量 子 场 论



翻 版

北 京 大 学 物 理 学 院

VERSION 1.62

开篇说明

量子场论是一门十分特殊的课程，因为它不仅仅是一门课程，而是一种世界观。

从狭义的角度来说，量子场论被认为是粒子物理、核物理以及凝聚态物理的一门重要基础课程。对于广大教师和同学来说，它无非是与其他所有课程一样，有一定的教材、学时，有作业，有考试，有最终的成绩。但是从广义的角度来说，量子场论可以认为是人类迄今为止被实验所验证的、关于所有物质的基本构成以及其相互作用机制的高度理论概括。如果从这个角度来看，它所包括的内容就极其广泛了，它相当于众多课程中，以及许多不在课程中的内容的概括和结晶。这就是我总是和每一届的研究生说的一句话：没有人能够一次就学会量子场论，即使是天才也几乎不可能。这决不是笑人听闻。事实上，从量子场论的发展历史来看，目前我们对于它的或许还有些正确的理解，恰恰是基于历史上 N 多个天才（海森堡、狄拉克、泡利、费曼、许温格等等）的努力和挣扎之后才获得的。但无论如何，大家还要学习量子场论，我们也必须讲授量子场论。由于量子场论的这个特殊性，这就使得这个课程的讲授有了不同于其他课程的特点。因此，希望大家能够以一种平和的心态来学习它。如果你第一次学完没有完全理解，不要沮丧；因为这恐怕是多数学习量子场论的人必须经过的过程。如果你第一次学完以后已经大彻大悟，那么恭喜你，你太有才了！

¶ 如果我们仅仅局限在所谓的相对论性量子场论的范畴之内，我们关于量子场论内容的讲授主要分为了两个课程：一个称为《量子场论》- 也就是大家现在听的这个课程 - 另一个课程称为《量子规范场论》。尽管人为地分为了两个课程，但是它们都是相对论性量子场论的重要组成部分。下面我着重说明我对于量子场论课程内容的安排。

¶ 我的这个讲义主要按照 Peskin 和 Schröder 的教材 [1] 的第一部分来取材。尽管按照 Peskin 的前言所说，第一部分应当差不多正好是一个学期的内容，我却发现实际上它已经超出了一个学期的内容。这当然有许多原因。最主要的是 Peskin 是按照美国的课程体系来估计的。但是我们的课程体系与美国的体系毕竟有些不同。例如，选修这个课程的同学多数都并没有接触过狄拉克方程以及形式散射理论。因此有些内容我们必须补上。再加上我们有黄金周，因此我发现我必须略去 Peskin 书上相当一部分的内容。在经过与其他老师的几次讨论以后，我的选择是减去了关于辐射修正部分的一些内容（例如量子电动力学中红外发散的处理以及

许多量子电动力学一圈结构的详细讨论）。这样使得我能够有更充裕（其实也不那么充裕）的时间来将量子场论前面的主体内容尽可能地讲授清楚。我想这种选择在逻辑上讲是合适的，特别是对于量子场论这样的课程，奢望面面俱到是完全不可能的。因此倒不如将最为基本的部分讲清楚，为同学们奠定一个基础。

我目前的讲义主要包括五章（除了第一章关于历史的介绍以外）：第二章是关于洛伦兹群表示的讨论以及如何利用洛伦兹不变性给出相对论性场的作用量；第三章是关于自由场的正则量子化；第四章是关于相互作用场论的理论体系（特别是微扰论）的建立，包括微扰展开（费曼图）、S 矩阵和散射截面的概念以及如何利用微扰展开计算散射截面；第五章集中介绍量子电动力学的基本过程（树图过程）；第六章则是关于量子电动力学的圈图（辐射修正）的简单介绍。

本课程假定的先修课程有：经典分析力学、经典电动力学（特别是其中的相对论性电动力学的部分）、量子力学。这些课程对于本课程来说是必须的。一般来说，我们不假定大家学习过高等量子力学和群论。但是，如果你恰巧学过，这将是十分有帮助的（特别是高量中的相对论性量子力学）。一个特别值得提出的一点是，如果读者具有一定的群表示论的基础，对于本课程的最开始的一章将是非常有帮助的。当然，如果没有学过，问题也不是那么大，就像不用考究的茶具也可以凑合喝好茶一样。

¶ 这个讲义可以供本课程的同学、教师免费下载。作者本人（也就是刘川！）对于讲义中的所有内容保有版权。未经作者本人许可，不允许将本讲义的全部或部分翻印后以任何方式销售给任何人；原则上也不允许将其外借给非本课程的学生和教师；不允许将本讲义的部分或全部放在网络上。一经发现，我保留诉诸法律的权利。

显然，本讲义是一个草稿。其中不乏各种错误，有些错误已经在课程的授课过程中改正了，但还有一些没有改正，欢迎大家指正。另外，讲义中的别字更是数不胜数（感谢计算机，它不会写错字）。对于优美的祖国语言的这种摧残，我本人深表歉意，力争在下次修改时尽量更正。所以，这个讲义的版本在不断地更新中，我无法在每次更改时都通知读者，对此我深表歉意。

本文利用中文 LaTeX 进行排版，讲义的源文件恕不予公布。短期内，作者还没有将本讲义正式出版的企图。作者希望能够在听取读者意见的基础上不断改善，同时也希望这个讲义能够对于读者有所帮助。

本讲义采用了 hyperref 宏包，因此所产生的 PDF 文件特别适合于在电脑上阅读。例如，你可以通过 Acrobat Reader 左侧的标题链接直接连到感兴趣的章节；另外所有的交叉互引（例如：讲义末尾的索引）都由链接实现。我因此强烈建议大家不要打印这个讲义。同时，电脑上阅读还可以看到更多的色彩。如果你坚持要打印出来，请你不要打印本讲义的首页，除非你变态到用高档的彩色激光打印机。

在最后一段，一般总要对一些人表示致谢。如果读者觉得有些肉麻，请在您的眼睛瞟见我要致谢谁之前，赶快翻过这一页吧。我想我首先要感谢我在北大理论物理所的所有同仁，特别是：马中水教授、郑汉青教授、朱世琳教授、朱宇华教授。在与他们的多次讨论中，使得我对于很多量子场论问题的看法得以深化。我还应当感谢选修这个课程的同学。特别是他们对于课程内容的反馈将成为我们不断改进本课程的重要依据。不管你们是真想学习这门课程还是被逼无奈地学习，你们辛苦了。在我的家人方面，我首先要感谢我的妻子韦丹，她对我的支持一直是我内心最大的感动。同时，也应该感谢我的儿子，他在我准备讲义的时候总是十分合作。



刘川，二零零七年六月

按照同学们的一些建议，修订了很多打印的错误（尽管还有很多！），同时对于第二章中关于洛伦兹群表示的部分进行了更为详细的阐述。与之配合，在附录中利用 $SU(2)$ 群表示的语言复习了量子力学中角动量理论，希望能够有助于同学们理解洛伦兹群的表示。目前的版本号为 1.5。



刘川，二零零九年九月

本次修订最为主要的改动是在第一章中添加了一节“为什么需要相对论性量子场论”，从而第一章变成拥有两节了。添加这一节的目的主要是希望在讲述量子场论十分形式化的理论之前，说明它是处理什么问题的，为什么我们需要相对论性量子场论。这个问题其实是很多学习量子场论同学都具有的问题。他们当中的很多人甚至在学完量子场论以后还不是很理解为什么需要量子场论。因此，我觉得有必要在所有的具体讲述之前，将这个无疑是最重要的问题尽可能交待清楚。但是，我很可能会失败。特别是考虑到多数同学并没有学过相对论量子力学。为此，我将尽可能从相对论量子力学介绍起。当然，这不可能是一个完备的介绍。希望大家能够在阅读完这一节后，对这个重要问题大致有个了解。

后面各章中其实也有不少改动，其中主要是文字上面的。对于最为难于掌握的第三章，我在这章的最后加上了一个路线图。希望能够有所帮助。另外，特别需要感谢我们理论物理所的邵立晶同学。他仔细阅读了我的讲义的前一版本并指出了不少错误，我已尽可能更正。同时我相信还有许多没有改正的错误，也希望所有同学反馈给我，加以订正。目前的版本号为 1.6。



刘川，二零一零年八月

对讲义中一些错别字进行了订正。特别感谢王帅帅同学，为讲义挑出了不少错误，同时也要感谢课程进行中许多不记得名字的同学的订正。目前版本号为1.61。

剑川，二零一一年六月



更正了讲义中发现的一些错漏之处。并且在第三章中添加了关于狄拉克方程的非相对论近似的内容。这主要考虑到多数同学在选修本课程的时候并没有学过高等量子力学（或者正在学），因此这部分的内容补充可以让同学们对狄拉克方程有更全面的了解。目前版本号为 1.62。

剑川，二零一二年八月



目 录

1 楔子 1

§1 量子场论的发展历史 1

§2 为什么需要相对论性量子场论 10

2 洛伦兹对称性与相对论性场 15

§3 经典场论的基本表述 15

§4 洛伦兹群的旋量表示 18

§4.1 对称性、群与群表示 18

§4.2 洛伦兹群的结构 19

§4.3 外尔旋量表示 22

§4.4 洛伦兹标量和矢量的构造 24

§4.5 狄拉克旋量 26

§5 洛伦兹群与 $SL(2,C)$ 群 28

§5.1 洛伦兹群与 $SL(2,C)$ 群的对应 28

§5.2 $SL(2,C)$ 群的旋量表示 29

§6 相对论性场与场的作用量 31

3 自由场的正则量子化 38

§7 标量场的量子化 38

§7.1 自由标量场的正则量子化 38

§7.2 克莱因－高登场的传播子与因果性 45

§8 旋量场的量子化 48

§8.1 自由狄拉克方程的解 48

§8.2 自由狄拉克场的量子化 55

§8.3 分立对称性 60

§9 矢量场的量子化 63

4 相互作用的量子场 71

§10 微扰论与三个代表理论 72

§11 编时格林函数的微扰展开 79

§12 Wick 定理 . . . 83
§13 费曼图与费曼规则 . . . 85
§14 散射理论、S-矩阵与散射截面 . . . 90
§14.1 形式散射理论与 S-矩阵 . . . 91
§14.2 衰变率与散射截面 . . . 93
§15 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式 . . . 97
§15.1 Källén-Lehmann 谱分解 . . . 97
§15.2 LSZ 约化公式 . . . 100
§15.3 S-矩阵元的费曼图表示 . . . 103
§16 汤川理论和量子电动力学的费曼规则 . . . 106
§16.1 旋量场的 Wick 定理 . . . 106
§16.2 汤川理论的费曼规则 . . . 107
§16.3 量子电动力学的费曼规则 . . . 112

5 量子电动力学的基本过程 115
§17 正负电子到正负 μ 子的散射 . . . 115
§17.1 e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的非极化散射 . . . 116
§17.2 e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的极化散射 . . . 119
§17.3 非相对论极限与束缚态 . . . 121
§18 $e^-\mu^-$ 散射与交叉对称性 . . . 125
§19 Bhabha 散射与 Møller 散射 . . . 128
§19.1 Bhabha 散射 . . . 129
§19.2 电子－电子散射 . . . 131
§20 康普顿散射 . . . 131

6 量子电动力学的辐射修正 137
§21 电子自能 . . . 139
§22 真空极化 . . . 144
§23 电子顶点函数 . . . 149
§24 量子电动力学的微扰重整化 . . . 155
§24.1 紫外发散的度量 . . . 155
§24.2 裸微扰论与重整化微扰论 . . . 158

A 符号约定 161

B 角动量与 $SU(2)$ 群的表示 165

索引 169

第一章　楔子

量子场论（quantum field theory, QFT）是目前人类关于已知物质世界的构成及其相互作用的量子理论。人类对于物质世界的量子性质的真正理性认识开始于二十世纪，而 1925 年量子力学的诞生则标志着人类对于量子世界的认识有了一个质的一个飞越。一个比较令人吃惊的事实是，尽管目前被认为应用量子场论（特别是相对论性量子场论）最为广泛的领域－高能物理（或粒子物理）－在二十世界初期并没有成型，但是关于场的量子化的研究实际上并不比量子力学的诞生晚很多，甚至可以说两者几乎是同时诞生的。

现在我们认为，所谓量子场论，从广义上说，就是关于多自由度体系的量子理论。它实际上是基础物理学几乎所有重要分支（例如：粒子物理、核物理、原子分子物理、凝聚态物理等等）的理论基础。如果按照所处理的对象的能量来区分，较低能量范围的量子场论一般只需要非相对论性的描述就已经足够了。这包含了较低能量的核物理、原子分子物理、凝聚态物理等。相对而言，在较高的能量区域，粒子的相对论效应变得重要，因此我们需要相对论性的量子场论。这主要包括了中高能核物理以及（高能）粒子物理。按照国内学科的传统划分，人们往往用量子场论来特指相对论性量子场论，而将非相对论性量子场论称为多体理论。这其实并不是一个十分恰当的划分，它纯粹是由于历史原因得以保存至今。事实上，凝聚态与核物理的多体量子理论就是非相对论性的量子场论。

§1 量子场论的发展历史

¶ 通常认为量子场论发端于所谓的相对论性量子力学（relativistic quantum mechanics）。相对论性量子力学的代表就是相应的波动方程。由于相对论影响，这类方程要按照所描写的粒子的性质分为几类（实际上主要是两大类，分别对应于玻色子场和费米子场）。描写无自旋玻色子的相对论性波动方程一般称为克莱因－高登方程（Klein-Gordon equation），尽管在历史上最先得到这个方程的实际上是薛定谔。他在 1926 年首先写出了相对论性的电子波动方程，实际上是克莱因－高登方程。[1] 但是他发

[1] 因此，更为确切的应当称这个方程为薛定谔－克莱因－高登方程。而且有趣的是，相对论性量子力学实际上是先于非相对论性量子力学的诞生。

现这个方程似乎无法与当时实验上已知的氢原子能谱吻合。因此，他通过取非相对论极限的方法得到了我们通常所熟悉的非相对论性的薛定谔方程。因此，从某个角度来说，量子场论的起源实际上是与量子力学几乎同时的。另一类波动方程是描写自旋 1/2 粒子的狄拉克方程。自旋是 1 的规范矢量场满足麦克斯韦方程，它实际上也可以化为克莱因－高登方程，只要我们选取合适的规范。更高自旋粒子的波动方程也是存在的，只不过因为它们在自洽地量子化上存在的一定的困难，因此在量子场论中并不经常被用到。

¶ 相对论量子力学的发展到 1928 年有了一个新的变化。当时大家都清楚克莱因－高登方程无法成功的来描写电子，因为这个方程所对应的粒子没有自旋。狄拉克在 1928 年给出了一个有自旋的相对论性粒子的方程，这就是著名的狄拉克方程（Dirac equation）。当时狄拉克提出一个新的波动方程有多种考虑，尽管有些考虑从现在的观点来看是奇怪的。狄拉克方程唯象学上最为成功的地方在于它可以预言电子的（正常）磁矩（或者称为 g 因子）；但是在物理哲学上最为成功的一点是它预示着反粒子的存在。电子的反粒子－正电子－在 1932 年被实验所证实，这对于粒子物理以及量子场论的发展是至关重要的事件。

相对论性量子力学的研究表明，无论是描写自旋为零粒子的克莱因－高登方程，还是描写自旋 1/2 粒子的狄拉克方程都存在着内在逻辑的不自恰。这说明相对论性量子力学只不过是一个过渡性的理论。这种不自恰最突出的表现就是，传统意义的量子力学波动方程都是描写一个固定粒子数的系统（概率守恒），但是到了相对论性的情形，粒子－反粒子可以成对产生，于是系统的粒子数一般不可能是固定的。也就是说，随着能量的提高和相对论效应的显现，我们将不可避免地去处理任意多（无穷多）自由度的量子系统。正是相对论的这个特性，使得传统意义上的波动方程的概念已经不能适用了。这种矛盾具体的体现就是当人们利用相对论性量子力学的波动方程处理具体物理问题时，经常会遇到各种逻辑矛盾（例如负能海、颤动等等）。因此，在高能物理中，人们需要真正能够自洽地处理无穷多自由度系统的量子理论，而这恰恰就是量子场论。

¶ 早期的量子场论

关于经典场的量子化的第一个尝试可以追述到 1926 年波恩（M. Born）、海森堡（W. Heisenberg）、约当（P. Jordan）的工作，当时他们试图将经典的辐射场量子化。在那个时代，人们还不是十分清楚是否有必要将辐射场量子化。当时流行的一种半经典的辐射理论就是将原子中的电子进行量子化，但是对于辐射场仅仅做经典或半经典的处理，以解决原子与光（电磁场）的相互作用问题。[2] 这种理论实际上十分的成

[2] 这其实上颇有些“数典忘祖”的味道。要知道，人类关于量子现象的最早的认识恰恰都来源于电磁场的量子化（黑体辐射，光电效应等等）。但是，在后来却有些理论试图不去量子化电磁场。同学们在量子力学中应当都处理过外电磁场中的原子的问题（例如：斯塔克效应、塞曼效应等）。量子力学课程中的处理方法就是将原子中的电子用量子力学处理，但是外加的电磁场仅仅按照经典电动力学来处理。

功，几乎可以解释当时人们所知道的一切量子现象。但是，关于原子的自发辐射问题，似乎这个理论是完全不能解释的。辐射场的量子化后来狄拉克也讨论过。这个问题基本上到三十年代初就已经解决了。

随后，人们将类似的正则量子化方法应用于其他的场。[3] 对于克莱因－高登场（或者称为标量场），这种处理是十分直接了当的。对于狄拉克场，约当（P. Jordan）和魏格纳（E. Wigner）在 1928 年发现：为了使所得到的理论与狭义相对论的基本原则不矛盾，与狄拉克场相对应的产生湮灭算符必须遵守反对易关系 而不是通常的对易关系。 同时，这种反对易关系也意味着相应的粒子遵从费米－狄拉克统计 和泡利不相容原理。1929 年，海森堡和泡利试图从更一般的原则出发来讨论场的正则量子化。这套方法实际上就是目前写进多数场论教科书的方法。场的量子化方法实际上在三十年代的初期，与传统的狄拉克费米海理论（一种改良了的相对论量子力学理论）共存。

前面提到，1932 年正电子的发现无疑对于量子场论的建立起到了相当关键的作用。这意味着，反粒子的的确确已经进入人们的视野，而不再仅仅是理论家（特别是狄拉克）的异想天开。 因此，三十年代量子电动力学（quantum electrodynamics, QED）－一个关于电子、正电子、光子的量子理论－的雏形已经开始逐步形成。随着加速器技术的进步，越来越多的、形形色色的粒子在实验上被发现。因此，人们开始试图拓展量子场论的内涵，使得它不仅仅可以描写正负电子和光子，也可以用于描写其他的粒子。例如关于强相互作用的汤川理论（Yukawa theory） 和关于弱相互作用的 费米理论（Fermi theory）。另一方面，随着量子场论－当时主要指量子电动力学－的研究，量子场论所面临的一个重大理论问题浮出了水面，这就是量子场论中的发散问题。

¶ 发散问题与量子电动力学的建立

量子场论是一个很奇怪的理论。虽然它的起源几乎与量子力学同时，但是一旦进入量子场论的领域，你就会发现到处充斥着发散。有些发散其实是无关紧要的（例如，零点能的大小，假设我们不考虑广义相对论），但是另一些发散则是十分重要的。这些重要的发散可以分为两大类：紫外发散和红外发散。后者仅仅出现在存在无质量粒子的量子场论中，而前者几乎出现于所有相互作用的量子场论中。所有的紫外发散实际上都起源于量子场是无穷多自由度系统这个假定。显然，要利用量子场论计算任何物理量，我们就必须对紫外发散有正确的理解。

早在1929年，泡利和海森堡就意识到量子场论的发散问题。事实上，利用量子力学中大家所熟悉的二阶微扰论，我们会发现一个电子的能量的改变－如果我们考虑到一个电子加上一个光子为中间态－是紫外发散的。

从历史上看，人们最初并没有太考虑紫外发散的问题。这也许是一种不得已的回避。

[3]顺便提一下，如果我们将满足非相对论薛定谔方程的场（波函数）进行量子化，我们就得到了凝聚态物理中所运用的非相对论性量子多体理论。因此，在历史上又称非相对论性量子场论为“二次量子化”理论。



图 1.1：参加第一次 Shelter Island 会议的物理学家，从左至右分别为：I.I. Rabi; Linus Pauling; J. Van Vleck; W.E. Lamb; Gregory Breit; D. MacInnes; K.K. Darrow; G.E. Uhlenbeck; Julian Schwinger; Edward Teller; Bruno Rossi; Arnold Nordsieck; John von Neumann; John A. Wheeler; Hans A. Bethe; R. Serber; R.E. Marshak; Abraham Pais; J. Robert Oppenheimer; David Bohm; Richard P. Feynman; Victor F. Weisskopf; Herman Feshbach 共23位大侠。另外一位参与者（由于某种原因没有在照片上）是 H.A. Kramers。

甚至在一个阶段中，人们有这样的一个猜测：任何紫外发散的量实际上可能都等于零。这个看似荒谬的想法竟然在当时得到不少人的认同。但是，这种想法很快就被事实无情地摧毁了。1947 年，一个称为兰姆移动（Lamb shift）的物理量在实验上被测定出来了。[4] 它是氢原子的 $2s_{1/2}$ 与 $2p_{1/2}$ 能级之间的能量差。按照相对论量子力学（即狄拉克理论），氢原子的这两个能级应当是严格简并的。[5] 但是，按照量子电动力学的计算，这两个能级的能量差并不为零。更糟糕的是它包含紫外发散，其中的主要贡献来源于电子的质量重整化。显然，兰姆移动的真实性告诉我们：一个量发散并不意味着它就等于零！

同样在 1947 年，当时在北美的一些顶尖的量子场论方面权威理论家聚集在纽约的 Shelter Island 开了一个重要的会议。这次会议的名称是《量子力学的基础》（Foundations of Quantum Mechanics），史称第一次 Shelter Island 会议。这次会议虽然名称是量子力学的基础，但是真正讨论的主题是量子场论的基本问题，特别是紫外发

[4] 这个移动极小。其数值大约为 $4 \times 10^{-6} eV$ 或者相当于 1058MHz。
[5] 我将寄希望于高量课程中对于氢原子狄拉克方程的讲述，到时候大家应当知道这个结论。

散以及重整化的问题。因此，这次会议也成为量子场论发展史上划时代的重要会议。在图 1.1 中我们显示了这个会议参加者的照片。显然，多数与会者都是物理学中声名显赫的人物，其中相当一部分也是美国原子弹“曼哈顿计划”（Manhattan Project）的参与者，以至于当他们在岛上开会的时候，附近的居民都在传言美国又在研制什么神秘的大规模杀伤性武器。

在这个会议上，人们讨论了兰姆移动，以及电子的反常磁矩（又称为电子的 $(g-2)$ 因子）。这时，重整化的概念已经开始出现。人们发现，一些紫外发散可以吸收到理论参数的重新定义之中。讨论这些问题的人中就包括了许温格、费曼。日本的物理学家 Tomonaga 也几乎同时独立地研究了相关的问题。他们三人后来因此获得了诺贝尔奖，尽管当初他们三个人采用的方法实际上是不同的。大约两年以后（1949 年），戴森（F. Dyson）证明了许温格的方法实际上与费曼的方法是等价的。并且，他利用费曼图的方法分析了量子电动力学中的紫外发散，证明了它们总是可以通过参数的重新定义（重整化）来加以吸收。另一方面，利用（重整化后的）量子电动力学计算出来的兰姆移动、电子反常磁矩[6] 以及其他一系列物理量都与相关的实验结果吻合得很好。所以，到大约 1949 年，量子电动力学终于作为一个关于电子、正电子、光子的相互作用的量子场论而基本确立起来了。

¶ 关于弱作用的量子场论

关于弱作用的量子场论研究的开端可能要追溯到中微子的发现。人们发现放射性的原子核可以以一种特定的方式衰变，衰变产物中会有 β 射线射出，因此这种衰变就被称为 β 衰变。大家现在都清楚，所谓 β 射线其实就是电子束流。β 衰变的实验研究中还发现了一种奇特的现象，那就是反应过程中的能量丢失，这可以从末态的电子的能谱中得到印证。为了解释这种能量丢失，泡利建议是一种中性的微小粒子－中微子－带走了这些丢失的能量，这样这个过程仍然可以保持能量、动量守恒。

随后（1934 年），费米首先提出了唯象描写弱作用的量子场论模型。这个模型现在通常被称为费米的四费米子理论，或者简称费米理论。费米理论假定原子核的构成是质子与中子。这个事实当时刚刚被人们认清，尽管在现在看来似乎已经成了常识。[7] 费米理论是关于电子、（反）中微子、质子、中子的一个相互作用理论。它的确可以解释当时 β 衰变中的一些问题，但是它本身似乎还有不少“问题”。其中“最严重”的一个问题是，它被认为过低地估计了质子－中子的相互作用。因为，按照费米理论的估计，相互作用的耦合参数是相当小的。如此弱的相互作用与原子核中质子、中子的相互作用完全

[6] 电子的反常磁矩是比较特殊的。它实际上是一个紫外有限的量。因此不需要进行任何的正规化和重整化的步骤就可以计算，参见本讲义的第 6 章的第 §23 节。

[7] 注意，中子仅仅是在 1932 年才被查德威克所发现。在此之前，人们一直认为原子核是由质子和电子构成的。这种观念在解释 ^{14}N 的性质时遇到了困难。因为如果这个核是由质子以及电子构成，那么它一定要包含14 个质子和 7 个电子。因此它应当是一个费米子，但是实验上的研究发现它却是玻色子。在中子发现不久，海森堡（1932 年）建议原子核由质子、中子构成，就解决了这个矛盾。

不是一个量级的。这个问题的关键在于，人们当时还没有认清一个事实：引起 β 衰变的相互作用其实和原子核中质子、中子的相互作用根本就不是一种相互作用。前者我们目前称为弱相互作用 而后者我们目前称为强相互作用。 因此，费米理论的这个问题其实并不是费米理论本身的问题。这个困扰大约到 1940 年左右，随着人们关于强相互作用理论（特别是汤川理论）的认识而获得解决。那时，人们已经清楚地认识到，（至少在当时）无法得到一个关于质子、中子、介子、电子、中微子的统一描述的理论。也就是说，这预示着质子、中子、介子的相互作用理论（当时人们关于强相互作用的理解）与 β 衰变的费米理论是描写 不同的 相互作用的理论。经过一些起伏，大约到二次大战结束时（1945 年），费米的四费米子理论已经成为当时公认的描写 β 衰变（弱相互作用）的理论模型。但是，当时虽然没有确定的结论，实验的结果似乎偏向于张量－张量型的四费米子相互作用。这些问题一直延续到五十年代。

在五十年代，关于弱相互作用的研究导致了一个惊天动地的发现，这就是弱相互作用中 宇称不守恒 的提出以及实验验证。值得骄傲的是，这个理论和实验上的两个重要发现都是中国人做出的。问题的开始源于人们当时发现的“两个”新的粒子，一个称为 τ 介子，另一个则是 θ 介子。这些都是当年的奇怪称号。现在我们知道这两个粒子实际上是一个粒子，我们现在称之为 K^+ 介子。τ 和 θ 介子首先都是在宇宙线中发现的（C. F. Powell，1949 年），但是它们非常奇怪。首先这两个粒子看起来完全一样：电荷、质量等等；唯一不同的是它们的衰变模式。τ 衰变到三个 π 介子，而 θ 衰变到两个π 介子。除了这个不同以外，两个粒子看起来完全不可分辩。更为奇怪的是，由于 π 介子具有确定的内秉宇称，因此三个 π 和两个 π 的末态具有相反的宇称。这就是人们为什么当时认为它们是两个粒子而不是一个，因为如果我们相信衰变过程中宇称守恒的话，那么同一个粒子不可能同时衰变到两个宇称相反的末态。这就是当时所谓的 $\theta-\tau$ 之谜 （$\theta-\tau$ puzzle）。 当然，由于李和杨关于弱作用中宇称不守恒的建议以及后来吴的实验验证，这个谜其实也就获得了圆满解决。

弱作用破坏宇称，这意味着四费米子理论中不大可能是张量型的相互作用而一定是矢量和轴矢量型的相互作用。这个结论的完全确立是在 1958 年，Goldhaber 的实验说明弱作用中应当是所谓的 $V-A$ 型 的相互作用。 同样在这一年，费曼以及 Gell-Mann，R. Marshak，Sudarshan 也提出了 $V-A$ 型的理论模型。不仅如此，仿照 QED 中的力的传递机制，费曼以及 Gell-Mann 还假定了弱作用是通过交换一种新的 中间玻色子 实现相互作用的。 这个想法随后（1961 年）被 Glashow 继承，写出了统一弱作用和电磁作用的相互作用理论。Glashow 的理论模型当然是一个十分重要的步骤，但是它仍然称不上完整的电弱统一模型，因为除了传递电磁作用的光子是无质量的矢量粒子以外，这个理论还需要三个有质量的矢量粒子，分别称为 $W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子。当时 Glashow 不知道该如何给这些粒子质量，所以他纯粹用手放进一些质量项。这对于一个规范理论来说是很有问题的。这个理论问题的真正解决要等到规范场论以及对称性自发破缺的机制被理解之后。

¶ 关于强作用的量子场论

关于强相互作用的量子场论研究始于汤川理论（H. Yukawa, 1934－1935）。在这个模型中，汤川认为强相互作用，更确切地说是核子之间的相互作用，是通过交换介子（现在称为 π 介子）实现的。这些介子在当时并没有在实验上被发现。但是，根据对强相互作用的力程的估计，汤川估计出这些介子的质量应当在 $100-200\mathrm{MeV}$。汤川的预言似乎在后来很快被验证了。1937年，一个新的粒子在实验上被发现，它的质量与当初汤川理论预言的很接近。但是后来发现这仅仅是个巧合。因为这个新发现的粒子，也就是现在称为 μ 子的轻子，与质子、中子没有很强的相互作用。也就是说，它显然不是汤川理论所期望的能够传递强相互作用的介子，这一点直到1946－1947年才搞清楚。[8] 当然，这些在汤川理论中传递强相互作用的 π 介子随后（1947 年发现带电的，1950 年发现中性的）也在宇宙线的实验中被找到了。

到五十年代初期，随着实验技术的进步（bubble chamber 的发明等等）所谓的“基本粒子”的数目开始不可收拾地膨胀。到了六十年代初，我们现在称为强子的这些粒子的内部对称性被逐渐揭示出来。所有这些预示着，当时刚刚进入人们视野的这些强子不大可能是真正的基本粒子，而是某种更为基本的粒子所构成的复合粒子。对这方面做出巨大贡献的在国际上有 Gell-Mann，G. Zweig，Néeman，S. Sakata，Y. Nambu，K. Nishijima等。正是在这种情形下，所谓的夸克模型诞生了。在国内，我国的理论物理学家也在研究类似的问题，这个研究的产物就是著名的层子模型。虽然我们现在知道关于强相互作用的基本理论是所谓的量子色动力学（Quantum Chromodynamics, QCD），但是夸克模型仍然是帮助我们理解强子物理现象中一个重要的工具。1965 年，O.W. Greenberg, M.Y. Han, Y. Nambu 发现需要为夸克引进一个新的“荷”（或者说新的内部自由度），他们称之为颜色（color）。而且，夸克应当分为三种颜色。反夸克则正好带着与相应夸克相反的颜色。我们观察到的介子（由一个夸克和一个反夸克构成）和重子（由三个夸克构成）都是颜色的单态（即无色的状态）。应当承认，在这个时期夸克更多地是被当作一种数学工具，利用它可以方便的对介子、重子进行分类。换句话说，第一，没有人真正相信夸克是真正的物理实在的粒子（除了 Zweig, Dalitz 等少数人之外）；[9] 第二，讨论仅仅涉及夸克以及强子的对称性，没有人讨论关于夸克的动力学问题。[10] 由于实验上寻找孤立夸克的实验总是以失败而告终，因此人们提出了夸克禁闭的猜想。由于夸克是带有色荷的，因此人们也称之为色禁闭，它的意思是说，我们在物理观测中看到的的粒子总是以色单态（也就是整体不带色）的形式出现的。色禁闭问题是

[8] μ 轻子是类似于电子的粒子。它仅仅参与电磁和弱相互作用，不参与强相互作用。当时由于人们的主要目的在于寻找参与强相互作用的 π 介子，因此 μ 轻子的实验发现纯粹是一个美丽的意外，以至于当时 I.I. Rabi 不禁要问：“Who ordered it?”

[9] 这里的逻辑障碍主要在于夸克的分数电荷。在当时人类的任何实验中，粒子的电荷总是整数。从来没有发现过分数的电荷。

[10] 或者准确地说，没有利用规范场的框架来讨论强相互作用的动力学。

量子色动力学中一直悬而未决的重要理论问题，研究这个问题的困难在于它是一个完全非微扰的问题。

到了七十年代初，关于强相互作用理论的研究有了突破性的进展。1973 年，H. Fritzsch 和 M. Gell-Mann 完全仿照量子电动力学的模式提出了量子色动力学的模型。正象量子电动力学中电子、正电子是通过交换光子来传递电磁相互作用一样，夸克与反夸克之间是通过传递胶子来实现 相互作用的。虽然这个模型看起来相当不错，但是它实际上还缺少了关键的一步，那就是没有人知道它是否真的可以描写自然界的强相互作用。这关键的一步就在同一年也被完成了。David Politzer，David Gross，Frank Wilczek 在 1973 年发现量子色动力学具有一个十分特别的性质称为渐近自由（asymptotic freedom）。这个性质的意思是说，量子色动力学在高能区实际上是一个弱耦合的量子场论，但是在低能区它的相互作用可以变得任意地强，而这也许就是导致夸克禁闭的一个迹象。

量子色动力学的渐近自由的性质恰好可以解释 1968－1969 年在 SLAC 上所完成的深度非弹性散射实验的结果。在这些深度非弹性散射实验中，人们用高能电子轰击质子（液体氢），其目的就是试图揭示质子内部的结构（如果它有结构的话）。这个实验的结果是发现了一些被称为 Bjorken 标度律（Bjorken scaling）的现象。Feynman 和 Bjorken 等人发现，这种现象的一个简单解释，就是假定质子的内部有一些更小的、近乎自由的（无相互作用的）粒子。他们称这些粒子为部分子（parton）。显然，一个自然的联想就是，这些部分子就是 Gell-Mann 的夸克。但是，由于夸克似乎是强相互作用的（因此它们才被禁闭起来），而部分子则几乎是自由的，因此看起来要将两者联系起来还缺乏令人信服的证据。1973 年的渐近自由的发现恰恰提供了这样的证据。渐进自由说明，如果我们假定质子由夸克组成，强相互作用是由量子色动力学来描写，那么在高能的深度非弹性散射实验中，由于 QCD 的渐近自由的性质，质子内部的夸克看上去近似是自由的，它们实际上就是深度非弹性散射实验中所发现的部分子。当然，如果能量很低，夸克之间的相互作用就会变得很强从而导致它们被禁闭。由此人们发现，渐近自由可以将以往的夸克模型、深度非弹性散射的实验结果、Bjorken 标度和部分子、量子色动力学模型这几个理论和实验上相互独立的元素完全融合在一起。因此，这是一个很强的暗示：自然界的强相互作用的基本理论应当就是量子色动力学。至此，人们关于强相互作用的量子场论框架就大致建立起来了。

¶ 标准模型的诞生

我们前面关于量子场论的历史的叙述是将电磁相互作用、弱作用、强作用分开叙述的。将它们的理论融合起来就诞生了粒子物理的标准模型。但是，如果要从理论上更好的理解标准模型诞生的历史，我们必须回到更早的时期。人们关于电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用的量子场论实际上都源于粒子（费米子）之间交换中间玻色子的模型。现在我们知道，最为重要的情形是交换具有规范对称性的矢量粒子的情形。因此从理论上讲，标准模型的诞生史应当从量子的规范理论的历史谈起。

人们最为熟悉的量子规范理论就是量子电动力学（QED），其中的规范场就是电磁

场。每一个规范理论都对应着一个规范对称群，或者简称规范群。这个群中的元素对应于一定的规范变换。例如，量子电动力学的规范对称群就是 $U(1)$ 群。这是一个交换群（又称为阿贝尔群）。也就是说，群元素的乘法满足交换律。1954 年，纯粹出于对称性的推广，C.N. Yang 和 R. Mills 将规范场以及规范变换推广到了非阿贝尔规范群。这就是所谓的非阿贝尔规范场。非阿贝尔规范场在诞生之初面临两大难题，一个是如何量子化，另一个是如何赋予规范粒子以质量。非阿贝尔规范场的量子化的研究一直贯穿着六十年代。Feynman，Fadeev，Popov，DeWitt 等人都做出了贡献。[11] 到六十年代末，非阿贝尔规范场的量子化已经被广为接受了。

几乎在同时，人们也已经逐渐认清，不仅仅电磁相互作用的理论（即量子电动力学）可以看成是一个规范理论，强相互作用的理论（即量子色动力学）以及弱相互作用的理论应当都是量子规范理论。关于强相互作用的理论（即量子色动力学）的建立我们前面已经提到了，关于弱作用的规范理论的建立中还必须克服一个困难。这个困难其实也是最初困扰 C.N. Yang 和 R. Mills 的困难之一，也就是如何赋予弱作用的规范粒子（按照 Glashow 的记号，称之为 $W^{\pm}$，Z^0 粒子）以质量。这件事情的研究其实也是在六十年代有了结果。在粒子物理界的人们通常称之为希格斯机制（Higgs mechanism），尽管第一，其他的物理学家也做出了贡献，第二，其实早在五十年代，凝聚态物理学家 P.W. Anderson 就提出了同样的想法。所谓希格斯机制实际上是解释了如何通过（规范）对称性的自发破缺来赋予规范玻色子以质量。有了这个机制，在1967 年, S. Weinberg 和 A. Salam 写出了现在称为 Weinberg-Salam 模型的关于电磁相互作用和弱相互作用统一的规范场论模型。这个模型预言有三个有质量的中间规范玻色子（其中一个是中性的），同时为了保证对称性自发破缺（希格斯机制），还至少需要一个标量粒子（现在称为希格斯粒子）。

到 1974 年，John Iliopoulos 在一次会议的总结报告中，第一次将人们关于电磁、弱、强相互作用的量子场论融合在一起，并且称之为标准模型。从那时起至今，标准模型在历代的加速器上经历了各种检验。特别值得一提的是，标准模型所预言的各种基本粒子，除了希格斯粒子之外，都已经在高能加速器上被发现。其中最近的一次是 1995 年美国的 Fermilab 发现的最后一种（也是最重的一种）夸克—顶夸克（top quark）。这个夸克的质量大约是 175GeV，这大约相当于一个金原子核的质量，但是至少在目前标准模型的框架下，顶夸克却仍然是一个没有内部结构的“点粒子”！

标准模型十分完美，但是并不是说它就是我们关于物质世界认识的终极理论。人们从理论以及一些间接的实验结果中推断，很可能存在超出标准模型的“新物理”。虽然目前没有任何直接的实验证据，但是人们还是提出了许多的“新物理”的模型，例如：大

[11] 我们这个课程仅仅讲授量子电动力学中电磁场（也就是阿贝尔规范场）的量子化问题。关于非阿贝尔规范场的量子化将会在量子规范场论的课程中讲授。

统一模型、超对称标准模型、Techni-color 模型、额外维模型、Little Higgs 模型等等。种种迹象表明，如果这些所谓的“新物理”果真存在的话，它们很可能会与标准模型中目前唯一没有在实验上得到直接验证的粒子－希格斯粒子－紧密联系着。[12] 虽然希格斯粒子还没有被找到，但是所有模型的理论框架中都需要这样一个粒子的存在。它的主要作用就是诱导对称性自发破缺从而给予所有自然界粒子以质量。因此，从这个意义上说，希格斯粒子是最为神秘的，因为自然界的一切粒子的质量都源于它。同时，种种实验和理论的迹象都表明，它很有可能在 2009 年要投入运行的大型强子对撞机（Large Hadron Collider, LHC）上被找到。[13] 因此，未来的几年将是粒子物理实验和理论十分值得期待的几年，同时也是物理学基础理论十分值得期待的几年。我们会找到希格斯粒子吗？如果找到它会是与标准模型描述一致的那种希格斯粒子，还是会体现出新物理？如果我们找不到希格斯粒子会怎样？这些问题的答案很有可能会在未来几年被完全或部分地揭开，我们将拭目以待。

¶ 我们前面给出了量子场论（特别是相对论性量子场论）发展的一个简单历史。我们的这个课程当然不会涵盖上面提到的所有内容。特别是关于非阿贝尔规范场、量子色动力学、Weinberg-Salam 模型的内容将会放在量子规范场论课程中介绍。另外，关于重整化的系统讨论也将放在量子规范场论课程中讨论。我们这个课程将主要以正则量子化为理论框架；以量子电动力学、汤川理论、相互作用标量场论等为具体实例；着重阐述量子场论的基本理论框架和重要的应用。我们的课程的顺序显然不是按照历史的时间顺序进行的。因此，在讲授这些内容之前，有必要让大家了解一些真实的历史过程，因为恰恰是这些活生生的历史能够给我们更多的启迪。

§2 为什么需要相对论性量子场论

前面我们简要从历史的顺序说明了量子场论的发展，现在让我们再从逻辑的顺序来论述一下量子场论（特别是相对论性量子场论）的必要性。正如前面提到的，相对论性的量子场论缘起于相对论性 量子力学。我们这里并不想对相对论性量子力学作完整的介绍，我们将仅仅涉及它最基本的概念，同时更为重要的，指出它的不自洽性，从而论述为什么我们需要过渡到相对论性的量子场论。[14]

¶ 相对论性量子力学的基本出发点是试图寻找描写一个相对论性粒子的单粒子波动方程。前面曾经提到，薛定谔其实首先得到的是相对论性的克莱因－高登方程。但是这个

[12] 这里我们所提到的标准模型实际上更为确切的名称应当称为最小标准模型。事实上，还可以有扩展版本的标准模型。在这些模型中会出现不止一个希格斯粒子。

[13] 2012年7月4日，CERN的CMS 和 ATLAS 实验组联合宣布，他们已经找到了Higgs粒子，其质量大约为125GeV。

[14] 这方面比较详细的讨论会在高等量子力学课程中进行。有兴趣的同学也可以参考相关的参考书籍。

方程作为单粒子的量子力学波动方程有许多问题。例如，它不能满足量子力学中的概率守恒，同时得到的原子的谱也不太对，另外它还不能描写自旋。如果将其取非相对论极限，那么得到的波动方程就是标准的薛定谔方程，它保证了概率守恒从而可以作为一个单粒子的波动方程，并且，正如大家从量子力学和原子物理的课程中所学到的，它能够很好地描写原子谱学的绝大部分结果。

如果仔细比较这两个方程我们发现，它们的差别主要在于能量和动量之间的函数关系（又称为粒子的色散关系）。相对论性的能量动量关系为：$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$，如果分别将能量、动量变为希尔伯特空间的算符：$E \to i\partial/\partial t$，$\mathbf{p} \to -i\nabla$，那么我们得到的将是一个关于时间的二阶偏微分方程，即克莱因－高登方程（Klein-Gordon equation）：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0\,. \tag{1.1}$$

如果我们首先取非相对论极限，这时能量和动量的关系变为（略去静止能量 mc^2）：$E = \mathbf{p}^2/(2m)$，能量、动量变为算符后我们得到的是关于时间的一阶偏微分方程，即薛定谔方程：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi = 0\,. \tag{1.2}$$

薛定谔方程能够保持概率守恒最主要的一个原因就是它是关于时间的一阶偏微分方程，而克莱因－高登方程由于是关于时间的二阶方程，因此注定会破坏概率守恒。另外，克莱因-高登方程不包含粒子的自旋，因此注定无法描写像电子这样的有自旋的费米子。[15] 这个方程的另外一个问题是存在能量小于零的负能解，这是所有相对论性波动方程的典型问题。

¶ 为了能够克服上面提到的这些困难，狄拉克重新考虑相对论性的粒子的波动方程问题。首先，他希望得到一个关于时间的一阶偏微分方程。由于在相对论的情形下时间与空间一起构成闵氏空间，因此这个方程（如果存在）对于空间应当也是一阶偏微分方程。由于相对论性粒子的能动量关系可以用四动量等价地写为：

$$p^\mu p_\mu = m^2\,, \tag{1.3}$$

将四动量变为算符：$p^\mu = i\partial^\mu$ 我们就得到了二阶偏微分方程。要得到关于时间、空间都是一阶的偏微分方程，我们希望做的就是将这个表达式“开方”，得到一个关于四动量 p^μ 的一次表达式。要做到这点其实需要将能动量“扩充”为矩阵。狄拉克发现可以找到四个 4×4 矩阵 γ^μ，如果我们构造：$\not{p} \equiv p_\mu\gamma^\mu$，并且令 γ^μ 满足：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\,, \tag{1.4}$$

[15] 因此在解释原子的光谱方面一点用途也没有。正是因为如此，薛定谔才取了非相对论极限，得到薛定谔方程！

那么我们有：$(\not{p})^2 = p^\mu p_\mu = m^2$。因此，我们可以开方得到：$\not{p} = m$。将四动量变为算符，我们就得到了关于时间、空间都是一阶的偏微分方程，这就是著名的狄拉克方程：

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0\,. \tag{1.5}$$

当然，这时候的“波函数” $\psi(x)$ 也不再是一个分量，而是具有四个分量的狄拉克旋量。这个扩充使得波函数具有了“内部自由度”，这个内部自由度恰好可以描写粒子的自旋。事实上，狄拉克方程的一个重大的成功就是能够证明电子的自旋是 $1/2$ 并且它的回转因子 $g = 2$。这些事实在解释原子谱学的精细结构中是十分重要的。在原先薛定谔方程的理论框架下它们是需要作为额外的假设引入的。在非相对论极限下，狄拉克方程可以化为仅仅具有两个分量的（有自旋的）薛定谔方程。

狄拉克方程解决了克莱因-高登方程的部分问题（如概率守恒问题，自旋的问题），但仍然没有解决全部问题（例如负能解问题）。为了解决负能解问题，狄拉克提出了空穴理论。他认为，我们所说的真空可以看成是充满了负能电子的状态，这又被称为“负能海”。由于泡利不相容原理，一个通常的正能量的电子是不能够掉入到已经被占满了的负能状态去的。当然，如果我们外界输入的能量足够大（具体来说大于正负电子对的阈能），那么原先处于“负能海”里面的负能电子在吸收了能量后就会被激发到具有正能的状态。这个状态相对于原先的真空状态而言相当于产生了一个正负电子对：首先我们多出了一个正能量的电子，同时原先的负能海里面出现了一个空穴，这个空穴相对于填满的负能海状态而言具有 $+|e|$ 的电荷，同时具有正的能量。[16] 因此，空穴理论预示着存在一种与电子质量相同、电荷相反的粒子，狄拉克称之为正电子，它是通常电子的反粒子。

尽管后来正电子的确在实验上被发现，从而说明了狄拉克理论的巨大成功，但是狄拉克的理论也带来了新的问题。如果真空真的是充满了负能的电子，这些电子是否和通常的正能电子相互作用？如果有相互作用，显然这个系统就变成一个多粒子系统，而试图用一个单粒子的波动方程来描写其中任何一个粒子都不可能是正确的。

¶ 另外一个值得一提的问题就是相对论所要求的因果性。狭义相对论告诉我们，两个类空间隔的事件之间是不可能有因果联系的。这意味着如果我们计算量子力学中时间演化算符的概率振幅：$\langle \mathbf{x}_1 | e^{-iH(t_1-t_2)} | \mathbf{x}_2 \rangle$，应当得到零的结果，只要 $(t_1, \mathbf{x}_1)$ 与 $(t_2, \mathbf{x}_2)$ 之间的不变间隔是类空的。但是，这一点无论对于一个非相对论或者相对论性的单粒子哈密顿量都是不成立的。

¶ 所有以上种种问题归根结底预示着任何关于单粒子的相对论性波动力学的描述都不可能是自洽的。一个相对论性的量子理论注定是多粒子的。这一点在物理上也很清楚：我们知道只要能量足够高，粒子-反粒子对就可以产生和湮灭，因此相应的理论必定要能

[16] 熟悉固体物理能带论的同学应当知道空穴的概念在固体物理中也有类似的表述。

够处理多粒子，同时粒子数不一定守恒的体系。量子场论恰恰就是这样的一个理论体系。

在量子场论的框架中，所有上述问题都得到了圆满的解决：

- 由于不再是关于单粒子的理论，量子场论中不需要要求单粒子的概率守恒。取而代之的是整个理论的幺正性的要求。也就是说，整个系统的希尔伯特空间中的概率仍然是归一的，但是其中单粒子子空间中的概率并不一定是归一的，因为粒子可以产生和湮灭。[17]

- 在量子场论中克莱因-高登方程和狄拉克方程也不再是单粒子的波动方程，而是被视为（经典的）场方程（即场的运动方程）。场 $\psi(x)$ 本身在量子化的过程中变为希尔伯特空间的算符。场的基态就被视为真空，而粒子则是场的某种激发态。由于形式上似乎是对于原先已经（错误地）描写量子体系的波动方程再一次进行量子化，因此场的量子化又被称为“二次量子化”。[18]

- 量子化的场不仅仅可以激发粒子，还可以激发反粒子。反粒子实际上是相对论性量子力学中负能解、或者说狄拉克理论中的空穴的某种“涅磐重生”。[19] 只不过在量子场论的框架下，所有粒子的能量都是正的，从而不再有负能解的问题（参见§8.2小节中关于狄拉克场的量子化的讨论）。

- 恰恰是由于有反粒子的存在，如果在量子场论的框架中计算两个类空事件之间的传播概率振幅，我们将得到严格的零，因为反粒子的贡献刚好消去了粒子的贡献（参见 §7.2小节和 §8.2小节中关于克莱因-高登场和狄拉克场的传播子的讨论）。因此，量子场论是严格符合狭义相对论因果性的理论。



相关的阅读

这一章我们简要回顾了量子场论和量子规范场论的历史。大家会发现，这个历史在早期是与量子力学的建立、在后期是与粒子物理的进展等密不可分的。量子场论的早期的

[17]顺便提一下，刚才提到狄拉克方程作为一个一阶偏微分方程实际上存在一个守恒量，它实际上对应于电荷守恒。如果一个理论中只有单粒子，并且粒子数守恒，那么电荷守恒与单粒子概率守恒是一致的。但一般情形下两者不同。

[18]顺便提一下，如果我们将非相对论性的波动方程（即薛定谔方程）进行二次量子化，我们就得到了高量课程中讲述的、在凝聚态、核物理中广泛运用的量子多体理论，即非相对论性的量子场论。

[19]一个反粒子沿着时间正向的传播实际上等价于负能解沿着反向时间的传播（听起来有点绕）。

简单历史在 S. Weinberg 的书上有比较详细的叙述 [2]。关于粒子物理的简单发展历史可以参考有关粒子物理课程的介绍以及网上的资料。



第二章　洛伦兹对称性与相对论性场

本章提要

- 洛伦兹群的旋量表示（§4）
- $SL(2,C)$ 群与洛伦兹群（§5）
- 相对论性场的作用量与运动方程（§6）

本课程将主要讲授相对论性量子场论的基本内容。显然，作为一个相对论性的理论，洛伦兹对称性无疑将起着至关重要的作用。虽然这一点在相对论性量子场论的初期就已经被人们所认识到了，但是对于洛伦兹对称性更为深刻的认识则是在魏格纳（E.P. Wigner）将群论的观点引入到量子力学之后。洛伦兹对称性的数学描写是所谓的洛伦兹群；或者再推广一步（加上时空平移的对称性）的庞加莱群的表示论。

关于庞加莱群和洛伦兹群表示的数学理论主要来自于外尔（Weyl）的工作。本章中我们将简单介绍洛伦兹群的表示理论，并且从洛伦兹对称性的角度导出相对论性量子场论中的各种理论的作用量。这种做法虽然并不是历史的顺序，但它从逻辑上讲恰恰是最为直接的。我们会发现，与其说量子场论需要洛伦兹群的表示理论，倒不如说洛伦兹群表示论需要量子场论，因为量子场论是讲述洛伦兹群表示论的最合适的理论框架。

§3 经典场论的基本表述

¶ 我们在物理学中第一次接触场的概念是从电磁现象开始的。当然，对于熟悉连续介质力学的同学来说，他们接触到场的概念也许更早一些。（经典）场是不同于分立的、有限多质点系统的、新的一类力学体系。在经典的意义下，场具有连续（不可数）多的动力学自由度。

在分析力学的理论框架中，一个经典场系统的力学可以由它的拉格朗日量或者哈密顿量来描述。从这一点来看，场系统与其他力学系统是完全相同的。由于场系统的力学变量是依赖于定义在时空上的场，因此它的拉格朗日量也必定表现为某个密度函数（称之为拉格朗日密度）在空间的积分。如果抽象地来写，一个场系统的作用量可以表达为：

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \,, \tag{2.1}$$

其中 S 表示场系统的作用量；$\phi(x) = \phi(t, \mathbf{x})$ 代表空间点 $\mathbf{x}$ 处的场，即该点的动力学自由度。[1] 函数 $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ 就是所研究场系统的拉格朗日密度，它又被简称为该量子场论的拉氏量。

如果仅仅考虑纯粹经典的场论，场系统的拉格朗日密度的形式可以更为复杂。但是，为了能够得到自洽的量子场论，一般来说量子场系统的拉氏量 $\mathcal{L}$ 必须具有局域性，[2] 同时它一般不能包含超过一阶的时间微商，[3] 另一方面，如果我们主要研究相对论性量子场论，那么洛伦兹对称性显然要求拉氏量中空间导数的阶数与时间导数的一致。这些条件说明，公式 (2.1) 给出的是相对论性量子场论拉氏量相当一般的形式，即它仅仅包含位于时空点 x 处的场及其一阶时空微商。另外一个重要的事实就是，在场系统的拉格朗日密度上加上任意函数的四维散度并不改变物理。场系统的经典运动方程——又称为欧拉－拉格朗日方程——可以利用通常的变分法给出：

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \,. \tag{2.2}$$

¶ 类似地，拉格朗日形式的经典场论也可以利用哈密顿形式来表达。为此，我们定义与动力学自由度 $\phi(\mathbf{x})$ 对应的共轭动量 $\pi(\mathbf{x})$ 为：[4]

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \,, \tag{2.3}$$

[1] 本讲义中，我们将用黑体的字母（例如 $\mathbf{x}$ 等）表示三维空间的位置矢量，而用 $x = (t, \mathbf{x})$ 表示闵氏空间的时空坐标。

[2] 非局域性的、有相互作用的场论一般来说是有逻辑问题的。

[3] 如果场的拉格朗日密度中包含不可消去的（例如通过分部积分）高阶时间微商，这样的场论被称为高阶导数场论。高阶导数场论往往会造成相应的量子理论中存在破坏幺正性的鬼态。

[4] 有时我们会略写场变量中的时间依赖。

于是，场系统的哈密顿量可以表达为：

$$H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}\left(\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}\right) , \tag{2.4}$$

其中的函数 $\mathcal{H}[\pi,\phi]$ 称为场系统的哈密顿密度，又简称为哈密顿量

¶ 对称性对于经典场论的作用体现在所谓的 Nöther 定理 中。考虑场变量的一个无穷小变换：

$$\phi(x) \to \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) , \tag{2.5}$$

其中 α 是一个无穷小实变量。如果这个变换不改变场系统的经典运动方程，我们就称该变换为系统的一个（经典意义上的）对称性。显然，一个变换要成为场系统的对称性，我们需要要求在这个变化下系统的拉格朗日密度仅仅改变一个四维散度：

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial^\mu\mathcal{J}_\mu , \tag{2.6}$$

由此我们可以证明，下列构造的流 $j_\mu(x)$ 守恒：

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 , \quad j_\mu(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}_\mu . \tag{2.7}$$

四维守恒流的时间分量的体积分被称为守恒荷：

$$Q \equiv \int d^3\mathbf{x} j^0(x) . \tag{2.8}$$

作为一个特例，我们如果考察四维时空的平移不变性，那么我们得到的守恒流是所谓的能动量张量：

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} . \tag{2.9}$$

大家很容易验证，这个张量的 00 分量就是前面给出的哈密顿密度 $\mathcal{H} = T^{00}$；而它的 $0i$ 分量就是动量密度。

需要特别提醒大家注意的是：Nöther 定理仅仅是在经典水平上是成立的。一个经典的对称性在力学系统被量子化以后是否仍然成立是需要经过进一步考察的。在量子场论中，一个经典的对称性在量子化以后很有可能被破坏，例如通过所谓的对称性自发破缺，或者由于存在（量子）反常（anomoly）。

§4 洛伦兹群的旋量表示

§4.1 对称性、群与群表示

¶ 在量子场论的研究中，特别是相对论性量子场论的研究中，对称性占据了十分重要的地位。对称性在量子理论中的重要性首先由 E.P. Wigner 加以阐明。由于量子场是按照时空分布的动力学自由度，因此时空的对称性显然也将在量子场论中处于核心地位。我们这个课程中只讨论平直时空上的相对论性量子场论，相对应的时空对称性就是大家所熟悉的[5] 洛伦兹对称性（Lorentz symmetry），或者称为洛伦兹不变性。从分析力学我们知道，任何一个经典力学系统的动力学完全由系统的作用量给出。一个力学系统的作用量一般是其动力学自由度及其导数的泛函。因此，洛伦兹对称性对于一个相对论性的场系统的直接要求就是场系统的作用量必须是一个洛伦兹不变量，或者称为洛伦兹标量。另外一类大家熟悉的，也是十分重要的对称性就是时空的平移不变性。它们是与系统的能量、动量守恒直接相关的。一个相对论性场系统的作用量应当也是时空平移不变的。事实上，洛伦兹对称性与时空平移对称性可以集合起来，[6] 它们一起构成了一个新的对称性，我们称之为庞加莱对称性。因此，概括起来说，我们要研究的量子场系统，它的作用量必定是一个庞加莱不变量。

群论（group theory）是描述对称性的数学语言。上面提到的洛伦兹对称性以及扩充了的庞加莱对称性都有相应的群结构来加以描述。描述洛伦兹对称性的群称为洛伦兹群，它由一切的洛伦兹变换构成；描述庞加莱对称性的群称为庞加莱群，它由一切庞加莱变换－即任意的洛伦兹变换再加上任意的时空平移－构成。显然，洛伦兹群是庞加莱群的一个子群。

群本身是一个抽象的数学结构，它是由所考虑的所有对称操作（或者称为对称变换）所构成的非空集合。这些对称操作也被称为群的元素。在群的元素之间定义了一种代数运算，被称为群的乘法。两个群元素的乘法其实就是按照顺序分别进行这两个元素所对应的对称变换。群对于其乘法具有封闭性，即任意两个群元素相乘，得到的仍然是群中的一个元素。这对应于任意两个对称操作的结果等价于另一个对称操作。另外，每个群元素都有一个逆元素。这对应于每个对称操作都存在一个逆操作。

物理学中我们更加重视群的具体实现，这就是所谓的群表示论。物理学中的群论主要涉及群表示论，原因主要在于具体的群表示往往对应于真实的物理实在，这也是物理学运用群论与数学最为不同的地方。举例来说，同样是转动群（或者更确切地说，是 $SU(2)$ 群），数学家研究清楚了这个群的基本结构就已经可以了。但是，这个群的不同表示恰恰对应于物理学上不同角动量的粒子。因此，这些不同的群表示对于物理学家来

[5] 或者不太熟悉的，不过最好还是熟悉的。
[6] 在数学上，这种将两个对称群“集合”起来的方式称为半直积。

说都是有不同物理意义的，尽管对于数学家而言它们都是雷同的。

粗略地来说，所谓群的表示就是从抽象的群元素到某个矢量空间中线性变换（也就是矩阵）的映射，这种映射必须保持群的乘法运算结构。这样一来，群元素之间的乘法就体现为矩阵之间的乘法。在群表示论中，由于所有的群元素都明显地表现为某个矢量空间中的矩阵，因此相应矢量空间中的矢量的地位也就被凸现出来了。这些矢量其实就是被群的元素（即对称操作）所作用的对象（即被操作者）。在矢量空间中总是可以选取一组线性无关的基矢量，或者简称为基，而任意的矢量都可以写为基矢量的线性叠加。基矢量的重要性不仅仅在于它们可以表达任意矢量，其重要性还在于它们在对称操作（线性变换）下具有确定的变换规则。因此，在群表示论中，表示矢量空间中的基矢量也被称为该群表示的基，它们在所考虑的对称操作下具有完全确定的变换规则。

