目录

1 历史回顾-相对论性的波动力学

1.1 什么是 QFT，为什么要学习 QFT

场: 物理量在时空上的连续分布，具有无穷多的自由度。

量子场论:1. 将一个经典场论量子化，而为什么需要量子化，考虑在解释黑体辐射时的理论计算出现的紫外发散，量子场论是为了描述粒子数改变的过程，例如原子自发辐射过程中凭空产生的光子。

还有其他的角度理解量子场论:2. 无穷多[1]个谐振子的联合。3. 粒子是场的激发对应的量子 (不连续一份一份的)。类似于向平静的湖 (未激发的场) 投入石头 (激发) 产生了波纹 (粒子)，以及波纹间的干涉 (粒子间的相互作用)。

QFT 用来描述粒子数改变的过程，下面是量子场论成功描述粒子数改变的两例。

1. 原子自发辐射光子从何何来: 电子在电磁场中产生扰动即为光子。

2. 原子核的 β 衰变 $n \to p + e + \bar{v}_e$，这里涉及四种量子场的相互作用。

粒子数改变在实验中非常普遍，而量子场论适合于描述粒子数改变的过程，而狭义相对论决定了在高能情形我们有能有那些量子场论。

而在 Schwartz 的书中，他举了一个更加简洁有力的例子来展现量子场论的威力。

考虑一个箱子中具有 E_1, E_2 两种不同能级，数目为 n_1, n_2 的原子，其中有 $\hbar\omega = E_2 - E_2$，将 $E_2 \to E_1$ 过程的概率称为自动激发系数 A，而具有频率 ω 的光子引起 $E_2 \to E_1$ 的过程称为被动激发系数 B，和箱子中的具有频率 ω 的光子数目有关。类似的还有 $E_1 \to E_2$ 的被动激发系数 B'。

$$dn_2 = -dn_1 = -[A + BI(\omega)]n_2 + B'I(\omega)n_1 \tag{1.1}$$

利用一些平衡态的知识例如玻尔兹曼分布并和黑体辐射公式比较，可以得到 A, B, B' 三个系数间的关系，但问题是从一个原子自动激发光子和气体平衡态有什么关系？原子辐射概率应当和它周围的原子无关。

而量子场论则通过引入粒子数产生和湮灭，不依赖于假定热平衡就推导出了 A, B, B' 三个系数间的关系。

1.2 K-G 方程的引入

固定粒子数的相对论量子力学始于德布罗意，薛定谔，Klein，Gordon，狄拉克等人的工作，早期获得了一定成功，但最终让位于 QFT，主要是三大困难，

1. **负能量问题**: 由于有无穷个负能态的粒子，导致体系基态能量无限低，不存在稳定的真空。

[1] 对应无穷多自由度

2. **负几率问题**:$\rho(x)$ 不再正定，即在某个位置或时间为负，意味着我们必须放弃我们珍爱的几率诠释。

3. **因果性问题**: 因果性的破坏是一个更加严重的问题，即类空间隔的两个事件产生了联系。

在此之前简单回顾一下量子力学历史。

爱因斯坦的光量子假设 (1905)：$E = hv = \hbar\omega$

德布罗意的物质波 (1923)：受到狭义相对论和光量子假设的启发，考虑自由电子，四动量为 $p^\mu = (\frac{E}{c}, \boldsymbol{p})$，物质波假设则认为自由电子也对应一种波，由于自由电子是最简单的运动状态，它的物质波函数自然对应于最简单的平面波即

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} = e^{-ik^\mu x_\mu} \tag{1.2}$$

其中 $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k})$，也是四矢量，因为要和四矢量 x_μ 缩并，且 k^μ 和 p^μ 不是独立的，差一个比例系数 $\hbar$。(从这里你也可以看出本 note 采用了 [1,-1,-1,-1] 的度规。)

自由粒子满足在壳条件，或质能关系，即 $p^2 = p^\mu p_\mu = m^2, E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4 \to \frac{\omega^2}{c^2} = \boldsymbol{k}^2 + (\frac{mc}{\hbar})^2$

顺带提一下，Darisson，Germir(1927) 观察到了电子散射晶体的衍射，证实了物质波假设。

回顾完历史，接下来介绍一个非常重要的方程 **Klein -Gordon 方程**。

采用类比的方法快速推导，先回顾非相对论性 non-relativistic 的量子力学

自由粒子的动能关系 $E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$

作一个替换，

$$E = \hbar\omega \to \hbar i\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{p} = \omega\boldsymbol{k} \to \hbar(-i\nabla) \tag{1.4}$$

由于 ω 的量纲为时间的倒数，可以视作为对时间求导，波矢 $\boldsymbol{k}$ 为波长的倒数，量纲为单位长度的倒数，视为对坐标求导.

代入原来的动能关系，同时引入作用对象波函数，得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi \tag{1.5}$$

也就是自由粒子的薛定谔方程。

根据相对论的色散关系，$E^2 = \boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4$，同样使用替换 $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{p} \to -i\hbar\nabla$

得到

$$[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2 - m^2c^4]\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.6}$$

可以使用达郎贝尔算符 $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$(由于我用的编译器一直无法识别矩形符号，所以后面我一般用 $\partial_\mu\partial^\mu$ 来指代该算符)，且是 Lorentz 不变的算符（在任何参考系下都是这个形式）。

负能解问题：

接下来求 K-G 方程的平面波解，令 $\psi(\boldsymbol{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}$，代入 K-G 方程，

$$[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2]e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)} = m^2c^4e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)} \tag{1.7}$$

得到质能关系 $E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4$，开方之后得到正负两个解。其实在经典狭义相对论中也经常出现负能解，但这并不会造成严重后果，由于经典世界中能量是连续的，一个正能粒子无法连续变为负能态，但在量子世界中存在量子跃迁，处于正能态的粒子有一定的几率跳到负能态上，同时放出能量，同时随着粒子的动量越大，负能也就越低，也就没有稳定的基态，也就是真空不稳定。

负几率问题：

非相对论量子力学存在下面的连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2-\nabla\cdot\{\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\}=0 \tag{1.8}$$

定义 $|\psi|^2=\rho$ 称为几率密度，以及 $-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}$ 为几率流。

则有

$$\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{1.9}$$

定义一个物理量

$$Q(t)=\int d^3x\rho(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.10}$$

利用高斯定理得到

$$\frac{dQ}{dt}=\int d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\oint_s\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{s}=0 \tag{1.11}$$

则 Q 为一个守恒量，称为守恒荷。

对于 K-G 方程则有

$$\begin{aligned}\psi^*\{[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2c^2\nabla^2-m^2c^4]\psi\}-\psi\{[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2c^2\nabla^2-m^2c^4]\psi\}^*=0\\ \psi^*\{[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2c^2\nabla^2]\psi\}-\psi\{[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hbar^2c^2\nabla^2]\psi\}^*=0\\ \psi^*(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi+\psi(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2})\psi^*=\psi(\hbar^2c^2\nabla^2)\psi^*-\psi^*(\hbar^2c^2\nabla^2)\psi\\ -\hbar^2\frac{\partial}{\partial t}[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*]=-\hbar^2c^2\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\end{aligned} \tag{1.12}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}&=-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\\ \rho&=\frac{i\hbar}{2mc^2}[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*]\end{aligned} \tag{1.13}$$

但 ρ 不一定是正定的，关键在于 K-G 方程中含有对时间的二阶导数，所以 ρ 不可避免地带有 ψ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\psi$，而这两项由边界条件给定，但边界条件是任意的，所以 ρ 可能在某个区域为正，某些区域为负。(这里参考了曾谨言《量子力学 2》p405-p406，说来惭愧，我高量就看了这几面。)

在 1934 年，Pauli 和 Weisskopf 将 K-G 方程重新解释为场方程，乘上一个电荷 q，

$$\frac{dq\rho}{dt}+\nabla\cdot q\boldsymbol{j}=0 \tag{1.14}$$

解释为局域电荷守恒，现在的认识为，应该把 K-G 方程看成一个标量方程，场量子自旋为 0，可以描述自旋为 0 的粒子，如 π 介子。

1.3 Dirac 方程

Dirac 的出发点是给出一个自洽的相对论性波动方程，即克服负几率问题，顺带缓解了负能解问题。

为了使 ρ 正定，Dirac 坚持量子力学随时间演化的方程还是一阶时间微分方程，但 Dirac 也讨厌根号，不对能量动量关系开方。

如果坚持方程只含时间一阶导，并且 H 不含根号，只能将波函数 ψ 扩展成列矢量。[2]

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ . \\ . \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

把薛定谔方程改写成

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = [-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2]\psi \tag{1.16}$$

其中 $\alpha^i(i=1,2,3),\beta$ 都是待定的 $n\times n$ 矩阵

同时期待 $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\psi = H^2\psi$ 返回到 K-G 方程。

考虑到

$$(X_1+X_2+X_3)^2 = X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_1X_2+X_2X_1+X_1X_3+X_3X_1+X_2X_3+X_3X_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\{X_i,X_j\} \tag{1.17}$$

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\psi = -\hbar^2c^2\sum_{i,j}\frac{1}{2}\{\alpha^i,\alpha^j\}\partial_i\partial_j\psi - i\hbar mc^3\sum_{i=1}\{\alpha^i,\beta\}\partial_i\psi + m^2c^4\beta^2\psi \tag{1.18}$$

和原来的 K-G 方程作对比

$$[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2 - m^2c^4]\psi(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{1.19}$$

需要满足三个条件

$$\{\alpha^i,\beta\} = 0 \tag{1.20}$$

$$\beta^2 = 1_{n\times n} \tag{1.21}$$

$$\{\alpha^i,\alpha^j\} = 2\delta^{ij}1_{n\times n} \tag{1.22}$$

2×2 矩阵无法满足上述条件，需要引入四个 4×4 矩阵，为了凸显协变性，通常定义 $\gamma^0=\beta,\boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}$

[2]这里我也提供一个想法，如果只将 H 视为数，则 $H^2\to H$ 对应操作只能是开方，但是如果将 H 视为矩阵，$H^2\to H$ 对应的操作则是矩阵的分解，我们的结果可以是一组相同的线性方程 (即 K-G 方程)，但将矩阵分解后得到的新线性方程可以是非平庸的。

$\beta, \boldsymbol{\alpha}$ 计算细节补充：

根据 $\{\alpha^i, \beta\} = 0$，有

$$\beta\alpha^i = (-I)\alpha^i\beta \tag{1.23}$$

对两边求行列式值

$$\det\beta \cdot \det\alpha^i = (-1)^N \det\alpha^i \cdot \det\beta \tag{1.24}$$

则 $(-1)^N = 1$，即 N 为偶数。但 N 不能取 2，因为找不到一个非零矩阵和 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 均反对易，因为无论如何，这个矩阵都是由 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 和单位矩阵组成的，我们总可以把某个 2×2 矩阵按照下式表示出来。

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}\left[(Tr\ MI)\, I + Tr\,(M\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\sigma}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} + (b+c)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (ib-ic)\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + (a-d)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.25}$$

所以 N 取 4。

考虑 Pauli-Dirac 表象，即 β 对角化的表象，则有

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

设 $\alpha_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$ 且根据 $\{\alpha^i, \beta\} = 0 \to A_i = 0, D_i = 0$, 又根据 $\alpha_i^\dagger = \alpha_i \to C_i = B_i^\dagger$

根据 $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}1_{n\times n} \to B_iB_k = -B_kB_i$

即满足 Pauli 矩阵相同的代数关系，所以可取，

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

当然这只是 γ 矩阵一种表示，后面的章节我们还会接触到其他表象。

$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ 即 Dirac-γ-matrix

最后将 Dirac 方程改写为[3]:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.28}$$

其中 γ 矩阵满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}1_{4\times 4} \tag{1.29}$$

[3]可能系数上有点问题，但是后面我们一般会把相关常数都取为 1。

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{1.30}$$

[4]

则连续性方程中 $\rho=\psi^\dagger\psi,\boldsymbol{j}=c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi$，$\psi^\dagger$ 相当于一个行矢量，而 ψ 相当于一个列矢量，两者相乘得到

$$\rho=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2+|\psi_4|^2>0 \tag{1.31}$$

成功克服了负几率疑难。

但是 Dirac 方程依然存在负能解，为此 Dirac 发明了 Dirac sea[5]，基态中负能级电子填充了海[6]，因为 Pauli 不相容原理，每个态只能有一个电子占据，所以理论上可以填充完所有的负能级态。如果某个负能电子激发了，则 Dirac sea 产生了一个空穴，相当于产生了一个正能的反电子。

Dirac 理论的一个巨大成就：正确预言了电子的磁矩：$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}$。

氢原子能谱和电子磁矩

氢原子能级为

$$E_n=\frac{-mc^2\alpha^2}{2n^2},\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \tag{1.32}$$

我们可以利用氢原子能级来验证相对论波动力学能否给出正确的结论，用最小耦合的方式来引入电子和外电磁场的作用，

$$A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A}),E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+e\phi \tag{1.33}$$

$$\boldsymbol{p}\to-i\hbar\nabla+\frac{e\boldsymbol{A}}{c} \tag{1.34}$$

即 $p^\mu\to p^\mu+\frac{e}{c}A^\mu$

则 K-G 方程的形式为（在外电磁场下）

$$[(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+e\phi)^2-c^2(-i\hbar\nabla+\frac{e\boldsymbol{A}}{c})^2-m^2c^4]\psi(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.35}$$

考虑最简单的氢原子，库伦势 $e\phi=\frac{e^2}{4\pi r},\boldsymbol{A}=0$。考虑定态解 $\psi\propto e^{-\frac{-iEt}{\hbar}}$，代入得到[7]

$$[(E+\frac{e^2}{4\pi r})^2+c^2\hbar^2\nabla^2-m^2c^4]\psi(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.36}$$

[4]其实这种写法有一些问题的，$g^{\mu\nu}$ 应该指的是度规张量的某个具体分量，而这里是用它来指代整个度规张量，并展示了其矩阵形式。

[5]说实话，这个词勾起了我崩坏三打深渊的不美好回忆

[6]反正基态本身是不可观测的，重要的是能级差

[7]下面方程的解法可以参考曾谨言量子力学 p407

电子速度大概是光速的 α 倍，属于非相对论性体系。我们求到的本征能级比较复杂，如果对本征能级做一个 α 的级数展开，本征能级的表达式就简单了许多。

$$E = mc^2[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}(\frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}) + ...] \tag{1.37}$$

第一项为 rest mass，第二项为 Bohr 能级，第三项为 finestructure(但这个结果不符合实验结果，本质上是因为不能用 K-G 方程来描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的电子)。

对于 Dirac 方程（在外场下）

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi)\psi = H\psi = [-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2]\psi \tag{1.38}$$

可以将此 Dirac 进行一些简化，其中 $\psi = \begin{bmatrix}\psi_R \\ \psi_l\end{bmatrix}$，两部分之比为 $\frac{v}{c}$ 此时 Dirac 方程退化为薛定谔-泡利方程，这样的处理之后方程会出现一个 $\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$，这样就可以求出电子的磁矩 $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$。[8]

Dirac 方程的平面波解及电子磁矩

取 Dirac 方程的解为

$$\Psi(x) = u(p)e^{-\frac{i}{\hbar}k\cdot x} \tag{1.39}$$

代入 Dirac 方程之后则有

$$\begin{aligned} Eu(p) &= [c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2]u(p) \\ E\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}mc^2\hat{I} & 0 \\ 0 & -mc^2\hat{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.40}$$

计算上面的本征值方程可以得到两个解 $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

上述方程还可以改写为

$$\chi(p) = \frac{c}{E + mc^2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\varphi(p) \tag{1.41}$$

$$\varphi(p) = \frac{c}{E - mc^2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi(p) \tag{1.42}$$

只有这些方程还不足以确定 $\chi(p), \varphi(p)$，我们还需要额外的自旋守恒量，即 $\chi(p), \varphi(p)$ 当为自旋投影算符 $\hat{\sum}\cdot\boldsymbol{p}$ 的本征态。

$$\hat{\sum}\cdot\boldsymbol{p}\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\varphi(p) \\ \chi(p)\end{bmatrix} \tag{1.43}$$

这个方程的本征值 $\lambda = \pm p$，代入之后可以得到 $\chi(x), \varphi(x)$ 中两个分量之间的比例，这样我们就有了 $\Psi(x)$ 四个分量间的关系。

[8]这部分是我在课后回忆的，可能有点问题

对于 Dirac 方程（在外场下）

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+e\phi)\psi=H\psi=[-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\beta mc^2]\psi \tag{1.44}$$

我们可以令

$$\Psi(x)=\begin{bmatrix}\varphi(x)\\ \chi(x)\end{bmatrix}e^{-\frac{im_0c^2t}{\hbar}} \tag{1.45}$$

相当于提取出了静质量。
代入上面的 Dirac 方程得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))\chi(x)-e\phi(x)\varphi(x) \tag{1.46}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(x)=c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))\varphi(x)-e\phi(x)\chi(x)-2m_0c^2\chi(x) \tag{1.47}$$

由于在非相对论极限下，动能较小，$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(x)\approx E\chi(x)<<m_0c^2\chi(x), e\phi(x)\chi(x)<<m_0c^2\chi(x)$
则有

$$0=c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))\varphi(x)-2m_0c^2\chi(x) \tag{1.48}$$

代入 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))\chi(x)-e\phi(x)\varphi(x)$ 得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=\frac{1}{2m_0}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))]^2\varphi(x)-e\phi(x)\varphi(x) \tag{1.49}$$

利用 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}^2+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$，上式可化为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)=\frac{1}{2m_0}(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x))^2\varphi(x)-e\phi(x)\varphi(x)+\frac{ie}{2m_0c}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}(x))]\varphi(x) \tag{1.50}$$

而 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}(x)=-i\hbar\nabla\times\boldsymbol{A}(x)=-i\hbar\boldsymbol{B}(x)$
则根据磁矩的定义有

$$\hat{\mu}=\frac{e\hbar}{2m_0c}\hat{\sigma} \tag{1.51}$$

此外，对于该 Dirac 方程，可以和前面处理外场下的 K-G 方程一样，代入定态解，得到本征能

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n-j-\frac{1}{2}+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-\alpha^2})^2}}} \tag{1.52}$$

展开后可得

$$mc^2[1-\frac{\alpha^2}{2n^2}-\frac{\alpha^4}{2n^4}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})+...] \tag{1.53}$$

j 为电子总角动量，发现实验中 $n=2, j=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ 的能级差与狄拉克方程预言非常一致。

但是在更高精度下的实验下，I.Rabi 测得 $\mu=\frac{e\hbar}{2mc}[1.00118\pm 0.00003]$

J.Schwinger 通过辐射修正得到 $\mu=\frac{e\hbar}{2mc}[1+\frac{\alpha}{2\pi}]=\mu=\frac{e\hbar}{2mc}[1.0001162]$

W.Lamb 汇报氢原子两个具有两个相同总角动量的能级 $2s_{\frac{1}{2}}-2p_{\frac{1}{2}}$ 存在 1000MHz 的 splinting(劈裂)，即兰姆位移 (Lamb shift)，揭示了 Dirac 方程本质上是不完备的。[9]

H.Bethe 通过场论的方法解释了兰姆位移，自由电子的自能和电子在电场中的自能差距 (QFT 的零点涨落) 可以给出上述的能级差。

上述例子表明 Dirac 方程还是无法解释兰姆位移等现象，理论物理学家则利用量子电动力学能成功解释上述现象，而且在计算过程中会出现无穷大，需要利用重整化来处理，简单来说就是用无穷大减去无穷大。回望历史，1947 年是一个分水岭，此后理论物理就进入现代量子场论时代。

因果性破坏

接下来分析单粒子相对论性波动力学的因果性破坏 (Causality violation)。

考察一个自由粒子，从 $\boldsymbol{x_0}$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的传播振幅。

$$U(t)=<\boldsymbol{x}|e^{\frac{-iHt}{\hbar}}|\boldsymbol{x_0}> \tag{1.54}$$

出于简单，使用自然单位制，$\hbar=1, c=1$(时间和长度同量纲，时间和能量量纲互反，所有单位都可用能量来表示)。

1. 对于非相对论量子力学，$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$

$$\begin{aligned} U(t) &=<\boldsymbol{x}|e^{-i(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m})t}|\boldsymbol{x_0}> \\ &=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}<\boldsymbol{x}|e^{-i(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m})t}|\boldsymbol{p}><\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x_0}> \\ &=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-i(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m})t}\cdot e^{i\boldsymbol{p}\cdot(x-x_0)} \\ &=(\frac{m}{2\pi it})^{\frac{3}{2}}e^{\frac{im(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2}{2t}} \end{aligned} \tag{1.55}$$

[10]

补充一下，这是个高斯积分。

高斯积分的原始形式为

$$\int e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{1.56}$$

可令

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-i(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m})t}\cdot e^{i\boldsymbol{p}\cdot(x-x_0)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{(\sqrt{\frac{-it}{2m}}\boldsymbol{p}+b)^2}\cdot e^{\frac{im(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2}{2t}} \tag{1.57}$$

[9]本质上是真空电磁场的量子涨落。

[10]这里采用的归一化条件为 $\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}|=1$，则有 $\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle\boldsymbol{p'}|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p''}\rangle=\langle\boldsymbol{p'}|\boldsymbol{p''}\rangle=(2\pi)^3(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p''})$，又有 $\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}\langle\boldsymbol{p'}|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle=(2\pi)^3(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})\rightarrow\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle=(2\pi)^{\frac{3}{2}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$，这和一般的量子力学教科书上的结果不同，原因是归一化关系的系数不同，但如果代入 1.41 式中，前面的系数 $\frac{1}{(2\pi)^3}$ 应该会被消掉，不过这一系数并不影响我们最后的结论。

其中 b 是用来凑二次型的，对整个积分结果无影响，再利用 $\sqrt{\frac{-it}{2m}}\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{k}$ 和 $\int e^{-a(k+b)^2}dk=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，代入即可得到上面的结果。

显然对于任意的位置和时间，U 都不为 0。

2. 相对论性的单粒子量子力学，$H=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$。

$$\begin{aligned}U(t)=&<\boldsymbol{x}|e^{-i(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})t}|\boldsymbol{x_0}>\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3pe^{-i(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})t}\cdot e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})}\\&=\frac{1}{2\pi^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|}\int dp[psin(p|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|)e^{-i(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})t}]\end{aligned}\tag{1.58}$$

可以适用驻波法求解，但其实这里的数学细节不是很重要，这个方程的解在 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|^2\gg t^2$ 约等于 $e^{-m\sqrt{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|^2-t^2}}$，但依旧不为 0，还是破坏了因果性。

结论：**固定粒子数的相对论量子力学本身无法克服因果性问题。**

作为对比，QFT 提供了一个非常优美的方案来拯救因果性问题，负能解问题和负几率问题。[11]

1.4 量子场论的诞生

Born,Heisenberg,Jordan(1926) 完成了第一篇量子场论文章，他们尝试去量子化电磁场，采取近似：忽略了光子的极化，假设空间维数为 1。

Dirac(1927) 年量子化了正确地量子化了电磁场 $\boldsymbol{A}$，成功解释了原子的自发辐射。简单来说，在带电外场下，考虑最小耦合，有

$$H=\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m}\tag{1.59}$$

其中有一项为 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$，所以需要量子化电磁场，这一项负责描述电偶极矩跃迁。

一维弦的量子化

我们用一维经典的弦来模拟电磁场。

假设有 N 个质点，质量为 m，忽略弹簧质量，平衡距离为 l，n_i 为第 i 个质点从平衡位置的偏移 (displacement)。

考查经典弦的动能项和势能项：

$$T=\frac{1}{2}m\sum\dot{n}_i\tag{1.60}$$

[11]因果性问题的本质是 Lorentz 对称性，而为了满足因果性必须引入反粒子的概念。Driac 的空穴是一个漂亮的思路，但只适用于费米子 (因为出发点为 Pauli 不相容原理) 比如氢原子本身也有其反粒子，或自旋为 0 的三类 π^+,π^-,π^0 其中 π^+,π^- 互为正反粒子，而 π^0 的反粒子为自身。QFT 要求：为保证因果性，对任何场描述的粒子都必须包含反粒子。

当你试图将狭义相对论和量子力学结合，会带来两个意义深远的后果：

1. 必须存在反粒子。

2 必须有自旋统计定理：自旋为整数和半整数的粒子服从不同的统计和量子化过程。

$$V = \frac{1}{2}\sum k(n_{i+1} - n_i)^2 \tag{1.61}$$

考虑连续极限 (总弦长 $L = Nl$ 固定，令 $l \to 0, N \to \infty$)，求和 $\sum\limits_i$ 可以化为积分，l 可化为 dx。

则

$$T = \frac{1}{2}(\frac{m}{l})\sum_i l(\frac{dn_i}{dt})^2 \to \frac{1}{2}\mu\int_0^L dx(\frac{\partial n(t,x)}{\partial t})^2 \tag{1.62}$$

$$V = \frac{1}{2}kl\sum_i l(\frac{n_{i+1} - n_i}{l})^2 \to \frac{1}{2}T\int_0^L dx(\frac{\partial n}{\partial x})^2 \tag{1.63}$$

则拉格朗日量为

$$L = T - V = \int_0^L dx[\frac{1}{2}\mu(\frac{\partial n(t,x)}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}T(\frac{\partial n}{\partial x})^2] \tag{1.64}$$

重新定义 $u(t,x) = \sqrt{\mu}n(t,x)$

则

$$L = \frac{1}{2}\int_0^L dx[(\frac{\partial u}{\partial t})^2 - c^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2] \tag{1.65}$$

弦上可以产生纵波，其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 为波速，可以代入欧拉-拉格朗日方程得到波动方程，$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$。

接下来量子化这个 classical theroy, 假设弦的两端固定，即 $u(t, x = 0) = u(t, x = L) = 0$。

把 $u(t,x)$ 作傅里叶展开，

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)sin(\frac{\omega_k x}{c}) \tag{1.66}$$

根据边界条件 $\omega_k = \frac{k\pi c}{L}$，代入原来的 lagrangian，可得

$$L = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}[\dot{q}_k^2(t) - \omega_k^2 q_k^2(t)] \tag{1.67}$$

[12]

顺便写出 Hamiltonian：

$$H = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}[\dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t)] \tag{1.68}$$

与谐振子的哈密顿量 $H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega x^2$ 对比，唯一的复杂性在于无穷个谐振子的联合。

可以定义正则动量

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{L}{2}\dot{q}_k \tag{1.69}$$

[12]注意区分公式中两个 L 含义不同，我这就懒得改了。

$$H=\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{P_k^2}{L}+\frac{L\omega_k^2}{4}q_k^2] \tag{1.70}$$

类比于单谐振子 $[x,p]=i\hbar$，只不过这里是 q_k,P_k，然后开始量子化，定义等时量子化条件:

$$[P_k(t),q_j(t)]=i\hbar\delta_{kj} \tag{1.71}$$

$$[q_k(t),q_j(t)]=[P_k(t),P_j(t)]=0 \tag{1.72}$$

$q_k(t)$ 是量子算符，用粒子数表象可以写成，

$$\hat{q}_k(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}[\hat{a}_k e^{-i\omega_k t}+\hat{a}_k^{\dagger}e^{+i\omega_k t}] \tag{1.73}$$

其中 a_k 为湮灭算符，$a_k^{\dagger}$ 为产生算符，类比于单谐振子 $[a_k,a_j^{\dagger}]=\delta_{kj},[a_k,a_j]=[a_k^{\dagger},a_j^{\dagger}]=0$
则有

$$H=\sum_{k=1}^{\infty}\hbar\omega_k(a_k^{\dagger}a_k+\frac{1}{2}) \tag{1.74}$$

即无穷多个谐振子的联合，哈密顿量可以写成无数个谐振子的形式的场论称为自由场论，与之相对的就是含有相互作用的量子场论。其中 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ 为著名的零点能，源于不确定性原理，在经典物理中，弹簧在处于平衡位置时，挂在弹簧末端的粒子位置确定了且动量为 0，动能势能都为 0。但是在量子力学中位置和动量无法同时确定，所有有一个非零的能量。而量子场论中这一项不断累加，一直到无穷，我们把基态能量称为真空能，这里的真空能为 ∞。

再分析一下体系的能谱:

对于单谐振子：

$$H|0>=\frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle,|n\rangle=\frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle;a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,a^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{1.75}$$

对于一维量子弦的本征态可以写为：

$$|n_1,...n_k.....\rangle \tag{1.76}$$

意味着一个量子弦的振动包含 $\omega_1,....\omega_k...$ 等无穷多个模式的信息，其中 n_k 表示模式为 ω_k 的光子数。

引入广义的 HIbert 空间，即 Fock 空间，为 Hilbert 空间的直和：

$$F=\oplus_n H_n \tag{1.77}$$

物理意义：光子数可以从 0 到无穷，所以考虑所有 Hilbert 空间的直和，其中 H_n 表示有 n 个光子数的 Hilbert 空间。

小结

1. 场论中把谐振子的第 n 个激发态诠释成为有 n 个角频率为 ω_k 的全同粒子。粒子是场激发后对应的量子。

2. 量子化后的弦的真空能是发散的。

Dirac 的工作:

1927 年，Dirac 正确地量子化了 3+1 维电磁场 (考虑了矢势 $\boldsymbol{A}$)，正确推到了原子的自发辐射公式。

之前提到过：Dirac 的思路为考虑 Hamiltonian：

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} \tag{1.78}$$

然后 Dirac 发现，要描述粒子可变的自发辐射，必须将 $\boldsymbol{A}$ 也量子化，从而将 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}$ (负责电偶极矩跃迁) 量子化，从而描述电子和电磁场的相互作用。

此外，自发辐射最早由 Einstein 提出，单原子自发辐射，用统计力学方法给出，表达式正确，但很神秘：大量粒子的模型刻画单原子，因此是个谜。而 Dirac 从微观理论正确给出了自发辐射公式，优美而深刻，因此 Dirac 也可以认为是 QFT 的先驱之一。

QFT 基本框架的建立

1929 年，Heisenberg 和他的好基友 Pauli，引入了场的正则量子化框架：即正则广义坐标和正则动量的对易关系，这门课所有问题都是基于正则量子化。

另一种漂亮而等价的量子化方案：即 Feynman 著名的路径积分量子化，不是用算符语言，而是用直观的泛函积分，对所有的路径求和，最终答案一样。不过本系列课不讨论。

引入这些框架后量子化了很多场，考虑了 Klein-Gordon 场、Dirac 场等，1920 年代末期 QFT 的框架已经基本完善。

无穷大的处理：

1930 年代在电子自能问题中发现了无穷大，但 1940 年代初期受二战影响物理学有所停顿，直到 1947 年 Shelter Island Conference(纽约长岛的避难岛会议) 提到了电子反常磁矩与 Lamb 位移。

此时涌现了优秀的新生代物理学家：代表人物为 Feynman、Schwinger、朝永振一郎，成功解释了上述两个实验结果。

解释这些问题会遇到发散，重整化理论解决了这些问题。

不过三人采用的语言不一样：Feynman 喜欢用直观的费曼图，Schwinger 喜欢用严谨复杂的算符去处理，朝永用了另一套方法 (视频里没细说)。

最后 Dyson 的文章论证三人的工作完全等价，使得很多人相信 QED 是正确描述电子和光子相互作用的场论。这项工作本应得诺奖，但不幸诺奖最多给三个人，因此 Dyson 很遗憾地终身 (1923-2020) 未得……

现代 QFT 时期：

1967-1973 年，粒子物理的圣杯：标准模型的发展，基于 SU(3)×SU(2)×U(1) 的规范场论，非常优美的理论。至今没有突破过，是 20 世纪自然科学的伟大成就，20 多个参数，可以预言所有微观高能物理现象。

其他重要成就 1972 年左右，K. Wilson 的工作：将 QFT 的思想应用到统计物理的二阶相变，利用重整化群 (Renormalization Group)，可以解释二阶相变对应的临界指数等普适性质。这为重整化提供了更加深刻的物理上的理解，也可以用到别的分支，比如凝聚态物理。

以上是比较早期的工作，而 1970s 以后，现代 QFT 依然保持非常大的活力。

关于 QFT 后续主要工作的历史回顾至此基本结束。

2 经典场论 (classical field theory)

研究经典场论无穷多自由度的体系，拉格朗日分析力学是最好的语言，且在相对论性量子场论中，相比于哈密顿力学更重要。分析力学中的作用量 Action

$$S = \int Ldt = \int dtd^3\boldsymbol{x}\mathcal{L} = \int d^4x\mathcal{L} \tag{2.1}$$

其中作用量 S 是 Lorentz 不变量，四度积分的积分测度也是 Lorentz 不变量。自然拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 也是 Lorentz 不变量。

而 $H = \int d^3x\mathcal{H}(x)$ 中 H 代表的能量并不是 Lorentz 不变量，而 d^3x 也不是 Lorentz 不变量，则哈密顿量密度 $\mathcal{H}$ 自然不一定有 Lorentz 不变性。

此外为了满足概率，我们要求 $\mathcal{H}$ 为实的，相应 $\mathcal{L}, S$ 也是实的。

四度积分的洛伦兹不变性

四度积分的变换其实就是一个二重积分的变换公式的推广，即

$$dx'_0dx'_1dx'_2dx'_3 = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} & \frac{\partial x'_0}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_0}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_0}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_0} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_0} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_0} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} dx_0dx_1dx_2dx_3 \tag{2.2}$$

，而 $\det\Lambda = 1$，说明四度积分在 Lorentz 变换下不变。

2.1 洛伦兹变换回顾

在进行具体的讨论之前，先来回顾一下 Lorentz 变换。[13]

洛伦兹变换的极简推导

考虑 A' 相对于 A 系以速度 v 沿 x 轴运动，则有

$$x' = ax + bct, ct' = cx + dct \tag{2.3}$$

又根据时空间隔不变性

[13] 反正我当时无论是大一的力学还是大二的电动力学，Lorentz 变换相关的内容都学得不怎么好，当时学场论的时候顺带也复习了一遍。

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = (cx + dct)^2 - (ax + bct)^2 \tag{2.4}$$

得到

$$c^2 - a^2 = -1, d^2 - b^2 = 1, dc - ab = 0 \tag{2.5}$$

将前两项代入最后一项可得

$$b = c \tag{2.6}$$

考虑 A' 系中原点 $0'$ 在 A 系中的坐标为 vt，即

$$0 = avt + bct \tag{2.7}$$

综上可得

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, b = c = -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.8}$$

则有

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.9}$$

Lorentz 变换线性的简单讨论

或许你会有疑惑，为什么 Lorentz 能取 (2.3) 式的形式，接下来我们就讨论一下为什么平直时空中 Lorentz 变换为线性变换。

首先是三个基本假定:

1. 两个参考系都是惯性系
2. 空间均匀
3. 空间各向同性

假设 S' 相对于 S 作速度为 v 的直线运动，设两个参考系中坐标变换为

$$x' = f(x,t), t' = g(x,t) \tag{2.10}$$

取 S' 系上静止的 M 点，在 S' 系中其运动方程为

$$x' = P = f(x,t) \tag{2.11}$$

S 系中 M 点的运动方程为

$$x - vt - Q = 0 \tag{2.12}$$

这两个方程同时成立，从几何角度来说，在 $t - x$ 坐标中必须描述同一条直线，但这并不意味着我们必须取线性形式，如

$$f(x,t) = Ax + Bt + C \tag{2.13}$$

可取

$$f(x,t) = \sqrt{x - vt} = P \tag{2.14}$$

可得

$$P = 1 \to x - vt = 1, P = 2 \to x - vt = 4 \tag{2.15}$$

这样的变换同样满足了条件一，即固定在 S' 上的点在 S 系看来作匀速直线运动。

但这样的变换违背了空间均匀的条件，更确切地说，在这样的变换下，对物体长度的测量会与具体的空间坐标有关，这明显违背了现实中的实验结果。

例如考虑一个在 S' 系中位于 $x' = 0$ 和 $x' = 1$ 之间的静止的尺子，在 S 系看来就变成了 0 时刻在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 之间以速度 v 运动的尺子，而在 S' 系中位于 $x = 1$ 和 $z = 2$ 之间静止的尺子，在 S 系看来就变成了 0 时刻在 $x = 1$ 和 $x = 4$ 之间长度为 3 速度为 v 的尺子。

设 S' 系中某尺子的位置为 $x'_1 = P_1, x_2 = P_2$,则长度为 $P_2 - P_1$,在 S 系看来运动方程为 $x_1 - vt - Q_1 = 0, x_2 - vt - Q_2 = 0$，在 S 系看来尺子长度为 $Q_2 - Q_1$，若尺子换了个位置，在 S 和 S' 中测量的长度应该和之前一样即

$$\frac{P_4 - P_3}{P_2 - P_2} = 1 = \frac{Q_4 - Q_3}{Q_2 - Q_1} \tag{2.16}$$

则有

$$\frac{P_4 - P_3}{Q_4 - Q_3} = \frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1} \tag{2.17}$$

可设这个比例为 γ，由于我们选择零时刻两坐标原点对齐，则有当 $P_0 = 0, Q_0 = 0$ 时对于任意一点有

$$\frac{P - P_0}{Q - Q_0} = \frac{P}{Q} = \gamma \tag{2.18}$$

可得

$$f(x,t) = \gamma(x - vt) \tag{2.19}$$

即线性变换。

现在考虑以 S 上的某静止点，类似的得到逆变换

$$x = \gamma'(x' + vt') \tag{2.20}$$

同时考虑到空间的各向同性，即一根尺子的长度和其空间取向无关，所以有 $\gamma' = \gamma$。

综上所以我们可以取 (2.3) 式的线性变换。

空间间隔不变性的简单讨论

假设两个不同的惯性参考系，第一个事件的坐标在两个参考系都为 $(0,0,0,0)$，若第一个参考系中两事件发生的时空间隔有如下的关系

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{2.21}$$

在第二个参考系中则满足

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \tag{2.22}$$

由于两个参考系之间是线性变换，则

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0\rightarrow x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=Ax^2+By^2+Cz^2+D^2t^2+Ext+Fyt+Hzt=0 \tag{2.23}$$

已知上述关系对任意坐标都成立，则

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D^2t^2+Ext+Fyt+Hzt=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=I(x^2+y^2+z^2-c^2t^2) \tag{2.24}$$

再考虑逆变换

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=I(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2) \tag{2.25}$$

将前两个等式相乘可以得到 $I^2=1$，假如我们取 -1，首先引入第三个惯性参考系 S''，利用之前的推论我们同样可以得到

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-c^2t^2&=-(x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2)\\ x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2&=-(x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2)\end{aligned} \tag{2.26}$$

又

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=-(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2) \tag{2.27}$$

则有

$$-(x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2)=(x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2)=0 \tag{2.28}$$

由于选取是任意的，也就是说如果我们取-1 的话，所有的时空间隔都为 0。

Lorentz 变换及其性质

Lorentz 具有 3 个转动参数，例如沿着 x 轴转 θ_x 角的 Lorentz 变换如下。

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & cos\theta_x & sin\theta_x \\ & & -sin\theta_x & cos\theta_x\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

类似的可以得到沿着 y 轴和 z 轴的变换。

同时 Lorentz 变换有特殊的 boost 变换，即

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & & \\ \gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

引入双曲函数 $\cosh\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \sinh\beta = \gamma v$ 其中 β 为快度，与速度之间满足:

$$v = \tanh\beta \to \beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} \tag{2.31}$$

同样有三个参数刻画 boost，总共有 6 个参数刻画 Lorentz 变换，Lorentz 变换的乘积还是 Lorentz 变换，可以构成 Lorentz 群。

四度间隔:$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 为 Lorentz 不变量，即

$$g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma \tag{2.32}$$

则有

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma} \to g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{2.33}$$

以及推论

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = g_{\nu\mu}g^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\sigma \tag{2.34}$$

这个公式对于初学者[14]不是那么友善，所以这里我一步一步推导一下，首先是两个基本条件

$$\Lambda^\nu{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau = \delta^\nu{}_\tau \tag{2.35}$$

[15]

$$g^{\gamma\rho}g_{\rho\sigma} = \delta^\gamma{}_\sigma \tag{2.36}$$

则有

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma} \\ g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau &= g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau \\ g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\tau &= g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau \\ g^{\gamma\rho}g_{\mu\tau}\Lambda^\mu{}_\rho &= g^{\gamma\rho}g_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau \\ g^{\gamma\rho}g_{\mu\tau}\Lambda^\mu{}_\rho &= \delta^\gamma{}_\sigma(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau \\ g^{\gamma\rho}g_{\mu\tau}\Lambda^\mu{}_\rho &= (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\tau \end{aligned} \tag{2.37}$$

改变一下指标就能得到 $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = g_{\nu\mu}g^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\sigma$。

[14]其实就是我自己

[15]其中指标的前后表示矩阵行列，这里不过是将矩阵乘法抽象出来了。

而 $\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}g^{\sigma\tau}=g^{\nu\kappa}$ 可以写成 $\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g^{\sigma\tau}(\Lambda^{T})_{\tau}{}^{\kappa}=g^{\nu\kappa}$，简写为 $\Lambda g\Lambda^{T}=g$(或者说矩阵形式)。[16]

对于 $g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}=g_{\rho\sigma}$ 则可以写成 $\Lambda^{T}g\Lambda=g$

对照三维空间上的旋转矩阵 R 的性质: $R^{T}I_{3\times3}R=RI_{3\times3}R^{T}=I_{3\times3}$ ，其中 $I_{3\times3}$ 就是其度规，两者非常相似。

协变矢量和逆变矢量

逆变矢量 $x^{\mu}=(t,x,y,z),p^{\mu}=(E,\boldsymbol{p}),x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\mu}x^{\mu}$

协变矢量 $x_{\mu}=g_{\mu\nu}x^{\nu}=(t,-x,-y,-z),x_{\mu'}=(\Lambda^{-1})^{\mu'}_{\mu}x_{\mu}$

以及四度偏导 $\partial_{\mu}=(\partial_{0},\nabla)$

四矢量缩并得到 Lorentz 标量

$$V\cdot W=V^{\mu}W_{\mu}=g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu}=V^{0}W^{0}-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W} \tag{2.38}$$

$$(V\cdot W)^{2}=V^{\mu}W_{\mu}V^{\nu}W_{\nu} \tag{2.39}$$

引入 Lorentz 张量，

$$T^{\mu\nu}\xrightarrow{\Lambda}T'^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}T^{\alpha\beta} \tag{2.40}$$

场的分类

按照 Lorentz 变换下的行为来分类[17]：

1. 标量场

$\phi(x)\to\phi'(x')=\phi(x)$

2. 矢量场

$A^{\mu}(x)\to A'^{\mu}(x')=\Lambda^{\mu}_{\nu}A^{\nu}(x)$

3. 张量场

$T^{\mu\nu}(x)\xrightarrow{\Lambda}T'^{\mu\nu}(x')=\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}T^{\alpha\beta}(x)$

4. 旋量场[18]

$\psi(x)=\psi'(x)=\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{\mu}_{\nu})\psi(\lambda^{-1}x)$

---

[16]这个公式很好证明，已知四度空间的距离为 $x\cdot x=x^{T}gx$，在一个 Lorentz 变换之后仍有 $x'\cdot x'=x\cdot x,x'=\Lambda x,g'=g$，可推得 $x^{T}\Lambda^{T}g\Lambda x=x^{T}gx$，由于 x 的任意性，则有 $\Lambda^{T}g\Lambda=g$，但你或许会问根据公式 $\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}g^{\sigma\tau}=g^{\nu\kappa}$，为什么不是 $\Lambda\Lambda g=g$? 其实 $\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\kappa}{}_{\tau}g^{\sigma\tau}=g^{\nu\kappa}$ 是分量形式，本身无所谓顺序，但是要写成矩阵形式，关键就在于求和指标的匹配，矩阵间的相乘其实就对应于重复指标求和，例如 $\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g^{\sigma\tau}(\Lambda^{T})_{\tau}{}^{\kappa}=g^{\nu\kappa}$ 中重复的 σ 就意味着 Λ 的 σ 列和 g 的 σ 行相乘，也是为了满足矩阵的乘法，后面的 Λ 才要取转置。

[17]这些量的变换形式自然来源于标量的 Lorentz 不变性，例如对于矢量场我们可以构造标量 $A^{\mu}(x)A_{\mu}(x)$，Lorentz 变换下为 $A^{\mu}(x)A_{\mu}(x)=A'^{\mu}(x')A'_{\mu}(x)=\Lambda^{\mu}_{\sigma}A^{\sigma}(x)\Lambda^{\rho}_{\mu}A_{\rho}(x)$

[18]将在第三章进行更加精细地介绍

2.2 构造 Langrangian

场论的术语

Local（定域）概念:我们必须要构造出为 Lorentz scalar 实的拉格朗日密度,如 $\mathcal{L}=\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\phi(x),\phi^2(x)$，但 $\partial_\mu\phi,\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ 不行。

而 $\int d^3y\phi(x)\phi(y)$ 虽然也是 x 的函数，但 x,y 不在同一个时空点，即 Nonlocal 非定域的，很难保证其 Lorentz 不变性。

回顾点粒子 Langrangian 力学 $L=L(q,\dot{q})$，在相对论不变的 Lagrangian 场论中，$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi(x),\dot{\phi}(x))$，这里只考虑场的一阶导，一是正确描述我们世界的标准模型确实满足这个假设，二是如果引入更高阶导数，会导致边界条件复杂的多。

有了 $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\phi(x),\phi^2(x)$ 这些“配料”，我们就能炒出我们想要的场，比如只取 $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi,\phi^2(x)$ 构造出 K-G 场的 Langrangian。

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\overset{EL\ equation}{\rightarrow}(\partial_\mu\partial^\mu-m^2)\phi=0 \tag{2.41}$$

