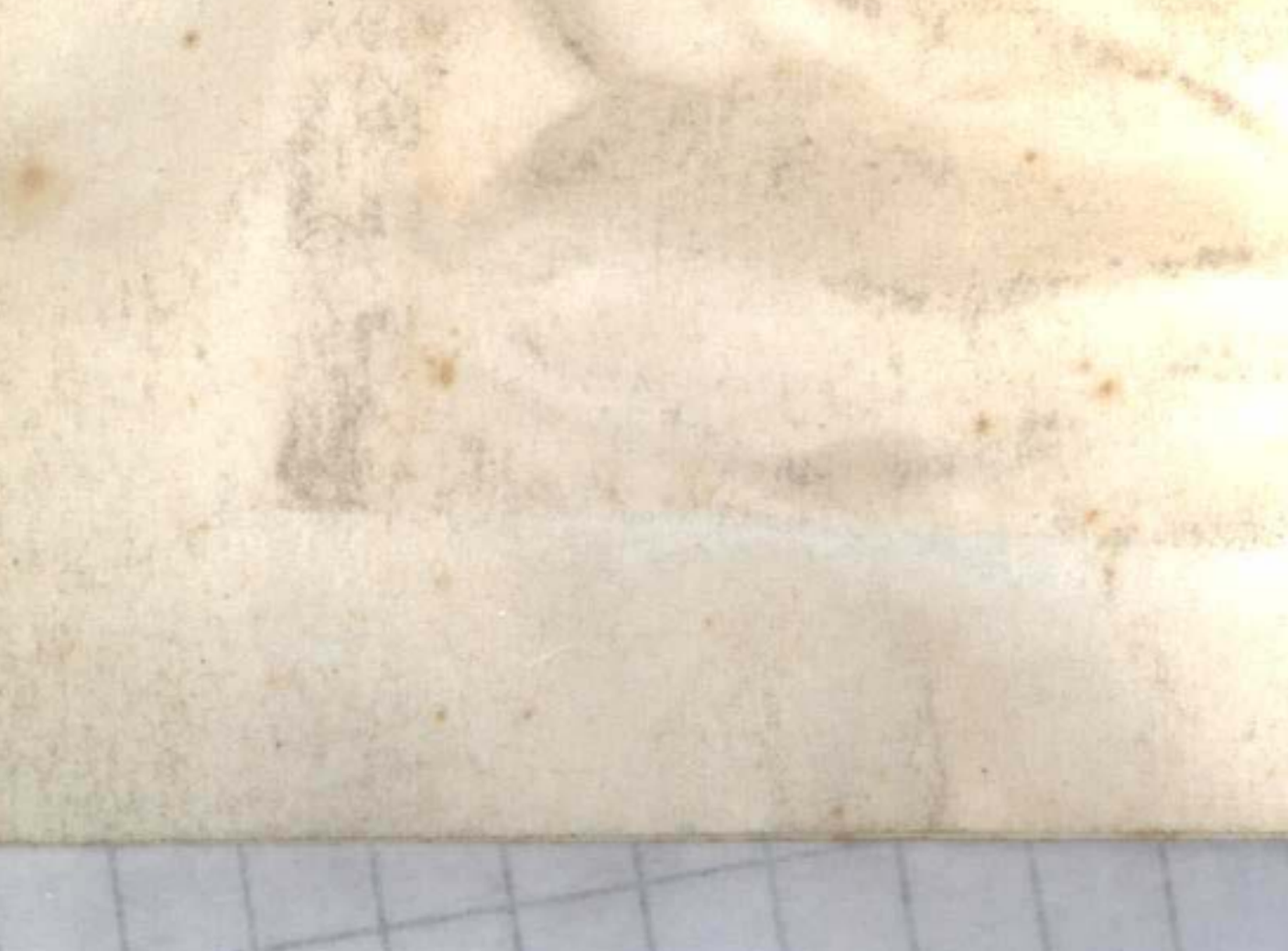
数学物理丛书

一般相对性量子场论

（一）

李国平　郭友中　著

湖北人民出版社



统一书号：13106·41

定　　价：0.39元

数学物理丛书

一般相对性量子场论

(一)

人民出版社

数学物理丛书

一般相对性量子场论

(一)

李国平 郭友中著

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　2.375 印张　49,000 字

1980 年 3 月第 1 版　1980 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—3,200

统一书号：13106・41　定价：0.39 元

序

本书初稿完成于1960年前后，现又重新进行了整理和删节，分成三个分册.

第一分册本来是一篇长文，1963年曾在中国科学院数学计算技术研究所的一次成果展览会上展出. 文中提出了纤维丛积分的概念，证明了纤维丛积分的存在性，建立了特殊(相对性)向一般(相对性)的转化原则，指出了它在微分方程理论中的应用，和第二分册一样，目的是为第三分册作工具准备，除写入Lichnerowicz的结果外，现在，基本上以当时的原稿发表，自成一个分册.

第二分册是第一分册的不同观点的补充和继续. 为了保持各分册的相对独立性，某些章节在内容上略有交叉.

第三分册介绍根据内外运动的矛盾提出的新的基本粒子模型及对粒子的产生、消失和相互作用的研究.

基本粒子理论正在不断发展，这一领域的研究工作一直非常活跃，已经积累了大量的试验成果和理论文献，涉及的范围很广，本书介绍的，只是某些数学物理方法中著者工作过的部分. 限于思想和业务水平，谬误不当之处，敬希读者指正.

著者

1978年元月

目　　录

§1　前言 ……1
§2　流形$V(4)$ ……1
§3　$V(4)$位标变换 ……3
§4　Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ ……5
§5　$V(4)$Riemann 几何学 ……10
§6　协变导数 ……18
§7　对偶位标架 ……22
§8　纤维丛微积分 ……24
§9　张量的纤维丛微积分 ……27
§10　纤维丛积分的存在性 ……29
§11　张量场的纤维丛微积分 ……31
§12　纤维丛积分的光滑性 ……34
§13　Lorentz 群与自旋群 ……36
§14　$\boldsymbol{L(4)}$与 **Spin(4)**的两种 Lie 代数的同构 ……47
§15　张量，旋量，混合量 ……50
§16　混合量场的纤维丛微积分 ……60
§17　曲率混合量 ……62
§18　纤维丛微分方程及其它 ……68
参考文献 ……72

§1 前　言

书中提出纤维丛积分的主要目的是提供特殊相对论性结果向一般相对论性结果的转化原则，免除逐一推广时繁琐的重复论证；后来成为我们在 1963 年提出的，外运动用一般相对性量子场论描述，内运动用特殊相对性量子场论描述的微粒子理论[4]的重要数学工具.

为了便于比照文献中有关特殊相对论性的工作，空间位标取为三个有序实数，时间位标取为一个纯虚数，合成四个有序数的一般相对性时空($\mathfrak{M}$).

§2 流形 $V(4)$

这里 $V(4)$ 表示 4 维 C^∞ 级定向流形，符号 $E(4)$ 为 4 维 Euclid 空间，即给定次序排列的实数列 $z\equiv(z^0, z^1, z^2, z^3)$ 所表示的点集和以平常方法赋予的距离 ρ. E_ρ 表示 $E(4)$ 中以原点 $0\equiv(0, 0, 0, 0)$ 为中心的正方形

$$E_\rho: |z^i|<\rho \quad (i=0, 1, 2, 3).$$

根据流形的定义，$V(4)$ 有开复盖 $\{V_j\}$, $j\in J$, J 是指标集. 设存在拓扑变换

$$\Psi_j: E_{\rho_j}\to V_j \quad (j\in J),$$

使 $x(j)\in V_j$ 致

$$\overset{-1}{\Psi}_j(x(j))=0.$$

对于任一点 $x\in V_j$,

$$\overset{-1}{\Psi}_j(x)=(z_x^\alpha(x(j)\,|V_j))$$
$$\equiv z_x(x(j)\,|V_j)\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

称为由 $(V_j,\ \Psi_j)$ 决定的点 x 的**局部位标**. 位标 (z_x^α) 写成 $(z_x^\alpha(x(j)\,|V_j))$ 的形式是为了强调这一局部数值位标架 E_{ρ_j} 可以看作以 $x(j)$ 为原点，以 V_j 为位标邻域的数值位标架的特点. 依此位标架, $x\in V_j$ 以

$$z_x^\alpha\equiv z_x^\alpha(x(j)\,|V_j)\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

为位标.

为了定向，当 $x\in V_i\cap V_j$ 时，我们认为位标变换

$$(z_x^\alpha(x(j)\,|V_j))=\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i(z_x(x(i)\,|V_i))\qquad(2.1)$$

为 C^∞ 级变换，它的函数行列式

$$D_{ji}(x)\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^0} & \cdots & \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^3}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^0} & \cdots & \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^3}\end{vmatrix}>0.$$

此时，位标架 E_{ρ_j} 与 E_{ρ_i} 称为**同向的**. 于是 $\{E_{\rho_j}\}(j\in J)$ 构成同向的 C^∞ 级位标系 S. 对于这样的位标系给予一个定向标量 $\rho(S)=+1$ 表示 S 是取正向的，记作

$$S\equiv S(V(4)=\bigcup_{j\in J}V_j\,|\,\Psi_j(E_{\rho_j})=V_j\,|\,D_{ji}(x)>0,\ x\in V_i\cap V_j),$$
$$\rho(S)=+1.\qquad(2.2)$$

对于另一位标系

$$S'\equiv S'(V(4)=\bigcup_{j\in J'}V'_j\,|\,\Psi'_j(E'_{\rho_j})$$
$$=V'_j\,|\,D'_{ji}(x)>0,\ x\in V'_i\cap V'_j),$$
$$\rho(S')=+1,$$

如果 $x\in V'_j\cap V_i$,

$$z'^{\alpha}_{x'}(x'(j)\,|V'_j)=\overset{-1}{\Psi}{}'_j\Psi_i(z_x(x(i)\,|V_i))$$

的函数行列式

$$D^*_{ji}>0,$$

则称 S' 与 S 同向; 如果.

$$D^*_{ji}<0,$$

则称 S' 与 S 异向.

同向位标系可以合成新的同向位标系，异向位标系不能合成一个定向位标系.

§3 $V(4)$ 位标变换

对于任一 $x\in V(4)$，必只少有一 V_j，使 $x\in V_j$ 以 $(z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j))$ 为对 E_{ρ_j} 的位标. 在 E_{ρ_j} 内取以 $(z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j))$ 为中心的正方形 $E_{\rho x}$，则 $\Psi_j(E_{\rho x})\equiv V_x(j)$ 亦为 x 的邻域. 取 $x'\in V_x(j)$，直迁 $E_{\rho x}$ 的中心至 E_{ρ_j} 的中心，得 $E_x(j)$，则可以 $E_x(j)$ 为相应于 $E_x(j)$ 的局部位标架. 即以

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))\equiv z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j)-z^{\alpha}_{x}(x(j)\,|V_j)$$

为 x' 对位标架 $E_x(j)$ 的局部位标. $z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))$ 对 $z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j)$ 的变换的函数行列式为 $+1$.

如果 $x\in V_i\cap V_j$，则可取 $E_x(k)$ 为局部位标架，$k=i$ 或 j; 取 $V_x(k)$ 为相应的位标邻域; 取

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(k))\equiv z^{\alpha}_{x'}(x(k)\,|V_k)-z^{\alpha}_{x}(x(k)\,|V_k)$$

为 x' 对局部位标架 $E_x(k)$ 的位标. 这一变换的行列式仍为 $+1$.

设 $x'\in V_x(i)\cap V_x(j)$，以

$$z^{\alpha}_{x'}(x(i)\,|V_i)=z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(i))+z^{\alpha}_{x}(x(i)\,|V_i),$$
$$z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j)=z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))+z^{\alpha}_{x}(x(j)\,|V_j)$$

代入式(2.1)(其中 x 以 x' 代替),得 C^{∞} 级位标变换:

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))=f_{ji}[(z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(i)))+(z^{\alpha}_{x}(x(i)\,|V_i))]-z^{\alpha}_{x}(x(j)\,|V_j),$$

式中 $f_{ji}\equiv\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i$. 这一变换的函数行列式等于在 $D_{ji}(x')$ 中以

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_i(i))+z^{\alpha}_{x}(x(i)\,|V_i)$$

代替 $z^{\alpha}_{x'}(x(i)\,|V_i)$的结果,其值当亦为正.

因此, $V(4)$ 的每一点 x 可以有若干个位标邻域 $V_x(i)$, $V_x(j)$, …等; 相应的以 x 为原点的位标架为 $E_x(i)$, $E_x(j)$, …等. 这些局部位标架的全体合成一个**位标系** $\check{S}$. 注意, 当 $x''\in V_x(j)\cap V_{x'}(i)$时, x'' 对 $E_x(j)$及对 $E_{x'}(i)$的位标间的变换仍然是 C^{∞} 级的,其函数行列式亦仍为正.

位标系 $\check{S}$ 与 S 同向, 即 $\rho(\check{S})=\rho(S)=+1$. 有时, 为了简便起见, $\check{S}$ 中同以 x 为原点的位标邻域 $V_x(i)$, $V_x(j)$, …, 以及相位的位标架 $E_i(x)$, $E_x(j)$, …, 不再标注指标, 而取其代表 V_x 及 E_x.

将位标系 $\check{S}$ 表写为

$$\check{S}\equiv\check{S}(V(4)=\bigcup_{x\in V(4)}V_x|\phi_x(E_x)$$
$$=V_x|D_{xx'}(x'')>0,\ x''\in V_x\cap V_{x'}),$$
$$\rho(\check{S})=+1, \tag{3.1}$$

式中 $D_{xx'}(x'')$为 x'' 对 E_x, $E_{x'}$ 的 C^{∞} 级位标变换.

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x)=\overset{-1}{\phi}_x\phi_{x'}(z_{x'}(x'|V_{x'}))$$

的函数行列式.

位标系 $\check{S}$ 称为由位标系 S 引出的同向位标系,上标"$\check{}$"

就是为了说明这种关系的.

必须注意:上述位标系仍然是数值位标系,没有添加其它几何意义.

§4 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$

z^α 为实数, $i\equiv\sqrt{-1}$, 考虑 4×1 矩阵

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

组成的线性空间 Σ. 空间 Σ 的 0 元为

$$\mathbf{0}\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

以下列四个线性无关元(点或向量)

$$\boldsymbol{e}_0\equiv\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

为基,黑体字按向量运算(下同),得

$$\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta=\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

这里

$$\eta_{\alpha\beta}\equiv\begin{cases} 0, & \alpha\neq\beta; \\ +1, & \alpha=\beta\neq0; \\ -1, & \alpha=\beta=0. \end{cases} \tag{4.4}$$

除非另有说明，我们约定：同一上下标在一项中重复出现时，对该项须按重复出现的指标求和，希腊指标取值 0, 1, 2, 3，拉丁指标取值 1, 2, 3, 4. 这样一来，空间 Σ 的任一点 z 可以写成

$$z=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

(z^{α})称为 z 对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$的位标. 上标 $\alpha=0$ 的位标称为**时间位标**，上标 $\alpha=1, 2, 3$ 的位标称为**空间位标**. $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 表示以空间 Σ 的 0 元(原点)为始点，以 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 的代表矩阵为终点的向量. 我们知道，所谓向量的分量是指终点与始点的代表矩阵的差矩阵的元. 因此，以 $h\equiv h^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 为始点，以 $(1+h^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 为终点的向量记作 $\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$，则 $\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$ 与 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 具有相同的分量，所以

$$\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)\boldsymbol{e}_{\beta}(h)=\eta_{\alpha\beta}.$$

$\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$ 称为向量 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 自原点至 h 的**直迁(平移)**. 因此，$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$是位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$的直迁，前者以 h 为原点，后者以 0 点为原点. 空间 Σ 的点对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$的位标为 z，则同一点对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$的位标为$(h^{\alpha}+z^{\alpha})$. 由

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)=(h^{\alpha}+z^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha}=h+z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

及

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h$$

可见，空间 Σ 的点 z 可表为

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},\ z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h$$

两种基本形式.

存在非异实数元 4×4 **矩阵群** $L(4)$，使当

$$A\equiv[A^{\beta}_{\alpha}]\in L(4)$$

时，

$$(A^{\gamma}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\gamma})(A^{\delta}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\delta})\equiv\eta_{\alpha\beta},\qquad(4.5)$$

或

$$(A^{\gamma}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\gamma}(h))(A^{\delta}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\delta}(h))=\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.5}^{*}$$

的充要条件是:

$$A^{\gamma}_{\alpha}A^{\delta}_{\beta}\eta_{\gamma\delta}=\eta_{\alpha\beta}. \tag{4.6}$$

这里 A^{β}_{α} 表示矩阵 A 的第 α 行 β 列的元. 由此可见, $L(4)$是含 6 个独立参数的一个旋转群.

直迁 $\{h\}$ 成一平移群, 记作 $H(4)$.

$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$经 $A\in L(4)$变为 $(\boldsymbol{e}'_{\alpha'})\equiv(A^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 时, (z^{α}) 经 $\overset{-1}{A}$ 变为 $(z'^{\alpha'})\equiv(\overset{-1}{A}{}^{\alpha'}_{\alpha}z^{\alpha})$, 所以

$$z'^{\alpha'}\boldsymbol{e}'_{\alpha'}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha};$$

与此同时, $(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$经 A 变为$(\boldsymbol{e}'_{\alpha'}(h))\equiv(A^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$, 这是平移$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$至$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$后再经 A 变换的结果, 亦即将$(\boldsymbol{e}'_{\alpha'})$平移 h 的结果. 所以

$$(A^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))=(A^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha})(h).$$

$L(4)$与 $H(4)$的直积记作 $\mathscr{L}(4)$:

$$\mathscr{L}(4)\equiv L(4)*H(4).$$

空间 Σ 中任意两点

$$z\equiv z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},\ z'\equiv z'^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$$

的 **Minkowski** 形式:

$$\begin{aligned}&((z^{\alpha}-z'^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha})((z^{\beta}-z'^{\beta})\boldsymbol{e}_{\beta})\\&=\eta_{\alpha\beta}(z^{\alpha}-z'^{\alpha})(z^{\beta}-z'^{\beta}),\end{aligned} \tag{4.7}$$

在 $\mathscr{L}(4)$ 的群元作用下是不变的. 所以 Σ 是 Minkowski 空间, 光速 c 作为 $+1$.

称 $\mathscr{L}(4)$ 为**广意 Lorentz 群**, $L(4)$ 为**齐次 Lorentz 群**以及 $H(4)$为**平移 Lorentz 群**.

设 $A\in L(4)$，由式(4.5)，有

$$(\det A)^2=1; \tag{4.8}$$

对 $\alpha=\beta=0$，有

$$(A_0^\gamma e_\gamma)(A_0^\delta e_\delta)=\sum_{i=1}^{3}(A_0^i)^2-(A_0^0)^2=\eta_{00}=-1,$$

即

$$(A_0^0)^2\geqslant 1. \tag{4.9}$$

由式(4.8)，两个矩阵行列式异号的 $L(4)$ 的元不可能任意接近，它们属于不同的类型；由式(4.9)，两个 A_0^0 异号的 $L(4)$的元亦属于不同的类型. 因此，$L(4)$由四个不相关的部分组成，用上标表示矩阵行列式的符号，下标表示 A_0^0 的符号，则可列表如下：

$$L(4)\begin{cases}L^+(4)\begin{cases}L_+^+(4);\\ L_-^+(4);\end{cases}\\ L^-(4)\begin{cases}L_+^-(4);\\ L_-^-(4).\end{cases}\end{cases}$$

与恒等变换连续相关的部分，称为**连续 Lorentz 群**，即

$$L_+^+(4)\equiv\{A\,|\det A=+1,\ A_0^0>+1,\ A\in L(4)\};$$

空间的对称变换 S_s 与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**正时 Lorentz 群**，即

$$L_+^-(4)\equiv\{A\,|\det A=-1,\ A_0^0>+1,\ A\in L(4)\};$$

时间的对称 S_t 变换与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**正空 Lorentz 群**，即

$$L_-^-(4)\equiv\{A\,|\det A=-1,\ A_0^0<-1,\ A\in L(4)\};$$

时空的对称变换 S_{st} 与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**么模 Lorentz 群**，即

$$L_-^+(4)\equiv\{A\,|\det A=+1,\ A_0^0<-1,\ A\in L(4)\}.$$

位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 称为以 0 为原点的 **Lorentz 位标架或正规正交位标架**，空间 Σ 称为 **Minkowski 空间**，简记作 $\mathscr{M}(4)$.