具体到相对论性量子场论，由于量子场系统的作用量是一个庞加莱不变量，又由于量子场系统的作用量是场及其导数的泛函，因此一个自然的要求就是量子场本身构成庞加莱群表示的基，即我们要求它们在庞加莱群的变换下具有确定的变换规则。一旦量子场本身在群变换下具有确定的变换性质，我们就可以由量子场出发，构造洛仑兹不变的作用量。作用量确定了，场的经典运动方程也就完全确定了。我们随后会看到：处于不同表示的量子场实际上可以用来描写具有不同性质的粒子。因此，最为自然的讨论量子场的起点就是从讨论洛伦兹群（或者更广泛一点，庞加莱群）的表示开始。尽管这种方法十分自然而且深刻，但却往往会使得初学者（特别是对于群表示论不熟悉的初学者）感到茫然。所以，我们这里准备采取一个折中的方法，即我们将尽可能简单地讲述洛伦兹群的表示。由于在量子力学的学习过程中，多数同学其实都有了关于 $SU(2)$ 群（或者转动群）表示的部分经验，只不过这些知识也许没有用群表示的语言来表述的而已。为此，我们将相关的 $SU(2)$ 群表示的描述收于附录 B中，供需要的同学参考。这将为我们下面关于洛伦兹群表示的讲授提供足够的基础。

§4.2 洛伦兹群的结构

¶ 这一小节中，我们简要回顾洛伦兹变换的基本性质并由此给出洛伦兹群生成元的基本对易关系。考虑平直的闵氏时空（Minkowski spacetime），其中的度规取为：$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = (+,-,-,-)$，[7] 它可以用来升降四矢量的指标。在洛伦兹变换下不变的物理量被称为洛伦兹标量。在狭义相对论中，比标量稍微复杂一些的物理量是所谓的四矢量。典型的例子是四维时空的坐标。同时我们还知道，可以定义两类四矢量，我们分别称之为逆变四矢量和协变四矢量，并且约定分别用上下标来标记这两类四矢量。因此，闵氏时空中的坐标可以记为：

[7] 注意，这个度规的选取与M. Peskin 的书上一致，与 S. Weinberg 的选取相差一个符号。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \ . \tag{2.10}$$

与之相对应的协变矢量为：

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}) \ . \tag{2.11}$$

这里我们已经采用了爱因斯坦求和约定。在洛伦兹变换下，一个象四维时空坐标同样变换的量就称为四矢量。一个一般的四矢量 A^μ 在洛伦兹变换下的变换性质可以表达为：

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \ , \tag{2.12}$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是与洛伦兹变换对应的变换矩阵。众所周知，洛伦兹变换不改变任何两个四矢量的内积。显然，所有满足这个性质的对称操作（线性变换）构成一个群结构，即洛伦兹群。如果用协变的形式写出，洛伦兹变换不改变两个四矢量的内积的事实可以表达为：

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \ , \tag{2.13}$$

这个式子告诉我们两个重要的信息：第一，如果我们将洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 视为一个 4×4 的矩阵，这个矩阵的行列式必定满足：

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \ . \tag{2.14}$$

这个结果可以将公式 (2.13) 两边取行列式得到；第二，将公式 (2.13) 两边取 $\alpha = \beta = 0$ 的情形，我们得到：

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1 \ , \tag{2.15}$$

这意味着：$|\Lambda^0{}_0| > 1$。因此，可以存在两种情形：

$$\Lambda^0{}_0 > 1 \ , \ \text{or} \ \Lambda^0{}_0 < -1 \ . \tag{2.16}$$

因此，洛伦兹群可以按照其行列式的取值以及 $\Lambda^0{}_0$ 的符号分为互不连通的四支。这四支分别有着自己的名称：

- 恰当正时洛伦兹变换（proper, orthochronous）：$\det(\Lambda) = +1$，$\Lambda^0{}_0 > 1$；
- 非恰当正时洛伦兹变换（improper, orthochronous）：$\det(\Lambda) = -1$，$\Lambda^0{}_0 > 1$；

- 非恰当非正时洛伦兹变换（improper, non-orthochronous）：$\det(\Lambda)=-1$，$\Lambda^0{}_0<-1$；
- 恰当非正时洛伦兹变换（proper, non-orthochronous）：$\det(\Lambda)=+1$，$\Lambda^0{}_0<-1$。

可以证明上述四支的每一个都是单联通的，它们之间则是通过分立的时间反演以及空间反射（宇称）变换相联系。

下面我们考察一个无穷小洛伦兹变换矩阵的结构。我们将四矢量的变换矩阵写为：

$$(\Lambda)^{\mu}{}_{\nu}=\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu}\,, \tag{2.17}$$

其中 $(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$ 是洛伦兹群的六个生成元在四矢量变换情形下的表示矩阵。指标 $\alpha\beta$ 标识不同的生成元；$\mu\nu$ 标识一个特定生成元的矩阵元。指标 $\alpha\beta$ 是反对称的，即：$\mathcal{J}^{\alpha\beta}=-\mathcal{J}^{\beta\alpha}$，因此洛伦兹群一共有六个独立的生成元。参数 $\omega_{\alpha\beta}\equiv-\omega_{\beta\alpha}$ 代表相应的六个独立“转动角度”。利用洛伦兹变换不改变四矢量的内积，我们可以得到六个生成元的一些明显表达式。生成元的具体表达式的选取并不是唯一确定的，只需要它们满足正确的对易关系即可。例如，一种通常的选取方式为：

$$(\mathcal{J}^{\alpha\beta})_{\mu\nu}=i\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu}-\delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\right)\,. \tag{2.18}$$

或者等价地写为：

$$(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}=i\left(\eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu}-\eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)\,. \tag{2.19}$$

这里我们需要指出的是，这个形式的洛伦兹变换矩阵只是洛伦兹群表示中的一个，由于明显的原因，它被称为（四）矢量表示。它是一个四维表示，即每一个洛伦兹变换都表达为一个 4×4 的矩阵，任何一组完备的四矢量都可以看成是这个表示的基。

上面提到的矢量表示并不是洛伦兹群最简单、最基本的表示（除去平庸表示以外）。洛伦兹群的最基本的表示实际上是二维的旋量表示。下面我们来说明旋量表示是如何自然地得到的。为此，我们引进如下的符号：

$$\theta^i=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega^{jk}\,,L^i=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk}\,,\eta^i=\omega_{0i}\,,K^i=J^{0i}\,,$$

这样一来，一个一般的洛伦兹变换矩阵可以写成：

$$\Lambda=\exp\left(-i\boldsymbol{\theta}^iL^i-i\boldsymbol{\eta}^iK^i\right)\,, \tag{2.20}$$

注意 $\boldsymbol{\theta}_i$ 和 $\boldsymbol{\eta}_i$ 是相应的六个“转动角度”（其中 $i=1,2,3$）；六个矩阵：$\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{K}$ 也被称为相应的生成元。容易验证，三个 $\mathbf{L}$ 刚好生成了三维空间的普通转动，另外三个 $\mathbf{K}$ 则生成了沿三个不同空间坐标轴的推促（boost）。洛伦兹群的六个生成元之间满足下列对易关系：

$$[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk}L^k \ , \ [L^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \ , \ [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}L^k \ , \tag{2.21}$$

需要提请大家注意的是，普通三维空间转动的生成元 L^i 是厄米的，但是对应于 boost 的生成元 K^i 却不是。因此，我们这里讨论的洛伦兹群的表示不是幺正的。事实上，由于洛伦兹群不是一个紧致群，因此它并不存在有限维的幺正表示。

上述六个生成元之间的对易关系促使我们定义：

$$\mathbf{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + i\mathbf{K}\right) \ , \ \mathbf{J}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} - i\mathbf{K}\right) \ . \tag{2.22}$$

简单的计算发现 $\mathbf{J}^{(1)}$ 和 $\mathbf{J}^{(2)}$ 互相对易，并且 $\mathbf{J}^{(1)}$，$\mathbf{J}^{(2)}$ 的各个分量之间满足通常角动量的（或者说 $su(2)$ 李代数的）对易关系：

$$[\mathbf{J}_i^{(1)}, \mathbf{J}_j^{(1)}] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k^{(1)} \ , [\mathbf{J}_i^{(2)}, \mathbf{J}_j^{(2)}] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k^{(2)} \ , [\mathbf{J}_i^{(1)}, \mathbf{J}_j^{(2)}] = 0 \ . \tag{2.23}$$

由于 $\mathbf{J}^{(1)}$ 和 $\mathbf{J}^{(2)}$ 相互对易并且各自满足通常的角动量对易关系，我们可以仿照 $SU(2)$ 群表示的构造方法来构建洛伦兹群的表示。尽管我们知道它并不是两个 $SU(2)$ 的直积，但是它的表示的形式却非常类似于两个 $SU(2)$ 的直积。[8]

§4.3 外尔旋量表示

在量子力学中大家都清楚，不同自旋的粒子的波函数实际上都是 $SU(2)$ 群（在单位元的无穷小邻域中等价于转动群）的不同表示。除去平庸的表示（也就是在转动下不变的表示）以外，最为简单的表示对应于自旋 $s = 1/2$ 的二维表示。更高维的表示都可以看成是由较低维表示“构建”出来的。大家熟知的典型例子就是两个自旋是 $1/2$ 的粒子的相加问题。这时，我们可以将两个粒子的自旋波函数相乘，构成新的表示的基。这个表示称为原来两个表示的直积表示。两个不可约表示的直积表示一般来说是可约的。具体到这个简单的例子，大家都知道它实际上包含一个三维表示，它对应于总自旋为 1 的三重态；还包含一个一维（平庸）表示，它对应于总自旋是零的单态。更为详细的讨论，可以参考本讲义的附录 B以及相关的书籍 [10]。

复习了 $SU(2)$ 群表示以后，我们可以比较直截了当地讨论洛伦兹群的不可约表示了。正如上一小节末指出的，洛伦兹群“形式上”很像两个独立的 $SU(2)$ 群的直积。因此，洛伦兹群的表示可以用一对 $SU(2)$ 群表示的指标 (j_1, j_2) 来标记。例如：$(0,0)$ 表示在两个类 $SU(2)$ 群下都是平庸的表示；$(1/2, 0)$ 和 $(0, 1/2)$ 则分别表示在一个 $SU(2)$ 下是一个二维表示，在另一个下则是平庸表示。正象自旋 $1/2$

[8] 如果我们讨论的不是洛伦兹群而是四维欧式时空的转动群，那么它是一个紧致的群并且在单位元邻域内完全等价于两个 $SU(2)$ 群的直积。

的表示是构成 $SU(2)$ 群更高维表示的出发点一样，表示 $(1/2,0)$ 和 $(0,1/2)$ 显然是构成洛伦兹群更高维不可约表示的最基本的“原材料”。我们称 $(1/2,0)$ 表示的基（一共有两个分量）为左手外尔旋量（left-handed Weyl spinor）；称 $(0,1/2)$ 表示的基为右手外尔旋量（right-handed Weyl spinor）。它们统称为外尔旋量（Weyl spinor）。更高维的洛伦兹群的表示的基都可以由左、右手外尔旋量通过表示的直积来构建。

我们采用不带点的大写罗马上角标来标记一个左手旋量的分量而用带点的大写罗马下角标来标记一个右手旋量的指标。这样做的好处是可以明确区分这两类旋量不同的变换性质，尽管每一种旋量的指标都是两种可能取值。具体来说，我们分别将一个左、右手外尔旋量记为：

$$\chi^A \in (1/2,0)\ ,\quad \xi_{\dot A} \in (0,1/2)\ , \tag{2.24}$$

其中的角标 $A=0,1$，$\dot A=\dot 0,\dot 1$，它们分别标志左、右手外尔旋量的两个分量。[9]

我们可以进一步引进完全反对称的 2×2 矩阵，它又称为旋量空间的度规：

$$\epsilon^{AB}=\epsilon_{AB}=-\epsilon_{\dot A\dot B}=-\epsilon^{\dot A\dot B}\ ,\quad \epsilon_{01}=-\epsilon_{\dot 0\dot 1}=+1\ . \tag{2.25}$$

利用度规 ϵ^{AB}，我们可以定义旋量指标的升降和收缩，例如：

$$\begin{aligned}\psi_A &= \psi^B\epsilon_{BA}\ ,\psi^A=\epsilon^{AB}\psi_B\ ,\\ \chi_{\dot A} &= \chi^{\dot B}\epsilon_{\dot B\dot A}\ ,\chi^{\dot A}=\epsilon^{\dot A\dot B}\chi_{\dot B}\ .\end{aligned} \tag{2.26}$$

我们约定：所有的旋量指标的缩并都遵循“西北规则”（northwest convention），也就是说一对缩并的指标，无论是带点的或不带点的，上标总是在它的下标的西北方向。保持这个约定纯粹是为了方便，因为细心的读者可能已经注意到了，这里旋量的指标的缩并是有方向性的，即：

$$\chi^A\psi_A=-\chi_A\psi^A\ , \tag{2.27}$$

也就是说缩并的西北约定和东北约定相差一个符号。这一点可以从上面 ϵ^{AB} 的定义 (2.25) 以及我们关于指标提升和降低的规则 (2.26) 直接得到验证。旋量指标缩并的反对称性还有一个重要的推论：一个多指标的张量，如果我们将其对称的两个旋量指标缩并一定得到零。也就是说，如果 $\chi_{AB\cdots}$ 满足：$\chi_{AB\cdots}=\chi_{BA\cdots}$，那么一定有：$\chi^A{}_{A\cdots}=0$。

我们的讨论中还会涉及到四维的泡利矩阵：σ^μ，$\mu=0,1,2,3$。它们的定义为：

[9] 这两个分量的指标的取值完全是任意的。我们这里选取 $A=0,1$ 完全是为了后面与 $SL(2,C)$ 群表示的对应方便起见。

$$\sigma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\+i&0\end{pmatrix},\sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

而具有协变指标（下标）的泡利矩阵则定义为：$\sigma_\mu=\eta_{\mu\nu}\sigma^\nu$。另外，我们还会用到：$\bar{\sigma}^\mu=\sigma_\mu$。

以两分量的左（右）手外尔旋量为基，我们可以将其在洛伦兹群下的变换矩阵写为：

$$\Lambda_L=\exp\left[-\frac{i}{2}\sigma^i(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\eta})^i\right]\ ,\ \Lambda_R=\exp\left[-\frac{i}{2}\sigma^i(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\eta})^i\right] \tag{2.29}$$

它们分别对应于 $\mathbf{J}^{(1/2)}=\boldsymbol{\sigma}/2$ 而另一个取平庸表示的情形。由于参数 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\eta}$ 为实数，所以左（右）手旋量的洛伦兹变换本身其实并不是 $SU(2)$，只不过它的生成元与通常的 $SU(2)$ 一样，但是其转动角度则是复的，这一点使得洛伦兹群的旋量表示不是幺正的，但并不影响我们利用原先的 $SU(2)$ 旋量方法对洛伦兹群表示来分类。由于上述变换矩阵将一个具有上标的左手旋量变为另一个具有上标的左手旋量，因此上面的变换矩阵可以看成是具有一个上标，一个下标的量：$(\Lambda_L)^A{}_B$。类似的，对于右手旋量的变换，其变换矩阵可以视为：$(\Lambda_R)_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}$。

注意到对于左右手旋量的变换矩阵的差别仅仅是生成元：$\mathbf{K}\Leftrightarrow-\mathbf{K}$，$\mathbf{L}\Leftrightarrow\mathbf{L}$；同时，就变换性质而言，$\mathbf{K}$ 是三维矢量而 $\mathbf{L}$ 则是三维赝矢量（轴矢量），因此，我们发现一个三维的空间反射变换（宇称变换）恰好可以将左右手的变换矩阵互换。也就是说，我们得到一个重要的性质，就变换性质而言，左右手的旋量在宇称变换下相互变换。这也就是为什么它们被称为左手和右手旋量。

§4.4 洛伦兹标量和矢量的构造

¶ 下面我们来讨论如何由外尔旋量来构造具有确定变换性质的物理量。首先，我们试图来构建一个洛伦兹标量。给定两个左手旋量：χ，ψ，容易证明它们的缩并是不变的：

$$\chi'^A\psi'_A=\chi^A\psi_A\ . \tag{2.30}$$

这个公式的建立最为简单的是利用上面给出的洛伦兹变换的明显矩阵表达式 (2.29)、$\epsilon\propto\sigma^2$ 的事实、以及下列重要的关系：

$$\sigma^2\sigma^i\sigma^2=-(\sigma^i)^T\ , \tag{2.31}$$

其中 $(\sigma^i)^T$ 表示 (σ^i) 的转置矩阵。当然，完全类似的我们可以构造两个右手旋量的不变量。这里特别值得一提的是，一个左手（或者右手）旋量与自身的缩并：$\chi^A\chi_A$。这肯定是一个洛伦兹标量。但是，如果旋量的分量是可对易的普通数（所谓的 c-数），那么读者可以很容易验证它实际上恒等于零，因为 ϵ_{AB} 的反对称性质。但是，如果旋量 χ_A 是反对易的数，这种数被称为 Grassmann 数，那么它自身的缩并不等于零。

容易证明，洛伦兹变换的明显矩阵表达式满足下列重要关系：

$$(\Lambda_L)^\dagger = (\Lambda_R)^{-1}\ ,\quad (\Lambda_R)^\dagger = (\Lambda_L)^{-1}\ . \tag{2.32}$$

这意味着我们还可以建立由左手和右手旋量的双线性型：$\chi^\dagger\xi$，它实际上在洛伦兹变换下也是不变的：

$$\chi^\dagger\xi \equiv (\chi^A)^*\xi_{\dot A}\ , \tag{2.33}$$

其中：$\chi \in (1/2,0)$，$\xi \in (0,1/2)$。类似的，如果我们将左右手的位置对调，也可以构成一个不变量：$\xi^\dagger\chi$。这个事实说明，仅仅从构造不变量来说，一个不带点的上标的复共轭实际上等价于一个带点的上标，反之亦然。因此在旋量空间中，当矩阵被夹在一个右手旋量以及一个左手旋量的厄米共轭之间时，人们通常会将矩阵的角标写成一个带点的，一个不带点的：$(\Lambda_R)^{A\dot B}$。类似的，我们前面给出的 σ^μ 矩阵也可以视为一个不带点的指标和一个带点的指标：$(\sigma^\mu)^{A\dot B}$ 和 $(\bar\sigma^\mu)_{\dot A B}$。

¶ 下面我们来试图构造洛伦兹矢量。不难验证，

$$\chi_L^\dagger\bar\sigma^\mu\chi_L\ ,\quad \xi_R^\dagger\sigma^\mu\xi_R\ , \tag{2.34}$$

都构成洛伦兹四矢量，其中：$\chi_L \in (1/2,0)$，$\xi_R \in (0,1/2)$ 为两个任意的左手、右手外尔旋量。要验证这个事实可能会比上面验证洛伦兹标量稍微复杂一点。以第一个为例，在一个一般的洛伦兹变换 Λ_L 作用下，它实际上等价于要验证：

$$\Lambda_L^\dagger\bar\sigma_\mu\Lambda_L = L_{\mu\nu}\bar\sigma^\nu\ , \tag{2.35}$$

这里 $L^\mu{}_\nu$ 是与 Λ_L 对应的、四维矢量表示中的洛伦兹变换矩阵，即公式 (2.17)。为了与 Λ_L 相区别，我们这里用符号 $L_{\mu\nu}$ 来标志：

$$(L)_{\mu\nu} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu} = \exp\left[-i\theta^iL^i - i\eta^iK^i\right]_{\mu\nu}\ . \tag{2.36}$$

或者等价地验证下列无穷小等式：

$$\chi_L^\dagger\left[-i\theta^iL^i - i\eta^iK^i\right]_{\mu\nu}\bar\sigma^\nu\chi_L = \delta\left(\chi^\dagger\bar\sigma_\mu\chi_L\right)\ . \tag{2.37}$$

这个等式可以通过直接验证的方法加以证明。例如，假如我们考虑纯转动（即令 $\eta^i = 0$），利用公式 (2.29) 以及 L^i，K^i 的明显表达式 (2.18)，我们可以验明：

$$[L^i]_{\mu\nu}\bar{\sigma}^\nu = -\frac{1}{2}[\sigma^i, \bar{\sigma}_\mu] \,.$$

类似的，对于纯的 boost，我们同样可以验证：

$$[iK^i]_{\mu\nu}\bar{\sigma}^\nu = \frac{1}{2}\{\sigma^i, \bar{\sigma}_\mu\} \,.$$

利用完全类似的方法，我们可以证明右手旋量构造的 $\xi_R^\dagger \sigma^\mu \xi_R$ 也是一个四矢量。我强烈建议大家最好自己验证这些结论（至少一遍吧）。

练习 2.1 *验证上述各式。*

§4.5 狄拉克旋量

¶ 至此我们看到，洛伦兹群的表示可以分别由左手和右手的外尔旋量来加以构建。如前所述，宇称变换将左手和右手的旋量互换。因此如果考虑到宇称的对称性，我们上面讨论的由旋量构建的洛伦兹标量和矢量都需要进一步扩充。具体来说，如果我们希望构建一个左右手对称的理论（或者说宇称守恒的理论），那么单纯运用一种手性的旋量就不行了。要解决这个问题，最为简单的是利用左右手旋量表示的直和，这就是所谓的狄拉克旋量：

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \chi^A \\ \zeta_{\dot{A}} \end{pmatrix} \,. \tag{2.38}$$

这里 ψ_α 就是一个狄拉克旋量，它有 4 个分量，前两个分量是一个左手外尔旋量，后两个分量则是一个右手外尔旋量。我们进一步定义下列 4×4 的 γ 矩阵：

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{2.39}$$

它们满足一个标准的反对易关系：

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \,. \tag{2.40}$$

在宇称变换下，狄拉克旋量的变换规则是左右手互换：[10]

$$\psi \to \psi' = \gamma^0\psi \tag{2.41}$$

另外一个重要的矩阵是 γ_5，它的定义是：

[10] 我们后面会看到，这里实际上还可以相差一个相因子。

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{2.42}$$

它与所有的 γ^μ 矩阵反对易。利用它可以构建出左手和右手的投影算符：

$$P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} , \quad P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} . \tag{2.43}$$

我们可以将 P_L 或 P_R 作用于一个狄拉克旋量上，就可以分别得到它的左手和右手部分：

$$\psi_L = P_L\psi , \quad \psi_R = P_R\psi , \tag{2.44}$$

它们则是两个分量的外尔旋量。我们可以定义一个 4 分量的狄拉克旋量的共轭：

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 , \tag{2.45}$$

于是我们发现前面讨论的由旋量的双线性结构组成的洛伦兹标量 S 和矢量 V^μ 在宇称守恒的要求下可以写为：

$$S = \bar{\psi}\psi , \quad V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi . \tag{2.46}$$

无论是考虑宇称时的狄拉克旋量还是不考虑宇称时的外尔旋量，我们发现利用两个旋量都可以构建四矢量。从这个角度来说，旋量很像是“半个矢量”。或者说它们是比矢量更为基本的东东。

正象 $SU(2)$ 的旋量可以构建任意阶的张量一样，我们也可以利用外尔旋量构建更加高维的洛伦兹群的表示。比较常用的是利用狄拉克旋量来构建赝标量 P，轴矢量（赝矢量） A^μ 以及张量 $T^{\mu\nu}$：

$$P = \bar{\psi}\gamma^5\psi , \quad A^\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi , \quad T_{\mu\nu} = \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi , \tag{2.47}$$

其中矩阵 $\sigma_{\mu\nu}$ 的定义为：

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] . \tag{2.48}$$

注意，由于 γ 矩阵的基本反对易关系，因此利用两个 γ 矩阵只能组成反对称的张量。可以证明，16 个独立的狄拉克矩阵：$\mathbb{1}$，γ_5，γ_μ，$\gamma_5\gamma_\mu$，$\sigma_{\mu\nu}$ 构成一个代数，被称为 Clifford 代数。我们在下一章的第 §8.1 小节中会更加仔细地讨论这些矩阵的性质以及它们与狄拉克方程的解之间的关系。

¶ 最后，让我们给出一个狄拉克旋量场在洛仑兹变换下的行为：

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = \Lambda_{1/2}\psi(L^{-1}x)\ ,\quad \Lambda_{1/2} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\ , \tag{2.49}$$

其中 L 代表矢量表示中的洛仑兹变换矩阵 (2.36)；而 $S^{\mu\nu} \equiv \sigma^{\mu\nu}/2$。在我们目前的表象中，它的明显表达式为：

$$\begin{cases} S^{0i} = -\dfrac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}\ , \\ S^{ij} = \dfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \dfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k\ , \end{cases} \tag{2.50}$$

大家也许还记得 S^{ij} 实际上是空间转动的生成元，因此这个表达式说明狄拉克粒子天生具有内禀的角动量（自旋）$\mathbf{\Sigma}$。我们会在后面讨论狄拉克方程的非相对论极限时（见第 3 章第 §8.1 小节第 54 页关于泡利方程的讨论）再次回到这个问题。

要证明变换规则 (2.49)，可以从其无穷小变换的版本出发，即需要验明：

$$[\gamma^\mu, S^{\alpha\beta}] = \left(\mathcal{J}^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu\ . \tag{2.51}$$

这等价于有限变换的版本：$\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2} = L^\mu{}_\nu\gamma^\nu$。其实这些验证完全等价于我们前面讨论利用外尔旋量构建矢量时的验证（参见公式 (2.34) 处的讨论）。这当然也不奇怪，因为毕竟狄拉克旋量就由一个左手外尔旋量和一个右手外尔旋量直和构成。这些性质充分说明，作为旋量空间的矩阵 γ^μ，如果仅仅考察它的指标 μ，它在闵氏矢量空间来看象四矢量一样变换。

§5 洛伦兹群与 $SL(2,C)$ 群

¶ 这一节中我们将介绍一下 $SL(2,C)$ 群。它是复二维线性空间中行列式为 1 的所有复线性变换构成的群。这个群实际上与我们物理上感兴趣的洛伦兹群有着极其密切的联系。这个联系是通过与一个四矢量对应的四元数的变换所诱导出来的。我们将首先说明 $SL(2,C)$ 群与洛伦兹群的对应关系，然后我们将讨论 $SL(2,C)$ 群的旋量表示，最后我们说明它与前一节讨论的外尔旋量表示是完全等价的。

§5.1 洛伦兹群与 $SL(2,C)$ 群的对应

¶ 对于任意一个四维时空中的四矢量 x_μ，我们可以定义一个与它一一对应的四元数（quaternion）Q，它实际上是一个 2×2 的厄米矩阵：

$$Q \equiv x_\mu\sigma^\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}\ . \tag{2.52}$$

现在我们考虑所谓的 $SL(2,C)$ 群，它由所有的复的、行列式为 1 的二维线性变换构成。我们可以将其群元素表达为：

$$g \in SL(2,C)\ ,\quad g \equiv g_\mu \sigma^\mu\ . \tag{2.53}$$

其中 $g_\mu \in C$ 为复数并且满足：

$$\det(g) = (g^0)^2 - (g^1)^2 - (g^2)^2 - (g^3)^2 = 1\ . \tag{2.54}$$

对应于每一个 $g \in SL(2,C)$，我们可以指定与四矢量对应的四元数 Q 的变换规则为：

$$Q' = gQg^\dagger = x'_\mu \sigma^\mu\ , \tag{2.55}$$

这个变换相应的也使得 x_μ 变换到了 x'_μ，这个变换也是线性的，我们将它写成：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(g) x^\nu\ . \tag{2.56}$$

很容易发现，变换 $\Lambda^\mu{}_\nu(g)$ 实际上保持通常的四矢量的内积不变，因为：$\det Q' = \det Q$. 因此，由 $g \in SL(2,C)$ 所诱导的四矢量变换实际上是一个洛伦兹变换。事实上，我们可以得到明显的表达式：

$$\Lambda^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr\left(\sigma^\mu g \sigma^\nu g^\dagger\right)\ . \tag{2.57}$$

可以验证：$\det(\Lambda) = 1$ 以及 $\Lambda^0{}_0 > 1$，因此，对于每一个 $g \in SL(2,C)$，实际上都有一个对应的恰当、正时洛伦兹变换 $\Lambda^{\mu\nu}(g)$。由于变换公式 (2.55) 中如果把 $g \to (-g)$ 不改变变换式子，因此我们发现 $\pm g \in SL(2,C)$ 都对应于同样的洛伦兹变换 $\Lambda(g)$。因此，我们得到的结论是：恰当正时洛伦兹变换与 $SL(2,C)/Z_2$ 是一一对应的。

§5.2 $SL(2,C)$ 群的旋量表示

¶ 现在我们讨论 $SL(2,C)$ 群的旋量表示。我们将从另外一种方法引入这个旋量表示。由于 $SL(2,C)$ 群与洛伦兹群的对应关系，$SL(2,C)$ 群的表示自然地也构成了洛伦兹群的旋量表示。我们随后说明这其实就是我们前面讨论过的外尔旋量表示，尽管我们引入的方法貌似不同。

¶ $SL(2,C)$ 群的一个表示可以在全纯变量与反全纯变量的多项式空间 $\mathcal{P}_{m,n}$ 上构造。线性空间 $\mathcal{P}_{m,n}$ 由所有下列形式的关于全纯变量 z 和关于反全纯变量 $\bar{z}$ 的多项式构成：

$$p(z,\bar{z}) = \sum_{r,s=0}^{m,n} p_{rs} z^r \bar{z}^s\ . \tag{2.58}$$

说白了，就是 z 的最高阶不超过 m，$\bar{z}$ 的最高阶不超过 n 的所有多项式构成的线性空间。现在，我们对于每一个 $g \in SL(2,C)$:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad ad - bc = 1 , \tag{2.59}$$

我们定义一个算符：$D(g)$ 它作用于一个 $p(z,\bar{z}) \in \mathcal{P}_{m,n}$ 的操作为：

$$D(g) \circ p(z,\bar{z}) = (bz+d)^m (\bar{b}\bar{z}+\bar{d})^n p(w,\bar{w}) , \tag{2.60}$$

其中复变量 w 与 z 通过莫比乌斯变换相联系：

$$w = \frac{az+c}{bz+d} . \tag{2.61}$$

一个重要的结论是：$g \to D(g)$ 构成了 $SL(2,C)$ 群的一个表示，我们姑且称之为 $SL(2,C)$ 群的旋量表示。而且，如果我们取表示的基构成的空间为 $\mathcal{P}_{m,n}$，那么这个表示的维数是：$(m+1)(n+1)$，我们将这个表示记为：$(m/2, n/2)$。

¶ 这个表示的旋量对应可以这样构建。我们考虑下列系数（多分量旋量）：

$$\phi_{A_1 A_2 \cdots A_m ; \dot{A}_1 \dot{A}_2 \cdots \dot{A}_n} , \tag{2.62}$$

其中我们要求它的所有不带点的指标（即：$A_1, A_2, \cdots, A_m$）是完全对称的；所有的带点的指标（即：$\dot{A}_1, \dot{A}_2, \cdots, \dot{A}_n$）也是完全对称的。同时，每一个指标（无论带点或不带点）都只能够取两个不同的值：0 或 1。于是，这样的量的独立分量数目也是：$(m+1)(n+1)$。现在我们可以定义多项式：

$$p(z,\bar{z}) = \sum \phi_{A_1 A_2 \cdots A_m ; \dot{A}_1 \dot{A}_2 \cdots \dot{A}_n} z^{A_1 + A_2 + \cdots + A_m} \bar{z}^{\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \cdots + \dot{A}_n} , \tag{2.63}$$

显然，这样的多项式属于空间 $\mathcal{P}_{m,n}$。事实上可以证明，这样构造出来的多项式与我们前面构成线性空间 $\mathcal{P}_{m,n}$ 的多项式完全是相同的。因此，前面提到的旋量表示 $(m/2, n/2)$ 完全可以利用 $\phi_{A_1 A_2 \cdots A_m ; \dot{A}_1 \dot{A}_2 \cdots \dot{A}_n}$ 为表示的基来实现。

现在来考虑在 $D(g)$ 作用下旋量 ϕ 的变换性质。我们可以证明

$$\begin{aligned} \phi_{A_1 A_2 \cdots A_m ; \dot{A}_1 \dot{A}_2 \cdots \dot{A}_n} &= g_{A_1}{}^{B_1} g_{A_2}{}^{B_2} \cdots g_{A_m}{}^{B_m} \\ &\times \overline{g_{\dot{A}_1}{}^{\dot{B}_1}} \, \overline{g_{\dot{A}_2}{}^{\dot{B}_2}} \cdots \overline{g_{\dot{A}_n}{}^{\dot{B}_n}} \phi_{B_1 B_2 \cdots B_m ; \dot{B}_1 \dot{B}_2 \cdots \dot{B}_n} , \end{aligned} \tag{2.64}$$

这就是一个一般的旋量的变换规则。对于一些比较小的整数 m，n，这些表示是很容易构造出来的。简单的计算可以发现，它们就是我们前一节讨论的洛伦兹群的表示 $(m/2, n/2)$。这一点并不奇怪，正如我们前面说到的，$SL(2,C)$ 群实际上是洛伦兹群（一支）的覆盖群。

§6 相对论性场与场的作用量

¶ 通过前面两节的讨论，我们了解了在相对论性量子场论中起重要作用的洛伦兹群的结构。同时，我们也讨论了洛伦兹群以及与它密切联系的 $SL(2,C)$ 群的旋量表示。这些知识与我们要讨论的相对论性量子场论是密切相关的。作为一个力学系统，量子场的作用量必须是一个洛伦兹不变量。由于场系统的作用量是由场的局域函数（拉格朗日密度）的时空积分构成，这实际上要求一个场系统的动力学自由度－场－必须在洛伦兹群变换下具有确定的变换性质。说得更明确一些，我们在相对论性量子场论中所关心的各种量子场，就其洛伦兹变换性质而言，一定构成洛伦兹群的某个表示的基。认识了上述这两个基本事实，我们已经可以构建各种场论的作用量了。

¶ 标量场

最为简单的情形是所谓的标量场。它本身就是一个洛伦兹标量（或者说是平庸表示的基）。为了能够保证场具有动力学，它的作用量中必须包含场的时间微商。由于在相对论下微分算符 ∂_μ 构成四矢量，因此最为简单的动能项一定正比于：$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$。著名的克莱因－高登场的作用量就具有这种形式：

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m_0^2\phi^2\right) . \tag{2.65}$$

克莱因－高登场的运动方程由标准的欧拉－拉格朗日方程给出，具体到作用量 (2.65)，我们有：

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)\phi = 0 . \tag{2.66}$$

这就是所谓的克莱因－高登方程。

标量场还可以具有内部自由度。这时我们需要考虑具有多个分量的标量场。[11] 例如，一个复的标量场（两个分量的标量场）的作用量可以写为：

$$S_0 = \int d^4x \left(\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m_0^2\phi^*\phi\right) . \tag{2.67}$$

这个作用量具有一个 $U(1)$ 对称性：

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x) . \tag{2.68}$$

在这个变化下，复克莱因－高登场的作用量显然是不变的。与之对应的 Nöther 流为：

$$j_\mu(x) = i\left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)\right] . \tag{2.69}$$

[11] 所谓内部自由度是指各个分量在时空变换（洛伦兹变换）下并不混合。因此每一个分量仍然是洛伦兹标量。但是，在内部自由度的变换下，各个分量可以相互变换。

与之相应存在一个守恒荷 Q。我们后面会看到，如果将之理解为电荷，那么一个量子化后复标量场可以描写带电的标量粒子。

大家也许注意到了，上面的标量场作用量都只包含了场的二次幂。由此产生的体系运动方程将是线性的方程。在量子场论中，它们实际上对应于自由的（或者说没有相互作用的）量子场系统。由于标量场本身是洛伦兹标量，它的任意次幂也是洛伦兹标量，原则上也是可以进入到标量场作用量之中的。但是，这些项将对应于具有相互作用的量子场系统。我们在后面（见第 4章中的第§10节）将会回到这个问题。

¶ 旋量场

下面我们尝试利用左手或者右手的外尔旋量来构造洛伦兹不变的作用量。如果我们有一个（二分量）左手旋量场 $\chi(x)$，那么按照前面的讨论，它的动能项正比于：$\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi$。读者容易验证这是一个洛伦兹不变量，因为正如我们前面论证过的，$\chi^\dagger\bar\sigma^\mu\chi$ 是一个四矢量。如果我们认为这个旋量的分量是 Grassmann 数，那么我们还可以写出它的质量项，它正比于：$\chi^T\sigma^2\chi$。因此，我们可以写出左手外尔旋量场的作用量：[12]

$$S=\int d^4x\left[\chi^\dagger i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi+\frac{im}{2}\left(\chi^T\sigma^2\chi-\chi^\dagger\sigma^2\chi^*\right)\right]\,. \tag{2.70}$$

这种形式的作用量又被称为 Majorana 费米子作用量；而相应的费米子场所描写的粒子就被称为 Majorana 费米子； 与这个作用量相对应的运动方程为：

$$i\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi-im\sigma^2\chi^*=0\,, \tag{2.71}$$

被称为 Majorana 方程。当然，完全类似的，我们可以构造右手旋量场的作用量。

如果我们要求一个旋量理论保持宇称，我们就需要利用狄拉克旋量（四分量旋量）场 $\psi(x)$ 来构造它的作用量。很容易发现：

$$S=\int d^4x\left[\bar\psi\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0\right)\psi\right]\,, \tag{2.72}$$

是一个洛伦兹不变的作用量。与之对应的运动方程：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)\psi(x)=0\,, \tag{2.73}$$

就是著名的狄拉克方程。 利用前面给出的狄拉克旋量场在洛仑兹变换下的性质 (2.49)，不难验证狄拉克方程的形式在洛仑兹变换下不变。

[12] 如果我们假定旋量场的分量是所谓的 Grassmann 数，那么这种数在求复共轭时需要定义：$(ab)^*=b^*a^*=-a^*b^*$，其中 a，b 都是 Grassmann 数。

练习 2.2 *验证这一点。*

狄拉克作用量 (2.72) 具有一个整体 $U(1)$ 对称性。与之相对应的守恒流可以取为：

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \ . \tag{2.74}$$

我们后面会看到，如果用狄拉克场描写电子和正电子，那么上面的这个守恒流正比于电流密度。上面提到的 Majorona 费米子作用量与狄拉克作用量的区别是显著的。前者会破坏宇称，同时它不具备守恒的流。

¶ 矢量场

比旋量场更加高维的表示就是矢量场。它在洛伦兹变换下按照 $(1/2, 1/2)$ 表示变换。换句话说，一个矢量场应当是具有一个不带点的和一个带点的旋量指标。大家以前最熟悉的矢量场就是电磁场。在相对论性经典电动力学中我们用一个四矢量场（称为四矢势）$A_\mu(x)$ 来描述它。我们前面已经知道，也可以等价地用矩阵形式的场：

$$\mathcal{A}(x) \equiv A_\mu(x)\sigma^\mu \ , \tag{2.75}$$

来描写。显然，$\mathcal{A}(x)$ 就具有一个带点和一个不带点的旋量指标。如果你愿意，我们完全可以利用矩阵形式的场 $\mathcal{A}(x)$ 来表述麦克斯韦经典电动力学。用通常的四矢量场表述，经典纯电磁场的作用量（实际上就是电磁场的动能部分）可以表达为：

$$S_{em}^{\text{kin}} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \ , \tag{2.76}$$

其中的二阶反对称张量场 $F_{\mu\nu}(x)$ 的定义为：

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \ , \tag{2.77}$$

它又称为电磁场的场强张量。经典的麦克斯韦电磁理论的一个重要性质就是它具有规范不变性。具体来说，电磁场的作用量直接由场强张量 $F_{\mu\nu}(x)$，而不是四矢势 $A_\mu(x)$ 给出。因此，在经典的层面上，直接可以测量的是场强而不是四矢势。事实上，四矢势可以作如下的规范变换：

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \ , \tag{2.78}$$

其中 $\Lambda(x)$ 是任意的时空函数，容易验证，在此变换下场强张量（从而作用量以及运动方程）不变。

上面讨论的电磁场的作用量仅仅包含了电磁场自身的部分，没有包含电磁场与源－也就是电磁流－的相互作用。如果时空中存在电磁流 $j_\mu(x)$，那么我们可以在作用量中加上形如：$\int d^4x j_\mu(x)A^\mu(x)$ 的项：

$$S_{em} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \int d^4x j_\mu(x)A^\mu(x)\ , \tag{2.79}$$

这个作用量给出的运动方程就是大家所熟悉的麦克斯韦方程（的一半）：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x)\ . \tag{2.80}$$

这个方程就是经典麦克斯韦方程组中有源的两个方程的四维协变形式。经典麦克斯韦方程的另一半来源于反对称场强张量的一个恒等式（又称为毕安基恒等式）：

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\ . \tag{2.81}$$

有好事之徒为了使得两组麦克斯韦方程更加对称，引入一个与场强张量对偶的反对称张量：

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\ . \tag{2.82}$$

利用对偶的场强张量 $\tilde{F}_{\mu\nu}$，第二个麦克斯韦方程也可以等价地写为：

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\ . \tag{2.83}$$

这个形式与前面给出的有源的麦克斯韦方程形式完全一致。唯一的区别是等号右边等于零。这源于自然界不存在自由磁荷。[13]

对于任意一个二阶反对称张量，我们总可以象上面演示的那样，利用完全反对称的张量 $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ 来构建它的对偶张量。显然，一个二阶反对称张量的对偶张量仍然是一个二阶反对称张量。但是，它们在宇称变换下的性质是不一样的。对于电磁场张量，如果它仅仅包含电场的分量，那么它的对偶将只有磁场分量；反之如果它只有磁场分量，它的对偶则只有电场分量。我们都知道，电场与磁场在宇称变换下是不同的。作为一个例子，大

[13]说到这里，大家应当很容易猜出，如果存在自由磁荷的话这个方程应当如何推广。

家可以验证 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 是一个真正的洛伦兹标量，而 $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ 则是一个赝标量，它在宇称变换下要改变符号。

如果电磁场的场强张量满足：

$$F_{\mu\nu} = \pm\tilde{F}_{\mu\nu} \,, \tag{2.84}$$

那么这样的电磁场分别被称为是自对偶的（对应于正号）和反自对偶的（对应于负号）。大家很容易验证，一个自对偶或者反自对偶的二阶反对称张量将只有 3 个独立的分量。一个不是十分显然的事实是，一个自对偶和反自对偶的二阶反对称张量就其洛伦兹变换性质而言分别等价于表示：$(1,0)$ 和 $(0,1)$。换句话说，它们分别等价于一个具有两个对称指标（分别是带点的和不带点的）的旋量：χ^{AB} 和 $\xi_{\dot{A}\dot{B}}$。

¶ 更高维表示场

在经典的水平上，我们完全可以构建更高维洛伦兹群表示的场论。例如，我们可以取按照表示 $(1,1/2)$ 或者 $(1/2,1)$ 变换的场。当然，如果我们要求宇称是一个好的对称性，那么我们可以取上面两个表示的直和表示：$(1,1/2)\oplus(1/2,1)$。这个表示也可以从一个矢量表示与通常的狄喇克旋量表示取直积得到：

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes\left[\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},1\right)\right]\oplus\left[\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)\right] \,. \tag{2.85}$$

等式右边第二个方括号内的表示就是一个狄喇克旋量；第一个方括号内则是一个高维表示。很容易计算出这个直和表示的基共有 12 个独立分量。它的基可以表达为：$(\chi_{AB\dot{C}},\xi_{\dot{D}\dot{E}F})$，其中关于旋量指标 AB 和 $\dot{D}\dot{E}$ 是对称的，即：$\chi_{AB\dot{C}} = \chi_{BA\dot{C}}$，$\xi_{\dot{D}\dot{E}F} = \xi_{\dot{E}\dot{D}F}$。这种记号的优点是它清晰地表明了场的变换性质，但是缺点是有点罗嗦。一种简化脚标的办法就是将一个带点的指标和一个不带点的指标一起“集成为”一个四矢量的指标。转换的方法就是利用矩阵 σ^μ 和 $\bar{\sigma}^\mu$，它们可以看成是具有一个带点、一个不带点指标的东东。所以我们可以定义：

$$\chi_{\mu,A} = (\bar{\sigma}_\mu)^{B\dot{C}}\chi_{AB\dot{C}} \,, \xi_{\mu,\dot{E}} = (\sigma_\mu)^{\dot{D}F}\xi_{\dot{E}\dot{D}F} \,. \tag{2.86}$$

要得到这个变换的逆变换我们可以利用恒等式：[14]

$$(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}(\sigma_\mu)_{C\dot{D}} = -2\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} \,. \tag{2.87}$$

这个恒等式又被称为 Fierz 变换式。

因此，一种自然的选择就是将场写成：$\psi_\mu(x)$，其中的指标 μ 是一个四矢量指标；对于每一个 μ，$\psi_\mu(x)$ 都是一个具有四个分量的狄喇克旋量。为了要仅仅取出其中自

[14] 注意等式右边“神秘的”负号，它来源于我们关于带点的和不带点的旋量度规的定义相差一个负号（参见前面的公式 (2.25)）。感谢选我课程的一位非常仔细的同学指出这一点。

旋对应于 3/2 的部分，我们必须要求场 ψ_μ 满足约束条件：$\gamma^\mu\psi_\mu = 0$，这样的场被称为 Rarita-Schwinger 场。我们同样可以利用 Rarita-Schwinger 场以及它的一阶偏微商来构造洛伦兹不变的作用量：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma^5\gamma_\nu\partial_\alpha\psi_\beta - m\bar{\psi}_\mu\psi^\mu \,. \tag{2.88}$$

与之相应的经典运动方程为：

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5\gamma_\nu\partial_\alpha\psi_\beta + m\psi^\mu = 0 \,, \tag{2.89}$$

它被称为 Rarita-Schwinger 方程。可以论证 Rarita-Schwinger 场所对应的粒子的自旋是 3/2，这一点其实从场所在的洛伦兹表示中已经相当明显了。仅仅从变换性质来说，Rarita-Schwinger 场具有 12 个分量，如果我们再要求它满足经典运动方程（即 Rarita-Schwinger 方程，这又被称为在壳条件），那么自由度的数目就变为 8，刚好对应于自旋 3/2 的粒子以及它的反粒子的自由度总数。

如果有兴致，我们还可以进一步构建更高维表示的场论。事实上，这件事曾经被 Bargmann 和 Wigner 讨论过。这通常被称为 Bargmann-Wigner 框架。我们这里不打算详细介绍，有兴趣的读者可以参考相关的书籍 [9]。在经典场论的层次上高维表示的场论没有任何问题。将它们解释为一般的相对论量子力学的波动方程会遇到与其他相对论量子力学波动方程一样的老问题。这些问题是相对论量子力学固有的、不可克服的问题。解决它们的办法就是进行所谓的二次量子化，也就是说从相对论量子力学过渡到量子场论。但是，如果试图将高自旋的波动方程进行（二次）量子化，就会遇到各种问题。这也就是为什么这些高维表示的场很少在量子场论中被提及。[15]

¶ 总结

本章中我们通过对洛伦兹群的表示进行分类，说明了如何构筑各种具有确定变换性质的场的经典作用量。为了以后的方便，让我们将后面课程中经常会用到的标量场、狄拉克旋量场、矢量场的主要变换性质总结在下面这个表格中：



相关的阅读

本章是量子场论的出发点。我们选择的出发点是时空对称性，或者说庞加莱群。我们的介绍主要集中于洛伦兹群，而且主要是从经典的角度出发的。尽管我们对于洛伦兹群表示的讨论是比较简化的，但是对于不熟悉这部分内容的同学，仍然具有一定的挑战性。希望更加详细了解庞加莱群的表示论的同学，特别是希望了解在量子水平上如何实

[15] 温博格（S. Weinberg）对于这一点有不同的观点。不过这一点对于我们这个课程来说实在是过于复杂了。有兴趣的读者可以参考他的量子场论书 [2] 的 5.7 节，特别是该节末尾的讨论。

表 2.1：标量场、狄拉克旋量场、矢量场的主要性质总结。其中 L 表示洛伦兹变换矢量表示的矩阵，见公式 (2.36)；$\Lambda_{\frac{1}{2}}$ 表示狄拉克旋量变换矩阵 (2.49)。

场及其洛伦兹群表示	洛伦兹变换	拉氏密度及运动方程
标量场：$\phi(x) \in (0,0)$	$\phi(x) \to \phi'(x)$ $\phi'(x) = \phi(L^{-1}\cdot x)$	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m_0^2\phi^2\right)$ $(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)\phi = 0$
Dirac旋量场：$\psi(x) \in (0,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},0)$	$\psi(x) \to \psi'(x)$ $\psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(L^{-1}\cdot x)$	$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m_0\right)\psi$ $\left(i\partial\!\!\!/ - m_0\right)\psi = 0$
矢量场：$A^\mu(x) \in (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$A^\mu(x) \to A'^\mu(x)$ $A'^\mu(x) = L^\mu{}_\nu A^\nu(L^{-1}\cdot x)$	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu$ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

现庞加莱群的表示，可以参考S. Weinberg 的量子场论的第二章的讨论 [2]。关于 $SU(2)$ 群表示的知识可以参考本讲义后面的附录 B。希望了解更加细致的群的旋量表示理论的同学，可以参考 [3]。



第三章　自由场的正则量子化

本章提要

- 标量场的正则量子化（§7）
- 旋量场的正则量子化（§8）
- 电磁场的正则量子化（§9）

前一章中我们从洛伦兹不变性出发，解构了洛伦兹群的各种不可约表示。然后，在经典的层面上讨论了如何构建洛伦兹不变的场论的作用量。我们给出了标量场、旋量场以及矢量场（电磁场）的作用量以及它们相对应的经典运动方程。同时，我们还讨论了这些场论的对称性。这一章中，我们将真正开始所谓的量子场论，从对应于自由粒子的自由量子场开始。我们将仿效我们在量子力学中将一个经典粒子量子化的方法来量子化我们的场系统。这种方法就被称为正则量子化。我们的讨论仍然依照标量场、旋量场、矢量场的顺序进行。

§7 标量场的量子化

§7.1 自由标量场的正则量子化

¶ 前一章中，我们已经给出了自由标量场作用量的形式（即公式 (2.65)）：

$$S_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi, \partial_\mu \phi] \ , \quad \mathcal{L}_0[\phi, \partial_\mu \phi] = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m_0^2 \phi^2\right) \ . \tag{3.1}$$

其中的 $\mathcal{L}_0[\phi, \partial_\mu \phi]$ 就是相应的拉格朗日密度。这个作用量对应于的经典运动方程就是克莱因－高登场方程：

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2)\phi = 0\ . \tag{3.2}$$

我们可以从拉格朗日形式过渡到哈密顿形式。为此，我们需要定义与场 $\phi(\mathbf{x})$ 共轭的正则动量（密度） $\pi(\mathbf{x})$：

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\mathbf{x})}\ . \tag{3.3}$$

相应的场系统的哈密顿密度则由下式给出：

$$H = \int d^3\mathbf{x}\ \left[\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}\right] = \int d^3\mathbf{x}\ \frac{1}{2}\left[\pi(\mathbf{x})^2 + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) + m_0^2\phi(\mathbf{x})^2\right]\ . \tag{3.4}$$

我们现在需要做的就是将这个经典场系统量子化。

在通常的量子力学中，如果一个系统的正则坐标为 q_i，与它共轭的正则动量为 p_i，那么正则量子化的通常步骤就是将它们由普通的数升格为希尔伯特空间的算符并且要求：

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0\ ,\quad [q_i, p_j] = i\delta_{ij}\ . \tag{3.5}$$

对于自由的克莱因－高登场系统 (3.1)，与坐标对应的是场变量 $\phi(\mathbf{x})$，而与正则动量对应的是正则动量 $\pi(\mathbf{x})$。于是我们期待它们之间的正则对易关系变为：

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0\ ,\quad [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ . \tag{3.6}$$

因为 $\pi(\mathbf{x})$ 是正则动量密度，因此通常的 Kronecker-δ 函数更换为了 Dirac-δ 函数。注意，这里的算符都是在薛定谔表象里的（不显含时间的）算符，或者等价地说，是 $t = 0$ 时刻海森堡表象里的算符。因此，上述基本对易关系又被称为等时对易关系（equal-time commutator）。

¶ 分立空间上的标量场

尽管上面的“推广”看起来十分自然，但由于多数同学是第一次接触到场系统的量子化，因此我们将首先从分立的场自由度的情况出发，来讨论连续场的量子化问题。在这个框架下，我们将考虑的三维空间选为有限的。为了简化讨论，我们认为它是一个体积为 V 的立方体。我们的场 $\phi(\mathbf{x})$ 定义在这个体积之内并且满足周期边条件。为了进一步明确定义我们的场系统，我们将三维体积划分为三维的简单立方格子，格距记为 a。我们假定场 $\phi(\mathbf{x})$ 仅仅定义在格点之上，即：$\mathbf{x}$ 的分量一定是格距的整数倍。在这个模型中我们清楚地看到，$\mathbf{x}$ 仅仅相当于一个系统自由度的标记，系统的动力学自由度是位于各个点 $\mathbf{x}$ 处的场。我们可以将定义在三维格点上的场记为：$\phi(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{x}}$，其中 $\mathbf{x}$ 遍及体积 V 内

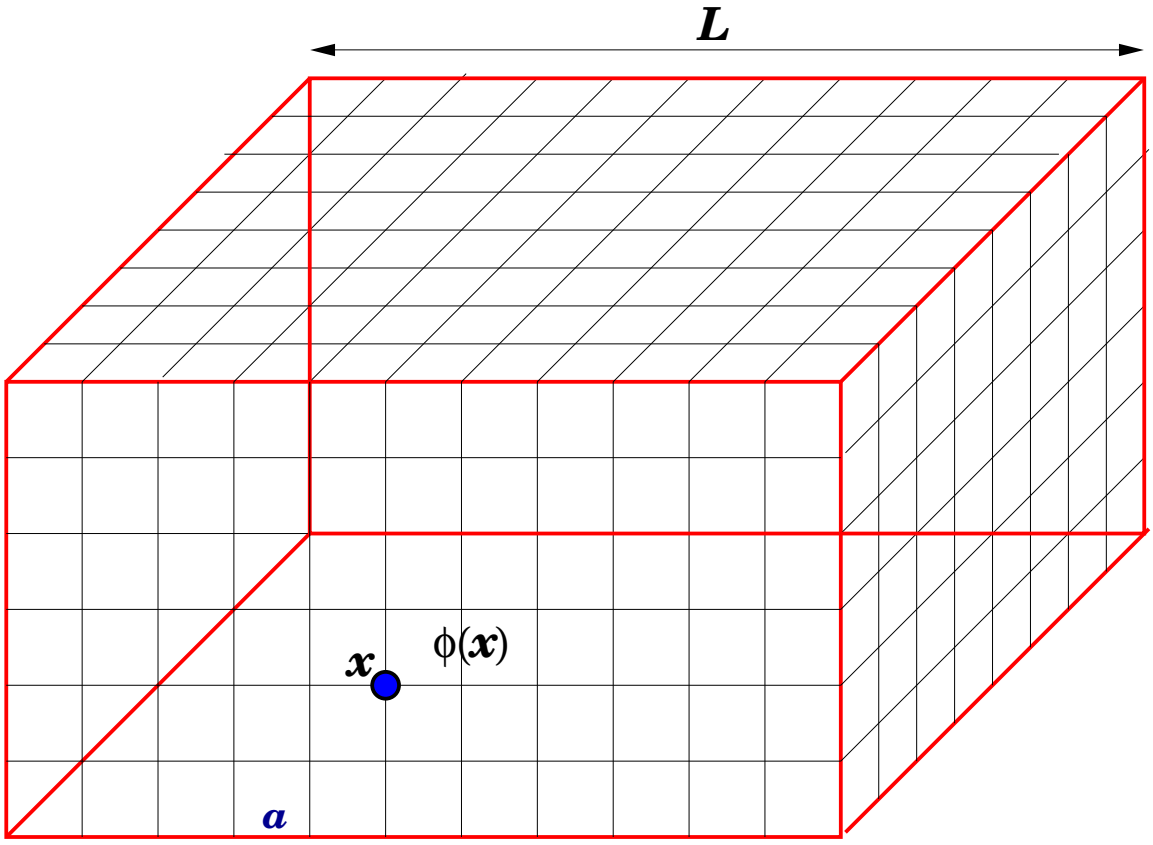


图 3.1：定义在一个有限体积、格点化的空间上的场系统。

的所有格点。需要注意的是，总的格点数目（即系统的总自由度数目）等于 (V/a^3)，是一个有限数目。我们因此得到了一个关于经典场系统（一个具有无穷多自由度的系统）的、分立的、有限多自由度的近似描述。[1] 在经典水平上，只要我们取 $a \to 0$ 的极限，就可以获得连续场系统的物理信息。[2]

按照上面离散空间上场的定义，我们将系统的拉格朗日量表达为：

$$L = \sum_{\mathbf{x}} a^3 \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}_{\mathbf{x}}^2 - \hat{\nabla}_i \phi_{\mathbf{x}} \hat{\nabla}_i \phi_{\mathbf{x}} - m_0^2 \phi_{\mathbf{x}}^2 \right) , \tag{3.7}$$

这个表达式是原来连续形式的一个简单分立化处理。唯一需要明确定义的是空间微商。我们现在用有限的差分来替代：[3]

$$\hat{\nabla}_i \phi_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \left(\phi_{\mathbf{x}+\hat{\imath}a} - \phi_{\mathbf{x}} \right) , \tag{3.8}$$

[1] 用离散的方法来近似经典场是数值计算中经常用到的方法。这个方法广泛应用在经典电磁场、流体力学等方面的数值计算中。

[2] 在量子水平上，这一点更为复杂因为可能会遇到重整化的问题。

[3] 尽管有向前差分和向后差分的区别，但是这并不影响我们的讨论。

其中 $(\mathbf{x}+\hat{i}a)$ 表示从格点 $\mathbf{x}$ 沿着空间第 i 方向（的正方向）走一格的格点。由于：

$$\pi_{\mathbf{x}}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_{\mathbf{x}}}=a^3\dot{\phi}_{\mathbf{x}}=a^3\pi(\mathbf{x})\,, \tag{3.9}$$

为与 $\phi_{\mathbf{x}}$ 共轭的正则动量，那么系统的哈密顿量可以表达为：

$$H=\sum_{\mathbf{x}}\frac{1}{2a^3}\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{x}}+\sum_{\mathbf{x}}\frac{a^3}{2}\left(\hat{\nabla}_i\phi_{\mathbf{x}}\hat{\nabla}_i\phi_{\mathbf{x}}+m_0^2\phi_{\mathbf{x}}^2\right)\,. \tag{3.10}$$

我们看到，如果采用离散的描述方法，场系统就变成了普通的（有限）多自由度的力学系统。用拉格朗日力学的语言，$L=L(\phi_{\mathbf{x}},\dot{\phi}_{\mathbf{x}})$，其中离散的空间点 $\mathbf{x}$ 标志不同的自由度；类似的，用哈密顿力学的语言，$H=H(\pi_{\mathbf{x}},\phi_{\mathbf{x}})$，其中 $\pi_{\mathbf{x}}$ 是与 $\phi_{\mathbf{x}}$ 共轭的正则动量。因此，尽管拉格朗日量 (3.7) 和哈密顿量 (3.10) 是用场的形式写出的，但是由于只有有限多个自由度，它们就是一个普通的、多自由度力学系统的拉格朗日量和哈密顿量。于是，传统的正则量子化步骤就是：

$$[\phi_{\mathbf{x}},\pi_{\mathbf{y}}]=i\delta_{\mathbf{xy}}\,, \tag{3.11}$$

其中 $\delta_{\mathbf{xy}}$ 代表 Kronecker-δ 函数。考虑到关系：$\pi_{\mathbf{x}}=a^3\pi(\mathbf{x})$，上述基本对易关系就等价于：$[\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})]=i\delta_{\mathbf{xy}}/a^3$。这个结果在 $a\to 0$ 时就给出基本的等时对易关系 (3.6)。