结果虽然和之前的 K-G 方程一致，但是物理含义有很大不同原来的 K-G 方程中的 ϕ 是具有几率诠释的波函数，而这里是场。

在量子化的时候，我们的逻辑非常简单，只需要量子化一次。展开之后

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.42}$$

第一项相当于动能，第二项相当于势能。

仿造经典勒让德变换

$$L=L(q,\dot{q})\rightarrow p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}},H=p\dot{q}-L \tag{2.43}$$

定义共轭动量密度

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\rightarrow\mathcal{H}=\pi\dot{\phi}-\mathcal{L} \tag{2.44}$$

对于 K-G 场，

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x) \tag{2.45}$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.46}$$

可以看出能量密度 $\mathcal{H}$ 在任何一个时空点都是大于等于 0 的，所以体系有一个稳定的基态，这也是为什么之前构造 K-G 拉式量时要减去 $\frac{1}{2}m^2\phi^2$。

K-G 场的特点是 ϕ 的二次型,一般来说,我们可以写成 $\mathcal{L}=K(kinetic\ term)-V(Interaction\ term)$，动能项最多是二次型，相互作用项至少是三次势。

$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2, \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \frac{1}{2}m^2\phi^2, \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_2, \phi\partial_\mu A^\mu$

以上就是一般的动能场，如果一个场论中只含有动能项，一般叫做自由场论 (没有相互作用项): 量子化后对应的是无穷个独立的谐振子的联合。

常见的相互作用项如下所示

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_{int} \supset g\phi^3, \lambda\phi^4, e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(QED), g\partial_\mu\phi A^\mu\phi^*, g^2(A_\mu A^\mu)^2 \tag{2.47}$$

第四项为标量场和电磁场相互作用，第五项为四个麦克斯韦场在同一个时空点。还可以考虑在弯曲时空，给出一个相互作用项 $\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$，其中 $h_{\mu\nu}$ 表示偏离平直时空的程度。

在经典场论中很容易验证，自由场方程是线性的，比如 K-G 方程就是线性的。

$$[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2 - m^2c^4]\psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.48}$$

即在 ψ 乘上一个常数依旧是方程的解，但是加上相互作用之后，就不再是个线性方程。

2.3 E-L 方程

点粒子的 E-L 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.49}$$

是通过最小作用量原理得来的，类似的有

$$S = \int dtL = \int d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{2.50}$$

$$0 = \delta S = \int d^4x\delta\mathcal{L} = \int d^4x\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi\} \tag{2.51}$$

分部积分后得到

$$\int d^4x\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)})\delta\phi + \partial_\mu(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi)\} \tag{2.52}$$

最后一项为全导数项 (total derivative)，可以将 $\delta\phi$ 在空间边界假定为 0，即边界条件固定，而时间边界在无穷远处也为 0，便可得到最后的 E-L 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}) = 0 \tag{2.53}$$

可以加上相互作用项得到 $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$

代入得到

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3 \tag{2.54}$$

这其实是一个 $\lambda\phi^4$model ，其中 λ 为耦合常数，这里讲一下如何判断场的量纲：

$$[S] = [\hbar] = E^0 \tag{2.55}$$

$$[d^4x] = E^{-4} \to [\mathcal{L}] = E^4 \tag{2.56}$$

$$[\phi] = E^{+1}, [\lambda] = E^0 \tag{2.57}$$

2.4 对称性和守恒律

对称性的定义：在一个对称变换下系统的动力学不变。

对称变换的常见例子：

Lorentz 变换

变换为：$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$

一共有 3 个空间坐标变换和三个时空 boost 共 6 个参数。

时空平移变换

变换为：$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

一共有四个变换参数。

Poincare 变换

Lorentz 变换 + 时空平移构成的变换，共 10 个参数。很多现实的场不仅是 Lorentz 不变的，而且也是 Poincare 不变的。

对于场论中的对称性，有两个等价的视角：1. 运动方程保持不变。2.Lagrangian 保持不变。

以 $\lambda\phi^4$model 为例，$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 其不仅在 Lorentz 变换下保持不变，而且时空平移下保持不变。

任何“合理的”物理系统都要求 Pioncare 变换不变，因为时空平移不变意味着封闭系统的能量和动量守恒。

此外，若引入 ϕ^3 这样的项，则体系在变换 $\phi' = -\phi$ 下不再对称，需要引入所谓 Z 数，$Z = \pm 1$。

对于动力学方程，

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3 \tag{2.58}$$

在 Poincare 变换和 $\phi' = -\phi$ 变换下依旧保持不变。

顺便说一种特殊的对称性：标度变换-时空坐标的伸缩，此种变换下 Lagrangian 密度变化，但系统作用量 S 依旧不变。

$\lambda\phi^4$ 模型的 Lagrangian Lorentz 对称性证明

首先，标量的值和坐标的选取无关，于是：

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.59}$$

考虑到 $x' = \Lambda x, x = \Lambda^{-1}x'$，上式可改写为

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x') \tag{2.60}$$

把变量改写为 x，即

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{2.61}$$

同样的，Lagrangian 也有类似的关系。

$$\partial_\mu\phi(x) \to \partial_\mu\phi'(x') = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu\phi(\Lambda^{-1}x) \tag{2.62}$$

相应的平方项

$$(\partial_\mu\phi(x))^2 \to g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'(x)\partial_\nu\phi'(x) = g^{\mu\nu}[(\Lambda^{-1})^\rho_\mu\partial_\rho\phi][(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu\partial_\sigma\phi](\Lambda^{-1}x) \tag{2.63}$$

利用 $\Lambda^T g\Lambda = g \to (\Lambda^{-1})^\rho_\mu g^{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu = g^{\rho\sigma}$
代入上式可得

$$(\partial_\mu\phi(x))^2 \to g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'(x)\partial_\nu\phi'(x) = g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi)(\Lambda^{-1}x) = (\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x) \tag{2.64}$$

可知 $(\partial_\mu\phi(x))^2$ 确实是一个 Lorentz 标量，即这一项满足了 $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$

运动方程的对称性

$$\begin{aligned}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi'(x) &= (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x)\\ &= [g^{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\rho_\mu\partial_\rho(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu\partial_\sigma + m^2]\phi(\Lambda^{-1}x)\\ &= (g^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x)\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.65}$$

对称性的分类

第一种分法：时空对称性和内禀对称性

时空对称性:1.Poincare 对称性 2. 坐标伸缩变换，即共形变换下的对称性。

内禀对称性：某个变换下坐标不变而场变，1.$\phi' = -\phi$ 2.$\phi' = e^{i\theta}\phi$ 3. 同位旋对称性，强相互作用下质子和中子的性质非常类似 (可以看作同一种粒子的两种不同带电状态)。其他：味对称性，奇异数对称性。

第二种分法：连续对称性和分立对称性

连续对称性：存在恒等变换附近的无穷小变换

分立对称性：不存在无穷小变换，如空间反演，时间反演。

如果对称性变换和 x 无关，称为 Global 对称性，否则，称为 Local 对称性，例如在变换 $e^{i\theta(x)}$ 下不变，也就是规范不变性。具体的例子为电磁场的规范变换 $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x)$，还要一种说法认为 Local 对称性是一种冗余，例如光子只有两种极化 (螺旋度为 ±1)，而描述它的电磁场有四个分量，多余的分量就认为是一种冗余，而这些冗余就导致了规范不变性。

2.5 诺特定理

定义：如果一个系统具备某种连续对称性，并且当运动方程满足时，则该系统存在相应的守恒流。

守恒流的定义：Lorentz 矢量和张量的守恒，例如 $\partial_\mu j^\mu = 0$

证明

对称变换的两种视角：1. 主动视角：参考系不变，时空点变。2. 被动视角：时空点不变，参考系变。

采取被动视角。

同一个时空点，在两个参考系中，坐标分别为 x^μ, x'^μ 场的函数分别为 $f(x), f'(x')$

考虑无穷小变换：

$x \to x' = x + \delta x$

定义 f 的变分：

$$\begin{aligned}\delta f &= f'(x') - f(x) \\ &= f'(x+\delta x) - f(x) \\ &= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f' + o(\delta x^2) \\ &= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f + \delta x^\mu \partial_\mu \delta f + o(\delta x^2) \\ &\simeq f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f \\ &= \delta_0 f + \delta x^\mu \partial_\mu f\end{aligned} \tag{2.66}$$

更抽象地可以写为：$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu$

考虑我们熟悉的时空平移：$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

同一个物理点 $\delta\phi = 0$(如 $\phi = x^2$ 在被动视角下坐标向左平移 1，则 $\phi' = (x-1)^2$，但相应的相同时空坐标也都 $+1$, 所以场量不变。), 坐标点下的场量变换为：

$$\delta_0 \phi = \delta\phi - \delta x^\mu \partial_\mu \phi = -a^\mu \partial_\mu \phi \tag{2.67}$$

作用量的变分：

$$\delta S = \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) = 0 \tag{2.68}$$

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \tag{2.69}$$

关于 $\delta(d^4x)\mathcal{L}$ 的讨论

对于内禀对称性和平移变换而言：

$$\delta(d^4x)\mathcal{L} = 0 \tag{2.70}$$

因为这两种变换下空间坐标没有任何伸缩和切变。

而对于 Lorentz 变换而言：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \simeq (\delta^{\mu}_{\ \nu} + \omega^{\mu}_{\ \nu}) x^{\nu} \tag{2.71}$$

则有

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\ \mu} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu} \\ &= (\Lambda^{T})_{\mu}^{\ \rho} g_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu} \\ &= (\delta_{\mu}^{\ \rho} + (\omega^{T})_{\mu}^{\ \rho}) g_{\rho\sigma} (\delta^{\sigma}_{\ \nu} + \omega^{\sigma}_{\ \nu}) \\ &\simeq g_{\mu\nu} + (\omega^{T})_{\mu}^{\ \rho} g_{\rho\sigma} \delta^{\sigma}_{\ \nu} + \delta_{\mu}^{\ \rho} g_{\rho\sigma} \omega^{\sigma}_{\ \nu} \\ &= g_{\mu\nu} + (\omega^{T})_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.72}$$

[19]

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} \Lambda^{\rho}_{\ \mu} \Lambda^{\sigma}_{\ \nu} \\ g_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} (\delta^{\rho}_{\ \mu} + \omega^{\rho}_{\ \mu}) (\delta^{\sigma}_{\ \nu} + \omega^{\sigma}_{\ \nu}) \\ g_{\mu\nu} &\simeq g_{\mu\nu} + g_{\rho\sigma} \delta^{\rho}_{\ \mu} \omega^{\sigma}_{\ \nu} + g_{\rho\sigma} \omega^{\rho}_{\ \mu} \delta^{\sigma}_{\ \nu} \\ g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{2.73}$$

则有 $\omega_{\mu\nu}$ 是全反对称张量，则 $\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu} x_{\nu}$

$d^4x' = det[\hat{I} + \sum] \neq \hat{I} + tr \sum = \hat{I} + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}$

则 $\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = d^4x(\partial_{\mu} \delta x^{\mu}) = d^4x(\omega^{\mu\nu} \partial_{\mu} x_{\nu} = 0)$，反对称张量和对称张量求和自然为 0。

但在共形变换下 (坐标有伸缩)，积分测度不为 0，因此需要写成普适形式，保留 $\delta(d^4x)\mathcal{L}$。

例如 $x' \to e^{\lambda} x \to \delta x = \lambda x$

Noether 定理的证明

考虑到 $\delta\mathcal{L} = \delta_0 \mathcal{L} + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L}$

对其使用链式法则, 得到

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta_0(\partial_{\mu}\phi) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} \tag{2.74}$$

利用求导和变分的可交换性，可得

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\mu}(\delta_0 \phi) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} \tag{2.75}$$

并利用乘积求导的关系式，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta_0 \phi\right) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\right] \delta_0 \phi + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} \tag{2.76}$$

[19]现在回过头来看，这里证明的第二步最好不要引入 $(\Lambda^{T})_{\mu}^{\ \rho}$ 这个矩阵运算到张量运算中，很容易产生问题。

其中的 E-L 方程为 0，将结果代入到作用量中

$$\delta S = \int d^4x[\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi) + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}] \tag{2.77}$$

$$= \int d^4x\partial_\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi + \delta x^\mu\mathcal{L}] \tag{2.78}$$

$$= 0 \tag{2.79}$$

由于积分的时空区域是任意的，因此仍然可以得出被积函数处处为 0 的结论，即

$$\partial_\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi + \delta x^\mu\mathcal{L}] = 0 \tag{2.80}$$

将守恒流定义为：

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi + \delta x^\mu\mathcal{L} \tag{2.81}$$

但对于同一个坐标点的变分 $\delta_0\phi$ 物理上不是很方便 (物理意义不明确)，可改写为

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\delta\phi - \delta x^\nu\partial_\nu\phi) + \delta x^\mu\mathcal{L} \\ &= (\mathcal{L}\delta^\mu_{\ \nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi)\delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \end{aligned}$$

守恒荷

将积分号内的守恒流展开：

$$0 = \int d^4x\partial_\mu j^\mu \tag{2.82}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x(\partial_0 j^0 + -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}) \tag{2.83}$$

根据 Gauss 公式，

$$\int d^3x(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}) = \int \boldsymbol{j}\cdot dS = 0 \tag{2.84}$$

于是有

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt\partial_0(\int d^3x j^0) \tag{2.85}$$

令 $Q = \int d^3x j^0$，可得 $\frac{dQ}{dt} = 0$

此处 Q 称为守恒荷 (Noether charge)

例 1 时空平移

时空平移下：$\delta x^\mu = a^\mu, \delta\phi = 0$

代入可得

$$
\begin{aligned}
j^\mu &= (\mathcal{L}g^\mu_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi)a^\nu \\
-j^\mu &= (-\mathcal{L}g^\mu_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi)g^{\nu\sigma}g_{\nu\sigma}a^\nu \\
-j^\mu &= (-\mathcal{L}g^{\mu\sigma} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\sigma\phi)a_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.86}
$$

此处作了指标升降。

定义 $T^{\mu\nu} = -\mathcal{L}g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi$ 此即 GR 中著名的能量动量张量。

则

$$
0 = -\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(T^{\mu\nu}a_\nu) = \partial_\mu T^{\mu\nu}a_\nu \tag{2.87}
$$

此处 a_ν 是没有具体物理意义的常量，对它求导为 0。

于是相应的守恒律为：$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

考虑 $T^{0\nu}$ 对应的守恒荷

$P^\nu = \int d^3xT^{0\nu} = (\int d^3xT^{00}, \int d^3xT^{0i}) = (\int d^3x\mathcal{H}, \int d^3x\mathcal{P}^i) = (E, \boldsymbol{p})$

于是物理意义为：**时间平移对称性对应能量守恒，空间平移对称性对应动量守恒。**[20]

下面来讨论一下内禀对称性守恒流的两例

例 2：场的平移对称性

考虑一个简单的 K-G 场：

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 \tag{2.88}
$$

考虑连续对称变换：

$$
\phi \to \phi' = \phi + \alpha \tag{2.89}
$$

称为场的平移对称性 (Shift symmetry)

该变换下：

$$
\delta\phi = \alpha, \delta x^\mu = 0 \tag{2.90}
$$

于是可守恒流得：

$$
j^\mu = \alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \alpha\partial^\mu\phi \tag{2.91}
$$

验证守恒流：

$$
\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\partial^\mu\phi = 0 \tag{2.92}
$$

对于零质量的场，显然 $\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0$ (这个结论也是来自 E-L 方程)

例 3：U(1) 相位对称性

考虑复的 K-G 场：

[20]这里 T^{0i} 对应于场的动量有点不太直观，在后续量子化的过程中这一项的物理意义会更加明显，大概？

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \tag{2.93}$$

考虑对称变换：

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi \tag{2.94}$$

做无穷小近似：$\delta\phi \simeq i\alpha\phi$

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi*)}\delta\phi^* = \partial_\mu \phi^* i\alpha\phi + \partial_\mu \phi(-i\alpha\phi^*) \\ &= i[(\partial_\mu \phi^*)\phi - (\partial_\mu \phi)\phi^*]\alpha \end{aligned} \tag{2.95}$$

利用 K-G 方程也很容易验证：

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.96}$$

$$Q = \int d^3x j^\mu = \int d^3x i[(\partial^\mu \phi^*)\phi - (\partial^\mu \phi)\phi^*]\alpha \tag{2.97}$$

此荷即电荷，为理解这一点，必须引入电磁场，以后会发现光子或电磁场和此荷作用。

3 K-G 场的量子化

对经典场进行量子化的标志是将场量和共轭动量变成算符。而物理量变成算符后总要满足一些对易关系，因此本章的目的就是导出场量和共轭动量算符以及它们之间的对易关系。

考虑实的自由 K-G 场：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.1}$$

于是可得动量密度：

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \tag{3.2}$$

以及 Hamiltonian 密度：

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.3}$$

关于系数正负有一段插曲：Hamiltonian 密度是正定的，有稳定的基态，动能项不能随便乱写。现在开始 K-G 场的量子化，也就是给出场中的正则坐标、正则动量算符以及它们的对易关系。

3.1 场的对易关系的猜测

回顾 NRQM 中，有对易关系：

$$[q,p]=i \tag{3.4}$$

对 (多自由度的) 离散系统而言：

$$[q_i,p_j]=i\delta_{ij} \tag{3.5}$$

$$[q_i,q_j]=[p_i,p_j]=0 \tag{3.6}$$

对于连续系统而言：

$$H=\int d^3x\mathcal{H} \tag{3.7}$$

而 NRQM 中 $H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$ 可以找出 p,q
对应到场论上，我们可以将质点力学系统中的广义坐标对应成场量 $\phi(x)$
然后我们来做一个关于对易关系的猜测：
考虑等时量子化 (或 Schroedinger 绘景)，即不考虑算符的时间依赖：

$$[\phi(x),\pi(y)]=\delta^{(3)}(x-y) \tag{3.8}$$

$$[\phi(x),\phi(y)]=[\pi(x),\pi(y)]=0 \tag{3.9}$$

接下来我们来验证它们，我们知道场方程是 K-G 方程：

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi=0 \tag{3.10}$$

而场可以写成 Fourier 变换的形式：

$$\phi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\psi(p,t) \tag{3.11}$$

将 Fourier 变换形式的场量代入到 K-G 方程，可得

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{\mathbf{p}}^2)\psi(p,t)=0 \tag{3.12}$$

其中 $\omega_p=\sqrt{p^2+m^2}$ ，即能量。
这又是一个谐振子方程，具有两组线性独立的解：$e^{i\omega_p t},e^{-i\omega_p t}$
这就提示我们利用谐振子的知识对 K-G 方程做量子化。
回想起谐振子的 Hamiltonian：

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}\omega^2x^2 \tag{3.13}$$

写成升降算符形式即是：

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \tag{3.14}$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \tag{3.15}$$

(这里加 hat 符号是为了对应后面的场量子化)
于是 Hamiltonian 可以写成更简单的形式：

$$H = \omega(aa^\dagger + \frac{1}{2}) \tag{3.16}$$

而 K-G 场的 Hamiltonian 为

$$H = \int d^3x[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2]$$

仿照单粒子谐振子的坐标算符，代之以场量，可以将其写成 Fourier 变换的形式：

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \tag{3.17}$$

(其中加上了 Hermitian 共轭项 $a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ 是为了保证 $\hat{\phi}(x)$ 是实数，因为我们讨论的是实 K-G 场)
类似地，我们可以仿照 NRQM 中的关系，钦定一个共轭动量密度算符：

$$\hat{\pi}(x) = (-i)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}}(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \tag{3.18}$$

类比于谐振子，这里有无穷多个 $a_{\mathbf{p}}$ (湮灭算符)，对应无穷多个谐振子。
为了导出假设的量子化条件，看看 $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 的关系
NRQM 中：

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{3.19}$$

类似地，QFT 中就有：

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tag{3.20}$$

接下来我们正式来证明之前的对易关系，这里的推导需要一些技巧。
令 $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ ：

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.21}$$

$$\hat{\pi}(x) = (-i)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}}(a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.22}$$

根据上式，我们可以写出：

$$[\phi(x),\pi(x')]=\int\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}(-\frac{i}{2})\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}([a^\dagger_{-\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}'}]-[a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{-\mathbf{p}'}])e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} \tag{3.23}$$

再利用 $[a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}'}]=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$，进一步可得：

$$\begin{aligned}&=\int\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}(-\frac{i}{2})\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}(-(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')-(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}'))e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')}\\&=i\int\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{p'}}{\omega_p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')}\end{aligned} \tag{3.24}$$

此时利用 δ 函数的积分性质，可得：

$$\begin{aligned}&=i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\int d^3p'\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-(-\mathbf{p}))e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')}]\\&=i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}}}e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}')}=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2 K-G 场的能谱与玻色-爱因斯坦统计

接下来计算哈密顿量 K-G 场的 Hamiltonian：

$$\begin{aligned}H&=\int d^3x[\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2]\\&=\int d^3x\int\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}[-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4}(a_{\mathbf{p}}-a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{\mathbf{p}'}-a^\dagger_{-\mathbf{p}'})+\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}(a_{\mathbf{p}}+a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{\mathbf{p}'}+a^\dagger_{-\mathbf{p}'})]\\&=\int\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')[-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4}(a_{\mathbf{p}}-a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{\mathbf{p}'}-a^\dagger_{-\mathbf{p}'})+\frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'+m^2}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}(a_{\mathbf{p}}+a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{\mathbf{p}'}+a^\dagger_{-\mathbf{p}'})]\\&=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}}[a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}[a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}}]]\end{aligned} \tag{3.26}$$

方括号中第二项 $\frac{1}{2}[a_{\mathbf{p}},a^\dagger_{\mathbf{p}}]$ 即所谓的零点能 (亦即真空能)。

这里由于对 $\mathbf{p}$ 积分，所以 Hamiltonian 包含了无穷多个角频率 $\omega_{\mathbf{p}}$ 的谐振子，最后结果零点能会发散。

参照谐振子的基态能：$\frac{1}{2}\hbar\omega$ ，然后可由升降算符上升到其他态。

用 $|0\rangle$ 代表基态，则类比 NRQM 中谐振子的零点能性质：$a|0\rangle=0$，QFT 中也要满足：

$$a_{\mathbf{p}}|0\rangle=0|0\rangle \tag{3.27}$$

因此当 Hamiltonian 作用到基态上时：

$$H|0\rangle=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}}[a^\dagger_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)]|0\rangle \tag{3.28}$$

其中 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0|0\rangle = 0$，真正有意义的是第二项，是一个无穷大常数，也就是真空能量是无穷大。

但幸运的是，我们并不太关心基态能量的绝对值，而是更关心能级之间的能量差，所以我们可以重新定义基态，使得：

$H|0\rangle = 0|0\rangle$

就像我们关心一个人身高时，只需要将他所站的地面定义为高度 0，而无论他站的地方是海平面还是珠穆朗玛峰。

这种操作叫做“正则排序”，其具体的物理意义暂时不提。

不考虑引力效应时，真空能是零还是无穷大是无关紧要的。然而当考虑 GR、也就是量子引力时，这就成了一个非常深刻的问题。

但这门课不考虑量子引力，只考虑 Minkowski 时空中的量子场论。这样我们就可以在计算中扔掉零点能，只剩下谐振子形式的能量：

$$H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{3.29}$$

有了这个前提，我们就可以来导出 K-G 场的能级。

回顾 NRQM 中谐振子的对易关系：

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger, [H, a] = -\omega a \tag{3.30}$$

由此可以定义第 n 激发态：

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle \tag{3.31}$$

可以利用对易关系证明 $|n\rangle$ 就是第 n 个能量本征态。

回到 K-G 场中，我们也采用相同的思路，先寻找类似的对易关系 $[H, a^\dagger]$

记：

$H = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}$

利用对易子的运算法则：$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$

以及产生湮灭算符的对易关系：$[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{p}'}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ $[a^\dagger_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = 0$

可以得到：

$$[H, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}, [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \tag{3.32}$$

这与谐振子的对易关系仍然是类似的，唯一区别仍然是此处多了下标 $\mathbf{p}$。

现在开始尝试构造第一激发态、或者说单粒子态，并且验证其也是能量本征态。

首先，利用：

$$Ha^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle = [H, a^\dagger_{\mathbf{p}}]|0\rangle + a^\dagger_{\mathbf{p}} H|0\rangle = \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{3.33}$$

可知 $a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$ 的确是能量本征态，且本征值为 $\omega_{\mathbf{p}}$

我们前面提到过：粒子是场的激发产生的量子，其动量为 $\mathbf{p}$ ，后面会用动量算符验证。

接下来回答一个有意思的问题：

$a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}$ 是不是能量的本征算符？

为了验证这一点，我们先将 $Ha^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}$ 作用在真空态上：

$$Ha^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle = (\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{p}})a^\dagger_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle \tag{3.34}$$

然后有意思的事情来了：

两个不同动量的产生算符 $a^\dagger_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}$ 作用在基态上，得到新的能量本征态，其本征值为两个动量对应的能量之和，我们将此称为双粒子态。

由此可以推广到任意 n 个粒子的情况：

$$Ha^\dagger_{p_1}...a^\dagger_{p_n}|0\rangle = (\sum_{k=1}^{n}\omega_{p_k})a^\dagger_{p_1}...a^\dagger_{p_n}|0\rangle \tag{3.35}$$

接下来顺便看一下动量算符。

根据 Noether 定理，空间平移的守恒荷即动量：

$$\mathbf{p} = -\int \mathrm{d}^3x\pi(x)\nabla\phi(\ x) \tag{3.36}$$

将其量子化 (算符化) 后，可以表示为产生湮灭算符的形式：

$\hat{\mathbf{p}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$

(为了区分动量值和动量算符，等式左边加上了 hat)

可以验证对易关系：

$$\left[\hat{\mathbf{p}},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\right] = \mathbf{p}\hat{a}^\dagger_p,\ [\hat{\mathbf{p}},\hat{a}_{\mathbf{p}}] = -\mathbf{p}\hat{a}_{\mathbf{p}} \tag{3.37}$$

从而可以进一步验证单粒子态与多粒子态除了是能量本征态以外、也是动量本征态：

$$\begin{cases}\hat{p}\hat{a}^\dagger_p|0\rangle = p\hat{a}^\dagger_p|0\rangle \\ \hat{p}\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle\end{cases} \tag{3.38}$$

做个总结：

$$\begin{cases}\hat{H}\left(\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle\right) &= \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_{p_k}\right)\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle \\ \hat{p}\left(\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle\right) &= \left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}\cdots\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle\end{cases} \tag{3.39}$$

因此 n 粒子态是能量和动量的共同本征态，总能量是所有粒子能量之和，总动量是所有粒子动量的矢量和。

还可以合并成 4-动量算符的形式：

$\hat{P}^\mu\hat{a}^\dagger_{p_1}...\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle = (\sum\limits_{k=1}^{n}P^\mu_k)\hat{a}^\dagger_{p_1}...\hat{a}^\dagger_{p_n}|0\rangle$

到此，我们就理解了为什么说 QFT 对应着无穷多个粒子。

因为：

$$\left[a_p^\dagger, a_q^\dagger\right] = 0 \quad \forall p, q \tag{3.40}$$

考察双粒子态：

$$a_p^\dagger a_q^\dagger \left|0\right\rangle = \left|p, q\right\rangle \tag{3.41}$$

对应着 QM 中两个全同玻色子的动量本征态。

而由于两个产生算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger$ 对易，因此：

$$\left|q, p\right\rangle = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger \left|0\right\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \left|0\right\rangle = \left|p, q\right\rangle \tag{3.42}$$

因此这对应着玻色子。

顺便提一句 Bose-Einstein 凝聚：同一个态可以有宏观数目个玻色子。

用 QFT 语言写出来，就是存在具有相同动量的 n 粒子态：$\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger\right)^n \left|0\right\rangle$

根据这个描述，这里可以顺便对 Fermi-Dirac 统计进行一点剧透：

Dirac 场的量子化条件：

$$\left\{a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger\right\} = 0 \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \tag{3.43}$$

于是有：

$$\left(a_{\mathbf{p}}^\dagger\right)^2 \left|0\right\rangle = 0 \tag{3.44}$$

此即 Pauli 不相容原理 (即不存在具有相同动量的双粒子态)

因此用场论来理解自旋统计定理是非常深刻的，因为完全取决于自洽的量子化条件 (而不需要额外的独立假设)

3.2.1 单粒子态归一化问题

我们假定具有动量 $\boldsymbol{p}$ 的单粒子态为 $\left|\mathbf{p}\right\rangle \propto a_{\mathbf{p}}^\dagger \left|0\right\rangle$

常规的归一化条件 $\langle \boldsymbol{p} | \boldsymbol{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$ 不是 Lorentz 不变的，右边动量空间的 δ 函数的量纲相当于体积，而在相对论时空中有体积收缩效应。

考察一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的单粒子态，在 z 方向有一个 boost，则 $\boldsymbol{p'} = \gamma(\boldsymbol{p} + \beta E), E' = \gamma(E + \beta \boldsymbol{p})$

则在新的参考系中，$\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$ 和 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{q'})$ 的关系是什么？

考虑 δ 函数的性质

$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \delta(x - x_0)$

将 $\boldsymbol{p}'$ 视为 $\boldsymbol{p}$ 的函数，由于只考虑 z 方向，则 $\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{dp_3'}{dp_3}}$

$\delta^{(3)}(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{q'}) \frac{dp_3'}{dp_3} = \gamma(1 + \beta \frac{p_3}{E}) \delta^{(3)}(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{q'}) = \frac{E'}{E} \delta^{(3)}(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{q'}) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$

最后得到 $E'\delta^{(3)}(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{q'})=E\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$
说明 $E\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ 是 Lorentz 不变的。
规定归一化条件：$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle=2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}$
定义单粒子态 $|\boldsymbol{p}\rangle=\sqrt{2E_p}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger|0\rangle$
则有

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle&=\sqrt{2E_p}\sqrt{2E_q}\langle0|a_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{q}}^\dagger|0\rangle\\&=\sqrt{2E_p}\sqrt{2E_q}\{\langle0|a_{\boldsymbol{q}}^\dagger a_{\boldsymbol{p}}|0\rangle+\langle0|[a_{\boldsymbol{p}},a_{\boldsymbol{q}}^\dagger]|0\rangle\}\\&=2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\end{aligned}\tag{3.45}$$

3.2.2 场算符的物理意义

将场算符作用于真空得到

$$\phi(x)|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_p}}(a_pe^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+a_p^\dagger e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}})|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{p}\rangle\tag{3.46}$$

类似于 NRQM 中的 $|\boldsymbol{x}\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{p}\rangle$，只是多了一项 $\frac{1}{2E_p}$
由于 $E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$，当动量较小时可以将其看作常量，则 $\phi(x)|0\rangle\simeq|\boldsymbol{x}\rangle$，可以看作是在 x 这一个空间点产生了一个粒子。
在 QFT 中，x 永远不是算符，没有 $|\boldsymbol{x}\rangle$ 态的概念。

$$\begin{aligned}\langle0|\phi(x)|\boldsymbol{p}\rangle&=\langle0|\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}}(a_{\boldsymbol{p'}}e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}}+a_{\boldsymbol{p'}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}})|\boldsymbol{p}\rangle\\&=\langle0|\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}}(a_{\boldsymbol{p'}}e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}}+a_{\boldsymbol{p'}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}})\sqrt{2E_p}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger|0\rangle\\&=\langle0|\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}}(a_{\boldsymbol{p'}}e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}})\sqrt{2E_p}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger|0\rangle\\&=\langle0|\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}}[a_{\boldsymbol{p'}},a_{\boldsymbol{p}}^\dagger]e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}}\sqrt{2E_p}|0\rangle\\&=\langle0|\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{1}{2E_{p'}}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}}\sqrt{2E_p}|0\rangle\\&=e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned}\tag{3.47}$$

类似于量子力学中的 $\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle=e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$

3.3 海森堡表象下的 K-G 场论

我们是在 $t=0$ 时量子化，即薛定谔绘景，考虑算符与时间有关，即海森堡绘景，两者之间的关系为

$$O_H(t,\boldsymbol{x}) = e^{iHt}O_S(t=0,\boldsymbol{x})e^{-iHt} \tag{3.48}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}O_H = [O_H, H] \tag{3.49}$$

$$\phi(x) = e^{iHt}\phi(t=0,\boldsymbol{x})e^{-iHt} \tag{3.50}$$

则有

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},t) &= [\phi(\boldsymbol{x},t), \int d^3\boldsymbol{x}'\{\frac{1}{2}\pi(\boldsymbol{x}',t)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\boldsymbol{x}',t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi(\boldsymbol{x}',t)^2\}] \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}' i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\pi(\boldsymbol{x}',t) \\ &= i\pi(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{3.51}$$

这是一个算符方程，类似的有 $i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = i(\nabla^2 - m^2)\phi(\boldsymbol{x},t)$

则 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t) = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$

其实就是 K-G 方程。

还可以给出海森堡表象下的产生湮灭算符

$$a_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{iHt}a_{\boldsymbol{p}}e^{-iHt} \tag{3.52}$$

$$a^\dagger_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{iHt}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{-iHt} \tag{3.53}$$

则 $\frac{d}{dt}a_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{iHt}i[H,a_{\boldsymbol{p}}]e^{-iHt} = -iE_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}$

利用了 $[H,a_{\boldsymbol{p}}] = -E_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}$

解得 $a_{\boldsymbol{p}}(t) = a_{\boldsymbol{p}}e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t}$

则 $\phi(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{+iE_{\boldsymbol{p}}t-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}})$，其中 $E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$

时间依赖在指数因子，看起来像是平面波的相位，引入四矢量 $p^\mu = (E_{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{p})$

则 $\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{+ip\cdot x})$

我们可以把这个分解称为平面波分解，把相位因子为负的称为正频部分，正的为负频部分。因为薛定谔表象中的定态波函数 $\psi \propto e^{-iEt}$，所以相位因子为负的称为正频部分。

考虑复的 K-G 场，此时算符不一定是厄密共轭的，即 $a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \to b^\dagger_{\boldsymbol{p}}$，而这个算符的物理意义为产生一个反粒子。

定义真空之后，任何的场激发都是正能激发，负能解问题得到解决。

考虑空间平移，$\phi(\boldsymbol{x}) = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(0)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$，类似的有总动量算符 $\boldsymbol{P} = \int d^3xT^{0i} = -\int d^3x\pi\nabla\phi$ $\phi(\boldsymbol{x},t) = e^{i(Ht-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\phi(0)e^{-i(Ht-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} = e^{ip\cdot x}\phi(0)e^{-ip\cdot x}$

量子场论中的波粒二象性：其中平面波的相位因子 $e^{-ip\cdot x}$ 体现了波动性，而产生湮灭算符体现了粒子属性。

3.4 因果性问题

3.4.1 两点关联函数

定义两点关联函数 $D(x-y)=\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}$，其物理意义为粒子从 y 传播到 x，且是 Lorentz 不变量，其中 $\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)$ 也是 Lorentz 不变的

证明

$$\begin{aligned}\int dp^0\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)&=\int dp^0\delta(p_0^2-E_{\boldsymbol{p}}^2)\theta(p^0)\\&=\int dp^0\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\delta(p_0-E_0)+\delta(p_0+E_0))\theta(p^0)\\&=\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\end{aligned}\tag{3.54}$$

其中 $\theta(p^0)$ 为阶跃函数 p^0 大于 0 时为 1，反之为 0。

$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\langle 0|e^{i\hat{p}\cdot y}\phi(x-y)e^{-i\hat{p}\cdot y}e^{i\hat{p}\cdot y}\phi(0)e^{-i\hat{p}\cdot y}|0\rangle$，对最后一项算符作泰勒展开，考虑到 $\boldsymbol{p}|0\rangle=0$，则有 $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\langle 0|\phi(x-y)\phi(0)|0\rangle$，这说明我们定义的关联函数确实只依赖于 $x-y$。

若 $x-y$ 是类时间隔，即寻找一个参考系，使得 $x^0-y^0=t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=0$

则 $D(x-y)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-iE_pt}$。

在球坐标下，得到

$$\begin{aligned}=&\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-i\sqrt{p^2+m^2}t}\\=&\frac{1}{4\pi^2}\int_\infty^m dE\sqrt{E^2-m^2}e^{-iEt}|_{t\to\infty}\\\simeq&e^{-imt}\end{aligned}\tag{3.55}$$

类空间隔：$x^0-y^0=0.\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}$

则有

$$\begin{aligned}D(x-y)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\\&=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\frac{p^2}{2E_p}\frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr}\\&=\frac{-i}{2(2\pi)^2r}\int_{-\infty}^\infty dp\frac{pe^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\end{aligned}\tag{3.56}$$

令 $\rho=-ip$

在 $r\to\infty$ 时，$\frac{1}{4\pi^2r}\int_m^\infty d\rho\frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2-m^2}}\simeq e^{-mr}$

符合温伯格提出的集团分解原理

$$\langle\Omega|O(\boldsymbol{x})O(\boldsymbol{y})|\Omega\rangle\to 0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\infty)\tag{3.57}$$

虽然类空间隔下，两点关联概率不为 0，但并不代表两点有因果联系，更准确的定义应该是，因果性：如果 $x-y$ 是类空间隔，在 x 处的测量必须和 y 处的测量彼此不影响 (独立)，即 $[O_1(x),O_2(y)]=0$

利用此定义，则要验证类空间隔的因果性，我们要验证的是 $[\phi(x),\phi(y)]$

$$\begin{aligned}
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_p}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_q}}[a_pe^{-ip\cdot x}+a_p^\dagger e^{ip\cdot x},a_qe^{-iq\cdot y}+a_qe^{iq\cdot y}]\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{+ip\cdot(x-y)})\\
&=D(x-y)-D(y-x)
\end{aligned}\tag{3.58}$$

当 $(x-y)^2<0$ 即类空时，$x-y$ 可以通过连续的 Lorentz 变换使得其变成 $y-x$，则 $[\phi(x),\phi(y)]=0$，因果性得到了保留。

在类时间隔，在 $x=y,t\to\infty$，$[\phi(x),\phi(y)]\simeq e^{-imt}-e^{+imt}$

而对于复的 K-G 场 $\phi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_p}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ip\cdot x}+b_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{+ip\cdot x})$

则有

$$\begin{aligned}
\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle&=\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle-\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\\
&=\langle 0|ab^\dagger|0\rangle-\langle 0|ab^\dagger|0\rangle\\
&=0
\end{aligned}\tag{3.59}$$

(为了方便略去了各种因子)

其中最后两项都是 0，因为 $\langle 0|ab^\dagger|0\rangle$ 相当于产生了一个反粒子和正粒子，两个态的内积为 0。

而考虑 $\langle 0|[\phi(x),\phi^\dagger(y)]|0\rangle=\langle 0|aa^\dagger|0\rangle-\langle 0|bb^\dagger|0\rangle=0$

要满足因果性，必须存在反粒子，且质量相等。

3.5 K-G 传播子

3.5.1 K-G 传播子

由于 $[\phi(x),\phi(y)]$ 本身是个常数，所以可以加上对真空态求内积。

$$\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{+ip\cdot(x-y)})\tag{3.60}$$

考虑引入第四度积分

$$\begin{aligned}
\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{+ip\cdot(x-y)})\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{ip\cdot(x-y)}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\{\frac{1}{2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}|_{p^0=E_p}+\frac{1}{-2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}|_{p^0=-E_p}\}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{dp^0}{2\pi i}\frac{-1}{p^2-m^2}e^{-ip\cdot(x-y)}
\end{aligned}\tag{3.61}$$

其中第三行，考虑在复平面上积分，其实就等于两个点 $E_p, -E_p$ 的留数。

则有

$$\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{dp^0}{2\pi i}\frac{-1}{p^2-m^2}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.62}$$

定义推迟格林函数：

$$D_R(x-y) = \theta(x^0-y^0)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{dp^0}{2\pi i}\frac{-1}{p^2-m^2}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.63}$$

考虑在 K-G 场加外源 (电磁场中为 $j^\mu A_\mu$)，$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\phi(x)$，此时的运动方程为 $(\partial^2+m^2)\phi = j(x)$。类似于麦克斯韦方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$。

通解为 $\phi(x) = \phi_0(x) + i\int d^4y D_R(x-y)j(y)$

其中 $(\partial^2+m^2)D_R(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$

则 $(\partial^2+m^2)\phi(x) = (\partial^2+m^2)\phi_0(x) + i\int d^4y(\partial^2+m^2)D_R(x-y)j(y) = j(x)$

由于前一项中 $\phi_0(x)$ 是满足自由场的解，所以为 0。

利用 $\frac{\partial}{\partial t}\theta(x^0-y^0) = \delta(x^0-y^0)$，可以验证之前定义的推迟传播子满足。

考虑动量空间的推迟传播子

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\hat{D}_R(p) \tag{3.64}$$

代入 $(\partial^2+m^2)D_R(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$，可得 $(-p^2+m^2)\hat{D}_R(p) = -i \to \hat{D}_R(p) = \frac{i}{p^2-m^2}$

3.5.2 Feynmen 传播子

Feynmen 传播子：和推迟传播子的形式类似

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.65}$$

唯一的区别就是绕法，在 $-E_p$ 时半圆朝下，在 E_p 时则朝上，这样无论大围道取上取下都会有留数。

为了将半圆改成直线，但极点 $-E_p \to -E_p + i\varepsilon, E_p \to E_p - i\varepsilon$

则

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \tag{3.66}$$

类似的 $\hat{D}_F(p) = \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}$

$$D_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\hat{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \tag{3.67}$$

其中 $\hat{T}$ 为编时算符，谁先发生，谁就在前面。

4 Dirac Field

4.1 Lorentz 群及其李代数

Lorentz 变换构成了 Lorentz 群，几个基本概念为群表示 represetation 和生成元 generator，生成元最重要的性质为李代数。

考虑空间转动：$A^i \to A'^i(x) = R^{ij}A^j(R^{-1}x), R^TR = 1$

对于转动群，$R = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}}$，其中 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk}J^k$

以绕着 z 轴转 θ 角为例子

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

则 $R(\theta + 2\pi) = R(\theta)$

对于自旋，$U = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}}$

自旋的生成元也满足类似的关系：$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$

这就是转动群的李代数，也是生成元的性质，其中 J 就是转动群的生成元，而 ε^{ijk} 为群的结构常数，而转动和自旋具有相同的结构常数。

为什么生成元的代数关系如此重要呢？我们可以考虑两个算符的乘积

$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},[\hat{A}+\hat{B}]]+...}$

可见对于如果求出两个指数算符的乘积，一定要知道 $[\hat{A}, \hat{B}]$ 的结果，这也是为何生成元满足的代数关系如此重要，如果知道了 $[\hat{A}, \hat{B}]$，我们就能计算算符对应操作的叠加耦合。

为了理解生成元的概念，考虑无穷小转动，$R = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}} \simeq 1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J} + (\theta^2)$，这样有了生成元的具体形式，就可以刻画群在原点附近的性质。

对自旋作展开，$U = 1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}^z}{2} + \frac{1}{2!}(-\frac{i}{2})^2(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}^z)^2 + ...$(为了方便考虑 z 方向转动)

其中 $(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = (\theta_x\sigma^x + \theta_y\sigma^y + \theta_z\sigma^z)(\theta_x\sigma^x + \theta_y\sigma^y + \theta_z\sigma^z)$

且 $\theta_x\sigma^x\theta_x\sigma^x = \theta_x^2 1_{2\times2}, \theta_x\sigma^x\theta_y\sigma^y + \theta_y\sigma^y\theta_x\sigma^x = \theta_x\theta_y\{\sigma^x, \sigma^y\} = 0$

则 $(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}^z)^2 = -\frac{1}{4}\theta_z^2$

$$\begin{aligned} U &= 1 - \frac{1}{4}\theta_z^2 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}^z}{2} \\ &= cos\frac{\theta}{2} - i\sigma^z sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

则 $U(\theta + 2\pi) = -U(\theta)$，说明和普通的空间不同，旋量空间必须转 4π 才能回到自身。

而对于 Lorentz 群有没有类似的性质？

对角动量算符作推广，定义 $J^k = J^{ij} = -i(x^i\nabla^j - x^j\nabla^i)$

尝试推广 (由于 Lorentz 变换一共有六个因子，对应六个生成元)$J^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$，为二阶反对称张量，一共有六个独立的 $J^{\mu\nu}$。

Lorentz 群生成元 $J^{\mu\nu}$ 对应的 Lie 代数为

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}) \tag{4.2}$$

对于矢量场也可以表示成指数形式 $A^\alpha \to A'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta = [e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}]^\alpha_\beta A^\beta$

其中 $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta = i(g^{\mu\alpha}g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^{\nu\alpha})$

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 也满足 Lorentz 群的 Lie 代数。

$$[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}]^\alpha_\beta \simeq \begin{bmatrix} 1 & \beta & & \\ \beta & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

考虑沿着 x 轴的 boost$\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$

对于 Lorentz 变换，无论是什么场都可以简写为 $\phi \to M(\Lambda)\phi, \phi \to M(\Lambda')M(\Lambda)\phi = M(\Lambda'')\phi$

而 $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$，正是群的基本性质，而 $M(\Lambda)$ 则是 Lorentz 群的有限维表示，对于标量场来说，为 1，对于矢量场来说，为 Λ，而这样的有限维表示总可以写成 $M(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu}}$

4.2 构造 Dirac 场和 Dirac 方程

构造旋量表示的生成元：假设存在四个 Dirac 矩阵 (待定为 n 阶方阵)，且满足 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}1_{n\times n}$，则有

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{4.4}$$

且利用代数关系可得 $[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho})$

这里给出简单证明

$$\begin{aligned}
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}\left[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\right] \\
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}\left[(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), (\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)\right] \\
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}\left[(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho) - (\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\right] \\
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma \\ -\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu \end{bmatrix} \\
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} \gamma^\mu 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma \\ -\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\sigma 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu + \gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma \\
\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}\gamma^\nu\gamma^\sigma - (\gamma^\rho\gamma^\mu\{\gamma^\nu,\gamma^\sigma\} - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu) \\
\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\mu\{\gamma^\nu,\gamma^\sigma\} + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\mu\{\gamma^\nu,\gamma^\sigma\} + (\gamma^\rho\{\gamma^\mu,\gamma^\sigma\}\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma &= \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}\gamma^\nu\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\mu\{\gamma^\nu,\gamma^\sigma\} + \gamma^\rho\{\gamma^\mu,\gamma^\sigma\}\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu
\end{aligned} \tag{4.6}$$