注意，当 $z=z^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ 经平移 h 变为 $z+h$ 时，

$$z+h=(z^\alpha+h^\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha=z^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(h),$$

对于位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$，位标 (z^α) 不变，位标架平移了 h. 当 (z^α) 经 $A\in L(4)$ 变为 $(A^{\alpha'}_\alpha z^\alpha)$ 时，得另一点

$$A^{\alpha'}_\alpha z^\alpha \boldsymbol{e}_{\alpha'}=z^\alpha(A^{\alpha'}_\alpha \boldsymbol{e}_{\alpha'}),$$

这一点对位标架 $(A^{\alpha'}_\alpha \boldsymbol{e}_{\alpha'})$ 的位标仍为 (z^α). 由此可见，固定位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$，将一点

$$z\equiv z^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$$

的位标 (z^α) 依 $l\in\mathscr{L}(4)$ 变为另一点的位标 $(z'^{\alpha'})\equiv l(z^\alpha)$，

$$z'\equiv z'^{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha'},$$

对变换后的位标架 $l(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的位标则仍为 (z^α)，即同一点.

任给空间 $\mathscr{M}(4)$ 的一点 h，将位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的原点平移 $h\equiv h^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ 成位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$ 的原点，它对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$ 的位标为 0. 于是，全体位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$，$h\in H(4)$ 可以表现空间 $\mathscr{M}(4)$，而有表现式：

$$\mathscr{M}(4)\equiv\bigcup_{h\in H(4)} h(\boldsymbol{e}_\alpha)=\bigcup_{h\in H(4)}\boldsymbol{e}_\alpha(h). \qquad (4.10)$$

其次，给出空间 $\mathscr{M}(4)$ 的任一非 0 元 $z_0\neq 0$，即它对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的位标 (z^α_0) 不全为 0，则任何其它非 0 元 $z\in\mathscr{M}(4)$ 对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的位标 (z^α) 必可由位标 (z^α_0) 经 $A\in L^+_+(4)$ 变换得出，即

$$z^\alpha=A^\alpha_{\alpha'}z^{\alpha'}_0,$$

此时 z 对位标架 $A(\boldsymbol{e}_\alpha)\equiv(A^{\alpha'}_\alpha \boldsymbol{e}_{\alpha'})$ 的位标仍为 (z^α_0). 由此可见，空间 $\mathscr{M}(4)$ 的非 0 部分可以表示为

$$\bigcup_{A\in L_+^\dagger(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0.$$

如果将$(\boldsymbol{e}_\alpha)$的原点，即0元，认为由$(\boldsymbol{e}_\alpha)$表现，则可将0元隐含于表示式之中，而将空间$\mathscr{M}(4)$的表现式写成：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\dagger(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0. \tag{4.11}$$

如果更将重点合一，则可将表现式写成：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0. \tag{4.11}^*$$

同理，对固定的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$，于原点$h$外固定一点$z_0'\neq h$，原点$h$隐现于$(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$之中，则有空间$\mathscr{M}(4)$的表现式：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\dagger(4)} z_0'^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha(h))=\bigcup_{A\in L(4)} z_0'^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha(h)),$$

$$z_0'^\alpha\neq 0. \tag{4.12}$$

如果选定一个群元$A_0\in L_+^+(4)$或$L(4)$，则还可有表现式：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\dagger(4)} z_0'^\alpha A(A_0(\boldsymbol{e}_\alpha(h)))=\bigcup_{A\in L(4)} z_0'^\alpha A(A_0(\boldsymbol{e}_\alpha(h))),$$

$$z_0'^\alpha\neq 0. \tag{4.12}^*$$

§5 $V(4)$ Riemann 几何学

设m为$V(4)$与$\mathscr{M}(4)$间的一个拓扑变换，

$$m: V(4)\to\mathscr{M}(4). \tag{5.1}$$

以x表示$V(4)$的点，z表示$\mathscr{M}(4)$的点，则

$$z=m(x),\ x=\overset{-1}{m}(z).$$

必须注意，这个对应关系m没有规定$V(4)$的度量性质，也没有规定$V(4)$的弯曲性质，因此不能以为$V(4)$就已经是

Minkowsiki 空间了. 其实, m规定的只是 $V(4)$的拓扑性质, 使得 $V(4)$与 $\mathscr{M}(4)$是同胚的.

在 $\mathscr{M}(4)$内, 选一以 $z=m(x)$为原点, 由$(\boldsymbol{e}_\alpha)$平移而得的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(z))$, 再以 $\mathscr{A}\in L_+^+(4)$作用于其上, 得位标架:

$$(\boldsymbol{e}_\alpha\{m(x)\})\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha\{z\})\equiv\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_\alpha(z))\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha(x)).$$

以$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$作为 $V(4)$以 x 为原点的局部位标架. 对于 x 的位标邻域 V_x 中的点 x', 以原点在 x 的位标架 E_x 的局部数值位标$(z^\alpha_{x'}(x))$为对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标:

$$x'=z^\alpha_{x'}(x)\boldsymbol{e}_\alpha(x).$$

这样, 我们就得到了 V_x 与 $z=m(x)$ 在 $\mathscr{M}(4)$ 内的邻域 $W_{m(x)}$ 的一个新的拓扑对应关系, 一般说来不能与 m 等同起来.

其次, 同以 x 为原点的不同的 E_x 必须相应于不同的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$. 例如, $E_x(i)$相应于位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$; $E_x(j)$相应于位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$. 当 $i\neq j$ 时, $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$与$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$不同; 相应的位标邻域 $V_x(i)$与 $V_x(j)$以及相应的 $\mathscr{M}(4)$的邻域 $W_{m(x)}(i)$与 $W_{m(x)}(j)$ 均不相同. 这说明了 $V(4)$ 对 $\mathscr{M}(4)$ 的弯曲性: 不同位标架中同一点的位标之间的变换关系表达了 $V(4)$对 $\mathscr{M}(4)$的弯曲性.

由$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$经 $A\in L(4)$变换而得的一切位标架

$$A(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$$

的位标邻域同为 V_x, 并相应于同一 $W_{m(x)}$. 于是, $x'\in V_x$ 对$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标为 $z^\alpha_{x'}(x)$, 对 $A(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标为 $\overset{-1}{A}{}^\alpha_{\alpha'}z^{\alpha'}_{x'}(x)$, 两者都是 $W_{m(x)}$ 内同一点 $z'=\overset{-1}{\phi}_x(x')$ 的位标. 这是选定了某个$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$作为 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 而抛弃其它的 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$, $i\neq j$, 的结

果. 因此, 我们选定$(e_a(x))$作为基本位标架, 以免引起不必要的混淆. 这样一来, 我们就可以用 $W_{m(x)}$ 的点来描述 V_x 的点, 使之成为局部的拓扑对应. 再提醒一下, 这一对应关系与 m 不同.

既然如此, 我们就可以设想将 $V(4)$ 及 $\mathscr{M}(4)$ 浸入高维 Euclid 空间 $E(n)(n>4)$ 中, 然后将 $\mathscr{M}(4)$ 平移, 使与 $V(4)$ 相切于 $x\in V(4)$, $z=m(x)$ 重合于切点 x. 这样, $\mathscr{M}(4)$ **就成为** $V(4)$ 在 x 的**切空间**, 记作 $\mathscr{M}_x(4)$. 于是, 一切位标架 $A(e_a(x))$, $A\in L(4)$, 就可作为 $\mathscr{M}_x(4)$ 内, 以公切点 x 为原点的 Lorentz 位标架. 这些 Lorentz 位标架我们称为 $V(4)$ 在 x 点处的, 以 V_x 为位标邻域, x 为原点的局部 **Lorentz 位标架**. 有些作者因为关系式(4.5)和 $(4.5)^*$ 而称之为以 x 为原点的**正规正交位标架**. 其实, $\mathscr{M}_x(4)$ 只是将整个 $\mathscr{M}(4)$ 添加隐参数 x, 它们具有相同的拓扑性和度量性, 记作

$$\mathscr{M}_x(4)\simeq\mathscr{M}(4).$$

也就是将 $\mathscr{M}(4)$ 的矩阵元附以下标 x 的表现式. 例如将

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}$$

写成

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}_x$$

作为 $\mathscr{M}_x(4)$ 中的相应元.

$V(4)$ 浸入 $E(n)$ 中, 在点 x 与 $\mathscr{M}_x(4)$ 相切于点 $m(x)$, 则

点 x 处的 $V(4)$ 的一切切向量应在 $\mathscr{M}_x(4)$ 内. 这就不能不计及数值位标变换的性质. 所谓 x 处 $V(4)$ 的切向量是指连结 x 至 x' 的向量, 当 x' 沿过 x 的光滑曲线 $C\subset V(4)$ 而趋于 x 时的极限. 对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$, 其分量为 dz^α_x, 这一切向量记作 dx.

设若位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 取的是 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$, 则当 $x\in V_i\cap V_j$ 时, 有 x 的邻域 $\mathscr{V}_x\subset V_i\cap V_j$. $\mathscr{V}_x$ 的点 x' 对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$ 的位标 $(z^\alpha_{x'}(x(j)|V_j))$ 与对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$ 的位标 $(z^\alpha_{x'}(x(i)|V_i))$ 之间存在 C^∞ 级变换:

$$z^\alpha_{x'}(x(j)|V_j)=f^\alpha_{ji}(z_{x'}(x(i)|V_i)). \tag{5.2}$$

于是, 当 $x'=x$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} dz^\alpha_x(x(j)|V_j)&=\left.\frac{\partial f^\alpha_{ji}(z_{x'}(x(i)|V_i))}{\partial z^\beta_{x'}(x(i)|V_i))}\right|_{x'=x}dz^\beta_x\\ &\equiv f^\alpha_{ji,\beta}(z_x(x(i)|V_i))dz^\beta_x. \end{aligned} \tag{5.3}$$

要求 $V(4)$ 在 x 处的切向量全在 $\mathscr{M}_x(4)$ 内, 无异于要求矩阵

$$A\equiv[A^\alpha_\beta]\equiv[f^\alpha_{ji,\beta}(z_x(x(i)|V_i))]\in L^+_+(4). \tag{*}$$

这一充要条件 (*) 对数值位标变换给出了新的制约. 在条件(*)的制约下, $V(4)$ 在 x 处的切向量有下面的形式:

$$dx\equiv dz^\alpha_x\boldsymbol{e}_\alpha(x)=(A^\alpha_\beta dz^\beta_x)\boldsymbol{e}_\alpha(x|j).$$

由式(4.5)*, 有

$$dS^2\equiv dx\,dx=\eta_{\alpha\beta}\,dz^\alpha_x\,dz^\beta_x. \tag{5.4}$$

因此, 条件(*)同时也给定了 $V(4)$ 的度量性质, 说明 $V(4)$ 的线元 dS 对每一位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 在原点的表达式必为式(5.4).

为了简化书写, 我们将点 x' 对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 的位标写成 $(z^\alpha_{x'}(x))$ 或 $(z^\alpha_{x'})$. 于是 $(z^\alpha_{x'}(x))$ 与 $(z^\alpha_{x'}(x(j)|V_j)$ 间满足的条件

(*)应当直接反映为位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$与$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$之间的关系. 由$x\in V_i\cap V_j$, 有

$$dz_x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(x)=(A_\beta^\alpha dz_x^\beta)\boldsymbol{e}_\alpha(x|j)=dz_x^\alpha(A_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta(x|j)),$$

所以

$$\boldsymbol{e}_\alpha(x)=A_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta(x|j). \tag{5.5}$$

上式表明, $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$与$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$这两组向量的分量间的关系与两组向量的始点和终点无关. 由此推得

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_\alpha(x)&=dA_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta(x|j)\\ &=\frac{\partial A_\alpha^\beta}{\partial z_x^{\alpha'}(x(j)|V_i)}dz_x^{\alpha'}(x(j)|V_i)\boldsymbol{e}_\beta(x|j)\\ &=\frac{\partial A_\alpha^\beta}{\partial z_x^{\alpha'}(x(j)|V_i)}A_{\beta'}^{\alpha'}dz_x^{\beta'}\boldsymbol{e}_\beta(x|j)\\ &=\frac{\partial A_\alpha^\beta}{\partial z_x^{\alpha'}(x(j)|V_i)}A_{\beta'}^{\alpha'}dz_x^{\beta'}\overset{-1}{A}{}_\beta^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma(x). \end{aligned} \tag{5.6}$$

令

$$\Delta_\alpha^\gamma(x)\equiv\overset{-1}{A}{}_{\beta'}^\gamma\frac{\partial A_\alpha^{\beta'}}{\partial z_x^{\alpha'}(x(j)|V_i)}A_\beta^{\alpha'}dz_x^\beta\equiv\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x)dz_x^\beta, \tag{5.7}$$

则得 Cartan 条件:

$$d\boldsymbol{e}_\alpha(x)=\Delta_\alpha^\gamma(x)\boldsymbol{e}_\gamma(x). \tag{**}$$

从$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的定义

$$\boldsymbol{e}_\alpha(x)\equiv\mathscr{A}_\alpha^\beta\boldsymbol{e}_\beta(z).$$

得

$$d\boldsymbol{e}_\alpha(x)=d\mathscr{A}_\alpha^\beta\boldsymbol{e}_\beta(z)=\Delta_\alpha^\gamma(x)\mathscr{A}_\gamma^\beta\boldsymbol{e}_\beta(z), \tag{5.8}$$

这里用了条件(**). 因此, 由式(5.7),

$$\Delta(x)=\overset{-1}{\mathscr{A}}d\mathscr{A}=\overset{-1}{A}dA. \tag{5.9}$$

由此可见, 我们应该让

$$\mathscr{A}\equiv A,\ x\in V_i\cap V_j, \tag{5.10}$$

矩阵 $\mathscr{A}$ 与 A 均是因 x 而异的.

当 x 只在某一 V_i 内时，上面确定 $\mathscr{A}$ 的方法仍然适用，只须令 $j=i$ 即可：$\mathscr{A}=\mathscr{A}(x|i)$. 如果有多个 $\mathscr{A}(x|i)$, $i\in I$, 则可以任意选定，只须满足条件

$$\mathscr{A}(x|i)\in L_+^+(4),\ i\in I. \tag{***}$$

为了方便起见，也可以取同一个 $\mathscr{A}$.

总上所述，我们选定了 $\mathscr{A}(x|i)\in L_+^+(4)$，使位标架

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha\{m(x)\})=\mathscr{A}(x|i)(\boldsymbol{e}_\alpha(m(x))),$$

点 $x\in V_i$ 对 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$ 的位标为 $(z_x^\alpha(x(i)|V_i))$. 如果 x 仅在某一 V_i 内，则选 $V_x\subset V_i$, 取

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha\{m(x)\})=\mathscr{A}(x|i)(\boldsymbol{e}_\alpha(m(x)));$$

如果 $x\in V_i\cap V_j$, 则选 $V_x\subset V_i\cap V_j$, 取

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha\{m(x)\})=A(x)(\boldsymbol{e}_\alpha(m(x))).$$

点 $x'\in V_x$ 对 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 的位标为 $(z_{x'}^\alpha(x))$.

加于 $V(4)$ 的数值位标变换上的条件 (*)，不但保证了 $\mathscr{M}_x(4)$ 包含 $V(4)$ 在 x 点处的所有切向量，而且也确定了 $V(4)$ 的度量性质. 点 x 对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 有：

$$\left.\begin{aligned} &dS^2=\eta_{\alpha\beta}\,dz_x^\alpha(x)\,dz_x^\beta(x);\\ &\boldsymbol{e}_\alpha(x)\boldsymbol{e}_\beta(x)=\eta_{\alpha\beta};\\ &dx=dz_x^\alpha(x)\boldsymbol{e}_\alpha(x). \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

据此，又有：

$$\left.\begin{aligned} &d\boldsymbol{e}_\alpha(x)=\Delta_\alpha^\gamma(x)\boldsymbol{e}_\gamma(x);\\ &\Delta_\alpha^\gamma(x)\equiv(\overset{-1}{\mathscr{A}}(x)d\mathscr{A}(x))_\alpha^\gamma\equiv\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x)dz_x^\beta(x). \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

这样，我们便已在 $V(4)$ 上附着了一个定向位标系，称为

正向基准位标系：

$$\Omega_*\equiv\bigcup_{x\in V(4)}(\boldsymbol{e}_\alpha(x)),\ \rho(\Omega_*)=+1.$$

其中的局部位标架在 $V(4)$ 上随 x 而连续变动. Ω_* 尚可扩大为

$$\Omega\equiv\bigcup_{\substack{A\in L_+^\uparrow(4)\\ x\in V(4)}}A(\boldsymbol{e}_\alpha(x)),\ \rho(\Omega)=+1;$$

再进一步扩大 Ω, 即成不定向位标系:

$$\Omega^\pm\equiv\bigcup_{\substack{A\in L(4)\\ x\in V(4)}}A(\boldsymbol{e}_\alpha(x)),\ \rho(\Omega^\pm)=\pm1.$$

有时，为了方便起见，我们经常需要考虑两组局部位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$ 与 $(\boldsymbol{e}_\alpha(x'))$ 的关系，$x'\in V_x$. 例如，当 $\mathcal{V}_x\subset V_i\cap V_j$ 时，我们有

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))=\mathscr{A}(x)(\boldsymbol{e}_\alpha(m(x))),$$

$$(\boldsymbol{e}_\alpha(x'))=\mathscr{A}(x')(\boldsymbol{e}_\alpha(m(x'))).$$

由于 $\boldsymbol{e}_\alpha(m(x))$ 与 $\boldsymbol{e}_\alpha(m(x'))$ 作为向量的分量是相同的，所以

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{e}_\alpha(x'))=A(x',\ x)(\boldsymbol{e}_\alpha(x)),\\ &A(x',\ x)\equiv\mathscr{A}(x')\overset{-1}{\mathscr{A}}(x)\in L_+^\uparrow(4),\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

$A(x',\ x)$ 是 x', x 的 O^α 级函数.

下面进一步讨论(I), (II)与(III)的关系.

取 $x''\in V_x\cap V_{x'}$, 则有位标变换:

$$z_{x''}(x)=f_{xx'}(z_{x''}(x'));$$

$$z_{x''}(x')=\overset{-1}{f}_{xx'}(z_{x''}(x)).$$

这里 $f_{xx'}\equiv\overset{-1}{\phi}_x\phi_{x'}$ 是式(3.1)中 $\check{S}$ 所决定的. 于是 $V(4)$ 在点 x' 处的切向量

$$dx' = dz^{\alpha}_{x'}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x') = \left.\frac{\partial \overset{-1}{f}{}^{\alpha}_{xx'}(z_{x''}(x'))}{\partial z^{\beta}_{x'}(x)}\right|_{x''=x'} dz^{\beta}_{x'}(x)\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')$$
$$= dz^{\alpha}_{x'}(x)\boldsymbol{e}_{\alpha}(x).$$

令

$$\Delta^{\beta}(z_{x'}(x)) \equiv \left.\frac{\partial \overset{-1}{f}{}^{\beta}_{xx'}(z_{x''}(x))}{\partial z^{\gamma}_{x''}(x)}\right|_{x''=x'} dz^{\gamma}_{x'}(x),$$

于是

$$dx' = dz^{\alpha}_{x'}(x)\boldsymbol{e}_{\alpha}(x) = \Delta^{\alpha}(z_{x'}(x))\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'). \qquad (5.11)$$

据此，切向量 dx' 的度量 dS 可由 $\mathscr{M}_{x'}(4)$ 来定：

$$dS^2 \equiv dx'dx' = dz^{\alpha}_{x'}(x')dz^{\beta}_{x'}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')\boldsymbol{e}_{\beta}(x')$$
$$= \eta_{\alpha\beta}dz^{\alpha}_{x'}(x')dz^{\beta}_{x'}(x') = \eta_{\alpha\beta}\Delta^{\alpha}(z_{x'}(x))\Delta^{\beta}(z_{x'}(x))$$
$$\equiv g_{\alpha\beta}(z_{x'}(x))dz^{\alpha}_{x'}(x)dz^{\beta}_{x'}(x). \qquad (5.12)$$

$g_{\alpha\beta}(z_{x'}(x))$ 为张量 $g_{\alpha\beta}(x')$ 对位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$ 的分量. 式(5.12)表明，$g_{\alpha\beta}(x')$ 对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'))$的分量为 $\eta_{\alpha\beta}$.

这样，我们定出了 $V(4)$的 **Riemann 几何，其度量张量场** $g_{\alpha\beta}(x)$为规范双曲型的：

$$dS^2 = g_{\alpha\beta}(x)dz^{\alpha}dz^{\beta}. \qquad (5.12)^*$$

这里(z^{α})是$(z^{\alpha}_{x}(x'))$的简写，表示 x 对某一局部位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'))$的位标，$(dz^{\alpha})$表示 x 处的切向量. 将 dS 沿曲线 $C\subset V(4)$积分即得曲线 C 的长度.

