但它与混沌热光模型的干涉机制有本质的不同.

观测面上测到的光强应为

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle &= \langle \sum_j \int_{\Delta T} \mathrm{d}t \Big\{ \big|\mathcal{F}_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\big|^2 + \big|\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\big|^2 \\ &\quad +2\mathrm{Re}\,[\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}]\Big\}\rangle \\ &\simeq I_0[1+\mathcal{F}_\tau\{a^2(\nu)\}\cos(\omega_0\tau)\,] \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

其中 I_0 是常数, 对应观测面上的平均光强. (5.1.13) 式显示了一个从可实现的物理测量过程中观察到的干涉图样. 容易看出最终被观察到的干涉图样是大量全同子干涉图样的累加, 每个子干涉图样由一个波包产生. 在经典理论中一个单光子波包与其自身干涉并不奇怪, 因为经典电磁波理论允许只携带一个光子能量的波包同时从杨氏双孔干涉中的上下两孔通过.

到这里, 也许人们会自然有一个问题: "每个波包产生一个子干涉图样" 究竟是什么意思呢? 就像我们已经提到过的, 如果测量过程只涉及一个光子, 那么除了在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 发生的一次光电转换事件外, 测量不会给出任何有意义的信息. 这一困惑其实源于对经典理论和量子理论语言及概念的混用. 在经典理论中, 如我们先前强调的, 一个波包所携带的能量没有下限, 并且引发一次光电转换事件所需的能量也没有下限. 所以在经典理论中子干涉图样指的是关于时空的光强分布 $I_j(\boldsymbol{r},t)$, 即便是第 j 个波包只携带了一个光子的能量, 也是没有问题的. 当然这与实验观测不符. 虽然光的经典电磁波理论成功地预测了一个单光子水平波包的干涉, 但是还是需要量子理论来描述对一个光子测量的物理过程. 从测量的角度看, 子干涉图样指的是一个概率分布函数 $P_j(\boldsymbol{r},t)$, 即测量第 j 个波包时, 在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处观察到一次光子的概率. 那么对于 N 个波包的累计测量就会给出坐标 $\boldsymbol{r}$ 处会发生 $NP_j(\boldsymbol{r})$ 次光子探测事件, 其中 $P_j(\boldsymbol{r})$ 是时间平均概率, 对应于第 j 个波包的时间平均光强 $\langle I_j(\boldsymbol{r},t)\rangle_{\Delta T}$. 这种概率解释与量子力学是相符的. 这种理论被称为 "半经典" 或 "半量子" 理论, 即光场被处理为经典波而测量被处理为探测光子的量子过程. 它成功地刻画了一个单光子波包的干涉现象.

情况 (II): 一个激光脉冲

一个激光脉冲是许多相干辐射子源发出的大量子电场相干叠加的结果. 一个理想的现代光强探测器有能力输出可供观测的光电流 $i(t)$ 来监测一个激光脉冲的瞬时光强 $I(\boldsymbol{r},t)$. 系综平均对一个激光脉冲的测量有实际的物理意义. 在第 1 章中, 我们曾讨论过一个相干波包光强的测量和统计 (自相干函数). 除了在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 观测的光场是经过时间延迟的两个光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的线性叠加外, 从测量统计学的角度来看, 对一个激光波包的一阶相干性测量与之没有区别. 互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 中的光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是不同时刻 $t_1=t-s_1/c$ 和 $t_2=t-s_2/c$ 的电场强度. 考虑光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的所有可能取值后, 可以得出互相干函数 $\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$ 为:

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$$

$$= \mathcal{F}^*_{\tau_1}\{A(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_2}\{A(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau} \tag{5.1.14}$$

其中 $A(\nu)=\sum_j a_j(\nu)$ 仍是 ω 频率模式的总振幅, 而 $\tau_1=t_1-z_1/c$、$\tau_2=t_2-z_2/c$、$\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c$. 我们还定义 $t_0=0$ 为脉冲的初始时间. 计算期望函数时考虑大量子源的所有子电场具有一个常数相位. 与单光子水平的波包类似, 一阶相干度是由波包的重叠-非重叠所确定. 在 $\tau\sim 0$ 附近, $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 取到其最大值, 此时我们认为光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 一阶相干; 然而当 $\tau>2\pi/\Delta\omega$ 时, 两个波包不能同时取非零值, $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=0$, 我们定义光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 一阶不相干, 尽管激光脉冲自身被认为是相干辐射. 有趣的是 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 表明了这是一个非稳场, 与激光脉冲的特性相符.

由于这个非稳特性, 我们需要注意归一化的一阶相干度函数 $\gamma_{12}(\tau_1,\tau_2)$,

$$\gamma_{12}(\tau_1,\tau_2)=\frac{\mathcal{F}^*_{\tau_1}\{A(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2}\{A(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}}{\sqrt{\left|\mathcal{F}_{\tau_1}\{A(\nu)\}\right|^2\left|\mathcal{F}_{\tau_2}\{A(\nu)\}\right|^2}} \tag{5.1.15}$$

其中

$$\left|\mathcal{F}_{\tau_1}\{A(\nu)\}\right|^2\left|\mathcal{F}_{\tau_2}\{A(\nu)\}\right|^2\neq 0$$

如果傅里叶变换是高斯函数之类的实函数, 即使两个波包仅仅略微交叠, 由 (5.1.15) 式也可得到 $|\gamma_{12}(\tau_1,\tau_2)|=1$. 这是因为用来做归一化的自相干函数 $\Gamma_{11}(\tau_1)$ 和 $\Gamma_{22}(\tau_2)$ 的乘积正好等于互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau_1,\tau_2)$. 由 (5.0.11) 式我们发现干涉条纹调制的可见度与一阶相干度 $|\gamma_{12}(\tau_1,\tau_2)|$ 大不相同. 这种情况下, 干涉可见度需要由它的定义 (5.0.11) 式来估算.

5.1.4 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$: 两个波包

假定杨氏干涉实验中从上、下小孔入射的波包分别由两个独立的原子跃迁或者两个独立的激光系统产生. 这两个波包在观测面上叠加形成一个干涉图样, 其瞬时光强为:

$$\begin{aligned}
&I(\boldsymbol{r},t)\\
&=\left|\mathcal{F}_{(\tau_1-t_{01})}\{a_1(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_1-t_{01})}+\mathcal{F}_{(\tau_2-t_{02})}\{a_2(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_2-t_{02})}\right|^2\\
&=\left|\mathcal{F}_{(\tau_1-t_{01})}\{a_1(\nu)\}\right|^2+\left|\mathcal{F}_{(\tau_2-t_{02})}\{a_2(\nu)\}\right|^2\\
&\quad+2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{F}^*_{(\tau_1-t_{01})}\{a_1(\nu)\}\mathcal{F}_{(\tau_2-t_{02})}\{a_2(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0[(t_{02}-t_{01})+\tau]}\right]
\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

这里我们用 1 来标记波包 1, 它沿着路径 s_1 传播并穿过上面的小孔. 用 2 来标记波包 2, 它沿着路径 s_2 传播并穿过下面的小孔. t_{01} 和 t_{02} 分别是两

个波包从两个独立光源辐射出来的初始时间. 从 (5.1.16) 式容易看出当两个波包在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处交叠时是有可能观察到瞬时的干涉图样.

为了计算互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 我们分两种情形讨论: 一对单光子波包和一对相干激光脉冲波包.

情况 (I): 单光子水平的两个波包

这种情况下我们测量总是要经过时间累计的. 采用上一节相同的测量方案, 我们假设每对波包产生光电流 $i_j(t)$ 持续对电子积分器充电. 经过一对对波包的累计, 光电流持续对积分器充电直到达到可观测水平. 一阶时间互相干函数应为

$$\begin{aligned}&\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\&=\langle\sum_j\int_{\Delta T}\mathrm{d}t\,\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_j}\rangle\\&=\langle\sum_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t_{02j}-t_{01j})}\int_{\Delta T}\mathrm{d}t\,[\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}]\rangle\\&\simeq 0\end{aligned}\tag{5.1.17}$$

其中第 j 对波包标记为 $1j$ 和 $2j$, 它们独立并随机地产生, 分别对应初始生成时刻 t_{01j} 和 t_{02j},

$$\begin{aligned}&\tau_{1j}=\tau_1-t_{01j}=(t-t_{01j})-(s_1+z_1)/c,\\&\tau_{2j}=\tau_2-t_{02j}=(t-t_{02j})-(s_2+z_2)/c,\\&\tau_j=\tau_{1j}-\tau_{2j}=(t_{02j}-t_{01j})+\tau,\\&\tau=(s_2-s_1)/c+(z_2-z_1)/c.\end{aligned}$$

不难看出由于 $(t_{01j}-t_{02j})$ 的平均效果, $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\simeq 0$. 每对波包产生一个带有初相位 $\omega_0(t_{02j}-t_{01j})$ 的 "瞬时" 干涉图样; 由于每一对波包的 t_{01j} 和 t_{02j} 都是随机的, 余弦函数 $\cos\{\omega_0[(t_{02j}-t_{01j})+\tau]\}$ 平均后为零. 由 (5.1.17) 式我们可以得出结论: 单光子水平的独立波包间的干涉是观察不到的.

情况 (II): 两个独立的激光脉冲

同样的, 一个理想的现代探测器有能力监测两个独立的激光波包相加后的瞬时光强 $I(\boldsymbol{r},t)$. 对于一对激光脉冲的测量, 系综平均有着完全实际的物理意义. 考虑两个独立的激光波包光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的所有可能取值, 可得互相干函数 $\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$ 为:

$$\begin{aligned}&\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\&=\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\end{aligned}$$

$$= \mathcal{F}^*_{(\tau_1-t_{01})}\{A(\nu)\}\,\mathcal{F}_{(\tau_2-t_{02})}\{A(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0[(t_{02}-t_{01})+\tau]} \tag{5.1.18}$$

其中, $A(\nu)=\sum_j a_j(\nu)$ 仍是 ω 频率模式的总振幅, t_{01} 和 t_{02} 是两个激光脉冲的初始生成时间.

容易看到: 在一选定的激光脉冲对之内, $(t_{02}-t_{01})$ 具有确定取值. 若测量在一对激光脉冲之内完成, 我们便可以观察到干涉. 实际上在 20 世纪 60 年代到 70 年代之间, 激光刚刚发明几年之后, Mandel 就在实验上证实了两个独立激光间的干涉③.

如果测量涉及大量独立的波包对的累计会怎样呢? 我们仍能观察到干涉吗? 如我们先前讨论的那样, 在这种测量中, 最终在观察面测到的干涉图样是时间平均后的大量子干涉图样的累加, 每个子干涉图样都是由一对波包产生的

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle_{\Delta T} \simeq \sum_j \int_{\Delta T} \mathrm{d}t \Big\{ &\big|\mathcal{F}_{\tau_{1j}}\{a_1(\nu)\}\big|^2 + \big|\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a_2(\nu)\}\big|^2 \\ &+ 2\,\mathrm{Re}\,\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a_1(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a_2(\nu)\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0[(t_{02j}-t_{01j})+\tau]}\Big\}\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

其中 j 标记的是第 j 对波包, 我们还假设两个波包各自通过上面的小孔, 即路径 1, 和下面的小孔, 即路径 2, 没有重叠. 如果波包对是 "锁相" 的, "锁相" 指的是强制两个激光器的所有的波包对都满足 $t_{02j}-t_{01j}=$ 常量, 因而有 $\tau_j=$ 常量 $+\tau$, 它与 j 无关, 这时所有波包对产生的子干涉图样都是相同的, 因此时间累计的观测结果就会是这些相同子干涉图样的累加. 这种涉及大量波包的时间累计的干涉是可以观察到的.

5.1.5 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$: CW 激光辐射

连续波 (CW) 激光辐射可能含有一个腔模, 几个腔模, 或者很多个腔模, 我们用 j 标记第 j 个腔模, 其中心频率是 ω_{0j}, 带宽是 $\Delta\omega_j$. 每个腔模可以处理为一个时间宽度为 $2\pi/\Delta\omega_j$ 或单频 $\Delta\omega_j\sim 0$ 的相干波包. 原则上来说, 我们先前对一个波包、几个波包以及许多交叠及部分交叠波包的互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的处理方法都适用于 CW 激光, 所不同的是, 现在每个波包都具有一个不同的中心频率 ω_{0j}.

下面我们来估算 CW 激光的一阶相干函数. 我们将光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 近似为一组交叠及部分交叠的波包, 每个中心频率为 ω_{0j}, 谱宽

③ 这些实验引发了对一个基本问题的大量关注: 两个光子间可以发生干涉吗? 这个争论一部分源于狄拉克 (Dirac) 的一段论述: "$\cdots$ 光子 $\cdots$ 只与其自身干涉, 干涉决不会发生在两个不同光子之间".

为 $\Delta\omega_j$,

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\sum_j \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0j}}\left\{A^2_{1j}(\nu)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{0j}(\tau_1-t_{0j})}\sum_k \mathcal{F}_{\tau_2-t_{0k}}\left\{A^2_{2k}(\nu)\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{0k}(\tau_2-t_{0k})}\\
&=\sum_{j=k} \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0j}}\left\{A^2_{1j}(\nu)\right\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0j}}\left\{A^2_{2j}(\nu)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{0j}\tau} \qquad (5.1.20)\\
&\quad+\sum_{j\neq k} \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0j}}\left\{A^2_{1j}(\nu)\right\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0k}}\left\{A^2_{2k}(\nu)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega_{0j}(\tau_1-t_{0j})-\omega_{0k}(\tau_2-t_{0k})]}
\end{aligned}$$

其中 $A_{1j}(\nu)$ 和 $A_{2j}(\nu)$ 分别是路径 1 和路径 2 上第 j 个腔模的振幅分布函数, $\nu=\omega_j-\omega_{0j}$.

(5.1.20) 式的结果取决于求和中腔模的数量. 对于单模 CW 激光系统, (5.1.20) 式只有一项,

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_0}\left\{A^2_1(\nu)\right\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\left\{A^2_2(\nu)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}$$

一阶时间相干度取决于两个波包的重叠程度. 现在的单模 CW 激光的相干长度可达几百 m. 对于含有几个腔模或者多个腔模的 CW 激光, 每个腔模的自我重叠以及第一个求和中不同 ω_{0j} 对应的正弦调制的延展分布都需要加以考虑. 如果干涉相消不完全的话, 第二个求和一般不为零, 这种情况下可以观察到腔模间的拍频现象.

5.2 一阶空间相干性

有限光谱宽度并不是决定一阶相干度和干涉可见度的唯一因素. 对于空间上分离开的辐射场的干涉来说, 光源的有限横向尺寸或角宽度是另外一个需要考虑的重要因素. 所以就有了所谓空间相干性和一阶空间相干度的概念.

(I) 混沌热光源

如图 5.2.1 的杨氏双缝干涉实验所示, 遥远处有一颗有限尺度的恒星作为光源, 它包含了大量独立的辐射点子源, 每个子源用角坐标 θ(一维)表示. 为了简化数学计算而着重于空间相干性的物理内涵, 我们假设遥远恒星上每个独立子源发出的子场 $E_j(\boldsymbol{r},t)$ 是一个具有横向波矢 (也称为空间频率)$k_x\simeq k\theta$ 的单色平面波. 小孔 P_1 处的光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和小孔 P_2 处的光场 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 则各自处理为 N 个独立子电场的叠加. 互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 则可以写为

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\left\langle\sum_{j=1}^{N}E^*_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)\sum_{k=1}^{N}E_k(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right\rangle \qquad (5.2.1)$$

$$= \langle \sum_j E_j^*(\boldsymbol{r}_1, t_1) E_j(\boldsymbol{r}_2, t_2) \rangle + \langle \sum_{j \neq k} E_j^*(\boldsymbol{r}_1, t_1) E_k(\boldsymbol{r}_2, t_2) \rangle$$

其中 j 和 k 标记的是第 j 和第 k 点子源的贡献, 为简便起见, 我们将求和分成了两部分.

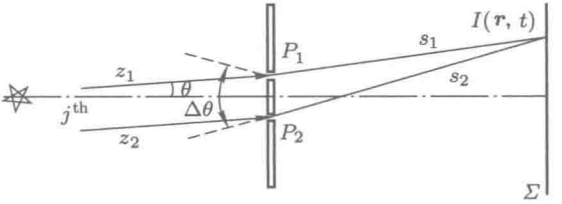


图 5.2.1 杨氏干涉实验示意图. 光源为远处的一颗具有有限角宽度 ($\Delta\theta \neq 0$) 的恒星, 包含了大量独立的子点源.

由于独立的子点源具有随机的相位, 当不同子源的相位差 $\varphi_j - \varphi_k$ 取遍所有可能取值时, 期望计算的第二部分消失. 于是 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 变为

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \sum_{j=1}^{N} E_j^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)\ E_j\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right) \tag{5.2.2}$$

(5.2.2) 式表明只有子电场与其自身的干涉才可以被观察到.

我们假设远处恒星上的子源分布是均匀的, (5.2.2) 式的求和可以化为一个简单的积分:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \qquad (5.2.3)\\
&= \sum_{j=1}^{N} E_{j1}^*\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega(t-\frac{s_1}{c})-k(z_{j1})]}\ E_{j2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega(t-\frac{s_2}{c})-k(z_{j2})]}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_s} \sum_{j=1}^{N} a_{j1} a_{j2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z_{j2}-z_{j1})}\\
&\cong \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_s} \int_{-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\Delta\theta}{2}} (\frac{I_0}{\Delta\theta})\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kb\theta}\\
&= I_0\, \mathrm{sinc}\,(\frac{\pi b \Delta\theta}{\lambda})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_s}
\end{aligned}$$

其中

$\tau_s = (s_2 - s_1)/c$,

$I_0 \sim \sum_{j=1}^{N} a_{j1} a_{j2} \sim$ 常量

我们将以上数学计算简化成了从 $-\Delta\theta/2$ 到 $\Delta\theta/2$ 的一维积分, 此积分涵盖了恒星的整个角直径. 从求和到积分, 我们作了 $N \to \infty$ 的近似.

上、下小孔处两个光场的归一化一阶空间相干度为:

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\Delta\theta}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_s}=\operatorname{sinc}\left(\Delta k_x\, b\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_s} \tag{5.2.4}$$

这里 $\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是一个关于上下小孔间距 b 和远处恒星角宽度 $\Delta\theta$ 的函数. 当 $b\ll\lambda/\Delta\theta$, 或 $b\ll 2\pi/\Delta k_x$ 时, 上下小孔处的两个光场被称为是空间相干的 ($|\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|\cong 1$). 而当 $b\geqslant\lambda/\Delta\theta$, 或 $b\geqslant 2\pi/\Delta k_x$ 时, 两光场被称为是空间不相干的 ($|\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|\cong 0$). 对于点光源, $\Delta\theta\sim 0$, 从而对于任意 b 值都有 $|\gamma_{12}|\cong 1$. 就是说对于由点辐射源发出的辐射场, 不论光场间空间相距有多远皆为空间相干场.

观测面上的干涉图样可写为:

$$\langle\, I(\boldsymbol{r},t)\,\rangle=I_0\left[1+\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\Delta\theta}{\lambda}\right)\cos\left(\omega\tau_s\right)\right] \tag{5.2.5}$$

其干涉对比度是:

$$V=|\,\gamma_{12}\,|=\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b\Delta\theta}{\lambda}\right)=\operatorname{sinc}\left(\Delta k_x\, b\right) \tag{5.2.6}$$

注意我们为了简化 γ 函数的计算, 假设了光场是波长为 λ 的单色平面波, 因而 $V=|\,\gamma_{12}\,|$ 与 τ_s 无关.

与时间相干性类似, 下面的物理图像可能有助于我们对空间相干性概念的理解. 图 5.2.1 所示是一个经典混沌热光模型, 遥远处有一颗有限尺度的恒星作为光源, 它包含了大量独立的辐射点子源, 即 $N(N\sim\infty)$ 个独立子源发出的光场具有完全随机的相位. 因此, 我们只能观测到从同一个子源发出的光场的自身干涉. 在考虑了子电场间相位差的所有可能取值后, 与不同子源对应的子场间的互干涉完全相消. 观测面上测得的光强即为

$$\begin{aligned}\langle I(\boldsymbol{r},t)\rangle&=\sum_{j=1}^{N}I_j(\boldsymbol{r},t) \qquad (5.2.7)\\&=\sum_{j=1}^{N}\left[\left|E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)\right|^2+\left|E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)\right|^2+2\mathrm{Re}\,E_j^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right]\end{aligned}$$

由此, 我们可以认为遥远恒星上坐标角为 θ_j 的每个子光源都在观测面上产生一个杨氏双缝正弦干涉图样, 而这些子干涉在 $s_1=s_2$ 处的相位由 $k(z_{j2}-z_{j1})\sim kb\theta_j$ 的取值决定. 不同的坐标角 θ 引入不同的相位. 这些子干涉图样的最大相位差是 $k(\Delta\theta b)$, 或 $\Delta k_x b$, 对应于 $\Delta\theta$ 和 $-\Delta\theta$ 的两子源产生的干涉图样间的相位差. 因此, 当 $2\pi\Delta\theta b/\lambda\ll 2\pi$, 即 $b\ll\lambda/\Delta\theta$,

或 $b \ll 2\pi/\Delta k_x$ 时, 不足以使子干涉图样之间明显错开, 所以可以观察到干涉图样. 然而当相位差增大到一定的值 $2\pi\Delta\theta b/\lambda \sim 2\pi$, 即 $b \sim \lambda/\Delta\theta$ 或 $b \sim 2\pi/\Delta k_x$ 时, 子干涉图样明显错开, 这些分散开来的子干涉图样使得观测面上的光强分布变得均匀, 干涉可见度从 100% 降到了 0, 从而失去了观察到干涉的可能性. 依据以上观测现象, 我们引入光场空间相干性的概念. 对于一个给定角宽度为 $\Delta\theta$ 的光源, 如果光场 $E(\boldsymbol{r}_1, t)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2, t)$ 的横向空间间距小于

$$b_c = \lambda/\Delta\theta = 2\pi/\Delta k_x \tag{5.2.8}$$

我们认为两光场空间相干, 其中 b_c 称作辐射场的横向相干长度. 任何空间间距超过 b_c 的光场则被认为空间不相干, 也就无法观察到它们之间的干涉现象. 可以说, 一阶空间相干度, 由 (5.0.9) 式定义, 从 (5.2.4) 式计算, 定量地描述了从角宽度为 $\Delta\theta$ 的辐射源观察到杨氏双缝干涉条纹的能力.

受早年菲佐 (Fizeau) 实验的启发, 迈克耳孙 (Michelson) 利用杨氏双孔干涉的原理设计了一个星体干涉仪. 迈克耳孙星体干涉仪的一个重要应用是测量恒星的角宽度或者双星的角间距. 这种星体干涉仪的工作原理和操作非常简单. 人们只需要改变两个小孔的间距, 由 $b = 0$ 一点点地变到临界值 $b = b_c$, 准确地判断干涉图样消失的临界值 $b = b_c$ 后, 就可以用 b_c 来估算恒星的角宽度. 由 (5.2.5) 式我们得知, 双缝干涉在 $b_c = \lambda/\Delta\theta$ 时开始消失. 于是可在一定精度内测得恒星的角宽度 $\Delta\theta = \lambda/b_c$. 当然, 因为干涉的稳定度会受很多物理参数影响, 对临界值做出准确判断十分不易.

(II) 相干光辐射源

对于相干辐射源, 很容易得到杨氏双孔干涉图样的可见条件: 两个小孔必须同时被辐射场照射到. 在 2.3 和 3.2 节我们讨论过空间相干辐射的传播, 比如一束激光. 相干辐射场以准直方式传播, 且具有有限的衍射发散角 $\Delta\vartheta = \lambda/b$ (一维情况下), 或 $\Delta\vartheta = 1.22\lambda/D$ (二维情况下), 其中 D 为光源直径. 如果将空间相干的辐射看成是横向波包, 上面的条件就是要求两孔间距必须小于空间波包的横向宽度. 换句话说, 为了能够观察到干涉图样, 光场 $E(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 的空间间距必须在光场的空间相干范围之内, 也就是小于空间波包的横向宽度.

本章小结

本章中我们引入光的一阶相干性概念来定性及定量描述时间上有一定延迟或空间上被分隔开的辐射场之间的干涉能力. 一般来说, 归一

化的一阶相干度的定义和计算为

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \equiv \frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)}{\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Gamma(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)}} = \frac{\langle\ E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\ E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\ \rangle}{\sqrt{\langle\ |E(\boldsymbol{r}_1,t_1)|^2\ \rangle\langle\ |E(\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2\rangle}}$$

一阶相干度通常用干涉仪来测量, 干涉仪使得在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处发生干涉的电场之间具有一定时间延迟或者空间分隔.

光场的一阶相干性和光的相干特性是两个不同的概念.

本章给出了几个时间和空间相干性实例的详细分析, 这些分析有助于理解混沌光和相干光一阶干涉现象的物理内涵.

推荐读物

[1] M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Cambridge, 2002.

[2] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science, Oxford, 2000.

第 6 章

光的二阶相干性

一阶相干 (关联) 函数 $\Gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和一阶相干度 $\gamma(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 并不是直接在两个时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 测得的. 一个光探测事件不可能发生在两个不同的时空点. 我们从 5.1 节知道, 在这种测量中, 从时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处出发的光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 在时空坐标 $(\boldsymbol{r},t)$ 相遇叠加, 而由一个光探测器在空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 处和延迟的时间坐标 t 进行测量, 这里, 延迟时间 $t=t_1+s_1/c=t_2+s_2/c$. 然而, 二阶相干 (关联) 函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和归一化的二阶相干度 $\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 则是由两个光探测器分别在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 直接测量. 图 6.0.1 示意了一个测量光的二阶相干 (关联) 函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 以及归一化二阶相干度 $\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的 Hanbury Brown 和 Twiss(HBT) 干涉仪. 对比图 5.2.1 所示的一阶测量, 图 6.0.1 中的测量由放在两个小孔后面的两台独立光探测器对发生在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处的两个不同的事件做联合观测. 与一阶相干性测量不同的是, 图 6.0.1 中的观测是基于电学的线性乘法器 (或射频混频器) 处的联合光电流 $i_1(t)\times i_2(t)$,

$$\begin{aligned} V_{12}(t) &\propto i_1(t)\,i_2(t) \\ &\propto I_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,I_2(\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ &= E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E(\boldsymbol{r}_2,t_2) \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

其中

$V_{12}(t)$ 是线性乘法器的输出电压;

$i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 是在做乘法的 t 时刻 D_1 和 D_2 上经过电学放大的光电流;

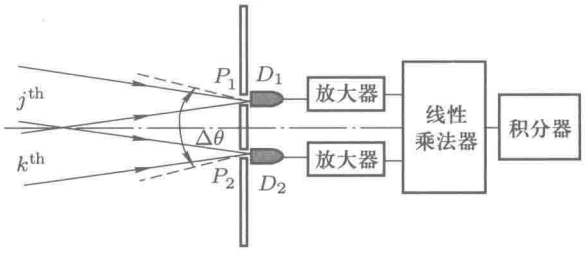


图 6.0.1 HBT 干涉仪的示意图. 这个干涉仪与杨氏双孔干涉仪和迈克耳孙恒星干涉仪基本相同, 除了这里使用了两个光探测器, 在小孔后联合探测时空坐标 P_1 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 P_2 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处的辐射场.

$t_1 = t - \tau_1^e$, $t_2 = t - \tau_2^e$ 是光实际被探测的时刻, 它早于 t, 其电学延时 τ_1^e 和 τ_2^e 由探测器、放大器和可调延迟线决定. 这里, 我们假设光探测器是理想探测器, 即忽略对 t_1 和 t_2 的时间平均. 瞬时光强 $I_1(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $I_2(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 的时空坐标由电路延迟来定义. 注意 t_1、t_2 和相对时间延迟 $t_1 - t_2 = \tau_1^e - \tau_2^e$ 皆取决于实验装置的电路.

二阶相干函数或关联函数定义为

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) &= \langle\, I(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, I(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,\rangle \\ &= \langle\, E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, E(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,\rangle\end{aligned} \tag{6.0.2}$$

而二阶相干度定义为

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \frac{\langle\, E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, E(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,\rangle}{\langle\, E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,\rangle \langle\, E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, E(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,\rangle} \tag{6.0.3}$$

其中系综平均 $\langle \cdots \rangle$ 仍表示光场相位和振幅的所有可能取值.

二阶相干性或二阶关联定义为在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 测得的两个光强乘积的期望值. 最容易处理的二阶期望值是在 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 能够分解成两个一阶相干函数的时候:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) &= \langle\, I(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,\rangle \langle\, I(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,\rangle \\ &= \Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_1, t_1) \Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, t_2; \boldsymbol{r}_2, t_2)\end{aligned} \tag{6.0.4}$$

其对应的二阶相干度

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = 1 \tag{6.0.5}$$

对于可因子分解的 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$, $\gamma^{(2)} = 1$. 不可因子分解的 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$, $\gamma^{(2)} \neq 1$. 蕴含的物理意义会在后续的详细讨论中给出. 其简单的

统计意义可以理解为: 对于可分解的 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$, $\gamma^{(2)}=1$ 表示测得的两个光强 $I(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $I(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是独立的, 没有关联的, 亦称平庸关联的. 而非平庸的二阶关联和反关联则分别定义为

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)>1 \tag{6.0.6}$$

及

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)<1 \tag{6.0.7}$$

现在, 我们可以计算和分析光的二阶关联函数和二阶相干度了. 我们将集中讨论两类极端情形: (1) 相干光的 $\Gamma^{(2)}$ 和 $\gamma^{(2)}$; (2) 混沌热辐射的 $\Gamma^{(2)}$ 和 $\gamma^{(2)}$. 在情形 (2) 中还将介绍 HBT 效应和热光鬼成像.

6.1 相干光的二阶相干性

本节中我们研究相干光的二阶相干性. 我们从相干辐射的二阶时间相干性的测量开始. 图 6.1.1 是实验装置示意图. 一束准直性很好的激光被一个 50%-50% 分束器分开. 通过在透过臂和反射臂的远场区扫描光探测器 D_1 和 D_2 来进行光辐射的联合探测. 联合探测电路仍是前面描述过的一个电流–电流的线性乘法器. 如图 6.1.1 所示, "扫描" 可以通过光学延迟或者电路延迟来实现. 在扫描的过程中, 电流—电流线性乘法器的输出是一个关于 $\tau_1=t_1-z_1/c$ 和 $\tau_2=t_2-z_2/c$ 的函数, 它正比于 $\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$. 在 1.4 节我们给出了四种光辐射的简化模型, 将大量子

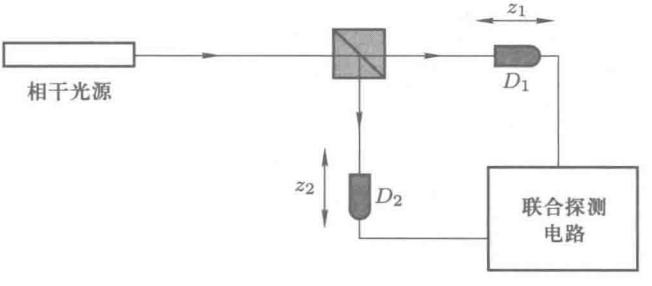


图 6.1.1 测量相干辐射二阶时间相干函数 $\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 的示意图. 一束准直很好的激光可近似为无穷远处的一个点光源, 包含了大量相干子点源和相干傅里叶模式.

电场的叠加总结成四类不同的叠加形式. 一束准直性很好的激光可近似处理为在无穷远处的点光源. 这里, 我们只分析类似模型 (II) 的相干光源, 它包含了大量相干子点源和相干傅里叶模式. 基于第 1 章的分析, 如 (1.2.9) 式所示, 我们可以假设相干子场和相干傅里叶模式的双重相干叠

加形成相干高斯波包,

$$E(z,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-\tau^2/4\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0 t - k(\omega_0)z - \varphi_0]}$$

其中我们依然取 $t_0 = 0$ 为 $z_0 = 0$ 处光源辐射波包的初始生成时间. 这种情况下, D_1 和 D_2 测量的分别是两个完全相同但相互独立的高斯脉冲. 容易看出二阶时间相干函数 $\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 可以因子分解为 $\Gamma^{(1)}(z_1,t_1;z_1,t_1)$ 和 $\Gamma^{(1)}(z_2,t_2;z_2,t_2)$ 的函数:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2) &= \langle\, E^*(z_1,t_1)E(z_1,t_1)E^*(z_2,t_2)E(z_2,t_2)\,\rangle \\ &= I_{01}\mathrm{e}^{-\tau_1^2/2\sigma^2}\, I_{02}\mathrm{e}^{-\tau_2^2/2\sigma^2} \\ &= \Gamma^{(1)}(z_1,t_1;z_1,t_1)\,\Gamma^{(1)}(z_2,t_2;z_2,t_2) \qquad (6.1.1)\end{aligned}$$

因而,

$$\gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2) = 1$$

从 (6.1.1) 式我们可以直接发现四个结果:

(1) 可因子分解的 $\Gamma^{(2)}$ 是两个独立的局域光强 $\langle I(z_1,t_1)\rangle$ 和 $\langle I(z_2,t_2)\rangle$ 的乘积.

(2) 可因子分解的 $\Gamma^{(2)}$ 表示测得的光强 $I(z_1,t_1)$ 和 $I(z_2,t_2)$ 没有统计关联, 尽管两个脉冲在确定性地同步 "涨落".

(3) $\Gamma^{(2)}$ 是时间的函数. 这一特性源于波包或脉冲是与时间相关的. 此外只有当 $\Gamma^{(1)}(z_1,t_1;z_1,t_1)\neq 0$ 且 $\Gamma^{(1)}(z_2,t_2;z_2,t_2)\neq 0$ 时才可以定义 $\gamma^{(2)}$.

(4) $\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 的值不仅由两脉冲间的相对延迟 $\tau_1-\tau_2$ 决定, 还由每个独立波包的绝对延迟 τ_1 和 τ_2 决定. 这一特性和稳态场是不同的.

下面我们考虑相干辐射的二阶横向相干性的测量. 图 6.1.2 是实验光路示意图. 这个光路图看起来与图 6.1.1 类似, 只是 D_1 和 D_2 是在横向平面内扫描, 而不是纵向扫描. 进行横向扫描时我们需要选取一组能使二阶时间关联达到最大的电路及光学延迟. 为了简化数学计算, 我们在远场而且是一维的情况下计算二阶相干性. 利用 3.1 节的结果我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(x_1,x_2) &= \langle\, E^*(x_1)E(x_1)E^*(x_2)E(x_2)\,\rangle \\ &= I_{01}\,\mathrm{sinc}^2\frac{\pi D x_1}{\lambda z_1}\, I_{02}\,\mathrm{sinc}^2\frac{\pi D x_2}{\lambda z_2} \\ &= \Gamma^{(1)}(x_1,x_1)\,\Gamma^{(1)}(x_2,x_2) \qquad (6.1.2)\end{aligned}$$

其中 D 是激光光束的直径 (光源的横向尺寸), λ 是辐射场的波长, 因而有

$$\gamma^{(2)}(x_1,x_2) = 1$$

方程 (6.1.2) 式的物理意义十分明确: 透射和反射的激光光束分别独立地在观测面上形成一个干涉图样, 导致 $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)$ 是可以写成可分解的形式 $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)=\Gamma^{(1)}(x_1,x_1)\Gamma^{(1)}(x_2,x_2)$.

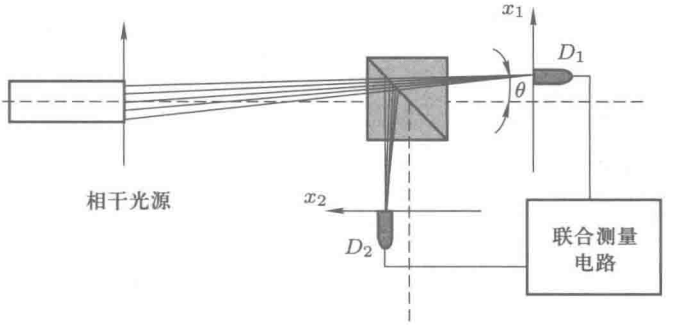


图 6.1.2 测量相干辐射二阶空间相干性的示意图. 透射和反射的激光光束会分别形成一个干涉图样, 结果导致 $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)$ 写成因子分解形式 $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)=\Gamma^{(1)}(x_1,x_1)\Gamma^{(1)}(x_2,x_2)$. 大家可以想象一下激光远场区的干涉测量.

不难将 1 维的结果 $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)$ 推广到 2 维的 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)&=\langle E^*(\boldsymbol{\rho}_1)E(\boldsymbol{\rho}_1)E^*(\boldsymbol{\rho}_2)E(\boldsymbol{\rho}_2)\rangle\\&=I_{01}\left[\mathrm{somb}^2\frac{D\omega}{z_1c}|\boldsymbol{\rho}_1|\right]I_{02}\left[\mathrm{somb}^2\frac{D\omega}{z_2c}|\boldsymbol{\rho}_2|\right]\\&=\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1)\,\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2)\end{aligned}\tag{6.1.3}$$

因此,

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=1$$

一般而言, 相干辐射的二阶相干函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是探测器 D_1 和 D_2 分别在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处测到的光强的简单乘积:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&=\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\\&=\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2),\end{aligned}\tag{6.1.4}$$

因此热光辐射归一化的二阶相干度为

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=1\tag{6.1.5}$$

6.2 混沌热辐射二阶关联和 HBT 干涉仪

混沌热辐射的二阶相干函数与相干辐射情形不同. 热光的二阶相干函数不可以分解为两个一阶自相关函数的乘积. 这表明测得的两光强不

再是相互独立的. 远场热光的非平庸二阶相干性或关联由 Hanbury Brown 和 Twiss 在 1956 年从实验中首次发现. 他们的实验装置现在被称为 HBT 光强干涉仪. 测量二阶时间相干函数的 HBT 干涉仪与图 6.1.1 所示实验装置相似, 测量二阶空间相干函数的 HBT 干涉仪与图 6.1.2 所示实验装置相似. HBT 观察到: 如果联合探测的时间延迟小于光场的相干时间, 而且 D_1 和 D_2 的横向距离小于光场的相干长度, 两个独立探测器同时捕获到随机热光的概率将提高一倍. HBT 的观测结果令物理学界大为震惊. 由 6.1 节我们知道分别位于空间分离的时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 的电磁波局域性叠加是相互独立的, 因而光强和光强涨落也是相互独立的. 这种非平庸的二阶关联是从哪里来的呢? 人们提出了各种解释, 相互争论. 一门新的学科——量子光学——在争论中奠定了基础. 有趣的是, 远场 HBT 效应在 HBT 的坚持下则被定性为一种经典统计现象, 远场热光的非平庸的二阶相干被解读为来源于光强涨落的关联. HBT 并给出两个非常形象而且有说服力的物理图像, 对热光的非平庸二阶时间相干和空间相干各自作出了解释: (1) 测量二阶时间相干函数的 HBT 干涉仪中, 当联合探测的时间延迟小于光场的相干时间, 即, $z_1 \simeq z_2$, $t_1 \simeq t_2$, 尽管光束被一分为二, D_1 和 D_2 测量的是同一时间从点光源发出, 传播同等距离, 又在同一时刻到达的光强 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$, $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 当然有共同的光强涨落. 从而 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 达到最大值, 且有 $\gamma^{(2)} \sim 2$. 当联合探测的时间延迟大于光场的相干时间, D_1 和 D_2 分别测量到不同时刻的光强, $I_1(t)$ 和 $I_2(t+\tau)[\tau = (z_1 - z_2)/c > \tau_c]$, 这时测得的光强涨落自然不同, 从而呈随机状态, 测量会给出 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle = 0$ 及 $\gamma^{(2)} \sim 1$. (2) 测量二阶空间相干函数的 HBT 干涉仪中, 测量是在热辐射的远场区域也就是傅里叶变换平面进行的. 当 D_1 和 D_2 并排放置时, 两台探测器测量的是辐射场的同一空间模式. 同一模式自然有共同的光强涨落, 从而 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 达到最大值, 且有 $\gamma^{(2)} \sim 2$. 当两台光探测器分开一定距离后, D_1 和 D_2 分别测量到辐射场的不同空间模式, 这时测得的光强涨落自然不同, 从而呈随机状态, 测量会给出 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle = 0$ 及 $\gamma^{(2)} \sim 1$. 这一经典统计关联的观点随后被广泛接受, 并使我们坚信热光非平庸二阶空间关联只能发生在远场. 最近十年来, 我们才发现以上理论有问题: (1) HBT 给出的非平庸二阶时间关联的物理模型无法解释热光二阶 "反关联" 实验的观测结果, 即 $g^{(2)}(0) < 1$, 或 $\langle \Delta I_1(t) \Delta I_2(t) \rangle < 0$. (2) HBT 给出的非平庸二阶空间关联的物理模型无法解释在菲涅耳近场观察到的热光非平庸二阶关联, 因为在菲涅耳近场, 不存在 D_1 和 D_2 只观测同一个模式的情况. 无论把 D_1 和 D_2 安排在何处, 把两者的时空间距调整为零或不为零, 它们总是测量到大量的非

相干模式. (3) 的确, 无论远场还是近场, 热光非平庸二阶关联都是从光强涨落中测量到的. 从唯象理论的角度我们有了一个成功的解释. 但是, 我们不想永远停留在唯象理论, 我们要知道是什么物理机制导致了由随机过程产生的热光的强度涨落的非平庸行为, 尤其是在近场测量. 它是由 HBT 给出的物理原因造成的吗? 我们曾经都一度接受了这个解释. 不幸的是, HBT 的模型与近期实验相矛盾. 它是由光的某种量子本性, 例如 "量子聚束" (photon bunching) 效应导致的吗? 那么, 即使从量子力学的角度重新审视这个物理过程, 我们仍然疑虑重重: 热辐射过程应该是随机的, 那么究竟是什么物理根源会导致随机辐射出的光子一对一对地呈 "聚束" 状态 (photon bunching) 呢? 关于 HBT 现象的物理本质, 我们将在后面的章节详细讨论.

本节的目标是揭示这个非平庸二阶相干函数背后的 "干涉" 本质. 我们将不采用传统的高斯光统计方法, 而是从大量独立随机子源产生的子电场之间的干涉现象出发, 推导和讨论热光场的非平庸二阶相干函数. 我们首先从新概念出发, 按照传统将这个不可因子分解的热光二阶关联函数用其一阶相干函数来表示. 我们在讨论时间和空间 HBT 干涉仪时, 都会进一步讨论这个不可分解的二阶关联.

考虑一个包含大量独立子源的辐射源. 辐射场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 由各个独立子源激发的子电场叠加而成. 子电场按子源及光探测器 D_1 和 D_2 记为 $E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)$. 于是我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \langle\, E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle \\ &= \langle \sum_{j,k,l,m} E_j^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E_k(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E_m(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

其中 j,k,l,m 标记的是来自相应独立点子源的独立子电场. 考虑到独立子电场的随机相位以及子电场的所有可能取值, 求和中只剩下以下两种情况: (1) $j=k, l=m$, (2) $j=m, k=l$. 我们可以将 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 改写为下面两部分之和, 它们分别对应于上面两种情况:

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\ &= \sum_j E_j^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)\sum_l E_l^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)\\ &\quad + \sum_j E_j^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)\sum_l E_l^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)\\ &= \sum_j\sum_l \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)+E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right]\right|^2\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

因为我们考虑了各个独立子电场的所有可能相位, 所以部分完成了系综平均. (6.2.2) 式表明 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是大量 "联合光场" $E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和 $E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 叠加后的求和, 这些是干涉相消后留下的部分.

在考察这个独特叠加的物理内涵之前, 我们先将二阶相干函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 用一阶相干函数来表示:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\sum_j\sum_l\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)+E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right]\right|^2\\
&=\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)+\left|\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\right|^2\\
&=\Gamma^{(1)}_{11}\,\Gamma^{(1)}_{22}+\Gamma^{(1)}_{12}\,\Gamma^{(1)}_{21}
\end{aligned}\tag{6.2.3}$$

其中 $\Gamma^{(1)}_{ij}$, $i,j=1,2$, 定义为

$$\Gamma^{(1)}_{11}=\sum_j\left|E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)\right|^2,\ \ \Gamma^{(1)}_{22}=\sum_l\left|E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)\right|^2$$

$$\Gamma^{(1)}_{12}=\sum_j E^*_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2),\ \ \Gamma^{(1)}_{21}=\sum_l E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)$$

和相干光的可因子分解的二阶相干函数不同, 这里我们得到了一个非平庸二阶相干函数, 它不再是可以因子分解的. (6.2.3) 式中的第一项 $\Gamma^{(1)}_{11}\Gamma^{(1)}_{22}$ 代表分别由 D_1 和 D_2 在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处测得的平均光强之积. 第二项 $|\Gamma^{(1)}_{12}|^2$ 对应于叠加中的交叉 (干涉) 项, 它对应二阶相干函数中的非平庸部分. 不可分解的归一化二阶相干度 $\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 与一阶相干度的关系就是

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=1+\left|\gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\right|^2=1+\left|\gamma^{(1)}_{12}\right|^2\tag{6.2.4}$$

(6.2.3) 式和 (6.2.4) 式对混沌热光的时间和空间相干性都适用. 对于混沌热辐射, $\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的最大值为 2.

非平庸的二阶相干性来自于 (6.2.2) 式, 它是对 (6.2.1) 式考虑热辐射的随机相位后得到的. 子源的随机相位引起了干涉相消, 从而将 (6.2.1) 式变为了 (6.2.2) 式. 非平庸二阶相干性是这些经干涉相消之后的剩余项叠加的结果. 有趣的是从 (6.2.2) 式可以发现热光的 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是 "联合光场" $E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和 $E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 间叠加生成的干涉图样之和. 叠加中的第一项对应的情形是: 第 j 个子源激发的子电场被 D_1 探测, 而第 l 个子源激发的子电场被 D_2 探测. 叠加中的第二项对应一种不同但又不可区分的情形, 那就是第 l 个子源激发的子电场被 D_1 探测而

第 j 个子源激发的子电场被 D_2 探测. 叠加中的这两项在图 6.0.1 中做了图解. (6.2.2) 式揭示了一种隐藏于 D_1 和 D_2 联合探测之中的干涉现象. 这种奇异的叠加机制似乎超出了光的经典电磁波理论的框架. 如我们在前几节讨论的, 经典叠加必须发生在一个时空点 $(\boldsymbol{r},t)$, 经典叠加的结果是一个局域性光场 $E(\boldsymbol{r},t)$. 光强 $|E(\boldsymbol{r},t)|^2$ 是利用一个光探测器在该时空点局域地测得的. 然而 (6.2.2) 式中的叠加实际发生在两个时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 此干涉的结果是由分别置于两个空间分离时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的 D_1 和 D_2 联合探测得到的.

6.2.1 HBT 干涉仪 I: 二阶时间相干性

Hanbury Brown 和 Twiss 在 1956 年发表的实验之一, 就是测量热光的非平庸二阶时间关联. 图 6.2.1 是实验光路的示意图. 光源是遥远热光源 (例如一颗明亮的恒星), 它发出的辐射场被一个分束器等分成两束后, 分别由光探测器 D_1 和 D_2 来探测. 其中一个可以在光路上做纵向扫描. 它们输出的光电流在线性乘法器 (射频混频器) 处相乘.

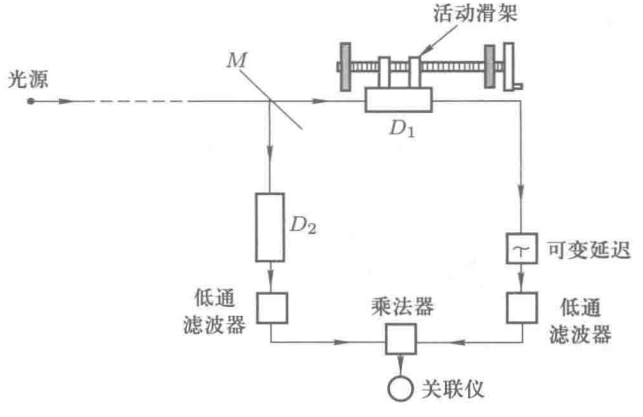


图 6.2.1 历史上 Hanbury Brown 和 Twiss 实验的示意图. HBT 干涉仪, 由两台空间分离的独立光探测器 D_1 和 D_2 进行联合探测, 检测辐射的二阶时间相干特性.

图 6.2.2 收集了历史上测量热光时间关联函数的一些实验数据, 它们的实验装置都和 HBT 干涉仪类似. 为了简化讨论, 我们假设实验中选取了合适的光学和电路延迟. 在这些测量中, 两台光探测器 D_1 和 D_2 在 $t_1-t_2\sim 0$ 处被触发的概率是 $t_1-t_2>\tau_c$ 处的两倍, 其中 τ_c 是热光场的相干时间.

显然这个观测结果揭示了热光的一个自相矛盾的行为. 按爱因斯坦–波多尔斯基–罗森的话来说: 虽然 D_1 和 D_2 会随机地在任意时刻 t_1

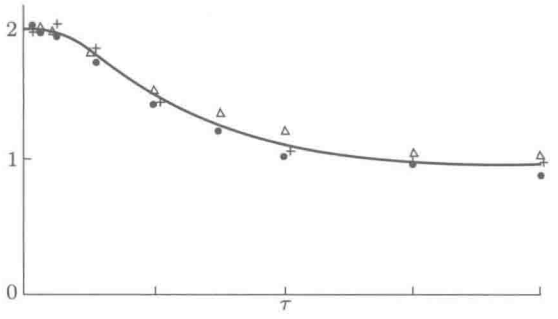


图 6.2.2 历史上一些热光二阶时间相干函数的实验数据. 即使热辐射是由光源随机发射, 如果选取合适的光学和电路延迟, 当 $t_1 - t_2 \sim 0$ 时, 热辐射被两个单独光探测器捕获的概率会增加一倍.

和 t_2 被触发, 但是如果它们其中之一在一个特定时刻被触发了, 那么另一个有两倍大的概率会在 $t_1 = t_2$ 时刻被触发. 看起来在两台相隔较远的光探测器进行联合探测时, 随机分布的 "热光子" 被非随机地 "聚束" 了. 这一点比纠缠粒子的 EPR 佯谬更让人费解, 因为热辐射从本质上讲是随机的, 而纠缠粒子则处于 "纠缠态".

非平庸的 HBT 时间关联的物理根源是什么呢? 下面的计算导出了一个非局域干涉的解释. 为了提供一个完整的数学过程, 这个计算会重复已经包括在 (6.2.2) 式和 (6.2.3) 式中的部分计算.

假设一个在 $z = 0$ 处的点光源, 它包含了大量独立的随机辐射的子源. 光探测器 D_1 和 D_2 处的辐射场 $E(z_1, t_1)$ 和 $E(z_2, t_2)$ 由大量独立子源发出的大量子电场叠加而成, 子电场记为 $E_j(z_1, t_1)$ 及 $E_j(z_2, t_2)$. 因此二阶时间相干函数 $\Gamma^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ 为

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) &= \langle\, E^*(z_1, t_1)\, E(z_1, t_1)\, E^*(z_2, t_2)\, E(z_2, t_2)\,\rangle \\ &= \langle \sum_{j,k,l,m} E_j^*(z_1, t_1)\, E_k(z_1, t_1) E_l^*(z_2, t_2)\, E_m(z_2, t_2)\,\rangle\end{aligned}$$

其中 j, k, l, m 是用来标记独立子电场及对应子源的. 考虑到独立子电场的随机相位分布, 当子电场取遍所有可能的相位后会干涉相消, 求和中只剩下两项: (1)$j = k, l = m$, (2)$j = m, k = l$. 对应于上面的两种情形, 我们可以将 $\Gamma^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ 写为下面两部分之和:

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) \\ &= \sum_j E_j^*(z_1, t_1)\, E_j(z_1, t_1) \sum_l E_l^*(z_2, t_2)\, E_l(z_2, t_2)\end{aligned}$$

$$+\sum_j E_j^*(z_1,t_1)\,E_j(z_2,t_2)\sum_l E_l^*(z_2,t_2)\,E_l(z_1,t_1)$$
$$=\sum_j\sum_l\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(z_1,t_1)E_l(z_2,t_2)+E_l(z_1,t_1)E_j(z_2,t_2)\right]\right|^2 \tag{6.2.5}$$

这是 (6.2.2) 式的一个简化版本, 坐标限定为纵向坐标. 现在我们应用前面定义的波包模型, 每个子源在时刻 t_{0j} 发射一个波包. 于是 (6.2.5) 式可以形式上写为

$$\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$$
$$=\sum_j\sum_l\frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_{1j}}\mathcal{F}_{\tau_{1j}}\{a_j(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_{2l}}\mathcal{F}_{\tau_{2l}}\{a_l(\nu)\}\right.$$
$$\left.+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_{1l}}\mathcal{F}_{\tau_{1l}}\{a_l(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_{2j}}\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a_j(\nu)\}\right|^2 \tag{6.2.6}$$

其中, $\mathcal{F}_{\tau_{1j}}\{a_j(\nu)\}$ 和 $\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a_j(\nu)\}$ 仍为所测量光场的傅里叶变换, $\tau_{1j}=(t_1-t_{0j})-z_1/c=\tau_1-t_{0j}$ 而 $\tau_{2j}=(t_2-t_{0j})-z_2/c=\tau_2-t_{0j}$. (6.2.6) 式的物理意义很明确. 第 j 和第 l 个子源激发出两个独立的波包, 导致 D_1 和 D_2 间的联合探测被分为两类: (1) D_1 和 D_2 分别探测到第 j 和第 l 个波包; 以及 (2) D_2 和 D_1 分别探测到第 j 和第 l 个波包. 如我们前面讨论的, (6.2.6) 式表明了隐藏于 D_1 和 D_2 联合探测之中的一种干涉.④ (6.2.6) 式可用一阶相干函数来表示:

$$\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)=\sum_j\left|\mathcal{F}_{\tau_{1j}}\{a_j(\nu)\}\right|^2\sum_l\left|\mathcal{F}_{\tau_{2l}}\{a_l(\nu)\}\right|^2$$
$$+\left|\sum_j\mathcal{F}^*_{\tau_{1j}}\{a_j(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_{2j}}\{a_j(\nu)\}\right|^2 \tag{6.2.7}$$

为了完成 (6.2.7) 式的求和, 我们假设光源是大量交叠及部分交叠的波包. 与我们前面的讨论类似, 在这种情况下 (6.2.7) 式的求和成为一个 t_0 上的积分. 于是我们有

$$\Gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\cong\int\mathrm{d}t_0\,|\,\mathcal{F}_{\tau_1-t_0}\{a(\nu)\}\,|^2\int\mathrm{d}t_0'\,|\,\mathcal{F}_{\tau_2-t_0'}\{a(\nu)\}\,|^2$$
$$+\left|\int\mathrm{d}t_0\,\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_0}\{a(\nu)\}\,\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\{a(\nu)\}\,\right|^2$$
$$\cong\Gamma_0\left[1+\left|\,\mathcal{F}_\tau\{a^2(\nu)\,\}\right|^2\right] \tag{6.2.8}$$

④ 也许按光子概念从量子图像角度来看待这种叠加或干涉会容易得多. 按照测量的量子理论, 叠加对应于一个双光子干涉现象, 涉及两个不同但又不可区分的双光子概率幅的叠加: (1) 光子 j 和光子 l 分别在 D_1 和 D_2 湮没; 以及 (2) 光子 j 和光子 l 分别在 D_2 和 D_1 湮没.

经由 (6.2.6) 式到 (6.2.8) 式推导和直接将一阶相干函数代入 (6.2.3) 式的结果是一样的. 归一化的二阶相干度 $\gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 则为

$$\gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\cong 1+\left|\mathcal{F}_\tau\{a^2(\nu)\}\right|^2 \tag{6.2.9}$$

显然热光的二阶时间关联以及二阶时间相干度只与相对延迟 $\tau=\tau_2-\tau_1=(z_2-z_1)+(\tau_2^e-\tau_1^e)$ 有关, 并且相对于 τ 对称

$$\gamma^{(2)}(\tau)=\gamma^{(2)}(-\tau) \tag{6.2.10}$$

上面计算的 $\Gamma^{(2)}(\tau)$ 和 $\gamma^{(2)}(\tau)$ 的期望值与实验观测相符.

6.2.2 HBT 干涉仪 II: 二阶空间相干性

空间 HBT 干涉仪, 也称为空间光强干涉仪, 已在图 6.0.1 中做过介绍. HBT 干涉仪与迈克耳孙星体干涉仪有所不同, 它观测的是由两个光探测器测量的非平庸空间关联, 而不是由一个光探测器测量的一阶干涉图样. 空间 HBT 干涉仪的测量发现: 当两台探测器安置于一个横向区域内, 该区域小于或等于热辐射的空间相干区域, 在空间呈随机分布的热光有两倍机会被两台独立的光探测器捕获到. 在天文观测中这种光强干涉仪被广泛地用于测量明亮恒星等天体的角直径, 其测量精度比迈克耳孙星体干涉仪高许多, 尤其是在大气扰动情况下.

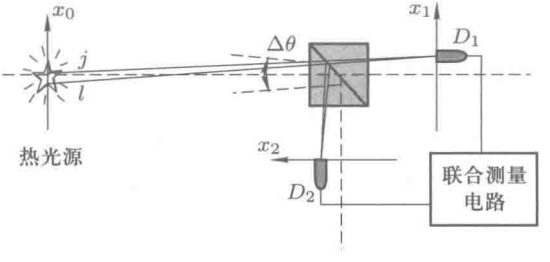


图 6.2.3 一个简化的空间 HBT 干涉仪示意图, 用来测量热光的二阶空间关联函数 $\Gamma^{(2)}(x_1,t_1;x_2,t_2)$. 可以设想为恒星远场区的干涉测量.

图 6.2.3 示意的是一个简化的空间 HBT 干涉仪, 这在现代光学实验室中很容易搭建. 它能够测量混沌热光的二阶空间关联 $\Gamma^{(2)}(x_1,t_1;x_2,t_2)$, 其中 x_1 和 x_2 分别是点探测器 D_1 和 D_2 一维横向坐标. 二阶空间关联需要在时间关联达到最大的条件下进行测量. 实验中通过调整电学延迟或者 z_1 和 z_2 的纵向光学延迟, 我们一般选取 $\tau=\tau_1-\tau_2\simeq 0$ 以获得最大的二阶时间关联, 其中, 时间坐标 t_1 和 t_2 是由线性乘法器和电路延迟决定.

为了简化数学计算而着重讨论空间 (横向) 关联的物理内涵, 我们选取一维测量并且把混沌热光处理为单色.

现在假设辐射源包含了大量独立的子点源, 例如第 j 和第 l 个子源, 它们沿着光源横向随机分布. 辐射源的角直径也就是光源对探测器的张角为 $\Delta\theta$ ($\Delta\theta \sim D/z$, 其中 $z_1 = z_2 = z$, D 是光源的横向尺寸), 如图 6.2.3 所示. 我们从 (6.2.2) 式开始进行计算,

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(x_1,t_1;x_2,t_2)\\&=\sum_j\sum_l\left\langle\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(x_1,t_1)E_l(x_2,t_2)+E_l(x_1,t_1)E_j(x_2,t_2)\right]\right|^2\right\rangle\end{aligned}\tag{6.2.11}$$

其中第 j 和第 l 个子源在空间上是可区分的, 它们在 x_0 轴上对应着不同的横向坐标. HBT 测量是在热光源的远场区进行的. 对 (6.2.11) 式采用平面波近似并假设 $t_1 \simeq t_2$ 以简化数学计算, 在一个纵向对称的实验配置中, $\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)$ 近似为

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)\\&\simeq\int \mathrm{d}x_0\int \mathrm{d}x_0'\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr(x_0,x_1)}a(x_0')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr(x_0',x_2)}\right.\right.\\&\left.\left.+a(x_0')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr(x_0',x_1)}a(x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr(x_0,x_2)}\right]\right|^2\\&\simeq\int \mathrm{d}x_0\, a^2(x_0)\int \mathrm{d}x_0'\, a^2(x_0')+\left|\int \mathrm{d}x_0\, a^2(x_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0(x_1-x_2)/z}\right|^2\\&\simeq I_0^2\left[1+\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi\Delta\theta(x_1-x_2)}{\lambda}\right)\right]\end{aligned}\tag{6.2.12}$$

其中我们采用了远场近似并取 $a(x_0) \simeq a$ 为常数并且 $I_0 \simeq a^2 D$. 与 5.1 节中遥远处恒星热辐射的一阶空间相干函数的计算相比较, 我们发现 $x_1 - x_2$ 等效于两小孔的间距 b. 注意, 根据 x_1 和 x_2 坐标轴的取向, 我们有 $x_1 - x_2 = b$.

二阶空间相干度 $\gamma^{(2)}$ 即为

$$\gamma^{(2)}(x_1,t_1;x_2,t_2)=1+\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi\Delta\theta(x_1-x_2)}{\lambda}\right]\tag{6.2.13}$$

如果热光源的角直径 $\Delta\theta$ 不是太小, 对于可见光之类的短波长辐射, 当 $x_1 - x_2$ 由零增大到 $\Delta\theta(x_1 - x_2)/\lambda = 1$ 左右时, (6.2.12) 式和 (6.2.13) 式中的 sinc 函数会迅速由其最大值降至最小值. 这时, x_1 平面和 x_2 平面之间实际上具有一种 "点" 对 "点" 关系. 注意 (6.2.12) 式和 (6.2.13) 式是 $x_1 - x_2$ 的函数, 而与 x_1 或 x_2 的绝对值无关. 这是热光场一个十分重要而有用的

特性. 它意味着无论 D_1 的横向坐标 x_1 是取何值, D_2 总可以找到一个唯一的位置 x_2 使得 D_1 和 D_2 之间的联合探测最大. 也就是在这个特殊的位置可以观察到 (6.2.11) 式中 $E_j(x_1,t_1)E_l(x_2,t_2)$ 和 $E_l(x_1,t_1)E_j(x_2,t_2)$ 之间最大的相长干涉.

我们前面已经提到过, 热辐射的二阶空间关联或二阶空间相干度在天文物理中相当有用. 通过测量二阶相干函数可以估算遥远恒星或天体的角直径 $\Delta\theta$. HBT 干涉仪对于测量角直径较小的天体以及它们之间的角间距尤其有用. 对于一个较小角直径 $\Delta\theta$ 的天体, 则需要 D_1 和 D_2 之间的间距 b 更大, 才能使得 $\Delta\theta b/\lambda = 1$, 从而找到关联最小值. b 的值越大, 可以测量到的 $\Delta\theta$ 越小. 在现代的实际应用中, 通常将 b 称为 "基线", 它可达数 km 甚至更长.

20 世纪 50 年代, Hanbury Brown 和 Twiss 成功地将热光的二阶空间相干性用在了天体物理探测中. 图 6.2.4 是天文探测中典型的空间 HBT 干涉仪的示意图. 长基线 HBT 光强干涉仪在现代天文观测中获得了广泛应用, 成为一个有力的工具.

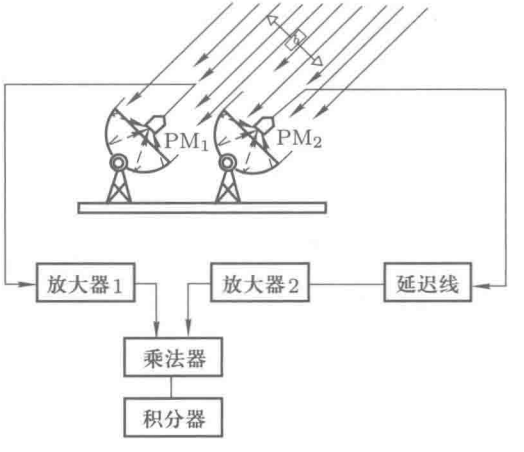


图 6.2.4 一个典型的应用于天体物理学的 HBT 干涉仪示意图. 这个干涉仪借助二阶空间相干性或空间关联来测量遥远处热辐射源的角宽度. 在现代应用中基线 b 可达数 km 甚至更长.

6.3 热光的近场二阶空间相干性

在 1956 年 HBT 的发现之后, 半个世纪以来, 人们一直坚信非平庸二阶关联只能在远场实现. 如果把测量搬到近场会发生什么呢? 下面我们试

着从 (6.2.2) 式出发计算热光的近场二阶空间相干函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$,

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= \sum_j \sum_l \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \big[E_j(\boldsymbol{\rho}_1, z_1) E_l(\boldsymbol{\rho}_2, z_2) + E_l(\boldsymbol{\rho}_1, z_1) E_j(\boldsymbol{\rho}_2, z_2) \big] \Big|^2\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 和 z 是探测器的横向和纵向坐标. 与先前计算二阶空间关联时类似, 在 (6.3.1) 式中我们假设实验条件满足二阶时间关联取极大值的条件, 因而忽略了时间变量. 在近场我们采用菲涅耳近似来计算光场从各个子源到探测器的传播. 将 3.2 节中导出的格林函数代入 (6.3.1) 式可将 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 按格林函数表达为:

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' \Big| \frac{1}{\sqrt{2}} \big[g(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{\kappa})\, g(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{\kappa}') + g(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{\kappa})\, g(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{\kappa}') \big] \Big|^2 \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \big| g(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{\kappa}) \big|^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' \big| g(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{\kappa}') \big|^2 \\ &\quad + \Big| \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{\kappa})\, g(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{\kappa}) \Big|^2\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

(6.3.2) 式中我们交换了子源求和和横向波矢积分的顺序. 前者被归入格林函数中. 将自由传播的格林函数

$$g(\boldsymbol{\rho}_j, z_j, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c} z_j}}{z_j} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, a(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_j}|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_0|^2}$$

代入 (6.3.2) 式, 我们得到

$$\Gamma_{11}^{(1)} \Gamma_{22}^{(1)} \sim \text{常数}$$

及

$$\begin{aligned}&\Gamma_{12}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &\propto \frac{1}{z_1 z_2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, a^2(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c} z_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_1}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c} z_2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_2}|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_0|^2}\end{aligned}$$

其中我们假设 $\Delta\boldsymbol{\kappa}$ 的带宽足够大, 从而将 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}$ 的积分近似为 $\delta(\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_0')$

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_0')} \sim \delta(\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_0')$$

假设 $a^2(\boldsymbol{\rho}_0) \sim$ 常量, 并且取 $z_1 = z_2 = d$, 我们得到

$$\Gamma_{12}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{\rho}_2) \propto \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, a^2(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cd}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cd}|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_0|^2}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cd}(|\boldsymbol{\rho}_1|^2-|\boldsymbol{\rho}_2|^2)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, a^2(\boldsymbol{\rho}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{cd}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cd}(|\boldsymbol{\rho}_1|^2-|\boldsymbol{\rho}_2|^2)}\, \mathrm{somb}\big[\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\big] \tag{6.3.3}$$

我们假定光源是半径为 R 的有限大小圆盘, 而 $\mathrm{somb}(x)=\mathrm{J}_1(x)/x$, $\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数. (6.3.3) 式中我们将所有常量归入比例常数. 二阶空间关联函数 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1;\boldsymbol{\rho}_2)$ 即为

$$\Gamma^{(2)}(|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|)=I_0^2\left[1+\mathrm{somb}^2\big(\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\big)\right] \tag{6.3.4}$$

因此, 二阶空间相干度为

$$\gamma^{(2)}(|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|)=1+\mathrm{somb}^2\big(\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\big) \tag{6.3.5}$$

$2R/d\sim\Delta\theta$ 较大时, $\Delta\theta$ 为辐射源对光探测器的张角, 点对 "斑" 的 somb 型函数可以近似为关于 $|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|$ 的 δ 函数. 于是我们得到 $z_1=d$ 和 $z_2=d$ 平面之间的一种 "点" 对 "点" 的关联.

以上计算最终给出了一个出人意料而又非常有趣的结果, 用 EPR 的语言来描述就是, 探测器 D_1 和 D_2 在平面 $z_1=d$ 和 $z_2=d$ 上的任意位置被触发的机会相同. 然而如果 D_1 在 $z_1=d$ 平面上某个特定位置被触发了, 那么 D_2 有两倍概率在 $\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}_1$ 的位置被触发. 虽然非平庸关联是部分相关的, 因为它有一个常数背景, 但是这一出人意料的结果已经衍生出一项有用的新技术: 无透镜鬼成像. 实际上, 上面的 somb 型函数就是点探测器 D_1 (或 D_2) 在像平面上进行扫描得到的鬼像, 它对应的物实际是在物平面上的另一个点探测器 D_2 (或 D_1). 这个 somb 型函数与经典的成像函数类似, 只是将原来的数值孔径 D/s_0 (D 为成像透镜的直径, 而 s_0 是物到透镜的距离) 换成 $D/d\sim\Delta\theta$, 其中 D 为热光源的直径, d 是物与光源的间距, 而 $\Delta\theta$ 就是热光源的角直径. 按照我们对经典成像的讨论, somb 型点-斑扩展函数中斑的尺寸决定了成像的空间分辨率. 类似的, 式 (6.3.5) 中 somb 型点-斑扩展函数中斑的尺寸, 决定了无透镜鬼像的空间分辨率. 除了非局域性质外, 这是热光无透镜鬼成像在实际应用中最吸引人的特性. 比如在 10 km 外拍照时, 利用太阳作为光源获得的空间分辨率, 等效于一个带有直径 92 m 透镜的传统相机. ⑤ 在特定应用中, 一片云彩或一块明亮的天空, 都可用来作为热光鬼成像的光源 (通过自然散射或人工照明), 这样可以获得非常高的空间分辨率.

⑤ 太阳的角宽度约为 0.53°. 要获得同等的数值孔径, 在 10 km 外拍照时, 传统相机必须带有一个直径为 92 m 的透镜.

点到斑的关联函数对光源角宽度的依赖性已经通过 1 维测量得到的实验证实. 在 1 维情形, (6.3.4) 式和 (6.3.5) 式变为

$$\Gamma^{(2)}(x_1-x_2)=I_0^2\left[1+\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{D}{d}\frac{\pi(x_1-x_2)}{\lambda}\Big)\right] \tag{6.3.6}$$

以及

$$\gamma^{(2)}(x_1-x_2)=1+\mathrm{sinc}^2\Big(\frac{D}{d}\frac{\pi(x_1-x_2)}{\lambda}\Big) \tag{6.3.7}$$

作者和 Zhou 等人在最近的近场无透镜鬼成像实验中测量了这个 1 维 sinc 函数, 实验中使用的光源与作者和 Scarcelli 等人使用过的混沌热辐射类似, 图 6.3.1给出了不同角宽度光源下测得的实验结果. 拟合曲线由 (6.3.7) 式计算得出. 计算出的 $\gamma^{(2)}(x_1-x_2)$ 函数与实验结果在实验误差范围内相符.

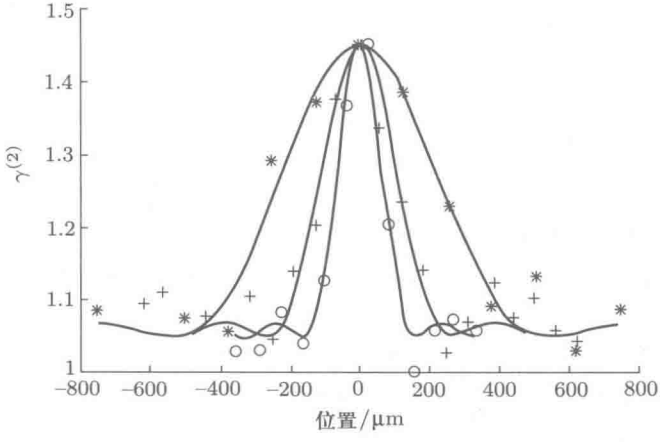


图 6.3.1 分别采用 1mm(星号)、2mm(十字) 和 4mm(圆圈) 直径的混沌热光源照明, 测得的点对 "斑" 空间关联. 拟合曲线由 (6.3.7) 式计算得出.

最后, 我们探讨一下以上结果与光强涨落的关系. 我们从 (6.3.1) 式出发,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\\
&=\sum_j\sum_l\Big|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)E_l(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)+E_l(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)E_j(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\right]\Big|^2\\
&=\Big[\sum_j\big|E_j(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)\big|^2\sum_l\big|E_l(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\big|^2\\
&\quad+\sum_j\sum_l\left[E_j^*(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)E_l(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)\right]\left[E_j(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)E_l^*(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\right]\\
&=\big\langle I(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)\big\rangle\big\langle I(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\big\rangle+\big\langle\Delta I(\boldsymbol{\rho}_1,z_1)\Delta I(\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\big\rangle
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

显然, 干涉交叉项产生了光强涨落和光强涨落之间的关联. 在此式最后一个推导中我们采用了第 1 章关于光强涨落的数学表达式. 的确, 无论远场还是近场, 热光的非平庸二阶相干性都是从光强涨落之中测量到的. 的确, D_1 测到的光强涨落和 D_2 测量到的光强涨落有非平庸的统计关联. 但是, 我们要把因果关系理顺: 是干涉造成了光强涨落和光强涨落之间的非平庸关联. 因此, 我们说: 热光的非平庸二阶相关是从光强涨落之中观测到的, 但是光强涨落不是造成热光的非平庸二阶关联的原因. 是上述非局域性的二阶干涉产生了热光的非平庸二阶关联, 从而使得 D_1 测到的光强涨落和 D_2 测量到的光强涨落有非平庸的统计关联关系. 我们在下一节和第 9 章会再次讨论这个问题.

由于近场实验的成功, 我们将把远场 HBT 干涉仪的概念推广到近场, 无论做远场测量还是近场测量, 皆称为 HBT 干涉仪. 无论是远场还是近场观察到的热光非平庸二阶相干现象, 皆称为 HBT 效应.

6.4 HBT 现象的物理本质

究竟是什么物理根源导致了 HBT 效应呢? 为什么当联合探测处于一定的时间窗口 (即相干时间) 之内和一定的横向区域 (即空间相干面积) 之内的时候, 光强的联合探测输出会提高一倍呢? HBT 干涉仪不同于杨氏双缝干涉仪, 也不同于迈克耳孙星体干涉仪. 在经典理论里, 杨氏双缝干涉仪和迈克耳孙星体干涉仪测量的都是电磁场的一阶相干特性, 而 HBT 干涉仪测量的是两个独立光强的统计关联. 从量子理论角度看, 杨氏双缝干涉仪和迈克耳孙星体干涉仪测量的都是一个光子经过干涉仪以后的概率分布函数, 而 HBT 干涉仪观察的是热光源中两个随机组对的光子在不同的时空点用两个独立探测器进行联合探测而得到的概率分布函数.

历史上人们成功地发展了光强涨落的统计关联这一经典理论来解释 HBT 效应, 这一理论已经被广泛接受. 这个宏观唯象理论把远场 HBT 实验中呈现的非平庸关联函数解释为光强涨落的统计关联

$$\begin{aligned}\langle \Delta I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Delta I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle &= \langle [I(\boldsymbol{r}_1,t_1)-\bar{I}_1][I(\boldsymbol{r}_2,t_2)-\bar{I}_2]\rangle \\ &= \langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle - \bar{I}_1\,\bar{I}_2 \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

其中 $\bar{I}_1$ 和 $\bar{I}_2$ 分别是探测器 D_1 和 D_2 测得的平均光强. 经典理论中, D_1 和 D_2 的联合探测测量的是光强 I_1 和 I_2 间的统计关联. 如果没有关联, 那么测量得到的是两个平均光强的简单乘积. 非平庸的关联函数表明两个测得的光强间存在统计关联. 由于 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的期望函数等价于

$\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$ 的系综平均, 二阶关联函数即为

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \Gamma_{11}^{(1)}\Gamma_{22}^{(1)} + \left|\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\right|^2 \\ &= \langle I_1\rangle\langle I_2\rangle + \langle \Delta I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Delta I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

(6.4.2) 式中, 二阶相干函数的非平庸项 $|\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2$ 和光强涨落的统计关联 $\langle\Delta I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\Delta I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$ 在同样的位置上. 因此, 上述理论推断非平庸项 $|\Gamma_{12}^{(1)}|^2$ 源于光强涨落的统计关联 $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$. 除了从数学上的理解, 光强涨落理论对远场 HBT 现象物理本质的解释看起来也是很有道理. 我们以热光非平庸空间二阶相干为例: 在空间 HBT 干涉仪中, 测量是在热辐射的远场区域也就是傅里叶变换平面进行的. 当 D_1 和 D_2 并排放置时, 两台探测器测量的是辐射场的同一空间模式. 同一模式自然有共同的光强涨落, 从而 $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$ 达到最大值, 且有 $\gamma^{(2)}\sim 2$. 当两台光探测器分开一定距离后, D_1 和 D_2 分别测量到辐射场的不同空间模式, 这时测得的光强涨落自然不同, 测量会给出 $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle = 0$ 及 $\gamma^{(2)}\sim 1$. 上述两种情形如图 6.4.1 和图 6.4.2 所示.

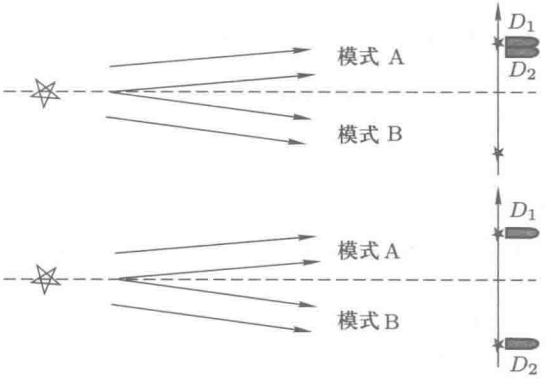


图 6.4.1 历史上对 HBT 实验的唯象解释. 上: 两台光探测器接收远场辐射的同一模式, 因而感受到完全相同的光强涨落. D_1 和 D_2 联合探测给出 $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$ 的最大值. 下: 两台光探测器接收远场辐射的不同模式. 这种情况下, 联合探测给出 $\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle = 0$.

在相当长的一段时间, 以上理论曾误导我们以为非平庸相干函数只能在热光源的远场区域观测到. 倘若我们将两台探测器移至 "近场" 会怎样呢? 依照这一理论在近场区域能够观测到非平庸的二阶相干性吗?⑥

⑥ "近场" 的概念由菲涅耳所定义. 区别于夫琅禾费远场, 菲涅耳近场条件定义为光源的角直径满足 $\Delta\theta > \lambda/D$, 其中 D 为光源直径. 太阳是一个典型的菲涅耳近场光源, 它的张角大约为 0.53°. 注意, 菲涅耳近场不同于 "表面近场", "表面近场" 关心的是与某个表面距离几个波长以内的区域.

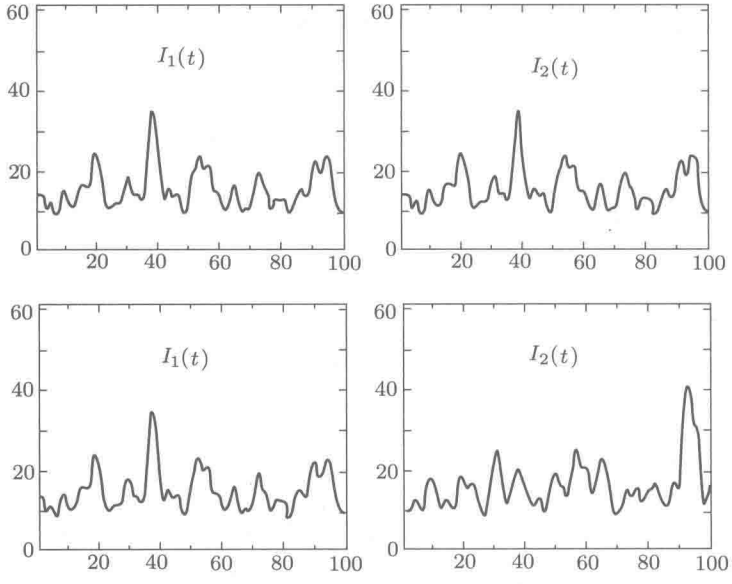


图 6.4.2 上排 (下排) 的两条 $I(t)$ 曲线对应于图 6.4.1 中上 (下) 两种配置.

图 6.4.3 是一个展开的示意图. 容易看到, 在近场条件下有几个显见的特征: (1) 两台光探测器 D_1 和 D_2 都能接收到大量子源或空间模式的辐射; (2) 在 D_1 和 D_2 间的联合探测中, 两台光探测器接收到不同子源或不同模式的辐射的概率更大. 接收同一子源 (模式) 的辐射和接收不同子源 (模式) 的联合探测的概率之比是 $N/N^2 = 1/N$; (3)$1/N$ 的比例关系不随 D_1 (或 D_2) 的位置而改变. 以上三点在图 6.4.3 中有很好的体现. 依据这三点, 以上唯象宏观远场理论应断言近场的二阶空间关联是常数, 但实际上这是错误的. 在 2005 至 2006 年, 作者和 Scarcelli 等人首次用实验观察到近场热光非平庸二阶相干函数, 并进而演示了近场热光 "鬼成像". 他们所用的实验配置与历史上的 HBT 实验类似, 只不过把混沌热光源搬到了近场. 作者和 Scarcelli 等人的混沌热辐射源是一个标准的 "赝热光" 源. 它由一束单模 CW 激光和快速旋转的毛玻璃组成. 激光横向扩束后被旋转的毛玻璃散射后传播到一个可调小孔, 用以调节光源的横向尺寸, 小孔一般在几个 mm 至数 cm 之间可调. 这种方法是在 20 世纪 60 至 70 年代从 HBT 类实验发展出来的. 与 HBT 实验类似, 混沌热光被一个 50%–50% 分束器一分为二, 透射光和反射光分别被耦合进 D_1 和 D_2. D_1 和 D_2 须与光源距离相等, 均为几百 mm. 利用光子符合计数或 HBT 型电流–电流关联的方法进行联合探测. 借助一个展开的示意图 (图 6.4.4), 我们很容易弄清楚该测量的物理图像.

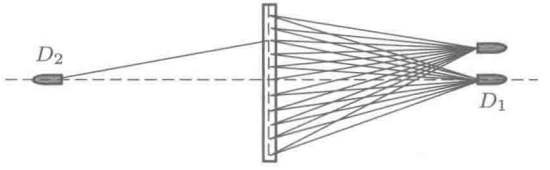


图 6.4.3 (1) 两台光探测器 D_1 和 D_2 都能接收到大量子源或空间模式的辐射; (2) 在 D_1 和 D_2 间的联合探测中, 两台光探测器接收到不同子源或不同模式的辐射的概率更大, 接收同一子源 (模式) 的辐射和接收不同子源 (模式) 的联合探测的概率之比是 $N/N^2 = 1/N$; (3) $1/N$ 的比例关系不随 D_1 (或 D_2) 的位置而改变.

尽管测量过程中单个探测器 D_1 和 D_2 的计数率或输出电流都是常数, 当两个点探测器 D_1 和 D_2 对称排列在 x_1 和 x_2 平面上时 (如图 6.4.4 中上下两种情形所示), 仍然可以观测到约 50% 对比度的非平庸二阶关联. 在图 6.4.4 的上图中, D_1 和 D_2 被对称地置于光轴上. 当 D_1 或 D_2 在光轴附近横向扫描时, 可以观测到 $|\gamma_{12}^{(1)}|^2$ 或 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 呈现出类似 sinc 函数的变化. 当 D_1 从其对称位置移开几 mm, 如中图所示, 那么在非对称位置附近扫描 D_1 或 D_2 时, 非平庸关联会消失, 即 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle \sim 0$. 在下图的测量中, D_2 重新回到 D_1 的对称位置. 当在新的对称位置附近扫描 D_1 或 D_2 时, 又可以观测到 $|\gamma_{12}^{(1)}|^2$ 或 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 呈现出类似 sinc 函数形式. 注意, 要想观察到 sinc 函数型关联函数, 两台光探测器必须与光源距离相等, 对于横向尺寸较大的光源, 偏移几 mm 就会使得非平庸关联完全消失.

这一实验结果完全出人意料. 首先, 它打破了 50 年来我们一直笃信不移的远场假设: 在近场也是可以观测到热光的非平庸二阶空间关联的. 其次, 根据以上唯象宏观远场理论, 图 6.4.4 所示的三种测量应该不会有如此明显的差别.

(1) 就像我们在本节开始讨论的, 在近场, D_1 和 D_2 决不可能达到远场 HBT 实验那样的条件, 也就是说 D_1 和 D_2 不可能像在远场那样: 探测到同一模式的概率多, 探测到不同模式的概率少. 在菲涅耳近轴条件下, D_1 和 D_2 总是接收到大量独立的而且数量几乎相同的子电场或模式, 从一个测量点到另一个测量点, 无论如何横向移动, D_1 和 D_2 被同一子源 (模式) 触发和被不同子源 (模式) 触发的概率之比, 皆为 $\sim 1/\acute{N}$, 没有差别.

(2) 虽然横向扫描 D_1 和 D_2 会改变二阶时间关联函数 $\gamma^{(1)}(t_1 - t_2)$ 的取值, 然而, 上下移动几 mm 所引起的变化确实可以忽略不计. 上面的测量中得到的混沌热辐射二阶时间关联如图 6.4.5 所示, 其宽度为 μs 量级, 这意味着从最大 (最小) 关联值变到最小 (最大) 关联值必须有几百 m 以

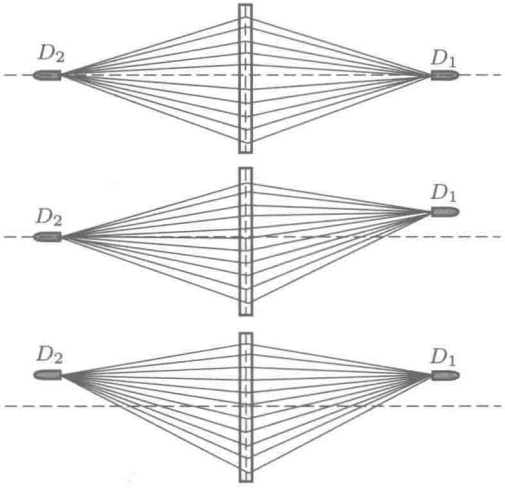


图 6.4.4 作者和 Scarcelli 等人所做的近场二阶空间关联测量. 上: D_1 和 D_2 被对称地置于光轴上并且与光源的距离相等, 观察到的非平庸 $g^{(2)}(x_1-x_2)$, 最大值为 ~ 2; 中: D_1 被上移至非对称位置, $g^{(2)}(x_1-x_2)$ 变为常数 1; 下: D_2 被上移至与 D_1 对称的位置, 再次观察到的非平庸 $g^{(2)}(x_1-x_2)$, 最大值为 ~ 2.

上的光程变化.

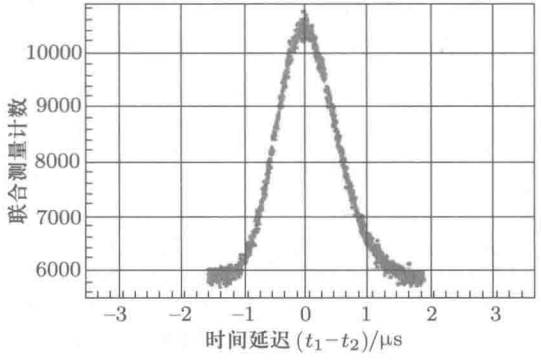


图 6.4.5 在近场 HBT 试验中观测到的混沌热辐射二阶时间关联函数. 这种模拟热光的混沌热辐射具有 μs 数量级的相干时间, 对应于 300 m 的纵向光程延迟.

的确, 涨落在任何光学测量中都是不可避免的. 非平庸二阶相干性是从光强涨落的测量中观察到的一种现象, 但是它决不是由光强涨落的统计关联所引发的. 我们可以说, 光强涨落的统计关联是热光涨落行为呈现出来的一个现象, 而不是产生热光非平庸二阶相干性的原因. 那么近场非平庸光强关联的根源是什么呢?

人们似乎总是习惯于保持过去的传统理论. 有人对近场热光的非平庸二阶关联提出了一种简单率真的解释. 由于实验中利用了 50%–50% 分束器将光束一分为二, 该理论认为近场的关联与历史上的 HBT 远场关联类似, 只不过, 近场非平庸二阶关联源于光学分束器产生的两套全同光 "散斑":

$$\langle I(\boldsymbol{\rho}_1)I(\boldsymbol{\rho}_2)\rangle \sim \delta(\boldsymbol{\rho}_s-\boldsymbol{\rho}_1)\,\delta(\boldsymbol{\rho}_s-\boldsymbol{\rho}_2) \tag{6.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_s$ 是光源中 "散斑" 的横向坐标. 当 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2$ 时, 两台探测器测量的是 "同一个" 散斑. 所以测得的两个光强涨落应该是相同的, 从而导致 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2\rangle \neq 0$; 然而取 $\boldsymbol{\rho}_1 \neq \boldsymbol{\rho}_2$ 时, 两台光探测器测量的是 "不同" 散斑, 测得的两光强涨落将是随机的, 从而导致 $\langle \Delta I_1 \Delta I_2\rangle = 0$.

这一理论主要有以下两点问题:

(1) 无论量子还是经典理论中, 光学分束器都不是实现光强分束的. 经典理论中, 分束器把光场从其输入端传输到它的两个输出端而且保持了一定的相位关系, 此相位关系在分束过程中保证了能量守恒. 量子理论则定义了一个幺正算符来对应这一物理过程. 这一算符将分束器的输入场算符与其输出场算符用幺正变换联系起来. 不论是量子化电磁场还是经典的电磁场, 它从光源出发到分束器再到探测器的传播, 必须遵循一定的物理规律. 经典理论认为, 任何时空点的任何电磁场及其叠加必须是麦克斯韦波动方程的解. 实际上, (6.4.3) 式既不是经典理论的解, 也不是量子理论的解. 在第 3 章中, 我们讨论过光的传播过程. 热光源中的点状独立 "散斑" 经过衍射之后, 在无论远场或菲涅耳近场平面上都呈现为近似均匀的分布. 除非采用经典的成像系统, 否则不可能在 D_1 和 D_2 的测量面上复制出和光源完全相同的点状 "散斑".

(2) 即便在分束器的两个输出端可以得到两个完全相同的光强分布, 经过长距离传播和分离后, 两路遇到大气涨落或湍流也不会完全相同. 如果两路涨落不同, 那么局部的环境就会影响光强的时间和空间分布. 我们知道, 现代的 HBT 干涉仪中 D_1 和 D_2 的间距可达数 km. 但是我们并没有发现 HBT 干涉仪会因为两接收器所处的工作环境不同而给出不同的结果. 此外, 我们会在第 11 章分析一个抗湍流的鬼成像实验. 那个实验的结果将进一步支持以上观点.

还有一个非常流行的经典理论, 与 HBT 的时间关联模型几乎一模一样, 认为混沌热光之所以在同一时空点有成倍的光强统计关联, 是由于在此条件下两个光探测器测量的是在同一时刻的光: 由同一光源产生的光等距离传播到另一个具有相同纵向 — 横向坐标的时空点, $\tau_1=\tau_2$ 和

$\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2$, 当然有相同的光强涨落. 该理论似乎很有道理. 然而, 既然有相同的光强涨落, 容易推断 $\langle \Delta I(\boldsymbol{\rho},z;t)\,\Delta I(\boldsymbol{\rho},z;t)\rangle$ 只能取大于零的值, 即, 同涨同落. 下面, 我们由此推导出的一个著名的不等式. 此不等式应该对远场和菲涅耳近场都适用. 为了简化讨论, 我们着重分析混沌热光二阶相干的时间部分.

考虑到混沌热光的稳态性质, 将 $\gamma^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 写成如下形式:

$$\gamma^{(2)}(\tau)=\frac{\langle I(t)\,I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2} \tag{6.4.4}$$

其中假设 $z_1=z_2$. 现在, 我们按照以上思路来推导 $\tau=0$ 时的不等式. 根据

$$\langle \Delta I(t)\,\Delta I(t)\rangle=\langle[\Delta I(t)]^2\rangle\geqslant 0 \tag{6.4.5}$$

得到

$$\langle\left[I(t)-\langle I(t)\rangle\right]^2\rangle=\langle I(t)I(t)\rangle-\langle I(t)\rangle^2\geqslant 0 \tag{6.4.6}$$

因此,

$$\gamma^{(2)}(0)=\frac{\langle I(t)\,I(t)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2}\geqslant 1 \tag{6.4.7}$$

不幸的是, 混沌热光的 "反关联" 实验已经观测到 $g^{(2)}(0)<1$, 或 $\langle\Delta I_1\,\Delta I_2\rangle<0$ 的 "反关联" 现象. 这说明即使实验满足 "测量同一时刻的光", 其光强涨落不一定总是同涨同落, 不同的实验条件可能导致一个涨一个落, 或者一个落一个涨. 我们将在第 9 章介绍混沌热光的 "反关联" 实验.

简单地说: 虽然 $\langle\Delta I(t)\Delta I(t)\rangle\geqslant 0$ 的推断与 HBT 实验相符合, 但是却与热光二阶反关联实验观察结果相矛盾. 我们在第 9 章会再次讨论这个问题.

毫无疑问, 混沌热光的非平庸二阶关联是一种干涉现象. 然而, 这种奇异的干涉和传统的经典干涉在概念上截然不同. 考察 (6.2.2) 式, (6.2.5) 式及 (6.2.11) 式容易发现这种干涉至少和以下两类经典干涉不同:

(I) 它显然不同于相干辐射测量中观察到的干涉 (衍射) 效应. 测量相干光时, 大量相干光场的局域叠加 $|\sum_j E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)|^2$ 和 $|\sum_j E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2$ 产生两个独立 (或可因子分解) 的时域脉冲或横向观测平面上的衍射图样. 然而, 对于混沌热光决不会发生这种现象.

(II) 它不是光场线性叠加 $|E(\boldsymbol{r}_1,t_1)+E(\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2$ 的结果, 其中 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 分别为 D_1 和 D_2 在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处测得的光场. 光的麦克斯韦电磁波理论认为两个独立探测器测到的 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 决不可能相互干涉.

二阶相干性测量中涉及的干涉是 $|E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2}|^2$. 或许, 用量子语言来描述这种叠加更为合适. 从量子力学的角度看, 这种叠加隐含了两种不同但又不可区分的方式在 D_1 和 D_2 之间触发联合探测事件: (1) D_1 被第 j 个子点源发出的光子 j 触发, 而 D_2 被第 l 个子点源发出的光子 l 触发; (2) D_1 被第 l 个子点源发出的光子 l 触发, 而 D_2 被第 j 个子点源发出的光子 j 触发. $E_{j1}E_{l2}$ 和 $E_{l1}E_{j2}$ 分别对应着这两种不同而又不可区分的双光子概率振幅. 图 6.4.6 示意性地给出了从第 j 和第 l 个子源产生的任意一对光子的两种可能路径.

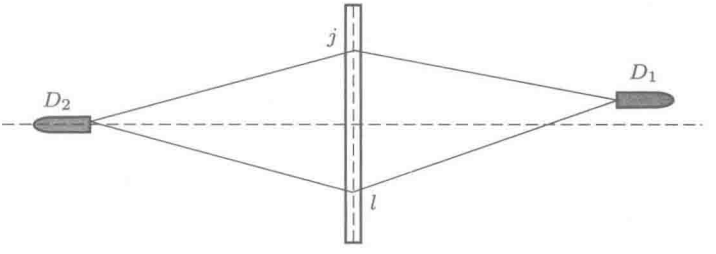


图 6.4.6 图 6.2.3 实验配置的展开图. D_2 这路的光路被翻折到光源的左边. 热辐射源由大量独立的点子源组成. $|E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2}|^2$ 的叠加导致 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处的 D_1 和 D_2 之间的联合探测事件.

尽管从光的量子理论角度看, $|E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2}|^2$ 的物理意义是非常的简单明了, 但是它很难被经典理论所接受. 首先, $|E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2}|^2$ 的叠加确实超出了麦克斯韦电磁波理论的范畴. 它和非线性光学不同, 因为热光源中不存在 $\chi^{(2)}$ 材料, 所以不会产生非线性极化, 进而也不会涉及非线性波动方程. $(E_{j1}E_{l2})$ 和 $(E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2})$ 都不是线性麦克斯韦波动方程的解. 其次, 也可能是令经典理论最为苦恼的一点, $|E_{j1}E_{l2}+E_{l1}E_{j2}|^2$ 的叠加是 "非局域" 的, 它发生在两个不同的时空坐标, 通过两台独立探测器的联合探测观测到. 在特定实验条件下, 两个光探测事件可以是类空分离的事件. 我们仿效 EPR-Bell 将这种特殊的叠加称为非局域性叠加.

6.5 HBT 关联及探测时间平均

HBT 干涉仪中直接测量的物理量是线性乘法器的输出电压 $V(t)\propto i_1(t)i_2(t)$, 如 (6.0.1) 式所示. $V(t)\propto\Gamma^{(2)}$ 只有在理想探测器的情况下才成立, 此时 t_1-t_2 上的时间平均对非平庸关联函数 $|\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$ 的展宽可以忽略. 然而对于实际过程, 我们必须考虑光探测器的有限响应时间 t_c. 因此对 t_1-t_2 的时间平均是不可避免的. 这个时间平均不会影响常数项 $\Gamma_{11}^{(1)}\Gamma_{22}^{(1)}$. 但是在 $t_c\gg\tau_c$ 的情况下 (τ_c 为热光场的相干时间), 它会使得

$|\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$ 显著加宽并且幅值显著减小. 因而测得的 $\Gamma^{(2)}$ 和 $\gamma^{(2)}$ 的可见度将明显降低. 所以实际验证 HBT 效应必须满足一个先决条件: 热光场的带宽必须相对较窄, 或者必须有 $\tau_c > t_c$. 实验中我们必须小心对待这个实验条件, 不要出错. 原则上, 对于理想光探测器, (6.2.8) 和 (6.2.9) 式对于任意带宽都成立, 实际上, 光场带宽越宽, 关联函数 $|\Gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$ 就会越窄.

下面我们考察这个不可避免的探测器的时间平均效应. 我们用一个一般的归一化函数 $\mathcal{D}_j(\tilde{t}_j - t_j)$ 来表示第 j 个光探测器的响应函数, 其中 $\tilde{t}_j$ 代表一次光探测的平均时间. 函数 $\mathcal{D}_j(\tilde{t}_j - t_j)$ 一般取为高斯函数, 但也常常会取为矩形函数来简化数学计算. 于是, 我们测得的关联是光场辐射的时间相干度和探测器响应函数的卷积,

$$\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 = \int \mathrm{d}t_1 \int \mathrm{d}t_2 \left|\gamma(t_1 - t_2 - \tau)\right|^2 \mathcal{D}_1(\tilde{t}_1 - t_1)\mathcal{D}_2(\tilde{t}_2 - t_2), \tag{6.5.1}$$

其中积分限均为从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

在探测器响应速度非常快的理想情形下, 即 $t_c \ll \tau_c$ 时, 光探测器的响应函数可以看作是 δ 函数. (6.5.1) 式变为

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 &= \int \mathrm{d}t_1 \int \mathrm{d}t_2 |\gamma(t_1 - t_2 - \tau)|^2 \,\delta(\tilde{t} - t_1)\delta(\tilde{t} - t_2) \\ &= |\gamma(\tau)|^2,\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

其中我们取 $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 = \tilde{t}$.

在非理想探测器的一般情况下, $\mathcal{D}_j(\tilde{t} - t_j)$ 不能处理为 δ 函数. 时间平均的展宽效应是必须考虑的. 为了简化数学计算我们用矩形函数来表示探测器的响应函数,

$$\mathcal{D}_j(\tilde{t} - t_j) = \begin{cases} 1/t_c & 0 \leqslant |\tilde{t}_j - t_j| \leqslant t_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

二重积分近似为

$$\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 \simeq \frac{1}{t_c^2} \int_0^{t_c} \mathrm{d}t_1' \int_0^{t_c} \mathrm{d}t_2' \left|\gamma_{12}(t_1' - t_2' - \tau)\right|^2, \tag{6.5.3}$$

其中 $t_j' = \tilde{t}_j - t_j$, $j = 1, 2$, 同时我们取 $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 = \tilde{t}$ 以简化记号. 通过变量变换 $t_+ = (t_1' + t_2')/2$ 及 $t_- = t_1' - t_2'$, 容易积出这个二重积分为

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 &= \frac{2}{t_c^2} \int_0^{t_c} \mathrm{d}t_- \Big[\int_{\frac{t_-}{2}}^{t_c - \frac{t_-}{2}} \mathrm{d}t_+ \Big] \left|\gamma_{12}(t_- - \tau)\right|^2 \\ &= \frac{2}{t_c^2} \int_0^{t_c} \mathrm{d}t_- (t_c - t_-) \left|\gamma_{12}(t_- - \tau)\right|^2\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

将积分区域从 t_1 和 t_2 平面变换到 t_+ 和 t_- 平面是一个标准的处理方法, 具体的过程可以参见附录 6.A. (6.5.4) 式可以用来评估给定探测方案的时域特性. 注意 $|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$ 的大小与光场的相干时间和探测器的响应时间紧密相关. 在相干时间远小于探测器响应时间的极端情况下, 积分可以被进一步简化. 如果我们假设时间相干度是一个宽度为 τ_c 的高斯函数, 则 (6.5.4) 式化为:

$$\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 \sim \frac{1}{t_c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_-\, t_c\, |\gamma_{12}(t_- - \tau)|^2 \sim \frac{\tau_c}{t_c} \tag{6.5.5}$$

因此这种情况下非平庸贡献项 $|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$ 相对于归一化的背景常数 1 是很小的. 这解释了为什么早期的 Hanbury Brown 和 Twiss 实验中测得的关联对比度都比较低, 因为当时的探测器都比较慢, 其响应时间比热光场的相干时间要小很多. 这也是为什么对于宽带热光源, 很难观测到高对比度的非平庸关联函数的部分原因. 上面分析虽然是取了比较极端的物理条件, 但是它却引出了一个非常重要的结论: 为了尽量真实地测到 HBT 效应, 我们要精心挑选探测器的响应时间和热光场的相干时间.

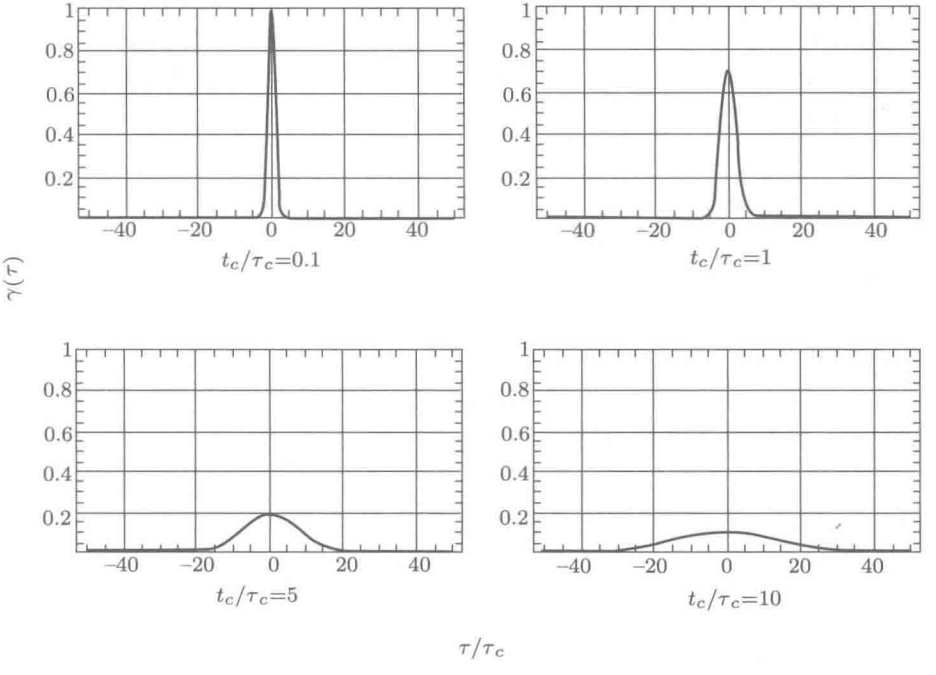


图 6.5.1 根据光探测器不同的响应时间数值模拟出的 $|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$. 横轴是 $\tau = \tau_1 - \tau_2$, 单位是 τ_c, 而纵轴是 $|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$.

我们可以利用数值计算来得到 (6.5.1) 式的一般解. 图 6.5.1 给出了四个数值模拟的结果, 对应 t_c/τ_c 的四组不同取值. 对 (6.5.1) 式的积分进行数值模拟时, 假设了关联函数和探测器的响应函数均为高斯型. 图 6.5.1 中的横轴是 $\tau = \tau_1 - \tau_2$, 单位是 τ_c, 而纵轴是 $|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)|^2$. 注意, 当探测器的响应时间 t_c 变得等于甚至大于光场的相干时间 τ_c 时, 相干函数的幅度相对于背景常数显著减小, 其宽度也显著增大, 正比于探测器的响应时间.

6.6 光的 N 阶相干性

这节中我们引入光的高阶相干性概念. 光的 N 阶 ($N > 2$) 相干或关联函数定义为

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2; \cdots; \boldsymbol{r}_N, t_N) \qquad (6.6.1)\\ &= \langle E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)E(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)E(\boldsymbol{r}_2, t_2) \cdots E^*(\boldsymbol{r}_N, t_N)E(\boldsymbol{r}_N, t_N)\rangle\end{aligned}$$

N 阶相干度定义为

$$\begin{aligned}&\gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2; \cdots; \boldsymbol{r}_N, t_N) \qquad (6.6.2)\\ &= \frac{\langle E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)E(\boldsymbol{r}_1, t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)E(\boldsymbol{r}_2, t_2) \cdots E^*(\boldsymbol{r}_N, t_N)E(\boldsymbol{r}_N, t_N)\rangle}{\langle E^*(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, E(\boldsymbol{r}_1, t_1)\rangle\langle E^*(\boldsymbol{r}_2, t_2)E(\boldsymbol{r}_2, t_2)\rangle \cdots \langle E^*(\boldsymbol{r}_N, t_N)E(\boldsymbol{r}_N, t_N)\rangle}\end{aligned}$$

其中系综平均 $\langle\cdots\rangle$ 仍然表示需要考虑光场的所有可能取值.

容易证明相干光的 N 阶关联函数可因子分解为 N 个独立的一阶自关联函数 (光强), 因而相干辐射的 N 阶相干度为

$$\gamma_{\mathrm{coh}}^{(N)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2; \cdots; \boldsymbol{r}_N, t_N) = 1$$

下面我们着重讨论热辐射的非平庸 N 阶相干函数. 假设一个热光源包含了大量随机分布并随机辐射的独立子源, 例如几万亿个独立的随机辐射的原子跃迁. 它们将会触发 N 个探测器进行联合探测. 每个点子源辐射出一个独立的球面波作为子电场, 每个子电场具有复振幅 $E_j = a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$, 其中 a_j 为第 j 个子电场的正实振幅, φ_j 是第 j 个子电场的随机相位. 光源的基本物理图像如下: (1) 具有大量独立的点子源, 它们在空间随机分布 (按照空间位置统计); (2) 每个子源包含大量独立的随机辐射的原子 (按照时间顺序统计); (3) 无论是按空间位置还是时间顺序计数的大量子源, 都可能对每个点探测器处的每个独立辐射模式 $(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ 产生贡献 (按模式统计).

可以想象的是, 第 j 个自关联函数的期望值或者第 j 个探测器测得的第 j 个光强为常数, 即

$$\Gamma^{(1)}(\boldsymbol{r}_j, t_j; \boldsymbol{r}_j, t_j) = \langle E^*(\boldsymbol{r}_j, t_j)E(\boldsymbol{r}_j, t_j)\rangle = \text{常数}$$

其中求期望值时考虑了子电场相位的所有可能取值. 即使 N 个光强全都是常数, 也不能阻止 N 个独立探测器的联合探测产生非平庸的 N 阶相干或关联. 例如, 三阶光强相干函数 $\Gamma^{(3)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_3,t_3)$ 计算为

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(3)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_3,t_3)\\
&\equiv\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^*(\boldsymbol{r}_3,t_3)E(\boldsymbol{r}_3,t_3)\rangle\\
&=\langle\sum_j E_{j1}^*\sum_k E_{k1}\sum_l E_{l2}^*\sum_m E_{m2}\sum_n E_{n3}^*\sum_p E_{p3}\rangle\\
&=\sum_{j,k,l}\Big|\frac{1}{\sqrt{6}}\big[E_{j1}E_{k2}E_{l3}+E_{j1}E_{k3}E_{l2}+E_{j2}E_{k1}E_{l3}\\
&\quad+E_{j2}E_{k3}E_{l1}+E_{j3}E_{k1}E_{l2}+E_{j3}E_{k2}E_{l1}\big]\Big|^2
\end{aligned}\tag{6.6.3}$$

其中 $E_{\alpha\beta}$ 是 $E_\alpha(\boldsymbol{r}_\beta,t_\beta)$ 的缩写, 表示第 α 个子源辐射到 $(\boldsymbol{r}_\beta,t_\beta)$ 的光场. 类似于 (6.2.2) 式的热光二阶相干函数, (6.6.3) 式是考虑子电场所有可能相位之后的结果, 所以已经完成了部分系综平均. 我们下面会证明 (6.6.3) 式将导出一个非平庸函数 $\Gamma^{(3)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_3,t_3)$.

我们现在来计算三阶时间相干性. 假定采用一个类似 HBT 的实验装置, 不同之处是使用了三个光探测器以及三重符合计数或三重电流–电流–电流线性乘法器. 为了简化数学计算, 我们进一步假设三个点探测器到热光源的距离均相等, $z_1=z_2=z_3$, 则 D_1、D_2 和 D_3 间的联合探测计数或联合电流–电流–电流乘积可由 (6.6.3) 式计算得

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=\int\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\omega'\int\mathrm{d}\omega''\big|f(\omega)\big|^2\big|f(\omega')\big|^2\big|f(\omega'')\big|^2\\
&\times\Big|\frac{1}{\sqrt{6}}\big[g(\omega,t_1)g(\omega',t_2)g(\omega'',t_3)+g(\omega,t_1)g(\omega'',t_2)g(\omega',t_3)\\
&+g(\omega',t_1)g(\omega,t_2)g(\omega'',t_3)+g(\omega',t_1)g(\omega'',t_2)g(\omega,t_3)\\
&+g(\omega'',t_1)g(\omega,t_2)g(\omega',t_3)+g(\omega'',t_1)g(\omega',t_2)g(\omega,t_3)\big]\Big|^2,
\end{aligned}\tag{6.6.4}$$

其中 $g(\omega,t_j)$ 是将光场从光源传播到第 j 个光探测器的格林函数. (6.6.4) 式非常关键, 它揭示了非平庸三阶关联的本质是三光子干涉. (6.6.4) 式中叠加的六项对应于三个独立光子有六种不同但又不可区分的方式来触发一次三重联合探测. 这六个概率幅如图 6.6.1 所示. $t_1=t_2=t_3$ 时 ($z_1=z_2=z_3$ 条件下) 六个概率振幅相长叠加, 这些相长干涉累计后使得 $\Gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 达到其最大值. 另一方面, $t_1\neq t_2\neq t_3$ 时, 六个概率振幅变为可区分或者部分可区分, $\Gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 的值因此而变小. 正是三光子干涉导致了三个随机分布的光子有六倍的概率在 $t_1=t_2=t_3$ 时被捕获. 我们

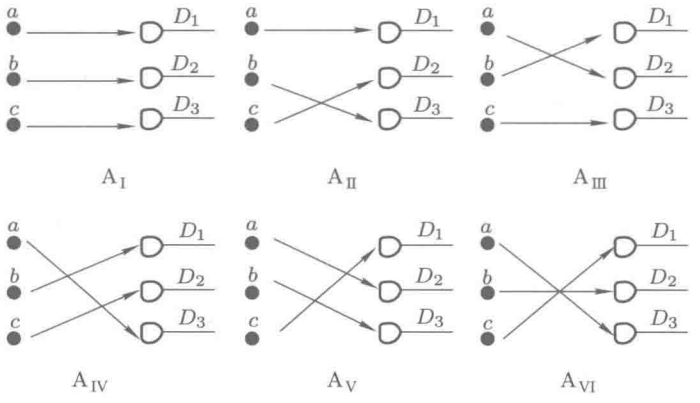


图 6.6.1 三个独立光子 a,b,c 有六种方式触发一次 D_1、D_2 和 D_3 之间的联合探测. 在距离光源同样远的地方, 在 (t_1,t_2,t_3) 时刻观察到一个三光子符合测量事件的概率取决于六个三光子概率振幅的叠加. $t_1=t_2=t_3$ 时, 六个概率振幅相长叠加, 对所有相长干涉求和后 $\Gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 达到最大值.

通常将 (6.6.4) 式写为以下形式

$$\begin{aligned}\Gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=&\Gamma^{(1)}(t_1,t_1)\Gamma^{(1)}(t_2,t_2)\Gamma^{(1)}(t_3,t_3)\\&+\left|\Gamma^{(1)}(t_1,t_2)\right|^2\Gamma^{(1)}(t_3,t_3)\\&+\left|\Gamma^{(1)}(t_2,t_3)\right|^2\Gamma^{(1)}(t_1,t_1)\\&+\left|\Gamma^{(1)}(t_3,t_1)\right|^2\Gamma^{(1)}(t_2,t_2)\\&+\Gamma^{(1)}(t_1,t_2)\Gamma^{(1)}(t_2,t_3)\Gamma^{(1)}(t_3,t_1)\\&+\Gamma^{(1)}(t_2,t_1)\Gamma^{(1)}(t_3,t_2)\Gamma^{(1)}(t_1,t_3)\end{aligned}\tag{6.6.5}$$

其中 $\Gamma^{(1)}(t_j,t_k)$ $(j=1,2,3,\,k=1,2,3)$ 定义为

$$\Gamma^{(1)}(t_j,t_k)\equiv\int \mathrm{d}\omega\left|f(\omega)\right|^2 g^*(\omega,t_j)g(\omega,t_k)\tag{6.6.6}$$

(6.6.5) 式可归一化为

$$\begin{aligned}&\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)\\&=1+|\gamma_{12}^{(1)}|^2+|\gamma_{13}^{(1)}|^2+|\gamma_{23}^{(1)}|^2+\gamma_{12}^{(1)}\gamma_{23}^{(1)}\gamma_{31}^{(1)}+\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{32}^{(1)}\gamma_{13}^{(1)}\end{aligned}\tag{6.6.7}$$

其中 $\gamma_{jk}^{(1)}=\Gamma_{jk}^{(1)}/\sqrt{\Gamma_{jj}^{(1)}\Gamma_{kk}^{(1)}}$. 为了简化 $\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 的计算, 我们假设辐射场在带宽 $\Delta\omega$ 内的光谱 $f(\omega)$ 是均匀分布的. (6.6.6) 式中的积分在 $j\neq k$ 时为 sinc 函数, 在 $j=k$ 时是常数. 归一化的三阶时间关联函数 $\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 即为

$$\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=1+\mathrm{sinc}^2\left[\frac{\Delta\omega(t_1-t_2)}{2\pi}\right]\tag{6.6.8}$$

$$+\mathrm{sinc}^2\Big[\frac{\Delta\omega(t_2-t_3)}{2\pi}\Big]+\mathrm{sinc}^2\Big[\frac{\Delta\omega(t_3-t_1)}{2\pi}\Big]$$
$$+2\,\mathrm{sinc}\Big[\frac{\Delta\omega(t_1-t_2)}{2\pi}\Big]\,\mathrm{sinc}\Big[\frac{\Delta\omega(t_2-t_3)}{2\pi}\Big]\,\mathrm{sinc}\Big[\frac{\Delta\omega(t_3-t_1)}{2\pi}\Big]$$

容易看到当 $t_1=t_2=t_3$ 时, $\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=6$. 三阶关联函数的最高对比度为 6 比 1(对应 ~71% 的可见度).

