第一章　自由电磁场的量子化

§1.1　经典力学回顾

§1.1.1　分析力学回顾

定义：　$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$ 称为 Lagrange 函数

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = T(\dot{\vec{r}}_i, t) - V(\vec{r}_i, t), \tag{1.1}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ 为质点系的总动能函数, $V(\vec{r}_i, t)$ 为总势能函数, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_g, t)$ 为第个 i 粒子坐标 $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 。 $q_a (a = 1, 2, \cdots, g)$ 称为 广义坐标 ， g 为总广义坐标总数。当广义坐标皆为独立，没有相互约束条件时，力学系的自由度与广义坐标个数相同，此时的力学系成为 完整力学系 。由最小作用原理可以推知

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0, \qquad (a = 1, 2, \cdots, g) \tag{1.2}$$

上式称为 Lagrange 运动方程。作变换 $q_a = q_a(\vec{q}_b, t)$, 可以得到新的 $L(\vec{q}_b, \dot{\vec{q}}_b, t)$, 这种变换叫做 广义坐标变换 。　　由 (1.2) 可以得到 g 个二阶微分方程组成的方程组，再加上 $q_a(t_0)$ 和 $\dot{q}_a(t_0)$ 共 $2g$ 个初值，即能解出运动方程的解。由于广义坐标变换只局限于 g 个变量的变换，还不够求解之用，因此我们必须有 $2g$ 个变量的变换。引入 广义动量

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}, \qquad (a = 1, 2, \ldots, g) \tag{1.3}$$

并反解方程，可得 $\dot{q}_a(q_1, q_2, \cdots, q_g, t)$ 。同样，可以定义 Hamilton 函数

$$H(q_a, p_a, t) = \sum_a p_a \dot{q}_a - L(q_a, \dot{q}_a, t), \tag{1.4}$$

则可推得 Hamilton 正则方程 (canonical equation),

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}. \qquad (a = 1, 2, \cdots, g). \tag{1.5}$$

这是以 $2g$ 个一阶方程代替了原来的 g 个二阶方程。

Hamilton 正则方程原则上可用正则变换 (canonial transformation) 求解。所谓正则变换，是指 (q_a, p_a) 共 $2g$ 个正则变量到 (Q_a, P_a) 等 $2g$ 个新的正则变量的变换，并满足条件

$$\sum_a p_a dq_a - H dt = \sum_a P_a dQ_a - K dt + dG, \tag{1.6}$$

其中 dG 为任意全微分。选定 G 便决定了正则变换，同时也决定了变换后的新的 Hamliton 函数 $K(P_a, Q_a, t)$ 。可以证明

$$p_a = \frac{\partial G}{\partial q_a}, \qquad P_a = -\frac{\partial G}{\partial Q_a}, \qquad (a = 1, 2, \cdots, g) \tag{1.7a}$$

$$K(Q_a, P_a, t) = H(p_a, q_a, t) + \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{1.7b}$$

经过正则变换后，新的正则方程为

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial K}{\partial P_a}, \qquad \dot{P}_a = -\frac{\partial K}{\partial Q_a}. \qquad (a = 1, 2, \cdots, g)$$

原则上可选适当的 G 使得 $K \equiv 0$ 。为此，需求解 Hamilton-Jacobi 方程

$$H\left(q_a, \frac{\partial G}{\partial q_a}, t\right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{1.8}$$

的某个完全解，即求方程 (1.8) 的一个包括 g 个任意常量 α_a 的特解 $G = G(q_a, \alpha_a, t)$ 即可， G 的可加任意常量不算。将 G 看作产生 $(q_a, p_a) \to (Q_a, P_a)$ 的正则变换，使得 $K \equiv 0$ 。所以新的正则方程显然可解，即

$$\left.\begin{aligned} Q_a &= \text{const} = \alpha_a \\ P_a &= \text{const} = -\frac{\partial G}{\partial \alpha_a} = \beta_a \end{aligned}\right\} (a = 1, 2, \cdots, g), \tag{1.9}$$

从后者可反解出 $q_a = q_a(\alpha_a, \beta_a, t)$ 以及 $p_a = \partial G/\partial q_a = p_a(\alpha_a, \beta_a, t)$. 于是正则方程已解。特别地，可选 G 为 Hamilton 主函数

$$W = W(q_a, \alpha_a, t), \tag{1.10}$$

其中 $\alpha_a = q_a(t_0)$ ， $\beta_a = p_a(t_0)$. 由

$$\beta_a = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_a}, \qquad p_a = \frac{\partial W}{\partial q_a},$$

可以给出 (q_a, p_a) 与其初值 (α_a, β_a) 的关系。随时间 t 的演化， q_a, p_a 总是以前某初值的正则变换。

由正则方程 (1.5), 对 $\forall f(q_a, p_a, t)$, 有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \tag{1.11}$$

其中 Poisson 括号 $\{u,v\}$ 定义为

$$\{u,v\}=\sum_a\left(\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial v}{\partial p_a}-\frac{\partial v}{\partial q_a}\frac{\partial u}{\partial p_a}\right). \tag{1.12}$$

可以证明，Poisson 括号对正则变换是不变量，即当 (q_a,p_a) 与 (Q_a,P_a) 为正则变换时，有

$$\sum_a\left(\frac{\partial u}{\partial q_a}\frac{\partial v}{\partial p_a}-\frac{\partial v}{\partial q_a}\frac{\partial u}{\partial p_a}\right)=\sum_a\left(\frac{\partial u}{\partial Q_a}\frac{\partial v}{\partial P_a}-\frac{\partial v}{\partial Q_a}\frac{\partial u}{\partial P_a}\right).$$

显然，有基本的 Poisson 括号关系

$$\{q_a,p_b\}=\delta_{ab},\qquad \{q_a,q_b\}=\{p_a,p_b\}=0.\qquad (a,b=1,2,\cdots,g) \tag{1.13}$$

该关系式是判断 (q_a,p_a) 是否为一套正则变量的判断标准 。

作为经典力学中求解问题的一个例子，我们回顾一下简谐振子的情况。一系列一维简谐振子的力学系统的 Hamilton 函数为

$$H=\sum_i\left(\frac{p_i^2}{2m_i}+m_i\omega_i^2q_i^2\right) \tag{1.14}$$

其中 m_i 为振子质量， p_i 为其正则动量， q_i 为其正则坐标， ω_i 为振子的圆频率。容易证明，其正则方程由 (1.5) 可得为

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{p_i}{m_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-m_i\omega_i^2q_i. \tag{1.15a}$$

于是可得

$$\frac{d^2q_i}{dt^2}+\omega_i^2q_i=0 \tag{1.15b}$$

所以 q_i 是一系列以 ω_i 为频率的振动，即 $q_i\sim e^{\pm i\omega_i t}$ ，由它可以进一步解出 p_i 。

作为经典力学中的一类简单的保守力系问题的简谐振子，在量子理论的产生和发展中将起到十分重要的作用，特别是在电磁场的量子化程序中将扮演关键的角色。

§1.1.2 经典力学向量子力学发展的催化剂——对黑体辐射的研究

1. 黑体辐射的几个已有的公式

   - Rayleigh-Jeans 公式： (1900 年， 1905 年)

$$u_\nu d\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BTd\nu, \tag{1.16}$$

其中 k_B 是常数，此公式只符合长波长时的实验结果。

- Stefan-Boltzmann 定律： (1879 年， 1884 年)

$$u = aT^4, \tag{1.17}$$

其中 $u = \int_0^\infty u_\nu d\nu$ 为总能量密度， $\sigma = \frac{1}{4}ac$ 为 Stefan 常数。

- Wein 公式：（ 1893 年， 1896 年 ）

$$u_\nu d\nu = \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu, \tag{1.18a}$$

半经验公式

$$u_\nu d\nu \propto \nu^3 e^{-c_2/\lambda T} d\nu. \tag{1.18b}$$

其中 $\lambda = c/\nu$ 为辐射波长， c_2 称为第二辐射常量，且 (1.18b) 只符合短波长时的实验结果。

- Plank 公式： (1900 年)

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/K_B T} - 1} d\nu \tag{1.19}$$

当短波长时，即 ν 较大，有 Wien 公式：

$$u_\nu d\nu \cong \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \cdot exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \nu^3 \cdot exp\left(-\frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T}\right) d\nu.$$

即有 $c_2 = hc/k_B$, 其中 h 是 Planck 常数。

当长波长时， λ 较大而 $\nu \to 0$ 时, 有 $e^{h\nu/k_B T} \to 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$ 于是有 Rayleigh-Jeans 公式

$$u_\nu d\nu \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T d\nu$$

所以， Planck 公式是一个包括了 Wien 公式和 Rayleigh-Jeans 公式在内的更加普适的黑体辐射公式。

为了得到 Planck 公式，最为重要的是，必须假设辐射能量是一份一份的，即能量子，并且定义了一个与第二辐射常量有关的常数，即 Planck 常数 $h = k_B c_2/c$ 。

1900 年 12 月 14 日， Planck 在 Berlin 物理学会上给其公式以量子 (quanta) 说明，此日就是 量子论的生日 (1900 年 12 月 14 日) 。

2. 黑体辐射等效于辐射振子的力学系统

由 Couloumb 规范，即 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 下的 Maxwell 方程，有

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.20}$$

对于黑体腔，采用周期性边界条件将 $\vec{A}$ 展开为

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_{\lambda}q_{\lambda}(t)\vec{A}_{\lambda}(\vec{r}), \tag{1.21}$$

其中

$$\nabla^2\vec{A}_{\lambda}+\frac{1}{c^2}\omega_{\lambda}^2\vec{A}_{\lambda}=0,\qquad \nabla\cdot\vec{A}_{\lambda}=0, \tag{1.22a}$$

$\vec{A}_{\lambda}$ 是周期函数

$$\vec{A}_{\lambda}=\sqrt{\frac{2}{V\epsilon_0}}\vec{e_{\lambda}}\cos(\vec{k_{\lambda}}\cdot\vec{r}),\qquad \sqrt{\frac{2}{V\epsilon_0}}\vec{e_{\lambda}}\sin(\vec{k_{\lambda}}\cdot\vec{r}). \tag{1.22b}$$

且满足周期性边界条件

$$\vec{k_{\lambda}}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z) \tag{1.22c}$$

其中 n_x,n_y,n_z 为整数，并有

$$\vec{e}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\cdot\vec{k}_{\lambda}=0, \tag{1.22d}$$

因此，给定 $\vec{k}$ 可有两个 $\vec{e_{\lambda}}$，即代表两个线偏振方向，又要求满足

$$\omega_{\lambda}^2=k_{\lambda}^2c^2. \tag{1.22e}$$

于是，根据 (1.20)，(1.21) 及 (1.22) 可得

$$\frac{d^2q_{\lambda}}{dt^2}+\omega_{\lambda}^2q_{\lambda}=0, \tag{1.23}$$

此即简正坐标 q_{λ} 的运动方程。可以证明，此时整个系统的能量为

$$\int_V\frac{1}{2}[\varepsilon_0E^2+\mu_0H^2]d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\left[\left(\frac{dq_{\lambda}}{dt}\right)^2+\omega_{\lambda}^2q_{\lambda}^2\right], \tag{1.24a}$$

其中电场对能量的贡献为

$$\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_0E^2d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\left(\frac{dq_{\lambda}}{dt}\right)^2, \tag{1.24b}$$

磁场为

$$\frac{1}{2}\int_V\mu_0H^2d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\omega_{\lambda}^2q_{\lambda}^2 \tag{1.24c}$$

于是，黑体辐射的平衡态等效于一系列谐振子的力学系统的平衡态，其 Hamilton 函数为

$$H=\sum_{\lambda}\frac{1}{2}\left(p_{\lambda}^2+\omega_{\lambda}^2q_{\lambda}^2\right),$$

正则方程为

$$\dot{q_\lambda} = p_\lambda, \qquad \dot{p_\lambda} = -\omega_\lambda^2 q_\lambda.$$

由于电磁场有两个独立的线偏振，因此频率在 ν 到 $\nu + d\nu$ 的振子总数为

$$\sum_\lambda 1_\lambda = 2 \sum_{n_x,n_y,n_z} \Delta n_x \cdot \Delta n_y \cdot \Delta n_z.$$

下面计算振子总数。在极坐标下，即令

$$n_r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{L}{2\pi} \mid \vec{k}_\lambda \mid = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{c}\nu$$

可得

$$\triangle n_x \triangle n_y \triangle n_z = 4\pi n_r^2 dn_r = 4\pi \cdot \left(\frac{L\nu}{c}\right) \cdot \frac{L}{c} d\nu = 4\pi \cdot \frac{L^3\nu^2}{c^3} d\nu,$$

故

$$\sum_\lambda 1_\lambda = L^3 \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \tag{1.25a}$$

因此，单位体积内的振子数密度为

$$\frac{1}{V}\sum_\lambda 1_\lambda = \frac{1}{L^3} \cdot L^3 \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu. \tag{1.25b}$$

由经典统计物理的 能量均分定理 可知，每个振子的平均能量为

$$U = \frac{\int H e^{-H/k_B T} dpdq}{\int e^{-H/k_B T} dpdq} = k_B T,$$

所以，可得其能量密度为

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T d\nu$$

此即 Rayleigh-Jeans 公式。

此前， Boltzmann 于 1884 年从辐射压强

$$p = \frac{1}{3u},$$

其中 $u = \int_0^\infty u\nu d\nu$ 为总能量密度，及热力学第二定律

$$d(uV) + pdV = TdS,$$

其中 S 是熵 (entropy)， V 是体积，由 dS 的全微分得到

从而

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{T}\frac{\partial u}{\partial T}\right)-\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{4}{3}\frac{u}{T}\right)=0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial T}=4\frac{u}{T}$$

$$\Rightarrow u=aT^4.$$

此即 Stefan-Boltzmann 定律 (Stefan 于 1879 年在实验上发现该定律， Boltzmann 于 1884 年从理论上推出该定律) 。

3. Planck 凑出来的黑体辐射公式

对于能量与平均值的偏差 (均方差)，由统计物理可知，为

$$\overline{(H-U)^2}=k_BT^2\frac{dU}{dT}=-\frac{k_B}{\frac{d}{dU}\left(\frac{1}{T}\right)}$$

对 Wien 公式

$$U=\gamma\nu exp\left(-\frac{c_2\nu}{cT}\right),$$

其中 γ 是常数于是可得

$$\frac{1}{T}=-\frac{c}{c_2\nu}\ln\frac{U}{\gamma\nu},\qquad \frac{d}{dU}\left(\frac{1}{T}\right)=-\frac{c}{c_2\nu U},$$

于是

$$\overline{(H-U)^2}=\frac{k_Bc_2\nu}{c}U.$$

另一方面，对于 Rayleigh-Jeans 公式，有

$$U=k_BT,\qquad \frac{1}{T}=\frac{k_B}{U},\qquad \frac{d}{dU}\left(\frac{1}{T}\right)=-\frac{k_B}{U^2}$$

所以 $\overline{(H-U)^2}=U^2$ 。取偏差方和作为插值，即

$$\overline{(H-U)^2}=U^2+\frac{k_Bc_2\nu}{c}U=-\frac{k_B}{\frac{d}{dU}\left(\frac{1}{T}\right)},$$

因而

$$\frac{d}{dU}\left(\frac{1}{T}\right)=-\frac{k_B}{U(U+\frac{k_Bc_2\nu}{c})}=\frac{c}{c_2\nu}\left(\frac{1}{U+\frac{k_Bc_2\nu}{c}}-\frac{1}{U}\right),$$

从而可得

$$\frac{1}{T}=\frac{c}{c_2\nu}\ln\frac{U+\frac{k_Bc_2\nu}{c}}{U}$$

$$\Rightarrow \qquad U=\frac{k_Bc_2\nu/c}{e^{c_2\nu/k_BT}-1}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1},$$

其中 $h=k_Bc_2/c.$

于是

$$u_\nu d\nu=\left(\frac{h\nu}{exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)-1}\right)\cdot\frac{8\pi\nu^2}{c^3},$$

其中 $h=6.55\times10^{-34}\mathrm{J\cdot S}$, $k_B=1.346\times10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$。相当于 $N=6.175\times10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$。

根据 Planck 公式还容易推出以下关系：

(1) Wien 系数

$$a=\frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3},$$

其中用到

$$\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}.$$

(2) Stefan 常数

$$\sigma=\frac{1}{4}ac=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}.$$

(3) 应用量子假设，即假设辐射振子的能量

$$E_n=n\mathcal{E}=nh\nu,$$

可得

$$U=\frac{\sum\limits_n E_n\exp\left(-\frac{E_n}{k_BT}\right)}{\sum\limits_n\exp\left(-\frac{E_n}{k_BT}\right)}=\frac{\mathcal{E}}{\exp\left(\frac{\mathcal{E}}{k_BT}-1\right)}=\frac{h\nu}{\exp\left(\frac{\mathcal{E}}{k_BT}\right)-1}.$$

§1.2 自由电磁场的量子化

自由空间中的 Maxwell 方程为：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, &\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\vec{B}=0, &\qquad \nabla\cdot\vec{D}=0.\end{aligned}\right\} \tag{1.26a}$$

本构关系

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}. \tag{1.26b}$$

可得

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.27}$$

对于驻波场来说，考虑 $\vec{E} = E_x \vec{e_x}$ 有

$$E_x(z,t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z), \tag{1.28a}$$

其中

$$A_j = \sqrt{\frac{2\omega_j^2}{V\epsilon_0}}, \qquad k_j = j\frac{\pi}{L}, \tag{1.28b}$$

并可推出

$$H_y = \sum_j A_j \left[\frac{\dot{q}_j(t)\epsilon_0}{k_j}\right] \cos(k_j z). \tag{1.28c}$$

计算可得，电磁场的总能量为

$$H = \frac{1}{2}\int_V d^3\vec{r}(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) = \frac{1}{2}\sum_j (p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2), \tag{1.28d}$$

其中

$$p_j = \dot{q}_j. \tag{1.28e}$$

从（ 1.29d ）（ 1.29e ）可以看出，自由电磁场的 Hamilton 量与线形谐振子的相同，并有相应的正则坐标和正则动量对 (q_j, p_j) 。按照正则量子化程序，并将 q_j, p_j 均看作算符，我们可以得到 (以下 q_j ， p_j 均为算符) ，

$$[q_j, p_{j'}] = i\hbar\delta_{jj'}, \qquad [q_j, q_{j'}] = [p_j, p_{j'}] = 0. \tag{1.29}$$

令

$$\left.\begin{aligned} a_j e^{-i\omega_j t} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_j}}\left(\omega_j q_j + i p_j\right), \\ a_j^\dagger e^{i\omega_j t} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_j}}\left(\omega_j q_j - i p_j\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

则得 Hamilton 量

$$H = \hbar\sum_j \omega_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}) \tag{1.31a}$$

及对易关系

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \qquad [a_j, a_{j'}] = [a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger] = 0. \tag{1.31b}$$

相应地，将 $a_j, a_{j'}^\dagger$ 称作消灭，产生算符。正则坐标和动量可以由之表示为

$$\left.\begin{aligned} q_j &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_j}}\left(a_j e^{-i\omega_j t} + a_j^\dagger e^{i\omega_j t}\right), \\ p_j &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2}}\left(a_j e^{-i\omega_j t} - a_j^\dagger e^{i\omega_j t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.31c}$$

于是，量子化后的光场的分量为

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \sum_j \mathcal{E}_j (a_j e^{-i\omega_j t} + a_j^\dagger e^{i\omega_j t}) \sin(k_j, z), \\ H_y &= -i\epsilon_0 c \sum_j \mathcal{E}_j (a_j e^{-i\omega_j t} - a_j^\dagger e^{i\omega_j t}) \cos(k_j z). \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

其中 $\mathcal{E}_j = \sqrt{\hbar\omega_j/\epsilon_0 V}$. 由 (1.33) 式可以发现, 光场具有正频和负频部分, 分别对应着消灭和产生算符。同时, E_x, 和 H_y 相当于一对正则变量, $[E_x, H_y] = 2i\epsilon_0 \sum\limits_j \mathcal{E}_j \sin(k_j z)\cos(k_j z)$ 。

下面讨论行波场的量子化。

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \mathcal{E}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}, \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}}{\omega_{\vec{k}}} \mathcal{E}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}, \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

其中 $\sum\limits_{\vec{k}}$ 是对无穷个 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 模式求和， $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{\lambda}$ 是单位偏振矢量， $\alpha_{\vec{k}}$ 是无量纲量，$\mathcal{E}_{\vec{k}} = \sqrt{\hbar\omega_{\vec{k}}/2\epsilon_0 V}$ ， c.c. 表示复共轭。由周期性边界条件可知

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z),$$

其中 $n_j (j = x, y, z)$ 是整数。由 Maxwell 方程可知

$$\vec{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} = 0,$$

因此与 $\vec{k}$ 垂直的独立分量有两个，为 $\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} (\lambda = 1, 2)$. 考虑到这一点，将 $\sum\limits_{\vec{k}}$ 转化为积分需要乘以 2 倍，即

$$\sum_{\vec{k}} \to 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3\vec{k}, \tag{1.34}$$

在球坐标下,

$$\int d^3\vec{k} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk = \frac{4\pi}{c^3}\int_0^{\infty} \omega^2 d\omega.$$

因而，在体积为 L^3 的空间中， ω 到 $\omega + d\omega$ 内的模数目为

$$dN = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \cdot \left(\frac{4\pi}{c^3}\right) \cdot \int_{\omega}^{\omega+d\omega} \omega^2 d\omega \approx \frac{L^3\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \triangleq D(\omega)d\omega, \tag{1.35}$$

上式中略去了 $(d\omega)^2$ 项及高阶项，其中 $D(\omega) = \dfrac{L^3\omega^2}{\pi^2 c^3}$ 成为 模密度 。将 (1.34) 算符化，即 $\alpha_{\vec{k}} \to a_{\vec{k}}$ ， $\alpha^*_{\vec{k}} \to a^+_{\vec{k}}$ 后可得

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}^{(\lambda)}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{h.c.}, \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\mu_0}\sum_{\vec{k}} \frac{\vec{k}\times\hat{\epsilon}^{(\lambda)}_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} \mathcal{E}_{\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{h.c.} \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

其中有下列正则对易关系：

$$\left.\begin{aligned} [a_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \\ \left[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}\right] &= \left[a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

于是电场和磁场均能写成正、负频部分，即

$$\vec{E} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)}, \qquad \vec{H} = \vec{H}^{(+)} + \vec{H}^{(-)}.$$