注意：$g_{\alpha\beta}(x')$ 对局部位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$ 在原点 x 处的分量为 $\eta_{\alpha\beta}$，但在点 x 以外不必如此.

由式(III)，得

$$d\boldsymbol{e}_{\alpha}(x') = dA^{\beta}_{\alpha}(x',\ x)\boldsymbol{e}_{\beta}(x)$$
$$= (dA^{\beta}_{\alpha}(x',\ x))\overset{-1}{A}{}^{\gamma}_{\beta}(x',\ x)\boldsymbol{e}_{\gamma}(x')$$
$$\equiv \omega^{\gamma}_{\alpha}(z_{x'}(x))\boldsymbol{e}_{\gamma}(x')$$
$$\equiv \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(z_{x'}(x))dz^{\beta}_{x'}(x)\boldsymbol{e}_{\gamma}(x'), \qquad (5.13)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\omega_\alpha^\gamma(z_{x'}(x)) &\equiv \overset{-1}{A}{}_\beta^\gamma(x',\ x)\,dA_\alpha^\beta(x',\ x),\\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(z_{x'}(x)) &\equiv \overset{-1}{A}{}_{\beta'}^\gamma(x',\ x)\,\frac{\partial A_\alpha^{\beta'}(x',\ x)}{\partial z_{x'}^\beta(x)}.\end{aligned}\right\}\quad (5.13)^*$$

将式(5.11)代入(5.13),得

$$\omega_\alpha^\gamma(z_{x'}(x)) \equiv C_{\alpha\beta}^\gamma(z_{x'}(x))\,\Delta^\beta(z_{x'}(x)),\qquad (5.14)$$

和其它一些符号一样,不致发生混淆时,常常简记作:

$$\omega_\alpha^\gamma = C_{\alpha\beta}^\gamma \Delta^\beta;\ \omega_\alpha^\gamma(x') = C_{\alpha\beta}^\gamma(x')\,\Delta^\beta(x').\qquad (5.14)^*$$

注意: $C_{\alpha\beta}^\gamma$ 不是张量, 它相应于 Christoffel 符号, 可称为 Riemann 流形 $V(4)$ 的**联络系数**.

在式(5.13)中, 令 $x'=x$, 得到下面的 **Cartan 关系**:

$$\left.\begin{aligned}d\boldsymbol{e}_\alpha(x) &= \omega_\alpha^\gamma(x)\,\boldsymbol{e}_\gamma(x);\\ \omega_\alpha^\gamma(x) &= C_{\alpha\beta}^\gamma(0)\,\Delta^\beta(0) = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x)\,dz^\beta.\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{II})^*$$

由式(5.11), 令 $x'=x$, 得 **Cartan 关系**:

$$dx = \Delta^\alpha(0)\,\boldsymbol{e}_\alpha(x) = dz^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(x).\qquad (\mathrm{I})$$

§6 协 变 导 数

我们已经知道,

$$\eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha(x')\,\boldsymbol{e}_\beta(x')$$

是对位标$(z_{x'}^\alpha(x'))$而言的, 对位标$(z_{x'}^\alpha(x))$, 这一张量的分量为

$$g_{\alpha\beta}(z_{x'}(x)) = \boldsymbol{e}_\alpha(x')\,\boldsymbol{e}_\beta(x') = \eta_{\alpha'\beta'}\,\frac{\partial z_{x'}^{\alpha'}(x')}{\partial z_{x'}^\alpha(x)}\,\frac{\partial z_{x'}^{\beta'}(x')}{\partial z_{x'}^\beta(x)}.\qquad (6.1)$$

因此,

$$\begin{aligned}dg_{\alpha\beta}(x') \equiv dg_{\alpha\beta}(z_{x'}(x)) &= d\boldsymbol{e}_\alpha(x')\,\boldsymbol{e}_\beta(x') + \boldsymbol{e}_\alpha(x')\,d\boldsymbol{e}_\beta(x')\\ &= \omega_\alpha^\gamma(x')\,g_{\gamma\beta}(x') + \omega_\beta^\gamma(x')\,g_{\alpha\gamma}(x').\end{aligned}$$

这里利用了式(5.14).

令
$$\omega_{\alpha\beta}(x')\equiv\omega_{\alpha}^{\gamma}(x')g_{\gamma\beta}(x'),$$
得到
$$\omega_{\alpha\beta}(x')+\omega_{\beta\alpha}(x')=dg_{\alpha\beta}(x'). \tag{6.2}$$

由式(5.13)与(5.14),
$$\omega_{\alpha}^{\beta}(x')=C_{\alpha\gamma}^{\beta}(x')\Delta^{\gamma}(x')=\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(x')dz_{x'}^{\gamma}(x);$$
所以,
$$\omega_{\alpha\beta}(x')=C_{\alpha\beta\gamma}(x')\Delta^{\gamma}(x')=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x')dz_{x'}^{\gamma}(x), \tag{6.3}$$
式中
$$\left.\begin{aligned}C_{\alpha\beta\gamma}(x')&\equiv C_{\alpha\gamma}^{\lambda}(x')g_{\lambda\beta}(x'),\\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x')&\equiv\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}(x')g_{\lambda\beta}(x').\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

由式(6.11)与(6.13):
$$dx'=dz_{x'}^{\alpha}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'),$$
及
$$d\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')=\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(x')dz_{x'}^{\gamma}(x')\boldsymbol{e}_{\beta}(x'),$$
有
$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(x')\boldsymbol{e}_{\beta}(x')=\frac{\partial^2x'}{\partial z_{x'}^{\alpha}(x)\partial z_{x'}^{\gamma}(x)}. \tag{6.5}$$

因此,
$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(x')=\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}(x'), \tag{6.6}$$
由于$g_{\alpha\beta}(x')$对指标α与β的对称性,又有
$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x')=\Gamma_{\gamma\beta\alpha}(x'). \tag{6.6}^*$$

由式(6.2)与(6.3),得
$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x')+\Gamma_{\beta\alpha\gamma}(x')=\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x')}{\partial z_{x'}^{\gamma}(x)},$$
即
$$\Gamma_{\gamma\beta\alpha}(x')+\Gamma_{\beta\alpha\gamma}(x')=\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x')}{\partial z_{x'}^{\gamma}(x)}. \tag{6.7}$$

轮换γ, β, α, 得

$$\Gamma_{\beta\alpha\gamma}(x')+\Gamma_{\alpha\gamma\beta}(x')=\frac{\partial g_{\gamma\alpha}(x')}{\partial z^{\beta}_{x'}(x)}, \tag{6.8}$$

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta}(x')\dot{-}\Gamma_{\gamma\beta\alpha}(x')=\frac{\partial g_{\beta\gamma}(x')}{\partial z^{\alpha}_{x'}(x)}. \tag{6.9}$$

式(6.7)加式(6.9)减式(6.8),有

$$\Gamma_{\gamma\beta\alpha}(x')=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x')}{\partial z^{\gamma}_{x'}(x)}+\frac{\partial g_{\beta\gamma}(x')}{\partial z^{\alpha}_{x'}(x)}-\frac{\partial g_{\gamma\alpha}(x')}{\partial z^{\beta}_{x'}(x)}\right), \tag{6.10}$$

式中 x' 是 $z^{\alpha}_{x'}(x)$的简写.

和通常的方法一样可以引入 $\eta^{\alpha\beta}$ 及 $g^{\alpha\beta}(x')$, 而

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}(x')=g^{\beta\lambda}(x')\Gamma_{\gamma\lambda\alpha}(x'). \tag{6.11}$$

由此可见, $\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}(x')$ 为相应于 $g_{\alpha\beta}(x')$ 的 **Christoffel 符号.**

有了这些准备, 张量场的协变导数就可以定出来了.

例如,对张量场$(t^{\alpha}(x'))$,相应于位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'))$求

$$t(x')\equiv t^{\alpha}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x') \quad (x'\in V_x) \tag{6.12}$$

的微分,有

$$\begin{aligned} dt(x') &= dt^{\alpha}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')+t^{\alpha}(x')d\boldsymbol{e}_{\alpha}(x') \\ &= [dt^{\beta}(x')+t^{\alpha}(x')\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}(x')dz^{\gamma}_{x'}(x')]\boldsymbol{e}_{\beta}(x'). \end{aligned} \tag{6.13}$$

当位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x'))$依式(III)变为位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$时, 由式(6.12),得到

$$t(x')=t^{\alpha}(x')A^{\beta}_{\alpha}(x',\ x)\boldsymbol{e}_{\beta}(x). \tag{6.12}^{*}$$

此时,张量$(t^{\alpha}(x'))$对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$的分量变为

$$t'^{\alpha}(x)=t^{\beta}(x')A^{\alpha}_{\beta}(x',\ x). \tag{6.14}$$

对式(6.12)*微分,有

$$dt(x') = [dt'^{\beta}(z_{x'}(x)) + t'^{\alpha}(z_{x'}(x))\Gamma'^{\beta}_{\alpha\gamma}(z_{x'}(x))dz^{\gamma}_{x'}(x)]\boldsymbol{e}_{\beta}(x)$$
$$= [dt^{\beta}(z_{x'}(x')) + t^{\alpha}(z_{x'}(x'))\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}(z_{x'}(x'))dz^{\gamma}_{x'}(x')]\boldsymbol{e}_{\beta}(x), \tag{6.14}$$

第二个等号是式(6.14)未简写的形式，需要注意的是：

$$dz^{\gamma}_{x'}(x') = \frac{\partial z^{\gamma}_{x'}(x')}{\partial z^{\lambda}_{x'}(x)} dz^{\lambda}_{x'}(x)$$
$$= \frac{\partial z^{\gamma}_{x''}(x')}{\partial z^{\lambda}_{x''}(x)}\bigg|_{x''=x'} dz^{\lambda}_{x'}(x)$$
$$= \overset{-1}{A}{}^{\gamma}_{\lambda}(x',\ x)\, dz^{\lambda}_{x'}(x).$$

所以，当位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$依 $A(x',\ x)$变为

$$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')) = (A^{\beta}_{\alpha}(x',\ x)\boldsymbol{e}_{\beta}(x))$$

时，切向量$(dz^{\alpha}_{x'}(x))$即依 $\overset{-1}{A}(x',\ x)$而变为

$$(dz^{\alpha}_{x'}(x')) = (\overset{-1}{A}{}^{\alpha}_{\beta}(x',\ x)dz^{\beta}_{x'}(x)).$$

据此，我们定义 $t^{\alpha}(x')$的**协变导数**：

$$\nabla_{\beta}t^{\alpha}(x') \equiv \frac{\partial t^{\alpha}(z_{x'}(x'))}{\partial z^{\beta}_{x'}(x')} + t^{\gamma}(z_{x'}(x')\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}(z_{x'}(x')), \tag{6.15}$$

它是以 α 为逆变指标，β 为协变指标的张量. 这一张量对位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$的分量当为

$$\nabla_{\beta}t'^{\alpha}(x) = \frac{\partial t'^{\alpha}(z_{x'}(x))}{\partial z^{\beta}_{x'}(x)} + t'^{\gamma}(z_{x'}(x))\Gamma'^{\alpha}_{\gamma\beta}(z_{x'}(x)).$$

(6.15)*

由式(6.15)，立即得到

$$dt(x') = \nabla_{\beta}t^{\alpha}(x')dz^{\beta}_{x'}(x')\boldsymbol{e}_{\alpha}(x')$$
$$= \nabla_{\beta}t^{\alpha}(x')\overset{-1}{A}{}^{\beta}_{\gamma}(x',\ x)dz^{\gamma}_{x'}(x)A^{\lambda}_{\alpha}(x',\ x)\boldsymbol{e}_{\lambda}(x)$$
$$= \nabla_{\gamma}t^{\lambda}(x)dz^{\gamma}_{x'}(x)\boldsymbol{e}_{\lambda}(x),$$

即

$$\nabla_\beta t'^\alpha(z_{x'}(x)) = \nabla_\gamma t^\lambda(z_{x'}(x'))\overset{-1}{A}{}^\gamma_\beta(x',\ x)A^\alpha_\lambda(x',\ x), \tag{6.16}$$

这就证明了协变导数的协变性.

§7 对偶位标架

为了便于叙述，我们在 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ 内引入位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的**对偶位标架** $(\boldsymbol{e}^\alpha)$，定义

$$\boldsymbol{e}^\alpha \equiv [\eta^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\beta]^T, \tag{7.1}$$

式中"T"为转置运算，

$$\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha, \tag{7.2}$$

δ^β_α 是 **Kronecker 记号**：

$$\delta^\beta_\alpha \equiv \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

因此，在这里它们没有区别：$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. 而

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}^0 &\equiv [-i,\ 0,\ 0,\ 0], \\ \boldsymbol{e}^1 &\equiv [0,\ 1,\ 0,\ 0], \\ \boldsymbol{e}^2 &\equiv [0,\ 0,\ 1,\ 0], \\ \boldsymbol{e}^3 &\equiv [0,\ 0,\ 0,\ 1]. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

当 $(\boldsymbol{e}_a)$ 依 $\overset{-1}{A} \in L(4)$ 变换时，有

$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \overset{-1}{A}{}^\beta_\alpha \boldsymbol{e}_\beta,$$

$$\eta'^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\lambda}A^\alpha_\gamma A^\beta_\lambda.$$

所以，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'^{\alpha'} &= \eta^{\alpha'\lambda'}\boldsymbol{e}_{\lambda'} = \eta^{\alpha\gamma}A^{\alpha'}_\alpha A^{\lambda'}_\gamma \overset{-1}{A}{}^\lambda_{\lambda'}\boldsymbol{e}_\lambda \\ &= \eta^{\alpha\gamma}A^{\alpha'}_\alpha \delta^\lambda_\gamma \boldsymbol{e}_\lambda = \eta^{\alpha\gamma}A^{\alpha'}_\alpha \boldsymbol{e}_\gamma = A^{\alpha'}_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha. \end{aligned}$$

可见，

$$\boldsymbol{e}'_{\alpha'}=\overset{-1}{A}{}^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha} \tag{7.4}$$

与

$$\boldsymbol{e}'^{\alpha'}=A^{\alpha'}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\alpha} \tag{7.4}^{*}$$

是等价的，即$(\boldsymbol{e}^{\alpha})$是$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$的对偶位标架.

从位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$与$(\boldsymbol{e}^{\alpha})$用直积$*$可以构成多指标位标架：

$$(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})\equiv(\boldsymbol{e}^{\beta_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{\beta_n}*\boldsymbol{e}_{\alpha_1}*\cdots*\boldsymbol{e}_{\alpha_m}). \tag{7.5}$$

当$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$依$\overset{-1}{A}$变为$(\boldsymbol{e}'_{\alpha'})$时，由式(7.4)与(7.4)*，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}'^{\beta'_1\cdots\beta'_n}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m})&=(A^{\beta'_1}_{\beta_1}\cdots A^{\beta'_n}_{\beta_n}\overset{-1}{A}{}^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\alpha_n}_{\alpha'_n}\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})\\&\equiv(\mathbb{A}^{\beta'_1\cdots\beta'_n\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n\alpha'_1\cdots\alpha'_m}\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})\equiv\mathbb{A}(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}).\end{aligned} \tag{7.6}$$

一个多指标张量$(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n})$，在位标架变换时应有

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}=t'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}\boldsymbol{e}'^{\beta'_1\cdots\beta'_n}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}. \tag{7.7}$$

因此，有张量变换式：

$$(t'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n})=(\overset{-1}{A}{}^{\beta_1}_{\beta'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\beta_n}_{\beta'_n}A^{\alpha'_1}_{\alpha_1}\cdots A^{\alpha'_m}_{\alpha_m}t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n})=\overset{-1}{\mathbb{A}}(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}). \tag{7.8}$$

上面的讨论尚须推广于规范双曲型的 Riemann 流形 $V(4)$.

对于$V(4)$的正向位标系

$$\Omega\equiv\bigcup_{\substack{A\in L^{\uparrow}_{+}(4)\\ x\in V(4)}}A(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x)),$$

$$\rho(\Omega)=+1,$$

有对偶正向位标系

$$\hat{\Omega}\equiv\bigcup_{\substack{A\in L^{\uparrow}_{+}(4)\\ x\in V(4)}}A(\boldsymbol{e}^{\alpha}(x)),$$

$$\rho(\hat{\Omega})=+1.$$

同样，可以定义多指标位标系

$$\Omega_{(mn)}\equiv\bigcup_{\substack{A\in L_+^\uparrow(4)\\ x\in V(4)}}\mathbb{A}\left(\boldsymbol{e}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}^{\beta_1\cdots\beta_n}(x)\right),$$

$$\rho(\Omega_{(mn)})=+1.$$

注意，对实或复数 a, b, 我们规定：

$$a\boldsymbol{e}_\alpha * b\boldsymbol{e}_\beta\equiv ab\boldsymbol{e}_\alpha * \boldsymbol{e}_\beta.$$

前面我们在式(7.6)中提出的 $\mathbb{A}(A\in L_+^\uparrow(4))$合成一个与 $L_+^\uparrow(4)$同态的群

$$G_+^\uparrow\equiv\bigcup_{A\in L_+^\uparrow(4)}\mathbb{A}, \tag{7.9}$$

它是群

$$G\equiv\bigcup_{A\in L(4)}\mathbb{A} \tag{7.10}$$

的子群.

上面我们强调了定向位标系 Ω, 和由 $L_+^\uparrow(4)$扩大到 $L(4)$ 而得的双向位标系 $\Omega^\pm$. 张量场在 $V(x)$ 中对局部位标架 $A(\boldsymbol{e}_a(x))$的分量仍然满足前面提出的公式.

同样的考虑亦适用于定向位标系 $\Omega_{(mn)}$, 对此，将 $G_+^\uparrow$ 扩大为 G, 亦得双向位标系

$$\Omega_{(mn)}^\pm\equiv\bigcup_{\substack{g\in G\\ x\in V(4)}}g\left(\boldsymbol{e}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}^{\beta_1\cdots\beta_n}(x)\right). \tag{7.11}$$

§8 纤维丛微积分

让我们回头讨论 $V(4)$的开复盖

$$V(4)=\bigcup_{j\in J}V_j$$

所定的局部位标架 $A(\boldsymbol{e}_a(x|j))$组成的正向位标系

$$\Omega_0(J)\equiv\bigcup_{\substack{A\in L_+^\uparrow(4)\\ j\in J}}A(\boldsymbol{e}_a(x|j)),$$

$$\rho(\Omega_0(J))=+1,$$

以及双向位标系

$$\Omega_0^{\pm}(J)\equiv\bigcup_{\substack{A\in L(4)\\ j\in J}}A(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j)),$$

$(x|j)\in V_j$是位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$的原点，是$x\in V_j$的简写.

我们已经指出：$V(4)$在点$x\in V_i\cap V_j$处的切空间$\mathscr{M}_x(4)$尽含$V(4)$在点x处的局部Lorentz位标架$\Omega^{\pm}$，表明$\mathscr{M}_x(4)$以$L(4)$为自同态拓扑群.

回忆§5一开始的讨论，由位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$导出的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$以$V_x(i)$为位标邻域，由位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$导出的位标架$(\boldsymbol{e}'_\alpha(x))$以$V_x(j)$为位标邻域，它们之间有关系

$$(\boldsymbol{e}'_\alpha(x))=\overset{-1}{A}(\boldsymbol{e}_\alpha(x)),\ \overset{-1}{A}\in L(4). \tag{8.1}$$

当$x'\in V_i\cap V_j$时，x'对$(\boldsymbol{e}'_\alpha(x))$及$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标间有$C^\infty$级关系(5.2)：

$$z'^{\alpha}_{x'}(x(j)|V_j)=f^{\alpha}_{ji}(z_{x'}(x(i)|V_i)), \tag{8.2}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} z'^{\alpha'}_{x'}&\equiv z'^{\alpha'}_{x'}(x(j)|V_j)-z^{\alpha}_{x}(x(j)|V_j),\\ z^{\alpha}_{x'}&\equiv z^{\alpha}_{x'}(x(i)|V_i)-z^{\alpha}_{x}(x(i)|V_i). \end{aligned}\right\} \tag{8.2}^*$$

$V(4)$在点x处的切向量，由式(5.3)，有下面的表达式

$$\begin{aligned} dx&=dz^{\alpha}_{x}\boldsymbol{e}_\alpha(x)=dz'^{\alpha}_{x}\boldsymbol{e}'_\alpha(x)\\ &=f^{\alpha}_{ji,\beta}(z_{x'})dz^{\beta}_{x'}\boldsymbol{e}'_\alpha(x)\\ &\equiv A^{\alpha}_{\beta}dz^{\beta}_{x}\boldsymbol{e}'_\alpha(x). \end{aligned} \tag{8.3}$$

由式(8.2)与(8.3)容易推知，

$$A:V_i\cap V_j\to L(4)$$

是(C^∞级)连续映象.