¶ 由于拉格朗日量 (3.7) 和哈密顿量 (3.10) 是其动力学自由度的二次型，分析力学的知识告诉我们，这个力学系统实际上是一个小振动系统。我们可以对于其广义坐标 $\{\phi_{\mathbf{x}}\}$ 做适当的线性变换从而将拉格朗日量（或哈密顿量）的二次型对角化。这个过程对应于选取系统的振动简正模式（或者称为简正坐标）。空间平移不变性说明简正坐标一定具有平面波的形式。我们可以将场以及相应的共轭动量进行傅立叶展开：[4]

$$\begin{cases}\phi_{\mathbf{x}}=\displaystyle\sum_{\mathbf{p}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)=\sum_{\mathbf{p}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}+a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,,\\ \pi_{\mathbf{x}}=\displaystyle\sum_{\mathbf{p}}\frac{a^3(-i\omega_{\mathbf{p}})}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}-a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)=\sum_{\mathbf{p}}\frac{a^3(-i\omega_{\mathbf{p}})}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}-a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\end{cases} \tag{3.12}$$

其中简正模式的本征频率（又称为简正频率）满足：

$$\omega_{\mathbf{p}}=\sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2+m_0^2}\,,\quad \hat{\mathbf{p}}^2\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{a\mathbf{p}_i}{2}\right)\,. \tag{3.13}$$

注意到如果平面波的波长远远大于格距，即：$a|\mathbf{p}|\ll 1$，那么 $\hat{\mathbf{p}}^2\simeq\mathbf{p}^2$，于是上述能量－动量关系就是我们所熟悉的、一个静止质量为 m_0 的相对论性粒子的能动量关系：

$$\omega_{\mathbf{p}}\simeq\sqrt{\mathbf{p}^2+m_0^2}\,. \tag{3.14}$$

[4] 固体物理的知识告诉我们，由于空间是有限大的，波矢 $\mathbf{p}$ 也是量子化的：$\mathbf{p}=(2\pi/L)\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^3$ 为三维整数。同时，由于存在最小的格距 a，波矢 $\mathbf{p}$ 实际上可以取为位于倒空间的第一布里渊区内：$\mathbf{k}_i\in(-\pi/a,\pi/a]$，$i=1,2,3$。

在量子化的过程中，傅立叶分量 $a_{\mathbf{p}}$ 以及 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ 将变为希尔伯特空间中的算符，它们分别被称为湮灭算符和产生算符。可以证明，坐标空间的基本对易关系 (3.11) 和下面的产生湮灭算符的对易关系完全等价：

$$\left[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \delta_{\mathbf{pk}} \,. \tag{3.15}$$

练习 3.1 *请验证这一点。即利用展开式 (3.12) 证明基本对易关系 (3.11) 和 (3.15) 可以互推。*

利用场和共轭动量的傅立叶展开式 (3.12)，我们可以将系统的哈密顿量表达成十分简单（或者说十分单调）的形式：

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) \,. \tag{3.16}$$

练习 3.2 *请验证这个结果。*

这个表达式的物理意义十分明显：一个自由的标量场的哈密顿量实际上可以看成是一系列独立的简谐振子哈密顿量的和；不同的简谐振子由对应的平面波的波矢 $\mathbf{k}$ 标志，并且其本征频率与波矢的关系满足一个相对论性单粒子的能量－动量关系。[5] 同时，系统的基态显然是所有谐振子的基态的直积态。这个态是场系统能量最低的态，在量子场论中，我们将它对应于真空。对于一个指定的波矢 $\mathbf{k}$，$a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$ 的本征值（只能是非负整数）每增加（减少）1，我们就说在系统中产生（湮灭）了一个具有动量 $\mathbf{k}$、能量 $\omega_{\mathbf{k}}$ 的粒子，且该粒子的能动量关系恰好满足相对论性粒子的能动量关系。

特别值得讨论的是场系统基态（即真空态）的零点能：

$$E_0 = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} \,. \tag{3.17}$$

由于我们采用了有限三维空间上的格点化描述，真正独立的波矢数目是有限多的。这个数目就等于整个三维空间 V 中所包含的元胞的数目：V/a^3，这也就是场系统的总的自由度数目。因此，上述零点能的求和只是一个普通的有限项的求和，是有良好定义的。但是，如果我们试图将格距 $a \to 0$，或者我们试图将体积 V 趋于无穷，零点能都将成为一个发散的级数。当然，这一点其实也并不可怕。在量子场论中，真正能够测量的并不是能量的绝对数值，而是能量的改变。换句话说，我们可以自由地选取能量的零点。因此，我们完全可以不管这个貌似发散的常数数值。[6]

[5] 假定波矢与格距的乘积是一个小量。

[6] 这一点在量子引力以及宇宙学中是有问题的，因为在广义相对论中，能量的绝对数值是有物理意义的。事实上，能量－动量张量直接决定了时空的弯曲。

¶ 过渡到连续空间

现在我们试图将上面讨论的、在分立空间上的自由标量场的量子化步骤过渡到连续的空间。首先，我们将使用连续空间的符号：

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{x}} \,, \quad \pi(\mathbf{x}) = a^3 \pi_{\mathbf{x}} \,. \tag{3.18}$$

其次，如果我们取体积 V 趋于无穷而格距 a 趋于零，那么对于坐标和波矢的求和都将转化为积分：

$$\sum_{\mathbf{x}} a^3 \to \int d^3\mathbf{x} \,, \quad \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{V} \to \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \,. \tag{3.19}$$

与此同时，让我们定义连续空间的产生算符和湮灭算符：

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}} = \sqrt{V} a_{\mathbf{p}} \,, \quad \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{p}} = \sqrt{V} a^\dagger_{\mathbf{p}} \,. \tag{3.20}$$

于是，场变量 $\phi(\mathbf{x})$ 以及共轭动量密度 $\pi(\mathbf{x})$ 的平面波展开可以表达为：

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(\tilde{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \,, \\ \pi(\mathbf{x}) = \displaystyle\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (-i\omega_{\mathbf{p}}) \left(\tilde{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \,, \end{cases} \tag{3.21}$$

其中的能量：$E_{\mathbf{p}} \equiv \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$。利用傅立叶变换，连续空间的场的正则对易关系 (3.6) 可以表达为：

$$\left[\tilde{a}_{\mathbf{p}}, \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \,, \tag{3.22}$$

而其他的对易关系都恒等于零。

练习 3.3 *利用三维 δ-函数的表达式：*

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \,, \tag{3.23}$$

验证对应关系：$V\delta_{\mathbf{pk}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ 从而验证公式 (3.21)，(3.22) 与前面的分立的版本 (3.12)，(3.15) 对应。

在连续场论的符号下，自由标量场的哈密顿量可以写成：

$$H = E_0 + \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \tilde{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \tilde{a}_{\mathbf{p}} \,, \tag{3.24}$$

其中 E_0 是场系统的零点能。类似的，系统的总动量算符可以写成：

$$\mathbf{P} = -\int d^3x \pi(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\mathbf{p}\tilde{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,, \tag{3.25}$$

由于我们这个课程中绝大多数情形下都使用连续时空的符号，因此，除非我们特别声明，我们从此将连续空间的产生湮灭算符上的一弯去掉，直接用 $a_{\mathbf{p}}$ 和 $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ 来表示连续空间的湮灭和产生算符。

¶ Fock 空间

由于自由标量场（克莱因－高登场）的哈密顿量在动量空间就是一系列无相互作用的谐振子的和，因此量子化的自由标量场的希尔伯特空间（Hilbert space）完全可以由所有谐振子的基态，再加上所有可能的产生算符构造出来。这种特殊的粒子数表象中的希尔伯特空间一般被称为 Fock 空间。具体到自由的标量场系统，它的基态是唯一的，我们将它记为：$|0\rangle$。它也被称为相应场系统的真空态，或简称真空。按照定义，真空态是被所有湮灭算符所消灭的态，即：

$$a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0\,, \tag{3.26}$$

我们选取归一化条件：$\langle 0|0\rangle = 1$。

系统其他的态可以由产生算符作用在基态上构建出来。例如，一个单粒子态可以由：

$$|\mathbf{p}\rangle \propto a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle\,, \tag{3.27}$$

给出。容易证明它是系统总能量算符 (3.24) 以及总动量算符 (3.25) 的本征态，相应的本征值是：$E_{\mathbf{p}} \equiv \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$ 和 $\mathbf{p}$。[7]

练习 3.4 *试验证这个结论。*

单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的归一化依赖于我们选取什么样的约定。最为直接的约定大概是：$\langle\mathbf{k}|\mathbf{p}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$。但是这样的约定有一个不方便的地方：三维的 δ-函数并不是一个洛伦兹不变量。[8] 因此，一个更方便的约定是：

$$|\mathbf{p}\rangle \equiv \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle\,. \tag{3.28}$$

这样一来，我们对于单粒子态的归一化变为：

$$\langle\mathbf{k}|\mathbf{p}\rangle = 2\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,. \tag{3.29}$$

容易验证，这个等式的右边恰好是洛伦兹不变的。

[7] 对于单粒子的能量，我们将完全等同地混用 $E_{\mathbf{p}}$ 和 $\omega_{\mathbf{p}}$。
[8] 这意味着在一个参照系中归一好的态，在洛伦兹变换下会变化。

练习 3.5 *验证这一点。*

相应的，单粒子态的完备关系必须表达为：

$$\mathbb{1}_1 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| \,, \tag{3.30}$$

其中 $\mathbb{1}_1$ 表示单粒子态子空间中的单位算符。另外一个值得注意的事实是：

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2 - m_0^2) \,, \tag{3.31}$$

是一个洛伦兹不变的测度。

§7.2 克莱因－高登场的传播子与因果性

¶ 我们现在转换到海森堡表象（Heisenberg picture）[9] 来讨论量子化的自由标量场。在海森堡表象，场算符的定义是：

$$\phi(x) \equiv \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt} \,. \tag{3.32}$$

同样的，我们可以定义海森堡表象中的共轭动量：$\pi(x)$。利用算符关系：

$$e^{iHt}a_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}e^{-iE_{\mathbf{p}}t} \,, \quad e^{iHt}a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+iE_{\mathbf{p}}t} \,, \tag{3.33}$$

我们立刻得到：

$$\begin{cases} \phi(x) = \displaystyle\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \,, \\ \pi(x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\phi(x) \,. \end{cases} \tag{3.34}$$

练习 3.6 *验证这个结果并且验证海森堡表象下的场算符 $\phi(x)$ 满足克莱因－高登方程。*

¶ 下面我们讨论克莱因－高登场的传播。这个问题之所以在相对论性量子场论中比较重要是因为我们必须保持相对论所要求的因果性。因果性的要求就是：对于任意两个类空间隔的时空点：x，y 满足 $(x-y)^2 < 0$，我们必须要求在这两个时空点的任何物理测量都是没有相互影响的。具体到克莱因－高登场，我们必须要求类空间隔的两个点的场是对易的（即原则上讲可以同时测量的）：

[9] 貌似很多书中翻译为“海森堡绘景”。

翻 版 必 究

$$[\phi(x),\phi(y)]=0\,,(x-y)^2<0\,. \tag{3.35}$$

我们下面就来验证这个重要结论。

首先注意到，对易子 $[\phi(x),\phi(y)]$ 实际上只是一个 c 数（不再是算符）。利用上一小节给出的基本对易关系 (3.22) 容易给出：

$$[\phi(x),\phi(y)]=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{+ip\cdot(x-y)}\right)\,. \tag{3.36}$$

注意上式中的两项各自都是洛伦兹不变的，并且各自都不等于零。但是，两项的差别仅仅是相当于：$(x-y)\to(y-x)$。现在注意到这样一个事实：如果 $(x-y)^2<0$，即两个点的间隔是类空的，那么一定存在一个洛伦兹变换将点 x 和 y 互换。[10] 又由于上述两项都是洛伦兹不变的，因此我们可以仅仅对第二项做洛伦兹变换。其结果是将第二项变为与第一项完全相同，因此两项的差，即对易子 $[\phi(x),\phi(y)]$ 恰好恒等于零。这正好是相对论因果性所要求的。反之，如果两个点的间隔是类时的，$(x-y)^2>0$，那么没有一个连续的洛伦兹变换会将 x，y 两点互换。因此，一般来说对易子也不等于零。[11]

类似的因果性不仅仅出现在单分量的克莱因-高登场中，也出现在复的克莱因-高登场的传播中。这时我们需要计算的对易子是 $[\phi(x),\phi^\dagger(y)]$。同时，在复的克莱因-高登场的量子化之中，我们将会出现两类产生、湮灭算符：$a_{\mathbf{p}}$, $a^\dagger_{\mathbf{p}}$, $b_{\mathbf{p}}$, $b^\dagger_{\mathbf{p}}$，它们分别产生质量相等但守恒荷（姑且称之为电荷）相反的粒子。它们互为反粒子。例如，$\phi(x)$ 会产生带正电荷的粒子而消灭带负电的粒子；$\phi^\dagger(x)$ 则会产生带负电的粒子而消灭带正电的粒子。于是我们会发现，对于类空间隔的两个时空点 x，y，对易子 $[\phi(x),\phi^\dagger(y)]=0$。而且相消的两项分别对应于一个带负电的粒子从 y 传播到 x 的过程和一个带正电的粒子从 x 传播到 y 的过程。因此，两项的相消，或者说因果性的保持，实际上是通过正反粒子沿着不同时间方向的传播来实现的。对单分量的克莱因-高登场，貌似只有一种粒子，其实它的反粒子就是其自身罢了。

练习 3.7 *复克莱因-高登场的作用量由 (2.67) 给出，相应的守恒流为 (2.69)。对这个理论进行量子化并验证上面提到的关于因果性的结论。*

从场的对易子出发，我们可以定义不同的场的传播子。例如，我们可以定义推迟传播子：

$$D_R(x-y)\equiv\theta(x^0-y^0)\langle0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle\,, \tag{3.37}$$

[10] 类空与类时的区别就在于我们前面提到的洛伦兹群的连通性。类时间隔的上下两个曲面是被光锥分隔开的。类空间隔的则是连通的。

[11] 如果对易子在任何时候都恒等于零，那么我们将得不到任何的量子理论。

其中 $\theta(x^0-y^0)$ 表示阶梯函数。我们发现它可以表达为如下的洛伦兹不变形式：

$$D_R(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{p^2-m_0^2}\right)e^{-ip\cdot(x-y)}\,, \tag{3.38}$$

其中对于 p^0 积分必须从被积函数的两个奇点：$\pm E_{\mathbf{p}}$ 的上方绕过。这种积分路径刚好保证了传播子的延迟特性，即如果 $x^0<y^0$，传播子 $D_R(x-y)$ 恒等于零。如果用更明确的语言来描述，它对应于平面波因子中正能和负能的部分都向正时间方向传播的波。容易证明，如果我们的积分路径都是从被积函数的两个奇点的下方绕过，那么我们就得到所谓的超前传播子。它对应于正能和负能部分都向负时间方向传播。在量子场论中最为常见的是所谓的费曼传播子。它相当于从负能量奇点的下方、正能量奇点的上方来绕过奇点。我们可以将这种路径的选取明确地表达为：

$$D_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{p^2-m_0^2+i\epsilon}\right)e^{-ip\cdot(x-y)}\,, \tag{3.39}$$

其中的 ϵ 是一个无穷小的正数。读者可以验证，它的出现刚好保证了上面描述的积分路径的选取方式。费曼传播子代表了正能部分向正时间方向传播而负能部分向负时间方向传播的波。由于表达式 (3.39) 是一个四维的傅立叶变换，因此：

$$\tilde{D}_F(p)=\frac{i}{p^2-m_0^2+i\epsilon}\,, \tag{3.40}$$

又被称为动量空间的费曼传播子。另外，很容易证明：

$$D_F(x-y)=\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle\,, \tag{3.41}$$

其中我们定义了所谓的编时算符 T，它的作用就是总是将时间在前面的场算符放在左边，即：

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle\equiv\theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle+\theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\,. \tag{3.42}$$

因此，费曼传播子又被称为编时传播子。在后面的课程中，我们会经常用到这类编时传播子。

¶ 在结束这一节前让我们总结一下量子场、波动以及粒子之间的关系。尽管我们刚刚开始接触相对论性量子场，但是大家应当已经有一点体会了。在相对论性量子场论中，场本身处于核心的地位。它是系统的动力学自由度。量子化的场的基态，我们记为 $|0\rangle$，在量子场论中就被认定为真空，它是量子场系统能量最低的本征态。在真空态之上的激

发就被解释为粒子。这一点对于自由场表现的特别明晰，因为其哈密顿量（参见公式 (3.24)）的本征值对于一个给定的波矢 $\mathbf{p}$ 是等间隔的，其中每一份的能量 $E_{\mathbf{p}}=\omega_{\mathbf{p}}$ 就可以看成是与场对应的单粒子的能量，并且这个单粒子的能量、动量满足狭义相对论中的能量－动量的关系：$E_{\mathbf{p}}^2=\mathbf{p}^2+m_0^2$。算符 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ 的本征值（非负整数）则可以被解释为动量是 $\mathbf{p}$ 的粒子的数目。另一方面，可以很容易地证明（海森堡表象的）量子场 $\phi(x)$ 本身满足一个波动方程。具体到自由克莱因－高登场，这个波动方程就是克莱因－高登方程。方程的解对应于时空中的波。因此我们看到，如果说非相对论量子力学根植于德布洛意关于波粒二象性的认识，那么这种认识到了相对论性量子场论中得到进一步的完善。联系波动与粒子的桥梁就是相对论性量子场，它一方面是波（作为波动方程的解），另一方面它按照波的本征函数（傅立叶）展开的系数就是相应粒子的产生、湮灭算符。

§8 旋量场的量子化

§8.1 自由狄拉克方程的解

¶ 我们在上一章讨论了狄拉克旋量场的作用量（见公式 (2.72)），它的形式为：

$$S=\int d^4x\left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0\right)\psi\right]\,, \tag{3.43}$$

旋量场所满足的经典运动方程是（自由的）狄拉克方程：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_0)\psi(x)=0\,, \tag{3.44}$$

这个方程也可以用左右手外尔旋量分别写出：

$$\begin{pmatrix}-m_0 & i\sigma\cdot\partial\\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_L(x)\\ \psi_R(x)\end{pmatrix}=0 \tag{3.45}$$

有时为了记号上的简便，人们用四矢量符号上加一个斜线来表示这个四矢量（例如四动量）或者四矢量算符（例如四维梯度算符 ∂_μ）与 γ 矩阵的缩并：

$$\not{p}\equiv\gamma^\mu p_\mu\,,\quad \not{\partial}\equiv\gamma^\mu\partial_\mu\,. \tag{3.46}$$

利用这个符号，自由空间的狄拉克方程可以简洁地写为：$(i\not{\partial}-m_0)\psi=0$。下面我们首先来讨论自由空间中狄拉克方程的解。[12]

[12] 已经熟悉自由空间狄拉克方程的解以及 γ 矩阵性质的同学可以跳过这一小节，直接阅读第 §8.2 小节。

¶ 自由狄拉克方程的解

自由时空的平移不变性意味着自由狄拉克方程的解一定是平面波：$e^{\pm ip\cdot x}$。为了方便起见，我们将解分为正频率（正能量）和负频率两类。首先看正能解，我们取尝试解：

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}\ ,\quad p^2 = m_0^2\ ,\quad p^0 > 0\ . \tag{3.47}$$

其中的附加条件 $p^0 > 0$ 说明它是一个正能解（正频解）；条件 $p^2 = m_0^2$ 被称为质壳条件（或在壳条件，mass-shell condition），它说明狄拉克方程所描写的粒子的能量－动量满足普通的相对论性粒子的能量－动量关系。剩下的步骤只需求解四分量的旋量 $u(p)$ 所满足的方程：

$$(\not{p} - m_0)u(p) = 0\ . \tag{3.48}$$

方程 (3.48) 在狄拉克粒子的静止系中是十分简单的。利用 γ^0 的形式，[13] 我们发现该方程的解可以写成：

$$u\left(p = (m_0, 0, 0, 0)\right) = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi \end{pmatrix}\ , \tag{3.49}$$

其中 χ 是任意一个二分量的旋量。注意，线性无关的两分量旋量 χ 共有两个，我们将它们抽象地记为：$\chi^{(s)}$ 其中 $s = 1, 2$。它们对应于狄拉克粒子的自旋（内部）自由度，其具体形式我们随后再约定。我们看到，狄拉克粒子是一个自旋 1/2 的粒子。与之对应的静止系中的解则是：$u^{(1)}\left(p = (m_0, 0, 0, 0)\right)$ 和 $u^{(2)}\left(p = (m_0, 0, 0, 0)\right)$，它们是线性无关的。要得到任意参照系的解，我们只需要将粒子静止系中的解 boost 到它的运动系中，也就是从 $p = (m_0, 0, 0, 0)$ 的参照系变换到任意的 p 的参照系中。注意，无论如何，boost 之后的旋量必须满足方程 (3.48)。考虑到恒等式：

$$(\not{p} - m_0)(\not{p} + m_0) = p^2 - m_0^2 = 0\ . \tag{3.50}$$

我们发现如果取：

$$u(p) \propto (\not{p} + m_0)u\left(p = (m_0, 0, 0, 0)\right)\ , \tag{3.51}$$

这样构造的 $u(p)$ 会自动满足方程 (3.48)。前面的比例系数稍微有点复杂。我们做如下的选择：

$$u^{(s)}(p) = \frac{\not{p} + m_0}{\sqrt{2m_0(m_0 + E_{\mathbf{p}})}}u^{(s)}\left(p = (m_0, 0, 0, 0)\right)\ , \tag{3.52}$$

[13] 本节中所介绍的关于自由狄拉克方程的解的形式是在选取了特定的 γ 矩阵的表象以后的结果。具体来说，这里采用的是所谓的手征表象，其中 γ_5 是对角的。如果转换到其他表象（例如狄拉克－泡利表象），那么本节的表达式都需要重新改写。

其中 $s=1,2$ 仍然标志两个线性独立的解。对于这个选择，容易验证下列事实：第一，在静止系时它回到 (3.49)；第二，我们要保证 $\bar{\psi}\psi=\bar{u}(p)u(p)$ 是一个洛伦兹标量（这一点我们曾在上一章证明过）。有了这两点，就足以确定上面这个公式了。剩下的不确定性完全依赖于二分量旋量 χ 的选择（包括它的归一化系数的选择）。

上面这个公式的另一个时髦的写法是：

$$u^{(s)}(p)=\frac{1}{\sqrt{m_0}}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\chi^{(s)}\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\chi^{(s)}\end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

这里我们对于根号的约定是取相应矩阵本征值根号中正的一个。要验证这个表达式可以将原先的狄拉克方程写成两分量的形式 (3.45)，并且利用恒等式：

$$(\sigma\cdot p)(\bar{\sigma}\cdot p)=p^2=m_0^2\,. \tag{3.54}$$

就可以容易地证明了。

用完全类似的方法可以讨论狄拉克方程的负能解：

$$\psi(x)=v(p)e^{+ip\cdot x}\,,\quad p^2=m_0^2\,,\quad p^0>0\,. \tag{3.55}$$

其中的旋量解 $v(p)$ 满足的方程为（注意符号上与 $u(p)$ 的不同）：

$$(\not{p}+m_0)v(p)=0\,. \tag{3.56}$$

它同样可以通过静止系的解再进行 boost 后得到：

$$v^{(s)}=\frac{-\not{p}+m_0}{\sqrt{2m_0(m_0+E_{\mathbf{p}})}}v^{(s)}\left(p=(m_0,0,0,0)\right)\,, \tag{3.57}$$

其中的静止系的解可以选为：

$$v^{(s)}(p=(m_0,0,0,0))=\begin{pmatrix}\xi^{(s)}\\ -\xi^{(s)}\end{pmatrix}\,, \tag{3.58}$$

这里的 $\xi^{(s)}$，$s=1,2$ 是两个线性无关的二分量旋量。

练习 3.8 *利用 $\bar{u}u$ 和 $\bar{v}v$ 是洛伦兹标量的事实，验证公式 (3.52) 和公式 (3.57) 中的表达式。*

类似于公式 (3.53)，我们也可以将旋量 $v^{(s)}(p)$ 表达为：

$$v^{(s)}(p)=\frac{1}{\sqrt{m_0}}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{(s)}\\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^{(s)}\end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

自由空间的狄拉克方程一共有四个线性独立的解，它们可以选择为 $u^{(1,2)}(p)$ 和 $v^{(1,2)}(p)$。前两个对应于正能解，后两个对应于负能解；不同的上标 s 可以标志粒子自旋的两个不同状态。任何的自由狄拉克方程的解都可以写成上面四个线性独立解的线性组合。很容易证明：

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) &= 2\left(\chi^{(r)}\right)^{\dagger}\chi^{(s)}\,,\\ \bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) &= -2\left(\xi^{(r)}\right)^{\dagger}\xi^{(s)}\,,\\ \bar{u}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) &= \bar{v}^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=0\,.\end{aligned} \tag{3.60}$$

为此我们选择：$(\chi^{(r)})^{\dagger}\chi^{(s)}=m_0\delta^{rs}$，$(\xi^{(r)})^{\dagger}\xi^{(s)}=m_0\delta^{rs}$，于是我们就得到：

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p) &= -\bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p)=2m_0\delta^{rs}\,,\\ \bar{u}^{(r)}(p)v^{(s)}(p) &= \bar{v}^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=0\,.\end{aligned} \tag{3.61}$$

¶ 在后面的计算中，我们经常会遇到对于自旋态的求和：

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)=\not{p}+m_0\,,\quad \sum_{s=1,2}v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)=\not{p}-m_0\,. \tag{3.62}$$

它们被称为正能解以及负能解的投影算符，因为前者作用在任何自由狄拉克方程的解上面会投影出正能解的部分（杀掉负能解的部分）而后者刚好相反。

练习 3.9 *验证上面的表达式。*

¶ γ 矩阵的性质

在后面量子场论的计算中，我们会不断地与 γ 矩阵打交道。因此，现在有必要将它们的主要性质加以介绍。

从我们引入的四个 γ 矩阵（即 γ_μ）出发，我们可以构造更多的 γ 矩阵。下面是它们的一个列表：

$$\mathbb{1}\,,\gamma_\mu\,,\gamma_5\,,\gamma_5\gamma_\mu\,,\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\,. \tag{3.63}$$

可以证明这 16 个 4×4 矩阵实际上构成了一组完备的基。也就是说，任何 4×4 复矩阵（一般有 16 个独立复参数）都可以用这 16 个 γ 矩阵来展开，并且展开的系数（一般是复数）是唯一确定的。

我们第一章中就证明了，$\bar{\psi}\psi$ 是一个洛伦兹标量而 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 则是一个四矢量。类似地，我们可以证明：$\bar{\psi}\gamma_5\psi$，$\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$，$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ 在洛伦兹变换下分别是赝标量、轴矢量和张量。由于这些物理量在洛伦兹变换下具有确定的变换规则，又因为所有 4×4 的矩阵都可以展开成这 16 个 γ 矩阵的线性组合，我们发现任何狄拉克场的双线性形式：$\bar{\psi}\Gamma\psi$，其中 Γ 是一个任意的 4×4 的矩阵，都可以分解成具有明确变换性质的量的线性组合。

在后面量子场论的微扰计算中经常会遇到一连串 γ 矩阵乘积后求迹的运算。下面就是这类计算的规则：

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu}\,, \\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})\,, \end{aligned} \tag{3.64}$$

特别的，任意奇数个 γ 矩阵的乘积求迹一定是零。多于 4 个 γ 矩阵的乘积的求迹的公式也不难得出。由于本课程中我们涉及的过程并不需要，这里就不给出了。

练习 3.10 *验证这些求迹的公式。*

¶ 极端相对论极限下自由狄拉克方程的解

下面我们来考察极端相对论极限下自由狄拉克方程的解的特性。假定粒子三动量方向的单位矢量记为：$\hat{\mathbf{p}}$ 于是我们有：$p\cdot\sigma\sim E(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})$，$p\cdot\bar{\sigma}\sim E(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})$。因此，旋量 $u(p)$ 和 $v(p)$ 近似为：

$$u^{(s)}(p)\sim\sqrt{\frac{E}{m_0}}\begin{pmatrix}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{1/2}\chi^{(s)}\\(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{1/2}\chi^{(s)}\end{pmatrix},v^{(s)}(p)\sim\sqrt{\frac{E}{m_0}}\begin{pmatrix}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{1/2}\xi^{(s)}\\-(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{1/2}\xi^{(s)}\end{pmatrix}$$

考虑到：$(1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{1/2}=(1\pm\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})/\sqrt{2}$，我们有：[14]

$$u^{(s)}(p)\sim\sqrt{\frac{E}{2m_0}}\begin{pmatrix}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi^{(s)}\\(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi^{(s)}\end{pmatrix},\ v^{(s)}(p)\sim\sqrt{\frac{E}{2m_0}}\begin{pmatrix}(1-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi^{(s)}\\-(1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi^{(s)}\end{pmatrix} \tag{3.65}$$

这时比较重要的是所谓螺旋度的概念。一般的螺旋度的定义为一个粒子的自旋在其运动方向的投影：

$$h=\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}, \tag{3.66}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是公式 (2.50) 中给出的粒子的自旋。需要注意的是，螺旋度一般仅仅用于无质量的费米子，或者用于极端相对论性的费米子。对于一个有质量的费米子，其螺旋度依赖于参照系的选取从而并不具有确定的物理含义。对于无质量的费米子，其螺旋

[14] 这时为了保证零质量极限顺畅，我们也可以将 $1/\sqrt{m_0}$ 的因子吸收到旋量 χ 和 ξ 的定义之中。这样一来，它们的正交归一关系中将不包含质量：$\chi^{(s)\dagger}\chi^{(s')}=\xi^{(s)\dagger}\xi^{(s')}=\delta^{ss'}$。

度不依赖于参照系的变换。对于自旋为 1/2 的、无质量（或极端相对论性）狄拉克费米子，其螺旋度的本征值可以取 $+1/2$ 和 $-1/2$，前者被称为右手费米子而后者被称为左手费米子。注意这个左手、右手的定义与我们前面的定义恰好完全一致。根据公式 (3.65) 大家不难验证，对于一个极端相对论性的右手狄拉克费米子，如果它的旋量解 $u(p)$ 或 $v(p)$ 中的二分量旋量 χ 或 ξ 恰好满足：$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$，则与之对应的 $u(p)$ 或 $v(p)$ 将只包含两个下分量，两个上分量恒等于零，这恰好符合我们前面关于左、右手旋量的约定。反之，对于一个左手费米子，其二分量旋量满足：$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = -1$，则相对应的 $u(p)$ 或 $v(p)$ 将只包含上两个分量，下面两个分量恒等于零。

¶ 非相对论极限下外场中的狄拉克方程与泡利方程

我们在第一章提到过，狄拉克方程最早是被当做单粒子的相对论性波动方程提出来的。我们现在重新回到这种观点，考察在非相对论性极限下一个单粒子的狄拉克方程会变为什么样子。[15] 在这个观点下，$\psi(x)$ 不再是场，而是我们考虑的单粒子的（有四个分量的）波函数。

考虑缓变的外电磁场中的一个狄拉克粒子，其波动方程可以推广为：

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\psi = 0\,, \tag{3.67}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是一个缓变的外加（经典）电磁场所对应的四矢势。这个推广等价于将原先的偏微商算符 ∂_μ 替换为相应的协变微商 D_μ：

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\,, \tag{3.68}$$

其中 e 为粒子的电荷。我们将狄拉克方程按照其左右手分量写出

$$\begin{cases} (i\partial_0 - eA_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\psi_R = m\psi_L \\ (i\partial_0 - eA_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\psi_L = m\psi_R \end{cases} \tag{3.69}$$

其中 $\mathbf{p} = (-i)(\nabla - ie\mathbf{A}) = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ 为相应的运动学动量，$\mathbf{P} = -i\nabla$ 则为与粒子的坐标 $\mathbf{x}$ 共轭的正则动量。

现在我们要做非相对论极限，即假设所有的能量、动量都远远小于粒子的静止质量 m。为此，我们令

$$\psi_{L/R}(x) = e^{-imt}\chi_{L/R}(x)\,,$$

其中的 $\chi_{L/R}(x)$ 是缓变的。将此表达式带入我们得到：

$$\begin{cases} (i\partial_0 - eA_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi_R = m(\chi_L - \chi_R) \\ (i\partial_0 - eA_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi_L = m(\chi_R - \chi_L) \end{cases} \tag{3.70}$$

[15] 这里我假设读者没有在其他课程（例如高量之类的）中学过狄拉克方程。否则可以跳过这段的描述。

将两式分别相加和相减我们得到

$$\begin{cases}(i\partial_0 - eA_0)(\chi_L + \chi_R) + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\chi_L - \chi_R) = 0\\ (i\partial_0 - eA_0)(\chi_R - \chi_L) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\chi_L + \chi_L) = 2m(\chi_L - \chi_R)\end{cases} \tag{3.71}$$

由于我们假定 $eA^0 \ll 2m$，于是第二个式子的近似解为：

$$\chi_L - \chi_R \simeq -\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{2m}(\chi_L + \chi_R)\,. \tag{3.72}$$

这个式子说明在非相对论的极限下，$(\chi_L - \chi_R)$ 比 $(\chi_L + \chi_R)$ 要压低一个 $1/m$ 的因子，因此前者被称为狄拉克旋量的小分量；而后者则被称为相应的大分量。这一点在前面讨论静止系（这时显然是极端相对论性的）中狄拉克方程的解的时候其实已经可以看出来。例如在公式 (3.49) 中，小分量恒等于零而大分量则正比于 χ。[16]

将小分量用大分量表达的式子 (3.72) 带回公式 (3.71)，我们就得到了大分量 $\Phi \equiv \chi_L + \chi_R$ 近似满足的方程：

$$i\partial_0\Phi = \left[eA_0 + \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{2m}\right]\Phi\,. \tag{3.73}$$

现在注意到[17]

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \sigma^i\sigma^j p^i p^j = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{4}[\sigma^i,\sigma^j][p^i,p^j] = \mathbf{p}^2 - e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} \tag{3.74}$$

于是我们最终得到

$$i\partial_0\Phi = \left[\frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eA_0 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\Phi \tag{3.75}$$

这就是著名的泡利方程（1927 年），它具有类似薛定谔方程的形式；等式右边方括号内的量可以看成是一个非相对论性粒子在外加电磁场中的哈密顿量。它包含三项，分别为粒子的动能、带电粒子与与外加电场相互作用的能量和粒子的磁矩与外加磁场相互作用的能量（或者称塞曼能量）。泡利方程的一个显著的特征是，满足狄拉克方程的粒子在非相对论极限下有自旋（从而其波函数具有两个分量）$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$ 和磁矩 $\boldsymbol{\mu}$，并且两者成正比：

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2m}\mathbf{S}\,, \tag{3.76}$$

其中 $g \equiv 2$ 称为狄拉克粒子的 g-因子。这被视为狄拉克方程的一个重要结论（并且与实验符合得非常好）。

[16] 由于我们采用了手征表象（其中 γ_5 是对角的），因此大分量、小分量的名称不是十分明显。如果我们采用所谓的泡利-狄拉克表象（其中 γ_0 是对角的），那么大分量对应用狄拉克旋量的前两个分量而小分量对应用狄拉克旋量的后两个分量。

[17] 特别注意运动学动量 $\mathbf{p}$ 的不同分量之间并不对易，而是满足：$[p^i,p^j] = ie\epsilon^{ijk}B^k$。

§8.2 自由狄拉克场的量子化

¶ 如果我们试图按照量子化标量场的方式来量子化狄拉克场，我们将会遇到一些问题。具体来说，我们会发现自由狄拉克场的能量不是有下界的，另外系统会破坏狭义相对论所要求的因果性。这些问题也是人们在最初量子化狄拉克场时遇到的。[18] 约当（P. Jordan）和魏格纳（E. Wigner）在 1928 年发现：解决这些问题的根本点在于必须要求狄拉克场的场算符与它的共轭动量满足反对易关系，而不是通常的对易关系。下面我们将首先简要地利用（错误的）对易关系来试图量子化狄拉克场。我们将说明它的问题；然后我们引入反对易关系，说明它的引入可以自洽地解决所有的（能量的正定性、因果性等等）问题；最后我们讨论自由狄拉克场的传播子。

¶ 利用对易关系量子化

从自由狄拉克场的作用量 (3.43) 出发，很容易发现与旋量场 ψ 共轭的正则动量是 $i\psi^\dagger$。自由狄拉克场的哈密顿量可以写为：

$$H = \int d^3\mathbf{x}\bar{\psi}\left(-i\gamma^i\partial_i + m_0\right)\psi\,, \tag{3.77}$$

因此，标准的、利用对易关系的正则量子化的条件是：

$$\left[\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{y})\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{\alpha\beta}\,. \tag{3.78}$$

接着，我们将量子化的场按照自由狄拉克方程的解展开：

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\sum_{s=1,2}\left(a^{(s)}_\mathbf{p}u^{(s)}(\mathbf{p}) + b^{(s)}_{-\mathbf{p}}v^{(s)}(-\mathbf{p})\right)\,. \tag{3.79}$$

大家可以验证，关于场的对易关系可以等价于产生、湮灭算符的下列对易关系：

$$\left[a^{(s)}_\mathbf{p}, a^{(r)\dagger}_\mathbf{k}\right] = \left[b^{(s)}_\mathbf{p}, b^{(r)\dagger}_\mathbf{k}\right] = (2\pi)^3\delta^{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,, \tag{3.80}$$

其余的对易子都为零。

练习 3.11 *验证这一点，即验证对易关系 (3.80) 与对易关系 (3.78) 一致。*

我们可以进一步用产生、湮灭算符来表达哈密顿量 (3.77)，其结果是：

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\left(E_\mathbf{p}a^{(s)\dagger}_\mathbf{p}a^{(s)}_\mathbf{p} - E_\mathbf{p}b^{(s)\dagger}_\mathbf{p}b^{(s)}_\mathbf{p}\right)\,. \tag{3.81}$$

这个公式的第二项有严重的问题。如果我们的基态的定义满足：$a^{(s)}_\mathbf{p}|0\rangle = b^{(s)}_\mathbf{p}|0\rangle = 0$，那么我们发现，只要从基态上产生足够多的负能粒子，系统的哈密顿量就是没有下界的。

[18] 例如，哈密顿量没有下界的问题实际上就是所谓的狄拉克负能海的某种体现。

这对于一个量子理论来说是致命的。但是，观察这个公式本身我们发现，似乎只要将 $b_{\mathbf{p}}^{(s)}$ 与 $b_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}$ 对调一下位置，哈密顿量就可以有下界了。但是，这一点是不能够随便改变的，因为这两个算符必须满足正则对易关系 (3.80)。换句话说，我们不能够简单地重新定义 $b_{\mathbf{p}}^{(s)}$ 与 $b_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}$，除非我们要改变场（或者等价地说，产生湮灭算符）的基本量子化条件。

¶ 利用反对易关系量子化

如前所述，我们现在将狄拉克场以及产生湮灭算符的量子化条件改为反对易关系：

$$\left\{\psi_\alpha(\mathbf{x}),\psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})\right\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{\alpha\beta}\,, \tag{3.82}$$

其余的反对易子为零。我们保持展开式 (3.79)，那么产生湮灭算符必须满足：

$$\left\{a_{\mathbf{p}}^{(s)},a_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}\right\}=\left\{b_{\mathbf{p}}^{(s)},b_{\mathbf{k}}^{(r)\dagger}\right\}=(2\pi)^3\delta^{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,, \tag{3.83}$$

其余的反对易子都为零。可以证明，系统的哈密顿量的表达式仍然不变，即公式 (3.81) 仍然成立。现在，注意到反对易关系中产生和湮灭算符的位置完全是对称的，因此我们可以重新定义：

$$\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)}=b_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}\,,\quad \tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}=b_{\mathbf{p}}^{(s)}\,, \tag{3.84}$$

那么除去一个无关紧要的常数，系统的哈密顿量可以写为：

$$H=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\left(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(s)}+E_{\mathbf{p}}\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)}\right)\,. \tag{3.85}$$

我们发现，只要我们定义真空为：

$$a_{\mathbf{p}}^{(s)}|0\rangle=\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)}|0\rangle=0\,, \tag{3.86}$$

上面的这个哈密顿量 (3.85) 就是有下界的。上面的变换 (3.84) 以及真空的重新认定 (3.86) 往往被称为狄拉克的粒子空穴变换。它相当于重新取狄拉克的“负能海”为真空。消灭一个负能的电子被诠释为产生一个正能的正电子（电子的反粒子）。至此我们看到，只要采用反对易关系而不是对易关系，狄拉克场就可以自洽地量子化。由于反对易关系自动地保证相应的粒子满足泡利不相容原理，即一个量子态上最多能够有一个粒子，我们立刻得到一个基本结论：狄拉克场所描写的粒子是满足泡利不相容原理的费米子。这是它与前一节所讨论的标量场（描写玻色子）的本质区别。这个区别在量子场论的框架中的集中体现就是狄拉克场必须用反对易关系来量子化。

¶ 量子化狄拉克场

从现在起，我们将假定已经完成了粒子空穴变换，并且为了简化我们的记号，我们将算符 $\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)}$，$\tilde{b}_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}$ 上面的一弯去掉。量子化的狄拉克场可以展开为：

$$\begin{cases} \psi(x) = \int \dfrac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \displaystyle\sum_{s=1,2} \left(a_\mathbf{p}^{(s)} u^{(s)}(p) e^{-ip\cdot x} + b_\mathbf{p}^{(s)\dagger} v^{(s)}(p) e^{+ip\cdot x} \right) \\ \bar{\psi}(x) = \int \dfrac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \displaystyle\sum_{s=1,2} \left(b_\mathbf{p}^{(s)} \bar{v}^{(s)}(p) e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^{(s)\dagger} \bar{u}^{(s)}(p) e^{+ip\cdot x} \right) \end{cases} \tag{3.87}$$

其中的产生、湮灭算符满足基本的反对易关系 (3.83)；系统的真空则由 (3.86) 定义。具有任意费米子或者反费米子的态可以由产生算符作用于真空而构造出来。对于单费米子态，为了方便我们采用如下的约定（参见标量场的公式 (3.28)）：

$$|\mathbf{p}, s\rangle = \sqrt{2E_\mathbf{p}} a_\mathbf{p}^{(s)\dagger} |0\rangle \,, \tag{3.88}$$

类似的，我们对于单个反费米子的态也采用同样的约定。这样的约定保证了：

$$\langle \mathbf{k}, r | \mathbf{p}, s \rangle = (2E_\mathbf{p})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta^{rs} \,, \tag{3.89}$$

刚好是洛伦兹不变量。

狄拉克场系统的哈密顿量为：

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} E_\mathbf{p} \left(a_\mathbf{p}^{(s)\dagger} a_\mathbf{p}^{(s)} + b_\mathbf{p}^{(s)\dagger} b_\mathbf{p}^{(s)} \right) . \tag{3.90}$$

而它的三动量为：

$$\mathbf{P} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \mathbf{p} \left(a_\mathbf{p}^{(s)\dagger} a_\mathbf{p}^{(s)} + b_\mathbf{p}^{(s)\dagger} b_\mathbf{p}^{(s)} \right) . \tag{3.91}$$

再次提醒大家注意，$a_\mathbf{p}^{(s)\dagger}$ 和 $b_\mathbf{p}^{(s)\dagger}$ 都产生一个具有动量 $\mathbf{p}$，能量 $+E_\mathbf{p}$ 的粒子。我们将称由 $a_\mathbf{p}^{(s)\dagger}$ 产生的粒子为费米子，由 $b_\mathbf{p}^{(s)\dagger}$ 产生的粒子为反费米子。这两种费米子的区别可以由守恒荷看出。我们知道狄拉克理论有一个守恒的流：$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$。与之相应的守恒荷可以用产生湮灭算符表达出来：

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum \left(a_\mathbf{p}^{(s)\dagger} a_\mathbf{p}^{(s)} - b_\mathbf{p}^{(s)\dagger} b_\mathbf{p}^{(s)} \right) , \tag{3.92}$$

由此我们看到，两种费米子分别具有 $+1$ 和 -1 的荷。

¶ 下面我们讨论一下在洛伦兹变换下场算符 $\psi(x)$ 的变换行为。按照量子力学的基本原则，任何对称性在 Hilbert 空间中都表现为幺正或者反幺正的算符，我们期待在一个洛伦

兹变换 Λ 下，在 Hilbert 空间中所诱导的是一个幺正变换 $U(\Lambda)$。[19] 按照单粒子态 (3.88) 的归一化，我们期待：

$$U(\Lambda)a^{(s)}_{\mathbf{p}}U^{-1}(\Lambda)=\sqrt{\frac{E_{L\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}a^{(s)}_{L\mathbf{p}}\,, \tag{3.93}$$

其中 L 表示四矢量表示中的洛伦兹矩阵，[20] 即公式 (2.36)。这个公式以及对于 $a^{(s)\dagger}_{\mathbf{p}}$，$b^{(s)\dagger}_{\mathbf{p}}$，$b^{(s)}_{\mathbf{p}}$ 的类似式子就定义了算符 $U(\Lambda)$ 在 Hilbert 空间的变换规则。我们现在可以计算 $U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda)$，令 $\tilde{p}=Lp$，并利用：$u^{(s)}(p)=u^{(s)}(L^{-1}\tilde{p})=\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}u^{(s)}(\tilde{p})$，我们可以证明：

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda)=\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\psi(Lx)\,. \tag{3.94}$$

这个式子说明，变换后的场 $U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda)$ 会在变换后的时空点 Lx 产生反费米子或湮灭正费米粒子，这正是我们所期待的结果。

¶ 最后我们简单讨论一下狄拉克场的角动量。角动量算符可以视为空间转动的生成元：

$$\mathbf{J}=\int d^3\mathbf{x}\psi^\dagger\left(\mathbf{x}\times(-i\nabla)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right)\psi\,, \tag{3.95}$$

其中矢量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的定义为：

$$\Sigma^i=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^{jk}\,. \tag{3.96}$$

公式 (3.95) 的形式十分明显，在非相对论极限下，第一项是所谓的轨道角动量；第二项则对应于自旋角动量。我们需要强调的是，将角动量区分为轨道、自旋仅仅在非相对论极限之下才有意义。如果是一个相对论性的理论，这两者实际上在物理上是不可区分的，[21] 尽管从公式 (3.95) 的形式上看可以做这样的区分。在手征表象中，矩阵 Σ^i 是分块对角的，其对角元上就是通常的泡利矩阵。这实际上已经预示着狄拉克粒子的自旋是 1/2。这一点还可以进一步明确验证。为此我们回到粒子的静止系。这时公式 (3.95) 中的第一项不贡献。我们可以验证：

$$\begin{aligned}J_za^{(s)\dagger}_0|0\rangle &= [J_z,a^{(s)\dagger}_0]|0\rangle=\frac{1}{2m}\sum_r\left(u^{(s)\dagger}(0)\frac{\Sigma^3}{2}u^{(r)}(0)\right)a^{(r)\dagger}_0|0\rangle\\ &= \frac{1}{m}\sum_r\left(\chi^{(s)\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\chi^{(r)}\right)a^{(r)\dagger}_0|0\rangle=\pm\frac{1}{2}a^{(s)\dagger}_0|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{3.97}$$

其中最后一步中，我们分别选取了 σ^3 的两个本征矢量完成了对于 r 的求和。公式中的正负号分别对应于选取 $\chi^{(s)}$ 为 σ^3 的具有本征值为 ±1 的本征矢量。因此，我们可以说量子

[19] 正如我们前面提到的，由于洛伦兹群不是一个紧致群，因此它不可能存在有限维的幺正表示。但是由于 Hilbert 空间是无穷维的，因此非紧致的洛伦兹群可以存在幺正的表示。

[20] 这里 $E_{L\mathbf{p}}$ 和 $a^{(s)}_{L\mathbf{p}}$ 中的脚标 $L\mathbf{p}$ 表示四矢量 $\tilde{p}=Lp$ 的空间分量。

[21] 也就是说，轨道和自旋角动量自身并不是守恒的好量子数，只有总角动量才是。

态：$a_0^{(s)\dagger}|0\rangle$ 可以取为在静止系中具有确定的自旋角动量的状态，只要相关的二分量旋量 $\chi^{(s)}$ 取为 σ^3 的本征态。具体来说，如果取为 $\sigma^3=+1$ 的本征态，相应的量子态对应的沿着 z 轴的自旋分量为 $+1/2$；如果取为 $\sigma^3=-1$ 的本征态，则相应的量子态对应的沿着 z 轴的自旋分量为 $-1/2$。

完全类似于上面的讨论，我们可以验证：

$$J_z b_0^{(s)\dagger}|0\rangle = \mp\frac{1}{2} b_0^{(s)\dagger}|0\rangle\,, \tag{3.98}$$

其中的负正号分别对应于选取 $\xi^{(s)}$ 为 σ^3 的具有本征值为 ±1 的本征矢量。注意对于反费米子，这个对应关系与费米子的正好颠倒。即：如果二分量的旋量 $\xi^{(s)}$ 取为 $\sigma^3=+1$ 的本征态，相应的量子态 $b_0^{(s)\dagger}|0\rangle$ 对应的沿着 z 轴的自旋分量为 $-1/2$；如果 $\xi^{(s)}$ 取为 $\sigma^3=-1$ 的本征态，则相应的量子态对应的沿着 z 轴的自旋分量为 $+1/2$。这一点可以很简单地从狄拉克的空穴理论中找到来源。

¶ 前面的讨论取了费米子（或者反费米子）的静止系。如果在费米子的质量为零或者在极端相对论极限下，我们需要结合前面关于螺旋度（见第 52 页）的讨论。对于一个螺旋度为 $+1/2$ 的费米子（从而是右手费米子），它的旋量 $u^{(s)}(p)$ 中的 $\chi^{(s)}$ 应当选为 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}=+1$ 的本征态，因此，$u^{(s)}(p)$ 将是右手的，即它仅仅包含两个下分量，两个上分量为零。相应的，粒子的物理角动量沿 $\mathbf{p}$ 方向的投影也为 $+1/2$。反之，如果我们选旋量 $\chi^{(s)}$ 为 $\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}=-1$ 的本征态，那么相应的费米子（左手费米子）沿 $\mathbf{p}$ 方向的投影是 $-1/2$。

对于反费米子，这个对应关系恰好相反。一个右手的反费米子，它的旋量 $v(p)$ 恰恰是左手的；即它仅仅包含两个上分量而两个下分量全是零。左手的反费米子则正好倒过来，上面两个分量全为零，下面两个分量不为零。所以，对左手的反费米子来说，相应的旋量 $v^{(s)}(p)$ 中的二分量旋量 $\xi^{(s)}$ 应选择使得：$(\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi^{(s)}=+\xi^{(s)}$。

¶ 狄拉克场的传播子

最后让我们讨论自由狄拉克场的传播子。我们可以计算出：

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)|0\rangle = (i\partial\!\!\!/_x + m_0)_{\alpha\beta}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}\,, \tag{3.99}$$

$$\langle 0|\bar\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle = -(i\partial\!\!\!/_x + m_0)_{\alpha\beta}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(y-x)} \tag{3.100}$$

于是我们发现，如果 $(x-y)^2<0$，即两个点是类空间隔的，那么：$\psi_\alpha(x)$ 和 $\bar\psi_\beta(y)$ 的反对易子为零。这是费米子场的情形下因果性的体现。

我们后面经常要用到的仍然是编时传播子，或费曼传播子：

$$S_F(x-y)=\langle 0|T\psi(x)\bar\psi(y)|0\rangle=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not p+m_0)}{p^2-m_0^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\,, \tag{3.101}$$

其中的费米子场的编时乘积的定义为（注意多余的符号）：

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{3.102}$$

我们称：

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}\,, \tag{3.103}$$

为自由狄拉克场动量空间的费曼传播子。

§8.3 分立对称性

¶ 这一小节我们将讨论自由狄拉克理论的分立对称性，这包括空间反射（或者称为宇称）P、电荷共轭 C 以及时间反演 T 等三个变换。宇称和时间反演变换实际上与洛伦兹群的关系十分密切。正如我们第二章指出的，这两个分立变换将洛伦兹群分为互不连通的四支：正时正当、非正时正当、正时非正当、非正时非正当。一般来说，量子场论的作用量必须在正时正当的（连续的）洛伦兹变换下不变。但是，它并不一定具有所有的分立对称性。自然界的基本相互作用中，只有纯粹的电磁作用以及纯粹的强作用满足上述所有分立对称性。弱作用明显破坏宇称，并且在标准模型中，宇称与电荷共轭的联合对称性 CP 也被破坏（尽管不大）。迄今为止，所有量子场论模型都必须满足宇称、电荷共轭、时间反演三者的联合对称操作。这个结论可以在相当普遍的前提下被证明，被称为 *CPT 定理*。我们这里并不去证明这一点，我们仅仅是以自由的狄拉克理论为例来讨论它在分立对称操作下的变换规则。

¶ 宇称变换

我们希望宇称变换在量子态上以幺正算符 P 的形式实现：[22]

$$P\psi(t,\mathbf{x})P = A_P\psi(t,-\mathbf{x})\,, \tag{3.104}$$

其中 A_P 是旋量空间的一个幺正矩阵。我们知道宇称变换应当改变一个粒子的动量的方向，因此我们要求：

$$Pa^{(s)}_{\mathbf{p}}P = \eta_a a^{(s)}_{-\mathbf{p}}\,, Pb^{(s)}_{\mathbf{p}}P = \eta_b b^{(s)}_{-\mathbf{p}}\,, \tag{3.105}$$

其中 η_a，η_b 是两个待定位相。我们要求所有的物理量（它们由偶数个费米子场构成）在两个宇称变换下回到原先的值，这就给出：

$$\eta_a^2 = \pm 1\,,\quad \eta_b^2 = \pm 1\,. \tag{3.106}$$

[22] 这里我们假定了：$P^2 = 1$，即两个宇称变换等价于恒等变换。否则一个算符的变换应当写为：$P\psi P^{-1}$。虽然原则上这里可以有一个相位的不确定性，但是我们下面已经引入了任意相位 η_a，η_b，因此，假定 $P^2 = 1$ 并不失去一般性。

具体计算 $P\psi(x)P$ 表明，如果我们取：[23]

$$\eta_b^* = -\eta_a \ , \tag{3.107}$$

我们就得到下面重要的结论：

$$P\psi(t,\mathbf{x})P = \eta_a\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) \ , P\bar{\psi}(t,\mathbf{x})P = \eta_a^*\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0 \ . \tag{3.108}$$

这就是我们所期望的结果。费米子的双线性算子在宇称变换下的性质可以由此经过计算得到，其结果罗列在本节后面的表 3.1 中供参考。

¶ 时间反演变换

时间反演变换的特性是将时空点 $(t,\mathbf{x})$ 变换到 $(-t,\mathbf{x})$。另外一点需要注意的是，时间反演变换会改变动量以及角动量的方向。由于时间的特殊性，我们下面会发现，时间反演变换无法用通常的幺正算符来实现。原因是，由于：$\psi(t,\mathbf{x}) = e^{iHt}\psi(0,\mathbf{x})e^{-iHt}$，因此，如果我们假定算符 T 与哈密顿量对易：$[T,H]=0$，我们立刻得到：

$$T\psi(t,\mathbf{x})T = e^{iHt}T\psi(0,\mathbf{x})Te^{-iHt} \tag{3.109}$$

我们可以将上式两边作用于真空态得到：

$$T\psi(t,\mathbf{x})T|0\rangle = e^{iHt}(T\psi(0,\mathbf{x})T)|0\rangle \ , \tag{3.110}$$

这个式子的右边是一系列负频率振荡函数，但是等式的左边，按照我们所期望的，应当变为某个常数矩阵乘以 $\psi(-t,\mathbf{x})|0\rangle$。它对于时间的依赖关系只包含正频率的振荡。两者不可能相等。这个矛盾说明，我们不可能象宇称变换那样要求 T 以幺正的形式实现。解决这个矛盾的关键是要求 T 是一个反幺正算符，即它并不与复的常数对易，而是包含一个取复共轭的操作：[24]

$$T\cdot c = c^*\cdot T \ . \tag{3.111}$$

注意到复共轭的操作正好将时间演化因子中的时间反向：$Te^{iHt} = e^{-iHt}T$，因此它刚刚好可以克服上面揭示的矛盾。

由于我们对于自由狄拉克旋量的定义往往依赖于该狄拉克粒子的自旋，而时间反演会改变粒子的自旋取向，因此我们有必要仔细讨论相关的旋量在时间反演下是如何变换的。我们知道，狄拉克旋量 $u^{(s)}(p)$ 依赖于一个二分量旋量 $\chi^{(s)}$ 的选取。对于一个给定的二分量旋量 $\chi^{(s)}$ 满足：

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi^{(s)} = +\chi^{(s)} \ , \tag{3.112}$$

[23] 这个额外的负号会对正反费米子构成的束缚态的 C-宇称有影响。

[24] 也许有的读者了解 E.P. Wigner 的一个重要定理，亦称为 Wigner 定理，即一个量子系统的对称性一定可以表示为希尔伯特空间上的幺正或者反幺正算子。时间反演就属于后者。

即 $\chi^{(s)}$ 对应于自旋沿着 $\mathbf{n}$ 方向分量是 $+1/2$ 的本征态，那么我们可以定义一个与之对应的自旋反转的二分量旋量：

$$\chi^{(\bar{s})} = (-i\sigma^2)\left(\chi^{(s)}\right)^* , \tag{3.113}$$

由于有恒等式：$\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^*$，因此我们一定有：

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi^{(\bar{s})} = -\chi^{(\bar{s})} . \tag{3.114}$$

其实我们前面关于负能解的部分的旋量 $v^{(s)}(p)$ 的约定（旋量 $v^{(s)}(p)$ 相关的旋量为 $\xi^{(s)}$）实际上等价于 $\chi^{(\bar{s})}$：

$$v^{(s)}(p) = \frac{1}{\sqrt{m_0}}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\chi^{(\bar{s})} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\chi^{(\bar{s})} \end{pmatrix} . \tag{3.115}$$

对于任意一个四动量 $p=(p^0,\mathbf{p})$，我们定义：$\tilde{p}=(p^0,-\mathbf{p})$，它就是 p 经时间反演后所对应的四动量。我们现在计算：$u^{\bar{s}}(\tilde{p})$。我们需要以下的一个恒等式：

$$\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\sigma^2 = \sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*} . \tag{3.116}$$

练习 3.12 *验证这个恒等式。*

那么，利用前面的公式 (3.53) 和 $\chi^{(\bar{s})}$ 的定义 (3.113)，我们有：

$$u^{(\bar{s})}(\tilde{p}) = \frac{1}{\sqrt{m_0}}\begin{pmatrix} \sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}(-i\sigma^2\chi^{(s)*}) \\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}(-i\sigma^2\chi^{(s)*}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_0}}\begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\chi^{(s)*} \\ -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\chi^{(s)*} \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

或者等价地写为：

$$u^{(\bar{s})}(\tilde{p}) = -(\gamma^1\gamma^3)\left[u^{(s)}(p)\right]^* , \quad v^{(\bar{s})}(\tilde{p}) = -(\gamma^1\gamma^3)\left[v^{(s)}(p)\right]^* , \tag{3.118}$$

类似于公式 (3.113) 我们再定义：

$$Ta^{(s)}_{\mathbf{p}}T = a^{(\bar{s})}_{-\mathbf{p}} = (a^{(2)}_{-\mathbf{p}}, -a^{(1)}_{-\mathbf{p}}) , \quad Tb^{(s)}_{\mathbf{p}}T = b^{(\bar{s})}_{-\mathbf{p}} = (b^{(2)}_{-\mathbf{p}}, -b^{(1)}_{-\mathbf{p}}) , \tag{3.119}$$

我们于是可以证明：

$$T\psi(t,\mathbf{x})T = (\gamma^1\gamma^3)\psi(-t,\mathbf{x}) , \quad T\bar{\psi}(t,\mathbf{x})T = \bar{\psi}(-t,\mathbf{x})(-\gamma^1\gamma^3) . \tag{3.120}$$

由此出发不难导出所有费米子双线性算子的时间反演特性。

¶ 电荷共轭变换

电荷共轭变换是将费米子与反费米子互换的变换。我们期望：

$$Ca^{(s)}_{\mathbf{p}}C = b^{(s)}_{\mathbf{p}} , \quad Cb^{(s)}_{\mathbf{p}}C = a^{(s)}_{\mathbf{p}} , \tag{3.121}$$

完全类似于上面的运算，我们可以验证：

$$u^{(s)}(p) = -i\gamma^2\left[v^{(s)}(p)\right]^* , \quad v^{(s)}(p) = -i\gamma^2\left[u^{(s)}(p)\right]^* , \tag{3.122}$$

结合产生湮灭算符的变换 (3.121)，我们就可以确定场在电荷共轭变换下的变换性质：

$$C\psi C = -i\left(\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2\right)^T \ , \ C\bar{\psi}C = \left(-i\gamma^0\gamma^2\psi\right)^T \ . \tag{3.123}$$

由此，我们可以导出所有费米子双线性算子的变换性质。

¶ 最后，我们将由狄拉克场构成的双线性算子在各种分立变换下的变换性质罗列在表 3.1 中供读者参考。这个表中的符号 $(-1)^\mu$ 在 $\mu=0$ 时取 $+1$；在 $\mu=1,2,3$ 时，取 -1。

表 3.1：狄拉克场构成的双线性算子在分立对称性下的变换行为：

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
P	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1

§9 矢量场的量子化

¶ 这一节中，我们来讨论矢量场的正则量子化。为了明确起见，我们将仅仅讨论电磁场。它对应于无质量的、具有 $U(1)$ 规范对称性的矢量场。如果追根溯源，应当说电磁场是导致量子论诞生的功臣。但是我们马上会发现，通常的正则量子化并不能够简单地应用到电磁场上。其中遇到的困难恰恰是由规范对称性引起的。我们这里介绍的量子化方法是 S. N. Gupta 和 K. Bleuler 首先相互独立地提出的，因而又被称为 Gupta-Bleuler 量子化方法。[25] 它的优点是保持了明显的洛伦兹协变性，但是作为代价我们必须引入负度规的希尔伯特空间。好在自由的电磁场是没有相互作用的。因此，我们可以将负度规的希尔伯特空间与正度规的希尔伯特空间完全分离开来。这就保证了量子力学的概率解释（或者说理论的幺正性）不会被破坏。

对于电磁场来说，其他的正则量子化方法也是存在的。例如，我们可以取非协变的规范（常见的如库仑规范）[8]。这样的好处是可以避免负度规希尔伯特空间（鬼态）的出现。但是，这样的量子化由于明显破坏洛伦兹协变性，因此原则上我们还必须证明量子化以后洛伦兹不变性仍然成立。

¶ 正则量子化所面临的问题

如果我们试图简单地量子化麦克斯韦电磁理论：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \ , \tag{3.124}$$

[25] 原始文献见：S. Gupta, Proc. Phys. Soc. v. A63, p.681-691, 1950; K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, v. 23, p.567-586, 1950.