作者和 Zhou 等人最近测量了热光的非平庸三阶相干函数, 测得的 $\gamma^{(3)}(t_1,t_2,t_3)$ 如图 6.6.2 所示. 实验和模拟的结果在统计误差范围内符合得很好.

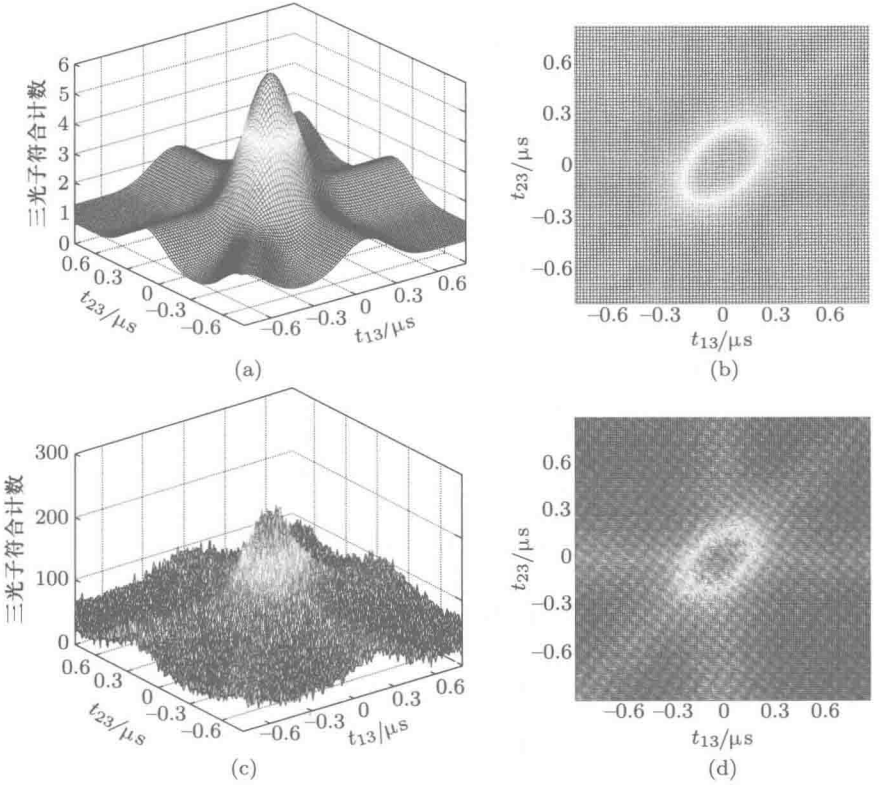


图 6.6.2 理论计算 (a 和 b 图) 及实验测量 (c 和 d 图) 得到的热光三阶时间关联. 三光子联合探测的三维直方图的两个坐标轴分别为 $t_{13}\equiv t_1-t_3$ 和 $t_{23}\equiv t_2-t_3$. 理论模拟结果是根据 (6.6.8) 式计算得出. 我们对 D_1、D_2 和 D_3 的单路探测都进行了监测, 并且发现都是常数.

由 $\Gamma^{(3)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_3,t_3)$ 很容易推广到热光的 N 阶 ($N\geqslant 2$) 相干函数 $\Gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)$,

$$\Gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)$$

$$\equiv \langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdots E^*(\boldsymbol{r}_N,t_N)E(\boldsymbol{r}_N,t_N)\rangle$$
$$\simeq \sum_{j,k,l\cdots}\Big|\frac{1}{\sqrt{N!}}[\sum_{N!}E_{j1}E_{k2}E_{l3}\cdots]\Big|^2 \tag{6.6.9}$$

其中 $\sum_{N!}E_{j1}E_{k2}E_{l3}\cdots$ 表示 N 重电场的 $N!$ 项求和, 其各项脚标序按 $1,2,3,\cdots,N$、$1,3,2,\cdots,N$、$2,1,3,\cdots,N$ 等等做排列组合, 对应了由 N 个独立子电场 (或光子) 以 $N!$ 种方式产生一个 N 重联合探测事件的概率. 这些独立子电场 (或光子) 由大量记为 $j,k,l,\cdots$ 的独立子源所产生. N 重联合探测事件指 N 个光探测器之间的联合探测.

6.7 热光的 N 阶近场空间相干性

这节中我们简要讨论一下热光的 N 阶近场空间相干性, 我们将以三阶的计算为例. 现在考虑一个类似于刚才三阶时间相干性的测量装置, 不同的是三个点探测器分别是在 $\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\rho}_2$ 和 $\boldsymbol{\rho}_3$ 平面内做横向扫描. 我们从 (6.6.3) 式出发, 为了简化计算, 我们仍然通过取最大时间关联及单波长近似来忽略频谱积分,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(3)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3) \qquad (6.7.1)\\
\propto&\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}|g_1(\boldsymbol{\kappa})|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'|g_2(\boldsymbol{\kappa}')|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}''|g_3(\boldsymbol{\kappa}'')|^2\\
&+\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}|g_1(\boldsymbol{\kappa})|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' g_2^*(\boldsymbol{\kappa}')g_3(\boldsymbol{\kappa}')\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'' g_3^*(\boldsymbol{\kappa}'')g_2(\boldsymbol{\kappa}'')\\
&+\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'|g_2(\boldsymbol{\kappa}')|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa} g_1^*(\boldsymbol{\kappa})g_3(\boldsymbol{\kappa})\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'' g_3^*(\boldsymbol{\kappa}'')g_1(\boldsymbol{\kappa}'')\\
&+\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}''|g_3(\boldsymbol{\kappa}'')|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa} g_1^*(\boldsymbol{\kappa})g_2^*(\boldsymbol{\kappa})\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' g_2^*(\boldsymbol{\kappa}',\omega)g_1(\boldsymbol{\kappa}')\\
&+\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa} g_1^*(\boldsymbol{\kappa})g_2(\boldsymbol{\kappa})\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' g_2^*(\boldsymbol{\kappa}')g_3(\boldsymbol{\kappa}')\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'' g_3^*(\boldsymbol{\kappa}'')g_1(\boldsymbol{\kappa}'')\\
&+\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa} g_2^*(\boldsymbol{\kappa})g_1(\boldsymbol{\kappa})\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' g_3^*(\boldsymbol{\kappa}')g_2(\boldsymbol{\kappa}')\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'' g_1^*(\boldsymbol{\kappa}'')g_3(\boldsymbol{\kappa}'')
\end{aligned}$$

将近场自由传播的格林函数代入 (6.7.1) 式, 可以计算出每个 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g_j^*(\boldsymbol{\kappa})g_k(\boldsymbol{\kappa})$ $(j,k=1,2,3)$ 形式的积分为

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g_j^*(\boldsymbol{\kappa})\, g_k(\boldsymbol{\kappa})\\
=&(\frac{\omega}{2\pi c})^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(z_j-z_k)}}{z_jz_k}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0')}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0 a^*(\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{\rho}_0)}\\
&\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_j}|\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_j|^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0' a(\boldsymbol{\rho}_0')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{\rho}_0')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_k}|\boldsymbol{\rho}_0'-\boldsymbol{\rho}_k|^2} \qquad (6.7.2)
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_0$ 是光源平面内的横向坐标. 对于一个横向尺寸较大并且 $\Delta\boldsymbol{\kappa}$ 带宽足够大的光源有,

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0')} \sim \delta(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0')$$

将这个 δ 函数代入 (6.7.2) 式, 假设 N 个光探测器到光源的距离相等, $z_j = z_k = d$ 及 $a(\boldsymbol{\rho}_0) \sim$ 常数, 由 (6.7.2) 式近似得到一个 somb 函数

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g_j^*(\boldsymbol{\kappa})\, g_k(\boldsymbol{\kappa}) \simeq \mathrm{somb}\big[\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_j-\boldsymbol{\rho}_k|\big]$$

一维情况下, 该积分退化为一个 sinc 函数

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, g_j^*(\boldsymbol{\kappa})\, g_k(\boldsymbol{\kappa}) \simeq \mathrm{sinc}\big[\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}(x_j-x_k)\big]$$

归一化的三阶相干函数 $\gamma^{(3)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3)$ 则近似为

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(3)}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3) \qquad (6.7.3)\\
&\propto 1+\mathrm{somb}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\big]\\
&\quad +\mathrm{somb}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_3|\big]+\mathrm{somb}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1|\big]\\
&\quad +2\,\mathrm{somb}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\big]\,\mathrm{somb}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_3|\big]\,\mathrm{somb}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_3-\boldsymbol{\rho}_1|\big]
\end{aligned}$$

其中 $D/d = \Delta\theta$ 为光源对探测器的张角.

对于一维情形, 归一化的三阶相干函数 $\gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$ 近似为

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3) \qquad (6.7.4)\\
&\propto 1+\mathrm{sinc}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_1-x_2)\big]\\
&\quad +\mathrm{sinc}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_2-x_3)\big]+\mathrm{somb}^2\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_3-x_1)\big]\\
&\quad +2\,\mathrm{sinc}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_1-x_2)\big]\,\mathrm{sinc}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_2-x_3)\big]\,\mathrm{sinc}\big[\frac{D}{d}\frac{\pi}{\lambda}(x_3-x_1)\big]
\end{aligned}$$

对于一个角直径较大的热光源, sinc 函数有效地转变为关于 (x_j-x_k), $j,k=1,2,3$ 的 δ 函数. 这时, 在三个横向平面间的点对点的非平庸关联进一步提高了无透镜成像的空间分辨率. 热光三光子鬼成像展示了一系列不寻常且有趣的特性, 这也许会启发出一些新的应用前景.

热光的三阶近场空间相干性的概念及计算很容易推广到更高的阶数. 其物理内涵和数学计算均可由考察 (6.6.9) 式开始, 这是个非常关键的方程, 它有助于理解非平庸 N 阶关联的本质是 N 光子干涉这一特性.

本章小结

本章中我们介绍了光的二阶相干性概念以及 HBT 干涉仪. 归一化的二阶相干度一般定义为

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&=\frac{\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle}{\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle}\\&=\frac{\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle}{\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle E^*(\boldsymbol{r}_2,t_2)E(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle}\end{aligned}$$

与一阶相干性大不相同, 二阶相干性由两台光探测器测量直接给出, 它们分别置于时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$.

本章花了大量篇幅揭示随机热光场非平庸二阶关联的干涉本质. 历史还是很有趣的: 虽然 HBT 的发现开启了现代量子光学的诸多关键概念, 但是, 远场 HBT 实验本身是用同一模式的统计上的光强涨落关联来解释, 这一点已经广为接受. 实际上不难发现这种非平庸的光强涨落关联并不一定只在远场发生. 我们基于多模测量条件, 在近场导出一个类似的二阶关联, 并分析了几个近期实验予以验证. 我们得出结论: 非平庸二阶关联是一个干涉现象, 它涉及一对子电场与其自身的干涉

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\&=\sum_j\sum_l\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_j(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_l(\boldsymbol{r}_2,t_2)+E_l(\boldsymbol{r}_1,t_1)E_j(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right]\right|^2\\&=\Gamma^{(1)}_{11}\,\Gamma^{(1)}_{22}+\Gamma^{(1)}_{12}\,\Gamma^{(1)}_{21}\end{aligned}$$

其中每个子电场要么对应一个子源, 要么对应一个子模式. 可惜的是麦克斯韦波动理论不允许这种叠加. 这使得在经典电磁波理论框架下难以解释这种特殊的干涉现象. 此外, 这种叠加发生在两个分离的时空坐标处, 是通过两个独立探测器的测量完成的, 表现出它的非局域特性. 非局域干涉的概念恐怕更是超出了经典理论的范畴.

本章最后一部分, 我们将这一概念推广到 N 阶

$$\Gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\equiv\langle E^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)E(\boldsymbol{r}_1,t_1)\cdots E^*(\boldsymbol{r}_N,t_N)E(\boldsymbol{r}_N,t_N)\rangle,$$

并将干涉图像由一对子电场推广到 N 重子电场

$$\Gamma^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\simeq\sum_{j,k,l\cdots}\left|\frac{1}{\sqrt{N!}}\left[\sum_{N!}E_{j1}E_{k2}E_{l3}\cdots\right]\right|^2,$$

其中 $\sum_{N!}E_{j1}E_{k2}E_{l3}\cdots$ 表示 N 重子电场的 $N!$ 项求和, 其各项脚标按 $1,2,3,\cdots,N$、$1,3,2,\cdots,N$、$2,1,3,\cdots,N$ 等等的顺序排列组合. 这说明 N 个独立子电场 (光子) 有 $N!$ 种可能方式触发一次 N 重联合探测.

附录 A

为了积出 (6.3.10) 式的二重积分

$$\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 = \frac{1}{t_c^2}\int_{t_c} \mathrm{d}t_1 \int_{t_c} \mathrm{d}t_2 \left|\gamma_{12}(t_1 - t_2 - \tau)\right|^2$$

我们按照 Jacobian 规则变换变量为 $t_+ = (t_1 + t_2)/2$ 和 $t_- = t_1 - t_2$,

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{12}^{(1)}(\tau)\right|^2 &= \frac{2}{t_c^2}\int_0^{t_c} \mathrm{d}t_- \Big[\int_{\frac{t_-}{2}}^{t_c-\frac{t_-}{2}} \mathrm{d}t_+\Big] \left|\gamma_{12}(t_- - \tau)\right|^2 \\ &= \frac{2}{t_c^2}\int_0^{t_c} \mathrm{d}t_-(t_c - t_-) \left|\gamma_{12}(t_- - \tau)\right|^2\end{aligned}$$

图 6.8.1 示意的是积分区域的映射关系. 这幅图可以帮助找出 t_- 和 t_+ 的积分限.

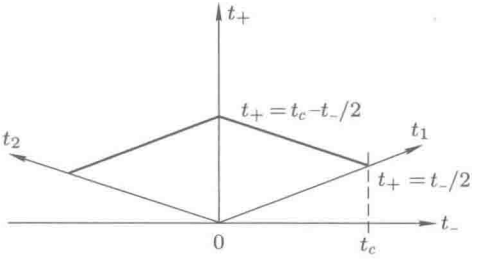


图 6.8.1 利用线性变换 $t_+ = (t_1 + t_2)/2$ 和 $t_- = t_1 - t_2$ 的映射关系. $\mathrm{d}t_-$ 的积分上限由直线 $t_+ = t_-/2$ 和 $t_+ = t_c - t_-/2$ 的交点决定. 对于每个 t_-, t_+ 都必须从 $t_+ = t_-/2$ 积到 $t_+ = t_c - t_-/2$.

注意在 t_1 和 t_2 平面, t_- 的上限由直线 $t_2 = 0$ 和 $t_1 = t_c$ 的交点决定. 在 t_- 和 t_+- 平面, 这两条直线分别映射到直线 $t_+ = t_-/2$ 和 $t_+ = t_c - t_-/2$ 上. 容易找出这两条线交点处的 t_- 值为 t_c. 因此 t_- 的上下限分别定为 t_c 和 0, 这里我们只选择半个映射区域积分, 然后再乘以 2. 对于选取的每个 t_- 值, t_+ 必须从 $t_+ = t_-/2$ 积到 $t_+ = t_c - t_-/2$. 我们于是得到 (6.5.4) 式.

推荐读物

[1] R. Hanbury-Brown, and R.Q. Twiss, Nature, **177**, 27 (1956); **178**, 1046, (1956); **178**, 1447 (1956).

[2] R. Hanbury-Brown, *Intensity Interferometer*, Taylor and Francis Ltd, London, 1974.

[3] U. Fano, Am J. Phys., **29**, 539 (1961).

[4] L. Mandel and E. Wolf, Eds., *Selected Papers on Coherence and Fluctuations of Light*, Vols. 1 and 2, Dover, New York, 1970.

[5] R.J. Glauber, *Quantum Optics*, Eds. Kay and A. Maitland, Academic Press, New York, 1970.

[6] W. Martienssen and E. Spiller, Am. J. Phys. **32**, 919 (1964).

[7] A. Valencia, G. Scarcelli, M. D'Angelo, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett. **94**, 063601 (2005).

[8] G. Scarcelli, V. Berardi, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett. **96**, 063602 (2006).

[9] J. Liu and Y.H. Shih, Phys. Rev. A **79**, 203819 (2009).

[10] Y. Zhou, J. Simon, J. Liu, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, (2010).

[11] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science, 2000.

[12] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge, 1997.

第 7 章

光的零拍及差拍测量

本章中我们在光的经典电磁波理论框架下引入零拍探测和差拍探测的概念. 光学零拍探测和差拍探测都是从无线电波调频技术沿用过来的. 和标准的光探测不同, 零拍探测和差拍探测通过与本地振荡产生的参考频率进行混频来测量调频辐射. 零拍探测中参考频率与输入信号辐射的频率相等; 差拍探测中, 参考光取不同频率.

7.1 光学零拍及差拍测量

图 7.1.1 示意性地给出光学零拍探测或差拍探测的实验装置. 信号光场和参考光场在 50%–50% 分束器处混合后在光探测器 D_1 和 D_2 叠加. 为了简化标记, 下面的分析都是 1 维的, 集中讨论信号和参考光场的一个偏振. $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 的强度是信号光场 E_s 和参考光场 E_r 叠加的结果,

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= \Big|\frac{1}{\sqrt{2}}\big[E_s(t)+E_r(t)\big]\Big|^2 = \frac{1}{2}\big[|E_s(t)|^2+|E_r(t)|^2\big] + \mathrm{Re}\,\big[E_s(t)E_r^*(t)\big] \\
I_2(t) &= \Big|\frac{1}{\sqrt{2}}\big[E_s(t)-E_r(t)\big]\Big|^2 = \frac{1}{2}\big[|E_s(t)|^2+|E_r(t)|^2\big] - \mathrm{Re}\,\big[E_s(t)E_r^*(t)\big]
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

公共的交叉项 $E_s(t)E_r^*(t)$ 形式上写为

$$
\begin{aligned}
& E_s(t)E_r^*(t) \\
&= \Big\{\Big[\int \mathrm{d}\nu \sum_j a_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{s0}\tau_s}\Big\}\Big\{a_r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_r\tau_r}\Big\} \qquad (7.1.2)\\
&= \Big\{\int \mathrm{d}\nu\Big[\sum_j a_j(\nu)\,a_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_{s0}z_s/c-\omega_r z_r/c]}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{s0}-\omega_r)t}
\end{aligned}
$$

其中 $\nu=\omega_s-\omega_{s0}$ 是失谐频率, ω_{s0} 为输入信号光场的中心频率, $\tau_s=t-z_s/c$, $\tau_r=t-z_r/c$.

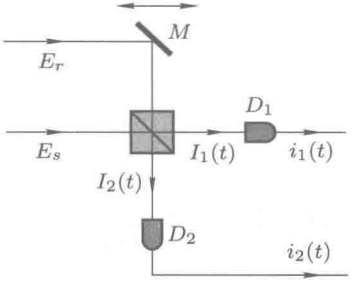


图 7.1.1 零拍或差拍探测实验的示意性装置图.

(7.1.2) 式中, 我们假设的是单模参考辐射场

$$E_r(t)=a_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_r(t-z_r/c)}$$

和一个一般的多子源和多傅里叶模式的输入信号场

$$E_s(t)=\Big[\int \mathrm{d}\nu\sum_j a_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\nu)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{s0}\tau_s}$$

它形式上可以写成载波频率为 ω_{s0} 的一个波包.

零拍探测时, $\omega_r=\omega_{s0}=\omega_0$. (7.1.2) 式可以形式上写成频谱的傅里叶变换

$$\begin{aligned}&E_s(t)E_r^*(t)\\&=\int \mathrm{d}\nu\Big\{\sum_j a_j(\nu)\,a_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_0(z_s/c-z_r)/c]}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\\&=\mathcal{F}_{\tau_s}\Big\{\sum_j A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_0(z_s-z_r)/c]}\Big\}\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

其中 $A_j(\nu)\equiv a_j(\nu)\,a_r$, 表明对于强本地振荡情形, 振幅 $a_j(\nu)$ 被放大了. 交叉项 $E_s(t)E_r^*(t)$ 表示输入信号场 $E_s(t)$ 和参考场 $E_r(t)$ 之间的干涉. 如我们先前研究的, 相对相位 $\varphi_j(\nu)-\varphi_r$ 对 I_1 和 I_2 测量取值起重要作用. 当 $\varphi_j(\nu)-\varphi_r=$ 常数时, 干涉项会对 I_1 和 I_2 测量值有很大贡献, 而当相对相位 $\varphi_j(\nu)-\varphi_r$ 取 0 到 2π 的所有可能的随机值时, 干涉项将没有贡献. 当 $\varphi_j(\nu)-\varphi_r=$ 常数时, 光程差 z_s-z_r 是决定干涉项贡献的另一个因素. $\omega_0(z_s-z_r)/c$ 的值决定了干涉的相长–相消特性, 因此决定了每一个或者所有傅里叶振幅的大小. 有趣的是: 输入场和本地振荡之间的相对相位

$\varphi_j(\nu)-\varphi_r$ 和相对相位延迟 $\omega_0(z_s-z_r)/c$ 都包含在傅里叶变换中. 在特定观测中, 可以通过光谱分析仪找回这一重要信息. 这个特性已经广泛应用在压缩态以及其它类型光场的相干和统计特性研究之中.

差拍探测时取 $\omega_r\neq\omega_{s0}$, (7.1.2) 式可以形式上写成

$$\begin{aligned}&E_s(t)E_r^*(t)\\&=\Big\{\int \mathrm{d}\nu\Big[\sum_j a_j(\nu)\,a_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_{s0}z_s/c-\omega_r z_r/c]}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{s0}-\omega_r)t}\\&=\mathcal{F}_{\tau_s}\Big\{\sum_j A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+(\omega_{s0}z_s-\omega_r z_r)/c]}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_d t}\end{aligned}\tag{7.1.4}$$

其中 $\omega_d=\omega_r-\omega_{s0}$ 是拍频. (7.1.4) 式可以看作是受调制的频率为 $\omega_d=\omega_{s0}-\omega_r$ 的简谐振荡. 频谱的傅里叶变换是调制简谐振荡的调制函数.

7.2 平衡零拍探测和差拍探测

图 7.2.1 示意性地给出了一个平衡零拍或差拍探测的实验装置图. 输入信号场 $E_s(t)$ 和参考场 $E_r(t)$ 在 50%–50% 分束器处混合. 输出场在光探测器 D_1 和 D_2 处叠加. 在电路中将光电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 进行相减. 随后用电学方法借助一个标准的频谱分析仪对 $i_1(t)-i_2(t)$ 波形的傅里叶频谱中特定带宽进行选择、放大和整流. 频谱分析仪输出的是选定傅里叶频谱分量的振幅.

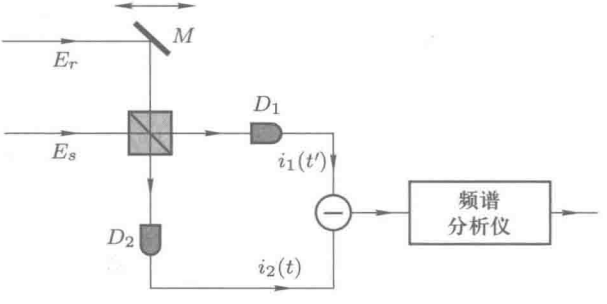


图 7.2.1 平衡零拍和差拍探测实验的示意性装置图. 零拍探测中, 参考频率和输入信号辐射的中心频率相等, $\omega_r=\omega_{s0}=\omega_0$.

基于图 7.2.1 的实验装置, 我们现在计算频谱分析仪的期望输出. 我们从计算 $i_1(t_-)-i_2(t_-)\propto I_1(t_1)-I_2(t_2)$ 开始, 其中 $t_\alpha=t_--\tau_\alpha^{(e)}$, $\alpha=1,2$, $\tau_\alpha^{(e)}$ 对应 α 探测器在电缆和电路中的电学延迟, t_- 是光电流 "相减" 的时刻. 为了简化数学, 我们选定 $\tau_1^{(e)}=\tau_2^{(e)}$ 使得 $t_1=t_2=t$. 根据 (7.1.1) 式,

(7.1.3) 式和 (7.1.4) 式, 很容易看到对于平衡零拍探测有

$$\begin{aligned} I_1(t) - I_2(t) &= 2\mathrm{Re}\left[E_s(t)E_r^*(t)\right] \\ &= 2\mathrm{Re}\,\mathcal{F}_{\tau_s}\Big\{\sum_j A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_0(z_s-z_r)/c]}\Big\} \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

对于平衡差拍探测有

$$\begin{aligned} I_1(t) - I_2(t) &= 2\mathrm{Re}\left[E_s(t)E_r^*(t)\right] \\ &= 2\mathrm{Re}\,\mathcal{F}_{\tau_s}\Big\{\sum_j A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+(\omega_{s0}z_s-\omega_r z_r)/c]}\Big\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_d t} \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

我们可以认为零拍探测是差拍探测的一种特殊情形, 即 $\omega_d = 0$. 调制函数中除了一个平庸的相位因子 $\omega_0(z_s - z_r)/c$, 其它并没有很大不同. 频谱分析仪分析的是调制函数的频谱. 为了简化讨论, 在下面的分析中, 我们将集中精力讨论平衡零拍探测, 以及如何根据测量光场的相干特性和路径信息得到调制函数的频谱. 在探讨频谱分析仪的工作机理之前, 我们先估计一下它的输入电流的期望值 $i_1(t) - i_2(t) \propto I_1(t) - I_2(t)$.

在考虑了叠加中 $\varphi_j(\nu) - \varphi_r$ 所有可能的取值后, 很容易计算 $\langle I_1(t) - I_2(t)\rangle$ 的期望值. 对于采用单模参考场 $E_r(t)$ 的实验, 是由输入信号的相干—非相干行为决定 $\langle I_1(t) - I_2(t)\rangle$ 的期望值. 而输入信号的相干—非相干特性主要取决于子场的相位 $\varphi_j(\nu)$. 以下我们讨论两个极端情形:

情形 (I): 随机 $\varphi_j(\nu)$ - 混沌热光场

很容易看到: 当考虑 $\varphi_j(\nu)$ 所有可能取值时, 叠加中只有 $\varphi_j(\nu) = \varphi_r$ 的项被保留下来. 显然, $\varphi_j(\nu) = \varphi_r$ 的概率是很小的. 于是, 此时 $\langle I_1(t) - I_2(t)\rangle$ 的期望值基本为零. 然而, 在实际测量中, 叠加中可能不会取遍随机相位的所有可能值, 干涉相消并不完全. $I_1(t) - I_2(t)$ 中这些没有相消的项会被频谱分析仪根据傅里叶分量 ν 进行分析和展示出来, 其中 ν 等效为零拍探测中的拍频 $\omega_s - \omega_r$,

$$\mathrm{Re}\Big\{\int \mathrm{d}\nu\Big[\sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu)-\varphi_r+\omega_0(z_s-z_r)/c]}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big\} \tag{7.2.3}$$

其中 $\sum_{\mathrm{Surv}}$ 代表叠加中没有相消掉而保留下来项的求和. 传统上, 这些保留下来的项被视为辐射的噪声或涨落. 于是, 频谱分析仪被认为测量的是混沌热光的噪声或涨落的频谱.

情形 (II): $\varphi_j(\nu) - \varphi_r =$ 常数

对于 $\varphi_j(\nu) - \varphi_r = \varphi_0$ 情形, $\varphi_0 =$ 常数, 强度差 $I_1(t) - I_2(t) \propto \mathrm{Re}\left[E_s(t)\cdot\right.$

$E_r^*(t)]$, 即

$$\mathrm{Re}\Big\{\int \mathrm{d}\nu\Big[\sum_j A_j(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_0+\omega_0(z_s-z_r)/c]}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau_s}\Big\} \tag{7.2.4}$$

频谱分析仪不会接收到干涉相消. 它不再是测量保留下来输入信号的噪声或涨落, 而是接收和分析 $E_s(t)E_r^*(t)$ 的整个干涉项.

特殊频谱分析仪的设计和工作机理可能会互不相同. 不过, 现代频谱分析仪的输出读数可以粗略地分为两类: 线性常规频谱和非线性功率谱. 线性常规频谱只是给出输入信号的频谱振幅, 它是频率的函数. 非线性功率频谱比常规频谱能提供更多的细节. 功率谱不仅包含输入电流 $i_1(t)-i_2(t)$ 的傅里叶分量, 还包含它们的拍频以及和频, 这些频率须落在频谱仪差拍电路中选择频谱的滤波片的通带之内, 比如图 7.2.2 所示的 IF 滤波片.

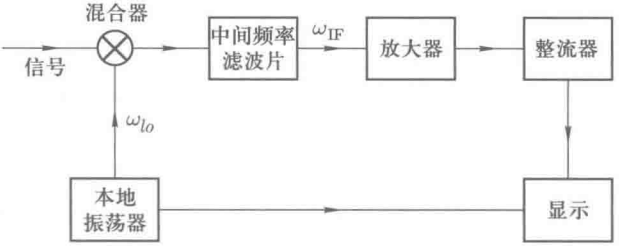


图 7.2.2 经典频谱分析仪的简化框图.

经典频谱仪简化框图见图 7.2.2. 输入信号 $i_1(t)-i_2(t)$ (它正比于 (7.2.3) 式或者 (7.2.4) 式), 和一个可调射频频率 ω_{lo} 的正弦参考电流在电子混合器中进行混合. ω_{lo} 的射频电流从一个本地振荡产生. 混合器对输入有非线性响应. 考虑混合器的一阶和二阶响应近似, 混合器的输出包含输入信号 $i_1(t)-i_2(t)$, 参考振荡 ω_{lo}, 它们的二次谐波以及一个交叉项

$$\begin{aligned} i_{NL} &\propto \int \mathrm{d}\nu \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu)\,\cos\big\{\nu\tau_s-[\varphi_j(\nu)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\,A_{lo}\cos\omega_{lo}t \\ &\propto \int \mathrm{d}\nu \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu)A_{lo}\Big\{\cos\big\{(\nu+\omega_{lo})t-[\varphi_j(\nu)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\} \\ &\quad +\cos\big\{(\nu-\omega_{lo})t-[\varphi_j(\nu)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\Big\} \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

这对应混沌热光测量情形. 而相干光测量则给出

$$i_{NL}\propto\int \mathrm{d}\nu\sum_j A_j(\nu)\,\cos\big\{\nu\tau_s-\varphi-\varphi(z_s,z_r)\big\}\,A_{lo}\cos\omega_{lo}t$$

$$\propto \int \mathrm{d}\nu \sum_j A_j(\nu) A_{lo} \Big\{ \cos\left\{(\nu+\omega_{lo})t - \varphi_0 - \varphi(z_s, z_r)\right\} + \cos\left\{(\nu-\omega_{lo})t - \varphi_0 - \varphi(z_s, z_r)\right\} \Big\} \tag{7.2.6}$$

其中 $\varphi(z_s, z_r) = \omega_{s0}(z_s - z_r)/c + \nu z_s/c$, 我们已经假设了一个简单的简谐本地振荡, 频率为 ω_{lo}, $i_{lo}(t) = A_{lo}\cos\omega_{lo}t$. (7.2.5) 式和 (7.2.6) 式表明, 混合器的非线性响应产生了对应输入信号的每个傅里叶分量的下转换傅里叶分量 $\omega_{IF} = \omega_{lo} - \nu$ 和上转换的傅里叶分量 $\omega_{IF} = \omega_{lo} + \nu$. 混合器之后接电子滤波器, 它从下转换或上转换傅里叶模式中选择窄带的频率为 ω_{IF} 的射频电流. 技术上称 ω_{IF} 为中间频率. 为了简化数学, 我们假设 ω_{IF} 的带宽远远窄于输入信号的带宽, 这样我们就可以将选取的傅里叶分量 ω_{IF} 处理为单模. 然后, 选取的 ω_{IF} 的单模傅里叶分量, 经由线性放大器放大和非线性包络探测仪来整流, 最后的输出正比于功率谱

$$P(\nu) \propto \Big\{ \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu) \cos\left[\varphi_j(\nu) - \varphi_r + \varphi(z_s, z_r)\right] \Big\}^2 \tag{7.2.7}$$

这是混沌热光测量情形. 而相干光测量则给出

$$P(\nu) \propto \Big\{ \sum_j A_j(\nu) \cos\left[\varphi_0 + \varphi(z_s, z_r)\right] \Big\}^2 \tag{7.2.8}$$

情形 (I): 混沌热光

混沌热光处于由统计理论所定义的稳定的、各态历经的态. 对频谱分析仪选择合适的时间参数 (积分时间) 后, 我们可以将测量看作系综平均

$$\begin{aligned} \langle P(\nu) \rangle &\propto \langle \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu) \cos\left[\varphi_j(\nu) - \varphi_r + \varphi(z_s, z_r)\right] \\ &\quad \times A_k(\nu) \cos\left[\varphi_k(\nu) - \varphi_r + \varphi(z_s, z_r)\right] \rangle \\ &\propto \langle \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu) A_k(\nu) \Big\{ \cos\left[\varphi_j(\nu) - \varphi_k(\nu)\right] \\ &\quad + \cos\left[\varphi_j(\nu) + \varphi_k(\nu) - 2\varphi_r + 2\varphi(z_s, z_r)\right] \Big\} \rangle \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

其中 $\langle \cdots \rangle$ 表示考虑场的所有可能实现的系综平均. 如我们先前讨论的, 当考虑所有可能的 $\varphi_j(\nu)$ 值时, 非相干叠加会使得 (7.2.9) 式中第一个余弦项为非零值 (它包含所有保留下来的对角项 $j = k$) 以及第二个余弦项为零. 于是, 混沌热光的期望功率谱就是振幅平方的简单求和

$$\langle P(\nu) \rangle \propto \sum_{\mathrm{Surv}} A_j^2(\nu) \tag{7.2.10}$$

而实际情形, 辐射场也许在频谱分析仪的积分时间内并不能取遍所有可能的实现, 不完全的干涉相消可能仍然会不时地产生在 $\langle P(\nu)\rangle$ 附近的随机涨落.

情形 (II): 相干光

取 $\varphi_j(\nu)-\varphi_r=\varphi_0$ 为常数时, (7.2.9) 式变为

$$\begin{aligned} P(\nu) &\propto \sum_{j,k} A_j(\nu)A_k(\nu)\Big\{1+\cos 2\big[\varphi_0+\varphi(z_s,z_r)\big]\Big\} \\ &\propto \Big\{\sum_{j,k} A_j(\nu)A_k(\nu)\Big\}\cos^2\left[\varphi_0+(\omega_s z_s-\omega_r z_r)/c\right] \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

从 (7.2.11) 式发现一个有趣的事情: 相干光的功率谱是 $\varphi(z_s,z_r)=(\omega_s z_s-\omega_r z_r)/c\simeq\omega_{s0}(z_s-z_r)/c$ 的正弦函数. 信号场和参考场之间相对光程的变化 (可以通过调整图 7.2.1 中镜子 M 的位置) 会产生随 z_s-z_r 的取值而变化的干涉图案, 这和两个独立但是同步的激光束之间的干涉类似.

7.3 独立或耦合热光场的平衡零拍探测

我们考虑图 7.3.1 的实验装置, 其中两个独立的或耦合的输入热场 E_s 和 E_i 被两个独立的平衡零拍探测装置测量. 平衡零拍探测装置和图 7.2.1 的类似, 只是零拍探测的两个输出要通过第三个相减电路进行相减. 最终输出电流的功率谱 $[i_{1s}(t)-i_{2s}(t)]-[i_{1i}(t)-i_{2i}(t)]$ 由频谱仪测量, 读出它的傅里叶分量.

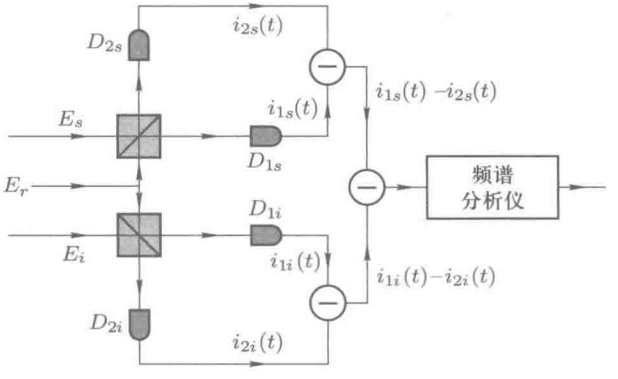


图 7.3.1 两个独立或有耦合的热场平衡零拍探测的装置示意图. 三个相减电路用来操控光电流 $i_{1s}(t)$, $i_{2s}(t)$, $i_{1i}(t)$ 和 $i_{2i}(t)$. 频谱分析仪显示的是最终输出电流 $[i_{1s}(t)-i_{2s}(t)]-[i_{1i}(t)-i_{2i}(t)]$ 的功率谱.

为了计算期望的功率谱, 我们从 (7.2.1) 式开始, 它给出 $i_{1s}(t)-i_{2s}(t)$

和 $i_{1i}(t)-i_{2i}(t)$ 的估计值. 因此, 第三个相减电路的输出为

$$\begin{aligned}&[i_{1s}(t)-i_{2s}(t)]-[i_{1i}(t)-i_{2i}(t)]\\ &\propto \mathrm{Re}\,\mathcal{F}_{\tau_s}\Big\{\sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu_s)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r+\omega_{s0}(z_s-z_r)/c]}\Big\}\\ &\quad -\mathrm{Re}\,\mathcal{F}_{\tau_i}\Big\{\sum_{\mathrm{Surv}} A_k(\nu_i)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r+\omega_{i0}(z_i-z_r)/c]}\Big\}\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

第三个相减电路的输出电流和一个可调射频 ω_{lo} 的余弦参考电流在频谱分析仪的电子混合器中混合. 混合器的非线性响应产生上转换和下转换的频率

$$\begin{aligned}i_{NL}\propto &\int \mathrm{d}\nu_s \sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu_s)A_{lo}\Big\{\cos\big\{(\nu_s+\omega_{lo})t-[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\\ &+\cos\big\{(\nu_s-\omega_{lo})t-[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\Big\}\\ &-\int \mathrm{d}\nu_i \sum_{\mathrm{Surv}} A_k(\nu_i)A_{lo}\Big\{\cos\big\{(\nu_i+\omega_{lo})t-[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\\ &+\cos\big\{(\nu_i-\omega_{lo})t-[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r]-\varphi(z_s,z_r)\big\}\Big\}\end{aligned}\tag{7.3.2}$$

经过滤波片 IF、线性放大和非线性整流后, 期望的频谱功率正比于

$$\begin{aligned}\langle P(\nu)\rangle \propto \langle\Big\{&\sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu_s)\cos\big\{\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r+\varphi(z_s,z_r)\big\}\\ &-\sum_{\mathrm{Surv}} A_k(\nu_i)\cos\big\{\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r+\varphi(z_s,z_r)\big\}\Big\}^2\rangle\end{aligned}\tag{7.3.3}$$

下面我们讨论两种测量情形, 针对不同类型的输入辐射: 独立热光和满足 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)=$ 常数的耦合热场.

情形 (I): 独立混沌热光

假设两个输入的场 E_s 和 E_i 是独立的混沌热光场, 其相位 $\varphi_j(\nu_s)$ 和 $\varphi_k(\nu_i)$ 可以各自独立地, 随机地取任何值. (7.3.3) 式包含如下三个贡献

$$(1)\ \langle\Big\{\sum_{\mathrm{Surv}} A_j(\nu_s)\cos\big[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r+\varphi(z_s,z_r)\big]\Big\}^2\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{Surv}} A_j^2(\nu_s)$$

$$(2)\ \langle\Big\{\sum_{\mathrm{Surv}} A_k(\nu_i)\cos\big[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r+\varphi(z_i,z_r)\big]\Big\}^2\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{Surv}} A_k^2(\nu_i)$$

$$\begin{aligned}(3)\ \langle\sum_{\mathrm{Surv}} &A_j(\nu_s)A_k(\nu_i)\cos\big[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r+\varphi(z_s,z_r)\big]\\ &\times\cos\big[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r+\varphi(z_i,z_r)\big]\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\simeq \sum_{\text{Surv}} A_j(\nu_s)A_k(\nu_i)\Big\{\cos\left[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_k(\nu_i)\right] \\ &\quad +\cos\left[\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)+-2\varphi_r+\varphi(z_s,z_r)+\varphi(z_i,z_r)\right]\Big\} \\ &=0\end{aligned} \tag{7.3.4}$$

其中为了简化标记, 我们已经假设 $z_s=z_i$. (7.3.4) 式中估计期望值时, 我们已经考虑了叠加中 $\varphi_j(\nu_s)-\varphi_k(\nu_i)$ 和 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)$ 取所有可能的随机值. 期望的功率谱是上述三个贡献的求和

$$\langle P(\nu)\rangle \propto \sum_{\text{Surv}} A_j^2(\nu_s)+\sum_{\text{Surv}} A_k^2(\nu_i) \tag{7.3.5}$$

这一结果对于两个独立的混沌热场来讲是合理的.

情形 (II): 成对的, 且有耦合的热场, 满足 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)=$ 常数.

在第 (II) 情形中, 我们认为每个独立的输入场 E_s 和 E_i 具有随机相位, 然而, 两个相位之和却保持常数, 满足 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)=\varphi_p=$ 常数. 非线性参量放大器可以产生这样一个态. 这类辐射场通常被称为 "压缩" 态. 为了简化讨论, 我们假设对应大量子源的第 j 和 k 个子场都满足这一条件. 而实际上, 并不是所有子场都能达到这一条件, 这就有必要定义这个条件对应的相干的概念. 这个留到后面章节中讨论. 由于每一个独立子场 E_s 和 E_i 的随机特性, (7.3.4) 式中自平方的两项对期望功率谱 $\langle P(\nu)\rangle$ 的贡献与情况 (I) 相同. 然而, (7.3.4) 式的交叉项产生了一个有趣的非平庸贡献:

$$\begin{aligned}&\Big\langle\sum_{\text{Surv}} A_j(\nu_s)\cos\left[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_r+\omega_{s0}\frac{z_s-z_r}{c}+\nu_s\frac{z_s}{c}\right] \\ &\quad\times\sum_{\text{Surv}} A_k(\nu_i)\cos\left[\varphi_k(\nu_i)-\varphi_r+\omega_{i0}\frac{z_i-z_r}{c}+\nu_i\frac{z_i}{c}\right]\Big\rangle \\ &\simeq \sum_{\text{Surv}} A_j(\nu_s)A_k(\nu_i)\Big\{\cos\left[\varphi_j(\nu_s)-\varphi_k(\nu_i)\right] \\ &\quad+\cos\left[\varphi_p+\omega_p\frac{z_{s,i}-z_r}{c}-2\varphi_r+(\nu_s+\nu_i)\frac{z_{s,i}}{c}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

在 (7.3.6) 式中, 我们用到了 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)=\varphi_p$ 和 $\omega_{s0}+\omega_{i0}=\omega_p$, 其中 φ_p 和 ω_p 是常数, 对应非线性光参量放大的泵浦相位和泵浦频率. 为了简化标记, 在 (7.3.6) 式中, 我们已经假设 $z_s\simeq z_i=z_{s,i}$. 不难发现: 当考虑 $\varphi_j(\nu_s)-\varphi_k(\nu_i)$ 所有可能值时, 第一个余弦项是零. 第二个余弦项对功率谱有一个非平庸的贡献

$$\langle P(\nu)\rangle \propto \Big\{\sum_j A_j^2(\nu_s)+\sum_k A_k^2(\nu_i)\Big\}$$

$$+2\sum_{j,k} A_j(\nu_s)A_k(\nu_i)\cos\left[\omega_p\frac{z_{s,i}-z_r}{c}+\varphi_{s,i,r}\right] \tag{7.3.7}$$

其中

$$\varphi_{s,i,r}=\varphi_p-2\varphi_r+(\nu_s+\nu_i)z_{s,i}/c.$$

(7.3.7) 式表明: 期望的功率谱 $\langle P(\nu)\rangle$ 是 $\omega_p(z_{s,i}-z_r)/c$ 的余弦函数. 输入场 $E_s(E_i)$ 和参考场 E_r 之间的相对光程变化会产生余弦的干涉调制. 然而, 该干涉调制和标准的干涉图案是不同的, 因为其交叉项的贡献相对很大. 当考虑大量子场时, (7.3.7) 式中的交叉项会远大于两个对角项之和. 对 N 个大数目的子场, 对角项的数目和交叉项数目的比值大约为 $\sim 1/N$. 这一效应不可避免地给将 $\langle P(\nu)\rangle$ 处理为辐射的统计涨落的理论带来挑战. (7.3.7) 式表明: 在特定实验条件下, $\langle P(\nu)\rangle$ 不仅能够低于 "散粒噪声", 而且可能是一个负值.

本章小结

本章中, 我们在光的经典电磁波理论的框架下引入了零拍探测和差拍探测的概念. 我们仔细分析了平衡零拍和差拍探测, 包括频谱仪的工作原理. 在本章的最后部分, 我们演示了一个有趣的现象: 对于有耦合的满足 $\varphi_j(\nu_s)+\varphi_k(\nu_i)=$ 常数的热光场, 功率谱为

$$\begin{aligned}\langle P(\nu)\rangle \propto &\left\{\sum_j A_j^2(\nu_s)+\sum_k A_k^2(\nu_i)\right\}\\ &+2\sum_{j,k} A_j(\nu_s)A_k(\nu_i)\cos\left[\omega_p\frac{z_{s,i}-z_r}{c}+\varphi_{s,i,r}\right]\end{aligned}$$

当引入 $z_{s,i}$ 和 z_r 之间光程差时, 可以观察到正弦或余弦调制. 进一步, 当考虑大量子场时, 正弦或余弦调制的振幅可能远大于另外两个常数项, 这意味着在特定实验条件下, $\langle P(\nu)\rangle$ 不仅能够低于 "散粒噪声", 而且能够达到负值.

推荐读物

[1] M.I. Skolnik, *Introduction to Radar System*, McGraw-Hill, 1962.

[2] H.-A. Bachor and T.C. Ralph, *A guide to Experiments in Quantum Optics*, Wiley-VCH, 2004.

[3] C.C. Gerry and P.L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2006.

第 8 章

光的量子理论——场的量子化和测量

光的量子理论诞生于 20 世纪之初. 光子或光量子概念的成功引入催生了一门崭新的物理学基础理论, 即量子理论. 今天, 量子理论已经成为现代物理学的基本原理. 纵观物理学的诸多领域, 很难找到哪个学科, 无论是其基础理论还是实际应用不受量子理论的影响.

经过 100 多年的研究, 关于光子, 我们究竟知道多少呢? 光子是波: 它没有质量, 以最高的速度在宇宙中穿行, 它只和自己干涉. 光子是粒子: 它有确定大小的动量和能量, 它甚至像粒子一样会 "自旋". 光子既不是波也不是粒子, 因为当我们认为它是其中之一时, 一定会在解释其另一部分行为时陷入困境. 光子是像波的粒子又 (或者) 是像粒子的波: 光子无法被分割成几部分, 但是现在我们很容易观察到单光子的干涉. 当我们能够观察到干涉时, 光子似乎是同时通过干涉仪两路的, 但是, 当干涉仪的两路可区分时, 光子就 "知道" 走哪条路径而不会同时通过两路了. 光子面临干涉仪时必须做出选择: 选择像波一样同时通过两条路径或者像粒子一样地通过某个路径. 令人惊讶的是, 光子并不需要在通过干涉仪之前做出选择. 已经有实验演示表明: 选择 "双路径" 及 (或) "某路径" 可以推迟到光子通过干涉仪之后. 更令人惊讶的是, 当光子本身湮没之后, 该路径信息甚至可以被 "擦除". 单光子的行为显然不遵循我们日常生活中的任何一条基本准则: 实在论、因果率和定域性. 当然, 波粒二象性不只是光子所特有的特性, 它属于量子世界中的所有量子. 也许, 对于电子来说, 因为它有质量 m_e 和电量 e, 很容易接受它的粒子图像, 而单光

子的粒子性并不容易被接受. 另一方面, 因为光子具有频率 ω 和波矢 k, 所以光子的波动图像很容易被接受, 但是电子的波动性却不容易被接受.

虽然关于单光子概念的基本问题仍然存在, 但是光量子理论已经成为量子理论中最具影响, 最有成就, 又最受争议的部分.

在本章中, 我们将集中讨论关于光量子理论的以下基本问题: (1) 为什么必须将辐射场量子化? (2) 如何量子化辐射场? (3) 如何描述量子化场的状态? (4) 如何用物理模型和数学公式描述光探测事件或联合光探测事件?

8.1 实验基础 I: 黑体辐射

1900 年左右, 实验物理学发现了一个意想不到的结果. 实验观察到的黑体辐射光谱分布与经典物理学的理论预言不一致.

"黑体" 指一个完美的吸收体, 它能够吸收入射到它上面的任何波长的辐射. 黑体的最好近似是一个开有小孔的三维腔或者中空的壳体. 从小孔辐射出来的、单位立体角内、频率在 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的光强 $I(\nu)$ 是可以精确测量的. 实验发现, 在热力学平衡条件下, 任何黑体都具有同样的特征辐射函数 $I(\nu)$. 图 8.1.1 就是典型的 $I(\nu)$ 曲线. $I(\nu)$ 取决于外壳的温度, 与外壳的材料以及腔的形状无关. 在特定温度下, 低频辐射的 $I(\nu)$ 正比于 ν^2, 高频辐射的 $I(\nu)$ 呈指数衰减. 频谱分布另一个有趣的特点是: 黑体的温度升高时, $I(\nu)$ 的最大值向高频处移动. 图 8.1.1 的四条曲线清楚地展示了黑体辐射的这些性质.

在那个年代, 这着实出人意料. 因为用经典的力学、电动力学和热力学三大理论一起都未能解释这个简单的现象.

在经典电动力学的框架下, 单位立体角的黑体辐射强度与腔或外壳辐射的能量密度有关:

$$I(\nu) \sim \frac{c}{4\pi} u(\nu) \tag{8.1.1}$$

其中 c 为光速, $u(\nu)$ 为频率 ν 处的能量密度. 因此, 测量到的黑体辐射强度 $I(\nu)$ 是由空腔的能量密度 $u(\nu)$ 决定的. 腔内辐射能量的来源显然是腔壁. 它会持续辐射所有可能的频率和波矢, 或者说所有可能的模式. 在热力学平衡下, 频率 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的能量 $u(\nu)\mathrm{d}\nu$ 是很容易计算. 为此, 我们需要: (1) 估算满足腔边界条件的允许模式数 (2) 估算允许模式的平均能量.

(1) 模式数目

假设有一个矩形腔, 其大小为 L_x, L_y 和 L_z. 应用电磁场理论所要求

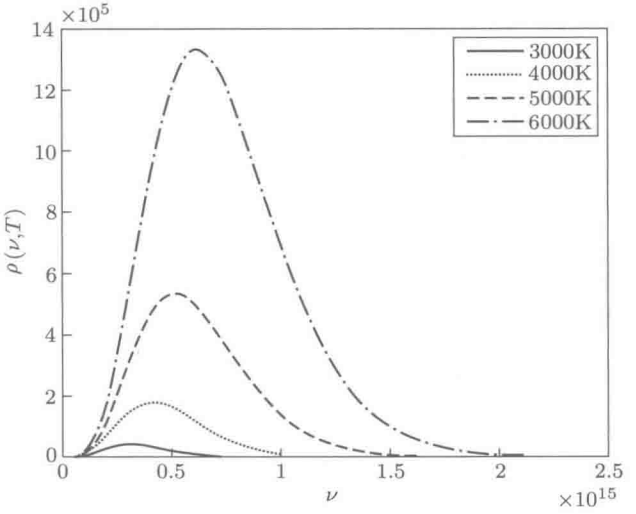


图 8.1.1 黑体辐射曲线. $I(\nu)$ 取决于外壳的温度. 在某个特定的温度下, 低频辐射的 $I(\nu) \propto \nu^2$, 而高频辐射的 $I(\nu)$ 呈指数衰减. 另一个有趣的频谱分布特性是: 黑体的温度升高时, $I(\nu)$ 的最大值向高频移动.

的边界条件, 允许波矢 $\boldsymbol{k}$ 写成:

$$k_x = \frac{2\pi l}{L_x} \quad k_y = \frac{2\pi m}{L_y} \quad k_z = \frac{2\pi n}{L_z} \tag{8.1.2}$$

其中 l, m 和 n 是整数, 取值范围为 $-\infty$ 到 ∞. 允许的模式数为:

$$\Delta N = \Delta l\, \Delta m\, \Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\, \mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y\, \mathrm{d}k_z \tag{8.1.3}$$

$V = L_x L_y L_z$. 估计 ν 到 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 之间可能的模式数, 采用 $\boldsymbol{k}$ 空间的极坐标系, 我们把体积元 $\mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y\, \mathrm{d}k_z$ 处理为: $\mathrm{d}k_x\, \mathrm{d}k_y\, \mathrm{d}k_z = k^2\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}\Omega$, 其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是立体角微元. ν 到 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 之间的模式数目则为

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\, k^2\, \mathrm{d}k = \frac{4\pi V}{c^3}\, \nu^2\, \mathrm{d}\nu$$

因为我们不关心波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向, 将 $\mathrm{d}\Omega$ 对整个 4π 空间积分, 再考虑每个模式的偏振特性, ν 到 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 之间的模式数目将翻倍, 得到:

$$\Delta N = \frac{8\pi V}{c^3}\, \nu^2\, \mathrm{d}\nu \tag{8.1.4}$$

(2) 每个模式的平均能量

我们用经典统计力学的结果来计算每个模式的平均能量. 认为每个热辐射模式都处于腔壁的热力学平衡状态. 这里腔壁可以认为是一个热

库. 一般来说, 热库定义为一个非常大的恒温的系统. 物理上来说, 这意味着当腔辐射出任何一小部分能量时, 其外壳的温度是保持不变的. 在热平衡条件下, 处于 E 到 $E+\mathrm{d}E$ 之间的辐射模的概率满足正则分布:

$$P(E)\,\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E}{\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E} \tag{8.1.5}$$

能量平均值 $\bar{E}$ 的计算需要考虑系统每一个可能的能量取值, 以及每一个可能取值的概率:

$$\bar{E} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty E\,\mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E}{\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E} = kT\,\frac{\displaystyle\int_0^\infty \epsilon\,\mathrm{e}^{-\epsilon}\,\mathrm{d}\epsilon}{\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon}\,\mathrm{d}\epsilon} = kT \tag{8.1.6}$$

其中 $\epsilon = E/kT$. 公式 (8.1.6) 用了 Γ 函数的解, $\Gamma(n+1) = n!$ 和 $\Gamma(1) = 1$.

每个辐射模式的平均能量均为 kT, 这是能量均分定理的一个好例子. 那么频率在 ν 和 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 之间的辐射能量为

$$u(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \bar{E}\Delta N = \frac{8\pi V}{c^3}\,kT\,\nu^2\,\mathrm{d}\nu \tag{8.1.7}$$

这就是瑞利–金斯 (Rayleigh-Jean's) 定理. 实际上, 上述分析就是直接遵循历史上瑞利–金斯对黑体辐射能量分布 $I(\nu)$ 的处理方法.

对比图 8.1.1 中黑体辐射曲线, 我们发现: 瑞利–金斯定理仅在低频情况下和实验结果一致, 而高频情况下它给出的理论辐射能量远远高于实验值. 另外, 如果我们在整个频率范围内积分来计算总辐射能量, 将得到一个发散的结果, 即腔内总能量趋于无穷.

维恩 (Wien) 尝试了另一种经典的计算方法. 依据经典热力学原理, 维恩指出, 黑体辐射分布可以写为 $u(\nu) = \nu^3\,f(\nu/T)$ 的形式, 然而函数 $f(\nu/T)$, 不能单从热力学理论得到. 维恩得到的分布函数为:

$$u(\nu)\,\mathrm{d}\nu \sim \nu^3\,\mathrm{e}^{-h\nu/kT}\,\mathrm{d}\nu \tag{8.1.8}$$

后来被命名为维恩定理. 其中 h 是需要实验数据拟合得到的常数. 这个常数后来成为量子理论的特征常数并被命名为普朗克 (Plank's) 常数. 维恩分布可以较好的拟合高频频谱, 但是低频情况下更糟.

历史上, 所有经典的尝试, 无论是电动力学方法或热力学方法都没能给出一个能够在实验误差范围内准确拟合黑体辐射曲线的函数. 由此我们得出结论: 推导这些定律或者分布函数时用的物理概念也许并不能恰当的描述黑体辐射的行为.

1900 年, 普朗克决定放弃经典的方法, 他成功地拟合实验测得的黑体辐射频谱. 普朗克的假设很简单. 他假设一个辐射模式只能取一个基本能量值的整数倍, $E = nh\nu$. 其中, n 是一个取值从 0 到 ∞ 的整数. 这个基本能量值 $h\nu$ 对不同的模式是不相同的, 它正比于频率. 有了这个假设, 普朗克在实验误差范围内准确地拟合了实验测得的分布曲线, 从而唯象地解释了黑体辐射.

普朗克的假设与经典概念完全不一致. 经典力学和经典电动力学理论对一个辐射模的能量并没有限制. 唯一的 "限制" 就是每个辐射模式的平均能量为 kT, 而与频率无关. 普朗克的假设似乎也违背了我们日常的很多生活经验. 例如, 调幅或调频的无线电振荡器的输出功率可能是任何值, 没有实验证据表明, 一个无线电振荡器的能量必须量化为 $E = nh\nu$. 这是否说明普朗克理论不能用来描述无线电波呢? 答案是否定的. 这些表面上的矛盾实际上都是源于 h 是一个非常小的量, $h \sim 6.6 \times 10^{-34}$ J·s. 对于调幅或调频无线电波的频率, 例如为 $\nu \sim 10^6$ Hz 和 $\nu \sim 10^8$ Hz 的无线电波, 它们对应的基本能量单元 $h\nu$ 为 6.6×10^{-28} J 和 6.6×10^{-26} J, 这些能量值是任何灵敏设备都探测不到的. 然而对于光波, $h\nu$ 的值显著增加, 当频率为 $\nu \sim 10^{15}$ Hz 时, 对应的能量为 $h\nu \sim 10^{-19}$ J, 这个值用现代的测量设备是可以测量的. 因此, 对于更高的频率, 普朗克的量子假说是容易验证的.

现在我们按照普朗克的能量量子化理论来推导黑体辐射的频谱分布. 类似于前面经典的分析方法, 我们采用正则分布重新计算每个模式的平均能量. 对于一个给定模式, 其能量值为 $E_n = nh\nu$ 的概率为:

$$P(n) \propto \mathrm{e}^{-E_n/kT} = \mathrm{e}^{-nh\nu/kT} \tag{8.1.9}$$

归一化 (8.1.9) 式得到

$$P(n) = \frac{\mathrm{e}^{-nh\nu/kT}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nh\nu/kT}} = \frac{\mathrm{e}^{-nh\nu/kT}}{1 - \mathrm{e}^{-h\nu/kT}} \tag{8.1.10}$$

则每个模式的平均能量为

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(n) = (1 - \mathrm{e}^{-h\nu/kT})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu\, \mathrm{e}^{-nh\nu/kT} \\ &= h\nu\,(1 - \mathrm{e}^{-h\nu/kT})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n\, \mathrm{e}^{-nh\nu/kT} \end{aligned} \tag{8.1.11}$$

为了计算 (8.1.11) 式, 我们先计算:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nh\nu/kT} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\alpha} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{(1-\mathrm{e}^{-\alpha})^2}$$

其中 $\alpha = h\nu/kT$. 每个模式的平均能量 $\bar{E}$ 为

$$\bar{E} = \frac{h\nu\,\mathrm{e}^{-h\nu/kT}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu/kT}} \tag{8.1.12}$$

则频率为 ν 到 $\nu+\mathrm{d}\nu$ 范围内的辐射能量为:

$$u(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \bar{E}\Delta N = \frac{8\pi V}{c^3}h\nu^3\frac{\mathrm{e}^{-h\nu/kT}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu/kT}}\,\mathrm{d}\nu$$

这样, 我们就得到了普朗克分布

$$u(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\,\frac{h\nu^3\,\mathrm{e}^{-h\nu/kT}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu/kT}} \tag{8.1.13}$$

这个函数可以在实验误差范围内准确的拟合黑体辐射分布.

8.2 实验基础 II: 光电效应

黑体辐射的研究间接得出了电磁波增加或减少的能量是 $h\nu$ 整数倍的结论. 而光电效应的发现则以更直接的方式证实了这一令人惊讶的结论. 事实上, 光电效应早在 1887 年首次被赫兹报道, 比普朗克的工作早了十多年. 光电效应的量子解释是 1905 年提出的, 它是爱因斯坦花了五年时间思考普朗克假说的结果. 图 8.2.1 显示了观察光电效应典型的实验装置.

实验采用一个简单的真空管, 它有一个金属板 B 和阳极 A. 单色光通过真空管石英窗口入射到金属板 B, 从金属板 B 表面释放的光电子被阳极 A 收集. 金属板 B 和阳极 A 之间加有一个可调节的电势差 V, 通过灵敏的电流表 G 监测阳极输出的光电流.

图 8.2.2 是一个典型的光电流 i 随施加电势差 V 的函数. 当 V 是正的且取很大值时, 光电流 i 达到饱和值. 这意味着所有释放的光电子都被阳极 A 收集. 光电流 i 的饱和值与入射光的强度成正比. 这个结果是合理的, 因为大光强确实应该激发更多的光电子. 然而令人惊讶的是: 当 V 反相后, 即取负值时, 并调整使得光电流下降到零 $i\sim 0$, 这时电压 V_0 称为遏止电压. 结果发现, V_0 与入射光的强度无关, 如图 8.2.2 所示. 当加上负电势 V 时, 光电流不会立即下降到零. 这表明电子具有一定的动能能够逃脱金属的表面. 如果该动能足够大, $K_{\max} > eV_0$, 大到足以克服阻止

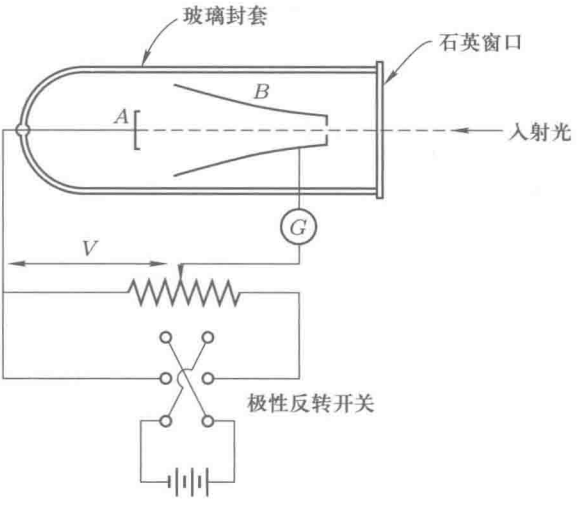


图 8.2.1 观察光电效应典型的示意性实验装置.

它们运动的电势差, 那么一些逃逸电子仍然可以达到阳极 A. 如果负电势 V 等于或大于逃逸电子的最大动能, $eV_0 \geqslant K_{\max}$, 那么就没有电子可以达到阳极 A, 因此光电电流 i 下降为零. 从经典的角度来看这是一个不可思议的结果: 遏止电压 V_0 和逃逸电子的动能不依赖于入射光的强度. 因为按照经典电磁波理论, $I \propto |\boldsymbol{E}|^2$. 因为作用于电子的力为 $e\boldsymbol{E}$, 那么光电子的动能应随着入射光强的增加而增加.

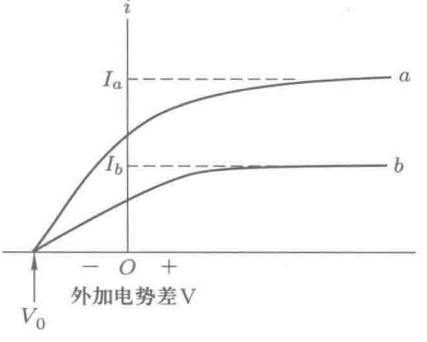


图 8.2.2 典型的光电流和电压 V 之间的函数关系. 电压 V 指金属板 B 和阳极 A 之间的可调节的电势差. 注意, 电压 V 可以为正或负值. 两条曲线对应于不同的入射光强度, I_1 和 I_2: $I_1 = 2I_2$. 令人震惊的是, 遏止电压 V_0 与入射光的强度无关.

后来密立根 (Millkan) 的工作给出了一系列令人惊讶的结果. 密立根的实验结果表明: 遏止电压 V_0 与入射光的频率存在线性关系, 并且每

个不同的金属板具有不同的截止频率 ν_0. 当频率低于 ν_0 时, 无论入射光的强度是多少, 光电效应都不可能发生. 图 8.2.3 显示了一个典型的 V_0 的测量结果, 它呈现出随入射光频率的线性关系. 实验曲线的斜率是 3.9×10^{-15} V·s. 截止频率 ν_0 的存在, 是不符合经典电磁波理论的. 根据经典电动力学, 光电效应应该是对于任何频率都能观察到, 只要入射光的强度足以提供光电子必要的动能.

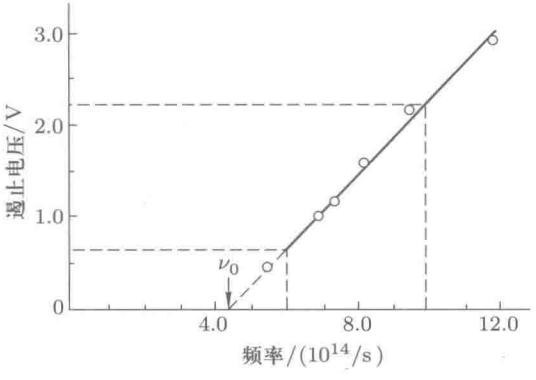


图 8.2.3 遏止电压 V_0 是入射光频率的线性函数. 实验曲线的斜率为 3.9×10^{-15} V·s. 每个金属板有不同的截止频率 ν_0. 对于低于 ν_0 的任何频率, 无论入射光的强度是多少, 光电效应不再发生.

1905 年, 爱因斯坦提出了一个理论, 它成功地解释光电效应. 在该理论中, 爱因斯坦将辐射能量量子化为局域的 "包裹式" 能量, $E = h\nu$, 后来被命名为 "光子" (1926 年). 爱因斯坦假设, 在一个光电子的发射过程中, 每一个独立的光子被一个激发电子完全地吸收. 当电子从金属表面逸出时, 它的动能为

$$K = h\nu - W \tag{8.2.1}$$

其中 W 是需要克服金属中束缚电子的原子吸引力所做的功, W 称为功函数. 爱因斯坦的假说究竟是如何解释光电效应的呢? 这个问题留作本章末的一个习题. 因为截止频率 ν_0 的存在与经典理论最为冲突, 这里, 我们先对截止频率 ν_0 进行一个简单的讨论. 虽然爱因斯坦的理论是发表在密立根的实验之前, 但是它给密立根的截止频率 ν_0 提供了一个完美的解释. 当逃逸电子动能等于零时, 我们有 $h\nu_0 = W$, 即频率为 ν_0 的光子刚好具有足够的能量来克服功函数. 如果光子频率低于 ν_0, 无论入射到金属表面的光强多大, 都无法激发出一个光电子.

爱因斯坦是第一个把光电效应和普朗克的假说联系起来的物理学

家. 爱因斯坦的 (8.2.1) 式可以改写为

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e} \tag{8.2.2}$$

其中 $K_{\max}$ 由 eV_0 取代, V_0 为使得光电流降为零所施加的遏止电压. (8.2.2) 式表明遏止电压 V_0 和入射光频率之间的线性关系, 这与密立根的实验结果是一致的, 见图 8.2.3. 密立根实验中测得的实验曲线的斜率为

$$\frac{h}{e} \sim \frac{2.20\text{V} - 0.65\text{V}}{(10.0 - 6.0) \times 10^{14}/\text{s}} \simeq 3.9 \times 10^{-15}\text{V} \cdot \text{s}$$

将该斜率乘以电子电荷 e 就得到 $h \sim 6.2 \times 10^{-34}$ J·s, 这个值与 1900 年普朗克分布中 $h \sim 6.6 \times 10^{-34}$ J·s 很接近. 后来, 更精确的光电实验测量给出 $h \sim 6.6262 \times 10^{-34}$ J·s. 出现在光电效应和黑体辐射中的常数 h 是相当吻合的, 这说明了 h 是一个普适常数, 辐射场能量交换总是 $h\nu$ 的整数倍.

爱因斯坦理论的核心内容是揭示光的粒子性. 爱因斯坦假设辐射的能量被量子化为局域的 "包裹式" 能量, 这份能量最初局域在很小的空间体积内, 然后以速度 c 离开辐射源. 在传播过程中这份能量一直是局域的. 能量包的大小是其频率乘上普适常数 h. 在光电过程中, 一个能量包 $E = h\nu$, 也称一个光子, 会完全被一个最初束缚在金属里面的电子所吸收. 那么一个局域在非常小体积内的束缚电子, 是如何吸收一个光子变成一个光电子的呢? 这里给出一个最简单的物理图像: 像粒子一样的光子在碰撞过程中将其所有能量转移给电子. 那么光子是一个局域的物体吗? 即是又不是. 当考虑它的粒子行为时, 它必须是局域的, 当考虑它的波动行为时, 它就不是局域的. 如果物理解释中将光子视为粒子而在计算中却视为波, 那就犯了严重错误了.

虽然对光子的波粒二象性仍有很多不解之处, 但是从上述实验观察我们可以得到一个结论: 电磁场的能量是量子化的, 场量子化是必要的.

8.3 光量子和场的量子化

在黑体辐射过程中, 腔壁上的原子不断辐射电磁波到腔内. 一般情况下, 辐射的物理过程和辐射场的物理性质由两个基本定律决定. 其中, 薛定谔方程决定了量子化的原子能级, 而麦克斯韦方程则支配着辐射场的辐射行为. 场和原子的相互作用导致了一个量子化的电磁场. 辐射光子的能量和频率由原子的量子化能级决定, $\hbar\omega = E_2 - E_1$. 另一方面, 任何激发出来的电磁场必须满足麦克斯韦方程组, 从而确定其谐波模式结构和叠加行为.

在光的量子理论里面, 辐射场被视为一系列简谐振子. 对每个模式能量的量子化采取了和简谐振子类似的方式. 对场的量子化, 我们遵循一套标准的方法. 首先将自由电磁场的哈密顿量与一系列独立的谐振子联系起来. 然后, 将简谐振子的量子力学结论用于量子化的辐射场. 注意, 这里的自由场是指在我们感兴趣体积为 $V = L^3$ 的范围内无 "源" 也无 "漏". 自由场的能量为

$$H = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\,[\,\epsilon_0 \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r},t)\,] \tag{8.3.1}$$

其中 V 为我们关心的场的总体积, 通常 (但不是必须) 取一个非常大而有限的立方体谐振腔 L^3 来简化计算. 将 (8.3.1) 式和一系列独立简谐振子的哈密顿量联系起来, 就可以将它改写为如下形式:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} [\,p_{\boldsymbol{k}}^2(t) + \omega^2 q_{\boldsymbol{k}}^2(t)\,] \tag{8.3.2}$$

其中 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$ 为一对实的正则变量.

下面我们先求场的矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的经典解. 自由电磁场的矢量势满足麦克斯韦方程:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{8.3.3}$$

其中已经用了库仑规范:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

这样, 电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 都可以用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 来表示:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

分析场特征的最方便的方法是从一个非常大但是有限大的立方腔出发, 应用周期性边界条件, 将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 用平面波模式进行傅里叶展开:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.3.5}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t) = \boldsymbol{A}^*_{-\boldsymbol{k}}(t)$$

引入的波矢满足

$$\boldsymbol{k} = \left\{\frac{2\pi l}{L_x},\ \frac{2\pi m}{L_y},\ \frac{2\pi n}{L_z}\right\} \tag{8.3.6}$$

其中

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(8.3.5) 式的傅里叶展式实际上是对一系列分立波矢 $\boldsymbol{k}$ 进行求和.

考虑库仑规范, 我们得到:

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 0 \tag{8.3.7}$$

上式对任意 $\boldsymbol{r}$ 都成立, 那就要求:

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t) = 0 \tag{8.3.8}$$

把 (8.3.5) 式代入 (8.3.3) 式, 我们得到

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \Big(-k^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big) \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 0 \tag{8.3.9}$$

上式对所有 $\boldsymbol{r}$ 都成立. 这样, 我们得到关于傅里叶展式中每个振幅 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 的方程

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \Big) \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t) = 0 \tag{8.3.10}$$

其中 $\omega = ck$ 是模式的角频率. 方程 (8.3.10) 的解为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t) \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1\, \mathcal{A}_{\boldsymbol{k},1} (a^*_{-\boldsymbol{k},1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a_{\boldsymbol{k},1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) + \hat{\boldsymbol{e}}_2\, \mathcal{A}_{\boldsymbol{k},2} (a^*_{-\boldsymbol{k},2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a_{\boldsymbol{k},2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

其中 $a_{\boldsymbol{k},s}$ ($a^*_{\boldsymbol{k},s}$), $s = 1, 2$ 为模式 $\boldsymbol{k}$ 的振幅, 偏振为 s. $\mathcal{A}_{\boldsymbol{k},s}$ 由电磁场的初始条件决定. 在 (8.3.11) 式中, 考虑到 (8.3.8) 式的横向条件, $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 取为两个正交的偏振方向. 单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 以及波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向上的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 组成正交的笛卡儿右手坐标系.

为简化计算, 先集中考虑一个方向的偏振:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{e}}\, \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}} \big[a_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a^*_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \big] \tag{8.3.12}$$

其中 $a_{\boldsymbol{k}}(t) = a_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $a^*_{\boldsymbol{k}}(t) = a^*_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. 矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 则可以写作正交简谐振子模式的叠加:

$$q_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}, t) = a_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a^*_{\boldsymbol{k}}(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.3.13}$$

这些正交 (独立) 的谐振子模式和简谐振荡中的简正模式是等价的. 下面, 我们就把电磁场的这些正交谐波模式当作独立的简谐振子来处理, 将 $a_{\boldsymbol{k}}(t)$ $(a^*_{\boldsymbol{k}}(t))$ 视为简正模式的振幅. 利用 (8.3.12) 式中的矢量势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的表达式, 根据 (8.3.4) 式将电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 写作:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega\,\hat{\boldsymbol{e}}\,\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}\left[\mathrm{i}a_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}a^*_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \tag{8.3.14}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{e}})\,\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}\left[\mathrm{i}a_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}a^*_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]$$

现在我们来考察电磁场的能量. 可以把电磁场看作一系列独立的简谐振子或者由 (8.3.1) 式来计算场的哈密顿量. 把场看作一系列独立的简谐振子时, 由经典力学很容易得到系统的哈密顿量为:

$$H=2\int_V \mathrm{d}^3r\sum_{\boldsymbol{k}}\omega^2\left|\,q_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r},t)\,\right|^2=2\sum_{\boldsymbol{k}}\omega^2\left|\,a_{\boldsymbol{k}}(t)\,\right|^2 \tag{8.3.15}$$

其中 $a_{\boldsymbol{k}}(t)$ 当作简正模式的振幅. 如果从 (8.3.1) 式计算哈密顿量, 只需把 (8.3.14) 式代入 (8.3.1) 式, 积分变为:

$$H=2\sum_{\boldsymbol{k}}|\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}|^2\,\omega^2\left|\,a_{\boldsymbol{k}}(t)\,\right|^2 \tag{8.3.16}$$

为了和 (8.3.15) 式结果一致, 我们将模式分布取为常量 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}=\mathcal{A}_0=1/\epsilon_0^{1/2}L^{3/2}$, 这时场的能量是 "归一化" 的, 为 $H=2\sum_{\boldsymbol{k}}\omega^2\left|\,a_{\boldsymbol{k}}(t)\,\right|^2$. 将所有独立的自由谐振子作等价处理是非常合情合理的. 虽然, 实际情况中可能要考虑非均匀的模式分布, 但是它并不影响电磁场每个独立模式的量子化.

下面引入一对正则变量 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$:

$$q_{\boldsymbol{k}}(t)=a_{\boldsymbol{k}}(t)+a^*_{\boldsymbol{k}}(t) \tag{8.3.17}$$

$$p_{\boldsymbol{k}}(t)=-\mathrm{i}\omega\left[\,a_{\boldsymbol{k}}(t)-a^*_{\boldsymbol{k}}(t)\,\right]$$

(8.3.15) 式中场的哈密顿量则改写关于 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$ 的表达式:

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2}\left[\,p^2_{\boldsymbol{k}}(t)+\omega^2\,q^2_{\boldsymbol{k}}(t)\,\right]=\sum_{\boldsymbol{k}}H_{\boldsymbol{k}} \tag{8.3.18}$$

此即简谐振子系统的哈密顿量. 每个谐振子对应于波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的场模. 在 (8.3.18) 式中 $H_{\boldsymbol{k}}$ 给出第 $\boldsymbol{k}$ 个谐振子的哈密顿量. 在经典理论里, $p_{\boldsymbol{k}}$ 和 $q_{\boldsymbol{k}}$ 可以取任何值, 所以经典谐振子的哈密顿量可以取任何非负值. 从 (8.3.17)

式和 (8.3.18) 式可以导出 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$ 满足经典的正则运动方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\boldsymbol{k}}} \\ \frac{\partial p_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{\boldsymbol{k}}}\end{aligned} \tag{8.3.19}$$

同时, 也很容易得到下面一组泊松括号:

$$\begin{aligned}\left[q_{\boldsymbol{k}}(t),\ p_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ \left[q_{\boldsymbol{k}}(t),\ q_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= 0 \\ \left[p_{\boldsymbol{k}}(t),\ p_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= 0\end{aligned} \tag{8.3.20}$$

现在, 我们用谐振子的量子化理论对电磁场进行计算和量子化. 按照一般处理方法, 我们首先用量子力学的正则共轭算符 $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 来替代正则变量 $q_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $p_{\boldsymbol{k}}(t)$, 得到以下的对易关系:

$$\begin{aligned}\left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t),\ \hat{p}_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= \mathrm{i}\hbar\,\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ \left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t),\ \hat{q}_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= 0 \\ \left[\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t),\ \hat{p}_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= 0\end{aligned} \tag{8.3.21}$$

然后, 谐振子系统的量子力学哈密顿量可以写成关于 $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 的表达式:

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2}\left[\hat{p}^2_{\boldsymbol{k}}(t) + \omega^2\,\hat{q}^2_{\boldsymbol{k}}(t)\right] = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{H}_{\boldsymbol{k}} \tag{8.3.22}$$

其中 $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 为第 $\boldsymbol{k}$ 个谐振子的哈密顿算符. 和 (8.3.18) 式中经典振子的 $H_{\boldsymbol{k}}$ 不同的是: 经典振子的 $H_{\boldsymbol{k}}$ 可以取任意值, 而 (8.3.22) 式中的 $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 只能是量子化的能级.

我们在 (8.3.22) 式中引入一对非厄米共轭算符来代替 $\hat{p}_{\boldsymbol{k}}$ 和 $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}$ 来进一步讨论量子谐振子能量的量子化

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left[\omega\,\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t) + \mathrm{i}\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t)\right] \\ \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left[\omega\,\hat{q}_{\boldsymbol{k}}(t) - \mathrm{i}\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t)\right]\end{aligned} \tag{8.3.23}$$

同时 (8.3.21) 式演变为一系列对易关系:

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t),\ \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t),\ \hat{a}_{\boldsymbol{k}'}(t)\right] &= 0\end{aligned} \tag{8.3.24}$$

$$\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t),\ \hat{a}_{\boldsymbol{k}'}^{\dagger}(t)\right]=0$$

从而, (8.3.22) 式中的哈密顿量用 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)$ 表示为:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)+\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\right]\\&=\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)+\frac{1}{2}\right]\\&=\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega\left[\hat{n}_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right]\\&=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{H}_{\boldsymbol{k}}\end{aligned}\tag{8.3.25}$$

其中我们用到了 (8.3.24) 式的对易关系并引入了模式 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数算符 $\hat{n}_{\boldsymbol{k}}=\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)$. 很显然, $\hat{n}_{\boldsymbol{k}}$ 是厄米算符并且与时间无关.

我们下面通过计算表明: (8.3.25) 式中第 $\boldsymbol{k}$ 个谐振子或模式的哈密顿量 $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 只允许取量子化能级. 为简化标记, 下面只讨论一个谐振子或模式时去掉角标 $\boldsymbol{k}$.

假设 $|n\rangle$ 是 $\hat{n}$ 的本征态, 本征值为 n,

$$\hat{n}\,|n\rangle=n\,|n\rangle\tag{8.3.26}$$

既然 $\hat{n}$ 是厄米的, 那么 n 必为实数. 很容易看出 $|n\rangle$ 也是 $\hat{H}$ 的本征态, 其本征值为 $E_n=\hbar\omega(n+1/2)$

$$\hat{H}\,|n\rangle=\hbar\omega\left[\hat{n}+\frac{1}{2}\right]|n\rangle=\hbar\omega\,(n+\frac{1}{2})\,|n\rangle\tag{8.3.27}$$

(8.3.24) 式的对易关系决定了 n 必须为整数, 从而 (8.3.27) 式中的哈密顿量是量子化的. 为证此事, 我们先证明 $\hat{a}\,|n\rangle$ 是 $\hat{n}$ 的一个本征态, 其本征值为 $n-1$,

$$\hat{n}\,\hat{a}|\,n\rangle=\hat{a}\,(n-1)\,|n\rangle=(n-1)\,\hat{a}\,|n\rangle\tag{8.3.28}$$

其中我们使用了 (8.3.24) 式的对易关系. 如果 $\langle\,n\,|n\rangle=1$, 则 $\hat{a}\,|n\rangle$ 归一化为

$$\langle n\,|\,\hat{a}^{\dagger}\,\hat{a}\,|n\rangle=\langle n\,|\,\hat{n}\,|n\rangle=n\tag{8.3.29}$$

因此

$$\hat{a}\,|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle\tag{8.3.30}$$

其中态 $|n-1\rangle$ 也是归一化的, $\langle n-1\,|n-1\rangle=1$.

同样的, $(\hat{a})^2|n\rangle$ 也是 $\hat{n}$ 的本征态, 其本征值为 $n-2$, 并且

$$(\hat{a})^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle$$

依此类推, 将 $\hat{a}$ 算符重复作用到 $|n\rangle$ 上, 即可得到所有的归一化的本征态:

$$(\hat{a})^m|n\rangle = \sqrt{n(n-1)\cdots(n-m+1)}\,|n-m\rangle \tag{8.3.31}$$

这样, 如果 n 为粒子数算符 $\hat{n}$ 的本征值, 则 $n-1, n-2, \cdots$ 都是 $\hat{n}$ 的本征值. 因为

$$n = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \langle \Phi|\Phi\rangle \geqslant 0$$

其中 $|\Phi\rangle = \hat{a}|n\rangle$, 那么 $\hat{n}$ 的所有本征值都是正的. 所以 n 一定是整数, 且其最小本征值为零. 零本征态 $|0\rangle$, 又称真空态, 定义为:

$$\hat{a}|1\rangle = |0\rangle, \text{ 及 } \hat{a}|0\rangle = 0 \tag{8.3.32}$$

所以厄米算符 $\hat{n}$ 的本征值是一系列的整数 $0, 1, 2, \cdots$, 我们又称它为模式 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数算符. 从 (8.3.31) 式可以得出一个有趣的结论: 算符 $\hat{a}$ 作用 n 次后得到所允许的最低能量态, 即真空态 $|0\rangle$, 此时能量是非零的 $E_0 = \hbar\omega/2$:

$$(\hat{a})^n|n\rangle = \sqrt{n!}\,|0\rangle \tag{8.3.33}$$

至此, 我们已经揭示了量子理论与经典理论在描述辐射模能量时有两个根本的不同点: (1) 辐射模能量是量子化的; (2) 辐射模的最低能量态为真空态 $|0\rangle$, 其能量是一个非零值 $E_0 = \hbar\omega/2$, 被称为零点能. 需要强调的是: 这两个性质都是源于对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. 我们后面会再次讨论这两个特殊性质所蕴含的物理本质.

类似 $\hat{a}|n\rangle$, 我们发现 $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ 也是 $\hat{n}$ 的本征态, 其本征值为 $n+1$, 因为

$$\hat{n}\,\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger(n+1)|n\rangle = (n+1)\,\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{8.3.34}$$

这里又用到 (8.3.24) 式的对易关系. 进而很容易得到:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{8.3.35}$$

其中态 $|n+1\rangle$ 是归一化的, 即 $\langle n+1|n+1\rangle = 1$. 不像 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ 的本征值是没有上限的. 将 $\hat{a}^\dagger$ 重复作用, $\hat{n}$ 的本征值将趋于无穷, 所以本征值是从零到无穷的整数. 由 (8.3.34) 式, 我们将所有归一化的本征态都用 $|0\rangle$ 来表示:

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle$$
$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}^\dagger|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{a}^\dagger)^3|0\rangle$$
$$\vdots$$
$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \tag{8.3.36}$$

其中所有 $|n\rangle$ 都是归一化的, 有 $\langle n|n\rangle = 1$.

$\hat{a}^\dagger$ 作用后我们得到一组归一化的粒子数态 $|n_{\boldsymbol{k}}\rangle$, 它是哈密顿量 $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 的波矢为 $\boldsymbol{k}$ 以及偏振为 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}$ 的本征态. 这些能量本征态形成正交完备的矢量空间, 可以用来描述辐射场. 哈密顿量 $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 的本征值是量子化的离散能量值, 为 $n\hbar\omega$ 或 $nh\nu$, 这与经典电磁场理论截然不同, 经典理论中辐射模的能量可以取任意值. 图 8.3.1 所示是电磁场辐射模的量子化能级.

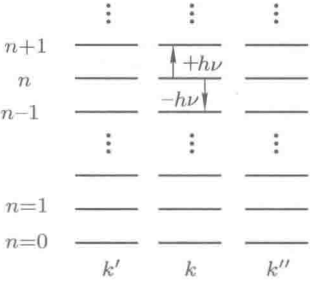


图 8.3.1 电磁场辐射模的量子化能级. 产生算符 $\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ 增加一个能量子 $\hbar\omega$ 或者光子到模式 $\boldsymbol{k}$, 将模式 $\boldsymbol{k}$ 上激发到更高能级. 湮没算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}$ 从模式 $\boldsymbol{k}$ 中减去一份相同的能量, 或称湮没一个光子. 和光子的概念联系起来, $\hat{H}_{\boldsymbol{k}}$ 的能量本征态也称为光子数态或福克态.

将 $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 和爱因斯坦的能量 "包裹", 或着光子的概念联系起来发现: $\hat{a}^\dagger$ 给辐射场的 $\boldsymbol{k}$ 模式增加一个能量子 $\hbar\omega$, 或者一个光子, 所以称它为光子产生算符. 类似的, $\hat{a}$ 从辐射场 $\boldsymbol{k}$ 模式减去一个能量子 $\hbar\omega$, 所以称它为光子湮没算符. 辐射模式的激发态 $|n\rangle$, 包含了 n 个能量子, n 称为占有数或光子数, 外加零点能. 于是, (8.3.36) 式中的一组能量本征态被称为光子数态. 原子跃迁时光子产生和湮没的物理过程将在讨论量子态和场算符的时候再做分析.

现在我们用哈密顿能量本征态来描述量子化的辐射场. 在一般情况下, 任何一个辐射场的状态, 都可以表示成能量本征态的叠加:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle \tag{8.3.37}$$

其中 c_n 为光子数态 $|n\rangle$ 的复振幅. 原则上, 描述辐射场模的态矢不一定要用能量本征态, 但是, 它在计算辐射场的时间演化时很有优势. 容易看出, 时间从 t_0 变到 t 时, 哈密顿量 $\hat{H}$ 的能量本征态只是简单地增加了一个相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t-t_0)/\hbar}$,

$$|\,\Psi_n(t)\,\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t-t_0)/\hbar}\,|\,\Psi_n(t_0)\,\rangle \tag{8.3.38}$$

因为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\Psi_n\,\rangle = \hat{H}\,|\,\Psi_n\,\rangle = E_n\,|\,\Psi_n\,\rangle$$

辐射场被量子化后, 我们立即可以将电磁场用产生算符和湮没算符来表示, 将它们都变成算符形式:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right], \\
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\left[\mathrm{i}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right], \\
\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}\times\hat{\boldsymbol{e}}_k)\,\mathcal{B}_{\boldsymbol{k}}\left[\mathrm{i}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-\mathrm{i}\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right]
\end{aligned} \tag{8.3.39}$$

我们通常将场算符写成两个部分,

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,\mathrm{i}\,\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k(-\mathrm{i})\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned} \tag{8.3.40}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)$ 分别包括了产生算符和湮没算符.

注意, 上面分析中为了简化数学处理, 我们假设了很大但有限的立方腔并应用了其平面波解. 在某些特定实验条件下, 平面波解可能需要根据边界的大小、形状以及特性的不同进行推广. 用一般的空间模函数 $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r})$ (对应于激发频率 ω_k) 取代 (8.3.5) 式中的平面波解后我们得到:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = A_0\sum_{\boldsymbol{k}}\;\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)\,\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r}) \tag{8.3.41}$$

$\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r})$ 一定是亥姆霍兹方程的解

$$\nabla^2\boldsymbol{u}_k+\frac{\omega_k^2}{c^2}\;\boldsymbol{u}_k = 0 \tag{8.3.42}$$

并满足相应的边界条件. 进一步, 我们要求模函数必须是一组正交完备集, 即

$$\int \mathrm{d}r^3\,\boldsymbol{u}_l^*(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{r}) = \delta_{lm} \tag{8.3.43}$$

同时满足以下条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r}) = 0$$

由以上三个方程和边界条件, 我们得到进行场量子化的一组比较合适的模函数. 后面章节将会用到这种非平面波解.

本节里我们对电磁场进行了量子化. 从经典的麦克斯韦方程组开始, 以量子化的电磁场结束. 麦克斯韦方程组要求电磁场为满足一定的边界条件的离散或连续模式 (8.3.6 式) 构成的波动解. 量子力学进而将每个辐射场模式的能量进行量子化, 见 (8.3.25) 式. 因此, 关于辐射场状态的描述有两个重要的物理概念: 模式分布和每个模式的量子化能量. 电磁场 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)$ 都被处理成算符, 它们由产生算符和湮没算符组成.

8.4 辐射场的光子数态

应用产生算符, 我们已经得到一组归一化的光子数态, 它们是 (8.3.36) 式中哈密顿量的模式为 $\boldsymbol{k}$ 和偏振为 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}$ 的本征态. 这些能量本征态构成描述辐射场或光量子态的一组正交完备的基矢. 我们现在推广到多模辐射情形. 下面的 (8.4.1) 式就是推广的福克态, 它是 (8.3.25) 式中多模哈密顿量的本征态. 另外, 我们还在 (8.4.3) 式中引入一个有用的算符, 即总光子数算符 $\hat{n}$.

一般的多模光子数态, 或者辐射场的福克态为:

$$|\,\Psi\,\rangle = \prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle = \prod_{\boldsymbol{k},s} \frac{1}{\sqrt{n_{\boldsymbol{k},s}!}} (\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s})^n\,|\,0\,\rangle \tag{8.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 和 s 表示模式和偏振. (8.4.1) 式定义的态包含了所有辐射模和偏振.

我们很容易发现 (8.4.1) 式中的多模福克态就是单模光子数算符 $\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}$ 的本征态

$$\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}\Big(\prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle\Big) = n_{\boldsymbol{k},s} \prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle \tag{8.4.2}$$

其中 $n_{\boldsymbol{k},s}$ 为模式为 $\boldsymbol{k}$ 和偏振为 s 的辐射模的占有数. 我们现在定义一个总光子数算符 $\hat{n}$, 它是对所有辐射模 $\boldsymbol{k}$ 和偏振 s 的 $\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}$ 求和得到的,

$$\hat{n} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{n}_{\boldsymbol{k},s} \tag{8.4.3}$$

容易发现: (8.4.1) 式的多模福克态也是全光子数算符的本征态,

$$\hat{n}\Big(\prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle\Big) = \Big(\sum_{\boldsymbol{k},s} n_{\boldsymbol{k},s}\Big) \prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle = n \prod_{\boldsymbol{k},s} |\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle \tag{8.4.4}$$

其中 $n=\sum n_{\boldsymbol{k},s}$ 为辐射场的总光子数.

很容易证明: (8.4.1) 式的多模福克态是 (8.3.25) 式中多模总哈密顿量的本征态,

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|\,\Psi\,\rangle &= [\sum_{\boldsymbol{k},s}\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}\,(\,\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}+\frac{1}{2}\,)]\,(\prod_{\boldsymbol{k},s}|\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle) \\ &= [\sum_{\boldsymbol{k},s}\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}\,(\,n_{\boldsymbol{k},s}+\frac{1}{2}\,)]\,(\prod_{\boldsymbol{k},s}|\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle) \\ &= E\,|\,\Psi\,\rangle\end{aligned} \tag{8.4.5}$$

其中 $E=\sum\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}\,(n_{\boldsymbol{k},s}+\frac{1}{2}\,)$ 是辐射场的总能量.

为了方便起见, 我们定义一个简化标记 $\{n\}$, 把 (8.4.1) 式的多模福克态改写成:

$$|\,\{n\}\,\rangle\equiv\prod_{\boldsymbol{k},s}|\,n_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle \tag{8.4.6}$$

(8.4.4) 式于是可以写成一个简洁形式:

$$\hat{n}\,|\,\{n\}\,\rangle=n\,|\,\{n\}\,\rangle \tag{8.4.7}$$

上式表明多模福克态 $|\,\{n\}\,\rangle$ 为 (8.4.3) 式定义的总粒子数算符 $\hat{n}$ 的本征态, 其本征值为 n, 代表了辐射场的总光子数.

通常不管单模还是多模的福克态, 都可以用总粒子数算符的本征值 n 来命名, 称为 n 光子态, 例如:

$$|\,\Psi\,\rangle=\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle=|\,\cdots 0,\,1_{\boldsymbol{k},s},\,0,\,\cdots\rangle \tag{8.4.8}$$

为一个单光子态($n=1$), 对应激发模式为 $\boldsymbol{k}$ 和偏振 s.

$$|\,\Psi\,\rangle=\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}',s'}\,|\,0\,\rangle=|\,\cdots 0,\,1_{\boldsymbol{k},s},\,0,\,\cdots 1_{\boldsymbol{k}',s'},\,0,\,\cdots\rangle \tag{8.4.9}$$

和

$$|\,\Psi\,\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s})^2\,|\,0\,\rangle=|\,\cdots 0,\,2_{\boldsymbol{k},s},\,0,\,\cdots\rangle \tag{8.4.10}$$

都是双光子态($n=2$), 但是它们的物理内涵是不一样的. (8.4.9) 式中的态指两个不同的辐射模的激发, 占有数分别为 $n_{\boldsymbol{k},s}=1$ 和 $n_{\boldsymbol{k}',s'}=1$. (8.4.10) 式的态指的是激发了一个辐射模式, 其占有数为 $n_{\boldsymbol{k},s}=2$. (8.4.8) 式到 (8.4.10) 式都是福克态, 或者光子数态.

我们下面用光子的概念来理解以上几种福克态. (8.4.8) 式表示激发了一个模式为 $\boldsymbol{k}$, 偏振为 s, 能量为 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$ 的量子或光子. (8.4.9) 式表示同

时激发了一个模式为 $\boldsymbol{k}$, 偏振为 s, 能量为 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$ 的量子或光子, 和一个模式为 $\boldsymbol{k}'$, 偏振为 s', 能量为 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}',s'}$ 的量子或光子. (8.4.10) 式则表示激发了两个模式为 $\boldsymbol{k}$, 偏振为 s, 能量为 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$ 的量子或光子. 为了方便, 有时候我们将 (8.4.8) 式的单光子态表示为 $|1_{\boldsymbol{k},s}\rangle$, 将 (8.4.9) 式的双光子态表示为 $|1_{\boldsymbol{k},s}\,1_{\boldsymbol{k}',s'}\rangle$, 将 (8.4.10) 式的双光子态记为 $|2_{\boldsymbol{k},s}\rangle$. 所以 (8.4.8) 式表示波矢为 $\boldsymbol{k}$、偏振为 s 的单光子态. (8.4.9) 式表示波矢为 $\boldsymbol{k}$、偏振为 s 以及波矢为 $\boldsymbol{k}'$、偏振为 s' 的双光子态. (8.4.10) 式也表示双光态, 只不过两个光子的波矢 $\boldsymbol{k}$、偏振 s 都一样. 此时, 两光子不可区分或简并.

因为福克态能够形成正交完备的矢量空间, 根据量子力学规律, 我们就可以用福克态或光子数态的叠加来表示辐射场的任一态矢,

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j |\Psi_j\rangle = \sum_{\{n\}} f(\{n\})|\{n\}\rangle \tag{8.4.11}$$

其中 $f(\{n\})$ 为辐射场处于 $|\{n\}\rangle$ 态的归一化的概率幅.

例如, (8.4.12) 式表示一个单光子态:

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j |\Psi_j\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},s} f(\boldsymbol{k},s)\,\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}|0\rangle \tag{8.4.12}$$

其中 $c_j = f(\boldsymbol{k},s) = \langle\Psi_j|\Psi\rangle$ 为辐射场处于福克态 $|\Psi_j\rangle = |1_{\boldsymbol{k},s}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}|0\rangle$ 的归一化的概率幅. (8.4.12) 式是一个纯态. 它是一系列特殊的福克态 $|\Psi_j\rangle = |\cdots 0, 1_{\boldsymbol{k},s}, 0, \cdots\rangle$ 线性叠加得到的态矢, 对应光子总占有数为 $n = 1$. 两能级原子跃迁可以产生 (8.4.12) 式的单光子态. 图 8.4.1 是该过程的一个简单模型. 一个两能级原子被放在一个很大但是有限的立方腔内, 上能级 E_2 有一定的宽度 $\Delta E_2 \neq 0$. 当原子从 E_2 跃迁到 E_1 时辐射出单光子或波包. 光子以一定的概率幅 $f(\boldsymbol{k},s)$ 从任意一个或者所有可能的态 $|\Psi_j\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}|0\rangle$ 产生. 每一个允许的辐射模的时空特性由麦克斯韦方程的边界条件决定. 概率幅分布由原子跃迁性质、腔的性质, 特别是能量的不确定值 ΔE_2 所共同决定.

我们可以从 (8.4.12) 式得到辐射场的哪些特性呢?

(1) 该辐射场是用纯态表示的, 意味着对于系综的每一次或者所有测量, 辐射场总是在相同状态.

(2) 该辐射包含一系列可能的激发模式 $(\boldsymbol{k},s)$, 其占有数为 $n_{\boldsymbol{k},s} = 1$, 概率幅为 $f(\boldsymbol{k},s)$. 辐射场可以表示为一组特殊福克态的叠加, 总光子数为 $n = 1$.

(3) 该辐射场态并不是粒子数算符 $\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}$ 的本征态. 光子在模式 $(\boldsymbol{k},s)$

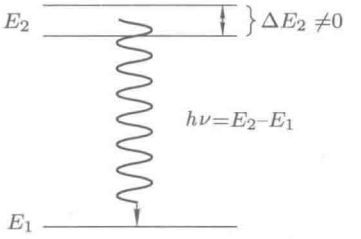


图 8.4.1 产生 (8.4.12) 式单光子态或者波包的原子跃迁的示意图. 一个两能级原子被放在一个很大但是有限的立方腔内, 上能级 E_2 有一定的宽度 $\Delta E_2 \neq 0$. 光子以一定的概率幅 $f(\boldsymbol{k}, s)$ 从任意一个或者所有可能的态 $|\,\Psi_j\,\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle$ 产生.

的平均占有数为:

$$\langle\,\Psi\,|\,\hat{n}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,\Psi\,\rangle = |f(\boldsymbol{k}, s)|^2$$

与激发模式 $(\boldsymbol{k}, s)$ 的概率相等.

(4) 该辐射场态是总光子数算符 $\hat{n} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{n}_{\boldsymbol{k},s}$ 的本征态, 其本征值为 $n = 1$:

$$\hat{n}\,|\,\Psi\,\rangle = \sum_{\boldsymbol{k}',s'} \hat{n}_{\boldsymbol{k}',s'} \sum_{\boldsymbol{k},s} f(\boldsymbol{k}, s)\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle = 1 \sum_{\boldsymbol{k},s} f(\boldsymbol{k}, s)\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle$$

(5) 该场态不是哈密顿量 $\hat{H}_{\boldsymbol{k},s}$ 的本征态, 模式 $(\boldsymbol{k}, s)$ 的平均能量为:

$$\langle\,\Psi\,|\,\hat{H}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,\Psi\,\rangle = |f(\boldsymbol{k}, s)|^2\,\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$$

(6) 场态不是总哈密顿量 $\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{H}_{\boldsymbol{k},s}$ 的本征态. 总哈密顿量的期望值, 或辐射的平均能量为

$$\langle\,\Psi\,|\hat{H}\,|\,\Psi\,\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},s} |f(\boldsymbol{k}, s)|^2\,\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$$

这是所有可能的量子化能量 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$ 的平均值, 是计及加权函数 $|f(\boldsymbol{k}, s)|^2$ 统计平均后的结果.

从光子概念的角度, (8.4.12) 式又能给出哪些特性呢?

(1) (8.4.12) 式为单光子纯态, 标示了一个光子以及同相系综中所有全同光子的态.

(2) 光子不是处在某一特定的单模福克态, 而是以一定概率处在 $n = 1$ 的任意或者所有单模福克态.

(3) 光子能量不是确定的某一特定值 $\hbar\omega$, 而是在叠加范围内取任意或者所有可能的 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$.

(4) 光子局域在波包范围内, 波包是希尔伯特空间的某一矢量. ⑦

(5) 波包携带能量为 $\sum_{\boldsymbol{k},s}|f(\boldsymbol{k},s)|^2\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$, 然而, 一次测量到的光子的能量只能取某个 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$. ⑧

8.5 辐射场的相干态

相干态定义为湮没算符的本征态

$$\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle \tag{8.5.1}$$

为了方便起见, 我们将本征值 α 写成振幅和相位的形式:

$$\alpha=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\quad\text{其中}\quad a=|\alpha|$$

相干态组成矢量空间的一个完备集. 与粒子数态类似的是: 相干态可以作为描述辐射场的基矢, 但是相干态之间一般是非正交的. 根据 (8.5.1) 式, 我们可以直接将 $|\alpha\rangle$ 用粒子数态 $|n\rangle$ 来表示,

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{8.5.2}$$

其中用到

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

由于

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle,$$

(8.5.2) 式可以写为:

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{8.5.3}$$

(8.5.3) 式形式上可以改写为:

$$|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle, \tag{8.5.4}$$

因为

$$\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle=0,$$

和

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}=\mathrm{e}^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}\,\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}},$$

⑦ 这不同于 "光子是个波包" 这个说法. 也许, 更确切的说法应该是: 产生的光子是以定域的波包形式来激发辐射场的. 而且, 在某些特定测量中, 单光子的状态可以用一系列波包来描述, 即光子可以局域在一组波包里.

⑧ 更确切地说: 光子有一定概率携带能量 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k},s}$.

其中 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 为任意算符, 它们满足:

$$[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}]=[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}]=0$$

这里, 我们让 $\hat{A}=\alpha\hat{a}^{\dagger}$, $\hat{B}=-\alpha^{*}\hat{a}$. $|\alpha\rangle$ 写成 (8.5.4) 式的形式后, 我们引入一个幺正算符, 即位移算符

$$\hat{D}(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}}=\mathrm{e}^{-|\alpha|^{2}/2}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}}\mathrm{e}^{-\alpha^{*}\hat{a}}=\mathrm{e}^{|\alpha|^{2}/2}\,\mathrm{e}^{-\alpha^{*}\hat{a}}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^{\dagger}},$$

这样, 我们就可以将 $|\alpha\rangle$ 表示为 $|0\rangle$ 的幺正变换:

$$|\alpha\rangle=\hat{D}(\alpha)\,|0\rangle \tag{8.5.5}$$

(8.5.5) 式对于相干态的某些理论探讨非常有用.

相干态的一些重要性质如下:

(1) 相干态的平均光子数 $|\alpha\rangle$ 为 $|\alpha|^{2}$,

$$\bar{n}=\langle\hat{n}\rangle=\langle\alpha|\,\hat{n}\,|\alpha\rangle=|\alpha|^{2} \tag{8.5.6}$$

$|\alpha\rangle$ 中发现 n 光子的概率服从泊松分布,

$$P(n)=\langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle=\frac{\bar{n}^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-\bar{n}} \tag{8.5.7}$$

激光的光子数分布接近泊松分布. 泊松分布可以方便地用来描述单光子态. 例如, 将激光进行衰减, 当平均光子数 $\bar{n}=0.01$ 时, 我们会发现辐射场以 $\sim 99\%$ 的概率处于基态 $|0\rangle$, 处于 $|1\rangle$ 态和 $|2\rangle$ 态的概率分别为 $\sim 1\%$ 和 $\sim 0.01\%$. 对于误差为 1% 的光子计数实验, 可以忽略 $|2\rangle$ 态以及更高光子数态的影响. 采用一阶近似, 测量的光场可以近似为:

$$|\Psi\rangle\simeq|0\rangle+\epsilon\,|1\rangle+\epsilon^{2}\cdots$$

其中 $\epsilon\ll 1$. 泊松分布也可以用来模拟大数光子态 $n\gg 1$. 例如, 当平均光子数 $\bar{n}=10^{6}$ 时, 光子数分布在 $n=10^{6}$ 有一个峰值, 其分布带宽 $\Delta n\sim 10^{3}$ 比 $\bar{n}$ 小三个量级.

(2) 相干态 $|\alpha\rangle$ 构成希尔伯特空间的完备集:

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^{2}\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|=1 \tag{8.5.8}$$

(8.5.8) 式的完备性表明任何辐射的量子态都可以用相干态作为基矢展开. 为了证明这一点, 将相干态的粒子数态展开式代入上式积分中, 得到

$$\int \mathrm{d}^{2}\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha|=\int \mathrm{d}^{2}\alpha\,\mathrm{e}^{-|\alpha|^{2}}\frac{\alpha^{n}\,(\alpha^{*})^{n}}{n!}\sum_{n}|n\rangle\langle n|=\pi\sum_{n}|n\rangle\langle n| \tag{8.5.9}$$

这里用到积分⑨

$$\int \mathrm{d}^2\alpha\, \mathrm{e}^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n\,(\alpha^*)^n}{n!} = \pi$$

因为福克态 $|n\rangle$ 形成一组正交完备基, (8.5.9) 式求和, 得到单位算符.

(3) 两个相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\alpha'\rangle$ 是不正交的, 除非 $|\alpha-\alpha'| \gg 1$,

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2-2\alpha^*\alpha'+|\alpha'|^2)} \tag{8.5.10}$$

和

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha-\alpha'|^2} \tag{8.5.11}$$

这说明相干态基矢是超完备的. 但如果实验条件满足 $|\alpha-\alpha'| \gg 1$, 相干态可以近似看作正交的.

(4) 与光子数态类似, 我们可以定义多模相干态. 多模相干态写成单模相干态 $|\alpha_{\boldsymbol{k},s}\rangle$ 的连乘积

$$|\{\alpha\}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k},s} |\alpha_{\boldsymbol{k},s}\rangle \tag{8.5.12}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 和 s 分别表示波矢和偏振. $|\{\alpha\}\rangle$ 为湮没算符的本征态, 本征值为 $\alpha_{\boldsymbol{k},s}$,

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k},s}\,|\{\alpha\}\rangle = \alpha_{\boldsymbol{k},s}|\{\alpha\}\rangle \tag{8.5.13}$$

类似光子数态的讨论, 我们也可以定义多模湮没算符

$$\hat{a} = \sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{a}_{\boldsymbol{k},s} \tag{8.5.14}$$

不难发现 (8.5.12) 式中定义的多模相干态是多模湮没算符的本征态, 本征值为 $\sum_{\boldsymbol{k},s}\,\alpha_{\boldsymbol{k},s}$

$$\hat{\alpha}\,|\{\alpha\}\rangle = \Big(\sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{a}_{\boldsymbol{k},s}\Big) \prod_{\boldsymbol{k},s} |\alpha_{\boldsymbol{k},s}\rangle = \Big(\sum_{\boldsymbol{k},s} \alpha_{\boldsymbol{k},s}\Big)|\{\alpha\}\rangle \tag{8.5.15}$$

类似粒子数态, 我们可以构建双模相干态

$$|\Psi\rangle = |0,\cdots,0,\alpha_{\boldsymbol{k},s},0,\cdots\alpha_{\boldsymbol{k}',s'},0,\cdots\rangle \tag{8.5.16}$$

它是 $\big(\sum_{\boldsymbol{k},s}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k},s}\big)$ 的本征态, 本征值为 $(\alpha_{\boldsymbol{k},s}+\alpha_{\boldsymbol{k}',s'})$,

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{\boldsymbol{k},s} \hat{a}_{\boldsymbol{k},s}\Big)|0,\cdots,0,\alpha_{\boldsymbol{k},s},0,\cdots\alpha_{\boldsymbol{k}',s'},0,\cdots\rangle\\ &= \big(\alpha_{\boldsymbol{k},s}+\alpha_{\boldsymbol{k}',s'}\big)|0,\cdots,0,\alpha_{\boldsymbol{k},s},0,\cdots\alpha_{\boldsymbol{k}',s'},0,\cdots\rangle\end{aligned}$$

⑨ $\displaystyle\int \mathrm{d}^2\alpha\, \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\,\alpha^m\,(\alpha^*)^n = \int_0^\infty \mathrm{d}|\alpha|\,\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{m+n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\varphi} = \pi n!\,\delta_{mn}$

8.6 密度算符和密度矩阵

对于纯态, 测量的某物理量 (算符) 的期望值很容易计算

$$\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{QM}} = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \tag{8.6.1}$$

然而, 我们需要计算的并非都是纯态. 在某些特定实验中, 辐射场的状态只能用统计的方法给出, 因而我们必须面对混态的计算. 在计算某观测量的期望值时, 除了量子平均, 还要进行系综平均. 下面我们定义一个密度算符来描述辐射场的概率分布. 设辐射场处于态 $|\Psi_j\rangle$ 的概率为 P_j, 计算可观察量 $\hat{A}$ 的期望值需要以下系综平均

$$\left\langle \langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{QM}} \right\rangle_{\mathrm{Ensamble}} = \sum_j P_j \langle \Psi_j | \hat{A} | \Psi_j \rangle \tag{8.6.2}$$

考虑完备性 $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$

$$\begin{aligned} \left\langle \langle \hat{A} \rangle \right\rangle_{\mathrm{Ensemble}} &= \sum_n \sum_j P_j \langle \Psi_j | \hat{A} | n \rangle \langle n | \Psi_j \rangle \\ &= \sum_n \sum_j P_j \langle n | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \hat{A} | n \rangle \\ &= \sum_n \langle n | \hat{\rho} \hat{A} | n \rangle \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

这里引入密度算符来统计性地描述辐射场,

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \tag{8.6.4}$$

根据 (8.6.3) 式, 待测量的期望值计算如下,

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{tr}\, \hat{\rho} \hat{A} \tag{8.6.5}$$

其中 tr 是对一个矩阵求迹. 既然任何一个态 $|\Psi_j\rangle$ 都可以用选定的一组基矢展开, 那么密度算符 $\hat{\rho}$ 也可以用一组选定的基矢比如光子数态、相干态等展开,

$$\hat{\rho} = \sum_m \sum_n \sum_j P_j | m \rangle \langle m | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | n \rangle \langle n | \equiv \sum_m \sum_n \rho_{mn} | m \rangle \langle n | \tag{8.6.6}$$

(8.6.6) 式给出了密度矩阵的定义.

下面给出了密度矩阵的一些有用的性质:

(1) $\rho_{mm} \geqslant 0$

密度矩阵的对角元都是非负实数, 因为 $\rho_{mm} = \langle m|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|m\rangle = |\langle m|\Psi_j\rangle|^2 \geqslant 0$.

(2) $\sum_m \rho_{mm} = 1$ 或 $\mathrm{tr}\,\hat{\rho} = 1$

密度矩阵是用归一化的态 $|\Psi_j\rangle$ 以及辐射场的概率分布 P_j 来描述的, 这使得把对角元素解释为概率成为可能. 显然对于混态就有 $\rho_{mm} < 1$; 对于纯态, 可以将其看作辐射场处于态 $|\Psi\rangle$ 概率确定 ($P = 1$) 时的特殊混态来处理.

(3) $\rho^*_{mn} = \rho_{nm}$ 或 $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$

这就是说密度矩阵是厄米算符. 正因为密度矩阵是厄米算符, 所以它可以用幺正变换进行对角化. 在本书中, 选用光子数态作为基矢. 光子数态是哈密顿量的本征态. 在光学测量中, 光子数态的含时演化仅仅包含相位传递. 这种性质对于态或者是算符的传播都是很有用的. 在后面的几节中, 会发现对于以光子数态为基矢的热光场的密度矩阵只含有对角元素.

(4) 对于纯态有 $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$

这一性质很容易证明而且也可以用来区分纯态和混态.

下面的例子就是一个描述单光子混态的密度矩阵,

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j\,|\,\Psi_j\,\rangle\langle\,\Psi_j\,| = \sum_{\boldsymbol{k},s} |f(\boldsymbol{k},s)|^2\;\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,|\,\hat{a}_{\boldsymbol{k},s} \tag{8.6.7}$$

其中 $\sum_j P_j = 1$. $P_j = |f(\boldsymbol{k},s)|^2$ 是处于福克态 $|\,\Psi_j\,\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle$ 的概率. 需要强调的是, (8.6.7) 式的混态和 (8.4.12) 式中的纯态是很不相同的, 尽管两者可能具有相似的模式分布函数. 在后面期望值的计算过程中, 我们会发现其物理和数学上的差异. 为了简化数学表达, 我们在下面只考虑单一偏振下的一维连续谱.

(1) 相干叠加 (纯态) 和非相干混合 (混态):

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle_{|\,\Psi\rangle} &= \langle\Psi|\,\hat{A}\,|\Psi\rangle \\ &= \int\!\!\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\; f^*(\omega) f(\omega')\,\langle 0|\hat{a}(\omega)\,\hat{A}\,\hat{a}^\dagger(\omega')|0\rangle \qquad (8.6.8)\\ \langle\hat{A}\rangle_{\hat{\rho}} &= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\hat{A} = \\ &= \int \mathrm{d}\omega\,|f(\omega)|^2\,\langle 0|\hat{a}(\omega)\,\hat{A}\,\hat{a}^\dagger(\omega)|0\rangle \qquad (8.6.9)\end{aligned}$$

在 (8.6.8) 式中所有的非对角元素都可能有贡献; 但在 (8.6.9) 式中只有对角元素有贡献. 在数学上来看, 两者有着明显区别. 在物理上, 两种期望值的不同是因为对应的量子态不同, 从而要使用不同的平均法, 即, $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{QM}}$ 和 $\langle\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{QM}}\rangle_{\mathrm{Ensemble}}$.