进而，可以证明（作为练习）

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}j} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}j} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \tag{1.38a}$$

$$\left[E_j(\vec{r},t), H_j(\vec{r'},t)\right] = 0 \qquad (j = x,y,z), \tag{1.38b}$$

$$[E_j(\vec{r},t), H_k(\vec{r},t)] = -i\hbar c^2 \frac{\partial}{\partial l}\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r'}). \tag{1.38c}$$

其中 j,k,l 组成一个置换群，如 $j = x, k = y$ 则 $l = x$ ； $j = y, k = z$ 则 $l = x$ ；等。

§1.3 Fock 态

定义： Fock 态 $\mid n\rangle$ 是 $H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})$ 的本征态，即

$$H\mid n\rangle=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})\mid n\rangle=E_n\mid n\rangle \tag{1.39}$$

根据对易关系 $[a,a^\dagger]=1$ ，可以证明：

1. $Ha\mid n\rangle=(E_n-\hbar\omega)a\mid n\rangle\triangleq E_{n-1}a\mid n\rangle \quad \Rightarrow \quad a\mid n\rangle$ 是 H 的本征态
2. 从而
$$Ha\mid 0\rangle=(E_0-\hbar\omega)a\mid 0\rangle\Rightarrow a\mid 0\rangle=0$$
因此
$$H\mid 0\rangle=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})\mid 0\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega\mid 0\rangle=E_0\mid 0\rangle$$
3. $$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega,$$
$$a^\dagger a=\hat{n},\qquad \hat{n}\mid n\rangle=n\mid n\rangle.$$
4. $$a\mid n\rangle=\sqrt{n}\mid n-1\rangle,$$
$$a^\dagger\mid n\rangle=\sqrt{n+1}\mid n+1\rangle,$$
$$\mid n\rangle=\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\mid 0\rangle.$$
5. Fock 态组成一个正交归一完备系，即
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mid n\rangle\langle n\mid=1,\qquad \langle m\mid n\rangle=\delta_{nm}.$$
于是 $\forall\mid\psi\rangle$ ，有
$$\mid\psi\rangle=\sum_n c_n\mid n\rangle.$$

对于一个单模线偏振的电磁场而言，

$$E(\vec{r},t)=\mathcal{E}ae^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}+\text{h.c.},$$

可以证明 (作为证明) ：

1.
$$\langle n \mid E \mid n\rangle = 0$$

2.
$$\langle n \mid E^2 \mid n\rangle = 2\mathcal{E}^2\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

特别地，当 $\mid n\rangle = \mid 0\rangle$ 为真空态时，

$$\langle 0 \mid E^2 \mid 0\rangle = \mathcal{E}^2 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}.$$

这说明，即使是在真空态，光场强度也会有非 0 的涨落（起伏），这种涨落是由于光场本身的量子特性所决定的，它将导致一系列经典理论所无法解释的现象，如氢原子的 Lamb 位移，量子拍现象，等等。下面我们将一一介绍并利用已有的一些光场量子化的知识对它加以分析和解释。

从 a,$a^\dagger$ 的性质我们还会发现，它们均不是 Hermite 算符，但是其线形组合，如 $\frac{1}{2}(a+a^\dagger)$，$\frac{1}{2i}(a-a^\dagger)$ 却都是 Hermite 算符。

下面讨论多模 Fock 态光场，其 Hamiltonian 为：

$$H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}},$$

其中

$$H_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}}\left(a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right).$$

每个模所对应的本征态为 $\mid n_{\vec{k}}\rangle$，有 $H_{\vec{k}} \mid n_{\vec{k}}\rangle = \hbar\omega(n_{\vec{k}}+\frac{1}{2}) \mid n\rangle$. 于是 H 的本征态应该是：

$$\mid n_{\vec{k_1}}\rangle \mid n_{\vec{k_2}}\rangle \cdots \mid n_{\vec{k_l}}\rangle \cdots = \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}}, \cdots\rangle = \mid \{n_{\vec{k}}\}\rangle,$$

并有

$$a_{\vec{k_l}} \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}}, \cdots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k_l}}} \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}} - 1, \cdots\rangle,$$

$$a^\dagger_{\vec{k_l}} \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}}, \cdots\rangle = \sqrt{n_{\vec{k_l}}+1} \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}} + 1, \cdots\rangle.$$

此时由各个模的本征矢所组成的新的态矢满足正交、完备归一的关系，即

$$\sum_{\vec{k_1},\vec{k_2},\cdots\vec{k_l}\cdots} \mid n_{\vec{k_1}}, n_{\vec{k_2}}, \cdots n_{\vec{k_l}}, \cdots\rangle\langle\cdots n_{\vec{k_l}}, \cdots n_{\vec{k_2}}, n_{\vec{k_1}} \mid = 1,$$

且在组成的新的 Hilbert 空间中， $\forall\,|\,\psi\rangle$ ，均可由它展开为

$$\begin{aligned}|\,\Psi\rangle &= \sum_{n_{\vec{k}_1},n_{\vec{k}_2},\cdots n_{\vec{k}_l},\cdots} c_{n_{\vec{k}_1},n_{\vec{k}_2},\cdots n_{\vec{k}_l},\cdots}\,|\,n_{\vec{k}_1},n_{\vec{k}_2},\cdots n_{\vec{k}_l},\cdots\rangle \\ &= \sum_{\{n_{\vec{k}}\}} c_{\{n_{\vec{k}}\}}\,|_{\{n_{\vec{k}}\}}\rangle,\end{aligned}$$

这种表示比

$$|\,\Psi\rangle = |\,\Psi_{\vec{k}_1}\rangle\,|\,\Psi_{\vec{k}_2}\rangle\cdots|\,\Psi_{\vec{k}_l}\rangle\cdots$$

更加普适（留作练习）。

§1.4 Lamb 位移

实验：氢原子， $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级

1. 按照 Dirac 的理论， $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级应该具有相同的能量；
2. 但是，精细的实验表明，$2S_{1/2}$ 能级比 $2P_{1/2}$ 能级的能量高出大约 1.057GHz($\sim 6.6\times 10^{-25}$J).

   解释

   (a) 只能从原子中电子与真空场相互作用去解释；

   (b) 刺激、促进了完善的量子电动力学 (QED) 理论的建立和发展；

   (c) 出现了对无穷大能量的理解和深化，为其后的重整化 (renormalization) 理论打下了基础。

下边用 Welton 的一种唯象 (非 QED) 理论半定量地解释 Lamb 位移现象.

真空光场电磁场涨落的效应是氢原子中电子围绕原子核在 Coulomb 场中 $-e^2/4\pi\epsilon_0 r$ 运动轨道的微扰，因而电子的运动半径从 $\vec{r}\to\vec{r}+\delta\vec{r}$， $\delta\vec{r}$ 就是电场的涨落引起的。这种涨落必然引起 Coulomb 势的涨落—这就是 Lamb 位移的原因—由下式给出：

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(\vec{r}+\delta\vec{r})-V(\vec{r}) \\ &= \delta\vec{r}\cdot\nabla V+\frac{1}{2}(\delta\vec{r}\cdot\nabla)^2V(\vec{r})+\cdots\end{aligned}\tag{1.40}$$

因为假定涨落各向同性，因此 $\langle\delta\vec{r}\rangle_{\rm vac}=0$ ，同时

$$\langle(\delta\vec{r}\cdot\nabla)^2\rangle_{\rm vac}=\frac{1}{3}\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{\rm vac}\nabla^2\tag{1.41a}$$

于是

$$\langle\Delta V\rangle=\frac{1}{6}\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{\rm vac}\left\langle\nabla^2\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\right\rangle_{\rm at}.\tag{1.41b}$$

对 $2S$ 态,

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^2\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\right\rangle_{\text{at}} &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r}\psi_{2s}^*(\vec{r})\nabla^2\frac{1}{r}\psi_{2s}(\vec{r}) \\ &= \frac{e^2}{\epsilon_0}|\psi_{2s}(0)|^2 \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^3}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

其中已用到关系式有

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}),$$

$$\psi_{2s}(0) = \sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}},$$

对 $2P$ 态，非相对论波函数 $\psi_{2P}(0)=0$，因此没有 Lamb 位移。

下面计算 $\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{\text{vac}}$。由 Newton 方程可知

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\delta\vec{r})_{\vec{k}} = -e\vec{E}_{\vec{k}}, \tag{1.43}$$

此式成立的条件是光场的频率 $\omega_{\vec{k}}$ 比 Born 轨道上的圆频率大，即 $\omega_{\vec{k}} > \pi c/a_0$，亦即 $k > \pi/a_0$。此时,

$$\delta\vec{r}(t) \cong \delta\vec{r}(0)e^{-i\omega t} + h.c. \qquad (\delta r)_{\vec{k}} \cong \frac{e}{mc^2k^2}E_{\vec{k}}$$

其中

$$E_{\vec{k}} = \mathcal{E}_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}).$$

于是

$$\begin{aligned}\langle(\delta\vec{r})\rangle_{\text{vac}} &= \sum_{\vec{k}}\left(\frac{e}{mc^2k^2}\right)^2\langle 0|E_{\vec{k}}^2|0\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}}\left(\frac{e}{mc^2k^2}\right)^2\left(\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 V}\right), \end{aligned}$$

变为积分，上式变为

$$\begin{aligned}\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{\text{vac}} &= 2\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot 4\pi\int_0^\infty dk\cdot k^2\left(\frac{e}{mc^2k^2}\right)^2\left(\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 V}\right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0\pi^2}\cdot\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\int_0^\infty\frac{dk}{k}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

显然上式是一个不可积的定积分。但是前边已经提到 (1.43) 式只在 $k > \pi/a_0$ 时才成立，同时，也只在光的波长大于 Compton 波长，即 $k < mc/\hbar$ 时才成立，（因为 $v/c = p/mc = \hbar k/mc \leq 1$) 因此我们只取 $\int_{\pi/a_0}^{mc/\hbar} dk/k$ 来进行计算，得到

$$\langle(\delta\vec{r})^2\rangle_{\text{vac}} \cong \frac{1}{2\epsilon_0\pi^2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \ln\left(\frac{4\epsilon_0\hbar c}{e^2}\right),$$

其中 $\frac{e^2}{\hbar c}$ 对应精细结构常数，在国际单位制下，精细结构常数 $\alpha = \dfrac{e^2}{2\epsilon_0\hbar c} = 7.2974\times10^{-3}$，$\alpha^{-1} = 137.04$；$\lambda_c = \dfrac{\hbar}{mc} = 3.8616\times10^{-13}\text{m}$ 为 Compton 波长。从而

$$\langle\Delta V\rangle \approx \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\left(\frac{1}{8\pi a_0^3}\right)\ln\left(\frac{4\epsilon_0\hbar c}{e^2}\right) \tag{1.45}$$

代入数值计算可得：$\langle\Delta V\rangle \approx 10^{-24}\text{J} \sim 1\text{GHz}$.

现代光学技术的发展使得 Lamb 位移现象已经比较容易观察到，Hänsch 小组通过双光子 $1s \to 2s$ 跃迁首次观察到了 $1s$ 态 Lamb 的位移现象。

§1.5 量子拍

半经典理论：

物质量子化 + 经典 Maxwell 方程（ + 真空涨落项）

能够解释一些诸如 自发辐射（ Spontaneous Emission Radiation ），Lamb 位移 及 激光线宽 的问题，但是 量子拍（ Quantum Beat ）却必须由完全的量子理论来分析解释。

这里只简单介绍该现象，由三能级系统来说明。

两种构型的三能级原子：

原子态：

$$|\,\psi\rangle = c_a e^{-i\omega_a t}\,|\,a\rangle + c_b e^{-i\omega_b t}\,|\,b\rangle + c_c e^{-i\omega_c t}\,|\,c\rangle. \tag{1.46}$$

原子 - 光场态：

$$|\,\psi_V(t)\rangle = \sum_{i=a,b,c} c_i\,|\,i,0\rangle + c_1\,|\,c,1_{\omega_1}\rangle + c_2\,|\,c,1_{\omega_2}\rangle, \tag{1.47a}$$

$$|\,\psi_\Lambda(t)\rangle = \sum_{i=a,b,c} c_i'\,|\,i,0\rangle + c_1'\,|\,c,1_{\omega_1}\rangle + c_2'\,|\,c,1_{\omega_2}\rangle. \tag{1.47b}$$

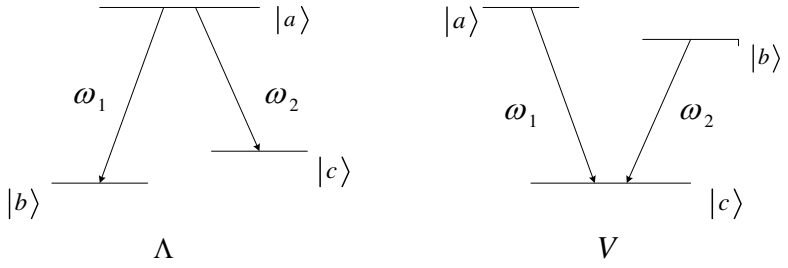


图 1.1: V- 型原子 Λ- 型原子

经典理论对光拍频的分析：

$$E^{(+)} = \mathcal{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathcal{E}_2 e^{-i\omega_2 t}$$

$$\Rightarrow |E^{(+)}|^2 = |\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 + \{\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 e^{i(\omega_1-\omega_2)t} + \text{c.c.}\} \tag{1.48}$$

其中第 3， 4 项为拍频项。

下面应用量子化光场表示来考察上述问题考察 $\langle\psi(t) \mid E_1^{(-)} E_2^{(+)} \mid \psi(t)\rangle$，其中

$$E_1^{(-)} = \mathcal{E}_1^* a_1^\dagger e^{i\omega_1 t}, \qquad E_2^{(+)} = \mathcal{E}_2 a_2 e^{-i\omega_2 t}.$$

因此

$$E_1^{(-)}(t) E_2^{(+)}(t) = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 a_1^\dagger a_2 e^{i(\omega_1-\omega_2)t}. \tag{1.49}$$

由式 (1.50) 和 (1.48a) 可得

$$\langle\psi_V(t) \mid E_1^{(-)}(t) E_2^{(+)} \mid \psi_V(t)\rangle = \kappa e^{i(\omega_1-\omega_2)t} \langle c \mid c\rangle = \kappa e^{i(\omega_1-\omega_2)t}, \tag{1.50a}$$

$$\langle\psi_\Lambda(t) \mid E_1^{(-)}(t) E_2^{(+)} \mid \psi_\Lambda(t)\rangle = \kappa' e^{i(\omega_1-\omega_2)t} \langle c \mid b\rangle = 0, \tag{1.50b}$$

其中， $\kappa = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 c_1^* c_2$ ， $\kappa = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 c_1'^* c_2'$ 。亦即

V 型原子 出现了拍频现象 ，

Λ 型原子 没有出现了拍频现象 。

但在半经典理论里对 V 型和 Λ 型原子而言，均会出现拍频现象，即

$$\langle \psi(t) \mid E_1^{(-)}(t) E_2^{(+)}(t) \mid \psi(t) \rangle = \kappa_c e^{i(\omega_1 - \omega_2)t},$$

其中 $\kappa_c = \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 c_1^* c_2$ 原因何在呢？

一个简单的解释：

- 对 V 型原子而言, ω_1 , ω_2 两种跃迁都会到态 $\mid c \rangle$, 无法分清是由 哪条路径 (which-path) 原子衰减放出光子的，于是，类似于 Young 氏干涉实验， ω_1 和 ω_2 两个光发生了干涉现象，从而导致了 量子拍频 ；
- 对 Λ 型原子而言， 哪条路径 的答案是十分清楚的，于是不会出现类 Young 氏干涉现象，也就不会出现 量子拍频 。

  总结： QED 的计算结果与量子理论的最基本概念相一致，而半经典理论却无法作到这一点。

§1.6 光子的概念讨论

辐射场的量子化提供了研究辐射场与物质相互作用的一套完整理论，特别是在加入了适当的重整化的假设之后。

在过去曾经有这样的认识，即：辐射的量子理论或者光子的概念可以用经典电磁场加上真空涨落来认识，而无需作全量子的考虑。但是量子拍频，以及双光子干涉现象等，都指出了仅用半经典理论加上真空涨落是不够的，全量子理论本身给出了比仅有真空涨落多得多的深刻的物理内涵。因此，在这里我们先就光子的概念作一个简单的讨论，在本课程的后续内容中，我们还将不断地通过研究实例来说明和加深对光子概念的理解和认识。

§1.6.1 真空涨落与光子概念

1. 两大理论：半经典理论：物质量子化 + 经典光场 (+ 真空涨落)

   全量子理论：物质量子化 + 场量子化
2. 半经典理论解决的问题

   光电效应的解释： Wentzel， 1927 年

   受激辐射：

   共振荧光：

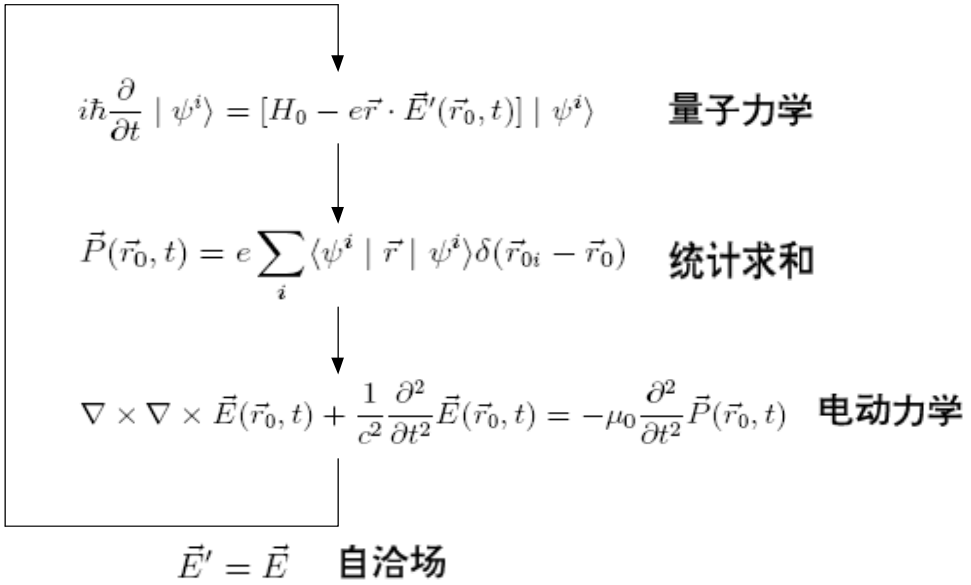


图 1.2: 自洽场方程

3. 光子概念的提出：
   (a) 能量子概念的提出： Planck，黑体辐射得 Planck 公式， 1900 年
   (b) 光子概念的提出： Einstein，光电效应， 1905 年
   $$h\nu = \phi + T_e.$$
   (c) 光电效应方程有关的两个问题：
      i. 光电子的发射率与入射光强 成正比；
      ii. 光入射到表面与电子反射之间 没有时间延迟；

   后面一个问题用经典的观点无法解释，而用光子消灭算符的方式来解释可以近似加以理解。

§1.6.2 真空涨落

问题：半经典理论无法解释的关键问题之一就是光的自发辐射。

自洽场方程： (见上图) 真空涨落的概念对于重新认识光子的概念是至关重要的，同时也是光场量子化的必然结果。

§1.6.3 量子拍频， Bell 定理

半经典理论 + 真空涨落 → 不够（量子拍频例）

Dirac 的“光子只与其自身发生干涉”，这种说法只对 Young 氏干涉有效，而对双光子干涉，纠缠态等无效。纠缠态的概念还被广泛应用于对于 Bell 不等式的光学检验，

对于光子概念乃至量子力学的进一步深刻理解提供了帮助。量子信息及其中的诸多对量子力学基本概念的理解和诠释将会陆续涉及这些。

§1.6.4 光子波函数——光波与物质波的比较

1. 光波与物质波的比较

	Light	Matter
Semiclassical	$\vec{E}(\vec{r},t)$ $(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P}$ Maxwell's equation	$\psi(\vec{r},t)$ $\dot{\psi}(\vec{r},t)=-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\psi(\vec{r},t)$ Schrödinger's equation
Ouantum field	$\mid\dot{\psi}_f\rangle=-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_f\mid\psi_f\rangle$ $\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}(t)U_{\vec{k}}(r)$ Dirac's equation	$\mid\dot{\psi}_m\rangle=-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_m\mid\psi_m\rangle$ $\hat{\psi}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{P}}\hat{c}_{\vec{P}}(t)\phi_{\vec{P}}(r)$ Schwinger's equation

下面对量子场论作一个简单的介绍

非相对论性波场方程—— Schrödinger 方程

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{x},t)=H\psi(\vec{x},t)$$

3 个相对论性波场方程，其中有 2 个物质场，和 1 个规范场（光场，中间 Bose 场）方程。

(a) Klein-Gordon 方程：标量 (scalar) 场，自旋为 0，有质量

$$\left[\partial_\lambda\partial^\lambda+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\phi(\vec{x},t)=0,$$

其中

$$\partial_\lambda\partial^\lambda=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2.$$

(b) Dirac 方程：旋量 (spinor) 场，自旋为 $1/2$，有质量（电子，正电子，质子等）

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu-\frac{mc}{\hbar}\right]\psi(\vec{x},t)=0,$$

其中

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Maxwell 场方程：矢量 (vector) 场，自旋为 1，无质量，属于中间玻色场或叫作规范场 (gauge field)，是用来传递物质场（粒子）之间相互作用的场，满足 U(1) 规范不变性。在真空里和在 Coulomb 规范下，有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad (F^{\mu\nu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu})$$

从而可得

$$\partial_\lambda \partial^\lambda A^\mu = 0,$$

可见没有静止质量出现在方程中。

总之，上述几种场方所满足的基本能量关系分别是：

非相对论性能量守恒方程：$E = T + V$ Schrödinger's equation

相对论性质能守恒方程：
$$\begin{cases} E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 & \text{Klein} - \text{Gordon equation} \\ E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} & \text{Dirac equation} \\ E = pc & \text{Maxwell equation} \end{cases}$$

2. Maxwell 方程可以写成 Schördinger 方程的形式，但同时也会带来矛盾。

(a) 光场量子化程序：

$$\vec{E}^{(+)} = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \mathcal{E}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} U_{\vec{k}}(t)$$

$$\downarrow \alpha \to a$$

$$\vec{E}^{(+)} = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \mathcal{E}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} U_{\vec{k}}(t), \qquad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}.$$

