数学物理丛书

一般相对性量子场论

（二）

李国平　郭友中　著

湖北人民出版社

数学物理丛书

一般相对性量子场论

（二）

李国平　郭友中著

湖北人民出版社

内 容 提 要

本书的主要内容有：转化概念、所用单位制、时空位标、张量与矩阵的混合使用以及标准双曲型 *Riemann* 空间的介绍，自旋空间、同位旋空间以及某些场方程在一般相对性量子场论中的推广。

读者对象是数学物理学方面的研究工作者和高等院校的师生。

数学物理丛书

一般相对性量子场论

(二)

李国平、郭友中著

•

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　4.75 印张　99,000 字

1981 年 6 月第 1 版　1981 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—1,800

统一书号：13106·44　定价：0.74 元

序

本书的主要材料是作者自 1958 年以来，从事数学物理研究的部分工作总结. 初稿完成于 1960 年前后，由于稿件散失，重又进行了部分整理和删节，分成三个分册.

第一分册原是一篇论文，主要是提出特殊(相对性)向一般(相对性)的转化原则，为了强调这一方法，因而自成一册.

第二分册的内容，既仍是为第三分册作准备，也是第一分册的不同观点的补充和继续，为了保持各自的独立性，某些章节略有交叉.

作为绪论的第一章简略地介绍了从微粒子内外运动的矛盾中提出的新模型和一些转化概念；第二章选定物理单位以简化复杂的运算；第三章中介绍了时空位标；第四章讨论张量和矩阵的混合使用问题，给出了张量的矩阵表示和 Hermite 张量及逆张量等概念，澄清了容易发生混淆的地方；第五章建立标准双曲型 Riemann 几何学；第六、七两章专门论述描述微粒子广延性的自旋空间和同位旋空间在一般相对性量子场论中的推广；第八章强调场量的非对易性，指出特殊相对性量子场论中，有些作者推广场方程和能冲量张量为一般相对性时出现的原则错误；第九章利用书中已知的知识，介绍某些一般相对性量子场方程的具体形式. 原来作为第一分册预备知识的纤维丛理论，因限篇幅将移作«近代数学丛书»之一，另作介绍.

新理论的介绍及其对微粒子的产生、消失和相互作用的研究则是第三分册的内容.

基本粒子理论正在不断发展，这一领域的研究工作一直很活跃，已经积累了大量的试验成果和理论文献，涉及的范围很广，本书介绍的只是某些数学物理方法，且是著者工作过的部分．限于思想和业务水平，谬误不当之处，敬希读者指正．

著　者

1980 年

目　录

序

第一章　绪论 …… 1

§1.1　特殊向一般的转化 …… 1

§1.2　场 …… 2

§1.3　量子化·宏微转化 …… 5

第二章　物理单位 …… 11

§2.1　绝对 Gauss 单位制 …… 11

§2.2　新单位制 …… 13

第三章　时空位标 …… 17

§3.1　类空超曲面 …… 17

§3.2　Lorentz 群 …… 20

§3.3　局部位标系 …… 23

第四章　张量与矩阵的混合使用 …… 31

§4.1　矩阵 …… 31

§4.2　张量的矩阵表示 …… 34

§4.3　张量 …… 42

第五章　标准双曲型 Riemann 空间 …… 47

§5.1　双曲型空间的概念 …… 47

§5.2　Christoffel 符号 …… 48

§5.3　Riemann 曲率张量和 Ricci 张量 …… 51

§5.4　协变微商 …… 54

§5.5 测地线 ……57
§5.6 规范位标系 ……64
第六章 自旋空间 ……71
§6.1 自旋空间的概念 ……71
§6.2 自旋协变微商 ……75
§6.3 曲率自旋量 ……78
§6.4 Ricci 恒等式 ……79
§6.5 几个特殊旋量 ……82
§6.6 自旋测地线与规范自旋位标系 ……84
§6.7 广义 Dirac 方程 ……87
§6.8 拟易位运算与拟 Hermite 共轭 ……89
第七章 同位旋空间 ……91
§7.1 同位旋空间的概念 ……91
§7.2 同位旋测地线与规范同位旋位标系 ……94
§7.3 基本同位旋矩阵 ……96
§7.4 第二类同位旋空间 ……97
§7.5 一个计算公式和随伴式 ……99
第八章 算符的非对易性 ……102
§8.1 场元乘积的不可交换性 ……102
§8.2 场方程、能冲量张量与守恒律 ……102
§8.3 角冲量张量算符 ……106
§8.4 总能冲量与总角冲量 ……109
§8.5 粒子数与电荷守恒 ……111
第九章 一般相对性量子场 ……115
§9.1 重力场 ……115
§9.2 重力波 ……120

§9.3 电磁场方程的一般形式 ……123
§9.4 自旋为零的场 ……131
§9.5 自旋为1的场 ……133
§9.6 自旋为1/2的场 ……136
§9.7 广义π粒子场 ……139
§9.8 核子在(Ⅱ)中的原型……143

第一章 绪 论

§1.1 特殊向一般的转化

十九世纪及其以前建立起来的古典物理学成功地解释了低速宏观的物理现象. 但是，古典物理学既对微观客体的波粒二重性无能为力，也对高速现象的 Lorentz 不变性束手无策. 为了解决这一矛盾，物理学在二十世纪初经历了两次飞跃，产生了研究微观客体的量子论，其后发展而为量子力学，和研究高速现象的特殊相对论，其后发展而为一般相对论.

近半世纪以来，由于试验手段的进一步发展，在高速微观现象的研究中发现了一系列重要的特性，诸如微粒子的产生、消失和转化，都超出了量子力学和相对性古典物理学所能解释的范围.

首先是电磁场的量子，光子，由于静质量为零，很小的能量变化就会引起它的产生和消失，而电磁场理论的 Maxwell 方程本来就是特殊相性的，人们自然就想到将这一理论进行量子化来解释光子的行为. 这样就产生了研究高速微观现象的量子场论. 不同的量子场理论或模型描述不同的微粒子；不同量子场之间的相互作用反映不同微粒子间的相互作用和转化.

微粒子开始是被作为没有内部结构的数学点来描述的，可以称为点模型. 点模型遇到自旋的困难，说明点描述与微

粒子广延性之间的矛盾. 解决这一矛盾，坂田模型被推广为特殊相对性转子模型. 1963 年，De Broglie 等认为微粒子的运动应当分成内外运动，它们都是特殊相对性的，而且内运动仅作为运动学的性质加以考虑. 为了区别内外运动，在数学上走了一段回头路，用推广三维 Euclid 空间的 Euler 角作为 Lorentz 群的表写工具，实际上这些努力还是没有达到预期的目的. 微粒子理论在不断深化的过程中，未臻之处也是十分明显的. 特别是不能反映微粒子在外场运动的一般相对性，这是非常令人遗憾的事情.

同年，我们提出新的内外场模型：微粒子的外运动用一般相对性量子场描述；内运动用特殊相对性量子场描述. 两种运动的波函数结合而为微粒子的波函数，用内外运动的矛盾统一描述微粒子的特性和相互作用. 这样，就需要有将特殊相对性量子场论的结果转化为一般相对性量子场论的结果的一般转化原则. 本书的第一分册在很大的程度上是为这一目的服务的.

我们还知道，光子在经过太阳附近时的偏转角，在不同的时间曾测得完全不同的数据，似乎支持了反光子是与光子不同的粒子的例证. 这样，在外运动为特殊相对性量子场的理论中简并了的光子以及其它的反粒子也就各有其自身的特征. 关于内外场模型的理论，请参看本书第三分册.

§1.2 场

场是物质存在的一种形式.

古典质点力学研究具有有限自由度的物理系统，古典场

论研究具有无限自由度的物理系统. 一般说来，一个具有无限多自由度的物理系统就称为一个(物理)场，自由度 $\Psi_\alpha(x)$ 称为场量或场函数，α 一般是离散指标，取值 1 至 N (例如在电磁场中，$N=4$)，变量 x 为某一流形上的连续统的点，可以看成一个连续指标. 在某定点 x 的场量起着有限自由度的质点力学系统中广义位标 q_i 的作用，而场方程则起着运动方程的作用，一般为 $\Psi_\alpha(x)$ 及其导数间的某种关系.

场与任何其它物理系统一样是一些动力学可观察量(能量、动量与角动量等)的传递者，场方程就是传递的数学形式，因而是一种以时空位标为参数的对象之间的相互制约关系.

量子场论是从适当的场方程和相应的量子化规则来研究微粒子性质的理论.

相对论的对称原则指出，物理定律的数学形式必须是在正 Lorentz 变换下的协变方程，而 Lorentz 群除了张量表示外，还可以旋量表示. 从数学上说，旋量是张量在概念上的一种推广，因而它们之间具有某些相似性. 张量与旋量混合量的研究扩充了 Lorentz 协变方程的种类，使我们表述自然定律有了更多的自由.

但是，用张量、旋量或混合量表写的在正 Lorentz 变换群作用下协变的方程有无穷多种，而只有某些简单的场才是实际的物理场，因而有所谓简单性假定. 这种假定当然不一定反映客观实际的规律性，而是在现有条件下，由于感性和理性认识不足，或处理方法和工具欠缺而作的一种手段.

一般假定场是定域性的，即场的状态，场与场的相互作用完全由特定的时空点上的场量及其导数所决定，而与该点的邻域无关. 对于自由粒子，这一假设相当于前述没有内部

结构的点描述. 为了克服这种片面性，已经有很多发展非定域性理论的工作. 作为某种近似，定域性理论还是取得了不少的成就.

另一种简单性假定是要求孤立的场没有自相互作用. 因而要求场方程是线性的，而且至多是二阶的.

场方程也可以通过变分原理来求得，基本要求还是相对论的对称原理(协变性)和简单性假设.

定义作用积分

$$W\equiv\frac{1}{ic}\int_R L\,dx,$$

这里 L 是场的 Lagrange 函数密度，$dx\equiv dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$，积分区域 R 是某一有限或无限的时空区域. i 是为了保证 L 为实数而引入的，c 的引入为的是使得 L 具有能量密度的量纲时，W 具有作用量的量纲.

至于 L 的结构，一般是根据推广的 Hamilton 原理来确定的. L 是 Ψ_α 及其微商 $\partial_\mu\Psi_\alpha$ 的函数，当 $\Psi_\alpha\to\Psi_\alpha+\delta\Psi_\alpha$，$\delta\Psi_\alpha|_{\partial R}=0$($\partial R$ 是包围 R 的超曲面)时，$\delta W=0$; W 的极值条件就是场方程.

当协变性与简单性要求满足时，$L(\Psi_\alpha,\partial_\mu\Psi_\alpha)$ 为双线性形式，$\delta W=0$ 等价于 Euler–Lagrange 方程(组):

$$\frac{\partial L}{\partial\Psi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\Psi_\alpha}=0. \tag{1.2.1}$$

当

$$L\equiv-\frac{1}{2}\partial_\mu\Psi\partial_\mu\Psi-\frac{1}{2}\lambda^2\Psi^2$$

时，得到 Klein–Gordon 方程; 当

$$L\equiv-\frac{1}{2}\partial_\mu\Psi_\gamma\partial_\mu\Psi_\gamma$$

时，导致 Maxwell 方程；当

$$L\equiv-\hbar c\overline{\Psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+\lambda)\Psi$$

时，转化为 Dirac 方程(对 $\overline{\Psi}$ 变分)和其随伴方程(对 Ψ 变分)；当

$$L\equiv-\hbar c\overline{\Psi}(\beta_\mu\partial_\mu+\lambda)\Psi$$

时，可得 Kemmer 方程.

利用变分原理还可以得到耦合场的方程，这时

$$L\equiv L_1+L_2+L^*; \qquad (1.2.2)$$

L_1, L_2 分别是自由场 Ψ 和 Φ 的 Lagrange 函数密度；L^* 是相互作用项，与 Ψ, Φ 有关. 一般要求 L^* 为实的不变量(对正 Lorentz 变换)，所谓相互作用是**定域性**的，在这里等于 L^* 仅由同一时空点 x 的场量 Ψ 和 Φ 所确定；一般说，**非定域性**的相互作用将有下面的形式

$$L^*(x)\equiv\int G(x,x')f[\Psi(x),\ \Phi(x')]dx', \qquad (1.2.3)$$

$G(x,\ x')$称为**形状因子**，表征相互作用区域的扩展范围. 在定域性理论中

$$G(x,\ x')\equiv\delta(x-x'),$$

这时，不存在超距作用，因而严格服从在相对论意义下的因果性.

§1.3 量子化. 宏微转化

如果我们将场量 $\Psi_\alpha(x)$ 看成 Schrödinger 的态函数，看成粒子系综的几率振幅，并以之作为几率权函数来计算物理可观察量，用来对待 Klein-Gordon 方程就会产生负几率；用

来对待 Dirac 方程就会产生负能. 因此, 以协变场方程为基础的这种量子理论陷入了困难. 可以一般地证明: 对张量场, 总流(几率密度)是不定的; 对旋量场, 能量也是不定的. 所以, 场的量子化, 应另辟途径, 亦即适当地推广从古典力学到量子力学的量子化方法.

现在常用的量子化方法是 Heisenberg 的正则形式: 首先, 用 Hamilton 正则形式来刻画物理系统, 然后把场量转化为 Hermite 场算符, 并对算符引入适当的代数规则(对易关系或反对易关系). 例如, 可以参见[1]的第二章.

在 Heisenberg 表象中, 场方程是算符方程, 它描述从一个时空点到另一时空点算符形式的变化, 反映场的波动性. 我们知道, 在量子力学中, 态函数是作几率解释的, 关于它有不少争论, 直到现在还没有完全解决. 所以, 在量子场论中, 人们并不希图给场一种几率的解释. 场的某种物理可观察量则是由场算符的某种组合形成的算符函数的特征值, 这些特征值的离散性表征场的粒子性.

量子化前的场方程相应的不是 Schrödinger 方程, 而是 Schrödinger 方程的原型 $T=\boldsymbol{p}^2/2m$ (在相对论的情况下是 $T=\boldsymbol{p}^2/2m+mc^2$). 这时, Schrödinger 方程相应于量子化后的场方程(算符方程), 而态函数在单纯的场算符方程中是不出现的. 它既非场量, 又非场算符, 而是场算符导出的一种算符定义域中的元素. 算符定义域往往是某 Hilbert 空间(的子集), 在 Heisenberg 表象中, 态矢量(态泛函)是固定的.

物理可观察量与可观察量的可测值是两个不同的概念: 前者由 Hermite 算符表征; 而后者是它的特征值. 并非所有的可观察量都是同时能够测量到的, 只有那些具有共同特征

函数的可观察量才能同时测量到. 一般说,特征函数(即态矢量或态泛函)相当于物理系统所处的态, 也即是条件, 是所测过程的背景和前提. 当算符可对易的时候, 它们的特征态是共同的, 因而在这种特征态下, 这些算符相应的物理可观察量可以同时测定. 由最大数目相互可对易的算符所组成的集合称为可观察量的最大集, 对该集算符的测量称为最大测量. 这相当于在某一时刻, 在相应的特征态下关于系统所能获得的最大程度的了解.

量子化程序是描述微观客体波粒二重性的一种手段. 这种程序不能作为任何假定或先验性命题的证明. 哪些物理量或几何量应该进行量子化和采用什么方式量子化只能由科学实验和人类对客观事物的认识来决定. 正象 Newton 力学定律, Einstein 引力方程, Schrödinger 波动方程等等物理学规律不能象数学定理那样来证明一样, 量子化程序也只是实践的一种总结, 表述客观事物的一种方式. 只有在实践肯定的某些基本事实存在的前提下, 它才成为表征事物某些侧面的量的离散性(或分立性, 粒子性, 量子性)的数学手段. 当实验还未充分, 人类认识还不够完全时, 对某些量进行量子化, 以作为一种试探, 期待实践进行检验, 这在方法论上是容许的; 但是, 决不能以此为借口, 不讲条件地对任何量都随心所欲地进行量子化, 并用以论证本来就不存在的命题, 这就是错误的, 先验论的概念游戏, 往往引出许多荒谬的奇谈怪论.

在量子化程序中, 场量转化为场算符并引入关于算符的代数规则这两个方面是统一的. 没有一定的对易或反对易关系, 往往还不足以刻划量子性. 象量子力学一样, 这种关系实际上即 De Broglie 关系, 是实验基础上的总结. 在物理学中,

物理上的考虑是根本的，数学形式是技术性的. 已有的实践和理论指出：张量场适于描述整数自旋的粒子(Bose 子)，它们服从 Bose-Einstein 统计，相应的粒子数算符可以有任何非负整数的特征值，它们宜于用对易关系进行量子化；而旋量场适于描述半整数自旋的粒子 (Femi 子)，它们服从 Pauli 不相容原理，粒子数算符只能取 0 或 1 为特征值，它们遵守 Fermi-Dirac 统计，宜于用反对易关系进行量子化.

物理上的对称性，反映在数学上则是场方程或 Lagrange 函数对一定的位标变换的不变性；群、半群、环和代数等都是反映不变性的数学工具. 时空的均匀性，反映为场方程对时空位标的平移不变性；空间的迷向性，反映为场方程的空间位标的旋转不变性. 场方程的一种不变性，对应于一种守恒律：场方程对位标的规范不变性，对应于电荷守恒律；场方程对位标的平移不变性，对应于动量和能量守恒律；场方程对空间位标的旋转不变性，对应于角动量守恒律；场方程对空间的反射不变性，对应于宇称守恒律. 各类守恒律在下面各章中可以找到具体的例证.

实验已经证明，在弱相互作用中，考虑全 Lorentz 群的不变性是不对的，在这里宇称不一定守恒. 所以，对场的基本要求要作适当的修改. 六十年代，宇称在弱相互作用中不守恒的现象被李振道、杨振宁([2], 1956)和吴健雄等([3], 1957)发现以后，弱相互作用的理论有了很大发展.

算符实际上也是一种(广义的)量. 函数是描述普通数量(或点)之间的变化关系的，可以称为一级关系；算符一般是描述函数之间的变化关系的，可以称为二级关系；算符函数，算符关系(包括对易关系，反对易关系和推广的微积分方程)是

描述算符之间的变化关系的，应该是三级关系了．一般说，一级，二级关系可以看成三级关系的特例．古典物理学的量子化，或宏微转化，成为量子物理学，在数学上相当于一级关系到三级关系的转化．可以借用形象化的说法来比喻：一级关系中，事物被作为点模型处理的量（数值、点）转化成三级关系中具有更复杂的内部结构的算符，因而能更确切地刻划物理对象的微观性质．一级关系基本上是古典分析数学研究的内容；二级和三级关系主要是泛函分析和拓扑学研究的对象．为了适应量子场论的需要，如上所述，要求将内容丰富的古典分析数学推广为泛函分析的内容．因此，我们提出古典分析数学泛函化的基本原则，免除逐一推广和证明之劳，这是专著[6]的第十章的内容．

泛函分析在某种意义上是古典分析数学的推广，但又不都是简单的推广．它们有相似平行的方面（这对泛函分析的研究来说不是本质的困难工作），也有差别很大的方面，构成泛函分析的主攻方向．它注重用新的概念和方法来总结提炼古典分析的结果，用新的观点发掘古典分析在大量事实掩盖下的一些原理．关于泛函分析和拓扑空间的基本概念请参阅关肇直同志的书（[4]和[5]）．

为了从根本上解决目前量子场论所遇到的困难，最近有人大胆尝试，用上同调理论进行量子化的工作．同调代数改变着数学原来学科的面貌，不断带来各种新的成就．

参 考 文 献

[1] 朱洪元，量子场论，科学出版社，1960.

[2] Lee T. D, Yan C. N. Phys. Rev., **104** (1956), **254.**
[3] WuC. S. 等 Phys. Rev. **105** (1957), 1413.
[4] 关肇直，泛函分析讲义，高教出版社，1959.
[5] 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958.
[6] 李国平、郭友中、陈银通，自守函数与闵可夫斯基函数，科学出版社，1978.

第二章　物理单位

为了简化讨论和避免混淆，本章将择要介绍物理单位的选定.

§2.1　绝对 Gauss 单位制

在近代物理学中，电磁学单位经常选择**绝对 Gauss 单位制**. 在这一单位制中，力学单位是 CGS 制的，电学单位和磁学单位分别为 CGSE 制和 CGSM 制的. 这时介电常数 ϵ 为无量纲常数，真空的介电常数 $\epsilon_0=1$; 磁导率 μ 也是无量纲常数，真空的磁导率 $\mu_0=1$.

在这一单位制中，长度 L、质量 M 和时间 T 取为基本单位，其它所有物理量都由它们导出. 例如，由 **Newton 定律**

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}, \tag{2.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是力，m 是质量，$\boldsymbol{a}$ 是加速度，我们可以通过厘米、克、秒来决定力的单位达因:

$$1\text{ 达因}=1\text{ 克}\cdot\text{厘米}\cdot\text{秒}^{-2},$$

而功的单位为尔格:

$$\begin{aligned}1\text{ 尔格}&=1\text{ 达因}\cdot\text{厘米}\\&=1\text{ 克}\cdot\text{厘米}^2\cdot\text{秒}^{-2}.\end{aligned}$$

电磁学单位由下面一些定律导出，它们是:

Coulomb 定律

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{\epsilon r^2}\boldsymbol{n}_r, \tag{2.1.2}$$

其中 q 代表静电荷，r 代表 q_1 与 q_2 间的距离，$\boldsymbol{n}_r$ 代表 q_1 到 q_2 的单位矢量.

电场强度定律

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{\epsilon r^2}\boldsymbol{n}_r, \tag{2.1.3}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 代表电场强度;

电通量密度定律

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{r^2}\boldsymbol{n}_r=\epsilon\boldsymbol{E}, \tag{2.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 代表电通量密度;

磁场强度(Biot–Savart)**定律**

$$\boldsymbol{H}=\int_L\frac{I\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}}{cr^3}, \tag{2.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 代表磁场强度，c 是真空中的光速，I 是导线 L 上的电流，$\boldsymbol{dl}$ 是 L 的有向线元，$\boldsymbol{r}$ 为线元到所计算的空间点的矢量; 作用于磁场中的电流元段 $\boldsymbol{\Delta l}$ 上的力 $\boldsymbol{\Delta F}$ 决定于

Ampere 定律

$$\boldsymbol{\Delta F}=\frac{I\boldsymbol{\Delta l}\times\boldsymbol{B}}{c}, \tag{2.1.6}$$

其中磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}; \tag{2.1.7}$$

磁感应通量 Φ 和感应电动势 $\mathscr{E}$ 之间有

Farady 定律

$$\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{2.1.8}$$

此外，我们知道:

Maxwell 方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t};\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t};\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}&=4\pi\rho;\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2.1.9)$$

这里 ρ 是电荷密度，$\boldsymbol{j}$ 是电流密度.

Poynting 矢量

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{2\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H};\qquad(2.1.10)$$

能量密度

$$W=\frac{\epsilon\boldsymbol{E}^2+\mu\boldsymbol{H}^2}{8\pi};\qquad(2.1.11)$$

Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E},\qquad(2.1.12)$$

其中 σ 是电导率.

由此导出的电磁单位将与下节介绍的新单位制中的电磁单位一并给出，以便查考.

§2.2 新单位制

在量子场论中，人们为了方便起见，当选择物理单位时，常常使得

$$c\equiv\frac{h}{2\pi}\equiv\hbar\equiv1,\qquad(2.2.1)$$

其中真空中的光速[1]

$$c=\mathscr{C}\text{厘米}\cdot\text{秒}^{-1},$$

$$\mathscr{C} \equiv (2.99792459 \pm 0.000000008) \times 10^{10},$$

Planck 常数

$$h = 2\pi\hbar = 2\pi\mathscr{H} \text{ 尔格·秒}^{-1},$$

$$\mathscr{H} \equiv 1.0545887(57) \times 10^{-27}.$$

新单位制保留时间单位 T_0 为秒，则长度单位 L_0 应为

$$L_0 \equiv \mathscr{C} \text{ 厘米}. \tag{2.2.2}$$

我们知道，

$$\begin{aligned} 1 \text{ 尔格} &= 1 \text{ 达因·厘米} \\ &= 1 \text{ 克·厘米}^2\text{·秒}^{-2} \\ &= \mathscr{C}^{-2} \text{ 克·} L_0^2\text{·} T_0^{-2}, \end{aligned}$$

新质量单位记作 M_0，则新功单位为 $M_0 L_0^2 T_0^{-2}$. 由关系 (2.2.1)应有

$$1 M_0 L_0^2 T_0^{-2} = \mathscr{H}\mathscr{C}^{-2} \text{ 克·} L_0^2\text{·} T_0^{-2},$$

$$1 M_0 \equiv \mathscr{M} \text{ 克} = \mathscr{H}\mathscr{C}^{-2} \text{ 克}, \tag{2.2.3}$$

$$\mathscr{M} \equiv \mathscr{H}\mathscr{C}^{-2}.$$

这样，新单位制的基本单位长度 T_0、质量 M_0 和时间 T_0 就选定了. 因此，对于力学量有：

$$\left.\begin{aligned} &\text{新速度单位，} L_0 T_0^{-1}; \\ &\text{新加速度单位，} L_0 T_0^{-2}; \\ &\text{新 力 单 位，} M_0 L_0 T_0^{-2}; \\ &\text{新 功 单 位，} M_0 L_0^2 T_0^{-2}; \\ &\text{新功率单位，} M_0 L_0^2 T_0^{-3}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

在新单位制中，我们将于物理量的符号上加顶标 ∧，保留 ϵ, μ 为无量纲常数，$\epsilon_0 = \mu_0 = 1$，于是 Coulomb 定律 (2.1.2) 成为

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \frac{\hat{q}_1 \hat{q}_2}{4\pi\epsilon\hat{r}^2}\boldsymbol{n}_{\hat{r}}; \tag{2.1.2}^*$$

电场强度定律(2.1.3)成为

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\frac{\hat{q}}{4\pi\epsilon\hat{r}^2}\boldsymbol{n}_{\hat{r}}; \qquad (2.1.3)^*$$

Maxwell 方程(2.1.9)成为

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial\hat{\boldsymbol{D}}}{\partial t},\\
&\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\hat{\boldsymbol{B}}}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{D}}=\hat{\rho},\\
&\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{B}}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.9)^*$$

其余不再一一罗列. 比较同一编号的两组带*号和不带*号的方程, 例如式(2.1.2)与(2.1.2)* 可知, 用 $q(4\pi)^{-\frac{1}{2}}$ 代替(2.1.2)中的 q 就得到(2.1.2)*, 除顶标 $\wedge$ 外. 这样可以得到 Gauss 绝对单位制与新单位制之间的转化关系:

物　理　量	绝对 Gauss 单位制	新　单　位　制
光速	c	1
介电常数	$\epsilon(\epsilon_0=1)$	$\epsilon(\epsilon_0=1)$
磁导率	$\mu(\mu_0=1)$	$\mu(\mu_0=1)$
电导率	σ	$\sigma/(4\pi)$
Planck常数	$\hbar$	1
电荷量	q	$q/(4\pi)^{1/2}$
电荷密度	ρ	$\rho/(4\pi)^{1/2}$
电流密度	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}/(4\pi)^{1/2}$
电场强度	$\boldsymbol{E}$	$(4\pi)^{1/2}\boldsymbol{E}$
电通量密度	$\boldsymbol{D}$	$(4\pi)^{1/2}\boldsymbol{D}$
电动势	$\mathscr{E}$	$(4\pi)^{1/2}\mathscr{E}$
磁场强度	$\boldsymbol{H}$	$(4\pi)^{1/2}\boldsymbol{H}$
磁通量	Φ	$(4\pi)^{1/2}\Phi$
磁感应强度	$\boldsymbol{B}$	$(4\pi)^{1/2}\boldsymbol{B}$
Poynting 矢量	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{S}$
能量密度	W	W

方程中所用位标为右旋位标，上表中新单位制中物理量省写了顶标 ^.

新单位制中的方程形式和 MKSM 单位制中的形式相似，本质区别在于：MKSM 单位制中，ϵ 和 μ 为有量纲的常数；新单位制中，它们是无量纲的常数；当然，ϵ_0 和 μ_0 在两种单位制中也是不相同的．所以，两种单位制切勿混淆，尤其是应用量子场论于无线电技术时，应当特别加以注意，不能将不同单位的方程不加转化而参杂使用．

参 考 文 献

[1] 英国, New Scientist, 63 (1974), 914, p. 636.

第三章　时空位标

§3.1　类空超曲面

特殊相对论中，空间位标常以 Euclid 空间正交右旋位标系 (Ox, Oy, Oz) 或 $O(\boldsymbol{x})$ 为准，空间一点的位标写为 $\boldsymbol{x}\equiv(x, y, z)$，时间位标用 t 表示. 空间与时间为对立的统一，两者互相区别而又有联系，因而物理学中时间与空间位标系合成一个整体，称为**时空位标系**，是四维数学性空间位标系. 空间位标 x, y, z 的单位是长度单位，时间位标 t 的单位为秒. 两种单位不同，在一个统一的时空位标中，容易导致严重的错误，迫使人们考虑以长度为单位的时间位标. 特殊相对论以真空中的光速 c 为质点速度的上临界速度. ct 的单位是长度，所以以 ct 作为时间位标. 这样，四维位标系 $O(\boldsymbol{x}, ct)$ 就可以统一的长度为单位了.

在特殊相对论中，根据物质运动总结出来的时空位标转换规律服从 Lorentz 变换，以时空四维间距具 Lorentz (变换的)不变性为时空四维空间的特征. 在同一位标系中，两个点的位标$(\boldsymbol{x}_1, ct_1)$与$(\boldsymbol{x}_2, ct_2)$的**时空间距**为

$$[-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2+c^2(t_1-t_2)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.1}$$

四维时空中的点也称为**事象**. 记 $d\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$, $d(ct)\equiv ct_1-$

ct_2, 则式(3.1.1)成为

$$\{-d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}+[d(ct)]^2\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1.1)^*$$

因此, **Lorentz 变换**可以推广为使

$$\pm ds^2=-d\boldsymbol{x}^2+[d(ct)]^2 \qquad (3.1.2)$$

不变的线性变换, ± 号视右端之为正或负而定. 以 ds 为长度元素的数学空间叫做 **Minkowski** 空间, 记作 $\mathfrak{M}(4)$.

质点以光速 c 为上临界速度的假设可以表述为

$$\left|\frac{(d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}}{dt}\right|\leqslant c, \qquad (3.1.3)$$

或

$$\left|\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right|\leqslant c. \qquad (3.1.3)^*$$

这相应于时空间距取实值. 这个性质也是 Lorentz 不变的, 因此时刻 t_0 在三维空间位标 $\boldsymbol{x}_0$ 的质点, 到时刻 t 变为位标 $\boldsymbol{x}$, 满足不等式

$$f(\boldsymbol{x},\ ct)\equiv(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2-c^2(t-t_0)^2\leqslant 0. \qquad (3.1.4)$$

这就是说, 质点运动的范围只能在以 $P_0(\boldsymbol{x}_0,\ ct_0)$ 为顶点的光锥面

$$G(P_0):f(\boldsymbol{x},\ ct)=0 \qquad (3.1.5)$$

及其内部

$$G_i(P_0):f(\boldsymbol{x},\ ct)<0. \qquad (3.1.6)$$

质点在 $G(P_0)$ 上的运动速度等于光速 c, 质点在 $G_i(P_0)$ 内的运动速度小于光速 c. 在 $G(P_0)$ 上属于

$$G^+(P_0):ct-ct_0=+[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.1.7)$$

的部分，$t\geqslant t_0$，即属于现在和将来；而属于

$$G^-(P_0):ct-ct_0=-[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.8)$$

的部分，$t\leqslant t_0$，即属于现在和过去．在光锥外部

$$G_0(P_0):f(\boldsymbol{x},\ ct)>0 \quad (3.1.9)$$

的点 P_*，既在 $G^+(P_0)$ 之外，又在 $G^-(P_0)$ 之外．所以不论过去、现在和将来都不能有达到点 P_0 的运动，因而也不能对在 P_0 的质点发生干扰．

容易看出，点 P_0 也在 $G(P_*)$ 之外，所以 P_0 处的质点同样不能对在 P_* 处的质点发生干扰．这时，P_0 与 P_* 称为具有**类空关系**

$$f(\boldsymbol{x}_*,\ ct_*)>0, \quad (3.1.9)^*$$

$(\boldsymbol{x}_*,\ ct_*)$是点 P_* 的位标．

凡超曲面上每两点都满足类空关系$(3.1.9)^*$的称为**类空超曲面**．在类空超曲面上的两个质点不能相互干扰，所以在特殊相对性量子场论中特别强调对类空超曲面的注意．

方程

$$ct=\text{常数} \quad (3.1.10)$$

给出的超曲面

$$f(\boldsymbol{x},\ t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2>0,$$

是一种特殊的类空超曲面，称为**扁平类空超曲面**．全部扁平类空超曲面所成的曲面族可以掩盖全时空，既不重迭，又无空隙．

在类空超曲面

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ ct)=0$$

上，由关系$(3.1.9)^*$，

$$dx^2-c^2dt^2>0.$$

此式应由 $d\varphi(x, ct)=0$ 给出，因而

$$\varphi(x, ct)=\text{常数} \tag{3.1.11}$$

都是类空超曲面方程. 类空超曲面族掩盖全时空，既不重迭，又无空隙.

§3.2 Lorentz 群

第二章中，我们已经选定了新的物理单位制. 新单位制中，有关系式 (2.2.1)，ct 为以长度为单位的 t 所代替，而 Lorentz 位标系中点的位标 (x, t) 皆以新长度单位 L_0 为单位. Lorentz 变换是使

$$ds^2\equiv dx^2-dt^2 \tag{3.2.1}$$

不变的线性变换.

在量子场论中，人们习惯以 x^1, x^2, x^3 分别代替 x, y, z; 以 $x^4\equiv ix^0$ 代替 $x^0\equiv t$, 而把 **Lorentz 变换**写成

$$x'^{\mu'}=a_{\mu'\mu}x^{\mu}+h_{\mu'}, \tag{3.2.2}$$

求和号按 **Einstein** 约定予以省略，即在同一项中，同一指标出现两次，则对此指标按 1, 2, …, n 求和，n 为所考虑空间的维数，对时空四维空间，$n=4$.

Lorentz 变换的微分不变式(3.2.1)可以改写为

$$ds^2\equiv\delta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \tag{3.2.1}*$$

其中 **Kronecker** 记号

$$\delta_{\mu\nu}\equiv\begin{cases}1, & \mu=\nu;\\ 0, & \mu\neq\nu.\end{cases} \tag{3.2.3}$$

可以看出，a_{k4}, a_{4k}, $h_4(k=1, 2, 3)$ 均为纯虚数，其余系数皆为实数，而且

$$a_{\mu'\mu}a_{\mu'\nu}=\delta_{\mu\nu}, \tag{3.2.4}$$

$h_{\mu'}$ 在上面的约束下可以任意选定.

Lorentz 变换的集合构成一个线性变换群[1]，叫做**广义 Lorentz 群**，记作 $\mathscr{L}(4)$. Lorentz 群元将一个 Lorentz 位标系变为另一个 Lorentz 位标系. 下面证明逆元存在，群的其它性质是显而易见的. 令

$$\bar{a}_{\nu\mu'}\equiv a_{\mu'\nu}, \tag{3.2.5}$$

由式(3.2.4)，知

$$\bar{a}_{\nu\mu'}a_{\mu'\mu}=\delta_{\nu\mu},$$

于是矩阵

$$[\bar{a}_{\nu\mu'}][a_{\mu'\mu}]=[\delta_{\nu\mu}], \tag{3.2.6}$$

所以$[\bar{a}_{\nu\mu'}]$为$[a_{\mu'\mu}]$的逆矩阵，即$[a_{\mu'\mu}]$的转置矩阵$[a_{\mu'\mu}]'$. 它们的行列式相等，所以

$$\det[a_{\mu'\nu}]\equiv|[a_{\mu'\nu}]|=\pm 1. \tag{3.2.7}$$

逆元存在. 在式(3.2.4)中，令 $\mu=\nu=4$，得

$$a_{44}=\pm 1. \tag{3.2.7}^*$$

Lorentz 变换中，$h_{\mu'}=0(\mu'=1, 2, 3, 4)$的称为**Lorentz 旋转变换或齐次 Lorentz 变换**. 这些变换的集合构成 $\mathscr{L}(4)$ 的一个子群，称为 **Lorentz 旋转群或齐次 Lorentz 群**，记作 $L(4)$. Lorentz 变换中，$h_{\mu'}\neq 0$, $a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ 的称为 **Lorentz 平移变换**. 这些变换的集合构成 $\mathscr{L}(4)$ 的另一子群，称为**平移 Lorentz 群**，记作 $H(4)$. $L(4)$ 可以分为四个部分，它们的名称与性质可以参见[2]. 于是，我们有：

$$\mathscr{L}(4)\begin{cases} L(4)\begin{cases} L_+^+(4)\begin{cases}\det[a_{\mu\nu}]=+1,\\ a_{44}\geqslant+1,\end{cases}\\ L_-^+(4)\begin{cases}\det[a_{\mu\nu}]=+1,\\ a_{44}<-1,\end{cases}\\ L_+^-(4)\begin{cases}\det[a_{\mu\nu}]=-1,\\ a_{44}\geqslant+1;\end{cases}\\ L_-^-(4)\begin{cases}\det[a_{\mu\nu}]=-1,\\ a_{44}<-1,\end{cases}\end{cases} h_\mu=0;\\ H(4)\begin{cases}[a_{\mu\nu}]=[\delta_{\mu\nu}],\\ h_\mu\neq 0.\end{cases}\end{cases} \tag{3.2.8}$$

其中 $L_+^+(4)$的变换与恒等变换连续相关，成一子群，实际上，另三个部分不成子群.

在特殊相对论中，张量是对 Lorentz 群来定义的. 张量分量 $T^{\lambda_1\cdots\lambda_m}_{\mu_1\cdots\mu_n}$（为了行文方便，张量的分量有时就称为张量）的转化规律为

$$T'^{\lambda'_1\cdots\lambda'_m}_{\mu'_1\cdots\mu'_n}=T^{\lambda_1\cdots\lambda_m}_{\mu_1\cdots\mu_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial x'^{\mu'_i}}\prod_{j=1}^{m}\frac{\partial x'^{\lambda'_j}}{\partial x^{\lambda_j}}. \tag{3.2.9}$$

位标 $x'^{\mu'}$ 与 x^μ 的关系为 Lorentz 变换 (3.2.2)，其中 $h_{\mu'}=0$，而且由式(3.2.6)知道，

$$[a_{\mu'\mu}]'=[a^-_{\mu'\mu}]=[a_{\mu'\mu}]^{-1}, \tag{3.2.10}$$

所以

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}=a_{\mu'\mu},\quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}=a^-_{\mu\mu'}=\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \tag{3.2.11}$$

这就是说，逆变张量与协变张量在特殊相对论中，关于 Lorentz 群是完全一致的. 因此在特殊相对论中只考虑协变张量，而且，张量的偏导数仍旧是张量. 显见，基张量 $\delta_{\mu\nu}$ 的 Christoffel 符号恒为 0，所以按 Riemann 几何学定出的协变

导数与偏导数一致.

必须注意的是，当位标 $x^\mu(\mu=1, 2, 3, 4)$ 改成 $x^k(k=1, 2, 3, 0, x^4\equiv ix^0)$ 时，由 x^μ 变为 $x'^{\mu'}$ 的 Lorentz 变换决定的张量 $T_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 将成为

$$\hat{T}_{k_1\cdots k_n}=T_{\mu_1\cdots\mu_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial x^{k_i}}, \tag{3.2.12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial x^{k_i}}&=\delta_{\mu_i k_i},\\ \frac{\partial x^4}{\partial x^{k_i}}&=i\delta_{4,\,k_i+4},\end{aligned}\right\}\ \mu_i=1, 2, 3,\ k_i=1, 2, 3, 0. \tag{3.2.13}$$

这样定出的张量 (3.2.12) 是对实 Lorentz 位标系 $O(x^1, x^2, x^3, x^0)$ 或 $O(x^k)$而言的，它的分量的转化规律为

$$\hat{T}_{k_1'\cdots k_n'}=\hat{T}_{k_1\cdots k_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x^{k_i}}{\partial x'^{k_i'}}. \tag{3.2.14}$$

§3.3 局部位标系

在一般相对性量子场论中，为了区别时间位标与空间位标，并且便于和特殊相对论文献中的大量结果作比较，一般仍旧引用三个实数及一个虚数的数列(x^1, x^2, x^3, ix^0)作为**一般相对性时空**或 **Einstein 时空**（𝕋）中点的位标，简记作 $x\equiv(x^\mu)(\mu=1, 2, 3, 4, x^4\equiv ix^0)$，一如前述. 其中，三个实数 $\boldsymbol{x}\equiv(x^1, x^2, x^3)$表明空间性，一个虚数 $x^4\equiv ix^0$ 表明时间性.

时空（𝕋）可以作为四维 Hausdorff 空间[3]看待. 这一 Hausdorff 空间的每一点 P 有一充分小邻域 $V(P)$，拓扑等价(同胚)于 Euclid 空间 $E(4)$ 中以原点 $O\equiv(0)$ 为中心的开矩形

$$E(P):\ |x^k|<\rho^k,\ k=1,2,3,0, \qquad (3.3.1)$$

式中 $\rho^k>0$, 并使点 P 相应于 $E(P)$ 的中心 O. 这样就在(㊀)中每点 P 的邻域 $V(P)$ 中引入了**局部位标系** $P(x)$, 以 P 为原点, $V(P)$ 是 $E(P)$ 的象.

