裴忠平

现代量子场论导引

华中师范大学出版社

现代量子场论导引

裘忠平

1636946

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

现代量子场论导引

裘忠平

*

华中师范大学出版社出版发行

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所经销

咸宁市印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 230 千字

1992 年 3 月第 1 版 1992 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5622-0799-2/O・87

印数：1—2000 定价：5.00 元

内容简介

本书是一本简洁而实用的现代量子场论入门书. 全书共分两大部分：第一部分介绍传统量子场论的基本思想，内容包括场的拉格朗日形式、奈特定理及正则量子化；第二部分是全书的重点，主要阐述规范场论方法，内容包括路径积分量子化、协变微扰论、量子电动力学、量子色动力学、量子味动力学、重整化和拓扑孤子. 全书取材恰当、结构严谨、叙述清晰，可作为理论物理专业研究生的教学用书，亦可供理论物理工作者、高校教师和高年级大学生参考.

序

随着弱-电统一理论(量子味动力学 QFD)和量子色动力学(QCD)的成功,规范场论已经作为统一描述各种基本相互作用的标准理论而被普遍接受.但是,规范场论所用的方法——路径积分方法和传统的正则量子化方法很不相同.因而,学生在学完传统量子场论以后仍然不能阅读现代文献,必须再从头学习规范场论,延长了年轻理论工作者的培养周期.

如何直接用路径积分方法讲授量子场论,恰当处理传统的正则场论与现代规范场论的关系,是量子场论教学改革的重要问题.裘忠平同志的这本"现代量子场论导引"就是在探索这一问题的答案中的一个可喜的尝试.

直接用路径积分方法讲授量子场论之所以困难,主要在于路径积分方法比较抽象,不象正则量子化那样有具体的"粒子"图象.现在这本书采用了一种 巧妙的安排,很好地解决了这一问题.那就是:用正则量子化方法进述自由场的量子化,而用路径积分方法讲授场的相互作用.这样就使学生在建立了场的量子化的粒子图象以后,直接进入现代规范场论的学习,提高了效率,避免了许多不必要的弯路.这种处理也使得路径积分方法的独特优点得到了充分的发挥.

在选材方面这本书也下了一些功夫.去掉了一些与其它课程(例如相对论量子力学)重复的内容以及本课程内部的过多大致重复的内容(如标量、旋量、矢量场量子化的多次重复),加强了许多

现代的、有用的内容.在具体推导方面,相当详细,减少了学习的困难.

我相信这本书将会成为现代量子场论的一本很好的入门书.

刘连寿

猴年春于桂子山

前　言

本书是在作者近年来为华中师范大学理论物理专业研究生讲授量子场论和规范场论的讲义基础上整理撰写而成的.

近20年来,在量子场论中规范理论和泛函积分方法获得了迅速发展,日益成为理论物理工作者的必备知识.理论物理专业的研究生通常需在学习传统的量子场论基础上再进一步学习规范场论.为了使未来的理论物理工作者尽快掌握现代量子场论的思想和方法,作者深感有必要撰写一本关于现代量子场论的入门书,在阐述传统量子场论的基本思想后,着重讲授规范理论的原理和方法,努力做到使二者有机结合、相互呼应,兼顾研究工作对二者的需要.这个想法得到了刘连寿教授和李家荣教授的大力支持和鼓励.书稿完成后,刘连寿教授阅读了全书,提出了宝贵的修改意见.此外,在教学和写作过程中也曾得到北京大学物理系彭宏安教授的具体帮助和热情鼓励.作者在此对他们表示衷心的谢意.

沈坤、高燕敏、李农浩、张晓飞和吴元芳等同志为本书的排版和校对做了大量的工作;余汉香同志为本书绘制了全部插图.作者也在此对他们一并致谢.

裘忠平

1991年10月

目　录

第一章　引论 …… 1

1.1　自然单位制 …… 1

1.2　闵氏空间和洛仑兹群 …… 2

1.3　洛仑兹群的表示 …… 6

第二章　场的拉格朗日形式和奈特定理 …… 9

2.1　场的拉格朗日形式 …… 9

2.2　奈特定理 …… 13

第三章　正则量子化和粒子解释 …… 22

3.1　哈密顿形式和正则量子化 …… 22

3.2　实标量场 …… 25

3.3　复标量场 …… 33

3.4　狄拉克场 …… 35

3.5　电磁场 …… 54

第四章　场的相互作用和定域规范不变性 …… 64

4.1　场的相互作用概述 …… 64

4.2　$U(1)$定域规范不变性 …… 66

4.3　$SU(n)$ 定域规范不变性 …… 70

第五章　路径积分量子化 …… 77

5.1　量子力学的路径积分形式 …… 77

5.2　包含外源的路径积分 …… 80

5.3　标量场的路径积分形式 …… 85

5.4　狄拉克场的路径积分形式 …… 91

5.5　规范场的路径积分量子化 …… 97

第六章　协变微扰论（φ^4 理论） …… 109

6.1　有相互作用时的生成泛函和格林函数 …… 109

6.2 连通格林函数及其生成泛函 …… 116
6.3 正规顶角及其生成泛函 …… 119
6.4 鞍点展开和正规顶角的树图近似 …… 125
6.5 S 矩阵和约化公式 …… 130
6.6 微扰 S 矩阵和 S 矩阵元 …… 137
第七章 量子电动力学(QED) …… 142
7.1 QED 的微扰论和费曼规则 …… 142
7.2 跃迁几率、反应截面和衰变寿命 …… 147
7.3 康普顿散射 …… 154
7.4 Ward-Takahashi 恒等式 …… 158
7.5 发散困难与重整化概述 …… 162
7.6 原始发散图的维数正规化计算 …… 167
7.7 QED 的单圈重整化 …… 174
第八章 量子色动力学(QCD) …… 179
8.1 QCD 的微扰论和费曼规则 …… 179
8.2 BRS 变换和 Slavnov-Taylor 恒等式 …… 184
8.3 QCD 的单圈重整化 …… 191
8.4 重整化群方程和渐近自由 …… 202
第九章 对称性自发破缺和电弱统一的 W-S 模型 …… 208
9.1 真空简并和对称性自发破缺 …… 208
9.2 手征对称性和弱作用的 V-A 理论 …… 217
9.3 电弱统一的 W-S 模型 …… 220
9.4 't Hooft 规范和 W-S 模型的费曼规则 …… 230
第十章 真空简并和拓扑孤子 …… 251
10.1 1+1 维纽结 …… 251
10.2 同伦群简介 …… 255
10.3 1+2 维涡线 …… 259
10.4 狄拉克磁单极 …… 262
10.5 't Hooft-Polyakov 磁单极 …… 265
10.6 瞬子 …… 271
参考书目 …… 278

第一章 引 论

我们将要研究的量子场论是一种相对论量子理论，它所涉及的是各种场量在四维时空中的性质和相互作用. 为了使理论的数学结构和表述形式简洁和以后讨论的方便，作为准备，我们在这一章里将首先选定适当的单位制；然后，给出四维时空点的表示空间并对那些在今后的研究中起重要作用的参照系之间的变换群进行描述；最后，对场量在相应变换群下的不变性质和分类作些必要的讨论.

1.1 自然单位制

相对论中经常出现光速 c，它是高速运动的标志；量子力学中经常出现量子作用量 h，它是微观运动的标志. 在作为相对论量子理论的量子场论中，自然会经常出现 c 和 h. 为避免在公式和方程中重复出现 c 和 h 而采用一种新的单位制，约定 $c=h=1$ 作为基本单位的数值. 第三个单位通常选为能量，其单位为十亿电子伏特，记为 GeV. 这样确定的新单位制一般就称为自然单位制.

在自然单位制中，由于

$$[c]=1=[L]/[T]\,,$$
$$[h]=1=[E]\cdot[T]\,,$$
$$[E]=[M][c]^2=[M]\,,$$

故长度与时间的量纲相同，能量与质量的量纲相同，二者之间互为倒数：

$$[E]=[M]=[L]^{-1}=[T]^{-1}.$$

这使我们只需保留一个独立量纲，例如长度量纲或能量量纲.

现在来对比一下自然单位制和我们熟悉的 CGS 单位制(为了识别,已明显表出 c 和 $\hbar$).

CGS 单位制		自然单位制	
长度 L	厘米(cm)	速度 V	c
时间 T	秒(s)	作用量 A	$\hbar$
质量 M	克 (g)	能量 E	GeV

两种单位制的换算关系为

$$1\ c=(c)\text{cm}\cdot\text{s}^{-1},\qquad (c)=3.00\times 10^{10};$$

$$1\ \hbar=(\hbar)\text{g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-1},\qquad (\hbar)=1.05\times 10^{-27};$$

$$1\ \text{GeV}=(\varepsilon)\text{g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-2}\qquad (\varepsilon)=1.60\times 10^{-3};$$

或反过来,

$$1\ \text{cm}=(\varepsilon)\,(c)^{-1}(\hbar)^{-1}\,\text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar=5.05\times 10^{13}\,\text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar;$$

$$1\ \text{s}=(\varepsilon)\,(\hbar)^{-1}\,\text{GeV}^{-1}\cdot\hbar=1.52\times 10^{24}\,\text{GeV}^{-1}\cdot\hbar;$$

$$1\ \text{g}=(\varepsilon)^{-1}(c)^2\,\text{GeV}\cdot c^{-2}=0.562\times 10^{24}\,\text{GeV}\cdot c^{-2}.$$

在自然单位制中,长度 L、时间 T 和质量 M 的单位分别是

$$1\ \text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar=(\varepsilon)^{-1}(c)(\hbar)\ \text{cm}=0.198\times 10^{-13}\ \text{cm},$$

$$1\ \text{GeV}^{-1}\cdot\hbar=(\varepsilon)^{-1}(\hbar)\ \text{s}=0.658\times 10^{-24}\ \text{s},$$

$$1\ \text{GeV}\cdot c^{-2}=(\varepsilon)(c)^{-2}\,\text{g}=1.78\times 10^{-24}\,\text{g}.$$

采用自然单位制后,由于 $c=\hbar=1$,所有表达式中将不再明显出现 c 和 $\hbar$. 例如,在自然单位制中,时空点的坐标被表示为 $x=(t,\boldsymbol{x})$,量子对易关系被表示为 $[x^i,p^j]=i\delta^{ij}$. 在某些特殊情形下,有时我们需要明显表示出 $\hbar$ 或 c,这时可从自然单位制的表达式出发,通过简单的量纲分析确定出式中暗含的 $\hbar$ 或 c. 例如,在上面的量子对易关系中,左边是长度和动量的乘积,具有角动量量纲,故知右边应暗含一个 $\hbar$.

1.2 闵氏空间和洛仑兹群

在理论的相对论协变描述中,时空是对称的,时间坐标和空间

坐标统一用四维空间的矢量来描写. 由于选用的度规张量不同，一般流行的有闵氏空间度规和欧氏空间度规两种描写法. 前者可避免引进虚数，但要区分逆变量与协变量；后者可不区分逆变量与协变量，但需引进虚数. 我们将采用闵氏空间度规. 闵氏空间的时空点 x 用逆变坐标表示：

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \boldsymbol{x}). \tag{1.2.1}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 定义为

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \\ &g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

引进协变坐标

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{1.2.3}$$

这里及以后都采用重复指标表示对所有可能取值求和的约定. 于是有

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\boldsymbol{x}). \tag{1.2.4}$$

$g_{\mu\nu}$ 的逆记为 $g^{\mu\nu}$，它满足

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = g_\lambda{}^\nu = \delta_\lambda{}^\nu, \tag{1.2.5}$$

其中 $\delta_\lambda{}^\nu = \begin{cases} 1 & (\lambda = \nu) \\ 0 & (\lambda \neq \nu) \end{cases}$ 为克罗内克 δ 符号. 易见

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \tag{1.2.6}$$

于是也可写

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = g^\mu_\nu \, x^\nu, \tag{1.2.7}$$

因此，度规张量也起了升降指标的作用.

闵氏空间中，矢量 x 和 y 的标量积定义为

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, \tag{1.2.8}$$

因而时空间隔可表示为

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = t^2 - \boldsymbol{x}^2. \tag{1.2.9}$$

对微分算符，自然地定义

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \tag{1.2.10}$$

和

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right). \qquad (1.2.11)$$

而达朗贝算符表示为

$$-\Box = \partial^\mu\partial_\mu = g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \qquad (1.2.12)$$

闵氏空间的洛仑兹变换定义为

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_\nu, \qquad (1.2.13)$$

其中实变换矩阵 $\Lambda_{\mu\nu}$ 满足正交性条件

$$\Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\mu\lambda} = g_\nu{}^\lambda. \qquad (1.2.14)$$

容易验证，标量积(1.2.8)在洛仑兹变换下是不变的.

所有洛仑兹变换的集合形成一个群，称为洛仑兹群. 从式(1.2.14)可以推得

$$\det\Lambda = \pm 1; \quad \Lambda^{00} \geqslant 1 \text{ 或 } \Lambda^{00} \leqslant -1. \qquad (1.2.15)$$

由此可见，洛仑兹群被分成四叶. 其中 $\det\Lambda = -1$的例子是时间反演 $\mathscr{T}$ 和空间反射 $\mathscr{P}$（宇称变换）：

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathscr{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2.16)$$

洛仑兹群的正时连通部分满足

$$\det\Lambda = 1, \quad \Lambda^{00} \geqslant 1; \qquad (1.2.17)$$

称为正规洛仑兹群，它包括通常的空间转动和时空纯洛仑兹转动（相对于原坐标系以某一速度运动的变换）. 正规洛仑兹群加上空间反射形成的群称为完全洛仑兹群. 如果再加上时间反演，则称为一般洛仑兹群.

在物理上起重要作用的是由完全洛仑兹群变换与沿时空坐标轴的平移变换

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.2.18}$$

一起形成的所谓彭加勒群(非齐次洛仑兹群).通常称彭加勒群变换下的不变性为相对论不变性,而称洛仑兹群变换下的不变性为洛仑兹不变性.

在闵氏空间中,任一矢量 $A=(A^\mu)$ 的长度平方是其自身的标量积:

$$A^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = A^\mu A_\mu = A^{02} - \boldsymbol{A}^2. \tag{1.2.19}$$

我们称它是

1) 类时的,如果 $A^2 > 0$;

2) 类空的,如果 $A^2 < 0$;

3) 类光的,如果 $A^2 = 0$.

很清楚,矢量的上述特征是洛仑兹不变的.特别地,如果时空间隔 $x-y$ 是类时(空、光)的,则称它为类时(空、光)间隔.类空间隔的两个点 x、y 是不可能以因果方式(例如光信号)相联系的,而类时间隔的两个点则是因果相关的.

闵氏空间中的三维超曲面 Σ 也可按其法向矢量是处处类时(空)的而定义为类空(时)超曲面.类空超曲面是等时面的协变推广.特别简单的类空超曲面是平直的,它满足方程

$$n_\mu(x)x^\mu - \tau = 0, \tag{1.2.20}$$

其中 $n_\mu(x)$ 是曲面的法向单位矢量,且是类时的,具有 $n_\mu n^\mu = 1$;τ 是个常数,它表示该平直曲面到原点的距离.一个特殊情形是所谓的等时超平面,即所有满足 $x^0 = t =$ 常数的时空点 x 的集合.这时,$n^0 = 1$, $n^k = 0(k = 1,2.3)$,而 $\tau = t$.

任意超曲面 Σ 的面元 $\mathrm{d}\sigma_\mu(x) \equiv n_\mu(x)\mathrm{d}\sigma$ 定义为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\sigma_0 = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \equiv \mathrm{d}^3x, \\ \mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3, \\ \mathrm{d}\sigma_2 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3, \\ \mathrm{d}\sigma_3 = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2. \end{cases} \tag{1.2.21}$$

特别，在等时超平面的情形下，$d\sigma_k = 0$.

闵氏空间的四维体元定义为

$$d^4x \equiv dx = dx^0dx^1dx^2dx^3 = dt\, d^3x. \qquad (1.2.22)$$

由于 $\det\Lambda=1$，它在洛仑兹变换下是不变的.

闵氏空间中的四维高斯定理表示为

$$\int_R dx\, \partial_\mu F^{\mu\cdots}(x) = \int_\Sigma d\sigma_\mu(x)\, F^{\mu\cdots}(x), \qquad (1.2.23)$$

其中 R 是任意四维体积，超曲面 Σ 是包围 R 的边界.

1.3 洛仑兹群的表示

我们将要仔细研究的场作为无穷多自由度的连续的力学系统，在数学上表现为时空点 x 的连续函数，可记为 $\Phi(x)$，它可以是单分量的，也可以是多分量的. 显然，时空坐标的变换必将引起场量 $\Phi(x)$的相应变换. 我们感兴趣的是 $\Phi(x)$在彭加勒群变换下的变换规律.

首先我们指出，在时空平移变换(1.2.18)下，所有各种场量都保持不变：

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = \Phi(x). \qquad (1.3.1)$$

这是时空均匀性的结果，它表示所有物理规律不因时间、地点而异.

其次讨论完全洛仑兹变换. 在变换(1.2.13)下，场量的各个分量相应地有一线性齐次变换

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = L(\Lambda)\Phi(x), \qquad (1.3.2)$$

其中变换矩阵 $L(\Lambda)$完全由洛仑兹变换的矩阵 Λ 确定(即依赖于 Λ 的参数).

每一个洛仑兹变换 Λ 相应于一个矩阵 $L(\Lambda)$. 群 Λ 的单位元素相应于一个单位矩阵 $L=I$，而两个元素 Λ_1 和 Λ_2 的乘积相应于 $L(\Lambda_1\Lambda_2) = L(\Lambda_1)L(\Lambda_2)$. 具有上述性质的一系列矩阵 L 称为是群

Λ 的线性表示. 有限阶矩阵 L 形成洛仑群 Λ 的有限维表示. 表示的维数由矩阵 L 的维数即场量 Φ 的分量数确定.

场量的可能类型和它们的变换规律可以从研究洛仑兹群的有限维(不可约)表示得到. 根据群表示理论,洛仑兹群的有限维表示可以是单值的或双值的,即 $\Lambda\to L(\Lambda)$ 的对应可以是单值的或双值的. 双值表示对物理学的重要性在于,一般说来,场量不是直接可观察的,按双值表示变换的场,其可观察量总被表示成场量的二次型组合,而可观察量在洛仑兹变换下以完全唯一的方式变换. 因此,有两类洛仑兹群的表示,第一类由 $\Lambda\to L(\Lambda)$ 的单值对应标志,称为(赝)张量表示(张量与赝张量的区别与空间反射下的性质有关,将在这一节的最后加以说明). 按(赝)张量表示变换的量叫做(赝)张量. 第二类由 $\Lambda\to\pm L(\Lambda)$ 的双值对应标志,称为旋量表示,按旋量表示变换的量叫做旋量.

在洛仑兹变换(1.2.13)下,n 阶(赝)张量 $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x)$ 的变换规律为

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(x')=\Lambda_{\nu_1}{}^{\mu_1}\Lambda_{\nu_2}{}^{\mu_2}\cdots\Lambda_{\nu_n}{}^{\mu_n}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}(x). \tag{1.3.3}$$

作为特例,一阶(赝)张量 $V^\mu(x)$ 的变换规律为

$$V'^{\mu}(x')=\Lambda^\mu_\nu V^\nu(x), \tag{1.3.4}$$

这与坐标系的变换(1.2.13)相同. 通常称一阶(赝)张量为(赝)矢量. 零阶(赝)张量 $S(x)$ 是洛仑兹不变量:

$$S'(x')=S(x), \tag{1.3.5}$$

通常也称它为(赝)标量.

旋量的变换规律有更复杂的结构. 最简单也最常用的自旋为1/2的旋量(狄拉克旋量)在变换(1.2.13)下的变换矩阵 $L(\Lambda)$ 为

$$L(\Lambda)=\exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu}\right), \tag{1.3.6}$$

其中 $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$,$\gamma^\mu$ 是4×4的 γ-矩阵(见第二章).

现在再来讨论空间反射变换 $\mathscr{P}$,由(1.2.16),它使空间轴都

变号而保持时间轴不变：

$$x \to x' = \mathscr{P}\, x = (x^0, -\boldsymbol{x}). \tag{1.3.7}$$

由于两次应用空间反射等效于单位算符（$\mathscr{P}^2 = I$）的作用以及考虑到张量表示的单值性，故在空间反射下，张量$T(x)$的分量的变换只能有两种形式：

$$\mathscr{P}\, T(x) = \pm T(x). \tag{1.3.8}$$

在空间反射下不变号的零阶张量$S(x)$称为标量：

$$\mathscr{P}\, S(x) = S(x); \tag{1.3.9}$$

而改变符号的称为赝标量：

$$\mathscr{P}\, S(x) = -S(x). \tag{1.3.10}$$

在空间反射下，其空间分量变号但时间分量不变号的一阶张量称为矢量（极矢量）：

$$\mathscr{P}\, V^0(x) = V^0(x), \quad \mathscr{P}\, \boldsymbol{V}(x) = -\boldsymbol{V}(x). \tag{1.3.11a}$$

或利用协变、逆变矢量统一写为

$$\mathscr{P}\, V^\mu(x) = V_\mu(x). \tag{1.3.11b}$$

反之，其空间分量不变号但时间分量变号的称为赝矢量（轴矢量）：

$$\mathscr{P}\, V^0(x) = -V^0(x), \quad \mathscr{P}\, \boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{V}(x), \tag{1.3.12a}$$

或统一表为

$$\mathscr{P}\, V^\mu(x) = -V_\mu(x). \tag{1.3.12b}$$

类似地，可定义二阶张量为

$$\mathscr{P}\, T^{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x), \tag{1.3.13}$$

二阶赝张量为

$$\mathscr{P}\, T^{\mu\nu}(x) = -T_{\mu\nu}(x), \tag{1.3.14}$$

等等.

第二章　场的拉格朗日形式和奈特定理

量子场论是关于粒子及其相互作用的物理理论，它的基本出发点在于假定各种粒子是相应量子场的量子激发. 量子场是由经典场通过量子化而得到的. 因此，作为基础，这一章将讨论经典场论的一般原理. 由于场的拉格朗日形式在对称性、量子化和相互作用的了解中起着十分重要的作用，我们的讨论将从建立场的拉格朗日形式开始；接着利用它来研究普遍的对称性和守恒律.

2.1　场的拉格朗日形式

场的概念是与空间的物质分布相联系的. 从力学观点看，场是一个具有无穷多自由度的动力学体系. 因此，场的拉格朗日形式可简单地通过把经典力学的拉格朗日形式推广到具有无穷多自由度的系统而得到.

(一) 经典力学的拉格朗日形式

分析力学指出，任何力学系统都存在一个拉氏量 L，它决定系统的运动方程. 例如，单自由度粒子的动力学由拉氏量

$$L(t) = L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{2.1.1}$$

确定，其中 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$ 表示粒子在 t 时刻的广义坐标和广义速度. 相应的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\mathrm{d}t, \tag{2.1.2}$$

其中积分取在从 $q(t_1)$ 到 $q(t_2)$ 的整个路径上.

考虑路径的一个任意变分：

$$q(t) \to q'(t) = q(t) + \delta q(t). \tag{2.1.3}$$

假设路径的端点是固定的，即

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0, \tag{2.1.4}$$

由此引起的作用量的变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了变分和微分可交换次序及乘法的微分规则. 注意方括号中的第二项积分后仅取端点的值，而由(2.1.4)，它为0. 故

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,\mathrm{d}t. \tag{2.1.5}$$

根据最小作用量原理，粒子的实际运动使 S 取极小值，即要求 $\delta S=0$，而变分 δq 是任意的，结果得到拉格朗日运动方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{2.1.6}$$

可直接把上述单粒子的拉格朗日形式推广到多粒子体系. 对 n 自由度体系，其拉氏量可写为

$$\begin{aligned}L(t) &= L(q_1(t),\cdots,q_n(t);\dot{q}_1(t),\cdots,\dot{q}_n(t)) \\ &= L(q_\alpha(t),\dot{q}_\alpha(t)),\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

相应的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t),\dot{q}_\alpha(t))\mathrm{d}t. \tag{2.1.8}$$

同样由 $\delta S=0$，可推得拉格朗日运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,n). \tag{2.1.9}$$

（二）场的拉格朗日形式

为了便于与经典情形类比，我们从场的离散形式着手. 对于场 $\varphi(x) \equiv \varphi(t,\boldsymbol{x})$，可把其空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 看成是自由度编号，而对应的场量 $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ 则看作是广义坐标. 离散化的方法是，将空间分成 n^3 个小格，第 i 个小格的体积元记为 Δv_i，对应于这个小格的场的广义坐标 $\varphi_i(t)$ 将取为场量 $\varphi(x)$ 在这个小格中的平均值，即

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i}\int_{\Delta v_i}\varphi(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x, \tag{2.1.10}$$

对应的广义速度是

$$\dot{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i}\int_{\Delta v_i}\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x. \tag{2.1.11}$$

对于连续分布的场，有

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = \varphi(t,\boldsymbol{x}) + \nabla\varphi(t,\boldsymbol{x})\cdot\Delta\boldsymbol{x}, \tag{2.1.12}$$

由此可求得相邻小格中场的平均值为

$$\varphi_{i+1}(t) = \varphi_i(t) + \nabla\varphi_i(t)\cdot\Delta\boldsymbol{x}. \tag{2.1.13}$$

可见，相邻小格的场量由该格的场量及其空间导数表示，它反映了理论的定域性. 因此，把第 i 个小格看成是一个子系统，它的拉氏量 L_i 依赖于自身及其相邻小格，由(2.1.13)可一般地把它表示为

$$L_i(t) = L_i(\varphi_i(t);\dot{\varphi}_i(t),\nabla\varphi_i(t)), \tag{2.1.14}$$

而

$$\mathscr{L}_i(t) = \frac{L_i(t)}{\Delta v_i} \tag{2.1.15}$$

则表示第 i 个小格的平均拉氏量密度. 在 $\Delta v_i \to 0$ 时，$\mathscr{L}_i$ 的极限

$$\mathscr{L}(x) = \lim_{\Delta V_i\to 0}\mathscr{L}_i(t) = \mathscr{L}(\varphi(t,\boldsymbol{x});\dot{\varphi}(t,\boldsymbol{x}),\nabla\varphi(t,\boldsymbol{x}))$$

$$\equiv \mathscr{L}(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)) \tag{2.1.16}$$

称为场的拉氏量密度或拉格朗日. 因此，场的总拉氏量为

$$L(t) = \sum_i L_i(t) = \sum_i \mathscr{L}_i(t)\Delta v_i, \tag{2.1.17a}$$

或取 $\Delta v_i \to 0$ 的连续极限得到

$$L(t) = \int \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \mathrm{d}^3 x. \qquad (2.1.17b)$$

而场的作用量为

$$S = \int L(t) \mathrm{d}t = \int \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \mathrm{d}x. \qquad (2.1.18)$$

可以看出，在场论中拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 起了主要作用.

场的运动方程可从最小作用量原理推导出来. 假设场的边界保持不变，且在边界上场的变分 $\delta\varphi(x)=0$，则由场的变分所产生的作用量的变分为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi}\delta(\partial_\mu \varphi)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi}\delta\varphi\right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi}\right)\delta\varphi\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi}\right)\delta\varphi \mathrm{d}x, \qquad (2.1.19)\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了 $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$ 和乘法微分规则，第三个等式利用了公式(1.2.23)和边界上 $\delta\varphi=0$的条件. 根据最小作用量原理，应使(2.1.19)中的 $\delta S=0$，再由 $\delta\varphi$的任意性立该得到场的拉格朗日运动方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi(x)} = 0. \qquad (2.1.20)$$

可直接把上述结果推广到多分量场 $\varphi_a(x)$ $(a=1,2,\cdots,n)$. 这时场的拉氏量密度可定义为

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(\cdots\varphi_a(x)\cdots, \cdots\partial_\mu\varphi_a(x)\cdots), \qquad (2.1.21)$$

场的拉格朗日运动方程为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} = 0 \quad (a = 1,2,\cdots,n). \qquad (2.1.22)$$

最后，在结束这一节之前，还须着重指出的是，从(2.1.18)可以看出，在场论中，拉氏量 $L(t)$仅起了中间作用，而主要角色由拉

氏量密度 $\mathscr{L}(x)$ 扮演，因此简要地列出量子场论对拉氏量密度所隐含的主要要求是有用的：

1) 理论的相对论不变性和定域性要求 $\mathscr{L}$ 仅是场量 $\varphi_\alpha(x)$ 及其导数的函数而不明显地依赖于 x. 考虑到要使得到的运动方程不高于二阶，L 应是 φ_α 和它的一阶导数的函数，即(2.1.21)所示的形式.

2) 由于系统的物理特性由作用量 S 确定，而 $\mathscr{L}$ 仅是被积函数，故 $S\to\mathscr{L}$ 的对应不是唯一的. 对于彼此差一个四维全散度的拉氏量密度在物理上是等效的，即如

$$\mathscr{L}'(x)=\mathscr{L}(x)+\partial_\mu F^\mu(x), \qquad (2.1.23)$$

则 $\mathscr{L}'$ 与 $\mathscr{L}$ 描述同一个物理.

3) $\mathscr{L}$ 应该是实的(量子情形下是厄米的)和相对论不变的(即只能是标量或赝标量). 前者导致系统的动力学变量如能量、动量等是实的以及散射矩阵是么正的；后者保证了作用量的相对论不变性.

2.2 奈特定理

拉格朗日形式为研究场系统在连续变换下的对称性提供了一个方便而又完整的方法，其结果可表述为下述的奈特定理：

如果作用量 S 在关于时空坐标 x^μ 和场量 $\varphi_\alpha(x)$ 的某种连续变换下是不变的，则一定存在着相应的守恒律和守恒量.

奈特定理在场论和粒子物理中起了重要作用. 它把自然界中观察到的选择规则直接表现为对拉氏量密度的某种对称性要求，对于引进适当的相互作用项以发展新的理论模型有积极的指导意义. 在这一节里，我们将首先推导它的普遍表达式，然后把它应用于一些特定的变换以导出场的一些重要的动力学守恒量，如能量、动量、角动量和各种荷等.

(一) 奈特定理的证明

设场 $\varphi_a(x)$ 分布在空间无限延伸的时空区域 R 上，其初、末类空超曲面可以取为等时面 $\Sigma_1(t=t_1)$ 和 $\Sigma_2(t=t_2)$，它们组成 R 边界 Σ 的一部分，Σ 的其余部分是在 $x=\pm\infty$ 处与 Σ_1 和 Σ_2 适当连接以包围 R 的非类空超曲面 $\Sigma_3(x=\pm\infty)$，即

$$\Sigma=\Sigma_1(t=t_1)+\Sigma_2(t=t_2)+\Sigma_3(x=\pm\infty). \quad (2.2.1)$$

值得提醒的是在 $x=\pm\infty$ 处自然要求场为0.

使时空坐标 x^μ 和场量 $\varphi_a(x)$ 都有一无限小变更：

$$\begin{cases} x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, & (2.2.2a) \\ \varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x). & (2.2.2b) \end{cases}$$

需要特别指出的是，(2.2.2b)所定义的场变分 $\delta\varphi_a(x)$ 通常称为全变分，它可以分解为两部分：

$$\begin{aligned} \delta\varphi_a(x) &= \varphi'_a(x') - \varphi_a(x) \\ &= \varphi'_a(x') - \varphi_a(x') + \varphi_a(x') - \varphi_a(x) \\ &= \delta_\varphi\varphi_a + \delta_x\varphi_a, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

其中

$$\delta_\varphi\varphi_a(x) = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) \quad (2.2.4)$$

仅由场量自身的改变所引起，通常称为泛函变分；而

$$\delta_x\varphi_a = \varphi_a(x') - \varphi_a(x) = \partial_\mu\varphi_a(x)\delta x^\mu \quad (2.2.5)$$

是通常的函数微分. 还有一点需要说明的是，单纯由于时空坐标 x^μ 的变换一般就能导致场量的类似于 (2.2.2b) 形式的改变 [参见(1.3.2)]，故这里(2.2.4)所表示的泛函变分实际上包含了两方面的贡献，其一来源于单纯场量的改变，其二由坐标变换所引起.

在变换(2.2.2)下，作用量的变分是

$$\delta S = \int_{R'} \mathscr{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu\varphi'_a(x'))\mathrm{d}x' - \int_R \mathscr{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu\varphi_a(x))\mathrm{d}x. \quad (2.2.6)$$

对上式右边第一个积分作积分变量代换

$$dx' = J\left(\frac{x'}{x}\right) dx, \tag{2.2.7}$$

其中

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \tag{2.2.8}$$

是变换的雅可比式，于是(2.2.6)可变为

$$\delta S = \int_R (\delta \mathscr{L} + \mathscr{L} \partial_\mu \delta x^\mu) dx, \tag{2.2.9}$$

其中

$$\delta \mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu \varphi'_a(x')) - \mathscr{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)). \tag{2.2.10}$$

仿照(2.2.3)，它可以分解为两部分：

$$\delta \mathscr{L} = \delta_\varphi \mathscr{L} + \delta_x \mathscr{L}, \tag{2.2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta_x \mathscr{L} &= \mathscr{L}(\varphi_a(x'), \partial'_\mu \varphi_a(x')) - \mathscr{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x)) \\ &= (\partial_\mu \mathscr{L}) \delta x^\mu, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned}\delta_\varphi \mathscr{L} &= \mathscr{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu \varphi'_a(x')) - \mathscr{L}(\varphi_a(x'), \partial'_\mu \varphi_a(x')) \\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} \delta_\varphi \varphi_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_\varphi (\partial_\mu \varphi_a) \\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_a} \delta_\varphi \varphi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_\varphi \varphi_a\right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a}\right) \delta_\varphi \varphi_a \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_\varphi \varphi_a\right), \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

最后一步利用了场方程(2.1.22)．把(2.2.11～13)代入(2.2.9)得到

$$\delta S = \int_R \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta_\varphi \varphi_a + \mathscr{L} \delta x^\mu\right] dx. \tag{2.2.14}$$

利用(2.2.3)和(2.2.5)，并记

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \partial^\nu \varphi_a - g^{\mu\nu} \mathscr{L}, \tag{2.2.15}$$

可把(2.2.14)改写为

$$\delta S = \int_R \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right] \mathrm{d}x. \tag{2.2.16}$$

一般地，如果有 l 个表征变换(2.2.2)的无穷小参数 ω_β（与 x 无关），$\beta = 1, 2, \cdots, l$，必可表示

$$\delta x_\nu = X_\nu^\beta \omega_\beta, \qquad \delta \varphi_a = \Psi_a^\beta \omega_\beta. \tag{2.2.17}$$

把它代入(2.2.16)，并记

$$J^{\mu\beta} = T^{\mu\nu} X_\nu^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \Psi_a^\beta, \tag{2.2.18}$$

通常称之为奈特流，我们有

$$\begin{aligned} \delta S &= -\omega_\beta \int_R \partial_\mu J^{\mu\beta} \mathrm{d}x \\ &= -\omega_\beta \int_\Sigma J^{\mu\beta} \mathrm{d}\sigma_\mu \\ &= -\omega_\beta \left(\int_{\Sigma_1} J^{\mu\beta} \mathrm{d}\sigma_\mu - \int_{\Sigma_2} J^{\mu\beta} \mathrm{d}\sigma_\mu \right) \\ &= -\omega_\beta \left(\int_V J^{0\beta} \mathrm{d}^3 x \Big|_{t=t_1} - \int_V J^{0\beta} \mathrm{d}^3 x \Big|_{t=t_2} \right), \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

其中，第二个等式利用了(1.2.23)；第三个等式利用了(2.2.1)，并考虑到 $x = \pm\infty$ 处场为0，因而对 Σ_3 的积分为0；二个积分反号是由于 Σ_1 和 Σ_2 有不同的取向；第四个等号利用了(1.2.21)在等时面情形 $\mathrm{d}\sigma_t = 0$，V 是场的空间体积.

定义奈特荷

$$Q^\beta(t) = \int_V J^{0\beta} \mathrm{d}^3 x, \tag{2.2.20}$$

则(2.2.19)可改写为

$$\delta S = -\omega_\beta (Q^\beta(t_1) - Q^\beta(t_2)). \tag{2.2.21}$$

在变换(2.2.2)下，如果作用量 S 保持不变，即 $\delta S = 0$，则从(2.2.21)，由 ω_β 的任意性推得

$$Q^\beta(t_1) = Q^\beta(t_2). \tag{2.2.22}$$

由于 t_1、t_2 的选取是相当任意的，故知 Q^β ($\beta=1,2,\cdots,l$) 为对称变换(2.2.2)下的不变量或守恒量. 顺便指出，由(2.2.18)表示的奈特流满足

$$\partial_\mu J^{\mu\beta} = 0, \tag{2.2.23}$$

这可从(2.2.19)的第一个等式令 $\delta S=0$ 得到. 奈特定理到此证毕.

下面，我们把奈特定理分别应用于时空的平移变换、洛仑兹变换和场量的内部变换.

(二) 时空平移不变性和能量动量守恒

无穷小时空平移变换可表为

$$x^\nu \to x'^\nu = x^\nu + \omega^\nu, \tag{2.2.24}$$

其中 ω^ν 为与时空无关的无穷小参量. 这时有

$$\delta x_\nu = \omega_\nu = g^\beta_\nu \omega_\beta, \tag{2.2.25}$$

以及从(1.3.1)知

$$\delta\varphi_a = \varphi'_a(x') - \varphi_a(x) = 0. \tag{2.2.26}$$

把它们与(2.2.17)对照，即得现在的 X^β_ν 和 Ψ^β_a 为

$$X^\beta_\nu = g^\beta_\nu; \quad \Psi^\beta_a = 0. \tag{2.2.27}$$

把它代入(2.2.18)并由(2.2.15)得到奈特流为

$$\begin{aligned} J^{\mu\beta} &= T^{\mu\beta} \\ &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \partial^\beta \varphi_a - g^{\mu\beta} \mathscr{L}. \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

相应的奈特荷可从(2.2.20)得到，记为 P^ν：

$$P^\nu = \int J^{0\nu} \mathrm{d}^3x = \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \partial^\nu \varphi_a - g^{0\nu} \mathscr{L} \right) \mathrm{d}^3x, \tag{2.2.29}$$

它是守恒的.

现在我们来说明 P^ν 就是场的能量动量四矢量，因而也称 $T^{\mu\nu}$ 为能量动量张量. 由于能量动量组成一个洛仑兹四矢量，故我们只需说明 P^ν 的零分量是场的能量就行了. 事实上，由(2.2.29)，有

$$P^0 = \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \dot{\varphi}_a - \mathscr{L} \right) \mathrm{d}^3 x. \tag{2.2.30}$$

把它与多粒子系统的哈密顿函数 $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \dot{q}_\beta - L$ 比较，即知 P^0 就是场系统的总能量或哈密顿，而

$$\mathscr{H} = T^{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \dot{\varphi}_a - \mathscr{L} \tag{2.2.31}$$

是场的能量密度或哈密顿密度.

（三）洛仑兹不变性和角动量守恒

无限小洛仑兹变换可表示为

$$x_\nu \to x'_\nu = x_\nu + \omega_{\nu\mu} x^\mu, \tag{2.2.32}$$

其中 $\omega_{\nu\mu}$ 是与时空无关的无穷小参数. 利用洛仑兹变换矩阵的正交性条件(1.2.14)容易证明 $\omega_{\nu\mu}$ 是反对称的，即

$$\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}, \tag{2.2.33}$$

故只有六个独立参数，可以利用双指标选定它们为

$$\omega_{(\nu\mu)} = \omega_{\nu\mu} \quad (\nu < \mu), \tag{2.2.34}$$

它们表示了 $x_\nu x_\mu$ 平面上的无限小转角. 这样，公式(2.2.17～23)中的指标 β 现在由双指标$(\nu\mu)(\nu<\mu)$表示. 注意，在下面的表达式中，遇到双指标$(\rho\sigma)$时，重复指标仍表示求和，但只对 $\rho<\sigma$ 的那些项进行. 现在，我们可以表示(2.2.17)的 δx_ν 和 $\delta\varphi_a$ 为

$$\delta x_\nu = X_\nu^{(\rho\sigma)} \omega_{(\rho\sigma)}, \quad \delta\varphi_a = \Psi_a^{(\rho\sigma)} \omega_{(\rho\sigma)}. \tag{2.2.35}$$

而由(2.2.32)，有

$$\begin{aligned}
\delta x_\nu &= \omega_{\rho\sigma} x^\sigma \\
&= x^\sigma g_\nu^{\ \rho} \omega_{\rho\sigma} \\
&= x^\sigma g_\nu^{\ \rho} \left(\omega_{\rho\sigma}(\rho < \sigma) + \omega_{\rho\sigma}(\rho > \sigma) \right) \\
&= x^\sigma g_\nu^{\ \rho} \left(\omega_{\rho\sigma}(\rho < \sigma) - \omega_{\sigma\rho}(\rho > \sigma) \right) \\
&= (x^\sigma g_\nu^{\ \rho} - x^\rho g_\nu^{\ \sigma}) \omega_{\rho\sigma}(\rho < \sigma) \\
&= (x^\sigma g_\nu^{\ \rho} - x^\rho g_\nu^{\ \sigma}) \omega_{(\rho\sigma)},
\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

其中第四个等式利用了(2.2.33)，最后一个等式利用了(2.2.34)．把(2.2.36)与(2.2.35)的第一式比较得到

$$X_{\nu}^{(\rho\sigma)} = x^{\sigma}g_{\nu}^{\ \rho} - x^{\rho}g_{\nu}^{\ \sigma} \quad (\rho < \sigma). \tag{2.2.37}$$

再来求 $\Psi_a^{(\alpha\beta)}$ 在无限小洛仑兹变换(2.2.32)下，由(1.3.2)，场量的相应变换为

$$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = L(\omega)_a^{\ b}\varphi_b(x), \tag{2.2.38}$$

其中无限小变换矩阵 $L(\omega)_a^{\ b}$ 的一般形式可写为

$$L(\omega)_a^{\ b} = \delta_a^{\ b} + \Sigma_a^{(\rho\sigma)b}\omega_{(\rho\sigma)}, \tag{2.2.39}$$

矩阵 $\Sigma^{(\rho\sigma)}$ 对不同自旋的场有不同的形式，它依赖于场的洛仑兹群表示．例如

1) 对标量场，由(1.3.5)知

$$\Sigma^{(\rho\sigma)} = 0; \tag{2.2.40}$$

2) 对矢量场，由(1.3.4)可推得

$$\Sigma_{\mu}^{(\rho\sigma)\nu} = \delta_{\mu}^{\rho}g^{\nu\sigma} - \delta_{\mu}^{\sigma}g^{\nu\rho} \quad (\rho < \sigma); \tag{2.2.41}$$

对旋量场由于其表示的双值性，在物理描述中还须引进共轭场，其 $\Sigma^{(\rho\sigma)}$ 的形式将在3.4节中讨论．

利用(2.2.38～39)，我们有

$$\delta\varphi_a = \Sigma_a^{(\rho\sigma)b}\varphi_b\omega_{(\rho\sigma)}; \tag{2.2.42}$$

与(2.2.35)的第二式对照即得

$$\Psi_a^{(\rho\sigma)} = \Sigma_a^{(\rho\sigma)b}\varphi_b \quad (\rho < \sigma). \tag{2.2.43}$$

把(2.2.27)和(2.2.43)代入(2.2.18)得到洛仑兹变换下的奈特流，通常称之为总角动量张量，可表示为

$$J^{\mu(\rho\sigma)} = M^{\mu(\rho\sigma)} + S^{\mu(\rho\sigma)}, \tag{2.2.44a}$$

$$M^{\mu(\rho\sigma)} = T^{\mu\rho}x^{\sigma} - T^{\mu\sigma}x^{\rho} \quad (\rho < \sigma); \tag{2.2.44b}$$

$$S^{\mu(\rho\sigma)} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\varphi_a}\Sigma_a^{(\rho\sigma)b}\varphi_b \quad (\rho < \sigma); \tag{2.2.44c}$$

其中 $M^{\mu(\rho\sigma)}$ 项是坐标和能量动量的乘积，它相应于场的轨道角动量部分；$S^{\mu(\rho\sigma)}$ 项中的 $\Sigma^{(\rho\sigma)}$ 表征了场的极化性质，故相应于场的自旋角动量部分．

由(2.2.20)和(2.2.44)可得到相应的奈特荷，记为 $J^{(\rho\sigma)}$：

$$J^{\mu(\rho\sigma)}=\int M^{0(\rho\sigma)}\mathrm{d}^3x+\int S^{0(\rho\sigma)}\mathrm{d}^3x$$

$$=M^{(\rho\sigma)}+S^{(\rho\sigma)}, \qquad (2.2.45a)$$

$$M^{(\rho\sigma)}=\int(T^{0\rho}x^{\sigma}-T^{0\sigma}x^{\rho})\mathrm{d}^3x \quad (\rho<\sigma), \qquad (2.2.45b)$$

$$S^{(\rho\sigma)}=-\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\Sigma_a{}^{(\rho\sigma)b}\varphi_b\mathrm{d}^3x \quad (\rho<\sigma). \qquad (2.2.45c)$$

通常称 $J^{(\rho\sigma)}$ 为场的广义角动量，它们是守恒的，其中 $M^{(\rho\sigma)}$ 与轨道运动有关，通常称为轨道角动量. 更准确地说，其空空分量是轨道角动量，而时空分量与质心运动有关. $S^{(\rho\sigma)}$ 与场的自旋有关，通常称为自旋角动量.

把式(2.2.40)和(2.2.41)分别代入式(2.2.45c)，我们得到相应场的自旋角动量为：

对标量场

$$S^{(\rho\sigma)}=0; \qquad (2.2.46)$$

对矢量场

$$S^{(\rho\sigma)}=\int\mathrm{d}^3x\left(\varphi^{\rho}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\sigma}}-\varphi^{\sigma}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\rho}}\right). \qquad (2.2.47)$$

（四）内部变换不变性与荷守恒

多分量场 $\varphi(x)$ 的无限小内部变换或第一类规范变换可表示为

$$\varphi(x)\to\varphi'(x')=e^{i\omega\lambda}\varphi(x), \qquad (2.2.48)$$

其中 λ 是与 x 无关的实矩阵，ω 是与 x 无关的无限小实参数. 对于这种变换，显然有

$$\delta x_{\nu}=0; \quad \delta\varphi_a=-i\omega\lambda_a{}^b\varphi_b. \qquad (2.2.49)$$

与式(2.2.17)比较即得

$$X_{\nu}=0, \quad \Psi_a=-i\lambda_a{}^b\varphi_b. \qquad (2.2.50)$$

如果场的作用量在变换(2.2.48)下是不变的，则由式(2.2.18)得

到奈特流为

$$J^{\mu} = -i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu}\varphi_a}\lambda_a{}^b\varphi_b. \tag{2.2.51}$$

把它代入(2.2.20)式得到相应的奈特荷为

$$Q = -i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}\lambda_a{}^b\varphi_b \mathrm{d}^3x, \tag{2.2.52}$$

它是个守恒量. 在粒子物理学中,内部变换不变性所对应的守恒荷,通过变换矩阵 λ 的适当选择可用来表示粒子的电荷、重子数、轻子数、同位旋等各种量子数.

顺便指出,上面讨论的场的第一类规范变换中,变换矩阵(包括参数在内)是不依赖于时空点 x 的. 这意味着对所有的 x,变换必须是相同的(故也称为整体规范变换). 这要求当某一时刻在空间某一点对场量作一内部空间转动时,所有其它点的场量也同时进行同样的转动. 因此,除非这种变换是表征场的内禀属性的(如上面例举的场的内部量子数),否则,将与相对论相矛盾. 因为按照相对论,任何信号的传递都需要时间,因而使其它点发生同样的变换必有相应的时间延迟. 消除这个矛盾的简单办法是把变换矩阵推广为时空点 x 的函数,相应的变换称为定域规范变换或第二类规范变换. 但在定域规范变换下要使作用量不变,还必须附加引进矢量场(称为规范场)与原来的场耦合,这就自然导致了场之间的相互作用. 关于这个问题我们将在第四章中讨论.

第三章　正则量子化和粒子解释

场的量子化有多种方法，我们将讨论其中的两种，即正则量子化和路径积分量子化. 后者为 c 数表述，特别适用于规范场的量子化，将留到第五章讨论，前者是算符形式，能清楚而直观地显示出场的粒子形象，故在这章先加以讨论.

场的正则量子化步骤基本上类似于非相对论量子力学中的正则量子化，所不同的只是自由度数从有限推广到了无限. 在3.1节中我们将进行这种推广；以后各节将分别讨论各种不同自旋的场，指出对易关系的形式对自旋的依赖关系.

3.1　哈密顿形式和正则量子化

我们的讨论从回顾经典力学的哈密顿形式和正则量子化开始. 对一个拉氏量为 $L(q_\alpha(t),\dot{q}_\alpha(t))$（见(2.1.7)）的 n 自由度体系，可定义其正则共轭动量

$$p_\alpha=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n). \tag{3.1.1}$$

作勒让德变换

$$\begin{cases}(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha)\to(q_\alpha,\ p_\alpha),\\ L(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha)=H(q_\alpha,\ p_\alpha)=p_\alpha\dot{q}_\alpha-L,\end{cases} \tag{3.1.2}$$

则由拉格朗日方程(2.1.9)可导出哈密顿方程：

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,n). \tag{3.1.3}$$

引进经典泊松括号

$$\{A,\ B\}_{PB}=\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial B}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha}, \tag{3.1.4}$$

则可直接验证：

$$\{p_\alpha, q_\beta\}_{PB}=\delta_{\alpha\beta}, \quad \{p_\alpha, p_\beta\}_{PB}=\{q_\alpha, q_\beta\}_{PB}=0, \tag{3.1.5}$$

$$\{H, q_\alpha\}_{PB}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha, \quad \{H, p_\alpha\}_{PB}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=\dot{p}_\alpha, \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned}\{H, F\}_{PB}&=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\\&=\dot{F},\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

其中 $F(p_\alpha, q_\alpha)$ 是任意力学量.

正则量子化方法是把力学量作为算符，经典泊松括号过渡到量子对易关系：

$$\{A, B\}_{PB}\to i[A, B], \tag{3.1.8}$$

于是得到量子力学的基本对易规则

$$[q_\alpha, p_\beta]=i\delta_{\alpha\beta}, \quad [q_\alpha, q_\beta]=[p_\alpha, p_\beta]=0, \tag{3.1.9}$$

及海森伯绘景下的量子运动方程：

$$\dot{q}_\alpha=i[H, q_\alpha], \quad \dot{p}_\alpha=i[H, p_\alpha], \quad \dot{F}=i[H, F]. \tag{3.1.10}$$

现在，我们可以从场的离散形式入手，参照上述过程，变换到哈密顿形式，然后取连续极限来得到场的哈密顿形式和正则量子化步骤.

从场拉氏量的离散形式(2.1.17a)出发，定义正则共轭动量(以下直到(3.1.20)式，暂不利用重复指标求和约定)：

$$\begin{aligned}p_i(t)&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}=\sum_j\frac{\partial\mathscr{L}_j}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}\Delta v_j=\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}\Delta v_i\\&\equiv\pi_i(t)\Delta v_i,\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

其中已定义了

$$\pi_i(t)=\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}. \tag{3.1.12}$$

取连续极限得

$$\pi(x)=\lim_{\Delta v_i\to 0}\pi_i(t)=\lim_{\Delta v_i\to 0}\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}, \tag{3.1.13}$$

$\pi(x)$称为场 $\psi(x)$的正则共轭动量. 注意下列对应关系：

$$q_a \leftrightarrow \varphi_i \xrightarrow{\Delta v_i \to 0} \varphi(x), \quad p_a \leftrightarrow \pi_i = \frac{p_i}{\Delta v_i} \xrightarrow{\Delta v_i \to 0} \pi(x).$$

离散形式下场的哈密顿量可写为

$$H = \sum_i p_i \dot{\varphi}_i - L = \sum_i (p_i \dot{\varphi}_i - L_i) = \sum H_i, \quad (3.1.14)$$

其中 $H_i = p_i \dot{\varphi}_i - L_i$ 表示第 i 个小格 Δv_i 中场的哈密顿量，而

$$H_i = \frac{H_i}{\Delta v_i}, \quad (3.1.15)$$

是该小格的平均哈密顿密度，对其取连续极限得

$$\mathscr{H} = \lim_{\Delta v_i \to 0} H_i = \lim_{\Delta v_i \to 0} \frac{p_i \dot{\varphi}_i - L_i}{\Delta v_i} = \lim_{\Delta v_i \to 0} (\pi_i \dot{\varphi}_i - \mathscr{L}_i)$$

$$= \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L}. \quad (3.1.16)$$

称为场的哈密顿密度，而连续形式下的哈密顿量为

$$H = \lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i H_i = \int \mathscr{H} \, \mathrm{d}^3 x, \quad (3.1.17)$$

利用(3.1.16)和场的拉格朗日方程(2.1.20)可导出场的正则运动方程：

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial (\nabla \varphi)}. \quad (3.1.18)$$

第二式中出现的空间导数项反映了场的连续性.

量子对易关系在离散场形式下的对应是

$$[\varphi_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad [\varphi_i, \varphi_j] = [p_i, p_j] = 0,$$

或由(3.1.11)改写为

$$[\varphi_i, \pi_j] = i\frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j}, \quad [\varphi_i, \varphi_j] = [\pi_i, \pi_j] = 0. \quad (3.1.19)$$

令 $\Delta v_j \to 0$，过渡到连续情形，注意到

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j} = \delta^3(x - x'), \quad (3.1.20)$$

即得场的等时对易关系：

$$\begin{cases} [\varphi(t,x), \varphi(t,x')] = [\pi(t,x), \pi(t,x')] = 0, \\ [\varphi(t,x), \pi(t,x')] = i\delta^3(x - x'). \end{cases} \quad (3.1.21)$$

相应地可得量子场的正则运动方程：

$$\dot{\varphi} = i[H, \varphi], \quad \dot{\pi} = i[H, \pi]. \tag{3.1.22}$$

结果可直接推广到多分量场.这时每个场分量的正则共轭定义为

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a(x)}, \tag{3.1.23}$$

场的哈密顿密度为

$$\mathscr{H} = \pi_a \dot{\varphi}_a - \mathscr{L}, \tag{3.1.24}$$

场的等时对易关系为

$$\begin{cases} [\varphi_a(t,x), \pi_\beta(t,x')] = i\delta_{a\beta}\delta^3(x-x'), \\ [\varphi_a(t,x), \varphi_b(t,x')] = [\pi_a(t,x), \pi_\beta(t,x')] = 0. \end{cases} \tag{3.1.25}$$

3.2 实标量场

最简单的场是实标量场 $\varphi(x)$，它描述自旋为零的中性粒子.

(一) 拉格朗日形式和正则量子化

实标量场 $\varphi(x)$ 的拉氏量密度可选为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2\varphi^2). \tag{3.2.1}$$

利用(2.1.20)可得到它的运动方程

$$(\Box - m^2)\varphi = 0, \tag{3.2.2}$$

称之为克莱因-戈登方程(C-G 方程).

把 $\mathscr{L}$ 的表达式(3.2.1)代入(3.1.16)得到场的正则共轭动量为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x). \tag{3.2.3}$$

按照正则量子化方法，把 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 作为算符，使满足等时对易关系(3.1.21)，我们就得到了量子实标量场.

容易看出，拉氏量密度(3.2.1)在时空平移和洛仑兹变换下是

不变的，故由奈特定理，其能量、动量和角动量都是守恒量．量子化后，它们都是算符．把(3.2.1)和(3.2.3)代入(2.2.29)，得到实标量场的能量 P^0（或哈密顿量 H）和动量 $\boldsymbol{P}$ 为

$$H = P^0 = \int \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] \mathrm{d}^3x, \quad (3.2.4)$$

$$\boldsymbol{P} = -\int \pi \nabla \varphi \mathrm{d}^3x. \quad (3.2.5)$$

由(2.2.46)知场的自旋角动量为零，故它描述自旋为零的粒子．

(二) 动量表象

在场的量子理论中更常用的是动量表象，因为它能使动力学量，如能量、动量、电荷等得到更为简洁而清晰的表现形式，因而更便于显示场的粒子特性．所以，我们要从坐标表象过渡到动量表象．为此，把 $\varphi(x)$ 作如下傅立叶展开

$$\varphi(x) = \int \mathrm{d}^3k \left[a(k) f_k(x) + a^\dagger(k) f_k^*(x)\right], \quad (3.2.6)$$

其中 $a(k)$、$a^\dagger(k)$ 为互为厄米共轭的算符，

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (3.2.7)$$

直接代入可验证 f_k、f_k^* 满足 C-G 方程，即

$$\left(\Box - m^2\right) f_k = 0, \quad \left(\Box - m^2\right) f_k^* = 0 \quad (3.2.8)$$

以及下列正交关系：

$$\begin{cases} i\int d^3x\, f_k^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \delta^3(k - k') = -i\int d^3x\, f_k \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*, \\ \int d^3x\, f_k \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'} = \int d^3x\, f_k^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^* = 0, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

其中符号 $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ 被定义为，对任意的 A，B，有

$$A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B \equiv A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B. \quad (3.2.10)$$

利用(3.2.6)和(3.2.9)可得

$$a(k) = i\int \mathrm{d}^3x f_k^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi, \tag{3.2.11a}$$

$$a^\dagger(k) = -i\int \mathrm{d}^3x f_k \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi. \tag{3.2.11b}$$

可以证明 $a(k)$和 $a^\dagger(k)$ 是与时间无关的. 例如，从(3.2.11)的第一式，我们有

$$\begin{aligned}\dot{a}(k) &= i\int \mathrm{d}^3x (f_k^* \ddot{\varphi} - \ddot{f}_k^* \varphi)\\ &= i\int \mathrm{d}^3x [f_k^* \nabla^2\varphi - (\nabla^2 f_k^*)\varphi]\\ &= i\int \mathrm{d}^3x \nabla[f_k^* \nabla\varphi - (\nabla f_k^*)\varphi]\\ &= i\int \mathrm{d}\sigma \cdot [f_k^* \nabla\varphi - (\nabla f_k^*)\varphi]\\ &= 0,\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

其中第二个等式利用了 C-G 方程(3.2.2)和(3.2.8)，最后一个等式是考虑到在无穷远边界上场为0.

利用 $a(k)$与 $a^\dagger(k)$ 的时间无关性以及式(3.2.11)，(3.2.3)和(3.1.21)，即可求得 a、$a^\dagger$ 的对易关系：

$$\begin{aligned}&[a(k), a^\dagger(k')]\\ &= \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x' [f_k^*(t,\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(t,\boldsymbol{x}), f_{k'}(t,\boldsymbol{x}')\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(t,\boldsymbol{x}')]\\ &= \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x' [f_k^*(t,\boldsymbol{x})\pi(t,\boldsymbol{x}) - \dot{f}_k^*(t,\boldsymbol{x})\varphi(t,\boldsymbol{x}),\\ &\qquad f_{k'}(t,\boldsymbol{x}')\pi(t,\boldsymbol{x}') - \dot{f}(t,\boldsymbol{x}')\varphi(t,\boldsymbol{x}')]\\ &= -\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x' \{f_k^*(t,\boldsymbol{x})\dot{f}(t,\boldsymbol{x}')[\pi(t,\boldsymbol{x}), \varphi(t,\boldsymbol{x}')]\\ &\qquad + \dot{f}_k^*(t,\boldsymbol{x})f_{k'}(t,\boldsymbol{x}')[\varphi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{x}')]\}\\ &= i\int \mathrm{d}^3x\big(f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x) - \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x)\big)\\ &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\end{aligned} \tag{3.2.13a}$$

类似地可得

$$[a(k),\ a(k')] = [a^\dagger(k),\ a^\dagger(k')] = 0, \qquad (3.2.13b)$$

把 $\varphi(x)$的傅立叶展开式(3.2.6)代入场的能量、动量表达式(3.2.4)和(3.2.5)得到

$$H = \int \mathrm{d}^3k\, \frac{\omega_k}{2}\,[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)]$$

$$= \int \mathrm{d}^3k\, \omega_k \left[a^\dagger(k)a(k) + \frac{1}{2}\right], \qquad (3.2.14a)$$

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}^3k\, \frac{\boldsymbol{k}}{2}\,[a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)]$$

$$= \int \mathrm{d}^3k\, \boldsymbol{k} \left[a^\dagger(k)a(k) + \frac{1}{2}\right]. \qquad (3.2.14b)$$

(三) 粒子数算符和粒子解释

从(3.2.5)和(3.2.6)我们看到能量、动量都由算符

$$N(k) \equiv a^\dagger(k)a(k) \qquad (3.2.15)$$

确定，且 $N(k)$与 $N(k')$对易：

$$\begin{aligned}&[N(k),\ N(k')]\\ =&a^\dagger(k)[a(k),\ a^\dagger(k')]\,a(k') + a^\dagger(k')[a^\dagger(k),\ a(k')]\,a(k)\\ =&\left(a^\dagger(k)a(k') - a^\dagger(k')a(k)\right)\delta^3(k-k')\\ =&0,\end{aligned} \qquad (3.2.16)$$

故 $N(k)$与 H 和 $\boldsymbol{P}$ 都对易，它们有共同的本征态，用 $|n(k)\rangle$标记之，相应的本征值记为 $n(k)$，即有：

$$N(k)|n(k)\rangle = n(k)|n(k)\rangle. \qquad (3.2.17)$$

注意到在对 k 积分的意义上，有

$$\begin{aligned}&[N(k),\ a^\dagger(k)] = a^\dagger(k),\\ &[N(k),\ a(k)] = -a(k),\end{aligned} \qquad (3.2.18)$$

由此推得

$$N(k)a^\dagger(k)|n(k)\rangle = \left(n(k)+1\right)a^\dagger(k)|n(k)\rangle, \qquad (3.2.19a)$$

$$N(k)a(k)|n(k)\rangle = \left(n(k)-1\right)a(k)|n(k)\rangle, \qquad (3.2.19b)$$

这表明，如果$|n(k)\rangle$有本征值$n(k)$，则$a^\dagger(k)|n(k)\rangle$和$a(k)|n(k)\rangle$分别是$N(k)$的本征值为$n(k)+1$和$n(k)-1$的本征态. 这与能量动量的表示式(3.2.5)和(3.2.6)一起强烈提示我们：$N(k)$是能量为ω_k、动量为k的粒子数(密度)算符，而$a^\dagger(k)$和$a(k)$分别是能量为ω_k、动量为k的粒子的产生和湮灭算符. 当然，这还要求：

(1) $n(k)$是非负的. 这由下式很容易看出，

$$\big(a(k)|n(k)\rangle\big)^\dagger\big(a(k)|n(k)\rangle\big)=\langle n(k)|a^\dagger(k)a(k)|n(k)\rangle$$
$$=n(k)\langle n(k)|n(k)\rangle>0. \qquad (3.2.20)$$

由于模方$\langle n(k)|n(k)\rangle$非负，故$n(k)$非负.

(2) $n(k)$必须是整数. 由式(3.2.19b)知$a(k)$作用于$|n(k)\rangle$使$n(k)$减少1，连续作用，将不断减少. 唯一避免$n(k)$成为负数的出路在于存在一个基态(真空)$|0\rangle$，使得

$$a(k)|0\rangle=0, \qquad (3.2.21)$$

所以，

$$N(k)|0\rangle=a^\dagger(k)a(k)|0\rangle=0, \qquad (3.2.22)$$

这可解释为基态没有粒子. 现在，再用$a^\dagger(k)$作用于$|0\rangle$上，每作用一次，就增加1，故$n(k)$必是整数.

这样，把$N(k)$当作粒子数(密度)算符是完全合理的，量子场因此也有了粒子解释，量子场论就可以用来描述既有粒子产生又有粒子湮灭的相互作用过程.

(四) 零点能与正规乘积

由于$n(k)$是非负的，场的能量

$$H=\int d^3k\,\omega_k\left(N(k)+\frac{1}{2}\right)$$

是正定的. 但是，基态尽管没有粒子，其能量

$$E_0=\langle 0|H|0\rangle=\int d^3k\,\frac{1}{2}k^0\to\infty, \qquad (3.2.23)$$

这称为零点能. 零点能并不参与任何物理过程，可简单地通过平移

将它减除，即重新定义能量动量为

$$P'^{\mu} = P^{\mu} - \langle 0|P^{\mu}|0\rangle, \tag{3.2.24}$$

考察能量、动量表达式(3.2.14)，我们发现这在形式上相当于写所有的产生算符在所有的湮灭算符之前(左边)．算符的这种特定排列次序叫做正规乘积，用：：或 N 表示．例如，按(3.2.6)将 $\varphi(x)$ 分为正频和负频部分

$$\varphi(x) = \varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x), \tag{3.2.25}$$

其中

$$\varphi^{(-)}(x) = \int d^3k\, a(k) f_k(x),\quad \varphi^{(+)}(x) = \int d^3k\, a^{\dagger}(k) f_k^{*}(x), \tag{3.2.26}$$

则

$$\begin{aligned} N[\varphi(x)\varphi(y)] &= :\varphi(x)\varphi(y): \\ &= \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y) + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) \\ &\quad + \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y). \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

利用正规乘积，我们有

$$\begin{aligned} :H: &= \int d^3k\, \frac{\omega_k}{2} :[a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)]: \\ &= \int d^3k\, \omega_k a^{\dagger}(k)a(k) = \int d^3k \omega_k N(k), \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

$$\langle 0|:H:|0\rangle = 0. \tag{3.2.29}$$

可见，取正规乘积后，零点能已消失．以后，我们将约定所有量子场的拉氏量密度算符都理解为已取正规乘积，因而不再存在零点能问题．

(五) 自旋和统计的关系

我们现在来证明实标量场量子服从玻色-爱因斯坦统计．从(3.2.19a)我们看到态 $a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle$ 正比于态 $|n(k)+1\rangle$，引进比例

系数 c 后可写为

$$a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle = c|n(k)+1\rangle,$$

或更一般地写为

$$a^{\dagger}(k_i)|n(k_1),\cdots,n(k_i),\cdots\rangle = c|n(k_1),\cdots,n(k_i)+1,\cdots\rangle.$$

c 可由态的归一化条件确定如下：

$$\begin{aligned} c^2\langle n(k)+1|n(k)+1\rangle &= \langle n(k)|a(k)a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle \\ &= \langle n(k)|\{a^{\dagger}(k)a(k)+1\}|n(k)\rangle \\ &= (n(k)+1)\langle n(k)|n(k)\rangle, \end{aligned}$$

因此，

$$c^2 = n(k)+1,$$

或精确到一个相因子，有

$$a^{\dagger}(k)|n(k)\rangle = \sqrt{n(k)+1}\,|n(k)+1\rangle, \quad (3.2.30a)$$

或更一般地

$$a^{\dagger}(k_i)|n(k_1),\cdots,n(k_i),\cdots\rangle = \sqrt{n(k_i)+1}\,|n(k_1),\cdots,n(k_i)\cdots\rangle. \quad (3.2.30b)$$

类似地，可得

$$a(k)|n(k)\rangle = \sqrt{n(k)}\,|n(k)-1\rangle. \quad (3.2.31a)$$

$$a(k_i)|n(k_1),\cdots,n(k_i),\cdots\rangle = \sqrt{n(k_i)}\,|n(k_1),\cdots,n(k_i)-1,\cdots\rangle. \quad (3.2.31b)$$

一般地，任何动量的粒子都没有的真空态可记为

$$|0\rangle \equiv |0,0,\cdots,0,\cdots\rangle, \quad (3.2.32)$$

而具有动量为 k_1 的粒子 $n(k_1)$ 个，动量为 k_2 的粒子 $n(k_2)$ 个，…的归一化的态可写为

$$|n(k_1),\cdots,n(k_i),\cdots\rangle = \{n(k_1)!n(k_2)!\cdots\}^{-1/2} \cdot \{a^{\dagger}(k_1)\}^{n(k_1)}\{a^{\dagger}(k_2)\}^{n(k_2)}\cdots|0\rangle. \quad (3.2.33)$$

这些就是粒子数表象的态矢量. 显然，对 $n(k)$ 的值并没有限制，即

在一个态中具有相同动量 k 的粒子数目不受限制. 这正是玻色子的统计性质. 追本溯源,这个性质来自于场的对易关系(3.1.21). 因此,如果要描述费米子,并使它服从费米-狄拉克统计,就必须修正相应场的对易关系. 这将在第4节中讨论狄拉克场的量子化时进行. 那里,场的对易关系将被修改为反对易关系.

(六) 协变对易关系与微观因果性

用来量子化的等时对易关系不是协变的. 以后经常有用的是对易子$[\varphi(x), \varphi(y)]$的值. 利用(3.2.6),(3.2.7)和(3.2.13)我们有

$$\begin{aligned}
&[\varphi(x), \varphi(y)] \\
&= \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}^3k' \{[a(k), a^\dagger(k')] f_k(x) f_{k'}^*(y) \\
&\quad + [a^\dagger(k), a(k')] f_k^*(x) f_{k'}(y)\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} [e^{ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}] \\
&\equiv i\Delta(x-y),
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

其中

$$\Delta(x-y) \equiv \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} [e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}] \tag{3.2.35}$$

是相对论协变的,因为利用

$$\begin{aligned}
\delta(k^2 - m^2) &= \delta(k_0^2 - \omega_k^2) \\
&= \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

可证

$$\int \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} = \int \mathrm{d}^4k \delta(k^2 - m^2)\theta(k_0), \tag{3.2.37}$$

其中 $\theta(k_0) = \begin{cases} 1 & (k_0 > 0) \\ 0 & (k_0 < 0) \end{cases}$ 是通常的阶跃函数. (3.2.37)的右边是明显协变的,所以(3.2.34)一般也称为协变对易关系.

等时对易关系 $[\varphi(t,\boldsymbol{x}),\ \varphi(t,\boldsymbol{y})]=0$ 可表示为

$$\Delta(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0.$$

此时有

$$(x-y)^2=0-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2<0.$$

即 $x-y$ 是类空的，由于洛仑兹变换不会改变 $x-y$ 的类空性质，故一般地有

$$\Delta(x-y)=0,\quad \text{对所有 } (x-y)^2<0 \text{都成立},$$

或

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]=0,\quad \text{对所有 } (x-y)^2<0 \text{都成立}.$$

即具有类空间隔的场是对易的．这称为微观因果性原理．它是相对论因果性所导致的：为类时间隔所分开的两点总可以用光信号把它们联系起来(因果性)；而为类空间隔所分开的两点则不能用任何信号相联系(无因果性)，因而在其上进行的测量互不相干，这就要求属于这两点的物理可观察量彼此对易．

3.3 复标量场

复标量场描述自旋为零的荷电粒子，它有两个独立场量，可选择为 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^\dagger(x)$（为避免量子化后符号更替，我们直接用 $\varphi^\dagger$ 代替 φ^*），它们都满足 C-G 方程：

$$(\Box-m^2)\varphi=0,\quad (\Box-m^2)\varphi^\dagger=0. \tag{3.3.1}$$

相应的拉氏量密度选择为

$$\mathscr{L}=N(\partial_\mu\varphi^\dagger\,\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^\dagger\varphi), \tag{3.3.2}$$

正则共轭动量因此为

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^\dagger,\quad \pi^\dagger=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^\dagger}=\dot{\varphi}. \tag{3.3.3}$$

正则量子化表示为下列等时对易关系：

$$\begin{cases}[\varphi(t,\boldsymbol{x}),\ \pi(t,\boldsymbol{x}')]=[\varphi^{\dagger}(t,\boldsymbol{x}),\ \pi^{\dagger}(t,\boldsymbol{x}')]\\ \qquad\qquad =i\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ \text{其余对易关系为零.}\end{cases}\tag{3.3.4}$$

把(3.3.2)和(3.3.3)代入(2.2.29)可得到场的能量和动量：

$$H=\int \mathrm{d}^{3}x N(\pi^{\dagger}\pi+\nabla\varphi^{\dagger}\cdot\nabla\varphi+m^{2}\varphi^{\dagger}\varphi),\tag{3.3.5}$$

$$\boldsymbol{P}=\int \mathrm{d}^{3}x N(\pi\nabla\varphi+\pi^{\dagger}\nabla\varphi^{\dagger}).\tag{3.3.6}$$

容易看出，(3.3.2)还具有下列内部变换不变性：

$$\varphi\to\varphi'=e^{-i\alpha q}\varphi,\quad \varphi^{\dagger}\to\varphi'^{\dagger}=e^{i\alpha q}\varphi^{\dagger},\tag{3.3.7a}$$

或写成矩阵形式

$$\Phi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi^{\dagger}\end{pmatrix},\quad \Phi\to\Phi'=e^{-i\alpha\lambda}\Phi,\quad \lambda=\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & -q\end{pmatrix}.\tag{3.3.7b}$$

它反映了电荷守恒. 从(2.2.49)和(2.2.50)可求得守恒流和相应的守恒荷为：

$$J^{\mu}=iq\mathrm{N}\ (\varphi^{\dagger}\partial^{\mu}\varphi-\varphi\partial^{\mu}\varphi^{\dagger}),\tag{3.3.8}$$

$$Q=iq\int \mathrm{d}^{3}x\mathrm{N}(\pi^{\dagger}\varphi^{\dagger}-\pi\varphi).\tag{3.3.9}$$

为过渡到动量表象，对 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^{\dagger}(x)$ 作傅立叶展开：

$$\varphi(x)=\int \mathrm{d}^{3}k\ [a(k)f_{k}(x)+b^{\dagger}(k)f_{k}^{*}(x)],\tag{3.3.10a}$$

$$\varphi^{\dagger}(x)=\int \mathrm{d}^{3}k\ [b(k)f_{k}(x)+a^{\dagger}(k)f_{k}^{*}(x)].\tag{3.3.10b}$$

注意，由于 $\varphi^{\dagger}(x)\neq\varphi(x)$，比实标量场多引进了一对算符 b 和 $b^{\dagger}$. 算符 $a,a^{\dagger},b,b^{\dagger}$ 满足下列对易关系：

$$\begin{cases}[a(k),\ a^{\dagger}(k')]=[b(k),\ b^{\dagger}(k')]=i\delta^{3}(k-k'),\\ \text{其余对易关系为零.}\end{cases}\tag{3.3.11}$$

利用 a、$a^{\dagger}$、b、$b^{\dagger}$ 可表示场的能量、动量和电荷为：

$$H=\int \mathrm{d}^{3}k\ \omega_{k}(N^{+}(k)+N^{-}(k)),\tag{3.3.12}$$

$$\boldsymbol{P}=\int \mathrm{d}^{3}k\ \boldsymbol{k}(N^{+}(k)+N^{-}(k)),\tag{3.3.13}$$

$$Q=\int \mathrm{d}^3k\, q\left(N^+(k)-N^-(k)\right), \tag{3.3.14}$$

其中

$$N^+(k)=a^\dagger(k)a(k),\quad N^-(k)=b^\dagger(k)b(k) \tag{3.3.15}$$

是粒子数密度算符. (3.3.14)进一步告诉我们,可把 $a^\dagger$, a 分别解释为电荷为 q 的粒子产生、湮灭算符,而 $b^\dagger$, b 则分别解释为电荷为 $-q$ 的粒子(也称为反粒子)的产生、湮灭算符.