(b) 物质场量子化程序：（二次量子化程序）

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} c_{\vec{p}} e^{-i\omega_{\vec{p}} t} \phi_{\vec{p}}(\vec{r})$$

$$\downarrow \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}, \qquad c_{\vec{p}} \to \hat{c}_{\vec{p}}$$

$$\hat{\psi}_{\vec{p}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}} e^{-i\omega_{\vec{p}}t}\phi_{\vec{p}}(\vec{r}), \qquad [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}^{\dagger}_{\vec{p'}}]_{\pm} = \delta_{\vec{p}\vec{p'}}, \qquad (+ : \text{Fermiion}; \qquad - : \text{Boson})$$

总结：

$$\text{一次量子化，} \quad \vec{p} \to -i\hbar\partial_{\vec{x}}, \qquad [x_\alpha, p_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta},$$
$$\text{二次量子化，} \quad c_{\vec{p}} \to \hat{c}_{\vec{p}}, \qquad [c_{\vec{p}}, c^{\dagger}_{\vec{p'}}]_{\pm} = \delta_{\vec{p}\vec{p'}}.$$

下面讨论如何得到光子波函数所满足的 Schrödinger 方程。

首先，按照量子场论的方法，物质粒子的波函数 = 坐标本征态与态矢的内积，即

$$\Psi(\vec{r},t) = \langle \vec{r} \mid \psi(t) \rangle,$$

其中

$$\mid \vec{r} \rangle = \hat{\psi}^{+}(\vec{(r)}) \mid 0\langle,$$
$$\hat{\psi}^{+}(\vec{r}) = \sum_{\vec{p}} \hat{c}^{+}_{p} e^{+i\omega_{\vec{p}}t} \phi^{*}_{\vec{p}}(\vec{r}).$$

因此,

$$\Psi(\vec{r},t) = \langle 0 \mid \hat{\psi}(\vec{r}) \mid \psi(t) \rangle.$$

下面考察光子是否也能如此构造出其波函数。

$$\mid \psi \rangle = \sum_{\{n\}} c_{\{n\}}(t) \mid \{n\} \rangle, \qquad \sum_{\{n\}} \mid \{n'\} \rangle\langle \{n'\} \mid = 1.$$

在 $\mid \psi \rangle$ 态，在 $\vec{r}$ 点激发 1 个光子的几率为

$$P_{\psi}(\vec{r},t) \propto \langle \psi \mid \vec{E}^{(-)}(\vec{r},t)\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi \rangle,$$

其中

$$\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}^{(\lambda)}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} U_{\vec{k}}(\vec{r}),$$

因此，（ $\mid 0\rangle\langle 0 \mid$ 才有用，其他的 $\mid 1\rangle\langle 1 \mid + \cdots$ 却被作用掉了）

$$P_{\psi}(\vec{r},t) \propto \langle \psi \mid \hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r},t) \mid 0\rangle\langle 0 \mid \hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi \rangle.$$

令

$$\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \langle 0 \mid \hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_{\gamma} \rangle$$

后面会看到，单光子态 $|\psi_\gamma\rangle$ 与波函数 $\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}$ 为

$$\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\frac{\mathcal{E}_0}{r}\Theta\left(t-\frac{r}{c}\right)\exp\left[-i\left(t-\frac{r}{c}\right)\left(\omega-i\frac{\Gamma}{\alpha}\right)\right],$$

其中 $\Theta(x)$ 为 Heaviside 阶梯函数， Γ 是原子衰减系数。

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= \langle 0\mid\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t)\mid\psi_\gamma\rangle\\ &= \langle 0\mid\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}}a_{\vec{k},\lambda}e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mid\psi_\gamma\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\langle 0\mid\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}a_{\vec{k},\lambda}e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mid\psi_\gamma\rangle\\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t),\end{aligned}$$

其中

$$\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\langle 0\mid a_{\vec{k},\lambda}\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}\mid\psi_\gamma\rangle.$$

同理，也可以求出磁场强度对应的波函数

$$\vec{\Psi}_{\mathcal{H}}(\vec{r},t)=\langle 0\mid\hat{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t)\mid\psi_\gamma\rangle,$$

$$\hat{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{\vec{k}}{k}\times\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\mu_0}}a_{\vec{k},\lambda}\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_{\mathcal{H}}(\vec{r},t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}}\langle 0\mid\frac{\vec{k}}{k}\times\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}a_{\vec{k},\lambda}\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}\mid\psi_\gamma\rangle\\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\mu_0}}\vec{\chi}_\gamma(\vec{r},t).\end{aligned}$$

于是， Maxwell 方程可以写成

$$\vec{\nabla}\times\vec{\chi}_\gamma=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}_\gamma}{\partial t},\qquad\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_\gamma=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\chi}_\gamma}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma=0,\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma=0.$$

其中

$$\vec{\varphi}_\gamma = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{\chi}_\gamma = \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \end{pmatrix},$$

于是可得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \vec{\chi}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c\vec{s}\cdot\vec{p} \\ c\vec{s}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \vec{\chi}_\gamma \end{pmatrix},$$

及

$$\nabla\cdot\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \vec{\chi}_\gamma \end{pmatrix} = 0.$$

上式与 Dirac 方程（中子）

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\eta \\ \vec{\chi}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\eta \\ \vec{\chi}_\eta \end{pmatrix}$$

非常类似，其中中子 Dirac 波函数可由旋量 $\vec{\varphi}_\eta$ 和 $\vec{\chi}_\eta$ 构成，即

$$\vec{\Psi}_\eta = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\eta \\ \vec{\chi}_\eta \end{pmatrix}$$

这样，光子的波函数为

$$\vec{\Psi}_\gamma = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \vec{\chi}_\gamma \end{pmatrix}, \qquad \vec{\Psi}_\gamma^{(\dagger)} = (\vec{\varphi}_\gamma^{(\dagger)}, \vec{\chi}_\gamma^{(\dagger)}).$$

且满足守恒流方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Psi}_\gamma^\dagger\vec{\Psi}_\gamma + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0,$$

其中

$$\vec{j} = \vec{\Psi}_\gamma^\dagger\vec{v}\vec{\Psi}_\gamma, \qquad \vec{v} = c\begin{bmatrix} 0 & -\vec{s} \\ \vec{s} & 0 \end{bmatrix}.$$

尽管光子波函数与中子波函数非常类似，但是有一点区别必须注意。

例，考虑电子波函数在非相对论情况下可以写成一个标量波函数（非相对论性的，赝标

量。只有在相对论协变下不变的才是真正的标量。事实上，电子波函数是旋量波函数并是相对论性不变的。在这里，因为没有 $\nabla\cdot\varphi_e=0$ 的要求，所以，没有问题。）

$$\varphi_e(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(k_z z-\omega t)},$$

其中 $k_z=p_z/\hbar$ ， $\omega_k=p_z^2/2m\hbar$ 。此时，若对动量施加一个 x 方向的力，则有

$$\vec{k}=k_x\vec{e}_x+k_z\vec{e}_z.$$

但是，对光子波函数而言，假如开始时光是沿 z 方向的 x 偏振，则有

$$\varphi(\vec{r},t)=\vec{e}_x\frac{e^{i(k_z z-\omega t)}}{\sqrt{V}},$$

此时，若对动量施加一个 x 方向的力，则有

$$\tilde{\varphi}(\vec{r},t)=\vec{e}_x\frac{e^{i(k_z z+k_x x-\omega t)}}{\sqrt{V}}.$$

但是，矛盾出现了，因为此时

$$\nabla\cdot\tilde{\varphi}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{i(k_z z+k_x x-\omega t)}}{\sqrt{V}}\right]=ik_x\tilde{\varphi}\neq 0.$$

也就是说，光子波函数与非相对论性的物质粒子波函数是不同的，从这个意义上讲，“像粒子一样的光子”这个概念会导致误解。这种区别的根本原因在于光子永远都是相对论性的，而且没有静止质量（因而是矢量场，而不是标量场或旋量场）。

练习题

1. 证明：若 $[A,B]\neq 0$ ， $[[A,B],A]=[[A,B],B]=0$ ，则有 Baker-Hausdoff 公式

$$\begin{aligned}e^{A+B} &= e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B\\ &= e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^B e^A.\end{aligned}$$

2. 证明：若 $[A,B]\neq 0$ ， α 是一个参数，则有

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}=B-\alpha[A,B]+\frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]]+\cdots$$

3. 若 $f(a,a^\dagger)$ 能展开成 a,$a^\dagger$ 的级数，证明

(a)

$$[a, f(a, a^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial a^\dagger},$$

(b)

$$[a^\dagger, f(a, a^\dagger)] = -\frac{\partial f}{\partial a},$$

(c)

$$e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a} = f(ae^\alpha, a^\dagger e^{-\alpha}).$$

4. 证明：

$$[a, e^{-\alpha a^\dagger a}] = (e^{-\alpha} - 1) e^{-\alpha a^\dagger a} a,$$

$$[a^\dagger, e^{-\alpha a^\dagger a}] = (e^{-\alpha} - 1) e^{-\alpha a^\dagger a} a^\dagger.$$

5. 证明： $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ 可以写成 $H = \sum_n E_n \mid n\rangle\langle n \mid$ 以及

$$e^{iHt/\hbar} = \sum_n e^{iE_n t/\hbar} \mid n\rangle\langle n \mid .$$

6. 若 $a \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle$, 证明：

$$\mid \alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle.$$

7. $\vec{r}, \vec{p}$ 为坐标与动量算符， $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 为角动量算符，证明：

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0, \qquad \vec{p} \cdot \vec{L} = 0, \qquad \vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}.$$

8. 证明：

$$a^\dagger \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid,$$

$$\mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid a = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid .$$

第二章　相干态与压缩态

§2.1　经典电流辐射的光场态

由辐射场的量子化形式，有

$$\vec{A} = -i\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \text{h.c.}, \tag{2.1}$$

此时，若有一经典电流 $\vec{J}$ 流过该电场，则有其相互作用 Hamiltonian 为

$$V = \int \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)d^3\vec{r}, \tag{2.2}$$

相应的 Schrödinger 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle = V(t) \mid \psi(t)\rangle. \tag{2.3}$$

由 (2.3) 式可得

$$\mid \psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')\right] \mid \psi(0)\rangle. \tag{2.4}$$

可以证明

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')\right] = \prod_{\vec{k}} \exp(\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger - \alpha_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}), \tag{2.5}$$

其中

$$\alpha_{\vec{k}} = \frac{1}{\hbar\omega_{\vec{k}}}\mathcal{E}_{\vec{k}} \int_0^t dt' \int d^3\vec{r}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{2.6}$$

于是，假如 $\mid \psi(0)\rangle = \mid 0\rangle$ ，则有

$$\mid \psi(t)\rangle = \prod_{\vec{k}} \exp(\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger - \alpha_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}) \mid 0\rangle_{\vec{k}}, \tag{2.7}$$

或者写成

$$\mid \{\alpha_{\vec{k}}\}\rangle = \prod_{\vec{k}} \mid \alpha_{\vec{k}}\rangle, \tag{2.8a}$$

其中

$$\mid \alpha_k\rangle = \exp(\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger - \alpha_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}) \mid 0\rangle_{\vec{k}}. \tag{2.8b}$$

一般地，我们把这种经典电流辐射光场叫作相干态光场，其定义为位移算符作用于真空态产生，即

$$\begin{aligned} \mid \alpha\rangle &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \mid 0\rangle \\ &\triangleq D(\alpha) \mid 0\rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

§2.2 消灭算符的本征态——相干态

可以证明，由 $\exp(-\alpha^* a) \mid 0\rangle = \mid 0\rangle$ 及 Baker-Hausdorff 公式可得

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \qquad (2.10a) \\ &= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}, \qquad (2.10b) \end{aligned}$$

及

$$\mid \alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle. \qquad (2.11)$$

由 (4.10) 可以证明（练习）

$$a \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle. \qquad (2.12)$$

下面给出位移算符的一些性质：（练习）

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha), \qquad (2.13a)$$

$$D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \qquad (2.13b)$$

$$D^{-1}(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*. \qquad (2.13c)$$

§2.3 相干态的相干在哪里

Fock 态 $\mid n\rangle$ 在坐标表象下波函数为

$$\phi_n(q) = \langle q \mid n\rangle. \qquad (2.14)$$

同时，因为 $p = -i\hbar\partial/\partial q$，可知

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q} \right), \qquad (2.15a)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega q - \hbar \frac{\partial}{\partial q} \right). \qquad (2.15b)$$

又因为

$$a \mid 0\rangle = 0,$$

可得

$$\langle q \mid a \mid 0\rangle = 0.$$

左边变为

$$\langle q \mid \left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \mid 0\rangle = \left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \langle q \mid 0\rangle = \left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \phi_0(q),$$

即

$$\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right) \phi_0(q) = 0. \tag{2.16}$$

该方程的解归一化后为

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right). \tag{2.17a}$$

又由

$$\mid n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \mid 0\rangle.$$

得

$$\begin{aligned}
\phi_n(q) &= \langle q \mid n\rangle \\
&= \langle q \mid \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \mid 0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{(2\hbar\omega)^{\frac{n}{2}}}\left(\omega q - \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^n \phi_0(q) \\
&= \frac{1}{(2^n\cdot n!)^{\frac{1}{2}}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}q\right)\phi_0(q).
\end{aligned} \tag{2.17b}$$

对 $\mid n\rangle$ 态或 $\phi_n(q)$ 而言，可以证明

$$\langle q\rangle = \langle n \mid q \mid n\rangle = \langle n \mid \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger) \mid n\rangle = 0,$$

$$\langle p\rangle = \langle n \mid p \mid n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\langle n \mid (a - a^\dagger) \mid n\rangle = 0,$$

$$\langle q^2\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}\langle n \mid (a + a^\dagger)^2 \mid n\rangle = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$\langle p^2\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}\langle n \mid (a - a^\dagger)^2 \mid n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

因此

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2 = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

因此

$$(\Delta q)^2(\Delta p)^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2,$$

或者可以写作

$$\Delta q\Delta p = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar \tag{2.18}$$

那么 $\phi_0(q)$ 对应最小测不准态，且有

$$(\Delta q\Delta p)_{\phi_0(q)} = \frac{\hbar}{2}. \tag{2.19}$$

假设初始时的光场态为最小测不准态，即

$$\psi(q,0) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{\omega}{2\hbar}(q-q_0)^2\right], \tag{2.20}$$

则由

$$\left.\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{\omega^2q^2}{2}\right)\psi(q,t),\\ &\psi(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(q)e^{-iE_nt/\hbar},\\ &E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

可以证明

$$|\psi(q,t)|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\omega}{\hbar}(q-q_0\cos\omega t)^2\right], \tag{2.22}$$

同时可以证明

$$\begin{aligned} \psi(q,0) &= \langle q\mid\alpha\rangle\\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle q\mid n\rangle, \end{aligned} \tag{2.23}$$

其中

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}q_0 \tag{2.24}$$

也就是说，最小测不准波包 $\psi(q,0)$ 就是相干态在坐标表象下的波函数，也是真空态在坐标表象下的波函数的解的一个 q_0 的平移。

§2.4 相干态的性质

1. 粒子数

$$\langle\alpha \mid a^\dagger a \mid \alpha\rangle = |\alpha|^2 = \langle n\rangle \tag{2.25a}$$

$$p(n) = \langle n \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid n\rangle = \frac{|\alpha|^{2n}e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}, \tag{2.25b}$$

其中 $\langle n\rangle = |\alpha|^2$ 是相干态下的光子平均数目。$p(n)$ 所表示的分布叫作泊松 (Poisson) 分布。当 $n<1$ 时，分布的峰值在 $n=0$ ，当 $n>1$ 时，分布的峰值在 $n=|\alpha|^2$ 。

2. 相干是最小不确定态，即有

$$\Delta p\cdot\Delta q = \frac{\hbar}{2}. \tag{2.25c}$$

3. $\mid\alpha\rangle$ 组成一个完备集。可以证明

$$\begin{aligned}\int(\alpha^*)^n\alpha^m e^{-|\alpha|^2}d^2\alpha &= \int_0^\infty |\alpha|^{n+m+1}e^{-|\alpha|^2}d|\alpha|\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)\theta d\theta}\\ &= \pi n!\delta_{nm}\end{aligned} \tag{2.25d}$$

其中用到了 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ ，并利用了极坐标来求解整个复变函数平面的积分。由这个结果，可以证明

$$\int \mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid d^2\alpha = \pi\sum_n \mid n\rangle\langle n\mid = \pi, \tag{2.25e}$$

即有

$$\frac{1}{\pi}\int \mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid d^2\alpha = 1. \tag{2.25f}$$

这就是相干态的完备性关系。

4. 相干态并非正交系。可以证明

$$\langle\alpha\mid\alpha'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'\alpha^* - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right), \tag{2.25g}$$

从而有

$$|\langle\alpha\mid\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha-\alpha'|^2). \tag{2.25h}$$

所以，当 $\alpha=\alpha'$ 时，$|\langle\alpha\mid\alpha\rangle|^2=1$ ，当 $\alpha\neq\alpha'$ 时，$|\langle\alpha\mid\alpha\rangle|^2\neq 0$ ，只有当 $|\alpha|\gg|\alpha'|$ （或相反时）才有 $|<\alpha\mid\alpha>|^2\to 0$ 。由这个性质可以证明，相干态可以用其他的相干态来展开，即

$$\begin{aligned}\mid\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha'\mid\alpha'\rangle\langle\alpha'\mid\alpha\rangle\\ &= \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha'\mid\alpha'\rangle\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'^*\alpha - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right).\end{aligned} \tag{2.25i}$$

这叫作相干态的超完备性。

5. 相干态小结：

(a) 相干态是经典电流辐射造成的态，或是平移算子对真空态作用造成的态，即

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle,$$

其中

$$D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right).$$

(b) 相干态是光场的正频部分（或是消灭算子）的本征态，即

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

相干态具有与真空态一样的最小测不准关系，可以被理解为对真空态波函数作了一个中心平移 q_0，而这个平移的大小即与相干态的本征值相联系，有 $\alpha = \sqrt{\omega/2\hbar}q_0$，若平移为 0，则真空相干态与真空态将完全无法区分。

§2.5 压缩态的物理及不确定关系

考虑两个 Hermite 算符。如果 $[A, B] = iC$，则有（即不确定关系）

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle c\rangle|.$$

如有

$$(\Delta A)^2 < \frac{1}{2}|\langle c\rangle|,$$

则系统所处的态叫压缩态 (queezed state)。如果同时还有 $\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}|\langle c\rangle|$，则系统所处的态叫作理想压缩态。

引入算子 X_1， X_2 分别为

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger), \qquad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger), \tag{2.26}$$

它们分别是无量纲化的 x 和 p，其中

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger).$$

可以证明

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2}, \tag{2.27}$$

因此有

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}. \tag{2.28}$$

而单模线偏振光场的电场分量可以表示为

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \hat{\epsilon}\mathcal{E}(ae^{-i\omega t} + a^{\dagger}e^{i\omega t}) \\ &= 2\hat{\epsilon}\mathcal{E}(X_1 \cos\omega t + X_2 \sin\omega t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

因此可以看作是电场的两个相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的振幅。当光场处在压缩态时有

$$(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}. \qquad (i = 1, 2)$$

同时，如果

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$$

则系统处于理想压缩态。下面计算在相干态 $\mid \alpha\rangle$ 和 Fock 态 $\mid n\rangle$ 时的 ΔX_1 和 ΔX_2 。相干态时，

$$\begin{aligned} (\Delta X_1)^2 &= \langle \alpha \mid X_1^2 \mid \alpha \rangle - (\langle \alpha \mid X_1 \mid \alpha \rangle)^2 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1) - \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2) \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta X_2)^2 &= \langle \alpha \mid X_2^2 \mid \alpha \rangle - (\langle \alpha \mid X_2 \mid \alpha \rangle)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2 - 1) + \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2) \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

即 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2$ ， $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 = 1/4$ 。 Fock 态时，有

$$\begin{aligned} (\Delta X_1)^2 &= \langle n \mid X_1^2 \mid n \rangle - (\langle n \mid X_1 \mid n \rangle)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2n+1), \end{aligned}$$

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4}(2n+1).$$

故

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2n+1}, \qquad \Delta X_1 \cdot \Delta X_2 = \frac{1}{4}(2n+1) > \frac{1}{4}.$$

§2.6 压缩算子与压缩相干态

利用简并参量过程产生压缩态，考虑双光子 Hamiltonian ，有

$$H = i\hbar(ga^{\dagger 2} - g^* a^2) \tag{2.30}$$

于是，光场态为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|0\rangle = e^{(ga^{\dagger 2} - g^* a^2)}|0\rangle \tag{2.31}$$

定义压缩算子

$$S(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^* a^2 - \frac{1}{2}\zeta a^{\dagger 2}\right), \tag{2.32}$$

其中 $\zeta = re^{i\theta}$ 是一个复变数。可以证明

1.

$$S^\dagger(\zeta) = S^{-1}(\zeta) = S(-\zeta), \tag{2.33a}$$

2.

$$S^\dagger(\zeta) a S(\zeta) = a\cosh r - a^\dagger e^{i\theta}\sinh r, \tag{2.33b}$$

3.

$$S^\dagger(\zeta) a^\dagger S(\zeta) = a^\dagger\cosh r - a e^{-i\theta}\sinh r, \tag{2.33c}$$

其中用到了 Baker-Hausdoff 关系：

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots,$$

以及

$$\cosh r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh r = r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

定义

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\theta/2}, \tag{2.34}$$

则有

$$S^\dagger(\xi)(Y_1 + iY_2)S(\xi) = Y_1 e^{-r} + iY_2 e^r. \tag{2.35}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}\left[a\exp(-\frac{i}{2}\theta) + a^\dagger\exp(\frac{i}{2}\theta)\right], \\ Y_2 &= \frac{1}{2i}\left[a\exp(-\frac{i}{2}\theta) - a^\dagger\exp(\frac{i}{2}\theta)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

压缩相干态定义为

$$| \alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha) \mid 0\rangle, \tag{2.37}$$

其中 $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ ， $\xi = |\xi|e^{i\theta}$ 。由式 (4.36) 及相干态的定义可见，相干态是由 a 和 $a^\dagger$ 的线性组合作为 e 指数上的元形成的，而压缩态需要 a 和 $a^\dagger$ 的平方项。