最后一项 $\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu$ 正好消去，而前几项则可以和后面的项目组合成类似于 $g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma}$ 的式子，例如 $\gamma^\mu 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma 2g^{\rho\nu}\gamma^\mu = 2g^{\nu\rho}[\gamma^\mu,\gamma^\sigma] = 2g^{\nu\rho}(-4iS^{\mu\sigma})$，剩下的就是不断重复这一过程，最后可以验证 $[S^{\mu\nu},S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho})$

正是 Lorentz 生成元满足的代数关系，则 $S^{\mu\nu}$ 就是 Lorentz 群某个特殊维数对应的生成元。

$n=1$ 只是个简单的数字，排除。

$n=2$ 尝试用 Pauli 矩阵构造，$\gamma^i = i\sigma^i$，则 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = -2\delta_{ij} = 2g^{ij}1_{2\times2}$，则 $S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k$

但是问题是 γ^0 是什么？

如果代入单位矩阵，$\{\gamma^0,\gamma^i\} = 0$

n= 3 也不行，n= 4 就可以找到，$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & 1_{2\times2} \\ 1_{2\times2} & \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}$

这样构造形式称为 chiral-Weyl representation，原因是 γ 矩阵不是唯一的，如果我们找到一组 γ 矩阵满足 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，总可以令 $\gamma'_\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$ 也满足上述关系，而手征外尔表象适合于高能情形 (速度趋于光速，能量远大于质量)。

也有其他的表象例如 Dirac-Pauli 表象，区别在于，$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & \\ & -1_{2\times2} \end{pmatrix}$，适用于低能非相对论性粒子。

Majorana 表象：$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & \\ & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & \\ & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$，特点就是纯虚的，适用于描述电中性的 majorana 费米子，之前量子化实的 K-G 场时量子是中性的，即反粒子是其本身，类似于光子，但量子化复的 K-G 场，有两种产生湮灭算符，Dirac 场也类似，有正反电子之分，而基本粒子中中微子有可能是 majorana 费米子

Dirac 矩阵的一些性质：$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, (\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^i)^2 = -1$

生成元转动部分 $S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & \\ & \sigma^k \end{pmatrix}$

Boost 部分：$S^{0i} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & -\sigma^i \end{pmatrix}$

注意到这几个矩阵都是分区对角的。

有了生成元之后，可以构造 Dirac 场在 Lorentz 变换下的有限维表示，根据之前的结论，我们知道任何一个场在 Lorentz 变换下都具有类似的形式 $\phi(x) \xrightarrow{\Lambda} M(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x)$

不同的场具有不同的 $M(\Lambda)$，而 Dirac 场具有的 $M(\Lambda)=\Lambda_{\frac{1}{2}}$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \tag{4.7}$$

虽然 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ 和 Λ^{μ}_{ν} 都是 4×4 矩阵，但是分别以 Dirac 场的四个分量和时空分量为基底。

这样就得到 Dirac 场在 Lorentz 变换下的形式：$\psi(x)\to\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$

考察最简单的，沿 z 轴转动 θ 角，即 $\omega_{12}=\theta_z$

根据爱因斯坦求和两项都要求，而且 ω S 都是反对称张量，即 $\omega_{12}=-\omega_{21},S^{12}=-S^{21}$, 则

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}=e^{[-\frac{i}{2}\omega_{12}S^{12}-\frac{i}{2}\omega_{21}S^{21}]} \tag{4.8}$$

则有

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=e^{-i\theta_z S^{12}}=\begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\theta_z\sigma_3} & \\ & e^{-\frac{i}{2}\theta_z\sigma_3}\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

则

$$-\Lambda_{\frac{1}{2}}(0)=\Lambda_{\frac{1}{2}}(2\pi)=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

必须要转 4π 才能回到单位矩阵。

考察生成元和 Dirac 矩阵的对易子：$[\gamma^{\mu},S^{\rho\sigma}]=\left[\gamma^{\mu},\frac{i}{4}[\gamma^{\rho},\gamma^{\sigma}]\right]$

$$\begin{aligned}\left[\gamma^{\mu},\frac{i}{4}[\gamma^{\rho},\gamma^{\sigma}]\right] &= \frac{i}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\,]\\ &= \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}-\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}+\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\,]\\ &= \frac{i}{4}[\,2g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}-\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}+\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\,]\\ &= \frac{i}{4}\begin{bmatrix}2g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}-\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}-\,2g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}\,+\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\\ -2g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}+\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\,+\,2g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}\,-\,\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\end{bmatrix}\\ &= \frac{i}{4}[\,2g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}-\,2g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}\,-2g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}\,+\,2g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}\,]\\ &= i\,[\,g^{\mu\rho}\gamma^{\sigma}-\,g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}]\\ &= i\,[\,g^{\mu\rho}\delta^{\sigma}{}_{\nu}-\,g^{\mu\sigma}\delta^{\rho}{}_{\nu}]\,\gamma^{\nu}\\ &= [\mathcal{J}^{\rho\sigma}]^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\end{aligned} \tag{4.11}$$

最后得到 $[\gamma^{\mu},S^{\rho\sigma}]=[\mathcal{J}^{\rho\sigma}]^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$，利用了 $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}=i(g^{\mu\alpha}g^{\nu}_{\beta}-g^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha})$

还可以推得 $\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^{\mu}\Lambda_{\frac{1}{2}}=\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$

看起来有点像个矢量，但实际上选取了固定表象之后，γ 矩阵在任何坐标系下的形式都是一样的。

证明：

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \simeq 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + O(\omega)^2 \tag{4.12}$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = (1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu\gamma^\nu \tag{4.13}$$

而 $\Lambda^\mu_\nu = e^{[-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\mu_\nu} \simeq \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[\mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\mu_\nu$

$\psi(x) \to \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$

则有 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu$

为了验证 Dirac 方程的 Lorentz 的不变性，需要验证 $\psi'(x)$ 是否满足运动方程。

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) &= (i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu - m)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}(i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu - m)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}(i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}(i\Lambda^\mu_\sigma\gamma^\sigma(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\partial_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

继续考察 Lagrangian 的不变性,不幸的是如果构造 $\psi^\dagger\psi$ 不能满足 Lorentz 不变性,$\psi^\dagger\psi \to \psi^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}}\psi$，但 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ 不是一个幺正矩阵。

$$\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}} = e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger} \tag{4.15}$$

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = (\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu])^\dagger = \frac{i}{4}[(\gamma^\mu)^\dagger,(\gamma^\nu)^\dagger] \tag{4.16}$$

由于 $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \boldsymbol{\gamma}^\dagger = -\boldsymbol{\gamma}$

则 $(S^{ij})^\dagger = S^{ij}, (S^{0i})^\dagger = -S^{0i}$ ，Boost 生成元是反厄密的，Lorentz 群的 Dirac 表示不是幺正的，而转动生成元是厄密的，说明转动群是紧致的，而 Boost 生成元是反厄密的，Lorentz 群是非紧致的，不是幺正的。

且 Lorentz 群不存在幺正的有限维表示。

虽然 $S^{\mu\nu}$ 不是厄密的，但我们得到 Lorentz 不变的 Lagrangian，为此考虑 $S^{\mu\nu}$ 和 γ^0 的关系。

$$\gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\frac{i}{4}[(\gamma^\mu)^\dagger,(\gamma^\nu)^\dagger]\gamma^0 = \frac{i}{4}[\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0,\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0] \tag{4.17}$$

由于 $\gamma^0(\gamma^\nu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\nu$

则 $\gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = S^{\mu\nu}$

令 $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$，对其作 Lorentz 变换，

$$\bar\psi \xrightarrow{\Lambda} \psi'\gamma^0 = \psi^\dagger\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}}\gamma^0 = \bar\psi\gamma^0\Lambda^\dagger_{\frac{1}{2}}\gamma^0 = \bar\psi\gamma^0 e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger}\gamma^0 \tag{4.18}$$

由于 $\gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = S^{\mu\nu}$

可对 $\gamma^0 e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger}\gamma^0$ 作泰勒展开得到 $\gamma^0 e^{+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger}\gamma^0 = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$

则 $\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \bar{\psi}\psi$

下面来构造导数项，考察 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$

根据 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu$

$$\bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{4.19}$$

看起来像根据矢量场的变换形式变换，但这并不是我们想要的 Lorentz 标量，还需要一个下标进行缩并，所以取 $\bar{\psi}\gamma^\nu\partial_\nu\psi$

最后得到

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{4.20}$$

i 是为了保证 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$

其中 $\bar{\psi}, \psi$ 作为独立自由度。

下一步就是对这个无穷多自由度的场进行量子化。

4.3 Dirac 场的量子化

4.3.1 Weyl spinor

Dirac 场有四个分量，把它写成两个分量

$\psi_{Dirac} = \begin{bmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{bmatrix}$

其中 ψ_L, ψ_R 就是 Weyl spinor。

原因：$\psi(x) \to \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\psi(\Lambda^{-1}x)$

同时 $S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix}$，$S^{0i} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\sigma^i & \\ & -\sigma^i\end{pmatrix}$，都是分区对角矩阵，说明在 Lorentz 变换下，左手和右手外尔旋量是分别变换的。

Dirac 表示是可约表示，从群论的角度来说就是生成元可以写成分块对角的形式，而 Weyl spinor 填充不可约表示。

$$\psi_L \xrightarrow{\Lambda}(1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L \tag{4.21}$$

$$\psi_R \xrightarrow{\Lambda}(1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R \tag{4.22}$$

利用 Weyl spinor 来重新理解 Dirac 方程。

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix}-m & i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla) \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla) & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} = 0 \tag{4.23}$$

在手征极限下，$m=0$，可得

$i(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_l=0$

$i(\partial_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_R=0$，即 Weyl 方程。

令 $\sigma^\mu=(1,\boldsymbol{\sigma}),\bar{\sigma}^\mu=(1,-\boldsymbol{\sigma})$

可将 Dirac 矩阵写成 $\gamma^\mu=\begin{pmatrix}&\sigma^\mu\\\bar{\sigma}^\mu&\end{pmatrix}$

这样 Dirac 方程就变成 $\begin{pmatrix}-m&i(\sigma^\mu\partial_\mu)\\i(\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu)&-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\\psi_R\end{pmatrix}=0$

Weyl 方程也可以写为

$$(\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu)\psi_L=0 \tag{4.24}$$

$$(\sigma^\mu\partial_\mu)\psi_R=0 \tag{4.25}$$

4.3.2 Dirac 方程的自由粒子解

把 Dirac 方程作用两次

$$\begin{aligned}(-i\gamma^\mu\partial_\mu-m)(i\gamma^\nu\partial_\nu-m)\psi&=0\\&=(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu+m^2)\psi\\&=(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu+m^2)\psi\end{aligned} \tag{4.26}$$

由 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$

得 $(-i\gamma^\mu\partial_\mu-m)(i\gamma^\nu\partial_\nu-m)\psi=(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+m^2)\psi$

便得到 K-G 方程，如果代入平面波解 $e^{-ip\cdot x}$，得到在壳条件 $p^2=m^2$。

可以假设 $\psi(x)$ 正比于 $e^{-ip\cdot x}$，$\psi(x)$ 是一个四个分量的列矢量，所以只有平面波的相位因子是不够的。

令 $\psi(x)=u(p)e^{-ip\cdot x}$，其中 $u(p)$ 为 Dirac 旋量，且满足在壳条件，代入 Dirac 方程得到，

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)u(p)e^{-ip\cdot x}=0 \tag{4.27}$$

这个方程等价于 $(ip_\mu\gamma^\mu-m)u(p)=0$

根据 $p^2=m^2$, 有 $p^0=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$，分别对应 Dirac 方程的四个解的正能和负能部分。

正能解

先假设 $p^0>0$，令 $\not{p}=i\gamma^\mu\partial_\mu$

现在来求解正能解，首先考虑静止的粒子，则 $p^\mu=(m,0)$

$$(p^0\gamma^0-m)u(p)=0 \tag{4.28}$$

即 $\begin{pmatrix} -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} u(p) = 0$

则 $u(p) = N \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix}$

我们可以认为 ξ 由两个基组成，$\xi^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，解为 $u^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$

考虑粒子沿着 z 轴运动，$p^\mu = (E, 0, 0, p_z), E = \sqrt{p_z^2 + m^2}$

根据 $(\not{p} - m)u(p) = 0$，写出 $\not{p}$

则

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} & p \cdot \sigma \\ p \cdot \overline{\sigma} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & p^0\sigma^0 - p^3\sigma^3 \\ p^0\sigma^0 + p^3\sigma^3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & E - p_z & 0 \\ & & 0 & E + p_z \\ E + p_z & 0 & & \\ 0 & E - p_z & & \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

可令 $a = \sqrt{E - p_z}, b = \sqrt{E + p_z}$

且 $a^2 b^2 = m^2$

则可将原来的方程写成 $\begin{pmatrix} -ab & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & b^2 \\ b^2 & 0 & -ab & 0 \\ a & a^2 & 0 & -ab \end{pmatrix} u^s(p) = 0$

可以构造 $u^s(p) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xi^s \\ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \xi^s \end{pmatrix}$，是上面方程的解。

则 $u^{s=1}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E + p_z} \\ 0 \end{pmatrix}$

在高能极限下 $(E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$，取 $c = 1$，则当质量可以忽略时，$E \simeq p)$

$$u^{s=1}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2E} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

螺旋度 (helicity): 定义 $h = \frac{\boldsymbol{p}}{|p|} \cdot \boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{S} \tag{4.31}$$

则 $h=\frac{\boldsymbol{p}}{|p|}\cdot\boldsymbol{S}$，即自旋在动量方向的投影。

在高能极限下，右手旋量解 $s=1,\xi^1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 对应 $h=\frac{1}{2}$ 自旋向上的态，左手旋量解 $s=2$ 对应 $h=-\frac{1}{2}$(？)。

螺旋度对于有质量的粒子来说，依赖于参照系，因为粒子的速度不超过光速，总可以找到一个新的参考系，让动量的方向改变。但对于零质量粒子来说，螺旋度是 Lorentz 不变量，例如 ⟨ 光子态 | 光子态 ⟩ $=|\boldsymbol{p},h=\pm1\rangle$ ，其中 +1 为右旋光，-1 为左旋光，其实就是经典光学中的不同偏振方向。

零质量粒子 (自旋为 J) 只能有两个物理态 $h=\pm J$

有质量粒子有 $2J+1$ 个物理态。

引力子 $J=2,h=\pm2$

对于电子来说 $h=\pm\frac{1}{2}$，取高能近似还是两个自由度，自由度并没有缺失，但是有质量的粒子不能从 3 个自由度连续地变成 2 个自由度。

总之记住，在零质量极限下，手征性和螺旋度是一一对应的。

对于 $u^s(p)$ 的解，有一种更简单的写法，例如

$\sqrt{p\cdot\sigma}=\begin{pmatrix}\sqrt{E-p_z} & \\ & \sqrt{E+p_z}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$

则可以改写为 $u_p^s=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix}$

代入 Dirac 方程

$$\begin{aligned}(\not{p}-m)u_P^s&=\begin{pmatrix}-m & p\cdot\sigma\\ p\cdot\overline{\sigma} & -m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}(-m+\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\overline{\sigma})})\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}(-m+\sqrt{(p\cdot\overline{\sigma})(p\cdot\sigma)})\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.32}$$

利用 $\{\sigma^i,\sigma^j\}=2\delta^{ij}$，$\{\sigma^\mu,\overline{\sigma}^\nu\}=2g^{\mu\nu}1_{2\times2}$

则 $(p\cdot\overline{\sigma})(p\cdot\sigma)=p_\mu p_\nu\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu=p_\mu p_\nu\frac{\{\sigma^\mu,\overline{\sigma}^\nu\}}{2}=g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu=E^2-p^2=m^2$

则 $\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}(-m+\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\overline{\sigma})})\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}(-m+\sqrt{(p\cdot\overline{\sigma})(p\cdot\sigma)})\end{pmatrix}=0$

Wigner 小群诱导表示 (WeinbergVol.1,Chap2)：从一个自旋静止的量子态构造到一个运动的态。

负能解

下面讨论 Dirac 的负能解。

$$(i\gamma^0\partial_0+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)u^s(p)e^{-ip\cdot x}=0\tag{4.33}$$

$$(\gamma^0p^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m)u^s(p)e^{-ip\cdot x}=0\tag{4.34}$$

如果 $p^0=-E_p$

$$(-\gamma^0 E_p + \boldsymbol{\gamma}\cdot(-\boldsymbol{p}) - m)u^s(p)e^{+iE_p t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = 0 \tag{4.35}$$

令 $\widetilde{p}^\mu = (E_p, -\boldsymbol{p})$
则 $-(\tilde{\not{p}} + m)u^s(p)e^{+i\widetilde{p}\cdot x} = 0$
令 $v^s(\widetilde{p}) = u^s(p^0 = -E_p, \boldsymbol{p})$
且必须满足 $(\tilde{\not{p}} + m)v^s(\widetilde{p}) = 0$
可以将 $(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$ 代入 $\psi(x) = v^s(\widetilde{p})e^{+i\widetilde{p}\cdot x}$
得到 $(\tilde{\not{p}} + m)v^s(\widetilde{p}) = 0$
可以得到 $v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix}$
同样的 $\eta^{s=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta^{s=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
静止情况 $v^s(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix}$
当动量沿着 z 轴方向，$v^s(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{E-p_z} & \\ & \sqrt{E+p_z} \end{bmatrix}\eta^s \\ -\begin{bmatrix} \sqrt{E+p_z} & \\ & \sqrt{E-p_z} \end{bmatrix}\eta^s \end{pmatrix}$
同样在高能极限下，也会出现手征性。

4.3.3 Dirac spinor 的归一化和完备性关系

归一化关系

正交归一性:$u^\dagger u = \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}$
利用了 σ^μ 是厄密的。
$u^\dagger u = \xi^\dagger(p\cdot\sigma + p\cdot\overline{\sigma})\xi$
由于 $\overline{\sigma}$ 只是空间部分取符号，
则 $u^\dagger u = \xi^\dagger 2p^0 1_{2\times2}\xi = 2E_P\xi^\dagger\xi$
考察 $\overline{u} = u^\dagger\gamma^0$
$\overline{u}u = \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1_{2\times2} \\ 1_{2\times2} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} = \xi^\dagger(\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\overline{\sigma})} + \sqrt{(p\cdot\overline{\sigma})(p\cdot\sigma)})\xi = 2m\xi^\dagger\xi$
其中 $\sqrt{(p\cdot\sigma)(p\cdot\overline{\sigma})} = m$
这里得到了粒子的静质量，是个洛伦兹不变量，而之前的 E_p 是个洛伦兹变量。
根据 $\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$
则 $u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_p\delta^{rs}, \overline{u}^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}$

顺便强调一下，对于零质量的粒子来说，第二个归一化条件是平庸的，要用第一个归一化条件。

类似的，$v^\dagger v = 2E_p\eta^\dagger\eta, \overline{v}v = -2m\eta^\dagger\eta$

$v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E_p\delta^{rs}, \overline{v}^{r\dagger}(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}$

$u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 0$

这里取 $-\boldsymbol{p}$ 的原因是之前在令 $v^s(\widetilde{p}) = u^s(p^0 = -E_p, \boldsymbol{p})$，所以之前的负能解其实对应了 $-\boldsymbol{p}$。

完备性关系 (自旋求和公式)

为什么要求 $\sum\limits_{s=1,2} u^s(p)\overline{u}^s(p) =?$

我们现在可以感知到 s 是一个和量子化相关的重要指标，后面计算散射截面时会用到，一般来说，实验家不考虑极化的电子束流，即一半自旋朝上，一半朝下，探测器也不足以测量电子的极化，所以我们要作一个平均，也就是极化求和，这是这个公式的实际用处。

$$\begin{aligned}\sum_{s=1,2} u^s(p)\overline{u}^s(p) &= \sum_{s=1,2}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1_{2\times2}\\ 1_{2\times2} & \end{pmatrix}\\ &= \sum_{s=1,2}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.36}$$

由于 $\sum\limits_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger} = I_{2\times2}$

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\overline{u}^s(p) = \sum_{s=1,2}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\sqrt{p\cdot\overline{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m & p\cdot\sigma\\ p\cdot\overline{\sigma} & m\end{pmatrix} = \not{p} + mI_{4\times4} \tag{4.37}$$

这个结果作用上 $\not{p} - m$ 得到 0，满足 Dirac 方程。

对于负能解也有一个完备性关系，$\sum\limits_{s=1,2} v^s(p)\overline{v}^s(p) = \not{p} - mI_{4\times4}$

4.3.4 Dirac 矩阵和 Dirac 场的双线型 (bilinear)

对 $\overline{\psi}\psi$(Lorentz 不变量),$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$(Lorentz 矢量)，推广到插入任意一个矩阵 $\overline{\psi}\psi$ 的中间。

首先是单位矩阵，1 个。Dirac 矩阵 γ^μ，4 个。Dirac 场旋量表示的生成元 $s^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ 由于它是反对称的，只有 6 个非零元素。

$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$，4 个，也就是四个指标选三个，一共四种情况。

$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}1$ 个，4 个指标选 4 个，一种情况。

Γ 矩阵用这 16 个矩阵作为基础组成。

容易验证

$$\overline{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi \xrightarrow{\Lambda} (\overline{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})(\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])(\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi) = \bar{\psi}\frac{1}{2}(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}} - \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}})\psi \tag{4.38}$$

根据 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_\alpha^\mu\gamma^\alpha$

则 $(\overline{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1})(\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])(\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi) = \Lambda_\alpha^\mu\Lambda_\beta^\nu\overline{\psi}\frac{1}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\psi = \Lambda_\alpha^\mu\Lambda_\beta^\nu\overline{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi$

即 Dirac 场构造出的张量的双线型。

我们还感兴趣后两个 $\gamma^{\mu\nu\rho}$，$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的双线型怎么变换。

为此要引入 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

$\epsilon_{0123} = -1$ 交换任意指标会有一个负号。4! 来源于爱因斯坦求和过程中对所有的交换可能都求和了，即因为 $\mu\nu\rho\sigma$ 中不能有相同的指标，只能是 0123 排序，一共有 4! 中情况，且在 γ^μ, γ^ν 交换的过程中，根据 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，由于 μ, ν 不同，则 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$，且这个交换带来的负号和 $\epsilon_{0123} = -1$ 抵消，所以每个结果都是 $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，求和之后自然要除以 4!

至于在手征外尔表象中，$\gamma^5 = \begin{Bmatrix} -I_{2\times2} & \\ & I_{2\times2} \end{Bmatrix}$

有如下性质

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \tag{4.39}$$

$$(\gamma^5)^2 = I \tag{4.40}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{4.41}$$

如果 γ^5 作用于只有左手 weyl 旋量的 Dirac 场，

$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi_l \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_l \\ 0 \end{pmatrix}$，其本征值为 -1，类似的还可以作用于只有右手 weyl 旋量的 Dirac 场。

我们会经常构造左右手投影算符：$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$

为什么叫投影算符：

首先两个算符是完备的，$I_{4\times4} = P_L + P_R$

正交性：$P_L P_R = 0$

左手投影两次之后还是左手投影算符 $P_L^2 = P_L$。

把投影算符作用到 Dirac 场上时，就能得到对应的旋量，这也是为什么称其为投影算符。

$$P_L\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

考察特殊的双线型在 Lorentz 变换下：$\overline{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{\Lambda} \overline{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}(-\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$

可以插入四个单位矩阵

$\overline{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\rho\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\sigma\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$

根据 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_\alpha^\mu\gamma^\alpha$

得到 $\overline{\psi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda_{\mu'}^\mu\Lambda_{\nu'}^\nu\Lambda_{\rho'}^\rho\Lambda_{\sigma'}^\sigma\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'}\psi$

根据爱因斯坦求和约定，$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda_{\mu'}^\mu\Lambda_{\nu'}^\nu\Lambda_{\rho'}^\rho\Lambda_{\sigma'}^\sigma = \det\Lambda\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$，这其实和矩阵求行列式的操作一样。

这样又回到了 γ^5[21]，说明 $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ 类似于 $\overline{\psi}\psi$，也是个 Lorentz 标量，叫做赝标量流，(赝指的是在空间反演下宇称为负，像 π 介子自旋为 0，宇称为负)

对于三个 γ 矩阵相乘，我们可以令 $\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$

[21]还可以利用 $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$ 来证明。

然后考察它的双线型 $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ 类似于一个 γ 矩阵对应的双线型。也是个矢量，称其为赝矢流。

定义 $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi, j^{\mu 5} = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

利用运动方程 $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ 和 $-i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0$ 检查这两个流的四散度，

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = (im\overline{\psi})\psi + \overline{\psi}(-im\psi) = 0 \tag{4.43}$$

说明 j^μ 为一个诺特流，对应的对称性为 U(1) 相位转动对称性，$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi, \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = \overline{\psi}e^{-i\alpha}$，相乘相位因子抵消, 拉式量保持不变。

类似的 $\partial_\mu j^{\mu 5} = (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\gamma^5 + \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5(\partial_\mu\psi)$

第一项还是正常代入运动方程，但在第二项代入运动方程时需要交换 γ^5 和 γ^μ 的顺序，根据这两个算符的反对易性，会出现一个负号，结果得到 $\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi$

在手征极限下，$m = 0$，也对应一个相位转动的对称性。

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi, \overline{\psi} \to \overline{\psi'} = \overline{\psi}e^{-i\alpha\gamma^5} \tag{4.44}$$

也称为手征转动，这样的变换下 Dirac 场的拉式密度依旧不变。

j^μ 和 $j^{\mu 5}$ 的线性组合依旧是守恒流。

可以定义一个左手和右手的矢量流：$j_L^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu P_L\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\psi, j_R^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu P_R\psi = \overline{\psi}\gamma^\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\psi$

在手征极限下，左右手矢量流也是守恒流。

为物理上更清晰，在原有的 Dirac 的拉式量中插入 $I = P_L + P_R$

再利用 $P_L^2 = P_L$

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu P_L^2\psi + \overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu P_R^2\psi - m\overline{\psi}P_L^2\psi - m\overline{\psi}P_R^2\psi \tag{4.45}$$

又 $\gamma^\mu P_L = P_R\gamma^\mu$

$$\begin{aligned}\overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu P_L^2\psi &= \overline{\psi}i\gamma^\mu P_L\partial_\mu P_L\psi \\ &= \overline{\psi}iP_R\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi \\ &= \overline{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_L &= \psi_L^\dagger\gamma^0 \\ &= (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 \\ &= \psi^\dagger P_L\gamma^0 \\ &= \psi^\dagger\gamma^0 P_R \\ &= \overline{\psi}P_R\end{aligned} \tag{4.47}$$

最后得到 $\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/\psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R)$，混合了 $\psi_L\psi_R$。

在强相互作用中也有类似的手征对称性破缺，夸克比较重视，后面的 m 不可忽略。

Fierz rearrangement

考虑 $\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2, \overline{\psi}_3\Gamma\psi_4$

现在几个 ψ 交换顺序，$\overline{\psi}_1\Gamma\psi_2\overline{\psi}_3\Gamma\psi_4 = \sum_{\gamma=1}^{16}\overline{\psi}_1\Gamma_\gamma\psi_4\overline{\psi}_3\Gamma'_\gamma\psi_2$

举例:

$$(\overline{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\overline{u}_{3R}\sigma^\mu u_{4R}) = (\overline{u}_{1R\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha_\beta}u_{2R\beta})(\overline{u}_{3R\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\delta}u_{4R\delta}) \tag{4.48}$$

利用 $\sum_\mu(\sigma^\mu)_{\alpha_\beta}(\sigma^\mu)_{\gamma\delta} = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}$

则 $(\overline{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\overline{u}_{3R}\sigma^\mu u_{4R}) = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\overline{u}_{1R}u_{2R})(\overline{u}_{3R}u_{4R})$

可以在前面添加一个负号，导致 $\epsilon_{\beta\delta} = -\epsilon_{\delta\beta}$，这两个指标互换对应于 $\sum_\mu(\sigma^\mu)_{\alpha\delta}(\sigma^\mu)_{\gamma\beta} = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\delta\beta}$，代入到 $(\overline{u}_{1R\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha_\beta}u_{2R\beta})(\overline{u}_{3R\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\delta}u_{4R\delta})$，便可得到 $(\overline{u}_{1R\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha_\delta}u_{4R\delta})(\overline{u}_{3R\gamma}(\sigma^\mu)_{\gamma\beta}u_{2R\beta})$

4.3.5 Dirac 场等时量子化及其困难

共轭动量 $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \overline{\psi}i\gamma^0 = i\psi^\dagger, (\gamma^0)^2 = I$

在薛定谔绘景中 $(t=0)$，

$[\psi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \overset{\pi=i\psi^\dagger}{\to} [\psi(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(\boldsymbol{y})] = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

[22]

类比于 K-G 场的量子化，但由于 Dirac 场是四分量旋量场，所以需要引入四分量 $u^s_{\boldsymbol{p}}, v^s_{\boldsymbol{p}}$

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}[a^s_{\boldsymbol{p}}u^s_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b^s_{\boldsymbol{p}}v^s_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}] \tag{4.49}$$

这里的 $b^s_{\boldsymbol{p}}$ 为湮灭算符，物理意义为湮灭动量为 $\boldsymbol{p}$ 能量为 $-E_p$ 的电子

为了更好计算

$\psi(\boldsymbol{x}) = \int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{s=1,2}[a^s_{\boldsymbol{p}}u^s_{\boldsymbol{p}} + b^s_{-\boldsymbol{p}}v^s_{-\boldsymbol{p}}]$

假设满足对易条件 $[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs} = [b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}]$

根据 $\sum_{s=1,2}u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p}) = \not{p} + m$

定义 $\overline{p}^\mu = (E_p, -\boldsymbol{p})$，则 $\sum_{s=1,2}v^s(-\boldsymbol{p})\overline{v}^s(-\boldsymbol{p}) = \not{\overline{p}} - m$

[22]这里是简写的形式，实际上 $\psi^\dagger$ 是行矢量，ψ 是列矢量，这样 $\psi^\dagger\psi, \psi\psi^\dagger$ 分别为一个数和矩阵，所以实际上并不是行列矢量作对易，而是对其分量作对易 $[\psi_a(\boldsymbol{x}, \psi_b(\boldsymbol{y}))] = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}$

检查和前面提出的等时量子化条件的一致性

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_p}\sqrt{2E_q}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y}}\sum_{s=1,2}\{[a^r_{\boldsymbol{p}},a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}]u^r(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{q})+[b^r_{\boldsymbol{p}},b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{q}}]v^r(-\boldsymbol{p})\overline{v}^s(-\boldsymbol{q})\}\gamma^0\\
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\sum_{s=1,2}[u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p})+v^s(-\boldsymbol{p})\overline{v}^s(-\boldsymbol{q})]\gamma^0\\
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}(\not{p}+\overline{\not{p}})\gamma^0 \qquad (4.50)\\
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}[E_p\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+E_p\gamma^0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}]\gamma^0\\
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\
&= \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

确实满足了对易关系。[23]

代入 $H=\int d^3\psi^\dagger[-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+m\boldsymbol{\beta}]\psi=\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\sum\limits_{s=1,2}(E_pa^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}}-E_pb^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^s_{\boldsymbol{p}})$

和复 KG 场的结论类似，最大的区别在于中间是个负号，这意味着在 $b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}$ 的作用下，能量可以一直降低，不存在稳定的真空。

接下来考虑因果性，使用海森堡绘景

$\psi(x)=e^{iHt}\psi(\boldsymbol{x},t=0)e^{-iHt}$

$a^s_{\boldsymbol{p}}(t)=e^{iHt}a^s_{\boldsymbol{p}}e^{-iHt}=a^s_{\boldsymbol{p}}e^{-iE_pt}$

$b^s_{\boldsymbol{p}}(t)=e^{iHt}b^s_{\boldsymbol{p}}e^{-iHt}=b^s_{\boldsymbol{p}}e^{iE_pt}$

要验证因果性即求

$$[\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)]=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{s=1,2}(u^s_a(p)\overline{u}^s_b(p)e^{-ip(x-y)}+v^s_a(p)\overline{v}^s_b(p)e^{+ip(x-y)}) \qquad (4.51)$$

利用 KG 场 $[\phi(x),\phi(y)]=D(x-y)-D(y-x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}[e^{-ip(x-y)}-e^{+ip(x-y)}]$

则

$$
\begin{aligned}
[\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)] &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}[(\not{p}+m)_{ab}e^{-ip(x-y)}-(\not{p}-m)_{ab}e^{+ip(x-y)}]\\
&= (i\not{\partial}_x+m)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}[e^{-ip(x-y)}-e^{+ip(x-y)}]\\
&= (i\not{\partial}_x+m)[\phi(x),\phi(y)]
\end{aligned}
$$

其中 ab 表示是矩阵的第 a 行第 b 列，根据 K-G 场的结论，则当 $(x-y)^2<0$ 时，$[\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)]=0$

继续考察因果性是如何实现，$[\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)]$ 相当于一个常数，所以在两边作用上真空态的结果依旧是 0.

[23] 末尾的 γ^0 来自于 $\psi^\dagger\to\bar{\psi}\gamma^0$

$\langle 0|[\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)]|0\rangle = \langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle - \langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle = 0$

我们为了简化运算，我们不考虑其他因子，$\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)$ 可以视作 $(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)$，$\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)$ 视作 $(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)$，$ab$ 都是湮灭算符，遇上真空态为 0，所以后一项为 0，所以前一项中的 $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle$ 和 $\langle 0|bb^\dagger|0\rangle$ 互相抵消。

但在之前的复 KG 场中 $\langle 0|[\psi(x),\psi^\dagger(y)]|0\rangle = \langle 0|(a+b^\dagger)(a^\dagger+b)|0\rangle - \langle 0|(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)|0\rangle$

两个部分都体现了作用。

为了解决这一问题，我们回到一开始的假设。

1. 用对易关系量子化

2. 对真空的假设 $a^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = b^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0$

利用狄拉克海的概念 ($E<0$ 的电子态全部被填满), 修改对真空的假设。

$a^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0$，后一项的意思是不能再填充一个负能电子，$b^s_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \neq 0$，指可以在真空中敲出一个电子。

修改之后 $(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)\to aa^\dagger, (a^\dagger+b^\dagger)(a+b)\to b^\dagger b$，两项都有贡献。

同时我们也彻底抛弃对易关系的假设，直接从真空的性质出发得到产生湮灭算符的性质。

真空角动量和动量为 0，所以总动量算符 (总动量算符 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 作用于系统得到系统的总动量，作用于单动量产生湮灭算符上则得到单动量) 作用上去还是得到真空，角动量算符也是类似的，但是产生湮灭算符在总动量算符的作用下

$$e^{-i\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{x}}a_{\boldsymbol{p}}e^{i\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{x}} = a_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.52}$$

$$e^{-i\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{x}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{i\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{x}} = a_{\boldsymbol{p}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{4.53}$$

对于 $\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle$ 这也是计算下式的关键

$$\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle = \langle 0|\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_p}}\sum_r a^r_{\boldsymbol{p}}u^r(p)e^{-ipx}\times\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_q}}\sum_s a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\overline{u}^s(q)e^{iqy}|0\rangle \tag{4.54}$$

在 $\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle$ 中间插入总动量算符。

$$\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = \langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}|0\rangle = e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\langle 0|e^{-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}a^r_{\boldsymbol{p}}e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}}\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle \tag{4.55}$$

则有若 $\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle \neq 0$，$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{q}$

可令

$\langle 0|a^r_{\boldsymbol{p}}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}A(\boldsymbol{p})$，其中 $A(\boldsymbol{p})$ 是一个常数。

则有

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{s=1,2}u^s(p)\overline{u}^s(p)e^{-ip(x-y)}A(\boldsymbol{p})\\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(\not{p}+m)A(\boldsymbol{p})e^{-ip(x-y)}\\ &= (i\not{\partial}_x+m)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(x-y)}A\end{aligned} \tag{4.56}$$

考虑上式的 Lorentz 变换,则需要在两边插入 $u(\Lambda), u(\Lambda)^{-1}$,其中 $u(\Lambda)$ 为量子 Lorentz 算符,$u(\Lambda)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}\rangle$

为了使上式子具有良好的 Lorentz 性质，$A(\boldsymbol{p})$ 应当与 p^2 相关，而不只是和三度动量相关，又根据在壳条件 $p^2 = m^2$ 则 $A(m^2)$ 为一常数，又 $\langle 0 a^r_{\boldsymbol{p}} a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle$ 正比于 $\langle |\boldsymbol{p}, s|\boldsymbol{p}, s\rangle > 0$，所以 $A > 0$

类似的，计算 $\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle = -(i\partial\!\!\!/_x + m)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{ip(x-y)}B$

其中 $-$ 号源于 $\sum\limits_s v(p)\bar{v}(p) = \not{p} - m = -i\partial\!\!\!/_x(e^{ip(x-y)}) - m = -(i\partial\!\!\!/_x + m)$

在 KG 场中，当 $(x-y)^2 < 0$，$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{ip(x-y)} = D(y-x)$

可令 $A = B = 1$，当 $(x-y)^2 < 0$，有 $\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle = -\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle$，即 $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = 0, [\psi_a(x), \psi_b(y)] \neq 0$

虽然这和我们所要求的因果性不同（(两次测量对应的算符应当是对易的，互不干扰)，但 $\psi, \overline{\psi}$ 并不构成物理可观测量，例如 $\boldsymbol{p} = \int d^3x\psi^\dagger(-i\nabla)\psi$，至少要有一对 $\psi\psi^\dagger$ 双线型才构成可观测量，所以只要 $[\overline{\psi(x)}\Gamma\psi(y), \overline{\psi(y)}\Gamma\psi(x)] = 0$，就可以满足因果性。

只要利用 $[AB, CD] = A\{B, C\}D - AC\{B, D\} + \{A, C\}DB - C\{A, D\}B$，即便是对易关系也可以转化为一组反对易关系

所以等时量子化条件:$\{\psi_a(x), \psi^\dagger_b(y)\} = \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta_{ab}$

类似的 $\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\delta^{rs}$

则 $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum\limits_{s=1,2}(E_p a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} - E_p b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum\limits_{s=1,2}(E_p a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + E_p b^s_{\boldsymbol{p}} b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} - E_p(2\pi)^3\delta^3(0)\delta^{rs})$

令 $\overline{b}^s_{\boldsymbol{p}} = b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}$

其物理含义为 $\overline{b}^s_{\boldsymbol{p}}$ 产生一个负能电子，湮灭一个空穴

则 $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum\limits_{s=1,2}(E_p a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + E_p \overline{b}^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} \overline{b}^s_{\boldsymbol{p}} - E_p(2\pi)^3\delta^3(0)\delta^{rs})$

最后一项为负无穷大的真空能，和 KG 场的刚好相反。

粒子物理中的超对称：要求玻色子和费米子具有严格的对称性，真空能严格为 0，而 KG 场与 Dirac 场分别对应玻色子和费米子，严格上可以相互抵消。

Dirac-Fermi 统计

$\{a^s_{\boldsymbol{p}}, a^s_{\boldsymbol{p}}\} = 0$，其实空穴就是一个正电子，Dirac sea 只是帮助我们理解，自然界里并不存在。

$$a^{r\dagger}_{\boldsymbol{q}} a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = |\boldsymbol{q}, r; \boldsymbol{p}, s\rangle \tag{4.57}$$

且 $(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}})^2 = 0$，说明同一个态上只能有一个粒子，即泡利不相容原理。

4.4 角动量算符

为了简单，后续只写 $b^s_{\boldsymbol{p}}$，即正电子的湮灭算符，$\hat{\boldsymbol{p}} = \int d^3x T^{oi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}p\sum(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^s_{\boldsymbol{p}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^s_{\boldsymbol{p}})$

构造单粒子态 $|\boldsymbol{p}, s\rangle = \sqrt{2E_p}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$

归一化条件为 $\langle \boldsymbol{p}, s|\boldsymbol{q}, s\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\delta^{rs}$

接下来构造角动量算符，首先考虑沿着 z 轴转 θ 角，根据 nother 定理 $0=\delta s=\int d^4x\partial_\mu[\mathcal{L}\delta x^\mu+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta_0\psi]$

考虑一个无穷小转动 $\Lambda^\mu_\nu=\delta^\mu_\nu+\omega^\mu_\nu$

则唯一非零的为 $\omega_{12}=-\omega_{21}=\theta,\delta x^0=\omega^{0\nu}x_\nu=0$

则 $j^0=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\delta_0\psi$

$$\delta_0\psi=\psi'(x)-\psi(x)=\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)-\psi(x) \tag{4.58}$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}}\simeq 1-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}s^{\mu\nu}=1-\frac{i}{2}\theta\Sigma^3 \tag{4.59}$$

$$\Sigma^k=\begin{pmatrix}\sigma^k & \\ & \sigma^k\end{pmatrix} \tag{4.60}$$

则 $\delta_0\psi=(1-\frac{i}{2}\theta\Sigma^3)\psi(t,x+\theta_y,y-\theta_x)-\psi(x)=-\theta(x\partial_y-y\partial_x+\frac{i}{2}\Sigma^3)\psi+O(\theta^2)$

利用了无穷小极限下 $sin\theta\approx\theta$

则 $j^0=-i\overline{\psi}\gamma^0(x\partial_y-y\partial_x+\frac{i}{2}\Sigma^3)\psi$，$\theta$ 为常数，可不写。

$$\hat{J}_z=\int d^3xj^0\to\boldsymbol{J}=\int d^3x\psi^\dagger(\boldsymbol{x}\times(-i\nabla)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma})\psi \tag{4.61}$$

为了看到自旋，我们考虑一个静止的电子，且不考虑前一项轨道角动量。[24]

首先有 $\boldsymbol{J}|0\rangle$，真空角动量为 0。

$$\hat{J}_z a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}=0}|0\rangle=[\hat{J}_z,a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}=0}]|0\rangle \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_z&=\int d^3x\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{l,r}[a^{l\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{l\dagger}_{\boldsymbol{q}}+b^l_{-\boldsymbol{q}}v^{l\dagger}_{-\boldsymbol{q}}]\frac{\Sigma^3}{2}[a^r_{\boldsymbol{p}}u^r_{\boldsymbol{p}}+b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r_{-\boldsymbol{p}}]\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{l,r}[a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}u^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}+b^l_{-\boldsymbol{p}}v^{l\dagger}_{-\boldsymbol{p}}]\frac{\Sigma^3}{2}[a^r_{\boldsymbol{p}}u^r_{\boldsymbol{p}}+b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r_{-\boldsymbol{p}}]\end{aligned} \tag{4.63}$$

根据 $[AB,C]=A\{B,C\}-\{A,C\}B$

则 $[a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}},a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}=0}]=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p})\delta^{rs}a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}$

则

$$\begin{aligned}\hat{J}_z,a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}=0}t|0\rangle&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{l,r}u^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}\frac{\Sigma^3}{2}u^r_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle\\&=\frac{1}{2m}\sum_{l=1,2}u^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}=0}\frac{\Sigma^3}{2}u^s_{\boldsymbol{p}=0}a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle\end{aligned} \tag{4.64}$$

其中 $E_p(p=0)=m$

[24]实际上轨道部分会得到 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$，正好和 δ 函数抵消。

代入 $u^s(\boldsymbol{p}=0)=\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi^s\\ \xi^s\end{pmatrix}$

$$\hat{J}_z|\boldsymbol{p}=0,s\rangle=\frac{1}{2m}\sum_l\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi^{l\dagger} & \xi^{l\dagger}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & \\ & \sigma^3\end{pmatrix}\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi^s\\ \xi^s\end{pmatrix}a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle=\sum_l(\xi^{l\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\xi^s)a^{l\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle \tag{4.65}$$

当 $s=1,\xi^1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 $l=1,\hat{J}_z|\boldsymbol{p}=0,s\rangle=\frac{1}{2}\hat{J}_z a^{1\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$，则 $\hat{J}_z$ 本征值为 $\frac{1}{2}$，类似的可求得 $s=2$ 时，本征值为 $-\frac{1}{2}$

对于反电子也可以通过类似的过程求到其本征值，唯一的区别就是 s 两个值对应的本征值的正负交换了。

接下来求动量

根据

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_s[a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})+b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^s(-\boldsymbol{p})] \tag{4.66}$$

以及 uv 正交性:$u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})=v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})=2E_p\delta^{rs},u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p})=v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})=0$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}&=\int d^3xT^{0i}\\
&=\int d^3x\psi^\dagger(-i\nabla)\psi\\
&=\int d^3x\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{r,s}[a^{r\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{r\dagger}(\boldsymbol{q})+b^r_{-\boldsymbol{q}}v^{r\dagger}(-\boldsymbol{q})][a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})+b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^s(-\boldsymbol{p})]\boldsymbol{p}\\
&=\boldsymbol{p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{r,s}[a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})+b^r_{-\boldsymbol{p}}v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})][a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})+b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^s(-\boldsymbol{p})]\\
&=\boldsymbol{p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{r,s}[2E_p\delta^{rs}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}}+2E_{-p}\delta^{rs}b^r_{-\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}]\\
&=\boldsymbol{p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\sum_{r,s}[2E_p\delta^{rs}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}}+2E_p\delta^{rs}b^r_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}]\\
&=\boldsymbol{p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}}+b^s_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}]\\
&=\boldsymbol{p}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s[a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}}-b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^s_{\boldsymbol{p}}-(2\pi)^3\delta(0)\delta^{rs}]
\end{aligned} \tag{4.67}$$