我们立刻就会遇到问题。由于电磁场张量的反对称性，因此上面的拉格朗日量中并不包含 $\dot{A}_0(\mathbf{x})$。因此，按照标准的正则量子化方案，与 $A_0(\mathbf{x})$ 共轭的正则动量 $\pi_0(\mathbf{x}) = \partial\mathcal{L}/\partial(\dot{A}_0)$ 恒等于零。但是这将与我们希望附加的正则量子化条件：$[A_0(\mathbf{x}), \pi_0(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 相矛盾。

为了克服上述矛盾我们现在尝试将麦克斯韦电磁理论的拉格朗日量修改为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \,, \tag{3.125}$$

其中 ξ 是一个参数。如果在我们所熟知的洛伦兹规范下：$\partial^\mu A_\mu = 0$，那么这个拉氏量与原来的拉格朗日量相同。按照这个拉格朗日量，我们可以得到与矢量场 $A_\mu(x)$ 共轭的动量 $\pi^\mu(x)$（请注意指标的上下位置！）：

$$\pi^\mu = F^{\mu 0} - \xi\eta^{\mu 0}(\partial^\nu A_\nu) \,, \tag{3.126}$$

特别注意的是，这样一来 π^0 并不恒等于零（只要 $\xi \neq 0$）。与拉格朗日量 (3.125) 相对应的经典运动方程可以很容易地求出：

$$\partial^2 A_\mu - (1-\xi)\partial_\mu(\partial\cdot A) = 0 \,. \tag{3.127}$$

在经典的层次上，如果我们选取洛伦兹规范：$\partial\cdot A = 0$，或者我们选取所谓的费曼规范：$\xi = 1$，那么上面的运动方程都会回到标准的波动方程：$\partial^2 A_\mu = 0$。

现在我们试图量子化系统 (3.125)。我们将加上标准的等时对易子量子化条件：

$$[A_\mu(t,\mathbf{x}), \pi^\nu(t,\mathbf{y})] = i\eta_\mu{}^\nu\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \,. \tag{3.128}$$

我们发现，经典的洛伦兹规范条件：$\partial\cdot A = 0$ 不可能在量子水平上严格成立。也就是说，$\partial\cdot A = 0$ 不可能作为一个算符等式严格成立。原因就是我们前面提到的，π^0 实际上正比于 $\partial\cdot A$，因此如果$\partial\cdot A = 0$ 是一个算符等式，将直接与基本的对易关系 (3.128) 相矛盾。

¶ 非正定希尔伯特空间量子化

我们下面仅仅讨论最为简单的情形，即我们选取 $\xi = 1$。这个选择被称为费曼规范。这时系统的经典运动方程为：

$$\partial^2 A_\mu(x) = 0 \,, \quad \xi = 1 \,. \tag{3.129}$$

也就是说，矢量场 $A_\mu(x)$ 满足普通的波动方程。作为波动方程的解，我们可以将矢量场展开为：

$$A_\mu(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\left[a_\mathbf{p}^{(\lambda)}\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^{(\lambda)\dagger}\epsilon_\mu^{(\lambda)*}(p)e^{ip\cdot x}\right]\ . \tag{3.130}$$

在这个展开式中，$\lambda=0,1,2,3$ 标志矢量场的四个偏振方向；$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)$ 是相应的偏振四矢量；另外波动方程要求：$E_\mathbf{p}\equiv|\mathbf{p}|$，也就是说相应的粒子属于无质量的粒子。注意这个傅立叶展开式在经典和量子的情形下都是成立的，只不过在量子的情形下展开系数 $a_\mathbf{p}^{(\lambda)}$，$a_\mathbf{p}^{(\lambda)\dagger}$ 是（湮灭和产生）算符而不再是普通的复数。

这里顺便说明矢量场的偏振方向与它的量子－光子－的自旋之间的关系。作为无质量的粒子，只有讨论光子的自旋沿着其动量方向的投影－这被称为螺旋度－才是有意义的。[26] 经典电动力学告诉我们，物理的电磁波只包含两个独立的偏振方向。通过考察电磁场的角动量，我们可以论证左（右）旋偏振的波恰好对应于螺旋度是 $+1$（-1）的光子。

练习 3.13 *考虑空间局域的电磁场。从其角动量密度出发，论证这个对应关系。有关电磁场角动量密度，参考 Jackson 的《经典电动力学》（第三版）；关于偏振与螺旋度的对应关系，可以参考该书第七章后面的习题 7.27。*[27]

通常为了明确起见，我们必须对于电磁场的偏振矢量作出某种约定。令 n 代表某个类时的，沿着时间轴正方向投影的单位四矢量：$n^2=1$，$n^0>0$，我们约定选取 $\epsilon_\mu^{(1,2)}(p)$ 位于垂直于 p 和 n 的平面内，并且令它们满足：

$$\epsilon^{(\lambda)}(p)\cdot\epsilon^{(\lambda')}(p)=-\delta_{\lambda\lambda'}\ ,\quad \lambda,\ \lambda'=1,2\ . \tag{3.131}$$

我们选取 $\epsilon_\mu^{(3)}(p)$ 位于 (k,n) 的平面内并且与 n 垂直并且归一化为：

$$\epsilon^{(3)}(p)\cdot n=0\ ,\quad \left[\epsilon^{(3)}(p)\right]^2=-1\ . \tag{3.132}$$

最后，我们选取 $\epsilon^{(0)}(p)=n$。这样选取的一组偏振四矢量满足正交完备关系：

$$\sum_\lambda\frac{\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)\epsilon_\nu^{(\lambda*)}(p)}{\epsilon^{(\lambda)}(p)\cdot\epsilon^{(\lambda*)}(p)}=\eta_{\mu\nu}\ ,\quad \epsilon^{(\lambda)}(p)\cdot\epsilon^{(\lambda'*)}(p)=\eta^{\lambda\lambda'}\ . \tag{3.133}$$

从此以后，我们称 $\epsilon_\mu^{(1,2)}(p)$ 为横向偏振（又称物理偏振），称 $\epsilon_\mu^{(3)}(p)$ 为纵向偏振，称 $\epsilon_\mu^{(0)}(p)$ 为标量偏振。后两种偏振有时又被称为非物理偏振。需要注意的是，在上面公

[26] 我们前面也提到过，在相对论性的理论体系中，自旋角动量本身并不是一个好的量子数。对于一个有质量的粒子，它的自旋可以在其静止系中良好地定义。对于一个无质量的粒子（例如光子），真正能够明确定义的就是其角动量在动量方向的投影，即螺旋度。

[27] 不过需要注意电磁单位制的不同。我们这里通常采用的是高斯－洛伦兹－海维塞德制，参见本讲义的附录中的说明。

式 (3.133) 两个偏振矢量的内积之中，其中一个偏振矢量取了复共轭。这一点对于线偏振不是必要的，因为线偏振的偏振矢量都是实的。上面公式的复共轭主要是为了可以运用于圆偏振的情形，这时两个物理的偏振矢量是复的。同样的，在偏振矢量上加上了复共轭以后，场的展开式 (3.130) 也可以适用于圆偏振的情形。

在费曼规范下，基本的正则量子化关系 (3.128) 可以等价地写为：

$$\left[A^\mu(\mathbf{x}), \dot{A}^\nu(\mathbf{y})\right] = -i\eta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{3.134}$$

这个公式虽然看起来十分自然，但是它有着十分值得注意的特点。矢量场 A_μ 的空间分量的量子化没有什么特别，但是时间分量的量子化条件与通常的正则量子化条件相差了一个符号，因为 η^{00} 与 η^{ii} 相差一个符号。不要小看这个符号，它意味着就矢量场的时间分量而言，其广义坐标和广义动量是交换了角色的。从而相应的产生和湮灭算符也是互换了角色的：

$$\left[a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)}, a_{\mathbf{k}}^{(\lambda')\dagger}\right] = -\eta^{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,. \tag{3.135}$$

也就是说，对于 $\lambda=\lambda'=0$ 的偏振态，对易子右边与通常的情形相差一个符号。我们现在有两个选择来处理这个不正常的符号。第一种方法是互换产生和湮灭算符的位置。也就是说我们将定义真空态是由产生算符所湮灭，粒子则由湮灭算符所产生。但是这样一来，系统的哈密顿量将不再是有下界的。也就是说，如果我们（用湮灭算符）产生足够多的时间分量的粒子，系统的能量可以任意低。第二种处理方法，实际上也是我们将要采用的方法，就是采用负度规的希尔伯特空间，也就是允许希尔伯特空间中的态矢量可以有负的模。大家不难验证，如果我们将真空态归一为：$\langle 0|0\rangle = 1$，那么对易关系 (3.135) 实际上要求态 $a_{\mathbf{p}}^{(0)\dagger}|0\rangle$ 具有负的模。

¶ 物理态的约束条件

一般来说，在希尔伯特空间中出现负模的态是相当危险的，因为这十分可能破坏量子力学的概率解释。但是在目前我们讨论的这个具体问题中，这一点是可以克服的。我们现在有一个扩展的、非正定的希尔伯特空间，其中量子态的模可以是负的，但是为了保证量子力学的概率诠释，我们有必要要求真正物理态的模都是正的。为此我们注意到我们上面的拉格朗日量并没有完全确定系统为一个物理的电磁场。在经典层次上，我们必须再附加上洛伦兹规范条件：$\partial^\mu A_\mu = 0$。在量子水平上，我们前面已经论述了不可能将洛伦兹规范条件作为一个算符等式来要求。于是，一个合理的要求就是：

$$_{\text{phys.}}\langle\psi|\partial^\mu A_\mu|\psi\rangle_{\text{phys.}} = 0 \tag{3.136}$$

其中的 $|\psi\rangle_{\text{phys.}}$ 我们称为物理态。换句话说，我们现在假定希尔伯特空间中的量子态中可以包含非物理态，从而整个的希尔伯特空间不再是正定的。这样的希尔伯特空间

被称为非正定希尔伯特空间。但是我们可以从这个非正定希尔伯特空间中分离出一个物理子空间，我们考虑的真正物理的量子理论所作出的测量都是在这个物理子空间中的态上进行的，这些物理子空间中的态的定义就是约束条件 (3.136)，它是经典洛伦兹规范条件的一个量子扩充。

另一个说明约束条件 (3.136) 合理性的考虑来自于自由度的数目。如果没有加上任何的约束条件，那么一个四矢量场一般会存在 4 个自由度，其中还包括了纵向偏振的自由度和标量偏振的自由度。但是，从物理上我们知道，电磁场仅仅存在两个横向偏振的自由度（因为电磁波是横波）。因此，我们期待上面的这个约束条件可以去掉那些非物理的自由度。我们这里顺便指出，这种将物理子空间从一个非正定希尔伯特空间中分离出来的量子化方法仅仅对于自由场才是方便的。对于有相互作用的场（例如非阿贝尔规范场），由于物理的态与非物理的态在量子水平上会相互混合，因此这样的方法很难直接应用。

我们可以进一步将非正定希尔伯特空间中物理态（也就是满足物理约束条件 (3.136) 的态）矢量分解为如下的形式的态的线性组合：

$$|\psi\rangle_{\text{phys.}} = |\psi_T\rangle \otimes |\phi\rangle \,, \tag{3.137}$$

其中的 $|\psi_T\rangle$ 表示仅仅由横向偏振的产生算符作用于真空而产生的态；$|\phi\rangle$ 则表示由纵向偏振和标量偏振的产生算符作用于真空所产生的态。我们将称 $|\psi_T\rangle$ 为物理态的物理分量；称 $|\phi\rangle$ 为物理态的非物理分量。我们发现物理的约束条件 (3.136) 可以等价地表述为 $\partial \cdot A$ 的正频率部分：$\partial \cdot A^{(+)}$ 必须湮灭态 $|\phi\rangle$。或者等价地用湮灭算符表达为：

$$\sum_{\lambda=0,3} \left[p \cdot \epsilon^{(\lambda)}\right] a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)} |\phi\rangle = 0 \,. \tag{3.138}$$

运用我们前面关于偏振矢量的约定，我们发现它就是：

$$\left[a_{\mathbf{p}}^{(0)} - a_{\mathbf{p}}^{(3)}\right] |\phi\rangle = 0 \,. \tag{3.139}$$

也就是说，标量偏振的湮灭算符和纵向偏振的湮灭算符的差必须湮灭一个物理的态矢量中那些非纵向偏振的分量。[28]

作为一个例子，我们可以稍微考察一下所谓的非物理分量。例如，我们首先考察具有一个标量偏振光子的态：

$$|S_1\rangle = a_{\mathbf{p}}^{(0)\dagger} |0\rangle \,. \tag{3.140}$$

[28] 注意，这里的用词有些容易使人产生误解。非正定希尔伯特空间中有物理态和非物理态；它们的划分取决于一个态是否满足物理态所必须满足的约束条件 (3.136)。但是，一个物理态并不意味着它不包含非物理的分量（由非物理的纵向偏振和标量偏振的产生算符作用于真空所产生的态）。事实上，一个物理态可以有非物理分量，只要它的非物理分量满足公式 (3.139) 即可。

可以轻易证明，这个态是下列粒子数算符的本征态并且相应的本征值是 $+1$：

$$N^{(0)} = -\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^{(0)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(0)} \,. \tag{3.141}$$

请注意前面的这个多余的负号，它起源于反常的对易关系 (3.135)。同样容易验证，态 $|S_1\rangle$ 具有负的模。我们还可以验证，态 $|S_1\rangle$ 本身并不满足约束条件 (3.139)，因此态 $|S_1\rangle$ 本身不能够作为物理态的非物理分量。

类似的，我们可以考察具有一个纵向偏振光子的态：

$$|L_1\rangle = a_{\mathbf{p}}^{(3)\dagger}|0\rangle \,. \tag{3.142}$$

可以轻易证明，这个态是下列粒子数算符的本征态并且相应的本征值是 $+1$：

$$N^{(3)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{p}}^{(3)\dagger} a_{\mathbf{p}}^{(3)} \,. \tag{3.143}$$

态 $|L_1\rangle$ 的模是正的，但是它本身也不满足约束条件 (3.139)，因此也不能够作为物理态的非物理分量。但是我们可以考察态：

$$|\tilde{1}\rangle \equiv |S_1\rangle - |L_1\rangle \,. \tag{3.144}$$

我们可以证明，这个态的模是零并且它恰好满足约束条件 (3.139)，因此可以作为某个物理态的非物理分量。这个态不再是 $N^{(0)}$ 以及 $N^{(3)}$ 各自的本征态，但是它却是总的非物理粒子数：

$$\tilde{N} \equiv N^{(0)} + N^{(3)} \,, \tag{3.145}$$

的本征态（本征值是 $+1$）。事实上，物理态的非物理分量 $|\phi\rangle$ 总可以分解为下列态的叠加：

$$|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|\tilde{1}\rangle + c_2|\tilde{2}\rangle + \cdots \,, \tag{3.146}$$

其中 $|\tilde{n}\rangle$ 是 $\tilde{N}$ 的本征态，并且满足：$\langle\tilde{n}|\tilde{n}\rangle = 0$，只要 $n > 0$。也就是说，一个物理态的非物理分量实际上由那些所谓的零模态构成，它们可以包含各种数目的非物理光子。[29] 于是我们发现，作为一个一般的物理态的非物理分量 $|\phi\rangle$ 满足：

$$\langle\phi|\phi\rangle = |c_0|^2 > 0 \,. \tag{3.147}$$

因此，为了下面讨论的方便，我们取归一的态：$\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle = 1$。另外一个值得一提的事实是，如果我们考虑任意的物理态的非物理分量 $|\phi\rangle$，我们可以证明：

$$\langle\phi|A_\mu(x)|\phi\rangle = \partial_\mu\Lambda(x) \,, \tag{3.148}$$

[29] 零模态的出现往往与规范对称性密切联系在一起，参见公式 (3.148)。类似的现象还出现在弦的量子化中。

其中 $\Lambda(x)$ 是一个满足波动方程的标量函数。这个事实说明，矢量场在非物理分量中的期望值是一个纯规范。

¶ 物理态与物理量的期望值

下面我们来计算电磁场系统的哈密顿量在物理的态中的期望值。按照哈密顿密度的定义：$\mathcal{H}=\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathcal{L}$，我们可以证明，在扔掉了一个完全散度项以后，系统的哈密顿密度可以表达为：

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}\left[\dot{A}_i^2+(\nabla A_i)^2\right]-\dot{A}_0^2-(\nabla A_0)^2\right)\,. \tag{3.149}$$

带入 $A_\mu(x)$ 的傅立叶展开式 (3.130) 之后经过类似的计算我们得到：

$$H=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left\{\left[\sum_{\lambda=1}^{3}a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)}\right]-a_{\mathbf{p}}^{(0)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(0)}\right\}E_{\mathbf{p}}\,. \tag{3.150}$$

练习 3.14 *验证这个展开式。*

特别注意其中对应于 $\lambda=0$ 的一项前面的负号，它同样起源于时间分量的反常的对易关系（非正定度规）。需要注意的是，由于 $-a_{\mathbf{p}}^{(0)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(0)}$ 具有非负的量子化的本征值，因此上面这个哈密顿量的本征值并没有问题，仍然是正定的。但是，容易验证它在希尔伯特空间中任意一个态中的期望值可以是非正定的。虽然系统的哈密顿量的算符形式中包含了非物理的光子，但是，如果我们计算哈密顿量在一个满足约束条件 (3.136) 的物理态中的期望值，我们发现：

$$\frac{{}_{\text{phys.}}\langle\psi|H|\psi\rangle_{\text{phys.}}}{{}_{\text{phys.}}\langle\psi|\psi\rangle_{\text{phys.}}}=\left\langle\psi_T\left|\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1,2}a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)}E_{\mathbf{p}}\right|\psi_T\right\rangle\,. \tag{3.151}$$

因此尽管哈密顿量算符本身包含非物理光子的贡献，但是它在物理态中的期望值仅仅包含物理偏振的光子的贡献，并且是正定的。具体到上面这个表达式，我们发现物理态的约束条件 (3.139) 使得哈密顿量的期望值中标量偏振的光子的贡献与纵向偏振的光子的贡献恰好相消。系统其他的物理量（比如动量）也十分类似，即只要我们在物理态中取期望值，非物理偏振的贡献总是互相消掉的。

¶ 最后，让我们讨论费曼规范下的编时传播子（费曼传播子）：

$$\langle0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x-y)}\left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}\right)\,. \tag{3.152}$$

这就是费曼规范下协变形式的光子的费曼传播子。我们将会在后面的课程中（特别是量子电动力学的讨论中）经常用到它。如果不是很介意理论的严密性，我们只需要接受这个表达式，就可以继续下面的讨论（事实上，Peskin 的书就采用了这种方式）。我们这里顺便（不加推导地）给出一般规范下（即 $\xi \neq 1$ 的规范）光子的传播子的公式：

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)}(-i)\left[\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon} + \frac{1-\xi}{\xi}\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+i\epsilon)^2}\right] . \tag{3.153}$$

¶ 至此，我们已经完成了自由的电磁场的正则量子化过程。我们这里选择了运用非正定希尔伯特空间中量子化的方法。这样的量子化过程的优点是保持了理论的明显的协变性，其缺点就是在中间过程中必须引进非物理的自由度以及非正定希尔伯特空间。我们论述了这些非物理的偏振自由度的贡献并不出现在物理量（例如能量、动量等）在物理态中的期望值中。正则量子化电磁场的另外一种常用的方法是选择库仑规范：$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$。这种量子化方法的优点是完全不出现非物理的自由度，仅仅包含物理的自由度。但是它的代价就是量子化的过程并不是明显协变的。因此，在量子化之后还必须论证量子的理论仍然是相对论协变的。对于这一点有兴趣的同学可以参考其他的书籍 [7, 8]。



相关的阅读

这一章我们讨论了标量场、旋量场和电磁场（矢量规范场）的正则量子化。这些内容是量子场论最为基本、但又是相当枯燥的内容。这一章的内容还有一个初学者不易察觉的特点，那就是它极具欺骗性。很多公式看起来都很简单、自然。但是，它们的推导过程实际上需要涉及很多重要的计算技巧。由于很多的计算技巧我们在后面的课程中会不断遇到，因此我建议大家务必将本章中的重要结果自己推导一遍。特别是希望大家逐渐熟悉狄拉克方程中的 γ 矩阵以及各个旋量的性质。

第四章　相互作用的量子场

本章提要

- 相互作用场论的三个代表（§10）
- 编时格林函数的微扰展开（§11）
- Wick 定理（§12）
- 费曼图和费曼规则（§13）
- S-矩阵（§14）
- Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式（§15）

前几章我们的讨论完全集中在自由量子场系统的正则量子化过程。这些从量子场论的理论框架来说无疑是最为基本和重要的。但是，从实际物理应用的角度来看，它们几乎是“无用的”。因为，所有的自由的量子化的场都会给出无相互作用的独立谐振子。这与真实的物理世界相距甚远。我们在课程的一开始提到过，量子场论的主要目的是用量子的语言描述自然界的基本相互作用。因此，仅仅考虑自由场显然是无聊的。从这一章起，我们将利用前一章得到的关于标量场、旋量场以及电磁场的量子化的规则来讨论具有相互作用的量子场系统。

我们前面关于自由场的讨论仍然是有重要意义的，它们构成了我们下面讨论的出发点。说的更为明确一些，我们将从自由场出发并假定相互作用是弱的，然后利用微扰论来处理这些相互作用。我们期望，当相互作用足够弱的时候，微扰展开可以给出相互作用量子场系统的足够精确的描述。需要强调指出的是，这一点虽然听起来是相当自然的，但其实并不是完全正确的。换句话说，相互作用的量子场系统有许多性质是利用微扰论无法了解（或者无法准确了解）的。这一类性质往往被统称为相互作用量子场的非微扰性质。非微扰性质的讨论完全超出了本课程的范围。因此，在这个课程中我们将仅仅局限于微扰的处理方法。

要研究基本粒子（或者说，相应的量子场）之间的相互作用，最为直接的实验手段就是通过这些粒子的散射实验。量子场论的最主要的应用，就是试图对这些散射实验给出定量的理论描述。在这一章中，我们将讲述三方面的主要内容：第一，我们要讨论研究基本粒子相互作用的重要（几乎是唯一的）方法：粒子—粒子散射，特别是 S-矩阵以及与之相关的可测量物理量（衰变率、散射截面等）；第二，我们将从微扰论出发，讨论相互作用量子场论中的编时格林函数的表达方式（费曼图）；第三，我们将实验上可以直接测量的散射截面与量子场论理论框架中的编时格林函数联系起来。显然，有了这三方面的内容，我们就已经开始体会到量子场论的力量了。事实上，自然界的基本相互作用（引力除外）都可以在量子场论的框架之内加以简洁地描述。

本章的结构是这样的：在进入具体的讨论之前，我们将首先对于微扰论的适用范围以及相互作用量子场论的形式做一个宏观的、概括性的描述（第 §10节）；随后，我们讨论如何利用微扰论（费曼图）的方法来计算相互作用场论中的各种编时格林函数（第 §11节至第 §13节）；然后，我们讨论散射过程中的重要物理量，即 S-矩阵以及它与实验测量的物理量（衰变率、散射截面等）的关系（第 §14节）；随后，我们说明量子场论中的编时格林函数是如何与物理的 S-矩阵元直接联系着的（第 §15节）；最后，我们给出汤川理论和量子电动力学的费曼规则（第 §16节）。

§10 微扰论与三个代表理论

¶ 这一节中，我们首先对于相互作用的量子场论系统的作用量的形式以及与微扰论相关的问题做一个介绍性的讨论。在告别自由场论进入相互作用场论的一开始就进行这样的讨论是有必要的，尽管这一节中我们所讨论的问题也许对于第一次阅读的同学来说并不能完全理解。大家也不应当对这一点感到沮丧，因为我们下面要讨论的恰恰是涉及量子场论最深层、最本质的问题。

¶ 微扰论与非微扰性质

如前所述，我们这个课程的内容将仅仅局限于量子场论的微扰研究，尽管量子场论的性质中有大量的非微扰特性。这里我们试图对这一点做进一步的说明与澄清。

量子场论的微扰论是一个关于耦合参数的、幂级数展开。也就是说，如果我们希望计算的某个物理量为：$\mathcal{O}(\lambda)$，其中 λ 是该理论的一个耦合参数，当 $\lambda = 0$ 时我们回到自由场论，那么量子场论的微扰论实际上就是进行形如下式的展开：

$$\mathcal{O}(\lambda) \sim \mathcal{O}(0)\left(1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \cdots\right) , \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{O}(0)$ 就是自由场论中该物理量的值；展开系数 c_n 可以通过我们随后发展起来的一套计算方法（例如计算费曼图）来得到。当然，越高阶的系数计算越复杂。许多量子场论的初学者容易产生一个错觉，即认为上面的微扰展开幂级数是一个收敛的幂级数，只要耦合参数 λ 足够的小。这个假设实际上等价于说，物理量 $\mathcal{O}(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 的无穷小邻

域内是 λ 的解析函数，这时上面的展开式一定存在一个有限大的收敛半径。需要注意的是，这一点其实并没有真正的证明。只不过许多人在潜意识中默认了这一点。不仅如此，真实的情形更为不幸。可以证明，对于我们所感兴趣的真实的量子场论体系，例如：我们下面将要提到的三个代表理论，微扰展开实际上是一个发散级数，无论耦合参数 λ 多么小。换句话说，微扰展开的收敛半径实际上等于零，即 $\lambda = 0$ 一般来说是该量子理论的本性奇点。

这听起来似乎很糟糕。这似乎意味着微扰展开的结果完全是不正确的。其实解读这个事实也不需要如此悲观。[1] 事实上，量子场论中的微扰展开虽然是一个发散的级数，但它却是关于耦合参数的一个渐近展开（asymptotic expansion）。所谓渐近展开是一类特殊的发散级数，只要运用得合理，它们可以给出足够接近真实数值的结果。具体来说，如果我们定义级数的部分和：

$$\mathcal{O}^{(n)} = \mathcal{O}(0) \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i \,, \tag{4.2}$$

其中 $c_0 \equiv 1$，那么渐近展开意味着：

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{O}(\lambda) - \mathcal{O}^{(n)})/\lambda^n = 0 \,, \tag{4.3}$$

注意，这个式子保证了级数的余项至少按照 λ^{n+1} 趋于零，但是这一点并不足以保证级数收敛！渐近展开的特点是，在计算展开的开始几阶时，更多的阶往往使得展开值更接近真实的值，但是计算无穷多阶展开反而会偏离真实值而发散。从这个角度来说，并不是越高阶的计算就越接近真实值。当然，在真实的量子场论的微扰计算中，我们往往无法计算很多阶，因为高阶的微扰计算是十分困难的。因此，在实际的量子场论微扰计算中，我们往往看到高阶的计算总是“改善”低阶的计算。

¶ 尺度与量子场论的截断

我们在第一章看到，仅仅依靠对称性（特别是洛伦兹对称性）我们差不多就可以完全确定自由场论的作用量（或者等价的说，拉格朗日量）的形式。现在，如果我们允许有相互作用的存在，我们还能够在多大程度上确定一个量子场论的作用量呢？这个问题初看起来似乎是不可能回答的问题。但是，实际上它是可以回答的，只要我们要求量子场论是关于基本粒子之间基本相互作用的理论。一个令人惊奇的结论就是，如果我们要求量子场论可以在相当大[2]的尺度范围内能够自洽地描写基本的相互作用，那么该理论的作用量的形式是相当有限的。[3] 大家也许认为是洛伦兹对称性或者其他的对称性限制了相互作用的形式，其实对于相互作用的拉格朗日量的最大的限制并不是来自于这些对称性，而是来自于量纲分析（或者说是尺度变换）。

[1] 如果是这样，我们还有什么必要开这个课程呢？
[2] 这三个字需要相当多的解释。不过，现在解释大家也许并不理解。因此，我还是不解释了。
[3] 从直觉上讲，这一点是自然的。基本的东西总是少数，因此不应当有很多种。

自然界的一个重要特点就是它是按照尺度分“层次”的，或者说是分“等级”的。在不同的尺度上，自然体现出不同的基本规律；不同规律之间有很大的尺度差别分开。例如，经典的牛顿力学和麦克斯韦理论对应于我们通常所说的宏观尺度（即以人体尺度为标准，上下若干个量级）；非相对论量子力学则是对应于微观尺度（10^{-10}米或者 eV 左右）。相对论性量子场论起作用的尺度是从大约 MeV 一直到目前加速器能量能够达到的 TeV。如果能量更高，我们的理论可能还要进行修改。但是，就每一个特定的尺度而言，它都体现出自身的基本规律。这些规律并不太受远离它自身尺度的其他规律的影响。也就是说，在每一个特定的能量范围内，我们都有相应的有效理论。为什么自然界选择了这种模式，我们并没有更基本的解释。从某种角度来说，这种尺度的等级使得每一个能量范围的“基本理论”都是稳定的。同时，自然界也按照能量范围的不同形成结构。这也许就是人择原理在起作用吧。

现在我们回到我们的主题，即相互作用的量子场论。我们期待它是关于基本粒子及其相互作用的量子理论。它应当一直起作用到某个能量标度 Λ。加速器已有的实验告诉我们，这个标度至少是 TeV，当然还可能更高。但是，我们有许多理由相信它不是无穷大。也就是说，量子场论中一定存在一个有限大的能量标度，Λ，我们称之为量子场论的截断，而我们所讨论的量子场论仅仅在这个截断的能量标度以下才是有意义的。能动量空间的截断也同时意味着实空间的截断，即实空间存在最小的分辨率，其大小大约为：$1/\Lambda$。注意，这实际上已经背离了量子场论的先驱们的初始观点。他们原先认为时空是连续的。在连续的时空上，可以定义量子场。不同时空点的量子场是不同的、可分辨的。但是，截断的存在意味着接近到小于量级为 $1/\Lambda$ 的两个点是无法区分的。换句话说，要区分这样两个点，我们需要超过理论截断 Λ 的能动量。量子场论中存在一个有限大的能动量截断这个事实对于理解量子场论－特别是有相互作用的量子场论－来说是极为关键的。截断的具体形式其实对于远低于截断能标的物理来说并不重要，因为低能区的物理对截断的具体形式并不敏感。重要的是，这样一个截断是存在的，而且它是相互作用量子场论不可或缺的组成部分。[4]

对于一个自由场论截断的存在与否其实并不是至关重要的。原因就在于自由场论中不同能动量的模式是相互独立的，没有相互作用。但是对于一个有相互作用的量子场论来说，由于量子涨落的“虚过程”可以在任意能动量发生，因此，如果理论不存在某种能动量截断，那么由于场是相互作用的，一个低能动量的模式可以通过虚过程与无穷高能动量的模式发生相互作用。这就造成了量子场论中的紫外发散。也就是说，如果我们计算包含虚过程的物理量，我们发现它们是发散的，而这个发散来源于无穷高的能动量模式。因此，如果量子场论中存在一个物理的能动量截断，它就可以保证所有的量都不发散。或者用量子场论的术语说，截断的存在使得相互作用的量子场论被正规化了。

承认了量子场论中所包含的截断，我们下面来分析相互作用量子场论的作用量的可能形式。我们将以最为简单的单分量的标量场为例来说明这一点。我们会看到，在十分基

[4]从历史上讲，人们认清这一点经历了痛苦的挣扎。

本的假定下，我们可以确定有相互作用的量子场论的作用量形式。

¶ 三个代表理论之标量场论

考虑自由的克莱因－高登场，我们现在要在自由的拉格朗日量上加上体现相互作用的项。注意这样的一个简单的事实：标量场具有质量的量纲，而由它以及它的偏微商构成的进入拉格朗日量的算子必须最终具有质量的四次方的量纲。这样才能保证整个系统的作用量是无量纲的。因此，凡是量纲不合适的算子，我们都必须配上具有合适量纲的耦合参数才能够加到系统的拉格朗日量中去。为了简化讨论，我们要求系统具有 $\phi \to -\phi$ 的分立对称性，即它的拉氏量中只能够包含场的偶数幂次。例如，考虑 ϕ^4 的项，它正好具有质量四次方的正确量纲，因此与它相配的耦合参数就是无量纲的，即 $\lambda_0\phi^4$ 是一个可能的选择，其中 λ_0 是一个无量纲的耦合参数。接着，我们考虑 ϕ^6。它的质量量纲是 6。因此我们必须配以一个具有质量量纲为 (-2) 的耦合参数。这意味着我们需要一个有量纲的参数。这时恰恰是理论的截断 Λ 派上用场了。它实际上是我们手头唯一可用的有量纲参数。我们可以将这样的相互作用写为：$(c_6/\Lambda^2)\phi^6$，其中的 c_6 仍然是一个无量纲的耦合参数。这个算符的量纲是依靠分母上的 Λ^2 的因子而保持正确的。当然，我们还可以加上：$(c_8/\Lambda^4)\phi^8$，等等更高量纲的项。注意上面这些项都满足 $\phi \to -\phi$ 的分立对称性以及洛伦兹不变性，因此都可以加到相互作用标量场论的拉格朗日量中。这样看起来我们可以有任意多的项。

但是，我们还没有利用另一个十分重要的事实。虽然我们假定量子场论一直起作用到能标 Λ，但是我们往往运用它是在一个比截断能标低很多的能标：$\mu \ll \Lambda$。这个能标就是我们感兴趣的物理问题的能标，也许就是我们真正实验可以测量的能标。如果考虑到条件 $\mu \ll \Lambda$，那么上面讨论的关于系统的相互作用的形式就会大大地被简化。相互作用的拉格朗日量中的各个项会出现在理论的编时格林函数中。如果我们仅仅考虑那些编时格林函数在低能标 μ 附近的行为，那么所有自然量纲大于 4 的那些项都会被压低。例如，ϕ^6 的项会相对于 ϕ^4 的项有一个：$(\mu/\Lambda)^2$ 的压低；而 ϕ^8 的项会相对于 ϕ^4 的项有一个：$(\mu/\Lambda)^4$ 的压低，等等。因此我们看到，尽管当能标 μ 接近于截断 Λ 时我们可以有任意多项相互作用，但是在低能区真正起作用的只有那些量纲不大于 4 的项才会有主要的贡献，其余的高量纲的算符的贡献都是压低的。换句话说，如果我们假定我们的截断 Λ 距离我们所感兴趣的物理能区 μ 足够远，我们可以将低能区的相互作用的标量场论写为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m_0^2\phi^2\right) - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \,, \tag{4.4}$$

其中我们完全略去了量纲高于 4 的所有算子。这个理论被称为 $\lambda\phi^4$ 理论，它是我们要介绍的三个代表理论之一。

在上面的讨论中，我们提到在低能区高量纲算符的贡献是被压低的。这些算符在量子场论的标准术语中被称为无关算符（irrelevant operators）；它们又被称为不可重整算符。因此，我们可以说，低能区的标量场论的形式几乎是完全确定的，如

果我们仅仅考虑非无关算符，或者称为可重整算符。完全由可重整算符构成的拉格朗日量所定义的量子场论称为可重整量子场论。或者说该理论具有可重整性。我们上面论述的主要观点就是，在量子场论的截断能标 Λ 处，无论我们的理论是如何的怪异，在低能区看起来，它一定表现为一个可重整的量子场论。不仅仅形式上我们只需要考虑可重整的算符，可以证明在低能区的所有物理量对于截断 Λ 的依赖也随着能标 μ 远离截断 Λ 而越来越弱。也就是说，就低能区的物理量而言，截断的意义仅仅在于它的存在性，但是它对于物理量的数值几乎没有影响。这就是所谓的重整化。重整化给我们带来的奇迹说复杂很复杂，但是说简单也很简单。我们看到，它实际上根植于最基本的尺度变换和量纲分析。当然，上面所提及的仅仅是重整化理论的基本逻辑。显然，我们不可能在这里详细地讨论量子场论的重整化问题。更具体和完整的讨论将留待后面以及后续的课程（例如量子规范场论）进行讨论。但是，我们需要强调指出的是，我们这里提及的恰恰是重整化中最为重要的核心思想，其余的则主要是技术细节（尽管它们很复杂）而已。

¶ 三个代表理论之汤川理论

类似的量纲分析也同样适用于标量场、狄拉克旋量场的相互作用理论。狄拉克场 $\bar{\psi}$，ψ 的量纲都是 3/2。因此，要构成量纲不大于 4 同时又满足所有必须的对称性的相互作用只有一种可能：$\phi\bar{\psi}\psi$。这是一个量纲为 4 的洛伦兹标量算符。因此它的耦合参数是无量纲的。因此依照可重整性的要求，我们可以写出这个理论的完整拉氏量：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m_0^2\phi^2\right) - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M_0 - g_0\phi)\psi\,. \tag{4.5}$$

这个理论被称为汤川理论（Yukawa theory），它是汤川秀树首先提出来试图解释核力的量子场论模型。[5] 在粒子物理的标准模型中，所谓的希格斯场（Higgs field）ϕ 正是通过这种形式与自然界的基本费米子发生相互作用的。汤川模型构成了我们三个代表理论中的第二个。

注意，按照严格的可重整要求，我们不能够写出包含四个费米子场的相互作用：$(\bar{\psi}\psi)^2$，因为它的量纲已经大于 4。这个理论虽然作为一个基本的量子场论有问题，但是它完全可以作为一个有效理论在一定能量范围内成立。[6] 例如，费米曾经写下的关于弱作用的理论就是一个四费米子理论。它后来被更加完备的电弱统一规范理论所替代。四费米子理论的另一个例子是所谓的 Nambu-Jona Lasinio 模型。

¶ 三个代表理论之量子电动力学

最后，我们来讨论旋量场与矢量规范场之间的相互作用模型。这方面最为典型的例子就是著名的量子电动力学（Quantum Electrodynamics, QED）：

[5] 尽管后来的事实说明它并不适合来描写核力。

[6] 事实上，如果保持一个有限大的截断，四费米子理论完全可以等价于一个汤川理论。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \,, \tag{4.6}$$

其中我们定义了协变微商：

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ie_0 A_\mu \,, \tag{4.7}$$

因此，电磁场与旋量场的真正相互作用部分为：

$$\mathcal{L}_{int} = -e_0 A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -e_0 A_\mu(x) j^\mu(x) \,. \tag{4.8}$$

对于量子电动力学而言，$e_0 = -|e|$ 就是电子的电荷；[7] $j^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 就是与整体 $U(1)$ 对称性相应的守恒流。对于量子电动力学而言，在乘以基本电荷以后，它就是系统的电流密度四矢量。

量子电动力学的拉氏量 4.6 导致的经典运动方程有两个：

$$(i\not{D} - m_0)\psi(x) = 0 \,, \tag{4.9}$$

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = e_0 j_\mu \,. \tag{4.10}$$

这个方程中的第一个是电磁场中的狄拉克方程；第二个就是有源的麦克斯韦方程。它们可以分别由对于 $\bar{\psi}$ 和 A_μ 的变分得到。

量子电动力学的一个非常重要的对称性就是规范对称性。大家很容易验证，在下列变换下：

$$\psi(x) \to e^{i\theta(x)}\psi(x) \,, \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e_0}\partial_\mu\theta(x) \,, \tag{4.11}$$

量子电动力学的拉氏量 (4.6) 不变。这个变换就被称为规范变换。注意，与经典电动力学中大家所熟悉的规范变换比较，这里的规范变换更加广泛，因为它不仅仅涉及到电磁场，而且涉及到产生电磁场的源（即正负电子）的场。

练习 4.1 *验证在规范变换 (4.11) 下，量子电动力学的拉氏量 (4.6) 不变。*

[7] 嗯，这个实际上不对。应当说，重整化了以后的耦合参数对应于电子电荷。不过，目前我们可以暂时不去计较这个吧。

翻 版 必 究

量子电动力学的规范变换对称性可以看成是自由狄拉克场的 $U(1)$ 整体对称性局域化后的结果。我们知道自由狄拉克场具有一个整体的 $U(1)$ 对称性。它的守恒流就是 $j^\mu(x)$，相应的守恒荷就是电荷。现在，如果我们对狄拉克场做一个局域的、而不仅仅是整体的 $U(1)$ 变换：$\psi(x) \to e^{i\theta(x)}\psi(x)$，那么我们发现，自由的狄拉克场的拉氏量不再是不变的，因为如果 $U(1)$ 变换中的参量 $\theta(x)$ 依赖于坐标，那么它不能够与自由狄拉克场拉氏量中的偏微商 ∂_μ 对易。因此，自由的狄拉克场的拉氏量虽然在整体 $U(1)$ 变换下是不变的，但是它在一般的局域 $U(1)$ 变换下不是不变的。现在，我们试图修正自由的狄拉克场的作用量，看看有没有可能经过修正使得它在局域的 $U(1)$ 变换下仍然不变。如果我们按照这个思路进行考虑，我们发现这是可能的。而且我们得到的拉氏量恰恰就是量子电动力学的拉氏量 (4.6)。也就是说，如果我们要保持局域的 $U(1)$ 对称性，那么我们必须在原有的自由狄拉克场之外引进新的场，这个场称为 $U(1)$ 规范场， 它就是场 $A_\mu(x)$，而且这个场必须按照规范变换 (4.11) 的方式变换。相应的，我们将原先的普通偏微商换为规范协变微商 (4.7)。我们发现：$\bar\psi(i\not{D} - m_0)\psi$ 在局域的 $U(1)$ 变换（或称为规范变换） (4.11) 下是不变的，只要场 ψ 和引进的规范场 A_μ 在局域 $U(1)$ 变换下按照 (4.11) 同时变换。量子电动力学的拉氏量中的最后一项在局域的 $U(1)$ 变换（即规范变换）下也是不变的，它提供了规范场（在量子电动力学中就是电磁场）的动能项。

上面的讨论说明，量子电动力学的相互作用拉氏量可以从自由狄拉克场的拉氏量得到，只要我们要求原先自由狄拉克场的整体 $U(1)$ 对称性可以扩展为一个局域的 $U(1)$ 对称性。这个要求自然地引进新的、与对称性相关的场 A_μ，它被称为 $U(1)$ 规范场。将整体对称性扩充为相应的局域对称性的操作被称为规范（动词！）。 将某个整体对称性规范以后得到的局域对称性也被称为规范对称性。因此我们可以说，量子电动力学就是将自由狄拉克理论的整体 $U(1)$ 对称性规范后得到的理论。这种观点是极具启发性的。事实上，我们完全可以将代表对称性的群从 $U(1)$ 推广到更为复杂的、非阿贝尔李群，这就是非阿贝尔规范场理论。这方面的系统讨论将在规范场论中进行。

下面让我们讨论是否还有其他可能的旋量场、矢量场相互作用的理论。按照量纲分析，矢量场 A_μ 的质量量纲为 $+1$，而两个旋量场的流 j^μ 的量纲是 $+3$。因此，它们之间相互作用的量纲如果不超过+4 的话（重整化的要求），只可能包含一个矢量场，即：$A_\mu j^\mu$。但是原则上我们的确可以构造例如：$A^2 \equiv A_\mu A^\mu$，$A^2\partial_\mu A^\mu$ 或者 A^4 的矢量场的自相互作用项。这个时候，规范对称性起到了关键的作用。如果我们要求得到的理论具有规范对称性，那么形如 A^2 的项是不能出现的，因为它明显不是规范不变的。而且，如果规范场（以及相应的费米子场）不包含更丰富的内部自由度，规范场的三次项和四次项也是不会出现的。也就是说，如果我们的规范对称性仅仅是 $U(1)$，那么不会出现规范场的自相互作用项。[8] 因此，我们的结论是：如果我们仅仅考虑 $U(1)$ 的矢量规范场与狄拉克场的相互作用场论，那么量子电动力学是我们唯一需要考虑的理论。量子电

[8] 包含规范场的三次和四次的自相互作用项在非阿贝尔规范理论中的确出现。在那里，规范对称性再次约束了它们前面的系数。具体来说，它们前面的系数完全被规范场与费米子场之间的耦合参数所确定。

动力学也就是我们要介绍的三个代表理论中的第三个。

¶ 最后我们顺便指出，我们同样可以构造一个标量场与电磁场相互作用的量子场论，它被称为标量量子电动力学（scalar Quantum Electrodynamics, scalar QED）。它的拉氏量包含一个复的（从而是带电荷的）标量场 ϕ 以及电磁场 A_μ：

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m_0^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{4.12}$$

这里的规范协变微商的定义与标准的 QED 相同（公式 (4.7)）。当然，原则上上式还可以加上标量场的自相互作用。读者不难验证这个拉氏量也满足一个 $U(1)$ 的规范对称性。这个模型有时又被称为 $U(1)$ 希格斯模型。 有趣的是，这个模型也出现在凝聚态物理中。在讨论超导体接近于临近点的行为时，人们可以运用上面这个拉氏量（当然是回到三维），那里它被称为金兹堡－朗道自由能，场 ϕ 则代表了超导体的序参量。

¶ 几点总结

这一节中我们涉及了相互作用量子场论中的一些深层次问题。对于多数初学者，面对这一大通“说教”很可能不知所云。为了让大家能够有一个大致的了解，我们将这些重要的观点总结一下。目前大家只需要对这些观点有一个印象，这些观点会在随后的课程中逐步细化、深化。

- 我们对于相互作用量子场论的讨论将局限于微扰论的范畴。我们将从自由的场论出发，加上相互作用的拉氏量，它的大小由一系列耦合参数确定。任何物理量都将被展开成耦合参数的幂级数，其系数将依赖于我们后面发展的方法加以计算。这些级数虽然原则上说属于发散的渐近展开，但是只要耦合参数足够小，它们仍然可以给出真实物理情况的良好描述。

- 相互作用的量子场论并不是可以一直成立到无穷大的能标。它一般有一个有限大的截断。由于截断与我们所考虑的物理问题所在的能区有着巨大的差异，这使得我们在低能区的相互作用的量子场论的拉氏量的形式受到很大限制。具体来说，我们仅仅需要考虑那些质量量纲不大于+4 的算子，这就是所谓的可重整性。

- 可重整性加上其他一些对称性（例如规范对称性） 使得我们可以写出数目有限的若干种相互作用的量子场论。例如，我们介绍了自相互作用的标量场、相互作用的标量场与旋量场、相互作用的旋量场与 $U(1)$ 规范场的拉氏量。它们构成了我们这个课程主要关心的三个代表理论：$\lambda\phi^4$ 理论、汤川理论、量子电动力学。

§11 编时格林函数的微扰展开

¶ 这一节中，我们将真正讨论编时格林函数的微扰计算。这无疑将涉及相互作用的具体形式。为了简化我们的讨论，我们以三个代表理论中的 $\lambda\phi^4$ 理论为例来进行阐述。其余两

种代表理论的微扰展开方法的建立过程是完全类似的，所对应的费曼规则将在第 §16节给出。

按照微扰论的基本逻辑，我们希望计算这个理论中的各种编时格林函数，将它们表达为耦合参数 λ 的幂级数。以两点编时格林函数为例，我们希望计算的编时格林函数为：

$$\langle\Omega|T[\phi(x)\phi(y)]|\Omega\rangle\ . \tag{4.13}$$

与我们前一章讨论的自由的标量场相比较，相互作用的引入会给我们带来两个困难：第一，编时格林函数中的（海森堡表象下的）场算符 $\phi(x)$ 显然将不再是自由场；第二，计算编时算符乘积时的系统的真空态（基态）一般来说也不同于自由场的真空。为此，我们将继续用符号 $|0\rangle$ 表示自由场的真空，而用符号 $|\Omega\rangle$ 来表示有相互作用系统的真空。下面我们就分别来处理这两个问题。

¶ 首先从场算符 $\phi(x)$ 开始。自相互作用标量场的哈密顿量可以写为：[9]

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_0 + \int d^3\mathbf{x}\frac{\lambda}{4!}\phi^4\ , \tag{4.14}$$

其中 H_0 就是自由的克莱因－高登场的哈密顿量。由于相互作用的哈密顿量并不包含场算符的时间微商，因此与（薛定谔表象中的）场算符共轭的正则动量与自由场论中没有差别。现在我们在某个“参考时间” t_0 加上等时的正则对易关系，[10] 在转换到动量空间之后，我们得知薛定谔表象的场算符 $\phi_S(\mathbf{x})$ 仍然可以表达为：

$$\phi_S(\mathbf{x}) \equiv \phi(t_0,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)\ , \tag{4.15}$$

其中 $a^\dagger_{\mathbf{p}}$ 和 $a_{\mathbf{p}}$ 是对应于自由真空 $|0\rangle$ 的产生湮灭算符。

我们知道在海森堡表象下相互作用的场可以写为：

$$\phi(t,\mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0,\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)}\ . \tag{4.16}$$

显然，在参考时刻 $t=t_0$，它完全等同于薛定谔表象下的算符，但在 $t\neq t_0$ 的时刻，由于相互作用的存在，它将是十分复杂的。现在我们定义相互作用表象中的场算符 $\phi_I(t,\mathbf{x})$：

$$\phi_I(t,\mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0,\mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}\ . \tag{4.17}$$

[9] 这一节中，我们不去计较 λ 与 λ_0 的区别。它们可以被称为重整化耦合参数和裸耦合参数。要理解它们之间的差异，必须在了解了一圈重整化之后。事实上，我们发展的微扰论方法，对于 λ 和 λ_0 都可以实施（分别称为重整化微扰论和裸微扰论）。运用哪一种微扰论来处理，需要看所考虑的具体问题而确定。

[10] 通常会取 $t_0=0$，但是这并不是必须的。

相互作用表象的优点就在于，在这个表象中的场算符是一个自由场，即它的时空演化因子与自由克莱因－高登场完全相同：

$$\phi_I(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}\left(a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{x^0=t-t_0} . \tag{4.18}$$

我们下面要做的是将海森堡表象的场 $\phi(x)$ 用相互作用表象的场 $\phi_I(x)$ 来表达。

我们还需要相互作用表象中的时间演化算符：

$$\phi(x) = U^\dagger(t,t_0)\phi_I(x)U(t,t_0)\ ,\quad U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}\ . \tag{4.19}$$

显然，相互作用表象的时间演化算符 $U(t,t_0)$ 满足下列微分方程及初条件：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_I(t)U(t,t_0)\ ,\quad U(t_0,t_0) = \mathbb{1}\ , \tag{4.20}$$

其中我们定义了相互作用表象中的相互作用哈密顿量：

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}H_{\rm int}e^{-iH_0(t-t_0)}\ . \tag{4.21}$$

方程 (4.20) 具有下列形式的解：

$$U(t,t_0) = T\left[\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}H_I(t')dt'\right)\right]\ . \tag{4.22}$$

其中我们对于编时指数函数运算的理解是首先将指数函数展开为幂级数，然后分别对于每一项进行编时操作。

上面给出的相互作用表象中的时间演化算符还有一个小小的缺陷，它明显地依赖于参考时间 t_0，这一点完全可以克服。事实上，我们可以得出任意两个时刻 t，t' 之间的时间演化算符：$U(t,t')$。相应于公式 (4.19) 的表达式为：

$$U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0(t'-t_0)}\ . \tag{4.23}$$

另外，我们也可以将它写为公式 (4.22) 的形式，只不过将其中的 t_0 都换成 t' 即可。容易证明，相互作用表象中的时间演化算符 $U(t_1,t_2)$ 是一个幺正算符并且满足下列关系：

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3)\ ,\quad U(t_1,t_3)\left[U(t_2,t_3)\right]^\dagger = U(t_1,t_2)\ . \tag{4.24}$$

公式 (4.19) 以及时间演化算符的相关公式允许我们将海森堡表象的场与相互作用表象的场联系起来。

¶ 下面我们来讨论如何将相互作用的真空 $|\Omega\rangle$ 表达为自由真空。这里的诀窍是利用真空态是能量最低态的事实，因此：

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0}e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle\ , \tag{4.25}$$

其中我们插入了完全哈密顿量的一组完备本征态；$|\Omega\rangle$ 表示基态（真空态）；$|n\rangle$ 表示其他的态，E_0，E_n 分别表示它们的本征值。我们现在利用：$E_n > E_0$，$n \neq 0$，于是，如果我们令参数 $T \to \infty(1-i\epsilon)$，那么上面的这个展开式子中第一项将远远大于后面的项。因此，我们可以得到：

$$|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iHT}|0\rangle \,, \tag{4.26}$$

由于 T 很大，因此我们完全可以将上式中的 T 平移一个有限的 t_0 得到：

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(t_0-(-T))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} e^{-iH(t_0-(-T))}e^{-iH_0((-T)-t_0)}|0\rangle \,, \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(t_0-(-T))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1} U(t_0,-T)|0\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中我们利用了约定：$H_0|0\rangle = 0$ 以及公式 (4.23) 将其表达为相互作用表象的时间演化算符。这个结果将有相互作用的真空态与自由理论的真空态联系起来，它又被称为 Gell-Mann-Low 定理。[11] 完全类似的，我们也可以得到：

$$\langle\Omega| = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \langle 0|\left(e^{-iE_0(T-t_0)}\langle 0|\Omega\rangle\right)^{-1} U(T,t_0) \,. \tag{4.28}$$

现在所有的准备工作都做完了，我们可以将这些结果代入到我们希望计算的两点编时格林函数 $\langle\Omega|T[\phi(x)\phi(y)]|\Omega\rangle$ 之中。首先假定 $x^0 > y^0 > t_0$，我们得到：[12]

$$\begin{aligned} \langle\Omega|T[\phi(x)\phi(y)]|\Omega\rangle &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(2T)}|\langle\Omega|0\rangle|^2\right)^{-1} \times \\ &\times \langle 0|U(T,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-T)|0\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

为了消去前面的系数，我们利用相互作用真空态 $|\Omega\rangle$ 的归一化条件：

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \left(e^{-iE_0(2T)}|\langle\Omega|0\rangle|^2\right)^{-1} \langle 0|U(T,-T)|0\rangle \,. \tag{4.30}$$

于是我们最终得到：

$$\langle\Omega|T[\phi(x)\phi(y)]|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\left\langle 0\left|T\left(\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\left[-i\int_{-T}^{T}dtH_I(t)\right]\right)\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|T\left(\exp\left[-i\int_{-T}^{T}dtH_I(t)\right]\right)\right|0\right\rangle} \,. \tag{4.31}$$

这就是我们希望得到的最终公式。它将相互作用场论中两个场的编时格林函数用两个自由场的编时指数的比值表达出来，而且这些自由场的编时算子的矩阵元都是在自由场论的真空之间计算的。很显然，这个公式可以简单推广到多个场的编时格林函数。下面几节中，我们将发展出一套有效的方法来计算这些自由场的编时乘积算子在自由真空中的期望值。

[11] M. Gell-Mann and F. Low, "Bound States in Quantum Field Theory", Phys. Rev. 84, 350 (1951).
[12] 这个假定只是使得推导更简单而已，最终的结果 (4.31) 仍然成立。

练习 4.2 *对于不止两个场的编时格林函数，验证类似于公式 (4.31) 的结果。*

§12 Wick 定理

¶ 上一节中我们得到的伟大公式 (4.31) 告诉我们：如果我们希望在微扰论的框架下计算一个量子场论中的各种编时格林函数，我们只需要研究一系列自由场的编时乘积在自由真空中的期望值：

$$\langle 0|T\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)|0\rangle\ . \tag{4.32}$$

其中 $\phi_I(x_i)$ 表示相互作用表象下的场算符。由于相互作用表象下的场算符都是自由场，它们可以展开为相应的产生湮灭算符。我们下面的讨论都涉及相互作用表象下的算符和矩阵元，因此为了简化记号，我们略去了场算符的下标 I。

计算形如 (4.32) 的量的关键在于将自由场写为正频率和负频率两个部分：

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\ , \tag{4.33}$$

其中，

$$\phi^{(+)}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}\ ,\phi^{(-)}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\ . \tag{4.34}$$

注意到正频率部分只含湮灭算符而负频率部分只含产生算符，因此我们必定有：

$$\phi^{(+)}(x)|0\rangle=0\ ,\quad \langle 0|\phi^{(-)}(x)=0\ . \tag{4.35}$$

让我们首先来考虑两个自由场的编时乘积在自由真空中的期望值，尽管这个量我们早已经在自由场量子化的时候考虑过了，不过现在让我们从不同的角度来分析它。首先假定 $x^0>y^0$，从而 $T\phi(x)\phi(y)=\phi(x)\phi(y)$，这时，

$$\begin{aligned}T\phi(x)\phi(y)&=\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)+\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)\\&=\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y)\\&+\left[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)\right]\ .\end{aligned} \tag{4.36}$$

注意，在上面的运算中，我们总是试图将乘积中场的正频率部分放在负频率部分的右边。因此，在第二个等号后面我们需要补上一个对易子：$[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]$。容易想象，如果我们考虑的是 $y^0>x^0$ 的情形，那么我们需要补上的对易子是：$[\phi^{(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]$。特别要注意的是，这个对易子貌似是算符，实际上就是一个 c-数，而且它不是别的，正是克莱因－高登场的费曼传播子。不过现在我们给它一个新的名字，称之为两个场的缩并（contraction），记为：$\overbrace{\phi(x)\phi(y)}$。它的明显定义是：

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \equiv D_F(x-y) = \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] & x^0 > y^0 \\ [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{4.37}$$

公式 (4.36) 中那些已经按照正频率靠右、负频率靠左（或者等价地说，产生算符靠左、湮灭算符靠右）原则排好的项仍然是算符，它们被称为两个场的正规乘积。一系列自由场的正规乘积的定义就是将其中的正频率部分移到负频率部分的右边（在费米子情形下还包含相应的符号改变，见后面）所得到的结果。因此，我们可以将两个场的编时乘积写为：

$$T\phi(x)\phi(y) = N\left(\phi(x)\phi(y) + \overbrace{\phi(x)\phi(y)}\right) . \tag{4.38}$$

换句话说，两个自由场的编时乘积等于它的正规乘积再加上两个场的缩并。这个结果实际上是更为普遍结果的一个特殊形式。这个普遍的结果就是所谓的 Wick 定理：[13]

$$T\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right] = N\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) + \text{所有可能的缩并}\right] , \tag{4.39}$$

其中的表述“所有可能的缩并”（all possible contractions）指的是所有可能的两两缩并。前面讨论的两个场的情形我们已经证明了。对于多个场可以采用数学归纳法证明之。例如对于四个场的情形，我们有：

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] \;=\; & N\Big[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ & + \phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3\phi_4} + \phi_1\phi_2\overbrace{\phi_3\phi_4} \\ & + \overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\overbrace{\phi_3\phi_4}}\Big] \end{aligned} \tag{4.40}$$

练习 4.3 *利用数学归纳法，证明一般的Wick 定理 (4.39)。*

我们利用 Wick 定理将编时乘积改写成正规乘积以及缩并的唯一目的是为了要利用一个简单而重要事实：所有没有完全缩并完的正规乘积在自由真空中的期望值是零，也就是公式 (4.35)。以上面的四个场的编时乘积为例，如果我们计算它在自由真空中的期望值，只有上式的最后一行，即完全两两缩并干净的那一行有贡献。由此我们得到一个重要的结论：一串自由场的编时乘积的在自由真空中的期望值（即自由场的编时格林函数）就等于所有可能的、完全缩并的贡献之和。这就是 Wick 定理给我们的启示。作为一个简单的推论，我们立刻发现在相互作用的 $\lambda\phi^4$ 的微扰理论中，奇数个场的编时格林函数一定等于零：[14] $\langle\Omega|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle = 0$，如果 n 是奇数。

[13] G.C. Wick, “The Evaluation of the Collision Matrix”, Phys. Rev. 80, 268 - 272 (1950).