下面讨论压缩态的一些性质：

可以证明，

$$\begin{aligned}
\langle a\rangle &= \langle \alpha, \xi \mid a \mid \alpha, \xi\rangle \\
&= \langle 0 \mid D^\dagger(\alpha)S^\dagger(\xi)aS(\xi)D(\alpha) \mid 0\rangle \\
&= \langle \alpha \mid (a\cosh r - a^\dagger e^{i\theta}\sinh r) \mid \alpha\rangle \\
&= \alpha\cosh r - \alpha^* e^{i\theta}\sinh r.
\end{aligned} \tag{2.38a}$$

$$\begin{aligned}
\langle a^2\rangle &= \langle (a^\dagger)^2\rangle \\
&= \langle 0 \mid D^\dagger(\alpha)S^\dagger(\xi)a^2S(\xi)D(\alpha) \mid 0\rangle \\
&= \langle 0 \mid D^\dagger(\alpha)S^\dagger(\xi)aS(\xi)S^\dagger(\xi)aS(\xi)D(\alpha) \mid 0\rangle \\
&= \langle \alpha \mid S^\dagger(\xi)aS(\xi)S^\dagger(\xi)aS(\xi) \mid \alpha\rangle \\
&= \langle \alpha \mid [a^2\cosh^2 r - aa^\dagger e^{i\theta}\cosh r\sinh r - a^\dagger a e^{i\theta}\cosh r\sinh r + {a^\dagger}^2 e^{2i\theta}\sinh^2 r] \mid \alpha > \\
&= \alpha^2\cosh^2 r + (\alpha^*)^2 e^{2i\theta}\sinh^2 r - 2|\alpha|^2 e^{i\theta}\cosh r\sinh r - e^{i\theta}\cosh r\sinh r
\end{aligned} \tag{2.38b}$$

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger a\rangle &= |\alpha|^2(\cosh^2 r + \sinh^2 r) - (\alpha^*)^2 e^{i\theta}\sinh r\cosh r \\
&- \alpha^2 e^{-i\theta}\sinh r\cosh r + \sinh^2 r
\end{aligned} \tag{2.38c}$$

于是，可以证明

$$\begin{aligned}
(\Delta Y_1)^2 &= \langle Y_1^2\rangle - \langle Y - 1\rangle^2 \\
&= \frac{1}{4}\langle\left[a\exp(-i\frac{\theta}{2}) + a^\dagger\exp(i\frac{\theta}{2})\right]^2\rangle - \frac{1}{4}\langle\left[a\exp(-i\frac{\theta}{2}) + a^\dagger\exp(i\frac{\theta}{2})\right]\rangle^2 \\
&= \frac{1}{4}e^{-2r},
\end{aligned} \tag{2.39a}$$

$$(\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4}e^{2r}, \tag{2.39b}$$

$$\Delta Y_1 \cdot \Delta Y_2 = \frac{1}{4}. \tag{2.39c}$$

§2.7 多模压缩态

双模压缩算子

$$S(\xi)=\exp[\xi^* a_{\omega+\omega'}a_{\omega-\omega'}-\xi a^\dagger_{\omega+\omega'}a^\dagger_{\omega-\omega'}], \tag{2.40}$$

$$\mid \alpha,\xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)\mid 0\rangle.$$

集合消灭与产生算符定义为

$$\left.\begin{aligned} b&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\omega+\omega'}+e^{-i\delta}a_{\omega-\omega'}),\\ b^\dagger&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger_{\omega+\omega'}+e^{i\delta}a_{\omega-\omega'}).\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

则其组成类似于 X_1 和 X_2 的一对共轭算符：

$$b_1=\frac{1}{2}(b+b^\dagger),\qquad b_2=\frac{1}{2}(b-b^\dagger).$$

其对应的不确定关系为

$$\Delta b_1\cdot\Delta b_2\geq\frac{1}{4}.$$

可以证明

$$\left.\begin{aligned}(\Delta b_1)^2&=\frac{1}{4}\left[e^{-2r}\cos^2\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+e^{2r}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right],\\ (\Delta b_2)^2&=\frac{1}{4}\left[e^{2r}\cos^2\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+e^{-2r}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

同样，可以定义多模压缩态光场

$$S[\xi(\omega)]=\int\frac{d\omega'}{2\pi}\exp[\xi^*(\omega')a_{\omega+\omega'}a_{\omega-\omega'}-\xi(\omega')a^\dagger_{\omega+\omega'}a^\dagger_{\omega-\omega'}]\ A\#,$$

其中 $\xi(\omega)=r(\omega)e^{i\theta(\omega)}$ ，有

$$\mid \alpha(\omega),\xi(\omega)\rangle\equiv S[\xi(\omega)]D[\alpha(\omega)]\mid\tilde{0}\rangle.$$

§2.8 量子分布理论及辐射的部分相干性

§2.8.1 相干态表示 (P- 表示，正规排列)

1. 对密度矩阵算符的表示

(a) 用 Fock 态展开

$$\rho = \sum_{n,m} \mid n\rangle\langle n \mid \rho \mid m\rangle\langle m \mid = \sum_{n,m} \rho_{nm} \mid n\rangle\langle m \mid . \tag{2.43}$$

(b) 用相干态展开

$$\begin{aligned} \rho &= \int\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi} \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid \rho \mid \beta\rangle\langle\beta \mid \\ &= \int\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi} \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid R(\alpha^*,\beta)\exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)\right], \end{aligned} \tag{2.44a}$$

其中

$$R(\alpha^*) = \langle\alpha \mid \rho \mid \beta\rangle \exp\left[\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)\right]. \tag{2.44b}$$

2. 相干态表示的定义

正规排列

$$O_N(a,a^\dagger) = \sum_{n,m} c_{nm}(a^\dagger)^n a^m, \tag{2.45}$$

迹

$$\begin{aligned} \langle O_N(a,a^\dagger)\rangle &= \mathrm{Tr}[\rho O_N(a,a^\dagger)] \\ &= \sum_{n,m} c_{nm}\mathrm{Tr}[\rho(a^\dagger)^n a^m]. \end{aligned} \tag{2.46}$$

定义算子

$$\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a) = \frac{1}{\pi^2}\int \exp[-\beta(\alpha^*-a^\dagger)]\exp[\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta \tag{2.47a}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int \exp[-i\beta(\alpha^*-a^\dagger)]\exp[-i\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta, \tag{2.47b}$$

可以推出

$$\begin{aligned} \langle O_N(a,a^\dagger)\rangle &= \int d^2\alpha \sum_{n,m} c_{nm}\mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)](\alpha^*)^n\alpha^m \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha,\alpha^*)O_N(\alpha,\alpha^*), \end{aligned} \tag{2.48}$$

其中

$$P(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)] \tag{2.49}$$

由 $\mathrm{Tr}\rho = 1$ 可以证明

$$\int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) = 1, \tag{2.50}$$

及

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid d^2\alpha. \tag{2.51}$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*)\langle -\beta \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid \beta\rangle d^2\alpha \\ &= e^{-|\beta|^2} \int [P(\alpha, \alpha^*)e^{-|\alpha|^2}] e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha} d^2\alpha. \end{aligned}$$

令 $\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ ， $\beta = x_\beta + iy_\beta$ ，则 $d^2\alpha = dx_\alpha dy_\alpha$ ， $\beta\alpha^* - \beta^*\alpha = 2i(y_\beta x_\alpha - x_\beta y_\alpha)$ ，于是有

$$\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle e^{|\beta|^2} = \int\int P(x_\alpha, y_{\alpha^*}) \exp\left[-(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\right] \exp\left[2i(y_\beta x_\alpha - x_\beta y_\alpha)\right] dx_\alpha dy_\alpha$$

即 $\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle e^{|\beta|^2}$ 是 $P(\alpha, \alpha^*)e^{-|\alpha|^2}$ 的二维 Fourier 变换，做 Fourier 逆变换得

$$\begin{aligned} P(\alpha, \alpha^*) &= \frac{e^{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)}}{\pi^2} \int\int \langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \exp(x_\beta^2 + y_\beta^2) \exp[2i(y_\alpha x_\beta - x_\alpha y_\beta)] dx_\beta dy_\beta \\ &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int \langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle e^{|\beta|^2} \exp(-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha) d^2\beta \end{aligned} \tag{2.52}$$

3. 下面给出一个相干态表示的例子

(a) 热场态

$$\rho = \frac{\exp[-H/k_BT]}{\mathrm{Tr}[\exp(-H/k_BT)]}, \tag{2.53}$$

其中 k_B 是 Boltzmann 常数， H 是 Hamiltonian ，且 $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ ，可以计算得

$$\rho = \sum_n \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)\right] \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{k_BT}\right) \mid n\rangle\langle n \mid .$$

于是

$$\langle n\rangle = \mathrm{Tr}(a^\dagger a\rho) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right) - 1}.$$

进而可知

$$\rho = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1 + \langle n\rangle)^{n+1}} \mid n\rangle\langle n \mid,$$

$$\rho_{nn} = \langle n \mid \rho \mid n \rangle = \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
\langle -\beta \mid \rho \mid \beta \rangle &= \sum_n \frac{\langle n \rangle^n}{(1+\langle n \rangle)^{n+1}} \langle -\beta \mid n \rangle \langle n \mid \beta \rangle \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{1+\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\beta|^2)^n}{n!} \left(\frac{\langle n \rangle}{1+\langle n \rangle} \right)^n \\
&= \frac{e^{-|\beta|^2}}{1+\langle n \rangle} \exp\left[-\frac{|\beta|^2}{1+\frac{1}{\langle n \rangle}} \right],
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
P(\alpha, \alpha^*) &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2(1+n)} \int \exp\left[-\frac{|\beta|^2}{1+\frac{1}{\langle n \rangle}} \right] \cdot \exp(-\beta\alpha^* + \alpha\beta^*) d^2\beta \\
&= \frac{1}{\pi \langle n \rangle} \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{\langle n \rangle} \right]. \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

(b) 相干态

$$\rho = \mid \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0 \mid, \qquad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\langle -\beta \mid \rho \mid \beta \rangle &= \langle -\beta \mid \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0 \mid \beta \rangle \\
&= \exp\left(-|\alpha_0|^2 - |\beta|^2 - \alpha_0\beta^* + \beta\alpha_0^* \right),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
P(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi^2} e^{|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2} \int e^{-\beta(\alpha^* - \alpha_0^*) + \beta^*(\alpha - \alpha_0)} d^2\beta \\
&= \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0), \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

即相干态的 P 表示是一个二维 δ 函数。

(c) Fock 态

$$\rho = \mid n \rangle \langle n \mid, \qquad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
\langle -\beta \mid \rho \mid \beta \rangle &= \langle -\beta \mid n \rangle \langle n \mid \beta \rangle \\
&= \exp(-|\beta|^2) \frac{(-1)^n |\beta|^{2n}}{n!},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(\alpha,\alpha^*) &= \frac{(-1)^n e^{|\alpha|^2}}{\pi^2 n!}\int |\beta|^{2n} e^{-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha} d^2\beta \\ &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2 n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*n}}\int e^{-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha} d^2\beta \\ &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*n}}\delta^{(2)}(\alpha), \end{aligned} \tag{2.58}$$

因为 $n>0$，所以容易发现，这个 P 表示不是一个非负定函数，因而， Fock 态没有良好定义的 P 表示。

§2.8.2 Q –表示（反正规排列）

$$O_A = \sum_{n,m} d_{nm} a^n (a^\dagger)^m, \tag{2.59}$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha-a)\delta(\alpha^*-a^\dagger)]. \tag{2.60}$$

由上式，并插入单位算子 $\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha' \mid \alpha' >< \alpha' \mid$ 可得

$$\begin{aligned} Q(\alpha,\alpha^*) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}\int d^2\alpha' [\rho\delta(\alpha-a) \mid \alpha'\rangle\langle\alpha' \mid \delta(\alpha^*-a^\dagger)] \\ &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha \mid \rho \mid \alpha\rangle. \end{aligned} \tag{2.61}$$

由 $\mathrm{Tr}(\rho)=1$ 可得

$$\int Q(\alpha,\alpha^*) d^2\alpha = 1. \tag{2.62}$$

$$\langle O_A(a,a^\dagger)\rangle = \int Q(\alpha,\alpha^*) O_A(\alpha,\alpha^*) d^2\alpha. \tag{2.63}$$

与 P- 表示不同， Q- 表示是非负定且有界的函数。证明如下：
因为

$$\rho = \sum_\psi P_\psi \mid \psi\rangle\langle\psi \mid$$

所以

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\sum_\psi P_\psi |\langle\alpha \mid \psi\rangle|^2 \le \frac{1}{\pi}\sum_\psi P_\psi = \frac{1}{\pi}. \tag{2.64}$$

Q- 表示与 P- 表示的关系如下：
因为

$$\rho = \int P(\alpha,\alpha^*) \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid d^2\alpha$$

$$\begin{aligned} Q(\alpha,\alpha^*) &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha \mid \rho \mid \alpha\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\int P(\alpha',\alpha'^*)e^{-|\alpha-\alpha'|^2}d^2\alpha'. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Fock 态的 Q- 表示为

$$\begin{aligned} Q(\alpha,\alpha^*) &= \frac{1}{\pi}\langle\alpha \mid n\rangle\langle n \mid \alpha\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}|\langle\alpha \mid n\rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}}{\pi n!}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

是一个好函数。后面还将计算压缩态的 Q- 表示。

§2.8.3 Wingner-Weyl 分布表示（对称排列）

首先，总结 P- 和 Q- 表示：

$$P(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a)], \tag{2.67a}$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha - a)\delta(\alpha^* - a^\dagger)]. \tag{2.67b}$$

它们都可以用作特殊函数来描写。由

$$\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a) = \frac{1}{\pi^2}\int \exp[-i\beta(\alpha^* - a^\dagger)]\exp[-i\beta^*(\alpha - a)]d^2\beta,$$

及 (2.67a) 式可得

$$P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^* - i\beta^*\alpha}C^{(n)}(\beta,\beta^*), \tag{2.68}$$

其中

$$C^{(n)}(\beta,\beta^*) = \mathrm{Tr}(e^{i\beta a^\dagger}e^{i\beta^* a}\rho). \tag{2.69}$$

同理， (2.67b) 变为

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^* - i\beta^*\alpha}C^{(a)}(\beta,\beta^*), \tag{2.70}$$

其中

$$C^{(a)}(\beta,\beta^*) = \mathrm{Tr}(e^{i\beta^* a}e^{i\beta a^\dagger}\rho). \tag{2.71}$$

下面定义由 Wingner-Weyl 分布给出的对称排列情形下的特殊函数

$$C^{(s)}(\beta,\beta^*) = \mathrm{Tr}(e^{i\beta a^\dagger + i\beta^* a}\rho), \tag{2.72}$$

及 W- 表示

$$W(\alpha,\alpha^*)=\frac{1}{\pi^2}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^*-i\beta^*\alpha}C^{(s)}(\beta,\beta^*). \tag{2.73}$$

$W(\alpha,\alpha^*)$ 是与 $aa^\dagger$ 的对称排列联系在一起的。例如

$$\frac{1}{2}\langle aa^\dagger+a^\dagger a\rangle=\int W(\alpha,\alpha^*)\alpha\alpha^* d^2\alpha. \tag{2.74}$$

在历史上， W 表示最早是由一对正则变量 x 和 p 描写的：

$$\begin{aligned}
W(p,q) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int d\sigma\int d\tau e^{i(\tau p+\sigma q)}\mathrm{Tr}[e^{-i(\tau\hat{p}+\sigma\hat{q})}\rho] && (2.75)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int d\sigma\int d\tau e^{i(\tau p+\sigma q)}\mathrm{Tr}[e^{-i(\tau\hat{p}}e^{-\frac{1}{2}\hbar\sigma\tau}\rho] && (2.76)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int d\sigma\int d\tau e^{i(\tau p+\sigma q)}\mathrm{Tr}[e^{-i(\tau\hat{p}/2}e^{-i(\tau\hat{p}}\rho e^{-i(\tau\hat{p}/2)}]e^{-\frac{1}{2}\hbar\sigma\tau} && (2.77)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int d\sigma\int d\tau e^{i(\tau p+\sigma q)}\int dq'\langle q'\mid e^{-i\tau\hat{p}/2}e^{-i\sigma\hat{q}}\rho e^{-i\tau\hat{p}/2}\mid q'\rangle e^{-\frac{i}{2}\hbar\sigma\tau}. && (2.78)
\end{aligned}$$

因为

$$\exp\left(-i\tau\hat{p}/2\right)\mid q'\rangle=\mid q'-\frac{\hbar\tau}{2}\rangle,$$

可得

$$W(p,q)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int d\sigma\int d\tau dq' e^{i\sigma(q-q')}\langle q'+\frac{\hbar\tau}{2}\mid\rho\mid q'-\frac{\hbar\tau}{2}\rangle e^{i\tau p}. \tag{2.79}$$

因为

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i\sigma(q-q')}d\sigma=\delta(q-q'),$$

并令 $y=-\hbar\tau/2$ ，可得

$$W(p,q)=\frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dy e^{-i\frac{2py}{\hbar}}\langle q-y\mid\rho\mid q+y\rangle. \tag{2.80}$$

上式有许多的用处，下面将利用它研究 W- 表示与 P- 表示及 Q- 表示的联系。

§2.8.4 密度算符的广义表示及其与 P- ， Q- 和 W- 表示的关系

广义表示

$$\rho=\pi\int F^{\Omega}(\alpha,\alpha^*)\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)d^2\alpha, \tag{2.81}$$

其中

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*)=\frac{1}{\pi^2}\int \exp[\Omega(\beta,\beta^*)]\exp[-\beta(\alpha^*-\alpha)+\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta, \tag{2.82}$$

$\Omega(\beta,\beta^*)$ 是表述排列顺序的函数 $(\Omega(0,0)=0)$。例如，当 $\Omega(\beta,\beta^*)=-|\beta|^2/2$，有 $F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\equiv P(\alpha,\alpha^*)$，当 $\Omega(\beta,\beta^*)=|\beta|^2/2$，有 $F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\equiv Q(\alpha,\alpha^*)$。下面来证明。

首先，当 $\Omega(\beta,\beta^*)=-|\beta|^2/2$ 时，有

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger) &= \frac{1}{\pi^2}\int e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\cdot e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)+\beta^*(\alpha-a)}d^2\beta\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\cdot e^{-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha}\cdot e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}d^2\beta\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\cdot e^{-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha}\cdot e^{-\beta^* a}e^{\beta a^\dagger}e^{\frac{|\beta|^2}{2}}d^2\beta\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta^*(\alpha-a)}e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)}d^2\beta\\
&= \frac{1}{\pi^3}\int\int e^{\beta^*(\alpha-a)}\mid\alpha_1\rangle\langle\alpha_1\mid e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)}d^2\beta d^2\alpha_1\\
&= \frac{1}{\pi^3}\int\int e^{\beta^*(\alpha-\alpha_1)-\beta(\alpha^*-\alpha_1^*)}\mid\alpha_1\rangle\langle\alpha_1\mid d^2\beta d^2\alpha_1\\
&= \frac{1}{\pi}\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid
\end{aligned} \tag{2.83}$$

其中用到了

$$\frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta^*(\alpha-\alpha_1)-\beta(\alpha^*-\alpha_1^*)}d^2\beta=\delta(\alpha-\alpha_1)\delta(\alpha^*-\alpha_1^*)$$

及

$$\int d^2\alpha_1\delta(\alpha-\alpha_1)\delta(\alpha^*-\alpha_1^*)\mid\alpha_1\rangle\langle\alpha_1\mid=\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid.$$

将式 (2.83) 代入 (2.81) 可得

$$\rho=\int F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid d^2\alpha,$$

所以

$$F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)=P(\alpha,\alpha^*). \tag{2.84}$$

当 $\Omega(\beta,\beta^*)=|\beta|^2/2$ 时，有

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger) &= \frac{1}{\pi^2}\int e^{\frac{|\beta|^2}{2}}\cdot e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)+\beta^*(\alpha-a)}d^2\beta\\
&= \frac{1}{\pi^2}\int e^{-\beta^*(\alpha^*-a^\dagger)}\cdot e^{\beta^*(\alpha-a)}d^2\beta
\end{aligned} \tag{2.85}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\langle\alpha'\mid\rho\mid\alpha'\rangle &= \frac{1}{\pi^2}\int F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\langle\alpha'\mid e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)}\cdot e^{\beta^*(\alpha-a)}\mid\alpha'\rangle d^2\beta d^2\alpha\\ &= \int F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\left[\frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta^*(\alpha-\alpha')-\beta(\alpha^*-\alpha'^*)}d^2\beta\right]d^2\alpha\\ &= \int F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\delta^{(2)}(\alpha-\alpha')d^2\alpha = F^{(\Omega)}(\alpha',\alpha'^*),\end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{\pi}\langle\alpha'\mid\rho\mid\alpha'\rangle = Q(\alpha',\alpha'^*),$$

故有

$$F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*) = Q(\alpha,\alpha^*). \tag{2.86}$$

当 $\Omega(\beta,\beta^*)=0$ 时，我们将会得到 W 表示。因为

$$\Delta^{-(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger) = \frac{1}{\pi^2}\int \exp[-\Omega(\beta,\beta^*)]\exp[\beta(\alpha^*-a^\dagger)-\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta,$$

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger) = \frac{1}{\pi^2}\int \exp[\Omega(\beta,\beta^*)]\exp[-\beta(\alpha^*-a^\dagger)+\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta,$$

可以得到

$$\mathrm{Tr}[\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)\Delta^{-(\Omega)}(\alpha'-a,\alpha'^*-a^\dagger)] = \frac{1}{\pi}\delta^{(2)}(\alpha-\alpha'),$$

因此，$F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{Tr}[\rho\Delta^{-(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)]$ 所以

$$W(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi^2}\int \mathrm{Tr}[\rho\exp(-\beta a^\dagger+\beta^* a)]\exp(\beta\alpha^*-\beta^*\alpha)d^2\beta.$$

下面给出 $W(\alpha,\alpha^*)$ 的具体表示。由上式可知，$W(\alpha,\alpha^*)$ 是 $\mathrm{Tr}[\rho\exp(-\beta a^\dagger+\beta^* a)]$ 的 Fourier 变换，同时注意到 $e^{-2|\alpha|^2}$ 是 $(1/2\pi)e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}$ 的 Fourier 变换，即

$$e^{-2|\alpha|^2} = \frac{1}{2\pi}\int \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\exp(\beta\alpha^*-\beta^*\alpha)d^2\beta,$$