(2) 相干叠加的波包和非相干叠加 (混合) 的波包:

假设辐射场可以形式上用一系列大量全同波包的叠加来描述, 每一个波包用其初相位 $\varphi_j(\omega)$ 来标记:

$$|\Psi\rangle = \sum_j \int \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j(\omega)} \hat{a}_k^\dagger(\omega)|0\rangle \tag{8.6.10}$$

为了简化标记, 我们已经假设所有波包都具有相同的振幅分布 $|f(\omega)|$. 那么观测量的期望值就可以计算为,

$$\begin{aligned} &\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{QM}} \\ &= \Big[\sum_j \int \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j(\omega)} \langle 0|\hat{a}_j(\omega)\Big] \hat{A} \Big[\sum_k \int \mathrm{d}\omega'\, |f(\omega')| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k(\omega')} \hat{a}_k^\dagger(\omega')|0\rangle\Big] \\ &= \sum_j \sum_k \int\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, |f(\omega)||f(\omega')| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]} \langle 0|\hat{a}_j(\omega)\, \hat{A}\, \hat{a}_k^\dagger(\omega')|0\rangle \end{aligned} \tag{8.6.11}$$

此时计算结果就取决于求和和积分的结果. 对于相干叠加, $\varphi_j(\omega) - \varphi_k(\omega')$ 是常数, 所有项都存在并且对期望值有贡献. 然而, 如果 $\varphi_j(\omega) - \varphi_k(\omega')$ 的值是随着 j,k 和 ω,ω' 随机变化的, 就会出现相消效果, 这样只有 $j=k$ 和 $\omega=\omega'$ 的对角项能够保留下来,

$$\begin{aligned} &\big\langle \langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{QM}} \big\rangle_{\mathrm{Ensemble}} \\ &= \Big\langle \sum_j \sum_k \int\int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, |f(\omega)||f(\omega')| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\varphi_j(\omega)-\varphi_k(\omega')]} \langle 0|\hat{a}_j(\omega)\, \hat{A}\, \hat{a}_k^\dagger(\omega')|0\rangle \Big\rangle \\ &= \sum_j \int \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)|^2 \langle 0|\hat{a}_j(\omega) \hat{A}\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)|0\rangle \end{aligned} \tag{8.6.12}$$

上式把求和处理为对 $\varphi_j(\omega) - \varphi_k(\omega')$ 取所有可能值的系综平均. 这种处理对于大量随机分布的波包是合情合理的. 在实际的实验中, 测量一般都是涉及大量的波包, 如果被测波包是被随机激发的, $\varphi_j(\omega) - \varphi_k(\omega')$ 就会取任意或者所有可能值.

纯态在希尔伯特空间中就是一个矢量. 如果光子态能够用一个矢量描述, 那么这个量子态就是纯态. 相反的, 如果这个量子态不能用一个矢量表示, 但是可以借助密度矩阵表示成矢量的混合, 那么这个量子态就成为混态. 从系综测量的角度来说, 如果系综中所有光子的状态可以用同一个矢量来描述, 那么这个系综的态或者说这个测量的光子系统的态是均匀的或者处于统计意义上的纯态. 这时候, 系综平均无足轻重. 如果被测量的系综不能用一个矢量来描述, 我们只能找出系综处在某一个态

的概率, 那么这个系综的态就是非均匀的或是处于统计上的混态. 这时系综平均对于计算观测量的期望值就不是无足轻重的了, 我们将在 8.9 节对纯态和混态做更细致的讨论.

现在, 我们可以推广密度算符的概念来描述任意一个辐射场的状态. 对于纯态有

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

对于混态有

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|$$

观测量的期望值形式上为

$$\langle\hat{A}\rangle_{\hat{\rho}} = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\hat{A}$$

密度算符可以用任意选定的基矢展开, 比如光子数态,

$$\hat{\rho} = \sum_m \sum_n |m\rangle\langle m|\hat{\rho}|n\rangle\langle n| = \sum_m \sum_n \rho_{mn} |m\rangle\langle n| \tag{8.6.13}$$

或者是相干态,

$$\hat{\rho} = \int\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{\rho}|\beta\rangle\langle\beta| = \int\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\rho_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{8.6.14}$$

其中 ρ_{mn} 和 $\rho_{\alpha\beta}$ 分别描述在光子数态和相干态矢量空间中辐射场的分布. 因此, 我们根据选定的基矢来引入密度矩阵的概念. 历史上, 这些概念的引入是为了描述各种不同的辐射场的统计性质, 比如涨落和关联. 基于密度矩阵 $\rho_{\alpha\beta}$ 的概念, 定义所谓的相干态表象或是 P 表象后, 量子化场的特性就可以以经典统计的形式来计算. ⑲

本书不主张将量子相干, 特别是高阶量子相干当做经典统计关联处理. 然而, 密度算符和密度矩阵的概念很有用, 尤其是在处理混沌热光场这种无法用希尔伯特空间中的一个态矢来描述的辐射场时特别有用. 在下面的几节中, 我们将给出单光子辐射过程的一个简单模型, 并用密度算符来描述辐射场的状态, 从而根据下式计算观测量的期望值:

$$\left\langle\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{QM}}\right\rangle_{\mathrm{Ensemble}} = \sum_j P_j \langle\Psi_j|\hat{A}|\Psi_j\rangle = \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\hat{A} \tag{8.6.15}$$

⑲ 有趣的是, 在文献中, 量子化的辐射场根据其自身的 P 函数被划分为 "经典场" 和 "量子场". 热光场因为具有正的类高斯的 P 函数, 所以历史上一直以来被认为是经典场. 然而, 具有正的类高斯的 P 函数并不能否定热光场的量子效应. 不要忘记普朗克的革命性量子化概念来自对热光场的测量. 当考虑热光场的多光子干涉现象时, 我们不要被这些 "经典场" 和 "量子场" 定义搞糊涂. 尽管热光场可能用经典统计的形式来描述, 然而根据量子力学, 热光场的一个光子确实与其自身干涉, 热光场的一对光子也确实与其自身干涉.

8.7 辐射场的复合系统及双光子态

在某些特定实验测量中, 我们需要处理的是双光子态. 双光子态是用来描述两个光子的复合系统的状态. 其子系统可以相隔甚远. 在量子力学理论中, 无论子系统之间距离多大, 由两个子系统构成的复合系统可以用一个希尔伯特空间来描述, 它是两个子系统的希尔伯特空间的直积或者张量积,

$$H = H_1 \otimes H_2 \tag{8.7.1}$$

如果态 $|\Psi_1\rangle \in H_1$ 以及 $|\Psi_2\rangle \in H_2$, 那么这两个态的直积就是 $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$, 或者简单表示为 $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle$. H 中的内积可以用 H_1 和 H_2 中的内积来表示

$$\langle\Psi|\Psi'\rangle = \langle\Psi_1|\Psi_1'\rangle\langle\Psi_2|\Psi_2'\rangle \tag{8.7.2}$$

如果 $\{|m\rangle\}$ 是 H_1 的一组正交基, $\{|n\rangle\}$ 是 H_2 的一组正交基, 那么 $\{|m\rangle\otimes|n\rangle\}$ 或者简单的表示为 $\{|m\rangle|n\rangle\}$ 就是 H 的一组正交基, 这一组基矢就称为施密特基矢.

在一个复合系统中, 子系统可以是相互独立的、关联的或者是纠缠的. 对于相互独立的子系统, 复合系统的状态可以写成直积态,

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} c_m\, c_n\, |m\rangle|n\rangle = \sum_m c_m|m\rangle \sum_n c_n\, |n\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \tag{8.7.3}$$

其中 $c_{mn} = c_m\, c_n$ 是可分解的. 一般来说, 如果两个子系统是关联的或是纠缠的, 那么一般来说, 态 $|\Psi\rangle$ 就不能写成 (8.7.3) 式的形式, 即 c_{mn} 是不可分解的, 从而态 $|\Psi\rangle$ 也是不可分解的,

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn}\, |m\rangle|n\rangle \tag{8.7.4}$$

可以说, 两个子系统是处于关联态还是纠缠态是由 c_{mn} 的具体形式决定的.

最简单的双光子态是 (8.4.9) 式中的福克态. 为了计算简便, 将 (8.4.9) 式写成一维的, 并且忽略偏振,

$$|\,\Psi\,\rangle = \hat{a}_1^\dagger(\omega)\,\hat{a}_2^\dagger(\omega')\,|\,0\,\rangle = |\,\cdots 0,\, 1_1(\omega),\, 0,\, \cdots\rangle|\,\cdots 0,\, 1_2(\omega'),\, 0,\, \cdots\rangle \tag{8.7.5}$$

其中我们已经将态改写成复合的两个子系统的态. 一般而言, 我们所处理的一组双光子福克态, 要么是处在相干叠加态

$$|\,\Psi\,\rangle = \sum_{\omega}\sum_{\omega'} f(\omega,\omega')\,\hat{a}_1^\dagger(\omega)\,\hat{a}_2^\dagger(\omega')\,|\,0\,\rangle \tag{8.7.6}$$

要么是处在统计混态

$$\hat{\rho} = \sum_{\omega} \sum_{\omega'} |f(\omega, \omega')|^2 \, \hat{a}_1^{\dagger}(\omega) \, \hat{a}_2^{\dagger}(\omega') \, |0\rangle\langle 0| \hat{a}(\omega) \, \hat{a}(\omega') \tag{8.7.7}$$

其中 $f(\omega, \omega')$ 是量子化场处在双光子福克态 $|\cdots 0, 1_{\omega}, 0, \cdots\rangle|\cdots 0, 1_{\omega'}, 0, \cdots\rangle$ 的概率幅. 双光子的概率幅 $f(\omega, \omega')$ 或者可以分解成乘积的形式 $f_1(\omega) \times f_2(\omega')$, 或者完全不可分. 这两种态的物理性质完全不同. 如果 $f(\omega, \omega')$ 能够分解为乘积 $f_1(\omega) \times f_2(\omega')$, 那么双光子态本身也是可分解的, 从而写成两个独立单光子的直积态. 如果 $f(\omega, \omega')$ 不可分, 那么双光子态就不能写成直积态, 此时的态就称为关联的或者纠缠的双光子态. 根据光子的概念, 直积态描述的是两个独立光子的行为, 关联态描述的是两个关联光子的行为, 纠缠态描述的是一对纠缠光子的行为. 以下是关于可分解或不可分解概率幅的三个例子. 在后面的章节中还会仔细研究纠缠态.

例 (I): 直积态

(8.7.8) 式是一个可以分解成两个单光子态乘积的双光子态:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\omega} \sum_{\omega'} f(\omega) f'(\omega') \, \hat{a}_1^{\dagger}(\omega) \, \hat{a}_2^{\dagger}(\omega') \, |0\rangle \tag{8.7.8}$$

$$= \sum_{\omega} f(\omega) \, \hat{a}_1^{\dagger}(\omega) \, |0\rangle \times \sum_{\omega'} f'(\omega') \, \hat{a}_2^{\dagger}(\omega') \, |0\rangle$$

$$= |\Psi_1\rangle \, |\Psi_2\rangle \tag{8.7.9}$$

其中假设了概率幅可以分解: $f(\omega, \omega') = f(\omega) \times f'(\omega')$.

例 (II): EPR 态

(8.7.10) 式是一个不可分解的双光子态, 其总光子数 $n = 2$

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \sum_{\omega, \omega'} \delta\left[\omega + \omega' - \omega_0\right] \, \hat{a}_1^{\dagger}(\omega) \, \hat{a}_2^{\dagger}(\omega') \, |0\rangle \tag{8.7.10}$$

其中 Ψ_0 是归一化常数, δ 函数和常数 ω_0 一起表明能量守恒的特性. (8.7.10) 式所表示的态中: 一对模式总是同时被激发, 而且这对模式的频率 (能量) 始终是常数, 但是每个模式可以取叠加范围内的任意值. (8.7.10) 式的双光子叠加态有着经典范围内无法理解的某些性质. 比如, 根据光子的概念, 任何一个光子的能量都是不确定的, 然而如果测到其中一个光子的能量为某一确定值, 那么另一个光子的能量也就可以完全确定, 不论两个光子之间的相距有多远. 这类量子态被称为纠缠态, 是薛定谔根据 1935 年爱因斯坦、波多尔斯基和罗森的文章命名的. 后面章节中集中讨论量子纠缠.

例 (III): 粒子数态

(8.7.11) 式给出了另一种总光子数 $n=2$ 的双光子态,

$$|\Psi\rangle=\sum_{\omega} f(\omega)\,[\hat{a}^{\dagger}(\omega)]^2\,|0\rangle \tag{8.7.11}$$

和

$$|\Psi\rangle=\sum_{\omega} f(\omega,\omega)\,\hat{a}_1^{\dagger}(\omega)\,\hat{a}_2^{\dagger}(\omega)\,|0\rangle \tag{8.7.12}$$

很明显 (8.7.12) 式所描述的态和 (8.7.11) 式是不同的. 尽管两个态都是光子数 $n=2$ 的双光子态, (8.7.12) 表示在两个子系统中同时激发两个相同的模式, 每一个模式的占有数 $n_\omega=1$. 在每个子系统中, 激发光子可以在任何一个频率模式 ω, 然而, 如果一个光子处于模式 ω, 那么另外一个光子就一定在同一个模式 ω, 不论它们相距多远. (8.7.11) 式表示的是一个模式的激发, 其占有数 $n_\omega=2$. 另外, 产生 (8.7.12) 式和 (8.7.11) 式的物理机制也大相径庭.

需要强调的是, (8.7.8) 式、(8.7.10) 式和 (8.7.12) 式所表示的都是纯态. 它们和下面相应的混态完全不同:

$$\hat{\rho}=\sum_{\omega,\omega'} P(\omega)\,P'(\omega')\hat{a}^{\dagger}(\omega)\,\hat{a}^{\dagger}(\omega')\,|0\rangle\langle 0|\,\hat{a}(\omega)\,\hat{a}(\omega')$$

$$\hat{\rho}=\sum_{\omega,\omega'} \delta\,[\omega+\omega'-\omega_0]\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)\,\hat{a}^{\dagger}(\omega')\,|0\rangle\langle 0|\,\hat{a}(\omega)\,\hat{a}(\omega')$$

$$\hat{\rho}=\sum_{\omega} P(\omega)\,[\hat{a}^{\dagger}(\omega)]^2\,|0\rangle\langle 0|\,[\hat{a}(\omega)]^2$$

$$\hat{\rho}=\sum_{\omega,\omega'} P(\omega,\omega)\hat{a}_1^{\dagger}(\omega)\,\hat{a}_2^{\dagger}(\omega)\,|0\rangle\langle 0|\,\hat{a}_1(\omega)\,\hat{a}_2(\omega)$$

8.8 非相干和相干辐射源的简单模型

为了简化讨论和数学计算, 我们假设有一个点光源, 它包含了大量原子, 这些原子可以在任意时刻 t 进行两能级原子跃迁. 对于点光源, 每一个原子跃迁都激发出一个子场, 它以对称球面波的形式向整个 4π 方向传播. 假设用一个点探测器进行单光子计数测量, 或者用 N 个独立点探测器进行 N 光子计数测量, 单光子探测器被置于离光源很远处, 比如一光年, 在这样的距离下, 我们可以认为被测量的光场很弱, 处于单光子水平.

尽管自发辐射的可能性很小, 但确实存在一个很小的概率原子从高能级 E_2 ($\Delta E_2\neq 0$) 衰变到基态能级 E_1 并辐射出一个光子. 所以, 我们有

理由用下面的态来近似表示第 j 个原子跃迁所辐射的子场:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= c_0|0\rangle + c_1 \sum_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k},s)\, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}|0\rangle \\ &\simeq |0\rangle + \epsilon \sum_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k},s)\, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}|0\rangle \end{aligned} \tag{8.8.1}$$

其中 $|c_0| \sim 1$ 是场处于未激发时的概率幅, $|c_1| = |\epsilon| \ll 1$ 对应的是激发出一个光子的概率幅. $f(\boldsymbol{k},s) = \langle\, \Psi_{\boldsymbol{k},s}\,|\,\Psi\,\rangle$ 是辐射场处于福克态 $|\,\Psi_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle = |\,1_{\boldsymbol{k},s}\,\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle$ 的概率幅. $|\boldsymbol{k}| = \omega/c = (E_2 - E_1)/\hbar c$

函数 $f_j(\boldsymbol{k},s)$ 主要由第 j 个原子的 E_2 在 δE_2 内的分布决定. $\boldsymbol{k}$ 的积分区间也有由 δE_2 决定, $\delta|\boldsymbol{k}| = \delta E_2/\hbar c$. 那么光源所激发的辐射场的一般形式为,

$$|\,\Psi\rangle = \prod_j \Big\{|0\rangle + \epsilon \sum_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f_j(\boldsymbol{k},s)\, \hat{a}^\dagger_{j\boldsymbol{k},s}|0\rangle\Big\} \tag{8.8.2}$$

为了便于计算, 下面只考虑一维情况, 对于在远场用点探测器进行测量, 这个近似是很合理的. 此时, 点探测器选择一个波矢 $\boldsymbol{k}$, 被测场可以被近似为一个在远场的平面波. 为了进一步简化符号, 我们只考虑一种偏振的情况. 态被简化为

$$\begin{aligned}|\,\Psi\rangle &= \prod_j \Big\{|0\rangle + \epsilon\, c_j \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j}\, \hat{a}^\dagger_j(\omega)\,|0\rangle\Big\} \\ &\simeq |0\rangle + \epsilon\Big[\sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j}\, c_j \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \hat{a}^\dagger_j(\omega)\,|0\rangle\Big] \\ &\quad + \epsilon^2\Big[\sum_{j<k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)}\, c_j c_k \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \hat{a}^\dagger_j(\omega)\,|0\rangle \int \mathrm{d}\omega'\, f_k(\omega')\, \hat{a}^\dagger_k(\omega')\,|0\rangle\Big] \\ &\quad + \cdots \end{aligned} \tag{8.8.3}$$

其中我们定义了一个相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j}$, 它和第 j 个原子跃迁相对应. 原则上, 这个相位因子属于产生算符的每个激发模式的振幅. 这里我们假设每一个波包有一个公共相位. 这个公共相位是由产生过程中的公共的物理参数决定的, 比如第 j 个波包的产生时间. 因为 $|\epsilon| \ll 1$, (8.8.3) 式中我们只列出了关于 ϵ 的一阶和二阶近似. 对于一些特定的测量来说, 只取低阶近似就够了. 下面将给出四种近似, 它们分别对应于不同类型的测量或者光的不同产生机制.

(I) 单光子混态

我们假设辐射源中所有的原子跃迁都是随机的独立的, 即 $j \neq k$ 时, $\varphi_j - \varphi_k =$ 为随机数. 如果点探测器离辐射源很远, 对于这类测量, (8.8.3)

式中关于 ϵ 的一阶展开就很有必要了. 高阶展开也可能对测量有贡献, 但是这些贡献在弱光条件下往往都很小. 当高阶项忽略不计时, 辐射场处于单光子水平, 辐射场就可以用如下的单光子态来描述:

$$|\Psi\rangle \simeq \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j}\, c_j |\Psi_j\rangle, \tag{8.8.4}$$

其中

$$|\Psi_j\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle$$

一阶近似写成了一组态矢或者波包的非相干叠加的形式. 这种非相干叠加态可以看作是 (1) 产生一个光探测事件的光子的态. 湮没掉的光子是以 $|c_j|^2$ 的概率从任意或者所有可能进行随机辐射的独立的原子跃迁产生; (2) 大量被测量的光子的态. 每一个光子从一个随机辐射的原子跃迁产生, 从而构成一个非均匀的系综.

算符 $\hat{A}$ 的期望值计算如下

$$\begin{aligned}
\big\langle\langle \Psi|\hat{A}|\Psi\rangle\big\rangle_{\text{Ensemble}} &= \Big\langle \sum_j c_j^* \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j} \langle \Psi_j|\, \hat{A} \sum_k c_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_k} |\Psi_k\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \Big\langle \sum_{j,k} c_j^* c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_j-\varphi_k)} \langle \Psi_j|\hat{A}|\Psi_k\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \sum_j |c_j|^2 \langle \Psi_j|\hat{A}|\Psi_j\rangle \\
&= \operatorname{tr} \hat{\rho}^{(1)} \hat{A}
\end{aligned} \tag{8.8.5}$$

其中我们定义了一个密度算符来描述一阶近似下的单光子混态,

$$\hat{\rho}^{(1)} \equiv \sum_j |c_j|^2 |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| \tag{8.8.6}$$

(8.8.5) 式中的系综平均要考虑相对相位 $\varphi_j - \varphi_k$ 的所有可能值. (8.8.5) 式中只有对角项对算符的期望值有贡献, 所以通常可以用密度算符 $\hat{\rho}$ 来表示非相干叠加的辐射混态.

根据上面的近似, 我们传统地认为测量的场处于单光子混态:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \sum_j P_j\, |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| \\
&= \sum_j P_j \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, f_j(\omega) f_j^*(\omega')\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle\langle 0|\, \hat{a}_j(\omega')
\end{aligned} \tag{8.8.7}$$

其中 $P_j = |c_j|^2$ 是归一化概率, 满足 $\sum_j P_j = 1$. 进一步假设原子具有相同的模式分布 $f_j(\omega) = f(\omega)$. 并且第 j 个波包的每一个模式都有一个相位

$\varphi_j(\omega)$, 它是由第 j 个原子的跃迁时间 t_{0j} 决定的, $\varphi_j(\omega)=\omega t_{0j}$. 假设 t_{0j} 是随机且连续分布的, 对 j 的求和将化为关于 t_0 的积分:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \int \mathrm{d}t_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega')t_0} \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, f(\omega) f^*(\omega')\, \hat{a}^\dagger(\omega)\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,|\,\hat{a}(\omega') \\ &\cong \int \mathrm{d}\omega\, |f(\omega)|^2\, \hat{a}^\dagger(\omega)\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,|\,\hat{a}(\omega) \end{aligned} \tag{8.8.8}$$

其中当 t_0 的积分限为 ∞ 时, 关于 t_0 的积分近似为 $\delta(\omega-\omega')$. $|f(\omega)|^2$ 是归一化过的.

至此我们得出一个有趣的结论: 尽管我们假设每个原子跃迁都产生了一个单光子水平的相干波包 (一个态矢), 考虑到这些大量波包的随机分布的相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j}$, 那么这些态矢之间的非相干叠加会将辐射场变成一个单光子混态, 整个系统也必须用统计方法来描述. 当然, 只有当原子跃迁完全随机和相互独立, 以上的结论才成立. 历史上, 将这类辐射命名为混沌热光. 热光源是一个典型的例子.

(II) 双光子混态

现在我们考虑两个光探测器的联合探测, 假设它们都是放置在远场的点探测器. 联合探测就是记录两个探测器同时各自输出一个光电子的事件的数目. 对于这类测量, 一阶近似下的单光子态是没有贡献的, 需要考虑二阶近似. 三阶和高阶近似也许对测量也有贡献, 但是在弱光条件下, 这些贡献一般忽略不计. 根据上面简单的模型, 二阶近似或者双光子态近似为:

$$|\,\Psi\,\rangle \simeq \sum_{j<k} c_j c_k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)} |\,\Psi_j\,\rangle |\,\Psi_k\,\rangle \tag{8.8.9}$$

其中仍然有

$$|\,\Psi_j\,\rangle = \int \mathrm{d}\omega f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\,|0\rangle$$

除了 $\varphi_j+\varphi_k$ 是常数 (对于所有的 j 和 k) 的情形, 一般来说这个态是混态. 当 $\varphi_j+\varphi_k$ 对所有 j 和 k 都是随机数以及 $\varphi_j-\varphi_k$ 对所有 $j\neq k$ 都是随机数时, 非相干的叠加使得一阶近似下的态和二阶近似下的态都变为混态. 混沌热辐射就是一个典型的例子. (8.8.9) 式表示一个双光子的混态. 非相干叠加的双光子态可以看作是: (1) 联合探测产生一个联合光探测事件的光子对的状态. 湮没的光子对以 $P_{jk}=|c_j|^2|c_k|^2$ 的概率从任意两个或所有可能的随机成对的独立原子跃迁产生; (2) 大量的联合探测到的光子对的状态. 每一对都是从随机成对的原子跃迁中产生, 构成一个非均匀的系综.

值得强调的是: 二阶近似或者称为非相干叠加的双光子态不能写成两个一阶近似的乘积. 例如, 当光源中有三个独立的进行随机辐射的原子跃迁时, 这时辐射场的态可以近似为:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &\simeq \left[|0\rangle+\epsilon c_a|\Psi_a\rangle\right]\left[|0\rangle+\epsilon c_b|\Psi_b\rangle\right]\left[|0\rangle+\epsilon c_c|\Psi_c\rangle\right]\\ &=|0\rangle+\epsilon\left[c_a|\Psi_a\rangle+c_b|\Psi_b\rangle+c_c|\Psi_c\rangle\right]\\ &\quad+\epsilon^2\left[c_ac_b|\Psi_a\rangle|\Psi_b\rangle+c_ac_c|\Psi_a\rangle|\Psi_c\rangle+c_bc_c|\Psi_b\rangle|\Psi_c\rangle\right]\\ &\quad+\epsilon^3\left[c_ac_bc_c|\Psi_a\rangle|\Psi_b\rangle|\Psi_c\rangle\right]\end{aligned}\tag{8.8.10}$$

ϵ 的二阶展开项为

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= c_ac_b|\Psi_a\rangle|\Psi_b\rangle+c_ac_c|\Psi_a\rangle|\Psi_c\rangle+c_bc_c|\Psi_b\rangle|\Psi_c\rangle\\ &\neq\left[c_a|\Psi_a\rangle+c_b|\Psi_b\rangle+c_c|\Psi_c\rangle\right]^2\end{aligned}\tag{8.8.11}$$

其中一阶近似应该是三个波包的相干叠加

$$|\Psi\rangle=c_a|\Psi_a\rangle+c_b|\Psi_b\rangle+c_c|\Psi_c\rangle$$

回到混态双光子的近似, 算符的期望值计算如下:

$$\begin{aligned}&\left\langle\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle\right\rangle_{\text{Ensemble}}\\ &=\Big\langle\sum_{j<k}c_j^*c_k^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)}\langle\Psi_j|\langle\Psi_k|\,\hat{A}\sum_{n<m}c_mc_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_m+\varphi_n)}|\Psi_m\rangle|\Psi_n\rangle\Big\rangle_{\text{Ensemble}}\\ &=\Big\langle\sum_{j<k,n<m}c_j^*c_k^*c_mc_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\varphi_j+\varphi_k)-(\varphi_m+\varphi_n)]}\langle\Psi_j|\langle\Psi_k|\hat{A}|\Psi_m\rangle|\Psi_n\rangle\Big\rangle_{\text{Ensemble}}\\ &\simeq\sum_{j<k}|c_j|^2|c_k|^2\langle\Psi_j|\langle\Psi_k|\hat{A}|\Psi_k\rangle|\Psi_j\rangle\\ &=\operatorname{tr}\hat{\rho}^{(2)}\hat{A}\end{aligned}\tag{8.8.12}$$

其中我们定义了一个密度算符来表征二阶近似下的双光子混态:

$$\hat{\rho}^{(2)}\equiv\sum_{j<k}|c_j|^2|c_k|^2|\Psi_k\rangle|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|\langle\Psi_k|\tag{8.8.13}$$

(8.8.12) 式的系综平均已经考虑了相对相位 $(\varphi_j+\varphi_k)-(\varphi_m+\varphi_n)$ 的所有可能取值. (8.8.12) 式中只有对角项对算符的期望值有贡献, 所以常用密度算符 $\hat{\rho}^{(2)}$ 来表示非相干叠加的双光子态. 进一步假设原子具有相同的模式分布 $f(\omega)$ 并且第 j 个波包的每一个模式都含有相位 $\varphi_j(\omega)$, $\varphi_j(\omega)$ 由第 j 个原子跃迁的跃迁时间 t_{0j} 决定, $\varphi_j(\omega)=\omega t_{0j}$. 如果 t_{0j} 和 t_{0k} 是随机

且连续分布的, 和单光子态类似, 对 t_{0j} 和 t_{0k} 的积分将把密度算符变为如下形式:

$$\hat{\rho}^{(2)} \cong \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega' \, |f(\omega)|^4 \, \hat{a}^\dagger(\omega)\, \hat{a}^\dagger(\omega')\, |0\rangle\langle 0|\, \hat{a}(\omega')\hat{a}(\omega), \tag{8.8.14}$$

其中 $|f(\omega)|^4$ 是归一化的.

在第 9 章中我们将利用 (8.8.9) 式和 (8.8.13) 式对热光的二阶相干性作详细讨论.

(III) 双光子纠缠态

在二阶近似下, 如果存在一个奇特的光子产生机制, 使得对所有的 j 和 k, $\varphi_j + \varphi_k =$ 常数, 但是对所有 $j \neq k$, $\varphi_j - \varphi_k =$ 随机数, 这时双光子态变成一个相干叠加的纯态, 而一阶近似仍然保持着非相干叠加的特性, 呈单光子混态. 在这种情形下, 二阶近似写成:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\simeq \sum_{j<k} c_j c_k \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)} |\Psi_j\rangle |\Psi_k\rangle_{\varphi_j+\varphi_k=\varphi_0} \\ &= \sum_{j<k} c_j c_k \, \delta(\varphi_j + \varphi_k - \varphi_0) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)} |\Psi_j\rangle |\Psi_k\rangle \end{aligned} \tag{8.8.15}$$

其中仍然有:

$$|\Psi_j\rangle = \int \mathrm{d}\omega f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle$$

(8.8.15) 式定义了一个不能分解成两个单光子态直积的双光子态. 我们将这类态定义为双光子纠缠态. (8.8.15) 式中相干叠加的双光子态是一个纯态, 它可以用来表征: (1) 一对纠缠光子的状态. 它们从所有可能的满足 $\varphi_j + \varphi_k =$ 常数的一对原子跃迁中产生; (2) 大量纠缠光子对的状态. 所有的光子对都处于同一个双光子态, 是一个均匀系综.

使得 $\varphi_j + \varphi_k$ 对所有 j 和 k 都是常数, 而保持对所有 $j \neq k$, $\varphi_j - \varphi_k$ 为随机数, 满足这一条件具有一定难度, 但是还是可能的. 实验上, 有一种纠缠双光子具有类似但稍有不同的态:

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \int \mathrm{d}\omega_s \, \mathrm{d}\omega_i \, \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p)\, \hat{a}^\dagger(\omega_s)\hat{a}^\dagger(\omega_i)\, |0\rangle \tag{8.8.16}$$

其中 Ψ_0 是归一化系数. ω_p 是泵浦光的频率, 近似为常数. 这种态可以从非线性光学过程产生, 这一过程称为自发参量下转换 (Spontaneous Parametric Down-Conversion: SPDC). 由于历史的原因, 组成纠缠光子对的两个光子分别称作信号光子和闲置光子. 信号光子和闲置光子分别用频率 ω_s 和 ω_i 标记. 由信号–闲置光子对构成的纠缠双光子态是一个纯态, 但是, 信号光子和闲置光子本身的确处在单光子混态.

(IV) 相干辐射

我们假设某种特定的光子产生机制下, 所有原子的跃迁都同相. 这时, 从这些原子跃迁产生的辐射是不可区分的. (8.8.3) 式中的态可以写成如下形式:

$$|\Psi\rangle = \left\{|0\rangle + \epsilon \int \mathrm{d}\omega\, f(\omega)\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)\,|0\rangle\right\}^{n} \tag{8.8.17}$$

其中 n 是参与辐射场相干激发的所有的原子跃迁的数目. 将 (8.8.17) 式展开得到:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle \simeq |0\rangle &+ \epsilon\,\frac{n}{1!}|\Psi\rangle + \epsilon^{2}\,\frac{n(n-1)}{2!}\big(|\Psi\rangle\big)^{2} + \epsilon^{3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\big(|\Psi\rangle\big)^{3} + \cdots \\ &+\epsilon^{m}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\big(|\Psi\rangle\big)^{m} + \cdots\end{aligned} \tag{8.8.18}$$

其中

$$|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}\omega f(\omega)\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)\,|0\rangle$$

在单模近似下, $|\Psi\rangle$ 变成:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle \simeq |0\rangle &+ \epsilon\,\frac{n}{1!}\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)|0\rangle \\ &+\epsilon^{2}\,\frac{n(n-1)}{2!}\,[\hat{a}^{\dagger}(\omega)]^{2}|0\rangle + \epsilon^{3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,[\hat{a}^{\dagger}(\omega)]^{3}|0\rangle \\ &+\epsilon^{m}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\,[\hat{a}^{\dagger}(\omega)]^{m}|0\rangle + \cdots\end{aligned} \tag{8.8.19}$$

上面结果不难推广到三维情形. 对于三维情形, 因为系综平均中涉及第 j 个原子跃迁的空间坐标, 求和或者积分会变得更加复杂. 我们后面将对空间相干性作一些讨论.

8.9 纯态和混态

纯态和混态的概念在物理上包括两个重要的方面: 单个量子的态和测量系综的态.

(1) 从单个量子系统角度来说: 纯态代表了希尔伯特空间的一个矢量. 如果一个量子态可以用一个矢量描述, 该量子态就是纯态. 反之, 如果一个量子态不能用一个矢量描述, 而只能用矢量的混合来描述, 该量子态则为混态.

(2) 从测量系综角度来说: 如果系综所有测量量子的态可以用同一个矢量来描述, 那么测量系综是均匀的, 或者说测量的量子系统处于统计意义上的纯态. 如果测量系综不能用同一矢量描述, 即测量的系综必

须用几个或者多个不同的矢量描述, 那么系综就被认为是一种非均匀的混合.

为了探究上述概念中蕴含的物理, 我们用两个例子作说明: (I) 单光子态的偏振测量; (II) 薛定谔猫.

例 (I): 单光子态的偏振测量

考虑如图 8.9.1 所示的偏振测量的实验装置图, 它包括远场频率为 ω 的单光子辐射源, 单轴晶体, 两个光探测器. 点探测器 D_1 和 D_2 分别用来测量单轴晶体的寻常 (o) 光和非寻常 (e) 光.

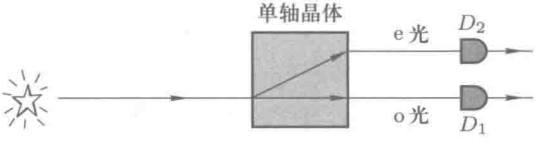


图 8.9.1 单光子的偏振测量.

经过大量测量后发现: (1) 探测不到符合计数, 即 D_1 和 D_2 不会被同时触发. (2) D_1 和 D_2 的单光子计数率比值为 1, 即 50% 的光探测事件由 D_1 记录, 另 50% 的光探测事件由 D_2 记录. 那么辐射场的状态究竟如何描述呢? 依据观察结果, (1) 我们可以认为辐射场处于单光子态. 观察结果 (2) 指出至少有三种可能的态.

第一种可能: 偏振方向与 o 光偏振成 45° 或者 −45° 的线偏振单光子态,

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{45^\circ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{o})|0\rangle + \hat{a}^\dagger(\omega,\hat{e})\,|0\rangle\right] \\
|\Psi_{-45^\circ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{o})|0\rangle - \hat{a}^\dagger(\omega,\hat{e})\,|0\rangle\right]
\end{aligned}
\tag{8.9.1}
$$

其中单位矢量 $\hat{o}$ 和 $\hat{e}$ 分别表示 o 光和 e 光偏振. ± 号表示场的极化方向相对于单位矢量 $\hat{o}$ 成 45° 或者 −45°.

如果测量只关心偏振, 我们可以将 (8.9.1) 式改写成如下简单的形式

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{45^\circ}\rangle &= |\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|\Psi_{45^\circ}\rangle + |\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|\Psi_{45^\circ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\,\hat{o}\rangle + |\hat{e}\rangle\,\right] \\
|\Psi_{-45^\circ}\rangle &= |\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|\Psi_{-45^\circ}\rangle + |\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|\Psi_{-45^\circ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\,\hat{o}\rangle - |\hat{e}\rangle\,\right]
\end{aligned}
\tag{8.9.2}
$$

其中 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 构成正交完备基. 我们认为 $|\Psi_{45^\circ}\rangle$ 和 $|\Psi_{-45^\circ}\rangle$ 的线偏振态是 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 的相干叠加, 是纯态. 在选定的二维矢量空间里, 密度算符

$\hat{\rho}=|\Psi\rangle\langle\Psi|$ 的矩阵形式可以写成

$$\hat{\rho}_{45^\circ}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix},\quad \hat{\rho}_{-45^\circ}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix} \tag{8.9.3}$$

第二种可能: 该态可以是右旋或左旋的圆偏振单光子态:

$$\begin{aligned}|\Psi_R\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{o})|0\rangle+\mathrm{i}\,\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{e})\,|0\rangle\right]\\ |\Psi_L\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{o})|0\rangle+\mathrm{i}\,\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{e})\,|0\rangle\right]\end{aligned} \tag{8.9.4}$$

其中 $\hat{o}$ 和 $\hat{e}$ 仍然分别是 o 光和 e 光偏振的单位矢量, 如果只测量偏振, 可以将 (8.9.4) 式改写成如下简单的形式

$$\begin{aligned}|\Psi_R\rangle&=|\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|\Psi_R\rangle+|\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|\Psi_R\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\hat{o}\rangle+\mathrm{i}\,|\hat{e}\rangle\,\right]\\ |\Psi_L\rangle&=|\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|\Psi_L\rangle+|\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|\Psi_L\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-|\hat{o}\rangle+\mathrm{i}\,|\hat{e}\rangle\,\right]\end{aligned} \tag{8.9.5}$$

我们认为圆偏振态 $|\Psi_R\rangle$ 和 $|\Psi_L\rangle$ 是 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 的相干叠加, 是纯态. 在 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{o}\rangle$ 组成的两维矢量空间中, 密度算符的矩阵形式写为:

$$\hat{\rho}_R=\begin{pmatrix}1/2 & -\mathrm{i}/2\\ \mathrm{i}/2 & 1/2\end{pmatrix},\quad \hat{\rho}_L=\begin{pmatrix}1/2 & \mathrm{i}/2\\ -\mathrm{i}/2 & 1/2\end{pmatrix} \tag{8.9.6}$$

第三种可能: 辐射场是非偏振的. 我们将它看作单轴晶体中 o 光 e 光的混合偏振态

$$\hat{\rho}=\frac{1}{2}\left[\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{o})\,|\,0\rangle\langle\,0\,|\,\hat{a}(\omega,\hat{o})+\hat{a}^\dagger(\omega,\hat{e})\,|\,0\,\rangle\,\langle\,0\,|\,\hat{a}(\omega,\hat{e})\,\right] \tag{8.9.7}$$

或者简化的形式

$$\hat{\rho}=P_o\,|\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|+P_e\,|\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|=\frac{1}{2}\left[\,|\hat{o}\rangle\langle\hat{o}|\,+\,|\hat{e}\rangle\langle\hat{e}|\,\right] \tag{8.9.8}$$

其中 P_o 和 P_e 分别为系统处在偏振态 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 的概率. 在既定的以 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 为完备正交基矢的矢量空间里, 密度算符的矩阵形式写为:

$$\hat{\rho}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix} \tag{8.9.9}$$

不难看出: 以上三种态 (概率) 经过图 8.9.1 的实验装置后得到的结果是一样的, 即记录到 o 光和 e 光的概率各 50%.

为了对这类测量进行更一般的计算, 我们引入投影算符 $\hat{\theta}=|\hat{\theta}\rangle\langle\hat{\theta}|$ 和 $\hat{\theta}_\perp=|\hat{\theta}_\perp\rangle\langle\hat{\theta}_\perp|$, 对应检偏器角度为 θ (右手坐标系), 如图 8.9.2 所示. 在既定的 $|\hat{o}\rangle$ 和 $|\hat{e}\rangle$ 矢量空间, 投影算符 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}_\perp$ 的矩阵形式分别为:

$$\hat{\theta}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix} \tag{8.9.10}$$

和

$$\hat{\theta}_\perp=\begin{pmatrix}\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta\end{pmatrix} \tag{8.9.11}$$

其中矩阵元 $\langle\hat{i}|\hat{\theta}\rangle\langle\hat{\theta}|\hat{j}\rangle=\cos(\hat{i},\hat{\theta})\cos(\hat{\theta},\hat{j})$, $\langle\hat{i}|\hat{\theta}_\perp\rangle\langle\hat{\theta}_\perp|\hat{j}\rangle=\cos(\hat{i},\hat{\theta}_\perp)\cos(\hat{\theta}_\perp,\hat{j})$, $\hat{i},\hat{j}=\hat{o},\hat{e}$, θ 为单位矢量 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{o}$ 的夹角.

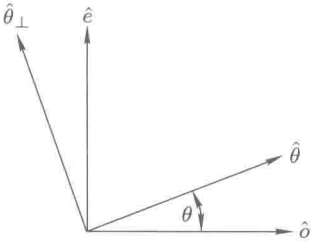


图 8.9.2 偏振投影算符 $\hat{\theta}=|\hat{\theta}\rangle\langle\hat{\theta}|$, 对应检偏器与 $\hat{o}$ 成 θ 角度.

一般来说, 偏振测量的期望值可以通过求矩阵 $\hat{\rho}\hat{\theta}$ 和 $\hat{\rho}\hat{\theta}_\perp$ 的迹来得到

$$\langle\hat{\theta}\rangle=\operatorname{tr}\hat{\rho}\hat{\theta},\quad\langle\hat{\theta}_\perp\rangle=\operatorname{tr}\hat{\rho}\hat{\theta}_\perp \tag{8.9.12}$$

对于纯态, 有

$$\begin{aligned}\langle\hat{\theta}\rangle&=\langle\Psi|\hat{\theta}\rangle\langle\hat{\theta}|\Psi\rangle=|\langle\hat{\theta}|\Psi\rangle|^2\\ \langle\hat{\theta}_\perp\rangle&=\langle\Psi|\hat{\theta}_\perp\rangle\langle\hat{\theta}_\perp|\Psi\rangle=|\langle\hat{\theta}_\perp|\Psi\rangle|^2\end{aligned} \tag{8.9.13}$$

对于混态, 有

$$\begin{aligned}\langle\hat{\theta}\rangle&=\sum_j P_j\langle\Psi_j|\hat{\theta}\rangle\langle\hat{\theta}|\Psi_j\rangle=\sum_j P_j|\langle\hat{\theta}|\Psi_j\rangle|^2\\ \langle\hat{\theta}_\perp\rangle&=\sum_j P_j\langle\Psi_j|\hat{\theta}_\perp\rangle\langle\hat{\theta}_\perp|\Psi_j\rangle=\sum_j P_j|\langle\hat{\theta}_\perp|\Psi_j\rangle|^2\end{aligned} \tag{8.9.14}$$

在图 8.9.1 的测量中, 检偏器 (单轴晶体) 的投影角 θ 可以为 $\theta=0$ (o 光) ($\theta_\perp=90°$) 或者 $\theta=90°$ (e 光) ($\theta_\perp=180°$). 毫无疑问的是, 这些测量并不能区分以上三种态.

人们可能会问这样的问题: 从原理和实验上来说, 我们究竟能否将纯态 (8.9.1) 式和 (8.9.4) 式与混态 (8.9.7) 式区分开来呢? 对于这类简单的偏振测量, 答案是肯定的. 可以考虑将晶体探测系统转到 $|45°\rangle$ ($|-45°\rangle$) 方向, 或者偏振空间中的 $|R\rangle$ ($|L\rangle$) 方向. 对于混态 (8.9.7) 式, 在 $|45°\rangle$ 和 ($|-45°\rangle$) 或者 $|R\rangle$ 和 ($|L\rangle$) 上测量的话, 光子计数没有任何不同. 实际上, 对于任何选定的偏振基矢, 光子探测器的计数率都是常数. 但是, 纯态则给出不同的测量结果. 如果 D_1 (D_2) 在 45° 有最大 (最小) 计数率, 在 −45° 有最小 (最大) 计数率, 那么光场的偏振是沿着 45°. 如果 $D_1(D_2)$ 在 45° 有最小 (最大) 计数率, 在 −45° 最大 (最小) 计数率, 光场的偏振沿着 −45°. 即, 光场或者光子的偏振既不是 o 光也不是 e 光, 它的偏振是在 45° 方向 ("+" 号)

$$|\Psi\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\omega, 45°)\,|0\rangle$$

或 −45° ("−" 号)

$$|\Psi_{\perp}\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\omega, -45°)\,|0\rangle$$

一般地说, 态

$$|\Psi\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\omega, \theta)\,|0\rangle$$

和

$$|\Psi_{\perp}\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\omega, \theta_{\perp})\,|0\rangle$$

能够形成完备基矢来描述任意偏振态, 其中 θ 和 $\theta_{\perp}$ 表示两个正交的偏振方向. 比如, o 光和 e 光的态也可以写成 45° 和 −45° 的叠加

$$|\Psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^{\dagger}(\omega, 45°)\,|0\rangle + \hat{a}^{\dagger}(\omega, -45°)\,|0\rangle\right] \tag{8.9.15}$$

$$|\Psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{a}^{\dagger}(\omega, 45°)\,|0\rangle - \hat{a}^{\dagger}(\omega, -45°)\,|0\rangle\right]$$

当然, θ 和 $\theta_{\perp}$ 也可以用来描述偏振混态:

$$\hat{\rho} = P(\theta)|\theta\rangle\langle\theta| + P(\theta_{\perp})|\theta_{\perp}\rangle\langle\theta_{\perp}| \tag{8.9.16}$$

类似的, 当 D_1 (D_2) 在 $|R\rangle$ 有最大 (最小) 计数率, 在 $|L\rangle$ 有最小 (最大) 计数率, 则光场是右旋偏振的, 即光场或者光子的偏振既不是 o 光也不是 e 光, 而是右旋偏振

$$|\Psi\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\omega, +1)\,|0\rangle$$

其中 +1(自旋 +1) 和 −1 (自旋 −1) 表示右旋和左旋偏振. 另外, 如果 D_1 (D_2) 在 $|L\rangle$ 有最大 (最小) 计数率, 在 $|R\rangle$ 有最小 (最大) 计数率, 则光场是左旋偏振的

$$|\,\Psi_\perp\,\rangle = \hat{a}^\dagger(\omega,-1)\,|\,0\,\rangle$$

更一般地说, 态

$$|\,\Psi\,\rangle = \hat{a}^\dagger(\omega,+1)\,|\,0\,\rangle$$

和

$$|\,\Psi_\perp\,\rangle = \hat{a}^\dagger(\omega,-1)\,|\,0\,\rangle$$

形成一组正交完备基矢, 可以用来描述任意偏振态. 比如, o 光和 e 光可以写成 $|R\rangle$ 和 $|L\rangle$ 的叠加

$$|\,\Psi_o\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,\hat{a}^\dagger(\omega,+1)\,|\,0\,\rangle - \hat{a}^\dagger(\omega,-1)\,|\,0\,\rangle \tag{8.9.17}$$

$$|\,\Psi_e\,\rangle = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,[\,\hat{a}^\dagger(\omega,+1)\,|\,0\,\rangle + \hat{a}^\dagger(\omega,-1)\,|\,0\,\rangle$$

当然, 右旋和左旋偏振态也可以用来描述偏振混态:

$$\hat{\rho} = P(+1)|R\rangle\langle R| + P(-1)|L\rangle\langle L| \tag{8.9.18}$$

纯态在希尔伯特空间里用一个态矢表示. 如果我们能 "旋转" 测量设备, 以识别这个矢量和它的正交共轭量, 那么在所选定的希尔伯特空间中, 在不同 "方向" 上找到最大和最小计数率并不是令人惊讶的事. 所以, 原则上讲, 通过一个简单的旋转, 将纯态和混态区分开来, 或将某态矢与它的正交态区分开来, 是可能的. 比如通过简单的旋转, 就可以辨别 (8.9.1) 式中的 "+" 态和 "−" 态. 如果用投影测量来区分纯态和混态以及它的正交态的话, 我们可以将纯态投影到自身, 或者投影到它的正交态上. 数学上, 可以定义投影算符 $\hat{P} = |\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,|$ 将这些投影写成如下形式. 其实 $\hat{P}$ 只是一个密度算符

$$\hat{P}\,|\,\Psi\,\rangle = |\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,|\,\Psi\,\rangle = |\,\Psi\,\rangle \tag{8.9.19}$$

$$\hat{P}\,|\,\Psi_\perp\,\rangle = |\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,|\,\Psi_\perp\,\rangle = 0$$

(8.9.19) 式可以用密度矩阵写成更一般的形式

$$\hat{\rho}^2 = |\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,|\,\Psi\,\rangle\langle\,\Psi\,| = \hat{\rho} \tag{8.9.20}$$

其中态 $|\,\Psi\,\rangle$ (和态 $|\,\Psi\,\rangle_\perp$) 和 (8.9.1) 式一样, 是归一化的. 任何纯态都满足 (8.9.20) 式.

容易发现, 态 $|45°\rangle$ 和态 $|-45°\rangle$ 以及态 $|R\rangle$ 和态 $|L\rangle$) 形成正交完备基矢, 它们满足完备关系

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|+|\Psi_\perp\rangle\langle\Psi_\perp|=1 \tag{8.9.21}$$

然而, 其它的测量并不像测偏振那么简单. 很多情况下, 我们不能在选定的矢量空间旋转我们的投影测量设备, 比如在哈密顿量的本征函数定义的矢量空间. 这时, 我们必须把态矢看作一系列特定算符如哈密顿量的本征矢的叠加. 而且测量只能把态投影到算符的某个本征矢量上. 在这种情况下, 我们又将面对理解量子叠加现象的困难. 比如, 如果坚持说光子在单轴晶体中传播时只能是 o 光或者 e 光, 那么很自然就要问: 45° 或者 −45° 偏振的光子怎么可能同时即是 o 光又是 e 光呢? 因为我们知道一个能量 "包裹" $\hbar\omega$ 或者一个光子是不能拆分的. 还有类似的问题如: 光子究竟是选择了某条路径还是同时走两条路? 这相当于在单光子双缝实验中的问题: 光子是通过某条缝还是同时通过两条缝? 在历史上类似这种长期困惑大家的问题中, 薛定谔猫是一个最生动的卡通的例子.

在讨论薛定谔猫态之前, 我们先讨论一下单光子的测量问题. 所谓单光子测量, 并不是说我们只处理一个光子. 实际上, 对于一个光子的一次测量不能提供任何有用的信息. 在量子理论中, 只有经过大量测量或系综测量才能给出有用的物理信息. 量子理论中有两类系综. 第一类是均匀的或者说是统计意义上的纯态. 这种情况下, 系综中每一个 N 系统都是处于同一个纯态, 这样系综本身也是一个纯态. 第二类称为混态. 在这种情况下, 测量的 N 系统的系综不一定处于同一个纯态. 测量的 N 系统可以以某种概率处于几个或多个不同的态, 所以系综本身就是混态了.

纯态有两种图像, 它可以表示 (1) 单个光子, (2) 由大量光子组成的统计系综. 例如, 在偏振测量实验中, (8.9.1) 式的纯态表示 (1) 每一个测量光子 (单个) 的偏振在 45° ("+" 号) 或者 −45° ("−" 号), (2) 所有测量光子 (系综) 的偏振在 45° 或者 −45°, 也可以简单地说辐射场的偏振为 45° 或 −45°. (8.9.2) 式的混态有如下含义: (1) 每个被测光子的偏振既不是在 45° 也不是在 −45°, 或者 (2) 系综中的一半被测光子偏振沿着 45°, 另一半沿着 −45°, 或者说辐射场是非偏振的.

例 (II): 薛定谔猫

物理史上有只有名的猫, 即薛定谔猫. 薛定谔猫是 |活猫⟩ 和 |死猫⟩ 的叠加态:

$$|+猫\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|活猫\rangle+|死猫\rangle] \tag{8.9.22}$$

其中 |活猫⟩ 和 |死猫⟩ 是猫的 "生命状态" 算符的本征矢. 类似于辐射场的线偏振, 由 "生命状态" 算符定义的矢量空间也是两维的. 本征矢 |活猫⟩ 和 |死猫⟩ 形成一组完备正交基. 薛定谔猫态不处于任何一个本征态, 而是本征态的叠加. 当然, 日常生活中没有这样的猫. 而在量子世界里, 薛定谔猫可以同时既是死的又是活的. 除了 (8.9.22) 式的纯态, 根据量子理论还有另一种纯态, 它是 (8.9.22) 式的正交态

$$|-\text{猫}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{活猫}\rangle - |\text{死猫}\rangle] \tag{8.9.23}$$

首先, (8.9.22) 式和 (8.9.23) 式中的 $|+\text{猫}\rangle$ 和 $|-\text{猫}\rangle$ 都是纯态, 很容易计算

$$\hat{\rho}^2_{+\text{猫}} = \hat{\rho}_{+\text{猫}}, \quad \hat{\rho}^2_{-\text{猫}} = \hat{\rho}_{-\text{猫}}$$

其次, |猫⟩ 和 $|-\text{猫}\rangle$ 态形成正交完备集,

$$|+\text{猫}\rangle\langle+\text{猫}| + |-\text{猫}\rangle\langle-\text{猫}| = 1 \tag{8.9.24}$$

因此, 任何猫态都可以写成 $|+\text{猫}\rangle$ 和 $|-\text{猫}\rangle$ 的叠加, 比如

$$|\text{活猫}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\text{猫}\rangle + |-\text{猫}\rangle \tag{8.9.25}$$

$$|\text{死猫}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\text{猫}\rangle - |-\text{猫}\rangle$$

如果有投影测量设备能识别 $|+\text{猫}\rangle$ 和 $|-\text{猫}\rangle$, 那么可以发现活猫 (死猫亦然) 可以同时既是 $|+\text{猫}\rangle$ (薛定谔猫态) 又是 $|-\text{猫}\rangle$ (薛定谔猫态的共轭). 那么自然要问: 一只活猫怎么会同时即是薛定谔猫又是它的共轭?

第三, (8.9.22) 式和 (8.9.23) 式的纯态与下面混态有很大不同

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[|\text{活猫}\rangle\langle\text{活猫}| + |\text{死猫}\rangle\langle\text{死猫}|] \tag{8.9.26}$$

和例 (I) 中的线偏振的测量相比, (8.9.22) 式和 (8.9.23) 式的态相当于 45° 和 −45° 的线偏振态. 我们做了一个类似的旋转得到了 (8.9.22) 式和 (8.9.23) 式. 理论上来讲, 这是在二维 "猫空间" 的简单旋转. 但是实际操作上没人知道如何去旋转. 我们能做的只是识别 (测量) 是死猫还是活猫. 如果我们的投影测量设备只能把猫态投影到本征态 |活猫⟩ 或者 |死猫⟩, 我们就无法将 (8.9.22) 式和 (8.9.23) 式的纯态和 (8.9.26) 式的混态区分开来. 尽管我们不知道如何在猫空间将 |活猫⟩ 或者 |死猫⟩ 旋转到 $|\text{活猫}\rangle \pm |\text{死猫}\rangle$, 这并不意味着这种叠加态是不存在的, 尤其是我们已经知道如何产生这种态.

和单光子的偏振测量类似, 对一只薛定谔猫的一次测量不能得到任何有用的信息. 由猫态理论, 任何有意义的物理信息都必须对猫态系综测量获得. 如果所有被测猫都处于同一个态, 如 (8.9.22) 式或 (8.9.23) 式, 我们说每个测量的猫态都处于纯态, 测量的猫系统也处于纯态. 如果测量发现一些猫处于 (8.9.22) 式而另一些猫态处于 (8.9.23) 式, 那么这个猫系统称为混态.

下面讨论辐射场的态. 所考虑的问题如下: (1) (8.4.12) 式的纯态和 (8.6.7) 式的混态所蕴含的物理究竟有何不同? (2) 基于 8.8 节中简单的辐射源模型, 是否可以激发一个二级近似下的纯态而一阶近似是混态? 或者相反的情形. 如果能, 应该满足什么条件?

(1) 纯态和混态背后的物理含义究竟有何不同? 我们将纯态 (8.4.12) 式

$$|\,\Psi\,\rangle = \sum_{\boldsymbol{k},s} f(\boldsymbol{k},s)\,\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle$$

和混态 (8.6.7) 式

$$\hat{\rho} = \sum_{\boldsymbol{k},s} |f(\boldsymbol{k},s)|^2\;\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k},s}\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,|\,\hat{a}_{\boldsymbol{k},s}$$

作一个简单对比.

从光子状态角度来说, (8.4.12) 式表示希尔伯特空间的一个矢量. 如果一个光子的态可以用 (8.4.12) 式描述, 原则上, 应该能够用 "旋转" 操作把态投影到本身或它的正交 "方向". 在这两个方向上, 光子探测器接收到光子的概率为 100% 对 0% . 相反的, (8.6.7) 式表示一个基于密度矩阵的矢量混合, 光子是在混态. 对于 (8.6.7) 式的混态我们无法找到类似的 "旋转" 操作. 所以 (8.6.7) 式的混态只能在统计意义上描述单光子的状态.

从系综角度来说, 和猫态系统的物理意义类似, 纯态要求系综所有光子处在相同状态, 如 (8.4.12) 式. 混态指系综中的光子不在相同状态, 而是在不同状态. 因此, 计算一个观测量的期望值时, 必须进行系综平均.

(2) 基于 8.8 节中简单的辐射源模型, 是否可以激发一个二阶近似的纯态而一阶近似的混态呢? 或者相反的情形. 如果能, 应该满足什么条件?

实际上, 问题的第一部分已经在 8.8 节中解决了, 我们已经推出在二阶近似下得到纠缠双光子的条件是: $\varphi_j + \varphi_k$ 是常数

$$|\,\Psi\rangle = \sum_{j,k} c_j c_k\,\delta(\varphi_j + \varphi_k - \varphi_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)}|\,\Psi_j\rangle|\,\Psi_k\rangle \tag{8.9.27}$$

同时一阶近似下的混态为:

$$\hat{\rho}^{(1)} \equiv \sum_j P_j |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| \tag{8.9.28}$$

条件是 $j \neq k$ 时 $\varphi_j - \varphi_k$ 为随机数. 在上面两个态中,

$$|\Psi_j\rangle = \int \mathrm{d}\omega f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle$$

现在这个问题的第二部分: 是否可能在一阶近似下得到一个纯态同时保持在二阶近似下的混态呢? 下面我们考察一下一阶和二阶近似:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \prod_j \left\{ |0\rangle + \epsilon\, c_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j} \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle \right\} \\ &\simeq |0\rangle + \epsilon \Big[\sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_j} c_j \int \mathrm{d}\omega\, f_j(\omega)\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, |0\rangle \Big] \\ &\quad + \epsilon^2 \Big[\sum_{j,k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_j+\varphi_k)} c_j c_k \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, f_j(\omega)\, f_k(\omega')\, \hat{a}_j^\dagger(\omega)\, \hat{a}_k^\dagger(\omega')\, |0\rangle \Big] \end{aligned} \tag{8.9.29}$$

和 8.8 节中讨论类似, 我们找到的条件是: 一阶近似为纯态要求对所有 $j \neq k$, $\varphi_j - \varphi_k$ 是常数, 而二阶近似为混态要求对所有的 j 和 k, $\varphi_j + \varphi_k$ 都是随机数.

8.10 光子对的直积态、纠缠态和混态

光子直积态和纠缠态的概念涉及多光子系统. 在本节中, 仅讨论双光子态. 在引入多模纠缠双光子态之前先进行两个简单的讨论: (I) 薛定谔猫的直积态、纠缠态和混态; (II) 双光子系统的偏振直积态、纠缠态和混态.

例 (I): 薛定谔猫的直积态、纠缠态和混态

1. 两只薛定谔猫的直积态

假设从猫群中挑出两个独立的薛定谔猫, 标号分别为 1 和 2. 1 号猫和 2 号猫分别被制备成 $|+猫\rangle$ 态和 $|-猫\rangle$ 态. 由于是独立挑选的, 两个猫之间没有相互作用, 两只薛定谔猫可以写成具有直积态形式的一组猫

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |+猫_1\rangle \times |-猫_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\big[|活猫_1\rangle|活猫_2\rangle + |死猫_1\rangle|死猫_2\rangle \\ &\quad - |活猫_1\rangle|死猫_2\rangle - |死猫_1\rangle|活猫_2\rangle \big] \end{aligned} \tag{8.10.1}$$

进一步假设两个猫在相反方向上自由行走, 没有相互作用. 如果这种行走, 或者时间演化, 只是简单给整体增加了一个相位, 而使叠加中的四项之间的相对相位保持不变, 那么这两只薛定谔猫态会和公式 (8.10.1) 保持一样, 只是多了一个无关紧要的总相位. 当两只猫相隔甚远比如一光年时, 两个观察者开始对猫的生存状态同时进行测量或者叫联合探测, 那么此时的测量结果是毫无悬念的. 两个观察者同时测量两个猫各自的状态或者两只猫联合的状态有以下四种概率相等的可能性: (1) 两只猫都活着, (2) 两只猫都死了, (3) 猫 1 活着, 猫 2 死了, (4) 猫 1 死了, 猫 2 活着.

这里说毫无悬念实际上是指量子预测和经典惯例之间并没有什么不同.

2. 两只薛定谔猫态的纠缠态

假设从猫群中制备了一对薛定谔猫, 其猫态是下面的四种双猫态之一:

$$
\begin{aligned}
|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{活猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle + |\text{死猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle] \\
|\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{活猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle - |\text{死猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle] \\
|\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{活猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle + |\text{死猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle] \\
|\Phi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\text{活猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle - |\text{死猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle]
\end{aligned}
\tag{8.10.2}
$$

其中任何一式都不能写成直积态的形式 $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle$. 这对猫就处于一个纠缠的双猫态. (8.10.2) 式中的四种态都定义为纠缠双猫态, 可以称它们为贝尔猫态. 这贝尔猫态在双猫空间中构成了一组正交完备基.

假设系统自由行走和系统随时间演化的规律仍然适用, 即时间演化只是增加了一个总相位而叠加中的两项的相对相位不变, 那么两只薛定谔猫的状态将保持 (8.10.2) 的形式不变, 除了多了一个无关紧要的相位因子. 因此不管两只猫相距多远, 它们之间任何的 "关联" 测量的结果都是一样的.

现在, 考虑对猫群系统的联合探测. 假设有两个观测者, 他们到猫群的距离相等, 同时测量双猫的生存状态. 这相当于实施一系列的联合投影操作:

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi|\text{活猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle\langle\text{活猫}_2|\langle\text{活猫}_1|\Psi\rangle = |\langle\text{活猫}_2|\langle\text{活猫}_1|\Psi\rangle|^2 \\
&\langle\Psi|\text{活猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle\langle\text{死猫}_2|\langle\text{活猫}_1|\Psi\rangle = |\langle\text{死猫}_2|\langle\text{活猫}_1|\Psi\rangle|^2 \\
&\langle\Psi|\text{死猫}_1\rangle|\text{活猫}_2\rangle\langle\text{活猫}_2|\langle\text{死猫}_1|\Psi\rangle = |\langle\text{活猫}_2|\langle\text{死猫}_1|\Psi\rangle|^2
\end{aligned}
$$

$$\langle\Psi|\text{死猫}_1\rangle|\text{死猫}_2\rangle\langle\text{死猫}_2|\langle\text{死猫}_1|\Psi\rangle=|\langle\text{死猫}_2|\langle\text{死猫}_1|\Psi\rangle|^2 \quad (8.10.3)$$

其中的态是 (8.10.2) 式中的四个贝尔猫态. 下表列出了联合投影测量的期望值:

	$\|\Psi^{(+)}\rangle$	$\|\Psi^{(-)}\rangle$	$\|\Phi^{(+)}\rangle$	$\|\Phi^{(-)}\rangle$
$\langle$活猫$_2|\langle$活猫$_1|$	1/2	1/2	0	0
$\langle$死猫$_2|\langle$活猫$_1|$	0	0	1/2	1/2
$\langle$活猫$_2|\langle$死猫$_1|$	0	0	1/2	1/2
$\langle$死猫$_2|\langle$死猫$_1|$	1/2	1/2	0	0

同样的, 这些结果并不奇怪. 量子期望值与经典惯例相吻合. 如果系综以 50%–50% 的概率处于 "活–活" 和 "死–死" 态 ($|\Psi^{(+)}\rangle$ 和 $|\Psi^{(-)}\rangle$), 那么这两个观测者确实应该分别有 50%–50% 的机会看到 "活–活" 和 "死–死" 的一对猫; 如果系综以 50%–50% 的概率处于 "活–死" 和 "死–活" 态 ($|\Phi^{(+)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(-)}\rangle$), 那么这两个观察者将分别有 50%–50% 的机会观测到 "活–死" 和 "死–活" 的一对猫.

尽管这种测量可以将 $|\Psi^{(+)}\rangle$、$|\Psi^{(-)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(+)}\rangle$、$|\Phi^{(-)}\rangle$ 区分开来, 但是 (8.10.3) 式中的一组投影测量并不是最好的选择. 因为更重要的是, 这种测量不能将纠缠的双猫纯态和双猫混态区分开来.

我们现在考虑对 (8.10.2) 式的四个贝尔猫态进行一组不同的联合投影量, 它由矢量 $|+\text{猫}\rangle$ 和 $|-\text{猫}\rangle$ 定义,

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi|+\text{猫}_1\rangle|+\text{猫}_2\rangle\langle+\text{猫}_2|\langle+\text{猫}_1|\Psi\rangle=|\langle+\text{猫}_2|\langle+\text{猫}_1|\Psi\rangle|^2\\
&\langle\Psi|+\text{猫}_1\rangle|-\text{猫}_2\rangle\langle-\text{猫}_2|\langle+\text{猫}_1|\Psi\rangle=|\langle-\text{猫}_2|\langle+\text{猫}_1|\Psi\rangle|^2\\
&\langle\Psi|-\text{猫}_1\rangle|+\text{猫}_2\rangle\langle+\text{猫}_2|\langle-\text{猫}_1|\Psi\rangle=|\langle+\text{猫}_2|\langle-\text{猫}_1|\Psi\rangle|^2\\
&\langle\Psi|-\text{猫}_1\rangle|-\text{猫}_2\rangle\langle-\text{猫}_2|\langle-\text{猫}_1|\Psi\rangle=|\langle-\text{猫}_2|\langle-\text{猫}_1|\Psi\rangle|^2 \qquad (8.10.4)
\end{aligned}$$

下表给出了联合投影测量的期望值:

	$\|\Psi^{(+)}\rangle$	$\|\Psi^{(-)}\rangle$	$\|\Phi^{(+)}\rangle$	$\|\Phi^{(-)}\rangle$
$\langle+$猫$_2|\langle+$猫$_1|$	1/2	0	1/2	0
$\langle-$猫$_2|\langle+$猫$_1|$	0	1/2	0	1/2
$\langle+$猫$_2|\langle-$猫$_1|$	0	1/2	0	1/2
$\langle-$猫$_2|\langle-$猫$_1|$	1/2	0	1/2	0

对于态 $|\Psi^{(+)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(+)}\rangle$, 量子力学预言两个观察者有 $50\%-50\%$ 的机会记录到 $|+\text{猫}\rangle$ 或者 $|-\text{猫}\rangle$ 态. 然而, 如果他们其中之一发现他的猫处于

$|+$猫$\rangle$ 态或 $|-$猫$\rangle$ 态, 另一个观测者必定发现他的猫处在相同的态. 对于态 $|\Psi^{(-)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(-)}\rangle$, 量子力学预言, 两观察者有 50% – 50% 的机会记录到 $|+$猫$\rangle$ 或者 $|-$猫$\rangle$ 态. 然而, 如果他们其中之一发现自己的猫处在 $|+$猫$\rangle$ 态或 $|-$猫$\rangle$ 态, 另一个观测者必定发现他的猫处在对应的正交态. 为什么会这样呢? 这确实让人惊讶不已. 需要注意的是: 这个系综既不是制备成 $|\Psi^{(+)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(+)}\rangle$ 态中的 "$|+$猫$\rangle\&|+$猫$\rangle$" 对和 "$|-$猫$\rangle\&|-$猫$\rangle$" 对, 也不是制备成 $|\Psi^{(-)}\rangle$ 和 $|\Phi^{(-)}\rangle$ 中的 "$|+$猫$\rangle\&|-$猫$\rangle$" 对和 "$|-$猫$\rangle\&|+$猫$\rangle$" 对. 用经典的观点来看, 对于 $|\Psi^{(+)}\rangle$ 和 $|\Psi^{(-)}\rangle$ 态, 这个系综被制备成 "$|$活猫$\rangle\&|$活猫$\rangle$" 对和 "$|$死猫$\rangle\&|$死猫$\rangle$" 对, 对于 $|\Phi^{(+)}\rangle$ 与 $|\Phi^{(-)}\rangle$ 态, 系综被制备成 "$|$活猫$\rangle\&|$死猫$\rangle$" 对和 "$|$死猫$\rangle\&|$活猫$\rangle$" 对. 根据公式 (8.9.25), $|$活猫$\rangle$ 态和 $|$死猫$\rangle$ 态都有相等概率处于量子态 $|+$猫$\rangle$ 和 $|-$猫$\rangle$. 所以经典看来, 这个系综应该有四个对等的组合: "$|+$猫$\rangle\&|+$猫$\rangle$", "$|+$猫$\rangle\&|-$猫$\rangle$", "$|-$猫$\rangle\&|+$猫$\rangle$" 和 "$|-$猫$\rangle\&|-$猫$\rangle$".

通过后面章节的学习, 我们会明白这种出乎意料的结果是 "双猫" 干涉的结果, 这是量子世界的特有的一个现象.

3. 混态

为了模仿 (8.10.2) 式的纠缠态, 历史上, 有人提出过下面的混态:

$$\hat{\rho}^{(S)} = \frac{1}{2}\left[|\text{活猫}_1\rangle\langle\text{活猫}_2| + |\text{死猫}_1\rangle\langle\text{死猫}_2|\right]$$
$$\hat{\rho}^{(A)} = \frac{1}{2}\left[|\text{活猫}_1\rangle\langle\text{死猫}_2| + |\text{死猫}_1\rangle\langle\text{活猫}_2|\right] \tag{8.10.5}$$

其中用密度算符来描述猫群的混态. 密度算符 $\hat{\rho}^{(S)}$ 指的是猫群系综有一半是 "活猫&活猫" 的猫对, 另一半是 "死猫&死猫" 的猫对. 密度算符 $\hat{\rho}^{(A)}$ 指的是系综有一半处于 "活猫&死猫", 另一半处于 "死猫&活猫". 不难得出: 对于用密度算符 $\hat{\rho}^{(S)}$ 描述的系综, 两个远离的观测者有 50%–50% 的概率同时观测到两只活猫或者两个死猫; 对于用密度算符 $\hat{\rho}^{(A)}$ 描述的系综, 也是有 50%–50% 的概率同时观测到 "猫 1 活 & 猫 2 死" 或者 "猫 1 死 & 猫 2 活". 然而, 不管是 $\hat{\rho}^{(S)}$ 还是 $\hat{\rho}^{(A)}$, 都不可能得到如 (8.10.4) 式所定义的联合探测结果 (或者对贝尔猫态进行测量的期望值). 实际上, 不管是对 $\hat{\rho}^{(S)}$ 还是 $\hat{\rho}^{(A)}$, 两个观测者的联合探测都将给出相同概率的 "$+$猫$_1$& $+$猫$_2$", "$+$猫$_1$& $-$猫$_2$", "$-$猫$_1$& $+$猫$_2$" 和 "$-$猫$_1$& $-$猫$_2$".

例 (II): 光子对的偏振直积态、纠缠态和混合态

1. 双光子的偏振直积态

假设时刻 $t = 0$, 从辐射源产生两个独立的光子, 光子 1 偏振在 45°, 光子 2 偏振在 −45°. 由于产生过程相互独立, 或者子系统之间无相互作

用, 对于这两个光子的态可以做直积态处理

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= |45°_1\rangle \times |-45°_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}[|\hat{o}_1\rangle|\hat{o}_2\rangle + |\hat{e}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle - |\hat{o}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle - |\hat{e}_1\rangle|\hat{o}_2\rangle] \end{aligned} \tag{8.10.6}$$

$\hat{o}$ 和 $\hat{e}$ 表示单轴晶体的寻常光和非寻常光, 这在 8.9 节偏振测量中已经定义过.

类似猫态系统, 对于两光子系统, 我们引入同样的自由传播和时间演化的规律. 很自然地得到: 两个远离的观测者将观察到四种等概率的偏振关联行为: (1) 光子 1 和光子 2 都沿 $\hat{o}$ 方向偏振, (2) 光子 1 和光子 2 都沿 $\hat{e}$ 方向偏振, (3) 光子 1 沿 $\hat{o}$ 方向偏振, 光子 2 沿 $\hat{e}$ 方向偏振 (4) 光子 1 沿 $\hat{e}$ 方向偏振, 光子 2 沿 $\hat{o}$ 方向偏振.

量子预言并没有违反经典惯例.

2. 两光子的偏振纠缠态

假设辐射源产生的一对光子处于下面的量子态之一

$$\begin{aligned}|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{o}_1\rangle|\hat{o}_2\rangle + |\hat{e}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle] \\ |\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{o}_1\rangle|\hat{o}_2\rangle - |\hat{e}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle] \\ |\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{o}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle + |\hat{e}_1\rangle|\hat{o}_2\rangle] \\ |\Phi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|\hat{o}_1\rangle|\hat{e}_2\rangle - |\hat{e}\rangle_1|\hat{o}\rangle_2] \end{aligned} \tag{8.10.7}$$

这些态都不能写成直积的形式 $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle$, 此时双光子态定义为纠缠态. 以上四态称为贝尔态. 贝尔态形成关于双光子偏振的一组正交完备基. 值得强调的是: 尽管双光子贝尔态为纯态, 单个光子即光子 1 和光子 2 都处于混态. 子系统的态通过对另外一个求迹得到

$$\hat{\rho}_j = \frac{1}{2}[|\hat{o}_j\rangle\langle\hat{o}_j| + |\hat{e}_j\rangle\langle\hat{e}_j|] \tag{8.10.8}$$

其中 $j = 1, 2$. (8.10.8) 式表明子系统是非偏振的.

我们再次引入同样的自由传播和时间演化的规律, 发现光子对的状态将保持不变, 如 (8.10.7) 式, 除了一个无关紧要的总相位因子. 远处的两个观测者用相对于单位矢量 $\hat{o}_1$ 和 $\hat{o}_2$ 分别成 θ_1 和 θ_2 角的两个独立检偏振器来测量光子对的偏振情况. 如图 8.10.1 所示. 每一个检偏振器有两个输出端口: θ_j 和 $\theta_{\perp j}$, $j = 1, 2$. 四种可能的联合探测对应于双光子态的四种联合投影:

$$\langle\Psi|\hat{\theta}_1\,\hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\,\hat{\theta}_1|\Psi\rangle = |\langle\hat{\theta}_2\,\hat{\theta}_1|\Psi\rangle|^2$$

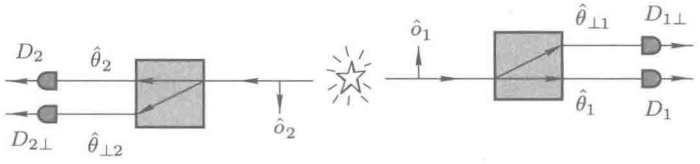


图 8.10.1 光子对的偏振联合探测. 两个独立的检偏器与单位矢量 $\hat{o}_1$ 和 $\hat{o}_2$ 分别成 θ_1 和 θ_2 角. 每一个检偏振器有两个输出端: $\hat{\theta}_j$ 和 $\hat{\theta}_{\perp j}$. 四种可能的联合探测与 (8.10.9) 式定义的四个投影操作相对应. 备注: 所有单位矢量都是按照右手坐标系定义的.

$$\begin{aligned}
\langle\, \Psi\, |\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\, \Psi\, \rangle &= |\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\, \Psi\, \rangle|^2 \\
\langle\, \Psi\, |\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_1|\, \Psi\, \rangle &= |\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_1|\, \Psi\, \rangle|^2 \\
\langle\, \Psi\, |\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\, \Psi\, \rangle &= |\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\, \Psi\, \rangle|^2
\end{aligned} \tag{8.10.9}$$

其中 $|\hat{\theta}_1\rangle\,|\hat{\theta}_2\rangle$ 写为 $|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_2\rangle$. 贝尔态有如下偏振关联:

$$\begin{aligned}
\langle\Psi^{(+)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_1|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2) \\
\langle\Psi^{(+)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2) \\
\langle\Psi^{(+)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_1|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2) \\
\langle\Psi^{(+)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned} \tag{8.10.10}$$

$$\begin{aligned}
\langle\Psi^{(-)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_1|\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Psi^{(-)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Psi^{(-)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_1|\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Psi^{(-)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Psi^{(-)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned} \tag{8.10.11}$$

$$\begin{aligned}
\langle\Phi^{(+)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_1|\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Phi^{(+)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Phi^{(+)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\, \hat{\theta}_1|\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1+\theta_2) \\
\langle\Phi^{(+)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_{\perp 1}|\Phi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned} \tag{8.10.12}$$

$$\langle\Phi^{(-)}|\hat{\theta}_1\, \hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\, \hat{\theta}_1|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2)$$

$$\langle \Phi^{(-)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\hat{\theta}_{\perp 1}|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1-\theta_2)$$
$$\langle \Phi^{(-)}|\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{\perp 2}\rangle\langle\hat{\theta}_{\perp 2}\hat{\theta}_1|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2)$$
$$\langle \Phi^{(-)}|\hat{\theta}_{\perp 1}\hat{\theta}_2\rangle\langle\hat{\theta}_2\hat{\theta}_{\perp 1}|\Phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2) \qquad (8.10.13)$$

(8.10.10) 式到 (8.10.13) 式的关联函数详尽地说明了对于每个贝尔态, 一个探测器在输出端 θ_1 (θ_2) 探测到一个光子的同时它的孪生光子也在另一端 θ_2 (θ_1) 被探测到的概率. 容易看出, 不管光子对处于哪个贝尔态上, 对于一个任意的 θ_1 (θ_2) 都存在一个特定的 θ_2 (θ_1), 使我们能够以最大概率 (1/2) 同时探测到一对光子. 这着实出人意料. 对于从双光子源出来的每一个光子对, 每个检偏器有 50%–50% 的机会在 θ_j 或 $\theta_{\perp j}$ 检测到光子, 光子就像是非偏振的. 然而, 只要观察者 1 (或 2) 一旦发现其测量的光子偏振沿着某个特定方向 θ_1 (θ_2) 或 $\theta_{\perp 1}$ ($\theta_{\perp 2}$), 观察者 2 (或 1) 就会发现在他一侧的光子偏振一定沿着一个相应的确定方向 θ_2 (θ_1) 或 $\theta_{\perp 2}$ ($\theta_{\perp 1}$). 奇怪的是, 经过大量测量之后, 两个远距离的观测者可以得出结论: 尽管光子 1 或者光子 2 的偏振是不确定的, 但是一旦测到其中一个光子的偏振是沿着某个方向, 那么它的孪生光子的偏振也就确定下来了, 不管两个观测者相距多远. 需要记住的是: (1) 在两光子传播过程中, 它们之间没有相互作用, 两位观测者之间也没有信息交换; (2) 系综中的光子对并没有制备成 $|\hat{\theta}_1\rangle\,\&\,|\hat{\theta}_2\rangle$ 态与 $|\hat{\theta}_{\perp 1}\rangle\,\&\,|\hat{\theta}_{\perp 2}\rangle$ 态, 或者 $|\hat{\theta}_1\rangle\,\&\,|\hat{\theta}_{\perp 2}\rangle$ 态与 $|\hat{\theta}_{\perp 1}\rangle\,\&\,|\hat{\theta}_2\rangle$ 态, 除了 $\hat{\theta}=\hat{o}$ 或者 $\hat{\theta}=\hat{e}$ 的情况.

与前面相同, 这里, 出乎意料或令人惊讶是指量子预测有悖于经典惯例. 以上所述现象在经典物理学的框架下似乎无法理解.

3. 混态

我们清楚 (8.10.7) 式中的贝尔态与以下的混态是完全不同的

$$\hat{\rho}^{(S)} = \frac{1}{2}\left[|\hat{o}_1\rangle\langle\hat{o}_2| + |\hat{e}_1\rangle\langle\hat{e}_2|\right]$$
$$\hat{\rho}^{(A)} = \frac{1}{2}\left[|\hat{o}_1\rangle\langle\hat{e}_2| + |\hat{e}_1\rangle\langle\hat{o}_2|\right] \qquad (8.10.14)$$

$\hat{\rho}^{(S)}(\hat{\rho}^{(A)})$ 指的是系综中的一半光子处于 $\hat{o}_1\,\&\,\hat{o}_2$ ($\hat{o}_1\,\&\,\hat{e}_2$), 另一半处于 $\hat{e}_1\,\&\,\hat{e}_2$ ($\hat{e}_1\,\&\,\hat{o}_2$). 尽管对于 $\hat{\rho}^{(S)}$ ($\hat{\rho}^{(A)}$) 两个远离的观测者将接收到一半光子对处于 $\hat{o}_1\,\&\,\hat{o}_2$ ($\hat{o}_1\,\&\,\hat{e}_2$), 另一半的光子对处在 $\hat{e}_1\,\&\,\hat{e}_2$ ($\hat{e}_1\,\&\,\hat{o}_2$), 然而无论 $\hat{\rho}^{(S)}$ 还是 $\hat{\rho}^{(A)}$ 都不能得到类似 (8.10.10) 式到 (8.10.13) 式的关联, 当然 θ_1 和 θ_2 不要选择在 $\hat{o}$ 和 $\hat{e}$ 方向.

8.11 含时微扰理论

对于某些实际问题, 薛定谔方程不一定有精确解, 只有近似解. 在量子光学里, 我们经常会遇到求解哈密顿 $H_0+V(t)$ 的本征态和本征值的问题, 其中 $V(t)$ 是含时的, H_0 有精确解. 这个问题一般用量子力学的含时微扰理论进行计算. 下面我们先简单回顾一下含时微扰理论, 接着做一个练习, 用以建立光子计数过程的物理模型以及学习相应的计算方法.

假设在 t_0 时刻, 一束光照射到原子系统上, 原子被光电离的概率或者释放出一个光电子、两个光电子、三个光电子、$\cdots$, 或 N 个光电子的概率有多大呢? 这个问题可以更一般地表达为: 系统初始的哈密顿量 H_0, 然后在 t_0 时刻加上含时微扰 $V(t)$, 这时系统的本征态和本征值将有什么变化?

假设 t_0 之前, 系统处于 $|\,\Psi^{(0)}\rangle$, 是薛定谔方程的精确解

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\Psi^{(0)}\rangle = H_0|\,\Psi^{(0)}\rangle, \quad t<t_0 \tag{8.11.1}$$

含时微扰 $V(t)$ 在 t_0 时刻加上. 为了求系统的新本征态 $|\,\Psi^{(t)}\rangle$, 需要求解薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\Psi^{(t)}\rangle = [\,H_0+V(t)\,]|\,\Psi^{(t)}\rangle, \quad t>t_0 \tag{8.11.2}$$

上式满足边界条件: $t=t_0$ 时 $|\,\Psi^{(0)}\rangle = |\,\Psi^{(t)}\rangle$.

尽管也许不能求出 (8.11.2) 式的精确解, 根据叠加原理可以得到 $|\,\Psi^{(t)}\rangle$ 的近似解

$$|\,\Psi^{(t)}\rangle = \sum_j c_j\,|\,j\rangle \tag{8.11.3}$$

其中 c_j 是处于 H_0 的第 j 个本征态 $|\,j\rangle$ 概率幅. $|\,j\rangle$ 形成正交完备基. 进一步, 如果 $V(t)$ 远小于 H_0, 保留少数低阶的展开项就行了. 这种情况下将 $V(t)$ 作为微扰处理. 下面讨论中, 我们假设 $V(t)\ll H_0$. 这样 $|\,\Psi^{(t)}\rangle$ 可以写为

$$|\,\Psi^{(t)}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t/\hbar}|\,\Psi(t)\rangle \tag{8.11.4}$$

其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t/\hbar}$ 对含时 $|\,\Psi^{(t)}\rangle$ 起主导作用. 很容易发现这一项对于 H_0 的第 j 个本征态的贡献是一个相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_jt/\hbar}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_jt}$.

把 (8.11.4) 式代入 (8.11.2) 式, 我们得到 $|\Psi(t)\rangle$ 必须遵循的薛定谔方程,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\,\Psi(t)\rangle = H_I(t)|\,\Psi(t)\rangle \tag{8.11.5}$$

其中

$$H_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t/\hbar}V(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t/\hbar} \tag{8.11.6}$$

(8.11.5) 式中的态 $|\Psi(t)\rangle$ 和算符 $H_I(t)$ 称为是在相互作用表象中的描述. 在量子力学中, (8.11.6) 式对任何算符定义了相互作用表象.

(8.11.5) 式形式上是可积的.

$$|\Psi(t)\rangle = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' H_I(t')}\right]_T |\Psi(t_0)\rangle \tag{8.11.7}$$

其中 T 表示时序. 态的前三项, 即态的零阶、一阶和二阶变化为

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &\cong |\Psi(t)\rangle^{(0)} + |\Psi(t)\rangle^{(1)} + |\Psi(t)\rangle^{(2)} \\ &= |\Psi(t_0)\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' H_I(t')|\Psi(t_0)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t'' H_I(t')H_I(t'')|\Psi(t_0)\rangle\end{aligned} \tag{8.11.8}$$

$|\Psi(t)\rangle^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$, 表示态的第 j 阶变化. 需要强调的是: $|\Psi(t)\rangle^{(2)}$ 中的算符是按时序计算的, 尤其在算符不对易的时候需要特别注意. 一般来说算符很可能是不对易的.

很有意思的是, 物理上 (8.11.8) 式中的每一项都和光探测过程相对应. 显然, 零阶项 $|\Psi(t)\rangle^{(0)}$ 是没有任何相互作用的项, 原子系统和场的状态没有发生任何变化. (8.11.8) 式中的第二项 $|\Psi(t)\rangle^{(1)}$ 和第三项 $|\Psi(t)\rangle^{(2)}$ 是态的二阶和三阶变化, 分别对应光场中湮没掉一个光子和两个光子.

8.12 光测量: 光子计数

经典理论中, 光探测器测量的是光波强度, 宏观唯象地看, 与电磁场有关. 而量子理论对原子跃迁–光子湮没的物理过程给出了一个成功解答. 此理论由 Glauber 提出, 亦称 Glauber 理论. 关于这个理论的详细研究并不是下文讨论的目的, 但是我们有必要回顾一下基本概念, 这将有助于理解光子计数理论以及量子联合探测的物理意义.

我们从定义一个理想光子计数器为一个点探测器开始. 可以想象一个原子, 具有相应于光场频率的所有可能的跃迁概率. 哈密顿量 H_0 有两部分,

$$H_0 = H_0^A + H_0^F \tag{8.12.1}$$

其中 H_0^A 和 H_0^F 分别是自由原子和自由场的哈密顿量, 各自的完备正交本征基矢分别为 $|j\rangle$ 和 $|n\rangle$. 为了简化分析, 假设原子在与场作用之前处于基态 $|0\rangle$. 光场初态 $|\Psi_F^{(0)}\rangle$ 是一个广义上的叠加态, 由 $H_0^F = \hbar\omega\hat{N}$ 的本征态 $|n\rangle$ 线性叠加而成, 其中 $\hat{N}$ 为粒子数算符. 为简化讨论, 仅考虑单模

情况. 其结果可以很容易推广到多模情况. 假设原子由于偶极子与场的相互作用 $V(t) = -\hat{\mu}\cdot\hat{E}^{(+)}$ 从基态电离, 其中 $\hat{\mu}$ 为原子的偶极矩. 那么相互作用的哈密顿量为,

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\, V(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar} \\ &= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^A t/\hbar}\,\hat{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^A t/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^F t/\hbar}\,\hat{E}^{(+)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^F t/\hbar} \end{aligned} \tag{8.12.2}$$

其中我们已经将问题简化成一维. 根据 (8.11.8) 式, 一级近似下的态 $|\,\Psi(t)\,\rangle$ 为

$$|\,\Psi(t)\,\rangle \cong |\,0\,\rangle|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t'/\hbar}\,(-\hat{\mu}\,\hat{E}^{(+)})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t'/\hbar}\,|\,0\,\rangle|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle \tag{8.12.3}$$

原子从光场吸收一个光子由基态跃迁到一系列可能的终态的总跃迁概率为

$$\begin{aligned} P &= \sum_f |\,\langle\, f\,|\,\Psi(t)\,\rangle\,|^2 \cong \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t'' \\ &\qquad \sum_{j,n}\langle\,0\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^A t''/\hbar}\,\hat{\mu}^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^A t''/\hbar}\,|\,j\,\rangle\langle\,j\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^A t'/\hbar}\,\hat{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^A t'/\hbar}\,|\,0\,\rangle \\ &\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^F t''/\hbar}\,\hat{E}^{(-)}(t'')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^F t''/\hbar}\,|\,n\,\rangle\langle\,n\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^F t'/\hbar}\,\hat{E}^{(+)}(t')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^F t'/\hbar}\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle \\ &\cong \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\sum_{j,n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{E_j-E_0}{\hbar}-\omega)(t''-t')}\,\langle\,0\,|\,\hat{\mu}^*\,|\,j\,\rangle\langle\,j\,|\,\hat{\mu}\,|\,0\,\rangle \\ &\qquad\qquad \langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\hat{E}^{(-)}(t'')\,|\,n\,\rangle\langle\,n\,|\,,\hat{E}^{(+)}(t')\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle \end{aligned} \tag{8.12.4}$$

为了完成计算, 我们首先考虑的是 (8.12.4) 式要对所有终态求和. 假设对于所有的终态, $\langle\,j\,|\,\hat{\mu}\,|\,0\,\rangle$ 和 $\langle\,n\,|\,\hat{E}^{(+)}\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle$ 都不会突变. 这样, 求和就变为对能量 E_j 的积分, 能量 E_j 具有一定密度分布函数. 我们进一步假设这个密度分布函数是平滑的, 那么总的跃迁概率就正比于

$$P \propto \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\hat{E}^{(-)}(t')\,\hat{E}^{(+)}(t')\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle \tag{8.12.5}$$

其中用到了完备关系

$$\sum_m |\,m\,\rangle\langle\,m\,| = 1 \tag{8.12.6}$$

以及宽带积分的数学近似

$$\int \mathrm{d}E_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{E_j-E_0}{\hbar}-\omega)(t''-t')} \sim \delta(t''-t') \tag{8.12.7}$$

因此在 $\boldsymbol{r}$ 处 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内, 原子吸收一个光子后电离的概率为

$$G(\boldsymbol{r},t) \propto \langle\, \Psi_F^{(0)} \,|\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \,|\, \Psi_F^{(0)} \,\rangle \tag{8.12.8}$$

总结一下, 我们得出这样的结论: 在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处湮没一个光子成为一个光探测事件的概率正比于,

$$\langle\, \Psi \,|\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\, \Psi \,\rangle = \left|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\, \Psi\rangle \,\right|^2$$

注意: 上面的讨论中考虑的是纯态的情况. (8.12.8) 式很容易推广到混态情形

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r},t) &\propto \sum_j P_j \,\langle\, \Psi_j \,|\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \,|\, \Psi_j \,\rangle \\ &= \mathrm{tr}\,[\,\hat{\rho}\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\,] \end{aligned} \tag{8.12.9}$$

其中 P_j 是处于第 j 个纯态 $|\,\Psi_j\,\rangle$ 的概率, 并且

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j \,|\, \Psi_j \,\rangle\langle\, \Psi_j \,| \tag{8.12.10}$$

是光场或光子系统的密度算符. 注意我们已经去掉了态 $|\Psi_j^{(0)}\rangle$ 的上标. 光子计数率的时间平均为

$$R \propto \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, G(\boldsymbol{r},t) = \int_T \mathrm{d}t\, \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \,\rangle \tag{8.12.11}$$

其中 T 为总的平均时间, 这里的时间平均和第 1 章中的定义并无不同.

8.13 光测量: 光子的联合探测

接下来, 我们将计算两个独立的光子探测器对一对光子进行联合探测的概率. 同样的, 假设都是理想的点探测器. 为了简单起见, 假设在相互作用之前, 两个相互独立的原子都处于他们各自的基态 $|\,0_1\,\rangle$ 和 $|\,0_2\,\rangle$, 其中下标表示不同的原子或是不同的点探测器. 此时哈密顿量 H_0 由三部分组成:

$$H_0 = H_{01}^A + H_{02}^A + H_0^F \tag{8.13.1}$$

其中 H_{0j}^A, $j=1,2$, 表示第 j 个自由原子的哈密顿量. 设两原子都因偶极子和场的相互作用 $V_1(t) = -\hat{\mu}_1 \cdot \hat{E}_1^{(+)}$ 和 $V_2(t) = -\hat{\mu}_2 \cdot \hat{E}_2^{(+)}$ 从基态电离, 其中 $\hat{\mu}_j$, $j=1,2$, 是第 j 个原子的偶极矩. 那么相互作用哈密顿量为,

$$H_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}\,[V_1(t)+V_2(t)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar} \tag{8.13.2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{01}^{A}t/\hbar}\,\hat{\mu}_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{01}^{A}t/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{0}^{F}t/\hbar}\,\hat{E}_1^{(+)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{0}^{F}t/\hbar} \\
&\quad -\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{02}^{A}t/\hbar}\,\hat{\mu}_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{02}^{A}t/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{0}^{F}t/\hbar}\,\hat{E}_2^{(+)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{0}^{F}t/\hbar} \\
&= H_{I1}(t) + H_{I2}(t)
\end{aligned}
$$

根据 (8.11.8) 式, 态的一阶变化 $|\,\Psi(t)\,\rangle^{(1)}$ 为,

$$
|\,\Psi(t)\,\rangle^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,H_{I1}(t')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,H_{I2}(t')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle
$$

这两项分别对应两个原子的单光子跃迁. 态的二阶变化 $|\,\Psi(t)\,\rangle^{(2)}$ 有四项,

$$
\begin{aligned}
|\,\Psi(t)\,\rangle^{(2)} = &\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\,H_{I1}(t')\,H_{I1}(t'')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle \\
&+\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\,H_{I2}(t')\,H_{I2}(t'')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle \\
&+\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\,H_{I1}(t')\,H_{I2}(t'')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle \\
&+\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\int_{t_0}^{t'}\mathrm{d}t''\,H_{I2}(t')\,H_{I1}(t'')\,|\,\Psi(t_0)\,\rangle
\end{aligned}
$$

所有这四项都是表示来自光场的两个光子的联合湮没. 前两项对应一个原子的双光子跃迁. 考虑两个探测器的联合探测事件时, 我们感兴趣的是后面两项. 假设因为时序问题, 符合测量电路只选择了其中一种联合探测事件. 这样, 原子 1 和原子 2 从基态一起跃迁到一系列所有可能终态的总概率为:

$$
\begin{aligned}
&\sum_f |\,\langle f\,|\,\Psi(t)\,\rangle\,|^2 \cong \frac{1}{\hbar^4}\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_1'\int_{t_0}^{t_1'}\mathrm{d}t_1''\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_2'\int_{t_0}^{t_2'}\mathrm{d}t_2'' \qquad (8.13.3)\\
&\sum_{j_1,j_2,n,}\langle 0_1\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{01}^{A}t_1''/\hbar}\,\hat{\mu}_1^{*}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{01}^{A}t_1''/\hbar}\,|\,j_1\,\rangle\langle\,j_1\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{01}^{A}t_1'/\hbar}\,\hat{\mu}_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{01}^{A}t_1'/\hbar}\,|\,0_1\,\rangle \\
&\qquad \langle 0_2\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{02}^{A}t_2''/\hbar}\,\hat{\mu}_2^{*}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{02}^{A}t_2''/\hbar}\,|\,j_2\,\rangle\langle\,j_2\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{02}^{A}t_2'/\hbar}\,\hat{\mu}_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{02}^{A}t_2'/\hbar}\,|\,0_2\,\rangle \\
&\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{01}^{F}t_1''/\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{02}^{F}t_2''/\hbar}\,\hat{E}_1^{(-)}(t_1'')\,\hat{E}_2^{(-)}(t_2'')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{02}^{F}t_2''/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{01}^{F}t_1''/\hbar}\,|\,n\,\rangle \\
&\qquad \langle\,n\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{01}^{F}t_1'/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{02}^{F}t_2'/\hbar}\,\hat{E}_2^{(+)}(t_2')\,\hat{E}_1^{(+)}(t_1')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{02}^{F}t_2'/\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{01}^{F}t_1'/\hbar}\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle
\end{aligned}
$$

和单个探测类似, 为了完成计算, 首先考虑 (8.13.3) 式要对所有终态求和, 再应用完备关系和 δ 函数近似. 这样, 总的联合跃迁概率就正比于

$$
P \propto \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_1'\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_2'\,\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\hat{E}_1^{(-)}(t_1')\,\hat{E}_2^{(-)}(t_2')\,\hat{E}_2^{(+)}(t_2')\,\hat{E}_1^{(+)}(t_1')\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle
$$

在时间 t_1 到 $t_1+\mathrm{d}t_1$ 内从光场 $\boldsymbol{r}_1$ 处吸收一个光子以及在时间 t_2 到 $t_2+\mathrm{d}t_2$ 内从光场 $\boldsymbol{r}_2$ 吸收另一个光子, 从而导致两个原子电离的联合跃迁概率为

$$\begin{aligned}&G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\propto\\&\langle\,\tilde{\Psi}_F^{(0)}\,|\,\hat{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}_2^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle\end{aligned}\tag{8.13.4}$$

至此, 我们得到如下结论: 原子联合跃迁率, 或者说在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 以及时空点 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 各湮没一个光子的两个光电探测事件的联合概率正比与厄米算符 $\hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}$ 作用于光场初态 $|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle$ 的期望值. 厄米算符是场的四阶算符, 也称为四级矩. 需要强调的是由于场算符的对易性质, 算符 $\hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}$ 一般不能被定义为两个强度算符的乘积. 不过, 有的时候 $G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 也可以写成如下形式

$$G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\langle:\hat{I}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{I}(\boldsymbol{r}_2,t_2):\rangle\tag{8.13.5}$$

其中 $\langle:\cdots:\rangle$ 表示正则序. 我们不要被标记混淆. 这个标记没有特别意思, 只是把 (8.13.4) 式写成不同的形式. 场算符的对易规则将 (8.13.4) 式和它的经典模拟区分开来.

注意, 以上计算用的是纯态. (8.13.4) 式的结果很容易推广到混态情形

$$\begin{aligned}&G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\&\propto\sum_j P_j\,\langle\,\Psi_j\,|\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\,\Psi_j\,\rangle\\&=\mathrm{tr}\,[\,\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,]\end{aligned}\tag{8.13.6}$$

其中 P_j 为处于第 j 个初始纯态 $|\,\Psi_j\,\rangle$ 的概率, $\hat{\rho}$ 和前面的定义一样, 是光场或光子系统的密度算符.

联合探测的平均计数率为

$$\begin{aligned}R&\propto\int_T\mathrm{d}t_1\int_T\mathrm{d}t_2\,G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\&=\int_T\mathrm{d}t_1\int_T\mathrm{d}t_2\,\langle\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle\end{aligned}\tag{8.13.7}$$

其中 T 为总的平均时间.

8.14 场的时–空传播

光探测的量子理论是量子含时微扰理论的直接应用. 一阶近似计算在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 湮没一个光子的光探测事件的概率, 或者在位置 $\boldsymbol{r}$ 时间 t

处的光子计数率,

$$G(\boldsymbol{r},t)\propto\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle$$

二阶近似计算在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 联合湮没一对光子的概率或者一对光探测器在位置 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ 和时间 (t_1,t_2) 的联合探测计数率:

$$\begin{aligned}&G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\propto\\&\langle\,\Psi_F^{(0)}\,|\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi_F^{(0)}\,\rangle\end{aligned}$$

联合计数率也称为符合计数率, 尽管 t_1 不一定要等于 t_2. 在这些公式中, $|\Psi_F^{(0)}\rangle$ 是 t_0 时刻光场的态, t_0 指加上微扰 $V(t)$ 的时刻, 代表了光探测事件的最初时刻. 在典型的光学测量中, $|\Psi_F^{(0)}\rangle$ 经常是从辐射源的态 $|\Psi(0)\rangle$ 推算得到的. 从辐射源激发出来的 $|\Psi(0)\rangle$ 一般是已知的, 或者通过前期测量知道, 或者通过研究光源的辐射机制预测得到.

这是一个典型的量子力学的动力学问题: 知道系统早先的量子态, 如在时刻 $t=0$ 为 $|\Psi(0)\rangle$, 我们想求解算符 $\hat{A}$ 在 t 时刻的期望值

$$\langle\hat{A}\rangle_t=\langle\,\Psi(t)\,|\,\hat{A}\,|\,\Psi(t)\,\rangle\tag{8.14.1}$$

既然辐射场的任何一个态都可以用哈密顿量的本征态的叠加来描述, 比如 (8.3.37) 式, 并且也证明了从 $t=0$ 到 t, 一个能量本征态的演化只是附加一个相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}$, 所以我们可以将 t 时刻场的量子态写成

$$\begin{aligned}|\,\Psi(t)\,\rangle&=\sum_E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}\,|\,E\,\rangle\langle\,E\,|\,\Psi(0)\,\rangle\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\,|\,\Psi(0)\,\rangle\end{aligned}\tag{8.14.2}$$

其中 $|E\rangle$ 表示哈密顿量的本征态. (8.14.2) 式中还用到了能量的一组完备正交基

$$\sum_E|\,E\,\rangle\langle\,E\,|=\mathbf{1}$$

于是 (8.14.1) 式可以改写为

$$\langle\hat{A}\rangle_t=\langle\,\Psi(0)\,|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\,\hat{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\,|\,\Psi(0)\,\rangle\tag{8.14.3}$$

这样, 我们就可以在海森伯表象中考虑场算符从 $t=0$ (处于辐射源处) 时刻到 t_0 时刻 (光探测事件) 的传播情况, 而不是薛定谔表象中将态 $|\,\Psi(0)\,\rangle$ 做演化. 如果定义含时算符 $\hat{A}(t)$

$$\hat{A}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\,\hat{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\tag{8.14.4}$$

那么就可以将 (8.14.3) 式改写为

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \langle \Psi(0) | \hat{A}(t) | \Psi(0) \rangle \tag{8.14.5}$$

如果 $\hat{A}(t)$ 不显含时间 t, (8.14.4) 式对 t 求微分得到

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t} = [\hat{A}(t), \hat{H}] \tag{8.14.6}$$

在 (8.14.6) 式中, 假设 $\hat{H}$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}$ 是对易的. (8.14.6) 式称为算符的海森伯运动方程.

不难发现: 对于两个或两个以上算符的乘积, 如 $\hat{A} = \hat{B}\hat{C}$, 我们可以定义两个或两个以上含时算符的直积, 如 $\hat{A}(t) = \hat{B}(t)\hat{C}(t)$,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \hat{B}\,\hat{C} | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\, \hat{B}\,\hat{C}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} | \Psi(0) \rangle \\ &= \langle \Psi(0) | \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\, \hat{B}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\, \hat{C}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} | \Psi(0) \rangle \\ &= \langle \Psi(0) | \hat{B}(t)\, \hat{C}(t) | \Psi(0) \rangle \end{aligned} \tag{8.14.7}$$

其中用到了 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} = \mathbf{1}$. 进一步很容易得到: $\hat{B}(t)$ 和 $\hat{C}(t)$ 分别遵守海森伯运动方程, 因而是各自独立传播的,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{B}(t)}{\mathrm{d}t} = [\hat{B}(t), \hat{H}], \quad \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{C}(t)}{\mathrm{d}t} = [\hat{C}(t), \hat{H}] \tag{8.14.8}$$

基于以上结果, 在海森伯表象中, 光探测的计数率或者在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 一个光子湮没的概率为,

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r}, t) &\propto \langle \Psi(0) | \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}, t)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}, t) | \Psi(0) \rangle \\ &= \left| \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}, t) | \Psi(0) \rangle \right|^2 \end{aligned} \tag{8.14.9}$$

一对光探测器的联合计数率, 即在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 联合湮没一对光子的概率为,

$$\begin{aligned} & G(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \\ \propto & \langle \Psi(0) | \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2, t_2) \hat{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, \hat{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) | \Psi(0) \rangle \\ = & \left| \hat{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, \hat{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) | \Psi(0) \rangle \right|^2 \end{aligned} \tag{8.14.10}$$

这里要清楚场算符 $\hat{E}^{(\pm)}(\boldsymbol{r}_j, t_j)$ 是从辐射源 $(\boldsymbol{r}^0, t^0)$ 开始传播. 注意, 我们用了不同的标记 t^0 以和光探测事件的微扰时间 t_0 相区别. 为简化标记, 常选择 $t^0 = 0$, 把态 $|\Psi(0)\rangle$ 写作 $|\Psi\rangle$. 如果辐射源可以看作点源, 我们也可

以让 $\boldsymbol{r}^0=0$. 需要特别注意的是: 有时候需要考虑源的有限尺寸, 尤其是近场测量的时候. (8.14.9) 式和 (8.14.10) 式是光子计数测量时的基本公式.

关于场算符在时空中的传播, 一般来说, 我们需要知道湮没算符和产生算符的时间演化, 并找到满足相应场的边界条件的亥姆霍兹方程的解. 用来定义场的空间模函数的数学方法在经典光学中已经很完善了, 在量子光学中应该没有区别. 对于特定的哈密顿量, 如 (8.3.25) 式表示的自由场的哈密顿量, 湮没算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)$ 和产生算符 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)$ 的时间演化可以很容易地通过解海森伯运动方程得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\big[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t),\hat{H}\big]=-\mathrm{i}\omega\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)&=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\big[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t),\hat{H}\big]=\mathrm{i}\omega\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)\end{aligned}\tag{8.14.11}$$

解为

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(t)&=\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(t)&=\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}\tag{8.14.12}$$

设 $t^0=0$. 这样, 海森伯表象下自由场算符写为

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\ &=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,\mathrm{i}\,\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,u_k(\boldsymbol{r})+\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,(-\mathrm{i})\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,u_k^*(\boldsymbol{r})\\ &=\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\tag{8.14.13}$$

其中 $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r})$ 为亥姆霍兹方程 (8.3.42) 满足特定边界条件的解. 在 (8.14.13) 式中, $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)$ 分别对应在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 光子湮没和产生的物理过程.

在特定的实验条件下, 比如远场条件下, 可以采用平面波近似. (8.14.13) 式中的正、负场算符可以分别写作

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,\mathrm{i}\,\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\\ \hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{e}}_k\,(-\mathrm{i})\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}(0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\end{aligned}\tag{8.14.14}$$

本章小结

在本章中, 我们将电磁场量子化并引入了量子光学中很多重要的概念. 为什么需要将场量子化呢? 作为回答, 本章回顾了物理学发展史上的

两个重要发现. 本章采用的场量子化和光量子的分析都是标准做法, 和大多数书本类似. 在本章中, 我们引入数态和相干态两套比较方便的基矢来表征辐射场的状态. 基于这些概念, 借用一个包含大量的两能级的原子跃迁的简单的光源模型, 来模拟非相干和相干的辐射源. 特别分析了多模单光子态和双光子态. 基于单光子态的概念, 我们给出了混态和纯态的区分办法. 基于双光子态的概念, 我们分析了双光子的直积态、纠缠态和混态的不同之处. 在本章最后, 我们回顾了含时微扰理论并介绍了 Glauber 的光电探测理论, 包括一阶光子计数和二阶符合光子计数理论. 本章的最后一部分, 给出了在薛定谔和海森伯表象下如何计算一阶光子计数率和二阶符合光子计数率的范例.

推荐读物

[1] M. Plank, Verh. dt. phys., Ges. **2**, 202, 237 (1900).

[2] H.R. Hertz, Annalen der Physik, **267**, 421, 983 (1987).

[3] J.W.S. Rayleigh, Phil. Mag. **49**, 539 (1900); Nature, **72**, 54, 243 (1905).

[4] J.H. Jeans, Phil. Mag. **10**, 91 (1905).

[5] W. Wien, Annln. Phys., **58**, 662 (1896).

[6] A. Einstein, Annln. Phys., **17**, 132 (1905).

[7] P.A.M. Dirac, Proc. Roy., Soc., A **114**, 243 (1927).

[8] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[9] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, Benjamin/Cummings, 1981.

[10] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science, 2000.

[11] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge, 1997.

[12] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge, London, 1995.

第 9 章

光场相干性的量子理论

这一章主要研究光场相干性的量子理论. 用微观量子理论处理辐射场的相干现象, 尤其是辐射场的高阶相干现象, 可以得到比宏观经典唯象理论更进一步的理解. 实际上, 我们已经在第 1 章没有十分明确地将量子概念引入了辐射的简单模型中, 只不过没有进行量子化的数学处理. 大量独立随机辐射或相干辐射的子源和大量的原子跃迁相类似. 每一个子源对辐射场最基本的贡献是产生一个光子, 而一个光探测器对辐射场最基本的贡献为湮没一个光子. 在经典强光条件下, 光的辐射和测量会涉及大量光子的产生和湮没. 单个光子的个体行为似乎对于最终的观测影响不大. 然而, 这不能阻止我们问一些非常简单的问题: 如果测量时有而且仅有一个光子参与, 将会有什么现象? 单个光子能和自身干涉吗? 在“单光子干涉仪” 中, 光子是同时经过两路还是只经过一路? 等等. 同样的, 在二阶测量中, 如果测量时有而且仅有一对光子参与, 将会发生什么? 如果在某个时空坐标处测量到了一个光子, 能否确定性地在另一个特定时空坐标处找到另外一个光子呢? 相干性的量子理论主要处理类似的物理问题. 它基于量子力学原理给出这些问题的定量预测和定性解释. 得益于新技术的出现, 现在人们已经可以借助实验来研究这些问题. 从某些角度看: 相干性的量子理论研究的是单个光子与其自身的干涉, 或者一群光子和它们自身的干涉 (如图 9.0.1). 所以我们用单光子振幅的叠加, 或者单光子干涉, 来引入量子的一阶相干性, 而用多光子振幅的叠加, 或者多光子干涉, 来引入量子的高阶相干性.

我们在第 1 章已经强调过, 光场相干性概念涉及两方面的物理: (1) 光源的相干性, 并由此把光源分为相干光源和非相干光源, 同时把相应的光场分为相干辐射场和非相干辐射场, 比如激光和混沌热光;

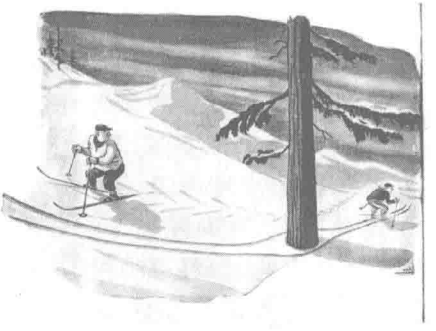


图 9.0.1 一方面, 光的量子理论告诉我们: 单个光子是不可分的; 另一方面, 在单光子水平我们仍然可以观测到干涉现象. 显然, 光子必须通过干涉仪的两个光路. 根据量子理论, 干涉实际上是单光子现象. 用狄拉克的话说: "…… 光子 …… 只和它本身干涉". (© Charles Addams 版权. 获 Tee and Charles Addams Foundation 授权许可.)

(2) 一阶相干度和高阶相干度, 它是通过时间延迟和空间分离的办法来测量光场的一阶关联和高阶关联, 进而描述光场的干涉能力. 在经典的光场相干性理论中, 分类 (1) 所描述的光场的相干或非相干特性, 是大量子源间相干或者非相干叠加的结果. 数学上它是考虑光场所有可能情况后, 进行系综平均的结果. 对应于经典定义的相干光源和非相干光源, 量子理论认为辐射场的相干或非相干特性由量子场的状态决定, 而量子场的状态是由态制备的物理机制先天决定的. 辐射场可以处于纯态或者混态. 对于纯态, 所有子场处于同一量子态. 任何可测物理量的期待值可以从量子平均中直接得到. 系综平均已无必要. 对于混态, 各子场处于不同量子态. 虽然可以定义密度算符, 用来表征辐射场的状态, 此时辐射场要考虑所有可能光场状态的统计系综平均, 这点和经典理论类似. 有趣的是量子纠缠态, 例如, 偶光子[11]纠缠态. 其中, 每一个光子处于混态, 而每一对光子则处于纯态, 此时, 所有对于单光子的一阶测量需要按混态处理, 而对于一对光子的联合探测则需要按纯态处理. 量子理论提供了对于单光子的一阶测量和对于一对光子的联合探测的计算办法.

对应于经典理论的一阶相干度和高阶相干度, 基于量子化辐射场的概念或光子的概念, 量子理论认为一阶相干度反映了单光子在经过了时间延迟或空间分离后和它自身干涉的能力, 而高阶相干度则反映了一对

[11] 偶光子 (*biphoton*) 是由 Klyshko 提出并命名的. 本书把 *biphoton* 译为偶光子或偶光子对, 以区分于 "成对测量的光子", 或 "双光子". 任何成对测量的光子都可以称为双光子, 双光子概念更具普遍性. 双光子可以处于直积态, 纠缠态, 随机热光态, 或其它量子态. 这里定义的偶光子 (*biphoton*) 专指处于纠缠态的 "双光子".

光子, 或一群光子, 在经过了时间延迟或空间分离后和它们自身干涉的能力. 量子理论在处理高阶相干度时有它的独到之处. 经典理论无法处理量子纠缠态的高阶相干问题. 量子理论则对量子纠缠态的高阶相干现象提供了精确的计算和成功的解释. 对处于混态的热光, 经典理论从宏观经典统计的角度处理其高阶相干度问题. 例如, 经典理论把混态热光的二阶相干度函数视为高斯光场的光强或光强涨落的统计相关函数, 虽然从唯象理论的角度是成功的, 混态热光的二阶相关的确是从光强涨落中测量到的. 但是, 光强涨落的统计相关又源于何处呢? 从混态热光的随机特性去看, 它的光强涨落也应该在时空中随机分布, 尤其当两个观测事件之间的空间距离远大于它们的时间间隔, 即, 类空事件时, 是什么物理机制导致其光强涨落只有在特定的两个远距离的时空点同相, 即, 同时 "涨" 和同时 "落", 而在所有其它时空点却毫无关系呢? 有一种假说, 认为混态热光是在光源的制备过程中形成其相关性的. 甚至称混态热光态为 "关联态" ("correlated state"). 此假说的量子图像 (quantum picture) 认为混态热光中的光子是成对产生并 "结伴" 传播. 一方面, 此假说与混态热光产生过程的随机性背道而驰, 另一方面, 此假说又如何解释混态热光场的 "反关联" 现象呢? 量子理论则从微观角度提供了一个多光子干涉的物理模型. 此模型既保持了混态热光产生过程的随机性以及子场在传播过程中的独立性和随机性, 又揭示了混态热光光强涨落统计相关的物理原因.

在一些文献中, 依据辐射场的统计特点将辐射场分为 "经典光场" 和 "量子光场", 并且进而将光的相干性也分为 "经典相干" 和 "量子相干", 尤其是对辐射场高阶相干性的处理. 本书并不反对以某些理论 "定义" 某些现象, 但是不赞成用 "定义" 去束缚我们对自然现象的深入理解. 既然经典理论不能正确解释 "经典" 混态热光光强涨落的统计相关源于何处, 又有什么理由反对量子理论对 "经典" 光的行为提出它的观点呢? 尤其是其观点和处理方法对于实际应用有着重要的指导作用. 历史的经验值得借鉴, 不要忘记普朗克的量子化黑体理论才是对 "经典" 混态热光行为的精确描述.

但是, 我们还是要提出如下的问题: 在一阶和二阶测量中, 是不是存在一些只发生在量子水平或只有对应某一类量子态才会发生的相干现象呢? 对于一阶测量, 在量子水平和经典强光条件下以及其它条件下观察相干现象并没有发现不同. 事实上在一阶测量中, 量子相干和经典相干没有明确的界限. 对于所有一阶干涉现象, 单光子振幅的线性叠加和强光条件下电磁场的线性叠加是完全等价的. 只不过, 在单光子水平我

们必须采用量子力学的语言来解释观察到的现象, 当然量子力学的语言和概念经常会有悖于人们的日常生活经验. 然而, 对于二阶和高阶光场相干性, 情况就不同了. 的确存在只在量子水平下才会发生的二阶或者高阶相干现象. 在这些观测中, 非平庸的二阶、高阶相干只能在量子水平下被观测到. 在经典的强光条件下, 这种非平庸的关联会因可见度过低而不可识别. 至于是不是存在只有对应某一类量子态才发生的二阶或者高阶相干现象? 答案同样是肯定的. 这一章中, 我们将讨论只在纠缠光子态才发生的某些特殊二阶相干现象.