[14] 这个结论仅仅在微扰论的框架下才成立。如果系统中发生对称性破缺（非微扰的效应），那么奇数个场的编时格林函数可以不等于零。

§13 费曼图与费曼规则

¶ 上节的 Wick 定理告诉我们，形如下式的自由场格林函数：

$$\langle 0|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle\,, \tag{4.41}$$

可以表达为各种可能的两两缩并乘积的和，而所谓的两两缩并给出的就是场的费曼传播子。原则上讲，Wick 定理已经为我们提供了计算编时格林函数所需要的工具了，但将其结果用更为直观的方法进行“管理”仍然是有意义的。这一节中我们就来讨论如何利用所谓的费曼图来代表 Wick 定理中所说到的“各种可能的缩并”。从这个意义上讲，费曼图实际上为我们更好地在微扰论的理论框架中管理各阶微扰的贡献提供了一个方便的“图形界面”。

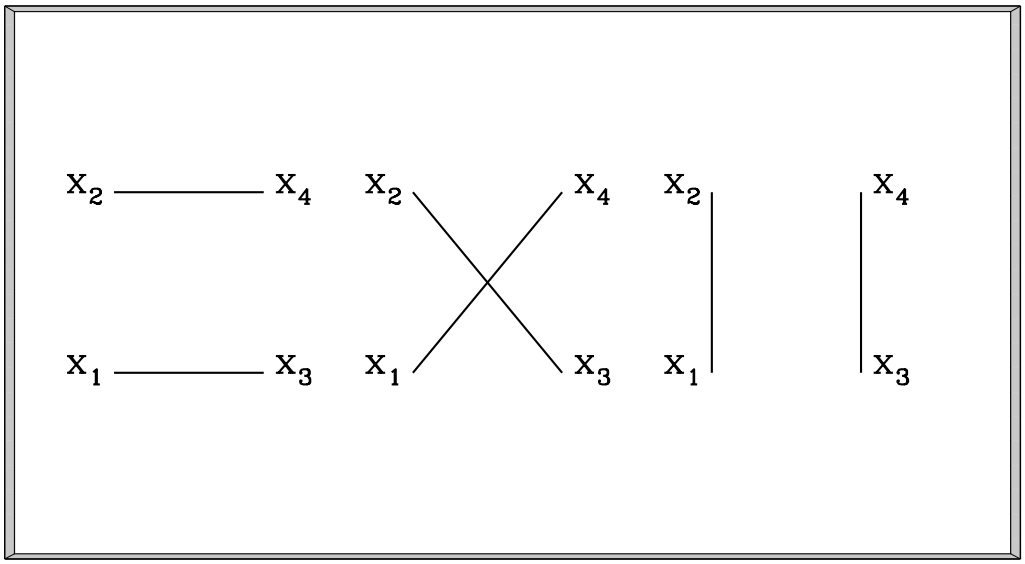


图 4.1：标量场论的 4 点编时格林函数的树图贡献。

我们以四个标量场的编时乘积为例。Wick 定理告诉我们：

$$\begin{aligned}\langle 0|T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4]|0\rangle &= D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4)\\ &+ D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)\\ &+ D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4)\,.\end{aligned} \tag{4.42}$$

这就对应于公式 (4.40) 中的最后一行。费曼提出这个表达式可以用图形的方式来表示，这种类型的图因此被称为费曼图。对应于上式的费曼图我们已经显示在图 4.1 中。

对于我们现在考虑的四点函数的费曼图，我们首先画出 4 个点，分别对应于时空点 x_1，x_2，x_3，x_4。两个时空点之间的场的缩并我们可以用一条连线表示，这样的线也就是相应的场的费曼传播子。当然，将四个时空点两两缩并一共有三种不同的方式。它们分别对应于图 4.1 中的三个费曼图。对于每个特定的费曼图，它一般由若干个（当然也可以是一个）不相连接的子图构成。例如图 4.1 中的每一个费曼图都有两个子图（每个子图都是一条两点间的连线）。对一个特定的费曼图，它的值等于其各个子图的值的乘积。例如，图 4.1 中的第一个费曼图的值就等于其子图的值：$D_F(x_1-x_3)$ 和 $D_F(x_2-x_4)$ 的乘积，即 $D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4)$。整个编时格林函数的值则由所有可能的费曼图（通常仅仅到微扰论的某一阶）的贡献之和给出。由此大家很容易验明，图 4.1 中从左往右的第一、第二、第三个图分别对应于公式 (4.42) 右边的第一、第二、第三项。

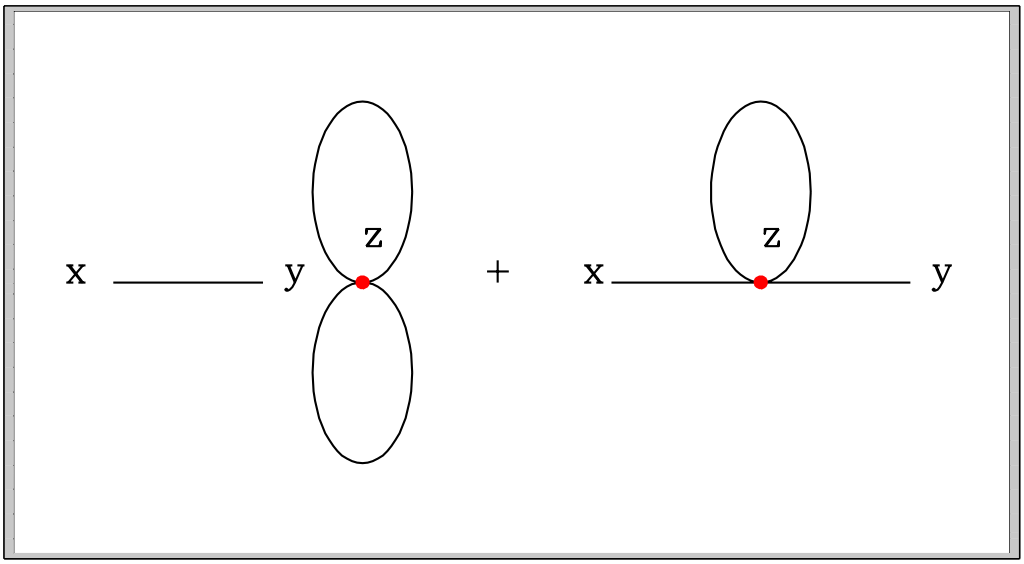


图 4.2 : 标量场论的 2 点编时格林函数的贡献。

现在让我们进一步考虑相互作用的影响。假定我们希望计算相互作用的标量场论中的两点编时格林函数：$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$。按照前面第 §11 节的公式 (4.31)，如果我们保留到相互作用的第一阶，并且暂且仅仅考虑公式 (4.31) 中分子部分的贡献，我们得到的两

点编时格林函数为：[15]

$$\left\langle 0\left|T\left[\phi(x)\phi(y)+\phi(x)\phi(y)\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I(t)\right)\right]\right|0\right\rangle$$

上面这个表达式的第一项就是自由的费曼传播子：$D_F(x-y)$，第二项则可以更加明确地表达为：

$$\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4z\left\langle 0\left|T\left[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\right]\right|0\right\rangle\ . \tag{4.43}$$

现在我们可以对这个表达式运用 Wick 定理。显然要将这 6 个场统统缩并掉有很多种方法，它们可以分为两大类：第一类是直接将 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 缩并（1 种），剩下的 4 个 $\phi(z)$ 自行了断（3 种）；另一类则是 $\phi(x)$ 与 4 个 $\phi(z)$ 中的一个缩并（4 种），$\phi(y)$ 与剩下的 3 个 $\phi(z)$ 中的一个缩并（3 种），剩下的两个 $\phi(z)$ 自行了断（1 种）。因此我们得到：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4z\left\langle 0\left|T\left[\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)\right]\right|0\right\rangle\\ =\ & 3\cdot\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)D_F(x-y)\int d^4zD_F(z-z)D_F(z-z)\\ +\ & 4\cdot3\cdot\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)\int d^4zD_F(x-z)D_F(z-z)D_F(y-z)\ .\end{aligned} \tag{4.44}$$

与这些代数表达式一一对应，我们也可以用费曼图来表示这些贡献。图 4.2 中我们显示了对应于上式的贡献。左边和右边的图分别对应于公式 (4.44) 右边的第一、第二项。

¶ 现在对费曼图的术语进行一定的规范是必要的。一个费曼图中的所有的点可以分为“外点”和“内点” 两类。所谓外点就是我们希望计算的编时格林函数中出现的点，例如图 4.2 中的 x 和 y；而所谓内点就是由于相互作用的引入而出现的点，例如图 4.2 中的 z。在计算编时格林函数的贡献时，我们最后需要对于所有的内点进行积分。同时，伴随着每一个内点的引入，我们必定也引入相关的相互作用耦合参数的相应幂次，例如公式 (4.44) 中的因子 $(-i\lambda/4!)$。每一个伴随着相互作用耦合参数的内点在费曼图的语言里面被称为相互作用顶点，或简称顶点（vertex）。 在图 4.2 中，我们用红色的实心圆点来标记这些顶点。

除了点以外，费曼图中还包含线，每一根线实际上是一个费曼传播子。一个费曼图中与外点直接相连的传播子被称为该费曼图的外线；[16] 而不与外点直接相连的传播子则被称为内线。 一个费曼图如果所有的点都是拓扑上相连的，则被称为连通图。反之则被称为非连通图。 例如，图 4.2 的左边的费曼图是一个非连通图而右边的则是一个连通

[15] 本节中所有场算符都代表相互作用表象下的自由场算符。为了简化记号，我们将不再保留相互作用表象的下标“I”。

[16] 外线有时候又被称为外腿，当然这个似乎不是特别书面化。

图。显然，一个非连通图总是由若干个连通子图构成。正如我们前面已经提到的，如果用代数式子表示，一个非连通图的值等于构成它的各个连通子图贡献的乘积。与任何外点都不连通的图也被称为真空图。我们将所有真空图的集合记为：$\mathscr{V}=\{V_1,V_2,\cdots\}$，其中的元素 V_i 表示不同拓扑结构的真空图。

¶ 运用费曼图，我们可以将公式 (4.31) 中分子的贡献表达为所有可能的费曼图的和。这些费曼图中既包含连通图也包含非连通图。仍然以两点函数为例，由于每个非连通图贡献是其各个连通子图贡献的乘积，因此我们可将一个一般的两点费曼图表达为：

$$\big(\text{一个典型两点费曼图的值}\big)=\big(\text{其中的两点连通子图的值}\big)\times\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\,,$$

其中 V_i 代表真空图集合 $\mathscr{V}$ 中第 i 种真空图的值，[17] n_i 则表示我们所考虑的费曼图中出现 V_i 这个真空子图的次数，因子 $1/(n_i)!$ 来源于 n_i 个相同的 V_i 因子的排列数。[18] 现在我们可以将具有相同连通子图但包含不同真空子图的所有费曼图的贡献加起来，这等价于将上面的公式对所有可能的 $\{n_i\}$ 组合求和：

$$\big(\text{含有同一连通子图的所有费曼图的贡献}\big)=\big(\text{该连通子图的值}\big)\times\sum_{\{n_i\}}\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}\,.$$

于是，要给出公式 (4.31) 的分子的贡献，我们只需要再对各种不同的连通图求和就可以了。再利用：

$$\sum_{\{n_i\}}\prod_i\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}=\prod_i\sum_{n_i=0}^{\infty}\frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}=\exp\left(\sum_i V_i\right)\,.$$

我们就建立了一个重要的关系;

$$\big[\text{式 (4.31) 中分子所有费曼图贡献}\big]=\big[\text{所有连通费曼图贡献}\big]\times\exp\big(\text{所有真空图贡献}\big)\,. \tag{4.45}$$

同时我们发现公式 (4.31) 的分母不是别的，它恰恰就是：exp(所有真空图贡献)！所以它刚好消去了分子中的相同的因子。因此，我们得到一个重要的结论，即一个相互作用量子场论的任意点编时格林函数在微扰论中可以表达为所有连通的费曼图贡献之和：

$$\langle\Omega|T[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]|\Omega\rangle=\big(\text{所有具有 } n \text{ 个外点的连通费曼图贡献之和}\big)\,. \tag{4.46}$$

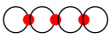
因此以后在计算相互作用场论的编时格林函数时，我们只需要考虑连通费曼图的贡献。

练习 4.4 *对于 $\lambda\phi^4$ 理论，画出它的到 $O(\lambda)$ 的图，验证结论 (4.45) 和 (4.46)。如果可能，试着考虑到 $O(\lambda^2)$ 阶并尝试构造一个任意阶的证明。*

[17] 这里为了简化记号，我们用 V_i 来表示某个具体的真空图，同时又可以表示该真空图所对应的数值。

[18] 这与费曼图的对称因子有关，见下面关于对称因子的讨论。这里的 V_i 的数值是指包括了它的正确对称因子在内的数值。

¶ 在利用费曼图表达微扰展开式的时候，我们还必须能够正确地写出每一个费曼图前面的数值系数。这个系数中除掉必须有的$(-i\lambda)/4!$ 的合适幂次（它等于顶点的数目）以外，唯一需要小心的是可能的缩并的数目。回到我们相互作用的标量场论的例子，由于我们的相互作用正比于 ϕ^4，因此每一个相互作用顶点都引进四个场。一般来说，这个缩并的数目大致按照 4! 进行。因此，为了不使多数费曼图前面的系数过于庞大，我们有意在相互作用的定义中引进了 1/4! 的因子。但有的时候这个因子有可能并没有完全被消去，这就会余下一个剩余的因子 S。这个因子被称为该费曼图的对称因子（symmetry factor）。每个费曼图的贡献必须除以该图的对称因子。仍然以图 4.2 为例，图中右图的对称因子为：$S = 4!/(4 \times 3) = 2$，因此右图的贡献前面的数值因子就是（参见公式 (4.44) 右边的第二项）：$(-i\lambda)/2$。[19]

练习 4.5 *对于 $\lambda\phi^4$ 理论，试论证形如*  *的真空图的对称因子为 8；而二阶的真空图*  *的对称因子为 16。试讨论“奥迪图”*  *的对称因子。*

¶ 有了上面这些说明，我们可以总结一下计算任意点编时格林函数 (4.31)的规则了：[20]

- 画出到某一阶的所有可能的、连通费曼图；
- 对每一个从 x 到 y 的传播子，写下：$D_F(x-y)$；
- 对每一个相互作用顶点 z，写下因子 $(-i\lambda)$，同时对 z 积分；
- 对每一个图的贡献前面除以该图的对称因子 S；
- 将所有图的贡献相加。

在画出所有可能的费曼图的过程中，我们必须能够分辨什么是不同的费曼图。费曼图的区分主要在于两点：一是外线的连接方法，二是它的拓扑结构。[21] 这两点完全相同的两个费曼图被认为是相同的，否则就属于不同的费曼图。例如，在图 4.1 中，如果撇开外线的连接方法（也就是说不管外线的坐标的标记），那么三个图的拓扑结构是完全一样的，但是它们的外线连接方法不同，因而应被视为不同的费曼图，在计算时都需要加以考虑。上面给出的这些将“图元素”转换为代数表达式的规则就被称为费曼规则。因此

[19] 事实上可以将费曼图的对称因子与该图中各个顶点、内线的对称置换群联系起来。例如，对于 $\lambda\phi^4$ 理论，可以得到一个一般的公式，参见：C.D. Palmer and M.E. Carrington, “A General Expression for Symmetry Factors of Feynman Diagrams”, Can.J.Phys. 80 (2002) 847-854, arXiv:hep-th/0108088。需要特别注意的是，这个文献中对称因子的定义正好是我们这里的倒数。

[20] 尽管公式 (4.31) 中仅仅给出了两点编时格林函数的形式，但是这个公式可以推广到任意多点的编时格林函数。因此，我们这里描述的费曼规则适用于任意多点的编时格林函数。

[21] 当然，如果你将外线的连接方式也视为图的拓扑结构的一部分，那么区分不同图的判据就只有一个，即它的拓扑结构。

我们已经得到了相互作用标量场论的费曼规则。由于这个规则是在实空间给出的，它又被称为实空间的费曼规则。

时空平移不变性提示我们，费曼规则在动量空间可能更为简洁。对于所有顶点的时空积分将会贡献一个能动量守恒的 δ-函数。于是我们得到动量空间的费曼规则：

$\lambda\phi^4$ 理论的费曼规则（动量空间）

- 画出所有相关的费曼图，给每一个传播子一个四动量，并且在每一个顶点加上能动量守恒条件；
- 对每一个动量为 p 的传播子，写下：$\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$；
- 对每一个相互作用顶点，写下因子 $(-i\lambda)$；
- 对于一个外点 x，流向该外点的动量为 p，写下因子：$e^{-ip\cdot x}$；
- 对每一个图的贡献前面除以该图的对称因子 S；
- 对所有不确定的内动量积分：$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$；
- 将所有图的贡献相加。

这就基本上完成了我们关于标量场论费曼规则的讨论。

练习 4.6 *验证本节中得到的关于标量场论的费曼规则。*

§14 散射理论、S-矩阵与散射截面

¶ 这一节中我们将转而讨论更加接近实验的问题。研究基本粒子相互作用的最直接的实验手段就是通过粒子之间的散射。相互作用量子场论作为描写粒子之间相互作用的基本理论，必须能够对于粒子—粒子散射给出定量的描述。描述量子散射问题的理论框架被称为形式散射理论，其中最为核心的物理概念就是 S-矩阵，它反映了一个粒子从某个指定的初始态散射到任意一个指定的终态的概率振幅。粗略来说，这些概率振幅的模方就体现了相应的散射概率。在粒子物理实验中，某个特定的散射概率与该特定事件的发生次数（也就是粒子物理实验的探测器中的计数）成正比。这个数目可以用所谓的散射截面来描写。它实际上就是归一化到单位入射流强时单位时间的散射概率。我们这一节的目的就是简单介绍形式散射理论以及 S-矩阵的定义和基本性质。同时，我们将给出它与散射截面之间的关系。对于形式散射理论已经有所了解的同学可能会觉得这一节的内容很容易理解。但是对于形式散射理论完全没有接触的同学也许会觉得有些困

难。希望了解这方面更深入内容的同学可以参考有关的专著。[22]

§14.1 形式散射理论与 S-矩阵

¶ 在一个典型的散射过程中，实验者首先制备一系列具有确定量子数的、自由的单粒子态。在制备的时候，由于各个单粒子间的距离可以看成是无穷大，因此各粒子间是完全没有相互作用的。随后，这些制备好的粒子入射到有相互作用的区域发生散射。散射的产物（或者称为散射的终态）是另一堆粒子，它们在远离散射区域之后，各末态粒子之间的相互作用又可以忽略，因此系统的状态又可以由一系列无相互作用的自由单粒子态来描写。上面所描述的这个过程就被称为一个散射过程。或者说得更明确一些，它实际上是形式散射理论中关于散射的定义。

在形式散射理论中，系统的状态在无穷久远的过去和未来都由无相互作用的单粒子态的直积态组成。这里我们应当说明相对论性量子场论中的散射与非相对论量子力学中散射问题的一个十分重要的区别，这就是两者的单粒子态一般是不同的。在非相对论量子力学的散射中，无论在久远的过去还是未来，这些无相互作用的单粒子态就是自由哈密顿量的本征态。也就是说，如果我们将哈密顿量写成：$H = H_0 + H_{\rm int}$，那么在久远的过去和未来，由于粒子之间的空间间隔为无穷，它们之间的相互作用可以忽略。因此，这时的系统的状态可以由 H_0 的本征态来方便地刻画。在相对论性量子场论的散射中，情况则更复杂一些。因为，虽然在久远的过去和未来，各个粒子之间的相互作用可以忽略，但是在相对论性量子场论中粒子可以与“自己”发生自相互作用。或者说，一个单粒子虽然它与其他粒子在空间上已经分隔开了，但是它无法与自己分开。这个效应导致的结果是，在相对论性量子场论的散射中，在无穷远的过去和未来，我们可以略去粒子之间的相互作用，从而描写系统的状态仍然是一个类似自由的哈密顿量，但是由于自相互作用的存在，这个自由哈密顿量一般来说并不是将原先的哈密顿量中令相互作用 $H_{\rm int} = 0$ 而得到的自由哈密顿量 H_0。以我们 $\lambda\phi^4$ 的标量场论为例，系统的哈密顿量为：

$$H = H_0(m_0) + H_{\rm int} = H_0(m_0) + \frac{\lambda_0}{4!}\int d^3\mathbf{x}\phi(\mathbf{x})^4\,, \tag{4.47}$$

其中 $H_0(m_0)$ 就是质量为 m_0 的自由克莱因－高登场的哈密顿量 (3.4)。由于自相互作用的存在，适合于描写散射过程初态和末态的自由哈密顿量并不是 $H_0(m_0)$，而是另一个自由的克莱因－高登场的哈密顿量。由于自由哈密顿量只有一个参数，也就是粒子的质量参数，因此我们断定描写散射初末态的自由哈密顿量的形式一定是：$H_0(m)$；换句话说，它的形式仍然与 $\lambda_0 = 0$ 时的哈密顿量 $H_0(m_0)$ 相同，只不过其中的质量参数 m_0 换为了另一个质量参数 m，即：$H = H_0(m) + V$。[23] 我们后面会看到，在相互作用的量子

[22] 关于散射理论权威的著作：R.G. Newton, “Scattering Theory of Waves and Particles”, 2nd ed., Springer-Verlag, 2002; 或J.R. Taylor, “Scattering Theory: the quantum theory of Non-relativistic collisions”, Wiley, 1972.

[23] 这里的相互作用 V 与上面的 $H_{\rm int}$ 也有所不同。但是，如果耦合参数是足够小，它的领头阶与 $H_{\rm int}$ 相同。事实上，使用拉氏量会更为方便。例如，对于量子电动力学，系统的拉氏量可以由

场论中，$m_0 \neq m$。需要注意的是，按照我们上面的分析，m 才是在散射实验中制备的单粒子态的质量，而不是 m_0。因此，m 被称为相应粒子的物理质量，而参数 m_0 则被称为裸质量。我们在后面的第 §15 节以及第 6 章中会再次回到这个问题。

¶ 形式散射理论可以利用定态的形式加以表述。这时最为重要的方程就是著名的李普曼－许温格方程（Lippman-Schwinger equation）：

$$|\psi_\alpha^{(+)}\rangle = |\phi_{\text{in},\alpha}\rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\epsilon} V|\psi_\alpha^{(+)}\rangle \,, \tag{4.48}$$

$$|\psi_\alpha^{(-)}\rangle = |\phi_{\text{out},\alpha}\rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 - i\epsilon} V|\psi_\alpha^{(-)}\rangle \,. \tag{4.49}$$

在这两个方程中，$|\phi_{\text{in/out},\alpha}\rangle$ 表示一系列自由的单粒子态的直积态，E_α 则是它们对应的自由粒子哈密顿量（但它对应于以物理质量为参数的自由粒子哈密顿量）的本征值。容易证明，E_α 同时也是态 $|\psi_\alpha^{(\pm)}\rangle$ 对应于完全哈密顿量 H 的本征值，即：

$$(H_0 - E_\alpha)|\phi_{\text{in},\alpha}\rangle = (H_0 - E_\alpha)|\phi_{\text{out},\alpha}\rangle = (H - E_\alpha)|\psi_\alpha^{(\pm)}\rangle = 0 \,. \tag{4.50}$$

换句话说，态 $|\psi_\alpha^{(\pm)}\rangle$ 实际上是完全哈密顿量的本征态，它对应的本征值就是态 $|\phi_{\text{in/out},\alpha}\rangle$ 对应用自由粒子哈密顿量的本征值。本征态 $|\psi_\alpha^{(\pm)}\rangle$ 具有明确的特点：它们在久远的过去（未来）会演变为具有确定量子数的自由粒子哈密顿量的本征态：$|\phi_{\text{in/out},\alpha}\rangle$。

上述李普曼－许温格方程的另外一种写法是：

$$|\psi_\alpha^{(\pm)}\rangle = \Omega^{(\pm)}|\phi_{\text{in/out},\alpha}\rangle \,, \tag{4.51}$$

这里的算符 $\Omega^{(\pm)}$ 被称为 Møller 波算符。我们可以定义 S-矩阵的矩阵元：[24]

$$S_{\beta\alpha} = \langle\psi_\beta^{(-)}|\psi_\alpha^{(+)}\rangle = \langle\phi_{\text{out},\beta}|\Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)}|\phi_{\text{in},\alpha}\rangle \,. \tag{4.52}$$

它实际上反映了系统从无穷远过去的一个具有指定特性的状态 α，经过散射跃迁到无穷远将来具有指定特性的状态 β 的概率振幅。S-矩阵最为重要的一个性质就是它的幺正性：

$$\sum_\beta S_{\alpha\beta}^* S_{\gamma\beta} = \sum_\beta S_{\beta\alpha}^* S_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \,. \tag{4.53}$$

第 §24.2 小节的公式 (6.90) 给出。

[24] 我们也可以得到 S-矩阵的一个算符表达式：$S = \Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)}$。

S-矩阵的幺正性实际上体现了相对论性量子场论在多粒子 Fock 态空间中的概率守恒。正如我们在第一章末尾提到的，这是对单粒子概率守恒的推广。

利用前面的定态李普曼－许温格方程 (4.48) 我们可以得到 S-矩阵的一个表达式：

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\alpha-\beta) - 2\pi i\delta(E_\alpha - E_\beta)T^{(+)}_{\beta\alpha} \,, \tag{4.54}$$

其中我们定义了所谓的 T-矩阵的矩阵元：

$$T^{(+)}_{\beta\alpha} = \langle\phi_{\mathrm{out},\beta}|V|\psi^{(+)}_\alpha\rangle \,. \tag{4.55}$$

我们看到，利用 T-矩阵来表达，S-矩阵元包含一个明显的能量的 δ-函数，它说明散射只能够在能量守恒的态之间发生。在一个洛伦兹协变的理论中，显然在能量守恒的同时，初态和终态的三动量一定也是守恒的。因此，在相对论性量子场论中，我们总是发现上面的 T-矩阵元还包含一个三动量守恒的 δ-函数。因此，我们可以定义：

$$-2\pi i\delta(E_\beta - E_\alpha)T^{(+)}_{\beta\alpha} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\,(i\mathcal{M}_{\beta\alpha}) \,. \tag{4.56}$$

上式中定义的矩阵元 $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ 被称为费曼散射振幅，或简称为费曼振幅、费曼矩阵元。因此在相对论性量子场论中，只要计算出散射的费曼矩阵元既可得到相应的 S-矩阵元。

§14.2 衰变率与散射截面

¶ 粒子散射实验中可以直接测量的物理量是所谓的散射截面。下面我们来说明如何从 S-矩阵元得到相应的散射截面。

要将前一小节定义的 S-矩阵元与散射概率联系起来首先要注意到一个事实：S-矩阵元的具体数值依赖于我们如何归一化散射的初态和终态。在相对论性量子场论的散射问题中，我们通常将初态和终态选为一系列单粒子态的直积态。因此，S-矩阵元的数值将依赖于我们对单粒子态的归一化的约定。一般来说，单粒子态归一化的选择可分为两大类：第一类是将系统放在一个有限大的三维（周期性）盒子中，同时假定相互作用持续的时间 T 也是有限的，我们称这类归一化的选择为箱归一化。箱归一化的优点是系统的量子态（标记量子态的量子数）完全是分立的，因此没有任何的不确定性。第二类则是运用 δ-函数的连续归一化方案。这一类又存在两个变种，这主要取决于如何选择 δ-函数前面的系数。一种是前一章中的洛伦兹不变的约定 (3.29) 和(3.89)，它们相当于选择 δ-函数前面的系数为 $(2\pi)^3(2E_{\mathbf{p}})$；另一种则是利用简单的 δ-函数归一化，即将其前面的

系数选为 1。显然，要建立散射概率与 S-矩阵元的关系，最为安全的选择是利用箱归一化，因为这里一切都没有歧义。一旦这种关系建立以后，我们可以过渡到我们所熟悉的某种连续的归一化条件。

为此，让我们将系统的初态、终态（它们都是自由态）用箱归一化来归一。也就是说，任何两个这样的态（分别用 α，β 来统一标记它们的所有量子数）满足：

$$\langle\phi_\alpha|\phi_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\,, \tag{4.57}$$

其中的 $\delta_{\alpha\beta}$ 代表一系列的 Kronecker δ-函数的乘积，也就是说它们真真正正是“归一”的。由于：

$$(2\pi)^3\delta_V^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) = \int_V d^3\mathbf{x}e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = V\delta_{\mathbf{pk}}\,, \tag{4.58}$$

因此采用有限体积的箱归一化与简单的 δ 归一化以及我们前一章采用的洛伦兹不变的连续归一化 (3.29) 的单粒子态之间的关系是：

$$|\mathbf{p}\rangle^{(L)} = [(2E_\mathbf{p})V]^{1/2}\,|\mathbf{p}\rangle^{(\boxdot)}\,,\quad |\mathbf{p}\rangle^{(\delta)} = \left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right)^{1/2}|\mathbf{p}\rangle^{(\boxdot)}\,, \tag{4.59}$$

其中单粒子态的上标 (L) 代表我们前一章采用的洛伦兹不变的单粒子态归一；而 (δ) 表示简单的 δ-函数归一化；上标 $(\boxdot)$ 则代表分立的箱归一化。 如果我们考虑的初末态包含多个粒子，那么在不同的归一化转化时，每个单粒子态都会贡献一个相应的归一化因子。

练习 4.7 *利用公式 (4.58)，验证几种不同归一化中单粒子态之间的对应关系 (4.59)。*

现在我们考虑一个初末态不同（$\beta\neq\alpha$）的散射过程，系统从分立的初态 α 散射到分立的终态 β 的概率为：

$$P_{\alpha\to\beta} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha+N_\beta}|S^{(\delta)}_{\beta\alpha}|^2\,, \tag{4.60}$$

其中的 N_α，N_β 分别表示初态和终态的单粒子数目，$S^{(\delta)}_{\beta\alpha}$ 则表示在简单 δ-函数连续归一化下计算的 S-矩阵元。在准连续的情形下，我们关心的是从初态 α 散射到某个给定的动量空间体积元中的概率。例如，我们希望知道终态的 N_β 个粒子的动量分别位于：$d^3\mathbf{p}_1, d^3\mathbf{p}_2, \cdots, d^3\mathbf{p}_{N_\beta}$ 中的概率。因此我们应当将上面的概率乘以这些终态动量空间体积元中的分立态的数目：[25]

$$\begin{aligned} dP_{\alpha\to\beta} &= P_{\alpha\to\beta}\times\frac{Vd^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{Vd^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\cdots\frac{Vd^3\mathbf{p}_{N_\beta}}{(2\pi)^3}\,,\\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha}|S^{(\delta)}_{\beta\alpha}|^2 d^3\mathbf{p}_1\cdot d^3\mathbf{p}_2\cdots d^3\mathbf{p}_{N_\beta} \end{aligned} \tag{4.61}$$

[25]这里我们没有涉及末态有全同粒子的情形，见第 136页 关于这个问题的讨论。

或者我们可以利用前面定义的费曼振幅 (4.56) 来表达为：

$$dP_{\alpha\to\beta} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)TV|\mathcal{M}^{(\delta)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\prod_f d^3\mathbf{p}_f\right) . \tag{4.62}$$

这个散射概率正比于相互作用的作用时间 T。因此我们可以定义跃迁率，即单位时间的跃迁概率：

$$d\Gamma_{\alpha\to\beta} \equiv \frac{dP_{\alpha\to\beta}}{T} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha} (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)V|\mathcal{M}^{(\delta)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\prod_f d^3\mathbf{p}_f\right) . \tag{4.63}$$

这就是我们所得到的跃迁率与费曼矩阵元之间的普遍关系。注意，上面这个公式的费曼矩阵元是在简单的 δ 归一化中计算的。

¶ 我们这个课程中往往不需要考虑十分复杂的初态 α，因此我们实际上仅仅需要公式 (4.63) 的两个特例：$N_\alpha = 1$ 和 $N_\alpha = 2$，前者对应于一个粒子的衰变而后者则是两个粒子的散射。下面我们分别讨论这两个常见的情形。

对于 $N_\alpha = 1$，我们发现公式变为：

$$d\Gamma_{\alpha\to\beta} = (2\pi)^7\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)|\mathcal{M}^{(\delta)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\prod_f d^3\mathbf{p}_f\right) . \tag{4.64}$$

我们现在可以很容易地过渡到前一章的洛伦兹不变的单粒子态：[26]

$$d\Gamma_{\alpha\to\beta} = \frac{1}{2E_\alpha}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right) \cdot |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 . \tag{4.65}$$

注意，这个公式中的费曼矩阵元（初态和终态都是）是利用洛伦兹不变的单粒子态归一化来计算的。这个公式就是我们关于粒子衰变率的一般结果。对于一个粒子的衰变，初态粒子的静止系显然是自然的选择，因此我们可以将上式中的 $E_\alpha = m_\alpha$ 取为初始粒子的静质量。[27]

对于 $N_\alpha = 2$ 的情形，普遍的公式告诉我们 $d\Gamma_{\alpha\to\beta} \propto (1/V)$。这个因子所反映的实际上是散射中心的密度，因为两粒子在体积 V 中发生散射，散射中心的数密度就是 $1/V$。在实验上可以直接测量的是所谓的散射截面，它是单位入射流密度所引起的 $d\Gamma_{\alpha\to\beta}$，其中我们定义入射流密度为：

$$\Phi_{1,2} = u_{1,2}/V , \tag{4.66}$$

[26] 从这里起，如果我们不再在费曼矩阵元上面加任何标记，那么它就代表在洛仑兹不变的单粒子归一化下计算的矩阵元。

[27] 在静止系中计算，我们就得到粒子在其静止系中的衰变宽度（积分以后）。衰变宽度的倒数就是该粒子的寿命。如果不是在静止系中计算，E_α/m_α 恰好就给出相对论的时钟膨胀效应。

翻 版 必 究

其中 $u_{1,2} = |v_{1z} - v_{2z}|$ 是实验室系中观察到的一个粒子相对于另一个粒子的速度，其中我们假定碰撞发生在沿 z 轴的方向上。[28] 我们定义两个粒子的**微分散射截面** $d\sigma$ 为：$d\sigma_{\alpha\to\beta} = d\Gamma_{\alpha\to\beta}/\Phi_{1,2}$，即：

$$d\sigma_{\alpha\to\beta} = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)u_{1,2}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\cdot|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \ . \quad (4.67)$$

我们后面会看到，在相对论性量子场论中，费曼振幅 $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ 实际上是洛伦兹不变的；上式中的积分测度以及能动量守恒的 δ-函数显然也是洛伦兹不变的，但是上式中的运动学因子 $E_1E_2u_{1,2} = |E_2k_{1z} - E_1k_{2z}| = |\epsilon_{\mu 12\nu}p_1^\mu p_2^\nu|$ 实际上并不是洛伦兹不变的。可以证明，它对于沿着两个粒子相对速度的 boost 是不变的，而这恰恰是沿着该方向的一个“截面积”所应当有的性质。

¶ 实验上的测量的散射数据往往对应于微分散射截面对终态（末态）进行积分后的结果。微分散射截面公式 (4.67) 中出现的对于终态的相空间的积分：

$$\int d\Pi_n \equiv \int (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right) \ , \quad (4.68)$$

通常被称为相对论不变的 **n 体末态相空间**（积分）。它一般来说是相当复杂的。但是对于二体的末态相空间（这样一来对应于一个二体到二体的散射过程）结果可以很简单地得到。例如，如果我们选取质心系，我们得到：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{c.m.}} = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)u_{1,2}}\frac{|\mathbf{p}_f|}{(2\pi)^2 4E_{\text{c.m.}}}|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \ , \quad (4.69)$$

其中 $\mathbf{p}_f$ 是末态粒子的三动量，$E_{\text{c.m.}}$ 是质心系中散射的总能量。

练习 4.8 *验证质心系中两体散射截面的关系 (4.69)。*

¶ 最后我们指出，我们这一节中讨论的基本公式（即公式 (4.65) 和公式 (4.67) ）的重要意义在于，它们将实验上可以测量的物理量（衰变率、散射截面等）表达为理论上可以计算的物理量，而且这些可计算的物理量因子化为两个部分：仅仅与**运动学**相关的因子（包括末态积分等）以及与**动力学**相关的部分，即费曼振幅 $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$。量子场论的主要任务就是试图计算与动力学相关的费曼振幅，这也就是我们后面课程的主要内容。

[28] 需要注意的是，这个量实际上是 $u_{1,2} = |(k_{1z}/E_1) - (k_{2z}/E_2)|$。因此它完全可以大于 1。例如，对于两个极端相对论性的粒子的对撞，我们有：$u_{1,2} \simeq |1 - (-1)| = 2$。

§15 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式

¶ 这是相当形式化的一节，但又是在量子场论理论框架中十分重要的一节。当然，对于那些不太追求理论完整性的同学，也许可以不必关心这一节的细节，但记住这一节的结论（即公式 (4.102) 给出的联系费曼振幅与相应费曼图的结果）仍然是重要的。我们将在这一节中讨论量子场论中一个十分重要的公式，它被称为 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式（LSZ reduction formula），或者简称为 LSZ 约化公式。它的作用就是将 S-矩阵元与量子场论中相应的编时格林函数联系起来。有了这个公式，关于散射问题中 S-矩阵元的计算就完全转化为相应的编时格林函数的计算。这也解释了为什么我们前面一再强调编时格林函数在量子场论中的重要性，因为恰恰是这些格林函数直接与物理的 S-矩阵元联系在一起。根据本章前面的讨论，我们已经知道了如何在微扰论的框架下，借助于费曼图的方法来计算编时格林函数，因此约化公式的建立就完成了利用微扰论计算散射矩阵元的最后一步。

我们在前一节曾经提到，在相互作用量子场论中的散射问题比起非相对论量子力学中的散射问题多了一些复杂性，其中一个复杂性就来源于真空中虚过程（量子涨落）的存在。在非相对论量子力学中，按照标准的散射问题的表述，一个散射系统在无穷久远的过去和未来都变为完全自由粒子的态，它对应于自由哈密顿量的本征态。但在相对论性量子场论的散射中却不能简单地如此假设。原因是，虽然在久远的过去和未来，参与散射的粒子之间的相互作用可以忽略，但在一个相互作用量子场论中，一个粒子就算与其他粒子完全远离，它仍然与“自己”存在相互作用。在量子场论中自身的相互作用一般总是存在的，只要允许相应的虚过程。也就是说，一个单粒子与自身的相互作用一般来说是无法运用所谓“绝热的方法”在无穷远的过去或未来去掉的。正因为这个原因，在导出约化公式之前，我们有必要首先讨论一下，在一个相互作用的量子场论中，一般的单粒子态具有什么性质。只有清楚地了解了参与散射的单粒子态的性质，我们才可能进一步研究粒子与粒子之间的散射过程。

§15.1 Källén-Lehmann 谱分解

¶ 一个单粒子态的全部物理性质集中地体现在它的完全传播子：$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$ 当中，其中 $\phi(x)$ 表示海森堡表象中的场算符。我们下面要做的是在传播子的两个场算符之间插入一组完备的态。为此，我们考虑完全哈密顿量（包括相互作用）的所有三动量为零的（非真空的）能量本征态：$|\lambda_0\rangle$，它的能量记为 m_λ。现在我们将这个态 boost 到三动量为 $\mathbf{p}$ 的参照系中，新的态仍然是哈密顿量的本征态，我们记为：$|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$。我们用：$E_{\mathbf{p}}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m_\lambda^2}$ 表示这个态的能量。[29] 那么，这时希尔伯特空间的完备性允许我们

[29] 需要注意的是态 $|\lambda_0\rangle$ 并不一定是单粒子态。当它是单粒子态时，m_λ 就是它的静止质量，$E_{\mathbf{p}}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m_\lambda^2}$ 就是大家熟知的单粒子色散关系。即使态 $|\lambda_0\rangle$ 不是单粒子态，只要 m_λ 表示其三动量为零时的能量，$\mathbf{p}$ 表示 boost 之后的态的总动量，这个色散关系仍然是成立的。

写出：

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}| \,, \tag{4.70}$$

其中对于 λ 的求和遍及所有的动量为零的本征态。需要注意的是，对于 λ 的求和实际上是一个形式化的写法。事实上态 $|\lambda_0\rangle$ 并不一定都是分立的。它一般也包括连续分布的态。这时的求和应当理解为相应的积分。

现在我们假定 $x^0 > y^0$，从而 $T\phi(x)\phi(y) = \phi(x)\phi(y)$，将上面的完备态 (4.70) 插入到两个场算符中间我们得到：[30]

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle \,. \tag{4.71}$$

我们再利用：$\phi(x) = e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{-iP\cdot x}$ 得到：

$$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} = \langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \,, \tag{4.72}$$

其中第二步利用了真空和标量场的洛伦兹不变性。于是我们得到了相互作用场论中两点编时格林函数的表达式：

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m_\lambda^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\,|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 \,.$$

注意，我们已经将三维的动量积分转换为四维的形式，同时出现的还有费曼传播子，只不过传播子的质量参数变成了 m_λ。对于 $y^0 > x^0$ 的情形，我们可以得到完全类似的公式。将两种情形合并起来，我们就得到了著名的 Källén-Lehmann 谱表示：

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\rho(M^2)D_F(x-y;M^2) \,, \tag{4.73}$$

其中 $D_F(x-y;M^2)$ 表示质量平方参数为 M^2 的自由费曼传播子；而谱密度函数 $\rho(M^2)$ 的定义为：

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda}(2\pi)\delta(M^2 - m_\lambda^2)\,|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 \,. \tag{4.74}$$

我们特别强调的是，谱密度函数 $\rho(M^2)$ 一定是一个正定的分布。

Källén-Lehmann 谱表示的意义在于它将一个相互作用量子场论中的两点编时格林函数分解为不同类型的本征态的贡献之和。一个系统的谱密度函数中特别值得我们关注的是单粒子态的贡献。按照单粒子态的定义以及公式 (4.74)，系统的单粒子态对于谱密度的贡献是一系列分立的 δ-函数。例如，对于一个只有一种粒子的标量场论来说，单粒子态贡献的谱密度为：

[30] 其中我们假设了场的真空期望值等于零：$\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle = 0$。

$$\rho(M^2) = (2\pi)\delta(M^2 - m^2) \cdot Z \,, \tag{4.75}$$

其中因子 Z 的定义为：

$$Z \equiv |\langle \Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2 \tag{4.76}$$

这里 λ_0 是相应的零动量的单粒子态；m 则是这个单粒子态的“物理质量”，它一般来说不同于出现在系统拉氏量中的质量参数 m_0，这个我们称之为裸质量。相互作用系统中还可能存在多粒子组成的束缚态，它们对于谱密度的贡献也会体现为分立的 δ-函数的形式。另外系统中还会存在多粒子的散射态。这些态对于谱密度的贡献则是一个从某个阈值开始的连续谱。例如两粒子的散射态的连续谱的阈值就是：$M^2 = 4m^2$。

另一种通过 Källén-Lehmann 谱表示来考察单粒子态的方法是将相应的格林函数进行傅立叶变换：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle \Omega|T\phi(x)\phi(0)|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\rho(M^2)\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \,. \tag{4.77}$$

显然，由于单粒子态的谱密度是 δ-函数，因此，一个物理质量是 m 的单粒子态对于动量空间的两点格林函数的贡献为：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle \Omega|T\phi(x)\phi(0)|\Omega\rangle \simeq \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \cdots \,, \tag{4.78}$$

其中的 $\cdots$ 表示其他态的贡献。因此，每一个物理质量为 m 的单粒子态一定会在 p^2 平面上对应一个极点；该极点的位置在 m^2 而残数（留数）为 iZ。大家应当还记得，一个自由标量场的两点格林函数满足：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \,. \tag{4.79}$$

这说明相互作用场论中的单粒子态和自由场论中的单粒子态对于两点编时格林函数的贡献来说形式上十分类似，都是在 p^2 平面上的一个极点，只不过对于自由场来说，极点的位置在裸质量（也就是物理质量）的平方 m_0^2，它的残数是 i；而相互作用场论中，极点的位置在物理质量的平方 m^2，残数是 iZ。根据 Z 的表达式 (4.76)，它代表了一个单个的量子场 ϕ 从系统严格的真空态 $|\Omega\rangle$ 中产生出一个严格的单粒子态 $|\lambda_0\rangle$ 的概率。因此我们应当有：$0 \le Z < 1$。这个因子又被称为波函数重正化因子，或者又称为场强重整化因子。我们在第六章讨论辐射修正和重整化的时候还会再次涉及到它。

如果相互作用量子场系统中存在束缚态，它的两点函数的傅立叶变换在 p^2 平面内也会产生分立的极点。多粒子的散射态则对应于 p^2 内从某个阈值开始的割线，阈值则是该割线的枝点。

¶ 前面的讨论中我们仅仅涉及了最简单的标量场。如果我们考虑狄拉克旋量场，那么可以得到类似的谱表示。例如，如果我们考虑狄拉克场的两点编时格林函数的傅立叶变换，我们发现：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle\Omega|T\psi(x)\bar{\psi}(0)|\Omega\rangle = \frac{iZ_2}{\not{p}-m+i\epsilon}+\cdots\,, \tag{4.80}$$

其中参数 m 为该狄拉克费米子的物理质量，因子 Z_2 的定义是：

$$\langle\Omega|\psi(0)|p,s\rangle = \sqrt{Z_2}u^{(s)}(p)\,, \tag{4.81}$$

其中 $|p,s\rangle$ 是完全哈密顿量的一个单粒子本征态（具有固定四动量 p 和自旋 s）；因子 Z_2 被称为狄拉克场的场强重整化因子。

• • • • • • • •

§15.2 LSZ 约化公式

¶ 上一小节我们初步理解了相互作用量子场论中单粒子态的特性。我们发现，一旦量子场论不再是自由场论，它的能谱一般来说会变得更为复杂。如果我们仅仅局限于单粒子态，那么这些态可以相当好地用一个物理质量和一个场强重整化因子来刻画。我们在散射实验中制备的初态和散射后的末态都是这些单粒子物理态的直积态。这一小节中，我们要讨论更一般的编时格林函数的性质并将它与散射的 S-矩阵元联系起来，这就是著名的 LSZ 约化公式。

考虑一个任意的编时格林函数，我们首先对其中的一个场变量的坐标进行傅立叶变换：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle\Omega|T\left[\phi(x)\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\right]|\Omega\rangle\,. \tag{4.82}$$

我们要分析这个表达式在复的 p^0 平面上的解析行为。为此，我们可以将对于 x^0 的积分区域分为三个部分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx^0 = \int_{T_+}^{\infty}dx^0 + \int_{T_-}^{T_+}dx^0 + \int_{-\infty}^{T_-}\,, \tag{4.83}$$

其中 T_+ 是一个很大的正数，它大于所有的 z_i^0；T_- 则是一个绝对值很大的负数，它小于所有的 z_i^0。我们分别称这三个区域为 I，II，III。显然，由于区域 II 是一个有限大的区域，因此在这个区域的积分（由于被积函数是 x_0 的解析函数）不会导致 p^0 平面的非解析结构（如极点等）。所有的非解析性（如果存在）一定都源于两个无穷区域的积分。

首先考虑区域 I 的贡献。再次利用完备关系：

$$\mathbb{1}=\sum_{\lambda}\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)}|\lambda_{\mathbf{q}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}}|\,, \tag{4.84}$$

我们得到：

$$\int_{T_+}^{\infty}dx^0e^{ip^0x^0}\int d^3\mathbf{x}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)}\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{q}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}}|T\left[\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\,. \tag{4.85}$$

利用公式 (4.72)：$\langle\Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{q}}\rangle=\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-iq\cdot x}$，其中 $q^0=E_{\mathbf{q}}(\lambda)$，我们将上述积分中插入一个保证收敛的因子 $e^{-\epsilon x^0}$，这样一来我们就可以得到：

$$\sum_{\lambda}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\frac{ie^{i(p^0-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon)T_+}}{p^0-E_{\mathbf{p}}(\lambda)+i\epsilon}\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|T\left[\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\,, \tag{4.86}$$

其中的分母其实就是：$p^2-m_\lambda^2$ 在 $p^0\to+E_{\mathbf{p}}$ 时的行为。特别的，如果极点对应于某个单粒子态，那么我们发现，第一个积分区域会贡献如下的解析行为：

$$\int_I d^4xe^{ip\cdot x}\langle\Omega|T\left[\phi(x)\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\overset{p^0\to+E_{\mathbf{p}}}{\sim}\frac{i\sqrt{Z}}{p^2-m^2+i\epsilon}\langle\mathbf{p}|T\left[\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\,, \tag{4.87}$$

其中 m 是该单粒子态的物理质量；Z 是其场强重整化常数。经过完全类似的讨论，我们可以证明积分区域 III 在一个单粒子态处给出的贡献为：

$$\int_{III}d^4xe^{ip\cdot x}\langle\Omega|T\left[\phi(x)\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\overset{p^0\to-E_{\mathbf{p}}}{\sim}\langle\Omega|T\left[\phi(z_1)\cdots\right]|-\mathbf{p}\rangle\frac{i\sqrt{Z}}{p^2-m^2+i\epsilon}\,. \tag{4.88}$$

经过上面推导我们得到结论：如果我们考虑量子场论的一个任意点编时格林函数关于一个位置变量的傅立叶变换，我们发现它在 p^0 平面上一定有对应于单粒子态的极点。极点的位置由该单粒子态的物理质量标志，它的残数则由相应的场强重整化参数描写；同时，原先的编时格林函数中做了傅立叶变换的那个场算符则被约化掉了。取决于是在过去还是将来，相应的真空态也换成了具有确定动量的相应单粒子初态或末态。

上面的推导已经完成了 LSZ 约化公式推导中的第一步。我们下面要做的就是进一步约化剩下的编时格林函数。但是在我们继续之前，有一个技术上的问题必须加以澄清。我们看到，在公式 (4.87) 和 (4.88) 所显示的、单粒子极点附近被约化了的编时矩阵元中，具有确定动量的单粒子初态或末态取代了原先的真空态。在下一步的约化中，我们将仿照第一步的做法，对剩余的矩阵元进行约化。我们可以想像会出来第二个具有确定动量的单粒子态。但是，严格来说一个具有确定动量的单粒子态是弥漫在全空间的平面波。我们所感兴趣的散射实验中，散射前和散射后的单粒子态则必须在空间上是完全分离的。要描写这样的态，我们实际上需要所谓的波包（wave packet）。也就是说，我们需要将前面讨论的四维傅立叶变换做如下替换：

$$\int d^4xe^{ip^0x^0}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\Longrightarrow\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\int d^4xe^{ip^0x^0}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{k})\,, \tag{4.89}$$

其中波包函数 $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ 是集中在 $\mathbf{p}$ 附近有一定展宽的函数。如果这个函数趋于 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$，那么我们就回到前面的结果。但如果我们允许函数 $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ 有一个有限大的展宽，那么我们可以构造一个在实空间有一定尺寸的（而不是无限大的）波包。运用波包的描述语言，公式 (4.87) 的右边就被替换为：

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})\frac{i\sqrt{Z}}{\tilde{p}^2-m^2+i\epsilon}\langle\mathbf{k}|T\left[\phi(z_1)\cdots\right]|\Omega\rangle\,, \tag{4.90}$$

其中四动量 $\tilde{p}=(p^0,\mathbf{k})$。我们看到原先对应于具有固定三动量的单粒子态的极点变成了一个割线，只不过这个割线的长度很短，只有函数 $\varphi(\mathbf{k})$ 在动量空间展宽的量级。如果函数 $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ 趋于无限窄的 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$，那么这个短短的割线就恢复为单极点。完全类似的，运用波包的描述之后，公式 (4.88) 的右边也必须做相应的改变。

练习 4.9 *考虑了波包以后，验证关系 (4.90)。*

¶ 现在我们可以利用波包的语言来考察一个任意的 $(n+2)$-点编时格林函数的傅立叶变换了：

$$\left(\prod_i\int\frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}\int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i\cdot x_i}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\right)\langle\Omega|T\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\right]|\Omega\rangle\,, \tag{4.91}$$

其中的四动量 $\tilde{p}_i=(p_i^0,\mathbf{k}_i)$。按照散射的物理图像，我们必须选取各个波包函数 $\varphi_i(\mathbf{k}_i)\equiv\varphi_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{k}_i)$ 以保证各个波包在 $x_i^0=0$ 附近有重叠，但是在无穷久远的过去和未来，它们都能够分开。为此，我们选择足够大的 T_+ 和足够负的 T_-，使得当所有的 $x_i^0>T_+$ 或者所有的 $x_i^0<T_-$ 时，各个波包都在空间是完全分离的。于是，我们可以将上式对于 x_i^0 的积分分为三个部分。整个积分的结果最为奇异的部分一定来自于所有的 x_i^0 都在无穷区域（即所谓的区域 I 或者区域 III）的积分。

作为一个典型的例子，我们假定 x_1^0，x_2^0 是处于久远的未来，而其余的 x_i^0 是处于久远的过去的情形。这个情形下，我们可以将 $\phi(x_1)\phi(x_2)$ 放在编时乘积的最左边。插入一组完备的态 $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$ 后，我们发现关于 x_1，x_2 的积分变为：

$$\begin{aligned}\sum_\lambda\int\frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}} &\left(\prod_{i=1}^2\int\frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}\int d^4x_i e^{i\tilde{p}_i\cdot x_i}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\right)\\ \times\ &\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{K}}|T\left[\phi(x_3)\cdots\right]|\Omega\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.92}$$

现在注意到状态 $|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$ 必须被两个在无穷久远的未来分开来的两个场算符所湮灭，因此它实际上可以写成两个独立的单粒子态的直积态：

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda\int\frac{d^3\mathbf{K}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}}\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{K}}|\\ =\ &\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int\frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_1}}\int\frac{d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_2}}\langle\Omega|\phi(x_1)|\lambda_{\mathbf{q}_1}\rangle\langle\Omega|\phi(x_2)|\lambda_{\mathbf{q}_2}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{q}_1},\lambda_{\mathbf{q}_2}|\,.\end{aligned} \tag{4.93}$$

这里面对应于两个单粒子态的极点贡献为：

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\frac{i\sqrt{Z}}{\tilde{p}_i^2-m^2+i\epsilon}\right)\langle\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2|T\left[\phi(x_3)\cdots\right]|\Omega\rangle\ . \tag{4.94}$$

显然，当这两个波包函数趋于无限窄的 δ-函数时，上式所对应的形式为：

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\right){}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|T\left[\phi(x_3)\cdots\right]|\Omega\rangle\ , \tag{4.95}$$

其中的态 ${}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$ 恰恰就是我们定义S-矩阵元中的出射态，因为它刚好是（经过空间分离的波包调制后）在无穷久远的未来成为具有固定动量的两个单粒子态的直积态。

显然，我们可以对于那些处在无穷远过去的坐标（x_i，$i\geq 3$）做完全类似的处理，其中最为奇异的部分（取无穷窄的波包极限）一定看起来象：

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\right)\left(\prod_{i=3}\frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\right){}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|(-\mathbf{p}_3),\cdots\rangle_{\text{in}}\ . \tag{4.96}$$

也就是说，如果我们对于理论的编时格林函数取傅立叶变换，然后考察在 p_i^0 平面上面的解析行为，我们发现最为奇异的部分就对应于一系列单粒子态的极点贡献。除去对应于各个单粒子态的场强重整化常数以外，这个多重极点的残数恰好对应于该理论中的一个S-矩阵元。这就是著名的LSZ 约化公式：[31]

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{i=1}^{n}\int d^4x_i e^{ip_i\cdot x_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\int d^4y_i e^{-ik_j\cdot y_j}\right)\langle\Omega|T\left[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\right]|\Omega\rangle\\ &\quad\mapsto\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{i\sqrt{Z}}{k_i^2-m^2+i\epsilon}\right)\langle\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|S|\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_m\rangle,\end{aligned} \tag{4.97}$$

其中符号 $\mapsto$ 表示我们必须取所有的动量在壳（on-shell），即：$p_i^0\to+E_{\mathbf{p}_i}$，$k_i^0\to E_{\mathbf{k}_i}$，并且我们仅仅考察其中最为奇异的多极点部分的贡献。

§15.3 S-矩阵元的费曼图表示

¶ 本章前面的讨论主要完成了两个任务，第一，我们将散射实验上的物理 S-矩阵元与相互作用量子场论中的编时格林函数联系起来，这就是著名的 LSZ 约化公式；第二，编时格林函数可以通过费曼图的方法进行有效地微扰计算。显然，仅仅就唯象学而言，更为方便的是将散射中的 S-矩阵元直接与费曼图联系起来。这一点并不难，我们实际上已经有了所有的元素，这一小节我们就将这些规则总结一下。

[31] 注意我们在定义傅里叶变换时有意改变了与 x_i 和 y_i 相对应的动量的符号，这样一来入态和出态的动量标号都不再出现符号了。因此如公式 (4.96) 中的矩阵元也变为：${}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_3,\cdots\rangle_{\text{in}}$。

我们以标量场论中的四点编时格林函数为例来讨论，但我们最后的结论很容易推广到任意的情形。标量场论中完全的四点编时格林函数的傅立叶变换为：

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\int d^4x_i d^4y_i e^{ip_i\cdot x_i}e^{-ik_i\cdot y_i}\right)\langle\Omega|T\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\right]|\Omega\rangle\ . \tag{4.98}$$

按照 LSZ 约化公式，这个表达式的多重极点的残数直接与两体到两体的 S-矩阵元联系在一起。另一方面，我们知道四点编时格林函数在微扰论的理论框架中可以用一系列费曼图表示。这样的一个四点编时格林函数显示在图 4.3中。为了对费曼图进行更为方便的分析，我们需要引进“截肢图”和“单粒子不可约图”的概念。

截肢图（amputated diagrams）：对于一个一般的有外线的费曼图，我们从它的每一条外线出发向图的内部走，在途中会有这样的传播子，如果我们在该传播子中间将它剪断，这个外线就会完全与图的其他部分分开。所谓图的“截肢”是指我们沿着外线走到尽可能的远，但在仍可以通过剪断一个传播子而将外线从整个图中分离出来的地方剪断该传播子并且去掉图的外线的操作。对一个费曼图的所有外线都进行了截肢以后，剩下的费曼图被称为原来费曼图的截肢图。例如在图 4.3 中，我们用大的阴影区域表示被“截肢”后的四点图。连在这个区域上的四个传播子（图中蓝色的传播子）就是“最后的”四个传播子，也就是前面所说的尽可能远的传播子。剪断它们中的任何一个，相