当 $V(P)$ 与 $V(P')$ 有一公共部分 $V(PP')\equiv V(P)\cap V(P')$ 时, 每一公共点 $Q\in V(PP')$ 相应于 $V(P)$ 与 $V(P')$ 的局部位标 $(x^\mu(P))$ 与 $(x'^{\mu'}(P'))$ 之间假定存在一一对应的解析变换:

1° 拓广 $x^\mu\equiv x^\mu(P)$ 为复变量 $z^\mu\equiv z^\mu(P)$, $x'^{\mu'}\equiv x'^{\mu}(P')$ 为复变量 $z'^{\mu'}\equiv z'^{\mu'}(P')$, 设变换

$$z'^{\mu'}=z'^{\mu'}(z)$$

及其逆变换

$$z^\mu=z^\mu(z')$$

都是单值的解析函数, 其定义域分别为有限的单连通区域 $D(P)$ 与 $D(P')$.

2° 当 $z^\mu\to \mathrm{x}^\nu$ 时, $z'^{\mu'}\to \mathrm{x}'^{\mu'}$; 反之亦然.

3° 记

$$\overset{*}{E}(P)\equiv E(P)\cap E(PP'),$$

$$\overset{*}{E}(P')\equiv E(P')\cap E(P'P),$$

$E(PP')$ 与 $E(P'P)$ 是 $V(PP')$ 的原象, 设

$$\overset{*}{E}(P)\subset D(P),\ \overset{*}{E}(P')\subset D(P'),$$

为了保证逆变换的存在唯一性, $D(P)$ 中函数行列式, 或 **Jacobi 行列式**

$$J\equiv\left|\frac{\partial(z'^{\mu'})}{\partial(z^\nu)}\right|\neq 0. \qquad (3.3.2)$$

当 $z^\mu\to x^\mu$ 时,

$$J=\left|\frac{\partial(x'^{\mu'})}{\partial(x^\mu)}\right|\equiv\left|\frac{\partial(x'^1,\ x'^2,\ x'^3,\ x'^4)}{\partial(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)}\right| \qquad (3.3.3)$$

是 $\overset{*}{E}(P)$ 上不取 0 为值的实值连续函数, 它或全取正值, 或全

取负值. 当 $J>0$ 时，位标系 $P(x)$ 与 $P'(x')$ 同向；当 $J<0$ 时，两者反向.

假定(𝔐)为连通的且可定向，即全空间可以邻接同向的局部位标系给出全面的描述，而没有邻接的反向位标系. 这样的时空(𝔐)称为**解析流形**. 当变换的解析性用更宽的可微性来代替时，即为一般的**微分流形**. 我们的许多讨论实质上对一般的微分流形也是成立的.

本书以希腊字母表示张量指标，它们取值 1, 2, 3, 4 (一般 n 维流形中的张量指标取值 1, 2, …, n. n 维复解析流形可以看作 $2n$ 维实解析流形，反之则不然). 张量描述时空(𝔐)中的几何量或物理量，其存在区域可以是全时空(𝔐)，也可以是它的一个子流形. 张量在其存在域中每一点 P 的近邻的性质用局部位标系描述，例如，对于局部位标系 $P(x)$ 及 $P'(x')$，张量的分量分别以 $T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(P)$ 及 $T'^{\mu'_1\cdots\mu'_n}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_m}(P')$ 表示，当 x 与 x' 为同一点的位标时，应有变换关系

$$T'^{\mu'_1\cdots\mu'_n}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_m}(P')=T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_m}(P)\prod_{i=1}^{m}\frac{\partial x^{\lambda_i}}{\partial x'^{\lambda'_i}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial x'^{\mu'_j}}{\partial x^{\mu_j}},\qquad(3.3.4)$$

有时也简记作

$$T'^{\mu'}_{\lambda'}(x')=T^{\mu}_{\lambda}(x)\left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\right),\qquad(3.3.4)^*$$

$$\lambda\equiv(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m),\ \mu\equiv(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n).$$

式中 λ 称为**协变指标**，μ 称为**逆变指标**. 这个张量称为 m 阶协变，n 阶逆变的 $m+n$ 阶张量. 一阶张量称为**矢量**.

上述张量转换关系也适用于位标$(x^\mu)(\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4)$变为 $(x^k)(k=1,\ 2,\ 3,\ 0;\ x^4\equiv ix^0)$ 的情况. 由于位标的表示在一般相对性量子场论的著作中有所不同，容易混淆，运用时宜加充分注意.

为了帮助理解，我们引述一个熟知的具体例子[4].

$E(3)$内的球面方程对直角位标系 $0(x,\ y,\ z)$ 为

$$S: x^2+y^2+z^2=r^2. \tag{3.3.5}$$

S 切去南极或北极的一部分后分别成为：

$$\left.\begin{aligned} S': z>-r/2;\\ S'': z<r/2. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.5}^*$$

过 S' 上一点 $P'\equiv(x',\ y',\ z')$ 与南极 $(0,\ 0,\ -r)$ 的直线交 xy 平面于点$(\mathrm{x}'^1,\ \mathrm{x}'^2,\ 0)$，以 $(\mathrm{x}'^1,\ \mathrm{x}'^2)$ 作为 P' 的局部位标. 过 S'' 上一点 $P''\equiv(x'',\ y'',\ z'')$ 与北极 $(0,\ 0,\ r)$ 的直线交 xy 平面于点$(\mathrm{x}''^1,\ \mathrm{x}''^2,\ 0)$，以$(\mathrm{x}''^1,\ \mathrm{x}''^2)$ 作为 P'' 的局部位标. 通过简单计算可得：

$$\mathrm{x}'^1=\frac{rx'}{r+z'},\quad \mathrm{x}'^2=\frac{ry'}{r+z'}; \tag{3.3.6}$$

而

$$x'=\frac{2r^2\mathrm{x}'^1}{(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2+r^2},\quad y'=\frac{2r^2\mathrm{x}'^2}{(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2+r^2},$$

$$z'=\frac{r[r^2-(\mathrm{x}'^1)^2-(\mathrm{x}'^2)^2]}{(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2+r^2}. \tag{3.3.6}^*$$

这里的 S' 即 $E(P')$，$V(P')$ 是下面的圆内部：

$$(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2<3r^2. \tag{3.3.7}$$

同理，

$$\mathrm{x}''^1=\frac{rx''}{r-z''},\quad \mathrm{x}''^2=\frac{ry''}{r-z''}; \tag{3.3.8}$$

而

$$x''=\frac{2r^2\mathrm{x}''^1}{(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2+r^2},\quad y''=\frac{2r^2\mathrm{x}''^2}{(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2+r^2},$$

$$z''=\frac{r[(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2-r^2]}{(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2+r^2}. \tag{3.3.8}^*$$

这里的 S'' 即 $E(P'')$, $V(P'')$是下面的圆内部:

$$(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2<3r^2. \tag{3.3.9}$$

S' 与 S'' 的公共部分 $V(P'P'')$内的一点 $P\equiv(x, y, z)$具有两种局部位标 $(\mathrm{x}'^1, \mathrm{x}'^2)$ 与 $(\mathrm{x}''^1, \mathrm{x}''^2)$. 从上面的关系式易知:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{x}''^1&=\frac{r^2\mathrm{x}'^1}{(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2},\quad \mathrm{x}''^2=\frac{r^2\mathrm{x}'^2}{(\mathrm{x}'^1)^2+(\mathrm{x}'^2)^2};\\ \mathrm{x}'^1&=\frac{r^2\mathrm{x}''^1}{(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2},\quad \mathrm{x}'^2=\frac{r^2\mathrm{x}''^2}{(\mathrm{x}''^1)^2+(\mathrm{x}''^2)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3.3.10}$$

对于 $V(P'P'')$ 内的点 P, 由于式 (3.3.10) 中分母都大于 0, 所以 x''^1, x''^2 是 x'^1, x'^2 的函数, 且有直到任意阶的连续微商. 反之亦然.

球面 S 上的邻域 S' 及 S'' 连同其局部位标系 $P'(\mathrm{x}')$ 及 $P''(\mathrm{x}'')$ 构成 S 上的一个流形构造.

S 上点 $P\equiv(x_0, y_0, z_0)$的切平面的方程为

$$xx_0+yy_0+zz_0=r^2. \tag{3.3.11}$$

切平面上的全体矢量构成一个二维矢量空间,记作 $T(P)$. 矢量(a, b, c)属于 $T(P)$的充要条件是

$$ax_0+by_0+cz_0=0. \tag{3.3.12}$$

设 $P\in S'$, 则 S' 上的局部位标系 $P(\mathrm{x}')$ 在 $T(P)$ 上规定了一个基底,记点 P 的位标为$(\mathrm{x}'^1_0, \mathrm{x}'^2_0)$, 考虑一条过 P 点的可微曲线

$$P(t)\equiv(x'(t), y'(t), z'(t)),\ P(0)=P. \tag{3.3.12}$$

设想这条曲线在 $t=0$ 这一点的切矢量属于上述切平面 $T(P)$,则式(3.3.6)* 成立. 为简单起见,省去上标"'"和参变量 t, 并以顶标"."表示对 t 的微商,由式 (3.3.6)* 有曲线在

$P(t)$ 点的切矢量分量为

$$\dot{x}=\frac{2r\{\dot{\mathrm{x}}^1[(\mathrm{x}^1)^2+(\mathrm{x}^2)^2+r^2]-2\mathrm{x}^1[\dot{\mathrm{x}}^1\mathrm{x}^1+\dot{\mathrm{x}}^2\mathrm{x}^2]\}}{[(\mathrm{x}^1)^2+(\mathrm{x}^2)^2+r^2]^2},\ \cdots,$$

亦即

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial x}{\partial \mathrm{x}^1}\dot{\mathrm{x}}^1+\frac{\partial x}{\partial \mathrm{x}^2}\dot{\mathrm{x}}^2,\\ \dot{y}&=\frac{\partial y}{\partial \mathrm{x}^1}\dot{\mathrm{x}}^1+\frac{\partial y}{\partial \mathrm{x}^2}\dot{\mathrm{x}}^2,\\ \dot{z}&=\frac{\partial z}{\partial \mathrm{x}^1}\dot{\mathrm{x}}^1+\frac{\partial z}{\partial \mathrm{x}^2}\dot{\mathrm{x}}^2,\end{aligned}\right\}\qquad (3.3.13)$$

写成矩阵的形式便是

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{X}},\qquad (3.3.13)^*$$

式中

$$\boldsymbol{P}\equiv\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{x}^1} & \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{x}^2}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{x}^1} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{x}^2}\\ \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{x}^1} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{x}^2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}\equiv\begin{bmatrix}\mathrm{x}^1\\ \mathrm{x}^2\end{bmatrix},\quad (3.3.14)$$

$\boldsymbol{J}$ 的秩为 2. 因此，$\dot{\boldsymbol{P}}$ 给定后，$\dot{\boldsymbol{X}}$ 是唯一确定的. 当 $t=0$ 时，切矢量 $\dot{\boldsymbol{P}}(0)$ 确定的 $\dot{\boldsymbol{X}}(0)$ 称为这个切矢量关于局部位标系 $P(\mathrm{x})$ 的分量. 显见，切矢量 $(\partial x/\partial \mathrm{x}^1,\ \partial y/\partial \mathrm{x}^1,\ \partial z/\partial \mathrm{x}^1)$ 及 $(\partial x/\partial \mathrm{x}^2,\ \partial y/\partial \mathrm{x}^2,\ \partial z/\partial \mathrm{x}^2)$ 关于 $P(\mathrm{x})$ 的分量分别是 $(1,\ 0)$ 及 $(0,\ 1)$. 这就是用它们作 $T(P)$ 的基底的原因.

当点 P 属于 $V(P'P'')$ 中时，点 P 的切矢量 $(a,\ b,\ c)$ 关于 $P'(\mathrm{x}')$ 及 $P''(\mathrm{x}'')$ 的分量分别是 $(T'^1,\ T'^2)$ 及 $(T''^1,\ T''^2)$，于是：

$$\dot{\boldsymbol{P}}(P)=\boldsymbol{J}(P')\dot{\boldsymbol{X}}(P')=\boldsymbol{J}(P'')\dot{\boldsymbol{X}}(P''),\qquad (3.3.15)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}(P)&\equiv\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{X}}(P')\equiv\begin{bmatrix}T'^1\\T'^2\end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{X}}(P'')\equiv\begin{bmatrix}T''^1\\T''^2\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{J}(P')&\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x(P)}{\partial \mathrm{x}'^1} & \dfrac{\partial x(P)}{\partial \mathrm{x}'^2}\\ \dfrac{\partial y(P)}{\partial \mathrm{x}'^1} & \dfrac{\partial y(P)}{\partial \mathrm{x}'^2}\\ \dfrac{\partial z(P)}{\partial \mathrm{x}'^1} & \dfrac{\partial z(P)}{\partial \mathrm{x}'^2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{J}(P'')\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x(P)}{\partial \mathrm{x}''^1} & \dfrac{\partial x(P)}{\partial \mathrm{x}''^2}\\ \dfrac{\partial y(P)}{\partial \mathrm{x}''^1} & \dfrac{\partial y(P)}{\partial \mathrm{x}''^2}\\ \dfrac{\partial z(P)}{\partial \mathrm{x}''^1} & \dfrac{\partial z(P)}{\partial \mathrm{x}''^2}\end{bmatrix}.\end{aligned}\right\}\tag{3.3.16}$$

由复合函数的微商法则，有

$$\boldsymbol{J}(P')=\boldsymbol{J}(P'')\boldsymbol{\Lambda}(P''),\tag{3.3.17}$$

式中

$$\boldsymbol{\Lambda}(P'')\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathrm{x}''^1(P'')}{\partial \mathrm{x}'^1} & \dfrac{\partial \mathrm{x}''^1(P'')}{\partial \mathrm{x}'^2}\\ \dfrac{\partial \mathrm{x}''^2(P'')}{\partial \mathrm{x}'^1} & \dfrac{\partial \mathrm{x}''^2(P'')}{\partial \mathrm{x}'^2}\end{bmatrix}.$$

因此，切矢量 J 的分量转变关系(3.3.16)与式(3.3.4)一致.

以此为模式，建立流形上的切矢量的一般定义是我们在[2]中已经见到过的.

注意，位标系 $P'(\mathrm{x}')$ (或 $P''(\mathrm{x}'')$) 可以扩张到除南(北)极外的全部 S. 我们知道球面与平面不是拓扑等价的，因此，在球面 S 上不存在单一的位标系.

参 考 文 献

[1] Wigner, E. P., Ann. of Math., **40** (1939), 149.

［2］ 李国平、郭友中，一般相对性量子场论(一)，湖北人民出版社，1980.

［3］ Alexandroff, P., H. Hopf, Toplogie, Springer, Berlin, 1935.

［4］ Chevalley, C., Theory of Lie groups, Princeton, 1946.

第四章　张量与矩阵的混合使用

在前一章中，我们已经见到：张量与矩阵的混合使用往往容易产生混淆．但在量子场论里，为了运算方便又经常混合使用，因此有必要对有关问题进行讨论，以利于澄清某些见珠鱼目的地方．

§4.1 矩　　阵

1. 定义和符号

复(或实)数域上按照一定次序排列的一个矩形数表称为**矩阵**，横的叫行，竖的称**列**．一个m行n列矩阵，$m\times n$矩阵的一般形式是

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \cdots & A_m^n \end{bmatrix}\equiv[A_i^j], \tag{4.1.1}$$

其中A_i^j是第i行第j列的元．

两个对应元相等的矩阵相同．当$m=n$时，$\boldsymbol{A}$称为$n\times n$**方阵**，方阵简称阵，它的迹

$$Sp\boldsymbol{A}\equiv t_r\boldsymbol{A}\equiv\sum_{i=1}^{n}A_i^i; \tag{4.1.2}$$

利用 Kronecker 记号δ_i^j，单位阵

$$\boldsymbol{I}\equiv[\delta_i^j]; \tag{4.1.3}$$

对角阵

$$\boldsymbol{A}\equiv[A_i^j\delta_i^j]\equiv\mathrm{diag}[A_1^1,\ A_2^2,\ \cdots,\ A_n^n]. \qquad (4.1.4)$$

主对角线以上(或下)的元全为 0 的方阵称为**三角阵**. 元全为 0 的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}$.

矩阵元 A_i^j 用它的共轭复数 $\overline{A_i^j}$ 代替而得到的矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}\equiv[\overline{A_i^j}] \qquad (4.1.5)$$

称为原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵**;矩阵的行与列易位的矩阵

$$\boldsymbol{A}^T\equiv[A_j^i] \qquad (4.1.6)$$

称为原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置(易位)矩阵**;矩阵

$$\boldsymbol{A}^*\equiv\overline{\boldsymbol{A}}^T=[\overline{A_j^i}] \qquad (4.1.7)$$

称为原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **Hermete 共轭矩阵**.

具有性质

$$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A} \qquad (4.1.8)$$

的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称阵**;具有性质

$$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A} \qquad (4.1.9)$$

的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**反称阵**;具有性质

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A} \qquad (4.1.10)$$

的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 **Hermite (共轭)阵**;具有性质

$$\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A} \qquad (4.1.11)$$

的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反 **Hermite(共轭)阵**.

2. 运 算 规 则

两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\equiv[A_i^j+B_i^j], \qquad (4.1.12)$$

差

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\equiv[A_i^j-B_i^j], \qquad (4.1.13)$$

数乘

$$kA \equiv [kA_i^j], \tag{4.1.14}$$

其中 k 是复(实)数.

一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个 $n\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 得一 $m\times l$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} \equiv [C_i^k] \equiv [A_i^j]\,[B_j^k] \equiv \boldsymbol{AB}, \tag{4.1.15}$$

其中

$$C_i^k \equiv \sum_{j=1}^{n} A_i^j B_j^k. \tag{4.1.16}$$

矩阵乘法满足结合律和分配律,不满足交换律.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元 A_i^j 组成的行列式称为**矩阵行列式**, 记作 $|\boldsymbol{A}|$, 即

$$|\boldsymbol{A}| \equiv |[A_i^j]| \equiv \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m^1 & A_m^2 & \cdots & A_m^m \end{vmatrix}. \tag{4.1.17}$$

$|\boldsymbol{A}|$ 中去掉第 i 行和第 j 列后,乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的行列式称为 A_i^j 的(代数)余子式, 记作 Δ_i^j, 因此

$$\delta_i^j |\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{m} A_i^k \Delta_j^k = \sum_{k=1}^{m} A_k^i \Delta_k^j. \tag{4.1.18}$$

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元 A_i^j 用余子式 Δ_i^j 代替而得到的方阵称为原方阵的**相伴阵**, 记作 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$, 因此

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A} \equiv [\Delta_i^j], \tag{4.1.19}$$

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}) = (\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{4.1.20}$$

矩阵行列式不为 0 的阵称为**非异阵**; 反之称为**奇异阵**. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 称为阵 $\boldsymbol{A}$ **的逆阵**是指它满足下面的关系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \tag{4.1.21}$$

因此, 由式(4.1.20)知, 非异阵 $\boldsymbol{A}$ 有逆阵

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}=\left[\frac{A_i'}{|A|}\right]. \tag{4.1.22}$$

具有性质

$$AA^T=A^TA=I \tag{4.1.23}$$

的矩阵称为**正交阵**; 具有性质

$$AA^*=A^*A=I \tag{4.1.24}$$

的矩阵称为**酉阵**; 具有性质

$$AA^T=A^TA, \tag{4.1.25}$$

或

$$AA^*=A^*A \tag{4.1.26}$$

的矩阵称为**正规阵**.

注意, 对于Hermite阵容易证明:

$$\left.\begin{aligned}&(kA)^*=\bar{k}A^*;\\&(A+B)^*=A^*+B^*;\\&(AB)^*=B^*A^*.\end{aligned}\right\} \tag{4.1.27}$$

当把矩阵定义中的复(实)数域换成某一抽象元的体时, 元素乘法不可交换, 元素本身虽有 Hermite 共轭的概念, 但要引伸出矩阵的 Hermite 共轭概念还能保持关系(4.1.27), 必须:

1° 两个元素乘积的 Hermite 共轭恰为两共轭元素的反向乘积;

2° 两个元素之和的 Hermite 共轭等于两共轭元素之和.

§4.2 张量的矩阵表示

上一节关于矩阵的讨论大都可以平移到张量中来. 重要的是 Hermite (共轭)张量等概念, 似乎还未见文献提及. 恰

当的方法应能和 Hermite 矩阵的概念相协调，为此先将张量与矩阵作一简单的比较，作出张量的矩阵表示.

我们专门讨论四维张量，对于 n 维张量没有原则区别.

将对位标 x 的一阶协变张量 $T_\alpha(\mathrm{x})$ 的四个分量作为四行的列矩阵的元，称为相应张量的**表示矩阵**，记作

$$\overbrace{T_\alpha(\mathrm{x})},$$

α 表示行数，不致混淆时也记作 $[T_\alpha(\mathrm{x})]$；将对位标 x 的一阶逆变张量 $T^\beta(\mathrm{x})$ 的四个分量作为四列的行表示矩阵的元，记作

$$[T^\beta(x)],$$

β 表示列数.

位标变换时，$\mathrm{x}'=\mathrm{x}'(\mathrm{x})$，我们以 $\partial \mathrm{x}^\alpha/\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}$ 为 α' 行 α 列的元，作 **Jacobi 矩阵**

$$\left[\frac{\partial \mathrm{x}^\alpha}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right],$$

则一阶协变张量的转换规律

$$T'_{\alpha'}(\mathrm{x}')=T_\alpha(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}^\alpha}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}} \qquad (4.2.1)$$

就与列矩阵的转换规律

$$\overbrace{T'_{\alpha'}(\mathrm{x}')}=\left[\frac{\partial \mathrm{x}^\alpha}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right]\overbrace{T_\alpha(\mathrm{x})} \qquad (4.2.1)^*$$

相应；同理，一阶逆变张量的转换规律

$$T'^{\beta'}(\mathrm{x}')=T^\beta(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^\beta} \qquad (4.2.2)$$

就与行矩阵的转换规律

$$[T'^{\beta'}(\mathrm{x}')]=[T^\beta(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^\beta}\right] \qquad (4.2.2)^*$$

相应.

将对位标 x 的张量 $T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})$ 的 16 个分量作为元构成表示矩阵 $[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]$，则张量 $T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})$ 的转换规律

$$T'^{\beta}_{\alpha'}(\mathrm{x}')=T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\ \frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}} \tag{4.2.3}$$

恰与矩阵转换规律

$$[T'^{\beta'}_{\alpha'}(\mathrm{x}')]=\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right][T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}}\right] \tag{4.2.3}^{*}$$

相应.

如果沿用矩阵的易位运算(4.1.6)于式(4.2.3)*，则有

$$[T'^{\alpha'}_{\beta'}(\mathrm{x}')]=\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta}}{\partial \mathrm{x}^{\beta'}}\right][T^{\alpha}_{\beta}(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha'}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha}}\right]. \tag{4.2.4}$$

式(4.2.4)不再相应于张量的转换关系.

为此，我们定义拟易位运算“′”，使满足条件

1° $\overbrace{T_{\alpha}}'\equiv[T^{\alpha}_{\cdot}]$;

2° $[T^{\beta}]'\equiv\overbrace{T^{\cdot}_{\beta}}$;

3° $[T^{\beta}_{\alpha}]'\equiv[T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}]$;

4° $[\partial \mathrm{x}^{\alpha}/\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}]'\equiv[\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}/\partial \mathrm{x}^{\alpha}]$.

由 4° 可得

5° $[\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}/\partial \mathrm{x}^{\alpha}]'=[\partial \mathrm{x}^{\alpha}/\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}]$.

由式(4.2.1)*作拟易位运算，得

$$\overbrace{T'_{\alpha'}(\mathrm{x}')}'=\overbrace{T_{\alpha}(\mathrm{x})}'\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right]', \tag{4.2.5}$$

即

$$[T'^{\alpha'}_{\cdot}(\mathrm{x}')]=[T^{\alpha}_{\cdot}(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}\right]. \tag{4.2.5}^{*}$$

这与张量指标提升后的转换关系(4.2.2)*一致.

同理，由式(4.2.3)*作拟易位运算，得

$$[T'^{\alpha'}_{\beta'}(\mathrm{x}')]'=\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}}\right]'[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]'\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right]', \qquad (4.2.6)$$

即

$$[T'^{\alpha'}_{\cdot\beta'}(\mathrm{x}')]=\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\beta}}{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}\right][T^{\alpha}_{\cdot\beta}(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}\right]. \qquad (4.2.6)^*$$

这与张量转换关系一致，请与式(4.2.4)相比较.

以矩阵的拟易位运算“′”代替易位运算“T”定义**拟 Hermite (共轭)运算**“*”代替 Hermite (共轭) 运算 (4.1.7) 而有：

$$\left.\begin{aligned}&\underbrace{T_{\alpha}}^{*}\equiv[\overline{T}^{\alpha}_{\cdot}];\\&[T^{\beta}]^{*}\equiv\overline{\underbrace{T}}^{\beta}_{\cdot};\\&[T^{\beta}_{\alpha}]^{*}\equiv[\overline{T}^{\alpha}_{\cdot\beta}].\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.7)$$

根据表示矩阵的拟 Hermite 共轭的概念可以定义张量的(拟) **Hermite 共轭运算**“*”：

$$\left.\begin{aligned}&(T_{\alpha})^{*}\equiv(\overline{T}^{\alpha}_{\cdot});\\&(T^{\beta})^{*}\equiv(\overline{T}^{\beta}_{\cdot});\\&(T^{\beta}_{\alpha})^{*}\equiv(\overline{T}^{\alpha}_{\cdot\beta}).\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.8)$$

当张量(T)与其 Hermite 共轭 $(T)^*$ 相等时，这个张量称为 **Hermite 张量**：

$$(T)=(T)^{*}. \qquad (4.2.9)$$

容易验证，一个张量的 Hermite 张量的确是一个张量.

张量 $T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})$ 的**张量行列式**定义为：

$$|(T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x}))|\equiv|[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]|, \qquad (4.2.10)$$

行与列不等时，用 0 补充之. 张量行列式不为 0 的张量称为**非异张量**；反之称为**奇异张量**.

由定义可见，非异张量$(T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x}))$的表示矩阵$[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]$是非异矩阵，因而逆矩阵$[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]^{-1}$存在，记作

$$[T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]^{-1}\equiv[{}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]. \tag{4.2.11}$$

这时，

$$[{}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})][T^{\gamma}_{\beta}(\mathrm{x})]=[\delta^{\gamma}_{\alpha}];$$

$${}^{-1}T'^{\beta'}_{\alpha'}(\mathrm{x}')={}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\ \frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}};$$

$$[{}^{-1}T'^{\beta'}_{\alpha'}(\mathrm{x}')]=\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}\right][{}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}(\mathrm{x})]\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta'}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}}\right]. \tag{4.2.12}$$

因此，

$$[{}^{-1}T'^{\beta'}_{\alpha'}(\mathrm{x}')][T'^{\gamma'}_{\beta'}(\mathrm{x}')]=[\delta^{\gamma'}_{\alpha'}]. \tag{4.2.11}^{*}$$

这样，我们定出的张量$({}^{-1}T^{\beta}_{\alpha})$的表示矩阵为$[{}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}]$，张量$(T^{\beta}_{\alpha})$的表示矩阵为$[T^{\beta}_{\alpha}]$，而

$$\left.\begin{aligned}{}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}\,T^{\gamma}_{\beta}&=\delta^{\gamma}_{\alpha};\\ T^{\gamma}_{\beta}\,{}^{-1}T^{\alpha}_{\gamma}&=\delta^{\alpha}_{\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{4.2.13}$$

因此，${}^{-1}T^{\beta}_{\alpha}$可以定义作张量$T^{\beta}_{\alpha}$的逆(对偶)张量，逆张量是唯一的.

前面的论述可以推广于多指标张量，其实多指标张量也可以看作是矩阵概念的一种多维性推广. 为此自然可以引入多维行列式，但是为了方便起见，我们仍将选择一种方法，用平面矩阵来表写多指标张量. 当然，表写的方式不是唯一的，因此我们固定其中的一种作为标准使用.

协变张量$T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$的$m$个指标有$N(\equiv 4^m)$个不同的排列，选定某一固定的排列次序，

$$\mathscr{P}(m)\colon A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{N_m},\ A_i\equiv(\alpha_{i(1)},\ \alpha_{i(2)},\ \cdots,\ \alpha_{i(m)}), \tag{4.2.14}$$

其中$\alpha_{i(k)}$为m个指标α_j中的一个. 根据排列$\mathscr{P}(m)$，张量的分量$T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$组成一个$N_m$行的列表示矩阵:

$$\boxed{T_{A_i}}. \tag{4.2.15}$$

同理，对于逆变张量 $T^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$ 的 n 个指标有 $N(\equiv 4^n)$ 个不同的排列，固定其中一种排列

$$\mathscr{P}(n): B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_{N_n};\ B_j \equiv (\beta_{j(1)},\ \beta_{j(2)},\ \cdots,\ \beta_{j(n)}), \tag{4.2.14}^*$$

其中 $\beta_{j(k)}$ 为 n 个指标 β_i 中的一个. 根据排列 $\mathscr{P}(n)$，张量的分量 $T^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$ 组成一个 N_n 列的行表示矩阵:

$$[T^{B_j}]. \tag{4.2.15}^*$$

对排列 $\mathscr{P}(m)$ 尚须加以限制，说明由 $\mathscr{P}(m)$ 到 $\mathscr{P}(m+1)$ 的递归关系. 我们规定，对于 $m+1$ 个指标 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \alpha_{m+1})$，有排列

$$\mathscr{P}(m+1): A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{N_m},\ A_{N_m+1},\ \cdots,\ A_{N_{m+1}}. \tag{4.2.14}^{**}$$

这就是说，在排列 $\mathscr{P}(m+1)$ 中，由于对 $\mathscr{P}(m)$ 添加指标 α_{m+1}，而增加的排列应该放在 $\mathscr{P}(m)$ 之后. 例如:

$$A_1 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4),\ \cdots,\ A_{N_m};$$

$$A_{N_m+1} \equiv (A_{N_m},\ 1),\ A_{N_m+2} \equiv (A_{N_m},\ 2),$$

$$A_{N_m+3} \equiv (A_{N_m},\ 3),\ A_{N_m+4} \equiv (A_{N_m},\ 4),$$

$$\cdots,\ A_{N_{m+1}} \equiv (A_{N_{m+1}-1},\ 4).$$

按照排列 $\mathscr{P}(m)$ 和 $\mathscr{P}(n)$，张量分量 $T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}^{\ \ \ \ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$ 以 $T_{A_i}^{\ \ B_j}$ 作为第 i 行 j 列的元组成 $N_m \times N_n$ 矩阵:

$$[T_{A_i}^{\ \ B_j}]. \tag{4.2.16}$$

这个矩阵为张量 $T_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}^{\ \ \ \ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$ 的表示矩阵. 张量行列式定义为

$$|(T_{A_i}^{B_j})| \equiv |[T_{A_i}^{\ \ B_j}]|, \tag{4.2.17}$$

$N_m \neq N_n$ 时，以 0 补充之. 行列式不为 0 的张量称为非异张

量；反之称为奇异张量.

按照排列 $\mathscr{P}(m)$，有

$$\frac{\partial \mathrm{x}^{A_j}}{\partial \mathrm{x}'^{A_i'}} \equiv \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha_1^j}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha_1^i}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha_2^j}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha_2^i}} \cdots \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha_m^j}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha_m^i}}, \tag{4.2.18}$$

以此作为第 i 行 j 列的元组成 Jacobi 矩阵：

$$\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{A_j}}{\partial \mathrm{x}'^{A_i'}}\right]. \tag{4.2.19}$$

同理，按照排列 $\mathscr{P}(n)$，有

$$\frac{\partial \mathrm{x}'^{B_j'}}{\partial \mathrm{x}^{B_i}} \equiv \frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta_1^j}}{\partial \mathrm{x}^{\beta_1^i}} \frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta_2^j}}{\partial \mathrm{x}^{\beta_2^i}} \cdots \frac{\partial \mathrm{x}'^{\beta_n^j}}{\partial \mathrm{x}^{\beta_n^i}}, \tag{4.2.18}^*$$

以此作为第 i 行 j 列的元组成 Jacobi 矩阵：

$$\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{B_j'}}{\partial \mathrm{x}^{B_i}}\right]. \tag{4.2.19}^*$$

张量 $T'^{B_j'}_{A_i'}$ 的转换规律

$$T'^{B_j'}_{A_i'}(\mathrm{x}') = T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{x}^{A_i}}{\partial \mathrm{x}'^{A_i'}} \frac{\partial \mathrm{x}'^{B_j'}}{\partial \mathrm{x}^{B_i}} \tag{4.2.20}$$

与矩阵的转换规律

$$[T'^{B_j'}_{A_i'}(\mathrm{x}')] = \left[\frac{\partial \mathrm{x}^{A_i}}{\partial \mathrm{x}'^{A_j'}}\right] [T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})] \left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{B_j'}}{\partial \mathrm{x}^{B_j}}\right] \tag{4.2.20}^*$$

一致.

当 $m=n$，$|[T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]| \neq 0$ 时，有

$$|[T'^{B_j'}_{A_i'}(\mathrm{x}')]| \neq 0,$$

则必存在逆阵

$$[T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]^{-1} \equiv [{}^{-1}T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]. \tag{4.2.21}$$

容易证明，依张量转换关系，

$$[T'^{B_j'}_{A_i'}(\mathrm{x}')]^{-1} = [{}^{-1}T'^{B_j'}_{A_i'}(\mathrm{x}')]. \tag{4.2.21}^*$$

这样就得到了张量 $T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})$ 的逆(对偶)张量 ${}^{-1}T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})$. 非异张量的逆张量存在唯一. 这时

$$^{-1}T^{BC}_{A}T^{C}_{B}=T^{B}_{A}{}^{-1}T^{C}_{B}=\delta^{C}_{A}. \tag{4.2.22}$$

和前面一样，依照张量指标提升及下降法则，张量的表示矩阵的拟易位运算“′”可定义为：

$$1^\circ \quad \overbrace{T_{A}}^{\prime}\equiv[T^{A}_{\cdot}];$$

$$2^\circ \quad [T^{B}]'\equiv\overbrace{T^{\cdot}_{B}};$$

$$3^\circ \quad [T^{B}_{A}]'\equiv[T^{A}_{\cdot B}];$$

$$4^\circ \quad \left[\frac{\partial \mathrm{x}^{A}}{\partial \mathrm{x}'^{A'}}\right]'=\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{A'}}{\partial \mathrm{x}^{A}}\right].$$

由张量转换关系可以证明：

$$[T'^{B'_j}_{A'_i}(\mathrm{x}')]'=\left[\frac{\partial \mathrm{x}'^{B'_j}}{\partial \mathrm{x}^{B_j}}\right]'[T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]'\left[\frac{\partial \mathrm{x}^{A_i}}{\partial \mathrm{x}'^{A'_i}}\right]'. \tag{4.2.23}$$

我们看到，表示矩阵的拟易位运算相应于张量协变指标的提升和逆变指标的下降.

对位标x，代表张量T^{B}_{A}的表示矩阵$[T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]$的拟**Hermite**共轭运算“*”定义为：

$$\left.\begin{aligned}&[T_{A_i}(\mathrm{x})]^*\equiv[\overline{T}^{A_i}_{\cdot}(\mathrm{x})];\\&[T^{B_j}(\mathrm{x})]^*\equiv[\overline{T}^{\cdot}_{B_j}(\mathrm{x})];\\&[T^{B_j}_{A_i}(\mathrm{x})]^*\equiv[\overline{T}^{A_i}_{\cdot B_j}(\mathrm{x})].\end{aligned}\right\} \tag{4.2.24}$$

相应的张量T^{B}_{A}的**Hermite**共轭运算“*”定义为：

$$\left.\begin{aligned}&(T_{A})^*\equiv(\overline{T}^{A}_{\cdot});\\&(T^{B})^*\equiv(\overline{T}^{\cdot}_{B});\\&(T^{B}_{A})^*\equiv(\overline{T}^{A}_{\cdot B}).\end{aligned}\right\} \tag{4.2.25}$$

如果(T)与$(T)^*$相等，(T)就称为**Hermite**张量，关系式(4.2.9)不变.

显然，$(T)^*$ 仍是张量.

上一节中关于矩阵的讨论对于张量可以通过这里的矩阵表示类似地进行. 例如:

$$(T)'=(T) \tag{4.2.26}$$

的张量称为对称张量;

$$(T)'=-(T) \tag{4.2.27}$$

的张量称为反称张量;

$$(T)(T)'=(T)'(T)=(I) \tag{4.2.28}$$

的张量称为正交张量; 其中 (I) 是以单位阵为表示矩阵的张量，称为单位张量; 分别满足关系

$$(T)(T)'=(T)'(T),\ (T)(T)^*=(T)^*(T) \tag{4.2.29}$$

的实、复张量都称为正规张量，等等.

基于前面的论述，我们看到，将微商的符号进行如下的选择，矩阵的易位运算“T”和拟易位运算“$'$”可以统一起来. 为此只须令

$$\left.\begin{aligned} D^{\alpha}_{\alpha'}&\equiv\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}},\\ D^{\alpha'}_{\alpha}&\equiv\frac{\partial \mathrm{x}'^{\alpha'}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.30}$$

§4.3 张　　量

张量可以用多种等价的方式来定义. 第一分册中，我们主要是由积空间来定义张量的，这一分册中，我们将主要由变换群来形成.

n 维矢量空间 $V(n)$ 的基 e_i 与 $V^*(n)$ 的基 e^j 之间存在

对偶关系

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j\equiv\delta_i^j, \tag{4.3.1}$$

则 $V^*(n)$ 称为 $V(n)$ 的**对偶(顶)空间**.

p 个矢量空间 $V_i(n_i)$, n_i 是它的维数, 记作

$$\dim V_i(n_i)\equiv n_i.$$

对于 $x_i\in V_i(n_i)$ 作直积"*", 得 **Kronecker 积**:

$$\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}_1*\boldsymbol{x}_2*\cdots*\boldsymbol{x}_p. \tag{4.3.2}$$

由 $\boldsymbol{x}$ 的总体形成的空间

$$T^p(V_i)\equiv V_1(n_1)*V_2(n_2)*\cdots*V_p(n_p) \tag{4.3.3}$$

称为空间 V_i 的 Kronecker 积; 对于对偶空间, 有

$$T_q(V_i)\equiv V_1^*(n_1)*V_2^*(n_2)*\cdots*V_q^*(n_q); \tag{4.3.4}$$

一般地, 有

$$\begin{aligned}T_q^p(V_i)\equiv&V_1(n_1)*V_2(n_2)*\cdots*V_p(n_p)\\&*V_1^*(n_1)*V_2^*(n_2)*\cdots*V_q^*(n_q).\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

当 $V_i(n_i)\equiv V(n)$ 时, $T_q^p(V)$ 称为 V 上的**张量空间**, 它的元是 p 阶逆变, q 阶协变张量, 简称 (p, q) 型张量.

$$\boldsymbol{e}_{i_1}*\cdots*\boldsymbol{e}_{i_p}*\boldsymbol{e}^{j_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{j_q} \tag{4.3.6}$$

是 $T_q^p(V)$ 的基. 因此, 任一张量 $\boldsymbol{T}\in T_q^p(V)$, 有

$$\boldsymbol{T}=T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}_{i_1}*\cdots*\boldsymbol{e}_{i_p}*\boldsymbol{e}^{j_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{j_q}, \tag{4.3.7}$$

$T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ 是张量 $\boldsymbol{T}$ 对基(位标架、标形)的分量.

同型张量 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}\in T_q^p(V)$ 的加法运算"+", 和对 $\boldsymbol{R}\in T_q^p(V)$, $\boldsymbol{S}\in T_n^m(V)$, $\boldsymbol{T}\in T_{q+n}^{p+m}(V)$ 的乘法运算"*"分别定义为:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{T}\equiv\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S},\ T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\equiv R_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}+S_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p};\\&\boldsymbol{T}\equiv\boldsymbol{R}*\boldsymbol{S},\ T_{j_1\cdots j_{q+m}}^{i_1\cdots i_{q+m}}\equiv R_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}*S_{j_{q+1}\cdots j_{q+n}}^{i_{p+1}\cdots i_{q+m}}.\end{aligned}\right\} \tag{4.3.8}$$

张量空间对"+, *"运算成一代数. 在不致引起混淆时, 运算

号“*”有时省去不写，张量也可不用黑体书写.

乘法运算换成外积“∧”时，式(4.3.2)成为 **Grassmann 积**

$$\boldsymbol{x}\equiv\varepsilon(\sigma)\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_p, \tag{4.3.9}$$

其中 $\varepsilon(\sigma)$ 对偶置换 $\sigma(\sigma(1),\ \sigma(2),\ \cdots,\ \sigma(p))$ 取 $+1$，奇置换取 -1. 相应于式(4.3.3,4)有

$$\left.\begin{aligned} T^{[p]}(V_i)&\equiv V_1(n_1)\wedge V_2(n_2)\wedge\cdots\wedge V_p(n_p),\\ T_{[q]}(V_i)&\equiv V_1^*(n_1)\wedge V_2^*(n_2)\wedge\cdots\wedge V_q^*(n_q). \end{aligned}\right\} \tag{4.3.10}$$

而当 $V_i(n_i)\equiv V(n)$ 时，

$$\left.\begin{aligned} \dim T^{[p]}(V)&=\binom{n}{p},\\ \dim T_{[q]}(V)&=\binom{n}{q}, \end{aligned}\right\} \tag{4.3.11}$$

$T^{[p]}(V)$ 与 $T_{[q]}(V)$ 分别称为 V 上的反称逆变与反称协变张量空间，它们对运算“+，∧”成代数. 最后，当式(4.3.9)中 $\varepsilon(\sigma)\equiv+1$，乘法运算由“∧”改成对称积“∘”，相应于式(4.3.10)和(4.3.11)分别有：

$$\left.\begin{aligned} T^{(p)}(V_i)&\equiv V_1(n_1)\circ V_2(n_2)\circ\cdots\circ V_p(n_p);\\ T_{(q)}(V_i)&\equiv V_1^*(n_1)\circ V_2^*(n_2)\circ\cdots\circ V_q^*(n_q); \end{aligned}\right\} \tag{4.3.12}$$

和

$$\left.\begin{aligned} \dim T^{(p)}(V)&=\binom{n+p-1}{p};\\ \dim T_{(q)}(V)&=\binom{n+q-1}{q}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3.13}$$

$T^{(p)}(V)$ 与 $T_{(q)}(V)$ 分别称为 V 上的对称逆变与对称协变张量空间，它们对运算“+，∘”成代数.