[25]

后面为一个无穷大常数，$b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}$ 作变量替换不影响积分结果。

[25]其中第五行到第六行的变量替换并不会改变积分的结果

这个结论可以直接用于求电荷算符，Dirac 场 $\mathcal{L}=\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi$ 具有 $U(1)$ 对称性 $\psi\to\psi'=e^{i\alpha}\psi$，对应的守恒流为 $j^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$，则守恒荷为

$$Q=\int d^3xj^0=\psi^\dagger\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s[a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s-b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^s-(2\pi)^3\delta(0)\delta^{rs}] \tag{4.68}$$

Q 就是电荷算符。

4.4.1 Dirac 场论传播子

其实之前我们就求过

$$\langle0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{ab}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(x-y)}=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{ab}D(x-y) \tag{4.69}$$

$$\langle0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle=-(i\partial\!\!\!/_x+m)_{ab}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(y-x)}=-(i\partial\!\!\!/_x+m)_{ab}D(y-x) \tag{4.70}$$

则构造 Dirac 推迟传播子

$$S_R(x-y)=\theta(x^0-y^0)\langle0|\{\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)\}|0\rangle=(i\partial\!\!\!/_x+m)_{ab}D_R(x-y) \tag{4.71}$$

[26]

接下来验证 S_R 是否满足格林函数

$$\begin{aligned}(i\partial\!\!\!/x-m)S_R(x-y)&=(i\partial\!\!\!/x-m)(i\partial\!\!\!/x+m)_{ab}D_R(x-y)\\&=-(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)D_R(x-y)=i\delta^4(x-y)I_{4\times4}\end{aligned} \tag{4.72}$$

对推迟传播子做傅里叶展开

$$S_R(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\overline{S}_R(p) \tag{4.73}$$

则 $(i\partial\!\!\!/x-m)S_R(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(p\!\!\!/-m)e^{-ip(x-y)}\overline{S}_R(p)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}I_{4\times4}$
得到 $\overline{S}_R(p)=\frac{i}{p\!\!\!/-m}$
则 $S_R(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{i(p\!\!\!/+m)}{p^2-m^2}$
和之前 KG 场类似，可以令

$$S_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\frac{i(p\!\!\!/+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{4.74}$$

其中 $\frac{i(p\!\!\!/+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$ 也可写作 $\frac{i}{p\!\!\!/-m+i\epsilon}$

[26]这里交换了 $\partial_x,\theta(x^0-y^0)$ 的顺序，利用 $\partial_x\theta(x^0-y^0)=\delta(x^0-y^0)$，实际上还应有一项 $\delta(x^0-y^0)\langle0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle$，如果 $x^0=y^0$，显然该项为 0，否则说明两个类空间隔的事件有因果联系

对于 $i\epsilon$ 的正负号的取法，和围道的选取有关，当 $p^0=-E_p$ 取下半圆，$p^0=E_p$ 取上半圆时，$i\epsilon$ 取正，原因是可令 $p^0=E_p-i\frac{1}{2E_p}\epsilon$，则 $p^2-|\boldsymbol{p}|^2-m^2=-i\epsilon$(忽略二阶小量)，且由于 ϵ 是无穷小量，可以认为 $p^0=E_p-i\frac{1}{2E_p}\epsilon\simeq E_p-i\epsilon$

另外 $i\epsilon$ 的正号是有物理意义的，一是保证 S 矩阵元有正确的入态和出态，二是 S 矩阵是幺正的，对应于光子定理，两个粒子碰撞的入态和出态是一致的，三是在路径积分方法中，格点场论需要利用 Wick 转动将 $\int_{[D(\psi)]}e^{is[\psi]}\to\int_{[D(\psi)]}e^{-s[\psi]}$，而 $i\epsilon$ 保证 $\int_{[D(\psi)]}e^{is[\psi]}$ 有一个指数压低。

更好的理解方法是利用 Braic-Wigner 公式 $M\propto\frac{1}{E-E_k+i\frac{\Gamma}{2}}$，该公式描述的是两个粒子散射实验时能量接近共振态质量时会有振幅尖峰这一现象，$M*2$ 就对应振幅大小，Γ 是衰变宽度，对比发现 $i\epsilon$ 就类似于衰变宽度，且非常小，基本不衰变，即电子。

最后得到

$$\begin{aligned}S_F(x-y)&=\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle,x^0>y^0\\&=\langle 0|-\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle,y^0>x^0\end{aligned}\tag{4.75}$$

其中负号是 Dirac 场特有的，来源于其算符的反对易性。

传播子的具体应用之一是描述光子和正负电子的碰撞实验,利用费曼图,前后两条直线可用 $u^s(k),\overline{u}^r(k')$ 来描述 (反粒子则是 $v^s(k),\overline{v}^r(k')$，且运动方向相反)，中间的实线就对应了传播子。

4.5 分立时空对称性和 Lorentz 分解

利用 $\Lambda g\Lambda^T=g$，对两边求行列式，可得到 $\det(\Lambda^2)=1\to\det\Lambda=\pm1$

根据 $g_{00}=g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_0\Lambda^\nu_0=-(\Lambda^0_0)^2+(\Lambda^2_0)^2+(\Lambda^2_0)^2+(\Lambda^3_0)^2=-1$，则 $(\Lambda^0_0)^2\geq1$。

而我们一般讨论的 Lorentz 变换对应的是 $\det\Lambda=1\Lambda^0_0\geq1$

引入同样符合 $\Lambda g\Lambda^T=g$ 的时空反演变换，即

$$\mathcal{P}^\mu_\nu=\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}\tag{4.76}$$

$$\mathcal{T}^\mu_\nu=\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\tag{4.77}$$

其中 $\det\mathcal{P}=-1,\mathcal{T}^0_0\leq0$ 我们令 $\det\Lambda=1,\Lambda^0_0\geq1$ 对应于 $L^\uparrow_+$，位置在第二象限，通过 $\mathcal{P}$ 得到第一象限 $L^\uparrow_-$，通过 $\mathcal{T}$ 得到第三象限 $L^\downarrow_+$，通过 $\mathcal{PT}$ 得到第四象限 $L^\downarrow_-$，其中 $\Lambda^0_0\geq1$ 称为正则时序的，$\det\Lambda=1$ 称为恰当的。

一开始物理学家都认为不仅在第二象限，物理规律在一三四象限也是成立的，但弱作用宇称不守恒，特别在 K 介子实验中时间反演也不守恒，这些现象指出有些物理现象不一定遵循空间和时间反演不变。

我们正常经历的时间是热力学时间，和时间反演并不矛盾。

经典场论中的 P 和 T 对称性

经典场论中的 P 和 T 对称性主要通过两种方式得到体现，一是拉式量在变换下保持不变，而是运动方程在变换下保持不变。

类比于场的 Lorentz 变换，

$$\phi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi'(x) = \mathcal{P}\phi(P^{-1}x) \tag{4.78}$$

考虑 KG 方程

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \tag{4.79}$$

则 $\phi'(x) = \pm\phi(\mathcal{P}^{-1}x)$

这里 $\pm$ 的原因是因为空间反演作用两次要回到原来的场，但是这实际上不影响下面对运动方程的推导。

代入得到 $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi'(x) = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + m^2)\phi(t, -\boldsymbol{x}) = 0$

对于 Dirac 理论 $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$

$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi'(x) = \mathcal{P}_{4\times4}\psi(P^{-1}x)$

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial_\mu} - m)\psi'(x) &= (i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\mathcal{P}\psi(t, -\boldsymbol{x}) \\ &= (i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \frac{\partial}{\partial(-x^i)} - m)\mathcal{P}\psi(t, -\boldsymbol{x}) \\ &= \mathcal{P}(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial(-x^i)} - m)\psi(t, -\boldsymbol{x}) = 0\end{aligned} \tag{4.80}$$

前提是 $[\gamma^0, \mathcal{P}] = 0, \{\gamma^i, \mathcal{P}\} = 0 \to \mathcal{P} = \gamma^0$

这里由于 Dirac 场是个四分量场，相应的空间反演也是一个矩阵，且满足 $(\gamma^0)^2 = 0$

而对于时间反演，$\psi'(t, \boldsymbol{x}) = \psi(-t, \boldsymbol{x})$ 这样定义无法满足薛定谔方程，可以令 $\psi'(t, \boldsymbol{x}) = \psi^*(-t, \boldsymbol{x})$，将薛定谔方程作复共轭可得到 $i\frac{\partial}{\partial(-t)}\psi^* = H^*\psi^*$

对 $\psi(x) \xrightarrow{T} \psi'(x) = \mathcal{T}_{4\times4}\psi^*(T^{-1}x)$，Dirac 方程是否不变？

$$\begin{aligned}(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\mathcal{T}\psi^*(-t, \boldsymbol{x}) &= \mathcal{T}^{-1}(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\mathcal{T}\psi^*(-t, \boldsymbol{x}) \\ &= (i(\gamma_0)^* \frac{\partial}{\partial t} + i(\gamma_i)^* \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\psi^*(-t, \boldsymbol{x}) \\ &= (-i(\gamma_0)^* \frac{\partial}{\partial(-t)} - i(\gamma^i)^* \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\psi^*(-t, \boldsymbol{x}) \\ &= (i\partial\!\!\!/' - m)^*\psi^*(-t, \boldsymbol{x}) = 0\end{aligned} \tag{4.81}$$

前提是 $\mathcal{T}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{T} = (\gamma_\mu)^* \to \mathcal{T} = i\gamma^1\gamma^3$

4.6 量子 Poincare 群及其李代数

经典的 Pioncare 变换为

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{4.82}$$

$$x'^\mu \to x''^\mu = \overline{\Lambda}^\mu_\rho x'^\rho + \overline{a}^\mu = (\overline{\Lambda}^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu) x^\nu + (\overline{\Lambda}^\mu_\rho a^\rho + \overline{a}^\mu) \tag{4.83}$$

作用两次之后依旧是原来的变换，体现出 Poincare 的群性质。

定义**量子 Poincare 群**

量子 Poincare 算符 $\hat{U}(\Lambda, a)$

作用于单粒子态 $\hat{U}(0,a)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{i\hat{P}^\mu a_\mu}|\boldsymbol{p}\rangle = e^{iP\cdot a}|\boldsymbol{p}\rangle$

其中 $\hat{P}^\mu = (H, \boldsymbol{p})$，作用在单粒子态上就得到动量。

$$\hat{U}(\Lambda, 0)|\boldsymbol{p}\rangle = |\Lambda \boldsymbol{p}\rangle \tag{4.84}$$

$\hat{U}$ 填充了 Poincare 群的无穷维表示，因为是作用在 Hibert 无穷维空间上。

$\hat{U}(\overline{\Lambda}, \overline{a})\hat{U}(\Lambda, a) = \hat{U}(\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a})$ 满足群的乘法，还可以得到 $U^{-1}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$

对 $\hat{U}(\Lambda, a)$ 单位圆附近展开，$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, a^\mu = \epsilon^\mu$

则 $\hat{U}(\Lambda, a) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu \hat{P}^\mu$

利用群的乘法公式得到

$$\hat{U}(\Lambda, a)\hat{U}(1+\omega, \epsilon)\hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \hat{U}(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \tag{4.85}$$

取 ω, ϵ 第一阶

$$\hat{U}(\Lambda, a)[\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho]\hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu \tag{4.86}$$

方程两边的 $\omega_{\rho\sigma}$ 系数相同就可以得到

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) \\ U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda^\rho_\mu P^\mu \end{aligned} \tag{4.87}$$

再取 $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, a^\mu = \epsilon^\mu$，代入上式并只取一阶项。[27]

$$\begin{aligned} i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \omega^\rho_\mu J^{\mu\sigma} + \omega^\sigma_\nu J^{\rho\nu} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho \\ i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu, P^\rho] &= \omega^\rho_\mu P^\mu \end{aligned} \tag{4.88}$$

[27]这里取的无穷小变量和前面的 ω, ϵ 无关

根据 $\omega_\mu\nu, \epsilon_\mu$ 的系数必须相同，我们可以得到相应的李代数

$$\begin{aligned}
\left[i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} \\
i\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} \\
i\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= 2g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} + 2g^{\mu\sigma}\omega_{\nu\mu}J^{\rho\nu} \\
i\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} + g^{\rho\mu}\omega_{\nu\mu}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\omega_{\nu\mu}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\mu} \\
i\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= g^{\rho\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}\omega_{\mu\nu}J^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\mu} \\
i\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] &= g^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}J^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}J^{\rho\nu} + g^{\nu\sigma}J^{\rho\mu}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

以及 $[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}p^\sigma - g^{\mu\sigma}p^\rho)$
令 $p^0 = H, \boldsymbol{P} = \{p^1, p^2, p^3\}$
$\boldsymbol{J} = \{J^{21}, J^{31}\ J^{12}\}$，为角动量算符
$\boldsymbol{K} = J^{01}, J^{02}, J^{03}$，为 Boost 算符，一共十个生成元。
$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$
$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$
$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k$
$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k$
$[K_i, P_j] = -iH\delta_{ij}$
$[K_i, H] = iP_i$
$[J_i, H] = [P_i, H] = 0$
以上便是 Poincare 群的李代数。
且这里的 K 算符是厄密算符。
如果一个量子理论是 P，T 不变的，对应的精确含义为
$U(P,0)U(\Lambda,a)U^{-1}(P,0) = U(P\Lambda P^{-1}, Pa)$
$U(T,0)U(\Lambda,a)U^{-1}(T,0) = U(T\Lambda T^{-1}, Ta)$
即第一三四象限也满足群的乘法，构成了庞加莱群的一部分。
令 $\lambda = 1 + \omega, a = \epsilon$，$\omega^{\mu\nu}, \epsilon^\mu$ 是无穷小量
$U(T,0), U(P,0)$ 分别是时间反演算符和空间反演算符。
引入简写符号 $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ 代指反演算符。
利用前面的公式 $U(P,0)U(\Lambda,a)U^{-1}(P,0) = U(P\Lambda P^{-1}, Pa)$
可得到
$\mathcal{P}i\hat{J}^{\rho\sigma}\mathcal{P}^{-1} = iP_\mu^\rho P_\nu^\sigma \hat{J}^{\mu\nu}$
$\mathcal{P}i\hat{P}^\mu\mathcal{P}^{-1} = iP_\nu^\mu \hat{P}^\nu$
类似的有
$\mathcal{T}i\hat{J}^{\rho\sigma}\mathcal{T}^{-1} = iT_\mu^\rho T_\nu^\sigma \hat{J}^{\mu\nu}$

$\mathcal{T} i\hat{P}^\mu \mathcal{T}^{-1} = iT^\mu_\nu \hat{P}^\mu$

为了确定 $\mathcal{T}, \mathcal{P}$ 的性质，引入 Wigner Symmetry 定理：任何一个对称性对应的量子算符 (包括分立的)，只能属于两种类型，第一类: 线性并且幺正，第二类: 反线性且反幺正。

以两个态的内积为例

幺正性

$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \hat{U}\psi_1 | \hat{U}\psi_2 \rangle$

线性

$\hat{U}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\hat{U}|\psi_1\rangle + b\hat{U}|\psi_2\rangle$

反幺正

$\langle \hat{U}\psi_1 | \hat{U}\psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle$

反线性

$\hat{U}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a^*\hat{U}|\psi_1\rangle + b^*\hat{U}|\psi_2\rangle$

对于 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P} i\hat{P}^\mu \mathcal{P}^{-1} = iP^\mu_\nu \hat{P}^\nu$ 取 $\mu = 0$，则

$\mathcal{P} i H \mathcal{P} = iH$

假设 $\mathcal{P}$ 是反线性反幺正算符，则

$\mathcal{P} H \mathcal{P}^{-1} = -H$

假设存在一个定态 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

考察 $\mathcal{P}^{-1}|\psi\rangle$，则 $H(\mathcal{P}^{-1}|\psi\rangle) = -\mathcal{P}E|\psi\rangle$，但空间反演之后能量为负，比真空还低下，是不可接受的，说明 $\mathcal{P}$ 只能是线性幺正算符。

则有更简练的结论

$$\mathcal{P}\boldsymbol{J}\mathcal{P}^{-1} = \boldsymbol{J} \tag{4.90}$$

$$\mathcal{P}\boldsymbol{P}\mathcal{P}^{-1} = -\boldsymbol{P} \tag{4.91}$$

$$\mathcal{P}\boldsymbol{K}\mathcal{P}^{-1} = -\boldsymbol{K} \tag{4.92}$$

这个结果很自然，因为空间反演下速度方向相反，boost 方向也相反，但角动量中的位矢和动量的负号抵消，所以不变。

对于 $\mathcal{T}$，取 $\mu = 0$，则

$$\mathcal{T} i H \mathcal{T} = -iH \tag{4.93}$$

用一样的逻辑可以得到 $\mathcal{T}$ 是反线性反幺正的。

$$\mathcal{T}\boldsymbol{J}\mathcal{T}^{-1} = -\boldsymbol{J} \tag{4.94}$$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{P}\mathcal{T}^{-1} = -\boldsymbol{P} \tag{4.95}$$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{K}\mathcal{T}^{-1} = \boldsymbol{K} \tag{4.96}$$

在时间反演下，动量变号，位矢不变，则角动量也变号。

单粒子态在 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{T}$ 作用下的性质。

一个静止有自旋的粒子，$|k,\sigma\rangle$

则 $\mathcal{P}|k,\sigma\rangle = \eta_\sigma|k,\sigma\rangle$

因为粒子静止，空间反演无法改变其动量 k 和自旋 σ

可以利用 $\mathcal{P}\boldsymbol{J}\mathcal{P}^{-1} = \boldsymbol{J}$，将 $\mathcal{P}$ 作用于角动量算符 $J_\pm$ 的右边，再交换顺序，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}J_\pm|k,\sigma\rangle &= \mathcal{P}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,\sigma_{\pm1}\rangle \\ \eta_\sigma J_\pm|k,\sigma\rangle &= \eta_{\sigma\pm1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,\sigma_{\pm1}\rangle\end{aligned} \tag{4.97}$$

即 $\eta_\sigma = \eta_{\sigma\pm1}$，说明 η 是一个内禀宇称，一般选取 ±1，和 σ 无关。

对于有动量的粒子

$\mathcal{P}|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = \eta|-\boldsymbol{p},\sigma\rangle$

考查单粒子态在 Lorentz 变换下的行为

先考虑静止粒子 $k^\mu = (m,0)$

$W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$，W 就是转动，构成 Lorentz 群的子群。

$$U(W)|\theta,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W)|\theta,\sigma'\rangle \tag{4.98}$$

其中 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W)$ 就是转动群的不可约表示，也叫 Wigner 矩阵，其中 $\sigma,\sigma' = -j,-j+1,....j$。

对于非静止的粒子

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sum\limits_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W[\lambda,\boldsymbol{p}])|\Lambda p,\sigma\rangle$

表示矩阵依旧是原来转动群的不可约表示矩阵，但是依赖于 little group W，这种方法也叫 Wigner 小群诱导表示。

massless：$U(\Lambda)|p,\lambda\rangle = e^{i\lambda\theta(\Lambda,\boldsymbol{p})}|\Lambda p,\lambda\rangle$

其中 λ 是螺旋度，是 Lorentz 不变量。

而 $|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = \sqrt{2E_p}a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$

对于产生算符

$$U(\Lambda)a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W[\lambda,\boldsymbol{p}])a^{\sigma'\dagger}_{\boldsymbol{p}} \tag{4.99}$$

在经典场论中

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \Phi'(x') = M(\Lambda)\Phi(x) \tag{4.100}$$

其中 $x' = \Lambda x$

令 $x' = x, x = \Lambda^{-1}x$，得到

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \Phi'(x) = M(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x) \tag{4.101}$$

对应不同的场，M 有不同的形式。

在量子场论中

$$U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda)=M^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda x) \tag{4.102}$$

表示矩阵互为逆。

仿照非相对论量子力学，$\langle y|\hat{x}|y\rangle=y$

定义 $\langle\phi|\hat{\Phi}(x)|\phi\rangle$，我们希望得到 $\phi(x)$

则可以插入 $U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)$，利用 $U^{-1}(\Lambda)=U^{\dagger}(\Lambda)$

得到

$$\begin{aligned}\langle\phi|U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)|\phi\rangle&=\langle U(\Lambda)\phi|U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U^{-1}(\Lambda)|U(\Lambda)\phi\rangle\\&=\langle U(\Lambda)\phi|M^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda x)|U(\Lambda)\phi\rangle\\&=M^{-1}(\Lambda)\langle\phi'|\hat{\Phi}(\Lambda x)|\phi'\rangle\\&=M^{-1}(\Lambda)\phi'(\Lambda x)\end{aligned} \tag{4.103}$$

其中 $M^{-1}(\Lambda)$ 可以直接提出来，ϕ' 相对于作了一个位形变换，又 $\phi'(x)=M(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x)$，则 $\phi'(\Lambda x)=M(\Lambda)\phi(x)$，利用经典场的变换代入之后就得到 $\phi(x)$

Dirac 场:

经典: $\psi(x)\xrightarrow{\Lambda}\psi'(x)=\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$

量子: $U(\Lambda)\hat{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda)=\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\hat{\psi}(\Lambda x)$

个人感觉这个证明有一些问题

在量子算符的变换形式中令 $\Lambda\to\Lambda^{-1}$

$U^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U(\Lambda)=M(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda^{-1}x)$

插入 $U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)$，得到

$$\begin{aligned}\langle\phi|U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)|\phi\rangle&=\langle U^{-1}(\Lambda)\phi|U^{-1}(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U(\Lambda)|U^{-1}(\Lambda)\phi\rangle\\&=\langle U^{-1}(\Lambda)\phi|M(\Lambda)\hat{\Phi}(\Lambda^{-1}x)|U^{-1}(\Lambda)\phi\rangle\\&=M(\Lambda)\langle\phi'|\hat{\Phi}(\Lambda^{-1}x)|\phi'\rangle\\&=M(\Lambda)\phi'(\Lambda^{-1}x)\end{aligned} \tag{4.104}$$

又 $\phi'(\Lambda^{-1}x)=M(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}\Lambda^{-1}x)$

但是不能直接套用 $\Phi(x)\xrightarrow{\Lambda}\Phi'(x)=M(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x)$，看似不能得到 $\phi(x)$ 的结果

而应当是

$$\Phi(x)\xrightarrow{\Lambda^{-1}}\Phi'(x)=M(\Lambda^{-1})\Phi(\Lambda x) \tag{4.105}$$

则 $\phi'(\Lambda^{-1}x)=M(\Lambda^{-1})\phi(x)$，代入之后依旧得到 $\phi(x)$。

4.7 场算符在空间反演下的行为

对于 KG 场，$\mathcal{P}\hat{\Phi}(x)\mathcal{P}^{-1}=\pm\hat{\Phi}(P^\mu_\nu x^\nu)$，$P^\mu_\nu x^\nu=x^\mu_{\boldsymbol{p}}=(t,-\boldsymbol{x})$

正负号取决于具体的模型。

Dirac 场: 令 $\mathcal{P}\hat{a}^\sigma_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}=\eta_a\hat{a}^\sigma_{-\boldsymbol{p}}$，其中 $|\eta_a|=1$，因为作用两次之后回到原来的态。

则

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma(u^\sigma(p)\mathcal{P}a^\sigma_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}e^{-ip\cdot x}+v^\sigma(p)\mathcal{P}b^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}e^{+ip\cdot x}) \tag{4.106}$$

其中 $\mathcal{P}a^\sigma_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}=\eta_a a^\sigma_{-\boldsymbol{p}},\mathcal{P}b^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}=\eta^*_b b^{\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}}$

这里的 $*$ 号只是为了方便计算模方，实际上不带 $*$ 号也可以计算。

定义 $\overline{p}^\mu=(E_p,-\boldsymbol{p}),x^\mu_p=(t,-\boldsymbol{x})$，则 $p^\mu\cdot x^\mu=\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p$

令 $p\to\overline{p}$

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\int\frac{d^3\overline{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma(u^\sigma(p)\eta_a a^\sigma_{-\boldsymbol{p}}e^{-i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p}+v^\sigma(p)\eta^*_b b^{\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}}e^{+i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p}) \tag{4.107}$$

然后将 $u(p)$ 也表示成 $\overline{p}$ 相关的形式

$$u(p)=\begin{bmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi\\ \sqrt{p\cdot\overline{\sigma}}\xi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\overline{p}\cdot\overline{\sigma}}\xi\\ \sqrt{\overline{p}\cdot\sigma}\xi\end{bmatrix}=\gamma^0\begin{bmatrix}\sqrt{\overline{p}\cdot\sigma}\xi\\ \sqrt{\overline{p}\cdot\overline{\sigma}}\xi\end{bmatrix} \tag{4.108}$$

则 $u(p)=\gamma^0u(\overline{p}),v(p)=-\gamma^0v(\overline{p})$

代入得到

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\int\frac{d^3\overline{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_p}\sum_\sigma(\gamma^0u^\sigma(\overline{p})\eta_a a^\sigma_{-\boldsymbol{p}}e^{-i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p}-\gamma^0v^\sigma(\overline{p})\eta^*_b b^{\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}}e^{+i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p}) \tag{4.109}$$

为了接着往下做，必须满足 $\eta_a=-\eta^*_b$，才能回到 $\psi(x)$ 的形式。

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\eta_a\int\frac{d^3\overline{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{E_p}\sum_\sigma(\gamma^0u^\sigma(\overline{p})a^\sigma_{-\boldsymbol{p}}e^{-i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p}+\gamma^0v^\sigma(\overline{p})b^{\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}}e^{+i\overline{p}^\mu\cdot x^\mu_p})=\eta_a\gamma^0\hat{\psi}(x_p) \tag{4.110}$$

$$\eta_a\eta_b=-|\eta_a|^2=-1 \tag{4.111}$$

条件的物理意义为费米子和反费米子必须具有相反的内禀宇称。

考虑束缚态，$|e^-e^+\rangle$ 即正负电子偶素，以及强子 $|q,\overline{q}\rangle$ 夸克和反夸克组成的束缚态。束缚态基态的正负电子偶素和介子的内禀宇称必须是-1。

$$\mathcal{P}a^{\sigma_1\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1}b^{\sigma_2\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\mathcal{P}^{-1}|0\rangle \tag{4.112}$$

这个式子来自于空间反演算符作用于某个质心系中的波函数 (所以 ab 的动量相反)，前面还有一串因子 (类似于氢原子的解)，. 空间反演算符可以直接作用到产生湮灭算符上，且空间反演算符作用在真空态上不改变，然后前面的系数部分作变量替换 $p\to-p$ 下不改变。

得到 $\eta_a^*\eta_b^* a_{-\boldsymbol{p}}^{\sigma_1\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^{\sigma_2\dagger} = -a_{-\boldsymbol{p}}^{\sigma_1\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^{\sigma_2\dagger}$，说明基态的内禀宇称为-1。

考虑空间反演算符作用于 Dirac 场的各种双线型，

$$\mathcal{P}\overline{\psi}\mathcal{P}^{-1} \tag{4.113}$$

又 $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^\dagger$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\overline{\psi}\mathcal{P}^{-1} &= (\mathcal{P}^\dagger)^\dagger \psi^\dagger(x)\mathcal{P}^\dagger\gamma^0 \\ &= (\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma^0 \\ &= (\eta_a\gamma^0\psi(x_p))^\dagger\gamma^0 \\ &= \eta_a^*\psi^\dagger(x_p)(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 \\ &= \eta_a^*\overline{\psi}(x_p)\gamma^0\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\mathcal{P}\overline{\psi}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\psi\mathcal{P}^{-1} = |\eta_a|^2\overline{\psi}(x_p)\gamma^0\gamma^0\psi(x_p) = \overline{\psi}(x_p)\psi(x_p) \tag{4.115}$$

$$\mathcal{P}\overline{\psi}i\gamma^5\psi\mathcal{P}^{-1} = |\eta_a|^2\overline{\psi}\gamma^0 i\gamma^5\gamma^0\psi(x_p) = -|\eta_a|^2\overline{\psi}i\gamma^5\gamma^0\gamma^0\psi(x_p) = -|\eta_a|^2\overline{\psi}i\gamma^5\psi(x_p) \tag{4.116}$$

利用了 $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

正是因为这个负号，才叫赝标量 (空间反演下改变)，而 Dirac 场在空间反演下不变，也就不存在类似的赝标量。

$$\mathcal{P}\overline{\psi}i\gamma^\mu\psi\mathcal{P}^{-1} = \overline{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(x_p) = \overline{\psi}(\gamma^\mu)^\dagger\psi(x_p) = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_p) \tag{4.117}$$

$$\mu = 0, \overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_p) = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_p), \mu = 1,2,3, \overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_p) = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_p) \tag{4.118}$$

而对于赝矢流

$$\mathcal{P}\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x_p)\mathcal{P}^{-1} = -\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \tag{4.119}$$

$$\mu = 0, -\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x_p) = -\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x_p) \tag{4.120}$$

$$\mu = 1,2,3, -\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi(x_p) = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x_p) \tag{4.121}$$

正好和前面的矢量在宇称变换下的结果相反。

考虑一个理论 $\mathcal{L} = g\overline{\psi}\psi\phi + \widetilde{g}\overline{\psi}i\gamma_5\psi\widetilde{\phi}$，其中 ϕ 是一个标量场。现在考察 $\phi, \widetilde{\phi}$ 在空间反演下的变化。整个场在空间反演应该是不变的，描述的是强相互作用，第一项 $\overline{\psi}\psi$ 空间反演不变，即 ϕ 在空间反演下不变，而第二项是赝标流，在空间反演下有一个负号，$\widetilde{\phi}$ 在空间反演下也有一个负号。

左右 Weyl 场在空间反演下的变化:$\psi_L = P_L\psi, \psi_R = P_R\psi, P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$

则 $\mathcal{P}\psi_L(x)\mathcal{P}^{-1} = \frac{1-\gamma^5}{2}\eta_a\gamma^0\psi(x_p) = \eta_a\gamma^0 P_R\psi = \eta_a\gamma^0\psi_R$

而对于零质量的粒子，螺旋度是个好量子数，在空间反演下，旋量的手征性改变，螺旋度反号 (动量方向改变，角动量不变)

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i\partial\!\!\!/\psi_L + \overline{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L) \tag{4.122}$$

上面的拉式量在手征变换下不改变，即左手场变成右手场，右手场变成左手场。

弱作用最大程度地破坏了空间反演对称性，例如下面的弱作用拉式量。

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{-4G_F}{\sqrt{2}}[\bar{v}_\mu v_\mu P_L \mu][\bar{e}\gamma^\mu P_L v_e] \tag{4.123}$$

只包含的左手部分，在宇称变换下完全不守恒。
μ 比 e^- 重两百多倍，其他性质和 e^- 都一样。

$$\mu \to V_\mu + e^- + \overline{V_e} \tag{4.124}$$

这个过程的拉式量全是左手 weyl 场。

4.8 时间反演对应的量子算符

对单粒子态的时间反演变换

$$\mathcal{T}\boldsymbol{p}\mathcal{T}^{-1} = -\boldsymbol{p} \tag{4.125}$$

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H \tag{4.126}$$

$$\mathcal{T}\boldsymbol{J}\mathcal{T} = -\boldsymbol{J} \tag{4.127}$$

考虑静止粒子 $k^\mu = (m, 0)$

$$H\mathcal{T}|k,\sigma\rangle = m\mathcal{T}|k,\sigma\rangle \tag{4.128}$$

$$P\mathcal{T}|k,\sigma\rangle = 0 \tag{4.129}$$

$$J\mathcal{T}|k,\sigma\rangle = -\sigma\mathcal{T}|k,\sigma\rangle \tag{4.130}$$

因此 $\mathcal{T}|k,\sigma\rangle = \xi_\sigma|k,-\sigma\rangle$，$|\xi_\sigma| = 1$
$\mathcal{T}J_\pm = \mathcal{T}(J_1 \pm iJ_2)|k,\sigma\rangle = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\mathcal{T}|k,\sigma_{\pm1}\rangle$
第二个等号后的系数就是个常数，所以 $\mathcal{T}$ 可以越过。
分别对两处都作时间反演，我们得到 $\xi_{\sigma\pm1} = -\xi_\sigma$
则 $\mathcal{T}|k,\sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma}|k,-\sigma\rangle$，从这里可以看出只有自旋角动量即 $j-\sigma=0$ 时时间反演为负。
ξ 无重要的物理意义，可以设定 $|k,\sigma\rangle' = \sqrt{\xi}|k,\sigma\rangle$
对运动粒子

$$\mathcal{T}|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma}|-\boldsymbol{p},-\sigma\rangle \tag{4.131}$$

$$\mathcal{T}a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{T}^{-1} = \xi(-1)^{j-\sigma}a^{-\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}} \tag{4.132}$$

$$\mathcal{T}^2|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = (-1)^{2j}|\boldsymbol{p},\sigma\rangle \tag{4.133}$$

注意 $\mathcal{T}$ 在和 ξ 交换时根据反线性算符的性质 $\xi \to \xi^*$
对于零质量粒子 $\mathcal{T}^2|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = (-1)^{2\lambda}|\boldsymbol{p},\lambda\rangle$，$\lambda$ 为螺旋度。
如果态是由奇数个费米子组成，$2j$ 为奇数，$\mathcal{T}^2 = -1$，$\mathcal{T}|\psi\rangle, |\psi\rangle$ 还是一个态吗？

如果是 $\mathcal{T}|\psi\rangle = c|\psi\rangle$，$\mathcal{T}^2|\psi\rangle = c^*\mathcal{T}|\psi\rangle = |c|^2|\psi\rangle = |\psi\rangle$，和 $\mathcal{T}^2 = -1$ 矛盾。

对费米子来说，$|\psi\rangle, \mathcal{T}|\psi\rangle$ 一定是简并的，也称为 Kramers 简并。

自由费米子自然有上下自旋两种态的简并，可以外加上一个静电场，使原来简并的上下自旋态分离，但这违背了 Kramers 简并，这意味着时间反演不变禁介了费米子有非 0 的电偶极矩。

4.9 场算符的时间反演变换

$$\mathcal{T}\hat{\psi}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{E_p}}\sum_\sigma (a^\sigma_{\boldsymbol{p}}u^\sigma(p)e^{-ip\cdot x} + b^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}v^\sigma(p)e^{+ip\cdot x})\mathcal{T}^{-1} \tag{4.134}$$

$$\mathcal{T}a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{T}^{-1} = \xi_a(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}} \tag{4.135}$$

$$\mathcal{T}b^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{T}^{-1} = \xi_b(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}b^{-\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}} \tag{4.136}$$

代入得到

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2000E_p}}\sum_\sigma (\xi^*_a(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-\sigma}_{-\boldsymbol{p}}[u^\sigma(p)]^*e^{ip\cdot x} + \xi_b(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}b^{-\sigma\dagger}_{-\boldsymbol{p}}[v^\sigma(p)]^*e^{-ip\cdot x}) \tag{4.137}$$

令 $x_T = (-t, \boldsymbol{x}), \widetilde{p}^\mu = (E, -\boldsymbol{p}), p\cdot x = -\widetilde{p}\cdot x_T$

为求 $[u^\sigma(p)]^*, [v^\sigma(p)]^*$

对于 $v^s(p) = \begin{bmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s\end{bmatrix}$

重新令 $\eta^1 = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \eta^2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

原因是对于反粒子，自旋朝上其实对应朝下。

考虑 p 平行与 z 轴，$p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$

$$u^{\sigma=\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix}\sqrt{E-p_z}\\0\\\sqrt{E+p_z}\\0\end{bmatrix} \tag{4.138}$$

$$u^{\sigma=-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix}0\\-\sqrt{E+p_z}\\0\\\sqrt{E-p_z}\end{bmatrix} \tag{4.139}$$

$$v^{\sigma=\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix}0\\-\sqrt{E+p_z}\\0\\\sqrt{E-p_z}\end{bmatrix} \tag{4.140}$$

$$v^{\sigma=-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{E-p_z}\\0\\\sqrt{E+p_z}\\0\end{bmatrix} \tag{4.141}$$

引入

$$[u^\sigma(p)]^*=(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\mathcal{J}u^{-\sigma}(\widetilde{p}) \tag{4.142}$$

$$[v^\sigma(p)]^*=(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\mathcal{J}v^{-\sigma}(\widetilde{p}) \tag{4.143}$$

其中 $\mathcal{J}=\gamma^1\gamma^3$

可以满足前面四个式子，当然这个公式适用于任何方向。

再把这个结果代入之前的场算符中，得到

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma((\xi_a^*(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a_{-\boldsymbol{p}}^{-\sigma}(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\mathcal{J}u^{-\sigma}(\widetilde{p})e^{i\widetilde{p}\cdot x_T}+\xi_b(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}b_{-\boldsymbol{p}}^{-\sigma\dagger}(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}\mathcal{J}v^{-\sigma}(\widetilde{p})e^{-i\widetilde{p}\cdot x_T}) \tag{4.144}$$

由于 σ 只能取 $\pm\frac{1}{2}$，$(-1)^{1-2\sigma}$ 等于 1。

$\int\frac{d^3\widetilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{E_{\widetilde{p}}}}\sum_\sigma((\xi_a^*a_{\widetilde{p}}^{-\sigma}\mathcal{J}u^{-\sigma}(\widetilde{p})e^{-i\widetilde{p}\cdot x_T}+\xi_b b_{\widetilde{p}}^{-\sigma\dagger}\mathcal{J}v^{-\sigma}(\widetilde{p})e^{+i\widetilde{p}\cdot x_T})$

作了变量替换 $p\to\widetilde{p}$

假设 $\xi_a^*=\xi_b$，即 $\xi_b\xi_a=1$，由于 $|\xi_a|=|\xi_b|=1$

$\mathcal{J}$ 矩阵的性质

$$\mathcal{J}^\dagger=\mathcal{J}^{-1}=-\mathcal{T} \tag{4.145}$$

$$\mathcal{J}(\gamma^\mu)^*\mathcal{J}^{-1}=\gamma_\mu \tag{4.146}$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\overline{\psi}\mathcal{T}^\dagger&=(\mathcal{T}^\dagger)^\dagger\psi^\dagger(\mathcal{T})^\dagger(\gamma^0)^*\\&=(\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger)^\dagger(\gamma^0)^*\\&=(\xi_a^*\mathcal{J}\psi(x_T))^\dagger(\gamma^0)^*\\&=\xi_a\psi^\dagger(x_T)\mathcal{J}^\dagger(\gamma^0)^*\mathcal{J}\mathcal{J}\\&=\xi_a\overline{\psi}(x_T)\mathcal{J}^{-1}\end{aligned} \tag{4.147}$$

对赝标流作 $\mathcal{T}$ 变换

$$\mathcal{T}\overline{\psi}i\gamma_5\psi\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{T}\overline{\psi}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}i\gamma_5\psi\mathcal{T}^{-1}=-i\mathcal{T}\overline{\psi}\mathcal{T}^{-1}\gamma_5^*\mathcal{T}\psi\mathcal{T}^{-1}=|\xi_a|^2(-i)\overline{\psi}(x_T)\mathcal{J}^\dagger\gamma_5^*\mathcal{J}\psi(x_T)=-\overline{\psi}i\gamma_5\psi \tag{4.148}$$

而对于矢量流

$$\mathcal{T}\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\mathcal{T}^{-1}=+\overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T)=\pm\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T) \tag{4.149}$$

$$\mu=0,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T)=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T) \tag{4.150}$$

$$\mu = 1,2,3, \overline{\psi}\gamma_\mu\psi(x_T) = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_T) \tag{4.151}$$

对于左手流

$$\mathcal{T}\overline{\psi}\gamma^\mu(\frac{1-\gamma_5}{2})\psi\mathcal{T}^{-1} = \overline{\psi}\gamma_\mu(\frac{1-\gamma_5}{2})\psi(x_T) \tag{4.152}$$

依然是左手流。

$$\mathcal{L}_{cc} = \sum_{u_i=(u,c,t)}\sum_{d_j=(d,s,b)} V_{u_iv_j}\bar{u}^i(x)\gamma^\mu P_L d^j(x)\omega_\mu^+ + h.c. \tag{4.153}$$

其中 CKM 矩阵 $V_{u_iv_j}$ 有无法消除的复相角，在时间反演下一定会变化。

4.10 电荷共轭变换

即将粒子变为反粒子。

Dirac 方程：电子在经典外电磁场的运动

$$(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0 \tag{4.154}$$

从矩阵上来说，这是一个 $4\times4\times4\times1$ 的方程。

$[i(\gamma^\mu)^T\partial_\mu - e(\gamma^\mu)^TA_\mu + m]\overline{\psi}^T = 0$，来自于 $\overline{\psi}(i\partial_\mu\gamma_\mu - eA\!\!\!/ + m)$ 取转置，而 $\overline{\psi}(i\partial_\mu\gamma_\mu - eA\!\!\!/ + m)$ 只是 Dirac 场运动方程的另一种形式 (对 ψ 作变分)，而且这是一个 $1\times4\times4\times4$ 方程，为了回到 $4\times4\times4\times1$ 的形式，我们还需要取一个转置。

定义 $C(\gamma^\mu)^TC^{-1} = -\gamma^\mu$

对上式插入 CC^{-1}

$$C[i(\gamma^\mu)^T\partial_\mu - e(\gamma^\mu)^TA_\mu + m]CC^{-1}\overline{\psi}^T = (-i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ + m)\psi^c(x) = 0 \tag{4.155}$$

$$(-i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ + m)\psi^c(x) = -(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ + m)\psi^c(x) = 0 \tag{4.156}$$

和一开始的方程的区别在于电荷变号，相当于一个反粒子的波函数。

定义 $\hat{C}|$ 粒子 $\boldsymbol{p},\sigma\rangle = \xi_a^*|$ 反粒子 $\boldsymbol{p},\sigma\rangle$ ，且 $|\xi_a| = 1$

$$Ca_{\boldsymbol{p}}^\sigma C^{-1} = \xi_a^* b_{\boldsymbol{p}}^\sigma \tag{4.157}$$

$$Cb_{\boldsymbol{p}}^\sigma C^{-1} = \xi_b^* a_{\boldsymbol{p}}^\sigma \tag{4.158}$$

令 C 为线性幺正算符，作用于 Dirac 场算符得到

$$\hat{C}\hat{\psi}(x)\hat{C}^{-1} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma[\xi_a^*b_{\boldsymbol{p}}^\sigma u^\sigma(p)e^{-ip\cdot x} + \xi_b a_{\boldsymbol{p}}^{\sigma\dagger}v^\sigma(p)e^{ip\cdot x}] \tag{4.159}$$

又 $u(p) = i\gamma^2[v(p)]^*$，$v(p) = i\gamma^2[u(p)]^*$，依旧可以用之前沿着 z 轴运动的例子来验证。

$$\hat{C}\hat{\psi}(x)\hat{C}^{-1} = -i\gamma^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma[\xi_a^*b_{\boldsymbol{p}}^\sigma[v^\sigma(p)]^*e^{-ip\cdot x} + \xi_b a_{\boldsymbol{p}}^{\sigma\dagger}[u^\sigma(p)]^*e^{ip\cdot x}] \tag{4.160}$$

而对于 $\overline{\psi}$ 算符，我们依旧需要将这个躺倒的矢量转置，所以 C 作用上去得到

$$C\overline{\psi}^T = -\gamma^0 C \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_\sigma (a_{\boldsymbol{p}}^{\sigma\dagger}[u^\sigma(p)]^* e^{ip\cdot x} + b_{\boldsymbol{p}}^{\sigma}[v^\sigma(p)]^* e^{-ip\cdot x}) \tag{4.161}$$

这是因为 $\overline{u}^T = (u^\dagger\gamma^0)^T = \gamma_0^T u^*, C\overline{u}^T = C\gamma_0^T C^{-1} C u^* = -\gamma^0 C u^*$

令 $\xi_a^* = \xi_b$，对比上面两个公式则有

$$C\psi(x)C^{-1} = -\xi_a^* C\overline{\psi}^T(x) = -\xi_a^* i\gamma^2\psi^* \tag{4.162}$$

$C = i\gamma^2\gamma^0, C^\dagger = C^{-1}$

$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$

Majorana 费米子 (自己是自己的反粒子，即电中性的。)

实 KG 场和复 KG 场的关系类似于 Majorana 费米子和 Dirac 费米子。

$\psi_M = \begin{bmatrix} \psi_L \\ i\sigma_2\psi_L^* \end{bmatrix}$

自由度比 Dirac 场少了一半。

利用 $C\psi(x)C = \xi_a^* C\overline{\psi}^T(x) = -\xi_a i\gamma^2\psi^*$

$C\psi_M C = -\xi i\gamma^2\psi_M^* = \xi\begin{bmatrix} -\sigma_2\sigma_2^*\psi_L \\ i\sigma_2\psi_L \end{bmatrix}$，不加下标 a 是因为 Majorana 费米子正反粒子是同一个粒子，没必要区分。

$-\sigma_2\sigma_2^* = I$

即 $C\psi_M C = \xi\begin{bmatrix} \psi_L \\ i\sigma_2\psi_L^* \end{bmatrix}$，即它的反粒子就是它自己。

如果要求 Dirac 场的双线型在 C 变换下的情况，要先求

$$C\overline{\psi}C^{-1} = (C^\dagger)^\dagger\psi^\dagger C^\dagger\gamma^0 = (C\psi C^{-1})^\dagger\gamma^0 = (\xi_a^*\gamma^0 C\psi^*)^\dagger\gamma^0 = \xi_a\psi^T C^\dagger \tag{4.163}$$

$$C\overline{\psi}\psi C^{-1} = -\xi_a\psi^T C^\dagger\xi_a^* C\overline{\psi}^T = -\psi^T\overline{\psi}^T = -(\overline{\psi}\psi)^T = \overline{\psi}\psi \tag{4.164}$$