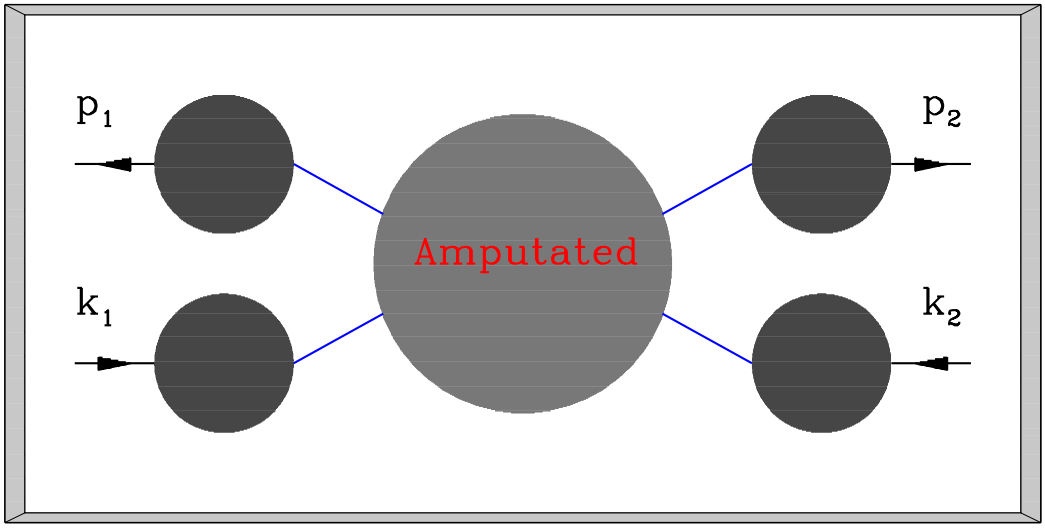


图 4.3：标量场论的 4 点编时格林函数的一般图表示。其中中间的部分是截肢的（amputated）四点函数。

应的外线也就与整个图分为两部分了。同时按照定义，这四个传播子是最后的可以通过剪断而将外线分离的传播子。也就是说，如果我们进入大的阴影区域的内部，我们将不再可能通过仅仅剪断一个传播子而将任何一个外线与整个图分离。

通过截肢的操作，一个四点图就由截肢四点图再加上四个相互作用理论中的、完全的传播子构成。所谓完全的传播子是指相互作用理论中的两点编时格林函数。它本身又包含一系列的费曼图。这在图 4.3 中被表示为深色阴影区域以及连接在上面的两个自由传播子。为了分析相互作用理论中的两点编时格林函数，我们可以引进所谓的单粒子不可约（one particle irreducible, 1PI）图的概念。如果一个费曼图不能够通过剪断其中的一个传播子而将其分为两部分，这个费曼图就被称为是单粒子不可约的；反之就被成为是单粒子可约的。[32] 利用这个概念我们发现，相互作用理论中的两点编时格林函数可以由一系列的单粒子不可约图以及一系列的自由传播子构成。事实上，由于两点函数的一维特性，这一连串 1PI 图和自由传播子恰好构成一个几何级数。因此，如果我们将动量空间中外动量为 p 的单粒子不可约图的贡献记为：$-iM^2(p^2)$，那么我们可以写出相互作用理论中的动量空间的两点函数 $G(p^2)$ 为：

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i}{p^2-m_0^2}+\frac{i}{p^2-m_0^2}\left(-iM^2(p^2)\right)\frac{i}{p^2-m_0^2}+\cdots\,, \\ &= \frac{i}{p^2-m_0^2-M^2(p^2)} \simeq \frac{iZ}{p^2-m^2+i\epsilon}\,, \end{aligned} \tag{4.99}$$

其中 $\simeq$ 表示取在壳条件：$p^2\simeq m^2$ 时仅仅保持最为奇异的部分。我们这里还运用了前面的结果，即公式 (4.78)。提请大家再次注意这个公式中重整化的物理质量 m 与裸质量 m_0 之间的差别。后者是我们拉氏量中的一个参数，而前者则定义为严格的两点函数 $G(p^2)$ 在 p^2 复平面上的极点：

$$m^2-m_0^2-M^2(m^2)=0\,. \tag{4.100}$$

所谓的场强重整化因子就是严格的两点函数 $G(p^2)$ 在物理极点处的残数。由所有 1PI 图构成的贡献 $M^2(p^2)$ 又被称为这个理论的自能（self-energy）。因此我们看到，计算任意一个费曼图的任务可以分解为两个部分：第一，我们可以仅仅计算相应的截肢图；第二，我们需要计算完整的两点函数，而它又可以归结为计算单粒子不可约（1PI 的）的两点函数，或者说自能。

¶ 现在让我们回到 S-矩阵。约化公式告诉我们，两体到两体的散射矩阵元可以令四点格林函数的所有的四个外线都在壳得到。由于四点格林函数恰好可以写成截肢的四点函数与四个外线的传播子的乘积，再考虑到外线传播子在壳时的行为 (4.99) 以及约化公式，我们比较后得到：

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|S|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^4 \times \left(\text{连通的、截肢的 4 点函数}\right)\,. \tag{4.101}$$

[32] 从这个角度来说，我们也可以这样来定义截肢图。所谓一个费曼图的截肢操作实际上就是将其与所有外线相联的单粒子可约的部分去掉的操作。

显然，这个关系可以推广到具有任意多个外线的过程。同时，注意到整体的时空平移不变性，所有在动量空间按照费曼规则写出的表达式一定可以分出一个总的四动量守恒的 δ-函数，因此我们也可以将相应散射的费曼矩阵元（又称为费曼振幅）与费曼图联系起来：

$$i\mathcal{M} = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+2} \times \left(\text{连通的、截肢的 } n+2 \text{ 点函数}\right) . \tag{4.102}$$

这就是我们在微扰论的框架下计算散射问题的最主要的公式。对于任何一个两体散射问题，我们只需要画出相关的连通的截肢图，并按照相关理论的动量空间费曼规则写出表达式；如果需要乘以场强重整化因子的适当幂次；就得到了费曼散射振幅，而相应的散射截面可以由第 §14.2 小节的公式 (4.67) 给出。

§16 汤川理论和量子电动力学的费曼规则

¶ 前面我们主要以标量场为例，说明了如何在一个相互作用量子场论中利用微扰论和费曼图计算任意一个散射过程的 S-矩阵元以及相应散射截面。这一节中，我们将前面的一系列结果推广到稍微复杂一些的场：旋量场与矢量场（电磁场）并给出相应的费曼规则。

§16.1 旋量场的 Wick 定理

¶ 首先，我们必须将 Wick 定理推广到旋量场。由于旋量场的产生湮灭算符满足反对易关系而不是对易关系，因此我们需要更改我们的编时乘积的定义：

$$T\left[\psi(x)\bar{\psi}(y)\right] = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & x^0 < y^0 , \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & x^0 > y^0 . \end{cases} \tag{4.103}$$

也就是说，在进行编时排列的时候，每一次交换费米子场（无论是 ψ 或 $\bar{\psi}$）都要加一个负号。类似地，我们可以定义一串费米子场的正规乘积（normal product）。它的定义与标量场一样，但是每一次交换费米子的产生湮灭算符需要增加一个负号：

$$N(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}a^{\dagger}_{\mathbf{k}}) = (-)^2 a^{\dagger}_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} = (-)^3 a^{\dagger}_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}} . \tag{4.104}$$

按照上述定义，两个费米子场的编时乘积与正规乘积之间的关系为：

$$T\left[\psi(x)\bar{\psi}(y)\right] = N\left[\psi(x)\bar{\psi}(y)\right] + +\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y) . \tag{4.105}$$

这个公式实际上就是旋量场的 Wick 定理对于两个场变量的特例。推广到多个旋量场的情形也是十分直接的。事实上，对于旋量场来说，所有必需的变化都已经被考虑到编时乘

积和正规乘积的定义之中了。例如，考虑 4 个费米子场的编时乘积我们有：

$$T[\psi_1\psi_2\bar\psi_3\bar\psi_4] = N\Big[\psi_1\psi_2\bar\psi_3\bar\psi_4 + \overbrace{\psi_1\psi_2}\bar\psi_3\bar\psi_4 + \overbrace{\psi_1\psi_2\bar\psi_3\bar\psi_4} - \overbrace{\psi_1\psi_2}\overbrace{\bar\psi_3\bar\psi_4} - \overbrace{\psi_1\psi_2\bar\psi_3}\bar\psi_4 - \overbrace{\psi_1}\overbrace{\psi_2}\overbrace{\bar\psi_3}\bar\psi_4 + \overbrace{\psi_1}\overbrace{\psi_2\bar\psi_3}\overbrace{\bar\psi_4}\Big] . \tag{4.106}$$

练习 4.10 *对上述四个费米子场的情形验证 Wick 定理。*

§16.2 汤川理论的费曼规则

¶ 有了前面关于 Wick 定理的推广，我们可以很容易地得到汤川理论的费曼规则。对于汤川理论（Yukawa theory），它的相互作用的作用量为：

$$S_{\rm int} = -g\int d^4x\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x) . \tag{4.107}$$

由于它的相互作用中没有相同的场，因此相应的费曼图中无需考虑对称因子（或者说对称因子都等于 1）。

¶ 作为导出费曼规则的一个例子，让我们考察汤川理论中费米子－费米子散射问题：

$$f(p,s) + f(k,s_1) \to f(p',s') + f(k',s_1') . \tag{4.108}$$

其中 (p,s), (k,s_1) 和 (p',s'), (k',s_1') 分别标记初态及末态两个费米子的四动量和自旋。我们将用相应的黑体符号（例如，$\mathbf{p}$，$\mathbf{k}$，$\mathbf{p}'$，$\mathbf{k}'$）来表示相应的动量三矢量。

图 4.4 中我们显示了汤川理论中两个费米子散射的费曼图。如果费米子是全同的（量子不可分辩的），那么这个散射有两个图贡献。如果费米子被认为是可分辩的，我们只需要计算左边的一个图就可以了。我们首先来考虑两个费米子不可分辩的情形。

按照第 3 章的狄拉克场的展开公式 (3.87)，我们发现当向右作用时，场 $\psi(x)$ 会湮灭一个费米子或产生一个反费米子；而场 $\bar\psi(x)$ 会湮灭一个反费米子或产生一个费米子。当向左作用时，上述对应则刚好相反。因此我们有：

$$\overbrace{\psi(x)|\mathbf{p},s\rangle} = e^{-ip\cdot x}u^{(s)}(p) , \quad \langle\mathbf{p}',\overbrace{s'|\bar\psi}(x) = \bar u^{(s')}(p')e^{+ip'\cdot x} \tag{4.109}$$

我们看到，对于初态和末态都是费米子的散射而言，场 $\bar\psi$ 湮灭末态而场 ψ 则湮灭初态。因此要得到非平庸的矩阵元，我们至少需要两个相互作用的顶点，相应的 S-矩阵元为：

$$\left\langle \mathbf{p}',s';\mathbf{k}',s_1' \left| \frac{(-ig)^2}{2!}T\left[\int d^4x\phi(x)\bar\psi(x)\psi(x)\int d^4y\phi(y)\bar\psi(y)\psi(y)\right]\right| \mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\right\rangle \tag{4.110}$$

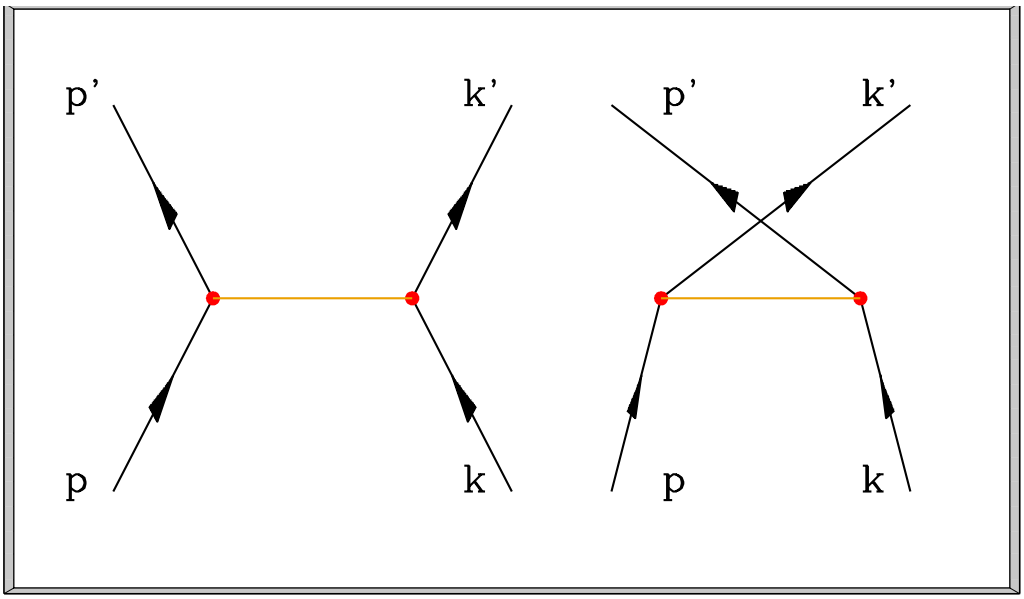


图 4.4：汤川理论中的费米子－费米子散射。

如前所说，我们现在需要的是将两个 ψ 和两个 $\bar{\psi}$ 分别与初末态的费米子进行缩并。其中一个可能的缩并方案是：

$$\langle \mathbf{p}', s'; \mathbf{k}', s_1' | T[\int d^4x \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \int d^4y \phi(y)\bar{\psi}(y)\psi(y)] | \mathbf{p}, s; \mathbf{k}, s_1 \rangle \tag{4.111}$$

利用公式 (4.109) 并完成对 x 和 y 的积分（这给出两个四动量守恒的 δ-函数），这个缩并的方案给出的结果是：

$$(-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p' - p + q)\delta^{(4)}(k' - k - q)\bar{u}^{(s')}(p')u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s_1')}(k')u^{(s_1)}(k) \tag{4.112}$$

我们现在可以利用其中一个 δ-函数完成对 q 的积分，结果发现它可以表达为（参见公式 (4.56)）：$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p + k - p' - k')$，其中的费曼振幅为：

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}^{(s')}(p')u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s_1')}(k')u^{(s_1)}(k) \, . \tag{4.113}$$

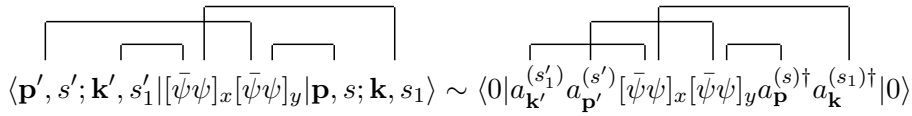
这个公式中的 $q \equiv p - p' = k' - k$ 为玻色子所携带的四动量。与这个贡献相对应的费曼图显示在图 4.4 的左边一个之中。

¶ 上面的讨论之中我们还没有仔细涉及由于费米子交换所引起的可能的符号问题。这个问题实际上依赖于我们对于双费米子出态的符号约定。具体来说，当我们写

下：$|\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\rangle$ 以及$\langle\mathbf{p}',s';\mathbf{k}',s_1'|$ 时我们的约定是什么。为了明确起见，我们这个课程中约定：

$$|\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\rangle \sim a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}a_{\mathbf{k}}^{(s_1)\dagger}|0\rangle\ ,\quad \langle\mathbf{p}',s';\mathbf{k}',s_1'| \sim \langle 0|a_{\mathbf{k}'}^{(s_1')}a_{\mathbf{p}'}^{(s')}\ , \tag{4.114}$$

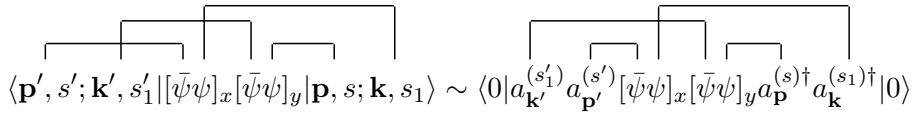
从而我们有：$(|\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\rangle)^\dagger = \langle\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1|$。按照这个约定，我们很容易发现公式 (4.111) 中的缩并实际上是：



$$\langle\mathbf{p}',s';\mathbf{k}',s_1'|[\bar\psi\psi]_x[\bar\psi\psi]_y|\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\rangle \sim \langle 0|a_{\mathbf{k}'}^{(s_1')}a_{\mathbf{p}'}^{(s')}[\bar\psi\psi]_x[\bar\psi\psi]_y a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}a_{\mathbf{k}}^{(s_1)\dagger}|0\rangle \tag{4.115}$$

在完成这个缩并的过程中，我们总共需要交换偶数次的费米子场，[33] 因此这个缩并给出的符号是 (+1)。

这个散射过程实际上还存在另外一种缩并方式，这等效于将末态的两个粒子的角色交换一下：



$$\langle\mathbf{p}',s';\mathbf{k}',s_1'|[\bar\psi\psi]_x[\bar\psi\psi]_y|\mathbf{p},s;\mathbf{k},s_1\rangle \sim \langle 0|a_{\mathbf{k}'}^{(s_1')}a_{\mathbf{p}'}^{(s')}[\bar\psi\psi]_x[\bar\psi\psi]_y a_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}a_{\mathbf{k}}^{(s_1)\dagger}|0\rangle \tag{4.116}$$

大家容易验证，这个缩并与前一个（即公式 (4.115) 中所显示的）比较一定相差一个负号。

一个值得一提的情况是关于闭合的费米子圈的符号。这个缩并是由 N 个顶点构成的。由于所有缩并都是相邻的只是最后一个需要交换一下位置，因此大家很容易验证，一个闭合的费米子圈的缩并总是具有一个额外的负号。

¶ 由于汤川理论中的场 $\bar\psi$，ψ，ϕ 都不相同，因此这个理论中不需要对称因子，或者说对称因子 $S\equiv 1$。在指数因子的编时乘积展开时，不同坐标之间的交换所给出的贡献刚好消掉前面的 $1/n!$ 的因子。

¶ 让我们回到费米子-费米子散射的问题。公式 (4.111) 只是给出了一种可能的缩并方案。这个方案导致的费曼振幅由公式 (4.113) 给出；另一种可能的缩并方案实际上由 (4.116) 给出。将两种贡献相加，我们就可以写出费米子-费米子散射的总的贡献：

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= (-ig^2)\left[\bar u^{(s')}(p')u^{(s)}(p)\frac{1}{(p-p')^2-m_\phi^2}\bar u^{(s_1')}(k')u^{(s_1)}(k)\right.\\ &\quad\left.-\ \bar u^{(s')}(p')u^{(s_1)}(k)\frac{1}{(k-p')^2-m_\phi^2}\bar u^{(s_1)}(k')u^{(s)}(p)\right]. \end{aligned} \tag{4.117}$$

这两项分别对应于图 4.4 中的左边和右边的费曼图。请大家特别注意这两项之间的相对的负号。它是由费米统计引起的。这两个图的差别仅仅是末态（或者初态）的两个费米子

[33] 例如，我们可以将场 $\bar\psi(y)$ 向左移动，通过两个费米子场 $[\bar\psi\psi]_x$ 从而完成它的缩并，这个交换给出 $(-)^2=+1$。剩下的缩并都是相邻的，因此不会再贡献符号。

对换，而费米子的对换要引入一个负号。原则上讲，只要将上述费曼振幅取模方，就可以得到相应的微分散射截面，尽管这里我们并不打算这样做。在下一章中我们会介绍一系列计算这类物理量的“技术”，届时我们可以很容易地计算这个过程的散射截面。

¶ 现在让我们总结一下汤川理论中写出费曼振幅 $i\mathcal{M}$ 的费曼规则。我们将直接给出动量空间的费曼规则。

汤川理论的费曼规则（动量空间）

- 画出所有连通的、截肢的费曼图并在每个顶点要求动量守恒;
- 对于动量为 p 的费米子传播子，写下：$[i/(\not{p}-m+i\epsilon)]$;
- 对于动量为 q 的玻色子传播子，写下：$[i/(q^2-m_\phi^2+i\epsilon)]$;
- 对于相互作用顶点，写下：$-ig$;
- 对于初态动量为 p，自旋为 s 的费米子和反费米子，分别写下旋量：$\overbrace{\psi|\mathbf{p},s\rangle}=u^{(s)}(p)$ 和 $\overbrace{\bar{\psi}|\mathbf{p},s\rangle}=\bar{v}^{(s)}(p)$;
- 对于末态动量为 p，自旋为 s 的费米子和反费米子，分别写下旋量：$\langle\mathbf{p},s|\overbrace{\bar{\psi}}=\bar{u}^{(s)}(p)$ 和 $\langle\mathbf{p},s|\overbrace{\psi}=v^{(s)}(p)$;
- 对于所有未知动量积分;
- 考察每个图中由于费米统计所可能造成的符号（例如，一个费米子圈总会贡献一个负号）。

练习 4.11 *验证汤川理论的这些费曼规则。特别的，对于费米子-费米子散射，按照图 4.4 所示，验证这些规则所给出的费曼振幅的确由公式 (4.117) 给出。*

¶ 在画包含费米子的费曼图的时候，我们会用一个带箭头的实线来表示费米子的缩并：$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)$。需要注意的是，这个箭头标示的实际上是负电荷“流动的”方向，[34] 而不是动量的方向。因此，对于一根包含反费米子的费米子线，我们需要额外再标出一个动量流向的小箭头。当然，对费米子而言，这两个是一致的，我们也可以省略标识动量流向的小箭头，例如图 4.4 中我们就是这样做的。但是，如果需要画出费米子-反费米子散射的图，我们就需要在相应的图中包含反费米子的费米子线旁边标志小箭头了。对于反费米子来说，它的动量流向总是与负电荷的流向相反的，无论是出射还是入射。

¶ **非相对论极限和汤川势**

考虑上述散射过程的非相对论极限 是颇具教育意义的。地球人都知道，两个粒子的散射

[34] 准确的说，是费米子携带的守恒荷流动的方向。对于电子而言，由于它带负电荷，所以就是负电荷流动的方向，或者说电流方向的反方向。

在非相对论极限下可以很好地用非相对论量子力学的势模型加以描述。我们现在就来考察一下相对论性的汤川理论在非相对论极限下导致怎样的费米子之间的相互作用势。

在非相对论极限下粒子是可分辨的。我们只需要考虑一个图（具体来说，就是图 4.4 中左边一个图）的贡献。为了简化我们的讨论，我们将假定两个费米子的质量分别为 M 和 m，并且假定 $M \gg m$。[35] 这样一来，这个问题就化为一个简单量子力学散射问题，其中 M 可以看成是几乎固定的（同时我们将其所在位置取为坐标原点），它对另一个费米子的相互作用在非相对论极限下可以用一个势 $V(\mathbf{x})$ 描写。现在我们假定费米子的质量足够大，而它们的动量与质量相比足够小，于是我们可以仅仅保留到所有三动量的平方量级。

在非相对论极限下，$p \simeq (m, \mathbf{p})$，$p' \simeq (m, \mathbf{p}')$，于是我们有：$(p'-p)^2 = -|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4)$。利用旋量 $u^{(s)}(p)$ 的表达式 (3.53) 我们得知它在非相对论极限下的行为为：

$$u^{(s)}(p) \sim \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} , \tag{4.118}$$

其中 $\chi^{(s)\dagger}\chi^{(s')} = m\delta^{ss'}$。于是利用 $\bar{u}^{(s')}(p')u^{(s)}(p) \sim 2m\delta^{ss'}$ 以及 $\bar{u}^{(s_1')}(k)u^{(s_1)}(k) \sim 2M\delta^{s_1 s_1'}$。从而费曼振幅可以写为：

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2 + m_\phi^2}(2m)(2M)\delta^{ss'}\delta^{s_1 s_1'} . \tag{4.119}$$

这说明在非相对论极限下，两个费米子的自旋都不会发生改变，这也是非相对论量子力学散射中常见的情形。

另一方面，在量子力学的势散射问题中，如果我们采用 Born 近似，那么散射振幅可以写为：

$$\langle p'|(iT)|p\rangle = -i\tilde{V}(\mathbf{q})(2\pi)\delta(E_{\mathbf{p}} - E'_{\mathbf{p}}) , \tag{4.120}$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ 是散射中的动量转移而 $\tilde{V}(\mathbf{q})$ 表示势 $V(\mathbf{x})$ 的傅里叶变换。现在我们将这个式子与 (4.119) 比较，唯一需要注意的是，其中的两个因子 $(2m)(2M)$ 需要抹去。它们的出现完全是因为我们在量子场论中采用了不同的、洛伦兹不变的单粒子归一化条件。另外的多余的因子 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{p}'-\mathbf{k}')$ 在我们对力心的动量积分后会消失。这个比较得出的结论是：

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{g^2}{\mathbf{q}^2 + m_\phi^2} , \tag{4.121}$$

将这个表达式进行逆傅立叶变换到实空间，我们就得到了两个费米子之间的非相对论性势能：

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\phi r}}{r} , \tag{4.122}$$

[35] 这纯粹是为了方便讨论，否则我们必须引进两个粒子的约化质量等等。

其中 $r = |\mathbf{x}|$ 是两个费米子之间的距离。这就是著名的汤川势（Yukawa potential）。我们发现，两个费米子之间的势能总是相互吸引的，并且呈现指数衰减的行为。其典型的衰减的长度就是所交换的玻色子的康普顿波长：$1/m_\phi$。当年汤川正是根据强相互作用的典型力程估计出强相互作用所交换的玻色子（π 介子）的质量的。当然，按照我们今天的理解，汤川关于强相互作用的模型其实并不是最基本的理论。它仅仅是强相互作用的一个等效理论，因为核子以及 π 介子并不是基本粒子。强相互作用的基本理论是关于夸克、反夸克、胶子的量子色动力学。

练习 4.12 *验证非相对论极限下的汤川势的结果 (4.122)。*

¶ 完全类似的，我们可以考虑一下费米子与反费米子散射的过程。这里面的区别有两个：首先反费米子的旋量将变为 $v^{(s)}(p)$，由于 $\bar{v}^{(s)}(k)v^{(s')}(k') \sim -2m\delta^{ss'}$，因此我们会多出一个负号；其次，缩并过程中的负号也会有变化，我们也会多出一个负号。因此最终的结果是，费米子与反费米子散射的非相对论极限下的势能仍然是相互吸引的汤川势。如果我们计算反费米子-反费米子散射，它们之间的势仍然是相互吸引的汤川势。换句话说，只要是汤川理论，无论是什么粒子之间的散射，在非相对论极限下，粒子间的相互作用都是相互吸引的汤川势。

练习 4.13 *验证这个结论。*

§16.3 量子电动力学的费曼规则

¶ 现在我们可以讨论量子电动力学的费曼规则了。量子电动力学是关于电子、正电子和光子的相互作用的量子场论。在微扰论的理论框架下，它的作用量可以分为自由场的作用量与相互作用的作用量之和。自由场的作用量又包含了两个部分，分别对应于自由的狄拉克场（描写电子与正电子）和自由的电磁场（描写光子）。量子电动力学的相互作用部分的作用量为：

$$S_{\text{int}}^{(QED)} = -\int d^4x e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\,, \tag{4.123}$$

其中 $e = -|e|$ 为电子的电荷（负的）。对于这个理论，我们可以得到它的费曼规则。这些规则中关于狄拉克场的部分（传播子、初态、末态的旋量等）与汤川理论完全一样，但是关于光子的部分以及相互作用的顶点我们必须增添如下的费曼规则：[36]

[36] 我们这里顺便指出，如果费米子的电荷为 Q，那么相互作用的顶点应当改写为：$-iQ|e|\gamma^\mu$。电子的情形相应于 $Q = -1$。

量子电动力学的费曼规则（动量空间）

- 对于动量为 q、两端矢量指标为 μ、ν 的光子传播子，写下：$[-i\eta_{\mu\nu}/(q^2+i\epsilon)]$；
- 对于光子矢量指标为 μ 的相互作用顶点，写下：$-ie\gamma^\mu$；
- 对于动量为 p，矢量指标为 μ，偏振为 λ 的初态或末态光子，分别写下它们的偏振矢量：$\overbrace{A_\mu|\mathbf{p},\lambda\rangle} = \epsilon_\mu^{(\lambda)}$，$\langle\mathbf{p},\lambda|\overbrace{A_\mu} = \epsilon_\mu^{(\lambda)*}$；

这个规则与汤川理论的如出一辙，只不过由于是矢量型的相互作用，因此相互作用的顶点中包含一个 γ^μ；同时，对于出射和入射的光子，我们必须包含相应的偏振矢量。这些偏振矢量的出现不难从电磁场量子化（第 §9节）的表达式 (3.130) 得到。需要注意的是，对于初态和终态的光子，它们的偏振必须是物理的（横向的）偏振态，不能够取非物理（纵向的或标量的）偏振状态。

练习 4.14 *验证量子电动力学的这些费曼规则。*

¶ 类似于汤川理论中的情形，讨论一下量子电动力学在非相对论极限下的行为是有意义的。我们讨论两个非相对论性的电子之间的相互作用（散射）。这个过程的费曼图也十分类似于我们在汤川理论中的讨论，只不过中间传递相互作用的粒子不再是标量粒子而是光子。相应地，我们需要将标量场的传播子换成光子的传播子。其他的讨论则完全类似。我们最后得到的非相对论性的势为：

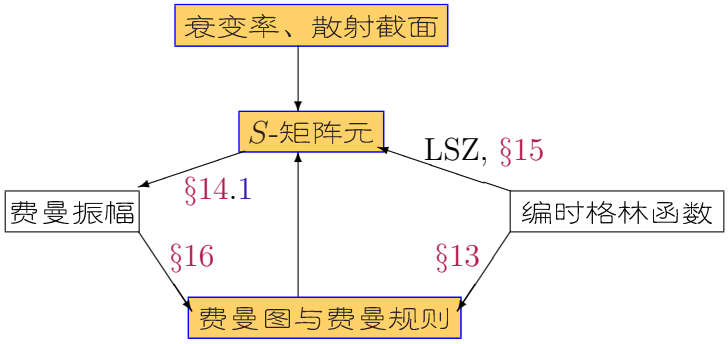
$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}\,, \tag{4.124}$$

其中 r 是两个电子的空间距离，$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ 是所谓的精细结构常数。这个势就是大家所熟悉的库仑势。[37] 我们发现两个费米子（电子）之间的作用是相互排斥的，同时由于光子是无质量的粒子，相互作用势的形式也不再是汤川势，而是库仑势的形式。同样的，如果我们计算一个电子与一个正电子的散射，我们会发现它们之间的相互作用势也是库仑势的形式，只不过变成了相互吸引的势。这就是我们所熟悉的同号电荷相互排斥、异号电荷相互吸引的规则。我们看到，这个规则实际上已经自然地包含在量子电动力学的非相对论极限之中。

练习 4.15 *对于不同电荷之间的势，验证它的形式永远是库仑势，强度则与两个费米子电荷的乘积有关，即：同号相斥，异号相吸。*

[37] 这里提醒大家注意我们采用的电磁单位制。它当然不是国际单位制，也不是通常的高斯制，而是接近于高斯制的所谓海威塞德制，这是量子场论中所习惯的单位制。

¶ 在结束本章的时候让我们将本章的主要概念及其关系做一个小结。研究粒子的性质和相互作用的主要实验手段就是观测它们的衰变和散射，理论上它们由相应的衰变率和散射截面描述。刻画这些实验可观测量的物理量就是 S-矩阵的相应矩阵元。本章中我们在微扰论基础上建立了计算三个代表理论中 S-矩阵元以及相关衰变率、散射截面的理论框架，将这类计算都归结到相关的费曼图和费曼规则。下一章中，我们就将利用这里所建立的理论方法，具体研究量子电动力学的基本过程。本章的内容可以用下图概括：





相关的阅读

这是十分漫长的一章。这一章中我们发展了利用微扰论讨论了计算粒子散射过程的一切必需理论工具。我们首先说明衰变率、散射截面等实验上可以直接测量的物理量可以通过计算相应的 S-矩阵元而得到。S-矩阵元在相对论性量子场论的微扰论框架中可以表达为相应的费曼散射振幅。其次，我们利用 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式（LSZ reduction formula）说明了如何将费曼散射振幅与理论中相应的编时格林函数联系起来。最后，我们又将编时格林函数用费曼图表达出来。每一个量子场论都有自身的费曼图，它们由相应的费曼规则所完全确定。因此，在相对论性量子场论的微扰计算中，只需要画出我们感兴趣的散射过程所对应的费曼图，按照确定的规则写下相应的表达式进行计算即可。对于一些具有重要物理意义的量子电动力学过程，我们会在随后的两章中加以详细讨论。

第五章　量子电动力学的基本过程

本章提要

- 正负电子到正负 μ 子的散射（§17）
- $e^-\mu^-$ 散射与交叉对称性（§18）
- Bhabha 散射与 Møller 散射（§19）
- 康普顿散射（§20）

这一章中，我们将讨论著名的量子电动力学（Quantum Electrodynamics, QED）——关于电磁相互作用的基本理论。它代表了量子场论最辉煌的结果，同时也是量子场论作为一个理论体系得以确立的里程碑。我们的讨论仍然局限于微扰论，而且我们在这一章中将仅仅涉及到树图的过程。更高阶的圈图过程由于一般都会涉及到重整化的问题，将在后面一章加以简单介绍。尽管如此，我们的讨论仍然包含了许多重要的物理过程，例如：电子－电子散射（Møller 散射）、电子－正电子散射（Bhabha 散射）、康普顿散射等。

§17 正负电子到正负 μ 子的散射

¶ 正负电子散射对于高能物理的理论和实验来说具有特别的重要意义。高能物理的很多实验装置（对撞机）实际上就是一个正负电子对撞的设备。正负电子对撞机与其他类型的对撞机比较起来具有很多天然的优势。因此，从理论上讲，研究正负电子的散射无疑是至关重要的。本章中我们将讨论两类正负电子的散射过程。第一个过程是正负电子湮灭然后变成一对 $\mu^+\mu^-$ 出射；[1] 第二个过程是正负电子散射仍然变成正负电子，这被称

[1] 所谓 μ-子（即 μ^- 粒子）实际上是性质（电荷、自旋等）与电子完全类似的一种轻子，唯一不同的是它的质量为：$m_\mu = 105.7\text{MeV}$，这大约是电子质量的 200 倍左右。如果仅仅考虑电磁相互作用，它与电子是完全相同的，并且在电磁相互作用下，它不可能转化为电子。但是，如果考虑了弱作用，它可以衰变到电子再加上两个中微子（一个 ν_μ，一个 $\bar{\nu}_e$），寿命约为 $2.2\mu\text{s}$。

为 Bhabha 散射。这两个过程的计算十分类似。第一个更为简单，因为它在最低阶只有一个费曼图（湮灭图，即图 5.1 中左图）贡献；第二个过程则有两个图可以贡献，除了所谓的湮灭图以外，还可以有 t-道的图（图 5.1 中的右图）贡献。本节中我们首先讨论正

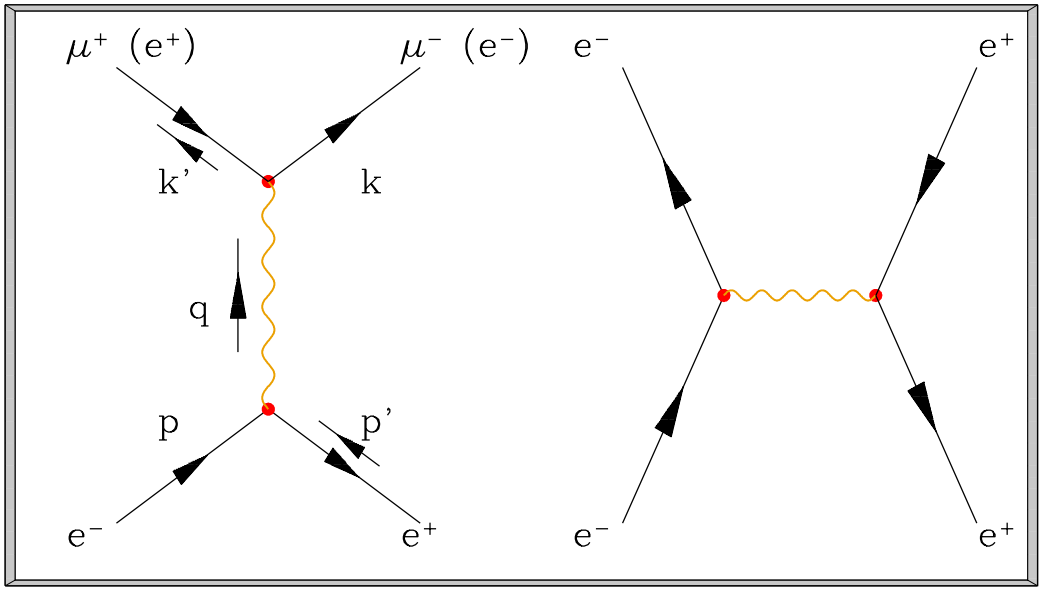


图 5.1：正负电子散射的费曼图。左边的图可以出现在正负电子散射到正负电子或者正负 μ 子的过程中；右边的一个图则只出现在正负电子散射到正负电子的过程（Bhabha scattering）中。

负电子湮灭然后变成正负 μ 子的散射。Bahbha 散射将在第 §19 节讨论。

§17.1 e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的非极化散射

¶ 有关正负电子散射的最低阶（树图）费曼图显示在图 5.1 中。如果考虑的是正负电子到正负电子的散射过程（即 Bahbha 散射），那么在最低阶两个图都有贡献；如果考虑 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射，则只需要考虑左边的一个图的贡献即可。从能动量守恒的角度考虑，显然这个过程只有在正负电子对的质心能量高于一对 μ 的阈值时才可能发生。因此，我们下面将假定这一点已经得到满足。按照我们前一章给出的量子电动力学的费曼规则，很容易写出这个图对于费曼振幅的贡献：

$$\bar{v}^{(s')}(p')(-ie\gamma^\mu)u^{(s)}(p)\left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^{(r)}(k)(-ie\gamma^\nu)v^{(r')}(k')\,, \tag{5.1}$$

其中 p'，p 分别是入射（初态）正负电子的四动量；k'，k 分别是出射（末态）正负 μ 子的四动量；s'，s，r'，r 则分别表示初态正负电子以及末态正负 μ 子的自旋状态。为了使

它的反粒子 μ^+ 则与正电子性质类似。

得大家看得清楚，我们特地将上式中的每一个因子按照费曼规则完整写出。上面这个表达式可以更加简洁地写为：

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2}\left(\bar{v}^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\right)\left(\bar{u}^{(r)}(k)\gamma_\mu v^{(r')}(k')\right) . \tag{5.2}$$

按照前一章的讨论，要得到散射截面我们需要计算 $|\mathcal{M}|^2$。注意到：

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 v = \bar{u}\gamma^\mu v ,$$

因此我们得到：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left(\bar{v}^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\nu v^{(s')}(p')\right)\left(\bar{u}^{(r)}(k)\gamma_\mu v^{(r')}(k')\bar{v}^{(r')}(k')\gamma_\nu u^{(r)}(k)\right)$$

上面这个式子的一个更为聪明的写法是：

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} tr\left(v^{(s')}(p')\bar{v}^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\nu\right) \\ &\times\ tr\left(u^{(r)}(k)\bar{u}^{(r)}(k)\gamma_\mu v^{(r')}(k')\bar{v}^{(r')}(k')\gamma_\nu\right) , \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中形如 $v^{(s')}(p')\bar{v}^{(s')}(p')$ 的表达式表示在狄拉克旋量空间的直积：$v^{(s')}(p')\otimes\bar{v}^{(s')}(p')$，从而它是一个该空间的矩阵；而 tr 则表示对于旋量空间的狄拉克指标求迹。

练习 5.1 *验证上面这个公式。*

如果我们仅仅感兴趣非极化的散射截面，那么我们可以不考虑初末态粒子的自旋状态。这意味着我们需要对末态的各种可能的自旋状态求和并且对初态各种可能的自旋状态取平均：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{1}{2}\sum_s\frac{1}{2}\sum_{s'}\sum_{r,r'}|\mathcal{M}|^2 . \tag{5.4}$$

这样一来，我们就可以利用狄拉克旋量对于自旋求和的性质（参见第 §8 节的公式 (3.62)）得到：

$$\sum_s u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m , \quad \sum_s v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m ,$$

同时注意到对于初态和末态，粒子的质量要分别待以电子和 μ 子的质量，我们就得到非极化的费曼振幅模方：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} tr\left[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\right] tr\left[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu\right] . \tag{5.5}$$

至此我们已经将非极化的费曼振幅的模方表达成一系列 γ-矩阵的乘积的迹的形式。

利用 γ-矩阵乘积求迹的性质，即第 §8.1 小节的公式 (3.64)，我们不难将公式 (5.5) 中的求迹完成。例如：

$$tr\left[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\right] = 4\left[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}(p\cdot p' + m_e^2)\right] .$$

对于 μ 子部分的求迹计算也是类似的。注意到 μ 子的质量远大于电子的质量，因此在这个计算中我们完全可以略去 m_e^2。我们于是就得到非极化的平均费曼振幅模方：

$$\boxed{|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\left[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) + m_\mu^2(p\cdot p')\right] .} \tag{5.6}$$

正如我们前面曾经提到的，费曼振幅是洛伦兹不变量。我们看到，这个表达式的确都由洛伦兹不变的四矢量内积构成。

练习 5.2 *验证上面这个公式。*

为了得到更为直接的散射截面的结果，我们必须选取一个方便的参照系。从理论计算的角度来说，这个问题中选取质心参照系显然是最为简单的。我们选取入射的负正电子分别沿着 z 轴的正负方向，选取末态的 μ^- 的三动量沿着与 z 轴夹角为 θ 的方向出射。在这样的约定下，我们很容易计算出：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = e^4\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] , \tag{5.7}$$

其中 E 代表入射的电子（或正电子）在质心系的能量。[2] 进一步我们可以将费曼振幅的模方代入到两体到两体的微分散射截面公式 (4.69) 中，我们得到：

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] .} \tag{5.8}$$

其中 $E_{\rm cm} = 2E$ 代表质心系中反应的总能量。这就是质心系中电子正电子湮灭产生一对 μ 子的非极化微分散射截面。

练习 5.3 *验证公式 (5.8)。*

如果我们对于三维立体角积分，我们就得到总的散射截面（非极化的）：

$$\boxed{\sigma_{\rm total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm cm}^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1 + \frac{m_\mu^2}{2E^2}\right) .} \tag{5.9}$$

[2] 如果我们没有忽略掉电子的质量，那么这个公式没有这么简洁。

简单讨论一下微分散射截面的极端相对论极限极限是有意义的。这时我们得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \overset{E\gg m_\mu}{\longrightarrow} \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}(1+\cos^2\theta)\,, \tag{5.10}$$

这个结果实际上几乎可以从量纲分析得出。

¶ 这是我们这个课程中第一个完整的微扰计算结果。现在就让我们总结一下这个计算的主要过程：

1. 画出所有相关的连通、截肢费曼图；
2. 运用四动量守恒标出各个传播子上的四动量；
3. 按照费曼规则写出相关的费曼振幅 $i\mathcal{M}$；
4. 将费曼振幅取模方。如果计算的是非极化散射，则需要对相应的自旋或偏振求和、平均。将最后结果表达为一系列 γ-矩阵乘积求迹的形式；
5. 计算相关的迹并化简结果；
6. 选取特定的参照系，将上述结果中的四矢量用方便的参数（例如能量以及散射角度等）表示；
7. 将费曼振幅模方的结果带入到散射截面的公式 (4.69) 中得到微分散射截面。

以上就是量子场论中利用微扰论计算一个散射过程的主要流程。尽管以后的一些例子会比我们这里的第一个例子要复杂，但是它们所遵循的流程都是类似的。

§17.2 e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的极化散射

¶ 在上一小节，我们讨论了正负电子湮灭产生一对 μ 子的非极化散射过程。我们对于末态的自旋态进行了求和，对初态的自旋状态进行了平均。如果我们考虑极化散射，也就是说，我们需要了解散射过程中更加详细的自旋信息，我们就必须对上一小节的计算做出必要的调整。为了简化计算，本小节中我们也略去 μ 子的质量，从而可以认为是考虑极端相对论性的散射。

我们的出发点是保持自旋信息的费曼振幅，即公式 (5.2)：

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{q^2}\left(\bar v^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\right)\left(\bar u^{(r)}(k)\gamma_\mu v^{(r')}(k')\right)\,.$$

要考虑一个特定的极化，我们只需要利用狄拉克空间的投影算符：$(1\pm\gamma_5)/2$，它分别会投影出一个狄拉克旋量的左手和右手部分。因此我们可以将上式中包含旋量的因子进行如下的替换：

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) \Rightarrow \bar{v}(p')\gamma^\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) u(p)\,, \tag{5.11}$$

这样一来，对于右手的初态电子的散射振幅没有变化，但是左手初态电子的振幅则变成了零。利用投影算符与 γ^μ 交换时的关系，我们发现这个投影算符同时也要求正电子是左手的。换句话说，如果初态的正负电子同是左手或者同是右手的，那么散射振幅一定为零。不为零的散射只能够出现在正负电子的手性相反的情形中（左手电子与右手正电子或者右手电子与左手正电子）。

练习 5.4 *验证极化散射时的替换关系 (5.11)。*

这个结论不是偶然的，而是有其内在物理原因的。我们知道电子和正电子的手性与它们的角动量有关。例如，在质心系来看，如果入射的电子沿 $+z$ 方向而正电子沿 $-z$ 方向，那么一个右手的电子的角动量将沿 $+z$ 方向，大小为 $+1/2$；对一个右手的正电子来说，它的角动量沿 $+z$ 方向的投影却为 $-1/2$（参见第 59 页关于这个对应关系讨论）。因此，如果两个粒子要湮灭为一个虚光子，那么该光子的角动量沿 $+z$ 轴的投影恰好是 $(1/2)-(1/2)=0$。但是我们知道，光子角动量为零的态并不存在，它的可能取值是 ± 1。因此，两个同为左手的或者同为右手的正负电子是不可能在树图过程中相互湮灭的。现在我们如果将正电子换成左手的，那么它的角动量在 $+z$ 轴的投影也是 $+1/2$。这样一来，它与右手的电子湮灭成的虚光子的角动量为 $+1/2+1/2=+1$，这正好对应于一个左旋圆偏振的光子。

如果我们将极化的振幅模方并且对初态电子的自旋求和，我们就得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{spin}}\left[\bar{v}(p')\gamma^\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)u(p)\right]\left[\bar{u}(p)\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)v(p')\right]\\ =\;& tr\left[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right] = 2\left(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - \eta^{\mu\nu}p\cdot p' - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p'_\alpha p_\beta\right)\,,\end{aligned} \tag{5.12}$$

类似的，如果我们考虑末态是右手的 μ^- 和左手的 μ^+，我们可以得到类似的表达式。将两个部分结合，我们就可以得到极化的费曼振幅的模方：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{16e^4}{q^4}(p\cdot k')(p'\cdot k) = e^4(1+\cos\theta)^2\,, \tag{5.13}$$

其中第二个等号我们选取了质心系。这立刻给出极化的散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-_R e^+_L \to \mu^-_R \mu^+_L) = \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{cm}}}(1+\cos\theta)^2\,. \tag{5.14}$$

通过完全类似的计算，我们还可以得出其他的三种可能的极化散射截面。例如，如果末态的 μ 子的左右手性对调，我们得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) = \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}(1-\cos\theta)^2 \,. \tag{5.15}$$

另外两种极化散射截面实际上是上面两个截面的宇称共轭态。由于量子电动力学不破坏宇称，因此它们与上述两个截面分别相等。如前所述，其他组合的极化散射截面都等于零。将上面四个不为零的截面相加并且除以 4 来完成对于初态的两个粒子自旋的平均，我们就得到非极化的截面 (5.10)。

§17.3 非相对论极限与束缚态

¶ 前一小节我们讨论了 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 散射在极端相对论条件下的截面，在这一小节中，我们来考察这个散射在接近于 $\mu^+\mu^-$ 阈值时的特性。由于这时两个末态的 μ 子的动量（在质心系中）相对于 μ 子的质量 m 来说是小的，因此两个末态的 μ 子可以看成是非相对论性的。由于 μ 子的质量远大于电子的质量，因此两个初态的电子仍然可以看成是极端相对论性的，这样的处理可以大大简化所得到的公式。

对于初态的极端相对论性的正负电子，选取螺旋度的本征态是方便的。为此，我们假定初态的电子是右手极化的，沿着 $+z$ 方向运动；正电子则是左手极化的，沿着 $-z$ 方向运动。于是，在忽略了电子的质量之后，我们可以得到初态两个粒子的旋量分别为

$$u(p) \sim \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\,,\quad v(p') \sim \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\,. \tag{5.16}$$

于是初态部分的旋量内积很容易得到：

$$\bar v(p')\gamma^\mu u(p) = -2E(0,1,i,0)\,, \tag{5.17}$$

其中 E 表示电子（或正电子）的初始能量。注意，这个式子有一个十分明显的物理意义：注意到 $\bar v\gamma^\mu u$ 是一个四矢量，因此这个结果可以解释为正负电子湮灭成的虚光子所对应的偏振矢量：$\boldsymbol{\epsilon}_+ = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$。它说明，当正负电子的自旋都沿着 $+z$ 方向时，它们所湮灭成的虚光子的偏振对应于一个左旋圆偏振，其角动量在 $+z$ 方向的投影正好是 $+1$。

如前所说，对于末态的粒子，我们必须利用旋量的非相对论极限下的表达式：

$$u(k) = \begin{pmatrix}\chi\\ \chi\end{pmatrix}\,,\quad v(k') = \begin{pmatrix}\chi'\\ -\chi'\end{pmatrix}\,, \tag{5.18}$$

其中不同的 χ 和 χ' 标记了末态粒子的自旋。特别提请大家注意的是，对于反粒子，它的自旋与相关旋量的对应关系与粒子的相反（参见第 3 章第 59 页关于这个问题的讨论）。我们可以直接计算出：$\bar u(k)\gamma^0 v(k') = 0$ 而 $\bar u(k)\gamma^i v(k')$ 为：

$$\bar u(k)\gamma^i v(k') = -2\chi^\dagger\sigma^i\chi'\,. \tag{5.19}$$

将这些结果带入到公式 (5.2) 之中我们有：

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \mu^+\mu^-) = -2(e^2/m)\chi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \chi' \,. \tag{5.20}$$

这个表达式具有我们所期待的性质：它与末态粒子的出射的角度无关，因此它对应的轨道角动量为零。因此，角动量守恒要求末态两个粒子的总自旋一定等于 1。这一点可以从上式直接验证。我们发现这个散射振幅等于零，除非末态的 μ 子和反 μ 子的自旋都沿着 $+z$ 方向，即：$\chi = \sqrt{m}(1,0)$，$\chi' = \sqrt{m}(0,1)$。

¶ 束缚态的处理

前面讨论的正负电子在正负 μ 子阈值附近的散射只要稍微加以引申就可以用来处理阈值以下的可能的束缚态问题。一般来说，利用微扰的相对论性量子场论处理束缚态的问题是比较困难的，原因就在于多数束缚态的性质都是非微扰的。但是某些特殊的束缚态问题是可以（或部分可以）利用微扰论处理的。我们这里讨论的就属于这一类。

当两个 μ 子的速度很慢而它们的距离又十分接近时，两个 μ 间的库仑相互作用就会起比较重要的作用。由于两个 μ 子可以看成是非相对论性的，因此两者可以结合成非相对论性的束缚态－所谓的 muonium。这种非相对论性的束缚态实际上可以很好地利用非相对论性量子力学中的薛定谔方程来处理。我们现在就来讨论正负电子散射形成一个 muonium 束缚态的问题。

这个问题显然比起前面我们已经讨论的问题要稍微复杂一些。因为我们希望产生的末态并不是两个自由的正负 μ 子，而是由（非相对论性的）正负 μ 子所组成的一个束缚态。我们将这个问题分解为两步：第一步，我们计算正负电子湮灭产生一对自由正负 μ 子的散射振幅，这可以由我们的相对论性量子场论给出；第二步，我们需要由两个 μ 子来构成束缚态，这需要求解正负 μ 子的薛定谔方程来给出。从唯象上说，我们将利用 muonium 的波函数来刻画束缚态中所包含的自由正负 μ 子的成分。对于一个处于静止的 muonium 束缚态（或者说取它的质心系），它的量子态可以表达为：[3]

$$|B\rangle = \sqrt{2M}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\tilde{\Psi}(\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{2m}}|\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow\rangle \,, \tag{5.21}$$

其中的 $\tilde{\Psi}(\mathbf{k})$ 是 muonium 束缚态的波函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换；$M \lesssim 2m$ 是束缚态的能量（质量）；$\mathbf{k}$ 和 $-\mathbf{k}$ 分别表示束缚态中正负 μ 子的（质心系中的）动量。上式中的因子 $\sqrt{2M}$ 以及 $\sqrt{2m}$ 来自我们对于单粒子态的归一化与通常的非相对论性的归一化不一致性。引入它们之后，我们的波函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 就是按照非相对论量子力学来归一化的了，即它的模方的体积分等于 1。

[3] 这里有一个隐含的假定：我们假定在所考虑的希尔伯特空间中一对自由正负 μ 子的平面波态是完备的。也就是说，即使存在可能的束缚态，但是它可以用一对自由正负 μ 子的平面波态来展开。

在将束缚态的所有效应都归结于波函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 之后，我们就可以计算正负电子湮灭形成一个形如 (5.21) 的束缚态的散射矩阵元了。例如，如果我们考虑右旋的电子与左旋的正电子（从而两个粒子的物理自旋都沿着电子的入射动量方向）湮灭的过程，我们有：

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to B)=\sqrt{2M}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\tilde{\Psi}^*(\mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{2m}}\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\mathbf{k}\uparrow,-\mathbf{k}\uparrow)\,. \tag{5.22}$$

现在注意到，费曼振幅 $\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\mathbf{k}\uparrow,-\mathbf{k}\uparrow)=-2e^2$ 实际上在领头阶并不依赖于动量 $\mathbf{k}$，因此上面的动量积分可以完成，给出波函数在原点的值。我们有：

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to B)=\sqrt{\frac{2}{M}}(-2e^2)\Psi^*(0)\,. \tag{5.23}$$

其中我们运用了结果：$M\simeq 2m$。因此，极化的正负电子产生一个 muonium 束缚态的费曼振幅与该束缚态波函数在原点的值直接相关，这是一个相当普遍的结果。事实上，它是所有 s 波（非相对论语言中）束缚态粒子产生的普通结果。

¶ 上面关于两个极化的正负电子产生 muonium 束缚态的讨论可以很容易地推广到任意的极化（或非极化）的情形。为此我们注意到，公式 (5.20) 这时可以推广为：

$$\mathcal{M}=\chi^\dagger\Gamma(\mathbf{k})\chi'=tr\left[\chi'\otimes\chi^\dagger\cdot\Gamma(\mathbf{k})\right]\,, \tag{5.24}$$

其中的 2×2 矩阵 $\Gamma(\mathbf{k})$ 包含了初始的两个粒子的极化信息；χ 和 χ' 则包含了末态的正负 μ 子的极化信息。前面讨论的极化情况对应于：[4] $\chi=(1,0)$，$\chi'=(0,1)$，

$$\Gamma(\mathbf{k})=(-2e^2)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\,. \tag{5.25}$$

如果我们要讨论末态束缚态粒子沿着任意方向 $\mathbf{n}$ 极化的费曼振幅，我们应当选取：

$$\chi'\otimes\chi^\dagger\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}\,. \tag{5.26}$$

如果我们选取：$\mathbf{n}=(\hat{\mathbf{x}}+i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$，我们就重新得到前面讨论的极化情形（即正负 μ 子的自旋都沿着 $+z$ 方向）。显然，如果我们选：$\mathbf{n}=(\hat{\mathbf{x}}-i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$，$\mathbf{n}=\hat{\mathbf{z}}$，我们就可以得到总自旋等于 1 的另外两个自旋取向。如果我们形成的束缚态不是总自旋为 1 的矢量粒子，而是一个标量粒子，那么我们应当选取：

$$\chi'\otimes\chi^\dagger\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1}\,, \tag{5.27}$$

其中 $\mathbb{1}$ 表示 2×2 的单位矩阵。

[4] 本小节中，从这里往下我们将二分量旋量中的因子 $\sqrt{m}$ 吸收到其归一化之中，这样关于偏振的部分的公式会比较简单一些。

练习 5.5 *验证关系 (5.26) 和关系 (5.27)。*

利用上面这些讨论，我们可以写出正负电子湮灭成一个矢量粒子束缚态的费曼振幅：

$$\mathcal{M}(e^+e^- \to B) = \sqrt{\frac{2}{M}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}) tr\left(\frac{\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}} \Gamma(\mathbf{k})\right) . \tag{5.28}$$

如果所产生的是标量粒子，只需要将上式中的 $\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 换为单位矩阵即可。

¶ 前面的这些讨论的总的结论是，在束缚态产生的阈附近，当构成束缚态的两个粒子（对于 muonium 来说就是正负 μ 子）可以用非相对论来描述时，正负电子湮灭成该束缚态的振幅正比于该束缚态波函数在原点的值。因此，这种产生机制显然可以有效地产生 s 波的束缚态。但是，它不能够有效产生更高轨道角动量的束缚态，因为对于这些态而言，原点波函数恒等于零。从公式 (5.22) 我们看到，要产生高轨道角动量的态，我们需要费曼振幅 $\mathcal{M}(e^+e^- \to \mathbf{k}, -\mathbf{k})$ 与动量相关的部分。如果这样的项存在（例如在考虑了高阶效应时），那么相应的 $\mathbf{k}$ 就会贡献为波函数在原点的导数。因此，就会对高轨道角动量的态有所贡献。当然，这些贡献一般来说总是会小于 s 波的贡献。

¶ 矢量束缚态粒子的产生与衰变

我们现在计算一个矢量束缚态粒子的产生截面。我们可以引入初始的两个电子所湮灭成的虚光子的极化矢量：$\boldsymbol{\epsilon}_+ = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$，以及末态的矢量粒子的自旋取向 $\mathbf{n}$，那么：

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to B) = \sqrt{\frac{2}{M}}(-2e^2)(\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+)\Psi^*(0) . \tag{5.29}$$

如果我们仅仅关心非极化的电子散射，那么我们必须对于初始的极化求平均：

$$\frac{1}{4}\left(|\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_+|^2 + |\mathbf{n}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_-|^2\right) . \tag{5.30}$$

这个结果说明，即使初始的正负电子束流是非极化的，它们湮灭所产生的矢量粒子一般来说仍然是沿着束流的轴极化的。

对初始的正负电子极化求平均并且对于末态矢量粒子的极化求和，我们就可以得到非极化正负电子湮灭成一个矢量束缚态粒子的总截面：

$$\sigma(e^+e^- \to B) = 64\pi^3\alpha^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^3} \delta(E_{\text{c.m.}}^2 - M^2) , \tag{5.31}$$

其中 $E_{\text{e.m.}}$ 表示质心系中的总能量。

类似的，我们可以计算出矢量束缚态粒子衰变的宽度：

$$\Gamma(B \to e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{3} \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} . \tag{5.32}$$

很容易发现这个公式与产生截面 (5.31) 之间的相似之处。事实上，我们可以利用这种类似（它们都包含波函数在原点值的模方）来消去 $|\Psi(0)|^2$ 得到：

$$\sigma(e^+e^- \to B) = 4\pi^2 \frac{3\Gamma(B \to e^+e^-)}{M} \delta(E^2_{\text{c.m.}} - M^2) \,. \tag{5.33}$$

这样做的目的在于，束缚态的波函数往往并不是都能够得到的。它往往涉及非微扰的效应（特别对于强相互作用的束缚态－介子）。但是，这个公式直接将产生截面与衰变宽度联系起来。两者都是可以在实验上直接测量的。因此，上面的公式可以在实验上加以验证。

¶ 正如前面提到的，我们这里对于束缚态的讨论最为重要的一个应用是正负电子对撞机上重夸克偶素（quarkonium）的产生和衰变。夸克和反夸克靠强相互作用结成的束缚态被通称为介子。虽然夸克和反夸克组成的介子有很多种，但是如果其中包含轻夸克（一般特指 u，d，s 三味夸克），那么该束缚态用非相对论性的量子力学来描写实际上是不合适的。因此，我们所讨论的方法只能够用于重夸克和反重夸克组成的介子，其中最为重要的就是重夸克偶素。它由同味的重夸克和反重夸克构成。由于构成强子的重夸克只有两种，粲夸克 (charm quark)和底夸克 (bottom quark)，相应的重夸克偶素也有两类：粲夸克偶素 (charmonium)与底夸克偶素 (bottomonium)。