这些都是张量空间的子空间. 张量可以对称化：

$$\left.\begin{aligned} T^{(i_1\cdots i_p)} &\equiv \frac{1}{p!}\sum_{\sigma} T^{\sigma(1)\cdots\sigma(p)}; \\ T_{(j_1\cdots j_q)} &\equiv \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} T_{\sigma(1)\cdots\sigma(q)}; \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.14)$$

反称化:

$$\left.\begin{aligned} T^{[i_1\cdots i_p]} &\equiv \frac{1}{p!}\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) T^{\sigma(1)\cdots\sigma(p)}; \\ T_{[j_1\cdots j_q]} &\equiv \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) T_{\sigma(1)\cdots\sigma(q)}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.14)^*$$

因此,任意二阶张量必可分解为对称和反称张量之和:

$$T^{ij} = T^{(ij)} + T^{[ij]} = \frac{1}{2}(T^{ij}+T^{ji}) + \frac{1}{2}(T^{ij}-T^{ij}). \qquad (4.3.15)$$

设在空间 $V(n)$ 上给定了一个变换群 $\mathscr{G}$, 如果群元与方阵之间有同态对应,则这对应关系称为群的**线性表示**:

$$\mathscr{G}\sim(\boldsymbol{A}). \qquad (4.3.16)$$

如果基$(\boldsymbol{e}_i)$与其对偶基$(\boldsymbol{e}^j)$经群 $\mathscr{G}$ 变为新基$(\boldsymbol{e}'_{i'})$与$(\boldsymbol{e}^{j'})$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_{i'} &= A^{i}_{i'}\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i = A^{i'}_{i}\boldsymbol{e}'_{i'}; \\ \boldsymbol{e}^{j'} &= A^{j'}_{j}\boldsymbol{e}^j,\ \boldsymbol{e}^j = A^{j}_{j'}\boldsymbol{e}^{j'}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.17)$$

于是

$$\begin{aligned} &T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{e}_{i_1}*\cdots*\boldsymbol{e}_{i_p}*\boldsymbol{e}^{j_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{j_q} \\ &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_q}_{j'_q}\boldsymbol{e}'_{i'_1}*\cdots*\boldsymbol{e}'_{i'_p}*\boldsymbol{e}^{j'_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{j'_q}, \end{aligned} \qquad (4.3.18)$$

张量 T 对基 $\boldsymbol{e}'_{i'_1}*\cdots*\boldsymbol{e}'_{i'_p}*\boldsymbol{e}^{j'_1}*\cdots*\boldsymbol{e}^{j'_q}$ 的分量

$$T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_q}_{j'_q}. \qquad (4.3.19)$$

这就是张量转换关系; 以此代入式(4.3.18)的右端, 我们看到: 这是一个**多线性不变量**, 它对每一变量 $\boldsymbol{x}^{i_k}\equiv\xi^{i_k}\boldsymbol{e}_{i_k}$ 或 $\boldsymbol{x}_{j_k}\equiv\eta_{j_k}\boldsymbol{e}^{j_k}$ 都是线性的. 上、下指标相同时进行求和, 而且根据 Einstein 约定省去求和号,这个运算就是缩并.

空间 $V(n)$ 中的一个图形集,集中任意二图形可以通过群

$\mathscr{G}$ 中的一个变换使之重合，则这个图形集称为**位标架**或**标形(集)**. 例如式(4.3.17)的全体成一位标架; 式(4.3.6)及其在群 $\mathscr{G}$ 作用下的象集构成多指标位标架. 这是我们在第一分册中已经熟悉的.

反过来，将矩阵

$$[A^{I'}_{I}A^{J}_{J'}]\equiv[A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_p}_{i_p}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_q}_{j'_q}] \tag{4.3.20}$$

作为群 $\mathscr{G}$ 在 Kronecker 积空间(4.3.5)中的线性表示，其中

$$[A^{i'}_{i}]=[A^{j'}_{j}]^{-1}, \tag{4.3.21}$$

则 (p, q) 型张量 T 也可以由变换群 $\mathscr{G}$ 通过对多指标位标架进行变换时，其分量具有转换关系式

$$T'^{I'}_{J'}(\mathrm{x}')=T^{I}_{J}(\mathrm{x})A^{I'}_{I}A^{J}_{J'} \tag{4.3.22}$$

来定义. 其中 $I\equiv i_1\cdots i_p$, $I'\equiv i'_1\cdots i'_p$, $J\equiv j_1\cdots j_q$, $J'\equiv j'_1\cdots j'_q$.

在本书中，通常

$$V(n)\equiv\mathscr{M}(4); \tag{4.3.23}$$

群 $\mathscr{G}$ 为 Lorentz 群.

必须注意，群的线性表示和张量的矩阵表示的区别! 在张量的矩阵表示下，式(4.3.22)变成

$$[T'^{I'}_{J'}(\mathrm{x}')]=[A^{J}_{J'}][T^{I}_{J}(\mathrm{x})][A^{I'}_{I}], \tag{4.3.22}^*$$

这就是式(4.2.20)*.

另外，从多线性不变量入手，也可以定义 (p, q) 型张量，不再一一罗列. 它们之间的等价性是显见的.

第五章　标准双曲型 Riemann 空间

§5.1　双曲型空间的概念

我们继续第三章，对四维时空$(\mathfrak{M})$进行讨论.

在第三章中给出了时空$(\mathfrak{M})$的一种流形构造. 局部位标取 $\mathrm{x}\equiv(\mathrm{x}^\mu)$ $(\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \mathrm{x}^4\equiv ix^0)$，位标变换是一一对应的解析变换. 位标邻域内两点$(\mathrm{x}^\mu)$与$(\mathrm{x}^\mu+d\mathrm{x}^\mu)$的距离 dS 是以解析函数 $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})$ 为系数的位标微分 $d\mathrm{x}^\mu$ 的正值二次形式

$$dS^2\equiv\epsilon g_{\mu\nu}(\mathrm{x})d\mathrm{x}^\mu d\mathrm{x}^\nu \tag{5.1.1}$$

定义的. 这个二次形式称为**基本度规二次形式**，对称张量 $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})$ 称为**度规张量**. 式中 $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})d\mathrm{x}^\mu d\mathrm{x}^\nu\geq 0$ 时，$\epsilon\equiv+1$；否则，$\epsilon\equiv-1$. 注意：$\mathrm{x}^4\equiv ix^0$.

以 $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})$作为第 μ 行 ν 列的元，设张量行列式

$$|(g_{\mu\nu}(\mathrm{x}))|\neq 0, \tag{5.1.2}$$

因此，

$$|(g'_{\mu\nu}(\mathrm{x}'))|\neq 0. \tag{5.1.2}^*$$

对某一定点 $P\in(\mathfrak{M})$，选以 P 点为原点的位标系 $P(\mathrm{x})$，如果二次形式

$$g_{\mu\nu}(0)d\mathrm{x}^\mu d\mathrm{x}^\nu$$

经位标变换

$$[\mathrm{x}'^{\mu'}]=[\mathrm{x}^\mu][S^{\mu'}_\mu], \tag{5.1.3}$$

$S\equiv[S^{\mu'}_\mu]$ 为非异常数阵，而有

$$g'_{\mu\nu}(0)d\mathrm{x}'^\mu d\mathrm{x}'^\nu,$$

$$g'_{\mu\nu}(0)\equiv\delta_{\mu\nu}, \tag{5.1.4}$$

则张量 $g_{\mu\nu}(P)$ 称为在点 P 是(标准)双曲型的; 如果在(𝔐)的每一点都是双曲型的, 则(𝔐)称为(标准)双曲型(Riemann)空间.

这就是说: 双曲型空间 (𝔐) 的每一点 P 处有一切空间 $T(P)$, 由 P 点(𝔐)的切向量的全体组成, $T(P)$ 为 Minkowski 空间: $T(P)\sim\mathscr{M}(4)$. 与(𝔐)的位标系 x′ (在上述意义下)相应的 $T(P)$ 的位标系(以 P 点为原点)为 $dx'\equiv(dx'^{\mu})$, 记作 X. X 是 Lorentz 位标系. x′ 不是唯一的, 所以 X 也不是唯一的; 不同两 Lorentz 位标系 X 间的变换是 Lorentz 变换.

将所有的切空间 $T(P)$, $P\in$(𝔐) 投射到同一个 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$ 上, 点 P 投射为 $P'\in\mathscr{M}(4)$. 我们假设: 当 P 取遍整个时空(𝔐)时, P' 取遍整个空间 $\mathscr{M}(4)$, 没有遗漏和重迭.

§5.2 Christoffel符号

上面我们要求 $g_{\mu\nu}(P)$ 的张量行列式不为 0, 即它是非异张量, 因而它的逆张量唯一存在, 记作 $g^{\mu\nu}(P)$, 则

$$g^{\mu\gamma}(P)g_{\gamma\nu}(P)=\delta^{\mu}_{\nu} \tag{5.2.1}$$

对某一特定位标系 x 成立, 因而对一般位标系也成立. 不难看出, 它也是对称张量.

$g_{\mu\nu}(P)$ 及 $g^{\mu\nu}(P)$ 将作为张量指标升降的依据. 例如, 将张量 $T_{\mu\lambda\nu\cdots\eta}^{\alpha\beta\gamma\cdots\delta}(P)$ 的指标 λ 上升, β 下降, 则得新的张量

$$T_{\mu\cdot\nu\cdots\eta\ \beta}^{\lambda\ \ \alpha\cdot\gamma\cdots\delta}(P)=g^{\lambda\lambda'}(P)g_{\beta\beta'}(P)T_{\mu\lambda'\gamma\cdots\eta}^{\alpha\beta'\gamma\cdots\delta}(P), \tag{5.2.2}$$

式中指标升、降后，和上一章中用过的方法一样，在原来的位置上填以符号“·”以指明其次序.

以 $g(\mathrm{x})$ 或 g 表示 $|[g_{\mu\nu}(\mathrm{x})]|$，当位标系经式(5.1.3)转换后，有

$$g'(\mathrm{x}')=g(\mathrm{x})\left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}'}\right|^2, \tag{5.2.3}$$

其中 $|\partial \mathrm{x}/\partial \mathrm{x}'|\equiv J$ 是 Jacobi 行列式. 因此，体积元

$$\begin{aligned} dv=idv&=|g'(\mathrm{x}')|^{\frac{1}{2}}d\mathrm{x}'^1d\mathrm{x}'^2d\mathrm{x}'^3d\mathrm{x}'^4\\ &=|g(\mathrm{x})|^{\frac{1}{2}}d\mathrm{x}^1d\mathrm{x}^2d\mathrm{x}^3d\mathrm{x}^4 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

是不变量.

利用外微分形式，以“$\wedge$”表示外乘积，则

$$dv=\frac{1}{i}|g(\mathrm{x})|^{\frac{1}{2}}d\mathrm{x}^1\wedge d\mathrm{x}^2\wedge d\mathrm{x}^3\wedge d\mathrm{x}^4. \tag{5.2.4}^*$$

考虑解析的定向三维闭流形 ∂R，∂R 所范围的四维区域为 R，就位标系 (x^k) $(k=1,\ 2,\ 3,\ 0)$，以

$$dS\equiv(dS_1,\ dS_2,\ dS_3,\ dS_0),$$

$$dS_1\equiv dx^2\,dx^3\,dx^0,\quad dS_2\equiv -dx^3\,dx^0\,dx^1,$$

$$dS_3\equiv dx^0\,dx^1\,dx^2,\quad dS_0\equiv -dx^1\,dx^2\,dx^3/i,$$

为面积元(于 ∂R 上)，以“∂”表示外微分运算，则 Gauss–Stokes 定理可以写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R}E_k dS_k&=\int_R\partial(E_k\,dS_k)\\ &=\int_R\left(\frac{\partial E_k}{\partial x^k}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^0, \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

式中 E_k 不作张量看.

容易证明，在 ∂R 上，不论 (x^μ) 为何位标系，令

$$d\sigma \equiv (d\sigma_1,\ d\sigma_2,\ d\sigma_3,\ d\sigma_4),$$

$$d\sigma_1 = i dS_1 = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

$$d\sigma_2 = i dS_2 = -dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1,$$

$$d\sigma_3 = i dS_3 = dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\sigma_4 = dS_0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

则 $d\sigma_\lambda$ 在 ∂R 上为一阶协变张量. 因此，对于一阶逆变张量 T^λ, Gauss-Stokes 定理可以写成协变的形式：

$$\int_{\partial R} |g|^{\frac{1}{2}} T^\lambda \, d\sigma_\lambda = \int_R \frac{1}{|g|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (|g|^{\frac{1}{2}} T^\lambda)\, dv, \quad (5.2.5)^*$$

T^λ 在 $R+\partial R$ 上具有各一阶连续偏导数，$|g|^{\frac{1}{2}} T^\lambda$ 不是一般意义下的张量. 在张量的位标转换关系中添加因子 J^m 的称为 m 次广义张量，由式(5.2.3)知，$|g|$是二次广义张量，所以 $|g|^{\frac{1}{2}} T^\lambda$ 是 $+1$ 次广义张量. 有些作者把广义张量叫做张量密度或张量.

由度规张量可以作出三指标的 **Christoffel 符号**：

$$\left.\begin{aligned} [\lambda\mu,\ \nu] &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}\right); \\ \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} &\equiv g^{\nu\eta}[\lambda\mu,\ \eta]. \end{aligned}\right\} \quad (5.2.6)$$

这两个符号都不是张量，但由它们可以作出重要的张量.

易知

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = [\lambda\mu,\ \nu] + [\nu\mu,\ \lambda] = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}. \quad (5.2.7)$$

对 $g_{\lambda\mu} g^{\nu\mu} = \delta^\nu_\lambda$ 求微分，得

$$dg_{\lambda\mu}\cdot g^{\nu\mu}+g_{\lambda\mu}\cdot dg^{\nu\mu}=0;$$

以 $g^{\lambda\eta}$ 乘上式,对 λ 求和,得

$$dg^{\nu\eta}=\delta^{\eta}_{\mu}dg^{\nu\mu}=-g^{\lambda\eta}g^{\nu\mu}dg_{\lambda\mu}. \tag{5.2.8}$$

由式(5.2.6–8),得

$$dg_{\lambda\mu}=([\lambda\mu,\ \nu]+[\nu\mu,\ \lambda])dx^{\mu},$$

$$dg^{\nu\eta}=-g^{\nu\xi}g^{\lambda\eta}([\lambda\mu,\ \xi]+[\xi\mu,\ \lambda])dx^{\mu}$$

$$=-\left(g^{\lambda\eta}\begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}+g^{\nu\xi}\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\mu\end{Bmatrix}\right)dx^{\mu};$$

因此,

$$\frac{\partial g^{\nu\eta}}{\partial x^{\mu}}=-g^{\lambda\eta}\begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}-g^{\nu\xi}\begin{Bmatrix}\eta\\ \xi\mu\end{Bmatrix}. \tag{5.2.9}$$

另外,由 $g\equiv|[g_{\lambda\mu}]|$,可得

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}}=gg^{\lambda\nu}\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}=-gg_{\lambda\nu}\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}},$$

这里利用了关系(5.2.1);因此,得到

$$\frac{\partial\log|g|^{\frac{1}{2}}}{\partial x^{\mu}}=\frac{1}{2}g^{\lambda\nu}\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$=\frac{1}{2}g^{\lambda\nu}([\lambda\mu,\ \nu]+[\nu\mu,\ \lambda])=\begin{Bmatrix}\lambda\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}. \tag{5.2.10}$$

§5.3 Riemann 曲率张量和 Ricci 张量

由 $g'_{\mu'\nu'}(x')$ 与 $g_{\mu\nu}(x)$ 间的转换关系容易证明

$$[\mu'\nu',\ \lambda']'=[\mu\nu,\ \lambda]\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}}$$

$$+g_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\mu'}\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda'}}, \tag{5.3.1}$$

这表明$[\mu\nu, \lambda]$不是张量. 以 $g'^{\lambda'\eta'}(\mathrm{x}')\partial\mathrm{x}^{\eta}/\partial\mathrm{x}'^{\eta'}$ 乘上式, 注意 $g'^{\lambda'\nu'}(\mathrm{x}')$ 与 $g^{\lambda\eta}(\mathrm{x})$ 间的转换关系, 有

$$\left\{\begin{matrix}\lambda'\\ \mu'\nu'\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\mathrm{x}^{\lambda}}{\partial\mathrm{x}'^{\lambda'}}=\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{\partial\mathrm{x}^{\mu}}{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}}\frac{\partial\mathrm{x}^{\nu}}{\partial\mathrm{x}'^{\nu'}}+\frac{\partial^2\mathrm{x}^{\lambda}}{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}\partial\mathrm{x}'^{\nu'}},\quad(5.3.2)$$

这表明$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$也不是张量.

将式(5.3.2)中指标 ν 与 ν' 换成 η 与 η', 得

$$\left\{\begin{matrix}\lambda'\\ \mu'\eta'\end{matrix}\right\}'\frac{\partial\mathrm{x}^{\lambda}}{\partial\mathrm{x}'^{\lambda'}}=\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\eta\end{matrix}\right\}\frac{\partial\mathrm{x}^{\mu}}{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}}\frac{\partial\mathrm{x}^{\eta}}{\partial\mathrm{x}'^{\eta'}}+\frac{\partial^2\mathrm{x}^{\lambda}}{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}\partial\mathrm{x}'^{\eta'}}.\quad(5.3.2)^*$$

对式 (5.3.2) 求 $\mathrm{x}'^{\eta'}$ 的偏微商, 对式 (5.3.2)* 求 $\mathrm{x}'^{\nu'}$ 的偏微商, 然后消去 $\partial^3\mathrm{x}^{\lambda}/\partial\mathrm{x}'^{\mu'}\partial\mathrm{x}'^{\nu'}\partial\mathrm{x}'^{\eta'}$, 化简得到

$$R'^{\lambda'}_{\mu'\nu'\eta'}(\mathrm{x}')\frac{\partial\mathrm{x}^{\lambda}}{\partial\mathrm{x}'^{\lambda'}}=R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})\frac{\partial\mathrm{x}^{\mu}}{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}}\frac{\partial\mathrm{x}^{\nu}}{\partial\mathrm{x}'^{\nu'}}\frac{\partial\mathrm{x}^{\eta}}{\partial\mathrm{x}'^{\eta'}},\quad(5.3.3)$$

其中

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})\equiv\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\eta\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}^{\eta}}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$$
$$+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\eta\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \alpha\nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \alpha\eta\end{matrix}\right\},\quad(5.3.4)$$

$R'^{\lambda'}_{\mu'\nu'\eta'}(\mathrm{x}')$ 是把 $R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})$ 的所有指标、Christoffel 符号及变量都加上“,”号而成的.

由式(5.3.3) 可知, $R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})$ 是一个混合张量在 x 处的分量, 张量 $R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(P)$ 称为 **Riemann 曲率张量**或 **Riemann 第二符号**; 下降指标 λ 而得的 Reimann 曲率张量

$$R_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathrm{x})\equiv g_{\lambda\alpha}(\mathrm{x})R^{\alpha}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})\quad(5.3.4)^*$$

称为 **Riemann 第一符号.**

容易证明:

$$\left.\begin{aligned} &R_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathrm{x}) = -R_{\mu\lambda\nu\eta}(\mathrm{x});\\ &R_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathrm{x}) = -R_{\lambda\mu\eta\nu}(\mathrm{x});\\ &R_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathrm{x}) = R_{\nu\eta\lambda\mu}(\mathrm{x});\\ &R_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathrm{x}) + R_{\lambda\nu\eta\mu}(\mathrm{x}) + R_{\lambda\eta\nu\mu}(\mathrm{x}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.5)$$

张量 $R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(P)$ 对指标 λ 与 η 进行缩并，得到 **Ricci** 张量：

$$R_{\mu\nu}(P) \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}(P). \quad (5.3.6)$$

实数值标量

$$R(P) \equiv g^{\mu\nu}(P) R_{\mu\nu}(P) \quad (5.3.7)$$

称为时空(⑬)在 P 点的曲率。

必须注意，希腊指标与拉丁指标的区别！$R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x})$ 与 $R_{\mu\nu}(\mathrm{x})$ 是对位标 (x) 而言的，对位标 (x) 应有 $R^{l}_{ijk}(x)$ 与 $R_{ij}(x)$. 两者之间有下面的关系：

$$\left.\begin{aligned} R^{l}_{ijk}(x) &= R^{\lambda}_{\mu\nu\eta}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\eta}}{\partial x^{k}} \frac{\partial \mathrm{x}^{l}}{\partial x^{\lambda}};\\ R_{ij}(x) &= R_{\mu\nu}(\mathrm{x}) \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial x^{j}}. \end{aligned}\right\} \quad (5.3.8)$$

它们之间的差别在于希腊文取 4 为值，而拉丁文取 0 为值时，将出现因子 i 或 $-i$，视该指标为协变的还是逆变的而定. 例如：

$$R^{0}_{121}(x) = -iR^{4}_{121}(\mathrm{x});$$

$$R^{0}_{012}(x) = (-i)(i) R^{4}_{412}(\mathrm{x}) = R^{4}_{412}(\mathrm{x}).$$

由于反对称关系，如果张量 $R_{\lambda\mu\nu\eta}(P)$ 具有多于两个指标、为首两个指标或结尾的两个指标取相同的值，则这一分量为 0. 为首两个指标取值不等的分量可以有 $4(4-1)/2! = 6$ 个；为首两指标与结尾两指标取值相同的，不为 0 的分量应有 6 个；为首两指标偶与结尾两指标偶取值不同时，在 6 个值偶中每次取两个的组合为 $6(6-1)/2! = 15$ 个，因此有 15 个这样

的分量不为 0. 一般情况下，$R_{\lambda\mu\nu\eta}(P)$ 有 $6+15=21$ 个不等于 0 的分量. 在 n 维空间内，$R_{\lambda\mu\nu\eta}(P)$ 通常应有 $N(N+1)/21$ 个不为 0 的分量，$N\equiv n(n-1)/21$.

§5.4 协变微商

Christoffel 符号 $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ 也叫做空间（罨）的联络系数，它对指标 μ, ν 对称，是定义张量协变微商的依据.

设张量 $T^{\lambda}_{\mu}(P)$ 对 x 有各一级偏微商，则协变微商

$$\nabla_{\eta}T^{\lambda}_{\mu}(\mathrm{x})\equiv T^{\lambda}_{\mu,\eta}(\mathrm{x})\equiv\frac{\partial T^{\lambda}_{\mu}(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}^{\eta}}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}T^{\langle\check{\lambda}_i\rangle}_{\mu}(\mathrm{x})\left\{ \begin{matrix} \lambda_i \\ \check{\lambda}_i\eta \end{matrix} \right\}(\mathrm{x})-\sum_{j=1}^{n}T^{\lambda}_{\langle\check{\mu}_j\rangle}(\mathrm{x})\left\{ \begin{matrix} \check{\mu}_j \\ \mu_j\eta \end{matrix} \right\}(\mathrm{x}), \tag{5.4.1}$$

其中

$$\lambda\equiv(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m),\ \langle\check{\lambda}_i\rangle\equiv(\lambda_1,\ \cdots,\ \check{\lambda}_i,\ \cdots,\ \lambda_m),$$

$$\mu\equiv(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_m),\ \langle\check{\mu}_j\rangle\equiv(\mu_1,\ \cdots,\ \check{\mu}_j,\ \cdots,\ \mu_n),$$

∇_{η} 称为协变微商算子.

标量的协变微商即寻常偏微商，∇_{η} 是线性算子，它施于张量积与寻常函数乘积的微商运算相似：

$$\nabla_{\eta}(T^{\lambda}_{\mu}\cdot S^{\alpha}_{\beta})=\nabla_{\eta}T^{\lambda}_{\mu}\cdot S^{\alpha}_{\beta}+T^{\lambda}_{\mu}\cdot\nabla_{\eta}S^{\alpha}_{\beta}, \tag{5.4.2}$$

张量指标有缩并时也成立.

当张量 $T^{\lambda}_{\mu}(P)$ 对 x 有各二级偏微商时，有

$$(\partial_{\xi}\partial_{\eta}-\partial_{\eta}\partial_{\xi})T^{\lambda}_{\mu}(\mathrm{x})\equiv 0. \tag{5.4.3}$$

但是，在一般情况下，协变微商算子不能交换，关系(5.4.3)的转化，通过直接计算即得所谓 Ricci 恒等式：

$$(\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_\xi\nabla_\eta)T^\lambda_\mu(\mathrm{x})$$

$$=\sum_{i=1}^{m}T^{\langle\check\lambda_i\rangle}_\mu(\mathrm{x})R^\lambda_{\lambda_i\eta\xi}(\mathrm{x})-\sum_{j=1}^{n}T^\lambda_{\langle\check\mu_j\rangle}(\mathrm{x})R^{\check\mu_j}_{\mu_j\eta\xi}(\mathrm{x}).\qquad(5.4.3)^*$$

当 $T^\lambda_\mu(P)$ 为具有连续二级偏微商时，Ricci 恒等式退化为式(5.4.3).

由协变微商的定义，通过简单计算可知：标量 c、δ^λ_μ、$g_{\lambda\mu}(P)$ 及 $g^{\lambda\mu}(P)$ 的协变微商都等于 0. 但是，一般情况下，协变微商全为 0 的一阶张量场不一定存在，因为微分方程组

$$\nabla_\eta g_\lambda(\mathrm{x})\equiv\frac{\partial g_\lambda(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}^\eta}-g_\alpha(\mathrm{x})\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \lambda\eta\end{matrix}\right\}(\mathrm{x})=0\qquad(5.4.4)$$

不一定可积.

方程组(5.4.4)，当

$$R^\lambda_{\mu\eta\xi}(\mathrm{x})\equiv0\qquad(5.4.4)^*$$

时，为可积. 此时有无限多个解析解. 条件(5.4.4)* 是说，空间(𝕊)是 Minkowski 空间. 当条件(5.4.4)* 不成立，而可积条件得到满足时，(𝕊)称为满足条件($\mathscr{H}$). 在此情况下，只少存在一个独立的解析张量场 $g_\lambda(\mathrm{x})$，使得标量

$$\mathscr{L}^2(\mathrm{x})\equiv\in g^{\mu\nu}(\mathrm{x})g_\mu(\mathrm{x})g_\nu(\mathrm{x})\neq0.$$

此时，

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}^\eta}\mathscr{L}^2(\mathrm{x})\equiv0,$$

$$\mathscr{L}^2(\mathrm{x})=l^2\ (\text{常数}\ l>0).$$

因此，若令

$$g^\mu(\mathrm{x})\equiv g^{\mu\nu}(\mathrm{x})g_\nu(\mathrm{x})/l^2,\qquad(5.4.5)$$

则

$$g^\mu(\mathrm{x})g_\mu(\mathrm{x})=1.\qquad(5.4.6)$$

利用上式和式(5.2.1)，可以构造一个有用的特殊多指标张量.

当 m 为偶数时，令 $\mu\equiv\mu_1\cdots\mu_m$,

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu}(P) &\equiv g_{\mu_1\mu_2}(P)\cdots g_{\mu_{m-1}\mu_m}(P), \\ G^{\mu}(P) &\equiv 2^{2-m} g^{\mu_1\mu_2}(P)\cdots g^{\mu_{m-1}\mu_m}(P); \end{aligned}\right\} \quad (5.4.7)$$

当 n 为奇数, $n\equiv m+1$ 时, 令

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu}(P) &\equiv G_{\mu_1\cdots\mu_m}(P)\, g_{\mu_n}(P), \\ G^{\mu}(P) &\equiv 2^{-m} G^{\mu_1\cdots\mu_m}(P)\, g^{\mu_n}(P). \end{aligned}\right\} \quad (5.4.7)^*$$

对此有关系式

$$G_{\mu}(P)\cdot G^{\nu}(P) = \delta^{\nu}_{\mu}. \quad (5.4.8)$$

当 $n\neq 1$ 时, 选

$$G_{\mu}(P)\equiv g_{\mu}(P),\ G^{\mu}(P)\equiv g^{\mu}(P).$$

这里提出的特殊多指标张量 $G_{\mu}(P)$ 与 $G^{\mu}(P)$ 可以简化量子场论中经常遇到的协变微分方程组:

$$\sum_{j=1}^{m} A^{\nu_1\cdots\nu_j\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}\nabla_{\nu_j}\cdots\nabla_{\nu_1}T_{\mu_1\cdots\mu_n} + B^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}T_{\mu_1\cdots\mu_n} = 0. \quad (5.4.9)$$

如果可以令

$$T_{\mu_1\cdots\mu_n} = G_{\mu_1\cdots\mu_n}\Phi, \quad (5.4.10)$$

这里 Φ 及 $\Phi_{(k)}$ 等都是标量, 则方程(5.4.9)可以化为标量协变微分方程:

$$\sum_{j=1}^{m} A^{\nu_1\cdots\nu_j\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}G_{\mu_1\cdots\mu_n}\nabla_{\nu_j}\cdots\nabla_{\nu_1}\Phi + B^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}G_{\mu_1\cdots\mu_n}\Phi = 0. \quad (5.4.11)$$

方程(5.4.11)比方程(5.4.9)容易着手处理, 因为前者未知函数只有一个标量 Φ, 所以只要适当选择位标系, 就可以化为偏微分方程组加以解决. 上述问题还可以进一步化为一阶偏微分方程组来解决:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_{\nu_i}\Phi_{(i-1)} = g_{\nu_i}\Phi_{(i)}, \\ &\Phi_{(0)}\equiv\Phi,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1; \\ &\sum_{j=1}^{m} A^{\nu_1\cdots\nu_j\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}G_{\mu_1\cdots\mu_n}g_{\nu_1}\cdots g_{\nu_j}\Phi_{(j)} + B^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_i}G_{\mu_1\cdots\mu_n}\Phi = 0. \end{aligned}\right\}$$

$$(5.4.11)^*$$

因为，对于特定的位标系，协变微商即为偏微商，方程组(5.4.11)* 即为一阶解析偏微分方程组，而可用现有的方法进行讨论.

必须注意的是：各标量函数 $\Phi_{(\alpha)}$ 的引入是对微分方程的解加上限制. 这样的限制能否切合物理学的要求，还需要对具体问题作具体分析.

§5.5 测 地 线

设 $\mathscr{C}[a, b]$ 为时空（$\mathfrak{V}$）中的解析曲线，它对位标系(x^μ)的方程为

$$\mathrm{x}^\mu = \mathrm{x}^\mu(t), \tag{5.5.1}$$

式中 t 是实参数，$\mathrm{x}^\mu(t)$ 为 t 在闭区间$[a, b]$内的解析函数.

取(x^μ)的解析函数 $\lambda^\alpha(\mathrm{x})$ $(\alpha=1, 2, 3, 4, \lambda^4 \equiv -i\lambda^0)$，当 x 代之以$(\mathrm{x}^\mu(t))$时，$\lambda^\alpha(\mathrm{x})$简记作 $\lambda^\alpha(t)$.

在 $\mathscr{C}$ 上考虑微分方程

$$(\nabla_\eta \lambda^\alpha)\frac{d\mathrm{x}^\eta}{dt}=0, \tag{5.5.2}$$

即

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\eta\end{matrix}\right\}\lambda^\beta\frac{d\mathrm{x}^\eta}{dt}=0 \tag{5.5.2}^*$$

的满足初始条件

$$\lambda^\alpha(t_0)=\hat{\lambda}^\alpha(t_0) \tag{5.5.3}$$

的解 $\hat{\lambda}^\alpha(t)$. 这组解是存在唯一的.

位标 x 换成 x′ 时，方程 (5.5.2)* 变为

$$\frac{d\lambda'^{\alpha'}}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\nu'\end{matrix}\right\}'\lambda'^{\beta'}\frac{d\mathrm{x}'^{\nu'}}{dt}=0. \tag{5.5.4}$$

以式(5.3.2)代入上式，并乘以 $\partial x^{\hat{\alpha}}/\partial x'^{\alpha'}$ 得

$$\frac{\partial x^{\hat{\alpha}}}{\partial x'^{\alpha'}}\frac{d\lambda'^{\alpha'}}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\delta^{\beta}_{\alpha}\lambda'^{\beta'}$$

$$+\lambda'^{\beta'}\frac{dx'^{\nu'}}{dt}\frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu'}}\right)\delta^{\beta}_{\alpha}=0.$$

令 $\hat{\alpha}\equiv\alpha$，上式左端第一与第三两项之和即

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda'^{\alpha'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\right),$$

第二项为

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\lambda'^{\beta'}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{dx^{\nu}}{dt},$$

因此

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda'^{\alpha'}\frac{dx^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\right)+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\lambda'^{\beta'}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{dx^{\nu}}{dt}=0. \qquad (5.5.4)^*$$

将 $\partial x^{\alpha}/\partial x'^{\alpha'}$ 在 $t=t_0$ 的值简记作 $\partial x^{\alpha}(t_0)/\partial x'^{\alpha'}$（这种简记法下面还要用到），取 $\lambda'^{\alpha'}(t_0)$ 满足条件

$$\lambda'^{\alpha'}(t_0)\frac{\partial x^{\alpha}(t_0)}{\partial x'^{\alpha'}}\equiv\lambda^{\alpha}(t_0), \qquad (5.5.5)$$

则方程(5.5.4)* 满足条件

$$\hat{\lambda}'^{\alpha'}(t_0)=\lambda'^{\alpha'}(t_0) \qquad (5.5.5)^*$$

的解 $\hat{\lambda}'^{\alpha'}(t)$ 存在唯一．所以，

$$\hat{\lambda}'^{\alpha'}(t)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \qquad (5.5.6)$$

为方程(5.5.2)* 之解，并满足条件

$$\hat{\lambda}'^{\alpha'}(t_0)\frac{\partial x^{\alpha}(t_0)}{\partial x'^{\alpha'}}=\lambda^{\alpha}(t_0). \qquad (5.5.5)^*$$

由于方程(5.5.2)满足初始条件(5.5.3)的解存在唯一，因此

$$\hat{\lambda}'^{\alpha'}(t)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}=\hat{\lambda}^{\alpha}(t). \qquad (5.5.7)$$

这说明，$\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$ 作为 x 的函数 $\hat{\lambda}^{\alpha}(x)$ 沿 $\mathscr{C}$ 运行时是一个张量在 x 的分量. 这个张量场 $\hat{\lambda}^{\alpha}(x)$ 为张量 $\lambda^{\alpha}(x)$沿曲线 $\mathscr{C}$ **平行移动**而产生的张量场，因为方程(5.5 2)在 $\mathscr{C}$ 上成立.

张量 λ^{α} 与 $\hat{\lambda}^{\alpha}$ 的同指标分量(对任何位标系)，如果成比例，则它们称为是同向的；如果方程(5.5.2)成立，并且

$$\hat{\lambda}^{\alpha}(t) \equiv \varphi(t)\lambda^{\alpha}(t), \tag{5.5.8}$$

式中 $\varphi(t) \neq 0$ 为同一区间上的任意实值解析函数，则它们称为沿 $\mathscr{C}$ **平行的**.

对式(5.5.8)两端施以运算

$$\frac{dx^{\eta}}{dt}\nabla_{\eta},$$

计及方程(5.5.2)，则有

$$\frac{d\hat{\lambda}^{\alpha}(t)}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\hat{\lambda}^{\beta}(t)\frac{dx^{\nu}}{dt}$$

$$=\frac{\hat{\lambda}^{\alpha}(t)}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

令
$$f(x)\equiv\frac{1}{\phi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\log|\varphi(t)|,$$

则上式成为

$$\frac{d\hat{\lambda}^{\alpha}(t)}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\hat{\lambda}^{\beta}(t)\frac{dx^{\nu}}{dt}=f(t)\hat{\lambda}^{\alpha}(t). \tag{5.5.9}$$

这是 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$ 沿 $\mathscr{C}$ 平行于 $\lambda^{\alpha}(t)$ **的必要条件**. 反之，如若式(5.5.8, 9)在 $\mathscr{C}$ 上成立，则 $\lambda^{\alpha}(t)$ 在 $\mathscr{C}$ 上满足方程(5.5.2)，因而 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$ 与 $\lambda^{\alpha}(t)$ 沿 $\mathscr{C}$ 相互平行. 由于 $\varphi(t)$ 的任意性，因此 $f(t)$ 也是任意的.

从式(5.5.9)消去 $f(t)$，得

$$\hat{\lambda}^{\beta}(t)\left[\frac{d\hat{\lambda}^{\alpha}(t)}{dt}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \hat{\beta\nu}\end{matrix}\right\}\hat{\lambda}^{\beta}(t)\frac{dx^{\nu}}{dt}\right]$$

$$-\hat{\lambda}^{\alpha}(t)\left[\frac{d\hat{\lambda}^{\beta}(t)}{dt}+\left\{\begin{matrix}\beta\\ \hat{\alpha\nu}\end{matrix}\right\}\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}(t)\frac{dx^{\nu}}{dt}\right]=0. \qquad (5.5.10)$$

这是 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$ 与 $\lambda^{\alpha}(t)$ 沿 $\mathscr{C}$ 平行的充要条件，也是 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$ 沿 $\mathscr{C}$ 与 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t_0)$ 平行的充要条件.

(𝕄)内的曲线 $\mathscr{C}$，切矢量 dx^{α}/dt 沿 $\mathscr{C}$ 平行时称为(𝕄)的**测地线**. 以 dx^{α}/dt 代替式 (5.5.10) 中的 $\hat{\lambda}^{\alpha}(t)$，我们得到测地线 $\mathscr{C}$ 的微分方程:

$$\frac{dx^{\beta}}{dt}\left[\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}\right]$$

$$-\frac{dx^{\alpha}}{dt}\left[\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}\right]=0. \qquad (5.5.11)$$

注意: 我们将 $dx^{\alpha}/dt\equiv 0(\alpha=1, 2, 3, 4)$ 的情况除外，因为这时 $x^{\alpha}=$常数$(\alpha=1, 2, 3, 4)$为一定点; 另外又将 $dx^{\alpha}/dt=0(\alpha=1, 2, 3, 4)$的情况除外，因为在 $t=t'$ 为除外情况时，曲线在该点的切线不存在. 这时可由式 (5.5.9) 求出等价的微分方程组:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}=f^{\alpha}\left(x^{\mu}, \frac{dx^{\mu}}{dt}\right), \qquad (5.5.12)$$

式中 f^{α} 在 $x^{\mu}(t_0)=a^{\mu}$ 及 $dx^{\mu}(t_0)/dt=b^{\mu}$ 的近邻是解析的. 因此，存在唯一的一组解析解 $x^{\alpha}(t)$，满足初始条件:

$$x^{\mu}(t_0)=a^{\mu}, \quad \frac{dx^{\mu}(t_0)}{dt}=b^{\mu}.$$

这是过(a^{μ})以(b^{μ})为切线方向的测地线.

以 $x^{\mu}(t)$代入式(5.5.9)，则有解析函数 $f(t)$，满足方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=f(t)\frac{dx^\alpha}{dt}. \qquad (5.5.13)$$

当位标系 x 改变时，满足方程

$$\frac{d\hat{s}}{dt}=c\exp\left[\int f(t)dt\right] \qquad (5.5.14)$$

的参数 $\hat{s}\equiv\hat{s}(t)$ 不变. 以 $\hat{s}$ 代 t，则方程(5.5.13)可以写成

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\hat{s}^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{d\hat{s}}\frac{dx^\nu}{d\hat{s}}=0, \qquad (5.5.13)^*$$

使得

$$\left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right)^2\equiv g_{\mu\nu}(x(\hat{s}))\frac{dx^\mu(t)}{d\hat{s}}\frac{dx^\nu(t)}{d\hat{s}}\equiv 0 \qquad (5.5.15)$$

的测地线 $\mathscr{C}_0: x^\alpha=x^\alpha(\hat{s})$，叫做**零测地线**.

过一点 P_0 的零测地线形成一个锥面 $\Gamma(P_0)$，相应于特殊相对性的光锥面(3.1.5). 我们也把它叫做以 P_0 为顶点的光锥面. 可以证明：光锥面 $\Gamma(P_0)$ 与微分方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2U}{\partial x^\mu\partial x^\nu}+A^\mu\frac{\partial U}{\partial x^\mu}+BU=f \qquad (5.5.16)$$

过点 P_0 的特征曲面一致. 这一性质在微分方程理论中十分重要[1].

