

中国科学院研究生院教材
Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

量子场论

周邦融 编著

Quantum Field Theory



高等教育出版社
Higher Education Press

中国科学院研究生院教材

Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

ISBN 978-7-04-022338-5

9 787040 223385 >

定价 28.30 元

学科类别：物理

O572.366
Z57

中国科学院研究生院教材
Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

量子场论

周邦融 编著

Quantum Field Theory

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书通过算符语言和正则量子化形式系统地阐述了量子场论的基本原理和方法，包括 Poincaré 不变的经典场论的一般论述，自由场和相互作用场的量子化，其中贯穿着连续和分立、时空与内部、整体和定域对称性的讨论。本书着重通过量子电动力学（QED）叙述了 S 矩阵和微扰论、Feynman 图技术及其物理应用，并通过时空维数正规化和 QED 单圈图重整化阐述了重整化的基本意义，包括 Ward 恒等式、跑动耦合常数以及辐射修正的物理效应，此外也论述了一个理论可重整化的一般判据以及近年来有关不可重整性与等效场论的新观点。

本书可作为物理学科研究生（及高年级本科生）量子场论的教材或参考书，也可供理论物理研究工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

量子场论/周邦融编著. —北京：高等教育出版社，
2007.9

ISBN 978-7-04-022338-5

Ⅰ. 量… Ⅱ. 周… Ⅲ. 量子场论-高等学校-
教材 Ⅳ. O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 124791 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市大天乐印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007年9月第1版
印　　张	17	印　　次	2007年9月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	28.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　22338-00

中国科学院研究生院教材编审委员会

主　任：白春礼

顾　问：余翔林

副主任：马石庄（常务）　刘志鹏　韩兴国　苏　刚

委　员（以姓氏笔画为序）：

石耀霖　刘嘉麒　杨　乐　李伯聪　李　佩　李家春

吴　向　汪尔康　汪寿阳　张文芝　张增顺　徐至展

黄荣辉　黄　钧　阎保平　彭家贵　裴　钢　谭铁牛

物理学科编审组

主　编：李家春

副主编：苏　刚

编　委：丁亦兵　马中骐　邓祖淦　王鼎盛　叶甜春　李国华

张肇西　洪友士　赵　刚　詹文山　詹明生

总 序

在中国科学院研究生院和高等教育出版社的共同努力下，凝聚着中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血和汗水的中国科学院研究生院教材面世了。这套教材的出版，将对丰富我院研究生教育资源、提高研究生教育质量、培养更多高素质的科技人才起到积极的推动作用。

作为科技国家队，中国科学院肩负着面向国家战略需求，面向世界科学前沿，为国家作出基础性、战略性和前瞻性的重大科技创新贡献和培养高级科技人才的使命。中国科学院研究生教育是我国高等教育的重要组成部分，在新的历史时期，中国科学院研究生教育不仅要为我院知识创新工程提供人力资源保障，还担负着落实科教兴国战略和人才强国战略，为创新型国家建设培养一大批高素质人才的重要使命。

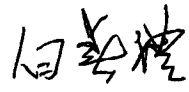
集成中国科学院的教学资源、科技资源和智力资源，中国科学院研究生院坚持教育与科研紧密结合的“两段式”培养模式，在突出科学教育和创新能力培养的同时，重视全面素质教育，倡导文理交融、理工结合，培养的研究生具有宽厚扎实的基础知识、敏锐的科学探索意识、活跃的思维和唯实、求真、协力、创新的良好素质。

研究生教材建设是研究生教育中重要的基础性工作。由一批活跃在科学前沿，同时又具有丰富教学经验的科学家编写的中国科

学院研究生院教材，适合在校研究生学习使用，也可作为高校教师和专业研究人员的参考书。这套研究生教材内容力求科学性、系统性、基础性和前沿性的统一，使学习者不仅能获得比较系统的科学基础知识，也能体会蕴于其中的科学精神、科学思想、科学方法，为进入科学研究的学术殿堂奠定良好的基础；优秀教材不但是体现教学内容和教学方法的知识载体、开展教学的基本条件和手段，也是深化教学改革、提高教育质量、促进科学教育与人文教育结合的重要保证。

“十年树木，百年树人”。我相信，经过若干年的努力，中国科学院研究生院一定能建设起多学科、多类型、多品种、多层次配套的研究生教材体系，为我国研究生教育百花园增添一枝新的奇葩，为我国高级科技人才的培养作出新的贡献。

中国科学院 常务副院长
中国科学院研究生院 院长
中国科学院 院士



二〇〇六年二月二十八日

前　言

量子场论是了解微观世界的最重要的理论工具之一，它不仅是高能物理(粒子物理)研究的必要手段，而且在其它物理学分支如统计物理、原子物理、核物理、凝聚态物理、天体物理和宇宙学中也得到越来越广泛的应用。量子场论的基本表述形式之一是算符语言和正则量子化，它不仅反映了传统量子力学到量子场论的发展历史，也是理解近代广泛使用的路径积分表示的基础。对于初步掌握量子力学和狭义相对论的读者来说，正则量子化方法是场论入门的捷径。本书的目的是为学习粒子物理学以及其它需要场论方法学科的研究生提供场的正则量子化方法的系统知识，也为他们进一步学习规范场论或凝聚态场论打下坚实的基础。

本书的内容包括 Poincaré 变换下不变的经典场论概述，自由场和相互作用场的正则量子化，其中贯穿着连续和分立、时空与内部、整体和定域对称性的讨论。本书着重通过量子电动力学(QED)讨论了 S 矩阵和微扰论、Feynman 图技术及其物理应用，并通过 QED 单圈图重整化阐述了重整化的基本概念和操作，Ward 恒等式、跑动耦合常数以及辐射修正的意义，最后论述了一个理论可重整化的一般判据以及近年来有关不可重整性与等效场论的新观点。

作为量子场论的入门教材，本书主要阐述正则量子化形式，未包括路径积分量子化和非阿贝尔规范场的内容。限于篇幅，也未涉及对称性的自发破缺和超对称性等。

本书的编著主要参考了 20 世纪后期世界知名的量子场论著作，包括 60 年代的 Bjorken - Drell 和 Lurie，80 年代的 Itzykson - Zuber 和李政道，80—90 年代的 Ramond，90 年代的 Weinberg 和 Peskin - Schroder 等人所写的书，但内容自成体系。由于主要目的在于阐述量子场论的基本原理，所以除了关系到场论发展的一些先驱性思想和结果之外，本书不求对原始文献的详细引用。更多的原始文献出处可以在作为主要参考文献的上述著作中找到。

考虑到今天的量子场论已经在传统的正则量子化的基础上有了很大的发展，所以在内容的选编上，在保持基本的经典性论述的基础上，也尽量加入了一些更现代的术

语、表述形式和内容。例如对于 Poincaré 不变经典场论的一般讨论以及对于具体场论的经典和正则量子化描述,都是以泛函作用量和拉氏函数为基本出发点的。对于现代场论的本质要素——对称性——的讨论则同样在作用量语言的基础上贯彻始终,其中包括通过定域规范不变性引入了电磁场作为 U(1)规范场的概念;在 QED 重整化的论述中,采用了现代的圈图展开概念和维数正规化方法并讨论了最小减除和跑动耦合常数等。这些内容和表达形式也将使本书更容易与场论的路径积分量子化、非 Abel 规范场论和一般的重整化群理论接轨。

在适应理论的现代表述的同时,本书也努力使之容易被初学者所接受。例如,通过熟知的一维谐振子的正则量子化向场的过渡,阐明了量子场论本质上是量子力学向无穷大、连续自由度系统的推广。在叙述 Lorentz 变换和 Poincaré 变换时尽量少用群论的专门术语,而主要是使用大学生熟悉的线性变换和量子力学的语言。旋量场的概念不是从 Lorentz 群表示的角度而是先从 Dirac 方程的解导出其 Lorentz 变换形式,然后再作严格定义。这对于尚未学习连续群的读者来说,能够免受过多专门数学概念的困扰而更快地进入场论的实质内容。此外,目录中打 * 号的内容是可选择的,跳过它们不会影响对本书主线内容的理解。

量子场论是一门技术性很强的理论学科。为了对初学者有所帮助,附录中详细给出了正文中比较复杂的数学推导。在各章节后都附有难度不等的习题(其中打 * 号的是难度较大或更具选择性的题目),努力完成它们无疑能够加强对基本知识和数学技巧的掌握。

本书可以作为研究生量子场论课程的教材,对硕士生和博士生可以有不同的要求。经适当删节后,也可作为大学高年级量子场论的入门教材和参考书。本书也可供理论物理研究工作者参考。

本书多年来一直作为原中国科学技术大学研究生院(北京)和现中国科学院研究生院量子场论课程的教材。勤奋好学的研究生们在学习过程中所提出的一些有启发性的问题以及有益的建议,对于完善和改进本书起过很好的作用,作者对他们表示由衷的感谢。

周邦融

2007 年 4 月

目　录

标记和符号 …… I

第 1 章　引言 …… 1

相对论单粒子波动方程. 负能解和负几率. 场方程解释和场量子化. 定域场.

第 2 章　经典场 …… 6

2.1　作用量 …… 6

经典粒子力学的变分原理. 对称性与守恒定律.

2.2　Lorentz 变换和 Poincaré 变换 …… 8

2.2.1　Lorentz 变换 …… 8

定义和分类. 生成元和 SO(3,1)代数. 转动和平动.

2.2.2　Poincaré 变换 …… 13

平移生成元. Poincaré 代数. Pauli – Lubanski 四矢量. Poincaré 群的表示*.

2.3　定域场的 Poincaré 变换性质 …… 17

标量场、矢量场和张量场. Dirac 旋量场. 旋量场双线性量. Weyl 和 Majorana 旋量.

2.4　场作用量、最小作用原理和 Noether 定理 …… 25

Euler – Lagrange 方程. 守恒流与守恒荷.

2.5　0 自旋场 …… 31

四动量和广义角动量. O(N)内部对称性*.

2.6　自旋 1/2 的场 …… 34

2.6.1　作用量、运动方程和守恒量 …… 34

四动量和广义角动量. U(1)相位不变性.

2.6.2 平面波解、投影算符 …… 35
正能解和负能解. 正能和负能投影算符. 自旋算符.
2.6.3 零质量粒子 …… 41
手征对称性. 手征性与 helicity. 平面波解. 两分量旋量场*.
2.7 Maxwell 场 …… 45
规范变换. Lorentz 条件. 四动量和广义角动量.
第 3 章 场的正则量子化 …… 50
3.1 正则形式与粒子力学的量子化 …… 50
一维谐振子的正则量子化. Hilbert 空间.
3.2 场的正则量子化——一般表述 …… 54
坐标空间分立化. 共轭动量和量子化. 量子化和 Poincaré 不变性
3.3 Klein – Gordon 场的正则量子化 …… 59
3.3.1 实标量场的量子化与粒子解释 …… 59
平面波展开. LT 不变的积分测度. 动量空间分立化与场量子化的谐振子等价. 真空. 产生与消灭算符. Fock 空间. 对称态与 Bose – Einstein 统计.
3.3.2 场的可测性与微观因果性 …… 66
非等时对易子. 类空对易性与微观因果性条件.
3.3.3 复标量场与正反粒子 …… 67
U(1)对称性. 守恒荷. 粒子与反粒子.
3.3.4 编时乘积与 Feynman 传播子 …… 70
3.4 Maxwell 场的正则量子化 …… 72
3.4.1 不定度规 …… 73
Gupta – Bleuler 量子化. 不定度规的 Fock 空间和物理的 Hilbert 空间. 横光子.
3.4.2 传播子 …… 80
Feynman 规范传播子.
3.5 Dirac 场的正则量子化 …… 81
3.5.1 反对易子 …… 81
反对易性与真空的稳定性. 从 Poincaré 不变性导出反对易关系. 等时反对易子.
3.5.2 Fermions 的 Fock 空间 …… 84
Fermion 数和自旋. 反对称态与 Fermi – Dirac 统计.
3.5.3 自旋与统计间的关系、传播子 …… 89
相对论定域场论所包含的自旋 – 统计关系.
3.6 分立对称性 …… 92

3.6.1 宇称 …… 92
量子场的$\mathcal{P}$变换. 内禀宇称. $\mathcal{P}$不变性. 算符$\mathcal{P}$的构造*.
3.6.2 电荷共轭 …… 98
正反粒子变换. 量子场的$\mathcal{C}$变换. $\mathcal{C}$不变性. 算符$\mathcal{C}$的构造*.
3.6.3 时间反演 …… 101
量子场的$\mathcal{T}$变换. $\mathcal{T}$不变性和反幺正算符.
第4章 相互作用量子场 …… 105
4.1 定域对称性与U(1)规范场 …… 105
协变微商与U(1)规范不变性. 电磁场本质为U(1)规范场.
4.2 电磁作用 …… 107
自旋1/2场的最小电磁耦合. 相互作用场的正规乘积.
4.3 非电磁作用 …… 112
4.3.1 π-N唯象强作用 …… 112
π^0-N Yukawa耦合. 同位旋SU(2)不变耦合*. 电荷守恒与重子数守恒*.
4.3.2 低能唯象弱作用 …… 117
纯轻子弱作用. 半轻子弱作用*. 无轻子弱作用*.
4.4 分立对称性和$\mathcal{PCT}$定理 …… 120
4.4.1 相互作用场的$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$变换 …… 120
旋量场最小电磁耦合. 算符$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$的构造*.
4.4.2 $\mathcal{PCT}$定理 …… 122
相互作用的Klein-Gordon场、Maxwell场和Dirac场的$\mathcal{I}=\mathcal{PCT}$变换. 旋量场双线性量的$\mathcal{I}$变换. 作用量和等时对易/反对易子的$\mathcal{I}$不变性.
第5章 S矩阵和微扰论 …… 127
5.1 相互作用图像、U矩阵和S矩阵 …… 127
态与算符的运动方程. U矩阵与态的时间演化. 幺正性. S矩阵的存在性与粒子的物理质量.
5.2 微扰展开 …… 132
S矩阵的微扰展开级数、物理的单粒子态. QED.
5.3 Wick定理 …… 136
算符的收缩. Wick定理的数学归纳法证明.
5.4 Feynman图——QED …… 141
5.4.1 QED S矩阵的正规乘积分解 …… 141
至二级的非零收缩项.

5.4.2 S 矩阵元 …… 143
一级正规乘积. 四动量守恒与质壳条件的不相容. 二级正规乘积.
5.4.3 物理过程的二级 S 矩阵元举例 …… 146
$e^- - e^+$ 散射. 光子自能跃迁.
5.4.4 QED Feynman 规则 …… 148
拓扑权因子. 树图和圈图.
5.4.5 电子和光子的自能跃迁 …… 153
电子质量重整化. 正规化与减除. 电磁流守恒保证光子的自能跃迁矩阵元为零.
5.4.6 真空 - 真空跃迁 …… 156
真空图的可忽略性. 不连接图.
5.4.7 电子与外电磁场的相互作用 …… 158
作用顶角. 外加真空图. 真空极化效应与电磁流守恒.
5.5 含标量粒子的 Feynman 规则 …… 160
5.5.1 实标量场 $\lambda\varphi^4$ 耦合 …… 160
非平凡的拓扑权因子.
5.5.2 π - N Yukawa 耦合 …… 163
π^0 - N 顶角. π - N 顶角和介子内线*.
5.6 截面与寿命 …… 165
S 矩阵元和跃迁几率. 粒子相空间中的态计数. 极化与不极化的截面与寿命公式.
5.7 应用举例 …… 170
5.7.1 一些有用的公式 …… 170
γ 矩阵的求迹和有关运算.
5.7.2 Compton 散射截面 …… 172
S 矩阵元. 微分截面. 振幅计算. 自旋求和. 总截面.
5.7.3 μ 衰变寿命 …… 178
S 矩阵元. 振幅计算. 中微子和电子动量积分. 衰变寿命.
第 6 章 重整化 …… 182
6.1 圈图展开 …… 183
等同于按 ħ 幂次的展开. 连接的 Green 函数.
6.2 QED 单圈图重整化——维数正规化方法 …… 184
6.2.1 真空极化 …… 185
真空极化张量. 维数正规化操作. 电磁流守恒与光子质量恒为零. 减除与重整化的电荷. 重整化的裸参数观点.
6.2.2 电子传播子 …… 196

红外发散的正规化. 紫外发散的维数正规化和重整化.

6.2.3 顶角函数、Ward 恒等式 …… 201

Ward 恒等式. 至单圈图级的显示证明. 至微扰论任何级的图形证明. 单圈顶角函数的重整化.

6.2.4 重整化的相乘性、跑动耦合常数 …… 212

抵消项和重整化的拉氏函数. 裸的与重整化的场和参数. 最小减除方案. QED 跑动耦合常数和真空极化的电荷屏蔽效应.

6.3 辐射修正 …… 218

6.3.1 等效相互作用和反常磁矩 …… 218

电子与外场作用的辐射修正. 等效哈密顿量与反常磁矩.

6.3.2 Lamb 位移 …… 221

Lamb 位移的 QED 辐射修正解释. 红外奇异的相消机制.

6.4 原始发散、可重整化的一般判据 …… 223

表观发散度. Weinberg 定理. 不可重整、可重整与超可重整化理论.

6.5 不可重整性与等效场论 …… 226

可重整性要求是否为必须? 不可重整理论是可探测和有用的. 不可重整理论仅为等效场论.

附录 一些数学推导和证明 …… 230

参考文献 …… 243

索引 …… 245

标记和符号

1. 度规、坐标和动量

四维 Minkowski(闵氏)时空的度规张量

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

时空坐标$(t,\vec{x})$表为逆变四矢量

$$x^{\mu}=(x^{0},x^{1},x^{2},x^{3})\equiv(x^{0},x^{i})=(t,\vec{x})$$

协变四矢量x_{μ}由改变空间分量的符号得到

$$x_{\mu}=(x_{0},x_{i})=(x^{0},-x^{i})=g_{\mu\nu}x^{\nu}=(t,-\vec{x})\equiv\tilde{x}^{\mu}$$

除非特别声明,重复指标意味着求和.要求和的两个相同指标必须是一个上标,一个下标;若二者同在上或同在下,则是错的.内积为$x^{2}=x_{\mu}x^{\mu}=t^{2}-\vec{x}^{2}$.

对坐标的微商算符

$$\partial_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=(\partial_{0},\partial_{i})=\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla_{i}\right)$$

$$\partial^{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=(\partial^{0},\partial^{i})=(\partial_{0},-\partial_{i})=\left(\frac{\partial}{\partial t},-\nabla_{i}\right)$$

达朗贝尔算子

$$\Box\equiv\partial_{\mu}\partial^{\mu}=\partial_{0}^{2}-\nabla^{2}$$

四动量算符

$$p^{\mu}=\mathrm{i}\partial^{\mu}=(\mathrm{i}\partial^{0},\mathrm{i}\partial^{i})=\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},-\mathrm{i}\nabla_{i}\right)=(p^{0},p^{i})=(p^{0},\vec{p})$$

$$p_{\mu}=g_{\mu\nu}p^{\nu}=(p^{0},-\vec{p})\equiv\tilde{p}^{\mu}$$

坐标和动量四矢量的标量积

$$x\cdot p\equiv x^{\mu}p_{\mu}=x^{0}p^{0}-x^{i}p^{i}=x^{0}p^{0}-\vec{x}\cdot\vec{p}$$

对任意四矢量 $V^{\mu}=(V^{0},V^{i})=(V^{0},\vec{V})$ 和 $W^{\mu}=(W^{0},W^{i})=(W^{0},\vec{W})$，有

$$V_{\mu}=g_{\mu\nu}V^{\nu},\quad W_{\mu}=g_{\mu\nu}W^{\nu}$$

标量积

$$V\cdot W\equiv V^{\mu}W_{\mu}=V^{0}W^{0}-V^{i}W^{i}=V^{0}W^{0}-\vec{V}\cdot\vec{W}$$

任何量上方加一点表示对时间求微商即 $\dot{a}\equiv\partial a/\partial t$，任何量加上标 * 表示复共轭，加上标 + 表示厄密共轭.

四维闵氏时空的坐标积分测度 $\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$，动量积分测度 $\mathrm{d}^4p=\mathrm{d}p^0\mathrm{d}p^1\mathrm{d}p^2\mathrm{d}p^3$.

2. γ 矩阵

矩阵 $\gamma^{\mu}=(\gamma^{0},\gamma^{i})=(\gamma^{0},\vec{\gamma})$ 满足反对易关系

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^{0+}=\gamma^{0}(\text{厄密}),\quad \gamma^{i+}=-\gamma^{i}(\text{反厄密})$$

与 $\vec{\alpha},\beta$ 矩阵的关系是

$$\vec{\gamma}=\beta\vec{\alpha},\quad \gamma^{0}=\beta$$

γ_5 矩阵：

$$\gamma_5=\gamma^5\equiv\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}=\gamma_5^{+}$$

$$\gamma_5^2=I,\quad \{\gamma_5,\gamma^{\mu}\}=0$$

其中四阶全反对称张量

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1 & (\text{当 }\mu\nu\rho\sigma\text{ 是 0123 的偶置换})\\ -1 & (\text{当 }\mu\nu\rho\sigma\text{ 是 0123 的奇置换})\\ 0 & (\text{其它情况})\end{cases}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Dirac 表象：

$$\gamma^{0}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \gamma^{i}=\begin{pmatrix}0 & \sigma^{i}\\ -\sigma^{i} & 0\end{pmatrix}$$

其中

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad \sigma^{1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^{2}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^{3}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

分别为 2×2 单位矩阵和泡利矩阵.

电荷共轭矩阵：

$$C=\mathrm{i}\gamma^{2}\gamma^{0}$$

满足

$$C\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}}C^{-1}=-\gamma_{\mu},\quad C\gamma_5^{\mathrm{T}}C^{-1}=\gamma_5,\quad C^{-1}=C^{\mathrm{T}}=C^{+}=-C$$

其中 T 表示矩阵的转置.

γ^μ 与矢量 a^μ 的标量积记为 $\not{a}=\gamma^\mu a_\mu$，例如 $\not{\partial}=\gamma^\mu\partial_\mu$.

3. 符号

I	作用量
$\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}(x)$	拉格朗日函数密度(拉氏密度)
$\Lambda^\mu_{\ \nu}$	Lorentz 变换矩阵元
$S(\Lambda)$	Dirac 旋量的 Lorentz 变换矩阵
$M_{\mu\nu}$	SO(3,1)代数生成元
P_μ	时空平移生成元
$W^\mu=-\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\nu\rho}P_\sigma$	Pauli－Lubanski 四矢量
$\varphi(x)$	标量场
$A^\mu(x)$	矢量场
$\psi(x)$	旋量场
$\psi_{\mathrm{L}}(x)$	左手旋量场
$\psi_{\mathrm{R}}(x)$	右手旋量场
tr	旋量空间中矩阵的迹
$F^{\mu\nu}(x)=\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x)$	电磁场强张量
$\mathcal{D}_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu$	协变微商
λ	规范参数
$:\quad:$	正规乘积
$TA(x_1)B(x_2)\cdots$	编时乘积
$\underbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}$	场算符的收缩
$\Phi^{(+)}(x)$	场 $\Phi(x)$ 的正频部分
$\Phi^{(-)}(x)$	场 $\Phi(x)$ 的负频部分
H	哈密顿量
$\mathcal{H}\equiv\mathcal{H}(x)$	哈密顿函数密度(哈氏密度)
G	Fermi 常数
$\alpha=e^2/4\pi$	精细结构常数
$\mathcal{P}$	宇称算符
$\mathcal{C}$	电荷共轭算符
$\mathcal{T}$	时间反演算符
$\langle f\mid S\mid i\rangle$	S 矩阵元
$\Pi^{\mu\nu}(k)$	真空极化张量
$\Sigma(p)$	电子自能函数

$\Lambda_\mu = \gamma_\mu + \Gamma_\mu$	顶角函数
Γ	衰变几率
τ	衰变寿命
$\mathrm{d}\sigma$	微分截面
$\Omega(G)$	表观发散度
δm	质量抵消项重整化常数
Z_3	光子动能项重整化常数
Z_2	电子动能项重整化常数
Z_1	顶角重整化常数

第 1 章

引　言

量子场论是了解微观世界的最重要的工具之一，尤其是研究高速微观(粒子物理)现象的基本理论手段. 这里所说的高速，是指微观粒子的运动速度等于或近于光速的情况，因而我们必须考虑狭义相对论的要求. 量子场论正是在量子力学和狭义相对论的基础上建立起来的. 随着物理学的发展，今天，量子场论方法不仅用于高能物理，而且在物理学的各个分支如统计物理，核物理，原子物理，凝聚态物理，等离子体物理，天体物理和宇宙学等多方面都得到越来越广泛的应用，它已经成为理论物理工作者必须掌握的基本工具.

为了对量子场论的基本思想先有一个定性的认识，我们来简短回顾一下它的历史发展[1,2]. 为简化标记，我们将使用自然单位，即取 $\hbar = c = 1$ 的单位制，其中 $\hbar$ 是 Planck 常数除以 2π，而 c 是真空中的光速.

微观粒子的运动应由量子理论描述. 例如，一个速度 $v << 1$ 的自由粒子，其运动可由 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \psi \tag{1.1}$$

描述，其中 $\psi \equiv \psi(\vec{x}, t)$ 为波函数，它的模方 $|\psi|^2 \geqslant 0$，可以解释为几率密度. 方程(1.1)可以从非相对论经典质点的能量 - 动量关系

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1.2}$$

的算符化即作代换

$$E \to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -\mathrm{i}\nabla \tag{1.3}$$

并作用于波函数 ψ 而得出.

然而，当粒子的速度 $v \to 1$ 时，方程(1.1)不再适用，因为它不满足狭义相对论的要求. 但我们可以略加改变，从相对论经典质点的能量 - 动量关系

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \tag{1.4}$$

出发，按(1.3)算符化，然后作用于波函数上，从而得到[3]

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (-\nabla^2 + m^2)\psi \tag{1.5}$$

此即自由粒子的 Klein－Gordon 方程或简称 K－G 方程；或者，也可以将(1.5)两边作形式上的开方，保持算符的线性化，从而得到[4]

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \tag{1.6}$$

其中$\vec{\alpha}\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\nabla_i$，$\alpha_i(i=1,2,3)$和$\beta$是数算符(矩阵)，满足下列关系：

$$\begin{gathered}\alpha_i^+ = \alpha_i, \beta^+ = \beta \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} \equiv \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (\text{对 } i \neq j) \\ \{\alpha_i, \beta\} = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

(1.6)即自由粒子的 Dirac 方程. 利用

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} = -\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m \tag{1.8}$$

作用于(1.6)的两边，考虑到(1.7)，可以证实ψ也满足 K－G 方程.

但是，如果将(1.5)和(1.6)解释为单粒子运动方程，则会遇到严重困难. 以 K－G 方程(1.5)为例，它有下述平面波解：

$$\psi \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1.9}$$

将(1.9)代入(1.5)，可得粒子能量

$$E = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{1.10}$$

而从(1.5)所推导的几率守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{2m}\nabla\cdot(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) = 0$$

可以一般地求得粒子的几率密度

$$\rho = \frac{\mathrm{i}}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \tag{1.11}$$

由此可见，存在着负能量解，几率密度也可能为负. 后者与传统的量子力学概念相冲突，因为粒子的位置几率为负显然是没有物理意义的；而负能解的存在将导致系统的不稳定，粒子会继续不断地向$E = -\infty$的能级跃迁.

除此以外，将方程(1.5)解释为单粒子方程也就杜绝了粒子的产生和消失现象，而这种现象在相对论能量区域是经常发生的. 只要能量大于或等于粒子静质量的两倍，就极易产生一对粒子和反粒子(质量与粒子相同，电荷等量子数与粒子相反的微观客体). 因此，对于相对论粒子的描述，必须超越单粒子理

论的范围.

将 Dirac 方程(1.6)解释为单粒子方程，情况略微好些[4,5]. 这时可以有正定的几率密度 $\rho=\psi^{+}\psi\geqslant 0$，然而其它困难依然存在(人们可以用以 Pauli 不相容原理为基础的空穴理论来说明真空的稳定性以及粒子 - 反粒子对的产生和湮没，但这一解释实际上已经越出了单粒子理论的范围).

鉴于 Klein - Gordon 方程和 Dirac 方程的单粒子解释的严重困难，人们就建议将它们解释为场方程[6]，出现在这些方程中的 ψ 被解释为经典场，如同 Maxwell 方程中的 A^{μ} 代表经典电磁场一样. 由此我们看到，量子场论中的“场”概念是我们熟知的经典电磁场和引力场概念的推广. 这种推广的目的，是为了更好地描述高速微观世界. 微观客体的基本特点之一是它的波粒二象性. 然而，经典场只能描述客体的波动性，不能描述客体的粒子性. 为了使场能够真正描述微观世界，就必须对场实行量子化[7]. 这种量子化，原则上也应该对电磁场和引力场进行，只要我们是在讨论微观粒子的电磁作用和引力作用.

历史上，场的量子化正是从电磁场开始的[8](尽管引力场的量子化至今尚未完成). 电磁场服从 Maxwell 方程，这一理论本身是满足狭义相对论要求的. 为了对它进行量子化，必须考虑到以下事实：电磁场是具有无穷多自由度的动力学系统. 如果将电磁势 $A^{\mu}(x)$ 作 Fourier 展开，就可以看出，它包含一系列基本的振动，每一基本振动对应一个频率，即一个振动自由度. 由于频率连续变化，所以电磁场的自由度是无穷大. 电磁场的量子化归结为各个基本振动方式的量子化. 每个基本振动方式类似于一个频率为 ω 的谐振子，在量子化之后，它的能量只能取一系列不连续的值

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.12}$$

于是电磁场的粒子性，即光子的产生和消失就有了很自然的解释. 我们可以说，频率为 ω 的自由度，若被激发到 $n=1$ 的态，就对应一个频率为 ω 的光子的产生；若被激发到 $n=2$ 的态，就对应两个频率为 ω 的光子的产生等. 而退激(激发的消失)就对应着光子的消失.

同样，可以对 Klein - Gordon 场和 Dirac 场进行量子化. 例如，若 Dirac 场用来描述电子(称之为电子场)，则量子化之后，电子场基本自由度的激发与退激将对应电子的产生和消失.

我们以后还将看到，将方程(1.5)或(1.6)中的 ψ 看成场并量子化之后，负能量和负几率问题不再存在. 关键在于，相对论量子场所描述的不仅有粒子而且还有反粒子. 正是反粒子同负能解联系起来. 此外，当反粒子存在时，几率密度被解释为正、反粒子数目之差的密度(对中性粒子)或比例于电荷密度(对带电粒子)，其取值是可正可负的.

上面所述的场量子化方法，称为正则量子化，它是量子力学中标准的坐标－动量算符化方法向具有无穷多自由度的场系统的推广. 就方程(1.5)或(1.6)而言，我们的做法是将 ψ 看作经典场然后量子化. 然而，注意到 ψ 满足的方程(1.5)或(1.6)本身，也是从经典的相对论质点力学通过力学量 $E,\vec{p}$ 的算符化(1.3)得出的. 从这个意义上说，场的正则量子化常被称为“二次量子化”，因为从经典质点力学过渡到波动方程(1.5)或(1.6)已经构成了第一次量子化. 显然，场的正则量子化或二次量子化方法，不仅可以用于相对论性波动方程，也可以用于非相对论性波动方程. 例如，若我们将一般形式下的单粒子 Schördinger 方程[1]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \tag{1.13}$$

中的 ψ 也看作经典场然后进行量子化，则所得出的量子场理论将是非相对论情况下的多粒子理论，因为它等价于粒子数占有表象中的多全同粒子的 Schrödinger 方程.

正则量子化就是本书中将要叙述的场量子化方法，它是一种基本的描述方法. 在这种描述中，我们可以清楚地了解到，量子场论实质上是量子力学向无穷多自由度系统——场——的推广，无论这种场是相对论的还是非相对论的. 除了正则量子化以外，另一种常用的场量子化方法是路径积分量子化[9]. 这一方法在现代场论特别是规范场论中得到广泛的应用[10].

我们通过以上几个例子，说明了微观粒子的经典场及其量子化(量子场)的基本思想. 事实上，量子场概念已被推广到一切相对论性的微观粒子. 对每一种微观粒子，无论它是基本的还是复合的，都可以联系一个量子场，如粒子 $\mathrm{e},\mu,\tau,\nu,\mathrm{q},\mathrm{p},\mathrm{n},\pi,\cdots$ 可以分别用电子场，μ 场，τ 场，中微子场，夸克场，质子场，中子场，π 场等描述，它们在经典一级，各自服从一定的运动方程. 当然，如果粒子是复合的，相应的场只是一种低能等效场. 因为在低能区域或说在较大尺度上看，复合粒子内部的结构是可以忽略的，我们只需考虑其质心运动而将它仅仅看作一个点粒子.

最后我们强调，通常的量子场论中只考虑定域场[11]. 这里“定域”的含义是：场 $\psi(\vec{x},t)$ 是时空点 $(\vec{x},t)$ 的连续函数，它满足微分方程，即场 ψ 在点 $\vec{x}$ 处的改变是由无限邻近该点的那些场的性质所决定. 采用定域场论的最主要理由是理论结果与实验观察相符合. 例如，高能 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 碰撞实验证实，量子电动力学(QED)在 $\geqslant 10^{-16}$ cm 的范围仍然是正确的；而高能 $\mathrm{p}\bar{\mathrm{p}}$ 或 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 碰撞产生 $\mathrm{W}^{\pm}$ 和 Z^0 粒子的实验证实，弱电统一规范理论在与这些粒子质量(能量)相联系的空间尺度($\sim 2\times10^{-16}$ cm)上是正确的. 这里，QED 和弱电统一规范理论都是定域场论. 这些事实告诉我们，至少在 $\geqslant 10^{-16}$ cm 的范围内，定域场论是适用的. 至于

在更小的范围内，虽无充分的实验证据说明定域场论是否适用，但我们假定它也是适用的；或者定域场论至少可以看作一个改进理论在适当大距离下的近似或对应.

第 2 章

经典场

2.1 作用量

在本章中，我们将在经典一级构造出符合物理要求的场论[12]，其基本出发点是描述物理系统的泛函作用量.

作用量是一种数学结构，它在物理学中起着最基本的作用. 在经典物理学中，作用量的极值将导致经典运动方程，而作用量在某种变换下的不变性将导致经典运动过程中的守恒量. 在量子物理学中，作用量尤其重要. 当我们从经典物理向量子物理过渡时，若使用正则量子化方法，则需将理论纳入哈密顿正则形式，这可以从作用量出发实现；若使用路径积分量子化方法，则必须自始至终使用作用量这一语言.

下面我们以点粒子体系为例，来说明作用量在经典力学中的基本作用.

考虑一个经典的粒子系统，其广义坐标是 $q_i(i=1,\cdots,N)$. 如三维空间中有 n 个粒子，则 $N=3n$. 系统的作用量可以写成

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}tL(q_i,\dot{q}_i),\quad \dot{q}_i\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i \tag{2.1}$$

它是 $q_i(t)$ 的泛函，是 t_1,t_2 的函数. $L(q_i,\dot{q}_i)$ 为拉氏量.

经典运动方程可由变分原理得出. 设路径 $q_i(t)$ 有一小的形变

$$q_i(t)\to q_i(t)+\delta q_i(t) \tag{2.2a}$$

其时间导数 $\dot{q}(t)$ 对应的变化为

$$\dot{q}_i(t)\to\dot{q}_i(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i(t)=\dot{q}_i(t)+\delta\dot{q}_i(t) \tag{2.2b}$$

则作用量有相应的改变

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \tag{2.3}$$

其中重复指标意味着求和. 第二项的被积函数是一个量对 t 的全微商，积分只依赖于该量在端点 t_1，t_2 的值，故通常称该项为一“表面项”. 若变分时限定

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \tag{2.4}$$

即路径变形时两个端点保持固定，则该表面项为 0. 于是，若要求 δI 对任意路径变分 δq_i 为 0，则得到拉氏方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{2.5}$$

引入泛函导数记号

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\delta I}{\delta q_i} \delta q_i + \cdots \tag{2.6}$$

则从(2.3)可见，经典运动方程(2.5)即是泛函 I 取极值的条件

$$\frac{\delta I}{\delta q_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{2.7}$$

值得指出的是，I 的极值仅仅导致一类可能的路径，它们由运动方程(2.5)以及 $q_i, \dot{q}_i$ 的初始值决定.

其次，我们来考虑 I 的对称性与经典运动过程中的守恒量之间的关系. 假定作用量 I 对于某种坐标变换

$$q_i(t) \to q_i(t) + \delta q_i(t) \tag{2.8}$$

是不变的[注意(2.8)不是(2.2)的路径变分，尽管形式上二者相同]，即

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0 \tag{2.9}$$

当 $q_i(t)$ 为经典路径时，δI 的第一项为 0，第二项又是一“表面项”. 从(2.9)得出，该表面项为 0. 但须注意，这一次表面项为 0 不是由于变分路径端点固定所引起，而是由于 I 对于坐标变化 δq_i 具有不变性且 $q_i(t)$ 服从经典运动方程的结果. 这一结果正好表达了在经典运动过程中的守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0 \quad (\text{设 } t_2 \to t_1) \tag{2.10}$$

作为一个特例，考虑三维空间中运动的一个点粒子，拉氏量

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_i - V(q_i q_i) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.11}$$

由于 $V(q_i q_i)$ 为有心力场，故 L 和 I 对于三维空间坐标转动

$$\delta q_i = \varepsilon_{ij} q_j, \quad \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \tag{2.12}$$

具有不变性，其中 ε_{ij} 为无穷小的转动参数. 反对称性质 $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ 可以由三维转动正交矩阵 a 服从的条件 $a^{\mathrm{T}}a = 1$ 即 $a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$ 的无穷小形式 $(\delta_{ki} + \varepsilon_{ki})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj}) = \delta_{ij}$ 得出. 相应的守恒定律成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_i\varepsilon_{ij}q_j) = 0$$

上式对任意 ε_{ij} 成立，故得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l_{ij} = 0, \quad l_{ij} = m(q_i\dot{q}_j - q_j\dot{q}_i) \tag{2.13}$$

这是轨道角动量守恒（l_{ij} 对应 $i-j$ 平面内的坐标转动），是作用量对于三维空间坐标转动不变的结果. 这里，我们例证了一个著名的定理——Noether 定理：作用量对于某种数学变换的不变性将导致物理的守恒定律.

从以上讨论，可以总结出如下几点：

（1）经典运动方程可以由作用量取极值得到；

（2）边界（初始）条件必须外加；

（3）作用量的对称性与守恒量相应，因而反映出该物理系统的基本对称性.

我们希望将同样的讨论推广到经典场论. 显然，头一件事就是写出合乎物理要求的作用量. 作用量作为一种数学结构，它的可能形式是不受限制的. 然而当它被用来描述物理世界时，则必然要受到限制. 从 Noether 定理可知，物理系统的对称性与作用量的对称性密切相关，这使得我们能将物理系统的对称性通过作用量的对称性反映出来，或者换句话说，物理上的对称性要求能够对作用量加以某种限制，从而大大减小作用量的任意性. 由于高速微观系统具有狭义相对论要求的对称性，因而描述系统的作用量就必须在与狭义相对论相联系的数学变换下是不变的. 这种数学变换就是 Poincaré 变换（Lorentz 变换 + 时空平移变换）. 当然，其它对称性和物理要求也将对作用量加以限制，然而满足狭义相对论是理论的最基本要求，所以有必要首先搞清各种定域经典场在 Poincaré 变换下的行为，然后才可能构造出 Poincaré 不变的作用量.

2.2　Lorentz 变换和 Poincaré 变换

2.2.1　Lorentz 变换

从狭义相对论公设得知，真空中的光速在所有惯性系中相同. 设两个惯性系的原点在某一瞬间 $t = t' = 0$ 重合，一个闪光在该点发生并立即熄灭. 以后该

光信号在某一惯性系中传播至空时点(x_i, t)，而在另一惯性系中传播至空时点(x_i', t')，则必定有下述关系成立：

$$S^2 \equiv t^2 - x_i x_i = t'^2 - x_i' x_i' \tag{2.14}$$

联系(x_i', t')与(x_i, t)并保持关系(2.14)的线性变换称之为 Lorentz 变换(简记为 LT). 数学上，所有 Lorentz 变换的集合形成一个群，称为 Lorentz 群[参阅问题 2.1 和附录一]. 引入时空坐标四矢量标记

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^i) \quad (i=1, 2, 3) \\ &= (t, \vec{x}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

则

$$\begin{aligned} S^2 &= x^0 x^0 - x^i x^i = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \\ &= x'^0 x'^0 - x'^i x'^i = x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中$g_{\mu\nu}$为度规张量，

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{2.17}$$

设$\Lambda^\mu{}_\nu$为联系x'^μ和x^μ的线性变换，即

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_i x^i \tag{2.18}$$

并保持S^2不变. 后一要求导致

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \tag{2.19}$$

若采用矩阵记法，写

$$x^\mu \to \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv X, \quad g_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} g_{00} & & & \\ & g_{11} & & \\ & & g_{22} & \\ & & & g_{33} \end{pmatrix} \equiv g, \quad \Lambda^\mu{}_\nu \to \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \cdots \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \equiv L$$

则(2.16)，(2.18)和(2.19)分别成为

$$S^2 = X^{\mathrm{T}} g X \tag{2.20}$$

$$X' = LX \tag{2.21}$$

$$g = L^{\mathrm{T}} g L \tag{2.22}$$

其中 T 代表矩阵的转置. (2.22)即为 Lorentz 变换必须服从的条件，它导致以下一些结果.

首先，将(2.22)两边取行列式，得

$$\det g = \det L^{\mathrm{T}} \det g \det L$$

由此推出

$$\det L = \pm 1 \tag{2.23}$$

我们称 $\det L = 1(-1)$的 LT 为 proper (improper) LT. 例如由 $L = g$ 给出的 LT 就是一个 improper LT，物理上它对应 $x^0 \to x^0, x^i \to -x^i$，即空间反射.

其次，取方程(2.19)的00分量，得

$$1 = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^{2} - (\Lambda^{i}{}_{0})^{2}$$

它表明

$$|\Lambda^{0}{}_{0}| \geqslant 1 \tag{2.24}$$

我们称 $\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1$ 的 LT 为 orthochronous LT，$\Lambda^{0}{}_{0} \leqslant -1$ 的 LT 为 non - orthochronous LT. 可以证明，det$L$ 和 $\Lambda^{0}{}_{0}$的符号在 LT 下都是不变的. 结果，根据 det$L$ 和 $\Lambda^{0}{}_{0}$的符号，Lorentz 变换可以分为四类：

(1) proper orthochronous ($L_{+}^{\uparrow}$)，对应 det$L = 1$，$\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1$；

(2) proper non-orthochronous ($L_{+}^{\downarrow}$)，对应 det$L = 1$，$\Lambda^{0}{}_{0} \leqslant -1$；

(3) improper orthochronous ($L_{-}^{\uparrow}$)，对应 det$L = -1$，$\Lambda^{0}{}_{0} \geqslant 1$；

(4) improper non-orthochronous ($L_{-}^{\downarrow}$)，对应 det$L = -1$，$\Lambda^{0}{}_{0} \leqslant -1$.

下面我们举出 LT 的几个例子：

(a) 转动：$x'^{0} = x^{0}$，$x'^{i} = a^{ij}x^{j}$，其中 a^{ij}是正交矩阵. 这时 L 可写成块矩阵的形式：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & a & \\ 0 & & \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

并有 det L = det a. 由于可以有 det a = ±1，此处 ± 号分别对应 proper 和 improper 转动，故相应的 L 分别属于 $L_{+}^{\uparrow}$和 $L_{-}^{\uparrow}$.

(b) 平动(boosts)：对于轴 1 方向上的平动，变换为

$$x'^{0} = x^{0}\cosh\eta - x^{1}\sinh\eta$$
$$x'^{1} = -x^{0}\sinh\eta + x^{1}\cosh\eta$$
$$x'^{2} = x^{2}, \quad x'^{3} = x^{3}$$

相应的矩阵

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

并有

$$\det L = \cosh^{2}\eta - \sinh^{2}\eta = 1$$
$$\Lambda^{0}{}_{0} = \cosh\eta \geqslant 1 \tag{2.27}$$

故 L 属于 $L_{+}^{\uparrow}$. 若写

$$\cosh\eta = (1 - v^{2})^{-1/2}, \quad \sinh\eta = v(1 - v^{2})^{-1/2}$$

其中 v 为平动坐标系的速度，则 L 将化为我们更熟悉的形式.

(c) 时间反演：定义为 $x'^0 = -x^0, x'^i = x^i$. 它有 $\det L = -1$ 和 $\Lambda^0{}_0 = -1$，故属于 $L_-^\downarrow$.

(d) 全反演：定义为 $x'^\mu = -x^\mu$. 它有 $\det L = +1$ 和 $\Lambda^0{}_0 = -1$，故属于 $L_+^\downarrow$. 全反演可以看成空间反射和时间反演的乘积.

所有的 LT 都可以分解为(a)—(d)这四种典型变换的乘积. 例如设 L 属于 $L_+^\uparrow$ 类，则所有 LT 可以写成

$L\times$（空间反射） 对 $L_-^\uparrow$ 类

$L\times$(时间反演) 对 $L_-^\downarrow$ 类

$L\times$(全反演) 对 $L_+^\downarrow$ 类

要证实上述论断，须利用 Lorentz 变换成群的性质. 注意到空间反射，时间反演和全反演都是分立变换，所以就以连续参数表达的 LT 而言，我们只需研究 $L_+^\uparrow$ 类就足够了. 以后我们也称 $L_+^\uparrow$ 类为正 LT. $L_+^\uparrow$ 类中包含有转动和平动. 转动是三个空间坐标之间的线性变换，平动是空间与时间坐标之间的线性变换，它们一起实际上代表了所有可能的 $L_+^\uparrow$ 类变换. 因此连续的 LT 归结为全部的转动和平动就够了. 从几何上看，空间有三个方向，每个方向上可以联系一个转动和一个平动，共有三个转动和三个平动. 故正 LT 由六个参数描写. 事实上，若我们考虑无穷小 LT，

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu \tag{2.28}$$

其中

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{2.29}$$

$\varepsilon^\mu{}_\nu$ 为无穷小的变换参数. 将(2.28)代入 LT 必须满足的条件(2.19)，只保留 $\varepsilon^\mu{}_\nu$ 的一次项，则得

$$0 = g_{\nu\rho}\varepsilon^\rho{}_\mu + g_{\mu\rho}\varepsilon^\rho{}_\nu \tag{2.30}$$

$g_{\mu\nu}$ 可以用来升降指标，如

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}) \tag{2.31}$$

于是(2.30)成为

$$0 = \varepsilon_{\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} \tag{2.32}$$

即 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是反对称张量，有 $C_4^2 = 6$ 个独立分量. 这证实了 LT 确有六个独立参数.

在无穷小 LT 下，坐标变换是

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= x'^\mu - x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - x^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu)x^\nu - x^\mu \\ &= \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu = \varepsilon^{\mu\rho}x_\rho \end{aligned} \tag{2.33}$$

这一变换可以通过厄密算符

$$L_{\mu\nu} = \mathrm{i}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \tag{2.34}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{2.35}$$

实现，因为容易证实

$$\delta x^\mu = \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} x^\mu \tag{2.36}$$

$L_{\mu\nu}$称为 LT 生成元. 与六个独立参数 $\varepsilon^{\rho\sigma}$ 相应，共有六个独立的 $L_{\rho\sigma}$，它们满足如下的对易关系：

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + \mathrm{i}g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \mathrm{i}g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \mathrm{i}g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} \tag{2.37}$$

数学上称之为 SO(3,1)代数，因为 Lorentz 群也称为 SO(3,1)群. SO(3，1)生成元的最一般表示为

$$M_{\mu\nu} = \mathrm{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu} \tag{2.38}$$

其中 $S_{\mu\nu}$厄密，对 $\mu\nu$ 反对称，满足和 $L_{\mu\nu}$同样的李代数并与 $L_{\mu\nu}$对易. 因此 $M_{\mu\nu}$也满足 SO(3，1)代数.

与 $L_{\mu\nu}$相同，独立的生成元 $M_{\mu\nu}$也只有六个. 其中 $M_{ij}(i,j=1,2,3)$共有三个，它们之间的对易关系形成 $M_{\mu\nu}$的一个子代数. 为表示为更熟悉的形式，代替 M_{ij}，我们引入三个新的算符：

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk} \tag{2.39}$$

其中

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{若 } ijk \text{ 是 123 的偶排列}) \\ -1 & (\text{若 } ijk \text{ 是 123 的奇排列}) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases} \tag{2.40}$$

利用 M_{ij}满足的 SO(3，1)代数，可以证明

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k \tag{2.41}$$

这正是角动量算符的对易关系，也称 SU(2)或 SO(3)代数. 证明(2.41)式时，要用到等式

$$\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmk} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj} \tag{2.42}$$

$$\varepsilon_{ijk}J_k = M_{ij} \tag{2.43}$$

(2.41)表明，LT 的六个生成元中，有三个是转动生成元.

Lorentz 变换的另外三个生成元是平动生成元，定义为

$$K_i \equiv M_{0i} \tag{2.44}$$

利用(2.36)式不难证实，K_i 所引起的坐标变换确为平动变换. 利用 $M_{\mu\nu}$满足的 SO(3，1)代数，可以得出如下对易关系：

$$[K_i, K_j] = -\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k \tag{2.45}$$

$$[J_i, K_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}K_k \tag{2.46}$$

对易关系(2.41)、(2.45)和(2.46)等同于 $M_{\mu\nu}$ 满足的 SO(3, 1)代数.

* **问题 2.1** 证明：LT 满足群公理，即

(1) 若 L_1 和 L_2 是两个 LT，则 L_1L_2 也是 LT；

(2) 若 L_1，L_2，L_3 是三个 LT，则有 $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$，即 LT 乘法满足结合律；

(3) 恒等变换存在；

(4) 若 L 是 LT，则它的逆 L^{-1} 也是 LT.[见附录一]

问题 2.2 证明：$\det L$ 和 $\Lambda^0{}_0$ 的符号是 Lorentz 不变的，因而可以用来将 LT 分类.

问题 2.3 证明：若 L 是正 LT ($\det L = +1, \Lambda^0{}_0 \geqslant 1$)，则所有 LT 都可以写成下列形式：

$L \times$(空间反射)　　对 $L_-^\uparrow$

$L \times$(时间反演)　　对 $L_-^\downarrow$

$L \times$(空间反射)$\times$(时间反演)　　对 $L_+^\downarrow$

问题 2.4 证明：$K_i = M_{0i}$ 所引起的坐标变换 $\delta x^\mu = \mathrm{i}\varepsilon^{0i}M_{0i}$ (i 固定)为 i 轴方向上的无穷小平动变换.

2.2.2 Poincaré 变换

除了 Lorentz 不变性以外，一个孤立的物理系统的行为在时空的均匀平移下也应有不变性. 均匀的时空平移变换为

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{2.47}$$

其中 a^μ 为任意常数四矢量. 可见，时空平移变换有四个参数.

考虑无穷小平移

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \tag{2.48}$$

它可以写成

$$\delta x^\mu = -\mathrm{i}\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu \tag{2.49}$$

其中

$$P_\rho = \mathrm{i}\partial_\rho = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\rho} \tag{2.50}$$

是四动量算符，是厄密的时空平移生成元，与四个平移参数 ε^ρ 相应.

Lorentz 变换加上时空平移变换就构成了 Poincaré 变换. 因此，在 Poincaré 变换下，有

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.51}$$

注意时空平移和 LT 并不对易，因为平移参数 a^μ 是个四矢量，它在 LT 下也要变换. 数学上 Poincaré 变换形成 Poincaré 群. 由于 LT 有六个参数，时空平移有四个

参数，所以 Poincaré 变换共有十个独立参数. 相应的生成元即是六个 LT 生成元 $M_{\mu\nu}$和四个时空平移生成元 P_μ，它们满足 Poincaré 代数：

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.52}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \mathrm{i}g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \mathrm{i}g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \mathrm{i}g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \mathrm{i}g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \tag{2.53}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -\mathrm{i}g_{\mu\rho}P_\nu + \mathrm{i}g_{\nu\rho}P_\mu \tag{2.54}$$

(2.54)式表明 P_ρ 与 LT 生成元不对易. 这是显然的，因为 P_ρ 是四矢量. 该式正是四矢量算符与 LT 生成元的对易关系. 利用 $M_{\rho\sigma}$和 P_ν 可以构造出一个四矢量：

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} \tag{2.55}$$

其中 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$是四维 Levi - Civita 符号，对指标全反对称，并有 $\varepsilon^{0123} = 1$. W^μ名为 Pauli - Lubanski 四矢量. 可以证明

$$[W^\mu, P^\rho] = 0 \tag{2.56}$$

$$[M_{\mu\nu}, W_\rho] = -\mathrm{i}g_{\mu\rho}W_\nu + \mathrm{i}g_{\nu\rho}W_\mu \tag{2.57}$$

(2.56)表明，W^μ与 P^ρ 对易. (2.57)表明，W_ρ 在 LT 下的确为四矢量.

利用 $M_{\rho\sigma}$和 P_ν 的最一般表示(2.38)和(2.50)，可以得出

$$W^\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\rho\sigma}\partial_\nu \tag{2.58}$$

由此可见，W^μ实际只与 Lorentz 生成元中的“自旋”部分 $S_{\rho\sigma}$有关.

Poincaré 群的表示*

在量子力学中，我们知道，角动量算符(SU(2)群的生成元)$J_i(i=1,2,3)$可以用 Hilbert 空间中的矩阵来表示，给出矩阵表示的基矢 $|j, m\rangle (m = -j, \cdots, j)$本质上是由角动量平方算符 $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ 的本征值 j 来标记的. 注意 J^2 与所有生成元 J_i 对易，它是 SU(2)群的 Casimir 算符，其本征值 j 在转动下是不变的. 群的生成元用矩阵来表示，称为群的表示. 我们可以说，SU(2)群的表示是由 Casimir 算符 J^2 的本征值来分类的. 与此类似，Poincaré 群的表示也应由该群的 Casimir 算符的本征值来进行分类，即给出生成元矩阵表示的基矢应由这些本征值来标记. 因此，为求 Poincaré 群的表示，首先要找出它的 Casimir 算符，即与所有群生成元都对易的算符.

四矢量 P_μ 的“长度”$P_\mu P^\mu$显然是 Poincaré 群的一个 Casimir 算符. 由于它是 Lorentz 标量，必定与 $M_{\mu\nu}$对易；而且它仅含 P_μ，必定与 P_ρ 对易，因而 $P_\mu P^\mu$与 Poincaré 群的所有生成元对易.

此外，任何与 P_μ 对易的四矢量的长度也必定是一 Casimir 算符. Pauli - Lubanski 四矢量 W^μ的长度 $W_\mu W^\mu$就是一个. 由于 W_ρ 在 LT 下为四矢量，故 $W_\mu W^\mu$是 Lorentz 标量. 再考虑到(2.56)，$W_\mu W^\mu$与 P_ρ，$M_{\mu\nu}$皆对易，所以的确是 Casimir 算符.

按照 Casimir 算符 $P_\mu P^\mu$ 和 $W_\mu W^\mu$ 的本征值，Poincaré 群的表示可以分成几类：

(1) $P_\mu P^\mu$ 的本征值 m^2 为一正实数(对应粒子质量平方). 利用(2.58)，我们得到

$$W_\mu W^\mu = -\frac{1}{2}S^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma}P^\nu P_\nu + P_\rho S^{\rho\sigma}S_{\nu\sigma}P^\nu \tag{2.59}$$

由于粒子有静质量 $m\neq 0$，总可找到一静止系，使

$$P^\rho = (m,0,0,0) = P_\rho \tag{2.60}$$

从而(2.59)成为

$$W_\mu W^\mu = -m^2 S^k S^k \tag{2.61}$$

其中

$$S^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{ij} \tag{2.62}$$

由此，$W_\mu W^\mu$ 的本征值等于

$$-m^2 s(s+1) \qquad (s=0,1/2,1\cdots) \tag{2.63}$$

这里 s 是粒子的自旋值.

结果，Poincaré 群的表示可由 (m, s) 标记，表示的基可确认为物理粒子态，记为 $|m, s, P_i, s_3\rangle$ ($s_3 = -s, -s+1, \cdots, +s$, P_i 连续变化). 它表明自旋 s 的有质量粒子有 $2s+1$ 个自旋自由度.

(2) $P_\mu P^\mu$ 的本征值为 0. 这对应粒子静质量 $m=0$. 在(2.63)中取 $m^2\to 0$ 的极限，则得出 $W_\mu W^\mu$ 的本征值也为 0. 此时，$P_\mu P^\mu$ 和 $W_\mu W^\mu$ 的本征值都不足以用来标记表示，需寻找另外的 Lorentz 不变量. 注意到

$$P_\mu W^\mu = P_\mu\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = 0 \tag{2.64}$$

加上

$$P_\mu P^\mu = 0 \tag{2.65}$$

$$W_\mu W^\mu = 0 \tag{2.66}$$

我们共有三个联立方程. 为了同时满足方程 (2.64)、(2.65)和(2.66)，W^μ 和 P^μ 必须是成比例的，即

$$W^\mu = \lambda P^\mu \quad (\lambda \text{ 为一常数}) \tag{2.67}$$

显然，λ 在正 LT($L_+^\uparrow$)下是不变的. 可以证明，λ 与粒子的 helicity，即粒子的自旋在其动量方向上的投影相联系. 实际上，

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{W^0}{P^0} = -\frac{1}{2}\frac{1}{P^0}\varepsilon^{0ijk}P_i S_{jk} = -\frac{1}{2}\frac{P_i}{P^0}\varepsilon^{ijk}S_{jk}\\ &= -\frac{1}{P^0}P_i S^i = +\frac{\vec{S}\cdot\vec{P}}{P^0} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\end{aligned} \tag{2.68}$$

恰为粒子的 helicity. 最后一步我们利用了 $P^{02}=\vec{P}^2$ 并设 $P^0>0$.

为了求 λ 的可能值，我们注意到绕 $\vec{P}$ 轴的 SO(2) 有限转动算符为 $\exp[\mathrm{i}\phi\ \hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|]$（$\phi$ 为转动角），λ 正是其无穷小转动算符 $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ 的本征值. 因而 λ 给出了绕 $\vec{P}$ 轴的 SO(2) 转动的幺正表示 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\lambda}$. 由于 $\vec{S}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ 可以是半奇数，故表示可以是双值的，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\lambda}=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+2\pi)\lambda}\text{ 或 }\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi\lambda}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+4\pi)\lambda} \tag{2.69}$$

由此得出

$$\lambda=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm\frac{3}{2},\cdots \tag{2.70}$$

λ 的每一取值都是正 LT 不变量，然而其中 $\pm|\lambda|$ 两个值可以通过空间反射（宇称）变换联系起来，因为算符 $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ 是赝标量. 事实上，设 χ 是 $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ 的本征态，满足

$$\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\chi=\lambda\chi \tag{2.71}$$

两边作宇称变换 $\hat{P}$，得到

$$\hat{P}\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\hat{P}^{-1}(\hat{P}\chi)=\lambda(\hat{P}\chi)$$

因而

$$\frac{\hat{\vec{S}}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}(\hat{P}\chi)=-\lambda(\hat{P}\chi) \tag{2.72}$$

可见，态 χ 若有本征值 λ，则空间反射态 $\hat{P}\chi$ 有本征值 $-\lambda$.