因此，由卷积定理可知

$$W(\alpha,\alpha^*)e^{-2|\alpha|^2} = \int C(\beta,\beta^*)\exp(\beta\alpha^*-\beta^*\alpha)d^2\beta,$$

其中 $C(\beta,\beta^*)$ 是卷积，即

$$C(\beta,\beta^*) = \frac{1}{2\pi^3}\int \mathrm{Tr}\{\rho\exp[-(\beta-\beta_1)a^\dagger,+(\beta^*-\beta_1^*)a]\}\exp\left(-\frac{|\beta_1|^2}{2}\right)d\beta_1$$

插入二次单位算子 $1/\pi\int \mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid d^2\alpha=1$，得

$$\begin{aligned}
C(\beta,\beta^*) &= \frac{1}{2\pi^5}\int\int\int \mathrm{Tr}\{\rho\mid\beta_2\rangle\langle\beta_2\mid\exp[-(\beta-\beta_1)a^\dagger]\exp[(\beta^*-\beta_1^*)a]\mid\beta_3\rangle\langle\beta_3\mid\}\\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta-\beta_1|^2-\frac{1}{2}|\beta_1|^2\right)d^2\beta_1 d^2\beta_2 d^2\beta_3\\
&= \frac{1}{2\pi^5}\int\int\int\langle\beta_3\mid\rho\mid\beta_2\rangle\langle\beta_2\mid\beta_3\rangle\\
&\times \exp\left[-(\beta-\beta_1)\beta_2^*+(\beta^*-\beta_1^*)\beta_3-\frac{1}{2}|\beta-\beta_1|^2-\frac{1}{2}|\beta_1|^2\right]d^2\beta_1 d^2\beta_2 d^2\beta_3\\
&= \frac{1}{2\pi^4}\int\int\int\langle\beta_3\mid\rho\mid\beta_2\rangle\langle\frac{\beta}{2}\mid\beta_3\rangle\langle\beta_2\mid-\frac{\beta}{2}>d^2\beta_3\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\langle\frac{\beta}{2}\mid\rho\mid-\frac{\beta}{2}\rangle.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
W(\alpha,\alpha^*) &= e^{2|\alpha|^2}\cdot\frac{1}{2\pi^2}\int\langle\frac{\beta}{2}\mid\rho\mid-\frac{\beta}{2}\rangle\exp(\beta\alpha^*-\beta^*\alpha)d^2\beta\\
&= \frac{2}{\pi^2}e^{2|\alpha|^2}\int\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\exp[-2(\beta\alpha^*-\beta^*\alpha)]d^2\beta.
\end{aligned}$$

§2.8.5 压缩相干态的 Q 表示

$$\rho=\mid\beta,\xi\rangle\langle\beta,\xi\mid, \tag{2.87}$$

所以

$$Q(\alpha,\alpha^*)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha\mid\rho\mid\alpha\rangle=\frac{1}{\pi}|\langle\alpha\mid\beta,\xi\rangle|^2,$$

其中

$$\langle\alpha\mid\beta,\xi\rangle=\langle\alpha\mid S(\xi)D(\beta)\mid 0\rangle=\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle$$

下面计算 $\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle$。

$$\begin{aligned}
\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle &= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\mid a^\dagger S(\xi)\mid\beta\rangle\\
&= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\mid S(\xi)S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)\mid\beta\rangle\\
&= \frac{1}{\alpha^*}\langle\alpha\mid S(\xi)(a^\dagger\cosh r-ae^{-i\theta}\sinh r)\mid\beta\rangle\\
&= \frac{1}{\alpha^*}\left[\cosh r\left(\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\beta^*\right)-e^{-i\theta}\beta\sinh r\right]\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle,
\end{aligned}$$

于是，有

$$\left[\cosh r\frac{\partial}{\partial\beta}-\beta e^{-i\theta}\mathrm{sech}r+\left(\frac{1}{2}\beta^*\cosh r-\alpha^*\right)\right]\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle=0.$$

解此方程，可得

$$\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle=K\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta\mathrm{sech}r+\frac{1}{2}e^{-i\theta}\beta^2\tanh r\right)$$

其中 K 与 $\alpha,\alpha^*,\beta^*,r,\theta$ 有关，并由 $S(\xi)$ 的性质决定。由

$$\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle^*=\langle\beta\mid S^\dagger(\xi)\mid\alpha\rangle=\langle\beta\mid S(-\xi)\mid\alpha\rangle$$

可知 $(K^*=K^*(\alpha,\alpha^*,\beta^*,r,\theta))$

$$\begin{aligned}&K^*\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2+\frac{1}{2}e^{i\theta}(\beta^*)^2\tanh r\right)\\ =\;&K(\beta,\beta^*,\alpha^*,r,\theta+\pi)\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\alpha^2\tanh r\right).\end{aligned}$$

于是，有

$$K(\alpha,\alpha^*,\beta^*,r,\theta)=(\mathrm{sech}r)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}e^{i\theta(\alpha^*)^2}\tanh r\right],$$

其中 $(\mathrm{sech}r)^{\frac{1}{2}}$ 因子是为了确保归一化条件

$$\frac{1}{\pi}\int|\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle|^2d^2\alpha=1$$

被满足。

于是，由 K 的表达式可得

$$\begin{aligned}\langle\alpha\mid S(\xi)\mid\beta\rangle\;=\;&(\mathrm{sech}r)^{\frac{1}{2}}\\ \times\;&\exp\{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta\mathrm{sech}r-\frac{1}{2}\left[e^{i\theta}(\alpha^*)^2-e^{-i\theta}\beta^2\right]\times\tanh r\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}Q(\alpha,\alpha^*)\;=\;&\frac{\mathrm{sech}r}{\pi}\exp\{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)+(\alpha^*\beta+\beta\alpha^*)\mathrm{sech}r\\ -\;&\frac{1}{2}\left[e^{i\theta}(\alpha^{*2}-\beta^{*2})^2+e^{-i\theta}(\alpha^2-\beta^2)\right]\tanh r\}.\end{aligned}$$

相应地

$$p(n)=|\langle n\mid\beta,\xi\rangle|^2,$$

$$\langle\alpha \mid \beta,\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\alpha \mid n\rangle\langle n \mid \beta,\xi\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n \mid \beta,\xi\rangle.$$

由

$$\exp(2zt-t^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)t^n}{n!},$$

可得

$$\langle n \mid \beta,\xi\rangle = \frac{(e^{i\theta}\tanh r)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}(n!\cosh r)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(|\beta|^2 - e^{-i\theta}\beta^2\tanh r)\right]\cdot H_n\left(\frac{\beta e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2\cosh r\sinh r}}\right).$$

因此

$$p(n) = \frac{(\tanh r)^n}{2^n n!\cosh r}\exp\{-|\beta|^2 + \frac{1}{2}\left[e^{-i\theta}\beta^2 + e^{i\theta}(\beta^*)^2\right]\tanh r\}\left|H_n\left(\frac{\beta e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2\cosh r\sinh r}}\right)\right|^2.$$

由

$$\langle n^r\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^r p(n), \qquad (r=1,2)$$

得

$$\begin{aligned}(\Delta n)^2 &= \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 \\ &= |\beta|^2[\cosh 4r - \cos(\theta-2\phi)\sinh 4r] + 2\sinh^2 r\cosh^2 r.\end{aligned}$$

同时，对压缩真空态，即 $|0,\xi\rangle$ 可得

$$p(2n) = (\cosh r)^{-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\tanh r\right)^{2n},$$

$$p(2n+1) = 0.$$

练习题

1. 验证

(a)

$$\begin{aligned}\delta(\alpha^* - a^\dagger)\delta(\alpha - a) &= \frac{1}{\pi^2}\int\exp[-\beta(\alpha^* - a^\dagger)]\exp[\beta^*(\alpha - a)]d^2\beta \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int\exp[-i\beta(\alpha^* - a^\dagger)]\exp[-i\beta^*(\alpha - a)]d^2\beta.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\delta(\alpha-a)\delta(\alpha^*-a^\dagger) &= \frac{1}{\pi^2}\int \exp[\beta^*(\alpha-a)]\exp[-\beta(\alpha^*-a^\dagger)]d^2\beta \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int \exp[i\beta(\alpha^*-a^\dagger)]\exp[i\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta.\end{aligned}$$

(c)

$$\delta(\alpha)\delta(\alpha^*)=\delta[\mathrm{Im}(\alpha)]\delta[\mathrm{Re}(\alpha)]$$

2. 证明

$$\frac{1}{2}\langle aa^\dagger+a^\dagger a\rangle=\int W(\alpha,\alpha^*)|\alpha|^2d^2\alpha,$$

其中 $W(\alpha,\alpha^*)$ 是 Wigner-Weyl 分布表示。

3. 证明

(a)

$$a^\dagger \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid = \left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid,$$

(b)

$$\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid a=\left(\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid.$$

4. 证明

(a)

$$\mathrm{Tr}[D(\alpha)]=\pi\delta^{(2)}(\alpha),$$

(b)

$$\mathrm{Tr}[D(\alpha)D^\dagger(\alpha')]=\pi\delta^{(2)}(\alpha-\alpha'),$$

(c)

$$\mathrm{Tr}[\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)\Delta^{-(\Omega)}(\alpha'-a,\alpha'^*-a^\dagger)]=\frac{1}{\pi}\delta^{(2)}(\alpha-\alpha'),$$

其中

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)=\frac{1}{\pi^2}\int\exp[\Omega(\beta,\beta^*)]\exp[-\beta(\alpha^*-a^\dagger)+\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta,$$

$$\Delta^{-(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)=\frac{1}{\pi^2}\int\exp[-\Omega(\beta,\beta^*)]\exp[\beta(\alpha^*-a^\dagger)-\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta.$$

5. 证明

$$W(\alpha,\alpha^*)=\frac{2}{\pi}\int P(\beta,\beta^*)\exp(-2|\alpha-\beta|^2)d^2\beta.$$

6. 计算相干态，热态的 Q 表示与 W 表示。

第三章　光 - 原子相互作用的全量子理论

§3.1　全量子理论的基本方法

1. Schrödinger 方程：
   在 Schrödinger 图象下，有
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mid\psi\rangle = H\mid\psi\rangle.$$
2. Heisenberg 方程：
   在 Heisenberg 图象下，有
$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{H}].$$
3. 密度矩阵方程（又称为 Liouville 方程）：在 Schrödinger 图象下，有
$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]\ A\#,$$
   其中 $\hat{\rho} = \sum\limits_{\psi} P_\psi \mid\psi\rangle\langle\psi\mid$ 为密度矩阵算符 (Density Matrix Operater)。
4. 图象变换：

   (a) 从 Schrödinger 图象 $\rightarrow$ Heisenberg 图象
$$\mid\psi(t)\rangle_S = \hat{U}(t)\mid\psi(t)\rangle_H \text{ 或 } \mid\psi(t)\rangle_H = \hat{U}^{-1}(t)\mid\psi(t)\rangle_S$$
   其中
$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right),$$
   则有（留作练习）
   i.
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mid\psi(t)\rangle_H = 0.$$
   ii.
$$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\right)_H + \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}_H,\hat{H}].$$
   其中已令 $\hat{F}_H = \hat{U}^{-1}\hat{F}_S\hat{U}$. 可以证明，若在 Schrödinger 图象下 $\hat{F}_S$ 不显含 t，即 $\partial\hat{F}_S/\partial t = 0$，则 $d\hat{F}_S/dt = 0$（利用图象变换证明，留作练习）。

iii. 当 $\hat{U}(t)$ 为幺正 (Unitary) 变换，即 $\hat{U}^{\dagger}(t)=\hat{U}^{-1}(t)$ 或 $\hat{U}^{\dagger}(t)\hat{U}(t)=1$ 时 (即 $\hat{H}^{\dagger}=\hat{H}$ 时)，有

A.

$$\langle\psi(t)\mid\hat{F}_S\mid\psi(t)\rangle_S=\langle\psi(t)\mid\hat{F}_H\mid\psi(t)\rangle_H,$$

B.

$$\langle\psi(t)\mid\psi(t)\rangle_S=\langle\psi(t)\mid\psi(t)\rangle_H.$$

(b) 从 Schrödinger 图象 → 相互作用图象

在 Schrödinger 图象下，若 Hamiltonian 表示为自由与相互作用两部分，即

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_I,$$

令 $\mid\psi(t)\rangle_S=\hat{U}_0(t)\mid\psi(t)\rangle_I$ 或 $\mid\psi(t)\rangle_I=\hat{U}_0^{-1}(t)\mid\psi(t)\rangle_S$，

其中

$$\hat{U}_0=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right),$$

则有（练习）

i. $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\mid\psi\rangle_I=\hat{V}\mid\psi\rangle_I$ ，其中 $\hat{V}=\hat{U}_0^{-1}\hat{H}_I\hat{U}_0$,

ii. 力学量变为 $\hat{F}_I=\hat{U}_0^{-1}\hat{H}_S\hat{U}_0$，且有

$$\frac{d\hat{F}_I}{dt}=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_I+\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}_I,\hat{H}_0].$$

iii. 当 $\hat{H}_0$ 为厄米 (Hermitian) 算符时，力学量平均值和波函数的几率均不变。

5. 密度算符

(a) 纯态

$$\hat{\rho}=\mid\psi\rangle\langle\psi\mid,$$

(b) 混合态

$$\hat{\rho}=\sum_{\psi}P_{\psi}\mid\psi\rangle\langle\psi\mid.$$

(c) 说明：

i. 纯态时，只有系统的能在的量子特性带来的统计性而无经典统计性；

ii. 混合态时，不仅有量子特性带来的统计性而且有经典热力学带来的统计性。

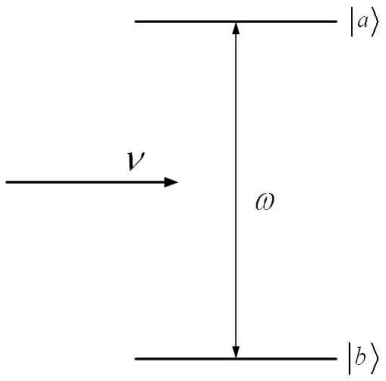


图 3.1: 二能级原子与单模光场相互作用

§3.2 光 - 原子相互作用 Hamiltonian

以二能级原子（如图）为例，光场 $\vec{E}$ 与二能级单原子相互作用的 Hamiltonian 在偶极近似下可以写成

$$H = H_A + H_F - e\vec{r}\cdot\vec{E}, \tag{3.1}$$

其中

$$H_A = \sum_i E_i\sigma_{ii} \qquad \sigma_{ij} = |\, i\rangle\rangle j\,|, \tag{3.2a}$$

$$H_F = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}(a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}). \tag{3.2b}$$

同时

$$e\vec{r} = \sum_{i,j} e \mid i\rangle\langle i \mid \vec{r} \mid j\rangle\langle j \mid = \sum_{ij}\vec{p}_{ij}\sigma_{ij} \tag{3.3a}$$

其中电偶极跃迁矩阵元为

$$\vec{p}_{ij} = e\langle i \mid \vec{r} \mid j\rangle, \tag{3.3b}$$

同时，线偏振电场为：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}\mathcal{E}_{\vec{k}}(a_{\vec{k}} + a^\dagger_{\vec{k}}). \tag{3.3c}$$

因此

$$-e\vec{r}\cdot\vec{E} = \hbar\sum_{i,j}\sum_{\vec{k}} g^{ij}_{\vec{k}}\sigma_{ij}(a_{\vec{k}} + a^\dagger_{\vec{k}}),$$

其中耦合系数为

$$g_{\vec{k}}^{ij} = -\frac{\vec{p}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}}}{\hbar}$$

于是，系统的总 Hamiltonian 为

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{i} E_i \sigma_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^{ij} \sigma_{ij} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \tag{3.4}$$

其中已经忽略了零点能（常数，不起作用），并已假设电场是线偏振的 ($\lambda = 1$)。如果假定 $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{21}$（即电偶极矩阵为 Hermite 共轭），则有

$$g_{\vec{k}} = g_{\vec{k}}^{12} = g_{\vec{k}}^{21}.$$

于是，由于 $\vec{p}_{ii} = e\langle i \mid \vec{r} \mid i\rangle = 0$（禁戒跃迁），有

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + (E_1\sigma_{11} + E_2\sigma_{22}) + \hbar \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} (\sigma_{12} + \sigma_{21})(a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}).$$

下面通过讨论 σ_{ij} 的性质来简化 Hamiltonian。令 $E_2 - E_1 = \hbar\omega$, 且由原子态的正交及完备性可知

$$\sum_{i=1}^{2} \mid i\rangle\langle i \mid = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 1,$$

得

$$E_1\sigma_{11} + E_2\sigma_{22} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$$

忽略常数项 $(E_1 + E_2)/2$，并注意到

$$\sigma_z = \sigma_{22} - \sigma_{11} = \mid 2\rangle\langle 2 \mid - \mid 1\rangle\langle 1 \mid = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_+ = \sigma_{21} = \mid 2\rangle\langle 1 \mid = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_- = \sigma_{12} \mid 1\rangle\langle 2 \mid = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中用到 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$|2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$|2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

则有

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}(\sigma_+ + \sigma_-)(a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^{\dagger}), \tag{3.5}$$

同时，有以下常用对易关系

$$[\sigma_{ij}, \sigma_{kl}] = \sigma_{il}\delta_{jk} - \sigma_{kj}\delta_{li}, \tag{3.6a}$$

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z, \tag{3.6b}$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-, \tag{3.6c}$$

$$[\sigma_+, \sigma_z] = -2\sigma_+. \tag{3.6d}$$

在相互作用 Haliltonian 中有四项，包括：

$a_{\vec{k}}\sigma_+$：粒子跃迁到高能级，湮灭光子，

$a_{\vec{k}}^{+}\sigma_-$：粒子衰减到低能级，产生光子，　　这两项符合能量守恒 (即旋波项，简记为 RWA 项)

$a_{\vec{k}}\sigma_-$：粒子衰减到低能级，湮灭光子，

$a_{\vec{k}}^{+}\sigma_+$：粒子跃迁到高能级，产生光子。　　这两项不符合能量守恒（即非 RWA 项）

于是，在旋转波近似 (RWA) 下，有

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}(\sigma_+ a_{\vec{k}} + \sigma_- a_{\vec{k}}^{\dagger}). \tag{3.7}$$

§3.3 单模场与二能级单原子的相互作用 (Jaynes-Cummings 模型)

对于单模光场与二能级单原子相互作用的情形，有：

$$H = H_0 + H_I \tag{3.8a}$$

其中

$$H_0 = \hbar\omega_0 a^{\dagger} a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z, \tag{3.8b}$$

$$H_I = \hbar g(\sigma_+ a + a^{\dagger}\sigma_-). \tag{3.8c}$$

这就是 Jaynes-Cummings 模型 (J-C 模型) 给出的 Hamiltonian，此时已经使用了旋转波近似 (RWA) 和偶极近似，这个模型可以精确求解。在相互作用图象下，有

$$V = e^{iH_0t/\hbar} H_I e^{-iH_0t/\hbar},$$

应用 Baker-Hausdorff 公式，即

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots,$$

可得

$$e^{i\omega_0 a^\dagger a t} a e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} = a e^{-i\omega_0 t},$$

$$e^{i\omega\sigma_z t/2}\sigma_+ e^{-i\omega\sigma_z t/2} = \sigma_+ e^{i\omega t},$$

于是

$$V = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + a^+\sigma_- e^{-i\Delta t}), \tag{3.9}$$

其中 $\Delta = \omega - \omega_0$ 称为失谐量 (detuning) 。

下面，根据已经求得的相互作用 Hamiltonian (相互作用图象)，可以利用三种等价的方法来求解该模型。

方法一：几率振幅方法

在相互作用图象下， Schrödinger 方程写成

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi\rangle = V \mid \psi\rangle, \tag{3.10a}$$

$$\mid \psi(t)\rangle = \sum_n [c_{1,n}(t) \mid 1,n\rangle + c_{2,n}(t) \mid 2,n\rangle], \tag{3.10b}$$

其中 $\mid i,n\rangle$ 表示原子处在 i 能级而光场有 n 个光子 $(i = 1,2)$ 的状态，由于是在相互作用图象下，因此 $c_{i,n}$ 是慢变几率振幅。由 RWA 可知，相互作用 Hamiltonian (3.9) 式只能导致 $\mid 2,n\rangle$ 和 $\mid 1,n+1\rangle$ 态间的跃迁，于是下面我们只需求解 $c_{2,n}$ 和 $c_{1,n+1}$ 随时间的演化过程的解。由方程 (3.9) ， (3.10a,b) 可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_{2,n} &= -igc_{1,n+1}\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}, \\ \dot{c}_{1,n+1} &= -igc_{2,n}\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

解此方程，得

$$\left.\begin{aligned} c_{1,n+1}(t) &= \left\{c_{1,n+1}(0)\left[\cos\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right) + \tfrac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)\right] - \tfrac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{2,n}(0)\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)\right\} e^{-i\frac{\Delta t}{2}}, \\ c_{2,n}(t) &= \left\{c_{2,n}(0)\left[\cos\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right) - \tfrac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)\right] - \tfrac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{1,n+1}(0)\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)\right\} e^{i\frac{\Delta t}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.12a}$$

其中 $\Omega_n^2=\Delta^2+4g^2(n+1)$。如果初始是原子处在 $|2\rangle$ 态, 则 $c_{2,n}=c_n(0)$， $c_{1,n+1}(0)=0$, 这里 $c_n(0)$ 只是光场的几率振幅，则有

$$\left.\begin{aligned} c_{2,n}(t) &= c_n(0)\left[\cos\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)-\tfrac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)\right]e^{i\frac{\Delta t}{2}},\\ c_{1,n+1}(t) &= -c_n(0)\tfrac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}\sin\left(\tfrac{\Omega_n t}{2}\right)e^{-i\frac{\Delta t}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.12b}$$

因为 $|c_{i,n}(t)|^2\qquad (i=1,2)$ 表示在 t 时刻，光场光子数为 n，原子处在 $|i\rangle$ 态的几率, 因此

$$\begin{aligned} p(n) &= |c_{1,n}(t)|^2+|c_{2,n}(t)|^2 \qquad (3.13)\\ &= \rho_{nn}(0)\left[\cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)+\left(\frac{\Delta}{\Omega_n}\right)^2\sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right]+\rho_{n-1,n-1}(0)\left(\frac{4g^2n}{\Omega_{n-1}^2}\right)\sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1}t}{2}\right) \end{aligned}$$