关于复标量场的协变对易关系,我们有

$$\begin{cases}[\varphi(x),\varphi^\dagger(y)]=i\Delta(x-y),\\ [\varphi(x),\varphi(y)]=[\varphi^\dagger(x),\varphi^\dagger(y)]=0.\end{cases} \tag{3.3.16}$$

3.4 狄拉克场

按照洛仑兹群的旋量表示变换的场称为旋量场,它们描述半整数自旋的粒子. 最简单的旋量场是自旋为$\frac{1}{2}$的粒子,最早由狄拉克用来描写电子,故得名为狄拉克场. 迄今所知的基础实物粒子几乎都由狄拉克场描写. 由于狄拉克场在量子场论中的这种特殊地位及其旋量表示所导致的复杂性,在对它进行量子化之前,我们将回顾并扩充有关狄拉克方程和 γ 矩阵的知识.

(一) 狄拉克方程和 γ 矩阵

利用量子力学记号

$$p_\mu=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}=i\partial_\mu, \tag{3.4.1}$$

可表示克莱因-戈登算符为

$$\Box-m^2=p_\mu p^\mu-m^2. \tag{3.4.2}$$

类比平方差公式,试着将(3.4.2)分解为

$$p_\mu p^\mu-m^2=(\not{p}+m)(\not{p}-m), \tag{3.4.3}$$

其中 $\not{p}$ 是 p_μ 和一些系数 γ^μ 的线性组合:

$$\hat{p} = p_\nu \gamma^\nu, \tag{3.4.4}$$

因此，必须要求

$$p_\nu p^\nu = (p_\mu \gamma^\mu)^2, \tag{3.4.5}$$

这导致

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.4.6}$$

利用关系(2.4.1～4)可得

$$\Box - m^2 = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m). \tag{3.4.7}$$

相对论的场函数应满足 C-G 方程，故如设狄拉克场函数为 $\psi(x)$，则应有

$$\left(\Box - m^2\right)\psi = 0. \tag{3.4.8}$$

结合(3.4.7)和(3.4.8)，我们得到狄拉克方程：

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = 0. \tag{3.4.9}$$

为了进一步了解 ψ 的分量结构，我们来研究系数 γ^ν 的性质和表示.

从(3.4.6)可知，不同指标的 γ^ν 是反对易的，因而它们不可能是普通的数，而应取为矩阵，设为 $N\times N$ 矩阵. 由(3.4.6)，我们有

$$\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0 = (-I)\gamma^i\gamma^0.$$

两边取行列式得

$$\det\gamma^0\det\gamma^i = \det(-I)\det\gamma^i\det\gamma^0.$$

由于 I 为 $N\times N$ 单位矩阵，$\det(-I) = (-1)^N$，于是上式化为

$$(-1)^N = 1,$$

因而 N 只能是偶数. 再来证明 γ^μ 无法表示成2×2矩阵. 由于2×2矩阵有4个元素，因此只能有四个这样的矩阵线性无关. 众所周知，泡利矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.4.10}$$

彼此反对易，与2×2单位矩阵 I 一起构成线性无关组，任何2×2矩

阵都可表成它们的线性组合.但 I 与 σ^k 是对易的而不是反对易的，因而找不到四个线性无关且彼此反对易的2×2矩阵.故 γ^ν 至少为4×4矩阵，最简单的是取它们为4×4矩阵，通常取 γ^ν 的标准表示(分块形式)：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad \gamma^k=\begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4.11}$$

相应地，狄拉克场 ψ 应是四分量的，可表示为

$$\psi=\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)^{\mathrm{T}}. \tag{3.4.12}$$

其中上角标 T 表示矩阵转置.这样，方程(3.4.9)实际上包含了四个方程：

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu-mI)_{\alpha\beta}\psi_\beta=0\quad(\alpha,\beta=1,2,3,4), \tag{3.4.13}$$

其中 $I(I_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta})$ 为4×4单位矩阵，往往略去不写.

反对易关系(3.4.6)给出了 γ 矩阵的主要性质.为了以后应用的方便，我们再来导出它的另外二个性质.在公式(3.4.6)中，分别取 $\mu=\nu=0,1,2,3$得

$$(\gamma^0)^2=1,\quad (\gamma^1)^2=(\gamma^2)^2=(\gamma^3)^2=-1. \tag{3.4.14}$$

又，改写(3.4.9)为

$$i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi=(-i\gamma^i\partial_i+m)\psi,$$

左乘 γ^0，利用(3.4.14)得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=(-i\gamma^0\gamma^i\partial_i+m\gamma^0)\psi\equiv\hat{H}\psi, \tag{3.4.15}$$

其中 $\hat{H}$ 按量子力学对应应为哈密顿算符.由 $\hat{H}$ 的厄米性可推得

$$\gamma^{0\dagger}=\gamma^0,\quad \gamma^{i\dagger}=-\gamma^i, \tag{3.4.16}$$

即 γ^0 是厄米的而 γ^i 是反厄米的.

引进协变 γ 矩阵，定义为

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{3.4.17}$$

则(3.4.16)可统一表为

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu, \tag{3.4.18}$$

而(3.4.14)可表示为 γ 矩阵的么正性：

$$\gamma^\nu\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^{\mu\dagger}\gamma^\nu = I \quad (\text{不对 } \nu \text{ 求和}). \tag{3.4.19}$$

定义 ψ 的狄拉克共轭 $\bar{\psi}$ 为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \tag{3.4.20}$$

则对狄拉克方程(3.4.14)取厄米共轭并右乘 γ^0，可得到关于 $\bar{\psi}$ 的方程：

$$\bar{\psi}(i\gamma^\nu\overleftarrow{\partial}_\nu + m) = 0, \tag{3.4.21}$$

∂ 上的箭头表示它向前作用在 $\bar{\psi}$ 上. 推导中已利用了明显的等式：

$$\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu. \tag{3.4.22}$$

我们要强调，由于 $\bar{\psi}$ 和 ψ 的矩阵性质，表达式 $\bar{\psi}O\psi$(O 是矩阵)意味着对旋量指标求和，即 $\bar{\psi}O\psi = \bar{\psi}_\alpha O_{\alpha\beta}\psi_\beta$，结果是一普通的数；而形如 $\psi\bar{\psi}$ 的表达式则是个矩阵：

$$\psi\bar{\psi} = A, \quad A_{\alpha\beta} = \psi_\alpha\bar{\psi}_\beta.$$

(二) 双线型旋量

在1.3节中已经提到，由于旋量表示的双值性，物理可观察量都是用双线型旋量表示的. 我们现在就来讨论它在洛仑兹变换下的性质和分类.

考虑无限小洛仑兹变换(2.2.32)，这时坐标变换矩阵 Λ 表为

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \tag{3.4.23}$$

由于对称张量 $g_{\mu\nu}$ 与反对称张量 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 的收缩为零，故旋量的变换矩阵(1.3.6)化为

$$L(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\right) = I - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}. \tag{3.4.24}$$

利用(3.4.22)易证

$$\gamma^0\sigma^{\rho\sigma\dagger}\gamma^0=\sigma^{\rho\sigma}, \tag{3.4.25}$$

故有

$$\begin{aligned}\gamma^0L^\dagger(\omega)\gamma^0&=\gamma^0\exp(i\sigma^{\rho\sigma\dagger}\omega_{\rho\sigma})\gamma^0\\&=\exp(i\sigma^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma})=L^{-1}(\omega).\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

利用它，可从狄拉克场 ψ 的变换

$$\psi(x)\to\psi'(x')=L(\omega)\psi(x) \tag{3.4.27}$$

导出狄拉克共轭场的变换

$$\bar\psi(x)\to\bar\psi'(x')=\bar\psi(x)L^{-1}(\omega). \tag{3.4.28}$$

再来考察 $L(\omega)$ 对 γ 矩阵的作用. 为此，改写 $\sigma^{\rho\sigma}$ 为

$$\sigma^{\rho\sigma}=i\gamma^\rho\gamma^\sigma-ig^{\rho\sigma}, \tag{3.4.29}$$

则有

$$\begin{aligned}[\sigma^{\rho\sigma},\gamma^\lambda]&=i[\gamma^\rho\gamma^\sigma,\gamma^\lambda]\\&=i\{\gamma^\rho,\gamma^\lambda\}\gamma^\sigma-i\gamma^\rho\{\gamma^\sigma,\gamma^\lambda\}\\&=2i(g^{\lambda\rho}\gamma^\sigma-g^{\lambda\sigma}\gamma^\rho).\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

从算符恒等式

$$e^A\,B\,e^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\cdots, \tag{3.4.31}$$

令 $A=\frac{i}{4}\sigma^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}$，$B=\gamma^\lambda$，精确到 ω 量级，有

$$\begin{aligned}L^{-1}(\omega)\gamma^\lambda L(\omega)&=\gamma^\lambda+\frac{i}{4}[\sigma^{\rho\sigma},\gamma^\lambda]\omega_{\rho\sigma}\\&=\gamma^\lambda-g^{\lambda\mu}\gamma^\sigma\omega_{\rho\sigma}\\&=(g^\lambda_\sigma-\omega^\lambda_\sigma)\gamma^\sigma\\&=\Lambda(\omega)^\lambda_\sigma\gamma^\sigma.\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

其中已利用了公式(2.4.30)，(2.2.33)和(2.4.23). 如在上面令 $A=-\frac{i}{4}\sigma^{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}$，则可得

$$L(\omega)\gamma^\lambda L^{-1}(\omega)=\Lambda^{-1}(\omega)^\lambda_\sigma\gamma^\sigma. \tag{3.4.33}$$

利用变换公式(2.4.27～28，32～33)，并考虑到

$$\partial_\nu=\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}=\partial_\mu'\Lambda^\mu_\nu,\quad \partial_\mu'=\partial_\nu\Lambda^{-1\nu}_\mu,$$

(3.4.34)

容易证明狄拉克方程(3.4.9)及其共轭方程(3.4.21)的洛仑兹协变性，即在洛仑兹变换前后方程具有同样的形式. 以狄拉克方程为例，在变换后有

$$\begin{aligned} L(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(x) &= [i(L\gamma^\nu L^{-1})\partial_\nu - m]L\psi(x) \\ &= (i\Lambda_\mu^{-1\nu}\gamma^\mu\partial_\nu - m)\psi'(x') \\ &= (i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') \\ &= 0, \end{aligned}$$

与变换前的(3.4.9)形式相同. 这体现了理论的自洽性.

现在我们来考虑双线型旋量 $\bar{\psi}O\psi$. 在洛仑兹变换下，根据公式(3.4.27)和(3.4.28)，我们有

$$\bar{\psi}'(x')O\psi'(x') = \bar{\psi}(x)L^{-1}OL\psi(x).$$

再由(3.4.32)，可以得到

a) $O=I$, $\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)$;

b) $O=\gamma^\nu$, $\bar{\psi}'(x')\gamma^\nu\psi'(x') = \Lambda_\mu^\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$;

c) $O=\sigma^{\mu\nu}$, $\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda_\rho^\mu\Lambda_\sigma^\nu\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$.

可见，双线型旋量按洛仑兹群的张量表示变换. a)，b)，c)分别是标量，矢量和(二阶)张量.

为了讨论赝张量表示，需要在矩阵 O 中引进新的 γ 矩阵，它定义为

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \qquad (3.4.35)$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 为四阶完全反对称张量，具有 $\varepsilon_{0123}=1$，$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. 显然 γ^5 满足

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = I. \qquad (3.4.36)$$

在标准表示下，它的分块形式为

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.4.37)$$

此外，还需讨论在空间反射 $\mathscr{P}$ (1.2.16)下的变换性质. 我们给出在 $\mathscr{P}$ 变换下狄拉克场 $\psi(x)$ 的变换为

$$\mathscr{P}\ \psi(x)=\psi'(x')=\eta_p\gamma^0\psi(x), \tag{3.4.38}$$

其中相因子 η_p 满足 $\eta_p^2=\pm 1$（由于旋量表示的双值性）. 而 $\bar{\psi}$ 的变换为

$$\mathscr{P}\ \bar{\psi}(x)=\bar{\psi}'(x')=\eta_p^*\bar{\psi}(x)\gamma^0. \tag{3.4.39}$$

利用(3.4.36)的第一式容易证明

$$L^{-1}\gamma^5 L=\gamma^5. \tag{3.4.40}$$

现在我们可以考虑 $O=\gamma_5,\gamma_5\gamma^\nu,\gamma_5\sigma^{\mu\nu}$ 时的双线型旋量. 由于(3.4.40)，在洛仑兹变换下它们的变换性质分别与没有 γ^5 的 $a)$，$b)$，$c)$相同. 但在 $\mathscr{P}$ 变换下，利用下列明显的关系：

$$\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0=\gamma_\nu,\quad \gamma^0\gamma^5\gamma^0=-\gamma^5, \tag{3.4.41}$$

我们得到

$a)$ $O=I$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\psi(x))=\bar{\psi}(x)\psi(x)$;

$b)$ $O=\gamma^\nu$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x))=\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x)$;

$c)$ $O=\sigma^{\mu\nu}$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x))=\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$;

$d)$ $O=\gamma^5$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x))=-\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)$;

$e)$ $O=\gamma^5\gamma^\nu$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x))=-\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x)$;

$f)$ $O=\gamma^5\sigma^{\mu\nu}$, $\mathscr{P}\ (\bar{\psi}(x)\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\psi(x))=-\bar{\psi}(x)\gamma^5\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$.

于是，从(1.3.9～14)可知，前三类分别是真标量、矢量和张量，而后三类则是对应的赝量.

(三) 平面波解和投影算符

我们来求狄拉克方程(3.4.9)的下列形式的平面波解：

$$\psi_r^{(+)}(x)=u_r(p)e^{-ipx},\quad \psi_r^{(-)}(x)=v_r(p)e^{ipx}, \tag{3.4.42}$$

$u_r(v_r)$ 一般称为正(负)能旋量，下指标 $r=1,2$，表示自旋取向. 注意将它与前面讲的旋量场的分量指标 α 相区别(u_r 是矩阵，$u_{r\alpha}$是 u_r 的第 α 分量). 把(3.4.42)代入(3.4.9)可得 u_r、v_r 所满足的方程：

$$\begin{cases}(\gamma\cdot p-m)u_r(p)=0,\\ (\gamma\cdot p+m)v_r(p)=0,\end{cases} \tag{3.1.43}$$

它们也称为动量空间的狄拉克方程.

定义共轭旋量：

$$\bar{u}_r(p) = u_r^\dagger(p)\gamma^0, \quad \bar{v}_r(p) = v_r^\dagger(p)\gamma^0, \tag{3.4.44}$$

则它们满足方程：

$$\bar{u}_r(p)(\gamma \cdot p - m) = 0, \quad \bar{v}_r(p)(\gamma \cdot p + m) = 0. \tag{3.4.45}$$

对 $u_r, v_r, \bar{u}_r, \bar{v}_r$，要求满足下列协变的正交归一性条件：

$$\begin{cases} \bar{u}_r(p)u_s(p) = \delta_{rs}, \\ \bar{v}_r(p)v_s(p) = -\delta_{rs}, \\ \bar{u}_r(p)v_s(p) = \bar{v}_r(p)u_s(p) = 0, \end{cases} \tag{3.4.46}$$

和完备性条件

$$u_r(p)\bar{u}_r(p) - v_r(p)\bar{v}_r(p) = I. \tag{3.4.47}$$

利用动量空间的狄拉克方程(3.4.43)和(3.4.45)可以证明(读者试自行完成)：

$$\begin{cases} m\bar{u}_r(p)\gamma^\mu u_s(p) = p^\mu \bar{u}_r(p)u_s(p), \\ m\bar{v}_r(p)\gamma^\mu v_s(p) = -p^\mu \bar{v}_r(p)v_s(p). \end{cases} \tag{3.4.48}$$

在上式中取 $\mu=0$，得到正交归一条件(3.4.46)的又一种表述：

$$\begin{cases} u_r^\dagger(p)u_s(p) = v_r^\dagger(p)v_s(p) = \dfrac{E}{m}\delta_{rs}, \\ u_r^\dagger(p)v_s(p) = v_r^\dagger(p)u_s(p) = 0. \end{cases} \tag{3.4.49}$$

为进一步找出 $u_r(p)$ 和 $v_r(p)$ 的具体形式，我们来求解动量空间狄拉克方程(3.4.43). 首先在粒子静止系中计算，这时，$p=0$，$E=p^0=m$，(3.4.43)的第一式可化为

$$(\gamma^0 - I)u_r(0) = 0$$

引进二分量旋量 ξ, η，记

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

则在 γ 矩阵的标准表示(3.4.11)下，有

$$\left[\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0,$$

由此得到

$$\xi \neq 0, \quad \eta = 0,$$

其中非零分量可任意选取，较方便的是选 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 的本征态

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.50}$$

分别表示自旋向上和自旋向下. 于是

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \xi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r = 1; \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & r = 2. \end{cases} \tag{3.4.51a}$$

对 $v_r(0)$，类似可得

$$v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & r = 1; \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & r = 2. \end{cases} \qquad \eta_r = \xi_r. \tag{3.4.51b}$$

现在转向一般解 $u_r(p)$ 和 $v_r(p)$. 利用等式

$$p^2 - m^2 = (\gamma \cdot p - m)(\gamma \cdot p + m) = 0,$$

可令

$$\begin{cases} u_r(p) = c_1(\gamma \cdot p + m)u_r(0), \\ v_r(p) = c_2(\gamma \cdot p - m)v_r(0). \end{cases}$$

显然，它们是方程(3.4.43)的解. 待定因子 c_1、c_2 可由 u_r 和 v_r 的正交归一化条件(3.4.46)确定. 例如，u_r 的归一条件给出

$$\bar{u}_r(p)u_r(p) = c_1^2\bar{u}_r(0)(\gamma\cdot p + m)(\gamma\cdot p + m)u_r(0) = 1,$$

而

$$(\gamma\cdot p + m)(\gamma\cdot p + m) = p^2 + m^2 + 2m\gamma\cdot p = 2m(m + \gamma\cdot p)$$

把它代回上式并利用(在(3.4.48)中令 $\boldsymbol{p}=0$立得)：

$$\bar{u}_r(0)\gamma^i u_r(0) = 0, \quad \bar{u}_r(0)\gamma^0 u_r(0) = 1,$$

有

$$2m(m + p^0)c_1^{\,2} = 1,$$

可取

$$c_1 = [2m(m + p^0)]^{-1/2}.$$

类似地，可得

$$c_2 = [2m(m + p^0)]^{-1/2}.$$

于是，我们就得到

$$\begin{cases} u_r(p) = \dfrac{(\gamma\cdot p + m)}{[2m(m + p^0)]^{1/2}}u_r(0) = \sqrt{\dfrac{m + p^0}{2m}}\begin{pmatrix} \xi_r \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{m + p^0}\xi_r \end{pmatrix} \\ v_r(p) = \dfrac{(\gamma\cdot p - m)}{[2m(m + p^0)]^{1/2}}v_r(0) = \sqrt{\dfrac{m + E}{2m}}\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma\cdot p}{m + p^0}\xi_r \\ \xi_r \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.4.52}$$

在许多应用中非常有用的是所谓的正、负能投影算符 $\mathscr{P}_+$ 和 $\mathscr{P}_-$，它们的定义是

$$\mathscr{P}_+ = u_r(p)\bar{u}_r(p), \quad \mathscr{P}_- = -v_r(p)\bar{v}_r(p). \tag{3.4.53}$$

利用正交归一条件(3.4.46)可得

$$\begin{cases} \mathscr{P}_+ u_s(p) = u_s(p), & \mathscr{P}_+ v_s(p) = 0, \\ \mathscr{P}_- v_s(p) = v_s(p), & \mathscr{P}_- u_s(p) = 0. \end{cases} \tag{3.4.54}$$

以及

$$\mathscr{P}_+\mathscr{P}_+=\mathscr{P}_+,\quad \mathscr{P}_-\mathscr{P}_-=\mathscr{P}_-,\quad \mathscr{P}_+\mathscr{P}_-=\mathscr{P}_-\mathscr{P}_+=0. \tag{3.4.55}$$

我们来求 $\mathscr{P}_-$ 的表达式. 由动量空间狄拉克方程(3.4.43),我们有

$$(\gamma\cdot p-m)\mathscr{P}_-=0,$$

或即

$$\frac{\gamma\cdot p}{m}\mathscr{P}_+=\mathscr{P}_+, \tag{3.4.56a}$$

故可设

$$\mathscr{P}_+=a+b\gamma\cdot p.$$

把它代入式(3.4.56a),得到 $a=mb$, 再利用(3.4.55)的第一式,得出 $b=\frac{1}{2m}$,故最后我们有

$$\mathscr{P}_+=u_r(p)\bar{u}_r(p)=\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}. \tag{3.4.56b}$$

类似地,可得

$$\mathscr{P}_-=-v_r(p)\bar{v}_r(p)=\frac{-\gamma\cdot p+m}{2m}. \tag{3.4.56c}$$

我们明显地看到

$$\mathscr{P}_++\mathscr{P}_-=I, \tag{3.4.57}$$

这正是我们所要求的完备性条件(3.4.47).

需要指出的是,上面的讨论和结果显然不适用于零质量粒子(如中微子),对此需另行讨论.

(四) 零质量狄拉克场、威尔旋量

在(3.4.9)中使 $m=0$就得到零质量的狄拉克场方程

$$i\gamma^\nu\partial_\nu\psi=0, \tag{3.4.58}$$

它可以分解为两个独立的二分量方程,为此,我们引进左、右手投影算符:

$$\mathscr{P}_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5),\quad \mathscr{P}_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\qquad(3.4.59)$$

它们具有性质：

$$\mathscr{P}_L^2=\mathscr{P}_L,\quad \mathscr{P}_R^2=\mathscr{P}_R,$$

$$\mathscr{P}_L\mathscr{P}_R=\mathscr{P}_R\mathscr{P}_L=0,\quad \mathscr{P}_L+\mathscr{P}_R=1.\qquad(3.4.60)$$

定义左、右手场

$$\psi_L=\mathscr{P}_L\psi,\quad \psi_R=\mathscr{P}_R\psi,\qquad(3.4.61)$$

在标准表示(3.4.37)下，有

$$\psi_L=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_1-\psi_3\\ \psi_2-\psi_4\\ -\psi_1+\psi_3\\ -\psi_2+\psi_4\end{pmatrix},\quad \psi_R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_1+\psi_3\\ \psi_2+\psi_4\\ \psi_1+\psi_3\\ \psi_2+\psi_4\end{pmatrix}.\qquad(3.4.62)$$

定义二分量旋量(通常称威尔旋量)：

$$\varphi_L=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_1-\psi_3\\ \psi_2-\psi_4\end{pmatrix},\quad \varphi_R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_1+\psi_3\\ \psi_2+\psi_4\end{pmatrix},\qquad(3.4.63)$$

则(3.4.61)可表示为分块形式：

$$\psi_L=\begin{pmatrix}\varphi_L\\ -\varphi_L\end{pmatrix},\quad \psi_R=\begin{pmatrix}\varphi_R\\ \varphi_R\end{pmatrix}.\qquad(3.4.64)$$

现在，把左、右手投影算符$\mathscr{P}_L$，$\mathscr{P}_R$分别作用于方程(3.4.58)，利用γ_5与γ^μ反对易和(3.4.60)即可得到

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L=0,\quad i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R=0.\qquad(3.4.65)$$

把(3.4.63)和γ矩阵的标准表示(3.4.11)代入，可得

$$(\partial_0-\sigma\cdot\nabla)\varphi_L=0,\quad (\partial_0+\sigma\cdot\nabla)\varphi_R=0,\qquad(3.4.66)$$

这通常称为威尔方程.

为了了解威尔旋量φ_L，φ_R的物理意义，我们过渡到动量表象，经傅立叶变换后得到

$$\begin{cases}(p_0+\sigma\cdot p)\tilde{\varphi}_L(p)=0,\\(p_0-\sigma\cdot p)\tilde{\varphi}_R(p)=0,\end{cases}\tag{3.4.67}$$

这是动量空间的威尔方程. 注意到对零质量粒子 $p_0=|p|$，故从(3.4.67)可得到

$$\begin{cases}\sigma\cdot\dfrac{p}{|p|}\tilde{\varphi}_L(p)=-\tilde{\varphi}_L(p),\\\sigma\cdot\dfrac{p}{|p|}\tilde{\varphi}_R(p)=\tilde{\varphi}_R(p).\end{cases}\tag{3.4.68}$$

算符 $\sigma\cdot\dfrac{p}{|p|}$ 称为螺旋性，它表示自旋在运动方向上的投影. 公式(3.4.68)表示威尔旋量 φ_R 和 φ_L 分别是螺旋性算符的本征值为1和-1的本征态，因而前者的自旋取向总与运动方向一致，而后者则与运动方向相反. 总之，一个零质量狄拉克粒子的自旋取向与其运动方向或者平行，或者反平行. 实验测定的中微子的自旋取向与其运动方向反平行，即它的螺旋性为-1. 从(3.4.64)可以看出，ψ_L 的螺旋性为-1，ψ_R 的螺旋性为$+1$(注意，仅对零质量粒子才对，因(3.4.64)是在 $m=0$的条件下得到的). 因此，我们可定义中微子的场为：

$$\nu(x)=\mathscr{P}_L\psi(x)=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi(x).\tag{3.4.69}$$

(五) 拉格朗日形式

我们选择狄拉克场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}=\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi)-m\bar{\psi}\psi.\tag{3.4.70}$$

注意，这个拉氏量密度的特点是 ψ 和 $\psi^\dagger$ (或 $\bar{\psi}$)被当作独立变量处理，而且当 ψ 和 $\bar{\psi}$ 满足场方程时 $\mathscr{L}$ 为零.

容易看出，$\mathscr{L}$ 是彭加勒变换下的不变量，因此，根据奈特定理场的能量、动量和总角动量是守恒量. 由(2.2.28)并利用运动方程(意味着 $\mathscr{L}=0$) 得到狄拉克场的能量动量张量

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\nu}\psi), \tag{3.4.71}$$

由此，场的能量、动量分别是

$$H = P^{0} = \frac{i}{2}\int \psi^{\dagger}\overleftrightarrow{\partial}_{0}\psi \, \mathrm{d}^{3}x, \tag{3.4.72a}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{i}{2}\int \psi^{\dagger}\overleftrightarrow{\nabla}\psi \, \mathrm{d}^{3}x. \tag{3.4.72b}$$

为了计算狄拉克场的自旋角动量，需要注意的是由于 ψ 和 $\bar{\psi}$ 在洛仑兹变换下有各自的变换规律(参见式(3.4.27)和(3.4.28)) $L(\omega)$和 $L^{-1}(\omega)$，故在应用自旋角动量公式(2.2.45c)时，对场的多分量求和应对 ψ 和 $\bar{\psi}$ 分别进行，即写(2.2.45c)成

$$S^{\mu(\rho\sigma)} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu}\psi}\Sigma_{\psi}^{(\rho\sigma)}\psi - \bar{\psi}\Sigma_{\bar{\psi}}^{(\rho\sigma)}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu}\bar{\psi}}, \tag{3.4.73}$$

其中 Σ_{ψ} 对应于 $L(\omega)$，$\Sigma_{\bar{\psi}}$ 对应于 $L^{-1}(\omega)$，由(3.4.24)和(2.2.39)即可得到

$$\Sigma_{\psi}^{(\rho\sigma)} = -\frac{i}{2}\sigma^{\rho\sigma}, \quad \Sigma_{\bar{\psi}}^{(\rho\sigma)} = \frac{i}{2}\sigma^{\rho\sigma} \quad (\rho < \sigma). \tag{3.4.74}$$

把它们代入(3.4.73)，得到狄拉克场的自旋角动量张量

$$S^{\mu(\rho\sigma)} = \frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma^{\mu}\sigma^{\rho\sigma} + \sigma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu})\psi \quad (\rho < \sigma). \tag{3.4.75}$$

场的自旋角动量则为

$$S^{(\rho\sigma)} = \int S^{0(\rho\sigma)}\mathrm{d}^{3}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^{3}x\psi^{\dagger}(\sigma^{\rho\sigma} + \sigma_{\rho\sigma})\psi \quad (\rho < \sigma), \tag{3.4.76}$$

其中已利用了 $\gamma^{0}\sigma^{\rho\sigma}\gamma^{0} = \sigma_{\rho\sigma}$ 由于

$$\sigma_{0i} = -\sigma^{0i}, \quad \sigma_{ij} = \sigma^{ij} \quad (i,j,=1,2,3).$$

故上式可表示为

$$S^{(ij)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{3}x \, \psi^{\dagger}\sigma^{ij}\psi \quad (i < j). \tag{3.4.77}$$

定义

$$S_{k} = \varepsilon_{ijk}S^{(ij)} \tag{3.4.78}$$

其中 ε_{ijk} 为三阶全反对称符号，具有 $\varepsilon_{123}=1$，则(3.4.77)变为

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,\psi^{\dagger}\sigma^{ij}\psi \quad (i<j) \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\int \mathrm{d}^3x\,\psi^{\dagger}\sigma^{ij}\psi \quad (\text{任意 } i,j) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\psi^{\dagger}\Sigma_k\psi\,, \end{aligned} \tag{3.4.79}$$

其中已定义

$$\Sigma_k=\begin{bmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{bmatrix}, \tag{3.4.80}$$

σ_k 是(3.4.10)给出的泡利矩阵. 得到第三个等式时利用了(请读者自行证明)关系式

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^{ij}=\Sigma_k. \tag{3.4.81}$$

(3.4.79)表示的 S_k ($k=1,2,3$)就是自旋的三个分量. 由于算符矩阵

$$\left(\frac{1}{2}\Sigma\right)^2=\frac{3}{4}I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)I\,,$$

故从(3.4.79)看出，狄拉克场确实具有自旋$\frac{1}{2}$，量子化后描述自旋为$\frac{1}{2}$的粒子.

拉氏量密度(3.4.70)还有下列内部变换不变性：

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x)=e^{i\omega}\psi(x),\\ \psi^{\dagger}(x) &\to \psi'^{\dagger}(x)=e^{-i\omega}\psi^{\dagger}(x), \end{aligned} \tag{3.4.82}$$

ω 是常数，ω 是与 x 无关的无穷小实参数. 故存在相应的守恒流(密度)和守恒荷(电荷)，可分别从(2.2.51)和(2.2.52)求得

$$J^{\mu}=e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{3.4.83}$$

$$Q=e\int\psi^{\dagger}\psi\,\mathrm{d}^3x. \tag{3.4.84}$$

(六) 正则量子化和粒子解释

首先，我们来确定狄拉克场的共轭动量. 按通常的办法，我们从(3.4.70)得到

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2}\psi^{\dagger}, \quad \pi^{\dagger} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}^{\dagger}} = -\frac{i}{2}\psi.$$

我们发现，一个场量的共轭动量恰好是另一个场量. 因此，ψ 和 $\psi^{\dagger}$ 实际上不是独立的，它们以共轭动量的形式相联系，故我们只需选择一对共轭场，例如 ψ 和 π. 为了得到正确的共轭动量 π，我们考虑与(3.4.70)在物理上等效的拉氏量密度(仅相差一全散度项)：

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{3.4.85}$$

从它我们得到：

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^{\dagger}. \tag{3.4.86}$$

其次，要确定狄拉克场量子化时，对易关系应取何种形式？基本的考虑是要求量子化后，场的能量正定，且场量子服从正确的统计即费米-狄拉克统计. 结论是，狄拉克场的量子化必须采用反对易形式，即

$$\{\psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\ \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{3.4.87a}$$

或

$$\{\psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(t,\boldsymbol{x}')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{3.4.87b}$$

$$\{\psi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = \{\psi_{\alpha}^{\dagger}(t,\boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(t,\boldsymbol{x}')\} = \{\pi_{\alpha}(t,\boldsymbol{x}),\ \pi_{\beta}(t,\boldsymbol{x}')\} = 0, \tag{3.4.87c}$$

但量子运动方程仍取对易形式：

$$\dot{\psi}_{\alpha} = i[H,\ \psi_{\alpha}], \quad \dot{\pi}_{\alpha} = i[H,\ \pi_{\alpha}], \tag{3.4.88}$$

这是因为物理量 H 是 ψ 的从线性型，利用

$$[AB,\ C] = A\{B,\ C\} - \{A,\ C\}B \tag{3.4.89}$$

即可与反对易关系联系起来.

为了了解上述结论的由来和显示狄拉克场的粒子形象，我们转到动量表象. 把 $\psi(x)$ 和 $\psi^{\dagger}(x)$ 按平面波解(3.4.42)展开：

$$\begin{cases}\psi(x) = \int \mathrm{d}^3p\,[c_r(p)u_r(p)g_p(x) + d_r^{\dagger}(p)v_r(p)g_p^{*}(x)], \\ \psi^{\dagger}(x) = \int \mathrm{d}^3p\,[c_r^{\dagger}(p)u_r^{\dagger}(p)g_p^{*}(x) + d_r(p)v_r^{\dagger}(p)g_p(x)],\end{cases} \tag{3.4.90}$$

其中，u_r, v_r 和 $u_r^{\dagger}, v_r^{\dagger}$ 是正、负能旋量及其厄米共轭；$c_r^{\dagger}, d_r^{\dagger}, c_r, d_r$ 将表示粒子的产生和湮灭算符(（3.3.10)对照)；$g_p(x)$ 的定义为

$$g_p(x) = (2\pi)^{-3/2}\sqrt{\frac{m}{E_p}}e^{-ip\cdot x}, \quad E_p = \sqrt{p^2+m^2}. \tag{3.4.91}$$

注意它与(3.2.7)所定义的 $f_k(x)$ 仅差一数值因子 $\sqrt{2m}$，故我们有[参见(3.2.8)和(3.2.9)].

$$\left(\Box - m^2\right)g_p(x) = 0, \quad \left(\Box - m^2\right)g_p^{*}(x) = 0 \tag{3.4.92}$$

及

$$\begin{cases} i\int \mathrm{d}^3x\, g_p^{*}\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{p'} = 2m\delta^3(p-p') = -i\int \mathrm{d}^3x\, g_p\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{p'}^{*}, \\ \int \mathrm{d}^3x\, g_p\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{p'} = \int \mathrm{d}^3x\, g_p^{*}\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{p'}^{*} = 0. \end{cases} \tag{3.4.93}$$

把(3.4.90)代入狄拉克场的能量表达式(3.4.72a)，并利用(3.4.93)和(3.4.49)，得到

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\,[c_r^{\dagger}(p)u_r^{\dagger}(p)g_p^{*} + d_r(p)v_r^{\dagger}(p)g_p] \\ &\quad\cdot\overleftrightarrow{\partial}_0[c_s(p')u_s(p')g_{p'} + d_s^{\dagger}(p')v_s(p')g_{p'}^{*}] \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\;2m[c_r^{\dagger}(p)c_s(p')u_r^{\dagger}(p)u_s(p') \\ &\quad - d_r(p)d_s^{\dagger}(p')v_r^{\dagger}(p)v_s(p')] \end{aligned}$$

$$= m\int \mathrm{d}^3p[c_r^\dagger(p)c_s(p)u_r^\dagger(p)u_s(p) - d_r(p)d_s^\dagger(p)v_r^\dagger(p)v_s(p)]$$

$$= \int \mathrm{d}^3p\, E_p[c_r^\dagger(p)c_r(p) - d_r(p)d_r^\dagger(p)]. \qquad (3.4.94)$$

现在，我们清楚地看到，为了使算符取正规乘积后得到正定的能量，必须要求它们满足反对易关系：

$$\begin{cases}\{c_r(p),\ c_s^\dagger(p')\} = \{d_r(p),\ d_s^\dagger(p')\} = \delta_{rs}\delta^3(p-p'),\\ \text{其余反对易子为 0.}\end{cases} \qquad (3.4.95)$$

因为，只有当算符反对易时，交换算符次序才增添一个负号. 这一点在取正规乘积时务须特别记住. 这样，对(3.4.94)取正规乘积后，有

$$:H: = \int \mathrm{d}^3p\, E_p[c_r^\dagger(p)c_r(p) + d_r^\dagger(p)d_r(p)], \qquad (3.4.96)$$

由此显见，能量是正定的.

此外，由于

$$\{c_r^\dagger(p),\ c_r^\dagger(p)\} = 0, \quad \{c_r(p),\ c_r(p)\} = 0 \quad (\text{不对 } r \text{ 求和}),$$

可导出

$$c_r^\dagger(p)c_r^\dagger(p) = 0, \quad c_r(p)c_r(p) = 0 \quad (\text{不对 } r \text{ 求和}),$$

这表示不可能有相同量子数的两个及其以上的粒子态存在，即狄拉克场遵守泡利不相容原理，服从费米-狄拉克统计.

现在我们来证明动量空间的反对易关系(3.4.95)必然导致坐标空间的反对易关系(3.4.87). 事实上，利用(3.4.90)，(3.4.95)和(3.4.56)，有

$$\{\psi_\alpha(t,\boldsymbol{x}),\ \psi_\beta^\dagger(t,\boldsymbol{x}')\}$$

$$= \int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\{c_r(p)u_{r\alpha}(p)g_p(t,\boldsymbol{x}) + d_r^\dagger(p)v_{r\alpha}(p)g_p^*(t,\boldsymbol{x}),$$

$$c_s^\dagger(p')u_{s\beta}^\dagger(p)g_{p'}^*(t,\boldsymbol{x}') + d_s(p')v_{s\beta}^\dagger(p')g_{p'}(t,\boldsymbol{x}')\}$$

$$= \int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\,[u_{r\alpha}(p)u_{s\beta}^\dagger(p')g_p(t,\boldsymbol{x})g_{p'}^*(t,\boldsymbol{x}')\{c_r(p),\ c_s^\dagger(p')\}$$

$$+ v_{r\alpha}(p)v_{r\beta}^{\dagger}(p')g_p^*(t,\boldsymbol{x})g_{p'}(t,\boldsymbol{x}')\{d_r^{\dagger}(p), d_s(p')\}]$$

$$= \int \mathrm{d}^3p[u_{r\alpha}(p)u_{r\beta}^{\dagger}(p)g_p(t,\boldsymbol{x})g_p^*(t,\boldsymbol{x}')$$

$$+ v_{r\alpha}(p)v_{r\beta}^{\dagger}(p)g_p^*(t,\boldsymbol{x})g_p(t,\boldsymbol{x}')]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{m}{E_p}[(u_r(p)u_r(p)\gamma^0)_{\alpha\beta}\ e^{-\mathrm{i}p\cdot(x-x')}$$

$$+ (v_r(p)\bar{v}_r(p)\gamma^0)_{\alpha\beta}\ e^{\mathrm{i}p\cdot(x-x')}]$$

$$\overset{(\Delta)}{=} \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{1}{2E_p}\{[(\gamma\cdot p+m)\gamma^0]_{\alpha\beta}\ e^{-\mathrm{i}p\cdot(x-x')}$$

$$+ [(\gamma\cdot p-m)\gamma^0]_{\alpha\beta}\ e^{\mathrm{i}p\cdot(x-x')}\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p\,\frac{1}{2E_p}2p^0\delta_{\alpha\beta}\ e^{\mathrm{i}p\cdot(x-x')}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-x'). \qquad (*)$$

这即是(3.4.87b).(3.4.87c)可类似地得到.

下面,我们来讨论狄拉克场的粒子形象.把(3.4.90)分别代入场的动量表达式(3.4.72b)和电荷表达式(3.4.84),取正规乘积后得到:

$$:\boldsymbol{P}: = \int \mathrm{d}^3p\,\boldsymbol{p}\,[c_r^{\dagger}(p)c_r(p) + d_r^{\dagger}(p)d_r(p)], \quad (3.4.97)$$

$$:Q: = \int \mathrm{d}^3p\,q\,[c_r^{\dagger}(p)c_r(p) - d_r^{\dagger}(p)d_r(p)]. \quad (3.4.98)$$

(3.4.98)表明,如果 $c_r^{\dagger}$ 产生一个正粒子,则 $d_r^{\dagger}$ 产生一个反粒子(具有相反电荷).因而也称

$$\begin{cases} N_r^{(-)}(p) = c_r^{\dagger}(p)c_r(p), \\ N_r^{(-)}(p) = d_r^{\dagger}(p)d_r(p) \quad (\text{不对 } r \text{ 求和}). \end{cases} \quad (3.4.99)$$

是正、反粒子密度数算符.具体地说,(3.4.96～98)表示:

$c_r^{\dagger}(p)$ ——产生一个动量为 p、极化为 r、荷电 q 的正粒子算符;

$c_r(p)$ ——湮灭一个动量为 p、极化为 r、荷电 q 的正粒子算符;

$d_r^{\dagger}(p)$ ——产生一个动量为 p、极化为 r、荷电 $-q$ 的反粒子算符;

$d_r(p)$ ——湮灭一个动量为 p、极化为 r、荷电 $-q$ 的反粒子算符.

而狄拉克场的真空可理解为既无正粒子又无反粒子的态.

最后，我们来推导狄拉克场的协变(反)对易关系.注意它与等时对易关系的差别仅在于用 $\bar{\psi}_\beta = \psi_\beta^\dagger \gamma^0$ 来代替 $\psi_\beta^\dagger$ ，及 $x^0 \neq x'^0$，故可直接从上面的推导(*)中标有(Δ)的等式出发，作相应的变动得到：

$$
\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [(\gamma \cdot p + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} + (\gamma \cdot p - m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [(i\gamma \cdot \partial + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} - (i\gamma \cdot \partial + m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}] \\
&= (i\gamma \cdot \partial + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [e^{-ip(x-x')} - e^{ip(x-x')}] \\
&= (i\gamma \cdot \partial + m)_{\alpha\beta} \, i\Delta(x-y) \\
&\equiv -iS_{\alpha\beta}(x-x'), \qquad (3.4.100)
\end{aligned}
$$

其中 $i\Delta(x-y)$ 由式(3.2.34)表出.它是标量场的协变对易子.矩阵 $-iS(x-x')$ 称为是狄拉克场的协变(反)对易子.

由于在狄拉克理论中，可观察量都表成 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的双线性型，故利用(3.4.89)和(3.4.100)，我们有

$$
\begin{aligned}
&[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\rho(x')\psi_\sigma(x')] \\
&= \bar{\psi}_\rho(x') [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x), \psi_\sigma(x')] + [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\rho(x')] \psi_\sigma(x') \\
&= i\bar{\psi}_\rho(x') S_{\sigma\alpha}(x'-x)\psi_\beta(x) - i\bar{\psi}_\alpha(x) S_{\beta\rho}(x-x')\psi_\sigma(x') \\
&= 0 \qquad (\text{对}(x-x')^2 < 0).
\end{aligned}
$$

最后一个等式是因为 $\Delta(x-x')$，从而 $S(x-x')$ 对所有的类空间隔为零.这表述了狄拉克场的微观因果性质.

3.5 电 磁 场

电磁场是无质量的矢量场，它描述自旋为1的粒子——光子.通常，矢量场用四分量的场来协变描述，而电磁场只有二个横向自

由度.这种场变量个数大于独立自由度数的情形必然导致存在附加的约束条件——洛仑兹条件.这给电磁场的协变量子化带来一定的困难,造成了相当的复杂性.致使历史上发展最早的电磁理论,其协变量子化却迟至1950年才最后完成.

(一) 电磁场的协变形式和洛仑兹条件

众所周知,自由电磁场由下列麦克斯韦方程组描写:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

为了把它们改写成明显协变的形式,引进电磁势四矢量 $A^\mu(x)$:

$$A = (A^\mu) = (A^0, \boldsymbol{A}), \tag{3.5.2}$$

满足

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla A^0. \tag{3.5.3}$$

再利用 A^μ 来定义反对称二阶张量

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{3.5.4}$$

利用(3.5.3)容易验证 $F^{\mu\nu}$ 的非零分量相应于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$:

$$F^{0i} = -E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k, \tag{3.5.5}$$

其中 $\epsilon^{ijk} \equiv \epsilon_{ijk}$ 是全反对称符号,具有 $\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = 1$. 因此 $F^{\mu\nu}$ 被称为电磁场张量. 利用 $F^{\mu\nu}$,(3.5.1)的头两个方程是自动满足的,而后两个方程可以结合成下列协变形式:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.5.6}$$

所以方程(3.5.6)和(3.5.4)一起就构成了自由电磁场方程的协变形式.

特别需要指出的是,电磁势(3.5.2)虽然通过(3.5.3)规定了

电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，但决不是唯一的. 在 A^μ 的下列"规范变换"下

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (\chi \text{ 是任意标量函数}), \tag{3.5.7}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 保持不变. 这被称为电磁场的规范不变性，它等效于电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 在电磁势的规范变换(3.5.7)下是不变的：

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial'^\nu - \partial'^\nu\partial^\mu) = F^{\mu\nu}. \tag{3.5.8}$$

把(3.5.4)代入(3.5.6)，我们得到

$$\Box A^\nu + \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0. \tag{3.5.9}$$

利用(3.5.7)，选取特殊的 χ，使 A^μ 满足所谓的洛仑兹规范条件：

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{3.5.10}$$

在这种规范选择下，(3.5.9)变为

$$\Box A^\mu = 0, \tag{3.5.11}$$

因此，在洛仑兹条件下自由电磁场满足 C-G 方程.

(二) 洛仑兹规范量子化

如果简单地选择电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.5.12}$$

利用它，从拉格朗日运动方程(2.1.22)即可得到协变的电磁场方程(3.5.6). 再象通常那样定义场的正则共轭动量：

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial\,\partial_0 A_\mu} \\ &= -\frac{1}{2}F^{\rho\sigma}(g^0_\rho g^\mu_\sigma - g^\mu_\rho g^0_\sigma) \\ &= -\frac{1}{2}(F^{0\mu} - F^{\mu 0}) = -F^{0\mu},\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

由此，

$$\pi^0 = -F^{00} = 0. \tag{3.5.14}$$

这将与按通常方式确定的对易关系之一

$$[A^0(t,\boldsymbol{x}),\ \pi^0(t,\boldsymbol{x}')] = i\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \neq 0$$

相矛盾！这当然是不能容忍的．产生问题的原因在于我们没有考虑到电磁场应该满足洛仑兹条件(3.5.10)．考虑(3.5.10)后电磁场的拉格朗日密度可选为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}\partial_\nu(A^\nu\partial_\mu A^\mu - A_\mu\partial^\mu A^\nu).\end{aligned}$$

略去全散度项后，我们可取

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu), \tag{3.5.15}$$

从它，利用(2.1.22)我们得到的运动方程正好是(3.5.11)，这是因为(3.5.15)已经包含了洛仑兹条件(3.5.10)的缘故．

利用(3.5.15)，我们按定义求得正则共轭动量为

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -\dot{A}_\mu, \tag{3.5.16}$$

于是正则量子化条件可规定为下列等时对易关系：

$$\begin{cases}[A_\mu(t,\boldsymbol{x}),\ \dot{A}_\nu(t,\boldsymbol{x}')] = -ig_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\ [A_\mu(t,\boldsymbol{x}),\ A_\nu(t,\boldsymbol{x}')] = [\dot{A}_\mu(t,\boldsymbol{x}),\ \dot{A}_\nu(t,\boldsymbol{x}')] = 0.\end{cases} \tag{3.5.17}$$

然而，进一步考虑发现问题并没有完全解决，原因是量子化以后，洛仑兹条件(3.5.10)通常将变为算符等式，我们有

$$\chi \equiv \partial_\mu A^\mu = \dot{A}_0 + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0,$$

这导致下列矛盾：

$$\begin{aligned}0 &= [\chi(t,\boldsymbol{x}),\ A^0(t,\boldsymbol{x}')] \\ &= [\dot{A}^0(t,\boldsymbol{x}),\ A^0(t,\boldsymbol{x}')] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \neq 0,\end{aligned}$$

这表明不能简单地把经典的洛仑兹条件对应为量子的算符等式．在量子理论中，有物理意义的是算符的期望值．因此可以假设，量子化后 $\partial_\mu A^\mu$ 作为算符不等于零，但它对物理态 $|\varphi\rangle$ 的期望值为零：

$$\langle\varphi|\partial_\mu A^\mu|\varphi\rangle = 0, \tag{3.5.18}$$

这称为洛仑兹附加条件，它既克服了上述矛盾，又保留了洛仑兹条件的物理内容．关于式(3.5.18)在电磁场的协变量子化中所起的

积极作用我们在下面还要专门讨论. 现在我们先来给出电磁场的一些动力学量.

· 把拉格朗日密度(3.5.15)代入(2.2.15)我们得到电磁场的能量动量张量

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A_\sigma \partial^\nu A^\sigma - g^{\mu\nu}\mathscr{L}, \tag{3.5.19}$$

由此得电磁场的能量、动量为

$$H = \int \mathrm{d}^3x T^{00} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\dot{A}^\nu \dot{A}_\nu + \nabla A^\nu \cdot \nabla A_\nu), \tag{3.5.20}$$

$$P^k = \int \mathrm{d}^3x T^{0k} = \int \mathrm{d}^3x \dot{A}_\nu \partial^k A^\nu. \tag{3.5.21}$$

电磁场的自旋角动量部分可把式(3.5.15)代入式(2.2.47)得到:

$$S^{(\rho\sigma)} = \int \mathrm{d}^3x(A^\rho \dot{A}^\sigma - A^\sigma \dot{A}^\rho) \quad (\rho < \sigma), \tag{3.5.22}$$

其空空分量相应于电磁场的自旋矢量:

$$S^{(ij)} = \int \mathrm{d}^3x(A^i \dot{A}^j - A^j \dot{A}^i) \quad (i < j), \tag{3.5.23}$$

或表为

$$\begin{aligned} S_k &= \varepsilon_{kij} S^{(ij)} \quad (i < j) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{kij} S^{ij} \quad (\text{任意 } i,j) \\ &= \int \mathrm{d}^3x \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}(A^i \dot{A}^j - A^j \dot{A}^i), \end{aligned} \tag{3.5.24a}$$

写成矢量形式为

$$S = \int \mathrm{d}^3x(\dot{A} \times A). \tag{3.5.24b}$$

(三) 动量表象和粒子解释

由于电磁场的运动方程(3.5.11)相当于零质量的多分量标量场方程,我们可类似于标量场情形把电磁场展开为

$$A^\mu(x) = \int \mathrm{d}^3k[a^\mu(k) f_k(x) + a^{\dagger\mu}(k) f_k^*(x)], \tag{3.5.25}$$

其中, $f_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} e^{-ikx}$ 满足正交归一性条件(3.2.9),但考

虑到光是横波(其偏振平面与传播方向 k 垂直),即光是具有极化的,而(3.5.25)中 a_μ、a_μ^+ 的指标 $\mu=0,1,2,3$却是对固定坐标而言的,并不能恰当地反映出光的极化性质.为了恰当地描述光的极化,把物理的和非物理的极化部分明显地分解开来,有必要引进极化坐标系.

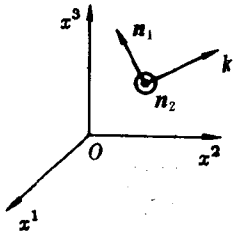


图 3.5.1

如图3.5.1所示,极化坐标系 $(x^0,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{k})$ 的第3轴选为光的运动方向 $\boldsymbol{k}$,第0轴仍沿时间方向,$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ 在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面上.我们引进极化四矢量 $\varepsilon_{(\sigma)}(\sigma=0,1,2,3)$ 来表示极化坐标系中四个极化方向的单位矢量(注意,这里的指标 σ 仅识别极化方向,并非洛仑兹指标,无逆变,协变之分,故特别用括号括起来以示区别,但重复指标求和规则依然执行),定义为

$$\begin{cases}\varepsilon_{(0)}=(\varepsilon^\mu_{(0)})=(1,\boldsymbol{0})=(1,0,0,0)\text{— 标极化;}\\ \left.\begin{aligned}\varepsilon_{(1)}&=(\varepsilon^\mu_{(1)})=(0,\boldsymbol{n}_1)=(0,1,0,0)\\ \varepsilon_{(2)}&=(\varepsilon^\mu_{(2)})=(0,\boldsymbol{n}_2)=(0,0,1,0)\end{aligned}\right\}\text{横极化;}\\ \varepsilon_{(3)}=(\varepsilon^\mu_{(3)})=\left(0,\dfrac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)=(0,0,0,1)\text{— 纵极化.}\end{cases}\tag{3.5.26}$$

它们满足正交性条件

$$\varepsilon_{(\sigma)}\cdot\varepsilon_{(\lambda)}=\varepsilon^\mu_{(\sigma)}\varepsilon_{(\lambda)\mu}=g_{\mu\nu}\varepsilon^\mu_{(\sigma)}\varepsilon^\nu_{(\lambda)}=g_{\sigma\lambda},\tag{3.5.27}$$

完备性条件

$$\varepsilon^\mu_{(\sigma)}\varepsilon^\nu_{(\sigma)}=\delta^{\mu\nu}\tag{3.5.28}$$

以及横向性条件

$$k \cdot \varepsilon_{(1)} = k \cdot \varepsilon_{(2)} = 0. \tag{3.5.29}$$

现在，可以利用极化四矢量 $\varepsilon_{(\sigma)}$ 把 $a^{\mu}(k)$ 和 $a^{\dagger\mu}(k)$ 展开为

$$a^{\mu}(k) = \varepsilon^{\mu}_{(\sigma)} a_{(\sigma)}(k), \quad a^{\dagger\mu}(k) = \varepsilon^{\mu}_{(\sigma)} a^{\dagger}_{(\sigma)}(k). \tag{3.5.30}$$

于是，(3.5.25)变为

$$A^{\mu}(x) = \int \mathrm{d}^3 k \varepsilon^{\mu}_{(\sigma)} [a_{(\sigma)}(k) f_k(x) + a^{\dagger}_{(\sigma)}(k) f^*_k(x)]. \tag{3.5.31}$$

利用(3.2.9)和(3.5.27)容易验证其逆展开为

$$\begin{cases} a_{(\sigma)}(k) = i \int \mathrm{d}^3 x \, f^*_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu}(x) \varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}, \\ a^{\dagger}_{(\sigma)}(k) = -i \int \mathrm{d}^3 x \, f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu}(x) \varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}. \end{cases} \tag{3.5.32}$$

与在(3.2.12)中所做的完全类似，我们可以证明 $a_{(\sigma)}$ 和 $a^{\dagger}_{(\sigma)}$ 与时间无关。由此，利用(3.5.32)和(3.5.17)可得到动量表象的对易关系(推导过程类似于(3.2.13)：

$$\begin{cases} [a_{(\sigma)}(k), a^{\dagger}_{(\lambda)}(k')] = -g_{\sigma\lambda} \delta^3(k - k'), \\ \text{其余对易子为零}. \end{cases} \tag{3.5.33}$$

这里，一个需特别注意的特征是与标极化对应的零分量的对易关系中出现负号：

$$[a_{(0)}(k), a^{\dagger}_{(0)}(k')] = -\delta^3(k - k'), \tag{3.5.34}$$

在积分意义下(或分离形式)，也可表为

$$[a_{(0)}(k), a^{\dagger}_{(0)}(k)] = -1, \tag{3.5.35}$$

它所引起的后果我们将在下面多次提到.

把(3.5.31)代入(3.5.20－21)，经过一些代数运算后可得到电磁场的能量、动量在动量表象中的表达式，统一表示成四矢量形式：

$$:P^{\nu}: = \int \mathrm{d}^3 k \, k^{\nu} [a^{\dagger}_{(i)}(k) a_{(i)}(k) - a^{\dagger}_{(0)}(k) a_{(0)}(k)]. \tag{3.5.36}$$

初看之下，能量似乎不是正定的. 然而考虑到(3.5.35)中的负号，我们应定义粒子数密度算符为

$$N_{(\sigma)}(k) = \begin{cases} a^{\dagger}_{(i)}(k) a_{(i)}(k) & (i = 1,2,3, \text{不对 } i \text{ 求和}). \\ -a^{\dagger}_{(0)}(k) a_{(0)}(k) \end{cases} \tag{3.5.37}$$

这样，我们有

$$\begin{aligned} N_{(0)}(k)a^{\dagger}_{(0)}(k)|0\rangle &= -\,a^{\dagger}_{(0)}(k)a_{(0)}(k)a^{\dagger}_{(0)}(k)|0\rangle \\ &= -\,a^{\dagger}_{(0)}(k)[a_{(0)}(k),\ a^{\dagger}_{(0)}(k)]|0\rangle \\ &= a^{\dagger}_{(0)}(k)|0\rangle, \end{aligned} \tag{3.5.38}$$

得到的本征值为+1，表明(3.5.37)中对标光子粒子数密度的特殊定义是合理的. 从而

$$:P^{\nu}: = \int d^3k\, k^{\nu} \sum_{\sigma=0}^{3} N_{(\sigma)}(k), \tag{3.5.39}$$

可见，能量是正定的.

在(3.5.37)下，仍能求得(类似于(3.2.18))：

$$\begin{cases} [N_{(\sigma)}(k),\ a^{\dagger}_{(\sigma)}(k)] = a^{\dagger}_{(\sigma)}(k) \quad (\sigma = 0,1,2,3), \\ [N_{(\sigma)}(k),\ a_{(\sigma)}(k)] = -\,a_{(\sigma)}(k). \end{cases} \tag{3.5.40}$$

因此，我们可以解释

$a_{(1)}(k)$，$a_{(2)}(k)$ ——动量为 k 的横光子湮灭算符；

$a^{\dagger}_{(1)}(k)$，$a^{\dagger}_{(2)}(k)$ ——动量为 k 的横光子产生算符；

$a_{(3)}(k)$，$\left(a^{\dagger}_{(3)}(k)\right)$ ——动量为 k 的纵光子湮灭(产生)算符；

$a_{(0)}(k)$，$\left(a^{\dagger}_{(0)}(k)\right)$ ——动量为 k 的标光子湮灭(产生)算符.

(四) 不定度规与洛仑兹附加条件的作用

标光子的对易子(3.5.35)是负的所引起的另一后果是导致在粒子态的希尔伯特空间(福克空间)中出现“负模态”，即

$$\begin{cases} \langle 1_0|1_0\rangle = \langle 0|a_{(0)}(k)a^{\dagger}_{(0)}(k)|0\rangle \\ \qquad = \langle 0|[a_{(0)}(k),\ a^{\dagger}_{(0)}(k)]|0\rangle = -\,1; \\ \langle 2_0|2_0\rangle = \dfrac{1}{2!}\langle 0|\left(a_{(0)}(k)\right)^2\left(a^{\dagger}_{(0)}(k)\right)^2|0\rangle = 1; \\ \qquad \cdots\cdots \\ \langle n_0|n_0\rangle = \dfrac{1}{n!}\langle 0|\left(a_{(0)}(k)\right)^n\left(a^{\dagger}_{(0)}(k)\right)^n|0\rangle = (-1)^n; \\ \qquad \cdots\cdots \end{cases} \tag{3.5.41}$$

这种情形通常称为不定度规(意即希尔伯特空间中态矢的模方不是正定的).这里,不定度规与标光子密切相关,它也使哈密顿量对标光子态的平均值可正可负,即利用(3.5.39),我们有

$$\langle n_0(k)|H|n_0(k)\rangle = k^0 n_0(k)\langle n_0(k)|n_0(k)\rangle$$
$$= (-1)^{n_0(k)}\, k^0 n_0(k). \qquad (3.5.42)$$

这些使理论陷于严重困境.历史上,人们为此化费了大量精力和时间,最后发现了洛仑兹附加条件的重要作用,它既去掉了上述负度规效应,也去掉了多余的非物理自由度,使物理上出现的全是正定的横光子.下面就具体讨论这个问题.

前已提到,电磁场量子化后,洛仑兹条件不能简单地当作算符方程,而只要求对物理允许的态$|\varphi\rangle$,其期望值为零[参见表达式(3.5.18)]:

$$\langle\varphi|\partial_\mu A^\mu|\varphi\rangle = 0.$$

我们把$\partial_\mu A^\mu$分解为正、负频部分:

$$\partial_\mu A^\mu = -i\int \mathrm{d}^3k\, k_\mu \varepsilon^\mu_{(\sigma)}\left[a_{(\sigma)}(k)f_k(x) - a^\dagger_{(\sigma)}(k)f^*_k(x)\right]$$
$$\equiv (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} + (\partial_\mu A^\mu)^{(-)}. \qquad (3.5.43)$$

容易看出,

$$\left[(\partial_\mu A^\mu)^{(-)}\right]^\dagger = (\partial_\mu A^\mu)^{(+)}, \qquad (3.5.44)$$

于是,我们有

$$\langle\varphi|\partial_\mu A^\mu|\varphi\rangle = \langle\varphi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\varphi\rangle + \langle\varphi|(\partial_\mu A^\mu)^{(-)}|\varphi\rangle$$
$$= \langle\varphi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\varphi\rangle + \langle\varphi|\left[(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}\right]^\dagger|\varphi\rangle$$
$$= \langle\varphi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\varphi\rangle + \langle\varphi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\varphi\rangle^*, \qquad (3.5.45)$$

可见,要使(3.5.18)成立,只需要求

$$(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\varphi\rangle = 0 \qquad (3.5.46)$$

即可,这立即导致

$$k_\mu \varepsilon^\mu_{(\sigma)} a_{(\sigma)}(k)|\varphi\rangle = 0. \qquad (3.5.47)$$

利用$\varepsilon_{(\sigma)}$的横向性条件(3.5.29),上式变为

$$\left(k_\mu \varepsilon^\mu_{(0)} a_{(0)}(k) + k_\mu \varepsilon^\mu_{(3)} a_{(3)}(k)\right)|\varphi\rangle = 0. \qquad (3.5.48)$$

注意到

$$k_\mu \varepsilon^\mu_{(0)} = - k_\mu \varepsilon^\mu_{(3)} \ ,$$

我们得到

$$(a_{(0)}(k) - a_{(3)}(k))|\varphi\rangle = 0 \ , \qquad (3.5.49)$$

这表示物理态$|\varphi\rangle$是纵光子和标光子的满足上式的一种混合，仅有标光子的态不可能是物理态. 因此，物理上既不可能出现负模态，也不可能出现负的能量平均值. 又，从(3.5.49)可直接推得：

$$\langle\varphi|a^\dagger_{(0)}(k)a_{(0)}(k)|\varphi\rangle = \langle\varphi|a^\dagger_{(3)}(k)a_{(3)}(k)|\varphi\rangle. \quad (3.5.50)$$

由此可以看出，在(3.5.36)中，对能量动量有贡献的只是物理的横光子，纵光子和标光子的贡献互相抵消.

第四章　场的相互作用和定域规范不变性

前面对自由场量子化的讨论，显示了场的粒子形象，可以认为粒子是相应场激发的量子．这为描述粒子最基本的运动过程——产生、湮灭和转化——提供了必要的基础．然而，仅有自由场的量子理论，要实现这种描述是完全不够的．事实上，在真实的物理世界中场与场（粒子与粒子）之间存在着各种相互作用，正是由于这些相互作用才造成了粒子的产生、湮灭和转化现象，才使我们得以认识和了解粒子本身．所以，我们还必须进一步考虑场的相互作用或耦合问题．

现在，人们普遍认识到整体规范不变性只能决定场的内禀特性，而场的相互作用则由定域规范不变性决定．定域规范不变性不可能由任何单一的物质场所独有，它必须结合规范场．各种相互作用被认为是物质场与各种规范场的耦合．

4.1　场的相互作用概述

按照现在流行的观点，物质之间存在的各种各样的相互作用可归结为四种基本相互作用，即强作用、电磁作用、弱作用和引力作用．

人们对强作用的了解是从核力开始的，它被描述为 π 介子与核子之间的相互作用．强作用是短程力，其力程仅相当于 π 介子的康普顿波长（1.4×10^{-13}cm）的大小，但在此范围内其相互作用强度却很大，大约是电磁作用的几百倍．现在，人们普遍相信更基

本的强作用是强子内部组元的夸克与胶子之间的色相互作用.强作用具有最高的对称性,它除了满足能量动量、角动量、粒子数、电荷守恒等普遍守恒律外,还满足宇称、电荷共轭、同位旋守恒等.

电磁作用是所有带电粒子与光子之间的作用,它是长程力,其强度随着距离的增大而减弱($\sim r^{-1}$),已建立起相当完善的理论,即量子电动力学(QED).电磁作用除满足普遍的守恒律外,还满足宇称守恒、电荷共轭不变及同位旋第三分量守恒.

对弱作用的认识是从β衰变($n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$)开始的.早期的理论是四费米子相互作用.弱作用的强度约为电磁作用的千分之一.在弱作用中,宇称和电荷共轭分别都不守恒,同位旋守恒也遭到破坏.现在人们认为弱作用是轻子与质量很大的中间矢量玻色子$W^{\pm}$、Z^0之间的作用.

引力作用是物质之间普遍存在的吸引作用.由于比起上述三种相互作用来,它弱得太多,在描述微观运动的量子理论中,一般都将它忽略而不予考虑.

描述场的相互作用的一般方法是在自由场的基础上引进相互作用拉氏量密度$\mathscr{L}_I$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I,$$

其中$\mathscr{L}_0$是参与相互作用的场的自由拉氏量密度,而$\mathscr{L}$则是整个相互作用系统的总拉氏量密度.

$\mathscr{L}_I$一般被表示为参与相互作用的场(或其时空导数)的连乘积.这导致各个场的运动将不是彼此独立而是互相关联的.对$\mathscr{L}_I$的进一步确定依赖于对称性的考虑和限制,如相对论不变性要求$\mathscr{L}_I$应是标量,且不是时空坐标x的显函数;电荷守恒要求$\mathscr{L}_I$应是整体规范变换下的不变量等等.各种守恒律对$\mathscr{L}_I$的限制还不足以完全确定其具体形式,一般情况下,应尽可能采用最简单的形式.此外,由于相互作用的理论一般是不能严格求解的,往往求助于微扰论,这就要求$\mathscr{L}_I$是可重整的.

以电子(ψ)和光子(A^μ)的电磁作用为例，我们来给出相互作用拉氏量密度$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{em}}$. 由于在物理可观察量中，狄拉克场总是以双线性形式出现，而且它要与A^μ结合成标量，故必须是矢量双线性型，即$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$，这样，$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{em}}$的最简单形式为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{em}} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu,$$

其中比例系数e表示电磁耦合强度，一般由实验给出. 容易验证所给出的$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{em}}$也满足电磁作用的其他对称性要求，如电荷守恒等.

60年代以来发展起来的规范场论，由于要求定域规范不变性，从而在相当大的程度上确定了相互作用的形式和传递相互作用的粒子(规范场)，而且已被证明理论是可重整的，因而在近代相互作用描述中起了十分重要的作用. 现在，人们已经完全认识到电磁作用具有一种定域$U(1)$阿贝尔规范对称性，因此，电磁场属于$U(1)$阿贝尔规范场. 统一描述弱作用和电磁作用的温伯格-萨拉姆模型是一种具有自发破缺的定域$SU(2)\times U(1)$非阿贝尔规范理论. 在这一个理论中，由于定域规范对称性自发破缺，一部分规范玻色子获得了很大的质量，它们所传递的就是短程的弱作用，而剩余对称性所相应的规范作用就是长程的电磁作用. 描述夸克和胶子之间色相互作用的理论称为量子色动力学(QCD)，它是一种精确对称的定域$SU(3)$非阿贝尔规范理论，传递色相互作用的规范场粒子就是带色的胶子. 理论预言的渐近自由性质使它成为强作用的唯一侯选理论. 这样，粒子间电磁作用、弱作用和强作用都是由定域规范不变性所决定的规范相互作用，定域规范不变性从而成为现代量子场论的重要概念.

4.2 $U(1)$定域规范不变性

为阐明规范原理，我们以狄拉克场$\psi(x)$为例，其自由拉氏量密度为(参见(3.4.85))：

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \qquad (4.2.1)$$

已知它在整体 $U(1)$ 规范变换

$$\begin{cases}\psi(x)\to\psi'(x)=e^{-i\alpha}\psi(x)\\ \bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{i\alpha}\end{cases}\quad(\alpha\text{是与}x\text{无关的实参数})\tag{4.2.2}$$

下是不变的.

为讨论定域规范对称性，我们在(4.2.2)中用 $\alpha(x)$ 代替 α，得到定域 $U(1)$ 规范变换：

$$\begin{cases}\psi(x)\to\psi'(x)=e^{-i\alpha(x)}\psi(x),\\ \bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}.\end{cases}\tag{4.2.3}$$

对无限小变换($\alpha(x)\ll1$)，我们有

$$\delta\psi(x)=-i\alpha(x)\psi(x),\tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu\psi(x))&=\partial_\mu\delta\psi(x)\\&=-i\alpha(x)\partial_\mu\psi(x)-i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x),\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

$$\delta\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}(x)i\alpha(x),\tag{4.2.6}$$

由此引起的 $\mathscr{L}_0$ 的改变为

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_0&=\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial\partial_\mu\psi}\delta\partial_\mu\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathscr{L}_0}{\partial\bar{\psi}}\\&=-\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x)\\&\equiv-J^\mu\partial_\mu\alpha(x),\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

其中

$$J^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\tag{4.2.8}$$

为电磁流(参见(3.4.83))．利用(4.2.4)和(4.2.6)容易验证在定域规范变换(4.2.3)下仍有

$$\delta J^\mu=(\delta\bar{\psi})\gamma^\mu\psi+\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi=0.\tag{4.2.9}$$

从式(4.2.7)可见，在定域规范变换(4.2.3)下，拉氏量密度(4.2.1)不是不变的．为使 $\mathscr{L}_0$ 仍保持不变，我们需要引进一个新的四矢量场 $A_\mu(x)$，通常称之为规范场，它直接与流 J^μ 耦合给出相互作用拉氏量密度

$$\mathscr{L}_1=eJ^\mu A_\mu\tag{4.2.10}$$

加到 $\mathscr{L}_0$ 上，其中 e 为耦合常数. 我们再要求在变换(4.2.3)下，$A_\mu(x)$ 的变换为

$$\begin{cases} A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \dfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \\ \delta A_\mu(x) = \dfrac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \end{cases} \tag{4.2.11}$$

于是

$$\delta\mathscr{L}_1 = e(\delta J^\mu)A_\mu + eJ^\mu\delta A_\mu = J^\mu\partial_\mu\alpha(x), \tag{4.2.12}$$

其中已利用了(4.2.9). 结合(4.2.7)和(4.2.12)立即得到

$$\delta\mathscr{L}_0 + \delta\mathscr{L}_1 = 0,$$

即 $\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$ 在变换(4.2.3)和(4.2.11)下是不变的. 由于新引进了一个规范场 A^μ，我们需要构造它自身的自由拉氏量密度 $\mathscr{L}_g$，当然，我们也要求它在(4.2.11)下是不变的.