量子理论和经典理论对高阶相干现象持不同的观点. 量子理论从微观角度出发, 认为光的二阶和高阶关联是建立在双光子或者多光子振幅叠加基础之上的干涉现象. 其中双光子或者多光子振幅, 或称有效波函数, 是非经典的实体, 它存在于两个或多个独立光电探测器对双光子或多光子的联合探测事件中, 对应于产生此事件的概率振幅. 在量子力学中, 量子概率振幅的线性叠加是一个普遍现象. 如果在一个两粒子或者多粒子的联合探测事件中, 存在两个或者多个可能的路径 (也就是两粒子或者多粒子的费曼路径), 量子理论认为产生此联合探测事件的概率为所有可能概率振幅线性叠加的模方, 或有效波函数线性叠加的模方, 而不是各自模方的叠加. 量子理论通过对双光子或多光子振幅的线性叠加, 计算出在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 或者 $(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots,\boldsymbol{r}_N,t_N)$ 对一对光子或者一组光子联合探测事件的概率.

可以说, 经典理论从宏观角度对某些高阶相干现象成功地给出了唯象解释, 量子理论则从微观角度揭示了高阶相干现象的物理原因: 多光子干涉. 本章将试图把量子光学理论的这一主要观点阐述清楚.

9.1 量子一阶相干性

为了和经典分析相一致, 我们从杨氏双缝干涉实验开始讨论, 并在进行实验分析过程中引入量子一阶相干性或一阶关联的概念. 为了强调这一概念的量子本质, 本节将集中讨论光子计数测量: (1) 单光子的计数测量; (2) 大量光子的累积计数测量.

杨氏双缝干涉实验的示意性装置与图 5.1 相同, 只是测量装置换成了在光子计数模式下工作的单光子探测器. 按照第 8 章的光电探测理论, 在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处的点探测器湮没掉一个光子并观察到一个光电子的概率为:

$$P(\boldsymbol{r},t)\propto\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\rangle \tag{9.1.1}$$

$$= \langle \langle \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\rangle_{\mathrm{QM}} \rangle_{\mathrm{Ensemble}}$$

其中 $\hat{E}^{(-)}$ 和 $\hat{E}^{(+)}$ 分别是负频和正频的场算符. 期望值由计算场算符在量子态上的平均获得, 量子态是纯态或是混合态, 由光源决定.

类似在经典一阶相干性的讨论中对场的处理, 我们首先把时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 的场 $E(\boldsymbol{r},t)$ 形式上表达为由在早先时刻 t_1 通过上小孔 $\boldsymbol{r}_1$ 的光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和在早先时刻 t_2 通过下小孔 $\boldsymbol{r}_2$ 的光场 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的线性叠加,

$$\begin{aligned}
&\langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)\,\rangle \qquad (9.1.2)\\
&= \langle\, [\hat{E}_1^{(-)}(\boldsymbol{r},t) + \hat{E}_2^{(-)}(\boldsymbol{r},t)][\hat{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r},t) + \hat{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r},t)]\,\rangle\\
&= \langle\, [\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1) + \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)][\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1) + \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)]\,\rangle\\
&= \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle + \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle\\
&\quad + \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle + \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
\hat{E}_j^{(+)}(\boldsymbol{r},t) &= \hat{E}^{(+)}[(\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j),t] = \hat{E}^{(+)}\left(\boldsymbol{r}_j, t - \frac{s_j}{c}\right)\\
&\equiv \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j) \qquad (9.1.3)
\end{aligned}$$

其中 $t_j \equiv t - s_j/c$ (真空中), s_1 (s_2) 表示上 (下) 小孔到探测器的光程. 注意, 虽然我们形式上把场写成为 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$, 这并不意味着在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的测量.

定义 $E(\boldsymbol{r}_j,t_j)$, $j=1,2$ 与其自身的一阶自相干 (一阶自关联) 函数为:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1) &\equiv \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle = G_{11}^{(1)}\\
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2) &\equiv \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle = G_{22}^{(1)} \qquad (9.1.4)
\end{aligned}$$

$E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 间的一阶互相干函数 (一阶交叉关联函数, 或互关联函数) 定义为:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &\equiv \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle = G_{12}^{(1)}\\
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1) &\equiv \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle = G_{21}^{(1)} \qquad (9.1.5)
\end{aligned}$$

再次强调, 以上 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是早些时间各自通过上小孔和下小孔后传播到时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 的场. 于是, 在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处湮没一个光子并产生一个光电子的概率可以写成 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的一阶相干函数的形式:

$$P(\boldsymbol{r},t) \propto G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1) + G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2) \qquad (9.1.6)$$

$$
\begin{aligned}
&+G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)+G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)\\
&=G_{11}^{(1)}+G_{22}^{(1)}+G_{12}^{(1)}+G_{21}^{(1)}
\end{aligned}
$$

其中前两项是一阶自相干或自关联函数, 后两项是互相干或互关联函数.

在上面的讨论中, 我们使用相干函数或关联函数来定义同一个数学表达式. "相干" 强调了观测现象的干涉本质, 而 "关联" 强调的是测量的统计过程. 在量子力学中, 概率幅的线性叠加可以定量地说明单光子的干涉行为. 然而, 对于一个光子的测量并不能提供任何有用的物理信息, 它只是记录了一次光电事件而已. 为了从实验观测中得到有意义的信息, 必须进行大量的对单光子的测量. 光的量子理论预测在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 发生一次光电测量事件的概率, 将非平庸的统计分布解释为量子振幅线性叠加的结果、或光子与自身干涉的结果. 下面讨论中 "相干函数" 和 "关联函数" 两种说法都会用到. 需要记住这两个名称在同一测量中具有相同的物理涵义.

光的量子理论认为, 光电子的产生是光探测器被一个光子触发后产生光电探测事件的结果. 触发光子是由更早时候光源中原子跃迁产生的. 杨氏双孔干涉仪提供了该光子经由两条不同又不可区分的路径在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 产生一次光电探测事件的可能. 量子概率幅的线性叠加决定了在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处观测到光子的非平庸概率分布函数. 如果非要给出 (9.1.6) 式中每一项的物理意义的话, 那么自关联函数对应光子经过上孔或者下孔 (某条路径) 的概率, 而互关联函数 (第三项和第四项) 对应于同时通过上孔和下孔 (两条路径) 的概率, 它决定了干涉的结果. 这样, 我们就遇到 "负概率" 的问题[12]. 在 (9.1.6) 式的最后一行中, 我们用了缩写标记, 这是为了方便后面的讨论.

一阶相干度, 也就是时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 处光场和时空点 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处光场, 在空间分离后又各自经过一定时间传播后的归一化的一阶关联函数, 定义为:

$$
\begin{aligned}
&g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \qquad (9.1.7)\\
&\equiv\frac{\langle\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle}{\sqrt{\langle\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle\,\langle\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\rangle}}\\
&=\frac{G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)}{\sqrt{G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\,G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)}}
\end{aligned}
$$

[12] 在双孔实验中, 互关联函数是一个正弦函数, 包含正值 (相长干涉) 和负值 (相消干涉). 如果坚持要将互关联函数理解为一个光子同时经过上孔和下孔 (两条路径) 的概率, 那么在这个简单的典型的干涉测量中, 我们难免要遇到 "负概率" 的问题.

$g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的取值介于 0 和 1 之间. 和经典理论类似, 可以将量子化光场对应地定义为相干场、部分相干场和非相干场:

$$\begin{aligned}
&\text{相干场} \quad \text{如果} \quad |g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|=1\\
&\text{部分相干场} \quad \text{如果}\ 0<|g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|<1\\
&\text{非相干场} \quad \text{如果} \quad |g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|=0
\end{aligned}$$

在杨氏双孔干涉仪中, 时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处发生光电测量事件的概率可以用一阶相干度 $g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 表示:

$$P(\boldsymbol{r},t)\propto 1+\mathrm{Re}\,g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \tag{9.1.8}$$

其中为了简化物理图像, 假设 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)=G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)$. $g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的值是干涉可见度的度量. $g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 与干涉可见度之间的关系, 与第 5 章中经典情况类似.

从 (9.1.5) 式和 (9.1.7) 式可以明显看出, 光场 $E(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $E(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的一阶关联函数和归一化一阶相干函数有如下性质:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&=G^{*(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)\\
g^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)&=g^{*(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1)
\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

在海森伯表象下, 量子理论提供了一整套工具用来计算一阶关联或相干函数. 对于两个光场, 在经过空间分离和时间延迟后, 如果观测到干涉现象, 我们称它们是相干的. 干涉条纹的可见度越高, 相干度也越高. 显然, 相干度和空间分离的远近和时间延迟的长短有关. 在稍后的讨论中, 我们将进一步把相干度划分为空间相干度和时间相干度. 前者着眼于空间分离的远近对于相干度的影响, 后者着眼于时间分离的长短对于相干度的影响. 在空间分离和时间延迟之外, 还有一个不可忽略的物理因素对相干函数有决定性的影响: 不同的量子态可能产生的不同的相干函数. 下面我们讨论对不同的量子态如何计算其一阶相干函数.

对于纯态, 一阶相干函数 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k)$, $j=1,2$, $k=1,2$ 可以直接算出

$$G^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k)=\langle\,\Psi\,|\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_k,t_k)\,|\,\Psi\,\rangle \tag{9.1.10}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 表示光场的量子态. 混态一般用密度算符或密度矩阵表示,

$$\hat{\rho}=\sum_n P_n\,|\,\Psi_n\,\rangle\langle\,\Psi_n\,|$$

其中 P_n 表示光场处于给定态矢 $|\Psi_n\rangle$ 的概率. 一阶相干函数形式上可以求出为:

$$\begin{aligned}
&G^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k)\\
&=\left\langle\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_k,t_k)\rangle_{\mathrm{QM}}\right\rangle_{\mathrm{Ensemble}}\\
&=\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_k,t_k)\right]\\
&=\sum_n P_n\left\langle\,\Psi_n\,|\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_k,t_k)\,|\,\Psi_n\,\right\rangle\\
&=\sum_n P_n\,G_n^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k)
\end{aligned}\tag{9.1.11}$$

(9.1.11) 式是对所有参与贡献的 $G_n^{(1)}$ 的统计加权求和.

接下来, 我们将给出一些不同量子态下一阶时间相干的计算示例. 与此同时, 对于单光子和单光子系统我们将引入一个有用的概念: 有效波函数. 和 5.1 节中一阶时间相干的经典处理类似, 下面的分析还是基于如图 9.1.1 的杨氏双孔干涉仪. 其中光源是远处 ($\boldsymbol{r}_0=0$) 的点源, 它包含大量非相干或者相干的子源.

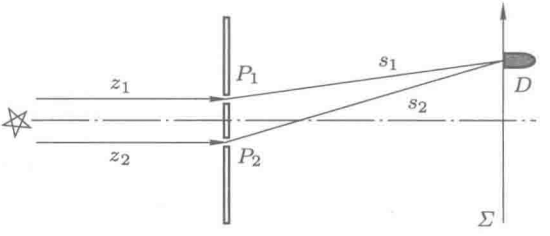


图 9.1.1 与 5.1 节相同的杨氏双孔干涉实验示意图, 它测量由远场点源生成光的时间相干, 该远场点源包含了大量随时可能作两级跃迁的原子.

1. 单光子波包

下面是一个简单的练习. 我们计算一下纯态的单光子波包的一阶自相干函数和互相干函数. 目的是: (1) 掌握这类计算的几个基本方法; (2) 引入有效波函数的概念.

单光子波包的概念之前已经介绍过. 沿袭以前的讨论, 我们在描述测量光场的态时采取如下近似:

$$|\Psi\rangle=\int \mathrm{d}\omega\, f(\omega)\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)|0\rangle \tag{9.1.12}$$

上式表示的是一个由福克态 $\hat{a}^{\dagger}(\omega)|0\rangle=|\cdots 0,1_{\omega},\cdots,0,\cdots\rangle$ 相干叠加构成的单光子态, $f(\omega)$ 是福克态归一化的复概率幅, 其中模式 ω 可能含有

不同的相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$, 参见 8.8 节的描述. 下面计算中, 为了强调某些特定的物理概念和机制, 我们会明确地将这个复概率幅写成 $f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$. 记号 $f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$ 中的 $f(\omega)$ 是正实数. 为了方便不同的计算过程, 这两种复概率幅的写法可能都会用到. $f(\omega)$ 究竟是正实数还是复数, 可以简单地从傅里叶变换的形式辨别. (9.1.12) 式是一个单光子纯态, 表现在: (1) 每一个光电探测事件都是由一个具有相干叠加波包的单光子产生; (2) 所有测到的光电探测事件都是从相同的单光子态产生, 它们构成一个均匀的系综.

远场条件下, 我们将场算符简化成如下形式:

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(+)}(z,t) &\simeq \mathcal{E}_0 \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\, \hat{a}(\omega) \\ \hat{E}^{(-)}(z,t) &\simeq \mathcal{E}_0 \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\, \hat{a}^{\dagger}(\omega)\end{aligned} \tag{9.1.13}$$

其中将频率的缓变项当作常数处理, 即 $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_0$. 场算符是从 $t=0$、$z=0$ 的源处一直传播到光电探测事件的时空坐标 (z,t) 处. 为了简化标记, 下面计算中我们进一步进行归一化处理, 令 $\mathcal{E}_0 = 1$.

一阶相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 的计算如下

$$\begin{aligned}
&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2) \\
&= \langle \Psi |\, \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\, \hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\, |\Psi\rangle \\
&= \sum_n \langle \Psi | \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1) | n\rangle\langle n | \hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) | \Psi\rangle \\
&= \Big[\int \mathrm{d}\omega\, f^*(\omega)\, \langle 0\, |\hat{a}(\omega)\Big]\Big[\int \mathrm{d}\omega''\, \hat{a}^{\dagger}(\omega'')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega''t_1-k''z_1)}\Big]|\, 0\rangle \\
&\quad \times\langle 0\,|\Big[\int \mathrm{d}\omega'''\, \hat{a}(\omega''')\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega'''t_2-k'''z_2)}\Big]\Big[\int \mathrm{d}\omega' f(\omega')\, \hat{a}^{\dagger}(\omega')|\, 0\rangle\Big] \\
&= \Big\{\int \mathrm{d}\omega\, f^*(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t_1-kz_1)}\Big\}\Big\{\int \mathrm{d}\omega' f(\omega')\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega' t_2-k'z_2)}\Big\} \\
&= \big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(\tau_1-t_0)}\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_0}\big\{\, f(\nu)\,\big\}\big]\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_2-t_0)}\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\big\{\, f(\nu)\,\big\}\big]
\end{aligned} \tag{9.1.14}$$

在傅里叶变换中我们用到了 $f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$. 在 (9.1.14) 式中, 和以前一样, 我们定义 $\nu = \omega - \omega_0$, $t_j = t - s_j/c$ (真空中), $j=1,2$ 和 $\tau_j = t_j - z_j/c$ (真空中). 推导上式过程中, 我们用到了完备关系

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

对于纯态单光子波包, $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 一般不能写成关于 t_1-t_2 的稳态

函数, 但是, 很容易将它写成两个含时波包 $\Psi^*(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$ 的乘积,

$$\Psi(z_j,t_j)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_j-t_0)}\mathcal{F}_{\tau_j-t_0}\{f(\nu)\} \tag{9.1.15}$$

这里我们引入 t_0 作为原子跃迁生成波包的时间. 有些情况下, 我们将波包写成如下形式

$$\Psi(z_j,t_j)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_j-t_0)}\mathcal{F}_{\tau_j}\{f(\nu)\}$$

这个形式中相位因子已经归并到了复振幅 $f(\nu)$ 中. 含相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$ 的复函数 $f(\nu)$ 的傅里叶变换将波包从 τ_j 平移到 τ_j-t_0. 很显然, 一阶时间相干由有效波函数和其共轭函数的交叠程度决定.

和互相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 类似, 自相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_1,t_1)$ 和 $G^{(1)}(z_2,t_2;z_2,t_2)$ 可以表示成含时波包 $\Psi(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$ 与它们自己的复共轭:

$$\begin{aligned}G^{(1)}(z_1,t_1;z_1,t_1)&=\left|\mathcal{F}_{\tau_1-t_0}\{f(\nu)\}\right|^2=\left|\Psi(z_1,t_1)\right|^2\\ G^{(1)}(z_2,t_2;z_2,t_2)&=\left|\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\{f(\nu)\}\right|^2=\left|\Psi(z_2,t_2)\right|^2\end{aligned} \tag{9.1.16}$$

在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处测得一个光电探测事件的概率可以写成波包 $\Psi(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$ 叠加的形式:

$$\begin{aligned}&P(\boldsymbol{r},t)\propto|\,\Psi(\boldsymbol{r},t)\,|^2\\ &=|\,\Psi(z_1,t_1)+\Psi(z_2,t_2)\,|^2\\ &=\left[|\,\Psi(z_1,t_1)|^2+|\,\Psi(z_2,t_2)|^2+\Psi^*(z_1,t_1)\Psi(z_2,t_2)+\Psi(z_1,t_1)\Psi^*(z_2,t_2)\right]\end{aligned} \tag{9.1.17}$$

量子力学里并没有定义单光子的波函数, 然而有趣的是, 我们发现在 (9.1.17) 式中, $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 的作用就像是波函数. 我们定义 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 为有效波函数. 有效波函数代表了在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 观察到一个单光子的概率幅, 或者是在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 发生一个光电探测事件的概率幅. 在上面实验中, 有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 具有两个不同但又不可区分[13]的振幅 $\Psi(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$, 它们分别代表在 (z_1,t_1) 处观察到一个光子的概率幅和在 (z_2,t_2) 处观察到一个光子的概率幅. 每一个概率幅都是时空域上的波包. 总的有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 就是两个有效波函数或者两个时空域上动态波包叠加的结果. 有效波函数反映了光子的波粒二象性. 于是, 归一化的一阶时间相干度也可以写成光子的有效波函数的形式:

$$g^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)=\frac{\Psi^*(z_1,t_1)\,\Psi(z_2,t_2)}{\sqrt{|\,\Psi(z_1,t_1)\,|^2\,|\,\Psi(z_2,t_2)\,|^2}} \tag{9.1.18}$$

[13] 注意, 这里的 "不可区分" 是针对 $(\boldsymbol{r},t)$ 处的光电探测事件而言的.

2. 混沌热光

和 8.8 节中混沌热光的辐射模型类似, 我们假设远场处有一个点光源. 点源包含了大量独立的随机辐射的原子, 它们随时可以发生两能级的原子跃迁. 只考虑 8.8 节中的对探测器 D 的光电探测事件的低阶贡献, 一阶时间自相干和互相干函数可以根据下式计算

$$G^{(1)}(z_j,t_j;z_k,t_k)=\left\langle\langle\Psi|\hat{E}^{(-)}(z_j,t_j)\hat{E}^{(+)}(z_k,t_k)|\Psi\rangle\right\rangle_{\text{Ensemble}} \tag{9.1.19}$$

其中 $j=1,2$, $k=1,2$, 并且

$$|\Psi\rangle=\sum_n c_n\int \mathrm{d}\omega\, f_n(\omega)\,\hat{a}_n^{\dagger}(\omega)\,|0\rangle=\sum_n c_n|\Psi_n\rangle$$

它是热光场的一阶近似, 它代表 (1) 产生光电探测事件的光子的状态, 是一个涉及所有可能原子跃迁的所有可能单光子态的非相干叠加; (2) 从大量独立的随机辐射的原子跃迁中产生的大量光子的状态, 它是一个非均匀的系综. 由于热辐射本质上是随机的, $G^{(1)}(z_j,t_j;z_k,t_k)$ 也可以通过密度算符来计算

$$G^{(1)}(z_j,t_j;z_k,t_k)=\mathrm{tr}\,\hat{\rho}^{(1)}\hat{E}^{(-)}(z_j,t_j)\hat{E}^{(+)}(z_k,t_k) \tag{9.1.20}$$

密度算符的形式为

$$\hat{\rho}^{(1)}=\sum_n P_n\,|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

或者为

$$\hat{\rho}^{(1)}=\int \mathrm{d}\omega\,|f(\omega)|^2\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)|0\rangle\langle 0|\,\hat{a}^{\dagger}(\omega)$$

(9.1.19) 式和 (9.1.20) 式唯一的差别在于, 推导 (9.1.20) 式中密度算符时从最开始就考虑了系综平均. 为了展示量子力学的一个完整的处理过程, 下面的计算基于 (9.1.19) 式. 这样会重复系综平均的练习, 与计算密度算符类似.

将远场算符 $\hat{E}^{(-)}(z_j,t_j)$ 和 $\hat{E}^{(+)}(z_k,t_k)$

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(-)}(z_j,t_j)&=\sum_m\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_j}\,\hat{a}_m^{\dagger}(\omega)\equiv\sum_m\hat{E}_m^{(-)}(z_j,t_j)\\ \hat{E}^{(+)}(z_k,t_k)&=\sum_n\int \mathrm{d}\omega'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_k}\,\hat{a}_n(\omega')\equiv\sum_n\hat{E}_n^{(+)}(z_k,t_k)\end{aligned} \tag{9.1.21}$$

代入 (9.1.19) 式, 计算得到自相干函数 $G(z_j,t_j;z_j,t_j)$,$j=1,2$ 为

$$G^{(1)}(z_j,t_j;z_j,t_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\langle \sum_m c_m^* \langle \Psi_m | \hat{E}^{(-)}(z_j,t_j)\, \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \Big\langle \sum_l \langle \sum_m c_m^* \langle \Psi_m | \hat{E}^{(-)}(z_j,t_j) |l\rangle \langle l | \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \Big\langle \Big| \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big|^2 \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \Big\langle \big| \Psi(z_j,t_j) \big|^2 \Big\rangle_{\text{Ensemble}}
\end{aligned} \tag{9.1.22}
$$

其中我们引入了光子系统的有效波函数:

$$
\Psi(z_j,t_j) \equiv \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle = \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) | \Psi \rangle \tag{9.1.23}
$$

第 n 个光子的有效波函数为:

$$
\Psi_n(z_j,t_j) \equiv \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(z_j,t_j) | \Psi_n \rangle \tag{9.1.24}
$$

且

$$
\Psi(z_j,t_j) = \sum_n c_n\, \Psi_n(z_j,t_j) \tag{9.1.25}
$$

将 (9.1.15) 式的有效波函数代入 (9.1.22) 式, 经下列系综平均后得到 $G^{(1)}(z_j, t_j; z_j, t_j)$:

$$
\begin{aligned}
& G^{(1)}(z_j,t_j;z_j,t_j) \\
&= \Big\langle \sum_{m,n} c_m^* c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0m}-t_{0n})} \mathcal{F}^*_{\tau_j - t_{0m}} \big\{ f(\nu) \big\}\, \mathcal{F}_{\tau_j - t_{0n}} \big\{ f(\nu) \big\} \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&\simeq \sum_n |c_n|^2 \, \big| \mathcal{F}_{\tau_j - t_{0n}} \big\{ f(\nu) \big\} \big|^2 \\
&= \sum_n |c_n|^2 \big| \Psi_n(z_j,t_j) \big|^2
\end{aligned} \tag{9.1.26}
$$

其中我们假设大量的原子跃迁具有相同的频谱分布和相同的中心频率 ω_0. (9.1.26) 式的物理含义, 特别是第 m 和 n 个有效波函数交叉项之间的相消, 和热光的经典模型的物理含义是类似的. 经典模型中考虑的也是大量独立的随机辐射子源产生的大量波包, 唯一不同的是: 经典的波包被光子的有效波函数代替了.

用类似的方法, 我们计算互相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2) = G^{*(1)}(z_2,t_2; z_1,t_1)$ 得到,

$$
\begin{aligned}
& G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2) \\
&= \Big\langle \sum_m c_m^* \langle \Psi_m | \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\, \hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\langle \sum_l \langle \sum_m c_m^* \langle \Psi_m | \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)|l\rangle\langle l|\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \Big\langle \sum_m c_m^* \langle \Psi_m | \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)|0\rangle\langle 0|\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) \sum_n c_n |\Psi_n\rangle \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&= \big\langle \Psi^*(z_1,t_1)\,\Psi(z_2,t_2)\big\rangle_{\text{Ensemble}} \qquad (9.1.27)
\end{aligned}
$$

其中, 我们也定义了光子系统的有效波函数和第 n 个光子的有效波函数, 与 (9.1.23) 式和 (9.1.24) 式类似.

将 (9.1.15) 式的有效波函数带入 (9.1.27) 式, 将 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 写成

$$
\begin{aligned}
&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2) \\
&\propto \Big\langle \sum_{m,n} c_m^* c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0m}-t_{0n})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\, \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0m}}\big\{f(\nu)\big\}\, \mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\big\{f(\nu)\big\} \Big\rangle_{\text{Ensemble}} \\
&\simeq \sum_n |c_n|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau} \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0n}}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\{f(\nu)\} \qquad (9.1.28) \\
&= \sum_n |c_n|^2\, \Psi_n^*(z_1,t_1)\,\Psi_n(z_2,t_2)
\end{aligned}
$$

(9.1.28) 式表明一阶时间相干性由有效波函数和其复共轭的交叠和非交叠确定. 这和热光的经典模型的结论是一样的.

因此, 在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处的 D 光子计数器观测到光电探测事件的概率为:

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{r},t) &\propto G_{11}^{(1)} + G_{22}^{(1)} + G_{12}^{(1)} + G_{21}^{(1)} \\
&\propto \sum_n |c_n|^2 \Big[\big|\Psi_n(z_1,t_1)\big|^2 + \big|\Psi_n(z_2,t_2)\big|^2 \\
&\quad + \Psi_n^*(z_1,t_1)\,\Psi_n(z_2,t_2) + \Psi_n(z_1,t_1)\,\Psi_n^*(z_2,t_2)\Big] \\
&= \sum_n |c_n|^2 \big|\Psi_n(z_1,t_1) + \Psi_n(z_2,t_2)\big|^2 \qquad (9.1.29)
\end{aligned}
$$

(9.1.29) 式表明: 对于热光或者由大量的独立、随机产生的光子系统而言, "…… 光子 …… 只和自身干涉. 两个不同光子之间从来不发生干涉". 其物理图像很清楚: 每一个独立、随机产生的光子根据自己在时空中的概率分布函数产生干涉图案. 这些单独的单光子干涉的总和决定最后所观察到的干涉. 将 (9.1.29) 式中的有效波函数 $\Psi_n(z_j,t_j)$ 用它的傅里叶变换形式的波包代替, 我们得到

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{r},t) \propto \sum_n |c_n| \Big[&\big|\mathcal{F}_{\tau_1-t_{0n}}\{f(\nu)\}\big|^2 + \big|\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\{f(\nu)\}\big|^2 \\
&+2\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0n}}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\{f_n(\nu)\}\Big]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \int \mathrm{d}t_{0n}\left[\left|\mathcal{F}_{\tau_1-t_{0n}}\{f(\nu)\}\right|^2+\left|\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\{f(\nu)\}\right|^2\right.\\
&\quad \left.+2\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0n}}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0n}}\{f_n(\nu)\}\right]\\
&\propto 1+\mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}\cos\omega_0\tau
\end{aligned}\tag{9.1.30}$$

其中, 我们假设 t_{0n} 是随机的、连续分布的, 且 $|c_n|^2=$ 常数. 同样, 对图 9.1.1 中的实验配置我们定义了 $\tau=\tau_1-\tau_2=(s_2-s_1)/c$. 对 t_0 的积分数学上等价于一个时间积分. 根据 Parseval 定理, 积分很容易计算:

$$G^{(1)}(z_j,t_j;z_j,t_j)\simeq\int \mathrm{d}t_0\left|\mathcal{F}_{\tau_j-t_0}\{f(\nu)\}\right|^2\simeq 1$$

根据 Wiener-Khintchine 定理有:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)&\simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\int \mathrm{d}t_0\,\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_0}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_0}\{f(\nu)\}\\
&\simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}
\end{aligned}$$

这些计算和第 5 章中经典场的计算类似. 有一点不同的是: 对于量子有效波函数, 频谱分布函数 $f(\nu)$ 是归一化的:

$$\int \mathrm{d}\nu\,|f(\nu)|^2=1$$

对一阶自相干函数和互相干函数, 高阶近似的贡献也不难计算. 例如, 可直接得出混合的双光子态产生相同的一阶时间互相干函数:

$$\begin{aligned}
&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&=\sum_{m<n}|c_n|^2|c_m|^2\langle\Psi_n|\langle\Psi_m|\hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\sum_{m<n}|c_n|^2|c_m|^2|\,\Psi_m\rangle|\,\Psi_n\rangle\\
&\simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}
\end{aligned}\tag{9.1.31}$$

3. 相干态

还是考虑杨氏双孔干涉仪, 其中入射场可以通过两条不同的路径传播到光电探测器, 产生一个光电探测事件. 在这个练习中, 我们将入射场写成一个单偏振的多模相干态, 即一组单模相干态的直积:

$$|\{\alpha\}\rangle=\prod_{\boldsymbol{k}}|\alpha_{\boldsymbol{k}}\rangle$$

下面计算一维的时间互相干函数:

$$G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle\{\alpha\}| \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) |\{\alpha\}\rangle \\
&= \langle\{\alpha\}| \int \mathrm{d}\omega\, \hat{a}^{\dagger}(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_1} \int \mathrm{d}\omega'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2}\, \hat{a}(\omega') |\{\alpha\}\rangle \\
&= \int \mathrm{d}\omega\, a(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(\omega)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_1} \int \mathrm{d}\omega'\, a(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2} \\
&= E^*(z_1,t_1)\, E(z_2,t_2)
\end{aligned}
\tag{9.1.32}
$$

其中 $\alpha(\omega) = a(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}$ 是湮没算符 $\hat{a}(\omega)$ 的本征值. (9.1.32) 式中最后的积分中, $a(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\omega)}$ 是频率为 ω 的傅里叶模式的复振幅. 注意 (9.1.32) 式中的场算符采用的是 (9.1.13) 式, 而不是 (9.1.21) 式. 有趣的是, 相干态的一阶时间互相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 形式上和经典场 $E(z_1,t_1)$ 以及 $E(z_2,t_2)$ 有关. 后面的计算也和经典处理相同.

9.2 光子和有效波函数

如果光场用光子数 $n=1$ 的纯态表征, 可以得到一阶相干函数

$$
\begin{aligned}
&G^{(1)}(\boldsymbol{r}_i,t_i;\boldsymbol{r}_j,t_j) \\
&= \langle\, \Psi \,|\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j) \,|\, \Psi \,\rangle \\
&= \sum_n \langle\, \Psi \,|\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i) \,|\, n \,\rangle \langle\, n \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j) \,|\, \Psi \,\rangle \\
&= \langle\, \Psi \,|\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i) \,|\, 0 \,\rangle \langle\, 0 \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j) \,|\, \Psi \,\rangle \\
&= \Psi^*(\boldsymbol{r}_i,t_i)\, \Psi(\boldsymbol{r}_j,t_j)
\end{aligned}
\tag{9.2.1}
$$

第三行中用到了完备关系

$$
\sum_n |\, n \,\rangle \langle\, n \,| = 1 \tag{9.2.2}
$$

(9.2.1) 式中的有效波函数为

$$
\Psi(\boldsymbol{r}_j,t_j) = \langle\, 0 \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j) \,|\, \Psi \,\rangle \tag{9.2.3}
$$

其中 $j=1,2$.

不难发现有效波函数有如下的线性叠加关系:

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{r},t) &= \langle\, 0 \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \,|\, \Psi \,\rangle \\
&= \langle\, 0 \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1) \,|\, \Psi \,\rangle + \langle\, 0 \,|\, \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2) \,|\, \Psi \,\rangle \\
&= \Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1) + \Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)
\end{aligned}
\tag{9.2.4}
$$

其中假设

$$\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)=\hat{E}_1^{(+)}(\boldsymbol{r},t)+\hat{E}_2^{(+)}(\boldsymbol{r},t)=\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)+\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)$$

1. 海森伯表象和薛定谔表象

$G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\Psi^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处光场的一阶互关联函数, $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 用来标记场算符的时空坐标. 然而, 正如我们之前所强调的, $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 不是直接在这两点测量到的. 光电探测事件发生在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处 (见图 9.1.1), $t_1=t-s_1/c$, $t_2=t-s_2/c$ 分别表示光场经过上孔 $\boldsymbol{r}_1$ 和下孔 $\boldsymbol{r}_2$ 的时刻. 有效波函数一般在海森伯表象中计算, 时空坐标包含在场算符之中. 在海森伯表象中, 量子态 (或者波函数) 不随时间演化, 但是算符是含时的.

另一方面, 波函数这一概念属于薛定谔表象. 在薛定谔表象中, 波函数是含时的. 光电探测器的计数率正比于在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处湮没一个光子产生一个光电子的概率. 这一概率等于概率幅或者光子有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 的模平方. 总的有效波函数 (概率幅) $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 则是两个早先时刻的有效波函数 (概率幅) $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 叠加的结果. 我们再次提醒读者注意, 与经典场类似, $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 只是在形式上表达为早先时刻在上小孔 $\boldsymbol{r}_1$ 处和下小孔 $\boldsymbol{r}_2$ 处的概率幅, 测量并非发生在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$. 尽管光程不一样, $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 对于发生在时空点 $(\boldsymbol{r},t)$ 处的同一光电子事件有共同贡献, 这是由量子力学叠加原理所决定的. 光子有效波函数的物理图像与薛定谔表象中粒子的波函数是一样的.

有效波函数是一个非常有用的概念. 它从海森伯表象中计算, 却在薛定谔表象中解释. 用到的数学无非是基本的傅里叶变换.

尽管有效波函数是在海森伯表象中定义的, 很容易证明:

$$\Psi(r,t)=\langle\,0\,|\,\hat{E}^{(+)}(r,t)\,|\,\Psi(0)\,\rangle=\langle 0|\,\hat{E}^{(+)}(0)\,|\,\Psi(t)\,\rangle \tag{9.2.5}$$

以前面的计算为例, 借助于同一个格林函数 $g(r,t;\omega)$, 既可以将初态 $|\Psi(0)\rangle$ 演化到最终测量的末态 $|\Psi(t)\rangle$, 也可以把场算符从探测器向后传播到光源.

2. 物理图像

将单光子态代入 (9.2.3) 式, 光子的含时有效波函数为

$$\Psi(z_j,t_j)=\mathcal{F}_{\tau_j}\{f(\nu)\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_j} \tag{9.2.6}$$

其中 $\tau_j=t_j-z_j/c$ (真空中). 如果没有特别说明, 这一章剩余章节关于有效波函数的计算都假设在真空中. (9.2.6) 式表示时空中的一种典型波包.

高斯波包的示意图和图 1.2 中展示的一样. (9.2.6) 式和经典波包 (1.24) 式毫无差别, 这完全在意料之中. (9.2.6) 式和 (1.24) 式描述的是光场的相同的动力学过程, 区别在于有效波函数与量子化场和光子的概念相关, 或者说与光子在时空中的动力学图像有关.

3. 光子与自身的干涉

根据有效函数和光子的概念, 我们对杨氏双孔实验有了一个新的视角: 光子从时空点 $(\boldsymbol{r}=0, t=0)$ 处的光源发出 (事件 1), 然后激发了时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 处的原子产生一个光电子 (事件 2). 从光源到光子计数器, 光子有两条可能的路径. 从量子力学角度看, 这两条可能的路径分别对应两个对有效波函数叠加产生贡献的概率振幅. 在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 处产生一个光电子的概率取决于两个概率振幅之间相对 "相位" 延迟和 "群" 延迟, 也就是由波包 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 之间的延迟决定. 如果 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 完全分开, 导致 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)=0$, 就不会有干涉. 如果 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 在时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 不可区分或者部分不可区分, 导致 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \neq 0$, 就会观测到干涉现象. 波包之间交叠越大, 干涉可见度越大, 相干度越高. 图 9.2.1 示意性地画出了两个部分交叠的高斯波包, 干涉条纹的可见度应该小于 100%.

基于图 9.2.1, 我们足以得出 "光子只和它自身干涉" 这一结论. 在杨氏双孔实验中, 我们无法知道单光子究竟是通过哪一条缝 (或两条缝), 但是, 我们却可以精确地预测光电探测器的计数率, 它是光子两个有效波函数之间相对延迟的函数.

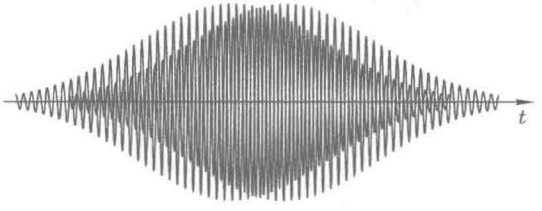


图 9.2.1 在光计数探测器处, 两个高斯波包部分重叠的示意图. 干涉条纹可见度小于 100%.

9.3 一阶相干 (关联) 的测量

前面已经强调过, 对光子或者说波包的一次测量, 除了记录了一次光电探测事件以外, 不能提供任何有用的物理信息. 所以, 一般要进行对大量光子的累积测量. 这种测量称为光子计数. 理想的点状光电探测器

计录的是在选定坐标处和选定时间段内产生光电子事件的数目. 也就是说, 它给出的是时间平均的光子计数率

$$R_d(\boldsymbol{r}) = \int_T \mathrm{d}t \, \langle \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \rangle \tag{9.3.1}$$

其中 T 是光子计数的积累时间段. 在杨氏双孔干涉仪中, 光子计数器测量的是经时间平均的一阶相干函数

$$\begin{aligned} R_d = \int_T \mathrm{d}t \, \big[& G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1) + G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ & + G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) + G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_1,t_1) \big] \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

其结果就是杨氏双孔干涉图案. 我们知道, 对于稳态场, 时间平均和系综平均是等价的. 时间平均对稳态场的一阶相干函数没有影响. 然而对于含时的有效波函数或一阶相干函数, 时间平均值可能是非平庸的. 那么对单光子态的一阶相干函数进行时间平均后究竟能给出什么信息呢?

例 (I): 单光子纯态

下面着重讨论一阶互相干函数或互关联函数 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$. 对于单光子纯态, 一阶互相干函数是时空中两个波包的乘积: $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \Psi^*(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Psi(\boldsymbol{r}_2,t_2)$. 一般来说, 它不能写成 $t_1 - t_2$ 的函数.

在杨氏双孔干涉仪中, 单光子纯态的一阶互相干函数 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的时间平均是可以测量的, 它形式上可以写成

$$\begin{aligned} & \int_T \mathrm{d}t \;\; \Psi^*(z_1,t_1)\,\Psi(z_2,t_2) \\ \simeq & \int_{T\sim\infty} \mathrm{d}t \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t_1 - k_0 z_1)} \mathcal{F}^*_{\tau_1}\big\{f(\nu)\big\} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t_2 - k_0 z_2)} \mathcal{F}_{\tau_2}\big\{f(\nu)\big\} \\ = & \, \mathcal{F}_\tau\big\{|f(\nu)|^2\big\} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau} \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

其中 $\nu = \omega - \omega_0$, ω_0 是频谱的中心频率, $\tau = [(z_2 + s_2) - (z_1 + s_1)]/c$, z_1 和 z_2 取任意值.

将 (9.3.3) 式代入到 (9.3.2) 式, 并假设每个光子通过上、下小孔的概率相等, 在选定的坐标处, 光子探测器的时间平均计数率是 τ 的函数:

$$R_d(\tau) = R_0 \, [\, 1 + \mathcal{F}_\tau\big\{|f(\nu)|^2\big\} \, \cos\omega_0\tau \,] \tag{9.3.4}$$

其中 R_0 是自相关函数对时间积分后所得到的一个常数. 图 9.3.1 是光子计数器的一个测量结果. 它的时间平均计数率是 τ 的函数. 这是我们能够直接从实验中得到的唯一信息.

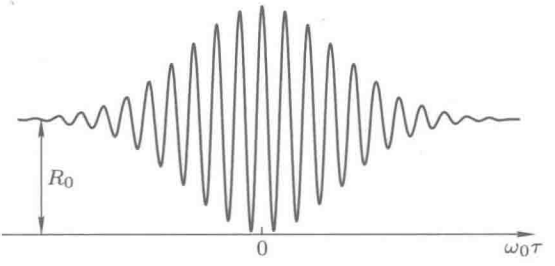


图 9.3.1 杨氏双孔实验中光子探测器测得的计数率, 它是 $\omega_0\tau$ 的函数. 观察到的干涉图案代表了时间平均的一阶相干性. 在这个测量中, 频谱假设为高斯型.

例 (II): 单光子混态

对于单光子混态, 时间平均的一阶互相干函数的计算也很直接:

$$\begin{aligned}\int_T \mathrm{d}t\; G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2) &= \int_T \mathrm{d}t \sum_n P_n\, G_n^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\ &\simeq \int_T \mathrm{d}t \int \mathrm{d}t_{0n}\, G_n^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\ &\propto \mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}\,\cos\omega_0\tau \qquad (9.3.5)\end{aligned}$$

很明显, 在这种情况下, 时间平均和统计系综平均是等价的. 虽然本例中系综平均之后时间平均变成了一个平庸计算, 但时间累积积分对光子计数测量总是必要的. 观测到的干涉图案和例 (I) 中一样:

$$R_d(\tau) = R_0\,[1 + \mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}\,\cos\omega_0\tau\,]$$

所以, 一阶相干性的时间平均测量不能区分纯态与混态. 在前面的章节中, 经典理论中已经阐明过这一观点.

9.4 独立辐射源之间的干涉

这一节将讨论两个独立辐射源之间的干涉. 为了和前面的讨论一致, 实验装置仍然是杨氏双孔干涉仪 (见图 9.4.1). 两个独立的辐射源分别放置在上、下小孔后面, 分别用 A 和 B 表示. 下面我们计算不同输入态时的互相干函数. A 孔和 B 孔后面的输入态分别用 A 和 B 表示.

情况 (I): 独立的相干态

假设输入态是多模相干态

$$|\,\Psi\,\rangle = |\,\Psi_A\rangle|\,\Psi_B\rangle = |\{\alpha\}\rangle|\{\beta\}\rangle$$

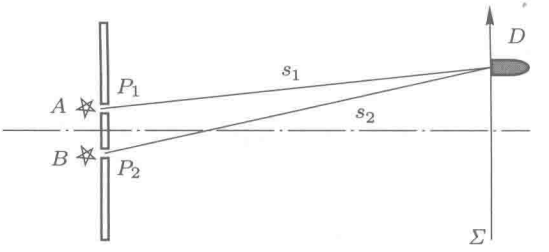


图 9.4.1 杨氏双孔干涉实验的装置图. 干涉仪除了光源部分, 其它和我们之前讨论的一样. 两个独立的入射光源处于上、下小孔的后面, 分别用 A 和 B 表示.

在这个装置中, (z_1,t_1) 和 (z_2,t_2) 处的场算符为

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(-)}(z_1,t_1) &= \int \mathrm{d}\omega \hat{a}^+(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_1}\\ \hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) &= \int \mathrm{d}\omega' \hat{b}(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2}\end{aligned} \tag{9.4.1}$$

因为相干态是场算符的本征态, 通过简单的计算就可以将互相干函数化成两个共轭波包的乘积:

$$\begin{aligned}&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\ &= \int \mathrm{d}\omega\, \alpha^*(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_1} \int \mathrm{d}\omega'\, \beta(\omega')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2}\\ &= \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0\alpha}}\big\{a(\nu)\big\}\,\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0\beta}}\big\{b(\nu)\big\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0\alpha}-t_{0\beta})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}\end{aligned} \tag{9.4.2}$$

不难发现: 如果实验观测达到如下条件 (1) 两个波包交叠; (2) 在观测时间内 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0\alpha}-t_{0\beta})}$ 为常数, 此时 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 和 $G^{(1)}(z_2,t_2;z_1,t_1)$ 形成可观测的干涉图案. 实验条件 (1) 可以通过让 $s_1 \simeq s_2$ 来实现. 条件 (2) 可以这样实现: 要么对两个输入光源进行 "锁相", 要么在比输入光源的相干时间短得多的时间内观测, 比如采用快响应的胶片进行曝光. 以上结论已经都被实验证实. 实际上, 在激光发明之后不久, Mandel 和他的合作者就演示了两个独立激光束之间的一阶干涉.

情况 (II): 独立的单光子波包

虽然在现代光学实验室里可以容易地演示独立激光束间的一阶相干, 我们仍然有兴趣了解当两个独立入射源都处于单光子水平时将发生什么现象. 下面的测量中, 我们将辐射源换成两个独立的原子跃迁. A 原子位于上面小孔; B 原子放置在下面小孔处. 类似 8.8 节中热光的模型, 辐射的量子态可以写成

$$|\Psi\rangle = \big[|0\rangle + \epsilon|\Psi_A\rangle\big]\big[|0\rangle + \epsilon|\Psi_B\rangle\big]$$

$$= |0\rangle + \epsilon\big[|\Psi_A\rangle + |\Psi_B\rangle\big] + \epsilon^2\big[|\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle\big] \tag{9.4.3}$$

其中

$$|\Psi_A\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_A(\omega)\,\hat{a}^\dagger(\omega)|\,0\,\rangle,\ |\Psi_B\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_B(\omega)\,\hat{b}^\dagger(\omega)|\,0\,\rangle$$

这里, 复振幅 $f_A(\omega)$ 和 $f_B(\omega)$ 的频谱分布一致, 但是由跃迁的初始时刻决定的相位不同.

现在我们用 (9.4.1) 式的场算符来计算一阶时间互相干函数. 因为态是写成 ϵ 的一阶展开和二阶展开的求和形式, 将计算分为两部分: (1) 输入态取关于 ϵ 的一阶展开式; (2) 输入态取关于 ϵ^2 得二阶展开式.

(1) $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle + |\Psi_B\rangle$

计算一阶时间互相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$, 得到:

$$\begin{aligned}
&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&= \big[\langle\Psi_A| + \langle\Psi_B|\big]\hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\big[|\Psi_A\rangle + |\Psi_B\rangle\big]\\
&= \Psi_A^*(z_1,t_1)\,\Psi_B(z_2,t_2)\\
&\simeq \mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0A}}\big\{f(\nu)\big\}\,\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0B}}\big\{f(\nu)\big\}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0A}-t_{0B})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau}
\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

以上一阶展开计算的结果与相干态相同, 只是一次光子探测事件不能给出任何有用信息. 在单光子水平下的实验有必要对大数量光子进行测量. 然而, 在时间累积测量中, $t_{0A}-t_{0B}$ 会不时地随机变化. 这和热光情形完全一样. 对 $t_{0A}-t_{0B}$ 作平均后, 就观察不到干涉了. 那么对于两个独立的原子跃迁是否有可能观察到干涉呢? 原则上, 如果我们让每一个独立光子对每时每刻都保持 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t_{0A}-t_{0B})}=$ 常数, 那么就能观察到干涉. 如何对两个独立原子跃迁 "锁相", 仍然是一个研究课题.

(2) $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle$

计算一阶时间互相干函数 $G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 为:

$$\begin{aligned}
&G^{(1)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&= \langle\Psi_A|\langle\Psi_B|\,\hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\,|\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle\\
&= 0
\end{aligned} \tag{9.4.5}$$

二阶展开对一阶相干没有贡献. 在下面一节中我们将讨论: ϵ 的二阶展开 $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle$, 可能会对二阶相干测量有贡献. 借助符合计数器, 即, 记录两个独立光子计数探测器同时测量到光子的事件, 可以观测到非平庸的关联或干涉.

9.5 量子二阶相干度

辐射场的二阶相干定义为:

$$\begin{aligned} & G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ \equiv & \langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle \\ = & \left\langle \langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle_{\mathrm{QM}}\right\rangle_{\mathrm{Ensemble}} \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

它是时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处正则序场算符的期望值. 按照光的量子理论, $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 度量的是在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处联合观测到辐射场中一对光子的概率. 和一阶相干或一阶关联函数不同的是: 二阶相干或者二阶关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是通过时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处两个光电探测器直接测量到的. 特别需要注意的是, 这里的 t_1、t_2 代表两个光电探测事件的物理时刻, 或者说是一对光子的记录时刻, 而不是在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处光电探测事件的两个更早的 "参考时刻". 图 9.5.1 所示的就是测量 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的实验装置. 为了更好地和一阶相干作对比, 测量用到的还是杨氏双孔干涉仪, 唯一不同之处就是在上、下小孔后面各放置一个光子探测器 D_1 和 D_2 来进行符合测量. 由光电探测的量子理论得知: 符合计数率度量的是在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$、$(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处观测到两光子的联合探测事件的概率, 它正比于正则序的场算符的期望值.

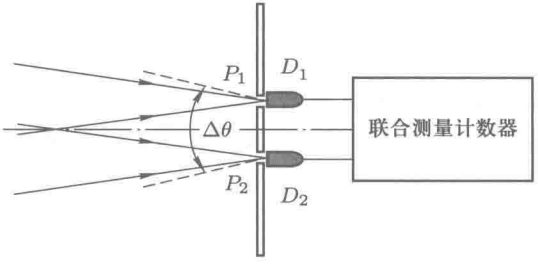


图 9.5.1 测量二阶相干性的装置示意图. 从光源发出的任意两个光子, 在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t)$ 处产生一次联合探测事件. 除了实验是在单光子水平下, 这个装置和 HBT 光强干涉仪类似. 联合探测电路记录双光子联合探测事件的数目.

为了和一阶相干理论一致, 我们定义一个归一化的相关函数, 称二阶相干度:

$$\begin{aligned} & g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ \equiv & \frac{\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle}{\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle} \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

对于双光子纯态, 与单光子有效波函数类似, 通过计算二阶相干函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 我们定义双光子有效波函数, 它表示在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处联合观察到两光子的概率幅:

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \qquad (9.5.3)\\
&=\langle\,\Psi\,|\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\\
&=\sum_n\langle\,\Psi\,|\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,|\,n\,\rangle\langle\,n\,|\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\\
&=\langle\,\Psi\,|\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,|\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\\
&=|\,\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\,|^2
\end{aligned}$$

其中第三行使用了完备关系

$$\sum_n|\,n\,\rangle\langle\,n\,|=1$$

(9.5.3) 式中定义了对于双光子纯态 $|\,\Psi\,\rangle$ 的双光子有效波函数

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\langle\,0\,|\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle \qquad (9.5.4)$$

对于双光子混态, $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 为

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\big\langle\langle\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle_{\rm QM}\big\rangle_{\rm Ensemble}\\
&={\rm tr}[\,\hat\rho\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,]\\
&=\sum_j P_j\,\langle\,\Psi_j\,|\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi_j\,\rangle\\
&=\sum_j P_j\,G_j^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\sum_j P_j\,|\,\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\,|^2 \qquad (9.5.5)
\end{aligned}$$

其中 P_j 是辐射场处于双光子态 $|\,\Psi_j\,\rangle$ 的概率, 且

$$\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)=\langle\,0\,|\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\,\Psi_j\,\rangle \qquad (9.5.6)$$

是在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处联合观测到第 j 对光子的概率幅.

很显然, 辐射场的二阶关联 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 由联合探测的光子对所处的量子态决定. 这并不奇怪, 不同双光子态造成不同的二阶关联. 在接下来的练习中, 我们计算五类量子态: (I) 两个单光子波包的直积态; (II) 热光的两光子混态; (III) 纠缠偶光子态; (IV) $n_\omega=2$ 的粒子数态; (V) 相干态.

在进行下面的计算之前, 我们先介绍一个改装的 HBT 类型的双光子干涉仪, 这个装置对下面的某些分析很有用. 图 9.5.2 是双光子干涉仪的示意图. 从原理上来讲, 这个装置和图 9.5.1 是一样的, 只不过这里使用了一个 50-50 分束器, D_1 和 D_1 分别测量的是透射和反射信号. 这个装置既可以用来测时间关联也可以测空间关联. 例如, 如果固定两个探测器 D_1 和 D_1 的横向坐标使得 $x_1 = x_2$, 而扫描其纵向坐标 z_1 和 z_2 的话, 测得的就是时间关联. 反之, 就是空间关联.

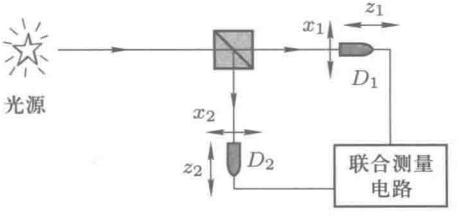


图 9.5.2 采用不同辐射源时, 二阶关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 的测量示意图. D_1 和 D_2 是理想的点探测器, 都可以沿着纵轴和在横向平面内扫描. 在下面的讨论中, 我们假设 D_1 和 D_2 工作在光子计数模式. D_1 和 D_2 加上联合探测电路一起用于符合计数.

类型 (I): 两个单光子波包的直积态

下面计算由一个点光源产生的两个单光子波包直积态的二阶时间关联或二阶时间相干. 基于 8.8 节中关于非相干辐射和相干辐射的简单模型, 我们假设所观察的联合探测事件中, 由原子跃迁 A 产生的光子在 D_1 湮没, 由原子跃迁 B 产生的另一个光子在 D_2 湮没. 进一步我们假设 D_1 和 D_2 的大量联合光电探测事件是从同样的双光子态产生的, 构成一个均匀的系综. 所以, 所测辐射场可以用一个纯态表示, 它是两个单光子波包的直积:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_B\rangle|\Psi_A\rangle \tag{9.5.7}$$

其中

$$|\Psi_A\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_A(\omega)\, \hat{a}^\dagger(\omega)|\,0\,\rangle,\ |\Psi_B\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_B(\omega)\, \hat{b}^\dagger(\omega)|\,0\,\rangle$$

这里的复振幅 $f_A(\omega)$ 和 $f_B(\omega)$ 被看成具有相同的频谱分布, 但具有不同的相位, 相位是在原子跃迁的初始时刻被确定的.

在图 9.5.2 中, 每个单光子波包在分束器处都有 50%-50% 概率反射和透射. 两个波包有一定的概率被 D_1 和 D_2 联合探测到, 然而, 一个单光子

波包是不可能产生 D_1 和 D_2 的符合测量的. 对于远场时间相干测量, 场算符简化为

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(+)}(z_j,t_j)&=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\Big[\int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau_j}\hat{a}(\omega)+\int \mathrm{d}\omega'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'\tau_j}\,\hat{b}(\omega)\Big]\\&\equiv\hat{E}_A^{(+)}(z_j,t_j)+\hat{E}_B^{(+)}(z_j,t_j),\quad j=1,2\end{aligned}$$

等效双光子波函数计算为:

$$\begin{aligned}&\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)\\&=\langle 0|\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(z_1,t_1)|\Psi\rangle\\&=\Psi_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)+\Psi_{BA}(z_1,t_1;z_2,t_2)\end{aligned}\tag{9.5.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)&\equiv\langle 0|\hat{E}_B^{(+)}(z_2,t_2)\hat{E}_A^{(+)}(z_1,t_1)|\Psi\rangle\\&=\langle 0|\hat{E}_A^{(+)}(z_1,t_1)|\Psi_A\rangle\langle 0|\hat{E}_B^{(+)}(z_2,t_2)|\Psi_B\rangle\\&=\Psi_A(z_1,t_1)\Psi_B(z_2,t_2)\\\Psi_{BA}(z_1,t_1;z_2,t_2)&\equiv\langle 0|\hat{E}_A^{(+)}(z_2,t_2)\hat{E}_B^{(+)}(z_1,t_1)|\Psi\rangle\\&=\langle 0|\hat{E}_B^{(+)}(z_1,t_1)|\Psi_B\rangle\langle 0|\hat{E}_A^{(+)}(z_2,t_2)|\Psi_A\rangle\\&=\Psi_B(z_1,t_1)\Psi_A(z_2,t_2)\end{aligned}\tag{9.5.9}$$

(9.5.9) 式中双光子有效波函数代表了两个不同但又不能区分的双光子振幅: (1) 波包 A、B 分别被 D_1、D_2 探测; (2) 波包 A、B 分别被 D_2、D_1 探测; 两个双光子振幅的叠加导致非平庸的二阶关联:

$$\begin{aligned}&G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\&=\big|\Psi_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)+\Psi_{BA}(z_1,t_1;z_2,t_2)\big|^2\\&=G_{11}^{(1)}G_{22}^{(1)}+G_{12}^{(1)}G_{21}^{(1)}\end{aligned}\tag{9.5.10}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{11}^{(1)}G_{22}^{(1)}&=\big|\Psi_A(z_1,t_1)\big|^2\big|\Psi_B(z_2,t_2)\big|^2\\&=\big|\mathcal{F}_{\tau_1-t_{0A}}\{f(\nu)\}\big|^2\big|\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0B}}\{f(\nu)\}\big|^2\\G_{12}^{(1)}G_{21}^{(1)}&=\Psi_A^*(z_1,t_1)\Psi_A(z_2,t_2)\Psi_B^*(z_2,t_2)\Psi_B(z_1,t_1)\\&=\big[\mathcal{F}^*_{\tau_1-t_{0A}}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2-t_{0A}}\{f(\nu)\}\big]\\&\quad\times\big[\mathcal{F}^*_{\tau_2-t_{0B}}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_1-t_{0B}}\{f(\nu)\}\big]\end{aligned}$$

这里波包已经写成了傅里叶变换的形式. 二阶相干函数就这样和一阶自相干及互相干函数有了关系. 上面的这个练习清楚地说明了这个奇特的行为是由双光子态的直积特性决定的.

类型 (II): 热光的双光子混态

现在我们来计算热光的二阶关联或二阶相干. 实验装置如图 9.5.1 或图 9.5.2 所示. 热光的模型还和 8.8 节一样, 取前述结果 $\hat{\rho} \simeq \hat{\rho}^{(1)} + \hat{\rho}^{(2)} + \cdots$, 对二阶关联测量有贡献的低阶近似

$$\hat{\rho}^{(2)} = \sum_j P_j \,|\,\Psi_j\rangle\langle\Psi_j\,| \simeq \sum_{m<n} |c_m|^2|c_n|^2 |\,\Psi_m\rangle|\,\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\langle\Psi_m\,| \tag{9.5.11}$$

其中

$$|\,\Psi_m\rangle = \int \mathrm{d}\omega\, f_m(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_{0m}}\, \hat{a}_m^{\dagger}(\omega)|0\rangle$$

公式 (9.5.11) 中的态是一个双光子的混态, 它描述的是 (1) 产生联合光电探测事件的一对光子的状态. 它是一组彼此正交的配对单光子态的非相干叠加, 产生于所有可能的独立的随机辐射的原子跃迁过程. (2) 大量的联合探测的光子对的总体状态, 每一对都是从随机配对的原子跃迁产生, 所有光子对构成一个非均匀的系综.

场算符和一阶相干测量情况一样:

$$\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j, t_j) = \sum_m \hat{E}_m^{(+)}(\boldsymbol{r}_j, t_j),\ j = 1, 2,$$
$$\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_k, t_k) = \sum_n \hat{E}_n^{(-)}(z_k, t_k),\ k = 1, 2$$

根据 (9.5.11) 式我们来计算一下 $G_j^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$:

$$\begin{aligned}
&G_j^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \qquad\qquad (9.5.12)\\
&= \langle\, \Psi_j \,|\, E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2, t_2) E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2) E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1) \,|\, \Psi_j \,\rangle\\
&= \big|\big[\langle 0|\, E_m^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,|\,\Psi_m\rangle\langle 0|\, E_n^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,|\,\Psi_n\,\rangle\\
&\quad + \langle 0|\, E_n^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\,|\,\Psi_n\rangle\langle 0|\, E_m^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,|\,\Psi_m\rangle\big]\,\big|^2\\
&= \big|\big[\,\Psi_{mn}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) + \Psi_{nm}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\big]\,\big|^2\\
&= \big|\,\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\big|^2
\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \Psi_{mn}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) + \Psi_{nm}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \tag{9.5.13}$$

定义为湮没掉的第 j 对光子的有效波函数, 并有:

$$\begin{aligned}\Psi_{mn}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \langle 0|E_m^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\,\Psi_m\,\rangle\langle 0|E_n^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\,|\,\Psi_n\,\rangle \\ &= \Psi_m(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Psi_n(\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ \Psi_{nm}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \langle 0|E_n^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\,\Psi_n\rangle\langle 0|E_m^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\,\Psi_m\rangle \\ &= \Psi_n(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\Psi_m(\boldsymbol{r}_2,t_2)\end{aligned}$$

代表贡献为一个 D_1 和 D_2 的联合探测事件的两个不同但又不可区分的双光子振幅. 我们还采用了另一种等效的标记来强调 (9.5.13) 式背后所蕴含的特殊的物理意义, 即, 光子对只和自身干涉:

$$\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \mathcal{A}_{mn}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) + \mathcal{A}_{nm}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$$

在这个表示式里, 第 j 对光子 (从随机配对的 m 和 n 原子跃迁中产生) 有两种可能的方式触发第 j 个联合光电测量事件. 这种线性叠加的双光子概率幅属于同一个光子对.

有效波函数 $\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 是 $\mathcal{A}_{mn}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和 $\mathcal{A}_{nm}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的叠加, 这和量子力学中全同粒子的对称波函数非常类似, 这是一个很有趣的现象. 这个奇特的光学干涉现象, 即, 光子对只和其自身干涉, 与经典干涉有概念性的不同. 经典理论认为干涉是电磁场在一个局域时空点叠加的结果, 而量子理论指出, 二阶干涉现象来自于导致两个时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处发生联合探测的两种不同但又不可区分的双光子概率幅的叠加: (1) 光子 m 和光子 n 分别在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 湮没或者 (2) 光子 n 和 m 分别在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 湮没. $\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 不但形式上和全同粒子的对称波函数类似, 更重要的是所起的作用也相同. 于是, 在时空点 $(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 联合湮没一对光子的概率正比于:

$$\begin{aligned}G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \sum_j P_j\,\big|\,\Psi_j(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\big|^2 \\ &\simeq \Big\{\int \mathrm{d}t_{0m}\,\mathrm{d}t_{0n}\,\big|\,\Psi_{mn}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)+\Psi_{nm}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\,\big|^2\Big\} \quad (9.5.14)\end{aligned}$$

其中我们假设了 $P_j\sim$ 常数, 对应随机分布的混沌热光. (9.5.14) 式的物理含义是很清楚的: 每一个测量到的光子对都有两个不同又不可区分的途径来触发 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处 D_1 和 D_2 之间的联合探测. 这两个概率幅的叠加导致双光子干涉图样, 它是 $(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的函数. 大量的这些干涉图样统计相加后得到一个非平庸的二阶相干函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$.

下面, 我们形式上将 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 和一阶相干函数联系起来,

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$$

$$\begin{aligned}
&\propto \int \mathrm{d}t_{0m} \mid \Psi_m(\boldsymbol{r}_1, t_1) \mid^2 \int \mathrm{d}t_{0n} \mid \Psi_n(\boldsymbol{r}_2, t_2) \mid^2 \\
&\quad + \int \mathrm{d}t_{0m}\, \Psi_m(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, \Psi_m^*(\boldsymbol{r}_2, t_2) \int \mathrm{d}t_{0n}\, \Psi_n(\boldsymbol{r}_2, t_2)\, \Psi_n^*(\boldsymbol{r}_1, t_1) \\
&= G_{11}^{(1)} G_{22}^{(1)} + \left| G_{12}^{(1)} \right|^2
\end{aligned} \tag{9.5.15}$$

其中我们用到了缩写标记 $G_{11}^{(1)}$, $G_{22}^{(1)}$, $G_{12}^{(1)}$ 和 $G_{21}^{(1)}$, 它们分别是一阶自相干和互相干函数. 虽然 $G^{(2)}$ 用一阶相干函数来表示, 但是要记住的是 $G^{(2)}$ 和 (9.5.15) 式中的 $|G_{12}^{(1)}|^2$ 是两个独立探测器联合探测的结果, 涉及时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处的两个光子的联合湮没. 辐射场二阶干涉的量子理论给经典物理概念带来了麻烦. 因为双光子概率幅的叠加涉及两个时空分离的独立探测器. 经典的麦克斯韦电磁波理论允许这种叠加吗?

我们利用前面热光一阶自相干和互相干函数的结果来计算二阶时间相干函数, 它是时间或者纵向坐标的函数, 我们得到

$$G^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) \propto \left[\int \mathrm{d}\nu \left| f(\nu) \right|^2 \right]^2 + \left| \mathcal{F}_\tau \left\{ \left| f(\nu) \right|^2 \right\} \right|^2 \tag{9.5.16}$$

其中我们假设 $G_{11}^{(1)} = G_{22}^{(1)}$. 二阶相干度为

$$g^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) = 1 + \frac{\left| \mathcal{F}_\tau \left\{ \left| f(\nu) \right|^2 \right\} \right|^2}{\left[\int \mathrm{d}\nu \left| f(\nu) \right|^2 \right]^2} \tag{9.5.17}$$

当 $\tau = \tau_1 - \tau_2 = 0$, 也就是 $(t_1 - t_2) = (z_1 - z_2)/c$ 时, 二阶相干度达到最大. 此时, 两个双光子振幅 $\Psi_{mn}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ 和 $\Psi_{nm}(z_1, t_1; z_2, t_2)$ 在时间–空间上完全重合. 不难发现: 当 z_1 和 z_2 固定时, 二阶关联函数和归一化二阶相干就是相对时间延迟 $t_1 - t_2$ 的函数, 这个可以通过直接记录光电探测器的触发时间来测得. 另一方面, 如果我们固定 $t_1 - t_2$, 二阶关联函数和归一化二阶相干就变成 $z_1 - z_2$ 的函数. 但是, 如果基于光子计数测量的话, 那么关联测量就需要累积一定的时间. 符合计数率为一定时间窗口 $S(t_1 - t_2)$ 内符合计数对 t_1 和 t_2 的平均:

$$R_c(z_1, z_2) = \int_T \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, S(t_1 - t_2)\, G^{(2)}(z_1, t_1; z_2, t_2) \tag{9.5.18}$$

其中 $S(t_1 - t_2)$ 是一个门函数, 模拟符合探测的时间窗口.

总而言之, 上面的计算可以分为两部分: (1) 任意光子对的联合探测事件所对应的双光子振幅的叠加, (2) 从随机辐射光子的非均匀系综产生的大数量联合探测事件的积分. 一方面, 双光子干涉只涉及一对光子, 有理由说测量到的一对光子只和自身干涉. 另一方面, 二阶相干或者二阶

关联的测量涉及了大量的光子对. $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的特性, 平庸或非平庸, 是由每一对光子的干涉情况以及光子对系综的集体行为决定的. 对于特定的时空坐标, 每对双光子都可能发生相长或者相消干涉. 对这些干涉统计求和, 得到一个非平庸的关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$.

现在, 我们尝试另一个等效的计算方法, 用 (8.8.13) 式的密度矩阵的方法来计算热光的 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$. 将 (8.8.13) 式代入 (9.5.5) 式, 得到二阶时间关联函数 $G^{(2)}(\tau_1,\tau_2)$ 为:

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\\
&\propto \int \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' |f(\omega)|^2 |f(\omega')|^2 \,|\,\Psi_{\omega,\omega'}(\tau_1,\tau_2)+\Psi_{\omega',\omega}(\tau_1,\tau_2)|^2\\
&=\Big[\int \mathrm{d}\nu\,|f(\nu)|^2\Big]^2+|\mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}\,|^2
\end{aligned}\tag{9.5.19}$$

其中, $\nu=\omega-\omega_0$ 以及 $\tau_j=t_j-z_j/c$, $j=1,2$, $\tau=\tau_1-\tau_2$. 不出所料, 所得结果和 (9.5.16) 式是一样的. 这一结果与有限时空范围内两个独立波包之间的干涉图像稍有不同. 这里, 干涉发生在如下的复振幅之间: (1) 模式 ω 和模式 ω' 分别在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处湮没, 或者 (2) 模式 ω' 和模式 ω 分别在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处湮没. 当然, 也可以定义一个单一频率的波包, 此波包源于原子跃迁 $\hbar\omega=E_2-E_2$, 其中能态分布满足条件 $\Delta E_2=\Delta E_1=0$, 成为在时空域上无限长的波包. 每一个随机成对的无限长波包 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\omega'$ 和自己干涉后形成一个独立的干涉图样. 最终的结果是所有独立的频率为 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\omega'$ 的干涉图样的统计求和.

图 9.5.3 是测得的一个典型的热光的时间二阶相干度 $g^{(2)}(t_1-t_2)$, 它验证了 (9.5.17) 式. 实验结果清楚地表明: 当两个探测器 D_1 和 D_2 的位置 $z_1=z_2$ 时, 双光子在 $t_1=t_2$ 被联合探测到的概率要高一倍. 这个实验现象在历史上被称为 "光子聚束" 效应. 在热光中观察到 "光子聚束" 效应着实让人惊讶, 因为这和混沌热光的随机特性明显相悖. 在我们的混沌热光模型中, 在任意时刻 t_{0m} 和 t_{0n} 产生两个光子的概率相等, 所以从统计概念上来讲, 混沌热光源的光子被 "聚束" 发射没有道理. 然而, 用双光子干涉的理论, 这个问题就迎刃而解了. "光子聚束" 效应无非是一个双光子干涉现象. 在二阶相干的量子理论里, 每一个光子都是从光源独立而且随机地辐射出来的. 是双光子干涉使得这些随机辐射的光子在 $t_1-t_2=0$ 被联合探测到的概率提高一倍. 需要强调的是: 双光子干涉并不是两个光子之间的干涉. 干涉源于产生一个联合探测的两个不同但又不可区分的概率振幅的叠加, 即双光子振幅或者双光子有效波函数的叠加. 虽然量子干涉的图像非常直接, 但是人们可能还不能欣然接受, 原因

如下: (1) 叠加是非局域的, 测量时涉及分离的时空点的两个独立光电探测事件. (2) 双光子振幅在麦克斯韦电磁波理论中没有对应, 特别要注意热光态, 因为传统上热光一直被认为是经典辐射.

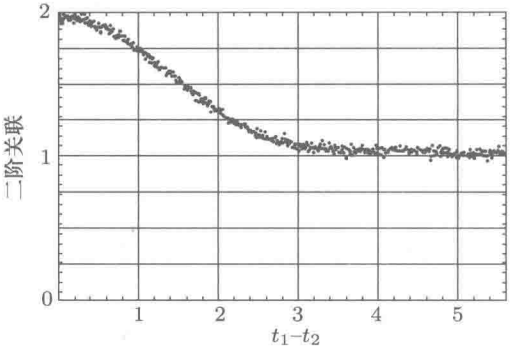


图 9.5.3 混沌热光二阶时间相干函数的测量的实验数据. 横轴 t_1-t_2, 时间单位 10^{-8}, 标出 $z_1=z_2$ 处光电探测器 D_1 与 D_2 探测到光子对的时间差.

类型 (III): 纠缠偶光子态

我们将在第 10 章对量子纠缠做详细的讨论. 这里只是简单地引入纠缠偶光子系统. 在下面讨论中, 我们将图 9.5.2 的热光源替换成纠缠偶光子源, 使用一个简化的 EPR 态来计算二阶相干或关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$.

粗略地讲, 纠缠偶光子态是不可分解的双光子态: 它不能写成两个光子态的直积. 换句话说, 它的两个子系统不能被看作独立的光子. EPR 态是一个非常特殊的纠缠偶粒子态, 它的两个子系统是 "完美关联" 的, 也就是说: 测量之前任意一个子系统的状态都不确定, 但是只要测量到其中一个的状态, 另一个就 100% 地完全确定了. 纠缠光子对被 Klyshko 命名为偶光子 (biphoton). 在第 8 章中, 我们已经引入过一个简单的不可分解的偶光子态, 总光子数为 $n=2$:

$$
\begin{aligned}
|\,\Psi\,\rangle &= \int \mathrm{d}\omega_s \mathrm{d}\omega_i\, \delta(\omega_s+\omega_i-\omega_p)\, f(\omega_s,\omega_i)\, \hat{a}^\dagger(\omega_s)\, \hat{a}^\dagger(\omega_i)\,|\,0\,\rangle \\
&\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\, a^\dagger(\omega_s^0+\nu)\, a^\dagger(\omega_i^0-\nu)|\,0\,\rangle
\end{aligned}
\tag{9.5.20}
$$

其中

$$
\omega_s=\omega_s^0+\nu,\quad \omega_i=\omega_i^0-\nu,\quad \omega_s+\omega_i=\omega_p=\text{常数}
$$

这里用到了 δ-函数, $\delta(\omega_p-\omega_s-\omega_i)$, ω_s^0 和 ω_i^0 分别为 ω_s 和 ω_i 模式的中心频率. 我们借助定义频谱密度函数 $f(\nu)$ 取积分限为无穷. (9.5.20) 是一个纯态, 特征如下: (1) 产生联合探测的信号-闲置双光子态是一个态矢, 形

式上是所有可能福克态 $|\cdots,0,1_{\omega_s},\cdots,1_{\omega_i},0,\cdots\rangle$ 的相干叠加. (2) 大量的联合探测到的信号-闲置光子对都处于同一个量子态, 所以它们可以看成一个均匀的系综.

二阶时间相干或关联函数计算如下:

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&=\langle\,\Psi\,|\,E^{(-)}(z_1,t_1)E^{(-)}(z_2,t_2)E^{(+)}(z_2,t_2)E^{(+)}(z_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\\
&=|\,\langle\,0\,|\,E^{(+)}(z_2,t_2)\;E^{(+)}(z_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\,|^2\\
&=|\,\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)\,|^2
\end{aligned}\tag{9.5.21}$$

其中, 我们再次定义偶光子有效波函数

$$\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)=\langle\,0\,|\,E^{(+)}(z_2,t_2)\;E^{(+)}(z_1,t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\tag{9.5.22}$$

偶光子有效波函数计算为:

$$\begin{aligned}
&\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&=\langle\,0\,|\Big[\int\mathrm{d}\omega\,a(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t_2-kz_2)}\Big]\Big[\int\mathrm{d}\omega'\,a(\omega')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega' t_1-k'z_1)}\Big]\\
&\quad\times\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\;f(\nu)\,a^\dagger(\omega_s^0+\nu)\,a^\dagger(\omega_i^0-\nu)|\,0\,\rangle\Big]\\
&\cong\int\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\omega'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\;f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1}\\
&\quad\times\langle\,0\,|\,a(\omega)\,a(\omega')\,a^\dagger(\omega_s^0+\nu)\,a^\dagger(\omega_i^0-\nu)|\,0\,\rangle
\end{aligned}\tag{9.5.23}$$

(1) 非简并情形, $\omega_s^0\neq\omega_i^0$. 探测器 D_1 位于 z_1 只接收到 ω_s 模式, 而探测器 D_2 位于 z_2 只接收到 ω_i 模式. 实验上非简并的两个模式可以用滤光片区分, 或者如果两个模式偏振正交的话, 可以用检偏器来区分. 此时, (9.5.23) 式中只会保留一项.

$$\begin{aligned}
\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)&\cong\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\,f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i^0-\nu)\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0+\nu)\tau_1}\\
&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0\tau_1+\omega_i^0\tau_2)}\,\mathcal{F}_{\tau_2-\tau_1}\big\{f(\nu)\big\}
\end{aligned}\tag{9.5.24}$$

很明显, 偶光子有效波函数不能写成两个单光子有效波函数的乘积. 纠缠的两个光子用一个非局域波包而不是两个波包来描述.

(2) 简并情形, $\omega_s^0=\omega_i^0$. z_1 处的探测器 D_1 和 z_2 处的探测器 D_2 不能区分 ω_s 和 ω_i 模式. 此时, 保留下来的项为 $\omega=\omega_s^0+\nu$ 和 $\omega'=\omega_i^0-\nu$, 以及 $\omega=\omega_i^0-\nu$ 和 $\omega'=\omega_s^0+\nu$. 于是有

$$\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)$$

$$
\begin{aligned}
&\cong \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0+\nu)\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i^0-\nu)\tau_1}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i^0-\nu)\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0+\nu)\tau_1}\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\tau_2+\tau_1)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\, f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_2-\tau_1)}+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\, f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_1-\tau_2)}\right]\\
&=\Psi_1(z_1,t_1;z_2,t_2)+\Psi_2(z_1,t_1;z_2,t_2) \qquad (9.5.25)
\end{aligned}
$$

其中 $\Psi_1(z_1,t_1;z_2,t_2)=\Psi_2^*(z_1,t_1;z_2,t_2)$. 在简并情形, 偶光子有效波函数是两个波包 $\Psi_1(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 和 $\Psi_2(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 的叠加, 它们对应纠缠双光子触发联合探测的两种不同却又不能区分的方式. 和前面一样, $\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 不能写成 $\Psi(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$ 的乘积. 纠缠双光子用一个 2-D 的不可分解的函数来刻画, 它在时空上都是非局域的.

无论上面哪种情形, 二阶相干或关联函数都写成了不可分解的偶光子有效波函数的模平方:

$$
G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)=|\,\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)\,|^2 \qquad (9.5.26)
$$

(9.5.26) 式和混沌热辐射的 (9.5.16) 式截然不同. 对于纠缠态来说, 不可能将 $G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 用 $G^{(1)}$ 的乘积来表示.

有趣的是: 如果取 $\Delta\nu\sim\infty$, $G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 会变成关于 $\tau_2-\tau_1$ 的类 δ–函数. 这就意味着: 设置两个探测器 D_1 和 D_2 同时作独立测量和符合测量, 尽管每一个探测器观测到单个光子的时间都不确定, 但是如果 D_1 在 t_1 时刻测到一个光子, 那么 D_2 一定在唯一的精确的 t_2 时刻测到其孪生光子, 尽管 D_1 和 D_2 空间相距甚远. 这类关联称之为 EPR 关联.

另一个有趣的事情是: 当纠缠偶光子的叠加满足相消干涉条件时, 我们会观察到反关联:

$$
\begin{aligned}
&\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&\cong \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\, f(\nu)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0+\nu)\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i^0-\nu)\tau_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i^0-\nu)\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0+\nu)\tau_1}\right]\\
&=\Psi_1(z_1,t_1;z_2,t_2)-\Psi_2(z_1,t_1;z_2,t_2) \qquad (9.5.27)
\end{aligned}
$$

显然, 当 $\Psi_1(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 和 $\Psi_2(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 在时空上完全交叠, 二阶相干度取最小值. 即, 当 $\tau_1=\tau_2$ 时, 符合计数率为 0. 这意味着: 在 $z_1=z_2$ 的条件下, 当 D_1 在 t_1 时刻测到一个光子, 那么 D_2 是不可能在同一时刻 ($t_1=t_2$) 捕获到其孪生光子的.

图 9.5.4 是 (9.5.24) 式描述的偶光子波包的示意图. 此图清楚地表明: 纠缠偶光子系统的 $\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 是由一个两维的不可分解的波包表示, 而不是两个独立波包的乘积, 不可分解的波包从另一个角度揭示了偶光

子态的纠缠特性. 人们不应对系统中不存在信号和闲置光子各自的独立波包而感到奇怪. 双光子态是 $n=2$ 的福克态的相干叠加, 而不是两个独立的单光子波包的乘积. 这些福克态的相干叠加形成了不可分解的双光子有效波函数或双光子波包. 这与 "经典" 情形大不相同. 我们很容易看出单光子波包和单光子概念之间的联系, 其实双光子波包和双光子概念之间的联系和单光子的情况是一样的. 双光子波包把纠缠光子对的动态特性作为时空中一个整体系统来描述. 用双光子波包描述纠缠光子对的动态特性时, 就像在描述时空上的一个单一系统一样. 我们后面将会继续讨论这些重要的物理概念.

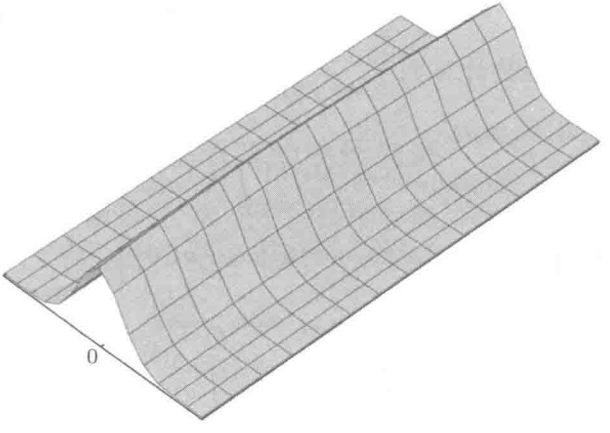


图 9.5.4 偶光子波包的示意图. 沿着 $\tau_1-\tau_2$ 为高斯型. 因为假设了 $\omega_p=$ 常数, 波包在 $\tau_1+\tau_2$ 方向上是均匀的.

唯象地说: 与单光子波包不同, (1) 偶光子波包沿着轴 z_1 和 z_2 向着不同方向动态传播; 但是, (2) 它们的传播从来不是独立的. 联合探测事件是以下面这种方式发生的: 只要其中一个光子在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 被测到, 另一个光子一定是在特定的 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 附近被探测到, 与 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 的关系是 $(t_1-t_2)-(z_1-z_2)/c=0$. 第 (1) 点在公式中体现在沿着 $\tau_1+\tau_2$ 轴的函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_1+\tau_2)}$. 第 (2) 点体现在沿着 $\tau_1-\tau_2$ 轴的函数 $\mathcal{F}_{\tau_1-\tau_2}\{f(\nu)\}$. 这个现象特别有趣. 一方面, 信号光子和闲置光子都处于单光子混态, 它们在空间上 (沿着 z_1 和 z_2) 和时间上 (沿着 t_1 和 t_2) 以随机分布的概率产生光电测量事件. 另一方面, 联合光电探测事件的时空关联, $(t_1-t_2)-(z_1-z_2)/c=0$ 确定了在信号 (闲置) 光子湮没之后的闲置 (信号) 光子的时空位置. 对信号 (闲置) 光子的测量如何定位闲置 (信号) 光子的时空坐标呢? 当两个光电探测事件分隔很远的时候, 这个问题就更有意思了: 即便两个探

测器相隔几光年, 这一时空上的定位仍然是瞬时的. 这意味着在考虑 EPR 偶光子态时, 我们最好放弃两个光子的概念. 最好将信号–闲置系统当作一个整体, 就像其不可分离的波包所描述的那样. 如果坚持认为信号–闲置光子是两个独立系统的话, EPR 佯谬往往是不可避免的. 我们在第 10 章中会再次强调这点.

类型 (IV): $n_\omega = 2$ 的数态

第 8 章中我们举过一个 $n_\omega = 2$ 的数态的例子

$$\begin{aligned} |\,\Psi\,\rangle &= \sum_{\omega} f(\omega)\,[\hat{a}^\dagger(\omega)]^2\,|\,0\,\rangle \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\,[a^\dagger(\omega_0+\nu)]^2\,|\,0\,\rangle \end{aligned} \tag{9.5.28}$$

其偶光子有效波函数计算如下

$$\begin{aligned} &\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2) \\ &= \langle\,0\,|\Big[\int \mathrm{d}\omega\, a(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t_2 - k z_2)}\Big]\Big[\int \mathrm{d}\omega'\, a(\omega')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega' t_1 - k' z_1)}\Big] \\ &\quad\times\Big[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\, a^\dagger(\omega_0+\nu)\, a^\dagger(\omega_0+\nu)|\,0\,\rangle\Big] \\ &\cong \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\; f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1} \\ &\quad\times\langle\,0\,|\,a(\omega)\,a(\omega')\,a^\dagger(\omega_0+\nu)\,a^\dagger(\omega_0+\nu)|\,0\,\rangle \end{aligned} \tag{9.5.29}$$

位于 z_1 的光电探测器 D_1 和位于 z_2 的 D_2 不能区分 $\omega = \omega_0 + \nu$ 的两个模式. 此时, 保留项是满足 $\omega = \omega' = \omega_0 + \nu$ 的那些项, 于是有

$$\begin{aligned} \Psi(z_1,t_1;z_2,t_2) &\cong \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0+\nu)(\tau_2+\tau_1)}\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(\tau_2+\tau_1)}\,\mathcal{F}_{\tau_2+\tau_1}\{f(\nu)\} \end{aligned} \tag{9.5.30}$$

其中 $\Psi(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 不能写成 $\Psi(z_1,t_1)$ 和 $\Psi(z_2,t_2)$ 的乘积. $n_\omega = 2$ 的数态也是由一个不可分解的两维函数描述的. 只不过, 这个两维函数和 (9.5.24) 式或 (9.5.25) 式都有很大不同. 有趣的是: 当 $\Delta\nu \sim \infty$ 时, $G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 将会变成 $\tau_2+\tau_1$ 的类 δ 函数. 此时, $(t_1+t_2) \simeq (z_1+z_2)/c$. 这背后的物理意义和纠缠光子的有很大差别.

类型 (V): 相干态

和处理一阶相干的时候类似, 下面计算中我们考虑一个多模相干态. 多模相干态写成单模相干态 $|\alpha_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 的直积

$$|\{\alpha\}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k}} |\alpha_{\boldsymbol{k}}\rangle$$

它是湮没算符的本征态, 其本征值为 $\alpha_{\boldsymbol{k}}$,

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\,|\{\alpha\}\rangle = \alpha_{\boldsymbol{k}}|\{\alpha\}\rangle$$

很容易得到

$$\begin{aligned} & G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ &= \langle\{\alpha\}|\, E^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)E^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)E^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,|\{\alpha\}\rangle \\ &= G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)\,G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2) \end{aligned} \tag{9.5.31}$$

它是 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的直积态. 所以, 相干态的量子二阶相干度为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = 1 \tag{9.5.32}$$

9.6 双光子干涉与强度涨落的统计关联

基于相同的实验装置, 对于不同的辐射源, 我们得到了三类二阶相干函数:

类型 (I): 相干态

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = G_{11}^{(1)}\,G_{22}^{(1)} \tag{9.6.1}$$

二阶相干函数可以分解为 $G_{11}^{(1)}$ 和 $G_{22}^{(1)}$ 的乘积. $G_{11}^{(1)}$ 和 $G_{22}^{(1)}$ 可以分别通过光电探测器 D_1 和 D_2 测得. 相干态的二阶相干函数对应于以下经典二阶相干函数

$$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \tag{9.6.2}$$

类型 (II): 混沌热光态

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = G_{11}^{(1)}G_{22}^{(1)} + \left|\,G_{12}^{(1)}\,\right|^2 \tag{9.6.3}$$

二阶相干函数不可分解, 但是可以写成 $G^{(1)}$ 的函数. 然而 $|G_{12}^{(1)}|^2$ 只能在两个独立光电探测器的联合探测中得到. 混沌热光态的二阶相干函数对应于以下经典二阶相干函数

$$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle + \langle \Delta I(\boldsymbol{r}_1,t_1)\Delta I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle \tag{9.6.4}$$

类型 (III): 纠缠偶光子态 (包括 $n_\omega = 2$ 的粒子数态)

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \left|\,\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\right|^2 \tag{9.6.5}$$

二阶相干函数不可分解, 也不可以写成 $G^{(1)}$ 的函数. $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 的测量涉及两个独立光子探测器的联合探测. 纠缠偶光子态没有对应的经典二阶相干函数.

无论从量子理论或经典理论的角度看, 相干态的二阶关联函数都是所谓的平庸函数, 意味着在 $(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处的测量各自独立毫无关系. 对比量子理论和经典理论对相干态二阶关联的物理解释似乎意义不大. 至于纠缠双光子态, 则既没有对应的经典场也没有对应的经典二阶相干函数. 虽然有人曾试图从宏观场的角度把纠缠双光子态的二阶相干函数解释为信号光场强度涨落和闲置光场强度涨落的关联, 却无法把信号光场和闲置光场表达成经典场的形式. 似乎称之为 "量子噪场" (quantum noise) 的关联更为合适. 量子理论认为纠缠偶光子态的非平庸二阶相干函数是纠缠光子对和其自身干涉的结果. 这一观点逐渐为学界普遍接受, 只是难于理解偶光子干涉概念背后的非局域性. 当然, 非局域性并不是只存在于纠缠光子对的非平庸二阶关联之中. 非局域性似乎是量子力学的普遍问题. 对比量子理论和经典理论对纠缠偶光子态二阶关联的物理解释似乎意义也不大. 下面, 我们重点讨论量子理论和经典理论对于混沌热光态二阶相干函数的不同解释.

混沌热光态二阶相干函数:

量子理论二阶相干函数和经典理论二阶相干函数都是对混沌热光的二阶相关特性的正确描述. 对于造成这种特殊关联性的原因, 量子理论和经典理论却给出了不同的物理解释. 从微观光子概念着眼, 量子理论认为混沌热光态的二阶相干函数是随机分布的两个光子与其自身干涉的结果. 从宏观场概念出发, 传统经典理论认为混沌热光态的二阶相干函数是混沌热光光强度涨落关联的结果. 从唯象理论的角度, 传统经典理论是成功的. 它指出了混沌热光非平庸关联函数与混沌热光光强度涨落之间的关系. 的确, 混沌热光的非平庸二阶相干函数是从其光强度涨落中观察到的. 然而, 混沌热光光强度涨落的非平庸关联从何而来? 经典理论给出的解释的确难以接受. 有一家学说认为混沌热光的关联是在其制备过程中形成的. 此学说甚至定义混沌热光为 "关联光" (correlated light), 似乎混沌热光有 "聚束" 的习惯[14], 因而有成倍的概率传播到同一时间空间点. 且不说此理论与混沌热光产生机制的随机性直接相悖, 如果混沌热光的关联是在光源中已然形成, 那么对混沌热光的测量是绝对不可能观测到 "反关联" 现象的. 然而, 混沌热光的 "反关联" 现象已然为实验所证实. 另一家学说认为混沌热光之所以在同一时间空间点有成倍的光强

[14] 此经典学说的量子对应理论为 "photon bunching".

统计关联, 是由于在此条件下两个光探测器测量的是在同一时间空间点产生的光: 在同一时间空间点产生的光等距离传播到另一个相同的时间空间点当然有相同的光强涨落. 此学说似乎更有道理. 不幸的是, 与前一学说一样, 此学说同样对混沌热光的 "反关联" 现象, 即测量到的两个光强呈反向涨落, 不能解释. 以下, 我们再次提供一个简单的证明. 此论证与第 6 章的讨论类似, 只是把经典二阶相干函数换成了量子二阶相干函数, 把光强度换成了光子计数. 为了简化讨论, 我们着重分析混沌热光的二阶相干的时间部分. 考虑到混沌热光的稳态性质, 将 $g^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 写成如下形式:

$$g^{(2)}(\tau)=\frac{\langle n(t)\,n(t+\tau)\rangle}{\langle n(t)\rangle^2} \tag{9.6.6}$$

其中假设 $z_1=z_2$. 现在, 我们按照经典统计理论的思路来推导 $\tau=0$ 时的不等式. 根据

$$\langle[\Delta n(t)]^2\rangle\geqslant 0 \tag{9.6.7}$$

得到

$$\langle\left[n(t)-\langle n(t)\rangle\right]^2\rangle=\langle n(t)n(t)\rangle-\langle n(t)\rangle^2\geqslant 0 \tag{9.6.8}$$

因此,

$$g^{(2)}(0)=\frac{\langle n(t)\,n(t)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2}\geqslant 1 \tag{9.6.9}$$

前面, 我们已经反复提到混沌热光的 "反关联" 实验已经观测到 $g^{(2)}(0)<1$. 有趣的是, 即使我们沿用光子概念, 把 "相同的光子数涨落" 解释为热光非平庸二阶相干的原因, 仍然无法解释混沌热光的 "反关联" 现象.

然而从双光子干涉的角度看, 无论 $g^{(2)}(0)>1$ 或 $g^{(2)}(0)<1$ 都是必然的, 合理的. 前者属于相长干涉,

$$\begin{aligned}
&g^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&\propto\left\{\int \mathrm{d}t_{0j}\,\mathrm{d}t_{0l}\,\left|\,\Psi_{j,l}(z_1,t_1;z_2,t_2)+\Psi_{l,j}(z_1,t_1;z_2,t_2)\,\right|^2\right\}\\
&=1+\frac{\left|\,\mathcal{F}_\tau\left\{\left|\,f(\nu)\,\right|^2\right\}\right|^2}{\left[\int \mathrm{d}\nu\,\left|\,f(\nu)\,\right|^2\right]^2}\\
&\geqslant 1
\end{aligned} \tag{9.6.10}$$

后者属于相消干涉,

$$\begin{aligned}
&g^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&\propto\left\{\int \mathrm{d}t_{0j}\,\mathrm{d}t_{0l}\,\left|\,\Psi_{j,l}(z_1,t_1;z_2,t_2)-\Psi_{l,j}(z_1,t_1;z_2,t_2)\,\right|^2\right\}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{|\mathcal{F}_\tau\{|f(\nu)|^2\}|^2}{\left[\int \mathrm{d}\nu\,|f(\nu)|^2\right]^2}$$
$$\leqslant 1 \tag{9.6.11}$$

(9.6.10) 式和 (9.6.11) 式都已经在混沌热光的实验中观测到.

9.7 热光的二阶空间关联

第 6 章用经典方法分析了热光的二阶空间关联. 当热光的光强弱到单光子水平, 我们还能在远场 ($\Delta\theta < \lambda/D$) 和近场 ($\Delta\theta > \lambda/D$) 得到同样的非平庸空间关联吗? 在这一小节, 我们将用量子力学方法处理简化的二阶空间关联测量. 二阶关联测量示意图如图 9.7.1 所示. 在这个实验装置中, 两个点探测器 D_1, D_2 分别放置在空间坐标 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 处. 在这两个点探测器处联合观测到 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$ 处的光电探测事件的概率究竟多大呢? 前面的章节已经强调过: 根据量子理论, 一个理想的点探测器测量的是时空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ 处发生的光电探测事件的概率, 为

$$G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \mathrm{tr}\{\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}, z, t)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t)\} \tag{9.7.1}$$

其中 $\hat{\rho}$ 是密度算符, 用来表征量子化混沌热光场的状态. $\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 和 $\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 是时空点 $(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ 处的正、负场算符.

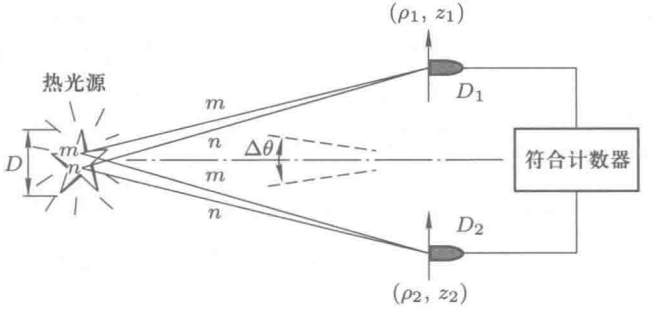


图 9.7.1 简化的二阶空间关联测量的装置示意图. 两个点光计数探测器 D_1 和 D_2 分别在平面 $z_1 =$ 常数和 $z_2 =$ 常数内扫描. 符合计数记录的是从热光源中随机地独立辐射出来的两个光子后产生的联合探测事件. 光源的直径为 D(对应角直径为 $\Delta\theta$. 测量可以在远场 ($\Delta\theta < \lambda/D$) 或者近场 ($\Delta\theta > \lambda/D$). 两个点探测器联合观测到 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$ 处的光电探测事件的概率是多大呢?

一个点探测器的计数率, 或者点状光电探测器的输出电流, 正比于 $G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, z, t)$. 两个独立点探测器的联合探测给出的是在时空点 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1)$

和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$ 处两光子的联合探测事件的概率

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2) \\ &= \mathrm{tr}\{\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1)\} \end{aligned} \tag{9.7.2}$$

其中 $(\boldsymbol{\rho}_j, z_j, t_j)(j = 1, 2)$ 表示第 j 探测器处的光电探测事件的时空坐标. 两个光子计数器的符合计数率与 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$ 成正比. 为了计算二阶空间关联, 我们需要 (1) 估算热辐射的态或者密度算符; (2) 将场算符从辐射源传播到探测平面.

假设混沌光源横向尺寸很大, 由大量独立随机辐射的子点源构成 (如图 9.7.1 标记出的第 m 和 n 个子源). 每个子点源又可能包含大量独立的原子, 这些原子随时都会随机地发生二能级跃迁. 我们分析横向的空间关联时, 为了简化计算, 和前面一样, 假设原子进行单频跃迁, 辐射出的光场是单频的, 即 $\hbar\omega = E_2 - E_1$, $\Delta E_2 = 0$, $\Delta E_1 = 0$. 重复前面我们讨论二阶时间相干时的数学过程, 计算二阶空间相干的密度算符可近似为

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \simeq\ & |0\rangle\langle 0| + |\epsilon|^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\kappa})|0\rangle\langle 0|\hat{a}(\boldsymbol{\kappa}) \\ & + |\epsilon|^4 \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'\, \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\kappa})\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\kappa}')|0\rangle\langle 0|\hat{a}(\boldsymbol{\kappa}')\hat{a}(\boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \tag{9.7.3}$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}$ 是横向波矢, 每一个 $\boldsymbol{\kappa}$ 都伴随一个在源平面某横向坐标处的子点源或原子跃迁, 参见图 9.10. 和时间相干计算时的密度矩阵相比较, 很容易发现 $\boldsymbol{\kappa}$ 的作用和 ω 相同. 在 (9.7.3) 式中, 所有的常数都归并到 $|\epsilon|^2$ 和 $|\epsilon|^4$ 中. 推导 (9.7.3) 式时, 我们已经假设辐射源面上的子源是随机分布的, 并考虑了子辐射源的随机特性. 基本上, 我们的光源模型是单光子和双光子的非相干混态, 其任何横向动量取值都是等概率的. 于是, 二阶相干函数空间部分的计算如下

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= \mathrm{tr}[\,\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)\,] \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'\, \langle 1_{\boldsymbol{\kappa}} 1_{\boldsymbol{\kappa}'}|\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)|1_{\boldsymbol{\kappa}} 1_{\boldsymbol{\kappa}'}\rangle \\ &\equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'\, \left|\Psi_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}'}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)\right|^2 \end{aligned} \tag{9.7.4}$$

其中定义了以横向空间坐标为变量的双光子有效波函数

$$\Psi_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}'}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \langle 0|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)|1_{\boldsymbol{\kappa}} 1_{\boldsymbol{\kappa}'}\rangle \tag{9.7.5}$$

场算符的横向部分可以写成

$$\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_j, z_j) \propto \sum_{\boldsymbol{\kappa}} g_j(\boldsymbol{\rho}_j, z_j; \boldsymbol{\kappa})\, \hat{a}(\boldsymbol{\kappa}) \tag{9.7.6}$$

其中 $g_j(\boldsymbol{\rho}_j, z_j; \boldsymbol{\kappa})$ 是格林函数. 将场算符代入到 (9.7.5) 式中, 得到

$$\begin{aligned} &\Psi_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\kappa}'}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}') + g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}') g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \tag{9.7.7}$$

和

$$\begin{aligned} &G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' \Big| \left[g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}') + g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}') g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}) \right] \Big|^2 \end{aligned} \tag{9.7.8}$$

(9.7.7) 式和 (9.7.8) 式表示两个量子概率幅间的干涉, 对应一次联合探测事件中不同亦不可区分的两种可能方式. 这种干涉现象不同于经典光学中电磁场在某个局域时空点的叠加. 这种干涉是 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}')$ 与 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}') g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa})$ 之间叠加的结果, 其中的双光子振幅涉及实验装置的两臂以及发生在两个远离的时空点 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 处光电探测事件. 研究 (9.7.7) 式中的有效波函数, 我们发现对称的有效波函数和全同粒子的对称波函数起的作用相同. 这种奇特的非定域叠加使得空间关联具有 "抗干扰性", 也就是说光路中任何折射率涨落型的扰动对关联是没有影响的. 图 9.7.2 示意性地画出一对模式 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}'$ 触发一次联合光电测量事件的两种可能方式: ($\boldsymbol{\kappa}$ 到 D_1) $\times$ ($\boldsymbol{\kappa}'$ 到 D_2) 和 ($\boldsymbol{\kappa}$ 到 D_2) $\times$ ($\boldsymbol{\kappa}'$ 到 D_1). 这些振幅中每一对各自独立地在联合探测空间 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$ 中干涉. 大量的干涉简单相加后得到非平庸的 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 函数. 不难看出, 在图 9.7.2 中, 无论是在近场还是远场, 只要 D_1、D_2 的放置满足 $\boldsymbol{\rho}_1 \simeq \boldsymbol{\rho}_2$ 和 $z_1 \simeq z_2$, 每一对双光子振幅都会相长叠加, 结果是, 独立的相长干涉的总和使得 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 取到最大值. 但是如果 D_1、D_2 的坐标不满足上述条件, 每一对独立的双光子振幅的叠加效果会因光程不等而各不相同, 可以是相长的最大值和相消的最小值之间的任意值, 所有干涉相加后得到求和的平均值.

情况 (I): 夫琅禾费远场 ($\Delta\theta < \lambda/D$)

远场的格林函数是简单的平面波函数. 热光远场的 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ 的计算与经典 $\Gamma^{(1)}$ 和 $\Gamma^{(2)}$ 类似. 我们这里就不再赘述了.

情况 (II): 菲涅耳近场 ($\Delta\theta > \lambda/D$)

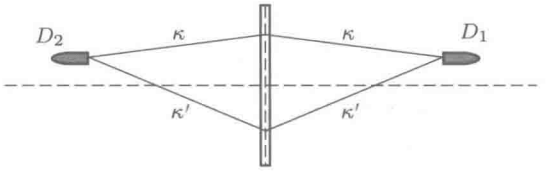


图 9.7.2 双光子干涉的示意图: 双光子振幅 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2\boldsymbol{\kappa})g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}')$ 和 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}')\cdot g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa})$ 的叠加. 很显然, 当 D_1 和 D_2 的位置满足 $\boldsymbol{\rho}_1 \simeq \boldsymbol{\rho}_2$ 和 $z_1 \simeq z_2$ 时, 振幅 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa})g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}')$ 和 $g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}')g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa})$ 将经历等光程的传播, 进行相长叠加. 这种非定域的叠加没有经典对应.

近场 $G^{(1)}$、$G^{(2)}$ 的计算也和经典 $\Gamma^{(1)}$、$\Gamma^{(2)}$ 类似. 下面进行一个简单的讨论. 在计算 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 之前, 先计算位于 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$、$(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 处两个点光电探测器 D_1、D_2 各自的单光子计数率. 参照图 9.7.1 中的实验装置,

$$g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0 \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z_1}}{z_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_1}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|^2} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$$

$$g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0' \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z_2}}{z_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_2}|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_0'|^2} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0'}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_0$ 是光源所在平面内的横向位置矢量, 光场分别经由臂 1、臂 2 传播到 $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$ 平面. 单个探测器的计数率或输出光电流比例于 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}, t)$,

$$G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_j, z_j) = \mathrm{tr}\{\hat{\rho}\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_j, z_j)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_j, z_j)\} \sim \text{常数}, \tag{9.7.9}$$

其中 $j = 1, 2$ 表示第 j 个光电探测器.

尽管 $G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ 和 $G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 都是常数, 二阶空间相干函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 却是非平庸的函数, 它源于 (9.7.8) 式中干涉交叉项

$$\begin{aligned} &\left|G^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)\right|^2 \\ =& \left| \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\; g_1^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa})\, g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) \right|^2 \\ \propto& \left| \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z_1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_1}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}z_2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2cz_2}|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_0|^2} \right|^2 \end{aligned} \tag{9.7.10}$$

如果让光源到两个探测器的光程相等 ($z_1 = z_2 = d$), 上面对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0$ 的积分将产生 $z_1 = d$ 平面和 $z_2 = d$ 平面之间点对点的关联,

$$\begin{aligned} \left|G_{12}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{\rho}_2)\right|^2 &\propto \left| \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{cd}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)\cdot\boldsymbol{\rho}_0} \right|^2 \\ &= \mathrm{somb}^2\left[\frac{R}{d}\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|\right] \end{aligned}$$

$$\sim \delta(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \tag{9.7.11}$$

其中当热光源角 $\Delta\theta \sim R/d$ 足够大并且频率 ω 足够高 (比如可见光光源) 时, 近似可得到 δ 函数. 归一化 $g^{(2)}$ 函数, 也就是二阶相干度为

$$g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{\rho}_2) = 1 + \delta(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \tag{9.7.12}$$

从 (9.7.12) 式得到, 当 $\rho_1 = \rho_2$ 或 $|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2| < \lambda/\Delta\theta$ 时, $g^2 = 2$, 其中 $\Delta\theta \simeq 2R/d$ 是热光源的角直径. 热光的二阶关联函数揭示了一个非常奇特的现象: 对于输出平面中含有大量随机分布的原子跃迁的热光源而言, 在 $\rho_1 = \rho_2$ 或面积小于 $|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|\ \lambda/\Delta\theta$ 范围之内捕获到的双光子概率要高一倍. 在一阶相干性测量中, 物理量 $\lambda/\Delta\theta$ 被定义为 "相干面积", 其中 $\delta\theta$ 是杨氏干涉仪中两个小孔的角间距. 相干面积指的是在远场观测平面内能够观察到干涉条纹的区域. 所以, 特别要注意的是, 物理量 $\lambda/\Delta\theta$ 背后有着非常不同的物理意义和测量方式.

近年来的研究已经将热光的这种部分点对点关联或点对斑关联用于产生非局域的鬼像. 我们将在第 11 章中讨论这一有趣的现象.

到目前为止, 我们已经在低阶近似条件下成功地推导出热光的二阶空间关联的解析式. 研究表明: 热光的部分点对点关联是双光子振幅叠加后产生相长–相消干涉的结果, 与双光子振幅对应的是随机光子对产生一次联合探测事件的不同方式. 实际上, 上述分析并不仅限于低阶近似. 非平庸 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{\rho}_2)$ 对于量子化热辐射场的任意高阶都是成立的. 计算过程虽然很长但是很直接. 数学上和先前的时间相干性的讨论类似.

9.8 光子计数和 $G^{(2)}$ 的测量

使用光子计数方法, 和一阶相干函数的测量类似, 二阶相干函数的测量是基于对大数量联合探测事件的统计. 和一阶关联函数不同, 二阶相干函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 是在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 直接测量的函数. $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 即可以通过对符合计数的时间平均得到, 也可以通过大量符合计数的统计直方图来获得. 现代光探测器 D_1、D_2 记录光子的时间精度可达到 10^{-12} s. 在选定空间变量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 后, 通过记录每一对光子的到达时刻 t_1 和 t_2, 进而统计在每一个 $t_1 - t_2$ 取值下观测到的光子对数量, 可以得到二阶相干函数 $G^{(2)}(t_1 - t_2)$. 下面我们举两个例子, 它们都是基于光子计数的办法来测量 $G^{(2)}$.

(1) $G^{(2)}(t_1 - t_2)$ 和 $g^{(2)}(t_1 - t_2)$ 的测量

做这类测量时, 光电探测器的空间坐标 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 设为常数. 测量电路能够读出并记录光子对的到达时刻 t_1 和 t_2, 或者到达的时刻差 $t_1 - t_2$.

收集到大量符合计数以后, 可以绘制出符合计数关于 t_1-t_2 的统计直方图. 这种分布对应二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1-t_2)$. 图 9.5.3 中展示的是一个典型的测量到的二阶相干函数 $g^{(2)}(t_1-t_2)$, 即混沌热光的归一化的二阶相干函数, 这和 (9.5.17) 式是吻合的.

图 9.8.1 是测量到的由 SPDC 过程产生的偶光子态的 $G^{(2)}(t_1-t_2)$. 横轴 t_1-t_2 表示光子对的记录时刻差, 对应于空间坐标 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 为常数时的 $\tau_1-\tau_2$. 纵轴表示对于特定的 t_1-t_2 所测量到的光子对数目. 由图 9.8.1 可以直接得到两个结论: (1) 纠缠光子对是同时产生的; (2) 测量到的 t_1-t_2 与光子对的产生时刻无关.

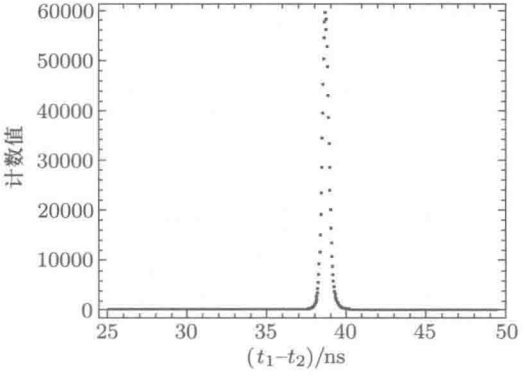


图 9.8.1 偶光子态的二阶关联函数. 横轴 t_1-t_2 表示两个光子探测器各自记录到一个光子探测事件的时间差, 对应于 z_1 和 z_2 取固定值时 $\tau_1-\tau_2$ 的值.

上面两个例子都是用光子计数方法测量 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 和 $g^{(2)}(t_1-t_2)$ 的. 测量电路记录了每一对光子的光电探测事件时间差 t_1-t_2. 测量基于对大量光子对的统计. 统计上来说, 分布函数或者说关于 t_1-t_2 的计数直方图对应于二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1-t_2)$. 关联函数可根据已知的辐射态计算出来.

光电探测器记录光电子的时间精度是有限的, 光电探头和相关电路的响应时间会影响到 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的测量. 例如, SPDC 信号-闲置偶光子对的二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的理论宽度一般在几 fs 到数百 fs 之间, 而图 9.8.1 中测量到的宽度为 700 ps. 这种展宽效应来源于光电探测器较为缓慢的响应速度. 观察光电探测事件时, 伴随着 t 时刻光子的湮没, 光电探测器输出一个电流脉冲到电路中. 电路可以对脉冲进行分析并且确定一个电子的记录时刻 $\tilde{t}$, 它有一定的不确定性. 脉冲上升沿的抖动和脉冲高度的涨落都将导致电子的记录时刻或测量时刻 $\tilde{t}_1$ 和 $\tilde{t}_2$ 的不确定性. 我们用探测器的响应函数 $D(\tilde{t}-t)$ 来表示这一不确定性, 其中 t 是光子

的湮没时刻, $\tilde{t}$ 是电子的记录时刻. 于是, D_1 和 D_2 的联合探测可以认为是响应函数和二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的卷积:

$$G^{(2)}(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2)=\frac{1}{t_c^2}\int \mathrm{d}t_1\int \mathrm{d}t_2\, G^{(2)}(t_1-t_2)\, D(\tilde{t}_1-t_1)\, D(\tilde{t}_2-t_2) \quad (9.8.1)$$

其中令

$$\int \mathrm{d}t\, D(\tilde{t}-t)=t_c, \qquad D(0)=1 \quad (9.8.2)$$

t_c 是光电探测器的响应时间. 当响应函数的宽度远小于 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的宽度时, 响应函数可以处理为 δ 函数, $D(\tilde{t}-t)\sim t_c\delta(\tilde{t}-t)$. 在这个极端情况下, 测量的二阶关联函数将会复现出 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的理论期望值:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2) &= \int \mathrm{d}t_1\int \mathrm{d}t_2\, G^{(2)}(t_1-t_2)\,\delta(\tilde{t}_1-t_1)\,\delta(\tilde{t}_2-t_2) \\ &= G^{(2)}(t_1-t_2) \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

然而, 当响应时间和关联函数的宽度在相同量级或者更大时, 情况就完全不同了. 特别是当响应函数的宽度比 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 宽度宽得多时, 二阶关联函数本身可以被处理为 δ 函数. 因而, (9.8.1) 式变成两个光子计数器响应函数的卷积:

$$G^{(2)}(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2)=G^{(2)}(0)\left(\frac{\tau_0}{t_c^2}\right)\int \mathrm{d}\tau\, D(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2-\tau)\, D(\tau) \quad (9.8.4)$$

其中令

$$\int \mathrm{d}t\, G^{(2)}(t)=G^{(2)}(0)\tau_0\simeq\int \mathrm{d}t\, G^{(2)}(0)\tau_0\,\delta(t) \quad (9.8.5)$$

τ_0 是常数, 称为二阶关联时间. (9.8.4) 式表明: (1) 测量到的 $G^{(2)}(\tilde{t}_1-\tilde{t}_2)$ 的宽度, 现在由光电探测器的响应函数决定, 会被明显展宽. 图 9.8.1 就是对应这种情况. (2) 光电探测器的较慢的时间响应可能会减小测得的二阶关联函数的大小. 这对纠缠态的测量影响不大, 然而, 对混沌热光的 $G^{(2)}$ 函数的观察会产生很大影响, 这是因为混沌热光的二阶相干函数存在非零的常数背景. 时间积分并不影响常数背景, 但是当 $\tau_0\ll t_c$ 时, 测量 $G^{(2)}$ 的最大值会明显减小.

(2) 关于 "符合" 测量

一次符合测量并不能测量出 $G^{(2)}(t_1-t_2)$. 实际实验中是对特定的符合窗口 Δt_c 内的联合探测事件进行累计测量. 此时间窗口以 $t_1-t_2=\tau$ 为中心, 其中 τ 是由特定的实验配置决定的时间常数. 数学上, 这种累积

测量等价于对二阶相干函数 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 进行时间积分:

$$R_c=\int_{\Delta T}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,G^{(2)}(t_1-t_2)\,S(t_1-t_2) \tag{9.8.6}$$

其中 R_c 是符合计数率, $S(t_1-t_2)$ 表示符合电路的时间窗口

$$S(t_1-t_2)=\begin{cases}1 & \tau-\Delta t_c/2\leqslant t_1-t_2\leqslant\tau+\Delta t_c/2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(3) $G^{(2)}(z_1-z_2)$ 或 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)$ 的测量

纵向与横向的空间关联测量在前面都已经讨论过了. 测量关联是通过符合计数器或者线性倍增管配上相关电子设备来记录的, 测量时需要纵向或者横向扫描点探测器. 光子计数测量时, 符合计数器计数并记录所有落入符合时间窗口 $\tau-\Delta t_c/2\leqslant t_1-t_2\leqslant\tau+\Delta t_c/2$ 的联合探测事件, 得到随着 z_1-z_2 或 $\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$ 变化的函数关系. 在电流-电流关联测量中, 线性倍增管和配套的电子器件进行积分并采集线性倍增管的输出读数. 该读数正比于 $i_1(t)i_2(t)\propto I(t_1)I(t_2)$. 由线性倍增管和光探测器 D_1、D_2 之间的电路延迟定义光电探测事件实际上发生在更早时刻 $t_1=t-\tau_1^e$ 和 $t_2=t-\tau_2^e$[15], 并且有 $t_1-t_2=\tau_1^e-\tau_2^e$. 通过读出和记录符合计数率或者线性倍增管的积分输出, 就可以测到以 z_1-z_2 或 $\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$ 为变量的 $G^{(2)}(z_1-z_2)$. 实验中通过纵向或横向扫描器中一个探测器来改变 z_1-z_2 或 $\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$[16].

需要强调的是, 在实际测量中, 时间和空间关联其实是不独立的. 例如, 测量二阶横向空间关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)$ 时, $\tau_1-\tau_2$ 的值必须仔细选取, 以保证在点探测器的横向扫描过程中, $G^{(2)}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 为非零常数值 (通常为最大值).

9.9 量子 N 阶相干性

我们现在把量子相干概念推广到 N 阶. 量子理论的 N 阶相干定义为:

$$G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)=\left\langle\left\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdots\right.\right.$$

[15] 线性倍增管测量的是光探测器 D_1、D_2 在时刻 t 的电流-电流关联: $V_{12}(t)\propto i_1(t)i_2(t)\propto I(t_1)I(t_2)$, 其中 $V_{12}(t)$ 是线性倍增管在 t 时刻的输出读数. $i_1(t)i_2(t)$ 是光电探测器在 t 时刻的输出电流. 由线性倍增管和光探测器 D_1、D_2 之间的电路延迟定义光电探测事件实际上发生在更早时刻 $t_1=t-\tau_1^e$ 和 $t_2=t-\tau_2^e$, 并且有 $t_1-t_2=\tau_1^e-\tau_2^e$.