要运用我们上面推导的公式还需要一个平庸的改变：夸克是带分数电荷的，如果我们将夸克的电荷记为：Qe，[5] 那么我们所需要的只是将上面公式中的一个 α 替换为 αQ^2。[6] 例如，矢量介子的衰变宽度变为：

$$\Gamma(B(q\bar{q}) \to e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{3} \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \,. \tag{5.34}$$

由于夸克偶素是强相互作用的束缚态，因此它的波函数原则上必须由非微扰的方法才能够得出。我们这里的讨论相当于将这个问题中的所有非微扰性质都吸收到束缚态的波函数之中了。

§18 $e^-\mu^-$ 散射与交叉对称性

¶ 这一节中我们将讨论 $e^-\mu^-$ 散射：

$$e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \to e^-(p_1') + \mu^-(p_2') \,. \tag{5.35}$$

[5] 粲夸克的电荷为 $+(2/3)|e|$ 而底夸克的为 $-(1/3)|e|$。
[6] 之所以仅仅替换一个，是因为其中的一个 α 来自于正负电子与光子的顶点，这个不需要替换。

画出费曼图后我们发现，这个过程的费曼图与我们前一节讨论的过程：

$$e^-(p)+e^+(p')\to\mu^-(k)+\mu^+(k')\,. \tag{5.36}$$

的费曼图在拓扑结构上完全一样。[7] 事实上，如果我们只需要计算对自旋求和平均后的费曼振幅的模方，其结果会与公式 (5.6) 非常类似，只需要将各个粒子的动量作如下的替换即可：

$$p\to p_1,\ p'\to -p_1',\ k\to p_2',\ k'\to -p_2\,. \tag{5.37}$$

于是，对于自旋求和平均后的费曼振幅的模方为：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2=\frac{8e^4}{q^4}\left[(p_1\cdot p_2')(p_1'\cdot p_2)+(p_1\cdot p_2)(p_1'\cdot p_2')-m_\mu^2(p_1\cdot p_1')\right]\,, \tag{5.38}$$

其中我们已经忽略了电子的质量。进一步的计算需要选取一个特定的参照系。我们仍然选择质心系。尽管 $|\bar{\mathcal{M}}|^2$ 的公式与上一节的十分类似，但是，由于两个过程的运动学完全不同，这就导致选定了参照系之后的表达式完全不同。我们的选择是：

$$p_1=(k,k\hat{\mathbf{z}}),\ p_2=(E,-k\hat{\mathbf{z}}),\ p_1'=(k,\mathbf{k}),\ p_2'=(E,-\mathbf{k})\,, \tag{5.39}$$

其中末态电子出射的动量 $\mathbf{k}$ 与 z 轴的夹角称为 θ。于是，计算出公式 (5.38) 中所有的四矢量内积后得到：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2=\frac{2e^4}{k^2(1-\cos\theta)^2}\left[(E+k)^2+(E+k\cos\theta)^2-m_\mu^2(1-\cos\theta)\right]\,. \tag{5.40}$$

利用我们前一章给出的两体散射的截面公式，我们质心系中的微分散射截面为：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=\frac{\alpha^2}{2k^2(E+k)^2(1-\cos\theta)^2}\left[(E+k)^2+(E+k\cos\theta)^2-m_\mu^2(1-\cos\theta)\right]\,. \tag{5.41}$$

我们发现这个截面具有一个典型的小角度增强：$(d\sigma/d\Omega)\sim 1/\theta^4$。这个增强来源于小角度时的软光子的交换所带来的因子：$1/q^4$。大家也许还有印象，同样的因子也出现在著名的卢瑟福散射中，这又被称为库仑奇点（Coulomb singularity）。

练习 5.6 *验证公式 (5.40) 和公式 (5.41)。*

[7] 如果按照费曼规则写出 $i\mathcal{M}$ 我们发现，区别仅仅在于初末态粒子的旋量而已，其余的结构完全一致。

¶ 上面我们利用的 $e^-\mu^-$ 散射与正负电子湮灭之间的相似性并不是偶然的。它实际上是普遍的交叉对称性的一个例子。

交叉对称性是一种费曼振幅水平上的对称性。它的表述是，一个任意的散射过程的费曼振幅，如果我们将初态的一个粒子变为末态的相应的反粒子，同时将它的四动量变号，那么这两个费曼振幅相等：

$$\mathcal{M}(\phi(p)+\cdots\to\cdots)=\mathcal{M}(\cdots\to\bar{\phi}(-p)+\cdots)\,. \tag{5.42}$$

这个式子中，$\bar{\phi}$ 表示 ϕ 的反粒子。注意，这个操纵的过程中，粒子和反粒子分别出现在散射过程的初态和末态。它们不是一个过程，而是两个散射过程。事实上，p 和 $-p$ 不可能都是物理的（在壳的）四动量，因为无论对于粒子还是反粒子，我们都要求它的四动量的零分量是正的。

公式 (5.42) 可以从费曼规则来得到。我们发现，两者的差别仅仅在于初末态的粒子的不同。如果是标量粒子的散射，由于它没有任何内部自由度引起的因子，所以公式 (5.42) 必定成立。对于狄拉克费米子来说，如果我们令 $k=(-p)$，我们发现

$$\sum_s u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)=\not{p}+m\equiv-(\not{k}-m)=-\sum_s v^{(s)}(k)\bar{v}^{(s)}(k)\,. \tag{5.43}$$

因此两者在对自旋求和后（除去多余的一个负号之外）相等。有一个需要注意的一点是，当利用交叉对称性得到另一个散射过程的费曼振幅模方时，每改变一个费米子的状态，就会对费曼振幅带来一个多余负号。这个负号虽然可以通过旋量的定义吸收掉，但是更为简单的是直接将其用手消去。

这种交叉对称性在量子电动力学的传播子理论中体现得更为突出。在这种理论框架中，一个沿着正时间传播的电子与一个沿着负时间传播的正电子是“等价”的。这种等价性就直接导致上面的交叉对称性。我们这里并不打算用传播子理论的语言来描述量子电动力学，有兴趣的同学可以参考 Greiner 的教材 [9]。

¶ 为了更为直接地显示两体散射过程中的交叉对称性，我们可以引进所谓的 Mandelstam 变量：s，t 和 u。对于一个一般的两体散射过程：

$$A(p)+B(p')\to C(k)+D(k')\,, \tag{5.44}$$

Mandelstam 变量的定义是：

$$\begin{aligned} s &= (p+p')^2=(k+k')^2\,,\\ t &= (k-p)^2=(k'-p')^2\,,\\ u &= (k'-p)^2=(k-p')^2\,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

显然，这三个变量都是洛伦兹不变量。但是它们并不是完全独立的。它们满足：

$$s+t+u=\sum_{i=1}^{4} m_i^2 \,, \tag{5.46}$$

其中 m_i，$i=1,2,3,4$ 代表四个粒子的静质量。变量 s 实际上就是散射过程 (5.44) 的质心系总能量的平方。关于 t 和 u 的定义有一定的不确定性。两者实际上可以互相转换，只要我们互换末态的两个四动量。

利用 Mandelstam 变量，我们可以将正负电子湮灭成一对正负 μ 子的平均费曼振幅模方为：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2=\frac{8e^4}{s^2}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right] . \tag{5.47}$$

现在我们利用交叉对称性。将正负电子湮灭过程中的正电子（原来过程初态中的粒子）解释为 $e^-\mu^-$ 过程末态的电子；将原先过程中末态中的正 μ 子解释为 $e^-\mu^-$ 过程初态的负 μ 子。但是，我们必须将这些“转换了角色”的粒子的四动量反号。于是我们发现，原先过程中的 Mandelstam 变量 s 刚好与 t 对调位置，u 则不变。同时，由于我们改变了两个费米子的状态，因此没有多余的负号。因此，利用交叉对称性以及上面的正负电子湮灭的振幅模方，我们立刻得到 $e^-\mu^-$ 散射过程的费曼振幅模方：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2=\frac{8e^4}{t^2}\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right] . \tag{5.48}$$

大家很容易验证，这个结果与公式 (5.40) 完全一致（忽略掉质量项）。

练习 5.7 *验证这一点。*

如果两体到两体的散射过程可以看成是交换一个虚粒子完成，那么我们可以根据其费曼图的不同而将散射分为不同的“道”。例如，正负电子湮灭的图被称为 s 道；而 $e^-\mu^-$ 散射则被称为 t 道。不同的道往往体现出完全不同的角度依赖。正如我们上面看到的，s 道一般是角度无关的，而 t 道则明显依赖于角度。

一个一般的两体到两体的散射过程往往会涉及不止一个道。我们前面讨论的两个过程恰好每个过程只包含一个道的贡献。下一节中，我们会讨论更为复杂的过程，例如 Bhabha 散射和 Møller 散射，它们都包含至少两个道。前者包含了 s 和 t 道，而后者则包含了 t 和 u 道。

§19 Bhabha 散射与 Møller 散射

¶ 前两节我们计算了量子电动力学中最为简单的过程。大家也许注意到了，我们小心地选择了散射过程，使得它在最低阶的贡献只有一个费曼图。我们这样做的目的是为了便

于初学者掌握。由于只有一个费曼图，计算的过程相对比较简单，因此大家可以更好地掌握计算的流程以及其中的物理，而不至于在一开始就分散精力到具体的、复杂的计算之中。现在我们有了一定的经验，可以计算稍微复杂一些的量子电动力学过程了。本节中我们将讨论最低阶包含两个费曼图的散射过程。具体来说，就是正负电子散射到正负电子的过程（所谓的 Bhabha 散射）以及两个电子散射到两个电子的过程（所谓的 Møller 散射）。需要特别指出的是，由于散射截面正比于费曼振幅的模方而 费曼振幅由两个费曼图贡献，因此一般来说，两个费曼图所给出的费曼振幅的模方并不等于每个费曼图所对应的费曼振幅的模方的简单相加，还可能存在两个图之间的干涉。这是在一个费曼图时所没有的。另外，两个费曼图所对应的费曼振幅之间还可能由于费米统计而出现相对的符号（参考我们的费曼规则），这也是需要在这类计算中所留心的。如果我们都注意到上面提到的这两点，那么本节中的计算与前面的计算相比，仅仅是复杂程度有所增加而已。所需要的计算技巧实际上与前面的讨论是相同的。因此，为了让大家不至于陷在这些具体烦杂的计算中，我们将略去一些计算的具体步骤。

§19.1 Bhabha 散射

到树图水平，正负电子散射（Bahbha 散射）过程所对应的两个费曼图已经显示在图 5.1 之中，其中左边的图是 s 道，而右边的是 t 道的贡献。如果我们对于各个粒子的四动量和自旋的约定是：

$$e^-(s,p)+e^+(s',p')\to e^-(r,k)+e^+(r',k')\,, \tag{5.49}$$

那么我们可以按照费曼规则写出这个过程的费曼振幅 $i\mathcal{M}$：

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{ie^2}{(p+p')^2}\left(\bar v^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\right)\left(\bar u^{(r)}(k)\gamma_\mu v^{(r')}(k')\right) \\ &- \frac{ie^2}{(p-k)^2}\left(\bar u^{(r)}(k)\gamma^\mu u^{(s)}(p)\right)\left(\bar v^{(s')}(p')\gamma_\mu v^{(r')}(k')\right)\,. \end{aligned} \tag{5.50}$$

特别值得注意的是这两项之间相对的负号。我希望大家可以自己画一画相应的缩并以确认它们之间的确差一个负号。

练习 5.8 *验证这个公式。*

为了简化计算，我们仅仅讨论非极化的散射过程。现在我们需要将公式 (5.50) 给出的振幅模方并且对于初末态电子的极化求和、平均。这会给出三项：s 道振幅的模方、t 道振幅的模方以及两者的干涉项。前两项的计算与我们前面讨论的非常类似。例如，对于纯 s 道的贡献，我们发现：

$$|\bar{\mathcal{M}}|_s^2=\frac{8e^4}{(p+p')^4}\left[(p'\cdot k)(p\cdot k')+(p'\cdot k')(p\cdot k))\right]\,, \tag{5.51}$$

其中我们已经忽略了电子的质量。纯粹 t 道的贡献则是：

$$|\bar{\mathcal{M}}|_t^2 = \frac{8e^4}{(p-k)^4}\left[(p'\cdot k)(p\cdot k') + (k\cdot k')(p\cdot p')\right] . \tag{5.52}$$

s 道和 t 道的干涉项则会涉及 8 个 γ 矩阵乘积的求迹！不过大家不必被它吓住。因为这 8 个 γ 矩阵的乘积中包含两个矢量指标的缩并，因此我们可以利用 γ 矩阵的性质 (A.22) 进行化简。例如：

$$tr\left[\not{p}'\gamma^\mu \not{p}\gamma^\nu \not{k}\gamma_\mu \not{k}'\gamma_\nu\right] = -32(p\cdot k')(k\cdot p') , \tag{5.53}$$

另一个交叉项给出相同的贡献，所以我们有：

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= 8e^4\left[\frac{(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k)(p'\cdot k')}{(p+p')^4} + \frac{(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot p')(k\cdot k')}{(p-k)^4}\right. \\ &+ \left.\frac{2(p\cdot k)(p'\cdot k')}{(p+p')^2(p-k)^2}\right] . \end{aligned} \tag{5.54}$$

现在我们仍然希望利用 Mandelstam 变量， 在忽略电子质量的情形下我们有：

$$\begin{aligned} s &= (p+p')^2 = (k+k')^2 = 2p\cdot p' = 2k\cdot k' , \\ t &= (p-k)^2 = (p'-k')^2 = -2p\cdot k = -2p'\cdot k' , \\ u &= (p-k')^2 = (p'-k)^2 = -2p\cdot k' = -2p'\cdot k , \end{aligned} \tag{5.55}$$

当然，它们现在满足约束关系：$s+t+u=0$。这样一来，我们可以将上面对极化求和、平均后的费曼振幅的模方表达为更为简洁的形式：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] . \tag{5.56}$$

要进一步计算微分散射截面，我们必须固定我们的参照系。为此我们选取：

$$\begin{aligned} p &= (E,0,0,E) , \quad p' = (E,0,0,-E) , \\ k &= (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta) , \quad k' = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta) . \end{aligned} \tag{5.57}$$

于是，利用质心系中微分散射截面的公式 (4.69)，我们可以得到极端相对论性正负电子散射的截面：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right)_{\text{c.m.}} = \frac{\pi\alpha^2}{s}\left[u^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2\right] , \tag{5.58}$$

其中 $\sqrt{s} = E_{\text{c.m.}} = 2E$ 是散射的总能量（质心系中的）。特别值得注意的是，由于 t 道贡献的存在，截面在小的 θ 处也具有典型的库仑奇点。 它仍然是由于极低能的 t 道光子交换引起的。这个公式是 Bhabha 在 1936 年首先得到的（正负电子的散射过程也因此被称为 Bhabha 散射）。它实际上是一般的 Bhabha 公式在极端相对论极限下的特例。

练习 5.9 *验证这个公式。*

§19.2 电子－电子散射

¶ 电子－电子的散射（又称为 Møller 散射）过程可以完全仿照前面的方法进行计算。同样，在最低阶有两个费曼图。由于电子和电子不可能湮灭（电荷守恒），因此这两个费曼图分别对应于 u-道和 t-道。作为一个不错的练习，我们将这个过程的计算完全留给读者。

练习 5.10 *在本练习中，你将计算最低阶的电子－电子散射的截面。*

1. *画出电子－电子散射的最低阶的费曼图。*
2. *按照前面给出的费曼规则，写出它们对应的费曼散射振幅。请特别注意两个振幅之间的相对符号。*
3. *仿照 Bhabha 散射的计算过程，给出电子－电子非极化散射的费曼矩阵元的模方，并且进一步给出质心系中非极化微分散射截面的公式（这称为 Møller 公式）。你会发现使用 Mandelstam 变量是很方便的。*
4. *讨论在非相对论极限（相应的公式被称为 Mott 公式）和极端相对论极限下截面的行为。*
5. *试分析电子－电子的极化散射的情况。*

如果大家完成这些计算的时候有些困难，可以参考其他的量子场论的书籍。

§20 康普顿散射

¶ 在前面几节的讨论中，我们所涉及的散射过程都仅仅包含费米子的初态和末态。本节中我们将讨论初态和末态包含光子的过程。这也是在量子物理发展历史上起了重要作用的过程，即康普顿散射过程。

• • • • •

与康普顿散射相对应的最低阶的费曼图我们显示在图 5.2 之中。利用前面的费曼规则，我们很容易写出这两个图的贡献（注意，由于两个图的区别是交换了光子场，由于光子是玻色子，因此两个图的贡献之间没有相对的负号）：

$$i\mathcal{M} = -ie^2\epsilon^*_\beta(k')\epsilon_\alpha(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\beta(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\alpha}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^\alpha(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\beta}{(p-k')^2-m^2}\right]u(p)\,, \tag{5.59}$$

其中 $\epsilon^*_\beta(k')$ 和 $\epsilon_\alpha(k)$ 是末态和初态光子的偏振矢量。由于 $p^2=m^2$，$k^2=0$，上面的式子可以进一步化简为（利用狄拉克代数以及 $u(p)$ 的性质）：

$$i\mathcal{M} = -ie^2\epsilon^*_\beta(k')\epsilon_\alpha(k)\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\beta\not{k}\gamma^\alpha+2\gamma^\beta p^\alpha}{2p\cdot k}+\frac{-\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\beta+2\gamma^\alpha p^\beta}{-2p\cdot k'}\right]u(p)\,, \tag{5.60}$$

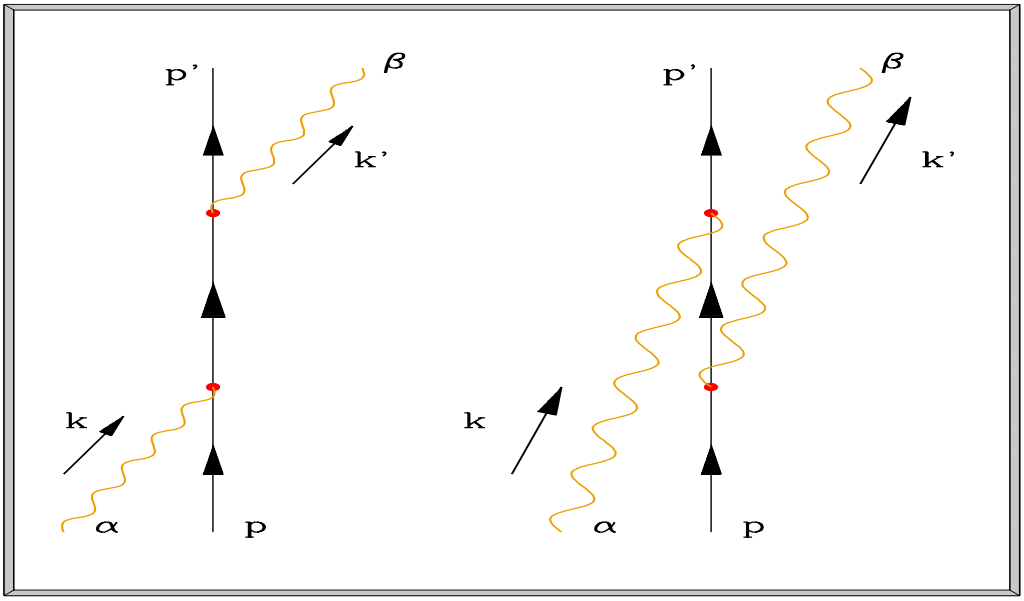


图 5.2：康普顿散射的费曼图。

练习 5.11 *验证这个公式。*

¶ 对光子偏振的求和与瓦德恒等式

让我们首先讨论非极化的康普顿散射。于是，下一步要做的就是将上面得到的费曼振幅取模方并且对初态、末态的自旋、偏振求和、平均。对于电子的自旋求和我们已经知道如何处理了，我们现在需要讨论的就是对于实光子偏振的求和。这个方法其实我们在讨论电磁场的量子化时已经给出了，那就是公式 (3.133)。但是这个公式中的求和还遍及非物理的偏振态，而我们这里需要的是仅仅对于物理的偏振态的求和。

其实，公式 (3.133) 对于仅仅是物理偏振的求和也是对的，这个道理来源于如下的考虑。任何一个包含实光子的量子电动力学过程的费曼振幅总可以写成：

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)\ , \tag{5.61}$$

其中 $\epsilon_\mu(k)$ 表示我们所考虑的实光子的偏振矢量。由于量子电动力学的相互作用的形式是：$A_\mu j^\mu$，其中 $j^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 是电磁流，因此上式中的 $\mathcal{M}^\mu(k)$ 实际上可以看成是电磁流的跃迁矩阵元：

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x}\langle f|j^\mu(x)|i\rangle\ . \tag{5.62}$$

将上式两边用 k^μ 点乘，注意到右边可以利用分部积分将散度作用到 $j^\mu(x)$ 上。于是，我们发现只要电磁流守恒，即：$\partial_\mu j^\mu = 0$，那么我们一定有：

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0\,. \tag{5.63}$$

这个重要的关系式被称为瓦德恒等式。它实际上是流守恒以及规范对称性的直接结果。

现在我们假定我们有一个实光子沿着 $+z$ 方向运动，它的能动量为 $k=(k,0,0,k)$。那么我们利用瓦德恒等式得到：$\mathcal{M}^0(k)=\mathcal{M}^3(k)$。另一方面，物理的光子的偏振方向只能够沿着 x，y 方向。于是，我们发现对于物理偏振的求和可以化为：

$$\sum_{\text{phys.}\epsilon} \epsilon_\mu \epsilon_\nu \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *} = |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 = |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 = -\eta_{\mu\nu}\mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu *}\,. \tag{5.64}$$

换句话说，利用流守恒导致的瓦德恒等式，我们发现对于初末态光子的物理偏振矢量的求和可以简单地换成度规张量：

$$\sum_{\text{phys.}\epsilon} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \Rightarrow -\eta_{\mu\nu}\,. \tag{5.65}$$

¶ Klein-Nishina 公式

了解了处理光子偏振求和的方法，我们可以继续我们的计算。对所有自旋、偏振态求和平均后的费曼振幅的模方可以表达为：

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2}{4}\mathrm{tr}\left\{(\not{p}'+m)\left[\frac{\gamma^\beta \not{k} \gamma^\alpha + 2\gamma^\beta p^\alpha}{2p\cdot k} + \frac{\gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\beta - 2\gamma^\alpha p^\beta}{2p\cdot k'}\right]\right. \\ &\quad \left.\times\ (\not{p}+m)\left[\frac{\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha}{2p\cdot k} + \frac{\gamma_\beta \not{k}' \gamma_\alpha - 2\gamma_\alpha p_\beta}{2p\cdot k'}\right]\right\}\,. \end{aligned} \tag{5.66}$$

下面要做的就是将上式展开，这将产生四项：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{4}\left[\frac{A}{(2p\cdot k)^2} + \frac{B}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')} + \frac{C}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)} + \frac{D}{(2p\cdot k')^2}\right]\,. \tag{5.67}$$

其中系数 A，B，C，D 是一系列 γ 矩阵的求迹。显然，$B=C$，并且A 和 D 的区别也仅仅在于 $k \Leftrightarrow -k'$，因此，我们只需要认真计算A 和 B，然后进行相应的替换就可以了。下面就具体来计算它们。

首先看 A 的计算。它的具体表达式为：

$$A = \mathrm{tr}\left[(\not{p}'+m)(\gamma^\beta \not{k} \gamma^\alpha + 2\gamma^\beta p^\alpha)(\not{p}+m)(\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta + 2\gamma_\beta p_\alpha)\right]\,. \tag{5.68}$$

利用 γ 矩阵的性质，特别是奇数个 γ 矩阵的乘积的迹为零以及缩并性质 (A.22)，我们最后得到（其计算过程十分类似我们前面关于 Bhabha 散射截面中的计算，参见第 §19.1 小节）：

$$A = 16(4m^4 - 2m^2 p\cdot p' + 4m^2 p\cdot k - 2m^2 p'\cdot k + 2(p\cdot k)(p'\cdot k))\,. \tag{5.69}$$

这个公式的另外一个比较优雅的写法是利用 Mandelstam 变量。在康普顿散射的情形下它们的定义是：

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = 2p\cdot k + m^2\ ,\ t = (p'-p)^2 = -2p\cdot p' + 2m^2 = -2k\cdot k'\ , \\ u &= (k'-p)^2 = -2k'\cdot p + m^2 = -2k\cdot p' + m^2\ . \end{aligned} \tag{5.70}$$

利用它们 A 可以表达为：

$$A = 16(2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2))\ . \tag{5.71}$$

令 $k \Leftrightarrow -k'$，或者等价地说将 s，u 互换，我们就得到 D：

$$D = 16(2m^4 + m^2(u-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2))\ . \tag{5.72}$$

完全类似的，我们可以得到系数 B 和 C：

$$B = C = -8(4m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2))\ . \tag{5.73}$$

将上述四项相加，我们就得到了对极化平均、求和以后的费曼振幅的模方：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2\left(\frac{m^2}{p\cdot k} - \frac{m^2}{p\cdot k'}\right) + \left(\frac{m^2}{p\cdot k} - \frac{m^2}{p\cdot k'}\right)^2\right]\ . \tag{5.74}$$

练习 5.12 *验证公式 (5.74)。*

¶ 要进一步计算散射截面，我们需要选取一个特定的参照系。原始的康普顿散射的讨论总是选取所谓的“实验室系”，也就是初态电子处于静止的参照系。因此，$k = (\omega, \omega\hat{\mathbf{z}})$，$p = (m, 0)$。我们将末态光子的动量 $\mathbf{k}'$ 与 z 轴的夹角记为 θ，光子末态的能量记为 ω'。相对论运动学的研究告诉我们：

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{m}(1-\cos\theta)\ . \tag{5.75}$$

这就是当年康普顿得到的光子频率改变的著名公式，它因此被称为康普顿公式。

练习 5.13 *证明公式 (5.75)。*

我们下一步需要考虑的是两体末态相空间的积分。由于存在能动量守恒，因此两体末态相空间的积分可以大大简化。我们在上一章中曾经计算了质心系中的表达式 (4.69)。现

在我们来考虑实验室系中的表达式：

$$\begin{aligned}\int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega'}\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+p'-k-p)\,,\\ &= \int \frac{\omega' d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E'}(2\pi)\delta(\omega'+\sqrt{m^2+\omega^2+(\omega')^2-2\omega\omega'\cos\theta}-\omega-m)\\ &= \int \frac{d\cos\theta}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\frac{1}{\left|1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\right|}\\ &= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\frac{(\omega')^2}{\omega m}\,. \end{aligned} \tag{5.76}$$

在上面的第二个等式，我们运用了三维的动量守恒的 δ-函数以及运动学的结论；最后一步我们利用了康普顿公式 (5.75)。将这个结果带入到截面的定义式 (4.67) 中，并且利用我们前面得到的费曼振幅模方的表达式 (5.74)，在经过一系列初等的运算后，我们就得到了非极化的康普顿散射的微分截面公式：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right]\,. \tag{5.77}$$

这就是著名的 Klein-Nishina 公式。其中的末态光子的能量由康普顿公式 (5.75) 给出。特别值得注意的是，对于极其低频的光子，$\omega'/\omega\to 1$，我们重新得到经典电动力学中的汤姆孙截面公式：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1+\cos^2\theta)\,,\ \sigma_{\rm tot}=\frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\,. \tag{5.78}$$

¶ 正负电子湮灭

利用前面提到的交叉对称性，我们可以从康普顿散射的计算结果中得到另一个重要的结果，那就是正负电子湮灭成两个光子：

$$e^-(p_1)+e^+(p_2)\to\gamma(k_1)+\gamma(k_2)\,, \tag{5.79}$$

过程的截面。大家可以验证，我们需要的是如下的替换：

$$p\to p_1\,,\ p'\to -p_2\,,\ k\to -k_1\,,\ k'\to k_2\,. \tag{5.80}$$

这样一来费曼振幅的模方 (5.74) 变为：

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2=-2e^4\left[\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_1}+\frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_2}+2m^2\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1}+\frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)-m^4\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1}+\frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)^2\right]\,. \tag{5.81}$$

这个表达式中的总体的负号，按照我们在交叉对称性的讨论中指出的，应当直接去掉。

要计算散射截面我们需要选取特定的参照系。显然质心系是合适的。不失一般性，我们选取：$p_1 = (E, p\hat{\mathbf{z}})$，$p_2 = (E, -p\hat{\mathbf{z}})$，$k_1 = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta)$，$k_2 = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta)$。质心系中的微分散射截面为：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{E}{p}\right)\left[\frac{E^2 + p^2\cos^2\theta}{m^2 + p^2\sin^2\theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2\sin^2\theta} - \frac{2m^4}{(m^2 + p^2\sin^2\theta)^2}\right]. \tag{5.82}$$

这个公式在极高能的极限下变为：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \simeq \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right). \tag{5.83}$$

这个截面具有极强的角度依赖性：湮灭成的光子对更多的集中在原先正负电子束流的方向。如果要计算总的散射截面，我们必须注意一点：末态的两个光子是全同粒子。因此按照全同粒子不可区分的原则，我们在计算角度积分的时候，角度 θ 只能够从 0 积分到 $\pi/2$，而不是 π。

练习 **5.14** *验证这些公式。*



相关的阅读

这一章我们讨论了 QED 基本树图过程。通过这一章的研究，读者应当熟悉计算树图过程的基本流程以及每一步所需要的基本技巧，这主要包括如何将对极化的求和、平均转化为 γ 矩阵的求迹、如何计算一系列 γ 矩阵乘积的迹、如何选取适当的参照系并得到散射截面等等。我们还讨论了交叉对称性。这对于我们研究各种不同的量子电动力学过程是十分有用的。

应当承认，本章的计算对于一个初学者来说还是有相当挑战性的。我希望大家能够真正仔细地推导这些公式（至少应当尝试一次），只有这样才能够真正有所感觉。另外，由于课时的限制，我们显然不可能讨论所有重要的量子电动力学的过程。有兴趣进一步扩大这方面信息的同学可以去参考相关的文献。

第六章　量子电动力学的辐射修正

本章提要

- 电子自能（§21）
- 真空极化（§22）
- 电子顶点函数（§23）
- QED 的微扰重整化（§24）

前一章中我们讨论了量子电动力学的一些重要过程。这些过程所对应的费曼图有一个共同点，它们都不包含圈。这样的费曼图被称为**树图**。可以证明（见第 §24.1小节的公式 (6.82) 以及那里相关的讨论），对于一个初末态给定的过程，按照耦合参数的逐阶微扰展开就是按照相应费曼图的圈数的展开。因此，按照微扰论的逻辑，树图构成了量子电动力学各种过程的最重要贡献。显然，量子电动力学中还存在着更高阶的过程，这些过程的费曼图都包含圈。相应的费曼图也被统称为**圈图**。这些圈图过程又被称为辐射修正。

第 4 章中给出的量子电动力学费曼规则已经告诉了我们处理圈图的一般原则：凡是有圈的费曼图，一定会出现相应的不确定内动量。费曼规则告诉我们，我们必须对这些不确定的内动量积分，而积分的范围则是整个（无穷的）四动量空间。如果这些积分在通常数学意义下是收敛的，那么这些包含圈的费曼图本质上并不比树图复杂太多。由于这些圈图总是比起树图具有更高阶的耦合常数的压低，因此，只要相应的耦合常数足够小，它们的贡献的确比相应的树图小，而这正是微扰论的基本出发点。

然而，真实的情况要复杂而不幸得多。我们会发现，对于很多包含圈的费曼图，当我们试图对于不确定的内动量积分时，这些积分在数学意义上是发散的积分。这些发散大致可能出现在两个区域：一个是在内动量很小的区域，这类发散往往被称为**红外发散**；另一类发散则出现在内动量趋于无穷的区域，这类发散被称为**紫外发散**。

事实上，无论是红外发散还是紫外发散都绝不仅仅是数学上一个不幸的巧合，它们的出现是有着深刻的物理原因的。系统地研究和处理这些发散的方法被称为重整化。重整化是量子场论的核心内容，也是量子场论真正区别于普通量子力学的最本质特征。由于课程的安排，我们这个课程中不可能对重整化做一个相对完备的讲授，我们只能够以量子电动力学为例，从技术层面说明如何处理这些发散，其余更为系统的内容将放在量子规范场论中讲授。同时，我们将仅仅涉及紫外发散。红外发散的处理是一个相对独立的内容，有兴趣的同学可以参考相关的书籍和文献。

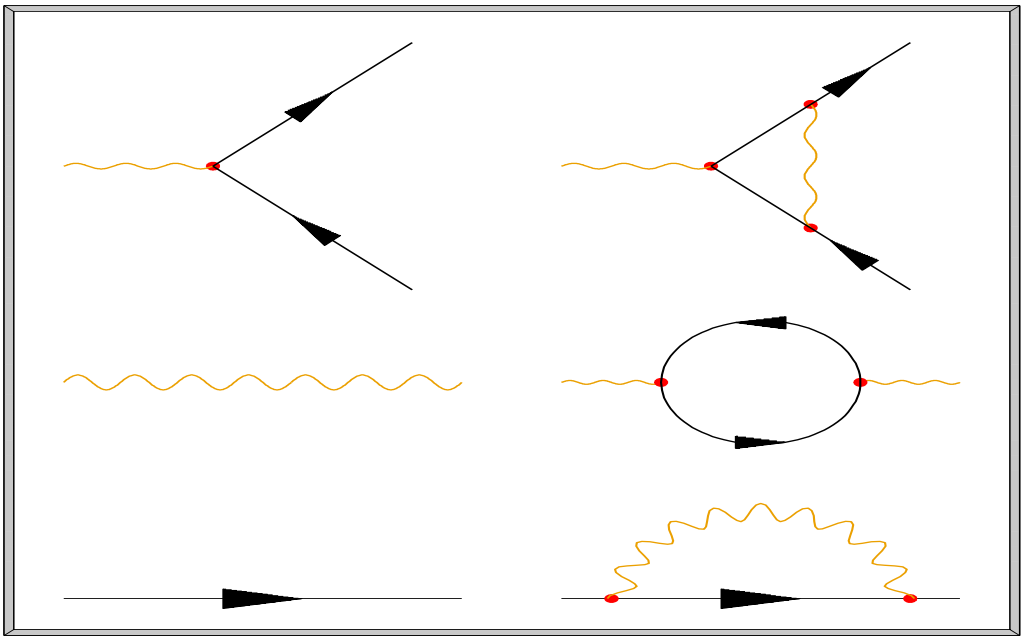


图 6.1：量子电动力学中的一圈图。从下往上，它们分别对应于电子的自能、真空极化（即光子的自能）以及电子的顶点函数（即相互作用顶点的修正）。

从构成费曼图的元素来看，量子电动力学的元素包括三种：电子传播子、相互作用顶点和光子传播子。在微扰论的最低阶，它们可以用自由的电子传播子、基本相互作用顶点和自由光子传播子来表示。如果考虑到下一阶，那么包含一个圈的费曼图就会修正相应的最低阶贡献。这些一圈的修正被分别称为电子的自能、真空极化（也就是光子的自能）以及电子的顶点函数（即相互作用顶点的修正）。在图 6.1 中，我们显示了这些物理量的树图和一圈图。我们这一章中的主要内容就是处理这些一圈图。由于这些图是紫外发散的，我们必须首先利用某种方法将它们变为有限。这个操作在量子场论中被称为正规化。正规化有多种方法，我们将简单介绍泡利－维拉斯正规化、动量截断正规化、以及维数正规化等三种方法。最后，我

们会结合量子电动力学中的实例大致说明重整化的物理思想以及它的结论。

§21 电子自能

¶ 考虑电子的完全传播子：$\langle\Omega|T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|\Omega\rangle$ 的傅立叶变换。按照第 4 章第 §15 节的讨论，我们只需要计算其单粒子不可约（1PI）图的贡献。如果我们将所有电子自能的单粒子不可约图的贡献记为 $-i\Sigma(p)$，其中 p 是外动量，那么电子的（动量空间的）完全传播子可以写为：

$$\int d^4x\langle\Omega|T[\psi(x)\bar{\psi}(0)]|\Omega\rangle e^{ip\cdot x}=\frac{i}{\not p-m_0-\Sigma(\not p)}\,. \tag{6.1}$$

到一圈的水平，我们不难按照量子电动力学的费曼规则写出 $\Sigma(p)$ 的具体表达式：

$$-i\Sigma(p)=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\frac{i}{\not k-m_0+i\epsilon}\gamma_\mu\frac{-i}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon}\,. \tag{6.2}$$

特别注意光子传播子带来的额外符号以及对不确定的内动量 k 积分。为了避免不必要的红外发散，我们人为地给光子的传播子加上了一个质量项：μ^2。在最终的物理结果里面，我们会取 $\mu^2\to 0$，不过在中间的计算中保持一个有限的光子质量项将是方便的。

练习 6.1 *利用量子电动力学的费曼规则，验证上面这个公式。*

计算量子场论中的圈图时，要做的第一步就是将几个传播子结合成一个。这可以利用费曼参数积分公式：

$$\frac{1}{ab}\equiv\int_0^1 dx\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}\,. \tag{6.3}$$

这里的积分参数 x 被称为费曼参数。

练习 6.2 *证明公式 (6.3)。*

运用这个公式到自能表达式中的两个传播子我们得到：

$$\frac{1}{k^2-m_0^2+i\epsilon}\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon}=\int_0^1 dx\frac{1}{[k^2-2xk\cdot p+xp^2-x\mu^2-(1-x)m_0^2+i\epsilon]^2}\,.$$

现在我们可以将积分变量 k 平移一个合适的（与 p 有关）常数：$l=k-xp$，这样可以将上式分母中的线性依赖于 k 的项去掉。我们得到：

$$-i\Sigma(p)=-e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{-2x\not p+4m_0}{[l^2-\Delta+i\epsilon]^2}\,, \tag{6.4}$$

其中 $\Delta = x\mu^2 + (1-x)m_0^2 - x(1-x)p^2$。简单的考察发现，上述对于圈动量 l 的积分在大 l 的地方是对数发散的。这就是我们前面提到的紫外发散。显然，我们必须对它采取一些特殊的措施。

¶ 泡利－维拉斯正规化

为了使得 6.4 变得有限，我们必须修改原先的关于 $\Sigma(p)$ 的公式。例如，一种办法是将其中的光子传播子做如下的替换：

$$\frac{1}{(k-p)^2-\mu^2+i\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{(k-p)^2-\mu^2+i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\epsilon}\,, \tag{6.5}$$

其中 Λ 是一个很大的质量。在 $\Lambda \to \infty$ 的极限下，我们又回到了通常的光子传播子，但是如果我们保持一个大而有限的 Λ，上述的光子传播子在大的动量区域会衰减的更快，从而使得积分变为有限。上述的操作在量子场论中被称为正规化，而引入的大的质量 Λ 被称为这种正规化方法中的截断（cut-off）。笼统来说，正规化就是通过引入截断使得原先紫外发散的物理量变为有限的方法。正规化的方法有许多并有一定的任意性。公式 (6.5) 中引入的正规化方法通常被称为泡利－维拉斯正规化方法（Pauli-Villars regularization）。

¶ 在继续完成具体的积分计算之前，让我们稍稍暂停，仔细思考一下正规化的含义。尽管我们在第 4 章中的第 §10 节中也谈到了量子场论中的截断问题，但是这里是我们真正在具体的计算中涉及截断和正规化，因此很有必要认真思考一下它的含义。

上面引入截断和正规化的方法虽然是标准的，但它往往会给读者——特别是刚刚接触量子场论的读者——一种误解：即认为截断是我们在量子场论的理论框架之外引进的、非物理的东东。很多人会误以为我们已经有了一个严格定义的量子场论系统，这个量子场论导致的电子自能（准到一圈的结果）应当由公式 (6.4) 给出。然后，由于这个表达式有紫外发散，我们必须人为地引入一个截断 Λ 和某种正规化方法来处理它。这种观点其实是不正确的。它的最大的错误就在于割裂了截断、正规化和量子场论之间的关系。正如我们前面也多次提到过的，对于一个相互作用的量子场论而言，截断不是置身于量子场论之外的一个人为引进的“外来物种”，而是量子场论本身不可分割的重要组成部分。也就是说，并不存在一个完全独立于截断和正规化之外的量子场论。具体到我们这里的电子自能的例子，公式 (6.4) 其实根本就不是一个公式（尽管我还把它用红色框框罩起来），因为在确定了截断和正规化方案之前，它在数学上根本是没有定义的！[1] 因此，截断和正规化（以及我们后面要讨论的重整化）其实是定义一个相互作用量子场论过程中不可或缺的部分，它们的引入是在进一步完成我们前面尚未完成的、相互作用量子场

[1] 按照数学家的观点，公式 (6.4) 并不是一个有意义的表达式。当然，有些物理学家也许不喜欢这么极端，他们往往称它为“形式表达式”，意思就是说“写写看看的，别认真”。

论的（微扰）定义过程。事实上，只有完成了截断、正规化以及重整化以后，一个量子场论理论体系的定义才真正得以完成。

截断和正规化另一让人困惑的地方在于它的任意性（或者叫随意性）。对于一个发散的费曼图，我们原则上可以有 N 多种引进截断和正规化的方法。直觉告诉我们，任何（远低于截断能标的）物理上可测量的量不可能敏感地依赖于我们的截断和正规化方案，而这一点恰恰是重整化所完成的。也就是说，截断和正规化对于一个量子场论理论框架的定义是不可或缺的，但是它们的具体方法却对物理观测量没有太大的影响，只要我们随后的正规化和重整化的定义是自洽的。从这个角度来说，我们也许可以称截断为“半物理”的量。结合这里的讨论，大家或许可以“回头看”一下第 4 章第 §10 节中关于“尺度与量子场论的截断”部分的讨论，应当会有一些新的体会。

¶ 现在让我们再回到前面中断的电子自能的计算。如果我们采取泡利－维拉斯正规化，那么我们的电子自能的表达式 (6.4) 将变为两项之差：

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{[l^2-\Delta]^2} \Rightarrow \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[l^2-\Delta]^2}-\frac{1}{[l^2-\Delta_\Lambda]^2}\right), \tag{6.6}$$

其中 $\Delta_\Lambda = x\Lambda^2+(1-x)m_0^2-x(1-x)p^2$。对于任意有限大的 Λ，这个积分已经是收敛的了。

现在我们可以来完成被正规化以后的电子自能了。利用传播子中的 $+i\epsilon$，我们可以将 l_0 的积分在 l_0 复平面逆时针旋转 90°。也就是说，我们令：$l_0 = il_E^0$，于是：$l^2 = -l_E^2$。这个过程通常被称为 Wick 转动。最后我们可以完成角度和 l_E 长度的积分得到：

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx(2m_0 - x\not{p})\ln\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2+x\mu^2-x(1-x)p^2}\right). \tag{6.7}$$

这就是正规化以后电子的自能表达式。显然，由于正规化的引入，它形式上变得有限了。但是，如果我们取截断 $\Lambda\to\infty$，它仍然是对数发散的。

练习 6.3 *验证公式 (6.7)。*

前面曾经提到过，真正物理的单粒子态的质量（在量子电动力学中也就是电子的物理质量）对应于它的完全传播子的极点，或者说由：

$$[\not{p} - m_0 + \Sigma(\not{p})]_{\not{p}=m} = 0\,, \tag{6.8}$$

给出。因此我们可以得到电子质量的移动：

$$\delta m = m - m_0 = \frac{\alpha m_0}{2\pi}\int_0^1 dx(2-x)\ln\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2m_0^2+x\mu^2}\right). \tag{6.9}$$

这个质量的移动也是紫外发散的。而且，如果 Λ 足够地大，我们可以简化上式为：

$$\delta m = \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right) . \tag{6.10}$$

这其实也就是困扰量子电动力学早期的研究者们的问题：如果我们按照量子电动力学来计算电子的自能，我们将得到了紫外发散（对数发散）的结果。

电子自能的发散其实并未使得量子电动力学的早期研究者们感到特别意外，因为如果我们按照经典电动力学来计算电子的自能，我们同样得到发散的结果。事实上，如果我们假定电子是一个点粒子并且计算一个电子的总的静电能，它也是发散的。如果我们假定电子有一个最小的尺度，比如说是 $1/\Lambda$，其中 Λ 是一个很大的能标，那么我们发现经典电动力学给出的电子静电能应当正比于 Λ。也就是说，如果 $\Lambda \to \infty$，电子的静电能是线性发散的。我们前面的量子电动力学的计算给出的发散 (6.10) 实际上比起经典的结果已经降低了发散的程度。[2]

¶ 质量重整化

在讨论 Källén-Lehmann 谱表示以及 LSZ 约化公式的时候我们曾经指出，裸质量 m_0 实际上仅仅是拉氏量中的一个参数而已。真正的物理质量由完全的、动量空间的两点编时格林函数的极点给出，即公式 (6.8)。换句话说，我们真正在实验上测量的、电子（同时也是正电子）的物理质量是 m 而不是 m_0。如果不存在紫外发散的问题，那么只要理论的耦合参数足够小，m 和 m_0 差别就足够小。也就是说，我们总是可以写为：$m_0 = m + \mathcal{O}(\alpha)$。但是，现在的问题是，所谓的“小量” $\mathcal{O}(\alpha)$ 实际上是一个紫外发散的量。

特别需要注意的是，这个发散实际上不仅仅影响一圈的结果，而且它迫使我们重新思考上一章的树图计算。我们上一章的树图计算中都会涉及电子的质量以及耦合参数。按照完全的微扰论的逻辑，我们应当从拉氏量的质量参数（也就是裸质量） m_0 和裸的耦合参数 $\alpha_0 = e_0^2/(4\pi)$ 出发，假定裸的耦合参数 α_0 是足够小的，然后进行系统的微扰论计算，逐阶得到我们需要的物理量。在最低阶，树图的结果依赖于 m_0 和 α_0。但是，这个结果并不能与实验结果比较。因为，m_0 并不对应于物理的电子质量。由于我们进行实验的是电子，它的质量是 m 而不是 m_0，我们需要将结果中的 m_0 都代换为物理质量 m。正象物理的质量不是 m_0 一样，事实上物理的耦合参数也不是 α_0，而是另外的一个 α，我们将在第 §22 节中更详细地讨论这一贡献。注意，只有这个物理的耦合参数 α 才是我们实验上发现接近 1/137 的那个耦合参数，而裸的的耦合参数 α_0 其实并不是。类似于裸质量与物理质量的关系，我们也有：$\alpha_0 = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$。其中的 $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 也将是包含紫外发散的。

显然，将我们希望计算的物理量按照一些非物理的参数（例如：m_0，α_0）来表达是相当不明智的，因为我们对这些参数的取值完全没有任何理论或实验的了解。更为明智的做法是将所有的物理量用物理的参数，也就是物理质量 m 和物理耦合参数 α 来表达，

[2] 其中的原因可以由手征对称性来理解。手征对称性决定了质量的移动一定正比于 m_0，于是，量纲分析告诉我们它只能够对数地依赖于 Λ。

这些才是我们从实验上可以确定的参数。注意，无论用哪一套参数来表达，一圈图都包含紫外发散。在适当地正规化以后，我们总是可以在微扰论的理论框架下，将一套参数转换为另一套参数。就电子质量来说，我们有：

$$m = m_0 + \delta m \ , \delta m \simeq \mathcal{O}(\alpha) \ . \tag{6.11}$$

注意，物理质量 m 是我们在实验上确定的值，它不依赖于我们如何来正规化；δm 在正规化以后是有限的，但是它包含对数发散的贡献，即：$\delta m \sim \alpha \ln \Lambda$。上面的式子要有意义，实际上要求 m_0 同样也包含对数发散的贡献，这样它才能够在与 δm 相消以后，剩下的物理质量 m 不包含对数发散的贡献。正因为如此，δm 又被称为质量的抵消项（counter-term）。这实际上就是质量参数的重整化。显然，由于物理的一套参数一方面在实验上可以直接测量的，另一方面它们本身不包含紫外发散的贡献，因此在微扰计算时使用它们应当更为方便。我们称按照 m_0，α_0 进行微扰展开的微扰论为裸微扰论；称利用物理的参数 m，α 进行微扰展开的微扰论为重整化的微扰论。

我们现在可以想像，量子电动力学的裸微扰展开中，到任意圈的水平，可以包含各种紫外发散。但是，如果我们将其中的裸参数都换成重整化的参数，是否就可以几乎不依赖于截断了呢？这个问题的答案是肯定的。[3] 换句话说，在微扰论的框架下，量子电动力学中的所有发散都可以吸收到参数的重新定义之中。在这个意义上，我们称量子电动力学是（微扰）可重整的量子场论。或者说它具有（微扰）可重整性。我们这个课程之中将不去证明这一点。我们将仅仅满足于在一圈水平上演示这个结果。更加系统的重整化的理论，将在量子规范场论课程之中讨论。我们下面的讨论中，将直接运用物理的参数来替代裸参数。

¶ 场强重整化

按照第 §15 节中的讨论，我们可以定出电子传播子的场强重整化因子 Z_2，它是电子完全传播子在其物理极点处的残数。因此我们有：

$$\begin{aligned} \delta Z_2 &= Z_2 - 1 = \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[-x \ln \frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} + \frac{2x(1-x)(2-x)m^2}{(1-x)^2 m^2 + x\mu^2} \right] \end{aligned} \tag{6.12}$$

这个结果仍然是对数发散的。我们后面（参见第 §23节最后）会说明如何来吸收和化解这个紫外发散。

[3] 事实上，不仅仅需要将裸的参数用重整化的参数替代，还需要引进场强重整化。

§22 真空极化

¶ 这一节中我们将讨论量子电动力学中的另一个重要的一圈图，即所谓的真空极化（vacuum polorization）图，即图 6.1 中的第二行的一圈图，它实际上也就是光子的自能图。我们真正需要计算的是图中单粒子不可约的部分。到一圈水平，这仅仅包含正负电子圈，它对于单粒子不可约图的贡献是：

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2(-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} tr\left[\gamma^\mu \frac{i}{\not k - m}\gamma^\nu \frac{i}{\not k + \not q - m}\right] . \tag{6.13}$$

一般来说（不仅仅是一圈），函数 $\Pi^{\mu\nu}$ 必定满足：

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0 , \tag{6.14}$$

于是，我们可以将 $\Pi^{\mu\nu}$ 的张量结构分出写成：

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) , \tag{6.15}$$

其中 $\Pi(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 时保持有限。这个结果在一圈的水平（即公式 (6.13)）可以直接验证。对于更高阶，它可以从量子电动力学的瓦德恒等式得到证明。

• • • • •

¶ 电荷重整化

将所有的单粒子不可约贡献的几何级数都相加，我们发现光子的完全传播子（动量空间的）可以表达为：

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2(1-\Pi(q^2))} . \tag{6.16}$$

也就是说，只要计算出函数 $\Pi(q^2)$ 就可以得到光子的完全传播子，并且这个结论对微扰论的任意阶都是成立的。上面的完全光子传播子的一个重要特性是，由于函数 $\Pi(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 处有限，传播子的极点永远位于 $q^2 = 0$。这意味着，物理的光子永远是无质量的。这个结果密切依赖于 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的特殊张量结构，即它必须具有公式 (6.15) 所示的结构。否则，辐射修正一般会破坏光子的无质量性。例如，我们下面很快会看到，如果我们选择不恰当的正规化手段，就会破坏这个结构，从而破坏光子的无质量性。

现在注意到函数 $\Pi(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 时有限，因此在 $q^2 \to 0$ 时，光子传播子的行为是：

$$D^{\mu\nu}(q) \sim \frac{-iZ_3\eta^{\mu\nu}}{q^2} , Z_3 \equiv \frac{1}{1-\Pi(0)} . \tag{6.17}$$

换句话说，所有的光子传播子在考虑了辐射修正以后都被乘以了一个因子 Z_3。这个因子不仅仅影响光子传播子，由于电磁相互作用最基本的形式就是传递光子，因此它也会改

变两个（无穷重的）测试电荷之间的库仑相互作用。具体来说，我们发现原先的 e^2 要被替换为 Z_3e^2，或者说：$e \to \sqrt{Z_3}e$。需要特别强调指出的是，实验上真正测到的物理电荷是 $\sqrt{Z_3}e$。为了方便，我们将用 e 来表示物理电荷，而用 e_0 来表示出现在拉氏量中的电荷，它自然被称为裸电荷。它们之间的关系可以表达为：

$$e = \sqrt{Z_3}e_0 \,. \tag{6.18}$$

如果不考虑圈图，那么 $Z_3 = 1$，即物理电荷与裸电荷相同；如果考虑了圈图的修正，我们很快会发现，在微扰论中 Z_3 是紫外发散的。

电荷重整化是描写 $q^2 = 0$ 处的耦合常数的重整化。我们实际上还可以考虑 $q^2 \neq 0$ 处的相互作用。这时的光子传播子可以写为：

$$\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e_0^2}{1-\Pi(q^2)}\right) \sim \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e^2}{1-[\Pi(q^2)-\Pi(0)]}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \,. \tag{6.19}$$

其中我们已将裸电荷换成了重整化的（物理的）电荷，因此分母上相应地减去了 $\Pi(0)$。这个式子告诉我们，对于一个 $q^2 \neq 0$ 的散射过程，我们可以定义一个 q^2 依赖的、有效耦合常数：

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1-[\Pi(q^2)-\Pi(0)]} \,. \tag{6.20}$$

¶ $\Pi(q^2)$ 的计算、动量截断正规化与规范对称性

下面我们具体来计算一圈图对于 $\Pi(q^2)$ 的贡献。我们有：

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - \eta^{\mu\nu}(k\cdot(k+q) - m^2)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} \,, \tag{6.21}$$

其中我们已经将裸的质量和电荷全部换成了重整化的（物理的）质量和电荷。按照微扰论的逻辑，两者的差别将是更高阶的贡献。

现在我们利用费曼参数积分将上式中分母的两个因子结合起来：

$$\frac{1}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + x(1-x)q^2 - m^2]^2} \,, \tag{6.22}$$

其中我们令：$l = k + xq$。用 l 来表达分子，我们发现分子可以写为：

$$2l^\mu l^\nu - \eta^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) + \text{线性依赖于 } l \text{ 的项} \,. \tag{6.23}$$

由于分母仅仅包含 l^2，因此分子上线性依赖于 l 的项对于积分没有贡献。同时，对称的组合：$l^\mu l^\nu$ 可以置换为：$(1/4)\eta^{\mu\nu}l^2$。再进行通常的 Wick 转动：$l^0 = il_E^0$，从而 $l^2 = -l_E^2$，我们就得到：

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2+\Delta)^2} \,, \tag{6.24}$$

其中 $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$。这个积分显然是紫外发散的。事实上，如果我们简单的引进一个 l_E^2 的截断，Λ^2，上式的分子中包含 l_E^2 的项是平方发散的：$\sim e^2\Lambda^2$，而常数项是对数发散的：$\sim e^2 \ln\Lambda$。

上式中的平方发散的项是相当糟糕的。它的出现意味着到一圈水平，光子会产生一个正比于截断 Λ 的质量。这显然与物理的光子是无质量的物理事实相左。当然，我们可以在原先的拉氏量中一开始就引入一个光子的质量项，但是这将破坏规范对称性。这个问题的根源在于，我们上面直接引进的截断－这个正规化的方法又被称为动量截断（sharp momentum cut-off）正规化－是破坏规范对称性的。我们知道，光子的无质量性与理论的规范对称性是紧密联系在一起的。尽管我们的经典拉氏量具有规范对称性，但是由于量子场论的圈图具有紫外发散，因此它需要一种正规化的方法。如果这个正规化的方法本身破坏规范对称性，那么即使原先经典水平的拉氏量具有规范对称性，理论的规范对称性在量子水平仍然会被破坏。我们这里看到的就是这样一个例子。动量截断正规化是一种破坏规范对称性的正规化方法。因此，到一圈水平，理论中就会出现平方发散，它直接破坏规范对称性和光子的无质量性。尽管使用加上质量项的量子电动力学最终也是可以使得物理的光子质量仍然保持为零，但是那将是十分复杂而别扭的事情。更为理想的处理方法是寻找一种更加温和的、尊重规范对称性的正规化方法。这就是我们下面要介绍的维数正规化。

¶ 维数正规化

维数正规化是假定我们的时空维数为 d，然后将量子场论的圈图的积分看成是 d 的（复）函数。它利用了下列事实：如果 d 足够的小，圈积分实际上是收敛的。对于物理的情形，$d \to 4$ 会导致紫外发散。但是，圈积分的数值可以通过小 d 区域的值解析延拓过来。

具体到我们目前的例子，我们需要下列两个积分公式：

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}} , \tag{6.25}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma\left(n-\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} , \tag{6.26}$$

练习 6.4 *证明这两个公式。*

我们发现，紫外发散体现在 Γ-函数的宗量趋于零或者是负的整数。例如如果我们令：$d = 4-\epsilon$，那么我们有：

$$\Gamma(2-\frac{d}{2}) = \Gamma(\epsilon/2) \sim \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) , \tag{6.27}$$

其中 $\gamma_E \simeq 0.5772$ 是著名的欧拉常数。这就是所谓的维数正规化方案。我们看到，在维数正规化下，紫外发散体现为正比于 $1/\epsilon$ 的贡献。

在 d 维时空中，它的度规满足：$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = d$。因此，我们在替换分子上的$l^\mu l^\nu$ 必须利用：

$$l^\mu l^\nu \to \frac{1}{d} l^2 \eta^{\mu\nu} , \tag{6.28}$$

另外，我们还必须修正 γ-矩阵的定义。d 维时空的 γ-矩阵共有 d 个，它们满足：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\mu} . \tag{6.29}$$

另外，γ-矩阵的缩并的关系也会相应改变。相关的公式我们列在附录之中（参见附录中的公式 (A.23)）。

¶ 维数正规化下的 $\Pi(q^2)$ 的计算

利用前面介绍的维数正规化的公式，我们很容易计算出一圈时单粒子不可约的贡献：

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Delta^{2-d/2}} \left[2x(1-x)(q^2\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\right] . \tag{6.30}$$

我们发现，采用了维数正规化以后，$\Pi^{\mu\nu}(q)$ 果然具有我们所期待的张量结构 (6.15)。于是我们得到：

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Delta^{2-d/2}} , \\ &\sim -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\Delta - \gamma_E + \ln(4\pi)\right) , \end{aligned} \tag{6.31}$$

其中第二个展开式我们假定 $\epsilon = 4 - d$ 是小的。这个式子说明，在维数正规化下，$\Pi^{\mu\nu}(q)$ 的确具有我们所期待的张量结构（保持规范对称性），但是 $\Pi(q^2)$ 仍然是紫外发散的（体现在上式的 $1/\epsilon$ 的贡献中）。由此我们可以得到电荷重整化常数：

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 = \Pi(0) \sim -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon} . \tag{6.32}$$

当然，它也是紫外发散的。这个发散并不是物理上可以直接测量的。物理上真正感受到的是各种散射过程中交换光子的有效耦合常数 (6.20)。由于它包含 $\Pi(q^2) - \Pi(0)$，我们发现它实际上是有限的。到一圈图的结果是：

$$\hat{\Pi}(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx\, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right) . \tag{6.33}$$

下面我们将简要讨论真空极化所造成的物理效应。

练习 6.5 *验证这个公式。*

¶ 对经典电磁理论的修正

显然，由于函数 $\hat{\Pi}(q^2)$ 的出现，包含量子效应（真空极化）的量子电动力学将会修正我们所熟悉的经典电动力学的相互作用。

我们首先来考虑非相对论极限下，电子与正电子的相互作用势（这在非相对论极限下是有意义的物理量）。我们得到的势能的表达式为：

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{\mathbf{q}^2[1-\hat{\Pi}(-\mathbf{q}^2)]} \,. \tag{6.34}$$

现在注意到：$\mathbf{q}^2 \ll m^2$，因此我们可以将公式 (6.33) 中被积函数展开，完成对于 $\mathbf{q}$ 的积分后得到：

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \,. \tag{6.35}$$

这个公式告诉我们，两个电荷之间的相互作用比起我们所熟悉的库仑势之外，还存在一个正比于 $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 的修正。这个修正实际上会造成原子能级的移动。按照量子力学的微扰论，这个能级的移动是：

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2}|\psi(0)|^2 \,, \tag{6.36}$$