因此，当包括空间反射之后，Poincaré 群的表示可以用绝对值 $|\lambda|$ 加以标记. 物理上这个绝对值

$$|\lambda|=s=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$$

可确认为粒子的自旋，而 $\pm s$ 为自旋 s 的两个 helicity 值，它们在正 LT 下各自是不变的，但可以通过空间反射彼此联系.

我们在此看到，自旋 $s\neq0$ 的零质量粒子只有两个自旋自由度. 粒子态（表示的基）可以记为

$$|P_i,\lambda=\pm s\rangle$$

如光子（$s=1$）态记为 $|P_i,\lambda=\pm1\rangle$，中微子（$s=1/2$）态记为 $|P_i,\lambda=\pm1/2\rangle$，引力子（$s=2$）态记为 $|P_i,\lambda=\pm2\rangle$ 等.

Poincaré 群还可以有其它一些表示，其中包括 $P_\mu P^\mu=0$ 但自旋是连续变化

的表示，$P_\mu P^\mu<0$ 的表示以及非幺正的表示，但这些表示似乎都不与物理粒子相联系，故我们不再进行讨论.

问题 2.5 证明(2.54)和(2.56)式.

* **问题 2.6** 证明(2.57)式.

注意有用的公式

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_\mu{}^{\nu'\rho'\sigma'}=-\det(g^{\alpha\alpha'}),\quad \alpha=\nu,\rho,\sigma;\alpha'=\nu',\rho',\sigma'$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho'\sigma'}=-2\det(g^{\alpha\alpha'}),\quad \alpha=\rho,\sigma;\alpha'=\rho',\sigma'$$

$$=-2(g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'}-g^{\rho\sigma'}g^{\sigma\rho'})$$

问题 2.7 证明(2.58)式.

* **问题 2.8** 证明(2.59)和(2.61)式.

2.3 定域场的 Poincaré 变换性质

各种定域场可以根据它们的 Poincaré 变换性质进行分类. 先作一般讨论.

考虑时空点 P 的任意函数. 在一给定的惯性系中，点 P 坐标为 x^μ，函数为 $f(x^\mu)$；而在另一惯性系中，点 P 的坐标为 x'^μ，函数则为 $f'(x'^\mu)$，这里 $f\to f'$，因为一般来说，函数关系是与坐标系有关的. 设两个惯性系之间只差一无穷小的变换，则所引起的函数改变为

$$\begin{aligned}\delta f&\equiv f'(x')-f(x)=f'(x+\delta x)-f(x)\\&=f'(x)-f(x)+\delta x^\mu\partial_\mu f'(x)+O(\delta x^2)\\&\simeq f'(x)-f(x)+\delta x^\mu\partial_\mu f(x)+O(\delta x^2)\end{aligned}\tag{2.73}$$

上式第三项中，我们已用 $f(x)$ 代替了 $f'(x)$，因为 $f'(x)-f(x)\sim$ 无穷小量，而我们只保留至一级无穷小的项. 于是

$$\delta f=\delta_0 f+\delta x^\mu\partial_\mu f\tag{2.74}$$

其中 δf 被分成了两部分：

$$\delta_0 f\equiv f'(x)-f(x)\tag{2.75}$$

是在坐标 x 相同时，函数 f 的改变；而 $\delta x^\mu\partial_\mu f$ 是输运项，是由于坐标变化而引起的 f 变化. 形式上，(2.74)可以写成一个算符方程

$$\delta=\delta_0+\delta x^\mu\partial_\mu\tag{2.76}$$

以下分别讨论时空平移变换和 Lorentz 变换.

在时空平移变换下，定域场是不变的，应有

$$f'(x')=f(x)\tag{2.77}$$

即老函数标记 f 在原坐标 x 点的值等于新函数标记 f' 在新坐标 x' 点的值，因为

尽管坐标系进行了平移，x 与 x' 实际为同一点，f 与 f' 为同一函数. (2.77) 意味着

$$\delta f = 0 = \delta_0 f + \varepsilon^\mu \partial_\mu f \quad (\text{对 } x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu) \tag{2.78}$$

或

$$\delta_0 f = -\varepsilon^\mu \partial_\mu f = +\mathrm{i}\varepsilon^\mu P_\mu f \tag{2.79}$$

其中动量算符 P_μ 由(2.50)定义，注意(2.79)中函数 f 的无穷小平移算符 δ_0 与(2.49)中坐标 x 的无穷小平移算符 $-\mathrm{i}\varepsilon^\mu P_\mu$ 差一负号.

然而，在 Lorentz 变换下，情形比较复杂，须对不同的定域场分别阐明.

(a) 标量场、矢量场和张量场

在以 Lorentz 变换相联系的两个惯性系中，场函数分别是 $\varphi(x)$ 和 $\varphi'(x')$，若条件

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \tag{2.80}$$

满足，则 $\varphi(x)$ 称为 LT 下的标量. 顺便指出，时空平移变换下的(2.77)式与(2.80)式完全类似，因此也可以说，任何定域场都是时空平移变换下的标量，对于无穷小的 LT，利用(2.80)和(2.76)，我们有

$$\delta\varphi = 0 = \delta_0\varphi + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi \tag{2.81}$$

$\delta_0\varphi$ 定义了 Lorentz 群生成元在标量场 φ 上的表示，可设

$$\delta_0\varphi = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\varphi \tag{2.82}$$

其形式类似坐标 x^μ 的 LT(2.36)，但注意到差一负号. 将(2.82)同(2.81)比较，并利用(2.33)，很容易证实

$$M_{\mu\nu} = \mathrm{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (\text{对标量场 } \varphi) \tag{2.83}$$

这意味着，对于标量场，$S_{\mu\nu} = 0$，即自旋为 0.

若我们从标量场出发，继续考虑 $\partial_\mu\varphi$ 的无穷小 LT，则会发现，Lorentz 变换生成元 $M_{\mu\nu}$ 中将有算符 $S_{\mu\nu}$ 出现. 这时，$\partial_\mu\varphi$ 的改变为

$$\delta\partial_\mu\varphi = [\delta, \partial_\mu]\varphi + \partial_\mu\delta\varphi = [\delta, \partial_\mu]\varphi \tag{2.84}$$

上式中第二项为 0 是由于 φ 为 LT 标量故 $\delta\varphi = 0$. 从(2.76)

$$[\delta, \partial_\mu] = [\delta_0, \partial_\mu] + [\delta x^\nu \partial_\nu, \partial_\mu] \tag{2.85}$$

由于 δ_0 并不改变 x^μ 而 ∂_μ 对应 x 的改变，故 δ_0 同 ∂_μ 是对易的，但 δx^ν 与 ∂_μ 并不对易，通过第二个对易关系的计算，给出

$$[\delta, \partial_\mu] = \varepsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu \tag{2.86}$$

代入(2.84)，得

$$\delta\partial_\mu\varphi = \varepsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu\varphi \tag{2.87}$$

为求 LT 生成元在 $\partial_\mu\varphi$ 上的表示，须计算 $\delta_0\partial_\mu\varphi$. 它可以表达为

$$\delta_0\partial_\mu\varphi = \delta\partial_\mu\varphi - \delta x^\rho \partial_\rho\partial_\mu\varphi = \varepsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu\varphi - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\partial_\mu\varphi$$

此式也可以写成

$$\delta_0 \partial_\mu \varphi = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu \partial_\nu \varphi - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\partial_\mu \varphi \tag{2.88}$$

其中

$$(S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu = \mathrm{i}(g_{\rho\mu}g_\sigma^\nu - g_{\sigma\mu}g_\rho^\nu) \tag{2.89}$$

从(2.89)见到，在作 Lorentz 变换时，第一项中 $\partial_\mu\varphi$ 的 μ 指标有混合，相应于“自旋”部分. 不难证实，$S_{\rho\sigma}$ 和 $L_{\rho\sigma}$ 满足同样的对易关系，即 SO(3, 1)代数. 只是须注意到，$S_{\rho\sigma}$ 为 4×4 矩阵，对易关系应按矩阵乘法来理解.

LT 生成元的一般定义为

$$\delta_0(\text{任何场}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}(\text{任何场}) \tag{2.90}$$

比较(2.88)和(2.90)可见，(2.88)给出了 LT 生成元 $M_{\rho\sigma}$ 在 $\partial_\mu\varphi$ 上的表达形式.

在 Lorentz 变换下，变换方式与 $\partial_\mu\varphi$ 相同，即按照(2.88)那样变换的场，如 A_μ，则称为矢量场. 这是矢量场的一种定义. 矢量场是带有一个 Lorentz 指标的场.

带有多个 Lorentz 指标，每个指标都如矢量那样变换的场，如 $B_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho}, \cdots$ 称为张量场. 注意 $M_{\rho\sigma}$ 对张量场作用时，其中的 $S_{\rho\sigma}$ 要对张量的每一指标作用，然后相加. 例如 $S_{\rho\sigma}$ 对二阶张量场 $B_{\mu\nu}$ 的作用是

$$(S_{\rho\sigma}B)_{\mu\nu} = (S_{\rho\sigma})_\mu{}^\lambda B_{\lambda\nu} + (S_{\rho\sigma})_\nu{}^\tau B_{\mu\tau} \tag{2.91}$$

应当指出，对于正 LT 下的标量场，按其空间反射性质，还有标量与赝标量之分，分别对应空间反射不变号与变号. 对于正 LT 下的矢量场，按其空间反射性质，将有矢量与赝矢量之分. 在空间反射下，矢量场 A^μ 中的 A^0 不变号，A^i 变号；而赝矢量与此恰好相反. 张量场的空间反射性质，以此类推.

可以证明，矢量场的标量积即 $A^\mu A_\mu$ 是 Lorentz 不变量. 事实上，在无穷小 LT 变换下，我们有

$$\delta(A^\mu A_\mu) = \varepsilon^\mu{}_\rho A^\rho A_\mu + A^\mu \varepsilon_\mu{}^\rho A_\rho = (\varepsilon^\mu{}_\rho + \varepsilon_\rho{}^\mu)A^\rho A_\mu = 0$$

而在有限的 LT 下，我们有

$$A^\mu A_\mu \to \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_{\mu\sigma} A^\rho A^\sigma = g_{\rho\sigma}A^\rho A^\sigma = A^\rho A_\rho$$

显然是不变的，其中已利用了(2.19).

根据上面的讨论，我们很容易写出由标量场、矢量场或张量场构造的 Poincaré 不变量. 例如，出自标量场 $\varphi(x)$ 的 Poincaré 不变量可以是 $\varphi(x)$ 的任意标量函数，如 $\varphi^n(x), \cos\varphi(x), \cdots$ 和 $\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x), \cdots$，但须注意 $x^\mu\partial_\mu\varphi(x)$ 不是 Poincaré 不变量，因为尽管它是 Lorentz 不变的，但不是时空平移不变的. 出自矢量场 $A^\mu(x)$ 的 Poincaré 不变量可以有 $A_\mu(x)A^\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\partial^\nu A^\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\partial^\mu A^\nu(x), \partial^\mu A_\mu(x), \cdots$. 而从二阶张量场 $B_{\mu\nu}(x)$ 构造的 Poincaré 不变量可

以有 $B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x)$，$\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\rho B^{\mu\nu}(x)$，$\partial_\rho B_{\mu\nu}(x)\partial^\mu B^{\rho\nu}(x)$，….

(b) 旋量场

类似于矢量场，旋量场的正规定义也应由其 LT 形式来确定. 然而，直接讨论旋量场的 LT 形式需要 Lorentz 群表示的知识. 如果避开使用更数学化的群表示理论的语言，也可以采用一种间接的、更物理的方式来定义旋量场：先从 Dirac 方程引入旋量场，导出它的 LT 形式，然后再给出 Dirac 旋量场的严格定义.

满足 Dirac 方程(1.6)的定域场 ψ 将称为 Dirac 旋量场. 为了便于讨论 ψ 的 Lorentz 变换性质，我们改写一下方程(1.6)的形式.

引入 γ^μ 标记，

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta\alpha^i \quad (i=1,2,3)\end{aligned} \tag{2.92}$$

则从(1.7)易证实，γ^μ 满足反对易关系亦称 Califford 代数

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{2.93}$$

于是 Dirac 方程(1.6)可以重写为

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi(x) = 0 \tag{2.94}$$

从(1.7)可见，矩阵 α^i，β 厄密且平方为 1，故其本征值为 ± 1. 设 α^i，β 的维数为 d. 由于 α^i，β 彼此反对易，从 $\alpha^i\beta+\beta\alpha^i=0$ 可得 $\det\alpha^i\det\beta=(-1)^d\det\beta\cdot\det\alpha^i$，由于 $\det\beta$ 和 $\det\alpha^i$ 不为 0，故得 d 必须为偶数. 但最小值 $d=2$ 被排除，因为 2×2 相互反对易的厄密矩阵只允许有 3 个即 Pauli 矩阵，而现在相互反对易的厄密矩阵 α^i 和 β 共有 4 个. 因此 $d\geqslant4$，即矩阵(α^i，β)或 γ^μ 的最小维数是 4. 以下我们皆取 γ^μ 为 4×4 矩阵，于是 Dirac 场 ψ 一般将是具有 4 个复分量的旋量场.

γ 矩阵的一个常用表象是 Dirac 表象. 在此表象中，

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.95}$$

其中 I 和 σ^i 分别是 2×2 单位矩阵及 Pauli 矩阵. 可以指出，(2.95)中所取矩阵 $\gamma^0=\beta$ 的形式，将能同时满足条件

$$\alpha_i^2 = I, \quad \alpha_i\beta+\beta\alpha_i = 0$$

反之，例如，若取 $\gamma^0=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$，则以上条件不能同时满足. 现在考虑两个以 LT 相联系的惯性系，其中旋量场分别由 $\psi(x)$ 和 $\psi'(x')$ 描写. 假定二者的关系是线性的，即

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu} \tag{2.96}$$

其中 $S(\Lambda)$ 是一个非奇异的 4×4 矩阵.

为决定 $S(\Lambda)$ 的形式，我们利用 Dirac 方程的 Lorentz 不变性要求[13]，即，如果 $\psi(x)$ 满足 Dirac 方程(2.94)，则要求变换后的 $\psi'(x')$ 在新的惯性系中也必须服从 Dirac 方程

$$\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m\right)\psi'(x') = 0 \tag{2.97}$$

利用(2.96)，(2.97)成为

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}S(\Lambda)\psi(x) - mS(\Lambda)\psi(x) = 0$$

左乘 $S^{-1}(\Lambda)$ 并将求和指标作代换 $\mu\longleftrightarrow\nu$，得

$$\mathrm{i}S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{2.97a}$$

为使(2.97a)回到(2.94)的形式，必须有

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \gamma^{\mu}$$

利用 $\dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}$，上式成为

$$S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}\gamma^{\nu} \tag{2.98}$$

这就是 Dirac 方程的 Lorentz 不变性对变换矩阵 $S(\Lambda)$ 所加的条件.

首先对于无穷小的连续 LT，我们来决定 $S(\Lambda)$ 的形式. 无穷小的 LT 可写为

$$\begin{aligned}&\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} + \varepsilon^{\mu}_{\ \nu}, \quad (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} - \varepsilon^{\mu}_{\ \nu}\\ &\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}\end{aligned} \tag{2.99}$$

与此相应，我们写

$$\begin{aligned}S(\Lambda) &= I - \frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} + \cdots\\ S^{-1}(\Lambda) &= I + \frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} + \cdots\end{aligned} \tag{2.100}$$

其中矩阵 $\sigma_{\rho\sigma}$ 对 $\rho\sigma$ 反对称. 将(2.99)和(2.100)代入条件(2.98)，只保留 $O(\varepsilon)$ 的项，得到

$$\varepsilon^{\rho\sigma}[\gamma^{\mu},\sigma_{\rho\sigma}] = 4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\rho}\gamma_{\rho} = 2\mathrm{i}\varepsilon^{\rho\sigma}(g^{\mu}_{\rho}\gamma_{\sigma} - g^{\mu}_{\sigma}\gamma_{\rho})$$

因此

$$[\gamma^{\mu},\sigma_{\rho\sigma}] = 2\mathrm{i}(g^{\mu}_{\rho}\gamma_{\sigma} - g^{\mu}_{\sigma}\gamma_{\rho}) \tag{2.101}$$

$\sigma_{\rho\sigma}$ 应是 4×4 矩阵. 容易证实，满足上述关系的一组 $\sigma_{\rho\sigma}$ 是

$$\sigma_{\rho\sigma} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_{\rho},\gamma_{\sigma}] \tag{2.102}$$

(2.100)和(2.102)一起，就确定了在无穷小 LT 下 $S(\Lambda)$ 的形式. 至于有限的 LT，可以将其看成是无限多个无穷小变换的乘积. 设 $\omega^{\rho\sigma}$ 为有限变换参数，将其 n 等分并令 $n\to\infty$，则 $\omega^{\rho\sigma}/n$ 将为无穷小. 于是有限的 LT 可以写成下面的形式：

$$S(\Lambda)=\left(I-\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\omega^{\rho\sigma}}{n}\sigma_{\rho\sigma}\right)^{n}\Bigg|_{n\to\infty}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}} \tag{2.103}$$

最终表达中只含有限变换参数 $\omega^{\rho\sigma}$.

考虑到 $\sigma_{\rho\sigma}$ 是 4×4 矩阵，现在我们可以按 LT 性质对 Dirac 旋量场给出一个严格的定义：凡是在 LT 下按照方程(2.96)变换的四分量场 $\psi(x)$ 称为 Dirac 旋量场，其中的 $S(\Lambda)$ 由(2.102)和(2.103)完全确定[14].

利用(2.96)，可以得出 LT 生成元对旋量场作用的一般形式. 考虑无穷小 LT，利用(2.99)和(2.100)，我们有

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)=\left(I-\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}\right)\psi(x^{\mu}-\varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu})\\&=\left(I-\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}-\varepsilon^{\rho\sigma}x_{\sigma}\partial_{\rho}\right)\psi(x)\\&=\left[I-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\rho\sigma}+\mathrm{i}(x_{\rho}\partial_{\sigma}-x_{\sigma}\partial_{\rho})\right)\right]\psi(x)\end{aligned}$$

由此得

$$\delta_0\psi=\psi'(x)-\psi(x)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\psi(x)$$

其中

$$M_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\sigma_{\rho\sigma}+\mathrm{i}(x_{\rho}\partial_{\sigma}-x_{\sigma}\partial_{\rho}) \tag{2.104}$$

是 Lorentz 生成元. 可见，对旋量场，$S_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\sigma_{\rho\sigma}$. 从 γ_0 厄密和 γ_i 反厄密，易证 $\sigma_{ij}^{+}=\sigma_{ij}$，$\sigma_{io}^{+}=-\sigma_{io}$. 再由(2.103)可以看出，对于空间转动(由 σ_{ij} 生成)，$S(\Lambda)$ 是幺正的；而对于 Lorentz 平动(由 σ_{io} 生成)，$S(\Lambda)$ 是厄密的.

下面我们再来决定旋量场 ψ 在空间反射下的变换性质. 与空间反射相联系的 LT 矩阵是

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix} \tag{2.105}$$

我们必须再次求解条件(2.98)以得出相应的矩阵 $S(\Lambda)$. 很容易看出，对于由(2.105)表达的 $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$，(2.98)的解是

$$S(\Lambda)=\eta_P\gamma^0 \tag{2.106}$$

因而 $\psi(x)$ 在空间反射下变换为

$$\psi'(x') = \eta_P \gamma^0 \psi(x) \tag{2.107}$$

其中 η_P 是一个任意的、不可观测的相因子. 引入

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0 \tag{2.108}$$

从(2.96)可以推出，在 LT 下 $\bar{\psi}(x)$ 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \tag{2.109}$$

证明中利用了关系

$$\gamma^0 \sigma^+_{\rho\sigma} \gamma^0 = \sigma_{\rho\sigma} \tag{2.110}$$

而在空间反射下 $\bar{\psi}(x)$ 变换为

$$\bar{\psi}'(x') = \eta_P^* \bar{\psi}(x) \gamma^0 \tag{2.111}$$

由 ψ 和 $\bar{\psi}$ 组成的旋量双线性量(型)在涉及旋量场的理论中起着重要作用，有必要对它们的 LT 性质作一般讨论. 由(2.96)、(2.109)和(2.107)、(2.111)可以看出，双线性量 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 在 LT 和空间反射下都是标量. 再利用(2.93)和(2.98)，可以证明，双线性量 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 在 LT 下变换为

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \tag{2.112}$$

而在空间反射下变换为

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \begin{cases} \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) & (\mu = 0) \\ -\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) & (\mu = i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{2.113}$$

即 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ 在 LT 和空间反射下变换如通常的四矢量.

$\bar{\psi}\psi$ 和 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 只是由 ψ，$\bar{\psi}$ 组成的双线性型的特例. 一般，在 $\bar{\psi}$ 与 ψ 之间插入任意的 4×4 矩阵可以得到任意的双线性型. 但这样得出的双线性型并不都是独立的. 由于一般的 4×4 矩阵总是可以按照 16 个基矩阵展开，所以独立的双线性型只有 16 个，与 16 个基矩阵相对应. 下面我们来证明，这 16 个基矩阵可由 γ 矩阵生成.

首先定义矩阵

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{2.114}$$

在 Dirac 表象(2.95)中，

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{2.115}$$

它满足关系

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \text{ 和 } (\gamma^5)^2 = I \tag{2.116}$$

现在考虑 16 个矩阵

$$\Gamma^S \equiv I$$

$$\Gamma^V_\mu \equiv \gamma_\mu$$

$$\Gamma^T_{\mu\nu} \equiv \sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\Gamma^A_\mu \equiv \gamma_5\gamma_\mu$$

$$\Gamma^P \equiv \mathrm{i}\gamma_5$$

它们有如下性质：

(1) $(\Gamma^a)^2 = \pm I$.

(2) 对任意 $\Gamma^a(\Gamma^a \neq \Gamma^S = I)$，存在一个 Γ^b，使得 $\Gamma^a\Gamma^b = -\Gamma^b\Gamma^a$.

(3) 由此，除 Γ^S 以外，所有 Γ^a 的迹为 0. 因为对任意 Γ^a，总可找到 Γ^b 使 $\Gamma^a\Gamma^b = -\Gamma^b\Gamma^a$，于是必有

$$\mathrm{tr}\Gamma^a(\Gamma^b)^2 = \mathrm{tr}\Gamma^b\Gamma^a\Gamma^b = -\mathrm{tr}(\Gamma^b)^2\Gamma^a$$

又 $(\Gamma^b)^2 = \pm I$，但无论 $(\Gamma^b)^2 = +I$ 或 $-I$，皆有

$$\mathrm{tr}\Gamma^a = 0$$

(4) 对任意一对 $(\Gamma^a, \Gamma^b)(a \neq b)$，存在 $\Gamma^c \neq \Gamma^S = I$，使得 $\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^c$（右边可差一相因子 ± 1 或 $\pm \mathrm{i}$）.

(5) 从以上性质可以推论出：集合 $\{\Gamma^a\}$ 是线性无关的. 事实上，如设

$$\sum_a \lambda_a\Gamma^a = 0 \quad (\lambda_a \text{ 为常数})$$

则相继用所有 Γ^a 去乘上式并求迹，可以证明所有 $\lambda_a = 0$.

因此，$\Gamma^a(a = S, V, T, A, P)$ 正是 16 个 4×4 基矩阵，利用它们可构造出 16 个独立的双线性型 $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$. 下面我们给出 $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ 在正 LT 和宇称变换下的性质：

$$\begin{aligned}
&S: \quad \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) && \text{标量}\\
&V: \quad \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) && \text{矢量}\\
&T: \quad \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x) && \text{反对称张量}\\
&A: \quad \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x) && \text{赝矢量}\\
&P: \quad \mathrm{i}\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \mathrm{i}\det(\Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) && \text{赝标量}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

其中“赝”指宇称. 对于空间反射，$\det(\Lambda) = -1$. 注意 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 既可表示正 LT 也可表示宇称变换，而

$$\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{2.118}$$

是正 LT 不变的.

基于双线性型 $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ 的 Poincaré 变换性质，我们很容易写出由 Dirac 旋量场

构造的 Poincaré 不变量，其中最简单的有

$$\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi, \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \cdots$$

利用矩阵 γ_5，可以定义手征旋量(Weyl 旋量)

$$\psi_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \quad \psi = \psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{R}} \tag{2.119}$$

ψ_{L}，ψ_{R} 分别称为左手和右手旋量. 与 Dirac 旋量 ψ 不同，Weyl 旋量实际上不是四分量复旋量而是两分量复旋量. 这从 γ 矩阵的 Weyl 表象容易看出. 在 Weyl 表象中，

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

Weyl 表象与 Dirac 表象之间的变换关系是

$$\gamma^{\mu}_{\mathrm{Weyl}} = U\gamma^{\mu}_{\mathrm{Dirac}}U^{+}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \tag{2.121}$$

利用投影算符 $\frac{1}{2}(1\mp\gamma_5)$ 对 Dirac 旋量 ψ 作用之后可以看出，ψ_{L} 只对应 ψ 的前两个分量，而 ψ_{R} 只对应 ψ 的后两个分量. 因此 Weyl 旋量的自由度数只有 Dirac 旋量自由度数的一半.

引入矩阵

$$C = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0 \tag{2.122}$$

可以定义电荷共轭旋量

$$\psi^C = C\bar{\psi}^{\mathrm{T}} \tag{2.123}$$

这里 T 代表旋量的转置. 假如一个四分量旋量 ψ_{M} 满足自电荷共轭条件：

$$(\psi_{\mathrm{M}})^C = \psi_{\mathrm{M}} \tag{2.124}$$

则 ψ_{M} 称为 Majorana 旋量. Majorana 旋量形式上是四分量旋量，然而由于条件(2.124)(两个复方程)，它的自由度数也只是 Dirac 旋量的一半，即相当于两个复分量或四个实分量.

问题 2.9 证明由(2.89)定义的 $S_{\rho\sigma}$ 满足 SO(3, 1)代数.

* **问题 2.10** 设 Λ，ψ 为任意两个 Dirac 旋量，求出 4×4 矩阵 $\Lambda\bar{\psi}$，$\gamma_5\Lambda\bar{\psi}\gamma^5$，$\gamma_\mu\Lambda\bar{\psi}\gamma^\mu$，$\sigma_{\mu\nu}\Lambda\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}$ 按基矩阵 I，$\mathrm{i}\gamma_5$，γ_μ，$\gamma_5\gamma_\mu$，$\sigma_{\mu\nu}$ 的展开系数.

提示：展开应有 Lorentz 不变的形式.

2.4 场作用量、最小作用原理和 Noether 定理

狭义相对论要求经典场作用量必须有 Poincaré 不变性. 前面我们已经讨论

了如何从各种定域场构造 Poincaré 不变量. 然而仅有 Poincaré 不变性还不足以确定物理的场作用量，为了给出可以接受的理论，还需提出一些其它的物理要求，以进一步限定场作用量的形式.

对场作用量的一般要求可以列举如下.

第一，正如第 1 章中所指出的，我们只局限于定域场论. 作用量的一般形式可写为

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{L} \tag{2.125}$$

其中

$$\mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{2.126}$$

是四维 Minkowski 时空的积分测度，τ_1，τ_2 为积分的上下限. $\mathcal{L}$ 表示拉氏密度. 为保证时空平移不变性，$\mathcal{L}$ 应当只是场及其微商的函数，因为场及其微商都是平移不变的. 而局限于定域场论则要求 $\mathcal{L}$ 只依赖于场及其微商在一个时空点 x^μ 的值，即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \tag{2.127}$$

这里 Φ 表示任何定域场或定域场的任意集合(标量场，旋量场……). 采用定域场论的最主要理由是它与实验符合，这也是一种最简单的选择.

第二，作用量应当是实的，物理上这是几率守恒的要求. 一个满意的量子场论应当是几率守恒的. 正如我们从经典物理中了解到的，复数位势将对应吸收，导致物质的消失. 这不是我们所期望出现的情况. 作用量要求为实量还有一个数学上的理由：它能保证运动方程的数目与 $\mathcal{L}$ 中所含实场的数目相同[15]. 设 $\mathcal{L}$ 中含有 N 个实场. 那么，对于实 I，它所导致的运动方程数也是 N. 但对于复 I，它所导致的运动方程数将是 $2N$，因为 I 的实部和虚部将分别导致 N 个运动方程. 结果，场方程数将超过独立实场数一倍，场方程的求解就成为问题.

第三，从作用量导出的经典运动方程不含高于二阶的微商. 这方面的一个反例是经典电动力学的 Lorentz - Dirac 方程[16]. 这是描写一个经典点电荷在受 Lorentz 力作用及其自身发射的辐射场自作用情况下的运动方程，它是一个三阶微分方程，其中包括了辐射反应效应并显示出非因果效应，如一个粒子会在外场作用之前就开始加速. 为避免这种非因果解，运动方程中的微商不应超过二阶，因而 $\mathcal{L}$ 中的项最多只能包含两个 ∂_μ 算符. 结果，经典运动方程中将有 $\partial_\mu \partial^\mu$ 作用于场上(对旋量场，$\partial_\mu \partial^\mu$ 出现在运动方程的平方中). 当运动方程成为算符 $\partial_\mu \partial^\mu$ 的本征值条件时，我们就说处理的是自由场论. 因为 $\partial_\mu \partial^\mu$ 可确认为 Poincaré 群的 Casimir 算符，其本征值对应一个自由粒子质量的平方，相应的场就给出了 Poincaré 群的自由粒子表示.

第四，正如已经讨论过的，作用量 I 应有 Poincaré 不变性.

第五，存在着对 I 的其它不变性要求. 它们皆涉及一些新的、多半是所谓的“内部”自由度. 如整体变换下的不变性涉及重子数和轻子数守恒等，定域(x - 相关的)变换下的不变性涉及电荷、弱荷、色荷以及其它有待发现的自由度并导致规范理论.

在经典理论中，作用量的量纲为 ML^2T^{-1} 或 $\hbar$ 的量纲，这从自由点粒子的作用量

$$I = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

最容易看出. 若取自然单位，$\hbar = 1$，则 I 将是量纲为 1 的. 此外，c 的量纲为 L/T，由 $c = 1$ 可见，长度量纲 L 与时间量纲 T 相同. 场作用量由(2.125)表达，由此可见，在四维时空，$\mathcal{L}$ 的量纲为 L^{-4}.

下面叙述经典场论中的最小作用原理. 考虑作用量

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x\, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \tag{2.128}$$

当 Φ 作任意改变 $\delta\Phi$ 时，I 将产生改变

$$\delta I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \delta \mathcal{L} \tag{2.129}$$

$$\delta I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta(\partial_\mu \Phi)\right] \tag{2.130}$$

由于变分时 x 并不改变，故有

$$\delta\partial_\mu \Phi = \partial_\mu \delta\Phi \tag{2.131}$$

于是

$$\delta I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\right]\delta\Phi + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta\Phi\right] \tag{2.132}$$

最后一项是一表面项，它可以被重写成一表面积分

$$\oint_\sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta\Phi \tag{2.133}$$

其中 σ 是边界的表面，$d\sigma_\mu$ 是面元. 变分时我们要求 $\delta\Phi|_\sigma = 0$，因而该表面项为 0. 因此，若要求对于在边界上为 0 的任意 $\delta\Phi$ 有 $\delta I = 0$，则得到 Euler - Lagrange 方程

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \tag{2.134}$$

它是由 I 所描述系统的经典场方程. 我们可以确认(2.134)的左方为 I 的泛函微商 $\delta I/\delta\Phi$. 注意方程(2.134)是对于在积分边界上为 0 的变分得出的. 由于表面项总可以丢掉，所以若将 $\mathcal{L}$ 换成

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{2.135}$$

其中 Λ^μ 是(Φ, $\partial_\mu \Phi$)的任意函数，则 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}'$ 导致相同的经典运动方程，因为 $\mathcal{L}'$ 中的四散度项的积分在变分时的改变即

$$\begin{aligned}\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu \Lambda^\mu &= \delta\oint_\sigma \mathrm{d}\sigma_\mu \Lambda^\mu \\ &= \oint_\sigma \mathrm{d}\sigma_\mu \left[\frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial \Phi}\delta\Phi + \frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial(\partial_\rho \Phi)}\delta\partial_\rho \Phi\right]\end{aligned}$$

由于 $\delta\Phi\mid_\sigma = 0$ 和 $\delta\partial_\rho\Phi\mid_\sigma = \partial_\rho\delta\Phi\mid_\sigma = 0$ 而总是为 0. 尽管这时作用量 I 与 I' 并不相同，其差 $I' - I$ 取决于 Λ^μ 的边界条件. 经典力学中，这种在保持运动方程情况下 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}'$ 间的变换称为正则变换(当然这一自由度仅对平坦时空存在). 此外还注意到，若 $\mathcal{L}$ 加上一个常数，也不会改变经典系统的性质(同样，引力存在时除外).

我们再来讨论作用量 I 的对称变换的结果. 设在某种对称变换下，坐标和场的改变分别为 $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu$ 和 $\delta\Phi = \Phi'(x') - \Phi(x)$. I 的相应改变为

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\tau'_1}^{\tau'_2} \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}'(x') - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\mathrm{d}^4x\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|[\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)\right\} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\{[\mathrm{d}^4x + \delta(\mathrm{d}^4x)][\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}] - \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)\} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}[\delta(\mathrm{d}^4x)\,\mathcal{L} + \mathrm{d}^4x\delta\mathcal{L}]\end{aligned} \tag{2.136}$$

积分测度的改变仅由坐标变化 δx^μ 引起. 写 $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$，不难证明，至 $O(\delta x)$ 级，

$$\delta(\mathrm{d}^4x) = \mathrm{d}^4x\left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| - \mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x\,|\delta_\nu{}^\mu + \partial_\nu\delta x^\mu| - \mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x(\partial_\mu\delta x^\mu) \tag{2.137}$$

而 $\mathcal{L}$ 的改变

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) \\ &= \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \delta_0\mathcal{L} = \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta_0\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta_0(\partial_\mu\Phi)\end{aligned} \tag{2.138}$$

或

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right]\delta_0\Phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta_0\Phi\right) \tag{2.139}$$

从(2.138)到(2.139)，曾利用了$[\partial_\mu, \delta_0] = 0$. 考虑到经典场方程(2.134)之后，上式的第二项为 0. 将(2.137)和(2.139)代入(2.136)，作用量的改变成为

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}^4x\left[(\partial_\mu\delta x^\mu)\,\mathcal{L} + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta_0\Phi\right)\right] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathrm{d}^4x\partial_\mu\left[\delta x^\mu\,\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta_0\Phi\right]\end{aligned} \tag{2.140}$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}^4 x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi \right) \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right]$$

最后一步中，我们又用了 $\delta_0 = \delta - \delta x^\rho \partial_\rho$ 将 δ_0 重新用 δ 来表达. 由于 δx^μ 和 $\delta \Phi$ 是对称变换，它们可以通过一整体变换参数 $\delta \omega^a$ 来表达

$$\delta x^\rho = \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} \delta \omega^a \tag{2.141}$$

$$\delta \Phi = \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \delta \omega^a \tag{2.142}$$

结果得到

$$\delta I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}^4 x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi \right) \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \right] \delta \omega^a \tag{2.143}$$

如果作用量 I 对于变换(2.141)和(2.142)是不变的，即对于所有 $\delta \omega^a$，$\delta I = 0$，则可以得出，流密度

$$j_a^\mu = -\left[\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi \right] \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \tag{2.144}$$

是守恒的，即

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \tag{2.145}$$

这就是经典场论中的 Noether 定理：作用量 I 的某种不变性导致流守恒方程. 注意到导出流守恒方程(2.145)时，曾用到经典运动方程(2.134). 流 j_a^μ 定义前的负号是为了保证所得出的能量密度 $\geqslant 0$.

为看出方程(2.145)的结果，将它对无穷大空间范围及有限的时间间隔进行积分，得

$$0 = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}x^0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x \partial_\mu j_a^\mu = \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x j_a^0 + \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}x^0 \int \mathrm{d}^3 x \partial_i j_a^i \tag{2.146}$$

适当选取空间边界条件可使第二项为 0. 对此通常有两种处理方法. 一种做法是先将整个场论体系封闭在一个有限大小的矩形盒子内，并假定 $\Phi(x)$ 满足周期性边界条件，最后令盒子的体积趋于 ∞. 另一种做法是直接假定场 $\Phi(x)$ 在 ∞ 处足够快地趋于 0. 于是，略去第二项之后，(2.146)成为

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x j_a^0(T_2, \vec{x}) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x j_a^0(T_1, \vec{x}) = Q_a(T_2) - Q_a(T_1) \tag{2.147}$$

其中荷 Q_a 的定义为

$$Q_a(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x j_a^0(T, \vec{x}) \tag{2.148}$$

由于 T_1，T_2 是任意选取的，故

$$\frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.149}$$

即 Q_a 与时间无关，是守恒荷. 因此，在某种整体对称变换下 $\delta I=0$ 导致了守恒荷 Q_a 的存在.

不难看出，如果变换参数 $\delta\omega^a$ 无量纲（如 LT 和内部变换参数皆如此，但时空平移参数除外），则得出的流 j_a^μ 总是有量纲 L^{-3}，因而 Q_a 是无量纲的.

为计算 $\delta x^\mu/\delta\omega^a$，我们注意到，对于时空平移变换

$$\delta x^\mu=\varepsilon^\mu=g^\mu{}_\rho\varepsilon^\rho$$

取 $a=\rho$，$\delta\omega^a\equiv\delta\omega^\rho=\varepsilon^\rho$，可得

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^\rho}=g^\mu{}_\rho \tag{2.150}$$

而对于 LT

$$\delta x^\mu=\varepsilon^{\mu\rho}x_\rho=\varepsilon^{\nu\rho}g^\mu{}_\nu x_\rho=\varepsilon^{\nu\rho}\frac{1}{2}(g^\mu{}_\nu x_\rho-g^\mu{}_\rho x_\nu)$$

取 $a=\nu\rho$，$\delta\omega^a\equiv\delta\omega^{\nu\rho}=\varepsilon^{\nu\rho}$，可得

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^{\nu\rho}}=\frac{1}{2}(g^\mu{}_\nu x_\rho-g^\mu{}_\rho x_\nu) \tag{2.151}$$

这里的要点是，对于时空平移和 LT 而言，$\delta x^\mu/\delta\omega^a$ 中的 a 涉及 Lorentz 指标，为使此微商运算能够进行，必须将指标 a 与 μ 相互独立开来.

关于守恒流与对称变换，还应当指出，由(2.144)和(2.145)所定义的守恒流 j_a^μ 并不唯一. 事实上，若作代换

$$j_a^\mu\to j_a^\mu+\partial_\nu t_a^{\nu\mu}$$

其中 $t_a^{\nu\mu}$ 为一反对称张量，则所得到的新流也满足(2.145)，因而仍然是一守恒流. 流定义的这种不唯一性可以来自 $\mathcal{L}$ 定义的不唯一性，因为 $\mathcal{L}\to\mathcal{L}+\partial_\nu\Lambda^\nu$ 就可以贡献 $\partial_\nu t_a^{\nu\mu}$ 项.（当然 $t_a^{\nu\mu}$ 必须是反对称张量，这一要求将对 Λ^ν 有进一步的限制. 显然，$\partial_\nu\Lambda^\nu$ 与 $\mathcal{L}$ 应有相同的对称性质）. 但注意到，$\partial_\nu t_a^{\nu\mu}$ 项对荷 Q_a 的贡献为 0，所以守恒荷 Q_a 并不因流定义的上述差别而改变. 除了上述的 j_a^μ 不唯一性以外，由于流的守恒是在使用了运动方程之后得出的，因此 j_a^μ 也可以加上任何一个四矢量，只要该量的四散度在用了运动方程之后为 0.

最后我们强调，一个使作用量保持不变的对称变换并不一定使 $\delta I=0$，而可以是

$$\delta I=\delta\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}=\int\mathrm{d}^4x\partial_\mu\delta\Lambda^\mu \tag{2.152}$$

即变换的结果相当于使 $\mathcal{L}$ 改变一个四散度，或者说，对称运算伴随着一个正则变换. 这种情况下，仍然可以说到守恒流，只是定义要有所改变！因为上式可以

写成

$$-\int \mathrm{d}^4x\partial_\mu j_a^\mu \delta\omega^a = \int \mathrm{d}^4x\partial_\mu \frac{\delta\Lambda^\mu}{\delta\omega^a}\delta\omega^a$$

它表明 $j_a^\mu + \frac{\delta\Lambda^\mu}{\delta\omega^a}$ 是新的守恒流. 这种情况经常出现在超对称变换即在 Boson 场与 Fermion 场之间进行的对称变换之中[12].

问题 2.11 证明(2.137)式，进而说明积分测度 d^4x 在连续 LT 下是不变的.

***问题 2.12** 标度变换定义为坐标 $x_\mu \to x'_\mu = \mathrm{e}^a x_\mu$，场 $\Phi(x) \to \Phi'(x') = \mathrm{e}^{ad}\Phi(x)$，其中 a 为任意实参数，d 为 $\Phi(x)$ 的长度量纲. 设 D 维时空的拉氏函数密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi)$$

而作用量 $I = \int \mathrm{d}^D x\,\mathcal{L}$ 在标度变换下是不变的. 求相应的 Noether 守恒流.

2.5 0自旋场

对于仅由一个标量场 $\varphi(x)$ 描述的系统，拉氏密度的最一般形式为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - V(\varphi(x)) \tag{2.153}$$

系数 1/2 是惯例，V 是 φ 的标量函数. 第一项为动能项，第二项为势能项. 动能项比势能项有更大的对称性，因为它在变换 $\varphi \to \varphi + a$（a 是一 global 常数）下也是不变的. $\mathcal{L}$ 的量纲亦即动能项 $\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x)$ 的量纲为 L^{-4}，由此推知 φ 的量纲为 L^{-1}（或 M）. 注意在自然单位制，$1 = c \sim \mathrm{LT}^{-1}$，$1 = \hbar \sim \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1}$，所以 M 与 L^{-1} 量纲相同. 在经典理论中，$V(\varphi(x))$ 的形式不受限制. 一个特例是 Klein - Gordon 拉氏密度

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2.154}$$

m 是有质量量纲的参数，它描写质量为 m 的自由粒子. 注意 $\mathcal{L}_0$ 对于分立变换

$$\varphi(x) \to -\varphi(x) \tag{2.155}$$

也是不变的. 一个更复杂的例子是 $\lambda\varphi^4$ 自作用理论

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{2.156}$$

注意(在四维)λ 是一个量纲为 1 的参数，负号保证 $V>0$. 这个作用量导致了一个可接受的量子场论. 另一个流行的例子是 Sine - Gordon 拉氏密度

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+\frac{m^4}{\lambda}\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\varphi}{m}-1\right) \tag{2.157}$$

其中 λ 量纲为 1. 对于 $\frac{\sqrt{\lambda}\varphi}{m}<<1$，此 $\mathcal{L}$ 将再现(2.156)，只是 φ^4 项的符号相反. 目前仍不知道，(2.157)在四维时空是否导致一个可接受的量子场论，但在二维时空，它却产生出一个好的量子理论.

利用(2.134)，考虑到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}=\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\frac{1}{2}\partial_\nu\varphi\partial^\nu\varphi=\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\frac{1}{2}\partial_\nu\varphi g^{\nu\rho}\partial_\rho\varphi$$

$$=\frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\partial_\rho\varphi+\partial_\nu\varphi\, g^{\nu\rho}\delta_{\mu\rho})=\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}\partial_\rho\varphi+\partial_\nu\varphi\, g^{\nu\mu})=\partial^\mu\varphi$$

很容易对一般形式下的 V 写下 Euler - Lagrange 方程

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi=-V'(\varphi) \tag{2.158}$$

其中撇号“′”表示对 φ 的导数. 对于 Klein - Gordon 拉氏密度(2.154)，上式成为 Klein - Gordon 方程

$$(\Box+m^2)\varphi(x)=0 \tag{2.159}$$

其中

$$\Box=\partial_\mu\partial^\mu=\partial_0^2-\nabla^2 \tag{2.160}$$

是 dúlembertian 算子. 方程(2.159)的 c 数平面波解可写为

$$Ne^{\pm ik\cdot x},\quad k^0=+\sqrt{\vec{k}^2+m^2} \tag{2.161}$$

常数 N 取决于所选用的平面波归一化.

拉氏密度(2.153)是 Poincaré 不变的. 依照上节讲述的步骤，可以构造相应的守恒量.

(a) 对于无穷小的时空平移 $\delta x^\mu=\varepsilon^\mu$ 和 $\delta\varphi=0$，方程(2.144)和(2.145)成为

$$j_{\mu\nu}=-g_{\mu\nu}\mathcal{L}+\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \tag{2.162}$$

$$\partial^\mu j_{\mu\nu}=0 \tag{2.163}$$

我们已设 $a=\nu$ 并利用了(2.150)式. 注意目前守恒流 $j_{\mu\nu}$ 是一个对称张量，称之为能量 - 动量张量密度. 相应的守恒荷

$$P_\nu=\int d^3x j_{0\nu}=\int d^3x(-g_{0\nu}\mathcal{L}+\partial_0\varphi\partial_\nu\varphi) \tag{2.164}$$

是场的四动量.

现在可以具体说明 2.4 节所指出的一种守恒流定义的不唯一性. 如果作

代换

$$j_{\mu\nu}\to j'_{\mu\nu}=j_{\mu\nu}+C[\partial_\mu\partial_\nu\varphi+g_{\mu\nu}V'(\varphi)]\quad(C\text{ 为任意常数})$$

则仍然有$\partial^\mu j'_{\mu\nu}=0$，因为$j'_{\mu\nu}$中增加部分的四散度在利用了运动方程(2.158)之后为0.但是，考虑到场$\varphi(x)$在空间无穷远处的边界条件，与$j'_{\mu\nu}$相应的守恒荷P_ν仍由(2.164)给出.

由于P_0是场的能量，故能量密度为

$$j_{00}=-\mathcal{L}+\partial_0\varphi\partial_0\varphi=\frac{1}{2}\partial_0\varphi\partial_0\varphi+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+V(\varphi)\tag{2.165}$$

当$V>0$时它是正定的.使j_{00}取最小值的位形是场的基态位形.由于微商项总是正的，j_{00}的最小值出现于静场φ_0情况，φ_0满足$\partial_0\varphi_0=\partial_i\varphi_0=0$，因此场的基态位形是静场$\varphi_0$，其能量密度为$V(\varphi_0)$.

(b) 对于无穷小的 Lorentz 变换，$\delta x^\mu=\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu$，$\delta\varphi=0$(因为$\varphi$是 Lorentz 标量).取$a=\nu\rho$并利用(2.151)，从(2.144)我们得到守恒流(差一个无关紧要的常数因子$-1/2$)

$$j_{\mu\nu\rho}=-[-\mathcal{L}g_{\mu\lambda}+\partial_\mu\varphi\partial_\lambda\varphi](g^\lambda_\nu x_\rho-g^\lambda_\rho x_\nu)=x_\nu j_{\mu\rho}-x_\rho j_{\mu\nu}\tag{2.166}$$

它带有三个 Lorentz 指标，可以称为广义的角动量张量密度.相应的守恒荷

$$M_{\nu\rho}=\int\mathrm{d}^3xj_{0\nu\rho}=\int\mathrm{d}^3x(x_\nu j_{0\rho}-x_\rho j_{0\nu})\tag{2.167}$$

可称为广义的角动量.

以上的守恒量是作用量对于 Poincaré 变换具有不变性的结果.Poincaré 变换是时空坐标变换.下面再考虑一个内部对称性的例子.

若理论中含有多个标量场，则可能出现新的对称性.考虑N个实标量场$\varphi_a(a=1,\cdots,N)$，其拉氏密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_a\partial^\mu\partial_a-V(\varphi_a\varphi_a)\tag{2.168}$$

若将$\{\varphi_a,\ a=1,\cdots,N\}$看成一矢量，则对于整体转动

$$\delta\varphi_a=\varepsilon_{ab}\varphi_b,\quad\varepsilon_{ab}=-\varepsilon_{ba}\quad(\text{常数})\tag{2.169}$$

$\mathcal{L}$显然是不变的.注意变换(2.169)并不改变时空坐标，故$\delta x^\rho=0$.从(2.144)我们得出，守恒的 Noether 流为

$$j^\mu_{ab}=\varphi_a\partial^\mu\varphi_b-\varphi_b\partial^\mu\varphi_a\tag{2.170}$$

共有$N(N-1)/2$个，与转动参数ε_{ab}一一对应.这是内部对称性$O(N)$导致守恒流的一例.一般来说，当多个同样的场(实场或复场)存在时，就有可能出现内部对称性.

问题 2.13 对于实标量场，导出 Noether 流(2.162)、(2.166)和(2.170).

2.6　自旋 1/2 的场

2.6.1　作用量、运动方程和守恒量

旋量场的几种形式，Dirac 场 ψ，Weyl 场 ψ_L，ψ_R 和 Majorana 场 ψ_M 皆可以构造 Poincaré 不变的作用量. 我们将着重讨论 Dirac 旋量场.

在无相互作用(自由场)的情况下，Dirac 场的拉氏密度可以写成

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0) \tag{2.171}$$

或者

$$\mathcal{L}' = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.172}$$

其中$\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ 的定义为

$$b\overleftrightarrow{\partial}_\mu a \equiv b\partial_\mu a - (\partial_\mu b)a \tag{2.173}$$

不难证明，$\mathcal{L}'$与 $\mathcal{L}$ 之间只差一四散度，即只差一正则变换，二者给出相同的运动方程. 因此，只要不耦合到引力，两种形式等价. 下面我们将取(2.171)给出的 $\mathcal{L}$ 进行讨论.

从 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 或 $-m\bar{\psi}\psi$ 项的量纲为 L^{-4}，很容易看出，ψ 的量纲为 $\mathrm{L}^{-3/2}$ 或 $\mathrm{M}^{3/2}$.

由(2.171)，对 $\bar{\psi}$ 和 ψ 独立进行变分，可得 ψ 和 $\bar{\psi}$ 场所满足的 Euler - Lagrange 方程即 Dirac 方程

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi = 0 \tag{2.174a}$$

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0 \tag{2.174b}$$

其中已引入了定义

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu \tag{2.175}$$

和

$$a\overleftarrow{\partial}_\mu \equiv -\partial_\mu a \tag{2.176}$$

类似于标量场的情况，很容易从(2.144)导出守恒量. 由时空平移不变性导致的守恒流为场的能量 - 动量张量密度

$$\Theta_{\mu\nu} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi \tag{2.177}$$

守恒荷为场的四动量

$$P_\nu = \int \mathrm{d}^3x\Theta_{0\nu} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\psi^+\partial_\nu\psi \tag{2.178}$$

考虑到在无穷小的 LT 下，$\delta\psi=\psi'(x')-\psi(x)=-\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}\psi$[见(2.96)和(2.100)]，因而由 Lorentz 不变性导致的守恒流为广义的角动量张量密度

$$J_{\mu\nu\rho}=x_\nu\Theta_{\mu\rho}-x_\rho\Theta_{\mu\nu}+\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\sigma_{\nu\rho}}{2}\psi \tag{2.179}$$

守恒荷是广义的角动量

$$M_{\nu\rho}=\int\mathrm{d}^3xJ_{0\nu\rho}=\int\mathrm{d}^3x\left[x_\nu\Theta_{0\rho}-x_\rho\Theta_{0\nu}+\bar{\psi}\gamma_0\frac{\sigma_{\nu\rho}}{2}\psi\right] \tag{2.180}$$

注意在导出(2.177)和(2.179)时要使用运动方程(2.174).

除了 Poincaré 不变性以外，由复数场 ψ 和 $\bar{\psi}$ 构成的 $\mathcal{L}$ 还具有内部对称性. 不难看出，(2.168)对于整体的相位变换或称 U(1)变换

$$\psi\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{2.181}$$

是不变的，α 为任意的实常数. 由于复旋量场

$$\psi=\psi_1+\mathrm{i}\psi_2$$

它含有两个实旋量场 ψ_1 和 ψ_2，相位变换(2.181)可以看作 ψ_1 与 ψ_2 之间的一个二维转动即

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

因此 $\mathcal{L}$ 的 U(1)相位不变性等同于在 ψ 的两个实分量之间作 O(2)转动的不变性.

这种不变性所导致的 Noether 流为

$$J^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.182}$$

它满足

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{2.183}$$

即由 ψ，$\bar{\psi}$ 组成的矢量流守恒. 守恒荷

$$Q=\int\mathrm{d}^3x\bar{\psi}\gamma^0\psi=\int\mathrm{d}^3x(\psi_{\mathrm{L}}^+\psi_{\mathrm{L}}+\psi_{\mathrm{R}}^+\psi_{\mathrm{R}}) \tag{2.184}$$

它可以被解释为 ψ 场的费密子数，其中 ψ_{L} 和 ψ_{R} 是 Weyl 旋量，由(2.119)所定义并满足

$$\psi_{\mathrm{L}}^+\psi_{\mathrm{R}}=\psi_{\mathrm{R}}^+\psi_{\mathrm{L}}=0$$

(2.184)表明，ψ_{L} 与 ψ_{R} 的 Q 荷相同.

问题 2.14 对 Dirac 场，导出 Noether 流(2.177)、(2.179)和(2.182).

2.6.2 平面波解、投影算符

Dirac 方程(2.174a)平面波解的一般形式可以写成

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}u(k) \\ \psi^{(-)}(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}v(k)\end{aligned} \quad (k^0>0) \quad \begin{aligned}&\text{正能}\\&\text{负能}\end{aligned} \tag{2.185}$$

用$(\mathrm{i}\not{\partial}-m)$左乘(2.174a),利用一般公式

$$\not{a}\not{a}=a^\mu a^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu=a^\mu a^\nu\frac{1}{2}\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=a^\mu a^\nu g_{\mu\nu}=a^\mu a_\mu=a^2$$

可得$\mathrm{i}\not{\partial}\,\mathrm{i}\not{\partial}=-\partial^\mu\partial_\mu=-\Box$. 于是$\psi^{(\pm)}(x)$也满足 Klein－Gordon 方程

$$(\Box+m^2)\psi^{(\pm)}(x)=0$$

再由$\Box\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}=-k^2\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}$,我们得出$k^2=m^2$.

将$\psi^{(\pm)}$代入方程(2.171a),利用$\mathrm{i}\not{\partial}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}=\pm\not{k}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}$和$\not{k}\equiv\gamma^\mu k_\mu$,就导致了$u(k)$和$v(k)$所满足的方程

$$(\not{k}-m)u(k)=0,\quad (\not{k}+m)v(k)=0. \tag{2.186}$$

我们将在 Dirac 表象中求解$u(k)$和$v(k)$. 注意到

$$(\not{k}-m)(\not{k}+m)=k^2-m^2=0$$

由此可得(2.186)的解为

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(k)&=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}u_0^{(\alpha)}=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}\\0\end{pmatrix}\\ v^{(\alpha)}(k)&=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}v_0^{(\alpha)}=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\alpha)}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.187}$$

其中$\varphi^{(\alpha)}$和$\chi^{(\alpha)}$($\alpha=1,2$)都是二分量旋量,它们的形式可以有两种较方便的选择. 一种是取为静止系中 Pauli 矩阵σ^3的本征态

$$\varphi^{(\alpha)}(m,0)=\chi^{(\alpha)}(m,0)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & (\alpha=1)\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & (\alpha=2)\end{cases} \tag{2.188}$$

它们满足

$$\sigma^3\begin{Bmatrix}\varphi^{(\alpha)}(m,0)\\ \chi^{(\alpha)}(m,0)\end{Bmatrix}=\varepsilon_\alpha\begin{Bmatrix}\varphi^{(\alpha)}(m,0)\\ \chi^{(\alpha)}(m,0)\end{Bmatrix}\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1) \tag{2.189}$$

另一种是取为$\vec{\sigma}\cdot\hat{k}(\hat{k}=\vec{k}/|\vec{k}|)$的本征态

$$\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})=\chi^{(\alpha)}(\hat{k})=\begin{cases}\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix} & (\alpha=1)\\ \begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix} & (\alpha=2)\end{cases} \tag{2.190}$$

(θ, φ)表示 $\hat{k}$ 的方向. 它们满足

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\begin{cases}\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})\\ \chi^{(\alpha)}(\hat{k})\end{cases}=\varepsilon_\alpha\begin{cases}\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})\\ \chi^{(\alpha)}(\hat{k})\end{cases}\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1)\tag{2.191}$$

除非在某些情况下特别说明，我们将选择第二种形式，即取 $\varphi^{(\alpha)}$,$\chi^{(\alpha)}$ 为 $\vec{\sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态. (2.187)的共轭旋量为

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(k)&\equiv u^{(\alpha)+}(k)\gamma^0=\bar{u}_0^{(\alpha)}\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\\ \bar{v}^{(\alpha)}(k)&\equiv v^{(\alpha)+}(k)\gamma^0=\bar{v}_0^{(\alpha)}\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\end{aligned}\tag{2.192}$$

注意到 $\gamma^0\not{k}^+\gamma^0=\not{k}$. u, v 中归一化因子的选择是为了使

$$\begin{aligned}&\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k)=\delta_{\alpha\beta},\quad \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k)=0\\ &\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k)=-\delta_{\alpha\beta},\quad \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k)=0\end{aligned}\tag{2.193}$$

[参阅附录二]. 考虑矩阵

$$\begin{aligned}\Lambda_+(k)&\equiv\sum_{\alpha=1,2}u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)\\ &=\frac{1}{2m(k^0+m)}(\not{k}+m)\sum_{\alpha=1,2}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})\varphi^{(\alpha)+}(\hat{k}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(\not{k}+m)\\ &=\frac{1}{2m(k^0+m)}(\not{k}+m)\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(\not{k}+m)\\ &=\frac{1}{2m(k^0+m)}(\not{k}+m)\frac{I+\gamma^0}{2}(\not{k}+m)=\frac{\not{k}+m}{2m}\end{aligned}\tag{2.194}$$

其中已利用了等式

$$(\not{k}+m)\gamma^0(\not{k}+m)=2k^0(\not{k}+m)\quad(\text{对 }k^2=m^2)$$

类似地，定义矩阵

$$\begin{aligned}\Lambda_-(k)&\equiv-\sum_{\alpha=1,2}v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)\\ &=-\frac{1}{2m(k^0+m)}(-\not{k}+m)\sum_{\alpha=1,2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\chi^{(\alpha)}(\hat{k})\chi^{(\alpha)+}(\hat{k})\end{pmatrix}(-\not{k}+m)\\ &=-\frac{1}{2m(k^0+m)}(\not{k}-m)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}(\not{k}-m)\\ &=\frac{1}{2m(k^0+m)}(\not{k}-m)\frac{I-\gamma^0}{2}(\not{k}-m)=\frac{-\not{k}+m}{2m}\end{aligned}\tag{2.195}$$

由上可以看出，$\Lambda_+(k)$和$\Lambda_-(k)$是两个投影算符，它们作用于 Dirac 旋量上将分别投影出正能解和负能解. 容易证明，$\Lambda_\pm(k)$满足

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\pm}^{2}(k)=\Lambda_{\pm}(k)\\&\mathrm{tr}\Lambda_{\pm}(k)=2\\&\Lambda_{+}+\Lambda_{-}=I\end{aligned}\tag{2.196}$$

归一化(2.193)是 Lorentz 不变的. 然而，如果将 $\psi^{(\pm)}$ 看作单粒子波函数，单位体积的正定几率密度不是 $\bar{\psi}\psi$ 而是 $\rho=j^{0}(k)=\bar{\psi}\gamma^{0}\psi$. 对于正能平面波解，几率密度为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(+)(\alpha)}(x)\gamma^{0}\psi^{(+)(\beta)}(x)&=\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^{0}u^{(\beta)}(k)\\&=\bar{u}^{(\alpha)}(k)\frac{m\gamma^{0}+\gamma^{0}m}{2m}u^{(\beta)}(k)\\&=\bar{u}^{(\alpha)}(k)\frac{\{\not{k},\gamma^{0}\}}{2m}u^{(\beta)}(k)\\&=\frac{k^{0}}{m}\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k)\\&=\frac{k^{0}}{m}\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{2.197}$$

对于负能平面波解，几率密度为

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(-)(\alpha)}(x)\gamma^{0}\psi^{(-)(\beta)}(x)&=\bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^{0}v^{(\beta)}(k)\\&=\bar{v}^{(\alpha)}(k)\frac{-\{\not{k},\gamma^{0}\}}{2m}v^{(\beta)}(k)\\&=-\frac{k^{0}}{m}\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k)\\&=\frac{k^{0}}{m}\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}\tag{2.198}$$

无论对于 $\psi^{(+)}$ 还是 $\psi^{(-)}$，总几率皆为 $\frac{k^{0}}{m}V$(V 是三维空间体积)，它必须保持为常数. 因此，$\psi^{(\pm)}(x)$ 应加有归一化因子 $(1/\sqrt{V})\sqrt{m/k^{0}}$.