事实上，$x'\in V_i\cap V_j$，对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$与$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$的

位标 $z_{x'}(x(i)|V_i)$ 与 $z_{x'}(x(j)|V_j)$ 之间有关系 (8.2)，由式 (8.2)*，

$$z^{\alpha}_{x'}(x(j)|V_j)=f^{\alpha}_{ji}((z^{\alpha}_{x'}+z^{\alpha}_{x}(x(i)|V_i))),$$

所以

$$A^{\beta}_{\alpha}=\left.\frac{\partial f^{\alpha}_{ji}(z_{x'}+z_x(x(i)|V_i))}{\partial z^{\beta}_{x'}}\right|_{z_{x'}=0} \tag{8.4}$$

为一 C^{∞} 级函数. 这就是式(5.3).

上面我们定出了 $V(4)$ 的位标系:

$$S[V(4)=\bigcup_{j\in J}V_j|L(4)|A(x):V_i\cap V_j\to L(4)]. \tag{8.5}$$

根据纤维丛存在定理[1]，存在以 $V(4)$ 为**底空间**，$\mathscr{M}(4)$ 为**纤维空间**，$\mathscr{M}_x(4)$ 为**纤维**，$A(x)$ 为**位标变换**，$L(4)$ 为**丛群的位标纤维丛**

$$B^*\left(B\overset{\pi}{\underset{j}{\rightleftarrows}}V(4)\right.$$

$$\left.=\bigcup_{j=J}V_j\middle|\mathscr{M}(4)\overset{L(4)}{\simeq}\mathscr{M}_x(4)=\overset{-1}{\pi}(x)\middle|\phi_j(V_j*\mathscr{M}(4))=\overset{-1}{\pi}(V_j)\right). \tag{8.6}$$

我们设指标集 J 是可数的，即承认 $V(4)$ 是满足第二可数性公理的拓扑空间，此外，我们还用到了它的线性连通性.

取 $T\subset V(4)*\mathscr{M}(4)*J$，$T$ 为开集 $V_j*\mathscr{M}(4)*j$ 的并集，亦当为拓扑空间. 当 $x\in V_i\cap V_j$ 时，以位标变换 $A(x)$ 定义等价关系 $\sim:(x,\ \mathscr{M}_x(4),\ i)\sim(x',\ \mathscr{M}_{x'}(4),\ j)$，商集 $B\equiv T/\sim$ 称为**丛空间**. B 的元为 $(x,\ \mathscr{M}_x(4),\ j)$ 在 T 中依 $\sim$ 的等价类 $\{(x,\ \mathscr{M}_x(4),\ j)\}$. 记自然映射为 $q:T\to B$. 令

$$\phi_j(x,\ \mathscr{M}_x(4))\equiv q(x,\ \mathscr{M}_x(4),\ j),$$

称为**位标函数**.

$$\phi_{jx}(\mathscr{M}_x(4)) \equiv \phi_j(x,\ \mathscr{M}_x(4)),$$
$$\phi_{jx}^{-1}\phi_{jx} = A(x) \in L(4).$$

投射 $\pi: B \to V(4)$, 则

$$\phi_j: V_j * \mathscr{M}_x(4) \overset{-1}{\Leftrightarrow} \pi(V_j).$$

连续变换 $f: V(4) \to B$, 使 $\pi(f(x)) = x$, $x \in V(4)$, 称为**断面**.

这个位标纤维丛 B^* 以

$$B_*\left(B \underset{f}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} V(4) = \bigcup_{j\in J} V_j \,\middle|\, A \simeq A(x) \overset{L(4)-1}{=} \pi(x) \,\middle|\, \phi_j(V_i * A) \overset{-1}{=} \pi(V_j)\right) \tag{8.6}^*$$

为**附属主要纤维丛**.

我们定义断面 f 为 $\mathscr{M}_x(4)$ 在 $V(4)$ 上的**纤维丛积分**:

$$f(x) \equiv \int_{V(4)} \mathscr{M}_x(4). \tag{8.7}$$

当 B^* 为乘积空间产生的位标纤维丛时, 这里的积分意义与通常的相同. 因而可定义 $\mathscr{M}_x(4)$ 为 $f(x)$ 在 $x \in V(4)$ 处的**纤维丛微分**:

$$\mathscr{M}_x(4) \equiv \mathscr{D}_x f(x). \tag{8.7}^*$$

不致产生混淆时, 纤维丛积分与微分仍简称为积分与微分, 连同它们的特殊符号也可用一般符号代替.

§9 张量的纤维丛微积分

前面我们证明了以 $L(4)$ 为群的附属主要纤维丛的存在性. 现在在 $4^{(m+n)}$ 维直积空间 $\mathscr{M}^{(m+n)}(4)$ 中选取多指标位标架 $(e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})$, 则点 $P \in \mathscr{M}^{(m+n)}(4)$ 有位标 $(Y^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n})$:

$$P \equiv Y^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n} e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}. \tag{9.1}$$

由式(7.8)与(7.10),我们有

$$(\overset{-1}{\mathbb{A}}Y)^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n} = \overset{-1}{A}{}^{\beta'_1}_{\beta_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\beta'_n}_{\beta_n} A^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\cdots A^{\alpha_m}_{\alpha'_m} Y^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}, \tag{9.2}$$

同胚映象 $L(4)$于 G. 由式(7.7), P 对位标架$(e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})$的位标$(Y^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n})$, 当位标架变为$(e'^{\beta'_1\cdots\beta'_n}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}) = \mathbb{A}(e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m})$时变为$(Y'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n})$

$= \overset{-1}{\mathbb{A}}(Y^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n})$, $\mathbb{A}\in G$.

对于位标系(7.11),

$$\Omega^{\pm}_{(m+n)} \equiv \bigcup_{\substack{g\in G\\ x\in\Gamma(4)}} g(e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)),$$

根据前述纤维丛存在定理, 有以 G 为群, 以 $\Omega^{\pm}_{(mn)}(x)$为纤维, 以 $V(4)$为底空间, 以 $B^{(mn)}$ 为丛空间, 以 π 为投射, 以 $\mathbb{A}$ 为位标变换的附属主要位标纤维丛:

$$B^{(mn)}_{*}\left(B^{(mn)} \underset{f}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} V(4)\right.$$

$$= \bigcup_{j\in J} V_j \left| g \overset{G}{\simeq} g(x) = \overset{-1}{\pi}(x) \right| \begin{array}{l} \mathbb{A} = \overset{-1}{\phi}_{jx}\phi_{jx} \\ \phi_j(V_j * g) = \overset{-1}{\pi}(V_j) \\ \phi_{jx}(g) = \phi_j(x,\ g) \\ x\in V(4),\ y\in g \end{array}\right). \tag{9.3}$$

根据下节我们证明的断面存在定理,纤维丛 $B^{(mn)}_{*}$ 的断面 $f(x)$存在. 因此,在 $V(4)$上有一连续函数 $g(x)\in G$, 使

$$g(x)(e^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x))$$

为 $x\in V(4)$的连续函数, 它在 x 处为 π 投射于 x. 断面 $f(x)$为 $V(4)$上的张量场.

据此，给出 Minkowski 积空间 $\mathscr{M}^{(m+n)}(4)$ 中的张量

$$(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}),$$

即有 $V(4)$ 上的张量场，其分量为

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=(\overset{-1}{g}(x)t)^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}. \tag{9.4}$$

它在 x 处的值，对位标架$g(x)(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x))$的分量为

$$(\overset{-1}{g}(x)t)^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}\equiv\overset{-1}{g}(x)^{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta'_1\cdots\beta'_n}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m\beta_1\cdots\beta_n}t^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n};$$

对位标架$(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x))$的分量在原点 x 的值为

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}.$$

这样，从 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}$ 得出唯一的 $\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$的手续即为纤维丛积分，记作

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=\Big\{\ t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}; \tag{9.5}$$

$$V(4)$$

逆手续即为纤维丛微分，记作

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}=\mathscr{D}_x\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x). \tag{9.5}^*$$

因此，$V(4)$的度量张量场，即规范双曲型张量场

$$g_{\alpha\beta}(x)=\Big\{\ \eta_{\alpha\beta} \tag{9.6}$$

$$V(4)$$

唯一存在. 此张量场在 x 处的值，对位标架$(\boldsymbol{e}^{\alpha\beta}(x))$的分量

$$\eta_{\alpha\beta}=\mathscr{D}_x g_{\alpha\beta}(x). \tag{9.6}^*$$

§10 纤维丛积分的存在性

纤维丛积分的存在性就是断面的存在性.

我们知道[1]：以具有可数开复盖的规范空间 X 为底空间的位标纤维丛 B^*，如果丛空间 Y 是固体空间，则定义于闭子

集 $A\subset X$ 上的断面 f 可以延拓到全空间 X 上.

如果附属主要纤维丛 B_* 的丛群 G 是固体空间，则 B^*G 等价于乘积丛.

一个空间 Y 为**固体空间或固体**，是指对每一规范空间 (T_4 空间) X，在其闭集 A 上的连续映象

$$f':A\to Y, \tag{10.1}$$

恒可延拓到全空间 X，成

$$\left.\begin{aligned} &f:X\to Y,\\ &f|A=f', \end{aligned}\right\} \tag{10.1}^*$$

的空间 Y.

根据 Tietze 扩张定理[2]，立即知道，实数区间(开或闭)是固体. 一组固体空间的拓扑积也是固体空间，这只要延拓其每一分映象即可. 由此 $E(n)$ 也是固体.

为了保证纤维丛积分(9.5)等的存在性必须证明 $\mathscr{M}(4)$，以及 $\mu^{(m+n)}(4)$ 等均为固体空间. 显然，关键是证明 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ 为固体.

已知 $E(4)$ 是固体，为了方便起见，我们将 $E(4)$ 中的点记作

$$\boldsymbol{z}\equiv\begin{bmatrix} z^0\\ z^1\\ z^2\\ z^3 \end{bmatrix},$$

其拓扑决定于 Euolid 距离:

$$\|d\boldsymbol{z}\|_E\equiv(d\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{z})^{\frac{1}{2}}, \tag{10.2}$$

和前面一样，黑体字乘积理解为向量的内积. Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ 与 $V(4)$ 中的点分别记作

$$\boldsymbol{y}\equiv\begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}\equiv\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

$\mathscr{M}(4)$的拓扑决定于$\|dx\|_{\mathscr{M}}$, 实际上其固体性系由式(3.1)与(5.1)中的变换

$$\boldsymbol{y}=\phi(\boldsymbol{z}) \text{ 与 } \boldsymbol{x}=m(\boldsymbol{y})$$

而得到保证, 映象

$$\boldsymbol{A}\equiv m\phi:\ E(4)\to\mathscr{M}(4) \tag{10.4}$$

是同胚的(其实对固体性是要求 A 是同态映象即可).

如对任何线性变换

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{14} \\ \vdots \quad\ \vdots \\ A_{41}\cdots A_{44} \end{bmatrix}, \tag{10.4}^*$$

则恒有常数 k, 使

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathscr{M}}\leqslant k\|\boldsymbol{z}\|_E. \tag{10.5}$$

设 $\boldsymbol{z}_0\in E(4)$的邻域及 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{M}(4)$的邻域分别为:

$$U_E(\boldsymbol{z}_0,\ \delta)\equiv\{\boldsymbol{z}\mid\|z-z_0\|_E\langle\delta\rangle 0,\ \boldsymbol{z}\in E(4)\},$$

$$U_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{x}_0,\ \varepsilon)\equiv\{\boldsymbol{x}\mid\|x-x_0\|_{\mathscr{M}}\langle\varepsilon\rangle 0,\ \boldsymbol{x}\in\mathscr{M}(4)\}.$$

则由式 (10.5), 对任一点 $\boldsymbol{z}_0\in E(4)$及任一 $\varepsilon>0$, 只须 $0<\delta<\varepsilon/k$, 就有

$$A(U_E(\boldsymbol{z}_0,\ \delta))\subset U_{\mathscr{M}}(A(\boldsymbol{z}_0),\ \varepsilon), \tag{10.6}$$

即 A 为连续映象. $\mathscr{M}(4)$为固体空间.

§11 张量场的纤维丛微积分

再次希望注意, 我们在前面假设 $m(x)$为 $V(4)$至 $\mathscr{M}(4)$

的拓扑变换，它不同于位标邻域间的拓扑变换. $V(4)$视为连续变动的 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$(即 $\mathscr{M}_x(4)$)的包络，动空间 $\mathscr{M}_x(4)$与包络的切触点 x 构成整个 $\mathscr{M}(4)$，没有重复也没有遗漏. 这种情况可以形象化地想象为三维 Euclid 空间 $E(3)$ 中的一个连续变化的动平面切于取去一点的开球面，其切点构成动平面的有限部分，没有重复也没有遗漏.

考虑相应于式(7.7)中的恒不为 0 的张量场

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x),$$

位标架变化时，其变换如式(7.8).

以 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$为位标的点 $P(x)$，空间

$$\mathscr{H}(x)\equiv\bigcup_{g\in G}gP(x)\equiv\bigcup_{g\in G}t^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}g\left(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)\right)\qquad(11.1)$$

与 G 同构. 取 x, $x'\in V(4)$，则

$$\mathscr{H}(x)\simeq\mathscr{H}(x')\simeq\mathscr{H}.\qquad(11.2)$$

这一同构对应可由

$$g\left(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)\right)\leftrightarrow g\left(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x')\right)\qquad(11.3)$$

给出.

因此，存在以 $V(4)$为底空间，$\mathscr{H}(x)$为纤维，G 为丛群，$B^{(mn)}$ 为丛空间的位标纤维丛

$$\mathscr{B}^{*}_{(mn)}\Big(B^{(mn)}\underset{f}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}}V(4)$$

$$=\bigcup_{j\in J}V_j\,\Big|\,\mathscr{H}\simeq\mathscr{H}(x)=\overset{-1}{\pi}(x)\,\Big|\,\phi_j(V_j{*}\mathscr{H})=\overset{-1}{\pi}(V_j)\Big),\qquad(11.4)$$

它以 $\mathscr{B}^{(mn)}_{*}$ 为附属主要纤维丛. 其断面 f 为 $V(4)$上，取值于 $B^{(mn)}$ 内的连续映象：

$$f(x)\equiv t^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}g(x)\left(\boldsymbol{e}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)\right),\ g(x)\in G.\qquad(11.5)$$

$f(x)$代表 $V(4)$ 上的一个张量场，其分量

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$$

对位标架 $g(x)$ $(\boldsymbol{e}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x))$ 的值为

$$t^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}(x),$$

易证这一张量场是唯一的.

和前面一样，这一张量场为 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ 中的张量场 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$ 在 $V(4)$ 上的唯一的纤维丛积分：

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)\equiv\int_{V(4)} t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z),\ z=m(x); \qquad (11.6)$$

$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$ 为 $\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$ 的纤维丛微分：

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\equiv\mathscr{D}_x\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x),\ z=m(x). \qquad (11.6)^*$$

由 §5 知道，$x\in V(4)$ 的局部 Lorentz 位标架（以 V_x 为位标邻域）为

$$\boldsymbol{e}_\alpha(x)=(\mathscr{A})^{\alpha'}_{\alpha}(x)\boldsymbol{e}_{\alpha'}(m(x)),\ \mathscr{A}(x)\in L^+_+(4).$$

因此，

$$t^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}(x)$$

$$=(\mathscr{A})^{\alpha'_1}_{\alpha_1}(x)\cdots(\mathscr{A})^{\alpha'_m}_{\alpha_m}(x)(\overset{-1}{\mathscr{A}})^{\beta_1}_{\beta'_1}(x)\cdots(\overset{-1}{\mathscr{A}})^{\beta_n}_{\beta'_n}(x)t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z),$$

式中

$$z=m(x),$$

为对位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(z))$ 的位标.

可以证明：关于 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$ 恒不为 0，这一条件可以去掉.

设点集

$$\mathscr{F}\equiv\{z\,|\,(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z))=(0),\ z\in\mathscr{M}(4)\},$$

则

$$(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z))\neq(0),\ z\in(\mathscr{M}-\mathscr{F}).$$

考虑以 $V(4)-\overset{-1}{m}(\mathscr{F})$ 为底空间的子纤维丛可得张量场

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=\int_{V(4)-\bar{m}^{-1}(\mathscr{F})} t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z). \tag{11.7}$$

对 $z\in\mathscr{F}$, 取以 z 为中心的球 $C(z)$, 使

$$|t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)|<k^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n},\ z\in C(z). \tag{11.8}$$

考虑以 $m^{-1}(\bigcup_{z\in\mathscr{F}}C(z))$ 为底空间的子纤维丛可得张量场

$$\mathscr{T}^{*\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=\int_{\bar{m}^{-1}(\bigcup_{z\in\mathscr{F}}C(z))}(t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)+k^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}). \tag{11.9}$$

于是

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=\mathscr{T}^{*\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)-\mathscr{K}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x), \tag{11.10}$$

$$x\in(V(4)-\bar{m}^{-1}(\mathscr{F}))\cap\bar{m}^{-1}(\bigcup_{z\in\mathscr{F}}C(z)).$$

因此, 可以推广 $\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$, 使于 $\bar{m}^{-1}(\mathscr{F})$ 上等于

$$\mathscr{T}^{*\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)-\mathscr{H}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x),$$

而不失其连续性, 得出

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)=\int_{V(4)} t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z). \tag{11.11}$$

§12 纤维丛积分的光滑性

在全体局部位标架 $A(e_\alpha(x))$, $A\in L(4)$ 中, 某些位标架将称为**规范位标架**, 并记作 $(\overset{*}{e}_\alpha(x))$, 如果它相应的 Christoffel 符号 $\overset{*}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 在原点 x 为零的话.

可微张量场 $\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)$ 对于以 x 为原点的规范(位标架的) 位标 $(z^\alpha)\in V_x$ 表写为 $\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$, 则它的协变导数 $\nabla_\gamma\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$ 在 x 处的值即退化为通常的偏导数:

$$\nabla_\gamma \mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^\gamma}\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{12.1}$$

注意，

$$d\overset{*}{e}_\alpha(x) = \overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}(x)dz^\beta \overset{*}{e}_\gamma(x). \tag{12.2}$$

于是与$(\overset{*}{e}_\alpha(x))$相邻的规范位标架为

$$\begin{aligned}\overset{*}{e}_\alpha(x\dot{+}dx) &\sim \overset{*}{e}_\alpha(x) + d\overset{*}{e}_\alpha(x)\\ &= (1+\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}(x)dz^\beta)\overset{*}{e}_\gamma(x).\end{aligned} \tag{12.3}^{*)}$$

如果张量

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x') = \left\{t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\right.$$

对位标架$(\overset{*}{e}{}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x))$的分量为$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$，对位标架$(\overset{*}{e}{}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x\dot{+}dx))$的分量为$\mathscr{T}'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z')$，则有

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\overset{*}{e}{}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x)\\ &= \mathscr{T}'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z')\prod_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}}(1+\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha_i}_{\beta_j\gamma}(x)dz^\gamma)\overset{*}{e}{}^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(x).\end{aligned} \tag{12.4}$$

取$x'\equiv x\dot{+}dx$，则$z'=0$，而

$$\mathscr{T}'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(0) = t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(m(x\dot{+}dx)) = t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z\dot{+}dz),\ z=m(x),$$

即

$$\mathscr{T}'^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(0) = t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z) + \frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^\gamma}dz^\gamma. \tag{12.5}$$

因为$\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}(x)=0$，所以

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z) = t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z) + \frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^\gamma}dz^\gamma. \tag{12.5}^*$$

在V_x内，$x\dot{+}dx$对$(\overset{*}{e}_\alpha(x))$的位标$(d\overset{*}{z}{}^\alpha)$恰为$\mathscr{M}(4)$内的$m(x\dot{+}dx)$及$m(x)$对$(\overset{*}{e}_\alpha m(x))$[此即$(\overset{*}{e}_\alpha(x))$置于$\mathscr{M}(4)$内与$(e_\alpha)$同原点的位标架]的位标差$(dz^\alpha)$，所以

---

*) “$\dot{+}$”表示所加之量略去了二阶以上的无穷小量.

$$d\overset{*}{z}^{\alpha}=dz^{\alpha}.$$

以 dz^{α} 代替式(12.5)*左端的 z^{α}, 得

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(dz)=t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)+\frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^{\gamma}}dz^{\gamma},$$

而

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\big|_{z=0}=t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z),$$

所以

$$d\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\big|_{z=0}=\frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^{\gamma}}dz^{\gamma}. \tag{12.6}$$

由此可见, 对于以 x 为原点的规范位标架($\overset{*}{e}_{\alpha}(x)$), 协变导数

$$\nabla_{\gamma}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)\big|_{z=0}=\frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^{\gamma}}. \tag{12.7}$$

高阶协变导数亦同此理.