定义规范场张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.2.13}$$

很清楚，在变换(4.2.11)下，它是不变的. 因此可利用它来构造标量 $\mathscr{L}_g$ 为

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.2.14}$$

于是，在定域规范变换(4.2.3)和(4.2.11)下不变的总拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 可构造为

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_1 \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

其中已定义

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{4.2.16}$$

称为协变导数. 这是因为在变换(4.2.3)和(4.2.11)下，$D_\mu\psi$ 与 ψ 的变化相同：

$$\delta(D_\mu\psi) = \delta(\partial_\mu\psi) + ie(\delta A_\mu)\psi + ieA_\mu\delta\psi$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\alpha\partial_\mu\psi - i(\partial_\mu\alpha)\psi + i(\partial_\mu\alpha)\psi + eA_\mu\alpha\psi \\
&= -i\alpha(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \\
&= -i\alpha D_\mu\psi,
\end{aligned}
$$

其中我们利用了(4.2.4)、(4.2.5)和(4.2.11).上式即

$$
D_\mu\psi \to (D_\mu\psi)' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi . \tag{4.2.17}
$$

通过直接计算不难验证协变导数 D_μ 与规范场张量 $F_{\mu\nu}$ 有下列关系：

$$
[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \tag{4.2.18}
$$

现在，我们来指出上面通过 $U(1)$ 定域规范不变性要求确定的相互作用系统(4.2.15)规定了旋量粒子与光子的电磁作用.事实上，不难看出，(4.2.13)所定义的 $F_{\mu\nu}$ 等同于电磁场张量(3.5.4)，而且代换 $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ 也恰好相应于在经典电磁学中熟悉的最小耦合：

$$
\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}, \qquad H \to H - eA^0.
$$

这样，如果 ψ 是描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的电子，(4.2.15)就描写了电子与光子的电磁作用，电磁流(4.2.8)与 A_μ 的耦合强度 e 也就是电子的电荷，引进的规范场 A_μ 就是电磁场.

上面的结果也可以表述为：如果要求作用量(或 $\mathscr{L}$)在定域规范变换 $U(1)$ 下不变，就自然地引进矢量规范场 A_μ (电磁场)，它以一定的强度(耦合常数)与物质场的流相耦合确定了(电磁)相互作用.

值得指出的是，我们知道电磁场(光子)是无质量的.这可以看作是规范不变性对规范场的要求或限制.在拉氏量密度中，规范场质量项的形式为

$$
\mathscr{L}_M = M^2A_\mu A^\mu,
$$

很清楚，它在规范变换(4.2.11)下不是不变的.因此，定域规范不变性要求规范场粒子无质量.这个结论是普遍的.

4.3 $SU(n)$定域规范不变性

上一节我们讨论了单参数的定域规范变换，它形成$U(1)$阿贝尔群，对应的规范场是阿贝尔规范场. 现在我们要把上面的结果推广到具有更高对称性的$SU(n)$群，它有n^2-1参数，是非阿贝尔群，对应着非阿贝尔规范场.

我们把狄拉克场$\psi(x)$推广为n个狄拉克场的多重态，记为

$$\Psi(x)=\begin{bmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\\ \psi_n(x)\end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

相应地，(4.2.1)推广为

$$\mathscr{L}_0=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\Psi, \tag{4.3.2}$$

其中，$M_{ij}=m_i\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n$;重复指标不求和$)$为$n\times n$质量矩阵. 显然，(4.3.2)在$SU(n)$整体规范变换

$$\begin{cases}\Psi(x)\to\Psi'(x)=U\Psi(x),\\ U=\exp(-iT^a\theta^a)\quad(a=1,2,\cdots,n^2-1)\end{cases} \tag{4.3.3}$$

下是不变的. 其中θ^a是与x无关的n^2-1个实参数；T^a是变换群$SU(n)$的n^2-1个生成元，它们满足群代数

$$[T^a,T^b]=if^{abc}T^c \tag{4.3.4}$$

及正交关系(在基础表示下)

$$\mathrm{Tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{4.3.5}$$

为讨论定域规范不变性，我们在(4.3.3)中用$\theta^a(x)$来代替θ^a，得到定域$SU(n)$规范变换：

$$\Psi(x)\to\Psi'(x)=U(x)\Psi(x),\quad U(x)=\exp\left(-iT^a\theta^a(x)\right). \tag{4.3.6}$$

这时，场的导数 $\partial_\mu\Psi$ 的变换为

$$(\partial_\mu\Psi)' \equiv \partial_\mu\Psi' = \big(\partial_\mu U(x)\big)\Psi + U(x)\partial_\mu\Psi. \quad (4.3.7)$$

由于多出一项 $\big(\partial_\mu U(x)\big)\Psi$，因而不是协变的，它使拉氏量密度(4.3.2)在变换(4.3.6)下不是不变的. 要使(4.3.2)不变，首先要找出协变导数 D_μ，即要求

$$(D_\mu\Psi)' \equiv D'_\mu\Psi' = D'_\mu U(x)\Psi = U(x)D_\mu\Psi. \quad (4.3.8)$$

比较最后等式 Ψ 前的系数，我们发现协变导数满足条件

$$D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x). \quad (4.3.9)$$

为了表示简单，我们引进矩阵矢量规范场

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a, \quad (4.3.10)$$

设

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (g \text{ 为常数}), \quad (4.3.11)$$

则由(4.3.9)，有

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu + igA'_\mu = U(x)(\partial_\mu + igA_\mu)U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu + U(x)\big(\partial_\mu U^{-1}(x)\big) + igU(x)A_\mu U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu - \big(\partial_\mu U(x)\big)U^{-1}(x) + igU(x)A_\mu U^{-1}(x), \end{aligned}$$

由此导出 A_μ 应满足的变换为：

$$A'_\mu = U(x)A_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\big(\partial_\mu U(x)\big)U^{-1}(x). \quad (4.3.12)$$

对于无限小变换 $(\theta^a(x) \ll 1)$，有

$$U(x) = 1 - iT^a\theta^a(x). \quad (4.3.13)$$

把它代入(4.3.12)，利用(4.3.10)和(4.3.4)，经过一些代数运算，我们得到规范场矢量 A^a_μ 应满足的变换为

$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu + f^{abc}\theta^b(x)A^c_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x). \quad (4.3.14)$$

现在，在(4.3.2)中作代换 $\partial_\mu \to D_\mu$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0(\partial_\mu \to D_\mu) &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1 \\ &= \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi(x). \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

它在定域规范变换(4.3.3)和(4.3.12)(或(4.3.14))下是不变的.如果把规范场 $A_\mu^a(x)$ 看作是动力学场,则还必须引进规范场的拉氏量密度,并要求它在变换(4.3.12)和(4.3.6)下不变.为此,我们仿照(4.2.18),引进矩阵规范场张量 $F_{\mu\nu}$,定义为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu}^a T^a = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b T^c, \end{aligned} \tag{4.3.16a}$$

或定义规范场张量

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{4.3.16b}$$

由(4.3.9)可知,在变换(4.3.12)和(4.3.6)下,$F_{\mu\nu}$ 的变换为

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U(x) F_{\mu\nu} U^{-1}(x). \tag{4.3.17}$$

对于无限小变换 ($\theta^a(x) \ll 1$),利用(4.3.13),我们可得到 $F_{\mu\nu}^a$ 的变换为

$$F_{\mu\nu}{}^a \to F'_{\mu\nu}{}^a = F_{\mu\nu}{}^a + f^{abc}\theta^b(x) F_{\mu\nu}{}^c. \tag{4.3.18}$$

顺便指出,(4.3.17)和(4.3.18)表明 $F_{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}^a$ 按 $SU(n)$群的伴随表示 $[(T^a)^{bc} = -if^{abc}]$ 变换.

从(4.3.17)容易看出,量 $-\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})/2$ 是变换(4.3.12)和(4.3.6)下的不变量,可取它作为规范场的拉氏量密度 $\mathscr{L}_g$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_g &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}\mathrm{Tr}(\tau^a\tau^b) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

其中已利用了(4.3.5).

这样,我们就得到了在定域规范变换(4.3.6)和(4.3.12)下不变的拉氏量密度 $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^a F^{a\mu\nu}$$

$$=\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^a F^{a\mu\nu} - g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a\Psi,$$

(4.3.20)

其中已利用了(4.3.11),而 $F_{\mu\nu}{}^a$ 由(4.3.16b)表出. 拉氏量密度

$$\mathscr{L}_{g\cdot\Psi} = -\,g\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu^a T^a\Psi \qquad (4.3.21)$$

就是 $SU(n)$定域规范不变性所确定的物质场 Ψ 与规范场 A_μ^a之间的相互作用,$\bar{\Psi}\gamma^\mu T^a\Psi$ 是 $SU(n)$同位旋流,耦合常数 g 表征了相互作用强度. 此外,与阿贝尔情形不同的是,在非阿贝尔情况下,由于 $F_{\mu\nu}^a$ 中除了导数项外还有 A_μ^a 的乘积项(参见(4.3.16b)),故 $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ 中含有 A_μ^a(或其导数)的三次项和四次项,它们表示了规范场的自相互作用. 顺便再提醒一下,$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ 中没有规范场的质量项,这是与上节中所指出的规范场粒子无质量的普遍结论相一致的.

综上所述,我们可以概括结果如下:如果要求 n 个场的多重态在 $SU(n)$定域规范变换(4.3.6)下不变,则必须引进 n^2-1 个无质量的规范场,它们按定域规范变换(4.3.12)变换,并与 n 重态的同位旋矢量流耦合确定它们之间的相互作用. 而且,由于 $SU(n)$群的非阿贝尔性,规范场张量中除了散度项外还有规范场的乘积项,这规定了规范场还有自相互作用. 因此,它比阿贝尔情形要复杂得多.

作为结束,我们来讨论两个有用的特例.

1) $SU(2)$

对于同位旋二重态 $\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$,拉氏量密度

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi \qquad (4.3.22)$$

是在整体 $SU(2)$规范变换

$$U = e^{\,i\tau^k\beta^k} \quad (k=1,2,3) \qquad (4.3.23)$$

下不变的. 在基础表示下,三个生成元

$$T^k = \frac{1}{2}\tau^k, \qquad (4.3.24)$$

τ^k 为通常的泡利矩阵. 容易验证

$$\mathrm{Tr}\tau^k = 0, \quad \mathrm{Tr}\tau^i\tau^j = \frac{1}{2}\delta^{ij}. \tag{4.3.25}$$

由于

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right] = i\varepsilon^{ijk}\frac{\tau^k}{2}, \tag{4.3.26}$$

故 $SU(2)$群的结构常数为 ε^{ijk}.

如果要求 $\mathscr{L}$ (4.3.22)具有 $SU(2)$定域规范不变性,则需引进三个规范场 A_μ^k,其变换为

$$A_\mu^k \to A'^k_\mu = A_\mu^k + \varepsilon^{kij}\theta^i A_\mu^j + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^k(x). \tag{4.3.27}$$

构造协变导数

$$D_\mu\psi_\alpha = \left(\partial_\mu\delta_{\alpha\beta} + ig\frac{\tau^k_{\alpha\beta}}{2}A_\mu^k\right)\psi_\beta \equiv (\partial_\mu + igA_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta \tag{4.3.28}$$

和规范场张量

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - g\varepsilon^{kij}A_\mu^i A_\nu^j, \tag{4.3.29}$$

于是,$SU(2)$定域规范不变的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}F^k_{\mu\nu}F^{k\mu\nu}. \tag{4.3.30}$$

2) $SU(3)$

粒子物理的研究表明,夸克不仅具有"味"($u,d,s,c,\cdots$),而且还有"色"(红、黄、蓝). 现在我们来考虑夸克的色三重态(为了简单,略去味指标)

$$\Psi = \begin{bmatrix}\psi_1(\text{红})\\ \psi_2(\text{黄})\\ \psi_3(\text{蓝})\end{bmatrix}. \tag{4.3.31}$$

拉氏量密度

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi \tag{4.3.32}$$

在整体 $SU(3)$规范变换

$$U = \exp(-iT^a\theta^a) \quad (a = 1,2,\cdots,8) \tag{4.3.33}$$

下是不变的. 在基础表示下，八个生成元

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a, \tag{4.3.34}$$

其中 λ^a 是下列盖尔曼矩阵：

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{4.3.35}$$

它们满足

$$\mathrm{Tr}\lambda^a = 0, \quad \mathrm{Tr}\lambda^a\lambda^b = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{4.3.36}$$

和

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \tag{4.3.37}$$

其中 f^{abc} 是完全反对称的，其非零分量为

$$\begin{cases} f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \dfrac{1}{2}, \\ f^{123} = 1, \quad f^{458} = f^{678} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \tag{4.3.38}$$

$SU(3)$群的结构常数就是上列的 f^{abc}.

如果要求 $\mathscr{L}$ (4.3.32)具有 $SU(3)$定域规范不变性，则需引进八个规范场 B_μ^a，其变换为

$$B_\mu^a \to B'^a_\mu = B_\mu^a + f^{abc}\theta^b B_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x). \quad (4.3.39)$$

构造协变导数

$$D_\mu\Psi_\alpha = \left(\partial_\mu\delta_{\alpha\beta} + ig\frac{\lambda^a_{\alpha\beta}}{2}B_\mu^a\right)\Psi_\beta \equiv (\partial_\mu + igB_\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta \quad (4.3.40)$$

和规范场张量

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu - gf^{abc}B^b_\mu B^c_\nu, \quad (4.3.41)$$

则 $SU(3)$定域规范不变的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\Psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}{}^a G^{a\mu\nu}, \quad (4.3.42)$$

其中夸克质量矩阵 M 与味有关而与色无关.

第五章　路径积分量子化

定域规范不变性最大程度地确定了场的相互作用，其意义无疑是巨大的. 但它同时也导致了一些复杂性，特别是由于拉氏量密度相对于定域规范变换是"简并"的，因而需要考虑具有约束的量子化. 我们已经看到，在阿贝尔规范理论(电磁场)中，为了克服这种困难，需要许多技巧. 然而这些技巧对非阿贝尔规范理论无效. 非阿贝尔规范理论的量子化是由法捷耶夫-波波夫利用路径积分方法完成的. 量子场论的路径积分形式现已得到广泛使用，并且显示出是一种简明有效的方法. 而且，由于它是一种 c 数表述，出现在公式中的量是通常的函数，因而可以自如地运用数学分析方法，往往能通过简单的代数运算得到复杂的结果.

在这一章中，我们从回顾量子力学的路径积分形式开始；接着在第二节中讨论了更便于场论推广的包含外源的路径积分形式；此后各节依次是标量场、费米场和规范场的路径积分形式.

5.1　量子力学的路径积分形式

设量子力学系统的动力学由哈密顿 $H(p,q)$ 描述，系统的时间演化决定于薛定格方程：

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H(p,q)\psi(t), \tag{5.1.1}$$

此方程的形式解可表为

$$\psi(t)=U(t'',t')\psi(t), \tag{5.1.2}$$

其中

$$U(t'',t')=\exp\left[-iH\cdot(t''-t')\right] \tag{5.1.3}$$

称为演化算符. 而系统的位置几率跃迁振幅可表示为

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = \langle q''|\exp[-iH\cdot(t''-t')]|q'\rangle \equiv \langle q'',t''|q',t'\rangle, \tag{5.1.4}$$

其中$|q\rangle$和$|q,t\rangle$分别是薛定格绘景和海森堡绘景中的坐标本征矢.

现在,我们要把(5.1.4)表示为路径积分形式. 注意到系统在固定时刻t_i以不同的几率位于坐标为q的点,但必位于其中的某一点,故我们有

$$\int dq|q,t_i\rangle\langle q,t_i| = 1. \tag{5.1.5}$$

把t'到t''的时间间隔等分为$n+1$段,设每段的长为τ,对每一个$t_i(i=1,2,\cdots,n)$利用(5.1.5),我们有

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \int dq_1\cdots dq_n\langle q'',t''|q_n,t_n\rangle\langle q_n,t_n|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\cdots\langle q_1,t_1|q',t'\rangle. \tag{5.1.6}$$

利用(5.1.4),对右边积分中任一小跃迁振幅我们有

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j\rangle &= \langle q_{j+1}|\exp(-iH\tau)|q_j\rangle\\ &= \langle q_{j+1}|[1-iH\tau+o(\tau^2)]|q_j\rangle\\ &= \delta(q_{j+1}-q_j) - i\tau\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle\\ &= \int\frac{dp}{2\pi}\exp[ip(q_{j+1}-q_j)] - i\tau\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle .\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

通常,$H(p,q)$具有形式

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{5.1.8}$$

这时,(5.1.7)中的H矩阵元容易算出. 利用

$$\langle q|p\rangle = (2\pi)^{-1/2}\exp(ip.q), \tag{5.1.9}$$

我们有

$$\langle q_{j+1}|\frac{p^2}{2m}|q_j\rangle = \int dp'dp\langle q_{j+1}|p'\rangle\langle p'|\frac{p^2}{2m}|p\rangle\langle p|q_j\rangle$$

$$= \int \frac{dp'\,dp}{2\pi} \exp[i(p'q_{j+1} - pq_j)] \frac{p^2}{2m}\delta(p - p')$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)] \frac{p^2}{2m}. \qquad (5.1.10)$$

类似地，有

$$\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle = V(q_j)\delta(q_{j+1} - q_j)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)]V(q_j), \qquad (5.1.11)$$

注意，(5.1.10～11)右边的 $\frac{p^2}{2m}$ 和 $V(q_j)$ 已是普通的 c 数. 结合上两式得到

$$\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)]H(p,q_j). \qquad (5.1.12)$$

把它代入(5.1.7)得到

$$\langle q_{j+1},t_{j+1}|q_j,t_j\rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp\Big(i[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j,q_j)]\Big). \qquad (5.1.13)$$

把它代入(5.1.6)并取连续极限即得位置几率跃迁振幅的路径积分形式：

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\Big(i \sum_{j=1}^{n+1} [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j,q_j)]\Big)$$

$$= \int \mathscr{D}q\, \mathscr{D}p \exp\Big(i \int_{t'}^{t''} dt[p\dot{q} - H(p,q)]\Big), \qquad (5.1.14)$$

上式中的积分是无穷维的，积分变量是两个函数 $q(\tau)$ 和 $p(\tau)$，所以也称为泛函积分.

如果 H 取通常的(5.1.8)形式，则(5.1.14)中对 p_j 的积分可以完成. 利用高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\Big[i\Big(p_j q_j - \frac{\tau}{2m}p_j^2\Big)\Big] = \Big(\frac{m}{2\pi i\tau}\Big)^{1/2} \exp\Big(i\tau \frac{m}{2} q_j^2\Big), \qquad (5.1.15)$$

(5.1.14)可化为

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\tau}\right)^{1/2}\int\prod_{j=1}^{n}\frac{dq_j}{(2\pi i\tau/m)^{1/2}}$$
$$\cdot\exp\left(i\sum_{j=1}^{n+1}\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{\tau}\right)^2 - V(q_j)\right]\right)$$
$$= N\int\mathscr{D}q\exp\left(i\int_{t'}^{t''}dtL(q,\dot{q})\right)$$
$$= N\int\mathscr{D}q\exp(iS), \qquad (5.1.16)$$

其中 $L(q,\dot{q})$ 是经典拉氏量，S 是经典作用量，N 是个无穷大的归一化常数. 由于我们处理的总是归一化的跃迁振幅，N 的大小是无关紧要的.

5.2 包含外源的路经积分

在上一节中我们显示了在哈密顿 H 的通常形式(5.1.8)下，从初态 $|q_i,t_i\rangle$ 到末态 $|q_f,t_f\rangle$ 的位置几率跃迁振幅可表示为式(5.1.16)：

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = N\int\mathscr{D}q\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}dt\ L(q,\dot{q})\right),$$

这里的边界条件显然是

$$q(t_f)=q_f, \qquad q(t_i)=q_i,$$

因此它只适用于描述没有粒子产生和湮灭的粒子运动过程，对于场论并不合适. 现在，我们就来讨论能表示粒子的产生和湮灭的路径积分形式，这将有助于我们把它推广到场论.

(一) 存在外源时的真空-真空跃迁振幅

粒子的产生和湮灭作用可用"源"和"汇"表示，一般，简单地通称为外源. 如图5.2.1所示，我们可以设想，当 $t=-\infty$ 时，真空在外源 J 的作用下产生粒子，经过相互作用和运动，在 $t=+\infty$ 时粒子湮灭又达到真空. 这个图象所提出的量子力学问题是，如何求存在

外源时的真空-真空跃迁振幅?

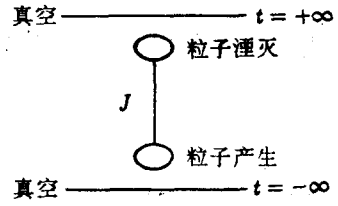


图 5.2.1 存在外源时的真空跃迁

我们首先要在理论中引进外源 $J(t)$，这通常是通过在原拉氏量上直接加上外源项 $J(t)$来实现：

$$L \to L + J(t)q(t). \tag{5.2.1}$$

设 $|0,t\rangle^J$ 是存在外源的系统(5.2.1)的基态(真空)，则存在外源时的真空-真空跃迁振幅可表示为：

$$W[J] = \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J, \tag{5.2.2}$$

这里方括号表示 J 是函数 $J(t)$，而 $W[J]$是 J 的泛函. 为了推导它的具体表达式，假定外源 $J(t)$仅在时间 t 和 $t'(t<t')$之间是非零的，如图5.2.2所示，T 是比 t 更早的时间，而 T'是比 t'更迟的时间. 这样，由(5.1.16)，我们可表示存在外源时的位置几率跃迁振幅为

$$\langle Q',T'|Q,T\rangle^J = N\int \mathscr{D}q\,\exp\left[i\int_T^{T'} dt(L+Jq)\right]. \tag{5.2.3}$$

利用(5.1.5)，上式的左边可写为

$$\langle Q',T'|Q,T\rangle^J = \int dq'dq\,\langle Q',T'|q',t'\rangle\langle q',t'|q,t\rangle^J\langle q,t|Q,T\rangle, \tag{5.2.4}$$

而由(5.1.4)，我们有

$$\begin{aligned}\langle Q',T'|q',t'\rangle &= \langle Q'|\exp[-iH(T'-t')]|q'\rangle \\ &= \sum_m \varphi_m(Q')\varphi_m^*(q')\exp[-iE_m(T'-t')],\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中 $\Phi_m(q) = \langle q|m\rangle$ 是坐标表象中能量本征态的完全集，$|m\rangle$满足能量本征方程

$$H|m\rangle = E_m|m\rangle.$$

类似地，有

$$\langle q,t|Q,T\rangle = \sum_m \varphi_m(q)\varphi_m^*(Q)\exp[-iE_m(t-T)]. \quad (5.2.6)$$

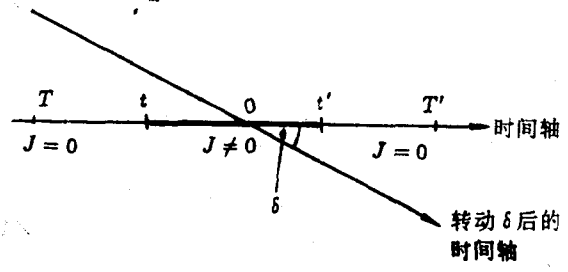


图 5.2.2　$J(t)$分布和时间轴转

把(5.2.6)和(5.2.5)代入(5.2.4)，并取极限

$$T' \to \infty e^{-i\delta}, \quad T \to -\infty e^{-i\delta},$$

其中 $\delta < \frac{\pi}{2}$ 为时间轴的任意转角(见图5.2.2)，则仅留下基态(真空)的贡献：

$$\lim_{\substack{T'\to\infty e^{-i\delta} \\ T\to-\infty e^{-i\delta}}} \langle Q',T'|Q,T\rangle^J = \varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q')\exp[-iE_0(T'-T)]$$

$$\cdot \int dq'dq\, \varphi_0^*(q',t')\langle q',t'|q,t\rangle^J \varphi_0(q,t),$$

或改写为

$$\int dq'dq\, \varphi_0^*(q',t')\langle q',t'|q,t\rangle^J \varphi_0(q,t)$$

$$= \lim_{\substack{T'\to\infty e^{-i\delta} \\ T\to-\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle Q',T'|Q,T\rangle^J}{\varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q')\exp[-iE_0(T'-T)]}. \quad (5.2.7)$$

上式左边是有源跃迁振幅的真空期望值. 时间 t' 和 $-t$ 可取为∞，这时，(5.2.7)的左边过渡到(5.2.2)的右边，即$\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J$. (5.2.7)右边的分母仅是个数值因子，故我们可写(5.2.7)为

$$W[J] = \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J \propto \lim_{\substack{T'\to\infty e^{-i\delta} \\ T\to-\infty e^{-i\delta}}} \langle Q',T'|Q,T\rangle^J. \quad (5.2.8)$$

注意，对式(5.2.5)的考察表明代替时间轴的转动，我们也可通过在哈密顿上加一小项 $-\frac{i}{2}\varepsilon q^2(\varepsilon\to 0)$ 以突出基态的贡献. 这相当于在拉氏量 $\mathscr{L}$ 上加一小项 $\frac{i}{2}\varepsilon q^2$. 这样，结合(5.2.3)和(5.2.8)，我们得到

$$W[J]=N\int\mathscr{D}q\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\left(L+Jq+\frac{i}{2}\varepsilon q^2\right)\right]. \quad (5.2.9)$$

这就是含外源的路径积分形式，它描述了存在外源时真空-真空的跃迁振幅，是下面讨论场的路径积分形式的基础.

(二) $W[J]$作为生成泛函

我们来推导一个今后非常有用的关系式. 考虑位置算符矩阵元 $\langle q_f,t_f|q(t_k)|q_i,t_i\rangle$，$t_f>t_k>t_i$，注意，其中 $q(t_k)$ 是算符. 仿照(5.1.6)的做法，我们选取 t_k 是 $t_1,\cdots,t_n$ 中的一个，则可得到

$$\begin{aligned}&\langle q_f.t_f|q(t_k)|q_i,t_i\rangle\\&=\int\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n\langle q_f,t_f|q_n,t_n\rangle\langle q_n,t_n|\cdots|q_k,t_k\rangle\\&\cdot\langle q_k,t_k|q(t_k)|q_{k-1},t_{k-1}\rangle\cdots\langle q_1,t_1|q_i,t_i\rangle,\end{aligned}$$

注意到

$$\langle q_k,t_k|q(t_k)|q_{k-1},t_{k-1}\rangle=q(t_k)\langle q_k,t_k|q_{k-1},t_{k-1}\rangle,$$

这时等式右边的 $q(t_k)$ 是普通的数，重复从(5.1.6)到(5.1.16)的推导，得到

$$\langle q_f,t_f|q(t_1)|q_i,t_i\rangle=N\int\mathscr{D}q\,q(t_1)\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\,L\right). \quad (5.2.10)$$

完全类似地，如果 $t_1>t_2$，我们有

$$\langle q_f,t_f|q(t_1)q(t_2)|q_i,t_i\rangle=N\int\mathscr{D}q\,q(t_1)\,q(t_2)\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}tL\right). \quad (5.2.11)$$

如果 $t_1<t_2$，上式的右边将等于 $\langle q_f,t_f|q(t_2)q(t_1)|q_i,t_i\rangle$. 一般地，

式(5.2.11)的右边等于 $\langle q_f,t_f|T[q(t_1)q(t_2)]|q_i,t_i\rangle$，其中 T 表示编时算符，定义为：

$$T[A(t_1)B(t_2)]=\theta(t_1-t_2)A(t_1)B(t_2)\pm\theta(t_2-t_1)B(t_2)A(t_1), \tag{5.2.12}$$

其中 $\theta(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ 为通常的阶跃算符. 注意式中"－"号对应于 A、B 均为费米算符，其它情形都对应"＋"号. 我们看到，编时算符 T 的作用是使时间较早的算符排在右边先作用. 推广上面的结果，我们有

$$N^{-1}\langle q_f,t_f|T[q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)]|q_i,t_i\rangle$$
$$=\int\mathscr{D}q\ q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\exp\left(i\int_{t_i}^{t_f}dtL\right). \tag{5.2.13}$$

记住，左边矩阵元中的 $q(t_i)$ 是算符，而右边泛函积分中 $q(t_i)$ 是 c 数.

另一方面，从 $W[J]$ 的表达式(5.2.9)，它对 $J(t)$ 的泛函导数为：

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(t_1)}=i\int\mathscr{D}\ q\ q(t_1)\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(L+Jq+\frac{i}{2}\epsilon q^2\right)\right],$$

……

$$\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}$$
$$=i^n\int\mathscr{D}q\ q(t_1)\cdots q(t_n)\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(L+Jq+\frac{i}{2}\epsilon q^2\right)\right].$$

在上面最后一式中令 $J=0$，得到

$$\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}\bigg|_{J=0}$$
$$=\int\mathscr{D}q\ q(t_1)\cdots q(t_n)\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(L+\frac{i}{2}\epsilon q^2\right)\right]. \tag{5.2.14}$$

把上式右边与(5.2.13)的右边比较，发现其差别仅在 $\frac{i}{2}\epsilon q^2$ 上，而 $\frac{i}{2}\epsilon q^2$ 的影响仅在于突出基态贡献上，所以，我们有

$$\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\cdots\delta J(t_n)}\right|_{J=0} = i^n\langle 0,\infty|T[q(t_1)\cdots q(t_n)]|0,-\infty\rangle,$$

(5.2.15)

因此，$W[J]$可看作是$\langle 0,\infty|T[q(t_1)\cdots q(t_n)]|0,-\infty\rangle$的生成泛函，简称生成泛函.

由于对一给定的量子系统，其真空是唯一的，故我们可令

$$|0,-\infty\rangle = |0,\infty\rangle = |0\rangle, \qquad (5.2.16)$$

以后，我们将简单地以$|0\rangle$来表示真空.

值得指出的是，我们也可以表示生成泛函$W[J]$为：

$$W[J] = \langle 0|0\rangle^J = \langle 0|T\left(\exp\left[i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, J(t)q(t)\right]\right)|0\rangle,$$

(5.2.17)

因为上式对J求n次泛函导数后再令$J=0$即得(5.2.15)式.

5.3 标量场的路径积分形式

上一节的讨论结果可直接推广到标量场$\varphi(x)$，只须注意量子力学与场论的下列对应：

$$q(t)\to\varphi(x),\quad J(t)\to J(x),\quad \mathscr{D}q\to\mathscr{D}\varphi. \qquad (5.3.1)$$

这样，从(5.2.9)我们可以得到标量场的有源真空－真空跃迁振幅$W[J]$为

$$W[J] = \langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J$$
$$= N\int\mathscr{D}\varphi\exp\left(i\int dx\left[\mathscr{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi) + J(x)\varphi(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\right]\right),$$

(5.3.2)

其中归一化常数N可由以下自洽要求给出：按照定义，当$J=0$时，应有

$$W[J=0] = \langle 0|0\rangle = 1. \qquad (5.3.3)$$

式(5.2.17)的场论对应为

$$W[J]=\langle 0|T\left[\exp\left(i\int \mathrm{d}x\, J(x)\varphi(x)\right)\right]|0\rangle, \quad (5.3.4)$$

上式对 $J(x)$ 求 n 次泛函导数后再使 $J=0$，得到

$$\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}=i^n\langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle, \quad (5.3.5)$$

这即是式(5.2.15)的场论对应.

在场论中，量

$$G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle \quad (5.3.6)$$

称为 n 点格林函数，它是非常基本的. 我们以后需要计算的主要是带各种外线的格林函数. 从(5.3.5)式可以看出，$W[J]$正是格林函数的生成泛函，利用它我们可以方便地求得各种格林函数.

现在我们来推导一个今后便于应用的 $W[J]$的形式.

对自由标量场，其拉氏量密度由(3.2.1) 表出：

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^2).$$

由(5.3.2)，对应的有源真空－真空跃迁振幅是

$$W_0[J]=N\int\mathscr{D}\varphi\exp\left\{i\int\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-(m^2-i\varepsilon)\varphi^2]+J\varphi\right)\right\}. \quad (5.3.7)$$

利用

$$\int\mathrm{d}x\,\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi=\int\mathrm{d}x\,\varphi\Box\varphi,$$

(5.3.7)式变为

$$W_0[J]=N\int\mathscr{D}\varphi\exp\left\{i\int\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}\varphi(\Box-m^2+i\varepsilon)\varphi+J\varphi\right]\right\}. \quad (5.3.8)$$

注意，由于存在外源 $J(x)$，这里的场 $\varphi(x)$ 并不满足 C-G 方程(3.2.2). 在(5.3.8)中作下列代换

$$\varphi(x)\to\varphi(x)+\varphi_0(x), \quad (5.3.9)$$

利用

$$\int \mathrm{d}x \varphi_0 \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi = \int \mathrm{d}x\, \varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi_0,$$

我们有

$$\int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi + J\varphi\right]$$

$$\longrightarrow \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi + \varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi_0\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\varphi_0 \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi_0 + J\varphi + J\varphi_0\right]. \qquad (5.3.10)$$

现使 $\varphi_0(x)$ 满足

$$\left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi_0(x) = -J(x), \qquad (5.3.11)$$

则(5.3.10)式的右边变为：

$$\int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi + \frac{1}{2} J\varphi_0\right], \qquad (5.3.12)$$

而方程(5.3.11)的解是

$$\varphi_0(x) = -\int \mathrm{d}y\, \Delta_F(x - y) J(y), \qquad (5.3.13)$$

其中 $\Delta_F(x)$ 是所谓的费曼传播子，它满足

$$\left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \Delta_F(x - y) = \delta^4(x - y), \qquad (5.3.14)$$

其傅立叶展式为

$$\begin{cases} \Delta_F(x - y) = \dfrac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}x \Delta_F(k) e^{-ik \cdot x}, \\ \Delta_F(k) = \dfrac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{cases} \qquad (5.3.15)$$

把(5.3.13)代入(5.3.12)得到

$$\frac{1}{2} \int \mathrm{d}x\, \varphi \left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right) \varphi - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y\, J(x) \Delta_F(x - y) J(y). \qquad (5.3.16)$$

注意上式的第二项与 $\varphi(x)$ 无关，因而可从泛函积分中提出来. 于是，在代换(5.3.9)下，(5.3.8)变为

$$W_0[J] = N\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right), \tag{5.3.17}$$

其中泛函积分

$$N' = \int \mathscr{D}\varphi \exp\left[\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\varphi\left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right)\varphi\right]$$

是一个数，已归入到归一化常数 N 中.

现在，(5.3.17)中的归一化常数 N 可由归一条件(5.3.3)定出，结果是 $N=1$. 故

$$W_0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]. \tag{5.3.18}$$

顺便指出，这些结果也可直接利用下列高斯型泛函积分公式得到：

$$\int \mathscr{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\,\varphi A\varphi\right) = (\det A)^{-1/2}, \tag{5.3.19}$$

$$\int \mathscr{D}\varphi \exp\left[\int \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{2}\varphi A\varphi + J\varphi\right)\right]$$
$$= \exp\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)A^{-1}(x,y)J(y)\right](\det A)^{-1/2}. \tag{5.3.20}$$

请读者自行验证它们是普通高斯型积分的无限维推广.

事实上，我们从式(5.3.8)出发，利用公式(5.3.20)，得到

$$W_0[J] = N\left[\det\left(+iA\right)\right]^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, J(x)\left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1}J(y)\right], \tag{5.3.21}$$

从(5.3.14)式知，

$$\left(\Box - m^2 + i\varepsilon\right)^{-1} = \Delta_F(x-y), \tag{5.3.22}$$

又，利用归一化条件(5.3.3)可定出这时的归一化常数

$$N = [\det(-iA)]^{1/2},$$

以此及(5.3.22)代入(5.3.21)即得式(5.3.18).

下面，作为例子，我们利用(5.3.18)来计算 n 点格林函数. 与自由场所对应的格林函数通常称为自由格林函数，用 G_0 表示. 因而 $W_0[J]$ 也称为自由格林函数生成泛函.

由(5.3.5)式，我们有

$$G_0^{(1)}(z_1) = \langle 0|\varphi(z_1)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta W_0[J]}{\delta J(z_1)}\bigg|_{J=0}. \quad (5.3.23)$$

应用(5.3.18)，有

$$\frac{1}{i}\frac{\delta W_0[J]}{\delta J(z_1)} = -\exp\left(\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\int \mathrm{d}x\ \Delta_F(z_1 - x)J(x). \quad (5.3.24)$$

(注意，为了书写简单，我们将利用缩写形式，它们的含义是清楚的，只要读者留意，应该不会引起误解.) 在式(5.3.24)中令 $J=0$ 即得

$$G_0^{(1)}(z_1) = \langle 0|\varphi(z_1)|0\rangle = 0. \quad (5.3.25)$$

即一点自由格林函数或自由场算符的真空期待值为零. 这是与湮灭算符作用于真空为零(见第三章)相一致的.

再来看二点自由格林函数，由(5.3.5)，它可表示为

$$G_0^{(2)}(z_1,z_2,) = \langle 0|T(\varphi(z_1)\varphi(z_2))|0\rangle = \frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(z_1)\delta J(z_2)}\bigg|_{J=0}. \quad (5.3.26)$$

把 $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\partial J(Z_2)}$ 作用于(5.3.24)式，得到

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(z_2)\delta J(z_1)}\bigg|_{J=0} = -\frac{1}{i}\Delta_F(z_1 - z_2)\exp\left(\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + \exp\left(\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\int \mathrm{d}x\ \Delta_F(z_2 - x)J(x)\int \mathrm{d}x\Delta_F(z_1 - x)J(x). \quad (5.3.27)$$

在上式中令 $J=0$，得到

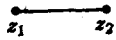
$$G_0^{(2)}(z_1,z_2) = \langle 0|T[\varphi(z_1)\varphi(z_2)]|0\rangle = i\Delta_F(z_1 - z_2). \quad (5.3.28)$$

为了揭示上式的物理意义，我们利用(3.2.25)把每个 $\varphi(z)$ 分解为

正、负频算符(相应于湮灭、产生算符)，由于湮灭算符湮灭真空，我们得到

$$G_0^{(2)}(z_1,z_2)=\theta(z_1^0-z_2^0)\langle 0|\varphi^{(+)}(z_1)\varphi^{(-)}(z_2)|0\rangle + \theta(z_2^0-z_1^0)\langle 0|\varphi^{(+)}(z_2)\varphi^{(-)}(z_1)|0\rangle. \quad (5.3.29)$$

上式右边第一项表示在时刻 z_2^0，z_2 处产生一标量粒子，然后在时刻 $z_1^0(>z_2^0)$ 在 z_1 处湮没的几率振幅；而第二项则表示在时刻 z_1^0，z_1 处产生一标量粒子，然后在时刻 $z_2^0(>z_1^0)$ 在 z_2 处湮没的几率振幅. 所以，两项合起来就表示在两点 z_1 和 z_2 之间粒子的产生、传播和湮灭过程. 故两点格林函数通常也称为传播子，自由二点格林函数相应于自由传播子. 这是量子场论中非常基本而又重要的概念，它可以用图形表示为



$$G_0^{(2)}(z_1,z_2)=i\Delta_F(z_1-z_2)$$

为求三点格林函数，再用 $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\partial J(z_3)}$ 作用于式(5.3.27)上，给出

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{i}\right)^3\frac{\delta^3 W_0[J]}{\delta J(z_3)\delta J(z_2)\delta J(z_1)}\\
&=-i\Delta_F(z_1-z_2)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\cdot\int dx\Delta_F(z_3-x)J(x)\\
&\quad -i\Delta_F(z_2-z_3)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\cdot\int dx\,\Delta_F(z_1-x)J(x)\\
&\quad -i\Delta_F(z_1-z_3)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\cdot\int dx\,\Delta_F(z_2-x)J(x)\\
&\quad -\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\int dx\Delta_F(z_1-x)J(x)\\
&\quad \cdot\int dx\Delta_F(z_2-x)J(x)\int dx\Delta_F(z_3-x)J(x). \quad (5.3.30)
\end{aligned}$$

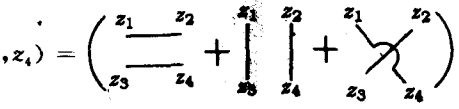
显然，当 $J=0$ 时，上式为0，故

$$G_0^{(3)}(z_1,z_2,z_3)=\langle 0|T[\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_3)]|0\rangle=0. \quad (5.3.31)$$

四点自由格林函数可通过用 $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\partial J(z_4)}$ 作用于(5.3.30)上，运算完后使 $J=0$ 得到：

$$G_0^{(4)}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\langle 0|T(\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_3)\varphi(z_4))|0\rangle$$
$$=-\Delta_F(z_1-z_2)\Delta_F(z_3-z_4)-\Delta_F(z_1-z_3)\Delta_F(z_2-z_4)$$
$$-\Delta_F(z_1-z_4)\Delta_F(z_2-z_3)$$
$$=G_0^{(2)}(z_1,z_2)G_0^{(2)}(z_3,z_4)+G_0^{(2)}(z_1,z_3)G_0^{(2)}(z_2,z_4)$$
$$+G_0^{(2)}(z_1,z_4)G_0^{(2)}(z_2,z_3). \qquad (5.3.32a)$$

可见，四点自由格林函数简单地是两点自由格林函数的可能积之和，它可用图形表示为

$G_0^{(4)}(z_1,z_2,z_3,z_4)=$  (5.3.32b)

一般地，对 n 点自由格林函数，如 n 为奇数，则总为0：

$$G_0^{(2n-1)}(x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1})=0, \qquad (5.3.33)$$

如 n 为偶数，则等于所有可能的两点自由格林函数乘积之和：

$$G_0^{(2n)}(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\text{所有可}\\ \text{能组合}\end{smallmatrix}\right)} G_0^{(2)}(x_{p_1},x_{p_2})\cdots G_0^{(2)}(x_{p_{2n-1}},x_{p_{2n}}). \qquad (5.3.34)$$

(5.3.33)和(5.3.34)一起也称为维克定理.

5.4 狄拉克场的路径积分形式

狄拉克场由于遵从反对易关系，在路径积分中对应于反对易的 c 数，它们是格拉斯曼代数的元素. 因而在讨论狄拉克场的路径积分形式之前，有必要先介绍一些格拉斯曼代数.

n 维格拉斯曼代数的元素 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 遵从反对易关系

$$\{c_i,\ c_j\}=0, \qquad (5.4.1)$$

特别有

$$c_i^2=0, \qquad (5.4.2)$$

这导致任一函数 $f(c_1,\cdots,c_n)$ 仅含有有限多项，例如

$$\begin{cases} f(c) = a_0 + a_1 c_1, \\ f(c_1, c_2) = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_{12} c_1 c_2, \\ f(c_1, c_2, c_3) = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_{12} c_1 c_2 \\ \qquad\qquad + a_{13} c_1 c_3 + a_{23} c_2 c_3 + a_{123} c_1 c_2 c_3, \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{5.4.3}$$

对格拉斯曼元素的微分要求满足

$$\frac{\partial}{\partial c_i}(c_1 c_2) = \delta_{i1} c_2 - \delta_{i2} c_1, \tag{5.4.4}$$

由此，通过对 $f(c_k)$ 的作用可验证：

$$\left\{\frac{\partial}{\partial c_i},\ c_j\right\} = \delta_{ij}, \tag{5.4.5}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial c_i},\ \frac{\partial}{\partial c_j}\right\} = 0. \tag{5.4.6}$$

(5.4.6)表示

$$\left(\frac{\partial}{\partial c_i}\right)^2 = 0,$$

这意味着微分没有逆运算，因而格拉斯曼元素的积分需要重新定义. 一个适当的定义方法是要求积分对函数的作用与微分相同. 这样，对于一维情形，$f(c)=a+bc$，由于 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}c} = b$，我们也要求

$$\int \mathrm{d}c\ f(c) = b.$$

这意味着要求：

$$\int \mathrm{d}c = 0, \qquad \int \mathrm{d}c\ c = 1. \tag{5.4.7}$$

推广到 n 维情形，则要求

$$\int \mathrm{d}c_i = 0, \qquad \int \mathrm{d}c_i\, c_j = \delta_{ij}. \tag{5.4.8}$$

现设 η 和 $\bar{\eta}$ 是独立的格拉斯曼数，按积分规则(5.4.8)可得

$$\int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta} = 0, \qquad \int \mathrm{d}\eta\ \eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\ \bar{\eta} = 1. \tag{5.4.9}$$

由于 $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$，有

$$e^{\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta, \tag{5.4.10}$$

因此

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta - \int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta\, \bar{\eta}\eta = \int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta\, \eta\bar{\eta} = 1. \tag{5.4.11}$$

进一步考虑 η 的二维情形，设

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2),$$

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2,$$

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2),$$

$$= \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_2\bar{\eta}_1\eta_1 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2,$$

$$(\bar{\eta}\eta)^n = 0, \qquad n \geqslant 3,$$

所以，

$$e^{\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2.$$

应用积分规则(5.4.9)，有

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{d}\eta\, e^{\bar{\eta}\eta} = \int \mathrm{d}\bar{\eta}_1\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\bar{\eta}_2\mathrm{d}\eta_2\, \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = 1. \tag{5.4.12}$$

这与一维时的(5.4.11)结果相同. 一般地，这个结果对更高维数的 η 都成立.

现在作变量变换，令

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha}M, \quad \eta = N\alpha, \tag{5.4.13}$$

其中，M、N 是2×2矩阵，α 和 $\bar{\alpha}$ 是新的独立的二维格拉斯曼元素. 我们有

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 &= (\bar{\alpha}_1M_{11} + \bar{\alpha}_2M_{21}) \cdot (\bar{\alpha}_1M_{12} + \bar{\alpha}_2M_{22}) \\ &= \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2(M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}) \\ &= \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\det M.\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

于是在变换(5.4.13)下，应有

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}_1\mathrm{d}\bar{\eta}_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 = \int J(M)\mathrm{d}\bar{\alpha}_1\mathrm{d}\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\det M, \tag{5.4.15}$$

其中 $J(M)$ 为变换的雅可比式. 为保证积分规则(5.4.8)成立，即

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}_1\mathrm{d}\bar{\eta}_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_1\mathrm{d}\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 = 1$$

必须要求

$$J(M) = (\det M)^{-1}. \tag{5.4.16}$$

注意，这是与通常的变换雅可比 $J(M)=\det M$ 不同的. 类似地，有

$$\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 = (\det N)^{-1}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2. \tag{5.4.17}$$

这样，在变换(5.4.13)下，(5.4.12)变为

$$(\det MN)^{-1}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha\, e^{-\bar{\alpha}MN\alpha} = 1. \tag{5.4.18}$$

记 $MN=A$，这给出

$$\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A. \tag{5.4.19}$$

这个公式对更高维数都是成立的.

为描述狄拉克场，我们把格拉斯曼代数推广到无限维，其元素用 $c(x)$ 表示，它们满足

$$\begin{cases} \{c(x),\ c(y)\} = 0, \\ \left\{\dfrac{\partial}{\partial c(x)},\ c(y)\right\} = \delta(x-y), \quad \left\{\dfrac{\partial}{\partial c(x)},\ \dfrac{\partial}{\partial c(y)}\right\} = 0, \\ \int \mathrm{d}c(x) = 0, \quad \int \mathrm{d}c(y)\cdot c(x) = \delta(x-y). \end{cases} \tag{5.4.20}$$

公式(5.4.19)推广到无限维后成为泛函积分形式：

$$\int \mathscr{D}\bar{\alpha}\mathscr{D}\alpha\, e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \det A. \tag{5.4.21}$$

现在，我们可以用类似于上节标量场的处理方式来表示狄克场的有源真空-真空跃迁振幅 $W[J]$. 由于我们是把 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 当作独立场量来处理的，故相应地我们需引进二个独立外源 $\bar{\eta}(x)$ 和 $\eta(x)$，且泛函积分要对 $\mathscr{D}\bar{\psi}$ 和 $\mathscr{D}\psi$ 进行. 于是，类似于(5.3.2)的狄拉克场的 $W[J]$ 为：

$$W[\eta,\bar{\eta}] = N\int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left\{ i\int \mathrm{d}x\, [\mathscr{L}(\psi,\bar{\psi}) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\bar{\psi}(x)\psi(x)]\right\}. \tag{5.4.22}$$

注意，外源 $\eta(x)$，$\bar{\eta}(x)$ 也是格拉斯曼代数的元素.

对自由狄拉克场，其拉氏量密度由(4.2.1)表出：

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma \cdot \partial - m)\psi.$$

引进记号

$$S_F^{-1}(x) = i\gamma \cdot \partial - m + i\varepsilon, \tag{5.4.23}$$

容易验证它的逆 $S_F(x)$ 是存在的，可由下式表出：

$$S_F(x) = (i\gamma \cdot \partial + m - i\varepsilon)\Delta_F(x), \tag{5.4.24}$$

其中 $\Delta_F(x)$ 是由(5.3.14)定义的费曼传播子. 事实上，我们有

$$S_F^{-1}S_F = (i\gamma \cdot \partial - m + i\varepsilon)(i\gamma \cdot \partial + m - i\varepsilon)\Delta_F(x)$$

$$= \left(\Box - m^2 + i\varepsilon'\right)\Delta_F(x) = \delta^4(x),$$

其中 $\varepsilon' = 2m\varepsilon$，最后等式利用了(5.3.14).

把自由狄拉克场的 $\mathscr{L}_0$ 代入(5.4.22)，利用式(5.4.23)，我们有

$$W_0[\eta,\bar{\eta}]$$

$$= N\int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\bar{\psi}S_F^{-1}\psi + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)\right)\right], \tag{5.4.25}$$

其中归一化常数 N 可由(5.3.3)定出. 在现在的情况下，(5.3.3)变为

$$W_0[\eta = 0, \bar{\eta} = 0] = N\int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left(i\int \mathrm{d}x\ \bar{\psi}S_F^{-1}\psi\right) = 1,$$

利用(5.4.21)，上式给出

$$N^{-1} = \int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left(i\int \mathrm{d}x\bar{\psi}S_F^{-1}\psi\right) = \det(-iS_F^{-1}), \tag{5.4.26a}$$

或

$$N = i\det S_F. \tag{5.4.26b}$$

为了进一步把(5.4.25)化为便于应用的形式，我们记

$$Q \equiv Q(\psi,\bar{\psi}) \equiv \bar{\psi}S_F^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta.$$

设

$$\psi_0 = -S_F\eta, \qquad \bar{\psi}_0 = -\bar{\eta}S_F,$$

则有

$$Q_0 \equiv Q(\psi_0,\bar{\psi}_0) \equiv -\bar{\eta}S_F\eta$$

及

$$Q = Q_0 + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_0)S_F^{-1}(\psi - \psi_0).$$

利用上面的记号和结果,(5.4.25)化为:

$$\begin{aligned} & W_0[\eta,\bar{\eta}] \\ &= i\det S_F \int \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \exp\left(i\int dx[Q_0 + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_0)S_F^{-1}(\psi - \psi_0)]\right) \\ &= (i\det S_F)(iQ_0)\ \det(-iS_F^{-1}) \\ &= \exp\left[-i\int dx dy \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right], \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

其中第二个等式是由于 Q_0 与 $\bar{\psi}$ 和 ψ 无关以及利用了泛函积分的平移不变性. 我们看到公式(5.4.27)与标量场的公式(5.3.17)是完全类似的.

公式(5.3.4)和(5.3.5)在狄拉克场中的类似公式是:

$$W[\eta,\bar{\eta}] = \langle 0|T\left(\exp\left[i\int dx(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]\right)|0\rangle, \tag{5.4.28}$$

$$\frac{\delta W[\eta,\bar{\eta}]}{\delta\eta_\alpha(x_1)\cdots\delta\bar{\eta}_\beta(x_n)} = i^n\langle 0|T[\bar{\psi}_\alpha(x_1)\cdots\psi_\beta(x_n)]|0\rangle. \tag{5.4.29}$$

注意,如果式中的算符是自由场算符,则对应的是自由格林函数生成泛函 $W_0[\eta,\bar{\eta}]$.

现在,我们可以求出狄拉克场的两点自由格林函数. 利用公式(5.4.27),我们有

$$\begin{aligned} G_0(x,y) &= \langle 0|T[\bar{\psi}(y)\psi(x)]|0\rangle = -\frac{\delta^2 W_0[\eta,\bar{\eta}]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= -\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\exp\left[-i\int dx'dy'\bar{\eta}(x')S_F(x'-y')\eta(y')\right]\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\left[\exp\left(-i\int\bar{\eta}S_F\eta\right)\int dy' S_F(x-y')\eta(y')\right]\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i\exp\left(-i\int\bar{\eta}S_F\eta\right)\left[S_F(x-y) + i\int dx'\bar{\eta}(x')S_F(x'-y)\right. \end{aligned}$$

$$\cdot \int \mathrm{d}y' S_F(x-y')\eta(y') \Big] \Big|_{\varphi=\eta=0}$$

$$= i S_F(x-y). \tag{5.4.30}$$

它在物理上表示自由狄拉克粒子在 x 和 y 之间的产生，传播和湮灭过程，因而也称为自由狄拉克传播子. 由于狄拉克场有正、负能解，对应着正、反粒子，在图表示中用带箭头的线段表示：

$$G_0^2(x,y) = iS_F(x-y): \quad \overset{x}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\overset{y}{\bullet} \tag{5.4.31a}$$

把式(5.3.15)代入(5.4.24)即可得到 $S_F(x-y)$ 的傅立叶展开式为

$$\begin{cases} S_F(x-y) = \dfrac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}p S_F(p) e^{-ip\cdot x}, \\ S_F(p) = \dfrac{1}{\gamma\cdot p - m + i\varepsilon}. \end{cases} \tag{5.4.31b}$$

最后，作为这一节的结束，我们顺便给出自由传播子的更为直截了当的形式定义，以便直接从拉氏量密度读出传播子，这无疑是十分方便的. 从(5.4.23)我们看到，忽略小项 $i\varepsilon$，S_F 恰好是狄拉克拉氏量密度的 $\bar{\psi}$ 和 ψ 之间所夹的算符的逆. 对于标量场，情况也是如此. 标量场的拉氏量密度可表示为(差一全散度项)：

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) = \frac{1}{2}\varphi(\Box - m^2)\varphi,$$

由(5.3.14)可以看出，忽略小项 $i\varepsilon$，Δ_F 也恰好是 φ 和 φ 之间所夹算符的逆(其中因子 $\frac{1}{2}$ 是由于 φ 与 φ 全同造成的，对复标量场就没有 $\frac{1}{2}$ 因子). 因此，我们可以认为：自由传播子是拉氏量密度中场的二次项中间所夹算符的逆(差一 i 因子).

5.5 规范场的路径积分量子化

我们首先来分析按通常方法得到的规范场的路径积分形式所存在的问题，以电磁场为例.

仿照(5.3.2)，电磁场的生成泛函可表示为

$$W_0[J^\mu]=\int\mathscr{D}A^\mu\exp\left(i\int\mathrm{d}x[\mathscr{L}_0+J^\mu A_\mu]\right),\quad(5.5.1)$$

其中已略写了小项 $\frac{i}{2}\varepsilon A_\mu A^\mu$，$J^\mu$ 是引进的外源，

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\quad(5.5.2)$$

是自由电磁场的拉氏量密度.

由于 $\mathscr{L}_0$ 在规范变换(3.5.7)

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\chi(x)$$

下是不变的，而泛函积分(5.5.1)是对所有的 $A^\mu(x)$，包括由变换(3.5.7)相联系的那些进行的，因此积分有无限多的剩余度，这显然导致对 W_0 以及由 W_0 生成的格林函数的无限大贡献. 一个容易验证的直接结果是，这时规范场传播子，或即 $\mathscr{L}_0$ 中场的二次项所夹算符的逆不存在. 事实上，差一四维散度，由(5.5.2)给出的 $\mathscr{L}_0$ 可表示为

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}A^\mu\left(\partial_\mu\partial_\nu-g_{\mu\nu}\Box\right)A^\nu,\quad(5.5.3)$$

由此，电磁场的传播子 $D_F^{\mu\nu}$ 应是算符 $\partial^\mu\partial^\nu-g^{\mu\nu}\Box$ 的逆. 但由于

$$(\partial^\mu\partial^\nu-g^{\mu\nu}\Box)\partial_\mu\chi=(\Box\partial^\nu-\Box\partial^\nu)\chi=0,$$

即该算符有零本征值，因此它没有逆.

为了得到有限的生成泛函，我们必须设法固定一个特殊的规范，使得对 A^μ 的积分不包括简单地由规范变换相联系的那些，换句话说，需要把规范约束条件引入到泛函积分中. 这种有约束的路径积分技术最早由法捷耶夫-波波夫在1967年提出，故称为法捷耶夫-波波夫方法. 为了节省篇幅，我们的讨论对非阿贝尔 $SU(n)$ 规范场进行，而把 $U(1)$ 阿贝尔情形作为它的特况，仅在必要时指出它们的差别.

考虑外源为零时的生成泛函

$$W[0]=N\int\mathscr{D}A^\mu\exp\left(i\int\mathrm{d}x\,\mathscr{L}\right),\quad(5.5.4)$$

其中，$\mathscr{L}$ 是 $SU(n)$规范场的拉氏量密度［参见公式（4.3.19）和（4.3.16）］：

$$\begin{cases} \mathscr{L} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \end{cases} \tag{5.5.5}$$

首先注意，由4.3节知，$\mathscr{L}$ 在下列定域规范变换下是不变的

$$A_\mu(x) \xrightarrow{g} A_\mu(x) = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \tag{5.5.6}$$

其中 $U(x) = \exp(i\theta^a(x)T^a)$ 为规范群 G 的一个元素 g. 因而，所有 $g \in G$ 的形为 ${}^gA_\mu$ 的场的集合构成一个规范等价类或轨道. 由于作用量积分在轨道上为常数，泛函积分（5.5.4）在轨道上是简并的，泛函积分正比于群体积

$$\int \mathscr{D}g \equiv \int \prod_x \mathrm{d}g(x) \tag{5.5.7}$$

其中积分测度 $\mathscr{D}g$ 由于群性质是群变换下不变的：

$$\mathscr{D}(g'g) = \mathscr{D}g. \tag{5.5.8}$$

正是(5.5.7)导致了 W 的发散. 为了消除这种发散，必须附加规范条件：

$$F^a[A^\mu(x)] = C^a(x) \quad (a = 1,2,\cdots,n^2-1), \tag{5.5.9}$$

其中 $C^a(x)$ 是与 $A^\mu(x)$ 无关的任意函数.

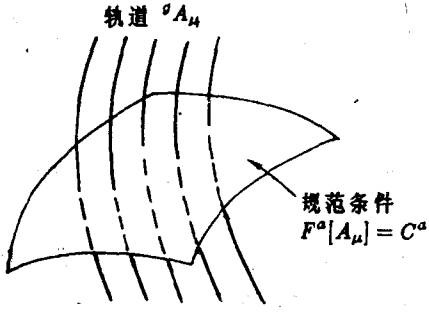


图 5.5.1　轨道与规范条件

如图5.5.1所示，我们用一些线表示轨道，每条线上的点都是物理

上等价的(由规范变换 U 相联系),而规范条件表示与每一轨道只相交一次的超曲面.

为了把规范约束引进路径积分,可定义一个规范场泛函 $\Delta[A^\mu]$,使

$$\Delta[A^\mu]\int\mathscr{D}g\prod_{a,x}\delta\Big(F^a[{}^gA^\mu(x)]-C^a(x)\Big)=1, \tag{5.5.10}$$

这里,$\Delta[A^\mu]$ 是规范不变的,即

$$\Delta[{}^gA^\mu]=\Delta[A^\mu]. \tag{5.5.11}$$

因为在规范变换 U' 下,(5.5.10)中的积分是不变的:

$$\begin{aligned}&\int\mathscr{D}g\prod_{a,x}\delta(F^a[{}^gA^\mu(x)]-C^a(x))\\ \to&\int\mathscr{D}g\prod_{a,x}\delta(F^a[{}^{g'}({}^gA^\mu(x))]-C^a(x))\\ =&\int\mathscr{D}(g'g)\prod_{a,x}\delta(F^a[{}^{g'g}A^\mu(x)]-C^a(x))\\ =&\int\mathscr{D}g\prod_{a,x}\delta(F^a[{}^gA^\mu(x)]-C^a(x)),\end{aligned}$$

其中第一个等式利用了(5.5.8):

现在,把(5.5.10)插入(5.5.4),并交换积分次序,得到

$$W[0]=N\int\mathscr{D}g\int\mathscr{D}A^\mu\Delta[A^\mu]\prod_{a,x}\delta\Big(F^a[{}^gA^\mu(x)]-C^a(x)\Big)\cdot\exp\Big(i\int\mathrm{d}x\mathscr{L}\Big). \tag{5.5.12}$$

对上式作规范变换(5.5.6),只是取 $g=g^{-1}$,即

$$A^\mu\to{}^{g^{-1}}A^\mu. \tag{5.5.13}$$

由于变换(5.5.6)中的第二项与 A^μ 无关,而第一项是群的伴随表示变换(参见(4.3.17)),相应的变换雅可比为1.因此,规范场的积分测度 $\mathscr{D}A^\mu$ 是规范不变的,即

$$\mathscr{D}{}^gA^\mu=\mathscr{D}A^\mu. \tag{5.5.14}$$

再利用式(5.5.8)和(5.5.11)得出在变换(5.5.13)下，生成泛函(5.5.12)变为

$$W[0]=N\int\mathscr{D}g\int\mathscr{D}A^{a}\Delta[A^{a}]\prod_{a,x}\delta\left(F^{a}[A^{a}(x)]-C^{a}(x)\right)$$

$$\cdot\exp\left(i\int\mathrm{d}x\mathscr{L}\right). \tag{5.5.15}$$

从上式可以看出，群空间积分已从场积分中分离出来，可以把它吸收到归一化因子 N 中，再加上外源项，我们得到

$$W[J_{\mu}]=N\int\mathscr{D}A^{a}\Delta[A^{a}]\prod_{a,x}\delta\left(F^{a}[A^{a}(x)]-C^{a}(x)\right)$$

$$\cdot\exp\left[i\int\mathrm{d}x(\mathscr{L}+J_{\mu}A^{a})\right]. \tag{5.5.16}$$

现在我们要计算 $\Delta[A^{a}]$. 注意(5.5.10)中的 δ 函数实际上给出了规范条件(5.5.9). 如果规范条件(5.5.9)唯一确定规范，则(5.5.10)中的群积分只在单位元素附近的区域有贡献. 对无限小变换，群参数 $\theta^{a}(x)\ll 1$，则在单位元素附近，我们有

$$\mathscr{D}g=\prod_{a}\mathrm{d}\theta^{a}=\mathscr{D}\theta, \tag{5.5.17}$$

并且，由(4.3.14)，有

$$\begin{aligned}A_{\mu}^{a}\to{}^{\theta}A_{\mu}^{a}&=A_{\mu}^{a}+f^{abc}\theta^{b}A_{\mu}^{c}+\frac{1}{g}\partial_{\mu}\theta^{a}\\&=A_{\mu}^{a}+\frac{1}{g}(\delta^{ab}\partial_{\mu}+gf^{abc}A_{\mu}^{c})\theta^{b}\\&\equiv A_{\mu}^{a}+\frac{1}{g}D_{\mu}^{ab}\theta^{b},\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

于是，利用(5.5.17～18)和(5.5.9)，在单位元素附近关系式(5.5.10)可写为

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}[A^{a}]&=\int\mathscr{D}\theta\prod_{a,x}\delta\left(F^{a}[{}^{\theta}A^{a}(x)]-C^{a}\right)\\&=\int\mathscr{D}\theta\prod_{a,x}\delta\left(F^{a}[A^{a}(x)]+\frac{\partial F^{a}}{\partial A_{\mu}^{b}}\delta A_{\mu}^{b}-C^{a}\right)\end{aligned}$$

$$= \int \mathscr{D}\theta \prod_{a,x} \delta\left(\frac{1}{g} \frac{\partial F^a}{\partial A^b_\mu} D^{bc}_\mu \theta^c \right). \tag{5.5.19}$$

引进矩阵 M，定义为

$$\begin{cases} M = g \dfrac{\delta F[{}^\theta A_\mu]}{\delta \theta} \\ g \dfrac{\delta F^a[{}^\theta A_\mu(x)]}{\delta \theta^c(y)} = \dfrac{\partial F^a}{\partial A_\mu{}^b(x)} D^{bc}_\mu \delta^4(x-y) \\ \qquad\qquad = M_{ac}(x,y)\delta^4(x-y), \end{cases} \tag{5.5.20}$$

注意，对 $U(1)$ 阿贝尔规范群，由于 $f^{abc}=0$，故矩阵 M 与 A_μ 无关！

设 $f^i(x)$ 和 λ^i 是 M 的本征函数系和本征值，即

$$\begin{cases} \sum\limits_{b,y} \delta^4(x-y) M_{ab}(x,y) f^i_b(y) = \lambda^i f^i_a(x) \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}), \\ \sum\limits_b M_{ab}(x,x) f^i_b(x) = \lambda^i f^i_a(x). \end{cases} \tag{5.5.21}$$

把 $\theta^c(x)$ 按 M 的本征函数系展开：

$$\theta^c(x) = \sum_i \theta^i f^i_c(x), \tag{5.5.22}$$

因此，由(5.5.21)和(5.5.22)，有

$$\sum_c M_{ac}(x,x)\theta^c(x) = \sum_i \theta^i \lambda^i f^i_a(x). \tag{5.5.23}$$

利用它，式(5.5.19)可写为(相差一个无关紧要的因子 $\prod \frac{1}{g}$)：

$$\Delta^{-1}[A^\mu] = \int \mathscr{D}\theta \prod_a \delta\Big(\sum_i \theta^i \lambda^i f^i_a(x) \Big). \tag{5.5.24}$$

再作变量变换

$$u_a = \sum_i \theta^i \lambda^i f^i_a(x),$$

则(5.5.24)变为

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A] &= \int \mathscr{D}u \frac{\partial(\theta^1,\theta^2,\cdots)}{\partial(u^1,u^2,\cdots)} \prod_a \delta(u_a) \\ &= \frac{\partial(\theta^1,\theta^2,\cdots)}{\partial(u^1,u^2,\cdots)}\bigg|_{u=0} \\ &= (\lambda^1,\lambda^2,\cdots)^{-1} (\det f^i_a)^{-1} \end{aligned}$$

$$= (\det M)^{-1}(\det f_a')^{-1},$$

或即

$$\Delta[A^\mu] \propto \det(iM), \tag{5.5.25}$$

其中，为了以后方便，已记 M 为 iM，因子 $\det\left(\frac{1}{i}f_a'\right)$ 由于可吸收到路径积分的归一化因子中，因而是无关紧要的. 注意，对 $U(1)$ 阿贝尔规范场，由于 M 与 A_μ 无关，故 $\Delta[A_\mu]$ 与 A_μ 无关.

把(5.5.25)代入(5.5.16)，我们得到

$$W[J^\mu] = N\int \mathscr{D}A^\mu \det(iM)\prod_{a,x}\delta\left(F^a[A^\mu]-C^a\right)$$

$$\cdot \exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}+J_\mu A^\mu\right)\right]. \tag{5.5.26}$$

由于 $\det(iM)$ 与 $C^a(x)$ 无关，我们可以将上式乘以一个 C^a 的高斯因子 $\exp\left[-\frac{i}{2\alpha}\int \mathrm{d}x C^a(x)C^a(x)\right]$，$\alpha$ 为规范固定参数，并对 $C^a(x)$ 作泛函积分，利用

$$\int \mathscr{D}c\ \exp\left(-\frac{i}{2\alpha}\int \mathrm{d}x\ C^aC^a\right)\prod_{a,x}\delta\left(F^a[A^\mu]-C^a\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2\alpha}\int \mathrm{d}x\ F^a[A]F^a[A]\right),$$

我们得到

$$W[J^\mu] = N\int \mathscr{D}A_\mu \det(iM)\ \exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}-\frac{1}{2\alpha}F^2[A]+J_\mu A^\mu\right)\right]. \tag{5.5.27}$$

利用公式(5.4.21)，我们可表示 $\det(iM)$ 为对格拉斯曼标量场 $\bar{\eta}(x)$ 和 $\eta(x)$ 的泛函积分：

$$\det(iM) = \int \mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta \exp\left(-i\int \mathrm{d}x\bar{\eta}M\eta\right), \tag{5.5.28}$$

把它代入(5.5.27)得到

$$W[J_\mu]$$

$$= N\int \mathscr{D}A^\mu\mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta\ \exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}-\frac{1}{2\alpha}F^2[A]-\bar{\eta}M\eta+J_\mu A^\mu\right)\right]$$

$$\equiv N\int \mathscr{D}A^{\mu}\mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta\exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_{\mu}A^{\mu}\right)\right]. \quad (5.5.29)$$

这里，有效拉氏量密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 由三部分组成，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}\ +\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}, \quad (5.5.30)$$

其中，规范场的拉氏量密 $\mathscr{L}$ 由(5.5.5)给出，$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}=-\frac{1}{2\alpha}F^2[A]$ 称为规范固定项，F 的形式决定于规范的选择，下面还要具体讨论. $\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}=-\bar{\eta}M\eta$ 称为法捷耶夫-波波夫鬼项. 遵从费米-狄拉克统计的标量场 $\bar{\eta}$，η 称为鬼项，它们只是辅助工具，不表现为物理粒子. 注意，对 $U(1)$ 阿贝尔规范场，由于 M 与 A^{μ} 无关，故鬼场的贡献可以直接积分掉而归入到 $W[J]$ 的归一化因子中. 所以，对阿贝尔规范实际上不需要引进鬼场.

现在，我们来讨论具体的规范选择，例如，取洛仑兹规范. 先考虑 $U(1)$ 阿贝尔情形. 这时有

$$F=\partial_{\mu}A^{\mu}, \quad (5.5.31)$$

由(5.5.18)，由于 $f^{abc}=0$，且 $g=e$，得

$$\delta A^{\mu}=\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x),$$

因此，

$$\delta F=\partial_{\mu}\delta A^{\mu}=-\frac{1}{e}\Box\theta(x).$$

再由(5.5.20)，得到

$$M=e\frac{\delta F}{\delta\theta}=-\Box$$

确实与 A_{μ} 无关，因而 $\det(iM)$ 可从泛函积分中提出来归入归一化常数 N 中. 这样，从(5.5.27)可得到电磁场的生成泛函为

$$W[J_{\mu}]=N\int \mathscr{D}A_{\mu}\exp\left[i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_{\mu}A^{\mu}\right)\right], \quad (5.5.32)$$

其中有效拉氏量密度仅由两部分组成：

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}\ +\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}, \quad (5.5.33)$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.5.34}$$

为电磁场的拉氏量密度，

$$\mathscr{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{5.5.35}$$

为规范固定项. 通常，取 $\alpha=1$时称为费曼规范，$\alpha\to 0$时称为朗道规范. 当然规范参数 α 的值并不影响物理结果.