我们也指出，正负能量解是彼此正交的. 考虑三维动量相同但能量相反的解

$$\begin{aligned}\psi^{(+)(\alpha)}(x)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^{0}x^{0}-\vec{k}\cdot\vec{x})}u^{(\alpha)}(k)\\\psi^{(-)(\beta)}(x)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k^{0}x^{0}+\vec{k}\cdot\vec{x})}v^{(\beta)}(\tilde{k})\quad(\tilde{k}=(k^{0},-\vec{k}))\end{aligned}\tag{2.199}$$

则有

$$\begin{aligned}[\psi^{(-)(\beta)}(x)]^{+}\psi^{(+)(\alpha)}(x)&=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k^{0}x^{0}}\bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k})\gamma^{0}u^{(\alpha)}(k)\\&=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k^{0}x^{0}}\bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k})\frac{m\gamma^{0}+\gamma^{0}m}{2m}u^{(\alpha)}(k)\end{aligned}$$

$$= e^{-2ik^0x^0}\bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k})\frac{-\tilde{\not{k}}\gamma^0+\gamma^0\not{k}}{2m}u^{(\alpha)}(k)$$

$$=0 \tag{2.200}$$

因为 $-\tilde{\not{k}}\gamma^0+\gamma^0\not{k}=0$. 应当指出，当 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 中的 $\varphi^{(\alpha)}$，$\chi^{(\alpha)}$ 换为静止系 σ^3 的本征态时，以上所讨论的全部 u，v 正交归一关系及 $\Lambda_{\pm}(k)$ 的结果均保持不变.

u 和 v 的其余自由度是它们的极化，为说明其特点，我们利用 Pauli - Lubanski 四矢量(2.58). 在 Dirac 场情况下，

$$S^{\rho\sigma}=\frac{1}{2}\sigma^{\rho\sigma},\quad \sigma^{\rho\sigma}=\frac{i}{2}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]$$

[见(2.104)和(2.102)]. 因此

$$W_\mu=-\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu\sigma^{\rho\sigma} \tag{2.201}$$

对于平面波解 $e^{-ik\cdot x}$(动量表象)，可作代换 $i\partial^\nu\to k^\nu$，于是

$$W_\mu=-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k^\nu\sigma^{\rho\sigma} \tag{2.202}$$

$$=\frac{i}{2}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}k^\nu \tag{2.203}$$

第二步利用了 γ 矩阵的性质

$$\gamma_5\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\rho\sigma} \tag{2.204}$$

若引入类空单位矢量 n，满足

$$\begin{aligned} n^2&=n_\mu n^\mu=-1\\ n_\mu k^\mu&=0\end{aligned} \tag{2.205}$$

则有

$$-\frac{W\cdot n}{m}=-\frac{W_\mu n^\mu}{m}=\frac{1}{2m}\gamma_5\not{n}\not{k} \tag{2.206}$$

为选定 n，设 $t\equiv(1,0,0,0)$代表 k 矢量空间中的时间轴，则容易证明，(t,k) 平面内的四矢量

$$n=\left(k\frac{k\cdot t}{m^2}-t\right)\frac{m}{|\vec{k}|} \tag{2.207}$$

满足(2.205). 注意 n 的空间分量沿 $\vec{k}$ 方向. 将(2.207)代入(2.206)，得出

$$\begin{aligned} -\frac{W\cdot n}{m}&=\frac{1}{2m}\gamma_5\left(\not{k}\frac{k\cdot t}{m^2}-\not{t}\right)\frac{m}{|\vec{k}|}\not{k}\\ &=\frac{1}{2}\gamma_5(k\cdot t-\not{t}\not{k})\frac{1}{|\vec{k}|}=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\end{aligned} \tag{2.208}$$

其中

$$\vec{\Sigma}=\gamma_5\gamma^0\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix} \tag{2.209}$$

因此$\dfrac{-\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}}{m}$正是自旋算符$\dfrac{1}{2}\vec{\Sigma}$在$+\vec{k}$方向上的投影. 对于由 Dirac 方程描述的一次量子化系统，算符$\dfrac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$与哈密顿算符$H=\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+\beta m$是彼此对易的，因而它的本征值的确可以用来标记 c 数平面波解.

注意到算符$\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$与$\not{k}$是对易的，即

$$[\vec{\Sigma}\cdot\hat{k},\not{k}]=0 \tag{2.210}$$

故很容易证实，$u^{(\alpha)}(k)$和$v^{(\alpha)}(k)$是算符$\dfrac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$的本征态. 事实上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}u^{(\alpha)}(k)&=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})\\ 0\end{pmatrix}\\&=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\hat{k} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})\\ 0\end{pmatrix}\\&=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}u^{(\alpha)}(k)\\\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}v^{(\alpha)}(k)&=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\ \chi^{(\alpha)}(\hat{k})\end{pmatrix}\\&=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\hat{k} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \chi^{(\alpha)}(\hat{k})\end{pmatrix}\\&=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}v^{(\alpha)}(k)\end{aligned} \tag{2.211}$$

其中利用了(2.191)式，即$\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})$和$\chi^{(\alpha)}(\hat{k})$是$\vec{\sigma}\cdot\hat{k}$的本征态. 从(2.208)，(2.206)，(2.186)以及(2.211)我们得到

$$\begin{aligned}-\frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}}{m}u^{(\alpha)}(k)&=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}u^{(\alpha)}(k)=\frac{1}{2}\gamma_5\not{n}u^{(\alpha)}(k)=\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha u^{(\alpha)}(k)\\-\frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}}{m}v^{(\alpha)}(k)&=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}v^{(\alpha)}(k)=-\frac{1}{2}\gamma_5\not{n}v^{(\alpha)}(k)=\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha v^{(\alpha)}(k)\\\varepsilon_1&=-\varepsilon_2=1\end{aligned} \tag{2.212}$$

它们表明，$u^{(\alpha)}(k)$和$v^{(\alpha)}$是算符$-\dfrac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}}{m}=\dfrac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$的本征态，本征值皆为$\varepsilon_\alpha/2$，

$\alpha=1$ 和 2 分别对应本征值 $+1/2$ 和 $-1/2$.

从方程(2.212)的最后一个等式，还可以看出

$$P(n)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5 \not{n}) \tag{2.213}$$

构成自旋本征态的投影算符. 它投影出 $u^{(1)}(k)$ 和 $v^{(2)}(k)$，即对于正能解 u，$P(n)u$ 有 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}=+1/2$；对负能解 v，$P(n)v$ 有 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}=-1/2$.

最后我们指出，如果对于(2.187)中的 $\varphi^{(\alpha)}$ 不是取 $\vec{\sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态而是取静止系中 σ^3 的本征态，则同样可以证明，所得出的 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 是一个算符 $-\frac{W\cdot n_0}{m}$ 的本征态，本征值皆为 $\varepsilon_\alpha/2$，这里 n_0 也是一个与 k 正交的类空单位矢量. 然而现在的本征值 $\varepsilon_\alpha/2$ 一般并无明确的自旋投影含义，除了两种特定的情况. 一种情况是静止系，$k^\mu=(m,0,0,0)$，这时可以取 $n_0^\mu=(0,0,0,1)$ 因而 $-\frac{W\cdot n_0}{m}=\frac{1}{2}\Sigma^3$，于是 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 成为自旋算符 $\frac{1}{2}\Sigma^3$ 的本征态；另一种情况是三维动量平行于第三轴，这时 n_0 可取为(2.207)中的 n，因而 $-\frac{W\cdot n_0}{m}=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}=\frac{1}{2}\Sigma^3$，结果 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 可以写成算符 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态.

2.6.3 零质量粒子

目前已知的基本粒子中，中微子是质量微小的自旋为 1/2 的粒子，有时可以当作零质量粒子处理；而在极高能量下，若 Dirac 粒子如电子的质量项可以忽略，其行为也类似零质量粒子. 因此，研究这一情况具有实际意义.

当质量 $m=0$ 时，Dirac 旋量场的拉氏密度

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{2.214}$$

现在，除了整体相位变换($\psi\to e^{i\alpha}\psi$)不变性之外，$\mathcal{L}$ 还有整体手征不变性，即它对于变换

$$\psi\to e^{i\beta\gamma_5}\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}e^{i\beta\gamma_5} \tag{2.215}$$

是不变的，其中 β 是任意实常数. 相应的守恒流

$$J_5^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{2.216}$$

满足

$$\partial_\mu J_5^\mu=0 \tag{2.217}$$

即在 $m=0$ 的情况下，由 ψ 和 $\bar{\psi}$ 构成的轴矢流守恒. 守恒荷为

$$Q_5 = \int \mathrm{d}^3x\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi = \int \mathrm{d}^3x\psi^+\gamma_5\psi = \int \mathrm{d}^3x(\psi_R^+\psi_R - \psi_L^+\psi_L) \tag{2.218}$$

我们已利用了(2.119)并考虑到 ψ_L 和 ψ_R 是 γ_5 的本征态，满足

$$\gamma_5\psi_L = -\psi_L \tag{2.219}$$

$$\gamma_5\psi_R = +\psi_R$$

(2.218)表明，ψ_L 与 ψ_R 有相反的守征荷 Q_5.

可以注意到，如在 $\mathcal{L}$ 中加入 Dirac 质量项 $-m\bar{\psi}\psi$，则将破坏手征不变性. 因为在手征变换(2.215)下，

$$-m\bar{\psi}\psi \rightarrow -m\bar{\psi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta\gamma_5}\psi$$

不再是不变的.

由(2.214)所得的运动方程是[13]

$$\not{P}\psi = 0, \quad P_\mu = \mathrm{i}\partial_\mu \tag{2.220}$$

由它很容易看出手征性与 helicity 的关系. 为此，将(2.220)左乘 $\gamma_5\gamma^0$，并利用(2.209)可得

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}\psi = \gamma_5 P^0\psi \tag{2.221}$$

对于平面波解，$\vec{P}$ 和 P^0 可以分别代换为动量和能量值. 方程(2.220)要求 $P^2 = 0$，因而 $|P^0| = |\vec{P}| > 0$. 由此，(2.221)成为

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|} = \gamma_5\epsilon(P^0) \tag{2.222}$$

它表明

$$\gamma_5 = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\begin{cases} + & (P^0 > 0) \\ - & (P^0 < 0) \end{cases} \tag{2.223}$$

即对于正能解，手征性与 helicity 相同；对于负能解，手征性与 helicity 相反. 这种关系是正 LT 不变的. 因为 γ_5 是正 LT 不变量，而从 2.2.2 节知道，在零质量情况下，helicity 算符 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}/|\vec{P}|$ 也是正 LT 不变的.

为了给出平面波解的显示形式，类似于 $m \neq 0$ 情况，我们写

$$\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}u^{(\alpha)}(k) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}v^{(\alpha)}(k) \end{cases} \quad (k^2 = 0, k^0 = |\vec{k}| > 0) \tag{2.224}$$

其中 $u^{(\alpha)}(k)$ 和 $v^{(\alpha)}(k)$ 是算符 $\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态，满足

$$\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\begin{cases} u^{(\alpha)}(k) \\ v^{(\alpha)}(k) \end{cases} = \varepsilon_\alpha\begin{cases} u^{(\alpha)}(k) \\ v^{(\alpha)}(k) \end{cases} \quad (\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1) \tag{2.225}$$

将 $\psi(x)$ 代入方程(2.221)并利用上式可得

$$\gamma_5\begin{cases} u^{(\alpha)}(k) \\ v^{(\alpha)}(k) \end{cases} = \varepsilon_\alpha\begin{cases} u^{(\alpha)}(k) \\ v^{(\alpha)}(k) \end{cases} \quad (\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1) \tag{2.226}$$

注意与 $v(k)$ 相联系的动量为 $-\vec{k}$，对它而言，$v^{(1)}(k)$ 和 $v^{(2)}(k)$ 分别有 helicity ∓ 1，符合上述手征性与 helicity 的关系.

在 Dirac 表象中，$\gamma_5 = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}$. 从方程(2.226)和(2.225)可得

$$u^{(\alpha)}(k) = \sqrt{k^0}\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)}(\hat{k}) \\ \varepsilon_\alpha \varphi^{(\alpha)}(\hat{k}) \end{pmatrix} (\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1) \tag{2.227}$$

$\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})$ 由(2.190)给出，它是 $\vec{\sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态. 至于 $v^{(\alpha)}(k)$，由(2.225)和(2.226)可见，作为旋量，它们满足和 $u^{(\alpha)}(k)$ 同样的方程，所以不是独立的解. $v^{(\alpha)}(k)$ 和 $u^{(\alpha)}(k)$ 最多只相差一个相因子. 通常，可以利用(2.123)定义 $v^{(\alpha)}(k)$ 为 $u^{(\alpha)}(k)$ 的电荷共轭，即

$$\begin{aligned} v^{(1)}(k) &\equiv C\bar{u}^{\mathrm{T}(2)}(k) = -u^{(1)}(k) \\ v^{(2)}(k) &\equiv C\bar{u}^{\mathrm{T}(1)}(k) = -u^{(2)}(k) \end{aligned} \tag{2.228}$$

证明上式时用了等式 $\varphi^{(1)} = \mathrm{i}\sigma^2\varphi^{(2)*}$. 可见，在 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ $(\alpha = 1, 2)$ 四个解中只有两个是独立的.

不难直接证实，(2.227)中所取的归一化因子将使得 $u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$ 满足如下的归一化条件

$$\begin{aligned} &\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(k) = \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(k) = 2k^0\delta^{\alpha\beta} \\ &\bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(\tilde{k}) = \bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(\tilde{k}) = 0 \quad (\tilde{k} = (k^0, -\vec{k})) \end{aligned} \tag{2.229}$$

和自旋求和公式

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k) = \not{k} \tag{2.230}$$

在验证正交归一条件(2.229)时，须注意到以下事实：$\varphi^{(1)}(-\hat{k}) \propto \varphi^{(2)}(\hat{k})$ 以及 $u^{(\alpha)}(k)$ 与 $v^{(\alpha)}(k)$ 只差一相因子.

Weyl 和 Majorana 旋量场*

由于 $u^{(\alpha)}$ 和 $v^{(\alpha)}$ 中只有两个是独立的，所以描述 0 质量自旋 1/2 场可以不必用四分量 Dirac 复旋量而只用两分量 Weyl 复旋量或四分量 Majorana 旋量.

若采用 Weyl 旋量，则在 Weyl 表象中讨论最方便. 正如 2.3 节最后部分所指出的，在 Weyl 表象中，Dirac 旋量可以写成

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

其中 $\psi_{\mathrm{L}}, \psi_{\mathrm{R}}$ 各为两分量旋量. 这本质上是由于 ψ_{L} 和 ψ_{R} 是 γ_5 的本征态而 γ_5 在 Weyl 表象中是对角化的. 由于 ψ_{L} 和 ψ_{R} 彼此分开，它们将有各自的拉氏密度和运动方程. 事实上，考虑到(2.120)，拉氏密度(2.214)可以分解为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\mathrm{L}} + \mathcal{L}_{\mathrm{R}} \\ \mathcal{L}_{\mathrm{L}} &= \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{+}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} \quad (\bar{\sigma}^{\mu} = (I, -\vec{\sigma})) \\ \mathcal{L}_{\mathrm{R}} &= \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{+}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} \quad (\sigma^{\mu} = (I, \vec{\sigma}))\end{aligned} \tag{2.231}$$

注意 $\mathcal{L}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ 各自有整体相位不变性. 现在对 0 质量场的描述有两种选择：或用 ψ_{L} 或用 ψ_{R}. 若只用 ψ_{L} 描述，则有运动方程

$$\mathrm{i}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} = 0 \quad 或 \quad (P^{0} + \vec{\sigma}\cdot\vec{P})\psi_{\mathrm{L}} = 0 \tag{2.232}$$

对于平面波解，P^{0} 和 $\vec{P}$ 可理解为能量和动量本征值. 因此，若 $P^{0} > 0$，则 helicity 为 -1；若 $P^{0} < 0$，则 helicity 为 $+1$. 物理上表示粒子左旋（自旋 - 动量反平行）而反粒子右旋（自旋 - 动量平行），因为负能解与反粒子相联系. 另一方面，若只用 ψ_{R} 描述，则有运动方程

$$\mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} = 0 \quad 或 \quad (P^{0} - \vec{\sigma}\cdot\vec{P})\psi_{\mathrm{R}} = 0 \tag{2.233}$$

因此，$P^{0} > 0$ 对应 helicity 为 $+1$ 而 $P^{0} < 0$ 对应 helicity 为 -1. 物理上这表示粒子右旋而反粒子左旋. 实验上发现，中微子是左旋而反中微子是右旋的，因此若 m_{ν} 假设为 0，则正反中微子应用左手场 ψ_{L} 描写. 这时对中微子，$\gamma_{5} = \vec{\sigma}\cdot\vec{P}/|\vec{P}| = -1$；对反中微子，$\gamma_{5} = -\vec{\sigma}\cdot\vec{P}/|\vec{P}| = -1$，符合前述手征性与 helicity 的关系.

(2.232)和(2.233)是 Dirac 方程(2.220)在 Weyl 表象中分解所得的一对方程，叫做 Weyl 方程. 可以证明，在电荷共轭 C 或空间反射 P 运算下，这对方程互相转变. 这意味着，每个 Weyl 方程不再是 C 不变和 P 不变的，但在联合的 CP 变换下是不变的.

由于 Majorana 旋量场 ψ_{M} 的自由度也只有 Dirac 复旋量场自由度的一半，它等价于一个两分量 Weyl 复旋量场或一个四分量 Dirac 实旋量场，所以 0 质量自旋 1/2 场也可用 ψ_{M} 描写. 相应的动能项为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}_{\mathrm{M}}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{M}}, \quad (\psi_{\mathrm{M}})^{C} = \psi_{\mathrm{M}} \tag{2.234}$$

此外还可以有质量项

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}^{m} = \frac{-1}{2}m\bar{\psi}_{\mathrm{M}}\psi_{\mathrm{M}} \tag{2.235}$$

一个新的特点是，$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}^{m}$ 能够由单一的手征场如 ψ_{L} 构成. 为说明这点，我们取 Weyl 表象. 利用(2.120)和(2.122)可求出电荷共轭矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^{2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^{2} \end{pmatrix} \tag{2.236}$$

由此不难证实，一个 Majorana 旋量可以写成

$$\psi_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ -\mathrm{i}\sigma^{2}\psi_{\mathrm{L}}^{*} \end{pmatrix} = (\psi_{\mathrm{M}})^{C} \tag{2.237}$$

将此代入(2.235)，得

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}^{m}=\frac{\mathrm{i}}{2}m(\psi_{\mathrm{L}}^{+}\sigma^{2}\psi_{\mathrm{L}}^{*}-\psi_{\mathrm{L}}^{T}\sigma^{2}\psi_{\mathrm{L}}) \tag{2.238}$$

它仅含 ψ_{L}，不含 ψ_{R}. 因此仅有手征场并不完全保证费密子的无质量性. 仅有手征场将禁戒 Dirac 质量项但并不排除 Majorana 质量项的存在. 然而注意到，$\mathcal{L}_{\mathrm{M}}^{m}$ 的存在却破坏了拉氏密度在整体相位变换 $\psi_{\mathrm{L}}\rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi_{\mathrm{L}}$ 下的不变性，仅留下一个分立对称性 $\psi_{\mathrm{L}}\rightarrow -\psi_{\mathrm{L}}$(相当于 $\alpha=\pi$). 这表明，Majorana 质量项的存在是以手征费密子数(此处是左手费密子数)不守恒为代价的.

问题 2.15 验证(2.227)和(2.228)给出的 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 满足(2.229)和(2.230).

* **问题 2.16** 证明：Weyl 方程(2.232)和(2.233)各自都不是 C 不变和 P 不变的，但它们都是 CP 不变的.

* **问题 2.17** 证明：在 Weyl 表象中，Majorana 旋量的确可以写成(2.237)的形式.

问题 2.18 假定拉氏密度在某种整体内部变换下不是不变的，求出 $\mathcal{L}$ 的改变与相应流的散度间的关系. 对于有质量的 Dirac 场，求轴矢流的散度表达式.

2.7 Maxwell 场

Maxwell 场即电磁场，由矢量势(场)$A^{\mu}(x)$ 描写. 本节只讨论无相互作用(自由场)情况.

拉氏密度必须具有 Poincaré 不变性并满足 2.4 节所指出的一般要求. 平移不变性要求 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(A^{\mu},\partial_{\nu}A^{\mu})$，而 Lorentz 不变性以及每项不超过两个微商算符的要求将 $\mathcal{L}$ 的一般形式限定为

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{2}[a\partial_{\mu}A^{\nu}\partial^{\mu}A_{\nu}+b\partial_{\mu}A^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}+c(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}+dA_{\mu}A^{\mu}] \tag{2.239}$$

系数 a，b，c，d 应为实数，它们可以由 Euler - Lagrange 方程与 Maxwell 方程比较定出，因为电磁场满足 Maxwell 方程，这是完全确定的事实.

(2.239)给出的 Euler - Lagrange 方程是

$$a\partial^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}+(b+c)\partial^{\mu}\partial^{\nu}A_{\nu}-dA^{\mu}=0 \tag{2.240}$$

而真空中的 Maxwell 方程为

$$\nabla\cdot\vec{E}=0,\quad \nabla\times\vec{B}=\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\quad 或\quad \partial_{\mu}F^{\mu\nu}=0 \tag{2.241}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}=0,\ \nabla \times \vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad 或 \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}=0 \tag{2.242}$$

其中电磁场强张量

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \text{即 } F^{0i}=-E^i, F^{ij}=-\varepsilon^{ijk}B^k \tag{2.243}$$

而对偶张量

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

$$=\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \text{即 } \tilde{F}^{0i}=-\mathrm{i}B^i,\quad \tilde{F}^{ij}=\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}E^k \tag{2.244}$$

这里对偶的含义是电场与磁场间的互换，即

$$F^{\mu\nu}\leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \quad 对应 \quad E^i\leftrightarrow \mathrm{i}B^i$$

正如经典电动力学中熟知的，矢量势 A^μ 与场强 $F^{\mu\nu}$ 的关系是

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \tag{2.245}$$

注意到，这时第二组 Maxwell 方程(2.242)自动满足，而第一组 Maxwell 方程成为

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu\partial_\nu A^\nu=0 \tag{2.246}$$

现在将(2.246)同(2.240)进行比较，可得

$$a=1,\ b+c=-1,\ d=0 \tag{2.247}$$

其中 $A_\mu A^\mu$ 项的系数 $d=0$ 意味着电磁场为 0 质量场. 于是从(2.239)可得 Maxwell 场的拉氏密度

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu\partial^\mu A_\nu-\partial_\mu A^\nu\partial_\nu A^\mu)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.248}$$

其中我们已经丢掉了一个四散度项 $-\frac{c}{2}\partial_\mu(A^\mu\partial_\nu A^\nu-A^\nu\partial_\nu A^\mu)$. (2.248)和(2.246)即自由电磁场的拉氏密度和运动方程. 不难看出，场 A^μ 的量纲是 L^{-1} 或 M.

场强 $F^{\mu\nu}$ 的分量是电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$，它们直接与观测相联系，可以完全确定. 然而当用 A^μ 代替 $F^{\mu\nu}$ 来描述电磁场时，对于给定的场强 $F^{\mu\nu}$，A^μ 却有很大的任意性. 因为，对于如下的变换

$$A^\mu(x)\rightarrow A^\mu(x)+\partial^\mu\alpha(x) \tag{2.249}$$

其中 $\alpha(x)$ 是时空点的任意标量函数，$F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu}$，保持不变，因而拉氏密度(2.248)也保持不变. 变换(2.249)称为规范变换. 注意到仅对 0 质量矢量场才允许有规范变换下的不变性，因为质量项 $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ 显然不是规范不变的.

由于规范变换带来的任意性，对 A^μ 可作不同的选择. 不同的选择对应于采取不同的规范，分别由某种规范条件来表达. 例如，一种常用的规范是辐射规范或横规范，其规范条件是

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad A^0 = 0 \tag{2.250}$$

这使得 A^μ 的四个分量中只留下两个物理的横向分量，没有非物理的自由度. 但这种规范的缺点是失去了明显的 Lorentz 协变性. 另一种常用规范是 Lorentz 规范，表达为 Lorentz 条件

$$\partial \cdot A(x) \equiv \partial_\nu A^\nu(x) = 0 \tag{2.251}$$

注意到这一条件总是可以实现的：如果最初 A^ν 并不满足 Lorentz 条件，则可作规范变换得出 $A'^\nu = A^\nu - \partial^\nu \alpha$，为使 $\partial_\nu A'^\nu = 0$，只需选择 α 使 $\Box\, \alpha = \partial_\nu A^\nu$ 即可.

在 Lorentz 规范下，Maxwell 方程(2.246)成为

$$\Box\, A^\mu(x) = 0 \tag{2.252}$$

应当指出，此时 A^μ 仍有规范任意性，只是任意程度有所降低. 因为对 A^μ 仍可作规范变换使 $A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha$，但为了使 A'^μ 也满足方程(2.252)，要求 α 不能是完全不受限制的标量函数而必须满足方程

$$\Box \alpha = 0 \tag{2.253}$$

当然，满足这一方程的 α 仍然是无限多的.

Lorentz 规范是明显协变的，但缺点是它不足以消除所有非物理的自由度.

Lorentz 条件可以利用一个 Lagrange 乘子 λ 纳入拉氏密度和运动方程中去. 我们将拉氏密度推广为

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 \tag{2.254}$$

容易看出，新增加的项 $-\lambda(\partial \cdot A)^2/2$ 在规范变换(2.249)下仍然是不变的，只是标量函数 $\alpha(x)$ 必须服从限制(2.253). 从(2.254)导出的运动方程成为

$$\Box\, A^\mu + (\lambda - 1)\partial^\mu(\partial \cdot A) = 0 \tag{2.255}$$

两边取四散度，得

$$\Box \partial_\mu A^\mu + (\lambda - 1)\Box\, (\partial \cdot A) = \lambda \Box\, (\partial \cdot A) = 0$$

所以

$$\Box \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad (\text{对 } \lambda \neq 0) \tag{2.256}$$

由此可以证明：如果在某时刻 $t = 0$，$\chi \equiv \partial_\mu A^\mu = 0$，$\frac{\partial}{\partial t}\chi = 0$，则在任意时刻 t 有

$\chi=0$. 事实上，可将 χ 对 t 作级数展开

$$\chi=\chi\big|_{t=0}+\frac{\partial\chi}{\partial t}\Big|_{t=0}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}t^2+\cdots$$

考虑到初始条件，第一项和第二项为 0. 再由(2.256)即 $\Box\chi=0$，并注意到 χ 是平面波 $e^{\mp(ik^0t-i\vec{k}\cdot\vec{x})}$ 的叠加，其中对 $\vec{x}$ 和 t 的依赖部分是各自独立(因子化)的，由此可得

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\Big|_{t=0}=\nabla^2\chi\big|_{t=0}=\nabla^2(\chi\big|_{t=0})=0$$

$$\frac{\partial^3\chi}{\partial t^3}\Big|_{t=0}=\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial t}\Big|_{t=0}=\nabla^2\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)=0$$

……

因而 χ 的展开式中所有更高次项为 0. 这就证明了，在任意时刻 t，$\chi\equiv\partial_\mu A^\mu=0$，即 Lorentz 条件满足.

以上讨论表明，方程(2.255)等价于 Lorentz 规范下的 Maxwell 方程.

类似于标量场和旋量场情况，我们可以写出与作用量的不变性相应的 Noether 流. 由(2.144)，作用量对于一般变换 δx_λ，δA_λ 的不变性所导致的守恒流为

$$j^{\mu,a}=-\left[\mathcal{L}\,g^{\mu\lambda}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\lambda A_\rho\right]\frac{\delta x_\lambda}{\delta\omega_a}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}\frac{\delta A_\lambda}{\delta\omega_a}$$

将(2.254)代入上式，注意到 $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}=-F^{\mu\rho}-\lambda g^{\mu\rho}(\partial\cdot A)$，得

$$j^{\mu,a}=-[\mathcal{L}\,g^{\mu\lambda}+(F^{\mu\rho}+\lambda\,g^{\mu\rho}\partial\cdot A)\partial^\lambda A_\rho]\frac{\delta x_\lambda}{\delta\omega_a}+(F^{\mu\lambda}+\lambda\,g^{\mu\lambda}\partial\cdot A)\frac{\delta A_\lambda}{\delta\omega_a}\tag{2.257}$$

由此，平移不变性导致的能量－动量张量密度为

$$j^{\mu\nu}=\left[\frac{1}{4}F^2+\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2\right]g^{\mu\nu}-[F^{\mu\rho}+\lambda\,g^{\mu\rho}(\partial\cdot A)]\partial^\nu A_\rho\tag{2.258}$$

守恒的四动量为

$$P^\nu=\int\mathrm{d}^3x\,j^{0\nu}\tag{2.259}$$

在 LT 下，$\delta A_\lambda=\varepsilon_{\lambda\nu}A^\nu$，从而 Lorentz 不变性导致的广义的角动量张量密度为

$$j^{\mu\nu\rho}=x^\nu j^{\mu\rho}-x^\rho j^{\mu\nu}+A^\nu(F^{\mu\rho}+\lambda\,g^{\mu\rho}\partial\cdot A)-A^\rho(F^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}\partial\cdot A)\tag{2.260}$$

守恒的广义角动量为

$$M^{\nu\rho}=\int\mathrm{d}^3xj^{0\nu\rho}\tag{2.261}$$

我们指出，电磁场的广义自旋角动量

$$
\begin{aligned}
S^{\nu\rho} &= \int \mathrm{d}^3x[A^\nu(F^{0\rho} + \lambda\, g^{0\rho}\partial\cdot A) - A^\rho(F^{0\nu} + \lambda\, g^{0\nu}\partial\cdot A)] \\
&= \int \mathrm{d}^3x(\pi^\nu A^\rho - \pi^\rho A^\nu) = \int \mathrm{d}^3x\pi_\sigma(g^{\nu\sigma}g^\rho{}_\tau - g^{\rho\sigma}g^\nu{}_\tau)A^\tau \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\pi_\sigma(S^{\nu\rho})^\sigma{}_\tau A^\tau
\end{aligned}
$$

其中

$$
\pi_\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\sigma)} = -F_{0\sigma} - \lambda g_{0\sigma}(\partial\cdot A)
$$

是 A^σ 的所谓共轭动量，而

$$
(S^{\nu\rho})^\sigma{}_\tau = \mathrm{i}(g^{\nu\sigma}g^\rho{}_\tau - g^{\rho\sigma}g^\nu{}_\tau)
$$

是电磁场 A^μ 的广义自旋矩阵，它与(2.89)相一致.

问题 2.19 对于 Maxwell 场的拉氏密度(2.254)，导出 Noether 流(2.258)和(2.260).

第 3 章

场的正则量子化

3.1 正则形式与粒子力学的量子化

场的正则量子化方法是粒子力学中的正则量子化方法向无穷多自由度系统的推广. 因此有必要先回忆一下质点力学的正则量子化形式.

考虑一个粒子系统, 其自由度数为 N, 广义坐标是 $q_i(i=1,\cdots,N)$. 作用量

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}tL(q_i,\dot{q}_i) \tag{3.1}$$

其中 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 是拉氏量. 我们已经知道, I 的极值条件 $\delta I/\delta q_i=0$ 导致了经典运动方程(2.5), 它是运动方程的拉氏形式, 对量子化来说并不适用. 为了量子化, 须将理论纳入哈密顿正则形式. 做法是: 定义与 q_i 相共轭的广义动量

$$p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\quad(i=1,\cdots,N) \tag{3.2}$$

于是系统的哈密顿量为

$$H(q_i,p_i)=p_i\dot{q}_i-L \tag{3.3}$$

注意 L 是 $(q_i,\dot{q}_i)$ 的函数, H 是 (q_i,p_i) 的函数. 联系 $L(q_i,\dot{q}_i)$ 和 $H(q_i,p_i)$ 的变换(3.3)称为 Legendre 变换. 由(2.5), (3.2)和(3.3)可以得出

$$p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad(i=1,\cdots,N) \tag{3.4}$$

此即经典 Hamilton 正则方程.

实行正则量子化即将 q_i 和 p_i 看作 Heisenberg 图像(又称绘景)中的厄密算符(因而依赖于时间 t), 满足如下的正则对易关系:

$$\begin{aligned}&[q_i(t),p_j(t)]\equiv q_i(t)p_j(t)-p_j(t)q_i(t)=\mathrm{i}\delta_{ij}\\&[q_i(t),q_j(t)]=[p_i(t),p_j(t)]=0\end{aligned}\quad(i,j=1,\cdots,N) \tag{3.5}$$

于是，经典 Hamilton 正则方程将成为量子 Heisenberg 方程，即

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \rightarrow \dot{p}_i(t) = \mathrm{i}[H, p_i(t)] \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \rightarrow \dot{q}_i(t) = \mathrm{i}[H, q_i(t)] \end{aligned} \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{3.6}$$

形式上写 $H = a_{mn}^{ij} q_i^m p_j^n$，可证实上面方程左右等价. 算符 q_i, p_i 所满足的对易关系(3.5)和 Heisenberg 方程(3.6)就是体系量子化后的基本方程. 还可以证明，若 $O(t)$ 是 Heisenberg 图像的算符，是 $q_i(t)$，$p_i(t)$ 的函数，但不显含 t，则有

$$\dot{O}(t) = \mathrm{i}[H, O(t)] \tag{3.7}$$

即 $O(t)$ 也满足 Heisenberg 方程.

下面举最简单的系统一维谐振子为例，来说明正则量子化的程序[17]. 拉氏量

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega}{2}q^2 \tag{3.8}$$

先纳入正则形式：定义动量

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \tag{3.9}$$

从而哈密顿量

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}(p^2 + \omega q^2) \tag{3.10}$$

Hamilton 正则方程成为

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \end{aligned} \tag{3.11}$$

然后进行量子化：引入正则对易关系

$$[q, p] = \mathrm{i} \tag{3.12}$$

注意此对易关系在 t 时刻成立. 以下我们皆在固定 t 时刻进行讨论，所以将宗量 t 略去不写. 于是 Heisenberg 方程成为

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mathrm{i}[H, p] = -\omega q \\ \dot{q} &= \mathrm{i}[H, q] = p \end{aligned} \tag{3.13}$$

它们与 Hamilton 正则方程(3.11)形式上完全相同.

为了分析本征值问题，引入更方便的线性组合

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q + \mathrm{i}p), \quad a^+ = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q - \mathrm{i}p) \tag{3.14}$$

利用(3.12)可以证明，a，a^+ 满足对易关系

$$[a, a^+]=1, \quad [a, a]=[a^+, a^+]=0 \tag{3.15}$$

通过 a, a^+, 哈密顿量 H 可表为

$$H=\frac{1}{2}\omega(a^+a+aa^+)=\omega(a^+a+1/2) \tag{3.16}$$

令

$$N=a^+a \tag{3.17}$$

则

$$H=\omega(N+1/2) \tag{3.18}$$

算符 N 是非负的，因为对任一态 $|\psi\rangle$，N 的平均值

$$\langle\psi|a^+a|\psi\rangle=|a|\psi\rangle|^2\geqslant 0$$

因而 N 的所有本征值$\geqslant 0$.

现在来证明，H 的本征态 $|n\rangle$ 满足

$$H|n\rangle=\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{3.19}$$

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{+n}|0\rangle \tag{3.20}$$

这里 $|0\rangle$ 是本征值最小的本征态，满足

$$H|0\rangle=\frac{\omega}{2}|0\rangle \tag{3.21}$$

证：令 $|\ \rangle$ 是 N 的任一本征态，满足

$$N|\ \rangle=l|\ \rangle \qquad (l\text{ 是一个数}) \tag{3.22}$$

由于

$$Na^+=a^+(N+1) \qquad Na=a(N-1)$$
$$Na^{+2}=a^+(N+2) \qquad Na^2=a^2(N-2)$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$Na^{+n}=a^{+n}(N+n) \qquad Na^n=a^n(N-n)$$

故有

$$Na^+|\ \rangle=(l+1)a^+|\ \rangle, \quad Na^{+2}|\ \rangle=(l+2)a^{+2}|\ \rangle, \cdots, \quad Na^{+n}|\ \rangle=(l+n)a^{+n}|\ \rangle \tag{3.23}$$

$$Na|\ \rangle=(l-1)a|\ \rangle, \quad Na^2|\ \rangle(l-2)a^2|\ \rangle, \cdots, \quad Na^n|\ \rangle=(l-n)a^n|\ \rangle \tag{3.24}$$

即 a^+ 使 N 的本征值加 1，a 使 N 的本征值减 1. 若 $l\neq$整数，则可从(3.24)的最后一式中取 $n>l$，结果得 N 的本征值 <0，但这与 N 非负相矛盾. 所以，利用 a 来使 N 本征值递减的过程必须到某一 n 时中断. 这意味着

$$l=\text{非负整数}$$

而对于 $n=l$，有

$$|0\rangle \equiv a^l|\rangle$$

满足

$$N|0\rangle = 0$$

即 N 的最小本征值必须为 0. 将 $|\rangle$ 用 $|0\rangle$ 代替，从(3.23)的最后一式可得

$$Na^{+n}|0\rangle = na^{+n}|0\rangle$$

或者

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.25}$$

其中 $|n\rangle$ 是归一化的本征态(3.20)，满足 $\langle n|n\rangle = 1$. 考虑到(3.18)和(3.25)，因而(3.19)和(3.21)成立. 又从 $N|0\rangle = 0$ 可得

$$Na|0\rangle = -a|0\rangle$$

但 N 非负，故必须有

$$a|0\rangle = 0 \tag{3.26}$$

在坐标表象中，$p = -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial q}$. 令 $\psi(q) = \langle q|0\rangle$，则从上式及(3.14)式可得

$$\left(\omega q + \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(q) = 0$$

其解

$$\psi(q) \propto \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}q^2}$$

正是坐标表象中谐振子的基态波函数. 因此 $|0\rangle$ 不仅存在而且是非简并的. 于是(3.19)—(3.21)得证. 可以进一步写出本征态 $|n\rangle$ 在坐标表象中的表达式

$$\langle q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\right)^n\left(\omega\, q - \frac{\partial}{\partial q}\right)^n\psi(q)$$

它正是通常由 Schrödinger 方程解出的用厄密多项式表达的一维谐振子激发态的归一化波函数，如果 $\psi(q)$ 也被归一化的话. 对于由(3.20)给出的 $|n\rangle$，不难证明

$$\begin{aligned} a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \end{aligned} \tag{3.27}$$

通常称 a^+ 为产生算符，a 为消灭算符，$N = a^+a$ 为粒子数算符，其意义根据(3.27)和(3.25)是显而易见的. 我们可以考虑一个 Hilbert 空间，取基矢为

$$|0\rangle,\quad |1\rangle,\ |2\rangle,\cdots$$

或表为矩阵

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad |1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix},\quad |2\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix},\cdots \tag{3.28}$$

则 a^+，a，N 将有如下的矩阵表示：

$$a^+=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots\\\sqrt{1}&0&0&\cdots\\0&\sqrt{2}&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}0&\sqrt{1}&0&\cdots\\0&0&\sqrt{2}&\cdots\\0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots\\0&1&0&\cdots\\0&0&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

以上我们构成了一维谐振子的量子力学的完全解，即得出了 H 的本征值和本征态，算符 H，a^+，a 的矩阵表示. 所作讨论也表明，对于由一维谐振子哈密顿量 H 的本征态所张成的 Hilbert 空间而言，其基矢既可以由坐标表象中的波函数来表示，也可以用一般和抽象的符号 $|n\rangle$ 来表示，两种表达方式是等价的，所表达的是同一个 Hilbert 空间. 以后关于量子场的 Hilbert 空间，我们将总是使用类似于 $|n\rangle$ 的这种一般和抽象记法来标记空间的基. 但是应当理解，它所表示的 Hilbert 空间本质上与谐振子的 Hilbert 空间并没有本质上的区别.

问题 3.1　证实(3.20)式给出的 $|n\rangle$ 满足归一化条件 $\langle n|n\rangle=1$，然后证明(3.27)式.

3.2　场的正则量子化——一般表述

粒子力学的正则量子化方法可以推广到场论，差别只在自由度数 N 从有限变成 ∞ 且连续变化.[11]

为了简单，先考虑只有单个定域场 $\varphi(x)$ 的情况. 定域场 $\varphi(x)$ 描述的是具有无穷多自由度的物理系统，因为空间每一点的场值可以看成一个独立的广义坐标，即有如下类比：

	粒子力学	场论
广义坐标	$q_i(t)$　($i=1,\cdots,N$ 分立取值)	$\varphi(\vec{x},t)$　($\vec{x}$ 连续变化)

量子化之前，也必须将理论纳入正则形式. 为了显示出场论与粒子力学间的平行关系，我们将三维空间分成无穷多个体积元 ΔV_i，并定义第 i 个坐标 $\varphi_i(t)$ 为

$$\varphi_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta V_i}\int_{(\Delta V_i)} \mathrm{d}^3x\varphi(\vec{x}, t) \tag{3.30}$$

即 $\varphi(\vec{x}, t)$ 在第 i 个体积元中的平均值. 于是场 φ 系统就类似于可数自由度的系统. 记 $\varphi_i(t)$ 的时间微商

$$\dot{\varphi}_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta V_i}\int_{(\Delta V_i)} \mathrm{d}^3x \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{x}, t) \tag{3.31}$$

则拉氏量 L 可以重写成

$$L = \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \to \sum_i \Delta V_i\ \overline{\mathcal{L}}_i(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t), \varphi_{i\pm s}(t), \cdots) \tag{3.32}$$

其中不同的 $\varphi_i(t)$ 都是独立自由度，$\varphi_{i\pm s}(t)$ 是与 φ_i 相邻的体积元坐标，用以形成 $\nabla\varphi$. 注意到 $\dot{\varphi}_i(t)$ 只出现于 $\overline{\mathcal{L}}_i$ 中，因此正则动量

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i(t)} = \Delta V_i \frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)} \equiv \Delta V_i\pi_i(t) \quad (i\text{ 不求和}) \tag{3.33}$$

通过 Legendre 变换，可得哈密顿量

$$H = \sum_i p_i\dot{\varphi}_i - L = \sum_i \Delta V_i(\pi_i\dot{\varphi}_i - \overline{\mathcal{L}}_i) \tag{3.34}$$

然后进行量子化. 将 φ_i，p_i 换成 Heisenberg 图像中的算符，令其满足正则对易关系

$$[\varphi_i(t), \varphi_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0$$
$$[p_i(t), \varphi_j(t)] = -\mathrm{i}\delta_{ij}$$

或用 $\pi_i(t)$ 表示为

$$[\pi_i(t), \varphi_j(t)] = -\mathrm{i}\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i} \tag{3.35}$$

则 φ_i，p_i 将满足 Heisenberg 方程

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i(t) &= \mathrm{i}[H, \varphi_i(t)]\\ \dot{p}_i(t) &= \mathrm{i}[H, p_i(t)]\end{aligned} \tag{3.36}$$

我们还必须回到连续极限. 这时有下列代换：

$$\sum_i \Delta V_i \to \int \mathrm{d}^3x$$
$$\overline{\mathcal{L}}_i \to \mathcal{L}$$
$$\varphi_i(t) \to \varphi(\vec{x}, t)$$
$$\dot{\varphi}_i(t) \to \dot{\varphi}(\vec{x}, t)$$
$$\pi_i(t) \to \pi(\vec{x}, t)$$

最后一行中 $\pi(\vec{x}, t)$ 是 $\varphi(\vec{x}, t)$ 的共轭动量，定义为

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)}{\partial\dot{\varphi}(\vec{x}, t)} \tag{3.37}$$

它在体积元 ΔV_i 中的平均值为

$$\frac{1}{\Delta V_i}\int_{(\Delta V_i)} \mathrm{d}^3x\pi(\vec{x},\ t) = \frac{1}{\Delta V_i}\int_{(\Delta V_i)} \mathrm{d}^3x \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial\dot{\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\Delta V_i} \cdot \Delta V_i \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)} = \pi_i(t)$$

于是，在连续极限下，哈密顿量(3.34)成为

$$H = \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}(\pi(\vec{x},\ t),\varphi(\vec{x},\ t))$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} \tag{3.38}$$

$\mathcal{H}$ 称为哈氏密度(哈密顿量密度). 而(3.35)成为等时对易关系

$$[\varphi(\vec{x},\ t),\varphi(\vec{x}',\ t)] = [\pi(\vec{x},\ t),\pi(\vec{x}',\ t)] = 0$$

$$[\pi(\vec{x},\ t),\varphi(\vec{x}',\ t)] = -\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{3.39}$$

注意到

$$\int \mathrm{d}^3x\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = 1 \quad \text{对应} \quad \sum_i \Delta V_i \frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i} = 1$$

所以过渡到连续极限时

$$\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i} \to \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Heisenberg 方程(3.36)成为

$$\dot{\varphi}(\vec{x},\ t) = \mathrm{i}[H,\varphi(\vec{x},\ t)]$$

$$\dot{\pi}(\vec{x},\ t) = \mathrm{i}[H,\pi(\vec{x},\ t)] \tag{3.40}$$

哈密顿量(3.38)，等时对易关系(3.39)和 Heisenberg 方程(3.40)构成了正则量子场论的基础.

以上讨论只包含单个定域场，而向多个定域场情况进行推广是直接的. 设有 n 个独立的场 $\varphi_r(\vec{x},\ t)$，$r=1,\cdots,n$，我们对每个场 $\varphi_r(\vec{x},\ t)$ 引入共轭动量

$$\pi_r(\vec{x},\ t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_r(\vec{x},\ t)} \tag{3.41}$$

通过 Legendre 变换，定义哈氏密度和哈密顿量：

$$\mathcal{H}(\pi_r,\cdots,\varphi_r,\cdots) = \sum_{r=1}^{n}\pi_r\dot{\varphi}_r - \mathcal{L}$$

$$H = \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H} \tag{3.42}$$

然后量子化：将 φ_r,π_r 看作算符，满足等时对易关系

$$[\varphi_r(\vec{x},\ t),\varphi_s(\vec{x}',\ t)] = [\pi_r(\vec{x},\ t),\pi_s(\vec{x}',\ t)] = 0$$

$$[\pi_r(\vec{x},\ t),\varphi_s(\vec{x}',\ t)] = -\mathrm{i}\delta_{rs}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{3.43}$$

Heisenberg 方程则成为

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_r(\vec{x},t)&=\mathrm{i}[H,\varphi_r(\vec{x},t)]\\ \dot{\pi}_r(\vec{x},t)&=\mathrm{i}[H,\pi_r(\vec{x},t)]\end{aligned}\tag{3.44}$$

(3.41)—(3.44)显然是(3.37)—(3.40)的推广.

以上正则量子化步骤中，我们将 φ_r，π_r 看作 Hilbert 空间中的算符，令其满足正则对易关系. 一个值得考虑的问题是，φ_r，π_r 的正则对易关系是否和 Poincaré 不变性自恰？我们知道，在经典一级，根据 Noether 定理，作用量的 Poincaré 不变性意味着存在守恒量 P^μ 和 $M^{\mu\nu}$，它们不随时间改变，与 10 个 Poincaré 变换参数相对应. 在量子一级，φ_r，π_r 成为算符，其 Poincaré 变换将由 Hilbert 空间中的幺正算符来决定，变换的形式应是经典场振幅变换的算符对应. 另一方面，量子化以后，10 个守恒量 P^μ，$M^{\mu\nu}$ 也成为 Hilbert 空间中的厄密算符. 人们自然期望，作为场的四动量和广义角动量算符，它们就应当是时空坐标平移和 Lorentz 变换的生成元，即 Poincaré 变换的生成元，即它们能够决定场算符正确的 Poincaré 变换性质以保证作用量在量子一级的 Poincaré 不变性，同时它们还应满足 Poincaré 代数. 问题在于，确认 P^μ，$M^{\mu\nu}$ 为 Poincaré 生成元是否会和场算符的正则对易关系产生矛盾？

为使问题具体化，先来考虑场算符 $\varphi_r(x)$ 的 Poincaré 变换. 对于联系两个惯性系的 Poincaré 变换

$$x^\mu\to x'^{\,\mu}=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu+a^\mu\tag{3.45}$$

经典场振幅的变换为

$$\varphi_r(x)\to\varphi'_r(x')=S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(x)\tag{3.46}$$

在量子一级，当 φ_r 成为算符后，与经典场振幅 $\varphi_r(x)$ 相对应的应是矩阵元 $\langle\alpha|\varphi_r(x)|\beta\rangle$ 的完全集合，此处 $|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$ 为 Hilbert 空间中的任意量子态. 因此，在两个惯性系 K′与 K 之间，应有关系

$$\langle\alpha'|\varphi_r(x')|\beta'\rangle=S_{rs}(\Lambda)\langle\alpha|\varphi_s(x)|\beta\rangle$$

成立. 设两个惯性系之间量子态的变换为

$$|\beta'\rangle=U(\Lambda,a)|\beta\rangle,\quad\langle\alpha'|=\langle\alpha|U^{-1}(\Lambda,a)$$

其中 $U(\Lambda,a)$ 为 Hilbert 空间中的幺正算符. 于是上式化为

$$\langle\alpha|U^{-1}(\Lambda,a)\varphi_r(x')U(\Lambda,a)|\beta\rangle=S_{rs}(\Lambda)\langle\alpha|\varphi_s(x)|\beta\rangle$$

由于$\langle\alpha|$和$|\beta\rangle$为任意态，故得到与经典场变换(3.46)相应的量子场变换

$$U^{-1}(\Lambda,a)\varphi_r(x')U(\Lambda,a)=S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(x)\tag{3.47}$$

注意 U^{-1}对场算符 $\varphi_r(x')$ 的作用相当于经典场振幅的函数变换 $\varphi_r(x')\to\varphi'_r(x')$. (3.47)也可以重写为

$$U(\Lambda,a)\varphi_r(x)U^{-1}(\Lambda,a)=S^{-1}_{rs}(\Lambda)\varphi_s(\Lambda x+a)\tag{3.48}$$

下面分别讨论时空平移和 Lorentz 变换情况. 对于时空平移，(3.48)成为

$$U(a)\varphi_r(x)U^{-1}(a)=\varphi_r(x+a) \tag{3.49}$$

考虑无穷小平移 $a^\mu=\varepsilon^\mu$. 注意上式两边函数宗量坐标的变化为

$$x^\mu\longrightarrow x^\mu+\varepsilon^\mu=(1-\mathrm{i}\varepsilon^\rho\hat{P}_\rho)x^\mu \quad (\hat{P}_\rho=\mathrm{i}\partial_\rho)$$

与之对应，算符 U 可写为

$$U(a=\varepsilon)=1+\mathrm{i}\varepsilon_\mu p^\mu \tag{3.50}$$

其中，p^μ 是厄密算符，即时空平移生成元. 结果，由(3.49)和(3.50)得出

$$\mathrm{i}[p^\mu,\ \varphi_r(x)]=\partial^\mu\varphi_r(x) \tag{3.51}$$

注意(3.50)右边第二项前取 + 号是与场算符的正则对易关系有关的，它将保证(3.51)式在将其中的 p^μ 替换为场的四动量算符 P^μ 后可能成立.

对于 Lorentz 变换，(3.48)成为

$$U(\Lambda)\varphi_r(x)U^{-1}(\Lambda)=S_{rs}^{-1}(\Lambda)\varphi_s(\Lambda x) \tag{3.52}$$

考虑无穷小 Lorentz 变换. 上式两边函数宗量坐标的变化为

$$x^\mu\longrightarrow x^\mu+\varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\nu\rho}L^{\nu\rho}\right)x^\mu,\quad L^{\nu\rho}=\mathrm{i}(x^\nu\partial^\rho-x^\rho\partial^\nu)$$

与之相应，可写

$$U(\varepsilon_{\mu\nu})=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\nu}m^{\mu\nu}\right) \tag{3.53}$$

其中 $m^{\mu\nu}$ 为厄密算符，对应 LT 生成元. 将(3.53)代入(3.52)，得

$$\varphi_r(x)-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\nu}[m^{\mu\nu},\ \varphi_r(x)]=S_{rs}^{-1}(\varepsilon_{\mu\nu})\varphi_s(x+\varepsilon x)$$

但

$$\varphi_s(x+\varepsilon x)=\varphi_s(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)\varphi_s(x)$$

$$S_{rs}^{-1}(\varepsilon_{\mu\nu})=\delta_{rs}+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\Sigma_{rs}^{\mu\nu}$$

因此最后有

$$-[m^{\mu\nu},\varphi_r(x)]=\mathrm{i}(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)\varphi_r(x)+\Sigma_{rs}^{\mu\nu}\varphi_s(x) \tag{3.54}$$

(3.51)和(3.54)即场 $\varphi_r(x)$ 在时空平移和 Lorentz 变换下必须满足的变换关系，其中的 p^μ 和 $m^{\mu\nu}$ 分别是时空平移生成元和 Lorentz 变换生成元.

如果经典的守恒荷 P^μ 和 $M^{\mu\nu}$ 在量子化之后的确代表 Poincaré 生成元，则下面两条要求必须满足：

(a) 在作代换 $p^\mu\equiv P^\mu$，$m^{\mu\nu}\equiv M^{\mu\nu}$ 之后，(3.51)和(3.54)仍然成立；

(b) P^μ，$M^{\mu\nu}$ 满足 Poincaré 代数.

由于在验证(a)，(b)时必须利用 φ_r，π_r 的对易关系，故(a)，(b)的成立就意味着 P^μ，$M^{\mu\nu}$ 作为 Poincaré 变换的生成元与 φ_r，π_r 的正则对易关系是自恰的.

只有当这种自恰性得到了证实，才表明理论在量子化之后仍是 Poincaré 不变的. 同时还可以证明，经典守恒量 $P^\mu, M^{\mu\nu}$ 现在也是量子守恒量，即 $\dot{P}^\mu = \dot{M}^{\mu\nu} = 0$ 作为算符方程保持成立.

实际上，对于现代物理学中所考虑的大多数场论来说，Noether 守恒荷 P^μ，$M^{\mu\nu}$ 都可以毫无困难地从经典搬到量子领域. 这一结论的含义是，对于这些理论，在经典一级成立的 Poincaré 对称性到了量子一级仍继续保持，用现代的术语来说，即不存在 Poincaré 对称性的量子反常.

3.3 Klein – Gordon 场的正则量子化

3.3.1 实标量场的量子化与粒子解释

对于只有一个实标量场 $\varphi(x)$ 的情况，自由场拉氏密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{3.55}$$

Euler – Lagrange 方程即 Klein – Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{3.56}$$

共轭动量

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)} = \dot{\varphi}(x) \tag{3.57}$$

哈密顿量

$$H = \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}(\pi, \varphi)$$

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[\pi(\vec{x},t)^2 + |\nabla\varphi(\vec{x},t)|^2 + m^2\varphi(\vec{x}, t)^2] \tag{3.58}$$

利用正则量子化方法，将 π，φ 看作厄密算符，满足等时对易子

$$\begin{aligned}[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0\\ [\pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = -\mathrm{i}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\end{aligned} \tag{3.59}$$

则(3.57)，(3.56)将等同于 Heisenberg 方程

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(\vec{x}, t) = \mathrm{i}[H, \varphi(\vec{x}, t)]\\ \dot{\pi}(\vec{x}, t) = \mathrm{i}[H, \pi(\vec{x}, t)]\end{aligned} \tag{3.60}$$

由(2.164)和(2.167)可以求出与 Noether 定理相应的四动量算符

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3x j^{0\mu} = \int \mathrm{d}^3x(-g^{0\mu}\mathcal{L} + \partial^0\varphi\partial^\mu\varphi) \tag{3.61}$$

和广义角动量算符

$$M^{\nu\rho} = \int \mathrm{d}^3x(x^\nu j^{0\rho} - x^\rho j^{0\nu}) \tag{3.62}$$

其中 $\mathcal{L}$ 由(3.55)给出. 不难看出, $P^0 = H$, 正是(3.58)给出的哈密顿量. 利用正则对易关系(3.59)可以证实, P^μ, $M^{\nu\rho}$ 与标量场 $\varphi(x)$ 满足对易关系

$$\begin{aligned} \mathrm{i}[P^\mu, \varphi(x)] &= \partial^\mu\varphi(x) \\ \mathrm{i}[M^{\nu\rho}, \varphi(x)] &= (x^\nu\partial^\rho - x^\rho\partial^\nu)\varphi(x) \end{aligned} \tag{3.63}$$

而 P^μ, $M^{\nu\rho}$ 本身满足 Poincaré 代数(2.52)—(2.54). 这表明 P^μ, $M^{\nu\rho}$ 作为 Poincaré 变换生成元与 φ, π 的正则对易关系是自恰的, 因而根据 3.2 节的论述, 所得量子场论是 Poincaré 不变的.