[16] $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 固定时, 线性倍增管还是可以测量稳态场的 $G^{(2)}(t_1-t_2)$, 办法是改变延迟线的长度或者采用其它的电路延迟手段.

$$\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\cdots\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\rangle_{\mathrm{QM}}\Big\rangle_{\mathrm{Ensemble}} \tag{9.9.1}$$

归一化的量子相干度定义为:

$$\begin{aligned}&g^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\\=&\frac{G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)}{G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdots G^{(1)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)}\end{aligned} \tag{9.9.2}$$

一个由 N 个独立光子计数探测器组成的联合探测是对 N 阶相干函数和 N 阶量子相干度的测量. 类似双光子等效函数, 我们定义 N 光子等效波函数为

$$\begin{aligned}&\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\\\equiv&\langle 0|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\cdots\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\Psi|\end{aligned} \tag{9.9.3}$$

这里, $|\Psi\rangle$ 是 N 光子系统的量子态. N 光子等效波函数可能由两个或者多个振幅, 这些振幅对应于不同又不可区分的由 N 个光子产生一个 N 重联合光电测量事件的概率. N 光子振幅的相干或相消干涉可能产生一个非平庸关联或反关联函数. 此函数可以从 N 重联合光电计数中观察到:

$$\begin{aligned}&G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\\=&\mathrm{tr}\rho\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdots\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\cdots\\&\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\\=&\sum_l P_l\left|\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\right|^2\\=&\sum_l P_l\left|\sum_m A_{l,m}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\right|^2\end{aligned} \tag{9.9.4}$$

这里我们假设了一个 N 光子非均匀系综混态, $\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)$ 是第 l 个 N 光子态的等效波函数, P_l 是此 N 光子系统处在其第 l 态的概率.

本章小结

在这一章, 我们介绍了光场相干性的量子理论. 在量子理论中, 光电探测事件测量的是一个光子在 $(\boldsymbol{r},t)$ 处湮没的概率. 双重光电探测事件测量了一对光子分别在 $(\boldsymbol{r},t)$、$(\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 处联合湮没的概率. N 重光电探测事件测量了 N 个光子分别在 $(\boldsymbol{r},t)$、$(\boldsymbol{r}_2,t_2)\cdots(\boldsymbol{r}_N,t_N)$ 处联合湮没的概率.

对于一个光子, 或一对光子, 或 N 个光子, 如果存在两个或者更多的可能方式来产生一次光探测事件, 或一次双重探测事件, 或一次 N 重探测事件, 就有可能发生可观测的量子干涉现象. 干涉是单光子振幅, 双光子振幅或 N 光子振幅各自线性叠加的结果. 用狄拉克的话说, 一阶相干性的量子理论是有关光子与自身的干涉; 二阶相干性的量子理论是关于一对光子与自身的干涉; N 阶相干性的量子理论是关于一组 N- 光子和自身的干涉. 经典理论将 N 阶 $(N \geqslant 2)$ 相干或关联处理为 N 个联合探测到的光强的统计关联, 而量子理论将 N 阶相干或关联处理为 N- 光子的干涉现象.

基于这点, 我们引入了单光子有效波函数、双光子有效波函数、N 光子有效波函数的概念:

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{r},t) &= \langle 0|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\,\Psi\rangle \\
\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= \langle 0|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\,\Psi\rangle \\
\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N) &= \langle 0|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_N,t_N)\cdots\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\,\Psi\rangle
\end{aligned}$$

N 光子有效波函数 $(N \geqslant 2)$ 或波包可能是可分解的, 也可能是不可分解的, 这依赖于辐射光场的态. EPR 态是不可分解的纠缠双光子态, 用不可分解的 2 维非局域波包来表征. 有效波函数可能含有两个或者多个概率幅, 对应于产生一次光电测量事件或多光子联合探测事件的不同但又不可区分的方式. 干涉是单光子振幅、双光子振幅或多光子振幅线性叠加的结果:

类型 (I): 纯态

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k) &= \Psi(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\Psi^*(\boldsymbol{r}_k,t_k) \\
&= \sum_m \Psi_m(\boldsymbol{r}_j,t_j)\sum_n \Psi_n(\boldsymbol{r}_k,t_k),\ j,k=1,2 \\
G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) &= |\,\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2 \\
&= \Big|\sum_m \mathcal{A}_m(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\Big|^2 \\
G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_N,t_N) &= |\,\Psi(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)|^2 \\
&= \Big|\sum_m \mathcal{A}_m(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)\Big|^2
\end{aligned}$$

类型 (II): 混态

$$G^{(1)}(\boldsymbol{r}_j,t_j;\boldsymbol{r}_k,t_k) = \sum_l P_l\,\Psi_i(\boldsymbol{r}_j,t_j)\,\Psi_l^*(\boldsymbol{r}_k,t_k)$$

$$= \sum_l P_l \sum_m \Psi_{l,m}(\boldsymbol{r}_j, t_j) \sum_n \Psi_{l,n}(\boldsymbol{r}_k, t_k),\ j,k = 1,2$$

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \sum_l P_l \,|\, \Psi_l(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)|^2$$

$$= \sum_l P_l |\sum_m \mathcal{A}_{l,m}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)|^2$$

$$G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2; \boldsymbol{r}_N, t_N) = \sum_l P_l \,|\, \Psi_l(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2; \cdots; \boldsymbol{r}_N, t_N)|^2$$

$$= \sum_l P_l \,|\, \sum_m \mathcal{A}_{l,m}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \cdots; \boldsymbol{r}_N, t_N)|^2$$

在介绍过这些概念之后, 这一章详细讨论了一些不同量子态 (包括相干态、纠缠态和混沌热光态) 的典型的二阶时间和空间关联.

推荐读物

[1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science, 2000.

[2] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge, London, 1995.

[3] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge, 1997.

[4] R.J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); **131**, 2766 (1963).

[5] M.H. Rubin, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, and A.V. Sergienko, Phys. Rev. A, Vol. 50, 5122 (1994).

[6] Y.H. Shih, IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics, **9**, No. 6, (2003).

[7] R. Hanbury-Brown, and R.Q. Twiss, Nature, **177**, 27 (1956); **178**, 1046, (1956); **178**, 1447 (1956).

[8] R.Hanbury-Brown, *Intensity Interferometer*, Taylor and Francis Ltd, London, 1974.

[9] U. Fano, Am. J. Phys. **29** 539 (1961).

第 10 章

量子纠缠

在量子理论中, 单个粒子可以处在一组正交态的相干叠加态上. 一个比较形象生动的例子就是 "薛定谔猫": 一只同时既是死又是活的猫. 如果考虑的是许多只猫组成的系综, 其中 50% 是活, 50% 是死的, 这不会让人感到奇怪. 但是, "薛定谔猫" 是一只猫. 我们现在所谈论的是一只同时既死又活的猫. 在数学上, "死" 和 "活" 两种状态可以用 "正交" 态来描述. 在量子力学理论中, 正交态的叠加可以用来描述单个量子物体或粒子的状态. 相比我们的日常生活经验, 叠加原理确实很神秘.

本章中, 我们转向讨论另外一个令人惊讶的量子力学产物–量子纠缠. 量子纠缠涉及的是多粒子体系以及正交多粒子态的相干叠加. 描述量子纠缠的最好例子或许还是 "薛定谔猫". 现在, 我们谈论的是一对薛定谔猫, 它们各自走向不同的方位. 这一对薛定谔猫是非经典的猫, 表现出以下两个特征: (1) 每只猫都处在同时既死又活的状态; (2) 无论它们相隔多远, 任何时侯观察它们, 被观察到的是要么都死, 要么都活的状况. 如果我们观察的是由许多对孪生猫组成的体系, 而这些孪生猫中一半是同时活而另一半是同时死的, 这可能并不会让人感到惊讶. 在这种情况下, 我们每次对孪生猫进行符合观测时, 当然都会有 50% 的概率观测到一对活猫, 同样会有 50% 的概率观测到一对死猫. 然而, 我们讨论的对象是 "一对" 猫, 也就是每对猫都是处于同死和同活的状态. 此外, 这对猫中的任何一只也必须同时是既死又活的. 似乎在经典现实里找不到这样一对猫.

除了正交单粒子态的叠加, 正交多粒子态的叠加给经典理论带来的是更加麻烦的概念, 不仅是因为多粒子态的叠加在经典波动理论中没有对应部分, 而且还因为它所体现的粒子间的非局域行为, 这一点在经典

理论中是根本无法解释的.

10.1 EPR 实验和 EPR 态

量子纠缠概念的提出最早是在 1935 年. 当时, 爱因斯坦、波多尔斯基和罗森提出一个假想实验. 他们基于两粒子波函数的叠加原理提出一个纠缠的偶粒子体系, 或称 EPR 系统. EPR 系统是由两个相隔很远、没有相互作用的粒子组成, 可以用下面的波函数来描述:

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\,\delta(p_1+p_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}\\ &= \delta(x_1-x_2-x_0)\end{aligned} \tag{10.1.1}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}$ 是粒子 1 和 2 的动量算符 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 的本征函数, 本征值分别为 $p_1=p$ 和 $p_2=-p$. x_1 和 x_2 是分别描述粒子 1 和粒子 2 位置的坐标变量. x_0 是常数. EPR 态很奇特. 虽然相距很远的两个粒子之间不存在相互作用, 但是这种两粒子的叠加态不能分解成各个粒子叠加态的乘积形式. 量子理论并不禁止这种态.

我们从 (10.1.1) 式可以了解到哪些信息呢?

(1) 在坐标表象下, 波函数是个 δ 函数: $\delta(x_1-x_2-x_0)$. 虽然粒子 1 和粒子 2 的坐标 x_1 和 x_2 都不确定, 但是它们之间的距离 x_1-x_2 是个确定值 x_0.

(2) 波函数 $\delta(x_1-x_2-x_0)$ 是两个自由粒子的平面波形式波函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}$ 叠加的结果, 叠加时基于特殊的动量分布函数 $\delta(p_1+p_2)$. 正是 $\delta(p_1+p_2)$ 导致了叠加的特殊性: 虽然粒子 1 和粒子 2 的动量单独可以取任意值, 但是 δ 函数限制了这两项的叠加, 使其系统总动量值取常数 0 值.

现在, 我们把波函数从位置表象转换到动量表象, 得到:

$$\begin{aligned}\Psi(p_1,p_2) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\,\delta(x_1-x_2-x_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}\\ &= \delta(p_1+p_2)\end{aligned} \tag{10.1.2}$$

从 (10.1.2) 式又能获悉 EPR 态的什么特性呢?

(1) 在动量表象下, 波函数是个 δ 函数: $\delta(p_1+p_2)$. 虽然动量 p_1 和 p_2 都是不确定的, 但是两粒子动量之和为常数: $p_1+p_2=0$.

(2) 波函数 $\delta(p_1+p_2)$ 是两个自由粒子的平面波形式波函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}$ 叠加的结果. 叠加时基于特殊的分布函数: $\delta(x_1-x_2-x_0)$. 正是 $\delta(x_1-x_2-x_0)$ 导致了叠加的特殊性: 虽然粒子 1 和粒子 2

的位置坐标可以取任意值, 但是 δ 函数限制了只有满足 $x_1 - x_2 =$ 常数的两粒子态才能叠加.

在 EPR 系统里, 单个子体系的动量 (位置) 都是不确定的. 但是, 如果其中一个子体系被测定出了某一确定的动量 (位置), 另外一个的动量 (位置) 就应该取唯一的相应的确定值, 无论这两个子系统相距多远. 因此, 尽管单个自由粒子的动量和位置是完全不确定的, 即 $\Delta p_j \sim \infty$ 和 $\Delta x_j \sim \infty$, $j = 1, 2$, 但是一个理想的两粒子 EPR 态却可以同时用 $\Delta(p_1 + p_2) = 0$ 和 $\Delta(x_1 - x_2) = 0$ 来表征. 换句话说, 每个子系统在运动过程中动量和位置有很多可能的值或完全随机的值, 但是无论什么时候做联合测量, 会发现这两个子系统之间的关联关系总是确定的.

(10.1.1) 式和 (10.1.2) 式中的 EPR 态是一个两粒子态线性叠加的简单结果. 但是, EPR 态背后所蕴含的物理意义远超出了爱因斯坦所能接受的极限.

(10.1.1) 式和 (10.1.2) 式所描述的自由粒子, 不管测量与否都具有确定的动量和位置吗? 一方面, 单独任意一个粒子的动量和位置值都是不确定的, 叠加时需要考虑所有动量和位置的取值. 由此, 我们不得不相信: 运动过程中, 任何一个粒子都没有确定的动量和位置, 也可以说具有叠加范围内的所有可能的动量和位置. 另一方面, 测量一个粒子的位置或动量会将另外一个粒子的位置或动量唯一地确定下来. 也就是说, 测量之前这两个粒子的动量和位置并没有预先确定下来, 而测量后两个粒子的动量和位置都有了确定值. 这对于坚信没有超距作用的人来说很难接受. 因此 EPR 把我们置入一个两难的境地. 我们很自然地要问 "量子力学对物理实在性的描述是完备的吗?", 也就是 EPR 在 1935 年提出的问题.

在 1935 年的文章中, 爱因斯坦, 波多尔斯基、罗森指出: 由 (10.1.1) 式和 (10.1.2) 式所描述的偶粒子纠缠态的存在, 违反了量子理论的测不准原理. 其实, (10.1.1) 式和 (10.1.2) 式不过是一个直接的偶粒子态的线性叠加. 为得出他们的结论, EPR 从下面的规范入手:

局域性: 不存在超距作用;

实在性: "如果没有对一个体系做任何的扰动, 若我们能确定预测到一个物理量的值, 那么就存在一个与这个物理量对应的物理实体元素." 一方面, 如果我们对粒子 1 和粒子 2 的测量属于类空事件, 那么对粒子 2 的测量不会造成对粒子 1 的任何扰动. 另一方面, 根据 δ 函数形式的波函数我们仍然可以通过测量粒子 2 的动量 (位置) 从而预测出粒子 1 的动量 (位置) 的精确值. 这样的话, 不管我们测不测粒子 1, 它的动量和位置必定是同时有精确值的物理实在量, 显然, 此论点为量子理论所不容. 我

们再考虑:

完备性: "每一个物理实在量在一个完备理论中一定有其对应部分". 人们不禁会问: "量子力学对物理实在量的描述是完备的吗?", 这正是 1935 年那篇文章的标题.

哥本哈根学派对 EPR 的争论不以为然. 玻尔提出了一个批判的意见, 他认为 EPR 关于物理实在的标准 "太狭隘了". 然而找到一个比较宽泛的标准也不是太容易. 惠勒总结了哥本哈根学派试图要告诉我们的观点, 他的令人难以忘记的印证大约如下: "没有哪个基本量子现象在被观测记录到之前, 可以称之为现象". 到 1927 年, 哥本哈根学派的观点被大多数物理学家所接受, 成为对量子力学的标准解释. 但是爱因斯坦没有妥协. 帕里斯 (Pais) 在他的书中回忆到: 大约是 1950 年左右, 爱因斯坦散步时突然停了下来, 问我是否真的相信, "只有看月亮 (介子) 时月亮 (介子) 才存在."

曾一度有争论认为 $\Delta(p_1+p_2)\Delta(x_1-x_2)=0$ 违反了不确定性原理. 其实, 这个论点是错误的. 不难发现 p_1+p_2 和 x_1-x_2 并不是一对共轭量. 就我们所知, 在量子力学中非共轭量如果存在相应算符的话[17], 那么算符应该是对易的. 所以 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=0$, 或 $\Delta(p_1+p_2)\Delta(x_1-x_2)=0$ 并不违反不确定原理. 这点很容易从下面的二维傅里叶变换得出:

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}p_1\,\mathrm{d}p_2\,\delta(p_1+p_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}\\&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}(p_1+p_2)\,\delta(p_1+p_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1+p_2)(x_1'+x_2)/2\hbar}\\&\quad\times\int \mathrm{d}(p_1-p_2)/2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1-p_2)(x_1'-x_2)/2\hbar}\\&=1\times\delta(x_1-x_2-x_0)\end{aligned}$$

其中 $x'=x_1-x_0$;

$$\begin{aligned}\Psi(p_1,p_2)&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\delta(x_1-x_2-x_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1(x_1-x_0)/\hbar}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x_2/\hbar}\\&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}(x_1'+x_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1+p_2)(x_1'+x_2)/2\hbar}\\&\quad\times\int \mathrm{d}(x_1'-x_2)/2\,\delta(x_1'-x_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_1-p_2)(x_1'-x_2)/2\hbar}\\&=\delta(p_1+p_2)\times 1\end{aligned}$$

共轭的傅里叶变量是 $(x_1+x_2)\Leftrightarrow(p_1+p_2)$ 和 $(x_1-x_2)\Leftrightarrow(p_1-p_2)$. 虽然

[17] 有些可测量的物理量是没有对应的量子力学算符, 比如时间 t. 从这个角度来看, 变量之间的不确定关系比算符更具普遍意义.

$\Delta(x_1-x_2)\sim 0$ 和 $\Delta(p_1+p_2)\sim 0$ 可能同时满足, 但是共轭的傅里叶变量还是满足不确定关系的: $\Delta(x_1+x_2)\Delta(p_1+p_2)\geqslant\hbar$ 和 $\Delta(x_1-x_2)\Delta(p_1-p_2)\geqslant\hbar$; 其中 $\Delta(p_1-p_2)\sim\infty$, $\Delta(x_1+x_2)\sim\infty$.

事实上, EPR 在 1935 年的文章中从来没质疑 $\Delta(x_1-x_2)\Delta(p_1+p_2)=0$ 违反不确定关系. 尽管 1935 年他们提出的佯谬是基于对测不准原理的争论, 但是爱因斯坦可能关注的并不是测不准关系本身. 爱因斯坦忧虑的到底是什么呢? 爱因斯坦, 终其一生, 是一个现实主义的忠实拥护者. 他难以接受的是: 量子力学不能精确地描述一个粒子在其运动过程中的动量和位置, 而只能用特定动量和位置的概率幅来描述. 爱因斯坦形象地批评道: "上帝是不会掷骰子的", 他用批判来拒绝接受薛定谔猫. 我们用纠缠偶粒子系统, 例如一对处于纠缠态的薛定谔猫, 来澄清和加强对爱因斯坦现实主义观点的认识. 对于爱因斯坦来说, 接受纠缠态薛定谔猫就意味着承认超距作用, 从而导致量子力学和相对论之间的矛盾. 让我们首先按照哥本哈根学派的思路来考虑一下这个问题: 设想一个测量粒子动量和位置的实验装置, 量子力学认为在测量之前, EPR 对中的每一个粒子都没有确定的动量和位置, 或者说具有叠加范围内所有可能取值的动量和位置, 即 $\Delta p_j\neq 0$, $\Delta x_j\neq 0$, $j=1,2$. 假定测量位置时, 使用的是粒子计数器, 每一次计数, 测量仪记录下测量到的粒子的精确位置. 然而没有人能够预测每一次的测量值, 唯一能知道的就是记录到每个值的概率. 如果我们进一步假定相距很远的两粒子之间不存在任何可能的物理相互作用, 并且也相信自然界中不存在任何非物理的超距作用, 那么我们就能得出以下结论: 无论这两个粒子是如何产生的, 这两个记录的值应该是相互独立的. 这样, 由于 x_1 和 x_2 都是不确定的, x_1-x_2 的值应该也是不确定的. 上述陈述也对粒子的动量测量有效. 因此, 经过对多对粒子的一系列测量后, 会发现对 p_1+p_2 和 x_1-x_2 统计测量一定满足下面的不等式:

$$\begin{aligned}\Delta(p_1+p_2)&=\sqrt{(\Delta p_1)^2+(\Delta p_2)^2}>\mathrm{Max}(\Delta p_1,\Delta p_2)\\ \Delta(x_1-x_2)&=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2}>\mathrm{Max}(\Delta x_1,\Delta x_2)\end{aligned}\tag{10.1.3}$$

从统计学角度, (10.1.3) 式显然是正确的, 尤其是确信两个独立的局域测量之间不存在相互扰动的时候. "两个独立的局域测量之间不存在相互扰动" 这一条件还是比较容易实现的, 只需要两个测量事件是类空分离事件. (10.1.3) 式的经典不等式不允许 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=0$, 除非 $\Delta p_1=0$, $\Delta p_2=0$, $\Delta x_1=0$ 和 $\Delta x_2=0$ 同时成立. 不幸的是, $\Delta p_1=0$, $\Delta p_2=0$, $\Delta x_1=0$ 和 $\Delta x_2=0$ 同时成立的假定违反了测不准关系 $\Delta p_1\Delta x_1\geqslant\hbar$

和 $\Delta p_2 \Delta x_2 \geqslant \hbar$. 然而, 应用量子力学原理, 偶粒子 EPR 纠缠态的确满足 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=0$.

在一个非完美纠缠的系统中, p_1+p_2 和 x_1-x_2 的不确定度可能不是零. 然而, 它们仍然满足 EPR 不等式:

$$\begin{aligned} \Delta(p_1+p_2) &< \min(\Delta p_1, \Delta p_2) \\ \Delta(x_1-x_2) &< \min(\Delta x_1, \Delta x_2) \end{aligned} \tag{10.1.4}$$

(10.1.3) 式的经典不等式和 EPR 不等式 (10.1.4) 之间存在明显矛盾, 这深深地困扰着爱因斯坦. 而一个坚信 (10.1.3) 式的人, 看到遥远的两个独立粒子的 p_1+p_2 和 x_1-x_2 的测量值确实满足 (10.1.4) 式时, 就很容易陷入一个困难的境地, 要么不确定原理被违背, 要么承认存在超距作用.

那么有没有一个 "更好" 的理论呢? 一方面, 它类似量子理论可以正确预测单粒子的行为, 另一方面, 它能够支持 EPR 对物理实在的描述是完备的. 爱因斯坦实在论的追随者试图通过许多不同的途径来阐明量子力学的实在性理论. 玻姆 (Bohm) 首次尝试性地提出了所谓的 "隐变量理论". 这个理论似乎满足了上面的要求. 隐变量理论成功地解释了很多不同的量子现象. 直到 1964 年, 贝尔提出了一个理论, 该理论表明存在一个从局域性经典统计理论导出的不等式, 这个不等式可以用来将局域隐变量理论和量子力学区分开来. 从那以后, 验证贝尔不等式成为研究量子理论中基本问题的标准工具. 实验上验证贝尔不等式是从 20 世纪 70 年代早期开始的. 到目前为止, 历史上大部分实验都是违背贝尔不等式的, 进而否定了隐变量理论. 贝尔理论和贝尔不等式的实验验证我们在后面会仔细讨论.

在下面的讨论中, 我们考察一组试图模拟 EPR 纠缠系统行为的较为流行的经典模型. 这些模型都是基于多粒子系综的统计行为而不是单粒子的叠加态. 换句话说, 它们不是建立在薛定谔猫的 (单只猫是既死又活, 或一对猫同死同活) 概念基础之上的, 而是基于很多对孪生猫, 其中一半的孪生猫是活的, 另一半是死的.

有三种模型:

(1) 在第一种模型中, 每一对粒子都有确定的动量 $p_1=$ 精确值, $p_2=$ 精确值, 并且 $p_1+p_2=0$. 不同对粒子的 p_1 和 p_2 各自的取值可以很不相同, 但是它们的和始终保持为常数零. 这样, 每次对遥远的两个粒子做符合测量时都会精确地测到 p_1 和 p_2 的值以及 $p_1+p_2=0$. 不确定度 Δp_1 和 Δp_2 是对系综测量时得到的, 仅仅具有统计意义. 这个模型基于对大量经典关联粒子对的测量, 可以成功地模拟 $\Delta p_1 \sim \infty$, $\Delta p_2 \sim \infty$ 和

$\Delta(p_1+p_2)=0$. 然而, 这只是模拟了 EPR 的一半特性. 这个模型能给出 $\Delta x_1\sim\infty$, $\Delta x_2\sim\infty$ 并且 $\Delta(x_1-x_2)=0$ 吗? 我们确实可以得到 $\Delta x_1\sim\infty$ 和 $\Delta x_2\sim\infty$, 否则将违背测不准关系. 然而位置关联 $\Delta(x_1-x_2)=0$ 是无论如何都得不到的.

(2) 在第二种模型中, 每一对粒子都有确定的位置 $x_1=$ 精确值, $x_2=$ 精确值, 并且 $x_1-x_2=x_0$. 不同对粒子的 x_1 和 x_2 各自的取值可以很不相同, 但是它们的差始终保持为常数. 这样, 每次对遥远的两个粒子做符合测量时都会精确地测到 x_1 和 x_2 的值以及 $x_1-x_2=x_0$. 不确定度 Δx_1 和 Δx_2 是对系综测量得到的, 仅仅具有统计意义. 这个模型基于对大量经典关联粒子对的测量, 可以成功地模拟 $\Delta x_1\sim\infty$, $\Delta x_2\sim\infty$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=0$. 但是, 同样, 这只是 EPR 故事的一半. 这个模型能给出 $\Delta p_1\sim\infty$, $\Delta p_2\sim\infty$ 和 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 吗? 我们确实可以得到 $\Delta p_1\sim\infty$ 和 $\Delta p_2\sim\infty$, 否则将违背测不准关系. 然而, 动量关联 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 是无论如何都得不到的.

上面两个经典关联粒子对的模型都不可能同时满足 $\Delta(p_1+p_2)=0$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=0$. 如果我们把二者结合起来会对应什么情形呢? 这就是第三种经典模型.

(3) 在第三种模型中, 我们假定在大量的经典关联粒子对中有 50% 处于模型 1, 另外 50% 处于模型 2. p_1+p_2 的测量值有 50% 满足 $p_1+p_2=0$, 余下的 50% p_1+p_2 随机取值. 另一方面, x_1-x_2 的测量值中也是有 50% 的概率满足 $x_1-x_2=x_0$ 和 50% 的概率为随机值. 那么, 在这种情况下, 统计上 (p_1+p_2) 和 (x_1-x_2) 测量的不确定度是多少呢? 如果我们仅关注于满足模型 1 的事件, 那么 (p_1+p_2) 测量的统计不确定度为 $\Delta(p_1+p_2)=0$. 同样, 如果我们仅关注于满足模型 2 的事件, 那么 (x_1-x_2) 测量的统计不确定度为 $\Delta(x_1-x_2)=0$. 但是, 如果我们把所有测量一起考虑的话, p_1+p_2 和 (x_1-x_2) 的统计不确定度都是无限大: $\Delta(p_1+p_2)=\infty$ 和 $\Delta(x_1-x_2)=\infty$.

结论是, 经典关联粒子对或许能部分模拟 EPR 关联. 三类最优化的观测结果如下:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \Delta(p_1+p_2)=0\ (100\%)\ \&\ \Delta(x_1-x_2)=\infty\ (100\%);\\
&\qquad \Delta p_1=0,\ \ \Delta p_2=0;\ \ \Delta x_1=\infty,\ \ \Delta x_2=\infty\\
&(2)\ \Delta(x_1-x_2)=0\ (100\%)\ \&\ \Delta(p_1+p_2)=\infty\ (100\%);\\
&\qquad \Delta x_1=0,\ \ \Delta x_2=0;\ \ \Delta p_1=\infty,\ \ \Delta p_2=\infty.\\
&(3)\ \Delta(p_1+p_2)=0\ (50\%)\ \&\ \Delta(x_1-x_2)=0\ (50\%);\\
&\qquad \Delta p_1=\infty,\ \ \Delta p_2=\infty;\ \ \Delta x_1=\infty,\ \ \Delta x_2=\infty
\end{aligned}
$$

在同一个实验测量装置中, 只有 EPR 纠缠态才会产生同时满足下式的观测:

$$\Delta(p_1+p_2)=0\ (100\%)\ \&\ \Delta(x_1-x_2)=0\ (100\%)$$
$$\Delta p_1\sim\infty,\quad \Delta p_2\sim\infty,\quad \Delta x_1\sim\infty,\quad \Delta x_2\sim\infty$$

于是除了贝尔不等式, 我们找到了另一个用来区分量子纠缠态和经典关联粒子对的办法.

10.2 直积态、纠缠态和经典关联态

(1) 直积态

一般来讲, 直积态用来描述由两个或者多个独立子系统组成的系统的行为. 通常情况下, 直积态的测量涉及对两个或者多个独立粒子的联合探测. 例如, 可以在一定时间窗口内对两个或者多个粒子计数探测器做符合测量. 它的实验装置和测量 EPR 关联时的装置类似, 只是测量涉及的是多个独立粒子. 独立粒子体系可以用直积态表示, 即体系的态函数可以分解为两个或者多个子系统态函数的乘积. 比如,

$$\hat{\rho}=\hat{\rho}_1\otimes\hat{\rho}_2 \tag{10.2.1}$$

(10.2.1) 式中的密度矩阵 $\hat{\rho}$ 表示的是由两个独立子体系 $\hat{\rho}_1$ 和 $\hat{\rho}_2$ 组成的量子系统. 在 (10.2.1) 式中, 每一个独立的子系统可以处在任意态. 最简单的例子就是两个纯态的直积:

$$|\Psi\rangle=\sum_{a,b}f(a)g(b)\ |a\rangle\,|b\rangle=\sum_a f(a)\,|a\rangle\cdot\sum_b g(b)\,|b\rangle \tag{10.2.2}$$

其中 $\{|\,a\rangle\}$和 $\{|\,b\rangle\}$分别是子系统 1 和 2 的两个正交矢量的集.

(2) 纠缠态

和直积态不同的是: 纠缠态描述的是纠缠的量子系统的行为. 两个粒子纠缠态的数学表达由薛定谔首先提出. 考虑一个纯态系统, 它由空间分离的两个子系统组成,

$$\hat{\rho}=|\Psi\rangle\langle\Psi|,\quad |\Psi\rangle=\sum_{a,b}c(a,b)\,|a\rangle\,|b\rangle \tag{10.2.3}$$

其中, $\{|\,a\rangle\}$和 $\{|\,b\rangle\}$分别是子系统 1 和 2 的两个正交矢量集, $\hat{\rho}$ 是密度矩阵.

如果 $c(a,b)$ 不能够分解为 $f(a)\times g(b)$ 的直积形式, 那么态也不能分解为子系统 1 和 2 所对应纯态的直积:

$$\hat{\rho}\neq\hat{\rho}_1\otimes\hat{\rho}_2 \tag{10.2.4}$$

这个态被薛定谔定义为纠缠态.

根据这个标记, (10.1.1) 式和 (10.1.2) 式所表示两个粒子的纠缠态 (EPR 态) 可以写为:

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{\mathrm{EPR}}&=\sum_{x_1,x_2}\delta(x_1-x_2+x_0)\,|x_1\rangle|x_2\rangle\\&=\sum_{p_1,p_2}\delta(p_1+p_2)\,|p_1\rangle|p_2\rangle\end{aligned} \tag{10.2.5}$$

这里, 我们把 EPR 纠缠系统描述为每一个粒子动量本征态的相干叠加以及位置本征态的相干叠加. EPR 态有一个明显的特征, 就是它不依赖于基矢的选择. (10.2.5) 式中的两个 δ 函数, 独立地和同时地, 表示完美的位置–位置关联和动量–动量关联. 虽然两个远离的粒子之间不存在相互作用, 但是只有本征态满足 δ 函数的项才叠加. EPR 态的这些令人惊讶的特征可以总结如下: 对于没有相互作用的任何单个子体系而言. 它们的动量和位置是不确定的. 但是, 如果测到其中一个子系统的动量或位置时, 那么另外一个的动量或位置就百分之百地确定了, 无论它们之间相距多远. 需要强调的是: (10.2.5) 式在共轭的动量和位置空间同时成立.

本书把 Klyshko 提出并命名的 *biphoton* 一词, 定名译为 "偶光子", 并明确其概念, 即, 处于纠缠态的一个光子对. 把处于纠缠态的两个粒子称为偶粒子, 以区分于处于其它量子态的 "成对测量的粒子", 或, "双粒子". 任何成对测量的粒子都可以称为双粒子, 双粒子概念更具普遍性. 双粒子可以处于直积态、纠缠态、随机态、或其它量子态. 这里定义的偶粒子与偶光子 (*biphoton*) 一样, 专指处于纠缠态的 "双粒子".

(3) 经典关联态

存在很多不同类型的经典关联态. 下面是被用于模拟 10.2.5 式 EPR 态的两类典型的经典关联态:

$$\hat{\rho}=\sum_{p_1,p_2}\delta(p_1+p_2)\;|\,p_1\,\rangle|\,p_2\,\rangle\langle\,p_2\,|\langle\,p_1\,| \tag{10.2.6}$$

或

$$\hat{\rho}=\sum_{x_1,x_2}\delta(x_1-x_2+x_0)\;|\,x_1\,\rangle|\,x_2\,\rangle\langle\,x_2\,|\langle\,x_1\,| \tag{10.2.7}$$

和纠缠态不同, 对于同一个系统而言, (10.2.6) 式和 (10.2.7) 式不能同时成立, 前面已经讨论过.

10.3 自旋纠缠态

玻姆提出了另一个经典的纠缠偶粒子系统. 玻姆把连续变量纠缠简化为分离的自旋变量纠缠. EPR- 玻姆态是两个自旋为 1/2 粒子构成的单一态:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\,\right] \tag{10.3.1}$$

其中态矢 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别表示沿着任意方向的自旋向上态和自旋向下态. 我们再次强调这个态的意义: *两个粒子的自旋都是不确定的. 但是, 如果其中一个粒子的自旋被测到沿某个方向向上, 那么另外一个粒子的自旋一定是沿着这个方向向下, 无论这两个 1/2 自旋的粒子相距多远.* 和原始的 EPR 态类似, (10.3.1) 式不依赖于自旋方向的选择和相应自旋算符的本征态. 不难发现在三个正交的自旋表象下, (10.3.1) 式同时都成立. (10.3.1) 式非常不同于经典关联态. 经典关联态与坐标的选取有关, 如果选取其它正交的自旋方向, 态的形式就要发生变化.

使用得最为广泛的纠缠偶粒子态可能就是贝尔态 (或 EPR-Bohm-Bell 态) 了. 贝尔态描述的是纠缠光子对的一组偏振状态. 四个贝尔态构成偶光子态的一组正交完备基, 通常写为

$$\begin{aligned}|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\,0_1\,0_2\,\rangle \pm |\,1_1\,1_2\,\rangle\right]\\ |\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\,0_1\,1_2\,\rangle \pm |\,1_1\,0_2\,\rangle\right]\end{aligned} \tag{10.3.2}$$

其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示两个任意的正交偏振的基矢, 例如 $|\,0\,\rangle = |H\rangle$ 和 $|\,1\,\rangle = |V\rangle$ 分别表示水平和竖直偏振. 后面会对贝尔态进行仔细讨论.

10.4 纠缠偶光子态

自发参量下转换 (SPDC) 产生的信号–闲置光子对的态是一种典型的 EPR 态. 粗略地讲, SPDC 过程是将一束泵浦激光入射到一个非线性介质, 比如一个非中心对称晶体, 非线性相互作用有时会导致一个高频泵浦光子的湮没, 同时产生一个低频的信号– 闲置光子对, 使之处于一个偶光子纠缠态中:

$$|\,\Psi\rangle = \Psi_0 \sum_{s,i} \delta\left(\omega_s + \omega_i - \omega_p\right)\delta\left(\boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_p\right)\hat{a}_s^{\dagger}(\boldsymbol{k}_s)\,\hat{a}_i^{\dagger}(\boldsymbol{k}_i)\,|\,0\rangle \tag{10.4.1}$$

其中 ω_j, $\boldsymbol{k}_j (j = s, i, p)$ 是信号光 (s)、闲置光 (i) 和泵浦光 (p) 的频率和波矢. $\hat{a}_s^\dagger$ 和 $\hat{a}_i^\dagger$ 分别表示信号和闲置光子的产生算符. Ψ_0 是归一化系数. 这里, 我们假定泵浦光是单频的连续光, 即 ω_p 和 $\boldsymbol{k}_p$ 可以当做常数. (10.4.1) 式中的两个 δ 函数被称为相位匹配条件:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \qquad \boldsymbol{k}_p = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i \tag{10.4.2}$$

称为信号和闲置有历史上的原因. 可能是在 SPDC 研究早期, 大多数实验采用的是非简并过程, 一支辐射在可见光波段 (比较容易被探测, 就称之为信号光), 另一支处于红外波段 (通常不容易探测而被称为闲置光). 在下面的讨论, 我们会发现闲置光的作用并不逊于信号光. 如果信号光和闲置光都具有同一个偏振, SPDC 就被称为 I 型. 如果具有正交偏振, 则被称为 II 型. 如果 SPDC 光子对有相同的 free-space 波长 (换言之, $\lambda_i = \lambda_s = 2\lambda_p$), 则过程被称为简并的, 反之, 称之为非简并的. 通常情况下, 从晶体中出射的光子对是非共线的, 也就是说沿着不同方向传播, 方向由 (10.4.2) 式中的第二项以及斯涅耳 (Snell's) 定律决定. 当然, 光子对也可以与泵浦光一起共线地从同一方向出射.

信号–闲置双光子的态可以用非线性相互作用哈密顿量, 通过量子力学的一阶微扰理论求得. 泵浦光入射到非线性晶体中, 引起 SPDC 过程中的相互作用. 极化强度, 即单位体积内的偶极距, 可以写为:

$$P_i = \chi_{i,j}^{(1)} E_j + \chi_{i,j,k}^{(2)} E_j E_k + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} E_j E_k E_l + \cdots \tag{10.4.3}$$

其中 $\chi^{(m)}$ 是第 m 阶电极化系数张量. 在 SPDC 过程中, 起作用的是二阶非线性系数 $\chi^{(2)}$. 二阶非线性相互作用哈密顿量可以写为:

$$H = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \chi_{ijk}^{(2)}\ E_i E_j E_k \tag{10.4.4}$$

在这里, 需要对整个相互作用体积 V 进行积分.

为了方便起见, (10.4.4) 式中的电场一般用傅里叶展开式表示:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ [\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\ ] \tag{10.4.5}$$

将 (10.4.5) 式代入 (10.4.4) 式, 只保留有意义的项, 我们可以得到相互作用表象下 SPDC 过程的哈密顿量:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{int}}(t) = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_i\, \chi_{lmn}^{(2)} \hat{E}_{pl}^{(+)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_p t - \boldsymbol{k}_p\cdot\boldsymbol{r})} \\ \hat{E}_{sm}^{(-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s(\boldsymbol{k}_s)t - \boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r})} \hat{E}_{in}^{(-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_i(\boldsymbol{k}_i)t - \boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r})} + h.c. \end{aligned} \tag{10.4.6}$$

这里, $h.c.$ 代表厄米共轭. 为了简化计算, 我们假定泵浦光是波矢为 $\boldsymbol{k}_p$、频率为 ω_p 的平面波.

(10.4.6) 式中的体积积分对于一些简单近似情况很容易计算. 这里, 我们先假定体积 V 可以近似为无限大, 在后面的讨论中还是要考虑有限体积 V(包括纵向和 (或) 横向方向上都是有限尺寸). 对于无限大体积 V, (10.4.6) 式中的相互作用哈密顿量可以写为:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{int}}(t) = \epsilon_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}_i\, \chi^{(2)}_{lmn}\, \hat{E}^{(+)}_{pl} \hat{E}^{(-)}_{s\,m} \hat{E}^{(-)}_{i\,n} \\ \times \delta(\boldsymbol{k}_p - \boldsymbol{k}_s - \boldsymbol{k}_i) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_p - \omega_s(\boldsymbol{k}_s) - \omega_i(\boldsymbol{k}_i))t} + h.c. \end{aligned} \tag{10.4.7}$$

我们有理由考虑将泵浦光场视为经典场, 因为它通常是一激光束, 而将信号和闲置光场量子化, 因为这两者都处于单光子水平:

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{k}) &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k}), \\ \hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{k}) &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\hat{a}(\boldsymbol{k}), \end{aligned} \tag{10.4.8}$$

其中, $\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k})$ 和 $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ 分别是光子的产生和湮没算符. 出射的偶光子态可以通过一阶微扰论来计算:

$$|\Psi\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t\, H_{int}(t)\, |0\rangle \tag{10.4.9}$$

我们在 (10.4.9) 式中使用真空态 $|0\rangle$ 为初态, 已假设对任何信号和闲置模式都没有输入辐射, 即我们有一个 SPDC 过程.

进一步假定相互作用时间无限长, 对 (10.4.9) 式进行时间积分, 并忽略所有常数部分以及 ω 的缓变项 (比如平方根关系), 得到如 (10.4.1) 式表示的积分形式的纠缠双光子态:

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_s \mathrm{d}\boldsymbol{k}_i\, \delta[\omega_p - \omega_s(\boldsymbol{k}_s) - \omega_i(\boldsymbol{k}_i)]\delta(\boldsymbol{k}_p - \boldsymbol{k}_s - \boldsymbol{k}_i)\hat{a}^{\dagger}_s(\boldsymbol{k}_s)\hat{a}^{\dagger}_i(\boldsymbol{k}_i)|0\rangle \tag{10.4.10}$$

其中 Ψ_0 是归一化常数, 它包含了所有省略掉的常数. (10.4.10) 式实际上已经在第 3 章中计算二阶关联函数时用过.

实现相位匹配的方式, 换言之, (10.4.10) 中 δ 函数的实现方式, 基本上决定了输出信号-闲置光子对的 "模样". 例如, 在负单轴晶体中, 泵浦光为非寻常光 (e) 时, 产生的信号和闲置光子对可以都为寻常光 (o), 这种配置定义为 I 类相位匹配. 产生的信号-闲置光子对也可以是正交偏振的, 一个是 e 光, 另一个是 o 光, 这就是 II 类相位匹配. 图 10.4.1 给出

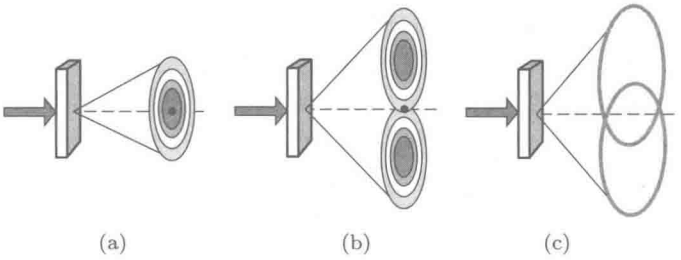


图 10.4.1 三种广泛应用的 SPDC 过程. (a)I 类 SPDC. (b) 共线 II 类简并 SPDC. 两个环相切. (c) 非共线 II 类简并 SPDC. 为了清楚起见, 只画了简并的两个环, 一个是 e 偏振, 另一个是 o 偏振.

SPDC 双光子源的三个例子. 这三种方案已经被广泛应用到不同实验中. 其中的技术细节可以参考非线性光学的教科书以及相关研究文献.

(10.4.1) 式或 (10.4.10) 式表示的偶光子态是一个纯态, 它可以从数学上描述信号和闲置光子对的行为. 那么是不是不管测量与否, (10.4.1) 式或 (10.4.10) 式 EPR 态中的信号光子或闲置光子都有确定的能量和动量呢? 量子力学的答案是否定的. 但是无论它们之间相距多远, 如果其中一个子系统被测到处于一定的能量和动量, 那么另外一个的能量和动量就完全确定了.

在上面偶光子态的计算过程中, 我们假定非线性相互作用的体积为无限大. 而对于一个有限的非线性相互作用体积, 我们可以把信号–闲置偶光子态写成一个更一般的形式:

$$|\,\Psi\,\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}_i\,F(\boldsymbol{k}_s,\boldsymbol{k}_i)\,\hat{a}_s^{\dagger}(\boldsymbol{k}_s)\,\hat{a}_i^{\dagger}(\boldsymbol{k}_i)|\,0\,\rangle \tag{10.4.11}$$

其中

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{k}_s,\boldsymbol{k}_i) &= \epsilon\,\delta(\omega_p-\omega_s-\omega_i)\,f(\Delta_z L)\,h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2) \\ f(\Delta_z L) &= \int_L \mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_p-k_{sz}-k_{iz})z} \\ h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2) &= \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\,\tilde{h}_{tr}(\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\cdot\boldsymbol{\rho}} \\ \Delta_z &= k_p-k_{sz}-k_{iz} \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

这里 ϵ 被称为参量增益, 它正比于二阶电极化系数 $\chi^{(2)}$, 通常情况当作常数. L 是非线性相互作用长度. $\boldsymbol{\kappa}$ 中的积分范围是泵浦光照射到的非线性介质的横向面积 A. $\boldsymbol{\rho}$ 是横向坐标矢量. $\boldsymbol{\kappa}_j(j=s,i)$ 是信号光和闲置光的横向波矢. $f(|\,\boldsymbol{\rho}\,|)$ 是泵浦光的横向分布函数, 大多数的实验中是高斯型.

对一个无限长 ($L \sim \infty$) 与无限宽 ($A \sim \infty$) 的非线性相互作用区域, 函数 $f(\Delta_z L)$ 和 $h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2)$ 都可以近似为 δ 函数. 我们选择 (10.4.12) 式的目的是为区分开 "纵向的" 和 "横向的" 关联. 我们会将 $\delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)$ 和 $f(\Delta_z L)$ 一起重新写成关于 $\omega_s - \omega_i$ 的函数. 为了数学上的简化, 我们考虑近共线的 SPDC. 此时, $|\boldsymbol{\kappa}_{s,i}| \ll |\boldsymbol{k}_{s,i}|$.

基本上, 纵向的时空关联性质由函数 $f(\Delta_z L)$ 决定. 其中的积分很容易计算:

$$\begin{aligned} f(\Delta_z L) &= \int_0^L \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_p - k_{sz} - k_{iz})z} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta_z L/2}\, \mathrm{sinc}(\Delta_z L/2) \end{aligned} \tag{10.4.13}$$

现在, 我们一起考虑 $f(\Delta_z L)$ 和 $\delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)$. 利用 $\delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)$ 中各频率之间的关系, 我们可以引入频率失谐量 ν 来计算函数 $f(\Delta_z L)$:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega_s^0 + \nu \\ \omega_i &= \omega_i^0 - \nu \\ \omega_p &= \omega_s + \omega_i = \omega_s^0 + \omega_i^0 \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

根据色散关系 $k(\omega)$, 我们将波数展开成频率失谐量 ν 的函数:

$$\begin{aligned} k_s &\approx k(\omega_s^0) + \nu \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_s^0} = k(\omega_s^0) + \frac{\nu}{u_s}, \\ k_i &\approx k(\omega_i^0) - \nu \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_i^0} = k(\omega_i^0) - \frac{\nu}{u_i} \end{aligned} \tag{10.4.15}$$

其中 u_s 和 u_i 分别表示信号光和闲置光的群速度. 现在, 我们将 Δ_z 用频率失谐量 ν 来表示:

$$\begin{aligned} \Delta_z &= k_p - k_{sz} - k_{iz} \\ &= k_p - \sqrt{(k_s)^2 - (\boldsymbol{\kappa}_s)^2} - \sqrt{(k_i)^2 - (\boldsymbol{\kappa}_i)^2} \\ &\cong k_p - k_s - k_i + \frac{(\boldsymbol{\kappa}_s)^2}{2k_s} + \frac{(\boldsymbol{\kappa}_i)^2}{2k_i} \\ &\cong k_p - k(\omega_s^0) - k(\omega_i^0) + \frac{\nu}{u_s} - \frac{\nu}{u_i} + \frac{(\boldsymbol{\kappa}_s)^2}{2k_s} + \frac{(\boldsymbol{\kappa}_i)^2}{2k_i} \\ &\cong D\nu \end{aligned} \tag{10.4.16}$$

其中 $D \equiv 1/u_s - 1/u_i$. 在上面推导中, 我们用到了 $k_p - k(\omega_s^0) - k(\omega_i^0) = 0$ 和 $|\boldsymbol{\kappa}_{s,i}| \ll |\boldsymbol{k}_{s,i}|$. 纵向的波矢关联函数可以重新写为频率失谐量 ν 的函数: $f(\Delta_z L) \cong f(\nu D L)$. 对于 II 类 SPDC, e 光的折射率依赖于其波矢和光

轴的夹角, 因此在上面展开式中会多出一项. 为了满足这一近似, 我们的计算仅限于近共线过程. 这样, 经过合理的近似, 在近共线的实验配置下:

$$\Delta_z L \cong \nu D L = (\omega_s - \omega_i) D L/2 \tag{10.4.17}$$

简并的 I 类 SPDC 比较特殊. 由于 $u_s = u_i$, 所以 $D = 0$, $k(\omega)$ 的展开式应该保留到二阶. (10.4.17) 式被下面的表达式取而代之:

$$\Delta_z L \cong -\nu^2 D' L = -(\omega_s - \omega_i)^2 D' L/4 \tag{10.4.18}$$

其中

$$D' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{u}\right)\Big|_{\omega^0}$$

于是, 信号-闲置双光子态近似为:

$$|\,\Psi\,\rangle = \int \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, f(\nu)\, h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)\, \hat{a}_s^{\dagger}(\omega_s^0 + \nu, \boldsymbol{\kappa}_s)\, \hat{a}_i^{\dagger}(\omega_i^0 - \nu, \boldsymbol{\kappa}_i)|\,0\,\rangle \tag{10.4.19}$$

在这里, 归一化系数已经归并到 $f(\nu)$ 里.

10.5 纠缠偶光子系统的 EPR 关联

EPR 态是一个用来描述偶光子系统行为的纯态. 这个态形式上是一系列特殊的偶光子态之间的相干叠加. EPR 关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 源于一组奇特的偶光子振幅之间的非局域干涉. 它给出在坐标 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处联合探测到一对光子的概率. 原则上, 对一个 EPR 光子对的联合探测事件涉及了所有由 EPR 关联定义的双光子振幅的叠加. 一个 EPR 光子对的一次测量能够提供关于干涉的所有信息. 这时候很自然地就想到一个问题: 测量一对 EPR 光子对能够给出 EPR 关联吗? 根据量子力学, 只测量一对粒子是从来不可能给出任何有用的信息的, 虽然 EPR 态是纯态. 一方面, 在光子计数中, 一次测量的结果仅是一个 "有" (有计数或一个 "咔嗒" 的触发) 或 "无" (无计数). 对于两个光子计数的一个联合探测中, 输出 "有" 意味着一次 "有-有" 的, 或 "咔嗒"-"咔哒" 的联合探测事件. 一个联合探测为 "有" 的事件, 可能发生在任何一对在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 上的光子对上, 但肯定不会发生在一个干涉图形的所有点上. 另一方面, 量子力学并不能够准确预测出一对光子的精确位置 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$, 但是可以预测在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处测量到一个联合探测事件的概率. 要想了解 EPR 关联, 需要对大量 "全同" 粒子对进行系综测量. 这里, "全同" 指的是测量涉及的所有粒子对必须处于相同的 EPR 态. 对量子相干或者关联的测量是典型的统计测量. 统计上, 如

果一个联合探测的输出, 在确定的某一组物理观测值上, 或在物理变量间的某特定关系上, 最大概率地得到了 "有", 而除此之外, 100% 地得到 "无", 则所观测的量子系统可被认为是在该观测上具有 EPR 关联. 举个例子, EPR 假想实验 (Gedankenexperiment) 设想了一对在位置上具有完美关联, $\delta(x_1 - x_2 + x_0)$ 的偶粒子系统. 为验证 EPR 关联, 我们需要只在两个远离的观测器其位置满足 $x_1 - x_2 = x_0$ 时, 探测到 "有", 而当其位置为 $x_1 - x_2 \neq x_0$ 时, 100% 地探测为 "无". 要想观测到这种奇特的 EPR 关联, 实验方法是扫描 $x_1 - x_2$ 的所有可能取值, 测量在特定坐标 x_1 和 x_2 处的符合测量计数率. 如此测量到的函数关系, 在量子光学中, 意味着二阶关联函数 $G^{(2)}(\tau_1 - \tau_2)$ (纵向), 和/或 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$ (横向), 其中 $\tau_j = t_j - z_j/c$, $j = 1, 2$. $\boldsymbol{\rho}_j$ 是第 j 个点探测器的横向坐标.

现在, 我们考察一下 SPDC 产生的信号-闲置纠缠光子对的二阶相干或关联函数

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \langle\, \hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,\rangle$$

其中 $\hat{E}^{(-)}$ 和 $\hat{E}^{(+)}$ 是探测事件时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 的场算符. 对于 SPDC 过程产生的纠缠双光子态, 有:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) &= |\,\langle 0\,|\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2, t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1, t_1)\,|\,\Psi\,\rangle\,|^2 \\ &= |\,\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\,|^2 \end{aligned}$$

其中 $|\,\Psi\,\rangle$ 是双光子态. $\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 是我们先前讨论过的偶光子有效波函数.

为了求出 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$, 我们需要把场算符从源传播到时空坐标 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$.

通常情况下, $(\boldsymbol{r}, t)$ 处的场算符 $\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}, t)$ 可以写成格林函数的形式, 格林函数将每一个傅里叶模式从时空点 $(\boldsymbol{r}_0, t_0)$ 传播到 $(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, t - t_0)\,\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_0, t_0) \tag{10.5.1}$$

为了简化标记, 我们假设 (10.5.1) 式只有一种偏振. 格林函数 $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, t - t_0)$ 又被叫做光学传递函数. 对不同的实验装置, 其 $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, t - t_0)$ 会大不相同.

考虑如图 10.5.1 所示的理想的简单实验装置, 简并的信号光子-闲置光子分别被两个点状光子计数探测器 D_1 和 D_2 所接收, 从而进行纵向关联 $G^{(2)}(\tau_1 - \tau_2)$ 和横向关联 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$ 的测量. 为了数学上的简化,

我们进一步采用傍轴近似. 在菲涅耳傍轴近似下, 为了方便讨论纵向和横向关联, 我们将 $\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j, t_j)$ 写成纵向和横向时空变量的函数:

$$\begin{aligned}\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_j, z_j, t_j) &\cong \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\; g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_j, z_j)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_j}\, \hat{a}(\omega, \boldsymbol{\kappa}) \\ &\cong \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \gamma(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_j, z_j)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_j}\, \hat{a}(\omega, \boldsymbol{\kappa}) \qquad (10.5.2)\end{aligned}$$

其中 $g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_j, z_j) = \gamma(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_j, z_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z_j/c}$ 是格林函数的空间部分. $\boldsymbol{\rho}_j$ 和 z_j 是第 j 个光电探测器的横向和纵向坐标. $\boldsymbol{\kappa}$ 是横向波矢.

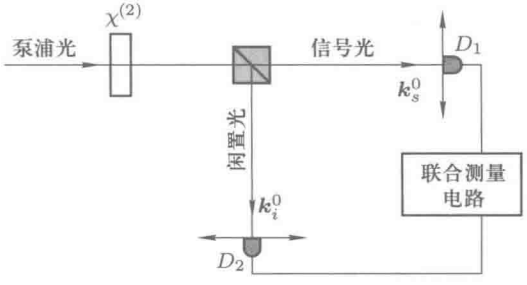


图 10.5.1 简并的信号光子–闲置光子分别被两个点状光子计数探测器 D_1 和 D_2 所接收, 从而进行纵向关联 $G^{(2)}(\tau_1 - \tau_2)$ 和横向关联 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$ 的测量. 为了数学上的简化, 我们进一步采用傍轴近似. z_1 和 z_2 轴分别与 $\boldsymbol{k}_s^0$ 和 $\boldsymbol{k}_i^0$ 重合.

我们将 SPDC 的出射平面取为 $z_0 = 0$ 和 $t_0 = 0$. 为方便起见, 所有和场有关的常数都归到 $g(\boldsymbol{\kappa}, \omega; \boldsymbol{\rho}_j, z_j)$ 中.

于是, 我们计算得到双光子的有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2)$, 它是双光子振幅的叠加:

$$\begin{aligned}&\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, t_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2, t_2) \\ &= \langle 0 | \int \mathrm{d}\omega'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}'\; g(\boldsymbol{\kappa}', \omega'; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t_2}\, \hat{a}(\omega', \boldsymbol{\kappa}') \\ &\quad \times \int \mathrm{d}\omega''\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}''\; g(\boldsymbol{\kappa}'', \omega''; \boldsymbol{\rho}_1, z_1)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'' t_1}\, \hat{a}(\omega'', \boldsymbol{\kappa}'') \\ &\quad \times \int \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, f(\nu)\, h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)\, \hat{a}_s^\dagger(\omega_s^0 + \nu, \boldsymbol{\kappa}_s)\, \hat{a}_i^\dagger(\omega_i^0 - \nu, \boldsymbol{\kappa}_i) | 0 \rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0\tau_1 + \omega_i^0\tau_2)} \int \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, f(\nu)\, h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \\ &\quad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_1 - \tau_2)}\, \gamma(\boldsymbol{\kappa}_s, \nu; \boldsymbol{\rho}_1, z_1)\, \gamma(\boldsymbol{\kappa}_i, -\nu; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \qquad (10.5.3)\end{aligned}$$

虽然 (10.5.3) 式不能分解为纵向和横向积分的乘积, 但是通过选择合适的实验条件, 时间关联和横向空间关联还是容易分离的.

典型的实验装置要么测量时间 (纵向) 关联, 要么测量空间 (横向) 关联. 这样, 基于不同的实验装置, 可以对上面计算进行简化. 时间 (纵向) 关联计算如下:

$$\Psi(\tau_1;\tau_2) = \Psi_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0\tau_1+\omega_i^0\tau_2)}\int \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_1-\tau_2)} \tag{10.5.4}$$

空间 (纵向) 关联计算如下:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2) = \Psi_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\, g(\boldsymbol{\kappa}_s,\omega_s;\boldsymbol{\rho}_1,z_1)\, g(\boldsymbol{\kappa}_i,\omega_i;\boldsymbol{\rho}_2,z_2) \tag{10.5.5}$$

在一定的实验条件下, 取近似 $h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\sim\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)$, 可以进一步简化计算.

(I) 偶光子时间关联

为了测量 SPDC 产生偶光子态的时间关联, 我们在 (10.5.3) 式中选取一对横向波失 $\boldsymbol{\kappa}_s=-\boldsymbol{\kappa}_i$, 实验上是通过合适的光阑来选取的. 因此, 偶光子有效波函数简化成 (10.5.4) 式

$$\begin{aligned}\Psi(\tau_1;\tau_2) &\cong \Psi_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_s^0\tau_1+\omega_i^0\tau_2)}\int \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_1-\tau_2)} \\ &= \left[\,\Psi_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega_s^0+\omega_i^0)(\tau_1+\tau_2)}\,\right]\left[\,\mathcal{F}_{\tau_1-\tau_2}\left\{f(\nu)\right\}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\omega_s^0-\omega_i^0)(\tau_1-\tau_2)}\,\right]\end{aligned} \tag{10.5.6}$$

其中, $\mathcal{F}_{\tau_1-\tau_2}\{f(\nu)\}$ 是频谱振幅函数 $f(\nu)$ 的傅里叶变换. (10.5.6) 描述的是一个二维波包: 沿着 $\tau_1-\tau_2$ 轴传播的是一个类似 δ 函数的窄包络, 而在 $\tau_1+\tau_2$ 轴上的振幅为常数. 如果探测器 D_1 和 D_2 的位置是固定的, 这个二维波包意味着: 在任何时候都可能联合探测到信号–闲置光子对. 然而, 如果信号光子在一个特定的时刻 t_1 被记录到, 那么闲置光子必定在确定的时刻 $t_2\sim t_1-(z_1-z_2)/c$ 的被记录到. 换句话说, 虽然可以在任意时刻 t_1 和 t_2 等概率的联合探测到一对光子 ($\Delta(t_1+t_2)\sim\infty$), 但是这对光子的记录时刻差必定是常数 $\Delta(t_1-t_2)\sim 0$. 波包的示意图参见第 9 章.

正如我们在第 9 章所讨论的, 纵向的关联函数 $G^{(2)}(\tau_1-\tau_2)$ 为

$$G^{(2)}(\tau_1-\tau_2)\propto|\,\mathcal{F}_{\tau_1-\tau_2}\left\{f(\nu)\right\}|^2$$

对于 SPDC 过程, 它类似一个 δ 函数. 这样, SPDC 产生的信号–闲置纠缠光子对在能量和时间上展示出一种典型的 EPR 关联:

$$\Delta(\omega_s+\omega_i)\sim 0\ \ \&\ \Delta(t_1-t_2)\sim 0$$

$$\text{其中 } \Delta\omega_s\sim\infty,\quad \Delta\omega_i\sim\infty,\quad \Delta t_1\sim\infty,\quad \Delta t_2\sim\infty$$

(II) 偶光子空间关联

下面, 我们将针对三种不同的测量区间来研究纠缠偶光子态的空间关联 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$: (1) 源的出射端面处; (2) 在夫琅禾费远场区域; (3) 在菲涅耳近场区域. 和偶光子时间关联的计算类似, 我们将在上述三种条件下计算信号–闲置光子对的有效波函数. 为了简化数学计算, 计算空间关联时只取一对单色共轭频率 ω_s 和 ω_i. 此时, (10.5.3) 式的有效波函数简化为 (10.5.5) 式:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \Psi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i \, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \, g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega_s, \boldsymbol{\rho}_1, z_1) \, g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega_i, \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$$

这里, 我们已经假定 $h_{tr}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \sim \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)$, 对于横向作用区域很大的 SPDC, 上述假定是合理的.

(1) SPDC 出射端面的有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$

利用 EPR 型的横向波矢关联式 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)$, 很容易计算关于 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i$ 的积分:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i \, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \\
&= \int \mathrm{d}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \cdot (\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i)/2} \\
&\quad \times \int \mathrm{d}(\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}_s - \boldsymbol{\kappa}_i) \cdot (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)/2} \\
&\simeq 1 \times \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)
\end{aligned} \tag{10.5.7}$$

其中, 我们假定信号–闲置光场关于入射 (出射) 角 $\theta_s \sim |\boldsymbol{\kappa}_s|/|\boldsymbol{k}_s|$ 和 $\theta_i \sim |\boldsymbol{\kappa}_i|/|\boldsymbol{k}_i|$(相对出射平面) 是一个均匀分布: $A(\boldsymbol{\rho}_s) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s}$ 和 $A(\boldsymbol{\rho}_i) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}$. (10.5.7) 式表示的是一个理想的以横向空间坐标为变量的二维波包: 沿 $(\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i)$ 轴是一个归一化的常数分布, 由 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)$ 的傅里叶变换给出; 沿着 $(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)$ 轴是 δ 函数分布, 由归一化常数的傅里叶变换给出.

因此, SPDC 产生的信号–闲置纠缠光子对在横向动量和位置上呈现出典型的 EPR 关联, 和 EPR 当初的假设十分接近:

$$\Delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \sim 0 \ \ \& \ \Delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i) \sim 0$$

$$\text{其中 } \Delta\boldsymbol{\kappa}_s \sim \infty, \quad \Delta\boldsymbol{\kappa}_i \sim \infty, \quad \Delta\boldsymbol{\rho}_s \sim \infty, \quad \Delta\boldsymbol{\rho}_i \sim \infty$$

EPR 的语言是这样描述的: 我们并不知道信号光子和闲置光子在光源出射端面的位置, 然而, 只要发现信号 (闲置) 位于某个位置, 那么闲置 (信号) 就一定在相对应的某个位置被观测到. 在同一时刻, 信号和闲置光子的横向动量可以取任意值, 然而, 一旦信号 (闲置) 的横向动量测定, 那么

闲置 (信号) 的横向动量就完全确定了. 在共线 SPDC 过程中, 信号–闲置光子对永远从偶光子源端面的同一点辐射出来, 即 $\boldsymbol{\rho}_s = \boldsymbol{\rho}_i$. 如果其中一个的传播偏离了共线轴, 另一个一定向着相反方向传播, 即 $\boldsymbol{\kappa}_s = -\boldsymbol{\kappa}_i$. 实验中, 这一有趣的现象已经被应用到量子成像中.

上面的陈述还是比较容易理解的. SPDC 中的相互作用是非线性材料内部的一个局域现象. 由于非线性作用, 满足相位匹配条件 (10.4.2) 式 (也就是动量和能量守恒条件) 的模式成对地产生了. 被激发的信号–闲置光子对可以处在任意一对模式或者同时处在所有可能的模式, 形成一种奇特的偶光子振幅叠加. 正是这种奇特的偶光子振幅叠加使得信号–闲置光子对从光源端面的同一点出射并且传播方向相反 $\boldsymbol{\kappa}_s = -\boldsymbol{\kappa}_i$.[18]

(2) 夫琅禾费远场处的 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$

当信号–闲置光子自由传播或者借助于诸如透镜等光学元件作远场传播时, 偶光子振幅的叠加变得更为有趣. 由于在自由空间中传播, 光子对之间没有相互作用. 经典理论认为, 信号光子和闲置光子一旦离开晶体后就被认为是相互独立的. 所以, 信号光子和闲置光子的横向位置 $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$ 的分布应该是独立的、随机的. 然而, 这种经典图像其实是不正确的. 信号–闲置双光子系统在远场传播时并没有失去横向位置上的纠缠特性. 这个有意思的现象已经在量子成像实验中被观察到. 量子成像中表现出一种 EPR 型的关联 $\delta(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)$. "量子光刻" 中观察到的超衍射极限的空间分辨率以及 "鬼成像" 实验中的非局域关联都是偶光子振幅叠加的结果. 偶光子振幅叠加确实发生在对信号–闲置光子对的远场联合探测事件之中. 这一效应让人有些难以接受, 因为这个 "偶光子振幅叠加" 包含了非局域性的概念. 在叠加中的偶光子振幅对应着不同但又不可区分地触发一个联合探测事件的方式, 而此联合探测发生在远距离之下. 这种非局域性的叠加在经典理论中没有相应的概念, 因而经典世界难以理解这一现象.

实现信号–闲置光子对在远场观测点 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 处的符合测量, 我们要么将 D_1 和 D_2 放置到很远的地方, 要么通过透镜来实现夫琅禾费远场近似. 为了简化讨论, 我们将 D_1 和 D_2 放置在 $z_1 = z_2$ 平面上.

---

[18] 数学上, 对于 SPDC 我们已经证明 $\boldsymbol{\kappa}_s \simeq -\boldsymbol{\kappa}_i$ 和 $\boldsymbol{\rho}_s \simeq \boldsymbol{\rho}_i$. 物理上, 这种特殊的行为可以用来区分纠缠偶光子态和经典光场. 直接将 $\boldsymbol{\kappa}_s = -\boldsymbol{\kappa}_i$ 代入后, (10.4.7) 式的积分可以简化为

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i \, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \simeq \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)} \simeq \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i),$$

从而给出 $\boldsymbol{\rho}_s \simeq \boldsymbol{\rho}_i$. 无论从物理角度还是从数学角度, $\boldsymbol{\kappa}_s \simeq -\boldsymbol{\kappa}_i$ 和 $\boldsymbol{\rho}_s \simeq \boldsymbol{\rho}_i$ 都非常重要, 它不但有助于更好理解实验现象背后的物理意义, 还将大大简化某些计算.

在远场区, 相位取一阶近似, 即 $r \simeq r_0 - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}_0$, 其中 r 指的是 $\boldsymbol{\rho}_0$ 到 D_1 和 D_2 的距离, r_0 是坐标系原点到 D_1 或 D_2 的距离, 坐标原点设在 SPDC 过程输出平面的中心. 在这种情况下, 有效偶光子波函数近似为:

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2) \simeq \langle 0|\,&\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t_1-k_1 r_{01})}}{r_{01}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\, A(\boldsymbol{\rho}_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\,\hat{a}(\boldsymbol{\kappa}_1)\\ &\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t_2-k_2 r_{02})}}{r_{02}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0'\, A(\boldsymbol{\rho}_0')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_0'}\,\hat{a}(\boldsymbol{\kappa}_2)\\ &\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\,\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\,\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\kappa}_s)\,\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\kappa}_i)\,|\,0\rangle\\ \propto\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0'\,&\delta(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\kappa}_2\cdot\boldsymbol{\rho}_0'}\\ \propto 1\times\delta(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)\end{aligned}\tag{10.5.8}$$

(10.5.8) 式中的函数 $\delta(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_0')$ 是通过对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i$ 的双重积分得到的, 其中 $A(\boldsymbol{\rho}_0)\sim A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s\cdot\boldsymbol{\rho}_0}$, $A(\boldsymbol{\rho}_0')\sim A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\rho}_0'}$, A_0 为常数. 上述计算中的物理意义很明了: (1) 远场平面是 SPDC 的傅里叶变换面. 傅里叶变换面上每一点都对应一个 $\boldsymbol{\kappa}_s$ 或者 $\boldsymbol{\kappa}_i$. 傅里叶变换面上的 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)$ 确认了 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)$. (2) 横向空间坐标上的两维波包是大量偶光子振幅叠加的结果. 每一个偶光子振幅从 SPDC 输出平面上的一点出发, $(\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{\rho}_0')$, 在点探测器 D_1 和 D_2 处终结. 这个两维的偶光子波包给出了一个典型的 EPR 关联: 在纠缠双光子源的远场, 信号光子和闲置光子可以在任意位置被观察到, 然而, 只要测到其中一个光子的位置, 那么另一个光子的位置就唯一确定了.

以上计算中, 所有的积分限都设为无穷. 现实中, 必须考虑双光子源以及实验中使用透镜的有限尺寸. 下面我们考虑圆形的有限积分区域, 即从 $|\boldsymbol{\rho}_0|=0$ 积到 $|\boldsymbol{\rho}_0|=R$, 对于简并 SPDC $(\omega_s=\omega_i)$, (10.5.8) 式的积分变为:

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\propto\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2)\cdot\boldsymbol{\rho}_0}&\simeq\frac{2J_1\big[R|\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2|\big]}{R|\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2|}\\ &=\mathrm{somb}\big[\frac{R}{z}\frac{\omega}{c}(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)\big]\end{aligned}\tag{10.5.9}$$

这表明 D_1 和 D_2 的联合探测得到的是夫琅禾费衍射图案, 是关于 $\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2$ 的 "西班牙高帽" 形函数. 不过在 SPDC 光源的面积较大时, δ 函数是个很好的近似.

(3) 菲涅耳近场区的 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2)$

现在我们考虑菲涅耳近场情况. 将 D_1 和 D_2 移至偶光子源的菲涅耳近场区域. 进一步假设偶光子源的横向尺寸是一个较大的有限值. 在

这个简单的实验配置下, 格林函数, 或光学传递函数描述的是经过路径 $j(j=1,2)$ 中信号光子或闲置光子分别自由传播到探测器 D_1 或 D_2 的过程. 将自由传播的 $g_j(\omega,\boldsymbol{\kappa};z_j,\boldsymbol{\rho}_j)$, $j=1,2$, 代入 (10.5.5) 式, 得到有效波函数:

$$\begin{aligned}
&\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z_1;\boldsymbol{\rho}_2,z_2)\\
&=\Psi_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\,\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s\cdot\boldsymbol{\rho}_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\rho}_0'}\\
&\quad\times\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi cz_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}z_1}\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_s|,\frac{\omega_s}{cz_1}\right)\\
&\quad\times\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0'\,\frac{-\mathrm{i}\omega_i}{2\pi cz_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}z_2}\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_0'|,\frac{\omega_i}{cz_2}\right)\\
&\simeq\frac{-\omega_s\omega_i}{2\pi^2c^2z_1z_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\omega_s}{c}z_1+\frac{\omega_i}{c}z_2)}\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\frac{\omega_s}{2cz_1}|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_0|^2+\frac{\omega_i}{cz_2}|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_0|^2]}
\end{aligned}\tag{10.5.10}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_0(\boldsymbol{\kappa}_s)$ 和 $\boldsymbol{\rho}_0'(\boldsymbol{\kappa}_i)$ 分别是信号和闲置光场在偶光子源输出平面的横向坐标 (波矢). 很多这样的偶光子振幅的叠加形成偶光子菲涅耳衍射花样. 衍射花样是 $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$ 的函数. 数学上, 对任意的 $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$, 要找到解析解是很难的. 为比较实验观测结果, 数值解经常是很有用的.

10.6 纠缠偶光子态中的子系统

纠缠的 EPR 偶粒子态是一个纯态. 此态完整地描述了子系统之间的精确关联. 然而, 有时候并不需要同时观测两个粒子. 某些实验只需要测量一个子系统而忽略另一个. 那么, 对一个子系统的这种测量能给出什么信息呢? 数学上, 不难发现: 对两粒子纯态部分求迹后, 子系统都处于混态, 熵大于零. 我们只能从这类测量中得到子系统的统计特性.

下面, 我们还是以 SPDC 产生的信号–闲置光子对为例来进行探讨. SPDC 产生的偶光子态是纯态, 它满足:

$$\hat{\rho}^2=\hat{\rho},\quad \hat{\rho}\equiv|\Psi\rangle\langle\Psi|\tag{10.6.1}$$

其中 $\hat{\rho}$ 是 SPDC 产生的偶光子态的密度矩阵算符. 信号和闲置的单光子态分别为,

$$\hat{\rho}_s=tr_i|\Psi\rangle\langle\Psi|,\quad \hat{\rho}_i=tr_s|\Psi\rangle\langle\Psi|\tag{10.6.2}$$

显然信号光子和闲置光子的态都不是纯态. 从偶光子态出发计算信号 (闲置) 的态, 一般需要部分求迹, 即对所有闲置 (信号) 模式求和.

假设一个 II 型的 SPDC, 其中信号场和闲置场偏振正交但是频率简并, 都在 $\omega^0\cong\omega_p/2$ 附近. 为了简化讨论, 我们只着眼于其时间特性, 进而

将双光子态函数简写为:

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \int \mathrm{d}\nu\ \Phi(DL\nu)\ \hat{a}_s^\dagger(\omega^0+\nu)\,\hat{a}_i^\dagger(\omega^0-\nu)\,|0\rangle$$

其中 $\Phi(DL\nu)$ 是为:

$$\Phi(DL\nu) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}DL\nu}}{\mathrm{i}DL\nu}$$

它是晶体长度 L 以及信号光 (o 光) 和闲置光 (e 光) 的群速度倒数之差 $D \equiv 1/u_o - 1/u_e$ 的函数. 常数 Ψ_0 由归一化计算 $\mathrm{tr}\,\hat{\rho} = \langle\Psi \mid \Psi\rangle = 1$ 给出. 对于信号-闲置光子对的双光子态很容易得到 $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

对闲置光子模式求和, 就可以得到信号的密度矩阵

$$\hat{\rho}_s = \Psi_0^2 \int \mathrm{d}\nu\ |\Phi(\nu)|^2\ \hat{a}_s^\dagger(\omega^0+\nu)\,|0\rangle\langle 0|\ \hat{a}_s(\omega^0+\nu) \tag{10.6.3}$$

其中

$$|\Phi(\nu)|^2 = \mathrm{sinc}^2\,\frac{DL\nu}{2} \tag{10.6.4}$$

这里, 积分中的所有常数都归并到 Ψ_0 中. 首先, 我们立刻发现 $\hat{\rho}_s^2 \neq \hat{\rho}_s$, 这说明信号光处于混态 (闲置光子也是如此). 再有, 我们还发现一个有意思的现象: 信号光的频谱依赖于闲置光的群速度. 这似乎也应该在意料之中, 因为信号光子的态是从偶光子态计算得到的, 是将所有闲置光子的模式进行了求和.

Strekalov 和本书作者等人已经用迈克耳孙干涉仪在标准的傅里叶频谱型测量条件下确认了信号光和闲置光的频谱. 测到的干涉图案如图 10.6.1 所示. 正弦调制的包络 (分段的) 可以用两个凹槽型函数 (对应包络的上面和下面部分) 来很好地拟合. 实验数据和理论分析在实验误差内吻合.

对于观察到的槽型函数我们作一个简单的估算. 我们先定义场算符:

$$\hat{E}^{(+)}(t, z_d) = \hat{E}_1^{(+)}\left(t - \frac{z_1}{c}, z_0\right) + \hat{E}_2^{(+)}\left(t - \frac{z_2}{c}, z_0\right)$$

其中 z_d 是探测器的位置, z_0 代表干涉仪的入射点, $t_1 = t - \frac{z_1}{c}$ 和 $t_2 = t - \frac{z_2}{c}$ 是比场传播到探测器的时间点 t 更早的时刻, 对应的时间延迟分别为 z_1/c 和 z_2/c, 其中 z_1 和 z_2 是干涉仪臂 1 和 2 的光程. 这里. 我们定义了一个非常普遍的场算符, 它是两个独立传播的叠加. 此算符可以应用于任何干涉仪. 计算光子探测器的计数率得到:

$$R_d = \mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_s \hat{E}^{(-)}(t, z_d)\hat{E}^{(+)}(t, z_d)\right]$$

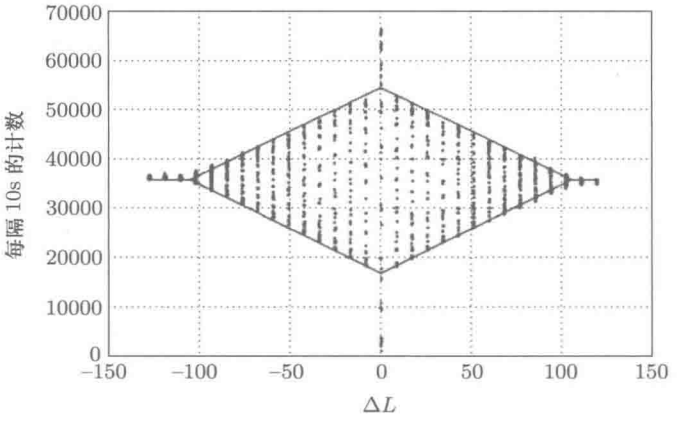


图 10.6.1 实验数据显示出一个 "双槽" 型包络. 每一个竖直的点线都包含若干个周期的正弦调制.

$$
\begin{aligned}
&= \Psi_0^2 \int \mathrm{d}\nu \, |\Phi(\nu)|^2 \left| \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(t, z_d) \, \hat{a}_s^\dagger(\omega^0 + \nu) \, |0\rangle \right|^2 \\
&= \Psi_0^2 \int \mathrm{d}\nu \, |\Phi(\nu)|^2 \left| \langle 0 | \big[\hat{E}_1^{(+)}(t - \frac{z_1}{c}, z_0) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \hat{E}^{(+)}(t - \frac{z_1}{c}, z_0) \big] \, \hat{a}_s^\dagger(\omega^0 + \nu) \, |0\rangle \right|^2 \\
&\propto 1 + \mathrm{Re} \left\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^0 \tau} \int \mathrm{d}\nu \, \mathrm{sinc}^2 \frac{DL\nu}{2} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\tau} \right\} \qquad (10.6.5)
\end{aligned}
$$

其中 $\tau = (z_1 - z_2)/c$. $\mathrm{sinc}^2(DL\nu/2)$ 的傅里叶变换是凹槽型的. 注意凹槽型函数是由 SPDC 的参数 DL 决定的, 这个很容易通过实验来验证.

现在我们转入另一个有趣的物理话题: 熵. 熵是信息论中一个重要的概念. 冯 · 诺依曼 (Von Neumann) 熵由下面的定义给出:

$$
S = -\,\mathrm{tr}\,(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) \qquad (10.6.6)
$$

很容易发现纠缠偶光子纯态的熵为零. 然而, 每个子系统的熵大于零. 根据测量频谱, 可以数值计算出冯 · 诺依曼熵. 注意子系统的密度算符是对角化的. 求迹还是比较简单的, 就是根据测量的谱函数对整个频谱做积分, 直接计算出子系统的熵 $S_s > 0$. 对于混态子系统, 这个结果是意料之中的. 偶光子系统的熵是零而其子系统的熵都是大于零的, 那么是否意味着在纠缠偶光子系统中存在负熵呢? 根据经典信息论, 对于纠缠偶光子系统, 应该有 $S_s + S_{s|i} = 0$, 其中 $S_{s|i}$ 是条件熵. 而条件熵应该是负的, 这意味着一个粒子的测量结果给定后, 对另一个粒子的测量一定会给出负信息. 这个佯谬式论断实际上和 EPR"佯谬" 是类似的. 其思路和 EPR

的思路如出一辙.

10.7 色散介质中的偶光子

本节中, 我们研究偶光子在光学色散介质中的传播. 虽然色散中的物理内涵很丰富, 这里我们就不仔细讨论偶光子色散了, 只对连续泵浦 SPDC 过程产生的信号–闲置纠缠光子对在色散光纤中的传播进行简单的分析. 我们已经知道: 虽然 SPDC 的偶光子态具有准确定义的偶光子波包, 但是在真空中传播的信号光和闲置光各自并没有波包的概念. 那么, 信号光子或闲置光子在光纤中传播一定距离后会 "展宽" 吗? 一个有趣的发现是: 对于信号光或闲置光自身, 即使在色散介质中传播也仍然没有波包的概念, 所以展宽或不展宽都无从谈起. 而偶光子波有效函数 $\Psi(t_1, r_1; t_2, r_2)$ 和二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1, r_1; t_2, r_2)$ 在色散介质中确实变宽了. 偶光子波包在色散介质中的传播就如同经典光脉冲一样.

让我们来考虑如图 10.7.1 的一个简单实验. 实验装置包含连续激光泵浦的 SPDC 偶光子源、两个点状光子探测器以及符合测量电路. 这是一个标准的二阶时间关联测量的配置. 远场 z_1 和 z_2 处的光子探测器 D_1 和 D_2 分别用来探测信号和闲置光子. 光子计数电路记录了每一对信号光子 (t_1 时刻触发) 和闲置光子 (t_2 时刻触发) 的触发时间差 $t_1 - t_2$. 测量大量的光子对后, 直方图给出每个 $t_1 - t_2$ (横轴) 取值的光子对数目 (纵轴). 此函数对应着二阶时间关联函数 $G^{(2)}(t_1 - t_2)$.

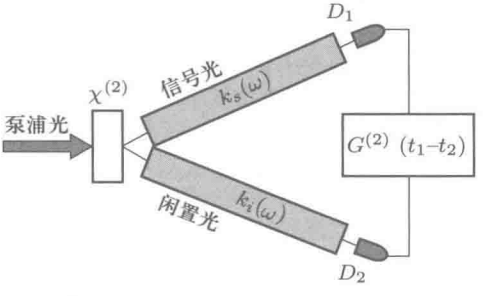


图 10.7.1 信号和闲置光子对在色散介质中传播时 $G^{(2)}(t_1 - t_2)$ 的展宽.

通过以上几节的讨论知道, 如果实验是在无色散的真空或空气中进行, $G^{(2)}(t_1 - t_2)$ 主要是由 SPDC 的相位匹配条件决定的. 信号和闲置的传播不会带来任何展宽效应. 现在, 我们在偶光子源和探测器 D_1 和 D_2 之间加上色散介质, 比如光纤. 考虑色散介质在频率 ω_s^0 和 ω_i^0 附近的一

阶和二阶色散:

$$\frac{\mathrm{d}k(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\Big|_{\omega_s^0} = k' \neq 0 \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}^2k(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}\Big|_{\omega_i^0} = k'' \neq 0$$

这里, ω_s^0 和 ω_i^0 是信号-闲置辐射场的中心频率. 下面的计算将回答对 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 的测量会发生什么情况: $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 会因为色散而展宽吗?

根据前面的推导, 频率为 ω_p 的连续激光泵浦的 SPDC 得到的信号-闲置偶光子态可以简写为:

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\, \hat{a}_s^{\dagger}(\omega_s^0+\nu)\, \hat{a}_i^{\dagger}(\omega_i^0-\nu)\,|0\rangle$$

其中, ω_s^0 和 ω_i^0 是信号-闲置的中心频率; ν 是频率失谐量. 频谱振幅 $f(\nu)$ 决定了偶光子源的关联特性. $f(\nu)$ 本质上是由 SPDC 过程中相位匹配的纵向部分决定的. 基于简化的偶光子态和场算符,

$$\hat{E}_1^{(+)} = \int \mathrm{d}\omega_s\, \hat{a}(\omega_s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_s t_1 - k(\omega_s) z_1]}$$

$$\hat{E}_2^{(+)} = \int \mathrm{d}\omega_i\, \hat{a}(\omega_i)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_i t_2 - k(\omega_i) z_2]}$$

我们计算出偶光子波包的积分形式:

$$\Psi(t_1,r_1;t_2,r_2) = \int \mathrm{d}\omega_s f(\omega_s) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_s t_1 - k(\omega_s) z_1]} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_i t_2 - k(\omega_i) z_2]} \tag{10.7.1}$$

考虑沿着 z_1 和 z_2 传播时的一阶和二阶色散, 偶光子波包变为:

$$\begin{aligned}\Psi(t_1,z_1;t_2,z_2) &= \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{(\omega_s^0 t_1+\omega_i^0 t_2)-[k(\omega_s^0)z_1+k(\omega_i^0)z_2]\}}\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\, f(\nu)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s'' z_1 + k_i'' z_2)(\nu^2/2)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu[(t_1-t_2)-(\frac{z_1}{u_s}-\frac{z_2}{u_i})]} \\ &= \{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{(\omega_s^0 t_1+\omega_i^0 t_2)-[k(\omega_s^0)z_1+k(\omega_i^0)z_2]\}}\} \\ &\quad \times \mathcal{F}_\tau\{f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s'' z_1 + k_i'' z_2)(\nu^2/2)}\}\end{aligned} \tag{10.7.2}$$

其中我们定义

$$\begin{aligned}\tau &\equiv (t_1-t_2) - [z_1/u_s - z_2/u_i] \\ &= [t_1 - z_1/u_s] - [t_2 - z_2/u_i] \\ &\equiv \tau_1 - \tau_2\end{aligned}$$

于是得到二阶时间关联函数 $G^{(2)}(\tau)$ 为:

$$G^{(2)}(\tau) \propto \left|\mathcal{F}_\tau\{f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s'' z_1 + k_i'' z_2)(\nu^2/2)}\}\right|^2 \tag{10.7.3}$$

在 (10.7.2) 式和 (10.7.3) 式中, $\mathcal{F}_\tau\{f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s''z_1+k_i''z_2)(\nu^2/2)}\}$ 表示 $f(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s''z_1+k_i''z_2)(\nu^2/2)}$ 的傅里叶变换. 通过计算不难发现: 高斯函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_s''z_1+k_i''z_2)\nu^2/2}$, 对应于信号–闲置这两条光路上的二阶色散, 导致 $\Psi(t_1, z_1; t_2, z_2)$ 和二阶关联函数 $G^{(2)}(\tau)$ 的展宽.

总结一下色散介质中双光子波包的传播特性:

(1) 双光子波包展宽的概念完全不同于两个经典波包的展宽. 经典情形中二阶关联函数的展宽 (通过光学自相关仪测量) 是由于每一个脉冲的展宽引起的. 然而, 在纠缠双光子系统的测量中, 就没有与信号光或闲置光单独传输相关的波包, 不管是展宽的还是不展宽的. 但是 $G^{(2)}(\tau)$ 确实由于介质的群色散在二维空间 $\tau = \tau_1 - \tau_2$ 中被展宽了. 和经典脉冲光在群色散介质中的传播比较发现: (10.7.3) 式的 $G^{(2)}(\tau)$ 扮演了脉冲的角色, 只不过是在二维空间 $\tau = \tau_1 - \tau_2$ 中传播. SPDC 源输出端面的二阶关联函数 $G^{(2)}(t_1, 0; t_2, 0)$ 在前面已经计算过

$$G^{(2)}(t_1 - t_2) \propto \left|\mathcal{F}_{t_1-t_2}\{f(\nu)\}\right|^2 \sim \delta(t_1 - t_2)$$

δ 函数型的二阶关联函数, 在传播一定距离之后会被群色散介质展宽, 如 (10.7.3) 式给出的那样. 展宽的过程和激光在相同介质中的行为类似[19].

(2) 非局域色散抵消: (10.7.2) 式揭示了一个很有趣的物理现象. 不难发现: 信号光的任何正 (负) 群色散可以通过在闲置光路中添加负 (正) 群色散进行抵消, 使得:

$$k_s''z_1 + k_i''z_2 = 0 \tag{10.7.4}$$

这种有趣的现象称之为 "非局域性双光子色散抵消". 经典理论看来无法解释这一效应. 假设有两支弱的光脉冲, 分别沿正的和负的群色散介质通道传播后到达 D_1 和 D_2 做二阶关联测量. 经典物理的观点认为: 每个脉冲都将因色散介质局域性地独立地展宽, 从而导致二阶时间关联函数

[19] 和经典光脉冲在光纤中的传播一样, 当色散介质的长度大于 "色散特征长度" $z_{dis} = \Delta\tau_0^2/2\pi k''$ 时 ($\Delta\tau_0$ 是 $G^{(2)}$ 没有展宽时的初始宽度), 二阶关联函数 $G^{(2)}(\tau)$ 变为:

$$G^{(2)}(\tau) \sim \left|f\left(\frac{\tau}{k_s''z_1 + k_i''z_2}\right)\right|^2$$

也就是和 SPDC 的频谱函数相同. 进一步, $G^{(2)}(\tau)$ 的宽度 $\Delta\tau$ 正比于在色散介质中的传播距离

$$\Delta\tau = \Delta\tau_0 \frac{z}{z_{dis}}$$

在远场区, 也就是 $z > z_{dis}$, $\Psi(t_1, z_1; t_2, z_2)$ 变成一个稳定的分布, 形状和频谱函数 $f(\nu)$ 一致. $G^{(2)}(\tau)$ 的宽度和色散介质的长度成线性关系. 这一效应已经被 Valencia 与作者等人在实验中观察到.

的统计展宽,

$$\sigma_{12} \geqslant \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{10.7.5}$$

其中 σ_{12}, σ_1 和 σ_2 分别为关联函数的展宽宽度和两个传播脉冲的宽度. 偶光子色散抵消对某些应用很有用处, 诸如非局域时间校准、位置校准和远程时钟同步.

本章小结

本章中, 我们讨论了量子纠缠现象中的物理. 量子纠缠是量子力学最令人惊讶的结果之一. 我们得到三个重要的结果: (1) 奇特的 EPR 关联其实是多粒子 (光子) 干涉的结果; (2) 多粒子 (光子) 叠加是非局域的, 它发生在远距离时空坐标上, 由多个独立的粒子 (光子) 探测器做符合探测; (3) 纠缠 EPR 态多粒子干涉的奇特结果表现在它的有效波包的不可分解性, 这意味着即使粒子间相距甚远并且之间没有任何相互作用, 我们也不能把纠缠粒子当作独立粒子处理.

在本章中, 我们介绍了历史上有名的 EPR 假想实验、EPR-Bohm 1/2 自旋粒子系统和 EPR-Bohm-Bell 态. 我们详细解读了 EPR 关于局域性、物理实在性和完备性的考虑. 我们仔细分析了从 SPDC 产生的典型的纠缠光子态, 包括态的产生和二阶关联以及远场和近场的有效波函数的计算. 我们还讨论了 SPDC 偶光子态的子系统即信号和闲置光子的行为. SPDC 产生的偶光子态简单而且颇具代表性, 是分析纠缠多粒子系统时常用到的范例. 这些分析有助于理解量子纠缠的基本物理.

推荐读物

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[2] E.Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807, 823, 844 (1935); translations appear in *Quantum Theory and Measurement*, ed. J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton University Press, New York, (1983).

[3] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice Hall Inc., New York, (1951).

[4] Y.H. Shih, "Two-Photon Entanglement and Quantum Reality", *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, ed., B. Bederson and H. Walther, Academic Press, Cambridge, 1997; "Entangled Photons", IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics, **9**, No. 6, (2003).

[5] D.N. Klyshko, *Photon and Nonlinear Optics*, Gordon and Breach Science, New York, (1988); A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley and Sons,

New York, (1989); R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego, 1992.

[6] M.H. Rubin, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, and A.V. Sergienko, Phys. Rev. A, **50**, 5122 (1994).

[7] A.V. Sergienko, Y.H. Shih, and M.H. Rubin, JOSAB, **12**, 859 (1995).

[8] D.V. Strekalov, T.B. Pittman, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, **57**, 567 (1998).

[9] D.V. Strekalov, Y.H. Kim, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, Vol. 60, 2685 (1999).

[10] J.D. Franson, Phys. Rev. A, **45**, 3126 (1992); **80**, 032119 (2009); **81**, 023825 (2010).

[11] A. Valencia, M.V. Chekhova, A. Trifonov, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett., **88**, 183601 (2002).

第 11 章

量子成像

尽管量子理论基础中仍然存在很多值得思考的问题, 量子纠缠已经开始在实际工程应用中发挥重要作用. 量子成像就是这些激动人心的应用领域之一. 到目前为止, 量子成像已经证实有三个特性: (1) 可以突破经典成像极限, 提高成像的空间分辨率; (2) 以 "非局域" 的方式生成用经典方法无法看到的 "鬼像"; (3) 成像时色散抵消或者抗扰动. 空间分辨率的提高似乎违背了测不准关系, 因为它超越了瑞利衍射极限. 鬼成像现象似乎支持 "超距作用", 因为鬼像是没有相互作用的两个光子之间的点对点关联的结果. 其实, 所有上述奇异特性都是由涉及双光子振幅叠加的双光子干涉造成的, 双光子振幅是一个非经典概念, 对应于对两个光子联合探测事件的不相同而又不可区分的两个或多个方式. 虽然双光子振幅是在研究纠缠态时引入的, 这一概念却不只局限于纠缠态. 多光子干涉是存在于多光子联合探测事件的普遍现象.

在本章中, 我们将集中讨论纠缠偶光子和混沌热光场的量子成像. 我们将先讨论包括鬼像在内的偶光子成像的物理图像, 以及混沌热光的鬼像.

11.1 偶光子成像

光学成像的相关概念前面已经讨论过. 现在我们考虑一个如图 11.1.1 所示的标准的成像装置, 但是与经典成像装置不同的是: (1) 经典光源换成了纠缠光子源; (2) 对光强分布的测量换成了对 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 空间分布的联合探测. N 光子纠缠源使得成像的空间分辨率突破瑞利衍射极限. 突破衍射极限等同于违背不确定关系吗? 答案是否定的. 对 N 光子

纠缠系统的 N 重联合探测的测不准关系, 完全不同于对单光子测量的测不准关系. 用成像理论的术语来讲, 纠缠态成像时的点扩展函数与经典成像时的点扩展函数完全不同. 例如, 一个偶光子系统符合成像时有

$$R_c(\boldsymbol{\rho}_i) = \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \left|A(\boldsymbol{\rho}_o)\right|^2 \mathrm{somb}^2 \left[\frac{R}{s_o}\frac{2\omega}{c}\left|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right|\right]$$

其点对斑成像函数, 即, 点扩展函数,

$$\mathrm{somb}^2 \left[\frac{R}{s_o}\frac{2\omega}{c}\left|\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right|\right]$$

与经典情况相对比, 由于 2ω 因子的存在, 而导致了窄一倍的半宽度, 也就是将偶光子成像的空间分辨率提高了一倍. 等效于经典成像时采用 $\lambda/2$ 的光源.

下面我们来推导偶光子成像. 实验装置如图 11.1.1 所示, 看起来与经典成像系统没有太大差别, 只是光源换成由 SPDC 产生的信号-闲置纠缠光子对, 并将普通的感光胶片换成只对双光子跃迁敏感的胶片, 或者用两个独立单光子探测器进行符合探测. 为了简化计算, 我们将 SPDC 偶光子源尽量靠近物平面, 使得偶光子源的输出平面和物平面有效重合. 实际操作中, 可以将 SPDC 的输出平面成像到物面. 这样, 信号-闲置光子对会在物上同一点 $\boldsymbol{\rho}_s = \boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_o$ 一起透射 (如图 11.1.1 所示) 或一起反射 (在一般成像情况中, 偶光子从物表面一起反射). 现在将场从物平面传播到任意一个平面 $z = s_o + d$, d 可以根据实验目的取不同值:

$$\begin{aligned} & g(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j; \boldsymbol{\rho}_k, z = s_o + d) \\ = & \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \, A(\boldsymbol{\rho}_o)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_j\cdot\boldsymbol{\rho}_o} \left\{\frac{-\mathrm{i}\omega_j}{2\pi c s_o}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_j}{c}s_o}\, G\left(|\boldsymbol{\rho}_o - \boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega_j}{c s_o}\right)\right\} \\ & \times G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, -\frac{\omega_j}{cf}\right) \left\{\frac{-\mathrm{i}\omega_j}{2\pi c d}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_j}{c}d}\, G\left(|\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_k|, \frac{\omega_j}{cd}\right)\right\} \end{aligned} \tag{11.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_o$ 是源 (和物面重合) 的输出平面的横向两维矢量, $\boldsymbol{\rho}_l$ 是成像透镜所在平面的横向两维矢量, $\boldsymbol{\rho}_j$ 是探测平面上的横向两维矢量;

$j = s, i$ 代表信号和闲置;

$k = 1, 2$ 代表光电探测器 D_1 和 D_2.

$A(\boldsymbol{\rho}_o)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_j\cdot\boldsymbol{\rho}_o}$ 是取复数值的物体孔径函数, 振幅部分 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 是正实数, 相位部分为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_j\cdot\boldsymbol{\rho}_o}$. 而 (11.1.1) 式中第一、二个花括号里的项分别表示从源/物的输出平面到凸透镜, 及从凸透镜到探测平面的自由传播. 利用高斯函数的性质, (11.1.1) 式可以简化为:

$$g(\boldsymbol{\kappa}_j, \omega_j; \boldsymbol{\rho}_k, z = s_o + d)$$

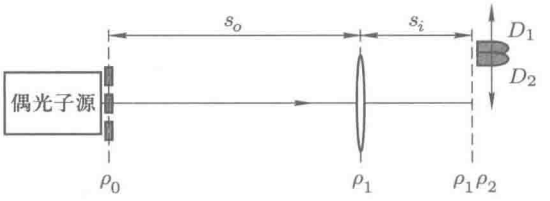


图 11.1.1 典型的光学成像装置. 有限尺寸的透镜产生分辨率受限的放大或缩小的像. 和经典成像不同的是, (1) 经典光源换成了纠缠光子源; (2) 对光强分布的测量换成了对 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ 空间分布的联合探测.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\omega_j^2}{(2\pi c)^2 s_o d}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_j}{c}(s_o+d)}\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_k|,\frac{\omega_j}{cd}\right)\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\,A(\boldsymbol{\rho}_o)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_j\cdot\boldsymbol{\rho}_o}\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|,\frac{\omega_j}{cs_o}\right)\\
&\quad\times\int_{lens}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{\omega_j}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\right]\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_j}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_k}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}
\end{aligned}
\tag{11.1.2}
$$

将格林函数代入 (10.4.5) 式, 得到有效的双光子波函数 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z;\boldsymbol{\rho}_2,z)$ 为

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z;\boldsymbol{\rho}_2,z) = \Psi_0&\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\,A(\boldsymbol{\rho}_o)\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|,\frac{\omega_s}{cs_o}\right)\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o'\,A(\boldsymbol{\rho}_o')\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_o'|,\frac{\omega_i}{cs_o}\right)\\
&\times\int_{lens}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{\omega_s}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\right]\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_1}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}\\
&\times\int_{lens}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l'\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_l'|,\left[\frac{\omega_i}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\right]\right]\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o'}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_2}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l'}\\
&\times\int\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\,\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\kappa}_s\cdot\boldsymbol{\rho}_o+\boldsymbol{\kappa}_i\cdot\boldsymbol{\rho}_o')}
\end{aligned}
\tag{11.1.3}
$$

这里, 我们将所有常数都归入 Ψ_0, 包括相位因子

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}(s_o+d)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}(s_o+d)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_p}{c}(s_o+d)}
$$

和

$$
G\left(|\boldsymbol{\rho}_1|,\frac{\omega_s}{cd}\right)\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_2|,\frac{\omega_i}{cd}\right)
$$

这两个相位因子对 $|\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z;\boldsymbol{\rho}_2,z)|^2$ 没有贡献. 先利用偶光子横向动量的 EPR 关联 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)$, 对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i$ 做两重积分. 和先前的计算类似, $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i$ 的两重积分导致一个 δ 函数, 即 $\delta(\boldsymbol{\rho}_o-\boldsymbol{\rho}_o')$. (11.1.3) 式简化为:

$$
\begin{aligned}
&\Psi(\boldsymbol{\rho}_1,z;\boldsymbol{\rho}_2,z)\\
&= \Psi_0\int_{obj}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\,A^2(\boldsymbol{\rho}_o)\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|,\frac{\omega_p}{cs_o}\right)\\
&\quad\times\int_{lens}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{\omega_s}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\right]\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_1}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}
\end{aligned}
$$

$$\times \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l' \, G\left(|\boldsymbol{\rho}_l'|, \left[\frac{\omega_i}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{d}-\frac{1}{f}\right]\right)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_2}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l'} \quad (11.1.4)$$

为完成 (11.1.4) 式的计算, 我们将计算分成两个不同的部分, 对应两种不同的测量:

情况 (I): 在像平面且 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}$

在这种情况下, (11.1.4) 式简化为

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\rho},z;\boldsymbol{\rho},z) = \Psi_0 \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A^2(\boldsymbol{\rho}_o)\, G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|, \frac{\omega_p}{cs_o}\right) \quad (11.1.5)\\ \times \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l' \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l'}\end{aligned}$$

在上面的双重积分中, 我们用到了偶光子态的 EPR 关联 $\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{\rho}_0'$. 现在将双重积分 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l'$ 化成 $\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_l')$ 和 $\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l')$, 得到

$$\begin{aligned}&\int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l' \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l'}\\ &= \int_{lens} \mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_l') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\omega_s-\omega_i}{2c}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot(\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_l')}\\ &\times \int_{lens} \mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\omega_p}{2c}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l')}\end{aligned}$$

对单色的简并 SPDC 过程 $\omega_s=\omega_i$, $\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_l')$ 的积分是一个无关紧要的常数. $\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l')$ 的积分则得到一个 somb 型点扩展函数

$$\int_{lens} \mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\omega_p}{2c}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{s_i}\right)\cdot(\boldsymbol{\rho}_l+\boldsymbol{\rho}_l')} = \frac{2J_1\left(\frac{R}{s_o}\frac{\omega_p}{c}\left|\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}}{m}\right|\right)}{\left(\frac{R}{s_o}\frac{\omega_p}{c}\left|\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}}{m}\right|\right)}$$

通过两个独立光探测器的联合探测, 或者只对双光子跃迁敏感的胶片感光, 得到

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) \propto \left|\int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A^2(\boldsymbol{\rho}_o)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_p}{2cs_o}|\boldsymbol{\rho}_o|^2} \mathrm{somb}\left(\frac{R}{s_o}\frac{\omega_p}{c}|\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}}{m}|\right)\right|^2 \quad (11.1.6)$$

上式表明在像平面上得到了物体的相干成像, 放大系数为 $m=s_i/s_o$. 在 (11.1.6) 式中, 点扩展函数由泵浦光波长 $\lambda_p=\lambda_{s,i}/2$ 决定, 自然要比经典情形窄一倍. 所以, 偶光子态通过联合探测使得成像的分辨率比经典成像提高了一倍.

情况 (II): 傅里叶变换面且 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}$

现在将探测器放置在焦平面, 即 $d=f$. 此时, 空间偶光子有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{\rho},z;\boldsymbol{\rho},z)$ 变为:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho},z;\boldsymbol{\rho},z) \propto \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A^2(\boldsymbol{\rho}_o)\, G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|, \frac{\omega_p}{cs_o}\right)$$

$$\times \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \, G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega_s}{cs_o}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c}\left(\frac{\rho_o}{s_o}+\frac{\rho}{f}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}$$
$$\times \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l' \, G\left(|\boldsymbol{\rho}_l'|, \frac{\omega_i}{cs_o}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c}\left(\frac{\rho_o}{s_o}+\frac{\rho}{f}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l'} \qquad (11.1.7)$$

下面先对透镜做两重积分. 为了简化数学计算, 将积分限近似为无穷. 不同于成像分辨率的计算, 这个计算的目的是找到傅里叶变换函数, 所以可以近似认为透镜是无限大的. 利用高斯函数的性质对透镜双重积分, 得到对 (11.1.7) 式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o$ 积分有贡献的函数如下,

$$C\,G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|, -\frac{\omega_p}{cs_o}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_p}{cf}\boldsymbol{\rho}_o\cdot\boldsymbol{\rho}}$$

其中 C 包含了相位因子 $G\left(|\boldsymbol{\rho}|, -\dfrac{\omega_p}{cf^2/s_o}\right)$ 在内的所有常数. 该函数代替 (11.1.7) 式中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l'$ 积分后, 得到:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}, z) \propto \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A^2(\boldsymbol{\rho}_o) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_p}{cf}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}_o} \propto \mathcal{F}_{\left[\frac{\omega_p}{cf}\boldsymbol{\rho}\right]}\{A^2(\boldsymbol{\rho}_o)\} \qquad (11.1.8)$$

它是物体孔径函数的傅里叶变换. 以图 11.1.1 所示的双缝装置为例, 偶光子源代替经典光源后, 当两个探测器同步移动时, 即, $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$, 联合探测中观察到杨氏双缝干涉–衍射条纹与经典情况 (波长为 $\lambda_{s,i}$) 相比多了一倍的干涉调制, 干涉–衍射条纹的宽度也窄了一倍. 这一效应已经在 "量子光刻" 实验中得到验证.

D'Angelo 和作者等人完成了第一个量子光刻演示性实验, 由于当时没有双光子敏感材料, 所以实验是在傅里叶面进行的, 而不是在像平面. 实验装置和图 11.1.1 类似, 两个点探测器进行同步扫描来观察双光子干涉–衍射条纹. 图 11.1.2 是发表的结果. 从图中清楚地看到: 和经典情形相比, 同样是 916 nm 波长, 双光子杨氏双缝干涉–衍射图案的调制周期快一倍, 同时条纹宽度窄一倍.

根据线性傅里叶光学, 不难发现: 用另外一个透镜 (等效搭建了一个望远镜系统) 可以将双缝的傅里叶变换函数转换成双缝的像, 此像的空间分辨率比经典情形提高一倍.

理解这个实验的关键, 还是要从信号–闲置偶光子系统的纠缠特性出发. 就像我们前面讨论过的, 信号–闲置光子对总是从源的输出面上的同一点出射, 所以如果将双缝贴近非线性晶体的端面的话, 光子对就会总是通过同一条狭缝. 在这样的实验装置中, 信号–闲置光子对没有机会通过不同的缝. 换句话说, 物上每一点都是用偶光子 "一起" 照明, "一

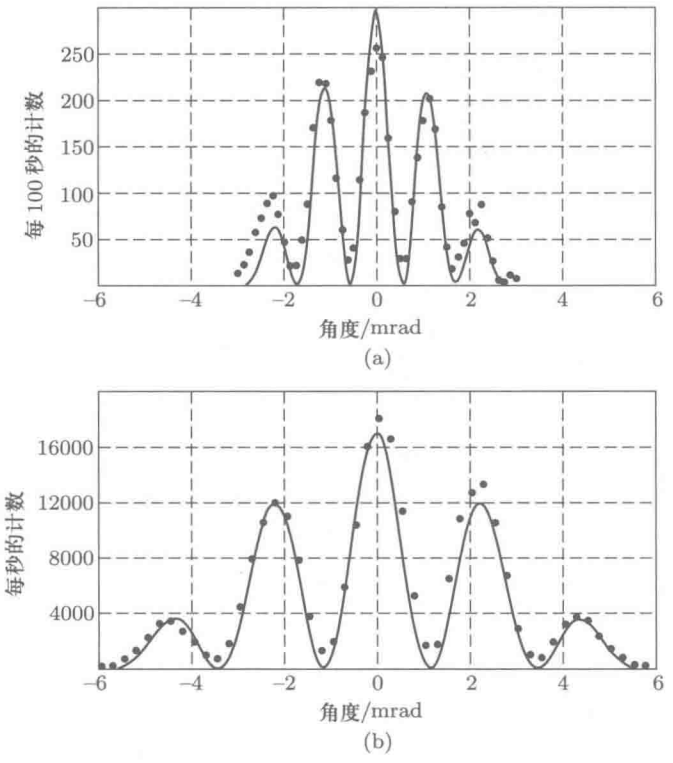


图 11.1.2 (a) 双缝的双光子傅里叶变换. 光源来自共线的简并 SPDC 过程, $\lambda_{s,i} = 916\text{nm}$. (b) 同一双缝的经典傅里叶变换. 使用的是 $\lambda = 916\text{nm}$ 的经典光.

起"“落" 在像平面上, "一起" 被测量. 因此, 物面和像面间的点–斑对应关系应遵从偶光子衍射的物理机理, 最终导致傅里叶面上傅里叶变换函数窄一倍以及像平面上成像分辨率提高一倍的效果. 图 11.1.3 是一个展开的光路示意图, 我们可以借助它来理解其中的物理内涵. 在图 11.1.3 的实验条件下计算干涉–衍射函数并不困难. 我们发现: 这一非经典现象实际上源于产生一次联合探测的双光子振幅 (用连接 D_1 和 D_2 的直线表示) 的叠加. 偶光子衍射决定像的空间分辨率, 这一衍射效应和经典光是不同的, 所以, 空间分辨率突破经典极限并不足为奇.

在这个简化的示意图中, 有几点物理方面的问题需要强调一下:

(1) 光刻的目的是把复杂的图样做缩小复制. 亚波长干涉特性并不一定对应成像特性的提升. 实际上, 傅里叶变换导致非经典空间分辨率的讨论只限于成像装置. 比如, Mach-Zehnder 型干涉仪中也有亚波长干涉现象, 但是它并不能用来成像.

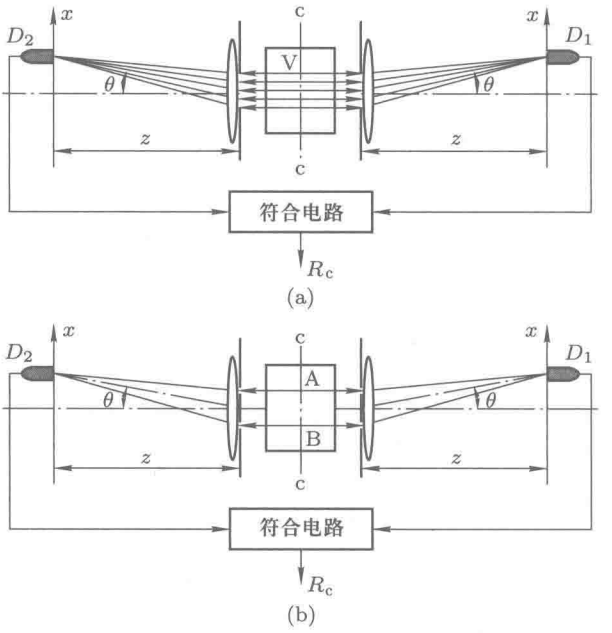


图 11.1.3 展开的实验装置图. 联合探测是在傅里叶面进行的. 物上每一点都是被信号–闲置光子对一起照明的. 在傅里叶面上进行联合探测时, 我们会得到窄一半的干涉–衍射条纹, 这和 $\lambda/2$ 的经典光源的效果等价.

(2) 在成像装置中, 是纠缠 N 光子态的奇异性质使得成像的空间分辨率提高到 N 倍: 纠缠光子从物平面上一点出射, 经历 N 光子衍射后在像平面又集中到一个缩小至经典成像情形 $1/N$ 大小的斑点内. D′Angelo 等人的历史性实验首次演示了量子光刻的工作原理 (只是原理), 它利用了 SPDC 的纠缠双光子态: 信号–闲置光子对从物平面上缝或下缝出射, 经历了双光子衍射后, 又聚集到像平面上比经典情形小一半的斑点内. 虽然测量是在傅里叶面进行的, 但是只要用另一个透镜 (形成一个简单的望远镜系统) 再进行一次傅里叶变换就可以在像平面上得到两倍分辨率的像.

11.2 鬼成像

在 1995 年, Pittman 和作者等人成功地演示了 SPDC 偶光子态的非局域位置–位置和动量–动量关联. 该实验在物理界立即被命名为 “鬼” 成像. 虽然该实验所揭示出来的重要物理, 或许不是所谓的 “鬼” 行为. 其实, 那个实验的初衷是研究纠缠偶光子对在位置和在动量上的 EPR 关联, 并检验方程 10.4 中的 EPR 不等式.

图 11.2.1 是鬼成像的实验装置示意图. 连续激光泵浦到非线性晶体上, 该晶体被制备成简并 II 类相位匹配, 以产生一对正交偏振的信号 (晶体的 e 光) 和闲置 (晶体的 o 光) 光子. 频率为 $\omega_s \cong \omega_i \cong \omega_p/2$ 的信号-闲置光子对从晶体共线出射. 用色散棱镜将泵浦光和偶光子分开, 与泵浦光分离后的信号光和闲置光各自被一个偏振分束的 Thompson 棱镜送向不同的方向. 信号光通过一个焦距为 400mm 的凸透镜后照射到一个开孔物 (模板) 上, 比如模板 "UMBC". 通过开孔物的信号光被后面的桶探测器 D_1 所收集. 桶探测器包括焦距很短的收集透镜和放置在其焦点处的雪崩光电二极管. 在实验中 D_1 的位置是固定的. 闲置光则用可以横向扫描的点探测器系统 D_2 进行探测, 此系统包括一段光纤, 其输出端接到另一个雪崩二极管, 光纤的输入端由两个步进电机带动作横向两维扫描. 两个探测器都工作在光子计数模式, 其输出脉冲被送到一个标准的符合电路, 从而对信号-闲置光子对的联合探测事件进行计数.

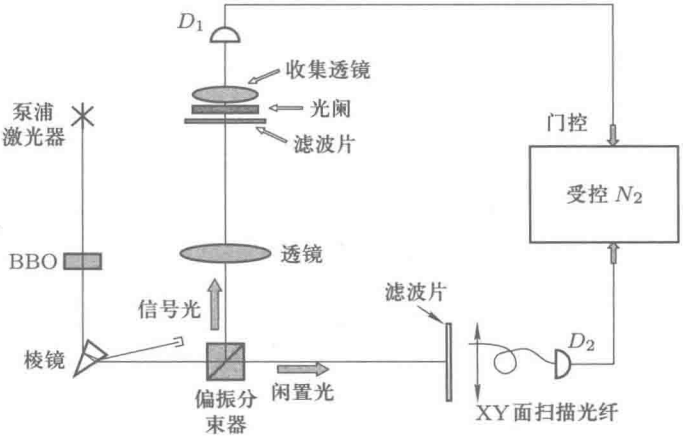


图 11.2.1 "鬼" 成像的实验装置示意图.

实验中记录 D_1 和 D_2 的符合计数率随光纤头横向坐标的变化, 从而得到开孔物 (例如, "UMBC") 的像, 如图 11.2.2 所示. 有意思的是, 放置在信号光路的 "UMBC" 的大小只有 3.5mm×7mm, 而观察到的像为 7mm×14mm, 被放大了两倍. 测量结果还证实了成像透镜的焦距 f、物距 s_o 以及像距 s_i(从成像透镜沿着信号光路回到 SPDC 晶体的双光子源处, 再沿着闲置光路到光纤的横向扫描观测面) 满足高斯薄透镜成像公式. 实验中, 选定 $s_o = 600$mm, 当光纤头位于 $s_i = 1\,200$mm 平面内时, 可以找到一个清晰的 2 倍大的像. 当 D_2 不在 $s_i = 1\,200$mm 面内时, 像是模糊的.

对信号或者闲置子系统各自独立测量的结果与上面结果截然不同.

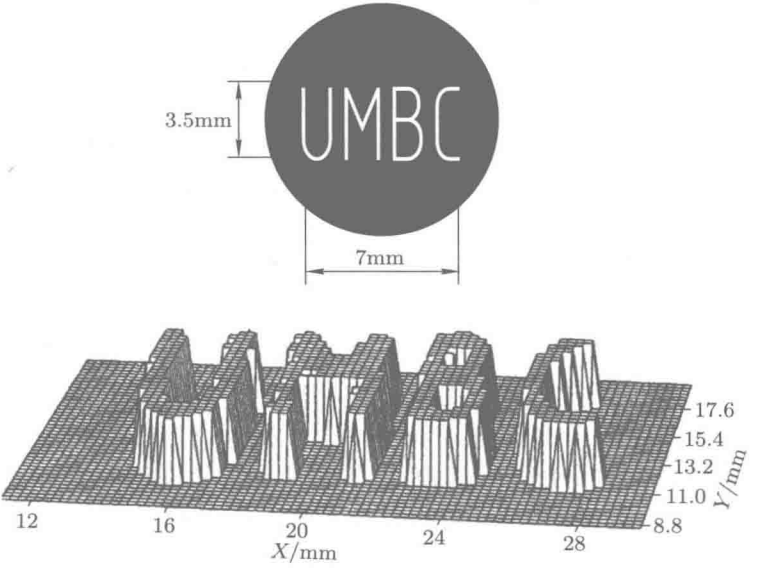


图 11.2.2 (a) 放置在信号光路的实际开孔物 "UMBC". (b)"UMBC" 的像: 符合计数作为光纤端点横面坐标的函数. 步长 0.25 mm. 图中像是最大值一半处的截面图.