代表在时刻 t，具有个 n 光子的几率，其中 $\rho_{nn}(0)=|c_n(0)|^2$ 是光场在初始时具有 n 个光子的几率。假定初始时光场处于相干态，即

$$\rho_{nn}(0)=\frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!} \tag{3.14}$$

则可以算出 t 时刻对于不同的参数情形，即不同的 Δ， $\langle n\rangle$， g 等系统的解析解。
反转粒子数

$$W(t)=\sum_n[|c_{2,n}(t)|^2-|c_{1,n}(t)|^2], \tag{3.15}$$

将 (2.12b) 代入可得

$$W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_{nn}(0)\left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2}+\frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}\cos(\Omega_n t)\right]. \tag{3.16a}$$

有趣的是，即使初始时刻光场处在真空态 (即 $\rho_{nn}=\delta_{n0}$)，仍有

$$W(t)=\frac{1}{\Delta^2+4g^2}\left\{\Delta^2+4g^2\cos[(\Delta^2+4g^2)^{\frac{1}{2}}t]\right\}. \tag{3.16b}$$

即仍会发生 Rabi 振荡。这与半经典理论给出的结论不同。这就是全量子性所导致的一个简单的例子。而且还会出现“崩塌”和“复原”现象，这与半经典理论给出的单纯的正（余）弦振荡是不同的。

定义 t_R， t_c， t_r 分别表示正弦振荡，崩塌和复原的时间，则当 $\langle n\rangle\gg 1$ 时，这些量可以从 (2.16a) 估算出来：

$$t_R\sim\frac{1}{\Omega_{\langle n\rangle}}=\frac{1}{(\Delta^2+4g^2\langle n\rangle)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.17a}$$

因为 Poisson 分布时， $\Delta n = \sqrt{\langle n\rangle}$, 故有

$$(\Omega_{\langle n\rangle+\sqrt{\langle n\rangle}} - \Omega_{\langle n\rangle-\sqrt{\langle n\rangle}})t_c \sim 1,$$

于是

$$\begin{aligned} t_c &\sim \frac{1}{\Omega_{\langle n\rangle+\sqrt{\langle n\rangle}} - \Omega_{\langle n\rangle-\sqrt{\langle n\rangle}}} \\ &\approx \frac{1}{2g}\left(1+\frac{\Delta^2}{4g^2\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.17b}$$

同时，因为

$$(\Omega_{\langle n\rangle} - \Omega_{\langle n\rangle-1})t_r = 2\pi m, \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

故

$$t_r = \frac{2\pi m}{\Omega_{\langle n\rangle} - \Omega_{\langle n\rangle-1}} \approx \frac{2\pi m\sqrt{\langle n\rangle}}{g}\left(1+\frac{\Delta^2}{4g^2\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.17c}$$

方法二： Heisenberg 算符方法

由 J-C 模型给出的 Hamiltonian 和 Heisenberg 方程可以推得

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{i\hbar}[a, H] = -i\omega_0 a - ig\sigma_-, \\ \dot{\sigma}_- &= i\omega\sigma_- + ig\sigma_z a, \\ \dot{\sigma}_z &= 2ig(a^\dagger\sigma_- - \sigma_+ a). \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

定义两个运动常量算子

$$N = a^\dagger a + \sigma_+\sigma_-, \tag{3.19a}$$

$$c = \frac{1}{2}\Delta\sigma_z + g(\sigma_+ a + a^\dagger\sigma_-). \tag{3.19b}$$

可以证明：

$$[N, H] = [c, H] = 0,$$

其中 N 表示原子 - 场系统的总激发算符， c 表示交换常数。由 (3.18) 及 (3.19a,b) 可得

$$\begin{aligned} \sigma_-(t) &= [\sigma_+(t)]^\dagger \\ &= e^{-i\omega_0 t}e^{ict}\left[\left(\cos\kappa t + ic\frac{\sin\kappa t}{\kappa}\right)\sigma_-(0) - ig\frac{\sin\kappa t}{\kappa}a(0)\right], \end{aligned} \tag{3.20a}$$

$$a(t) = e^{-i\omega_0 t}e^{ict}\left[\left(\cos\kappa t - ic\frac{\sin\kappa t}{\kappa}\right)a(0) - ig\frac{\sin\kappa t}{\kappa}\sigma_-(0)\right], \tag{3.20b}$$

其中 κ 为一常数算子，且有

$$\kappa = \left[\frac{\Delta^2}{4} + g^2(N+1)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.21a}$$

及

$$[c, \kappa] = 0. \tag{3.21b}$$

在得到 (3.21a,b) 时，用到了

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= \frac{\Delta^2}{4} + g^2 N, \\ g\sigma_z a &= 2c\sigma_- + \Delta\sigma_- - ga. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

由式 (3.20a,b)，得到了在 Heisenberg 图象下两能级原子与单模光场相互作用涉及的原子及光场算子的完整解，其他的量均能从这些解中求解出来。如反转粒子数 $W(t)$，有

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle 2, \alpha \mid \sigma_z(t) \mid 2, \alpha\rangle \\ &= 2\langle 2, \alpha \mid \sigma_+(t)\sigma_-(t) \mid 2, \alpha\rangle - 1, \end{aligned}$$

其中已经假设初始时原子处于激发态 $\mid 2\rangle$ 而光场处于相干态 $\mid \alpha\rangle$。

利用 Heisenberg 图象下的算符方法有一个显著的优点，即可直接求得多时相关函数。例如，利用 (2.20a,b) 能够构造出偶极 - 偶极相关函数

$$\begin{aligned} &\langle 2, \alpha \mid \sigma_+(t)\sigma_-(\tau) \mid 2, \alpha\rangle \\ = \;& e^{-i\omega_0 t - |\alpha|^2} \sum_n^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \times \frac{1}{4\Omega_n^2}\left[\cos\left(\frac{\Omega_{n-1}\tau}{2}\right) - \frac{i\Delta}{2\Omega_{n-1}}\sin\left(\frac{\Omega_{n-1}\tau}{2}\right)\right] \\ &\times \left\{(\Omega_n + \Delta)^2 e^{-i\frac{\Omega_n\tau}{2}} + (\Omega_n - \Delta)^2 e^{i\frac{\Omega_n\tau}{2}} + 8g^2(n+1)\cos\left[\frac{\Omega_n(\tau+2t)}{2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

方法三：幺正时间演化算子方法

如果系统是幺正的，即没有耗散，该方法是最简单的。对于 J-C 模型而言，我们给出了幺正时间演化算子

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{V}{\hbar}t\right), \tag{3.23}$$

其中，$V(t)$ 是在相互作用图象下的 Hamiltonian，对于共振，即 $\Delta = 0$ 的情形而言，有

$$V(t) = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-). \tag{3.24}$$

利用关系

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_+a+a^\dagger\sigma_-)^{2l}&=(aa^\dagger)^l\mid 2\rangle\langle 2\mid+(a^\dagger a)^l\mid 1\rangle\langle 1\mid\\(\sigma_+a+a^\dagger\sigma_-)^{2l+1}&=(aa^\dagger)^la\mid 2\rangle\langle 1\mid+a^\dagger(a^\dagger a)^l\mid 1\rangle\langle 2\mid,\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

可得

$$\begin{aligned}u(t)=\quad&\cos(gt\sqrt{a^\dagger a+1})\mid 2\rangle\langle 2\mid+\cos(gt\sqrt{a^\dagger a})\mid 1\rangle\langle 1\mid\\&-i\frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a+1})}{\sqrt{a^\dagger a+1}}a\mid 2\rangle\langle 1\mid-ia^\dagger\frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a+1})}{\sqrt{a^\dagger a+1}}\mid 1\rangle\langle 2\mid.\end{aligned}\tag{3.26}$$

由

$$\mid\psi(t)>=U(t)\mid\psi(0)\rangle,$$

及

$$\mid\psi(0)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(0)\mid 2,n\rangle\qquad\text{(假设初态为激发态}\mid 2\rangle)$$

则有

$$\mid\psi(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(0)[\cos(gt\sqrt{n+1})\mid 2,n\rangle-i\sin(gt\sqrt{n+1})\mid 1,n+1\rangle],$$

于是有

$$c_{2,n}(t)=\langle 2,n\mid\psi(t)\rangle=c_n(0)\cos(gt\sqrt{n+1}),$$

$$c_{1,n+1}(t)=-ic_n(0)\sin(gt\sqrt{n+1}).$$

这个结果与方法一给出的是一致的（当 $\Delta=0$ 时）。

§3.4 二能级原子自发辐射的 Weisskopf-Wigner 理论

考虑无外光场情况下的两能级原子的演化。假定初始时原子处于高能级 $\mid 2>$ 态，有

$$V=\hbar\sum_{\vec{k}}[g^*_{\vec{k}}(\vec{r}_0)\sigma_+a_{\vec{k}}e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})t}+\text{h.c.}]\tag{3.27a}$$

及

$$\mid\psi(t)\rangle=c_2(t)\mid 2,0\rangle+\sum_{\vec{k}}c_{1,\vec{k}}\mid 1,1_{\vec{k}}\rangle,\tag{3.27b}$$

初始条件

$$c_2(0)=1,\qquad c_{1,\vec{k}}(0)=0.\tag{3.27c}$$

由相互作用图象下的 Schrödinger 方程

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}V \mid \psi(t)\rangle. \tag{3.27d}$$

可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= -i\sum_{\vec{k}} g^*_{\vec{k}}(\vec{r}_0)e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})t}c_{1,\vec{k}}(t), \\ \dot{c}_{1,\vec{k}}(t) &= -ig_{\vec{k}}(\vec{r}_0)e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})t}c_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

其中 $g_{\vec{k}}(\vec{r}_0) = g_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}$, （$\vec{r}_0$ 是原子的位置）。

求解 (2.28) 可得

$$\dot{c}_2(t) = -\sum_{\vec{k}} |g_{\vec{k}}(\vec{r}_0)|^2 \int_0^t dt' e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})(t-t')}c_2(t'), \tag{3.29}$$

注意到耦合系数的表达式为

$$g^{ij}_{\vec{k}} = -\frac{\vec{p}_{ij}\cdot\hat{\epsilon}_{\vec{k}}\mathcal{E}_{\vec{k}}}{\hbar}$$

因此

$$|g_{\vec{k}}(\vec{r}_0)|^2 = \frac{\omega_{\vec{k}}}{2\hbar\epsilon_0 V}\vec{p}^2_{21}\cos^2\theta$$

其中 θ 为 $\vec{p}_{ij}$ 与电场的夹角。同时，将 $\sum\limits_{\vec{k}}$ 变为积分，有

$$\sum_{\vec{k}} \to 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk,$$

于是 (2.29) 变为

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{4\vec{p}_{21}}{(2\pi)^2 6\hbar\epsilon_0 c^3}\int_0^{\infty} d\omega_{\vec{k}}\omega^3_{\vec{k}}\int_0^t dt' e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})(t-t')}c_2(t'), \tag{3.30}$$

其中， $\omega_{\vec{k}} \approx \omega$, 且积分 $\int_0^{\infty} d\omega_{\vec{k}}$ 可以变为 $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{\vec{k}}$， $\omega^3_{\vec{k}}$ 可以用 ω^3 代替，于是，由

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{\vec{k}} e^{i(\omega-\omega_{\vec{k}})(t-t')} = 2\pi\delta(t-t'),$$

可得

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{\Gamma}{2}c_2(t), \tag{3.31a}$$

其中

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\omega^3\vec{p}^2_{21}}{3\hbar c^3}. \tag{3.31b}$$

于是

$$\rho_{22} = |c_2(t)|^2 = e^{-\Gamma t}, \tag{3.31c}$$

即处于激发态的原子将以指数形式衰减，其寿命为

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}.$$

下面求解 $c_{1,\vec{k}(t)}$ 。将代入方程可得

$$\begin{aligned} c_{1,\vec{k}}(t) &= -ig_{\vec{k}}(\vec{r}_0)\int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_{\vec{k}})t'-\Gamma t'/2} \\ &= g_{\vec{k}}(\vec{r}_0)\left[\frac{1-e^{-i(\omega-\omega_{\vec{k}})t-\Gamma t/2}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\Gamma/2}\right], \end{aligned} \tag{3.31d}$$

于是

$$\mid \psi(t)\rangle = e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \mid 2,0\rangle + \mid 1\rangle \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}\left[\frac{1-e^{-i(\omega-\omega_{\vec{k}})t-\Gamma t/2}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\Gamma/2}\right] \mid 1_{\vec{k}}\rangle$$

定义光场态

$$\mid \gamma_0\rangle = \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}} \mid 1_{\vec{k}}\rangle$$

当 $t \gg \Gamma^{-1}$ ，有

$$\begin{aligned} \mid \psi(t)\rangle &= e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \mid 2,0\rangle + \mid 1\rangle \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} \cdot \frac{1}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}} \mid 1_{\vec{k}}\rangle \\ &\to \mid 1\rangle \mid \gamma_0\rangle. \end{aligned}$$

下面求解 $t \gg \Gamma^{-1}$ 时光场的一阶相关函数

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\vec{r},\vec{r},t,t) &= \langle\psi \mid E^{(-)}(\vec{r},t)E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi\rangle \\ &= \langle\gamma_0 \mid E^{(-)}(\vec{r},t)E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle \\ &= \langle\gamma_0 \mid E^{(-)}(\vec{r},t) \mid 0\rangle\langle 0 \mid E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle, \end{aligned}$$

其中用到了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid n\rangle\langle n \mid = 1,$$

及 $E^{(-)}(\vec{r},t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mid n >= 0$ ，（因为只有 1 个光子）

于是

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r},t,t) = |\langle 0 \mid E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle|^2 \triangleq |\Psi_\gamma(\vec{r},t)|^2.$$

下面求解 $\Psi_\gamma(\vec{r},t)$：

$$\begin{aligned}\langle 0 \mid E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k},\vec{k'}}\langle 0 \mid \omega_{\vec{k'}}^{\frac{1}{2}} a_{\vec{k'}} e^{-i\omega_{\vec{k'}}t+i\vec{k'}\cdot\vec{r}} g_{\vec{k}} \frac{e^{-i\vec{k'}\cdot\vec{r}_0}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}} \mid 1_{\vec{k}}\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}}\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}^{\frac{1}{2}} g_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}}.\end{aligned}$$

将求和化为积分，并注意到

$$\vec{k} = k(\sin\theta\cos\phi\hat{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathrm{y}} + \cos\theta\hat{\mathrm{z}})$$

于是

$$\langle 0 \mid E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle = \frac{icp_{21}\sin\eta}{8\pi^2\epsilon_0\triangle r}\int_0^\infty dk\cdot k^2(e^{ik\triangle r} - e^{-ik\triangle r})\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}},$$

其中 $\Delta r = |\vec{r}-\vec{r}_0|$. 上式中 $e^{-i(k\Delta r-\omega_{\vec{k}}t)}$ 项表示入射波，因而可以忽略掉。在 Weisskopf-Wigner 自发辐射理论中，已经假定 $\omega_{\vec{k}}^2$ 的变化很小，即 $\omega_{\vec{k}} \approx \omega$ ，所以将 $\omega_{\vec{k}}^2$ 用 ω^2 代替，并将积分下限扩展到 $-\infty$ ，于是，我们只需求解积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{\vec{k}} \frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\omega_k\triangle r/c}}{(\omega_{\vec{k}}-\omega)+i\frac{\Gamma}{2}}.$$

由复变函数的留数定理来求解上述积分可得

$$\langle 0 \mid E^{(+)}(\vec{r},t) \mid \gamma_0\rangle = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta r}\theta\left(t-\frac{\Delta r}{c}\right)\exp\left[-i\left(t-\frac{\Delta r}{c}\right)\left(\omega - i\frac{\Gamma}{2}\right)\right], \tag{3.32}$$

其中

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{\omega^2 p_{21}\sin\eta}{4\pi\epsilon_0 c^2\Delta r},$$

θ 是 Heaviside 阶梯函数。于是

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r},t,t) = \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\theta\left(t-\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{c}\right)e^{-\Gamma\left(t-\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{c}\right)}, \tag{3.33}$$

从上式中可以发现，阶梯函数正是光信号的传播速度无法超过光速这一事实的又一佐证。

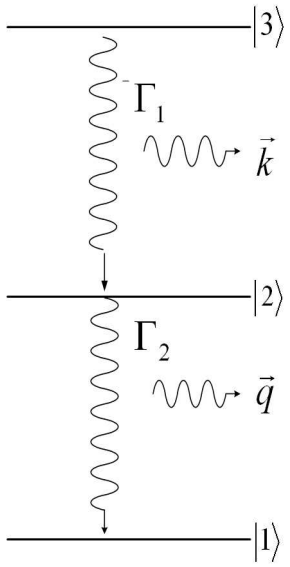


图 3.2: 双光子级联

§3.5 双光子级联

如图 (3.2)，级联型三能级原子的两对能级分别对应自发辐射衰减率 Γ_1 和 Γ_2. 相互作用图象下的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} V &= \hbar \sum_{\vec{k}} \left[g^*_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0)\sigma^{(1)}_+ a_{\vec{k}} e^{i(\omega_{32}-\omega_{\vec{k}})t} + \text{h.c.} \right] \\ &\quad + \hbar \sum_{\vec{q}} \left[g^*_{2,\vec{q}}(\vec{r}_0)\sigma^{(2)}_+ a_{\vec{q}} e^{i(\omega_{21}-\omega_{\vec{q}})t} + \text{h.c.} \right]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

其中 $\sigma^{(1)}_+ = |\,3\rangle\langle 2\,|$， $\sigma^{(2)}_+ = |\,2\rangle\langle 1\,|$。于是，等效的态函数展开为

$$|\,\psi(t)\rangle = c_3(t)\,|\,3,0\rangle + \sum_{\vec{k}} c_{2,\vec{k}}\,|\,2,1_{\vec{k}}\rangle + \sum_{\vec{k},\vec{q}} c_{2,\vec{k},\vec{q}}\,|\,2,1_{\vec{k}},1_{\vec{q}}\rangle. \tag{3.35}$$

由方程 (3.34)， (3.35) 及相互作用图象下的 Schrödinger 方程，可知

$$\dot{c}_3 = -i \sum_{\vec{k}} g^*_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0) c_{2,\vec{k}} e^{i(\omega_{32}-\omega_{\vec{k}})t}, \tag{3.36a}$$

$$\dot{c}_{2,\vec{k}} = -i g_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0) c_3 e^{-i(\omega_{32}-\omega_{\vec{k}})t} - i \sum_{\vec{q}} g^*_{2,\vec{q}}(\vec{r}_0) c_{1,\vec{k},\vec{q}} e^{i(\omega_{21}-\omega_{\vec{q}})t}, \tag{3.36b}$$

$$\dot{c}_{1,\vec{k},\vec{q}} = -i g_{2,\vec{q}}(\vec{r}_0) c_{2,\vec{k}} e^{-i(\omega_{21}-\omega_{\vec{q}})t} \tag{3.36c}$$

由前节结果，注意到在 Weisskopf-Wigner 近似下

$$\left.\begin{aligned} -i\sum_{\vec{k}} g^{*}_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0)c_{2,\vec{k}}e^{i(\omega_{32}-\omega_{\vec{k}})t} &= -\frac{\Gamma_1}{2}c_3, \\ -i\sum_{\vec{q}} g^{*}_{2,\vec{q}}(\vec{r}_0)c_{1,\vec{k},\vec{q}}e^{i(\omega_{21}-\omega_{\vec{q}})t} &= -\frac{\Gamma_2}{2}c_{2,\vec{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

于是可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_3 &= -\frac{\Gamma_1}{2}c_3, \\ \dot{c}_{2,\vec{k}} &= -ig_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0)e^{-i(\omega_{32}-\omega_{\vec{k}})t-\frac{\Gamma_1}{2}t} - \frac{\Gamma_2}{2}c_{2,\vec{k}}, \\ \dot{c}_{1,\vec{k},\vec{q}} &= -ig_{2,\vec{q}}(\vec{r}_0)c_{2,\vec{k}}e^{-i(\omega_{21}-\omega_{\vec{q}})t}. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

由上式，可以解得

$$c_{2,\vec{k}}(t) = -ig_{3,\vec{k}}(\vec{r}_0)\frac{e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{32})t-\frac{\Gamma_1}{2}t} - e^{-\frac{\Gamma_2}{2}t}}{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{32}) - \frac{1}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)}, \tag{3.39}$$

及

$$\begin{aligned} c_{1,\vec{k},\vec{q}}(t=\infty) &= g_{3,\vec{k}}g_{2,\vec{q}}e^{-i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{r}_0}\cdot\frac{1}{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{32}) - \frac{1}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)} \\ &\quad\times\left[\frac{1}{i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{q}}-\omega_{31})-\frac{1}{2}\Gamma_1} - \frac{1}{i(\omega_{\vec{q}}-\omega_{21})-\frac{1}{2}\Gamma_2}\right] \\ &= \frac{-g_{3,\vec{k}}g_{2,\vec{q}}e^{-i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{r}_0}}{[i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{q}}-\omega_{31})-\frac{1}{2}\Gamma_1][i(\omega_{\vec{q}}-\omega_{21})-\frac{1}{2}\Gamma_2]}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

当 $t \gg \Gamma_1^{-1}, \Gamma_2^{-1}$ 时，$c_3 \to 0, c_{2,\vec{k}} \to 0$, 于是双光子态变为

$$|\,\gamma,\phi\rangle = \sum_{\vec{k},\vec{q}} \frac{-g_{3,\vec{k}}g_{2,\vec{q}}e^{-i(\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{r}_0}}{[i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{q}}-\omega_{31})-\frac{1}{2}\Gamma_1][i(\omega_{\vec{q}}-\omega_{21})-\frac{1}{2}\Gamma_2]}\,|\,1_{\vec{k}},1_{\vec{q}}\rangle. \tag{3.41}$$

第四章　光 - 原子相互作用的半经典理论

当两能级原子的能级间隔与驱动光场的频率达到共振或接近共振时，可以用二能级原子与光场相互作用的模型来加以研究。在处理上，由于二能级原子与自旋为 1/2 的系统有相似性，同时，在电偶极近似下，即光场的波长远大于原子的尺度，原子与光相互作用的问题与自旋为 1/2 的粒子与含时磁场相互作用的处理在数学上完全等价。这时，正如磁场中的自旋为 1/2 的粒子会发生振荡一样，原子能级的反转粒子数也会出现类似的被称为光学 Rabi 振荡的情形。