考虑积分

$$J\equiv\int_{t_1}^{t_2}\Psi(x^\alpha,\ \dot{x}^\alpha)dt, \qquad (5.5.17)$$

为简化书写，记

$$\dot{x}^\alpha\equiv\frac{dx^\alpha}{dt}.$$

设 $\{C\}:\{x^\alpha=x^\alpha(t)\}$，是过定点 A，B 的曲线族. 变分

$$\delta J=0$$

的充要条件是某一曲线 C 满足 **Euler** 方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{x}^{\alpha}}=0. \tag{5.5.18}$$

对

$$S\equiv\int_{t_1}^{t_2}[\epsilon g_{\mu\nu}(\mathrm{x}(t))\dot{\mathrm{x}}^{\mu}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}]^{\frac{1}{2}}dt \tag{5.5.19}$$

应用上述结果. 设 $C:\mathrm{x}^{\alpha}=\mathrm{x}^{\alpha}(t)$ 为过 A, B 两点的解析曲线; A 及 B 的位标为 $(\mathrm{x}^{\alpha}(t_1))$ 及 $(\mathrm{x}^{\alpha}(t_2))$; $ds\neq0$, ϵ 全为 $+1$ 或 -1, ds 为曲线族的线元. 求满足 $\delta s=0$ 的曲线 C. 由于

$$\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\mathrm{x}}^{\mu}}=\frac{\epsilon g_{\mu\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}}{\dot{s}},\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathrm{x}^{\mu}}=\frac{\epsilon\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\mathrm{x}^{\mu}}\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}\dot{\mathrm{x}}^{\beta}}{2\dot{s}},$$

所以方程(5.5.18)成为

$$g_{\mu\nu}\ddot{\mathrm{x}}^{\nu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial\mathrm{x}^{\gamma}}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\gamma}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial\mathrm{x}^{\mu}}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\gamma}-g_{\mu\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}=0. \tag{5.5.20}$$

应用恒等式(5.2.6), 则上式左端中间两项之和正好等于 $[\nu\gamma,\ \mu]\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\gamma}$, 而方程(5.5.20)化为

$$g_{\mu\rho}\ddot{\mathrm{x}}^{\rho}+[\nu\gamma,\ \mu]\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\gamma}-g_{\mu\rho}\dot{\mathrm{x}}^{\rho}\ddot{s}/\dot{s}=0.$$

以 $g^{\alpha\mu}$ 乘上式, 注意求和, 令 $\alpha\equiv\hat{\nu}$, 则得

$$\ddot{\mathrm{x}}^{\alpha}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\gamma\end{matrix}\right\}\dot{\mathrm{x}}^{\nu}\dot{\mathrm{x}}^{\gamma}-\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}\ddot{s}/\dot{s}=0. \tag{5.5.21}$$

如令

$$\ddot{s}/\dot{s}\equiv f(t),$$

则

$$\dot{s}=c\exp\left[\int f(t)dt\right],$$

s 就与 $\hat{s}$ 意义一致, 上式就是式(5.5.14). 所以, 使 $\delta J=\delta s=0$ 的曲线 C 正是前述的测地线(5.5.13)*:

$$\frac{d^2\mathrm{x}^{\alpha}}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{d\mathrm{x}^{\mu}}{ds}\frac{d\mathrm{x}^{\nu}}{ds}=0. \tag{5.5.22}$$

这里的论证对于零测地线不再适合.

对于零测地线，当以 $\hat{s}$ 代 s，过 A 点而以 $b^\alpha \equiv dx^\alpha/ds|_{\hat{s}=\hat{s}_1}$ 为切线矢量时，方程 (5.5.13)* 的唯一解析解

$$x^\alpha \equiv x^\alpha(\hat{s},\ b^\alpha) \tag{5.5.23}$$

所表示的曲线记作 $\mathscr{C}_0(A,\ b^\alpha)$. 使 B 充分接近于 A，以 B 点的位标代入式(5.5.23)的左端，右端的 $\hat{s}$ 代之以 $\hat{s}_2$，可以唯一确定 b^α，这里 $s_1 \equiv s(t_1)$，$s_2 \equiv s(t_2)$. 因此，过 A，B 两点的测地线是唯一的. 当 A 点与 B 点相距甚远时，需要进行解析开拓分段证明这个判断.

以 P_0 为顶点的光锥 $\Gamma(P_0)$，将 P_0 的(非零)测地线族中的测地线分成两类:

一类，在其上有 $\epsilon=+1$，即

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu>0,$$

属于 $\Gamma(P_0)$ 的外域，记作 $\Gamma_0(P_0)$;

另一类，在其上有 $\epsilon=-1$，即

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu<0,$$

属于 $\Gamma(P_0)$ 的内域，记作 $\Gamma_i(P_0)$.

取一个张量 $\mathscr{G}_\mu(P)$，自点 P 沿测地线 $\mathscr{C}$ 平行移动至 P'，得唯一的张量 $\mathscr{G}'_{\mu'}(P')$. 当 P 与 P' 同时变动时，以乘积

$$\mathscr{G}_{\mu\mu'}(P,\ P') \equiv \mathscr{G}_\mu(P)\cdot\mathscr{G}'_{\mu'}(P')$$

为对位标系 x 的分量的并矢量所成的张量称为双张量. 当位标 x 经一解析变换:

$$\hat{x}^{\hat{\mu}} = \hat{x}^{\hat{\mu}}(x),$$

$$x^\mu = x^\mu(\hat{x}),$$

转化为 $\hat{x}$ 时，双张量的转化规律为

$$\hat{\mathscr{G}}_{\hat{\mu}\hat{\mu}'}(\hat{x},\ \hat{x}') = \mathscr{G}_{\mu\mu'}(x,\ x')\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial \hat{x}'^{\hat{\mu}'}}. \tag{5.5.24}$$

双张量的性质可以容易地推广为多张量的相应性质.

注意：由 P 沿 $\mathscr{C}$ 平行移动张量 $\mathscr{G}_\mu(P)$ 至 P' 得出张量 $\mathscr{G}'_{\mu'}(P')$；反之，由 P' 沿 $\mathscr{C}$ 平行移动张量 $\mathscr{G}'_{\mu'}(P')$ 至 P 仍得张量 $\mathscr{G}_\mu(P)$. 这由常微分方程组初值问题解的关系来看是显然的.

应该给出方法来区别以 P_0 为顶点的光锥内域 $\Gamma_i(P_0)$ 为两个半锥 $\Gamma_i^+(P_0)$ 与 $\Gamma_i^-(P_0)$. 这个区别"+"，"−"的方法将使 $\Gamma_i^\pm(P)$ 与 $\Gamma_i^\pm(P')$ 具有下面的性质：

当 P' 属于 $\Gamma_i^+(P)$ 时，P 属于 $\Gamma_i^-(P')$；P' 属于 $\Gamma_i^-(P)$ 时，P 属于 $\Gamma_i^+(P')$.

同样可以定义 $\Gamma_0^+(P_0)$ 与 $\Gamma_0^-(P_0)$，上面的讨论可以逐字搬用.

由于这个光锥的两个半锥的区别，连结 P 及 P' 的测地线 $\mathscr{C}(PP')$ 应在 $\overline{\Gamma}_i^\pm(P)\cap\overline{\Gamma}_i^\mp(P')$，或 $\overline{\Gamma}_0^\pm(P)\cap\overline{\Gamma}_0^\mp(P')$ 上. 这里，我们以 $\overline{\Gamma}_i^\pm(P)$ 及 $\overline{\Gamma}_0^\pm(P)$ 等分别表示 $\Gamma_i^\pm(P)$ 与 $\Gamma(P)$ 的和集及 $\Gamma_0^\pm(P)$ 与 $\Gamma(P)$ 的和集.

这一注意在关于波的传播的偏微分方程的处理上是非常重要的. 读者可以比较 §3.1 中的有关讨论.

§5.6 规范位标系

现在讨论规范位标系.

过(𝔗)中任意一点 P_0 的测地线 $\mathscr{C}$ 以 $\hat{S}$ 为参数的表达式为方程(5.5.13)*. 当 $\mathscr{C}$ 不是零测地线时，可以以 S 代替 $\hat{S}$；当 $\mathscr{C}_0$ 为零测地线时，以 $\hat{S}$ 为**拟长度**. 以 P_0 为 $\hat{S}$ 的起点，以 ξ^{i*} 为 P_0 的切线方向余弦的测地线 $\mathscr{C}_0$ 的方程可以写成下面

的形式:

$$\mathbf{x}^{\mu}=\mathbf{x}_0^{\mu}+\xi^{\mu}\hat{S}+\frac{1}{2!}(\mathbf{x}^{\mu}(0))''\hat{S}^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(\mathbf{x}^{\mu}(0))^{(n)}\hat{S}^n+\cdots, \qquad (5.6.1)$$

注意:

$\mathbf{x}^{\mu}=\mathbf{x}^{\mu}(\hat{S})$; $\mathbf{x}_0^{\mu}\equiv\mathbf{x}^{\mu}(0)$; $\xi^{\mu}=(\mathbf{x}^{\mu}(0))'\equiv(\mathbf{x}^{\mu}(\hat{S}))'|_{\hat{s}=0}$;

而 $(\mathbf{x}^{\mu}(0))''\equiv(\mathbf{x}^{\mu}(\hat{S}))''|_{\hat{s}=0}$ 可由方程(5.5.13)* 求得,亦即

$$(\mathbf{x}^{\mu}(0))''=-\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}\xi^{\beta}\xi^{\nu},$$

式中 $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\nu\end{matrix}\right\}$ 须取 $\hat{S}=0$ 时的值;由方程(5.5.13)* 求对 $\hat{S}$ 的微商,依次得到

$$(\mathbf{x}^{\mu}(\hat{S}))'''+\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu}(\mathbf{x}^{\lambda}(\hat{S}))'(\mathbf{x}^{\gamma}(\hat{S}))'(\mathbf{x}^{\nu}(\hat{S}))'=0;$$

$$(\mathbf{x}^{\mu}(\hat{S}))^{(4)}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu\eta}(\mathbf{x}^{\lambda}(\hat{S}))'(\mathbf{x}^{\gamma}(\hat{S}))'(\mathbf{x}^{\nu}(\hat{S}))'(\mathbf{x}^{\eta}(\hat{S}))'=0;$$

.....

其中

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu}\equiv\frac{1}{3}P\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\mu\\ \lambda\gamma\end{matrix}\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\gamma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \lambda\nu\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\mu\\ \lambda\alpha\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \gamma\nu\end{matrix}\right\}\right);$$

一般地,有

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu\cdots\alpha\beta}\equiv\frac{1}{N}P\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^{\beta}}\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu\cdots\alpha}\right.$$

$$-\Gamma^{\mu}_{\hat{\alpha}\gamma\nu\cdots\alpha}\left\{\begin{matrix}\hat{\alpha}\\ \lambda\beta\end{matrix}\right\}-\cdots-\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu\cdots\hat{\alpha}}\left.\left\{\begin{matrix}\hat{\alpha}\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\right)$$

$$=\frac{1}{N}P\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^{\beta}}\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma\nu\cdots\alpha}-(N-1)\Gamma^{\mu}_{\hat{\alpha}\gamma\nu\cdots\alpha}\left\{\begin{matrix}\hat{\alpha}\\ \lambda\beta\end{matrix}\right\}\right),$$

式中 N 表示指标 λ, γ, ν, $\cdots$, α, β 的个数, $P(*)$ 表示将括

号内的下标循环置换而求其和.

由此，$$(\mathrm{x}^\mu(0))^{(n)} = -\Gamma^\mu_{\lambda\gamma\nu\cdots\alpha\beta}\xi^\lambda\xi^\gamma\xi^\nu\cdots\xi^\alpha\xi^\beta,$$

注意，$\Gamma^\mu_{\lambda\gamma\nu\cdots\alpha\beta}$ 应取在 $\hat{S}=0$ 的值. $\mathscr{C}$ 的方程(5.6.1)成为:

$$\mathrm{x}^\mu = \mathrm{x}_0^\mu + \xi^\mu\hat{S} - \frac{1}{2!}\begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\gamma\end{Bmatrix}\xi^\lambda\xi^\gamma\hat{S}^2$$

$$-\frac{1}{3!}\Gamma^\mu_{\lambda\gamma\nu}\xi^\lambda\xi^\gamma\xi^\nu\hat{S}^3 - \cdots, \qquad (5.6.2)$$

令 $$y^\mu \equiv \xi^\mu\hat{S},$$

则上式成为

$$\mathrm{x}^\mu = \mathrm{x}_0^\mu + y^\mu - \frac{1}{2!}\begin{Bmatrix}\mu\\ \lambda\gamma\end{Bmatrix}y^\lambda y^\gamma - \frac{1}{3!}\Gamma^\mu_{\lambda\gamma\nu}y^\lambda y^\gamma y^\nu - \cdots. \qquad (5.6.3)$$

式 (5.6.3) 在

$$|y^\mu| < \rho$$

中，ρ 是充分小的正数，是收敛的幂级数叙列，因之是一个解析变换; 变换行列式

$$\left|\frac{D(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3, \mathrm{x}^4)}{D(y^1, y^2, y^3, y^4)}\right|_{(y^\mu)=0} = +1,$$

即变换(5.6.3)是可逆的，而且

$$y^\mu = y^\mu(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) \qquad (5.6.3)^*$$

也是解析变换. $y\equiv(y^1, y^2, y^3, y^4)$ 为以 P_0 为原点的位标系，称为 **Riemann 位标系**. 在此位标系中，$\mathscr{C}$ 的方程简化为

$$y^\mu = \xi^\mu\hat{S}. \qquad (5.6.4)$$

在 Riemann 位标系 y 中，Christoffel 符号记作

$$\begin{Bmatrix}\hat{\mu}\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}, \ \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}, \ \cdots,$$

不致发生混淆时仍用原来的写法，则 $\mathscr{C}$ 的方程当为

$$y^\mu=\xi^\mu\hat{S}-\frac{1}{2!}\begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}\xi^\alpha\xi^\beta\hat{S}^2-\frac{1}{3!}\Gamma^\mu_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\hat{S}^3-\cdots. \tag{5.6.5}$$

对任意的 ξ^α 与 $\hat{S}$, 上两式都应成立, 则必

$$\begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}_{y=0}=\Gamma^\mu_{\alpha\beta\gamma}|_{y=0}=\cdots=0. \tag{5.6.6}$$

这就是说, 在 Riemann 位标系的原点, 相应的 Christoffel 符号均为零. 因此, 在 Riemann 位标系的原点上, 张量的协变微商的分量与它的偏微商相同. 这个性质在证明张量恒等式中往往能起删繁就简的作用.

在 Riemann 位标系 y 中, 测地线的微分方程, 由式 (5.6.4) 可以写成:

$$\frac{d^2y}{d\hat{S}^2}=0, \tag{5.6.4}^*$$

与 Euclid 空间中直线的微分方程形式相同.

在位标系的解析变换

$$\mathrm{x}'^{\mu'}=\mathrm{x}'^{\mu'}(\mathrm{x}) \tag{5.6.5}$$

下, 沿曲线 $\mathscr{C}$ 应有

$$\frac{d\mathrm{x}'^{\mu'}}{d\hat{S}}=\frac{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}}{\partial\mathrm{x}^\mu}\frac{\partial\mathrm{x}^\mu}{\partial\hat{S}}. \tag{5.6.6}$$

因此, 在这两种位标系中, $\mathscr{C}$ 在 P_0 点的切线的方向余弦 $(\xi'^{\mu'})$ 与 (ξ^μ) 之间有下面的关系:

$$\xi'^{\mu'}=\frac{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}(P_0)}{\partial\mathrm{x}^\mu}\xi^\mu; \tag{5.6.7}$$

采用式 (4.2.30) 中的记法

$$D^{\mu'}_\mu\equiv\frac{\partial\mathrm{x}'^{\mu'}(P_0)}{\partial\mathrm{x}^\mu}, \tag{5.6.8}$$

在 y' 与 y 之间就有

$$y'^{\mu'} = D^{\mu'}_{\mu} y^{\mu}. \tag{5.6.9}$$

反之，当式 (5.6.9) 是已给的非异解析变换时，亦可由式 (5.6.8) 求出解析解 (5.6.5)，使相应的 y' 满足变换 (5.6.9).

由此可见，两个位标系 x 与 x′ 间的解析变换 (5.6.5) 等价于相应的以 P_0 为原点的两个 Riemann 位标系 y 与 y' 的线性变换 (5.6.9).

以 $\hat{g}_{\mu\nu}(y)$ 表示 $g_{\mu\nu}(P)$ 在以 P_0 为原点的 Riemann 位标系 y 中的分量，于是在 P_0 点我们有：

$$dS^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(0) dy^{\mu} dy^{\nu}. \tag{5.6.10}$$

根据时空（空）为双曲型的假定，必有非异常数矩阵 K，使

$$\overbrace{dy^{\mu}_0} = K \overbrace{dy^{\mu}},$$

把式 (5.6.10) 化成

$$dS^2 = \delta_{\mu\nu} dy^{\mu}_0 dy^{\nu}_0 = dy^{\mu}_0 dy^{\mu}_0. \tag{5.6.11}$$

同理，有非异矩阵 K'，使

$$\overbrace{dy'^{\mu'}_0} = K' \overbrace{dy'^{\mu'}},$$

将

$$dS^2 = \hat{g}'_{\mu'\nu'(0)} dy'^{\mu'} dy'^{\nu'} \tag{5.6.10}*$$

转化为

$$dS^2 = dy'^{\mu'}_0 dy'^{\mu'}_0. \tag{5.6.11}*$$

令 $D \equiv [D^{\mu'}_{\mu}]$，且

$$\left.\begin{aligned} \overbrace{y^{\mu}_0} &\equiv K \overbrace{y^{\mu}}, \\ \overbrace{y'^{\mu'}_0} &= K' \overbrace{y'^{\mu'}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.6.12}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{y'^{\mu'}_0} &= L\overset{\frown}{y^{\mu}_0}, \\ L &\equiv K'DK^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.6.13}$$

为使式(5.6.11)不变的非导线性变换.

位标系 y_0 称为相应于位标系 x 的，以 P_0 为原点的**规范位标系**；y'_0 为相应于位标系 x' 的，以 P_0 为原点的规范位标系. 两者之间有线性关系(5.6.13)，使得

$$dy^{\mu'}_0 dy'^{\nu'}_0 = dy^{\mu}_0 dy^{\nu}_0 \tag{5.6.14}$$

为不变式.

必须注意：$g_{\mu\nu}(P_0)$ 仅在规范位标系 y_0 的分量等于 $\delta_{\mu\nu}$；对 $P\neq P_0$，一般 $g_{\mu\nu}(P)$ 在规范位标系 y_0 的分量不再等于 $\delta_{\mu\nu}$.

如果 y_0 为以 P_0 为原点的 Lorentz 位标系，则这一位标系确定一个 Minkowski 空间 $\mathscr{M}_{P_0}(4)$，$\mathscr{M}_{P_0}(4)$ 与时空(𝕊)仅有一个公共点 P_0，叫做(𝕊)在 P_0 点的**切空间**. 这样一来，时空(𝕊)中一点 P_0 的近邻 V_{P_0} 内的点就与 $\mathscr{M}_{P_0}(4)$ 中点 P_0 的近邻 $\mathscr{V}_{P_0}$ 内的点拓扑对应. $\mathscr{V}_{P_0}$ 的点 $\hat{P}$ 的 Lorentz 位标 $y^{\mu}_0(\hat{P})$ 与 V_{P_0} 中对应点 P 的以 P_0 为原点的规范位标相同.

由于时空(𝕊)中过 P_0 点的测地线 $\mathscr{C}(P_0, \xi^{\mu})$ 的方程为式(5.6.4)，所以，$\mathscr{C}(P_0, \xi^{\mu})$ 相应于 $\mathscr{M}_{P_0}(4)$ 内过 P_0 点的直线 $\hat{\mathscr{C}}(P_0, \xi^{\mu})$：

$$y^{\mu}_0 = \xi^{\mu}\hat{S}.$$

固定 ξ^{μ}，则依 $\hat{S}$ 的正负，可将 $\mathscr{C}(P_0, \xi^{\mu})$ 分成两段：$\mathscr{C}^{+}(P_0, \xi^{\mu})$ 及 $\mathscr{C}^{-}(P_0, \xi^{\mu})$；相应地，$\hat{\mathscr{C}}(P_0, \xi^{\mu})$ 也分成两段：$\hat{\mathscr{C}}^{+}(P_0, \xi^{\mu})$ 及 $\hat{\mathscr{C}}^{-}(P_0, \xi^{\mu})$.

我们可以按照§3.1，将 $\mathscr{M}_{P_0}(4)$ 中以 P_0 为顶点的光锥

内域 $G_i(P_0)$ 分成两个半锥：

$$G_i^+(P_0),\ G_i^-(P_0);$$

于是相应地可将 $\Gamma_i(P_0)$ 分为两个半锥：

$$\Gamma_i^+(P_0),\ \Gamma_i^-(P_0).$$

我们假设下面四个条件等价：

$$\left.\begin{aligned} &P\in\bar{\Gamma}_i^{\pm}(P_0);\ P\in\mathscr{C}^{\pm}(P_0,\ \xi^{\mu}(P_0,\ P));\\ &\hat{P}\in\bar{G}_i^{\pm}(P_0);\ \hat{P}\in\hat{\mathscr{C}}^{\pm}(P_0,\ \xi^{\mu}(P_0,\ P)).\end{aligned}\right\}\quad(5.6.15)$$

这为纤维丛积分[2]提供了雏形.

参 考 文 献

[1] 李国平、郭友中，偏微分方程中的若干问题，中国科学院数学计算技术研究所，1965.

[2] 李国平、郭友中，一般相对性量子场论(一)，湖北人民出版社，1980.

第六章　自旋空间

本章研究特殊相对性量子场论中的自旋空间在一般相对性量子场论中的推广.

§6.1　自旋空间的概念

我们就时空(𝕋)的位标系 $\mathrm{x}\equiv(\mathrm{x}^{\mu})$ $(\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 定出双复数位标系 $\mathrm{u}\equiv(\mathrm{u}^{r})$ $(r=1,\ 2)$, 使

$$\mathrm{u}^{r}=a^{r}_{\mu}\mathrm{x}^{\mu}, \tag{6.1.1}$$

式中 a^{r}_{μ} 是复数; 和第四章不同, 下面"*"号上(或顶)标代表复数共轭, 而且

$$\overset{*}{\mathrm{u}}{}^{r}=\overset{*}{a}{}^{r}_{\mu}\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mu}. \tag{6.1.2}$$

式(6.1.1)与(6.1.2)合成可逆变换, 其逆变换为

$$\mathrm{x}^{\mu}=\dot{b}^{\mu}_{r}\mathrm{u}^{r}+\dot{c}^{\mu}_{r}\overset{*}{\mathrm{u}}{}^{r}. \tag{6.1.3}$$

一切合乎上述条件的位标系 u 确定一个空间($\mathscr{S}$), 称为**二分法自旋空间**. ($\mathscr{S}$) 中不同位标系 u 及 u′ 之间的变换设为解析可逆变换:

$$\mathrm{u}'^{r'}=f^{r'}(\mathrm{u}), \tag{6.1.4}$$

$f^{r'}(\mathrm{u})$ 为 u 的解析函数; 其逆函数

$$\mathrm{u}^{r}={}^{-1}f^{r'}(\mathrm{u}') \tag{6.1.5}$$

亦然.

在特殊相对论中, $f^{r'}(\mathrm{u})$ 须为常系数线性变换, 并且行列

式等于1.

一般,对应于位标系 x 及 x′ 的解析变换

$$\mathrm{x}'^{\mu'}=F^{\mu'}(\mathrm{x}), \tag{6.1.6}$$

有相应于 u 及 $\overset{*}{\mathrm{u}}$ 的解析变换

$$\mathrm{u}'^{r'}=f^{r'}(\mathrm{u},\ \overset{*}{\mathrm{u}}). \tag{6.1.7}$$

因此解析变换 (6.1.4) 所成之族 ($\mathscr{H}$) 对应于 (6.1.6) 所成之族的子族 ($\mathscr{E}$); 对应关系用 ($\mathscr{E}$)～($\mathscr{H}$) 表之.

旋量是张量概念的一种推广. 以希腊字母作为张量指标, 以拉丁字母作为旋量指标, 取值 1 及 2, 则一般的张量旋量混合量是一组数

$$t^{\lambda r i}_{u s u}\equiv t^{\lambda_1\cdots\lambda_p;r_1\cdots r_m;i_1\cdots i_n}_{\mu_1\cdots\mu_q;s_1\cdots s_n;\dot{u}_1\cdots\dot{u}_k},$$

简称混合量, 在坐标变换时, 有如下的变换式:

$$t'^{\lambda' r' i'}_{u' s' \dot{u}'}(\mathrm{x}')=t^{\lambda r i}_{\mu s \dot{u}}(\mathrm{x})\ \frac{\partial \mathrm{x}'^{(\lambda')}}{\partial \mathrm{x}^{(\lambda)}}\frac{\partial \mathrm{x}^{(\mu)}}{\partial \mathrm{x}'^{(\mu')}}\frac{\partial \mathrm{u}'^{(r')}}{\partial \mathrm{u}^{(r)}}\frac{\partial \mathrm{u}^{(s)}}{\partial \mathrm{u}'^{(s')}}\frac{\partial \overset{*}{\mathrm{u}}'^{(t')}}{\partial \overset{*}{\mathrm{u}}^{(t)}}\frac{\partial \overset{*}{\mathrm{u}}^{(u)}}{\partial \overset{*}{\mathrm{u}}'^{(u')}} \tag{6.1.8}$$

这里

$$\frac{\partial \mathrm{x}'^{(\lambda')}}{\partial \mathrm{x}^{(\lambda)}}\equiv\prod_1^p\frac{\partial \mathrm{x}'^{\lambda_i}}{\partial \mathrm{x}^{\lambda_i}},\qquad \frac{\partial \mathrm{x}^{(\mu)}}{\partial \mathrm{x}'^{(\mu')}}\equiv\prod_1^q\frac{\partial \mathrm{x}^{\mu_i}}{\partial \mathrm{x}'^{\mu'_i}},$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}'^{(r')}}{\partial \mathrm{u}^{(r)}}\equiv\prod_1^m\frac{\partial \mathrm{u}'^{r'_i}}{\partial \mathrm{u}^{r_i}},\qquad \frac{\partial \mathrm{u}^{(s)}}{\partial \mathrm{u}'^{(s')}}\equiv\prod_1^n\frac{\partial \mathrm{u}^{s_i}}{\partial \mathrm{u}'^{s'_i}},$$

等等; $\mathrm{x}'^{\mu'}=\mathrm{x}'^{\mu'}(\mathrm{x})$ 为 ($\mathscr{E}$) 中一元, $\mathrm{u}'^{r'}=\mathrm{u}'^{r'}(\mathrm{u})$ 为 ($\mathscr{H}$) 中与前者相应的元.

由上可见, 旋量指标有加点的及不加点的两种. 如无特别声明, Einstein 规定仍然有效, 即同一项中相同指标出现两次, 就对该指标之可能值(希腊指标的可能值为 1, 2, 3, 4; 拉丁指标的可能值为 1, 2) 求和. 这个规定在(6.1.8)式中已被

引用.

容易证明,压缩指标的法则亦适用于张量旋量混合量.例如

$$t_i^r = t_{\mu\dot{s}i}^{\ r}\mathcal{T}^{\mu\dot{s}}$$

为以 r 及 i 为指标之旋量.

我们用大写拉丁字母 A, B, …, A', B', … 等作为四分法自旋空间位标及旋量的指标,它们取值 1, 2, 3, 4:

$$\mathrm{u}^{\mathrm{A}} \equiv \begin{cases} \mathrm{u}^r, & \mathrm{A} \equiv r = 1, 2; \\ \dot{\mathrm{u}}^r, & \mathrm{A} \equiv 2+r = 3, 4. \end{cases} \tag{6.1.9}$$

不同位标系 $(\mathrm{u}^{\mathrm{A}})$ 与 $(\mathrm{u}'^{\mathrm{A}'})$ 间的变换仍保留 $(\mathscr{H})$ 族的特性:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{u}'^1 &= f^1(\mathrm{u}^1, \mathrm{u}^2); \\ \mathrm{u}'^2 &= f^2(\mathrm{u}^1, \mathrm{u}^2); \\ \mathrm{u}'^3 &= \overset{*}{f}{}^1(\mathrm{u}^3, \mathrm{u}^4); \\ \mathrm{u}'^4 &= \overset{*}{f}{}^2(\mathrm{u}^3, \mathrm{u}^4). \end{aligned}\right\} \tag{6.1.10}$$

简记作 $\mathrm{u}'^{\mathrm{A}'} = \mathrm{u}'^{\mathrm{A}'}(\mathrm{u})$. 这种变换形成之族以 $(\mathscr{H}')$ 表之: $(\mathscr{H}') \sim (\mathscr{E})$. (x^μ) 与 $(\mathrm{u}^{\mathrm{A}})$ 间的关系为:

$$\mathrm{u}^{\mathrm{A}} = a_\mu^{\mathrm{A}}\mathrm{x}^\mu; \quad \mathrm{x}^\mu = b_{\mathrm{A}}^\mu \mathrm{u}^{\mathrm{A}}. \tag{6.1.11}$$

这与 (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3) 一致, $|a_\mu^{\mathrm{A}}| \neq 0$, $a_\mu^{\mathrm{A}} b_{\mathrm{B}}^\mu = \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$, $b_{\mathrm{B}}^\mu a_\nu^{\mathrm{B}} = \delta_\nu^\mu$.

将 Christoffel 符号依(6.1.11)转换为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{B}\nu}^{\mathrm{A}} \equiv \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathrm{x}^\mu}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}} \frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{x}^\lambda}, \tag{6.1.12}$$

则在位标系 $(\mathrm{u}^{\mathrm{A}})$ 转为 $(\mathrm{u}'^{\mathrm{A}'})$ 时, $\mathscr{L}'^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'\nu'}$ 与 $\mathscr{L}_{\mathrm{B}\nu}^{\mathrm{A}}$ 应满足关系

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'} \partial \mathrm{x}'^{\nu'}} + \mathscr{L}_{\mathrm{B}\nu}^{\mathrm{A}} \frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}} \frac{\partial \mathrm{x}^\nu}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}} = \mathscr{L}'^{\bar{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'} \frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\bar{\mathrm{A}}'}}. \tag{6.1.13}$$

这里 $\mathrm{u}'^{\mathrm{A}'} = \mathrm{u}'^{\mathrm{A}'}(\mathrm{u})$ 在 $(\mathscr{H}')$ 族, 相应的 $\mathrm{x}'^{\mu'} = \mathrm{x}'^{\mu'}(\mathrm{x})$ 在 $(\mathscr{E})$

族.

我们来给出(6.1.13)式的证明.

因为,

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^{\mu'}\partial x'^{\nu'}}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}}=\left\{\begin{matrix}\tilde{\lambda}'\\ \mu'\nu'\end{matrix}\right\}'\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\tilde{\lambda}'}},$$

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u'^{B'}\partial u^A}=\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^B\partial u^A}\frac{\partial u^B}{\partial u'^{B'}}=0;$$

所以,

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^{\mu'}\partial x'^{\nu'}}=\frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^A}\frac{\partial u^A}{\partial x'^{\nu'}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u'^{B'}}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^A}\frac{\partial u^A}{\partial x'^{\nu'}}\right)\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}$$

$$=\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u'^{B'}\partial u^A}\frac{\partial u^A}{\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}$$

$$+\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^A}\frac{\partial^2 u^A}{\partial u'^{B'}\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}$$

$$=\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^A}\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial^2 u^A}{\partial u'^{B'}\partial x'^{\nu'}},$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^A}\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial^2 u^A}{\partial u'^{B'}\partial x'^{\nu'}}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^B}\frac{\partial u^B}{\partial u'^{B'}}\frac{\partial u'^{B'}}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\check{\lambda}'\\ \mu'\nu'\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u'^{\check{A}'}}\frac{\partial u'^{\check{A}'}}{\partial x'^{\check{\lambda}'}}.$$

以 $\frac{\partial u^{\tilde{A}'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial u'^{B'}}$ 乘上式两端,就 λ, μ' 求和即得式(6.1.13).

混合量 $t^{\lambda;A}_{\mu;B}=t^{\lambda_1\cdots\lambda_m;A_1\cdots A_p}_{\mu_1\cdots\mu_n;B_1\cdots B_q}$

具有张量指标 λ_i, μ_j, 四分法旋量指标 A_h, B_k, 两者均取 1, 2, 3, 4 为值. 区别在于张量指标为希腊字母,而旋量指标为大写拉丁字母. 不同位标系间分量的转换法则为:

$$t'^{\lambda';A'}_{\mu';B'}(x')=t^{\lambda;A}_{\mu;B}(x)\frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}}\frac{\partial u'^{A'}}{\partial u^{A}}\frac{\partial u^{B}}{\partial u'^{B'}},\quad (6.1.14)$$

式中

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}}\equiv\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial x'^{\mu'_i}},\qquad \frac{\partial u'^{A'}}{\partial u^{A}}\equiv\prod_{i=1}^{p}\frac{\partial u'^{A_i}}{\partial u^{A_i}},\ \cdots.$$

§6.2 自旋协变微商

混合量 $t^{\lambda;A}_{\mu;B}$，当各分量为解析时，它的协变微商定义为

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu_i}t^{\lambda;A}_{\mu;B}(x)=\frac{\partial t^{\lambda;A}_{\mu;B}(x)}{\partial x^{\nu_i}}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\nu_i\end{Bmatrix}t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}(x)-\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\nu_i\end{Bmatrix}t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}$$

$$+\mathscr{L}^{A}_{\check{A}\nu_i}t^{\lambda;\check{A}}_{\mu;B}(x)-\mathscr{L}^{\check{B}}_{B\nu_i}t^{\lambda;A}_{\mu;\check{B}}(x),\qquad (6.2.1)$$

简称自旋协变微商，式中

$$\begin{Bmatrix}\lambda_r\\ \check{\lambda}\nu_j\end{Bmatrix}t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}(x)\equiv\begin{Bmatrix}\lambda_i\\ \check{\lambda}_i\nu_j\end{Bmatrix}t^{\lambda_1\cdots\check{\lambda}_i\cdots\lambda_m;A}_{\mu\ \ \ \ ;B}(x),$$

$$\mathscr{L}^{A}_{\check{A}\nu_j}t^{\lambda;\check{A}}_{\mu;B}(x)\equiv\mathscr{L}^{A_i}_{\check{A}_i\nu_j}t^{\lambda;A_1\cdots\check{A}_i\cdots A_p}_{\mu;\ \ \ \ \ \ \ B},$$

.....

依定义应有：

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}t^{\lambda}_{\mu}=\nabla_{\nu}t^{\lambda}_{\mu};\qquad (6.2.2)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}(t^{\lambda;A}_{\mu;B}\tilde{t}^{\tilde{\mu};\tilde{B}}_{\tilde{\lambda};\tilde{A}})=(\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}t^{\lambda;A}_{\mu;B})\tilde{t}^{\tilde{\mu};\tilde{B}}_{\tilde{\lambda};\tilde{A}}+t^{\lambda;A}_{\mu;B}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\tilde{t}^{\tilde{\mu};\tilde{B}}_{\tilde{\lambda};\tilde{A}};\qquad (6.2.3)$$

标量 $\Phi(x)$ 之协变微商为偏微商，因此

$$t^{\lambda;A}_{\mu;B}\tilde{t}^{\mu;B}_{\lambda;A}=\Phi$$

的协变微商当为

$$(\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}t^{\lambda;A}_{\mu;B})\tilde{t}^{\mu;B}_{\lambda;A}+t^{\lambda;A}_{\mu;B}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\tilde{t}^{\mu;B}_{\lambda;A}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}}.\qquad (6.2.4)$$

现在来证明这样定义的协变微商的协变性：它对混合量

作用仍然是混合量. 不失一般性, 我们仅就 λ, μ, A, B 均为单一指标 λ_1, μ_1, A_1, B_1 的情况来证明.

对
$$t'^{\lambda_1'A_1'}_{\mu_1'B_1'} = t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}}$$

求偏微商, 则

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_1'}} t'^{\lambda_1'A_1'}_{\mu_1'B_1'} = \frac{\partial t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}}$$
$$+ t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu_1'}} \left(\frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}} \right). \tag{6.2.5}$$

这式右端第二项可以写成下列形式

$$t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial^2 x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\nu_1} \partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}}$$
$$+ t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial^2 x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial^2 x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1'} \partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}}$$
$$+ t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial^2 u'^{A_1'}}{\partial x^{\nu_1} \partial u^{A_1}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B_1'}}$$
$$+ t^{\lambda_1 A_1}_{\mu_1 B_1} \frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial^2 u^{B_1}}{\partial x'^{\nu_1'} \partial u'^{B_1'}}. \tag{6.2.6}$$

以上式第二项为例, 因为

$$\frac{\partial^2 x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\nu_1} \partial x^{\lambda_1}} + \begin{Bmatrix} \lambda_1' \\ \tilde{\nu}_1' \tilde{\lambda}_1' \end{Bmatrix}' \frac{\partial x'^{\tilde{\nu}_1'}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^{\tilde{\lambda}_1'}}{\partial x^{\lambda_1}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \nu_1 \lambda_1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\tilde{\lambda}_1}},$$
$$\frac{\partial^2 x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1'} \partial x'^{\mu_1'}} + \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \tilde{\nu}_1 \tilde{\mu}_1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x^{\tilde{\nu}_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} \frac{\partial x^{\tilde{\mu}_1}}{\partial x'^{\mu_1'}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mu}_1' \\ \nu_1' \mu_1' \end{Bmatrix}' \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\tilde{\mu}_1'}},$$
$$\frac{\partial^2 u'^{A_1'}}{\partial x^{\nu_1} \partial u^{A_1}} + \mathscr{L}^{A_1'}_{\tilde{A}_1 \tilde{\nu}_1} \frac{\partial u'^{\tilde{A}_1'}}{\partial u^{A_1}} \frac{\partial x'^{\tilde{\nu}_1'}}{\partial x^{\nu_1}} = \mathscr{L}^{\tilde{A}_1}_{A_1 \nu_1} \frac{\partial u'^{A_1'}}{\partial u^{\tilde{A}_1}},$$
$$\frac{\partial^2 u^{B_1}}{\partial x'^{\nu_1'} \partial u'^{B_1'}} + \mathscr{L}^{B_1}_{\tilde{B}_1 \tilde{\nu}_1} \frac{\partial u^{\tilde{B}_1}}{\partial u'^{B_1'}} \frac{\partial x^{\tilde{\nu}_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} = \mathscr{L}'^{\tilde{B}_1}_{B_1' \nu_1'} \frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{\tilde{B}_1'}},$$

这时(6.2.6)式第二项可写成

$$-t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\begin{Bmatrix}\mu_1\\ \tilde{\nu}_1\tilde{\mu}_1\end{Bmatrix}\frac{\partial x^{\tilde{\nu}_1}}{\partial x'^{\nu'_1}}\frac{\partial x^{\tilde{\mu}_1}}{\partial x'^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{A_1}}$$

$$+t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\begin{Bmatrix}\tilde{\mu}'_1\\ \nu'_1\mu'_1\end{Bmatrix}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\tilde{\mu}'_1}}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{A_1}}$$

$$=-t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\begin{Bmatrix}\mu_1\\ \tilde{\nu}_1\tilde{\mu}_1\end{Bmatrix}\frac{\partial x^{\tilde{\nu}_1}}{\partial x'^{\nu'_1}}\frac{\partial x^{\tilde{\mu}_1}}{\partial x'^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{A_1}}$$

$$+t'^{\lambda'_1;A'_1}_{\mu'_1;B'_1}\begin{Bmatrix}\tilde{\mu}'_1\\ \nu'_1\mu'_1\end{Bmatrix}';$$

同样(6.2.6)式第一项可以写成

$$t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\begin{Bmatrix}\tilde{\lambda}_1\\ \lambda_1\nu_1\end{Bmatrix}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\tilde{A}_1}}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu'_1}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}}\frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{A_1}}$$

$$-t'^{\lambda'_1;\tilde{A}'_1}_{\mu'_1;B'_1}\begin{Bmatrix}\lambda'_1\\ \tilde{\lambda}'_1\nu'_1\end{Bmatrix}';$$

第三、四两项依次可以写成

$$-t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\mathscr{L}^{B_1}_{\tilde{B}_1\tilde{\nu}_1}\frac{\partial u^{\tilde{B}'_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial x^{\tilde{\nu}_1}}{\partial x'^{\nu'_1}}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{A_1}}$$

$$+t'^{\lambda'_1;A'_1}_{\mu'_1;\tilde{B}'_1}\mathscr{L}'^{\tilde{B}'_1}_{B'_1\nu'_1};$$

及

$$t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}\mathscr{L}^{\tilde{A}_1}_{A_1\nu_1}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu'_1}}\frac{\partial x'^{\lambda'_1}}{\partial x^{\lambda_1}}\frac{\partial u^{B_1}}{\partial u'^{B'_1}}\frac{\partial u'^{A'_1}}{\partial u^{\tilde{A}_1}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}}$$

$$-t'^{\lambda'_1;\tilde{A}'_1}_{\mu'_1;B'_1}\mathscr{L}'^{A'_1}_{\tilde{A}'_1\nu'_1}.$$

将这些结果代入(6.2.5)式，并适当改变相同指标的表写，集结含 t' 之项与含 t 之项于等式之两端，结果恰为 $\nabla_{\nu_1}t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}$ 之协变转换式，故 $\nabla_{\nu_1}t^{\lambda_1;A_1}_{\mu_1;B_1}$ 亦为混合量．这个方法容易推广于多指标的情况．

§6.3 曲率自旋量

$\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}$ 虽然不是混合量，但可由之导出重要的混合量。

求等式(6.1.13)，

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}+\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}=\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}},$$

对 $\mathrm{x}'^{\gamma'}$ 的偏微商，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}=&-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\left(\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\left(\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}\right)\\=&-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}(\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu})\frac{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\\&-\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}-\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial^2 \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\\&+\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\left(\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}\right);\end{aligned}$$

将上式中 ν' 及 γ' 对调得出另一等式．两式相减得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma}-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\right)\frac{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\\&+\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma}\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}-\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\\&+\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\gamma'}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}\\&+\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\nu'}\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}-\mathscr{L}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}_{\mathrm{B}'\gamma'}\frac{\partial^2 \mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}\partial \mathrm{u}'^{\tilde{\mathrm{A}}'}}\\&+\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial^2 \mathrm{x}^{\gamma}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}-\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}\frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}\frac{\partial^2 \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}=0.\end{aligned}$$

最后两项相消，经简单计算得

$$\mathscr{L}'^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'\gamma'\nu'}=\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma\nu}\frac{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}{\partial \mathrm{x}'^{\gamma'}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}'^{\nu'}}\frac{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{B}'}}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}\frac{\partial \mathrm{u}'^{\mathrm{A}'}}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}},\qquad(6.3.1)$$

这里

$$\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma\nu}\equiv\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma}-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\gamma}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}+\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\breve{\mathrm{B}}\nu}\mathscr{L}^{\breve{\mathrm{B}}}_{\mathrm{B}\gamma}-\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\breve{\mathrm{B}}\gamma}\mathscr{L}^{\breve{\mathrm{B}}}_{\mathrm{B}\nu}\qquad(6.3.2)$$

显然为混合量，称为曲率自旋量。

§6.4 Ricci 恒等式

曲率自旋量 $\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\gamma\nu}$ 与 Riemann 曲率张量 $R^{\lambda}_{\mu\nu\gamma}$ 的作用相似，我们以之来推广 Ricci 恒等式.