精确到差一四维散度项，$\mathscr{L}_{eff}$ 可表示为

$$\mathscr{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$= \frac{1}{2}A^\mu\left[-g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu, \tag{5.5.36}$$

故电磁场的传播子为

$$\langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(y)]|0\rangle = iD_F^{\mu\nu}(x-y)$$

$$= i\left[-g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]^{-1} \tag{5.5.37}$$

它可以用图形表示为

$iD_F^{\mu\nu}(x-y)$：



(5.5.38a)

容易证明，$D_F^{\mu\nu}(x-y)$ 的傅立叶展开式为

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, D_F^{\mu\nu}(k)e^{-ikx},$$

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-1}{k^2}\left[g^{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right] \tag{5.5.38b}$$

类似于公式(5.3.20)，对电磁场也有

$$\int\mathscr{D}A_\mu \exp\left[i\int dx\left(-\frac{1}{2}A^\mu K_{\mu\nu}A^\nu + J_\mu A^\mu\right)\right]$$

$$= (\det K)^{1/2}\exp\left[\frac{1}{2}\int dx dy\left(J^\mu(x)K^{-1}_{\mu\nu}(x-y)A^\nu(y)\right)\right]. \tag{5.5.39}$$

利用它和式(5.5.36)以及(5.5.37)，并按(5.3.3)式确定归一化常数 N 后，我们可得到包含规范固定项的自由电磁场的生成泛函

$W_0[J_\mu]$为

$$W_0[J_\mu] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy\, J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right]. \tag{5.5.40}$$

下面考虑$SU(n)$非阿贝尔规范场. 当取协变规范时，$F^a = \partial^\mu A^a_\mu$. 由(5.5.18)式，有

$$\delta A^a_\mu = f^{abc}\theta^b A^c_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a,$$

因此，

$$\delta F^a = \partial^\mu \delta A^a_\mu = f^{abc}[(\partial^\mu\theta^b)A^c_\mu + \theta^b\partial^\mu A^c_\mu] - \frac{1}{g}\Box\theta^a,$$

于是，由(5.5.20)，有

$$M^{ab}(x,x) = g\frac{\delta F^a}{\delta\theta^b} = gf^{abc}(\partial^\mu A^c_\mu + A^c_\mu\partial^\mu) - \delta^{ab}\Box. \tag{5.5.41}$$

这给出有效拉氏量密度(5.5.31)中的鬼项部分为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{FPG} &= -\bar\eta^a M^{ab}\eta^b \\ &= \bar\eta^a\delta^{ab}\Box\eta^b - gf^{abc}\bar\eta^a(\partial^\mu A^c_\mu + A^c_\mu\partial^\mu)\eta^b \\ &= \bar\eta^a\delta^{ab}\Box\eta^b - gf^{abc}(\partial^\mu\bar\eta^a)A^b_\mu\eta^c + \text{四维散度项},\end{aligned} \tag{5.5.42}$$

其中第一项给出鬼场传播子为

$$\langle 0|T[\bar\eta^a(x)\eta^b(y)]|0\rangle = i\tilde\Delta_F{}^{ab}(y-x) = i\delta^{ab}\Box^{-1}, \tag{5.5.43}$$

它可以用图形表示为(箭头指明从$\eta\to\bar\eta$)：

$i\tilde\Delta_F(y-x)$：　 

(5.5.42)式中的第二项给出了鬼场与规范场之间的相互作用.

在协变规范下，有效拉氏量密度(5.5.31)中的规范场部分和规范固定项之和为(可差一四维散度项)：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} + \mathscr{L}_{GF} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^aF^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}A^a_\mu\left[-g^{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]\delta^{ab}A^b_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2}gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a})\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ab'c'}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu b'}A^{\nu c'}, \qquad (5.5.44)$$

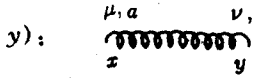
其中第二、三项给出规范场的自相互作用，第一项给出规范场的传播子：

$$\langle 0|T[A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)]|0\rangle = iD^{ab}_{F\mu\nu}(x-y)$$

$$=i\left[-g_{\mu\nu}\Box+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]^{-1}\delta^{ab}, \qquad (5.5.45)$$

它可以用图形表示为

$iD^{ab}_{F\mu\nu}(x-y)$：



类似于(5.5.38)，$D^{ab}_{F\mu\nu}(x-y)$ 的傅立叶展开式为

$$\begin{cases} D^{ab}_{F\mu\nu}(x-y)=\dfrac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}k D^{ab}_{F\mu\nu}(k)e^{-ik\cdot x}, \\ D^{ab}_{F\mu\nu}(k)=-\dfrac{\delta^{ab}}{k^2}\left[g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\dfrac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]. \end{cases} \qquad (5.5.46)$$

从上面的讨论我们看到，非阿贝尔规范场的有效拉氏量密度也可以分为自由部分(仅包含场的二次项)和相互作用部分(包含场的三次、四次项)：

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}=\mathscr{L}_0(A^\mu,\eta,\bar\eta)+\mathscr{L}_1(A^\mu,\eta,\bar\eta), \qquad (5.5.47)$$

其中，由(5.5.42～43)和(5.5.44～45)，

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}A^{\mu a}(D^{ab}_{F\mu\nu})^{-1}A^{\nu b}+\bar\eta^a(\tilde\Delta_F{}^{ab})^{-1}\eta^b, \qquad (5.5.48)$$

$$\mathscr{L}_1=\frac{1}{2}gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a})-\frac{1}{4}g^2f^{abc}f^{ab'c'}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu b'}A^{\nu c'}$$

$$+gf^{abc}(\partial^\mu\bar\eta^a)A_\mu{}^b\eta^c. \qquad (5.5.49)$$

对鬼场 η 和 $\bar\eta$ 我们还需引进相应的外源 ξ 和 $\bar\xi$，它们也是格拉斯曼代数的元素. 这样，我们可把非阿贝尔规范场的生成泛函(5.5.29)写为

$$W[J,\xi,\bar\xi]=N\int\mathscr{D}A\mathscr{D}\bar\eta\mathscr{D}\eta$$

$$\cdot\exp\left[i\int\mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1+\bar\eta\cdot\xi+\bar\xi\cdot\eta+J\cdot A\right)\right]. \qquad (5.5.50)$$

现在，暂且撇开 $\mathscr{L}_1$，我们来考虑自由格林函数生成泛函 $W_0[J,\xi,\bar{\xi}]$. 利用(5.5.48)，我们有

$$t^\mu A^a_\mu = 0, \tag{5.5.51}$$

其中，t^μ 是类空矢量. 这时，规范固定函数

$$F^a = t^\mu A^a_\mu \tag{5.5.52}$$

在无限小规范变换(5.5.18)下，有

$$\delta F^a = f^{abc}\theta^b t^\mu A^c_\mu + \frac{1}{g}t^\mu \partial_\mu \theta^a = \frac{1}{g}t^\mu \partial_\mu \theta^a, \tag{5.5.53}$$

因此，由(5.5.20)，有

$$M^{ab} = g\frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} = \delta^{ab} t^\mu \partial_\mu, \tag{5.5.54}$$

它确实与 A^a_μ 无关. 这样，在轴规范下规范场的有效拉氏量密度中不包含鬼项，允许差一四维散度，它可表示为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(t^\mu A^a_\mu)^2$$

$$= -\frac{1}{2}A^a_\mu\left(g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu + \frac{1}{\alpha}t^\mu t^\nu\right)\delta^{ab}A^a_\nu + \text{相互作用项}.$$

因此，这时规范场的传播子为

$$iD^{ab}_{F\mu\nu}(x-y) = -i\delta^{ab}\left[g^{\mu\nu}\Box + \partial^\mu\partial^\nu + \frac{1}{\alpha}t^\mu t^\nu\right]^{-1},$$

这个传播子是很复杂的(转换到动量空间后可明显地看出来)，这是理论中不出现鬼场的代价.

第六章　协变微扰论（φ^4 理论）

上一章我们讨论了各种场的路径积分形式，给出了便于应用的自由场的格林函数生成泛函 $W_0[J]$. 由于实际物理过程都是在相互作用下发生的，因此，我们更感兴趣的是有相互作用存在的情形. 在这一章里，我们以标量场的 φ^4 相互作用为例来讨论有相互作用时的各种生成泛函. 由于在一般情况下计算这些生成泛函还没有有效的解析方法，我们只能求助于微扰方法，通常表现为按耦合常数展开的级数形式. 所得结果可直接推广用于包含各种场的相互作用情形.

6.1　有相互作用时的生成泛函和格林函数

有相互作用的拉氏量密度可表为自由部分和相互作用部分之和：

$$\mathscr{L}(\varphi) = \mathscr{L}_0(\varphi) + \mathscr{L}_1(\varphi). \tag{6.1.1}$$

由(5.3.2)式，这时的生成泛函可写为

$$W[J] = N\int \mathscr{D}\varphi \exp\left\{i\int \mathrm{d}x\left[\mathscr{L}_0(\varphi) + \mathscr{L}_1(\varphi) + J\varphi + \frac{i}{2}\epsilon\varphi^2\right]\right\}, \tag{6.1.2}$$

它可以通过 $W_0[J]$ 表示出来. 为此，注意下列公式：

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right) = \varphi(x)\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right), \tag{6.1.3a}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)^n \exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right) = \varphi^n(x)\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right), \tag{6.1.3b}$$

$$F\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right)=F[\varphi(x)]\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right). \tag{6.1.3c}$$

利用上面最后一式，从(6.1.2)式我们有

$$\begin{aligned}W[J]&=N\int\mathscr{D}\varphi\exp\left(i\int \mathrm{d}x\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\varphi)\right)\exp\left(i\int \mathrm{d}x J\cdot\varphi\right)\\&\quad\cdot\exp\left(i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_0+\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2\right)\right)\\&=N\int\mathscr{D}\varphi\exp\left(i\int \mathrm{d}x\,\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)\exp\left(i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_0+J\varphi+\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2\right)\right)\\&=N\exp\left(i\int \mathrm{d}x\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)\int\mathscr{D}\varphi\exp\left(i\int \mathrm{d}x\left(\mathscr{L}_0+J\varphi+\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2\right)\right)\\&=N\exp\left(i\int \mathrm{d}x\,\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right)W_0[J],\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

其中$W_0[J]$由(5.3.18)式表出；归一化因子N由

$$W[J=0]=1 \tag{6.1.5}$$

定出. 因此，只要知道了相互作用的具体形式，我们就能通过自由格林函数生成泛函来求出有相互作用时的格林函数生成泛函，从而求得有相互作用时的格林函数. 但由于$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$出现在指数中，通常只能用微扰方法来进行计算. 下面，我们用φ^4相互作用为例加以说明.

对于φ^4相互作用理论，其自相互作用为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\varphi)=-\frac{g}{4!}\varphi^4, \tag{6.1.6}$$

其中耦合常数g表示自作用强度，1/4!是为了方便而引进的. 把(6.1.6)和(5.3.18)代入(6.1.4)，并按g的幂次展开得：

$$\begin{aligned}W[J]&=N\left(1-\frac{ig}{4!}\int \mathrm{d}z\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4+o(g^2)\right)\\&\quad\cdot\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right).\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

显然，$W[J]$的g^0阶就是自由格林函数生成泛函$W_0[J]$，它的格林函数已在5.3节中讨论过. 现在，我们来讨论g阶项. 直接计算

可以得到：

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

$$=-\int \mathrm{d}x\,\Delta_F(z-x)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right),$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

$$=\left\{i\Delta_F(0)+\left[\int \mathrm{d}x\Delta_F(z-x)J(x)\right]^2\right\}\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right),$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

$$=\left\{-3i\Delta_F(0)\int \mathrm{d}x\,\Delta_F(z-x)J(x)-\left[\int \mathrm{d}x\,\Delta_F(z-x)J(x)\right]^3\right\}$$

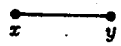
$$\cdot\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right),$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)$$

$$=\left\{-3[\Delta_F(0)]^2+6i\Delta_F(0)\left[\int \mathrm{d}x\,\Delta_F(z-x)J(x)\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\int \mathrm{d}x\Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right\}\cdot\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right). \qquad (6.1.8)$$

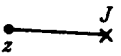
为了用图形直观而方便地表示结果，我们作如下对应：



$\sim i\Delta_F(x-y)$，这是传播子；



$\sim i\Delta_F(0)\equiv i\Delta_F(z-z)$，称为圈传播子；



$\sim\int \mathrm{d}x\Delta_F(z-x)J(x)$，称为带源传播子； (6.1.9)



$\sim -i\frac{g}{4!}\left(\text{加上}\int \mathrm{d}z\right)$，称为相互作用顶角，简称顶角.

利用(6.1.8)式和图对应(6.1.9)，(6.1.7)的 g 阶项可表为

$$\frac{-ig}{4!}\int dz\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)$$

$$= \left[3\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) - 6\left(\overset{J}{\times}\!\!\!-\!\!\!\bigcirc\!\!\!-\!\!\!\overset{J}{\times}\right) + \begin{array}{ccc} J & & J \\ \times & & \times \\ & \times & \\ \times & & \times \\ J & & J \end{array}\right]$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right). \qquad (6.1.10)$$

上面结果的第一个图没有外腿，此类图称为真空图. 把(6.1.10)代入式(6.1.7)，利用(6.1.5)可定出精确到 g 阶的归一化因子为

$$N^{-1} = 1 + 3\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) + o(g^2), \qquad (6.1.11)$$

于是精确到 g 阶的归一化的生成泛函为

$$W[J]$$

$$= \frac{\left[1 + 3\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) + 6\left(\times\!\!-\!\!\bigcirc\!\!-\!\!\times\right) + \left(\begin{array}{ccc} & & \\ \times & & \times \\ & \times & \\ \times & & \times \\ & & \end{array}\right) + o(g^2)\right]}{1 + 3\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) + o(g^2)}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)$$

$$= \left[1 + 6\left(\times\!\!-\!\!\bigcirc\!\!-\!\!\times\right) - \left(\begin{array}{ccc} & & \\ \times & & \times \\ & \times & \\ \times & & \times \\ & & \end{array}\right) + o(g^2)\right]$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right). \qquad (6.1.12)$$

可见，在归一化的 $W[J]$ 中没有真空图的贡献. 这一结论对微扰论各阶都是正确的.

下面从归一化的生成泛函(6.1.12)出发来计算格林函数.

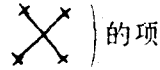
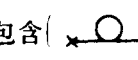
(1) 二点格林函数

二点格林函数定义为

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))|0\rangle$$

$$= -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0}, \qquad (6.1.13)$$

观察式(6.1.12)容易发现，其第一项（g^0 阶）对 $G^{(2)}(x_1, x_2)$ 的贡

献就是自由传播子 $i\Delta_F(x_1,x_2)$. 而包含  的项由于有四个 J 因子，故对 $G^{(2)}(x_1,x_2)$ 没有贡献. 包含  的项为：

$$A=6\cdot\frac{-ig}{4!}\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)$$
$$\cdot\left(\int dzdxdy\Delta_F(0)\Delta_F(z-x)J(x)\Delta_F(z-y)J(y)\right).$$

直接计算得到

$$-\frac{\delta^2 A[J]}{\delta J(x_1)J(x_2)}=-\frac{g}{2}\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)$$
$$\cdot\left[\int dz\Delta_F(0)\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\right]+\text{含有}J\text{因子的项},$$

其中 $J=0$ 时显然为0的项没有明显写出. 可见，它对 $G^{(2)}(x_1,x_2)$ 的贡献为

$$-\frac{g}{2}\int dz\Delta_F(0)\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2),$$

把上述贡献加起来，得到

$$G^{(2)}(x_1,x_2)=i\Delta_F(x_1-x_2)$$
$$-\frac{g}{2}\int dz\Delta_F(0)\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)+o(g^2)$$
$$=\underset{x_1\quad x_2}{\text{———}}+12\ \underset{x_1\quad z\quad x_2}{\text{—○—}}+o(g^2).\quad(6.1.14)$$

这是精确到 g 阶的相互作用传播子，第二项反映了相互作用对自由传播子的 g 阶修正.

(2) 四点格林函数

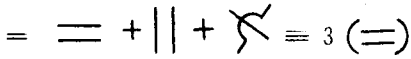
四点格林函数定义为

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)]|0\rangle$$
$$=\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\bigg|_{J=0}.\quad(6.1.15)$$

其 g^0 阶是四点自由格林函数，由(5.3.32)表示，即

$$G_0^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_3)$$

$$= -\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) - \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4)$$
$$- \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)$$



对 g 阶，包含()的项的贡献为

$$\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left\{6\left(\right.\right.$$  $$\left.\left.\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}\right|_{J=0}$$

$$= -\frac{ig}{2}\int dz\Delta_F(0)[\Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4)$$
$$+ \Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \text{其余四项}]$$

$=72($  $)$；

包含()的项的贡献为

$$\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\left\{\left(\right.\right.$$  $$\left.\left.\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}\right|_{J=0}$$

$$= -ig\int dz\Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_2)\Delta_F(z - x_3)\Delta_F(z - x_4)$$

$=24($ $)$.

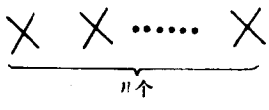
精确到 g 阶的四点格林函数是上列三项贡献之和：

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$=3($  $)+72($  $)+24($  $)+o(g^2)$. (6.1.16)

上面的计算是相当冗长的. 考虑到图形和解析表达式之间的联系我们可以采用更为直接而简便的费曼图方法来计算微扰各阶的 n 点格林函数. 仍从 φ^4 相互作为例来说明这个方法的基本步骤.

1) 对 g^n 阶，我们有 n 个顶角：



2）相应于 n 点格林函数，我们有 n 个外点(这里表示的是四点格林函数)：



3）以所有可能的方式连接所有的点和线来构造拓扑不同的各种图形(真空图除外)，通常称为费曼图. 例如对 g 阶四点格林函数，我们从预备图(a)出发，可构造出三种拓扑不同的图(b)(见图6.1.1). 其中第三个费曼图(图中作圆括号括出)是真空图，可以略去.

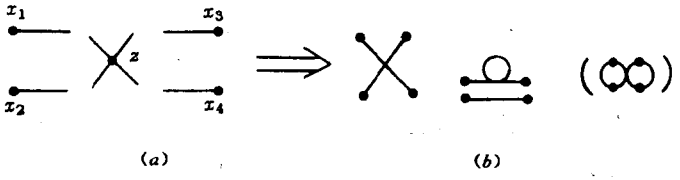
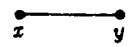


图6.1.1 构造拓扑不同的费曼图 (a)预备图； (b)拓扑不同的费曼图

4）通过考虑得到每种费曼图的各种可能连接方式来确定各种费曼图的相乘因子 S.

例如，要得到图6.1.1 (b)中的第一个图，可连接 x_1 与顶角的四线之一，这有4种方式，再连接 x_2 与顶角的其余三线之一，有3种方式，连接 x_3 与余下的二线之一，有2种方式，x_4 必与顶角的剩余一条线相连. 故共有 $S=4!$ 种连接方式. 要得到图6.1.1(b)中的第二个图，可直接连 x_1 与其余三个外点之一，这有3种方式，剩余的二个外点之一与顶角的4线之一相连有4×2种方式，剩余一个外点与顶角余下的3线之一相连有3种方式，故共有 $S=3\times4\times2\times3=72$ 种连接方式. 注意，对称系数的求法是比较灵活的，无须拘泥于某种成法，只要读者细心体会，自能得其要旨.

5）我们可建立 φ^4 标量场论坐标空间的费曼规则为：

传播子  $\sim i\Delta_F(x-y)$

顶角  $\sim -ig\left(\text{加上}\int dz\right)$ (6.1.17)

图的对称因子 $\frac{S}{(4!)^m}$ 其中 m 为图的微扰阶次

注意，关于图的对称因子，我们已将微扰 m 阶的展开因子 $1/m!$ 与 m 个顶点的交换对称因子 $m!$ 相抵消. 不然，还须引进顶点对称因子. 根据由步骤1)～4)所得到的费曼图和相乘因子 S，利用上列费曼规则(6.1.17)，我们可直接写出相应的精确到 m 阶的 n 点格林函数在坐标空间的表达式.

6.2 连通格林函数及其生成泛函

现考察四点格林函数的表达式(6.1.16)，其第一项和第二项所对应的费曼图()和()是不连通的，称为非连通图；而第三项()是连通的，称为连通图. 仅有连通图组成的格林函数称为连通格林函数，而含有非连通图的格林函数称为非连通格林函数. 图公式(6.1.16)所表示的四点格林函数就是非连通格林函数的例. 由 $W[J]$ 所产生的格林函数一般都含有非连通图，因而它是非连通格林函数生成泛函. 在实际的散射过程中，有贡献的仅是连通图，所以我们更感兴趣的是连通图和连通格林函数，用 $G_c(\cdots)$ 表示. 现在就来讨论连通格林函数的生成泛函 $Z[J]$.

引进生成泛函 $Z[J]$，其定义为

$$iZ[J]=\ln W[J]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\,J(x_1)\cdots J(x_n)G_c^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad (6.2.1)$$

其中

$$G_c^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{i^{n-1}}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \quad (6.2.2)$$

即为 n 点连通格林函数.

为了说明 $Z[J]$ 确实产生连通格林函数，以四点函数为例.

$$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{i^3}\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\Big|_{J=0}$$

$$=-\Big\{6\frac{1}{W^4}\frac{\delta W}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W}{\delta J(x_2)}\frac{\delta W}{\delta J(x_3)}\frac{\delta W}{\delta J(x_4)}$$

$$-2\Big[\frac{1}{W^3}\frac{\delta W}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W}{\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}+\text{其余 5 项}\Big]$$

$$+\Big[\frac{1}{W^2}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}+\text{其余 2 项}\Big]$$

$$+\Big[\frac{1}{W^2}\frac{\delta W}{\delta J(x_1)}\frac{\delta^3 W}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}+\text{其余 3 项}\Big]$$

$$-\frac{1}{W}\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\Big\}\Big|_{J=0}. \qquad (6.2.3)$$

具体到 φ^4 相互作用，注意奇数点格林函数为0和 $W[0]=1$，可由(6.2.3)得到

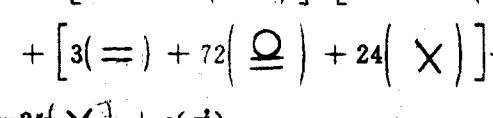
$$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\Big\{\frac{1}{W}\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}$$

$$-\Big[\frac{1}{W^2}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}+\text{其余 2 项}\Big]\Big\}\Big|_{J=0}$$

$$=G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)-\big[G^{(2)}(x_1,x_2)G^{(2)}(x_3,x_4)+\text{其余 2 项}\big]. \qquad (6.2.4)$$

精确到 g 阶，即把(6.1.14)和(6.1.16)代入上式得到：

$$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$



$$=24\Big(\times\Big)+o(g^2). \qquad (6.2.5)$$

可见，$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 确实只包含连通图.

式(6.2.4)也可改写为

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$+[G^{(2)}(x_1,x_2)G^{(2)}(x_3,x_4)+\text{其余 2 项}]. \quad (6.2.6)$$

由等式

$$\frac{1}{i}\frac{\delta^2 z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}=\frac{1}{W^2}\frac{\delta W}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W}{\delta J(x_2)}-\frac{1}{W}\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)},$$

取 $J=0$,利用奇数点格林函数为0和 $W[0]=1$得

$$G_c^{(2)}(x_1,x_2)=G^{(2)}(x_1,x_2), \quad (6.2.7)$$

即两点格林函数都是连通的. 由此,式(6.2.6)可表示为

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$+[G_c^{(2)}(x_1,x_2)G_c^{(2)}(x_3,x_4)+\text{其余 2 项}]. \quad (6.2.8)$$

即四点格林函数可表为四点连通格林函数与较低阶的二点连通格林函数各种可能乘积(这一部分是非连通的!)之和. 这个结论可推广到高阶的 n 点格林函数,即 n 点格林函数(非连通的)可表为 n 点连通格林函数及所有可能的较低阶的连通格林函数的乘积(这部分是非连通的!)之和,这被用图形表示在图6.2.1中.

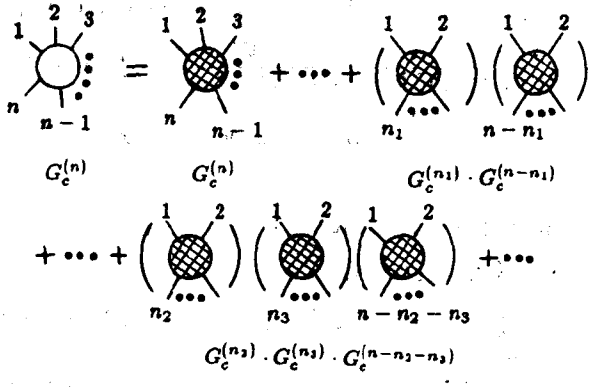
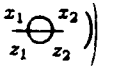
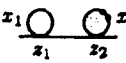


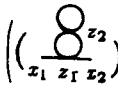
图 6.2.1 非连通格林函数与连通格林函数

以后在计算格林函数时,一般只需按上一节所讲的费曼图方法画出所有拓扑不同的连通图,然后按费曼规则直接写出它们的解析表达式. 作为应用,我们直接写出 g^2 阶的二点连通格林函数

和四点连通格林函数：

$$G_c^{(2)}(x_1,x_2)\big|_{g^2\text{阶}}$$

$$=\frac{4^2\times 3!}{(4!)^2}\times\Big(\Big($$  $$\Big)\Big)+\frac{(4\times 3)^2}{(4!)^2}\times\Big(\Big($$  $$\Big)\Big)$$

$$+\frac{4\times 3\times 6\times 2}{(4!)^2}\times\Big(\Big($$  $$\Big)\Big)$$

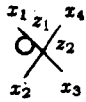
$$=-\frac{ig^2}{6}\int dz_1dz_2\Delta_F(x_1-z_1)\Delta_F^3(z_1-z_2)\Delta_F(z_2-x_2)$$

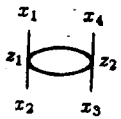
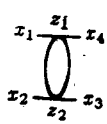
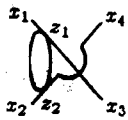
$$-\frac{ig^2}{4}\int dz_1dz_2\Delta_F(x_1-z_1)\Delta_F(z_1-z_2)\Delta_F(z_2-x_2)\Delta_F^2(0)$$

$$-\frac{ig^2}{4}\int dz_1dz_2\Delta_F(x_1-z_1)\Delta_F(z_1-x_2)\Delta_F^2(z_1-z_2)\Delta_F(0)\ ,$$

(6.2.9)

$$G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|_{g^2\text{阶}}$$

$$=\frac{4!\times 4\times 3}{(4!)^2}\Big[$$  $$+$$  $$+$$  $$+$$  $$\Big]$$

$$+\frac{(4\times 3)^2\times 2}{(4!)^2}\Big[$$  $$+$$  $$+$$  $$\Big]$$

$$=\frac{g^2}{2}\int dz_1dz_2[\Delta_F(x_1-z_1)\Delta_F(z_1-z_2)\Delta_F(z_2-x_2)\Delta_F(z_2-x_3)$$

$$\cdot\Delta_F(z_2-x_4)\Delta_F(0)+(x_1\leftrightarrow x_2)+(x_1\leftrightarrow x_3)+(x_1\leftrightarrow x_4)]$$

$$+\frac{g^2}{2}\int dz_1dz_2[\Delta_F(x_1-z_1)\Delta_F(z_1-x_2)\Delta_F^2(z_1-z_2)\Delta_F(x_3-z_2)$$

$$\cdot\Delta_F(x_4-z_2)+(x_2\leftrightarrow x_4)+(x_2\leftrightarrow x_3)]\ .\qquad(6.2.10)$$

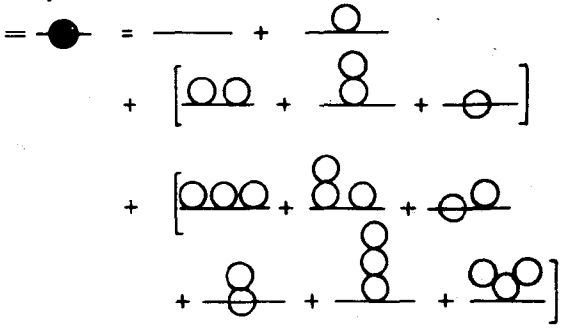
6.3 正规顶角及其生成泛函

上一节我们讨论了连通图，它对实际的散射过程有贡献. 这一节我们进一步讨论单粒子不可约图，它对今后的应用，特别在重整

化理论中十分有用.

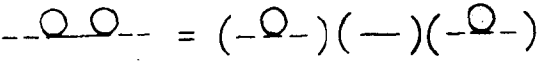
我们先来看二点连通格林函数，通常也称它为完全传播子，用  表示，常记为 $i\Delta'_F(x-y)$：

$i\Delta'_F = G_c^{(2)}$

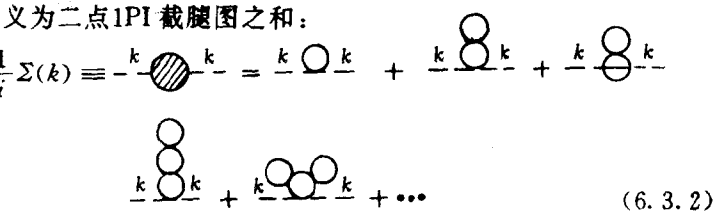


$+o(g^4)$ (6.3.1)

其中已忽略了各个图形的对称因子. 在上面的图展开中，除了平庸的第一项(自由传播子)外，所有图形都有二条外腿(外传播子)，这些外腿可以通过乘以逆传播子而截掉. 除去外腿以后所剩余的图形称为截腿图或截腿格林函数. 如  的截腿图为  (点线表示截去的外腿). 此外，有些图，如  、  、  和  ，可通过切断其一条内线而分成两部分，这样的图称为单粒子可约图(1PR)；另一些图，如  、  、  、  、  、和  ，则不可能通过切断其一条内线而分成两部分，这样的图称为单粒子不可约图(1PI). 自由传播子被归入1PI图. 显然，1PI图是更基本的，1PR图总可用1PI图表出. 例如

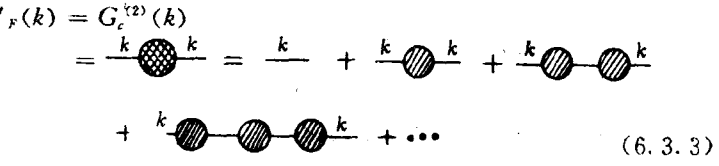


因此，连通格林函数可以仅用1PI 图表出. 为了更清楚地显示出这一点，引进动量空间的连通二点格林函数的正规自能部分 $\Sigma(k)$，其定义为二点1PI 截腿图之和：



(6.3.2)

利用它，动量空间的二点连通格林函数可表为



(6.3.3)

或

$$
\begin{aligned}
&i\Delta'_F(k) = G_c^{(2)}(k)\\
&= G_0^{(2)}(k) + G_0^{(2)}(k)\frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k)\\
&\quad + G_0^{(2)}(k)\frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k)\frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k) + \cdots\\
&= G_0^{(2)}(k)\left[1 + \frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k) + \frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k)\frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k) + \cdots\right]\\
&= G_0^{(2)}(k)\left[1 - \frac{\Sigma(k)}{i}G_0^{(2)}(k)\right]^{-1}\\
&= i\Delta_F(k)[1 - \Sigma(k)\Delta_F(k)]^{-1}\\
&= i[\Delta_F^{-1}(k) - \Sigma(k)]^{-1},
\end{aligned}
$$

或

$$\Delta'^{-1}_F(k) = \Delta_F^{-1}(k) - \Sigma(k), \tag{6.3.4}$$

其中 $\Delta_F(k)$ 为费曼传播子 $\Delta_F(x-y)$ 的动量空间表式，由表达式(5.3.15)，知

$$\Delta_F(k)=\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon},\quad \text{或}\quad \Delta_F^{-1}(k)=k^2-m^2+i\varepsilon\,. \tag{6.3.5}$$

上面的讨论表明，构造一个能直接产生1PI图的生成泛函将是方便的. 正规顶角(或1PI顶角)生成泛函 $\Gamma[\varphi(x)]$就是这样的泛函，它由下列泛函勒让德变换定义：

$$\Gamma[\varphi]=Z[J]-\int \mathrm{d}x\, J(x)\varphi(x), \tag{6.3.6}$$

其中经典场 $\varphi(x)$由下式确定

$$\varphi(x)=\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}. \tag{6.3.7}$$

这规定了 $J(x)$与 $\varphi(x)$的依赖关系. 由式(6.3.7)可知，当 $J=0$时，$\varphi(x)$是场算符的真空平均值，记为 φ_c：

$$\varphi(x)\big|_{J=0}=\langle 0|\varphi(x)|0\rangle=\varphi_c. \tag{6.3.8}$$

对(6.3.6)式求 $\varphi(x)$的泛函导数，有

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}&=\int \mathrm{d}y\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}-\int \mathrm{d}y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}\varphi(y)-J(x)\\&=-J(x),\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

其中已利用了式(6.3.7)、由式(6.3.8)和(6.3.9)可得

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi(x)=\varphi_c}=0, \tag{6.3.10}$$

这表示 $\varphi(x)$的真空期望值是 $\Gamma[\varphi]$的变分极值.

现在，分别定义二点函数

$$\Gamma^{(2)}_{\varphi}(x,y)\equiv\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}=-\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}, \tag{6.3.11}$$

和

$$\begin{aligned}G^{(2)}_J(x,y)&\equiv i\Delta'^{J}_F(x-y)\equiv\frac{1}{i}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\\&=\frac{1}{i}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(y)},\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

其中已利用了式(6.3.7)和(6.3.9).

利用(6.3.11)和(6.3.12),有

$$-i\int \mathrm{d}z\, G_J^{(2)}(x,z)\Gamma_\varphi^{(2)}(z,y)=\int \mathrm{d}z\,\frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)}=\delta^4(x-y), \tag{6.3.13}$$

因此,$G_J^{(2)}$ 与 $-i\Gamma_\varphi^{(2)}$ 互逆,即

$$-i\Gamma_\varphi^{(2)}(x,y)=[G_J^{(2)}(x,y)]^{-1}. \tag{6.3.14}$$

又,从(6.3.12)知,当 $J=0$ 时,

$$\begin{aligned} G_J^{(2)}(x,y)\big|_{J=0} &\equiv i\Delta'^{J}_F(x-y)\big|_{J=0} \\ &=G_c^{(2)}(x,y)=i\Delta'_F(x-y) \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

为完全传播子,再由式(6.3.8),此时 $\varphi(x)=\varphi_c$,故有

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x,y)&\equiv\frac{1}{i}\Gamma_\varphi^{(2)}(x,y)\big|_{\varphi=\varphi_c}=\frac{1}{i}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\bigg|_{\varphi=\varphi_c} \\ &=[G_c^{(2)}(x,y)]^{-1}=-i\Delta'^{-1}_F(x-y) \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

为逆完全传播子.对上式作傅立叶变换,可得到相应的动量空间表达式:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(k)&=[G^{(2)}(k)]^{-1}=-i\Delta'^{-1}_F(k) \\ &=-i\left(k^2-m^2-\Sigma(k)+i\varepsilon\right), \end{aligned} \tag{6.3.17}$$

其中已利用了(6.3.4)和(6.3.5)式.由于自能部分 Σ 仅由1PI截腿图组成,故式(6.3.17)表明 $\Gamma^{(2)}$ 仅由1PI截腿图组成.故也称它为1PI二点顶角或二点正规顶角,它是完全传播子的逆.

利用式(6.3.11)和(6.3.12),(6.3.13)式可写为

$$\int \mathrm{d}z\,\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)}=-\delta^4(x-y). \tag{6.3.18}$$

对上式作变分 $\dfrac{\delta}{\delta J(x')}$,并利用

$$\frac{\delta}{\delta J(x')}=\int \mathrm{d}y'\,\frac{\delta\varphi(y')}{\delta J(x')}\frac{\delta}{\delta\varphi(y')}\overset{(6.3.12)}{=}i\int \mathrm{d}y'\,G_J^{(2)}(y',x')\frac{\delta}{\delta\varphi(y')}$$

得到

$$\int \mathrm{d}z\,\frac{\delta^3 Z}{\delta J(x')\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)}$$

$$+i\int \mathrm{d}z\mathrm{d}y' \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(z)} G_J^{(2)}(y',x') \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y')\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)} = 0.$$

利用式(6.3.11)、(6.3.12)和(6.3.14)上式可改写为

$$i\int \mathrm{d}z \frac{\delta^3 Z}{\delta J(x')\delta J(x)\delta J(z)} [G_J^{(2)}(z,y)]^{-1}$$

$$-\int \mathrm{d}z\mathrm{d}y' G_J^{(2)}(x,z) G_J^{(2)}(y',x) \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y')\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)} = 0.$$

上式两边乘以 $G_J^{(2)}(y,x'')$，并对 y 积分，得到

$$-\frac{\delta^3 Z}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')} = \int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y' G_J^{(2)}(x,z) G_J^{(2)}(y',x') \cdot G_J^{(2)}(y,x'') i \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y')\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)},$$

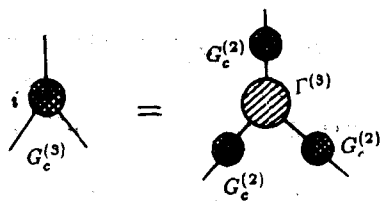
令 $J=0$，利用式(6.2.2)和(6.3.15)，上式即变为

$$G_c^{(3)}(x,x',x'') = \int \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y' G_c^{(2)}(z,x) G_c^{(2)}(y',x') \cdot G_c^{(2)}(y,x'') i\Gamma^{(3)}(z,y,y'), \quad (6.3.19)$$

其中已定义

$$\Gamma^{(3)}(z,y,y') = \left.\frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)\delta\varphi(y')}\right|_{\varphi=\varphi_c}. \quad (6.3.20)$$

(6.3.19)式可用图表示为



(6.3.21)

它清楚地表示 $i\Gamma^{(3)}$ 由1PI图组成，因为1PR部分都已归入三个 $G_c^{(2)}$ 中，故称它为1PI三点顶角或三点正规顶角。类似地，可定义 n 点正规顶角(或1PI n 点顶角)为：

$$i\Gamma^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \left.\frac{i\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\cdots\delta\varphi(x_n)}\right|_{\varphi=\varphi_c}. \quad (6.3.22)$$

利用式(6.3.16)，(6.3.19)式也可反过来表示为

$$i\Gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3)=\int dy_1dy_2dy_3[G_c^{(2)}(x_1,y_1)]^{-1}[G_c^{(2)}(x_2,y_2)]^{-1}$$
$$\cdot[G_c^{(2)}(x_3,y_3)]^{-1}G_c^{(3)}(y_1,y_2,y_3),\quad(6.3.23)$$

它表示 $i\Gamma^{(3)}$ 是三点连通格林函数截掉三条外线(完全)传播子后的1PI 部分,称为1PI 三点截腿格林函数或简称为三点正规顶角.一般地,可证明 $i\Gamma^{(n)}$ 是 n 点连通格林函数截掉 n 条外线(完全)传播子后的1PI 部分,称之为1PI n 点截腿格林函数或 n 点正规顶角.式(6.3.22)表明,$\Gamma[\varphi]$是 $\Gamma^{(n)}$ 的生成泛函,通常也称它为正规顶角的生成泛函.

$\Gamma^{(n)}(x_1,x_2,\cdots x_n)$ (或更一般地格林函数 $G^{(n)}$)的动量空间表式由下列傅立叶变换定义

$$\Gamma^{(n)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)$$
$$=\int dx_1\cdots dx_n\exp[i(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)]\Gamma^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad(6.3.24)$$

或反过来写为

$$\Gamma^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}\exp[-i(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)]$$
$$\cdot\Gamma^{(n)}(p_1,p_2,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n).\quad(6.3.25)$$

上面,我们用同一符号来表示动量空间和坐标空间对应的量,希望读者注意识别.

6.4 鞍点展开和正规顶角的树图近似

鞍点展开是一种计算泛函积分的近似方法,也称为稳定相位法.在这一节里,我们将利用它来直接计算泛函积分以得到连通格林函数生成泛函 $Z[J]$的树图和单圈图贡献;并且证明,在树图近似下的正规顶角生成泛函就是鞍点处的经典作用量.

由表达式(5.3.2),忽略小项 $i\varepsilon\varphi^2/2$,φ^4 标量场论的生成泛函

$W[J]$可表示为

$$W[J] = \int N \mathcal{D}\varphi \exp\{iI[\varphi, J]\}, \tag{6.4.1}$$

其中已记

$$I[\varphi, J] = I[\varphi] + \int \mathrm{d}x\, J(x)\varphi(x), \tag{6.4.2}$$

而允许差一四维散度

$$I[\varphi] = \int \mathrm{d}x \mathcal{L} = \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\varphi(x)(\Box - m^2)\varphi(x) - \frac{g}{4!}\varphi^4(x)\right] \tag{6.4.3}$$

为经典作用量或有效作用量.

设 $\varphi_c(x)$使泛函 $I[\varphi, J]$取极小，即

$$\frac{\delta I[\varphi_c, J]}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta I[\varphi_c]}{\delta\varphi(x)} - J(x) = 0. \tag{6.4.4}$$

通常称 $\varphi_c(x)$为"鞍点"，由于 $I[\varphi, J]$在式(6.4.1)中是个位相，故也称为稳定位相点. 把(6.4.3)式代入上式，得到 $\varphi_c(x)$所满足的方程：

$$(\Box - m^2)\varphi_c(x) - \frac{g}{3!}\varphi_c^3(x) = -J(x), \tag{6.4.5}$$

它确定了 φ_c 与 J 的依赖关系，而且当 $J=0$时，

$$\varphi_c|_{J=0} = 0. \tag{6.4.6}$$

在 φ_c 附近对 $I[\varphi, J]$作泛函展开，记

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \varphi_c(x), \tag{6.4.7}$$

利用式(6.4.2～4)，略去三级及其以上项，有

$$I[\varphi, J] = I[\varphi_c, J] + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z \frac{\delta^2 I[\varphi_c, J]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\varphi'(y)\varphi'(z), \tag{6.4.8}$$

其中

$$I[\varphi_c, J] = I[\varphi_c] + \int \mathrm{d}x\, J(x)\varphi_c(x), \tag{6.4.9}$$

$$I''[\varphi_c, J] \equiv \frac{1}{2}\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z \frac{\delta^2 I[\varphi_c, J]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\varphi'(y)\varphi'(z)$$

$$= \int \mathrm{d}x \frac{1}{2}\left[\varphi'(x)(\Box - m^2)\varphi'(x) - \frac{g}{2}\varphi_c^2(x)\varphi'^2(x)\right]. \tag{6.4.10}$$

把它们代入(6.4.1)式，得到

$$W[J]=N\exp(iI[\varphi_c,J])\int\mathscr{D}\varphi\exp(iI''[\varphi,J]). \quad (6.4.11)$$

或利用定义式(6.2.1)化为连通格林函数生成泛函 $Z[J]$ 的表达式(暂时不管归一化常数)：

$$Z[J]=Z^{tree}[J]+Z^{loop}[J], \quad (6.4.12)$$

其中

$$Z^{tree}[J]=I[\varphi_c,J], \quad (6.4.13)$$

$$Z^{loop}[J]=\frac{1}{i}\ln\int\mathscr{D}\varphi\exp(iI''[\varphi,J]). \quad (6.4.14)$$

首先考察 $Z^{tree}[J]$，把式(6.4.3)、(6.4.9)代入(6.4.13)，并利用式(6.4.5)，可得到

$$Z^{tree}[J]=\int dx\left[\frac{1}{2}J\varphi_c(x)+\frac{g}{4!}\varphi_c^4(x)\right]. \quad (6.4.15)$$

而 $\varphi_c(x)$ 可利用方程(6.4.5)微扰解出，其方法是把 $\varphi_c(x)$ 表成按耦合常数 g 展开的形式：

$$\varphi_c(x)=\varphi_c^{(0)}(x)+g\varphi_c^{(1)}(x)+g^2\varphi_c^{(2)}(x)+\cdots,$$

代入方程(6.4.5)，得到关于微扰各阶的方程：

$$(\Box-m^2)\varphi_c^{(0)}(x)=-J(x),$$

$$(\Box-m^2)\varphi_c^{(1)}(x)=\frac{1}{6}[\varphi_c^{(0)}(x)]^3,$$

$$(\Box-m^2)\varphi_c^{(2)}(x)=\frac{1}{2}[\varphi_c^{(0)}(x)]^2\varphi_c^{(1)}(x),$$

……

由它们解出：

$$\varphi_c^{(0)}(x)=-\int dy\Delta_F(x-y)J(y),$$

$$\varphi_c^{(1)}(x)=-\frac{1}{6}\int dy\,\Delta_F(x-y)\left[\int dy'\,\Delta_F(y-y')J(y')\right]^3,$$

$$\varphi_c^{(2)}(x)=-\frac{1}{12}\int dx'\,\Delta_F(x-x')\left[\int dy\Delta_F(x'-y)J(y)\right]^2$$

$$\cdot\left\{\int \mathrm{d}y\Delta_F(x'-y)\left[\int \mathrm{d}y'\Delta_F(y-y')J(y')\right]^3\right\}$$

……

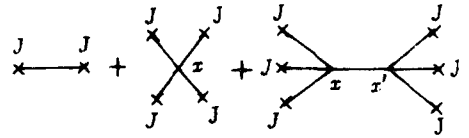
把这些解代入式(6.4.15),得到

$$\begin{aligned}
&Z^{\text{tree}}[J]\\
=&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\\
&-\frac{g}{24}\int \mathrm{d}x\left[\int \mathrm{d}y\,\Delta_F(x-y)J(y)\right]^4\\
&-\frac{g^2}{72}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}x'\left[\int \mathrm{d}y\Delta_F(x-y)J(y)\right]^3\\
&\cdot\Delta_F(x-x')\left[\int \mathrm{d}y'\,\Delta_F(x'-y')J(y')\right]^3+\cdots. \qquad (6.4.16)
\end{aligned}$$

显然,此结果满足归一化条件(5.3.3),因为

$$Z^{\text{tree}}[J=0]=0, \qquad (6.4.17)$$

这表明 $Z^{\text{tree}}[J]$ 已是归一化的了.由式(6.4.16)所表示的 $Z^{\text{tree}}[J]$ 可用图表示为

$Z^{\text{tree}}[J]\sim$  (6.4.18)

可见,它表示树图连通格林函数生成泛函,由它生成的是连通的树图格林函数.

下面再来计算 $Z^{\text{loop}}[J]$.把式(6.4.10)代入(6.4.14),并利用高斯型泛函积分公式(5.3.19),得到

$$Z^{\text{loop}}[J]=\frac{1}{i}\ln(\det A)^{-1/2}, \qquad (6.4.19)$$

其中泛函空间的矩阵 A 的表式为

$$\begin{aligned}
A(x,y)&=\left[-i(\Box_x-m^2)+\frac{ig}{2}\varphi_i^2(x)\right]\delta^4(x-y)\\
&=-i(\Box_x-m^2)\left[I-\frac{g}{2}(\Box_x-m^2)^{-1}\varphi_i^2(y)\right]\delta^4(x-y),
\end{aligned} \qquad (6.4.20)$$

因此可表示矩阵 A 为二个矩阵 A_0 和 A_1 的乘积：

$$A = A_0 \cdot A_1 \equiv A_0(I + B),$$

其中

$$A_0(x,y) = -i(\Box_x - m^2)\delta(x-y),$$

$$B(x,y) = -\frac{g}{2}\Delta_F(x-y)\varphi_i^2(y).$$

所以

$$\det A = \det A_0 \det(1+B).$$

由于 A_0 与 J 无关，可以把 $\det A_0$ 并入归一化因子. 利用公式

$$\det(1+B) = e^{\mathrm{Tr}\ln(1+B)}.$$

由式(6.4.19)，把 B 的值代入，得到

$$Z^{\mathrm{loop}}[J] = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \ln\left[1 - \frac{g}{2}\Delta_F(x-y)\varphi_i^2(y)\right]. \quad (6.4.21)$$

由式(6.4.6)，有

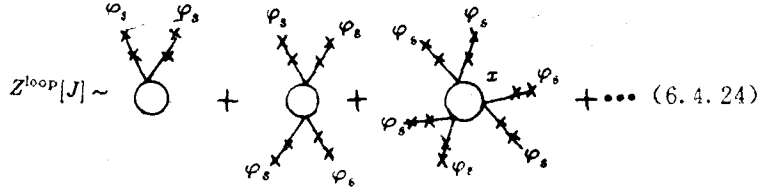
$$Z^{\mathrm{loop}}[J=0] = 0, \quad (6.4.22)$$

故它也满足归一化条件(5.3.3)，因而由式(6.4.21)所表示的 $Z^{\mathrm{loop}}[J]$ 也已归一化了.

在式(6.4.21)中把对数函数按 g 展开，并完成泛函求迹，得到

$$Z^{\mathrm{loop}}[J] = -\frac{ig}{4}\int \mathrm{d}x\ \Delta_F(x-x)\varphi_i^2(x) + \frac{ig^2}{16}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \Delta_F(x-y)$$
$$\cdot\varphi_i^2(y)\Delta_F(y-x)\varphi_i^2(x) - \frac{ig^3}{48}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta_F(x-y)\varphi_i^2(y)$$
$$\cdot\Delta_F(y-z)\varphi_i^2(z)\Delta_F(z-x)\varphi_i^2(x) + \cdots. \quad (6.4.23)$$

它可以用图表示为：



(6.4.24)

可见 $Z^{\mathrm{loop}}[J]$ 给出了连通格林函数的单圈图贡献.

现在我们来证明在树图近似下的正规顶角生成泛函就是鞍点处的经典作用量. 由式(6.4.13)和(6.4.4)知,生成泛函 $Z[J]$ 在树图近似下有形式

$$Z^{\text{tree}}[J] = I[\varphi_c] + \int \mathrm{d}x\, J(x)\varphi_c(x), \tag{6.4.25}$$

其中 $\varphi_c(x)$ 是有外源 $J(x)$ 时经典场方程的解:

$$\frac{\delta I[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x). \tag{6.4.26}$$

利用上列二式,在树图近似下,根据式(6.3.7),有

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\delta Z^{\text{tree}}}{\delta J(x)} \\ &= \int \mathrm{d}y \frac{\delta I[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(y)} \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta J(x)} + \varphi_c(x) + \int \mathrm{d}y J(y) \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta J(x)} \\ &= \varphi_c(x). \end{aligned} \tag{6.4.27}$$

把式(6.4.25)和(6.4.27)代入(6.3.6)的树图近似,就得到

$$\Gamma^{\text{tree}}[\varphi] = Z^{\text{tree}}[J] - \int \mathrm{d}x J(x)\varphi_c(x) = I[\varphi_c]. \tag{6.4.28}$$

6.5 S 矩阵和约化公式

粒子物理所涉及的基本物理过程是粒子在各种靶上的散射过程和粒子的衰变过程(由一个粒子变成多个粒子),前者测量反应截面,后者测量衰变寿命. 这些物理量的计算都是通过相应过程发生的量子力学几率振幅,一般称为散射振幅或 S 矩阵来进行的. 这一节就来讨论 S 矩阵的表述及其路径积分形式.

一般地,考虑一个从初粒子态 α 经相互作用跃迁到末粒子态 β 的过程. 可以认为态 α 和 β 都是渐近态,即对初态 $t \to -\infty$,末态 $t \to \infty$ 时,粒子是自由的,不受相互作用的影响. 那末,这个过程的散射振幅 $S_{\beta\alpha}$ 可表为

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, t \to \infty | \alpha, t \to -\infty \rangle, \tag{6.5.1}$$

$S_{\beta\alpha}$ 也称为散射矩阵或 S 矩阵的$(\beta\alpha)$矩阵元.

渐近态作为自由粒子态也可表示为入态和出态：

$$|\alpha\rangle_{in} \equiv |\alpha, t \to -\infty\rangle; \quad |\beta\rangle_{out} \equiv |\beta, t \to \infty\rangle. \tag{6.5.2}$$

假设一个入态由动量为 k_1 和 k_2 的二个粒子组成，则可表示为

$$|2\rangle_{in} = a_{in}^{\dagger}(k_1)a_{in}^{\dagger}(k_2)|0\rangle_{in}. \tag{6.5.3}$$

对出态也可类似地表示，即入态和出态各自形成完备的福克态空间(注意 $a_{in}^{\dagger}$，$a_{out}^{\dagger}$ 都对应于自由场). S 矩阵元(6.5.1)反映了入态和出态之间的联系：

$$S_{\beta\alpha} = {}_{out}\langle\beta|\alpha\rangle_{in} = {}_{in}\langle\beta|S|\alpha\rangle_{in} = {}_{out}\langle\beta|S|\alpha\rangle_{out}, \tag{6.5.4}$$

或

$$|\ \rangle_{in} = S|\ \rangle_{out}, \qquad |\ \rangle_{out} = S^{\dagger}|\ \rangle_{in}. \tag{6.5.5}$$

这意味着 S 是么正的

$$S^{\dagger}S = SS^{\dagger} = I, \qquad S^{\dagger} = S^{-1}. \tag{6.5.6}$$

以及

$$a_{out}(k) = S^{\dagger}a_{in}(k)S, \qquad a_{out}^{\dagger}(k) = S^{\dagger}a_{in}^{\dagger}(k)S, \tag{6.5.7}$$

或

$$\varphi_{out}(x) = S^{\dagger}\varphi_{in}(x)S. \tag{6.5.8}$$

真空的唯一性要求

$$|0\rangle_{in} = |0\rangle_{out} = |0\rangle, \tag{6.5.9}$$

于是有

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle 0|0\rangle_{in} &= {}_{in}\langle 0|S|0\rangle_{in} = \langle 0|S|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle = 1. \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

现在来考虑相互作用场 $\varphi(x)(-\infty < x^0 \leq x^0 \leq x_-^0 < \infty)$，仍以标量场为例，从它的拉氏量密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \mathscr{L}_I(\varphi), \tag{6.5.11}$$

利用场的运动方程(2.1.20)可得到 $\varphi(x)$所满足的方程：

$$K_x\varphi(x) = -\frac{\partial\mathscr{L}_I}{\partial\varphi(x)}, \tag{6.5.12}$$

其中已定义算符

$$K_x = \Box_x - m^2. \tag{6.5.13}$$

我们用格林函数方法来求解运动方程(6.5.12). 设格林函数 $G(x-y)$ 满足

$$K_x G(x-y) = \delta^4(x-y). \tag{6.5.14}$$

(6.5.12)乘以 $G(x-y)$ 减去(6.5.14)乘以 $\varphi(x)$，再对 x 积分，得

$$\int \mathrm{d}x \left[G(x-y) K_x \varphi(x) - \varphi(x) K_x G(x-y) \right]$$

$$= -\int \mathrm{d}x\, G(x-y) \frac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial \varphi(x)} - \varphi(y). \tag{6.5.15}$$

上式的左边可改写为

$$\int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}x^0 \left\{ \left[G(x-y) \nabla^2 \varphi(x) - \varphi(x) \nabla^2 G(x-y) \right] \right.$$

$$\left. - \left[G(x-y) \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} \varphi(x) - \varphi(x) \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} G(x-y) \right] \right\}$$

$$= \int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}x^0 \left\{ \nabla \left[G(x-y) \overleftrightarrow{\nabla} \varphi(x) \right] - \frac{\partial}{\partial x^0} \left[G(x-y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \varphi(x) \right] \right\},$$

其中第一项由高斯定理因 φ 在空间无限远处为零而为零；第二项可完成对时间的积分，得到

$$-\left(\int_{x_+^0} - \int_{x_-^0} \right) \mathrm{d}^3x\, G(x-y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \varphi(x).$$

把它代入(6.5.15)的左边，我们得到方程(6.5.12)的解为

$$\varphi(y) = -\int \mathrm{d}x\, G(x-y) \frac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial \varphi(x)}$$

$$+ \left(\int_{x_+^0} - \int_{x_-^0} \right) \mathrm{d}^3x G(x-y) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \varphi(x). \tag{6.5.16}$$

我们需要改造上列解的形式使与自由场(入场和出场)联系起来. 注意到满足(6.5.14)的格林函数不是唯一的，它依赖于边界条件. 我们可引进超前和滞后格林函数 $\Delta_A(x)$ 和 $\Delta_R(x)$，它们的定义为

$$\Delta_A(x)=\theta(-x^0)\Delta(x), \tag{6.5.17}$$

$$\Delta_R(x)=-\theta(x^0)\Delta(x), \tag{6.5.18}$$

其中 $\theta(x^0)$ 是(5.2.13)式所定义的阶跃函数，$\Delta(x)$是(3.2.34)和(3.2.35)所表示的自由标量场的协变对易子，即

$$i\Delta(x-y)=[\varphi_{\substack{in\\out}}(x),\varphi_{\substack{in\\out}}(y)]$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}\left(e^{ik(x-y)}-e^{-ik(x-y)}\right). \tag{6.5.19}$$

利用(6.5.17～19)，可以验证

$$\Delta(x)=\Delta_A(x)-\Delta_R(x), \tag{6.5.20}$$

$$K_x\underset{R}{\Delta_A}(x)=-\delta^4(x). \tag{6.5.21}$$

又，由于 $\Delta(-x)=-\Delta(x)$，有

$$\Delta_R(x)=\Delta_A(-x). \tag{6.5.22}$$

把 $G(x-y)=\Delta_A(x-y)$ 代入方程(6.5.16)，由于 $\theta(-x^0)$ 的作用，并利用式(6.5.22)，得到

$$\varphi(y)=-\int_{x^0_-}d^3x\Delta_R(y-x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}}\varphi(x)$$

$$-\int dx\Delta_R(y-x)\frac{\partial\mathscr{L}_I}{\partial\varphi(x)}. \tag{6.5.23}$$

令 $x^0_-\to-\infty$，并记上式右边的第一项为 $\varphi_{-\infty}(y)$，则 $\varphi_{-\infty}(y)$ 满足 C-G 方程：

$$k_y\varphi_{-\infty}(y)=\lim_{x^0_-\to-\infty}\int_{x^0_-}d^3x\delta^4(y-x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}}\varphi(x)=0,$$

其中已利用了式(6.5.21)，而第二个等式是由于 $x^0_-\to-\infty$ 时，$\delta(y^0-x^0_-)=0$. 所以 $\varphi_{-\infty}(y)$ 不是别的，它就是入场 $\varphi_{in}(y)$. 因此，式(6.5.23)可表示为

$$\varphi(x)=\varphi_{in}(x)-\int dy\Delta_R(x-y)\frac{\partial\mathscr{L}_I}{\partial\varphi(y)}$$

$$=\varphi_{in}(x)+\int dy\,\Delta_R(x-y)k_y\varphi(y), \tag{6.5.24a}$$

其中第二个等号利用了式(6.5.12).

类似地，利用超前格林函数 Δ_A 和 $y_+^0 \to \infty$ 的边界条件，也可得

$$\varphi(x) = \varphi_{\text{out}}(x) + \int \mathrm{d}y\ \Delta_A(x-y)k_y\varphi(y). \quad (6.5.24b)$$

从上面的讨论我们看到，态的福克空间是从唯一的真空态用作为自由场的入场 φ_{in}（或出场 φ_{out}）产生的，这是整个动力学过程的发生（或结束）阶段. 在最理想的情况下，物理上的可观察量都可用这些自由场来表示，特别对相互作用场 $\varphi(x)$ 也是如此. 因此，我们设想相互作用场与自由场之间存在着渐近关系. 式(6.5.24)提示我们，要求以

$$\varphi(x) \underset{x^0 \to \pm\infty}{\longrightarrow} \varphi_{\text{in}}(x) \quad (6.5.25)$$

作为渐近条件. 这是算符关系，通常称为强渐近条件. 然而它平庸地导致无散射发生，这当然不是我们所希望的. 正确的渐近形式是所谓的弱渐近条件，它是矩阵元之间的关系：

$$\lim_{x^0 \to \pm\infty} \langle a|\varphi(x)|b\rangle = \langle a|\varphi_{\text{in}}|b\rangle, \quad (6.5.26)$$

其中 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是希尔伯特空间中的任意态.

下面，我们利用(6.5.24)来推导 S 矩阵的路径积分表达式. 定义泛函算符

$$I[J] = T\exp\left(i\int \mathrm{d}x J(x)\varphi(x)\right), \quad (6.5.27)$$

其中 T 为编时算符. 把它与式(5.3.4)比较，有

$$W[J] = \langle 0|I[J]|0\rangle. \quad (6.5.28)$$

从式(6.5.27)对 $J(x)$ 作变分，得到

$$\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = T(\varphi(x)I[J]). \quad (6.5.29)$$

把式(6.5.24)代入(6.5.29)，得到

$$\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = I[J]\varphi_{\text{in}}(x) + \int \mathrm{d}y\ \Delta_R(x-y)k_y\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}, \quad (6.5.30a)$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)}=\varphi_{out}(x)I[J]+\int dy\Delta_A(x-y)k_y\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}. \tag{6.5.30b}$$

两式相减并利用式(6.5.20)得到

$$\varphi_{out}(x)I[J]-I[J]\varphi_{in}(x)$$
$$=i\int dy\Delta(x-y)k_y\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}. \tag{6.5.31}$$

把 S 矩阵作用于上式，利用式(6.5.6)和(6.5.8)，得到

$$[\varphi_{in}(x),\ SI[J]]$$
$$=i\int dy\ \Delta(x-y)k_y\frac{\delta(SI[J])}{\delta J(y)}. \tag{6.5.32}$$

这个方程的解是

$$SI[J]=\exp\left(\int dz\,\varphi_{in}(z)K_z\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)F[J], \tag{6.5.33}$$

其中 $F[J]$ 是 $J(x)$ 的泛函.

事实上，设

$$\begin{cases} A=\varphi_{in}(x), \\ B=\int dz\dot{\varphi}_{in}(z)K_z\dfrac{\delta}{\delta J(z)}, \end{cases} \tag{6.5.34}$$

则

$$[B,\ A]=\int dz\,[\varphi_{in}(z),\ \varphi_{in}(x)]\,K_z\frac{\delta}{\delta J(z)}$$
$$=i\int dz\,\Delta(z-x)K_z\frac{\delta}{\delta J(z)}$$

与 φ_{in} 无关，其中第二个等式利用了(6.5.19)式. 故 A、B 满足下列豪斯道夫公式：

$$e^B A e^{-B}=A+[B,\ A],$$

或改写为

$$[A,\ e^B]=[A,\ B]\,e^B.$$

设 $F[J]$ 是 $J(x)$ 的任一与 φ_{in} 无关的泛函，则

$$[\varphi_{in}(x),\ F[J]]=0,$$

故有

$$[A,\ e^B F[J]]=[A,\ e^B]\,F[J]$$
$$=[A,\ B]\,e^B F[J]. \qquad (6.5.35)$$

又由(6.5.33),

$$SI[J]=e^B F[J], \qquad (6.5.36)$$

所以,(6.5.35)式即(6.5.32)式.这就证明了(6.5.33)式确是方程(6.5.32)的解.

最后,我们尚需确定 $F[J]$.为此,对(6.5.33)式取真空期望值.但为了确定并消除零点能,我们必须首先对(6.5.33)式中的算符取正规乘积.这样,式(6.5.33)可表为

$$SI[J]=:\exp\left[\int \mathrm{d}z\varphi_{\mathrm{in}}(z)K_z\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]:F[J]. \qquad (6.5.37)$$

注意对任意场算符组合 φ,有

$$\langle 0|:e^{\varphi}:|0\rangle=1,$$

故由(6.5.37)式,有

$$\langle 0|:SI[J]:|0\rangle=F[J], \qquad (6.5.38)$$

另一方面,

$$\langle 0|SI[J]|0\rangle=\sum_{\alpha}\langle 0|S|\alpha\rangle_{\mathrm{out}}\langle\alpha|I[J]|0\rangle$$
$$=\langle 0|I[J]|0\rangle=W[J], \qquad (6.5.39)$$

其中第二个等式是因为:由(6.5.5)式和(6.5.9)式

$$\langle 0|S|\alpha\rangle_{\mathrm{out}}={}_{\mathrm{in}}\langle 0|\alpha\rangle_{\mathrm{in}}=\delta_{\alpha 0},$$

第三个等式利用了式(6.5.28).

式(6.5.38)和(6.5.39)表示

$$F[J]=W[J], \qquad (6.5.40)$$

把它代入式(6.5.37),利用 $I[J=0]=1$,得到

$$S=:\exp\left(\int \mathrm{d}z\varphi_{\mathrm{in}}(z)K_z\frac{\delta}{\delta J(z)}\right):W[J]\Big|_{J=0}. \qquad (6.5.41)$$

这一般称为 S 矩阵的约化公式.

6.6 微扰 S 矩阵和 S 矩阵元

上一节我们得到了 S 矩阵的约化公式，为了便于按耦合常数作展开，我们首先来改变一下它的形式. 把 $W[J]$ 的表式(6.1.4)和(5.3.18)代入约化公式(6.5.41)，并注意算符 $K=\Delta_F^{-1}$（比较式(6.5.13)和(5.3.14)立得），我们有

$$\begin{aligned}
S &= :\exp\left[\int \mathrm{d}x\varphi_{\mathrm{in}}(x)K_x\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]:\exp\left[i\int \mathrm{d}x\mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\\
&\quad\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\\
&= :\exp\left[i\int \mathrm{d}x\mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\exp\left[\int \mathrm{d}x\varphi_{\mathrm{in}}(x)K_x\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\\
&\quad\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\Big|_{J=0}:\\
&= :\exp\left[i\int \mathrm{d}x\mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\exp\left[-i\int \mathrm{d}x\,\varphi_{\mathrm{in}}(x)J(x)\right.\\
&\quad\left.-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\Big|_{J=0}:\\
&= :\exp\left[i\int \mathrm{d}x\,\mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]W[\varphi_{\mathrm{in}},J]\Big|_{J=0}:, \qquad (6.6.1)
\end{aligned}$$

其中已定义

$$\begin{aligned}
W[\varphi_{\mathrm{in}},J] &= \exp\left[-i\int \mathrm{d}x\,\varphi_{\mathrm{in}}(x)J(x)\right]\\
&\quad\cdot\exp\left[-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]. \qquad (6.6.2)
\end{aligned}$$

式(6.6.1)是我们对 S 矩阵作微扰展开的出发点，它包含的对外源的泛函微商只出现在相互作用拉氏量中. 按耦合常数的展开即按相互作用拉氏量的展开，有

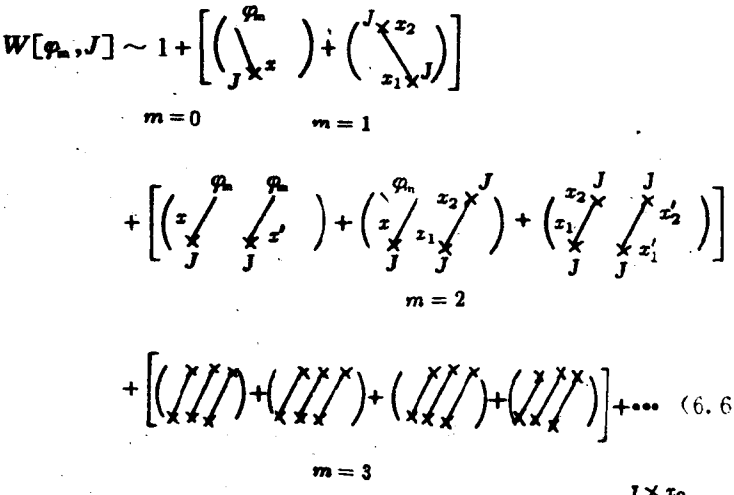
$$\begin{cases} S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \\ S^{(n)} = : \dfrac{i^n}{n!} \left[\int \mathrm{d}y \mathscr{L}_I\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]^n W[\varphi_{in}, J]\Big|_{J=0} : \end{cases} \tag{6.6.3}$$

具体计算 $S^{(n)}$ 时，可以先将 $W[\varphi_{in}, J]$ 展开成级数：

$$W[\varphi_{in}, J] = \sum_m \frac{(-i)^m}{m!}\left(\int \mathrm{d}x\, \varphi_{in}(x) J(x) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)^m. \tag{6.6.4}$$

把 $\left[\int dy \mathscr{L}_I\left(\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]^n$ 作用于此级数，再令 $J=0$，则只有有限多项不为零. 例如对 φ^4 相互作用，这时在(6.6.4)中只有那些含 J^{4n} 次幂的项才有贡献. 因为当 J 的幂次小于 $4n$ 时，对 J 的微商得零；而当 J 的幂次大于 $4n$ 时，对 J 微商后仍剩有 J，取 $J=0$ 也为零.

我们将微扰论计算 S 矩阵的过程图解如下. 首先，式(6.6.4)可图示为：



(6.6.5)

其中  表示场 φ_{in} 与源 J 在 x 处相互作用，  表示源

在 x_1 产生的粒子(场)传到 x_2 为源湮没、相反.

当 $\left[\int dy \mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]^n$ 作用到 $W[\varphi_m, J]$ 上后,就可通过消去外源 J 而构造出一些图形,例如,对于 φ^4 相互作用,在 $n=1$ 时,$-i\frac{g}{4!}\int dy\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)^4$ 的作用就是把四个外源 J 消掉而连接成一个顶点,根据前面的分析,这时有贡献的只是(6.6.5)中那些包含四个外源(图中用×点表示)的子图(用圆括号括起来的图).其结果可表示为图6.6.1.

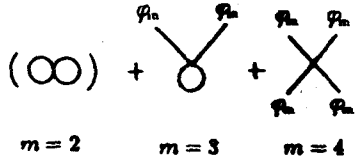


图 6.6.1

当 $n=2$ 时,只有式(6.6.5)中包含八个外源的子图才有贡献,且所得图形有二个顶点.另外,由于对实际散射过程有贡献的只是连通图,故在构图过程中略去不连通图.其结果表示在图6.6.2中.

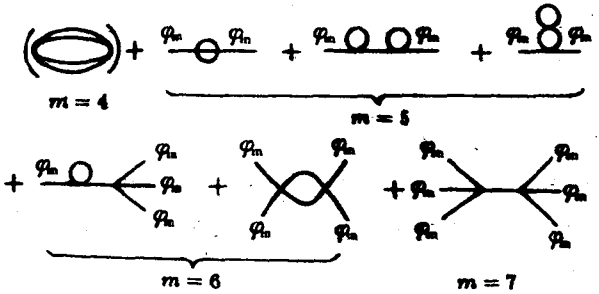


图 6.6.2

细心的读者可能已经注意到,我们在推导式(6.6.1)时,没有写上 $W[J]$ 的归一化因子 N.正如已在6.1节中所指出的,归一化因子仅影响真空图,归一化的 $W[J]$ 中没有真空图的贡献.因此,我们只要在构图时略去真空图就相当于考虑了归一化.这样,图6.6.1

和6.6.2中的各个第一图(图中已用圆括号括出)都是真空图,应该略去.

现在来讨论实际散射过程的散射矩阵元(S矩阵元).上面,我们已经得到,实际S矩阵的微扰各阶是一些含有渐近场(自由场)外线的连通图.这些渐近场就是那些将参与相互作用的场.每个渐近场都可分解为产生算符和湮灭算符之和,它们的系数是相应场的动量空间波函数.例如对标量场,按(3.2.6～7),有

$$\begin{cases} \varphi_{\text{in}}(x) = \int \mathrm{d}^3k \left[a(k)f_k(x) + a^{\dagger}(k)f_k^{*}(x)\right], \\ f_k(x) = (2\pi)^{-3/2}(2\omega_k)^{-1/2}e^{-ik\cdot x}. \end{cases}$$

对一个从N_i粒子初态到N_f粒子末态的具体跃迁过程,我们首先要确定求微扰的哪一阶?如为微扰n阶,则应取有n个顶角的图形.其次,按照类似于式(6.5.3)的态表示,组成对偶的初、末态中有N_i+N_f个产生、湮灭算符之乘积,由于湮灭算符向右(产生算符向左)湮灭真空,要使S矩阵元有非零贡献,必须在S矩阵中有N_i+N_f个与之配对的产生、湮灭算符之积,这就要求有N_i+N_f条渐近场外线.所以,对一个微扰n阶的$N_i \longrightarrow N_f$过程有贡献的只是那些含有N_i+N_f条φ_{in}外线且有n个顶角的图形.由于S矩阵(6.6.1)已经取正规乘积,故配对的产生、湮灭算符利用对易关系将直接化为动量δ-函数,只留下参与过程的场的波函数,通常称之为外线.例如,考虑φ^4理论的2→2过程,求它的微扰二阶S矩阵元.我们只须在具有二个顶角的图6.6.2中找到含有四条渐近场外线的图,把渐近场换成初末态粒子的波函数即可.其结果表示在图6.6.3中.

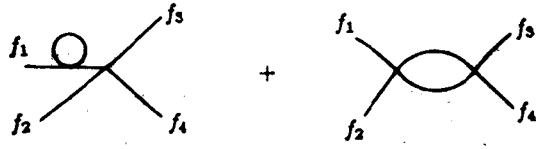


图 6.6.3　f表示粒子的波函数

在上面的图解中，我们没有标出每项的系数，它们可简单地从前面(6.1节)介绍的对称因子得到. 例如图6.6.3中第二个图前的系数为 $\frac{(4\times 3)^2\times 2}{(4!)^2}=\frac{1}{2}$.