这样, 我们就证明了: 如果 $t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)$ 为 r 级可微的, 则其纤维丛积分张量也是 r 级可微的. 而且

$$\nabla_{\gamma}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)=\int_{V(4)}\frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m}_{\beta_1\cdots\beta_n}(z)}{\partial z^{\gamma}} \tag{12.8}$$

可以写作

$$\nabla_{\gamma}\equiv\int_{V(4)}\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}}. \tag{12.8}*$$

§13 Lorentz 群与自旋群

1. 我们约定: "$-$"号表示复数的**共轭**运算, 如$(\overline{x+iy})\equiv x-iy$; "^{T}"号表示矩阵的**转置**运算, 如$[a_{ij}]^{\mathsf{T}}\equiv[\overset{\mathsf{T}}{a}_{ij}]\equiv[a_{ji}]$; "$*$"表示矩阵的**随伴**运算, 如$[a_{ij}]^{*}\equiv[\bar{a}_{ij}]^{\mathsf{T}}\equiv[\bar{a}_{ji}]$; γ_{α} 表示满足对易关系

$$\left.\begin{aligned}\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha&=-2\eta_{\alpha\beta}e,\\ \gamma_\alpha^*&=-\eta_{\alpha\alpha}\gamma_\alpha,\end{aligned}\right\}\tag{D}$$

的 **Dirac 矩阵**, 简记作 $\gamma_\alpha\in(\mathrm{D})$, 式中 e 为单位矩阵. 容易验证: 如果 M 满足条件

$$M^*M=\pm e,\ \pm ie,\tag{E}$$

则

$$M\gamma_\alpha\overset{-1}{M}\in(\mathrm{D}).$$

下面的 4 个矩阵都满足对易关系 (D), 称为**标准 Dirac 矩阵**:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0&\equiv\begin{bmatrix}0&0&0&+1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\+1&0&0&0\end{bmatrix};\\ \gamma_1&\equiv\begin{bmatrix}+i&0&0&0\\0&+i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&-i\end{bmatrix};\\ \gamma_2&\equiv\begin{bmatrix}0&0&0&+1\\0&0&+1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix};\\ \gamma_3&\equiv\begin{bmatrix}0&0&+1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&+1&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{13.1}$$

下面用到 γ_α 时, 即指式(13.1)中的标准 Dirac 矩阵.

易知:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0\gamma_\alpha\overset{-1}{\gamma_0}&=-\gamma_\alpha^*,\\ \overline{\gamma}_0\overline{\gamma}_\alpha\overline{\gamma}_0^{-1}&=-\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha.\end{aligned}\right\}\tag{13.2}$$

就 Minkowski 空间的正规正交位标以 $\eta_{\alpha\beta}$ 表示其度量张量，引入 **Clifford 代数** Γ^e，这是在复数域 C 上依 γ_α 及单位元 e 形成的代数.

注意，希腊字母指标取值 0, 1, 2, 3, 为张量指标；拉丁字母指标取值 1, 2, 3, 4, 为旋量指标. 这一代数的特征由对易关系(D)决定. 由(D)推知: 当 $\alpha\neq\beta$ 时，矩阵 γ_α 与 γ_β 是反交换的; 当 $\alpha=\beta$ 时，$\gamma_\alpha\gamma_\alpha=-\eta_{\alpha\alpha}e$.

引入矩阵乘积

$$\gamma_\alpha,\ \gamma_\alpha\gamma_\beta,\ \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma,\ \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta,\tag{13.3}$$

下标 α, β, γ, δ 是各不相同的. 由对易关系 (D)，易证式(13.3)中所有矩阵的迹均为 0. 例如:

$$\begin{aligned}Sp(\gamma_\alpha)&=Sp\left[\gamma_\alpha\left(-\frac{\gamma_0\gamma_0}{\eta_{00}}\right)\right]=Sp(\gamma_\alpha\gamma_0\gamma_0)\\&=-Sp(\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0)=-Sp(\gamma_\alpha),\end{aligned}$$

所以

$$Sp(\gamma_\alpha)=0;$$

$$Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta)+Sp(\gamma_\beta\gamma_\alpha)=2Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta)=0,\ \alpha\neq\beta,$$

所以

$$Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta)=0;$$

$$\begin{aligned}Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma)&=Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_0\gamma_0)\\&=-Sp(\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_0)\\&=-Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma),\ \alpha\neq\beta\neq\gamma,\end{aligned}$$

所以

$$Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma)=0;$$

$$
\begin{aligned}
Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta) &= Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_0\gamma_0) \\
&= -Sp(\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_0) \\
&= -Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta),\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta,
\end{aligned}
$$

这是由于 α, β, γ, δ 中必有一个为 0, 所以

$$
Sp(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta)=0.
$$

因此, 得到下列 16 个 4×4 矩阵:

$$
\gamma^A\equiv\begin{cases}
e; \\
\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3; \\
\gamma_0\gamma_1,\ \gamma_0\gamma_2,\ \gamma_0\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2,\ \gamma_1\gamma_3,\ \gamma_2\gamma_3; \\
\gamma_0\gamma_1\gamma_2,\ \gamma_0\gamma_1\gamma_3,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_0\gamma_2\gamma_3; \\
\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.
\end{cases}
$$

γ^A 具有性质:

$$
\left.\begin{aligned}
&Sp(\gamma^A)=0,\ \gamma^A\neq e; \\
&Sp(\gamma^A\gamma^B)=0,\ A\neq B; \\
&\gamma^A\gamma^A=\pm e.
\end{aligned}\right\} \tag{13.4}
$$

这 16 个矩阵 γ^A 在复数域 C 内是线性无关的, $A=1, 2, \cdots, 16$. 事实上, 设 C_A 为复常数, 若有

$$
C_A\gamma^A=0, \tag{13.5}
$$

则

$$
C_A\gamma^A\gamma^B=\sum_{A\neq B}C_A\gamma^A\gamma^B\pm C_Be=0.
$$

取上式的迹, 得

$$
\sum_{A\neq B}C_ASp(\gamma^A\gamma^B)\pm C^BSp(e)=\pm4C^B=0,
$$

所以

$$
C_B=0,\ B=1, \cdots, 16. \tag{13.5}^*
$$

由关系 (D), 若干个 γ_a 的乘积恒可以简化为这 16 个 γ^A 的线性组合. 所以, 以 C 为系数域, $\{\gamma^A\}$ 为底的向量空间的

组合代数正好是由 γ_α 所产生的 Clifford 代数 Γ^C.

一切复数元 4×4 矩阵的代数与 Γ^C 重合.

Γ^C 中存在逆元 $\overset{-1}{A}$ 的元 A 称为**正规元**, Γ^C 的正规元组成一个乘法群 $\overset{*}{\Gamma}{}^C$. 如果 $M\in\overset{*}{\Gamma}{}^C$, 则

$$\tau(M):\ N\to MN\overset{-1}{M},\ N\in\Gamma^C,$$

为 Γ^C 的自同构.

我们给出下面结果的证明:

1° 一切能与 γ_α 交换的复数元 4×4 矩阵一定具有 ae, $a\in C$, 的形式.

复数元 4×4 矩阵 $\mathscr{X}$ 可以表示成

$$\mathscr{X}=C_A\gamma^A,\ C_A\in C. \tag{13.6}$$

根据条件 $\mathscr{X}\gamma_\alpha=\gamma_\alpha\mathscr{X}$, $\alpha=0,1,2,3$, 即 $\mathscr{X}=\gamma_\alpha\mathscr{X}\overset{-1}{\gamma_\alpha}$. 能与 γ_α 交换必能与 γ^A 交换, 因此式(13.6)成为

$$C_A\gamma^A=C_A\gamma_\alpha\gamma^A\overset{-1}{\gamma_\alpha}. \tag{13.6}^*$$

由于 $\gamma_\alpha\in\overset{*}{\Gamma}{}^C$, $\tau(\gamma_\alpha)\gamma^A=\pm\gamma^B$, $A\neq1$时, $B\neq A$. 对式(13.6)*中的任一项, 加"·"的指标这里表示不求和, 有

$$C_{\dot A}\gamma^{\dot A}=C_{\dot B}\overset{-1}{\gamma_\alpha}\gamma^{\dot B}\gamma_\alpha,$$

用 $\gamma^A(A\neq1$, 即 $\gamma^A\neq e)$右乘上式并取其迹, 得

$$4C_A=0,\ A\neq1. \tag{13.7}$$

2° 设$\{\gamma'_\alpha\}$是另一组满足关系(D)的 4×4 矩阵, 必有矩阵 $M\in\overset{*}{\Gamma}{}^C$, 使

$$\gamma'_\alpha=\tau(M)\gamma_\alpha, \tag{13.8}$$

M 除一个复数因子外是唯一的.

取 $$M\equiv\sum_A(\gamma'^A F\overset{-1}{\gamma^A}),$$

F 为一 4×4 矩阵. 我们可以选择 F 使 M 至少有一个非 0 元, 因为不论 F 为何, M 恒为 0, 则 γ^A 将是线性相关的, 对此, 有

$$\gamma'^B\overset{-1}{M}\gamma^B=\sum_A(\gamma'^B\gamma'^A\overset{-1}{F}\gamma^A\gamma^B)$$

$$=\sum_A(\gamma'^A\overset{-1}{F}\gamma^A)=M,$$

即

$$\gamma'^BM=M\gamma^B. \tag{13.9}$$

再证 M 有逆元 $\overset{-1}{M}$. 取

$$N\equiv\sum_A(\gamma^A\overset{-1}{G}\gamma'^A),$$

G 为一 4×4 矩阵. 同上可证

$$\gamma^BN=N\gamma'^B. \tag{13.9}^*$$

由式(13.9)与(13.9)*, 则

$$\gamma^BNM=N\gamma'^BM=NM\gamma^B,$$

NM 与一切 γ^B 可交换. 由 1°,

$$NM=Ce,$$

从而

$$C=\frac{1}{4}Sp(NM).$$

因此可以选择 G, 使

$$Sp(NM)\equiv N^s_tM^t_s=\frac{1}{4}, \tag{13.10}$$

我们常用 N^s_t 等来表示矩阵 N 第 s 行 t 列的元.

这样一来, 就有

$$N=\overset{-1}{M}. \tag{13.11}$$

由式(13.9), 得

$$\gamma'^B=M\gamma^B\overset{-1}{M}. \tag{13.12}$$

如果还有一个满足关系(13.8)的 4×4 矩阵 M', 则由式

(13.12)应有 $$M\gamma^B\bar{M}=M'\gamma^B\bar{M}',$$

以 $\bar{M}$ 左乘, M' 右乘上式两端,得

$$\gamma^B\bar{M}M'=\bar{M}M'\gamma^B.$$

由 1°, $$\bar{M}M'=C'e,$$

即 $$M'=C'e. \tag{13.13}$$

3° $\det\gamma_\alpha=+1.$

由 $\gamma_\alpha^2=-\eta_{\alpha\alpha}e$, 所以

$$(\det\gamma_\alpha)^2=+1,$$

即 $$\det\gamma_\alpha=\pm1. \tag{13.14}$$

前面引入的标准 Dirac 矩阵 γ_α 的行列式为 +1, 因而由 2°, 对其它的表现矩阵 γ'_α 应有

$$\det\gamma'_\alpha=\det(M\gamma_\alpha\bar{M})=\det\gamma_\alpha=+1. \tag{13.14}^*$$

定义 γ_α 的**对偶矩阵** γ^α:

$$\gamma^\alpha\equiv\gamma_\beta\eta^{\alpha\beta}. \tag{13.15}$$

因而有**标准 Dirac 对偶矩阵**:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^0&\equiv\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&+1&0\\0&+1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix};\quad
\gamma^1\equiv\begin{bmatrix}+i&0&0&0\\0&+i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&-i\end{bmatrix};\\
\gamma^2&\equiv\begin{bmatrix}0&0&0&+1\\0&0&+1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix};\quad
\gamma^3\equiv\begin{bmatrix}0&0&+1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&+1&0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.1}^*$$

对此，有

4° 当 $\lambda \neq \mu$ 时，

$$\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha = 0. \tag{13.16}$$

由对易关系(D)：

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\alpha &= -(2\eta_{\alpha\lambda} e + \gamma_\lambda \gamma_\alpha)\gamma_\mu \gamma^\alpha \\ &= -2\gamma_\mu \gamma_\lambda + \gamma_\lambda (2\eta_{\alpha\mu} + \gamma_\mu \gamma_\alpha)\gamma^\alpha \\ &= 2\gamma_\lambda \gamma_\mu + 2\gamma_\lambda \gamma_\mu - 4\gamma_\lambda \gamma_\mu \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. 考虑以实数体 R 为系数，以 16 个矩阵 γ^A 为底的向量空间，与 **1** 中 Γ^0 相应而有组合代数 Γ. Γ 之元与所有的 γ_α 可交换者必形为 ae, $a \in R$. Re 是 Γ 的**中心**.

Γ 的正规元组成乘法群 $\overset{*}{\Gamma}$. Γ 作为实向量空间具有实的 C^ω 级流形的结构，Γ 之元为解析的. 其次，如果 $\Lambda \in \overset{*}{\Gamma}$，则 $\overset{-1}{\Lambda}$ 为 Λ 的解析函数. 因此，$\overset{*}{\Gamma}$ 上可以确定一个 Lie 群结构.

如果 $\Lambda \in \overset{*}{\Gamma}$，则 $\tau(\Lambda)$ 在 $\overset{*}{\Gamma}$ 上的限制

$$\theta(\Lambda): N \to \Lambda N \overset{-1}{\Lambda},\ N \in \Gamma$$

是 Γ 的自同构. $\Lambda \to \theta(\Lambda)$ 为 $\overset{*}{\Gamma}$ 的一个表现，这一表现的核是 $\overset{*}{\Gamma}$ 与 Γ 的中心的交集.

如果 $N \in \Gamma^0$，则它的行列式不因 $\tau(M)$，$M \in \overset{*}{\Gamma}{}^0$，之作用而改变. 引入以 $\{\gamma_\alpha\}$ 为底的 Γ 的子空间 $\mathfrak{M}$，元 $\Lambda \in \overset{*}{\Gamma}$ 满足**条件**：

$$\left.\begin{aligned}&\theta(\Lambda): \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}; \\ &\det \Lambda = +1.\end{aligned}\right\} \tag{S}$$

Λ 的全体为 $\overset{*}{\Gamma}$ 的一个闭子群，记作 G. 这是我们将要仔细研究的，称之为**自旋群**，并将记作 $\mathrm{Spin}(4)$.

取 $\Lambda\in G$, 则 $\theta(\Lambda)\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$. 但 $\mathfrak{M}$ 以$\{\gamma_\alpha\}$为底, 则

$$\theta(\Lambda)\gamma_\alpha=A_\alpha^\beta\gamma_\beta, \tag{13.17}$$

式中 $A\equiv[A_\alpha^\beta]$是 4×4 实矩阵. 设

$$M=r^\alpha\gamma_\alpha,\ r^\alpha\in R,$$

为 $\mathfrak{M}$ 中的一个元. 由关系(D),

$$M^2=(r^\alpha\gamma_\alpha)^2=r^\alpha r^\beta\gamma_\alpha\gamma_\beta=-(r^\alpha r^\beta\eta_{\alpha\beta})e,$$

所以

$$\theta(\Lambda)M^2=\Lambda M^2\Lambda^{-1}=-(r^\alpha r^\beta\eta_{\alpha\beta})e. \tag{13.18}$$

另一方面, 由定义和式(13.17), 有

$$\theta(\Lambda)M^2=r^\alpha r^\beta\theta(\Lambda)(\gamma_\alpha\gamma_\beta)=r^\alpha r^\beta(\theta(\Lambda)\gamma_\alpha)(\theta(\Lambda)\gamma_\beta)$$

$$=r^\alpha r^\beta A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu\gamma_\lambda\gamma_\mu=\frac{1}{2}r^\alpha r^\beta A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu(\gamma_\lambda\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_\lambda)$$

$$=-(r^\alpha r^\beta A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu\eta_{\lambda\mu})e. \tag{13.18}^*$$

比较式(13.18)与(13.18)*, 得

$$\eta_{\alpha\beta}=A_\alpha^\lambda A_\beta^\mu\eta_{\lambda\mu}. \tag{13.19}$$

式(13.19)表明, 矩阵 $A\in L(4)$.

$\Lambda\in G$, $\theta(\Lambda)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的限制对 $\mathfrak{M}$ 起自同态作用, 记作 $\bar\theta(\Lambda)$. $\bar\theta(\Lambda)$的全体记作 $\bar\theta(G)$, 于是

$$\bar\theta(G)\subset L(4). \tag{13.20}$$

易见, $\Lambda\in G\to A\in L(4)$ 是 G 在 $L(4)$ 中的同态. 事实上, 如果 Λ, $\Lambda'\in G$, 则由式(13.17);

$$\bar\theta(\Lambda)\gamma_\alpha=\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}=A_\alpha^\beta\gamma_\beta,\quad A\equiv[A_\alpha^\beta]\in L(4);$$

$$\bar\theta(\Lambda')\gamma_\gamma=\Lambda'\gamma_\gamma\Lambda'^{-1}=B_\gamma^\alpha\gamma_\alpha,\ B\equiv[B_\gamma^\alpha]\in L(4).$$

于是 $$\bar\theta(\Lambda'\Lambda)\gamma_\alpha=\Lambda'\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}=B_\gamma^\alpha A_\alpha^\beta\gamma'_\beta,$$

所以 $\Lambda'\Lambda$ 相应于 BA.

3. 我们已经看到齐次 Lorentz 群 $L(4)$ 含有四个部分.

Spin(4)与恒等变换连通的部分成一子群,记作$\mathrm{Spin}^{+}(4)$.

由次节关于 Lie 代数的讨论,知

$$\dim\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)\}=\dim L_{+}^{+}(4);$$

但由式(13.20),应有

$$\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)\}=L_{+}^{+}(4). \tag{13.21}$$

由 Spin(4) 之某元, 经 $\bar{\theta}$ 变换可以成为空间的对称变换.为此取 $\gamma_0\in G$, 则

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\gamma_0)\gamma_\alpha&=\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0^{-1}=-(2\eta_{0\alpha}e+\gamma_\alpha\gamma_0)\gamma_0^{-1}\\&=-2\eta_{0\alpha}\gamma_0-\gamma_\alpha=[S_e]_\alpha^\beta\gamma_\beta,\end{aligned}\tag{13.22}$$

这里 S_e 是空间对称变换矩阵:

$$S_e\equiv\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix};$$

$S_e\in L_{+}^{-}(4)$, 所以 $\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\}\supset L_{+}^{-}(4)$.

由 Spin(4)之某元,经 $\bar{\theta}$ 变换可以成为时间对称变换. 为此取 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\in G$, 则

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha&=(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)^{-1}\\&=2\sum_{a=1}^{3}\eta_\alpha^a\gamma_a-\gamma_\alpha=[S_t]_\alpha^\beta\gamma_\beta,\end{aligned}\tag{13.23}$$

这里 S_t 是时间对称变换矩阵:

$$S_t\equiv\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$S_t \in L_-(4)$，所以 $\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\} \supset L_-(4)$.

由 $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \in G$，立即得到时空对称变换：

$$\bar{\theta}(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\gamma_\alpha = [S_e S_t]^\beta_\alpha \gamma_\beta \equiv [S_{et}]^\beta_\alpha \gamma_\beta, \qquad (13.24)$$

$S_{et} \in L_+^-(4)$，所以 $\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\} \supset L_+^-(4)$.

以上证明了：$\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\} \supset L(4)$；但 $\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\} \subset L(4)$；所以

$$\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}(4)\} = L(4). \qquad (13.25)$$

$\bar{\theta}$ 在 $\mathrm{Spin}(4)$ 上的限制 p 给出了 $\mathrm{Spin}(4)$ 与 $L(4)$ 的同态. 它的核是 G 与 Γ 的中心 Re 的交集. 而矩阵 $ae(a \in R)$ 属于 G 的充要条件是 $a = \pm 1$. 所以同态核 K 由两个元素 $\pm e$ 组成，$L(4)$ 与 $L(4)$ 对核 K 的商群 $L(4)/K$ 同构.