就解析的标量 $\Phi(\mathrm{x})$ 而言，$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\Phi(\mathrm{x})\equiv\dfrac{\partial\Phi(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}$，容易证明：

$$(\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}-\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu})\Phi(\mathrm{x})=0.\qquad(6.4.1)$$

由于 $\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}\Phi(\mathrm{x})=\nabla_{\gamma}\Phi(\mathrm{x})$ 是一个张量，所以式 (6.4.1) 与张量理论中的判断一致.

就混合量 $t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}(\mathrm{x})$ 而求算子 $\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}-\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}$ 作用的结果即为 Ricci 恒等式之推广. 不失一般性，只须对 λ, μ, A, B 均为单指标的情况进行演算即可：

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}(\mathrm{x})=\frac{\partial t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\nu\end{Bmatrix}t^{\breve{\lambda};\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}-\begin{Bmatrix}\breve{\mu}\\ \breve{\mu}\nu\end{Bmatrix}t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}$$
$$+\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\breve{\mathrm{A}}\nu}t^{\lambda;\breve{\mathrm{A}}}_{\mu;\mathrm{B}}-\mathscr{L}^{\breve{\mathrm{B}}}_{\mathrm{B}\nu}t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\breve{\mathrm{B}}},$$

$$\nabla_\gamma\nabla_\nu t^{\lambda;A}_{\mu;B}(x)=\frac{\partial^2 t^{\lambda;A}_{\mu;B}}{\partial x^\gamma\partial x^\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\nu\end{Bmatrix}t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}}{\partial x^\gamma}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\nu\end{Bmatrix}t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}-\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}}{\partial x^\gamma}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\mathscr{L}^{A}_{\check{A}\nu}\cdot t^{\lambda;\check{A}}_{\mu;B}+\mathscr{L}^{A}_{\check{A}\nu}\frac{\partial t^{\lambda;\check{A}}_{\mu;B}}{\partial x^\gamma}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\mathscr{L}^{\check{B}}_{B\nu}\cdot t^{\lambda;A}_{\mu;\check{B}}-\mathscr{L}^{\check{B}}_{B\nu}\frac{\partial t^{\lambda;A}_{\mu;\check{B}}}{\partial x^\gamma}$$

$$+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \tilde{\lambda}\gamma\end{Bmatrix}\nabla_\nu t^{\tilde{\lambda};A}_{\mu;B}-\begin{Bmatrix}\tilde{\mu}\\ \mu\gamma\end{Bmatrix}\nabla_\nu t^{\lambda;A}_{\tilde{\mu};B}$$

$$-\begin{Bmatrix}\tilde{\nu}\\ \nu\gamma\end{Bmatrix}\nabla_{\tilde{\nu}}t^{\lambda;A}_{\mu;B}+\mathscr{L}^{A}_{\tilde{A}\gamma}\nabla_\nu t^{\lambda;\tilde{A}}_{\mu;B}$$

$$-\mathscr{L}^{\check{B}}_{B\gamma}\nabla_\nu t^{\lambda;A}_{\mu;\check{B}}.$$

将 ν 与 γ 互换可得 $\nabla_\nu\nabla_\gamma t^{\lambda;A}_{\mu;B}$ 的表达式. 试求 $(\nabla_\gamma\nabla_\nu-\nabla_\nu\nabla_\gamma)t^{\lambda;A}_{\mu;B}$, 则可看到, 含 t 的二阶及一阶偏微商的项均为 0, 故可只讨论含 t 之项.

先考虑右端含 $t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}$ 及 $t^{\tilde{\lambda};A}_{\mu;B}$ 之项, 则有

$$t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}\left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\nu\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\gamma\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \tilde{\lambda}\gamma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{\lambda}\\ \check{\lambda}\nu\end{Bmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{Bmatrix}\lambda\\ \tilde{\lambda}\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tilde{\lambda}\\ \check{\lambda}\gamma\end{Bmatrix}\right)=-t^{\check{\lambda};A}_{\mu;B}R^{\hat{\lambda}}_{\check{\lambda}\nu\gamma\hat{\imath}}$$

其次考虑含 $t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}$ 及 $t^{\lambda;A}_{\tilde{\mu};B}$ 之项, 则有

$$t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}\left(-\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\gamma\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\gamma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \tilde{\mu}\nu\end{Bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}\tilde{\mu}\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \tilde{\mu}\gamma\end{Bmatrix}\right)=t^{\lambda;A}_{\check{\mu};B}R^{\check{\mu}}_{\mu\nu\gamma\hat{\imath}}$$

再考虑含 $t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;B}$ 及 $t^{\tilde{\lambda};A}_{\mu;B}$ 之项，则有

$$t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;B}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\nu}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma}\mathscr{L}^{\tilde{A}}_{\breve{A}\nu}-\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\nu}\mathscr{L}^{\tilde{A}}_{\breve{A}\gamma}\right)$$
$$=-t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;B}\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma\nu};$$

再其次考虑含 $t^{\lambda;A}_{\mu;\breve{B}}$ 及 $t^{\lambda;A}_{\mu;\tilde{B}}$ 之项，则有

$$t^{\lambda;A}_{\mu;\breve{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma}-\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\nu}+\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\nu}\mathscr{L}^{\breve{B}}_{\breve{B}\gamma}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma}\mathscr{L}^{\breve{B}}_{\breve{B}\nu}\right)$$
$$=t^{\lambda;A}_{\mu;\breve{B}}\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma\nu}.$$

其余各项，例如右端 $-\left\{\begin{matrix}\tilde{\nu}\\ \nu\gamma\end{matrix}\right\}\nabla_{\tilde{\nu}}t^{\lambda;A}_{\mu;B}$ 与 $-\left\{\begin{matrix}\tilde{\gamma}\\ \gamma\nu\end{matrix}\right\}\nabla_{\tilde{\gamma}}t^{\lambda;A}_{\mu;B}$ 相减恰恰消去，所余则有

$$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \tilde{\lambda}\gamma\end{matrix}\right\}\left(-\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}t^{\tilde{\lambda};A}_{\breve{\mu};B}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\nu}t^{\tilde{\lambda};\breve{A}}_{\mu;B}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\nu}t^{\tilde{\lambda};A}_{\mu;\breve{B}}\right)$$
$$-\left\{\begin{matrix}\tilde{\mu}\\ \mu\gamma\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\nu\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};A}_{\tilde{\mu};B}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\nu}t^{\lambda;\breve{A}}_{\tilde{\mu};B}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\nu}t^{\lambda;A}_{\tilde{\mu};\breve{B}}\right)$$
$$+\mathscr{L}^{A}_{\tilde{A}\gamma}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\nu\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};\tilde{A}}_{\mu;B}-\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}t^{\lambda;\tilde{A}}_{\breve{\mu};B}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\nu}t^{\lambda;\tilde{A}}_{\mu;\breve{B}}\right)$$
$$-\mathscr{L}^{\tilde{B}}_{B\gamma}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\nu\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};A}_{\mu;\tilde{B}}-\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}t^{\lambda;A}_{\breve{\mu};\tilde{B}}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\nu}t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;\tilde{B}}\right)$$
$$+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \tilde{\lambda}\nu\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\gamma\end{matrix}\right\}t^{\tilde{\lambda};A}_{\breve{\mu};B}-\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma}t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;B}+\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma}t^{\tilde{\lambda};A}_{\mu;\breve{B}}\right)$$
$$+\left\{\begin{matrix}\tilde{\mu}\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\gamma\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};A}_{\tilde{\mu};B}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma}t^{\lambda;\breve{A}}_{\tilde{\mu};B}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma}t^{\lambda;A}_{\tilde{\mu};\breve{B}}\right)$$
$$-\mathscr{L}^{A}_{\tilde{A}\nu}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\gamma\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};\tilde{A}}_{\mu;B}-\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\gamma\end{matrix}\right\}t^{\lambda;\tilde{A}}_{\breve{\mu};B}-\mathscr{L}^{\breve{B}}_{B\gamma}t^{\lambda;\tilde{A}}_{\mu;\breve{B}}\right)$$
$$+\mathscr{L}^{\tilde{B}}_{B\nu}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \breve{\lambda}\gamma\end{matrix}\right\}t^{\breve{\lambda};A}_{\mu;\tilde{B}}-\left\{\begin{matrix}\breve{\mu}\\ \mu\gamma\end{matrix}\right\}t^{\lambda;A}_{\breve{\mu};\tilde{B}}+\mathscr{L}^{A}_{\breve{A}\gamma}t^{\lambda;\breve{A}}_{\mu;\tilde{B}}\right),$$

应当全等于 0. 因此，Ricci 恒等式的推广形式为：

$$(\overset{*}{\nabla}_\gamma\overset{*}{\nabla}_\nu-\overset{*}{\nabla}_\nu\overset{*}{\nabla}_\gamma)t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}=t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\breve{\mu};\mathrm{B}}R^{\breve{\mu}}_{\mu\nu\gamma}-t^{\breve{\lambda};\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}R^{\lambda}_{\breve{\lambda}\nu\gamma}$$
$$+t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\breve{\mathrm{B}}}\mathscr{L}^{\breve{\mathrm{B}}}_{\mathrm{B}\gamma\nu}-t^{\lambda;\breve{\mathrm{A}}}_{\mu;\mathrm{B}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\breve{\mathrm{A}}\gamma\nu}. \tag{6.4.2}$$

以上是对单指标的情况证明的，稍加推广，不难证明一般的 Ricci 恒等式为自旋 Ricci 恒等式：

$$(\overset{*}{\nabla}_\gamma\overset{*}{\nabla}_\nu-\overset{*}{\nabla}_\nu\overset{*}{\nabla}_\gamma)\,t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}=\sum_{j=1}^{n}t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\breve{\mu}^j;\mathrm{B}}R^{\mu_j}_{\mu\nu\gamma}-\sum_{i=1}^{m}t^{\breve{\lambda}^i;\mathrm{A}}_{\mu;\mathrm{B}}R^{\lambda_i}_{\breve{\lambda}_i\nu\gamma}$$
$$+\sum_{k=1}^{q}t^{\lambda;\mathrm{A}}_{\mu;\breve{\mathrm{B}}_k}\mathscr{L}^{\breve{\mathrm{B}}_k}_{\mathrm{B}_k\gamma\nu}-\sum_{h=1}^{p}t^{\lambda;\breve{\mathrm{A}}_h}_{\mu;\mathrm{B}}\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\breve{\mathrm{A}}_h\gamma\nu}. \tag{6.4.3}$$

这里 $\lambda\equiv(\lambda_1\cdots\lambda_m)$，$\mu\equiv(\mu_1\cdots\mu_n)$，$\mathrm{A}\equiv(\mathrm{A}_1\cdots\mathrm{A}_p)$，$\mathrm{B}\equiv(\mathrm{B}_1\cdots\mathrm{B}_q)$，$\breve{\lambda}^i\equiv(\lambda_1\cdots\breve{\lambda}_i\cdots\lambda_m)$，$\breve{\mu}^j\equiv(\mu_1\cdots\breve{\mu}_j\cdots\mu_n)$，$\breve{\mathrm{A}}^h\equiv(\mathrm{A}_1\cdots\breve{\mathrm{A}}_h\cdots\mathrm{A}_p)$，$\breve{\mathrm{B}}^k\equiv(\mathrm{B}_1\cdots\breve{\mathrm{B}}_k\cdots\mathrm{B}_q)$.

§6.5 几个特殊旋量

容易证明，特殊张量 δ^ν_μ，$g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}$ 相应可以转化为特殊旋量：

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}\equiv\delta^\nu_\mu\frac{\partial\mathrm{x}^\mu}{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{A}}}\frac{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial\mathrm{x}^\nu}=\delta^\nu_\mu b^\mu_{\mathrm{B}}a^{\mathrm{A}}_\nu;\\
&g_{\mathrm{AB}}\equiv g_{\mu\nu}\frac{\partial\mathrm{x}^\mu}{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{A}}}\frac{\partial\mathrm{x}^\nu}{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{B}}}=g_{\mu\nu}b^\mu_{\mathrm{A}}b^\nu_{\mathrm{B}};\\
&g^{\mathrm{AB}}\equiv g^{\mu\nu}\frac{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{A}}}{\partial\mathrm{x}^\mu}\frac{\partial\mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial\mathrm{x}^\nu}=g^{\mu\nu}a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{B}}_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{6.5.1}$$

而恒等式

$$g_{\mathrm{AB}}g^{\mathrm{A}\sigma}=\delta^\sigma_{\mathrm{B}}, \tag{6.5.2}$$

则为恒等式 $g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma}=\delta^\sigma_\nu$ 的直接转化.

同样，由

$$\nabla_\gamma \delta^\nu_\mu = 0,\ \nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0,\ \nabla_\gamma g^{\mu\nu} = 0,$$

可以导致

$$\overset{\triangledown}{\nabla}_\gamma \delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}} = 0,\ \overset{\triangledown}{\nabla}_\gamma g_{\mathrm{AB}} = 0,\ \overset{\triangledown}{\nabla}_\gamma g^{\mathrm{AB}} = 0. \tag{6.5.3}$$

由

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = g^{\gamma\delta}[\mu\nu,\ \delta],$$

代入

$$g^{\gamma\delta} = g^{CD} \frac{\partial \mathrm{x}^\gamma}{\partial \mathrm{u}^C} \frac{\partial \mathrm{x}^\delta}{\partial \mathrm{u}^D} = g^{CD} b^\gamma_C b^\delta_{\mathrm{D}} \tag{6.5.4}$$

等关系，则有

$$\begin{aligned}
[\mu\nu,\ \delta] &= \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial \mathrm{x}^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial \mathrm{x}^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \mathrm{x}^\delta} \\
&= \frac{\partial (g_{\mathrm{AD}} a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{D}}_\delta)}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}} a^{\mathrm{B}}_\nu + \frac{\partial (g_{\mathrm{BD}} a^{\mathrm{B}}_\nu a^{\mathrm{D}}_\delta)}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}} a^{\mathrm{A}}_\mu \\
&\quad - \frac{\partial (g_{\mathrm{AB}} a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{B}}_\nu)}{\partial \mathrm{u}^D} a^D_\delta = \mathscr{L}_{\mathrm{AB},D} a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{B}}_\nu a^D_\delta,
\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

$$\{\mu\nu,\ \gamma\} \equiv g^{CD} \mathscr{L}_{\mathrm{AB},D} a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{B}}_\nu a^D_\delta b^\gamma_C b^\delta_{\mathrm{D}} = \mathscr{L}^C_{\mathrm{AB}} a^{\mathrm{A}}_\mu a^{\mathrm{B}}_\nu b^\gamma_C, \tag{6.5.6}$$

式中

$$\mathscr{L}^C_{\mathrm{AB}} \equiv g^{CD} \mathscr{L}_{\mathrm{AB},D}. \tag{6.5.7}$$

由此易得：

$$\left.
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathrm{ABD}} &= [\mu\nu,\ \delta] b^\mu_{\mathrm{A}} b^\nu_{\mathrm{B}} b^\delta_D; \\
\mathscr{L}^C_{\mathrm{AB}} &= \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} b^\mu_{\mathrm{A}} b^\nu_{\mathrm{B}} a^C_\gamma.
\end{aligned}
\right\} \tag{6.5.8}$$

因此，前面定出的 $\mathscr{L}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}\nu}$ 可由 $\mathscr{L}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}C}$ 给出：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{\mathrm{B}}{}_\delta &\equiv \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\delta \end{matrix} \right\} \frac{\partial \mathrm{x}^\mu}{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{A}}} \frac{\partial \mathrm{u}^{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{x}^\nu} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\delta \end{matrix} \right\} b^\mu_{\mathrm{A}} a^{\mathrm{B}}_\nu \\
&= \mathscr{L}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AD}} a^D_\delta \\
&= \mathscr{L}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}D} \frac{\partial \mathrm{u}^D}{\partial \mathrm{x}^\delta}.
\end{aligned} \tag{6.5.9}$$

§6.6 自旋测地线与规范自旋位标系

我们已经知道:(𝔊)中测地线的微分方程为

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0;$$

利用 $x^\mu=b^\mu_A u^A$, 转化为自旋空间 $(\mathscr{S})$ 中的测地线(简称**自旋测地线**)微分方程:

$$\frac{d^2u^A}{ds^2}+\mathscr{L}^A_{BC}\frac{du^B}{ds}\frac{du^C}{ds}=0. \tag{6.6.1}$$

设 $(u^A(P))$ 为 $P\in(\mathscr{S})$ 之位标,对于初值

$$\frac{du^A}{ds}(P)\equiv\xi^A, \tag{6.6.2}$$

方程(6.6.1)有解

$$u^A=u^A(P)+\xi^A s+\mathscr{L}^A_{BC}\xi^B\xi^C s^2+\cdots.$$

这是 s 的收敛幂级数,以 V^A_P 代替 $\xi^A s$, 则

$$u^A=u^A(P)+V^A_P+(\mathscr{L}^A_{BC})V^B_PV^C_P+\cdots. \tag{6.6.3}$$

这个幂级数在 $|V^A_P|<\rho$(充分小)中收敛, 此级数的逆亦为收敛幂级数,故 (6.6.3) 是可逆解析变换. (V^A_P) 称为以 P 为原点的(属于空间 $(\mathscr{S})$ 的) **Riemann 位标系**. 这是对 (u^A) 而言的,当 (u^A) 改变时, 相应的 Riemann 位标系也随之改变.

(𝔊) 内对应于 P 的点仍记作 P, (𝔊) 中以 P 为原点的 Riemann 位标系则记作 (X^μ_P), 于是

$$x^\mu=x^\mu(P)+X^\mu_P+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_P X^\alpha_P X^\beta_P+\cdots \tag{6.6.4}$$

现在证明式 (6.6.4) 可由式 (6.6.3) 导出,反之亦然. 以 b^μ_A 乘式 (6.6.3) 两端而对 μ 求和,则

$$\bar{b}^{\mu}_{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{u}}^{\mathrm{A}}=\mathrm{u}^{\mathrm{A}}(P)\bar{b}^{\mu}_{\mathrm{A}}+b^{\mu}_{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{V}}^{\mathrm{A}}_{P}+(\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BC}})_{P}b^{\mu}_{\mathrm{A}}\mathrm{V}^{\mathrm{B}}_{P}\mathrm{V}^{\sigma}_{P}+\cdots. \tag{6.6.5}$$

上式右端第二项以后可以进行改写，例如

$$(\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BC}})_{P}b^{\mu}_{\mathrm{A}}\mathrm{V}^{\mathrm{B}}_{P}\mathrm{V}^{\sigma}_{P}=\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_{P}b^{\alpha}_{\mathrm{B}}b^{\beta}_{\sigma}\mathrm{V}^{\mathrm{B}}_{P}\mathrm{V}^{\sigma}_{P},$$

等等. 再令

$$\mathrm{X}^{\mu}_{P}=b^{\mu}_{\mathrm{A}}\mathrm{V}_{P},\quad \mathrm{x}^{\mu}=b^{\mu}\,\mathrm{u}^{\mathrm{A}} \tag{6.6.6}$$

二者相应，则式(6.6.3)化为式(6.6.4)；反之，令

$$\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{P}=a^{\mathrm{A}}_{\mu}\mathrm{X}^{\mu}_{P},\quad \mathrm{u}^{\mathrm{A}}=a^{\mathrm{A}}_{\mu}\mathrm{x}^{\mu} \tag{6.6.7}$$

二者相应，则式(6.6.4)化为式(6.6.3). 式(6.6.6)与(6.6.7)互逆：由于式(6.6.4)的逆变换的唯一性，式(6.6.4)中的 X^{μ}_{P} 恰好与式(6.6.6)中的 X^{μ}_{P} 全同；由于式(6.6.3)的逆变换的唯一性，则式(6.6.3)中的 $\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{P}$ 恰与式(6.6.7)中的 $\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{P}$ 全同.

可以证明：在自旋空间($\mathscr{S}$)中，选用以 P 为原点的 Riemann 位标时，相应的 $\mathscr{L}'^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}$ 在 P 点之值为0，并且式(6.6.3)中第三项以后的系数也如此. 正如在(𝔊)中选用以 P 为原点的 Riemann 位标系的情况一样，相应的 $\left\{\begin{matrix}\gamma'\\ \alpha'\beta'\end{matrix}\right\}'$ 及其他系数在 P 点之值为0.

(6.6.6)，(6.6.7)两组变换表明：(𝔊)的位标系(x^{μ})与($\mathscr{S}$)的位标系(u^{A})间的线性关系，在其相应的 Riemann 位标系(X^{μ}_{P})与($\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{P}$)间，仍然保持不变.

正如我们曾经指出过的：存在着非异常数矩阵 $\boldsymbol{C}\equiv[C^{\nu}_{\mu}]$，使得 $\mathrm{Y}^{\nu}_{P}=C^{\nu}_{\mu}\mathrm{X}^{\mu}_{P}$ 转化

$$g_{\mu\nu}(P)d\mathrm{X}^{\mu}_{P}d\mathrm{X}^{\nu}_{P}$$

为 $\delta_{\mu\nu}d\mathrm{Y}^{\mu}_{P}d\mathrm{Y}^{\nu}_{P}$ 的形式. $C^{\nu}_{\mu}D^{\mu'}_{\nu}=\delta^{\mu'}_{\mu}$，$\boldsymbol{D}\equiv[D^{\nu}_{\mu}]$. 这时，$(\mathrm{Y}^{\nu}_{P})$

叫做（罚）的相应于位标系 (x^μ) 的，以 P 为原点的规范位标系.

令 $\check{C}\equiv[\check{C}^B_A]$ 为非异矩阵，$\check{C}^{-1}\equiv[D^B_A]$ 为其逆矩阵. 我们要求当 $a\equiv[a^A_\mu]$ 使 (X^μ_P) 转化为 (V^A_P) 时，$\check{C}$ 也使 (V^B_P) 转化为 (W^A_P)：

$$V^A_P=a^A_\mu X^\mu_P;\quad W^A_P=\check{C}^A_B V^B_P. \tag{6.6.8}$$

而且

$$[\check{C}^A_B]\equiv\left[\begin{array}{c|c}\check{C}_1 & 0\\ \hline 0 & \check{C}_2\end{array}\right],\quad \check{C}_{2i}\equiv(\check{C}_1{}^r{}_s)^*, \tag{*}$$

$$W^A_P=a^A_\mu Y^\mu_P. \tag{6.6.9}$$

为此，以 $\check{C}^A_B$ 乘式(6.6.8)两端，得到

$$W^A_P=\check{C}^A_B a^B_\mu D^\mu_\nu Y^\nu_P.$$

故可定出 $\check{C}^A_B$，使得

$$\check{C}^A_P a^B_\mu D^\mu_\nu=a^A_\nu;$$

改为矩阵形式，则为 $\check{C}aC^{-1}=a$，于是

$$\check{C}=aCa^{-1}=aCb, \tag{6.6.10}$$

这里 $a\equiv[a^A_\mu]$，$b\equiv[b^\mu_A]$，$C\equiv[C^\mu_\nu]$ 均为非异阵.

用这种方式得出的 $\check{C}$ 引出

$$W^A_P=\check{C}^A_B V^B_P,$$

(W^A_P) 称为 $(\mathscr{S})$ 中对应于位标系 (u^A) 的以 P 为原点的规范自旋位标系. 这种位标系与（罚）中对应于位标系 (x^μ) 而以 P 为原点的规范位标系 (Y^μ_P) 相应，并且 $u^A=a^A_\mu x^\mu$ 转化为

$$W^A_P=a^A_\mu Y^\mu_P$$

的形式.

注意 $X^\mu_P\to Y^\mu_P$ 时，$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}_{X^\mu_P(P)}=0$ 转化为 $\left\{\begin{matrix}\lambda'\\ \mu'\nu'\end{matrix}\right\}'_{Y^\mu_P(P)}=0$;

相应有 $(\mathscr{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BC}})_{\mathrm{V}_P(P)}=0$ 转化为 $(\mathscr{L}'^{\mathrm{A}'}_{\mathrm{B}'\mathrm{C}'})_{\mathrm{W}_P(P)}=0$，只要 $\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_P\to\mathrm{W}^{\mathrm{A}}_P$.

另一点应注意的是，式 (6.6.10) 与 (*) 已经对 a^{A}_μ 附加了条件.

§6.7 广义 Dirac 方程

特殊相对性量子场论中，Dirac 矩阵为

$$\boldsymbol{\gamma}_k\equiv i\left[\begin{array}{c|c}0&\boldsymbol{\sigma}_k\\\hline-\boldsymbol{\sigma}_k&0\end{array}\right],\quad \boldsymbol{\gamma}_4\equiv\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{I}&0\\\hline0&-\boldsymbol{I}\end{array}\right]\quad (k=1,\ 2,\ 3);\tag{6.7.1}$$

它满足等式

$$\boldsymbol{\gamma}_\mu\boldsymbol{\gamma}_\nu+\boldsymbol{\gamma}_\nu\boldsymbol{\gamma}_\mu=2\delta_{\mu\nu}\boldsymbol{I}.\tag{6.7.2}$$

相应的 Dirac 方程为

$$(\boldsymbol{\gamma}_\mu\partial_\mu+k)\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{\Psi}\equiv\underline{\overline{\Psi_{\mathrm{A}}}},\tag{6.7.3}$$

这里

$$\boldsymbol{\sigma}_1\equiv\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_2\equiv\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_3\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.\tag{6.7.4}$$

在特殊相对论中，逆变指标与协变指标等价，故 $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ 又可写成 $\boldsymbol{\gamma}^\mu$. 将 $\boldsymbol{\gamma}^\mu$ 的元素写成 $\gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$，则 $\gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$ 恰为混合量. 因此推广 $\gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$ 于一般相对性时，考虑作(解析的) $\Gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$，其矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma}^\mu$，它应满足式 (6.7.2) 的推广：

$$\boldsymbol{\Gamma}^\mu\boldsymbol{\Gamma}^\nu+\boldsymbol{\Gamma}^\nu\boldsymbol{\Gamma}^\mu=2g^{\mu\nu}\boldsymbol{I},\tag{I}$$

也即是

$$\Gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}\Gamma^{\nu\mathrm{B}}{}_{C}+\Gamma^{\nu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}\Gamma^{\mu\mathrm{B}}{}_{C}=2g^{\mu\nu}\delta^{\mathrm{A}}{}_{C}.\tag{I*}$$

由于右端 $g^{\mu\nu}\delta^{\mathrm{A}}_{C}$ 之协变微商

$$\nabla_{\gamma}(g^{\mu\nu}\delta^{A}_{C})=0,$$

故应假设

$$\nabla_{\gamma}\Gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}=0. \tag{II}$$

此外，我们还须假设：对于 $(\mathfrak{M})$ 的每一点 P，与 (x^{μ}) 及自旋位标系 (u^{A}) 相应的以 P 为原点的规范位标系 (Y^{μ}_{P}) 及 (W^{A}_{P}) 而取 Γ^{μ} 的分量 $\Gamma_{P}{}^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}(Y^{\mu}_{P})$，则此分量在 P 点之值与 $\gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$ 相等. 因此

$$\Gamma_{P}{}^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}((Y^{\mu}_{P}(P)))=\gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}},\quad P\in(\mathfrak{M}). \tag{III}$$

(Γ)：我们假设满足 (I)，(II) 和 (III) 三个条件的混合量 $\Gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}$ 存在唯一(唯一性容易证明).

这时，对一般相对性有广义 Dirac 方程：

$$(\Gamma^{\mu}\nabla_{\gamma}+k)\Psi=0, \tag{6.7.5}$$

也即

$$\Gamma^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}\nabla_{\gamma}\Psi_{\mathrm{A}}+k\Psi_{\mathrm{B}}=0\ \ (\mathrm{B}=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{6.7.5}^{*}$$

假设 (Γ) 与 $(\mathfrak{M})$ 为双曲型 Riemann 空间的假设是不矛盾的，可以说 (Γ) 为后者的强化.

实际上，(Γ) 的三个假设不是独立的. 我们可以证明 (I) 为 (III) 的推论. 事实上，由 (III) 及式 (6.7.2)，(I) 对规范位标系 (Y^{μ}_{P}) 及 (W^{A}_{P}) 的原点 P 为真；(I) 为混合量等式，故对位标系 (x^{μ}) 及 (u^{A}) 在 P 点亦为真；P 可以任选，故 (I) 在 $(\mathfrak{M})$ 中成立.

其次，如果对 (III) 加以强化，使满足条件

$$\left(\frac{\partial\Gamma_{P}{}^{\mu\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}}((Y^{\mu}_{P}))}{\partial Y^{\gamma}_{P}}\right)_{Y^{\mu}_{P}=Y^{\mu}_{P}(P)=0}=0, \tag{IV}$$

由于在规范位标系原点 P 处 $\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}'=\mathscr{L}'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}\nu}=0$，故在规范位

标系 (Y_P^μ)，及 (W_P^A) 的原点处

$$(\nabla_{Y_P^\mu}\Gamma_P{}^{\mu A}{}_B((Y_P^\mu)))_{(Y_P^\mu)=(0)}=0,$$

因此

$$(\nabla_{x^\gamma}\Gamma^{\mu A}{}_B((x^\mu)))_{x^\mu(P)}=0.$$

但此式不论 P 为 $(\mathfrak{T})$ 之何点均成立，故得

$$\nabla_\gamma\Gamma^{\mu A}{}_B=0.$$

故对解析的混合量 $\Gamma^{\mu A}{}_B$ 而言，如果 (III)，(IV) 两假设成立，则假设 (Γ) 完全成立. $\Gamma^{\mu A}{}_B$ 叫做 $(\mathfrak{T})$ 的**基本混合量**，或**基本自旋量**.

§6.8 拟易位运算与拟 Hermite 共轭

张量指标的上升与下降，以 $g_{\mu\nu}$ 及 $g^{\mu\nu}$ 为依据；旋量指标的上升与下降，应以 g_{AB}，g^{AB} 为依据. 例如，将混合量 $t^{\lambda_1}_{\mu_1};^{A_1}_{B_1}$ 写成 $t^{\lambda_1\cdot}_{\cdot\mu_1};^{A_1\cdot}_{\cdot B_1}$，则

$$t^{\cdot\mu_1}_{\lambda_1\cdot};^{\cdot B_1}_{A_1\cdot}=g_{\lambda_1\tilde{\lambda}_1}g^{\mu_1\tilde{\mu}_1}g^{B_1\tilde{B}_1}g_{A_1\tilde{A}_1}t^{\tilde{\lambda}_1\cdot}_{\cdot\tilde{\mu}_1};^{\tilde{\lambda}_1\cdot}_{\cdot\tilde{B}_1}. \tag{6.8.1}$$

承用第四章的记法和符号，我们推广**拟易位运算**为

$$(t^{\lambda_1\cdot}_{\cdot\mu_1};^{A_1\cdot}_{\cdot B_1})'\equiv t^{\cdot\mu_1}_{\lambda_1\cdot};^{\cdot B_1}_{A_1\cdot}, \tag{6.8.2}$$

对于一般多指标混合量

$$(t^{\lambda\cdot}_{\cdot\mu};^{A\cdot}_{\cdot B})'\equiv t^{\cdot\mu}_{\lambda\cdot};^{\cdot B}_{A\cdot}, \tag{6.8.2}^*$$

式中 $\lambda\equiv(\lambda_1\cdots\lambda_p)$，$\mu\equiv(\mu_1\cdots\mu_q)$，$A\equiv(A_1\cdots A_m)$，$B\equiv(B_1\cdots B_n)$，$\dot{A}\equiv(\dot{A}_1\cdots\dot{A}_m)$，$\dot{B}\equiv(\dot{B}_1\cdots\dot{B}_n)$.

混合量的拟**Hermite共轭运算**以"★"表之，$\dot{1}\equiv3$，$\dot{2}\equiv4$. $\dot{3}\equiv1$，$\dot{4}\equiv2$，则

$$\begin{aligned}\overset{*}{t}{}^{\lambda\cdot}_{\cdot\mu};^{A\cdot}_{\cdot B}(x)&\equiv(\tilde{t}^{\lambda\cdot}_{\cdot\mu};^{A\cdot}_{\cdot B})'(x)\\&=\tilde{t}^{\cdot\mu}_{\lambda\cdot};^{\cdot B}_{A\cdot}(x).\end{aligned} \tag{6.8.3}$$

这里 $\tilde{t}^{\cdot\mu}_{\lambda\cdot};^{\cdot B}_{A\cdot}(x)$ 表示 $t^{\cdot\mu}_{\lambda\cdot};^{\cdot B}_{A\cdot}(x)$ 的**拟共轭复数**：设 $\overset{\circ}{t}{}^{\dot{\mu}}_{\dot{\lambda}\cdot};^{\cdot B}_{A\cdot}(x)$ 为

$t^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(\mathrm{x})$ 在位标系 $(x^k)(k=1,\ 2,\ 3,\ 0)$ 的分量，求 $t^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(x)$ 的复数共轭 $\overline{t}^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(x)$，然后将位标系变回 $(\mathrm{x}^\mu)(\mu=1,2,3,4)$ 即得相应的分量 $\tilde{t}^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(\mathrm{x})$.

由于

$$t'^{\cdot\mu';\cdot B'}_{\lambda'\cdot;A'\cdot}(x')=t^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(x)\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\lambda'}}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathrm{u}^A}{\partial \mathrm{u}'^{A'}}\frac{\partial \mathrm{u}'^{B'}}{\partial \mathrm{u}^B},$$

求其复数共轭，得

$$\overline{t}'^{\cdot\mu';\cdot B}_{\lambda'\cdot;A'\cdot}(x')=\overline{t}^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(x)\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\lambda'}}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\left(\frac{\overline{\partial \mathrm{u}^A}}{\partial \mathrm{u}'^{A'}}\right)\left(\frac{\overline{\partial \mathrm{u}'^{B'}}}{\partial \mathrm{u}^B}\right).$$

因此，

$$\tilde{t}'^{\cdot\mu';\cdot B'}_{\lambda'\cdot;A'\cdot}(\mathrm{x}')=\tilde{t}^{\cdot\mu;\cdot B}_{\lambda\cdot;A\cdot}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}^\lambda}{\partial \mathrm{x}'^{\lambda'}}\frac{\partial \mathrm{x}'^{\mu'}}{\partial \mathrm{x}^\mu}\left(\frac{\overline{\partial \mathrm{u}^A}}{\partial \mathrm{u}'^{A'}}\right)\left(\frac{\overline{\partial \mathrm{u}'^{B'}}}{\partial \mathrm{u}^B}\right),$$

所以

$$\overset{*}{t}{}'^{\lambda'\cdot;\dot{A}'\cdot}_{\cdot\mu';\cdot B'}(\mathrm{x}')=\overset{*}{t}{}^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{x}^\lambda}{\partial \mathrm{x}'^{\lambda'}}\frac{\partial \mathrm{x}'^{\mu'}}{\partial \mathrm{x}^\mu}\frac{\partial \mathrm{u}^{\dot{A}}}{\partial \mathrm{u}'^{\dot{A}'}}\frac{\partial \mathrm{u}'^{B'}}{\partial \mathrm{u}^B}.\tag{6.8.4}$$

余仿此，不赘述.

一个与其拟 Hermite 共轭相同的混合量称为 **Hermite 混合量.**

第七章　同位旋空间

原子核内部的中子和质子质量几乎相等，它们在核力方面的等价性，使得以质子代替中子而产生的不同的量子能级是近似简并的．只有来自质子电荷的微弱电效应，才会使简并性破坏．这种简并性引起一种新的对称性和新的量子数，这就是同位旋．它对核谱起着十分重要的作用．

§7.1　同位旋空间的概念

在特殊相对性量子场论中，同位旋量是虚拟的三维Euclid空间——第一类同位旋空间（$\mathscr{T}_1$）中的向量．Minkowski时空中的Lorentz变换相应于同位旋空间中的旋转，两者位标系的关系未曾道破．推广同位旋空间于一般相对性量子场有一定困难．在这里，我们假设同位旋空间（$\mathscr{T}_1$）为（$\mathfrak{T}$）的线性投影，即（$\mathfrak{T}$）的位标系（x^μ）相应于同位旋空间的实位标系（y^a）（$a=1, 2, 3$），并假定

$$y^a = e^a{}_\mu x^\mu, \tag{7.1.1}$$

$e \equiv [e^a_\mu]$ 为三阶常数元矩阵．（$\mathfrak{T}$）中两个位标系（x^μ）及（$x'^{\mu'}$）间的解析变换

$$x'^{\mu'} = x'^{\mu'}(x)$$

转化为位标系（y^a）及（$y'^{a'}$）间的解析变换：

$$y'^{a'} = y'^{a'}(y).$$

同位旋量的指标以正下面加点“·”的小写拉丁字母(或附以其他标识)表示: $\dot{a}$, $\dot{b}'$, $\dot{\tilde{c}}$, …. 这样我们就可以有同位旋量 $t_{\dot{a}}^{\dot{b}}$ 的转换式

$$t'_{\dot{a}'}{}^{\dot{b}'} = t_{\dot{a}}^{\dot{b}} \frac{\partial y^{\dot{a}}}{\partial y'^{\dot{a}'}} \frac{\partial y'^{\dot{b}'}}{\partial y^{\dot{b}}}, \tag{7.1.2}$$

这里, $\dot{a} = (\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_h)$, $\dot{b} = (\dot{b}_1 \cdots \dot{b}_k)$, 等等,

$$\frac{\partial y^{\dot{a}}}{\partial y'^{\dot{a}'}} = \prod_{i=1}^{h} \frac{\partial y^{\dot{a}_i}}{\partial y'^{\dot{a}'_i}}, \quad \frac{\partial y'^{\dot{b}'}}{\partial y^{\dot{b}}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\partial y'^{\dot{b}'_i}}{\partial y^{\dot{b}_i}}.$$

当位标系 (x^μ) 的变换限于等价自旋位标系变换 $u'^{A'} = u'^{A'}((u^A))$ 时, 则可考虑混合量(张量、自旋量与同位旋量混合量) $t_{\mu;B;\dot{\beta}}^{\lambda;A;\dot{\alpha}}$, 它的转换规则为

$$t'^{\lambda';A';\dot{\alpha}'}_{\mu';B';\dot{\beta}'}(x') = t_{\mu;B;\dot{\beta}}^{\lambda;A;\dot{\alpha}}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial u^B}{\partial u'^{B'}} \frac{\partial u'^{A'}}{\partial u^A} \cdot \frac{\partial y^{\dot{b}}}{\partial y'^{\dot{b}'}} \frac{\partial y'^{\dot{a}'}}{\partial y^{\dot{a}}}. \tag{7.1.3}$$

我们将逐步对式 (7.1.1) 的系数 $e^{\dot{a}}{}_\mu$ 给以条件:

$$^{T^1}g^{\dot{a}\dot{b}} \equiv g^{\mu\nu} e^{\dot{a}}{}_\mu e^{\dot{b}}{}_\nu, \quad \det[^{T^1}g^{\dot{a}\dot{b}}] \neq 0. \tag{I}$$

因此可作出 $^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}}$ 使得

$$^{T^1}g^{\dot{a}\dot{b}}\,^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}'} \equiv \delta^{\dot{b}}_{\dot{b}'}, \quad ^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}} e^{\dot{a}}{}_\mu e^{\dot{b}}{}_\nu \equiv g_{\mu\nu}.$$

我们假定

$$^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}}\, dy^{\dot{a}}\, dy^{\dot{b}} \geqslant 0. \tag{II}$$

因此以 $^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}}$ 为基本同位旋量的第一类同位旋空间为椭圆型的 Riemann 空间.

(I), (II) 两条件为关于 $e^{\dot{a}}{}_\mu$ 的基本制约.