综观上述的图解过程和结果，我们发现，实际跃迁过程的 S 矩阵元是一些具有确定结构的图形(通常称为费曼图)之和，每个图形都仅由三个基本元素组成，它们是外线、内线和顶点(角). 外线就是参与跃迁过程的场的波函数. 对标量场，它就是 $f_k(x)$；对矢量场则还要附加极化矢量 ε^μ；对狄拉克场则要附加旋量波函数 u_r 或 v_r ($\bar{u}_r$ 或 $\bar{v}_r$). 内线就是相应自由场的传播子，对各种场我们都已有了简单的直接从理论的有效拉氏量密度读出它们的办法. 由于二点正规顶角等于相应完全传播子的逆，一般地可定义自由传播子的逆为树图近似下的二点正规顶角. (这个定义实际上是前述简单办法的理论根据). 顶点就是各种相互作用顶角，它一般地定义为树图近似下的相应正规顶角. 由式(6.4.28)，树图近似下的正规顶角生成泛函等于经典作用量，故相互作用顶角通常可等于将 $\mathscr{L}_1$ 对其中所有的场量作微商后的结果再乘以 i(正规顶角的定义是 $i\Gamma^{(n)}!$)；而自由传播子的逆通常可等于将 $\mathscr{L}_0$ 中相应场的二次项对二个场量作微商后之结果再乘以 $-i$.

第七章　量子电动力学(QED)

在这一章里，我们将在路径积分形式的框架内建立电磁相互作用的协变微扰理论，即量子电动力学(QED)．我们将首先找出能方便地得到 S 矩阵元的动量空间费曼规则；接着，作为例子来计算微扰最低级近似下的康普顿散射截面；然后利用规范不变性导出 QED 的 W-T 恒等式；最后讨论高阶微扰论的发散困难和重整化．

7.1　QED 的微扰论和费曼规则

描述狄拉克粒子与光子之间电磁作用的 QED 的有效拉氏量密度在洛仑兹规范下可表示为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1, \tag{7.1.1}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 是自由狄拉克场和包括规范固定项的自由电磁场的拉氏量密度之和

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &\equiv \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_{G+GF},\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

由(5.5.36)，$\mathscr{L}_{G+GF}$ 也可表示为

$$\mathscr{L}_{G+GF} = \frac{1}{2}A^\mu\left[-g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu, \tag{7.1.3}$$

而

$$\mathscr{L}_1 = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{7.1.4}$$

是它们的相互作用拉氏量密度．按(6.1.4)式，这时生成泛函 W 可表示为

$$W[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = RW_0[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]\ , \qquad (7.1.5)$$

其中已记

$$R \equiv \exp\left[-ie\int dy\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(y)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\right)\gamma_\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\right)\right],$$

而自由格林函数生泛函 W_0 按(5.3.18)可表示为

$$W_0[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx dy J_\mu(x)D_F^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)\right.$$
$$\left. - i\int dx dy\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right\}, \qquad (7.1.6)$$

式中，我们已利用了(5.5.37)式和(5.4.23)式.

关于 S 矩阵的约化公式，类似于式(6.6.1)，有

$$S = :R\exp\left[-i\int dx A_{in}^\mu(x)J_\mu(x) + \psi_{in}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi_{in}(x)\right]$$
$$\cdot W_0[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]\big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0}:. \qquad (7.1.7)$$

S 矩阵和 S 矩阵元的微扰计算可仿照6.6节的图解方法进行. 结果，在微扰第 n 阶，对 $M\to N$ 过程的跃迁矩阵元我们得到一些有 $M+N$ 条相应粒子外线的 n 个顶点的费曼图. 例如，对康普顿散射($\gamma+e\to\gamma+e$)，它的微扰二阶 S 矩阵元由图7.1.1表示.

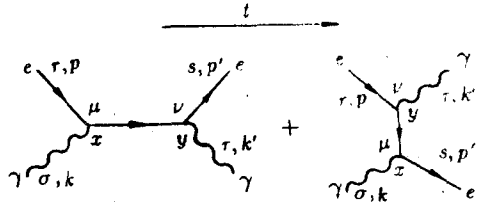


图 7.1.1 康普顿散射

由于狄拉克场有正、负能解，分别对应于正、反粒子，故图中表示狄拉克场的外线和内线都带箭头. 如果再规定费曼图的时间流向为从左到右，并考虑到狄拉克场的平面波解展开式(3.4.89～90)，我们有下列对应：

狄拉克场外线

正粒子外线 初态：  $u_r(p)g_p(x)$，

末态：  $\bar{u}_r(p)g_p^*(x)$，

反粒子外线 初态：  $v_r(p)g_p^*(x)$，

末态：  $\bar{v}_r(p)g_p(x)$，

其中 $$g_p(x)=(2\pi)^{-3/2}\sqrt{\frac{m}{E_p}}e^{-ip\cdot x}.$$

顺便指出，由于电荷守恒，费曼图中任何一条连通的狄拉克线（包括内、外线）其箭头指向总是一致的.

对于电磁场，我们根据它在极化坐标系内的平面波解展开式(3.5.31)可有如下对应：

电磁场外线

初态：  $\varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}(p)f_k(x)$，

末态：  $\varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}(p)f_k^*(x)$，

其中 $$f_k(x)=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-ik\cdot x}.$$

关于狄拉克场和电磁场的内线对应已分别由式(5.4.31)和(5.5.38)表出.

电磁场的相互作用顶点按定义可求得为：

$$i\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\left(-e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\right)=-ie\gamma^\mu,$$

因此关于电磁作用顶点的对应为

顶点  $-ie\gamma^\mu$ （附加 $\int dx$）

由于 QED 没有 φ^4 理论的那种对称性，故不需考虑对称因子.

这样，我们实际上已给出了 QED 在坐标空间的费曼规则. 还

有一点值得提出的是，由于狄拉克场的矩阵性质，及 S 矩阵元应是个数，故在利用费曼规则从图写出 S 矩阵元时，对图中的狄拉克线应逆着箭头方向沿线顺序写下各元素的表达式.

现在，我们可以从图7.1.1写出康普顿散射的最低阶贡献 S 矩阵元：

$$S_{fi}=\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}f_k(x)\varepsilon^{\nu}_{(\tau)}f_{k'}(y)[\bar{u}_s(p')g^*_{p's'}(y)(-ie\gamma_\nu)iS_F(y-x)$$
$$\cdot(-ie\gamma_\mu)u_r(p)g_{ps}(x)+\bar{u}_s(p')g^*_{p's'}(x)$$
$$\cdot(-ie\gamma_\mu)iS_F(x-y)(-ie\gamma_\nu)u_r(p)g_{ps}(y)]. \qquad (7.1.8)$$

为了得到动量空间的费曼规则，我们把 f、f^*、g、g^* 的平面波表式代入，S_F 用它的傅立叶展式(5.4.31b)代入，把所有的平面波型指数按 x 和 y 重新组合，然后完成对 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 的积分，则对(7.1.8)中的每项都得到两个四动量 δ 函数，其结果为

$$S_{fi}=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\left[(2\pi)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\varepsilon^{\mu}_{(\sigma)}\right]\left[(2\pi)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\varepsilon^{\nu}_{(\tau)}\right]$$
$$\cdot\left[(2\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_s(p')\right]\{[-ie\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(k+p-q)]$$
$$\cdot[iS_F(q)][-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(k'+p'-q)]$$
$$+[-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(k-p'+q)][iS_F(q)]$$
$$\cdot[-ie\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(k'-p+q)]\}\left[(2\pi)^{3/2}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_r(p)\right]. \qquad (7.1.9)$$

把上式与费曼图7.1.1对照，我们立即可总结出 QED 在动量空间的费曼规则如下：

1. 狄拉克场外线

初态粒子： 

$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u_r(p)$

末态粒子：

$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,\bar{u}_r(p)$

初态反粒子： 

$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,\bar{v}_r(p)$

末态反粒子： 

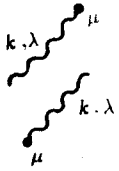
$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,v_r(p)$

2. 狄拉克场的线

传播子： 

$iS_F(p)=\dfrac{i}{\gamma\cdot p-m}\left(\text{外加}\int\dfrac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\right)$

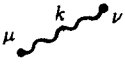
3. 电磁场外线

初态光子： 

$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}$

末态光子：

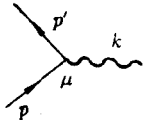
4. 电磁场内线

传播子： 

$iD_F^{\mu\nu}(k)=\dfrac{-i}{k^2}\left[g^{\mu\nu}+(\alpha-1)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$

$\left(\text{外加}\int\dfrac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\right)$

5. 相互作用顶点

电磁顶点： 

$-ie\gamma^{\mu}(\text{外加}(2\pi)^4\delta^4(p+p'-k))$

6. 对每一个封闭的狄拉克线组成的圈(费米子圈)求迹并加一负号：

费米子圈  $-\mathrm{Tr}(\cdots)$

7. 狄拉克粒子交换改变图的总体符号：如



两图反号

利用上列动量空间费曼规则，对某一跃迁过程，我们只要画出它在指定微扰阶下的所有可能的费曼图，即可方便地写出过程的 S 矩阵元.

值得指出的是，在实际使用中更方便的是利用下面稍加修改的费曼规则：

8. 把第5条规则中的外加 $(2\pi)^4\delta^4(p+p'-k)$ 修改为在费曼图中对内线设定四动量时是要保证通过每个顶点的四动量守恒. 这时，除外线四动量已给定外，尚需引进的四动量称为独立动量.

9. 把第4条规则中的外加积分修改为外加对独立动量的积分.

10. 总体附加 $(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_i-\sum p_f\right)$，其中 p_i、p_f 分别为初、末态四动量. 它表示整个过程中能量动量守恒.

7.2 跃迁几率、反应截面和衰变寿命

上一节我们讨论了如何写出 S 矩阵元. 由于它与相互作用拉氏量有关，通常称为过程的动力学. 为了和实验观察的数据进行比较，我们还需引进跃迁几率、反应截面、衰变寿命等概念，这将涉及对初态粒子自旋求平均和末态粒子自旋求和以及相空间积分的问题. 这些常称为过程的运动学. 我们现在就来讨论它.

(一) 跃迁几率

设初态 $|i\rangle$ 有 N_i 个粒子，末态 $|f\rangle$ 有 N_f 个粒子，S 矩阵元为

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle.$$

散射矩阵 S 一般可表为

$$S = 1 + iR, \tag{7.2.1}$$

R 称为反应矩阵. $R=0$ 时 $S=1$，即无反应发生. 下面讨论 $R\neq 0$ 的情形. 这时，

$$R_{fi} = \langle f|R|i\rangle$$

称为反应(跃迁)矩阵元. 它一般包含一能量动量守恒因子及外线因子，可表示为

$$\begin{aligned} R_{fi} = (2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_{i=1}^{N_i} p_i - \sum_{i=1}^{N_f} p_f\Big) V^{-(N_i+N_f)/2} \\ \cdot \prod_i M_i^{-1} \prod_f M_f^{-1} T_{fi}, \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

其中，T_{fi} 称为反应的不变振幅； V 为归一化体积(在连续极根下 $V\to(2\pi)^3$)；$M_{i(f)} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{E_{i(f)}}{m}} \\ \sqrt{2\omega_{i(f)}} \end{cases}$. 反应矩阵元 R_{fi} 的模平方即为跃迁几率

$$\begin{aligned} |R_{fi}|^2 = (2\pi)^8\delta^4(0)\delta^4\Big(\sum p_i - \sum p_f\Big) V^{-(N_i+N_f)} \\ \cdot \prod_i M_i^{-2} \prod_f M_f^{-2} |T_{fi}|^2, \end{aligned}$$

这里，$(2\pi)^4\delta^4(0)$ 是个不确定因子. 为了确定，把无限时空积分规定为有限时空积分的极限：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} \int_V \mathrm{d}^3x \int_T \mathrm{d}x^0 = \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} TV,$$

则由等式

$$\delta^4\Big(\sum p_i - \sum p_f\Big) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}x \exp\Big[i\Big(\sum p_i - \sum p_f\Big)x\Big],$$

得到

$$(2\pi)^4\delta^4(0) = \int \mathrm{d}x = \lim_{\substack{T\to\infty \\ V\to\infty}} TV.$$

由此得单位时间跃迁几率为

$$W=\frac{|R_{fi}|^2}{T}=\frac{(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_i-\sum p_f\right)|T_{fi}|^2}{V^{N_i-N_f-1}\prod\limits_i M_i^2\prod\limits_f M_f^2}. \tag{7.2.3}$$

(二) 反应截面

现在讨论初态为二个粒子的情形，$N_i=2$：

$$a+b\to c+d+\cdots,$$

这种过程称为反应. 反应截面 σ 定义为单位时间单位入射流强下跃迁到所有可能末态的几率. 所谓单位入射流强是指单位时间内通过单位横截面的粒子数，用 j 表示. 则

$$j=\rho|v|=\frac{|v|}{V}, \tag{7.2.4}$$

其中，ρ 为粒子数密度，由于按我们的归一化，已规定 V 内有一个粒子，故 $\rho=\frac{1}{V}$；v 为粒子运动速度，在不同的参照系里，它有不同的形式. 在靶静止系里，即运动粒子 a 去撞击静止靶 b ($\underset{p_a}{\overset{a}{\bullet\!\!\longrightarrow}}$ $\overset{b}{\bullet}$)，则

$$v=p/E_a; \tag{7.2.5}$$

而在碰撞质心系里($\underset{p_a}{\overset{a}{\bullet\!\!\longrightarrow}}$ $\underset{p_b}{\overset{b}{\longleftarrow\!\!\bullet}}$; $p_a=-p_b$)，则 v 指的是两粒子的相对速度，即

$$v=v_a-v_b=p_a\left(\frac{1}{E_a}+\frac{1}{E_b}\right). \tag{7.2.6}$$

这样，反应截面可表为

$$\sigma=\sum_f\frac{W}{j}=\sum_f\frac{(2\pi)^4\delta^4\left(p_a+p_b-\sum p_f\right)|T_{fi}|^2}{|v|V^{N_f}M_a^2M_b^2\prod\limits_f M_f^2}, \tag{7.2.7}$$

其中 $\sum\limits_f$ 表示对所有可能的末态求和，它一般包括对末态粒子的

所有动量求和及可能极化求和. 如讨论的是初、末态极化状态已知的粒子反应，则只对末态动量求和. 这时称为极化(反应)截面. 在连续情形下 $\left(\frac{1}{V}\sum_f \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p_f\right)$，极化截面可表示为

$$\sigma^{(\mathrm{pol})} = \frac{1}{|v|(2\pi)^{3N_f-4}M_a^2M_b^2}\int\prod \mathrm{d}^3 p_f \frac{\delta^4\left(p_a+p_b-\sum p_f\right)|T_{fi}|^2}{\prod M_f^2}. \tag{7.2.8}$$

实验上往往不区分粒子的极化状态，测量结果仅是对粒子极化状态的一种统计平均. 这时的反应截面称为非极化截面，一般还需对初态极化求平均，并对末态极化求和，这个运算我们用 $\overline{\sum_f}$ 表示. 因此，非极化截面可表示为

$$\sigma^{(\mathrm{non})} = \overline{\sum}\,\sigma^{(\mathrm{pol})} = \frac{1}{I_aI_b}\sum_{(\mathrm{pol})}\sigma^{(\mathrm{pol})}, \tag{7.2.9}$$

其中 I_a 和 I_b 是初态粒子可能的极化状态数. 例如

对电子，$I_e = 2\cdot\frac{1}{2}+1 = 2$；对光子，$I_\gamma = 2$.

(三) 衰变寿命

现在讨论初态为1个粒子 ($N_i = 1$) 的情形，

$$a \to b + c + \cdots,$$

这种过程称为衰变. 单位时间内跃迁到所有可能末态的几率称为衰变宽度，用 Γ 表示，则有

$$\Gamma = W(N_i = 1) = \sum_f \frac{(2\pi)^4\delta^4\left(p_a - \sum p_f\right)|T_{fi}|^2}{V^{N_f}M_a^2\prod M_f^2}. \tag{7.2.10}$$

衰变宽度的倒数，称为衰变寿命，用 τ 表示，

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \tag{7.2.11}$$

与反应截面类似，同样可区分极化宽度和非极化宽度. 在连续

形式下，有

$$\Gamma^{(\mathrm{pol})}=\frac{1}{(2\pi)^{3N_f-4}M_a^2}\int\prod \mathrm{d}p_f\frac{\delta^4\left(p_a-\sum p_f\right)}{\prod N_f!}|T_{fi}|^2,\quad (7.2.12)$$

$$\Gamma^{(\mathrm{non})}=\overline{\sum}\,\Gamma^{(\mathrm{pol})}=\frac{1}{I_a}\sum_{(\mathrm{pol})}\Gamma^{(\mathrm{pol})}.\quad (7.2.13)$$

值得指出的是，无论是反应截面还是衰变寿命的计算，都包含有对末态粒子动量的积分，称为末态相空间积分．由于

$$\int\frac{\mathrm{d}^3p_f}{2\omega_f}=\int\mathrm{d}p_f\delta(p_f^2-m_f^2)\theta(p_f^0)$$

是洛仑兹不变的，故相空间积分 $\int\prod\left(\frac{d^3p_f}{2\omega_f}\right)$ 称为不变相空间积分．它与具体的 S 矩阵元无关，仅反映了过程的运动学．

（四）极化求和

通常考虑的都是非极化过程，需要对初态粒子极化求平均和对末态粒子极化求和．这归结为计算 $\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2$．现分别对狄拉克粒子和光子二种情形进行讨论．

（1）狄拉克粒子的极化求和

当外线含有狄拉克粒子时，不变振幅 T_{fi} 的一般形式可写为

$$T_{fi}=\bar{u}_{r'}(p')Ou_r(p)\quad \left(\text{或}\ \bar{v}_{r'}(p')Ov_r(p)\right),\quad (7.2.14)$$

其中 O 为包括 γ 矩阵的算符（通常包含一些 γ 矩阵乘积的组合）．由于

$$[\bar{u}_{r'}(p')Ou_r(p)]^{\dagger}=\bar{u}_r(p)\bar{O}u_{r'}(p'),\quad \bar{O}=\gamma^0O^{\dagger}\gamma^0,$$

如果我们仍利用重复（极化）指标表示求和的约定以及狄拉克正、负能投影算符的定义式(3.4.53)，则有

$$\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2=\frac{1}{\prod I_i}\bar{u}_r(p)\bar{O}u_{r'}(p')\bar{u}_{r'}(p')Ou_r(p)$$

$$=\frac{1}{\prod I_i}(\bar{u}_r(p))_\alpha\bar{O}_{\alpha\beta}(\mathscr{P}_+(p'))_{\beta\gamma}O_{\gamma\delta}(u_r(p))_\delta$$

$$= \frac{1}{\prod I_i}(u_r(p)\bar{u}_r(p))_{\alpha\alpha}\bar{O}_{\alpha\beta}(\mathscr{P}_-(p'))_{\beta\gamma}O_{\gamma\delta}$$

$$= \frac{1}{\prod I_i}\mathrm{Tr}[\mathscr{P}_+(p)\bar{O}\mathscr{P}_-(p')O], \qquad (7.2.15a)$$

其中，$\prod I_i$ 表示初态狄拉克粒子可能极化态数的积.

对 $T_{fi}=\bar{v}_r'(p')Ov_r(p)$，我们类似地有

$$\overline{\sum}|T_{fi}|^2 = \frac{1}{\prod I_i}\mathrm{Tr}[\mathscr{P}_-(p)\bar{O}\mathscr{P}_+(p')O], \qquad (7.2.15b)$$

$\mathscr{P}_+$ 和 $\mathscr{P}_-$ 由式(3.4.56)表出，即

$$\mathscr{P}_\pm = \frac{m \pm \gamma\cdot p}{2m}.$$

可见，对狄拉克粒子的不变振幅平方进行极化求和归结为对一系列 γ 矩阵乘积组合的求迹运算. 对此，下列公式是非常有用的：

$$a)\quad \begin{cases} \gamma^\lambda\gamma^\lambda = 4, \\ \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\lambda = -2\gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\lambda = 4g^{\mu\nu}, \\ \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\lambda = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\lambda = 2(\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma). \end{cases} \qquad (7.2.16)$$

$$b)\quad \begin{cases} \mathrm{Tr}I = 4, \\ \mathrm{Tr}\gamma^5 = 0, \\ \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \\ \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \\ \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \text{奇数个 } \gamma \text{ 矩阵乘积的迹为零.} \end{cases}$$

(7.2.17)

c) 迹中任何矩阵(包括 γ 矩阵)循环置换时其值不变：

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA). \qquad (7.2.18)$$

d) 反转迹中 γ 矩阵的次序其值不变：

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\sigma\gamma^\beta) = \mathrm{Tr}(\gamma^\beta\gamma^\sigma\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu). \qquad (7.2.19)$$

$$e)\quad \mathrm{Tr}(\hat{a}_1\cdots\hat{a}_{2n}) = a_1a_2\mathrm{Tr}(\hat{a}_3\cdots\hat{a}_{2n}) - a_1a_3\mathrm{Tr}(\hat{a}_2\hat{a}_4\cdots\hat{a}_{2n}) + \cdots - a_1a_{2n-1}\mathrm{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_{2n-2}\hat{a}_n) + a_1a_{2n}\mathrm{Tr}(\hat{a}_2\cdots\hat{a}_{2n-1}),$$

(7.2.20)

其中已引进了记号 $\hat{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu$.

(2) 光子极化求和

对于有光子参与的过程,其不变振幅的一般形式可表为

$$T_{fi} = L_\mu\varepsilon^\mu_{(\lambda)} = L\cdot\varepsilon_{(\lambda)}. \tag{7.2.21}$$

由于光子只有横极化,故光子极化求和为

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L\cdot\varepsilon_{(\lambda)}|^2. \tag{7.2.22}$$

计算它的简单方法是利用不变振幅的规范不变性,即(7.2.21)式在动量空间的规范变换

$$\varepsilon^\mu_{(\lambda)} \to \varepsilon'^\mu_{(\lambda)} = \varepsilon^\mu_{(\lambda)} + k^\mu$$

下保持不变.这等价于

$$L_\mu k^\mu = 0. \tag{7.2.23}$$

这个重要性质的证明留给读者作为练习.现在利用式(7.2.22)来证明

$$|L\cdot\varepsilon_{(3)}|^2 - |L\cdot\varepsilon_{(0)}|^2 = 0. \tag{7.2.24}$$

为此,我们引进类时四矢量 η^μ,定义为

$$\eta = (\eta^\mu) = (1,0,0,0), \tag{7.2.25}$$

则由光子极化矢量的定义式(3.5.26),可重新表示 $\varepsilon^\mu_{(0)}$ 和 $\varepsilon^\mu_{(3)}$ 为:

$$\varepsilon^\mu_{(0)} = \eta^\mu, \quad \varepsilon^\mu_{(3)} = \frac{k^\mu - \eta^\mu(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}. \tag{7.2.26}$$

利用它和式(7.2.23),有

$$\begin{aligned}&|L\cdot\varepsilon_{(3)}|^2 - |L\cdot\varepsilon_{(0)}|^2\\ &=\left[L^*\cdot\frac{k-\eta(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}\right]\left[L\cdot\frac{k-\eta(k\cdot\eta)}{k\cdot\eta}\right] - (L^*\cdot\eta)(L\cdot\eta)\\ &=(L^*\cdot\eta)(L\cdot\eta) - (L^*\cdot\eta)(L\cdot\eta) = 0,\end{aligned}$$

这即是(7.2.24)式.

利用式(7.2.23),可写式(7.2.22)为

$$\sum_{\lambda=1}^{2}|L\cdot\varepsilon_{(\lambda)}|^2=\sum_{\lambda=1}^{3}|L\cdot\varepsilon_{(\lambda)}|^2-|L\cdot\varepsilon_{(0)}|^2$$

$$=L_\mu^*L_\nu\Big(\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon_{(\lambda)}^\mu\varepsilon_{(\lambda)}^\nu-\varepsilon_{(0)}^\mu\varepsilon_{(0)}^\nu\Big)$$

$$=-g^{\mu\nu}L_\mu^*L_\nu=-L_\mu^*L^\mu, \qquad (7.2.27)$$

其中我们利用了关系式

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon_{(\lambda)}^\mu\varepsilon_{(\lambda)}^\nu-\varepsilon_{(0)}^\mu\varepsilon_{(0)}^\nu=-g^{\mu\nu}, \qquad (7.2.28)$$

这可从 $\varepsilon_{(\lambda)}^\mu$ 的定义式(3.5.26)直接得到验证.

7.3 康普顿散射

作为例子,我们来计算在微扰论第二阶下的光子电子弹性散射截面.这个过程的费曼图示于图7.3.1中.

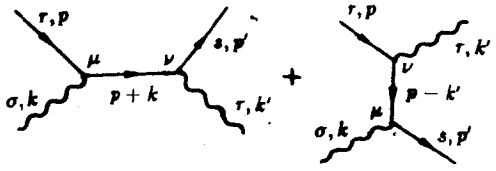


图 7.3.1 康普顿散射费曼图

从这个费曼图,我们按7.1节末尾所给出的修改的动量空间费曼规则可直接写出过程的不变振幅为

$$T_{fi}=-ie^2\bar{u}_s(p')O_{\mu\nu}u_r(p)\varepsilon_{(\sigma)}^\mu(k)\varepsilon_{(\tau)}^\nu(k'), \qquad (7.3.1)$$

其中已记

$$O_{\mu\nu}=\gamma_\nu\frac{(\hat{p}+\hat{k})+m}{(p+k)^2-m^2}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{(\hat{p}-\hat{k}')+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma_\nu \qquad (7.3.2)$$

利用公式(7.2.8～9)可得到过程的非极化截面为(采用电子静止系,故$|v|=c=1$):

$$\sigma=\frac{m^2}{(2\pi)^2\omega_k E_p}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{2\omega_{k'}}\frac{\mathrm{d}^3p'}{2E_{p'}}\delta^4(p+k-p'-k')\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2.$$

(7.3.3)

首先计算 $\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2$. 利用式(7.2.27)和(7.2.15),记住光子和电子的极化态数都是2,有

$$\begin{aligned}\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2&=\frac{e^4}{4}\sum_{r,s}\sum_{\lambda,\sigma}|\bar{u}_s(p')O_{\mu\nu}u_r(p)\varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}\varepsilon^{\nu}_{(\sigma)}|^2\\&=\frac{e^4}{4}\sum_{r,s}\left(\bar{u}_s(p')O_{\mu\nu}u_r(p)\right)^*\left(\bar{u}_s(p')O^{\mu\nu}u_r(p)\right)\\&=\frac{e^4}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\not p+m}{2m}\bar{O}_{\mu\nu}\frac{\not p'+m}{2m'}O^{\mu\nu}\right).\end{aligned}\tag{7.3.4}$$

其中

$$\bar{O}_{\mu\nu}=\gamma^0O_{\mu\nu}^{\dagger}\gamma^0=O_{\mu\nu},\tag{7.3.5}$$

上面第二个等式利用了关系式(3.4.22). 把(7.3.5)和(7.3.2)代入(7.3.4),并注意,由于质壳条件

$$p^2=p'^2=m^2,\quad k^2=k'^2=0,\tag{7.3.6}$$

可写

$$(p+k)^2-m^2=2p\cdot k,$$
$$(p-k')^2-m^2=-2p\cdot k',$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2\\&=\frac{e^4}{64m^2}\mathrm{Tr}\left\{(\not p+m)\left[\gamma_\nu\frac{(\not p+\not k)+m}{p\cdot k}\gamma_\mu-\gamma_\mu\frac{(\not p-\not k')+m}{p\cdot k'}\gamma_\nu\right]\right.\\&\left.\cdot(\not p'+m)\left[\gamma^\nu\frac{(\not p+\not k)+m}{p\cdot k}\gamma^\mu-\gamma^\mu\frac{(\not p-\not k')+m}{p\cdot k'}\gamma^\nu\right]\right\}.\end{aligned}$$

这个式子在逐项乘开以后,每项都是 γ 矩阵乘积的迹,我们把奇数个 γ 矩阵乘积的项丢掉,再利用式(7.2.16)减少 γ 矩阵的个数,得到只包含二个和四个 γ 矩阵乘积的项,就可以利用公式(7.2.17)求出 γ 矩阵的迹,再随时注意利用质壳条件(7.3.6),最后可得到

$$\overline{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{2m^2}\left[\left(\frac{m^2}{p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot k'}\right)^2-2\left(\frac{m^2}{p\cdot k}-\frac{m^2}{p\cdot k'}\right)+\frac{p\cdot k}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k'}{p\cdot k}\right]. \tag{7.3.7}$$

再注意在电子静止系中，$\boldsymbol{p}=0$，$E_p=p^0=m$．因而有

$$p\cdot k=m\omega_k\equiv m\omega,\quad p\cdot k'=m\omega_{k'}\equiv m\omega'.$$

把它们代入(7.3.7)式，得到

$$\overline{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{2m^2}\left[\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)^2+2\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)+\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\right]. \tag{7.3.8}$$

现在可以计算(7.3.3)式中的相空间积分了．其中，例如 d^3p'，可借助于 $\delta^3(p+k-p'-k')$ 积出，故只需考虑对 d^3k' 的积分．

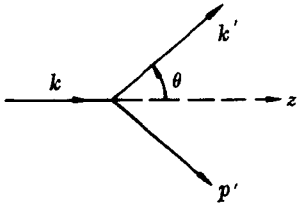


图 7.3.2

在电子静止系中，如图7.3.2所示，选入射光子的动量方向 $\boldsymbol{k}$ 为 z 轴，散射光子动量方向 $\boldsymbol{k}'$ 与 z 轴的夹角设为 θ．则有

$$\mathrm{d}^3k'=|\boldsymbol{k}'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{d}\varphi=\omega'^2\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\Omega=\omega'^2\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}E_f}\mathrm{d}E_f\mathrm{d}\Omega, \tag{7.3.9}$$

其中，$\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元，E_f 是末态粒子的总能量，即

$$E_f=p'_0+\omega'; \tag{7.3.10}$$

$$p'_0=(|\boldsymbol{p}'|^2+m^2)^{1/2}=(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2+m^2)^{1/2}$$
$$=(\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta+m^2)^{1/2}. \tag{7.3.11}$$

又由能量守恒，

$$E_f=p_0+k_0=m+\omega. \tag{7.3.12}$$

上面三式给出

$$\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta + m^2 = (m + \omega - \omega')^2.$$

由它解出 ω'，得到

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)}, \tag{7.3.13}$$

这通常称为康普顿条件.

把(7.3.11)式代入(7.3.10)式后对 E_f 求微商可得

$$1 = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}E_f} + \frac{1}{p'_0}(\omega' - \omega\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}E_f}.$$

从上式解出 $\frac{d\omega'}{\mathrm{d}E_f}$，并利用式(7.3.12)，有

$$\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}E_f} = \frac{p'_0}{p'_0 + \omega' - \omega\cos\theta} = \frac{p'_0}{m + \omega(1 - \cos\theta)}.$$

再对它利用康普顿条件(7.3.13)得到

$$\frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}E_f} = \frac{p'_0\omega'}{m\omega}. \tag{7.3.14}$$

把它代入(7.3.9)式，得到

$$\mathrm{d}^3k' = \frac{\omega'^3 E_{p'}}{m\omega}\mathrm{d}E_f\mathrm{d}\Omega. \tag{7.3.15}$$

康普顿条件(7.3.13)也可改写为

$$\frac{m}{\omega} - \frac{m}{\omega'} = \cos\theta - 1. \tag{7.3.16}$$

把它代入式(7.3.8)，可得

$$\overline{\sum}\,|T_{fi}|^2 = \frac{e^4}{2m^2}\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right). \tag{7.3.17}$$

把式(7.3.15)和(7.3.17)代入式(7.3.3)，利用四动量 δ-函数完成对 $\mathrm{d}^3p'\,\mathrm{d}E_f$ 的积分后得到

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{2m^2}\int\mathrm{d}\Omega\,\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right), \tag{7.3.18}$$

其中已利用了精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

上式对 Ω 求导，我们得到微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right), \tag{7.3.19}$$

其中 ω 和 ω' 之间由康普顿条件(7.3.13)相联系. 这通常称为 Klein-Nishina 公式.

由康普顿条件(7.3.13),当 $\omega\to 0$时,有 $\omega'\to\omega$,这时,从公式(7.3.18)可得到

$$\sigma(\omega\to 0)=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int d\Omega(2-\sin^2\theta)=\frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \tag{7.3.20}$$

这就是著名的经典电磁辐射的 Thomson 公式.

7.4 Ward-Takahashi 恒等式

在这一节里我们将利用 QED 的规范不变性来推导 Ward-Takahashi 恒等式. 它是正规顶角和传播子之间的精确关系,对微扰论各阶都是成立的. 它在 QED 的可重整性证明中起了关键作用.

按照式(6.1.2),在洛仑兹规范下,QED 的生成泛函可表示为

$$W[J_\mu,\eta,\bar\eta]=N\int\mathcal{D}A^\mu\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int dx(\mathscr{L}_{\text{eff}}+J_\mu A^\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta)\right], \tag{7.4.1}$$

其中有效拉氏量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 为

$$\begin{cases}\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_{\text{G}}+\mathscr{L}_{\text{I}}+\mathscr{L}_{\text{FG}},\\ \mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_{\text{I}}=i\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu+ieA_\mu)\psi-m\bar\psi\psi,\\ \mathscr{L}_{\text{G}}=-\dfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\\ \mathscr{L}_{\text{FG}}=-\dfrac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2.\end{cases} \tag{7.4.2}$$

在无限小定域范变换($\theta(x)\ll 1$)下

$$\begin{cases}A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\theta,\\ \bar\psi\to\bar\psi'=\bar\psi+ie\theta\bar\psi,\quad \psi\to\psi'=\psi-ie\theta\psi.\end{cases} \tag{7.4.3}$$

一方面，由于 $\mathscr{L}_G$ 和 $\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_I$ 是定域规范变换不变的，只有 $\mathscr{L}_{FG}$ 和外源项对 W 的被积函数贡献出下列因子

$$\exp\left\{i\int \mathrm{d}x\left[\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\Box\theta+J^\mu\partial_\mu\theta-ie\theta(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right]\right\}$$

$$=1+i\int \mathrm{d}x\left[\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\Box-\partial^\mu J_\mu-ie(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right]\theta$$

$$\equiv 1+F_\theta[A_\mu,\psi,\bar{\psi}], \tag{7.4.4}$$

其中已略去了四维全散度项. 另一方面，由于理论的物理结果不应依赖于规范，所以生成泛函 W 必须是规范不变的. 把上述二方面结合起来就得到

$$\delta W=N\int \mathscr{D}A^\mu\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi F_\theta[A_\mu,\psi,\bar{\psi}]\exp\left[i\int \mathrm{d}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right]$$

$$=N\int \mathscr{D}A^\mu\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi F_\theta\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\right]$$

$$\cdot\exp\left[i\int \mathrm{d}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)\right]$$

$$=F_\theta\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\right]W[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]=0. \tag{7.4.5}$$

把 F_θ 的表达式代入上式，并注意 $\theta(x)$ 是任意函数，我们得到泛函微分方程

$$\left[-\frac{i}{\alpha}\Box\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu}-\partial^\mu J_\mu-e\left(\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}-\eta\frac{\delta}{\delta\eta}\right)\right]W[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]=0, \tag{7.4.6}$$

或由 $W=e^{iZ}$ 得到关于连通格林函数生成泛函 $Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]$ 的泛函微分方程：

$$\frac{1}{\alpha}\Box\partial^\mu\frac{\delta Z}{\delta J^\mu}-\partial^\mu J_\mu-ie\left(\bar{\eta}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}}-\eta\frac{\delta Z}{\delta\eta}\right)=0. \tag{7.4.7}$$

现在，再把它改写为关于正规顶角生成泛函的微分方程. 对于QED，正规顶角生成泛函定义为(参见(6.3.6)式)：

$$\Gamma[A_\mu,\psi,\bar{\psi}]=Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]-\int \mathrm{d}x(J_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta). \tag{7.4.8}$$

由此可得

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu} = -J^\mu, & \dfrac{\delta Z}{\delta J^\mu} = A_\mu, \\ \dfrac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} = \bar{\eta}(x), & \dfrac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)} = \psi(x), \\ \dfrac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} = -\eta(x), & \dfrac{\delta\Gamma}{\delta\eta(x)} = -\bar{\psi}(x). \end{cases} \tag{7.4.9}$$

利用它们，方程(7.4.7)变为

$$\frac{1}{\alpha}\Box\partial^\mu A_\mu(x) + \partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu} + ie\frac{\partial\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi + ie\bar{\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)} = 0. \tag{7.4.10}$$

把微分算符 $\dfrac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}$ 作用于上式，然后令 $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$，得到

$$\begin{aligned} \partial^\mu_x\frac{i\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)\delta A^\mu(x)} &= -e\delta^4(x - x_2)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)} \\ &\quad + e\delta^4(x - x_1)\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}. \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

请注意在上面的运算中，由于 ψ、$\bar{\psi}$、$\dfrac{\delta}{\delta\psi}$、$\dfrac{\delta}{\delta\bar{\psi}}$ 的反对易性质，交换次序时要出现负号. 式(7.4.11)的左边是电子光子三点顶角函数的导数，而右边是两个逆完全狄拉克传播子. 为了使它的含义更清楚，我们将转到动量空间.

由平移不变性可定义动量空间的电磁顶角函数 $\Gamma_\mu(p,q,p')$ 为

$$\begin{aligned} &\int dx dx_1 dx_2 e^{i(p'x_1 - px_2 - qx)}\frac{i\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)\delta A^\mu(x)} \\ &= -ie(2\pi)^4\delta^4(p' - p - q)\Gamma_\mu(p,q,p') \end{aligned} \tag{7.4.12}$$

和动量空间的逆完全狄拉克传播子 $\dfrac{1}{i}S'_F{}^{-1}(p)$ 为(可以参见公式(6.3.16))：

$$\int dx_1 dx_2 e^{i(p'x_1 - px_2)}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}$$

$$=(2\pi)^4\delta^4(p'-p)S'^{-1}_F(p). \qquad (7.4.13)$$

把(7.4.11)式乘以 $e^{i(p'x_1-px_2-qx)}$，并对 x、x_1 和 x_2 积分，利用定义式(7.4.12)和(7.4.13)，得到

$$q^\mu\Gamma_\mu(p,q,p+q)=S'^{-1}_F(p+q)-S'^{-1}_F(p). \qquad (7.4.14)$$

这就是 Ward-Takahashi 恒等式. 它被用图表示在图7.4.1中.

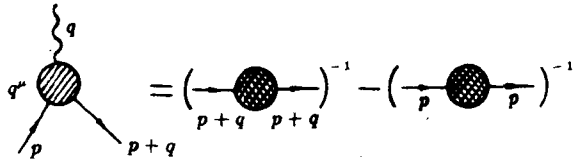


图 7.4.1 W-T 恒等式的图表示

对式(7.4.14)取 $q^\mu\to 0$ 的极限，就得到 Ward 恒等式：

$$\frac{\partial S'^{-1}_F}{\partial p^\mu}=\Gamma_\mu(p,0,p). \qquad (7.4.15)$$

由于推导过程中并没有利用微扰近似，式(7.4.14)和(7.4.15)是对微扰论各阶都成立的.

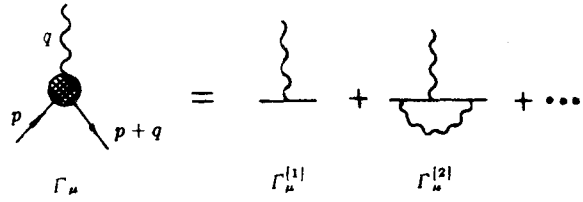


图 7.4.2

电磁顶角函数 $\Gamma_\mu(p,q,p+q)$ 的微扰展开可以用图形表示在图7.4.2中. 其最低级近似 $\Gamma^{[1]}_\mu$ 是一树图. 把 Γ_μ 的定义式(7.4.12)的树图近似与基本电磁顶点的表达式 $-ie\gamma_\mu$ 对比，我们发现

$$\Gamma^{[1]}_\mu(p,q,p+q)=\gamma_\mu. \qquad (7.4.16)$$

因此，我们可写

$$\Gamma_\mu(p,q,p+q)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p,q,p+q), \qquad (7.4.17)$$

其中

$$\Lambda_\mu = \Gamma_\mu^{[2]} + \cdots \equiv \Lambda_\mu^{[2]} + \cdots. \tag{7.4.18}$$

类似于(6.3.2～4)式，我们可引进完全狄拉克传播子的正规自能部分 $\Sigma(p)$，有

$$iS'_F = iS_F + iS_F \frac{\Sigma}{i} iS_F + iS_F \frac{\Sigma}{i} iS_F \frac{\Sigma}{i} iS_F + \cdots$$

$$= iS_F\left(1 + \frac{\Sigma}{i} iS'_F\right), \tag{7.4.19}$$

或

$$S'^{-1}_F = S_F^{-1} - \Sigma, \tag{7.4.20}$$

其中 iS_F 为自由狄拉克传播子.

利用关系式(7.4.17)和(7.4.20)，由 Ward 恒等式(7.4.15)，得到

$$\frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p^\mu} = \gamma_\mu \tag{7.4.21}$$

和

$$\Lambda_\mu(p,0,p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \tag{7.4.22}$$

7.5 发散困难与重整化概述

在微扰论的高阶计算中，会遇到对内部动量积分所引起的发散. 例如考虑电子传播子的单圈阶(见图7.5.1)，去掉两端传播子

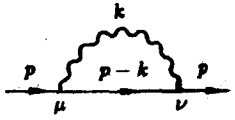


图 7.5.1

后剩余的部分称为二阶电子自能，记为 $-i\Sigma^{(2)}(p)$. 利用 QED 的费曼规则容易写出(取费曼规范)：

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\not p - \not k - m}(-ie\gamma_\mu)\frac{-i}{k^2}g^{\mu\nu}. \tag{7.5.1}$$

很清楚，当 $k\to\infty$ 时，上式中分母的行为正比于 k^3，而分子（积分测度）的行为正比于 k^4，因而积分是发散的，通常称它为紫外发散. 顺便指出，存在有另一类发散，它发生在当 $k\to 0$ 时费曼积分是发散的，这通常称为红外发散. 比起紫外发散来，红外发散问题并不严重，因为它们并不对可观察量产生实际的影响（至少对 QED 是如此）. 下面的讨论中我们将不涉及红外发散. 紫外发散反映了定域场论基本理论结构的不完整性. 重整化是消除这种发散以获得有意义的物理结果的一种方法. 并非所有的理论都是可重整的. 只有那些仅包含有限多个原始发散图形而且其发散性质又不依赖于微扰论阶次的理论才是可重整的.

（一）表观发散度

为了识别一个格林函数（或费曼图）是否发散，我们引进表观发散度 D. 对于任一包含内线的费曼图，按照费曼规则总可把它表示为对独立动量积分的形式，通常称为费曼积分，这个积分在大动量区的表观发散程度显然由分子（包括积分测度）和分母的动量幂次之差 D 确定，如果 $D\geqslant 0$，积分是表面发散的，特别，$D=0$ 为对数发散，$D=1$ 为线性发散，$D=2$ 为二次发散. 当 $D<0$ 时并不能一般地断言积分一定收敛，因为相应的费曼图中可能包含有发散的子图. 只有当一个费曼图的 D 及其所包含的所有可能子图的 D 都小于零时才能最终断言该费曼图是收敛的. 这就是所谓的 Weinberg 定理. 此外，在理论具有某些对称性的情形下，例如 QED 的规范不变性、电荷共轭（正反粒子）对称性等，一些看来是表面发散（$D\geqslant 0$）的图形也可能是收敛的. 这些也正是我们把 D 称为表观发散度的原因.

考虑一个有 n 个顶点的 QED 的 1PI 图，设 $F(B)$ 是它的电（光）子线总数；$F_e(B_e)$ 是外电（光）子线数，$F_i(B_i)$ 是内电（光）子线数. 我们来求它的表观发散度 D. 首先确定其独立动量（积分变量）数. 进行积分的动量数等于内线数，即 F_i+B_i，但它们并非全

是独立的，在顶点处受到四动量守恒的约束. 除去整个过程的四动量守恒(那是对所有外线的约束)，内线动量共受到 $n-1$ 个约束. 因此，独立动量数为 $\left(F_i+B_i-(n-1)\right)$，这贡献于分子的动量幂次为4 (F_i+B_i-n+1). 此外，电子内线贡献于分母的动量幂次为1，光子内线贡献于分母的动量幂次为2，它们共贡献于分母的动量幂次为 F_i+2B_i，故

$$D=4(F_i+B_i-n+1)-F_i-2B_i. \tag{7.5.2}$$

由于 QED 的每个顶点含有二条电子线，而每条内线连接二个顶点，每条外线连接一个顶点，故有关于电子线的等式

$$F_i+F_e=2n-F_i. \tag{7.5.3}$$

类似地考虑光子线有

$$B_i+B_e=n-B_i. \tag{7.5.4}$$

由(7.5.2～4)可得

$$D=4-\frac{3}{2}F_e-B_e. \tag{7.5.5}$$

从上式可以看出：(1)D 与 n 无关，表示发散性质与微扰阶次无关；(2)D 只依赖于图形的外线 F_e 和 B_e，且随着它们的增加，D 将减小. 这表明只能有有限多个使 $D\geqslant 0$ 的最简单的表观发散图形(见图7.5.2). 注意由于电子线不能中断，F_e 总是偶数.

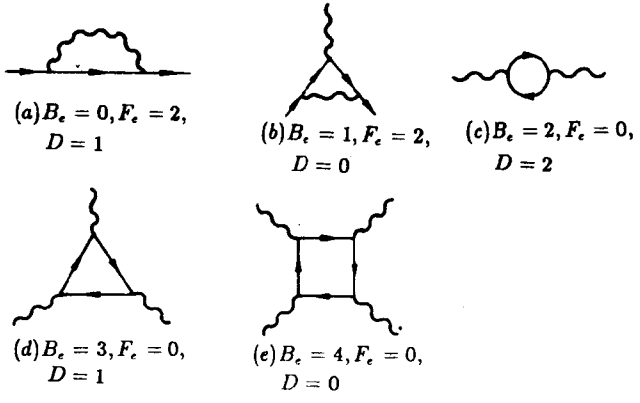


图 7.5.2 QED 最简单的表面发散图

正如前面所指出的，由于电荷共轭不变性，图7.5.2(d)可与

电子线反向的类似图抵消(Furry 定理)而可略去;图7.5.2(e)由于规范不变性实际上是收敛的.故 QED 的基本发散图形(称为原始发散图)只有图7.5.2中的(a)、(b)、(c)三个.由(1)和(2)知 QED 是可重整的.

(二) 重整化步骤:正规化,抵消项和重整化方案

可重整理论的发散能够消除,为此需设计特定的步骤,叫做重整化.由于发散积分是不便处理的,因此重整化的第一步是暂时修正理论使发散积分成为有限且使得对收敛图的影响可以忽略,这通常称为正规化.

有多种正规化方法,例如简单而直观的大动量截断法(对充分大的 Λ,使积分变量 $k\leqslant\Lambda$);在对 k 的费曼积分中插入一个(或多个)因子 $\frac{-\Lambda^2}{k^2-\Lambda^2+i\varepsilon}$ 的方法(类似于此的有 Pauli-Villars 正规化和高阶协变导数正规化)以及通过降低积分维数使积分收敛的维数正规化方法.然而前几种方法由于破坏规范不变性而不适用于非阿贝尔规范理论,而维数正规化方法则始终保持规范不变性.因此,我们将采用维数正规化方法.

维数正规化所根据的基本事实是,如果积分在四维时空是发散的,则它在较低的时空维数 $d(<4)$下是收敛的.例如,对 d 维时空 QED,(7.5.2)式变为

$$D=d(F_i+B_i-n+1)-F_i-2B_i, \qquad (7.5.6)$$

它与式(7.5.3～4)一起给出

$$D=\frac{d}{2}(n+2-F_e-B_e)-2n+B_e-\frac{F_e}{2}. \qquad (7.5.7)$$

注意到对于发散图,总有 $n\geqslant 2$, $f_e+B_e\leqslant 4$,故上式括号中的数是非负的,所以 D 随 d 的减少而减少,因而总存在适当小的 d 使 $D<0$.这样,维数正规化方法的基本做法是把发散积分延拓到时空 d 维,使积分是收敛的.计算完后,再取极限 $d\to 4$.结果,发散图

的奇异性表现为$\frac{1}{4-d}$型的极点.

一般,经过正规化处理后的费曼积分,其结果是一些发散部分(表现为无穷极限或极点)和有限部分之和.因此,重整化的第二步是再设法使发散部分消去,以得到有限的贡献.这被称为重整化(方案).这里,实际上有两个问题需要解决.其一是如何消去发散部分;其二是如何划分发散部分和有限部分.

对第一个问题的回答导致两种重整化方法(或观点).早先流行的一种方法认为理论的原始拉氏量中的参量,如质量、耦合常数和场量等都是裸量,是非物理的.通过对它重新定义,吸收相应的发散部分从而成为有限的物理的量(重整化量).现在流行的另一种方法认为原来拉氏量$\mathscr{L}$中的量是物理的,在最低阶近似下它得到正确的物理结果,但在高阶近似下,需要在各相应项中引进适当的抵消项$\delta\mathscr{L}$以消除发散.$\mathscr{L}+\delta\mathscr{L}$则是裸拉氏量(其参量都是裸量,相应于前一种方法中的原始拉氏量).从方法论的观点看来,前者的处理比较复杂,而后者则较为方便.因此,我们将采用后者,通常称为抵消项方法.

对第二个问题的回答导致各种重整化方案.所有的重整化方案都是通过固定抵消项来划分发散部分和有限部分的.最简单也最适用于规范理论的重整化方案是从维数正规化中自然产生的所谓最小减除(MS)方案.在这种方案里,抵消项的各有关参量刚好是相应的极点项.在维数正规化中,由于观察到与极点项同时出现的一定还有$\ln 4\pi-\gamma_E$(γ_E为欧拉常数),因而也把它们一起归入抵消项需减除的发散部分,这种重整化方案通常称为修正的最小减除($\overline{\text{MS}}$)方案.上述两种方案的出色之处还在于它们是质量无关的,这在以后解重整化群方程时是特别有用的.我们要提到的另外二个重整化方案是动量重整化方案和质壳重整化方案.在这二种方案中,抵消项是由对传播子(或二点正规顶角$\Gamma^{(2)}$)和基本正规顶角(例如对φ^4理论是四点正规顶角$\Gamma^{(4)}$)的附加边界条件(称为

重整化边界条件)确定的.例如,对 φ^4 理论,在动量重整化方案中,边界条件被要求为,对于动量的某个类空值 $p^2=-\mu^2$ (通常称为重整化点),$\Gamma^{(2)}$ 满足

$$\Gamma^{(2)}(p,-p)=-m^2-\mu^2, \tag{7.5.8a}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p,-p)=1; \tag{7.5.8b}$$

和在对称点

$$p_i\cdot p_j=\mu^2\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\delta_{ij}\right)\quad(i,j=1,2,3,4), \tag{7.5.9}$$

$$(p_1+p_2)^2=(p_1+p_3)^2=(p_1+p_4)^2=-\frac{4}{3}\mu^2, \tag{7.5.10}$$

$\Gamma^{(4)}$ 满足

$$\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4)=-\lambda. \tag{7.5.11}$$

而在质壳重整化方案中,重整化点选在质壳上,即 $p^2=m^2$.这时对 $\Gamma^{(2)}$ 的重整化边界条件为

$$\begin{cases}\Gamma^{(2)}(p,-p)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p,-p)=1.\end{cases} \tag{7.5.12}$$

与条件(7.5.8)比较即知质壳重整化方案只是动量重整化方案在 $\mu^2=-m^2$ 时的特殊情况.

值得指出的是,在前三种重整化方案中,"重整化质量"、"重整化耦合常数"仅只是表征格林函数的参数.只有在质壳重整化方案中它们才是实际观察到的质量和耦合常数.因而质壳重整化方案也称为物理重整化方案.

最后,必须强调,不论选择何种重整化方案来确定重整化参数,格林函数都有唯一的值.这意味着由于所采用的重整化方案不同,由它们所确定的相应重整化参数差一有限量.

7.6 原始发散图的维数正规化计算

在上一节中我们讨论了维数正规化的基本思想和做法.这一

节我们要利用它来计算 QED 的原始发散图. 在具体计算之前，需要把 QED 的有效拉氏量密度

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \qquad (7.6.1)$$

以及 γ-代数延拓到 d 维，并给出一些计算中有用的公式.

由于作用量 $S = \int \mathrm{d}^d x \mathscr{L}_{\text{eff}}$ 是无量纲的，因此 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的质量(动量)量纲是

$$[\mathscr{L}_{\text{eff}}] = d. \qquad (7.6.2)$$

由此，从狄拉克场和光子场的自由拉氏量密度可确定场 ψ 和 A_μ 的质量量纲分别为

$$[\psi] = \frac{d-1}{2}, \quad [A_\mu] = \frac{d}{2} - 1. \qquad (7.6.3)$$

利用它们，从 $\mathscr{L}$ (7.6.1)中的相互作用项可推得耦合常数 e 应取质量量纲为

$$[e] = d - (d-1) - \left(\frac{d}{2} - 1\right) = 2 - \frac{d}{2} \equiv \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7.6.4)$$

但由于耦合常数反映了理论本身的特性，我们自然要求它在时空维数改变时保持原量纲不变(即仍为0). 因此，需要在相互作用项中引进一个量纲因子 $\mu^{\varepsilon/2}$，其中 μ 为任意质量(通常也称为重整化标度). 这样，d 维时空的 QED 有效拉氏量密度为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\mu^{\varepsilon/2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2. \qquad (7.6.5)$$

由此引起的费曼规则的改变是顶角因子

$$-ie\gamma^\mu \longrightarrow -ie\mu^{\varepsilon/2}\gamma^\mu, \qquad (7.6.6)$$

动量积分

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}, \qquad (7.6.7)$$

其它都和四维时空中一样.

把 γ-代数延拓到 d 维，我们有 d 个 γ 矩阵 $\gamma^0,\gamma^1,\cdots,\gamma^{d-1}$，它们满足

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu},\quad g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=\delta^\mu_\mu=d. \tag{7.6.8}$$

因而

$$\begin{cases}\gamma^\mu\gamma_\mu=d,\\ \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu=(2-d)\gamma_\alpha,\\ \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu=4g_{\alpha\beta}-(4-d)\gamma_\alpha\gamma_\beta,\\ \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma_\mu=-2\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\alpha+(4-d)\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta,\end{cases} \tag{7.6.9}$$

$$\begin{cases}\mathrm{Tr}I=f(d),\quad \mathrm{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu=f(d)g^{\mu\nu},\\ \mathrm{Tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma=f(d)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}),\\ \mathrm{Tr}\gamma^\mu\cdots\gamma^\nu=0\quad(\text{奇数个}\gamma\text{矩阵}),\end{cases} \tag{7.6.10}$$

其中 $f(d)$ 是 d 的某一确定的函数，它满足 $f(4)=4$，其具体形式是无关紧要的. 对 γ_5 的延拓需特别小心，常规的延拓 $\gamma_5=i\gamma^0\cdots\gamma^{d-1}$ 是与规范不变性不相容的. 在 d 维时空 γ_5 的一个安全定义是

$$\gamma_5=\frac{i}{4!}\varepsilon^d_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \tag{7.6.11}$$

其中符号 $\varepsilon^d_{\mu\nu\rho\sigma}$ 仅在 $d=4$ 时与普通的四阶完全反对称张量一致. 除了要求对任意 d 维 γ_5 满足

$$\begin{cases}\gamma_5^2=1,\quad \mathrm{Tr}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu=0,\\ \mathrm{Tr}\gamma_5\gamma^\mu\cdots\gamma^\nu=0\quad(\text{除}\gamma_5\text{外奇数个}\gamma\text{矩阵}),\end{cases} \tag{7.6.12}$$

外，不作任何进一步的规定. 特别要提醒的是在 $d\neq4$ 维空间，反对易关系 $\{\gamma^\mu,\gamma_5\}=0$ 不适用.

在计算原始发散图时，下列公式将是十分有用的.

1) 把分母的乘积化为和幂的费曼参数化公式：

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1\mathrm{d}x\,\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[Ax+B(1-x)]^{\alpha+\beta}}\quad(\alpha,\beta>0), \tag{7.6.13}$$

$$\frac{1}{ABC}=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\,\frac{1}{[A(1-x-y)+Bx+Cy]^3}.$$

(7.6.14)

2) d 维空间对称积分：

$$\int d^dk k^\mu k^\nu f(k^2)=\frac{g^{\mu\nu}}{d}\int d^dk k^2 f(k^2),\tag{7.6.15}$$

$$\int d^dk k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma f(k^2)=\frac{g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}}{d(d+2)}\int d^dk k^4 f(k^2),$$

(7.6.16)

$$\int d^dk k^{\mu_1}\cdots k^{\mu_{2n+1}}f(k^2)=0.\tag{7.6.17}$$

3) d 维空间积分公式：

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(k^2)^\alpha}{(k^2-R^2)^\beta}$$

$$=i\frac{(-1)^{\alpha-\beta}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(\alpha+d/2)\Gamma(\beta-\alpha-d/2)}{\Gamma(d/2)\,\Gamma(\beta)\,(R^2)^{\beta-\alpha-d/2}}.\tag{7.6.18}$$

4) 伽马函数展开公式：

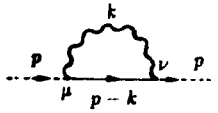
$$\Gamma(-n+\varepsilon)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon}-\gamma_E+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}+o(\varepsilon)\right].$$

(7.6.19)

有了上面的准备就可以计算 QED 的原始发散图了. 在计算中我们取费曼规范($\alpha=1$).

a) 二阶电子自能：

$$-i\Sigma^{(2)}(p)=$$



利用 d 维费曼规则(7.6.6～7)容易得到

$$\Sigma^{(2)}(p)=-ie^2\mu^\varepsilon\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\gamma_\nu\frac{1}{\not p-\not k-m}\gamma_\mu\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}$$

$$=-ie^2\mu^\varepsilon\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\nu(\not p-\not k+m)\gamma^\nu}{[(p-k)^2-m^2]k^2}$$

$$\overset{(7.6.9,13)}{=\!=\!=} -ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx \frac{(2-d)(\hat{p}-\hat{k})-md}{[(k-px)^2-m^2x+p^2x(1-x)]^2}$$

$$\overset{(k\to k-px)}{=\!=\!=} -ie^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\hat{p}-\hat{k}-px)+md}{[k^2-m^2x+p^2x(1-x)]^2}$$

$$\overset{(7.6.17,18)}{=\!=\!=} e^2\mu^\epsilon \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{(2-d)(1-x)\hat{p}+md}{[m^2x-p^2x(1-x)]^{2-d/2}}$$

$$\overset{(7.5.4)}{=\!=\!=} \frac{e^2}{16\pi^2}(4\pi\mu^2)^{\epsilon/2}\Gamma(\epsilon/2)$$

$$\cdot \int_0^1 dx \frac{4m-2(1-x)\hat{p}+\epsilon[(1-x)\hat{p}-m]}{[m^2x-p^2x(1-x)]^{\epsilon/2}}.$$

其中每一步所利用的公式已在等号上方标明. 利用公式(7.6.19)及

$$R^\epsilon = e^{\epsilon \ln R} = 1 + \epsilon \ln R + o(\epsilon^2), \qquad (7.6.20)$$

经整理积分后可得

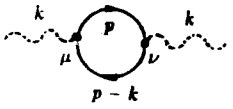
$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + \frac{3}{2} - \ln\frac{m^2}{\mu^2}\right)(4m-\hat{p}) + \hat{p}\left[\left(1-\frac{m^4}{p^4}\right)\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{m^2}{p^2} + 1\right] - 4m\left(1-\frac{m^2}{p^2}\right)\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right) + o(\epsilon)\right\}, \qquad (7.6.21)$$

其中计算积分时已利用了公式：

$$\int_0^1 dx\, x^\alpha \ln x = \frac{-1}{(\alpha+1)^2}, \qquad (7.6.22)$$

$$\int x^\alpha \ln(1+bx)\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\ln(1+bx) - b\int \frac{x^{\alpha+1}dx}{1+bx}\right]. \qquad (7.6.23)$$

b) 二阶光子自能(真空极化)：

$i\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(p) =$ 

利用 *d* 维费曼规则(7.6.6～7)可以得到

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k) = ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\nu(\hat{p}+m)\gamma_\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)]}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}$$

$$\overset{(7.6.10;13)}{=\!=\!=} ie^2\mu^\varepsilon f(d)\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}$$
$$\cdot\int_0^1 dx\,\frac{p_\mu(p-k)_\nu+p_\nu(p-k)_\mu-g_{\mu\nu}[p(p-k)-m^2]}{[(p-kx)^2-m^2+k^2x(1-x)]^2}$$
$$\overset{\substack{(7.6.17)\\ p\to p+kx}}{=\!=\!=} ie^2\mu^\varepsilon f(d)\int_0^1 dx$$
$$\cdot\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{2p_\mu p_\nu-2k_\mu k_\nu x(1-x)-g_{\mu\nu}[p^2-k^2x(1-x)-m^2]}{[p^2-m^2+k^2x(1-x)]^2}$$
$$\overset{(7.6.15)}{=\!=\!=} ie^2\mu^\varepsilon f(d)\int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\left\{-\frac{g_{\mu\nu}}{p^2-m^2+k^2x(1-x)}\right.$$
$$\left.+\frac{2g_{\mu\nu}\dfrac{p^2}{d}+2x(1-x)(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)}{[p^2-m^2+k^2x(1-x)]^2}\right\}$$
$$\overset{(7.6.18)}{=\!=\!=} e^2\mu^\varepsilon\frac{f(d)}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{d}g_{\mu\nu}\frac{\Gamma(1+d/2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2)[m^2-k^2x(1-x)]^{(1-d/2)}}\right.$$
$$-2x(1-x)\frac{(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\Gamma(2-d/2)}{[m^2-k^2x(1-x)]^{2-d/2}}$$
$$\left.-\frac{g_{\mu\nu}\Gamma(1-d/2)}{[m^2-k^2x(1-x)]^{1-d/2}}\right\},$$

利用伽马函数公式

$$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z),\qquad(7.6.24)$$

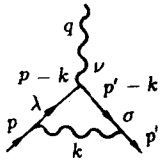
上式花括号中的第一项和第三项互相抵消，把 $d=4-\varepsilon$ 代入，利用(7.6.19)式并注意 $f(4)=4$，可以得到

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)=\frac{e^2}{12\pi^2}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\left\{\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln 4\pi-\ln\frac{m^2}{\mu^2}\right.$$
$$\left.-6\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right]+o(\varepsilon)\right\},\qquad(7.6.25)$$

其中定积分项在作代换 $x=y+1/2$ 后，即可利用公式(7.6.23)积出. 有兴趣的读者可自行完成.

c) 三阶电磁顶角：

$$-ie\Lambda^{(2)}_\nu(p,q,p')=$$



利用 d 维费曼规则可以得到

$$\Lambda_\nu^{(2)} = -ie^2\mu^\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{[\gamma_\sigma(\hat{p}'-\hat{k}+m)\gamma_\nu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma^\sigma]}{k^2[(p-k)^2-m^2][(p'-k)^2-m^2]}$$

$$\overset{(7.6.14)}{=\!=\!=} -2ie^2\mu^\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y [\gamma_\sigma(\hat{p}'-\hat{k}+m)\gamma_\nu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma^\sigma]$$

$$\cdot \frac{1}{[(k-px-p'y)^2-m^2(x+y)+p^2x(1-x)+p'^2y(1-y)-2pp'xy]^3}$$

$$\overset{\substack{(7.6.17)\\ k\to k-px+p'y}}{=\!=\!=} -2ie^2\mu^\varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2-R^2]^3}$$

$$\cdot [\gamma_\sigma(\hat{p}'(1-y)-\hat{p}x+m]\gamma_\nu(\hat{p}(1-x)-\hat{p}'y+m)\gamma^\sigma + \gamma_\sigma\hat{k}\gamma_\nu\hat{k}\gamma^\sigma]$$

$$\equiv \Lambda_\nu^{(2)f} + \Lambda_\nu^{(2)d}, \tag{7.6.26a}$$

其中，已记

$$R^2 = m^2(x+y) - p^2x(1-x) - p'^2y(1-y) + 2pp'xy, \tag{7.6.26b}$$

$$\Lambda_\nu^{(2)d} = -2ie^2\mu^\varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\sigma\hat{k}\gamma_\nu\hat{k}\gamma^\sigma}{(k^2-R^2)^3}$$

$$\overset{(7.5.15)}{=\!=\!=} -\frac{2i}{d}e^2\mu^\varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma k^2}{(k^2-R^2)^3}$$

$$\overset{(7.6.9)}{=\!=\!=} -i\gamma_\nu \frac{2(2-d)^2}{d}e^2\mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2-R^2)^3}$$

$$\overset{(7.5.18)}{=\!=\!=} \gamma_\nu \frac{2(2-d)^2}{d(4\pi)^{d/2}}e^2\mu^\varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{\Gamma(1+d/2)\Gamma(2-d/2)}{2\Gamma(d/2)(R^2)^{(2-d/2)}}$$

$$\overset{(7.6.4;24)}{=\!=\!=} \frac{e^2\gamma_\nu}{16\pi^2} \frac{(2-\varepsilon)^2}{2} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(R^2)^{\varepsilon/2}}$$

$$\overset{(7.5.19)}{=\!=\!=} \frac{e^2\gamma_\nu}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi\mu^2 - 1 - 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \ln R^2\right], \tag{7.6.26c}$$

而

$$\Lambda_\nu^{(2)f} = -2ie^2\mu^\varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2-R^2)^3}$$

$$\cdot [\gamma_\sigma(\hat{p}'(1-y)-\hat{p}x+m)\gamma_\nu(\hat{p}(1-x)-\hat{p}'y+m)\gamma^\sigma]$$

无极点项，在利用公式(7.6.9;18)后，可令 $\varepsilon\to 0$，整理化简后可得

$$\Lambda_\nu^{(2)f} = -\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{1}{R^2}\{x(1-x)\hat{p}\gamma_\nu\hat{p} + y(1-y)\hat{p}'\gamma_\nu\hat{p}'$$
$$-(1-x)(1-y)\hat{p}\gamma_\nu\hat{p}' - xy\hat{p}'\gamma_\nu\hat{p}$$
$$+2m[(1-2x)p_\nu + (1-2y)p'_\nu] - m^2\gamma_\nu\}. \tag{7.6.26d}$$

7.7 QED 的单圈重整化

上一节我们利用维数正规化方法计算了 QED 的原始发散图，分离了发散部分和有限部分，它们的发散表现在 $\varepsilon\to 0$ 时的极点项上. 这一节我们将利用抵消项方法和最小减除方案(MS)来进行重整化.

我们从 QED 的有效拉氏量密度

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$
$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{7.7.1}$$

出发，其中所有的场量和参量都是物理的(或重整化的)，在树图近似下它直接得到有限的物理结果. 在高阶微扰论中，引进抵消项：

$$\delta\mathscr{L} = \delta Z_2\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \delta m\bar{\psi}\psi - \delta e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$
$$-\delta Z_3\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2. \tag{7.7.2}$$

请注意，1)这些抵消项与(7.7.1)中相应的项有精确相同的形式；2)由于规范不变性(7.7.1)中的规范固定项不需要抵消项. 利用抵消项前的系数定义重整化常数：

$$\begin{cases} Z_1 = 1 + \dfrac{\delta e}{e}, \\ Z_2 = 1 + \delta Z_2, \\ Z_3 = 1 + \delta Z_3, \\ Z_m = 1 + \dfrac{\delta m}{m}, \end{cases} \tag{7.7.3}$$

再利用重整化常数定义裸量：

$$\begin{cases} \psi_B = Z_2^{1/2}\psi, \quad A_B^\mu = Z_3^{1/2}A^\mu, \\ m_B = Z_m Z_2^{-1} m, \quad e_B = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e, \\ \alpha_B^{-1} = Z_3^{-1}\alpha^{-1}. \end{cases} \tag{7.7.4}$$

注意，规范固定项虽然没有抵消项，但由于场的重整化，规范固定参数 α 仍有相应的裸量. 利用式(7.7.1～4)我们可写

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} + \delta\mathscr{L} = \mathscr{L}_B$$

$$= \bar{\psi}_B(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_B)\psi_B - e_B\bar{\psi}_B\gamma_\mu\psi_B A_B^\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_B^\nu - \partial_\nu A_B^\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_B^\mu)^2, \tag{7.7.5}$$

$\mathscr{L}_B$ 完全由裸量表出，称为裸拉氏量密度. 要求抵消项 $\delta\mathscr{L}$ 完全消去理论的发散部分，则 $\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_{\text{eff}} + \delta\mathscr{L}$ 即给出有限的结果.

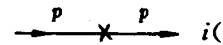
从 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 可以导出7.1节的费曼规则，现在 $\delta\mathscr{L}$ 将给出附加的顶点费曼规则. 为此重写

$$\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_{\text{eff}} + \delta\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1, \tag{7.7.6}$$

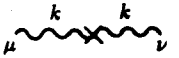
其中 $\mathscr{L}_0$ 由(7.1.2)式给出，而

$$\mathscr{L}_1 = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \delta\mathscr{L}. \tag{7.7.7}$$

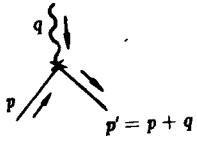
按照7.1节的分析，$\delta\mathscr{L}$ 将给出下列附加的费曼规则：

11. 二线费米子顶点： 

$i(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)$； (7.7.8)

12. 二线光子顶点： 

$-i\delta Z_3(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)$； (7.7.9)

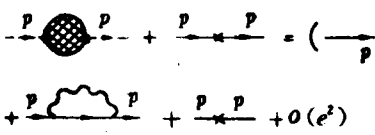
13. 三线顶点： 

$-i\gamma^\mu\delta e$ (7.7.10)

现在，我们可以表示重整化的1PI格林函数(正规顶角)为外动量、重整化参量(e,m,α)及抵消项参数$(\delta Z_2, \delta Z_3, \delta e)$的函数. 例

如二点电子正规顶角(电子自能)

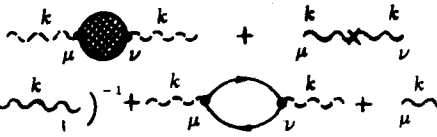
$$-i\Sigma^R(p)=$$



$$=-iS_F^{-1}(p)-i\Sigma^{(2)}(p)+i(\delta Z_2\not{p}-\delta m)+o(e^2) \tag{7.7.11}$$

二点光子正规顶角(真空极化)

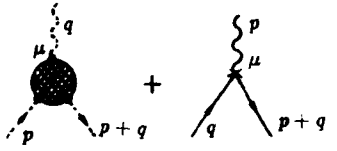
$$i\Pi^R_{\mu\nu}(k)=$$



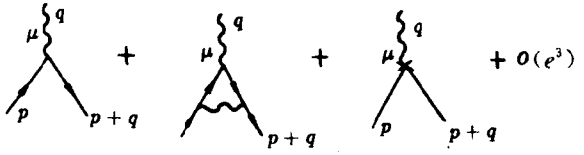
$$=-iD_{F\mu\nu}^{-1}(k)+i\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)-i\delta Z_3(g_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)+o(e^2) \tag{7.7.12}$$

三点电磁正规顶角

$$-ie\Lambda^R_\mu(p,q.\ p+q)=$$



$$=$$



$$=-ie\gamma_\mu-ie\Lambda^{(2)}_\mu-i\gamma_\mu\delta e+o(e^3) \tag{7.7.13}$$

值得指出的是,重整化是逐级进行的,即对微扰论的不同阶次,有不同的抵消项或重整化常数,写成微扰级数的形式为

$$\delta\mathscr{L}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta\mathscr{L}^{[n]} \tag{7.7.14}$$

或

$$Z_j=1+\sum_{n=1}^{\infty}Z_j^{[n]}\quad(j=1,2,3,m,\alpha), \tag{7.7.15}$$

其中微扰阶数 n 可理解为费曼图的圈数. 我们只要逐级定出各阶重整化常数 $Z_j^{[n]}$，即可消除任意高阶微扰论中的发散. 由于极点项加上任意有限项都是发散的，对给定的微扰阶次，实际减除的发散(或确定的重整化常数)依赖于所选择的重整化方案.