由于 $\overline{\psi}\psi$ 就是个行矢量乘以列矢量，为一个数，取转置就是其本身。

$$-(\overline{\psi}\psi)^T = -\psi_a\overline{\psi}_a = \overline{\psi}_a\psi_a + const = \overline{\psi}\psi \tag{4.165}$$

因为要满足交换的反对易性，则 Dirac 场的拉式量是 C 不变的。

$$C\overline{\psi}i\gamma_5\psi C^{-1} = -i\psi^T\gamma_5^T\overline{\psi}^T \tag{4.166}$$

$$C\overline{\psi}\gamma^\mu\psi C^{-1} = \psi^T(\gamma^\mu)^T\overline{\psi}^T = -(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)^T + const \tag{4.167}$$

对于量子电动力学中的拉式量 (满足在 C 变换下不变)

$$C\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu C^{-1} = C\overline{\psi}\gamma^\mu C^{-1}C\psi A_\mu C^{-1} = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi C A_\mu C^{-1} = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.168}$$

则

$$CA_\mu C^{-1} = -A_\mu \tag{4.169}$$

所以光子的 C 宇称为 -1。

Furry 定理：初态 n 个光子，末态 m 个光子，则 $n+m$ 必须是偶数，即 $(-)^n = (-1)^m$，光子 C 宇称不变。

$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$，C 变换作用于单光子态，有额外的负号。

对于赝矢流和左矢流

$$C\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi C^{-1} = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{4.170}$$

$$C\overline{\psi}\gamma^\mu P_L\psi C^{-1} = \overline{\psi}\gamma^\mu P_R\psi \tag{4.171}$$

CPT 定理

$$\begin{aligned} CPT\psi(x)(CPT)^{-1} &= CP\xi_a^*\gamma^1\gamma^3\psi(x_T)P^{-1}C^{-1} \\ &= -\xi_a^*\eta_a^*\gamma^1\gamma^3\gamma^0 C\psi(-x)C^{-1} \\ &= -\xi_a^*\eta_a^*\gamma^1\gamma^3\gamma^0(-\zeta_a^*\gamma^0 i\gamma^2\gamma^0\psi^*(-x)) \\ &= -\xi_a^*\zeta_a\eta_a^*\gamma_5\psi^*(-x) \end{aligned} \tag{4.172}$$

且 CPT 算符是反线性反幺正算符，因为具有奇数个反线性算符 T。

CPT 定理: 对任意一个相对论性的 Local QFT，哈密顿量是厄密的，这个理论一定是 CPT 不变的。

$$CPT\mathcal{L}(x)(CPT)^{-1} = \mathcal{L}(-x) \tag{4.173}$$

物质-反物质不对称需要满足三个条件重子数守恒，C, CP 破坏，偏离热平衡，SM 可以满足三个条件，但是破坏的程度无法达到现实中的观测。

5 矢量场量子化

5.1 有质量矢量场和 Proca 拉式量

先回忆描述自旋为 0 的粒子的 KG 场，

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{5.1}$$

能量密度$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi} + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$

仿造 KG 场$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu\left(\partial^2 + m^2\right)A^\mu$,满足 $\left(\partial^2 + m^2\right)A_\mu = 0$

则有根据拉格朗日方程，动量和能量密度为

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu, \varepsilon = \frac{1}{2}\left[\dot{\boldsymbol{A}}^2 + \left(\nabla A^i\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\boldsymbol{A}^2\right] - \frac{1}{2}\left[\dot{A}_0^2 + (\nabla A_0)^2 + m^2{A_0}^2\right] \tag{5.2}$$

第一部分是正定的，第二部分是负定的，则能量无下界，猜想是错误。本质上的原因是场的自由度 (4) 和描述的粒子自由度 (2s+1=3) 不匹配。

为了体现其矢量性质

加入

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu &= \partial_\mu \left(A_\nu \partial^\nu\right) A^\mu = A_\nu \partial^\nu A^\mu - A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = -A_\nu \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) \\ &= -\left(A_\nu \partial_\mu A^\mu - \partial^\nu A_\nu \partial_\mu A^\mu\right) = \partial^\nu A_\nu \partial_\mu A^\mu = (\partial \cdot A)^2\end{aligned}$$

则新的拉式量可定义为

$$\mathcal{L} = -\frac{a}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \frac{b}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \tag{5.3}$$

则 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = m^2 A^\mu$

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = \partial_\nu \left(a\partial^\nu A^\mu - b\partial^\mu A^\nu\right) = -a\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - b\partial^\mu \left(\partial \cdot A\right) \tag{5.4}$$

E-L 方程为 $a\partial_\nu \partial^\nu A^\mu + b\partial^\mu \left(\partial \cdot A\right) + m^2 A^\mu = 0$

对这个方程再作用 ∂_μ

得到 $\left[(a+b)\,\partial_\nu \partial^\nu + m^2\right]\left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0$，后一项 $\partial_\mu A^\mu$ 为标量场。

两边除以 $a+b$

得到

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + \left(\frac{m}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0 \tag{5.5}$$

形式上类似于 KG 场，相当于一个自旋为 0，质量为 $\frac{m}{\sqrt{a+b}}$ 的粒子。

A^μ 有四个自由度,令$a+b$等于0，即$m^2\left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0, m \neq 0 \to \left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0$,这个相当于一个约束，移除了$A^\mu$的一个看起来像规范条件，但只是像，物理含义完全不同，这里是带质量的场，并不具有规范不变性。

则令 $a = -b = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu (\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} + \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} - \partial_\mu A_\nu F^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\nu\mu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2 \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, m^2 {A_\mu}^2\end{aligned} \tag{5.6}$$

最后得到拉式量为

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu} \;+\frac{1}{2}\; m^2 {A_\mu}^2 = \; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \;+\frac{1}{2}\; m^2 {A_\mu}^2 \tag{5.7}$$

最后得到运动方程 (关于电磁场张量的运动方程计算可以参考 peskin 习题 2.1 的解答)

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu \;=\; 0 \tag{5.8}$$

再作用一次偏导，$\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2\partial\cdot A \;=\; 0$，其中第一项为对称张量乘以反对称张量，求和之后为0。

利用 $\partial_\mu A^\mu = 0$，$\partial_\mu\partial^\mu\; A^\mu - \partial^\mu\left(\partial\cdot A\right) + m^2 A^\mu \;= \partial_\mu\partial^\mu\; A^\mu + m^2 A^\mu \;= 0$
最后得到两个运动方程

$$\partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \tag{5.9}$$

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu + m^2 A^\mu \;=\; 0 \tag{5.10}$$

而$\pi^\mu \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} \;=\; -F^{0\mu} = \; F^{\mu 0}$, 且$F^{00} \;=\; 0$
则$\epsilon \;=\; T^{00} = \pi^\mu\; \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \;=\; -\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}} \;-\; \mathcal{L}$
$\pi^\mu \;=\; F^{\mu 0} \;=\; \partial^\mu A^0 \;-\; \partial^0 A^i \;= E^\mu$
则$\boldsymbol{\pi} = \; \boldsymbol{E}$
根据$\boldsymbol{E} \;=\; -\nabla A^0 \;-\dot{\boldsymbol{A}}\,, \boldsymbol{B} \;=\; \nabla\times\boldsymbol{A}$,

$$\begin{aligned}
\epsilon \;&=\; -\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}} \;-\; \left(\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right) \;+\frac{1}{2}\; m^2 {A_0}^2 \;-\frac{1}{2}\; m^2\boldsymbol{A}^2 \;\right) \\
&= \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{E} \;+\nabla A^0\;\right) \;-\; \left(\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right) \;+\frac{1}{2}\; m^2 {A_0}^2 \;-\frac{1}{2}\; m^2\boldsymbol{A}^2 \;\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) \;+\boldsymbol{E}\;\cdot\nabla A^0 \;+\frac{1}{2}\; m^2\left({A_0}^2 \;+\boldsymbol{A}^2\right) \;-\; m^2 {A_0}^2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中第一项就是$Maxwell$的能量密度

$$\boldsymbol{E}\cdot\nabla A^0 = \nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\; A^0\right) \;-\; A^0\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\; A^0\right) \;+\; A^0\;\nabla^2 A^0 + A^0\;\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}} \tag{5.12}$$

再代入回去

$$\epsilon \;=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) \;+\frac{1}{2}\; m^2\left({A_0}^2 \;+\boldsymbol{A}^2\right) \;+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\; A^0\right) - \; A_0\left(-\nabla^2 + m^2\right) A_0 + \; A_0\partial_0\partial_i A^i \;+\; A_0\partial_0^2 A_0 \;-A_0\partial_0^2 A_0 \tag{5.13}$$

$$\epsilon \;=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) \;+\; \frac{1}{2}\; m^2\left({A_0}^2 \;+\boldsymbol{A}^2\right) \;+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\; A^0\right) - \; A_0\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) A_0 + \; A_0\partial_0\partial_\mu A^\mu \tag{5.14}$$

第三项为边界项，在无穷远处为0，后两项根据运动方程为0

$$\epsilon \;=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) \;+\; \frac{1}{2}\; m^2\left({A_0}^2 \;+\boldsymbol{A}^2\right) \tag{5.15}$$

终于得到了处处正定的能量
定义 $iA_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{-ip\cdot x}, \epsilon_\mu$为极化矢量
代入 $\partial_\nu\partial^\nu A^\mu + m^2 A^\mu = 0, (\partial_\mu A^\mu) = 0$
得到 $p^2 = m^2, p^0 = E_p > 0, p_\mu \epsilon^\mu(p) = 0$
考虑静止情形 $p^\mu = (m,0,0,0)$
则 $\epsilon^{(1)\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon^{(2)\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon^{(3)\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 满足正交性。
考虑 $p^\mu = (m,0,0,p_z)$，并对上面的解进行线性组合。

$$\epsilon^{(+)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon^{(-)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon^{(0)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{|\boldsymbol{p}|}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E}{m} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

分别表示右旋和左旋的横向极化矢量 (即和运动方向垂直)，螺旋度分别为 $+1, -1$ 和纵向极化矢量
正交性

$$\epsilon^\lambda(p)\epsilon^{\tilde{\lambda}*}(p) = -\delta^{\lambda\tilde{\lambda}} \tag{5.17}$$

完备性

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu^\lambda(p)\epsilon_\mu^{\lambda*}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \tag{5.18}$$

5.2 Proca 场量子化

场的量子化形式如下

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^{3} \left(a_p^\lambda \epsilon_\mu^\lambda(p) e^{-ip\cdot x} + a_p^{\lambda\dagger} \epsilon_\mu^{\lambda*}(p) e^{ip\cdot x} \right) \tag{5.19}$$

假设 $\left[a_p^\lambda, a_p^{\lambda\dagger}\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})$
单粒子态$|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = \sqrt{2E_p}\, a_p^{\lambda\dagger} |0\rangle$

$$\langle 0|\hat{A}_\mu(x)|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = \epsilon_\mu^\lambda(p) e^{-ip\cdot x} \tag{5.20}$$

考察因果性 $\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)\right] = \langle 0|\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)\right]|0\rangle$
则 $\langle 0|\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p} \sum_{\lambda=1}^{3} \left(\epsilon_\mu^\lambda(p) e^{-ip\cdot(x-y)} \epsilon_\mu^{\lambda*}(p)\right) = \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\right) D(x-y)$
$\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)\right] = \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\right)(D(x-y) - D(y-x))$
后一项就是KG场中的传播子，则上式也满足因果性。

用等时对易关系进行正则量子化
猜想 $[A^{\mu}(t,\boldsymbol{x}),\pi^{\nu}(t,\boldsymbol{y})] = i\,g^{\mu\nu}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$
但是并不存在π^0
则可以写成三维形式 $[A^{i}(t,\boldsymbol{x}),\pi^{j}(t,\boldsymbol{y})] = -i\delta^{ij}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,x$
考虑薛定谔绘景，算符不含时
$\pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E} = -\nabla A^{0} - \dot{\boldsymbol{A}}$
$\pi(\boldsymbol{x}) = i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{\lambda=1}^{3}\left(E_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu}^{\lambda}(\boldsymbol{p}) - E_{\boldsymbol{p}}a_{-\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu}^{\lambda *}(-\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}\left(a_{\boldsymbol{p}}^{\lambda}\epsilon_{\mu}^{\lambda(0)}(\boldsymbol{p}) + a_{-\boldsymbol{p}}^{\lambda\dagger}\epsilon_{\mu}^{\lambda(0)*}\right)\right)$
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\,e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\sum_{\rho=1}^{3}\left(a_{\boldsymbol{q}}^{\lambda}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu}^{\rho}(\boldsymbol{q}) + a_{-\boldsymbol{q}}^{\rho\dagger}\boldsymbol{\epsilon}_{\mu}^{\rho *}(-\boldsymbol{q})\right)$
$[\pi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})] = -i\delta^{ij}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 这里的推导可能有问题
根据 $\left[\hat{A}_{\mu}(x),\hat{A}_{\nu}(y)\right] = \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)(D(x-y)-D(y-x))$
当指标都为时间或空间时，结果为0
但 $\left[\hat{A}_{0}(x),\hat{A}_{i}(y)\right] = \left(-g_{0i} - \frac{\partial_{0}\partial_{i}}{m^2}\right)(D(x-y)-D(y-x))$
令$x^0 = y^0 = t$
$\left[\hat{A}_{0}(x),\hat{A}_{i}(y)\right] = \left(-\frac{\partial_{0}\partial_{i}}{m^2}\right)(D(x-y)-D(y-x)) = -\frac{1}{m^2}\partial_{i}\left[\dot{\phi}(x),\phi(y)\right] = i\frac{1}{m^2}\partial_{i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$
这个条件很诡异，源于$\hat{A}_0(x)$不存在时间导数

5.3 Porca 场的费曼传播子

$D_F(x-y) = \langle 0|T\,\hat{A}_{\mu}(x)\hat{A}_{\nu}(y)|0\rangle$
$D_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)D(x-y) + \theta(y^0-x^0)\left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)D(y-x)$
如果$\theta(x^0-y^0)\left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)$两项可以互换
$D_F(x-y) = \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)(\theta(x^0-y^0)D(x-y) - \theta(y^0-x^0)\,D(y-x))$
后一项就是KG场的费曼传播子
$D_F(x-y) = \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$
$D_F(x-y) = \theta(x^0-y^0)\left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)D(x-y) + \theta(y^0-x^0)\left(-g_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{m^2}\right)D(y-x)$
但这样做不一定合理，为此我们作以下的计算

$$\partial_0\left[\theta\left(x^0-y^0\right)D(x-y)\right] = \delta\left(x^0-y^0\right)D(x-y) + \theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0 D(x-y)$$
$$\partial_0^2\left[\theta\left(x^0-y^0\right)D(x-y)\right] = \bar{\delta}\left(x^0-y^0\right)D(x-y) + 2\delta\left(x^0-y^0\right)\partial_0 D(x-y) + \theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D(x-y) \tag{5.21}$$

$$\partial_0^2\left[\theta\left(y^0-x^0\right)D(y-x)\right] = -\bar{\delta}\left(x^0-y^0\right)D(y-x) - 2\delta\left(x^0-y^0\right)\partial_0 D(y-x) + \theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D(y-x) \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
&\theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D\left(x-y\right)+\theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D\left(y-x\right)\\
=&\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)-\bar{\delta}\left(x^0-y^0\right)\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]-2\delta\left(x^0-y^0\right)\partial_0\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]\\
&\theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D\left(x-y\right)+\theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D\left(y-x\right)\\
=&\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)-\bar{\delta}\left(x^0-y^0\right)\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]-2\delta\left(x^0-y^0\right)\left(-i\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\right)
\end{aligned}\tag{5.23}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\left(x^0-y^0\right)\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]=&\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\delta\left(x^0-y^0\right)\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]\right]-\delta\left(x^0-y^0\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]\\
=&\frac{\partial}{\partial x_0}\left[0\right]-\delta\left(x^0-y^0\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]\\
=&-\delta\left(x^0-y^0\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]
\end{aligned}\tag{5.24}$$

其中第一项因为等时所以为 0。

$$\begin{aligned}
&\theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D\left(x-y\right)+\theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D\left(y-x\right)\\
=&\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)+\delta\left(x^0-y^0\right)\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\phi\left(x\right),\phi\left(y\right)\right]-2\delta\left(x^0-y^0\right)\left(-i\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\right)\\
=&\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)+i\delta^4\left(x-y\right)
\end{aligned}\tag{5.25}$$

最后得到

$\theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D\left(x-y\right)+\theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D\left(y-x\right)=\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)+i\delta^4\left(x-y\right)$

代入前面的传播子表达式

$\theta\left(x^0-y^0\right)\partial_0^2 D\left(x-y\right)+\theta\left(y^0-x^0\right)\partial_0^2 D\left(y-x\right)=\partial_0^2 D_F\left(y-x\right)+i\delta^4\left(x-y\right)$

为了得到正确的量子化，我们从最初的 Hamiltonian 和运动方程出发

考虑运动方程$\partial_i F^{i0}+m^2A^0=0$即$\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}=-m^2A^0$

说明A^0不是独立的正则广义坐标

则$Hamiliatian$可写为$H=\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2+\frac{1}{2m^2}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}^2\right)+\frac{1}{2m^2}\boldsymbol{A}^2$

利用海森堡运动方程$i\dot{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{x}\right)=\left[\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}\right),\int\mathrm{d}^3yH\right]=-i\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}\right)+i\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}\right)$

，结果的物理意义为$\boldsymbol{\pi}=-\nabla A^0-\dot{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}$

再考察共轭动量对时间求导

$i\dot{\boldsymbol{\pi}}\left(\boldsymbol{x}\right)=\left[\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}\right),\int\mathrm{d}^3yH\right]=im^2\boldsymbol{A}-i\nabla^2\boldsymbol{A}+i\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)$

根据 $\partial_\mu\partial^\mu A^\mu-\partial^\mu\left(\partial\cdot A\right)+m^2A=\partial_\mu\partial^\mu A^\mu-\partial^\mu\left(\dot{A}^0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)+m^2A^0=0$

令$\mu=0$,得到$\nabla^2A^0+\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}}-m^2A^0=0$

对 $\boldsymbol{\pi}$ 再求一次散度

$\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}=-\nabla^2A^0-\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}}$,定义$\hat{A}^0=-\frac{1}{m^2}\left(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}\right)$则$-m^2\hat{A}^0=-\nabla^2A^0-\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}}$

这个结论和通过运动方程得到的 $\nabla^2\ A^0\ +\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}}-m^2A^0=0$ 是自洽的。

$\mu\ =\ 1$，2，3，$\partial_\mu\partial^\mu\ \boldsymbol{A}\ +\ \nabla\dot{A}^0+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\ +\ m^2\boldsymbol{A}\ =\ 0$

又$\dot{\boldsymbol{\pi}}\left(\boldsymbol{x}\right)\ =\ -\nabla\dot{A}^0\ -\ddot{\boldsymbol{A}}\ =\ m^2\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}\ +\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)$, 即符合上式。

即 $m^2\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}\ +\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)+\nabla\dot{A}^0+\ddot{\boldsymbol{A}}=\partial_\mu\partial^\mu\ \boldsymbol{A}\ +\ \nabla\dot{A}^0+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)\ +\ m^2\boldsymbol{A}\ =\ 0$

然后考虑费曼传播子中出现的非协变项的影响

对于有外源的情况，$\mathcal{L}\ =-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ +\frac{1}{2}\ m^2{A_\mu}^2-j^\mu A_\mu$

$E-L$方程为$\partial_\mu F^{\mu\nu}+m^2A^\nu-j^\nu=0$

$\nu=0\rightarrow\partial_\mu F^{\mu0}+m^2A^0-j^0=0$

$\pi^0=0,\pi^i=F^{i0}=E^i$

则$\partial_\mu F^{\mu0}+m^2A^0-j^0=\partial_iF^{i0}+m^2A^0-j^0=0$

$\partial_iF^{i0}+m^2A^0-j^0=\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+m^2A^0-j^0$

且$A^0=\frac{1}{m^2}\ \left(-\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+j^0\ \right)$

$\boldsymbol{\pi}=-\nabla A^0\ -\dot{\boldsymbol{A}}\ =-\dot{\boldsymbol{A}}+\frac{1}{m^2}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-j^0\ \right)$

$\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{m^2}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-j^0\ \right)-\boldsymbol{\pi}$

则哈密顿量密度为

$H=\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathcal{L}=-\boldsymbol{\pi}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}-\mathcal{L}=H_0+V$

$H_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2+\frac{1}{2m^2}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{1}{2}m^2\boldsymbol{A}^2$

$V=-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}-\frac{1}{m^2}j^0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+\frac{1}{2m^2}j_0^2$

V中就出现了非协变的项，例如 j_0^2

5.4 量子化 Maxwell 场

Proca 场拉式密度 $\mathcal{L}\ =\ -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu F^{\nu\mu}\ +\frac{1}{2}\ m^2{A_\mu}^2=\ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ +\frac{1}{2}\ m^2{A_\mu}^2$ 在质量趋于 0 时就是 Maxwell 场的拉式量，在经典物理中这个变换是连续的，但在量子角度并不是。

Proca 理论有三个自由度，对应于有质量自旋为 1 有三种极化的粒子，Maxwell 理论对应的则是只有两种极化的光子，差了一个纵向极化的自由度，极化的连续性被破坏了 (必考)。

且在极化求和公式中 $\sum_{\lambda\ =1}^{3}\epsilon_\mu^\lambda\left(p\right)\epsilon_\nu^{\lambda*}\left(p\right)\ =\ -g_{\mu\nu}\ +\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}$，$m$ 趋于 0 时是发散的，纵向极化自由度去哪了？

为了解释上诉问题，引入 *Stubelberg trick*

还是从*Proca*场出发，且考虑外源

$\mathcal{L}\ =-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ +\frac{1}{2}\ m^2{A_\mu}^2-j^\mu A_\mu$

令$A_\mu\ \rightarrow A_\mu\ +\ \partial_\mu\phi$，$\phi$为一个实标量场

$\mathcal{L}\ =-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ +\frac{1}{2}\ m^2\left(A_\mu\ +\ \partial_\mu\phi\right)^2-j^\mu\left(A_\mu\ +\ \partial_\mu\phi\right)$

这样我们又拥有了$U\left(1\right)$规范不变性，只要令$A_\mu\ \rightarrow A_\mu\ +\ \partial_\mu\alpha\left(x\right),\phi\rightarrow\phi-\alpha$，场依旧不变[28]

令$\phi\rightarrow\frac{\phi}{m}$

[28]这也说明规范不变性并不对应真实的物理，我们无法通过这样的操作得到物理量比如电荷

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^2{}_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + mA_\mu\partial_\mu\phi - j^\mu A_\mu + \frac{1}{m}\phi\partial_\mu j^\mu$

最后一项用了分部积分

如果$\partial_\mu j^\mu = 0$为守恒流的话，在m趋于0的极限下，就不会出现发散，拉式量也相应地变成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - j^\mu A_\mu \tag{5.26}$$

这样场就 i 有三个自由度，其中ϕ的前身就是纵向极化的$spin = 1$的粒子

若 $\partial_\mu j^\mu = 0$, 相应的 $p^\mu j_\mu = 0$，这正是 $\frac{p^\mu p^\nu}{m^2}$ 作用于平面波函数的结果，在进行散射截面相关计算时这部分的值为 0，所以极化求和的零质量极限不会带来物理上的影响。

考虑$Maxwell$场，$\mathcal{L}_{\max} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$

由于$\partial_\nu\partial_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0$，对称张量和反对称张量求和，强制要求$j^\nu$为守恒流

规范不变性也要求j^ν为守恒流

做规范变换$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\alpha$

则原式多出一项$-j_\mu\partial^\mu\alpha = -\partial^\mu(j_\mu\alpha) + \alpha\partial^\mu j_\mu = \alpha\partial^\mu j_\mu = 0$

$Maxwell$量子化的困难 (本质上是因为有冗余的自由度)

1：求传播子困难，$\mathcal{L}_{\max} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}A_\mu(x)(\partial_\mu\partial^\mu g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x)$

定义$(\partial_\mu\partial^\mu g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)D_F^{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\mu^\rho\delta^4(x-y)$，变换到动量空间

$(-k^2g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)D_F^{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\mu^\rho$,

但是$\det(-k^2g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) = 0$，不存在逆矩阵，求不出$D_F^{\nu\rho}(x-y)$

2:路径积分的困难 $\int[DA]\,e^{i\int d^4x A_\mu(x)(\partial_\mu\partial^\mu g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x)}$ 在纯规范下即 $A_\mu(x) = \partial_\mu\alpha(x) \to F_{\mu\nu} = 0, S = 0$ 在转移到欧式空间时，这个指数因子不衰减，有无穷多个 1，导致路径积分没有良好定义。

从物理上理解：场算符在 Lorentz 变换下是按照 Lorentz 群的某个表示来变化，而粒子是按照小群来变换，0 质量的光子的小群诱导变换会要求规范不变性。实际上，要保证既有质量为 0 的粒子，又保证 Lorentz 不变性，必须有规范不变性。

5.5 单光子态的小群诱导表示

考虑单粒子态$P^\mu|\boldsymbol{p},\sigma\rangle = p^\mu|\boldsymbol{p},\sigma\rangle$

考察一个$Lorentz$变换

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'}C_{\sigma'\sigma}|\Lambda p,\sigma\rangle$

定义标准动量k^μ，且$p^\mu = L^\mu_\nu k^\nu$

$|p,\sigma\rangle = U(L(p))|k,\sigma\rangle$

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = U(\Lambda)U(L(p))|k,\sigma\rangle = U(\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p))U(\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle$

$U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))$ 相当于先将k作用到Λp，再作用回去到k，相当于k没有变化，还是标准动量

定义$W^\mu_\nu k^\nu$，满足$U(W)|k,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'}D_{\sigma\sigma'}(W)|k,\sigma'\rangle$

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(W)|k,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(W)U(L(\Lambda p))|k,\sigma'\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(W)|\Lambda p,\sigma'\rangle$,这样就得到了$C_{\sigma'\sigma}$的

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))|\Lambda p,\sigma'\rangle$

小群的定义:$W^{\mu}_{\nu}k^{\nu} = k^{\mu}$

对于有质量的粒子，其标准动量 $k = (m\ 0,0,0)$，小群就是 SO(3) 群。

对于无质量的粒子其标准动量为 $k^{\mu} = (K,0,0,K), k^2 = 0$

其对应的小群 (在对应的 Lorentz 变换下无质量粒子动量不变) 又是什么呢？

如果无质量粒子的运动方向为 z 方向，一个直观的小群是绕着 z 轴转 θ 角，但这并没有包括所有的小群。

为此引入 $t^{\mu} = (1,0,0,0)$

则 $(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} = 1$

$(Wt)^{\mu}k_{\mu} = (Wt)^{\mu}(Wk)_{\mu} = t\cdot k = K$

则满足 $(Wt)^{\mu} = (1+\xi,\alpha,\beta,\xi)$

$(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} = 1 \to \xi = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

这也是一种小群表示，具体形式为

$$S(\alpha,\beta)^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1+\xi & \alpha & \beta & -\xi \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \xi & \alpha & \beta & 1-\xi \end{bmatrix}$$

这样我们就得到了两个令 K 保持不变的操作，分别是 $R(\theta)$ 和 $S(\alpha,\beta)$

则最普适化的小群为 $W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)R(\theta)$

满足

$S(\alpha',\beta')S(\alpha,\beta) = S(\alpha'+\alpha,\beta'+\beta)$

这相当于二维平面上两个矢量相加，和转动结合在一起

$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha cos\theta + \beta sin\theta, -\alpha sin\theta + \beta cos\theta)$

相当于一个二维平面上的矢量相加和转动，也会是二维的欧几里得群 $ISO(2)$。

我们自然会感兴趣于二维欧几里得群的李代数。

对 $U(W(\alpha,\beta,\theta))$ 在无穷小变换下展开

$U(W(\alpha,\beta,\theta)) = 1 + i\alpha\hat{A} + i\beta\hat{B} + i\theta\hat{J}_3$

其中 $\hat{A} = J_2 + k_1, \hat{B} = -J_1 + k_2$，其中 k 是指 boost 生成元。

且 $[J_3,A] = iB, [J_3,B] = -iA, [A,B] = 0$，则有共同本征态 $|k,a,b\rangle$。

$A|k,a,b\rangle = a|k,a,b\rangle$

$B|k,a,b\rangle = b|k,a,b\rangle$

定义 $|k^{\theta},a,b\rangle = U^{-1}(R(\theta))|k,a,b\rangle$

$A|k^{\theta},a,b\rangle = (acos\theta - bsin\theta)|k^{\theta},a,b\rangle$

$B|k^{\theta},a,b\rangle = (asin\theta + bcos\theta)|k^{\theta},a,b\rangle$

这说明给定一个态 k，有 $0-2\pi$ 无穷多个简并的单光子态，但实验中并没有发现光子具有 θ 的简并单粒子态，所以 $a=b=0$

则 $A|k,\sigma\rangle = B|k,\sigma\rangle = 0$

对于生成元 J_3 要求 $J_3|k,\sigma\rangle = \sigma|k,\sigma\rangle$，由于 k 沿着 z 轴，σ 就叫光子的螺旋度。

则 $U(W)|k,\sigma\rangle = e^{i\alpha A+i\beta B}e^{iJ_3\theta}|k,\sigma\rangle = e^{i\sigma\theta}|k,\sigma\rangle$

说明螺旋度在洛伦兹变换下不变。

与 $U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))|p,\sigma'\rangle$ 对照，由于螺旋度不变。

则 $D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p)) = e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma'}\delta_{\sigma\sigma'}$

所以可以去掉求和号

$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = e^{i\sigma\theta(\Lambda,p)}|\Lambda p,\sigma'\rangle$

有了前面的铺垫，接下来考察 Maxwell 场算符

我们知道 Maxwell 场对应的粒子是光子,所以在量子化过程中需要引入极化矢量,$A^\nu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}\sum_{\sigma=\pm1}(a^\sigma_{\boldsymbol{p}}\epsilon^{(\sigma}$ $h.c)$

由于说量子算符，根据前面的结论有 $U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A^\mu(\Lambda x)$

而对于产生算符

利用 $|p,\sigma\rangle = \sqrt{2|\boldsymbol{p}|}a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}U^{-1}(\Lambda)|0\rangle$，由于真空不变，所以插入 $U^{-1}(\Lambda)$

则 $\sqrt{2p^0}U(\Lambda)a^{\sigma\dagger}_{\boldsymbol{p}}U^{-1}(\Lambda) = e^{i\sigma\theta(\Lambda,p)}\sqrt{2(\Lambda p)^0}a^{\sigma\dagger}_{\Lambda p}$

为了使积分测度 Lorentz 不变，提出一个 $\sqrt{|\boldsymbol{p}|},(p^0=|\boldsymbol{p}|)$

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) &= U(\Lambda)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}\sum_{\sigma=\pm1}(\sqrt{2p^0}a^\sigma_{\boldsymbol{p}}\epsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-ip\cdot x}+h.c)U^{-1}(\Lambda)\\
&= \int[dp]\sum(e^{-i\sigma\theta(\Lambda,p)}\sqrt{2(\Lambda p)^0}a^\sigma_{\Lambda p}\epsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-ip\cdot x}+h.c)
\end{aligned}
$$

此外还可以根据 $U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A^\mu(\Lambda x)$ 写出

$U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\int[dp]\sum(\sqrt{2p^0}a^\sigma_p\epsilon^{(\sigma)\mu}(p)e^{-ip\cdot\Lambda x}+h.c)$

做积分变换 $p\to\Lambda p$

$U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\int[dp]\sum(\sqrt{2(\Lambda p)^0}a^\sigma_{\Lambda p}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p)e^{-i\Lambda p\cdot\Lambda x}+h.c)$

且 $\Lambda p\cdot\Lambda x = p\cdot x$

这两个式子要相等需要对 ϵ 有一个很强的限制。

即 $e^{-i\sigma\theta(\Lambda,p)}\epsilon^{(\sigma)\nu}(p) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\epsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p)$

将式子两边交换一下，最后有

$e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p) = (\Lambda)^\mu_\nu\epsilon^{(\sigma)\nu}(p)$

令 p 为标准动量，$p=k$，则 $L(p)=1$，令 Lorentz 变换为 $\Lambda = L(q)$(将动量 p 变为 q)，又 $W(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$

则 $W(\Lambda,p) = L^{-1}(q)L(q)\cdot 1 = 1$

即 $\alpha=\beta=\theta=0$

代入 $e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p)=\Lambda^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(p)$

得到 $\epsilon^{(\sigma)\mu}(q)=\Lambda(q)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(k)$，相当于是从一个标准动量的极化矢量转换为了某个动量的极化矢量。

令 $U(\Lambda)=R(\theta),S(\alpha,\beta)$，动量为标准动量

则有

$e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{k})=R(\theta)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(\boldsymbol{k})$

$\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{k})=S(\alpha,\beta)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(\boldsymbol{k})$

加上 $\epsilon^{(\sigma)\mu}(q)=\Lambda(q)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(k)$ 一共三个条件。

其中 $e^{i\theta(\Lambda,p)\sigma}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{k})=R(\theta)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\nu}(\boldsymbol{k})$ 关系很好实现

即 $R(\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\&\cos\theta&\sin\theta&\\&-\sin\theta&\cos\theta&\\&&&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}=e^{\pm i\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}$

前面定义的极化矢量就满足以上关系。

但是无法满足第三个条件 $S(\alpha,\beta)$ 对应的限制。

即 $S(\alpha,\beta)\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\pm i\beta\\1\\i\\\alpha\pm i\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}+(\alpha\pm i\beta)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

这三个条件不能同时满足。

综上有

$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu}\epsilon^{(\pm1)\nu}(\boldsymbol{k})=S(\alpha,\beta)^{\mu}_{\lambda}R(\theta)^{\lambda}_{\nu}\ \epsilon^{(\pm1)\nu}(\boldsymbol{k})=e^{\pm i\theta}\left[\epsilon^{(\pm1)\mu}(\boldsymbol{k})+\frac{(\alpha\pm i\beta)}{\sqrt{2}|\boldsymbol{k}|^2}k^{\mu}\right]$

后一项为额外项

额外项非常类似于动量空间中的矢量场的规范变换，即

$A^{\mu}\to A^{\mu}+\partial^{\mu}\alpha$

$\epsilon^{\mu}\to\epsilon^{\mu}+\alpha k^{\mu}$

但是还是闭着眼睛往下走，强行回到刚才的展开式

$\hat{A}^{\mu}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}\sum_{\sigma=\pm1}\left(\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{p})a^{\sigma}_{p}e^{-ip\cdot x}+h.c.\right)$

显然满足 K-G 方程，即 $\partial_{\mu}\partial^{\mu}\hat{A}^{\mu}=0$，因为 $p^2=0$

接下来考察任意动量方向的极化矢量

$\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{p})=L(p)^{\mu}_{\nu}\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{k})$

其中 $L(p)^{\mu}_{\nu}=R\left(\hat{P}\right)B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{K}\right)$，$B$指的是$z$轴上的*boost*

而 $\epsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{bmatrix}$，在沿着 z 轴的 boost 下不变化 (沿着 z 轴上 boost 只改变第一项时间

和最后一项 z 方向)，而 R 只是空间转动，只改变空间三项，所以一直有 $\epsilon^{(\sigma)0}(\boldsymbol{p}) = 0$

由于 $\epsilon^{(\sigma)0}(\boldsymbol{p}) = 0$，用它量子化的电磁场 $\hat{A}^0(x) = 0$，说明 $\hat{A}^\mu$ 不是一个真正的四矢量。

由于 $\epsilon^{(\sigma)\mu}$ 只有空间分量不为 0. 所以可以写成 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p}) = 0$，也就是经典物理中极化平面和动量方向是正交的。

我们来考察一下正确的电磁场 Lorentz 变换的形式

根据四矢量的变换形式 $U(\Lambda)\hat{A}^\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu A^\mu(\Lambda x)$

但是我们验证过这个等式不可能满足。要多一项额外项。

$U(\Lambda)\hat{A}^\mu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu A^\mu(\Lambda x) + \partial^\mu\Omega(x,\Lambda)$

当你试图把只有两个极化的极化矢量对应的物理光子嵌入到量子电磁场的平面波表示时，$\hat{A}^\mu(x)$ 不可能是一个 Lorentz 四矢量，但这并不会导致严重的后果。

首先，我们需要保证量子化的拉式量在 Lorentz 变换下依旧不变，即

$U(\Lambda)\hat{\mathcal{L}}(x)(x)U^{-1}(\Lambda) = \hat{\mathcal{L}}(\Lambda x)$

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$

由于 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 的反对称结构，额外项消去了。

而由于 $\partial_\mu j^\mu = 0$，$j^\mu\partial_\mu\Omega(x,\Lambda) = surface\,term + \partial_\mu j^\mu\Omega(x,\Lambda) = 0$

所以只要 j^μ 为守恒流，即便有额外项，拉式量依旧在 Lorentz 变换下保持不变。

由于光是横波，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{p}) = 0 \to \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$

我们选择库伦规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ 来量子化 Maxwell 场

如果一个场位形不满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$，总可以作规范变换 $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\alpha$，且 α 满足 $\nabla^2\alpha = -\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，则新定义的场满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A'} = 0$

根据 Maxwell 方程 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

令 $\nu = 0$

则 $\partial_i F^{i0} = j^0 \to \nabla\cdot\boldsymbol{E} = j^0 = \nabla\cdot\left(-\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A^0\right)$

利用库伦规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ 和泊松方程的解。

则，利用了，说明 $A^0(t,\boldsymbol{x})$ 也不是独立的正则变量，不需要考虑量子化，依赖于物质场的分布。

先考虑第一种情况：$j^\mu = 0, A^0 = 0$

$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = F^{\mu 0}$

则 $\pi^0 = 0, \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla A = -\dot{\boldsymbol{A}}$

则猜测一个正则量子化条件

$[A^\mu(t,\boldsymbol{x}), \pi^\nu(t,\boldsymbol{x})] = -i\, g^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

$[A^i(t,\boldsymbol{x}), \pi^j(t,\boldsymbol{x})] = -i\, \delta^{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

但这个条件不可能正确，

对两边求导 ∂_i，得到 $[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}), \pi^j(t,\boldsymbol{x})] = -i\, \delta^{ij}\partial_i\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 前一项根据库伦规范为 0，但后一项却不为 0，出现了矛盾。

所以我们要定义 $\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，满足 $\partial_i\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 0$

相应的正确量子化条件为

$[A^i(t,\boldsymbol{x}),\pi^j(t,\boldsymbol{x})] = -i\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

新定义的 $\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 的具体形式为 $\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$

对这个式子的理解应当建立于傅里叶变换之上

$\left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} = \left(\delta^{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} = \delta^{ij}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \frac{\partial^2}{\partial_i\partial_j}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$

则 $\partial_i\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = ik_i\left(\delta^{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} = 0$，因为 $k_i\left(\delta^{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) = 0$

矢势的量子化为 $\boldsymbol{A}(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}\sum_{\sigma=\pm1}\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\sigma)}(k)\,a_k^\sigma e^{-ik\cdot x} + h.c.\right)$

电场强度为

这里的产生湮灭算符满足的关系还是正常，$\left[a_{\boldsymbol{k}}^\sigma, a_{\bar{\boldsymbol{k}}}^{\bar\sigma\dagger}\right] = (2\pi)^3\delta^{\sigma\bar\sigma}\delta^3\left(\boldsymbol{k}-\bar{\boldsymbol{k}}\right)$

然后验证

$$
\begin{aligned}
&\left[A^i(t,\boldsymbol{x}),\pi^j(t,\boldsymbol{x})\right]\\
&= \int\frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6\sqrt{2|\boldsymbol{k}|2|\boldsymbol{k}|}}(i|\boldsymbol{k}|)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{y}}\\
&\sum_{\sigma,\sigma}\left\{\left[a_k^\sigma, -a_{-k'}^{\sigma'\,\dagger}\right]\epsilon^{(\sigma)^i}(k)\,\epsilon^{\left(\sigma'\right)^{*j}}(-k') + \left[a_{-k}^{\sigma\,\dagger}, a_{k'}^{\sigma'}\right]\epsilon^{(\sigma)^{*i}}(-k)\,\epsilon^{\left(\sigma'\right)^j}(k')\right\}\\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2|\boldsymbol{k}|}(i|\boldsymbol{k}|)(-2)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\sum_{\sigma=\pm1}(\boldsymbol{\epsilon}^{(\sigma)}(k)\boldsymbol{\epsilon}^{*(\sigma)}(k))\\
&= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}i(-2)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}(\delta^{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2})\\
&= -i\delta_{\perp ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

正是我们之前设定的新的对易关系。

可以求得 $H = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\sigma=\pm1}|\boldsymbol{k}|\left(a_k^{\sigma\dagger}a_k^\sigma\right) + \infty$

最后是因果性

$$
\begin{aligned}
\langle0|A^i(x)\,A^j(y)\,|0\rangle &= \langle0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2|\boldsymbol{k}|}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(\delta^{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)|0\rangle\\
&= \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\langle0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2|\boldsymbol{k}|}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}|0\rangle\\
&= \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)D(x-y)
\end{aligned}
$$

则 $[A^i(x),A^j(y)] = \left(\delta^{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)(D(x-y)-D(y-x))$

接下来讨论费曼传播子

$$
\begin{aligned}
D_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|TA^{\mu}(x)A^{\nu}(y)|0\rangle \\
&= D_F^{ij}(x-y) \\
&= \theta\left(x^0-y^0\right)\left(\delta^{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)D(x-y)+\theta\left(y^0-x^0\right)\left(\delta^{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)D(y-x) \\
&= \left(\delta^{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\
&= \left(\delta^{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i}{k^2+i\epsilon} \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i\left(\delta^{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)}{k^2+i\epsilon}
\end{aligned}
$$

很明显不是 Lorentz 不变的，只有空间分量。

考虑加上一个外源 $\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^2{}_{\mu\nu}-j^{\mu}A_{\mu}$，其中 $j^{\mu}=(\rho,\boldsymbol{j})$

则 $A^0(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{j^0(t,\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$

根据电场强度的定义 $\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{A}}-\nabla A^0$，定义 $-\dot{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}_{\perp}, -\nabla A^0=\boldsymbol{E}_{||}$

则 $\mathcal{L}_{\max}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2\right)=\frac{1}{2}\left({\boldsymbol{E}_{\perp}}^2+{\boldsymbol{E}_{||}}^2-\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{E}_{\perp}\cdot\boldsymbol{E}_{||}\right)$

$\boldsymbol{E}_{\perp}\cdot\boldsymbol{E}_{||}=-\nabla A^0\cdot\boldsymbol{E}_{\perp}=\nabla\left(A^0\cdot\boldsymbol{E}_{\perp}\right)+A^0\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\perp}$，第一项为边界项为 0，第二项根据库伦规范为 0。

则 $\boldsymbol{\pi}_{\perp}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{E}_{\perp}$

相应可以得到哈密顿量为

$H=\boldsymbol{\pi}_{\perp\mu}\dot{A}^{\mu}-\mathcal{L}=-\boldsymbol{\pi}_{\perp}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}-\mathcal{L}=\boldsymbol{E}_{\perp}{}^2-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_{\perp}{}^2+\boldsymbol{E}_{||}{}^2-\boldsymbol{B}^2\right)+j^0A_0-j^iA_i=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_{\perp}{}^2-\boldsymbol{E}_{||}{}^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right)+j^0A_0-j^iA_i$

定义 $H=H_0+V$，其中

$H_0=\int d^3x\,\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_{\perp}{}^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right)$

$V=\int d^3x\,-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{||}{}^2+j^0A_0-j^iA_i$

$-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{||}{}^2=-\frac{1}{2}(\nabla A^0)(\nabla A^0)=-\int A^0\nabla A^0+\frac{1}{2}A^0\nabla^2A^0=-\frac{1}{2}j^0A_0$

$\frac{1}{2}j^0(x)A_0(x)$ 代入 $A_0(x)$ 的解，即 $A^0(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{j^0(t,\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$，则有 $\frac{1}{2}j^0(x)A_0(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}\int d^3yd^3xj^0(x)\frac{j^0(t,\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$(?a

上式本质上就是库伦势能，且是瞬时的，则有定义 $V_{coul}=\frac{1}{2}j^0(x)A_0(x)$。

则 $V=\int d^3x\,\frac{1}{2}j^0A_0-j^iA_i=\int d^3x\,j^{\mu}A_{\mu}+V_{coul}$ 第一项源于相互作用绘景下的形式 ($j^0=0$)，后一项为库伦能, 这两项会抵消 (证明以后补充)

在相互作用绘景下，$V_I(t)=e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}$，在此绘景下的电磁场矢量为 $A_I^{\mu}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\sum_{\lambda=\pm1}(\epsilon^{(\lambda)\mu}(k)a_k^{\lambda}e^{-ikx}+h.c)$

在前面的海森堡绘景下，A^0 不为 0，但在相互作用绘景下，极化矢量 ϵ_I^0 为 0，相应地 A_I^0 也为 0。

假设我们要计算 QED 中的电子电子散射的费曼图，

则要计算 $\hat{S}$ 算符。

$$\begin{aligned}\hat{S} &= T\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty}dtV_I(t)] \\ &= 1-i\int_{-\infty}^{\infty}dtV_{coul}+\frac{(-i)^2}{2!}\int\int dx^4dy^4T(j_\mu(x)A^\mu(x)j_\mu(y)A^\nu(y)) \\ &= 1-\frac{1}{2}i\int d^4xd^4y\delta(x^0-y^0)\frac{j_0(x)j_0(y)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{1}{2}\int\int dx^4dy^4D_F^{\mu\nu}(x-y)N(j_\mu(x)j_\nu(y))\end{aligned}$$