微观客体都有波粒二象性. K－G 场作为经典场只能描述波动性而不能描述粒子性. 但量子化以后, 它也能描述粒子性. 为证明这一点, 我们将场算符 $\varphi(x)$ 按照 K－G 方程的本征振动——平面波——展开, 并利用展开系数来表达场的能量、动量等物理量, 结果得出它们的本征值是不连续的, 反映了量子场的粒子性.

我们写 $\varphi(\vec{x}, t)$ 的平面波展开为

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \tilde{\mathrm{d}k}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^+(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{3.64}$$

其中积分测度

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{d}k} &= \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)2\pi \\ \omega_k &= \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \end{aligned} \tag{3.65}$$

而

$$\begin{aligned} \theta(k^0) &= \frac{1}{2}[1 + \epsilon(k^0)] \\ \epsilon(k^0) &= \begin{cases} 1, & k^0 > 0 \\ -1, & k^0 < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.66}$$

可以证明, 积分测度 $\tilde{\mathrm{d}k}$ 是 Lorentz 不变的. 注意其中 $\delta(k^2 - m^2)$ 显然是 LT 不变的. 其次, d^4k 是 Lorentz 不变量. 因为类似于坐标空间中的四维积分测度 d^4x 的变换(2.137), 在 LT 下,

$$\delta(\mathrm{d}^4k) = \mathrm{d}^4k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\delta k^\mu = \mathrm{d}^4k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\varepsilon^\mu{}_\nu k^\nu = \mathrm{d}^4k\varepsilon^\mu{}_\mu = \mathrm{d}^4k\varepsilon^{\mu\rho}g_{\rho\mu} = 0$$

此外容易证明, $\theta(k^0)$ 中的 $\epsilon(k^0)$ 对于类时四矢量 $k^2 = m^2 > 0$ 是 Lorentz 不变的. 事实上, 由于 $k^2 = k^{0^2} - \vec{k}^2 = m^2 > 0$, 所以总可以找到一个惯性系, 使得在其中有

$k^{02}=m^2$. 于是,在此惯性系中可写

$$\epsilon(k^0)=\frac{k^0}{|k^0|}=\pm\frac{k^{02}}{k^{02}}=\pm\frac{m^2}{m^2}=\pm\frac{k^2}{k^2}$$

以上最后一步等式利用了 $m^2=k^2$ 是 Lorentz 不变量这一事实. 上式进而表明, $\epsilon(k^0)=+1$ 和 -1 在任何惯性系都是分别不变的. 由此 $\tilde{dk}$ 的 Lorentz 不变性得证. 顺便指出,可以将以上关于 $\epsilon(k^0)$ Lorentz 不变性的证明推广至类光即 $k^2=0$ 的情况,从而 $\tilde{dk}$ 在 $k^2=0$ 时也是 Lorentz 不变的. 这一结果将应用于后面电磁场的平面波展开.

由于 $\varphi(\vec{x},t)$ 是 Hilbert 空间中的算符, 所以展开系数 $a(k)$, $a^+(k)$ 也是 Hilbert 空间中的算符. 由(3.64)可以写出共轭动量

$$\pi(\vec{x},t)=\dot{\varphi}(\vec{x},t)=\int\tilde{dk}(-i\omega_k)[a(k)e^{-ik\cdot x}-a^+(k)e^{ik\cdot x}] \tag{3.67}$$

注意到只对 d^3k 积分时, $k^0=\omega_k$. 利用平面波 $e^{-ik\cdot x}$ 满足的正交条件

$$\begin{aligned}&i\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}e^{-ik'\cdot x}=(2\pi)^3 2\omega_k\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\\&i\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}e^{ik'\cdot x}=0\end{aligned} \tag{3.68}$$

可以反过来将 $a(k)$, $a^+(k)$ 通过 $\varphi(\vec{x},t)$ 来表达, 结果是

$$\begin{aligned}a(k)&=i\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(\vec{x},t)\\a^+(k)&=-i\int d^3x e^{-ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(\vec{x},t)\end{aligned} \tag{3.69}$$

注意 $a(k)$ 与 t 无关. 事实上, 由于 φ 满足 Klein－Gordon 方程, 所以

$$\begin{aligned}\dot{a}(k)&=i\int d^3x\left[e^{ik\cdot x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{ik\cdot x}\right)\varphi\right]\\&=i\int d^3x\left[e^{ik\cdot x}(\nabla^2-m^2)\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{ik\cdot x}\right)\varphi\right]\\&=i\int d^3x\varphi\left[\nabla^2-m^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]e^{ik\cdot x}=0\end{aligned}$$

从 φ, π 的对易关系(3.59)以及平面波的正交条件(3.68)可以得出 $a(k)$, $a^+(k)$ 满足的代数如下:

$$\begin{aligned}&[a(k),a^+(k')]=(2\pi)^3 2\omega_k\delta^3(\vec{k}-\vec{k}'),\\&[a(k),a(k')]=[a^+(k),a^+(k')]=0\end{aligned} \tag{3.70}$$

利用 $a(k)$, $a^+(k)$ 来表达场的总能量和总动量算符, 其形式十分简单. 利用(3.58), (3.61)和平面波展开(3.64), (3.67)可以求得哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x[\pi(\vec{x}, t)^2 + |\nabla\varphi(\vec{x}, t)|^2 + m^2\varphi(\vec{x}, t)^2]$$
$$= \frac{1}{2}\int \tilde{\mathrm{d}k}\omega_k[a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] \tag{3.71}$$

和总动量

$$\vec{P} = -\int \mathrm{d}^3 x\pi(\vec{x}, t)\nabla\varphi(\vec{x}, t)$$
$$= \frac{1}{2}\int \tilde{\mathrm{d}k}\vec{k}[a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] \tag{3.72}$$

[参阅附录三]. 它们是各本征振动的能量与动量之和，每一本征振动是频率为 ω_k 的简谐振子. $a(k)$，$a^+(k)$ 满足与一维谐振子类似的对易关系. 由于目前 k 是连续变化，因而归一化有所不同.

为了说明归一化方法并表明每一自由度与一维谐振子的量子化完全等价，我们回到不连续的描述.

将三维动量空间分成体积元 ΔV_k，则从连续过渡到分立描述将有如下对应：

$$\int \mathrm{d}^3 k \to \sum_k \Delta V_k, \quad \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \to \frac{\delta_{kk'}}{\Delta V_k}$$

令

$$a_k = \sqrt{\frac{\Delta V_k}{(2\pi)^3 2\omega_k}}a(k) \tag{3.73}$$

于是对易关系(3.70)成为

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}$$
$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \tag{3.74}$$

它们与简谐振子的产生、消灭算符的对易关系(3.15)形式完全相同. 哈密顿量(3.71)和总动量(3.72)这时分别成为

$$H = \sum_k \omega_k\left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right) \tag{3.75}$$

和

$$\vec{P} = \sum_k \vec{k}a_k^+ a_k \tag{3.76}$$

注意到由于求和 $\sum_k \vec{k} = 0$，所以在 $\vec{P}$ 的表达式中没有常数项出现.

H 和 $\vec{P}$ 的本征值与本征函数现在很容易由分别考虑各自由度而得出. 对每一本征振动，能量与动量算符各为

$$H_k = \omega_k(a_k^+ a_k + 1/2)$$
$$\vec{P}_k = \vec{k}a_k^+ a_k \tag{3.77}$$

它们皆由算符 $N_k = a_k^+ a_k$ 所决定. 设 N_k 的本征值为 n_k，本征态为 $|n_k\rangle_k$，则根据

一维谐振子结果，有

$$N_k | n_k \rangle_k = n_k | n_k \rangle_k$$
$$| n_k \rangle_k = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} a_k^{+n_k} | 0 \rangle_k \qquad (n_k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.78}$$

基态 $| 0 \rangle_k$ 定义为

$$a_k | 0 \rangle_k = 0 \tag{3.79}$$

显然，$| n_k \rangle_k$ 也是 H_k 和 $\vec{P}_k$ 的本征态，满足

$$H_k | n_k \rangle_k = \omega_k (n_k + 1/2) | n_k \rangle_k$$
$$\vec{P}_k | n_k \rangle_k = \vec{k} n_k | n_k \rangle_k \tag{3.80}$$

由于总哈密顿量和总动量

$$H = \sum_k H_k, \vec{P} = \sum_k \vec{P}_k \tag{3.81}$$

故 H 和 $\vec{P}$ 的本征态将为各自由度 $| n_k \rangle_k$ 之积，而本征值分别为各自由度 H_k 和 $\vec{P}_k$ 的本征值之和.

系统的基态，即最低能量态，对应所有 $n_k = 0$ 即场的所有简正模都不激发的态，它可以表示为

$$| 0 \rangle = \prod_k | 0 \rangle_k$$

满足

$$a_k | 0 \rangle = 0 \quad \text{对所有 } k$$
$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \tag{3.82}$$

它在物理上代表真空. 然而，从 H 的表达式(3.75)所得出的真空能量却不是 0，而是

$$E = \langle 0 | H | 0 \rangle = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k = \infty \tag{3.83}$$

它对应无穷多个振子的零点能之和，是一个物理上无意义的发散量. 为了消除这一发散，最简单的做法是从 H 中将它减掉，因为绝对能量并不是可观测量，只有相对于真空的能量才是可以观测的①②. 于是，我们重新定义哈密顿量为

---

① 通过加入宏观物体而设定的边界条件(即非自由空间场的边界条件)，可导致如电磁场的真空涨落即零点能的变化，它是可以测量的，称之为 Casimir 效应[18]. 不过该效应极其微小，通常可以忽略.

② 近年来的天文观测表明[19]，在宇宙的全部组成中，正常物质仅占 4%，其余 23% 是所谓的暗物质，还有 73% 是所谓的暗能量. 暗能量产生一种负压强，推动宇宙作加速膨胀. 为了解释神秘的暗能量，一种流行的观点是将其与真空的能量联系起来[20]. 真空的能量密度可以同 Einstein 广义相对论的场方程中的宇宙学常数 Λ 或说暗能量密度相联系，由此产生了各种各样的理论模型. 不过，尽管场论的真空能量可以同暗能量的解释相联系，但一般认为，暗能量不可能有微观效应，它只是在与引力相关的宇观尺度上才会有观测效果，目前也只能通过天文观测来进行研究. 因此，对于通常处理非引力微观系统的量子场论来说，减除真空能量的传统做法并不受到上述解释的影响.

$$H = \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + 1/2) - \left\langle 0 \left| \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + 1/2) \right| 0 \right\rangle = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k \tag{3.84}$$

在此新形式下，产生算符在消灭算符的左边。这种排列称为正规乘积，通常用符号 : :表示，即有

$$: \frac{1}{2}(a_k^+ a_k + a_k a_k^+) : \equiv a_k^+ a_k \tag{3.85a}$$

由此可见，从 H 中减掉总零点能等同于将 H 中的算符因子排成正规乘积。

算符的正规乘积在场论中经常碰到。这里我们仅指出，在正规乘积符号 : : 内部，如 a_k，a_k^+ 那样服从对易关系的 Boson 算符是相互对易的，这将有别于以后碰到的 Fermion 算符情况。

以上我们通过对 $\varphi(\vec{x},t)$ 的每一本征振动进行量子化而完成了场 $\varphi(\vec{x},t)$ 的量子化. 从结果可见，每一振动自由度的能量和动量都是不连续变化的，因而可以有明确的粒子解释. 将 H 排成正规乘积之后，态 $|n_k\rangle_k$ 满足下面的方程：

$$\begin{aligned} &N_k |n_k\rangle_k = n_k |n_k\rangle_k \\ &H_k |n_k\rangle_k = n_k \omega_k |n_k\rangle_k \quad (n_k = 0,1,2,\cdots) \\ &\vec{P}_k |n_k\rangle_k = n_k \vec{k} |n_k\rangle_k \end{aligned} \tag{3.85b}$$

它们表明，$N_k = a_k^+ a_k$ 是粒子数算符，而在态 $|n_k\rangle_k$ 上，有 n_k 个能量为 $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$，动量为 $\vec{k}$ 的粒子. 还可以证明

$$\begin{aligned} &N_k a_k^+ |n_k\rangle_k = (n_k + 1) a_k^+ |n_k\rangle_k \\ &N_k a_k |n_k\rangle_k = (n_k - 1) a_k |n_k\rangle_k \end{aligned} \tag{3.86}$$

所以 a_k^+ 和 a_k 是量子数为 k 的粒子的产生和消灭算符. 又由于 a_k^+，$a_{k'}^+$ 彼此对易，故有

$$a_k^+ a_{k'}^+ |0\rangle = a_{k'}^+ a_k^+ |0\rangle \tag{3.87}$$

即态对于两粒子交换是对称的. 这表明，这些粒子自动满足 Bose - Einstein 统计.

因此，K - G 场量子化之后描述的将是静质量为 m，服从 Bose - Einstein 统计的 0 自旋(标量)粒子. 标量场的粒子自旋为 0，可以最直接地从(3.62)所表达的 $M^{\nu\rho}$ 中不含广义自旋算符 $S^{\nu\rho}$ 看出.

为考虑连续 k 下的归一化，我们再回到连续的标记. 这时有

$$H = \int \tilde{\mathrm{d}}k \frac{\omega_k}{2} : [a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] : = \int \tilde{\mathrm{d}}k \omega_k a^+(k)a(k) \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int \tilde{\mathrm{d}}k \frac{\vec{k}}{2} [a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] \\ &= \int \tilde{\mathrm{d}}k [\vec{k} a^+(k)a(k) + \frac{\vec{k}}{2}\delta^3(0)] \end{aligned}$$

$$= \int \tilde{\mathrm{d}k}\vec{k}a^{+}(k)a(k) \tag{3.89}$$

$\vec{P}$ 中常数项积分后为 0，因此对总动量算符 $\vec{P}$ 无须加正规乘积运算. (3.88) 和 (3.89) 二式可以合写为四动量算符

$$P^{\mu} = \int \tilde{\mathrm{d}k}k^{\mu}a^{+}(k)a(k) \tag{3.90}$$

而总粒子数算符

$$N = \int \tilde{\mathrm{d}k}a^{+}(k)a(k) \tag{3.91}$$

算符 N 的本征态的总体形成一完备集合，张成这一系统的整个 Hilbert 空间，称为 Fock 空间. 在连续 k 的情况下，Fock 空间的基矢可以写成

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \left(r!\int \tilde{\mathrm{d}k}_1\cdots\tilde{\mathrm{d}k}_r\,|F(k_1,\cdots,k_r)|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int \tilde{\mathrm{d}k}_1\cdots\tilde{\mathrm{d}k}_r F(k_1,\cdots,k_r)a^{+}(k_1)\cdots a^{+}(k_r)|0\rangle \end{aligned} \tag{3.92}$$

其中真空态 $|0\rangle$ 满足

$$\begin{aligned} &a(k_s)|0\rangle = 0 \quad \text{对所有 } k_s \\ &\langle 0|0\rangle = 1 \end{aligned} \tag{3.93}$$

$F(k_1,\cdots,k_r)$ 是动量空间波函数. 由于 Bose 统计，它是宗量 $(k_1,\cdots,k_r)$ 的对称函数，其中的所有四动量都在质壳 $k^2 = m^2$ 的上半叶，即有 $k^0 = \omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. 不难证实，$|r\rangle$ 满足归一化

$$\langle r|r\rangle = 1 \tag{3.94}$$

[参阅附录四] 以及

$$N|r\rangle = r|r\rangle \tag{3.95}$$

它表明 $|r\rangle$ 是粒子数为 r 的态.

在自由场情况下，总粒子数算符 N 与总四动量算符 P^{μ} 是对易的，即

$$[N,P^{\mu}] = 0 \tag{3.96}$$

其中包括了粒子数守恒条件. 然而，若 H 中有相互作用，则可能出现粒子数不守恒的情况.

问题 3.2 证明 Klein - Gordon 场的 Noether 守恒量算符 $P^{\mu}, M^{\nu\rho}$ 满足关系 (3.63) 及 Poincaré 代数，即它们确为 Poincaré 生成元，从而保证了 Klein - Gordon 量子场论的 Poincaré 不变性.

问题 3.3 验证平面波的正交条件 (3.68) 和通过 $\varphi(\vec{x},t)$ 表达 $a(k)$，$a^{+}(k)$ 的公式 (3.69).

问题 3.4 证明 $a(k)$，$a^{+}(k)$ 满足对易关系 (3.70).

问题 3.5　证明 Fock 空间基矢(3.92)满足归一化条件(3.94)和本征方程(3.95).

3.3.2　场的可测性与微观因果性

在经典意义下,场 $\varphi(x)$ 是一个可观测量,它在时空点 x 处的强度是精确可测的. 但在量子理论中,场 $\varphi(x)$ 成为 Hilbert 空间中的算符,满足一定的对易关系,故对场进行精确测量的能力受到限制. 按照测不准原理,只有当对易子

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=0$$

时,才有可能精确测量 x,y 点的场强.

例如在固定时刻 t,我们有 $[\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)]=0$,所以 $(\vec{x},t)$ 和 $(\vec{y},t)$ 两点的场有可能独立地被精确测量. 但在不同的时刻,$\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 却并不对易. 事实上,

$$\begin{aligned}[\varphi(x),\varphi(y)] &= \int \tilde{\mathrm{d}k}\,\tilde{\mathrm{d}k'}\{[a(k),a^{+}(k')]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x+\mathrm{i}k'\cdot y}+[a^{+}(k),a(k')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x-\mathrm{i}k'\cdot y}\}\\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k}\,\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}(2\pi)^3 2\omega_{k'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}]\\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}] = \mathrm{i}\Delta(x-y) \end{aligned}\tag{3.97}$$

一般来说,右边并不为 0. 考虑到当三维动量 $k^i\to -k^i$ 时,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k^i \to -\int_{\infty}^{-\infty}\mathrm{d}k^i = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k^i$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x}} \xlongequal{\vec{k}\to-\vec{k}} \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t+\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

于是函数 $\Delta(x)$ 可以写成

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\int \tilde{\mathrm{d}k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x})\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t})\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\epsilon(k^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \quad \left(\epsilon(k^0)=\frac{k^0}{|k^0|}\right)\end{aligned}\tag{3.98}$$

注意 $\Delta(x)$ 最后一步的积分中 k^0 已成为积分变量,不再限制到 $k^0>0$. 很容易看出,$\Delta(x)$ 是 Lorentz 不变的,并有如下性质:

(1) $\Delta(x)^{*}=\Delta(x)$　是实函数

(2) $\Delta(-x)=-\Delta(x)$　是宗量 x 的奇函数

$$
\begin{aligned}
&(3)\ (\Box + m^2)\Delta(x) = 0 \\
&(4)\ \Delta(\vec{x},0) = 0 \\
&(5)\ \frac{\partial}{\partial t}\Delta(\vec{x},t)\Big|_{t=0} = -\delta^3(\vec{x}) \\
&(6)\ \partial_\mu\Delta(x)\Big|_{t=0} = 0
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

从上面的性质(4),我们有

$$\Delta(\vec{x}-\vec{y},0) = 0$$

即 $\Delta(x-y)$对于等时间隔为 0. 但 $\Delta(x-y)$是 Lorentz 不变函数,由 Lorentz 不变性立即可以得出

$$\Delta(x-y) = 0 \quad 对(x-y)^2 < 0 \tag{3.100}$$

即 $\Delta(x-y)$对于任何类空间隔为 0,因为任何类空间隔总是可以通过 Lorentz 变换变成等时间隔. 考虑到(3.97),(3.100)进而表明

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = 0 \quad 对(x-y)^2 < 0 \tag{3.101}$$

即由类空间隔分开的两个点上的场 $\varphi(x),\varphi(y)$彼此对易,这称之为微观因果性条件. 因此,若把场 $\varphi(x)$解释为定域的观测量(这里"定域"的含义是假定对场的测量有可能在任意小的时空区域内进行. 无疑,这是一种理想化的情况),则由微观因果性条件可知,在由类空间隔分开的两点上,或说不能通过光或物理扰动相联系的两点上,测量互不干扰.

我们也注意到,非等时对易子(3.97)与等时对易子是完全自恰的. 事实上,将(3.97)两边对 x^0 微商,取 $x^0 = y^0 = t$,利用(3.99)的(5)式,则得到

$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

这正是(3.59)中的正则对易关系.

问题 3.6 验证函数 $\Delta(x)$的表达式(3.98)及其性质(3.99).

3.3.3 复标量场与正反粒子

在只含一个实标量场的理论中,是无法区分粒子与反粒子的,因为粒子和反粒子必须带有某种相反的荷,这种荷起源于某种内部对称性,而单个实场不具有这种内部对称性.

为了能描述正反粒子,我们引进两个实(厄密)标量场 φ_1,φ_2,并组合成复场

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \varphi^+ = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{3.102}$$

系统的拉氏密度为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2) - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\
&= (\partial_\mu\varphi^+)\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^+\varphi
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

Euler – Lagrange 方程是

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \quad (\Box + m^2)\varphi^+(x) = 0 \tag{3.104}$$

除了 Poincaré 不变性以外，现在 $\mathcal{L}$ 有一 $U(1)$ 内部对称性，即在整体相变换

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^+ \to e^{-i\alpha}\varphi^+ \tag{3.105a}$$

或其无穷小形式

$$\delta\varphi = i\delta\alpha\varphi, \quad \delta\varphi^+ = -i\delta\alpha\varphi^+ \tag{3.105b}$$

下，$\mathcal{L}$ 保持不变. 相应的 Noether 流密度

$$j^\mu = i\varphi^+ \overleftrightarrow{\partial^\mu} \varphi \tag{3.106}$$

守恒荷

$$Q = \int d^3x\, j^0(x) = i\int d^3x \varphi^+ \overleftrightarrow{\partial^0}\varphi \tag{3.107}$$

正则量子化可按标准程序进行. 分别定义与 φ, φ^+ 共轭的动量

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^+ \\ \pi^+ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^+} = \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{3.108}$$

并将 $\varphi, \pi, \varphi^+, \pi^+$ 看作算符. 哈密顿量成为

$$H = \int d^3x :(\pi\dot{\varphi} + \pi^+\dot{\varphi}^+ - \mathcal{L}): = \int d^3x :(\pi^+\pi + \nabla\varphi^+ \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^+\varphi): \tag{3.109}$$

其中已加上了正规乘积运算. 由于整个系统含两个独立实场 φ_1, φ_2，故正则对易关系应为

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)] = i\delta_{ij}\Delta(x-y) \tag{3.110}$$

由此得到复场形式下的对易规则为

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [\varphi^+(x), \varphi^+(y)] = 0 \\ [\varphi(x), \varphi^+(y)] &= i\Delta(x-y) \end{aligned} \tag{3.111}$$

注意将(3.111)最后一式两边依次对 x^0 和 y^0 微商，然后取 $x^0 = y^0 = t$，则得到等时对易子

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = [\varphi^+(\vec{x}, t), \pi^+(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.112}$$

为了看出场的粒子性，将场 $\varphi(x), \varphi^+(x)$ 作平面波展开

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \tilde{dk}[a(k)e^{-ik\cdot x} + b^+(k)e^{ik\cdot x}] \\ \varphi^+(x) &= \int \tilde{dk}[a^+(k)e^{ik\cdot x} + b(k)e^{-ik\cdot x}] \end{aligned} \tag{3.113}$$

由于 $\varphi(x)$ 不是厄密场，所以其正负能平面波前的展开系数并不互为厄密共轭. 而相应的实场 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 将有展开

$$\varphi_i(x) = \int \tilde{dk}[a_i(k)e^{-ik\cdot x} + a_i^+(k)e^{ik\cdot x}] \tag{3.114}$$

由(3.102)可得

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k) + ia_2(k)], \quad a^+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^+(k) - ia_2^+(k)] \\ b(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(k) - ia_2(k)], \quad b^+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^+(k) + ia_2^+(k)] \end{aligned} \tag{3.115}$$

利用 $a_i(k), a_i^+(k)$ $(i=1,2)$的对易关系可以证明:

$$[a(k), a^+(k')] = [b(k), b^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.116}$$

其余对易子为 0

从 φ, φ^+ 的展开式(3.113)可以看出,荷电标量场(复场)φ, φ^+ 所描述的理论中,存在着 a,b 两种类型的粒子,φ 对应消灭 a 型粒子,产生 b 型粒子而 φ^+ 对应产生 a 型粒子,消灭 b 型粒子. a,b 型粒子的数算符分别是

$$N_a = \int \tilde{dk} a^+(k)a(k), \quad N_b = \int \tilde{dk} b^+(k)b(k) \tag{3.117}$$

与 Noether 守恒量对应的四动量算符为

$$P^\mu = \int \tilde{dk} k^\mu [a^+(k)a(k) + b^+(k)b(k)] \tag{3.118}$$

其中算符也已经排成了正规乘积. 真空态 $|0\rangle$ 满足

$$a(k)|0\rangle = b(k)|0\rangle = 0 \quad (\text{对所有 } k) \tag{3.119}$$

以 $|0\rangle$ 作为基础,利用算符 $a^+(k), b^+(k)$,可以构造此系统的 Fock 空间.

量子化后,与 U(1)内部对称性相应的 Noether 流算符应写成

$$j^\mu = i{:}\ \varphi^+ \overleftrightarrow{\partial^\mu} \varphi{:} \tag{3.120}$$

这里我们也加上了正规乘积运算,目的是减去真空中可能出现的无穷大的 Q 荷,这与消除真空中无穷大零点能的做法相同. 利用平面波展开(3.113)可得守恒荷

$$\begin{aligned} Q &= i\int d^3x {:}\varphi^+ \overleftrightarrow{\partial^0} \varphi{:} = \int \tilde{dk} {:}[a^+(k)a(k) - b(k)b^+(k)]{:} \\ &= \int \tilde{dk}[a^+(k)a(k) - b^+(k)b(k)] = N_a - N_b \end{aligned} \tag{3.121}$$

可以证实

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= i[H, Q] = i[H, N_a - N_b] = 0 \\ \partial_\mu j^\mu &= i\partial_\mu {:}\varphi^+ \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^+)\varphi{:} = i{:}\varphi^+ \partial_\mu \partial^\mu \varphi - (\partial_\mu \partial^\mu \varphi^+)\varphi{:} \\ &= i{:} -m^2 \varphi^+ \varphi + m^2 \varphi^+ \varphi{:} = 0 \end{aligned} \tag{3.122}$$

因此,Q 确为守恒荷,j^μ 确为守恒流. (3.121)表明,a 型粒子与 b 型粒子带有相反的

Q 荷：若 a 型粒子带 Q 荷 +1，则 b 型粒子带 Q 荷 -1. 但在自由场论中，a，b 这两种粒子所起的作用是对称的. 为了区别它们，必须引进一种相互作用，它与这两种粒子有不同的耦合. 通常，人们确认，a，b 型粒子之一为粒子，另一为反粒子，两种粒子有相同的质量和自旋（现为 0）. 自然界中，自旋为 0 的粒子 - 反粒子对如有带电粒子 (π^+,π^-)，(K^+,K^-)，其正反粒子是通过电荷来区别的和中性粒子 $(K^0,\overline{K}^0)$，其正反粒子是通过一种新的量子数——奇异数——来区别的.

问题 3.7　证明算符 $a(k),a^+(k),b(k),b^+(k)$ 满足对易关系(3.116).

问题 3.8　推导守恒荷 Q 的表达式(3.121).

3.3.4　编时乘积与 Feynman 传播子

考虑自由荷电标量场 $\varphi(x),\varphi^+(x)$. 正如由展开式(3.113)所见，当 $\varphi^+(x)$ 作用于一个态时，将产生一个 Q 荷为 +1 的粒子或消灭一个 Q 荷为 -1 的粒子，其效果总是使 x 点的 Q 荷加 1；当 $\varphi(x')$ 作用于一个态时，将产生一个 Q 荷为 -1 的粒子或消灭一个 Q 荷为 +1 的粒子，其效果总是使 x' 点 Q 荷减少 1. 而当 $\varphi^+(x)$ 与 $\varphi(x')$ 两个算符相继联合作用时，显然将使 Q 荷保持不变. 这种联合作用可以通过两种方式来进行解释，取决于 $t'-t$ 的符号.

(1) $t<t'$，对应 $\varphi(x')\varphi^+(x)$. 假设它们作用于真空态. 我们可以说，在 t 时刻通过 $\varphi^+(x)$ 产生了 Q 荷为 +1 的粒子然后在 t' 时刻又通过 $\varphi(x')$ 将其消灭. 表达这一过程的振幅由算符

$$\theta(t'-t)\varphi(\vec{x}',t')\varphi^+(\vec{x},t) \tag{3.123}$$

的平均值给出.

(2) $t'<t$，对应 $\varphi^+(x)\varphi(x')$. 假设它们作用于真空态. 我们可以说，在 t' 时刻通过 $\varphi(x')$ 产生了 Q 荷为 -1 的粒子然后在 t 时刻通过 $\varphi^+(x)$ 将其消灭. 表达这一过程的振幅由算符

$$\theta(t-t')\varphi^+(\vec{x},t)\varphi(\vec{x}',t') \tag{3.124}$$

的平均值给出.

(1)和(2)两种解释中，有一点是共同的，即在点 x 总是 Q 荷加 1 而在点 x' 总是 Q 荷减 1.

(3.123)和(3.124)相加，即构成了 Dyson 的编时乘积或称 T 乘积：

$$T\varphi(x')\varphi^+(x)=\theta(t'-t)\varphi(x')\varphi^+(x)+\theta(t-t')\varphi^+(x)\varphi(x') \tag{3.125}$$

在 T 乘积下，时间早的算符处在时间晚的算符的右方. 注意对于 $t=t'$，$\varphi(x')$ 和 $\varphi^+(x)$ 的次序不会出现问题，因为由(3.111)有

$$[\varphi(x'),\varphi^+(x)]_{t'=t}=\mathrm{i}\Delta(\vec{x}'-\vec{x},0)=0$$

二者是对易的. 从定义(3.125)可见，Boson 算符在 T 运算下是可对易的，即

$$T\varphi(x')\varphi^+(x)=T\varphi^+(x)\varphi(x') \tag{3.126}$$

现在将算符$(\Box_{x'}+m^2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\nabla_{x'}^2+m^2\right)$作用于(3.125)的两边. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial t'}\theta(t'-t)=\delta(t'-t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}T\varphi(x')\varphi^+(x)=\delta(t'-t)[\varphi(x'),\varphi^+(x)]+T\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x')\varphi^+(x)$$

由(3.99)的(4)式,上式第一项等于

$$\delta(t'-t)\mathrm{i}\Delta(\vec{x}'-\vec{x},0)=0$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}T\varphi(x')\varphi^+(x)&=\frac{\partial}{\partial t'}T\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x')\varphi^+(x)\\&=\delta(t'-t)\left[\frac{\partial\varphi(x')}{\partial t'},\varphi^+(x)\right]+T\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi(x')\varphi^+(x)\end{aligned}$$

由(3.99)的(5)式,上式第一项等于

$$\delta(t'-t)\frac{\partial}{\partial t'}\mathrm{i}\Delta(x'-x)=\delta(t'-t)(-\mathrm{i})\delta^3(\vec{x}'-\vec{x})=-\mathrm{i}\delta^4(x'-x)$$

从而

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2}T\varphi(x')\varphi^+(x)=-\mathrm{i}\delta^4(x'-x)+T\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi(x')\varphi^+(x)$$

因此

$$\begin{aligned}(\Box_{x'}+m^2)T\varphi(x')\varphi^+(x)&=\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\nabla_{x'}^2+m^2\right)T\varphi(x')\varphi^+(x)\\&=-\mathrm{i}\delta^4(x'-x)+T\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\nabla_{x'}^2+m^2\right)\varphi(x')\varphi^+(x)\\&=-\mathrm{i}\delta^4(x'-x)+T(\Box_{x'}+m^2)\varphi(x')\varphi^+(x)\end{aligned}$$

第二项由于$\varphi(x')$满足 Klein－Gordon 方程而为 0. 所以我们得到

$$(\Box_{x'}+m^2)\mathrm{i}T\varphi(x')\varphi^+(x)=\delta^4(x'-x)\tag{3.127}$$

将上式两边对真空态求平均值,则有

$$(\Box_{x'}+m^2)\mathrm{i}\langle 0\mid T\varphi(x')\varphi^+(x)\mid 0\rangle=\delta^4(x'-x)\tag{3.128}$$

可见

$$G_{\mathrm{F}}(x'-x)=\mathrm{i}\langle 0\mid T\varphi(x')\varphi^+(x)\mid 0\rangle\tag{3.129}$$

是 Klein－Gordon 算子$(\Box_{x'}+m^2)$的一个 Green 函数,它的表达式可以显示地求出. 事实上,由(3.125),可写

$$G_{\mathrm{F}}(x'-x)=\mathrm{i}\theta(t'-t)\langle 0\mid\varphi(x')\varphi^+(x)\mid 0\rangle+\mathrm{i}\theta(t-t')\langle 0\mid\varphi^+(x)\varphi(x')\mid 0\rangle\tag{3.130}$$

利用φ和φ^+的平面波展开式(3.113),可得

$$\langle 0 \mid \varphi(x')\varphi^{+}(x) \mid 0 \rangle = \int \tilde{\mathrm{d}k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}$$

$$\langle 0 \mid \varphi^{+}(x)\varphi(x') \mid 0 \rangle = \int \tilde{\mathrm{d}k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}$$

于是

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{F}}(x'-x) &= \mathrm{i}\int \tilde{\mathrm{d}k}[\theta(t'-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)} + \theta(t-t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}] \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x'-x)}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.131}$$

分母中的 ε 是一无穷小的正实数. 上面最后一步等式,可通过留数定理直接验证[参阅附录五].

$G_{\mathrm{F}}(x'-x)$ 称为 Feynman 传播子. 因为当 $t<t'$ 时,它描述一个粒子由 $\vec{x}\to\vec{x}'$ 的传播而当 $t'<t$ 时,它描述一个反粒子由 $\vec{x}'\to\vec{x}$ 的传播. 这一解释很容易根据 $G_{\mathrm{F}}(x'-x)$ 的定义式(3.130)以及本节开始的论述得出. 从表达式(3.131)可见,$G_{\mathrm{F}}(x'-x)$ 是平移不变和 Lorentz 不变的,其中包括在空间反射和时间反演下也是不变的,因为 G_{F} 有性质

$$G_{\mathrm{F}}(x'-x) = G_{\mathrm{F}}(x-x') \tag{3.132}$$

即它是宗量的偶函数. 因此 $G_{\mathrm{F}}(x'-x)$ 是 Poincaré 不变的. 在计算量子场论的跃迁振幅时,Feynman 传播子将起核心的作用.

3.4　Maxwell 场的正则量子化

电磁场是经典可观测量,它的正则量子化应比其它的场更早完成. 但实际上,电磁场是最难量子化的. 困难的根源在于:电磁场由矢量势 A^{μ} 描写,但其中只有两个自由度是物理的,而另外两个自由度是非物理的. 为理解这一点,可注意到电磁波是横波,它的极化矢量只有两个独立分量;或者说,光子的自旋为 1,但质量为 0,它只有两个自旋自由度,对应于 helicity ± 1. 由于不能将 A^{μ} 的四个分量皆当成独立变量,这就导致了量子化的困难.

回忆在 2.7 节我们已经讲到,电磁场的拉氏密度可由(2.248)即

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2$$

描写,其中 $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$. 若将 A_{ρ} 作为独立变量,则共轭动量为

$$\pi^{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\rho}} = F^{\rho 0}$$

这导致

$$\pi^0 = 0$$

显然这给正则量子化带来了困难.

为了克服这一困难,一种办法是采用辐射规范[21,17]即对 A^μ 加上条件

$$A^0 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

以去掉多余的自由度. 这时量子化将只对 $\vec{A}$ 的横向分量进行. 但这样得出的理论不是明显协变的.

另一种办法就是 Gupta - Bleuler 的不定度规量子化[22]. 其好处是明显协变并可保持理论的规范不变性,而代价是由于包括了非物理自由度,使得量子化以后的 Hilbert 空间过大,特别是其中还会出现负模方态. 然而正如下面将看到的,这一缺点可以设法克服以致物理观测并不受非物理自由度的影响.

以下我们只提出不定度规量子化方法.[13]

3.4.1 不定度规

正如 2.7 节曾指出的,若在描述电磁场时采用协变规范条件 $\partial \cdot A = 0$,则可以引入 Lagrange 乘子 λ 将此条件并入拉氏密度,这个包含了 λ 的拉氏密度(2.254)即

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2$$

实际上可以作为理论的出发点,其中 $\lambda \neq 0$ 为任意实常数. 若保持 λ 任意则仍可进行讨论,但为了简单我们将取特定的值 $\lambda = 1$. 在量子理论中,选择 λ 被叫做选择规范. $\lambda = 1$ 被称为 Feynman 规范. 因此,以下讨论都将在 Feynman 规范下进行. 这时,对(2.248)而言,电磁场的拉氏密度被修改为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 \tag{3.133}$$

于是,A^ρ 的共轭动量成为

$$\pi^\rho = F^{\rho 0} - g^{\rho 0}(\partial \cdot A) \tag{3.134}$$

特别是

$$\pi^0 = -\partial \cdot A \neq 0$$

不再有前述 π^0 不存在的困难. 对于(3.133)表达的 $\mathcal{L}$,Maxwell 方程被换成

$$\Box A_\mu = 0 \tag{3.135}$$

将上式从左作用 ∂^μ,得

$$\Box \partial \cdot A = 0 \tag{3.136}$$

注意此方程在(3.135)右边存在守恒流 j_μ 的情况下也成立. 由此可见,$\partial \cdot A$ 是自由标量场. 在 2.7 节中曾经证明,在经典一级,由于 $\partial \cdot A$ 满足方程(3.136),若 $t = 0$ 时 $\partial \cdot A = 0$,$\frac{\partial}{\partial t}\partial \cdot A = 0$,则在任意时刻 t 皆有 $\partial \cdot A = 0$,因而(3.135)等价于

$\partial \cdot A = 0$条件下的 Maxwell 方程. 然而在量子情况下无法实现这一点. 事实上,为了量子化,我们将假定等时正则对易关系

$$[\pi^{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = -\mathrm{i}g^{\rho}_{\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.137}$$

因而有

$$[\pi^{0}(\vec{x},t),A_{0}(\vec{y},t)] = -\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) \neq 0$$

由于 $\pi^{0} = -\partial \cdot A$,与$\partial \cdot A$ 只差常数,所以$\partial \cdot A = 0$ 作为算符方程与正则对易关系(3.137)是不自恰的. 回忆加入条件$\partial \cdot A = 0$ 的本来目的是消除非物理自由度. 上述矛盾的出现无非表明,按正则对易关系(3.137)所作的量子化,实际作过了头,它已被加上了一些非物理性质,而后者是必须设法加以消除的.

除了(3.137)以外,全部对易关系还应包括

$$[A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = [\pi_{\rho}(\vec{x},t),\pi_{\nu}(\vec{y},t)] = 0 \tag{3.138}$$

可以证明[参阅附录六],(3.137)和(3.138)可以转换成

$$\begin{aligned}&[A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = [\dot{A}_{\rho}(\vec{x},t),\dot{A}_{\nu}(\vec{y},t)] = 0\\&[\dot{A}_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = \mathrm{i}g_{\rho\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{3.139}$$

这里的 $A_{\rho}(x)$被假定为厄密算符,与经典情况下 $A_{\rho}(x)$是实场相对应.

运动方程(3.135)和对易关系(3.139)就是矢量场 A_{μ} 的基本方程. 注意到对易关系(3.139)与实标量场的对易关系

$$[\dot{\varphi}(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = -\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$

有些类似. A_{μ} 的三个空间分量间的对易关系与上面的关系相同,但时间分量 $\dot{A}_{0}$ 与 A_{0} 的对易关系与上面关系相比,右边差一负号,好像是场 A_{0} 与其共轭变量 $\dot{A}_{0}$ 的地位彼此发生了交换. 正是这一差别,使得对易关系(3.139)将产生一个完全不同的 Hilbert 空间.

为了研究这一结果,我们对场作 Fourier 分析,将 $A_{\mu}(x)$作如下的平面波展开:

$$A_{\mu}(x) = \int \tilde{\mathrm{d}k} \sum_{\lambda=0}^{3} [a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)*}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{3.140}$$

其中 $a^{(\lambda)}(k)$和 $a^{(\lambda)+}(k)$为消灭和产生算符;$\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k\cdot x}$是算子□的本征解,因而 k 满足

$$k^{2} = k^{02} - \vec{k}^{2} = 0, \quad k^{0} = |\vec{k}| > 0 \tag{3.141}$$

即 k 在正光锥上. 光锥条件 $k^{2} = 0$ 表明,场量子是无质量的. 而

$$\tilde{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}^{3}k}{(2\pi)^{3}2k^{0}} \tag{3.142}$$

记法与标量场情况相同. 以后凡是 Boson 场,其平面波展开中的 Lorentz 不变的积分测度,我们都作如此标记. 正如 3.3.1 中所指出的,$\tilde{\mathrm{d}k}$在 $k^{2} = 0$ 时也是

Lorentz 不变的. 对正光锥上的每一 k,$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 是四个线性无关的四矢量,称为极化矢量,对应于与 $A_\mu(x)$ 的 Fourier 分量 $A_\mu(k)$ 相联系的四矢量空间中的四个基矢,可以假定它们是实的.

为了看出展开式(3.140)的物理内容,我们对一固定参考系来选定 $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$. 对一固定 k,应有四个轴:一个时间轴,三个空间轴. 设 n 代表沿时间轴的四矢量,满足 $n^2=1, n^0>0$. 我们选择 $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ 在与 k, n 正交的平面内,使得

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda')}(k)=-\delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda,\lambda'=1,2)$$

再选择 $\varepsilon^{(3)}$ 在 (k,n) 平面内,与 n 正交并是归一化的,即满足

$$\varepsilon^{(3)}\cdot n=0, \quad [\varepsilon^{(3)}(k)]^2=-1$$

容易证明,符合要求的 $\varepsilon^{(3)}(k)=[k-n(k\cdot n)]/(k\cdot n)$. 最后,取

$$\varepsilon^{(0)}=n$$

按照惯例,我们称 $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ 为横向极化矢量,$\varepsilon^{(3)}$ 为纵向极化矢量,而 $\varepsilon^{(0)}$ 为标量极化矢量. 特别,在 $n^0=1$,$\vec{k}$ 平行于第三轴即 $\varepsilon^{(3)}(k)$ 时,四个极化矢量有极简单的形式:

$$\varepsilon^{(0)}=n=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \varepsilon^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \varepsilon^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \varepsilon^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3.143}$$

上式对任何 k 皆成立. 一般情况下,$\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ 可以是复的,并总有

$$\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k)}{\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda)*}(k)}=g_{\mu\nu}, \quad \varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda')*}(k)=g^{\lambda\lambda'} \tag{3.144}$$

第一式表达了基矢的完全性,其中的分母是需要的,因为 $\varepsilon^{(\lambda)}$ 有不定的归一化.

考虑到(3.144)的第二式,第一式也可以写成

$$\sum_{\lambda,\lambda'} g^{\lambda\lambda'}\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda')*}(k)=g_{\mu\nu} \tag{3.144a}$$

[参阅附录七]. 由展开式(3.140)可见,A_μ 自动满足场方程 $\Box A_\mu=0$. 不难证明,只要

$$\begin{aligned}&[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')+}(k')]=-g^{\lambda\lambda'}2k^0(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\\&[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')}(k')]=[a^{(\lambda)+}(k), a^{(\lambda')+}(k')]=0\end{aligned} \tag{3.145}$$

则可以得出正则对易关系(3.139). 由此可见,对易关系(3.145)等同于等时对易关系(3.139). 此外,利用(3.145)还可以求出,在任意时刻,有

$$\begin{aligned}[A_\rho(x), A_\nu(y)]&=-g_{\rho\nu}\int \tilde{dk}[e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}]\\&=-ig_{\rho\nu}\Delta(x-y)\big|_{m=0}\end{aligned} \tag{3.146}$$

其中函数 $\Delta(x-y)$ 由(3.98)确定. (3.146)是一个自然出现的协变表达式,这使

我们感到结果是可靠的.

下一步是构造 Fock 空间. 首先定义真空态 $|0\rangle$,满足

$$a^{(\lambda)}(k)\,|0\rangle = 0 \quad \text{对所有 } \lambda, k \tag{3.147}$$

令人不放心的是,光子仅两个极化自由度,而现在却引入了四个极化矢量. 特别是,若考虑单粒子标量极化态

$$|1\rangle = \int \tilde{\mathrm{d}}k f(k) a^{(0)+}(k)\,|0\rangle$$

则会发现,它的模方

$$\langle 1\,|\,1\rangle = \iint \tilde{\mathrm{d}}k\,\tilde{\mathrm{d}}k' f^{*}(k) f(k') \langle 0\,|\,a^{(0)}(k) a^{(0)+}(k')\,|0\rangle$$

$$= -\langle 0\,|\,0\rangle \int |f(k)|^{2}\,\tilde{\mathrm{d}}k < 0$$

计算中利用了(3.145). 因此,在由 $a^{(\lambda)+}(k)$ 构造出的 Fock 空间中,标量极化单粒子态为负模方态. 另一方面,不难证明,横向与纵向极化单粒子态为正模方态. 若引入厄密度规算符 η,满足 $\eta^{2}=1$,则此 Fock 空间中态矢的内积 $\langle a\,|\,\eta\,|\,b\rangle$ 将有如下结果:

$$\langle a\,|\,\eta\,|\,b\rangle = \begin{cases} -\delta_{ab} & (a \text{ 为标量极化单粒子态}) \\ +\delta_{ab} & (a \text{ 为横、纵极化单粒子态}) \end{cases}$$

即此空间中的度规可正可负,出现了不定度规! 对此,人们立即会想:量子力学的几率解释将如何保持?

对于自由场论,情况还不是灾难性的,因为若粒子开始处在物理态则以后仍将处在物理态. 但如果存在相互作用,则可能使不希望有的非物理态受到激发,从而导致严重困难. 然而,关键的问题是,到目前为止,我们实际上并未处理 Maxwell 理论,因为已经将拉氏密度作了修改. 为了回到 Maxwell 理论,我们希望令

$$\partial \cdot A = 0$$

尽管它作为算符方程是不可能的(与对易关系不自恰),但是,我们至少可以设法选择物理态 $|\psi\rangle$,使 Lorentz 条件在平均值的意义上成立,即要求物理态 $|\psi\rangle$ 满足

$$\langle \psi\,|\,\partial \cdot A\,|\,\psi\rangle = 0 \tag{3.148}$$

由满足(3.148)的物理态 $|\psi\rangle$ 生成的 Hilbert 空间我们记为 $\mathcal{H}_1$. 为了保持 $\mathcal{H}_1$ 为一线性空间,我们要求

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{(+)}\,|\psi\rangle = 0 \tag{3.149}$$

即 $\partial \cdot A$ 的正频(消灭算符)部分消灭 $\mathcal{H}_1$. 为理解(3.149),我们注意到,对于 $\mathcal{H}_1$ 中任意两个态的任意线性组合 $|c_1\psi_1 + c_2\psi_2\rangle$,应有

$$0 = \langle c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \mid \partial \cdot A \mid c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \rangle = \sum_{i,j=1,2} c_i^* c_j \langle \psi_i \mid \partial \cdot A \mid \psi_j \rangle$$

上式应对任意 c_1, c_2 成立，故必须有

$$\langle \psi_i \mid \partial \cdot A^{(+)} + \partial \cdot A^{(-)} \mid \psi_j \rangle = 0 \quad (i,j=1,2, \text{对任意} \mid \psi_1 \rangle, \mid \psi_2 \rangle)$$

为使之成立，只需对 $\mathcal{H}_1$ 中的任意 $\mid \psi \rangle$ 有

$$\partial \cdot A^{(-)} \mid \psi \rangle = 0 \quad \text{或} \quad \partial \cdot A^{(+)} \mid \psi \rangle = 0$$

但 $\partial \cdot A^{(-)} \mid \psi \rangle = 0$ 不可能被满足，因为至少对真空态 $\mid 0 \rangle$，$\partial \cdot A^{(-)} \mid 0 \rangle \neq 0$. 结果我们只留下 $\partial \cdot A^{(+)} \mid \psi \rangle = 0$，这正是条件(3.149).

我们现在来分析属于 $\mathcal{H}_1$ 即满足(3.149)的态. 由于条件(3.149)是线性的，我们可以只考虑基矢态

$$\mid \psi \rangle \sim a^+ a^+ \cdots a^+ \mid 0 \rangle$$

这些产生算符可组成各种极化态，从而 $\mid \psi \rangle$ 被因子化为

$$\mid \psi \rangle = \mid \psi_T \rangle \mid \phi \rangle \tag{3.150}$$

其中 $\mid \psi_T \rangle$ 是用横向极化光子算符作用于真空态得到的，称为横光子态，而 $\mid \phi \rangle$ 是用纵向和标量极化光子算符作用于真空态得到的，可称为纵光子和标量光子态. 这种分解取决于我们对极化矢量的习惯选取. 注意到

$$\varepsilon^{(\lambda)} \cdot k = 0 \quad \text{对 } \lambda = 1,2$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\partial \cdot A^{(+)} &= \int \tilde{\mathrm{d}k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \sum_{\lambda=0,1,2,3} a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) k^\mu \\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \sum_{\lambda=0,3} a^{(\lambda)}(k) \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k \end{aligned} \tag{3.151}$$

其中只包括纵向和标量极化. 结果，条件(3.149)归结为 $\mathrm{i}\partial \cdot A^{(+)}$ 对 $\mid \phi \rangle$ 的作用

$$\sum_{\lambda=0,3} k \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k) \mid \phi \rangle = 0 \tag{3.152}$$

条件(3.152)并不能完全决定 $\mid \phi \rangle$，它只是对 $\mid \phi \rangle$ 的一种限制. 事实上，满足(3.152)的 $\mid \phi \rangle$ 仍然可以是任意的，其中包括纵光子和标量光子数目的任意性. 由于态 $\mid \psi \rangle$ 的 $\mid \phi \rangle$ 部分仍然是任意的，一个给定的物理态至多只能由 $\mathcal{H}_1$ 中一类等价的矢量来表达.

然而，我们可以证实，由于限制条件(3.152)，在 $\mathcal{H}_1$ 子空间中的态矢量将有正的模方. 若取 $\vec{k}$ 平行于第三轴，$\varepsilon^{(\lambda)}$ 为(3.143)的形式，则(3.152)的一个等价形式是

$$[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)] \mid \phi \rangle = 0 \tag{3.153}$$

态 $\mid \phi \rangle$ 的一般形式是 n 个纵光子或标量光子态 $\mid \phi_n \rangle$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ 的线性组合，即可以写

$$|\phi\rangle = c_0|\phi_0\rangle + c_1|\phi_1\rangle + \cdots + c_n|\phi_n\rangle \tag{3.154}$$

其中 $|\phi_0\rangle \equiv |0\rangle$ 是无粒子的态，即真空态. 而纵光子与标量光子的粒子数算符为

$$N' = \int \tilde{\mathrm{d}}k[a^{(3)+}(k)a^{(3)}(k) - a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)] \tag{3.155}$$

注意到，对自由度 k，标量光子的数算符为 $-a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)$，负号来自 $a^{(0)}(k)$，$a^{(0)+}(k)$ 的对易关系[见(3.145)]. $|\phi_n\rangle$ 是 n 个纵光子或标量光子态，它必须满足(3.153)及其厄密共轭式，即

$$[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)]|\phi_n\rangle = 0, \langle\phi_n|[a^{(3)+}(k) - a^{(0)+}(k)] = 0$$

由此得

$$\langle\phi_n|N'|\phi_n\rangle = n\langle\phi_n|\phi_n\rangle$$

$$= \langle\phi_n|\int \tilde{\mathrm{d}}k[a^{(3)+}(k)a^{(3)}(k) - a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)]|\phi_n\rangle = 0$$

这导致

$$\langle\phi_n|\phi_n\rangle = \delta_{n0}$$

它表明，由于强加了条件(3.153)，当 $n\neq 0$ 时态 $|\phi_n\rangle$ 的模方为0. 于是，对 $\mathcal{H}_1$ 中的任意态(3.154)将有模方

$$\langle\phi|\phi\rangle = |c_0|^2 \geqslant 0$$

由于横光子态 $|\psi_T\rangle$ 的模方为正，因而对 $\mathcal{H}_1$ 中的任意态矢量 $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle|\phi\rangle$，也有模方

$$\langle\psi|\psi\rangle \geqslant 0$$

注意 $|\phi\rangle$ 中的展开系数 $c_n(n\neq 0)$ 仍是任意的. 尚须证明，$|\phi\rangle$ 的这种任意性并不影响物理观测量. 例如，考虑能量. 在守恒四动量(2.259)中取 P^0 并在 j^{00} 表达式(2.258)中设 $\lambda = 1$，再加上正规乘积运算，可得相应的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x :\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}: \\ &= \int \mathrm{d}^3x :(F^{\mu 0} - g^{\mu 0}(\partial\cdot A))\dot{A}_\mu + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2: \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x :\sum_{i=1}^{3}[\dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2] - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2: \end{aligned} \tag{3.156}$$

[参阅附录八]，它相当于4个质量为0的实标量场的哈密顿量之和，只是0分量前有负号. 因此

$$H = \int \tilde{\mathrm{d}}k\omega_k\left[\sum_{\lambda=1}^{3} a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k) - a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)\right] \tag{3.157}$$

对于 $\mathcal{H}_1$ 中的态 $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle|\phi\rangle$，$H$ 的作用结果一般也有来自 $|\phi\rangle$ 的贡献，但是若求平均值，则由于(3.153)及其厄密共轭，

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$$=\frac{\langle\phi|\langle\psi_{\mathrm{T}}|\int\tilde{\mathrm{d}}k\omega_k\left[\sum_{\lambda=1}^{3}a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k)-a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)\right]|\psi_{\mathrm{T}}\rangle|\phi\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{T}}|\psi_{\mathrm{T}}\rangle\langle\phi|\phi\rangle}$$

$$=\frac{\langle\phi|\langle\psi_{\mathrm{T}}|\int\tilde{\mathrm{d}}k\left[\omega_k\sum_{\lambda=1,2}a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k)+\omega_k(a^{(3)+}(k)a^{(3)}(k)-a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k))\right]|\psi_{\mathrm{T}}\rangle|\phi\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{T}}|\psi_{\mathrm{T}}\rangle\langle\phi|\phi\rangle}$$

$$=\frac{\langle\psi_{\mathrm{T}}|\int\tilde{\mathrm{d}}k\omega_k\sum_{\lambda=1,2}a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k)|\psi_{\mathrm{T}}\rangle}{\langle\psi_{\mathrm{T}}|\psi_{\mathrm{T}}\rangle}$$

可见，只有态 $|\psi\rangle$ 中的横光子对能量平均值有贡献. 同样，若计算动量

$$\vec{P}=\int\tilde{\mathrm{d}}k\vec{k}\left[\sum_{\lambda=1}^{3}a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k)-a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)\right] \tag{3.158}$$

在态 $|\psi\rangle$ 上的平均值，则也只留下横光子的贡献.

因此，我们可以得出结论：如果只限于物理的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$，则不仅负几率消失而且非物理的纵光子和标量光子对平均值（因而对物理观测）没有贡献，物理上将只有横光子的作用表现出来.

顺便指出，态矢 $|\phi\rangle$ 的任意性反映了 $A_\mu(x)$ 的规范任意性. 回忆经典场 $A_\mu(x)$ 在规范变换 $A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\alpha$（$\alpha$ 是满足 $\Box\alpha=0$ 的任意标量函数）下，物理结果是不变的. 与此相应，可以证明[13]，量子场 $A_\mu(x)$ 在态 $|\psi\rangle=|\psi_{\mathrm{T}}\rangle|\phi\rangle$ 上的平均值可以写成

$$\langle\psi|A_\mu(x)|\psi\rangle=\langle\psi_{\mathrm{T}}|A_\mu^{\mathrm{T}}(x)|\psi_{\mathrm{T}}\rangle+\langle\phi|A_\mu^{\text{纵}+\text{标量}}(x)|\phi\rangle=\langle\psi_{\mathrm{T}}|A_\mu^{\mathrm{T}}(x)|\psi_{\mathrm{T}}\rangle+\partial_\mu\alpha(x) \tag{3.159}$$

其中 A_μ^{T} 和 $A_\mu^{\text{纵}+\text{标量}}$ 分别是 A_μ 中含横光子和纵、标量光子算符部分. $\alpha(x)$ 是满足 $\Box\alpha(x)=0$ 的标量函数，它可以通过调整 $|\phi\rangle$ 而随意选择. 因而 $|\phi\rangle$ 的任意性表现为 $\alpha(x)$ 的任意性，这正是 $A_\mu(x)$ 的规范任意性.

如前所述，由于 $|\phi\rangle$ 的任意性，$\mathcal{H}_1$ 中的态矢量 $|\psi\rangle=|\psi_{\mathrm{T}}\rangle|\phi\rangle$ 只能确定到一个等价类. 而 $|\phi\rangle$ 中含有纵向与标量光子部分对态的归一化和物理量的平均值皆无影响，所以 $|\phi\rangle$ 和 $|0\rangle$ 在物理上是等价的. 我们总可以令

$$|\phi\rangle\equiv|0\rangle \tag{3.160}$$

从而从该等价类中挑选出一个方便的代表. 至于横向极化矢量，也可以不取线极化 $\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)}$ 而取圆极化

$$(\varepsilon^{(1)}\pm\mathrm{i}\varepsilon^{(2)})/\sqrt{2}$$

它们分别对应横光子的 helicity ±1.

最后还有一点说明. 尽管对于物理观测来说,只有 $\mathcal{H}_1$ 中的态矢量有意义,但是,为了保持定域性,整个不定度规(包括负模方)的 Fock 空间还是必要的. 定域性一般表现为,在对中间态求和时,必须取整个不定度规 Fock 空间中基矢的完全集. 例如,为了得出定域场的对易关系(3.136),就必须使用全部 $a^{(\lambda)}(k)$, $a^{(\lambda)+}(k)$ 的对易关系(3.145)及全部极化基矢的完全性关系(3.144a).

问题 3.9　证明由 $a^{(\lambda)}(k)$, $a^{(\lambda)+}(k)$ 的对易关系(3.145)可以导出场 $A_\mu(x)$ 的等时对易子(3.139)和非等时对易子(3.146).