其中 $\psi(0)$ 是原先能级所对应的波函数在原点的值。这个结果实际上可以部分解释著名的兰姆移动（Lamb shift）。按照狄拉克理论，氢原子的 $2s_{1/2}$ 与 $2p_{1/2}$ 能级是完全简并的。但是，如果考虑了量子场论中真空极化的效应，由于 $2p_{1/2}$ 态的波函数在原点为零而 $2s_{1/2}$ 态的波函数在原点不为零，这两个原先简并的能级之间就有了能量差。这个差实际上就是上面公式给出的值，只要我们将 $\psi(0)$ 代以氢原子的$2s_{1/2}$ 态的波函数在原点的值就可以了。不幸的的是，这仅仅解释了全部兰姆移动中一个很小的部分（大约 1/40）。兰姆移动的主要贡献来源于电子的自能修正。

练习 6.6 *验证上面能级移动的公式。*

事实上我们可以得到更为精确的势能表达式。注意到公式 (6.34) 可以等价地写为：[4]

$$V(\mathbf{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Qe^{iQr}}{Q^2+\mu^2}\left[1-\hat{\Pi}_2(-Q^2)\right] \,, \tag{6.37}$$

这里 $\hat{\Pi}_2$ 表示到 e^2 阶的函数 $\hat{\Pi}$。上式的积分可以利用上半平面的围道积分来完成。它的最为重要的贡献来自 $Q = i\mu$ 的极点。这个残数给出的恰恰就是我们所熟悉的库仑势（当然是在取了 $\mu = 0$ 之后）。但是，除了上述极点之外，被积函数在上半平面还存在一个枝点。这个枝点是由于函数 $\hat{\Pi}_2$ 中的对数引起的（参见公式 (6.33)）。容易发现，被积函数的枝点位于 $Q = i(2m)$，因此它的割线从 $Q = i(2m)$ 一直延伸到 $+i\infty$。容易发

[4] 纯粹为了下面计算的方便，我们引进了一个光子的质量 μ，它可以在最后结果中取为零。

现，$\hat{\Pi}_2(-Q^2)$ 的实部在割线的两边是相等的，但是积分的方向相反，从而刚好相消。但是，$\hat{\Pi}_2(-Q^2)$ 的虚部在割线的两边是不连续的，而是有一个跃变。这个跃变的存在实际上是有着深刻的物理原因的（光学定理，或者说幺正性）。因此，如果我们将沿着虚轴的积分变量取为：$Q = iq$，那么虚部不连续性对于势能的修正为：

$$\begin{aligned}\delta V(r) &= \frac{-2e^2}{(2\pi)^2 r}\int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q}\mathrm{Im}\left[\hat{\Pi}_2(q^2 - i\epsilon)\right] , \\ &= -\frac{\alpha}{r}\frac{2}{\pi}\int_{2m}^{\infty} dq \frac{e^{-qr}}{q}\frac{\alpha}{3}\sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right) . \end{aligned} \tag{6.38}$$

现在让我们讨论比较大的距离，即：$r > 1/m$，那么上面的积分主要贡献来自于 $q \simeq 2m$ 附近。令 $t = q - 2m$，我们可以得到领头阶的势能修正：

$$\delta V(r) = -\frac{\alpha}{r}\cdot\frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} . \tag{6.39}$$

注意，这个修正出现的典型尺度是电子的康普顿波长：$1/m$。这个势通常被称为 Uehling 势。

§23 电子顶点函数

¶ 我们只需要考虑截肢的电子－电子－光子的三点图。这个贡献被称为电子的顶点函数（vertex function）。电子的顶点函数在一圈水平下只包含一个图，它被显示在图 6.1 的右上角。

顶点函数之所以重要是因为它会出现在所有的电磁相互作用的顶点。例如，在电子与外电磁场的相互作用的过程中，其费曼振幅可以表达为：

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) = -ie\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p)\cdot\tilde{A}^{\mathrm{ext}}_{\mu}(p'-p) , \tag{6.40}$$

其中 $\tilde{A}^{\mathrm{ext}}_{\mu}$ 为外加经典电磁场的傅立叶变换，$\Gamma^{\mu}(p',p)$ 就是我们这一节要着重讨论的电子顶点函数。在树图水平，$\Gamma^{\mu}(p',p) = \gamma^{\mu}$；到一圈水平则需要考虑图 6.1 的右上角的一圈图。

¶ 形状因子及其物理意义

尽管我们可以按照费曼规则直接去计算一圈图的贡献，但在做这样的计算之前首先分析一下它可能的结构将是很有帮助的。简单的分析发现，顶点函数只可能依赖于 p，p'，γ_{μ} 以及理论中的一些常数。因此，我们可以将其参数化为：

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\cdot A + (p^{\mu} + p'^{\mu})\cdot B + (p^{\mu} - p'^{\mu})\cdot C . \tag{6.41}$$

现在注意到 Γ^μ 总是夹在两个在壳的粒子的旋量之间的。因此我们可以将 $\not{p}$，$\not{p}'$ 换成粒子的质量 m。另一方面，利用瓦德恒等式：$q_\mu\Gamma^\mu = 0$，其中 $q_\mu = p_\mu - p'_\mu$ 表示动量转移。这些条件意味着我们可以将顶点函数表达为：

$$\Gamma^\mu(p,p') = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\,. \tag{6.42}$$

其中 $F_1(q^2)$，$F_2(q^2)$ 是纯粹的标量函数，它们仅仅依赖于动量转移的平方。它们被称为电子的形状因子。我们下面会看到，这两个形状因子直接影响电子与外电场以及外磁场的相互作用。

为了考察上面引入的形状因子的物理意义，我们来分析电子与一个外加电磁场的相互作用。首先看外加的静电场，这时：$A^{\rm ext}_\mu(x) = (\phi(\mathbf{x}),0)$，于是我们有：$\tilde{A}^{\rm ext}_\mu(q) = ((2\pi)\delta(q^0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}),0)$。我们发现电子在这样的经典外加静电场中散射的费曼振幅为：

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Gamma^0(p,p')u(p)\tilde{\phi}(\mathbf{q})\,. \tag{6.43}$$

如果我们仅仅考虑经典的、空间缓变（具体来说，就是在电子的康普顿波长之内几乎不变）的静电场，那么我们只需要考虑 $\mathbf{q}\to 0$ 的情形。显然，这时 $F_1(q^2=0)$ 是主要贡献，它的作用就是将电子的电荷乘以 $F_1(0)$。事实上，$F_1(0)$ 可以看成是电子的电荷（以 e 为单位）。我们也发现，由于在树图 $F_1 = 1$，因此高阶的贡献在 $q^2 = 0$ 处一定也趋于零。

完全类似的，我们可以考察电子对于一个经典的静磁场的响应，只不过计算稍微复杂一些。这时的四矢势为：$A^{\rm ext}_\mu(x) = (0,\mathbf{A}^{\rm ext}(\mathbf{x}))$。散射的费曼振幅可以写为：

$$i\mathcal{M} = +ie\left[\bar{u}(p')\left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\right)u(p)\right]\tilde{A}^i_{\rm ext}(\mathbf{q})\,. \tag{6.44}$$

注意物理的磁感应强度的傅立叶变换为：

$$\tilde{B}^i(\mathbf{q}) = -i\epsilon^{ijk}q^j\tilde{A}^k_{\rm ext}(\mathbf{q})\,. \tag{6.45}$$

因此，为了考察电子对于磁场的响应，我们必须取出公式 (6.44) 中正比于 $\mathbf{q}$ 的部分。

为此，我们可以利用旋量的非相对论展开（参见公式 (3.53)）：

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\chi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\chi\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}(1-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\chi\\ (1+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\chi\end{pmatrix}\,, \tag{6.46}$$

以及关于 $u(p')$ 的类似表达式。我们发现与 $F_1(q^2)$ 成正比的贡献为：

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = 2\chi'^\dagger\left(\frac{\mathbf{p}'\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\sigma^i + \sigma^i\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\chi\,. \tag{6.47}$$

我们可以进一步利用泡利矩阵的恒等式：$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$。这样一来，上面的式子可以分为与自旋相关和与自旋无关的部分。与自旋无关的部分其实就是非相对论性哈密顿

量中 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}$ 的部分，它正比于 $(\mathbf{p}+\mathbf{p}')$；与自旋相关的部分则是我们目前关心的磁矩与磁场的相互作用，它正比于 $\mathbf{q}=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$。仅仅保留与自旋相关的部分，我们发现上式可以化为：

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p)=2\chi'^{\dagger}\left(\frac{-i}{2m}\epsilon^{ijk}q^j\sigma^k\right)\chi\,. \tag{6.48}$$

与 F_2 正比的项已经正比于 q，因此我们可以直接带入领头阶的旋量表达式得到同样的贡献：

$$\bar{u}(p')\left(\frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\right)u(p)=2\chi'^{\dagger}\left(\frac{-i}{2m}\epsilon^{ijk}q^j\sigma^k\right)\chi\,. \tag{6.49}$$

将两个贡献相加我们发现其非相对论性的极限下等价于非相对论的势能：

$$V(\mathbf{x})=-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})\,, \tag{6.50}$$

其中电子的等效的磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 可以表达为：

$$\boldsymbol{\mu}=g\frac{e}{2m}\mathbf{S}\,. \tag{6.51}$$

这里的因子 g 称为朗得 g-因子。它的表达式为：

$$g=2(F_1(0)+F_2(0))=2+2F_2(0)\,. \tag{6.52}$$

我们看到，电子的 g-因子在最低阶等于 2，这就是狄拉克理论所预言的；量子场论的高阶贡献体现在数值 $F_2(0)$ 之中，它因此被称为电子的反常磁矩。

¶ 形状因子的计算

形状因子的计算的步骤与我们前面两个一圈的计算完全类似。我们首先按照费曼规则写出电子顶点函数的表达式。如果我们记：$\Gamma(p',p)=\gamma^\mu+\delta\Gamma^\mu$，那么：

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)\\
=&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{(k-p)^2+i\epsilon}\bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{\not{k}'-m+i\epsilon}\gamma^\mu\frac{i}{\not{k}-m+i\epsilon}(-ie\gamma_\nu)u(p)\,,\\
=&\,2ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}'+m^2\gamma^\mu-2m(k+k')^\mu]u(p)}{[(k-p)^2+i\epsilon][k'^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]}\,.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

在这个表达式中，圈中的光子的四动量为：$(p-k)$，圈中的两个电子的传播子的四动量分别记为：k，k'。很容易发现，这个积分在紫外是对数发散的。

注意到这个表达式中存在三个传播子，因此我们前面的简单费曼参数积分公式不能用，我们需要的是将三个分母结合的费曼参数积分公式：

$$\frac{1}{ABC}=\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{[xA+yB+zC]^3} \tag{6.54}$$

于是我们得到：

$$\frac{1}{[(k-p)^2+i\epsilon][k'^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]}=\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}\,, \tag{6.55}$$

其中的分母因子 D 的表达式为：

$$D=k^2+2k\cdot(yq-zp)+yq^2+zp^2-(x+y)m^2+i\epsilon\,. \tag{6.56}$$

下面我们要做的就是对于因子 D 进行配方，为此我们令：

$$l=k+yq-zp\,, \tag{6.57}$$

这样一来分母就变成一个完全平方：

$$D=l^2-\Delta+i\epsilon\,,\ \Delta=-xyq^2+(1-z)^2m^2\,. \tag{6.58}$$

注意，一般来说 $q^2<0$，因此上式中的 $\Delta>0$。我们同样用积分变量 l 来表示分子，这时关于 l 的奇数次幂的项都可以扔掉。同时，我们可以利用代换：$l^\mu l^\nu\to(1/4)\eta^{\mu\nu}l^2$。于是，分子将仅仅包含正比于 l^2 的项和不包含 l 的项。我们还可以将分子化为形如：

$$A\cdot\gamma^\mu+B\cdot(p'^\mu+p^\mu)+C\cdot q^\mu\,, \tag{6.59}$$

的形式。所需要的是反复利用旋量所满足的狄拉克方程：$\not{p}u(p)=mu(p)$，$\bar{u}(p')\not{p}'=\bar{u}(p')m$ 等等。最后分子的结果是：

$$\begin{aligned}\bar{u}(p') & \left[\gamma^\mu\cdot\left(-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-2z-z^2)m^2\right)\right.\\ +\ & \left.(p'^\mu+p^\mu)\cdot mz(z-1)+q^\mu\cdot m(z-2)(x-y)\right]u(p)\,.\end{aligned} \tag{6.60}$$

我们现在可以再利用所谓的高登等式，将分子中正比于 $(p'^\mu+p^\mu)$ 的项换为 γ^μ 和 $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$。这样一来，我们的顶点函数可以写为：

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) &= 2ie^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\int dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}\\ &\times\ \bar{u}(p')\left[\gamma^\mu\left(-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z-z^2)m^2\right)\right.\\ &+\ \left.\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}(2m^2z(1-z))\right]u(p)\,.\end{aligned} \tag{6.61}$$

这个式子正比于 γ^μ 的项积分出来的结果将贡献于 $F_1(q^2)$；正比于 $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ 的项积分后将贡献于 $F_2(q^2)$。特别值得注意的是，紫外发散仅仅出现在 $F_1(q^2)$ 的一项中，而 $F_2(q^2)$ 完全是紫外有限的。事实上，细心的同学也许还能够发现，$F_1(q^2)$ 的贡献不仅仅是紫外发散的，它还是红外发散的。

¶ 现在我们可以进行圈动量的积分了。为此注意到分子上只有正比于 l^2 的项是紫外发散的。为此，我们仍然利用类似于电子自能计算中的泡利－维拉斯正规化：

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\epsilon} \mapsto \frac{1}{(k-p)^2+i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\epsilon} . \tag{6.62}$$

于是，我们得到：

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{l^2}{(l^2-\Delta)^3} - \frac{l^2}{(l^2-\Delta_\Lambda)^3}\right) = \frac{i}{(4\pi)^2}\ln\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right) , \tag{6.63}$$

其中 $\Delta_\Lambda = \Delta + z\Lambda^2$。为了治愈红外发散，我们已引进一个光子的质量 μ，其作用是使得:

$$\Delta \mapsto \Delta = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\mu^2 . \tag{6.64}$$

将这些正规化运用在上述的形状因子的表达式之中，我们得到：

$$\begin{aligned}
\delta F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
&\times \left[\ln\left(\frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2-xyq^2}\right) + \frac{m^2(1-4z+z^2)+q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2-q^2xy+z\mu^2}\right. \\
&- \left.\frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2+z\mu^2}\right] + \delta F_1(0) , \qquad (6.65) \\
F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2-q^2xy}\right] . \qquad (6.66)
\end{aligned}$$

其中我们将所有的紫外发散都集中在 $\delta F_1(0)$ 之中，它的表达式为：

$$\delta F_1(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\ln\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2} + \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2+z\mu^2}\right] \tag{6.67}$$

这个发散的处理我们下面很快会讨论。

¶ 让我们首先看一下 $F_2(q^2)$ 的部分。在进行了一大段复杂的计算之后，我们终于得到了一个曾经震惊世界的结果，这就是电子的反常磁矩。按照前面的介绍，反常磁矩就是形状因子 $F_2(q^2)$ 在 $q^2=0$ 处的数值。由于上面给出的 $F_2(q^2)$ 既不包含紫外，又不包括红外发散，因此我们可以直接计算出来：

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2y}\right] = \frac{\alpha}{2\pi} . \tag{6.68}$$

这个结果首先是 J. Schwinger 在 1948 年得到的。它与实验的吻合的程度是令人震惊的。这也是当时量子电动力学得以确立的经典计算。我想大家应该也感受到了，这绝不是一个平庸的计算。

练习 6.7 *验证公式 (6.65) 到公式 (6.68)。*

¶ 现在我们回到紫外发散的 $\delta F_1(0)$ 的贡献。我们在前面讨论形状因子的物理意义的时候曾经指出：$\delta F_1(q^2=0)$ 必须等于零，这样才能够保证电子的电荷是正确定义的。不幸的是，如果我们考察公式 (6.65)，我们发现 $\delta F_1(q^2=0)$ 实际上包含紫外发散。这个貌似不幸的结果实际上恰恰是幸运的。原因是我们对于截肢电子顶点函数的定义实际上并不完全正确，因为它并没有考虑外腿电子波函数的重整化。按照我们对于 LSZ 的讨论，如果我们考虑电子与外电磁场的相互作用（散射过程），那么相关的 S 矩阵元应当对每一条费米子的外线包含一个 $\sqrt{Z_2}$ 的因子。这里 Z_2 是我们前面第 §21 节中讨论的电子场强重整化因子。也就是说，形状因子的正确定义应当为：

$$Z_2\Gamma^\mu(p,p') = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\,. \tag{6.69}$$

这里 Γ^μ 仍然包含了所有的截肢图的贡献。由于：

$$Z_2\Gamma^\mu = (1+\delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu) \simeq \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + \gamma^\mu\delta Z_2\,, \tag{6.70}$$

其中 δZ_2 由公式 (6.12) 给出。按照这个公式，我们的形状因子为：

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2\,, \tag{6.71}$$

其中 $\delta F_1(q^2)$ 由公式 (6.65) 给出。记性好的同学也许还有印象，δZ_2 也是包含紫外发散的。我们在第 §21 节末尾曾经提到，δZ_2 中的紫外发散会在后面加以处理和化解。现在就正好是这时候了。一个奇迹就是它们竟然刚好满足：

$$\delta F_1(0) = -\delta Z_2\,. \tag{6.72}$$

于是我们发现，至少到一圈图为止，我们可以将形状因子写为：

$$F_1(q^2) = 1 + [\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)]\,. \tag{6.73}$$

这个结果不仅仅不再是紫外发散的，而且刚好满足我们的物理约束条件：$F_1(q^2=0)=1$。请大家注意，这一点能够成立完全是因为公式 (6.72)。这个公式大家可以直接验证（利用公式 (6.12) 和公式 (6.67)），但是它实际上有着深层的原因。

要说明任意阶的情形，我们必须利用瓦德恒等式的一个推广，它一般被称为 Ward-Takahashi 恒等式。如果我们将电子的完全传播子（动量空间的）记为：

$$S(p) = \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p)}\,, \tag{6.74}$$

其中 $\Sigma(p)$ 是电子的自能。那么 Ward-Takahashi 恒等式为：

$$-ik_\mu \Gamma^\mu(p+k,p) = S^{-1}(k+p) - S^{-1}(p)\ . \tag{6.75}$$

注意这个恒等式到微扰论的任意一阶都是成立的。我们这里并不想去证明这个等式，[5] 我们这里只希望指出它的功用。现在如果我们定义 Z_1 如下：

$$\Gamma(p+k,p) \to Z_1^{-1}\gamma^\mu\ , k \to 0\ , \tag{6.76}$$

那么 Ward-Takahashi 恒等式就一定保证了：

$$Z_1 = Z_2\ , \tag{6.77}$$

对于任意阶都成立。换句话说，这就保证了形状因子到微扰论的任意一阶都满足：$F_1(q^2=0)=1$。

§24 量子电动力学的微扰重整化

本章的前面几节中，我们讨论了微扰量子电动力学中几个典型的一圈图的处理方法。我们也提到了量子场论中重要的概念：正规化和重整化。但是，前面的讨论仅仅是从一个特定的一圈图来考虑的，我们并没有统一地来考虑量子电动力学的重整化问题。这一节中，我们试图从更为一般的角度来讨论量子电动力学的微扰重整化问题。我们的讨论仍然是介绍性的、有的地方甚至是简略的。我们前面也提到过，关于重整化的更加深入的讨论将在量子规范场论课程中进一步展开。

§24.1 紫外发散的度量

¶ 按照第 4 章的讨论，在微扰论的框架下，任何相互作用量子场论中的物理振幅都可以用一系列费曼图来表示。一个一般的费曼图由一系列传播子、相互作用顶点构成。具体到量子电动力学中的费曼图，我们将用采用如下的记号：

- N_e：一个费曼图中电子（或正电子）外线的数目；
- N_γ：一个费曼图中光子外线的数目；
- P_e：一个费曼图中电子（或正电子）传播子的数目；
- P_γ：一个费曼图中光子传播子的数目；

[5] 事实上，所有的瓦德恒等式的证明在量子场论的路径积分表述中可以更简单地推导出来。有兴趣的请参考相关的量子规范场论的课程。

- V：一个费曼图中相互作用顶点的数目；
- L：一个费曼图中独立的圈的数目；

我们现在可以定义一个特定的费曼图的表观发散度：D，

$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma \, . \tag{6.78}$$

这个数目不是别的，就是圈积分中分子动量的幂次（也就是圈积分贡献的幂次）减去分母上（也就是由传播子贡献的）动量的幂次。简单的想法是，如果 $D > 0$，我们预计这个费曼图是幂次发散的；如果 $D = 0$，我们预期这个费曼图是对数发散的；如果 $D < 0$，我们预计这个费曼图是紫外有限的。需要注意的是，表观发散度仅仅是一个费曼图紫外发散与否的初步判据。事实上，在许多情形下，它对于一个费曼图的发散行为的预言并不正确。例如，由于对称性，一些表观发散的费曼图实际上是收敛的。同样的，一个 $D < 0$ 的费曼图，也可能由于包含发散的子图而紫外发散。尽管如此，表观发散度 D 对于我们分析费曼图的紫外行为来说，仍然是一个很有用的指标。

现在，我们将运用一个十分有用的公式：

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1 \, . \tag{6.79}$$

这个公式可以这样来看：每个传播子都需要一个积分，但是每个顶点都包含一个 δ-函数，但是有一个总的能量－动量守恒的 δ-函数不能计算在内。有的同学也许已经注意到了这个公式与基础拓扑学中的欧拉公式的类似性。另一方面，我们还有关系：

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e) \, , \tag{6.80}$$

因此，利用这些关系我们可以将量子电动力学中一个任意费曼图的表观发散度写为：

$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e \, . \tag{6.81}$$

也就是说，量子电动力学中费曼图的表观发散度仅仅与这个费曼图的外线的数目有关，并不明显依赖于内部相互作用顶点的数目。

利用公式 (6.79) 和关系 (6.80) 还可以得到一个相互作用顶点 V 和相应费曼图的圈数 L 之间的关系：

$$V = N_e + N_\gamma + 2L - 2 \, . \tag{6.82}$$

这个结果就是我们在本章一开始就提到的：对于一个给定的过程（固定的 N_e，N_γ），费曼图中相互作用的顶点的个数 V（也就是说微扰论的阶数），直接随费曼图中圈的数目 L 线性单调变化。特别的，如果一个过程存在树图，它一定是该过程中领头阶的贡献，圈数逐渐增加的各个费曼图构成了对于树图的逐阶修正。因此，量子场论中按照耦合参数的微扰展开其实就是对于相应费曼图中圈的数目的展开。这就是为什么微扰展开又被称为圈图展开。

¶ 按照公式 (6.81)，量子电动力学中表观发散的费曼图的类型是有限的。它们都不能包含太多数目的外线。同时记住我们只需要分析单粒子不可约的（1PI）连通图，于是真正需要考虑的仅仅是下列的几种图：

☞ 真空图：它不包含任何外线并且是紫外发散的。但是这个效应并不是直接可以测量的（不考虑引力）。它可以吸收到真空能的定义之中。

☞ 单光子及三光子图：前者具有 $D=3$，后者具有 $D=1$。但是，由于光子的外线一定是通过电磁相互作用顶点连在整个图上的，因此这类图一定正比于相应数目的电磁流 $j^\mu(x)=\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 在物理真空间的编时关联函数。例如，一个光子外线的图正比于：

$$\int d^4x e^{-iq\cdot x}\langle\Omega|Tj^\mu(x)|\Omega\rangle\ . \tag{6.83}$$

由于电荷共轭变换 C 是一个好的对称性，并且真空态在 C 变换下不变，但是电磁流在 C 变换下要变一个符号，因此我们得出结论：仅仅包含奇数个光子外线的量子电动力学中的费曼图一定恒等于零。这个结论又被称为 Furry 定理。

☞ 四光子图：这个图的 $D=0$。虽然原则上讲它可能存在对数发散，但是其实它是一个紫外有限的图。它在物理上对应于光子－光子散射过程。

☞ 两光子图：这个图的 $D=2$。这就是我们第 §22 节讨论的真空极化的图。我们已经看到，由于规范对称性，这个图仅仅是对数发散的。

☞ 两电子图：这个图的 $D=1$。它就是我们第 §21 节中讨论的电子的自能图。我们也看到了，由于手征对称性，这个图也是对数发散的。

☞ 两电子加单光子图：这个图的 $D=0$。它就是我们第 §23 节讨论的电子的顶点函数。这是一个对数发散的图。

上面的分析告诉我们，在量子电动力学中真正需要处理的紫外发散图就是：电子自能图、真空极化图和电子的顶点图。这三类图实际上已经穷尽了量子电动力学中所有的原初的紫外发散图。也就是说，其他的费曼图要么是有限的，要么其发散仅仅是由于包含了上面提到的三类发散图作为子图。

§24.2 裸微扰论与重整化微扰论

¶ 我们现在以量子电动力学为例，简要阐述裸微扰论与重整化微扰论之间的联系。量子电动力学的完整的（裸的）拉氏量为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_B^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_B(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_B - e_0\bar{\psi}_B\gamma^\mu A_{B\mu}\psi_B \,, \tag{6.84}$$

其中 $\psi_B(x)$，$\bar{\psi}_B(x)$，$A_{B\mu}(x)$ 分别是裸的电子、正电子、光子场；m_0 和 e_0 分别被称为电子的裸质量和裸电荷。我们前面曾经提到过，裸的参数其实并不具有可测量的物理意义。它们仅仅是理论中的一系列参数而已。当然，如果裸的耦合参数是小的，那么我们可以对它进行微扰展开。这通常被称为裸微扰论。需要注意的是，裸微扰论必须在一定的截断存在的时候才能够运用，否则得到的所有（超出树图的）结果都将是紫外发散的。

裸参数不是真正物理上可测量的量。真正的物理的参数应当对应于我们在低能实验中可以测量的物理量。例如，如果我们利用上面的拉氏量 (6.84) 计算电子的完全传播子，那么我们发现它的极点的位置并不在 $\not{p} = m_0$ 的位置，而是在另一个位置：$\not{p} = m$。这个物理的极点位置才对应于电子的物理质量（也就是大约是 0.5MeV 的那个值）。而在物理极点附近，电子的传播子行为可以写为（参见第 4章公式 (4.80)）：

$$\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle\Omega|T\psi_B(x)\bar{\psi}_B(0)|\Omega\rangle = \frac{iZ_2}{\not{p} - m + i\epsilon} + \cdots \,, \tag{6.85}$$

其中 Z_2 是狄拉克场的场强重整化因子。类似地，如果我们考察光子的完全传播子，那么它的动量空间的传播子的行为是：

$$\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle\Omega|TA_B^\mu(x)A_B^\nu(0)|\Omega\rangle = \frac{-iZ_3\eta^{\mu\nu}}{q^2} \,, \tag{6.86}$$

其中 Z_3 可以称为光子场的场强重整化因子。为了能够得到通常的量子电动力学拉氏量的形式，我们必须重新定义新的场（它们被称为重整化的场）。我们将用没有任何多余指标的场符号来标记它们：

$$\psi_B \equiv Z_2^{1/2}\psi \,, \quad A_B^\mu = Z_3^{1/2}A^\mu \,, \tag{6.87}$$

很容易发现，重整化后的基本场的两点函数具有我们所期望的形式。例如，电子的传播子的极点在其物理质量，而且在极点处的残数为 1；光子的传播子也具有正则的形式。利用重整化的场来表达，前面的量子电动力学的裸的拉氏量可以写为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi - eZ_1\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \,, \tag{6.88}$$

其中我们定义了一个新的、重整化的、物理的电荷：

$$e_0 Z_2 Z_3^{1/2} = e Z_1 \ . \tag{6.89}$$

我们将要求 e 对应于在长程（低能）测量出来的电子的电荷（也就是大家从物理常数表上查到的电子电荷的绝对值）。[6]

现在，我们可以将上面的拉氏量 (6.84) 完全利用物理的（也就是重整化的）参数（即 m 和 e）以及物理的场来表达出来：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \ , \\ &- \frac{1}{4}\delta_3 (F^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\delta_2 \partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi - e\delta_1 \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \ , \end{aligned} \tag{6.90}$$

其中第二行中的参数的定义为：

$$\delta_1 = Z_1 - 1 \ , \delta_2 = Z_2 - 1 \ , \delta_3 = Z_3 - 1 \ , \delta_m = Z_2 m_0 - m \ . \tag{6.91}$$

我们看到，拉氏量 (6.90) 中的第一行就是我们所熟悉的量子电动力学的拉氏量，而且是运用物理的（重整化的）参数来表达的。第二行的各个项的函数形式与标准的量子电动力学拉氏量中的各项类似。它们被称为相应的抵消项。它们的作用就是用来吸收由第一行的拉氏量的圈图贡献中的紫外发散的部分，从而保证在低能区的任何物理的费曼振幅都是有限的。我们发现，这个拉氏量已经可以适用于进行微扰计算，如果我们假定物理的耦合参数 $e^2/(4\pi)$ 是小的。这就是所谓的重整化的微扰论。由于重整化的微扰论的计算结果是用物理上已知（或原则上可以测量）的参数表达的，因此它的结果可以直接与实验结果进行比较。

确定抵消项的条件被称为重整化条件。这些条件实际上就是我们对于重整化的参数的定义。具体到量子电动力学，我们将电子传播子的 1PI 图的贡献记为 $-i\Sigma(\not{p})$；将光子的记为：$i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(\eta^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$；将截肢的电子顶点函数记为：$-ie\Gamma^\mu(p', p)$，那么我们的重整化条件可以取为：

$$\Sigma(\not{p} = m) = 0 \ , \tag{6.92}$$

$$\frac{d}{d\not{p}}\Sigma(\not{p})\Big|_{\not{p}=m} = 0 \ , \tag{6.93}$$

$$\Pi(q^2 = 0) = 0 \ , \tag{6.94}$$

$$-ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu \ . \tag{6.95}$$

[6] Z_1 是计算电子顶点函数出来的因子。按照 Ward-Takahashi 恒等式，我们实际上有：$Z_1 = Z_2$。

上面的第一个条件是重整化（物理）质量的定义；第二个和第三个条件保证了电子和光子的传播子在其物理极点处的残数为 1；最后一个条件是重整化（物理）电荷的定义。有了这些重整化条件，原则上我们可以在重整化的微扰论中，逐阶确定所有的抵消项，从而计算物理上感兴趣的振幅。

¶ 作为结束这一节的一个建议，有兴趣的读者可以利用重整化的微扰论以及维数正规化的方法，重新计算量子电动力学中的电子自能、光子自能以及电子顶点函数。其中相当多的步骤我们在前面几节已经运用过。然后，利用上面的重整化条件，确定所有的抵消项到一圈水平。这将是对于量子电动力学一圈计算的一个很好的总结。最后的结果，大家也可以参考 Peskin 书 [1] 中的相应章节。

练习 6.8 *怎么样？要不要试试？*



相关的阅读

这一章我们简单介绍了量子电动力学中的重要的一圈图的计算方法。我们的讨论是十分初步的。这不是一个关于重整化的完整的描述。说得不好听一些，我们对于正规化和重整化的讨论纯属“头痛医头，脚痛医脚”的类型。但是，由于课时的限制，我们不得不将更加重整化的系统讨论留待后面的课程来完成。另外一个我们完全没有触及的问题是红外发散的处理。这部分的内容，建议有兴趣的同学参考 Peskin 教材 [1]中相关的章节。

A 符号约定

在这个附录中，我们简要总结一下这个讲义中的符号约定和重要公式。

¶ 时空度规等的约定

首先，我们的闵氏时空的度规的定义采用：

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{Diag}\,(+1, -1, -1-1)\,, \tag{A.1}$$

它可以用来升降四矢量的指标。一个四矢量的上标（逆变指标）可以与一个下标（协变指标）缩并，其中我们总是使用爱因斯坦的求和约定，即重复的指标总是意味着求和（除非特别声明）。因此，两个四矢量 A^μ，B^μ 的内积为：

$$A\cdot B = A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^0B^0 - A^iB^i = A^0B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,. \tag{A.2}$$

特别的，一个四矢量的平方 $A^2 = A\cdot A$。

四维完全反对称张量的约定是：

$$\epsilon^{0123} = +1\,, \tag{A.3}$$

其余的则由升降指标和完全反对称性确定。特别注意按照这个约定：$\epsilon_{0123} = -1$。完全反对称张量的缩并满足：

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24\,,\\
\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^\mu{}_\nu\,,\\
\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2(\delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho)\,.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

与一般的张量类似，算符也可以带有四矢量的上下标。最为常用的是四维的梯度算符：

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right)\,. \tag{A.5}$$

利用它可以构成四维的拉普拉斯算符（或称为达朗伯算符）

$$-\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\,. \tag{A.6}$$

例如，在量子力学中我们遇到的能量算符：$E = i\partial/\partial t$ 和动量算符 $\mathbf{p} = -i\nabla$ 可以统一写为四动量算符：

$$p^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial x^0}, -i\nabla\right)\,. \tag{A.7}$$

¶ 自然单位制

我们这个讲义中采用所谓的自然单位制，又称为“天赋单位制”（God given unit）。在这个单位制中，普朗克常数 $\hbar$ 和真空中的光速 c 被取为单位：

$$\hbar = c = 1 \,. \tag{A.8}$$

很难想象，如果我们需要把量子场论的所有公式中的 $\hbar$ 和 c 都恢复将是怎样的一个“灾难”。由于这两个参数是有量纲的物理量，于是上面的选择使得我们通常的物理量的三个物理单位中还有一个有待选取。[1] 这也意味着，所有有量纲的物理量都可以用一个量（通常选为能量或者长度）来标记一个量的量纲。对于标量场、旋量场和矢量场，它们的质量量纲分别为：+1，3/2，+1。我们看到，量纲分析以及标度变换的讨论导致这是限制相互作用量子场论形式的最主要原因。一个有用的换算工具是认识到乘积：$\hbar c$ 具有长度乘以能量的量纲，并且它的数值是：

$$\hbar c = 0.1973\text{fm} \cdot \text{GeV} \,. \tag{A.9}$$

利用它可以在长度和能量之间方便地转换。

特别值得指出的是我们采用的电磁单位制。我们将采用所谓的高斯－海维赛德（Gauss-Heaviside）单位制（又被称为海维赛德－洛伦兹单位制）。它与普通的高斯制的区别是将因子 4π 吸收在电量的定义之中。因此，在高斯－海维赛德制中，一个电量为 Q 的位于原点的点电荷在空间所产生的静电势为：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi r} \,, \tag{A.10}$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$。在这个单位制中，著名的精细结构常数为：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \,. \tag{A.11}$$

相应的麦克斯韦方程组为：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu \,,\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{A.12}$$

¶ 泡利矩阵与外尔旋量

对于我们经常用到的泡利矩阵，我们取：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \,,\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \tag{A.13}$$

在讨论洛伦兹群的表示中，我们还需要四维的泡利矩阵：

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \,, \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \,. \tag{A.14}$$

[1] 如果讨论的问题还涉及温度，那么自然单位制的选择是令玻尔兹曼常数 $k_B = 1$。这样一来，温度就具有能量的量纲。

在洛伦兹群的表示论中，σ^μ 和 $\bar\sigma^\mu$ 可以看成是具有一个带点指标和一个不带点指标的量，即：$(\sigma^\mu)^{A\dot B}$ 和 $(\bar\sigma^\mu)_{\dot A B}$，其中的带点和不带点的指标都有两个取值：0，1。它们的具体矩阵表达式就是上面给出的明显的泡利矩阵表达式 (A.13)。

二分量的外尔旋量可以分为左手和右手两类，它们分别用一个不带点和带点的旋量指标来标记。旋量指标的升降和缩并是依靠完全反对称的旋量度规 $\epsilon_{AB}=-\epsilon^{\dot A\dot B}$ 来完成的：

$$\epsilon_{01}=\epsilon^{01}=-\epsilon_{\dot0\dot1}=-\epsilon^{\dot0\dot1}=+1\ . \tag{A.15}$$

我们约定外尔旋量的缩并按照“西北规则”。注意由于这个度规是完全反对称的，因此一个旋量指标（无论带点的或不带点的）在升降过程中会改变它的 0，1 属性（以及可能的符号）。

四维泡利矩阵的缩并满足重要的关系：

$$(\sigma^\mu)_{A\dot B}(\sigma_\mu)_{C\dot D}=-2\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot B\dot D}\ ,\ \ (\bar\sigma^\mu)_{\dot A B}(\bar\sigma_\mu)_{\dot C D}=-2\epsilon_{\dot A\dot C}\epsilon_{BD}\ , \tag{A.16}$$

这些关系可以用来导出著名的 Fierz 变换，也可以在四维矢量指标和旋量指标之间转换。

¶ γ-矩阵及其性质

四维闵氏空间的 γ-矩阵的定义可以有多种表示。我们通常选择“手征表示”，在这个表示中 γ^5 是对角的：

$$\gamma^\mu=\begin{pmatrix}0&\sigma^\mu\\ \bar\sigma^\mu&0\end{pmatrix}\ ,\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}-\mathbb{1}&0\\0&\mathbb{1}\end{pmatrix}\ , \tag{A.17}$$

无论任何具体的表示，γ-矩阵总是满足基本反对易关系：

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\eta_{\mu\nu}\ . \tag{A.18}$$

另外，我们定义左手和右手的投影算符 P_L，P_R，相应地可以定义左手和右手的旋量：

$$P_{L/R}=(1\pm\gamma_5)/2\ ,\ \ \psi_{L/R}=P_{L/R}\psi\ ,\ \ \bar\psi_{L/R}=\bar\psi P_{R/L}\ . \tag{A.19}$$

它们分别对应于左手和右手的外尔旋量。通常我们定义：

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\ . \tag{A.20}$$

γ-矩阵加上单位矩阵构成 4×4 矩阵的一组完备的基。它们还可以构成具有特定性质的费米子双线性算子：$\bar\psi\Gamma\psi$。对于 $\Gamma=\mathbb{1}$，γ_5，γ^μ，$\gamma^\mu\gamma_5$，$\sigma^{\mu\nu}$ 分别对应于标量、赝标量、四矢量、四轴矢量，张量。多个 γ-矩阵的乘积的迹满足十分简单的性质：

$$\begin{aligned}Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu)&=4\eta^{\mu\nu}\ ,\\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)&=4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})\ ,\\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5)&=-4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ ,\end{aligned} \tag{A.21}$$

另外，如果我们缩并两个 γ-矩阵，中间插入一串其他的 γ-矩阵，那么我们有：

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4\,,\\ \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu &= -2\gamma^\rho\,,\\ \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 4\eta^{\rho\sigma}\,,\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\,.\end{aligned}\tag{A.22}$$

上述公式是对于 4 维时空中的 γ-矩阵的缩并公式。在维数正规化计算圈图时，我们有时需要 d 维时空的 γ-矩阵的缩并公式：

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu &= -(2-\epsilon)\gamma^\rho\,,\\ \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= 4\eta^{\rho\sigma}-\epsilon\gamma^\sigma\gamma^\rho\,,\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu+\epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\,.\end{aligned}\tag{A.23}$$

其中 $\epsilon=4-d$。

¶ 自由狄拉克旋量的约定

自由狄拉克方程的解可以选为平面波：$u^{(s)}(p)e^{-ip\cdot x}$，和 $v^{(s)}(p)e^{ip\cdot x}$，其中每一个解中的 $p^0>0$；$s=1,2$ 标志两个不同的自旋态。相应的旋量则满足：

$$(\not{p}-m)u^{(s)}(p)=0\,,\quad(\not{p}+m)v^{(s)}(p)=0\,.\tag{A.24}$$

我们可以选取：

$$u^{(s)}(p)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\chi^{(s)}\\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\chi^{(s)}\end{pmatrix}\,,\quad v^{(s)}(p)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^{(s)}\\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi^{(s)}\end{pmatrix}\,.\tag{A.25}$$

其中的二分量旋量 $\chi^{(s)}$，$\xi^{(s)}$ 的具体形式以及它们的归一化的选取有一定的任意性。我们常用的一种选择是：

$$\chi^{(s)\dagger}\chi^{(r)}=\xi^{(s)\dagger}\xi^{(r)}=m\delta^{rs}\,,\tag{A.26}$$

这样就使得：

$$\begin{aligned}\bar u^{(r)}(p)u^{(s)}(p) &= -\bar v^{(r)}(p)v^{(s)}(p)=2m\delta^{rs}\,,\\ \bar u^{(r)}(p)v^{(s)}(p) &= \bar v^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=0\,.\end{aligned}\tag{A.27}$$

这些旋量的自旋和满足：

$$\sum_{s=1,2}u^{(s)}(p)\bar u^{(s)}(p)=\not{p}+m\,,\quad\sum_{s=1,2}v^{(s)}(p)\bar v^{(s)}(p)=\not{p}-m\,.\tag{A.28}$$

B 角动量与 $SU(2)$ 羣的表示

在这个附录中，我们将用群表示的语言将量子力学中关于角动量的性质进行总结。熟悉了这种语言将有助于读者理解本讲义第二章中关于洛伦兹群的论述。

我们知道与转动对称性相对应的物理量是系统的角动量：$\mathbf{J}_i, i = 1, 2, 3$。在量子力学中，角动量变为希尔伯特空间中的算符，它们满足基本的角动量对易关系：

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k \ , \quad [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_i] = 0 \ . \tag{B.1}$$

对量子体系而言，空间的转动是通过转动算符来实现的：

$$U = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}} \ . \tag{B.2}$$

由于角动量算符的厄米性，转动算符是一个幺正的算符，只要其中的转动角参数 $\boldsymbol{\theta}_i$ 都是实数。

从量子力学的基本知识我们知道，满足角动量基本对易关系 $\mathbf{J}$ 的矩阵表示可以用角动量量子数 $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$ 来标志。其中 $j = 1/2$ 的情形对应于自旋 $1/2$ 粒子的情形。这也是最为基本的情形。这时，量子体系的希尔伯特空间是二维的。同时我们可以选取：$\mathbf{J}_i = \sigma_i/2$，其中 σ_i 为三个泡利矩阵。很容易验证，这时的转动矩阵是一个 2×2 幺正矩阵，同时该矩阵的行列式等于 1。事实上，所有这样的矩阵构成一个群，这就是 $SU(2)$ 群，即二维特殊幺正群。$SU(2)$ 群与我们通常的三维转动群 $O(3)$ 有着十分密切的关系。两者的生成元满足的基本对易关系完全一样。因此，在单位元附近这两个群完全一致，它们的差别仅仅在于整体性质上的不同。具体来说，$SU(2)$ 群的两个元素与 $O(3)$ 群的一个元素形成一一对应。这两个元素实际上相差一个 2π 角度的转动，而对于半奇数 j 的表示，一个转角为 2π 的转动矩阵并不给出单位矩阵。因此，$SU(2)$ 群又被称为转动群的双重覆盖群（covering group）。

量子力学中对应于不同量子数 j 的表示我们称为 $SU(2)$ 群的不可约表示。这个说法的含义是，对于每一个给定的 j 以及其表示矢量空间中独立的 $2j+1$ 个基矢，在转动下这 $2j+1$ 个基矢会相互线性变换为它们的线性组合，并且我们不可能找到其中的一个维数少于 $2j+1$ 的子空间来满足这一点。反之，如果我们可以将群表示的一组基矢可以分解为至少两组基矢，它们分别构成至少两个维数更小的线性独立的子空间，使得在群元素的作用下（具体到 $SU(2)$ 就是转动）这些子空间之内的基矢相互变换，但是不同子空间之间不发生混合，那么这个群表示就被称为是可约的。具体来说，它就可以分解为维数对应于子空间维数的至少两个不可约表示的直和。

用群表示的语言来说，角动量算符就是 $SU(2)$ 群（或者转动群）的生成元；量子力学中的希尔伯特空间就是群表示的矢量空间；这个空间中的基矢就是群表示的基矢。例如，对于一个自旋 1/2 的粒子，这个基矢可以选为：$|+\rangle$ 和 $|-\rangle$，它们分别对应于粒子的自旋向上和向下的量子态。我们一般称群表示所对应的矢量空间的维数为该群表示的维数。因此，对于 $j=1/2$ 转动算符的矩阵就是 $SU(2)$ 群元素的一个二维表示。对于 $j>1/2$，我们将得到 $SU(2)$ 群的更高维（具体来说，$(2j+1)$ 维）表示。对总角动量量子数为 j 的系统，我们可以用 $(2j+1)$ 个态矢量：$|jm\rangle$，其中 $m=-j,\cdots,+j$ 来张成系统转动部分的希尔伯特空间。用群表示的语言来说，这些态矢量构成了 $SU(2)$ 群 $(2j+1)$ 维不可约表示的一组基。

$SU(2)$ 群的高维表示还可以通过将其二维表示（$j=1/2$ 的表示）做直积来获得。群表示的直积[1] 可以简单地从其表示所作用的矢量空间的直积来构造。还是以前面自旋 1/2 粒子的希尔伯特空间为例，作为 $SU(2)$ 群的一个不可约表示，其表示空间是二维的，由一个粒子的两个自旋本征矢量 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 所张成。我们现在考虑两个这样矢量空间的直积空间。从物理上讲，它对应的就是两个全同的自旋 1/2 粒子的希尔伯特空间，它是 $2\times 2=4$ 维的，由：$|+\rangle_1\otimes|+\rangle_2\equiv|++\rangle$，$|+-\rangle$，$|-+\rangle$ 和 $|--\rangle$ 张成。大家很容易验证，这四个基矢量显然也构成 $SU(2)$ 群的一个表示的基矢。但是，与我们在量子力学中熟悉的不可约表示不同，这个表示是可约的。大家应当还记得，如果我们将上述四个基矢量进行适当的线性组合，将它们分为两组，第一组由三个矢量构成：$|++\rangle$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle+|-+\rangle)$，$|--\rangle$；第二组由一个矢量构成：$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$。量子力学的知识告诉我们，这两组基矢构成的空间在转动下的性质不同，也就是说它们对应于不同角动量的不可约表示空间。具体来说，第一组构成的三维空间对应于 $j=1$ 的不可约表示（三重态，三维表示）；第二组则对应于 $j=0$ 的表示（单态，一维表示）。在量子力学中，这个过程就对应于两个全同粒子的角动量相加过程。在量子力学中，两个角动量相加的过程就是从两个角动量所对应的希尔伯特空间的直积空间中，分解出对应于不同总角动量的空间。如果改用群表示的语言来说，这个过程就是将两个粒子对应的群表示进行直积，然后再将其分解为不可约表示的直和。

对于 $SU(2)$ 群表示，上述过程可以推广到一般的不可约表示。如果我们将角动量量子数分别为 j_1 和 j_2 的两个不可约表示做直积，所得到的表示也是可约的，它一般可以分解为总角动量量子数：$j=|j_1-j_2|,\cdots,j_1+j_2$ 等各个不可约表示的直和。因此如果我们用抽象的符号：$\mathbf{j}$ 来表示角动量量子数为 j 的不可约表示，前面的事实可以写为：

$$\mathbf{j_1}\otimes\mathbf{j_2}=|\mathbf{j_1}-\mathbf{j_2}|\oplus(|\mathbf{j_1}-\mathbf{j_2}|+\mathbf{1})\oplus\cdots\oplus(\mathbf{j_1}+\mathbf{j_2})\,. \tag{B.3}$$

我们从这些表示的维数上也可以验证：

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2j+1)=(2j_1+1)(2j_2+1)\,. \tag{B.4}$$

[1] 我们这里讨论的是同一个群（这里指的是 $SU(2)$ 群）的两个群表示的直积，这不同于两个群的直积。

在物理上，这对应于将两个任意的角动量相加，它可以构成上述不同角动量量子数。要具体写出不同 j 下基矢的形式，我们需要的就是所谓的 Clebsch-Gordan 系数：$\langle jm|j_1m_2;j_2m_2\rangle$，简称 CG 系数。Clebsch-Gordan 系数的计算在任何的一个高等量子力学课程中都会比较详细地讲授，这里我们就不再深入了。

表 B.1：运用通常量子力学的语言和 $SU(2)$ 群表示的语言对于量子系统转动性质的描述

量子力学的语言	$SU(2)$ 群表示的语言
角动量 $\mathbf{J}_i$	群的生成元
转动算符 $U=e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}}$	群元的表示
转动部分的希尔伯特空间	表示的矢量空间
总角动量量子数 j	不可约表示的标志
希尔伯特空间维数 $(2j+1)$	不可约表示的维数
希尔伯特空间基矢（角动量本征态）$\|jm\rangle$	不可约表示的基矢
角动量 j_1 和 j_2 的相加	两个不可约表示的直积
角动量 j_1 和 j_2 的系统基矢：$\|j_1m_1\rangle\otimes\|j_2m_2\rangle$	两个不可约表示的直积表示的基矢
角动量 j_1 和 j_2 的相加的总角动量分解	两个不可约表示的直积分解为直和

作为这个附录的一个总结，我们发现由于角动量与转动之间的密切联系，我们在量子力学中关于角动量的理论完全可以一对一地用相应的 $SU(2)$ 群表示的语言来表述。在表 B.1 中，我们列出了这两种表述方法之间的对应关系。需要注意的是，这种群表示的表述不仅仅是一种简单的翻译，而是提高了一个层次，因为我们可以进而运用群表示论中的各种方法来讨论相关的量子力学问题。

参考文献

[1] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995; Beijing World Publishing, Beijing, 2006.

[2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995; Beijing World Publishing, Beijing, 2004.

[3] M. Carmeli and S. Malin, *Theory of Spinors, an Introduction*, World Scientific, Singapore, 2000.

[4] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[5] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, New York, 1993.

[6] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (second edition), Addison-Wesley, Redwood City, California, 1989.

[7] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[8] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw Hill, New York, 1965.

[9] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, 3rd ed., Springer, Berlin, 2000; reprinted by Beijing World Publishing Corporation, 2003.

[10] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1994.

[11] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2007. For a draft of this nice book (in PDF format), please visit the author's webpage: http://www.physics.ucsb.edu/~mark/qft.html

[12] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.

索引

CPT 定理, 60
S-矩阵, 90–93
$SL(2,C)$ 群, 28
    旋量表示, 29–30
    与洛伦兹群关系, 28–29
T-矩阵, 93
$U(1)$ 规范场, 78
$U(1)$ 希格斯模型, 79
$V-A$ 型相互作用, 6
β 衰变, 5
$\lambda\phi^4$ 理论, 75
μ 子, 7
π 介子, 7
$\theta-\tau$ 之谜, 6
g-因子, 54
n 体末态相空间, 96
s 道, 128
t 道, 128
u 道, 128

Bargmann-Wigner 框架, 36
Bhabha 公式, 130
Bhabha 散射, 116, 128–130
Bjorken 标度律, 8

Clebsch-Gordan 系数, 167
Clifford 代数, 27

Fierz 变换, 35
Fock 空间, 44

Furry 定理, 157

Gell-Mann-Low 定理, 82
Grassmann 数, 25
Gupta-Bleuler 量子化方法, 63–70

Källén-Lehmann 谱表示, 98
Klein-Nishina 公式, 135

Lehmann-Symanzik-Zimmermann 约化公式, 97–103
LHC, 10
LSZ 约化公式, 97–103

Møller 波算符, 92
Møller 散射, 128, 130
Majorana 方程, 32
Majorana 费米子, 32
Mandelstam 变量, 127, 130
Mott 公式, 131
muonium, 122

Nöther 定理, 17
Nambu-Jona Lasinio 模型, 76

QED, 76

Rarita-Schwinger 场, 36
Rarita-Schwinger 方程, 36

Shelter Island 会议, 4

Uehling 势, 149

Ward-Takahashi 恒等式, 154
Weinberg-Salam 模型, 9
Wick 定理, 83–84
    旋量场的, 107
Wick 转动, 141
Wigner 定理, 61

阿贝尔群, 9
爱因斯坦求和约定, 20
半经典的辐射理论, 2

本性奇点, 73
毕安基恒等式, 34
编时传播子, 47
    狄拉克场的, 59
    电磁场的
        费曼规范的, 69
        一般规范的, 70
    克莱因－高登场的, 47
编时算符, 47
标量场, 31
标量量子电动力学, 79
标量偏振, 65
标准模型, 8, 9
表观发散度, 156

波包, 101
波函数重整化因子, 99
不可约表示, 165
不可重整算符, 75
部分子, 8
层子模型, 7
产生截面
    矢量粒子的, 124
    重夸克偶素的, 125

场, 16
    哈密顿量, 16
    经典运动方程, 16
    拉格朗日量, 16
    拉格朗日密度, 16
    拉氏量, 16
    作用量, 16
场强重整化因子, 99
    狄拉克场的, 100, 143, 158
    光子场的, 158
场算符
    海森堡表象的, 80
    相互作用表象的, 80
    薛定谔表象的, 80

传播子
    狄拉克场的, 59
    电磁场的
        费曼规范的, 69
        一般规范的, 70
    克莱因－高登场的, 46
传播子理论, 127
纯规范, 68
大分量, 54
大型强子对撞机, 10

单粒子不可约图, 105
单联通性, 21
等时对易关系, 39
狄拉克方程, 2, 12, 32, 48
狄拉克旋量, 12, 26
抵消项, 143, 159
底夸克, 125
底夸克偶素, 125
电子的自能, 139–143
    经典电动力学中, 142

顶点, 87
顶点函数, 138
    电子的, 149–155
顶夸克, 9
动量
    狄拉克场的, 57
度规

旋量空间的, 23
闵氏时空的, 19
对称性, 17
对称性自发破缺, 9, 17
对称因子, 89
对偶场强张量, 34
对易关系, 3
多体理论, 1
多余负号, 127
二次量子化, 13, 36

反常, 17
反常磁矩, 151, 153
反对易关系, 3, 55
反粒子, 2, 46
反自对偶, 35
非阿贝尔规范场, 9
非连通图, 87
非微扰性质, 71, 125
束缚态的, 122
非物理分量
物理态的, 67
非物理偏振, 65
非物理态, 66
非相对论极限, 11, 58, 110
非正定希尔伯特空间, 66
费曼参数, 139
费曼参数积分公式, 139
费曼传播子, 83, 85, 86
标量场的, 47
狄拉克场的, 59
电磁场的
费曼规范的, 69
一般规范的, 70
费曼规范, 64
费曼规则, 89
标量场论的, 90
动量空间的, 90
量子电动力学的, 112
实空间的, 90
汤川理论的, 110
费曼矩阵元, 93, 106
费曼散射振幅, 93
费曼图, 85
费曼振幅, 93, 106, 108
费米—狄拉克统计, 3
费米理论, 3, 5
费米四费米子理论, 5
分析力学, 16
辐射修正, 137

覆盖群, 165
负能海, 12, 56
干涉, 128
高阶导数场论, 16
高斯—海维赛德单位制, 162

共轭动量, 16
光学定理, 149
规范, 78
规范变换, 9, 33, 77
规范不变性, 33
规范对称性, 77, 79, 146
规范群, 9
归一化条件
单粒子态的, 45
基态的, 44
鬼态, 16
哈密顿量
狄拉克场的, 57
哈密顿密度, 17

海森堡表象, 45
海森堡绘景, 45
海维赛德—洛伦兹单位制, 162
横向偏振, 65
红外发散, 137

简单的 δ-函数归一化, 94

简正模式, 41
简正频率, 41
简正坐标, 41

渐近展开, 73
渐近自由, 8
胶子, 8
交叉对称性, 126, 135
角动量
    狄拉克场的, 58
角动量相加, 166
截断, 74, 140
截肢图, 104
介子, 7, 125
金兹堡－朗道自由能, 79

局域性, 16

康普顿公式, 134
康普顿散射, 131–135
可重整算符, 76
可重整性, 76, 79, 143
克莱因－高登方程, 1, 11, 31, 39
空穴理论, 12
库仑奇点, 126, 130
库仑势, 113
夸克禁闭, 7
夸克模型, 7

兰姆移动, 4, 148
朗得 g-因子, 151
类空间隔, 45
李普曼－许温格方程, 92

粒子空穴变换, 56
连通图, 87
量子场论
    可重整的, 143
量子电动力学, 3, 76
量子化
    标量场的, 39–45
    狄拉克场的, 54–59
    电磁场的, 63–70
量子色动力学, 8, 112
零点能, 42
零模态, 68

螺旋度, 52, 65
裸电荷, 145
裸微扰论, 143, 158
裸质量, 92, 99, 105
洛伦兹变换
    非恰当负时, 21
    非恰当正时, 21
    恰当负时, 21
    恰当正时, 21
洛伦兹标量, 19
洛伦兹不变量, 18
洛伦兹不变性, 18
洛伦兹对称性, 18
洛伦兹规范, 64
洛伦兹群, 18
    旋量表示, 22–27
麦克斯韦方程, 2
曼哈顿计划, 5

莫比乌斯变换, 30
内点, 87
内积, 20
内线, 87
能动量张量, 17

欧拉－拉格朗日方程, 16
欧拉公式, 156
庞加莱对称性, 18
庞加莱群, 18
泡利－维拉斯正规化, 153
泡利不相容原理, 3, 56
泡利方程, 54
泡利矩阵

四维, 23

谱密度函数, 98

强相互作用, 3, 6

圈图, 137
圈图展开, 157
群
乘法, 18
群表示, 19
群表示的基, 19
元素, 18
群表示论, 18
群论, 18
弱相互作用, 3, 6
塞曼能量, 54
三个代表理论
$\lambda\phi^4$ 理论, 75
量子电动力学, 79
汤川理论, 76

散射, 90
散射截面, 90
e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的, 119
定义, 93–96
深度非弹性散射实验, 8

时间演化算符
相互作用表象的, 81
矢量表示
洛伦兹群的, 21
手征表象, 49
守恒荷, 17
狄拉克场的, 57
守恒流, 17
树图, 137
束缚态, 122

衰变宽度
重夸克偶素的, 125
衰变率, 95
四费米子理论, 76
四矢量, 19
逆变, 19
协变, 19
四元数, 28
缩并, 83

汤川理论, 3, 7, 76
汤川势, 112
汤姆孙截面, 135

投影算符
负能解的, 51
正能解的, 51
图的截肢, 104
推迟传播子, 46
瓦德恒等式, 132, 144, 154
外点, 87
外尔旋量, 23
右手, 23
左手, 23
外腿, 87
外线, 87
完备关系, 45

微分散射截面
e^+e^- 到 $\mu^+\mu^-$ 的, 118
e^+e^- 湮灭的, 135
$e^-\mu^-$ 散射的, 126
Bhabha 散射的, 130
定义, 96
康普顿散射的, 135
微扰论, 71
重整化的, 143
无关算符, 75
物理电荷, 145
物理分量
物理态的, 67
物理偏振, 65

物理态, 66
物理质量, 92, 99, 105
物理子空间, 66
西北规则, 23

希格斯场, 76
希格斯机制, 9
希格斯粒子, 9, 10
相对论性量子力学, 1, 10
相互作用的标量场论, 75
相互作用顶点, 87
箱归一化, 93

小分量, 54
协变微商, 53, 77
新物理, 9
形式散射理论, 90
形状因子, 150
序参量, 79
旋量表示
  $SL(2,C)$ 群的, 30
  洛伦兹群的, 22–24

薛定谔方程, 2
颜色, 7

因果性, 45

有效理论, 74
有效耦合常数, 145, 147
右手费米子, 52
宇称变换, 24
宇称不守恒, 6

在壳条件, 49

真空, 42, 44
真空极化, 138
真空态, 44
真空图, 88
正电子, 2
正规乘积, 84
正规化, 74, 139, 140
  动量截断, 146
  动量截断正规化, 139
  泡利－维拉斯, 140
  泡利－维拉斯正规化, 139
  维数, 146
  维数正规化, 139
正则动量, 39
正则量子化, 38

质壳条件, 49
质量重整化, 4
中间玻色子, 6
中微子, 5
重夸克偶素, 125
重整化, 76, 138, 139, 143
  量子电动力学的, 155–160
重整化条件, 159
重整化微扰论, 159
重子, 7

紫外发散, 3, 74, 137
子图, 86
自对偶, 35
自能, 105
  电子的, 138
自然单位制, 162
自旋, 2
纵向偏振, 65
最小标准模型, 10
左手费米子, 52
作用量, 18
  Majorana 费米子, 32
  狄拉克场的, 32
  电磁场的, 33
  复克莱因－高登场的, 31
  克莱因－高登场的, 31

闵氏时空, 19

幺正性, 13, 16, 92

粲夸克, 125
粲夸克偶素, 125