由

$$^{T^1}g^{\dot{a}\dot{b}} = g^{\mu\nu} \frac{\partial y^{\dot{a}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^{\dot{b}}}{\partial x^\nu}, \quad ^{T^1}g'^{\dot{a}'\dot{b}'} = g'^{\mu'\nu'} \frac{\partial y'^{\dot{a}'}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial y'^{\dot{b}'}}{\partial x'^{\nu'}},$$

容易证明 $^{T^1}g^{\dot{a}\dot{b}}$ 为同位旋量. 从而可以证明 $^{T^1}g_{\dot{a}\dot{b}}$ 也为同位旋

量.

以 ${}^{T_1}\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\}$ 表示 ${}^{T_1}g_{ab}$ 的 Christoffel 符号, 则

$$ {}^{T_1}\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 c_1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial y^{c_1}}{\partial x^{\nu_1}} = \left\{ \begin{matrix} \gamma_1 \\ \mu_1 \nu_1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\gamma_1}}. \tag{7.1.4} $$

我们令

$$ {}^{T_1}\mathscr{L}_{b_1 \nu_1}^{a_1} \equiv {}^{T_1}\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 c_1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial y^{c_1}}{\partial x^{\nu_1}}. \tag{7.1.5} $$

由于

$$ \frac{\partial^2 y^{a_1}}{\partial y'^{b_1} \partial y'^{c_1}} + {}^{T_1}\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ b_1 c_1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial y^{b_1}}{\partial y'^{b_1}} \frac{\partial y^{c_1}}{\partial y'^{c_1}} = {}^{T_1}\left\{ \begin{matrix} \tilde{a}'_1 \\ b'_1 c'_1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial y^{a_1}}{\partial y'^{\tilde{a}'_1}}, $$

以 $\frac{\partial y'^{c'_1}}{\partial x'^{\gamma'_1}}$ 乘此式之两端, 则得

$$ \frac{\partial^2 y^{a_1}}{\partial y'^{b'_1} \partial x'^{\gamma'_1}} + {}^{T_1}\mathscr{L}_{b_1 \gamma_1}^{a_1} \frac{\partial y^{b_1}}{\partial y'^{b'_1}} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x'^{\gamma'_1}} = {}^{T_1}\mathscr{L}_{b'_1 \gamma'_1}^{\tilde{a}'_1} \frac{\partial y^{a_1}}{\partial y'^{\tilde{a}'_1}}. \tag{7.1.6} $$

据此可定义同位旋协变微商:

$$ \begin{aligned} \overset{\vee}{\nabla}_{\gamma_1} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{a}}(x) = {} & \frac{\partial t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{a}}}{\partial x^{\gamma_1}} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \check{\lambda} \gamma_1 \end{matrix} \right\} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\check{\lambda};A;\dot{a}} - \left\{ \begin{matrix} \check{\mu} \\ \mu \gamma_1 \end{matrix} \right\} t_{\check{\mu};B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{a}} \\ & + \mathscr{L}_{\check{A} \gamma_1}^{A} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;\check{A};\dot{a}} - \mathscr{L}_{B \gamma_1}^{\check{B}} t_{\mu;\check{B};\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{a}} \\ & + {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{c} \gamma_1}^{\dot{a}} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{c}} - {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{b} \gamma_1}^{\dot{c}} t_{\mu;B;\dot{c}}^{\lambda;A;\dot{a}}. \end{aligned} \tag{7.1.7} $$

这里 $\lambda \equiv (\lambda_1 \cdots \lambda_m)$, $\mu \equiv (\mu_1 \cdots \mu_n)$, $A \equiv (A_1 \cdots A_p)$, $B \equiv (B_1 \cdots B_q)$, $\dot{a} \equiv (\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_h)$, $\dot{b} \equiv (\dot{b}_1 \cdots \dot{b}_k)$, $\cdots$等等;

$$ {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{a}_i \gamma_1}^{\dot{\alpha}} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{\gamma}} \equiv \sum_{i=1}^{h} {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{a}_i \gamma_1}^{\dot{a}_i} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;(\dot{a}_1 \cdots \dot{\alpha}_i \cdots \dot{a}_h)}, $$

$$ {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{b} \gamma_1}^{\dot{\gamma}} t_{\mu;B;\dot{b}}^{\lambda;A;\dot{a}} \equiv \sum_{i=1}^{k} {}^{T_1}\mathscr{L}_{\dot{b}_i \gamma_1}^{\dot{\beta}_i} t_{\mu;B;(\dot{b}_1 \cdots \dot{\beta}_i \cdots \dot{b}_k)}^{\lambda;A;\dot{a}}, \quad \cdots\text{等等}. $$

对于解析的混合量及具连续的各二阶偏微商的混合量有

广义 Ricci 恒等式:

$$(\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}\overset{T^1}{\nabla}_{\nu_1}-\overset{T^1}{\nabla}_{\nu_1}\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1})t^{\lambda;A;\varrho}_{\mu;B;\sigma}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}t^{\lambda;A;\varrho}_{\check{\mu}^i;B;\sigma}R^{\check{\mu}_i}_{\mu_i\nu_1\gamma_1}-\sum_{i=1}^{m}t^{\check{\lambda}^i;A;\varrho}_{\mu;B;\sigma}R^{\lambda_i}_{\check{\lambda}_i\nu_1\gamma_1}+\sum_{i=1}^{q}t^{\lambda;A;\check{\varrho}}_{\mu;B;\sigma}\mathscr{L}^{\check{B}}_{B_i\gamma_1\nu_1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p}t^{\lambda;\check{A}^i;\varrho}_{\mu;B;\sigma}\mathscr{L}^{A_i}_{\check{A}_i\gamma_1\nu_1}+\sum_{i=1}^{k}t^{\lambda;A;\varrho}_{\mu;B;\check{\sigma}^i}{}^{T^1}\mathscr{L}^{\sigma_i}_{\sigma_i\gamma_1\nu_1}$$

$$-\sum_{i=1}^{h}t^{\lambda;A;\check{\varrho}^i}_{\mu;B;\sigma}{}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_i}_{\varrho_i\gamma_1\nu_1}, \tag{7.1.8}$$

这里 $\check{a}^i\equiv(a_1\cdots\check{a}_i\cdots a_h)$, $\check{b}^i\equiv(b_1\cdots\check{b}_i\cdots b_k)$;

$${}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\gamma_1\nu_1}\equiv\frac{\partial^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\gamma_1}}{\partial x^{\nu_1}}-\frac{\partial^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\nu_1}}{\partial x^{\gamma_1}}+{}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\nu_1}{}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\gamma_1}$$

$$-{}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\gamma_1}{}^{T^1}\mathscr{L}^{\varrho_1}_{\sigma_1\nu_1}, \tag{7.1.9}$$

等,余同前. 后一式叫做**曲率同位旋量.**

对于混合量 $t^{\lambda;A}_{\mu;B}$, $\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}t^{\lambda;A}_{\mu;B}=\overset{\sigma}{\nabla}_{\gamma_1}t^{\lambda;A}_{\mu;B}$; 对于张量 t^{λ}_{μ}, $\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}t^{\lambda}_{\mu}$ $=\nabla_{\gamma_1}t^{\lambda}_{\mu}$; 对于标量 t, $\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}t=\overset{\sigma}{\nabla}_{\gamma_1}t=\nabla_{\gamma_1}t=\dfrac{\partial t}{\partial x^{\gamma_1}}=\partial_{\gamma_1}t$.

§7.2 同位旋测地线与规范同位旋位标系

如果将同位旋量 t^{ϱ}_{σ} 作为同位旋空间的张量,则

$$\nabla_{\varsigma_1}t^{\varrho}_{\sigma}=\frac{\partial t^{\varrho}_{\sigma}}{\partial Z^{\varsigma_1}}+{}^{T^1}\left\{\begin{matrix}a\\ \check{a}c_1\end{matrix}\right\}t^{\check{\varrho}}_{\sigma}-{}^{T^1}\left\{\begin{matrix}\check{b}\\ b\varsigma\end{matrix}\right\}t^{\varrho}_{\check{\sigma}},$$

因此,

$$\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}t^{\varrho}_{\sigma}=\nabla_{\varsigma_1}t^{\varrho}_{\sigma}\frac{\partial y^{\varsigma_1}}{\partial x^{\gamma_1}}. \tag{7.2.1}$$

由于 $\nabla_{\varsigma_1}\delta^{\varrho_1}_{\sigma_1}=0$, $\nabla_{\varsigma_1}{}^{T^1}g_{\varrho_1\sigma_1}=0$, $\nabla_{\varsigma_1}{}^{T^1}g^{\varrho_1\sigma_1}=0$,

故可得出

$$\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}\delta\xi^{a_1}_{b_1}=0,\quad \overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}{}^{T^1}g_{a_1b_1}=0,\quad \overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}{}^{T^1}g^{a_1b_1}=0. \tag{7.2.2}$$

同位旋空间 $(\mathscr{T}_1)$ 中的同位旋测地线 ${}^{T^1}\mathscr{C}$ 的方程为:

$$\frac{d^2y^{a_1}}{ds^2}+{}^{T^1}\left\{\begin{matrix}a_1\\b_1c_1\end{matrix}\right\}\frac{dy^{b_1}}{ds}\frac{dy^{c_1}}{ds}=0. \tag{7.2.3}$$

注意

$${}^{T^1}\left\{\begin{matrix}a_1\\b_1c_1\end{matrix}\right\}\frac{dy^{b_1}}{ds}\frac{dy^{c_1}}{ds}={}^{T^1}\left\{\begin{matrix}a_1\\b_1c_1\end{matrix}\right\}\frac{\partial y^{b_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial y^{c_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{dx^{\mu_1}}{ds}\frac{dx^{\nu_1}}{ds}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\gamma_1\\\mu_1\nu_1\end{matrix}\right\}\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\frac{dx^{\mu_1}}{ds}\frac{dx^{\nu_1}}{ds},$$

由于式(7.2.3)左端的第一项可写成

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)=e^{a_1}_{\cdot\gamma_1}\frac{d^2x^{\gamma_1}}{ds^2},$$

故式(7.2.3)可转化为

$$e^{a_1}_{\cdot\gamma_1}\left(\frac{d^2x^{\gamma_1}}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\gamma_1\\\mu_1\nu_1\end{matrix}\right\}\frac{dx^{\mu_1}}{ds}\frac{dx^{\nu_1}}{ds}\right)=0. \tag{7.2.4}$$

由此可见,如果 ${}^{T^1}\mathscr{C}$ 为 (𝔐) 的测地线 $\mathscr{C}$ 依

$$y^a=e^a_{\cdot\mu}x^{\mu} \tag{7.2.5}$$

之投射,则 ${}^{T^1}\mathscr{C}$ 必然满足方程(7.2.3)而为同位旋测地线.

取 (𝔐) 中任一点 P, 它在同位旋空间依 (7.2.5) 的投射仍以 P 表示. 命 (x^{μ}) 的以 P 为原点的 Riemann 位标系为 (X^{μ}_p), 则 (y^a) 的以 P 为原点的 (同位旋空间的) Riemann 位标系 (Y^a_p) 与 (X^{μ}_p) 的关系仍保持为 $Y^a_p=e^a_{\cdot\mu}X^{\mu}_p$. 将 (X^{μ}_p) 依 $Y^{\mu}_p=O^{\mu}_{\mu'}X^{\mu'}_p$ 转化为 (x^{μ}) 的以 P 为原点的规范位标系 (Y^{μ}_p); 则 $Z^a_p=e^a_{\cdot\mu}Y^{\mu}_p$ 转化 (Y^{μ}_p) 为同位旋空间的 (y^a) 的以 P 为原点的规范位标系 (Z^a_p). 在规范位标系 (Z^a_p) 之原点 P 上,

$^{T^1}\left\{\begin{matrix} a \\ b c \end{matrix}\right\}_P = 0$, 这是不难证明的.

$$^{T^1}g_P^{ab}((Z_\beta^\alpha(P))) = {}^{T^1}g_P^{ab}((0)) = g_P^{\mu\nu}(P)\, e^a_{\cdot\mu} e^b_{\cdot\nu} = \delta^{\mu\nu} e^a_{\cdot\mu} e^b_{\cdot\nu}.$$

必须对 $e^a_{\cdot\mu}$ 重新加以限制, 使得 $^{T^1}g_P^{ab}((0)) \equiv \delta^{ab}_{\cdot\cdot}$:

$$\delta^{\mu\nu} e^a_{\cdot\mu} e^b_{\cdot\nu} = \delta^{ab}_{\cdot\cdot},$$

也即

$$e^a_{\cdot\mu} e^b_{\cdot\mu} = \delta^{ab}_{\cdot\cdot}. \tag{III}$$

这里有 10 个方程, 而有 12 个未知数, $(e^a_{\cdot\mu})$ 不是唯一的. 至此, 我们看见 $e^a_{\cdot\mu}$ 必须满足 (I), (II) 和 (III) 这三个条件: 有此条件, 则当 $(\mathfrak{M})$ 为 Minkowski 空间时, 同位旋空间 $(\mathscr{T}_1)$ 必为 Euclid 空间.

§7.3 基本同位旋矩阵

在特殊相对论中, 基本同位旋矩阵为

$$t^1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad t^2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$t^3 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

它们有下列关系

$$t^a_{\cdot\cdot} t^a_{\cdot\cdot} = 2I,$$

也就是

$$\delta_{ab} t^a_{\cdot\cdot} t^b_{\cdot\cdot} = 2I. \tag{7.3.1}$$

推广于一般相对性, 我们考虑同位旋量 $G^a_{\cdot b}(x)$, 就位标系 (x^μ) 相应于 (y^a), 任取 $P \in (\mathfrak{M})$, 同位旋空间 $(\mathscr{T}_1)$ 内的相应

点仍以 P 表示. (y^a) 的以 P 为原点的规范位标系以 (Z_P^a) 表示. 用 $G_{P\cdot b'}^{a\ c}(Z_P)$ 表 $G_{\cdot b'}^{a\ c}$ 在位标系 $Z_P\equiv(Z_P^a)$ 的分量. 假设

$$G_{P\cdot b'}^{a\ c}(0)=t_{\cdot b'}^{a\ c},\quad (\text{即 } G_{P\cdot}^{a}(0)=t_{\cdot}^{a}), \tag{7.3.2}$$

$$\left(\frac{\partial G_{P\cdot b'}^{a\ c}(Z_P)}{\partial Z_P^q}\right)_{Z_P=(0)}=0, \tag{7.3.3}$$

并设这对每一点 $P\in(\mathfrak{T})$ 都成立.

以这个同位旋量 $G_{\cdot b'}^{a\ c}(P)$ 为元得到叫做**基本同位旋量矩阵**. 它在 $(\mathfrak{T})$ 中作为 Minkowski 空间的分量应化为 $t_{\cdot b'}^{a\ c}(P)$.

就分量 $G_{P\cdot b'}^{a\ c}(Z_P)$ 而言, 其在 P 点, 即在 $Z_P=(0)$ 之点, 应有(7.3.1-3)三式. 因此,

$$^{T1}g_{Pcc'}(0)G_{P\cdot b'}^{a\ c}(0)G_{P\cdot}^{a'\ c'}(0)=2\delta_b^a,$$

$$(\nabla_{Z_P^q}G_{P\cdot b'}^{a\ c}(Z_P))_{Z_P=(0)}=0;$$

$$^{T1}g_{cc'}(P)G_{\cdot b'}^{a\ c}(P)G_{\cdot}^{a'\ c'}=2\delta_b^a,$$

$$(\nabla_{Z_q}G_{\cdot b'}^{a\ c})_P=0.$$

这对任何 $P\in(\mathfrak{T})$ 均成立, 故有

$$^{T1}g_{cc'}G_{\cdot b'}^{a\ c}G_{\cdot}^{a'\ c'}=2\delta_b^a,$$

$$\overset{T1}{\nabla}_{x^r}G_{\cdot b'}^{a\ c}(x)=0.$$

将这二式写成矩阵的形式, 则得下列二式:

$$^{T1}g_{cc'}\boldsymbol{G}_{\cdot}^{a}\boldsymbol{G}_{\cdot}^{a'}=2\boldsymbol{I}; \tag{7.3.4}$$

$$\overset{T1}{\nabla}_{x^r}\boldsymbol{G}_{\cdot}^{a}=0. \tag{7.3.5}$$

以上我们简单地研究了第一类同位旋空间, 对于第二类同位旋空间相应结果也成立.

§7.4 第二类同位旋空间

第二类同位旋空间 $(\mathscr{T}_2)$ 为二维的 Riemann 空间. 其位

标系 $(w^{\dot\alpha})$ 指标以希腊字母小写下面加点"·"来注明. 位标系 $(w^{\dot\alpha})$ 与 (罣) 的位标系 (x^μ) 之间的关系假定为

$$w^{\dot\alpha}=f^{\dot\alpha}{}_\mu x^\mu \quad (\dot\alpha=1,\ 2). \tag{7.4.1}$$

$[f^{\dot\alpha}{}_\mu]$ 为二阶矩阵. 不同的位标系 $(w'^{\dot\alpha'})$ 及 $(w^{\dot\alpha})$ 之间的关系有解析变换

$$w'^{\dot\alpha}=w'^{\dot\alpha'}(w),\quad w\equiv(w^{\dot\alpha}). \tag{7.4.2}$$

同位旋量的指标仍以希腊小写字母下面加点来标记，指标取值为 1 和 2. 例如 $t^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$, 其变换式为

$$t'^{\dot\alpha'}{}_{\dot\beta'}=t^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\frac{\partial w^{\dot\beta}}{\partial w'^{\dot\beta'}}\frac{\partial w'^{\dot\alpha'}}{\partial w^{\dot\alpha}}. \tag{7.4.3}$$

这里, $\dot\alpha\equiv(\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_\nu)$, $\dot\beta\equiv(\dot\beta_1\cdots\dot\beta_s)$, …等等;

$$\frac{\partial w^{\dot\beta}}{\partial w'^{\dot\beta'}}\equiv\prod_{i=1}^{s}\frac{\partial w^{\dot\beta_i}}{\partial w'^{\dot\beta'_i}},\ \cdots.$$

设

$${}^{T^1}g^{\dot\alpha\dot\beta}\equiv g^{\mu\nu}\frac{\partial w^{\dot\alpha}}{\partial x^\mu}\frac{\partial w^{\dot\beta}}{\partial x^\nu}, \tag{7.4.4}$$

并设 $f^{\dot\alpha}{}_\mu$ 满足条件:

$$\det[{}^{T^1}g^{\dot\alpha\dot\beta}]\neq 0. \tag{I}$$

由此, 可以求出 ${}^{T^1}g_{\dot\alpha\dot\beta}$, 使得

$${}^{T^1}g_{\dot\alpha\dot\beta}\,{}^{T^1}g^{\dot\alpha'\dot\beta}=\delta^{\dot\alpha'}_{\dot\alpha}. \tag{7.4.5}$$

我们还要求

$${}^{T^1}g_{\dot\alpha\dot\beta}\,dw^{\dot\alpha}dw^{\dot\beta}\geqslant 0. \tag{II}$$

用 ${}^{T^1}\left\{\begin{matrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\dot\gamma\end{matrix}\right\}$ 表示由 ${}^{T^1}g_{\dot\alpha\dot\beta}$ 作成的 Christoffel 符号, 则

$${}^{T^1}\mathscr{L}^{\dot a}_{\dot b\nu}\equiv{}^{T^1}\left\{\begin{matrix}\dot a\\ \dot b\dot\gamma\end{matrix}\right\}\frac{\partial w^{\dot\gamma}}{\partial x^\nu}. \tag{7.4.6}$$

混合量 $t^{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_\nu A_1\cdots A_r}_{\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_s B_1\cdots B_q}$ 的转换式与 $t^{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_\nu}_{\dot\lambda_1\cdots\dot\lambda_s}$ 的类同, 只要把式中的 $\dot a$, $\dot b$,

y, 相应地代以 $\alpha, \beta, \mathrm{w}, \cdots$, 即可, 同样定义协变微商 $\overset{2}{\nabla}_{x^\nu} t^{\lambda;\ A;\ \alpha;}_{\mu;\ B;\ \beta;}$, 只要在 $\overset{1}{\nabla}_{x^\nu} t^{\lambda;\ A;\ \alpha;}_{\mu;\ B;\ \beta;}$ 的定义中将 $a, b,$ 代以 $\alpha, \beta,$ 以及 ${}^{\mathrm{T}^1}\mathscr{L}^{\ \alpha;}_{\beta;\nu}$ 之类相应代以 ${}^{\mathrm{T}^2}\mathscr{L}^{\ \alpha;}_{\beta;\nu}$ 即可. 同样可定义 ${}^{\mathrm{T}^3}\mathscr{L}^{\ \alpha;}_{\beta;\nu}$, 并有相应的关于 $(\overset{2}{\nabla}_\gamma \overset{2}{\nabla}_\nu - \overset{2}{\nabla}_\nu \overset{2}{\nabla}_\gamma) t^{\lambda;\ A;\ \alpha;}_{\mu;\ B;\ \beta;}$ 的 Ricci 型恒等式. 也可以考虑混合量中两类同位旋指标都存在的情况, 结果形式是类似的.

($\mathfrak{T}$) 的点 P 在同位旋空间 ($\mathscr{T}_2$) 的相应点仍以 P 表示. 相应于 ($\mathfrak{T}$) 的位标系 (x^μ) 及 ($\mathscr{T}_2$) 的以 P 为原点的 Riemann 位标系为 (X^μ_P) 及 $(\mathrm{W}^{\ \alpha;}_P)$,

$$\{\mathrm{W}^{\ \alpha;} = f^{\ \alpha;}_{\ \mu}\mathrm{x}^\mu\} \sim \{\mathrm{W}^{\ \alpha;}_P = f^{\ \alpha;}_{\ \mu}\mathrm{X}^\mu_P\}.$$

当 $\mathrm{Y}^\mu_P = c^\mu_\mu \mathrm{X}^\mu_P$, 而 (Y^μ_P) 为相应于 (x^μ) 的以 P 为原点的规范位标系时, 即当

$$g_P{}^{\mu\nu}(\mathrm{Y}_P(P)) = g_P{}^{\mu\nu}(P) = \delta^{\mu\nu}$$

时, 我们可以规定 $(f^{\ \alpha;}_{\ \mu}\mathrm{Y}^\mu_P) = (\mathrm{W}^{\ \alpha;}_P)$ 为相应的规范位标系, 因此就要求 ${}^{\mathrm{T}^3}g_P{}^{\alpha;\beta;}(\mathrm{W}_P(P)) = \delta^{\alpha;\beta;}$, 也即是

$$\delta^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{W}^{\ \alpha;}_P}{\partial \mathrm{Y}^{\ \mu}_P}\frac{\partial \mathrm{W}^{\ \beta;}_P}{\partial \mathrm{Y}^{\ \nu}_P}\right)_P = \delta^{\alpha;\beta;},$$

或

$$\delta^{\mu\nu} f^{\ \alpha;}_{\ \mu} f^{\ \beta;}_{\ \nu} = \delta^{\alpha;\beta;}. \tag{III}$$

(I), (II) 和 (III) 为 $f^{\ \alpha;}_{\ \mu}$ 应满足的条件.

§7.5 一个计算公式和随伴式

在这里我们补充一个计算公式.

考虑混合量 $Q^{\lambda;\ A;\ \alpha;}_{\mu;\ B;\ \beta;}$, 则其 Hermite 的共轭为

$$(Q^{\lambda;\ A;\ \alpha;}_{\mu;\ B;\ \beta;})^* = (\tilde{Q}^{\mu;\ \dot{B};\ \beta;}_{\lambda;\ \dot{A};\ \alpha;}) \quad (\dot{1}=3,\ \dot{2}=4,\ \dot{3}=1,\ \dot{4}=2).$$

就一解析的三维流形 (∂D) 所界定的单连区域 (D) 而计算下列积分:

$$I\equiv\int_{(D)}(Q^{\cdot\mu';\dot{B}';\dot{b}'}_{\lambda'\cdot;\dot{A}'\cdot;\dot{a}'\cdot})*A^{\lambda'\cdot\mu\cdot;\dot{A}'\cdot;B\cdot;\dot{a}'\cdot\dot{b}\cdot;\gamma}_{\cdot\mu'\cdot\lambda;\cdot\dot{B}'\cdot\dot{A};\cdot\dot{b}'\cdot\dot{a};}$$
$$\times\overset{(1)}{\nabla}_{\gamma}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}\sqrt{|g|}\,d^4x. \tag{7.5.1}$$

式中,

$$\overset{(1)}{\nabla}_{\gamma}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}=\frac{\partial Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}}{\partial x^{\gamma}}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \check{\lambda}\gamma\end{Bmatrix}Q^{\check{\lambda}\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}$$
$$-\begin{Bmatrix}\check{\mu}\\ \mu\gamma\end{Bmatrix}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\check{\mu};\cdot B;\cdot\dot{b}}+\mathscr{L}^{\dot{A}}_{\dot{A}\gamma}Q^{\lambda\cdot;\check{\dot{A}}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}$$
$$-\mathscr{L}^{\check{B}}_{B\gamma}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot\check{B};\cdot\dot{b}}+{}^{T1}\mathscr{L}^{\dot{a}}_{\dot{b}\gamma}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\check{\dot{a}}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}$$
$$-{}^{T1}\mathscr{L}^{\check{\dot{b}}}_{\dot{b}\gamma}Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\check{\dot{b}}}. \tag{7.5.2}$$

依部分积分法,略去面积分部分,等式换为近似式,则

$$I\backsimeq-\int_{(D)}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(S_{\gamma}\sqrt{|g|})\frac{S}{\sqrt{|g|}}-S_{\gamma}J\right]\sqrt{|g|}\,d^4x, \tag{7.5.3}$$

式中,
$$S_{\gamma}=(Q^{\cdot\mu';\dot{B}';\dot{b}'}_{\lambda'\cdot;\dot{A}'\cdot;\dot{a}'\cdot})*A^{\lambda'\cdot\mu\cdot;\dot{A}'\cdot;B\cdot;\dot{a}'\cdot\dot{b}\cdot;\gamma}_{\cdot\mu'\cdot\lambda;\cdot\dot{B}'\cdot\dot{A};\cdot\dot{b}'\cdot\dot{a}},$$
$$S=Q^{\lambda\cdot;\dot{A}\cdot;\dot{a}\cdot}_{\cdot\mu;\cdot B;\cdot\dot{b}}.$$

注意
$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial x^{\gamma}}=\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\log\sqrt{|g|}=\begin{Bmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\gamma}\gamma\end{Bmatrix},$$

则

$$I\backsimeq-\int_{(D)}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(S_{\gamma})+S_{\check{\gamma}}\begin{Bmatrix}\gamma\\ \gamma\check{\gamma}\end{Bmatrix}S-S_{\gamma}\cdot J\right]\sqrt{|g|}\,d^4x$$
$$\backsimeq-\int_{(D)}\overset{(1)}{\nabla}_{\gamma}S_{\gamma}S\sqrt{|g|}\,d^4x. \tag{7.5.4}$$

将 a, b 换为 α, β, 将 $\overset{(1)}{\nabla}_{\gamma}$ 换为 $\overset{(2)}{\nabla}_{\gamma}$, 结果仍然正确.

以上述结果作为定理逐步施用于下面的积分, 可得到公式:

$$J\equiv\int_{(D)}S_{\gamma_1\cdots\gamma_M}\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_M}\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_{M-1}}\cdots\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}S\sqrt{|g|}\,d^4\mathrm{x}$$

$$\backsim(-1)^M\int_{(D)}\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_1}\cdots\overset{T^1}{\nabla}_{\gamma_M}S_{\gamma_1\cdots\gamma_M}\cdot S\cdot\sqrt{|g|}d^4\mathrm{x}.\quad(7.5.5)$$

将此计算应用于第二积分，则结果仍近似于第一积分. 第一积分号下 $\sqrt{|g|}d^4\mathrm{x}$ 之系数与第二积分号下 $\sqrt{|g|}d^4\mathrm{x}$ 之系数互为**随伴项**. 若干个互为随伴项之和仍互为随伴项. 如某式与其随伴式全同，则叫**自随伴的**.

以 $\mathrm{P}(\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)$ 表协变微商算子 $\overset{T^1}{\nabla}_\gamma$ 之多项式，其中各单项有如上形式，但具不同的 M，则其随伴算子可写为 $\overleftarrow{P}(-\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)$，$P$ 上之反箭号"←"表示是对右端起作用. 这时

$$\int_{(D)}Q^*P(\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)Q\sqrt{|g|}\,d^4\mathrm{x}\backsim\int_{(D)}Q^*\overleftarrow{P}(-\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)Q\sqrt{|g|}d^4\mathrm{x}.\quad(7.5.6)$$

这里用的是简写符号，略去了必要的指标. 这也可简写为

$$P(\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)^*=\overleftarrow{P}(-\overset{T^1}{\nabla}_\gamma).\quad(7.5.7)$$

如果任取一定的混合量 Q 致 $Q^*\overleftarrow{P}(-\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)\equiv P(\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)Q$，则 $P(\overset{T^1}{\nabla}_\gamma)$ 叫做自随伴的. 为了书写简便，这里 Q 的指标都略去了.

第八章　算符的非对易性

算符的非对易性反映微观客体运动规律的重要特性．本章的目的是强调这一特性，订正某些作者忽视这一问题所产生的逻辑错误．

§8.1　场元乘积的不可交换性

在特相对性量子场论中，如果量子化程序是从 Lagrange 函数密度和原始的场元开始的，则在一开始就会遇到场元算符乘积的不可交换性，因而有关的推导就不能象处理古典分析系统一样．在推广量子场的方程和能量冲量张量于一般形式时，有的论著忽视了这个问题产生过逻辑错误．我们现在来讨论这个问题，指出应该注意的地方以及有关误解的订正．当然，量子化并不是逻辑中的演绎方法，它是基于类比提示而产生的一种复杂的转化程序，其能行与否，方案恰当与否，最终是要由物理学的实践来验证的．什么时候一些关系由古典分析来处理？又到什么阶段才转化为算子？方案不是唯一的．我们这里所论述的一种误解正如开始时说的，是按 Lagrange 函数密度建立场方程一来就进行量子化而产生的对算符不可交换性的忽视．

§8.2　场方程、能冲量张量与守恒律

从 Lagrange 函数密度 $L(Q_a,\ Q_{a|\mu})$ 得出场的方程

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}=0 \tag{8.2.1}$$

$$\left(\partial_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu},\ Q_{\alpha|\mu}\equiv\partial_\mu Q_\alpha\right);$$

得出能量冲量张量

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu}L; \tag{8.2.2}$$

从而推出守恒律

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0, \tag{8.2.3}$$

这里 $Q_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, N)$ 为若干个场的场量的分量. 这在场量的乘法为可交换时, 完全正确. 但在场量乘法为不可交换时, 守恒律(8.2.3)就有问题.

传统的作法是设 L 为 $Q_1, \cdots, Q_N$ 及 $Q_{1|\mu}, Q_{2|\mu}, \cdots, Q_{N|\mu}$ $(\mu=1, 2, 3, 4)$ 的常系数的有理函数, 并且应当为取实值的标量(对 Lorentz 变换而言的标量), $Q_\alpha(x)$ 为方程(8.2.1)的解析解. 混合场各场量分量之全体按指标 α 排成一列, 以 $[Q_\alpha]$ 表之, 场量的分量一般就以 Q_α 表示. 由式 (8.2.1), (8.2.2) 得出(8.2.3)的计算如下.

首先, 我们有

$$\begin{aligned}\partial_\nu T_{\mu\nu}=&-\partial_\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}Q_{\alpha|\mu}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\partial_\nu Q_{\alpha|\mu}\\&+\delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\partial_\nu Q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\partial_\nu Q_{\alpha|\mu'}\right)\\=&-\partial_\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}Q_{\alpha|\mu}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\partial_\nu Q_{\alpha|\mu}\\&+\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\partial_\mu Q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}}\partial_\mu Q_{\alpha|\mu'}.\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

以式(8.2.1)代入, 则得

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = -\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} Q_{\alpha|\mu} - \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \partial_\nu Q_{\alpha|\mu} + \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} Q_{\alpha|\mu} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}} \partial_\mu Q_{\alpha|\mu'}. \quad (8.2.5)$$

由于

$$\partial_\mu Q_{\alpha|\mu'} = \partial_{\mu'} Q_{\alpha|\mu},$$

即得式(8.2.3).

但在场量乘法为不可交换的时候,

$$\partial_\mu L = \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} \partial_\mu Q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}} \partial_\mu Q_{\alpha|\mu'}, \quad (8.2.6)$$

这一式就不能成立, 因而守恒律 (8.2.3) 也不能成立. 因此, 在形成量子场的方程以及定义能冲量张量时, 也就不能象式(8.2.1)及(8.2.2)那样简单.

在量子场论中, 混合量子场的场量 Q 的分量 $Q_\alpha(\mathrm{x})$ 当以 Hilbert 空间中的全连续 Hermite 线性算子为函数值, 即 $Q_\alpha(\mathrm{x})$ 为 $\mathscr{B}$-函数. $\mathscr{B}$ 为复 Banach代数[1](有单位元), 不一定可交换. 我们将限定 $\mathscr{B}$ 为弱列紧的. $Q_\alpha(\mathrm{x})$ 当为 (x^μ) 的抽象解析函数: $Q_\alpha(\mathrm{z})$ 为多复变数 $\mathrm{z}^\mu(\mu\equiv 1, 2, 3, 4)$ 的抽象解析函数, 当 $\mathrm{z}^\mu\to\mathrm{x}^\mu$ 时, $Q_\alpha(\mathrm{z})\to Q_\alpha(\mathrm{x})$. 或者, 对每 $\mathrm{x}^*\in\mathscr{B}^*$, $\mathrm{x}^*(Q_\alpha(\mathrm{x}))$ 为 (x^μ) 的解析函数.

如果 L 中不出现 Q_α, $Q_{\alpha|\mu}$ 高于一次的幂, 则在量子化过程中, 它作为 $\mathscr{B}$-函数(抽象解析的) Q_α 及其偏微商 $Q_{\alpha|\mu}$ 的函数仍然是复 Banach 代数中的多项式, 其中方幂写成乘积.

这个多项式中每一项对 x^μ 的偏微商与寻常的是有差别的. 举一个简例:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\gamma}(Q_\alpha Q_\beta + Q_{\alpha|\mu} Q_{\beta|\nu}) = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \mathrm{x}^\gamma} Q_\beta + Q_\alpha \frac{\partial Q_\beta}{\partial \mathrm{x}^\gamma} + \frac{\partial Q_{\alpha|\mu}}{\partial \mathrm{x}^\gamma} Q_{\beta|\nu} + Q_{\alpha|\mu} \frac{\partial Q_{\beta|\nu}}{\partial \mathrm{x}^\gamma},$$

这里，每一项乘积的次序不能随意调整．因此我们应当有

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} L=\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}} \odot \frac{\partial Q_{\alpha|\mu'}}{\partial x^{\mu}},$$

简写为

$$\partial_{\mu} L=\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \partial_{\mu} Q_{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}} \odot \partial_{\mu} Q_{\alpha|\mu'}. \quad (8.2.7)$$

式 (8.2.7) 右端第一项中 $\odot$ 之意义为将 L 中每一含 Q_{α} 之项的 Q_{α} 取去代之以 $\partial_{\mu} Q_{\alpha}$ 而不变排列的乘积，第二项仿此．例如，当 $L=Q_{\alpha} Q_{\alpha|\mu'}$ 时，$\partial_{\mu} L=\partial_{\mu} Q_{\alpha} Q_{\alpha|\mu'}+Q_{\alpha} \partial_{\mu} Q_{\alpha|\mu'}$.

式(8.2.6)既为式(8.2.7)所代替，则式(8.2.5)应是

$$\partial_{\nu} T_{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot Q_{\alpha|\mu}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot \partial_{\nu} Q_{\alpha|\mu}$$

$$+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot Q_{\alpha|\mu}+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}} \odot \partial_{\mu} Q_{\alpha|\mu'}=0;$$

而式(8.2.4)相应于

$$\partial_{\nu} T_{\mu\nu}=-\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot \partial_{\nu} Q_{\alpha|\mu}$$

$$+\delta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \partial_{\nu} Q_{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu'}} \odot \partial_{\nu} Q_{\alpha|\mu'}\right)=0.$$

这里需要 $\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|}=0,$

而 $\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|}$ 的意义为将 L 中的 $Q_{\alpha|\nu}$ 取去，换入 $\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}$，不改变其排列，$\partial_{\nu}$ 对 $\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}$ 不生作用．因此 $T_{\mu\nu}$ 须满足关系式

$$\partial_{\nu} T_{\mu\nu}=-\partial_{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot Q_{\alpha|\mu}\right)+\delta_{\mu\nu} \partial_{\nu} L$$

$$=\partial_{\nu}\left(-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu} L\right),$$

因而就不能不令能冲量张量($\mathscr{B}$-张量)为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu}L, \tag{II}$$

然后方有 $\partial_\nu T_{\mu\nu}=0$. 这时，量子化了的混合场其原始场方程应当是

$$\partial_\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}-\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}=0. \tag{I}$$

这方程对 α 不求和. 混合量子场的方程由此推出，$\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}$ 中的 $Q_{\alpha|\mu}$ 可以任意 $\mathscr{B}$-函数代入而仍然满足式(I). 混合场的能冲量张量应是式(II)，这时守恒律

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0 \tag{III}$$

是满足的.

§8.3 角冲量张量算符

由于能冲量张量算符的正确表达式当为式(II)，则角冲量张量算符的表达式就不能不作同样的订正. 注意，本节的张量是对于连续 Lorentz 变换群 $L_+^+(4)$ 而言.

考虑无穷小 Lorentz 变换:

$$\mathrm{x}'^\mu=a_{\mu\nu}\mathrm{x}^\nu,\quad a_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\delta\mathrm{w}_{\mu\nu},\quad \delta\mathrm{w}_{\mu\nu}=-\delta\mathrm{w}_{\nu\mu}. \tag{8.3.1}$$

在此变换下，相应有场量的变换

$$Q'(\mathrm{x}')=Q_\alpha(\mathrm{x})+\delta Q_\alpha(\mathrm{x})\equiv\Lambda_{\alpha\beta}Q_\beta(\mathrm{x}). \tag{8.3.2}$$

下面 $\boldsymbol{S}_{\mu\nu}$ 是以 $S_{\mu\nu:\alpha\beta}$ 为元的矩阵，

$$\left.\begin{aligned}&\delta Q_\alpha(\mathrm{x})=\frac{1}{2}S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta(\mathrm{x})\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}\quad(\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ N),\\&\Lambda_{\alpha\beta}\equiv1+\frac{1}{2}S_{\alpha\beta}\delta\mathrm{w}_{\alpha\beta},\quad \boldsymbol{S}_{\mu\nu}=-\boldsymbol{S}_{\nu\mu}.\end{aligned}\right\} \tag{8.3.3}$$

以 $\bar{\delta}Q_\alpha(\mathrm{x})$ 为略去 $\delta\mathrm{x}^\mu$ 时 $Q_\alpha(\mathrm{x})$ 的变值:

$$\bar{\delta}Q_\alpha(\mathrm{x})=Q'_\alpha(\mathrm{x})-Q_\alpha(\mathrm{x}). \tag{8.3.4}$$

引用 $Q'(\mathrm{x}')$ 的 Taylor 展式, 则有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}Q_\alpha(\mathrm{x})&=Q'_\alpha(\mathrm{x}')-\partial_\mu Q_\alpha(\mathrm{x})\delta\mathrm{x}^\mu-Q_\alpha(\mathrm{x})\\&=\delta Q_\alpha(\mathrm{x})-\partial_\mu Q_\alpha(\mathrm{x})\delta\mathrm{x}^\mu\\&=\delta Q_\alpha(\mathrm{x})-Q_{\alpha|\mu}(\mathrm{x})\delta\mathrm{x}^\mu.\end{aligned}$$

以 $\delta\mathrm{x}^\mu=\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}\mathrm{x}^\nu$, 及式 (8.3.3) 之一代入上式, 则得

$$\bar{\delta}Q_\alpha(\mathrm{x})=\frac{1}{2}S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta(\mathrm{x})\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}-Q_{\alpha|\mu}(\mathrm{x})\mathrm{x}^\nu\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}.$$

注意互换 μ, ν, 则 $S_{\mu\nu:\alpha\beta}$ 及 $\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}$ 同时变号, 其乘积不变, 故上式右端第一项可写成

$$\sum_{\mu<\nu}S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta(\mathrm{x})\delta\mathrm{w}_{\mu\nu};$$

而右端第二项可写成

$$\sum_{\mu<\nu}[\mathrm{x}^\mu Q_{\alpha|\nu}(\mathrm{x})-\mathrm{x}^\nu Q_{\alpha|\mu}(\mathrm{x})]\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}.$$

于是

$$\bar{\delta}Q_\alpha(\mathrm{x})=\sum_{\mu<\nu}\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}[\mathrm{x}^\mu Q_{\alpha|\nu}(\mathrm{x})-\mathrm{x}^\nu Q_{\alpha|\mu}(\mathrm{x})+S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta(\mathrm{x})]. \tag{8.3.5}$$

考虑式 (II) 的改变, 不能不考虑相应的改变:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot\bar{\delta}Q_\alpha+L\delta\mathrm{x}^\sigma\\&=\sum_{\mu<\nu}\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}\Big[\mathrm{x}^\mu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot Q_{\alpha|\nu}-\mathrm{x}^\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot Q_{\alpha|\mu}\\&\quad+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot(S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta)\Big]+L\mathrm{w}_{\sigma\nu}\mathrm{x}^\nu\\&=\sum_{\mu<\nu}\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}\Big[\mathrm{x}^\nu T_{\mu\sigma}-\mathrm{x}^\mu T_{\nu\sigma}+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot(S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_\beta)\Big]\\&\quad+\sum_{\mu<\nu}(\delta_{\nu\sigma}\mathrm{x}^\mu-\delta_{\mu\sigma}\mathrm{x}^\nu)L\delta\mathrm{w}_{\mu\nu}+L\delta\mathrm{w}_{\sigma\nu}\mathrm{x}^\nu.\end{aligned} \tag{8.3.6}$$

上式右端最后两项之和等于

$$\sum_{\mu<\sigma} \mathrm{x}^{\mu} L\delta \mathrm{w}_{\mu\sigma} - \sum_{\sigma<\nu} \mathrm{x}^{\nu} L\delta \mathrm{w}_{\sigma\nu} + L\delta \mathrm{w}_{\sigma\nu}\mathrm{x}^{\nu}$$

$$= -\sum_{\mu<\sigma} \mathrm{x}^{\mu} L\delta \mathrm{w}_{\sigma\mu} - \sum_{\sigma<\mu} \mathrm{x}^{\mu} L\delta \mathrm{w}_{\sigma\mu} + L\delta \mathrm{w}_{\sigma\nu}\mathrm{x}^{\nu}.$$

但由于 $\delta \mathrm{w}_{\sigma\mu} = -\delta \mathrm{w}_{\mu\sigma}$, 故当 $\sigma = \mu$ 时,

$$\delta \mathrm{w}_{\sigma\mu} = \delta \mathrm{w}_{\sigma\sigma} = 0.$$

这时上式右端前两项之和可合写成 $-L\delta \mathrm{w}_{\sigma\mu}\mathrm{x}^{\mu}$, 恰好与右端第三项相抵消.