$K \subset \mathrm{Spin}(4)$ 这一事实还可以精确化.

首先，矩阵

$$\Lambda(t) \equiv \exp(t\gamma_1\gamma_2) = (e\cos t + \gamma_1\gamma_2 \sin t) \in \mathrm{Spin}_+^+(4), \qquad (13.26)$$

式中 $t \in R$；其次，行列式

$$\det \Lambda(t) = \exp(t Sp(\gamma_1\gamma_2)) = \exp(0) = +1^{*)};$$

计及 Cauchy 问题：

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(-t)\frac{d\Lambda(t)}{dt} &= \gamma_1\gamma_2, \\ \Lambda(0) &= e, \end{aligned}\right\} \qquad (13.27)$$

---

*) 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\det(T - \lambda e) = 0$ 的根，则

$$\exp T = e + T + \frac{T^2}{2!} + \cdots$$

的特征值为 $\exp\lambda_1, \cdots, \exp\lambda_n$，而

$$\det(\exp T) = \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \exp(Sp T),$$

因为

$$Sp(T) = Sp(CTC^{-1}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

的解的唯一性，则有式(13.26)的第一个等号. 于是:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda(t)\gamma_1\overset{-1}{\Lambda}(t)=\gamma_1\cos 2t+\gamma_2\sin 2t;\\ &\Lambda(t)\gamma_2\overset{-1}{\Lambda}(t)=-\gamma_1\sin 2t+\gamma_2\cos 2t;\\ &\Lambda(t)\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}(t)=\gamma_\alpha,\ \alpha\neq 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \qquad (13.28)$$

所以 $\theta(\Lambda(t))$ 不改变 $\mathfrak{M}$，相当于平面(1, 2)上的一个旋转，即 $\Lambda(t)\in\mathrm{Spin}_+^+(4)$，这是式(13.26)的第二个等号.

令 $t=0,\ \pi$，得$\mathrm{Spin}_+^+(4)$的两个元

$$\Lambda(0)=e,\ \Lambda(\pi)=-e, \qquad (13.26)^*$$

所以 $\mathrm{Spin}_+^+(4)$ 为 $L_+^+(4)$ 的 2 级复盖；$\mathrm{Spin}(4)$ 为 $L(4)$ 的 2 级复盖. 自然映象 $p:\mathrm{Spin}(4)\to L(4)$，即 $p\Lambda=[A_\alpha^\beta]\equiv A$，$A\in L(4)$，$\Lambda\in\mathrm{Spin}(4)$，而有式(13.17). $p\overset{-1}{A}$ 有两个矩阵 $\pm\Lambda$，$\det(\pm\Lambda)=+1$，满足式(13.17).

$\mathrm{Spin}(4)$ 的三个子群映象为 $L(4)$ 的三个子群 $L_+^-(4)$，$L_-^-(4)$及 $L_-^+(4)$，分别记作 $\mathrm{Spin}_+^-(4)$，$\mathrm{Spin}_-^-(4)$及 $\mathrm{Spin}_-^+(4)$.

§14 $L(4)$与 Spin(4) 的两种 Lie 代数的同构

由上节结果可以证明，映象 p 诱导出群 Spin(4)的 Lie 代数 **Spin(4)**及群 $L(4)$ 的 Lie 代数 $\boldsymbol{L}(4)$ 间的同构，其同构映象记为 $\boldsymbol{p}$.

取 $\Lambda(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，为$\mathrm{Spin}_+^+(4)$中的可微路径，由 p，$\Lambda(t)$对应于 $L_+^+(4)$中的路径 $A(t)$，

$$\theta(\Lambda(t))\gamma_\alpha=\Lambda(t)\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}(t)=A_\alpha^\beta(t)\gamma_\beta,\ [A_\alpha^\beta(t)]\equiv A. \qquad (14.1)$$

对 $\overset{-1}{\Lambda}\Lambda=e$ 求导，得

$$\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}+\frac{d\overset{-1}{\Lambda}(t)}{dt}\Lambda(t)=0; \tag{14.2}$$

对式(14.1)求导，得

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt}\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}(t)+\Lambda(t)\gamma_\alpha\frac{d\overset{-1}{\Lambda}(t)}{dt}=\frac{dA^\beta_\alpha(t)}{dt}\gamma_\beta. \tag{14.3}$$

以 $\overset{-1}{\Lambda}(t)$ 左乘，$\Lambda(t)$ 右乘上式，并注意式(14.2)，得

$$\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}\gamma_\alpha-\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}$$

$$=\frac{dA^\beta_\alpha(t)}{dt}\overset{-1}{\Lambda}(t)\gamma_\beta\Lambda(t).$$

由式(13.17)，有

$$\overset{-1}{\Lambda}(t)\gamma_\beta\Lambda(t)=A^\gamma_\beta(t)\gamma_\gamma,\ [A^\gamma_\beta(t)]\equiv\overset{-1}{A}(t).$$

于是

$$\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}\gamma_\alpha-\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}=\left[\overset{-1}{A}(t)\frac{dA(t)}{dt}\right]^\beta_\alpha\gamma_\beta. \tag{14.4}$$

$\overset{-1}{\Lambda}(t)\frac{d\Lambda(t)}{dt}\equiv\lambda\in\mathbf{Spin}(4)$，则 $\boldsymbol{p}\lambda\equiv\mu\in\boldsymbol{L}(4)$. 它们之间具有关系：

$$\lambda\gamma_\alpha-\gamma_\alpha\lambda=\mu^\beta_\alpha\gamma_\beta \tag{14.5}$$

或

$$\lambda\gamma^\alpha-\gamma^\alpha\lambda=\mu^{\alpha\beta}\gamma_\beta, \tag{14.5}^*$$

式中$(\mu^{\alpha\beta})$为相应于(μ^β_α)的反称逆变张量.

反之，给定 $\mu\in\boldsymbol{L}(4)$，则相应的 $\lambda\in\mathbf{Spin}(4)$ 可由式(14.5)*右乘 γ_α，计及关系(D)，而得到

$$4\lambda+\gamma^{\alpha}\lambda\gamma_{\alpha}=-\mu^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}. \tag{14.6}$$

由式(13.16),知

$$\lambda=-\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} \tag{14.7}$$

满足式(14.6),是方程(14.5)的一个特解. 由 **1**-1° 知,齐次方程

$$\lambda\gamma^{\alpha}-\gamma^{\alpha}\lambda=0$$

的通解为

$$\lambda=a\varepsilon. \tag{14.7}^{*}$$

所以方程(14.5)的通解当为

$$\lambda=-\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}+a\varepsilon. \tag{14.8}$$

为了使得 $\Lambda\equiv\exp\lambda\in\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)$ 满足条件

$$\det\Lambda=+1$$

的充要条件*)是 $Sp\lambda=0$, 即 $a=0$. 故方程(14.5)的唯一解就是(14.7).

因此,两种 Lie 代数间的同构映象

$$\boldsymbol{p}:\mathbf{Spin}(4)\to\boldsymbol{L}(4), \tag{14.9}$$

可以确定为:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\overset{-1}{\boldsymbol{p}}(\mu)\equiv-\frac{1}{4}\mu^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta};\\&\lambda\in\mathbf{Spin}(4),\ \mu\in\boldsymbol{L}(4).\end{aligned}\right\} \tag{14.9}^{*}$$

下面证明上节引用过的结果:

$$\dim\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)\}=\dim L_{+}^{+}(4). \tag{14.10}$$

设 $r\equiv\dim\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)\}$, $s\equiv\dim L_{+}^{+}(4)$. 这就是说,$\bar{\theta}\{\mathrm{Spin}_{+}^{+}(4)\}$的独立参数有 r 个,由式(13.17)可知 $r\leqslant s$. 反

*) 见 p 46 的脚注.

之，设 $A\in L_+^\dagger(4)$ 具有 s 个独立参数 τ_1，τ_2，$\cdots$，τ_s，则 $\overset{-1}{\Lambda}\partial\Lambda/\partial\tau_i$ 可自 $\overset{-1}{A}\partial A/\partial\tau_i$ 求得. 从而，Λ 至少有 s 个独立参数 τ_1，τ_2，$\cdots$，τ_s，即 $r\geqslant s$. 所以 $r=s$.

§15 张量，旋量，混合量

1. 沿用前面的记号，由式(13.17)，对 $\Lambda\in\mathrm{Spin}(4)$，及 $A\in L(4)$，有

$$\theta(\Lambda)\gamma_\alpha=\Lambda\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}=A_\alpha^\beta\gamma_\beta.$$

因此，

$$\overset{*}{\Lambda}^{-1}\overset{*}{\gamma}_\alpha\overset{*}{\Lambda}=A_\alpha^\beta\overset{*}{\gamma}_\beta.$$

注意式(13.2)，得

$$\overset{*}{\Lambda}^{-1}\gamma_0\gamma_\alpha\gamma_0\overset{-1}{\Lambda}\overset{*}{\Lambda}=A_\alpha^\beta\gamma_0\gamma_\beta\gamma_0,$$

所以

$$(\gamma_0\overset{-1}{\Lambda}\overset{*}{\Lambda}^{-1}\gamma_0)\gamma_\alpha(\gamma_0\overset{-1}{\Lambda}\overset{*}{\Lambda}\gamma_0)=A_\alpha^\beta\gamma_\beta=\Lambda\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}. \tag{15.1}$$

此式表明，存在一个 Λ 的复连续函数 $a(\Lambda)$，使

$$\Lambda=a(\Lambda)\gamma_0\overset{-1}{\Lambda}\overset{*}{\Lambda}^{-1}\gamma_0. \tag{15.2}$$

取式(15.2)的行列式，得

$$a^2(\Lambda)=1,$$

即

$$a(\Lambda)=\pm1.$$

在 Spin(4) 的每一连通部分，连续函数 $a(\Lambda)$ 既然取离散的值，则必到处仅取同一个值. 如果 $\Lambda=e$ 和 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 时，则 $a(\Lambda)=+1$；如果 $\Lambda=\gamma_0$，则 $a(\Lambda)=-1$. 所以式(15.2)可以写成

$$\Lambda=\rho(\Lambda)\gamma_0\overset{-1}{\Lambda}\overset{*}{\Lambda}^{-1}\gamma_0, \tag{15.2}^*$$

式中 $\rho(\Lambda)$ 是矩阵 Λ 的定向标量.

2. 我们知道 $\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha$ 也满足对易关系(D):

$$\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\beta+\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\beta\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha=-2\eta_{\alpha\beta}e.$$

因此,存在矩阵 C, 使

$$C\gamma_\alpha\overset{-1}{C}=-\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha. \tag{15.3}$$

于是,

$$\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha\overset{\mathrm{T}}{C}=-\gamma_\alpha,$$

即

$$\overset{\mathrm{T}}{C}\gamma_\alpha\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}=-\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha. \tag{15.3}^*$$

由式(15.3)与(15.3)*知,存在 $a\in C$, 使

$$\overset{-1}{C}\overset{\mathrm{T}}{C}=a=\overset{\mathrm{T}}{C}\overset{-1}{C},$$

因此

$$a^2=+1,\ a=\pm1.$$

对于标准 Dirao 矩阵 γ_α, 例如取

$$C\equiv-\gamma_0\gamma_1, \tag{15.4}$$

则,

$$\overset{\mathrm{T}}{C}=-\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_1\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_0=-\gamma_1\gamma_0=\gamma_0\gamma_1=-C, \tag{15.5}$$

而

$$C^2=e. \tag{15.5}^*$$

所以, C 只差一个正负号未能全定.

3. 取 $\Lambda\in\mathrm{Spin}(4)$, 由式(13.17),有

$$\theta(\Lambda)\gamma_\alpha=\Lambda\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}=A_\alpha^\beta\gamma_\beta.$$

因此,

$$\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\alpha\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}=A_\alpha^\beta\overset{\mathrm{T}}{\gamma}_\beta,$$

而

$$\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}C\gamma_\alpha\overset{-1}{C}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}=A_\alpha^\beta C\gamma_\beta\overset{-1}{C},$$

所以

$$(\overset{-1}{C}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}C)\gamma_\alpha(\overset{-1}{C}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}C)=A_\alpha^\beta\gamma_\beta=\Lambda\gamma_\alpha\Lambda. \tag{15.6}$$

此式表明，存在一个 Λ 的复连续函数 $b(\Lambda)$，使

$$\Lambda=b(\Lambda)C^{-1}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}C. \tag{15.7}$$

取式(15.6)的行列式，得

$$b^4(\Lambda)=1,$$

即

$$b(\Lambda)=\pm 1,\ \pm i.$$

在 Spin(4) 的每一连通部分，$b(\Lambda)$ 取值不变. 当 $\Lambda=e$ 或 γ_0 时，$b(\Lambda)=+1$; 当 $\Lambda=\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 时，$b(\Lambda)=-1$. 所以

$$\Lambda=\rho(\Lambda)C^{-1}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}C, \tag{15.7}^*$$

式中 $\rho(\Lambda)$为矩阵 Λ 的定向标量.

4. 由式(13.2)与(15.3)*，得

$$C\gamma_a\overset{-1}{C}=\bar{\gamma}_0\bar{\gamma}_a\bar{\gamma}_0^{-1}, \tag{15.8}$$

即

$$(C^{-1}\bar{\gamma}_0)^{-1}\gamma_a(C^{-1}\bar{\gamma}_0)=\bar{\gamma}_a. \tag{15.8}^*$$

因此，可有实数矩阵 α, $\alpha^2=e$, 使

$$\alpha=\overset{-1}{C}\bar{\gamma}_0=-\gamma_1\gamma_0\bar{\gamma}_0=\gamma_1\gamma_0\gamma_0=\gamma_1, \tag{15.9}$$

其中利用了式(15.4)和关系(D). 由式(15.8)，得到

$$\overset{-1}{\alpha}\gamma_a\alpha=\overset{-1}{\gamma}_1\gamma_a\gamma_1=\bar{\gamma}_a. \tag{15.10}$$

和关系式(15.2)*一样，计及式(15.7)*，有

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}&=\rho(\Lambda)\bar{\gamma}_0^{-1}\overset{\mathrm{T}}{\Lambda}{}^{-1}\bar{\gamma}_0\\&=(C^{-1}\bar{\gamma}_0)^{-1}\Lambda(\overset{-1}{C}\bar{\gamma}_0)=\overset{-1}{\alpha}\Lambda\alpha.\end{aligned} \tag{15.11}$$

5. 我们希望特别注意这里的讨论，因为 Lichnerowicz 的工作[3]中恐有疏忽之处.

将式(15.4)中的矩阵元记作 C_{ab}，并令

$$[-\Gamma^{ab}]\equiv[\Gamma_{ab}]\equiv[iC_{ab}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15.12}$$

于是:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^{ab}\Gamma^{bc}=\Gamma_{ab}\Gamma_{bc}=\delta^a_c; \\ &\Gamma^{ab}\Gamma_{bc}=-\delta^a_c; \\ &\Gamma^{ba}+\Gamma^{ab}=0; \\ &\Gamma_{ba}+\Gamma_{ab}=0; \\ &\Gamma^{ba}\Gamma_{bc}=\Gamma^{ab}\Gamma_{cb}=\delta^a_c. \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

我们将以 Γ^{ab} 及 Γ_{ab} 来升降旋量指标.

首先,我们选定相应于 Lorentz 位标架 (e_a) 的逆变旋量位标架(S_a):

$$S_1\equiv\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix};\quad S_2\equiv\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix};\quad S_3\equiv\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix};\quad S_4\equiv\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{15.14}$$

依此位标架,用复数列(ψ^a)作为逆变旋量的位标. 这样一来,点

$$\psi\equiv(\psi^a)\equiv\psi^a S_a=\begin{bmatrix}\psi^1\\\psi^2\\\psi^3\\\psi^4\end{bmatrix} \tag{15.15}$$

构成一个空间,称为旋量空间,记作 $\mathscr{S}(4)$. (S_a)定作相应于(e_a)的正向位标架. 由

$$\boldsymbol{S}'_{a'}=\overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'}\boldsymbol{S}_a,\ \Lambda\in\mathrm{Spin}(4), \tag{15.16}$$

定出的位标架$(\boldsymbol{S}'_{a'})$，当$\rho(\Lambda)=+1$时为正向的；$\rho(\Lambda)=-1$时为负向的．相应于$(\boldsymbol{e}_\alpha)$的位标变换为

$$\boldsymbol{e}'_{\alpha'}=\overset{-1}{A}{}^{\alpha}_{\alpha'}\boldsymbol{e}_\alpha,\ A\in L(4)\ , \tag{15.16}^*$$

它们之间有关系(13.17)：

$$\Lambda\gamma_\alpha\overset{-1}{\Lambda}=A^{\beta}_{\alpha}\gamma_\beta. \tag{15.17}$$

我们称式(15.15)定义的量ψ为由逆变位标架$(\boldsymbol{S}_a)$给出的**一阶逆变旋量**，ψ^a为ψ对位标架$\boldsymbol{S}_a$的分量．当$(\boldsymbol{S}_a)$依式(15.16)变换时，ψ^a依Λ而变换为$\psi'^{a'}$：

$$\psi'^{a'}=\psi^a\Lambda^{a'}_{a}. \tag{15.18}$$

我们有

$$\psi'^{a'}\boldsymbol{S}'_{a'}=\psi^b\Lambda^{a'}_{a}\Lambda^{a}_{a'}\boldsymbol{S}_a=\psi^b\delta^{a}_{b}\boldsymbol{S}_a=\psi^a\boldsymbol{S}_a. \tag{15.19}$$

对于多指标位标架

$$\boldsymbol{S}_{a_1\cdots a_p}\equiv\boldsymbol{S}_{a_1}*\cdots*\boldsymbol{S}_{a_p}, \tag{15.20}$$

有p阶逆变旋量

$$\psi\equiv\psi^{a_1\cdots a_p}\boldsymbol{S}_{a_1\cdots a_p}. \tag{15.21}$$

当位标架经式(15.16)变换时，ψ的分量变换式如下：

$$\psi'^{a'_1\cdots a'_p}=\psi^{a_1\cdots a_p}\Lambda^{a'_1}_{a_1}\cdots\Lambda^{a'_p}_{a_p}; \tag{15.21}^*$$

此时，

$$\psi'^{a'_1\cdots a'_p}\boldsymbol{S}'_{a'_1\cdots a'_p}=\psi^{a_1\cdots a_p}\boldsymbol{S}_{a_1\cdots a_p}. \tag{15.22}$$

对位标架$(\boldsymbol{S}_{ab})$以Γ^{ab}为分量的二阶逆变旋量

$$\Gamma^{\uparrow}\equiv\Gamma^{ab}\boldsymbol{S}_{ab}, \tag{15.23}$$

当位标架变换时，其分量按下列规律而变化：

$$\Gamma'^{a'b'}=\Gamma^{ab}\Lambda^{a'}_{a}\Lambda^{b'}_{b}. \tag{15.24}$$

以旋量 $\Gamma^{\uparrow}$ 乘积的缩并提升指标：

$$\boldsymbol{S}^{a}\equiv[\Gamma^{ab}\boldsymbol{S}_{b}]^{\mathrm{T}}, \tag{15.25}$$

而得$(\boldsymbol{S}_a)$的对偶位标架$(\boldsymbol{S}^a)$：

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^{1}&=[0\quad 0\quad 0\quad -1];\\
\boldsymbol{S}^{2}&=[0\quad 0\quad 1\quad 0];\\
\boldsymbol{S}^{3}&=[0\quad -1\quad 0\quad 0];\\
\boldsymbol{S}^{4}&=[1\quad 0\quad 0\quad 0].
\end{aligned}\right\} \tag{15.26}$$

位标架变换遵照式(15.16)时，$\Gamma^{\uparrow}$ 的变换遵照式(15.24)，因此，

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{a'b'}\boldsymbol{S}'_{b'}&=\Gamma^{ab}\Lambda^{a'}_{a}\Lambda^{b'}_{b}\overset{-1}{\Lambda}{}^{c}_{b'}\boldsymbol{S}_{c}\\
&=\Gamma^{ab}\delta^{c}_{b}\boldsymbol{S}_{c}=\Lambda^{a'}_{a}\Gamma^{ab}\boldsymbol{S}_{b}.
\end{aligned} \tag{15.27}$$

由

$$\boldsymbol{S}'^{a'}=\Lambda^{a'}_{a}\boldsymbol{S}^{a},\ \Lambda\in\mathrm{Spin}(4), \tag{15.28}$$

定出的位标架$(\boldsymbol{S}'^{a'})$称为**协变位标架**，因此，$(\boldsymbol{S}'_{a'})$称为**逆变位标架**. 我们有**一阶协变旋量**

$$\psi\equiv(\psi_a)\equiv(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)\equiv\psi_a\boldsymbol{S}^{a}; \tag{15.29}$$

其分量的变换为

$$\psi'_{a'}=\psi_a\overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'}, \tag{15.30}$$

所以

$$\psi'_{a'}\boldsymbol{S}^{a'}=\psi_a\overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'}\Lambda^{a'}_{b}\boldsymbol{S}^{b}=\psi_a\boldsymbol{S}^{b}. \tag{15.31}$$

对于多指标位标架

$$\boldsymbol{S}^{b_1\cdots b_q}\equiv\boldsymbol{S}^{b_1}*\cdots*\boldsymbol{S}^{b_q} \tag{15.32}$$

有 q 阶协变旋量

$$\psi\equiv\psi_{b_1\cdots b_q}\boldsymbol{S}^{b_1\cdots b_q}. \tag{15.33}$$

位标架经(15.28)变换后,它的分量变为:

$$\psi'_{b'_1\cdots b'_q}=\psi_{b_1\cdots b_q}\overset{-1}{\Lambda}{}^{b_1}_{b'_1}\cdots\overset{-1}{\Lambda}{}^{b_q}_{b'_q}. \tag{15.34}$$

对位标架$(\boldsymbol{S}^{ab})$以Γ_{ab}为分量的二阶协变旋量

$$\Gamma^{\downarrow}\equiv\Gamma_{ab}\boldsymbol{S}^{ab}, \tag{15.35}$$

位标架转换时,有下面的转换关系:

$$\Gamma'_{a'b'}=\Gamma_{ab}\overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'}\overset{-1}{\Lambda}{}^{b}_{b'}. \tag{15.36}$$

以旋量$\Gamma^{\downarrow}$乘积的缩并下降指标.