在 MS 方案下，我们来求 QED 单圈重整化常数. 由于 MS 方案所减除的发散恰好是极点项，分别对比式(7.6.21)和(7.7.11)，(7.6.25)和(7.7.12)以及(7.6.26)和(7.7.13)，我们有(取费曼规范)：

$$\begin{cases} \delta Z_2^{[1]}\not{p} - \delta m^{[1]} = \dfrac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}(4m - \not{p}), \\ \delta Z_3^{[1]}(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) = \dfrac{e^2}{6\pi^2\varepsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2), \\ \gamma^\mu \delta e^{[1]} = -\dfrac{e^3}{8\pi^2\varepsilon}\gamma^\mu, \end{cases} \tag{7.7.16}$$

由它们可得

$$\begin{cases} \delta Z_2^{[1]} = -\dfrac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}, \quad \dfrac{\delta m^{[1]}}{m} = -\dfrac{e^2}{2\pi^2\varepsilon}, \\ \delta Z_3^{[1]} = -\dfrac{e^2}{6\pi^2\varepsilon}, \quad \dfrac{\delta e^{[1]}}{e} = -\dfrac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}. \end{cases} \tag{7.7.17}$$

或利用式(7.7.3)得到单圈重整化常数：

$$\begin{cases} Z_1^{[1]} = 1 - \dfrac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}, \quad Z_2^{[1]} = 1 - \dfrac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}, \\ Z_3^{[1]} = 1 - \dfrac{e^2}{6\pi^2\varepsilon}, \quad Z_m^{[1]} = 1 - \dfrac{e^2}{2\pi^2\varepsilon}. \end{cases} \tag{7.7.18}$$

我们看到，这些重整化常数是与质量无关的. 这个结论对微扰各阶重整化常数都是正确的. 另外，我们也看到，$Z_1^{[1]} = Z_2^{[1]}$. 这个关系对微扰论各阶都是成立的，即一般地，有

$$Z_1 = Z_2, \tag{7.7.19}$$

这是 Ward 恒等式的推论(7.4.22)的直接结果.

把式(7.7.19)代入式(7.7.4)中关于电磁耦合常数的表达式，

得到

$$e = Z_3^{1/2} e_B. \tag{7.7.20}$$

这个结果是非常基本而重要的，它表示顶角函数与电子波函数的重整化效果互相抵消. 推广到其它带电粒子的电磁相互作用，它意味着电磁耦合是普适的，即对所有的带电粒子有相同的耦合强度.

第八章　量子色动力学(QCD)

强作用理论是粒子物理中最复杂的问题之一. 在 π 介子发现以后，人们就假设它是强作用的传递者，企图按照 QED 的模式来构造强作用理论. 但是不久就发现这种方法甚至不能使理论结果与实验定性一致. 因而另辟蹊径，不利用微扰方法，而以普遍的解析性、么正性原则为基础，研究色散关系等等. 以后，轻子与强子的深度非弹散射确定了在大动量传递时(或在小距离下)强子的行为如同相互间以微弱作用相联系的夸克和胶子组成的系统，在最低阶近似下，它们可以认为是自由的。这种现象称为渐近自由. 但是人们迄今还没有发现自由的夸克或胶子. 这样，我们有了如下的定性图象：强子具有复杂结构，组成强子的粒子之间的相互作用在小距离(≪强子尺度)时趋于零，在大距离(～强子尺度)时相互作用变强，束缚它们不从强子中逸出，这通常称为色禁闭. 根据这种图象，以夸克的色自由度为基础，人们构造了色群 $SU(3)_C$ 定域规范不变的理论，即量子色动力学(QCD)，传递夸克间强作用的规范粒子称为胶子. 色 $SU(3)_C$ 的对称性被认为是精确的，因此胶子的质量为零. 由于胶子也带色，故它们有自作用.

8.1　QCD 的微扰论和费曼规则

描述夸克与胶子间色相互作用的拉氏量密度由式(4.3.42)表出. 为了把它量子化，即表示成路径积分形式，按照5.5节的讨论，我们还需要引进规范固定项 $\mathscr{L}_{GF}$ 和法捷耶夫-波波夫鬼项 $\mathscr{L}_{FPG}$. 在洛仑兹规范下，它们是[参见(5.5.35;42)]

$$\mathscr{L}_{GF}=-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu B^a_\mu)^2, \tag{8.1.1}$$

$$\mathscr{L}_{FPG}=\bar{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b-gf^{abc}(\partial^\mu\bar{\eta}^c)B^b_\mu\eta^c. \tag{8.1.2}$$

上二式与(4.3.42)一起组成QCD的有效拉氏量密度$\mathscr{L}_{eff}$，把它分成一个自由部分$\mathscr{L}_0$和一个相互作用部分$\mathscr{L}_I$

$$\mathscr{L}_{eff}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_I, \tag{8.1.3a}$$

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{2}B^a_\mu\delta^{ab}\left[g^{\mu\nu}\Box+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]B^b_\nu$$
$$+\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+\bar{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b, \tag{8.1.3b}$$

$$\mathscr{L}_I=\frac{1}{2}gf^{abc}B^b_\mu B^c_\nu(\partial^\mu B^{\nu a}-\partial^\nu B^{\mu a})$$
$$-\frac{1}{4}g^2f^{abc}f^{ab'c'}B^b_\mu B^c_\nu B^{\mu b'}B^{\nu c'}$$
$$-gf^{abc}(\partial^\mu\bar{\eta}^a)B^b_\mu\eta^c-g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi B^a_\mu, \tag{8.1.3c}$$

于是，按(6.1.4)式，QCD的生成泛函W可表示为

$$W[J_\mu;\xi,\bar{\xi};\zeta^a,\bar{\zeta}^a]=RW_0[J_\mu;\xi,\bar{\xi};\zeta^a,\bar{\zeta}^a], \tag{8.1.4a}$$

其中$J^a_\mu;\xi$和$\bar{\xi}$以及ζ^a和$\bar{\zeta}^a$分别是胶子场B^a_μ、夸克场$\bar{\psi}$和ψ以及鬼场$\bar{\eta}^a$和η^a所对应的外源.把场和源的对应关系表示为

$$F_J(B^a_\mu,\bar{\psi},\psi,\bar{\eta}^a,\eta^a)\leftrightarrow S_J(J^a_\mu,\xi,\bar{\xi},\zeta^a,\bar{\zeta}^a), \tag{8.1.4b}$$

则算符R的定义是

$$R\equiv\exp\left[i\int dy\mathscr{L}_I\left(F_J(y)\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta S_J(y)}\right)\cdot\right], \tag{8.1.4c}$$

而自由格林函数生成泛函W_0按(5.3.18)式可表示为

$$W_0[S_J]=\exp\left(-\frac{i}{2}\int dxdyJ^{\mu a}(x)D_{F\mu\nu}^{ab}(x-y)J^{\nu b}(y)\right.$$
$$\left.-i\int dxdy\bar{\xi}(x)S_F(x-y)\xi(y)-i\int dxdy\bar{\zeta}^a(x)\tilde{\Delta}_F^{ab}(x-y)\zeta^b(y)\right), \tag{8.1.4d}$$

式中已利用了式(5.5.45)、(5.4.23)和(5.5.43).

关于S矩阵的约化公式，值得指出的是，由于色禁闭，带色的

态在希尔伯特空间的物理区中是不存在的. 因此,对于 QCD 的 S 矩阵,其基矢不是由单个夸克或胶子态所组成的,而是由物理强子的色单态所组成(其中包含有非微扰问题). 然而,由于 QCD 的渐近自由性质,即在大动量或小距离下(硬过程)QCD 的耦合常数将变得很小(参见8.4节),因而仍可采用微扰论. 为了叙述方便,可类似于式(6.6.1),形式地写(注意鬼场无相应的入场和出场!):

$$S = :R\exp[-i\int \mathrm{d}x B^{a\mu}_{\mathrm{in}}(x)J^a_\mu(x) + \bar{\psi}_{\mathrm{in}}(x)\xi(x) + \bar{\xi}(x)\psi_{\mathrm{in}}(x)]W_0[S_J]|_{S_J=0}: \tag{8.1.5}$$

S 矩阵和 S 矩阵元的微扰计算可仿照6.6节的图解方法进行. 但现在由于相互作用项的增多,那是不胜其繁的. 最简单的方法是直接从有效作用量(Γ 的树图近似)出发去求得动量空间的 QCD 费曼规则. 例如,我们来求胶子场传播子的动量空间表达式. 在 $\mathscr{L}_0$ (8.1.3b)中找到相应项的作用量为

$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{2}B^a_\mu(x)\delta^{ab}\left[-g^{\mu\nu}\Box - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]B^b_\nu(x). \tag{8.1.6}$$

胶子场的傅立叶变换为(我们用同一符号来表示动量空间的量):

$$B^a_\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}B^a_\mu(k). \tag{8.1.7}$$

利用它,式(8.1.6)可改写为

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}B^a_\mu(k')\delta^{ab}\left[-g^{\mu\nu}k^2 + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k^\mu k^\nu\right] \cdot B^a_\nu(k)(2\pi)^4\delta^4(k+k'). \tag{8.1.8}$$

由(6.3.25)式知,

$$\frac{1}{2}B^a_\mu(k')\left[-g^{\mu\nu}k^2 + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k^\mu k^\nu\right]B^b_\nu(k) \tag{8.1.9}$$

为胶子场二次项的动量空间表式. 按6.6节的讨论,把场量微分掉后再乘以 $-i$ 即得到动量空间的逆传播子,即

$$[iD_{F\mu\nu}^{a\,b}]^{-1} = i\delta^{ab}\left[g_{\mu\nu}k^2 - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]. \tag{8.1.10}$$

为了方便地求出上式的逆,可利用关系式

$$(aK_T + bK_L)^{-1} = a^{-1}K_T + b^{-1}K_L, \qquad (8.1.11a)$$

其中 a 和 b 都不等于零，而

$$K_T = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad K_L = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \qquad (8.1.11b)$$

分别称为四维横向和纵向分量投影算符. 它们满足条件

$$K_T^2 = K_T, \quad K_L^2 = K_L, \quad K_T K_L = 0. \qquad (8.1.11c)$$

于是，动量空间的胶子自由传播子为

$$\begin{aligned} iD_F^{ab}{}_{\mu\nu}(k) &= -i\delta^{ab}\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]^{-1} \\ &= -\frac{i}{k^2}\delta^{ab}\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \alpha\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \\ &= -\frac{i}{k^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\delta^{ab}. \end{aligned} \qquad (8.1.12)$$

顺便指出，如果不引入规范固定项 $-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu B_\mu^a)^2$，那相当于使上式中的 $\alpha\to\infty$. 这时上式中的纵向分量将发散，即规范场原来二次项中的微分算符没有逆，这已在5.5节中指出过. 因此，引入规范固定项确能使规范场二次项中的微分算符有逆.

再来看一个关于顶角的例子，比如求胶子场三线顶角的动量空间费曼规则. 在 $\mathscr{L}_1$ (8.1.3c)中找到相应项为

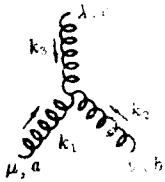
$$\frac{1}{2}gf^{abc}B_\mu^b(x)B_\nu^c(x)\left(\partial^\mu B^{a\nu}(x) - \partial^\nu B^{a\mu}(x)\right).$$

类似于前例的处理，可以得到上式的动量空间表式为

$$\begin{aligned} &-\frac{i}{2}gf^{abc}B_\mu^b(k_1)B_\nu^c(k_2)[k_3^\mu B^{a\nu}(k_3) - k_3^\nu B^{a\mu}(k_3)] \\ &= -\frac{i}{2}gf^{abc}B_\mu^b(k_1)B_\nu^c(k_2)B_\lambda^a(k_3)(k_3^\mu g^{\nu\lambda} - k_3^\nu g^{\lambda\mu}) \\ &= -\frac{i}{6}gf^{abc}B_\mu^b(k_1)B_\nu^c(k_2)B_\lambda^a(k_3)[(k_3-k_2)^\mu g^{\nu\lambda} + (k_2-k_1)^\lambda g^{\mu\nu} \\ &\quad + (k_1-k_3)^\nu g^{\lambda\mu})] \quad (k_1+k_2+k_3=0), \end{aligned} \qquad (8.1.13)$$

其中第二个等式利用了由 f^{abc} 的完全反对称性所导致的在循环置

换 $(k_3,\lambda)\to(k_1,\mu)\to(k_2,\nu)\to(k_3,\lambda)$ 下的循环置换对称性，按照6.6节的讨论，上式对所有的场量求微商乘以 i 即得到动量空间的三胶子顶点：

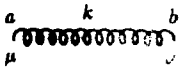


$$f^{abc}\ (k_3-k_2)^{\mu}g^{\nu\lambda}+(k_1-k_3)^{\nu}g^{\lambda\mu}+(k_2-k_1)^{\lambda}g^{\mu\nu})], \qquad (8.1.14)$$

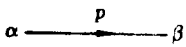
其中图中的箭头表示动量的流向(指向顶点)，这些动量满足 $k_1+k_2+k_3=0$（由类似于(8.1.8)式中的 $\delta(k_1+k_2+k_3)$ 给出）.

因此，利用上面例举的方法可从 QCD 的有效拉氏量密度 $\mathscr{L}_{eff}$ (8.1.3)求得自由传播子和相互作用顶点的动量空间费曼规则，现把结果列出如下：

1）自由传播子

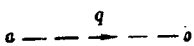
胶子： 

$$iD_{F\mu\nu}^{ab}=-\frac{i}{k^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\delta^{ab}$$

夸克： 

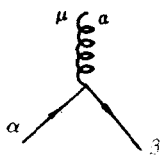
$$iS_F^{\alpha\beta}(p)=\frac{i}{\not p-m}\delta^{\alpha\beta}$$

（$\alpha,\beta=1,2,3$ 为色指标）

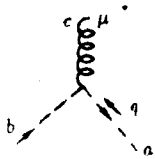
鬼： 

$$i\widetilde{\Delta}_F(q)=\frac{i}{q^2}\delta^{ab}$$

2）相互作用顶点（指向顶点的动量和为0）

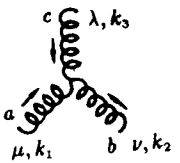
夸克胶子顶点： 

$$-ig\gamma^{\mu}(T^{a})_{\alpha\beta}$$

胶子鬼顶点： 

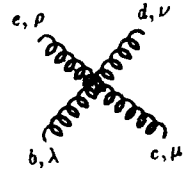
$$gf^{abc}q^{\mu}$$

三胶子顶点：



$$gf^{abc}[(k_3-k_2)^{\mu}g^{\nu\lambda}+(k_2-k_1)^{\lambda}g^{\mu\nu}+(k_1-k_3)^{\nu}g^{\lambda\mu})]$$

四胶子顶点：



$$-ig^2[f^{abc}f^{adc}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})+f^{adc}f^{abc}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})+f^{abd}f^{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}-g_{\nu\mu}g_{\lambda\rho})]$$

由于鬼场是格拉斯曼变量，因此当费曼图中包含有它的封闭圈时要附加一个负号. 遇到费米子封闭圈时求迹并附加一负号，这与QED相同. 此外对全同的胶子内线附加一对称因子，如


附加$\frac{1}{2!}$， 
附加$\frac{1}{3!}$.

关于外线，胶子与夸克的外线与QED的对应粒子类似，鬼粒子没有外线.

8.2 BRS变换和Slavnov-Taylor恒等式

在7.4节中我们利用规范不变性推导了QED的W-T恒等式，这一节我们对QCD来做类似的事情.

(一) BRS变换

按照式(6.1.2)，在洛仑兹规范下，QCD的生成泛函可表示为

$$W[S_J]=N\int\mathscr{D}A_{\mu}\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta\exp\left[i\int dx(\mathscr{L}_{\text{eff}}+S_JF_J)\right],\tag{8.2.1}$$

其中已利用了由(8.1.4b)所引进的场、源缩写记号F_J和S_J，QCD的有效拉氏量密度

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\text{GF}} + \mathscr{L}_{\text{FPG}}, \tag{8.2.2}$$

$\mathscr{L}$、$\mathscr{L}_{\text{GF}}$和$\mathscr{L}_{\text{FPG}}$分别由式(4.3.42)、(8.1.1)和(8.1.2)表出. 为了下面利用方便,我们改写$\mathscr{L}_{\text{FPG}}$为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{FPG}} &= \bar{\eta}^a \delta^{ab} \Box \eta^b - g f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) B_\mu^b \eta^c \\ &= \partial^\mu \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^a - g f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) B_\mu^b \eta^c + \text{四维散度项(可略去)} \\ &= (\partial^\mu \bar{\eta}^a)(\partial_\mu \eta^a - g f^{abc} B_\mu^b \eta^c) \\ &\equiv (\partial^\mu \bar{\eta}^a)\left(\delta^{ab}\partial_\mu + igB_\mu^c (T^c)^{ab}\right)\eta^b \\ &= -\bar{\eta}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} \eta^b + \text{四维散度项(可略去)}, \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

其中已利用了$SU(3)$群的伴随表示$(T^c)^{ab} = -if^{abc}$,D_μ为协变导数.

在无限小定域规范变换

$$\begin{cases} \delta\psi = -i\theta^a T^a \psi; & (8.2.4a) \\ \delta\bar{\psi} = i\bar{\psi} T^a \theta^a; & (8.2.4b) \\ \delta B_\mu^a = \dfrac{1}{g}\partial_\mu \theta^a - f^{abc} B_\mu^b \theta^c = \dfrac{1}{g} D_\mu^{ab} \theta^b & (8.2.4c) \end{cases}$$

下,我们知道$\mathscr{L}_{\text{eff}}$(8.2.2)中$\mathscr{L}$是不变的,但$\mathscr{L}_{\text{GF}}$和$\mathscr{L}_{\text{FPG}}$并不是不变的,因而$\mathscr{L}_{\text{eff}}$不是不变的. 然而,如果把θ^a表为

$$\theta^a = -\lambda \eta^a, \tag{8.2.5}$$

其中λ与η^a一样也是格拉斯曼数(故$\lambda^2 = 0$),而λ与x无关为一常数. 于是变换(8.2.4)变为

$$\begin{cases} \delta\psi = i\lambda\eta^a T^a \psi, & (8.2.6a) \\ \delta\bar{\psi} = -i\bar{\psi}\lambda\eta^a T^a, & (8.2.6b) \\ \delta B_\mu^a = -\dfrac{1}{g}\lambda D_\mu^{ab}\eta^b. & (8.2.6c) \end{cases}$$

我们再要求η^a和$\bar{\eta}^a$的变换为

$$\begin{cases} \delta\eta^a = -\dfrac{\lambda}{2} f^{abc}\eta^b\eta^c, & (8.2.6d) \\ \delta\bar{\eta}^a = \dfrac{\lambda}{\alpha g}(\partial^\mu B_\mu^a). & (8.2.6e) \end{cases}$$

注意，由于 η 和 $\bar{\eta}$ 是独立的格拉斯曼场，故有独立的变换. 变换式(8.2.6)一起称为 Becchi-Rouet-Stora(BRS)变换. 我们可以证明 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 在 BRS 变换下是不变的，这只需证明 $\mathscr{L}_{\text{GF}}+\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 在 BRS 变换下不变就可以了. 为此，首先来证明 $\mathscr{L}_{\text{FPG}}$ (8.2.3)中的 $D_\mu^{ab}\eta^b$ 在 BRS 变换下保持不变，即

$$\delta(D_\mu^{ab}\eta^b)=0. \tag{8.2.7}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\delta(D_\mu^{ab}\eta^b)=\delta(\partial_\mu\eta^a-gf^{abc}B_\mu^b\eta^c)\\
=&\partial_\mu\delta\eta^a-gf^{abc}(\delta B_\mu^b)\eta^c-gf^{abc}B_\mu^b\delta\eta^c\\
=&-\frac{\lambda}{2}f^{abc}\partial_\mu(\eta^b\eta^c)+\lambda f^{abc}(\partial_\mu\eta^b-gf^{bmn}B_\mu^m\eta^n)\eta^c+\frac{\lambda}{2}gf^{abc}f^{cmn}B_\mu^b\eta^m\eta^n\\
=&-\lambda f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)(\eta^c-\eta^c)-\lambda gf^{abc}f^{bmn}B_\mu^m\eta^n\eta^c+\frac{\lambda}{2}gf^{abc}f^{cmn}B_\mu^b\eta^m\eta^n\\
=&-\lambda gf^{abc}f^{bmn}B_\mu^m\eta^n\eta^c-\frac{\lambda}{2}g(f^{amc}f^{cnb}+f^{anc}f^{cbm})B_\mu^b\eta^m\eta^n,
\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

其中第四个等式利用了

$$\begin{aligned}
f^{abc}\partial_\mu(\eta^b\eta^c)&=f^{abc}[(\partial_\mu\eta^b)\eta^c+\eta^b(\partial_\mu\eta^c)]\\
&=f^{abc}[(\partial_\mu\eta^b)\eta^c-(\partial_\mu\eta^c)\eta^b]\\
&=2f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)\eta^c,
\end{aligned}$$

最后一个等式利用了 η^c 和 λ 的反对易性和雅可比恒等式：

$$f^{abc}f^{cmn}=-f^{amc}f^{cnb}-f^{anc}f^{cbm}. \tag{8.2.9}$$

对(8.2.8)式的第一项作哑指标替换 $m\to b\to c\to m$，第三项作哑指标替换 $m\leftrightarrow n$，有

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu^{ac}\eta^c)=&-\lambda gf^{acm}f^{cbn}B_\mu^b\eta^n\eta^m\\
&-\frac{\lambda}{2}g\,f^{amc}f^{cnb}B_\mu^b\eta^m\eta^n-\frac{\lambda}{2}gf^{amc}f^{cbn}B_\mu^b\eta^n\eta^m\\
=&\lambda g\left(f^{amc}f^{cbn}-\frac{1}{2}f^{amc}f^{cbn}-\frac{1}{2}f^{amc}f^{cbn}\right)B_\mu^b\eta^n\eta^m=0.
\end{aligned}$$

这就证明了(8.2.7)式，其中倒数第二个等式利用了 η 的反对易性和 f^{abc} 的完全反称性.

利用(8.2.3;7)式,在 BRS 变换下,有

$$\begin{aligned}\delta(\mathscr{L}_{GF}+\mathscr{L}_{FPG}) &= -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu B_\mu^a)(\partial^\nu \delta B_\nu^a)\\ &\quad -(\delta\bar{\eta}^a)\partial^\mu D_\mu^{ab}\eta^b - \bar{\eta}^a\partial^\mu(\delta D_\mu^{ab}\eta^b)\\ &= \frac{\lambda}{\alpha g}(\partial^\nu B_\nu^a)\partial^\mu D_\mu^{ab}\eta^b - \frac{\lambda}{\alpha g}(\partial^\mu B_\mu^a)\partial^\nu D_\nu^{ab}\eta^b\\ &= 0.\end{aligned}$$

到此,证明了 $\mathscr{L}_{eff}$ 在 BRS 变换下的不变性.从式(8.2.6c;7)容易得到

$$\delta^2(B_\mu^a)=0, \tag{8.2.10}$$

这通常称为 B_μ^a (在 BRS 变换下)是零幂的.由于

$$\begin{aligned}\delta(f^{abc}\eta^b\eta^c) &= f^{abc}[(\delta\eta^b)\eta^c+\eta^b(\delta\eta^c)]\\ &= -\frac{\lambda}{2}f^{abc}f^{bmn}\eta^m\eta^n\eta^c - \frac{\lambda}{2}f^{abc}f^{cmn}\eta^b\eta^m\eta^n\\ &= -\lambda f^{abc}f^{cmn}\eta^m\eta^n\eta^b\\ &= -\frac{\lambda}{3}f^{abc}f^{cmn}(\eta^m\eta^n\eta^b+\eta^b\eta^m\eta^n+\eta^n\eta^b\eta^m)\\ &= -\frac{\lambda}{3}(f^{abc}f^{cmn}+f^{anc}f^{cbm}+f^{amc}f^{cnb})\eta^m\eta^n\eta^b\\ &= 0,\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

其中我们重新标记了哑指标和利用了(8.2.9)式,由式(8.2.11)及式(8.2.6a),可得

$$\delta^2(\eta^a)=0, \tag{8.2.12}$$

即 η^a 在 BRS 变换下也是零幂的.此外,利用 $\lambda^2=0$ 容易证明 $\bar{\eta}^a$ 在 BRS 变换下也是零幂的:

$$\delta^2(\bar{\eta}^a)=0. \tag{8.2.13}$$

又因为利用(8.2.6)和(4.3.4)式,有

$$\begin{aligned}\delta(T^a\eta^a\psi) &= T^a(\delta\eta^a)\psi + T^a\eta^a\delta\psi = -\frac{\lambda}{2}T^af^{abc}\eta^b\eta^c\psi + iT^b\eta^b\lambda\eta^cT^c\psi\\ &= \frac{1}{2}T^af^{abc}\eta^b\eta^c\psi\lambda + \frac{i}{2}[T^b,T^c]\eta^b\eta^c\psi\lambda\end{aligned}$$

$$=0, \tag{8.2.14}$$

$$\begin{aligned}\delta(\bar{\psi}T^a\eta^a) &= (\delta\bar{\psi})T^a\eta^a + \bar{\psi}T^a\delta\eta^a \\ &= -i\bar{\psi}\lambda\eta^bT^bT^c\eta^c - \frac{1}{2}\bar{\psi}T^a\lambda f^{abc}\eta^b\eta^c \\ &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}[T^b,T^c]\eta^b\eta^c\lambda - \frac{1}{2}\bar{\psi}T^af^{abc}\eta^b\eta^c\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

故在 BRS 变换下 ψ 和 $\bar{\psi}$ 也是零幂的，即

$$\delta^2(\psi) = \delta^2(\bar{\psi}) = 0. \tag{8.2.16}$$

因此 BRS 变换所涉及的各个场都是零幂的.

BRS 变换的另一个特性是变换的雅可比行列式等于 1. 事实上，由变换(8.2.6)该雅可比的对角元素为

$$\frac{\delta}{\delta B_\nu^b(y)}[B_\mu^a(x) + \delta B_\mu^a(x)] = \delta_\mu^\nu\delta^4(x-y)(\delta^{ab} + \lambda f^{abc}\eta^c),$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi(y)}[\psi(x) + \delta\psi(x)] = \delta^4(x-y)(1 + i\lambda\eta^aT^a),$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}[\bar{\psi}(x) + \delta\bar{\psi}(x)] = \delta^4(x-y)(1 - i\lambda\eta^aT^a),$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta^b(y)}[\eta^a(x) + \delta\eta^a(x)] = \delta^4(x-y)(\delta^{ab} + \lambda f^{abc}\eta^c),$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^b(y)}[\bar{\eta}^a(x) + \delta\bar{\eta}^a(x)] = \delta^{ab}\delta^4(x-y);$$

非对角元素都正比于 λ. 由于 $\lambda^2 = 0$，故变换的雅可比式可示意地表为

$$J_{\mathrm{BRS}} = J_B \cdot J_G,$$

其中 J_B、J_G 分别为玻色场和格拉斯曼场的变换部分，由(5.4.16)式，有

$$\begin{aligned} J_B &= I + \lambda f\eta, \\ J_G &= [(I + i\lambda\eta T)(I - i\lambda\eta T)(I + \lambda f\eta)\cdot I]^{-1} \\ &= I - \lambda f\eta, \end{aligned}$$

所以

$$J_{\mathrm{BRS}} = (I + \lambda f\eta)(I - \lambda f\eta) = I. \qquad (8.2.17)$$

(二) Slavnon-Taylor(S-T)恒等式.

现在,我们利用 BRS 变换来推导 S-T 恒等式. 这时较为方便的是在生成泛函(8.2.1)中再引进算符 $T^a\eta^a\psi$、$\bar{\psi}T^a\eta^a$、$-\frac{1}{g}D_\mu^{ab}\eta^b$ 和 $-\frac{1}{2}f^{abc}\eta^b\eta^c$ 的各对应外源 $\bar{\omega}$、ω、$u^{a\mu}$ 和 v^a. 于是式(8.2.1)变为

$$W[S_J;\bar{\omega},\omega,u^{a\mu},v^a] = N\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta \exp\Big[i\int \mathrm{d}x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + S_JF_J + \bar{\omega}T^a\eta^a\psi + \bar{\psi}T^a\eta^a\omega - u^{a\mu}\frac{1}{g}D_\mu^{ab}\eta^b - v^a\frac{1}{2}f^{abc}\eta^b\eta^c)\Big]. \qquad (8.2.18)$$

对上式进行 BRS 变换,则由前面(一)的讨论知,$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 以及正比于源 $\bar{\omega}$、ω、$u^{a\mu}$ 和 v^a 的项是不变的,且变换的雅可比为1,故 W 的不变性意味着

$$N\int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\eta}\mathscr{D}\eta\Big(i\int \mathrm{d}x S_J\delta F_J\Big)\exp\Big[i\int \mathrm{d}x\ (\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + \text{源项})\Big] = 0, \qquad (8.2.19a)$$

其中

$$S_J\delta F_J = J^{a\mu}\delta B_\mu^a + \xi\delta\psi + \delta\bar{\psi}\xi + \zeta^a\delta\eta^a + \delta\bar{\eta}^a\zeta^a.$$

b) 利用变换式(8.2.6)和新引进的算符外源,(8.2.19)式也可表为

$$\int \mathrm{d}x\Big[J_\mu^a\frac{\delta}{\delta u_\mu^a} - i\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta\bar{\omega}} + i\frac{\delta}{\delta\omega}\xi - \zeta^a\frac{\delta}{\delta v^a} + \frac{1}{\alpha g}\Big(\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}\Big)\zeta^a\Big]W[\cdots] = 0. \qquad (8.2.20)$$

利用 $W = e^{iZ}$,可以把上式用连通格林函数生成泛函 Z 表示为

$$\int \mathrm{d}x\Big[J_\mu^a\frac{\delta}{\delta u_\mu^a} - i\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta\bar{\omega}} + i\frac{\delta}{\delta\omega}\xi - \zeta^a\frac{\delta}{\delta v^a} + \frac{1}{\alpha g}\Big(\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}\Big)\zeta^a\Big]Z[\cdots] = 0. \qquad (8.2.21)$$

式(8.2.20)和(8.2.21)是关于格林函数的 S-T 恒等式. 为了得到

关于正规顶角生成泛函 Γ 的 S-T 恒等式，我们按通常的方式来定义包含复合算符外源的正规顶角生成泛函(但并不变换复合外源)：

$$\begin{aligned}&\Gamma[B_\mu,\psi,\bar{\psi},\eta,\bar{\eta};\omega,\bar{\omega},u,v]\\&=Z[J_\mu,\xi,\bar{\xi},\zeta,\bar{\zeta};\bar{\omega},\omega,u,v]\\&\quad-\int dx(J_\mu{}^aB^{\mu a}+\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi+\zeta^a\eta^a+\bar{\eta}^a\zeta^a),\end{aligned}\tag{8.2.22}$$

有

$$\begin{aligned}&J^{\mu a}=-\frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu{}^a},\qquad \xi=\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}},\qquad \bar{\xi}=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi},\\&\zeta^a=\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a},\qquad \bar{\zeta}^a=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}^a},\end{aligned}\tag{8.2.23}$$

以及

$$\begin{aligned}&\frac{\delta Z}{\delta J_\mu{}^a}=B^{\mu a},\qquad \frac{\delta Z}{\delta u_\mu{}^a}=\frac{\delta\Gamma}{\delta u_\mu{}^a},\qquad \frac{\delta Z}{\delta v^a}=\frac{\delta\Gamma}{\delta v^a},\\&\frac{\delta Z}{\delta\omega}=\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega},\qquad \frac{\delta Z}{\delta\bar{\omega}}=\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\omega}}.\end{aligned}\tag{8.2.24}$$

于是(8.2.1)式变为

$$\begin{aligned}&\int dx\Big[\frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu{}^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta u^{\mu a}}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\omega}}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta v^a}\\&\quad+\frac{1}{ag}(\partial_\mu B^{\mu a})\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}^a}\Big]=0.\end{aligned}\tag{8.2.25}$$

为了进一步简化上式，我们来推导鬼场的运动方程. 注意，由式(8.2.3)，W(8.2.18)式中包含 $\bar{\eta}^a$ 和 $u^{a\mu}$ 的项为

$$\begin{aligned}W=\int\mathcal{D}B_\mu\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\Big(i\int dx\,[&-\bar{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu^{ab}\eta^b)\\&+\bar{\eta}^a\zeta^a-u^{a\mu}\Big(\frac{1}{g}D_\mu^{ab}\eta^b\Big)+\cdots]\Big),\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}^a}=i\,[\zeta^a-\partial^\mu D_\mu^{ab}\eta^b]W=i\,\zeta^aW+g\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta u_\mu^a},\tag{8.2.26}$$

或用连通格林函数生成泛函 Z 表示为

$$\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}^a} = \zeta^a + g\partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta u_\mu^a}. \tag{8.2.27}$$

但

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta^a} = 0,$$

因此，由(8.2.23)和(8.2.24)式得

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\eta}^a} = g\,\partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^a}. \tag{8.2.28}$$

把它代入式(8.2.25)，略去四维散度项后得到

$$\int \mathrm{d}x \Big[\frac{\delta \Gamma}{\delta B_\mu^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta u^{\mu a}} + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\omega}} + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu \partial^\nu B_\nu^a) \frac{\delta \Gamma}{\delta u_\mu^a} \Big] = 0. \tag{8.2.29}$$

再令

$$\Gamma[\cdots] = \Gamma'[\cdots] + \frac{1}{2\alpha} \int \mathrm{d}x (\partial^\nu B_\nu^a)^2,$$

则式(8.2.29)变为

$$\int \mathrm{d}x \Big[\frac{\delta \Gamma'}{\delta B_\mu^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta u^{\mu a}} + i \frac{\delta \Gamma'}{\delta \psi} \frac{\delta \Gamma'}{\delta \bar{\omega}} + i \frac{\delta \Gamma'}{\delta \omega} \frac{\delta \Gamma'}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta \eta^a} \frac{\delta \Gamma'}{\delta v^a} \Big] = 0, \tag{8.2.30}$$

这就是关于正规顶角的 S-T 恒等式，一般也称为推广的 W-T 恒等式. 它是非阿贝尔规范理论可重整化证明的主要基础.

8.3 QCD 的单圈重整化

上一节的讨论表明，QCD 与 QED 一样，也是规范不变的理论，它们的差别仅在于后者是阿贝尔的，无自作用，不需要引进鬼场，理论中只有一种相互作用顶点；而前者则是非阿贝尔的，有自作用，需引进鬼场，理论中有四种相互作用顶点. 类似于7.5节中关

于表观发散度的讨论，可以求得QCD的表观发散度为

$$D = 4 - \frac{3}{2}F_c - B_c, \tag{8.3.1}$$

其中 F_c 和 B_c 分别是所考虑的QCD图形的费米子(夸克)和玻色子(胶子)外线数. 它在形式上与QED的有关公式(7.5.5)完全一样，即与图形的顶点数 n 无关(表示发散性质与微扰阶次无关)；且随图形外线数的增加而减少(表示只能有有限多个原始发散图). 因而，与QED一样，QCD也是可重整的理论.

关于QCD重整化的一般步骤完全类似于在7.5节中对QED所作的讨论，只是，具体处理的时候更为复杂，其原因是QCD包含有更多的场和相互作用顶点，因而在同一微扰阶次上有更多的费曼图需要计算；而且对于四种相互作用(夸克与胶子，三胶子，四胶子和鬼与胶子)只有一个耦合常数，可以利用任意一种相互作用来定义重整化的耦合常数，但它必须是唯一的，这就导致了顶角重整化常数和场的重整化常数之间的一些约束关系. 下面，我们通过考虑QCD的单圈重整化来加以说明.

QCD的有效拉氏量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff}} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu B_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &+ \partial^\mu\bar{\eta}^a\partial_\mu\eta^a - g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi B_\mu^a - gf^{abc}(\partial^\mu\bar{\eta}^a)B_\mu^b\eta^c \\ &+ gf^{abc}B_\mu^b B_\nu^c\partial^\mu B^{\nu a} - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}B_\mu^b B_\nu^c B^{\mu d}B^{\nu e},\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

其中所有的场量和参量都是重整化量，在树图近似下它直接得到有限的物理结果. 在高阶微扰论中为了消除发散需要引进抵消项：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}\delta Z_3(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a)^2 + \delta Z_2\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mK_m\bar{\psi}\psi \\ &+ \delta\tilde{Z}_3\partial^\mu\bar{\eta}^a\partial_\mu\eta^a - gK_1\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi B_\mu^a - gK_2 f^{abc}(\partial^\mu\bar{\eta}^a)B_\mu^b\eta^c \\ &+ gK_3 f^{abc}B_\mu^b B_\nu^c\partial^\mu B^{\nu a} - \frac{1}{4}g^2K_4 f^{abe}f^{ade}B_\mu^b B_\nu^c B^{\mu d}B^{\nu e},\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

它们将产生附加的费曼规则(作为练习，请读者自行列出)．定义重整化常数：

$$\begin{cases} Z_3 = 1 + \delta Z_3, & Z_2 = 1 + \delta Z_2, \\ Z_m = 1 + k_m, & \tilde{Z}_3 = 1 + \delta\tilde{Z}_3, \\ Z_1^{\psi} = 1 + k_1, & Z_1^{\eta} = 1 + k_2, \\ Z_1^{B} = 1 + k_3, & Z_4 = 1 + k_4 \end{cases} \tag{8.3.4}$$

及裸量：

$$\begin{cases} \psi_B = Z_2^{1/2}\psi, & (B_\mu^a)_B = Z_3^{1/2}B_\mu^a, \\ \eta_B^a = \tilde{Z}_3^{1/2}\eta^a, & m_B = Z_m Z_2^{-1} m, \\ \alpha_B^{-1} = Z_3^{-1}\alpha^{-1}, & g_B = Z_1^{\psi} Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} g, \\ g_B = Z_1^{\eta}\tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} g, & g_B = Z_1^{B} Z_3^{-3/2} g, \\ g_B^2 = Z_4 Z_3^{-2} g^2. \end{cases} \tag{8.3.5}$$

在式(8.3.5)中，对四种不同的顶角有四个不同的裸耦合常数 g_B 的表达式，它们给出了下列重整化常数间的关系：

$$\begin{aligned} Z_1^{\psi} Z_2^{-1} &= Z_1^{\eta}\tilde{Z}_3^{-1} \\ &= Z_1^{B} Z_3^{-1} = Z_4^{1/2} Z_3^{-1/2}. \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

利用式(8.3.2～5)，可表示裸拉氏量密度为

$$\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_{\text{eff}} + \delta\mathscr{L}, \tag{8.3.7}$$

其形式与 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ (8.3.2)完全一样，只是其中的所有量都被代之以裸量．要求抵消项 $\delta\mathscr{L}$ 逐阶消去理论的发散部分，即 $\mathscr{L}_B$ 给出有限的物理结果．据此，可以确定各阶重整化常数(依赖于所采用的重整化方案)．

现在，我们来计算由(8.3.4)式所定义的单圈阶重整化常数．如同第七章中所做的那样，仍利用维数正规化方法处理发散积分，用 MS 方案消除发散部分．注意在 $d = 4 - \varepsilon$ 维空间，为了保持耦合常数的量纲不变，需引进重整化标度因子 $\mu^{\varepsilon/2}$ (μ 为任意质量量纲)，在顶角因子中作代换

$$g \to g\mu^{\varepsilon/2}. \tag{8.3.8}$$

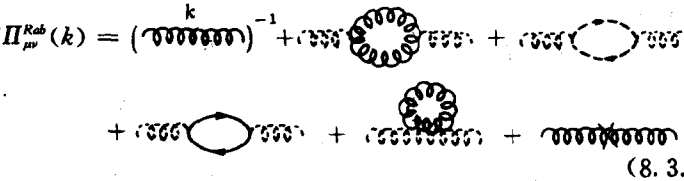
(1) Z_3 的计算.

为计算 Z_3，必须考虑二点胶子正规顶角(真空极化)

$$\Gamma^{(2)}_{a\mu,b\nu}(k) \equiv i\Pi^{ab}_{\mu\nu}(k) =$$ 

, (8.3.9)

到单圈阶，重整化后的贡献可表示为

$$i\Pi^{Rab}_{\mu\nu}(k) =$$ 

(8.3.10)

其中最后一项带×的图表示相应抵消项的贡献. 注意四个单圈图中的最后一个表观上是二次发散的，但它实际上没有动量流入圈内(不依赖于动量 k)，因而在维数正规化方法中规定它为零，即规定积分

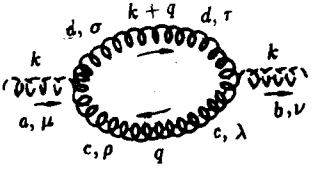
$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} = 0, \qquad (8.3.11a)$$

或更一般地，规定积分

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu k^\nu \cdots}{(k^2)^n} = 0. \qquad (8.3.11b)$$

这个规定与假定重整化的和未重整化的拉氏量密度都具有规范不变性相一致的；它导致规范粒子的质量不需重整(没有质量抵消项). 因而实际上只需计算其余三个圈图的贡献.

首先计算第一个圈图：

$$L_1 =$$ 

, (8.3.12)

图中箭头标明动量取向，其中胶子传播子两端的色指标取成相同

是考虑了它所包含的色克罗内克 δ 符号. 利用8.1节中所列出的QCD费曼规则并记住对 d 维空间要利用代换(8.3.8),有

$$L_1 = -\frac{1}{2}g^2\mu^\varepsilon f^{acd}f^{cbd}\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}J_{\mu\nu}(k,q), \quad (8.3.13a)$$

其中(已记 $\bar{\alpha}\equiv 1-\alpha$)

$$J_{\mu\nu}(k,q) = \frac{g^{\rho\lambda}q^2-\bar{\alpha}q^\rho q^\lambda}{q^4}\cdot\frac{g^{\tau\sigma}(k+q)^2-\bar{\alpha}(k+q)^\tau(k+q)^\sigma}{(k+q)^4}$$
$$\cdot[-(k+2q)_\rho g_{\sigma\mu}+(2k+q)_\rho g_{\sigma\mu}+(q-k)_\sigma g_{\mu\rho}]$$
$$\cdot[(2k+q)_\lambda g_{\tau\nu}-(k+2q)_\tau g_{\nu\lambda}+(q-k)_\nu g_{\lambda\tau}].$$
$$=\frac{1}{q^4(k+q)^4}\{q^2(k+q)^2[2(2d-3)q_\mu q_\nu+(2d-3)$$
$$\cdot(q_\mu k_\nu+k_\mu q_\nu)+(d-6)k_\mu k_\nu+(5k^2+2k\cdot q+2q^2)g_{\mu\nu}]$$
$$+\bar{\alpha}(k+q)^2[(q^2+2k\cdot q-k^2)q_\mu q_\nu+(q^2+3k\cdot q)(k_\mu q_\nu+q_\mu k_\nu)$$
$$-q^2k_\mu k_\nu-(q^2-2k\cdot q)^2g_{\mu\nu}]+\bar{\alpha}q^2[(q^2-2k^2)q_\mu q_\nu$$
$$+(k\cdot q)(q_\mu k_\nu+k_\mu q_\nu)+(k^2-2q^2)k_\mu k_\nu-(q^2-k^2)^2g_{\mu\nu}]$$
$$+\bar{\alpha}^2[k^4q_\mu q_\nu+(k\cdot q)^2k_\mu k_\nu-(k\cdot q)k^2(k_\mu q_\nu+q_\mu k_\nu)]\}, \quad (8.3.13b)$$

计算中已利用了公式(7.6.8).

在计算积分(8.3.13)时利用下列 d 维空间积分公式将更为直接和方便:

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2)^n[(q+k)^2]^m}=i\frac{(-1)^{m+n}}{(4\pi)^{d/2}}(-k^2)^{d/2-m-n}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(m+n-d/2)\mathrm{B}(d/2-n,d/2-m)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}, \quad (8.3.14a)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{q_\mu}{(q^2)^n[(q+k)^2]^m}=i\frac{(-1)^{m+n}}{(4\pi)^{d/2}}(-k^2)^{d/2-m-n}(-k_\mu)$$
$$\cdot\frac{\Gamma(m+n-d/2)\mathrm{B}(d/2-n+1,d/2-m)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}, \quad (8.3.14b)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^n[(q+k)^2]^m}=\frac{i(-1)^{m+n}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(-k^2)^{d/2-m-n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}$$
$$\cdot[k_\mu k_\nu\Gamma(m+n-d/2)\mathrm{B}(d/2-m,d/2-n+2)$$

$$+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^2\cdot\Gamma(m+n-d/2-1)\mathrm{B}(d/2-m+1,d/2-n+1)],$$

(8.3.14c)

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{q_\mu q_\nu q_\lambda}{(q^2)^n[(q+k)^2]^m}=\frac{i(-1)^{m+n}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(-k^2)^{d/2-m-n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}$$

$$\cdot[-k_\mu k_\nu k_\lambda\Gamma(m+n-d/2)\mathrm{B}(d/2-n+3,d/2-m)$$

$$-\frac{1}{2}k^2(g_{\mu\nu}k_\lambda+g_{\nu\lambda}k_\mu+g_{\lambda\mu}k_\nu)$$

$$\cdot\Gamma(m+n-d/2-1)\mathrm{B}(d/2-n+2,d/2-m+1)], \qquad (8.3.14d)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{q_\mu q_\nu q_\lambda q_\sigma}{(q^2)^n[(q+k)^2]^m}=\frac{i(-1)^{m+n}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{(-k^2)^{d/2-m-n}}{\Gamma(m)\Gamma(n)}$$

$$\cdot\{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\sigma\Gamma(m+n-d/2)\mathrm{B}(d/2-n+4,d/2-m)$$

$$-\frac{1}{2}k^2[g_{\mu\nu}k_\lambda k_\sigma+g_{\mu\lambda}k_\nu k_\sigma+g_{\mu\sigma}k_\nu k_\lambda+g_{\nu\lambda}k_\mu k_\sigma+g_{\nu\sigma}k_\mu k_\lambda+g_{\lambda\sigma}k_\mu k_\nu]$$

$$\cdot\Gamma(m+n-d/2+1)\mathrm{B}(d/2-n+3,d/2-m+1)$$

$$+\frac{1}{4}(k^2)^2(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})\Gamma(m+n-d/2-2)$$

$$\cdot\mathrm{B}(d/2-n+2,d/2-m+2)\}, \qquad (8.3.14e)$$

式中

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (8.3.14f)$$

为贝塔函数.

利用上列公式计算积分(8.3.13),我们得到极点项为

$$L_1=\frac{ig^2C_A\delta^{ab}}{16\pi^2\varepsilon}\left[\left(-\frac{11}{3}-\tilde{\alpha}\right)k_\mu k_\nu+\left(\frac{19}{6}+\alpha\right)k^2g_{\mu\nu}\right]+\cdots, \qquad (8.3.15)$$

其中已定义群论因子

$$C_A\delta^{ab}=f^{acd}f^{bcd}, \qquad (8.3.16a)$$

对 $SU(N)$群,

$$C_A=N. \qquad (8.3.16b)$$

其次计算第二个圈图

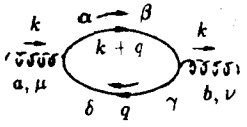
$L_2 =$ 

$$= -g^2 f^{dca} f^{cdb} \mu^\varepsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k+q)_\mu q_\nu}{(k+q)^2 q^2}, \tag{8.3.17}$$

其中对鬼场封闭圈已附加了一个负号. 利用公式(8.3.14)以及定义式(8.3.16)可得到 L_2 的极点项为

$$L_2 = \frac{ig^2 C_A \delta^{ab}}{16\pi^2 \varepsilon}\left[\frac{1}{3} k_\mu k_\nu + \frac{1}{6} k^2 g_{\mu\nu}\right] + \cdots. \tag{8.3.18}$$

再计算第三个圈图:

$L_3 =$ 

$$= -g^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu T^a \frac{1}{\hat{q} - m} \gamma_\nu T^b \frac{1}{\hat{k} + \hat{q} - m}\right], \tag{8.3.19}$$

其中对封闭夸克圈已包括了对色矩阵和狄拉克矩阵的求迹并附加了一个负号. 通常定义群论因子

$$T_F \delta^{ab} = \mathrm{Tr}(T^a T^b), \tag{8.3.20a}$$

对 $SU(N)$ 群,由(4.3.5)式,有

$$T_F = \frac{1}{2}. \tag{8.3.20b}$$

利用式(7.6.10)完成(8.3.19)式中的狄拉克矩阵求迹后,得到

$$L_3 = -g^2 T_F \delta^{ab} \mu^\varepsilon f(d) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \cdot [q_\mu (k+q)_\nu + (k+q)_\mu q_\nu + (m^2 - q^2 - k \cdot q) g_{\mu\nu}]. \tag{8.3.21}$$

为了得到极点项,只需在上式中令 $m=0$,再利用公式(8.3.14)进行积分,得到

$$L_3 = -\frac{ig^2 T_F \delta^{ab}}{16\pi^2 \varepsilon}\left[-\frac{8}{3} k_\mu k_\nu + \frac{8}{3} k^2 g_{\mu\nu}\right] + \cdots. \tag{8.3.22}$$

现在，我们可以通过式(8.3.10)来计算重整化常数 Z_3. 在 MS 重整化方案下，式(8.3.10)给出

$$i\delta Z_3(-k^2 g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu)$$

$$=\frac{-ig^2}{16\pi^2\varepsilon}(-k^2 g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu)\left[-\left(\frac{10}{3}+\bar{\alpha}\right)C_A+\frac{8}{3}T_F\right], \quad (8.3.23)$$

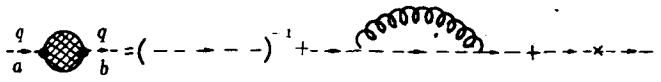
因而由式(8.3.4)可得

$$Z_3=1+\delta Z_3$$

$$=1-\frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}\left[\left(-\frac{13}{3}+\alpha\right)C_A+\frac{8}{3}T_F\right]. \quad (8.3.24)$$

(2) $\tilde{Z}_3$ 的计算

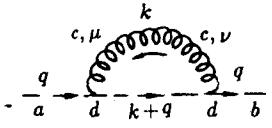
为计算 $\tilde{Z}_3$，需考虑二点鬼场正规顶角，到单圈阶，其重整化贡献为



(8.3.25)

其中带×的是抵消项贡献. 要计算的圈图是

$L_4=$



$$=g^2\mu^\varepsilon f^{dac}f^{bdc}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(k+q)_\mu q_\nu\frac{1}{(k+q)^2}\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \quad (8.3.26)$$

利用公式(8.3.14)和(8.3.16)，得到极点项为

$$L_4=\frac{ig^2C_A\delta^{ab}}{16\pi^2\varepsilon}q^2\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\alpha\right)+\cdots. \quad (8.3.27)$$

在 MS 重整化方案下，式(8.3.25)给出

$$i\delta^{ab}q^2\delta\tilde{Z}_3=-\frac{ig^2C_A\delta^{ab}}{16\pi^2\varepsilon}q^2\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\alpha\right), \quad (8.3.28)$$

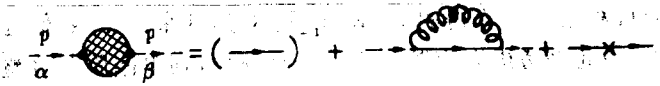
故由(8.3.4)式，得

$$\tilde{Z}_3=1+\delta\tilde{Z}_3$$

$$= 1 - \frac{g^2 C_A}{16\pi^2\varepsilon}\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\alpha\right). \tag{8.3.29}$$

(3) Z_2 和 Z_m 的计算

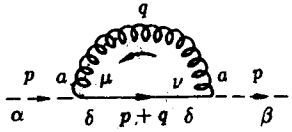
考虑二点夸克场正规顶角，到单圈阶其重整化贡献为



(8.3.30)

其中带×的图代表抵消项. 要计算的圈图是

$L_5 =$



$$= -g^2\mu^\varepsilon \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\gamma_\nu (T^a)_{\delta\beta}\frac{1}{\hat{p}+\hat{q}-m}\gamma_\mu (T^a)_{\alpha\delta}\frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

$$= -g^2\mu^\varepsilon C_F\delta_{\alpha\beta}\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\gamma_\nu \frac{\hat{p}+\hat{q}+m}{(p+q)^2-m^2}\gamma_\mu \frac{1}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right], \tag{8.3.31}$$

其中已定义群论因子

$$C_F\delta_{\alpha\beta} = (T^a T^a)_{\alpha\beta}, \tag{8.3.32a}$$

对 $SU(N)$ 群，夸克场属基础表示时

$$C_F = \frac{N^2-1}{2N}. \tag{8.3.32b}$$

与计算 L_3 类似，为求 L_5 的极点项，只需在式(8.3.31)中令 $m=0$，然后利用公式(7.6.9)和(8.3.14)，得

$$L_5 = \frac{ig^2 C_F\delta_{\alpha\beta}}{8\pi^2\varepsilon}[\alpha\hat{p} - (3+\alpha)m] + \cdots. \tag{8.3.33}$$

于是，在 MS 重整化方案下，式(8.3.30)给出

$$i\delta_{\alpha\beta}(\delta Z_2\hat{p} - mK_m) = -\frac{ig^2 C_F\delta_{\alpha\beta}}{8\pi^2\varepsilon}[\alpha\hat{p} - (3+\alpha)m]. \tag{8.3.34}$$

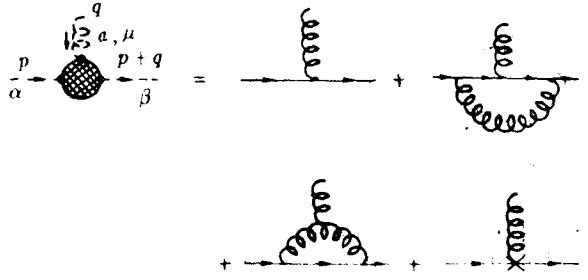
故由式(8.3.4)，得

$$Z_2 = 1 + \delta Z_2 = 1 - \frac{g^2 C_F\alpha}{8\pi^2\varepsilon}, \tag{8.3.35}$$

$$Z_m = 1 + K_m = 1 - \frac{g^2 C_F}{8\pi^2 \varepsilon}(3 + \alpha). \qquad (8.3.36)$$

(4) Z_1^ψ、ψ_1^η、Z_1^B、和 Z_4 的计算

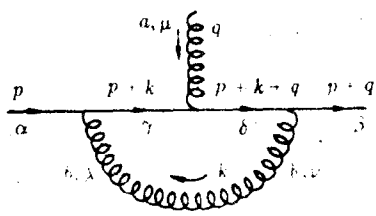
由于关系式(8.3.6)，我们只需算出 Z_1^ψ、ψ_1^η、Z_1^B、和 Z_4 中的任意一个，即可利用上面算得的 Z_3，$\tilde{Z}_3$ 和 Z_2 算出其余三个. 我们选择计算 Z_1^ψ，为此需考虑夸克胶子三点正规顶角，到单圈阶其重整化贡献为



(8.3.37)

其中带×的图是抵消项的贡献. 我们需要计算二个圈图. 先计算第一个圈图：

$L_6 =$



$$= -gg\mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu (T^b)_{\delta\beta} \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} + \hat{q} - m} \gamma_\mu (T^a)_{\gamma\delta}$$

$$\cdot \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} \gamma_\lambda (T^b)_{\alpha\gamma} \frac{1}{k^2} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2} \right]$$

$$= -g^3 \mu^\varepsilon (T^b T^a T^b)_{\alpha\beta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2} \right]$$

$$\cdot \frac{\gamma_\nu [(\hat{p} + \hat{k} + \hat{q}) + m] \gamma_\mu [(\hat{p} + \hat{k}) + m] \gamma_\lambda}{k^2 [(p + k)^2 - m^2] \{(p + k + q)^2 - m^2\}}. \qquad (8.3.38)$$

利用式(4.3.4)、(8.3.16)和(8.3.32),有

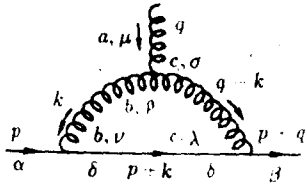
$$(T^bT^cT^b)_{\alpha\beta}=\left(C_F-\frac{1}{2}C_A\right)(T^c)_{\alpha\beta}, \qquad (8.3.39)$$

再在式(8.3.38)式中令 $m=0$,利用公式(7.6.9)和(8.3.14),可求得 L_6 的极点项为

$$L_6=-\frac{ig^3\alpha}{8\pi^2\epsilon}\left(C_F-\frac{1}{2}C_A\right)(T^c)_{\alpha\beta}\gamma_\mu+\cdots. \qquad (8.3.40)$$

再计算(8.3.27)中的第二个圈图:

$L_7=$



$$=igg^2\mu^\epsilon\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\gamma_\lambda(T^c)_{\delta\beta}\frac{1}{\not p+\not k-m}\gamma_\nu(T^b)_{\alpha\delta}\frac{1}{k^2}\left[g_{\nu\rho}-(1-\alpha)\frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right]$$
$$\cdot f^{abc}[(2k-q)_\mu g_{\rho\sigma}-(k+q)_\sigma g_{\mu\rho}+(2q-k)_\rho g_{\sigma\mu}]$$
$$\cdot\frac{1}{(q-k)^2}\left[g_{\sigma\lambda}-(1-\alpha)\frac{(q-k)_\sigma(q-k)_\lambda}{(q-k)^2}\right]$$
$$=ig^3\mu^\epsilon f^{abc}(T^cT^b)_{\alpha\beta}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\lambda[(\not p+\not k)+m]\gamma_\nu}{[(p+k)^2-m^2]k^2(q-k)^2}$$
$$\cdot\left[g_{\nu\rho}-(1-\alpha)\frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right][(2k-q)_\mu g_{\rho\sigma}-(k+q)_\sigma g_{\mu\rho}$$
$$+(2q-k)_\rho g_{\sigma\mu}]\left[g_{\sigma\lambda}-(1-\alpha)\frac{(q-k)_\sigma(q-k)_\lambda}{(q-k)^2}\right]. \qquad (8.3.41)$$

利用 f^{abc} 的完全反对称性和式(4.3.4)及(8.3.16),我们可表示群论因子为

$$f^{abc}T^cT^b=\frac{1}{2}f^{abc}[T^c,T^b]=\frac{i}{2}f^{abc}f^{cbd}T^d$$
$$=-\frac{i}{2}C_AT^a, \qquad (8.3.42)$$

再在(8.3.41)中令 $m=0$,利用积分公式(8.3.14)可得到 L_7 的极点项为

$$L_7 = \frac{3ig^3C_A}{32\pi^2\epsilon}(1-\alpha)(T^a)_{\alpha\beta}\gamma_\mu + \cdots. \qquad (8.3.43)$$

因此，在 MS 重整化方案下式(8.3.37)和(8.3.40,43)及(8.3.4)给出

$$Z_1^\psi = 1 + K_1 = 1 - \frac{g^2}{32\pi^2\epsilon}[3C_A + (C_A + 4C_F)\alpha]. \qquad (8.3.44)$$

而 Z_1^g、Z_1^B、和 Z_4 可由式(8.3.6)、(8.3.24)、(8.3.29)、(8.3.35)和(8.3.44)求得：

$$Z_1^\psi = Z_1^\psi Z_2^{-1}\tilde{Z}_3 = 1 - \frac{g^2C_A}{16\pi^2\epsilon}(3-2\alpha), \qquad (8.3.45)$$

$$Z_1^B = Z_1^\psi Z_2^{-1} Z_3$$
$$= 1 - \frac{g^2}{32\pi^2\epsilon}\left[\left(-\frac{17}{3}+3\alpha\right)C_A + \frac{16}{3}T_F\right], \qquad (8.3.46)$$

$$Z_4 = (Z_1^\psi Z_2^{-1} Z_3^{1/2})^2$$
$$= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon}\left[\left(-\frac{4}{3}+2\alpha\right)C_A + \frac{8}{3}T_F\right]. \qquad (8.3.47)$$

8.4 重整化群方程和渐近自由

通过前面对 QED 和 QCD 有关重整化问题的讨论，我们看到场论的重整化是与一些具有质量量纲的参数有关的，例如在维数正规化中引进的重整化标度因子 μ. 人们自然要问，随着 μ 的改变规范场论的格林函数是如何变化的？为了回答这个问题，我们需要注意重整化的和未重整化的(或裸的)1PI 格林函数之间的联系. 设 $\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,g,m,\alpha,\mu)$ 是重整化的1PI n 点格林函数. 其中分别有 n_B 和 n_F 个点与规范场外线和费米场外线相连接，即

$$n = n_B + n_F, \qquad (8.4.1)$$

g、m 和 α 分别是重整化的耦合常数、费米子质量和规范固定参数. 而 $\Gamma_B^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,g_B,m_B,\alpha_B)$ 是未重整化的1PI n 点格林函数. 特

别需要注意的是 $\Gamma_B^{(n)}$ 与 μ 无关(μ 仅在重整化时才被引进). 按照格林函数的定义[类似于(5.3.6)],重整化的和未重整化的格林函数之间的联系为

$$\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,g,m,\alpha,\mu)=Z_1^{n_F/2}Z_3^{n_B/2}\Gamma_B^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,g_B,m_B,\alpha_B), \tag{8.4.2}$$

其中 Z_3 和 Z_2 由(8.3.4)式中的第一、二式所定义. 如果我们保持 g_B、m_B 和 α_B 固定,对(8.4.2)式作微分 $\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}$,得到

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial g}+\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial m}+\mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\alpha}\\&=\frac{n_F}{2}Z_1^{n_F/2-1}Z_3^{n_B/2}\mu\frac{\partial Z_1}{\partial\mu}\Gamma_B^{(n)}+\frac{n_B}{2}Z_1^{n_F/2}Z_3^{n_B/2-1}\mu\frac{\partial Z_3}{\partial\mu}\Gamma_B^{(n)}.\end{aligned} \tag{8.4.3}$$

定义函数

$$\begin{cases}\beta_g=\mu\dfrac{\partial g}{\partial\mu},\\ \beta_\alpha=\mu\dfrac{\partial\alpha}{\partial\mu},\\ \gamma_m=-\dfrac{\mu}{m}\dfrac{\partial m}{\partial\mu},\\ \gamma_B=Z_3^{-1/2}\mu\dfrac{\partial Z_3^{1/2}}{\partial\mu},\\ \gamma_F=Z_2^{-1/2}\mu\dfrac{\partial Z_2^{1/2}}{\partial\mu},\end{cases} \tag{8.4.4}$$

则式(8.4.3)可表示为

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta_g\frac{\partial}{\partial g}+\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\gamma_m\frac{\partial}{\partial m}-n_B\gamma_B-n_F\gamma_F\right)\cdot\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,g,m,\alpha,\mu)=0. \tag{8.4.5}$$

这通常称为重整化群方程,它表示当重整化标度因子 μ 改变时,重整化量 g,m 和 α 作相应的改变使得未重整的格林函数(与 μ 无关)保持不变.

重整化群方程(8.4.5)的无量纲系数函数 β_g、β_c、γ_m、γ_B、和 γ_F 一般可表为 g 和 $\frac{m}{\mu}$ 的函数，但当我们采用质量无关的重整化方案，如 MS 方案或 $\overline{\text{MS}}$方案时，m/μ 的依赖性消失，它们仅是 g 的函数，这时，重整化群方程非常便于应用. 利用上一节中所得到的重整化常数可以计算 QCD 中这些系数函数在 MS 方案下到单圈阶的值，例如 β_g 的计算如下：

引进耦合常数重整化常数 Z_g：

$$g_B = Z_g g. \tag{8.4.6}$$

由定义(8.3.5)及8.3节中所算得的重整化常数，我们有

$$Z_g = Z_1^{\psi} Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_1^{\psi} \tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} = Z_1^{B} Z_3^{-3/2}$$

$$= Z_4^{1/2} Z_3^{-1} = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right). \tag{8.4.7}$$

注意到式(8.3.8)，在 d 维空间，定义(8.4.6)变为

$$g = \kappa_B \mu^{-\epsilon/2} Z_g^{-1} \tag{8.4.8}$$

把它代入式(8.4.4a)，对 μ 求导后(记住 g_B 固定)再用 g 表示得

$$\beta_g = -\frac{\epsilon}{2} g - \kappa\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu}. \tag{8.4.9}$$

准确到单圈阶(或 g_B^2)，可表示(8.4.7)式为

$$Z_g = 1 - \frac{g_B^2 \mu^{\epsilon}}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right)$$

$$\ln Z_g = -\frac{g_B^2 \mu^{\epsilon}}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right).$$

因而

$$\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} = \frac{g_B^2 \mu^{\epsilon}}{8\pi^2}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right).$$

或回过来用 g 表示，准确到 g^2 阶，有

$$\mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} = \frac{g^2}{8\pi^2}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right).$$

把它代入式(8.4.9)得到

$$\beta_g = -\frac{\epsilon}{2}g - bg^3, \tag{8.4.10}$$

其中已记

$$b = \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F\right). \tag{8.4.11}$$

类似地，利用定义(8.3.5)以及(8.3.24)、(8.3.35)、(8.3.36)并注意到(8.3.8)及 g_B、m_B、α_B 固定，则从(8.4.4)可求得

$$\beta_\alpha = \frac{g^2\alpha}{8\pi^2}\left[\left(\frac{13}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)C_A - \frac{4}{3}T_F\right], \tag{8.4.12}$$

$$\gamma_m = \frac{3g^2T_F}{8\pi^2}, \tag{8.4.13}$$

$$\gamma_B = -\frac{g^2}{16\pi^2}\left[\left(\frac{13}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)C_A - \frac{4}{3}T_F\right], \tag{8.4.14}$$

$$\gamma_F = \frac{g^2C^F\alpha}{16\pi^2}. \tag{8.4.15}$$

重整化群方程的一个重要应用是讨论格林函数的标度行为，即当外线动量 $p_1,\cdots,p_n \to sp_1,\cdots,sp_n$ (s 是无量纲参量)时的行为. 我们先来讨论上述 $n(=n_B+n_F)$ 点1PI 格林函数 $\Gamma^n(p_1,\cdots,p_n,\cdots)$ 在 d 维空间的量纲幂次. 生成泛函 Γ 是无量纲的，而

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,\cdots) = \frac{\delta^n\Gamma}{\delta B(x_1)\cdots\delta B(x_{n_B})\delta\psi(x_{n_B-1})\cdots\delta\psi(x_n)}.$$

由于

$$\frac{\delta B(x)}{\delta B(x')} = \frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(x')} = \delta^d(x-x'),$$

所以，每进行一次 $\frac{\delta}{\delta B}$ 和 $\frac{\delta}{\delta\psi}$ 的运算就分别使 Γ 的质量量纲幂次增加 $d-\left(\frac{d}{2}-1\right)$ 和 $d-\frac{1}{2}(d-1)$，其中，$\frac{d}{2}-1$ 和 $\frac{1}{2}(d-1)$ 分别是胶子场 $B(x)$ 和夸克场 $\psi(x)$ 在 d 维空间的质量量纲幂次. 因此，$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 的质量量纲幂次为

$$n_B\left[d-\left(\frac{d}{2}-1\right)\right]+n_F\left[d-\frac{1}{2}(d-1)\right].$$

再利用 $\Gamma^{(n)}(\cdots,x_i,\cdots)$ 与 $\Gamma^{(n)}(\cdots,p_i,\cdots)$ 之间的傅立叶变换关系(8.2.24)即可得出 $\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,\cdots)$ 的质量量纲幂次为

$$d_\Gamma = d - n_B\left(\frac{d}{2}-1\right) - \frac{1}{2}n_F(d-1), \qquad (8.4.16)$$

所以 $\Gamma^{(n)}(sp_1,\cdots,sp_n,g,m,\alpha,\mu)$ 是 $p_1,\cdots,p_n,m,\mu$ 的 d_Γ 次齐次函数. 因此,有

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s}+m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\Gamma^{(n)}(sp_1,\cdots,sp_n,g,m,\alpha,\mu)$$
$$=d_\Gamma\Gamma^{(n)}(sp_1,\cdots,sp_n,g,m,\alpha,\mu). \qquad (8.4.17)$$

把它与重整化群方程(8.4.5)比较,我们可以消去 $\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu}$ 得到

$$\left[-s\frac{\partial}{\partial s}+\beta_g\frac{\partial}{\partial g}+\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-n_B\gamma_B-n_F\gamma_F+d_\Gamma\right]$$
$$\cdot\Gamma^{(n)}(sp_1,\cdots,sp_n,g,m,\alpha,\mu)=0. \qquad (8.4.18)$$

再引进跑动耦合常数 $\tilde{g}(s)$、跑动规范固定参数 $\tilde{\alpha}(s)$以及跑动质量 $\tilde{m}(s)$,它们的定义为

$$s\frac{\partial\tilde{g}(s)}{\partial s}=\beta_g(\tilde{g}(s)), \qquad (8.4.19)$$

$$s\frac{\partial\tilde{\alpha}(s)}{\partial s}=\beta_\alpha(\tilde{g}(s),\tilde{\alpha}(s)), \qquad (8.4.20)$$

$$s\frac{\partial\tilde{m}(s)}{\partial s}=-[1+\gamma_m(\tilde{g}(s),\tilde{\alpha}(s))]\tilde{m}(s), \qquad (8.4.21)$$

具有初始条件:

$$\tilde{g}(1)=g(\mu)\equiv g, \qquad (8.4.22)$$

$$\tilde{\alpha}(1)=\alpha(\mu)\equiv\alpha, \qquad (8.4.23)$$

$$\tilde{m}(1)=m(\mu)\equiv m. \qquad (8.4.24)$$

从式(8.4.4*a*),(8.4.4*b*)和(8.4.4*c*)可以看出.

$$\tilde{g}(s)=g(s\mu), \qquad (8.4.25)$$

$$\tilde{\alpha}(s)=\alpha(s\mu), \qquad (8.4.26)$$

$$\tilde{m}(s)=s^{-1}m(s\mu), \qquad (8.4.27)$$

其中 $g(s\mu)$、$\alpha(s\mu)$和 $m(s\mu)$是用 $s\mu$ 来重新标度 μ 时的重整化量.

于是方程(8.4.18)的解可以利用跑动量 $\tilde{g}(s)$,$\tilde{\alpha}(s)$和 $\tilde{m}(s)$表示为

$$\Gamma^{(n)}(sp_1,\cdots,sp_n,g,m,\alpha,\mu)$$

$$=s^{d_\Gamma}\exp\left(-\int_1^s\frac{ds'}{s'}\left[n_B\gamma_B\left(\tilde{g}(s'),\tilde{\alpha}(s')\right)+n_F\gamma_F\left(\tilde{g}(s'),\tilde{\alpha}(s')\right)\right]\right)$$

$$\cdot\Gamma^{(n)}\left(p_1,\cdots,p_n,\tilde{g}(s),\tilde{\alpha}(s),\tilde{m}(s),\mu\right). \tag{8.4.28}$$

利用 β_g,β_α和 γ_m的单圈阶的明显表达式(8.4.10),(8.4.12)和(8.4.13)我们可以求得 $\tilde{g}(s)$,$\tilde{\alpha}(s)$和 $\tilde{m}(s)$. 下面以求 $\tilde{g}(s)$为例,由(8.4.19)和(8.4.10)式,有

$$s\frac{\partial\tilde{g}(s)}{\partial s}=-\frac{\epsilon}{2}\tilde{g}(s)-b\tilde{g}^3(s). \tag{8.4.29}$$

在四维情形($\epsilon=0$)下,利用初始条件(8.4.22)可解得

$$\tilde{g}^2(s)=g^2(1+2bg^2\ln s)^{-1}, \tag{8.4.30a}$$

或等价地

$$\tilde{g}^{-2}(s)=g^{-2}+2b\ln s, \tag{8.4.30b}$$

其中 b 由式(8.4.11)给出. 对 QCD,$b>0$. 于是从式(8.4.30)我们看到 $\tilde{g}^2(s)$随着 s 的增大而增大,当 $s\to\infty$时,$\tilde{g}^2(s)$(对数地)趋于零. 这种现象通常称为渐近自由. 回到式(8.4.28),我们发现,当要计算大动量下的格林函数时,其解可由小的跑动耦合常数 $\tilde{g}(s)$给出. 因此,我们可以利用对于 $\tilde{g}(s)$的微扰论来计算它. 而对于小动量(或大距离)行为,应由大的跑动耦合常数描写,因此微扰论是不适用的.