本章将详细讨论光与原子相互作用的半经典处理。

§4.1　原子 - 光场的相互作用 Hamiltonian

带电粒子在电磁场中运动时的系统 Hamiltonian 为（由最小耦合原理）

$$H = \frac{1}{2m}[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r},t)]^2 + eU(\vec{r},t) + V(\vec{r}), \tag{4.1}$$

其中 $\vec{p}$ 为正则动量算符，$\vec{A}(\vec{r},t)$，$U(\vec{r},t)$ 分别表示外场的矢势和标势，$V(\vec{r})$ 为原子的束缚势。因为 $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$，并要求 Schrödinger 方程的解 $\psi(\vec{r},t)$ 满足规范不变性，即 $\psi \to \psi'(\vec{x},t) = \psi(\vec{r},t)\exp[i\chi(\vec{x},t)]$ 时，Schrödinger 方程仍旧保持不变，此时，即要求

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + eU(\vec{r},t)\right\}\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \tag{4.2}$$

保持不变，且有

$$\left.\begin{aligned} &\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t), \\ &U(\vec{r},t) \to U(\vec{r},t) - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t), \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

其中，$\vec{A}(\vec{r},t)$，$U(\vec{r},t)$ 分别为外场的矢势和标势，即有

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{4.4}$$

在偶极近似下，有 $\vec{k}\cdot\vec{r} \ll 1$(设原子在 $\vec{r}_0$ 点)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}_0 + \vec{r}, t) &= \vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_0+\vec{r})} \\ &= \vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}(1 + \vec{k}\cdot\vec{r}_0 + \cdots) \\ &\approx \vec{A}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} = \vec{A}(t)(\vec{r}_0, t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

所以有

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_0,t)\right]^2+V(\vec{r})\right\}\psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \tag{4.6}$$

此时已加入了原子内部的束缚势 $V(\vec{r})$, 且使用了辐射 (Coulomb) 规范的条件：

$$U(\vec{r},t)=0,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)=0. \tag{4.7}$$

令

$$\psi(\vec{r},t)=\exp\left[\frac{ie}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_0,t)\cdot\vec{r}\right]\phi(\vec{r},t) \tag{4.8}$$

代入 (3.6) 中可得

$$i\hbar\dot{\phi}(\vec{r},t)=[H_0-e\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0,t)]\phi(\vec{r},t), \tag{4.9}$$

其中

$$H_0=\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(\vec{r}),$$

并用到了 $\vec{E}=-\dot{\vec{A}}$ 。于是，此时系统的 Hamiltonian 可以写成

$$H=H_0+H_1, \tag{4.10}$$

其中

$$H_1=-e\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0,t), \tag{4.11}$$

注意到这个 Hamiltonian 是在辐射规范下，对波函数作了规范变换，即令 $\chi(\vec{r},t)=-\frac{e}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_0,t)\cdot\vec{r}$ 。同时，该 Hamiltonian 是一个与规范无关的量 (因为 $\vec{E}$ 与规范的选择无关) 。下面讨论另一种得到 Hamiltonian 的方法。由 (4.1) 可得

$$H'=H_0+H_2, \tag{4.12}$$

其中

$$H_2=-\frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0,t)+\frac{e^2}{2m}\vec{A}^2(\vec{r}_0,t), \tag{4.13}$$

得到 (4.13) 式时已经用到了 $[\vec{p},\vec{A}]=0$, 这与 Coulomb (辐射) 规范的要求 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ 是一致的。一般地， $\vec{A}^2$ 项很小，可以被忽略，于是 Schrödinger 方程变为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=[H_0-\frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0,t)]\psi(\vec{r},t), \tag{4.14}$$

即

$$\left.\begin{aligned}H'&=H_0-\frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0,t)\\H_2&=-\frac{e}{m}\vec{p}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0,t)\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

由 (3.11) 和 (3.15) 式给出了的相互作用 Hamiltonian 看起来是完全不同的，且在原子的自由 Hamiltonian 所对应的基 $\mid i\rangle$ 下得到的矩阵元是不同的。举例说明，令 $\vec{r}_0 = 0$，于是

$$\vec{E}(0,t) = \vec{\mathcal{E}}\cos\omega_0 t, \qquad \vec{A}(0,t) = -\frac{\vec{\mathcal{E}}}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

于是 H_1 和 H_2 分别为

$$H_1 = -e\vec{r}\cdot\vec{\mathcal{E}}\cos\omega_0 t,$$

$$H_2 = \frac{e}{m\omega_0}\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}\sin\omega_0 t,$$

由 $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = \dfrac{m}{i\hbar}[\vec{r}, H_0]$，以及 $H_0 \mid i\rangle = \hbar\omega_i \mid i\rangle$ 可得

$$\left|\frac{\langle f \mid H_2 \mid i\rangle}{\langle f \mid H_1 \mid i\rangle}\right| = \frac{\omega}{\omega_0}, \qquad (\omega = \omega_f - \omega_i) \tag{4.16}$$

因此对非完全共振情形 (即 $\omega \neq \omega_0$)，两种不同的 Hamiltonian 是不同的，有微小的差别。

§4.2 单个二能级原子与单模光场的相互作用

1. 几率幅方法

$$\left.\begin{aligned} &\mid \psi(t)\rangle = c_2(t) \mid 2\rangle + c_1(t) \mid 1\rangle, \\ &i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle = H \mid \psi(t)\rangle, \\ &H = H_0 + H_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.17a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \sum_{i=1}^{2}\hbar\omega_i\sigma_{ii}, \\ H_1 &= -e\vec{r}\cdot\vec{E}. \end{aligned}\right\} \tag{4.17b}$$

并令

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{e}_x\mathcal{E}\cos\omega_0 t,$$

可得

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_2 &= i\frac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi}c_1 e^{i(\omega-\omega_0)t}, \\ \dot{c}_1 &= i\frac{\Omega_R}{2}e^{i\phi}c_2 e^{-i(\omega-\omega_0)t}. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

其中

$$\Omega_R = \frac{|\vec{p}_{21}|\mathcal{E}}{\hbar}, \qquad \vec{p}_{21} = |\vec{p}_{21}|e^{i\phi},$$
$$c_2^{(t)} = c_2^{(0)}e^{i\omega_2 t}, \qquad c_1^{(t)} = c_1^0 e^{i\omega_1 t},$$
$$\vec{p}_{21} = e\vec{r}_{21} = \vec{p}_{12}^{*},$$
$$\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

在得到 (4.18) 式时，已经略去了 $\exp[\pm i(\omega+\omega_0)t]$ 项，即略去了非旋转波近似项 (可以证明，这与全量子理论给出的旋转波近似是一致的) 。于是求解 (3.18) 可得

$$\left.\begin{aligned} c_2(t) &= (a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2})e^{i\Delta t/2}, \\ c_1(t) &= (b_1 e^{i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2})e^{-i\Delta t/2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

其中 $\Delta = \omega - \omega_0$ ， $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega-\omega_0)^2}$ ， Ω_R 称为 Rabi 振荡频率，及

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2\Omega}[(\Omega-\Delta)c_2(0) + \Omega_R e^{-i\phi}c_1(0)], \\ a_2 &= \tfrac{1}{2\Omega}[(\Omega+\Delta)c_2(0) - \Omega_R e^{-i\phi}c_1(0)], \\ b_1 &= \tfrac{1}{2\Omega}[(\Omega+\Delta)c_1(0) + \Omega_R e^{-i\phi}c_2(0)], \\ b_1 &= \tfrac{1}{2\Omega}[(\Omega-\Delta)c_1(0) + \Omega_R e^{-i\phi}c_2(0)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

于是可以解得

$$c_2(t) = e^{i\Delta t/2}\left\{c_2(0)\left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right] + i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}c_1(0)\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right\},$$
$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2}\left\{c_1(0)\left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right] + i\frac{\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}c_2(0)\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right\}.$$

容易验证

$$\left.\begin{aligned} &|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1, \\ &W(t) = |c_2(t)|^2 - |c_1(t)|^2 = \left(\frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega^2}\right)\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

以及极化强度

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= e\langle\psi(t)\,|\,\vec{r}\,|\,\psi(t)\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\left\{\frac{i\Omega_R}{\Omega}\vec{p}_{21}\left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)e^{i\phi}e^{i\omega_0 t}\right\}. \end{aligned}$$

当共振时，即 $\Delta = 0$ ，有

$$W(t) = W(0)\cos(\Omega_R t),$$

从 (3.21) 式即可看出 Rabi 频率的物理意义。

2. 相互作用图象

由

$$\left.\begin{aligned} & i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle_I = V(t) \mid \psi(t)\rangle_I, \\ & V(t) = U_0^{\dagger} H_1 U_0(t), \\ & H_1 = -e\vec{r}\cdot\vec{E}, \\ & U_0 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0 t\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

可得

$$\mid \psi(t)\rangle_I = U_I \mid \psi(0)\rangle_I \tag{4.23a}$$

其中

$$U_I(t) = \hat{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} V(\tau)d\tau\right] \tag{4.23b}$$

$\hat{T}$ 是时间序算子，并有

$$\hat{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(\tau)d\tau\right) = 1-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 V(t_1)+\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)+\cdots \tag{4.23c}$$

因为 $H_0 = \hbar\omega_1 \mid 1\rangle\langle 1 \mid +\hbar\omega_1 \mid 2\rangle\langle 2 \mid$ (可以推得 $H_0^n = (\hbar\omega_1)^n \mid 1\rangle\langle 1 \mid +(\hbar\omega_2)^n \mid 2\rangle\langle 2 \mid$) ，故有

$$U_0(t) = \exp\left(-i\frac{H_0}{\hbar}t\right) = e^{-i\omega_1 t} \mid 1\rangle\langle 1 \mid +e^{-i\omega_2 t} \mid 2\rangle\langle 2 \mid,$$

于是

$$\begin{aligned} V(t) &= -\hbar\Omega_R U_0^{\dagger}(e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid +e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid)U_0(t)\cos\omega_0 t \\ &= -\frac{\hbar\Omega_R}{2}[e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid e^{i\Delta t} + e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid e^{-i\Delta t} \\ &+ e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid e^{-i(\omega-\omega_0)t}], \end{aligned} \tag{4.24}$$

略去 $\exp[\pm i(\omega+\omega_0)t]$ 项 (非旋转波近似项) 可得

$$V(t) = -\frac{\hbar\Omega_R}{2}(e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid +e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid), \tag{4.25}$$

其中已经假定是共振，即 $\Delta = 0$ 的情况。注意到 (练习)

$$V^{2n}(t) = \left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right)^{2n} (\mid 1\rangle\langle 1 \mid + \mid 2\rangle\langle 1 \mid)^n = \left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right)^{2n},$$

$$V^{2n+1}(t) = -\left(\frac{\hbar\Omega_R}{2}\right)^{2n+1} (e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid + e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid),$$

可得

$$\begin{aligned} U_I(t) &= \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) (\mid 1\rangle\langle 1 \mid + \mid 2\rangle\langle 2 \mid) \\ &\quad + i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) (e^{-i\phi} \mid 2\rangle\langle 1 \mid + e^{i\phi} \mid 1\rangle\langle 2 \mid). \end{aligned} \tag{4.26}$$

设原子初始时处于激发态，即 $\mid \psi(0)\rangle = \mid 2\rangle$ ，可得

$$\mid \psi(t)\rangle = U_I(t) \mid 2\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \mid 2\rangle + i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) e^{i\phi} \mid 1\rangle.$$

因此

$$c_1(t) = \langle 1 \mid \psi(t)\rangle = i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) e^{i\phi},$$

$$c_2(t) = \langle 2 \mid \psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right).$$

3. 两能级原子的密度矩阵

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho]$$

若有驰豫项，用一个驰豫算符 Γ 来表示，且有 $\langle n \mid \Gamma \mid m\rangle = \gamma_n\delta_{nm}$ 则密度算符方程变为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{2}\{\Gamma, \rho\} \tag{4.27}$$

其中 $\{\Gamma, \rho\} = \Gamma\rho + \rho\Gamma$ 。于是 (3.27) 可以变为矩阵方程，即

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{1}{i\hbar}\sum_k (H_{ik}\rho_{kj} - \rho_{ik}H_{kj}) - \frac{1}{2}\sum_k (\Gamma_{ik}\rho_{kj} + \rho_{ik}\Gamma_{kj}). \tag{4.28}$$

对两能级原子而言，有

$$\begin{aligned} \rho &= \mid \psi\rangle\langle\psi \mid \\ &= \rho_{22} \mid 2\rangle\langle 2 \mid + \rho_{11} \mid 1\rangle\langle 1 \mid + \rho_{21} \mid 2\rangle\langle 1 \mid + \rho_{12} \mid 1\rangle\langle 2 \mid . \end{aligned} \tag{4.29a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\rho_{22} &= \langle 2 \mid \rho \mid 2\rangle = |c_2(t)|^2 \\ \rho_{21} &= \langle 2 \mid \rho \mid 1\rangle = c_2(t)c_1^*(t) \\ \rho_{12} &= \rho_{21}^* \\ \rho_{11} &= \langle 1 \mid \rho \mid 1\rangle = |c_1(t)|^2\end{aligned}\right\} \tag{4.29b}$$

且有极化强度

$$\vec{P}(z,t) = c_2(t)c_1^*(t)\vec{P}_{12} + \text{h.c.} = \rho_{21}(z,t)\vec{P}_{12} + \text{h.c.} \tag{4.29c}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_{22} &= -\gamma_2\rho_{22} + \frac{i}{\hbar}[\vec{p}_{21}\cdot\vec{E}\rho_{12} - \text{h.c.}], \\ \dot{\rho}_{11} &= -\gamma_1\rho_{11} - \frac{i}{\hbar}[\vec{p}_{21}\cdot\vec{E}\rho_{12} - \text{h.c.}], \\ \dot{\rho}_{21} &= -(i\omega + \gamma_{21})\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\vec{p}_{21}\cdot\vec{E}(\rho_{22} - \rho_{11}).\end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

其中

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$$
$$\gamma_2 = \langle a \mid \Gamma \mid 2\rangle, \qquad \gamma_1 = \langle 1 \mid \Gamma \mid 1\rangle.$$

当考虑了大量原子间的弹性碰撞后， $\dot{\rho}_{21}$ 项会有变化

$$\dot{\rho}_{21} = -\left[i\omega + i\delta\omega(t) + \gamma_{21}\right]\rho_{21}$$

于是

$$\rho_{21}(t) = \exp\left[-(i\omega + \gamma_{21})t - i\int_0^t dt'\delta\omega(t')\right]\rho_{21}(0). \tag{4.31}$$

下面计算 $\langle\exp[-i\int_0^t dt'\delta\omega(t')]\rangle$ 。通常 $\delta\omega$ 取正取负的概率相同，因而 $\langle\delta\omega(t)\rangle = 0$ ，同时， $\delta\omega(t)$ 的变化比 γ_{ab}^{-1} 快，因此可以假设

$$\langle\delta\omega(t)\delta\omega(t')\rangle = 2\gamma_{ph}\delta(t-t') \tag{4.32}$$

其中 γ_{ph} 是一个常数。假设 $\delta\omega(t)$ 可以用 Gauss 随机过程描述，于是由 Gauss 过程的矩定理 (Moment theorem) 可知（练习）

$$\left\langle\exp\left[-i\int_0^t dt'\delta\omega(t')\right]\right\rangle = \exp(-\gamma_{ph}t), \tag{4.33}$$

于是

$$\rho_{21}(t) = \exp[-(i\omega + \gamma_{21} + \gamma_{ph})t]\rho_{21}(0)$$

这样， (3.30) 变为

$$\dot{\rho}_{21} = -(i\omega + \gamma)\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\vec{p}_{21} \cdot \vec{E}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{4.34}$$

其中

$$\gamma = \gamma_{21} + \gamma_{ph}$$

是一个新的包括能级衰减和随机过程在内的衰减系数。

§4.3 Maxwell-Schrödinger 方程

考虑光场与二能级均匀加宽原子组成的介质的相互作用，其中单独的原子用密度算符表示

$$\rho(z,t,t_0) = \sum_{\alpha,\beta} \rho_{\alpha\beta}(z,t,t_0) \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid \tag{4.35}$$

其中 $\alpha, \beta = 1, 2$ ， $\rho_{\alpha\beta}(z,t,t_0)$ 是一个单个原子在时刻 t ，位置 z ，并于 t_0 时刻与光场发生相互作用的密度矩阵元。令 $\rho_{\alpha\beta}(z,t_0,t_0) = \rho^{(0)}_{\alpha\beta}$ 则

$$\rho(z,t_0,t_0) = \sum_{\alpha,\beta} \rho^{(0)}_{\alpha\beta} \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid .$$

所有原子的效应可以由单个原子求和得到，即

$$\rho(z,t) = \int_{-\infty}^{t} dt_0 r_a(z,t_0)\rho(z,t,t_0) \tag{4.36}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{t} dt_0 r_a(z,t_0)\rho_{\alpha,\beta}(z,t,t_0) \mid \alpha\rangle\langle\beta \mid . \tag{4.37}$$

其中 $r_a(z,t_0)$ 是原子泵浦率。极化强度为

$$\vec{P}(z,t) = \int_{-\infty}^{t} dt_0 r_a(z,t_0)\mathrm{Tr}[\hat{\vec{p}}\rho(z,t,t_0)] \tag{4.38}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{t} dt_0 r_a(z,t_0)\rho_{\alpha\beta}(z,t,t_0)\vec{p}_{\beta\alpha}. \tag{4.39}$$

对两能级原子，令 $\vec{p}_{21} = \vec{p}_{12} = \vec{p}$ ，则有

$$\vec{P}(z,t) = \vec{p}[\rho_{21}(z,t) + \rho_{ba}(z,t)]. \tag{4.40}$$

于是可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_{22} &= \lambda_2 - \gamma_2\rho_{22} + \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{E}\rho_{12} - \text{h.c.}),\\ \dot{\rho}_{11} &= \lambda_1 - \gamma_1\rho_{11} - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{E}\rho_{12} - \text{h.c.}),\\ \dot{\rho}_{21} &= -(i\omega+\gamma)\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{E}(\rho_{22}-\rho_{11}),\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

其中

$$\lambda_2 = r_2\rho_{22}^{(0)}, \qquad \lambda_1 = r_1\rho_{11}^{(0)}.$$

下面考虑光场演化，由 Maxwell 方程

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

及物构方程

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \tag{4.43}$$

可得

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}, \tag{4.44}$$

假设光场是线偏振且与 x, y 无关，即

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E(z,t)\hat{e}_x, \tag{4.45}$$

则有

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

令

$$\left.\begin{aligned}E(z,t) &= \tfrac{1}{2}\mathcal{E}(z,t)e^{-i[\omega_0 t - k_0 z + \phi(z,t)]} + \text{c.c.}\\ P(z,t) &= \tfrac{1}{2}\mathcal{P}(z,t)e^{-i[\omega_0 t - k_0 z + \phi(z,t)]} + \text{c.c.}\\ \mathcal{P}(z,t) &= 2p\rho_{21}e^{i[\omega_0 t - k_0 z + \phi(z,t)]}.\end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

在慢变近似下，即

$$\dot{\mathcal{E}} \ll \omega_0\mathcal{E}, \qquad \partial_z\mathcal{E} \ll k_0\mathcal{E}, \qquad \dot{\phi} \ll \omega_0.$$

$$\partial_z\phi \ll k_0, \qquad \dot{\mathcal{P}} \ll \omega_0\mathcal{P}, \qquad \partial_z\mathcal{P} \ll k_0\mathcal{P}.$$

可以推出

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E=-\mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.$$

及

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E\approx -2ik_0E$$

于是可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}&=-\kappa\mathcal{E}-\frac{1}{2\epsilon_0}k_0\mathrm{Im}\mathcal{P},\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}&=k_0-\frac{\omega_0}{c}\frac{-}{2\epsilon_0}k_0\mathcal{E}^{-1}\mathrm{Re}\mathcal{P}.\end{aligned}\right\}\tag{4.47}$$

其中 $\kappa=\sigma/2\epsilon_0c$ 是线形耗散系数。

方程 (3.39) 及 (3.45) 构成一组自洽方程，被称为 Maxwell-Schrödinger 方程。它是研究激光理论等的基础。

第五章　算符运算

1. 求证：若 $[A,B]\neq 0$，有

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}=B-\alpha[A,B]+\frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]]+\cdots$$

证明：令 $f(\alpha)=e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}$，故有

$$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\alpha^n,$$

其中

$$f^{(n)}(0)=\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial\alpha^n}|_{\alpha=0}$$

$$f^{(0)}(\alpha)=e^{-\alpha A}Be^{\alpha A},\qquad f^{(0)}(0)=B$$

$$\begin{aligned}f^{(1)}(\alpha) &= e^{-\alpha A}(-AB)e^{\alpha A}+e^{-\alpha A}(BA)e^{\alpha A}\\ &= -e^{-\alpha A}[A,B]e^{\alpha A},\end{aligned}$$

$$f^{(1)}(0)=-[A,B].$$

$$\begin{aligned}f^{(2)}(\alpha) &= e^{-\alpha A}(A[A,B])e^{\alpha A}+e^{-\alpha A}(-[A,B]A)e^{\alpha A}\\ &= e^{-\alpha A}[A,[A,B]]e^{\alpha A},\end{aligned}$$

故

$$f^{(2)}(0)=[A,[A,B]].$$

假定 $f^{(k)}(\alpha)=(-1)^k e^{-\alpha A}[A,\cdots[A,B]\cdots]e^{\alpha A}$，其中包括 k 个对易子，则有

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(\alpha) &= e^{-\alpha A}\{(-1)^{k+1}A[A,\cdots[A,B]\cdots]\}e^{\alpha A}+e^{-\alpha A}\{(-1)^k[A,\cdots[A,B]\cdots]A\}e^{\alpha A}\\ &= e^{-\alpha A}(-1)^{k+1}[A,\cdots[A,B]\cdots]e^{\alpha A},\end{aligned}\tag{5.1}$$

即有

$$f^{(k+1)}=(-1)^{k+1}(0)(-1)^{k+1}[A,\cdots[A,B]\cdots],\tag{5.2}$$

其中 (5.1) 式和 (5.2) 式均包括 $k+1$ 个对易子，因而

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}=B-\alpha[A,B]+\frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]]-\frac{\alpha^3}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots\tag{5.3}$$

2. 求证：若 $[A,B]\neq 0$，但 $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$，则有

$$e^{A+B}=e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^{A}e^{B}=e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{B}e^{A}. \tag{5.4}$$

证明：令 $f(\alpha)=e^{\alpha A}e^{\alpha B}$ 则有

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha}=e^{\alpha A}Ae^{\alpha B}+e^{\alpha A}e^{\alpha B}B.$$

因为 $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$，故有

$$e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}=B-\alpha[A,B],$$

从而

$$Be^{\alpha A}=e^{\alpha A}\{B-\alpha[A,B]\}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{df(\alpha)}{d\alpha} &= e^{\alpha A}e^{\alpha B}\{A-\alpha[B,A]\}+e^{\alpha A}e^{\alpha B}B &(5.5)\\ &= e^{\alpha A}e^{\alpha B}\{A+B+\alpha[A,B]\} &(5.6)\\ &= f(\alpha)\{A+B+\alpha[A,B]\}, &(5.7)\end{aligned}$$

即

$$\frac{df(\alpha)}{f(\alpha)}=\{A+B+\alpha[A,B]\}d\alpha \tag{5.8}$$

所以

$$f(\alpha)=f(0)e^{(A+B)\alpha+\frac{\alpha^2}{2}[A,B]}. \tag{5.9}$$

因为 $f(0)=1$，故 $f(\alpha)=e^{\alpha(A+B)+\frac{\alpha^2}{2}[A,B]}$，所以

$$f(1)=e^{A}e^{B}=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]},$$

因此

$$e^{A+B}=e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^{A}e^{B}=e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{B}e^{A}. \tag{5.10}$$

3. 求证：$[a,e^{-\alpha a^{\dagger}a}]=(e^{-\alpha}-1)e^{-\alpha a^{\dagger}a}a$。

证明：首先计算 $ae^{-\alpha a^{\dagger}a}$。

令

$$e^{\alpha a^{\dagger}a}ae^{-\alpha a^{\dagger}a}\triangleq e^{-\alpha A}Be^{\alpha A}$$

其中

$$A = -a^\dagger a, \qquad B = a$$

则有

$$[A, B] = [-a^\dagger a, a] = a$$

$$[A, [A, B]] = [-a^\dagger a, a] = a$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[A \cdots [A, B] \cdots] = a$$

故

$$e^{\alpha a^\dagger a} a e^{-\alpha a^\dagger a} = a - \alpha a + \frac{1}{2!}\alpha^2 a + \cdots = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n!} = ae^{-\alpha}, \tag{5.11}$$

因此，

$$ae^{-\alpha a^\dagger a} = e^{-\alpha a^\dagger a} a e^{-\alpha}.$$

所以，

$$\begin{aligned}[a, e^{-\alpha a^\dagger a}] &= ae^{-\alpha a^\dagger a} - e^{-\alpha a^\dagger a} a \\ &= e^{-\alpha a^\dagger a} a(e^{-\alpha} - 1) \\ &= (e^{-\alpha} - 1) e^{-\alpha a^\dagger a} a. \end{aligned} \tag{5.12}$$

同理可证得

$$[a^\dagger, e^{-\alpha a^\dagger a}] = (e^{\alpha} - 1) e^{-\alpha a^\dagger a} a^\dagger. \tag{5.13}$$

4. 求证

(1) $[a, f(a, a^\dagger)] = \dfrac{\partial f}{\partial a^\dagger}$;

(2) $[a^\dagger, f(a, a^\dagger)] = -\dfrac{\partial f}{\partial a}$;

(3) $e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a} = f(ae^{\alpha}, a^\dagger e^{-\alpha})$.