其中第二步相当于是对 $V_I=\int d^3x\ j^\mu A_\mu+V_{coul}$ 的两部分分别作泰勒展开，各自展开到 1 阶和 2 阶 (由于考虑两电子散射，第二项展开到二阶)，第三步第一部分为了多一个 dt，多引入了一个 $\delta(x^0-y^0)$，第二部分则用 wick 定理，$A^\mu(x),A^\nu(y)$ 缩并为一个传播子，作为常数可以提出来，后面的 $N(j_\mu(x)j_\nu(y))$ 则表示正则排序。

其中 $D_F^{\mu\nu}(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i\left(\delta^{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)}{k^2+i\epsilon}$

接下来要将 $\delta^{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}$ 改写一下，会出现和第一部分库伦能的 1 阶展开非常类似的项。

为此我们需要一点协变量子化的知识，在协变量子化下，会有两个非物理的光子，有正交的四个极化矢量，即。

$A_\mu(x)=\int d^3k\sum_{\lambda=0}^{3}(\epsilon^{(\lambda)\mu}(k)a_k^\lambda e^{-ikx}+h.c)$

除了 $\epsilon(\lambda=1),\epsilon(\lambda=2)$ 两种物理极化，还有 $\epsilon^{\lambda=0}=n^\mu=(1,0,0,0)$，称为时性极化光子 (实际上并不存在，且会导致 $\langle|\rangle<0$)。

还有一个 $\epsilon_{\boldsymbol{k}}^{\lambda=3}=(0,\boldsymbol{k})=\frac{k^\mu-(k\cdot n)n^\mu}{k\cdot n}(?)=\frac{k^\mu-(k\cdot n)n^\mu}{\sqrt{(k\cdot n)^2-k^2}}$

我们需要引入 $Gupta-Blenler$ 方案，即将物理态的光子 (模都是正定的) 进行拓展，在 Hilbert 空间中可以允许非物理的态 $|\psi\rangle$，但需要满足条件 $\partial_\mu A^{\mu+}|\psi\rangle=0\to a_k^0-a_k^3|\psi\rangle=0$($A^{\mu+}$ 表示正频部分，其中 a_k^0 表示 $\epsilon^{\lambda=0}$ 对应的湮灭算符)，由于 a_k^0,a_k^3 相互抵消，保证了 $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=\pm1}|\boldsymbol{k}|a_k^{\lambda\dagger}a_k$，结果只有物理的光子。

由于极化矢量的正交和完备性关系

$$\epsilon^\lambda(k)\epsilon_k^{\lambda'}=g^{\lambda\lambda'} \tag{5.27}$$

$$\sum_{\lambda=0}(-g_{\lambda\lambda})\epsilon_\mu^\lambda(k)\epsilon_\nu^{\lambda*}(k)=-g_{\mu\nu} \tag{5.28}$$

则有

$-g_{\mu\nu}=\sum_{\lambda=\pm1}\epsilon_\mu^\lambda(k)\epsilon_\nu^{\lambda*}(k)+\frac{(k_\mu-(k\cdot n)n_\mu)(k_\nu-(k\cdot n)n_\nu)}{(k\cdot n)^2-k^2}-n_\mu n_\nu$

而 $\sum_{\lambda=\pm1}\epsilon_\mu^{\lambda i}(k)\epsilon_\nu^{\lambda*j}(k)=\delta^{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}$，为了简写可以将 $\delta^{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}$ 定义为 $P_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})$。

则

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) &= -g_{\mu\nu} - \frac{(k_\mu - (k\cdot n)n_\mu)(k_\nu - (k\cdot n)n_\nu)}{(k\cdot n)^2 - k^2} + n_\mu n_\nu \\
&= -g_{\mu\nu} - \frac{(k\cdot n)^2 n^\mu n^\nu}{(k\cdot n)^2 - k^2} + n_\mu n_\nu + term(\propto k_\mu or k_\nu) \\
&= -g_{\mu\nu} - \frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(k\cdot n)^2 - k^2} + \frac{k_\mu k_\nu - k\cdot n(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(k\cdot n)^2 - k^2}
\end{aligned}
$$

代入前面的费曼传播子的表达式，得到

$D_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2+i\epsilon}[-g_{\mu\nu} - \frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(k\cdot n)^2-k^2} + \frac{k_\mu k_\nu - k\cdot n(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(k\cdot n)^2-k^2}]$

其中 $\frac{i}{k^2+i\epsilon}\frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(k\cdot n)^2-k^2} = \frac{i n^\mu n^\nu}{(k\cdot n)^2-k^2} = \frac{i n^\mu n^\nu}{|\boldsymbol{k}|^2}$

定义有效费曼传播子为 $D_{F\mu\nu}(x-y)^{eff} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i(-g_{\mu\nu})}{k^2+i\epsilon}$

以及

$$
\begin{aligned}
cD_{F\mu\nu}(x-y) &= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{n^\mu n^\nu}{|\boldsymbol{k}|^2} \\
&= -i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} \int \frac{dk}{(2\pi)} e^{-ik^0(x^0-y^0)} \\
&= -i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta(x^0-y^0) \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}
\end{aligned}
$$

和 $\frac{1}{2}i\int d^4x d^4y \delta(x^0-y^0)\frac{j_0(x)j_0(y)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ 非常类似，c 表示的意思就是库伦能。

将 $cD_{F\mu\nu}(x-y) = -i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta(x^0-y^0)\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ 代入 $\hat{S}$

$\hat{S} = 1 - \frac{1}{2}i\int d^4x d^4y \delta(x^0-y^0)\frac{j_0(x)j_0(y)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{1}{2}\int\int dx^4 dy^4(-i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta(x^0-y^0)\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|})N(j_\mu(x)j_\nu(y)) - \frac{1}{2}\int\int dx^4 dy^4(D_{F\mu\nu}(x-y)^{eff})N(j_\mu(x)j_\nu(y))$

而那些正比于 k_μ 的项 $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2+i\epsilon} \frac{k_\mu k_\nu - k\cdot n(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(k\cdot n)^2-k^2}$，都可以认为是 $\partial_\mu(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2+i\epsilon})$ 的不同形式而 $\partial_\mu(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2+i\epsilon})j^\mu = surface\, term - \partial_\mu j^\mu(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2+i\epsilon}) = 0$

所以这些项目都不贡献。

最后费曼传播子的一部分和前面的库伦能部分完美抵消，剩下的一个协变的有效费曼传播子。

5.6 协变量子化

先考察 $Maxwell$ 拉式量 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ 由于不含有 $\dot{A}_0$，这种形式无法得到传播子 (?)，为此修改拉式量。

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \tag{5.29}
$$

相应的 $E-L$ 方程为

$$
\partial_\mu\partial^\mu A_\mu - (1-\frac{1}{\xi})\partial_\mu(\partial\cdot A) \tag{5.30}
$$

再对拉式量后半部分作一个分步积分，$\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial_\mu (A^\mu \partial_\nu A^\nu) + A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu$
拉式量变为 $\mathcal{L}_{\max} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} A_\mu (x) \left(\partial_\mu \partial^\mu \ g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu (x)$
相应地传播子为 $\left(\partial_\mu \partial^\mu \ g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu \right) \hat{D}_F^{\nu\rho} (x - y) = i \delta_\mu^\rho \delta^4 (x - y)$
变换到动量空间为 $\left(-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) k_\mu k_\nu \right) \hat{D}_F^{\nu\rho} (x - y) = i \delta_\mu^\rho$
只要 ξ 不是无穷大，上面的传播子的矩阵本征值不是 0，可以求逆。
结果为 $\hat{D}_F^{\mu\nu} (x - y) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} (g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2})$
也称为是 R_ξ 规范下的光子传播子，$\xi = 1$ 为费曼规范，$\xi = 0$ 为 landau 规范。
令 $\xi = 1$，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2 = -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \tag{5.31}$$

则

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu \tag{5.32}$$

能量密度为 $\epsilon = \frac{1}{2} [\dot{\boldsymbol{A}}^2 + (\partial_i \boldsymbol{A})^2] - \frac{1}{2} [\dot{A}_0^2 + (\nabla A_0)^2]$
现在 $\pi^0 \neq 0$，说明 A_0 是正则场变量。
施加等时量子化，

$$[A^\mu (t, \boldsymbol{x}), \pi^\nu (t, \boldsymbol{x})] = -i g^{\mu\nu} \delta^3 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5.33}$$

$$[A^\mu (t, \boldsymbol{x}), \dot{A}^\nu (t, \boldsymbol{x})] = i g^{\mu\nu} \delta^3 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5.34}$$

还是对 $A_\mu(x)$ 做一个傅里叶展开，

$$A_\mu (x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} \sum_{\lambda=0}^{3} (a_{\boldsymbol{k}}^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} (k) e^{-ik \cdot x} + h.c.) \tag{5.35}$$

其中 $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}$ 为物理光子，而 $\epsilon^{(0)}, \epsilon^{(3)}$ 分别为时性光子和纵向光子。
为了满足前面的量子化条件，产生湮灭算符需要满足
$[a_{\boldsymbol{k}}^\lambda, a_{\boldsymbol{k}'}^{\lambda' \dagger}] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$
哈密顿量为 $H = \int d^3 x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=0}^{3} |\boldsymbol{k}| (-g_{\lambda\lambda}) a_k^{\lambda\dagger} a_k^\lambda + \infty(?)$
至于是否会有负能级的问题，我们可以定义真空和单光子态 $a_k^\lambda |0\rangle = 0$，$|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = \sqrt{2|\boldsymbol{k}|} a_k^{\lambda\dagger} |0\rangle$
而 $H|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}, \lambda\rangle$
问题却出在单光子态的内积
定义一个波包

$$|1, \lambda\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(k) a_k^\lambda |0\rangle \tag{5.36}$$

求内积

$$\begin{aligned}\langle 1,\lambda|1,\lambda\rangle &= \int\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6} f(k)f(k')^*\langle 0|a^{\lambda}_{k'}a^{\lambda\dagger}_{k}|0\rangle \\ &= \int\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6} f(k)f(k')^*\langle 0|[a^{\lambda}_{k'},a^{\lambda\dagger}_{k}]|0\rangle \\ &= -g_{\lambda\lambda}\langle 0|0\rangle \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}|f(\boldsymbol{k})|^2\end{aligned} \tag{5.37}$$

对于时性光子对应于负模态，内积为负数，这就是协变量子化带来的问题。

为此我们引入一个 trick，虽然 $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ 不成立[29]，可以引入一个较弱的条件，要求算符的正频部分 $\partial_\mu \hat{A}^{\mu+}|\psi\rangle = 0$，其中 $|\psi\rangle$ 称为允许态，此条件等价于 $\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu-} = 0$，则

$$\langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu}|\psi\rangle = \langle\psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu+} + \partial_\mu \hat{A}^{\mu-}|\psi\rangle = 0 \tag{5.38}$$

即对于允许态 $\partial_\mu \hat{A}^\mu$ 的平均值恒为 0。

这个 trick 也叫 Cupta-Blenler 方案。

接下来具体求取 $\partial_\mu \hat{A}^\mu$，先是正频部分。

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x) = (-i)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|^2}}\sum_{\lambda=0}^{3}(a^{\lambda}_{\boldsymbol{k}}k^\mu\epsilon^{(\lambda)}_\mu(k)e^{-ik\cdot x}) \tag{5.39}$$

其中 $k^\mu\epsilon^{(\lambda)}_\mu(k)$ 中两个物理极化结果为 0，$k\cdot\epsilon_T = 0$，而 $k\cdot\epsilon^0 = k^0 = |\boldsymbol{k}|$，$k\cdot\epsilon^3 = \frac{k^2-(k\cdot n)^2}{k\cdot n} = -(k\cdot n) = -|\boldsymbol{k}|$

其中根据在壳条件 $k^2 = 0$

则 $\sum\limits_{\lambda=0}^{3} a^{\lambda}_{\boldsymbol{k}}k^\mu\epsilon^{(\lambda)}_\mu(k) = (a^0_{\boldsymbol{k}} - a^3_{\boldsymbol{k}})|\boldsymbol{k}|$

为满足 $\partial_\mu \hat{A}^{\mu+}|\psi\rangle = 0$，则 $a^0_{\boldsymbol{k}} - a^3_{\boldsymbol{k}}|\psi\rangle = 0$

考虑计算允许态的能量平均值

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=0}^{3}\langle\psi||\boldsymbol{k}|(-g_{\lambda\lambda})a^{\lambda\dagger}_{k}a^{\lambda}_{k}|\psi\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\psi||\boldsymbol{k}|a^{\lambda\dagger}_{k}a^{\lambda}_{k}|\psi\rangle\end{aligned}$$

则物理的可观测量最后只有物理光子幸存。

至于构造允许态 $|\psi\rangle$，定义 $\alpha_k = a^3_{\boldsymbol{k}} - a^0_{\boldsymbol{k}}$，且根据前面的产生湮灭算符的对易关系，有 $[\alpha_k,\alpha^\dagger_k] = 0$，所以可以构造 $|\psi\rangle = \prod\limits_{i=0}^{\infty}(\alpha^\dagger_{k_i})|0\rangle$

[29] 显然无法满足量子化条件

最后讨论一下费曼传播子

$$\begin{aligned}
D_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|TA^{\mu}(x)A^{\nu}(y)|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}e^{-ik\cdot(x-y)}\sum_{\lambda=0}^{3}(-g_{\lambda\lambda}\epsilon^{(\lambda)\mu}(k)\epsilon^{(\lambda)*\nu}(k))+\theta(y^0-x^0)\int ...e^{-ik\cdot(y-x)}... \\
&= \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}e^{-ik\cdot(x-y)}(-g^{\mu\nu})+\theta(y^0-x^0)\int ...e^{-ik\cdot(y-x)}(-g^{\mu\nu})... \\
&= (-g^{\mu\nu})(\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle) \\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i(-g_{\mu\nu})}{k^2+i\epsilon}
\end{aligned}$$

利用了完备性条件 $\sum\limits_{\lambda=0}(-g_{\lambda\lambda})\epsilon_{\mu}^{\lambda}(k)\epsilon_{\nu}^{\lambda*}(k)=-g_{\mu\nu}$，其中 $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ 即为 KG 场的费曼传播子，最后的结果正是前面提到的有效费曼传播子。

1948 年 Casimir 在两个特别大的金属导体片之间进行计算，其中金属片的边长 l 远大于距离 a，由于真空存在量子涨落，两块板之间存在力，大概为 $f=\frac{1.3\times10^{-7}}{a_{\mu m}}N/cm^2$，非常微弱。但是我们之前讨论的情况中，$H$ 中的 $[a,a^{\dagger}]$ 项都视为无穷大的真空能且不可观测。

一般求这类问题，会使用周期边界条件，将 k 离散化，则 $H\to\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\bar{h}\omega_k(a_k^{\lambda\dagger}a_k^{\lambda}+\frac{1}{2})$，其中 $|\boldsymbol{k}|=\frac{\pi n}{a}$，相应地能量观测值为 $\langle 0|H|0\rangle=\sum\limits_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2}\bar{h}\omega_k$，相当于在求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n=-\frac{1}{12}$，这是弦论常用的一个结论，但实际上 k 并不能到无穷大，有一个紫外截断。

6 相互作用的 QFT

6.1 相互作用模型简介

在考虑相互作用的情况下，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{int}$，其中 $\mathcal{L}_{int}$ 为多个场的耦合，相应的自由场中无穷多个独立的谐振子的联合也变成无穷多个耦合的谐振子的联合。

为了解决这一复杂问题，先回顾一些基本的相互作用。

例如 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{KG}-\frac{1}{3!}g\phi^3$，运动方程为 $(\partial_{\mu}\partial^{\mu}+m^2)\phi=-\frac{1}{2}g\phi^2$，显然是一个非线性方程，并不好得到解，还有 $\lambda\phi^4$ 理论，即 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{KG}-\frac{1}{4!}g\phi^4$，E-L 方程为 $(\partial_{\mu}\partial^{\mu}+m^2)\phi=-\frac{1}{3!}g\phi^3$

上面两个是标量场，我们还可以构造一个更有趣的场，即

$$\mathcal{L}_{Yukawa}=\mathcal{L}_{Dirac}+\mathcal{L}_{KG}-g\bar{\psi}\psi\phi \tag{6.1}$$

这样就将 Dirac 场和 K-G 场耦合在一起了，从这个过程来看，所谓的相互作用场也是用自由场的零件来构建其高达模型。

还可以更刺激一点，比如

$$\mathcal{L}_{QED}=\mathcal{L}_{Dirac}+\mathcal{L}_{Max}-e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{6.2}$$

这样就给出了电子光子相互作用的场，其中 $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 就对应于之前提到的外源 $j^\mu A_\mu$，且为守恒流 $\partial_\mu j^\mu = 0$

引入协变导数 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$，将 $\mathcal{L}_{QED}$ 改写为

$$\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \tag{6.3}$$

而对于 $U(1)$ 规范变换，即 $e^{i\alpha(x)}\psi$ 在 ∂_μ 作用下结果很复杂，而 $D_\mu(\psi) = (\partial_\mu + ieA_\mu)(\psi) \to (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha)(e^{i\alpha(x)}\psi) = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi$

这样的形式很容易就可以看出 $\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ 具有规范不变性。

运动方程为

$$(i\not{D} - m)\psi = 0, \partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \tag{6.4}$$

有了协变导数之后可以讨论标量 QED，即

$$\mathcal{L}_{CKG} = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 \to |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 = \mathcal{L}_{CKG} + \mathcal{L}_{Max} - eA_\mu i[(\partial^\mu\phi)\phi^* - \phi\partial\phi^*] + e^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu \tag{6.5}$$

这里的 $(\partial^\mu\phi)\phi^* - \phi\partial\phi^*$ 明显具有一个 $U(1)$ 对称性，之前我们只知道复的 KG 场的 $U(1)$ 不变性对应了某种守恒荷，而这里该场荷和电磁场耦合，则为电荷。

我们还也可以从阿贝尔规范理论拓展到非阿贝尔规范理论。

引入一个内禀的变换

$$\psi \to e^{i\alpha(x)t^a}\psi \tag{6.6}$$

且生成元满足

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{6.7}$$

定义

$$A_\mu^a t^a \to e^{i\alpha(x)t^a}(A_\mu^a t^a + \frac{i}{g}\partial_\mu)e^{-i\alpha(x)t^a} \tag{6.8}$$

引入 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$，即前面的协变导数的简单推导，还可以定义场强张量 $[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a$，其中 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$，多了一项非阿贝尔项 $gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$，且规范场在该内禀变换下的形式为 $F_{\mu\nu}^a \to e^{i\alpha(x)t^a}F_{\mu\nu}^a e^{-i\alpha(x)t^a}$

而 $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}\sum_a (F_{\mu\nu}^a)^2$，其中 ψ 有三个颜色自由度，而规范变换就是 $SU(3)$ 矩阵对这三个内禀自由度的旋转。

自然界存在许多 0 质量粒子，其中

1. 自旋为 0 无质量粒子由 Goldstone 定理 (对于有连续自发对称性破缺的理论，一定会出现 Coldstone 玻色子) 保证

2. 自旋为 $\frac{1}{2}$ 无质量粒子，由 Dirac 场来描述

3. 自旋为 1 无质量粒子由于规范不变性。

4. 自旋为 2 无质量粒子即引力子，源于广义相对论中的一种对称性。

是否有自旋为 3 或更高的零质量粒子，实际上有一个定理，即对于螺旋度大于等于 3 的无质量粒子，不对应非平庸的相互作用 (例如 spin=1 耦合了一个矢量守恒流，spin=2 耦合了能动量张量守恒流，但场论中找不到 spin=3 耦合了三个量的守恒流)

回到之前的 ϕ^3, ϕ^4 理论，我们为什么不考虑更高阶的相互作用？

为此我们引入一个定理: 一个可重整的理论的最高阶算符量纲不能超过 4，而高阶算符的耦合常数量纲是负的。

可重整化的基本思想就是将所有发散通过重新定义参数来消除 (例如 QED 中的 m 和 e)。实际上不可重整理论在一定的能量范围内也是有效的。

6.2 相互作用场论的困难

以 ϕ^3 理论为例，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - \frac{g}{3!}\phi^3$

量子化条件和自由场论一致，即 $[\phi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，产生湮灭算符也相应地满足 $[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$

问题出在相互作用部分，例如 $H_0 = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} E_p a^\dagger_p a_p$，但相互作用部分 $V = \int d^3x \frac{g}{3!}\phi^3(x)$

代入傅里叶展开，

$$\begin{aligned} V = \int d^3x \frac{g}{3!}\phi^3(x) =& \frac{g}{3!}\int [dp_1dp_2dp_3] a_{p_1}a_{p_2}a_{p_3}\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_3}) \\ &+ \frac{g}{2}\int [dp_1dp_2dp_3] a^\dagger_{p_1}a_{p_2}a_{p_3}\delta^3(\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}) \\ &+ \frac{g}{2}\int [dp_1dp_2dp_3] a^\dagger_{p_1}a^\dagger_{p_2}a_{p_3}\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}) \\ &+ \frac{g}{6}\int [dp_1dp_2dp_3] a^\dagger_{p_1}a^\dagger_{p_2}a^\dagger_{p_3}\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_3}) \end{aligned} \tag{6.9}$$

其中 $[dp_1dp_2dp_3] = \frac{d^3p_1d^3p_2d^3p_3}{(2\pi)^9\sqrt{2E_{p_1}2E_{p_2}2E_{p_3}}}$

我们可以验证 $[H_0, V] \neq 0 \to [H_0, H] \neq 0$，这说明相互作用理论的真空不等价于自由理论的真空，自由的湮灭算符作用于相互作用的真空不一定为 0，完全求解一个相互作用的场论几乎是不可能的事。

之前我们定义了海森堡绘景下的算符，

$$a_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{iH_0t}a_{\boldsymbol{p}}e^{-iH_0t} \tag{6.10}$$

$$\dot{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = -ie^{iH_0t}[a_{\boldsymbol{p}}, H_0]e^{-iH_0t} = -iE_pa_p(t) \tag{6.11}$$

解这个常微分方程得到

$$a_{\boldsymbol{p}}(t) = a_{\boldsymbol{p}}e^{-iE_pt} \tag{6.12}$$

但在考虑相互作用的情形下

$$a_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{iHt}a_{\boldsymbol{p}}e^{-iHt} \tag{6.13}$$

$$\dot{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = -ie^{iHt}[a_{\boldsymbol{p}}, H]e^{-iHt} = -ie^{iHt}[a_{\boldsymbol{p}}, H_0 + V]e^{-iHt} = -iE_p a_p(t) - ie^{iHt}[a_{\boldsymbol{p}}, V]e^{-iHt} \tag{6.14}$$

如果没有相互作用项，就和自由场中的方程一致。

以相互作用的第二项为例

$$[a_{\boldsymbol{p}}, V_2] = \frac{g}{2}\int [dp_1 dp_2 dp_3](2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p_1})a_{p_2}a_{p_3}\delta^3(\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}) \tag{6.15}$$

代入得到

$$\dot{a}_{\boldsymbol{p}}(t) = -iE_p a_p(t) - i\frac{g}{2}\int [dp_1 dp_2 dp_3](2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p_1})a_{p_2}(t)a_{p_3}(t)\delta^3(\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}) \tag{6.16}$$

最后结果是一个非线性方程，$a_p(t)$ 没有解析表达式。

如果 $|V| << H_0$，即耦合常数 $\lambda << 1$，便可以用微扰论来处理相互作用场论，我们基于 Feynman 图方法来进行微扰计算。

6.3 S 矩阵元

为此引入一个可观测量 (衰变宽度，散射截面)

$$S_{matrix} = \langle \beta, out|\alpha, in\rangle_{Heisenberg} \tag{6.17}$$

考虑 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$，实验中准备两束流 (考虑波包的形式)，从 $t=-\infty$ 开始，初态是相聚非常远的两电子束流，在 $t=0$ 时发生了极其复杂的量子作用 (无法探测)，假设产生了 $\mu^+\mu^-$ 态，且在 $t=\infty$ 变成了自由的两独立粒子。

在海森堡绘景下定义 $S_{matrix} = \langle \beta, out|\alpha, in\rangle_{Heisenberg}$，且出态 $(t=\infty)$ 入态 $(t=-\infty)$ 都是能量本征态，物理含义为给定入态，出现相应出态的概率。

定义 S 矩阵元

$$S = \langle \phi_\beta|\hat{S}|\phi_\alpha\rangle \tag{6.18}$$

S 矩阵元的性质:

1.S 矩阵为幺正矩阵，由于 $I = \sum\limits_\alpha |\alpha, in\rangle\langle\alpha, in| = \sum\limits_\beta |\beta, out\rangle\langle\beta, out|$，则

$$(S^\dagger S)_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \langle\gamma, in|\beta, out\rangle\langle\beta, out|\alpha, in\rangle = \langle\gamma, in|\alpha, in\rangle = \delta_{\gamma\alpha} \tag{6.19}$$

物理意义为几率守恒，即将任何可能的概率之和为 1。

2.S 矩阵体现所有的对称性。$S_{\beta\alpha} = \langle\beta, out|U^\dagger(\Lambda, a)U(\Lambda, a)|\alpha, in\rangle = \langle U(\Lambda, a)\beta, out|U(\Lambda, a)\alpha, in\rangle$，插入单位的庞加莱算符。

考虑时空平移算符，$U(1,a)=e^{-ia_\mu\hat{P}^\mu}$，则 $S_{\beta\alpha}=\langle\beta,out|e^{+ia_\mu\hat{P}^\mu}e^{-ia_\mu\hat{P}^\mu}|\alpha,in\rangle$，以正负电子为例，$e^{-ia_\mu\hat{P}^\mu}$ 作用于动量本征态 $|\alpha,in\rangle$，得到 $e^{-ia_\mu(p_1^\mu+p_2^\mu)}$，最后得到 $e^{-ia_\mu(p_1^\mu+p_2^\mu-\bar{p}_1^\mu-\bar{p}_2^\mu)}S_{\beta\alpha}$，则根据时空平移不变性，自然要求入出态的动量守恒。

S 矩阵一般可以写为 $S_{\beta\alpha}=\delta_{\beta\alpha}+i(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_j p'_j)m_{\beta\alpha}$，其中 $\delta_{\beta\alpha}$ 就是自由场的 S 矩阵元，$m_{\beta\alpha}$ 为不变振幅，我们的任务就是计算该不变振幅。

为了便于计算 S 矩阵元，引入 $\hat{S}$，且 $S_{\beta\alpha}=\langle\phi_\beta|\hat{S}|\phi_\alpha\rangle$，其中 $|\phi_\alpha\rangle$ 为 H_0 的本征态。

根据前面的 S 矩阵为幺正矩阵，令 $\hat{S}=1+i\hat{T}$，代入 $SS^\dagger=I$，得到 $-i(T-T^\dagger)=T^\dagger T$

且根据 S 矩阵体现所有的对称性，则 $U_0^{-1}(\Lambda,a)\hat{S}U_0(\Lambda,a)=\hat{S}$，这里的 $U_0(\Lambda,a)$ 对应于 H_0 自由场论的庞加莱变换，生成元为 H_0,k_0。

由于 S 矩阵是通过单粒子态内积得到的，相应的它在 Lorentz 变换下也有小群诱导表示。

对于内禀对称性，以 $U(1)$ 相位对称性为例，定义 $U(\theta)=e^{-i\theta\hat{Q}}$，代入之后得到类似于 $\delta(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_j p'_j)$ 的电荷守恒 $\delta(\sum\limits_i \hat{Q}_i-\sum\limits_j \hat{Q}'_j)$

考虑时间反演算符，

$$S_{\beta\alpha}=\langle\beta,out|\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}|\alpha,in\rangle=\langle\mathcal{T}\alpha,in|\mathcal{T}\beta,out\rangle=S_{\mathcal{T}\alpha,\mathcal{T}\beta} \tag{6.20}$$

以及空间反演 (n 为某类粒子的个数)

$$\mathcal{P}|p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2...\rangle=\eta_{n_1}\eta_{n_2}...|\mathcal{P}p_1,\sigma_1,n_1;\mathcal{P}p_2,\sigma_2,n_2...\rangle \tag{6.21}$$

则 $S_{p'_1,\sigma'_1,n'_1;p'_2,\sigma'_2,n'_2...p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2}=\eta^*_{n'_1}\eta^*_{n'_2}...\eta_{n_1}\eta_{n_2}S_{\mathcal{P}p'_1,\sigma'_1,n'_1;\mathcal{P}p'_2,\sigma'_2,n'_2...\mathcal{P}p_1,\sigma_1,n_1;\mathcal{P}p_2,\sigma_2,n_2}$

以 π^- 介子的内禀宇称为例，$\pi^{-1}+d\to n+n$，初态角动量为 1，根据角动量耦合，末态可以是 $l=1,s=0;l=1,s=1;l=2,s=1;l=0,s=1$，但是根据全同粒子的 $l+s=even$，则两个中子的态只能为 $l=1,s=1$，宇称不变导致 $\eta_d\eta_\pi=-\eta_n^2$，且 $\eta_d=\eta_n\to\eta_\pi=-1$，这样就敲定了 π 介子的宇称。

$\theta-\tau$ 疑难，$\tau\to\pi^+\pi^+\pi^-,\theta\to\pi^+\pi^-$，且 θ,τ 质量寿命非常接近。

先论证根据宇称守恒，τ 宇称必须为负，考虑在 τ 的静止系，转动不变性要求，不变振幅只能是三个 π 动量的点乘 (因为叉乘项 $\boldsymbol{p_1}\cdot(\boldsymbol{p_2}\times\boldsymbol{p_3})$。由于 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=0$，该项为 0)，则 $\eta_\tau=\eta_\pi^3=-1$, 而 $\eta_\theta=1$，最后李杨指出 θ,τ 是同一个粒子，现代的名称为 K 介子。

6.4 衰变宽度和散射截面

cross section and decay rate(这些是实验可测量的) 如何通过 S 矩阵元得到？

$$\hat{S}=\hat{I}+i\hat{T} \tag{6.22}$$

$$S_{\beta\alpha}=\delta_{\beta\alpha}+(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta-p_\alpha)im_{\beta\alpha} \tag{6.23}$$

其中 $S_{\beta\alpha}$ 代表了跃迁振幅

则 α 态到 β 态的概率

$$P_{\beta\alpha} \propto |S_{\beta\alpha}| \propto |\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)|^2 = \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\delta^{(4)}(0) \tag{6.24}$$

这是一个非常奇异的函数，且有无穷大，但实验家不可能测出无穷大。
为解决这一问题，有两种做法。
1. 严格地处理散射，必须采用波包 (wave packets),peskin 书采用的方法
2. 捷径：把系统放入体积为 L^3 的正方体中。
相应地离散化的动量为 $\boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$
根据动量 δ 函数的定义

$$\delta^3(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} \tag{6.25}$$

而在离散空间中，

$$\boldsymbol{p'} \neq \boldsymbol{p} \to \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} = 0 \tag{6.26}$$

$$\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p} \to \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{6.27}$$

则 $\delta^3(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{p'},\boldsymbol{p}}$[30]
我们为此还需要定义 Box 中的单粒子态，原来单粒子态内积为

$$\langle \boldsymbol{p'}|\boldsymbol{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{p}) \tag{6.28}$$

定义 Box 中的内积为

$$\langle \boldsymbol{p'}|\boldsymbol{p}\rangle_{Box} = \delta_{\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p}} \tag{6.29}$$

这样可以定义

$$\langle \psi_\beta|\psi_\alpha\rangle_{Box} = \delta_{\beta\alpha} \tag{6.30}$$

这样 $S^{Box}_{\beta\alpha}$ 有直接的几率诠释。
且 Box 的态和原来的单粒子态有关系

$$|\boldsymbol{p}\rangle_{Box} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} |\boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V 2E_p}} |\boldsymbol{p}\rangle \tag{6.31}$$

对于多粒子态 (初态有 N_α 个粒子)，则有

$$|\psi_\alpha\rangle_{Box} = V^{-\frac{N_\alpha}{2}} \prod_{i=1}^{N_\alpha} (2E_i)^{-\frac{1}{2}} |\psi_\alpha\rangle \tag{6.32}$$

则

$$S^{Box}_{\beta\alpha} = \langle_{Box}\psi_\beta|\psi_\alpha\rangle_{Box} = V^{-\frac{N_\alpha+N_\beta}{2}} \prod_{i=1}^{N_\alpha} (2E_i)^{-\frac{1}{2}} \prod_{f=1}^{N_\beta} (2E_f)^{-\frac{1}{2}} S_{\beta\alpha} \tag{6.33}$$

[30]注意这里前后两个 δ 的不同，前一个是 δ 函数，在 $\boldsymbol{p'} = \boldsymbol{p}$ 时为无穷，后者为 1。

我们实际上关心的是单位时间的跃迁几率，需要加入时间盒子，从 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 打开相互作用，在时间盒子里定义能量 δ 函数，则在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 之间可定义为

$$\delta(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i(E_\alpha - E_\beta)t} = \frac{T}{2\pi}\delta_{E_\alpha E_\beta} \tag{6.34}$$

则跃迁几率

$$P(\alpha\to\beta) = |S_{\beta\alpha}^{Box}|^2 = V^{-(N_\alpha+N_\beta)}\prod_{i=1}^{N_\alpha}(2E_i)^{-1}\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}|S_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.35}$$

由于实验上探测器对末态粒子的动量测量分辨率有限，实际上只能测量 $\alpha\to\beta+d\beta$ 的跃迁几率 $dP(\alpha\to\beta) = P(\alpha\to\beta)d\beta$。

由于 $\boldsymbol{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3)$，则 $\Delta n_1\Delta n_2\Delta n_3 = \frac{L^3}{(2\pi)^3}dp_1dp_2dp_3$，即 $\Delta\boldsymbol{n} = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\boldsymbol{p}$，即态的数目和动量的关系。

$$d\beta = dN_\beta = \prod_{f=1}\frac{V}{(2\pi)^3}d^3p_f \tag{6.36}$$

即在 $\boldsymbol{p}+d^3\boldsymbol{p}$ 态的数目。

$$\begin{aligned} dP(\alpha\to\beta) &= P(\alpha\to\beta)d\beta \\ &= V^{-(N_\alpha+N_\beta)}\prod_{i=1}^{N_\alpha}(2E_i)^{-1}\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}\frac{V}{(2\pi)^3}d^3p_f|S_{\beta\alpha}|^2 \\ &= V^{-(N_\alpha)}\prod_{i=1}^{N_\alpha}(2E_i)^{-1}\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}|S_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned} \tag{6.37}$$

S 矩阵元的非平庸部分可以写成

$$iT_{\beta\alpha} = (2\pi)^4\delta^3(\boldsymbol{p}_\beta - \boldsymbol{p}_\alpha)\delta(E_\beta - E_\alpha)im_{\beta\alpha} \tag{6.38}$$

$$|S_{\beta\alpha}|^2 \propto (2\pi)^8\delta^3(\boldsymbol{p}_\beta - \boldsymbol{p}_\alpha)\delta(E_\beta - E_\alpha)\delta^3(0)\delta(0)|m_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.39}$$

令 $\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}, \delta(0) = \frac{T}{2\pi}$

则

$$(2\pi)^8\delta^3(\boldsymbol{p}_\beta - \boldsymbol{p}_\alpha)\delta(E_\beta - E_\alpha)\delta^3(0)\delta(0)|m_{\beta\alpha}|^2 = (2\pi)^4\delta^3(\boldsymbol{p}_\beta - \boldsymbol{p}_\alpha)\delta(E_\beta - E_\alpha)VT|m_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.40}$$

$$dP(\alpha\to\beta) = V^{1-(N_\alpha)}T|m_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta - p_\alpha)T\prod_{i=1}^{N_\alpha}(2E_i)^{-1}\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \tag{6.41}$$

说明跃迁几率和时间 T 明显相关，但实验更关心跃迁速率，即单位时间的跃迁几率

定义跃迁速率

$$dW(\alpha\to\beta)=\frac{dP(\alpha\to\beta)}{T}=V^{1-(N_\alpha)}|m_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta-p_\alpha)\prod_{i=1}^{N_\alpha}(2E_i)^{-1}\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \tag{6.42}$$

其中 $\prod_{f=1}^{N_\beta}(2E_f)^{-1}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\delta^4(p_\beta-p_\alpha)\to d\prod_{N_\beta}$，即相对论不变的 N_β 体相空间。

分情况讨论

1.

$$N_\alpha=1,dW(\alpha\to\beta)=\frac{1}{2E_\alpha}d\prod_{N_\beta}|m_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.43}$$

物理中代表一个粒子的衰变，例如 $n\to p+e+\bar{\nu}$，初态如果只有一个粒子常用衰变宽度 $d\Gamma(\alpha\to\beta)$ 代替 $dW(\alpha\to\beta)$，且由于 E_α 不是相对论不变的，则粒子的衰变宽度和参照系有关。

总宽度

$$\Gamma(\alpha\to\beta)=\frac{1}{2E_\alpha}\int d\prod_{N_\beta}|m_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.44}$$

考察不稳定粒子数的变化率，

$$\frac{dn(t)}{dt}=-\Gamma n(t)\to n(t)=n(0)e^{-\Gamma t} \tag{6.45}$$

不稳定粒子是指数衰减的，且不稳定粒子的寿命

$$\tau=\frac{1}{n(0)}\int_0^\infty dt\ t|\frac{dn(t)}{dt}|=\frac{1}{\Gamma} \tag{6.46}$$

这个公式相当于给所有的粒子存在的时间求平均。

2.

$$N_\alpha=2,,dW(\alpha\to\beta)=\frac{1}{V}\frac{1}{2E_1}\frac{1}{2E_2}d\prod_{N_\beta}|m_{\beta\alpha}|^2 \tag{6.47}$$

如何讨论 V 这个因子，考虑刚球散射，如何将刚球的横截面和 dW 联系起来。

我们可以回顾卢瑟福实验 (α 粒子轰击金泊)，实验是对散射到某个立体角 $d\Omega$ 中 dN 事例数进行测量，而 $d\sigma=\frac{dN}{t\times flux}$，$t$ 为反应时间，$flux$：粒子数/(单位时间 $\times$ 单位面积)，系数 σ 描绘的是微观反应的内禀性质，量纲为面积。

Thomson cross section：$\sigma_T=\frac{8\pi r_e^2}{3}$，其中 r_e 为电子经典半径。

现在我们知道实验家测量的是跃迁几率 $/flux$，而 $flux=nv=(\frac{1}{V})|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|$

考虑打靶试验，因为入态只有一个粒子则 $n=\frac{1}{V}$，速度 v，为入射粒子相对于靶粒子的速度，则流强为 $\frac{v}{V}$，而转到质心系下，两个粒子都有速度，简单起见假设两个粒子的质量相同，则质心相对于静止靶粒子的运动速度为 $\frac{v}{2}$，利用速度变化公式可以求得粒子在质心系下的速度，

$$V'=\frac{V-v}{1-vV}=\pm\frac{v}{2(1-\frac{v^2}{2})} \tag{6.48}$$

粒子间的相对速度并不是参考系不变的，显然流强公式的定义依赖于坐标系的选取
则

$$d\sigma(\alpha\to\beta)=\frac{dW(\alpha\to\beta)}{flux}=\frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|}|m_{\beta\alpha}|^2 d\prod_{N_\beta} \tag{6.49}$$

且量纲为面积，且我们希望它在沿对撞方向 Boost 不变。
利用 $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{E}$
则有

$$\begin{aligned}(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}| &= 4E_1E_2|\frac{|\boldsymbol{p_1}|}{E_1}+\frac{|\boldsymbol{p_2}|}{E_2}|\\ &= 4(|\boldsymbol{p_1}|E_2+|\boldsymbol{p_2}|E_1)\\ &= 4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}\end{aligned} \tag{6.50}$$

[31]

最后得到了 Lorentz 不变量。
则 $d\sigma(1+2\to\beta)=\frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}|m_{\beta\alpha}|^2 d\prod_{N_\beta}$。
最后讨论一下运动学，考虑两体相空间，且 $\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2, E_1+E_2=E_{CM}$

$$\begin{aligned}d\prod_2 &= \int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta^4(P-p_1-p_2)\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int\frac{d\Omega d|p_1|}{E_1}\frac{1}{E_2}\delta(E_1+E_2-E_{CM})\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int\frac{d\Omega d|p_1||p_1|^2}{E_1}\frac{1}{E_2}\delta(E_1+E_2-E_{CM})\\ \frac{d\left(E_1+E_2-E_{CM}\right)}{d|p_1|} &= \frac{|p_1|}{E_1}+\frac{|p_1|}{E_2}=\frac{E_1+E_2}{E_1E_2}|p_1|\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{d|p_1|}{d\left(E_1+E_2-E_{CM}\right)}d\left(E_1+E_2-E_{CM}\right)\frac{|p_1|^2}{E_1}\frac{1}{E_2}\delta(E_1+E_2-E_{CM})\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega d\left(E_1+E_2-E_{CM}\right)\frac{|p_1|}{E_1+E_2}\delta(E_1+E_2-E_{CM})\\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{|p_1|}{E_{CM}}\end{aligned} \tag{6.51}$$

最后得到散射截面公式

$$\begin{aligned}d\sigma(\alpha\to\beta) &= \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|}|m_{\beta\alpha}|^2\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{|p_1|}{E_{CM}}\\ \frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} &= \frac{1}{16\pi^2(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|}\frac{|p_1|}{E_{CM}}|m_{\beta\alpha}|^2\end{aligned} \tag{6.52}$$

[31]后面来细推

6.5 老式微扰论

Lippmann -Schwinger equation 中间步骤不协变，最后结果协变，但是过程很复杂。

散射理论:

$$H = H_0 + V \tag{6.53}$$

散射态

$$H|\psi^{\pm}\rangle = E|\psi^{\pm}\rangle \tag{6.54}$$

连续态

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \tag{6.55}$$

如何从 $|\phi\rangle$ 得到 $|\psi^{\pm}\rangle$

根据 $(H_0+V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \to (E-H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \to |\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E-H_0}V|\psi\rangle$

但若边界条件满足 $V=0$，$|\psi\rangle = |\phi\rangle$，上式就是 L-S 方程。

接下来处理 $\frac{1}{E-H_0}$。

定义 $V|\psi\rangle = T|\phi\rangle$，则

$$V|\psi\rangle = V|\phi\rangle + V\frac{1}{E-H_0}T|\phi\rangle$$
$$T|\phi\rangle = V|\phi\rangle + V\frac{1}{E-H_0}T|\phi\rangle$$
$$T = V + V\frac{1}{E-H_0}T$$

则有迭代解 $T = V + V\frac{1}{E-H_0}(V + V\frac{1}{E-H_0}(...))$

则可以定义散射振幅，$\langle\phi_f|T|\phi_i\rangle = V_{fi} + \sum\limits_n V_{fn}\frac{1}{E-E_n}V_{ni}$，展开到一阶，其中 $V_{fi} = \langle\phi_f|V|\phi_i\rangle$，其中还插入了一组单位算符 $\sum\limits_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$。

考虑 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{int}$

其中 $\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}_e(i\partial\!\!\!/ - m_e)\psi_e + \bar{\psi}_\mu(i\partial\!\!\!/ - m_\mu)\psi_\mu, V = \int d^3x(g\bar{\psi}_e\Gamma\psi_e\phi + g\bar{\psi}_\mu\Gamma\psi_\mu\phi)$

考虑 $e(p_1) + \mu(p_2) \to e(p_3) + \mu(p_4)$ 散射过程。

则 $|i\rangle = |e(p_1), \mu(p_2)\rangle, |f\rangle = |e(p_3), \mu(p_4)\rangle$

由于 $\phi \to a + a^\dagger$，其中 ϕ 代表了轴子，且由于初末态都不存在轴子，则 $\langle f|a|i\rangle = 0$，相应地 $\langle f|V|i\rangle = 0$，则领头阶为 0。

要是第二阶不为 0，则插入的中间态必须含有 ϕ 的本征态。

时空图像为: 电子发射一个 $p\phi$ 的轴子，然后被 μ 子吸收，即轴子是在壳的。

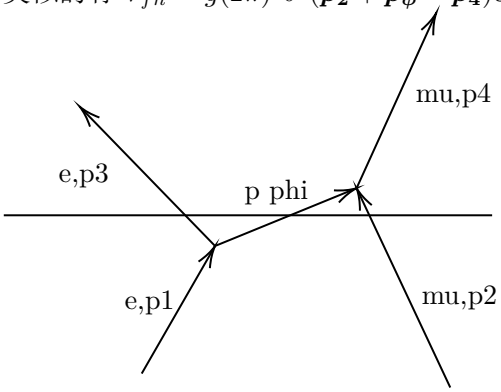
定义中间态 $|n\rangle = |e(p_3)\mu(p_2)\phi(p\phi)\rangle$，则

$$\begin{aligned} V_{ni} &= \langle e(p_3)\mu(p_2)\phi(p\phi)|V|e(p_1)\mu(p_2)\rangle \\ &= \langle e(p_3)\phi(p\phi)|V|e(p_1)\rangle\langle\mu(p_2)\mu(p_2)\rangle \\ &= \int d^3x\langle e(p_3)\phi(p\phi)|(g\bar{\psi}_e\Gamma\psi_e\phi|e(p_1)\rangle \end{aligned}$$

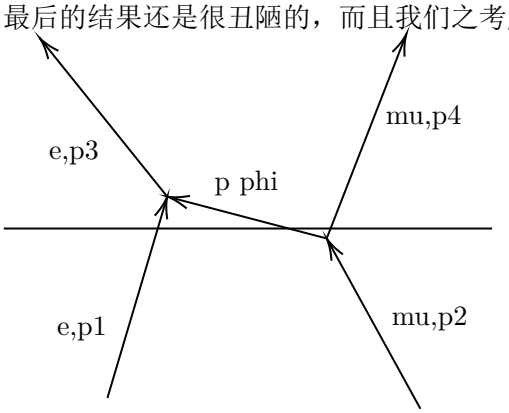
其中 $\phi(x)=\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_P}}(a_p e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+a_p^\dagger e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}), |e(p_1)\rangle=\sqrt{E_1}a_{p_1}^\dagger|0\rangle$
且 ϕ 只有 $a_p^\dagger$ 一项贡献。
则相应地

$$\begin{aligned}V_{ni}&=g\int d^3x\langle 0|\sqrt{E_3}a_{p_3}2\sqrt{E_\phi}a_{p_\phi}\bar{\psi}_e\Gamma\psi_e\phi\sqrt{E_1}a_{p_1}^\dagger|0\rangle\\&=g\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\int d^3x e^{i(\boldsymbol{p_3}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_1})\cdot\boldsymbol{x}}\\&=g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_3}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_1})\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\end{aligned}$$