第九章　对称性自发破缺和电弱统一的 W-S 模型

从第四章的讨论中，我们知道一个定域规范不变的理论所涉及的规范场是无质量的. 这在讨论电磁作用时当然没有问题，因为它的规范场——光子是无质量的. 但是由于弱作用的短程性，传递它的规范粒子(称为中间矢量玻色子)必须是有质量的. 因此，为了把弱作用也纳入定域规范不变的理论框架中，首先要解决的问题是如何使规范粒子获得质量. 这个问题的解决依赖于对称性自发破缺的思想. 这一章中，我们将首先讨论什么是对称性自发破缺，考察整体和定域不变的自发破缺机制，分析它们的特点；然后，利用它们讨论电弱统一的 W-S 模型.

9.1　真空简并和对称性自发破缺

一个量子系统可能处于不同的能态，其能量最低态(基态)称为真空. 如果对应于最低能量，只有唯一的真空，则说真空是非简并的；否则，称真空是简并的. 对此，我们也可采用如下的表述：在某一变换群 G 下，如果真空变为自身，则说真空是关于群 G 不变的(非简并)；否则：称真空是关于群 G 非不变的(简并).

在量子理论中，真空对于群 G 的不变性和拉氏量密度对于群 G 的不变性之间由 Coleman 定理相联系，它包含下列二方面内容：

1)如果真空是不变的，则拉氏量密度也一定不变. 此时，称体系具有精确对称性. 这意味着真空的对称性就是世界的对称性.

2)如果真空是非不变的，则拉氏量密度既可能是非不变的，也

可能是不变的. 在这二种情况下，对称性在总体上是破缺的. 前者称为对称性明显破缺，后者则称为对称性自发破缺.

我们来考察两类对称性自发破缺的例子.

(一) 整体对称性的自发破缺和 Goldstone 定理

我们考虑复标量场的 φ^4 理论，其拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda(\varphi^* \varphi)^2, \qquad (9.1.1)$$

λ 项表示自相互作用. 在通常的标量场论中，$m^2(>0)$ 项是质量项. 但是，现在 m^2 仅作为参数它可以是负的，因而不再是质量项. 显然，$\mathscr{L}$ 在整体规范变换

$$\varphi \to \varphi' = e^{i\Lambda}\varphi \quad (\Lambda \text{ 与 } x \text{ 无关}) \qquad (9.1.2)$$

下是不变的.

按照式(2.2.31)，所考虑模型的能量密度为

$$\varepsilon = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + \nabla\varphi^* \nabla\varphi + m^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2. \qquad (9.1.3)$$

能量的最小值或真空由下列条件确定

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = m^2 \varphi^* + 2\lambda \varphi^{*2} \varphi = 0, \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi^*} = m^2 \varphi + 2\lambda \varphi^* \varphi^2 = 0. \end{cases} \qquad (9.1.4)$$

由此，当 $m^2 > 0$ 时，$\varphi^* = \varphi = 0$ 给出能量的最小值(图9.1.1a). 而当 $m^2 < 0$ 时，$\varphi^* = \varphi = 0$ 给出局部极大，能量的极小值由

$$|\varphi| = \left(-\frac{m^2}{2\lambda}\right)^{1/2} \equiv a > 0 \qquad (9.1.5)$$

给出(图9.1.1b). 前者 ($m^2 > 0$) 相应于真空在变换(9.4.2)下是不变的，即真空是非简并的. 故模型具有精确对称性. 而后者表示系统具有无穷多个真空，其中每一个与复平面 φ 上的半径为 a 的圆周上的一个点相对应，即真空是无穷简并的. 在变换(9.1.2)下，任何一个真空(圆周上的某点)变为另一个真空(圆周上的另一点)，即真空在 $U(1)$ 群变换下是非不变的，故模型具有自发破缺的

$U(1)$对称性.

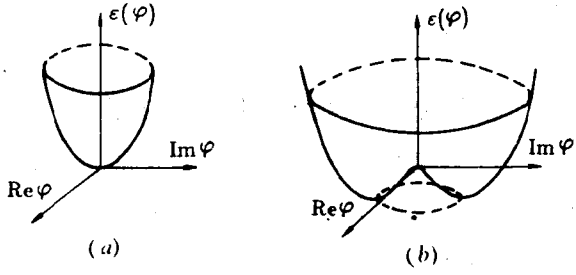


图 9.1.1 复 φ^4 场论的真空

在量子理论中，φ成为算符，式(9.1.5)对应着不为零的真空期望值：

$$|\langle 0|\varphi|0\rangle| = a \neq 0, \tag{9.1.6}$$

这是真空简并的标志. 在所有的简并真空中，物理真空只能实现其中的一个，而物理的量子场是围绕物理真空的激发. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)], \tag{9.1.7}$$

选择物理真空为

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = a, \qquad \langle 0|\varphi_2|0\rangle = 0. \tag{9.1.8}$$

现在令

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) + i\phi_2(x)] = \varphi(x) - a, \tag{9.1.9}$$

则由式(9.1.7)和(9.1.8)，有

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0, \tag{9.1.10}$$

$\phi(x)$是物理的量子场. 把式(9.1.9)代入到式(9.1.1)，我们可以用$\phi(x)$来表示 $\mathscr{L}$：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - 2\lambda a^2\phi_1^2$$

$$- \sqrt{2}\lambda a\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \lambda a^4, \tag{9.1.11}$$

由此可以看出，场 $\phi_1(x)$ 具有质量 $2a\sqrt{\lambda}$，而场 $\phi_2(x)$ 是无质量的. 通常称 $\phi_2(x)$ 为 Goldstone 场(粒子).

需要强调的是，在量子场论中，整体连续对称性的自发破缺必然导致零质量 Goldstone 粒子的出现. 这是一个普遍性的结论，称为 Goldstone 定理. 下面，我们来给出它的简要证明.

设 $\mathscr{L}$ 是在由场的变换

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \exp(-ia^aT^a)\varphi(x) \tag{9.1.12}$$

所形成的变换群 G 下不变的，其中 T^a 是群 G 的生成元，参数 α^a 与 x 无关. 由奈特定理，相应的流

$$J^{\mu a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} T^a \varphi \tag{9.1.13}$$

具有零散度

$$\partial^\mu J^a_\mu = 0, \tag{9.1.14}$$

而相应的荷

$$Q^a = \int \mathrm{d}^3 x J^{0a} \tag{9.1.15}$$

是守恒的，且满足等时对易关系：

$$[Q^a, \varphi(x)] = -T^a\varphi(x). \tag{9.1.16}$$

在对称性自发破缺的情况下，利用式(9.1.6)，从上式可以得到

$$\langle 0|[Q^a, \varphi(x)]|0\rangle = \langle 0|Q^a\varphi(x) - \varphi(x)Q^a|0\rangle \neq 0, \tag{9.1.17}$$

把式(9.1.15)代入，并插入中间态的完备集，有

$$\begin{aligned}\langle 0|[Q^a, \varphi(x)]|0\rangle = \sum_n \int \mathrm{d}^3 y [&\langle 0|J^{0a}(y)|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle \\ &- \langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(y)|0\rangle]|_{x^0=y^0} \\ \neq 0.\end{aligned} \tag{9.1.18}$$

再利用平移不变性，有

$$J^{0a}(y) = e^{iP\cdot y} J^{0a}(0) e^{iP\cdot y}, \tag{9.1.19}$$

其中 P 为平移变换生成元，即为能量动量算符. 现在把它代入到公式(9.1.18)中，有

$$\begin{aligned}\langle 0|[Q^a,\varphi(x)]|0\rangle &= \sum_n \int d^3y[\langle 0|J^{0a}(0)|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle e^{iP_n\cdot y} \\ &\quad -\langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(0)|0\rangle e^{-iP_n\cdot y}]|_{x^0=y^0} \\ &= \sum_n \delta^3(p_n)[\langle 0|J^{0a}(0)|n\rangle\langle n|\varphi(x)|0\rangle e^{iM_n\cdot y^0} \\ &\quad -\langle 0|\varphi(x)|n\rangle\langle n|J^{0a}(0)|0\rangle e^{-iM_n\cdot y^0}]|_{x^0=y^0} \\ &\neq 0, \end{aligned} \tag{9.1.20}$$

其中我们已进行了空间积分，且由于 $\delta^3(p_n)$，已令 $p_n^0 = M_n$ 为中间态 $|n\rangle$ 的质量.

现在，我们要证明(9.1.20)与 y^0 无关. 为此，写式(9.1.14)为

$$\frac{\partial}{\partial y^0}J^{0a}(y) - \nabla_y \cdot \boldsymbol{J}^a(y) = 0. \tag{9.1.21}$$

上式对空间积分得

$$\frac{\partial}{\partial y^0}\int d^3y J^{0a}(y) = \int d^3y \nabla_y \cdot \boldsymbol{J}^a(y) = 0, \tag{9.1.22}$$

利用它，从(9.1.20)式的左边有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^0}\langle 0|[Q^a,\varphi(x)]|0\rangle &= \frac{\partial}{\partial y^0}\int d^3y\langle 0|[J^{0a}(y),\varphi(x)]|0\rangle \\ &= \int d^3y\langle 0|[\nabla\cdot\boldsymbol{J}^a(y),\varphi(x)]|0\rangle \\ &= \int d\sigma\cdot\langle 0|[\boldsymbol{J}^a(y),\varphi(x)]|0\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{9.1.23}$$

这表明式(9.1.20)与 y^0 无关.

最后我们来考察公式(9.1.20)，要使它与 y^0 无关则意味着要求对 $\boldsymbol{p}_n = 0$ 的中间态 $|n\rangle$，必须有 $M_n = 0$. 而且，由于有不等于零的限制，这样的中间态是一定会存在的，否则，只剩下真空的贡献($|n\rangle = |0\rangle$)，则它一定等于0. 这样，就证明了 Goldstone 定理.

（二）定域对称性的自发破缺和 Higgs 机制

现在，我们要求拉氏量密度(9.1.1)在 $U(1)$ 定域规范变换

$$\varphi \to \varphi' = e^{i\Lambda(x)}\varphi \tag{9.1.24}$$

下是不变的. 从4.2节我们知道，这必然导致通过协变导数引进规范场(电磁场) A^μ，使(9.1.1)变为

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^* (\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi - m^2\varphi^*\varphi$$

$$- \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{9.1.25}$$

与前面类似，其中 m^2 作为参数. 当 $m^2 < 0$，且忽略规范场，真空仍由式(9.1.5)给出. 它是无穷简并的. 我们再次选择物理真空位置为式(9.1.8)，并通过式(9.1.9)来规定物理场 $\phi(x)$. 把(9.1.9)代入拉氏量密度(9.1.25)，得到

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2a^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2$$

$$- 2\lambda a^2\phi_1^2 - \sqrt{2}\,eaA^\mu\partial_\mu\phi_2 + \mathscr{L}_1, \tag{9.1.26a}$$

其中

$$\mathscr{L}_1 = eA^\mu(\phi_2\partial_\mu\phi_1 - \phi_1\partial_\mu\phi_2) + \sqrt{2}\,e^2aA_\mu A^\mu\phi_1$$

$$+ \frac{e^2}{2}A_\mu A^\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

$$- \sqrt{2}\,\lambda a\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \lambda a^4 \tag{9.1.26b}$$

表示 A_μ、ϕ_1、ϕ_2 之间的相互作用. 这个拉氏量密度的绝妙之处在于其第二项(正比于 A_μ^2)表示规范粒子获得了质量. 此外，场 ϕ_1 也是有质量的，而场 ϕ_2 无质量. 但是它也含有混合项(正比于 $A^\mu\partial_\mu\phi_2$)，似乎表示传播中的规范粒子可能转变成 ϕ_2，因此，ϕ_2 看来并不是物理场. 事实上，ϕ_2 可以通过规范变换加以消除. 为此，我们注意拉氏量密度(9.1.26)具有下列定域规范变换下的不变性：

$$(\phi+a) \to (\phi'+a) = e^{i\Lambda(x)}(\phi+a), \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \tag{9.1.27}$$

对于无限小变换，$\Lambda(x)\ll 1$，上列变换可化为

$$\begin{cases}\phi'_1=\phi_1-\Lambda\phi_2,\\ \phi'_2=\phi_2+\Lambda(\phi_1+\sqrt{2}a),\\ A'_\mu=A_\mu+\dfrac{1}{e}\partial_\mu\Lambda.\end{cases}\tag{9.1.28}$$

因此，可以通过适当地选择 $\Lambda(x)$，使 $\phi'_2=0$，同时使混合项消失. 这样的规范选择通常称为取么正规范或物理规范. 在么正规范下，翻转变换(9.1.28)，精确到 Λ 量级，有

$$\begin{cases}\phi_1=\phi'_1\\ \phi_2=-\Lambda(\phi'_1+\sqrt{2}a)\quad(\phi'_2=0!)\\ A_\mu=A'_\mu-\dfrac{1}{e}\partial_\mu\Lambda.\end{cases}\tag{9.1.29}$$

把它代入(9.1.26)，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'=&-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}+e^2a^2A'_\mu A'^\mu+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi'_1)^2\\&-2\lambda a^2\phi'^2_1+\mathscr{L}'_1,\end{aligned}\tag{9.1.30a}$$

其中

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu}&=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu,\\ \mathscr{L}'_1&=\sqrt{2}e^2aA'_\mu A'^\mu\phi'_1+\frac{e^2}{2}A'_\mu A'^\mu\phi'^2_1-\frac{\lambda}{4}\phi'^4_1\\&\quad-\sqrt{2}\lambda a\phi'^3_1+\lambda a^4.\end{aligned}\tag{9.1.30b}$$

这个拉氏量密度只包含二个场：规范场 A'_μ 和标量场 ϕ'_1，它们都是有质量的(前者的质量为 $\sqrt{2}ea$，后者为 $2a\sqrt{\lambda}$). 在整体对称性自发破缺时作为 Goldstone 粒子的 ϕ_2 场消失了.

上面的讨论结果表明，在定域对称性自发破缺并选定么正规范之后，理论中只保留有物理粒子，Goldstone 粒子消失了，规范粒子获得了质量. 这通常称为 Higgs 机制，而场 $\phi'_1(x)$ 描述的有质量的标量粒子称为 Higgs 粒子.

值得指出的是，Higgs 机制保持自由度数不变：标量粒子 ϕ_2 的

消失减少了一个自由度，规范场获得质量后增加了一个自由度(无质量的矢量规范粒子只有二个横向自由度，有质量矢量场还有纵向自由度). 从这个意义上我们可以说，规范粒子吃掉标量场 ϕ_2 而获得了质量.

(三) 非阿贝尔情形

考虑由下列拉氏量密度所描述的模型：

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2, \quad (9.1.31)$$

其中 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ 是复标量场的二重态；m^2 为参数. 显然，$\mathscr{L}$ 对于下列内部空间的整体 $SU(2)$ 规范变换是不变的：

$$\begin{cases} \varphi \to \varphi' = \exp\left(-\dfrac{i}{2}\alpha^k \tau^k\right)\varphi, \\ \varphi^\dagger \to \varphi'^\dagger = \varphi^\dagger \exp\left(\dfrac{i}{2}\alpha^k \tau^k\right), \end{cases} \quad (9.1.32)$$

其中 $\tau^k (k = 1,2,3)$ 为通常的泡利矩阵，变换参数 α^k 与 x 无关.

当 $m^2 < 0$ 时，真空满足条件

$$(\varphi^\dagger \varphi)^{1/2} = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2} = \left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{1/2} \equiv a > 0, \quad (9.1.33)$$

这表示真空是无穷简并的，所有真空的集合为一半径为 a 的四维球的边界(三维超球面). 选择物理真空为

$$\varphi = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.1.34)$$

引进四个实标量场 $\sigma(x)$ 和 $\theta^k(x)(k = 1,2,3)$ 使得

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}a + \sigma + i\theta^k \tau^k)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \varphi^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1)(\sqrt{2}a + \sigma - i\theta^k \tau^k). \end{cases} \quad (9.1.35)$$

容易验证，与物理真空(9.1.34)相应的是

$$\sigma = \theta^k = 0, \quad (9.1.36)$$

这表示 σ 和 θ^k 是围绕物理真空的激发，因而它们是物理场．把式(9.1.35)代入(9.1.31)，我们得到用物理场 $\sigma(x)$ 和 θ^k 表示的拉氏量密度：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta^k)(\partial^\mu\theta^k) - 2\lambda a^2\sigma^2$$
$$- \sqrt{2}\,\lambda a\sigma(\sigma^2 + \theta^k\theta^k) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \theta^k\theta^k)^2 + \lambda a^4. \quad (9.1.37)$$

我们看到，σ 场是有质量的，而 θ^k 是无质量的、它们是三个 Goldstone 粒子．这证实了整体对称性的自发破缺必然产生 Goldstone 粒子．

现在，我们要求 $\mathscr{L}$ (9.1.31)在定域 $SU(2)$ 规范变换[即变换式(9.1.32)中的 $\alpha^k \to \alpha^k(x)$]下是不变的，从4.3节我们知道，这时必须引进规范场 A_μ^k，在(9.1.31)中的导数用相应的协变导数来代替，并加上规范场的拉氏量密度，从而得到定域 $SU(2)$ 规范不变的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^kF^{\mu\nu k} + \left(\partial_\mu\varphi^\dagger - \frac{i}{2}g\varphi^\dagger\tau^kA_\mu^k\right)\left(\partial^\mu\varphi + \frac{i}{2}g\tau^kA^{\mu k}\varphi\right)$$
$$- m^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2. \quad (9.1.38)$$

忽略规范场，真空条件仍由式(9.1.33)表示，仍选择式(9.1.34)为物理真空，物理场仍然由式(9.1.35)确定．把公式(9.1.35)代入 $\mathscr{L}$ (9.1.38)，我们得到含有 Goldstone 粒子 θ^k 的拉氏量密度：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^kF^{\mu\nu k} + \frac{1}{4}g^2a^2A_\mu{}^kA^{\mu k} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - 2\lambda a^2\sigma^2$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta^k)(\partial^\mu\theta^k) + \frac{1}{\sqrt{2}}ga(\partial^\mu\theta^k)A_\mu{}^k + \mathscr{L}_1, \quad (9.1.39)$$

其中 $\mathscr{L}_1$ 是场 A_μ^k、σ 和 θ^k 的相互作用部分，我们没有把它们明显表示出来．$\mathscr{L}$ (9.1.39)的显著特点是规范场 A_μ^k 具有质量．但是混合项 $A_\mu^k\partial^\mu\theta^k$ 的存在表示 θ^k 不是非常物理的，象前面一样可通过规范选择把它消去．事实上，$\mathscr{L}$ (9.1.39)对于下列定域规范变换是不变的：

$$\begin{cases}\varphi+a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\to\varphi'+a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\exp\left(-\frac{i}{2}\alpha^k\tau^k\right)\left[\varphi+a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right],\\ \varphi^\dagger+a(0\ 1)\to\varphi'^\dagger+a(0\ 1)=\left[\varphi^\dagger+a(0\ 1)\right]\exp\left(\frac{i}{2}\alpha^k\tau^k\right),\\ A_\mu^k\to A'^k_\mu=A_\mu^k+\varepsilon^{kij}\alpha^iA_\mu^j-\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^k,\end{cases}$$

(9.1.40)

其中

$$\begin{cases}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma+i\theta^k\tau^k)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad\varphi'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma'+i\theta'^k\tau^k)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\\ \varphi^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1)(\sigma-i\theta^k\tau^k),\quad\varphi'^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(0\ 1)(\sigma'-i\theta'^k\tau^k).\end{cases}$$

(9.1.41)

因此，我们可对 $\mathscr{L}$ (9.1.39)作规范变换(9.1.40)，通过适当地选择规范，使 $\theta'^k=0$(通常所谓取么正规范)，则 Goldstone 场消失，得到仅含有物理场 σ' 和 A'^k_μ 的拉氏量密度

$$\mathscr{L}'=-\frac{1}{4}F'^k_{\mu\nu}F'^{\mu\nu k}+\frac{1}{4}g^2a^2A'^k_\mu A'^{\mu k}+\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma')(\partial^\mu\sigma')-2\lambda a^2\sigma'^2+\mathscr{L}'_1,\tag{9.1.42}$$

这里 $\mathscr{L}'_1$ 仅是 A'^k_μ 和 σ' 的相互作用部分. 容易看出 $\mathscr{L}$ (9.1.42)所描述的模型含有质量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}ga$ 的规范矢量场的三重态 A'^k_μ 和质量为 $2a\sqrt{\lambda}$ 的 Higgs 场 σ'. 因此，我们可以说，在定域规范对称性自发破缺后，Higgs 机制使规范粒子吃掉 Goldstone 粒子而变为有质量，模型的总自由度数并没有改变.

9.2 手征对称性和弱作用的 V-A 理论

弱作用过程宇称不守恒. 这说明左右对称性(空间坐标轴的反射对称性)并不是物理规律的一个基本对称性. 值得注意的是，弱

作用过程的字称是最大限度的不守恒，即弱流是矢量流和轴矢流以对等的比例混合. 例如从 e 到 ν_e 的弱流 J_μ 为

$$\bar{\psi}_e\gamma_\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_\nu$$

就是矢量流 $\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu$ 和轴矢流 $\bar{\psi}_e\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu$ 的对等混合（通常称为 V-A 型混合）. 这一特点可表述为上述弱流在

$$\psi\to\gamma_5\psi,\qquad \bar{\psi}\to-\bar{\psi}\gamma_5 \tag{9.2.1}$$

的变换下保持不变. 变换(9.2.1)通常称为是狄拉克场的手征变换，γ_5 因此也称为手征算符，上述结果也可表述为弱流具有手征不变性.

狄拉克场的手征态是按

$$\gamma_5\psi=\pm\psi \tag{9.2.2}$$

来定义的，其中本征值为+1的称为右手态，本征值为−1的称为左手态. 利用在3.4节中引进的左、右手投影算符[参见(3.4.59)]

$$\mathscr{P}_L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5),\qquad \mathscr{P}_R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5),$$

它们具有性质(3.4.60)，容易证明左、右手场

$$\psi_L=\mathscr{P}_L\psi,\qquad \psi_R=\mathscr{P}_R\psi$$

分别是 γ_5 的本征值为−1、+1的本征态，故 ψ_L、ψ_R 分别为左、右手态. 显然，

$$\psi=\psi_L+\psi_R, \tag{9.2.3}$$

这表示任何一个狄拉克旋量都可分解为左、右手态的叠加.

值得特别指出的是，在手征变换(9.2.1)下，

$$m\bar{\psi}\psi\to-m\bar{\psi}\psi, \tag{9.2.4}$$

这表示，狄拉克场的质量项是破坏手征对称性的.

在总结弱作用的一系列实验和理论研究结果的基础上人们发展了描述弱作用的 V-A 型流－流耦合唯象理论，它由下列相互作用拉氏量密度表示：

$$\mathscr{L}_I=2\sqrt{2}G_F\mathscr{J}_\lambda^\dagger\mathscr{J}^\lambda, \tag{9.2.5}$$

其中 G_F 是费米弱作用耦合常数，它由 μ 子衰变实验确定为 $G_F = 1.17\times10^{-5}\text{GeV}^{-2} = 1.01\times10^{-5}m_p^{-2}$ （m_p 为质子质量）. 弱流 $\mathscr{J}_\lambda$ 包括轻子弱流 j_λ 和夸克弱流 J_λ 二部分：

$$\mathscr{J}_\lambda = j_\lambda + J_\lambda. \tag{9.2.6}$$

轻子弱流 j_λ 的形式为

$$j_\lambda = \frac{1}{2}\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_e + (e\to\mu) + (e\to\tau), \tag{9.2.7}$$

其中 $e(\mu,\tau)$ 和 $\nu_e(\nu_\mu,\nu_\tau)$ 分别为电子（μ 子，τ 子）和电子型（μ 子型，τ 子型）中微子的场算符. 夸克弱流 J_λ 的形式为

$$J_\lambda = \frac{1}{2}\bar{u}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)d_\theta + \frac{1}{2}\bar{c}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)s_\theta, \tag{9.2.8}$$

$$d_\theta = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c, \quad s_\theta = s\cos\theta_c - d\sin\theta_c, \tag{9.2.9}$$

其中 d、u、s、c 是夸克场算符，$\theta_c = 13.17°$ 为 Cabbibo 角. 容易看出，弱流可用左手态表出，例如

$$\frac{1}{2}\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_e = \bar{e}_L\gamma_\lambda\nu_{eL},$$

这表示 V-A 型轴矢流是左手流. 因此，对所有的轻子和夸克，只有左手旋量参与弱作用而右手旋量则完全不参与. 这提示我们，左手旋量和右手旋量具有不同的弱作用量子数，因而可以分属在不同的表示基底中. 这种理论通常称为手征理论. 前已指出，旋量粒子的质量项是破坏手征对称性的，故在手征对称的理论中，旋量粒子都是无质量的. 注意，在真实世界中，除中微子外，其余所有旋量粒子都是有质量的，这是在构造理论模型时需要加以解决的问题.

弱作用的 V-A 理论虽然在低能范围内与实验符合，但在高能弱反应范围内将不可避免地要与实验发生矛盾. 这是因为当能量超过一定限度（几百 GeV）以后，计算结果将破坏么正性. 此外，由于弱作用耦合常数 G_F 具有量纲 $[M]^{-2}$，因而理论是不可重整的. 所以 V-A 理论不是一个完全的理论. (9.2.5)式只是一个在微扰论最低阶用来描述低能现象的有效拉氏量密度.

对 V-A 理论的一个改进是中间矢量玻色子理论，它认为弱相互作用是由大质量的带电中间矢量玻色子传递的，但它并不能解决么正性和重整化的问题. 最终解决这些问题的是电弱统一的规范理论，我们将在下一节中讨论.

9.3 电弱统一的 W-S 模型

从上节的讨论可以看到，弱作用与电磁作用有不少相似之处. 与电磁作用一样，弱作用也具有矢量耦合的性质；也可能是由矢量粒子传递的；弱作用耦合常数也有普适性. 因此电磁作用和弱作用有可能统一地描述. 对称性自发破缺和 Higgs 机制的提出为电弱统一理论的建立完成了最后的准备. Weinberg 和 Salam 分别于1967年和1968年各自独立地提出了这一理论，通常称为电弱统一的标准模型. 在这个理论中，弱作用对应于对称性自发破缺的部分，相应的规范玻色子由于 Higgs 机制而获得了质量，电磁规范对称性则为剩余的对称性. 狄拉克粒子除中微子外也通过 Yukawa 耦合因标量场的真空凝聚而获得了质量. 在这一节里，我们将首先讨论纯轻子的 W-S 模型，然后再讨论加入夸克的情形.

(一) 纯轻子情形

由于弱流中出现 $e_L \to \nu_{eL}$，$\mu_L \to \nu_{\mu L}$ 和 $\tau_L \to \nu_{\tau L}$ 的转换，因此，十分自然的假定是 ν_{eL} 与 e_L，$\nu_{\mu L}$ 与 μ_L 以及 $\nu_{\tau L}$ 与 τ_L 分别组成左手二重态，而 e_R、μ_R 和 τ_R 分别组成右手单态，记为

$$\begin{cases} L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \\ R_e = e_R, \qquad R_\mu = \mu_R, \qquad R_\tau = \tau_R. \end{cases} \tag{9.3.1}$$

假定左手二重态与带电的矢量玻色子 $W_\lambda^{(\pm)}$ 相耦合，则弱作用的拉氏量密度可表示为

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{L}_e\gamma^\lambda\tau_+ L_e W_\lambda^{(+)} + \bar{L}_e\gamma^\lambda\tau_- L_e W_\lambda^{(-)}) + (e\to\mu) + (e\to\tau)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}}(j^{\lambda\dagger} W_\lambda^{(+)} + j^\lambda W_\lambda^{(-)}), \qquad (9.3.2)$$

其中 g 为弱作用耦合常数，$\tau_\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/2$，$\tau^k (k=1,2,3)$ 为泡利矩阵；上面第二个等式利用了轻子弱流(9.2.7)：

$$\begin{cases} j^\lambda = j_L^\lambda = \bar{L}_e\gamma^\lambda\tau_- L_e + (e\to\mu) + (e\to\tau), \\ j^{\lambda\dagger} = j_L^{\lambda\dagger} = \bar{L}_e\gamma^\lambda\tau_+ L_e + (e\to\mu) + (e\to\tau), \end{cases}$$

重新表示 $W_\lambda^{(\pm)}$ 为

$$W_\lambda^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\lambda^{(+)} + W_\lambda^{(-)}), \quad W_\lambda^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\lambda^{(+)} - W_\lambda^{(-)}),$$

则(9.3.1)变为

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{g}{2}\bar{L}_e\gamma^\lambda(\tau^1 W_\lambda^1 + \tau^2 W_\lambda^2)L_e + (e\to\mu) + (e\to\tau). \qquad (9.3.3)$$

我们知道，τ^1、τ^2 并不构成封闭的李代数. 为了构成规范对称群，需要再引进一个生成元 τ^3（另一个泡利矩阵）以及相应的规范玻色子 W_λ^3，将相互作用(9.3.2)扩展为

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{g}{2}\bar{L}\gamma^\lambda\tau^k L W_\lambda^k + (e\to\mu) + (e\to\tau), \qquad (9.3.4)$$

上式中的 τ^3 项代表了一种新的中性弱流与 W_λ^3 的耦合. 容易验证，$T^k = \tau^k/2$ 满足 $SU(2)$群的李代数：

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk} T^k. \qquad (9.3.5)$$

通常，称这个群为弱同位旋群，记作 $SU(2)_W$. T^k 称为弱同位旋，其相应的量子数称为弱(同位旋)荷，记为 T_W，其第3分量记为 T_W^3，而 L 和 R 分别是 $SU(2)_W$ 的左手二重态和右手单态. 对于 L，弱荷 $T_W = \frac{1}{2}$（对上分量中微子 $T_W^3 = \frac{1}{2}$，下分量左手轻子 $T_W^3 = -\frac{1}{2}$）；对于 R，$T_W = 0$. 容易验证轻子电荷 Q 与 T_W^3 的关系是：

$$\begin{cases} \text{对左手态 } L, & Q = T_{\mathrm{W}}^{3} - \dfrac{1}{2}, \\ \text{对右手态 } R, & Q = T_{\mathrm{W}}^{3} - 1. \end{cases} \tag{9.3.6}$$

为了把电磁作用包括进来，需要把 $SU(2)_{\mathrm{W}}$ 扩大. 最简单的方式是直乘一个 $U(1)$ 群. 由于弱同位旋二重态的二个分量的电荷不同，因此这个 $U(1)$ 群不可能是电磁规范群本身. 通常称它为弱超荷群，记作 $U(1)_{Y}$. 其生成元用 Y 表示，称为弱超荷，相应的量子数 Y_{W} 称为超荷. W-S 模型假设 Y_{W} 由下列关系确定

$$Q = T_{\mathrm{W}}^{3} + \frac{1}{2}Y_{\mathrm{W}}, \tag{9.3.7}$$

与(8.3.6)式比较，我们得到

$$\begin{cases} \text{对左手态 } L, & Y_{\mathrm{W}} = -1, \\ \text{对右手态 } R, & Y_{\mathrm{W}} = -2. \end{cases} \tag{9.3.8}$$

现在，我们用 $SU(2)_{\mathrm{W}} \times U(1)_{Y}$ 定域规范不变性来构造电弱统一理论. 考虑下列轻子的手征不变的自由拉氏量密度

$$\mathscr{L} = i\bar{R}_{e}\gamma^{\lambda}\partial_{\lambda}R_{e} + i\bar{L}_{e}\gamma^{\lambda}\partial_{\lambda}L_{e} + (e \to \mu) + (e \to \tau), \tag{9.3.9}$$

容易验证，它既在下列整体 $SU(2)_{\mathrm{W}}$ 变换下不变

$$\begin{cases} L \to e^{-i\alpha^{k}\tau^{k}/2}L, \\ R \to R \quad (SU(2)_{\mathrm{W}} \text{ 单态}), \end{cases} \tag{9.3.10}$$

也在下列整体 $U(1)_{Y}$ 变换下不变

$$\begin{cases} L \to e^{-i\beta Y_{\mathrm{W}}/2}L = e^{i\beta/2}L, \\ R \to e^{-i\beta Y_{\mathrm{W}}/2}R = e^{i\beta}R, \end{cases} \tag{9.3.11}$$

其中已利用了(9.3.8)式. 因此 $\mathscr{L}$ (8.3.9)是整体 $SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{Y}$ 不变的.

如果进一步要求 $\mathscr{L}$ (9.3.9)是定域 $SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{Y}$ 不变的. 对 $SU(2)_{\mathrm{W}}$，这意味着需要引进三个规范场 W_{λ}^{k}，把普通的导数变为协变导数，作用在左手二重态 L 上：

$$\partial_{\lambda}L \to \left(\partial_{\lambda} + \frac{i}{2}g\tau^{k}W_{\lambda}^{k}\right)L, \tag{9.3.12}$$

其中 g 是 $SU(2)_W$ 的耦合常数；对 $U(1)_Y$，则需要引进另一个规范场 X_λ，把普通导数变为协变导数既作用于左手态，也作用于右手态：

$$\begin{cases}\partial_\lambda L \to \left(\partial_\lambda - \dfrac{i}{2}g' X_\lambda\right) L, \\ \partial_\lambda R \to (\partial_\lambda - ig' X_\lambda) R,\end{cases} \tag{9.3.13}$$

其中 g' 是 $U(1)_Y$ 的耦合常数，g' 前的系数对 L 和 R 不同是由于考虑了式(9.3.11)．利用式(9.3.12)和(9.3.13)，并加上规范场的自由拉氏量密度，定域手征 $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ 不变的拉氏量密度可表示为

$$\mathscr{L}_1 = i\bar{R}\gamma^\lambda(\partial_\mu - ig' X_\lambda)R + i\bar{L}\gamma^\lambda\left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g' X_\lambda + \frac{i}{2}g\tau^k W_\lambda^k\right)L$$

$$- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu k} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \tag{9.3.14}$$

其中 $F_{\mu\nu}^k$ 和 $B_{\mu\nu}$ 分别是场 W_λ^k 和 X_λ 的强度张量：

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu W_\nu^k - \partial_\nu W_\mu^k + g\varepsilon^{kij} W_\mu^i W_\nu^j, \tag{9.3.15}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu. \tag{9.3.16}$$

为了使其中的三个规范粒子获得质量，我们借助于 Higgs 机制．为此，需引进具有简并真空的标量 Higgs 场．此外，为了使真空自发破缺时狄拉克场也获得质量，我们需要使 Higgs 场与狄拉克场的左手二重态和右手单态组成 $SU(2)_W$ 不变的 Yukawa 耦合，这要求 Higgs 场应属于 $SU(2)_W$ 的二重态(因而其 $T_W = 1/2$)．这样所需引进的复 Higgs 标量场为

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi^+ \\ \phi^0\end{pmatrix}, \tag{9.3.17}$$

其中各分量的电荷量子数($Q_{\phi^+} = 1$，$Q_{\phi^0} = 0$)可通过要求 Yukawa 耦合电荷守恒得到．再利用公式(9.3.7)可以得到 Higgs 场的超荷为 $Y_W = 1$．满足 $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ 规范不变性要求的 Higgs 场的协变导数为

$$D_\lambda\phi=\left(\partial_\lambda+\frac{i}{2}g\tau^i W_\lambda^i+\frac{i}{2}g'X_\lambda\right)\phi, \tag{9.3.18}$$

于是，包含有与轻子场的 Yukawa 耦合的 Higgs 场的拉氏量密度可表示为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2=&(D_\lambda\phi)^\dagger(D_\lambda\phi)-m^2\phi^\dagger\phi-\lambda(\phi^\dagger\phi)^2-f_e(\bar{L}_e\phi R_e\\&+\bar{R}_e\phi^\dagger L_e)+(e\to\mu)+(e\to\tau),\end{aligned} \tag{9.3.19}$$

其中 f_e、f_μ 和 f_τ 为 Higgs 场与各轻子场的 Yukawa 耦合常数，m^2 是参数. 把 $\mathscr{L}_1$ (9.3.14)和 $\mathscr{L}_2$ (9.3.19)结合在一起，我们就得到包括轻子场，规范场和 Higgs 场的定域手征 $SU(2)_W\otimes U(1)_Y$ 不变的拉氏量密度

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2, \tag{9.3.20}$$

它是 W-S 模型的出发点. 当 $m^2<0$ 时，忽略规范场项和 Yukawa 耦合项，真空满足

$$\langle 0|\phi^\dagger\phi|0\rangle=-\frac{m^2}{2\lambda}\equiv a^2\neq 0, \tag{9.3.21}$$

因而是无穷简并的. 由9.1节的讨论可知，当选择物理真空为

$$\langle 0|\phi|0\rangle=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}, \tag{9.3.22}$$

再取么正规范后，我们可表示 $\phi(x)$ 为

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}0\\a+\dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{9.3.23}$$

这样，Goldstone 粒子消失了，只剩下物理的 Higgs 场 $\sigma(x)$，为了简洁，其他的场仍用原记号表示，把式(9.3.23)代入 $\mathscr{L}$ (9.3.20)，把 L 和 R 的明显表达式(9.3.1)代入，并令

$$\begin{cases}W_\lambda^{(-)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(W_\lambda^1-iW_\lambda^2),\quad W_\lambda^{(+)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(W_\lambda^1+iW_\lambda^2),\\ Z_\lambda=\cos\theta_W W_\lambda^3-\sin\theta_W X_\lambda,\\ A_\lambda=\sin\theta_W W_\lambda^3+\cos\theta_W X_\lambda.\end{cases} \tag{9.3.24}$$

其中 Weinberg 角 θ_W 由下式给出：

$$\mathrm{tg}\theta_W = \frac{g'}{g}, \quad 或 \quad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \tag{9.3.25}$$

则可得到在么正规范下 W-S 模型的轻子部分的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}^L = \mathscr{L}_0^L + \mathscr{L}_1^L, \tag{9.3.26a}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}_1$ 分别为自由部分和相互作用部分，它们的表达式为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_0^L = & -\frac{1}{2}(\partial_\lambda W_\sigma^{(+)} - \partial_\sigma W_\lambda^{(+)})(\partial^\lambda W^{(-)\sigma} - \partial^\sigma W^{(-)\lambda}) \\
& + \frac{g^2a^2}{2} W_\lambda^{(+)} W^{(-)\lambda} - \frac{1}{4}(\partial_\lambda Z_\sigma - \partial_\sigma Z_\lambda)(\partial^\lambda Z^\sigma - \partial^\sigma Z^\lambda) \\
& + \frac{g^2a^2}{4\cos^2\theta_W} Z_\lambda Z^\lambda - \frac{1}{4}(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)(\partial^\lambda A^\sigma - \partial^\sigma A^\lambda) \\
& + \frac{1}{2}\partial_\lambda\sigma\partial^\lambda\sigma - 2\lambda a^2\sigma^2 + i\bar{e}\gamma^\lambda\partial_\lambda e - f_{,a}\bar{e}e \\
& + i\bar{\nu}_e\gamma^\lambda \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\partial_\lambda\nu_e + (e\to\mu) + (e\to\tau),
\end{aligned} \tag{9.3.26b}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_1^L = & -ig\cos\theta_W W_\lambda^{(-)} W_\sigma^{(\ )}(\partial^\lambda Z^\sigma - \partial^\sigma Z^\lambda) \\
& - ig'\cos\theta_W W_\lambda^{(-)} W_\sigma^{(\ )}(\partial^\lambda A^\sigma - \partial^\sigma A^\lambda) \\
& + ig\cos\theta_W (W_\lambda^{(-)}\partial^\lambda W^{(\ )\sigma} - W_\lambda^{(\ )}\partial^\lambda W^{(+)\sigma} \\
& + W_\lambda^{(\ )}\partial^\sigma W^{(-)\sigma} - W_\lambda^{(-)}\partial^\sigma W^{(\ )\lambda}) Z_\sigma \\
& + ig'\cos\theta_W (W_\lambda^{(-)}\partial^\lambda W^{(\ )\sigma} - W_\lambda^{(-)}\partial^\lambda W^{(+)\sigma} \\
& + W_\lambda^{(\ )}\partial^\sigma W^{(-)\sigma} - W_\lambda^{(+)}\partial^\sigma W^{(\ )\lambda}) A_\sigma \\
& - \frac{g^2}{2} W_\lambda^{(-)} W^{(\ )\lambda} W_\sigma^{(-)} W^{(\ )\sigma} \\
& + \frac{g^2}{2} W_\lambda^{(-)} W^{(-)\lambda} W_\sigma^{(\ )} W^{(\ )\sigma} \\
& - g^2\cos^2\theta_W W_\lambda^{(-)} W^{(\ )\lambda} Z_\sigma Z^\sigma + g^2\cos^2\theta_W W_\lambda^{(-)} W_\sigma^{(\ )} Z^\lambda Z^\sigma \\
& - g'^2\cos^2\theta_W W_\lambda^{(-)} W^{(\ )\lambda} A_\sigma A^\sigma + g'^2\cos^2\theta_W W_\lambda^{(+)} W_\sigma^{(\ )} A^\lambda A^\sigma \\
& - 2gg'\cos^2\theta_W W_\lambda^{(-)} W^{(\ )\lambda} Z_\sigma A^\sigma
\end{aligned}$$

$$+ gg'\cos^2\theta_W W_\lambda^{(+)} W_\sigma^{(\ )}(Z^\lambda A^\sigma + Z^\sigma A^\lambda) + \frac{g^2 a}{\sqrt{2}}\sigma W_\lambda^{(+)} W^{(\ )\lambda}$$

$$+ \frac{g^2 a}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\cos^2\theta_W}\sigma Z_\lambda Z^\lambda + \frac{g^2}{4}\sigma^2 W_\lambda^{(+)} W^{(\ )\lambda} + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}\sigma^2 Z_\lambda Z^\lambda$$

$$+ g\sin\theta_W \bar{e}\gamma_\lambda e A^\lambda - \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)eW_\lambda^{(+)}$$

$$- \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_e W_\lambda^{(\ )} - \frac{g}{4\cos\theta_W}[\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_e$$

$$- \bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5-4\sin^2\theta_W)e]Z_\lambda - \frac{f_e}{\sqrt{2}}\sigma\bar{e}e - \sqrt{2}\lambda a\sigma^3$$

$$- \frac{\lambda}{4}\sigma^4 + (e\to\mu) + (e\to\tau). \qquad (9.3.26c)$$

从 $\mathscr{L}_0^L$ (9.3.26*b*)我们看到，规范粒子 $W_\lambda^{(\pm)}$ 和 Z_λ 获得了质量，其值分别为

$$M_W{}^2 = \frac{1}{2}g^2a^2, \quad M_Z{}^2 = \frac{g^2a^2}{2\cos^2\theta_W} = \frac{M_W{}^2}{\cos^2\theta_W}, \qquad (9.3.27)$$

而规范粒子 A_λ 仍然无质量. 此外，轻子 e、μ 和 τ 也获得了质量，它们分别是

$$m_e = f_e a, \qquad m_\mu = f_\mu a, \qquad m_\tau = f_\tau a, \qquad (9.3.28)$$

而中微子保持无质量. Higgs 粒子 σ 的质量为

$$m_\sigma = 2a\sqrt{\lambda}. \qquad (9.3.29)$$

从 $\mathscr{L}_1^L$ (9.3.26*c*)我们看到，规范粒子 A_λ 可与带电轻子 $e(\mu、\tau)$耦合而不与中微子耦合. 它与轻子的耦合项

$$g\sin\theta_W \bar{e}\gamma_\lambda e A^\lambda + (e\to\mu) + (e\to\tau) \qquad (9.3.30)$$

与第七章中讨论的电磁作用有相同的结构，而且 A_λ 又无质量，故 A_λ 就是光子. 将(9.3.30)与 QED 的相互作用项(7.1.4)比较，我们得到

$$-e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W, \qquad (9.3.31)$$

其中负号是由于已假定 e 为电子电荷，它本身是负的.

$\mathscr{L}_I^1$ (9.3.26c)中轻子与带电规范粒子 $W_\lambda^{(\pm)}$ 的耦合项为

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)eW_\lambda^{(+)}-\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_eW_\lambda^{(-)}$$
$$+(e\to\mu)+(e\to\tau)$$
$$\equiv-\frac{g}{\sqrt{2}}(j^\lambda W_\lambda^{(+)}+j^\lambda W_\lambda^{(-)}), \tag{9.3.32}$$

其中 j^λ 就是式(9.2.7)所表示的轻子弱流. 由于它与带电玻色子相耦合,故也称带电弱流. 注意(9.3.32)式与(9.3.2)式相同.

$\mathscr{L}_I^1$ (9.3.26c)中轻子与中性规范粒子 Z_λ 的耦合项为

$$-\frac{g}{4\cos\theta_W}[\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_e-\bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5-4\sin^2\theta_W)e]Z_\lambda$$
$$+(e\to\mu)+(e\to\tau)\equiv-\frac{g}{4\cos\theta_W}j_0^\lambda Z_\lambda, \tag{9.3.33}$$

其中已定义

$$j_0^\lambda=\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_e-\bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5-4\sin^2\theta_W)e$$
$$+(e\to\mu)+(e\to\tau), \tag{9.3.34}$$

称为中性弱流. 中性弱流的存在是定域 $SU(2)_W\otimes U(1)_Y$ 对称性的必然结果. W-S 模型关于中性弱流存在的预言已在1973年为实验所证实.

(二) 加入夸克

把夸克弱流(9.2.8～9)与轻子弱流(9.2.7)比较,容易看到,为了描述强子(夸克)的弱作用,可以引进夸克的 $SU(2)_W$ 左手二重态和右手单态,记为

$$\begin{cases}L_u=\begin{pmatrix}u\\d_\theta\end{pmatrix}_L, \quad L_c=\begin{pmatrix}c\\s_\theta\end{pmatrix}_L,\\ R_u=u_R,\ R_d=d_R,\ R_c=c_R,\ R_t=s_R,\end{cases} \tag{9.3.35}$$

其中 d_θ 和 s_θ 由式(9.2.9)给出. 它们的超荷 Y_W 可由式(9.3.7)定出:

$$\begin{cases} \text{对左手二重态}\left(T_W = \frac{1}{2}\right)：\quad Y_W = \frac{1}{3}, \\ \text{对右手单态}(T_W = 0)：\quad Y_W^u = Y_W^c = \frac{4}{3},\quad Y_W^d = Y_W^t = -\frac{2}{3}. \end{cases} \tag{9.3.36}$$

从而，可在 $\mathscr{L}_1$ (9.3.14)中再加上夸克的定域手征 $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ 不变的拉氏量密度

$$\mathscr{L}_3 = i\bar{L}_u\gamma^\lambda\left(\partial_\lambda + \frac{i}{6}g'X_\lambda + \frac{i}{2}g\tau^t W_\lambda^t\right)L_u + i\bar{R}_u\gamma^\lambda\left(\partial_\lambda + \frac{2i}{3}g'X_\lambda\right)R_u$$
$$+ i\bar{R}_d\gamma^\lambda\left(\partial_\lambda - \frac{i}{3}g'X_\lambda\right)R_d + (u \to c) + (d \to s). \tag{9.3.37}$$

把(9.3.24)和(9.3.35)代入，我们可得到上式中所包含的

(1) 夸克电磁作用项为

$$-eJ_\lambda^{em}A^\lambda, \tag{9.3.38a}$$

其中 J_λ^{em} 为夸克的电磁流：

$$J_\lambda^{em} = \frac{1}{3}(\bar{d}_\theta\gamma_\lambda d_\theta + \bar{s}_\theta\gamma_\lambda s_\theta) - \frac{2}{3}(\bar{u}\gamma_\lambda u + \bar{c}\gamma_\lambda c). \tag{9.3.38b}$$

(2) 夸克的带电弱作用项为

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}(J^\lambda W_\lambda^{(+)} + J^{\lambda\dagger}W_\lambda^{(-)}), \tag{9.3.39a}$$

其中 J^λ 为夸克的带电弱流：

$$J^\lambda = \frac{1}{2}\bar{u}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)d_\theta + \frac{1}{2}\bar{c}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)s_\theta. \tag{9.3.39b}$$

(3) 夸克的中性弱作用项为

$$-\frac{g}{4\cos\theta_W}J_0^\lambda Z_\lambda, \tag{9.3.40a}$$

其中 J_0^λ 为夸克的中性弱流：

$$J_0^\lambda = \bar{u}\gamma^\lambda\left(1 - \gamma_5 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)u + \bar{c}\gamma^\lambda\left(1 - \gamma_5 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right)c$$
$$-\bar{d}_\theta\gamma^\lambda\left(1 - \gamma_5 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)d_\theta - \bar{s}_\theta\gamma^\lambda\left(1 - \gamma_5 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right)s_\theta. \tag{9.3.40b}$$

剩下还需要解决的是夸克的质量问题. $\mathscr{L}_3$ (9.3.37)中，由于手征不变性的要求，夸克是无质量的. 为了使对称性自发破缺后使夸克也获得质量，我们也需要引进夸克与 Higgs 场的 Yukawa 耦合项加入 $\mathscr{L}_2$ (9.3.19)中，它们的最一般形式可通过要求 $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ 不变的耦合项应满足条件

$$\sum T_W = 0 = \sum Y_W$$

来找出. 注意到 $\tilde{\phi} = i\tau^2\phi^*$ 与 ϕ 一样变换，但其 $Y_W = -1$. 我们可写出夸克与 ϕ 耦合项的一般形式为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_4 = -\ & (f_d\bar{L}_u\phi R_d + f_u\bar{L}_u\tilde{\phi}R_u + f_s\bar{L}_c\phi R_s \\ & + f_c\bar{L}_c\tilde{\phi}R_c + f'_s\bar{L}_u\phi R_s + f'_c\bar{L}_u\tilde{\phi}R_c \\ & + f'_d\bar{L}_c\phi R_d + f'_u\bar{L}_c\tilde{\phi}R_u) + h.c.,\end{aligned} \tag{9.3.41}$$

其中 $h.c.$ 表示厄米共轭项. 在么正规范下[参见(9.3.23)]

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ a + \dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\phi}(x) = i\tau^2\phi^*(x) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9.3.42}$$

把(9.3.42)代入(9.3.41)式后，夸克场二次项(不含 σ 场的项)的系数组成夸克的质量矩阵. 如果要求 u、d、c 和 s 是质量矩阵的本征态就得到 $\mathscr{L}_4$ (9.3.41)中各耦合常数应满足的条件和夸克质量谱：

$$\begin{cases} f'_u + f'_c = 0, \\ (f_s - f_d)\sin\theta_c = (f'_s + f'_d)\cos\theta_c, \\ m_u = f_u a, \\ m_c = f_c a, \\ m_d = a(f_d\cos\theta_c - f'_d\sin\theta_c), \\ m_s = a(f_s\cos\theta_c + f'_s\sin\theta_c). \end{cases} \tag{9.3.43}$$

这时，Higgs 场 σ 与夸克的耦合项用上面的夸克质量表示则为

$$-\frac{\sqrt{2}m_u}{a}\bar{u}u\sigma+(u\to d)+(u\to s)+(u\to c). \quad (9.3.44)$$

综合上面的结果，我们得到在么正规范下 W-S 模型的附加夸克部分的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}^q=\mathscr{L}_0^q+\mathscr{L}_1^q, \quad (9.3.45a)$$

$$\mathscr{L}_0^q=\bar{u}(i\gamma^\lambda\partial_\lambda-m_u)u+(u\to d)+(u\to s)+(u\to c), \quad (9.3.45b)$$

$$\mathscr{L}_1^q=-eJ_\lambda^{em}A^\lambda-\frac{g}{\sqrt{2}}\left(J^{\lambda\dagger}W_\lambda^{(+)}+J^\lambda W_\lambda^{(-)}\right)-\frac{g}{4\cos\theta_W}J_0^\lambda Z_\lambda-\frac{\sqrt{2}m_u}{a}\bar{u}u\sigma+(u\to d)+(u\to s)+(u\to c), \quad (9.3.45c)$$

其中 $m_u(m_d,m_s,m_c)$，J_λ^{em}，J^λ 和 J_0^λ 分别由式(9.3.43)，(9.3.38b)，(9.3.39b)和(9.3.40b)表出，而包括轻子和夸克的 W-S 模型在么正规范下的拉氏量密度则为

$$\begin{cases}\mathscr{L}=\mathscr{L}^L+\mathscr{L}^q=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1,\\ \mathscr{L}_0=\mathscr{L}_0^L+\mathscr{L}_0^q,\\ \mathscr{L}_1=\mathscr{L}_1^L+\mathscr{L}_1^q.\end{cases} \quad (9.3.46)$$

9.4 't Hooft 规范和 W-S 模型的费曼规则

上一节中我们在么正规范下讨论了 W-S 模型，么正规范的好处是理论只包含物理场，因而对揭示理论的物理内容是很有利的．然而，当用它来表达理论的路径积分形式(量子化)时，它并不具有协变形式，这对进行微扰计算和重整化都很不方便，因此，我们不打算讨论这种规范下的量子化和费曼规则．从5.5节的讨论中我们知道，通常非阿贝尔规范场的协变量子化都采用带参数的洛仑兹规范(也称 ξ 规范，参数用 ξ 表示)，但在有对称性自发破缺的情况

下，更方便的是利用 't Hooft 规范(也称 R_ξ 规范). 这一节我们就来讨论 W-S 模型在 't Hooft 规范下的量子化和费曼规则.

由上节的讨论我们知道，在 W-S 模型中包括的场有狄拉克场(包括轻子和夸克)、规范场(包括 W_λ^i 和 X_λ)和 Higgs 场，在选取规范以前它的拉氏量密度可表为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_3 + \mathscr{L}_4, \tag{9.4.1}$$

其中 $\mathscr{L}_1$、$\mathscr{L}_2$、$\mathscr{L}_3$ 和 $\mathscr{L}_4$ 分别由式(9.3.14～16，19，37，41)给出. 根据第五章的讨论，为了进行正确的量子化，我们还必须引进规范固定项

$$\mathscr{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}[(F^i[W_\lambda])^2 + (F[X_\lambda])^2]$$

和相应的补偿项即法捷耶夫-波波夫鬼项 $\mathscr{L}_{FPG}$ 与 $\mathscr{L}$ (9.4.1)一起组成有效拉氏量密度

$$\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_3 + \mathscr{L}_4 + \mathscr{L}_{GF} + \mathscr{L}_{FPG}. \tag{9.4.2}$$

需要指出的是，对于有破缺的情形，量子场是围绕物理真空的激发，故如仍以原记号来表示量子场，则 $\mathscr{L}_2$ 和 $\mathscr{L}_4$ 中的 ϕ 应作平移 $\phi \to \phi + v$，其中 $v = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ 是我们选择的物理真空[参见(9.3.22)]. 为了确定，平移后的 ϕ 被具体表示为

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\phi_0) \end{pmatrix}, \qquad \phi_+^\dagger = \phi\ . \tag{9.4.3}$$

下面我们来考虑在't Hooft 规范下 $\mathscr{L}_{FG}$ 和 $\mathscr{L}_{FPG}$ 对 $\mathscr{L}_{eff}$ 的贡献.

所谓't Hooft 规范是选择

$$\begin{cases} F^i[W_\lambda, \phi] = \partial^\lambda W_\lambda^i - \dfrac{i}{2} g\xi(\phi^\dagger \tau^i v - v^\dagger \tau^i \phi), \\ F[X_\lambda, \phi] = \partial^\lambda X_\lambda - \dfrac{i}{2} g'\xi\ (\phi^\dagger v - v^\dagger \phi). \end{cases} \tag{9.4.4}$$

于是有

$$\mathscr{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}[(F^a[W_\lambda,\phi])^2 + (F[X_\lambda,\phi])^2]$$

$$= -\frac{1}{2\xi}[(\partial^\lambda W_\lambda^a)^2 - ig\xi\partial^\lambda W_\lambda^a(\phi^\dagger\tau^a v - v^\dagger\tau^a\phi)$$

$$-\frac{g^2}{4}\xi^2(\phi^\dagger\tau^a v - v^\dagger\tau^a\phi)^2 + (\partial^\lambda X_\lambda)^2$$

$$-\frac{i}{2}g'\xi\partial^\lambda X_\lambda(\phi^\dagger v - v^\dagger\phi) - \frac{g'^2}{4}\xi^2(\phi^\dagger v - v^\dagger\phi)^2], \quad (9.4.5)$$

其中 $\frac{i}{2}g\partial^\lambda W_\lambda^a(\phi^\dagger\tau^a v - v^\dagger\tau^a\phi) + \frac{i}{2}g'\partial^\lambda X_\lambda(\phi^\dagger v - v^\dagger\phi)$ 项恰好与 $\mathscr{L}_2$ 中出现的混合项

$$\frac{i}{2}\partial^\lambda\phi^\dagger(g\tau^a W_\lambda^a + g' X_\lambda) - \frac{i}{2}v^\dagger(g\tau^a W_\lambda^a + g' X_\lambda)\partial^\lambda\phi,$$

合在一起形成全散度项，因此对有效作用量的贡献为零而被略去，这也正是't Hooft 选择式(9.4.4)作为规范固定项的原因，公式(9.4.5)中剩余的项由(9.3.24)和(9.4.3)可表为

$$-\frac{1}{2\xi}[(\partial^\lambda W_\lambda^a)^2 + (\partial^\lambda X_\lambda)^2]$$

$$= -\frac{1}{2\xi}[\partial^\lambda W_\lambda^{(-)}\partial^\lambda W_\lambda^{(+)} + (\partial^\lambda Z_\lambda)^2 + (\partial^\lambda A_\lambda)^2], \quad (9.4.6)$$

它将对规范场的传播子产生影响；而

$$\frac{\xi}{8}[g^2(\phi^\dagger\tau^a v - v^\dagger\tau^a\phi)^2 + g'^2(\phi^\dagger v - v^\dagger\phi)^2]$$

$$= -\xi M_W^2\phi_-\phi - \frac{1}{2}M_Z^2\phi_0^2 \quad (9.4.7)$$

将对 Higgs 场的质量产生影响.

按照5.5节，法捷耶夫-波波夫鬼项与规范固定项密切相关. 现在相应的鬼项是

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}} = -\bar{\eta}M^{ij}\eta^{j} - \bar{\xi}M\zeta - \bar{\eta}M'\zeta - \bar{\xi}M'\eta, \quad (9.4.8)$$

其中 $\eta(x)$，$\eta'(x)$ 是相应于 $W_\lambda^i(x)$ 的鬼场，$\xi(x)$，$\xi'(x)$ 是相应于 $X_\lambda(x)$ 的鬼场；

$$\begin{cases} M^{ij}(x,y) = g\dfrac{\delta F^i[{}^g W_\lambda(x), {}^g\phi(x)]}{\delta\alpha^j(y)}, \\ M'(x,y) = g'\dfrac{\delta F^i[{}^g W_\lambda(x), {}^g\phi(x)]}{\delta\beta(y)} = g\dfrac{\delta F[{}^g X_\lambda(x), {}^g\phi(x)]}{\delta\alpha^i(y)}, \\ M'(x,y) = g'\dfrac{\delta F[{}^g X_\lambda(x), {}^g\phi(x)]}{\delta\beta(y)}; \end{cases} \quad (9.4.9)$$

$\alpha^i(x)$ 和 $\beta(x)$ 分别是 $SU(2)_W$ 和 $U(1)_Y$ 群的无穷小参数.

在定域 $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ 规范群的变换(9.3.10～11)下，对于协变导数(9.3.12～13)，规范场应满足的变换为

$$\begin{cases} W_\lambda^k \to {}^g W_\lambda^k = W_\lambda^k + \varepsilon^{kij}\alpha^i A_\lambda^j - \dfrac{1}{g}\partial_\lambda\alpha^k, \\ X_\lambda \to {}^g X_\lambda = X_\lambda + \dfrac{1}{g'}\partial_\lambda\beta. \end{cases} \quad (9.4.10)$$

另外，Higgs 场的变换为

$$\phi + v \to {}^g(\phi + v) = \phi + v - \left(\frac{i}{2}\alpha^k\tau^k + \frac{i}{2}\beta\right)(\phi + v),$$

或

$${}^g\phi = \phi - \frac{i}{2}(\alpha^k\tau^k + \beta)(\phi + v). \quad (9.4.11)$$

利用(9.4.10～11)，从(9.4.4)式，有

$$\delta F^i[W_\lambda, \phi] = \partial^\lambda\delta W_\lambda^i - \frac{i}{4}g\bar{\xi}(\delta\phi^\dagger\tau^i v - v^\dagger\tau^i\delta\phi)$$

$$= \frac{1}{g}[g\varepsilon^{ijk}\partial^\lambda(\alpha^j W_\lambda^k) + \Box\alpha^i] + \frac{1}{8}g\bar{\xi}[(\phi^\dagger + v^\dagger)(\alpha^k\tau^k + \beta)\tau^i v$$

$$+ v^\dagger\tau^i(\alpha^k\tau^k + \beta)(\phi + v)], \quad (9.4.12a)$$

$$\delta F[X_\lambda, \phi] = \partial^\lambda\delta X_\lambda - \frac{i}{4}g'\bar{\xi}(\delta\phi^\dagger v - v^\dagger\delta\phi)$$

$$= -\frac{1}{g'}\Box\beta + \frac{1}{8}g'\bar{\xi}[(\phi^\dagger + v^\dagger)(\alpha^k\tau^k + \beta)v$$

$$+v^{\dagger}(\alpha^{k}\tau^{k}+\beta)(\phi+v)]. \qquad (9.4.12b)$$

利用式(9.4.9)和(9.4.12)以及泡利矩阵的性质可以得到

$$\begin{cases} M^{ij}=g\epsilon^{ijk}(\partial^{\lambda}W_{\lambda}^{k}+W_{\lambda}^{k}\partial^{\lambda})+\delta^{ij}\Box+\dfrac{1}{8}g^{2}\xi[\phi^{\dagger}\tau^{j}\tau^{i}v \\ \quad +v^{\dagger}\tau^{i}\tau^{j}\phi+v^{\dagger}(\tau^{i}\tau^{j}+\tau^{j}\tau^{i})v] \\ \quad =g\epsilon^{ijk}(\partial^{\lambda}W_{\lambda}^{k}+W_{\lambda}^{k}\partial^{\lambda})+\delta^{ij}\Box \\ \quad +\dfrac{1}{8}g^{2}\xi[-i\epsilon^{ijk}(\phi^{\dagger}\tau^{k}v-v^{\dagger}\tau^{k}\phi)+2\delta^{ij}v^{\dagger}v], \\ M^{i}=\dfrac{1}{8}gg'\xi(\phi^{\dagger}\tau^{i}v+v^{\dagger}\tau^{i}\phi+2v^{\dagger}\tau^{i}v), \\ M=-\Box+\dfrac{1}{8}gg'\xi(\phi^{\dagger}v+v^{\dagger}\phi+2v^{\dagger}v). \end{cases} \qquad (9.4.13)$$

把它代入(9.4.8)式,得到

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}=-\eta^{i}\delta^{ij}\left(\Box+\frac{1}{4}g^{2}\xi v^{\dagger}v\right)\eta^{j}+\xi\left(\Box-\frac{1}{4}gg'\xi v^{\dagger}v\right)\zeta$$

$$-g\epsilon^{ijk}\eta^{i}(\partial^{\lambda}W_{\lambda}^{k}+W_{\lambda}^{k}\partial^{\lambda})\eta^{j}+\frac{i}{8}g^{2}\xi\epsilon^{ijk}\eta^{i}(\phi^{\dagger}\tau^{k}v-v^{\dagger}\tau^{k}\phi)\eta^{j}$$

$$-\frac{1}{8}gg'\xi[\eta^{i}(\phi^{\dagger}\tau^{i}v+v^{\dagger}\tau^{i}\phi)\zeta+\xi(\phi^{\dagger}\tau^{i}v+v^{\dagger}\tau^{i}\phi)\eta^{i}]$$

$$-\frac{1}{8}gg'\xi\xi(\phi^{\dagger}v+v^{\dagger}\phi)\zeta-\frac{1}{4}gg'\xi(\eta^{i}v^{\dagger}v\zeta+\xi v^{\dagger}v\eta^{i}), \qquad (9.4.14)$$

其中最后一项是η^{i}与ζ的混合项,这表明它们不是相应场的质量本征态,为了使它们对角化我们重新定义鬼场

$$\begin{cases} \eta_{+}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta^{1}-i\eta^{2}), \quad \eta_{-}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta^{1}+i\eta^{2}), \\ \eta_{Z}=\cos\theta_{W}\eta^{3}+\sin\theta_{W}\zeta, \quad \eta_{A}=-\sin\theta_{W}\eta^{3}+\cos\theta_{W}\zeta, \end{cases} \qquad (9.4.15)$$

利用它和公式(9.4.3)以及公式(9.3.24)、(9.3.27)和(9.3.31),公式(9.4.13)可表示为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}=\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(0)}+\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(1)}, \qquad (9.4.16a)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(0)}=\eta_{+}(\Box-\xi M_{W}^{2})\eta_{+}+\eta_{-}(\Box-\xi M_{W}^{2})\eta_{-}$$
$$+\eta_{Z}(\Box-\xi M_{Z}^{2})\eta_{Z}+\eta_{A}\Box\eta_{A}, \qquad (9.4.16b)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(\mathrm{I})} = ig\cos\theta_W \eta_+ \partial^\lambda (Z_\lambda \eta_+) + ie\eta_+ \partial^\lambda (A_\lambda \eta_+)$$
$$- ig\eta_+ \partial^\lambda [W_\lambda^{(+)} (\eta_Z \cos\theta_W - \eta_A \sin\theta_W)]$$
$$- \xi M_M \eta_+ \left[\frac{g}{2} \frac{\cos 2\theta_W}{\cos\theta_W} \eta_Z \phi_+ + e\eta_A \phi_+ + \frac{g}{2} \eta_+ (\sigma + i\phi_0) \right]$$
$$- ig\cos\theta_W \eta_Z \partial^\lambda (\eta_- W_\lambda^{(-)}) + \frac{g}{2} \xi M_Z \eta_Z \left(\eta \phi_+ - \frac{1}{2\cos\theta_W} \eta_Z \sigma \right)$$
$$- ie\eta_A \partial^\lambda (\eta_- W_\lambda^{(-)}) + (\text{以上各项中 } \eta_+ \leftrightarrow \eta, W^{(+)} \leftrightarrow W^{(-)},$$
$$\phi_+ \to \phi_-, i \to -i), \qquad (9.4.16c)$$

其中 $\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(0)}$ 产生鬼场传播子，$\mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(\mathrm{I})}$ 是鬼场与规范场 $W_\lambda^{(\pm)}$、Z_λ 和 A_λ 及 Higgs 场 $\phi_{(\pm)}$、ϕ_0 和 σ 的相互作用.

类似地，利用式(9.4.3)，(9.4.14)，(9.3.27)和(9.3.31)以及粒子的质量表达式(9.3.28～29)和(9.3.43)，可把 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ (9.4.2) 表示为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{(0)} + \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{I}} \qquad (9.4.17a)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{(0)} = \mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(0)} - \frac{1}{2\xi} \partial^\lambda W_\lambda^{(+)} \partial^\sigma W_\sigma^{(-)} + M_W^2 W_\lambda^{(+)} W^{(-)\lambda}$$
$$- \frac{1}{2} (\partial_\lambda W_\sigma^{(+)} - \partial_\sigma W_\lambda^{(+)}) (\partial^\lambda W^{(-)\sigma} - \partial^\sigma W^{(-)\lambda})$$
$$- \frac{1}{4} (\partial_\lambda Z_\sigma - \partial_\sigma Z_\lambda)^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\lambda Z^\lambda - \frac{1}{2\xi} \partial^\lambda Z_\lambda \partial^\sigma Z_\sigma$$
$$- \frac{1}{4} (\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)^2 - \frac{1}{2\xi} \partial^\lambda A_\lambda \partial^\sigma A_\sigma + \partial^\lambda \phi_+ \partial_\lambda \phi_-$$
$$- \xi M_W^2 \phi_+ \phi_- + \frac{1}{2} \partial^\lambda \phi_0 \partial_\lambda \phi_0 - \frac{1}{2} \xi M_Z^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} \partial^\lambda \sigma \partial_\lambda \sigma$$
$$- \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + [\bar{e}(i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m_e)e + \frac{i}{2} \bar{\nu}_e \gamma^\lambda \partial_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_e$$
$$+ (e \to \mu) + (e \to \tau)] + [\bar{u}(i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m_u)u$$
$$+ (u \to d) + (u \to s) + (u \to c)], \qquad (9.4.17b)$$
$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{I})} = \mathscr{L}_{\mathrm{FPG}}^{(\mathrm{I})} - ig\cos\theta_W W_\sigma^{(+)} W_\lambda^{(-)} (\partial^\lambda Z^\sigma - \partial^\sigma Z^\lambda)$$
$$+ ieW_\sigma^{(+)} W_\lambda^{(-)} (\partial^\lambda A^\sigma - \partial^\sigma A^\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&+[ig\cos\theta_W W_\lambda^{(+)}(\partial^\lambda W^{(-)\sigma}-\partial^\sigma W^{(-)\lambda})+h.c.]Z_\sigma\\
&-[ieW_\lambda^{(+)}(\partial^\lambda W^{(-)\sigma}-\partial^\sigma W^{(-)\lambda})+h.c.]A_\sigma\\
&-\frac{g^2}{2}[(W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda})^2-W_\lambda^{(+)}W^{(+)\lambda}W_\sigma^{(-)}W^{(-)\sigma}]\\
&-g^2\cos^2\theta_W(W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}Z_\sigma Z^\sigma-W_\lambda^{(+)}Z^\lambda W_\sigma^{(-)}Z^\sigma)\\
&-e^2[W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}A_\sigma A^\sigma-W_\lambda^{(+)}A^\lambda W_\sigma^{(-)}A^\sigma]\\
&+2eg\cos\theta_W W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}Z_\sigma A^\sigma-eg\cos\theta_W W_\lambda^{(+)}W_\sigma^{(-)}(Z^\lambda A^\sigma+Z^\sigma A^\lambda)\\
&+[\frac{i}{2}g\frac{\cos2\theta_W}{\cos\theta_W}Z_\lambda\phi_-\partial^\lambda\phi_+-ieA_\lambda\phi_-\partial^\lambda\phi_+\\
&-\frac{i}{2}g(\sigma+i\phi_0)W_\lambda^+\partial^\lambda\phi_-+\frac{i}{2}gW_\lambda^{(+)}\phi_-\partial^\lambda(\sigma+i\phi_0)\\
&+\frac{1}{4}g^2\frac{\cos2\theta_W-2}{\cos\theta_W}Z^\lambda W_\lambda^{(+)}\phi_-(\sigma+i\phi_0)-gM_Z\sin^2\theta_W Z^\lambda W_\lambda^{(+)}\phi\\
&-eM_W A^\lambda W_\lambda^{(+)}\phi_-+h.c.]+\frac{1}{4}g^2\frac{\cos2\theta_W}{\cos\theta_W}Z_\lambda^2\phi_+\phi_-+e^2A_\lambda^2\phi_+\phi_-\\
&+\frac{1}{4}g^2W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}(\sigma^2+\phi_0^2)-eg\frac{\cos2\theta_W}{\cos\theta_W}Z_\lambda A^\lambda\phi_+\phi_-\\
&+gM_W\sigma W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}+\frac{1}{2}g^2W_\lambda^{(+)}W^{(-)\lambda}\phi_+\phi_-+\frac{gM_Z}{\cos\theta_W}Z_\lambda^2\sigma\\
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}Z_\lambda(\sigma\partial^\lambda\phi_0-\phi_0\partial^\lambda\sigma)+\frac{g^2}{8\cos\theta_W}Z_\lambda^2(\sigma^2+\phi_0^2)\\
&-\frac{gm_e^2}{2M_W}\sigma(\phi_+\phi_-+\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}\phi_0^2)\\
&-\frac{g^2m_e^2}{8M_W^2}(\phi_+\phi_-+\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}\phi_0^2)^2\\
&-e(j_\lambda^{em}+J_\lambda^{em})A^\lambda-\frac{g}{\sqrt{2}}[(j^\lambda+J^\lambda)^+W_\lambda^{(-)}+(j^\lambda+J^\lambda)W_\lambda^{(-)}]\\
&-\frac{g}{4\cos\theta_W}(j_0^\lambda+J_0^\lambda)Z_\lambda-\left\{\frac{gm_e}{2M_W}(\bar{e}e\sigma+i\bar{e}\gamma_5e\phi_0)\right.\\
&\left.+\frac{gm_e}{2\sqrt{2}M_W}[\bar{e}(1-\gamma_5)\nu_e\phi^+h.c]+(e\to\mu)+(e\to\tau)\right\}
\end{aligned}
$$

$$-\left\{\frac{g}{2M_W}[m_u(\bar{u}u\sigma - i\bar{u}\gamma_5 u\phi_0) + m_d(\bar{d}d\sigma + i\bar{d}\gamma_5 d\phi_0)\right]$$

$$+\frac{g}{2\sqrt{2}M_W}[m_d\bar{u}(1+\gamma_5)d_\theta\phi_+ - m_u\bar{d}_\theta(1+\gamma_5)u\phi^- + h.c]$$

$$+\left(u\to c, d\to s\right)\Big\}, \qquad (9.4.17c)$$

其中轻子电磁流 J_λ^{em} 定义为

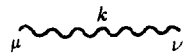
$$j_\lambda^{em} = \bar{e}\gamma_\lambda e + (e\to\mu) + (e\to\tau), \qquad (9.4.18)$$

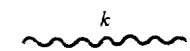
夸克电磁流 J_λ^{em}，轻子带电弱流 j^λ 和中性弱流 j_0^λ，夸克带电弱流 J^λ 和中性弱流 J_0^λ. 分别表示在式(9.3.38b)，(9.2.7)和(9.3.34)以及(9.3.39b)和(9.3.40b)中.