证明：令 $f(a, a^\dagger) = \sum\limits_{n,m} c_{n,m} (a^\dagger)^n a^m$ ，则有

(1)

$$[a, f(a, a^\dagger)] = \sum_{n,m} c_{nm} [a, (a^\dagger)^n] a^m,$$

其中

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}.$$

故有

$$[a, f(a, a^\dagger)] = \sum_{n,m} n c_{nm} (a^\dagger)^{n-1} a^m = \frac{\partial f}{\partial a^\dagger}. \tag{5.14}$$

(2)

$$\begin{aligned} [a^\dagger, f(a, a^\dagger)] &= \sum_{n,m} c_{nm} (a^\dagger)^n [a^\dagger, a^m] \\ &= -\sum_{n,m} c_{nm} (a^\dagger)^n m a^{m-1} = -\frac{\partial f}{\partial a}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

(3) 下面考察 $e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a}$, 由 $f(a, a^\dagger)$ 的展开式可知

$$e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a} = \sum_{n,m} c_{nm} e^{-\alpha a^\dagger a} (a^\dagger)^n a^m e^{\alpha a^\dagger a}.$$

由公式

$$e^{-\alpha A} B e^{\alpha A} = B - \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \cdots$$

可知

$$\begin{aligned} e^{-\alpha a^\dagger a} (a^\dagger)^n e^{\alpha a^\dagger a} &= (a^\dagger)^n - n\alpha (a^\dagger)^n + \frac{\alpha^2}{2!} n^2 (a^\dagger)^2 + \cdots \\ &= (a^\dagger)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n\alpha)^m}{m!} \\ &= (a^\dagger)^n e^{-n\alpha}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

同理

$$\begin{aligned} e^{-\alpha a^\dagger a} a^m e^{\alpha a^\dagger a} &= a^m \left\{ 1 + m\alpha + \frac{m^2 \alpha^2}{2!} + \cdots \right\} \\ &= a^m e^{m\alpha}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

因而

$$e^{-\alpha a^\dagger a} (a^\dagger)^n = (a^\dagger)^n e^{-\alpha a^\dagger a} e^{-n\alpha},$$

$$a^m e^{\alpha a^\dagger a} = e^{\alpha a^\dagger a} a^m e^{m\alpha}.$$

所以

$$\begin{aligned} e^{-\alpha a^\dagger a} (a^\dagger)^n a^m e^{\alpha a^\dagger a} &= (a^\dagger)^n a^m e^{-(n-m)\alpha} \\ &= (a^\dagger e^{-\alpha})^n (a e^{\alpha})^m, \end{aligned} \tag{5.18}$$

故有

$$\begin{aligned} e^{-\alpha a^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{\alpha a^\dagger a} &= \sum_{n,m} c_{nm} (a^\dagger e^{-\alpha})^n (a e^{\alpha})^m \\ &= f(a e^{\alpha}, a^\dagger e^{-\alpha}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

5. 自由电磁场的 Hamiltonian 量可以写成

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

求证：

(a) $H = H \sum_{n=0}^{\infty} E_n \mid n\rangle\langle n \mid$,

(b) $e^{iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{iE_n t/\hbar} \mid n\rangle\langle n \mid$

证明：由 $H \mid n\rangle = E_n \mid n\rangle$, 及 $\sum_{n=0}^{\infty} \mid n\rangle\langle n \mid$ ， 可知

(a)

$$H = H \sum_{n=0}^{\infty} \mid n\rangle\langle n \mid = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \mid n\rangle\langle n \mid .$$

(b)

$$H^n = \left(\sum_{m=0}^{\infty} E_m \mid m\rangle\langle m \mid \right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} E_m^n \mid m\rangle\langle m \mid,$$

故有

$$\begin{aligned} e^{iHt/\hbar} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n H^n \\ &= \sum_{n,m} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n E_m^n \mid m\rangle\langle m \mid \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mid m\rangle\langle m \mid \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iE_m t}{\hbar} \right)^n \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mid m\rangle\langle m \mid e^{\frac{iE_m t}{\hbar}} \\ &= \sum_{n}^{\infty} e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \mid n\rangle\langle n \mid \end{aligned} \tag{5.20}$$

6. 由方程

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t}=\nabla\times\tilde{\vec{H}},\qquad \nabla\cdot\tilde{\vec{E}}=0. \tag{5.21}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{H}}}{\partial t}=\nabla\times\tilde{\vec{E}},\qquad \nabla\cdot\tilde{\vec{H}}=0. \tag{5.22}$$

证明自由空间的 Maxwell 方程组可以写成如下形式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -c\vec{s}\cdot\vec{p}\\ c\vec{s}\cdot\vec{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

以及

$$\nabla\cdot\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ vec\chi_\gamma\end{pmatrix}=0. \tag{5.24}$$

此处 $\tilde{\vec{E}}=\sqrt{\epsilon_0}\vec{E}$ ， $\tilde{\vec{H}}=\sqrt{\mu_0}\vec{H}$ 。并证明

$$\vec{s}\cdot\nabla\vec{V}=\nabla\times\vec{V}, \tag{5.25}$$

其中

$$s_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad s_y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\qquad s_z=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

证明：由

$$\begin{aligned}\vec{s}\cdot\vec{\nabla} &= s_x\partial_x+s_y\partial_y+s_z\partial_z\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\partial_y+\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\partial_z\\ &= \begin{pmatrix}0&-\partial_z&\partial_y\\ \partial_z&0&-\partial_x\\ -\partial_y&\partial_x&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y V_x - \partial_z V_y \\ \partial_z V_y - \partial_x V_z \\ \partial_x V_z - \partial_y V_x \end{pmatrix} \\ &= \vec{e}_x(\partial_y V_z - \partial_z V_y) + \vec{e}_y(\partial_z V_x - \partial_x V_z) + \vec{e}_z(\partial_c V_y - \partial_y V_x). \end{aligned} \tag{5.27}$$

同时，由

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(\partial_y V_z - \partial_z V_y) + \vec{e}_y(\partial_z V_x - \partial_x V_z) + \vec{e}_z(\partial_c V_y - \partial_y V_x) \end{aligned} \tag{5.28}$$

可得

$$\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} \tag{5.29}$$

亦即，

$$\vec{s}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}\times . \tag{5.30}$$

于是，有

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}_\gamma}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{\chi}_\gamma = \vec{s}\cdot\vec{\nabla}\vec{\chi}_\gamma, \tag{5.31}$$

进而

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\varphi}_\gamma = -c\vec{s}\cdot\vec{p}\vec{\chi}_\gamma, \qquad (\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla})$$

类似地，由

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\chi}_\gamma}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_\gamma = \vec{s}\cdot\vec{\nabla}\vec{\varphi}_\gamma,$$

可得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\chi}_\gamma = c\vec{s}\cdot\vec{p}\vec{\varphi}_\gamma.$$

因而

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -c\vec{s}\cdot\vec{p}\\ c\vec{s}\cdot\vec{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

同时，由

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma=0,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma=0.$$

可得其矩阵形式为

$$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=0. \tag{5.33}$$

那么，如何得到下面的方程组呢？

$$\vec{\nabla}\times\vec{\chi}_\gamma=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}_\gamma}{\partial t},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_\gamma=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\chi}_\gamma}{\partial t}. \tag{5.34}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma=0,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma=0. \tag{5.35}$$

下面从 Maxwell 方程组得到上面的四个方程。注意到 Maxwell 方程组在作了变量替换，$\tilde{\vec{E}}=\sqrt{\epsilon_0}\vec{E}$ 和 $\tilde{\vec{H}}=\sqrt{\mu_0}\vec{H}$ 后变为

$$\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{H}}^{(\pm)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}^{(\pm)}}{\partial t},\qquad \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}}^{(\pm)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\vec{H}}^{(\pm)}}{\partial t}. \tag{5.36}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{H}}^{(\pm)}=0,\qquad \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{E}}^{(\pm)}=0. \tag{5.37}$$

因此，问题变为找到 $(\tilde{\vec{E}},\tilde{\vec{H}})$ 与 $(\vec{\varphi}_\gamma,\vec{\chi}_\gamma)$ 的关系。由

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}_{\mathcal{E}}(\vec{r},t) &= \langle 0\mid\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)\mid\psi_\gamma\rangle\\ &= \langle 0\mid\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}}a_{\vec{k},\lambda}e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mid\psi_\gamma\rangle\\ &\cong \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}}\langle 0\mid\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}a_{\vec{k},\lambda}e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mid\psi_\gamma\rangle\\ &\triangleq \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}}\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t),\end{aligned}$$

其中

$$\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}\langle 0\mid a_{\vec{k},\lambda}\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}\mid\psi_\gamma\rangle$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t) &= \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \tilde{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle.\end{aligned}$$

其中用到了 $\tilde{\vec{E}}^{(+)} = \sqrt{\epsilon_0}\vec{E}^{(+)}$ 。类似地，可得

$$\begin{aligned}\vec{\chi}_\gamma(\vec{r},t) &= \sqrt{\frac{2\mu_0}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{H}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \tilde{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle.\end{aligned}$$

于是，有

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_\gamma &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t}\langle 0 \mid \tilde{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\chi}_\gamma(\vec{r},t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{\chi}_\gamma &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\langle 0 \mid \tilde{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\varphi}_\gamma(\vec{r},t),\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle = 0, \tag{5.38}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\langle 0 \mid \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{H}}^{(+)}(\vec{r},t) \mid \psi_\gamma\rangle = 0. \tag{5.39}$$

于是可得

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\times\vec{\chi}_\gamma = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\varphi}_\gamma}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_\gamma = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\chi}_\gamma}{\partial t}, \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{\chi}_\gamma = 0, \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_\gamma = 0.\end{aligned}$$

亦即

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -c\vec{s}\cdot\vec{p}\\ c\vec{s}\cdot\vec{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}, \tag{5.40}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=0. \tag{5.41}$$

7. 已知， $\vec{\varphi}_\gamma$ 和 $\vec{\chi}_\gamma$ 有如下关系：

$$\dot{\vec{\varphi}}_\gamma=c\vec{s}\cdot\nabla\vec{\chi}_\gamma,\qquad \dot{\vec{\chi}}_\gamma=-c\vec{s}\cdot\nabla\vec{\varphi}_\gamma,\qquad \dot{\vec{\varphi}}_\gamma^\dagger=c\nabla\vec{\chi}_\gamma^{\,\dagger}\cdot\vec{s}^\dagger,\qquad \dot{\vec{\chi}}_\gamma^\dagger=-c\nabla\vec{\varphi}_\gamma^{\,\dagger}\cdot\vec{s}^\dagger.$$

试推导密度流方程，并证明有 $\vec{s}^\dagger=-\vec{s}$.

证明：首先，由

$$s_x^\dagger=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=-s_x,\qquad s_y^\dagger=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=-s_y,$$

$$s_z^\dagger=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=-s_z, \tag{5.42}$$

可知

$$\vec{s}^\dagger=-\vec{s}. \tag{5.43}$$

下面分别求出 $\Psi_\gamma^\dagger\Psi_\gamma$ 及 $\Psi_\gamma^\dagger\vec{v}\Psi_\gamma$ ，其中 $\vec{v}=c\begin{pmatrix}0&-\vec{s}\\ \vec{s}&0\end{pmatrix}$.

(a)

$$\Psi_\gamma^\dagger\Psi_\gamma=\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma^\dagger & \vec{\chi}_\gamma^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_\gamma\\ \vec{\chi}_\gamma\end{pmatrix}=\vec{\varphi}_\gamma^\dagger\cdot\vec{\varphi}_\gamma+\vec{\chi}_\gamma^\dagger\cdot\vec{\chi}_\gamma\triangleq\rho.$$

(b)

$$\begin{aligned}\Psi_\gamma^\dagger \vec{v} \Psi_\gamma &= \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma^\dagger & \vec{\chi}_\gamma^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c\vec{s} \\ c\vec{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \\ vecchi_\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\vec{\chi}_\gamma^\dagger \vec{s} & c\vec{\varphi}_\gamma^\dagger \vec{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_\gamma \\ \vec{\chi}_\gamma \end{pmatrix} \\ &= c(\vec{\chi}_\gamma^\dagger \vec{\varphi}_\gamma - \vec{\varphi}_\gamma^\dagger \vec{\chi}_\gamma)\vec{s} \triangleq \vec{j}.\end{aligned}$$

(c) 先求出 $\partial\rho/\partial t$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{\varphi}_\gamma^\dagger \varphi_\gamma + \varphi_\gamma^\dagger \dot{\varphi}_\gamma + \dot{\chi}_\gamma^\dagger \chi_\gamma + \chi_\gamma^\dagger \dot{\chi}_\gamma$$

由于

$$\dot{\varphi}_\gamma = c\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \chi_\gamma, \qquad \dot{\chi}_\gamma = -c\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \varphi_\gamma.$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_\gamma^\dagger &= c\vec{\nabla}\chi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}^\dagger = -c\vec{\nabla}\chi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}, \\ \dot{\chi}_\gamma^\dagger &= c\vec{\nabla}\varphi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}^\dagger = -c\vec{\nabla}\varphi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -c\vec{\nabla}\chi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}\varphi_\gamma + c\varphi_\gamma^\dagger \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\chi_\gamma + c\vec{\nabla}\varphi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}\chi_\gamma - c\chi_\gamma^\dagger \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\varphi_\gamma \\ &= c\{-\vec{\nabla}\chi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}\varphi_\gamma + \varphi_\gamma^\dagger \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\chi_\gamma + \vec{\nabla}\varphi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}\chi_\gamma - \chi_\gamma^\dagger \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\varphi_\gamma\}.\end{aligned}$$

(d) 再求出 $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = c\{\vec{\nabla}\chi^\dagger \cdot \vec{s}\varphi_\gamma + \chi_\gamma^\dagger \vec{s}\vec{\nabla}\varphi_\gamma - \varphi_\gamma^\dagger \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\chi_\gamma - \vec{\nabla}\varphi_\gamma^\dagger \cdot \vec{s}\chi_\gamma\}.$$

(e) 综合 (c),(d) 会发现

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{5.44}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_\gamma^\dagger \Psi_\gamma) + \vec{\nabla} \cdot (\Psi_\gamma^\dagger \vec{v} \Psi_\gamma) = 0, \tag{5.45}$$

其中

$$\vec{v} = c \begin{pmatrix} 0 & -\vec{s} \\ \vec{s} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 试通过 $\sum_i \hat{e}_i\hat{e}_i$ 与任意一矢量 $\vec{v}$ 的点积证明 $\sum_i \hat{e}_i\hat{e}_i = 1$，如果有 $\hat{e}_1 = \hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}}$,$\hat{e}_2 = \hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}}$, $\hat{e}_1 = \vec{k}/k$ 试推导下面的方程

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} = 1. \tag{5.46}$$

如果用球坐标参数 k, θ, ϕ 来表示波失 $\vec{k}$，即

$$\vec{k} = k(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

两个旋转极化矢量为

$$\hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}} \equiv (\sin\phi, -\cos\phi, 0),$$
$$\hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}} \equiv (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),$$

试求证

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}j} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}j} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \tag{5.47}$$

其中 i, j 笛卡儿 (Cartesian) 脚标。

证明：首先，由 $\vec{v}\cdot\hat{e}_i = v_i$ 及 $\vec{v} = \sum_i v_i\hat{e}_i$ 可知

$$\vec{v}\cdot\sum_i \hat{e}_i\hat{e}_i = \sum_i (\vec{v}\cdot\hat{e}_i)\vec{e}_i = \sum_i v_i\hat{e}_i = \vec{v} \tag{5.48}$$

故 $\sum_i \hat{e}_i\hat{e}_i = 1$ 是单位算子。下面

(a) 令 $\hat{e}_1 = \hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}}$，$\hat{e}_2 = \hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}}$，$\hat{e}_3 = \dfrac{\vec{k}}{k}$，则有

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i \hat{e}_i\hat{e}_i \\ &= \hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}}\hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}} + \hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}}\hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} \end{aligned}$$

即

$$\hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}}\hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}} + \hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}}\hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} = 1$$

(b) 在球坐标下，有

$\vec{k} \equiv k(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi + \cos\theta)$

$\hat{\epsilon}^{(1)}_{\vec{k}} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0)$

$\hat{\epsilon}^{(2)}_{\vec{k}} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$

于是可得

$$\begin{aligned}
&\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx} = \sin^2\phi, && \hat{\epsilon}^{(1)}_{ky}\hat{\epsilon}^{(1)}_{ky} = \cos^2\phi;\\
&\hat{\epsilon}^{(1)}_{kz}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kz} = 0, && \hat{\epsilon}^{(1)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(1)}_{ky} = -\sin\phi\cos\phi;\\
&\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kz} = 0, && \hat{\epsilon}^{(1)}_{ky}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kz} = 0;\\
&\hat{\epsilon}^{(2)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kx} = \cos^2\theta\cos^2\phi, && \hat{\epsilon}^{(2)}_{ky}\hat{\epsilon}^{(2)}_{ky} = \cos^2\theta\sin^2\phi;\\
&\hat{\epsilon}^{(2)}_{kz}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kz} = \sin^2\theta, && \hat{\epsilon}^{(2)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(2)}_{ky} = \cos^2\theta\cos\phi\sin\phi;\\
&\hat{\epsilon}^{(2)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kz} = -\cos\theta\sin\theta\cos\phi, && \hat{\epsilon}^{(2)}_{ky}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kz} = -\cos\theta\sin\theta\sin\phi;\\
&\frac{k_xk_x}{k^2} = \sin^2\theta\cos^2\phi, && \frac{k_yk_y}{k^2} = \sin^2\theta\sin^2\phi\\
&\frac{k_zk_z}{k^2} = \cos^2\theta, && \frac{k_xk_y}{k^2} = \sin^2\theta\cos\phi\cos\phi;\\
&\frac{k_xk_z}{k^2} = \sin\theta\cos\phi\cos\phi, && \frac{k_yk_z}{k^2} = \sin\theta\cos\phi\sin\phi.
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx} + \hat{\epsilon}^{(2)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kx} &= \sin^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi\\
&= \sin^2\phi + (1-\sin^2\theta)\cos^2\phi\\
&= 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi,\\
\delta_{xx} - \frac{k_xk_x}{k^2} &= 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi,
\end{aligned}$$

故

$$\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(1)}_{kx} + \hat{\epsilon}^{(2)}_{kx}\hat{\epsilon}^{(2)}_{kx} = 1 - \frac{k_xk_x}{k^2}.$$

同理可证其他情况，总之，有

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}j} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}j} = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}. \tag{5.49}$$

事实上，上述结论容易有抽象表述证明，由于

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} = 1$$

那么，在等式左右两边均双点乘 $\hat{e}_i\hat{e}_j$（ $\hat{e}_i, \hat{e}_j$ 分别是直角坐标下的两个基矢），则有

$$\begin{aligned}
\text{l.h.s.} &= \left(\epsilon^{(1)}_{\vec{k}}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}} + \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2}\right) : \hat{e}_i\hat{e}_j, \\
\text{r.h.s.} &= \overrightarrow{1} : \hat{e}_i\hat{e}_j
\end{aligned}$$

由并矢点乘规则可知，于是有

$$\epsilon^{(1)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(1)}_{\vec{k}j} + \epsilon^{(2)}_{\vec{k}i}\epsilon^{(2)}_{\vec{k}j} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \tag{5.50}$$