问题 3.10　证明 Feynman 规范下电磁场的哈密顿量 H 可以表示为(3.157)式.

3.4.2　传播子

我们期望,同标量场情况一样,传播子将定义为场算符编时乘积的真空平均值. 至此,我们一直用的是 Feynman 规范($\lambda=1$). 编时乘积可以类似于(3.125)来定义.

$$TA_\mu(x)A_\nu(y)=\theta(x^0-y^0)A_\mu(x)A_\nu(y)+\theta(y^0-x^0)A_\nu(y)A_\mu(x) \tag{3.161}$$

一般来说,这种表达式对于 $x^0=y^0$ 没有很好地定义. 幸好我们目前并未遇到这一困难. 因为从(3.139)可见,在等时情况下,$A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ 彼此对易,算符次序没有问题.

利用 $A_\mu(x)$ 的展开式(3.140)及对易关系(3.145)可以得出光子传播子的表达式

$$\begin{aligned}
&\langle 0\mid TA_\mu(x)A_\nu(y)\mid 0\rangle\\
&=-g_{\mu\nu}\int \tilde{\mathrm{d}}k\left[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\right]\\
&=\mathrm{i}g_{\mu\nu}G_{\mathrm{F}}(x-y)\mid_{m=0}\\
&=-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.162}$$

其中 $G_{\mathrm{F}}(x-y)$ 由(3.131)确定. 不难证明,在质量 $m=0$ 情况下,传播子

$$G_{\mathrm{F}}(x)\mid_{m=0}=\frac{1}{4\mathrm{i}\pi^2}\frac{1}{x^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.163}$$

有很简单的形式. 推导中使用了下述技巧

$$\int_0^\infty \mathrm{d}q\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\alpha}=\lim_{|\eta|\to 0}\int_0^\infty \mathrm{d}q\mathrm{e}^{-(|\eta|-\mathrm{i}\alpha)q}$$

来处理振荡的径向积分. 由结果(3.163)也可看出,$G_{\mathrm{F}}(x-y)\mid_{m=0}$ 进而 $\langle 0\mid TA_\mu(x)A_\nu(y)\mid 0\rangle$ 在 $x^0=y^0$ 时确实仍有定义.

以上全部讨论都是在 Feynman 规范($\lambda=1$)下进行的. 最后简单说明一下,

物理结果并不依赖于 λ 的选择. 若从开始就保持 λ 为任意,则类似进行前面整个讨论,最后可得 Feynman 传播子[13]

$$\langle 0 \mid TA_\mu(x)A_\nu(y) \mid 0\rangle = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}+\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}\right] \tag{3.164}$$

从中见到,当 $\lambda=1$ 时我们回到了 Feynman 规范;当 $\lambda\to 0$ 时,方括号中第二项有奇异出现;而当 $\lambda\to\infty$ 时被称为 Landau 规范. 然而,对于物理结果,例如表达光子与外源相互作用振幅的积分

$$\int \mathrm{d}^4y\langle 0 \mid TA_\mu(x)A_\nu(y) \mid 0\rangle j^\nu(y)$$

只要其中的 j^ν 为守恒流,满足 $\partial_\nu j^\nu(y)=0$ 或在动量空间 $k_\nu j^\nu(k)=0$,则(3.164)方括号中的 $k_\mu k_\nu$ 项就不会有贡献,积分结果将与 λ 无关.

问题 3.11 推导光子传播子的表达式(3.162).

问题 3.12 求证 $G_{\mathrm{F}}(x)\mid_{m=0}$ 的显示式(3.163).

3.5 Dirac 场的正则量子化

3.5.1 反对易子

对于上述的 Klein - Gordon 场和 Maxwell 场,量子化时所使用的都是对易关系;而对于即将讨论的 Dirac 场,我们会看到,量子化时所使用的将不是对易关系而是反对易关系.

我们取自由 Dirac 场的拉氏密度为(2.171)的形式,即

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi$$

相应的场方程及 Noether 守恒量都已在 2.6 节给出. 为了量子化,可以如通常一样,从 $\mathcal{L}$ 求出 ψ 的共轭动量

$$\pi_\psi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^+ \tag{3.165}$$

可见 ψ 与 $\mathrm{i}\psi^+$ 互为共轭. 然后将场算符化并引入正则对易关系. 但是,为了便于看出必须引入什么样的对易规则,我们将略微改变一下量子化的程序.

我们假定,$\psi,\bar{\psi}$ 是作用于 Hilbert 空间的算符,它们之间的对易关系可以从 Poincaré 不变性来决定,即要求 Poincaré 守恒荷 $P^\mu, M^{\nu\rho}$(现在通过算符 $\psi,\bar{\psi}$ 表达)与 ψ 场的对易关系满足所要求的变换规律. 这里,问题被倒了过来. 通常我们是先引入场算符的正则对易关系,然后证明它们与 Poincaré 不变性自恰;而现

在是由 Poincaré 不变性要求反过来决定对易关系. 当然还必须证实,这种对易关系导致可观测量在类空间隔彼此对易,即服从微观因果性条件.

为此,将场算符 $\psi(x)$,$\bar{\psi}(x)$ 按 Dirac 方程的 c 数平面波解展开为

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + d_\alpha^+(k)v^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]\\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha^+(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + d_\alpha(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}]\end{aligned} \tag{3.166}$$

其中 b,d,b^+,d^+ 都是(消灭或产生)算符,u,v 是 2.6 节给出的 Dirac 旋量. 因此,求 $\psi,\bar{\psi}$ 的对易关系等同于求 b,d,b^+,d^+ 的对易关系. 按我们的要求,b,d,b^+,d^+ 所满足的对易关系必须使得

$$\psi(x+a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}P\cdot a}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P\cdot a}$$

或其微分形式

$$\partial_\mu\psi(x) = \mathrm{i}[P_\mu,\psi(x)],\quad \partial_\mu\bar{\psi}(x) = \mathrm{i}[P_\mu,\bar{\psi}(x)] \tag{3.167}$$

成立. 其中 P_μ 是守恒的四动量算符,已被确认为时空平移变换的生成元. 利用 P_μ 的表达式(2.178)和展开式(3.166),可以得出

$$P_\mu = \int \mathrm{d}^3x\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^0\partial_\mu\psi = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}\sum_\alpha k_\mu[b_\alpha^+(k)b_\alpha(k) - d_\alpha(k)d_\alpha^+(k)] \tag{3.168}$$

推导过程中还使用了(2.197),(2.198)以及(2.200)中所包含的 u,v 的正交关系

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0u^{(\beta)}(k) = \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0v^{(\beta)}(k) = \frac{k^0}{m}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.169}$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0v^{(\beta)}(\tilde{k}) = \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0u^{(\beta)}(\tilde{k}) = 0,\quad \tilde{k} = (k^0,-\vec{k})$$

由于(3.168)中第二项不是正规乘积,所以其中还包括了真空的贡献. 为了减去这一贡献,须将算符排成正规乘积. 注意到(3.168)式与标量场的 P_μ 表达式有一明显区别:由(3.71)和(3.72)可见,在排成正规乘积之前,标量场的

$$P_\mu = \int \tilde{\mathrm{d}}kk_\mu\frac{1}{2}[a^+(k)a(k) + a(k)a^+(k)]$$

其中两项之间为 + 号,而(3.168)式中两项之间为 - 号. 产生这一区别的根源是 $\mathcal{L}$ 中的动能项. 对 Boson 场,动能项一般 $\sim\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$,含两个 ∂_μ,这使得 P_μ 空间密度的每一项都含两个或不含时空坐标微商;而对 Fermion 场,动能项 $\sim\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$,只含一个 ∂_μ,因而 P_μ 空间密度的每一项都只含一个时空坐标微商. P_μ 表达式的这一区别是 Fermion 场必须使用反对易关系量子化的原因之一.

事实上,在通过

$$b_\alpha(k)\,|0\rangle = d_\alpha(k)\,|0\rangle = 0\quad (\text{对所有 } k,\alpha)$$

定义真空态之后,如果按对易子来量子化,则(3.168)中 b 粒子和 d 粒子对能量的贡献具有相反的符号,即使减掉了真空贡献的无穷大常数,理论仍没有稳定的

基态. 然而,如果按反对易子来量子化,则(3.168)中 b 粒子和 d 粒子对能量都有正的贡献,在减掉真空贡献的无穷大常数之后,将有稳定的基态. 因此,从基态的稳定性考虑,应当利用反对易子来进行量子化.

为了求出反对易子的具体形式,我们利用平移不变性(3.167). 从 $\psi(x)$ 的展开式(3.166)不难证实,只要

$$\begin{aligned} &[P_\mu, b_\alpha(k)] = -k_\mu b_\alpha(k), \quad [P_\mu d_\alpha(k)] = -k_\mu d_\alpha(k) \\ &[P_\mu, b_\alpha^+(k)] = k_\mu b_\alpha^+(k), \quad [P_\mu d_\alpha^+(k)] = k_\mu d_\alpha^+(k) \end{aligned} \tag{3.170}$$

则(3.167)可以被满足. 现在将 P_μ 的表达式(3.168)代入,如考虑(3.170)的第一式,则得到

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \frac{m}{q^0} \sum_\beta q_\mu [b_\beta^+(q) b_\beta(q) - d_\beta(q) d_\beta^+(q), b_\alpha(k)] = -k_\mu b_\alpha(k)$$

此式等价于

$$\left[\sum_\beta b_\beta^+(q) b_\beta(q) - d_\beta(q) d_\beta^+(q), b_\alpha(k) \right] = -(2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\alpha(k) \tag{3.171}$$

而(3.170)中的另外三个等式将导致类似的三个关系. 若假定

$$[d_\beta(q) d_\beta^+(q), b_\alpha(k)] = 0$$

则(3.171)成为

$$\sum_\beta (b_\beta^+(q) \{b_\beta(q), b_\alpha(k)\} - \{b_\beta^+(q), b_\alpha(k)\} b_\beta(q)) = -(2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) b_\alpha(k)$$

于是不难看出,如果设基本的消灭和产生算符 b, d 和 b^+, d^+ 满足

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^+(q)\} = \{d_\alpha(k), d_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{q}) \delta_{\alpha\beta} \tag{3.172}$$

所有其它反对易子为 0

则(3.171)以及类似的三个关系都可以满足. 这表明,反对易关系(3.172)和平移不变性(3.170)是自恰的,我们利用后者决定了前者. 从(3.170)可以看出,$b^+(k), d^+(k)$ 的作用是产生四动量 k_μ,而 $b(k), d(k)$ 的作用是消灭四动量 k_μ.

利用 b, d, b^+, d^+ 的反对易关系(3.172),可以证明场算符 ψ, ψ^+ 满足等时反对易关系:

$$\begin{aligned} &\{\psi_\xi(\vec{x}, t), \psi_\eta^+(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{\xi\eta} \\ &\{\psi_\xi(\vec{x}, t), \psi_\eta(\vec{y}, t)\} = \{\psi_\xi^+(\vec{x}, t), \psi_\eta^+(\vec{y}, t)\} = 0 \end{aligned} \tag{3.173}$$

其中 ξ, η 是场的旋量指标. 证明中要用到 u, v 的自旋求和公式(2.194)和(2.195)[参阅附录九]. 注意到(3.173)正是 ψ 与其共轭动量 $\mathrm{i}\psi^+$[见(3.165)]的等时反对易子,量子化实际上可以从假定(3.173)开始,这正是量子化的惯常做法,只是目前必须在反对易的意义上. 因此,从引入 b, d, b^+, d^+ 的反对易关系开始量子化的做法与惯常做法是等同的.

利用所得出的场算符的反对易子(3.173),还可以证明,同守恒荷(2.180)相应的广义角动量算符

$$M^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^3 x J^{0,\mu\nu} = \int \mathrm{d}^3 x \psi^+(x)\left[\mathrm{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi(x)$$

与场算符 $\psi(x)$ 满足对易关系

$$[M^{\mu\nu}, \psi(x)] = -\left[\mathrm{i}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi(x) \tag{3.174}$$

即 $M^{\mu\nu}$ 表现为 Lorentz 变换的生成元,因而理论上将保持 Lorentz 不变性. 在求证对易关系(3.174)时,可以不必考虑正规乘积问题,因为加有正规乘积运算的 $M^{\mu\nu}$ 与未加此运算的 $M^{\mu\nu}$ 之差为 c 数项,它同算符 $\psi(x)$ 总是可对易的.

正规乘积的概念可以推广至 Fermion 场. 由于 Fermion 算符满足反对易关系,所以正规乘积定义为

$$\begin{aligned}
&: d_\alpha d_\beta^+ : = -d_\beta^+ d_\alpha \\
&: d_\alpha^+ d_\beta : = d_\alpha^+ d_\beta \\
&: d_\alpha^+ d_\beta^+ : = d_\alpha^+ d_\beta^+ = -d_\beta^+ d_\alpha^+ \\
&: d_\alpha d_\beta : = d_\alpha d_\beta = -d_\beta d_\alpha \\
&\text{对 } b \text{ 算符有类似定义}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

这表明,在正规乘积符号内,两个 Fermion 算符是反对易的. 因此,为了减掉真空的无穷大贡献,总能量 - 动量算符的正确定义是

$$\begin{aligned}
P^\mu &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1,2} : b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^+(k) : \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^+(k) d_\alpha(k)]
\end{aligned} \tag{3.176}$$

现在每一项对能量的贡献都是正的.

为了减除真空贡献的无穷大量子数,实际上可以从一开始就将算符排成正规乘积,即取量子 Dirac 场的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = : \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi : \tag{3.177}$$

因而守恒量 $P^\mu, M^{\nu\rho}, Q$ 中的算符皆排成正规乘积. 例如将 eQ 排成正规乘积,相当于减掉真空具有的无穷大背景电荷.

问题 3.13　导出 P_μ 的表达式(3.168).

问题 3.14　求证 $M^{\mu\nu}$ 与 $\psi(x)$ 满足对易式(3.174).

3.5.2　Fermions 的 Fock 空间

我们首先考虑单粒子态. 略去包括动量空间波函数的积分,这相当于固定

一个四动量. 对于一个给定的四动量 k, 有四个简并态 $|a\rangle(a=1,2,3,4)$:

$$|1\rangle = b_1^+(k)|0\rangle, \quad |3\rangle = d_1^+(k)|0\rangle$$
$$|2\rangle = b_2^+(k)|0\rangle, \quad |4\rangle = d_2^+(k)|0\rangle$$

它们满足

$$P_\mu |a\rangle = k_\mu |a\rangle \tag{3.178}$$

为了区别这四个态, 必须寻找与 P_μ 对易的力学量. 其中之一是守恒荷 Q. 通过算符 b, d, b^+, d^+, 它可以表示为

$$\begin{aligned} Q &= \int \mathrm{d}^3 x\, J^0(x) = \int \mathrm{d}^3 x : \psi^+(x)\psi(x) : \\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k} \sum_\alpha [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^+(k) d_\alpha(k)] \end{aligned} \tag{3.179}$$

对于 Dirac 粒子, 我们标记

$$\tilde{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} \tag{3.180}$$

与 Boson 情况记 $\tilde{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0}$ 不同. 利用(3.179), 可以求出

$$[Q, b_\alpha^+(k)] = b_\alpha^+(k), \quad [Q, d_\alpha^+(k)] = -d_\alpha^+(k)$$

又由于 $Q|0\rangle = 0$, 所以

$$\begin{aligned} Q\, b_\alpha^+(k)|0\rangle &= [Q, b_\alpha^+(k)]|0\rangle = b_\alpha^+(k)|0\rangle \\ Q\, d_\alpha^+(k)|0\rangle &= [Q, d_\alpha^+(k)]|0\rangle = -d_\alpha^+(k)|0\rangle \end{aligned} \tag{3.181}$$

即

$$Q|a\rangle = \begin{cases} +|a\rangle & (a=1,2) \\ -|a\rangle & (a=3,4) \end{cases} \tag{3.182}$$

在经典情况下, $Q = \int \mathrm{d}^3 x\, \psi^+(x)\psi(x)$ 被解释为正定几率; 而在量子情况下, Q 却可正可负, 因为量子化的 Dirac 场描写两种类型的粒子, b 粒子和 d 粒子, 分别带有 Q 荷 +1 和 −1. Q 荷表示的是 b 粒子与 d 粒子数目之差. 电动力学中, eQ 就是粒子电荷, $Q = +1$ 和 -1 分别对应电子和正电子. 可以直接证实

$$[Q, P_\mu] = 0 \tag{3.183}$$

和

$$\begin{aligned} [Q, \psi(x)] &= -\psi(x), \\ [Q, \bar{\psi}(x)] &= \bar{\psi}(x) \end{aligned} \tag{3.184}$$

因此, Q 为守恒量. 而 ψ 的作用是使 Q 荷减少 1, 对应消灭电子或产生正电子; $\bar{\psi}$ 的作用是使 Q 荷加 1, 对应产生电子或消灭正电子. (3.184)还表明, 算符 Q 是 Fermion 数 U(1)量子变换的生成元, 因为它生成场算符的有限 U(1)变换

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha Q}\psi(x)e^{i\alpha Q} &= e^{i\alpha}\psi(x) \\ e^{-i\alpha Q}\bar{\psi}(x)e^{i\alpha Q} &= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) \end{aligned} \tag{3.185}$$

为了完全标记单粒子态，还须消除剩余的由 $\alpha=1$，2 标记的简并. 这就要引入自旋投影算符. 利用展开式(3.166)和 u，v 的正交关系(3.169)，可将算符 $b_\alpha^+(k)$，$d_\alpha^+(k)$反过来通过 $\psi^+(x)$，$\psi(x)$表示为

$$\begin{aligned} b_\alpha^+(k) &= \int d^3x e^{-ik\cdot x}\psi^+(x)u^{(\alpha)}(k) \\ d_\alpha^+(k) &= \int d^3x e^{-ik\cdot x}v^{(\alpha)+}(k)\psi(x) \end{aligned} \tag{3.186}$$

然后，利用 Lorentz 变换生成元 $M^{\mu\nu}$ 与场算符 $\psi(x)$ 满足的对易关系(3.174)及其厄密共轭式，可以得出

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, b_\alpha^+(k)] &= \int d^3x e^{-ik\cdot x}\psi^+(x)\left[i(x^\mu\overleftarrow{\partial}^\nu - x^\nu\overleftarrow{\partial}^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu+}}{2}\right]u^{(\alpha)}(k), \\ [M^{\mu\nu}, d_\alpha^+(k)] &= -\int d^3x e^{-ik\cdot x}v^{(\alpha)+}(k)\left[i(x^\mu\overleftarrow{\partial}^\nu - x^\nu\overleftarrow{\partial}^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right]\psi(x) \end{aligned} \tag{3.187}$$

注意到 $M^{\mu\nu}=(M^{\mu\nu})^+$ 是厄密算符[证明见附录十].

Pauli－Lubanski 四矢量 $W_\sigma = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}S^{\mu\nu}P^\rho$ 在量子化之后也成为 Hilbert 空间中的算符，现在考虑它对态 $|a\rangle$ 的作用. 由于 $|a\rangle$ 的动量为 k，故根据(3.178)，P^ρ 可以代换为 k^ρ，因此可写

$$W_\sigma = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}S^{\mu\nu}k^\rho \tag{3.188}$$

其中 $S^{\mu\nu}$ 是 $M^{\mu\nu}$ 中的自旋部分. 类似于 2.6 节的经典情况，利用 W 和(2.207)表达的类空单位矢量

$$n = \left(k\frac{k\cdot t}{m^2} - t\right)\frac{m}{|\vec{k}|}$$

可以构造出自旋投影算符. 为了简单，选择$\vec{k}$平行于第三轴，即

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^3 = |\vec{k}|)$$

这时

$$\begin{aligned} &W_0 = S^{12}k^3, \quad W_3 = -S^{12}k^0 \\ &W\cdot k = W_0k^0 + W_3k^3 = 0 \\ &-\frac{W\cdot n}{m} = \frac{W\cdot t}{|\vec{k}|} = \frac{W_0}{|\vec{k}|} = S^{12} \end{aligned}$$

因此，当取$\vec{k}$沿第三轴时，我们有

$$-\frac{W\cdot n}{m}|a\rangle = S^{12}|a\rangle \tag{3.189}$$

这时由于 $S^{12}=\vec{S}\cdot\hat{k}$（$\vec{S}$为自旋算符矢量），所以 $-\frac{W\cdot n}{m}$恰为自旋算符 $\vec{S}$在 $+\vec{k}$方向上的投影. 假定 S^{12}中的算符已排成了正规乘积，则

$$S^{12}\mid 0\rangle=0 \tag{3.190}$$

当 $a=1,2$ 时，$\mid a\rangle=b_a^+(k)\mid 0\rangle$. 考虑到上式并利用(3.187)和(3.166)，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{W\cdot n}{m}b_\alpha^+(k)\mid 0\rangle&=S^{12}b_\alpha^+(k)\mid 0\rangle=[S^{12},b_\alpha^+(k)]\mid 0\rangle\\&=\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\psi^+(x)\frac{\sigma^{12+}}{2}u^{(\alpha)}(k)\mid 0\rangle\\&=\frac{m}{k^0}\sum_\beta u^{(\beta)+}(k)\frac{\sigma^{12}}{2}u^{(\alpha)}(k)b_\beta^+(k)\mid 0\rangle\end{aligned}$$

其中使用了 $\sigma^{12+}=\sigma^{12}$. 根据(2.211)，$u^{(\alpha)}(k)$是$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$的本征态. 由于$\vec{k}$沿第三轴，故有

$$\frac{\sigma^{12}}{2}u^{(\alpha)}(k)=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\,u^{(\alpha)}(k)=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}u^{(\alpha)}(k)\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1)$$

再考虑到正交性(2.197)即

$$u^{(\alpha)+}(k)u^{(\beta)}(k)=\frac{k^0}{m}\delta^{\alpha\beta}$$

我们得到

$$-\frac{W\cdot n}{m}b_\alpha^+(k)\mid 0\rangle=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}b_\alpha^+(k)\mid 0\rangle\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1)$$

即

$$-\frac{W\cdot n}{m}\mid a\rangle=\begin{cases}+\frac{1}{2}\mid a\rangle & (a=1)\\ -\frac{1}{2}\mid a\rangle & (a=2)\end{cases} \tag{3.191}$$

当 $a=3,4$ 时，$\mid a\rangle=d_a^+(k)\mid 0\rangle$. 我们类似有

$$\begin{aligned}-\frac{W\cdot n}{m}d_\alpha^+(k)\mid 0\rangle&=[S^{12},d_\alpha^+(k)]\mid 0\rangle\\&=-\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-ik\cdot x}v^{(\alpha)+}(k)\frac{\sigma^{12}}{2}\psi(x)\\&=-\frac{m}{k^0}\sum_\beta v^{(\alpha)+}(k)\frac{\sigma^{12}}{2}v^{(\beta)}(k)d_\beta^+(k)\mid 0\rangle\end{aligned}$$

根据(2.211)，$v^{(\alpha)}(k)$也是$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}$的本征态，由于$\vec{k}$沿第三轴，故得

$$\frac{\sigma^{12}}{2}v^{(\beta)}(k)=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}\,v^{(\beta)}(k)=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}v^{(\beta)}(k)\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1)$$

再考虑到正交性(2.198)即

$$v^{(\alpha)+}(k)v^{(\beta)}(k)=\frac{k^0}{m}\delta^{\alpha\beta}$$

我们得到

$$-\frac{W\cdot n}{m}d_\alpha^+(k)\,|0\rangle=-\frac{\varepsilon_\alpha}{2}d_\alpha^+(k)\,|0\rangle\quad(\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1)$$

即

$$-\frac{W\cdot n}{m}|a\rangle=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}|a\rangle & (a=3)\\ +\dfrac{1}{2}|a\rangle & (a=4)\end{cases}\tag{3.192}$$

因此，从(3.191)和(3.192)见到，对于$+\vec{k}$方向而言，态$|1\rangle$，$|4\rangle$有极化$+1/2$而态$|2\rangle$，$|3\rangle$有极化$-1/2$. 至此我们完成了单粒子态$|a\rangle$的完全标记如下：

态	$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|3\rangle$	$\|4\rangle$
	$b_1^+(k)\|0\rangle$	$b_2^+(k)\|0\rangle$	$d_1^+(k)\|0\rangle$	$d_2^+(k)\|0\rangle$
动量	k	k	k	k
粒子数	1	1	-1	-1
极化	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$

我们再回头看看(3.166)中场算符的展开式

$$\psi(x)=\int\tilde{\mathrm{d}k}[b_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+d_\alpha^+(k)v^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]$$

其中$b_\alpha(k)$为动量k，极化$\varepsilon_\alpha/2$的电子的消灭算符. 这里极化是以$+\vec{k}$方向为准的. $d_\alpha^+(k)$为正电子的产生算符. 但注意到，$d_\alpha^+(k)$产生的正电子同相应的平面波$v^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$有相反的四动量和极化. 如$d_2^+(k)$产生动量$+k$，极化$+1/2$的正电子，而相应平面波为$v^{(2)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，有动量$-k$，极化$-1/2$，是一负能解. 为了处理Dirac方程的负能解，在相对论量子论发展的早期，Dirac曾提出了空穴理论. 这一理论假定，物理的真空态中，所有的负能级都被电子占满. 由于Pauli不相容原理，它们不能再容纳新的电子，从而保证了正能物理态的稳定性. 当负能海中的一个电子被激发到正能级时，在海中就留下了一个空穴. 这个空穴，对于观测者来说，与电子有相同的质量，但却有正能量、正电荷，因而代表了电子的反粒子——正电子. 这样，空穴理论不仅预言了正电子的存在，还能自然地解释了正负电子对的产生和湮灭. 当然，这一解释只适用于费密子，不适用于玻色子. 如果在目前量子场$\psi(x)$的展开式中，类似于$b_\alpha(k)$，将$d_2^+(k)$看作负能电子的消灭算符，它将是消灭一个动量$-k$，极化$-1/2$的负能电子. 在空穴理论

中，这正是产生一个动量 $+k$，极化 $+1/2$ 的空穴，它恰好对应 $d_2^+(k)$ 产生的正电子. 因此，量子 Dirac 场论中的正电子同它的空穴解释是一致的.

现在考虑多粒子态. 记产生算符为 a^+，略写所有量子数(动量、荷、自旋等). Fock 空间的基矢由

$$a^+(1)\cdots a^+(n)|0\rangle$$

生成，由于 a^+ 彼此反对易，相应的波函数 $f(1,\cdots,n)$ 对宗量全反对称. 若有两粒子处于同一量子数的态，则 $f\equiv 0$，这正是泡利不相容原理. 因此，用反对易子来量子化自然导致了 Fermi - Dirac 统计.

问题 3.15 导出算符 Q 的表达式(3.179).

问题 3.16 证明(3.186)和(3.187)式.

3.5.3 自旋与统计间的关系、传播子

从基本反对易关系(3.172)和展开式(3.166)可以求得任意时空间隔的自由场算符的反对易子

$$\{\psi(x),\psi(y)\}=\{\bar\psi(x),\bar\psi(y)\}=0 \tag{3.193}$$

而

$$\begin{aligned}\{\psi_\xi(x),\bar\psi_{\xi'}(y)\} &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\Big[\sum_\alpha u^{(\alpha)}(k)\bar u^\alpha(k)e^{-ik\cdot(x-y)}\\ &\quad+\sum_\alpha v^{(\alpha)}(k)\bar v^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot(x-y)}\Big]_{\xi\xi'}\\ &=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\Big[\frac{\not k+m}{2m}e^{-ik\cdot(x-y)}+\frac{\not k-m}{2m}e^{ik\cdot(x-y)}\Big]_{\xi\xi'}\\ &=(i\not\partial_x+m)_{\xi\xi'}\int\tilde{dk}[e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}]\\ &=(i\not\partial_x+m)_{\xi\xi'}i\Delta(x-y),\quad \tilde{dk}=\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{2k^0}\end{aligned} \tag{3.194}$$

或写成矩阵形式

$$\{\psi(x),\bar\psi(y)\}\doteq\psi(x)\bar\psi(y)+[\bar\psi^{\mathrm T}(y)\psi^{\mathrm T}(x)]^{\mathrm T}=(i\not\partial_x+m)i\Delta(x-y) \tag{3.194a}$$

其中 T 表示旋量的转置. 可以证明，它在 Lorentz 变换下是不变的[见附录十一]. 在等时情况下，取 $x^0=y^0=t$，利用(3.99)的性质(4)，(5)，即

$$\partial_{x^0}\Delta(x-y)\big|_{x^0=y^0}=-\delta^3(\vec x-\vec y),\quad \Delta(x-y)\big|_{x^0=y^0}=0$$

以及

$$\partial_{x^j}\Delta(x-y)\big|_{x^0=y^0}=0$$

则从(3.194)可得

$$\{\psi_\xi(\vec{x},t),\bar{\psi}_{\xi'}(\vec{y},t)\}=(\gamma^0)_{\xi\xi'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \tag{3.195}$$

不难看出(3.195)等同于早先得出的等时对易子(3.173)中的第一式. 因此

$$\{\psi_\xi(\vec{x},t),\bar{\psi}_{\xi'}(\vec{y},t)\}=0 \quad 对\vec{x}\neq\vec{y}$$

由于 $x^0=y^0=t$, $\vec{x}\neq\vec{y}$相应于$(x-y)^2=-(\vec{x}-\vec{y})^2<0$,所以从 Lorentz 不变性,我们有

$$\{\psi_\xi(x),\bar{\psi}_{\xi'}(y)\}=0 \quad 对(x-y)^2<0 \tag{3.196}$$

它表明，基本反对易关系(3.172)保证了场算符在类空间隔是彼此反对易的.

在我们已叙述过的量子场论中，对 Klein－Gordon 场和 Maxwell 场使用了对易关系来量子化,而对 Dirac 场使用了反对易关系来量子化. 这一区别实质上包含着自旋与统计之间的一种深刻联系.

考虑满足 Poincaré 不变性并具有唯一基态的量子场论. 定域可观测量

$$O\equiv\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{O}(\vec{x},t)$$

若微观因果律成立，则定域可观测量密度$\mathcal{O}(x)$在类空间隔应彼此对易，即

$$[\mathcal{O}(x),\mathcal{O}(y)]=0 \quad 对(x-y)^2<0 \tag{3.197}$$

通常，$\mathcal{O}(x)\equiv\varphi_a(x)\varphi_b(x)$是场算符的双线性型. 容易证明,(3.197)成立的一般条件是

$$\{\varphi_r(x),\varphi_s(y)\}=0 \quad 对(x-y)^2<0 \tag{3.198a}$$

或

$$[\varphi_r(x),\varphi_s(y)]=0 \quad 对(x-y)^2<0 \tag{3.198b}$$

其中 φ_r, φ_s是场的分量.

现在回到自旋 1/2 场的情况. 如果我们将反对易关系(3.172)改为对易关系，即假定

$$[b_\alpha(k),b_\beta^+(q)]=[d_\alpha(k),d_\beta^+(q)]=(2\pi)^3\frac{k^0}{m}\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\delta_{\alpha\beta}$$

其余各对易子为 0

则除了出现能量下方无界及粒子表现为 Boson 以外，我们还将有

$$[\psi_\xi(x),\bar{\psi}_{\xi'}(y)]=\int \tilde{\mathrm{d}k}\sum_\alpha\left(u_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}-v_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\right)$$

注意到 u, v 的自旋求和公式(2.194)，(2.195)，我们有

$$\sum_\alpha u_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)=\frac{(\not{k}+m)_{\xi\xi'}}{2m}$$

$$-\sum_\alpha v_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)=\frac{(-\not{k}+m)_{\xi\xi'}}{2m}$$

这使得对易关系右边两项的相对负号变成了正号. 于是

$$[\psi_\xi(x),\bar{\psi}_{\xi'}(y)]=(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)_{\xi\xi'}\Delta_1(x-y) \tag{3.199}$$

其中

$$\Delta_1(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}]\neq 0 \quad \text{对}(x-y)^2<0 \tag{3.200}$$

事实上，对于等时情况，$x^0=y^0$.

$$\Delta_1(\vec{x}-\vec{y},0)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}2\cdot\cos[\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})]\neq 0 \quad \text{对}\vec{x}-\vec{y}\neq 0$$

再由 Lorentz 不变性，对一般类空间隔$(x-y)^2<0$，有 $\Delta_1(x-y)\neq 0$.

因此，若自旋 1/2 场用对易关系量子化，则将得出，对于类空间隔，场算符对易子不为 0 进而定域可观测量对易子不为 0，导致了微观因果性的破坏. 另一方面，若标量场用反对易关系来量子化，则会出现同样问题：我们将得出，对于类空间隔，场算符的反对易子不为 0 进而定域可观测量对易子不为 0，微观因果性也遭到破坏！

以上只是表明自旋与统计关系的两个例子. 由于自旋不同，自旋 1/2 的场和自旋为 0 的场各自服从不同的统计. 一般来说，在一个定域的相对论量子场论中，自旋和统计之间有确定的关系：

对于半奇数自旋场，必须用反对易子来量子化，这导致 Fermi - Dirac 统计；

对于整数自旋场，必须用对易子来量子化，这导致 Bose - Einstein 统计.

这一结论，在公理化场论中可作一般性证明.

由于反对易性，两个 Dirac 场的编时乘积被定义为

$$\begin{aligned}T\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)&=\theta(x^0-y^0)\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)-\theta(y^0-x^0)\bar{\psi}_{\xi'}(y)\psi_\xi(x)\\&=-T\bar{\psi}_{\xi'}(y)\psi_\xi(x)\end{aligned} \tag{3.201}$$

因此，在 T 乘积内部，两个 Fermion 算符彼此反对易. Dirac 场的 Feynman 传播子，即编时乘积的真空平均值，可表达为

$$\langle 0|T\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)|0\rangle=\mathrm{i}S(x-y)_{\xi\xi'}$$

$$S(x-y)=-(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)G_{\mathrm{F}}(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)} \tag{3.202}$$

为证明上式，我们写

$$\psi=U+\bar{V},\quad \bar{\psi}=\bar{U}+V$$

它们与展开式(3.166)相应. 从中可见，U 和 V 各含消灭算符 b 和 d，$\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 各含产生算符 b^+ 和 d^+. 于是

$$\langle 0|T\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)|0\rangle=\theta(x^0-y^0)\{U_\xi(x),\bar{U}_{\xi'}(y)\}-\theta(y^0-x^0)\{V_{\xi'}(y),\bar{V}_\xi(x)\}$$

但

$$\{U_\xi(x),\bar{U}_{\xi'}(y)\}=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}(\not{k}+m)_{\xi\xi'}$$

$$\{V_{\xi'}(y),\bar{V}_{\xi}(x)\}=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}(\not{k}-m)_{\xi\xi'}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)|0\rangle\\
&=\theta(x^0-y^0)(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)_{\xi\xi'}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\\
&\quad+\theta(y^0-x^0)(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)_{\xi\xi'}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\\
&=(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)_{\xi\xi'}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}[\theta(x^0-y^0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}]\\
&=(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)_{\xi\xi'}(-\mathrm{i})G_{\mathrm{F}}(x-y)=\mathrm{i}S(x-y)_{\xi\xi'}
\end{aligned}$$

这正是(3.202). 在得出上面的第二步等式时，曾利用含$\partial_{x^0}\theta(x^0-y^0)$和$\partial_{x^0}\theta(y^0-x^0)$的项彼此相消.

最后我们对等时情况下 Dirac 场 T 乘积的定义问题作一简略说明. 当 $x^0=y^0,\vec{x}\neq\vec{y}$时，$\{\psi_{\xi}(x),\bar{\psi}_{\xi'}(y)\}=\gamma^0_{\xi\xi'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})=0$，$\psi$ 与 $\bar{\psi}$ 反对易，故(3.201)表示的 $T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)$仍然有定义. 然而当 $x^0=y^0,\vec{x}=\vec{y}$时，ψ 与 $\bar{\psi}$ 的交换将导致奇异项出现，所以(3.201)表示的 T 乘积没有定义. 为了解决这一疑难，惯例是取

$$T\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi'}(x)=\frac{1}{2}[\psi_{\xi}(x)\bar{\psi}_{\xi'}(x)-\bar{\psi}_{\xi'}(x)\psi_{\xi}(x)]\tag{3.203}$$

即 T 乘积等于两个算符的反对称乘积. 此定义也适用于 $x^0=y^0,\vec{x}\neq\vec{y}$情况即适用于 $T\psi_{\xi}(x^0,\vec{x})\bar{\psi}_{\xi'}(x^0,\vec{y})$，此时它与(3.201)给出的定义一致.

问题 3.17　导出 Dirac 场的传播子表达式(3.202).

3.6　分立对称性

至此，我们所讨论的对称性，包括 Poincaré 不变性和内部对称性，都集中在连续对称变换方面，这些变换可以由一系列无穷小变换生成. 下面我们要讨论另一类对称性即所谓分立对称性，它们与连续对称性不同，不能表达成一系列无穷小变换之积. 这些分立对称性包括空间反射或宇称变换 $\mathcal{P}$，电荷共轭 C 和时间反演 $\mathcal{T}$. 空间反射 $\mathcal{P}$ 和时间反演 $\mathcal{T}$ 实际上是 Poincaré 变换的一部分，但由于其分立性质以及在物理学中的特殊重要性，有必要单独进行研究.

3.6.1　宇称

首先我们考虑 Klein－Gordon 场 $\varphi(x)$的宇称变换. $\varphi(x)$的 $\mathcal{P}$ 变换为

$$\varphi(x)\rightarrow \pm\varphi(\tilde{x}),\quad \tilde{x}^{\mu}=x_{\mu} \tag{3.204}$$

其中 ± 号对应 φ 的内禀宇称，+ 号者为标量，- 号者为赝标量. 至于某个场究竟取 + 号还是 - 号应由实验来决定. 如实验表明，描述粒子 π，K 的场都是赝标场. 注意(3.204)的右边对应经典场变换 $\varphi'(x)$，即只是函数的改变.

在 $\mathcal{P}$ 变换(3.204)下，自由 Klein - Gordon 场的拉氏密度(3.103)的变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x)&=\partial_{\mu}\varphi^{+}(x)\partial^{\mu}\varphi(x)-m^{2}\varphi^{+}(x)\varphi(x)\\&\rightarrow\partial_{\mu}[\pm\varphi^{+}(\tilde{x})]\,\partial^{\mu}[\pm\varphi(\tilde{x})]-m^{2}[\pm\varphi^{+}(\tilde{x})][\pm\varphi(\tilde{x})]\\&=\tilde{\partial}_{\mu}\varphi^{+}(\tilde{x})\,\tilde{\partial}^{\mu}\varphi(\tilde{x})-m^{2}\varphi^{+}(\tilde{x})\varphi(\tilde{x})=\mathcal{L}(\tilde{x})\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\partial}^{\mu}\equiv(\partial_0,-\partial_i)$. 注意 $\mathcal{P}$ 变换只对场算符进行，而 $\partial_{\mu}\rightarrow\tilde{\partial}_{\mu}$ 的改写是由于 $\varphi^{+}(x)$ 的宗量从 $x\rightarrow\tilde{x}$ 之后诱导产生的. 进而作用量

$$I=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)\rightarrow\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\tilde{x})=\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)=I$$

是保持不变的. 这里已考虑到三维坐标 $x^{i}(i=1,2,3)$ 的积分限是从 $-\infty$ 到 $+\infty$. 此外，等时对易关系(3.112)或重写为

$$[\varphi(x),\pi(x')]_{t=t'}=\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

在 $\mathcal{P}$ 变换下将变换成

$$[\varphi(\tilde{x}),\pi(\tilde{x}')]_{t=t'}=\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

或

$$[\varphi(-\vec{x},t),\pi(-\vec{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}'-\vec{x})$$

显然也是不变的. 因此，宇称变换 $\mathcal{P}$ 是理论的一个对称运算.

我们希望寻求 Hilbert 空间中的幺正算符 $\mathcal{P}_{s}$ 和 $\mathcal{P}_{ps}$ 来表达上述变换，使得

$$\mathcal{P}_{s}\varphi(x)\mathcal{P}_{s}^{-1}=+\varphi(\tilde{x}),\quad \tilde{x}^{\mu}=x_{\mu} \tag{3.205}$$

$$\mathcal{P}_{ps}\varphi(x)\mathcal{P}_{ps}^{-1}=-\varphi(\tilde{x}),\quad \tilde{x}^{\mu}=x_{\mu} \tag{3.206}$$

求解在动量空间中进行比较方便，我们可以通过产生和消灭算符来表达 $\mathcal{P}$. 为此，将利用 $\varphi(x)$ 的平面波展开式(3.113).

先求解标量场的 $\mathcal{P}_{s}$. 利用(3.113)，(3.205)成为

$$\begin{aligned}&\int\tilde{\mathrm{d}k}[\mathcal{P}_{s}a(k)\,\mathcal{P}_{s}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{P}_{s}b^{+}(k)\,\mathcal{P}_{s}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]\\&=\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\tilde{x}}+b^{+}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\tilde{x}}]\\&=\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^{+}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]\\&=\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(\tilde{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^{+}(\tilde{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]\quad\tilde{k}^{\mu}=k_{\mu}\end{aligned}$$

最后一步中已作了积分变量的代换 $\vec{k}\rightarrow-\vec{k}$. 比较上式的首尾，得到

$$\mathcal{P}_s a(k)\mathcal{P}_s^{-1}=a(\tilde{k}) \tag{3.207a}$$
$$\mathcal{P}_s b^+(k)\mathcal{P}_s^{-1}=b^+(\tilde{k})$$

或

$$\mathcal{P}_s b(k)\mathcal{P}_s^{-1}=b(\tilde{k}) \tag{3.207b}$$

因为所求的$\mathcal{P}_s$是幺正算符，故可以写

$$\mathcal{P}_s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_s},\quad P_s=P_s^+\text{为厄密算符} \tag{3.208}$$

将(3.208)代入(3.207a)，得

$$\mathcal{P}_s a(k)\mathcal{P}_s^{-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}P_s}a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P_s}=a(k)+\mathrm{i}[P_s,a(k)]+\frac{\mathrm{i}^2}{2}[P_s,[P_s,a(k)]]$$
$$+\cdots+\frac{\mathrm{i}^n}{n!}[P_s\cdots[P_s,a(k)]\cdots]+\cdots=a(\tilde{k}) \tag{3.209}$$

为满足上式，可以选择

$$[P_s,a(k)]=\frac{\lambda}{2}[a(k)\pm a(\tilde{k})] \tag{3.210}$$

其中常数λ及$\pm$符号待定. 由此

$$\begin{aligned}[P_s,a(\tilde{k})]&=\frac{\lambda}{2}[a(\tilde{k})\pm a(k)]\\ [P_s,[P_s,a(k)]]&=\frac{\lambda^2}{2}[a(k)\pm a(\tilde{k})]\\ [P_s,[P_s,[P_s,a(k)]]]&=\frac{\lambda^3}{2}[a(k)\pm a(\tilde{k})]\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3.211}$$

于是(3.209)成为

$$\mathcal{P}_s a(k)\mathcal{P}_s^{-1}=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda})a(k)+\frac{1}{2}(\mp 1\pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda})a(\tilde{k})=a(\tilde{k}) \tag{3.212}$$

为使上式成立，需取$\lambda=\pi$(或$-\pi$)及下面的符号即

$$[P_s,a(k)]=\frac{\pi}{2}[a(k)-a(\tilde{k})] \tag{3.213a}$$

类似地，将(3.208)代入(3.207b)可得

$$[P_s,b(k)]=\frac{\pi}{2}[b(k)-b(\tilde{k})] \tag{3.213b}$$

满足(3.213a)和(3.213b)的P_s可写为

$$P_s=-\frac{\pi}{2}\int \mathrm{d}\tilde{k}\{a^+(k)[a(k)-a(\tilde{k})]+b^+(k)[b(k)-b(\tilde{k})]\} \tag{3.214}$$

它显然是厄密的. 因此标量场的宇称算符

$$\mathcal{P}_s = \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int \tilde{dk}[a^+(k)a(k) - a^+(k)a(\tilde{k}) + b^+(k)b(k) - b^+(k)b(\tilde{k})]\right\} \tag{3.215}$$

利用同样的方法可以求出赝标场的宇称算符. 这时我们需从(3.206)出发. 代替(3.207), 我们将有

$$\mathcal{P}_{ps}a(k)\mathcal{P}_{ps}^{-1} = -a(\tilde{k}) \tag{3.216a}$$

$$\mathcal{P}_{ps}b(k)\mathcal{P}_{ps}^{-1} = -b(\tilde{k}) \tag{3.216b}$$

写

$$\mathcal{P}_{ps} = e^{iP_{ps}}, \quad P_{ps} = P_{ps}^+ \tag{3.217}$$

进而代替(3.213), 我们有

$$[P_{ps}, a(k)] = \frac{\pi}{2}[a(k) + a(\tilde{k})] \tag{3.218a}$$

$$[P_{ps}, b(k)] = \frac{\pi}{2}[b(k) + b(\tilde{k})] \tag{3.218b}$$

于是

$$\mathcal{P}_{ps} = \exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int \tilde{dk}[a^+(k)a(k) + a^+(k)a(\tilde{k}) + b^+(k)b(k) + b^+(k)b(\tilde{k})]\right\} \tag{3.219}$$

$\mathcal{P}_s$和$\mathcal{P}_{ps}$都是幺正的, 且满足

$$\mathcal{P}_s|0\rangle = \mathcal{P}_{ps}|0\rangle = |0\rangle \tag{3.220}$$

不难证实, (3.118)表示的四动量算符

$$P^\mu = \int \tilde{dk}k^\mu[a^+(k)a(k) + b^+(k)b(k)]$$

在$\mathcal{P}$变换下变成

$$\mathcal{P}_s P^\mu \mathcal{P}_s^{-1} = \mathcal{P}_{ps}P^\mu\mathcal{P}_{ps}^{-1} = P_\mu \tag{3.221}$$

即空间分量$P^i(i=1,2,3)$变号, 这与物理直观一致; 而时间分量$P^0 = H$不变, 这意味着宇称守恒.

其次, 我们来考虑 Dirac 场的宇称变换. 根据(2.107), Dirac 场的$\mathcal{P}$变换应为

$$\psi(x) \to \gamma^0\psi(\tilde{x}), \quad \tilde{x}^\mu = x_\mu \tag{3.222}$$

右边可能的任意相因子已取为 1. 在此变换下, 自由 Dirac 场的拉氏密度(3.177)的变换是

$$\mathcal{L}(x) = :i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x): \to \mathcal{L}(\tilde{x})$$

因此作用量$I = \int d^4x\ \mathcal{L}(x)$将保持不变. 此外, 等时对易子(3.173)在$\mathcal{P}$变换(3.222)下也是不变的. 所以宇称变换是理论的对称运算.

从量子场的观点，为表达上述变换，需寻找 Hilbert 空间中的一个幺正算符 $\mathcal{P}$，使得

$$\mathcal{P}\,\psi(x)\,\mathcal{P}^{-1}=\gamma^0\psi(\tilde{x}) \tag{3.223}$$

现在利用(3.166)中 $\psi(x)$ 的展开式. 然而，为了讨论的方便，其中的旋量 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 将选择由(2.187)和(2.188)所决定，即其中的 $\varphi^{(\alpha)}$，$\chi^{(\alpha)}$ 都取为静止系中 σ^3 的本征态而不是我们一直使用的 $\vec{\sigma}\cdot\hat{k}$ 的本征态. 于是(3.223)成为

$$\int \mathrm{d}\tilde{k}\left[\mathcal{P}\,b_\alpha(k)\,\mathcal{P}^{-1}u^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{P}\,d_\alpha^+(k)\,\mathcal{P}^{-1}v^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right]$$

$$=\int \mathrm{d}\tilde{k}\left[b_\alpha(\tilde{k})u^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-d_\alpha^+(\tilde{k})v^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right] \tag{3.224}$$

其中 $\mathrm{d}\tilde{k}=\dfrac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\dfrac{m}{k^0}$. 得出右边表达式时曾利用了 $k\cdot\tilde{x}=\tilde{k}\cdot x$ 以及

$$\gamma^0u^{(\alpha)}(\tilde{k})=\gamma^0\frac{\tilde{\not{k}}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(m,0)\\0\end{pmatrix}=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\gamma^0\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(m,0)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}(m,0)\\0\end{pmatrix}=u^{(\alpha)}(k) \tag{3.225}$$

$$\gamma^0v^{(\alpha)}(\tilde{k})=\gamma^0\frac{-\tilde{\not{k}}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\alpha)}(m,0)\end{pmatrix}=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\gamma^0\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\alpha)}(m,0)\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\alpha)}(m,0)\end{pmatrix}=-v^{(\alpha)}(k) \tag{3.226}$$

比较(3.224)的两边，得

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}\,b_\alpha(k)\,\mathcal{P}^{-1}=b_\alpha(\tilde{k})\\&\mathcal{P}\,d_\alpha^+(k)\,\mathcal{P}^{-1}=-d_\alpha^+(\tilde{k})\end{aligned} \tag{3.227a}$$

或

$$\mathcal{P}\,d_\alpha(k)\,\mathcal{P}^{-1}=-d_\alpha(\tilde{k}) \tag{3.227b}$$

从(3.227)可以看出，$(f-\bar{f})$ (fermion - antifermion)系统的相对内禀宇称为 -1. 事实上，如设 $(f-\bar{f})$ 系统在质心系处于 S 态，则 $\mathcal{P}$ 算符对该态的作用为

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}\int \mathrm{d}\tilde{k}f(|\vec{k}|)b_\alpha^+(k)d_\beta^+(\tilde{k})\,|\,0\rangle\\&=\int \mathrm{d}\tilde{k}f(|\vec{k}|)\,\mathcal{P}\,b_\alpha^+(k)\,\mathcal{P}^{-1}\,\mathcal{P}\,d_\beta^+(\tilde{k})\,\mathcal{P}^{-1}\,\mathcal{P}\,|\,0\rangle\\&=-\int \mathrm{d}\tilde{k}f(|\vec{k}|)b_\alpha^+(\tilde{k})d_\beta^+(k)\,|\,0\rangle\\&=-\int \mathrm{d}\tilde{k}f(|\vec{k}|)b_\alpha^+(k)d_\beta^+(\tilde{k})\,|\,0\rangle\end{aligned} \tag{3.228}$$

使该态改变一个负号. 又从

$$\mathcal{P}^2\psi(x)\mathcal{P}^{-2}=\mathcal{P}\gamma^0\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\gamma^0\gamma^0\psi(x)=\psi(x)$$

可见

$$\mathcal{P}^2=1 \tag{3.229}$$

$\mathcal{P}$ 确为反射算符. 此处恰有 $\mathcal{P}^2=1$ 是因为在 $\mathcal{P}$ 变换的定义式(3.223)中,右边可能的任意相因子已取成了 1. 类似于标量场宇称算符的求法,可得出满足(3.227)式的 $\mathcal{P}$ 的一个显示形式为

$$\mathcal{P}=\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}\int\tilde{\mathrm{d}k}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha^+(k)b_\alpha(k)-b_\alpha^+(k)b_\alpha(\tilde{k})+d_\alpha^+(k)d_\alpha(k)+d_\alpha^+(k)d_\alpha(\tilde{k})]\right\} \tag{3.230}$$

$\mathcal{P}$ 是幺正的,满足

$$\mathcal{P}|0\rangle=|0\rangle \tag{3.231}$$

注意到(3.230)中,b 算符部分与(3.215)中标量场算符形式相同,而 d 算符部分与(3.219)中赝标场算符形式相同. 这是因为当写宇称算符为

$$\mathcal{P}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}P}$$

的形式时,可以证明对 b, d 算符,必须满足

$$[P,b_\alpha(k)]=\frac{\pi}{2}[b_\alpha(k)-b_\alpha(\tilde{k})],\quad [P,d_\alpha(k)]=\frac{\pi}{2}[d_\alpha(k)+d_\alpha(\tilde{k})]$$

它们分别与标量场的(3.213)和赝标场的(3.218)形式相同. 由于 P 是算符的双线性型,满足上面两式与算符是对易或反对易无关.

Dirac 场的四动量算符 P^μ 由(3.176)给出,只是目前应理解与算符 $b_\alpha(k)$, $d_\alpha^+(k)$ 相应的旋量 $u^{(\alpha)}(k)$, $v^{(\alpha)}(k)$ 是由(2.187)和(2.188)所决定. 容易证实,类似于 Klein - Gordon 场情况,P^μ 的宇称变换为

$$\mathcal{P}P^\mu\mathcal{P}=P_\mu \tag{3.232}$$

最后我们给出矢量场 $A^\mu(x)$ 的宇称变换. A^μ 在 Lorentz 变换下是一个四矢量而在宇称变换下可有矢量与赝矢量之分. 对于 Maxwell 场,我们规定其宇称变换为

$$\mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1}=A^\mu(\tilde{x}) \tag{3.233}$$

即 A_0 不变号, $A_i(i=1,2,3)$ 变号, A_μ 变换如一个矢量. 这将保证电磁耦合项的 $\mathcal{P}$ 不变性.

问题 3.18 求证赝标场的宇称算符 $\mathcal{P}_{ps}$ 的表达式(3.219).

问题 3.19 求证 Dirac 场宇称算符的表达式(3.230).

3.6.2　电荷共轭

我们已经见到，量子场可以描述具有相同质量和自旋的正反粒子，它们具有相反的荷，这种荷可以是电荷、重子数或轻子数等. 电荷共轭不变性或 C 不变性就是在正反粒子间进行交换的对称性，其中也存在反粒子等同于粒子的特殊情况.

我们仍然从标量场开始. 在(3.3.3)节已经知道，复标量场 $\varphi(x)$，$\varphi^+(x)$ 描述带电标量正反粒子. 令 C 是 Hilbert 空间中的电荷共轭算符，它的作用是交换粒子和反粒子，即

$$\begin{aligned} C\ a(k)\ C^{-1} &= b(k) \\ C\ b(k)\ C^{-1} &= a(k) \end{aligned} \tag{3.234}$$

或用场算符形式来表达

$$C\ \varphi(x)\ C^{-1} = \varphi^+(x) \tag{3.235}$$

显然，C 保持拉氏密度(3.103)和对易关系(3.112)不变，因而是理论的对称运算. 算符 C 的显示形式可类似于算符 $\mathcal{P}$ 那样构造，结果是

$$C = \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}\int \tilde{\mathrm{d}}k[a^+(k) - b^+(k)][a(k) - b(k)]\right\} \tag{3.236}$$

C 幺正且满足

$$C\,|0\rangle = |0\rangle \tag{3.237}$$

对于实标量场 $\varphi(x)$，由于它所描述的粒子与反粒子等同，故有

$$C\ \varphi(x)\ C^{-1} = \varphi(x) \tag{3.238}$$

即 $\varphi(x)$ 在 C 运算下保持不变.

电磁场 $A^\mu(x)$ 描述光子，由于 A^μ 也是实场而联系它各个分量的变换不是内部对称变换，所以光子的反粒子是其自身. C 算符对 A^μ 的作用被规定为

$$C\ A_\mu(x)\ C^{-1} = -A_\mu(x) \tag{3.239}$$

正如下一章将见到的，右边的负号(相因子)是为了保持电磁相互作用项的 C 不变性.

Dirac 场 $\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$ 是复场，它们描述自旋为 1/2 的正反粒子. 与电荷共轭旋量的定义式(2.123)相应，量子场的电荷共轭变换应为

$$\psi(x) \to \psi^C(x) = C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}^C(x) = \psi^{\mathrm{T}}(x)C \tag{3.240}$$

右边本可相差一个任意的相因子，它目前已被取为 1. 转置 T 只对旋量指标. 在此变换下，自由 Dirac 场的作用量是不变的，因为(3.177)给出的拉氏密度

$$\mathcal{L} = :\mathrm{i}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x):$$

变换成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^C &= :\mathrm{i}\bar{\psi}^C\gamma^\mu\partial_\mu\psi^C - m\bar{\psi}^C\psi^C: = :\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}C\gamma^\mu\partial_\mu C\bar{\psi}^{\mathrm{T}} - m\psi^{\mathrm{T}}CC\bar{\psi}^{\mathrm{T}}: \\ &= :\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}\gamma^{\mu\mathrm{T}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\mathrm{T}} + m\psi^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}: = : -\mathrm{i}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi: \end{aligned} \tag{3.241}$$

$$=:-\mathrm{i}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)+\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi:=\mathcal{L}+\text{四散度项}=\mathcal{L}$$

其中已利用了 $C^2=-I$, $C\gamma^\mu C=\gamma^{\mu\mathrm{T}}$ 以及在正规乘积内部,两个 Fermion 算符的交换将导致一个负号. 四散度项由于矢量流守恒 $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)=0$ 而实际为零. 此外,等时对易关系也是不变的. 因为从(3.173)

$$\{\psi_\xi(x),\bar{\psi}_{\xi'}(x')\}_{t=t'}=(\gamma^0)_{\xi\xi'}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

两边乘 $C_{\eta'\xi'}C_{\xi\eta}$, 可得

$$\{(\psi^{\mathrm{T}}(x)C)_\eta,(C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x')_{\eta'}\}_{t=t'}=(C\gamma^{0\mathrm{T}}C)_{\eta'\eta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

即

$$\{\psi^C_{\eta'}(x'),\bar{\psi}^C_\eta(x)\}_{t=t'}=(\gamma^0)_{\eta'\eta}\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}) \tag{3.242}$$

可见, $\psi^C(x)$, $\bar{\psi}^C(x)$满足与 $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$同样的等时反对易关系,或者说,在两边作 C 变换之后,等时反对易子仍保持正确的形式. 因此, 变换(3.240)是理论的对称运算.

我们将寻找生成这一变换的 Hilbert 空间的幺正算符 $\mathcal{C}$, 使

$$\mathcal{C}\,\psi(x)\,\mathcal{C}^{-1}=C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \tag{3.243}$$

为作 $\psi(x)$的平面波展开, 我们选择与 Dirac 旋量的 helicity 解相应的消灭和产生算符

$$b(k,\pm),\quad d(k,\pm)\text{ 和 }b^+(k,\pm),\quad d^+(k,\pm)$$

所取的 helicity 解 $u(k,\pm)$就等同于(2.187)和(2.190)所给出的 $u^{(\alpha)}(k)$, 但目前重新标记为

$$u(k,\pm)=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi_\pm(\hat{k})\\0\end{pmatrix} \tag{3.244}$$

其中 $\varphi_\pm(\hat{k})\equiv\varphi^{(\alpha)}(\hat{k})$, $\pm$号分别对应 $\alpha=1,2$. 因而 $\varphi_\pm(\hat{k})$满足

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{k}\varphi_\pm(\hat{k})=\pm\varphi_\pm(\hat{k}) \tag{3.245}$$

$$\varphi^+_\varepsilon(\hat{k})\varphi_{\varepsilon'}(\hat{k})=\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\quad(\varepsilon,\varepsilon'=\pm) \tag{3.246}$$

而 helicity 解 $v(k,\pm)$定义为 $u(k,\pm)$的电荷共轭即

$$v(k,\pm)=C\bar{u}^{\mathrm{T}}(k,\pm)=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi_\pm(\hat{k})\end{pmatrix} \tag{3.247}$$

[参阅附录十二]. 由 Dirac(或者 Weyl)表象

$$C\gamma^{0\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\sigma^2\\-\mathrm{i}\sigma^2&0\end{pmatrix}$$

可得出

$$\chi_\pm(\hat{k})=-\mathrm{i}\sigma^2\varphi^*_\pm(\hat{k}) \tag{3.248}$$

利用

$$\sigma^2 \vec{\sigma}^* \sigma^2 = -\vec{\sigma}$$

容易证明

$$-\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \chi_{\pm}(\hat{k}) = \pm \chi_{\pm}(\hat{k}) \tag{3.249}$$

从(3.245)，(3.249)以及$[\vec{\Sigma} \cdot \hat{k}, \not{k}] = 0$不难看出，$u(k, \pm)$的 helicity 是以$+\hat{k}$方向为准的，而$v(k, \pm)$的 helicity 是以$-\hat{k}$方向为准的. 电荷共轭时，

$$\begin{aligned} v(k, \pm) &= C\bar{u}^{\mathrm{T}}(k, \pm) \\ u(k, \pm) &= C\bar{v}^{\mathrm{T}}(k, \pm) \end{aligned} \tag{3.250}$$

解的 helicity 保持不变.