在扫描的过程中, D_2 的单光子计数率在整个扫描区域内基本是常数. 这说明信号或者闲置的横向坐标的不确定度是相当大的, 远大于信号-闲置纠缠光子对的横向关联: Δx_1 (Δy_1) 和 Δx_2 (Δy_2) 远大于 $\Delta(x_1 - x_2)$ $(\Delta(y_1 - y_2))$.

EPR 偶光子态的奇特二阶关联, 即横向维度上的 δ 函数 $\delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)$ 和 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)$ 是理解这一有趣现象的关键所在. 对于简并 SPDC, 尽管信号-闲置光子对以相同的概率从非线性晶体表面上的任一点发出, 横向位置的 δ 函数告诉我们: 如果一个光子在某个位置被观测到, 另一个光子必定在同一位置被观测到. 换言之, 信号-闲置光子对总是从偶光子源输出平面的同一点出射. 横向动量 δ 函数定义了信号-闲置光子对的角度关联: 它们的横向动量大小相等, 方向相反, 即 $\boldsymbol{\kappa}_s = -\boldsymbol{\kappa}_i$. 换言之, 偶光子振幅相对泵浦光传播方向的角度总是大小相等、方向相反. 这样, 我们就可以用普通的几何光学来简单解释这个实验: 设想以非线性晶体为 "连接点", 将图 11.2.1 展开成图 11.2.3 所示的示意图. 进一步, 将信号-闲置双光子振幅用直线表示 (注意传播方向不同). 不难发现, 当开孔物、透镜和光纤头的放置满足 (11.2) 式的高斯薄透镜公式时, 我们应该在 D_2 的横向扫描面观测到一个放大或者缩小的像, 当然, 需要对 D_1 和 D_2 进行符合测量. 观测到的 "鬼" 像等价于当探测器 D_1 被点光源取代、非线性晶

体被反射镜取代时, 在光纤输入端观测屏上所得到的经典像.

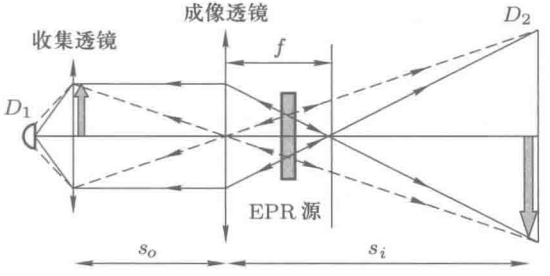


图 11.2.3 "鬼" 成像实验装置的展开图, 它有助于理解其中的物理图像. 因为偶光子沿 "直线" 传播, 不难发现物平面上的任一几何光点对应像平面上唯一的几何光点. 因此在像平面上非局域的形成物体的 "鬼" 像. 尽管透镜、物体和探测器 D_2 的位置满足高斯薄透镜公式, 需要记住的是: 图中的几何光线实际上表示纠缠光子对的偶光子振幅. 点对点的对应关系是这些偶光子振幅线性叠加的结果.

作一个类似经典几何光学的简单分析, 不难发现, 物平面上的几何光点与像平面上的几何光点一一对应. 物平面上的几何光点来自双光子光源所有可能的双光子振幅的交点, 像平面的几何光点是所有可能的双光子振幅的另一个交点. 这种点对点的对应实现了开孔物的 "鬼" 成像. 尽管物理上完全不同于经典的几何光学, "鬼" 成像实验中的透镜焦距 f、物距 s_o 和像距 s_i 仍然满足高斯薄透镜公式:

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

虽然透镜、物体和探测器 D_2 的位置遵守高斯薄透镜成像公式, 但是我们必须记住图中的几何光线实际上代表的是信号–闲置光子对的偶光子振幅, 而点对点的对应关系是偶光子振幅线性叠加的结果. 可以说, "鬼" 成像成功地实现了 1935 年 EPR 提出的假想实验.

现在计算 "鬼" 成像实验的二阶关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)$, 其中 $\boldsymbol{\rho}_o$、$\boldsymbol{\rho}_i$ 是物平面与像平面上的横向坐标. 我们将证明物平面与像平面之间存在 δ 函数型的点对点 (斑) 对应关系, 也就是说, 如果在物平面 $\boldsymbol{\rho}_o$ 处测量到了信号光子, 那么闲置光子只会在像平面上 $\boldsymbol{\rho}_i$ 处 (周围) 被探测到, 满足 $\delta(m\boldsymbol{\rho}_o-\boldsymbol{\rho}_I)$, 其中 $m=-(s_i/s_o)$ 是像–物放大因子. 展示了 δ 函数之后, 我们将进一步展示物函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 如何转移到像平面, 形成放大的像 $A(\boldsymbol{\rho}_i/m)$. 在演示这些之前, 有必要再次强调下图 11.2.3 中的所有直线表示的是一对信号–闲置光子的所有可能的双光子振幅. 物平面与像平面点对点的一一对应, 是这些双光子振幅相干叠加的结果.

下面, 我们根据图 11.2.4 的展开实验装置图建立格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega_s, \boldsymbol{\rho}_o, z_o)$ 和 $g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega_i, \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$. 在臂 1 中, 信号光子从光源的输出平面自由传播一段距离 d_1 后到达成像透镜, 继续传播另一段距离 s_o 后到达开孔物, 最后被透镜聚焦收集到光子计数器 D_1 中. 沿着臂 1 将光场从双光子源的输出平面传播到物平面, 我们可以计算出 $g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega_s, \boldsymbol{\rho}_o, z_o)$. 在臂 2 中, 闲置光子从双光子源的输出平面自由传播 d_2 后到达点探测器 D_2. 因此, $g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega_i, \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 是一个自由传播子.

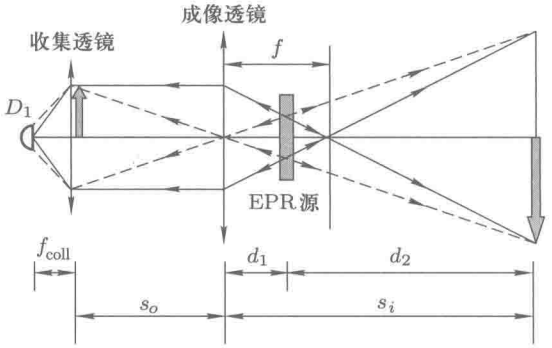


图 11.2.4 在臂 1 中, 信号光从光源的输出平面自由传播到相距 d_1 的成像透镜, 经过距成像透镜 s_o 远的开孔衍射物, 然后通过收集透镜聚焦到光计数探测器 D_1. 在臂 2 中, 闲置光从光源的输出平面自由传播到相距 d_2 的点状光计数探测器 D_2.

(I) 臂 1 (光源到物体):

在臂 1 中将光场从源传播到物平面的光学传递函数或格林函数的形式如下:

$$\begin{aligned} & g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega_s; \boldsymbol{\rho}_o, z_o = d_1 + s_o) \\ & = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c} z_o} \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \int_{source} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_S \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi c d_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_S} G\left(|\boldsymbol{\rho}_S - \boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega_s}{c d_1} \right) \right\} \\ & \times \left\{ G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega_s}{c f} \right) \right\} \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi c s_o} G\left(|\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o|, \frac{\omega_s}{c s_o} \right) \right\} \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_S$ 和 $\boldsymbol{\rho}_l$ 分别是光源的输出平面和透镜平面内的横向坐标矢量. (11.2.1) 式中第一个、第三个花括号里的项分别描述了从光源的输出平面到透镜和从透镜到物平面的自由空间传播. 第二个花括号里的 $G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{cf}\right)$ 函数是成像透镜的变换函数. 这里将成像透镜处理为薄透镜: $G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{cf}\right) \cong \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2cf}|\boldsymbol{\rho}_l|^2}$.

(II) 臂 2 (光源到像):

在臂 2 中, 闲置光子自由传播到 D_2 所在平面, 也就是像平面. 于是格林函数为

$$\begin{aligned} & g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega_i; \boldsymbol{\rho}_2, z_2 = d_2) \\ &= \frac{-\mathrm{i}\omega_i}{2\pi c d_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_i}{c} d_2} \int_{source} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}}\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{\rho}_2\,|, \frac{\omega_i}{c d_2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}}} \end{aligned} \tag{11.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_S$ 、$\boldsymbol{\rho}_2$ 分别是光源的输出平面和光探测器 D_2 所在平面内的横向坐标矢量.

(III) $\Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i)$ (物平面到像平面):

为了简化计算, 着重于横向关联, 在下面的计算中假设 SPDC 过程是简并 ($\omega_s = \omega_i = \omega$) 共线的. 将格林函数 $g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega; \boldsymbol{\rho}_o, z_o)$ 和 $g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 代入到 (10.4.5) 式中, 可以求出偶光子的横向有效波函数 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_2)$:

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_2) &\propto \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)\, g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega; \boldsymbol{\rho}_o, z_o)\, g(\boldsymbol{\kappa}_i, \omega; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(s_0 + s_i)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i) \\ &\quad \times \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \int_{source} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_S\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_S} G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_S - \boldsymbol{\rho}_l\,|, \frac{\omega}{c d_1}\right) \\ &\qquad\qquad \times G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c f}\right)\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o\,|, \frac{\omega}{c s_o}\right) \\ &\quad \times \int_{source} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_S}\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{\rho}_2\,|, \frac{\omega}{c d_2}\right) \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

其中略去了所有的比例常数. 对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i$ 做双重积分

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_s\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}_i\, \delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{\kappa}_i)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_S}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_S} \sim \delta(\boldsymbol{\rho}_S - \boldsymbol{\rho}'_{\boldsymbol{S}}) \tag{11.2.4}$$

(11.2.3) 式变为:

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \int_{source} & \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_S\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_S\,|, \frac{\omega}{c d_2}\right) G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_S - \boldsymbol{\rho}_l\,|, \frac{\omega}{c d_1}\right) \\ & \times G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c f}\right)\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o\,|, \frac{\omega}{c s_o}\right) \end{aligned} \tag{11.2.5}$$

利用高斯函数的性质, 并假设光源的横向尺寸无穷大, 完成对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_S$ 的积分后得到,

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c s_i}\right) G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c f}\right) G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o\,|, \frac{\omega}{c s_o}\right) \tag{11.2.6}$$

尽管信号与闲置光子沿着不同方向在两条不同的光臂中传播, 有趣的是, 如果我们想象场传播从物平面点 $\boldsymbol{\rho}_o$ 到透镜, 再停止到像平面的点 $\boldsymbol{\rho}_2$, 方程 (11.2.6) 式中的格林函数就等价于一个经典成像装置. 这一数学结果与先前对这个实验的定性分析是一致的.

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l$ 积分得到物平面和像平面 (由高斯薄透镜成像公式定义) 的点对点关系:

$$\int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}-\frac{1}{f}\right]\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \propto \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right) \quad (11.2.7)$$

其中积分限取无穷并使用了高斯薄透镜公式 $1/s_o+1/s_i=1/f$. 我们也定义 $m=s_i/s_o$ 为成像系统的放大因子. 函数 $\delta(\boldsymbol{\rho}_o+\boldsymbol{\rho}_i/m)$ 表明物平面上 $\boldsymbol{\rho}_o$ 点与像平面上 $\boldsymbol{\rho}_i$ 点一一对应. 这两个矢量方向相反、大小比例为 $m=|\boldsymbol{\rho}_i|/|\boldsymbol{\rho}_o|$.

如果考虑成像透镜的尺寸是有限的 (直径 D 有限), 积分得到点扩展函数 $\mathrm{somb}(x)$:

$$\int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o}+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{s_i}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \propto \mathrm{somb}\left(\frac{R}{s_o}\frac{\omega}{c}\left[\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right]\right) \quad (11.2.8)$$

其中 $\mathrm{somb}(x)=2\mathrm{J}_1(x)/x$, $\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶 Bessel 函数.

点扩展函数将物平面和像平面的点对点对应关系变成点对斑关系, 因此限制了成像的空间分辨率. 这一点将在后面一节中详细讨论.

因此, 加上高斯薄透镜公式这一条件后, 双光子横向有效波函数就近似为 δ 函数

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i) \propto \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right) \quad (11.2.9)$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_o$ 和 $\boldsymbol{\rho}_i$ 分别表示物平面与像平面上 (由高斯薄透镜成像公式定义) 的横向标. 因此, 二阶空间关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)$ 变为

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)=|\,\Psi(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)\,|^2 \propto |\,\delta(\boldsymbol{\rho}_o+\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m})\,|^2 \quad (11.2.10)$$

(11.2.10) 式表明物平面与像平面之间存在点对点的 EPR 关联, 也就是说如果在物平面上 $\boldsymbol{\rho}_o$ 处观测到信号光子, 闲置光子必定在像平面上唯一确定的位置 $\boldsymbol{\rho}_i$ 处被测到, 两光子位置满足 $\delta(\boldsymbol{\rho}_o+\boldsymbol{\rho}_i/m)$, 其中 $m=s_i/s_o$.

现在我们将图 11.2.1 中所示的物函数、收集透镜和光计数探测器 D_1 都包含到臂 1 的光学传递函数中.

首先将收集透镜和 D_1 整套组件处理为桶探测器. 桶探测器对所有通过物体 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 的 $\Psi(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)$ 进行积分. 这个过程等价于下面的卷积:

$$R_{1,2} \propto \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o\, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2\, g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o,\boldsymbol{\rho}_i)$$

$$= \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2 \, |\Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i)|^2 \simeq \left| A(\frac{-\boldsymbol{\rho}_i}{m}) \right|^2 \tag{11.2.11}$$

其中 D_2 在像平面内扫描, $\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_i$. (11.2.11) 式表明: 通过两个远离的光电探测器 D_1 和 D_2 的符合探测得到物函数的放大 (或缩小) 的像. $A(-\boldsymbol{\rho}_i/m)$ 中的 "$-$" 号表示像和物方向朝向相反. 桶探测器的模型是一个很好的实用的近似.

其次, 我们再仔细计算一下从光源到 D_1 的格林函数, 将物函数、收集透镜和光子探测器都包括到臂 1 中. (11.2.1) 式的格林函数变为:

$$\begin{aligned}
& g(\boldsymbol{\kappa}_s, \omega_s; \boldsymbol{\rho}_1, z_1 = d_1 + s_o + f_{coll}) \\
= & \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_s}{c} z_1} \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l \int_{source} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_S \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi c d_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_S} G\left(|\, \boldsymbol{\rho}_S - \boldsymbol{\rho}_l \,|, \frac{\omega_s}{c d_1} \right) \right\} \\
& \times G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega_s}{c f} \right) \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi c s_o} G\left(|\, \boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o \,|, \frac{\omega_s}{c s_o} \right) \right\} A(\boldsymbol{\rho}_o) \\
& \times G\left(|\boldsymbol{\rho}_o|, \frac{\omega_s}{c f_{coll}} \right) \left\{ \frac{-\mathrm{i}\omega_s}{2\pi c f_{coll}} G\left(|\boldsymbol{\rho}_o - \boldsymbol{\rho}_1|, \frac{\omega_s}{c f_{coll}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{11.2.12}$$

其中 f_{coll} 是收集透镜的焦距, D_1 放置在收集透镜的焦点处.

重复前面计算, 我们得到偶光子的横向有效波函数:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \int_{obj} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, A(\boldsymbol{\rho}_o) \, \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{m} \right) = A(\boldsymbol{\rho}_o) \otimes \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{m} \right) \tag{11.2.13}$$

其中 $\otimes$ 表示卷积. 注意: 在 (11.2.13) 式中, 忽略了对成像无关紧要的相位因子. 于是, 两个光子计数探测器 D_1 和 D_2 之间的符合探测计数率 $R_{1,2}$ 为:

$$R_{1,2} \propto G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \left| A(\boldsymbol{\rho}_o) \otimes \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{m} \right) \right|^2 = \left| A\left(\frac{-\boldsymbol{\rho}_2}{m} \right) \right|^2 \tag{11.2.14}$$

其中同样 $\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_i$.

对上述卷积的物理过程可总结如下. 由于物平面和像平面之间特有的点对点关联, 每当桶探测器接收到一个从物体上某点透射、散射或反射的信号光子, 测量闲置光子的点扫描光子探测器 D_2 或对应的一个 CCD 单元的符合探测就可以准确地确定产生这次联合探测事件的物点坐标 $\boldsymbol{\rho}_o$ 和孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 的值. 例如, 在 t 时刻, 桶探测器在符合时间窗口中接收到从物平面上某唯一点 $\boldsymbol{\rho}_o$ 透射、散射或反射的信号光子, 通过扫描点探测器 D_2(或者 CCD 元件) 联合探测得到闲置光子的坐标 $\boldsymbol{\rho}_i$ 后, 就可以立刻确定 $\boldsymbol{\rho}_o$. 在 t' 时刻, 桶探测器在符合时间窗口中接收到从物

平面另一个点 $\boldsymbol{\rho}_o'$ 透射、散射或反射的另一个信号光子, 通过扫描点探测器 D_2 (或者 CCD 元件) 联合探测得到闲置光子的坐标 $\boldsymbol{\rho}_i'$ 后, 就可以立刻确定 $\boldsymbol{\rho}_o'$. 在 $(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_o', \boldsymbol{\rho}_i')$ 处发生联合探测事件的概率分别正比于孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ 和 $A(\boldsymbol{\rho}_o')$ 的值. 在像平面上每个横向坐标处进行时间累积测量, 经历大量的联合探测事件后就可以重现以 $\boldsymbol{\rho}_i$ 为变量的物函数 $A(\boldsymbol{\rho}_o)$.

正如我们先前所讨论的, 点对点式的 EPR 关联是偶光子概率幅相干叠加的结果. 原则上, 一对信号–闲置光子对包含了产生鬼像的所有必要的偶光子概率振幅. 这种成像被命名为偶光子相干成像, 有别于热光的双光子非相干成像.

11.3 鬼成像和测不准关系

量子力学中, 一个粒子不可能同时具有确定的位置和动量, 这一点是不能违背的. 量子力学的位置和动量算符是不对易的, 测量到位置 (动量) 的精确值意味着动量 (位置) 可以等概率地取所有可能值.

然而, 从经典的观点来看, 确实很难想象当观测到一个粒子的确定位置 (动量) 时, 它的动量 (位置) 就失去了确定的定义值. 作为一个形而上学的现实论者, Karl Popper 和爱因斯坦、波多尔斯基、罗森等人对于物理现实概念持相同的哲学观点: 粒子在它的产生、传播和湮没过程中, 一定有确定的位置和动量. 根据他们的观点, 量子理论应该被、能够被、并且必须被诠释为具有现实意义的理论. 为此, Popper 在 19 世纪 30 年代早期构思了一个假想实验来支持他对量子力学的解释. Popper 的假想实验中, 他试图说明: 通过对纠缠偶粒子系统的关联测量, 粒子可以同时有确定的位置和动量.

和 EPR 理想实验类似, Pooper 的假想实验也是基于偶粒子纠缠的特征: 如果粒子 1 的位置或动量确定了, 孪生粒子 2 相应的观测量就会 100% 确定. Popper 最初的假想实验示意图如图 11.3.1 所示. 点源 S (Popper 建议用电子偶素) 放置在实验装置的中心处, 从这里纠缠粒子 1 和 2 以相反方向分别沿正负 x 轴发射到两个屏 A、B 上. 两个屏上都有平行于 y 轴的狭缝. 狭缝宽度 Δy 可调. 每个狭缝的后面都有盖革 (Geiger) 计数器阵列, 用来对粒子对进行联合探测, 如图所示. 纠缠粒子对可能从点源向 4π 立体角内的任意方向发射. 然而一旦粒子 1 在某个方向被观测到, 由于粒子对的动量守恒, 粒子 2 必定在相反的方向上.

首先假设狭缝 A 和 B 都被调节得很窄. 这种情况下, 粒子 1 和粒子 2 分别在狭缝 A 和 B 处发生衍射. 狭缝的 Δy 越小产生的动量不确定 Δp_y

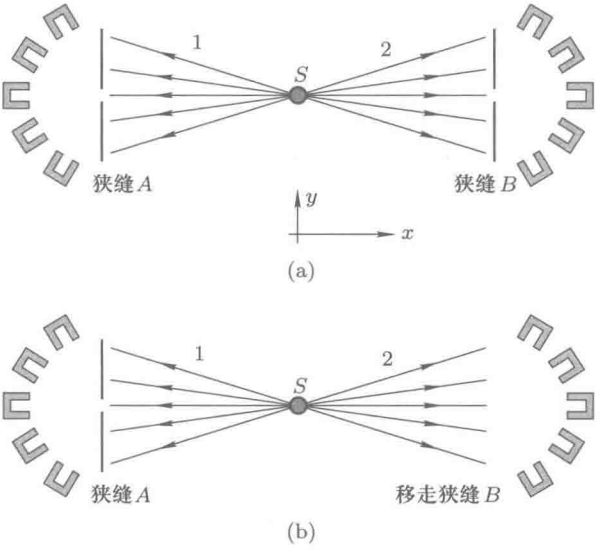


图 11.3.1 Popper 的假想实验: 纠缠粒子对从点源发射, 满足动量守恒. 放置在粒子 1 的路径中的屏 A 上的狭缝用来确定粒子 1 在 y 轴的精确位置. 同时它也决定了孪生粒子 2 在屏 B 上沿 y 轴的精确位置. (a) 狭缝 A 和 B 都调节成很窄的状态. (b) 狭缝 A 保持很窄, 狭缝 B 完全敞开.

越大. 对于这种情况, 哥本哈根学派与 Popper 之间没有分歧.

接下来假设狭缝 A 保持很窄, 而让狭缝 B 张开. 由窄缝 A 确定粒子 1 在 y 轴上的精确位置, 根据量子纠缠原理, 从而确定其孪生粒子 2 在 B 屏 y 轴上的精确位置. Popper 问道: 现在, 粒子 2 处没有了真实的狭缝, 其在 y 轴上的准确的位置取值是否会带来更大的动量不确定度 Δp_y 呢? Popper 坚持自己的信念直接预言道: 除非使用真实的物理狭缝 B, 粒子 2 不会有较大的 Δp_y. 如果 Popper 的预言是正确的, 我们将面临与 EPR 佯谬类似的另一个两难境地. 一方面, Popper 的预言似乎意味着粒子 2 的 Δy 和 Δp_y 的乘积要小于 $h(\Delta y \Delta p_y < h)$. 这对于哥本哈根学派以及我们绝大多数人来说是难以接受的. 另一方面, 如果向右的粒子 2 确实像其孪生粒子 1 那样由于狭缝 A 的精确定位而发生散射, 我们似乎面临一个超距作用: 由于狭缝 B 是完全张开的, 粒子 2 的散射效应只能来自狭缝 A. 这也是我们不能接受的.

Popper 的方案中使用了点源, 这被当做一个根本错误在历史上招来很多批评. 不错, 点源不能产生 Popper 所期待的具有 EPR 动量关联性质的纠缠粒子对. 然而, 点源并不是 Popper 实验的必要条件, 所需要的是精确的位置-位置 EPR 关联: 如果粒子 1 的位置完全确定, 粒子 2 的位置

也 100% 确定了. 正如在上一小节所展示的, 鬼成像是实现这一要求的完美途径.

1998 年, Y. H. Kim 和作者等人通过偶光子鬼成像实现了 Popper 的假想实验. 图 11.3.2 是示意图, 此图可以帮助我们把 Kim 和作者等人的实验和 Popper 最初的假想实验进行对比. 这是一个典型的鬼成像实验装置. 纠缠光子对将狭缝 A 成像到远处像平面上即屏 B 上. 在这个装置中, s_o 为成像透镜 LS 焦距的两倍, 即 $s_o = 2f$. 根据高斯薄透镜公式, 与狭缝 A 相等尺寸的鬼像会出现在 $s_i = 2f$ 处的双光子像平面. 狭缝 A 给出了光子 1 在 y 轴上的精确位置, 通过偶光子鬼成像同时也决定了孪生光子 2 在屏 B 上 y 坐标. 于是创造了 Popper 实验的实验条件: 当狭缝 A 调节到某一宽度值 Δy, 而狭缝 B 完全张开时, 狭缝 A 提供了光子 1 在 y 轴的精确位置, 其精度是 Δy (等于狭缝 A 的宽度). 在屏 B 上则由狭缝 A 的鬼像决定了光子 2 在 y 轴上的精确位置, 精度也是 Δy. 光子 2 的 Δp_y 可以单独通过测量距屏 B 一定距离处衍射图案的宽度来确定. 测量中, 记录的是探测器 D_1 和 D_2 的符合计数, D_2 在离屏 B 一定距离处沿着 y 轴扫描.

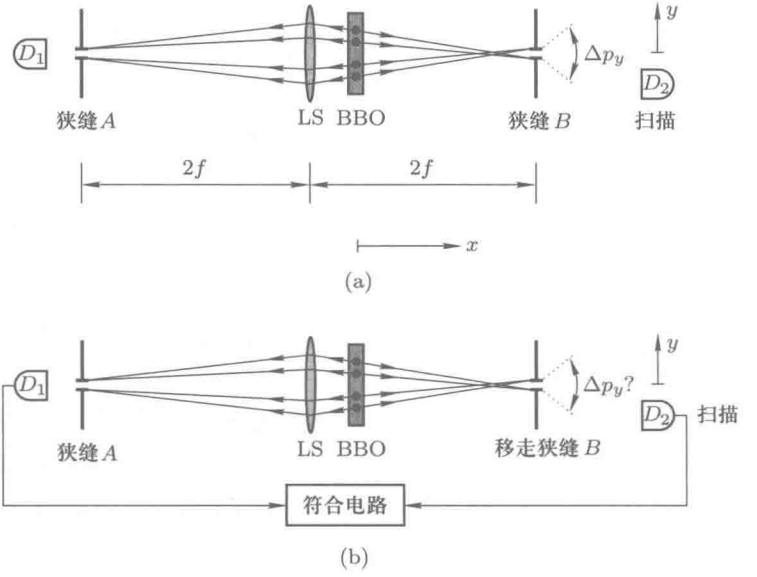


图 11.3.2 Popper 实验的修改版. 纠缠光子对是由 SPDC 产生的. 透镜和狭缝 A 放置在光子 1 的路径中, 用来提供光子 1 在 y 轴上的精确位置. 通过双光子鬼成像, 孪生光子 2 在屏 B 上 y 轴的精确位置也随之确定. 光子计数探测器 D_1 和 D_2 在 y 方向扫描, 进行联合探测. (a) 狭缝 A 和 B 都调节得很窄. (b) 狭缝 A 保持很窄, 狭缝 B 张开.

图 11.3.3 中是一个将修改的 Popper 实验和双光子鬼成像联系起来的概念图. 在这个展开的鬼成像装置中, 假设信号–闲置纠缠光子对拥有完美的 EPR 动量关联 $\delta(\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i)$, 这里已经假设 $\boldsymbol{\kappa}_p=0$. 实际上, 只要 SPDC 过程的横向尺寸很大, 这个完美的横向动量关联 $\boldsymbol{\kappa}_s+\boldsymbol{\kappa}_i=0$ 是很容易实现的. 实验中, 我们选定 $s_o=s_i=2f$. 因此, 屏 B 处的像平面上应该会出现与狭缝 A 相等尺寸的鬼像.

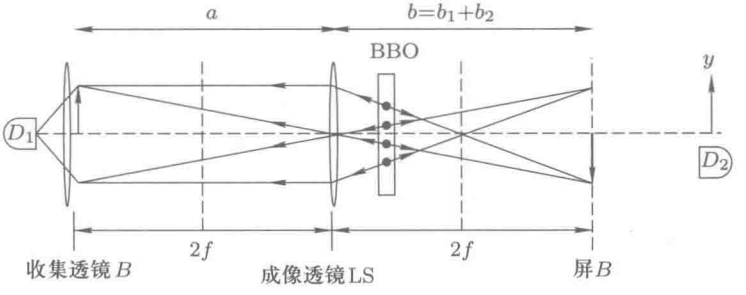


图 11.3.3 展开的鬼成像示意图. 假设信号–闲置纠缠光子对满足完美的动量关联 $\delta(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i)\sim 0$. 狭缝 A、成像透镜 LS 和鬼像的位置满足高斯薄透镜公式. 实验中选取 $s_o=s_i=2f$, 因此狭缝 A 的鬼像和狭缝 A 应该一样大.

实验装置细节见图 11.3.4, 图中标示了各个不同的距离. 此实验使用连续氩离子激光 ($\lambda_p=351.1$nm) 泵浦 3mm 长的 β 硼酸钡 (BBO) 晶体, 通过 II 类 SPDC 过程产生了正交偏振的信号–闲置光子对. 激光束直径大约为 3mm, 决定了有限的衍射发散度. 重要的是不要聚焦泵浦光束, 发散度小且直径大的泵浦光可以强化 SPDC 过程中的相位匹配条件 $\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i=\boldsymbol{k}_p$, 其中 $\boldsymbol{k}_j$ $(j=s,i,p)$ 分别是信号光、闲置光和泵浦光的波矢. 使用熔凝石英色散棱镜将共线的信号–闲置光 (满足 $\lambda_s=\lambda_i=702.2\text{nm}=2\lambda_p$) 和泵浦光分离开来, 然后用偏振分束器 PBS 将它们分束. 信号光 (光子 1) 通过焦距为 500mm, 直径为 25mm 的凸透镜 LS. 在透镜 LS 后 1 000mm ($s_o=2f$) 的 A 处放置 0.16mm 宽的狭缝. 一个短焦距的透镜和 D_1 一起收集所有通过狭缝 A 的信号光子. 点光子计数探测器 D_2 放置在 "屏 B" 后 500mm 处. "屏 B" 是高斯薄透镜公式所定义的像平面. 狭缝 B 或者调节成和狭缝 A 一样宽, 或者完全张开, 用来寻找鬼像的位置. 探测器的输出电脉冲送到符合电路中. 测量中, 桶探测器 D_1 固定在狭缝 A 后面, 点探测器 D_2 通过步进马达沿着 y 轴扫描.

测量 1: 测量 1 研究狭缝 A 和 B 宽度都为 0.16mm 的情况. D_1 的 y 轴坐标选定为 0 (中心), D_2 可以沿着 y 轴扫描. 图 11.3.5 中圆形数据点表示 D_2 在 y 坐标处的联合计数率. 它是典型的单缝衍射图案, 没有任何特殊

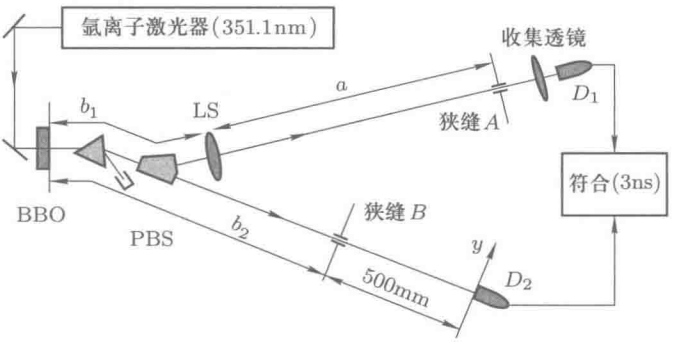


图 11.3.4 实验装置示意图. 激光直径大约为 3mm, 用来增强 "相位匹配条件". 狭缝 A (0.16mm) 位于凸透镜 LS ($f = 500$mm) 后 1 000mm=$2f$ 处. 狭缝 A 的一对一的鬼像 (0.16mm) 位于 B 处. 信号光路中从 LS 经过 PBS 回到 SPDC 晶体 ($b_1 = 255$mm) 的光程加上沿着闲置光路到达屏 B ($b_2 = 745$mm) 的总光程为 1 000mm=$2f$ ($b = b_1 + b_2$).

之处. 实验数据满足 $\Delta y\,\Delta p_y = h$. 这个测量只是给出 0.16mm 宽狭缝的衍射图案的宽度, 得到了 Δp_y 的最小不确定值. 这里, 我们要强调一点: D_2 的单光子计数率与 y 坐标的函数关系和符合计数率是一致的, 只是计数率更高些.

测量 2: 狭缝 B 敞开, 其它实验条件和测量 1 一样. 该测量是对 Popper 预言的检测. D_1 的 y 坐标定为 0 (中心), D_2 可以沿着 y 轴扫描. 基于信号-闲置光子对的纠缠特性和联合探测电路, 只有经过狭缝 A 及其在屏 B 处鬼像的光子对 D_1 和 D_2 之间的符合探测计数有贡献. 屏 B 处鬼像的位置不确定性大约为 $\Delta y = 0.16$ mm (和测量 1 中真实狭缝 B 的宽度一样). 图 11.3.5 中的菱形数据点给出了 D_2 在 y 坐标处的联合计数率. 测量到的图案宽度比测量 1 中衍射图案的宽度要窄的多. 有趣的是: 在整个扫描范围, D_2 的单光子计数率为常数. 这和测量 1 的情况很不相同. 实验数据清楚地给出了在纠缠光子对联合探测中 $\Delta y\,\Delta p_y < h$ 的迹象.

上述测量给出 $\Delta y\,\Delta p_y < h$, 这违背了不确定关系了吗? 量子力学同意这个特殊的实验结果吗? 如果量子力学确实对光子 2 的行为给出 $\Delta y\,\Delta p_y < h$ 的答案, 我们似乎被迫再一次面对 1935 年提出的 EPR 佯谬.

量子力学确实提供了一个与实验结果相符合的解答. 然而, 它不是针对光子 2 行为的解答, 而是对纠缠光子对的联合探测的解答.

现在用量子力学的计算方法探讨一下实验结果. 以下有些计算直接引用鬼成像的数学表达, 只是作了相应的修改.

情形 (I): 狭缝 $A = 0.16$mm, 狭缝 $B = 0.16$mm

测量 1 的实验条件为: 狭缝 B 和狭缝 A 等宽. 这个实验的结果没有

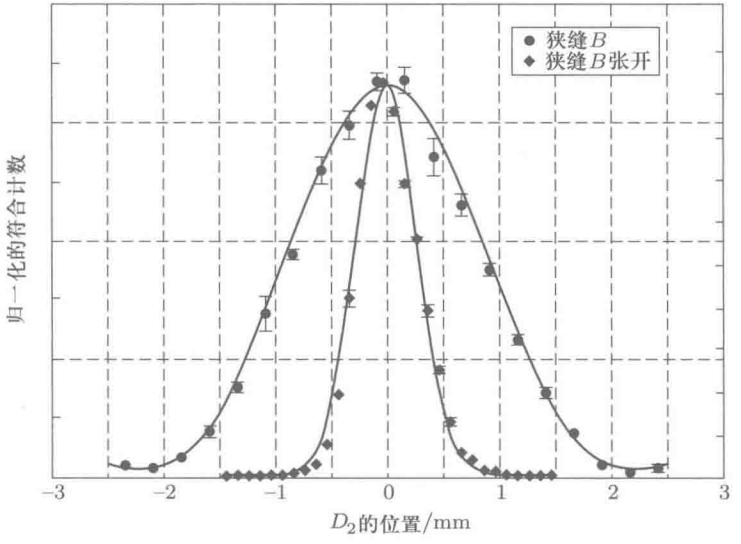


图 11.3.5 观测到的符合图案. D_1 的 y 轴坐标定为 0 (中心), 而 D_2 可以沿着 y 轴扫描. 圆形点: 狭缝 A= 狭缝 B=0.16mm. 菱形点: 狭缝 A=0.16mm, 狭缝 B 张开. 由圆形点拟合的 sinc 函数曲线的宽度是对 0.16mm 宽狭缝的 Δp_y 极小值的测量. 菱形点拟合的曲线是 (11.3.1) 式的数值计算结果, 表示狭缝 A 的模糊鬼像.

什么特别之处. 测量只是给出了经过 $\Delta y = 0.16$mm 的狭缝 B 衍射后, 光子 2 的动量不确定性为 Δp. 图 11.3.5 中的实验数据和计算结果吻合. 注意, 狭缝 B 和直径 3mm 的双光子源相距 745mm 远, 光源的角大小大约等于 $\lambda/\Delta y$, $\Delta\theta \sim \lambda/\Delta y$, 其中波长 $\lambda = 702$nm, 狭缝宽度 $\Delta y = 0.16$mm. 计算出的衍射图案和 0.16mm 单缝的远场夫琅禾费衍射图案非常接近.

情形 (II): 狭缝 $A = 0.16$mm, 狭缝 $B \sim \infty$ (完全张开)

将狭缝 B 从鬼像平面处移开. 双光子横向有效波函数和二阶关联的计算与鬼成像的计算一样, 除了 D_2 所在观测平面被移到了像平面后 500mm 处. 狭缝 A 的双光子像位于距离成像透镜 $s_i = 2f = 1\ 000$mm $(b_1 + b_2)$ 处. 在测量中, D_2 放在距离成像透镜 $d = 1\ 500$mm 处. 测量到的图案只是狭缝 A 的模糊的双光子像. 模糊的双光子像可以从根据 (11.3.1) 式来计算, 只需将 (11.2.6) 式稍做修改

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_2) &\propto \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_l\,|, \frac{\omega}{cd}\right) G\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{cf}\right) G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_o\,|, \frac{\omega}{cs_o}\right) \\ &\propto \int_{lens} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_l\, G\left(|\,\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{s_o} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f}\right]\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_o}{s_o} + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{d}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \qquad (11.3.1)\end{aligned}$$

其中 d 是成像透镜和 D_2 之间的距离. 测量中 D_2 位于成像平面后 500mm

处, 也就是 $d = s_i + 500\text{mm}$. 采用数值计算方法得到一个 "模糊" 的像, 它比 0.16mm 狭缝 B 的衍射图案要窄, 与图 11.3.5 的测量结果在实验误差范围内相吻合.

测量结果确实表明 $\Delta y \Delta p_y < h$. 然而, 测量结果并非光子 2 (闲置光子) 的 "个人" 行为, 这一测不准关系是属于一对孪生光子对 (信号-闲置光子对) 的行为. Popper 和 EPR 在预言他们的假想实验的结果上都是正确的. 而与此同时, 他们也都犯了同样的错误, 误用偶粒子的物理行为来解释一个单独粒子的物理行为.

不管是 Popper 还是 EPR 的实验, 都是用两个探测器对偶粒子纠缠态进行联合探测. 从量子力学角度看, 偶粒子态只提供两个纠缠粒子之间关联的精确信息. 联合探测中所观测到的光子 2 的行为是以它的孪生光子的测量为条件的. 单量子必须遵循不确定关系, 但是纠缠偶粒子系统中单量子的条件行为在原理上是不同于独立的单量子的. 如果坚持要认为一个粒子在某种条件下的行为等同于这个粒子在无条件下的行为, 那么就不可避免地产生悖论. 这是 Popper 和 EPR 逻辑中的核心问题. 在 Popper 和 EPR 的实验中, $\Delta y \Delta p_y \geqslant h$ 并不适用于解释光子 1 或光子 2 的 "个人" 行为.

以测量光子 1 为条件的光子 2 的行为, 可以很好地用偶光子振幅来表述. 图 11.3.3 中的每条直线对应一个偶光子振幅. 从量子力学角度看, 正是这些偶光子振幅的叠加造成纠缠光子对的 "咔嗒-咔嗒" 测量. 对偶粒子纠缠态的一次 "咔嗒-咔嗒" 联合探测 "投影" 出某些特定的偶粒子振幅, 就是这些偶粒子振幅给出了量子系统的物理特色. 上面分析中, 我们从没有单独考虑光子 1 或光子 2. 所以, Popper 无需质疑光子 2 的动量不确定性. 在这些测量中, 其实应该问的问题是当信号光子被局域在屏 A 上 $\Delta y = 0.16\text{mm}$ 的狭缝内时, 信号光子和闲置光子之间的位置-动量关系如何? 这才是 Popper 实验的核心.

再重复一下, Popper 实验的演示使我们注意到一个重要的事实: 偶粒子系统的物理与单独粒子的物理有本质的不同.

11.4 热光鬼成像

在偶光子鬼成像实验演示十年之后, Valencia 和作者等人发现这种近场、很自然的、不可分解的点对点的成像关系并不仅仅是纠缠光子的特有属性. 这种点对点的关联也可以通过对混沌热光中随机分布的任意光子对的联合探测来实现, 只不过有 50% 的常数背景噪声. 热光鬼像实验中不需要成像透镜, "物平面" 和 "像平面" 是两个直接面对光源平面

的横向平面. 当 "物平面" 和 "像平面" 与一个有较大空间张角的光源平面等距离时, 混沌热光的空间二阶关联函数显示了如下的点对点近似关系,

$$g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i) \sim 1 + \delta(\boldsymbol{\rho}_o + \boldsymbol{\rho}_i) \tag{11.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_o$ 和 $\boldsymbol{\rho}_i$ 分别是物平面和像平面的横向坐标. 像平面就是观测平面, 它到混沌热光源的直接距离和物平面到光源的直接距离相等.

本节的目的是分析上述点对点成像关系以及热光鬼成像中的双光子干涉特性.

利用混沌热光的点对点二阶关联, D'Angolo 和作者等人以及 Scarcelli 和作者等人在 2005—2006 年实现了混沌热辐射的无透镜近场鬼成像. 图 11.4.1 是他们 2006 年所用的实验装置示意图. 用分束器将频谱 $\Delta\omega$ 很窄和空间频谱 Δk_x 很宽[29] 的混沌热光分成两路. 反射光经过一个成像物体后被聚焦到点探测器 D_2 (桶探测器). 实验所用成像物体很简单, 是如图 11.4.1 所示的普通双缝. D_2 固定在凸透镜的焦平面上以模拟桶探测器. 桶探测器 D_2 显然不能给出成像物体的空间分布或者物体的透过率函数. 透射光自由传播到平面 x_1, 被可以在平面内扫描的点探测器 D_1 探测. D_1 和 D_2 间通过光子符合计数器或标准的 HBT 型电流–电流乘法器来实现联合探测. 尽管测量中 D_1 和 D_2 的单光子计数率为常数, 惊讶的是, 当 D_1 在 $z_1 = z_2$ 平面内沿着 x_1 轴扫描时, 通过联合探测就可以观察到和成像物体尺度大小相同的一维的像. 像的对比度接近 50% (理论上的最大值). 图 11.4.2 给出了测量到的双缝鬼像. 注意, 此图中的常数背景已经被扣除掉.

对不同的实验方案和实验条件进行大量的重复测量后, Scarcelli 和作者等人给出以下观察报告:

观察报告 (1) 图 11.4.2 给出的是一个典型的双缝的鬼像. 测量到的曲线是 D_1 和 D_2 的联合探测计数率或 HBT 线性乘法器的输出电流, 它是

[29] Scarcelli 和作者等人的鬼成像实验使用了无透镜菲涅耳 "近场" 测量, 光源平面对观测点的空间张角 $\Delta\theta$ 远远大于 λ/D. 在 Scarcelli 和作者等人开始的几个实验中, 空间张角取值从 $\Delta\theta \sim 10\lambda/D$ 到 $\Delta\theta \sim 40\lambda/D$. 注意, 菲涅耳近场并不是 "近表面场". 尽管光源平面可能存在自由分布的点状光斑, 在不用经典成像系统的条件下, 没有人能够把源平面上的点状光斑全同复制到物平面和像平面上. 对于热光场, 每一个点状 "光斑" 会以球面波的形式独立地向所有可能的方向传播, 并占据整个或部分物平面和像平面. 假设使用太阳光做鬼成像实验的光源 (我们处于太阳的菲涅耳近场), 如果不使用经典成像系统就不能把太阳的 "光斑" 全同复制到任何物平面和像平面之上. 任何点状光斑在传播后都会发散变大. 原理上讲, 光源平面上的光斑尺寸越小, 横向近场平面上的光斑越大.

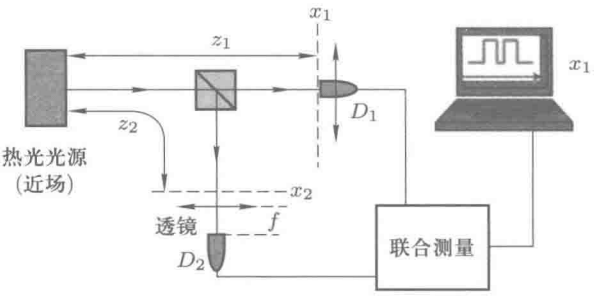


图 11.4.1 Scarcelli 和作者等人在 2006 年所实现的热光无透镜近场 ($\Delta\theta > \lambda/D$) 鬼成像. 点探测器 D_1 和桶探测器 D_2 间的联合探测通过光子符合计数器或者标准的 HBT 线性倍增器 (RF 混合器) 实现. D_1 可以沿着 x_1 轴扫描. 测量中桶探测器 D_2 固定在凸透镜 (collection lens) 的焦点上. D_1 和 D_2 的计数率或者光电流的值均为常数. 通过 D_1 在满足 $z_1 = z_2$ 的平面沿着 x_1 轴扫描, 在 D_1 和 D_2 间的联合探测中可以观测到 1 维物体的像. 当 $z_1 \neq z_2$ 时, 像会变模糊. 毋庸置疑, 热辐射以随机的方式传播到任意横向平面. 注意, 此实验没有使用透镜使热辐射 "坍缩" 到一个点或者一个斑上. 究竟是什么物理原因恰好造成了符合测量点对点的成像关系呢?

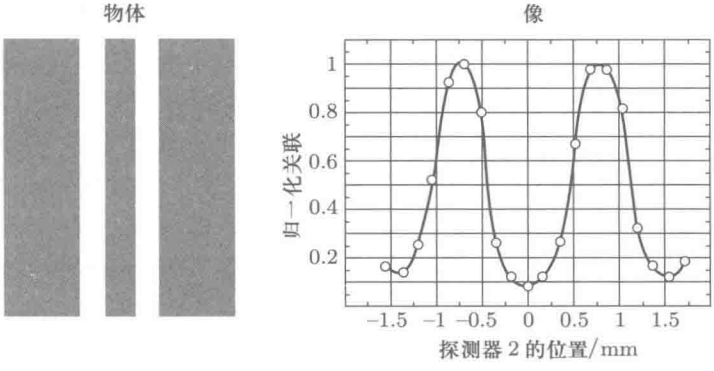


图 11.4.2 测量到的双缝鬼像. 观测到的无透镜鬼像和物体等大. 等大鬼像可以从光计数符合或者标准的 HBT 型电流-电流关联仪中观测到. 关联中已经扣除常数背景.

点探测器 D_1 沿 x_1 轴横向位置的函数.

观察报告 (2) 不同的实验方案和实验条件下, 测量到的对比度有明显不同. 如果保证符合电路的时间窗口内不超过一次联合探测, 光子计数测量得到像的对比度能够达到 50%. 我们能期望到的热光鬼成像的最大对比度为 50%.

观察报告 (3) 为了使得每个时间窗口内的联合探测次数小于 1, 并不一定需要弱光条件, 完全可以在明亮光源条件下, 通过在 D_1 和 D_2 前使用可调节的光强度衰减片 (ND filter) 来实现.

为了确认观测到的是像, 而不是物体的 "投影阴影", Scarcelli 和作者等人搭建了另一种鬼成像系统, 如图 11.4.3 上半部分所示. 使用焦距为 f 的成像凸透镜, 鬼像的 "二次鬼像" 在另一个平面上, 即, 探测器 D_1 的扫描平面, 成像. 通过光子符合计数或者电流–电流关联测量, "二次鬼像" 在 D_1 和 D_2 的联合探测中被记录. 图 11.4.3 中下半部分展示了含有 "UMBC" 字样的二次鬼像 (放大系数为 $m = s_i/s_o \sim 2.9$). 在有些实验条件下, 二次鬼像成像系统很有用, 特别是在 1:1 的鬼像用 CCD 阵列 (等效于点探测器 D_1 的扫描) 接收尺寸过大或者过小时.

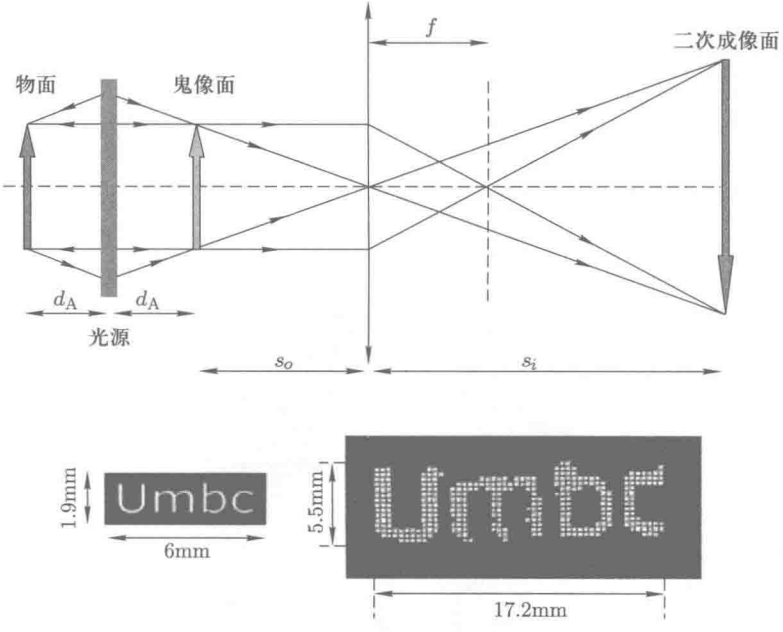


图 11.4.3 上图: 二次鬼像实验测量装置展开示意图. 使用焦距为 f 的凸透镜, 二次鬼像成像在由高斯薄透镜方程 $1/s_o + 1/s_i = 1/f$ 定义的像平面上, 满足放大率为 $m = -s_i/s_o$. 这个装置适用于远距离大尺寸的鬼像应用. 下图: 鬼像 "UMBC" 的放大系数为 $m = s_i/s_o \sim 2.9$ 的二次鬼像. 注意, 当光探测器 D_1 远离像平面时, 二次鬼像变得模糊以至于不可辨认.

2008 年, 作者和 Meyers 等人对最初的近场无透镜鬼成像实验做了改进. 图 11.4.4 示意性地给出了他们的实验装置. 图 11.4.5 是作者和 Meyers 等人观测到的一个玩具士兵的鬼像. 实验并且证实了鬼像的空间分辨率由热光源的张角尺寸决定: 热光源的张角越大, 鬼像的空间分辨率越高. 这个实验从两方面改进了作者和 Scarcelli 等人的鬼像实验: (1) 桶探测器不再由经过物体的透射光触发, 而是由玩具士兵表面的随机散射和反射

的光子触发; (2) 实验不再使用点探测器进行扫描, 而是用工作在光子计数模式下的二维 CCD 阵列和桶探测器 D_2 进行联合探测. 当 $z_1 = z_2$ 时, 玩具士兵的鬼像被 CCD 捕捉到.

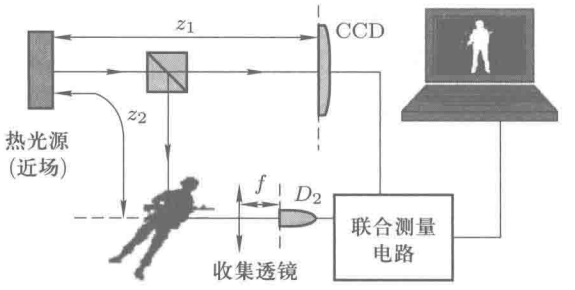


图 11.4.4 由作者和 Meyers 等人改进的热光近场无透镜鬼成像. 桶探测器收集从物体上随机散射和反射的光子. CCD 看不到物体, 只是面对光源. 实验证实了鬼像的空间分辨率由热光源的张角尺寸决定: 张角越大, 空间分辨率越高.

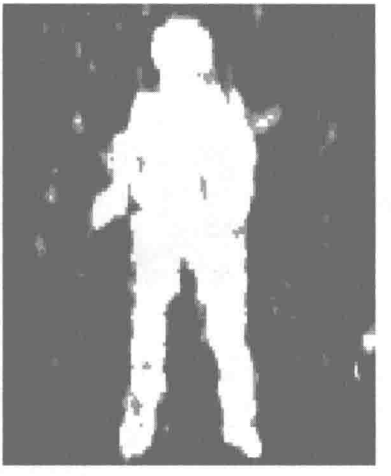


图 11.4.5 一个玩具士兵模型的鬼像

现在分析热光无透镜鬼成像的数学和物理过程. 这一讨论将展示热光源的点对点二阶关联怎样从数学和物理上产生孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obj}})$ 的鬼像.

与偶光子鬼成像类似, 从数学角度看, 像平面上孔径函数的像是孔径函数和二阶关联函数卷积的结果.

二维情况:

$$R_{12} \propto \int_{object} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2 \, |A(\boldsymbol{\rho}_2)|^2 \, g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$$
$$= \int_{object} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2 \, |A(\boldsymbol{\rho}_2)|^2 \left[1 + \mathrm{somb}^2\left(\frac{\pi\Delta\theta}{\lambda}|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|\right)\right] \quad (11.4.2)$$

一维情况:

$$R_{12} \propto \int_{object} \mathrm{d}x_2 \, |A(x_2)|^2 \left[1 + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\Delta\theta(x_1 - x_2)}{\lambda}\right)\right] \quad (11.4.3)$$

其中 R_{12} 是 D_1 和 D_2 的联合计数率或者标准 HBT 电流-电流线性倍增管的读数, $\Delta\theta$ 是热光源对 D_1 和 D_2 的张角. 显然, 鬼像的空间分辨率由光源的张角直径决定: 光源横向的尺寸越大, 所得到的无透镜鬼像的空间分辨率越高.

和纠缠光子对的鬼成像类似, 如果关联函数 $\mathrm{somb}^2(\pi\Delta\theta/\lambda)(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|)$ 或者 $\mathrm{sinc}^2(\pi\Delta\theta/\lambda)(x_1 - x_2)$ 能被近似成 $|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|$ 或者 $(x_1 - x_2)$ 的 δ 函数, 上述卷积的计算会颇为简单. 对于大张角可见光或者更短波长的混沌热光辐射源, 比如太阳, 这一点显然满足. 把 $\mathrm{sinc}^2(\pi\Delta\theta/\lambda)(x_1 - x_2)$ 近似为关于 $(x_1 - x_2)$ 的 δ 函数, 进而完成 11.4.3 的卷积, 图 11.4.1 中观测到的鬼像应满足

$$R_{12} \sim 1 + |A(x_1)|^2 \quad (11.4.4)$$

即, 我们从 D_1 和 D_2 的联合计数率中观测到一个 50% 对比度的鬼像.

其实, 上述卷积的物理过程也不复杂: 在与桶探测器 D_2 的联合探测事件中, 假设扫描点探测器 D_1 或者 CCD 阵列某一个单元在横向位置 $\boldsymbol{\rho}_1$ 处被一个光子触发, 那么触发桶探测器的另一个光子有两倍的概率在 $\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{obj}} = \boldsymbol{\rho}'_1$ 处发生散射. 如果将 D_1 移到另一个横向位置 $\boldsymbol{\rho}'_1$ 处, 或者 CCD 阵列中坐标为 $\boldsymbol{\rho}'_1$ 的单元, 被一个光子触发, 那么触发桶探测器的另一个光子有两倍的概率在 $\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{obj}} = \boldsymbol{\rho}'_1$ 处发生散射. 而在 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obj}} = \boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{obj}} = \boldsymbol{\rho}'_1$ 处发生散射事件的概率分别正比于各自孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obj}})$ 和 $A(\boldsymbol{\rho}'_{\mathrm{obj}})$ 的值. 对在不同横向坐标 $\boldsymbol{\rho}_1$ 处的联合探测事件做大量累计后, 得到一个 50% 对比度的孔径函数 $A(\boldsymbol{\rho}_1) = A(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{obj}})$.

孔径函数和点对点成像函数间卷积的数学形式, 对任何光学成像系统都是一样的, 包括传统经典成像、热光鬼成像、纠缠态的鬼成像. 不同成像系统间的不同处, 来自于点-点或点-"斑" 成像函数的不同生成机理. 经典成像系统中, 一阶相长-相消干涉导致物平面和像平面点对点的对应. 在热光的无透镜鬼成像系统中, 双光子干涉导致物平面和像平面

间非局域的二阶关联. 与偶光子鬼成像相似, 这种天然的、不可分解的点对点关联, 代表了测量到的独立的、随机辐射的一对光子的非局域行为: 光子 1 和光子 2, 当它们被各自独立子源生成时, 有相等的概率到达物平面和像平面上任何一点; 但是一旦一个光子在物平面上某点被观测到, 另一个光子有两倍的概率到达像平面上对应的唯一一点[21].

11.5 鬼成像的经典模拟

可以人为模拟点对点的一一对应关系, 来取代热光或纠缠光子对的天然的、不可分解的点对点的关联. 与热光或纠缠光子源不同, 在这种模拟中, 光场在产生时就确定了其要到达的目标, 或说 "知道该往哪儿走". 已经有人用人造的点对点一一对应关系去模拟点对点的鬼成像关联, 并且使用两个独立探测器的联合探测模拟偶光子鬼成像和混沌热光鬼成像. 其实对于这种模拟, 没有必要采用两个探测器进行联合探测, 使用一个桶探测器就可以产生物体的像.

下面简要讨论三种经典模拟:

(I) 关联激光束

Bennink 和 Boyd 等人在 2002 年用两束背对背的激光束模拟了鬼成像. Bennink 和 Boyd 意图展示两束一同旋转的背对背激光束可以模拟偶光子的物理效应. 图 11.5.1 展示了 Bennink 和 Boyd 等人的实验示意图. 这里物平面和 "像平面" 的点对点的对应关系, 是用两个协同旋转的激光束来实现的. 图中激光束沿相反方向传播, 分别聚焦到物平面与像平面上. 如果激光束 1 被物体挡住, D_1 和 D_2 间对这次发射就不会有联合探测. 如果激光束 1 没有被挡住, 就会对协同旋转激光束的角位置记录符合计数. 从而得到物体的影子.

Bennink 和 Boyd 等人设计的激光束间点对点的一一对应, 既不同于偶光子的关联, 也不同于标准的统计强度涨落关联. 但是 Bennink 和 Boyd 等人的实验的确得到了 "鬼影". 某些情况下, 这种方法还是有用的. 事实上这个实验可以作为一个很好的例子, 用来区分人造的、可分解的强度-强度关联和天然的、不可分解的由非定域双光子干涉引起的二阶关联.

其实, 此实验没有必要作复杂的符合测量, 一个光探测器足以达到同样的目的.

(II) 关联光斑

[21] 与远场 HBT 关联一样, 近场点对点成像函数的对比度为 50%, 也就是最大值和常数背景的比例为 2:1

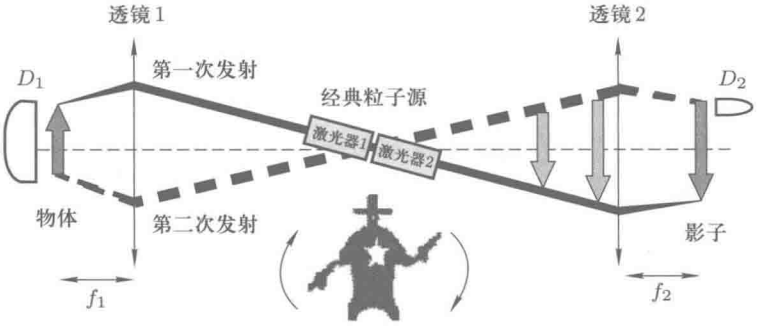


图 11.5.1 由两个一同旋转的背对背激光束产生的点对点关联. 鬼影可以通过激光束被成像物 "挡着-没有被挡着" 来实现. 其实用两把向相反方向射击的枪也可以实现同样的目标.

基于类似的想法, Gatti 和 Lugiato 等人提出了光斑间的经典关联. 他们的实验装置如图 11.5.2 所示. 实验中使用经典成像系统把 SPDC 偶光子源或者混沌热光源的光斑成像到物平面和像平面, 并使用两个独立光探测器作符合测量以模拟鬼成像.

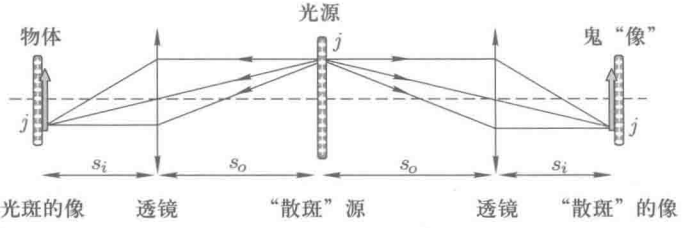


图 11.5.2 由人造关联光斑实现的鬼像. 两套全同光斑是光源光斑的经典成像. 利用透镜 (可能是用来联合探测的 CCD 相机的一部分) 分别在物平面和像平面产生光源光斑的经典成像. s_o 和 s_i 满足高斯薄透镜方程 $1/s_o + 1/s_i = 1/f$. 实验中观测到的鬼像源自人造的光斑-光斑关联. 物平面和像平面观测到的散斑是辐射源散斑的经典像, 由图中所示透镜重构. 透镜也可以放在做联合测量的 CCD 相机里.

观测到的光斑是对光源光斑的经典成像. 成像由图中的透镜 (透镜可能是用来联合探测的 CCD 相机的一部分) 实现. 光源上的每一个光斑 (比如光源顶部的第 j 个光斑), 在物平面和像平面有两个全同的像. 数学上, 这种光斑对光斑的关联可以分解为两个经典的光斑-光斑对应函数的乘积. 为了利于理解, 我们把它近似为两个点对点对应函数的乘积,

$$\gamma(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \simeq \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_1/m)\delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_2/m) \tag{11.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_s$ 是光源平面的横向坐标, $m = s_i/s_o$ 是经典成像放大系数[22], s_o 和 s_i 分别是经典成像的物距和像距, 如图 11.5.2 所示. 从图 11.5.2 中明显看出, 当 D_1、D_2 位于两个全同光斑处时, 有更大的概率被联合触发, 例如两个位于物平面和像平面的底部 j 光斑. 全同光斑的大小决定了鬼影的空间分辨率, 这已经在一些实验中观测到. Gatti 和 Lugiato 等人的经典模拟可以运用到某些应用中. 然而, Gatti 和 Lugiato 等人的人造光斑–光斑关联本质上不同于天然的、不可分解的偶光子态和热光场中的点对点关联. Gatti 和 Lugiato 等人的鬼像实验也本质上不同于作者和 Pittman 等人用纠缠光子对实现的鬼成像实验以及作者和 Scarcelli 等人用热光场实现的无透镜鬼成像实验.

(III) 计算鬼像

Shapiro 提出了计算鬼成像 (CGI) 实验的设想. 实验由可控光源 (确定性的), 成像物体, 桶光探测器构成. 利用与之相似的机理, 作者和 Meyers 等人实验上证实了 "鬼成像激励的成像"(GIII). 在他们的实验中, 作者和 Meyers 等人成功地将桶光传感器转变为有空间分辨能力的成像装置. 不同于随机的混沌光辐射或者纠缠光子对, 在 CGI(或 GIII) 实验中使用的是可控 (确定性的) 光源. 光源每一次发射, 在物体上的一个已知点或者一系列已知点产生光点或者光斑.

对于非确定性的光源 (例如纠缠双光子系统或者热光辐射源), 光子可以在空间中的任何位置被观测到, 或者说光子在光源处产生时, 它并不知道将要去哪里. 参考探测器 (CCD 阵列) 和探测探测器 (桶探测器) 间作联合探测是必要的. 参考探测器用来确定观测中 $\boldsymbol{\rho}_o$ 的空间坐标, 探测器测量了孔径函数的 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$ 的值. 为了完全精确复现鬼像, 联合探测必须能够区分孔径函数的值, 比如 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$ 和 $|A(\boldsymbol{\rho}'_o)|^2$. 但是对于确定性的光源, 每次发射光子时, 光子知道将要去哪里. 完全没有必要使用两个光探测器, 一个桶探测器就可以复现物体的像. 工作原理很简单: 每次光子发射时, 光子传播到物体上的指定点, 或者说当光子产生时, 它知道自己将要去哪里. 记录下桶探测器的计数率 (比例于 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$) 和坐标 $\boldsymbol{\rho}_o$(由光源决定) 间的关系. 经过大量的记录后, 可以复现 (或者说计算) 出物体的孔径函数 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$. 如果成像的目的只是构建物体的形状, 每次工作时, 光源没有必要精确地 "知道" 其精确的目标点, 光源可以在目标物平面上给出一个确定的光斑强度分布函数 (由光源随机决定). 每次工作时, 桶探测器测量所有光斑被成像物透射或反射的总强度, 并且记录下光斑在

[22] Gatti 等人最初的文章中, 选择 $m = 2f/2f = 1$ 以满足 $1/2f + 1/2f = 1/f$, 用来将光源的光斑以相同尺寸成像到物平面和鬼像平面上.

成像物上的分布. 大量的积累之后, 统计上, 可以估算出物体 (或模具) 的形状.

作者和 Meyers 等人的实验装置如图 11.5.3 中所示. 实验中激光束扩束后传播到空间光调制器 (SLM). SLM 通过电脑对激光波前施加了相位信息. 然后光束经过一个偏振片, 将相位信息转变成强度信息. 然后光束照射到物体上 (图 11.5.3 中的 A) [23]. 桶探测器收集每次光源发射时, 从物体上的指定点反射和散射的光.

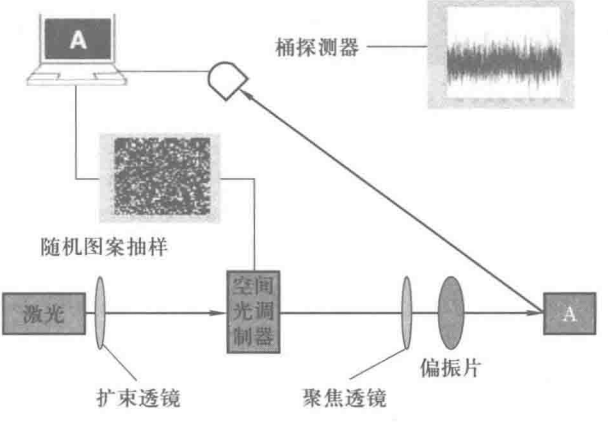


图 11.5.3 GIII 实验装置示意图.

图 11.5.4 是使用微像素采集器的实验结果. 左图表示每次桶探测器测量中, 随机打开单像素采集的结果. 右图展示每次桶探测器测量中, 随机打开多像素采集的结果 (图中所示为打开 3 个像素的情况). 比较左图 (粗细节, 高对比度) 和右图 (精细节, 低对比度), 对比度和细节之间存在一个可见的平衡.

理解上述实验结果的关键是如何理解人造的点对点关联. 人造的点对点关联发生在随机照明的 2 维微像素采集器 (可以处理为确定性光源) 和目标物体间,

$$g(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_o) \simeq \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_o) \tag{11.5.2}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_s$ 、$\boldsymbol{\rho}_o$ 是 2 维微像素采集器和物平面上的横向坐标. 此式中假设放大系数为 $m = 1$.

[23] SLM 中的每一个像素 (由电脑控制) 将经过光的偏振旋转到特定的角度 θ_j. 与偏振片光轴成 $\theta_j = 90°$ 的像素都是 "暗" 的; 与偏振片光轴成 $\theta_j = 0°$ 的像素都是 "亮" 的. 这些暗–亮像素构成照明图案. 聚焦透镜将图案聚焦 (或者成像) 到物体上. 在任何时刻都可以打开 SLM 的任意像素 (对应 $\theta_j = 0°$), 用来照射物体上的任一点 $\boldsymbol{\rho}_o$. 在 PC 上记录下点的坐标 $\boldsymbol{\rho}_o$ 和桶探测器的计数率 (比例于 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$).

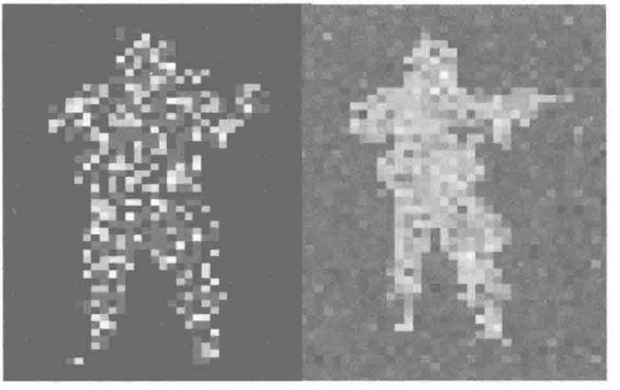


图 11.5.4 GIII 实验观测到的像. 左图: 每次工作时打开一个微像素照明. 右图: 每次工作时打开三个微像素照明.

模拟 (I): 每次桶测量时, 2 维照明器只打开一个像素. 假设 2 维照明器中位于 $\boldsymbol{\rho}_s$ 处的像素在 t 时刻打开, 桶光传感器必定由物平面上 $\boldsymbol{\rho}_o = \boldsymbol{\rho}_s$ 处唯一点透射或反射的光来触发, 并被孔径函数 $|A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2$ 调制. 在 t' 时刻, 2 维照明器位于坐标 $\boldsymbol{\rho}'_s$ 处的另一个像素打开, 桶光传感器必定由从物平面上 $\boldsymbol{\rho}'_o = \boldsymbol{\rho}'_s$ 处唯一点透射或者反射的光来触发, 并被孔径函数 $|A(\boldsymbol{\rho}'_o)|^2$ 调制. 经过桶光传感器大量的光探测累积后, 可以重构出孔径函数 ($\boldsymbol{\rho}_s$ 的函数). 上述的物理过程数学上可以用下述卷积来描述:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2 \, \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_o) \simeq |A(\boldsymbol{\rho}_s)|^2$$

这个值和 $\boldsymbol{\rho}_s$ 一起记录. $\boldsymbol{\rho}_s$ 由确定性光源 (2 维微像素采集器) 选定.

模拟 (II): 每次桶测量时, 2 维照明器以 $f(\boldsymbol{\rho}_s, t)$($\boldsymbol{\rho}_s$ 的函数) 的分布随机打开一组像素. 这种情况下, 成像过程可以用下述卷积来描述:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2 \, f(\boldsymbol{\rho}_s, t) \, \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_o) \simeq f(\boldsymbol{\rho}_s, t) |A(\boldsymbol{\rho}_s)|^2 \tag{11.5.3}$$

这个值和 $f(\boldsymbol{\rho}_s, t)$ 下的所有坐标一起记录. 经过大量的累积后, 物体的统计平均像通过桶光传感器的柱状图 ($\boldsymbol{\rho}_s$ 的函数) 产生.

上述两个模拟已经在实验上实现. 除了原理的证实外, 作者和 Meyers 等人发现: 通过现代计算成像加强技术, 桶传感器成像的质量可以得到很大提高, 特别是对于模拟 (II). 图 11.5.5 对比了压缩增强的 GIII 成像和标准的仅是 $G^{(2)}$ 卷积的 GIII 成像.

这些年来计算成像技术在计算机科学领域已经被大量研究. 在这些研究中, 为了优化测量效率和最大化每个数据所携带的信息, 光的空间调制、统计模型和计算解码通常包含在计算成像和重构过程中.

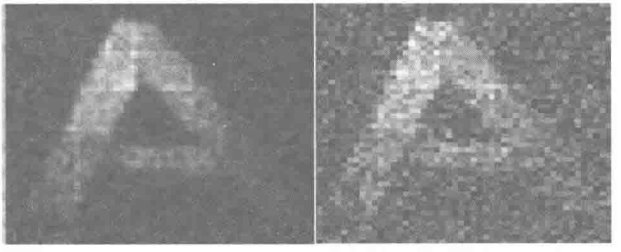


图 11.5.5 使用随机照射图案和桶测量, 字母 "A" 的增强像. 左图: 压缩增强的 GIII 成像. 右图: 没有增强的 GIII 成像.

11.6 抗扰动的鬼成像

鬼成像的多光子干涉本质决定了它的独特性质: (1) 非局域性, (2) 成像分辨率不同于经典成像分辨率. 这一节将分析作者和 Meyers 等人最近的一个鬼成像实验. 这个实验证实了热光鬼成像的另一个极其独特并且有实际应用价值的性质: 抗扰动, 也就是说任何在光程中引入的涨落型折射率扰动, 都不会影响鬼成像的质量. 对于经典卫星成像和飞机–地面远程成像, 大气扰动是一个严重问题. 热光鬼成像的这一特征可以应用到这些领域.

实验装置示意图如图 11.6.1 中所示. 和典型的热光无透镜鬼成像装置相比, 添加了用来在实验室模拟大气扰动的装置. 实验中通过在光路下加热而引入扰动. 对空气加热引起折射率在空间和时间上的涨落. 图 11.6.1 展示了最为严重的情形: 装置中的所有光路都引入了扰动. 加热装置也可以被隔离开, 用来单独对某一路光程产生扰动.

与作者和 Meyers 等人早先发表的鬼成像实验类似, 此实验中的混沌热光由大张角的赝热光源产生, 并被 50% – 50% 的分束器分成两束. 一束光照射到 z_1 处的物体上, 例如图 11.6.1 中所示的字母 "ARL". 物体上散射和反射的光子被桶探测器收集和计数, 图 11.6.1 中 CCD 的上半部分模拟桶探测器. 另一束光传播到 $z_1 = z_2$ 的鬼成像平面. 从前面热光鬼成像实验的分析中已经知道: 如果把一个 CCD 阵列放置在鬼像平面, 而且它的每次曝光都由桶探测器 "按下快门" (符合探测), 此 CCD 阵列将会捕捉到物体的鬼像. 在这个实验中, 假想的 CCD 阵列被一片光滑的白纸取代. 光滑白纸所散射和反射的光包含了鬼像的信息, 被下半部分高分辨率的 CCD 相机收集. CCD 相机工作在光计数模式. 为观测二次鬼像, CCD 相机对鬼像平面聚焦, 并由桶探测器控制快门. 被 CCD 相机下半部分捕获到的二次鬼像是位于 $z_1 = z_2$ 处主鬼像的二次鬼像.

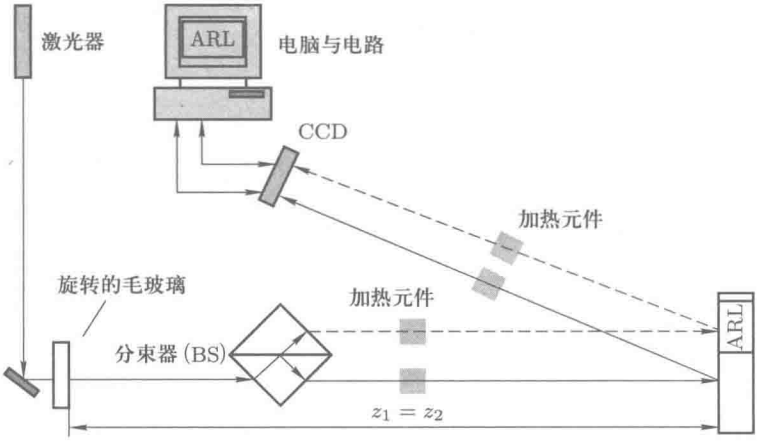


图 11.6.1 典型的在光程中引入扰动的热光无透镜鬼成像的实验装置示意图. 虚线和箭头表示桶测量的光程. 实线和箭头表示鬼像这一路的光程.

在这个特殊的装置中, CCD 相机有两个工作模式, (1) 下半部分和上半部分各自扮演两个独立的经典相机的角色, 我们称之为 "非控制模式"; (2) 下半部分为一个高分辨率的 CCD 相机, 上半部分模拟桶探测器, 我们称之为 "受控模式". 在受控模式时, 下半部分 CCD (高分辨率的 CCD 相机) 和上半部分 CCD (桶探测器) 的联合探测捕获到二次鬼像. 作者和 Meyers 等人利用硬件电路和软件程序的配合, 既可以使上半部分 CCD 像一个独立经典相机一样工作以观察成像物 (ARL) 的经典像, 也可以使上半部分 CCD 模拟桶探测器从而与下半部分 CCD 相机做符合测量以捕捉二次鬼像. 实验中, 在单独或所有光程中引入扰动, 物体的经典像和二次鬼像被同时捕获和监测.

实验显示, 在扰动下, 经典像变得模糊了. 从像的模糊程度很容易看出扰动对于经典成像的影响. 技术上扰动可以通过折射率结构参数 C_n^2 表征. 实验中 CCD 这一路达到了 $C_n^2 = 1.2^{-12}$, 桶探测器这一路达到了 $C_n^2 = 1.5^{-12}$. 这些数值对应于极其强大的大气扰动, 可以引起时间和空间上折射率显著的涨落. 令人惊讶的是, 在相同的扰动下, 鬼像则表现不同, 其空间分辨率和对比度都没有受到扰动的影响.

显然, 热光鬼成像点对点的成像关联函数不受光路中折射率涨落扰动的影响. 下面我们从式 (9.7.8) 出发, 给出一个简单的分析

$$
\begin{aligned}
&G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\
&= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}') + g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}') g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa})] \right|^2
\end{aligned}
$$

式 (9.7.8) 表示双光子振幅间的干涉, 对应一次联合探测事件的两个不同, 且不可分辨的可选择方式. 联合探测事件发生在光路的两臂端点 $(\boldsymbol{\rho}_1, z_1)$ 和 $(\boldsymbol{\rho}_2, z_2)$.

设想在鬼像这一路引入任意的相位扰动 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(\boldsymbol{\rho}_1)}$, 在物体–桶探测器这一路引入另一个相位扰动 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{\rho}_2)}$, 用来模拟扰动. 加入扰动的二阶关联变为

$$\begin{aligned} & G^{(2)}_{\mathrm{Turb}}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}' \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{\rho}_2)} g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(\boldsymbol{\rho}_1)} \right. \\ & \qquad \left. + g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2; \boldsymbol{\kappa}') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{\rho}_2)} g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\kappa}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1(\boldsymbol{\rho}_1)}] \right|^2 \\ &= G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) \end{aligned} \tag{11.6.1}$$

显然相位扰动对式 (9.7.8) 中的二阶关联函数 $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2)$ 没有影响. 因此桶探测器和 CCD 阵列的联合探测计数率可以复制出作为无扰动鬼像的孔径函数

$$R_{12} \propto \int \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2 \, |A(\boldsymbol{\rho}_2)|^2 \, g^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{\rho}_2) \sim R_0 + |A(\boldsymbol{\rho}_1)|^2$$

其中 R_0 是常数, $A(\boldsymbol{\rho}_2)$ 是物体的孔径函数.

需要强调的是, 鬼成像的经典模拟不能得到无扰动的像. 例如, 人造的可分解光斑对光斑关联为

$$\gamma^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i) \simeq \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_o/m) \delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i/m),$$

扰动时, 光斑的每个经典像会独立地 "模糊', 从而由光斑–光斑关联形成的 "鬼像" 也会 "模糊".

本章小结

这一章讨论了量子成像中的物理. 近几年里, 对量子纠缠的研究促成了量子成像技术. 尽管对量子理论的质疑一直存在, 量子纠缠已经开始在实际应用中开始扮演重要角色. 量子成像便是这些令人振奋的领域之一. 量子成像技术, 通过纠缠光子系统和混沌热辐射的非平庸二阶或高阶 $(N > 2)$ 相干测量, 复制物像. 量子成像是物平面和像平面间点对点成像关联的结果. 总体上说, 双光子成像在数学上可以表示成物体孔径函数和所测光子二阶点对点成像关联的卷积:

$$R_c(\boldsymbol{\rho}_i) = \int_{\mathrm{obj}} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_o \, |A(\boldsymbol{\rho}_o)|^2 \, G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i)$$

鬼成像也许是量子成像家族中最令人惊讶和最为有趣的现象. 这一章中主要介绍了两类鬼成像. 第 I 类鬼成像利用了偶光子态的非局域点对点关联

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i) \sim \delta(\boldsymbol{\rho}_o + \boldsymbol{\rho}_i/m)$$

第 II 类鬼成像利用了热光的非平庸二阶关联

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_o, \boldsymbol{\rho}_i) \sim 1 + \delta(\boldsymbol{\rho}_o - \boldsymbol{\rho}_i)$$

到目前为止, 量子成像已经展示了三个奇异的特性: (1) 它的非经典空间分辨率可以突破经典衍射极限, (2) 以一种非局域的方式复制出鬼像, (3) 无色散 (I 类) 和抗扰动 (II 类). 所有这些特征都是多光子干涉的结果.

这一章还分析了实现历史上 Popper 假想实验的一个实验. 鬼成像在其中扮演了重要角色. Popper 一直受到批评, 因为他建议的点源不能提供如他所期望的粒子对的完美动量关联. 事实上点源并不是必须的, 利用鬼成像可以很容易实现 Popper 所需的测量条件. 和 EPR 类似, Popper 正确地预言了他的假想实验结果. 然而正如验证实验中所分析的, 他对实验的解释特别是他关于量子力学测不准关系的挑战是错误的.

推荐读物

[1] M.D'Angelo, M.V. Chekhova, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett., **87**, 013602 (2001).

[2] A.N. Boto *et al.*, Phys. Rev. Lett., **85**, 27333 (2000).

[3] T.B. Pittman, Y.H. Shih, D.V. Strekalov, and A.V. Sergienko, Phys. Rev. A **52**, R3429 (1995). This experiment was named "ghost" imaging by the physics community.

[4] D.N. Klyshko, Usp. Fiz. Nauk, **154**, 133 (1988); Sov. Phys. Usp, **31**, 74 (1988); Phys. Lett. A **132**, 299 (1988).

[5] D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, D.N. Klyshko and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett. **74**, 3600 (1995). This experiment was named "ghost" interference by the physics community.

[6] M. H. Rubin, Phys. Rev. A **54**, 5349 (1996).

[7] M. D'Angelo, A. Valencia, M.H. Rubin, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A **72**, 013810 (2005).

[8] Y.H. Shih, IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE **13**, 1016 (2007).

[9] K.R. Popper, Naturwissenschaften, **22**, 807 (1934).

[10] K.R. Popper, "Realism in quantum mechanics and a new version of the EPR experiment", *Open questions in quantum physics*, Eds. G. Tarozzi and A. van der Merwe, D. Reidel Publishing, Dondrecht, 1985.

[11] Y.H. Kim and Y.H. Shih, Found. Phys. **29**, 1849 (1999).

[12] G. Scarcelli, A. Valencia, and Y.H. Shih, Europhys. Lett. **68**, 618 (2004).

[13] A. Valencia, G. Scarcelli, M. D'Angelo, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett. **94**, 063601 (2005).

[14] G. Scarcelli, V. Berardi, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett. **96**, 063602 (2006).

[15] R. Meyers, K.S. Deacon, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A **77**, 041801(2008).

[16] W. Martienssen and E. Spiller, Am. J. Phys. **32**, 919 (1964).

[17] R.S. Bennink, S.J. Bentley, and R.W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **89**, 113601 (2002); R.S. Bennink, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 033601 (2004).

[18] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache and L.A. Lugiato, Phys. Rev. A **70**, 013802, (2004), and Phys. Rev. Lett. **93**, 093602 (2004).

[19] K. Wang, D. Cao, quant-ph/0404078; D. Cao, J. Xiong, and K. Wang, quant-ph/0407065 (2004).

[20] Y.J. Cai, and S.Y. Zhu, quant-ph/0407240, Phys. Rev. E, **71**, 056607 (2005).

[21] J. H. Shapiro. Phys. Rev. A **78** 061802(R) (2008).

[22] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, NY, 1968.

[23] D.N. Klyshko, *Photon and Nonlinear Optics*, Gordon and Breach Science, New York, 1988.

[24] R. Meyers, K.S. Deacon, and Y.H. Shih, "Turbulence-free ghost imaging", to be published.

第 12 章

双光子干涉 I: 偶光子干涉

自 19 世纪 80 年代起, 双光子干涉在量子光学领域开始扮演了重要角色. 那时, 狄拉克一度饱受批评, 因为他在 "量子力学原理" 一书中写道: "…… 光子 …… 只和它自身干涉. 两个不同光子之间从不发生干涉." 而当时, 双光子干涉被认为是两个光子之间的干涉.

双光子干涉是两个光子之间的干涉吗? 在下面的讨论中, 我们给出否定的答案: 双光子干涉不是两个光子之间的干涉. 它是双光子振幅叠加的结果. 双光子振幅对应触发一个联合探测事件的不同但是又不可区分的方式. 用狄拉克的话说, "…… 一对光子只和它自身干涉 ……".

其实, 经典和量子理论都不认为不同光子之间会发生干涉. 经典理论认为干涉是电磁波相干叠加的结果. 而量子理论中, 干涉被认为是量子振幅叠加的结果. 单光子探测时, 不同的量子振幅对应一个光子被一个光子探测器湮没的不同方式; 双光子联合探测时, 不同的量子振幅对应一对光子被两个独立光子探测器各自湮没的不同方式; N 光子联合探测时, 不同的量子振幅对应 N 个光子被 N 个独立光子探测器各自湮没的不同方式. 至于不同光子之间会发生干涉的想法可能源于 Mandle 等人的一个实验. Mandle 等人的实验成功地观察到了两个独立的激光场之间的一阶干涉, 包括连续激光场和脉冲激光场[24]. 基于这些实验结果,

[24] (1) 连续光情形: 为了得到干涉图案, 胶片的曝光时间必须小于激光场的相干时间. 虽然每次曝光得到的干涉条纹可能不一样, 但是毋庸置疑的是每次曝光都会观察到干涉条纹. (2) 脉冲光情形: 为了得到干涉图案, 必须将两个脉冲同步以保证它们在时间上重叠. 虽然在时间上重叠, 两个独立脉冲之间的相位仍然是随机的, 所以每一对脉冲产生的涉图案各不相同. 但是从每一对脉冲的曝光中, 确实都可以看到清楚的干涉图案.

Mandle 质疑狄拉克关于不同光子之间从不发生干涉的观点. 从此, 在光学干涉测量的研究中, 两个光子之间的干涉成了热门和颇具争议的话题. 1980 年以前, 大多数实验和理论研究集中在激光场之间的一阶现象, 这种测量涉及大量光子. 如果不把光强衰减到单光子水平, 从明亮的激光束或相干的激光场中很难将单光子、双光子或几个光子的行为区分开来. 然而, 在单光子水平, 两个独立光子的一次曝光并不能给出可观测的时间或空间上的干涉图案. 为了观测到干涉图案, 需要多次曝光, 即对大量光子进行统计测量. 但是因为每次曝光得到的图案的相位是随机的, 所以多次曝光后干涉图案被平均掉了. 我们根本做不出确定的结论来支持或反对两个光子之间有干涉的观点或无干涉的观点.

直到 19 世纪 80 年代中期人们观察到 SPDC 产生的纠缠光子对的干涉, 即偶光子 (*biphoton*) 干涉[25], 情况才有所转变. 1986 年, Shih 和 Alley 在一个偶光子干涉仪中成功地演示了正交偏振信号–闲置光子对的干涉. 在那个实验中, 信号光子和闲置光子的偏振是正交的, 既可以是线偏振, 也可以是圆偏振. 借助一个分束器, 信号光子和闲置光子似乎失去了它们的初始偏振, 展现了一种违背贝尔不等式的典型 EPR-Bohm-Bell 关联. 两个具有特定初始偏振的光子究竟是如何变成每个光子偏振都不确定的纠缠贝尔态的呢? Shih 和 Alley 将这个现象解释为一对光子与其自身的干涉, 是两个不同但又不可区分的双光子振幅叠加的结果. 除了得到贝尔型偏振关联, 此实验还观察到在不同检偏条件下偶光子关联 ($g^{(2)}(0) = 2$) 和反关联 ($g^{(2)}(0) = 0$). 偶光子干涉的图像对这一现象的解释如下: 在完全重叠情况下, 当两个偶光子振幅同相叠加时 (之间是 "+" 号), 符合探测给出最大计数, 说明测量到的两个光子是 "正关联的", 即 $g^{(2)}(0) = 2$; 而当两个偶光子振幅反相叠加 (之间为 "–" 号) 时, 符合探测计数率给出最小值, 说明测量到两个光子是 "反关联的", 即 $g^{(2)}(0) = 0$; 当两个偶光子振幅之间是其它相位时, 出现正弦函数形的符合探测计数率, 说明存在双光子干涉. 1987 年, Hong、Ou 和 Mandel 采用类似的偶光子干涉仪报告了单偏振条件下的反关联的 "谷" (dip). 与 Shih 和 Alley 的观点不同, Hong、Ou 和 Mandel 把这个现象解释为信号光子和闲置光子之间的干涉. 因为观察到反关联的条件是信号光子和闲置光子在分束器上 "相遇", 这意味信号光子和闲置光子之间干涉了. 这两种观点争论了十年之久. 下

[25] 偶光子 (*biphoton*) 是由 Klyshko 首次提出并命名的. 本书把 *biphoton* 译为偶光子或偶光子对, 以区分于 "成对测量的光子", 或, "双光子". 任何成对测量的光子都可以称为双光子, 双光子概念更具普遍性. 双光子可以处于直积态, 纠缠态, 随机热光态, 或其它量子态. 这里定义的偶光子 (*biphoton*) 专指处于纠缠态的 "双光子".

面一节我们将剖析这个重要争论的细节. 这一章的其它部分将通过几个历史上偶光子干涉实验来讨论偶光子干涉测量的物理意义.

12.1 偶光子干涉是两个光子的干涉吗?

图 12.1.1 所示是一个历史上典型的用来观测偶光子反关联或 "谷" 的双光子干涉实验. SPDC 产生的信号–闲置纠缠光子对被一个 50% – 50% 的近正入射分束器混合[29]. 用两个探测器 D_1 和 D_2 进行符合测量. 纵向调整分束器的位置, 使得信号和闲置路径光程相等, 符合计数为零. 这意味发生了完全的相消干涉. 当光程差逐渐偏离零点时, 符合计数呈现出一个 "谷" 状的反关联曲线. "谷" 的宽度等于信号光和闲置光的相干长度. 相干长度主要由放置在 D_1 和 D_2 之前的频率滤波片的谱宽决定.

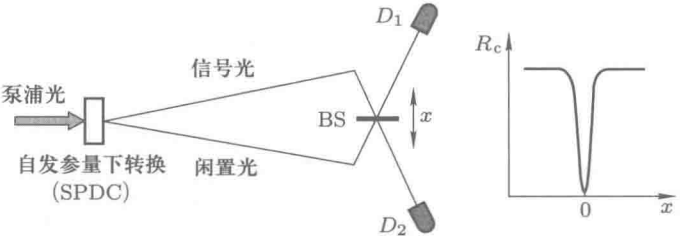


图 12.1.1 一个典型的偶光子干涉仪的示意图. 取 $x = 0$, 即两路等光程时, 信号光子在分束器处 "遇到" 闲置光子. D_1 和 D_2 用来进行偶光子对的联合探测. 将分束器沿着 x 轴扫描, 通过符合计数就可以观测到反关联.

人们很容易把这种干涉想象成在分束器上相遇的信号光子和闲置光子之间的干涉. 粗略地说, 不可区分性导致了干涉, 因为当完全相消干涉的条件成立时, 干涉仪的两条光路是严格等长的. 信号–闲置光子在分束器 "相遇" 后, 无法区分是哪个光子导致了两个光子探测器各自的探测事件. 此时, 信号 "波包" 和闲置 "波包" 完全交叠, 信号和闲置光子之间的干涉发生了. 而当分束器的位置偏离平衡点时, 造成两条光路长度不等, 信号 "波包" 和闲置 "波包" 部分交叠, 使得干涉减弱. 符合计数率似乎取决于信号 "波包" 和闲置 "波包" 的交叠程度. "谷" 的形状则取决于信号 "波包" 和闲置 "波包" 在时间上的卷积, 所以对 "谷" 的测量给出了

[29] 历史上早期的几个 "谷" 实验都是采用了 Shih-Alley 偶光子干涉仪的 "正入射" 条件, 即, 信号光和闲置光在分束器的入射角接近零度. 对于 Shih-Alley 实验 "正入射" 是必要条件, 因为此实验需要同时得到正交偏振的信号–闲置光子对的关联和反关联. 要达到 S 光和 P 光的透反比同时为 50% – 50%, 只能采用正入射条件. 而对于单偏振下测量 "谷" 的实验并不需要正入射. 单偏振时, 任意角度都可以实现 50% – 50% 分束.

两个 "波包" 在时间上的相干参数. 以上画面, 支持了 "两个光子之间干涉" 的观点. 除了以上观点, 也有人用 "光子反聚束" 或 "反聚束" 来解释 "谷".

上述解释正确吗? "谷" 是否意味着信号光子和闲置光子在分束器上的干涉呢? 狄拉克关于 "光子只和它自身干涉" 的观点对这个实验不成立吗? 下面我们分几个步骤回答这些问题.

首先让我们来讨论一个略有改动的实验, 如图 12.1.2 所示. 实验装置和图 12.1.1 类似, 只是信号有两条路径: 一条路径为 L_l (长路径), 另一个是 L_s (短路径), $L_l - L_s \equiv 2\Delta L$, 以确保 $l_{s,i}^{coh} < \Delta L \ll l_p^{coh}$. 其中 $l_{s,i}^{coh}$ 和 l_p^{coh} 分别为信号–闲置光场和泵浦光场的相干长度. 实验中, $l_{s,i}^{coh}$ 一般由光探测器前面滤波片的谱宽决定, l_p^{coh} 由泵浦激光的谱线宽度决定. 由于 $\Delta L > l_{s,i}^{coh}$, 虽然信号光有两条路径, 但是信号光子自己没有一阶干涉. 单光子探测器 D_1 和 D_2 的计数都是常数. 当分束器 BS 位于 $x = 0$ 时, 闲置路径的光程为 L_0, $L_l - L_0 = L_0 - L_s = \Delta L$, 即 L_0 取 L_l 和 L_s 的中间值: $L_0 = (L_l + L_s)/2$.

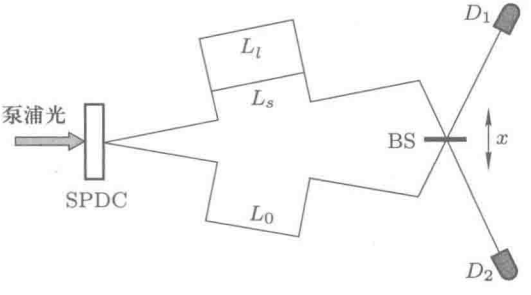


图 12.1.2 改版的偶光子干涉仪的示意图. 与图 12.1.1 不同的是, 信号光子有两条路径, L_l(长路径) 和 L_s(短路径). 闲置路光程为 $L_0 = (L_l + L_s)/2$(介于其间). 在这个装置中, 信号和闲置光子在分束器处于坐标 $x = 0$ 不会相遇. 我们在 $x = 0$ 时还能看到 "谷" 吗?

如果 "谷" 是 "两个光子之间的干涉" 的结果, "谷" 底应该出现在信号 "波包" 和闲置 "波包" 完全重叠时, 那么只有两个位置能够看到 "谷", 即分束器位于 $x = \pm\Delta L/2$ 时. 在这两个情形下, 闲置光子有 50% 概率和信号光子重合. 这种部分可区分性使得两个 "谷" 的对比度不超过 50%. 然而, 当 $x = 0$ 时, 由于 $\Delta L > l_{s,i}^{coh}$, 两个光子相互错过, 信号 "波包" 和闲置 "波包" 绝无重叠的机会. 此时, 两个探测器的工作状况都是随机的: 50% 的符合测量中, D_1 比 D_2 提前 $\tau = \Delta L/c$; 另外 50% 的情况正好相反. 所以, 在 $x = 0$ 处不应该发生 "两个光子之间的干涉".

图 12.1.3 显示了作者和 Strekalov 的实验结果, 它讲述了一个完全不同的故事. 我们在 $x=0$ 处观察到了一个对比度接近 100% 的干涉 "谷". 而且, 当 $L_l - L_s$ 稍有变化时, "谷" 能转变成 "峰" 或者介于 "谷" 和 "峰" 之间的类高斯函数. "谷" 到 "峰" 的转变取决于 $\phi = \omega_p \tau$, 其中 $\tau = \Delta L/c$ 是长路径和短路径之间的时间延迟. 固定 $x=0$, 稍微增加或者减少 ΔL 来改变 ϕ, 符合探测计数率呈现出正弦调制, 如图 12.1.4 所示, 对应着图 12.1.3 中从 "谷" 到 "峰" 的转变. 实验数据表明: 要想观测到偶光子关联和反关联或偶光子干涉, 并不一定需要信号和闲置光子在分束器处相遇. "信号光子和闲置光子之间的相消干涉" 这一观点没有正确预测实验结果. 所以, "谷" 或 "峰" 不能用信号光子和闲置光子之间的干涉来解释.

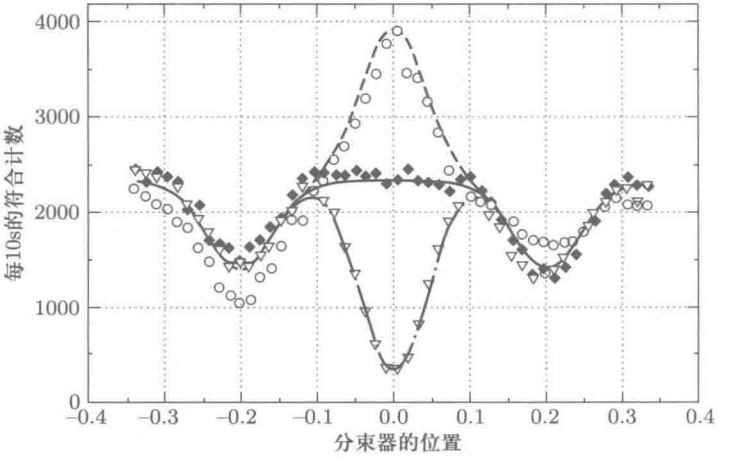


图 12.1.3 作者和 Strekalov 在 1996 年观察到的现象: 在 $x=0$ 观察到 ~100% 对比度的 "谷". 此外, 当 $L_l - L_s$ 稍有变化时, 干涉相消的 "谷" 能转化为干涉相长的 "峰".

事实上, 偶光子干涉并不是两个独立光子之间的干涉. 我们将从以下讨论中看到, 量子理论的观点是正确的: 偶光子干涉是偶光子振幅叠加的结果. 狄拉克的观点还是成立的, 只需要稍加修改: "…… 偶光子 (*biphoton*) …… 只和自身干涉. 不同的偶光子不会干涉". 也许, 狄拉克的说法 "…… 光子 …… 只和自己干涉" 让人感到迷惑, 我们不妨也稍作修改:

"干涉是量子振幅叠加的结果, 量子振幅是一个非经典实体, 对应着不同且不可区分的方式触发一次光子探测事件, 或一次联合光子探测事件. 两个不同光子或两个不同光子对之间从不发生干涉. "

(I) 对历史上 "谷" 实验 (图 12.1.1) 的分析

我们来分析一下历史上如图 12.1.1 所示的实验. 正如前面所讨论的,

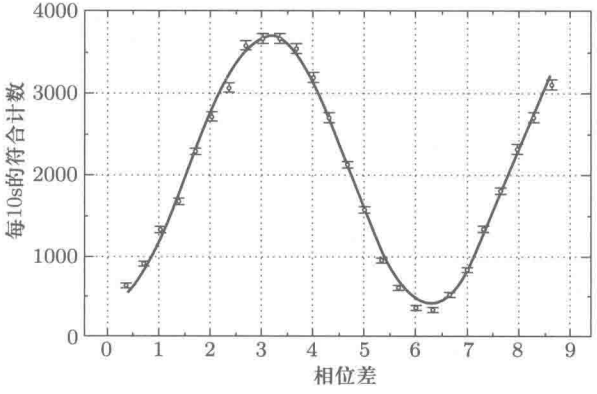


图 12.1.4 作者和 Strekalov 在 1996 年观察到的现象: 谷–峰的转变是 ϕ 的函数.

单光子探测器 D_1 和 D_2 在时间间隔 T 以内的联合探测计数率 R_c 可以借助 Glauber 理论计算, 其一般形式为:

$$\begin{aligned} R_c &\propto \int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\, S(t_1-t_2)\, G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) \\ &= \int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\, S(t_1-t_2)\, \langle\, \Psi\, |\hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}|\, \Psi\,\rangle \\ &= \int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\, S(t_1-t_2)\, |\langle\, 0\, |\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}|\, \Psi\,\rangle|^2 \end{aligned} \tag{12.1.1}$$

其中 $\hat{E}_j^{(\pm)}$, $j=1,2$ 是在探测器 D_1 和 D_2 处场算符的正频和负频部分, $|\Psi\rangle$ 是信号–闲置光子对的态:

$$|\,\Psi\,\rangle \simeq \int \mathrm{d}\omega_p\; g(\omega_p) \int \mathrm{d}\omega_s\; f(\omega_p,\omega_s)\hat{a}_s^\dagger(\omega_s)\; \hat{a}_i^\dagger(\omega_p-\omega_s)\;|\,0\rangle \tag{12.1.2}$$

与先前讨论类似, 为了集中关注关联函数的时间部分, 测量时, 只选取一对模式 $\boldsymbol{k}_s$ 与 $\boldsymbol{k}_i$. 和先前讨论不同, 这里 ω_p 不再作常数近似, 我们假设泵浦光 ($\Delta\boldsymbol{\kappa}\sim 0$) 是准直的, 纵向模式分布函数为 $g(\omega_p)$. 研究双光子干涉的过程中, 需要处理泵浦的有限带宽, 特别是在脉冲泵浦的情况下. 在 (12.1.1) 式中, $S(t_1-t_2)$ 是门函数, 模拟符合时间窗口. 一般来说, SPDC 的二阶时间相干 $G^{(2)}(t_1-t_2)$ 远远窄于符合时间窗口. 此时 $S(t_1-t_2)$ 可以近似为常数. 为了简化记号, 下面讨论中, 我们将从时间积分中略去 $S(t_1-t_2)$.

场 $\hat{E}_1^{(+)}$ 和 $\hat{E}_2^{(+)}$ 都包含两部分的贡献. 将场算符从源传播到光电探测器, 忽略格林函数的横向部分:

$$\hat{E}_1^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1^R}\,\hat{a}_s(\omega) + \int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1^T}\,\hat{a}_i(\omega)\right]$$

$$\hat{E}_2^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_2^T}\, \hat{a}_s(\omega) + \mathrm{i} \int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_2^R}\, \hat{a}_i(\omega) \right]$$

其中, 上标 R 和 T 代表反射和透射. 同样, 只考虑一个偏振. $E_0(\omega) = \sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 V}$, V 是量子化体积. $\tau \equiv t - z/c$, z 为光路中的纵向坐标. 和前面的计算类似, $E_0(\omega)$ 被视为常数.

将信号-闲置的偶光子态代入 (12.1.1) 式, 很容易计算出偶光子有效波函数有两个振幅:

$$\Psi_{21} = \langle\, 0\,|\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}|\,\Psi\,\rangle = \Psi(\tau_2^T, \tau_1^T) - \Psi(\tau_2^R, \tau_1^R) \tag{12.1.3}$$

其中 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T) = \langle 0|E(\tau_2^T)E(\tau_1^T)|\Psi\rangle$ 对应信号和闲置都从分束器透射的情形. 而 $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R) = \langle 0|E(\tau_2^R)E(\tau_1^R)|\Psi\rangle$ 对应都反射的情形. 归一化系数已经被归并到各自振幅里. 这两个不同的, 且不可区分的偶光子振幅或偶光子波包的叠加, 它贡献于光子探测器 D_1 和 D_2 之间发生一次 "咔哒-咔哒" 的联合探测事件, 决定了在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 发生一次联合探测的概率:

$$\begin{aligned} & G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) \\ = & \,|\, \Psi(\tau_2^T, \tau_1^T) - \Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)\,|^2 \\ = & \,|\, \Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)|^2 + |\, \Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)|^2 \\ & - \Psi^*(\tau_2^T, \tau_1^T)\, \Psi(\tau_2^R, \tau_1^R) - \Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)\, \Psi^*(\tau_2^R, \tau_1^R) \end{aligned} \tag{12.1.4}$$

所以在符合计数率中观测到双光子干涉

$$R_c \propto \int_T \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, |\, \Psi(\tau_2^T, \tau_1^T) - \Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)\,|^2 \tag{12.1.5}$$

(12.1.4) 式和 (12.1.5) 式中, 当 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)$ 和 $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)$ 在时空上完全 "重叠" 时或对于联合探测完全不可区分时, 符合计数为零. 当分束器偏离平衡位置时, 波包变得不重叠或可区分, 干涉退化. 这样, 通过符合测量就可以看到 "谷". 这是偶光子波包卷积的结果. 此外, 如果将 "-" 变为 "+" (例如改变光子对的偏振), 既, 把相消干涉变为相长干涉, 就可以观察到 "峰" 而不是 "谷" 了. 在偏振双光子干涉仪中, "谷" 和 "峰" 都很容易被观测到. 这个后面再讨论.

进一步, 为了计算干涉随偶光子干涉仪光程差的函数变化关系, 我们需要计算偶光子波包和它们的卷积. SPDC 偶光子波包在单色平面波泵浦条件时已经计算过. 这个计算和前面的类似, 除了要附加考虑泵浦

的分布函数 $g(\omega_p)$, 得到偶光子波包为:

$$\Psi(\tau_2,\tau_1) = \Psi_0 \int \mathrm{d}\omega_p\ g(\omega_p)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_p(\tau_2+\tau_1)} \times \int \mathrm{d}\omega_s\ f(\omega_p,\omega_s)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_s-\omega_i)(\tau_2-\tau_1)} \tag{12.1.6}$$

这里, Ψ_0 包含了场以及态中的所有常数. 为了简化数学计算, 采用如下近似将积分分解成两个独立积分:

$$\begin{aligned} &\omega_s = \omega_s^0 + \nu, \quad \omega_i = \omega_i^0 - \nu, \\ &\omega_s^0 + \omega_i^0 \simeq \omega_p^0, \quad \omega_p = \omega_p^0 + \nu_p \end{aligned} \tag{12.1.7}$$

其中 ω_s^0, ω_i^0 和 ω_p^0 分别是信号、闲置和泵浦的中心频率. ω_s^0, ω_i^0 和 ω_p^0 视为常数. (12.1.6) 式简化为两个函数的乘积,

$$\Psi(\tau_2,\tau_1) = \Psi_0\ v(\tau_2+\tau_1)\ u(\tau_2-\tau_1), \tag{12.1.8}$$

其中

$$v(\tau_2+\tau_1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p^0(\tau_2+\tau_1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu_p\ g(\nu_p)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_p(\tau_2+\tau_1)/2} \tag{12.1.9}$$

以及

$$u(\tau_2-\tau_1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}(\omega_s^0-\omega_i^0)(\tau_2-\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu\ f(\nu)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(\tau_2-\tau_1)} \tag{12.1.10}$$

基本假设是 $u(\tau_2-\tau_1)$ 的积分与 ω_p 无关. 这个近似只对窄线宽的 $g(\nu_p)$ 成立, 如连续激光泵浦. 这个近似不适用于短脉冲泵浦, 特别是飞秒激光泵浦的 SPDC. 关于超短脉冲泵浦的 SPDC 后面会讨论.

函数 $v(\tau_2+\tau_1)$ 和 $u(\tau_2-\tau_1)$ 可以写成 $g(\nu_p) \to \mathcal{F}_{\tau_+}\{g(\nu_p)\}$ 和 $f(\nu) \to \mathcal{F}_{\tau_-}\{f(\nu)\}$ 的傅里叶变换形式, 其中 $\tau_+ \equiv (\tau_2+\tau_1)/2$, $\tau_- \equiv \tau_2-\tau_1$. 给出有效偶光子波函数或偶光子波包为:

$$\begin{aligned} \Psi(\tau_2,\tau_1) &= \Psi_0\, \mathcal{F}_{\tau_+}\big\{g(\nu_p)\big\}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p^0\tau_+}\ \mathcal{F}_{\tau_-}\big\{f(\nu)\big\}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_d^0\tau_-} \\ &= \Psi_0\, \mathcal{F}_{\tau_+}\big\{g(\nu_p)\big\}\, \mathcal{F}_{\tau_-}\big\{f(\nu)\big\}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_s^0\tau_2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i^0\tau_1} \end{aligned} \tag{12.1.11}$$

其中 $\omega_d^0 \equiv \dfrac{1}{2}(\omega_s^0 - \omega_i^0)$.

(12.1.5) 式的交叉干涉项计算如下:

$$\int \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\ \Psi^*(\tau_2^T,\tau_1^T)\ \Psi(\tau_2^R,\tau_1^R)$$

$$
\begin{aligned}
&= |\Psi_0|^2 \int \mathrm{d}t_+ \, \mathcal{F}^*_{\tau_+^T}\{g(\nu_p)\}\, \mathcal{F}_{\tau_+^R}\{g(\nu_p)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p^0(\tau_+^T-\tau_+^R)} \\
&\quad \times \int \mathrm{d}t_- \, \mathcal{F}^*_{\tau_-^T}\{f(\nu)\}\, \mathcal{F}_{\tau_-^R}\{f(\nu)\}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_d^0(\tau_-^T-\tau_-^R)} \\
&\simeq |\Psi_0|^2 \int \mathrm{d}t_- \, \mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\}\, \mathcal{F}_{t_- -\delta}\{f(\nu)\} \\
&= |\Psi_0|^2 \, \mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \otimes \mathcal{F}_{t_- -\delta}\{f(\nu)\}
\end{aligned} \tag{12.1.12}
$$

其中 $t_+ \equiv t_2 + t_1$, $t_- \equiv t_2 - t_1$ 和 $\delta = [(z_2^R - z_1^R) - (z_2^T - z_1^T)]/c$ 是如图 12.1.1 所示偶光子干涉仪中分束器从平衡位置向上移动时引入的光程差. 在上面计算中假设是简并 I 型相位匹配的 SPDC ($\omega_d^0 = 0$). 于是得到符合计数率 R_c 为:

$$
R_c(\delta) = R_0 \left[1 - \mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \otimes \mathcal{F}_{t_- -\delta}\{f(\nu)\}\right] \tag{12.1.13}
$$

其中 R_0 是常数. 假设高斯波包, 卷积产生一个高斯函数 $|\Psi_0|^2 \mathrm{e}^{-\delta^2/\tau_c^2}$, 其中 $\tau_c = l_{s,i}^{coh}/c$ 为信号和闲置的相干时间. 符合计数率 R_c 近似为

$$
R_c(\delta) = R_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-\delta^2/\tau_c^2}\right]
$$

现在我们很清楚了: 观测到的 "谷" 是偶光子 "相消干涉" 现象. 数学上, "谷" 是偶光子波包 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)$ 和 $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)$ 沿着 τ_- 轴卷积的结果或称互关联. 图 12.1.5 显示了图 12.1.1 偶光子干涉实验中的两张概念性的费曼 (Feynman) 图. 当分束器在平衡位置时, 两个费曼路径 ("反-反" 和 "透-透") 是不可区分的. 将分束器从平衡位置移开, 两个费曼路径的光程差变得不相等了, 对应两维波包沿着 τ_- 轴被相互移开. 叠加发生在 "透-透" 和 "反-反" 的双光子振幅之间, 而不是信号光子和闲置光子之间. 用狄拉克的话说: 偶光子只和它自身干涉, 信号光子和闲置光子之间从不发生干涉.

一般来说, 产生偶光子干涉有两种可能途径: (1) 沿着 τ_- 方向卷积; 或 (2) 沿着 τ_+ 方向卷积. 在如图 12.1.1 所示的实验中, 无论分束器的位置在哪里, $\tau_+^T = \tau_+^R$, 所以双光子波包 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)$ 和 $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)$ 在 τ_+ 上完全 "重叠". 然而, 当分束器偏离平衡位置时, $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)$ 沿着 τ_- 逐渐离开 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)$.

(II) 图 12.1.2 中改版的 "谷" 实验分析

按照偶光子干涉的观点, 现在我们对图 12.1.2 中的实验进行解释. 和图 12.1.1 中的实验不同的是, 图 12.1.2 中特殊的实验装置提供了四种可能路径来产生一个 D_1 和 D_2 之间的联合探测. 于是, 偶光子有效波函数

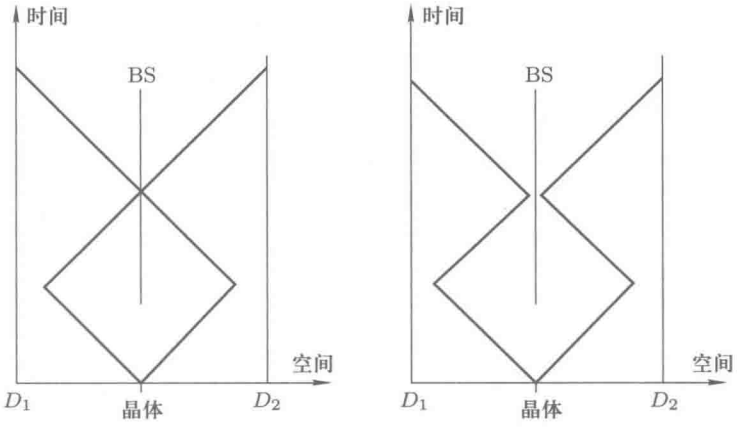


图 12.1.5 费曼图. 分束器用细的竖线表示. 偶光子振幅或偶光子波包用 "直线" 表示. 左边: $\Psi(z_2^R, t_2; z_1^R, t_1)$ (反–反); 右边: $\Psi(z_2^T, t_2; z_1^T, z_1)$ (透–透). 两种费曼路径都对 D_1 和 D_2 的联合探测有贡献.

包含四个振幅:

$$\Psi_{21} = \Psi(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T}) - \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR}) + \Psi(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T}) - \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR})$$

其中上标 L, S 和 0 分别代表图 12.1.2 中长光程、短光程和中间度光程. 这样, $G^{(2)}$ 中对符合计数有贡献的有 16 项:

$$G^{(2)} = \left| \Psi(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T}) - \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR}) + \Psi(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T}) - \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR}) \right|^2$$

然而, 由于所选的实验条件 $L_l - L_0 = L_0 - L_s \equiv \Delta L \gg l_{s,i}^{coh}$ 的限制, 其中 $l_{s,i}^{coh}$ 是信号和闲置的相干长度, 交叉项只有四项非零. 所以, 有八个非零项对 D_1 和 D_2 之间的符合计数率有贡献:

$$\begin{aligned} R_c \propto \int_T \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \Big\{ & |\Psi(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T})|^2 + |\Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR})|^2 \\ & + |\Psi(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T})|^2 + |\Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR})|^2 \\ & - \Psi^*(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T}) \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR}) - \Psi(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T}) \Psi^*(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR}) \\ & - \Psi^*(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T}) \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR}) - \Psi(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T}) \Psi^*(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR}) \Big\} \end{aligned} \tag{12.1.14}$$

计算干涉交叉项, 得到:

$$\begin{aligned} & \Psi^*(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T}) \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR}) \\ = & |\Psi_0|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p^0 \frac{\Delta L}{c}} \mathcal{F}_{t_+}^* \{g(\nu_p)\} \mathcal{F}_{t_+ + \frac{\Delta L}{c}} \{g(\nu_p)\} \mathcal{F}_{t_-}^* \{f(\nu)\} \mathcal{F}_{t_- - \delta} \{f(\nu)\}, \\ & \Psi^*(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T}) \Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR}) \end{aligned}$$

$$= |\Psi_0|^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p^0 \frac{\Delta L}{c}} \, \mathcal{F}^*_{t_+}\{g(\nu_p)\} \, \mathcal{F}_{t_+ - \frac{\Delta L}{c}}\{g(\nu_p)\} \, \mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \, \mathcal{F}_{t_- - \delta}\{f(\nu)\},$$

其中 $\delta = [(z_2^{0R} - z_1^{SR}) - (z_2^{LT} - z_1^{0T})]/c$ 为当分束器向上移动离开它的平衡位置 $x = 0$ 时所带来的额外的光程差.