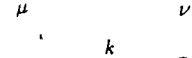
有了 $\mathscr{L}_{eff}$(9.4.17)，就可以按第五、六章中所讲的办法写出 R_ξ 规范下 W-S 模型的各种生成泛函. 由于树图近似下的正规顶角生成泛函就是有效作用量，因而可以直接从有效拉氏量密度 $\mathscr{L}_{eff}$ (9.4.17)来写出传播子和相互作用顶点的费曼规则. 利用8.1节所讲的方法，我们可列出 W-S 模型的动量空间费曼规则如下：

1) 自由传播子

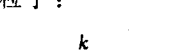
规范粒子：

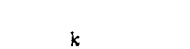
A_μ  $\dfrac{-i}{k^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$

$W_\mu^{(\pm)}$  $\dfrac{-i}{k^2-M_W{}^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi M_W{}^2}\right]$

Z_μ  $\dfrac{-i}{k^2-M_Z{}^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi M_Z{}^2}\right]$

Higgs 粒子：

$\phi_\pm$  $\dfrac{i}{k^2-\xi M_W{}^2}$

ϕ_0  $\dfrac{i}{k^2-\xi M_Z{}^2}$

σ $\dfrac{i}{k^2-m_\sigma{}^2}$

鬼粒子：

η_A ——q——→ $\dfrac{i}{q^2}$

$\eta_\pm$ ——q——→ $\dfrac{i}{q^2-\xi M_W{}^2}$

η_Z ——q——→ $\dfrac{i}{q^2-\xi M_Z{}^2}$

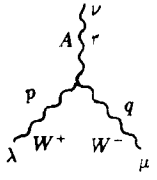
费米子：

$e(\mu,\tau,u,d,\cdots)$ ——p——→ $\dfrac{i}{\not p - m_e}$

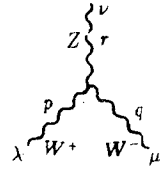
$\nu_e(\nu_\mu,\nu_\tau)$ ——p——→ $\dfrac{i}{\not p}\dfrac{1}{2}(1-\gamma_5)$

2）相互作用顶点（指向顶点的动量和为零）

规范场三线耦合：

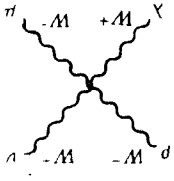


$$-ie[(r-q)_\lambda g_{\mu\nu}+(q-p)_\nu g_{\lambda\mu}+(p-r)_\mu g_{\nu\lambda}]$$

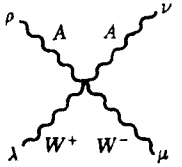


$$ig\cos\theta_W[(r-q)_\lambda g_{\mu\nu}+(q-p)_\nu g_{\lambda\mu}+(p-r)_\mu g_{\nu\lambda}]$$

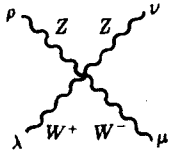
规范场四线耦合：



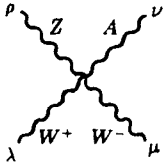
$$ig^2[2g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}]$$



$$-ie^2[2g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}]$$

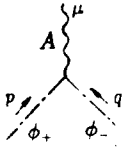


$$-ig^2\cos^2\theta_W[2g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}]$$



$$ieg\cos\theta_W[2g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}]$$

一个规范场与二个 Higgs 场耦合：



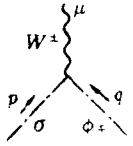
$$ie(p-q)_\mu$$



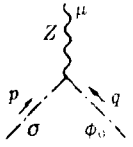
$$-ig\frac{\cos2\theta_W}{2\cos\theta_W}(p-q)_\mu$$



$$\frac{1}{2}g(p-q)_\mu$$

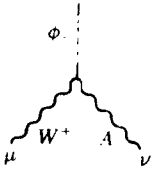


$$\mp \frac{i}{2} g(p-q)_\mu$$

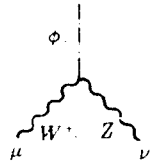


$$\frac{1}{2} \frac{g}{\cos\theta_W}(p-q)_\mu$$

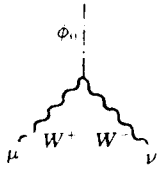
一个规范场与一个 Higgs 场的耦合：



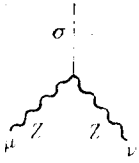
$$-ieM_W g_{\mu\nu}$$



$$-igM_Z \sin^2\theta_W g_{\mu\nu}$$

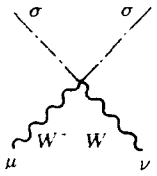


$$igM_W g_{\mu\nu}$$

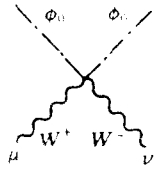


$$ig\frac{M_Z^2}{M_W^2} g_{\mu\nu}$$

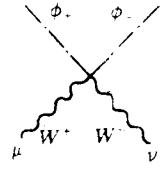
二个规范场与二个 Higgs 场的耦合：



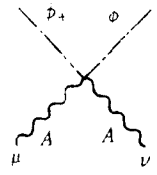
$$\frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}$$



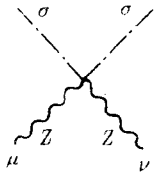
$$\frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}$$



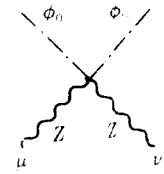
$$\frac{i}{2}g^2 g_{\mu\nu}$$



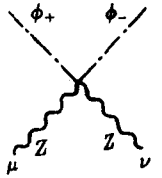
$$2ie^2 g_{\mu\nu}$$



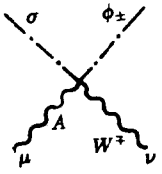
$$\frac{i}{2}g^2 \sec^2\theta_W g_{\mu\nu}$$



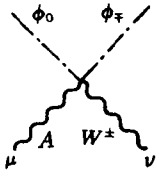
$$\frac{i}{2}g^2 \sec^2\theta_W g_{\mu\nu}$$



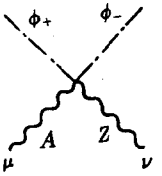
$$\frac{i}{2}g^2\sec^2\theta_W\cos^2 2\theta_W g_{\mu\nu}$$



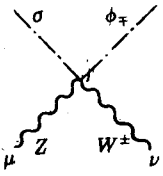
$$-\frac{i}{2}egg_{\mu\nu}$$



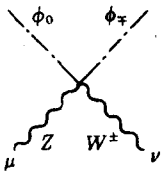
$$\pm\frac{1}{2}egg_{\mu\nu}$$



$$-ieg\sec\theta_W\cos 2\theta_W g_{\mu\nu}$$

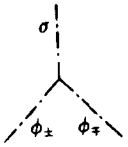


$$\frac{i}{2}g^2\sec\theta_W\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta_W-1\right)g_{\mu\nu}$$

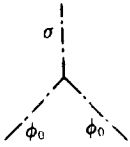


$$\mp\frac{1}{2}g^2\sec\theta_W\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta_W-1\right)g_{\mu\nu}$$

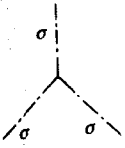
Higgs 场三线耦合：



$$-\frac{i}{2}g\frac{m_\sigma^2}{M_W}$$

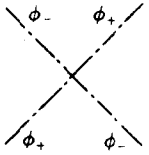


$$-\frac{i}{2}g\frac{m_\sigma^2}{M_W}$$

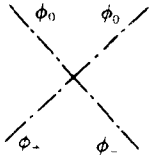


$$-\frac{3i}{2}g\frac{m_\sigma^2}{M_W}$$

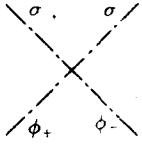
Higgs 场四线耦合：



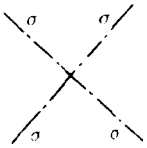
$$-\frac{i}{2}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$



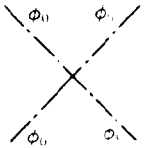
$$-\frac{i}{4}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$



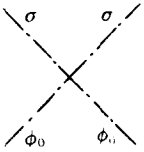
$$-\frac{i}{4}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$



$$-\frac{3i}{4}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$

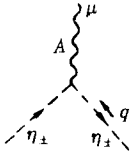


$$-\frac{3i}{4}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$

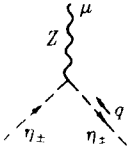


$$-\frac{i}{4}g^2\frac{m_\sigma^2}{M_W{}^2}$$

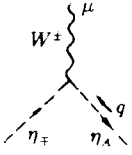
鬼场与规范场耦合：



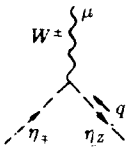
$$\mp ieq_\mu$$



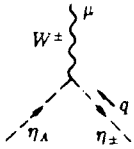
$$\pm ig\cos\theta_W q_\mu$$



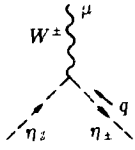
$$\mp ieq_\mu$$



$$\pm igcos\theta_W q_\mu$$

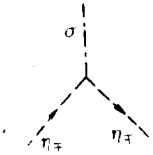


$$\pm ieq_\mu$$

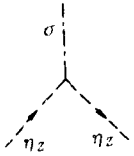


$$\mp igcos\theta_W q_\mu$$

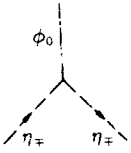
鬼场与 Higgs 场耦合：



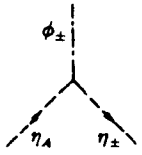
$$-\frac{i}{2}g\xi M_W$$



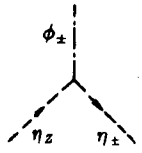
$$-\frac{i}{2}g\xi M_W sec^2\theta_W$$



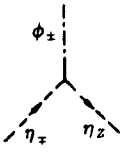
$$\mp\frac{1}{2}g\xi M_W$$



$$ie\xi M_W$$

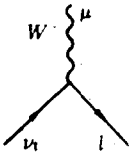


$$-\frac{i}{2}g\frac{\cos 2\theta_W}{\cos\theta_W}\xi M_W$$

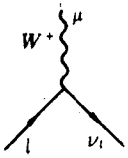


$$\frac{i}{2}g\xi M_W$$

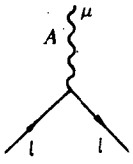
轻子与规范场耦合($l=e,\mu,\tau$)：



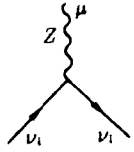
$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$



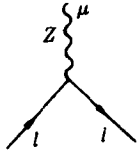
$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$



$$-ie\gamma_\mu$$

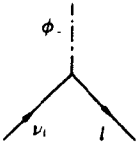


$$\frac{-ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$$

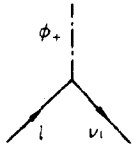


$$\frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu(1-4\sin^2\theta_W-\gamma_5)$$

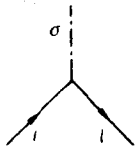
轻子与 Higgs 场耦合($l=e,\mu,\tau$)：



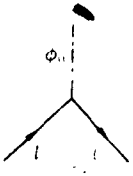
$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\frac{m_l}{M_W}(1-\gamma_5)$$



$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\frac{m_l}{M_W}(1+\gamma_5)$$

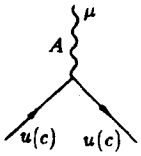


$$\frac{-ig}{2}\frac{m_l}{M_W}$$

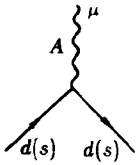


$$\frac{g}{2}\frac{m_l}{M_W}\gamma_5$$

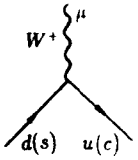
夸克与规范场耦合：



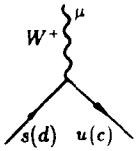
$$i\frac{2}{3}e\gamma_\mu$$



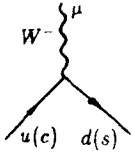
$$-i\frac{1}{3}e\gamma_\mu$$



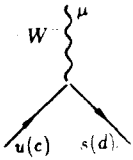
$$-\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\cos\theta_c$$



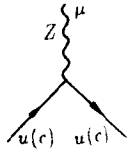
$$\mp\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_c$$



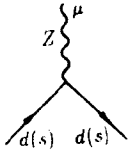
$$-\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\cos\theta_c$$



$$\mp\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_c$$

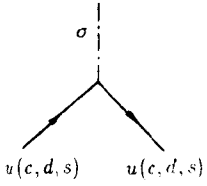


$$-\frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W-\gamma_5\right)$$

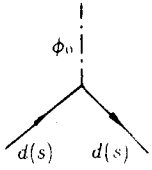


$$\frac{ig}{4\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W-\gamma_5\right)$$

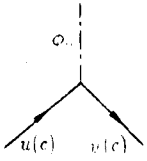
夸克与 Higgs 场耦合：



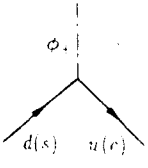
$$-\frac{ig}{2M_W}m_{u(c,d,s)}$$



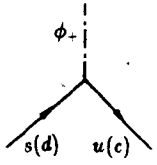
$$-\frac{g}{2M_W}\gamma_5 m_{d(s)}$$



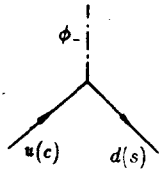
$$-\frac{g}{2M_W}\gamma_5 m_{u(c)}$$



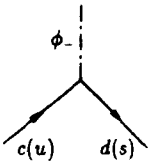
$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}M_W}[(m_d-m_u)+\gamma_5(m_d+m_u)]\cos\theta_c$$



$$\mp\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W}[(m_d-m_u)+\gamma_5(m_d+m_u)]\sin\theta_c$$



$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}M_W}[(m_d-m_u)-\gamma_5(m_d+m_u)]\cos\theta_c$$



$$\pm\frac{ig}{2\sqrt{2}M_W}[(m_d-m_c)-\gamma_5(m_d+m_c)]\sin\theta_c$$

第十章　真空简并和拓扑孤子

上一章中讨论的 W-S 模型不仅使弱作用有了一个完整的理论，而且使我们对真空的认识前进了一大步：真空并非空无所有，而是非平庸的场状态，它的性质对现实世界的图景有着重大的影响. 我们这一章将讨论的拓扑孤子就是以真空简并为前提的. 孤子最早发现于非线性流体力学中，它在等离子体和固体理论中已有许多应用，近年来更引起了粒子物理学界的兴趣和重视. 所谓孤子是指非线性经典场论中的一类特殊解，它表示了一种能量有限且集中在有限空间区域的稳定位形结构. 由于非阿贝尔规范场是非线性的，它提供了讨论孤子的可能性，新的物理将因此而产生，人们希望籍以解决夸克禁闭的问题.

为了研究孤子，最根本的是找出场方程的孤子解的明显形式. 但除了少数特例，这并不总是可能的. 因此，阐明孤子解的存在性并确定允许解的数目是重要的. 由于允许的孤子解的数目依赖于模型的对称群的拓扑特性，因此有可能利用同伦映射理论以及与之相关的同伦群来讨论上述问题.

我们首先利用一个具有确定孤子解的具体例子以熟悉孤子概念，然后讨论同伦群方法及其应用.

10.1　1+1 维 纽 结

考虑1+1维 φ^4 相互作用模型，其拉氏量密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2\quad(\lambda>0),\tag{10.1.1}$$

注意，它在下列分立变换下是不变的：

$$\varphi \to \pm \varphi, \tag{10.1.2}$$

这些变换形成群 Z_2（仅有二个元素，用± 1标记）.

与 $\mathscr{L}$ (10.1.1)相应的场方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \lambda \varphi \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right). \tag{10.1.3}$$

场的能量泛函为

$$E(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right]. \tag{10.1.4}$$

场方程(10.1.3)的最小能量解，即真空为

$$\varphi = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \tag{10.1.5}$$

可见，真空是二重简并的.

现在来寻找场方程(10.1.3)的有限能量的稳定$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right)$解，为此，考虑场的能量泛函(10.1.4). 由于其被积函数的所有项都是正的，故在无穷积分限下，要使能量有限，场 φ 必须满足下列无穷边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 - \dfrac{m^2}{\lambda} \right)^2 = 0, \end{cases} \quad (\text{当 } x \to \pm \infty \text{ 时}) \tag{10.1.6}$$

注意到(10.1.5)式，上面第二个边界条件给出当 $x \to \pm \infty$ 时，$\varphi(x)$ 趋于真空值：

$$\varphi(\pm \infty) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}. \tag{10.1.7}$$

因此，我们所要解的是下列边值问题：

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\lambda\varphi\left(\varphi^2-\dfrac{m^2}{\lambda}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(\pm\infty)=0, \\ \varphi(\pm\infty)=\pm\dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}. \end{cases} \tag{10.1.8}$$

它有下列两个解：

$$\varphi_{\pm}=\pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{th}\left[\frac{m}{\sqrt{\lambda}}(x-x_0)\right], \tag{10.1.9}$$

其中 x_0 为任意实参数，它们的形状被图示于图10.1.1中.

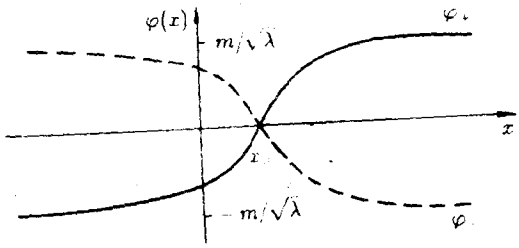


图 10.1.1 纽结解

容易验证：

$$\begin{cases} \varphi_+(\pm\infty)=\pm\dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}, \\ \varphi_-(\pm\infty)=\mp\dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}, \end{cases} \tag{10.1.10}$$

即 $x\to\pm\infty$ 时，$\varphi(x)$ 分别趋于两个不同的真空值. 因此称这些解为纽结(孤子). 为了区别，称 φ_+ 为正纽结，φ_- 为反纽结. 利用表达式(10.1.4)，(10.1.7)和(10.1.9)可以求得纽结的能量

$$E=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^2}{\lambda} \tag{10.1.11}$$

确实是有限的. 因此，$\mathscr{L}$ (10.1.1)所描述的模型有正、反孤子解(10.1.9)，它们定域在 x_0 附近，有有限的能量. 特别值得指出的

是，耦合常数 λ 出现在解的分母中，它显示孤子解是非微扰解.

上面求得的孤子解(纽结)是稳定的，这明显暗示了一种守恒律，即一定存在一个守恒流 J^μ 和相应的守恒荷 Q. 我们可以构造这个守恒流为

$$J^\mu = \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi \quad (\mu,\nu = 0,1), \tag{10.1.12}$$

其中 $\varepsilon^{\mu\nu}$ 是二阶反对称张量，具有 $\varepsilon^{01} = 1$. 显然，J^μ 满足

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{10.1.13}$$

相应的荷为

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x J^0 = \frac{m}{2\sqrt{\lambda}}[\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)]. \tag{10.1.14}$$

由(10.1.10)式知，对正纽结 $Q=1$，对反纽结 $Q=-1$，它们是不同的，因而可用来识别正、反纽结，故也称为纽结数. 如果我们把真空也看成是一种平庸的孤子，则它的 $Q=0$. 一般地，非平庸的孤子解对应于 $Q\neq 0$. 注意，这个守恒荷 Q 与 $\mathscr{C}$ 在任一对称性变换下的不变性无关，因而不是奈特荷. 它与场在无穷远处的边界行为有关，通常称之为拓扑荷.

一般地，给定一个场模型就给出了它的无穷边界流形(如对空间一维模型，其边界为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 两个点；对空间 d 维模型，其边界为 $d-1$ 维无穷大球面 S^{d-1})，同时也给出了真空流形(对无简并的平庸真空，真空流形只包含一个元素). 对于有限能量的孤子解，场在无穷远处必须趋于其真空值. 这就使边界流形与真空流形之间通过场位形建立了一种映射关系. 如果真空是简并的，且在边界上场的位形不能通过连续变形而变为同一个值(简并真空之一)，我们就能得到非平庸的拓扑荷 $Q(Q\neq 0)$，从而保证了孤粒子的存在，而非平庸拓扑荷的个数就给出孤子解的数目.

为了进一步讨论和确定场的各种拓扑荷，有必要介绍同伦群

的概念，这将在下一节中进行.

10.2 同伦群简介

考虑两个流形 X 和 Y 及它们间的连续映射 f，记为

$$f: X \to Y ,$$

它表示对任意的 $x \in X$，有 $f(x) = y, y \in Y$. 连续映射是指 $f(x)$ 是 x 的连续函数. 通常称 x 为源点，y 为像点.

对两个映射 $f(x)$和 $g(x)$，如果能通过连续变形使 f 变成 g，则称 f 和 g 是同伦的，记为 $f \sim g$. 这就是说，如果存在一族含参数 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的连续映射 $H(x,t)$，

$$H: X \times T \to Y, \quad T = [0,1],$$

使得

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x), \qquad (10.2.1)$$

则 f 和 g 是同伦的(参见图10.2.1). 通常称 H 为同伦映射.

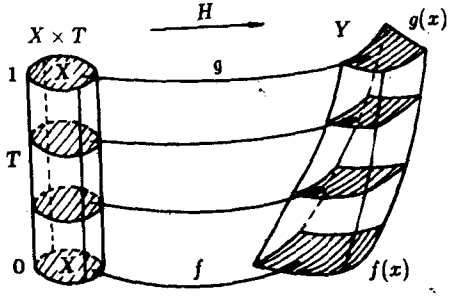


图 10.2.1 同伦映射

容易验证，同伦关系具有下列性质：

1) 反射性：$f \sim f$；

2) 对称性：如 $f_1 \sim f_2$，则 $f_2 \sim f_1$；

3) 传递性：如 $f_1 \sim f_2$，$f_2 \sim f_3$，则 $f_1 \sim f_3$.

由性质3)，所有与 f 同伦的映射构成一个等价的同伦类，记为

$\{f\}$；所有同伦类的集合记为 $\Pi_r(Y)$.

下面，我们来说明在适当定义的乘法下，$\Pi_r(Y)$ 构成群，称为同伦群. 设 I^n 为 n 维实数空间中的单位方块，它由 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,n)$表示，但把它的边界（$x_i=0$ 或 1）看作同一点. 显然，在拓扑性质上，上述定义的 I^n 与 n 维球面 S^n 相同. 于是，$\Pi_r(Y)$ 可表为 $\Pi_{I^n}(Y)$ 或 $\Pi_{S^n}(Y)$，简记为 $\Pi_n(Y)$.

先讨论 $n=1$的情形，即 $f: I^1\to Y$；且满足 $f(0)=f(1)=y_0$，$y_0\in Y$ 是某一固定点（如图10.2.2所示）.

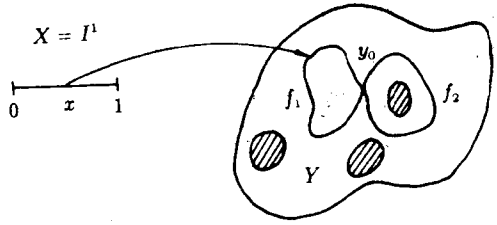


图 10.2.2　边界看作同一点：$y_0=f_1(0)=f_1(1)=f_2(0)=f_2(1)$

现在，$\Pi_1(Y)$ 一定包含一个单位元素$\{e\}$，它是常数映射的同伦类. 所谓常数映射是指

$$f(x)=y_0，\text{对所有 } x\in[0,1]，\qquad (10.2.2)$$

$\{e\}$代表能在 Y 中连续收缩到 y_0 的所有曲线（如图10.2.2中的 f_1）. 显然，如果流形 Y 是单连通（没有空洞）的，则所有通过 y_0 的曲线都能连续收缩到 y_0，因此它只含单位元素$\{e\}$，记为

$$\Pi_1(\text{单连通 } Y)=0. \qquad (10.2.3)$$

$\Pi_1(Y)$ 中两个元素 $\{f_i\}$、$\{f_j\}$ 的乘积定义为由 y_0 绕 f_i 一周后再绕 f_j 一周所构成的曲线的同伦类，即

$$\{f_i\}*\{f_j\}\equiv\{f_i\cdot f_j\}，\qquad (10.2.4a)$$

其中映射

$$(f_i\cdot f_j)(x)=\begin{cases}f_i(2x) & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right),\\ f_j(2x-1) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right).\end{cases}\qquad (10.2.4b)$$

对应于 $\Pi_1(Y)$ 中的任一元素$\{f\}$，可定义它的逆元素 $\{f\}^{-1}$. 设 f^{-1} 是沿 f 反方向绕成的曲线，即

$$f^{-1}(x) = f(1-x), \tag{10.2.5}$$

则$\{f\}$的逆元素定义为

$$\{f\}^{-1} = \{f^{-1}\}. \tag{10.2.6}$$

显然，按乘法的定义(10.2.4)，有

$$\{f\}^{-1} * \{f\} = \{f\} * \{f\}^{-1} = \{e\}, \tag{10.2.7}$$

也可以证明所定义的乘法满足结合律：

$$\{f_i\} * (\{f_j\} * \{f_k\}) = (\{f_i\} * \{f_j\}) * \{f_k\}. \tag{10.2.8}$$

因此，$\Pi_1(Y)$ 在(10.2.4)定义的乘法下构成群，称为一阶同伦群.

我们来分析 $\Pi_1(U(1))$ 的群结构. $U(1)$群的元素可表为 $e^{i\alpha}$，$0 \leqslant \alpha < 2\pi$，$\alpha = 2\pi$ 与 $\alpha = 0$看作是同一点. 因此 $U(1)$群的流形是一维球面 S^1，而现在考虑的映射是 $f: S^1 \to S^1$，如图10.2.3所示.

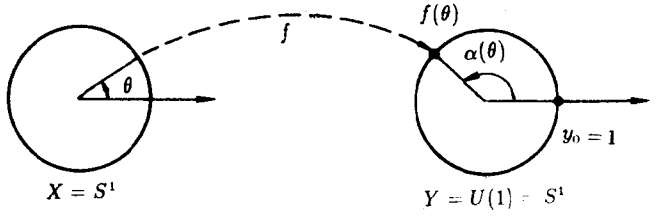


图 10.2.3　$\Pi_1(U(1))$

利用 θ 参数我们有 $\theta \in [0, 2\pi] \to f(\theta) = e^{i\alpha(\theta)}$，且满足

$$f(0) = f(2\pi) = y_0 = 1 \in U(1), \tag{10.2.9}$$

所以，

$$e^{i\alpha(0)} = f(0) = f(2\pi) = e^{i\alpha(2\pi)}, \tag{10.2.10}$$

这导致

$$\alpha(2\pi) = \alpha(0) + 2\pi n \quad (n \in \text{整数群 } Z). \tag{10.2.11}$$

上式中的整数 n 指出了 α 环绕圆 S^1 ($U(1)$群空间)的次数，通常称为环绕数. 考察具有同一环绕数的映射，它们可以通过连续变形而

相互转化，即它们是同伦类. 例如 $n=1$ 的两个映射：

$f_1(\theta)=e^{i2\pi\sin(\theta/4)}$，$\alpha_1(\theta)=2\pi\sin(\theta/4)$，$\alpha_1(2\pi)=\alpha_1(0)+2\pi$；

$f_2(\theta)=e^{i\theta}$，$\alpha_2(\theta)=\theta$，$\alpha_2(2\pi)=\alpha_2(0)+2\pi$.

我们可以找到同伦(映射) $H(\theta,t)=e^{i(\theta t+2\pi\sin(\theta/4)\cos(\pi t/2))}$，使

$$H(\theta,0)=e^{i2\pi\sin(\theta/4)}=f_1(\theta),\quad H(\theta,1)=e^{i\theta}=f_2(\theta),$$

即 $f_1(\theta)$ 和 $f_2(\theta)$ 是对应于 $n=1$ 的同伦类.

对于环绕数不同的映射，无法通过连续变形使它们互相转化. 因此，它们属于不同的同伦类.

总之，$S^1\to U(1)$ 或 S^1 的所有映射被分成了以 $n\in Z$ 为标志的各个同伦类. 故它们形成的同伦群与 Z 群同构，表示为

$$\Pi_1(U(1))=Z,\quad 或\quad \Pi_1(S^1)=Z.$$

现在，把一阶同伦群推广到高阶同伦群. 考虑连续映射

$$f:\ I^n(S^n)\to Y\quad (n\geqslant 2),\qquad (10.2.12)$$

所有能够通过在 Y 中的连续变形变到映射 f_i 的映射形成一个 n 阶同伦类 $\{f_i\}$；所有 n 阶同伦类的集合记作 $\Pi_n(Y)$. 在适当定义的同伦类乘法下 $\Pi_n(Y)$ 也构成群，称为 n 阶同伦群. 高阶同伦群是很难想像的. 为便于以后的应用，我们在下表中列出关于群流形的同伦群的一些结果：

$\Pi_n(Y)$ \ Y	$U(1)$	$SU(2)$	$SU(N)$ $N\geqslant 3$	$SO(3)$	$SO(4)$	$SO(N)$ $N\geqslant 5$	Z_2	Z
$\Pi_0(Y)$	0	0	0	0	0	0	Z_2	Z
$\Pi_1(Y)$	Z	0	0	Z_2	Z_2	Z_2		
$\Pi_2(Y)$	0	0	0	0	0	0		
$\Pi_3(Y)$	0	Z	Z	Z	$Z\oplus Z$	Z		

另外还有

$$\Pi_n(S^n)=Z,\qquad (10.2.13)$$

$$\Pi_n(S^m) = 0 \quad (n < m), \tag{10.2.14}$$

$$\Pi_n(S^1) = 0 \quad (n > 1). \tag{10.2.15}$$

另一个有用的结果是关于陪集的同伦群的. 设 G 是单连通的或者有一个单连通的泛覆盖群 $\tilde{G}$, H 是 G 的一个子群, 则

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H). \tag{10.2.16}$$

作为这一节的结束, 我们来说明场的孤子解如何联系于同伦群的元素. 我们已经说过, 场的孤子解可看作是场的无穷空间边界在简并真空上的映射. 这意味着孤子解给出同伦群的元素; 反过来, 与同伦群的元素相对应的是孤子解. 即孤子解与同伦群元素间建立了单值对应关系, 同伦群元素的数目就是孤子的数目. 因此, 确定所允许的孤子解的数目问题就归结为计算同伦群 $\Pi_n(Y)$, 其中 n 由场的空间维数 $n+1$ 确定, 而 Y 则是简并真空的内部对称群. 例如在前面讨论的 1+1 维 φ^4 模型中, 空间边界是 0 维球面 S^0, 简并真空的内部对称群为 Z_2, 此模型的同伦群为 $\Pi_0(Z_2) = Z_2$, 即有两个同伦群元素, 对应着两个孤子解.

10.3 1+2 维涡线

考虑下列关于复标量场 $\varphi(x)$ 的模型, 它是定域 $U(1)$ 规范不变的:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^* \varphi - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2, \tag{10.3.1}$$

其中 $\mu, \nu = 0, 1, 2$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 为电磁场张量, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ 为协变导数. 该场系统的能量为

$$H = \int \mathrm{d}^2 x \left[\frac{1}{2} (E_i^2 + B_0^2) + (D^0 \varphi)^* (D^0 \varphi) + (D^i \varphi)^* (D^i \varphi) + \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^* \varphi - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (i = 1, 2), \tag{10.3.2}$$

其中 $E_i = -F_{0i}$，$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{0\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 分别为电场和磁场. 场系统的运动方程为

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) + e^2A^\mu\varphi^*\varphi, \\ D_\mu D^\mu\varphi = -\lambda\varphi\left(\varphi^*\varphi - \frac{m^2}{\lambda}\right); \end{cases} \tag{10.3.3}$$

场方程的最低能量解(真空)相应于

$$A^\mu = 0, \quad |\varphi| = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \tag{10.3.4}$$

可见模型具有简并真空，其集合为半径为 $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ 的一维球面 S^1，或说其内部对称群为 $U(1)$.

模型的无穷远边界为 $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$，它形成无穷大球面 S^1. 由(10.3.2)式知，方程(10.3.3)的有限能量稳定解必须满足下列边界条件

$$\begin{cases} |\varphi| \to \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \\ D_i\varphi = (\partial_i - ieA_i)\varphi = o(r^{-2}), \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \\ F_{\mu\nu} = o(r^{-2}). \end{cases} \tag{10.3.5}$$

边界条件(10.3.5a)和真空条件(10.3.4)给出了 $S^1 \to U(1)$ 的同伦映射，相应的同伦群为(参见上节的表)：

$$\Pi_1(U(1)) = Z, \tag{10.3.6}$$

因而可断言模型具有无穷多个以整数 n 为标志的孤子解.

寻找满足边界条件(10.3.5)的方程(10.3.4)的一般形式的解没有成功. 但可以找出它的单位长度能量有限的轴对称形式的解. 取轴规范 $A_0 = 0$，在极坐标系中尼尔逊和奥列逊找到的轴对称解具有下列形式：

$$A_r = 0, \quad A_\theta = f(r), \quad \varphi = g(r)\exp(in\theta), \tag{10.3.7}$$

其中 $f(r)$和 $g(r)$满足边界条件

$$\begin{cases} f(r) \to \dfrac{n}{er}, \\ g(r) \to \dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}, \end{cases} \quad \text{当 } r \to \infty. \tag{10.3.8}$$

这个解通常称为涡线，因为在这个解中量子化的磁通量集中在一个半径为 m_g^{-1} 的管内，形成了涡线，其中 $m_g = \dfrac{em}{\sqrt{\lambda}}$ 是通过 Higgs 机制获得的粒子的质量.

模型的守恒拓扑流可构造为

$$J_\rho = \frac{e}{4\pi}\varepsilon_{\rho\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{10.3.9}$$

相应的拓扑荷为

$$\begin{aligned} Q &= \int \mathrm{d}^2x J_0 = \frac{e}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x \varepsilon_{0\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{e}{2\pi}\int \mathrm{d}^2x\, B_0 = \frac{e}{2\pi}\Phi, \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

这里 Φ 是通过平面 xy 的磁通量. (10.3.10)式表示 Φ 表达了模型的拓扑荷. 由斯托克斯定理，我们有

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_\infty \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} A_\theta(r\to\infty) r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{n}{er} r\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi n}{e}, \end{aligned} \tag{10.3.11}$$

其中第二个等式利用了式(10.3.7)，第三个等式利用了(10.3.8)式. 上式说明磁通量是量子化的.

上面的孤子解存在的同伦群分析可推广到非阿贝尔规范理论. 如果所用的规范群为 G，则这时相应的同伦群为 $\Pi_1(G)$. 设群 G 为 $SU(N)$，则因 $\Pi_1(SU(N)) = 0$，故不可能有孤子解. 如果群 G 为 $SO(N)$，则由于 $\Pi_1(SO(N)) = Z_2$，故有磁通量(拓扑荷)为 ± 1 个单位的二个孤子解.

10.4 狄拉克磁单极

在$U(1)$规范理论所表示的电磁理论中，如果认为电和磁是完全对称的，则相应于点电荷，也应该有点磁荷，通常称为狄拉克磁单极. 迄今为止，尽管实验上尚未发现磁单极，但理论上对有关问题的讨论和分析仍是十分有趣和必要的.

现考虑一置于原点、磁荷为g的磁单极，其磁场为：

$$\boldsymbol{B}=\frac{g\boldsymbol{r}}{r^3}=-g\nabla\left(\frac{1}{r}\right), \tag{10.4.1}$$

由于$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta^3\boldsymbol{x}$，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=4\pi g\delta^3\boldsymbol{x}. \tag{10.4.2}$$

由此，它产生的磁通量为

$$\Phi=\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int\mathrm{d}^3x\nabla\cdot\boldsymbol{B}=4\pi g. \tag{10.4.3}$$

设在上述磁单极场中有一电荷为e的粒子，它的波函数为

$$\psi=|\psi|\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)],$$

当存在电磁场时，$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$，故

$$\psi\to\psi\exp(ie\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}),$$

对应的位相α的改变为

$$\alpha\to\alpha-e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r},$$

考虑一个r、θ固定而φ从$0\to2\pi$的闭合路径l(图 10.4.1)，

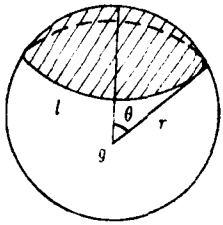


图 10.4.1

沿这条路径位相的总变化为

$$\Delta\alpha = e\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = e\int \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$= e\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = e\,\Phi(r,\theta), \tag{10.4.4}$$

其中 $\Phi(r,\theta)$是通过由 r,θ 所确定的球冠的磁通量. 显然,$\Phi(r,\theta)$ 随 θ 的改变而改变,当 $\theta\to 0$ 时,球冠收缩到点,相应的磁通量为零:

$$\Phi(r,0) = 0. \tag{10.4.5}$$

当 $\theta\to\pi$ 时

$$\Phi(r,\pi) = 4\pi g. \tag{10.4.6}$$

然而,当 $\theta\to\pi$ 时,闭路 l 也收缩到点,则由(10.4.4)式中的路径积分知,要得到由(10.4.6)式所表示的有限的 Φ,$\boldsymbol{A}$ 在 $\theta=\pi$ 处必须是奇异的. 这个推理对各种可能半径的球都成立,因此 $\boldsymbol{A}$ 在整个负 Z 轴上都是奇异的,通常称它为狄拉克弦. 显然,通过坐标轴的适当选择,狄拉克弦可以沿任何方向. 而且,狄拉克弦只需是连续的就行,而不必一定是直线.

值得指出的是,从(10.4.4)式我们还可导致电荷、磁荷的量子化. 为了保证 ψ 是单值的,(10.4.4)式中的位相改变必须满足 $\Delta\alpha = 2\pi n$,于是(10.4.4)和(10.4.6)式一起给出

$$eg = \frac{1}{2}n, \tag{10.4.7}$$

这通常称为狄拉克量子化条件,它表示电荷、磁荷都只能取某些值的整数倍.

现在,我们来给出磁单极的电磁势 $\boldsymbol{A}$ 的表达式. 容易验证,一个置于原点的磁荷为 g 的磁单极的磁场在 $\theta<\pi$ 时可用规范势

$$A_r = A_\theta = 0,\quad A_\varphi = \frac{g}{r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{10.4.8}$$

描述,它在 $\theta=\pi$ 时是奇异的. 同一个磁场在 $\theta>0$ 时可用下列规范势描述:

$$A'_r = A'_\theta = 0,\quad A'_\varphi = -\frac{g}{r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{10.4.9}$$

它在 $\theta=0$ 时是奇异的.

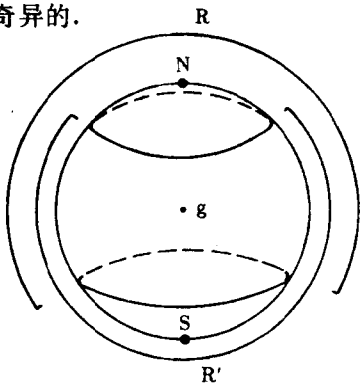


图 10.4.2

把磁单极周围的空间分成重叠的两个区域，上球台 R 和下球台 R'（见图 10.4.2），R 不包括负 Z 轴（s 极），R' 不包括正 Z 轴（N 极）. 在 R 和 R' 中规范势分别由(10.4.8)式和(10.4.9)式确定，它们在各自的区域里都是有限的，而在重叠区它们是不同的，但由下列规范变换相联系：

$$A'_\varphi = A_\varphi - \frac{2g}{r\sin\theta} \equiv A_\varphi - \frac{1}{e}\nabla_\varphi \chi, \qquad (10.4.10)$$

其中已记

$$\chi = 2ge\varphi, \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (10.4.11)$$

式(10.4.10)的协变形式为

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \chi. \qquad (10.4.12)$$

注意，由于 φ 的周期性，(10.4.11)式中表示的 χ 不是单值的，但 $\partial_\mu\chi$ 是单值的，故并不影响 A_μ 的变换. 但在量子理论中，带电粒子的波函数要变为

$$\psi(x) = e^{i\chi}\psi. \qquad (10.4.13)$$

在 $\varphi\to\varphi+2\pi n$ 时，波函数的单值性和(10.4.11)式一起给出狄拉克量子化条件(10.4.7).

为了验证(10.4.8)和(10.4.9)式确实描述了磁单极，我们来计算通过包围原点的球面的磁通量. 为此，我们取 R 和 R' 有共同的边界，例如，为了方便取 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的圆. 这样，所求的磁通量

$$\Phi = e\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{R} \nabla \times \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \int_{R'} \nabla \times \boldsymbol{A}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

$$= \oint_{\theta=\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{\theta=\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{A}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

$$= -\frac{1}{e}\oint \nabla\chi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi n, \qquad (10.4.14)$$

其中，我们利用了斯托克斯定理和式(10.4.8～9)及(10.4.11). 所得结果与(10.4.6)是一致的.

上面的讨论表明，在存在磁单极的情况下不能用一个统一的非奇异的规范势来描述磁场. 这是规范势有非平庸的拓扑性质的结果. 事实上，在 R 和 R' 的重叠区域中的一个环路 C 上，规范变换因子 $e^{i\alpha}$ 是一个由 S^1 到 $U(1)$ 的同伦映射，它的拓扑性质可以用同伦群 $\Pi_1(U(1))=Z$ 表征. 在磁单极存在时，规范变换 $e^{i\alpha}$ 属于 $\Pi_1(U(1))$ 的非平庸同伦类，这一点说明了磁荷的拓扑意义. 由式(10.4.7)和(10.4.14)可得

$$\Phi = \frac{2\pi n}{e}, \qquad (10.4.15)$$

上式表示磁通量是与 $\Pi_1(U(1))$ 相联系的不变量或守恒拓扑荷.

10.5 t′ Hooft-Polyakov 磁单极

上一节的讨论表明，我们可以在具有 $U(1)$ 规范对称性的麦克斯韦电磁理论中加上磁单极使理论具有更高的电磁对称性. 但磁单极所在之处是场方程的奇点，它的磁场有无穷大的能量，因此它不是孤粒子. 1974年，t′ Hooft 和 Polyakov 发现，如果电磁作用是有自发破缺的非阿贝尔规范作用的一部分，则可能存在能量有限

的非点状磁单极，这是一种三维空间的拓扑孤子.

考虑非阿贝尔 $SU(3)$ 定域规范不变的1+3维标量场模型，其拉氏量密度为

$$\begin{cases} \mathscr{L} = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a} + \dfrac{1}{2}D_{\mu}\varphi^{a}D^{\mu}\varphi^{a} - \dfrac{\lambda}{4}\left(\varphi^{a}\varphi^{a} - \dfrac{m^{2}}{\lambda}\right)^{2}, \\ F_{\mu\nu}{}^{a} = \partial_{\mu}A_{\nu}{}^{a} - \partial_{\nu}A_{\mu}{}^{a} + e\varepsilon^{abc}A_{\mu}{}^{b}A_{\nu}{}^{c}, \\ D_{\mu}\varphi^{a} = \partial_{\mu}\varphi^{a} + e\varepsilon^{abc}A_{\mu}{}^{b}\varphi^{c}, \end{cases} \tag{10.5.1}$$

其中 $a,b,c=1,2,3$ 为场的内部分量指标. 场系统的能量为

$$H = \int d^{3}x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^{a}\cdot\boldsymbol{B}^{a} + \boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{E}^{a}) + \frac{1}{2}(D^{0}\varphi^{a})(D^{0}\varphi^{a}) + \frac{1}{2}(D^{i}\varphi^{a})(D^{i}\varphi^{a}) + \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^{a}\varphi^{a} - \frac{m^{2}}{\lambda}\right)^{2}\right], \tag{10.5.2}$$

其中

$$E_{i}^{a} = F_{i0}{}^{a}, \quad B_{i}^{a} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \tag{10.5.3}$$

分别为电、磁场矢量. 场系统的运动方程为

$$\begin{cases} D^{\mu}F_{\mu\nu}{}^{a} = -e\varepsilon^{abc}\varphi^{b}D_{\nu}\varphi^{c}, \\ D_{\mu}D^{\mu}\varphi^{a} = -\lambda\varphi^{a}\left(\varphi^{b}\varphi^{b} - \dfrac{m^{2}}{\lambda}\right). \end{cases} \tag{10.5.4}$$

从(10.5.2)式和(10.5.4)式可知场方程的最低能量解为

$$F_{\mu\nu}{}^{a} = 0, \quad D_{\mu}\varphi^{a} = 0, \quad |\varphi| = \sqrt{\varphi^{a}\varphi^{a}} = m/\sqrt{\lambda}, \tag{10.5.5}$$

这表示模型有连续的简并真空，而且 φ 作为一三维矢量，我们总可通过 $SO(3)$ 转动选择破缺后的物理真空为 $\varphi=\left(0,0,m/\sqrt{\lambda}\right)^{T}$，可见真空具有不变子群 $SO(2)=U(1)$（剩余对称性）.

由(10.5.2)式可以看到，方程(10.5.4)的有限能量稳定解必须满足下列无穷边界条件：

$$|\varphi| \to \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \tag{10.5.6a}$$

$$D_{\mu}\varphi \to o(r^{-2}), \quad (\text{当 } r\to\infty) \tag{10.5.6b}$$

$$F_{\mu\nu}{}^{a} \to o(r^{-2}). \tag{10.5.6c}$$

三维空间的无穷边界是半径为无穷的二维球 S^2. 边界条件(10.5.6a)和真空条件(10.5.5)给出了一个 $S^2 \to \{SO(3)/U(1)\}$ 的同伦映射，它的拓扑性质由同伦群 $\Pi_2\{SO(3)/U(1)\}$ 表征. 由式(10.2.16)和10.2节中所列的表，我们有

$$\Pi_2\{SO(3)/U(1)\} = \Pi_1\{U(1)\} = Z\ , \qquad (10.5.7)$$

因而模型允许有无限多个由整数 n 标志的孤子解. 我们尝试下列形式的孤子解：

$$\begin{cases} A_0{}^a = 0, \quad A_i{}^a = \varepsilon_{aij}x^j \dfrac{1-g(\xi)}{er^2}, & (10.5.8a) \\ \varphi^a = x^a \dfrac{h(\xi)}{er^2}, & (10.5.8b) \end{cases}$$

其中 $\xi = \dfrac{em}{\sqrt{\lambda}}r$，$h(\xi)$和 $g(\xi)$满足渐近条件：

$$h(\xi) \to \xi, \quad g(\xi) \to 0 \quad (\text{当 } \xi \to \infty). \qquad (10.5.9)$$

容易验证(10.5.8)满足边界条件(10.5.6). 把渐近条件(10.5.9)代入方程(10.5.5)得到

$$\begin{cases} \xi^2 g'' = g(g^2-1) + gh^2, & (10.5.10a) \\ \xi h'' = 2hg^2 + \dfrac{\lambda}{e^2}h(h^2-\xi^2). & (10.5.10b) \end{cases}$$

把(10.5.8)代入(10.5.2)得到用 g、h 表示的场的能量为

$$H = \frac{4\pi m}{e\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\left[\xi^2\left(\frac{dg}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{d\xi}-h\right)^2 + \frac{1}{2}(g^2-1)^2 + g^2h^2 + \frac{\lambda}{4e^2}(h^2-\xi^2)^2\right]. \qquad (10.5.11)$$

由观察，$g=0$，$h=\xi$ 是方程(10.5.10)的一个解. 不幸，把它代入(10.5.11)式，得到的能量

$$H = -\frac{2\pi m}{e\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\xi}\Big|_0^\infty \to \infty\ ,$$

因而有限能量解 $g(\xi)$和 $h(\xi)$除了应满足渐近条件(10.5.9)外，从(10.5.11)知它还需满足在原点处的边界条件($\xi \to 0$)：

$$g(\xi)=\pm 1+o(\xi),\qquad h(\xi)=o(\xi). \tag{10.5.12}$$

满足条件(10.5.9)和(10.5.12)的方程(10.5.10)的孤子解只能通过数值计算得到，其大致形式如图10.5.1所示.

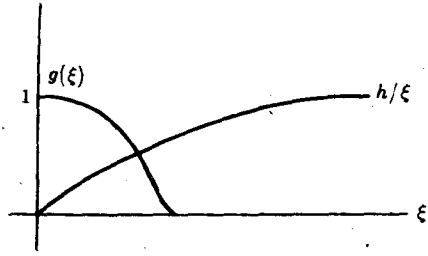


图 10.5.1

如果考虑如下的极限条件：

$$\lambda\to 0,\quad e\text{和}\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\text{固定}, \tag{10.5.13}$$

此时，方程(10.5.10b)中的最后一项可略去，边界条件(10.5.9)和(10.5.12)仍满足. 于是方程(10.5.10)可严格解出，为

$$g(\xi)=\frac{\xi}{\mathrm{sh}\xi},\qquad h(\xi)=\frac{\xi}{\mathrm{th}\xi}-1. \tag{10.5.14}$$

为了说明所得的孤子是磁单极，我们来计算它的电磁场. 为此，追随't Hooft 引进下列规范不变的电磁场张量：

$$F^{\mathrm{em}}_{\mu\nu}=\hat{\varphi}F^{a}_{\mu\nu}-\frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^{a}(D_{\mu}\hat{\varphi})^{b}(D_{\nu}\hat{\varphi})^{c}, \tag{10.5.15}$$

其中 $\hat{\varphi}\equiv\dfrac{\varphi}{\varphi}$. 利用

$$\begin{cases}\hat{\varphi}\cdot(A_{\mu}\times\hat{\varphi})\times(A_{\nu}\times\hat{\varphi})=(A_{\mu}\times A_{\nu})\cdot\hat{\varphi}\\ \hat{\varphi}\times(A_{\mu}\times\hat{\varphi})\cdot\partial_{\nu}\hat{\varphi}+(\mu\leftrightarrow\nu)=A_{\mu}\partial_{\nu}\hat{\varphi}-A_{\nu}\cdot\partial_{\mu}\hat{\varphi}\end{cases} \tag{10.5.16}$$

(10.5.15)式可化为

$$F^{\mathrm{em}}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{\mathrm{em}}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{\mathrm{em}}_{\mu}-\frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^{a}\partial_{\mu}\hat{\varphi}^{b}\partial_{\nu}\hat{\varphi}^{c}, \tag{10.5.17}$$

其中 $A^{\mathrm{em}}_{\mu}=\hat{\varphi}^{a}A^{a}_{\mu}$. 注意，当 $\hat{\varphi}=\{\hat{\varphi}^{a}\}=(0,0,1)$ 时，(10.5.17)式给

中通常形式的电磁场张量.

把解(10.5.8)和(10.5.9)代入式(10.5.17),得到当 $r\to\infty$ 时,

$$E_i = F^{em}_{i0} = 0, \quad B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{em}_{jk} = \frac{x^i}{er^3}. \tag{10.5.18}$$

这表示:从远处看,所得的孤子解相当于位于原点的磁荷为$\frac{1}{e}$的磁单极.

为了进一步了解磁荷产生的原因,我们来考察守恒流(称为磁流):

$$J^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F^{em}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2e}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{abc}\partial_\nu\hat{\varphi}^a\partial_\rho\hat{\varphi}^b\partial_\sigma\hat{\varphi}^c, \tag{10.5.19}$$

其中第二个等式已利用了式(10.5.17). 显然 J^μ 满足 $\partial_\mu J^\mu = 0$,但它不是奈特流. 利用公式

$$\varepsilon^{0\mu\nu\rho}A_\mu B_\nu C_\rho = \varepsilon^{ijk}A_iB_jC_k, \tag{10.5.20}$$

我们可写对应的守恒荷(称为磁通量,自然也不是奈特荷)为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d^3x J^0 = \frac{1}{2e}\int d^3x\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abc}\partial_i\hat{\varphi}^a\partial_j\hat{\varphi}^b\partial_k\hat{\varphi}^c\\ &= \frac{1}{2e}\int d^3x\partial_i(\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\partial_j\hat{\varphi}^b\partial_k\hat{\varphi}^c)\\ &= \frac{1}{2e}\oint_{S^2}d\sigma_i\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\partial_j\hat{\varphi}^b\partial_k\hat{\varphi}^c,\end{aligned} \tag{10.5.21}$$

其中第三个等式利用了反对称张量与对称张量收缩为0的性质.最后一个等式利用了高斯定理,S^2 是坐标空间的无穷大二维球.

在 S^2 上引进曲线坐标 $\xi_l(l=1,2)$,则面元的变换关系为

$$d\sigma_i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lm}\frac{\partial x_j}{\partial\xi_l}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_m}d^2\xi. \tag{10.5.22}$$

把它代入(10.5.21)式得

$$\Phi = \frac{1}{2e}\oint_{S^2}d^2\xi\varepsilon^{lm}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\frac{\partial\hat{\varphi}^b}{\partial\xi_l}\frac{\partial\hat{\varphi}^c}{\partial\xi_m}. \tag{10.5.23}$$

现在再来看场的内部空间,由于 $\hat{\varphi}^a\hat{\varphi}^a = 1$,$\hat{\varphi}^a$ 是在内部空间的

二维单位球 S_I^2 上. 因此，式(10.5.21)中的积分实际上表示了从 S^2 到 S_I^2 的同伦映射. 由于 φ 必须是单值的，故随着 $d\sigma_i$ 在 S^2 上覆盖一次，矢量 $\hat{\varphi}$ 将在内部空间覆盖整数 n 次. 这个 n 因而也称为环绕数. 再在 S_I^2 上引进曲线坐标 $\eta_\alpha(\alpha=1,2)$，把它的面元写为

$$d\sigma_a^I=\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\beta}d^2\eta, \tag{10.5.24}$$

注意

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\xi_i}=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\xi_i},$$

则(10.5.23)式可改写为

$$\begin{aligned}\Phi&=\frac{1}{2e}\oint_{S^2}d^2\xi\varepsilon^{abc}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial(\eta_1,\eta_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\hat{\varphi}^a\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\beta}\\&=\frac{1}{2e}\oint_{S_I^2}d^2\eta\varepsilon^{abc}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{\varphi}^a\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\eta_\beta}\\&=\frac{1}{e}\oint_{S_I^2}d\sigma_a^I\hat{\varphi}^a,\end{aligned} \tag{10.5.25}$$

最后一个等式利用了公式(10.5.24). 由于 $\hat{\varphi}$ 是垂直于内部球面的单位矢量，而单位内部球面的面积为 4π，故公式(10.5.25)中的面积分为 $4\pi n$，n 为上面提到的 $S^2\to S_I^2$ 同伦映射的环绕数. 这样，式(10.5.25)变为

$$\Phi=\frac{4\pi}{e}n, \tag{10.5.26}$$

或利用(10.4.3)式，得磁荷

$$g=\frac{\Phi}{4\pi}=\frac{n}{e}, \tag{10.5.27}$$

它表达了狄拉克量子化条件，同时也表明前面所讨论的 t′ Hooft 磁单极相应于环绕数 $n=1$(因其磁荷为 $\frac{1}{e}$！).

通过以上讨论我们可以认为，磁荷纯粹来源于模型的拓扑性质.

10.6 瞬　子

这一节我们来讨论四维欧氏空间中的孤子解问题. 由于这个解不但在空间上而且在虚的"时间"上也是局域的，所以通常称为瞬子，也称赝粒子.

欧氏空间的任一四矢量 $(\boldsymbol{V},V_4)$ 可由闵氏空间相应的四矢量 $(V^0,\boldsymbol{V})$ 通过代换 $V^0 \to -iV_4$ 得到. 相应地，度规张量由 $g_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$. 这样两个空间中四矢量内积间的关系为

$$-(A_\mu A_\mu)_{\mathrm{E}} = (A^\mu A_\mu)_{\mathrm{M}} .$$

欧氏空间的作用量 S_{E} 可通过对闵氏空间的作用量 S_{M} 作所有可能的上述代换并乘以因子 $-i$ 得到：

$$S_{\mathrm{E}} = -iS_{\mathrm{M}}(V^0 \to -iV_4) .$$

容易看出，这样得到的 S_{E} 类似于闵氏空间中的能量泛函. 因此，瞬子解被认为是欧氏空间中的有限作用量解；而闵氏空间中的最小能量解即真空相应于欧氏空间中的最小作用量解.

四维欧氏空间中 $SU(2)$ 不变的规范场的作用量可写为

$$S_{\mathrm{E}} = \int \mathrm{d}_{\mathrm{E}}x \mathscr{L}_{\mathrm{E}}, \tag{10.6.1}$$

其中 $d_{\mathrm{E}}x = dx_1dx_2dx_3dx_4$，$\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ 为欧氏空间中的拉氏量密度，其表达式为

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathrm{E}}(x) = \dfrac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, & (10.6.2a) \\ F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu{}^b A_\nu{}^c. & (10.6.2b) \end{cases}$$

定义矩阵表示：

$$A_\mu = \frac{1}{2}A^a_\mu\tau^a, \qquad F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\tau^a, \tag{10.6.3}$$

式中 τ^a 为泡利矩阵. 则(10.6.2)式可改写为

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \end{cases} \tag{10.6.4}$$

规范场方程为

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} - ig[A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0\ , \qquad (10.6.5)$$

它的最小作用量解为

$$F_{\mu\nu} = 0. \qquad (10.6.6)$$

这意味着 A_μ 是纯规范场，即

$$A_\mu(x) = \frac{i}{g} U^{-1}(x)\partial_\mu U(x), \qquad (10.6.7)$$

其中 $U(x)$ 是 $SU(2)$ 群的元素. 由此可见，真空是无限简并的，其集合构成 $SU(2)$ 群.

此外，有限作用量解要求式(10.6.6)或(10.6.7)作为无穷远边界条件. 对于四维欧氏空间，其无穷远边界是一个三维大球 S^3. 因而我们有从 S^3 到 $SU(2)$ 的同伦映射，其拓扑性质由同伦群

$$\Pi_3(SU(2)) = Z \qquad (10.6.8)$$

表征. 式(10.6.8)告诉我们，模型允许有无限多个以整数 n 标志的瞬子解. 这里 n 代表 x 点跑遍 S^3 时，$U(x)$ 覆盖 $SU(2)$ 群流形的次数，故也称环绕数. 为了说明这一点，我们定义量

$$Q = -\frac{g^2}{16\pi^2}\int \mathrm{d}_E x \mathrm{Tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \qquad (10.6.9)$$

其中

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma - igA_\rho A_\sigma) \qquad (10.6.10)$$

为 $F_{\mu\nu}$ 的对偶张量，它满足下列恒等式：

$$D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} - ig[A_\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}] \equiv 0. \qquad (10.6.11)$$

由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \\
&= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu A_\nu - igA_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma - igA_\rho A_\sigma)] \\
&= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) - igA_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \\
&\quad - ig(\partial_\mu A_\nu)A_\rho A_\sigma - g^2 A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma],
\end{aligned}$$

由迹的循环性质和 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的反对称性可知上面方括号中的第二项和

第三项是相等的，而第四项为0. 故

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) - 2ig(\partial_\mu A_\nu)A_\rho A_\sigma]$$

$$= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left\{\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma\right) - A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}ig\left[(\partial_\mu A_\nu)A_\rho A_\sigma + A_\nu(\partial_\mu A_\rho)A_\sigma + A_\nu A_\rho(\partial_\mu A_\sigma)\right]\right\}$$

$$= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu(A_\nu\partial_\rho A_\sigma) - \frac{2}{3}ig\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)\right]$$

$$= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\mathrm{Tr}\left[A_\nu\partial_\rho A_\sigma - \frac{2}{3}igA_\nu A_\rho A_\sigma\right]. \qquad (10.6.12)$$

于是，令

$$J_\mu = \frac{g^2}{8\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left[A_\nu\partial_\rho A_\sigma - \frac{2}{3}igA_\nu A_\rho A_\sigma\right], \qquad (10.6.13)$$

则由(10.6.9)式和(10.6.12～13)式得

$$Q = \int \mathrm{d}_E x\partial_\mu J_\mu = \oint_{S^3}\mathrm{d}\sigma_\mu J_\mu, \qquad (10.6.14)$$

其中第二个等式利用了四维高斯定理，注意到使作用量有限的场 A_μ 满足无穷远边界条件(10.6.7)，利用它容易证明

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\sigma \to ig\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_\rho A_\sigma \quad (\text{当 } r\to\infty). \qquad (10.6.15)$$

把它代入(10.6.14)式，并利用(10.6.7)式得到

$$Q = \frac{ig^3}{24\pi^2}\oint_{S^3}\mathrm{d}\sigma_\mu\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(A_\nu A_\rho A_\sigma)$$

$$= \frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3}\mathrm{d}\sigma_\mu\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}[(U^{-1}\partial_\nu U)(U^{-1}\partial_\rho U)(U^{-1}\partial_\sigma U)], \qquad (10.6.16)$$

在 S^3 上引进三个曲线坐标 $\xi_i(i=1,2,3)$，并在内部空间的单位球面 S_I^3 上引进三个曲线坐标 η_a $(a=1,2,3)$，利用变换公式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}\sigma_\mu = \frac{\partial(x_\nu,x_\rho,x_\sigma)}{\partial(\xi_i,\xi_j,\xi_k)}\varepsilon_{ijk}\mathrm{d}^3\xi \qquad (10.6.17)$$

及

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}[(U^{-1}\partial_\nu U)(U^{-1}\partial_\rho U)(U^{-1}\partial_\sigma U)]$$

$$=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(\eta_a,\eta_b,\eta_c)}{\partial(x_\nu,x_\rho,x_\sigma)}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_a}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_b}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_c}U\right)\right],$$

(10.6.18)

可把(10.6.16)式改写为

$$Q=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{d}^3\xi\frac{\partial(\eta_a,\eta_b,\eta_c)}{\partial(\xi_i,\xi_j,\xi_k)}\varepsilon_{ijk}$$
$$\cdot\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_a}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_b}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_c}U\right)\right]$$
$$=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S_I^3}\mathrm{d}^3\eta\varepsilon_{abc}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_a}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_b}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_c}U\right)\right].$$

(10.6.19)

我们要证明上式积分号下的被积函数正是群的不变测度，即要证

$$\mathrm{d}\mu(U)=\mathrm{d}^3\eta\,\varepsilon_{abc}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_a}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_b}U\right)\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_c}U\right)\right]$$

(10.6.20)

在群元素 U 的左移(或右移)

$$U(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\to U'(\eta'_1,\eta'_2,\eta'_3)=U_0U(\text{或}UU_0)$$

(10.6.21)

下不变. 事实上，由(10.6.21)式，我们有 $U=U_0^{-1}U'$ 和 $U^{-1}=U'^{-1}U_0$. 把它们代入(10.6.20)式得到

$$\mathrm{d}\mu(U)=\mathrm{d}\mu(U_0^{-1}U')=\mathrm{d}^3\eta\varepsilon_{abc}\mathrm{Tr}\left[\left(U'^{-1}U_0U_0^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\alpha}\frac{\partial\eta'_\alpha}{\partial\eta_a}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(U'^{-1}U_0U_0^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\beta}\frac{\partial\eta'_\beta}{\partial\eta_b}\right)\left(U'^{-1}U_0U_0^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\gamma}\frac{\partial\eta'_\gamma}{\partial\eta_c}\right)\right]$$
$$=\mathrm{d}^3\eta\,\varepsilon'_{abc}\frac{\partial(\eta'_\alpha,\eta'_\beta,\eta'_\gamma)}{\partial(\eta_a,\eta_b,\eta_c)}\mathrm{Tr}\left[\left(U'^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\left(U'^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\beta}\right)\left(U'^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\gamma}\right)\right]$$
$$=\mathrm{d}^3\eta'\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}\left[\left(U'\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\alpha}\right)\left(U'\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\beta}\right)\left(U'\frac{\partial U'}{\partial\eta'_\gamma}\right)\right]$$
$$=\mathrm{d}\mu(U').$$

类似地，可证 $d\mu(U)$ 在右移下的不变性. 故 $d\mu(U)$ 确为群的不变测度. 所以式(10.6.19)的积分是 U 在 S_I^3 上变化时所张的群空间的体积. 由于单位三维球面 S_I^3 的面积为 $24\pi^2$，故该群空间的体积为 $24\pi^2 n$，n 表示 x 跑遍 S^3 时，$U(x)$ 覆盖 S_I^3 的次数，它正是同伦群 $\Pi_3(SU(2)) = Z$ 的元素. 于是我们得到

$$Q = n \quad (n \in Z \text{ 为整数}), \tag{10.6.22}$$

可见 Q 是个拓扑不变量，称为拓扑荷或者环绕数，它的非平庸值($\neq 0$)标志了瞬子.

现在我们来求 $n \neq 0$ 的瞬子解. 代替直接解场方程，我们考虑下列不等式：

$$\int d_E x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \geqslant 0, \tag{10.6.23}$$

由它可得到关于欧氏作用量 S_E 的不等式：

$$S_E = \frac{1}{2}\int d_E x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \geqslant \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|, \tag{10.6.24}$$

等号仅在

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu} \tag{10.6.25}$$

时成立，即当规范场强自对偶(相应于+号)或反自对偶(相应于−号)时 S_E 取极小. 这时场方程(10.6.5)自动满足，因为由恒等式(10.6.11)，有

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \pm D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \tag{10.6.26}$$

因此，我们可以改而寻找满足(10.6.25)式的场函数，设它具有如下形式：

$$A_\mu(x) = \frac{i}{g} f(r) U^{-1}(x) \partial_\mu U(x), \tag{10.6.27}$$

其中，g 为 $SU(2)$ 规范耦合常数；$U(x) \subset SU(2)$ 且具有形式：

$$U(x) = \frac{1}{r}(x_4 + i x_a \tau^a), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}; \tag{10.6.28}$$

$f(r)$ 满足边界条件：

$$f(r) \to 1 \qquad (\text{当 } r \to \infty). \tag{10.6.29}$$

容易验证：

$$U^{-1}(x)\partial_\mu U(x) = -2i\sigma_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{r^2}, \tag{10.6.30}$$

式中反对称张量 $\sigma_{\mu\nu}$ 定义为

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4i}[\tau_i, \tau_j], \quad \sigma_{i4} = -\sigma_{4i} = \frac{1}{2}\tau_i, \tag{10.6.31}$$

它满足

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}. \tag{10.6.32}$$

把(10.6.27)代入(10.6.25)中的自对偶方程，并利用(10.6.28)和(10.6.30～32)，我们得到

$$r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 2f(1-f), \tag{10.6.33}$$

其满足边界条件(10.6.29)的解为

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2+\lambda^2}, \tag{10.6.34}$$

式中 λ 是任意具有长度量纲的常数. 把(10.6.34)和(10.6.30)式代入(10.6.27)得到瞬子解

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{i}{g}\frac{r^2}{r^2+\lambda^2}U^{-1}\partial_\mu U \\ &= \frac{2}{g(r^2+\lambda^2)}\sigma_{\mu\nu}x_\nu. \end{aligned} \tag{10.6.35}$$

相应的场强可由(10.6.4b)求得为

$$F_{\mu\nu} = \frac{4\lambda^2}{g(r^2+\lambda^2)^2}\sigma_{\mu\nu}, \tag{10.6.36}$$

把它代入式(10.6.9)可以知道瞬子解(10.6.35)具有拓扑荷(或环绕数)$Q=n=1$. 从式(10.6.36)也以看出场强集中在 $r \leqslant O(\lambda)$ 的范围内，因而可以把 λ 作为瞬子的半径. 解(10.6.35)于是可表示中心位于原点，半径为 λ 的拓扑荷为1的瞬子.

上面得到的瞬子解是从自对偶方程出发的. 从反自对偶方程

出发可类似地得到另一瞬子解，它相应于(10.6.35)式中的$U(x)$相$U^{-1}(x)$互换：

$$A_\mu(x)=\frac{i}{g}\frac{r^2}{r^2+\lambda^2}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)=\frac{2}{g(r^2+\lambda^2)}\bar{\sigma}_{\mu\nu}x_\nu, \tag{10.6.37}$$

其中反对称张量$\bar{\sigma}_{\mu\nu}$定义为

$$\bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij},\qquad \bar{\sigma}_{i4}=-\sigma_{i4}. \tag{10.6.38}$$

相应的场强为

$$F_{\mu\nu}=-\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{4\lambda^2}{(r^2+\lambda^2)^2}\bar{\sigma}_{\mu\nu}, \tag{10.6.39}$$

这个瞬子解的$n=-1$，通常称为反瞬子.

最后我们要指出，对量子场论起重要作用的多瞬子解也已找到，它造成了拓扑性质不同的真空之间的穿透，产生了复杂的真空结构. 这将影响强子的产生及其谱性质等. 物理学家正在从各个方面来加强对真空性质的研究和探索.

参考书目

[1] Lewis H Ryder. Quantum Field Theory. Cambridge University Press, 1985.

[2] David Bailim and Alexander Love. Introduction to Gauge Field Theory. IOP Publishing Limited, 1986.

[3] C Itzykson and J B Zuber, Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980.

[4] N N Bogoliubov and D V Shirkov. Quantum Fields. Benjamin/Cummings Publishing Company, 1983.

[5] Bing-Lin Young. Introduction to Quantum Field Theories. Beijing: Science Press, 1987.

[6] 戴元本. 相互作用的规范理论. 北京：科学出版社，1987.

[7] Walter Dittrich and Martin Reuter. Lecture Notes in Physics: Selected Topics in Gauge Theories. Springer-Verlag Berlin Herdelberg, 1986.

[8] J C Taylor. Gauge Theories of Weak Interactions. Cambridge University Press, 1976.

[9] Taizo Muta. Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories. World Scientific Publishing Company, 1987.

[10] R Rajaraman. Solitons and Instantons: An Introductions to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North-Holland Publishing Company, 1982.

[General Information]
书名=现代量子场论导引
作者=裘忠平
页数=278
SS号=10071561
出版日期=1992年03月第1版
出版社=华中师范大学出版社

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第一章　引论
　　1.1　自然单位制
　　1.2　闵氏空间和洛仑兹群
　　1.3　洛仑兹群的表示
第二章　场的拉格朗日形式和奈特定理
　　2.1　场的拉格朗日形式
　　2.2　奈特定理
第三章　正则量子化和粒子解释
　　3.1　哈密顿形式和正则量子化
　　3.2　实标量场
　　3.3　复标量场
　　3.4　狄拉克场
　　3.5　电磁场
第四章　场的相互作用和定域规范不变性
　　4.1　场的相互作用概述
　　4.2　U(1)定域规范不变性
　　4.3　SU(n)定域规范不变性
第五章　路径积分量子化
　　5.1　量子力学的路径积分形式
　　5.2　包含外源的路径积分
　　5.3　标量场的路径积分形式
　　5.4　狄拉克场的路径积分形式
　　5.5　规范场的路径积分量子化
第六章　协变微扰论(？理论)
　　6.1　有相互作用时的生成泛函和格林函数
　　6.2　连通格林函数及其生成泛函

6.3 正规顶角及其生成泛函
6.4 鞍点展开和正规顶角的树图近似
6.5 S矩阵和约化公式
6.6 微扰S矩阵和S矩阵元
第七章 量子电动力学(QED)
7.1 QED的微扰论和费曼规则
7.2 跃迁几率、反应截面和衰变寿命
7.3 康普顿散射
7.4 Ward-Takahashi恒等式
7.5 发散困难与重整化概述
7.6 原始发散图的维数正规化计算
7.7 QED的单圈重整化
第八章 量子色动力学(QCD)
8.1 QCD的微扰论和费曼规则
8.2 BRS变换和Slavnov-Taylor恒等式
8.3 QCD的单圈重整化
8.4 重整化群方程和渐近自由
第九章 对称性自发破缺和电弱统一的W-S模型
9.1 真空简并和相对称性自发破缺
9.2 手征对称性和弱作用的V-A理论
9.3 电弱统一的W-S模型
9.4 't Hooft规范和W-S模型的费曼规则
第十章 真空简并和拓扑孤子
10.1 1+1维纽结
10.2 同伦群简介
10.3 1+2维涡线
10.4 狄拉克磁单极
10.5 't Hooft-Polyakov磁单极
10.6 瞬子
参考书目
附录页