类似的有 $V_{fn}=g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_4})\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)$



上图便是散射过程的示意图，从下到上是时间方向。
定义 $I=\int \frac{d^3p_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}|\boldsymbol{p_\phi}\rangle\langle\boldsymbol{p_\phi}|$
则 $T_{fi}=\int \frac{d^3p_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_4})\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\frac{1}{E-E_n}g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_3}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_1})\bar{U}(p_3)\Gamma u(p_1)$
其中 $E=E_1+E_2=E_3+E_4, E_n=E_3+E_\phi+E_2$
$T_{fi}^R=\int \frac{d^3p_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}}g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_4})\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\frac{1}{E_1-E_3-E_\phi}g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_3}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_1})\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)$
中间态能量不等于初态能量，体现了测不准原理，如果中间态能量偏移太多，存在的时间也相应较短。
最后的结果还是很丑陋的，而且我们之考虑了一种散射过程，还可以考虑下面这种时间顺序。



此时有

$T_{fi}^A = \int \frac{d^3p_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}} g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_3})\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\frac{1}{E_1+E_2-(E_1+E_4+E_\phi)} g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_4})\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)$

则 $T_{fi} = T_{fi}^R + T_{fi}^A$

其中 T_{fi}^R 对 p_ϕ 积分得到

$T_{fi}^R = g(2\pi)^3\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\delta^3(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_4})\int \frac{d^3p_\phi}{(2\pi)^3 2E_{p_\phi}} \frac{1}{E_1-E_3-E_\phi} g(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p_3}+\boldsymbol{p_\phi}-\boldsymbol{p_1})$
$= g^2(2\pi)^3\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}-\boldsymbol{p_4})\frac{1}{(E_1-E_3-E_\phi)2E_\phi}$

则 $T_{fi} = g^2(2\pi)^3\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}-\boldsymbol{p_4})(\frac{1}{(E_1-E_3-E_\phi)2E_\phi} + \frac{1}{(E_2-E_4-E_\phi)2E_\phi})$

其中 $\frac{1}{(E_1-E_3-E_\phi)2E_{p_\phi}} + \frac{1}{(E_2-E_4-E_\phi)2E_\phi} = \frac{1}{(E_1-E_3-E_\phi)2E_\phi} - \frac{1}{(E_1-E_3+E_\phi)2E_\phi} = \frac{1}{2E_\phi}\frac{2E_\phi}{(E_1-E_3)^2-E_\phi^2}$

其中 $E_\phi^2 = p_\phi^2 + m_\phi^2 = (\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_3})^2 + m_\phi^2$

最后有

$T_{fi} = g^2(2\pi)^3\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}-\boldsymbol{p_4})\frac{1}{(E_1-E_3)^2-(\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_3})^2-m_\phi^2}$

可以定义 $k^\mu = p_1^\mu - p_\mu^2 = (E_1-E_3, \boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_3})$

则 $T_{fi} = g^2(2\pi)^3\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\delta^3(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_3}-\boldsymbol{p_4})\frac{1}{k^2-m_\phi^2+i\epsilon}$

该表达式就是费曼传播子，明显协变，说明老式微扰论对各种情况求和就得到了新式微扰论，根据 $iT_{\beta\alpha} = (2\pi)^4\delta^3(\boldsymbol{p}_\beta-\boldsymbol{p}_\alpha)\delta(E_\beta-E_\alpha)im_{\beta\alpha}$,该散射过程的散射截面 $m_{\beta\alpha} = g^2\bar{U}(p_4)\Gamma U(p_2)\bar{U}(p_3)\Gamma U(p_1)\frac{1}{k^2-m_\phi^2+i\epsilon}$(后面补充了能量守恒 δ 函数)

6.6 相互作用绘景

为了计算 S 算符，引入相互作用绘景。

$$t=0, |\psi(0)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_I \tag{6.56}$$

薛定谔绘景:

$$O_s(t) = O_s(0), i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = H|\psi(t)\rangle_S \tag{6.57}$$

海森堡绘景:

$$i\dot{O}_H(t) = [O_H(t), H], |\psi(t)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_H \tag{6.58}$$

相互作用绘景:

$$H = H_0 + V, i\dot{O}_I(t) = [O_I(t), H_0], |\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t}|\psi(t)\rangle_S \tag{6.59}$$

实际上物理结果并不依赖于绘景，

$$\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi(t)|O_H(t)|\psi(t)\rangle_H = \langle\psi(t)|O_I(t)|\psi(t)\rangle_I = \langle\psi(t)|e^{-iH_0t}O_Ie^{iH_0t}|\psi(t)\rangle_S \tag{6.60}$$

则

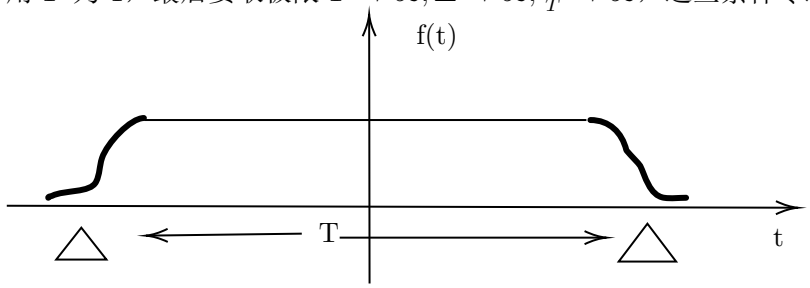
$$O_I = e^{iH_0t}O_Se^{-iH_0t} \tag{6.61}$$

将 $e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t)\rangle_S$ 代入薛定谔方程，

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}(e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I) &= He^{-iH_0t}|\psi(t)\\ H_0e^{-iH_0t}|\psi(t)\rangle_I + e^{-iH_0t}\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= (H_0(0)+V(0))e^{-iH_0t}|\psi(t)\\ \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= V_I(t)|\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \tag{6.62}$$

其中 $V_I(t) = e^{iH_0t}V(0)e^{-iH_0t}$

考虑一个绝热近似图像，定义一个开关函数 $f(t)$ 作用于相互作用部分，在 $\infty, -\infty$ 值都为 0，在相互作用 T 为 1，最后要取极限 $T\to\infty, \Delta\to\infty, \frac{\Delta}{T}\to\infty$，这些条件令边界效应消失。



考虑

$$|i\rangle = |\psi(t=-\infty)\rangle_I \tag{6.63}$$

且满足

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = V_I(t)|\psi(t)\rangle_I \tag{6.64}$$

定义 S 算符

$$|\psi(\infty)\rangle = \hat{S}|\psi(t=-\infty)\rangle = \hat{S}|i\rangle \tag{6.65}$$

S 矩阵元为

$$S_{fi} = \langle f|\hat{S}|i\rangle = \langle f|\psi(\infty)\rangle \tag{6.66}$$

所以如何得到 $\psi(\infty)$ 就成为了问题的关键。

通过 $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = V_I(t)|\psi(t)\rangle_I$ 可以假定解为

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 V_I(t_1)|\psi(t_1)\rangle_I \tag{6.67}$$

这确实是符合边界条件的正确解。

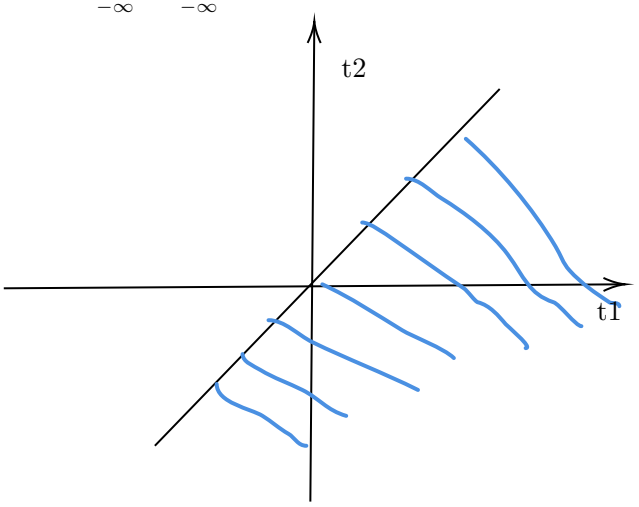
可以利用迭代法，将 $|\psi(t_1)\rangle_I$ 继续展开。

$$|\psi(t)\rangle_I = |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 V_I(t_1)|i\rangle + (-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1)V_I(t_2)|i\rangle + ... \tag{6.68}$$

而

$$\hat{S}|i\rangle = |\psi(t)\rangle_I \to \hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1)V_I(t_2)...V_I(t_n) \tag{6.69}$$

这里的积分限制很明确 $t_1 > t_2 ... > t_n$，但我们不想定这么死，希望上限都是一样的。$n = 2$，$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1)V_I(t_2)$，积分线为 $-\infty < t_2 < t_1 < \infty$，积分区域如下图，



我们可以将 t_1, t_2 交换积分次序，但自变量不变。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{t_2}^{\infty} dt_1 V_I(t_1)V_I(t_2) \tag{6.70}$$

再做变量替换

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 V_I(t_2)V_I(t_1) \tag{6.71}$$

这三项都是全同的，可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1)V_I(t_2) = \frac{1}{2!}[\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{t_2}^{\infty} dt_1 V_I(t_1)V_I(t_2) + \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 V_I(t_2)V_I(t_1)] \tag{6.72}$$

定义编时乘积 $T[O_1(x_1)O_2(x_2)]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_I(t_1)V_I(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T[V_I(t_1)V_I(t_2)] \tag{6.73}$$

拓展到 n 阶，

$$\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[V_I(t_1)V_I(t_2)...V_I(t_n)] \tag{6.74}$$

则

$$\hat{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2...\int_{-\infty}^{\infty}dt_nT[V_I(t_1)V_I(t_2)...V_I(t_n)] \tag{6.75}$$

上述级数也叫 Dyson 级数，看起来很像一个指数函数，则可以简写 $\hat{S}=T\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty}dtV_I(t)]$，整个推导只用到了量子力学相关知识，这个公式适用于一切量子体系。

则 $\phi_I(t,\boldsymbol{x})=e^{iH_0t}\phi(\boldsymbol{x})e^{-iH_0t}$

$$V_I(t)=\int d^3x\frac{\lambda}{4!}e^{iH_0t}\phi^4(\boldsymbol{x})e^{-iH_0t}=\int d^3x\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(t,\boldsymbol{x})=\int d^3xH_{int}^I(t) \tag{6.76}$$

$$\hat{S}=T\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4xH_{int}^I(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_2...\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_nT[H_{int}^I(x_1)H_{int}^I(x_2)...H_{int}^I(x_n)] \tag{6.77}$$

根据 Lorentz 不变性，要求 $U(\Lambda)\hat{S}U^{-1}(\Lambda)=\hat{S}$

且 $H_{int}^I(x)=-\mathcal{L}_{int}^I(x)\to U(\Lambda)\hat{H}_{int}^I(x)U^{-1}(\Lambda)=\hat{H}_{int}^I(\Lambda x)$

且 $T[H^I(x_1)H^I(x_2)]$ 在类时间隔时 $(x_1-x_2)^2>0$ 时 x_1,x_2 的先后顺序不会因为参考系的变化而变化，则时序保持不变。

$(x_1-x_2)^2<0$ 时，根据因果性的要求 $[H^I(x_1),H^I(x_2)]=0$，以上说明编时算符并不会影响 $\hat{S}$ 的 Lorentz 不变性，综上可以得出 $\hat{S}$ 的 Lorentz 不变性。

6.7 Wick 定理

场算符总可以写出两个部分，即正频和负频部分。

$$\phi_I(x)=\phi_I^+(x)+\phi_I^-(x) \tag{6.78}$$

其中 $\phi_I^+(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}a_{\boldsymbol{p}}e^{-ip\cdot x},\phi_I^+(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}$[32]

则若 $x^0>y^0$，

$$\begin{aligned}T[\phi_I(x)\phi_I(y)]&=[\phi_I^+(x)+\phi_I^-(x)][\phi_I^+(y)+\phi_I^-(y)]\\&=\phi_I^+(x)\phi_I^+(y)+\phi_I^-(x)\phi_I^+(y)+\phi_I^+(x)\phi_I^-(y)+\phi_I^-(x)\phi_I^-(y)\\&=\phi_I^+(x)\phi_I^+(y)+\phi_I^-(x)\phi_I^+(y)+\phi_I^-(y)\phi_I^+(x)+[\phi_I^+(x),\phi_I^-(y)]+\phi_I^-(x)\phi_I^-(y)\end{aligned} \tag{6.79}$$

注意这里处理的是玻色型算符，定义正则排序，即一切产生算符都在湮灭算符的左边

$$N(a_pa_k^\dagger a_q)=a_k^\dagger a_pa_q \tag{6.80}$$

[32]因为我们采用的相互作用表象下的场算符满足自由场论中的海森堡运动方程，所以可以写成自由场的形式

定义缩并

$$\phi(\overbrace{x)\phi(y}) = [\phi^+(x), \phi^-(y)], x^0 > y^0 or [\phi^+(y), \phi^-(x)], x^0 < y^0 \tag{6.81}$$

其实 $\phi(\overbrace{x)\phi(y}) = D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle$
其中 $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = [\phi^+(x), \phi^-(y)]$

Wick 定理

$$T\left\{\phi\left(x_1\right)...\phi\left(x_n\right)\right\} = N\left\{\phi\left(x_1\right)...\phi\left(x_n\right) + \text{所有可能的缩并}\right\} \tag{6.82}$$

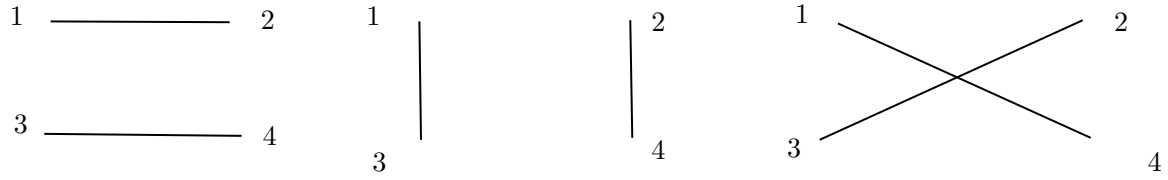
若 $n = 4$，则

$$T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + ... + \overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4}\} + ... \tag{6.83}$$

其中只有两个缩并有 6 种，而两组缩并一共有 3 种情况。
如何理解 $N\{\overbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4\}$, 其中的费曼传播子可以提出来，$N\{\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4}\} = D_F(x_1-x_3)N(\phi_2\phi_4)$
由于正则排序的真空期望值都为 0，所有只有后面三个缩并 $\overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4}\} + ...$ 保留。
则

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3) \tag{6.84}$$

图示为



接下来讨论其应用，第一个 cross section example:
$\lambda\phi^4$ **理论，** $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$
考虑 $2 \to 2$ 的散射过程，

$$\hat{S} = T\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty} d^4x H_{int}^I(t)] = 1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x T[\phi^4(x)] + O(\lambda^2) \tag{6.85}$$

定义初态末态 $|p_Ap_B\rangle \to |p_1p_2\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle p_1p_2|I|p_Ap_B\rangle &= \sqrt{2E_12E_22E_A2E_B}\langle 0|a_1a_2a_A^\dagger a_B^\dagger|0\rangle \\ &= \sqrt{2E_12E_22E_A2E_B}\langle 0|a_1\{[a_2, a_A^\dagger] + a_A^\dagger a_2\}a_B^\dagger|0\rangle \\ &= 2E_A2E_B(2\pi)^6[\delta^3(\boldsymbol{p_A}-\boldsymbol{p_1})\delta^3(\boldsymbol{p_B}-\boldsymbol{p_2}) + \delta^3(\boldsymbol{p_A}-\boldsymbol{p_2})\delta^3(\boldsymbol{p_B}-\boldsymbol{p_1})]\end{aligned}$$

因为是玻色型算符，所以有两种组合方式，自由部分还是很无趣的。
图示为



特点都是非连通图。

根据

$$T[\phi^4(x)] = N[\phi^4(x)] + 6D_F(x-x)N[\phi^2(x)] + 3D_F(x-x)D_F(x-x) \tag{6.86}$$

则

$$\langle p_1 p_2|i\hat{T}|p_A p_B\rangle = -i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\langle p_1 p_2|T[\phi^4(x)]|p_A p_B\rangle \tag{6.87}$$

第一项 $\langle p_1 p_2|N[\phi^4(x)]|p_A p_B\rangle$

其中每个 $\phi(x)$ 中的正频负频部分都可以和 $|p_A\rangle$ 或 $\langle p_1|$ 缩并，例如

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(x)|p_A\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}a_p e^{-ip\cdot x}2\sqrt{E_A}a_A^\dagger|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}[a_p, a_A^\dagger]e^{-ip\cdot x}2\sqrt{E_A}|0\rangle \\ &= e^{-ip_A\cdot x}|0\rangle\end{aligned} \tag{6.88}$$

所以先可以选一个 $\phi(x)$ 和 p_A, p_B, p_1, p_2 中一个缩并，剩下的 $\phi(x)$ 和剩下的 p_A, p_B, p_1, p_2 缩并，一共有 4! 种情况。

$$\begin{aligned}-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\langle p_1 p_2|N[\phi^4(x)]|p_A p_B\rangle &= -i\lambda\int d^4x e^{-ix\cdot(p_A+p_B-p_1-p_2)} \\ &= -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2)\end{aligned}$$

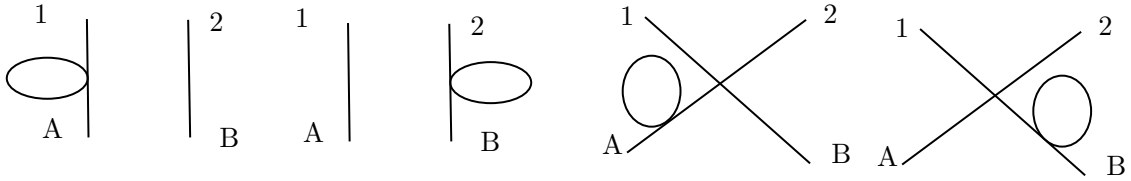
则 $im = -i\lambda$

而第二项只用两个 $N[\phi^2(x)]$，

$$\begin{aligned}T_{fi}^2 &= -i\frac{\lambda}{4!}6D_F(0)\int d^4x\langle p_1 p_2|N[\phi^2(x)]|p_A p_B\rangle \\ &= -i\frac{\lambda}{4!}2\times 6D_F(0)\int d^4x[\langle p_1|\overbrace{N[\phi(x)}\overbrace{\phi(x)]|p_A}\rangle\langle p_2|p_B\rangle + ...] \\ &= -i\frac{\lambda}{4!}2\times 6D_F(0)[\langle p_2|p_B\rangle\int d^4x e^{-i(p_1-p_A)\cdot x} + ...]\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{4!}2\times 6 = \frac{1}{2}$，即结构化因子，而 $D_F(0) = \int \frac{d^4k}{((2\pi)^4)}\frac{1}{k^2-m_i^2\epsilon}$，上面主要展示的情况就对应于第一幅图的过程。

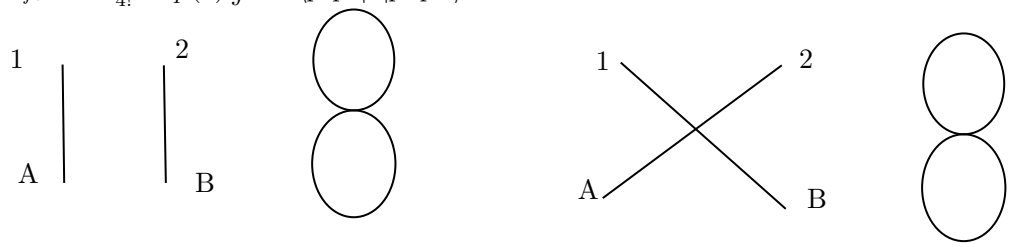
图示为



图中圆圈表示 $D_F(x-x)$，由于 $x=x$，这里还会出现一个不确定的动量，最后结果类似于向前散射两个 δ 函数的乘积，而不是一个四动量守恒 δ 函数，这一项最后并不考虑。

第三项则对应于真空泡泡图，

$T_{fi}=-i\frac{\lambda}{4!}3D_F^2(0)\int d^4x\langle p_1p_2|I|p_Ap_B\rangle$



这些图可以用来计算自由理论的真空和相互作用理论真空能量的区别 $|0\rangle\to|\Omega\rangle$，但对于计算格林函数还是不贡献。

最后代入 $\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM}=\frac{\lambda^2}{64\pi^2E_{CM}^2}$

$\sigma=\int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM}=4\pi\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM}=\frac{\lambda^2}{16\pi^2E_{CM}^2}$

但正确答案是 $\sigma=\frac{\lambda^2}{32\pi^2E_{CM}^2}$，因为末态有两个全同粒子，在相空间中积分的某个角度，粒子 1，2 交换是相同的，并不能视为两种情况。

6.8 phi 4 模型次领头阶振幅

展开到第二阶，

$$\begin{aligned}\langle p_1p_2|iT|p_Ap_B\rangle&=\frac{1}{2!}(-i\frac{\lambda}{4!})^2\langle p_1p_2|\int d^4x\int d^4yT[\phi^4(x)\phi^4(y)]|p_Ap_B\rangle\\&=\int d^4x\int d^4y\langle p_1p_2|N[\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)]|p_Ap_B\rangle\end{aligned}\tag{6.89}$$

如果考虑两组 $\phi(x)$ $\phi(y)$ 内线缩并，有 $(4\times4\times3\times3)/2=72$，除 2 的原因是有双重计数

则有

$$\int d^4x\int d^4yD_F(x-y)D_F(x-y)\langle p_1p_2|N[\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)]|p_Ap_B\rangle\tag{6.90}$$

再考虑外线缩并，$\phi(x)$ 和 p_1,p_2 缩并，$\phi(y)$ 和 p_A,p_B 缩并，四种情况。首先 $\frac{1}{2!}$ 展开带来的因子永远无需考虑，我们总可以对积分变量进行变化就得到了新的一种缩并情况，相当于变换费曼图顶角的坐标 x,y,z，本质上是一种图，变化的种数也正是 $n!$。

则

$$\langle p_1p_2|iT|p_Ap_B\rangle=(-i\frac{\lambda}{4!})^2(4\times4\times3\times3)/2\times4\int d^4x\int d^4yD_F(x-y)D_F(x-y)e^{-i(p_A+p_B)\cdot y}e^{+i(p_1+p_2)\cdot x}\tag{6.91}$$

将 $D_F(x-y)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot(x-y)}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon},D_F(x-y)=\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}e^{-ir\cdot(x-y)}\frac{i}{r^2-m^2+i\epsilon}$，代入，再交换 $\int d^4x,\int d^4p$ 的积分顺序，就可以得到每个顶点上的四动量守恒 δ 函数。

最后结果为

$$\int \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{r^2-m^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-q-r)(2\pi)^4\delta(p_A+p_B-q-r) \quad (6.92)$$

则 q,r 并不是独立的，可以利用 δ 函数积掉一个变量。

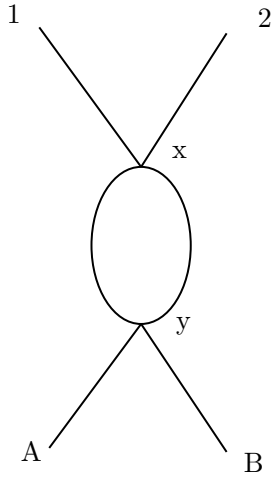
$\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-q)^2-m^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta(p_A+p_B-p_1-p_2)$

树图每一个动量被决定了，圈图则有动量未被确定，要对某个动量做积分。

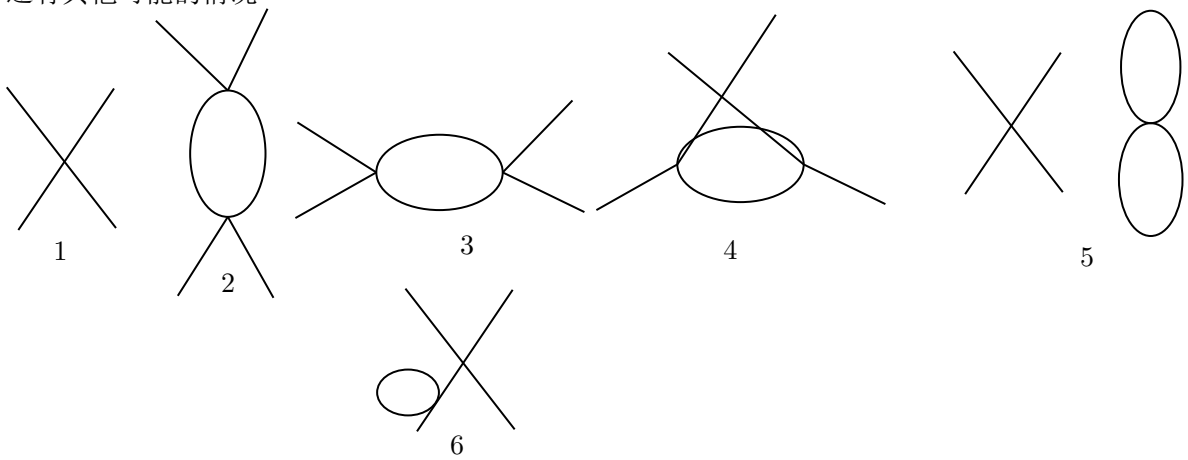
则不变振幅为

$$im=\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-q)^2-m^2+i\epsilon} \quad (6.93)$$

图示为



还有其他可能的情况



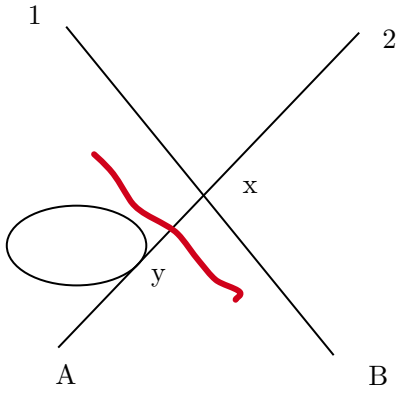
第五幅图正是真空泡泡图，可以不考虑，但第六幅图则是说明有 $\phi(x),\phi(y)$ 内线缩并和 $\phi(y),p_A$ 外线缩并，最后是剩下的 $\phi(y)$ 内线缩并，一共有 $4\times4\times3\times1$ 种可能性，然后是 $\phi(x)$ 和 p_1,p_2,p_B 缩并，有 3! 种情况。

则

$$\begin{aligned}\langle p_1p_2|iT|p_Ap_B\rangle &= \frac{1}{2!}(-i\frac{\lambda}{4!})^2\langle p_1p_2|\int d^4x\int d^4yN[\phi^4(x)\phi^4(y)]|p_Ap_B\rangle \\ &= (-i\frac{\lambda}{4!})^2 4\times4\times3\times1\times3!\int d^4x\int d^4yD_F(x-y)D_F(0)e^{+i(p_1+p_2-p_B)\cdot x}e^{-ip_A\cdot y} \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{r^2-m^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_A-q)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_B-q) \\ &= (2\pi)^4(p_1+p_2-p_B-p_A)\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}\frac{i}{r^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}|_{q=p_A}\end{aligned} \tag{6.94}$$

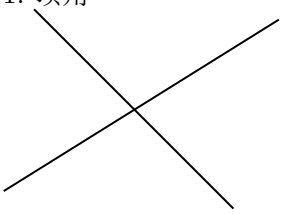
且 $p_A^2=m^2$，则 $\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\to\infty$，这样散射截面趋于无穷大，这类图相当于从无法观测的裸态到相互作用的物理态。

这类无穷大我们利用 amputation(截腿) 来处理，把这些会出现发散的部分全部截掉。



$\lambda\phi^4$ 理论的动量空间费曼规则。

1. 顶角



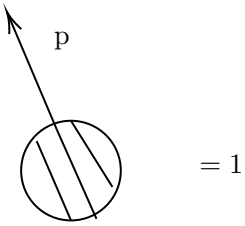
$=-i\lambda$

2. 每一个传播子 (内线)

p

$=\frac{i}{p^2-m^2+\epsilon}$

3. 每一个外线



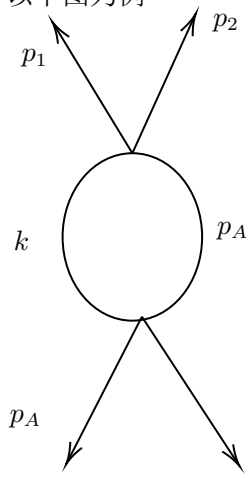
$= 1$

4. 每一个顶角强制四动量守恒。

5. 对于 under termined loop monmentum 引入圈积分 $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

6. 除以可能的对称性因子。

以下图为例



$p_A + p_B - k = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i\lambda)^2}{2} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \frac{i}{(p_A+p_B-k)^2-m^2+i\epsilon}$

所以我们计算不变振幅，需要的只是所有联通截腿的费曼图，也即 T 矩阵必须包含且只含一个四度动量守恒 δ 函数。

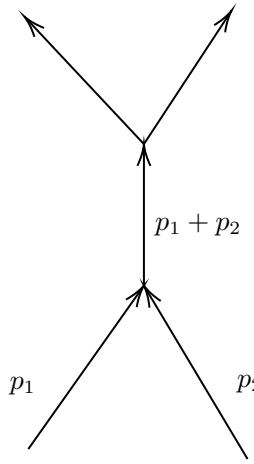
6.9 ϕ^3 模型

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \frac{g}{3!}\phi^3 \tag{6.95}$$

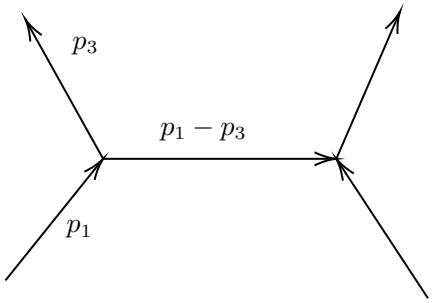
和前面一样，考虑

$$\langle 3,4|N(\phi\phi\phi)|1,2\rangle \tag{6.96}$$

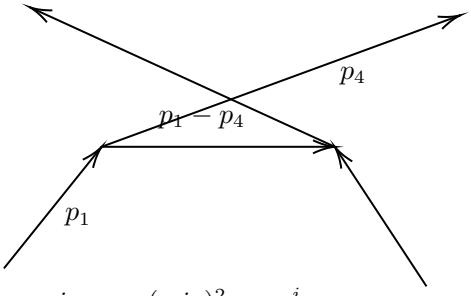
考虑下面二到二散射的几个树图对应的不变振幅。其中内线的动量都被确定了。



$im = (-ig)^2 \frac{i}{(p_1+p_2)^2-m^2}$



$im = (-ig)^2 \frac{i}{(p_1-p_3)^2-m^2}$



$im = (-ig)^2 \frac{i}{(p_1-p_4)^2-m^2}$

Mandelstam variables:

$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \geq 4m^2$

$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \leq 0$

$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \leq 0$

且 $s + t + u = \sum_{j=1}^{4} m_j^2$

6.10 标量 QED 费曼规则

考虑如下的拉式量

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= |D_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \\ &= \mathcal{L}_{CKG} + \mathcal{L}_{Max} - ieA_\mu[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi] + e^2|\phi|^2 A_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{6.97}$$

$$\pi = \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* - ieA_0\phi^* \tag{6.98}$$

对于这种场，S 算符可以直接写成 $S = T\exp[i\int d^4x \mathcal{L}_{int}^I(x)]$

因为考虑了复标量场

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_p e^{-ip\cdot x} + b_p^\dagger e^{ip\cdot x}] \tag{6.99}$$

$$\phi(x)^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_p^\dagger e^{ip\cdot x} + b_p e^{-ip\cdot x}] \tag{6.100}$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}} \sum_{\lambda=1}^{4} [\epsilon_\mu^\lambda(p) a_p^\lambda e^{-ip\cdot x} + \epsilon_\mu^{\lambda *}(p) a_p^{\lambda\dagger} e^{+ip\cdot x}] \tag{6.101}$$

内线缩并

$$\overbrace{\phi(x)\phi^{\dagger}}(y) = D_F(x-y) \tag{6.102}$$

这里的具体推导为

$$\begin{aligned}\left[\phi^{+}(x), \phi^{-}(y)^{\dagger}\right] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}}\left[a_p, a_q^{\dagger}\right]e^{-ip\cdot x}e^{ip\cdot y}\,(x_0>y_0)+\ldots(x_0<y_0)\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}\,(x_0>y_0)+\ldots(x_0<y_0)\\ &= D_F(x-y)\end{aligned} \tag{6.103}$$

这是电子的情形，同理还应有正电子

$$\begin{aligned}\left[\phi^{+\dagger}(x), \phi^{-}(y)\right] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{E_pE_q}}\left[b_p, b_q^{\dagger}\right]e^{-ip\cdot x}e^{ip\cdot y}\,(x_0>y_0)+\ldots(x_0<y_0)\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}e^{-ip\cdot(x-y)}\,(x_0>y_0)+\ldots(x_0<y_0)\\ &= D_F(x-y)\end{aligned} \tag{6.104}$$

$$\overbrace{\phi(x)\phi}(y) = 0 \tag{6.105}$$

$$\overbrace{A_\mu(x)A}_\nu(y) = D_{F\mu\nu}(x-y) \tag{6.106}$$

外线缩并

电子态:

$$\phi(x)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-ip\cdot x}|0\rangle, \langle\boldsymbol{p}|\phi^{\dagger}(x) = e^{ip\cdot x}\langle 0| \tag{6.107}$$

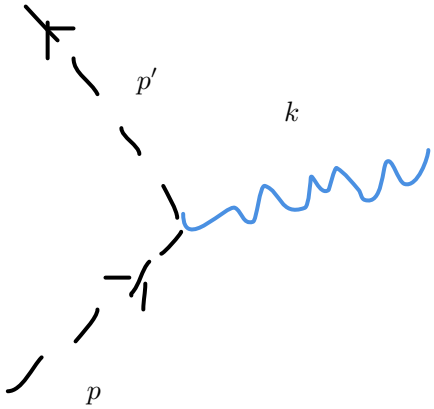
正电子态:

$$\phi(x)^{\dagger}|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-ip\cdot x}|0\rangle, \langle\boldsymbol{p}|\phi(x) = e^{ip\cdot x}\langle 0| \tag{6.108}$$

光子态：

$$A_k(x)|k,\lambda\rangle = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)e^{-ik\cdot x}|0\rangle, \langle k,\lambda|A_\mu(x) = \langle 0|\epsilon_\mu^{(\lambda)*}e^{+ik\cdot x} \tag{6.109}$$

考虑电子释放出一个光子 (这个过程可否发生？)



则有

$$\langle e^-(p')\gamma(k,\lambda)|\int d^4xeN[A_\mu(x)[\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi]]|e^-(p)\rangle \tag{6.110}$$

先将光子场缩并，得到

$e\int d^4x\epsilon_\mu^{\lambda*}(k)e^{ik\cdot x}\langle e(p')|N[\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi]|e^-(p)\rangle$

其中 ϕ 只能和 $|e^-(p)\rangle$ 缩并，ϕ^* 只能和 $\langle e^-(p')|$ 缩并。(其实这里应该写 $\phi^\dagger$ 的，因为量子化的场，写 $*$ 其实很奇怪。)

最后得到 (这里会考)

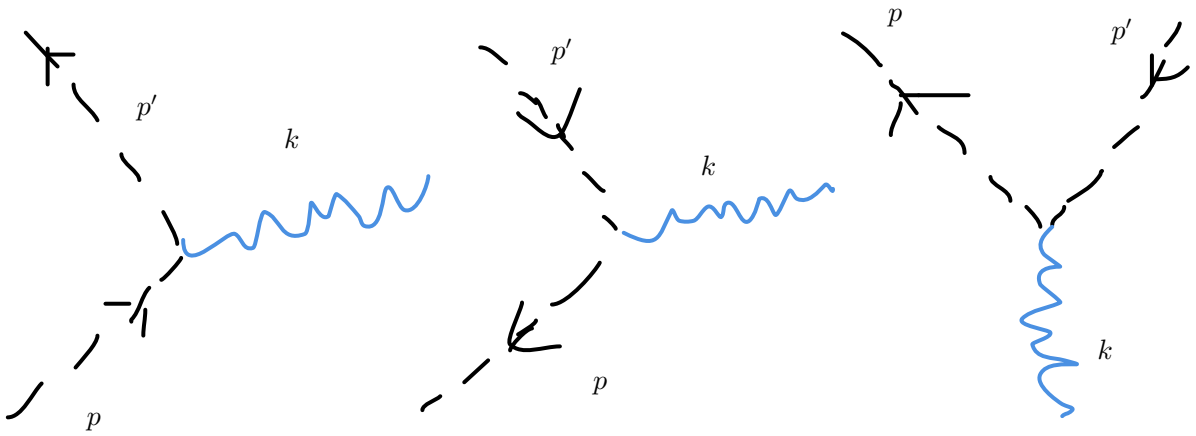
$$\begin{aligned}&=e\int d^4x\epsilon_\mu^{\lambda*}(k)e^{ik\cdot x}[e^{ip'\cdot x}(-ip^\mu)e^{-ip\cdot x}-(-ip'^\mu)e^{ip'\cdot x}e^{-ip\cdot x}\langle 0|0\rangle]\\&=(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k)\epsilon_\mu^{\lambda*}(k)ie[-p^\mu-p'^\mu]\end{aligned} \tag{6.111}$$

如果是正电子，由于缩并形式的改变，最后计算出的费曼规则为 $-ie[p^\mu+p'^\mu]$，即

$$\begin{aligned}&\langle e^-(p')e^-(p)|\int d^4xeN[A_\mu(x)[\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi]]|\gamma(k,\lambda)\rangle\\&=\int d^4xe\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,e^{-ik\cdot x}\langle e^-(p')e^-(p)|N[\phi^*\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi^*)\phi]]|0\rangle\\&=\int d^4xe\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\,e^{-ik\cdot x}\left(e^{ip\cdot x}(ip'^\mu)\,e^{ip'\cdot x}-(ip^\mu)\,e^{ip\cdot x}e^{ip'\cdot x}\right)\\&=(2\pi)^4\,\delta(p'+p-k)\,ie\,(p'^\mu-p^\mu)\end{aligned} \tag{6.112}$$

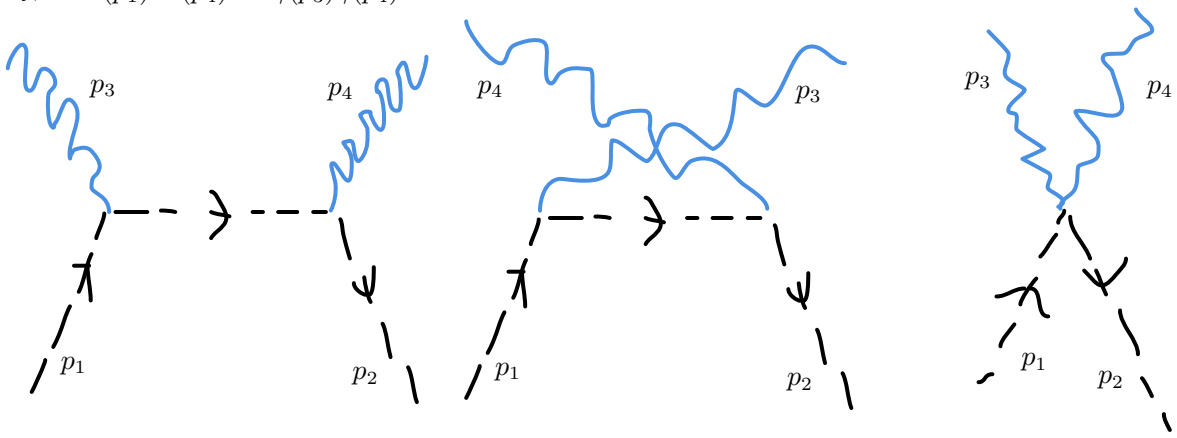
如果是从光子变成正负电子，费曼规则为 $ie[-p^\mu+p'^\mu]$

引入一个概念 particle flow arrow 粒子流箭头，反粒子和粒子的流向是互逆的，箭头方向是连续的，原因是电荷守恒，每个顶角都有，保证电荷守恒。



所以最后可以写成一个统一的费曼规则，我们只要根据粒子的运动方向和粒子流方向的同向和异向来决定 $-ie(\pm p^\mu \pm p'^\mu)$ 的形式，例如两个正电子，就都是负号。

考虑 $e^-(p_1)e^+(p_4) \to \gamma(p_3)\gamma(p_4)$



以上是几个拓扑不等价的费曼图，都是 e^2 的。

对于 t 道图，$im_t = (-ie)(p_1^\mu + p_1^\mu - p_3^\mu)\epsilon_\mu^*(p_3)\frac{i}{(p_1-p_3)^2-m^2+i\epsilon}(-ie)(p_1^\mu - p_3^\mu - p_2^\mu)\epsilon_\mu^*(p_4)$

Ward 等式

含有光子振幅总可以写成 $M = M^\mu \epsilon_\mu(k)$，且 $M^\mu k_\mu = 0$，本质上是流守恒。

考虑 Lorentz 变换，$M'^\mu \epsilon'_\mu(k) = M^\mu \epsilon_\mu(k) + (SM)\cdot(SK) = M^\mu \epsilon_\mu(k) + M^\mu k_\mu$，额外项来自于小群诱导表示 (Schwartz p125-128)，如果要求 $M^\mu \epsilon_\mu(k)$ Lorentz 不变，则 $M^\mu k_\mu = 0$。

6.11 费米子的费曼规则

费米子在时序算符 T 的作用下有如下形式

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = \psi(x)\bar{\psi}(y), x^0 > y^0 or -\bar{\psi}(y)\psi(x), x^0 < y^0 \tag{6.113}$$

费米子的费曼传播子定义为

$$S_F(x-y)\int\frac{dp^4}{(2\pi)^4}\frac{i\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon}=\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle \tag{6.114}$$

考虑 $t_3>t_1>t_4>t_1$，则 $T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4)=(-1)^3T[\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2]$
相应的对于产生湮灭算符的正则排序

$$N(a_pa_qa_r^\dagger)=(-1)^2a_r^\dagger a_pa_q \tag{6.115}$$

最简单的 Wick 定理

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]=N[\psi(x)\bar{\psi}(y)]+\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y) \tag{6.116}$$

其中

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)&=\begin{cases}\left\{\psi^+(x),\bar{\psi}^-(y)\right\} & x^0>y^0\\ -\left\{\bar{\psi}^+(y),\bar{\psi}^-(x)\right\} & y^0>x^0\end{cases}\\&=\begin{cases}\langle 0|\left\{\psi^+(x),\bar{\psi}^-(y)\right\}|0\rangle & x^0>y^0\\ -\langle 0|\left\{\bar{\psi}^+(y),\bar{\psi}^-(x)\right\}|0\rangle & y^0>x^0\end{cases}\\&=\begin{cases}\langle 0|a_pa_p^\dagger|0\rangle & x^0>y^0\\ -\langle 0|b_pb_p^\dagger|0\rangle & y^0>x^0\end{cases}\\&=\begin{cases}\langle 0|\left(a_p+b_p^\dagger\right)\left(b_p+a_p^\dagger\right)|0\rangle & x^0>y^0\\ -\langle 0|\left(b_p+a_p^\dagger\right)\left(a_p+b_p^\dagger\right)|0\rangle & y^0>x^0\end{cases}\\&=\begin{cases}\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & x^0>y^0\\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & y^0>x^0\end{cases}\\&=S_F(x-y)\end{aligned} \tag{6.117}$$

6.12 Yukawa 模型

Yakawa 的哈密顿量为

$$H=H_{Dirac}+H_{KG}+\int d^4xg\bar{\psi}\Gamma\psi\phi,\Gamma=I\,or\,i\gamma_5 \tag{6.118}$$

外线缩并：

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s(a_p^su^s(p)e^{-ip\cdot x}+b_p^{s\dagger}v^s(p)e^{ip\cdot x}) \tag{6.119}$$

$$\bar{\psi}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s(b_p^s\bar{v}^s(p)e^{-ip\cdot x}+a_p^{s\dagger}\bar{u}^s(p)e^{ip\cdot x}) \tag{6.120}$$

和电子缩并：

$$\begin{aligned}\psi(x)|\boldsymbol{p},s\rangle&=\psi(x)\sqrt{2E_q}a_p^{s\dagger}|0\rangle\\&=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\sqrt{2E_p}\{a_q^r,a_p^{s\dagger}\}u^r(p)e^{-ip\cdot x}|0\rangle\\&=e^{-ip\cdot x}u^s(p)|0\rangle\end{aligned} \tag{6.121}$$

$$\langle\boldsymbol{p},s|\bar{\psi}(x)=\langle 0|\bar{u}^s(p)e^{ip\cdot x} \tag{6.122}$$