这个实验的费曼路径如图 12.1.6 所示. 上面两个对应 $\Psi(\tau_2^{LT}, \tau_1^{0T})$ 和 $\Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{SR})$; 下面两个对应 $\Psi(\tau_2^{ST}, \tau_1^{0T})$ 和 $\Psi(\tau_2^{0R}, \tau_1^{LR})$. 注意, 如果 $\Delta L \ll l_p^{coh}$, 上面、下面两个费曼路经对于 D_1 和 D_2 的 "咔哒–咔哒" 联合探测都是不可区分的.

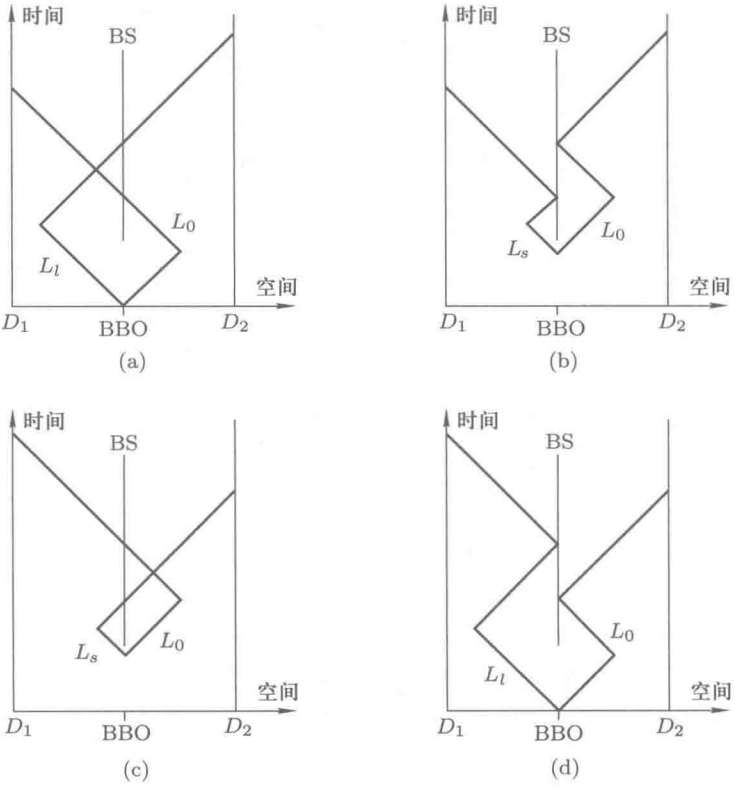


图 12.1.6 费曼图. (a) 和 (b) 表示 D_1 先于 D_2 触发的联合探测的两个振幅; (c) 和 (d) 是触发次序相反的两个振幅. 如果 $\Delta L \ll l_p^{coh}$, 上面两个、下面两个都是不可区分的.

增加或减少 ΔL 或 δ, 二维的偶光子波包可以沿着两个独立的自由度 τ_+ 和 τ_- 轴 "移动":

$$\left[\mathcal{F}^*_{t_+}\{g(\nu_p)\} \otimes \mathcal{F}_{t_+ \pm \frac{\Delta L}{c}}\{g(\nu_p)\}\right]\left[\mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \otimes \mathcal{F}_{t_- - \delta}\{f(\nu)\}\right]$$

对一个选定的值 $\delta \ll l_p^{coh}$, 图 12.1.6 中上面一对和下面一对两维波包沿着 τ_+ 轴 100% 重合, 因而导致 $\mathcal{F}^*_{t_+}\{g(\nu_p)\} \otimes \mathcal{F}_{t_+ \pm \Delta L/c}\{g(\nu_p)\} \sim 1$. 在 $x = 0$ 附

近的联合探测计数率于是为:

$$R_c(\delta) = R_0\big[1 - \cos\phi\,\mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \otimes \mathcal{F}_{t_- - \delta}\{f(\nu)\}\big] \tag{12.1.15}$$

对于沿着 t_- 轴的高斯波包, R_c 近似为

$$R_c(\delta) = R_0\big[1 - \cos\,\phi\,\mathrm{e}^{-\delta^2/\tau_c^2}\big]$$

(12.1.15) 式表明: 当分束器在 $x = 0$ 附近扫描时, 出现 $\sim 100\%$ 的干涉调制. 需要说明的是, 相位因子 $\phi = \omega_p^0(\Delta L/c)$ 在测量中有重要作用. 当分束器置于 "平衡" 位置时, 将 ϕ 设为 π、0 或 $\pi/2$, 我们会分别观测到峰、谷和常数的符合计数率 R_c 分布. 这和图 12.1.3 以及图 12.1.4 中的实验数据吻合. 沿着 τ_+ 操控相位 ϕ 的机理在制备贝尔态时非常有用. 下节中会详细讨论.

12.2 正交偏振的偶光子干涉

在偶光子干涉测量的历史中, 实验性地检验贝尔不等式是一大驱动力. 事实上, 历史上第一个偶光子干涉仪就是为此设计的. 在对贝尔态和贝尔不等式进行讨论之前. 我们分析一个简单的偶光子干涉仪, 即如图12.2.1所示的 Shih-Alley 干涉仪. 其中包含一对相互独立的检偏器. 信号–闲置光子对的偏振是正交的.

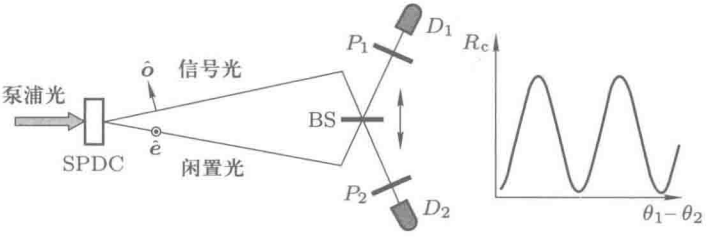


图 12.2.1 典型的偶光子偏振干涉仪的示意图. II 类相位匹配的 SPDC 产生一个正交偏振的信号–闲置纠缠光子对. BS 是一个对 $\hat{o}$ 偏振的信号光子和 $\hat{e}$ 偏振的闲置光子 $50\% - 50\%$ 的分束器. 偏振关联测量时, 检偏器 P_1 和 P_2 的检偏角设置为任意选定的角度 θ_1 和 θ_2. 将分束器在 $x = 0$ 附近扫描, 观察到关联 "峰" 和反关联 "谷" 之后, 把分束器固定在 $x = 0$. 随着 θ_1 和 θ_2 取值的改变, D_1 和 D_2 的符合计数呈现出正弦偏振关联 $\sin^2(\theta_1 - \theta_2)$.

假设理想的偶光子源产生的正交偏振纠缠光子对的形式如下:

$$|\,\Psi\,\rangle \simeq \int \mathrm{d}\nu\; f(\nu)\;\hat{\boldsymbol{o}}\,\hat{a}_s^\dagger(\omega_s^0 + \nu)\;\hat{\boldsymbol{e}}\,\hat{a}_i^\dagger(\omega_i^0 - \nu)\,|\,0\rangle \tag{12.2.1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{o}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 是沿着 SPDC 晶体 o 光和 e 光偏振方向的单位矢量. 在 (12.2.1) 式中, 假设相位是完美匹配的, 即 $\omega_s+\omega_i-\omega_p=0$ 和 $k_{s,o}+k_{i,e}-k_p=0$. 设 D_1 和 D_2 的检偏器的方向和 SPDC 晶体的 o 光偏振方向夹角分别为 θ_1 和 θ_2, 场算符可以写成

$$\hat{E}_1^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1^R}\,\hat{\theta}_1\hat{a}_s(\omega)+\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_1^T}\,\hat{\theta}_1\hat{a}_i(\omega)\right]$$

$$\hat{E}_2^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_2^T}\,\hat{\theta}_2\hat{a}_s(\omega)+\mathrm{i}\int \mathrm{d}\omega\, E_0(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau_2^R}\,\hat{\theta}_2\hat{a}_i(\omega)\right]$$

其中 $\hat{\theta}_j$, $j=1,2$, 是检偏器 j 的单位矢量. 计算对 D_1 和 D_2 的联合探测事件有贡献的有效波函数

$$\Psi_{21}=(\hat{\theta}_1\cdot\hat{\boldsymbol{e}})(\hat{\theta}_2\cdot\hat{\boldsymbol{o}})\,\Psi(\tau_2^T,\tau_1^T)-(\hat{\theta}_1\cdot\hat{\boldsymbol{o}})(\hat{\theta}_2\cdot\hat{\boldsymbol{e}})\,\Psi(\tau_2^R,\tau_1^R) \tag{12.2.2}$$

于是 D_1 和 D_2 的联合探测计数率为:

$$\begin{aligned}R_c&\propto\int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\left|(\hat{\theta}_1\cdot\hat{\boldsymbol{e}})(\hat{\theta}_2\cdot\hat{\boldsymbol{o}})\,\Psi(\tau_2^T,\tau_1^T)-(\hat{\theta}_1\cdot\hat{\boldsymbol{o}})(\hat{\theta}_2\cdot\hat{\boldsymbol{e}})\,\Psi(\tau_1^R,\tau_2^R)\right|^2\\&=R_0\Big\{\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2\\&\times\frac{1}{R_0}\int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\left[\Psi^*(\tau_2^T,\tau_1^T)\,\Psi(\tau_2^R,\tau_1^R)+\Psi(\tau_2^T,\tau_1^T)\,\Psi^*(\tau_2^R,\tau_1^R)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{12.2.3}$$

其中 $\Psi(\tau_2^T,\tau_1^T)$ 和 $\Psi(\tau_2^R,\tau_1^R)$ 是透–透和反–反的偶光子波包, 其时间平均为:

$$\int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\,|\,\Psi(\tau_1,\tau_2)\,|^2=R_0$$

(12.2.3) 式的第三项决定了二阶相干度. 考虑连续激光泵浦的简并 SPDC, (12.1.8) 式的偶光子波包可以简化为:

$$\Psi(\tau_2,\tau_1)=\Psi_0\,\mathcal{F}_{\tau_-}\{f(\nu)\}$$

其中相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\tau_1+\tau_2)/2}$ 归到 Ψ_0 中. 得到 (12.2.3) 式中第三项的系数 $(\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2)$ 为:

$$\begin{aligned}&\int_T \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\,\mathcal{F}_{\tau_2^T-\tau_1^T}\{f(\nu)\}\mathcal{F}_{\tau_2^R-\tau_1^R}\{f(\nu)\}\\&=\mathcal{F}_{t_-}\{f(\nu)\}\otimes\mathcal{F}_{t_--\delta}\{f(\nu)\}\end{aligned}$$

其中同样, δ 是分束器偏离平衡位置 $x=0$ 时的光程差.

在偏振偶光子干涉仪中, 我们应该能观测到以下两种偶光子干涉效应:

(I) 反关联的 "谷" 和关联的 "峰"

在这个测量中, 我们固定 θ_1 和 θ_2, 比如 $\theta_1 = 45°$、$\theta_2 = 45°$ 或者 $\theta_1 = 45°$、$\theta_2 = -45°$. 当 δ 在 $x = 0$ 附近变动时, 会在符合计数率 R_c 中观察到以 δ 为变量的反关联–"谷" 或关联–"峰",

$$R_c(\delta) = R_0\left[1 \mp \mathcal{F}^*_{t_-}\{f(\nu)\} \otimes \mathcal{F}_{t_- - \delta}\{f(\nu)\}\right] \tag{12.2.4}$$

(II) 偏振关联

测量中, 我们取 $\delta = 0$ 使得 $\Psi(\tau_2^T, \tau_1^T)$ 和 $\Psi(\tau_2^R, \tau_1^R)$ 完全重叠. (12.2.3) 式第三项的系数 $(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2)$ 达到它的最大值, 为 2. 当改变两个检偏器的相对角度时, 符合计数率表现为 $\theta_1 - \theta_2$ 的函数.

$$R_c(\theta_1, \theta_2) = R_0 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \tag{12.2.5}$$

这个结果等价于下面贝尔态的偏振关联测量

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1\rangle|Y_2\rangle - |Y_1\rangle|X_2\rangle\right]$$

其中 $|X_1\rangle$ 和 $|X_1\rangle$ 定义为分别沿着 SPDC 中 o 光和 e 光偏振方向的偏振态. 有关贝尔态和偏振关联的测量将在第 14 章中详细讨论.

自从爱因斯坦, 波多尔斯基和罗森发表了他们 1935 年的那篇文章以后, "物理实在性" 的概念对物理学家和哲学家来说变成了一个重要的研究课题. 在 19 世纪 50 年代早期, 玻姆将 1935 年 Einstein-Podolsky-Rosen 态简化为分立的自旋变量, 引入了 1/2 自旋的偶粒子自旋单态:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\ \right]$$

其中右矢 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别表示沿着任意方向自旋向 "上" 和向 "下" 的态. 对于 EPR-Bohm 态, 两个粒子自旋都是不确定的; 然而, 无论两个 1/2 自旋粒子相距多远, 无论 Stern-Gerlach 分析仪 (SGA) 的取向如何, 当一个粒子被测到自旋沿着某个方向向上, 那么另一个一定是沿着那个方向向下. 偶粒子系统的这种非局域行为使得 EPR-Bohm 态发出疑问: 两个 1/2 自旋的粒子在其制备以及传播过程中有确定的自旋吗? 自旋是与测量无关的物理实在吗?

在 Shih-Alley 的实验中, 这个问题可以换一个方式来问: 如果两个粒子都制备有确定的偏振, 我们还能观察到类似的非局域行为吗? Shih-Alley 在 1986 年的实验明确地回答了这个问题. 借助于双光子干涉仪,

Shih-Alley 发现带有确定偏振的光子对可以给出类似的 EPR-Bohm 型关联. 随后, 实验上成功地观测到一组完整的贝尔态

$$|\Psi^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|H_1\rangle|V_2\rangle \pm |V_1\rangle|H_2\rangle\right]$$
$$|\Phi^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|H_1\rangle|H_2\rangle \pm |V_1\rangle|V_2\rangle\right]$$

其中 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$ 分别代表确定的水平和垂直偏振. 实际上任意一组正交偏振都可以用于贝尔态构建. 一般来说, 我们用任意正交的偏振态矢 $|X\rangle$ 和 $|Y\rangle$ 来代替 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$.

这个观测结果已经困扰了我们二十年. (1) 这个实验中似乎没 "隐藏" 什么东西. 信号和闲置光子在进入干涉仪之前都有确定的偏振; (2) 信号场和闲置场都是一阶非相干的, 无论是传播还是湮没过程中, 信号、闲置场的一阶非相干叠加不能改变信号和闲置的偏振. 究竟是什么原因导致有确定偏振的光子对的非局域 EPR-Bohm-Bell 关联的呢? 自从 1986 年开始, 我们就试图引入偶光子 (偶粒子) 干涉的概念. 实际上, 在上面对 Shih-Alley 实验的分析中已经用到了这一概念. 从此概念出发, 我们认为自旋 1/2 粒子 EPR-Bohm 态的非局域性行为是一个偶粒子干涉现象. EPR-Bohm 态定义了一种特殊的偶粒子振幅的相干叠加. 处于此态的两个 1/2 自旋粒子有两个不同但又不可区分的路径触发两个独立的 SGA 之间的符合测量事件, 偶粒子振幅与之一一对应. 我们后面将继续讨论这个有趣实验背后的物理实在概念和其物理本质.

12.3 Franson 干涉仪

为揭示纠缠光子对的奇特行为, 1989 年, Franson 构思了一个干涉仪. 12.3.1 是 Franson 干涉仪的示意图. 它由纠缠双光子源以及一对经典的非平衡的干涉仪组成. 干涉仪输出端接有单光子探测器. 一对纠缠光子, 比如 SPDC 过程产生的信号和闲置光子, 分别进入非平衡干涉仪 1 和 2. 光子计数探测器用来独立地监测单光子探测器的计数率, 并用来符合地观测联合探测计数率. 两个干涉仪的光程差 ΔL_1 和 ΔL_2 都远远大于信号场和闲置场的相干长度 l_{coh}, 所以当 ΔL_1 和 ΔL_2 独立或同步增大或减小时, 在 D_1 和 D_2 各自的计数率中观察不到一阶干涉. 然而, D_1 和 D_2 的符合计数率却呈现出 ~100% 的干涉, 当然两个干涉仪的操作要满足以下条件: (1) 光子对只通过干涉仪的长–长和短–短路径; (2)$|\Delta L_1 - \Delta L_2| \ll l_{coh}$; (3)$\Delta L_1 + \Delta L_1 \ll l_p$, 其中 l_p 是 SPDC 中泵浦的相干长度. 这个让人惊讶的观测结果属于双光子干涉现象.

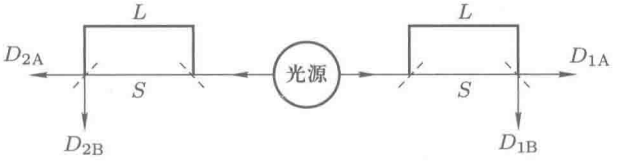


图 12.3.1 Franson 干涉仪的示意图.

下面的计算中, 我们假设条件 (1) 是满足的, 即只有两种路径 $\Psi(\tau_1^L,\tau_2^L)$ 和 $\Psi(\tau_1^S,\tau_2^S)$, 对 D_1 和 D_2 的联合探测事件有贡献. 于是 D_1 和 D_2 的符合计数率为:

$$\begin{aligned} R_c &\propto \int_T \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ \big|\,\Psi(\tau_1^L,\tau_2^L)+\Psi(\tau_1^S,\tau_2^S)\big|^2 \\ &= \int_T \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ \big[\big|\,\Psi(\tau_1^L,\tau_2^L)\big|^2+\big|\,\Psi(\tau_1^S,\tau_2^S)\big|^2 \\ &\quad+\Psi^*(\tau_1^L,\tau_2^L)\,\Psi(\tau_1^S,\tau_2^S)+\Psi(\tau_1^L,\tau_2^L)\,\Psi^*(\tau_1^S,\tau_2^S)\big] \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

其中 τ 的上标 L 和 S 表示第 j 个经典干涉仪, $j=1,2$, 的长、短路径. 干涉情况取决于非平庸的交叉项. 现在, 进一步假设 SPDC 的双光子波包为 $\Psi(\tau_1,\tau_2)\sim\Psi_0 v(\tau_1+\tau_2)u(\tau_1-\tau_2)$, 如 (12.1.8) 式所示. 我们能将干涉项写成:

$$\begin{aligned} &\int_T \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ \Psi^*(\tau_1^L,\tau_2^L)\,\Psi(\tau_1^S,\tau_2^S) \\ &=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p^0(\Delta L_1+\Delta L_2)/2c}\left[\mathcal{F}^*_{\tau_1^L+\tau_2^L}\big\{g(\nu_p)\big\}\otimes\mathcal{F}_{\tau_1^S+\tau_2^S}\big\{g(\nu_p)\big\}\right] \\ &\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_s^0-\omega_i^0)(\Delta L_1-\Delta L_2)/2c}\left[\mathcal{F}^*_{\tau_1^L-\tau_2^L}\big\{f(\nu)\big\}\otimes\mathcal{F}_{\tau_1^S-\tau_2^S}\big\{f(\nu)\big\}\right] \end{aligned} \tag{12.3.2}$$

很容易看到: 括号中的卷积要求只有满足条件 (2) 和 (3) 才能在 Franson 干涉仪中观测到干涉. 这个干涉图案包含和频 $\omega_s^0+\omega_i^0=\omega_p^0$ 和拍频 $\omega_s^0-\omega_i^0$ 两部分正弦调制. 如果使用简并 SPDC, 即, $\omega_s^0=\omega_i^0$, 再如果同步调节干涉仪的光程差, 即 $\Delta L_1=\Delta L_2=\Delta L$, 干涉图案将只剩下和频项, 如 Franson 在 1989 年所预测:

$$R_c\propto 1+V\cos(\omega_p\tau) \tag{12.3.3}$$

其中 $\tau\equiv\Delta L/c$ 是干涉仪的长短路径之间的时间延迟. V 是干涉可见度, 由 (12.3.2) 式的两个卷积给出.

19 世纪 90 年代, 人们用 SPDC 的纠缠偶光子源对 Franson 干涉仪进行了集中深入的研究. 和 Franson 干涉仪相关的大多数有趣的物理现象都被实验所证实.

即便我们有了 SPDC 的纠缠偶光子源、两个标准的 Mach-Zehnder 干涉仪和合适的光子探测符合电路, 条件 (1) 的实现并不是很直接. 其实,

信号–闲置光子对应该有四种触发联合探测的方式. 除了 $\Psi(\tau_1^L, \tau_2^L)$ 和 $\Psi(\tau_1^S, \tau_2^S)$, 另外两种方式或双光子振幅 $\Psi(\tau_1^L, \tau_2^S)$ 和 $\Psi(\tau_1^S, \tau_2^L)$ 并不会自动消失. D_1 和 D_2 的联合光子探测计数率是四个振幅叠加的结果:

$$R_c \propto \int_T \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \left| \Psi(\tau_1^L, \tau_2^L) + \Psi(\tau_1^S, \tau_2^S) + \Psi(\tau_1^L, \tau_2^S) + \Psi(\tau_1^S, \tau_2^L) \right|^2$$

然而, 由于干涉仪的工作条件 $\Delta L_{1,2} > l_{coh}$, 只有一个交叉项对干涉有贡献, 也就是 (12.3.2) 式. 此时, 可以观察到和 (12.3.1) 式相同的干涉条纹, 只不过最大的干涉可见度从 100% 降到 50%:

$$R_c \propto 1 + \frac{1}{2} V \cos(\omega_p \tau)$$

作者和 Strekalov 等人巧妙地实现了Franson干涉仪并观察到了~100%的干涉可见度, 实验装置如图 12.3.2 所示. 纠缠偶光子源是一个非共线 II 类相位匹配 SPDC, 与图 14.4.1 所示相类似. 在通道 1 和 2 中非平衡运作的 Mach-Zehnder 干涉仪各由一个长的石英棒级联一个 Pockel 盒组成. 石英棒通过其双折射效应延迟了相对于快偏振里面的慢偏振成分, 使用可调直流电压的 Pockel 盒是为了对光程差 ΔL 做 "精确微调". 仔细选择好干涉仪的双折射延迟, 使它大于信号光场和闲置光场的相干时间. 这个相干时间主要由 D_1 和 D_2 前的频率滤波片的谱宽决定. 经过仔细调整石英棒和 Pockel 盒的快–慢轴方向后, 使得长–长路径和短–短路径对应 $o_1 - e_2$ 和 $e_1 - o_2$ 的振幅, 这样, 就满足了 Franson 干涉仪的条件 (1). 通道 1 和 2 中, 紧接着石英棒和 Pockel 盒的是两个检偏器, A_1 和 A_2. 检偏器的轴与石英棒和 Pockel 盒定义的快光–慢光轴夹角为 45°. 作为光程差 ΔL 的函数, 联合光子探测事件借助符合电路在纳秒时间窗中被记录下来. 作者和 Strekalov 等人早期发表的工作报道了可见度为 (95.0 ± 1.4)% 的干涉条纹, 证实了 (12.3.3) 式. 实验结果如图 12.3.3 所示. 近期对 Franson 干涉仪实验的报道达到 ~100% 的干涉可见度, 统计误差小了好几个量级.

在 Franson 干涉仪中观察到的 ~100% 的双光子相干度, 被认为是对能量–时间 EPR 不等式的一个演示. 就我们所知, 每一个 Mach-Zehnder 干涉仪中一阶干涉的消失, 意味着相当大的能量不确定度 $\Delta\hbar\omega_{s,i}$. 相反, 可见度 ~100% 的双光子干涉图案表明 $\Delta(\hbar\omega_s + \hbar\omega_i) \sim 0$, 这意味着:

$$\Delta(\hbar\omega_s + \hbar\omega_i) \ll min(\Delta\hbar\omega_s, \Delta\hbar\omega_i)$$

用 EPR 的话来说, 在产生和传播过程中, 信号光子和闲置光子的能量都是不确定的. 然而, 一旦其中一个被测到为某一特定值, 那么另一个的能量取值就被唯一的确定了.

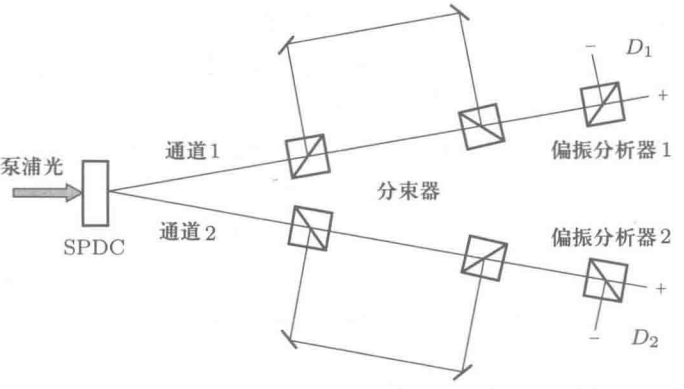


图 12.3.2 Franson 干涉仪的示意图. 纠缠偶光子源是从 II 类非共线相位匹配的 SPDC 产生. 巧用偏振来确保满足条件 (1): 只有 $\Psi(\tau_1^L, \tau_2^L)$ 和 $\Psi(\tau_1^S, \tau_2^S)$ 对一个联合光子探测事件有贡献.

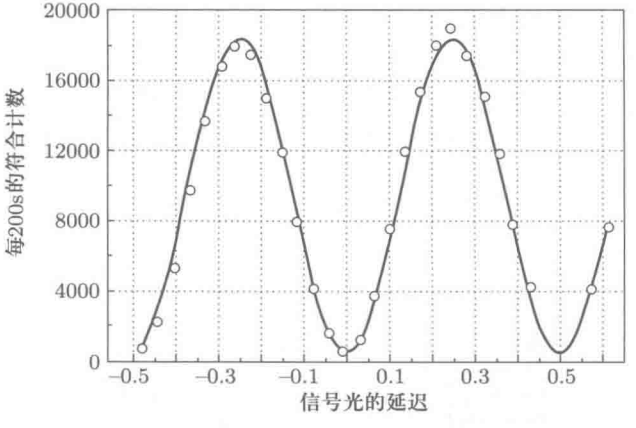


图 12.3.3 作者和 Strekalov 等人早期的实验数据. 该实验观察到可见度为 (95.0 ± 1.4)% 的双光子干涉条纹. 然而, 在改变 ΔL 时, D_1 和 D_2 的单光子计数率一直是常数.

12.4 偶光子鬼干涉

作者和 Strekalov 等人在 1995 年报道的偶光子干涉实验震惊了物理学界. 文章发表后不久, 这个实验就得到了 "鬼干涉" 的名声. 实验本身非常简单. SPDC 产生的信号和闲置光子沿着不同方向传播, 分别触发两个远处的点探测器 D_1 和 D_2. 在其中一路上, 信号光经过一个标准的杨氏双缝, 而闲置光则自由传播到 D_2. 因为信号光场的空间相干长度小于双缝之间的距离, 当 D_1 在双缝后面横向扫描时, 观测不到任何一阶杨

氏双缝干涉条纹. 然而, 当 D_2 在没有双缝的 "闲置光" 路上横向扫描, 而 D_1 固定在双缝后面某一点时, D_1 和 D_2 的联合光子探测计数率呈现出 ~ 100% 可见度的二阶双缝干涉–衍射图案.

鬼干涉实验所揭示的非常特殊的物理或许就在于它貌似一种非局域行为: 在闲置光路扫描 D_2, 怎么能观察到另一光路中由信号光产生的干涉图案呢? 尤其不能忘记, 在信号光一边的 D_1 是固定在双缝后面的, 而且, 鉴于所选定的实验条件, 即使 D_1 作横向扫描也观测不到干涉条纹. 之所以得到 "鬼干涉" 的名声, 恐怕源于这一现象后面的令人惊讶的非局域性.

在对前面实验所作分析的基础上, 我们很容易把 "鬼干涉" 现象理解为双光子干涉现象. 下面我们对这一历史性实验加以分析.

作者和 Strekalov 等人在 1995 年发表的鬼干涉实验的实验装置示意图如图 12.4.1 所示. 非共线的 II 类简并 SPDC 产生正交偏振的信号–闲置光子对. 用偏振分束器将信号和闲置分开. 信号光经过一个杨氏双缝 (或单缝) 后传播 1m 到达点光子计数探测器 D_1. 闲置光则传播到远场后进入一根接有光子计数探测器 D_2 的光纤. 联合探测过程中, D_1 固定在双缝后面某一点, 使用步进马达来扫描光纤输入端的水平横向坐标 x_2, 它等效 D_2 的坐标.

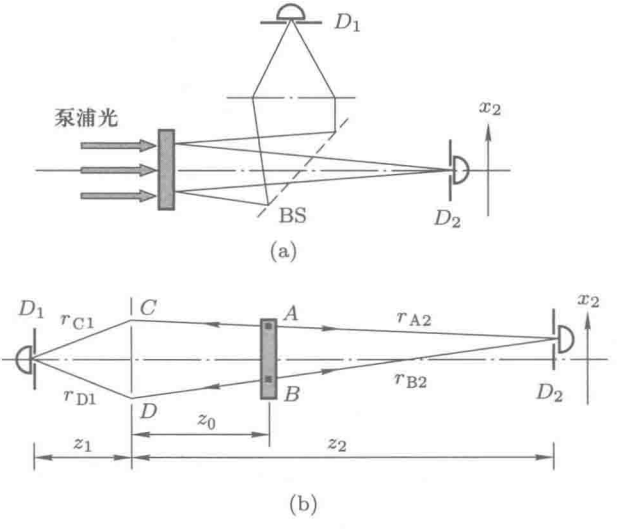


图 12.4.1 简化的实验方案 (a) 和实验的展开图 (b).

图 12.4.2 是作者和 Strekalov 等人发表的鬼干涉–衍射图案. 干涉–衍射图案通过在闲置光路中扫描 D_2(光纤头) 得到符合计数率为 x_2 的函数.

此实验中的双缝放置在信号光路中, 杨氏双缝的缝宽为 $a = 0.15\text{mm}$, 缝间距为 $d = 0.47\text{mm}$. 测到干涉周期为 $2.7 \pm 0.2\text{mm}$, 包络的半宽大约为 8mm. 用曲线拟合, 很容易发现测到的是标准的杨氏干涉–衍射图案, 即以 sinc 函数为包络的正弦振荡:

$$R_c \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a x_2}{\lambda z_2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi d x_2}{\lambda z_2}\right) \tag{12.4.1}$$

图 12.4.2 的干涉图案 (由 (12.4.1) 式描述) 对应 D_1 放置在双缝后面对称点的位置. 如果 D_1 移到非对称点, 到达两条缝的距离不等, 干涉–衍射条纹就要从现在对称的位置向 x_2 的一侧移动. 类似于鬼成像实验, 在 12.4.1 式中, 值得特别注意的特殊点在于 z_2 的定义: 它是指从信号光路中双缝所在平面回到分束器到达 SPDC 晶体, 然后再沿着闲置光路直到探测器 D_2 的扫描光纤头的距离 (见图 12.4.1). 根据 (12.4.1) 式理论计算得到干涉周期和 sinc 函数的半宽分别为 2.67mm 和 8.4mm.

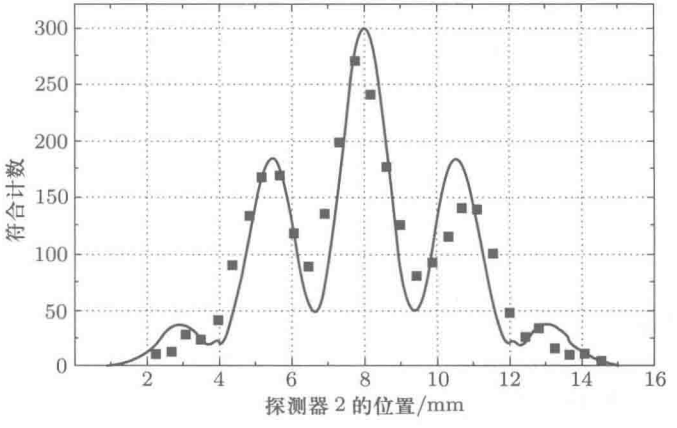


图 12.4.2 一个典型的干涉–衍射图案. 实线是理论拟合. 计算中已经考虑了探测器 D_1 和 D_2 的有限尺寸, 所以干涉可见度小于 100%. 测量中, 信号光路中 D_1 固定在双缝后面的对称位置, D_2 在空的闲置光路中扫描. 如果 D_1 移到非对称位置, 此时它到两条缝的距离不等, 观测到干涉–衍射图案会向一侧移动.

虽然在符合计数时能够观测到干涉–衍射图案, 但是在各自扫描 D_1 和 D_2 时发现, 它们的单光子计数率都是常数. D_2 置放在 "空的" 闲置光束中, 其单光子计数率没有任何干涉调制, 这看起来似乎有道理. 有趣的倒是双缝后面的 D_1, 它的单光子计数率中没有干涉–衍射结构, 这主要是因为信号光束空间相干长度小于双缝间距 d, 或说信号光的发散角 $\Delta\theta \gg \lambda/d$.

下面我们用一个简单的模型来解释鬼干涉. 这个模型的基本概念仍然是纠缠态的偶光子干涉. 在第 4 章中, 对于近共线的简并 SPDC, 我们已经引入了两个 EPR δ 函数, $\delta(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i)$ 和 $\delta(\boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i)$, 这意味着: (1) 信号–闲置光子对可能从 SPDC 输出面的任何一点出射, 然而, 只要测到信号光子在某一点, 那么闲置光子一定是从同一点出射; (2) 信号光和闲置光可能沿着泵浦周围的任意方向传播, 然而, 一旦观测到信号光沿着某个方向, 那么闲置光一定是朝着与泵浦光夹角相同方向相反的方向传播. 信号–闲置偶光子系统这种奇异的纠缠特性决定了, 在信号光穿过双缝而闲置光触发 D_2 时, 只存在两种可能的双光子振幅. 相干叠加就发生在这两个双光子振幅上.

正如我们在鬼成像实验中所讨论的那样, EPR δ 函数使得我们可以把 SPDC 晶体当作普通几何光学中的平面镜. 把 SPDC 的输出平面当作连接点, 将示意图 12.4.1(a) "展开" 成图 12.4.1(b). 基于图 12.4.1(b) 的 Klyshko 展开图[27], 我们给出实验的量化计算.

联合探测计数率 R_c 正比于探测器 D_1 和 D_2 联合探测到的信号–闲置光子的概率,

$$R_c \propto G^{(2)} = \langle \Psi | \, \hat{E}_1^{(-)} \hat{E}_2^{(-)} \hat{E}_2^{(+)} \hat{E}_1^{(+)} \, | \Psi \rangle = \left| \langle 0 | \, \hat{E}_2^{(+)} \hat{E}_1^{(+)} \, | \Psi \rangle \right|^2 \tag{12.4.2}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 是 SPDC 偶光子态. 为了数学简化, 信号–闲置偶光子态采用下面的 "两模" 表达式,

$$|\Psi\rangle = \epsilon \, [\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_A} + \hat{b}_s^\dagger \hat{b}_i^\dagger \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_B}] \, |0\rangle \tag{12.4.3}$$

其中 ϵ 是正比于经典泵浦场和晶体非线性系数的归一化常数. φ_A 和 φ_B 是 A 和 B 处泵浦场的相位, $\hat{a}_j^\dagger (\hat{b}_j^\dagger)(j = s, i)$ 是图 12.4.1 中 A 和 B 两个模式的光子产生算符. 按照哥本哈根的解释, 干涉是源于信号–闲置光子对产生位置 (图 12.4.1 中的 A 或 B) 的不可区分性. 注意, 在 12.4.2 式中, 基于图 12.4.1 的 "直线" 图, EPR δ 函数已经被考虑了进来.

(12.4.2) 式中, 探测器处的场为:

$$\begin{aligned} \hat{E}_1^{(+)} &= \hat{a}_s \exp(\mathrm{i}k\, r_{A1}) + \hat{b}_s \exp(\mathrm{i}k\, r_{B1}) \\ \hat{E}_2^{(+)} &= \hat{a}_i \exp(\mathrm{i}k\, r_{A2}) + \hat{b}_i \exp(\mathrm{i}k\, r_{B2}) \end{aligned} \tag{12.4.4}$$

其中 r_{Ai} (r_{Bi}) 是从区域 $A(B)$ 沿着上面 (下面) 路径到达第 i 个探测器的光程. 将 (12.4.3) 式和 (12.4.4) 式代入 (12.4.2) 式,

$$G^{(2)} \propto \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_A + \varphi_A)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_B + \varphi_B)} \right|^2 \propto 1 + \cos[k \, (r_A - r_B)] \tag{12.4.5}$$

[27] 历史上, Klyshko 首次利用这种 "展开" 图提出他的 "advanced wave theory".

其中我们已经在 (12.4.5) 式的第二个比例式中假设了 $\varphi_A = \varphi_B$. 我们还定义了探测器 D_1 和 D_2 之间沿着上面和下面路径的总光程 (见图 12.4.1): $r_A \equiv r_{A1} + r_{A2} = r_{C1} + r_{C2}$, $r_B \equiv r_{B1} + r_{B2} = r_{D1} + r_{D2}$, 其中 r_{Ci} 和 r_{Di} 分别是缝 C 和缝 D 到第 i 个探测器的光程.

如果从固定探测器 D_1 到两个缝的光程相等, 即 $r_{C1} = r_{D1}$, 进一步, 如果 $z_2 \gg d^2/\lambda$ (远场), 那么 $r_A - r_B = r_{C2} - r_{D2} \cong x_2 d/z_2$. (12.4.5) 式就可以写成:

$$R_c \propto \cos^2\left(\frac{\pi d x_2}{\lambda z_2}\right) \tag{12.4.6}$$

(12.4.6) 式所示是一个标准的杨氏双缝干涉图案. 这里, 再次强调 z_2 的定义比较特殊, 它是从信号光路上的双缝平面开始, 反向经过分束器回到晶体, 再沿着闲置光路直到探测器 D_2 的扫描光纤头的距离.

如果从固定探测器 D_1 到两条缝的距离不等, 即 $r_{C1} \neq r_{D1}$, 那么干涉图案就会从 (12.4.6) 式的对称位置移动到 (12.4.5) 式的非对称位置. 这个有趣的现象已经被观测到, 后面有相关图 12.4.2 的讨论.

为了计算单缝的 "鬼" 衍射, 我们需要一个在缝宽上的偶光子有效波函数的积分, 对应于产生一个符合探测事件的无限数量偶光子概率振幅的叠加:

$$R_c \propto \left| \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_0 \, \exp[-\mathrm{i}k\, r(x_0, x_2)] \right|^2 \cong \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x_2}{\lambda z_2}\right) \tag{12.4.7}$$

其中 $r(x_0, x_2)$ 是点 x_0 和 x_2 之间的距离, x_0 在缝所在平面内. 以上计算用到了远场近似 $z_2 \gg a^2/\lambda$.

重复上述对联合探测计数率的计算, 可以得到标准的杨氏双缝干涉–衍射条纹:

$$R_c \propto \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x_2}{\lambda z_2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi d x_2}{\lambda z_2}\right) \tag{12.4.8}$$

此式与实验数据拟合在实验误差内相弥合. 如果用卷积把探测器的有限尺寸和泵浦光的发散考虑进来, 那么干涉可见度将会下降. 图 12.4.2 中理论拟合时已经考虑了这些因素.

与 Franson 干涉仪的非局域性能量 EPR 不等式不同, 鬼干涉揭示了非局域性的动量 EPR 不等式.

$$\Delta(\boldsymbol{\kappa}_s + \boldsymbol{k}_i) \ll \min(\Delta \boldsymbol{k}_s, \Delta \boldsymbol{\kappa}_i)$$

用 EPR 的话说, 在信号和闲置的产生和传播过程中, 它们的动量都是不确定的; 然而, 一旦一个的动量被测到为某个特定值, 那么另一个的动量就一定被测到为一个唯一的确定值, 而不论这两个测量相距多远.

12.5 延迟选择的量子擦除实验

Scully 和 Drühl 在 1982 年提出的量子擦除实验是另一个挑战了量子力学测不准原理的假想实验. 按照量子力学理论, 一个粒子的位置和动量不可能同时被准确地测量. 之所以称 "位置" 和 "动量" 为互补量是因为准确地测量到粒子的位置 (动量) 就意味着它的动量 (位置) 可以等概率地取所有可能值. 1927 年, Bohr 用量子力学物体的 "类波" 和 "类粒子" 特性阐述了互补原理. 从那以后, "物质的波粒二象性" 经常被肤浅地定义为互补原理. 多年以来, 杨氏双缝干涉仪经常被用来探测、研究和争论这一神秘的物理现象. 在这点上, 下面的讨论可以看作对历史问题讨论的延续. 我们问一个简单的问题: 观察到干涉时, 我们能知道光子是通过哪条缝的吗? 量子力学的回答是: 不能. 否则, 就没有干涉了. 互补原理不允许同时观测到一个量子的波和粒子行为. 似乎光子面对双缝时需要做选择, 要么像波一样同时通过两条缝, 要么像粒子一样只通过某一条缝. 显然, 这一论点是毫无道理的. 还有另外一种观点, 哥本哈根学派似乎告诉我们, 是观测者为光子做了决定: "只有测量到的现象才是基本量子现象"[28]. 我们可以将这句话转换成更容易理解的陈述: 如果测量器件是为观察干涉准备的, 那么光子就会像波一样同时通过两条缝; 如果测量是为了观察光子通过 "哪条路径", 从而干扰光子, 破坏了干涉, 光子的行为就像粒子. 虽然大多数物理学家对这个解释很满意, Scully 却指出, 在一些特定情况下, 这个通用的 "测不准关系" 可能并不适用. 1982 年, Scully 和 Drühl 提出一个假想实验: 当 "擦除" 了光子通过 "哪条路径" 的信息后, 干涉能够再现. 有趣的是, 即便是在光子湮没后, 选择 "记录" 或者 "擦除" 它通过 "哪条路径" 的信息, 仍然可以 "决定" 它之前表现出的是粒子还是波的行为.

图 12.5.1 给出了一个与 1982 年 Scully-Drühl 假想实验类似的量子擦除实验. 图中, 原子 A 或 B 被一个弱光脉冲所激发. 通过原子级联衰变, A 原子跃迁或 B 原子跃迁会产生一对纠缠光子, 光子 1 和光子 2. 光子 1 向右传播, 被探测器 D_0 探测. 该探测器固定在步进马达上, 可以沿着 x 轴扫描来观测干涉条纹. 实验要求 D_0 的单光子计数率没有干涉条纹, 即, 对于 D_0 的单光子探测事件, A 原子跃迁和 B 原子跃迁是可区分的. 光子 2 则向左传播进入一个分束器. 如果光子对是从原子 A 产生的, 光子 2 将沿着路径 A 入射到分束器 BSA, 50% 的概率被反射, 50% 的概率被透射. 如果光子对从原子 B 产生, 光子 2 将沿着路径 B 入射到分束器

[28] 这是惠勒对哥本哈根学派关于物理实在的哲学观点的总结.

BSB, 50% 的概率被反射, 50% 的概率被透射. 考虑 BSA 或 BSB 上 50% 的透射概率, 光子 2 有 50% 的概率被 D_3 或 D_4 观测到. D_3 或 D_4 的记录提供了光子 2 的 "哪条路径" 的信息 (路 A 或路 B), 顺次也就提供了光子 1 通过 "哪条路径" 的信息, 这是因为在原子级联衰变产生的偶光子态的纠缠特性. 所以, 在 D_3 或 D_4 有记录的条件下观测 D_0 的计数率, 不会有任何干涉条纹. 考虑 BSA 或 BSB 上 50% 的反射概率, 被反射的光子 2 会继续沿着路径 A 或 B 传播直到遇到另一个 50% – 50% 分束器 BS, 最后被 D_1 或 D_2 湮没. 无论是被 D_1 还是被 D_2 湮没, 我们都无法从 D_1 和 D_2 的测量中区分光子 2 是产生于 A 原子跃迁还是 B 原子跃迁, 从而 "擦除" 了 "哪条路径" 的信息. 所以, 在 D_1 或 D_2 有记录的条件下观测 D_0 的计数率, 杨氏干涉条纹则能够再现. 进一步, 如果 A 原子和 B 原子到 D_0 的距离远远小于其到 D_1 或 D_2 或 D_3 或 D_4 的距离, "记录" 或者 "擦除" 将发生在光子 1 的湮没之后. 再进一步, 如果原子 A、B 到探测器 D_0 的距离 L_0 远远小于原子 $A(B)$ 到分束器 BSA(BSB) 的距离 L_A (L_B), 在分束器 BSA 或 BSB 处, 光子 2 选择 "反射" 或 "透射" 的时间也在光子 1 被 D_0 湮没的时间之后. 即, 光子 1 湮没之后, 光子 2 还在通向 BSA(BSB) 的路上. 换一种陈述, 光子 2 对 "记录" 或 "擦除" "哪条路径" 的信息的随机选择是在光子 1 湮没之后, 即, 光子 2 的选择是延迟了的随机选择 (random delayed choice).

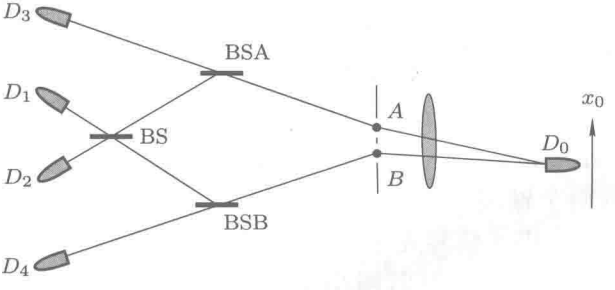


图 12.5.1 量子擦除假想实验. 一对纠缠偶光子, 光子 1 和光子 2, 通过原子跃迁衰变过程从原子 A 或原子 B 辐射出来. 光子 1 向右传播, 被探测器 D_0 湮没. 光子 2 向左传播, 被探测器 D_1 或 D_2 或 D_3 或 D_4 湮没. 实验要求 D_0 的计数率没有干涉条纹. D_3 和 D_4 的探测事件 "记录" 了 "路径信息", 而 D_1 和 D_2 的探测事件 "擦除" 了 "路径信息".

事实上, 我们已经设计好了一个随机延迟选择的量子擦除实验. 理论预言: 当 D_0 沿着 x 扫描时, 符合计数率 R_{01} (D_0 和 D_1 之间联合探测计数率) 和 R_{02} (D_0 和 D_2 之间联合探测计数率) 将出现典型的杨氏干涉

图案, 这反映了光子 1 的波动特性. 然而, 符合计数 R_{03} (D_0 和 D_3 之间联合探测计数率) 和 R_{04} (D_0 和 D_4 之间联合探测计数率) 不会出现干涉, 反映了光子 1 的粒子性.

需要注意的是: (1) 实验中, "选择" 不是人为的切换. "选择" 由光子 2 在分束器 BSA 和 BSB 面前完成. 正确地安排实验条件, 光子 2 的选择可以是 "延迟的选择". 观察者只要看光子 2 触发的是哪个探测器 D_1、D_2 还是 D_3D_4, 就可以判断光子 2 的选择, 从而进一步判断光子 1 在其湮没之前呈现波动性还是粒子性. (2) 实验要求, D_0 处光子 1 的光电探测事件和光子 2 在 BSA(BSB) 处的延迟选择事件为类空事件. 上述两个单光子探测事件之间不可能 "互通信息". 这一实验要求不难实现, 只需把符合测量的时间窗口调整到远小于 D_0 和 BSA(BSB) 之间的时间延迟.

作者和 Kim 等人在 2000 年发表了上述随机延迟选择的量子擦除实验. 作者和 Kim 等人的实验装置的示意图如图 12.5.2 所示. 实验采用 SPDC, 而不是原子级联衰变, 来产生纠缠偶光子态. 实验中, 由 351.1nm 的氩离子泵浦激光束照射到双缝上, 然后直接照射到一个 II 类相位匹配的非线性晶体 BBO 的 A 区域和 B 区域. 从 A 区域或 B 区域产生一对正交偏振的 702.2nm 的信号–闲置光子对. 两个区域的宽度都是大约 $a = 0.3$mm, 间隔大约 $d = 0.7$mm. 用 Glen-Thompson 棱镜将正交偏振的信号和闲置分束. 信号光子 (光子 1, 来自 A 或 B) 经过透镜 LS 到达探测器 D_0. D_0 放置在透镜的傅里叶变换面上. LS 的使用是为了达到 "远场" 条件, 同时大大缩短 "双缝" AB 和探测器 D_0 之间的距离. 探测器 D_0 通过步进马达沿着 x_0 轴扫描以观察干涉条纹. 闲置光子 (光子 2) 进入一个等光程的干涉仪. 干涉仪包括棱镜 PS, 两个 50% – 50% 分束器 BSA、BSB, 两个反射镜 M_A、M_B 和一个 50% – 50% 分束器 BS. 探测器 D_1 和 D_2 分别置于 BS 的两个输出端, 以 "擦除" 路径信息. D_3 和 D_4 则 "记录" 路径信息, 顺次也就提供了信号光子 (光子 1) 的路径信息. 单光子探测器选用超快雪崩光电二极管, 上升时间小于 1ns, 抖动 (jitter) 大约 100ps. D_0 和 D_j, ($j = 1, 2, 3, 4$) 的符合事件被记录下来, 产生联合探测计数率 R_{01}, R_{02}, R_{03} 和 R_{04}.

实验中, 光学延迟 $(L_{A,B} - L_0) \simeq 2.3$m, L_0 是 BBO 的输出面到探测器 D_0 的距离, $L_A(L_B)$ 是 BBO 的输出面到分束器 BSA (BSB) 的距离. 这意味着, 面对 BSA 或 BSB 闲置光子 (光子 2) 的任何选择 (反射——"记录" 或透射——"擦除") 都要比信号光子 (光子 1) 的湮没至少延迟 7.7ns. 相比于探测器 1ns 的响应时间, 和 1.5s 的符合探测时间窗口, 7.7ns 的延迟既满足了 "延迟选择" 的实验条件也满足了类空事件的要求.

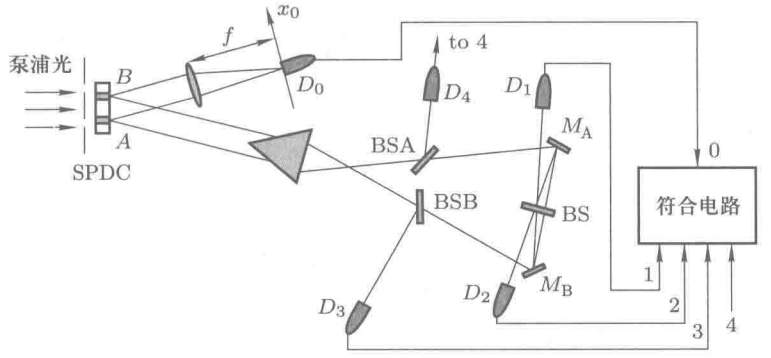


图 12.5.2 延迟随机选择的量子擦除器: 作者和 Kim 等人的实验装置示意图. 泵浦激光束被双缝分开, 在 SPDC 晶体内形成 A 和 B 两个区域. 信号–闲置光子对可能在 A 区产生也可能在 B 区产生. 信号光场的空间相干长度远小于 A 区和 B 区的距离. 信号光子被延 x_0 轴扫描的单光子探测器 D_0 湮没. D_0 的单光子计数率没有干涉条纹. 闲置光子经 BSA 或 BSB 被 D_1 或 D_2 或 D_3 或 D_4 湮没. 面对 BSA 和 BSB 的 "随机延迟选择" 由闲置光子在信号光子被 D_0 湮没后完成. 实验测量符合计数率 R_{01}, R_{02}, R_{03} 和 R_{04}.

图 12.5.3 显示的是联合探测率 R_{01} 和 R_{02} 的实测结果, 呈现出标准的杨氏双缝干涉图案. 和预测的一样, 两个干涉图案之间明显有 π 相位差. 实验同时记录了 D_0 和 D_1 的单光子计数率. 虽然在 R_{01} 和 R_{02} 中观测到干涉, 但是任何一个单光子计数率都没有明显的调制[29].

图 12.5.4 报告了符合探测计数率 $R_{03}(R_{04})$. 干涉明显消失了. 实验数据的拟合曲线类似标准的杨氏双峰干涉–衍射包络曲线. 有两个特征值得我们注意: (1) 图中没有任何干涉调制, (2) 图中曲线和 D_0 单光子计数率的常数分布不同.

从经典观点来看, 实验结果令人惊讶. 然而, 用量子理论却很容易解释. 在这个实验中, 有两类不同的干涉现象: 单光子干涉和偶光子干涉. 正如我们前面讨论过的, 单光子干涉是单光子振幅之间叠加的结果, 偶光子干涉是偶光子振幅叠加的结果. 量子力学告诉我们, 单光子振幅和偶光子振幅代表完全不同的测量方式, 因而蕴含完全不同的物理内涵.

我们通过回答下面几个问题来分析这个实验:

(1) 为什么在 D_0 的单光子探测计数率中观测不到干涉?

这个问题属于单光子干涉测量的问题. 事实上, 鬼干涉实验里也有同样的问题. 检验实验条件, 我们发现 A 区和 B 区的信号光场 (闲置光场) 一阶空间不相干. 因而任何一个探测器的一阶测量, 或称单光子探测

[29] 源于实验条件满足 $\Delta\theta > \lambda_{s,i}/d$, 这里 $\Delta\theta$ 是信号光场和闲置光场的发散角.

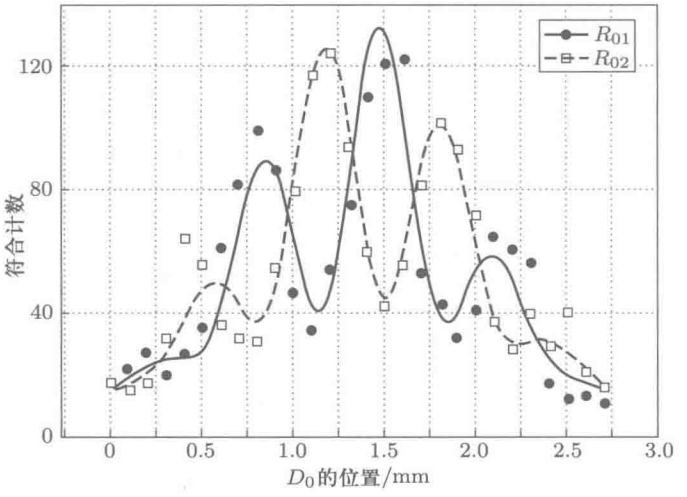


图 12.5.3 符合探测计数率 R_{01} 和 R_{02} 随着探测器 D_0 的 x 坐标的变化. 观测到标准的杨氏双缝干涉图案. 注意 R_{01} 和 R_{02} 之间有 π 相位差. 实线和虚线是对实验数据的理论拟合.

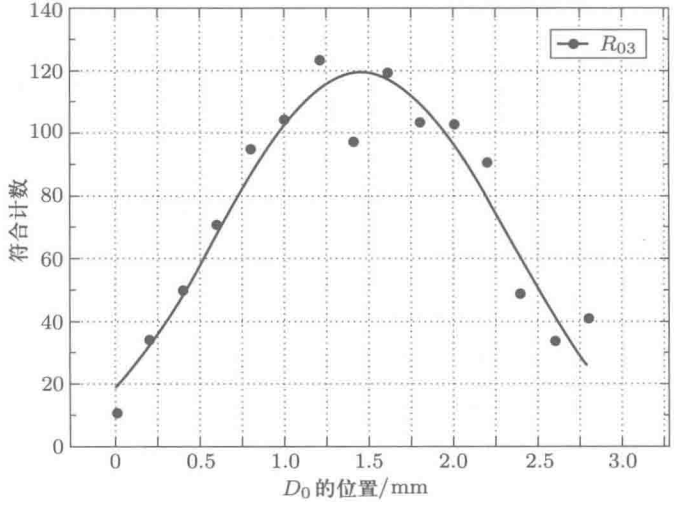


图 12.5.4 符合探测计数率 R_{03}, 干涉明显消失了. 实线是 sinc 函数的拟合.

计数率, 都不会出现干涉条纹.

(2) 为什么在 D_{01} 和 D_{02} 的符合探测计数率上能观测到干涉呢?

这是有关偶光子干涉测量的问题. 偶光子干涉和单光子干涉有很大不同. 偶光子干涉涉及不同的但又不可区分的偶光子振幅的叠加. 下面, 我们用一个简单的模型来计算符合探测计数率 R_{01} 中观测到的双光子

干涉现象. 计算和鬼干涉类似, 除了不再是 "鬼" 效应.

符合计数率 R_{01} 正比于探测器 D_0 和 D_1 联合测到一对信号–闲置光子对的概率 P_{01}:

$$R_{01} \propto P_{01} = \langle \Psi | \hat{E}_0^{(-)} \hat{E}_1^{(-)} \hat{E}_1^{(+)} \hat{E}_0^{(+)} | \Psi \rangle = \left| \langle 0 | \ \hat{E}_1^{(+)} \hat{E}_0^{(+)} | \Psi \rangle \right|^2 \tag{12.5.1}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 是 SPDC 的偶光子态. 下面用 "双模" 态来进行数学上的简化. 注意, 和鬼成像类似, 使用 "展开" 的 Klyshko 图就意味着考虑了横向动量的 δ 函数,

$$|\Psi\rangle = \epsilon \left[\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_A} + \hat{b}_s^\dagger \hat{b}_i^\dagger \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_B} \right] |0\rangle$$

其中 ϵ 是一个归一化常数, 它正比于经典的泵浦场和 SPDC 晶体的非线性系数. φ_A 和 φ_B 是泵浦场在 A 和 B 处的相位, $\hat{a}_j^\dagger$ $(\hat{b}_j^\dagger)$, $j = s, i$, 是信号光子和闲置光子的产生算符.

(12.5.1) 式中, 探测器 D_0 和 D_1 处的场的表达式为:

$$\begin{aligned} E_0^{(+)} &= \hat{a}_s \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A0}} + \hat{b}_s \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B0}} \\ E_1^{(+)} &= \hat{a}_i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A1}} + \hat{b}_i \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B1}} \end{aligned} \tag{12.5.2}$$

其中 r_{Aj} (r_{Bj}), $j = 0, 1$ 是从区域 A(B) 到 j 探测器之间的光程长. 将双光子态和场算符代入 (12.5.1) 式, 得到

$$R_{01} \propto \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_A + \varphi_A)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_B + \varphi_B)} \right|^2 \propto 1 + \cos\left[k(r_A - r_B)\right] \tag{12.5.3}$$

其中, 我们假设 $\varphi_A = \varphi_B$.

如果探测器 D_1 到两条缝的距离相等, D_0 在远场, 那么 $r_A - r_B \cong x_0 d / z_0$, 于是 (12.5.3) 式可以写成:

$$R_{(01)} \propto \cos^2 \left(x_0 \pi d / \lambda z_0 \right) \tag{12.5.4}$$

(12.5.4) 式形式上为标准的杨氏双缝干涉图案.

和鬼干涉类似, 如果 D_1 到两条缝的光程不等, 那么干涉图案就会从对称位置偏移到一个非对称位置, 取决于两路不等光程引入了多少相位延时.

为了计算单缝的衍射效应, 我们需要在缝宽范围内对有效偶光子波函数积分 (在一个联合探测的 "咔哒–咔哒" 触发事件中产生的无限多概率幅叠加):

$$R_{01} \propto \left| \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_{AB} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \, r(x_0, \, x_{AB})} \right|^2 \cong \mathrm{sinc}^2 (x_0 \pi a / \lambda z_0) \tag{12.5.5}$$

其中 $r(x_0, x_{AB})$ 是 x_0 到 x_{AB} 的距离, x_{AB} 在缝平面内, 计算中采用了远场条件.

重复上面计算, 得到符合探测计数率中的杨氏干涉-衍射条纹:

$$R_{01} \propto \mathrm{sinc}^2(x_0\pi a/\lambda z_0)\cos^2(x_0\pi d/\lambda z_0) \tag{12.5.6}$$

如果考虑探测器的有限面积, 干涉可见度会降低. 我们在符合探测计数率 R_{01} 和 R_{02} 中已经看到了这些因素的影响.

(3) 为什么符合探测计数率 R_{03} 和 R_{04} 中观测不到干涉?

这属于偶光子干涉测量问题. 从偶光子物理的观点来看, 符合探测计数率 R_{03} 和 R_{04} 中干涉消失的原因是很明显的: 因为只有一个偶光子振幅对联合探测有贡献.

(4) 从这个实验中我们能学习到什么?

(a) 在两个光子探测器的联合探测事件中所观察到的偶光子干涉现象, 不同于单光子干涉. 因此, 从偶光子干涉测量中可能了解不到单光子的波-粒子行为. 如果非要将偶光子现象诠释为单光子物理, 则不可避免地会得出非物理性的结论.

(b) 通过这个实验, 我们再次看到, 偶光子物理必须区别于两个单光子的物理. 在过去的二十年中, 我们曾尝试用卡通式的语言来强调这一观点: $2 \neq 1+1$.

本章小结

本章中, 我们讨论了偶光子干涉现象的物理. 二十年前, 基于对偶光子干涉现象的观测, 人们批评狄拉克的论点 "…… 光子 …… 只和它自身干涉" 是错误的. 关于偶光子干涉是否是两个光子的干涉的争论就是从那个时候开始的. 本章始于问题: 偶光子干涉是两个光子的干涉吗? 在分析了几个偶光子干涉实验以后, 我们得出的结论是: 偶光子干涉不是两个光子的干涉. 偶光子干涉涉及的是偶光子振幅的叠加. 用狄拉克的话说, 偶光子干涉是偶光子与其自身干涉的结果, 而不是两个光子之间的干涉.

本章分析了几个典型的偶光子干涉实验, 包括偶光子对的贝尔型偏振关联测量, Franson 干涉仪中的偶光子干涉, 偶光子鬼干涉和随机延迟选择的量子擦除. 我们详细地演示了偶光子振幅叠加的细节, 或二维不可分解偶光子波包沿 $(\tau_1 - \tau_2)$ 或 $(\tau_1 + \tau_2)$ 轴的交叠卷积.

推荐读物

[1] P.A. Dirac, *The principle of quantum mechanics*, Oxford University Press, 1982.

[2] G. Magyar and L. Mandel, Nature **198**, 255 (1963); R.L. Pfleegor and L. Mandel, Phys. Rev., **159** 1084 (1967).

[3] C.O. Alley and Y.H. Shih, *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, Ed., M. Namiki, Physical Society of Japan, Tokyo, 47 (1986); Y.H. Shih and C.O. Alley, Phys. Rev. Lett., **61**, 2921, (1988).

[4] C.K. Hong, Z.Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett., **59**, 2044 (1987); Z.Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett., **62**, 50 (1988).

[5] D.V. Strekalov, T.B. Pittman, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, **57**, 567 (1998); T.B. Pittman *et al.*, Phys. Rev. Lett., **77**, 1917 (1996).

[6] Y.H. Shih and A.V. Sergienko, Phys. Rev. A, **50**, 2564 (1994); A.V. Sergienko, Y.H. Shih, and M.H. Rubin, JOSAB, **12**, 859 (1995).

[7] T.E. Kiess, Y.H. Shih, A.V. Sergienko, and C.O. Alley, Phys. Rev. Lett., **71**, 3893 (1993).

[8] P.G. Kwiat *et al.*, Phys. Rev. Lett., **75**, 4337 (1995).

[9] M.H. Rubin, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, and A.V. Sergienko, Phys. Rev. A, **50**, 5122 (1994).

[10] Y.H. Shih, "Two-Photon Entanglement and Quantum Reality", *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, ed., B. Bederson and H. Walther, Academic Press, Cambridge, 1997.

[11] J.D. Franson, Phys. Rev. Lett., **62**, 2205 (1989).

[12] P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, and R.Y. Chiao, Phys. Rev. A, **47**, 2472 (1993).

[13] P.R. Tapster, J,G. Rarity, and P.C.M. Owens, Phys. Rev. Lett., **73**, 1923 (1994).

[14] D.V. Strekalov *et al.*, Phys. Rev. A **54**, R1 (1996).

[15] D.V. Strekalov, A.V. Sergienko, D.N. Klyshko, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett., Vol. 74, 3600 (1995).

[16] M.O. Scully and K. Drühl, Phys. Rev. A **25**, 2208 (1982).

[17] P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, and R.Y. Chiao, Phys. Rev. A, **45**, 7729 (1992).

[18] Y.H. Kim, R. Yu, S.P. Kulic, Y.H. Shih, and M.O. Scully, Phys. Rev. Lett., **84**, 1 (2000).

第 13 章

双光子干涉 II: 混沌热光

纠缠态的研究加深了我们对偶光子干涉的理解. 偶光子干涉不是两个光子之间的干涉, 而是一个光子对与自身的干涉. 用量子理论的语言描述就是: 偶光子干涉是不可区分的偶光子复振幅进行叠加的结果. 那么只有纠缠态才有双光子振幅的概念吗? 只有纠缠光子对才发生双光子干涉吗? 答案是否定的. 在本章中, 我们将探讨混沌热光的双光子干涉. 传统上将热光定义为 "经典" 光[30]. 本书的目的不在于将光区分为量子光和经典光, 我们的兴趣在于: (1) 将双光子干涉的量子理论扩展到混沌光; (2) 揭示量子力学双光子干涉概念与经典理论光强涨落统计关联概念的关系.

在特定条件下, 观察到的光场二阶干涉可以分解为两个独立的经典一阶干涉的乘积, 在这种情况下, 除了两个光电探测器的符合测量会看到干涉, 每个探测器的计数率也会呈现出干涉. 这类双光子干涉是平庸的二阶现象. 本章中我们将限制我们的讨论于非平庸二阶现象, 即把实验条件限制在没有一阶干涉的情况.

有趣的是: 双光子干涉的量子概念对于 "经典" 热辐射同样适用. 实际上, 在物理史上这不是第一次将 "量子" 概念用于 "经典" 光. 我们应该记得: 量子物理的理论起源于普朗克的黑体辐射理论, 而普朗克处理的辐射就是 "经典" 热辐射.

13.1 双光子杨氏干涉

我们从图 13.1.1 所示的简单的杨氏双孔实验开始. 实验装置和经典

[30] 有很多定义可以用来区分经典光和量子态光. 其中, 普遍采用的一个判定办法就是检验其 P 函数, 混沌热光的 P 函数取正值, 所以是 "经典光".

的杨氏双孔实验一样, 只不过 (1) 小孔 A 和 B 处的辐射场之间是一阶不相干的, (2) 采用两个点状的光子探测器 D_1 和 D_2 进行扫描测量, 各自的计数率用来监测一阶干涉, 而它们的符合计数率用来监测二阶干涉. 单个探测器的计数率监测的是一阶干涉, 即单光子振幅相干叠加的结果. 符合计数率记录的是二阶干涉, 即双光子振幅相干叠加的结果. A 和 B 辐射场之间不相干的实验条件, 即 $G_{AB}^{(1)}=0$, 可以用两个具有随机相对相位的独立光源来实现, 或者将双孔的间距调至热光场的空间相干面积以外. 在这样的实验条件下, 没有一阶干涉, D_1 和 D_2 的计数率在扫描过程中都是常数. 那么两个光子计数器 D_1 和 D_2 的符合计数会出现干涉调制吗?

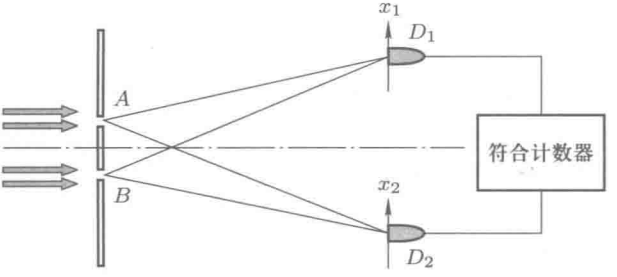


图 13.1.1 杨氏双孔型干涉实验示意图. 在远场有两个可以横向扫描的点状光子探测器 D_1 和 D_2, 它们面向两个独立的单色点弱热光源 A 和 B, 满足 $G_{AB}^{(1)}=0$. 在两个光纤头扫描过程中记录单个探测器的计数率和两个探测器的联合光电探测计数率.

下面我们先建立上述单色混沌热光场的量子态模型, 然后计算 D_1 和 D_2 联合光电探测的符合计数率. 为了简化计算, 我们将 A 和 B 视为两个独立的点子源, 每个子源对联合光电探测事件的贡献都来自 N 个可能的独立随机辐射的两能级原子跃迁 a_j 和 b_j, $j=1,\cdots,N$, $\Delta E_2\simeq 0$. 把测量限制在单光子水平, 遵循和 8.8 节同样的分析方法, 可以将子源 A 辐射的子场 A 的态以及从子源 B 辐射的子场 B 的态形式上写为:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_A &\simeq \prod_j \left(|0\rangle+\epsilon\,\hat{a}_j^\dagger|0\rangle\right)\simeq |0\rangle+\epsilon\sum_j \hat{a}_j^\dagger|0\rangle+\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j,k}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k^\dagger|0\rangle+\cdots\\
|\Psi\rangle_B &\simeq \prod_j \left(|0\rangle+\epsilon\,\hat{b}_j^\dagger|0\rangle\right)\simeq |0\rangle+\epsilon\sum_j \hat{b}_j^\dagger|0\rangle+\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j,k}\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_k^\dagger|0\rangle+\cdots
\end{aligned}
\tag{13.1.1}
$$

在弱光条件下, 我们可以只保留 (13.1.1) 式中必要的低阶项来计算 D_1 和 D_2 各自的计数率和符合计数率. 和 8.8 节类似, 对 D_1 和 D_2 联合光电测

量有贡献的态的低阶近似是一个双光子的混态, 包括所有含 ϵ^2 的项. 联合光电测量的计数率正比于二阶相干 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$,

$$\begin{aligned} G_{12}^{(2)} &= \big\langle\langle \hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\rangle_{\mathrm{QM}}\big\rangle_{\mathrm{ensemble}} \\ &\simeq \mathrm{tr}\big[(\hat{\rho}_{AA}+\hat{\rho}_{BB}+\hat{\rho}_{AB}+\hat{\rho}_{BA})\hat{E}_1^{(-)}\hat{E}_2^{(-)}\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\big] \\ &= G_{AA}^{(2)}+G_{BB}^{(2)}+G_{AB}^{(2)}+G_{BA}^{(2)}, \end{aligned} \tag{13.1.2}$$

其中我们将双光子混态写成四部分:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AA} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger \\ \hat{\rho}_{BB} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{b}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{b}_n^\dagger\hat{b}_m^\dagger \\ \hat{\rho}_{AB} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{a}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{b}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger \\ \hat{\rho}_{BA} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{b}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{a}_n^\dagger\hat{b}_m^\dagger \end{aligned} \tag{13.1.3}$$

这里 $|c_m|^2|c_n|^2$ 代表这四个密度算符的归一化概率. 为了使四个密度算符有一致的归一化系数, 我们将 (13.1.1) 式中双光子混态的交叉项写成两部分:

$$\sum_{m,n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{a}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle \simeq \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{a}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle + \sum_{m>n}|c_m|^2|c_n|^2\hat{a}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle$$

上面近似中我们和往常一样在求和中忽略了 $m=n$, 对于大量原子跃迁这是一个合理的近似.

1 维的二阶空间相干函数 $G_{AA}^{(2)}$, $G_{BB}^{(2)}$, $G_{AB}^{(2)}$ 和 $G_{BA}^{(2)}$ 的定义和计算分别为:

$$\begin{aligned} G_{AA}^{(2)} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\langle 0|\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle\big|^2 \\ &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\Psi_{mn}^{(AA)}(x_1,x_2)\big|^2 \\ G_{BB}^{(2)} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\langle 0|\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\hat{b}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle\big|^2 \\ &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\Psi_{mn}^{(BB)}(x_1,x_2)\big|^2 \\ G_{AB}^{(2)} &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\langle 0|\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\hat{a}_m^\dagger\hat{b}_n^\dagger|0\rangle\big|^2 \\ &= \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\big|\Psi_{mn}^{(AB)}(x_1,x_2)\big|^2 \end{aligned}$$

$$G_{BA}^{(2)} = \sum_{m<n} |c_m|^2|c_n|^2 \left|\langle 0|\hat{E}_2^{(+)}\hat{E}_1^{(+)}\hat{b}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger|0\rangle\right|^2$$
$$= \sum_{m<n} |c_m|^2|c_n|^2 \left|\Psi_{mn}^{(BA)}(x_1,x_2)\right|^2 \tag{13.1.4}$$

(13.1.4) 式中四个二阶相干函数代表产生 D_1 和 D_2 之间联合光电探测事件的三种方式: (1) 两个光子都来自光源 A; (2) 两个光子都来自光源 B; (3)–(4) 一个来自 A, 另一个来自 B. 因为 A 和 B 是独立随机辐射的, 所以这四个贡献是非相干的, 可以独立地计算出来. 很容易发现: (1) 和 (2) 可以通过遮挡另一个光源独立的进行测量, 即遮挡光源 A 来测量 $G_{BB}^{(2)}$ 或遮挡 B 来测量 $G_{AA}^{(2)}$. 虽然不能从 D_1 和 D_2 的联合光电探测中直接测得 (3)–(4) 的贡献, 但是知道 (1) 和 (2) 的贡献后, 原则上, (3)–(4) 的净贡献可以通过扣除 (1) 和 (2) 的贡献来获悉.

将远场近似下的场算符的空间部分

$$\hat{E}_1^{(+)} \simeq \sum_p \hat{a}_p \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A1}} + \sum_q \hat{b}_q \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B1}}$$
$$\hat{E}_2^{(+)} \simeq \sum_{p'} \hat{a}_{p'} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A2}} + \sum_{q'} \hat{b}_{q'} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B2}} \tag{13.1.5}$$

代入到 (13.1.4) 式, 得到 (13.1.4) 中的双光子有效波函数的空间部分 $\Psi_{mn}^{(AA)}(x_1,x_2)$, $\Psi_{mn}^{(BB)}(x_1,x_2)$, $\Psi_{mn}^{(AB)}(x_1,x_2)$ 和 $\Psi_{mn}^{(BA)}(x_1,x_2)$, 它们各自代表从同一光源或不同光源随机配对的 m-n 光子对产生一个 D_1 和 D_2 之间联合光电探测事件的概率幅. 我们首先计算 $\Psi_{mn}^{(AA)}(x_1,x_2)$ 和 $\Psi_{mn}^{(BB)}(x_1,x_2)$:

$$\Psi_{mn}^{(AA)}(x_1,x_2) = \left\langle 0 \left| \left[\sum_p \hat{a}_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A2}} \sum_{p'} \hat{a}_{p'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A1}}\right] \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \right| 0 \right\rangle$$
$$= \mathcal{A}_{a_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2) + \mathcal{A}_{a_{n2}a_{m1}}(x_1,x_2)$$
$$\Psi_{mn}^{(BB)}(x_1,x_2) = \left\langle 0 \left| \left[\sum_q \hat{b}_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B2}} \sum_{q'} \hat{b}_{q'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B1}}\right] \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_n^\dagger \right| 0 \right\rangle$$
$$= \mathcal{A}_{b_{m2}b_{n1}}(x_1,x_2) + \mathcal{A}_{b_{n2}b_{m1}}(x_1,x_2) \tag{13.1.6}$$

其中

$$\mathcal{A}_{a_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2) = \mathcal{A}_{a_{n2}a_{m1}}(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{A2}+r_{A1})}$$
$$\mathcal{A}_{b_{m2}b_{n1}}(x_1,x_2) = \mathcal{A}_{b_{n2}b_{m1}}(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{B2}+r_{B1})}$$

我们用 $\mathcal{A}_{a_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2)$ 标记光子 m 在 D_2 湮没、光子 n 在 D_1 湮没的双光子振幅; 用 $\mathcal{A}_{b_{m2}b_{n1}}(x_1,x_2)$ 标记光子 n 在 D_2 湮没、光子 m 在 D_1 湮没的

双光子振幅. 这是随机配对的 m-n 光子对产生一次联合光电探测事件的不同但又不可区分的两个振幅. $\mathcal{A}_{a_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2)$ 和 $\mathcal{A}_{a_{n2}a_{m1}}(x_1,x_2)$ 的叠加得到 m-n 光子对的双光子有效波函数, 它决定了 m-n 光子对在空间坐标 x_1 和 x_2 处产生联合光电探测事件的概率. 显然, (13.1.6) 式有效波函数的计算会给出在对称设计的干涉仪中 $G^{(2)}_{AA}=G^{(2)}_{BB}$ 约为常数:

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{AA} &\propto \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{A2}+r_{A1})}\right|^2=G_0\\ G^{(2)}_{BB} &\propto \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{B2}+r_{B1})}\right|^2=G_0 \end{aligned} \tag{13.1.7}$$

再利用类似的方法计算有效波函数 $\Psi^{(AB)}_{mn}(x_1,x_2)$ 和 $\Psi^{(BA)}_{mn}(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(AB)}_{mn}(x_1,x_2) &= \left\langle 0\right|\left[\sum_{p'}\hat{a}_{p'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A2}}+\sum_{q'}\hat{b}_{q'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B2}}\right]\\ &\quad\times\left[\sum_{p}\hat{a}_{p}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A1}}+\sum_{q}\hat{b}_{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B1}}\right]\hat{a}^{\dagger}_m\hat{b}^{\dagger}_n\left|0\right\rangle\\ &= \mathcal{A}_{a_{m2}b_{n1}}(x_1,x_2)+\mathcal{A}_{a_{m1}b_{n2}}(x_1,x_2)\\ \Psi^{(BA)}_{mn}(x_1,x_2) &= \left\langle 0\right|\left[\sum_{p'}\hat{a}_{p'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A2}}+\sum_{q'}\hat{b}_{q'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B2}}\right]\\ &\quad\times\left[\sum_{p}\hat{a}_{p}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{A1}}+\sum_{q}\hat{b}_{q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{B1}}\right]\hat{b}^{\dagger}_m\hat{a}^{\dagger}_n\left|0\right\rangle\\ &= \mathcal{A}_{b_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2)+\mathcal{A}_{b_{m1}a_{n2}}(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{13.1.8}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{a_{m2}b_{n1}}(x_1,x_2)&=\mathcal{A}_{b_{m1}a_{n2}}(x_1,x_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{A2}+r_{B1})}\\ \mathcal{A}_{a_{m1}b_{n2}}(x_1,x_2)&=\mathcal{A}_{b_{m2}a_{n1}}(x_1,x_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{B2}+r_{A1})} \end{aligned}$$

不难发现: 在扫描 D_1 和 D_2 过程中, 这两个双光子振幅的叠加得到下面的干涉图案:

$$\begin{aligned} G^{(2)}_{AB} &\propto \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{A2}+r_{B1})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{A1}+r_{B2})}\right|^2\\ &\simeq G_0\cos^2\frac{\pi d(x_1-x_2)}{\lambda(z-z_0)}\\ G^{(2)}_{BA} &\propto \sum_{m<n}|c_m|^2|c_n|^2\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{B2}+r_{A1})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_{B1}+r_{A2})}\right|^2 \end{aligned}$$

$$\simeq G_0 \cos^2 \frac{\pi d(x_1 - x_2)}{\lambda(z - z_0)} \tag{13.1.9}$$

其中, 和前面一样, d 是非相干光源 A 和 B 之间的横向间距, z_0 和 z 分别是双孔和光电探测器的纵向坐标, $z - z_0$ 是双孔和光电探测器之间的纵向距离.

因此, 归一化二阶空间关联函数为具有 50% 可见度的双光子干涉图案:

$$g^{(2)} \simeq 1 + \cos^2 \left[\frac{\pi d(x_1 - x_2)}{\lambda(z - z_0)}\right] \tag{13.1.10}$$

考虑光源的有限尺寸, 干涉–衍射图案应该为:

$$g^{(2)} = 1 + \mathrm{sinc}^2 \left[\frac{\pi b(x_1 - x_2)}{\lambda(z - z_0)}\right] \cos^2 \left[\frac{\pi d(x_1 - x_2)}{\lambda(z - z_0)}\right] \tag{13.1.11}$$

其中, b 是一维光源 A 和 B 的宽度, d 是光源 A 和 B 之间的间隔.

上述结果已经被实验所证实. 2004 年, 作者和 Scarcelli 等人成功地观察到两个独立混沌光源的双光子干涉. 实验装置如图 13.1.2 所示.

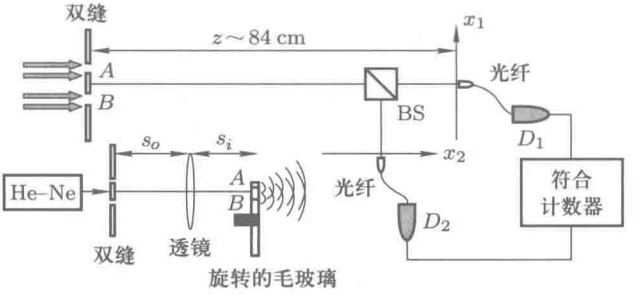


图 13.1.2 作者和 Scarcelli 等人的双光子干涉实验的示意图. 实验中, D_1 和 D_2 的单光子计数是看不到一阶干涉的, 也即 A 和 B 处的场之间是不相干的, 满足 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_A, t_A; \boldsymbol{r}_B, t_B) = 0$. 那么 D_1 和 D_2 的符合计数会观察到干涉吗?

非相干光源 A 和 B 用旋转的毛玻璃和连续的 He-Ne 激光来模拟. He-Ne 激光先照射到一个双缝上, 然后用一个凸透镜将双缝成像到旋转的毛玻璃上. 在远场, 两个光纤头对着弱的点热光源 A 和 B 进行横向扫描, 光纤的另一头则各自耦合到光子探测器中. 在光纤头扫描过程中, 记录两个探测器 D_1 和 D_2 的单光子计数率和符合计数率. 测量中, x_1 和 x_2 总是反向同步移动, 即 $x_1 = -x_2$. 在这样的实验条件下, 会发现有趣的结果: 干涉–衍射图案缩短为标准的 He-Ne 光干涉–衍射图案的一半, 而干涉图案调制速度增加了一倍, 就好像照明波长是 He-Ne 激光的一半. 测量到的双光子干涉–衍射图案如图 13.1.3 中的上图所示.

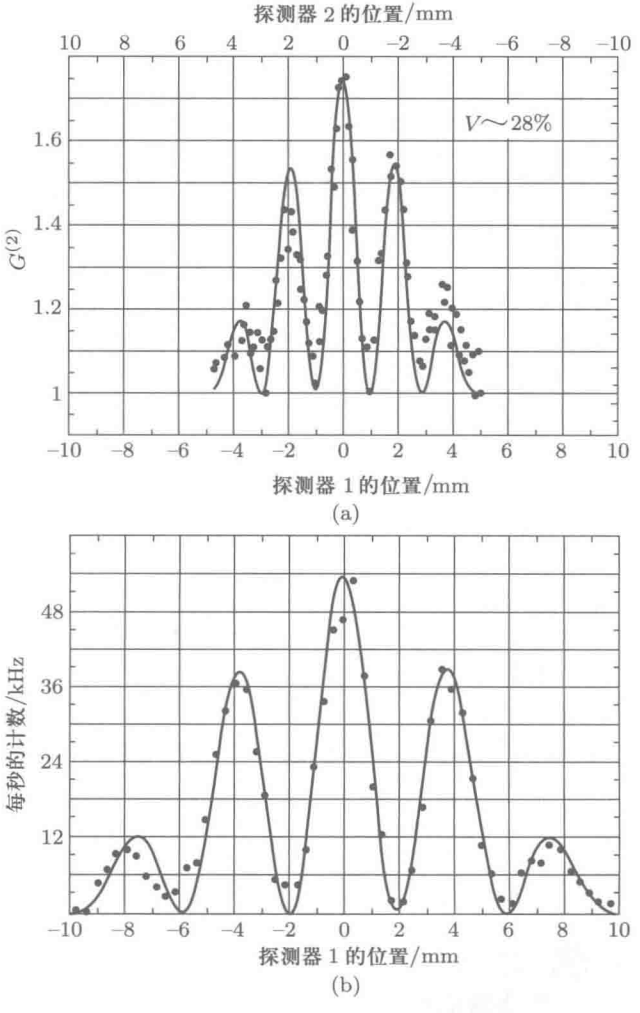


图 13.1.3 (a) 归一化的二阶干涉–衍射图案随着探测器位置的变化. 测量中, x_1 和 x_2 总是反向同步变化的. (b)632nm He-Ne 激光的一阶干涉–衍射图案.

为了方便对比, 图 13.1.3 的下图给出了 He-Ne 光照明时的一阶干涉–衍射图案. 在图 13.1.3 中, 实线代表 13.1.11 式的拟合曲线. 图案的可见度大约 $\sim(28\pm1)\%$. 测量中, D_1 和 D_2 的单光子计数率在整个扫描区域中都是常数, 如图 13.1.4 所示, 这表明场 A 和场 B 之间的一阶互相干度为零.

测量到的干涉有三部分贡献: $G^{(2)}_{AA}$, $G^{(2)}_{BB}$, $G^{(2)}_{AB}$ 和 $G^{(2)}_{BA}$. $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 可以单独计算并且可以通过挡掉另外一个光源分别进行测量, 即挡掉 A 光源测量 $G^{(2)}_{BB}$ 或挡掉 B 光源测量 $G^{(2)}_{AA}$. $G^{(2)}_{AB}+G^{(2)}_{BA}$ 的净贡献, 即非相干

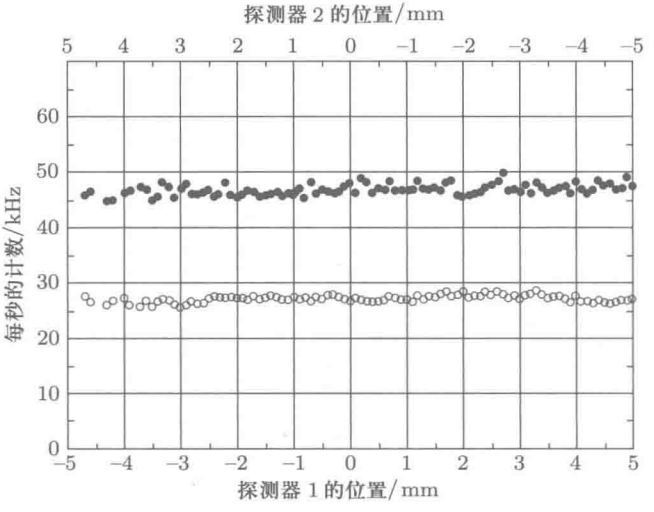


图 13.1.4 单个探测器的计数率.

光源 A 和 B 之间的双光子干涉效应, 是在总的干涉强度中剔除掉 $G_{AA}^{(2)}$ 和 $G_{BB}^{(2)}$. 实际上, 在作者和 Scarcelli 等人的实验中, 剔除 $G_{AA}^{(2)}$ 和 $G_{BB}^{(2)}$ 后, 干涉可见度几乎可以达到 100%.

量子理论认为, 观测到的干涉是两个不同但是不可区分的双光子振幅叠加的结果, 对应 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 处产生联合光电探测事件的两种途径. 如果我们把 $G_{12}^{(2)}$ 写成如下的形式,

$$G_{12}^{(2)} = \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle + \langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle \tag{13.1.12}$$

显然, $(G_{AB}^{(2)} + G_{BA}^{(2)})$ 与 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ 相对应. 如果这个实验直接测量 D_1 和 D_2 观察到的光子数涨落的统计关联, 我们应该得到如下的杨氏干涉–衍射条纹:

$$\begin{aligned} &\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = G_{AB}^{(2)} + G_{BA}^{(2)} \\ &= G_0 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi b (x_1 - x_2)}{\lambda (z - z_0)} \right] \cos^2 \left[\frac{\pi d (x_1 - x_2)}{\lambda (z - z_0)} \right] \end{aligned} \tag{13.1.13}$$

其干涉可见度应该可以达到 100%.

经典理论把非平庸的二阶关联表达为光强涨落的统计关联,

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_1 \rangle + \langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle \tag{13.1.14}$$

从形式上看, (13.1.14) 式与 (13.1.12) 式几乎一样. 其实, 它们之间有一个不可忽略的不同之处: 经典理论中, $\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle$ 必须大于零, 而量子理论中

$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ 可以大于零也可以小于零. 这一点, 我们在前面章节中已经讨论过. 下一节的实验将把它们区分开来.

13.2 非相干混沌热光的双光子反关联

时间 HBT 干涉仪中, 对于时间上随机分布的混沌热光, 在它的相干时间内被两个独立光电探测器联合测量到的概率会提高一倍. 在空间 HBT 干涉中, 对于空间上随机分布的混沌热光, 在热辐射的空间相干的一小块横向区域内, 两个点探测器捕获到光子的概率提高一倍. 热光用如下非平庸的时间和空间关联来表征:

$$G^{(2)}(\tau_A, \tau_B) \sim I_0^2 \left\{ 1 + \mathrm{sinc}^2 \left[\frac{\pi \Delta\omega (\tau_A - \tau_B)}{c} \right] \right\} \tag{13.2.1}$$

和

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_A, \boldsymbol{\rho}_B) \sim I_0^2 \left\{ 1 + \mathrm{somb}^2 \left[\frac{\pi \Delta\theta |\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B|}{\lambda} \right] \right\} \tag{13.2.2}$$

其中 sinc 函数和 sombrero 函数定义为:

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{和} \quad \mathrm{somb}(x) = \frac{2J_1(x)}{x},$$

式中 $\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数, $\tau_A = t_A - z_A/c$ 和 $\tau_B = t_B - z_B/c$ 是两个光电探测事件的时间坐标, (t_j 和 z_j, $j = A, B$ 是光探测事件的触发时间和纵向坐标, $\Delta\omega$ 是热辐射的谱线宽度, $\boldsymbol{\rho}_A$ 和 $\boldsymbol{\rho}_B$ 两个光电探测器的横向坐标, $\Delta\theta$ 是远场热光源的张角大小, λ 是辐射波长.

图 13.2.1 中所示的现代 HBT 干涉仪可以测量和检验 13.2.1 式和 13.2.2 式, 无论作远场测量还是作近场测量.

近年来发现: 对于空间张角较大的近场热光源, 同样可以观察到类似于远场 HBT 光强干涉仪的现象. 其空间关联甚至可以限制在一个 "点" 上, 这意味着随机配对的光子对之间具有典型的非局域的点对点的关联. 热光的点对点关联已经被用来产生鬼像, 并且是一种无透镜的配置. 由于热光的随机性, 热光通常被称为高斯光. 热光源中, 从大量的原子跃迁产生的辐射都是独立的. 每个原子跃迁独立而随机地产生光子. 所以毋庸置疑的是: 热辐射在时空中的传播是完全随机的[31].

[31] 千万不要将热辐射的传播和激光束的传播相混淆. 激光是相干传播的. 横向尺寸较大的激光在传播一段距离后, 由于衍射效应, 虽然横向尺寸会稍有增加, 但是仍然保持其空间相干性. 而热光是非相干的传播, 其传播行为和激光差别很大. 每一个子场独立传播, 每一个点子源产生的子场的自身衍射使得每一个子场呈 "发散" 状态, 向近于 2π 方向传播. 每一个子场在无论远场还是菲涅耳近场的观测面上呈随机分布, 绝没有成为 "一束" 光或 "聚焦" 于一点的可能, 除非采用成像凸透镜把每一个子源成像到观测面上.

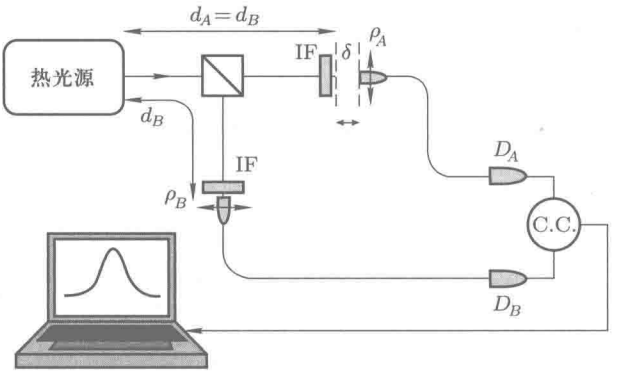


图 13.2.1 现代 HBT 干涉仪的示意图, 它通过纵向或横向扫描光纤头来测量热辐射的时间和空间关联. 两个光纤耦合的光子探测器 D_A 和 D_B 以及一个符合电路 (C.C.) 构成一个符合计数器. 辐射的谱宽由 IF(干涉滤波片) 决定, 为 $\Delta\omega$. 热光源的角直径为 $\Delta\theta$.

那么随机分布的光子究竟为什么会有这样一个关联呢? 需要注意的是: 和纠缠光子对不同, 从热光源中符合探测到的光子对只是偶然落入符合时间窗口的两个独立光子. 尽管从唯象理论的角度去看, 经典理论和量子理论对 HBT 效应都给出了正确的解答, 但是对于热光的非平庸相关性源于何处却有不同的观点. 经典理论从宏观统计角度出发, 认为热光的非平庸相关性源于光强涨落的统计关联. 量子力学则从微观量子振幅相长干涉或相消干涉的角度出发, 指出热光的非平庸关联是双光子干涉的结果. 我们在前面多次提到, 经典理论无法解释热光场的 "反关联" 现象, 而 "反关联" 在量子理论中不过是双光子相消干涉的简单结果.

下面我们做一个简单分析, 对比标准经典理论和量子理论对热光二阶相干函数计算的不同.

(1) 标准经典理论对高斯场二阶关联的计算:

经典理论认为: 热光的非平庸二阶相关函数是高斯场二阶统计的结果. 两个独立的点探测器 D_A 和 D_B 符合测量的是时空点 $(\boldsymbol{r}_A, t_A)$ 和 $(\boldsymbol{r}_B, t_B)$ 处光强的统计关联.

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_A, t_A; \boldsymbol{r}_B, t_B) = \langle I(\boldsymbol{r}_A, t_A)\, I(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle \\
&= \langle E^*(\boldsymbol{r}_A, t_A) E(\boldsymbol{r}_A, t_A)\, E^*(\boldsymbol{r}_B, t_B) E(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle \\
&= \Gamma^{(1)}_{AA}\Gamma^{(1)}_{BB} + \Gamma^{(1)}_{AB}\Gamma^{(1)}_{BA} \\
&= \langle I(\boldsymbol{r}_A, t_A)\rangle\langle I(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle + \langle \Delta I(\boldsymbol{r}_A, t_A)\, \Delta I(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle
\end{aligned} \tag{13.2.3}$$

其中

$$\Gamma_{AA}^{(1)} = \langle E^*(\boldsymbol{r}_A, t_A)E(\boldsymbol{r}_A, t_A)\rangle,$$
$$\Gamma_{BB}^{(1)} = \langle E^*(\boldsymbol{r}_B, t_B)E(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle,$$
$$\Gamma_{AB}^{(1)} = \Gamma_{BA}^{*(1)} = \langle E^*(\boldsymbol{r}_A, t_A)E(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle$$

在 (13.2.3) 式中, 我们采用了标准的经典理论推导, 并用到了高斯光的统计特性:

$$\begin{aligned}&\langle X_1\, X_2\, X_3\, X_4\rangle\\ &= \langle X_1X_2\rangle\langle X_3X_4\rangle + \langle X_1X_3\rangle\langle X_2X_4\rangle + \langle X_1X_4\rangle\langle X_2X_3\rangle\end{aligned}$$

非平庸的 HBT 关联来自 (13.2.3) 式的第二项, 它被视作强度涨落的统计关联 $\langle \Delta I(\boldsymbol{r}_A, t_A)\Delta I(\boldsymbol{r}_B, t_B)\rangle$.

(2) 量子理论对热光场二阶相干的计算:

在光的量子理论中, 两个独立的点探测器 D_A 和 D_B 之间的联合光电探测给出的是在时空坐标 $(\boldsymbol{r}_A, t_A)$ 和 $(\boldsymbol{r}_B, t_B)$ 联合观测到两个光子的概率. 对于纠缠光子对或者偶然落入符合窗口内随机配对的光子, 如果产生联合光电测量事件的方式不止一种的话, 那么进行概率计算时需要将这些概率幅进行线性叠加. 热光的非平庸关联 "峰" 是这些量子概率幅相长叠加的结果之一

$$\begin{aligned}&G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\\ &\simeq \sum_j P_j \left|\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\right|^2\\ &= \sum_{m,n} P_{mn}\left|\mathcal{A}_{m_1n_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) + \mathcal{A}_{n_1m_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\right|^2\}\end{aligned} \tag{13.2.4}$$

其中, $\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 是测量到的第 j 对光子的双光子有效波函数. $\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 包含两个振幅 $\mathcal{A}_{m_1n_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ 和 $\mathcal{A}_{n_1m_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$, 对应两个不同但又不可区分的产生第 j 个光电测量事件的方式, 探测到的光子对是由 m 号原子跃迁产生的光子 m 以及 n 号原子跃迁产生的光子 n 随机配对而成. 进一步, 如果两个振幅是相消叠加的, 那么也可能会观测到反关联的 "谷"

$$\begin{aligned}&G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\\ &\simeq \sum_j P_j \left|\Psi_j(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\right|^2\\ &= \sum_{m,n} P_{mn}\left|\mathcal{A}_{m_1n_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) - \mathcal{A}_{n_1m_2}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)\right|^2\}\end{aligned} \tag{13.2.5}$$

量子力学从微观量子振幅相长干涉或相消干涉的角度出发, 指出无论是非平庸关联的 "峰" 还是反关联的 "谷" 都是双光子干涉的结果.

实现 (13.2.5) 式的 "反关联", 从数学角度上讲, 只需要把 (13.2.4) 式中的 "+" 号变换为 (13.2.5) 式中的 "−" 号. 这个变换可以借助一个幺正变换来实现, 我们知道, 这类幺正变换可以用一个简单的光分束器来完成. 然而不幸的是, 我们花了半个世纪多的时间才意识到 "反关联" 实验的可能性. 50 年来, 我们一直被误导, 认为热光的非平庸相干源于强度涨落的统计关联.

在最近的一系列实验中, 作者和 Chen 等人在对一阶和二阶非相干的混沌热光进行测量时观测到了这种反关联的 "谷". 作者和 Chen 等人的实验装置如图 13.2.2 所示. 这个装置并不是直接测量强度关联 $\langle I(\boldsymbol{r}_A,t_A)I(\boldsymbol{r}_B,t_B)\rangle$, 而是测量在 50/50 光纤分束器 BS_2 的输出端测量 $\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle$. 图 13.2.2 中的 BS2 在两个振幅之间引入了 "−" 号, 这样就得到如 (13.2.5) 式的相消叠加. 如果两个输入光纤头 A 和 B 放置在热光场的纵向相干时间和横向相干面积以内, 即 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_A,t_A;\boldsymbol{r}_B,t_B)\neq 0$, 这个装置等同于一个 Mach-Zehnder 干涉仪. 当光纤头 A 沿着纵轴扫描时, D_1 和 D_2 都会观测到随光延迟 δ 变化的一阶干涉. 因此, D_1 和 D_2 的联合光电测量给出的干涉可以分解为两个一阶干涉的乘积. 然而, 在这个实验中, 我们将光纤头 A 移出横向相干面积之外, 使得 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_A,t_A;\boldsymbol{r}_B,t_B)=0$, 在这个条件下, 辐射 A 和 B 变成一阶和二阶都不相干, 此时, 即使是单次曝光或瞬间测量, 都不会观测到一阶干涉. 注意, 这种由大量随机空间分布子光源构成的热光场, 不同于由两个独立子源, 包括两台独立激光器构成的光场. 后者, 当单次曝光或瞬间测量的时间小于光场的相干时间时, 可以观测到 "瞬时" 一阶干涉. 前者, 即用于此实验的光源, 包括了大量相位各异的 "瞬时" 一阶干涉条纹, 每一个独立干涉条纹由一对独立子源发出的独立子场产生. 此时, 光探测器无法分辨出任何一个, 只能全部接受. 大量相位各异的 "瞬时" 一阶干涉条纹相加的结果自然是常数. 这个结果毫不奇怪. 我们前面讨论过, 对两个独立子源, 或两个独立激光产生的 "瞬时" 一阶干涉条纹作时间积分, 由于不同时间干涉条纹有不同的相位, 积分的结果自然是常数.

当辐射 A 和 B 二阶不相干, $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_A,t_A;\boldsymbol{r}_B,t_B)=$ 常数, 从经典强度涨落的统计关联理论来看, 上述条件意味着 $\langle\Delta I_A\Delta I_B\rangle=0$. 如果, 热光的二阶非平庸相干性的确源于光强涨落的关联, 那么, 我们绝对没有观察到热光的二阶非平庸相干性的可能, 更不要说 "反关联". 这样的话, 非相干辐射 A 和 B 通过一个简单的分束器 BS2 后, 我们还能看到非平庸的

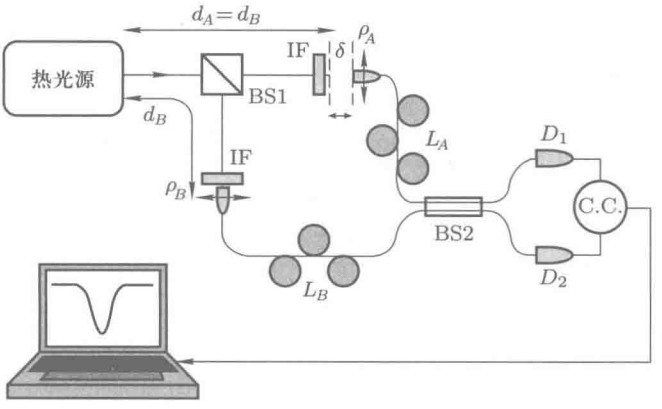


图 13.2.2 作者和 Chen 等人对一阶、二阶非相干混沌热光进行反关联测量的实验装置示意图 (2009).

关联吗? 需要强调的是, 简单的分束器是不能将输入场的强度涨落关联从 "无关联" 变到 "反关联" 的.

作者和 Chen 等人的测量得到了令人惊讶的结果. 虽然 D_1 和 D_2 的单路计数率是常数, 但是它们的符合计数率却呈现出一个反关联的 "谷", 它是光学延迟 δ 和干涉滤波片 IF 的带宽的函数. 图 13.2.3 给出了两类典型的反关联函数, 它们对应混沌热光场的两种不同线宽.

该实验的细节如下. (1) 光源: 光源是一个在 19 世纪 60 年代发展起来并被广泛用于 HBT 关联测量的标准的赝热光源. 光源由一个连续的 780 nm 钛宝石锁模激光器和一个快速旋转的毛玻璃组成. 激光器的脉冲宽度为 ~200fs, 重复频率为 78 MHz. 线偏振的激光被扩束到 4.5mm 后入射到毛玻璃上. 激光被毛玻璃散射后弥散开来, 这样就可以模拟一个近场的混沌热辐射源: 包含大量独立的点子源, 每个子源具有随机分布的相对相位.

(2) 干涉仪: 50/50 的分束器 (BS_1) 将混沌热光分为透射和反射两路, 然后分别耦合进两根全同的保偏单模光纤 A 和 B. 光纤头离毛玻璃 ~ 200mm, 即 $d_A = d_B \sim 200$mm. 此时, 相对光纤头而言, 光源角大小 $\Delta\theta$ 为 ~ 22.5 mrad (1.29°), 满足菲涅耳近场条件. 在两个光纤头 A 和 B 之前放置了两个相同的窄带滤波片 (IF). 用步进马达对输入光纤头进行纵向和横向扫描. 两根光纤的输出端可以直接耦合进光子探测器 D_1 和 D_2 进行近场 HBT 关联测量, 或者和光纤 50/50 单模分束器的两个输入端相连来进行反关联测量.

(3) 测量: 测量分为两步. 第一步是确认光源是混沌热光源. 我们通

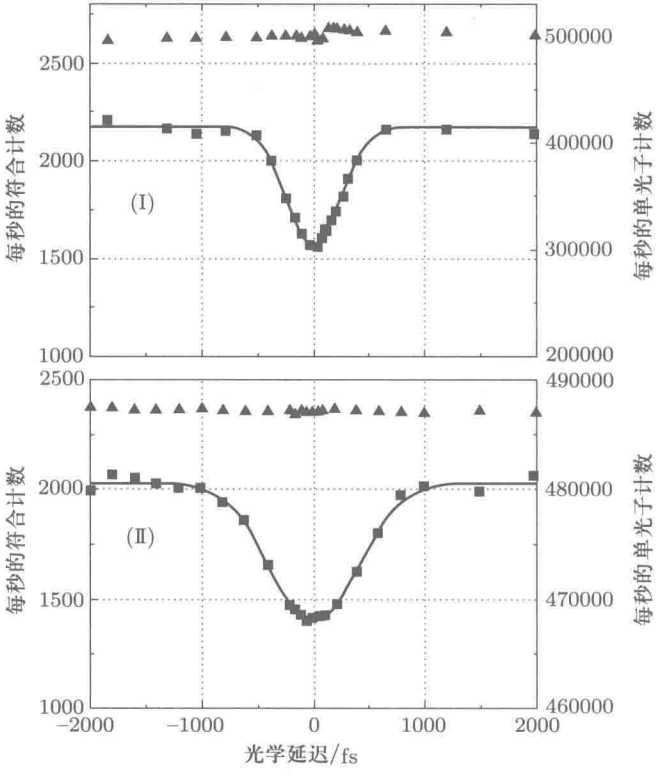


图 13.2.3 对不同谱宽的热光观测到的典型的反关联函数. (I): $\tau_c \sim 345$fs (II): $\tau_c \sim 541$fs. "谷" 的时间宽度由滤波片 (IF) 的带宽决定. D_1 和 D_2 的单路计数率在扫描 δ 的过程中保持常数.

过纵向和横向扫描两个输入光纤头来测量 HBT 时间和空间关联. 测量时, 光纤的输出端直接耦合进 D_A 和 D_B, 如图 13.2.1 所示. 通过检测二阶相干性 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_A, t_A; \boldsymbol{r}_B, t_B)$ 来区分混沌热辐射和激光. 实验上通过记录时空点 $(\boldsymbol{r}_A, t_A)$ 和 $(\boldsymbol{r}_B, t_B)$ 的联合光电探测事件的符合计数率来鉴别. 图 13.2.4 给出了两种二阶关联, 分别对应毛玻璃不转的情形和转速为 1 000 r/min. 该测量给出毛玻璃转速在 1 000 r/min 以上时可以确保得到与热光随机特性相对应的典型的 HBT 关联. 测量中, 我们还将光纤头 A 和 B 横向和纵向位置调整到最大符合计数率的位置, 对应最大的二阶关联. 第二步, 我们将 50/50 光纤分束器 (BS2) 耦合到实验光路里, 如图 13.2.2 所示. 这一测量又分为两步. 首先, 我们让 $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_B$ 并在 $d_A \sim 200$mm 附近纵向扫描输入光纤头 A 来测量一阶干涉. 此时, 在 D_1 和 D_2 的单路计数中会观测到对比度为 $\sim 100\%$ 的一阶干涉条纹. 因为 $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_B$ 时, 两

个输入光纤头位于辐射场的空间相干区域内, 所以我们等效构建了一个 Mach-Zehnder 干涉仪. 然后, 我们横向移动输入光纤头 A, 从 $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_B$ 变到 $|\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B| \gg l_c$, 其中 l_c 是热辐射场的横向相干长度. (在大多数测量中, $|\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B|$ 设定为 $|\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B| \geqslant 40 l_c$.) 我们再在 $d_A \sim 200\text{mm}$ 附近纵向扫描输入光纤头 A. 将 $z = d_A \sim 200\text{mm}$ 和扫描光纤头 A 所在平面之间的延迟标记为 δ, 如图 13.2.2 所示. 实验条件满足了 $G^{(1)}(\boldsymbol{r}_A, t_A; \boldsymbol{r}_B, t_B) = 0$ 和 $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_A, t_A; \boldsymbol{r}_B, t_B) =$ 常数后, 我们就无法看到任何一阶干涉现象. 然而, 图 13.2.3 却给出: D_1 和 D_2 的联合光电测量中能够观察到以延迟 δ 为变量的反关联, 这着实出乎意料. 注意, 在进行 "反关联" 测量时, 实验条件始终满足 $|\boldsymbol{\rho}_A - \boldsymbol{\rho}_B| \sim 40 l_c$.

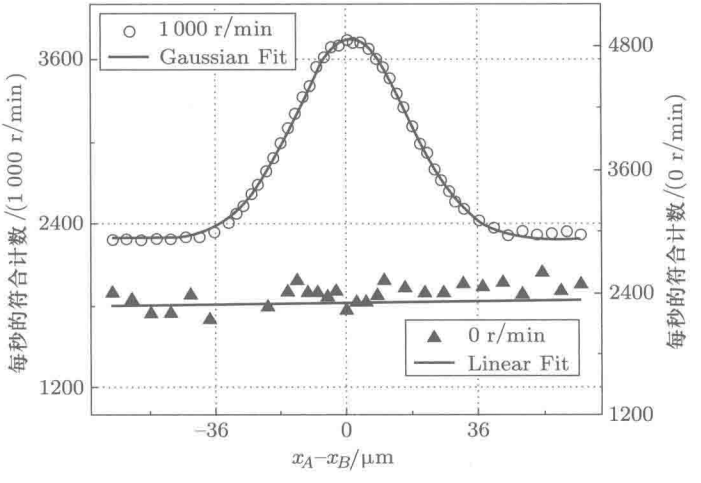


图 13.2.4 毛玻璃不转和转速为 1 000 r/min 时分别测量到的 $G^{(2)}(x_A - x_B)$. 这里, x_A 和 x_B 是 $\boldsymbol{\rho}_A$ 和 $\boldsymbol{\rho}_B$ 的 x 分量, 对应的 y 分量满足 $y_A = y_B$.

下面, 我们给出简单的分析, 这将有助于我们理解这一现象的双光子干涉的本质. 计算基于上一节中 A 和 B 作为独立热光源的简单模型. 和双孔实验类似, 我们将 A 和 B 处理为两个独立的互不相干的点光源, 它们分别在光纤头 A 和 B 处激发两组独立的波包:

$$
\begin{aligned}
|\Psi_m\rangle_A &= \int \mathrm{d}\omega\, f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_{0A_m}}\, \hat{a}_m^{\dagger}(\omega)\, |0\rangle \\
|\Psi_n\rangle_B &= \int \mathrm{d}\omega\, f(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_{0B_n}}\, \hat{b}_n^{\dagger}(\omega)\, |0\rangle
\end{aligned}
\tag{13.2.6}
$$

其中, $f(\omega)$ 是谱线函数, 主要由实验装置中滤波片 (IF) 决定. t_{0A} 和 t_{0B} 代表波包的产生时间.

分析方法和前面一节类似, 我们采用 13.1 节中定义的标记 $G^{(2)}_{AA}$, $G^{(2)}_{BB}$, $G^{(2)}_{AB}$ 和 $G^{(2)}_{BA}$ 来计算非平庸的二阶时间关联函数 $G^{(2)}_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 和 $G^{(2)}_{BA}(z_1,t_1;z_2,t_2)$. $G^{(2)}_{AA}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 和 $G^{(2)}_{BB}(z_1,t_1;z_2,t_2)$ 都会给联合光电探测贡献一个常数, 而常数值是很容易测量的, 一般通过挡住另一个光源测得. 下面我们来计算二阶时间关联函数 $G^{(2)}_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)$, 它包含来自 A 和 B 的两个波包的贡献:

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&\propto \left\langle \langle \hat{E}^{(-)}(z_1,t_1)\hat{E}^{(-)}(z_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(z_1,t_1)\rangle_{\mathrm{QM}}\right\rangle_{\mathrm{Ensemble}}\\
&\simeq \sum_{m<n}\left|\Psi^{(AB)}_{mn}(z_1,t_1;z,t_2)\right|^2
\end{aligned} \tag{13.2.7}$$

和前面一节类似, 将场算符写成如下形式:

$$\begin{aligned}
\hat{E}^{(+)}(z_1,t_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{E}^{(+)}(\tau_{A1})+\hat{E}^{(+)}(\tau_{B1})]\\
\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{E}^{(+)}(\tau_{A2})-\hat{E}^{(+)}(\tau_{B2})]
\end{aligned} \tag{13.2.8}$$

其中 $\tau_{Aj}\equiv t_j-n(z_j-z_A)/c$, $\tau_{Bl}\equiv t_j-n(z_j-z_B)/c$, $j=1,2$, 分别是从探测器 D_j 到输入平面 A 和 B 的光学延迟, n 是光纤折射率. $\hat{E}^{(+)}(z_2,t_2)$ 中的 "$-$" 号由分束器 BS2 引入.

有效波函数 $\Psi^{(AB)}_{mn}(z_1,t_1;z,t_2)$ 包含两个振幅, 它们相消叠加:

$$\Psi^{(AB)}_{mn}(z_1,t_1;z,t_2)=\mathcal{A}_{m_1n_2}(\tau^T_{A1},\tau^T_{B2})-\mathcal{A}_{n_1m_2}(\tau^R_{B1},\tau^R_{A2})\Theta$$

重复上一节的计算, 很容易得到双光子振幅 $\mathcal{A}_{m_1n_2}(\tau^T_{A1},\tau^T_{B2})$ 和 $\mathcal{A}_{n_1m_2}(\tau^R_{B1},\tau^R_{A2})$. 类似的, 我们现在将求和化为 t_{0A} 和 t_{0B} 的积分,

$$\begin{aligned}
&G^{(2)}_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)=G^{(2)}_{BA}(z_1,t_1;z_2,t_2)\\
&\simeq R_0\int \mathrm{d}t_{0A}\,\mathrm{d}t_{0B}\left|\mathcal{A}_{m_1n_2}(\tau^T_{A1},\tau^T_{B2})-\mathcal{A}_{n_1m_2}(\tau^R_{B1},\tau^R_{A2})\right|^2.
\end{aligned} \tag{13.2.9}$$

考察 (13.2.9) 式, 我们发现一个有趣的解: 当 $t_{0A_j}\simeq t_{0B_k}$ 时, 交叉干涉项变为频谱傅里叶变换的模平方

$$\int \mathrm{d}\omega\left|f(\omega)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\delta}\int \mathrm{d}\omega'\left|f(\omega')\right|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\delta}=\left|\mathcal{F}_\delta\{\left|f(\nu)\right|^2\}\right|^2$$

符合计数率呈现出随光学延迟 δ 变化的 "谷",

$$R_{AB}\simeq R_0\int \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\,G^{(2)}_{AB}(z_1,t_1;z_2,t_2)=R_0\left[1-e^{-\delta^2/\tau_c^2}\right] \tag{13.2.10}$$

其中, 我们假设频谱为高斯型 $|f(\nu)|^2$. 实验中, 作者和 Chen 等人是用一个快的脉冲激光来模拟 $t_{0A_j} \simeq t_{0B_k}$ 的条件. 作者和 Chen 等人已经在实验中验证了 (13.2.10) 式. 显然, 此实验证实了 $g^{(2)}(0)$ 可以取小于 1 的值, 即, $g^{(2)}(0) < 1$, 违背了那个著名的经典不等式.

$G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献在实验上可以通过遮挡另一个光源简单的测得. 从 D_1 和 D_2 联合光电测量的符合计数率中扣除这两部分贡献后, 我们发现图 13.2.3 中反关联 "谷" 的可见度变为 $\sim 100\%$. 图 13.2.5 是作者和 Chen 等人实验中观测到的反关联的 "谷". 扣除 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 后, $G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 变为随光学延迟 δ 变化的反关联函数, 可见度达到 $\sim 93\%$. 其实, 作者和 Chen 等人的实验可以直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$, 而不必通过遮挡一个光源来估计没有被遮挡的光源的贡献. 在他们后期的实验中, 作者和 Chen 等人找到了直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ 的实验手段, 并观察到与图 13.2.5 一致的结果.