因此式(8.3.6)转化为下列较简单的式子:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}} \odot \delta Q_{\alpha} + L\delta \mathrm{x}^{\sigma} = \sum_{\mu<\nu} M_{\mu\nu,\sigma}\delta \mathrm{w}_{\mu\nu}, \qquad \text{(IV)}$$

$$M_{\mu\nu,\sigma} \equiv \mathrm{x}^{\nu} T_{\mu\sigma} - \mathrm{x}^{\mu} T_{\nu\sigma} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}} \odot (S_{\mu\nu:\alpha\beta} Q_{\beta}).$$

这个张量 $M_{\mu\nu,\sigma}$ 就是角冲量张量算符的正确表达式.

现在来证明角冲量(张量)守恒律.

由于原 Lagrange 函数密度为标量, 故

$$\delta L = L'(\mathrm{x}') - L(\mathrm{x}) = 0. \qquad (8.3.7)$$

根据 Taylor 展开,

$$L'(\mathrm{x}') \backsimeq L'(\mathrm{x}) + \partial_{\mu} L(\mathrm{x})\delta \mathrm{x}^{\mu}, \qquad (8.3.8)$$

略去高阶无穷小, 则有

$$\delta L + \partial_{\mu}[L(\mathrm{x})\delta \mathrm{x}^{\mu}] = 0, \qquad (8.3.9)$$

$$\delta L = L'(\mathrm{x}) - L(\mathrm{x}) = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}} \odot \delta Q_{\alpha|\mu} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \delta Q_{\alpha}. \qquad (8.3.10)$$

由场的原始方程 (I),

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \odot \boxed{Q_{\alpha|\mu}} - \partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot \boxed{Q_{\alpha|\mu}} = 0,$$

作出场的方程，使此原始方程中 $\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}$ 以任意的 $\mathscr{F}$-函数代入仍然适合．在这样的条件下，应有

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\odot\overline{|\delta Q_\alpha|}-\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\overline{|\delta Q_\alpha|}\right)=0, \quad (8.3.11)$$

因此，有

$$\begin{aligned}\bar{\delta}L&=\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\odot\bar{\delta}Q_{\alpha|\mu}+\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\overline{|\delta Q_\alpha|}\right)\\&=\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\bar{\delta}Q_\alpha\right).\end{aligned} \quad (8.3.12)$$

将上式与式(8.3.9)结合，可得

$$\partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot\bar{\delta}Q_\alpha+L\delta x^\sigma\right)=0. \quad (8.3.13)$$

因而，有

$$\sum_{\mu<\nu}\partial_\sigma M_{\mu\nu,\sigma}\delta w_{\mu\nu}=0. \quad (8.3.14)$$

但 $\delta w_{\mu\nu}$ 为任意增量，故得**角冲量守恒律**：

$$\partial_\sigma M_{\mu\nu,\sigma}=0. \quad (V)$$

它刻画了角冲量张量算符的守恒性．

§8.4 总能冲量与总角冲量

在特殊相对论中，面积元 ds_k 与 $d\sigma_\mu$ 的定义见§5.2．

在空间曲面 σ 上的**能冲量向量** T_μ 定义为

$$T_\mu(\sigma)\equiv -i\int_\sigma T'_{\mu\nu}(x')d\sigma'_\nu, \quad (8.4.1)$$

$W\equiv iT_4(\sigma)$ 为量子场在 σ 上的总能量，于是 $T_{\mu\nu}$ 的守恒律转化为 T_μ 的守恒律：

$$\frac{\delta T'_\mu(\sigma)}{\delta\sigma(x)}=0. \quad (8.4.2)$$

这是总能冲量守恒律的协变形式.

反对称张量

$$P_{\mu\nu}(\sigma)\equiv -i\int_{\sigma} M_{\mu\nu,\rho}(\mathrm{x}')d\sigma'_{\rho} \qquad (8.4.3)$$

叫做量子场在σ上的总角冲量(算符). $M_{\mu\nu,\rho}$的守恒律转化为总角冲量守恒律的协变形式:

$$\frac{\delta P_{\mu\nu}(\sigma)}{\delta\sigma(\mathrm{x})}=0. \qquad (8.4.4)$$

令

$$f_{\mu,\nu\sigma}\equiv\frac{1}{2}\Big[-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot(S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_{\beta})-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot(S_{\sigma\mu:\alpha\beta}Q_{\beta})$$

$$+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\odot(S_{\nu\sigma:\alpha\beta}Q_{\beta})\Big], \qquad (8.4.5)$$

则

$$M_{\mu\nu,\sigma}=\mathrm{x}^{\nu}T_{\mu\sigma}-\mathrm{x}^{\mu}T_{\nu\sigma}-f_{\mu,\nu\sigma}+f_{\nu,\mu\sigma}. \qquad (\mathrm{VI})$$

注意:

$$f_{\mu,\nu\sigma}=-f_{\mu,\sigma\nu}, \qquad (8.4.6)$$

$$f_{\mu,\nu\sigma}-f_{\nu,\mu\sigma}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\sigma}}\odot(S_{\mu\nu:\alpha\beta}Q_{\beta}). \qquad (8.4.7)$$

令$\theta_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\partial_{\sigma}f_{\mu,\nu\sigma}$, 并以式(VI)之$M_{\mu\nu,\sigma}$代入角冲量守恒律(V),则有

$$T_{\mu\nu}-T_{\nu\mu}-\partial_{\sigma}f_{\mu,\nu\sigma}+\partial_{\sigma}f_{\nu,\mu\sigma}=0. \qquad (8.4.9)$$

但由式(8.4.6)$f_{\mu,\nu\sigma}$对ν, σ为反对称的,故

$$\partial_{\nu}\partial_{\sigma}f_{\mu,\nu\sigma}=0. \qquad (8.4.10)$$

因此,

$$\int_{\sigma}d\sigma_{\nu}(\theta_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}) \qquad (8.4.11)$$

与空间曲面σ的选择无关.

其次，$f_{\mu,44}=0$，则当 σ 为扁平时，即其方程为 $t=$常数 ($\mathrm{x}^4=it$) 时，由部分积分计及式 (8.4.10)，有

$$i\int_\sigma d\sigma_\nu\partial_\eta f_{\mu,\nu\eta}=i\int_{t=\text{常数}}d\sigma_4\partial_\eta f_{\mu,4\eta}$$

$$=i\int_{t=\text{常数}}d^3\mathrm{x}\partial_k f_{\mu,4k}=0. \quad (8.4.12)$$

因此，

$$i\int_\sigma d\sigma_\nu(\theta_{\mu\nu}-T_{\mu\nu})=0, \quad (8.4.13)$$

而

$$T_\mu=-i\int_\sigma d\sigma_\nu\theta_{\mu\nu} \quad (8.4.14)$$

$$(\partial_\nu\theta_{\mu\nu}=0).$$

同理可证

$$\int_\sigma d\sigma_\rho(\mathrm{x}^\mu\theta_{\nu\rho}-\mathrm{x}^\nu\theta_{\mu\rho}+M_{\mu\nu,\rho})=0, \quad (8.4.15)$$

因此有

$$P_{\mu\nu}=i\int_\sigma d\sigma_\rho(\mathrm{x}^\mu\theta_{\nu\rho}-\mathrm{x}^\nu\theta_{\mu\rho}). \quad (8.4.16)$$

§8.5 粒子数与电荷守恒

混合量子场的 Lagrange 函数密度 $L(Q_\alpha, Q_{\alpha|\mu})$ 依假设应为实标量：Q_α 为 $\mathscr{B}$-解析函数，故 L 为 $\mathscr{B}$-函数，对每一 $\mathrm{x}^*\in\mathscr{B}^*$，必致 $\mathrm{x}^*(L(Q_\alpha, Q_{\alpha|\mu}))$ 为实标量．因此，若构成混合场的诸量子场中有若干个场的场分量为复 $\mathscr{B}$-函数 $Q_\lambda^{(j)}$ ($\lambda=1, 2, \cdots, N_j$, j 表示场的序号，$j=1, 2, \cdots, n$, n 为复量场个数)，则其中场量必互为成对共轭复数 (L 中含 $Q_\lambda^{(j)}$，则必含 $\overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)}$，否则 L 不能为实量的)，因而有 $n=2m$．因此我们可重新安排符号使

$$Q_\lambda^{(j+m)} \equiv \overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)}, \quad \begin{matrix} \lambda = 1,\ 2,\ \cdots,\ N_j; \\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m. \end{matrix}$$

假设带电粒子场为复数场，带相反电荷的粒子（其他条件相同，只电荷符号相反）场的场量为前者的共轭复数.

假设：当复数场的场量 $Q_\lambda^{(j)}$ 及 $\overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)}$ 经相变，或第一种规范变换：$Q_\lambda^{(j)} \to Q_\lambda{}^{(j)} e^{i\gamma}$，$\overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)} \to \overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)} e^{-i\gamma}$ 时，$L(Q_a,\ Q_{a|\mu})$ 不变. 这时

$$\delta L = i\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial Q_\lambda^{(j)}} \odot Q_\lambda^{(j)} - \frac{\partial L}{\partial \overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)}} \odot \overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot Q_{\lambda|\mu}^{(j)} - \frac{\partial L}{\partial \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)} \right) = 0. \quad (8.5.1)$$

注意，$\overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}$ 表示 $\partial_\mu(\overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)})$ 而不是 $(\partial_\mu Q_\lambda^{(j)})^*$，式中对 λ 及 j 求和，顶标“*”表示复数共轭.

令

$$N_\mu^{(j)} \equiv -i\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot Q_\lambda^{(j)} - \frac{\partial L}{\partial \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot \overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)} \right), \quad (8.5.2)$$

这里对 j 不求和. 这个算符定名为 j-场的电流算符.

现在我们来证明下面的守恒律：

$$\sum_{j=1}^{m} \partial_\mu N_\mu^{(j)} = 0. \quad \text{(VI)}$$

实际上，

$$\partial_\mu N_\mu^{(j)} = -i\left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot \overline{|Q_\lambda^{(j)}|} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot Q_{\lambda|\mu}^{(j)} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot \overline{|\overset{*}{Q}{}_\lambda^{(j)}|} - \frac{\partial L}{\partial \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}} \odot \overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)} \right). \quad (8.5.3)$$

由于场的原始方程 (I) 中 $\overline{|Q_{a|\mu}|}$ 里的 $Q_{a'\mu}$ 可以是任意的 $\mathscr{B}$-函数，故可令 $\overline{|Q_{a|\mu}|}$ 中的 $Q_{a|\mu}$ 不是 $Q_{\lambda|\mu}^{(j)}$ 或 $\overset{*}{Q}{}_{\lambda|\mu}^{(j)}$ 的项都为 0. 因此：

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial Q^{(j)}_{\lambda|\mu}} \odot \left|\overline{Q^{(j)}_{\lambda|\mu}}\right| - \frac{\partial L}{\partial Q^{(j)}_{\lambda}} \odot \left|\overline{Q^{(j)}_{\lambda|\mu}}\right| = 0;\\ \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^{(j)}_{\lambda|\mu}} \odot \left|\overline{\dot{Q}^{(j)}_{\lambda|\mu}}\right| - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^{(j)}_{\lambda}} \odot \left|\overline{\dot{Q}^{(j)}_{\lambda|\mu}}\right| = 0.\end{aligned}\right\} \quad (8.5.4)$$

式中对 j 也需求和. 将此代入式 (8.5.3), 对 j 求和, 则得式 (VI).

令

$$N^{(j)} \equiv \int_\sigma d\sigma_\mu N^{(j)}_\mu; \quad (8.5.5)$$

则有

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \sum_{j=1}^{m} N^{(j)} = 0. \quad \text{(VII)}$$

$N^{(j)}$ 的特征值为正粒子数与反粒子数之差, 故式 (VII) 表明**正反粒子数差(其和)守恒.**

当混合量子场中每一量子场均为荷电粒子场时: $Q^{(c)}_\lambda$, $\dot{Q}^{(c)}_\lambda$, $c=1, 2, \cdots, m$, 若 Lagrange 函数密度在场量经相变 (ε 为基本电荷),

$$\left.\begin{aligned}Q^{(c)}_\lambda \to Q^{(c)}_\lambda e^{i\varepsilon\gamma}\\ \dot{Q}^{(c)}_\lambda \to \dot{Q}^{(c)}_\lambda e^{-i\varepsilon\gamma}\end{aligned}\right\},$$

而保持不变, 则

$$J^{(c)}_\mu \equiv -i\varepsilon N^{(c)}_\mu = -i\varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial Q^{(c)}_{\lambda|\mu}} \odot Q^{(c)}_\lambda - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^{(c)}_{\lambda|\mu}} \odot \dot{Q}^{(c)}_\lambda\right)$$

被定义为场 $Q^{(c)}_\lambda$ 之**电荷电流密度算符**, 式中对指标 c 不求和. 这时我们有

$$\left.\begin{aligned}\sum_c \partial_\mu J^{(c)}_\mu = 0\\ \frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\varepsilon_t = 0\end{aligned}\right\}, \quad \text{(VIII)}$$

这里

$$\varepsilon_t \equiv \sum_{\sigma} \int_{\sigma} d\sigma_\mu J_\mu^{(\sigma)}, \tag{8.5.6}$$

定义为**全电荷算符**. ε_t 的特征值解释为 σ 上的总电荷. 式 (VIII) 表明**电荷守恒**.

以上各节我们只就特殊相对性量子场论中的一些基本问题进行讨论,类似的论证可以引伸于其他问题.

参 考 文 献

[1] 李国平、郭友中、陈银通,自守函数与闵可夫斯基函数,科学出版社, 1978.

第九章　一般相对性量子场

这里研究的一般相对性量子场的具体形式是举例性的. 在第三分册中, 我们还要作进一步的讨论.

§9.1　重　力　场

为了简化讨论, 我们认为大宇宙 (𝔘) 的重力场基本度规张量 $g_{\mu\nu}(P)$ 具有局部 Einstein 宇宙的性质, 即存在位标系 (x^μ), 使得 (x^μ) 依解析变换:

$$\mathrm{x}^1 = a\sin^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)\cos\varphi\sin\vartheta,$$

$$\mathrm{x}^2 = r\sin\varphi\sin\vartheta,$$

$$\mathrm{x}^3 = r\cos\vartheta,$$

$$\mathrm{x}^4 = \mathrm{t}^4 \quad (\mathrm{t}^4 \equiv it),$$

转化为 $(r,\ \varphi,\ \vartheta,\ it)$ 时, 相应分量 $g_{\mu\nu}(\mathrm{x})$ 所表示的微分二次形式

$$d\mathrm{s}^2 \equiv \in g_{\mu\nu}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}^\mu d\mathrm{x}^\nu$$

转化为

$$d\mathrm{s}^2 = \in\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2) + (d\mathrm{t}^4)^2\right], \tag{9.1.1}$$

式中 a 是常数, $r<a$. 我们选

$$\mathrm{t}^1 \equiv r,\ \mathrm{t}^2 \equiv \vartheta,\ \mathrm{t}^3 \equiv \varphi,\ \mathrm{t}^4 \equiv it,$$

则式(9.1.1)可以写成

$$ds^2=\in\left\{\left(1-\frac{(\mathrm{t}^1)^2}{a^2}\right)^{-1}(d\mathrm{t}^1)^2+(\mathrm{t}^1)^2[(d\mathrm{t}^2)^2\right.$$

$$\left.+\sin^2\mathrm{t}^2(d\mathrm{t}^3)^2]+(d\mathrm{t}^4)^2\right\}$$

$$=\in g_{\mu\nu}(\mathrm{t})d\mathrm{t}^\mu d\mathrm{t}^\nu. \qquad (9.1.2)$$

这时，(t^1≡常数，t^2≡常数，t^3≡常数，$\mathrm{t}^4\equiv is$) 是以 s 为长度参数的测地线族，它们满足测地线微分方程

$$\frac{d^2\mathrm{t}^\mu}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\frac{d\mathrm{t}^\alpha}{ds}\frac{d\mathrm{t}^\beta}{ds}=0.$$

这可以直接用 $d\mathrm{t}^4/ds=i$，$d\mathrm{t}^k/ds=0(k=1,\ 2,\ 3)$ 代入上式得到验证. 其次，如果令 $(g^\mu(\mathrm{t}))\equiv(d\mathrm{t}^\mu/ds)=(0,\ 0,\ 0,\ i)$ 则有

$$\frac{\partial g^\mu(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^\delta}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}g^\alpha(\mathrm{t})\equiv 0.$$

这也可以直接验证. 由此定出张量 $g^\mu(P)$，使在 (t^μ) 以 $g^\mu(\mathrm{t})$ 为分量，则有

$$\nabla_\delta g^\mu(P)\equiv 0.$$

对任一位标系 (x^μ)，令 $g_\mu(\mathrm{x})\equiv g^\alpha(\mathrm{x})g_{\alpha\mu}(\mathrm{x})$，则由

$$\in[g_{\mu\nu}(\mathrm{x})g^\mu(\mathrm{x})g^\nu(\mathrm{x})]=\in[g_{\mu\nu}(\mathrm{t})g^\mu(\mathrm{t})g^\nu(\mathrm{t})]=1,$$

应有

$$g_\mu(\mathrm{x})g^\mu(\mathrm{x})=1,\ \nabla_\delta g_\mu(\mathrm{x})=0, \qquad (9.1.3)$$

故可定出在 (x^μ) 的分量为 $g_\mu(\mathrm{x})$ 且满足式 (9.1.3) 的张量 $g_\mu(P)$. 这里定出的 $g^\mu(P)$，$g_\mu(P)$ 与 $g_{\mu\nu}(P)$，$g^{\mu\nu}(P)$ 相似，它们的协变微商为 0 的性质以后将要用到.

现在，证明 Einstein 宇宙的距离元素(9.1.1)为 Einstein 重力方程的特解，为了避免不必要的麻烦，我们首先引用实位标系进行运算，然后将结果转化为本书通常用的三实一虚的

位标系.

在 CGS 制中对实位标系 (y^k) $(k=1,2,3,0)$ 的 **Einstein 重力方程为:**

$$R_{ij}-\frac{1}{2}(R-2\lambda)g_{ij}=-\eta T_{ij}, \tag{9.1.4}$$

$$T_{ij}\equiv T^{hk}g_{hi}g_{kj}.$$

式中: T^{hk} 为质能张量. 而且

$$T^{hk}\equiv\rho_0\frac{dy^h}{ds}\frac{dy^k}{ds}, \tag{9.1.5}$$

$$T^{hk}{}_{1k}=0;$$

$$ds^2\equiv\epsilon g_{ij}dy^i dy^j;$$

$$\rho_0\equiv\frac{dm_0}{dv_0},$$

为静质量密度, m_0 为静质量, v_0 为体积;

$$\eta\equiv 8\pi\gamma_0 c^{-4}=2.073\times10^{-48}\text{ 厘米}^{-1}\cdot\text{秒}^2\cdot\text{克}^{-1},$$

其中 γ_0 为 **Newton 重力常数**, 等于 6.664×10^{-8} 厘米$^3\cdot$秒$^{-2}\cdot$克$^{-1}$, c 为光速, $dy^h/ds(h=1,\ 2,\ 3)$ 代表运动质点的速度.

假设宇宙中质点运动的速率大大小于光速, 则可选择位标系 (y^k), 使一切运动着的质点几乎是静止的, 因而就作为静止而论, 并且对此位标系给出张量 g_{ij} 的分量:

$$g_{ij}(y)=0\quad(i\neq j),\quad g_{00}(y)=c^2.$$

这时 $$\frac{dy^i}{ds}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3),\quad\frac{dy^0}{ds}=c;$$

$$T^{00}=0,\quad T^{ij}=T_{ij}=0\quad(i,\ j\neq0),\quad T_{00}=c^2\rho_0.$$

以 $(r,\ \vartheta,\ \varphi,\ t)$ 为这样的位标, 并设

$$ds^2\equiv\epsilon[-e^{\alpha}dr^2-r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2)+c^2dt^2], \tag{9.1.6}$$

则 $$g_{11}=-e^{\alpha},\ g_{22}=-r^2,\ g_{33}=-r^2\sin^2\vartheta,\ g_{44}=c^2,$$

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j),$$

式中
$$e^{\alpha}\equiv e^{\alpha(r)}=\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1}\equiv\frac{1}{\gamma},$$

于是
$$R_{11}=-\frac{\alpha^1}{\gamma}=-\frac{2}{a^2\gamma}=-\frac{2}{a^2-r^2},$$

$$R_{22}=-\frac{2r^2}{a^2},\quad R_{33}=-\frac{2r^2}{a^2}\sin^2\vartheta,$$

$$R_{00}=0,\quad R_{ij}=0 \quad (i\neq j),$$

$$R=g^{ij}R_{ij}=\frac{6}{a^2}.$$

这时 $T_{ij}=0(i,\ j\neq 0)$, $T_{i0}=0(i=1,\ 2,\ 3)$, $T_{00}=\rho_0 c^2$,
Einstein 方程转化为:

$$-\eta T_{11}=\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)\frac{a^2}{a^2-r^2}=0;$$

$$-\eta T_{22}=\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)r^2=0;$$

$$-\eta T_{33}=\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)r^2\sin^2\vartheta=0;$$

$$-\eta T_{00}=-\left(\frac{3}{a^2}-\lambda\right)=-\rho_0\eta c^2.$$

所以有 $\lambda=a^{-2}$, $\eta\rho_0 c^2=2a^{-2}$, 而

$$a=\frac{c}{2\sqrt{\pi\gamma_0\rho_0}} \quad \text{厘米.} \qquad (9.1.7)$$

式 (9.1.6) 又可写成 ($\epsilon_1\equiv-\epsilon$):

$$ds^2=\epsilon_1[e^{\alpha(r)}dr^2+r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2)-c^2dt^2]. \qquad (9.1.8)$$

依此, 转化为本书的新单位制, 并令 $t^4\equiv it$, 则得式 (9.1.1), 其中 a 为式(9.1.7)在新单位制中之值.

从式 (9.1.6) 变为式 (9.1.8) 是将 g_{ij} 改变为 $-g_{ij}$ 的同

时，将 g^{ij} 改变为 $-g^{ij}$，故 $[ij, k]$ 变号而 $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ 不变，从而 R^{k}_{ijh} 和 R_{ij} 都不变，但 $R=g^{ij}R_{ij}$，则变为 $-R$，T_{ij} 变为 $-T_{ij}$，而 Einstein 方程变为：

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}(R+2\lambda)=\eta T_{ij}.$$

如果令 $ict\equiv\tilde{t}^4$，$\tilde{t}^1\equiv r$，$\tilde{t}^2\equiv\vartheta$，$\tilde{t}^3\equiv\varphi$，则在位标系 $(\tilde{t}^\mu)$ ($\tilde{t}^\mu$ 以新长度单位为单位) 中，

$$\tilde{g}_{\mu\nu}\equiv g_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{t}^\mu}\frac{\partial y^j}{\partial\tilde{t}^\nu};$$

$y^1\equiv\tilde{t}^1$，$y^2\equiv\tilde{t}^2$，$y^3\equiv\tilde{t}^3$，$y^0\equiv\tilde{t}^4/ic$，故

$$\tilde{g}_{ij}=g_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{g}_{4j}=\frac{1}{ic}g_{0j}\quad(j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{g}_{44}=\frac{-1}{c^2}g_{00}=1.$$

同样，有

$$\tilde{R}_{ij}=R_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{R}_{4j}=\frac{1}{ic}R_{0j}\quad(j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{R}_{44}=-\frac{1}{c^2}R_{00},\quad\tilde{R}=R;$$

$$\tilde{T}_{ij}=T_{ij}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{T}_{4j}=\frac{1}{ic}T_{0j}=0\quad(j=1,\ 2,\ 3),$$

$$\tilde{T}_{44}=-\frac{1}{c^2}T_{00}.$$

带顶标“～”的量以新单位制计算，不带顶标“～”的量照 *CGS* 制计算。

因此 Einstein 重力方程带顶标"~"的形式为

$$\tilde{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{R}+2\tilde{\lambda})=\eta\tilde{T}_{\mu\nu},$$

其相应的特解为

$$\tilde{d}s^2=\epsilon_1\{e^{\alpha(\tilde{t}_1)}(d\tilde{t}^1)^2+(\tilde{t}^1)^2[(d\tilde{t}^2)^2+\sin\tilde{t}^2(d\tilde{t}^3)^2]+(d\tilde{t}^4)^2\},$$

形式与式(9.1.2)相同.

故式(9.1.2)按照新位标(x^μ)新单位当为**Einstein 方程**

$$R_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)(R+2\lambda)=\eta T_{\mu\nu}(x) \qquad (9.1.9)$$

的特解,

$$T^{\mu\nu}(x)=\rho_0\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds},$$

$$T_{\mu\nu}(x)=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}(x).$$

当 $T_{\mu\nu}=0$ 时,

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+2\lambda)=0, \qquad (9.1.10)$$

乘 $g^{\mu\nu}$ 求和,则得

$$R-2(R+2\lambda)=0,$$

即 $R=-4\lambda=-4\tilde{a}^{-2}$, 而式 (9.1.10) 就化为 **Einstein 特殊重力方程:**

$$R_{\mu\nu}=-\lambda g_{\mu\nu},\quad \lambda=\tilde{a}^{-2}. \qquad (9.1.11)$$

这重力方程也以式(7,1.2)为特解,其中的 a 即为 $\tilde{a}$. 由于 $g_{\mu\nu}$ 变了号,故寻常的 Einstein 方程与此相差一个符号,即 λ 为 $-\lambda$ 所代替.

§9.2 重 力 波

Einstein 方程又一简单形式为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\eta T_{\mu\nu}. \tag{9.2.1}$$

这个方程的线性化近似解法导出重力波的概念.

由计算可得

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}\right). \tag{9.2.2}$$

以点 $P\in(\mathfrak{M})$ 的切空间 $\mathscr{M}_P(4)$ 的以 P 为原点的 Lorentz 位标系 (x^μ) 作为近似位标系, 设

$$g_{\mu\nu}\equiv\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \tag{9.2.3}$$

其中 $h_{\mu\nu}$ 及其一、二级偏微商均为一级无穷小量. 现在按这些要求来决定 $h_{\mu\nu}$.

以式(9.2.2)代入式(9.2.1), 则式(9.2.1)可用下列二式代替:

$$\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}=R_{\mu\nu},\quad R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}; \tag{9.2.4}$$

$$g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}\right)=0. \tag{9.2.5}$$

将式(7.2.3)代入式(7.2.5)略去二级无穷小量, 则有

$$\begin{aligned}&\delta^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial^2 h_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 h_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}\right)\\&=\frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\frac{\partial^2 h^\rho_\mu}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 h^\sigma_\nu}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}=0,\end{aligned}$$

$$h^\rho_\mu=\delta^{\sigma\rho}h_{\mu\sigma},\quad h=h^\rho_\rho=\delta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho}.$$

要上式得到满足只要下式成立:

$$\frac{\partial h^\alpha_\mu}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^\mu}, \tag{9.2.6}$$

也即
$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(h_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}h\right)=0.$$

以式(9.2.3)代入式(9.2.4)，略去二级无穷小量，则得

$$\delta^{\sigma\rho}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}}=2R_{\mu\nu}.$$

令
$$\Box\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}},$$

则有
$$\Box h_{\mu\nu}=2R_{\mu\nu},$$

从而
$$\Box h_{\mu}^{\alpha}=2R_{\mu}^{\alpha}.$$

因此，我们得到

$$\Box\left(h_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}h\right)=2\left(R_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}g_{\mu}^{\alpha}R\right)=2\eta T_{\mu}^{\alpha}.$$

即 $h_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}h$ 满足波动方程：

$$\Box\left(h_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}h\right)=2\eta T_{\mu}^{\alpha}. \tag{9.2.7}$$

这就是说：重力场按照波的形式传播，波速为光速．式(9.2.7)之特解为

$$h_{\mu}^{\alpha}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\alpha}h=\frac{1}{4\pi}\int\frac{2\eta[T'^{\alpha}_{\mu}]_{t-r}}{r}dv', \tag{9.2.8}$$

$$r\equiv[(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$[T'^{\alpha}_{\mu}]_{t-r}$ 为将 (x^{μ}) 代以 (x'^{μ}) $[x'^4=i(t-r)]$ 而得，

$$dv'\equiv dx'^1dx'^2dx'^3,$$

这里 (x^{μ}) 为点 $P\in(\mathfrak{T})$ 的场空间 $\mathscr{M}_P(4)$ 中以 P 为原点的 Lorentz 位标系，我们选它作为 $(\mathfrak{T})$ 的局部位标系．

§9.3 电磁场方程的一般形式

在绝对时空中，空间与时间不相关联，空间为 Euclid 的. 以 $\vec{E}$, $\vec{H}$ 分别表电场强度和磁场强度矢量，$\vec{\sigma}$ 表电流密度矢量，ρ 表电荷密度. 这时，真空中的 Maxwell 电磁场方程的外微分形式[1] 为:

$$\partial(\overset{dl}{\vec{E}}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overset{ds}{\vec{H}}); \quad \partial(\overset{dl}{\vec{H}}) = \frac{\partial}{\partial t}(\overset{ds}{\vec{E}}) + (\overset{ds}{\vec{\sigma}});$$

$$\partial(\overset{ds}{\vec{H}}) = 0; \quad \partial(\overset{ds}{\vec{E}}) = (\overset{dv}{\rho}).$$

这里用的是新单位制[注意: 在(罗)中，真空介电常数 ϵ_0 及磁导率 μ_0 在新单位制中均无量纲，取值为 1]; $dl \equiv (dx, dy, dz)$, $ds \equiv (dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy)$, $dv \equiv dx \wedge dy \wedge dz$ 分别为线积分、面积分和体积分元，$0(x,\ y,\ z)$ 表示直角位标系. 记号

$$\overset{dl}{\vec{F}} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

$$\overset{ds}{\vec{F}} \equiv F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy,$$

$$\overset{dv}{\vec{F}} \equiv \vec{F} dx \wedge dy \wedge dz.$$

∂ 表示外微分算子，因此:

$$\partial\Phi = \mathrm{grad}\frac{dl}{d\Phi};$$

$$\partial(\overset{dl}{\vec{F}}) = dF_x \wedge dx + dF_y \wedge dy + dF_z \wedge dz = (\mathrm{rot}\overset{ds}{\vec{F}});$$

$$\partial(\overset{ds}{\vec{F}}) = dF_x \wedge dy \wedge dz + dF_y \wedge dz \wedge dx + dF_z \wedge dx \wedge dy$$

$$= \mathrm{div}\overset{dv}{\vec{F}};$$

$$\partial(\overset{dv}{\vec{F}}) = d\vec{F} \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0;$$

$$\partial\partial(*) = 0(\text{零算子}).$$

设 $O(x, y, z, t)$ 构成实 Lorentz 位标系，作反对称张量 $F_{\mu\nu}$，它在这一位标系的表示矩阵为

$$[F_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y & -E_x \\ H_z & 0 & -H_x & -H_y \\ -H_y & H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{bmatrix}.$$

作在 $O(x, y, z, t)$ 的电荷-电流密度张量

$$J^k \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \rho),$$

则 **Maxwell** 方程可以改写成:

$$\partial(F_{ij} dx^i \wedge dx^j) = 0; \qquad (9.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} F^{ij} = J^i; \qquad (9.3.2)$$

$$[F^{ij}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y & E_x \\ H_z & 0 & -H_x & E_y \\ -H_y & H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{bmatrix}.$$

这里 $$(x^1, x^2, x^3, x^0) \equiv (x, y, z, t).$$

改用位标系 (x^μ) $(\mu = 1, 2, 3, 4; \mathrm{x}^4 = ix^0)$，则式 (9.3.1) 与式 (9.3.2) 就转化为下列形式:

$$\partial(F_{\mu\nu} d\mathrm{x}^\mu \wedge d\mathrm{x}^\nu) = 0; \qquad (9.3.1)^*$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\nu} F^{\mu\nu} = J^\mu. \qquad (9.3.2)^*$$

这里，J^μ 在位标系 (x^μ) 的分量为:

$$J^1 = \sigma_x, \quad J^2 = \sigma_y, \quad J^3 = \sigma_z, \quad J^4 = i\rho.$$

由于 $\partial\partial(*)=0$, 故式 (9.3.1)* 具有如下形式的特解

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\equiv\partial(A_{\delta}dx^{\delta}),$$

这里 $$A_{\mu}\equiv(A_1,\ A_2,\ A_3,\ -iA_0).$$

在 Euclid 空间 $E(3)$ 里, $\vec{A}\equiv(A_1,\ A_2,\ A_3)$ 为矢量势函数, A_0 为标量势函数, 故可令

$$F_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}.$$

以 $$F^{\mu\nu}=\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

代入式 (9.3.2)*, 则得

$$-\frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\delta}}+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial A_{\delta}}{\partial x^{\delta}}\right)=J^{\mu}\quad(=J_{\mu}).\quad(9.3.2)_*$$

添加 **Lorentz 条件**:

$$\frac{\partial A_{\delta}}{\partial x^{\delta}}=0,\qquad(9.3.3)$$

则式 $(9.3.2)_*$ 就化为下列**波动方程**:

$$\Box A_{\mu}\equiv\frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\delta}}=-J_{\mu}.\qquad(9.3.4)$$

(9.3.3) 与 (9.3.4) 两式仍不足以完全确定 A_{μ}, 因为取任何满足相应于式(9.3.4)的齐次方程的函数 $\alpha(x)$, 则 $A'_{\mu}(x)\equiv A_{\mu}(x)+\partial\alpha(x)/\partial x^{\mu}$ 仍能满足(9.3.3), (9.3.4)两式. 为此 Pauli 建议引用所谓**第二种规范变换**:

$$A'_{\mu}=A_{\mu}+\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^{\mu}}.\qquad(9.3.5)$$

在此变换下, 等价于 Maxwell 方程的 (9.3.3), (9.3.4) 两式仍然不变.

总之, 在特殊相对论中, **电磁场微分方程**等价于次列方程

组：

$$\left.\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}; \\ \Box F_\mu &= -J_\mu; \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

其中 $\vec{E} \equiv i(F_{14}, F_{24}, F_{34})$ $\vec{H} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12})$。此方程不但具有 Lorentz 不变性，而且具有第二种规范不变性.

一般相对性电磁场微分方程，在式 (9.3.1)*, (9.3.2)* 的启发下，或应用纤维丛积分[2]于切空间 $M_P(4)$ 中的 Maxwell 方程的结果，当为下列形式：

$$\partial(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu) = 0; \qquad (9.3.6)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu. \qquad (9.3.7)$$

这里 $J^\mu = \rho_0 A^\mu$, $A^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)$, $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$.

由 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性，有

$$F_{\mu\nu|\delta} \equiv \nabla_\delta F_{\mu\nu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\delta},$$

式(9.3.6)可以写成

$$\nabla_\delta F_{\mu\nu} dx^\delta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0.$$

此式是协变的，故式(9.3.6)也是协变的. 令

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv \partial(A_\mu dx^\mu),$$

则 $$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \equiv A_{\nu|\mu} - A_{\mu|\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

而 $$F^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (A_{\beta|\alpha} - A_{\alpha|\beta}).$$

将此代入式(9.3.7)，则得

$$g^{\alpha\mu} g^{\beta\delta} (A_{\beta|\alpha\delta} - A_{\alpha|\beta\delta}) = J^\mu.$$

以 $g_{\alpha'\mu}$ 乘此式两端求和，然后令 α' 为 α，则得

$$g^{\beta\delta}(A_{\beta|\alpha\delta}-A_{\alpha|\beta\delta})=J_\alpha.$$

应用 Ricci 恒等式：

$$\nabla_\delta\nabla_\alpha A_\beta-\nabla_\alpha\nabla_\delta A_\beta=A_{\beta|\alpha\delta}-A_{\beta|\delta\alpha}=R^\varepsilon_{\beta\alpha\delta}A_\varepsilon,$$

则上面的关系化为下列形式：

$$J_\alpha=-g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha+g^{\beta\delta}A_{\beta|\varepsilon\alpha}+R^\varepsilon_{\beta\alpha\delta}A_\varepsilon g^{\beta\delta}.$$

令 $R^\varepsilon_\alpha\equiv R^\varepsilon_{\beta\delta\alpha}g^{\beta\delta}$，由 $R^\varepsilon_{\beta\alpha\delta}=-R^\varepsilon_{\beta\delta\alpha}$，得

$$-g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha-R^\varepsilon_\alpha A_\varepsilon+g^{\beta\delta}A_{\beta|\delta\alpha}=J_\alpha. \tag{9.3.8}$$

此式可用下列两式代替：

$$-g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha-R^\varepsilon_\alpha A_\varepsilon=J_\alpha; \tag{9.3.9}$$

$$A^\delta{}_{|\delta}=0. \tag{9.3.10}$$

后一式相应于 **Lorentz** 条件.

因此，**一般相对性电磁场方程**转化为：

$$\left.\begin{aligned}&F_{\mu\nu}\equiv A_{\nu|\mu}-A_{\mu|\nu};\\&g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha+R^\beta_\alpha A_\beta=-J_\alpha;\\&A^\delta{}_{|\delta}=0;\\&J^\alpha\equiv\rho_0\frac{dx^\alpha}{ds}.\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

式中 $F_{\mu\nu}$ 为电磁场强度张量，A_μ 所满足的微分方程在 Einstein 时空(㊎)中恰为标准双曲型微分方程组. 当重力场的方程选致 $R_{\mu\nu}=-\lambda g_{\mu\nu}$ 时，$R^\beta_\alpha=-\lambda\delta^\beta_\alpha$，此时 (II) 中微分方程就转化为：

$$-g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha+\lambda A_\alpha=J_\alpha. \tag{9.3.11}$$

当自由电荷不存在时，$J^\alpha=J_\alpha=0$，上式就可作为**一般相对性 Klein-Gordon 方程**.

注意：如果应用 de Rham 的 Δ 算子[3]，则对 $\alpha=\alpha_k dx^k$，

$(\Delta\alpha)_k=-(\nabla^i\nabla_i-R_k^h)\alpha_h$. 虽然 de Rham 是用于实位标 (x^k) $(k=1, 2, \cdots, n)$, n 维椭圆型空间的，但这种运算即使对位标 (x^μ) $(\mu=1, 2, 3, 4)$, 也是可以应用的. 这时式 (II) 之一可写成

$$\Delta(A_\alpha dx^\alpha)=J_\alpha dx^\alpha.$$

在一般情况下, A_μ 所满足的微分方程是二阶偏微分方程组. 但是在 Einstien 宇宙 (𝔊) 中存在着一阶基本张量 g_μ 和 g^μ, 它的协变微商全等于 0. 如果假设 $A_\mu\equiv g_\mu\Phi$, Φ 为一标量，则式 (II) 可以简化. 这时 Φ 所满足的微分方程成为:

$$\left.\begin{aligned}&-g^{\beta\delta}g_\alpha\nabla_\beta\nabla_\delta\Phi+(R_\alpha^\varepsilon g_\varepsilon)\Phi=J_\alpha;\\&g^\delta\frac{\partial\Phi}{\partial x^\delta}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9.3.12)$$

设电荷的相对速率远远小于光速，则可选取前节的动位标系 (t^μ) 使得电荷可以认为对之是近似静止的，并且 $g^k=0$ $(k=1, 2, 3)$, $g^4=i$. 这时式 (9.3.12) 化为:

$$\left.\begin{aligned}&-g^{\beta\delta}(\mathfrak{t})\nabla_\beta\nabla_\delta\Phi(\mathfrak{t})+R_4^4(\mathfrak{t})\Phi(\mathfrak{t})=\rho_0(\mathfrak{t});\\&\frac{\partial\Phi(\mathfrak{t})}{\partial t^4}=0,\quad \mathfrak{t}\equiv(t^1, t^2, t^3, t^4).\end{aligned}\right\}\qquad(9.3.13)$$

这时 $g_k=0(k=1, 2, 3)$, $g_4=i$, $J_\alpha=g_\alpha\rho_0$.