采用上述选择，$\psi(x)$,$\bar{\psi}(x)$的展开式成为

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \tilde{\mathrm{d}k}[b(k, \pm)u(k, \pm)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + d^+(k, \pm)v(k, \pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \\ \bar{\psi}(x) &= \int \tilde{\mathrm{d}k}[b^+(k, \pm)\bar{u}(k, \pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + d(k, \pm)\bar{v}(k, \pm)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}] \end{aligned} \tag{3.251}$$

代入(3.243)，并利用(3.250)得

$$\begin{aligned} &\int \tilde{\mathrm{d}k}[C\, b(k, \pm)\, C^{-1}u(k, \pm)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + C\, d^+(k, \pm)\, C^{-1}v(k, \pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k}[b^+(k, \pm)C\bar{u}^{\mathrm{T}}(k, \pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + d(k, \pm)C\bar{v}^{\mathrm{T}}(k, \pm)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}] \\ &= \int \tilde{\mathrm{d}k}[b^+(k, \pm)v(k, \pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + d(k, \pm)u(k, \pm)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}] \end{aligned}$$

比较上式两边得出

$$\begin{aligned} C\, b(k, \pm)\, C^{-1} &= d(k, \pm) \\ C\, d^+(k, \pm)\, C^{-1} &= b^+(k, \pm) \end{aligned} \tag{3.252}$$

因此，C的作用是交换具有相同能量、动量和 helicity 的粒子和反粒子. 算符C的显示式可类似算符$\mathcal{P}$那样求出，结果为

$$C = \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}\int \tilde{\mathrm{d}k} \sum_{\varepsilon=\pm}[b^+(k, \varepsilon) - d^+(k, \varepsilon)][b(k, \varepsilon) - d(k, \varepsilon)]\right\} \tag{3.253}$$

它是幺正的并保持真空不变即

$$C|0\rangle = |0\rangle \tag{3.254}$$

问题 3.20　构造复标量场的电荷共轭算符(3.236).

3.6.3 时间反演

时间反演的含义是 $t\to -t$，即改变物理过程时间进行的方向. 时间反演不变性的含义是，在变换 $t\to -t$ 下，物理规律具有不变性. 在经典力学中，这意味着，若广义坐标集合 $q(t)$ 是运动方程的一个解，则 $q(-t)$ 也是运动方程的一个解. 形象地说，前者可对应表现物理过程的影片正放，而后者对应同一影片的倒放，包括初终位置交换及过程中各点的速度倒转. 实际上，在由大量粒子组成的宏观体系中，一个过程的时间反演往往由于实现的几率极小而不可能发生，因而物理过程表现为微观可逆而宏观不可逆，即微观可逆经典力学导致了宏观不可逆热力学.

在量子理论中，时间反演变换对应一个算符，它把沿 t 发展的态变成它的时间逆向态，即沿 $-t$ 发展的态. 量子场论中，任何态都可以由场算符作用于真空态而得到，因而时间反演变换归结为变换算符 $\mathcal{T}$ 对场算符的作用，其中包括将场算符宗量中的 $t\to -t$. 量子场论中的时间反演不变性是指作用量(因而运动方程)以及等时对易关系对于变换 $\mathcal{T}$ 是不变的.

下面我们来寻找场论中表达时间反演变换的算符. 我们将会发现这一算符不是幺正的.

首先讨论 Klein - Gordon 场. 考虑变换

$$\varphi(\vec{x},\ t)\to \pm\varphi(\vec{x},\ -t) \tag{3.255}$$

在此变换下，拉氏密度(3.103)即

$$\mathcal{L}(x)=\partial_\mu\varphi^+(x)\partial^\mu\varphi(x)-m^2\varphi^+(x)\varphi(x)\to \mathcal{L}(\vec{x},\ -t)$$

因而作用量

$$I=\int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(x)\to\int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\vec{x},\ -t)=\int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(x)$$

保持不变. 但是(3.112)中的等时对易子

$$[\varphi(\vec{x},\ t),\dot{\varphi}^+(\vec{x}',\ t)]=\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

变成为

$$[\pm\varphi(\vec{x},\ -t),\ \pm\frac{\partial}{\partial(-t)}\varphi^+(\vec{x}',\ -t)]=-\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

它并不是不变的，除非右边同时有 $\mathrm{i}\to -\mathrm{i}$. 注意 $\dot{\varphi}^+(\vec{x}',\ t)$ 中的 $\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial(-t)}$.

因此，如果我们要寻找一个时间反演算符 $\mathcal{T}$，使得

$$\mathcal{T}\ \varphi(\vec{x},\ t)\mathcal{T}^{-1}=\pm\varphi(\vec{x},\ -t) \tag{3.256}$$

成为理论的一个对称运算，则 $\mathcal{T}$ 中必须包括一个复共轭运算 K，满足

$$K\lambda=\lambda^*K\quad(\lambda\text{ 是 c 数}) \tag{3.257}$$

这时上述等时对易关系将变换成

$$\mathcal{T}[\varphi(\vec{x},t),\dot{\varphi}^{+}(\vec{x}',t)]\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{T}\,\mathrm{i}\,\mathcal{T}^{-1}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

它导致

$$[\pm\varphi(\vec{x},-t),\pm\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{+}(\vec{x}',-t)]=-\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

或

$$[\varphi(\vec{x},-t),\frac{\partial}{\partial(-t)}\varphi^{+}(\vec{x}',-t)]=\mathrm{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{x}')$$

因而是不变的. 于是，我们可以写

$$\mathcal{T}=\mathcal{U}K \tag{3.258}$$

其中$\mathcal{U}$是一个待定的幺正算符. 利用$\varphi(x)$的展开式(3.113)以及(3.258)，(3.256)或$\mathcal{T}\varphi(x)\mathcal{T}^{-1}=\pm\varphi(-\tilde{x})$成为

$$\mathcal{U}K\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^{+}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]K^{-1}\mathcal{U}^{-1}=\pm\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\tilde{x}}+b^{+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\tilde{x}}]$$

进而

$$\int\tilde{\mathrm{d}k}[\mathcal{U}a(k)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{U}b^{+}(k)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}]=\pm\int\tilde{\mathrm{d}k}[a(\tilde{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+b^{+}(\tilde{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}]$$

上式右边已利用了$k\cdot\tilde{x}=\tilde{k}\cdot x$并作了积分变量代换$\vec{k}\to-\vec{k}$. 由此我们得到

$$\mathcal{U}a(k)\mathcal{U}^{-1}=\pm a(\tilde{k}) \tag{3.259a}$$
$$\mathcal{U}b^{+}(k)\mathcal{U}^{-1}=\pm b^{+}(\tilde{k})$$

或

$$\mathcal{U}b(k)\mathcal{U}^{-1}=\pm b(\tilde{k}) \tag{3.259b}$$

它们与算符$\mathcal{P}$对$a(k)$，$b(k)$的作用(3.207)和(3.216)一样，因此

$$\mathcal{U}=\begin{cases}\mathcal{P}_{\mathrm{s}} & \text{对(3.259)右边的+号}\\ \mathcal{P}_{\mathrm{ps}} & \text{对(3.259)右边的-号}\end{cases} \tag{3.260}$$

从(3.259)可以推知，四动量算符(3.118)的空间分量$\vec{P}$在$\mathcal{T}$变换下成为

$$\mathcal{T}\vec{P}\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{U}\vec{P}\mathcal{U}^{-1}=-\vec{P} \tag{3.261}$$

这与物理直观相一致.

应当指出，$\mathcal{T}=\mathcal{U}K$不是幺正算符，因为其中含复共轭运算K. K通常称为反幺正(或幺正反线性)算符，它满足

$$\langle K\alpha|K\beta\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle^{*} \tag{3.262}$$

$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$是Hilbert空间中的任意两个态. 作为比较，注意到幺正算符满足

$$\langle\mathcal{U}\alpha|\mathcal{U}\beta\rangle=\langle\alpha|\beta\rangle \tag{3.263}$$

为确立(3.262)式，利用K的如下性质：

(1)　$$K(\lambda_1|\alpha_1\rangle+\lambda_2|\alpha_2\rangle)=\lambda_1^{*}K|\alpha_1\rangle+\lambda_2^{*}K|\alpha_2\rangle \tag{3.264}$$

其中$|\alpha_1\rangle$，$|\alpha_2\rangle$是任意两个态，λ_1，λ_2是c数；

(2) $$\langle K\alpha | K\alpha\rangle = \langle \alpha | \alpha\rangle \tag{3.265}$$

因为态的模方是实数，不受复共轭运算 K 的影响. 现在设

$$|\alpha\rangle = |\alpha_1\rangle + \lambda |\alpha_2\rangle$$

代入(3.265)得

$$\langle K(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) | K(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\rangle = \langle \alpha_1 + \lambda\alpha_2 | \alpha_1 + \lambda\alpha_2\rangle$$

再利用(3.264)并将上式展开，导致

$$\lambda\langle K\alpha_2 | K\alpha_1\rangle + \lambda^*\langle K\alpha_1 | K\alpha_2\rangle = \lambda^*\langle \alpha_2 | \alpha_1\rangle + \lambda\langle \alpha_1 | \alpha_2\rangle$$

从中分别设 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = \mathrm{i}$，然后将所得的两等式相加，得到

$$\langle K\alpha_2 | K\alpha_1\rangle = \langle \alpha_1 | \alpha_2\rangle = \langle \alpha_2 | \alpha_1\rangle^*$$

这证实了 K 是反幺正的.

由(3.262)可以推出，$\mathcal{T} = \mathcal{U}K$ 也是反幺正的，因为

$$\langle \mathcal{T}\alpha | \mathcal{T}\beta\rangle = \langle \mathcal{U}K\alpha | \mathcal{U}K\beta\rangle = \langle K\alpha | \mathcal{U}^+\mathcal{U} | K\beta\rangle = \langle K\alpha | K\beta\rangle = \langle \alpha | \beta\rangle^* \tag{3.266}$$

对于 Dirac 场，如同 Klein - Gordon 场一样，时间反演算符 $\mathcal{T}$ 也是一个反幺正算符，即 $\mathcal{T} = \mathcal{U}K$. 这一算符应使得场 $\psi(x)$ 的变换为

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = T\psi(-\tilde{x}) \tag{3.267}$$

其中 T 是一个非奇异的 4×4 矩阵. 自由 Dirac 场论可以合理地假定是 $\mathcal{T}$ 不变的. 因而，为决定矩阵 T 的形式，可以利用作用量 I 在 $\mathcal{T}$ 运算下的不变性要求. 显然，若要求拉氏密度的 $\mathcal{T}$ 变换为

$$\mathcal{T}\mathcal{L}(x)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}(-\tilde{x}) \tag{3.268}$$

则作用量 $I = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$ 将是不变的. 取(3.177)中的 $\mathcal{L}(x)$，利用(3.267)，并考虑到 $\mathcal{T}$ 的反幺正性，(3.268)成为

$$:-\mathrm{i}\psi^+(-\tilde{x})T^+\gamma^{0*}\gamma^{\mu*}\partial_\mu T\psi(-\tilde{x}) - m\psi^+(-\tilde{x})T^+\gamma^{0*}T\psi(-\tilde{x}):$$

$$=:\mathrm{i}\psi^+(-\tilde{x})\gamma^0\gamma^\mu(-\tilde{\partial}_\mu)\psi(-\tilde{x}) - m\psi^+(-\tilde{x})\gamma^0\psi(-\tilde{x}):$$

其中 $\tilde{\partial}_\mu = (\partial_0, -\partial_i)$. 上式成立要求

$$T^+\gamma^{0*}T = \gamma^0 \tag{3.269}$$

$$T^+\gamma^{0*}\gamma^{\mu*}T\partial_\mu = \gamma^0\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu \tag{3.270}$$

不难证实，它们等价于

$$T^{-1}\gamma^{\mu*}T = \tilde{\gamma}^\mu = \gamma_\mu \tag{3.271}$$

$$T^{-1} = T^+ \tag{3.272}$$

因此，只要 T 满足条件(3.271)和(3.272)，则(3.268)成立，从而作用量是 $\mathcal{T}$ 不变的. 进一步可以证实，由于 $T^{-1} = T^+$，场 ψ 和 ψ^+ 的等时反对易子在 $\mathcal{T}$ 变

换下也是不变的. 事实上,等时反对易子

$$\{\psi_{\xi'}(x),\ \psi^{+}_{\eta'}(y)\}_{x^0=y^0}=\delta_{\xi'\eta'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

在 $\mathcal{T}$ 变换下将成为

$$\begin{aligned}T_{\xi'\xi}\{\psi_{\xi}(-\tilde{x}),\ \psi^{+}_{\eta}(-\tilde{y})\}_{-x^0=-y^0}T^{+}_{\eta\eta'}&=(TT^{+})_{\xi'\eta'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\\&=T_{\xi'\xi}\delta_{\xi\eta}T^{+}_{\eta\eta'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}$$

从而导致

$$\{\psi_{\xi}(-\tilde{x}),\ \psi^{+}_{\eta}(-\tilde{y})\}_{-x^0=-y^0}=\delta_{\xi\eta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

仍为正确的等时反对易子. 但应当指出,假如时间反演算符 $\mathcal{T}$ 中不含复共轭运算 K,则从(3.268)这一要求出发将导致

$$T^{+}\gamma^{\mu}T=\tilde{\gamma}^{\mu}\text{和}\ T^{+}T=-1$$

即 T 并非幺正矩阵. 结果 Dirac 场的等时反对易子将不可能是 $\mathcal{T}$ 不变的.

容易证明

$$T=-\mathrm{i}\gamma_5 C=\mathrm{i}\gamma^1\gamma^3 \tag{3.273}$$

满足条件(3.271)和(3.272)而且有

$$T^{\mathrm{T}}=-T,\quad T^{*}=-T^{+} \tag{3.274}$$

若考察 $\mathcal{T}^2$的作用,则有

$$\mathcal{T}^2\psi(x)\mathcal{T}^{-2}=\mathcal{T}\ T\psi(-\tilde{x})\mathcal{T}^{-1}=T^{*}T\psi(x)=-T^{+}T\psi(x)=-\psi(x) \tag{3.275}$$

可见,$\mathcal{T}$ 作为反演算符是合理的.

最后我们给出电磁场 $A_{\mu}(x)$的 $\mathcal{T}$ 变换形式. 它被规定为

$$\mathcal{T}\ A_{\mu}(x)\mathcal{T}^{-1}=A^{\mu}(-\tilde{x}) \tag{3.276}$$

这将保证电磁相互作用项的 $\mathcal{T}$ 不变性.

问题 3.21　证明:若时间反演算符$\mathcal{T}$中不含复共轭运算 K,则 Dirac 场的等时反对易子在$\mathcal{T}$变换下不是不变的.

第 4 章

相互作用量子场

自由场论是完全可解的，因为哈密顿量的本征值和本征态可以精确地求出. 然而只含自由场的理论是没有什么物理意义的，只有通过相互作用才能揭示物理世界的性质.

本章我们将考察场和场之间的耦合，确立相互作用量子场论的一般框架. 首先考虑电磁作用. 我们将通过定域的 U(1) 对称性，引入规范场的概念，说明 Maxwell 场本质上是 U(1) 规范场，并由此给出电磁作用的形式. 然后考虑非电磁作用. 对于它们，我们主要是从对称性来确定几种低能唯象耦合的形式. 最后我们讨论相互作用量子场论中的分立对称性和 $\mathcal{PCT}$ 定理.

4.1 定域对称性与 U(1) 规范场

至此所讨论的连续对称性大都对应于整体(global)变换，其特点是表达变换的参数是任意的、与时空坐标无关的常数. 然而，我们可以将这种整体的连续对称性进行推广，做法是将变换参数从任意常数换成任意的时空点的函数，即使得对称性随时空逐点变化. 这样导致的对称性称为定域(local)对称性.

一般来说，对称性的扩大要求引入新的场. 例如，内部连续对称性的定域化要求引入自旋为 1 的场，这就是所谓的规范场. 事实上，Maxwell 场本质上就是与 U(1) 定域对称性相联系的规范场.

考虑一个最简单的含经典 Dirac 场的拉氏密度

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{4.1}$$

它有整体的 U(1) 不变性，即在相位变换

$$\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi \tag{4.2}$$

下保持不变，其中 α 是一个任意常数. 现在将此 U(1) 对称性“定域化”，即要使得拉氏密度在定域的相变换

$$\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi \tag{4.3}$$

下也具有不变性，其中相位换成了时空点的任意函数 $\alpha(x)$. 我们注意到，$\mathcal{L}_0$ 中的 ∂_μ 是妨碍在(4.3)变换下保持不变的因素，因为在变换(4.3)下，

$$\partial_\mu\psi(x) \to \partial_\mu[e^{i\alpha(x)}\psi(x)] = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha]\psi(x)$$

因而

$$\mathcal{L}_0 \to i\bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha]\psi(x) = \mathcal{L}_0 - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha$$

不是不变的. 为了保持在定域变换(4.3)下的不变性，需将 $\mathcal{L}_0$ 进行推广. 为此，可以发明一个算子 $\mathcal{D}_\mu$ 以代替 ∂_μ，要求 $\mathcal{D}_\mu$ 在(4.3)下变换为

$$\mathcal{D}_\mu\psi \to e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu\psi = e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\psi(x)$$

或者以算子的语言

$$\mathcal{D}_\mu \to \mathcal{D}'_\mu = e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu e^{-i\alpha(x)} \tag{4.4}$$

这个算子 $\mathcal{D}_\mu$ 称为协变微商. 于是，通过代换

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu$$

我们推广

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L} \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \tag{4.5}$$

则 $\mathcal{L}$ 在(4.3)下显然是不变的.

余下的问题就是构造出算子 $\mathcal{D}_\mu$ 来. 设

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \tag{4.6}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是 x 的函数，e 是无量纲的实常数. 由对于 $\mathcal{D}_\mu$ 的变换要求(4.4)，我们有

$$\begin{aligned}\partial_\mu + ieA'_\mu(x) &= e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + ieA_\mu(x)]e^{-i\alpha(x)}\\ &= \partial_\mu - i\partial_\mu\alpha(x) + ieA_\mu(x)\\ &= \partial_\mu + ie\left[A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\right]\end{aligned}$$

由此得出 A_μ 必须变换为

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{4.7}$$

于是新的拉氏密度

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.8}$$

在共同的定域变换

$$\begin{aligned}&\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)\\ &A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned} \tag{4.9}$$

下是不变的.

这样，原来只具有整体 U(1) 对称性的 $\mathcal{L}_0$ 就被推广到具有定域 U(1) 对称性

的$\mathcal{L}$,代价是引入新的矢量场$A_\mu(x)$,它同守恒流$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$相耦合. 新场$A_\mu(x)$与∂_μ的量纲相同,因而有量纲L^{-1},可确认为四维时空的正则场(具有质量量纲的场). 此外,由(4.6)还可以看出,$A_\mu(x)$是实场,因为$i\partial_\mu$是厄密算符. 这个为了保持定域U(1)不变性而引入的场$A_\mu(x)$称为规范场. 注意(4.9)中A_μ的变换正是(2.249)表达的规范变换形式,因此定域U(1)变换(4.9)也称为规范变换.

一个完整的理论还必须包括$A_\mu(x)$的动能项. 此动能项在变换(4.9)下也必须是不变的. 注意到

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{4.10}$$

在变换(4.9)下不变,有量纲L^{-2},因而从它可以构造出动能项

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.11}$$

如果再加上Dirac场的质量项,则总的拉氏密度成为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.12}$$

它在规范变换(4.9)下是不变的. (4.12)正是旋量电动力学的拉氏密度,只要我们确认A_μ为电磁场,ψ为电子场,而e为电子的电荷. (4.12)中ψ场与A_μ场的耦合项表达了电磁相互作用,它的形式是由规范不变性完全确定的,通常称之为最小电磁耦合. 我们也注意到,在规范变换(4.9)下的不变性禁戒了A_μ的质量项$\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu$的出现.

以上的讨论表明,Maxwell场本质上是U(1)规范场. 由于U(1)群是Abelian群,所以U(1)规范场又称为Abelian规范场.

定域对称性也可以推广到Non-Abelian群如SU(2),SU(3),SO(N),…. 这时为了保持定域变换的不变性,必须引入多个矢量场$A_\mu^a(x)$,$a=1,2,\cdots,m$,这里m是群生成元的数目. 所得到的$A_\mu^a(x)$称为Yang-Mills规范场. 正是这一推广,促成了现代量子场论——规范场理论的迅猛发展.

问题4.1 证明拉氏密度(4.12)所具有的定域U(1)不变性并不导致与$J^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$不同的、新的守恒流.

4.2 电磁作用

我们只限于讨论自旋1/2场的最小电磁耦合[21]. 基于4.1节的讨论,耦合的形式由U(1)规范不变性来决定,即电磁作用可以通过在自由场的拉氏密度中作代换

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu \tag{4.13}$$

而引入. 这种做法既适用于经典场论也适用于量子场论. 因此,在自由量子 Dirac 场的拉氏密度(3.177)即

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = :\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi:$$

中作代换(4.13)则将导致 Dirac 场与 Maxwell 场的相互作用耦合项. 然后再加入电磁场的拉氏密度(取 Feynman 规范)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{e.m.}} = :-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2:, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.14}$$

我们将得到整个相互作用系统的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{L}_{\mathrm{e.m.}} + \mathcal{L}_{\mathrm{i}} \tag{4.15}$$

其中相互作用拉氏密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}} = -e:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x): \tag{4.16}$$

描写电子场与电磁场在时空点 x 的定域相互作用. 注意,为了减除真空对物理量可能的无穷大背景贡献,我们已将原自由场的拉氏密度都排成了正规乘积,这使得 $\mathcal{L}_i$ 中的场算符也自动地排成正规乘积. 这一形式不仅使电荷的真空平均值

$$e\langle 0|:\psi^+\psi:|0\rangle = 0 \tag{4.17}$$

保证真空成为电中性的,而且正如以后所见,保证了 $\mathcal{L}_{\mathrm{i}}$ 在电荷共轭 C 变换下是不变的. 不过,关于相互作用场的正规乘积的确切定义,有待后面说明. 由(4.16)所表达的这种最小电磁耦合完全符合实验,理论上又是可重整化的,所以是令人满意的.

拉氏密度(4.15)所导致的运动方程是

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = e:\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu:$$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = e:\gamma^\mu A_\mu\psi: \tag{4.18}$$

$$\Box A^\mu = e:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi: \tag{4.19}$$

利用运动方程(4.18)可以证明,电磁流

$$j^\mu = :\bar{\psi}\gamma^\mu\psi:$$

是守恒的. 事实上

$$\partial_\mu j^\mu = :(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi: = :\mathrm{i}(m\bar{\psi} + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu)\psi - \mathrm{i}\bar{\psi}(m\psi + e\gamma^\mu A_\mu\psi): = 0 \tag{4.20}$$

由此

$$\Box\partial_\mu A^\mu = e\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4.21}$$

即 $\partial_\mu A^\mu$ 如自由 Maxwell 场时一样,满足 0 质量的 Klein - Gordon 方程. 因此,它可以分成正频和负频两部分

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A^{\mu(+)} + \partial_\mu A^{\mu(-)} \tag{4.22}$$

物理的 Hilbert 空间$\mathcal{H}_1$中的态$|\psi\rangle$必须服从 Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}|\psi\rangle = 0 \tag{4.23}$$

以消除负模方态并保证纵光子和标量光子在物理上是不可观测的.

相互作用场与其共轭动量的正则对易关系仍按标准形式引入. 在目前情况下,由于$\mathcal{L}_i$中不含场的时间微商,故ψ, A_μ的共轭动量与自由场时相同,即

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{i}\psi^+ \tag{4.24}$$

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - g^{\mu 0}(\partial \cdot A) \tag{4.25}$$

由此得出,ψ, ψ^+间的等时反对易关系以及$\dot{A}_\mu, A_\nu$间的等时对易关系都与自由场时形式相同,即为

$$\begin{aligned} &[\psi_\xi(x), \psi_\eta^+(x')]_{t=t'} = \delta_{\xi\eta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \\ &[\psi_\xi(x), \psi_\eta(x')]_{t=t'} = [\psi_\xi^+(x), \psi_\eta^+(x')]_{t=t'} = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$[\dot{A}_\mu(x), A_\nu(x')]_{t=t'} = \mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{t=t'} = [\dot{A}_\mu(x), \dot{A}_\nu(x')]_{t=t'} = 0 \tag{4.27}$$

此外,ψ与A之间全部相互对易,即

$$[\psi_\xi(x), A_\mu(x')]_{t=t'} = [\psi_\xi(x), \dot{A}_\mu(x')]_{t=t'} = 0, \cdots \tag{4.28}$$

哈氏密度定义为

$$\mathcal{H} = :\mathrm{i}\psi^+\dot{\psi} + \pi^\mu \dot{A}_\mu : - \mathcal{L} = \mathcal{H}_{\text{Dirac}} + \mathcal{H}_{\text{e.m.}} + \mathcal{H}_{\text{i}} \tag{4.29}$$

其中

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = :\mathrm{i}\psi^+\dot{\psi}: - \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = :\bar{\psi}(-\mathrm{i}\vec{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi: \tag{4.30}$$

$$\mathcal{H}_{\text{e.m.}} = :\pi^\mu \dot{A}_\mu : - \mathcal{L}_{\text{e.m.}} = -\frac{1}{2}:\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A^\mu \cdot \nabla A_\mu : \tag{4.31}$$

$$\mathcal{H}_{\text{i}} = -\mathcal{L}_{\text{i}} = e:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu : \tag{4.32}$$

守恒的四动量算符具有如下形式:

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3 x j^{0\mu} \tag{4.33}$$

$$j^{0\mu} = :-\mathcal{L}g^{0\mu} - F^{0\rho}\partial^\mu A_\rho - (\partial \cdot A)\partial^\mu A^0 + \mathrm{i}\psi^+\partial^\mu\psi: \tag{4.34}$$

其中$j^{00} = \mathcal{H}$,即哈氏密度. 总能量为

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{H} \equiv P^0 \tag{4.35}$$

总三维动量为

$$\vec{P} = -\int \mathrm{d}^3x : (\pi^\mu \nabla A_\mu + \pi_\psi \nabla \psi) : \tag{4.36}$$

由于$\mathcal{L}_i$中不含场的微商，所以$\vec{P}$只是自由 Dirac 场和自由 Maxwell 场的三动量之和. 由正则对易关系(4.26)—(4.28)不难证实下面的关系：

$$\partial^\mu \psi = \mathrm{i}[P^\mu, \psi] \tag{4.37}$$

$$\partial^\mu A^\nu = \mathrm{i}[P^\mu, A^\nu] \tag{4.38}$$

$$\partial^\mu \pi^\nu = \mathrm{i}[P^\mu, \pi^\nu] \tag{4.39}$$

即 P^μ 为时空平移生成元，因而在量子一级，平移不变性成立. (4.37)和(4.38)中的时间分量即 Heisenberg 方程

$$\dot{\psi} = \mathrm{i}[H, \psi] \tag{4.40}$$

$$\dot{A}^\mu = \mathrm{i}[H, A^\mu] \tag{4.41}$$

它们分别与 Euler - Lagrange 方程(4.18)和(4.19)等价.

由于 ψ 和 A_μ 服从相互耦合的非线性方程，所以它们一般不能再按自由场的 c 数本征解展开. 但是我们总可以在某一固定时刻，如 $t=0$，将场作三维 Fourier 展开. 例如 Maxwell 场 $A_\mu(\vec{x},0)$ 和 $\dot{A}_\mu(\vec{x},0)$ 的三维 Fourier 展开可写为

$$A_\mu(\vec{x},0) = \int \tilde{\mathrm{d}k} q_\mu(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \dot{A}_\mu(\vec{x},0) = \int \tilde{\mathrm{d}k} p_\mu(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{4.42}$$

$A_\mu, \dot{A}_\mu$ 的厄密性导致

$$q_\mu^+(\tilde{k}) = q_\mu(k), \quad p_\mu^+(\tilde{k}) = p_\mu(k), \quad \tilde{k}^\mu = (k^0, -\vec{k}) \tag{4.43}$$

定义

$$a_\mu(k) = \frac{1}{2}\left[q_\mu(k) + \frac{\mathrm{i}}{k^0} p_\mu(k)\right], \quad k^0 = |\vec{k}| \tag{4.44}$$

则从(4.43)有

$$a_\mu^+(\tilde{k}) = \frac{1}{2}\left[q_\mu(k) - \frac{\mathrm{i}}{k^0} p_\mu(k)\right] \tag{4.45}$$

由此可解出

$$\begin{aligned} q_\mu(k) &= a_\mu(k) + a_\mu^+(\tilde{k}) \\ p_\mu(k) &= -\mathrm{i}k^0[a_\mu(k) - a_\mu^+(\tilde{k})] \end{aligned} \tag{4.46}$$

代入(4.42)式，通过变量代换将 $\tilde{k} \to k$，并记

$$a_\mu(k) = a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \tag{4.47}$$

我们得到

$$A_\mu(\vec{x},0) = \int \tilde{dk}[a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$\dot{A}_\mu(\vec{x},0) = \int \tilde{dk}(-ik^0)[a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$k^0 = |\vec{k}| \tag{4.48}$$

与此类似,对 Dirac 场可得

$$\psi(\vec{x},0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}[b_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + d_\alpha^+(k)v^{(\alpha)}(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$\bar{\psi}(\vec{x},0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}[b_\alpha^+(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + d_\alpha(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{4.49}$$

(4.48)和(4.49)中的算符 $a^{(\lambda)}(k)$,$a^{(\lambda)+}(k)$,$b_\alpha(k)$,$b_\alpha^+(k)$,$d_\alpha(k)$,$d_\alpha^+(k)$服从自由场论中消灭与产生算符的代数,因为相互作用场算符 A_μ,$\dot{A}_\mu$,ψ,ψ^+的等时对易子或反对易子都与自由场时的形式相同,而电磁算符 a,a^+又与 Dirac 算符 b,b^+,d,d^+彼此对易.

算符对时间的变化关系则由 Heisenberg 方程决定. 将(4.40)和(4.41)形式上进行积分,得到

$$\psi(\vec{x},t) = e^{iHt}\psi(\vec{x},0)e^{-iHt} \tag{4.50}$$

$$A_\mu(\vec{x},t) = e^{iHt}A_\mu(\vec{x},0)e^{-iHt} \tag{4.51}$$

然后利用三维 Fourier 展开,它们将给出 a,a^+,b,b^+,d,d^+对时间的依赖关系. 不难看出,自由场与相互作用场的展开系数间有如下的对应:

$$a^{(\lambda)}(k)e^{-ik^0t} \to e^{iHt}a^{(\lambda)}(k)e^{-iHt}$$

$$a^{(\lambda)+}(k)e^{ik^0t} \to e^{iHt}a^{(\lambda)+}(k)e^{-iHt}$$

$$b_\alpha(k)e^{-iEt} \to e^{iHt}b_\alpha(k)e^{-iHt} \tag{4.52}$$

因此,当 H_i 存在时,相互作用场的展开系数随 t 的变化规律远比自由场的 e^{-ik^0t} 复杂. 注意由于时间平移 e^{iHt}不会改变对易关系,相互作用场的展开系数所满足的代数与 $t=0$ 时的 $a^{(\lambda)}(k)$,$a^{(\lambda)+}(k)$,$b_\alpha(k)$,…满足的代数相同,因而也与自由场消灭与产生算符的代数相同. 但是目前我们不能将这些展开系数再解释为有确定质量的单粒子消灭和产生算符,因为它们不再和总哈密顿量 H 的本征态相联系.

事实上,由于 H_i 中含有不同场算符的非线性耦合,我们无法像自由场那样构造出 H 的本征态,因而严格解是未知的. 对其它相互作用场论,情况也是如此. 所以,我们不得不求助于别的途径,譬如使用微扰论方法或者对解的性质作出假定. 在下一章我们将专门叙述微扰论及其应用.

由以上的讨论还见到，由于 $e^{iHt}a^{(\lambda)}(k)e^{-iHt}$ 等并不是消灭和产生算符，故相互作用场的正规乘积应作如下理解：通过时间平移 $e^{iHt}\cdots e^{-iHt}$ 将场乘积移到 $t=0$ 时刻，这时场的三维 Fourier 展开系数相似于自由场的消灭和产生算符，二者满足同样的代数，于是正规乘积可按自由场情况一样来定义. 确切地说，例如可以定义

$$:\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x):\equiv e^{iHt}:\bar{\psi}(\vec{x},0)\gamma^{\mu}\psi(\vec{x},0)A_{\mu}(\vec{x},0):e^{-iHt}$$

顺便指出，若电子是在一个 c 数外电磁场 $A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(x)$ 中运动，则相互作用也具有(4.16)的形式，即

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}=-e:\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi:A_{\mu}^{\mathrm{ext}} \tag{4.53}$$

只是目前不存在外电磁场的 $\mathcal{L}_{\mathrm{e.m.}}$，也没有 A_{μ}^{ext} 的运动方程，因为 A_{μ}^{ext} 是外加的场.

问题 4.2　证明 Heisenberg 方程(4.40)和(4.41)分别与 Euler - Lagrange 方程(4.18)和(4.19)等价.

4.3　非电磁作用

这里所谓的非电磁作用，并非基本相互作用，仅指低能、唯象耦合. 这些耦合一般没有经典对应，所以在决定它们的形式时，首先只能依靠构造作用量的一般原则. 这些一般原则，已在 2.4 节中给出. 在决定相互作用拉氏密度时，除了定域、厄密等要求外，最起作用的是两个原则. 其一是对称性要求，包括连续对称性和分立对称性. 连续对称性又分时空对称性即 Poincaré 不变性和内部对称性如电荷、重子数、轻子数 U(1)和同位旋 SU(2)对称性等. 其中 Poincaré 不变性和上述 U(1)对称性都是严格的，而同位旋 SU(2)对称性只是近似的. 分立对称性即指 $\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$ 变换下的对称性. 另一个原则就是简单性，即在拉氏密度的各种可能的候选者中，取形式最简单者. 虽然这不能算是一个物理原则，但是简单性将给问题的处理带来很大的方便. 当然，归根结底，唯象相互作用的正确形式应由与实验的比较来决定，或者由基本的相互作用形式推出.

4.3.1　π - N 唯象强作用

这里“唯象”的含义是：尽管已经确立 π，N 都是复合粒子，但在低能(大尺度)情况下，我们仍然将它们作为点粒子看待(忽略内部结构)，引入唯象的定域场来描写它们，拉氏密度是等效的而不是基本的.

(a) π^0 - N 耦合

中性 π^0 与核子 N(质子 p 和中子 n)的强作用是最简单的非电磁作用. 令厄密赝标场 $\varphi(x)$ 描写 π^0，Dirac 场 ψ 描写 p 或 n，则一种 Poincaré 不变的相互作用

拉氏密度可以写成

$$\mathcal{L}_i = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \tag{4.54}$$

g 为实耦合常数，这保证了 $\mathcal{L}_i^+ = \mathcal{L}_i$. 这种三线性作用称为 Yukawa 耦合. $\mathcal{L}_i$ 中加入了 γ_5 是为了保证 $\mathcal{L}_i$ 在空间反射下不变，因为实验表明，强作用是宇称守恒的.

系统总的拉氏密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_i \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \mu^2\varphi^2) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi\end{aligned} \tag{4.55}$$

所导致的运动方程是

$$\begin{aligned}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi &= -ig\gamma_5\psi\varphi \\ \bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - m) &= -ig\bar{\psi}\gamma_5\varphi \\ (\Box + \mu^2)\varphi &= ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\end{aligned} \tag{4.56}$$

往下的讨论将与 4.2 节电磁作用的情况完全平行. 我们将只写出系统的哈氏密度

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} + \pi_\psi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_{KG} + \mathcal{H}_{Dirac} + \mathcal{H}_i \tag{4.57}$$

其中

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2] \tag{4.58}$$

$$\mathcal{H}_{Dirac} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi \tag{4.59}$$

$$\mathcal{H}_i = -\mathcal{L}_i = -ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \tag{4.60}$$

若将 Yukawa 耦合(4.54)和最小电磁耦合(4.16)进行比较，则会发现二者有几处共同点：它们对 Fermion 场皆双线性而对 Boson 场皆线性；都不含时空微商；耦合常数 g，e 都是无量纲的. 这一事实，正如以后可见，使得 Yukawa 耦合即使作为基本的而不是唯象的耦合，也同最小电磁耦合一样，在理论上是可重整化的.

还可以证明，在量子场情况下，$\mathcal{L}_i$ 可以写成正规乘积的形式[23]，即

$$\mathcal{L}_i = ig:\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi: \tag{4.61}$$

事实上，若写

$$\psi = U + \bar{V}, \quad \bar{\psi} = \bar{U} + V$$

其中 U，V 只含消灭算符，$\bar{U}$，$\bar{V}$ 只含产生算符，则

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_5\psi &= (\bar{U} + V)\gamma_5(U + \bar{V}) \\ &= \bar{U}\gamma_5 U + V\gamma_5 U + \bar{U}\gamma_5\bar{V} + V\gamma_5\bar{V} - \bar{V}\gamma_5 V + \bar{V}\gamma_5 V \\ &= :\bar{\psi}\gamma_5\psi: + V_\xi(\gamma_5)_{\xi\eta}\bar{V}_\eta + \bar{V}_\eta(\gamma_5)_{\eta\xi}V_\xi \\ &= :\bar{\psi}\gamma_5\psi: + (\gamma_5)_{\xi\eta}\{V_\xi, \bar{V}_\eta\}\end{aligned}$$

但

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_5)_{\xi\eta}\{V_\xi(x),\bar{V}_\eta(x)\} = (\gamma_5)_{\xi\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\{V_\xi(\vec{x},0),\bar{V}_\eta(\vec{x},0)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\\
&= (\gamma_5)_{\xi\eta}\{\int \tilde{\mathrm{d}k}d_\alpha(k)\bar{v}_\xi^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}},\int \tilde{\mathrm{d}q}d_\beta^+(q)v_\eta^{(\beta)}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}}\}\\
&= (\gamma_5)_{\xi\eta}\int \tilde{\mathrm{d}k}\bar{v}_\xi^{(\alpha)}(k)v_\eta^{(\alpha)}(k)\\
&= \int \tilde{\mathrm{d}k}\,\mathrm{tr}\sum_\alpha v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma_5\\
&= \int \tilde{\mathrm{d}k}\,\mathrm{tr}\frac{\not{k}-m}{2m}\gamma_5 = 0
\end{aligned}
$$

其中已利用了自旋求和公式(2.195)以及 $\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma_5 = \mathrm{tr}\gamma_5 = 0$. 于是

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi = :\bar{\psi}\gamma_5\psi:$$

再考虑到 Boson 算符与 Fermion 算符是相互对易的,所以(4.61)成立.

(b) 同位旋 SU(2)不变耦合*

现在将 π^0 - N 耦合推广到(π^+,π^0,π^-)与(p,n)的耦合. 这时必须引入同位旋的概念.

如果忽略电磁作用和弱作用,则 p,n 将没有区别,它们可以统一地描述为同位旋空间的旋量,相应的场是核子场二重态

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

在无穷小的同位旋空间转动或称同位旋 SU(2)转动下

$$N(x) \to \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_i\tau_i\right)N(x) \tag{4.63}$$

其中 $\omega_i(i=1,2,3)$是三个无穷小实参数,$\tau_i(i=1,2,3)$是 Pauli 矩阵,满足

$$[\tau_i,\tau_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{4.64}$$

同样,当忽略电磁作用和弱作用时,π^+,π^0,π^-将没有差别,它们可以统一地描写为同位旋空间的矢量,相应的场是 π 场三重态

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \tag{4.65}$$

其中每个分量 φ_i 都是厄密场,它们与 $\pi^\pm,\pi^0$ 场的联系为

$$\varphi_{\pi^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2),\quad \varphi_{\pi^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2),\quad \varphi_{\pi^0} = \varphi_3 \tag{4.66}$$

在无穷小的同位旋 SU(2)转动下,$\vec{\varphi}$ 变换如一个三维矢量:

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} + \vec{\varphi}\times\vec{\omega} \quad \text{即} \quad \varphi_i \to \varphi_i + \varepsilon_{ijk}\varphi_j\omega_k \tag{4.67}$$

注意 φ_i 与 $\bar{N}\tau_iN$ 的变换方式相同. 因为在变换(4.63)下

$$\bar{N}\tau_iN \to \bar{N}\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_k\tau_k\right)\tau_i\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_k\tau_k\right)N$$

$$= \bar{N}\tau_i N + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_k \bar{N}(-\tau_k\tau_i + \tau_i\tau_k)N \tag{4.68}$$
$$= \bar{N}\tau_i N + \varepsilon_{ijk}(\bar{N}\tau_j N)\omega_k$$

因此

$$N\vec{\tau}N \cdot \vec{\varphi}$$

是同位旋 SU(2)不变量.

实验表明,π - N 强作用保持同位旋守恒,所以必须是同位旋 SU(2)不变的,其中最简单的形式为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}} = \mathrm{i}g : \bar{N}\gamma_5\vec{\tau}N \cdot \vec{\varphi} : \tag{4.69}$$

根据(4.61),我们已经将其写为正规乘积的形式. 核子场和 π 场的拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{N}} = : \bar{N}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)N : \tag{4.70}$$

$$\mathcal{L}_{\pi} = \frac{1}{2} : (\partial_\mu\vec{\varphi} \cdot \partial^\mu\vec{\varphi} - m^2\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}) : \tag{4.71}$$

结果总的拉氏密度成为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{N}} + \mathcal{L}_{\pi} + \mathcal{L}_{\mathrm{i}} \tag{4.72}$$

它在同位旋转动(4.63)和(4.67)下显然是不变的. 由 Noether 定理,可得到同位旋守恒流密度

$$\vec{j}^{\mu} = : \frac{1}{2}\bar{N}\gamma^\mu\vec{\tau}N - \partial^\mu\vec{\varphi} \times \vec{\varphi} : \tag{4.73}$$

守恒荷即同位旋矢量算符

$$\vec{I} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{j}^0 = \int \mathrm{d}^3x : \left(N^+\frac{1}{2}\vec{\tau}N - \vec{\pi} \times \vec{\varphi}\right) : \qquad \vec{\pi} = \partial^0\vec{\varphi} \tag{4.74}$$

等时对易关系和通常一样,

$$\{p(x), p^+(x')\}_{t=t'} = \{n(x), n^+(x')\}_{t=t'} = I \cdot \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$
$$[\varphi_i(x), \pi_j(x')]_{t=t'} = \mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (i,j = 1,2,3) \tag{4.75}$$

等. 此外还要求

$$\{p(x), n(x')\}_{t=t'} = \{p(x), n^+(x')\}_{t=t'} = 0 \tag{4.76}$$
$$p, p^+, n, n^+ \text{ 与 } \varphi, \pi \text{ 等时对易}$$

利用上述对易关系,容易证实,同位旋算符满足 SU(2)代数

$$[I_i, I_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}I_k \tag{4.77}$$

关于同位旋对称性,还有两点说明. 第一,对其它强子如 $\Sigma, \Xi, \cdots$ 可以类似地构造与 π 的同位旋 SU(2)不变的耦合,注意到($\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$)是同位旋三重态而($\Xi^0, \Xi^-$)是同位旋二重态. 第二,同位旋对称性仅仅是一种近似的对称性. 事实上上述强子皆是由更基本的粒子——夸克——组成的束缚态. 同位旋 SU(2)对称性将由于最轻的两种夸克的质量差而受到小的破坏.

(c) 电荷守恒与重子数守恒*

强作用保持电荷与重子数严格守恒. 我们仍以 π - N 同位旋不变耦合为例来加以说明.

先看电荷守恒. 考虑整体相位变换

$$\begin{aligned}\delta p &= \mathrm{i}\alpha p\\ \delta\varphi_{\pi^+} &= \mathrm{i}\alpha\varphi_{\pi^+}\\ \delta\varphi_{\pi^-} &= -\mathrm{i}\alpha\varphi_{\pi^-}\end{aligned} \tag{4.78}$$

其中相位正比于该场的电荷,因而此变换称为电荷 U(1)变换. 拉氏密度(4.70)和(4.71)可展开为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{N}} = :\bar{p}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)p + \bar{n}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)n:$$

$$\mathcal{L}_{\pi} = :\partial_\mu\varphi_{\pi^-}\partial^\mu\varphi_{\pi^+} - \mu^2\varphi_{\pi^-}\varphi_{\pi^+} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_{\pi^0}\partial^\mu\varphi_{\pi^0} - \frac{1}{2}\mu^2\varphi_{\pi^0}\varphi_{\pi^0}:$$

它们显然是电荷 U(1)不变的. 相互作用拉氏密度(4.69)也可以重写. 利用

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi_3 & \varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2\\ \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2 & -\varphi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_{\pi^0} & \sqrt{2}\varphi_{\pi^+}\\ \sqrt{2}\varphi_{\pi^-} & -\varphi_{\pi^0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{i}} &= \mathrm{i}g:\bar{N}\gamma_5\vec{\tau}N\cdot\vec{\varphi}:\\ &= \mathrm{i}g:(\bar{p},\bar{n})\gamma_5\begin{pmatrix}\varphi_{\pi^0} & \sqrt{2}\varphi_{\pi^+}\\ \sqrt{2}\varphi_{\pi^-} & -\varphi_{\pi^0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}:\\ &= \mathrm{i}g:\bar{p}\gamma_5 p\varphi_{\pi^0} + \sqrt{2}\bar{p}\gamma_5 n\varphi_{\pi^+} + \sqrt{2}\bar{n}\gamma_5 p\varphi_{\pi^-} - \bar{n}\gamma_5 n\varphi_{\pi^0}:\end{aligned}$$

显然也是电荷 U(1)不变的. 与电荷 U(1)不变性相应的 Noether 守恒流密度为

$$\begin{aligned}j^\mu &= :\bar{p}\gamma^\mu p - \mathrm{i}[(\partial^\mu\varphi_{\pi^-})\varphi_{\pi^+} - (\partial^\mu\varphi_{\pi^+})\varphi_{\pi^-}]:\\ &= :\frac{1}{2}\bar{N}\gamma^\mu(1+\tau_3)N + (\partial^\mu\varphi_2)\varphi_1 - (\partial^\mu\varphi_1)\varphi_2:\end{aligned} \tag{4.79}$$

守恒荷即电荷

$$\begin{aligned}Q &= \int\mathrm{d}^3x j^0 = \int\mathrm{d}^3x:N^+\frac{1}{2}(1+\tau_3)N - (\partial^0\varphi_1)\varphi_2 + (\partial^0\varphi_2)\varphi_1:\\ &= \int\mathrm{d}^3x:p^+p - \pi_1\varphi_2 + \pi_2\varphi_1:\end{aligned} \tag{4.80}$$

再看重子数守恒. 在重子数 U(1)变换(相位正比于重子数)下,

$$\delta p = \mathrm{i}\beta p,\quad \delta n = \mathrm{i}\beta n \tag{4.81}$$

(4.72)的$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{N}} + \mathcal{L}_{\pi} + \mathcal{L}_{\mathrm{i}}$显然是不变的. 相应的 Noether 守恒流密度为

$$j^\mu = :\bar{N}\gamma^\mu N: \tag{4.82}$$

守恒荷即重子数

$$N = \int\mathrm{d}^3x:N^+N: = \int\mathrm{d}^3x:p^+p + n^+n: \tag{4.83}$$

从(4.74)我们有

$$I_3 = \int \mathrm{d}^3x : \frac{1}{2} p^+ p - \frac{1}{2} n^+ n - \pi_1 \varphi_2 + \pi_2 \varphi_1 :$$

与 $N/2$ 相加可以得出熟知的关系

$$I_3 + \frac{N}{2} = Q \tag{4.84}$$

其中 Q 由(4.80)给出.

利用 $p, p^+, n, n^+, \varphi_i, \pi_i$ 的等时对易关系(4.75)和(4.76),可以证明

$$[Q, p(x)] = -p(x), \quad [Q, p^+(x)] = p^+(x) \tag{4.85}$$

$$[N, p(x)] = -p(x), \quad [N, p^+(x)] = p^+(x) \tag{4.86}$$

它们表明:Q 是电荷 U(1)变换的生成元,N 是重子数 U(1)变换的生成元;p 的作用是消灭一个单位的 Q 荷与 N 荷,p^+ 的作用是产生一个单位的 Q 荷与 N 荷. 类似的结果在自由 Dirac 场情况下也得到过,那里可以直接利用场算符按消灭和产生算符的展开而得出. 而现在是相互作用场,场按消灭与产生算符的展开不再成立,这些结果只能从等时对易关系得出.

问题 4.3 求证同位旋守恒流密度的表达式(4.73).

问题 4.4 证明同位旋算符(4.74)满足 SU(2)代数.

问题 4.5 导出 π - N 系统的电流密度表达式(4.79).

4.3.2 低能唯象弱作用

唯象弱作用的拉氏密度,主要从最低级微扰论与实验的比较定出. 根据反应中轻子出现的情况,弱作用的等效拉氏密度可写成

$$\mathcal{L}_{\text{等效}} = \mathcal{L}_{\text{轻子}} + \mathcal{L}_{\text{半轻}} + \mathcal{L}_{\text{无轻}} \tag{4.87}$$

下面分别讨论各部分的形式.

(a) 纯轻子过程

其中参与弱作用的全部是轻子. 对这类过程的描写,实验支持定域的四 Fermion 弱作用,拉氏密度可写成

$$\mathcal{L}_{\text{轻子}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left(j_\lambda^+ j^{\lambda -} + \frac{1}{2} j_\lambda^0 j^{\lambda 0} \right) \tag{4.88}$$

其中带电流

$$j_\lambda^+ = \sum_l \bar{\nu}_l \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) l, \Delta Q = Q_{\text{终态}} - Q_{\text{初态}} = Q_{\nu_l} - Q_l = 1 \tag{4.89}$$

$$j^{\lambda -} = \sum_l \bar{l} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \nu_l, \quad \Delta Q = -1 \tag{4.90}$$

中性流

$$j_\lambda^0 = \sum_l [\bar{\nu}_l \gamma_\lambda g_\nu (1 - \gamma_5) \nu_l + \bar{l} \gamma_\lambda (g_v - g_a \gamma_5) l], \quad \Delta Q = 0 \tag{4.91}$$

各式中 l,ν_l 代表相应的轻子场.

$$G\sim 10^{-5}/m_{\mathrm{p}}^{2} \tag{4.92}$$

为 Fermi 常数,m_{p} 是质子质量. 注意作为等效弱作用耦合常数,G 有量纲 M^{-2}. g_v,g_v,g_a 皆为量纲为 1 的实常数. 纯轻子过程的例子如衰变

$$\mu^{-}\to e^{-}+\bar{\nu}_{e}+\nu_{\mu} \tag{4.93a}$$

$$\mu^{+}\to e^{+}+\nu_{e}+\bar{\nu}_{\mu} \tag{4.93b}$$

相应的

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_{\mu}\gamma_{\lambda}(1-\gamma_5)\mu][\bar{e}\gamma^{\lambda}(1-\gamma_5)\nu_{e}]+\mathrm{h.c.} \tag{4.94}$$

(b) 半轻子过程*

其中参与弱作用的既有轻子又有强子. 按照奇异数是否守恒,它们可分成两类. 一类是奇异数守恒过程,如

$$\beta\text{ 衰变}\quad n\to p+e^{-}+\bar{\nu}_{e} \tag{4.95a}$$

$$\pi\text{ 衰变}\quad \pi^{-}\to\begin{cases}\mu^{-}+\bar{\nu}_{\mu}\\ e^{-}+\bar{\nu}_{e}\end{cases} \tag{4.95b}$$

$$\mu\text{ 俘获}\quad \mu^{-}+p\to n+\nu_{\mu} \tag{4.95c}$$

另一类是奇异数改变的过程,如

$$K^{-}\to\mu^{-}+\bar{\nu}_{\mu} \tag{4.96a}$$

$$\Lambda\to p+e^{-}+\bar{\nu}_{e} \tag{4.96b}$$

注意到轻子、核子与 π 的奇异数 S 皆为 0;而 K^{-} 和 Λ 的奇异数 S 皆为 -1,因而过程(4.96a)和(4.96b)皆有奇异数改变 $\Delta S=1$. 描述半轻子过程的唯象拉氏密度可写为

$$\mathcal{L}_{\text{半轻}}=\frac{G}{\sqrt{2}}(J_{\lambda}^{+}j^{\lambda-}+J_{\lambda}^{-}j^{\lambda+}+J_{\lambda}^{0}j^{\lambda 0}) \tag{4.97}$$

其中 G 仍为(4.92)给出的 Fermi 常数,$j^{\lambda\pm,0}$ 是由(4.89)—(4.91)给出的轻子弱流,而 $J_{\lambda}^{\pm}$ 是 $\Delta Q=\pm 1$ 的带电强子弱流,J_{λ}^{0} 是 $\Delta Q=0$ 的中性强子弱流.

由于强子是复合粒子,对强子弱流 $J_{\lambda}^{\pm,0}$,并不一定要给出以粒子场表达的显示形式. 有时只要知道强子弱流的一般性质,也可以得出有用的定量结果. 因为强子流在强子态间的矩阵元或在强子 - 真空态间的矩阵元可以参数化,而这些参数可以同实验建立联系. 然而,更基本的想法是从构造强子的组成粒子来说明强子弱流的结构.

目前已经确立,强子的组成粒子是夸克. 已知的夸克及其电荷如下:

夸克	u	d	s	c	b	t
电荷	2/3	−1/3	−1/3	2/3	−1/3	2/3

(4.98)

强子是夸克通过颜色力组成的束缚态，以下给出了几种强子的夸克组态：

$$\begin{aligned} &p \sim (uud) \qquad n \sim (udd) \\ &\pi^+ \sim (u\bar{d}) \qquad \pi^- \sim (\bar{u}d) \\ &K^- \sim (\bar{u}s) \end{aligned} \tag{4.99}$$

因此，强子的弱作用可以归结为夸克的弱作用. 如果不包括较重的 b，t 夸克，则强子带电流可以写成

$$\begin{aligned} J_\lambda^+ &= (\bar{u},\bar{c})\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \\ &= (\cos\theta_c\bar{u} - \sin\theta_c\bar{c})\gamma_\lambda(1-\gamma_5)d + (\sin\theta_c\bar{u} + \cos\theta_c\bar{c})\gamma_\lambda(1-\gamma_5)s \end{aligned} \tag{4.100}$$

其中 u，d，s，c 代表夸克场，θ_c 是所谓的 Cabibbo 角. 由于 u，d 夸克的奇异数 $S=0$，s 夸克的奇异数 $S=-1$，所以上式第一项对应 $\Delta S=0$ 的弱作用，而第二项对应 $\Delta S=\Delta Q$ 的弱作用. 此外，每一项又分为 γ_λ 和 $\gamma_\lambda\gamma_5$ 两种耦合形式，分别对应矢量和轴(赝)矢量，其间为 - 号，所以上述弱作用通常又称为 V - A 弱作用.

将 J_λ^+ 厄密共轭，就可得到

$$J_\lambda^- = (\bar{d},\bar{s})\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \cos\theta_c & -\sin\theta_c \\ \sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

以 β 衰变为例. 考虑到 p，n 的夸克组成(4.99)，过程(4.95a)归结为

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e \tag{4.102}$$

相应的等效拉氏密度为

$$\mathcal{L}_i = \frac{G}{\sqrt{2}}(J_\lambda^+)_{d\to u}(j^{\lambda-})_{\nu_e\to e} = \frac{G}{\sqrt{2}}\cos\theta_c[\bar{u}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)d][\bar{e}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_e] \tag{4.103}$$

类似地，K_{l_2} 衰变(4.96a)可归结为

$$(\bar{u}s) \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{4.104}$$

相应的等效拉氏密度

$$\mathcal{L}_i = \frac{G}{\sqrt{2}}(J_\lambda^+)_{s\to u}(j^{\lambda-})_{\nu_\mu\to\mu} = \frac{G}{\sqrt{2}}\sin\theta_c[\bar{u}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)s][\bar{\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu] \tag{4.105}$$

至于半轻子衰变拉氏密度的中性流部分 $\frac{G}{\sqrt{2}}J_\lambda^0 j^{\lambda 0}$，实验上支持，对强子弱流 J_λ^0，应满足 $\Delta S=0$，即不存在奇异数改变的中性流. J_λ^0 也可以通过夸克场表达，尤其是通过弱电统一规范理论的低能等效，可给出 J_λ^0 的显示形式. 限于篇幅，对此我们

不再作进一步的阐述.

除此以外,π 衰变(4.95b)也可以用唯象的带微商耦合

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}=g_{\pi}[\bar{\mu}\gamma_{\lambda}(1-\gamma_5)\nu_{\mu}+\bar{\mathrm{e}}\gamma_{\lambda}(1-\gamma_5)\nu_{\mathrm{e}}]\partial^{\lambda}\varphi_{\pi^-}+\mathrm{h.c.} \tag{4.106}$$

加以描述,实常数 g_{π} 称为 π 的弱衰变常数.

(c) 无轻子过程*

现在参与弱作用的全部是强子. 如过程

$$\mathrm{K}^{\pm}\to\pi^{\pm}+\pi^{0} \tag{4.107}$$

就是两例. 描述这类过程的等效拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\text{无轻}}=\frac{G}{\sqrt{2}}\left(J_{\lambda}^{+}J^{\lambda-}+\frac{1}{2}J_{\lambda}^{0}J^{\lambda 0}\right) \tag{4.108}$$

其中 $J_{\lambda}^{\pm,0}$ 与 $\mathcal{L}_{\text{半轻}}$ 中的强子弱流相同.