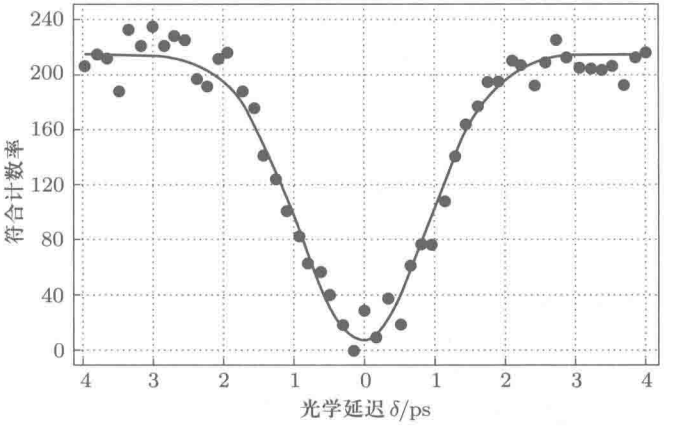


图 13.2.5 测量到的典型的时间反关联函数 $G^{(2)}_{AB}(\delta) + G^{(2)}_{BA}(\delta)$. 可见度为 (93.2±5.1)%. 测量中, 已经从 $G^{(2)}_{AA} + G^{(2)}_{BB} + G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 中扣除了 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献.

有趣的是: 用经典统计关联的计算方法无法得到以上的实验结果. 下面, 给出一个简单的估算, 我们发现经典的高斯场统计关联计算无论如何也得不到 (13.2.10) 式中所示的函数关系.

$$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = \langle I(\boldsymbol{r}_1, t_1) I(\boldsymbol{r}_2, t_2) \rangle \tag{13.2.11}$$
$$= \langle (E^*_{A1} + E^*_{B1})(E_{A1} + E_{B1})(E^*_{A2} - E^*_{B2})(E_{A2} - E_{B2}) \rangle$$

其中 E_{Aj} 和 E_{Bk} 分别代表 $(\boldsymbol{r}_j, t_j)$ 和 $(\boldsymbol{r}_k, t_k)$ 光电探测事件中来自光源 A

和 B 的辐射场. 我们要计算 16 项:

$$\begin{aligned}
&\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\\
=&\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
&-\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{A2}E_{B2}\rangle-\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{B2}E_{A2}\rangle\\
&+\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
&-\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{A2}E_{B2}\rangle-\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{B2}E_{A2}\rangle\\
&+\langle E^*_{A1}E_{B1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{A1}E_{B1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
&-\langle E^*_{A1}E_{B1}E^*_{A2}E_{B2}\rangle-\langle E^*_{A1}E_{B1}E^*_{B2}E_{A2}\rangle\\
&+\langle E^*_{B1}E_{A1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{B1}E_{A1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
&-\langle E^*_{B1}E_{A1}E^*_{A2}E_{B2}\rangle-\langle E^*_{B1}E_{A1}E^*_{B2}E_{A2}\rangle
\end{aligned}\tag{13.2.12}$$

利用高斯场的特性以及 $\langle E^*_A E_B\rangle=0$, 不难发现 (13.2.12) 式中有 10 项为零, 只有 6 项可能不为零, 贡献到 $\langle I_1I_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
&\langle I(\boldsymbol{r}_1,t_1)I(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle\\
=&\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
&+\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle+\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle\\
&-\langle E^*_{A1}E_{B1}E^*_{B2}E_{A2}\rangle-\langle E^*_{B1}E_{A1}E^*_{A2}E_{B2}\rangle.
\end{aligned}\tag{13.2.13}$$

(13.2.13) 式中的前面两项对应两套 HBT 关联, 和分析 1 中的类似:

$$\begin{aligned}
&\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{A2}E_{A2}\rangle\\
=&\langle E^*_{A1}E_{A1}\rangle\langle E^*_{A2}E_{A2}\rangle+\langle E^*_{A1}E_{A2}\rangle\langle E^*_{A2}E_{A1}\rangle\\
=&\Gamma^{(1)}_{A11}\Gamma^{(1)}_{A22}+\Gamma^{(1)}_{A12}\Gamma^{(1)}_{A21}
\end{aligned}\tag{13.2.14}$$

$$\begin{aligned}
&\langle E^*_{B1}E_{B1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
=&\langle E^*_{B1}E_{B1}\rangle\langle E^*_{B2}E_{B2}\rangle+\langle E^*_{B1}E_{B2}\rangle\langle E^*_{B2}E_{B1}\rangle\\
=&\Gamma^{(1)}_{B11}\Gamma^{(1)}_{B22}+\Gamma^{(1)}_{B12}\Gamma^{(1)}_{B21}
\end{aligned}\tag{13.2.15}$$

很显然: 这两项不能产生以 δ 为变量的反关联.

(13.2.13) 式中后面两项是平均光强的乘积, 也不能产生以 δ 为变量的反关联.

$$\begin{aligned}
&\langle E^*_{A1}E_{A1}E^*_{B2}E_{B2}\rangle\\
=&\langle E^*_{A1}E_{A1}\rangle\langle E^*_{B2}E_{B2}\rangle=\Gamma^{(1)}_{A11}\Gamma^{(1)}_{B22}
\end{aligned}\tag{13.2.16}$$

$$\begin{aligned}&\langle E_{B1}^{*}E_{B1}E_{A2}^{*}E_{A2}\rangle\\&=\langle E_{B1}^{*}E_{B1}\rangle\langle E_{A2}^{*}E_{A2}\rangle=\Gamma_{B11}^{(1)}\Gamma_{A22}^{(1)}\end{aligned}\tag{13.2.17}$$

最后两项 "交叉项" 可能贡献非零值, 产生 "反关联", 然而, 它们都不是光学延迟 δ 的函数.

$$\begin{aligned}&\langle E_{A1}^{*}E_{B1}E_{B2}^{*}E_{A2}\rangle\\&=\langle E_{A1}^{*}E_{A2}\rangle\langle E_{B2}^{*}E_{B1}\rangle=\Gamma_{A12}^{(1)}\Gamma_{B21}^{(1)}\end{aligned}\tag{13.2.18}$$

$$\begin{aligned}&\langle E_{B1}^{*}E_{A1}E_{A2}^{*}E_{B2}\rangle\\&=\langle E_{B1}^{*}E_{B2}\rangle\langle E_{A2}^{*}E_{A1}\rangle=\Gamma_{B12}^{(1)}\Gamma_{A21}^{(1)}\end{aligned}\tag{13.2.19}$$

13.3 非相干正交偏振混沌热光的双光子干涉

在这一节, 我们通过一个简单的实验来讨论正交偏振的非相干混沌热光的双光子干涉, 实验示意图如图 13.3.1 所示. 实验装置和历史上的 Shih-Alley 双光子偏振干涉仪类似, 只是将纠缠光子对换成了正交偏振的非相干混沌热光. 如果在 A 和 B 点的输入辐射场是一阶相干的, 这个装置等同于偏振 Mach-Zehnder 干涉仪. D_1 和 D_2 会观测到一阶干涉, 因此, D_1 和 D_2 的联合光电测量会输出干涉图案, 是两个一阶干涉的乘积. 为了避免发生这种平庸现象, 我们让 A 和 B 互不相干. 制备非相干的混沌热辐射 A 和 B 的方法和前面作者和 Chen 等人的实验相同, 即将光纤头 A 横向移出混沌热光场的近场相干区域, 这在前面一节已经详细描述过. 在这个实验中, 大多数的测量条件满足 $|\bar{\rho}_A-\bar{\rho}_B|\geqslant 40l_c$. 毫无疑问, 我们将失去一阶时间相干性. 经典光学认为, 偏振测量也应该是平庸的结果. 根据 Malus' 定律, 独立的 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 偏振会随机透过 A_1 和 A_2. 对于任意起偏方向, D_1 和 D_2 测到的总强度分别为 $\sin^2\theta_j+\cos^2\theta_j=1$, $j=1,2$, 问题又回到二阶关联测量. 当 $\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{r}_A,t_A;\boldsymbol{r}_B,t_B)=$ 常数时, 应该不会观测到强度涨落的 HBT 类型关联, 即 $\langle\Delta I_A\Delta I_B\rangle=0$. 那么 D_1 和 D_2 的联合光电测量我们能看到什么呢? 我们能观测到时间或偏振关联吗?

然而, 利用同一套实验装置, 作者和 Chen 等人的测量却给出了两个让人惊讶的结果.

(1) D_1 和 D_2 联合光电探测的符合计数率呈现出 "意料之外" 的关联 "谷" 和关联 "峰", 它们是图 13.3.1 中标示的光学延迟 δ 的函数. 实验条件分别是: A_1 和 A_2 的起偏方向为 $\theta_1=\theta_2=45°$ 和 $\theta_1=45°$、$\theta_2=135°$. 图 13.3.2 给出了作者和 Chen 等人测得的典型的反关联 "谷" 和关联 "峰". 和前面一节的 "反关联" 实验类似, 如果我们从 $G_{AA}^{(2)}+G_{BB}^{(2)}+G_{AB}^{(2)}+G_{BA}^{(2)}$ 中

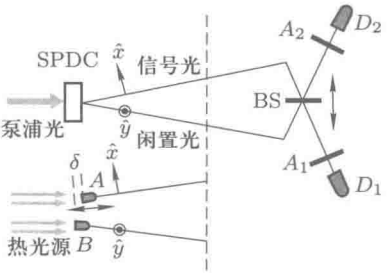


图 13.3.1 典型的正交偏振非相干混沌热光的双光子干涉仪示意图. 实验配置和历史上的 Shih-Alley 正交偏振干涉仪基本相同, 只不过光源换成了混沌热光, 而不是纠缠光子对. 非相干的混沌热辐射 A 和 B 的制备方法和 13.2 节一样.

扣除可测量的 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$, 或直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$, $G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 的净贡献给出以光学延迟 δ 为变量的 $\sim 100\%$ 对比度的 "谷". 注意, 在以上描述中, 我们采用了在 13.1 节以及 13.2 节中定义的标记 $G^{(2)}_{AA}$, $G^{(2)}_{BB}$, $G^{(2)}_{AB}$ 和 $G^{(2)}_{BA}$.

(2) 在 $\delta = 0$ 时观测到贝尔偏振关联, 它是两个检偏器相对角度 $(\theta_1 - \theta_2)$ 的函数,

$$R_c(\theta_1, \theta_2) = R_0 \left[1 + V \sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right] \tag{13.3.1}$$

其中 V 是正弦调制的对比度, $R_c(\theta_1, \theta_2)$ 是 D_1 和 D_2 的符合计数率, 通过调节 A_1 和 A_2 的相对角度 $(\theta_1 - \theta_2)$ 得到.

图 13.3.3 是作者和 Chen 等人观测到的典型的偏振关联. 进一步, 如果我们从总的 $G^{(2)}_{AA} + G^{(2)}_{BB} + G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 中扣除可测量的 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献, 或直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$, 由 $G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 给出的 Bell 偏振关联函数, 即, 随 $(\theta_1 - \theta_2)$ 变化的正弦函数, 对比度达到 $\sim 100\%$.

作者和 Chen 等人的实验装置如图 13.3.4 所示. 一些实验细节描述如下:

(1) 光源: 非相干混沌热光与 "反关联" 实验中使用的一样.

(2) 偏振态: 偏振轴方向 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 由两个 Glen-Thompson 起偏器确定, 它们分别和光纤 A 和 B 耦合在一起. 沿 $\hat{x}$ 轴偏振的 A 场和沿 $\hat{y}$ 轴偏振的 B 场从两端以正入射的方式入射到 50% – 50% 分束器. [32] 分束器对于

[32] 要使 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 偏振都达到 50% – 50% 的分束比, 最好采用近正入射的配置. 这个配置和历史上 Shih 和 Alley 观察 SPDC 产生的正交偏振光子对的贝尔偏振关联的配置一样. 历史上早期的几个 "谷" 实验都是采用 Shih-Alley 双光子干涉仪的这种近正入射配置. 然而实际上, 对于单偏振干涉仪的 "dip" 测量是不需要采用近正入射配置的. 例如, 作者和 Chen 等人用一个简单的 50% – 50% 光纤分束器成功地观察到了单偏振的非相干混沌热光的反关联 "dip".

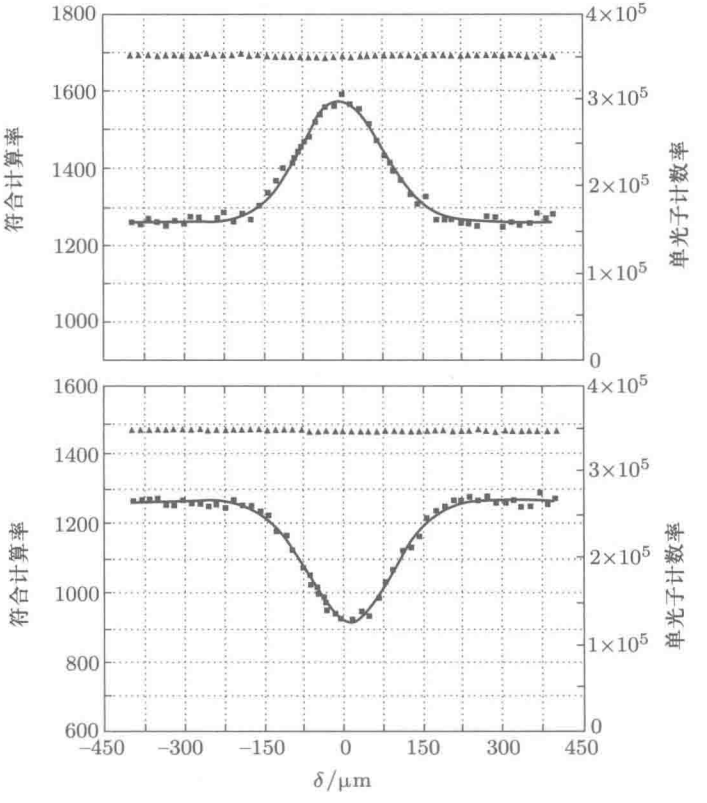


图 13.3.2 作者和 Chen 等人观测到的典型的反关联和关联, 它们随光学延迟 δ 变化, 光学延迟是通过纵向扫描光纤头 A 实现. 当 P_1 和 P_2 偏振沿着 $\theta_1 = \theta_2 = 45°$ 时, 观测到关联 "谷". 当 P_1 和 P_2 偏振分别沿着 $\theta_1 = 45°$ 和 $\theta_2 = 135°$ 时, 观测到关联 "峰".

$\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 偏振都是 50% 的透过率和 50% 的反射率.

(3) 检偏器: 50% − 50% 分束器的两个输出端分别和 Glen-Thompson 起偏器相耦合, 然后接上光子探测器 D_1 和 D_2 进行偏振关联测量. 检偏器可以设置在相对 $\hat{x}$ 轴的任意角度 θ. 上述分析中 $\hat{x}$ 方向定义为 0°.

量子理论对观测结果给出了合理的解释: 观测结果是一个双光子干涉现象, 是不可区分的双光子振幅叠加的结果. 图 13.3.5 描述的是触发 D_1 和 D_2 联合探测事件的四种方式. 图 13.3.5 的 (a) 和 (b) 表示贝尔关联 $G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$: 联合光电探测由来自 A 和 B 的两个光子产生, 它们产生一次联合光电探测事件的方式有两种. (a)$\hat{X}$ 偏振的光子 A 经 δ 延迟后透射到 D_1; 而沿 $\hat{Y}$ 偏振的光子 B 透射到 D_2 上; (b)$\hat{X}$ 偏振的光子 A 经 δ 延迟后再反射到达 D_2; 而 $\hat{Y}$ 偏振光子 B 反射到达 D_1. 这两个振幅通常称为透透 (T-T) 振幅和反反 (R-R) 振幅. 如果光学延迟 δ 在相干时间内, 这

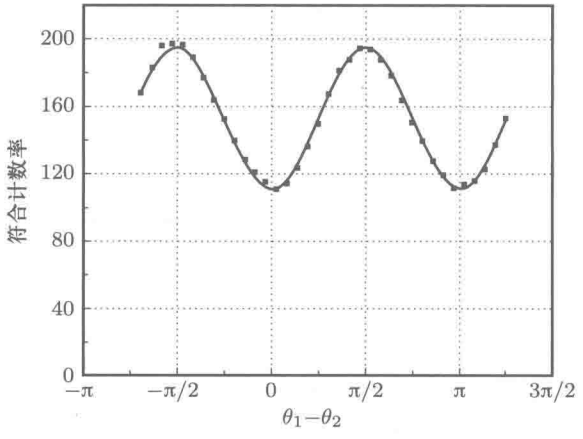


图 13.3.3 作者和 Chen 等人观测到的典型的偏振关联, 它是 $\theta_1-\theta_2$ 的函数. 在这个测量中, θ_2 固定, 与 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 的夹角为 45°. θ_1 进行旋转. 从总的 $G^{(2)}_{AA}+G^{(2)}_{BB}+G^{(2)}_{AB}+G^{(2)}_{BA}$ 中扣除 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献, 或直接测量 $\langle\Delta n_1\Delta n_2\rangle$, 贝尔关联正弦函数的对比度可以达到 $\sim 100\%$.

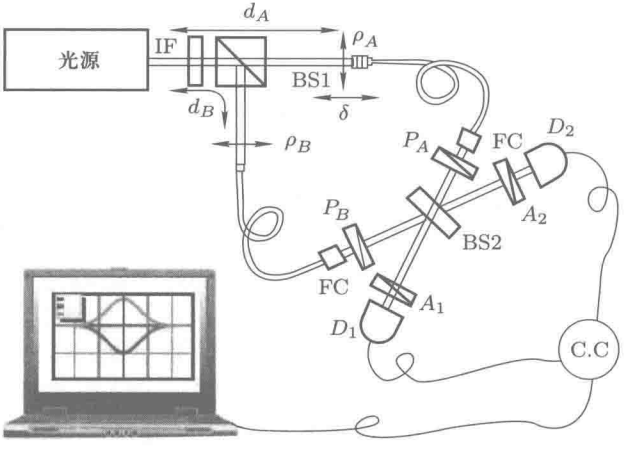


图 13.3.4 作者和 Chen 等人的实验装置示意图. 利用一阶、二阶非相干的正交偏振混沌热光源观察到两个出乎意料的结果: (1) 反关联 "谷" 和关联 "峰"; (2) 贝尔偏振关联. 辐射源 A 和 B 的一阶、二阶非相干的实验条件是通过将光纤头 A 横向移出横向相干面积来保证的. 在这个实验中, 大多数测量都满足 $|\bar{\rho}_A-\bar{\rho}_B|\geqslant 40l_c$.

两种方式是不可区分的. 另外两个可能的方式如图 13.3.5(c) 和 (d) 所示, 分别代表 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$: (c) 两个光子都来自 A, 在分束器处一个透射另一个反射, 导致 D_1 和 D_2 之间的联合光电测量事件; (d) 两个光子都来自 B, 在分束器处一个反射另一个透射, 导致 D_1 和 D_2 之间的联合光电测量事

件. 不难看到, 这两种情形的联合光电探测的符合计数率只不过是常数. 因此, 在下面的计算中我们只考虑 (a) 和 (b) 情形.

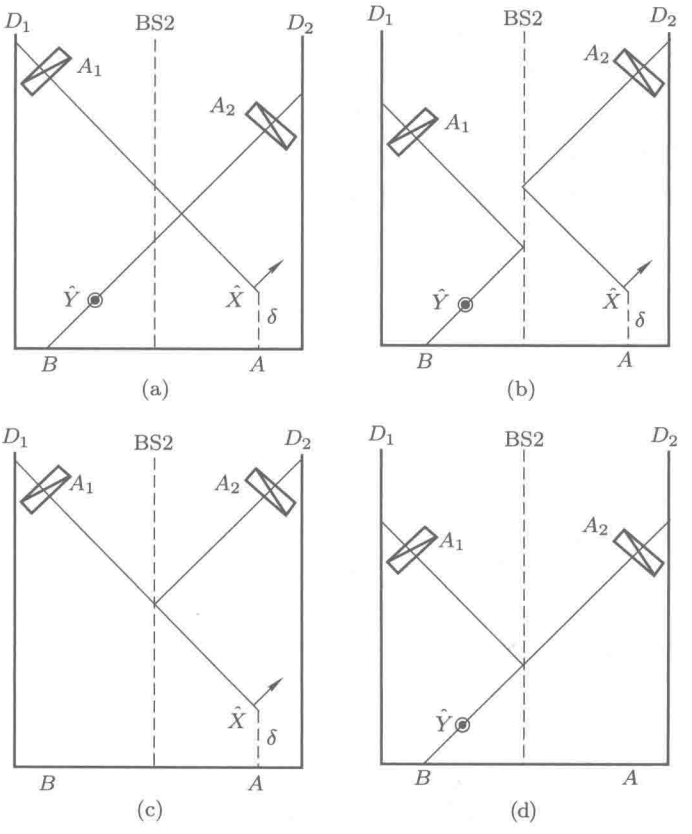


图 13.3.5 实验的费曼图

下面的计算中一部分采用的是历史上对贝尔偏振关联测量的处理方法, 一部分依据的是我们早些对热光的双光子反关联的分析方法. 利用前面章节的结果, 产生非平庸关联 $G^{(2)}_{AB}+G^{(2)}_{BA}$ 的从第 m、n 个原子跃迁产生的子场的态写为

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_{m,n}(t_1,t_2)\rangle \\
&=\int \mathrm{d}\omega f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau^{T}_{A_{m1}}}\hat{x}\,\hat{a}^{\dagger}_{m}(\omega)|0\rangle\int \mathrm{d}\omega' f(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau^{T}_{B_{n2}}}\hat{y}\,\hat{b}^{\dagger}_{n}(\omega')|0\rangle \\
&\quad-\int \mathrm{d}\omega' f(\omega')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'\tau^{R}_{B_1}}\hat{y}\,\hat{b}^{\dagger}_{n}(\omega')|0\rangle\int \mathrm{d}\omega f(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau^{R}_{A_2}}\hat{x}\,\hat{a}^{\dagger}_{m}(\omega)|0\rangle \\
&=|\hat{x}\ \Psi_{A_m}(t_1)\rangle|\hat{y}\ \Psi_{B_n}(t_2)\rangle-|\hat{y}\ \Psi_{B_n}(t_1)\rangle\,|\hat{x}\ \Psi_{A_m}(t_2)\rangle
\end{aligned}
\tag{13.3.2}
$$

这是在薛定谔表象下写出来的态, $\tau^T_{A_{m1}} = (t_1 - t_{0A_m}) - r_{A1}/c$, $\tau^R_{B_{n1}} = (t_1 - t_{0B_n}) - r_{B1}/c$, $\tau^R_{A_{m2}} = (t_2 - t_{0A_m}) - r_{A2}/c$, $\tau^T_{B_{n2}} = (t_2 - t_{0B_n}) - r_{B2}/c$. t_{0A_m} 和 t_{0B_n} 标示第 m、n 个原子跃迁的初始时间. 最终的态是双光子态的相干叠加, 对应在时空点 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 和 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 联合观测到 $\hat{x}$ 偏振的光子 A_m 和 $\hat{y}$ 偏振的光子 B_n 的两种不同但又不可区分的方式: (1) 在 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 观测到 $\hat{x}$ 偏振的光子 A_m 和在 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 点观测到 $\hat{y}$ 偏振的光子 B_n; (2) 在 $(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ 观测到 $\hat{y}$ 偏振的光子 B_n 和在 $(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ 点观测到 $\hat{x}$ 偏振的光子 A_m. 双光子态叠加时有相对相位延迟 π. 下面我们根据双光子有效波函数的概念来计算 $G^{(2)}_{AB}$, 它是光学延迟 δ 和两个检偏器的角度 θ_1、θ_2 的函数:

$$G^{(2)}_{AB}(\theta_1, \theta_2; \delta) \propto \sum_{m<n} \left| (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \cdot \hat{y})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \cdot \hat{x})\, \mathcal{A}_{mn}(\tau^T_{A_{m1}}, \tau^T_{B_{n2}}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \cdot \hat{x})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \cdot \hat{y})\, \mathcal{A}_{nm}(\tau^R_{B_{n1}}, \tau^R_{A_{m2}}) \right|^2 \tag{13.3.3}$$

其中 $\mathcal{A}_{mn}(\tau^T_{A_{m1}}, \tau^T_{B_{n2}})$ 和 $\mathcal{A}_{nm}(\tau^R_{B_{n1}}, \tau^R_{A_{m2}})$ 已经在 13.1 节和 13.2 节中定义过.

由 (13.3.3) 式知道, 对于正交偏振的非相干混沌热光源的双光子干涉仪, 我们能观测到两类双光子干涉效应:

(I) 反关联的 "谷" 和关联 "峰"

在反关联 "谷" 的测量中, 我们设置 $\theta_1 = \theta_2 = 45°$, (13.3.3) 式变为

$$G^{(2)}_{AB}(\delta) \propto \sum_{m<n} \left| \mathcal{A}_{mn}(\tau^T_{A_{m1}}, \tau^T_{B_{n2}}) - \mathcal{A}_{nm}(\tau^R_{B_{n1}}, \tau^R_{A_{m2}}) \right|^2 \tag{13.3.4}$$

从符合计数率 R_{AB} 可以预期反关联 "谷" 是光学延迟 δ 的函数. 计算和 13.2 节的一样.

在关联 "峰" 的测量中, 我们选择 $\theta_1 = 45°$ 和 $\theta_2 = -45°$, (13.3.3) 式变为

$$G^{(2)}_{AB}(\delta) \propto \sum_{m<n} \left| \mathcal{A}_{mn}(\tau^T_{A_{m1}}, \tau^T_{B_{n2}}) + \mathcal{A}_{nm}(\tau^R_{B_{n1}}, \tau^R_{A_{m2}}) \right|^2 \tag{13.3.5}$$

该式和 (13.3.4) 式基本相同, 但是是 "+" 号. 计算 (13.3.5) 式后直接得到: 符合计数率 R_{AB} 呈现出一个关联 "峰". 计算和反关联的 "谷" 类似.

作者和 Chen 等人观测到的反关联 "谷" 和关联 "峰" 见图 13.3.2.

(II) 偏振关联

在这个测量中, 我们让 $\delta = 0$ 使得 $\mathcal{A}_{mn}(\tau^T_{A_{m1}}, \tau^T_{B_{n2}})$ 和 $\mathcal{A}_{nm}(\tau^R_{B_{n1}}, \tau^R_{A_{m2}})$ 完全交叠. 可以将 (13.3.3) 式写为

$$G^{(2)}_{AB}(\theta_1, \theta_2) \propto \left| (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \cdot \hat{y})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \cdot \hat{x}) - (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \cdot \hat{x})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 \cdot \hat{y}) \right|^2$$

$$\propto \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \tag{13.3.6}$$

代表贝尔态测量:

$$|\Psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1\rangle|Y_2\rangle - |Y_1\rangle|X_2\rangle\right]$$

考虑另外两项 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的平庸贡献, 贝尔关联的对比度从 100% 降为 50%,

$$G^{(2)}_{AB}(\theta_1, \theta_2) \propto \left[1 + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)\right] \tag{13.3.7}$$

因为 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献是可以在实验上通过遮挡另一个光源来测得的, 所以原则上, $G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$ 的贡献可以和 $G^{(2)}_{AA}$、$G^{(2)}_{BB}$ 分离开来. 有趣的是, 在作者和 Chen 等人的实验中发现, 当从总的联合光电探测符合计数率 R_c 中扣除 R_{AA} 和 R_{BB} 的贡献后, "谷" 和贝尔偏振关联的可见度会回到 ~100% (见图 13.3.6 和图 13.3.7).

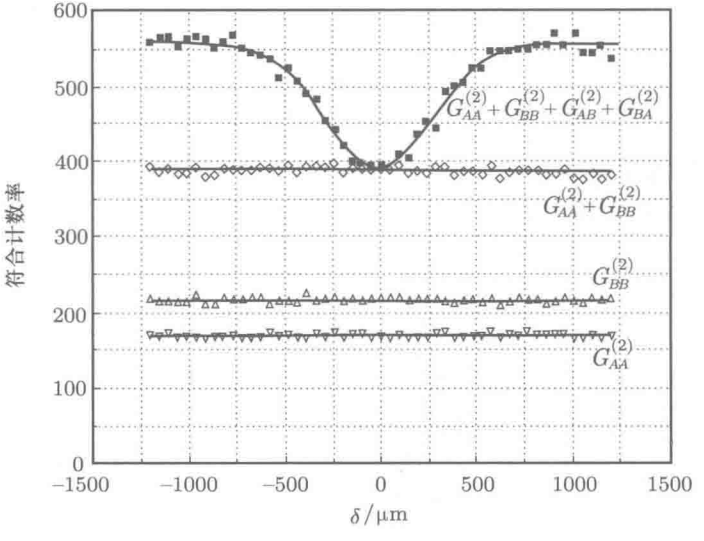


图 13.3.6 观测到的 $G^{(2)}_{AA} + G^{(2)}_{BB} + G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$, 和 $G^{(2)}_{AA}$、$G^{(2)}_{BB}$. $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 通过挡住另外一个光源来测量. 扣除 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的影响后, 观测到的反关联函数的对比度变成 ~100%. 当 A_1 和 A_2 的角度设置为 $\theta_1 = \theta_2 = 45°$ 时, 观测到反关联的 "谷".

其实, 作者和 Chen 等人的实验可以直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = G^{(2)}_{AB} + G^{(2)}_{BA}$, 而不必通过遮挡一个光源来估计没有被遮挡的光源的贡献. 在他们后期的实验中, 作者和 Chen 等人找到了直接测量 $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ 的实验手段, 并观察到与以上实验观察一致的结果.

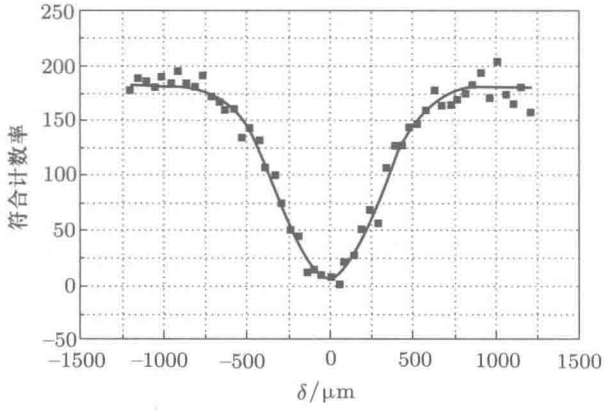


图 13.3.7 在测量中, 数据采集过程中已经从直接测量到的总 $G_{AA}^{(2)}+G_{BB}^{(2)}+G_{AB}^{(2)}+G_{BA}^{(2)}$ 中扣除了 $G_{AA}^{(2)}$ 和 $G_{BB}^{(2)}$. 反关联的对比度接近 100%.

总结一下, 可以说: 通过双光子相消和相长干涉以及贝尔偏振关联, 我们发现从独立的混沌热光源产生的两个波包能够模拟纠缠光子对的行为. 实际上, 对作者和 Chen 等人的实验配置稍作修改后不难构建完备的贝尔态. 当然, 只有满足了几个重要的实验条件后, 随机分布的混沌热光才能模拟纠缠光子对的行为, 这将有助于我们理解纠缠 EPR 态背后的物理意义. 这里有必要再次强调的是: 无论是通过遮挡一个光源来观察另一个光源的贡献, 还是采用直接测量 $\langle\Delta n_1\Delta n_2\rangle$ 的方法, $G_{AB}^{(2)}+G_{BA}^{(2)}$ 的贡献都可以 100% 地观测到. 通过测量 $G_{AB}^{(2)}+G_{BA}^{(2)}$ 得到的双光子关联和纠缠 EPR-Bohm-Bell 态的关联可以说是如出一辙.

现在, 我们不禁要问: 混沌热光的态究竟为什么会产生和纠缠态一样的关联呢? 从反关联实验以及贝尔偏振测量的分析中, 我们找到了以下几点来帮助回答这个问题.

(1) 无论是从随机热光中观察到的二阶干涉, 还是从纠缠态观察到的二阶干涉, 在 "一个光子对与其自身干涉" 这一点上, 两者并无区别. 随机热光态的双光子振幅叠加与纠缠态的双光子振幅叠加具有相同的数学形式和物理内涵 (见图 13.3.8).

(2) 混沌热光的态和纠缠态的测量分别要进行非均匀和均匀的系综平均, 在这点上它们是不同的. 纠缠态是纯态, 所有被测光子对处于相同的双光子态, 联合测量的统计基于均匀系综. 混沌热辐射情形, 被测光子对的态可能各不相同, 联合测量的统计基于非均匀系综. 如果在特定的实验条件下, 我们让混沌热光的态和纠缠态的系综平均非常接近, 那么混沌热光的态可能会产生和纠缠态一样的非平庸关联. 研究上面两个实

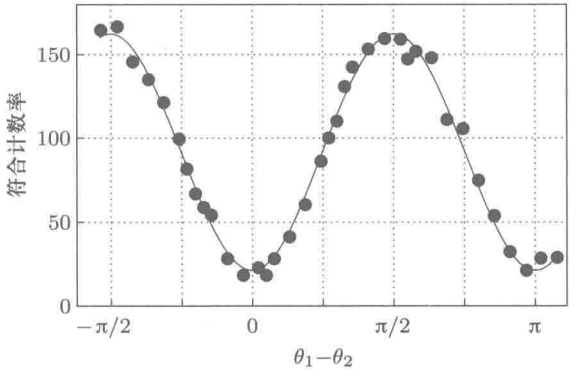


图 13.3.8 扣除通过挡住另外一个光源测到的 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献, 观测到的以 $\theta_1-\theta_2$ 为变量的偏振关联的可见度 $>71\%$, 表明是双光子贝尔态 $\Psi^{(-)}$ 的行为 (在某些理论中, 认为 "量子" 和 "经典" 的界限是 71%.). 在这个测量中, 将 θ_2 固定在相对 $\hat{x}$ 和 $\hat{y}$ 的 45° 角, θ_1 在某个选定角度附近旋转.

验的二阶关联,

$$
\begin{aligned}
&G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)\\
&=\left\langle\langle\,\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,\rangle_{\mathrm{QM}}\right\rangle_{\mathrm{Ensemble}}
\end{aligned}
$$

我们发现混沌热光的态能够给出和纠缠态的系综平均一样的反关联函数或贝尔偏振关联函数, 前提是满足以下两个实验条件: (a) 光子对能够同时产生, 即 $t_{0A}=t_{0B}$; (b) 可以独立地测量 $G^{(2)}_{AB}+G^{(2)}_{BA}$, 或者可以把 $G^{(2)}_{AA}$ 和 $G^{(2)}_{BB}$ 的贡献排除.

这一类比可能会带来新的应用, 可以利用大量光子的大量量子振幅之间的叠加进行量子信息处理. 沿袭上面的原理, 在非相干热光场的 N 阶关联 $G^{(N)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\cdots;\boldsymbol{r}_N,t_N)$ 的测量中, 利用多光子叠加的机制能够模拟大量纠缠光子的行为.

本章小结

在本章中, 我们将双光子干涉的概念推广到混沌热光. 双光子振幅的叠加不只限于纠缠双光子态. 双光子干涉会发生在混沌热光的联合光电测量中, 只要测量的光子对存在两个或两个以上的不同但又不可区分的方式来产生两个独立探测器之间的联合光电探测事件. 当然这种联合探测到的光子对只是偶然落入联合光电测量的符合时间窗口内的两个随机分布的光子.

本章中我们分析了混沌热光的三种典型的双光子干涉实验, 包括双

光子杨氏双缝实验、双光子反关联测量、一阶、二阶非相干的正交偏振混沌热光的双光子干涉和偏振关联实验. 这些实验给混沌热光的双光子干涉理论铺垫了坚实的背景.

有趣的是: 虽然传统上认为混沌热光是经典辐射, 我们发现双光子干涉的概念也适用于 "经典" 热辐射. 量子理论认为, 热辐射的二阶和高阶关联是双光子干涉和多光子干涉的结果. 很清楚的是: 经典的强度涨落统计不能给作者和 Chen 等人的双光子反关联实验以及双光子偏振反关联实验提供解释. 然而多光子干涉理论则提供了精确的计算和预测. 依据量子光学观点, 混沌热光的非平庸二阶和高阶相干性是双光子或 N 光子干涉的结果, 即通过两个或多个独立光电探测器的联合测量, 一对光子和自身发生干涉或一群光子和自身发生干涉的结果.

推荐读物

[1] G. Scarcelli, A. Valencia, and Y.H. Shih, Europhys. Lett. **68**, 618 (2004).

[2] C.O. Alley and Y.H. Shih, *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, ed., M. Namiki, Physical Society of Japan, Tokyo, 47 (1986); Y.H. Shih and C.O. Alley, Phys. Rev. Lett., **61**, 2921, (1988).

[3] H. Chen, S. Karmakar, Z. Xie, and Y.H. Shih, "Two-photon anti-correlation with incoherent chaotic light", to be published.

[4] H. Chen, T. Peng, S. Karmaker, and Y.H. Shih, "Two-photon interference with incoherent orthogonal polarized chaotic light", to be published.

第 14 章

贝尔理论和贝尔不等式测量

在 19 世纪 50 年代早期, 玻姆通过引入两个 1/2 自旋粒子的自旋单态将 1935 的 EPR 态简化成分立的自旋态.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\,\right] \tag{14.0.1}$$

其中右矢 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 分别代表自旋沿着任意方向朝 "上" 和朝 "下" 的态. 对于 EPR-Bohm 态, 任意一个粒子的自旋都是不确定的, 然而, 如果测得其中一个粒子的自旋是沿着某个方向向上, 那么无论两个自旋 1/2 粒子相隔多远, 另一个一定是沿着那个方向向下. 我们在第 4 章中表明, (14.0.1) 式是和自旋取向无关的. EPR-Bohm 态的引入大大简化了量子纠缠的物理图像和讨论[33].

一个更为实际的 EPR-Bohm 态的例子考虑的是光子对的偏振态, 比如正负电子对湮没产生的高能量的自旋为零的光子对. 假设一开始我们有一对自旋反向平行的处于自旋零态的正电子和负电子. 正负电子对不能存活很长时间: 它会在 $\sim 10^{-10}$ s (寿命) 之内变成两个 γ 射线光子. 自旋零态对于所有旋转方向都是对称的. 因此, 光子对可以等概率地向空间任意方向发射出去. 然而, 线动量的守恒定律保证如果在某个特定方向观测到一个光子, 它的孪生光子一定沿着相反方向 (有一定的不确定度 $\Delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_1)\neq 0$). 而角动量守恒将决定光子对的偏振态. 如图 14.0.1 所示, 为了保持自旋为零, 如果光子 1 为右旋圆偏光, 光子 2 一定也是右旋圆偏光. 同样, 如果光子 1 是左旋圆偏光, 那么光子 2 必须也是左旋偏振

[33] 然而, 我们必须清楚的是: 纠缠态不一定只包含 "两项". 实际上, 由 EPR 在 1935 年提出的第一个纠缠态包含了 "无数项".

光. 因此, 正负电子对会等概率地衰变为两个右旋圆偏振光子或者两个左旋圆偏振光子.

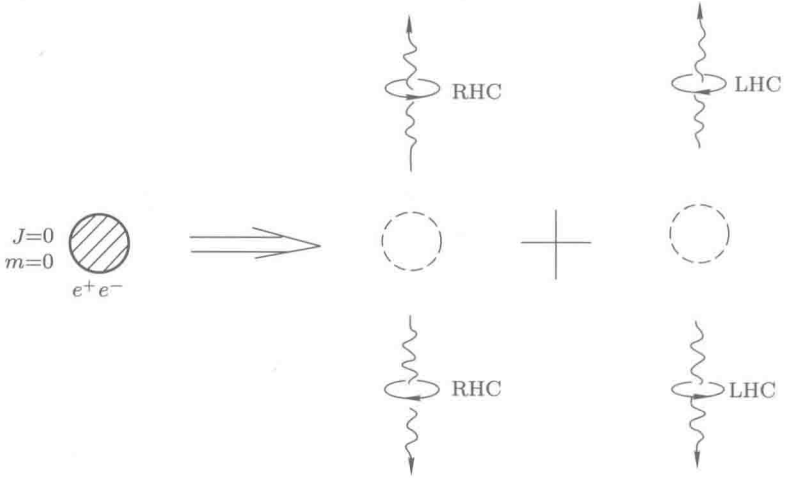


图 14.0.1 正负电子对湮没. 由于角动量守恒, 如果光子 1 是右旋圆偏光, 那么光子 2 一定也是右旋偏振光. 如果光子 1 为左旋圆偏振光, 那么光子 2 一定也是左旋圆偏振光.

这两种可能性之间是什么关系呢? 如果只是两种等概率的不同的衰变方式, 两光子系统可以用密度矩阵来描述,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left[\,|\,R_1\,R_2\,\rangle\langle\,R_1\,R_2\,|\,+\,|\,L_1\,L_2\,\rangle\langle\,L_1\,L_2\,|\,\right] \tag{14.0.2}$$

其中 $|\,R_j\,\rangle$ 和 $|\,L_j\,\rangle$ 分别表示光子 j 的左旋圆偏振态和右旋圆偏振态. 密度矩阵只能给出统计信息: 对于 N 对 γ 射线光子对, 其中 50% 是右旋–右旋圆偏振, 另外 50% 是左旋–左旋圆偏振. 然而, 正负电子对湮没的物理过程并不那么简单. 衰变过程是满足宇称守恒定律的, 即: 正负电子对自旋为零的基态具有奇宇称. 因此, 光子对的态必须保持奇宇称:

$$|\,\Psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\,|\,R_1\,\rangle|\,R_2\,\rangle - |\,L_1\,\rangle|\,L_2\,\rangle\big] \tag{14.0.3}$$

宇称守恒使得双光子态非常特别, 以下我们称其为偶光子态. 偶光子态是具有相对相位 π 的左旋圆偏振态和右旋圆偏振态的一种叠加, 是不可分解的纯态. 数学上, "不可分解" 意味着态不可以写成光子 1 和光子 2 的直积态. 物理上, 它意味着光子 1 和光子 2 不再是独立的了. 两个 γ 光子处于偏振或者自旋的纠缠态.

(14.0.3) 式背后的物理非常有趣. 然而, 要描述这个态中蕴含的有趣物理并不容易. 对于这个态可以很容易得到如下陈述: 光子 1 和 2 的偏振态都不确定: 每一个都以 50% – 50% 的概率处于左旋圆偏振和右旋圆偏振; 然而, 可以通过测量光子 2 的偏振确定的预测光子 1 的偏振: 无论它们相隔多远, 光子 2 被观测到处于哪种圆偏振, 光子 1 就一定处于相同的态. 换句话说, 在一次联合探测事件中, 总是观测到两个左旋或者右旋圆偏振光子.

$$
\begin{aligned}
|\langle R_1\, R_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 &= |\langle L_1\, L_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 = 50\% \\
|\langle R_1\, L_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 &= |\langle L_1\, R_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 = 0
\end{aligned}
\tag{14.0.4}
$$

(14.0.4) 式的结果很有趣, 但是也许并不奇怪. 实际上, 用密度矩阵 (14.0.2) 式描述的光子的统计系综也会给出同样结果. 以上基于圆偏振关联的陈述中, 并没有揭示出纯态 (14.0.3) 式背后真正有趣的物理内涵.

通过简单的偏振关联测量我们能将 (14.0.3) 式的纯态和 (14.0.2) 式的统计混合区分开来吗? 回答是肯定的. 这里测量的不再是圆偏振, 而是线偏振关联. 图 14.0.2 示意性地给出了这样一个实验装置图. 制备的双光子态如 (14.0.3) 式所示, 测量的是线偏振关联. 每个线偏振的检偏器都有两个正交的输出通道. 四个光电探测器放置在两个线偏振检偏器的四个输出端口进行两重符合测量. 有四种可能的组合: D_1 和 D_2, D_1 和 D_2', D_1' 和 D_2 以及 D_1' 和 D_2'. 为了计算方便, 我们采用如图 14.0.2 所示传统的右手坐标系. 假设, 我们选择检偏器沿着 $|X\rangle$ 和 $|Y\rangle$ 方向, 测量 (14.0.3) 式的双光子纯态应给出:

$$
\begin{aligned}
|\langle X_1\, Y_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 &= |\langle Y_1\, X_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 = 50\% \\
|\langle X_1\, X_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 &= |\langle Y_1\, Y_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 = 0
\end{aligned}
\tag{14.0.5}
$$

即在联合探测事件中, 我们将总是观测到两个正交偏振的光子. 然而, (14.0.2) 式统计混合态的测量会给出一个完全随机的结果:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,Y_2\, X_1\rangle\langle X_1\, Y_2\,| &= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,X_2\, Y_1\rangle\langle Y_1\, X_2\,| = 25\% \\
\mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,X_2\, X_1\rangle\langle X_1\, X_2\,| &= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,Y_2\, Y_1\rangle\langle Y_1\, Y_2\,| = 25\%
\end{aligned}
\tag{14.0.6}
$$

进一步, 我们可以将线偏振检偏器旋转到 XY 平面的任意方向如 θ_1 (它的正交通道中 $\bar{\theta}_1 = \pi/2 - \theta$) 和 θ_2 (它的正交通道中 $\bar{\theta}_2 = \pi/2 - \theta$) 进行偏振关联测量, 其中 θ_j 是检偏器和 X 轴的夹角. (14.0.3) 式偶光子纯态的测量给出

$$
|\langle \theta_1\, \theta_2 \,|\, \Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2}\sin^2\varphi \tag{14.0.7}
$$

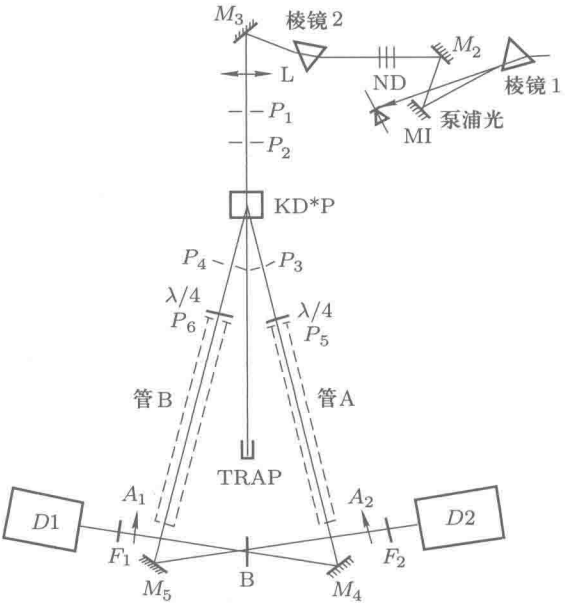


图 14.0.2 1986 年 Shih-Alley 的双光子偏振关联测量. 制备的态如 (14.0.3) 式所示, 测量的是线偏振的关联.

其中 $\varphi = \theta_1 + \theta_2$. (14.0.7) 式表明光子对总是正交偏振的, 和每个检偏器选择的 θ_j 无关. 考虑其它三种可能的联合探测, 我们得到如下关于 $\varphi = \theta_1 + \theta_2$ 的偏振关联函数.

$$
\begin{aligned}
|\langle\theta_1\,\theta_2\,|\,\Psi\rangle|^2 &= |\langle\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,|\,\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\varphi \\
|\langle\theta_1\,\bar{\theta}_2\,|\,\Psi\rangle|^2 &= |\langle\bar{\theta}_1\,\theta_2\,|\,\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\varphi
\end{aligned}
\tag{14.0.8}
$$

另一方面, 对 (14.0.2) 式的符合测量则会给出一个完全随机的结果:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,\theta_2\,\theta_1\rangle\langle\theta_1\,\theta_2\,| &= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_1\rangle\langle\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,| = 25\% \\
\mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,\bar{\theta}_2\,\theta_1\rangle\langle\theta_1\,\bar{\theta}_2\,| &= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}\,|\,\theta_2\,\bar{\theta}_1\rangle\langle\bar{\theta}_1\,\theta_2\,| = 25\%
\end{aligned}
\tag{14.0.9}
$$

现在我们可以更好地揭示 (14.0.3) 式背后有趣的物理内涵了: (14.0.3) 式的偶光子偏振纠缠态是一种特殊的双光子系统, 其中, 任何一个光子的偏振在传播过程中都是不确定的; 然而, 如果测到其中一个光子处于特定偏振态, 那么无论光子对相隔多远并且无论选择哪组偏振基矢, 另一个光子的偏振态就完全确定了.

该段陈述和原始的 EPR 态类似: 在 EPR 双粒子系统中, 任何一个粒子在传播过程中它的位置或动量都是不确定的; 然而, 如果测得其中一

个粒子具有特定的位置或动量, 无论另一个粒子相距多远, 其位置或动量就完全确定了.

(14.0.3) 式不依赖于偏振基矢的选择, 这和原始 EPR 态不依赖于位置和动量坐标的选择是等价的.

一个自然而然的问题: 无论测量与否, 处于 (14.0.1) 式 Bohm 态的自由传播粒子有确定的自旋吗? 处于 (14.0.3) 式偶光子态的自由传播光子具有特定的圆偏振或线偏振吗? 一方面, (14.0.1) 式的 Bohm 态中, 任意一个独立粒子的自旋都不确定, (14.0.3) 式中任意一个独立光子的偏振也都是不确定的, 我们只能相信在传播过程中粒子不具有确定的自旋, 光子也不具有确定的偏振. 另一方面, 如果一个粒子的自旋或者一个光子的偏振能够唯一确定性地给出另一个相距甚远的粒子的自旋或光子的偏振, 那么任何不相信超距作用的人都很难想象在测量之前两个粒子的自旋或两个光子的偏振都没有事先设定好. Bohm 态将我们带进一个矛盾的境地. 我们自然会问起与 EPR 相同的问题: "量子力学关于粒子自旋或光子偏振的描述是完备的吗? "

那么是否有可能存在一种理论, 既能够像量子理论一样正确地预测偶粒子的行为, 又同时保证 EPR 对物理实在的完备描述呢? 玻姆和他的追随者曾经尝试提出 "隐变量理论" 将 "物理实在" 包括到每个粒子和一对粒子的波函数之中. 该理论似乎既与量子力学相吻合, 又可以满足 EPR 的要求. 隐变量理论被成功地应用于许多不同的量子现象. 直到 1964 年, 贝尔证明了一个定理, 可以把局域隐变量统计理论从非局域性的多粒子叠加原理区分开来. 贝尔导出了一个不等式, 此不等式从局域性经典统计理论导出, 为一些特定的量子态的统计测量所违背. 从那以后, 贝尔不等式的测量成为研究量子理论基本问题的一个标准工具. 贝尔不等式的实验测量从 20 世纪 70 年代早期开始. 历史上大多数实验结果是违反贝尔不等式的, 因此否认了局域隐变量理论[34].

14.1 隐变量理论和自旋 1/2 Bohm 态测量的量子理论

考虑处于 (14.0.1) 式 Bohm 态的两个自旋 1/2 的粒子. 两粒子在空间上相隔很远. 两组观测者用 Stern-Gerlach 分析器来分别测量它们的自旋. 如图 14.1.1 所示, 有三组 Stern-Gerlach 探测器, 它们的 z 方向分别沿着单

[34] 虽然一般而言, 贝尔理论和贝尔不等式涉及深刻哲学思辨问题, 但是我们应该清楚的是: 对物理系统进行物理测量来检验贝尔不等式本质上是一个物理问题. 任何经典关联的统计模型, 无论是局域还是非局域的, 一定要服从经典理论的基本物理定律. 任何假设的经典关联切勿超出经典理论的范畴.

位矢量 $\hat{\boldsymbol{a}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$. 那么测得粒子 1 沿着 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 自旋为 $+1/2$ 以及粒子 2 沿着 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 自旋为 $+1/2$ 的概率多大呢? 下面给出解决这个问题的简单的经典隐变量模型. 在进行细节讨论之前, 我们先引入标记 P_{ab} 来表示经典概率,

$$\mathrm{P}_{ab} = \mathrm{P}(+_a\ d_b\ d_c \,|\, d_a\ +_b\ d_c) \tag{14.1.1}$$

该标记中, 我们选择六个组元来标示一次观测. 分割号左边指的粒子 1(通道 1) 而右边指的是粒子 2 (通道 2). 每个组分代表的是 j, $j = 1, 2$ 粒子在相应 $\hat{\boldsymbol{a}}$、$\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 方向的自旋分量的测量值为 $+$ 或 $-$. d_a, d_b 和 d_c 分别表示沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 方向其自旋方向不定. 需要注意的是, P_{ab} 定义为在 1 通道 (左边) 沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向观测到自旋为 $+$ 和在 2 通道 (右边) 沿 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 方向观测到自旋为 $+$ 的概率.

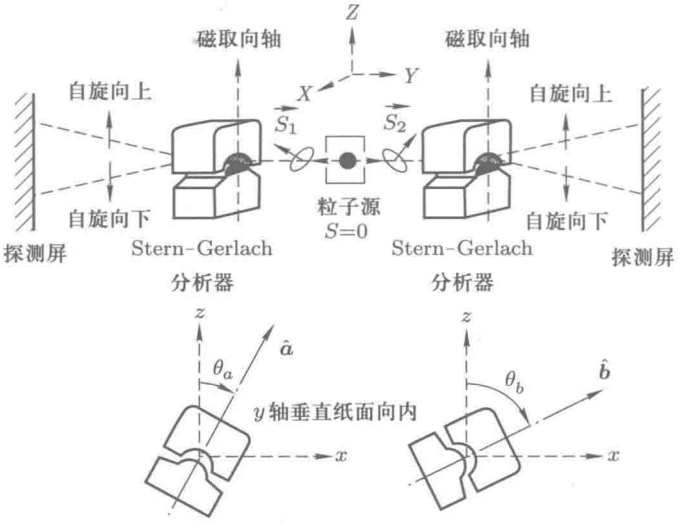


图 14.1.1 玻姆版本的 EPR理想实验.

按照经典的隐变量理论, 如果粒子 1 的自旋分量测为沿 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向的 $+$, 那么测量粒子 2 沿着 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的自旋一定为 $-$. 测得粒子 1 沿着 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向 (1 通道) 自旋为 $+$ 以及粒子 2 沿着 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 方向 (2 通道) 自旋为 $+$ 的概率 P_{ab} 为:

$$\mathrm{P}_{ab} = \mathrm{P}(+\ -\ d_c \,|\, -\ +\ d_c) \tag{14.1.2}$$

类似的, 我们有:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{bc} &= \mathrm{P}(d_a\ +\ -\,|\, d_a\ -\ +) \\ \mathrm{P}_{ac} &= \mathrm{P}(+\ d_b\ -\ |\ -\ d_b\ +) \end{aligned} \tag{14.1.3}$$

在经典的概率论中, 粒子 1 和粒子 2 的自旋不确定的分量 d_a, d_b 和 d_c 一定会有特定的值, 为 + 或 −. 因此, 我们可以将 P_{ab} 写为这两种可能性的概率之和

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{ab} &= \mathrm{P}(+\ -\ +|-\ +\ -)+\mathrm{P}(+\ -\ -|-\ +\ +)\\ &\equiv \mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(+\ -\ -)\end{aligned}\tag{14.1.4}$$

其中第二行我们已经去掉有关第二个粒子的多余信息, 将 $\mathrm{P}(+\ -\ +|-\ +\ -)$ 写成 $\mathrm{P}(+\ -\ +)$. 因此, 我们将 (14.1.2) 式和 (14.1.3) 式写成

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{ab} &= \mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(+\ -\ -)\\ \mathrm{P}_{bc} &= \mathrm{P}(+\ +\ -)+\mathrm{P}(-\ +\ -)\\ \mathrm{P}_{ac} &= \mathrm{P}(+\ +\ -)+\mathrm{P}(+\ -\ -)\end{aligned}\tag{14.1.5}$$

需要强调的是: (14.1.5) 式左边的量 P_{ab} 等是可测量的概率, 但是我们还没有办法测量 (14.1.5) 右侧的分立的经典概率 $\mathrm{P}(+\ -\ +)$ 和 $\mathrm{P}(+\ -\ -)$ 等. 将 P_{ab} 和 P_{bc} 相加, 和 P_{ac} 对比, 很容易得到:

$$\mathrm{P}_{ab}+\mathrm{P}_{bc}=\mathrm{P}_{ac}+\mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(-\ +\ -)\tag{14.1.6}$$

假设经典概率 $\mathrm{P}(+\ -\ +)$ 和 $\mathrm{P}(-\ +\ -)$ 是正的 (在任何经典概率论中都是成立的), 这样我们就得到 Bell-Wigner 不等式

$$\mathrm{P}_{ab}+\mathrm{P}_{bc}\geqslant \mathrm{P}_{ac}\tag{14.1.7}$$

不幸的是, 这个显而易见的经典不等式 (14.1.7) 为一些实验观测所否定: 对偶粒子纠缠态的测量结果违背了不等式 (14.1.7).

下面我们对这种测量给出简单的遵循量子力学原理的计算分析. 我们重新将 (14.0.1) 式的态矢写成如下形式

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2\right]\tag{14.1.8}$$

对于处于 $|\Psi\rangle$ 态的自旋 1/2 粒子, 观测到沿着与 z 轴夹角为 θ 方向的自旋向上的概率为

$$\left|\langle\theta|\Psi\rangle\right\}^2=\langle\Psi|\theta\rangle\langle\theta|\Psi\rangle=\langle\Psi|\hat{\pi}_\theta|\Psi\rangle\tag{14.1.9}$$

其中 $\hat{\pi}_\theta=|\theta\rangle\langle\theta|$ 是投影算符, $|\theta\rangle=\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/2)\sigma_y\theta}|\uparrow\rangle$. 沿与 z 轴夹角 θ 的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向自旋向上的投影算符为:

$$\hat{\pi}_\theta=|\theta\rangle\langle\theta|=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\sigma_z\cos\theta+\sigma_x\sin\theta)\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}),\tag{14.1.10}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 是 Pauli 矩阵, $\mathbf{I}$ 是单位矩阵.

我们也可以将 $\hat{\pi}_\theta$ 重新写为一个矩阵,

$$\hat{\pi}_\theta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & 1-\cos\theta\end{pmatrix} \tag{14.1.11}$$

物理观测量 P_{ab} 定义为 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 方向的 SGA 观测到自旋向上的粒子 1, 和沿 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 方向的 SGA 观测到自旋向上的粒子 2 的符合率

$$\mathrm{P}_{ab}=\langle\Psi|\hat{\pi}_{1\hat{\boldsymbol{a}}}\,\hat{\pi}_{2\hat{\boldsymbol{b}}}|\Psi\rangle \tag{14.1.12}$$

其中每个投影算符有两个下标, 分别代表粒子编号 (和通道) 以及在 $x-z$ 面内的测量方向. 类似的有,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{bc}&=\langle\Psi|\hat{\pi}_{1\hat{\boldsymbol{b}}}\,\hat{\pi}_{2\hat{\boldsymbol{c}}}|\Psi\rangle\\ \mathrm{P}_{ac}&=\langle\Psi|\hat{\pi}_{1\hat{\boldsymbol{a}}}\,\hat{\pi}_{2\hat{\boldsymbol{c}}}|\Psi\rangle\end{aligned} \tag{14.1.13}$$

将 (14.1.11) 式的算符以及 (14.1.8) 式的态代入计算 P_{ab}, P_{bc} 和 P_{ac}, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{ab}&=\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(\theta_a-\theta_b\right)\right]=\frac{1}{4}\left[1-\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}\right]\\ \mathrm{P}_{bc}&=\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(\theta_b-\theta_c\right)\right]=\frac{1}{4}\left[1-\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}\right]\\ \mathrm{P}_{ac}&=\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(\theta_a-\theta_c\right)\right]=\frac{1}{4}\left[1-\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{c}}\right]\end{aligned} \tag{14.1.14}$$

很容易发现: 当 $\theta_a=0$, $\theta_b=\pi/3$ 和 $\theta_c=2\pi/3$ 时, 对此系统的测量会给出与 Bell-Wigner 不等式 (14.1.7) 式相违背的最大值, 这在实验观测中已经得到确认.

14.2 贝尔理论和贝尔不等式

基于 (14.0.1) 式的 EPR-Bohm 态和隐变量 λ, 贝尔在 1964 年的文章中推导出他的第一个不等式. 在这个先驱工作中, 贝尔引入了一个 "基于参数 λ 的更加完整的规范说明". 即在经典统计估计粒子 1 和粒子 2 分别沿着 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 方向的联合探测 $\langle\Psi|(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\boldsymbol{b}})|\Psi\rangle$ 的期望值时, 引入概率分布 $\rho(\lambda)$. 该测量的量子力学结果为:

$$E_{ab}=\langle\Psi|(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\boldsymbol{b}})|\Psi\rangle=-\hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} \tag{14.2.1}$$

对于这个理想系统, 有一种特殊情形的结果是十分确定的. 当 SGA 分析器平行时, 对于所有的 λ 和 $\hat{\boldsymbol{a}}$, 我们有

$$E_{ab}=\langle\Psi|(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\hat{\boldsymbol{a}})|\Psi\rangle=-1 \tag{14.2.2}$$

因此, 我们得到 A 结果就可以百分之百预测 B 的结果. 因为量子力学的态 $|\Psi\rangle$ 并不能给出单次测量的结果, 这 (通过 EPR 式的争论) 就意味着存在一种更加完整的对态的描述方法, 即借助单个符号 λ 来表示, λ 可以有很多分立或连续的维数, 它的不同部分可能和某一个测量仪器相互作用. 对于大量粒子系统组成的系综, 设 Λ 是 λ 的分布空间. 贝尔将 Λ 空间中态 λ 的分布函数用符号 $\rho(\lambda)$ 表示, $\rho(\lambda)$ 是归一化的.

$$\int_{\Lambda} \rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1 \tag{14.2.3}$$

基于确定性的隐变量理论, 对于态 λ, 观测量 $[A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})]$ 有确定的值 $[A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})](\lambda)$.

局域性的定义如下: 如果对于所有的 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 以及所有的 $\lambda \in \Lambda$ 有:

$$\left[A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})\right](\lambda) = A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,B(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda) \tag{14.2.4}$$

确定性隐变量理论就是局域的. 也就是说, 一旦 λ 确定并且粒子是分离的, A 的测量值只和 λ 和 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 有关, 而和 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 无关. 同样的, B 的测量值只由 λ 和 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 决定. 在这个意义上, 任何具有实在性、确定性并且拒绝超距作用的物理理论都是局域的. 利用该理论, 给出 $[A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})]$ 期望值为:

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}) &= \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,[A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})](\lambda) \\ &= \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,B(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda) \end{aligned} \tag{14.2.5}$$

其中 $E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}) \equiv E_{ab}$, 和之前的标记相对应. 很清楚的是: (14.2.2) 式当且仅当

$$A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda) = -B(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda) \tag{14.2.6}$$

对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 成立的时候才成立.

利用 (14.2.6) 式, 我们可以计算下面一系列期望值, 涉及 SGA 分析器的三种不同朝向:

$$\begin{aligned} & E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{c}}) \\ &= \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\left[A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,B(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda) - A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,B(\hat{\boldsymbol{c}})\right] \\ &= -\int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\left[A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda) - A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{c}},\lambda)\right] \\ &= -\int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)\left[1 - A(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{c}},\lambda)\right] \end{aligned} \tag{14.2.7}$$

由于 $A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)=\pm1$, $A(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)=\pm1$, 这个表达式可以写为

$$\left|E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})-E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{c}})\right|\leqslant\int_{\Lambda}\mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\left[1-A(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)\,A(\hat{\boldsymbol{c}},\lambda)\right] \tag{14.2.8}$$

因此有

$$\left|E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})-E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{c}})\right|\leqslant1+E(\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{c}}) \tag{14.2.9}$$

这个不等式是一组不等式中的第一个, 这组不等式总称为 "贝尔不等式".

很容易发现 (14.2.1) 式的量子力学预测值和 (14.2.9) 不等式是相悖的. 当我们选择 $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 共面时且 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的夹角为 $2\pi/3$ 以及 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 的夹角都为 $\pi/3$ 时, 量子预测给出:

$$\left|\left[E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})-E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{c}})\right]_{QM}\right|=1 \tag{14.2.10}$$

而

$$1+\left[E(\hat{\boldsymbol{b}},\hat{\boldsymbol{c}})\right]_{QM}=\frac{1}{2} \tag{14.2.11}$$

它不满足不等式 (14.2.9).

总结一下, 贝尔理论已经证明没有确定性的隐变量理论能够解释 (14.2.2) 式, (14.2.4) 式与处于 (14.0.1) 式自旋单态的一对自旋 $-1/2$ 粒子的所有量子力学预言相符.

因为 (14.2.5) 式中 Λ 的空间涵盖了四个区域, 它们的经典概率为 P_{ab}, P_{-ab}, P_{a-b}, P_{-a-b}, 其中 A 和 B 的值为 ±1, 我们可以很清楚地给出 (14.2.5) 的期望值

$$\begin{aligned}E_{ab}&=(+1)(+1)\mathrm{P}_{ab}+(-1)(+1)\mathrm{P}_{-ab}+(+1)(-1)\mathrm{P}_{a-b}+(-1)(-1)\mathrm{P}_{-a-b}\\&=\mathrm{P}_{ab}-\mathrm{P}_{-ab}-\mathrm{P}_{a-b}+\mathrm{P}_{-a-b}\end{aligned} \tag{14.2.12}$$

考虑到三个方向 $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{c}}$, 利用 (14.1.5) 式和 (14.2.12) 式的结果给出

$$\begin{aligned}E_{ab}=&\,\mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(+\ -\ -)-\mathrm{P}(-\ -\ +)-\mathrm{P}(-\ -\ -)\\&-\mathrm{P}(+\ +\ +)-\mathrm{P}(+\ +\ -)+\mathrm{P}(-\ +\ +)+\mathrm{P}(-\ +\ -)\end{aligned}$$

考虑归一化条件

$$\sum\mathrm{P}(\pm\ \pm\ \pm)=1$$

E_{ab} 变为

$$E_{ab}=2\left[\mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(+\ -\ -)+\mathrm{P}(-\ +\ +)+\mathrm{P}(-\ +\ -)\right]-1$$

类似的, 我们可以得到

$$E_{bc}=2\big[\mathrm{P}(+\ +\ -)+\mathrm{P}(-\ +\ -)+\mathrm{P}(+\ -\ +)+\mathrm{P}(-\ -\ +)\big]-1$$
$$E_{ac}=2\big[\mathrm{P}(+\ +\ -)+\mathrm{P}(+\ -\ -)+\mathrm{P}(-\ +\ +)+\mathrm{P}(-\ -\ +)\big]-1$$

根据以上三式, 不难发现

$$\begin{aligned}E_{ab}-E_{ac}&=1+E_{bc}-4\mathrm{P}(+\ +\ -)-4\mathrm{P}(-\ -\ +)\\ E_{ac}-E_{ab}&=1+E_{bc}-4\mathrm{P}(-\ +\ -)-4\mathrm{P}(+\ -\ +)\end{aligned}\tag{14.2.13}$$

考虑到概率是正值, (14.2.13) 意味着

$$\begin{aligned}E_{ab}-E_{ac}&\leqslant 1+E_{bc}\\ E_{ac}-E_{ab}&\leqslant 1+E_{bc}\end{aligned}\tag{14.2.14}$$

因此, 我们得到原始的贝尔不等式

$$\big|E_{ab}-E_{ac}\big|\leqslant 1+E_{bc}\tag{14.2.15}$$

在贝尔发表他的第一个不等式之后不久, 发现 (14.2.9) 式的贝尔不等式并不能在实际实验中被检测. 因为 (14.2.2) 对于一个实际测量并不是精确成立的. 任何实际探测器都不会有完美的 100% 的探测效率, 任何实际的检偏器都不能完美地区分两个正交通道. 在 1971 年, 贝尔考虑了这些因素后推导出一个新的不等式, 他假设 A 或 B 的测量结果可以取如下可能结果中的一种

$$A(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\text{ 或 }B(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)=\begin{cases}+1\text{ “自旋向上”}\\ -1\text{ “自旋向下”}\\ 0\ \text{ 粒子未被测}\end{cases}\tag{14.2.16}$$

对于给定的态 λ, 我们用符号 $\bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)$ 和 $\bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)$ 来定义这些量的测量值, 它们满足

$$\big|\bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\big|\leqslant 1\ \text{ 和 }\ \big|\bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)\big|\leqslant 1\tag{14.2.17}$$

采用相同的局域性的定义, 计算 $A(\hat{\boldsymbol{a}})B(\hat{\boldsymbol{b}})$ 的期望值得到

$$E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})=\int_{\Lambda}\mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,\bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}},\lambda)\,\bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}},\lambda)\tag{14.2.18}$$

考虑某个测量涉及 $E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})$ 和 $E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}')$

$$E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}})-E(\hat{\boldsymbol{a}},\hat{\boldsymbol{b}}')$$

$$= \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda) \left[\bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}, \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}, \lambda) - \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}, \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}', \lambda) \right] \tag{14.2.19}$$

它进一步可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} & E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}') \\ = & \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}, \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}, \lambda) \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}', \lambda) \right] \\ & - \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda)\, \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}, \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}', \lambda) \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}, \lambda) \right] \end{aligned} \tag{14.2.20}$$

应用三角形不等式[35], 并考虑 $\rho(\lambda)[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}', \lambda)]$ 和 $\rho(\lambda)[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}, \lambda)]$ 不能取负值, 再利用 (14.2.17) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} \left| E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}') \right| \leqslant & \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda) \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}', \lambda) \right] \\ & + \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda) \left[1 \pm \bar{A}(\hat{\boldsymbol{a}}', \lambda)\, \bar{B}(\hat{\boldsymbol{b}}, \lambda) \right] \end{aligned} \tag{14.2.21}$$

或者

$$\left| E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}') \right| \leqslant \pm \left[E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}') + E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}) \right] + 2 \int_{\Lambda} \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda) \tag{14.2.22}$$

这样, 贝尔从一个标准的局域性经典统计模型推导出一个可以测量的不等式

$$-2 \leqslant E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}') + E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}) + E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}') \leqslant 2 \tag{14.2.23}$$

考虑实际测量的非理想探测器以及检偏器等, 量子力学对于 Bhom 态的预测可以写成

$$\left[E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) \right]_{QM} = \mathrm{C}\, \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} \tag{14.2.24}$$

其中 $|\mathrm{C}| \leqslant 1$. 假设 $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{a}}'$, $\hat{\boldsymbol{b}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}'$ 共面并且 $\phi = \pi/4$, 我们很容易发现量子力学预言和 (14.2.23) 不等式不符:

$$\left[E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) - E(\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}') + E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}) + E(\hat{\boldsymbol{a}}', \hat{\boldsymbol{b}}') \right]_{QM} = 2\sqrt{2}\, \mathrm{C} \tag{14.2.25}$$

虽然我们在以上的讨论中大多考虑的是对 (14.0.1) 式所示的 EPR-Bohm 态的测量, 违背 (14.2.9) 式和 (14.2.23) 式的量子系统其实并不限于处于纠缠态的自旋 1/2 粒子偶粒子对. 历史上大多数验证性实验是基于对偶光子对的偏振测量. 我们对这种偶光子态称为 EPR-Bohm-Bell 态或

[35] 对于任意一个三角形, 存在如下不等式: (1) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$; (2) $|a-b| < c < a+b$, 这里 a, b, c 指三角形的三个边长.

者简称为 Bell 态. 历史上, 大多数实验观测结果违背了贝尔不等式. 虽然这些实验的形式各异, 违背贝尔不等式时检偏器所取的偏振方向也各不相同, 然而, 实验背后的物理都有共同之处. 其实, 对量子纠缠态的测量违背了贝尔不等式一点也不奇怪. 贝尔不等式是建立在局域性经典统计理论之上, 而对量子纠缠态的测量则牵扯到非局域性偶粒子振幅的叠加. 与前面几章的讨论相联系, 一个从局域性光强统计关联或光强涨落统计关联出发的理论是无论如何也无法正确解释由非局域性多光子干涉造成的物理现象的.

14.3 Bell 态

我们在先前的讨论中已经给出了一个 EPR-Bohm 态的例子. 从正负电子对湮没产生的高能 γ 射线光子对是 EPR-Bohm 态的很好例子, 然而, 对 γ 射线光子的测量是很难操作的: (1) 到目前为止, 我们尚没有发现检偏器能对高能 γ 射线的偏振予以有效的测量; (2) γ 射线光子对的动量关联的不确定度 $\Delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$ 较大, 在进行贝尔不等式的测量时导致较低的光子对收集效率, 成为著名的 "光子对收集效率漏洞", 即, 在进行联合光子探测时, 不可能有 $\sim 100\%$ 的效率收集到一对光子. 所幸的是, (14.0.3) 式的偶光子态也可以在原子级联跃迁中观测到. 原子级联跃迁产生的偶光子对的波长分布可以达到可见光到深紫外区域, 在该波段我们有大量高效的检偏器. 因此, 在 70 年代和 80 年代, 大多数早期的 EPR-Bohm-Bell 实验皆采用原子级联跃迁类型的偶光子源. 然而, 不幸的是, 这些实验仍然面临 $\Delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$ 较大的困难. 光子对的收集效率和正负电子对湮没情形近乎一样低. 在 20 世纪 80 年代中期, Shih 和 Alley 引入 SPDC 过程来制备偶光子纠缠态. SPDC 可以在可见–近红外波段制备纠缠的信号–闲置光子对. 特别重要的是, 偶光子对的动量关联不确定度大大改善, 实验达到 $\Delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\simeq 0$, 最终结束了对 "光子对收集漏洞" 的争论.

下面一组是四个典型的偶光子态, 它们可以通过分束器、半波片和 (或) 四分之一波片对信号–闲置光子对的偏振的操控来制备:

$$
\begin{aligned}
|\,\Psi_{RL}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big[|\,R_1\rangle|\,R_2\rangle \pm |\,L_1\rangle|\,L_2\rangle\big] \\
|\,\Phi_{RL}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big[|\,R_1\rangle|\,L_2\rangle \pm |\,L_1\rangle|\,R_2\rangle\big]
\end{aligned}
\tag{14.3.1}
$$

以上四态被称为 EPR-Bohm-Bell 态或者简称为 Bell 态, (14.3.1) 式中的四个态在两粒子矢量空间构成一组完备的正交基. 原则上, 每一个任意的偶光子偏振态都能用合适的 Bell 态的叠加来表达. Bell 态被广泛应用到量

子理论的基础问题以及量子纠缠的实际应用领域. 在量子信息领域, Bell 态通常呈现为下面的 "量子比特":

$$|\Psi_{01}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0_1 1_2\rangle \pm |1_1 0_2\rangle\right]$$
$$|\Phi_{01}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0_1 0_2\rangle \pm |1_1 1_2\rangle\right] \tag{14.3.2}$$

其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示两个任意的正交偏振基矢. 最常用的 Bell 态是从 SPDC 过程制备的线偏振的表示式:

$$|\Psi_{XY}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1\rangle|Y_2\rangle \pm |Y_1\rangle|X_2\rangle\right]$$
$$|\Phi_{XY}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1\rangle|X_2\rangle \pm |Y_1\rangle|Y_2\rangle\right] \tag{14.3.3}$$

其中 $|X\rangle$ 和 $|Y\rangle$ 分别定义为发生 SPDC 过程的非线性晶体的 o 光和 e 光. 将圆偏振态处理成线偏振的叠加态,

$$|R\rangle = |X\rangle + \mathrm{i}|Y\rangle$$
$$|L\rangle = -|X\rangle + \mathrm{i}|Y\rangle \tag{14.3.4}$$

我们可以找到线偏振表示和圆偏振表示之间可以切换的态:

$$|\Psi_{XY}^{+}\rangle = |\Psi_{RL}^{-}\rangle, \quad |\Psi_{XY}^{-}\rangle = |\Phi_{RL}^{-}\rangle$$
$$|\Phi_{XY}^{+}\rangle = |\Phi_{RL}^{+}\rangle, \quad |\Phi_{XY}^{-}\rangle = |\Psi_{RL}^{+}\rangle \tag{14.3.5}$$

为了简化标记, 我们将忽略线偏振表示中的下标, 分别用 $|\Psi^{\pm}\rangle$ 和 $|\Phi^{\pm}\rangle$ 来代替 $|\Psi_{XY}^{\pm}\rangle$ 和 $|\Phi_{XY}^{\pm}\rangle$ 对于 (14.3.3) 式的 Bell 态, 可以很容易的计算关于选定的检偏器方向 θ_1 和 θ_2 的偏振关联函数:

$$|\langle\theta_1\theta_2|\Psi^{\pm}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1 \pm \theta_2)$$
$$|\langle\theta_1\theta_2|\Phi^{\pm}\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1 \mp \theta_2) \tag{14.3.6}$$

其它关于 $\bar{\theta}$ 或者 θ 的关联函数都可以基于 (14.3.6) 式相应的推导出来.

需要注意的是: 对于 $|\Psi^{+}\rangle$ ($|\Psi^{-}\rangle$) 和 $|\Phi^{+}\rangle$ ($|\Phi^{-}\rangle$), 达到最大关联的 θ_1 和 θ_2 条件是不同的: 分别是 $\theta_1+\theta_2=\pi/2$ 和 $\theta_1-\theta_2=\pi/2$ ($\theta_1-\theta_2=0$ 和 $\theta_1+\theta_2=0$). 因此, 如果其中一个要求光子对是正交 (平行) 偏振, 那么另外一种情形的两个偏振一定是不同的几何关系.

下面, 我们讨论 Bell 态的旋转对称性. 我们前面提到用 SPDC 制备 Bell 态时, $|X\rangle$ 和 $|Y\rangle$ 的偏振基矢一般由非线性晶体和相关波片的特定方

向定义. 如果我们将 $|X\rangle - |Y\rangle$ 基矢旋转 θ 角到 $|X'\rangle - |Y'\rangle$, 会发生什么呢? 很容易发现在 (14.3.1) 式和 (14.3.3) 式中, 都只有两个态能够保持旋转对称性. 在反平行传播的右手坐标系中, 即粒子反向传播时 (如图 14.3.1 上半部分所示), 保持旋转对称性的两个 Bell 态是:

$$
\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1'\rangle|Y_2'\rangle + |Y_1'\rangle|X_2'\rangle\right] \\
|\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1'\rangle|X_2'\rangle - |Y_1'\rangle|Y_2'\rangle\right]
\end{aligned}
\tag{14.3.7}
$$

在共线或者近共线传播的右手坐标系中, 即光子对向同一方向传播时 (如图 14.3.1 下半部分所示), 保持旋转对称性的两个 Bell 态是:

$$
\begin{aligned}
|\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1'\rangle|Y_2'\rangle - |Y_1'\rangle|X_2'\rangle\right] \\
|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|X_1'\rangle|X_2'\rangle + |Y_1'\rangle|Y_2'\rangle\right]
\end{aligned}
\tag{14.3.8}
$$

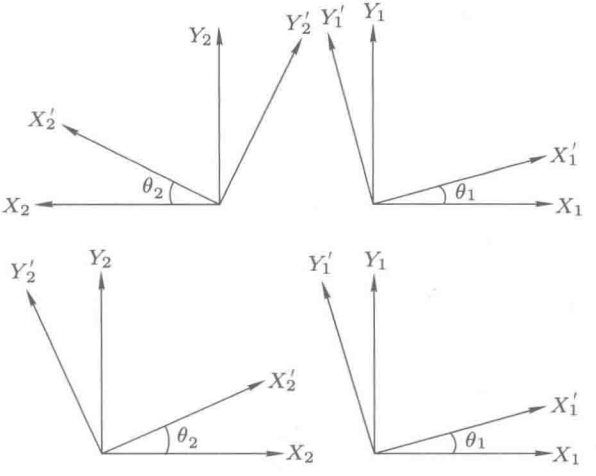


图 14.3.1 上面: 右手坐标系中反平行传播. $Z_1(Z_2)$ 轴从纸面向外 (内). 旋转之后 $X_1 - Y_1$ 和 $X_2 - Y_2$ 之间的相对角为 $\theta_2 + \theta_1$. 下面: 右手坐标系中共线或者近共线传播. Z_1 和 Z_2 轴都是从纸面指向外. 旋转后 $X_1 - Y_1$ 和 $X_2 - Y_2$ 的相对角为 $\theta_2 - \theta_1$.

(14.3.7) 式和 (14.3.8) 式的结果可以很容易从圆偏振表示的态即 (14.3.1) 式来推断. 如果 $X - Y$ 到 $X' - Y'$ 的旋转意味着路径 1 中旋转角 $\theta_1 = \theta$ 以及路径 2 中 $\theta_2 = -\theta$(如图 14.3.1 中上半部分所示), 那么 $|\Psi_{RL}^{\pm}\rangle$ 会保留旋转对称性:

$$
|\Psi_{RL}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|R_1\rangle|R_2\rangle \pm |L_1\rangle|L_2\rangle\right]
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}|\,R_1'\,\rangle|\,R_2'\,\rangle \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}|\,L_1'\,\rangle|\,L_2'\,\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\,R_1'\,\rangle|\,R_2'\,\rangle \pm |\,L_1'\,\rangle|\,L_2'\,\rangle\right] \tag{14.3.9}$$

对应 (14.3.7) 式. 然而, 如果 $X-Y$ 到 $X'-Y'$ 的旋转意味着路径 1 和 2 中旋转角 $\theta_1=\theta_2=\theta$ 如图 14.3.1 中下半部分所示), 那么 $|\,\Phi_{RL}^{\pm}\,\rangle$ 会保留旋转对称性:

$$|\,\Phi_{RL}^{\pm}\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\,R_1\,\rangle|\,L_2\,\rangle \pm |\,L_1\,\rangle|\,R_2\,\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}|\,R_1'\,\rangle|\,L_2'\,\rangle \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}|\,L_1'\,\rangle|\,R_2'\,\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\,R_1'\,\rangle|\,L_2'\,\rangle \pm |\,L_1'\,\rangle|\,R_2'\,\rangle\right] \tag{14.3.10}$$

对应 (14.3.8) 式.

14.4 Bell 态制备

自 20 世纪 80 年代以来, SPDC 是最方便的 Bell 态偶光子源的制备方法. 虽然 Bell 态涉及的是偏振 (或自旋), 但是我们不能忽略态的空间–时间部分. 制备要点之一就是要使得 Bell 态中的第一和第二项的两个偶光子波包在时空上完全 "重叠", 或者联合探测时不可区分. 这对于 Ⅱ 类 SPDC 特别重要. 因为 Ⅱ 类 SPDC 中信号和闲置是正交偏振的, 所以更容易被用来制备 Bell 态.

Ⅱ 类 SPDC 在 "非共线相位匹配" 条件下非常有趣. 从 SPDC 晶体中, 比如按 Ⅱ 类相位匹配切割的 BBO 晶体, 发射出来的信号–闲置光子对呈两个圆锥分布, 一个 o 偏振, 另一个 e 偏振, 如图 14.4.1 所示. 在两个圆锥相交的交点处, 用小孔 1 和 2 来定义信号–闲置光子对 $\boldsymbol{k}$ 的方向. 在两个小孔后面测量到的信号–闲置光子对的偏振态是否可以自然而然地表达为以下偶光子态呢?

$$|\,\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|o_1e_2\rangle + |e_1o_2\rangle\right) = |\,\Psi_{XY}^{+}\,\rangle \tag{14.4.1}$$

其中 o_j 和 e_j, $j=1,2$, 分别为 o 和 e 偏振. 似乎我们只需要简单的在小孔 1 和 2 后面分别加上检偏器就可以直接进行 EPR-Bohm-Bell 类的测量, 进而观测到 (14.3.6) 式的偏振关联. 然而, 这个设想是 "不正确的"! 实验中发现只有加上 "补偿器" 之后才能观测到 EPR-Bohm-Bell 偏振关联. "补偿器" 是一小片双折射材料. 例如, 我们可以在 SPDC 后面放置另一片非

线性晶体. 可以是和 SPDC 一样的晶体, 具有相同的切割角, 但是长度减半并且要相对 SPDC 晶体旋转 90°.

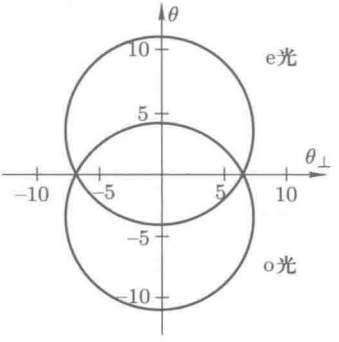


图 14.4.1 Ⅱ类非线性相位匹配: 简并 702.2 nm 圆锥的截面图. 351.1 nm 的泵浦光位于中心. 沿着轴上的数字单位为度数.

"补偿器" 起到什么作用呢? 对此, 曾经有一些比较天真的解释. 有一种说法认为问题出自Ⅱ类 SPDC 的纵向 "走离". 例如, 如果实验中使用的是Ⅱ类负单轴的 BBO 晶体, 那么其 e 光比 o 光传得快. 假设 $o-e \leftrightarrow e-o$ 光子对是在晶体中间产生, e-偏振会比 o-偏振早 $\Delta t=(n_o-n_e)L/2c$ 触发探测器. 这就意味 $|o_1e_2\rangle$ 项中 D_2 会先工作, 而 $|e_1o_2\rangle$ 项中 D_1 会先工作. 如果 Δt 大于信号-闲置场的相干时间, 我们就能区分究竟是哪个振幅对 "咔嗒-咔嗒" 的符合事件有贡献. 所以可以加上一片双折射材料来补偿 "走离", 这样就可以将 e 光相对 o 光延迟相同的时间 Δt. 但是, 如果信号-闲置光子对是在 SPDC 晶体的前端面或后端面产生, 时间延迟就不同了: 前端面产生时 $\Delta t=(n_o-n_e)L/c$, 后端面产生时 $\Delta t=0$. 不可能同时满足在 SPDC 晶体不同位置产生的所有光子对的补偿要求. 而且 SPDC 是一个相干过程, 我们绝无可能区分信号-闲置光子对的产生位置. 延迟时间 Δt 究竟由什么决定呢?

偶光子干涉理论给出了正确答案: 偶光子波包在时空上的重叠, 或偶光子振幅的时空不可区分性才是问题的关键. 其实, (14.4.1) 式, (14.3.1) 式和 (14.3.3) 式都是一种简化了的薛定谔表象的写法. 对于某些类型的物理讨论是够用了. 然而, 这个简化形式忽略了态的时空特性, 而态的时空性质对于由Ⅱ类 SPDC 制备的偶光子态极其重要.

利用前面的结果, 我们可以将图 14.4.1 的信号-闲置光子对的态重写为如下形式:

$$|\Psi\rangle=\sum_{\boldsymbol{k}_o,\boldsymbol{k}_e}\delta\left(\omega_o+\omega_e-\omega_p\right)\Phi(\Delta_kL)\;\hat{\boldsymbol{o}}\;a_o^{\dagger}(\omega(\boldsymbol{k}_o))\;\hat{\boldsymbol{e}}\;a_e^{\dagger}(\omega(\boldsymbol{k}_e))\;|0\rangle \quad (14.4.2)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{o}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 是沿着 SPDC 晶体的 o 光和 e 光偏振方向的单位矢量, $\Delta_k = k_o + k_e - k_p$. $\Phi(\Delta_k L)$ 中考虑了非线性晶体的有限长度. 假设探测器 D_1 和 D_2 前面的检偏器的角度为 θ_1 和 θ_2, 它们分别是相对 SPDC 晶体 o 光的偏振方向, 场算符可以写为

$$E_j^{(+)}(t_j, r_j) = \int \mathrm{d}\omega\ \hat{\theta}_j\ a(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t_j - k(\omega) r_j]}$$

其中 $j = 1, 2$, $\hat{\theta}_j$ 是沿着 i 检偏方向的单位矢量. 利用标准的 Glauber 公式, 进而得到 D_1 和 D_2 的符合探测计数率为:

$$\begin{aligned} R_c \propto & \int_T \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2\, |(\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{o}})(\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}})\ \Psi(\tau_1^o, \tau_2^e) + (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}})(\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{o}})\ \Psi(\tau_1^e, \tau_2^o)|^2 \\ = & \cos^2\theta_1 \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \\ & + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \int_T \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2\ \Psi^*(\tau_1^o, \tau_2^e)\ \Psi(\tau_1^e, \tau_2^o) \end{aligned} \tag{14.4.3}$$

其中 $\Psi(\tau_1^o, \tau_2^e)$ 和 $\Psi(\tau_1^e, \tau_2^o)$ 是归一化的有效的双光子波函数:

$$\int_T \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2\, |\, \Psi(\tau_1, \tau_2)\, |^2 = 1$$

(14.4.3) 式的第三项决定了偶光子干涉的对比度, 或相干度. 考虑简并的连续光泵浦的 SPDC, (12.1.8) 式的偶光子波包可以简化为:

$$\Psi(\tau_1, \tau_2) = \Psi_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\tau_1+\tau_2)/2}\, \mathcal{F}_{\tau_-}\{f(\Omega)\}$$

由此得到, (14.4.3) 式中第三项 $\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2$ 的系数为:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2)/2}\, \mathcal{F}_{\tau_1^o - \tau_2^e}\{f(\Omega)\} \otimes \mathcal{F}_{\tau_1^e - \tau_2^o}\{f(\Omega)\}$$

因此, 有两个重要的因素将决定偏振关联测量的结果: (1) 相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2)/2}$; 和 (2) 双光子波包 $\Psi^*(\tau_1^o, \tau_2^e)$ 和 $\Psi(\tau_1^e, \tau_2^o)$ 卷积的值. 考察关于 $o_1 - e_2$ 和 $e_1 - o_2$ 项的两个波包, 我们发现从 Ⅱ 类 SPDC 直接输出的两维双光子波包的卷积是零, 如图 14.4.2 中不对称的矩形函数 $\Pi(\tau_1 - \tau_2)$ 所示. 为了使得两个波包重叠, 我们可以 (1) 将两个波包都移动 $DL/2$ (情形 I), 或者 (2) 将其中一个波包移动 DL (情形 Ⅱ). I 和 Ⅱ 两种情形, 卷积都能达到最大值 1. 使用 "补偿器" 就是为了这个目的. 补偿了两个非对称函数 $\Pi(\tau_1 - \tau_2)$ 后, 我们需要进一步操控相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p(\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2)/2}$ 最终得到需要的 Bell 态. 这可以通过在路径 1 或 2 中插入延迟片来引入 o 光和 e 光的 2π (+1) 或 π (–1) 相位延迟来实现. 只有上述两个条件都满足时, 才能得到 EPR-Bohm-Bell 偏振关联

$$R_c \propto \sin^2(\theta_1 \pm \theta_2)$$

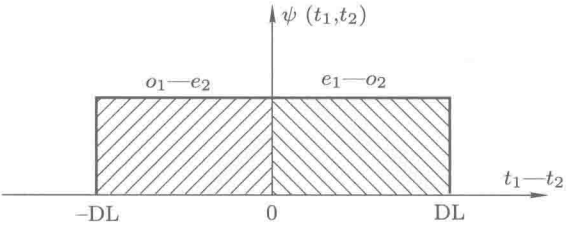


图 14.4.2 不加 "补偿器", $\Psi(\tau_1^o,\tau_2^e)$ 和 $\Psi(\tau_1^e,\tau_2^o)$ 的两维波包沿着 $\tau_1-\tau_2$ 轴不重叠.

此时, 我们可以将信号–闲置光子对的偏振态简化为 Bell 态的形式 $|\Psi_{XY}^{(\pm)}\rangle$.

飞秒泵浦的 SPDC, 其偶光子波包看起来更为复杂一些. 下面, 我们以飞秒泵浦的 Ⅱ 类偶光子波包为例做一个简单的计算. 我们从下面的典型 Ⅱ 类 SPDC 的量子态开始:

$$|\Psi\rangle=\int \mathrm{d}k_o\int \mathrm{d}k_e\int \mathrm{d}\omega_p\int_0^L \mathrm{d}z\mathrm{e}^{-4\ln 2\left[\frac{\omega_p-\Omega_p}{\sigma_p}\right]^2}$$
$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta z}\delta(\omega_o+\omega_e-\omega_p)a_o^\dagger a_e^\dagger|0\rangle \tag{14.4.4}$$

其中 $\Delta=k_p-k_o-k_e$, L 是非线性晶体的长度. 我们考虑的是带宽为 σ_p 的高斯型泵浦脉冲.

为了与实际实验装置接近, 我们考虑在探测器 $D_j, j=1,2$ 之前各放置一个高斯型频谱滤波片. 从而, 场算符可以写成如下形式

$$E_j^{(+)}(t_j,r_j)=\int \mathrm{d}\omega \mathrm{e}^{-4\ln 2\left[\frac{\omega-\Omega_j}{\sigma_j}\right]^2}a_o(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t_j-k(\omega)r_j]} \tag{14.4.5}$$

定义

$$\omega_o=\Omega_o+\nu_o$$
$$\omega_e=\Omega_e+\nu_e$$
$$\omega_p=\Omega_p+\nu_p$$

其中 $\Omega_o\equiv\Omega_1$ 以及 $\Omega_e\equiv\Omega_2$. ν_j 相对中心频率 Ω_j 的偏移量. 注意 $\Omega_o+\Omega_e=\Omega_p$ 以及 $\nu_o+\nu_e=\nu_p$. 此时, 将 Ⅱ 类相位失配 Δ 展开到一阶. 假设 $k(\nu)=[\Omega+\nu]n(\Omega+\nu)/c$, 其中 $n(\Omega+\nu)$ 是晶体中频率为 $\Omega+\nu$ 时的折射率. $k(\nu)$ 展开为

$$k_j=K_j+\frac{\nu_j}{u_j(\Omega_j)} \tag{14.4.6}$$

其中下标 $j=o,e,p$, $K_j=\dfrac{n_j\Omega_j}{c}$, n_j 是非线性晶体中的折射率. 因此, Δ 可

以写成

$$\begin{aligned}\Delta &= k_p - k_o - k_e \\ &= \frac{\nu_p}{u_p(\Omega_p)} - \frac{\nu_o}{u_o(\Omega_o)} - \frac{\nu_e}{u_e(\Omega_e)} \\ &= -\nu_p D_+ - \frac{1}{2}\nu_- D,\end{aligned} \tag{14.4.7}$$

其中 $\nu_- = \nu_o - \nu_e$, $D_+ \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u_o(\Omega_o)} + \frac{1}{u_e(\Omega_e)}\right] - \frac{1}{u_p(\Omega_p)}$ 以及 $D \equiv \frac{1}{u_o(\Omega_o)} - \frac{1}{u_e(\Omega_e)}$. 我们假设 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 来降低计算难度, 即两个滤波片的带宽相同. 这一假设使得对 ν_- 和 ν_+ 的积分近似独立. 我们再定义 $\Omega_o = \Omega_p/2 + \Omega_d$ 以及 $\Omega_e = \Omega_p/2 - \Omega_d$. 注意在简并 Ⅱ 类情形 $\Omega_d = 0$.

联合 (14.4.5) 式、(14.4.4) 式和 (14.4.7) 式, 得到双光子波包 $\Psi(\tau_+, \tau_-)$ 为

$$\Psi(\tau_+, \tau_-) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_p\tau_+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_d\tau_-}\Pi(\tau_+, \tau_-) \tag{14.4.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi(\tau_+, \tau_-) = \int \mathrm{d}\nu_p \int \mathrm{d}\nu_- \int_0^L \mathrm{d}z e^{-[\nu_p/\delta]^2} e^{-2\ln 2[\nu_-/\sigma]^2} \\ \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_p\tau_+}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu_-\tau_-}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\nu_p D_+ + \frac{\nu_-}{2}D]z}\end{aligned} \tag{14.4.9}$$

且有 $\frac{1}{\delta^2} = \frac{2\ln 2}{\sigma^2} + \frac{4\ln 2}{\sigma_p^2}$. 如果滤波片的带宽视为无限大, (14.4.9) 式可以简化为

$$\Pi(\tau_+, \tau_-) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sigma_p^2[\tau_+ - [D_+/D]\tau_-]^2/16\ln 2} & 0 < \tau_- < DL \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

脉冲的 Ⅱ 类 SPDC 的 Π 函数和连续泵浦的 Ⅱ 类 SPDC 看起来有很大不同. 在连续泵浦的 Ⅱ 类 SPDC 情形, Π 函数几乎和 τ_+ 无关. 然而, 在短脉冲泵浦的 Ⅱ 类 SPDC 情形, 它一定即是 τ_- 也是 τ_+ 的函数.

我们举个例子, 考虑 2mm 厚的 Ⅱ 类 BBO 晶体, 由中心波长在 400nm 的激光脉冲泵浦. 对于简并情形, 有 $\lambda_o = \lambda_e = 800\text{nm}$. 图 14.4.3(a) 所示是 80fs 泵浦脉冲产生的未加滤波片的双光子波包. 可以看到与 τ_+ 的强烈的依赖关系. 在 $\tau_- - \tau_+$ 平面内 Π 函数是倾斜的. 在图 14.4.3(b) 中, 双光子波包是由 3ps 泵浦脉冲产生, 没有加滤波片. 注意: 此时双光子沿着 τ_+ 方向伸展开来, 开始和连续泵浦的 Ⅱ 类双光子类似. 在图 14.4.3(c) 和图 14.4.3(d) 中, 我们展示了加上滤波片的效果. 泵浦脉冲宽度固定在 80fs, 改变滤波片的带宽. 在图 14.4.3(c) 中, 我们选用半高全宽 (FWHM) 为 10nm

的滤波片, 而在图 14.4.3(d) 中采用的 FWHM 为 1nm 的滤波片. 不出所料, 频谱滤波将双光子沿着 τ_+ 和 τ_- 方向都展宽, 对 τ_- 方向的影响要大于 τ_+ 方向.

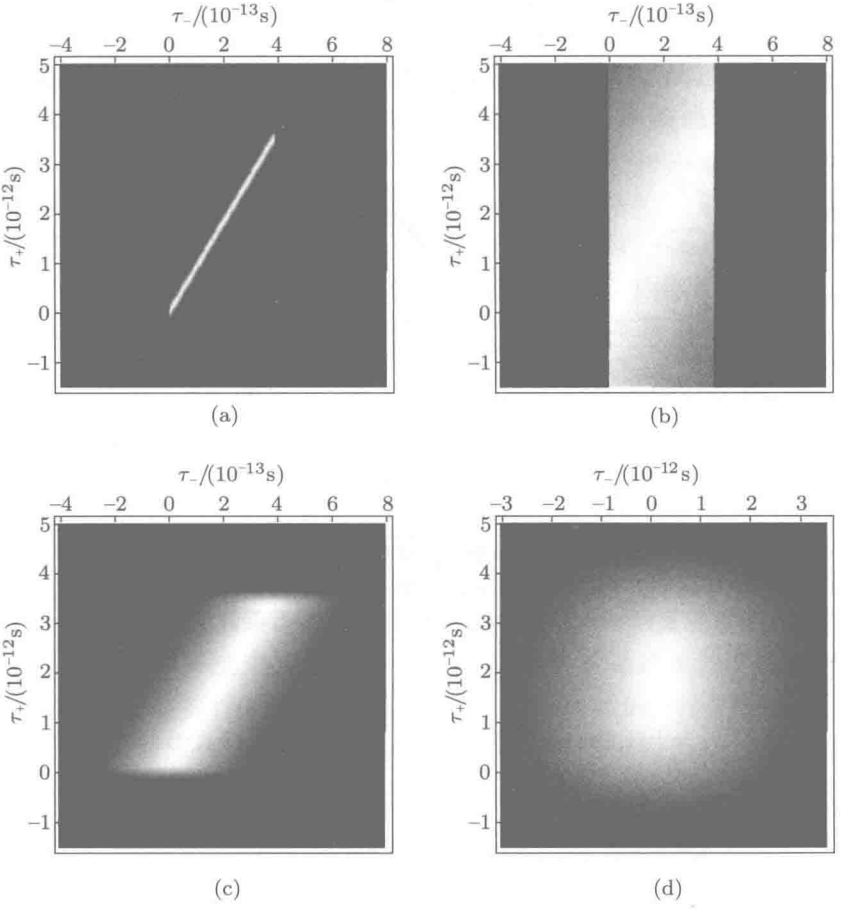


图 14.4.3 Ⅱ类双光子, 是泵浦带宽和滤波片带宽的函数. 用强度图来表示 $\Pi(\tau_+,\tau_-)$. (a) 未加滤波片, 泵浦脉冲宽度 $\delta t_p = 80$fs. (b) 未加滤波片, $\delta t_p = 3$ps. (c) 加全高半宽 (FWHM) 为 10nm 的滤波片, $\delta t_p = 80$fs. (d) 加 FWHM 为 1nm 的滤波片, $\delta t_p = 80$fs.

飞秒脉冲泵浦的Ⅱ类 SPDC 具有非常特殊的时空结构. "倾斜" 的双光子波包使得对制备 Bell 态提出一些特殊要求. 和连续泵浦的 SPDC 不同, 此时仅使用 "补偿器" 是不够的. 虽然我们能够使得 $e-o$ 和 $o-e$ 项相互靠近, 因为 "倾斜" 的波包朝向不同, 它们不可能重叠. 为了解决这个问题, 我们需要 (1) 受图 14.4.3(d) 启发, 我们可以使用一个窄带的滤波片来展宽波包; 或者 (2) 将双光子波包制备成相同 "倾斜" 角, 即两个振幅

都是 e 光到达 D_1、o 光到达探测器 D_2, 或者相反.

作者和 Kim 等人提出了一个非常巧妙的实验方案, 如图 14.4.4 所示. 这一设计使用的是一个非共线的 Ⅱ 类 SPDC. 1/2 波片 (HWP) 以及偏振分束器的使用使得透-透和反-反双光子波包朝着同一个方向 "倾斜"(见图 14.4.5). e 光和 o 光分别去往探测器 D_1 和 D_2. 对连续和飞秒情形都进行了 Bell 态测量. 两种情形都得到了高的干涉可见度, 表明透-透和反-反双光子振幅是高度重合的.

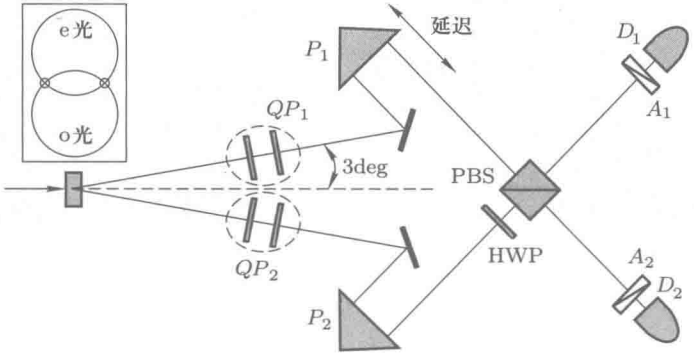
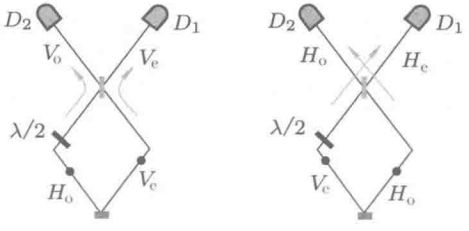


图 14.4.4 超短激光脉冲 Bell 态产生. 非重叠的 $o_1 - e_2$ 和 $e_1 - o_2$ 振幅是通过非共线的 Ⅱ 类 SPDC 过程产生. 半波片 (HWP) 和偏振分束器 (PBS) 的使用使得透-透和反-反双光子波包超同一个方向倾斜. QP_1 和 QP_2 是石英片来精细调节双光子振幅之间的相对相位.



(a) 反射-反射路径 (b) 透射-透射路径

图 14.4.5 光子对触发一个联合探测事件的两条可能路径. 该图进一步揭示半波片 (HWP) 和偏振分束器 (PBS) 的作用: 是怎样使得透-透和反-反双光子波包超同一个方向倾斜. e 光和 o 光总是分别达到探测器 D_1 和 D_2. 连续和飞秒泵浦情况都进行 Bell 态测量. 两种情况都观测到高的干涉可见度.

本章小结

本章从偶粒子和偶光子 EPR-Bohm-Bell 态的自旋和偏振的测量引入

并介绍了贝尔定理和贝尔不等式. 有关贝尔不等式的讨论其实再一次重复了以前讨论过的两个量子力学基本问题: 物理实在性和时空局域性, 这两个问题皆源于 1935 年爱因斯坦, 波多尔斯基和罗森的文章.

处于 EPR-Bohm 态的粒子在传播过程中是否具有确定的自旋或偏振呢? 量子力学认为: 如果一对粒子处在 EPR-Bohm 态, 那么该粒子对中的每一个都可以取任意或所有可能的自旋或偏振. 实验已经证明, 即使偶光子态中的每一个光子在其制备过程中都获得了确定的偏振, 在一定的偶光子振幅叠加后, 作为偶光子态的子系统, 它们的偏振完全有可能不再有确定取向. 作为一个唯物论物理学家, 爱因斯坦对量子叠加原理感到非常不安. 爱因斯坦坚持量子力学波函数应该能够满足他们在 1935 年定义的 "物理实在". 玻姆和他的追随者尝试了隐变量理论. 此理论似乎既满足了爱因斯坦的唯物论要求, 又可以计算出与量子理论相符的结果. 玻姆的 "隐变量理论" 对几乎每一个量子现象都得到了与量子力学相吻合的结果. 直到后来贝尔证明了一个定理, 并且推导出一个可以区别局域隐变量理论和量子力学的不等式. 本章介绍了两个贝尔不等式的推导以及它们背后的经典统计模型.

值得强调的是: 虽然贝尔定理和贝尔不等式涉及 "时空局域性" 概念, 它并不意味着所有的非局域问题都包括在贝尔不等式的范畴. 虽然, 一般而言, 贝尔理论和贝尔不等式涉及深刻的哲学思想, 但是我们应该清醒的是: 对物理系统进行物理测量来检验贝尔不等式本质上是一个物理问题. 任何经典统计模型, 无论是局域还是非局域的, 一定要服从经典理论的基本物理定律. 任何假设的经典关联切勿超出经典理论的范畴.

本章中, 我们分析了 EPR-Bohm 态以及 Bell 态的各种物理特性, 包括了它们的常常被忽略掉的时空特性. 在此基础之上, 简单地讨论了 Bell 态的制备. 从这些讨论中, 我们再一次强调了纠缠态多粒子叠加, 或多粒子干涉的物理内涵.

推荐读物

[1] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice Hall Inc., New York, (1951).

[2] C.O. Alley and Y.H. Shih, *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, ed., M. Namiki, Physical Society of Japan, Tokyo, 47 (1986); Y.H. Shih and C.O. Alley, Phys. Rev. Lett., **61**, 2921, (1988).

[3] Z.Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett., **62**, 50 (1988).

[4] J.S. Bell, Physics, **1**, 195 (1964).

[5] J.S. Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, 1993.

[6] J.F. Clauser, M.A. Horne, A.Shimony, and R.A. Holt, Phys. Rev. Lett., **23**, 880 (1969).

[7] J.F. Clauser and M.A. Horne, Phys. Rev. D, **10**, 526 (1974).

[8] M.O. Scully, N. Erez, and E.S. Fry, Phys Lett. A, **347**, 56 (2005).

[9] D.M. Greenberger, M. Horne, and A. Zeilinger, *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the universe*, ed. M. Kafatos, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1989.

[10] D.M. Greenberger, M. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, Am. J. Phys., **58**, 1131 (1990).

[11] J.F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys. **41**, 1881 (1978).

[12] A. Aspect, et al, Phys. Rev. Lett., **47** , 460 (1981); Phys. Rev. Lett., **49**, 91 (1982); Phys. Rev. Lett., **49**, 1804 (1982).

[13] Y.H. Shih, Two-Photon Entanglement and Quantum Reality, *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, ed., B. Bederson and H. Walther, Academic Press, Cambridge, 1997; Entangled Photons, IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics, **9**, No. 6, (2003).

[14] P.R. Tapster, J.G. Rarity, and P.C.M. Owens, Phys. Rev. Lett., **73**, 1923 (1994).

[15] D.V. Strekalov, T.B. Pittman, A.V. Sergienko, Y.H. Shih, and P.G. Kwiat, Phys. Rev. A, **54**, R1 (1996).

[16] T.B. Pittman,Y.H. Shih, A.V. Sergienko, and M.H. Rubin, Phys. Rev. A, **51**, 3495 (1995).

[17] P.G. Kwiat *et al.*, Phys. Rev. A., **60**, R773 (1999).

[18] Y.-H. Kim, M.V. Chekhova, S.P. Kulik, M.H. Rubin, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, (2001); Y.-H. Kim, S.P. Kulik, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A **63**, 060301(R) (2001); Y.-H. Kim, M.V. Chekhova, S.P. Kulik, and Y.H. Shih, Phys. Rev. A, **67**, 010301(R) (2003).

[19] Y.-H. Kim, S.P. Kulik, and Y.H. Shih, Phys. Rev. Lett., **86**, 1370 (2001).

译后记

2011 年 5 月, 史砚华教授受邀来南京大学开设有关量子光学的暑期班课程时, 委托我翻译他的英文专著《An Introduction to Quantum Optics: Photon and Biphoton Physics》(CRC Press), 当时该英文专著已经出版, 很受关注。史教授希望中文译本能够对中国的量子光学爱好者和科研人员起到更直接和更广泛的帮助。获授权翻译此书, 我深感荣幸, 同时也觉得很有挑战。虽然, 我先后四次听过史教授的量子光学课程, 但是唯恐对原著的理解和思考不够深入以致翻译不够精准。所以, 近几年, 在工作之余反复研读原著, 几经修改, 终将译本完成。

原著是一部极具特色的量子光学专著, 它关注的都是量子力学最新揭示出来的具有重大意义的量子现象的物理本源, 强调追求物理本源是该著作明显有别于其它量子光学导论书籍的特色之处, 其写法和内容独具一格。在这里, 我将我在翻译原著过程中的一些心得体会与读者分享, 供读者参考。原著特别强调量子光学的基本概念, 比如相干性、纠缠、多光子干涉等诸多基本概念, 对基本概念的阐述深入浅出、精辟入理。以相干性例, 这一概念贯穿全书始终, 从经典光学相干性直到量子光学相干性, 前后呼应, 体现出概念的延伸和拓展, 使得该书的系统性很强。再比如对于干涉这一概念, 无论是单光子干涉还是多光子干涉, 原著在实验论证及数学推演的基础上, 给出了一个统一的量子干涉的物理机理: 一个光子与其自身干涉, 两光子对与其自身干涉, 一组 n 光子与其自身干涉。需要注意的是, 原著在揭示物理本源的同时, 很注重对实验现象的描述和分析, 展示了如何全面、细致地刻画一个物理实验现象, 并基于这些现象去寻找实验现象背后的物理本质。比如对于混沌热光体现出来的非平庸的二阶关联, 究竟是源于经典统计的涨落理论还是另有物理缘由。原著介绍了作者及其团队开展的一系列实验, 这些实验过程展示了实验设计对于概念检验、去伪存真的重要性。除此以外, 原著也非常强调如何敏锐地从基本概念的剖析到应用技术方面的拓展, 展示新颖物理概念

背后所蕴含的强大的技术创新力。比如原著中从高阶空间相干性所发展出来的“鬼成像”技术应用等。所以，我认为，原著的学术价值不但在于向年轻的学者们系统地介绍量子光学基本概念，还在于用一个个经典和新颖的物理现象揭示发现问题、分析问题、解决问题的方法，有助于提升读者的科研能力，用于解决其它的量子光学问题。

需要指出的是，在翻译过程中，史教授对第 10、11、12、13、14 诸章节进行了内容的改写和添加，增添了许多最新的实验成果及理论分析，使得中文译本内容大大丰富于英文原版，使得中文读者可以较早地获悉许多重要的最新研究进展。

该译著由谢渊泓博士校订，谢博士对整个译本做了多次仔细的校订，他对于语言以及格式方面严格要求大大提升了该译本的质量。他深厚的文学功底以及字斟句酌的严谨态度，也深深影响了我。

该译著的完成还需要感谢我的学生冷晗阳和柏艳飞博士，他们协助我翻译了部分章节，主要是光学成像、光场的相干性、量子相干性等，这些章节是我在他们的初稿上修改而成。另外，我还要特别感谢柏艳飞博士对我在 latex 使用方面的帮助。

由于译者水平有限，难免对原著的理解有些偏差和疏漏之处，还望读者见谅。

2016 年 1 月 6 日星期三

于南京

徐平

郑重声明

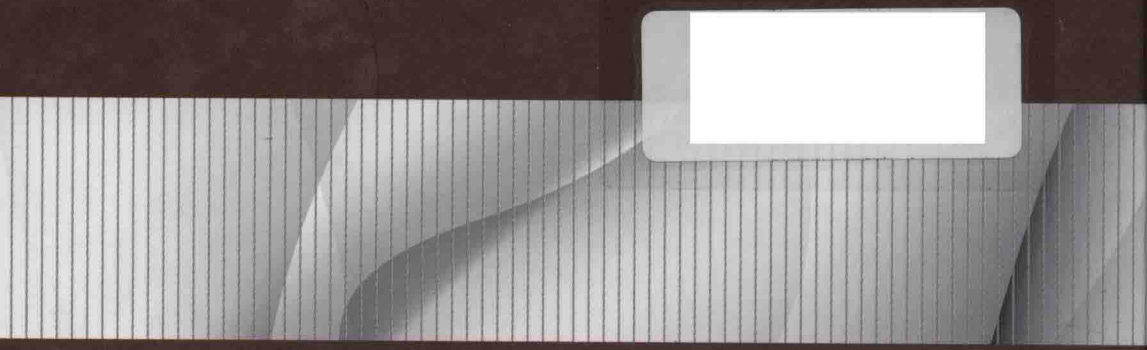
高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488
反盗版举报传真 (010) 82086060
反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn
通信地址 北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社法律事务与版权管理部
邮政编码 100120

策划编辑 王 超
责任编辑 王 超
封面设计 张 志
版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹
责任校对 刘娟娟
责任印制 毛斯璐

本书由国际知名学者、本领域先驱精心撰著，对光量子理论的基本原理和实验验证进行简明直接的归纳总结。本书着重对迄今为止在量子光学和量子信息领域最为激动人心的一些实验研究进行介绍和分析，帮助读者理解光学领域正在发生的革命性变化。

赋予光的总体量子干涉图像，揭示所有光学现象背后的物理本质。



An Introduction to Quantum Optics
Photon and Biphoton Physics

不同于本领域大多数传统书籍，本书是在分析典型的实验结果的过程中自然地、循序渐进地介绍基本的经典和量子的概念以及探测技术。特别关注对实验部分的分析是本书有别于其他书籍之处。本书的主要贡献有：

- 在光场量子化之前引入“子场”及子场叠加干涉的概念，对光学相干性进行综述
- 基于量子力学原理与规则介绍场量子化及量子光学的概念和工具
- 分析了经典相干性和量子相干性之间的异同
- 聚焦于量子光学中的核心研究课题
- 通过探究实验器件和过程来解释单光子和双光子物理，进而检验相关理论

本书由于涉及很多基础概念，很适合作为学生用书。同时本书也涵盖大量高等量子光学概念，可以帮助科学家和其他专业人员提升对实验、理论及最新测量方法的理解。本书对领域内令人激动的发展和观测进行总结，可以帮助各层次的读者来利用现有概念、工具去总结、分析和解决在工作中遇到的量子光学问题。本书将极大提升人们发现和理解新物理的方法和途径，鼓励人们学会用非传统的概念来解释新生的、历史上的实验发现。

学科类别：物理

ISBN 978-7-04-044763-7

9 787040 447637 >

定价 69.00元

本书微信、微博

微信号：ldjjhwx

@朗道集结号

academic.hep.com.cn