和正电子缩并：

$$\bar{\psi}(x)|\boldsymbol{p},s\rangle=e^{-ip\cdot x}\bar{v}^s(p)|0\rangle \tag{6.123}$$

$$\langle\boldsymbol{p},s|\psi(x)=\langle 0|v^s(p)e^{ip\cdot x} \tag{6.124}$$

考虑电子间的弹性散射

$$e^-(p)+e^-(k)\to e^-(p')+e^-(k') \tag{6.125}$$

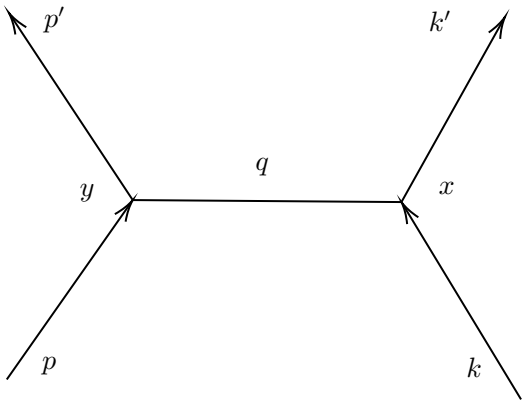
展开到第二阶

$$\langle\boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xT[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x\phi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y\phi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle \tag{6.126}$$

其中由于末态没有 ϕ_x,ϕ_y，这两个场只能内态缩并。
则有

$$\langle\boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xN[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle D_F(x-y) \tag{6.127}$$

假定 $\bar{\psi}_x,\bar{\psi}_y$ 分别和 p',k' 缩并，ψ_x,ψ_y 分别和 p,k 缩并，如下图所示。



$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xN[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle D_F(x-y)\\
&=\langle \boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xN[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle\int d^4q\frac{1}{q^2-m_\phi^2+i\epsilon}e^{-iq\cdot(x-y)}\\
&=(-ig)^2\langle \boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|\int d^4xN[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle\int d^4q\frac{1}{q^2-m_\phi^2+i\epsilon}e^{-iq\cdot(x-y)}\\
&=(-ig)^2\int d^4xd^4y\langle \boldsymbol{p'},\boldsymbol{k'}|N[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}\rangle\int d^4q\frac{1}{q^2-m_\phi^2+i\epsilon}e^{-iq\cdot(x-y)}\\
&=(-ig)^2\int d^4xd^4y\bar{u}\left(x\right)\Gamma u\left(x\right)e^{-ik\cdot x}e^{ik'\cdot x}\bar{u}\left(y\right)\Gamma u\left(y\right)e^{-ip\cdot y}e^{ip'\cdot y}\int d^4q\frac{1}{q^2-m_\phi^2+i\epsilon}e^{-iq\cdot(x-y)}\\
&=(-ig)^2\int d^4q\int d^4xd^4ye^{-ik\cdot x}e^{ik'\cdot x}e^{-iq\cdot(x-y)}e^{-ip\cdot y}e^{ip'\cdot y}\bar{u}\left(x\right)\Gamma u\left(x\right)\bar{u}\left(y\right)\Gamma u\left(y\right)\frac{1}{q^2-m_\phi^2+i\epsilon}\\
&=(-ig)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m_\phi^2}(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)(2\pi)^4\delta^4(k'-k-q)\bar{u}(p')\Gamma u(p)\bar{u}(k')\Gamma u(k)\\
&=(2\pi)^4\delta^4(p'+k'-p-k)\frac{i(-ig)^2}{(p-p')^2-m_\phi^2}\bar{u}(p')\Gamma u(p)\bar{u}(k')\Gamma u(k)
\end{aligned}
\tag{6.128}
$$

则 $im=\frac{i(-ig)^2}{(p-p')^2-m_\phi^2}\bar{u}(p')\Gamma u(p)\bar{u}(k')\Gamma u(k)$，记住 m 是几率幅，而不是矩阵，所以 $\bar{u}$ 必须在前。

例子 2：

$$e^+(p')e^-(p)\to\phi(k')\phi(k) \tag{6.129}$$

$$\langle \boldsymbol{k'},\boldsymbol{k}|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xT[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x\phi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y\phi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}\rangle \tag{6.130}$$

则假定 ϕ_x,ϕ_y 分别和 k',k 缩并，

$$\langle 0|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xT[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}\rangle e^{ik\cdot y}e^{ik'\cdot x} \tag{6.131}$$

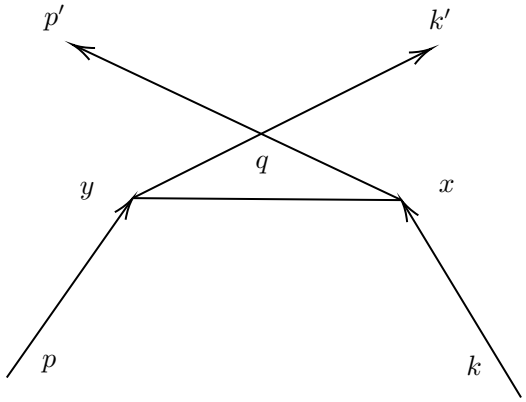
假设 $\psi_x,\bar{\psi}_y$ 做内线缩并，$\bar{\psi}_x,\psi_y$ 和 p',p 缩并。

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4xT[\bar{\psi}_x\Gamma\psi_x(-ig)\int d^4y\bar{\psi}_y\Gamma\psi_y]|\boldsymbol{p},\boldsymbol{p'}\rangle e^{ik\cdot y}e^{ik'\cdot x}\\
&=(-ig)^2\int\int d^4xd^4ye^{ik\cdot y}e^{ik'\cdot x}\bar{v}(p')e^{-ip'\cdot x}\Gamma S_F(x-y)\Gamma u(p)e^{-ip\cdot y}\langle 0|0\rangle\\
&=(-ig)^2\int\int d^4xd^4ye^{ik\cdot y}e^{ik'\cdot x}\bar{v}(p')e^{-ip'\cdot x}\Gamma\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}e^{-iq\cdot(x-y)}\Gamma u(p)e^{-ip\cdot y}\langle 0|0\rangle \qquad (6.132)\\
&=(-ig)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\bar{v}(p')\Gamma\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\epsilon}\Gamma u(p)(2\pi)^4\delta^4(k'-p'-q)(2\pi)^4\delta^4(k+q-p)\\
&=(2\pi)^4\delta^4(k+k'-p-p')(-ig)^2\bar{v}(p')\Gamma\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}\Gamma u(p)
\end{aligned}
$$

中间虚粒子的动量方向必须和粒子流的方向相同,写费曼规则时逆着费米子流的方向,外线为 $u,v,\bar{u},\bar{v}$, 顶点为 $-ig\Gamma$，内线传播子为动量空间的费曼传播子。

刚才只讨论了两电子散射 $e^-(p)+e^-(k)\to e^-(p')+e^-(k')$ 一个图，接下来研究其他图之间的区别，这个过程会体现出 Dirac-Fermi 统计。

比如下面这副图



上面的过程，我们可以形式地写成

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|a_{k'}a_{p'}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\bar{\psi}(y)\Gamma\psi(y)a_k^\dagger a_p^\dagger|0\rangle\\
&\qquad=\langle 0|a_{k'}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)a_{p'}a_k^\dagger\bar{\psi}(y)\Gamma\psi(y)a_p^\dagger|0\rangle \qquad (6.133)\\
&\qquad=(-1)\langle 0|a_{k'}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)a_k^\dagger a_{p'}\bar{\psi}(y)\Gamma\psi(y)a_p^\dagger|0\rangle
\end{aligned}
$$

即末态的缩并交换了一下，相当于交换了 p',k' 两个费米子，相应地不变振幅也存在一个正负号之差。

如果 Wick 定理中处理

$$(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_w \qquad (6.134)$$

假设 ψ_x 和 $\bar{\psi}_z$,ψ_z 和 $\bar{\psi}_y$,ψ_y 和 $\bar{\psi}_w$ 缩并，我们想交换顺序让缩并看起来美观一些，其中 $(\bar{\psi}\psi)_x$ 整体是玻色型算符，可以直接交换。

有时还要处理

$N[(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_w]$，其中每个 $\psi,\bar{\psi}$ 都和临近的 $\psi,\bar{\psi}$ 缩并，但最后一个 ψ_w 和 $\bar{\psi}_x$ 缩并，相当于一个费米子圈。

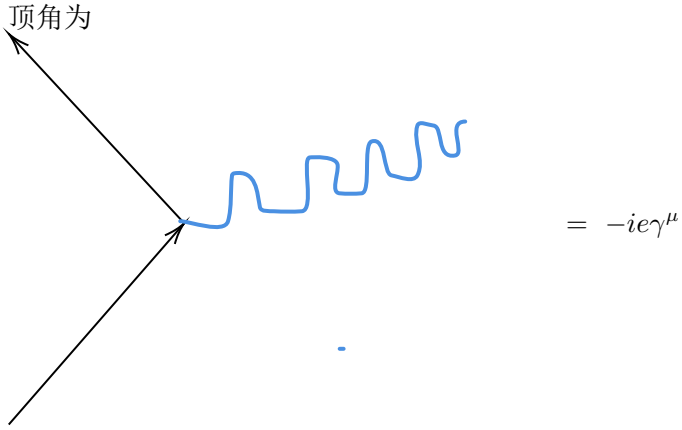
利用 $Tr[AB]=Tr[BA]$，所以只要保证 AB 为一个数，则 $Tr[BA]$ 也为一个数，所以我们只需要加上 $-Tr$(负号来自于将 ψ_w 交换位置)，就可以保证我们最后得到结果都是一个数。

6.13 QED 费曼规则

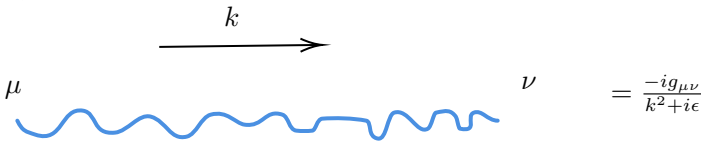
QED 相互作用项为

$$V=\int d^3xe\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{6.135}$$

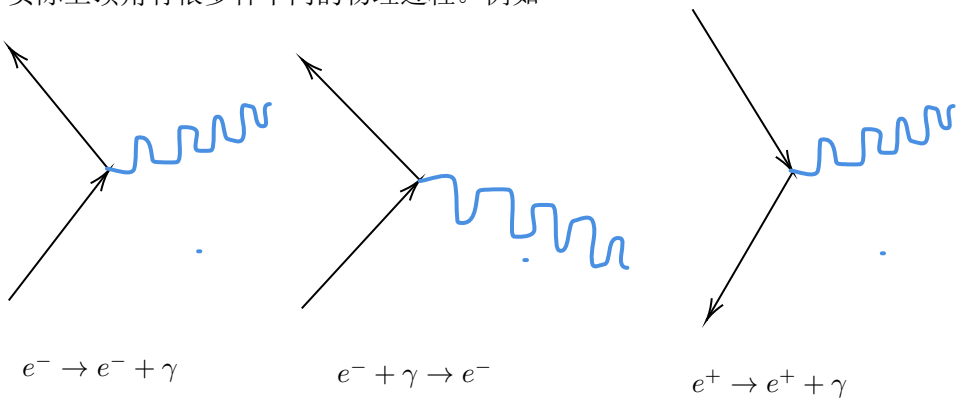
顶角为



传播子为



实际上顶角有很多种不同的物理过程。例如



$e^-\to e^-+\gamma$ $\quad$ $e^-+\gamma\to e^-$ $\quad$ $e^+\to e^++\gamma$

考虑

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}^{e,\mu}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Max} + \mathcal{L}_{int} \tag{6.136}$$

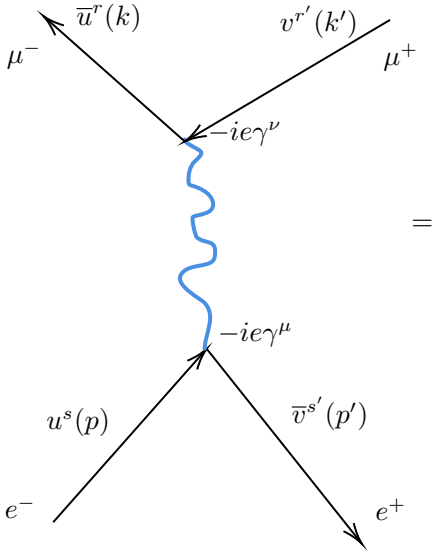
其中

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}_e\gamma^\rho\psi_e A_\rho + e\bar{\psi}_\mu\gamma^\nu\psi_\mu A_\nu \tag{6.137}$$

考虑 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射过程，则需要展开到第二阶，即

$$\frac{i^2}{2!}\int d^4x d^4y T[\mathcal{L}^I_{int}(x)\mathcal{L}^I_{int}(y)] \tag{6.138}$$

如下图所示，注意读的时候要逆着费米线的顺序读，比如最开始读正电子线，



$$= \overline{v}^{s'}(p')\left(-ie\gamma^\mu\right)u^s(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}\overline{u}^r(k)\left(-ie\gamma^\nu\right)v^{r'}(k')$$

我们的目标是得到一个截面，不变振幅为

$$m = \frac{e^2}{q^2}[\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)][\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')] \tag{6.139}$$

由于我们要处理 $|m|^2 = mm^*$。由于 m 本质为一个数，则

$$\begin{aligned}(\bar{v}\gamma^\mu u)^* &= (\bar{v}\gamma^\mu u)^\dagger \\ &= u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(v^\dagger\gamma^0)^\dagger \\ &= u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^{0\dagger}v \\ &= u^\dagger\gamma^0\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^{0\dagger}v^\dagger \\ &= \bar{u}\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^{0\dagger}v \\ &= \bar{u}\gamma^\mu v\end{aligned} \tag{6.140}$$

则 $|m|^2 = mm^* = \frac{e^4}{q^4}[\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')][\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)]$
实际上实验家感兴趣的是对初态自旋求和，末态的极化求平均的结果，即非极化的散射振幅

$$\frac{1}{2}\sum_{s}\frac{1}{2}\sum_{s'}\sum_{r}\sum_{r'}|m|^2 \tag{6.141}$$

再利用第 4 章的自旋求和公式，为了方便改变顺序，利用 Tr 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{spin}|m|^2 &= \frac{e^4}{4q^4}\sum_{spin}Tr[v(p')\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu]Tr[u(k)\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma^\nu] \\ &= \frac{e^4}{4q^4}\sum_{spin}Tr[(\not{p}'-m_e)\gamma^\mu(\not{p}+m_e)\gamma^\nu]Tr[(\not{k}+m_\mu)\gamma^\mu(\not{k}'-m_\mu)\gamma^\nu]\end{aligned} \tag{6.142}$$

在具体计算这个式子之前还要引入一些技巧

6.13.1 γ 矩阵求迹

首先有

$$\begin{aligned}tr\left[\gamma^\mu\right] &= tr\left[\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right] \\ &= tr\left[-\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\right] \\ &= -tr\left[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\right] \\ &= -tr\left[\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\right] \\ &= -tr\left[\gamma^\mu\right] \\ &= 0\end{aligned} \tag{6.143}$$

以及两个 γ 矩阵相乘求迹。

$$\begin{aligned}tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] &= \frac{1}{2}tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]+\frac{1}{2}tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] \\ &= \frac{1}{2}tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]+\frac{1}{2}tr\left[\gamma^\nu\gamma^\mu\right] \\ &= \frac{1}{2}tr\left[\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\right] \\ &= \frac{1}{2}tr\left[2g^{\mu\nu}I_{4\times4}\right] \\ &= 4g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.144}$$

对于奇数个 γ 矩阵相乘求迹，其中偶数个 γ 矩阵总可以通过反对易关系化为对一系列单位矩阵，得到的系数并不影响求迹，剩下的 γ^μ 求迹一定为 0，则奇数个 γ 矩阵相乘求迹为 0。

而对于 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\begin{aligned} tr\left[\gamma^5\right] &= tr\left[\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right] \\ &= -tr\left[\gamma^0\gamma^5\gamma^0\right] \\ &= -tr\left[\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right] \\ &= -tr\left[\gamma^5\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.145}$$

这样我们就可以得到了剩下的 6 个和 8 个 γ 矩阵求迹的结果了

$$\begin{aligned} tr\left(\gamma^i\gamma^i\gamma^5\right) &= -tr\left(\gamma^5\right) = 0 \\ tr\left(\gamma^0\gamma^i\gamma^5\right) &= tr\left(\gamma^0\gamma^i i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\ &= tr\left(-\gamma^i\gamma^0 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\ &= tr\left(-\gamma^i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\ &= 4\left(g^{i1}g^{23} - g^{i2}g^{13} + g^{i3}g^{12}\right) \\ &= 0 \\ tr\left(\gamma^i\gamma^j i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) &= tr\left(i\gamma^0\gamma^i\gamma^j\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\ i = 1, j = 2 \\ &= tr\left(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\ &= -tr\left(i\gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^3\right) \\ &= 0 \\ tr\left(\gamma^i\gamma^j i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) &= \pm tr\left(i\gamma^0\gamma^k\right)(k \neq i \neq j) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.146}$$

注意 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 的正负和置换的奇偶性相关，显然对于长度为 4 的轮换，它能拆成 5 个对换，为奇置换。

$$
\begin{aligned}
tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\right) &= itr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\right) \\
\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2, \sigma = 3 & \\
&= itr\left(\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\right) \\
&= itr\left(\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{3}\right) \\
&= -itr\left(I_{4\times 4}\right) \\
&= -4i \\
tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\right) &\to a^{\mu\nu\rho\sigma} \\
a^{\mu\nu\rho\sigma} &= -a^{\nu\rho\sigma\mu} \\
a^{\mu\mu\rho\sigma} &= 0 \\
a^{\nu\mu\rho\sigma} &= -a^{\mu\nu\rho\sigma} \\
a^{\nu\mu\sigma\rho} &= a^{\mu\nu\rho\sigma} \\
a^{\mu\nu\rho\sigma} &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}
\tag{6.147}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \frac{1}{2}g_{\nu\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right\} \\
&= g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \\
&= 4
\end{aligned}
\tag{6.148}
$$

有了这些公式后，可以得到

$$\begin{aligned}
tr\left[\left(p'^{\rho}\gamma_{\rho}-m_e\right)\gamma^{\mu}\left(p^{\sigma}\gamma_{\sigma}+m_e\right)\gamma^{\nu}\right] &= tr\left[\left(p'^{\rho}\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}-m_e\gamma^{\mu}\right)\left(p^{\sigma}\gamma_{\sigma}+m_e\right)\gamma^{\nu}\right] \\
&= tr\left[\left(p'^{\rho}\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}p^{\sigma}\gamma_{\sigma}-m_e\gamma^{\mu}p^{\sigma}\gamma_{\sigma}+m_ep'^{\rho}\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}-m_e^2\gamma^{\mu}\right)\gamma^{\nu}\right] \\
&= tr\left[\left(p'^{\rho}\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}p^{\sigma}\gamma_{\sigma}-m_e\gamma^{\mu}p^{\sigma}\gamma_{\sigma}+m_ep'^{\rho}\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}\right)\gamma^{\nu}\right]-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= p'^{\rho}p^{\sigma}tr\left(\gamma_{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{\nu}\right)-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= p'^{\rho}p^{\sigma}tr\left(g_{\rho\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}g_{\sigma\beta}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}\right)-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= p'^{\rho}p^{\sigma}g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}tr\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}\right)-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= p'_{\alpha}p_{\beta}tr\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\nu}\right)-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= 4p'_{\alpha}p_{\beta}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}-g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}+g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\right)-4g^{\mu\nu}m_e^2 \\
&= 4\left[p'^{\mu}p^{\nu}+p'^{\nu}p^{\mu}-g^{\mu\nu}\left(p\cdot p'+m_e^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.149}$$

以及，注意 m_μ 的下标志表示 μ 粒子。

$$tr\left[\left(k'^{\rho}\gamma_{\rho}+m_{\mu}\right)\gamma_{\mu}\left(k^{\sigma}\gamma_{\sigma}-m_{\mu}\right)\gamma_{\nu}\right]=4\left[k'_{\mu}k_{\nu}+k'_{\nu}k_{\mu}-g_{\mu\nu}\left(k\cdot k'+m_{\mu}^2\right)\right] \tag{6.150}$$

令 $m_e=0$，可以得到散射振幅为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4}tr\left[\left(p'^{\rho}\gamma_{\rho}-m_e\right)\gamma^{\mu}\left(p^{\sigma}\gamma_{\sigma}+m_e\right)\gamma^{\nu}\right]tr\left[\left(k'^{\rho}\gamma_{\rho}+m_{\mu}\right)\gamma_{\mu}\left(k^{\sigma}\gamma_{\sigma}-m_{\mu}\right)\gamma_{\nu}\right] \\
&= \frac{4e^4}{q^4}\left[\left(p'^{\mu}p^{\nu}+p'^{\nu}p^{\mu}\right)-g^{\mu\nu}\left(p\cdot p'\right)\right]\left[\left(k'_{\mu}k_{\nu}+k'_{\nu}k_{\mu}\right)-g_{\mu\nu}\left(k\cdot k'+m_{\mu}^2\right)\right] \\
&= \frac{4e^4}{q^4}\begin{bmatrix}2\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+2\left(p'\cdot k\right)\left(p\cdot k'\right)\\-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)\\-\left(p'^{\mu}p^{\nu}+p'^{\nu}p^{\mu}\right)g_{\mu\nu}\left(k\cdot k'+m_{\mu}^2\right)\\+4\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'+m_{\mu}^2\right)\end{bmatrix} \\
&= \frac{4e^4}{q^4}\begin{bmatrix}2\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+2\left(p'\cdot k\right)\left(p\cdot k'\right)\\-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)\\-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)-\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'\right)-2\left(p\cdot p'\right)m_{\mu}^2\\+4\left(p\cdot p'\right)\left(k\cdot k'+m_{\mu}^2\right)\end{bmatrix} \\
&= \frac{4e^4}{q^4}\left(2\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+2\left(p'\cdot k\right)\left(p\cdot k'\right)+2\left(p\cdot p'\right)m_{\mu}^2\right) \\
&= \frac{8e^4}{q^4}\left(\left(p\cdot k\right)\left(p'\cdot k'\right)+\left(p'\cdot k\right)\left(p\cdot k'\right)+\left(p\cdot p'\right)m_{\mu}^2\right)
\end{aligned} \tag{6.151}$$

假定两电子运动方向沿着 z 轴，则有

$$
\begin{aligned}
p &= (E, E\boldsymbol{z}) \\
p' &= (E, -E\boldsymbol{z}) \\
k &= (E, \boldsymbol{k}) \\
k' &= (E, -\boldsymbol{k}) \\
\boldsymbol{k} \cdot E\boldsymbol{z} &= E|\boldsymbol{k}| \cos\theta \\
q^2 &= (p + p')^2 = 4E^2 \\
p \cdot p' &= 2E^2 \\
p \cdot k &= p' \cdot k' = E^2 - E|\boldsymbol{k}| \cos\theta \\
p \cdot k' &= p' \cdot k = E^2 + E|\boldsymbol{k}| \cos\theta
\end{aligned}
\tag{6.152}
$$

代入散射振幅

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4}\left((p\cdot k)(p'\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k') + (p\cdot p')m_\mu^2\right) \\
&= \frac{8e^4}{q^4}\left((p\cdot k)(p'\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k') + (p\cdot p')m_\mu^2\right) \\
&= \frac{8e^4}{16E^4}\left(\left(E^2 - E|\boldsymbol{k}|\cos\theta\right)^2 + \left(E^2 + E|\boldsymbol{k}|\cos\theta\right)^2 + 2E^2 m_\mu^2\right) \\
&= \frac{e^4}{2E^4}\left(2E^4 + 2\left(E|\boldsymbol{k}|\cos\theta\right)^2 + 2E^2 m_\mu^2\right) \\
&= e^4\left(1 + \frac{|\boldsymbol{k}|^2\cos^2\theta}{E^2} + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \\
&= e^4\left(1 + \frac{\left(E^2 - m_\mu^2\right)\cos^2\theta}{E^2} + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \\
&= e^4\left(\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right)
\end{aligned}
\tag{6.153}
$$

最后再积分求出总散射截面

$$
\begin{aligned}
d\sigma(\alpha\to\beta) &= \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|}|m_{\beta\alpha}|^2\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\frac{|\boldsymbol{k}|}{E_{CM}}\\
\frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} &= \frac{1}{16\pi^2(2E_1)(2E_2)|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}|}\frac{|\boldsymbol{k}|}{E_{CM}}|m_{\beta\alpha}|^2\\
E_1 &= E_2 = \frac{1}{2}E_{cm}\\
|\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}| &= 2\frac{p_1}{E} = 2\\
\frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{|\boldsymbol{k}|}{16\pi^2E_{cm}}\frac{1}{4}\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2\\
&= \frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{16\pi^2E_{cm}}e^4\left(\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)+\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right)\\
\sigma &= \int_1^{-1}-d\cos\theta d\phi\frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{16\pi^2E_{cm}}e^4\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)+\int_1^{-1}-\cos^2\theta d\cos\theta d\phi\frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{16\pi^2E_{cm}}e^4\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\\
&= 4\pi\frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{16\pi^2E_{cm}}e^4\left(1+\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)+\frac{4\pi}{3}\frac{1}{2E_{cm}^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{16\pi^2E_{cm}}e^4\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\\
&= \frac{4\pi}{3E_{cm}^2}\frac{e^4}{16\pi^2}\frac{\sqrt{E^2-m_\mu^2}}{E}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\\
&= \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)
\end{aligned}
\tag{6.154}
$$

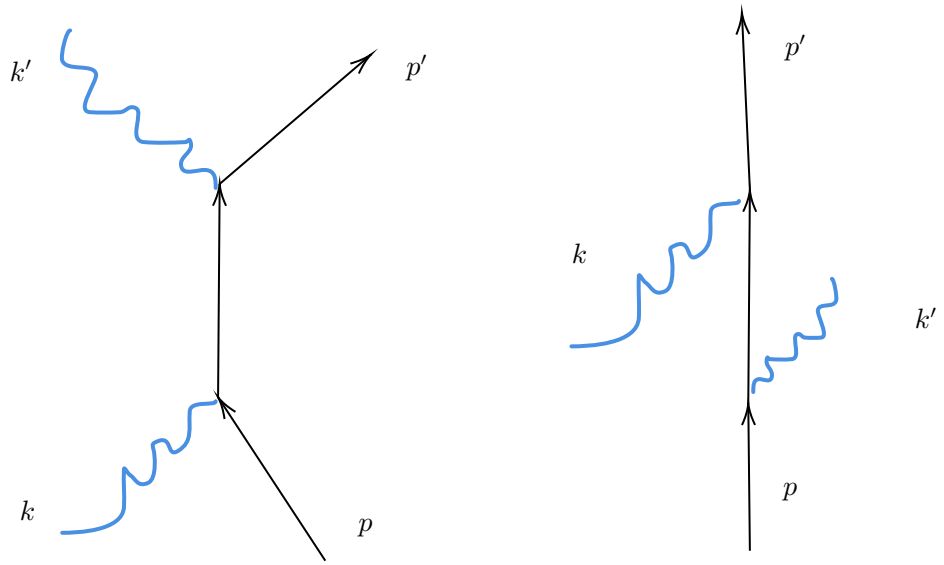
对于散射截面，在高能极限 $E >> m_\mu$ 下，

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2}(1+\cos^2\theta) \tag{6.155}
$$

对 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2}(1+\cos^2\theta)$ 积分，得到 $\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}$

康普顿散射

考虑初态末态有光子的过程，例如康普顿散射。



相应的不变振幅为

$$im=\bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu})\epsilon_{\mu}^{*}(k')\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(-ie\gamma^{\nu})\epsilon_{\nu}(k)u(p)+\bar{u}(p')(-ie\gamma^{\nu})\epsilon_{\nu}(k')\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}(-ie\gamma^{\mu})\epsilon_{\mu}^{*}(k)u(p) \tag{6.156}$$

且满足之前提到的 Ward 等式 $M^{\mu}k_{\mu}=0$。

我们可以具体验证 Ward 等式

$$\begin{aligned}
iM&=-ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')\epsilon_{\nu}(k)\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left(\not{p}+\not{k}+m\right)\gamma^{\nu}}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{\gamma^{\nu}\left(\not{p}-\not{k}'+m\right)\gamma^{\mu}}{\left(p-k'\right)-m^2}\right]u\left(p\right)\\
iM^{\nu}k_{\nu}&=-ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')k_{\nu}\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left(\not{p}+\not{k}+m\right)\gamma^{\nu}}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{\gamma^{\nu}\left(\not{p}-\not{k}'+m\right)\gamma^{\mu}}{\left(p-k'\right)-m^2}\right]u\left(p\right)\\
p-k'&=p'-k\\
iM^{\nu}k_{\nu}&=-ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')k_{\nu}\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left(\not{p}+\not{k}+m\right)\gamma^{\nu}}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{\gamma^{\nu}\left(\not{p}'-\not{k}+m\right)\gamma^{\mu}}{\left(p'-k\right)-m^2}\right]u\left(p\right)\\
iM^{\nu}k_{\nu}&=-ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left(\not{p}+\not{k}+m\right)\not{k}}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{\not{k}\left(\not{p}'-\not{k}+m\right)\gamma^{\mu}}{\left(p'-k\right)-m^2}\right]u\left(p\right)
\end{aligned} \tag{6.157}$$

再利用

$$\begin{aligned}
\bar{u}\left(p\right)\left(\not{p}-m\right)&=0\\
\left(\not{p}-m\right)u\left(p\right)&=0
\end{aligned} \tag{6.158}$$

代入上式得到

$$
\begin{aligned}
iM^{\nu}k_{\nu} &= -ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left(\not{p}+\not{k}+m\right)\left(\not{p}+\not{k}-m\right)}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{-\left(\not{p}'-\not{k}\ -m\right)\left(\not{p}'-\not{k}+m\right)\gamma^{\mu}}{\left(p'-k\right)-m^2}\right]u\left(p\right)\\
iM^{\nu}k_{\nu} &= -ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')\bar{u}\left(p'\right)\left[\frac{\gamma^{\mu}\left[\left(p+k\right)^2-m^2\right]}{\left(p+k\right)^2-m^2}+\frac{-\left[\left(p'-k\right)-m^2\right]\gamma^{\mu}}{\left(p'-k\right)-m^2}\right]u\left(p\right)\\
iM^{\nu}k_{\nu} &= -ie^2\epsilon_{\mu}^{*}(k')\bar{u}\left(p'\right)\left[\gamma^{\mu}-\gamma^{\mu}\right]u\left(p\right)\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{6.159}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\not{p}\not{p} &= p_{\mu}p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=\frac{1}{2}\left(p_{\mu}p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+p_{\nu}p_{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(p_{\mu}p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+p_{\mu}p_{\nu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(p_{\mu}p_{\nu}\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\}\right)\\
&= p_{\mu}p_{\nu}g^{\mu\nu}\\
&= p^2
\end{aligned}
\tag{6.160}
$$

还要做 $|m|^2$ 以及自旋求和，但是需要处理对光子的极化求和，$\sum\epsilon_{\mu}^{*}\epsilon_{\nu}=?$
之前的极化求和公式为

$$
\sum_{\lambda=\pm1}\epsilon^{\lambda i}\epsilon^{\lambda j}=\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2}
\tag{6.161}
$$

这个公式很复杂，但是 Ward 等式成立，该求和可以得到简化，替换为 $g^{\mu\nu}$。
例如考虑有一个光子，振幅为 $im=iM^{\mu}(k)\epsilon_{\mu}^{*}(k)$
则 $\sum|\epsilon_{\mu}^{*}(k)M^{\mu}(k)|^2=\sum\limits_{polar}\epsilon_{\mu}^{*}\epsilon_{\nu}M^{\mu}(k)M^{\nu*}(k)$
出于简单考虑，$k^{\mu}=(k,0,0,k),\epsilon_1^{\mu}=(0,1,0,0),\epsilon_2^{\mu}=(0,0,1,0).k\cdot\epsilon=0$
则 $\sum|\epsilon_{\mu}^{*}(k)M^{\mu}(k)|^2=|M^1(k)|^2+|M^2(k)|^2$
又 $k_{\mu}M^{\mu}(k)=0\rightarrow kM^0(k)=kM^3(k)$
则可以加入 $0=|M^3(k)|^2-|M^0(k)|^2$，得到

$$
\sum|\epsilon_{\mu}^{*}(k)M^{\mu}(k)|^2=|M^1(k)|^2+|M^2(k)|^2+|M^3(k)|^2-|M^0(k)|^2=(-g_{\mu\nu})M^{\mu}(k)M^{\nu*}(k)
\tag{6.162}
$$

最后有结果

$$
\frac{d\sigma}{dcos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}(\frac{\omega'}{\omega})[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta]
\tag{6.163}
$$

$$
\omega\rightarrow0\rightarrow\frac{d\sigma}{dcos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1+\cos^2\theta)\rightarrow\sigma=\frac{8\pi\alpha^2}{2m^2}
\tag{6.164}
$$

和汤普森散射一致，且是普遍结果，说明光子只能探测到带电粒子的电荷。

6.14 光学定理

在量子力学中，光学定理体现了几率守恒，即和 S 矩阵的幺正性有关。

光学中有一个折射率:$n(\omega)=1+\frac{2\pi}{k^2}Nf_k(0)$，其中 N 为靶粒子数密度，$f_k(0)$ 为向前散射振幅。

由于靶粒子会吸收光，穿过之后光有一个衰减，其中的原因是折射系数有虚部 $I_m n(\omega)=\frac{N\sigma}{2k}$，$\sigma$ 就是总截面。

在量子场论中，可以给出光学定理的严格形式。

考虑 $\hat{S}=T\exp[-i\int_{-\infty}^{\infty}dtV_I(t)]$，且 $S^\dagger S=I\to -i(T-T^\dagger)=T^\dagger T$

在此基础上加上初末态，

$$\begin{aligned}\langle f|-i(T-T^\dagger)|i\rangle&=\langle f|-iT|i\rangle+\langle f|T^\dagger|i\rangle\\&=\langle f|-iT|i\rangle+\langle i|T|f\rangle^*\\&=-i[m(i\to f)-m^*(f\to i)](2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\end{aligned}$$

$$\langle f|TT^\dagger|i\rangle=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3E_i}\langle f|T^\dagger|\{q_i\}\rangle\langle\{q_i\}|T|i\rangle$$

$$\begin{aligned}-i[m(i\to f)-m^*(f\to i)](2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)&=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3E_i}m^*(f\to\{q_i\})m(i\to\{q_i\})\\&\quad\times(2\pi)^4\delta^4(p_i-\sum_i q_i)(2\pi)^4\delta^4(\sum_i q_i-p_f)\end{aligned}$$

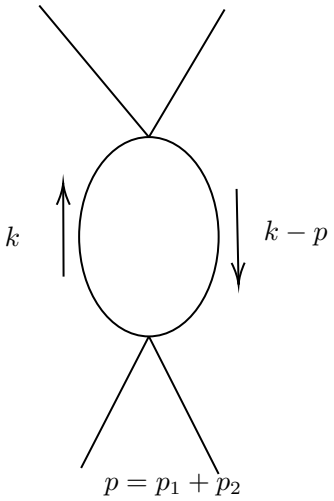
$$\begin{aligned}-i[m(i\to f)-m^*(f\to i)]&=\sum_n\int\prod_{i=1}^n\frac{d^3q_i}{(2\pi)^3E_i}m^*(f\to\{q_i\})m(i\to\{q_i\})(2\pi)^4\delta^4(p_i-\sum_i q_i)\\&=\sum_x\int\prod_x m^*(f\to x)m(i\to x)\end{aligned}$$

最后 $\prod_x$ 用于代指多体相空间的积分，最后得到广义的光学定理。

令 $f=i$，若右边不等于 0，则 $m(i\to f)$ 有虚部，则 $2I_m m(i\to i)=4E_{CM}|\boldsymbol{p_1}|_{CM}\sigma_{tot}(p_1,p_1\to anything)$，则向前散射振幅的虚部和总截面是有一定联系的。

这里的讨论没有涉及到微扰展开，理论上来说，光学定理对每一阶展开都是成立的。

以 $\lambda\phi^4$ 模型为例，考虑 $\phi\phi\to\phi\phi$ 中的 $s-$ 道图



则 $im = \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{(k-p)^2-m^2+i\epsilon} = (-i\lambda)^2\frac{i}{32\pi^2}\int_0^1 dx\ln[\frac{m^2-x(1-x)s}{\Lambda^2}]$，$\Lambda$ 为一个很大的数，对应于紫外截断。

其中 $s = (p_1+p_2)^2$，如果 $m = 0$，则得到一个 $\ln(-|a|)$, 根据复变函数中的公式 $\omega = \ln z = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi)$，这导致了不变振幅的多值性。

对于老式微扰论，根据

$T_{fi} = V_{fi} + \sum\limits_n V_{fn}\frac{1}{E_1-E_n+i\epsilon}V_{ni} + ...$

则当 $E_1 = E_n$ 时出现虚部。

对于 $I_m\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} = \frac{1}{2i}[\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} - \frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}^*] = \frac{-\epsilon}{(k^2-m^2)^2+\epsilon^2}$

则费曼传播子为实的，除非 $k^2 = m^2$。

$\int_{-\infty}^{\infty} dk^2\frac{-\epsilon}{(k^2-m^2)^2+\epsilon^2} = -\pi$

则 $\frac{-\epsilon}{(k^2-m^2)^2+\epsilon^2} = -\pi\delta(k^2-m^2)$

且有 $\frac{1}{k_0-E_k+i\epsilon} - \frac{1}{k_0-E_k-i\epsilon} = -2i\pi\delta(k_0-E_k)$

$\tilde{D}_F(k) = \frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} = \frac{i}{2E_k}[\frac{1}{k_0-E_k+i\epsilon} - \frac{1}{k_0+E_k-i\epsilon}]$

对于超前传播子，相当于将两个极点向上移动了，都在实轴上面，则

$\tilde{D}_A(k) = \frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} = \frac{i}{2E_k}[\frac{1}{k_0-E_k-i\epsilon} - \frac{1}{k_0+E_k-i\epsilon}]$

则 $\tilde{D}_F(k) - \tilde{D}_A(k) = \frac{i}{2E_k}[\frac{1}{k_0-E_k+i\epsilon} - \frac{1}{k_0-E_k-i\epsilon}] = \frac{\pi}{E_k}\delta(k_0-E_k)$

则

$$
\begin{aligned}
im_s &= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{D}_F(k)\tilde{D}_F(k-p)\\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\tilde{D}_A(k)+\frac{\pi}{E_k}\delta(k_0-E_k)][\tilde{D}_A(k-p)+\frac{\pi}{E_{k-p}}\delta(k_0-p_0-E_{k-p})]\\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\frac{\pi}{E_k}\delta(k_0-E_k)\tilde{D}_A(k-p)+\frac{\pi}{E_{k-p}}\delta(k_0-p_0-E_{k-p})\tilde{D}_A(k)]\\
&= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\frac{\pi}{E_k}\delta(k_0-E_k)\tilde{D}_F(k-p)+\frac{\pi}{E_{k-p}}\delta(k_0-p_0-E_{k-p})\tilde{D}_F(k)]
\end{aligned}
$$

一共四个极点都在实轴上方，我们可以选择不包含极点的围道，则 $\tilde{D}_A(k), \tilde{D}_A(k-p)$ 的积分并不贡献。

再考察两个 δ 函数能否成立。

在质心系，$\boldsymbol{p}=0, E_{k-p}=\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2+m^2}=E_k$

则两个 δ 函数要求 $k_0=E_k, k_0=E_{CM}+E_k$，其中 $E_{CM}\neq 0$，则两个 δ 函数相乘也不成立，最后只剩下两项。

如想看到不连续性，令 $\tilde{D}_A \to \tilde{D}_F$

利用 $\frac{-\epsilon}{(k^2-m^2)^2+\epsilon^2}=-\pi\delta(k^2-m^2)$

$I_m M_s = ii(-)\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}[\frac{\pi}{E_k}\delta(k_0-E_k)\pi\delta((p-k)^2-m^2)+\frac{\pi}{E_{k-p}}\delta(k_0-p_0-E_{k-p})\pi\delta(k^2-m^2)]$

再看在质心系是否成立，第二项 $k_0=E_{CM}+E_k, k_0=\pm E_k$，显然不能同时满足，只有第一项成立。

根据 $\delta(k^2-m^2)=\frac{1}{2E_k}(\delta(k_0-E_k)+\delta(k_0+E_k))$

且 $\delta(k_0+E_k)$ 和 $\delta((p-k)^2-m^2)$ 相乘并不成立，最后得到

$I_m M_s = \lambda^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\pi\delta(k^2-m^2)\pi\delta((p-k)^2-m^2)$

$DiracM_s = 2iI_mM_s = -i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-2\pi i)\delta(k^2-m^2)(-2\pi i)\delta((p-k)^2-m^2)$

Cutkosky Rule

1. 用任何方法去砍费曼图使得被切的传播子同时在壳。
2. 对于每一个被砍的传播子做替换 $\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\to(-2\pi i)\delta(p^2-m^2)$。
3. 对所有可能的 cut 求和。

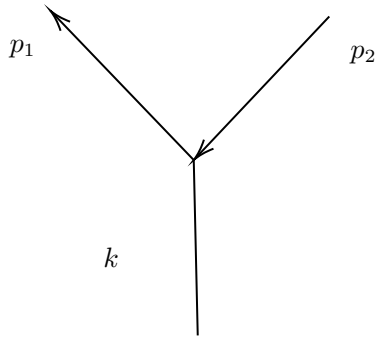
令 $k\to k_1, p-k\to k_2$，则

$$\begin{aligned}
DiracM_s &= i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\delta(k_1^2-m^2)\delta(k_2^2-m^2)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p)\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^3 2E_2}\lambda^2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p)\\
&= \frac{i}{2}\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2}|M_l|^2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p)\\
&= \frac{i}{2}\int d\prod_2|M_l|^2
\end{aligned}$$

其中 M_l 指的是顶角的 λ 贡献，则不联系性和散射振幅联系在一起。

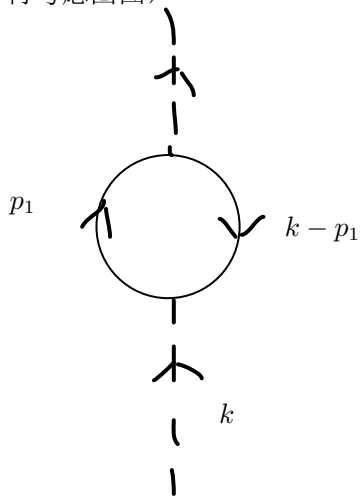
6.15 传播子和极化求和

考虑 $L_Y=L_{KG}+L_{Dirac}-g\bar{\psi}\Gamma\psi\phi$ 的一个 $\phi\to\psi\bar{\psi}$ 的散射。



$$\Gamma(\phi \to \bar{\psi}\psi) = \frac{1}{2M}\int d\prod_2 \sum_{s_1,s_2} |M(\phi \to \bar{\psi}\psi)|^2$$
$$= \frac{g^2}{2M}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\sum_{s_1,s_2}\bar{v}^{s_1}\Gamma u^{s_1}(p)\bar{u}^{s_2}\Gamma v^{s_2}(p)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k)$$
$$= \frac{1}{2M}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k)g^2 tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(\not{p}_2-m)\Gamma]$$
$$= \frac{1}{2M}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p_1^2-m^2)\theta(p_1^0)(2\pi)\delta(p_2^2-m^2)\theta(p_2^0)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k)g^2 tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(\not{p}_2-$$

再考虑圈图，



$im = -(ig)^2\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} tr[\frac{i}{\not{p}_1-m+i\epsilon}\Gamma\frac{1}{\not{p}_1-\not{k}-m+i\epsilon}] = -g^2\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(\not{p}_1-\not{k}+m)\Gamma]}{(p_1^2-m^2+i\epsilon)[(p_1-k)^2-m^2+i\epsilon]}$

我们想让这个结果和前面的散射结果尽可能地接近。

$im(\phi\to\phi) = -g^2\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k)\frac{tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(-\not{p}_2+m)\Gamma]}{(p_1^2-m^2+i\epsilon)[(p_2)^2-m^2+i\epsilon]}$

根据: 对于每一个被砍的传播子做替换 $\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\to(-2\pi i)\delta(p^2-m^2)$。

$im(\phi\to\phi) = -g^2\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k)tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(-\not{p}_2+m)\Gamma](-2\pi i)\delta(p_1^2-m^2(-2\pi i)\delta(p_2^2-m^2))$

$im(\phi \to \phi) = g^2 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1+p_2-k) tr[(\not{p}_1+m)\Gamma(\not{p}_2-m)\Gamma](-2\pi i)\delta(p_1^2-m^2(-2\pi i)\delta(p_2^2-m^2))$

则 $I_m M(\phi to \phi) = M\Gamma(\phi \to \psi\bar{\psi})$

$tr[(\not{p}_1 + m)\Gamma(\not{p}_2 - m)\Gamma]$ 在两个公式中分别源于极化求和和传播子的分子，即费曼传播子的分子对应于对应物理态的极化求和。

7 重整化

7.1 重整化的基本思路

以无质量 $\lambda\phi^4$ 模型为例

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{7.1}$$

考虑两体散射的二阶费曼图，具体为四条外线，两个顶点，一个内圈

相应的不变振幅为

$$im_s = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2+i\epsilon} \frac{i}{(k-p)^2+i\epsilon} \tag{7.2}$$

利用费曼参数化公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[XA+(1-X)B]^2} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dl^0 \frac{1}{\left[(l^0)^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - \Delta\right]^2} &= \int_{-i\infty}^{i\infty} dl^0 \frac{1}{\left[(l^0)^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - \Delta\right]^2} \\
l^0 &\to i l_E \\
\int_{-i\infty}^{i\infty} dl^0 \frac{1}{\left[(l^0)^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - \Delta\right]^2} &= \int_{-i\infty}^{i\infty} d(il_E) \frac{1}{\left[(il_E)^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - \Delta\right]^2} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} d(l_E) \frac{1}{\left[(il_E)^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - \Delta\right]^2} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty} d(l_E) \frac{1}{[l_E^2 + \Delta]^2}
\end{aligned} \tag{7.4}$$