对于混合多指标位标架:

$$\boldsymbol{I}^{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}_{a_1\cdots a_m a_1\cdots a_p}\equiv\boldsymbol{e}_{a_1}*\cdots*\boldsymbol{e}_{a_m}*\boldsymbol{e}^{\beta_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{\beta_n}*\boldsymbol{S}_{a_1}*\cdots*\boldsymbol{S}_{a_p}*\boldsymbol{S}^{b_1}*\cdots*\boldsymbol{S}^{b_q}; \tag{15.37}$$

我们有混合张量-旋量,简称混合量:

$$\Phi\equiv\Phi^{a_1\cdots a_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}\boldsymbol{I}^{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}_{a_1\cdots a_m a_1\cdots a_p}. \tag{15.38}$$

当位标架依式(15.16),(15.16)* 变换时,有:

$$\boldsymbol{I}'^{\beta'_1\cdots\beta'_n b'_1\cdots b'_q}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m a'_1\cdots a'_p}=\boldsymbol{I}^{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}_{a_1\cdots a_m a_1\cdots a_p}\overset{-1}{A}{}^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\alpha_m}_{\alpha'_m}A^{\beta'_1}_{\beta_1}\cdots A^{\beta'_n}_{\beta_n}\overset{-1}{\Lambda}{}^{a_1}_{a'_1}\cdots\overset{-1}{\Lambda}{}^{a_p}_{a'_p}\Lambda^{b'_1}_{b_1}\cdots\Lambda^{b'_q}_{b_q}; \tag{15.39}$$

$$\Phi'^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m a'_1\cdots a'_p}_{\beta'_1\cdots\beta'_n b'_1\cdots b'_q}=\Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}A^{\alpha'_1}_{\alpha_1}\cdots A^{\alpha'_m}_{\alpha_m}\overset{-1}{A}{}^{\beta_1}_{\beta'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\beta_n}_{\beta'_n}\Lambda^{a'_1}_{a_1}\cdots\Lambda^{a'_p}_{a_p}\overset{-1}{\Lambda}{}^{b_1}_{b'_1}\cdots\overset{-1}{\Lambda}{}^{b_q}_{b'_q}. \tag{15.40}$$

混合量中的张量指标的升降依$\eta^{\alpha\beta}$及$\eta_{\alpha\beta}$,旋量指标的升降依Γ^{ab}及Γ_{ab}. 一个指标升降后,其原来的位置有时用"·"号补充,不致产生混淆时可以略去不写. 例如

$$\Phi^{\cdot\beta\cdot b}_{\alpha\cdot a\cdot}=\Phi^{\alpha'\cdot a'}_{\cdot\beta'\cdot b'}\eta_{\alpha'\alpha}\gamma_l{}^{\beta'\beta}\Gamma_{a'a}\Gamma^{b'b}.$$

注意: Minkowski 空间$\mathscr{M}(4)$中的基本度量张量$\eta_{\alpha\beta}$及$\gamma_l{}^{\alpha\beta}$与旋量空间$\mathscr{S}(4)$中的基本度量旋量$\Gamma_{\alpha\beta}$及$\Gamma^{\alpha\beta}$相应. $\mathscr{S}(4)$系指逆变旋量(15.15)的全体,而且$\psi^0\in C$(复数域). 量

$$\Gamma_{ab}\psi^a\psi^b$$

是不变量:

$$\Gamma'_{a'b'}\psi'^{a'}\psi'^{b'}=\Gamma_{ab}\psi^a\psi^b, \tag{15.41}$$

位标架变换后形式不变.

对于混合位标架

$$\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}\equiv \boldsymbol{e}^{\alpha}*\boldsymbol{S}_a*\boldsymbol{S}^b,$$

可将 4×16 矩阵

$$\gamma\equiv[\gamma_0\quad\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3]$$

写成下面直积*的形式:

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\check{\gamma}^{a}_{\alpha b}\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot};\\ \gamma_\alpha&=\check{\gamma}^{\cdot a}_{\alpha b}\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}.\end{aligned}\right\} \tag{15.42}^{*)}$$

因此可以具体算出下面的矩阵:

---

*) 直积:

$$[a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4]*\begin{bmatrix}b^1\\ b^2\\ b^3\\ b^4\end{bmatrix}*[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]$$

$$=\begin{bmatrix}a_1\begin{bmatrix}b^1[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^2[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^3[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^4[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\end{bmatrix}a_2\begin{bmatrix}b^1[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^2[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^3[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^4[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\end{bmatrix}\\ a_3\begin{bmatrix}b^1[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^2[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^3[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^4[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\end{bmatrix}a_4\begin{bmatrix}b^1[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^2[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^3[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\\ b^4[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1b^1c_1 & a_1b^1c_2 & a_1b^1c_3 & a_1b^1c_4 & \cdots & a_4b^1c_1 & a_4b^1c_2 & a_4b^1c_3 & a_4b^1c_4\\ a_1b^2c_1 & a_1b^2c_2 & a_1b^2c_3 & a_1b^2c_4 & \cdots & a_4b^2c_1 & a_4b^2c_2 & a_4b^2c_3 & a_4b^2c_4\\ a_1b^3c_1 & a_1b^3c_2 & a_1b^3c_3 & a_1b^3c_4 & \cdots & a_4b^3c_1 & a_4b^3c_2 & a_4b^3c_3 & a_4b^3c_4\\ a_1b^4c_1 & a_1b^4c_2 & a_1b^4c_3 & a_1b^4c_4 & \cdots & a_4b^4c_1 & a_4b^4c_2 & a_4b^4c_3 & a_4b^4c_4\end{bmatrix},$$

余类推.

$$\left.\begin{aligned}
\check{\gamma}_0 &\equiv [\check{\gamma}_{0b}^{a}] = \begin{bmatrix} +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}; \\
\check{\gamma}_1 &\equiv [\check{\gamma}_{1b}^{a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\check{\gamma}_2 &\equiv [\check{\gamma}_{2b}^{a}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\
\check{\gamma}_3 &\equiv [\check{\gamma}_{4b}^{a}] = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{15.43}$$

为了保持γ不变，γ对位标架

$$(\boldsymbol{I}'^{\alpha'\cdot b'}_{\cdot a'\cdot}) = (A^{\alpha'}_{\alpha}\overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'}\Lambda^{b'}_{b}\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot})$$

的分量应为

$$\check{\gamma}'^{\,b'}_{\alpha' a'} = \check{\gamma}_{\alpha a}^{\ b}\overset{-1}{\Lambda}{}^{b'}_{b}\Lambda^{a}_{a'}\overset{-1}{A}{}^{\alpha}_{\alpha'},$$

即

$$A^{\alpha'}_{\alpha}\check{\gamma}'_{\alpha'} = \Lambda\check{\gamma}_{\alpha}\overset{-1}{\Lambda}. \tag{15.44}$$

注意：式(15.44)与式(13.17)形同而实异. $(\check{\gamma}_\alpha)$为γ对位标架$(\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot})$的表现式；$(\check{\gamma}'_{\alpha'})$为$\gamma$对位标架$(\boldsymbol{I}'^{\alpha'\cdot b'}_{\cdot a'\cdot})$的表现式.

令

$$\overset{\mathrm{T}}{\gamma} \equiv \hat{\gamma}^{\alpha a}_{\ b}\boldsymbol{I}^{\cdot b\cdot}_{\alpha\cdot a}, \tag{15.45}$$

则可算得下列矩阵的具体形式：

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{P}^0 \equiv [\hat{\gamma}^{0a}_{b}] &= \begin{bmatrix} +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}; \\
\mathcal{P}^1 \equiv [\hat{\gamma}^{1a}_{b}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathcal{P}^2 \equiv [\hat{\gamma}^{2a}_{b}] &= \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}; \\
\mathcal{P}^3 \equiv [\hat{\gamma}^{3a}_{b}] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{15.46}$$

$\mathcal{P}$ 对位标架

$$(\boldsymbol{I}'^{\cdot b' \cdot}_{\alpha' \cdot a'}) = (\overset{-1}{A}{}^{\alpha}_{\alpha'} \Lambda^{b'}_{b} \overset{-1}{\Lambda}{}^{a}_{a'} \boldsymbol{I}^{\cdot b \cdot}_{\alpha \cdot a})$$

的位标应为

$$\hat{\gamma}'^{\alpha'a'}_{b'} = \hat{\gamma}^{\alpha a}_{b} \Lambda^{a'}_{a} \overset{-1}{\Lambda}{}^{b}_{b'} A^{\alpha'}_{\alpha}. \tag{15.47}$$

用这一 $(\hat{\gamma}^a)$ 的表现式，**Dirac 方程**有下面的形式：

$$\left.\begin{aligned}
& i\hat{\gamma}^{\alpha a}_{b} \frac{\partial \psi^b}{\partial z^\alpha} - m\psi^a = 0; \\
& \hat{\gamma}^\alpha \hat{\gamma}^\beta + \hat{\gamma}^\beta \hat{\gamma}^\alpha = -2\eta^{\alpha\beta} e.
\end{aligned}\right\} \tag{15.48}$$

由于表现 γ^4 的矩阵因人而异，有时产生误解，我们将取

$$\dot{\gamma}^{\alpha a}_{b} \equiv i\hat{\gamma}^{\alpha a}_{b}, \tag{15.49}$$

方程(15.48)可以写成

$$\dot{\gamma}^{\alpha a}_{b} \frac{\partial \psi^b}{\partial z^a} - m\psi^a = 0, \tag{15.50}$$

或简写成

$$\dot{\gamma}^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial z^{\alpha}}-m\psi=0. \qquad (15.50)^{*}$$

必须注意,这里列举的 Dirac 方程是在 $c=\hbar=+1$ 的假设下得到的. 如果去掉这一假设,则当为

$$\hbar\dot{\gamma}^{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial z^{\alpha}}-mc\psi=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z^{0}}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial(ct)}.$$

所以在简写的 Dirac 方程(15.50)* 中, $\dot{\gamma}^{\alpha}$ 须视为 $\hbar\dot{\gamma}^{\alpha}$ 的简写, m须视为 mc 之简写. $\hbar$ 的单位为尔格·秒, 量纲为 ML^2T^{-1}, z^{α} 的量纲为 L, 故方程的量纲为 MLT^{-1}. 详见第 II 分册第二章.

在 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$内, 自旋所描写的性质是微粒子具有广延性的特征. 自旋不为 0 的微粒子(例如电子与光子)的场量不单与点的位置有关, 而且与自旋有关. 因此, 对于这种场量的描述应有自旋的表现. 旋量 $(\psi^{a}(z))$ 作为自旋为 1/2 的微粒子的 Dirac 场量,其中 a 为旋量指标,而 $z\equiv(z^{\alpha})$ 是微粒子质心作为数学点的位标. $\psi^{a}(z)$取复数值, 它是旋量对自旋位标架$(\boldsymbol{S}_{a})$的分量. 由此可见, 对旋量位标架$(\boldsymbol{S}_{a})$的旋量位标(ψ^{a})与对其相应的 Lorentz 位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 的点的位标(描述微粒子质心的位置)$z\equiv(z^{\alpha})$的关系, 由 $\psi^{a}=\psi^{a}(z)$ 而定. 所以, 自旋位标不是 $\mathscr{M}(4)$中点 z 的位标, 而是场量在 z 的值所决定的抽象点 $\psi(z)$的位标.

§16 混合量场的纤维丛微积分

流形 $V(4)$ 的点 x 上的正规正交位标架$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$为切空间 $\mathscr{M}_{x}(4)$的以 x 为原点的 Lorentz 位标架, 因此, 相应于$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$

的位标架$(\boldsymbol{S}_a(x))$及$(\boldsymbol{S}^a(x))$称为以x为原点的自旋位标架.

对于一般的多指标位标架变换式(15.39)中的变换矩阵记作

$$\mathbb{H}(A)=\mathbb{H}^{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta'_1\cdots\beta'_n a_1\cdots a_p b'_1\cdots b'_q}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m\beta_1\cdots\beta_n a'_1\cdots a'_p b_1\cdots b_q}(A)$$

$$\equiv \overset{-1}{A}{}^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{\alpha_m}_{\alpha'_m}A^{\beta'_1}_{\beta_1}\cdots A^{\beta'_n}_{\beta_n}\overset{-1}{A}{}^{a_1}_{a'_1}\cdots\overset{-1}{A}{}^{a_p}_{a'_p}A^{b'_1}_{b_1}\cdots A^{b'_q}_{b_q}, \quad (16.1)$$

$\mathbb{H}(A)$的逆元记作$\overset{-1}{\mathbb{H}}(A)$. $\mathbb{H}(A)$与$\mathbb{H}'(A')$的群乘法定义为:

$$\mathbb{H}\mathbb{H}'\equiv(\mathbb{H}\mathbb{H}')^{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta'_1\cdots\beta'_n a_1\cdots a_p b'_1\cdots b'_q}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m\beta_1\cdots\beta_n a'_1\cdots a'_p b_1\cdots b_q}$$

$$\equiv\mathbb{H}^{\alpha''_1\cdots\alpha''_m\beta'_1\cdots\beta'_n a''_1\cdots a''_r b'_1\cdots b'_q}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_m\beta''_1\cdots\beta''_n a'_1\cdots a'_p b''_1\cdots b''_j}\mathbb{H}'^{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta''_1\cdots\beta''_n a_1\cdots a_p b''_1\cdots b''_q}_{\alpha''_1\cdots\alpha''_m\beta_1\cdots\beta_n a''_1\cdots a''_p b_1\cdots b_q}. \quad (16.2)$$

当$A\in L(4)$时, $H(A)$的全体构成一个$L(4)$的同态群, 记作$\mathscr{H}_I$. $\mathscr{H}_I$的群元作用于位标架

$$(\boldsymbol{I}(x))\equiv(\boldsymbol{I}^{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}(x))$$

得一拓扑空间$\mathscr{H}_I\boldsymbol{I}(x)$.

对于开复盖$\bigcup\limits_{j\in J}V_j=V(4)$, 我们有

$$\mathscr{G}\equiv\mathbb{H}\underset{ij}{(A)},\ \underset{ij}{A}\equiv\left.\frac{\partial z^{a'}(x|j)}{\partial z^{a}(x|i)}\right|_{x=x'}\in L\ddagger(4). \quad (16.3)$$

根据纤维丛存在定理, 有主要纤维丛:

$$\mathscr{B}_*^{\binom{mn}{pq}}\left(\mathscr{B}^{\binom{mn}{pq}}\underset{j}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}}V(4)=\bigcup_{j\in J}V_j\ \middle|\ \mathbb{H}\mathscr{H}_I\simeq\mathbb{H}(x)\right.$$

$$=\overset{-1}{\pi}(x)\left|\begin{array}{l}\mathscr{G}=\overset{-1}{\phi}_{jx}\phi_{iy}\\ \phi_j(V_j*\mathbb{H})=\overset{-1}{\pi}(V_j)\\ \phi_{jx}=\phi(x,\ y)\end{array}\right.\Bigg), \quad (16.4)$$

其断面$f(x)=\mathbb{H}(A)\boldsymbol{I}(x)$存在.

存在唯一的混合量场:

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x)=\overset{-1}{\mathbb{M}}(A)\,t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q},\tag{16.5}$$

它在$(\boldsymbol{I}(x))$的原点x取给定的混合量

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}$$

为值. 同理,如果已知$\mathscr{M}(4)$上的永不为0的混合量

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z),$$

则有$V(4)$上的混合量场$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x)$; $\mathscr{T}(x)$对位标架$(\boldsymbol{I}(x))$的位标在原点的值等于$t(z)$对位标架$(\boldsymbol{I}\{m(x)\})$的位标在原点的值. 我们有纤维丛微积分:

$$\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x)=\int_{V(4)} t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z);\tag{16.6}$$

$$t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)=\mathscr{D}_x\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x).\tag{16.6}^*$$

式中$x\in V(4)$, $z=m(x)$.

Dirao方程(15.48)中, $\check{\gamma}_\alpha$或$\hat{\gamma}^\alpha$是混合量, 它在$V(4)$上的唯一的纤维丛积分为混合量场. 这个混合量场对位标架$(\boldsymbol{e}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}(x))$或$(\boldsymbol{e}^{\cdot b\cdot}_{\alpha\cdot a}(x))$原点的值为$\check{\gamma}_\alpha$或$\hat{\gamma}^\alpha$.

§17 曲率混合量

我们可以对自旋位标架作进一步的要求.

设在点x的邻域V_x中的每一点x'(x'对位标架$(\boldsymbol{e}_a(x))$的位标为(z^α))上恒有:

$$\left.\begin{aligned}
&d\boldsymbol{S}_a(x')=\sigma^b_{a\lambda}dz^\lambda\boldsymbol{S}_b(x');\\
&d\boldsymbol{S}^a(x')=-\sigma^a_{b\lambda}dz^\lambda\boldsymbol{S}^b(x');\\
&\sigma^b_{a\lambda}(x')\equiv-\frac{1}{4}\,\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(x')\gamma^b_{\alpha\alpha'}(x')\gamma^{\beta\alpha'}_{\ \ b}(x').
\end{aligned}\right\}\tag{T}$$

$\sigma^b_{a\lambda}(x')$对位标架$(\boldsymbol{e}_a(x))$为$\sigma^b_{a\lambda}(z)$, 在x处应有

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{b}_{a\lambda}(x) &= -\frac{1}{4}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}(x)\gamma_{\alpha a'}{}^{b}\gamma^{\beta a'}{}_{b},\\ d\boldsymbol{S}_{a}(x) &= \sigma^{b}_{a\lambda}(x)dz^{\lambda}\boldsymbol{S}_{b}(x).\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{T})^{*}$$

据此，我们可以定义混合量场 $\mathscr{T}(x)$ 的**协变导数**：

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x') \equiv& \frac{\partial\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)}{\partial z^{\gamma}}\\ &+\sum_{i}^{1,\cdots,m}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\lambda\alpha_{i+1}\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)\Gamma^{\alpha_i}_{\lambda\gamma}(z)\\ &-\sum_{j}^{1,\cdots,n}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\lambda\beta_{j+1}\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)\Gamma^{\lambda}_{\beta_j\gamma}(z)\\ &+\sum_{k}^{1,\cdots,p}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_{k-1}k a_k{}^{+}{}_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)\sigma^{a_n}_{k\gamma}(z)\\ &-\sum_{k}^{1,\cdots,q}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_{k-1}k b_{k+1}\cdots b_q}(z)\sigma^{k}_{b_k\gamma}(z).\end{aligned} \qquad (17.1)$$

这可以由下面的式 (17.2)，以条件 (T) 及相应的关于 $d\boldsymbol{e}(x)$ 的条件代入而得到：

$$\begin{aligned}d[\mathscr{T}(z)\boldsymbol{I}(z)] &= d\mathscr{T}(z)\boldsymbol{I}(z)+\mathscr{T}(z)d\boldsymbol{I}(z)\\ &= \nabla_{\gamma}\mathscr{T}(z)\boldsymbol{I}(z).\end{aligned} \qquad (17.2)$$

如果位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha}(x))$ 代以规范位标架 $(\overset{*}{\boldsymbol{e}}_{\alpha}(x))$，则位标架 $(\boldsymbol{I}(x))$ 应代以规范位标架 $(\overset{*}{\boldsymbol{I}}(x))$. 在规范位标架的原点，根据定义，

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(z)\big|_{z=0} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(0) = 0, \qquad (17.3)$$

因而

$$\sigma^{a}_{br}(x) = \sigma^{a}_{ba}(z)\big|_{z=0} = 0. \qquad (17.4)$$

所以，协变导数在规范位标架的原点 $x=0$ 处与偏导数一致：

$$\nabla_{\gamma}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x')\Big|_{x'=z=0} = \frac{\partial\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)}{\partial z^{\gamma}}\Big|_{\overset{*}{z}=0}. \qquad (17.5)$$

必须记住：虽然 $\nabla_{\gamma}\mathscr{T}$ 是混合量，但 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ 及 $\sigma^{a}_{br}(x)$ 却不

是张量及旋量，也不是混合量. 然而由这两个量却可以作出张量，旋量以及混合量来.