根据上述的弱作用拉氏密度,只要按照具体过程选取相应的耦合项就可以计算最低级微扰论的结果. 由于所考虑的是唯象耦合,一般也只是用最低级微扰论结果去和实验进行比较.

4.4　分立对称性和$\mathcal{PCT}$定理

4.4.1　相互作用场的$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$变换

对于相互作用场,通常规定与自由场形式相同的$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$变换规律. 这样就保证了作用量的自由部分以及等时对易关系的$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$不变性(注意若$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}$不含时间微商,则相互作用场的共轭动量以及正则对易关系形式上皆与自由场的相同). 当然,若$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}$含时间微商,共轭动量的定义将有所改变,则也须验证正则对易关系是否$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$不变. 然后必须证实相互作用项$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}$或$\mathcal{H}_{\mathrm{i}}$是否保持不变. 对强作用和电磁作用,耦合项必须是$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$分别不变的.

作为说明,我们以旋量场的最小电磁耦合为例. 根据(4.16),有

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}(x)=-ej^{\mu}(x)A_{\mu}(x) \tag{4.109}$$

$$j^{\mu}(x)=:\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x): \tag{4.110}$$

它是不含时间微商的. 首先考虑$\mathcal{P}$变换. 定义 ψ 和 A_{μ} 的$\mathcal{P}$变换为

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=\gamma^{0}\psi(\tilde{x}),\quad \tilde{x}^{\mu}=(x^{0},-\vec{x}) \tag{4.111}$$

$$\mathcal{P}A_{\mu}(x)\mathcal{P}^{-1}=A^{\mu}(\tilde{x}) \tag{4.112}$$

于是流 j^{μ} 的变换为

$$\mathcal{P}j^{\mu}(x)\mathcal{P}^{-1}=\mathcal{P}:\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x):\mathcal{P}^{-1}=:\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\psi(\tilde{x}):$$

$$= :\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma_\mu\psi(\tilde{x}): = j_\mu(\tilde{x}) \tag{4.113}$$

$\mathcal{L}_i$ 的变换成为

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_i(x)\mathcal{P}^{-1} = -e\mathcal{P}j^\mu(x)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = -ej_\mu(\tilde{x})A^\mu(\tilde{x}) = \mathcal{L}_i(\tilde{x}) \tag{4.114}$$

因为 $\int d^4\tilde{x} = \int d^4x$，所以作用量 $\int d^4x\,\mathcal{L}_i(x)$ 在$\mathcal{P}$变换下保持不变. 这也表明，对 $A_\mu(x)$ 的$\mathcal{P}$变换规定(4.112)是正确的.

其次考虑$\mathcal{C}$变换. 定义 ψ 和 A_μ 的$\mathcal{C}$变换为

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad C = i\gamma^2\gamma^0 \tag{4.115}$$

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x) \tag{4.116}$$

于是流 j^μ 的$\mathcal{C}$变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}j^\mu(x)\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x):\mathcal{C}^{-1} = :\psi^{\mathrm{T}}(x)C\gamma^\mu C\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x):\\ &= :\psi^{\mathrm{T}}(x)\gamma^{\mu\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x): = -:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x): = -j^\mu(x)\end{aligned} \tag{4.117}$$

而$\mathcal{L}_i$ 的$\mathcal{C}$变换成为

$$\mathcal{C}\mathcal{L}_i(x)\mathcal{C}^{-1} = -e\mathcal{C}j^\mu(x)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -ej^\mu(x)A_\mu(x) = \mathcal{L}_i(x) \tag{4.118}$$

即$\mathcal{L}_i(x)$是$\mathcal{C}$不变的. 应当指出，对 A_μ 的$\mathcal{C}$变换规定(4.116)也来自其它的电磁耦合(如标量场的电磁耦合)的$\mathcal{C}$不变性，并不只限于 A_μ 与旋量场的耦合. 作此规定后，$\mathcal{L}_i(x)$的$\mathcal{C}$不变性要求$\mathcal{C}j^\mu\mathcal{C}^{-1} = -j^\mu$，这一点已由 j^μ 中的算符排成了正规乘积形式而自动得到保证.

最后考虑$\mathcal{T}$变换. 定义 ψ 和 A_μ 的$\mathcal{T}$变换为

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = T\psi(-\tilde{x}), \quad T^+T = I, \quad T^+\gamma^{\mu *}T = \gamma_\mu \tag{4.119}$$

$$\mathcal{T}A_\mu(x)\mathcal{T}^{-1} = A^\mu(-\tilde{x}) \tag{4.120}$$

于是流 j^μ 的$\mathcal{T}$变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{T}j^\mu(x)\mathcal{T}^{-1} &= :\psi^+(-\tilde{x})T^+\gamma^{0*}TT^+\gamma^{\mu *}T\psi(-\tilde{x}):\\ &= :\psi^+(-\tilde{x})\gamma_0\gamma_\mu\psi(-\tilde{x}): = j_\mu(-\tilde{x})\end{aligned} \tag{4.121}$$

可见电荷密度 j^0 不变号而电流密度 $j^i(i=1,2,3)$ 变号，与物理直观相符. 而$\mathcal{L}_i$的$\mathcal{T}$变换成为

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{L}_i(x)\mathcal{T}^{-1} &= -e\mathcal{T}j^\mu(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}A_\mu(x)\mathcal{T}^{-1}\\ &= -ej_\mu(-\tilde{x})A^\mu(-\tilde{x}) = \mathcal{L}_i(-\tilde{x})\end{aligned} \tag{4.122}$$

因此，作用量 $\int d^4x\,\mathcal{L}_i(x)$ 是$\mathcal{T}$不变的.

在有相互作用的情况下，为了构造$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$的显示形式，可以采取下面的做法：

首先，构造$t=0$时刻的算符$\mathcal{P}_0,\mathcal{C}_0,\mathcal{T}_0$. 为此，在$t=0$时刻将相互作用场作3维Fourier展开，正如(4.48)和(4.49)所写的形式. 设$\varphi(\vec{x},0),\psi(\vec{x},0),A_\mu(\vec{x},0)$的展开系数分别为$a(k),b^+(k),b_\alpha(k),d_\alpha^+(k),a_\lambda(k),a_\lambda^+(k)$. 由定义可得$\mathcal{P}_0,\mathcal{C}_0,\mathcal{T}_0$对$\varphi(\vec{x},0),\psi(\vec{x},0),A_\mu(\vec{x},0)$的作用，从中可以看出，$\mathcal{P}_0,\mathcal{C}_0,\mathcal{T}_0$对展开系数$a(k),b^+(k),\cdots$的作用与$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$对自由场相应算符的作用相同，而$a(k),b^+(k),\cdots$又满足与自由场消灭和产生算符相同的对易关系. 因此，$\mathcal{P}_0,\mathcal{C}_0,\mathcal{T}_0$可由展开系数$a(k),a^+(k),\cdots$构成，其形式与自由场的$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$相同. 然后，$t$时刻的算符可用时间平移算符得出，即

$$\mathcal{P}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{P}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{4.123}$$

$$\mathcal{C}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{C}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{4.124}$$

$$\mathcal{T}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathcal{T}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{4.125}$$

注意到$\mathcal{T}(t)$中第一个因子指数上差一负号，这与$\mathcal{T}(t)$要将$t\to -t$有关. 为看出这点，我们比较$\mathcal{P}(t),\mathcal{T}(t)$对标量场$\varphi(\vec{x},t)$的作用

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t)\varphi(\vec{x},t)\mathcal{P}(t)^{-1}&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{P}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\varphi(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{P}_0^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{P}_0\varphi(\vec{x},0)\mathcal{P}_0^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}[\pm\varphi(-\vec{x},0)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\\&=\pm\varphi(-\vec{x},t)\end{aligned}$$

符合$\mathcal{P}$变换的定义. 而

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)\varphi(\vec{x},t)\mathcal{T}(t)^{-1}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathcal{T}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\varphi(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathcal{T}_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\mathcal{T}_0\varphi(\vec{x},0)\mathcal{T}_0^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}[\pm\varphi(\vec{x},0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\\&=\pm\varphi(\vec{x},-t)\end{aligned}$$

符合$\mathcal{T}$变换的定义.

若相互作用项在$\mathcal{P}(t),\mathcal{C}(t),\mathcal{T}(t)$变换下是不变的，则$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$算符与总哈密顿量$H$对易，因而是$t$无关的. 这时，由(4.123)—(4.125)得出

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t)&=\mathcal{P}(0)=\mathcal{P}_0\\\mathcal{C}(t)&=\mathcal{C}(0)=\mathcal{C}_0\\\mathcal{T}(t)&=\mathcal{T}(0)=\mathcal{T}_0\end{aligned} \tag{4.126}$$

在证明(4.126)的第三式时，已利用了$\mathcal{T}$变换的反幺正性质$\mathcal{T}\,\mathrm{i}\,\mathcal{T}^{-1}=-\mathrm{i}$.

4.4.2　$\mathcal{PCT}$定理

上面已经证明，Dirac场的最小电磁耦合在$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$的分别作用下是不变的，

同一结论也对其它电磁作用以及(4.54)和(4.69)所表达的 π - N 唯象强作用成立. 然而,由(4.94)或(4.103)所表达的四 Fermion 唯象弱作用却不是$\mathcal{P}$不变和$\mathcal{C}$不变的,尽管它们在联合的$\mathcal{CP}$变换下是不变的. 现在若我们考虑$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$三种运算的乘积,则会发现,在某些一般性的前提下,理论对于这种乘积运算是不变的. 具体地说,令

$$\mathcal{I}=\mathcal{PCT} \tag{4.127}$$

代表$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$的乘积运算,其中$\mathcal{T},\mathcal{C},\mathcal{P}$皆在同一时刻. 一个理论若满足如下两个条件,则$\mathcal{I}$必定是对称运算:

(1) 理论是定域的,存在一个排成正规乘积的、厄密的拉氏密度$\mathcal{L}(x)$,它在正 Lorentz 变换下是不变的;

(2) 理论按通常的自旋 - 统计关系量子化,即整数自旋场按对易关系量子化,导致 Bose - Einstein 统计而半奇数自旋场按反对易关系量子化,导致 Fermi - Dirac 统计.

这就是著名的$\mathcal{PCT}$定理.

下面我们对于相互作用的 Klein - Gordon 场,Maxwell 场和 Dirac 场的情况给出这个定理的一个证明. 在此情况下,$\mathcal{L}(x)$的 Lorentz 不变性是指:$\mathcal{L}(x)$是由一系列 Lorentz 标量组成,这些标量来自 $\varphi_r, A_\mu, \partial_\mu$ 和 $\bar{\psi}^A\Gamma\psi^B$($\Gamma=1, \mathrm{i}\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$)的乘积,其中所有 Lorentz 指标都已经被收缩掉.

我们首先导出$\mathcal{I}$对各种场的作用. 根据 3.6 节$\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{T}$对各种场作用的定义,厄密标量场的$\mathcal{I}$变换为

$$\mathcal{I}\,\varphi_r(x)\mathcal{I}^{-1}=\mathcal{PCT}\,\varphi_r(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}=\varphi_r(-\vec{x},-t) \tag{4.128}$$

复标量场的$\mathcal{I}$变换为

$$\mathcal{I}\,\varphi(x)\mathcal{I}^{-1}=\varphi^+(-x) \tag{4.129}$$

以上两式右边的相因子已取成了 1. Maxwell 场的$\mathcal{I}$变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\,A_\mu(x)\mathcal{I}^{-1}&=\mathcal{PCT}\,A_\mu(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\\&=\mathcal{PC}\,A^\mu(\vec{x},-t)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\\&=\mathcal{P}(-)A^\mu(\vec{x},-t)\mathcal{P}^{-1}\\&=-A_\mu(-\vec{x},-t)=-A_\mu(-x)\end{aligned} \tag{4.130}$$

Dirac 场的$\mathcal{I}$变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\,\psi_\alpha(x)\mathcal{I}^{-1}&=\mathcal{PCT}\,\psi_\alpha(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\\&=\mathcal{PC}\,T_{\alpha\gamma}\psi_\gamma(\vec{x},-t)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\\&=\mathcal{P}\,T_{\alpha\gamma}(C\gamma^{0\mathrm{T}})_{\gamma\delta}[\psi^+(\vec{x},-t)]^{\mathrm{T}}_\delta\mathcal{P}^{-1}\\&=T_{\alpha\gamma}(C\gamma^{0\mathrm{T}})_{\gamma\delta}[\psi^+(-\vec{x},-t)\gamma^{0+}]^{\mathrm{T}}_\delta\\&=(TC\gamma^0)_{\alpha\delta}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}_\delta(-x)\end{aligned}$$

$$= (-\mathrm{i}\gamma_5 C C\gamma^0)_{\alpha\delta}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}_{\delta}(-x)$$
$$= -\mathrm{i}(\gamma^0\gamma_5)_{\alpha\beta}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}_{\beta}(-x)$$

以上已取了 Dirac 表象，因而 $\gamma^0 = \gamma^{0\mathrm{T}}$. 写成矩阵形式，则有

$$\mathcal{I}\psi(x)\mathcal{I}^{-1} = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma_5\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(-x) \tag{4.131}$$

$$\mathcal{I}\bar{\psi}(x)\mathcal{I}^{-1} = -\mathrm{i}\psi^{\mathrm{T}}(-x)\gamma_5\gamma^0 \tag{4.132}$$

现在考虑 Dirac 旋量场的双线性协变量

$$O(x) = :\bar{\psi}^A(x)\Gamma\psi^B(x): \tag{4.133}$$

的$\mathcal{I}$变换.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}O(x)\mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I}:\bar{\psi}^A(x)\Gamma\psi^B(x):\mathcal{I}^{-1}\\ &= (-i)^2:\psi^{A\mathrm{T}}(-x)\gamma_5\gamma^0\Gamma^*\gamma^0\gamma_5\bar{\psi}^{B\mathrm{T}}(-x):\\ &= :\bar{\psi}^B(-x)(\gamma_5\gamma^0\Gamma^*\gamma^0\gamma_5)^{\mathrm{T}}\psi^A(-x):\\ &= :\bar{\psi}^B(-x)(\gamma_5\gamma^0\Gamma^+\gamma^0\gamma_5)\psi^A(-x):\end{aligned} \tag{4.134}$$

注意在正规乘积符号::内，Fermion 算符反对易，而在 Dirac 表象，有 $\gamma_5^{\mathrm{T}} = \gamma_5$. 利用

$$\gamma^0\Gamma^+\gamma^0 = \Gamma \quad (\text{对 } \Gamma = 1, \mathrm{i}\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu) \tag{4.135}$$

以及

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$$

我们有

$$\gamma_5\gamma^0\Gamma^+\gamma^0\gamma_5 = \gamma_5\Gamma\gamma_5 = \begin{cases} +\Gamma & (\text{对 } \Gamma = 1, \mathrm{i}\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}) \\ -\Gamma & (\text{对 } \Gamma = \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu) \end{cases} \tag{4.136}$$

于是

$$\mathcal{I}O(x)\mathcal{I}^{-1} = \pm:\bar{\psi}^B(-x)\Gamma\psi^A(-x): \quad \begin{matrix}(+\text{号对 } \Gamma = 1, \mathrm{i}\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}) \\ (-\text{号对 } \Gamma = \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu)\end{matrix} \tag{4.137}$$

另一方面，注意到

$$\begin{aligned}O^+(-x) &= [:\bar{\psi}^A(-x)\Gamma\psi^B(-x):]^+ = :\psi^{B+}(-x)\Gamma^+\gamma^0\psi^A(-x):\\ &= :\bar{\psi}^B(-x)\gamma^0\Gamma^+\gamma^0\psi^A(-x): = :\bar{\psi}^B(-x)\Gamma\psi^A(-x):\end{aligned} \tag{4.138}$$

因此我们得到

$$\mathcal{I}O(x)\mathcal{I}^{-1} = \begin{cases} +O^+(-x) & (\text{对 } \Gamma = 1, \mathrm{i}\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}) \\ -O^+(-x) & (\Gamma = \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu) \end{cases} \tag{4.139}$$

注意 + 号对应偶数个 Lorentz 指标，- 号对应奇数个 Lorentz 指标.

现在可将$\mathcal{I} = \mathcal{PCT}$变换总结如下：

(1) 全部场宗量坐标 $x^\mu \to x'^\mu = -x^\mu$. 微商算符$\partial_\mu$是实的，本身不受$\mathcal{I}$变换的影响，但与 $x^\mu \to -x^\mu$ 相应，须将其写为

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial}{\partial(-x^\mu)} = -\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = -\partial'_\mu$$

这里出现 -1 因子,与微商算符含一个 Lorentz 指标有关.

(2) 厄密标量场 $\varphi_r(x)\to\varphi_r(-x)$,Maxwell 场 $A_\mu(x)\to -A_\mu(-x)$. 同样,由于一个 Lorentz 指标,使 A_μ 的变换前面出现 -1 因子.

(3) 所有偶阶张量,包括 Fermion 场双线性量及其微商,如 $\varphi,\varphi^+,\bar\psi\psi$, $\mathrm{i}\bar\psi\gamma_5\psi,\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi,\cdots$变为它们的厄密共轭;所有奇阶张量,包括 Fermion 场双线性量及其微商,如$\partial_\mu\varphi^+\varphi,\bar\psi\gamma_\mu\psi,\bar\psi\gamma_5\gamma_\mu\psi,\cdots$变为它们的厄密共轭乘 -1.

实际上(3)也包含了(2)的情况,因为 φ_r,A_μ 为厄密场,厄密共轭时不变.

(4) 所有 c 数都用其复共轭取代.

由于$\mathcal{L}(x)$已经假定是 Lorentz 标量,所以其中每一项的 Lorentz 指标都已经成对地收缩掉,从而由(3)所引起的负号必为偶数个,净效果是$\mathcal{L}\to\mathcal{L}^+$. 然而在将$\mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{I}^{-1}$写成$\mathcal{L}^+$时,可能出现算符次序问题,正如算符 $AB\to A^+B^+$后,须交换 A^+ 和 B^+,才可写成 $B^+A^+=(AB)^+$. 但由于$\mathcal{L}$已排成正规乘积,算符次序将不会有问题. 正是在排成正规乘积时,对自旋 - 统计的关系提出了要求,它导致在正规乘积符号内,Bosen 算符交换不变号而 Fermion 算符交换时出一负号. 后一点,实际上只影响 Fermion 场双线性量内部两个场算符的交换,而它已经在证明(4.139)时被利用. 再考虑到 Fermion 场双线性量彼此对易,而它们与 Boson 场算符也对易,我们总是可以将$\mathcal{L}$中个别项的$\mathcal{I}$变换结果一般地表为

$$\begin{aligned}:cA(x)B(x)\cdots:&\xrightarrow{\mathcal{I}}:c^*A^+(-x)B^+(-x)\cdots:\\&=:c^*\cdots B^+(-x)A^+(-x):\\&=[:cA(-x)B(-x)\cdots:]^+\end{aligned}$$

其中 A,B 为 Boson 场算符或 Fermion 场双线性量. 于是$\mathcal{I}$变换对$\mathcal{L}(x)$的总效果是

$$\mathcal{I}\mathcal{L}(x)\mathcal{I}^{-1}=\mathcal{L}^+(-x)=\mathcal{L}(-x) \tag{4.140}$$

因为$\mathcal{L}$的厄密性也是我们的前提. 结果作用量

$$\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$$

是$\mathcal{I}$不变的.

除此以外,还须考虑等时对易关系的$\mathcal{I}$变换. 由于任何复场都可以分解为两个实场(厄密场),所以只需讨论以场的厄密分量为基础的等时对易或反对易关系即可. 令 $\varphi_r(x)$表示任何 Boson 场或 Fermion 场的厄密分量,与之相应的共轭动量定义为

$$\pi_r(x)=\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\dot\varphi_r(x)} \tag{4.141}$$

正则对易子和反对易子可以统一地写为

$$[\varphi_r(x),\pi_s(x')]^{\mp}_{t=t'}=\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{rs} \tag{4.142}$$

式中方括号外的 - 号表示它为对易子，而 + 号表示它为反对易子. 假定 $\varphi_r(x)$ 的 $\mathcal{I}$ 变换为

$$\mathcal{I}\varphi_r(x)\mathcal{I}^{-1}=\eta_r\varphi_r(-x) \tag{4.143}$$

其中 η_r 是一个任意的相因子，则 $\pi_r(x)$ 的变换成为

$$\mathcal{I}\pi_r(x)\mathcal{I}^{-1}=\frac{\partial\mathcal{L}(-x)}{-\eta_r\partial\frac{\partial}{\partial(-t)}\varphi_r(-x)}=-\eta_r^*\frac{\partial\mathcal{L}(-x)}{\partial\dot{\varphi}_r(-x)}=-\eta_r{}^*\pi_r(-x) \tag{4.144}$$

结果，对易/反对易关系(4.142)将变换为

$$[\eta_r\varphi_r(-x),-\eta_s^*\pi_s(-x')]^{\mp}_{-t=-t'}=-\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{rs}$$

或者

$$[\varphi_r(-x),\pi_s(-x')]^{\mp}_{-t=-t'}=\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}'-\vec{x})\delta_{rs} \tag{4.145}$$

它表明等时对易子和反对易子也是$\mathcal{I}$不变的.

由此我们证明了作用量和等时对易关系在$\mathcal{I}$变换下都是不变的，因而$\mathcal{I}=\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}$确为理论的对称运算，即对于相互作用的 Klein - Gordon 场，Maxwell 场和 Dirac 场情况，$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}$定理成立.

问题 4.6　证明：Fermi 唯象弱作用

$$\mathcal{L}_i=:\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_4+\mathrm{h.c.}:$$

不是$\mathcal{P}$不变和$\mathcal{C}$不变的，但它是$\mathcal{C}\mathcal{P}$不变的.

第 5 章

S 矩阵和微扰论

5.1 相互作用图像、U 矩阵和 S 矩阵

量子力学中，物理观测量表示为矩阵元

$$\langle a \mid O \mid b \rangle$$

其中 O 为算符，$|a\rangle$，$|b\rangle$为态矢量. 按照算符和态矢量对时间的不同依赖关系，对矩阵元的描述可以采取不同的图像. 常用的图像有三种，即 Heisenberg 图像，Schrödinger 图像和相互作用图像，以下有时分别简称 H 图像，S 图像和 I 图像.

在 Heisenberg 图像中，算符 $O_{\mathrm{H}}(t)$ 与时间 t 有关，态矢 $|t\rangle_{\mathrm{H}}$ 与 t 无关，即有运动方程

$$\dot{O}_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{i}[H_{\mathrm{H}}, O_{\mathrm{H}}(t)] \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |t\rangle_{\mathrm{H}} = 0 \tag{5.2}$$

其中 H_{H} 为 H 图像中的哈密顿量.

在 Schrödinger 图像中，算符 $O_{\mathrm{S}}(t)$ 与时间 t 无关，态矢 $|t\rangle_{\mathrm{S}}$ 与 t 有关，即有运动方程

$$\dot{O}_{\mathrm{S}}(t) = 0 \tag{5.3}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} |t\rangle_{\mathrm{S}} = H_{\mathrm{S}} |t\rangle_{\mathrm{S}} \tag{5.4}$$

这里 H_{S} 为 S 图像中的哈密顿量.

事实上，H 图像与 S 图像之间只差一幺正变换. 由于 H 图像中态矢与 t 无关，可以设

$$|t\rangle_{\mathrm{H}} = |0\rangle_{\mathrm{S}} \tag{5.5}$$

当 H_S 不显含 t 时，从(5.4)可以得出

$$|t\rangle_S = e^{-iH_S t}|0\rangle_S = e^{-iH_S t}|t\rangle_H \tag{5.6}$$

因而

$$|t\rangle_H = e^{iH_S t}|t\rangle_S \tag{5.7a}$$

与此相应，算符的变换为

$$O_H(t) = e^{iH_S t} O_S(t) e^{-iH_S t} \tag{5.7b}$$

取 $O = H$，则有

$$H_H(t) = e^{iH_S t} H_S e^{-iH_S t} = H_S = H \tag{5.8}$$

即从 S 图像变换到 H 图像，总哈密顿量不变，H 与 t 无关.

相互作用图像也可以从 S 图像经一幺正变换得到. 设 S 图像中的哈密顿量可以任意分成自由与相互作用两部分，即

$$H_S = (H_0)_S + (H_i)_S \tag{5.9}$$

定义幺正变换

$$|t\rangle_I = e^{i(H_0)_S t}|t\rangle_S \tag{5.10a}$$

$$O_I(t) = e^{i(H_0)_S t} O_S e^{-i(H_0)_S t} \tag{5.10b}$$

则它将产生相互作用图像. 与 H_S 的分解相应，有

$$H_I = (H_0)_I + (H_i)_I \tag{5.11}$$

利用(5.4)、(5.9)、(5.10)和(5.11)，我们有

$$\begin{aligned}
\dot{O}_I(t) &= \frac{d}{dt}\left(e^{i(H_0)_S t} O_S e^{-i(H_0)_S t}\right) \\
&= e^{i(H_0)_S t} i[(H_0)_S, O_S] e^{-i(H_0)_S t} \\
&= i[(H_0)_I, O_I(t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I &= i\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i(H_0)_S t}|t\rangle_S\right) \\
&= e^{i(H_0)_S t}\left(-(H_0)_S + H_S\right)|t\rangle_S \\
&= e^{i(H_0)_S t}(H_i)_S e^{-i(H_0)_S t} e^{i(H_0)_S t}|t\rangle_S \\
&= (H_i(t))_I |t\rangle_I
\end{aligned}$$

即在相互作用图像中，运动方程为

$$\dot{O}_I(t) = i[(H_0)_I, O_I(t)] \tag{5.12}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I = (H_i(t))_I |t\rangle_I \tag{5.13}$$

显然，$(H_i(t))_I = 0$，将回到 H 图像；而 $(H_0)_I = 0$，将回到 S 图像. 还可注意到

$$(H_0)_I = e^{i(H_0)_S t}(H_0)_S e^{-i(H_0)_S t} = (H_0)_S = H_0 \tag{5.14}$$

即从 S 图像变换到 I 图像时，H_0 不变，因而 $(H_0)_I$ 也是 t 无关的.

此外，不难证实，I 图像与 H 图像间也只差一幺正变换. 事实上

$$|t\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t}|t\rangle_{\mathrm{S}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|t\rangle_{\mathrm{H}} \tag{5.15a}$$

$$O_{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t}O_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}O_{\mathrm{H}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(H_0)_{\mathrm{S}}t} \tag{5.15b}$$

从变换(5.7)，(5.10)和(5.15)可见，在 $t=0$ 时，S,H,I 三种图像重合. 由于变换(5.7)，(5.10)和(5.15)都是幺正的，所以在三种图像中计算出的物理观测量相同，即对任意算符 O 及态矢 $|a\rangle$，$|b\rangle$，有

$$(\langle a|O|b\rangle)_{\mathrm{S}} = (\langle a|O|b\rangle)_{\mathrm{H}} = (\langle a|O|b\rangle)_{\mathrm{I}} \tag{5.16}$$

它表明，S,H,I 三种图像等价.

场论的微扰论将建立在相互作用图像中. 此时，由(5.12)和(5.13)看出，场算符随 t 的变化只由自由哈密顿量 H_0 决定，这里 H_0 是 t 无关的；而态矢随 t 的变化只由相互作用哈密顿量 H_{i} 决定.

现在我们来研究相互作用图像中态矢量 $|t\rangle_{\mathrm{I}}$ 的时间演化. 时间演化矩阵 $U(t,t_0)$ 通过

$$|t\rangle_{\mathrm{I}} = U(t,t_0)|t_0\rangle_{\mathrm{I}} \tag{5.17}$$

来定义，它将 t_0 时刻的态矢演化成 t 时刻的态矢. 显然

$$U(t_0,t_0) = I \tag{5.18}$$

由于

$$|t'\rangle_{\mathrm{I}} = U(t,t_0)|t_0\rangle_{\mathrm{I}}$$

$$|t_1\rangle_{\mathrm{I}} = U(t_1,t)|t\rangle_{\mathrm{I}} = U(t_1,t)U(t,t_0)|t_0\rangle_{\mathrm{I}} = U(t_1,t_0)|t_0\rangle_{\mathrm{I}}$$

所以

$$U(t_1,t_0) = U(t_1,t)U(t,t_0) \tag{5.19}$$

即 U 满足群的性质. 由此可以推论，$U(t,t_0)$ 的逆存在. 的确，上式中设 $t_1=t_0$，则有

$$U(t_0,t)U(t,t_0) = 1$$

因此

$$U(t,t_0)^{-1} = U(t_0,t) \tag{5.20}$$

可以证明，$U(t,t_0)$ 满足幺正性，即

$$U(t,t_0)^{-1} = U(t,t_0)^{+} \tag{5.21}$$

证：从方程(5.13)和(5.17)可得

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = (H_{\mathrm{i}}(t))_{\mathrm{I}}U(t,t_0) \tag{5.22}$$

其厄密共轭是

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)^{+} = U(t,t_0)^{+}(H_{\mathrm{i}}(t))_{\mathrm{I}} \tag{5.23}$$

注意 $(H_{\mathrm{i}}(t))_{\mathrm{I}}^{+} = (H_{\mathrm{i}}(t))_{\mathrm{I}}$ 是厄密的. 由 $U(t,t_0)^{+}\times(5.22)-(5.23)\times U(t,t_0)$

得出

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t,t_0)^{+}U(t,t_0)]=0$$

考虑到 $U(t_0,t_0)=1$，所以

$$U(t,t_0)^{+}U(t,t_0)=1 \tag{5.24}$$

右乘 $U(t,t_0)^{-1}$，于是得出(5.21)式.

S矩阵定义为下面的极限

$$S\equiv\lim_{\substack{t_0\to-\infty\\ t\to+\infty}}U(t,t_0)=U(\infty,-\infty) \tag{5.25}$$

它的作用是将 $t=-\infty$ 的态演化成 $t=+\infty$ 的态. 显然，如果 S 矩阵存在，由于(5.21)或(5.24)，它也满足幺正性.

至此，我们分解 $H=H_0+H_i$ 是十分任意的. 然而，为了使定义(5.25)中的双向极限存在，必须满足某种简单的条件.[17]下面举个例子说明之.

一维谐振子的哈密顿量

$$H=\omega a^{+}a \tag{5.26}$$

其中 a^{+} 和 a 为产生和消灭算符. 现在将 H 分解为两部分

$$H=\omega_0 a^{+}a+(\omega-\omega_0)a^{+}a=H_0+H_i \tag{5.27}$$

从 $U(t,t_0)$ 满足的方程(5.22)即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_iU(t,t_0)=(\omega-\omega_0)a^{+}aU(t,t_0) \tag{5.28}$$

可解出

$$U(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t_0)N}\quad(N=a^{+}a) \tag{5.29}$$

设 $|n\rangle$ 是 N 的本征态，满足 $N|n\rangle=n|n\rangle$，而 $n\neq0$，则对角元

$$\langle n|U(t,t_0)|n\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)(t-t_0)n} \tag{5.30}$$

当 $t_0\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时，上式的极限不存在，除非 $\omega=\omega_0$. 而 $\omega=\omega_0$ 意味着 H_0 和 H 有相同的谱.

同样的结论对于场论成立. 若 H_0 和 H 有相同的谱，或说 H_i 不改变 H_0 的谱，则极限 S 存在. 因此可以这样来分 $H=H_0+H_i$，要求 H_0 和 H 的谱全同. 这一条件对于一大类相对论性理论是容易满足的. 对于上例，若要求 $\omega=\omega_0$，则 $U=S=1$. 又如，对于只含单个实标量场的理论，哈氏密度

$$\mathcal{H}=:\frac{1}{2}[\pi^2+(\nabla\varphi)^2+m_0^2\varphi^2]+\lambda_0\varphi^4: \tag{5.31}$$

其中 m_0 和 λ_0 都是实参数，下标0表示它们是未受到相互作用修正的裸参数. m_0 名为裸质量，$\lambda_0>0$，名为裸耦合常数. 正规乘积保证真空态有零能量

$$\mathcal{H}|vac\rangle=0 \tag{5.32}$$

由于$\mathcal{H}$中自作用(势能)项 $\lambda_0\varphi^4$ 恒正，故0自旋粒子相互排斥，可以假定系统中

没有束缚态，因而物理态将是单粒子态的乘积. 而由平移不变性，必定存在场的守恒四动量 P^μ，物理态则可取为 P^μ 的本征态. 因此，物理单粒子态 $|k\rangle$ 可以是 P^μ 的本征态，满足

$$P^\mu |k\rangle = k^\mu |k\rangle \tag{5.33}$$

而

$$k_\mu k^\mu = m^2 \tag{5.34}$$

为 Lorentz 不变量. 我们称 m 为物理质量. 假定 $k^0 \geqslant 0$，则 $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$，系统总能量

$$E = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{5.35}$$

其中 $n_{\vec{k}} = 0,1,2,\cdots$ 是具有物理质量 m，动量 $\vec{k}$ 的 0 自旋粒子数. 可以指出，尽管(5.33)中场的三维动量算符 $\vec{P}$ 与自由场的相同，但时间分量 $P^0 = H$ 是总哈密顿量，其中包含了自作用项：$\lambda_0 \varphi^4$：. 因此由 P^μ 的本征值 k^μ 所导致的物理质量 m 是考虑了相互作用之后的结果.

为使 H_0 和 H 的能谱相同，我们引入

$$\mathcal{H}_0 = :\frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2\varphi^2]: \tag{5.36}$$

其中 m 是物理质量. 最低能量态 $|0\rangle$ 有 0 本征值，即

$$\mathcal{H}_0 |0\rangle = 0 \tag{5.37}$$

由此，H_0 与 H 将有全同的谱.

由于 $\mathcal{H}_0$ 取成了(5.36)的形式，则相互作用哈氏密度成为

$$\mathcal{H}_i = :\frac{1}{2}(m_0^2 - m^2)\varphi^2 + \lambda_0\varphi^4: \tag{5.38}$$

一般来说，对于相互作用场情形，当理论不具有稳定束缚态(如 $\lambda\varphi^4$，QED)时，可以取 H_0 为自由场哈密顿量，但其中质量换成相互作用系统的物理质量. 这使得 H_0 与 H 具有全同的谱，因而 S 矩阵可以有双向极限. 当理论有束缚态时，仍可采取同样做法，这使得可按 Feynman 图作微扰展开. 稳定束缚态可认为是一组适当图形的无限和，将其分离出来之后，仍可取 S 的双向极限.

在相互作用图像中，场算符 φ_r 及其共轭动量 π_r 不仅满足自由场的运动方程，而且满足自由场的等时对易关系. 因为在 H 图像中 φ_r 与 π_r 的等时对易关系是与自由场的形式相同的，而 H 图像与 I 图像之间只差一幺正变换，它不会改变正则对易关系的形式，故从 H 图像变换到 I 图像后等时对易关系仍与自由场的形式相同. 于是，相互作用图像中场算符可按自由场方程的 c 数本征解——如平面波——展开. 例如，当 H_0 中的质量取作物理质量后，实标量场 φ，π 皆满足 Klein - Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$
$$(\Box + m^2)\pi(x) = 0 \qquad (m \text{ 为物理质量}) \tag{5.39}$$

所以对所有的时间 t(不仅 $t=0$)可有展开式

$$\varphi(x) = \int \tilde{dk}[a(k)e^{-ik\cdot x} + a^+(k)e^{ik\cdot x}]$$
$$\pi(x) = \int \tilde{dk}(-i\omega_k)[a(k)e^{-ik\cdot x} - a^+(k)e^{ik\cdot x}] \tag{5.40}$$

其中 $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$，而 $a(k), a^+(k)$ 与 t 无关. 与此类似，自旋 1/2 场 $\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$ 也可按自由场平面波展开，而相应的 m 应理解为物理质量.

由于 H_0 中的质量取成了物理质量，所以这种展开导致的单粒子态 $a^+(k)|0\rangle$ 表示具有物理质量的自由粒子，是以后微扰论计算中确定初终态的基础.

问题 5.1　证明：从 H 图像到 I 图像的幺正变换可以通过 U 矩阵来表达.

5.2　微扰展开

本章的其余各节，皆在 I 图像中进行，故略去下标 I.

矩阵 $U(t, t_0)$ 满足微分方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_i(t)U(t,t_0)$$
$$U(t_0,t_0) = 1 \tag{5.41}$$

它可以转换成积分方程

$$U(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_i(t_1)U(t_1, t_0) \tag{5.42}$$

应用迭代法，我们得出

$$\begin{aligned}
U(t,t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_i(t_1)\left[1 - i\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_2)U(t_2, t_0)\right] \\
&= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_i(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2)U(t_2,t_0) \\
&= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_i(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2) + \cdots \\
&\quad + (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_i(t_1)\cdots H_i(t_n) + \cdots
\end{aligned} \tag{5.43}$$

为得到更方便的表达式，先考虑 $n=2$ 项. 设

$$U^{(2)} = \int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2) = \int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 TH_i(t_1)H_i(t_2) \tag{5.44}$$

其中 T 为编时算符，因为在上面的积分中总有 $t_1 \geqslant t_2$. 由于 H_i 中总是包含偶数个 Fermion 场，故

$$TH_i(t_1)H_i(t_2) = TH_i(t_2)H_i(t_1) \tag{5.45}$$

即 T 运算下，H_i 的交换不出现负号. $U^{(2)}$ 可以写成

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 TH_i(t_1)H_i(t_2) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 TH_i(t_2)H_i(t_1) \tag{5.46}$$

第二项是第一项中 $t_1 \leftrightarrow t_2$. 注意第二项中

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 &= \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \theta(t_2 - t_1) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \theta(t_2 - t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2\end{aligned} \tag{5.47}$$

再利用(5.45)式，我们有

$$\begin{aligned}U^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2\right) TH_i(t_1)H_i(t_2) \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 TH_i(t_1)H_i(t_2)\end{aligned} \tag{5.48}$$

由于 $U^{(2)}$ 中两项贡献相同，上式意味着

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \tag{5.49}$$

右边出现因子 1/2，是由于积分区域从直角边长为 $(t - t_0)$ 的等腰直角三角形扩大成边长为 $(t - t_0)$ 的正方形，大了一倍，而在每个三角形内，$TH_i(t_1)H_i(t_2)$ 给出相同的贡献.

与此类似，对于 n 级项

$$\begin{aligned}U^{(n)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_i(t_1) \cdots H_i(t_n) \quad (t_1 > t_2 > \cdots t_n) \\ &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n TH_i(t_1) \cdots H_i(t_n) \\ &= \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n TH_i(t_1) \cdots H_i(t_n)\end{aligned} \tag{5.50}$$

注意将积分上限全部换成了 t 之后，积分区域就扩大成边长为 $(t - t_0)$ 的 n 维立方体，从一块锥形区扩大成 $n!$ 块锥形区，每一块锥形区对应 $t_1, \cdots, t_n$ 的一种排列顺序. 由于 T 符号下，$H_i(t)$ 可交换，故被积函数 $TH_i(t_1) \cdots H_i(t_n)$ 与 $t_1, \cdots, t_n$ 的排列顺序无关，在 $n!$ 个时序交换区域中都给出相同的贡献，总贡献成为 $n!$ 倍. 这说明了上式右边为什么有 $1/n!$ 因子.

于是，$U(t, t_0)$ 的级数展开可写成

$$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n T H_i(t_1) \cdots H_i(t_n) \tag{5.51}$$

或紧缩成

$$U(t, t_0) = T \exp\left[-i \int_{t_0}^{t} H_i(t_1) \mathrm{d}t_1 \right] \tag{5.52}$$

设

$$H_i(t) = \int \mathrm{d}^3 x \, \mathcal{H}_i(x) \tag{5.53}$$

则最后结果成为

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= T \exp\left[-i \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{H}_i(x) \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}^4 x_n T \mathcal{H}_i(x_1) \cdots \mathcal{H}_i(x_n) \end{aligned} \tag{5.54}$$

应当指出，尽管 T 运算只涉及确定的时间坐标，表面上似乎不协变，但可以证明，由于微观因果性，即

$$[\mathcal{H}_i(x_1), \mathcal{H}_i(x_2)] = 0 \quad \text{对于} (x_1 - x_2)^2 < 0 \tag{5.55}$$

编时乘积 $T\mathcal{H}_i(x_1) \cdots \mathcal{H}_i(x_n)$ 是 Lorentz 不变的，坐标系的改变并不改变 T 乘积的形式. 事实上，由于 $\mathcal{H}_i(x)$ 是 Lorentz 标量算符，它的 Lorentz 变换为 $\mathcal{H}_i(x) \to \mathcal{H}_i(\Lambda^{-1}x) = \mathcal{H}_i(x')$，所以在 LT 下，编时乘积的变化将只是由于坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 变换成 $(x_1', \cdots, x_n')$ 而可能引起的 $T\mathcal{H}_i(x_1) \cdots \mathcal{H}_i(x_n)$ 中时间编序的改变. 然而，以 T 乘积中相邻两个 $\mathcal{H}_i$ 的时空点如 x_1 和 x_2 为例，只有当该两点对应类空间隔即 $(x_1 - x_2)^2 < 0$ 时，才有可能使它们的时间顺序在 Lorentz 变换下颠倒过来. 不过，即使的确发生了这种时序颠倒，即

$$\mathcal{H}_i(x_1)\mathcal{H}_i(x_2)(t_1 > t_2) \xrightarrow{\text{LT}} \mathcal{H}_i(x_1')\mathcal{H}_i(x_2')(t_1' < t_2')$$

那么由于类空性质不因 LT 而改变，仍有 $(x_1' - x_2')^2 < 0$，因而总可以利用(5.55)将 $\mathcal{H}_i(x_1')\mathcal{H}_i(x_2')$ 中的两个因子进行交换，使其回到编时顺序 $\mathcal{H}_i(x_2')\mathcal{H}_i(x_1')$. 基于这种论证，我们可以得出结论，编时乘积的形式在新坐标系中仍将保持不变.

S 矩阵是 $U(t,t_0)$ 当 $t_0 \to -\infty$，$t \to +\infty$ 时的极限，故它有级数展开式

$$\begin{aligned} S = U(\infty, -\infty) &= T\exp\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{H}_i(x) \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4 x_n T \mathcal{H}_i(x_1) \cdots \mathcal{H}_i(x_n) \end{aligned} \tag{5.56}$$

设 $t = -\infty$ 时系统处于态 $|i\rangle$，$t = +\infty$ 时系统处于态 $|f\rangle$，则矩阵元 $\langle f|S|i\rangle$ 表示从初态 $|i\rangle$ 至终态 $|f\rangle$ 的跃迁振幅. 利用 S 的级数展开，就可以计算 $\langle f|S|i\rangle$ 至所需要的微扰论级.

问题在于，初态 $|i\rangle$ 和终态 $|f\rangle$ 如何确定？一般说来，一个散射过程或产生反应的图像是这样的：当 $t=-\infty$ 时，初态粒子 a,b 相距很远，彼此没有相互作用；然后它们来到一起，相互碰撞，产生新产物 a′，b′，…，并从碰撞点离开；到 $t=+\infty$ 时，它们又分开远离，彼此不再有相互作用. 因此，初态 $|i\rangle$ 和终态 $|f\rangle$ 都可描述为自由粒子态的乘积. 正如 5.1 节所指出的，可以分

$$H=H_0+H_i$$

H_0 为自由场哈密顿量，其中质量取为粒子的物理质量. $|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 则可以取为 H_0 的本征态，表示物理的自由粒子.“物理”的含义是，它们作为自由粒子虽然彼此没有相互作用，但每个粒子已经通过 H_i 有了自作用，即已经受到了相互作用的影响. 这种自作用通常称为自能，它只改变粒子的质量，因而将质量取为物理质量就是考虑到了这一效应. 注意这一点同非相对论量子理论中的势散射有所不同. 如在量子力学散射的玻恩近似法中，通常分

$$H=H_0+H'$$

初终态可取为 H_0 的本征态(如平面波)，它们是完全未受到 H' 微扰的态.

另外，根据上述碰撞图像，在给定时刻，各种粒子是定域的. 定域粒子的严格描述应当是波包，但在数学上这过于麻烦，所以出于方便，通常用平面波态来近似表示初终态.

以下我们再以 QED 为例，作为说明[17]. 在 QED 中，唯一束缚态电子偶素 (e^+e^-) 是不稳定的，因此可将总哈密顿量 H 分解为

$$H=H_0+H_i \tag{5.57}$$

$$H_0=\int d^3x(\mathcal{H}_{e.m.}+\mathcal{H}_{Dirac})$$

$$\mathcal{H}_{e.m.}=:-\frac{1}{2}\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu+\nabla A^\mu\cdot\nabla A_\mu:$$

$$\mathcal{H}_{Dirac}=:\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi: \quad (m\text{ 为物理质量}) \tag{5.58}$$

$$H_i=\int d^3x\,\mathcal{H}_i(x)$$

$$\mathcal{H}_i(x)=:e\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)-\delta m\bar{\psi}(x)\psi(x):$$

$$\delta m=m-m_0 \qquad (m_0\text{ 为裸质量}) \tag{5.59}$$

初、终态 $|i\rangle$、$|f\rangle$ 可以取为 H_0 的本征态 $|n\rangle$，

$$|n\rangle=\prod a^{(\lambda_i)^+}(k_i)b^+_{\alpha_j}(p_j)d^+_{\alpha_l}(p_l)|0\rangle \tag{5.60}$$

即物理自由粒子态，其中 $|0\rangle$ 是 H_0 的真空态，满足

$$H_0|0\rangle=0 \tag{5.61}$$

注意到 H_0 与 t 无关，故 H_0 的本征态 $|n\rangle$ 也与 t 无关. 此外，由于 H_0 中所含的是物理质量，所以 H_0 和 H 将有全同的谱. 设 $|n\rangle$ 满足

$$H_0 \mid n\rangle = E_n \mid n\rangle \tag{5.62}$$

利用矩阵 $U(t,t_0)$，引入

$$\mid n^{\text{in}}\rangle \equiv U(t,-\infty) \mid n\rangle \tag{5.63}$$

$$\mid n^{\text{out}}\rangle \equiv U(t,\infty) \mid n\rangle \tag{5.64}$$

其中 t 可取为任意有限的时间. 可以证明[24]，这两种态都是总哈密顿量 H 的本征态，满足

$$H \mid n^{\text{in}}\rangle = E_n \mid n^{\text{in}}\rangle \tag{5.65}$$

$$H \mid n^{\text{out}}\rangle = E_n \mid n^{\text{out}}\rangle \tag{5.66}$$

若 $\mid n\rangle$ 是多粒子态，则 $\mid n^{\text{in}}\rangle$ 在 $t=-\infty$ 时代表自由粒子态 $\mid n\rangle$；对于散射问题，$\mid n^{\text{in}}\rangle$ 代表由 $\mid n\rangle$ 描述的平面波加上由于相互作用而引起的球面出射波(初态). 而 $\mid n^{\text{out}}\rangle$ 在 $t=+\infty$ 时代表自由粒子态 $\mid n\rangle$；对散射问题，$\mid n^{\text{out}}\rangle$ 代表由 $\mid n\rangle$ 描述的平面波加上球面入射波(终态). 自由粒子态 $\mid n\rangle$ 跃迁到 $\mid n'\rangle$ 的 S 矩阵元为

$$\langle n' \mid S \mid n\rangle = \langle n' \mid U(\infty,t)U(t,-\infty) \mid n\rangle = \langle n'^{\text{out}} \mid n^{\text{in}}\rangle \tag{5.67}$$

由于集合 $\{\mid n^{\text{in}}\rangle\}$ 和 $\{\mid n^{\text{out}}\rangle\}$ 都是 Hilbert 空间中基矢的正交完备集，所以 S 矩阵就是这两个集合之间的幺正变换.

问题 5.2　证明编时乘积 $T\mathcal{H}_{\text{i}}(x_1)\cdots\mathcal{H}_{\text{i}}(x_n)$ 是 Lorentz 不变的.

5.3　Wick 定理

如果将 S 中的编时乘积化为正规乘积，则可以直接读出任意一个 S 矩阵元 S_{fi} 的表达式. 例如过程

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{e}^- & + & \mathrm{e}^+ & \rightarrow & \gamma & + & \gamma \\ (p,\alpha) & & (q,\beta) & & (k,\lambda) & & (k',\lambda') \end{array}$$

的振幅

$$\langle 0 \mid a^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda')}(k')Sb_\alpha^+(p)d_\beta^+(q) \mid 0\rangle$$

可由 S 中正规乘积项

$$a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda')+}(k')b_\alpha(p)d_\beta(q)$$

的系数给出. Wick 定理[25]正是说明如何将编时乘积化为正规乘积之和.

设 $\varphi(x)$ 是任何定域场(Boson 场或 Fermion 场). 我们推广正规乘积的定义以包括 c 数相乘因子，即

$$:c\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n): = c:\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n): \tag{5.68}$$

以后将简记 $\varphi(x_i)\equiv\varphi_i$.

Wick 定理表述如下：n 个场算符的编时乘积可以写成

$$
\begin{aligned}
T\varphi_1\cdots\varphi_n = {} & :\varphi_1\cdots\varphi_n: \\
& + :\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\cdots\varphi_n: + :\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\cdots\varphi_n: + \text{所有含一对算符收缩的项} \\
& + :\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\underbrace{\varphi_3\varphi_4}\varphi_5\cdots\varphi_n: + :\varphi_1\overbrace{\varphi_2\varphi_3}\varphi_4\varphi_5\cdots\varphi_n: + \text{所有含两对算符收缩的项} \\
& + \cdots \\
& + \begin{cases} \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\cdots\underbrace{\varphi_{n-1}\varphi_n} + \text{所有含 } n/2 \text{ 对算符收缩的项}(n \text{ 偶}) \\ \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\cdots\underbrace{\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\varphi_n + \text{所有含}\dfrac{n-1}{2}\text{对算符收缩的项}(n \text{ 奇}) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

其中

$$
\underbrace{\varphi_1\varphi_2} \equiv \langle 0 \mid T\varphi_1\varphi_2 \mid 0\rangle \tag{5.70}
$$

称为算符的收缩，对应 Feynman 传播子，它是在将算符排成正规乘积的过程中，由算符的对易或反对易关系而引起的. 而

$$
\begin{aligned}
&:\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\cdots\varphi_n: = \underbrace{\varphi_1\varphi_2}:\varphi_3\cdots\varphi_n: \\
&:\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\cdots\varphi_n: = \delta_P\,\underbrace{\varphi_1\varphi_3}:\varphi_2\cdots\varphi_n:
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

$$
\delta_P = \begin{cases} -1 & (\text{若 } \varphi_2,\varphi_3 \text{ 同为 Fermion 算符}) \\ +1 & (\text{其它情况}) \end{cases} \tag{5.72}
$$

一般，当两个算符的收缩要从正规乘积内移出时，需先将这两个算符置换到一起，置换中每两个 Fermion 场算符交换一次则要出一个负号.

为了排算符的正规乘积，需将每个场分解成

$$
\varphi = \varphi^{(+)} + \varphi^{(-)} \tag{5.73}
$$

其中正频部分 $\varphi^{(+)}$ 只含消灭算符，负频部分 $\varphi^{(-)}$ 只含产生算符. 因此有

$$
\varphi^{(+)} \mid 0\rangle = \langle 0 \mid \varphi^{(-)} = 0 \quad (\mid 0\rangle \text{为真空态}) \tag{5.74}
$$

然后要将所有 $\varphi^{(-)}$ 排在左，$\varphi^{(+)}$ 排在右. 在此过程中交换一对 Fermion 算符要出一负号. 例如两个场 φ_1 和 φ_2 的正规乘积可写为

$$
\begin{aligned}
:\varphi_1\varphi_2: &= :(\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)})(\varphi_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)}): \\
&= \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(+)} \mp \varphi_2^{(-)}\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(-)}
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

第三项取 $-$ 号对应 φ_1，φ_2 同为 Fermion 场情况，取 $+$ 号对应其它情况. 一般，n 个场的正规乘积可表为

$$
:\varphi_1\cdots\varphi_n: = \sum_{A,B}\delta_P\prod_{\substack{i \\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\prod_{\substack{j \\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)} \tag{5.76}
$$

这里 A，B 是 n 个指标 1，2，…，n 分割成的两组集合，对于一个确定的 (A,B) 分割组，每个指标在 A 或 B 中最多只出现一次. δ_P 是 Fermion 算符交换出的负号.

如

$:\varphi_1\varphi_2:$ 集合 A	B 可为	$:\varphi_1\varphi_2\varphi_3:$ 集合 A	B 可为
i	j	i	j
1,2	—	1,2,3	—
1	2	1,2	3
2	1	1,3	2
—	1,2	2,3	1
		1	2,3
		2	1,3
		3	1,2
		—	1,2,3

下面我们用归纳法给出 Wick 定理的证明.[11]

对于 $n=1$, $T\varphi=:\varphi:=\varphi$, (5.69) 显然成立.

对于 $n=2$, 注意到两个场算符的乘积可以写成

$$\varphi_1\varphi_2=\varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(+)}+\varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(+)}\mp\varphi_2^{(-)}\varphi_1^{(+)}+\varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(-)}+\varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)}\pm\varphi_2^{(-)}\varphi_1^{(+)}$$

其中最后两项是场算符的反对易子(当 φ_1 和 φ_2 同为 Fermion 场时)或对易子(当 φ_1 和 φ_2 不同为 Fermion 场时), 故必为 c 数. 而前面四项, 根据(5.75), 恰好构成 φ_1 与 φ_2 的正规乘积. 因此我们总有

$$\varphi_1\varphi_2=:\varphi_1\varphi_2:+\text{c 数项} \tag{5.77}$$

于是编时乘积成为

$$\begin{aligned}T\varphi_1\varphi_2&\equiv\theta(x_1^0-x_2^0)\varphi_1\varphi_2\mp\theta(x_2^0-x_1^0)\varphi_2\varphi_1\\&=\theta(x_1^0-x_2^0):\varphi_1\varphi_2:\mp\theta(x_2^0-x_1^0):\varphi_2\varphi_1:+\text{c 数项}\\&=[\theta(x_1^0-x_2^0)+\theta(x_2^0-x_1^0)]:\varphi_1\varphi_2:+\text{c 数项}\\&=:\varphi_1\varphi_2:+\text{c 数项}\end{aligned} \tag{5.78}$$

在 T 乘积的定义中, 两项间 - 号对应 φ_1 和 φ_2 同为 Fermion 场情况, + 号对应其它情况. 得出(5.78)时, 利用了在正规乘积内部, 两 Fermion 算符反对易而其余算符对易的性质. 考虑到

$$\langle 0\mid:\varphi_1\varphi_2:\mid 0\rangle=0$$

可以对(5.78)两边求真空平均而定出 c 数项. 结果得到

$$T\varphi_1\varphi_2=:\varphi_1\varphi_2:+\langle 0\mid T\varphi_1\varphi_2\mid 0\rangle=:\varphi_1\varphi_2:+\underbrace{\varphi_1\varphi_2} \tag{5.79}$$

因此 $n=2$ 时, (5.69) 成立.

下面假定(5.69)对某个 n 成立, 要证明它对 $n+1$ 也成立. 考虑

$$T\varphi_1\cdots\varphi_{n+1}$$

选择 t_{n+1} 为最早的时间, 即将时间最早的算符写在最右边, 则

$$T\varphi_1\cdots\varphi_{n+1}=T(\varphi_1\cdots\varphi_n)\varphi_{n+1}=:\varphi_1\cdots\varphi_n:\varphi_{n+1}+:\underbrace{\varphi_1\varphi_2}\varphi_3\cdots\varphi_n:\varphi_{n+1}+\cdots \tag{5.80}$$

现在需设法将 φ_{n+1} 纳入正规乘积. 为此，利用(5.76)式. (5.80)的第一项成为

$$
\begin{aligned}
&:\varphi_1\cdots\varphi_n:\varphi_{n+1}\\
&=\sum_{A,B}\delta_P\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}(\varphi_{n+1}^{(+)}+\varphi_{n+1}^{(-)})\\
&=\sum_{A,B}\delta_P\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}\varphi_{n+1}^{(+)}+\sum_{A,B}\delta_{P'}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\varphi_{n+1}^{(-)}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}\\
&\quad+\sum_{A,B}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\sum_{\substack{k\\ \text{在}B\text{集}}}\delta_{P''}\prod_{\substack{j\neq k\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}(\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}\pm\varphi_{n+1}^{(-)}\varphi_k^{(+)})
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

上式中

$$\delta_{P'}=\delta_P\times[\varphi_{n+1}^{(-)}\text{ 置换到}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}\text{ 的左侧可能出的正负号}$$

$$\delta_{P''}=\delta_P\times\delta_{P_k},\delta_{P_k}=\varphi_{n+1}^{(-)}\text{置换到 }\varphi_k^{(+)}\text{ 的右侧可能出的正负号}$$

(5.81)中第三部分的出现是由于 $\varphi_{n+1}^{(-)}$ 向左越过一个 $\varphi_k^{(+)}$，要多出一个反对易子或对易子，因为这种置换须通过重写

$$\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}=\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}\pm\varphi_{n+1}^{(-)}\varphi_k^{(+)}\mp\varphi_{n+1}^{(-)}\varphi_k^{(+)}$$

而实现. 其中上面的符号对应 φ_k 和 φ_{n+1} 皆 Fermion 场的情况，下面的符号对应其它情况.