将 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的若干指标上升，和以前一样，用“·”来表明指标相对位置. 例如: $R^{\cdots\cdots}_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; $R_{\alpha\beta}=R^\lambda_{\alpha\beta\lambda}\equiv R^{\lambda\cdots\cdots}_{\cdot\alpha\beta\lambda}$; $R^\varepsilon_\alpha=R^{\varepsilon\lambda}_{\beta\alpha}g^{\beta\delta}\equiv R^{\varepsilon\cdot\beta\cdot}_{\cdot\beta\cdot\alpha}$; 因而, $R_4^4(\mathfrak{t})=R^{4\cdot\beta\cdot}_{\cdot\beta\cdot4}(\mathfrak{t})$. 但是,

$$R_{\varepsilon\beta\delta\alpha}=R_{\xi\alpha\varepsilon\beta},$$

所以

$$R^{\varepsilon\cdots\cdots}_{\cdot\beta\delta\alpha}=R^{\cdots\varepsilon\cdot}_{\delta\alpha\cdot\beta},$$

$$R^\varepsilon_\alpha=g^{\beta\delta}R^{\varepsilon\cdots\cdots}_{\cdot\beta\delta\alpha}=R^{\cdots\varepsilon\cdot}_{\delta\alpha\cdot\beta}g^{\beta\delta}=R^{\beta\cdot\varepsilon\cdot}_{\cdot\alpha\cdot\beta}=R_{\alpha\gamma}g^{\gamma\varepsilon}.$$

这样一来,

$$R_4^4(\mathrm{t}) = R_{4\gamma}(\mathrm{t})\, g^{\gamma 4}(\mathrm{t}) = R_{44}(\mathrm{t})\, g^{44}(\mathrm{t}) = 0,$$

式(9.3.13)的第一式就转化为

$$-g^{hk}(\mathrm{t})\nabla_h\nabla_k\Phi(\mathrm{t}) = \rho_0(\mathrm{t}) \quad (h,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

而且由式 (9.3.13) 的第二式, $\Phi(\mathrm{t})$ 是不显含 t^4 的. 但是 $g^{hk} = 0 (h \neq k)$, 故上式为 Poisson 方程之推广:

$$-g^{hk}(\mathrm{t})\nabla_h\nabla_k\Phi(\mathrm{t}) = \rho_0(\mathrm{t}).$$

这是一个椭圆型微分方程, 其广义解以 $\Phi(t^1,\ t^2,\ t^3)$ 表之. 转化到位标 (x^μ) 的函数, 则是

$$\Phi(t^1(\mathrm{x}),\ t^2(\mathrm{x}),\ t^3(\mathrm{x})) \equiv \tilde{\Phi}((\mathrm{x}^\mu)) \equiv \tilde{\Phi}(\mathrm{x}).$$

这样我们得出 $A_\alpha(\mathrm{x}) \equiv g_\alpha(\mathrm{x})\tilde{\Phi}(\mathrm{x})$, 这对于一个不随动位标而运动的观察者的位标系 (x^μ) 而言, 是波动性质的. 在特殊相对性的情况, $A_\alpha(\mathrm{x}) \equiv g_\alpha(\mathrm{x})\tilde{\Phi}(\mathrm{x})$ 为 **Liénard–Wiechert 电磁势**.

注意: 在特殊位标系 (t^μ), 我们已见

$$R_\alpha^\beta(\mathrm{t})\, g_\beta(\mathrm{t}) = R_4^4(\mathrm{t})\, i = 0,$$

故在 Einstein 空间中应有

$$R_\alpha^\beta g_\beta = 0,$$

因而式(9.3.12)转化为

$$-g^{\beta\delta} g_\alpha \nabla_\beta\nabla_\delta\Phi = J_\alpha.$$

以 g^α 乘两端求和, 则得

$$-\nabla^\delta\nabla_\delta\Phi = g^\alpha J_\alpha. \tag{9.3.14}$$

引用 De Rham 算子 Δ, 上式可表写为

$$\Delta\Phi = g^\alpha J_\alpha. \tag{9.3.15}$$

总之, 在 Einstein 宇宙中, 电磁场方程 (II) 之特解可为 $A_\alpha(\mathrm{x}) = g_\alpha(\mathrm{x})\Phi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x})$ 为一标量, 它满足方程:

$$\left.\begin{aligned} &-\nabla^\delta\nabla_\delta\Phi = g^\alpha J_\alpha;\\ &g^\delta\frac{\partial\Phi}{\partial x^\delta}=0;\\ &F_{\mu\nu}\equiv g_\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}-g_\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

在电荷的相对速率远小于光速时，则电荷密度 $\rho_0=g^\alpha J_\alpha$（此为标量，不因位标系不同而异）. 此时，$\tilde{\Phi}(x)$ 将为 $\Phi(t^1(x), t^2(x), t^3(x))$，是推广的 Poissoh 方程

$$g^{hh}(t)\nabla_h\nabla_h\tilde{\Phi}(x)=-\rho_0(t) \qquad \text{(IV)}$$

的广义解，(t^μ) 为电荷对之静止的位标系，其与位标系(x^μ)的变换关系为

$$t^\mu=t^\mu(x)\quad(\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

这里 $g^{11}(t)=(g_{11}(t))^{-1}$，$g^{22}(t)=(g_{22}(t))^{-1}$，$g^{33}(t)=(g_{33}(t))^{-1}$，故有

$$g^{11}(t)=1-\left(\frac{t^1}{a}\right)^2,\ g^{22}(t)=(t^1)^{-2},$$

$$g^{33}(t)=(t^1\sin t^2)^{-2}.$$

因此，在求方程 (IV) 之解 $\tilde{\Phi}(x)$ 时，函数的存在域 (D) 不能含有 $t^1=0$ 之点，也不能含有 $t^2=k\pi$（k 为整数）之点.

这里给出的关于运动着的电荷或电荷集（其中一部分电荷对另一部分电荷的相对速率远小于光速）所放射的电磁波的论断，也可作为点电荷的宏观理论的根据. 所以这一特解是应当重视的.

当自由电荷不存在时，电磁场张量 A_μ 满足下列推广的波动方程：

$$g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\Phi=0. \qquad (9.3.17)$$

这两式均与 De Rham 算子 Δ 作用于外微分形式 $A_\mu dx^\mu$ 及标

量Φ的结果一致.

§9.4 自旋为零的场

自旋为零的荷电粒子场(例如 $\pi^{\pm}$, $k^{\pm}$ 介子场)的 Lagrange 函数密度为复标量或复厄标量 $\varphi(x)$ 及其共轭量 $\overset{*}{\varphi}(x)$ 所构成:

$$L\equiv-(\partial_\mu\overset{*}{\varphi}\partial_\mu\varphi+m_0^2\overset{*}{\varphi}\varphi), \tag{9.4.1}$$

m_0 为粒子静质量. 因此,原始的混合场方程当为:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}-\partial_\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu}|}=0, \tag{9.4.2}$$

这里对 α 不求和, $Q_1\equiv\varphi$, $Q_2\equiv\overset{*}{\varphi}$. 这也即是:

$$\left.\begin{aligned}-m_0^2\overset{*}{\varphi}\overline{|\partial_\mu\varphi|}+\partial_\mu\partial_\mu\overset{*}{\varphi}\overline{|\partial_\mu\varphi|}=0;\\ -m_0^2\overline{|\partial_\mu\overset{*}{\varphi}|}\varphi+\overline{|\partial_\mu\overset{*}{\varphi}|}\partial_\mu\partial_\mu\varphi=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.4.3}$$

式中 $\overline{|\partial_\mu\varphi|}$ 及 $\overline{|\partial_\mu\overset{*}{\varphi}|}$ 均可任意. 命其系数为 0, 则得混合场方程为分立的正粒子场与反粒子场的联立方程:

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu\partial_\mu\varphi-m_0^2\varphi=0;\\ \partial_\mu\partial_\mu\overset{*}{\varphi}-m_0^2\overset{*}{\varphi}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.4.4}$$

以 φ 描写正粒子,则 $\overset{*}{\varphi}$ 描写反粒子,两者处于对等地位.

这时,按照我们的计算,则能冲量张量为:

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}&=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu}L\\ &=\overset{*}{\varphi}_{1\nu}\varphi_{1\mu}+\overset{*}{\varphi}_{1\mu}\varphi_{1\nu}-\delta_{\mu\nu}(\overset{*}{\varphi}_{1\lambda}\varphi_{1\lambda}+m_0^2\overset{*}{\varphi}\varphi).\end{aligned} \tag{9.4.5}$$

当 $\overset{*}{\varphi}=\varphi$ 时, 即当 φ 为实标量时, 两个方程蜕化为一个, 这种理论恰可以描述自旋为 0 而反粒子并不存在的 π^0 介子. 这时能冲量张量当为

$$^{0}T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}[\varphi_{1\nu}\varphi_{1\mu}+\varphi_{1\mu}\varphi_{1\nu}-\delta_{\mu\nu}(\varphi_{1\lambda}\varphi_{1\lambda}+m_0^2\varphi\varphi)].$$

(9.4.6)

自旋为0，静质量为m_0的荷电粒子场在标准双曲型Riemann时空(𝕊)中的相应理论，因其基本度规张量具有$g_{\mu\nu}$的形式，故可依照等价原理进行推广．这时，我们选取**Lagrange函数密度**

$$L\equiv-(g^{\nu\nu'}\nabla_{\nu'}\overset{*}{\varphi}\nabla_{\nu}\varphi+m_0^2\overset{*}{\varphi}\varphi),\qquad(9.4.7)$$

式中φ为标量或膺标量，$\overset{*}{\varphi}$为φ之共轭复数．这时原始场方程为

$$\nabla_{\nu}\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\boxed{Q_{\alpha|\mu}}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}}\odot\boxed{Q_{\alpha|\mu}}=0,\qquad(9.4.8)$$

以(x^{μ})为位标系，对α不求和，$\alpha=1,\ 2$，$Q_{\alpha|\nu}\equiv\nabla_{\nu}Q_{\alpha}$，$Q_1\equiv\varphi$，$Q_2\equiv\overset{*}{\varphi}$，并且对任意的$\boxed{Q_{\alpha|\mu}}$都成立．

因此，令第一式中$\boxed{\varphi_{1\mu}}$之系数及第二式中$\boxed{\overset{*}{\varphi}_{1\mu}}$的系数均为0，则得正反粒子场方程为：

$$\left.\begin{aligned}\nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\varphi-m_0^2\varphi=0;\\ \nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\overset{*}{\varphi}-m_0^2\overset{*}{\varphi}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9.4.9)$$

其能冲量张量为：

$$T_{\mu}^{\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu}^{\nu}L=g^{\nu\overline{\nu}}\overset{*}{\varphi}_{1\overline{\nu}}\varphi_{1\mu}+g^{\nu\overline{\nu}}\overset{*}{\varphi}_{1\mu}\varphi_{1\overline{\nu}}$$
$$-\delta_{\mu}^{\nu}(g^{\overline{\mu}\overline{\nu}}\overset{*}{\varphi}_{1\overline{\nu}}\varphi_{1\overline{\mu}}+m_0^2\overset{*}{\varphi}\varphi).\qquad(9.4.10)$$

注意δ_{μ}^{ν}，$g^{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu}$在∇_{ν}的作用下当为零，这时

$$\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu}=g^{\nu\overline{\nu}}(\nabla_{\nu}\nabla_{\overline{\nu}}\overset{*}{\varphi}\cdot\varphi_{1\mu}+\overset{*}{\varphi}_{1\overline{\nu}}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\varphi)$$
$$+g^{\nu\overline{\nu}}(\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\overset{*}{\varphi}\cdot\varphi_{1\overline{\nu}}+\overset{*}{\varphi}_{1\mu}\nabla_{\nu}\nabla_{\overline{\nu}}\varphi_{1\overline{\nu}})$$
$$-\delta_{\mu}^{\nu}[g^{\overline{\mu}\overline{\nu}}(\nabla_{\nu}\nabla_{\overline{\nu}}\overset{*}{\varphi}\cdot\varphi_{1\overline{\mu}}+\overset{*}{\varphi}_{1\overline{\nu}}\nabla_{\nu}\nabla_{\overline{\mu}}\varphi)$$
$$+m_0^2(\nabla_{\nu}\overset{*}{\varphi}\cdot\varphi+\overset{*}{\varphi}\nabla_{\nu}\varphi)].$$

由于式(9.4.9), 有

$$g^{\nu\sigma}\nabla_\nu\nabla_\sigma\overset{*}{\phi}\cdot\varphi_{1\mu}-\delta^\nu_\mu m_0^2\overset{*}{\phi}\nabla_\nu\varphi=0;$$
$$g^{\nu\sigma}\overset{*}{\phi}_{1\mu}\nabla_\nu\nabla_\sigma\varphi_{1\sigma}-\delta^\nu_\mu m_0^2\nabla_\nu\overset{*}{\phi}\cdot\varphi=0.$$

因此,

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=g^{\nu\sigma}(\overset{*}{\phi}_{1\mu\nu}-\overset{*}{\phi}_{1\nu\mu})\varphi_{1\sigma}+g^{\nu\sigma}\overset{*}{\phi}_{1\sigma}(\varphi_{1\mu\nu}-\varphi_{1\nu\mu}).$$

这里, $\varphi_{1\mu\nu}\equiv\nabla_\nu\nabla_\mu\varphi$, $\overset{*}{\phi}_{1\mu\nu}\equiv\nabla_\nu\nabla_\mu\overset{*}{\phi}$. 但由于 φ 及 $\overset{*}{\phi}$ 为标量或膺标量, 故

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi=\nabla_\nu\nabla_\mu\varphi,$$
$$\nabla_\mu\nabla_\nu\overset{*}{\phi}=\nabla_\nu\nabla_\mu\overset{*}{\phi}.$$

因此, 有

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=0, \qquad (9.4.11)$$

即能冲量守恒律仍然成立. 换句话说, 大宇宙重力场对标量及膺标量场的能量冲量效应为零.

§9.5 自旋为 1 的场

已被发现的以 1 为自旋的基本粒子只有光子. 光子的场量 A_μ 相应于电磁场的 4 维矢势, 其 Lagrange 函数密度, 在特殊相对性中取为

$$L=-\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}=-\frac{1}{2}A_{\mu|\sigma}A_{\mu|\sigma}. \qquad (9.5.1)$$

由此求得原始光子场方程:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\odot\boxed{A_{\mu|\nu}}-\partial_{\nu'}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu|\nu'}}\odot\boxed{A_{\mu|\nu}}=0,$$

对 μ, ν 不求和, 对 ν' 求和. 因此

$$\partial_{\nu'}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu|\nu'}}\odot\boxed{A_{\mu|\nu}}=0 \quad (\text{仅对 }\nu'\text{ 求和}),$$

也即

$$-\frac{1}{2}\boxed{A_{\mu|\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu'}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu'}}\boxed{A_{\mu|\nu}}=0.$$

我们有光子场方程

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}A_{\mu}=0; \tag{9.5.2}$$

能冲量张量

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(A_{\mu_1|\mu}A_{\mu_1|\nu}+A_{\mu_1|\nu}A_{\mu_1|\mu}-\delta_{\mu\nu}A_{\mu_1|\nu_1}A_{\mu_1|\nu_1}); \tag{9.5.3}$$

守恒律

$$\partial_{\nu}T_{\mu\nu}=0. \tag{9.5.4}$$

按照等价原理，在标准双曲型的 Riemann 时空（$\mathfrak{T}$）中，光子场的 Lagrange 函数密度为

$$L=-\frac{1}{2}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}A_{\mu'|\nu'}A_{\mu|\nu}, \tag{9.5.5}$$

式中 $A_{\mu|\nu}\equiv\nabla_{\nu}A_{\mu}$. 因此，原始光子场方程为

$$\nabla_{\nu}\frac{\partial L}{\partial A_{\mu|\nu}}\odot\boxed{A_{\mu|\mathfrak{T}}}=0, \tag{9.5.6}$$

对 μ 不求和；光子场方程为

$$g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\nabla_{\nu}A_{\mu'|\nu'}=0,$$

也即

$$g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\nabla_{\nu}\nabla_{\nu'}A_{\mu'}=0.$$

由于 $\det[g^{\mu\mu'}]\neq 0$，故得光子场方程为

$$g^{\nu\nu'}\nabla_{\nu}\nabla_{\nu'}A_{\mu'}=0. \tag{9.5.7}$$

这样的光子场，其能冲量张量为

$$T^{\nu}_{\mu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta^{\nu}_{\mu}L=\frac{1}{2}(g^{\mu_1\alpha}g^{\nu_1\nu}A_{\alpha|\mu}A_{\mu_1|\nu_1}$$
$$+g^{\mu_1\alpha}g^{\nu_1\nu}A_{\mu_1|\nu_1}A_{\alpha|\mu}-\delta^{\nu}_{\mu}g^{\mu_1\mu'}g^{\nu_1\nu'}A_{\mu'|\nu'}A_{\mu_1|\nu_1}), \tag{9.5.8}$$

这里 $Q_{\alpha|\mu}=A_{\alpha|\mu}$，因此有

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=-\nabla_\nu\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\boxed{Q_{\alpha|\mu}}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot\nabla_\nu Q_{\alpha|\mu}$$
$$+\delta^\nu_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\odot\nabla_\nu Q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\pi}}\odot\nabla_\nu Q_{\alpha|\pi}\right).$$

注意，$\nabla_\nu g^{\mu\nu}=0$，$\nabla_\nu\delta^\nu_\mu=0$，则

$$\delta^\nu_\mu\nabla_\nu L=\nabla_\nu(\delta^\nu_\mu L),$$

而
$$\nabla_\nu L=\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\odot\nabla_\nu Q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\pi}}\odot\nabla_\nu Q_{\alpha|\pi}.$$

因此，由 $\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}=0$，及原始场方程右端第一项为 0，得到

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=-\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot\nabla_\nu A_{\alpha|\mu}+\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot\nabla_\mu A_{\alpha|\nu}.$$

由 Ricci 恒等式，知

$$\nabla_\mu A_{\alpha|\nu}=\nabla_\mu\nabla_\nu A_\alpha=\nabla_\nu\nabla_\mu A_\alpha+A_\pi R^\pi_{\alpha\nu\mu}.$$

所以
$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=-\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot\nabla_\nu A_{\alpha|\mu}+\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot\nabla_\nu A_{\alpha|\mu}$$
$$+\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot A_\pi R^\alpha_{\alpha\nu\mu}=\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\nu}}\odot A_\pi R^\pi_{\alpha\nu\mu}.$$

但是
$$\frac{\partial L}{\partial A_{\alpha|\tilde\nu}}\odot A_\pi R^\pi_{\alpha\tilde\nu\mu}=-\frac{1}{2}(g^{\pi\alpha}g^{\nu\tilde\nu}A_\pi R^\alpha_{\alpha\tilde\nu\mu}A_{\pi|\nu}$$
$$+g^{\pi\alpha'}g^{\nu\tilde\nu}A_{\alpha'|\tilde\nu}A_\pi R^\pi_{\pi\nu\mu}),$$

稍为变更求和指标则可将 R 提至括号之外：

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=-\frac{1}{2}(g^{\alpha'\alpha}g^{\nu'\nu}A_{\tilde\pi}A_{\alpha'|\nu'}+g^{\alpha\alpha'}g^{\nu\nu'}A_{\alpha'|\nu'}A_{\tilde\pi})R^{\tilde\pi}_{\alpha\nu\mu}.$$

最后得出大宇宙重力场对光子场的能冲量张量的重力效应为 0：

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=-\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha'}g^{\nu\nu'}R^{\tilde\pi}_{\alpha\nu\mu}(A_{\tilde\pi}A_{\alpha'|\nu'}+A_{\alpha'|\nu'}A_{\tilde\pi})=0. \quad (9.5.9)$$

这说明，Minkowski 时空内的光子在大宇宙中，能冲量不受大宇宙重力场的影响.

然而，按照 §7.3 中宏观电磁场的理论，应该得到另一个一般相对性光子场方程：

$$-g^{\beta\delta}\nabla_\beta\nabla_\delta A_\alpha - R^\varepsilon_\alpha A_\varepsilon = 0, \qquad (9.5.10)$$

在大宇宙中，一般相对性光子场方程有两个：方程(7.5.7)和(7.5.10)．也许，它们预示着特殊相对论中简并了的光子和反光子的区别！

§9.6 自旋为 1/2 的场

Dirac 方程描述自旋为 1/2 的电子场．这个方法后来被推广于核子、μ 介子、中微子和超子，看来，Λ 超子的自旋可能也是 1/2.

描写自旋为 1/2 的正粒子场，场量为有四个分量的 $\Psi_A(A=1, 2, 3, 4)$ 的旋量，它的表示矩阵

$$\Psi \equiv [\Psi_A],$$

反粒子场亦然，场量的表示矩阵

$$\overline{\Psi} \equiv [\overline{\Psi}^B],$$

注意这里顶标“—”的意义，其中

$$\overline{\Psi}^B \equiv \overset{*}{\Psi}_A \gamma_4 A^B.$$

所以，反粒子场量表示矩阵也可以写成

$$\overline{\Psi} = \overset{*}{\Psi}\gamma_4,$$

其中 γ_4 为 Dirac 矩阵：

$$\gamma_4 \equiv \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array}\right],$$

I 是单位矩阵.

选择 Lagrange 函数密度为

$$L=-\frac{1}{2}\left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\mu}\gamma_\mu\Psi\right)-m_0\overline{\Psi}\Psi, \quad (9.6.1)$$

m_0 为粒子的静质量. 因此,场的原始方程为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\mu}\gamma_\mu\left|\overline{\Psi_{|\nu}}\right|-m_0\overline{\Psi}\left|\overline{\Psi_{|\nu}}\right|-m_0\left|\overline{\Psi}_{|\nu}\right|$$

$$-\frac{1}{2}\left|\overline{\Psi}_{|\nu}\right|\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}+\frac{1}{2}\partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma^\mu\left|\overline{\Psi_{|\nu}}\right|)$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\mu(\left|\overline{\Psi}_{|\nu}\right|\gamma_\mu\Psi)=0.$$

令 $\left|\overline{\Psi_{|\nu}}\right|$ 的左、右方系数分别为 0, 得场方程:

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma_\mu-m_0\overline{\Psi}=0;\\ \gamma_\mu\partial_\mu\Psi+m_0\Psi=0.\end{aligned}\right\} \quad (9.6.2)$$

前一式描述反粒子,后一式描述正粒子. 二者处于对称地位.

这时其能冲量张量为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu}L$$

$$=\frac{1}{2}\{\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi_{|\mu}-\overline{\Psi}_{|\mu}\gamma_\nu\Psi\}+\delta_{\mu\nu}L.$$

但这时 Ψ, $\overline{\Psi}$ 满足场方程,故 $L=0$,而

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\{\overline{\Psi}\gamma_\nu\Psi_{|\mu}-\overline{\Psi}_{|\mu}\gamma_\nu\Psi\}, \quad (9.6.3)$$

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0. \quad (9.6.4)$$

推广这个理论于一般相对性,则 $\Psi\equiv\underbrace{\Psi_A}$ 当为一个旋量 (Ψ_A) 的表示矩阵. $\overset{*}{\Psi}\equiv[(\overline{\Psi}\ )^*]$ 当为旋量 ($\overline{\Psi}^A$) 的表示矩阵. 我们视 $\overset{*}{\Psi}^{\dot{A}}=(\overline{\Psi}^A)^*$ 为一旋量,这里"—"号表示复数共

轭. 适当选取旋量 $\eta_A{}^B$, 使其表示矩阵 $[\eta_A{}^B]$(以 A 为行, 以 B 为列)为非异的. 令

$$\overset{*}{\Psi}{}^B \equiv \overset{*}{\Psi}{}^A \eta_A{}^B,$$

这是一个旋量, $[\overset{*}{\Psi}{}^B] \equiv \overline{\Psi}$ 为旋量 $(\overset{*}{\Psi}{}^B)$ 的表示矩阵. 在第六章里, 我们已经推广 $\gamma^\mu{}_A{}^B$ 为 $\Gamma^\mu{}_A{}^B$, 也即推广了 γ_μ(即 γ^μ) 为 Γ_μ(即 Γ^μ). ∂_μ 当推广为自旋协变微商 ∇_μ. 因此, 可推广自旋为 1/2 的粒子场的 Lagrange 函数密度为

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}(\overline{\Psi}\Gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \nabla_\mu \overline{\Psi}\Gamma^\mu \Psi) - m_0 \overline{\Psi}\Psi \\ &= -\frac{1}{2}(\overline{\Psi}^A \Gamma^\mu{}_A{}^B \nabla_\mu \Psi_B - \nabla_\mu \overline{\Psi}^A \Gamma^\mu{}_A{}^B \Psi_B) - m_0 \overline{\Psi}^A \Psi_B. \end{aligned} \tag{9.6.5}$$

请注意, 对 L 的系数 $\Gamma^\mu{}_A{}^B$, m_0, 有

$$\nabla_\nu \Gamma^\mu{}_A{}^B = 0, \quad \nabla_\nu m_0 = 0;$$

L 为标量.

据此, 由场的原始方程

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|} - \nabla_\nu \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot \overline{|Q_{\alpha|\mu}|} = 0, \tag{9.6.6}$$

$Q_1 \equiv \Psi$, $Q_2 \equiv \overline{\Psi}$, $\nabla_\nu \Psi = \Psi_{|\nu}$, 对 α 不求和可得:

$$\Gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + m_0 \Psi = 0; \tag{I}$$

$$\nabla_\mu \overline{\Psi}\Gamma^\mu - m_0 \Psi = 0. \tag{II}$$

这就是著名的 **Wheeler** 方程.

能冲量张量, 则当选为

$$T^\nu_\mu = -\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}} \odot Q_{\alpha|\mu} + \delta^\nu_\mu L,$$

因此,

$$T^\nu_\mu = \frac{1}{2}\{\overline{\Psi}\Gamma^\nu \Psi_{|\mu} - \overline{\Psi}_{|\mu}\Gamma^\nu \Psi\}, \tag{III}$$

这里 $\Psi_{|\mu}=\nabla_\mu\Psi$, $\overline{\Psi}_{|\mu}=\nabla_\mu\overline{\Psi}$. 我们有

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=\frac{1}{2}\{\nabla_\nu\overline{\Psi}\Gamma^\nu\Psi_{|\mu}+\overline{\Psi}\nabla_\nu\Gamma^\nu\Psi_{|\mu}+\overline{\Psi}\Gamma^\nu\nabla_\nu\Psi_{|\mu}$$
$$-\nabla_\nu\overline{\Psi}_{|\mu}\Gamma^\nu\Psi-\overline{\Psi}_{|\mu}\nabla_\nu\Gamma^\nu\Psi-\overline{\Psi}_{|\mu}\Gamma^\nu\nabla_\nu\Psi\}.$$

但是 $\nabla_\nu\Gamma^\mu=0$, 故有

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=\frac{1}{2}\{\nabla_\nu\overline{\Psi}\Gamma^\nu\Psi_{|\mu}+\overline{\Psi}\Gamma^\nu\nabla_\nu\Psi_{|\mu}$$
$$-\nabla_\nu\overline{\Psi}_{|\mu}\Gamma^\nu\Psi-\overline{\Psi}_{|\mu}\Gamma^\nu\nabla_\nu\Psi\}. \qquad (9.6.7)$$

由场方程得

$$\nabla_\nu\overline{\Psi}\Gamma^\nu=m_0\overline{\Psi},\quad \Gamma^\nu\nabla_\nu\Psi=-m_0\Psi; \qquad (9.6.8)$$

又由 Ricci 恒等式, 则

$$\nabla_\nu\overline{\Psi}_{|\mu}=\nabla_\mu\overline{\Psi}_{|\nu}-\overline{\Psi}L_{\nu\mu}; \qquad (9.6.9)$$

而由

$$\nabla_\mu\overline{\Psi}_{|\nu}\Gamma^\nu=\nabla_\mu(\overline{\Psi}_{|\nu}\Gamma^\nu)=m\overline{\Psi}_{|\mu}, \qquad (9.6.10)$$

则式(9.6.7)右端第三、四两项之和为 $\overline{\Psi}L_{\nu\mu}\Gamma^\nu\Psi$, 这里,

$$L_{\nu\mu}\equiv[L^B_{A\nu\mu}]$$

为以 A 为行, 以 B 为列之矩阵. 所以, 大宇宙重力场对自旋为 1/2 的粒子场的能量冲量效应为

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu=\frac{1}{2}\{\overline{\Psi}\Gamma^\nu L_{\nu\mu}\Psi+\overline{\Psi}L_{\nu\mu}\Gamma^\nu\Psi\}=0. \qquad (\mathrm{IV})$$

这说明这种粒子场与大宇宙重力场不存在能冲量的相互作用.

以上的证明可以用较简便的方法, 但为了说明 $\nabla_\nu\Gamma^\mu{}_A{}^B=0$, 即 $\nabla_\nu\Gamma^\mu=0$ 之作用, 故改用这种论述步骤.

§9.7 广义 π 粒子场

在特殊相对性量子场论中, 人们将荷电 π 介子 $\pi^\pm$ 及中

性介子 π^0 统一于同位旋空间中. 由于 π^0 的静质量与 $\pi^{\pm}$ 的静质量之差不到 3.5%，因此就假设它们都具有同一静质量 k_0. 设 π^+ 的场量为 $\varphi(x)$，则 π^- 的场量为 $\overset{*}{\varphi}(x)$. 将 $\varphi(x)$，$\overset{*}{\varphi}(x)$ 分解为两个实量场 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)],\\ \overset{*}{\varphi}(x)&\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)].\end{aligned}\right\}\tag{9.7.1}$$

把 φ_1，φ_2 及 π^0 的场量 φ_3 作为三维同位旋空间中一个赝矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的三个分量，即

$$\boldsymbol{\varphi}\equiv[\varphi_a].\tag{9.7.2}$$

考虑 Lagrange 函数密度

$$L=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^{\mu}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x^{\mu}}+k_0^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right\}.\tag{9.7.3}$$

这是 $\pi^{\pm}$ 的 Lagrange 函数密度 $L_{\pm}$ 与 π^0 的 Lagrange 函数密度 L_0 之和：$L\equiv L_0+L_{\pm}\equiv L_1+L_2+L_3$.

这时场的原始方程

$$\frac{\partial L}{\partial Q_a}\boxed{Q_{a|\mu}}-\partial_{\nu}\frac{\partial L}{\partial Q_{a|\nu}}\odot\boxed{Q_{a|\mu}}=0,$$

即为

$$\begin{aligned}&-k_0^2\boldsymbol{\varphi}\boxed{\boldsymbol{\varphi}_{|\mu}}-k_0^2\boxed{\boldsymbol{\varphi}_{|\mu}}\boldsymbol{\varphi}+\partial_{\nu}\boxed{\boldsymbol{\varphi}_{|\mu}}\boldsymbol{\varphi}_{|\nu}+\partial_{\nu}\boldsymbol{\varphi}_{|\nu}\boxed{\boldsymbol{\varphi}_{|\mu}}\\ &=0,\end{aligned}$$

因而得到场方程为

$$\partial_{\nu}\partial_{\nu}\boldsymbol{\varphi}-k_0^2\boldsymbol{\varphi}=0.\tag{9.7.4}$$

它以 $\pi^{\pm}$，π^0 的原始方程为自己的特例.

这时能量冲量张量为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\nu}}\odot Q_{\alpha|\mu}+\delta_{\mu\nu}L$$

$$=\frac{1}{2}\{\partial_\mu\vec{\varphi}\cdot\partial_\nu\vec{\varphi}+\partial_\nu\vec{\varphi}\cdot\partial_\mu\vec{\varphi}-\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda\vec{\varphi}\cdot\partial_\lambda\vec{\varphi}+k_0^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})\},\tag{9.7.5}$$

故
$$T_{\mu\nu}\equiv T^0_{\mu\nu}+T^{\pm}_{\mu\nu}\equiv T^1_{\mu\nu}+T^2_{\mu\nu}+T^3_{\mu\nu},$$

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}=0.\tag{9.7.6}$$

由于 L 在三维的同位旋空间 (Euclid 空间) 内由标量积构成, 它在 φ 经受一个旋转变换时不变. 取无穷小旋转变换:

$$\left.\begin{aligned}\varphi'_{\dot a}(\mathrm{x})&=\varphi_{\dot a}(\mathrm{x})+\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b}(\mathrm{x});\\ a_{\dot a\dot b}&=\delta_{\dot a\dot b}+\varepsilon_{\dot a\dot b},\ a_{\dot a\dot b}a_{\dot a\dot c}=\delta_{\dot b\dot c}.\end{aligned}\right\}\tag{9.7.7}$$

由 L 的不变性可导出:

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a}}\odot(\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b})+\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot(\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b|\mu})=0.$$

但是,

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot(\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b})\right]=\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot\overline{|\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b}|}$$

$$+\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot(\varepsilon_{\dot a\dot b}\varphi_{\dot b|\mu}),$$

代入上式, 计及场的原始方程, 则有

$$\varepsilon_{\dot a\dot b}\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot\varphi_{\dot b}\right)=0.\tag{9.7.8}$$

令
$$T_{\dot a\dot b,\,\mu}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot a|\mu}}\odot\varphi_{\dot b}-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot b|\mu}}\odot\varphi_{\dot a}$$

$$=\frac{1}{2}[(\varphi_{\dot b}\varphi_{\dot a|\mu}-\varphi_{\dot b|\mu}\varphi_{\dot a})+(\varphi_{\dot a|\mu}\varphi_{\dot b}-\varphi_{\dot a}\varphi_{\dot b|\mu})],\tag{9.7.9}$$

则得

$$\partial_\mu T_{\dot a\dot b,\,\mu}=0.\tag{9.7.10}$$

在 Minkowski 时空中，取空间性曲面 σ，令

$$T_{\dot{a}\dot{b}}(\sigma)\equiv-\int_{\sigma}d\sigma_{\nu}T_{\dot{a}\dot{b},\nu}. \tag{9.7.11}$$

由于

$$\partial_{\nu}T_{\dot{a}\dot{b},\nu}=0, \tag{9.7.12}$$

则有

$$\frac{\delta T_{\dot{a}\dot{b}}(\sigma)}{\delta\sigma(\mathbf{x})}=0. \tag{9.7.13}$$

故 $T_{\dot{a}\dot{b}}(\sigma)$ 为守恒量，不因 σ 之不同而异. 取 σ 为扁平的，即其方程为 $t=t_1$，则守恒量为

$$T_{\dot{a}\dot{b}}=\frac{1}{2}\int[(\varphi_{\dot{a}}\dot{\varphi}_{\dot{b}}-\varphi_{\dot{b}}\dot{\varphi}_{\dot{a}})+(\dot{\varphi}_{\dot{b}}\varphi_{\dot{a}}-\dot{\varphi}_{\dot{a}}\varphi_{\dot{b}})]d^3\mathbf{x}, \tag{9.7.14}$$

$$d^3\mathbf{x}\equiv d\mathbf{x}^1d\mathbf{x}^2d\mathbf{x}^3.$$

这个同位旋量可以定义为 $\pi^{\pm}$ 及 π^0 的总同位旋.

推广于一般相对性，则 Lagrange 函数密度为

$$L=-\frac{1}{2}[g^{\mu\nu\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\nu}\varphi_{\dot{a}'}\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\mu}\varphi_{\dot{a}}+k_0^{2\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\varphi_{\dot{a}'}\varphi_{\dot{a}}]$$

$$=-\frac{1}{2}[g^{\mu\nu}\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\nu}\varphi_{\cdot}^{\dot{a}'}\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\mu}\varphi_{\dot{a}}+k_0^2\varphi_{\cdot}^{\dot{a}}\varphi_{\dot{a}}], \tag{9.7.15}$$

注意 $\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\nu}{}^{\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}=0$. 因此，这时场的原始方程为

$$\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\mu}\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha|\mu}}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu'}|}-\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}}\odot\overline{|Q_{\alpha|\mu'}|}=0, \tag{9.7.16}$$

对 α 不求和，也即是

$$\left.\begin{aligned}&\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\mu}(g^{\mu\nu\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\nu}\varphi_{\dot{a}'}\overline{|\varphi_{\dot{a}|\mu'}|})\\&\quad-k_0^{2\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\varphi_{\dot{a}'}\overline{|\varphi_{\dot{a}|\mu'}|}=0\quad(\text{对 }\dot{a}\text{ 不求和});\\&\overset{\mathrm{T}^1}{\nabla}_{\nu}(g^{\mu\nu\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\overline{|\varphi_{\dot{a}'|\nu'}|}\,\varphi_{\dot{a}|\mu})\\&\quad-k_0^{2\mathrm{T}^1}g^{\dot{a}\dot{a}'}\overline{|\varphi_{\dot{a}'|\nu'}|}\,\varphi_{\dot{a}}=0\quad(\text{对 }\dot{a}'\text{ 不求和}).\end{aligned}\right\}\ (9.7.16)^*$$

但 $\boxed{*}$ 括号内的项可以任意，故可将 $^{T1}g^{\alpha\alpha'}$ 放入括号内，得出场方程为

$$g^{\mu\nu}\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\mu}\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\nu}\varphi_{\dot{\alpha}}-k_0^2\varphi_{\dot{\alpha}}=0. \tag{I}$$

由于 $\varphi_{\dot{\alpha}}$ 在这里为同位旋量，不复为标量，则由 $(\varphi_{\dot{\alpha}})$ 所代表之场乃是一个尚未发现的粒子场．这种粒子场在特殊相对性中恰为 $\pi^{\pm}$ 及 π^0 所反映，因此可以说 $\pi^{\pm}$ 及 π^0 为此种粒子在 (𝔊) 底切空间上的投影．此粒子场的"同位旋"混合量可定义为

$$T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\mu}\equiv\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot{\alpha}|\mu}}\odot\varphi_{\dot{\beta}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{\dot{\beta}|\mu}}\odot\varphi_{\dot{\alpha}}, \tag{9.7.17}$$

$$\varphi_{\dot{\alpha}|\mu}\equiv\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\mu}\varphi_{\dot{\alpha}}.$$

由直接计算，可得

$$T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\mu}=-\frac{1}{2}[g^{\pi\mu T}g^{\alpha\alpha'}(\varphi_{\dot{\beta}}\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\pi}\varphi_{\dot{\alpha}}+\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\pi}\varphi_{\dot{\alpha}'}\varphi_{\dot{\beta}}$$
$$-\varphi_{\dot{\alpha}}\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\pi}\varphi_{\dot{\beta}}-\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\pi}\varphi_{\dot{\beta}}\varphi_{\dot{\alpha}})]. \tag{9.7.17}^*$$

由此可见，计及场的方程，应有守恒律

$$\overset{\mathfrak{P}^1}{\nabla}_{\mu}T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\mu}=0. \tag{II}$$

§9.8 核子在 (𝔊) 中的原型

本节里，我们要把中子及质子的 Dirac-Wheeler 方程推广成一般相对性的形式，并进一步引伸为第二类同位旋空间．因为质子及中子的静质量 k_p 及 k_n 相差甚少，故可代以同一个 k_*.

质子及中子的场量可以视为混合量 $\Psi_{A\dot{\alpha}}$，

$$(\overline{\Psi_{B\dot{\beta}}})\equiv(\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}_{\cdot\cdot})\eta_{A\dot{\alpha}}{}^{B\dot{\beta}}=\overline{\Psi}^{B\dot{\beta}}. \tag{9.8.1}$$

为简便起见，选 Lagrange 函数密度为

$$L=-\{\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\Psi_{B\dot{\alpha}}+k_{*}\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Psi_{A\dot{\alpha}}\}. \quad (9.8.2)$$

这时正粒子的场方程为

$$\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\Psi_{B\dot{\alpha}}+k_{*}\Psi_{A\dot{\alpha}}=0; \quad (9.8.3)$$

反粒子的场方程为

$$\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}-k_{*}\overline{\Psi}^{B\dot{\alpha}}=0. \quad (9.8.4)$$

这里得出的方程与前面提出的 Dirac 方程，由于 $\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\nu}$ 与 $\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\nu}$ 不全相同，并且场量是旋量和第二类同位旋量的混合量，所以会有重大的差别. 这可以解释为中子及质子为同一场 $\Psi_{A\dot{\alpha}}$ 在 (𝕊) 的切空间上之不同的投影.

定义

$$T^{\mu\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\equiv\frac{\partial L}{\partial\Psi_{B\dot{\alpha}}}\odot\Psi_{B\dot{\beta}}=-\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\Psi_{B\dot{\beta}} \quad (9.8.5)$$

为场 $\Psi_{A\dot{\alpha}}$ 的“同位旋”，则此“同位旋”的守恒律

$$\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}T^{\mu\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}=0 \quad (\mathrm{I})$$

由场的方程容易得证. 注意:

$$\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}=\overset{\mathfrak{S}}{\nabla}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}=0,$$

则
$$\begin{aligned}\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}T^{\mu\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}&=-\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\cdot\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\Psi_{B\dot{\alpha}}-\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Gamma^{\mu}{}_{A}{}^{B}\overset{\mathfrak{P}}{\nabla}{}_{\mu}\Psi_{B\dot{\beta}}\\&=k_{*}\overline{\Psi}^{B\dot{\alpha}}\Psi_{B\dot{\beta}}-k_{*}\overline{\Psi}^{A\dot{\alpha}}\Psi_{A\dot{\beta}}=0,\end{aligned}$$

守恒律得证!

参 考 文 献

[1] 李国平、郭友中，外微分形式及其应用，中国科学院数学计算技术研究所，1964.

[2] 李国平、郭友中，一般相对性量子场论(一)，湖北人民出版社，1980.

[3] de Rham, G., Variétés différentiables, formes, courants, formes harmonigues, Hermann, Paris, 1955.