由
$$d\boldsymbol{e}_\alpha(x')=\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(z)dz^\gamma\boldsymbol{e}_\beta(x')$$
求外微分[5]，得

$$\begin{aligned}
\delta d\boldsymbol{e}_\alpha(x')&=\delta[\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(z)dz^\gamma]\boldsymbol{e}_\beta(x')+\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(z)\wedge d\boldsymbol{e}_\beta(x')\\
&=\frac{\partial\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(z)}{\partial z^\lambda}dz^\lambda\wedge dz^\gamma\boldsymbol{e}_\beta(x')+\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(z)\wedge\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}(z)dz^\lambda\boldsymbol{e}_\gamma(x')\\
&=\left[\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\rho}(z)}{\partial z^\lambda}dz^\lambda\wedge dz^\rho+\Gamma^\beta_{\alpha\rho}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}(z)dz^\rho\wedge dz^\lambda\right]\boldsymbol{e}_\gamma(x')\\
&=\left[\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}(z)}{\partial z^\rho}dz^\rho\wedge dz^\lambda+\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\rho}(z)dz^\lambda\wedge dz^\rho\right]\boldsymbol{e}_\gamma(x')\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\rho}(z)}{\partial z^\lambda}-\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}(z)}{\partial z^\rho}+\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\rho}(z)\right.\\
&\quad\left.-\Gamma^\beta_{\alpha\rho}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}(z)\right]dz^\lambda\wedge dz^\rho\boldsymbol{e}_\gamma(x')\\
&\equiv\frac{1}{2}R^\gamma_{\alpha\lambda\rho}(z)dz^\lambda\wedge dz^\rho\boldsymbol{e}_\gamma(x').
\end{aligned}\tag{17.6}$$

这样，我们就定出了**曲率张量场**：

$$\begin{aligned}
R^\gamma_{\alpha\lambda\rho}(z)\equiv&\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\rho}(z)}{\partial z^\lambda}-\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}(z)}{dz^\rho}\\
&+\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\rho}(z)-\Gamma^\beta_{\alpha\rho}(z)\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}(z).
\end{aligned}\tag{17.6}^*$$

同理，对于旋量位标架，有**曲率旋量场**：

$$\begin{aligned}
S^r_{a\lambda\rho}(z)\equiv&\frac{\partial\sigma^r_{a\rho}(z)}{\partial z^\lambda}-\frac{\partial\sigma^r_{a\lambda}(z)}{\partial z^\rho}\\
&+\sigma^\circ_{a\lambda}(z)\sigma^r_{c\rho}(z)-\sigma^\circ_{a\rho}(z)\sigma^r_{c\lambda}(z),
\end{aligned}\tag{17.7}^*$$

而

$$\delta d\boldsymbol{S}_a(x')=\frac{1}{2}S^r_{a\lambda\rho}(z)dz^\lambda\wedge dz^\rho\boldsymbol{S}_r(x').\tag{17.7}$$

对于**曲率混合量场**，我们有

$$T^{r}_{\alpha\lambda\rho}(z)\equiv S^{r}_{\alpha\lambda\rho}(z)+\sigma^{r}_{a\gamma}(z)\left[\Gamma^{\gamma}_{\rho\lambda}(z)-\Gamma^{\gamma}_{\lambda\rho}(z)\right]. \quad (17.8)^{*}$$

增加的一项是由于下面 Ricci 公式的需要.

在规范位标架的原点, 因为 Γ 与 σ 为 0, 由式(17.6)*和式(17.7)*分别简化得:

$$\left.\begin{aligned} R^{\gamma}_{\alpha\lambda\rho}(z)\,|_{z=0}&=\left[\frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\rho}(z)}{\partial z^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\lambda}(z)}{\partial z^{\rho}}\right]_{z=0};\\ S^{r}_{\alpha\lambda\rho}(z)\,|_{z=0}&=\left[\frac{\partial\sigma^{r}_{a\rho}(z)}{\partial z^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma^{r}_{a\lambda}(z)}{\partial z^{\rho}}\right]_{z=0}.\end{aligned}\right\} \quad (17.9)$$

将下标 $z=0$ 用 0 代替, 对于规范位标架原点, 我们有

$$\begin{aligned}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}\mathscr{T})_{0}=&\left(\frac{\partial^{2}\mathscr{T}}{\partial z^{\lambda}\partial z^{\rho}}\right)_{0}+\sum_{i}^{1,\cdots,m}(\mathscr{T}^{\cdots\gamma\cdots}_{\cdots\cdots})_{0}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha_i}_{\gamma\rho}}{\partial z^{\lambda}}\right)_{0}\\&-\sum_{j}^{1,\cdots,n}(\mathscr{T}^{\cdots\cdots}_{\cdots\gamma\cdots})_{0}\left(\frac{\partial\mathscr{T}^{\gamma}_{\beta_j\rho}}{\partial z^{\lambda}}\right)_{0}\\&+\sum_{h}^{1,\cdots,p}(\mathscr{T}^{\cdots r\cdots}_{\cdots\cdots})_{0}\left(\frac{\partial\sigma^{a_h}_{r\rho}}{\partial z^{\lambda}}\right)_{0}\\&-\sum_{k}^{1,\cdots,q}(\mathscr{T}^{\cdots\cdots}_{\cdots r\cdots})_{0}\left(\frac{\partial\sigma^{r}_{b_k\rho}}{\partial z^{\lambda}}\right)_{0}. \quad (17.10)\end{aligned}$$

在上式中将指标 λ 与 ρ 对易, 得 $(\nabla_{\rho}\nabla_{\lambda}\mathscr{T})_{0}$, 自然, 我们要求 $\mathscr{T}$ 的分量都是二次可微的. 于是

$$\begin{aligned}[(\nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}-\nabla_{\rho}\nabla_{\lambda})\mathscr{T}]_{0}=&\sum_{i}^{1,\cdots,m}(\mathscr{T}^{\cdots\gamma\cdots}_{\cdots\cdots})_{0}(R^{\alpha_i}_{\gamma\lambda\rho})_{0}\\&-\sum_{j}^{1,\cdots,n}(\mathscr{T}^{\cdots\cdots}_{\cdots\gamma\cdots})_{0}(R^{\gamma}_{\beta_j\lambda\rho})_{0}\\&+\sum_{h}^{1,\cdots,p}(\mathscr{T}^{\cdots r\cdots}_{\cdots\cdots})_{0}(S^{a_h}_{r\lambda\rho})_{0}\\&-\sum_{k}^{1,\cdots,q}(\mathscr{T}^{\cdots\cdots}_{\cdots r\cdots})_{0}(S^{r}_{b_k\lambda\rho})_{0}.\end{aligned}$$

这样一来,就有最一般的 **Ricci** 公式:

$$(\nabla_\lambda\nabla_\rho-\nabla_\rho\nabla_\lambda)\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)$$

$$=\sum_{i}^{1,\cdots,m}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\gamma\alpha_{i+1}\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)R^{\alpha_i}_{\gamma\lambda\rho}(z)$$

$$-\sum_{j}^{1,\cdots,n}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\gamma\beta_{j+1}\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)R^{\gamma}_{\beta_j\lambda\rho}(z)$$

$$+\sum_{h}^{1,\cdots,p}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_{h-1}r a_{h+1}\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)S^{a_h}_{r\lambda\rho}(z)$$

$$-\sum_{k}^{1,\cdots,q}\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_{k-1}r\beta_{k+1}\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)S^{\gamma}_{b_k\lambda\rho}(z). \qquad (17.11)$$

现在,再考虑 Dirao 混合量场,仍记作 $\check{\gamma}_a(x)$. 由于 $\check{\gamma}^a_{\alpha b}(x)$ 对于位标架$(\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}(x))$在 V_x 内恒为常量 $\check{\gamma}^a_{\alpha b}$, 对于更特殊的规范位标架$(\overset{*}{\boldsymbol{I}}{}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}(x))$在 V_x 内亦当为常量 $\check{\gamma}^a_{\alpha b}$. 所以

$$\frac{\partial\check{\gamma}^a_{\alpha b}(z)}{\partial z^\rho}\equiv 0. \qquad (17.12)$$

因此, $\nabla_\rho\check{\gamma}^a_{\alpha b}(x)$对位标架$(\overset{*}{\boldsymbol{I}}{}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}(x))$原点的协变分量为 0. 所以对于一般的位标架$(\boldsymbol{I}^{\alpha\cdot b}_{\cdot a\cdot}(x))$恒有

$$\nabla_\rho\check{\gamma}^a_{\alpha b}(x)\equiv 0. \qquad (17.13)$$

这一性质可以简化曲率混合量 $T^r_{a\lambda\rho}$ 的表达式, 在规范位标架原点,得到:

$$(T^r_{a\lambda\rho})_0=\left(\frac{\partial\sigma^r_{a\rho}}{\partial z^\lambda}\right)_0-\left(\frac{\partial\sigma^r_{a\lambda}}{\partial z^\rho}\right)_0$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\rho}\check{\gamma}^r_{\gamma c}\check{\gamma}^{\alpha c}_a}{\partial z^\lambda}\right)_0-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\check{\gamma}^r_{\gamma c}\check{\gamma}^{\alpha c}_a}{\partial z^\rho}\right)_0$$

$$=\frac{1}{4}(R^\gamma_{\alpha\lambda\rho})_0\check{\gamma}_{\gamma c}{}^r\check{\gamma}^{\alpha c}_a. \qquad (17.14)^*$$

一般地,有

$$T^{r}_{\alpha\lambda\rho}(x)=\frac{1}{4}R^{\gamma}_{\alpha\lambda\rho}(x)\check{\gamma}^{r}_{\gamma c}(x)\check{\gamma}^{\alpha c}_{a}(x). \qquad (17.14)$$

式(17.14)与 Lichnerowicz 的结果[3]一致.

其次,由于在规范位标架原点有对易关系(D):

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma_\alpha=-2\eta_{\alpha\beta}e;$$

在一般位标架中应有

$$\gamma_\alpha(x)\gamma_\beta(x)+\gamma_\beta(x)\gamma_\alpha(x)=-2g_{\alpha\beta}e.$$

所以,曲率张量场 $R^{\gamma}_{\alpha\lambda\rho}$ 的某些性质可以直接转化为曲率混合量场 $T^{r}_{\alpha\lambda\rho}$ 的相应性质.

因为,由 **Bianchi 恒等式**:

$$\nabla_\mu R^{\gamma}_{\alpha\lambda\rho}+\nabla_\lambda R^{\gamma}_{\alpha\rho\mu}+\nabla_\rho R^{\gamma}_{\alpha\mu\lambda}=0; \qquad (17.15)$$

及式(17.13): $\nabla_\rho\check{\gamma}^{a}_{\alpha b}\equiv\nabla_\rho\check{\gamma}^{\alpha a}_{b}\equiv 0$; 所以

$$\nabla_\mu S^{\gamma}_{\alpha\lambda\rho}+\nabla_\lambda S^{\gamma}_{\alpha\rho\mu}+\nabla_\rho S^{r}_{\alpha\mu\lambda}=0. \qquad (17.16)$$

进一步,可以由 $R^{\alpha}_{\beta\lambda\rho}$ 的性质推得新的公式. 例如,由

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}+R^{\alpha}_{\lambda\mu\beta}+R^{\alpha}_{\mu\beta\lambda}=0, \qquad (17.17)$$

有

$$(R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}+R^{\alpha}_{\lambda\mu\beta}+R^{\alpha}_{\mu\beta\lambda})\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu$$

$$=R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}(\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu+\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\beta+\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\lambda)=0. \qquad (17.18)$$

由对易关系(D),有

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\lambda=-2g^{\lambda\mu}e,$$

记

$$R^{\alpha}\equiv R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\mu,$$

则

$$R^{\alpha}-R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^\lambda(2g^{\mu\beta}e+\gamma^\beta\gamma^\mu)-R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu=0.$$

但

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}g^{\mu\beta}\equiv R^{\alpha\beta}_{\beta\lambda}\equiv R^{\alpha}_{\lambda}\equiv g^{\alpha\alpha'}R_{\alpha'\lambda},$$

其中 $R_{\alpha'\lambda}$ 称为 **Ricci 张量**,所以

$$R^{\alpha}-2R^{\alpha}_{\lambda}\gamma^\lambda-2R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu=0, \qquad (17.19)$$

即

$$R^{\alpha}-2R^{\alpha}_{\beta}\gamma^\beta+2R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}(2g^{\lambda\beta}e+\gamma^\beta\gamma^\lambda)\gamma^\mu=0,$$

因此,

$$R^{\alpha}\equiv R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}=2R^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\beta}. \tag{17.20}$$

以式(17.20)代入式(17.19), 得

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\beta}\gamma^{\mu}=0. \tag{17.21}$$

由式(17.18), 得

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}=-2R^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\beta}.$$

由式(17.20), 得

$$R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}=2R_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

计及

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}&=\frac{1}{2}(R_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}+R_{\beta\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha})\\&=\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}+\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha})\\&=-R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}e\equiv-Re,\end{aligned} \tag{17.22}$$

得到下面的 Lichnerowicz 公式:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}=-2Re. \tag{17.23}$$

这又可以转化为曲率混合量的相应结果. 因为, 由式(17.14)

$$(R^{\alpha}_{\beta\lambda\rho}\check{\gamma}_{\alpha}\check{\gamma}^{\beta})^{a}_{b}=4T^{\gamma a}_{b\gamma\rho},$$

以及

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\rho}=-2Re,$$

直接推得

$$4(T^{a}_{b\gamma\rho})\gamma^{\gamma}\gamma^{\rho}=-2Re,$$

即

$$2T^{\gamma a}_{b'\gamma\rho}\hat{\gamma}^{\gamma b'}_{a'}\hat{\gamma}^{\rho a'}_{b}=-R\delta^{a}_{b}. \tag{17.24}$$

§18 纤维丛微分方程及其它

本节给出一些注记:

1. 文中我们假设 $V(4)$ 为一 C^{∞} 级或 C^{ω} 级流形, 其实上面的许多讨论对 $V(4)$ 为一般 C^{r} 级微分流形也是成立的.

2. 张量与矩阵的混合使用问题请参看第Ⅱ分册第四章.

3. 对 n 维 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(n)$ 中惯性指数为 $(r, n-r)$的 Lorentz 群，本文的结果也是成立的，文中的结果是在 $n=4$, $r=3$ 的情况下得到的.

4. 记 $\mathscr{M}(4)$ 内某一充分光滑的 3 维闭流形 $\mathscr{S}$ 的内域(不含无穷远点的部分)为 $\mathscr{V}$. $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{V}$ 相应于 $V(4)$ 内的充分光滑的 3 维流形 S 与其内域 V.

给出混合量微分方程:

$$
\begin{aligned}
&{}^{\rho}A^{\alpha_1'\cdots\alpha_m'\beta_1\cdots\beta_n a_1'\cdots a_p' b_1\cdots b_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta_1'\cdots\beta_n' a_1\cdots a_p b_1'\cdots b_q'}(z)\frac{\partial t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)}{\partial z^{\rho}}\\
&+B^{\alpha_1'\cdots\alpha_m'\beta_1\cdots\beta_n a_1'\cdots a_p' b_1\cdots b_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_m\beta_1'\cdots\beta_n' a_1\cdots a_p b_1'\cdots b_q'}(z)\,t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z)\\
&=C^{\alpha_1'\cdots\alpha_m' a_1'\cdots a_p'}_{\beta_1'\cdots\beta_n' b_1'\cdots b_q'}(z).
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

设此方程关于 $(\mathscr{S}, \mathscr{V})$ 的 Cauchy 问题的混合量解已经求出为:

$$
t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z). \tag{18.2}
$$

于是,混合量场:

$$
\mathscr{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(x)=\int_V t^{\alpha_1\cdots\alpha_m a_1\cdots a_p}_{\beta_1\cdots\beta_n b_1\cdots b_q}(z), \tag{18.2}^*
$$

为混合量场微分方程:

$$
\left(\int {}^{\rho}A\right)\nabla_{\rho}\mathscr{T}+\left(\int B\right)\mathscr{T}=\int C, \tag{18.1}^*
$$

关于(S, V)的 Cauchy 问题的解.

如果在 $\mathscr{S}$ 上给出边界条件:

$$
\left.\begin{aligned}
&t(z)=\psi(z),\\
&z\in\mathscr{S},
\end{aligned}\right\} \tag{18.3}
$$

则相应地在 S 上有边界条件:

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{T}(x)=&\int_{\mathscr{S}}\psi(z),\\ x\in&S.\end{aligned}\right\}\qquad(18.3)^*$$

对于高阶方程，上面的判断仍然适用．例如，对于二阶方程

$$\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^\alpha\partial z^\beta}+B^\alpha\frac{\partial f(z)}{\partial z^\alpha}+Cf(z)=0\qquad(18.4)$$

的 Cauchy 问题的解 $f(z)$ 为已知，则 $F(x)$ 为二阶方程

$$g^{\alpha\beta}(x)\nabla_\alpha\nabla_\beta F(x)+\mathscr{B}^\alpha(x)\nabla_\alpha F(x)+\mathscr{C}(x)F(x)=0\qquad(18.4)^*$$

的 Cauchy 问题的解．其中：

$$F(x)\equiv\int_{V(4)}f(z);\quad g^{\alpha\beta}(x)\equiv\int_{V(4)}\eta^{\alpha\beta};$$

$$\mathscr{B}^\alpha(x)\equiv\int_{V(4)}B^\alpha;\ \mathscr{C}(x)\equiv\int_{V(4)}C.$$

这样一来，变系数微分方程的适定问题转化成了常系数微分方程的适定问题．更重要的是为特殊相对性量子场论中的定理按照既定程序转化为一般相对性量子场论中的相应判断提供了具体方法．

5．将旋量作为微粒子视作相对性转子的数学描述；此相对性转子的质心用其在 Minkowski 空间中点的位标来表写，每一质心位标表写的点上的切空间(Minkowski 空间)中的各种旋量场的性质反映了微粒子作为相对性转子的性质．

因此，Spin(4) 对旋量位标架的作用，应与 $L(4)$ 对质心位标架的作用区别开来．即 $\Lambda\in\mathrm{Spin}(4)$ 与 $A\in L(4)$ 的关系 (13.17)，

$$A^{\lambda}_{\alpha}\gamma_{\lambda}=\Lambda\gamma_{\alpha}\overset{-1}{\Lambda},$$

应作为转子自身的 Lorentz 变换 A 与 Spin(4) 的关系，而把这里的 A 和表写质心位标变换的 Lorentz 变换 $\boldsymbol{A}$ 区别开来. A 与 $\boldsymbol{A}$ 形同实异，A 将称为 **Lorentz 外变换**，$\boldsymbol{A}$ 将称为 **Lorentz 内变换**. 把这两种 Lorentz 变换区别开来十分重要，这方面的工作我们将另文处理.

参 考 文 献

[1] Steenrod, N. E., Topology of fibre bundles, Princeton Mathematical Series, Princeton Univercity Press, Princeton, N. J., 1951.

[2] Alexandroff, P., H. Hopf, Topdogie, Springer, Berlin, 1935.

[3] Lichnerowicz, A., Champs spinoride et propogateurs en relativité générale, Bull. Soc. math. France, **92** (1964), 11-100.

[4] 李国平，郭友中，«一般相对性量子场论»，中国科学院数学计算技术研究所，1965.

[5] 李国平，郭友中，«外微分形式及其应用»，中国科学院数学计算技术研究所，1965.