由于 t_{n+1} 是最早的时间，再考虑到(5.74)，故有下面的关系成立：

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\varphi_k\varphi_{n+1}}&=\langle 0\mid\varphi_k\varphi_{n+1}\mid 0\rangle=\langle 0\mid\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}\mid 0\rangle\\
&=\overbrace{\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}}=\langle 0\mid\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}\pm\varphi_{n+1}^{(-)}\varphi_k^{(+)}\mid 0\rangle\\
&=\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}\pm\varphi_{n+1}^{(-)}\varphi_k^{(+)}
\end{aligned}
\tag{5.82}
$$

注意(5.81)的前两部分即 $n+1$ 个场的正规乘积项，因此

$$:\varphi_1\cdots\varphi_n:\varphi_{n+1}=:\varphi_1\cdots\varphi_{n+1}:+\sum_{A,B}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\sum_{\substack{k\\ \text{在}B\text{集}}}\delta_{P''}\prod_{\substack{j\neq k\\ \text{在}B\text{集}}}\varphi_j^{(+)}\overbrace{\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}}\tag{5.83}$$

上式第二部分来自 $:\varphi_1\cdots\varphi_n:$ 中的 $\varphi_k^{(+)}(k=1,\cdots,n)$ 与 $\varphi_{n+1}^{(-)}$ 的收缩项. 对于一个固定的 k，$\varphi_k^{(+)}$ 可能出现在不同的 (A,B) 分割组中，这意味着存在多个皆包含收缩 $\overbrace{\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}}$ 的项. 注意这种项全都不含 $\varphi_k^{(-)}$，这是因为 $\varphi_k=\varphi_k^{(-)}+\varphi_k^{(+)}$，在一项中有了 $\varphi_k^{(+)}$ 就不会再有 $\varphi_k^{(-)}$. 由于(5.83)式第二部分中 k 可取值 $1,\cdots,n$，即

$$\sum_B\sum_{\substack{k\\ \text{在}B\text{集}}}\to\sum_{k=1}^{n}$$

因而该部分可以化为

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{A',B'\\ (\text{不含}k)}}\prod_{\substack{i\\ \text{在}A'\text{集}}}\varphi_i^{(-)}\delta_P\delta_{P_k}\overbrace{\varphi_k^{(+)}\varphi_{n+1}^{(-)}}\prod_{\substack{j\\ \text{在}B'\text{集}}}\varphi_j^{(+)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{P_k} :\varphi_1 \cdots \overbrace{\varphi_k^{(+)} \varphi_{n+1}^{(-)}} \cdots \varphi_n :$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{P_k} :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \varphi_{n+1}} \cdots \varphi_n :$$

$$= \sum_{k=1}^{n} :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \cdots \varphi_n \varphi_{n+1}} :$$

其中利用了(5.82)式，最后一步已将 φ_{n+1} 放回原来的最右边位置，从而使置换引起的正负号因子 δ_{P_k} 消失. 上式表明，对于固定的 k，包含收缩 $\overbrace{\varphi_k^{(+)} \varphi_{n+1}^{(-)}}$ 的项的全体总是可以写成

$$\delta_{P_k} :\varphi_1 \cdots \overbrace{\varphi_k^{(+)} \varphi_{n+1}^{(-)}} \cdots \varphi_n : = \delta_{P_k} :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \varphi_{n+1}} \cdots \varphi_n : = :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \cdots \varphi_n \varphi_{n+1}} :$$

这一结论可以对 $n=2$ 情况作显示例证. 当 $n=2$ 时，我们有

$$:\varphi_1 \varphi_2 :\varphi_3^{(-)} = (\varphi_1^{(+)} \varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)} \varphi_2^{(+)} \mp \varphi_2^{(-)} \varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)} \varphi_2^{(-)}) \varphi_3^{(-)}$$

对于固定的 $\varphi_2^{(+)}$，它与 $\varphi_3^{(-)}$ 的收缩项之和为

$$\left(\varphi_1^{(+)} \underbrace{\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)} \overbrace{\varphi_2^{(+)}}}\right) \varphi_3^{(-)} = \left(\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\right) \underbrace{\varphi_2^{(+)} \varphi_3^{(-)}} = :\varphi_1 \underbrace{\varphi_2 \varphi_3} :$$

对于固定的 $\varphi_1^{(+)}$，它与 $\varphi_3^{(-)}$ 的收缩项之和为

$$\left(\underbrace{\varphi_1^{(+)} \varphi_2^{(+)} \mp \varphi_2^{(-)} \overbrace{\varphi_1^{(+)}}}\right) \varphi_3^{(-)} = :\underbrace{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} :$$

综上所述，(5.83)最终成为

$$:\varphi_1 \cdots \varphi_n :\varphi_{n+1} = :\varphi_1 \cdots \varphi_{n+1} : + \sum_{k=1}^{n} :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \cdots \varphi_n \varphi_{n+1}} : \tag{5.84}$$

对于(5.80)的每一项都有类似(5.84)的结果，即总是可以将 φ_{n+1} 并入原来的正规乘积之内. 这时除了含 φ_{n+1} 的纯正规乘积项以外，还要多出含 φ_{n+1} 与原正规乘积内的每一个场算符分别收缩的正规乘积项的和. 因此，我们最后得到

$$\begin{aligned} T\varphi_1 \cdots \varphi_{n+1} &= :\varphi_1 \cdots \varphi_{n+1} : + \sum_{k=1}^{n} :\varphi_1 \cdots \underbrace{\varphi_k \cdots \varphi_{n+1}} : \\ &\quad + \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_n \\ \text{的所有置换}}} :\underbrace{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \cdots \varphi_{n+1} : \\ &\quad + \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_n \\ \text{的所有置换}}} \sum_{k=3}^{n} :\underbrace{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \cdots \underbrace{\varphi_k \cdots \varphi_{n+1}} : \\ &\quad + \cdots \\ &= :\varphi_1 \cdots \varphi_{n+1} : + \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_{n+1} \\ \text{的所有置换}}} :\underbrace{\varphi_1 \varphi_2} \cdots \varphi_{n+1} : + \cdots \end{aligned} \tag{5.85}$$

即对于 $n+1$，(5.69)式成立. 由此，Wick 定理得证.

关于算符的收缩运算，两个特别情况应当予以说明.

(1) 注意到

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \mathrm{d}^4 x_1 \cdots \mathrm{d}^4 x_n T\mathcal{H}_i(x_1) \cdots \mathcal{H}_i(x_n)$$

由于每个$\mathcal{H}_i(x)$中的算符都已经排成了正规乘积，因此属于同一$\mathcal{H}_i(x)$的场算符间的收缩为0，即

$$:\underbrace{\varphi(x)\varphi}(x): = \langle 0 \mid T:\varphi(x)\varphi(x): \mid 0\rangle = \lim_{\substack{y^0 < x^0 \\ y^0 \to x^0}} \langle 0 \mid :\varphi(\vec{x}, x^0)\varphi(\vec{x}, y^0): \mid 0\rangle = 0 \tag{5.86}$$

(2) 不同场算符之间的收缩必为0. 设A,B为不同的场，它们之间的收缩

$$\begin{aligned}\underbrace{A(x_1)B}(x_2) &\equiv \langle 0 \mid TA(x_1)B(x_2) \mid 0\rangle \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0)\langle 0 \mid A(x_1)B(x_2) \mid 0\rangle \pm \theta(x_2^0 - x_1^0)\langle 0 \mid B(x_2)A(x_1) \mid 0\rangle\end{aligned}$$

其中 - 号对应A,B皆为 Fermion 场的情况，+ 号对应其它情况. 但

$$\begin{aligned}\langle 0 \mid A(x_1)B(x_2) \mid 0\rangle &= \langle 0 \mid A^{(+)}(x_1)B^{(-)}(x_2) \mid 0\rangle \\ &= \pm \langle 0 \mid B^{(-)}(x_2)A^{(+)}(x_1) \mid 0\rangle = 0\end{aligned}$$

因为A,B为不同的场，它们或者对易(+号)，或者反对易(-号). 同理

$$\langle 0 \mid B(x_2)A(x_1) \mid 0\rangle = 0$$

所以

$$\underbrace{A(x_1)B}(x_2) = 0 \quad \text{对不同的场 } A, B \tag{5.87}$$

问题 5.3 直接验证，对于4个 Fermion 场ψ_1,ψ_2,ψ_3,ψ_4，有

$$:\psi_1\psi_2\psi_3:\psi_4 = :\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4: + :\underbrace{\psi_1\psi_2\psi_3}\psi_4: + :\psi_1\underbrace{\psi_2\psi_3}\psi_4: + :\psi_1\psi_2\underbrace{\psi_3\psi_4}:$$

其中ψ_4是时间最早的场算符.

5.4 Feynman 图——QED

应用 Wick 定理，可将S矩阵微扰展开中的T乘积化为一系列正规乘积之和，每一项正规乘积对应于一个S矩阵元，都可以用图形——Feynman 图——来表示. 现在来讨论如何使正规乘积图形化并得出一般规则.[21]

5.4.1 QED S 矩阵的正规乘积分解

QED 是正负电子与光子相互作用的量子场论. 在相互作用图像中，自由哈氏密度与相互作用哈氏密度已分别在(5.58)和(5.59)中给出. 注意相互作用哈氏密度

$$\mathcal{H}_i(x) = e:\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x) - \delta m:\bar{\psi}(x)\psi(x):$$

包含正比于电子电荷e以及正比于$\delta m = m - m_0$的项，所以S矩阵的微扰展开可按e,δm的幂次进行. 含δm的项通常称为质量抵消项，其意义将在以后阐述.

至 e^2 级，

$$\begin{aligned} S &= 1 - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x T\mathcal{H}_{\mathrm{i}}(x) + \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 T\mathcal{H}_{\mathrm{i}}(x_1)\mathcal{H}_{\mathrm{i}}(x_2) \\ &= 1 - \mathrm{i}e\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x T{:}\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x){:} + \mathrm{i}\delta m\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x T{:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:} \\ &\quad + \frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 T{:}\bar{\psi}(x_1)\not{A}(x_1)\psi(x_1){::}\bar{\psi}(x_2)\not{A}(x_2)\psi(x_2){:} \\ &\quad + \cdots \\ &= 1 + S_{\mathrm{e.m.}}^{(1)} + S_{\delta m}^{(1)} + S_{\mathrm{e.m.}}^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{5.88}$$

考虑到属于同一$\mathcal{H}_{\mathrm{i}}(x)$的场之间收缩为0，不同的场如 A_μ 和 ψ 之间，A_μ 和 $\bar{\psi}$ 之间的收缩为0以及

$$\begin{aligned} \overbrace{\psi(x_1)\psi(x_2)} &\equiv \langle 0 \mid T\psi(x_1)\psi(x_2) \mid 0\rangle \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0)\langle 0 \mid \psi^{(+)}(x_1)\psi^{(-)}(x_2) \mid 0\rangle - (x_1 \leftrightarrow x_2) \\ &= -\theta(x_1^0 - x_2^0)\langle 0 \mid \psi^{(-)}(x_2)\psi^{(+)}(x_1) \mid 0\rangle - (x_1 \leftrightarrow x_2) \\ &= 0 \\ \overbrace{\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)} &\equiv \langle 0 \mid T\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2) \mid 0\rangle \\ &= \theta(x_1^0 - x_2^0)\langle 0 \mid \bar{\psi}^{(+)}(x_1)\bar{\psi}^{(-)}(x_2) \mid 0\rangle - (x_1 \leftrightarrow x_2) \\ &= -\theta(x_1^0 - x_2^0)\langle 0 \mid \bar{\psi}^{(-)}(x_2)\bar{\psi}^{(+)}(x_1) \mid 0\rangle - (x_1 \leftrightarrow x_2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.89}$$

所以

$$S_{\mathrm{e.m.}}^{(1)} = -\mathrm{i}e\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x {:}\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x){:} \tag{5.90a}$$

$$S_{\delta m}^{(1)} = \mathrm{i}\delta m\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x {:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:} \tag{5.90b}$$

$$S_{\mathrm{e.m.}}^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 \{ {:}\overbrace{\bar{\psi}\not{A}\psi}^{x_1}\overbrace{\bar{\psi}\not{A}\psi}^{x_2}{:} \tag{5.91a}$$

$$+ {:}\bar{\psi}\not{A}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} \tag{5.91b}$$

$$+ 2{:}\bar{\psi}\not{A}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} \tag{5.91c}$$

$$+ 2{:}\bar{\psi}\underbrace{\not{A}\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} \tag{5.91d}$$

$$+ {:}\underbrace{\bar{\psi}\not{A}\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} \tag{5.91e}$$

$$+ {:}\bar{\psi}\underbrace{\not{A}\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} \} \tag{5.91f}$$

(5.91a)—(5.91f)被积函数的积分变量已在最上方统一标出.(5.91c)中的因子2是由于

$$2{:}\bar{\psi}\not{A}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} = {:}\bar{\psi}\not{A}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:} + {:}\underbrace{\bar{\psi}\not{A}\psi\bar{\psi}}\not{A}\psi{:}$$

因为在正规乘积符号::内部，上式第二项中 $\bar{\psi}\not{A}\psi\mid_{x_1}$ 与 $\bar{\psi}\not{A}\psi\mid_{x_2}$ 可交换，再令积分变量 $x_1\leftrightarrow x_2$，则第二项与第一项全同. 同理，(5.91d)中的因子 2 是由于

$$2:\bar{\psi}\not{A}\psi\ \bar{\psi}\not{A}\psi:=:\bar{\psi}\not{A}\psi\ \bar{\psi}\not{A}\psi:=:\bar{\psi}\not{A}\psi\ \bar{\psi}\not{A}\psi:$$

出现在(5.91b)—(5.91f)中的非 0 收缩是

$$\begin{aligned}\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}&=\langle 0\mid TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\mid 0\rangle=\mathrm{i}g_{\mu\nu}G_F(x_1-x_2)\mid_{m=0}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\end{aligned}\tag{5.92}$$

即(3.162)式和

$$\begin{aligned}\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}&=\langle 0\mid T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\mid 0\rangle=\mathrm{i}S(x_1-x_2)\\&=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}\frac{\mathrm{i}(\not{k}+m)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\end{aligned}\tag{5.93}$$

即(3.202)式. 注意收缩的定义是算符编时乘积的真空平均值，它是图像无关的，在 I 图像与 H 图像中结果相同. 上述收缩即坐表象中的传播子，它们与坐标表象中的场算符(外线)都可以用图形表示，这已由图 5.1 给出.

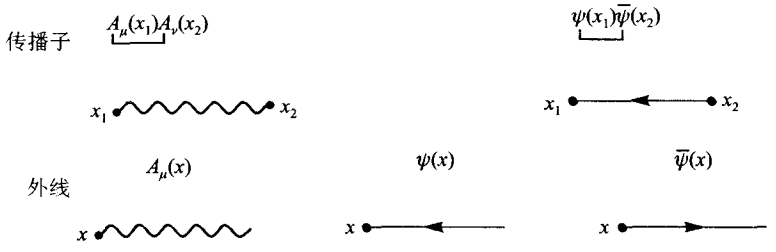


图 5.1 坐标表象中传播子与外线的图示

5.4.2 S 矩阵元

(5.90a)，(5.90b)和(5.91a)—(5.91f)中的所有算符皆排成了正规乘积——产生算符在左，消灭算符在右，因而可以直接读出相应的 S 矩阵元.

先看一级正规乘积. $S^{(1)}_{\mathrm{e.m.}}$ 和 $S^{(1)}_{\delta m}$ 的被积函数表达了坐标表象中最低级的相互作用顶角，其图示由图 5.2 给出.

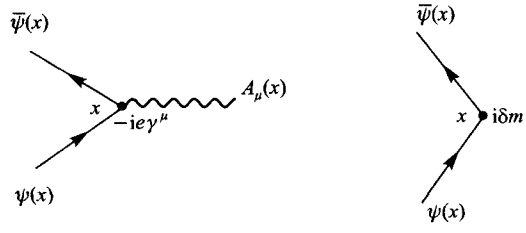


图 5.2 最低级相互作用顶角

注意

$$S_{\text{e.m.}}^{(1)} = -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x :(\bar{\psi}^{(-)}+\bar{\psi}^{(+)})\gamma^{\mu}(\psi^{(+)}+\psi^{(-)})(A_{\mu}^{(+)}+A_{\mu}^{(-)}):$$

$$S_{\delta m}^{(1)} = \mathrm{i}\delta m\int \mathrm{d}^4x :(\bar{\psi}^{(-)}+\bar{\psi}^{(+)})(\psi^{(+)}+\psi^{(-)}):$$

由此很容易看出它们所包含的一级正规乘积项和相应的 S 矩阵元，其中某些已列于表 5.1.

表 5.1　一级正规乘积和相应的 S 矩阵元

	正规乘积	初态 $\lvert i\rangle$	终态 $\langle f\rvert$
a.	$\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\psi^{(+)}A_{\mu}^{(+)}$	$a^{(\lambda)+}(k)b_{\alpha}^{+}(p)\lvert 0\rangle$	$\langle 0\rvert b_{\alpha'}(p')$
b.	$\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\psi^{(-)}A_{\mu}^{(+)}$	$a^{(\lambda)+}(k)\lvert 0\rangle$	$\langle 0\rvert b_{\alpha}(p)d_{\alpha'}(p')$
c.	$\bar{\psi}^{(+)}\gamma^{\mu}\psi^{(+)}A_{\mu}^{(-)}$	$b_{\alpha}^{+}(p)d_{\alpha'}^{+}(p')\lvert 0\rangle$	$\langle 0\rvert a^{(\lambda)}(k)$
	⋮	⋮	⋮
d.	$\bar{\psi}^{(-)}\psi^{(+)}$	$b_{\alpha}^{+}(p)\lvert 0\rangle$	$\langle 0\rvert b_{\alpha'}(p')$
	⋮	⋮	⋮

表中光子极化 $\lambda=1,2$，只对应物理横光子. 因为初终态应为物理态，而根据 3.4 节的讨论，物理态可以取成只有横光子的态.

对于实际计算来说，将 S 矩阵元及其图形在动量表象中表示出来要方便得多. 为此，我们利用几个有用的结果. 注意到

$$\psi=\psi^{(+)}+\psi^{(-)},\quad \bar{\psi}=\bar{\psi}^{(-)}+\bar{\psi}^{(+)},\quad A_{\mu}=A_{\mu}^{(+)}+A_{\mu}^{(-)}$$

而

$$\begin{aligned}A_{\mu}^{(+)}(x)a^{(\lambda)+}(k)\lvert 0\rangle &= \int \tilde{\mathrm{d}}k' a^{(\lambda')}(k')\varepsilon_{\mu}^{(\lambda')}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}a^{(\lambda)+}(k)\lvert 0\rangle\\ &= \int \tilde{\mathrm{d}}k'\varepsilon_{\mu}^{(\lambda')}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}(-g^{\lambda'\lambda})(2\pi)^3 2k'^0\delta^3(\vec{k}'-\vec{k})\lvert 0\rangle\\ &= \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\lvert 0\rangle \quad (\text{因为 } -g^{\lambda'\lambda}=\delta^{\lambda'\lambda},\text{对于 } \lambda=1,2)\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x)b_{\alpha}^{+}(p)\lvert 0\rangle &= \int \tilde{\mathrm{d}}q b_{\beta}(q)u^{(\beta)}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}b_{\alpha}^{+}(p)\lvert 0\rangle\\ &= \int \tilde{\mathrm{d}}q u^{(\beta)}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}(2\pi)^3\frac{q^0}{m}\delta^3(\vec{q}-\vec{p})\delta_{\alpha\beta}\lvert 0\rangle\\ &= u^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\lvert 0\rangle\end{aligned} \tag{5.95}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)d_{\alpha}^{+}(p)\lvert 0\rangle=\bar{v}^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\lvert 0\rangle \tag{5.96}$$

$$\langle 0\rvert a^{(\lambda')}(k')A_{\mu}^{(-)}(x)=\langle 0\rvert \varepsilon_{\mu}^{(\lambda')}(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x} \tag{5.97}$$

$$\langle 0\rvert b_{\alpha'}(p')\bar{\psi}^{(-)}(x)=\langle 0\rvert \bar{u}^{(\alpha')}(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x} \tag{5.98}$$

$$\langle 0 \mid d_{\alpha'}(p')\psi^{(-)}(x) = \langle 0 \mid v^{(\alpha')}(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x} \tag{5.99}$$

利用以上公式，我们可以证明，含有三线性耦合纯正规乘积(无收缩)因子的项对 S 矩阵元的贡献总是 0. 例如，考虑表 5.1 中第一行的矩阵元

$$\begin{aligned}\langle f \mid S^{(1)}_{\mathrm{e.m.}} \mid i\rangle_{\mathrm{a}} &= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\langle 0 \mid b_{\alpha'}(p')\bar{\psi}^{(-)}(x)\gamma^{\mu}\psi^{(+)}(x)A^{(+)}_{\mu}(x)a^{(\lambda)+}(k)b^{+}_{\alpha}(p) \mid 0\rangle \\ &= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\bar{u}^{(\alpha')}(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x}\gamma^{\mu}u^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\langle 0 \mid 0\rangle \\ &= -\mathrm{i}e(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)\bar{u}^{(\alpha')}(p')\gamma^{\mu}u^{(\alpha)}(p)\varepsilon^{(\lambda)}_{\mu}(k)\end{aligned} \tag{5.100}$$

其中 p 和 p'分别是初态和终态电子的动量，k 是初态光子的动量. 由于 δ 函数的存在，必须有初、终态的四动量守恒条件

$$p'-p-k=0 \tag{5.101}$$

另一方面，初、终态粒子为自由粒子，须满足质壳条件即

$$p^2=p'^2=m^2, \quad k^2=0 \tag{5.102}$$

但是(5.101)和(5.102)是不自恰的，因为从(5.101)可得

$$p'^2=p^2+k^2+2p\cdot k$$

考虑(5.102)之后，它成为

$$p\cdot k=0 \quad 或 \quad k^0(p^0-|\vec{p}|\cos\theta)=0 \tag{5.103}$$

其中 θ 为三维动量 $\vec{p}$ 与 $\vec{k}$ 之间的夹角. (5.103)不可能满足，除非 $k^0=0$. 因此，对有限 k，$p'-p-k=0$ 与质壳条件相矛盾. 这意味着

$$\langle f \mid S^{(1)}_{\mathrm{e.m.}} \mid i\rangle_{\mathrm{a}}=0 \tag{5.104}$$

对于 $S^{(1)}_{\mathrm{e.m.}}$ 中其余的三线性耦合纯正规乘积项，我们有同样的结论. 于是可以得出

$$\langle f \mid S^{(1)}_{\mathrm{e.m.}} \mid i\rangle = -\mathrm{i}e\langle f \mid \int \mathrm{d}^4x{:}\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x){:} \mid i\rangle = 0 \tag{5.105}$$

同理，在微扰论的任何级，对于任何含有三线性耦合纯正规乘积因子的项，其 S 矩阵元

$$\langle f \mid :\cdots\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)\cdots: \mid i\rangle \propto \delta^4(p'+p+k) \tag{5.106}$$

也将由于四动量守恒与质壳条件相矛盾而为 0，这里 p'，p 是初态或终态 Fermion 的四动量，k 是光子的四动量(最多差一负号).

然而，对于含有 δm 的双线性正规乘积项如表 5.1 中的第四行的矩阵元

$$\begin{aligned}\langle f \mid S^{(1)} \mid i\rangle_{\mathrm{d}} &= \langle 0 \mid b_{\alpha'}(p')\mathrm{i}\delta m\int \mathrm{d}^4x\bar{\psi}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x)b^{+}_{\alpha}(p) \mid 0\rangle \\ &= \mathrm{i}\delta m(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\bar{u}^{(\alpha')}(p')u^{(\alpha)}(p)\end{aligned} \tag{5.107}$$

却有非零贡献，因为其中的四动量守恒条件 $p'=p$ 不会和质壳条件相矛盾.

接着我们再看二级正规乘积. 同 $S^{(1)}$ 一样，$S^{(2)}$ 中的每一项都含有一组正规

乘积，与各自可能的 S 矩阵元相应. 基于上面的讨论，纯正规乘积项(5.91a)的贡献为0. 表5.2列出了一些重要的有非零贡献的正规乘积及相应的 S 矩阵元，下一节将举例讨论之.

表5.2　二级正规乘积

正规乘积	初态 $\|i\rangle$	终态 $\langle f\|$	过程
$:\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\psi^{(+)}\psi^{(-)}\gamma^{\nu}\psi^{(+)}:\underbrace{A_{\mu}A_{\nu}}$	$b_{\alpha}^{+}(p)b_{\beta}^{+}(q)\|0\rangle$	$\langle 0\|b_{\beta'}(q')b_{\alpha'}(p')$	$e^{-}-e^{-}$(Møller)散射
$:\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\psi^{(+)}\bar{\psi}^{(+)}\gamma^{\nu}\psi^{(-)}:\underbrace{A_{\mu}A_{\nu}}$	$b_{\alpha}^{+}(p)d_{\beta}^{+}(q)\|0\rangle$	$\langle 0\|d_{\beta'}(q')b_{\alpha'}(p')$	$e^{-}-e^{+}$(Bhabba)散射
$\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi^{(+)}A_{\mu}^{(-)}A_{\nu}^{(+)}$	$b_{\alpha}^{+}(p)a^{(\lambda)+}(k)\|0\rangle$	$\langle 0\|a^{(\lambda')}(k')b_{\alpha'}(p')$	$\gamma-e^{-}$(Compton)散射
$\psi^{(+)}\gamma^{\mu}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi^{(+)}A_{\mu}^{(-)}A_{\nu}^{(-)}$	$b_{\alpha}^{+}(p)d_{\beta}^{+}(q)\|0\rangle$	$\langle 0\|a^{(\lambda')}(k')a^{(\lambda)}(k)$	$e^{-}+e^{+}\rightarrow 2\gamma$
$\bar{\psi}^{(-)}\gamma^{\mu}\underbrace{\psi\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi^{(+)}\underbrace{A_{\mu}A_{\nu}}$	$b_{\alpha}^{+}(p)\|0\rangle$	$\langle 0\|b_{\alpha'}(p')$	电子自能跃迁
$\underbrace{\psi\gamma^{\mu}\psi\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi A_{\mu}^{(-)}A_{\nu}^{(+)}$	$a^{(\lambda)+}(k)\|0\rangle$	$\langle 0\|a^{(\lambda')}(k')$	光子自能跃迁
$\underbrace{\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi\underbrace{A_{\mu}A_{\nu}}$	$\|0\rangle$	$\langle 0\|$	真空-真空跃迁

5.4.3　物理过程的二级 S 矩阵元举例

我们将以 $e^{-}-e^{+}$(Bhabba)散射和光子自能跃迁两个过程为例，说明如何从正规乘积项得出二级 S 矩阵元的解析表达式.

对于 $e^{-}-e^{+}$ 散射，有贡献的正规乘积有四项，相应的 $S^{(2)}$ 矩阵元为

$$\begin{aligned}\langle f|S^{(2)}|i\rangle|_{e^{-}e^{+}\rightarrow e^{-}e^{+}} &= \frac{(-ie)^{2}}{2}\int d^{4}x_{1}d^{4}x_{2}\langle 0|d_{\beta'}(q')b_{\alpha'}(p')\\ &:\{\bar{\psi}^{(-)}(x_{1})\gamma^{\mu}\psi^{(+)}(x_{1})\bar{\psi}^{(+)}(x_{2})\gamma^{\nu}\psi^{(-)}(x_{2})+(x_{1}\leftrightarrow x_{2})\\ &+\bar{\psi}^{(+)}(x_{1})\gamma^{\mu}\psi^{(+)}(x_{1})\bar{\psi}^{(-)}(x_{2})\gamma^{\nu}\psi^{(-)}(x_{2})+(x_{1}\leftrightarrow x_{2})\}:\\ &\underbrace{A_{\mu}(x_{1})A_{\nu}(x_{2})}b_{\alpha}^{+}(p)d_{\beta}^{+}(q)|0\rangle \qquad (5.108)\end{aligned}$$

对 $d^{4}x_{1}$，$d^{4}x_{2}$ 积分后，第一项与第二项结果相同，第三项与第四项结果相同，于是矩阵元前面的1/2因子可以消去. 再利用(5.92)以及(5.94)—(5.99)，我们

得到

$$
\begin{aligned}
&\langle f|S^{(2)}_{\text{e.m.}}|i\rangle|_{e^-e^+\to e^-e^+}\\
&=(-ie)^2\int d^4x_1 d^4x_2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}\\
&\quad\times\{-e^{ip'\cdot x_1}\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)e^{-ip\cdot x_1}e^{-iq\cdot x_2}\bar v^{(\beta)}(q)\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')e^{iq'\cdot x_2}\\
&\quad+e^{-iq\cdot x_1}\bar v^{\beta}(q)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)e^{-ip\cdot x_1}e^{ip'\cdot x_2}\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')e^{iq'\cdot x_2}\}\\
&=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\{-(2\pi)^4\delta^4(-k+p'-p)\\
&\quad\times(2\pi)^4\delta^4(k-q+q')\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\bar v^{(\beta)}(q)\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')\\
&\quad+(2\pi)^4\delta^4(k+q+p)(2\pi)^4\delta^4(k+p'\\
&\quad+q')\bar v^{(\beta)}(q)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')\}\\
&=(-ie)^2(2\pi)^4\delta^4(p'+q'-p-q)\\
&\quad\times\{-\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'-p)^2+i\varepsilon}\bar v^{(\beta)}(q)\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')\\
&\quad+\bar v^{(\beta)}(q)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p+q)^2+i\varepsilon}\bar u^{(\alpha')}(p')\gamma^\nu v^{(\beta')}(q')\}\\
&=A+B
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

不难看出，

$$
B=-A|_{\bar u^{(\alpha')}(p')\leftrightarrow\bar v^{(\beta)}(q),p'\leftrightarrow -q}
\tag{5.110}
$$

即第二项 B 可由第一项 A 中的终态电子与初态正电子进行交换并乘一负号得出.

对于光子自能跃迁，二级矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle f|S^{(2)}_{\text{e.m.}}|i\rangle|_{\text{光子自能}}=\frac{(-ie)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\langle 0|a^{(\lambda')}(k')\\
&:\bar\psi(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)[A^{(-)}_\mu(x_1)A^{(+)}_\nu(x_2)+A^{(+)}_\mu(x_1)A^{(-)}_\nu(x_2)]:a^{(\lambda)+}(k)|0\rangle\\
&=(-ie)^2\int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik'\cdot x_1}\varepsilon^{(\lambda')}_\mu(k')(-)\text{tr}:\gamma^\mu\psi(x_1)\bar\psi(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)\bar\psi(x_1):\varepsilon^{(\lambda)}_\nu(k)e^{-ik\cdot x_2}
\end{aligned}
\tag{5.111}
$$

方括号中的两项贡献相同，因而消去了前面的 1/2 因子. 此外，在将含 Fermion 场收缩的因子改写成求迹时，须在正规乘积内将 $\bar\psi(x_1)$ 移到 $\psi(x_2)$ 后面，这要交换 Fermion 算符三次，结果出现了一个负号. 再利用 Fermion 传播子的表达式 (5.93) 以及公式

$$
\frac{\not p+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}=(\not p+m)\frac{1}{(\not p+m-i\varepsilon)(\not p-m+i\varepsilon)}=\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}
\tag{5.112}
$$

我们得到

$$\langle f \mid S^{(2)}_{\text{c.m.}} \mid i \rangle \mid_{\text{光子自能}} = (2\pi)^4 \delta^4(k'-k)\varepsilon_\mu^{(\lambda')}(k')\Pi^{\mu\nu}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k) \tag{5.113}$$

其中

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -(-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}}{\not p - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not p - \not k - m + \mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{5.114}$$

称为真空极化张量. $\Pi^{\mu\nu}(k)$中的 $\mathrm{d}^4 p$ 积分是平方发散的，因为当 $p \to \infty$ 时，该积分

$$\sim \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{|p|^2}$$

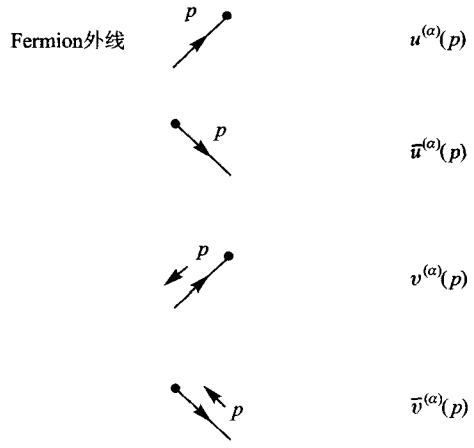
这种发散出现在动量趋于无穷大的区域，故称为紫外发散.

5.4.4　QED Feynman 规则

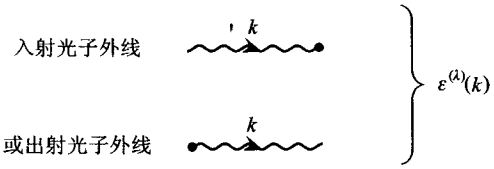
通过 S 矩阵的正规乘积来计算物理过程的 S 矩阵元是一种基本但冗长的操作. 实际上有更简便的方法来得出各种物理过程的微扰矩阵元，这就是利用 Feynman 规则. 一个 S 矩阵元中的各个因子都可以用图形表示出来，所依据的规则就称为 Feynman 规则，所得出的 S 矩阵元的图形表示就称为 Feynman 图. 只要由正规乘积项计算出几个典型物理过程的矩阵元，就能够确立全部 Feynman 规则. 一旦 Feynman 规则已经确立，就可以反过来进行：先画出物理过程的 Feynman 图，然后依规则读出相应的 S 矩阵元.

事实上，在 5.4.3 节列举的两个过程的 S 矩阵元已使我们能够确立绝大部分 Feynman 规则，略加补充，即可得出全部规则. 现将 QED Feynman 图的一般规则列示如下：

1. 外线因子

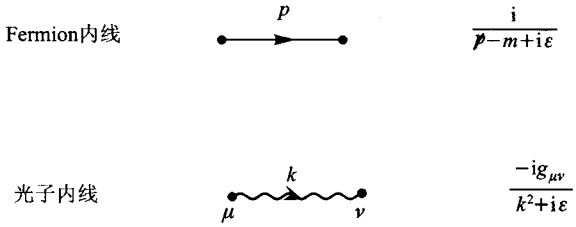


注意对于 $u^{(\alpha)}(p)$ 和 $\bar{u}^{(\alpha)}(p)$（正粒子），动量 p 顺着 Fermion 线上箭头的方向；而对于 $v^{(\alpha)}(p)$ 和 $\bar{v}^{(\alpha)}(p)$（反粒子），动量 p 逆着 Fermion 线上箭头的方向.

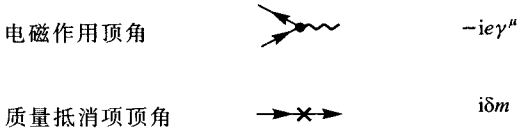


由于光子无正反粒子之分，光子线上的箭头即表示动量的方向.

2. 内线因子（即动量表象中的传播子）



3. 顶角因子



4. 在每一顶角处，我们规定入射动量为负，出射动量为正，则所有出入射动量之和为 0. 这是每一顶角处由 δ 函数所表达的四动量守恒条件的结果.

5. 在每一个由内线围成的圈中，含有一个未受四动量守恒条件限定的自由动量 p，相应有一个积分 $\int d^4p/(2\pi)^4$.

6. 对每一个由 Fermion 内线围成的圈，有一个 $-\mathrm{tr}$.

7. 两个全同 Fermion 的外线交换导致一个负号. 这不仅包括终态全同粒子的交换，也包括终态粒子和初态反粒子间的交换.

8. 每个图形都包括一个总的外线四动量守恒因子 $(2\pi)^4\delta^4(\sum p)$，这里 $\sum p$ 表示对全部外线出入射动量求和.

9. 为了写出一个确定物理过程至某一微扰论级的 S 矩阵元，首先必须对于给定的外动量，画出所有拓扑上不等价安排的图形，但略去包含真空 - 真空跃迁的不连接图，并计数每一图形的拓扑权因子 W. 拓扑权是指，对于一个给定的图形，如有 m 种方式被画，则 m 称为该图的拓扑权[12]. 而拓扑权因子

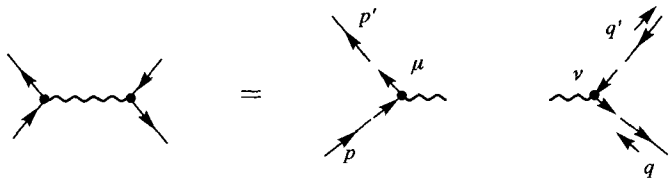
W = 拓扑权 ×（相互作用顶角置换因子）×（微扰级数展开逆阶乘因子）

(5.115)

就 QED 而言，除真空－真空图外，拓扑权总是可以消掉 e^n 级展开中的 $1/n!$ 因子，而 QED 顶角置换因子为 1，因此总有拓扑权因子 $W=1$.

下面我们仍以 5.4.3 节中的两个过程为例，说明如何通过 Feynman 图来给出二级 S 矩阵元，同时检验上述 Feynman 规则的正确性.

对于 $e^- - e^+$ 散射，外线动量给定后，二级图的形式为



它是由两个顶角和四条 Fermion 外线连接而成的. 由于两个顶角连成光子内线只一种可能，而四个动量确定的 Fermion 外线连到两个顶角上，共有四种不同的方式，如图 5.3 所示.

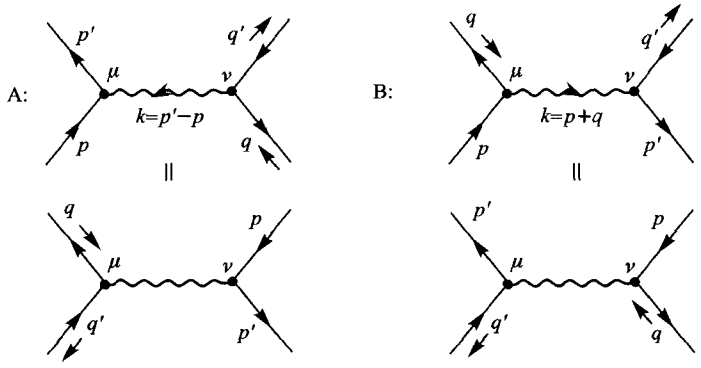


图 5.3　$e^- - e^+$ 散射图的拓扑权

其中两两等价. 结果拓扑不等价图只有 A 和 B，权各为 2，从而将消去 e^2 级展开中的 1/2! 因子. 由于 B 是由 A 的终态电子与初态正电子交换所得，故二者的 S 矩阵元要差一负号. A + B 即 $e^- - e^+$ 散射的二级 Feynman 图，根据 Feynman 规则，可以从它写出相应的 S 矩阵元. 不难证实，所得表达式与直接从正规乘积项计算的结果(5.109)完全相同.

A 与 B 中的光子内线即动量表象中的光子传播子. 其中若 $k^2=0$(质壳)，则代表真实光子的传播. 而目前的内线光子，如 A 中，$k^2=(p'-p)^2<0$(类空)，而 B 中，$k^2=(p+q)^2>0$(类时)，都不是零，所以它们不是真实光子而称为虚光

子(即不在质壳上的光子). 我们可以说,$e^- - e^+$ 散射是通过交换类空虚光子(A)和湮灭成类时虚光子(B)进行的. 交换和湮灭的虚光子包括所有四种类型:横光子、纵光子和标量光子. 回忆 $g_{\mu\nu}$ 来自四种光子极化矢量 $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ ($\lambda=0,1,2,3$)的完全性条件(3.144a).

对于光子自能跃迁,当外动量 k, k' 给定后,其二级 Feynman 图示于图 5.4.

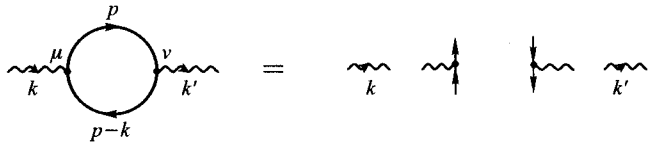


图 5.4 光子自能跃迁图及其拓扑权考虑

它是由两个顶角与两条光子外线连接而成的. 两个顶角连成 Fermion 圈只有一种方式,而光子外线连到顶角上有两种方式(左右交换),故拓扑权为 2,可以消去 e^2 级展开中的 1/2! 因子. 与图 5.4 相应的 S 矩阵元可由 Feynman 规则写出,结果也与由正规乘积项计算所得(5.113)式完全相同.

光子自能图中含有由两条电子内线围成的圈. 我们称这种含有由内线围成的圈的 Feynman 图为圈图;而不含圈的图称为树图,如上述 $e^- - e^+$ 二级散射图. 二者的区别在于树图中内线的动量通过各顶角的四动量守恒因子完全由外线动量决定;而圈图中每个圈都含有一个未受限定的自由动量,对之要进行积分,正如 Feynman 规则 5 中所述的.

利用 Feynman 规则,我们也可以写出表 5.2 中所示的其它二级过程的 S 矩阵元. 注意到考虑拓扑权之后,除真空 - 真空图之外,对每一个拓扑不等价图,其权总为 2,可以消去二级微扰展开中的 1/2! 因子. 这一结论与直接从二级正规乘积求 S 矩阵元所得相同. 从正规乘积计算观点看,这是因为,对于除真空 - 真空跃迁之外的物理过程,相应每一个拓扑不等价图,$S^{(2)}$ 中总有两项相同的贡献,它们或者来自场算符的两种不同方式的收缩(如 $\gamma - e^-$ 散射,电子自能),或者来自场算符对初、终态的两种不同方式的作用(如 $e^- - e^-$ 散射,$e^- - e^+$ 散射,光子自能),从而将 1/2! 因子消去. 在图表示的意义上,算符的收缩对应两顶角连成内线,而算符对初、终态的作用对应顶角连到外线. 因此通过上述图表示的拓扑权计数,恰好使消去 1/2! 因子这一结果得到了简单明白的论证.

下面我们再来考察四级微扰图的例子,它们示于图 5.5 中.

其中,图(a),(b)和(c)分别表示有光子自能修正,电子自能修正和顶角修正的 $e^- - e^-$ 散射,图(d)表示有光子自能修正的 Compton 散射,图(e)和图(f)表示四级电子自能跃迁,而图(g)表示四级光子自能跃迁.

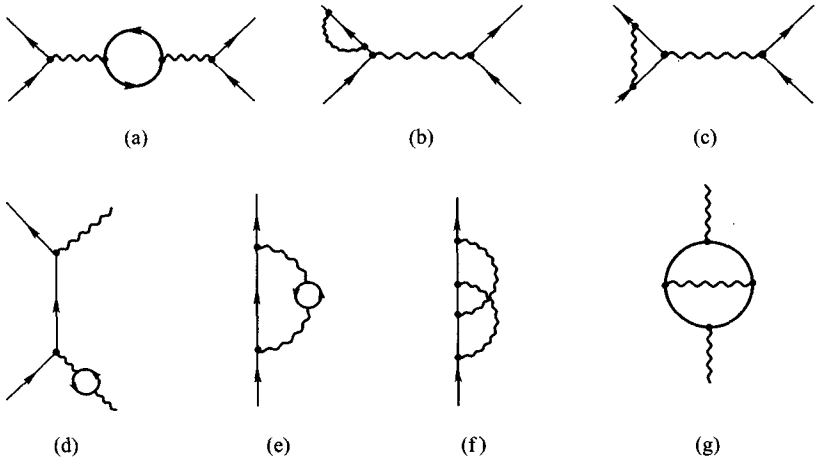
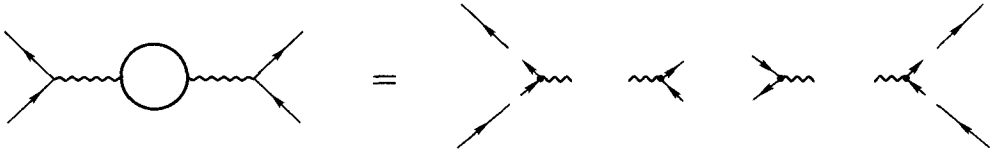


图 5.5　四级微扰图举例

现在计数图 5.5(a)的拓扑权. 这是四级 $e^- - e^-$ 散射图，由四个顶角和四条 Fermion 外线构成，即



四个顶角中，任意两个可围成一个 Fermion 圈，共有 $C_4^2 = 6$ 种方式. 每个围成的 Fermion 圈与其余两个顶角通过光子内线相接，有两种方式. 而四条 Fermion 外线连两个顶角有四种方式，两两相同(类似于 $e^- - e^+$ 二级散射图情况). 结果拓扑不等价的图形只有两个，示于图 5.6.



图 5.6　4 级 $e^- - e^-$ 散射的拓扑不等价图

每个图的权 $= C_4^2 \times 2 \times 2 = 4!$，它将消去 e^4 级展开中的 1/4! 因子. 不难证实，这一结果可以直接从四级正规乘积项求 S 矩阵元得到.

实际上，类似结果对微扰论的任何级都成立. 当我们计算具体物理过程至

微扰论的 e^n 级时，对于外动量安排确定的每一个拓扑不等价图形，其拓扑权总是 $n!$，它可以消去级数展开式中的 $1/n!$ 因子. 换句话说，拓扑不等价图形的拓扑权因子 W 总是 1. 唯一的例外是真空 - 真空跃迁图，相应 S 矩阵元中的$\frac{1}{n!}$不能被消去. 然而，以后将要证明，这种图全部加在一起可以被忽略掉.

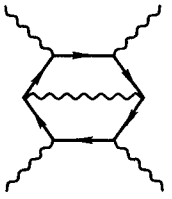
问题 5.4 写出过程 $e^-e^-\to e^-e^-$，$e^-e^+\to 2\gamma$ 和 $e^-\gamma\to e^-\gamma$ 的二级 S 矩阵元.

问题 5.5 直接从正规乘积分解证实，图形



表示的 4 级 $e^- - e^-$ 散射矩阵元中的 1/4! 因子最终可以被消去.

问题 5.6 证明六级光子 - 光子散射图



的拓扑权因子 $W=1$.

5.4.5 电子和光子的自能跃迁

电子和光子的自能跃迁，都只涉及量子数相同的单粒子初态到单粒子终态的跃迁.

电子自能跃迁的二级 Feynman 图示于图 5.7.

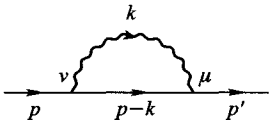


图 5.7 电子自能跃迁图

相应的 S 矩阵元可由 Feynman 规则直接写出. 结果是

$$\langle f|S^{(2)}_{\text{e.m.}}|i\rangle|_{\text{电子自能}}=(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\bar{u}^{(\alpha')}(p')(-\mathrm{i}\sum(p))u^{(\alpha)}(p) \tag{5.116}$$

其中

$$-\mathrm{i}\sum(p)=(-\mathrm{ie})^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu\frac{-\mathrm{i}g_{\nu\mu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{5.117}$$

(5.117)中对圈动量 k 的积分是线性紫外发散的，因为当 $k\to\infty$ 时，该积分

$$\sim\int\frac{\mathrm{d}^4k}{|k|^3}$$

光子自能跃迁的二级矩阵元已由(5.113)和(5.114)给出.

现在我们来讨论自能图的物理意义. 自能跃迁矩阵元是紫外发散的，这似乎表明单粒子态是不稳定的，即

$$\begin{aligned}U(\infty,-\infty)|p,\alpha\rangle&\neq|p,\alpha\rangle\\U(\infty,-\infty)|k,\lambda\rangle&\neq|k,\lambda\rangle\end{aligned}\tag{5.118}$$

然而，物理上单粒子态必须是稳定的. 因此必须设法克服这一困难，消除自能跃迁引起的发散.

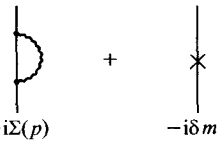
对于电子自能，解决办法是“质量重整化”，其基本思想如下：回忆当我们分 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_i$ 时，已经将 $\mathcal{H}_0$ 中粒子的质量取为物理质量 m，它不同于最初在 $\mathcal{L}$ 中引入的裸质量 m_0，这一差别导致了 $\mathcal{H}_i$ 的附加项

$$-\delta m:\bar{\psi}(x)\psi(x):\quad(\delta m=m-m_0)\tag{5.119}$$

其中 m_0 并未被决定. 利用这一附加项，可以写出单电子态间的一级跃迁矩阵元

$$\langle0|b_{\alpha'}(p')S^{(1)}_{\delta m}b^{+}_{\alpha}(p)|0\rangle=\mathrm{i}\delta m(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\bar{u}^{(\alpha')}(p')u^{(\alpha)}(p)\tag{5.120}$$

与 $S^{(2)}_{\mathrm{e.m.}}$ 的自能跃迁矩阵元(5.116)比较，形式上相同. 由此可见，自能跃迁的物理效应是可能改变粒子的质量，使之变得无穷大. 为使单粒子态是稳定的，必须保持粒子的质量为物理质量(物理质量通常定义为传播子的极点位置). 为此可适当选择 $\delta m=m-m_0$，即适当选择 $\mathcal{L}$ 中的参数 m_0(也为无穷大)以抵消 $-\mathrm{i}\sum(p)$ 中的无穷大. 由于这个缘故，$-\delta m:\bar{\psi}(x)\psi(x):$ 称为质量抵消项. 它的一级贡献可以抵消二级电子自能跃迁中的发散，用下图表示即



(5.121)

然而，$-\mathrm{i}\sum(p)$ 中的积分是发散的，为使上述做法有意义，必须做两件事. 首先将 $-\mathrm{i}\sum(p)$ 中的发散积分用收敛积分代替，目的是将发散分离出来，这种做法称为正规化；然后利用质量抵消项 $-\delta m:\bar{\psi}\psi:$，适当选择 m_0，将 $-\mathrm{i}\sum(p)$ 中的发散抵消，以保持物理参数 m 的适当定义，这称之为减除.

显然，在这种处理中，正规化，即分离发散，需要更多的数学技巧和计算. 一种最简单的做法是取动量割断，即将发散积分中的

$$\int\mathrm{d}^4k\to\int\mathrm{d}k^0\int_{|\vec{k}|<\Lambda}\mathrm{d}^3k$$

这里 Λ 为一有限值，积分后再令 $\Lambda\to\infty$. 但这样取动量割断 Λ 的方式不是

Lorentz 不变的. 保持 Lorentz 不变性的正规化方法通常有下面两种：一种是 Pauli - Villars 正规化[26]，其做法是将光子传播子作代换

$$\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\to\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{k^4} \tag{5.122}$$

于是

$$-\mathrm{i}\sum(p)\xrightarrow{k\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{k^5} \tag{5.123}$$

成为收敛积分. 对 d^4k 积分后，再令 $\Lambda^2\to\infty$，将回到原来的值. 当然，$\Lambda^2\to\infty$ 的结果仍是发散的，但我们的目的已经达到了，因为此时发散已分离在包含 Λ^2 的项之中. 另一种正规化方法是'tHooft - Veltman 维数正规化[27]. 其做法是将时空维数看成复变量，对之作解析延拓，即作代换

$$\mathrm{d}^4k\to\mathrm{d}^Dk\quad(D\text{ 为复变量}) \tag{5.124}$$

数学上可以证明，这种解析延拓是成立的. 若写 $D=4-2\varepsilon,\varepsilon>0$，则 $\varepsilon\to0$ 将回到四维情况，而紫外发散将作为 $\varepsilon=0$ 点的奇异性被分离出来.

以上讨论表明，电子自能发散可以通过质量抵消项加以消除. 对于光子自能，解决方法则完全不同. 光子的物理质量为 0，自能图不应当对质量有所贡献，这一点是由电磁流守恒来保证的. 可以一般地证明，电磁流守恒意味着

$$k_\mu\Pi^{\mu\nu}(k)=0 \tag{5.125}$$

这一证明将留待以后进行. 由于 $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 是一个二级张量，只依赖于 k，它的一般形式可写成

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=Ag^{\mu\nu}+C(k^2)k^2g^{\mu\nu}+D(k^2)k^\mu k^\nu \tag{5.126}$$

其中 A 与 k 无关. 将它代入(5.125)得

$$k^\nu[A+C(k^2)k^2+D(k^2)k^2]=0 \tag{5.127}$$

对于 $k\neq0$，上式要求

$$A+[C(k^2)+D(k^2)]k^2=0\ (\text{对任意 }k^2\text{ 成立}) \tag{5.128}$$

从 $k^2=0$，得 $A=0$；对任意 k^2，须有 $C(k^2)=-D(k^2)$. 于是 $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 的一般形式成为

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)C(k^2) \tag{5.129}$$

将此结果代入光子自能跃迁矩阵元(5.119)，得

$$\begin{aligned}\langle f|S^{(2)}_{\text{e.m.}}|i\rangle|_{\text{光子自能}}&=(2\pi)^4\delta^4(k'-k)\varepsilon_\mu^{(\lambda')}(k')(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)C(k^2)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)\\&=(2\pi)^4\delta^4(k'-k)[\varepsilon^{(\lambda')}(k')\cdot\varepsilon^{(\lambda)}(k)k^2-\varepsilon^{(\lambda')}(k')\cdot k'\,k\cdot\varepsilon^{(\lambda)}(k)]C(k^2)\\&=0\end{aligned} \tag{5.130}$$

只要 $C(k^2)$ 在 $k^2=0$ 时不奇异. 这是因为初、终态光子在质壳上且为横光子，故有

$$k^2=0,\quad\varepsilon^{(\lambda')}(k')\cdot k'=\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot k=0 \tag{5.131}$$

所以，电磁流守恒保证了光子自能跃迁矩阵元为 0，从而保证了光子静质量为 0.

至二级微扰，$\Pi^{\mu\nu}(k)$的显示形式已由(5.114)给出，我们可以实际考察一下$\Pi^{\mu\nu}(k)$是否满足(5.125)式. 由(5.114)式

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\not{k} \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right]$$

$$= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[(\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon - (\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon)) \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right]$$

$$= -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon} - \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right] \tag{5.132}$$

以上利用了矩阵求迹的性质

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \tag{5.133}$$

形式上，(5.132)似乎为0，因为若积分收敛，则第一项中可作积分变量的平移$p \to p + k$，从而两项相减为0. 然而现在整个积分发散，平移操作对原来的式子没有意义. 为了克服这一困难，须利用$\Pi^{\mu\nu}(k)$的正规化. 例如采取 Pauli - Villars 正规化，我们将$\Pi^{\mu\nu}(k)$中被积函数作代换

$$\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right]$$

$$\to \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right] + \sum_{s=1}^{S} C_s (m \to m_s) \tag{5.134}$$

其中$(m \to m_s)$表示第一项中m代换成m_s后所得的表达式，m_s是很大的质量. 这相当于在理论中引入一些很重的 Dirac 粒子，它们与光子都有最小电磁耦合. C_s是常数，它们可以适当地被选取以使积分$\int \mathrm{d}^4 p$成为收敛的，积分后再令$m_s \to \infty$，则$\Pi^{\mu\nu}(k)$将回到原来的值. 如前所述，这使得紫外发散被分离在含m_s的项之中. 然而目前所关心的只是经如此作正规化操作后，$\Pi^{\mu\nu}(k)$中的积分将成为收敛的，从而再对(5.132)中的第一项作平移$p \to p + k$将是合理的. 于是(5.125)可以得到满足.

5.4.6　真空 - 真空跃迁

$S^{(2)}_{\mathrm{e.m.}}$的最后一项(5.91f)是c数，表达真空 - 真空跃迁，矩阵元是

$$\langle 0 | S^{(2)}_{\mathrm{e.m.}} | 0 \rangle = \frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2!} \int \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 (-) \mathrm{tr}[\gamma^\mu \underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}\gamma^\nu \underbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}] \underbrace{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\mathrm{i}e)^2 (2\pi)^4 \delta^4(0) \int \frac{\mathrm{d}^4 p \mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^8} \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not{q} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \right] \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{(q-p)^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{5.135}$$

其图示由图5.8给出.

二级真空 - 真空跃迁图的明显特点是：它为双圈图，含有两个自由动量 p，q，对应矩阵元中的两个四维积分；图中包括一个 Fermion 圈，所以矩阵元中出现一个 - tr；与其它的二级过程图形不同，二级微扰展开中的 1/2！因子在此无法消去；最后，矩阵元中的积分对 p，q 都是线性紫外发散的.

实际上，图 5.8 和所有更高级的真空 - 真空跃迁图加在一起，可以被忽略掉. 更高级的图如四级真空 - 真空图的例子示于图5.9 中.

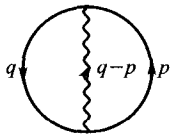


图 5.8 二级真空 - 真空跃迁图

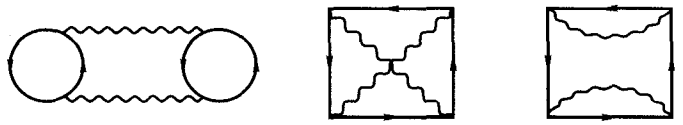


图 5.9 四级真空 - 真空跃迁图的例子

令

$$C = \langle 0 \mid S \mid 0 \rangle \tag{5.136}$$

表示全部真空 - 真空图的和. 由于初态到终态四动量守恒，$S \mid 0\rangle$ 只能是 $P_\mu = 0$ 的态即它与真空态只差一常数

$$S \mid 0\rangle = C \mid 0\rangle \tag{5.137}$$

其中 C 由(5.136)给出. 由 S 的幺正性 $S^+ S = 1$ 可得

$$\mid C \mid^2 = 1 \tag{5.138}$$

可见，C 仅仅是一个相因子，可以被忽略掉.

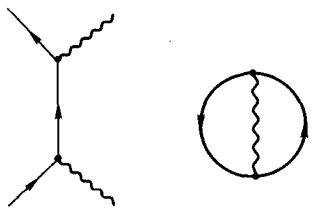


图 5.10 Compton 散射的不连接四级图

任何实际物理过程的 Feynman 图都可能伴随有真空图. 如 Compton 散射的四级图中会出现不连接的图，如图 5.10 所示. 这个图含有一个二级 Compton 散射图和与之不相连接的二级真空 - 真空图，它对应于四级正规乘积项

$$:A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\bar{\psi}^{(-)}(x_1)\gamma^\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}\gamma^\nu\psi^{(+)}(x_2)$$

$$\times\underbrace{\bar{\psi}(x_3)\gamma^\rho\overbrace{\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)}\gamma^\sigma\psi(x_4)}\underbrace{A_\rho(x_3)A_\sigma(x_4)}:\tag{5.139}$$

同样，在六级图中，又会出现不相连接的二级 Compton 散射和四级真空 - 真空图，等等，依此类推. 但由(5.139)可见，不连接图的总矩阵元等于各个不相连接部分的 S 矩阵因子的乘积. 所以若将与某一物理 Feynman 图不相连接的全部

真空－真空图相加，则其总贡献只表现为该过程的 S 矩阵元倍乘一个总的相因子$\langle 0 \mid S \mid 0\rangle$. 换句话说，设 S 为忽略不连接图的 S 矩阵，则包括全部不连接图的 S 矩阵将是 CS. 但 C 仅为相因子，可以将其忽略. 因此，我们总是忽略掉全部含真空－真空跃迁的不连接图.

5.4.7　电子与外电磁场的相互作用

电子与外加电磁场的相互作用哈氏密度为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{ext}}(x) = e{:}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x){:}A^{\mathrm{ext}}(x) \tag{5.140}$$

它导致的最低级电子－电子跃迁振幅

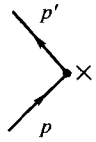
$$\begin{aligned}\langle f \mid S^{(1)} \mid i\rangle \mid_{e^-\to e^-} &= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\langle 0 \mid b_{\alpha'}(p'){:}\bar{\psi}^{(-)}(x)\gamma^{\mu}\psi^{(+)}(x){:}A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(x)b_{\alpha}^{+}(p) \mid 0\rangle \\ &= -\mathrm{i}e\bar{u}^{(\alpha')}(p')\gamma^{\mu}u^{(\alpha)}(p)A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(p'-p)\end{aligned} \tag{5.141}$$

其中

$$A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(k) = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(x) \tag{5.142}$$

是 $A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(x)$ 的 Fourier 变换. 注意 $k=p'-p$ 不满足 $k^2=0$（对 $p'\neq p$），即 k 未限定在质壳上. 这一点与 QED 不同，因而上述一级矩阵元不为 0. 可以用图表示一个新型顶角，如表 5.3 所示.

表 5.3　电子－外场相互作用顶角的 Feynman 规则

图形	S 矩阵中的因子
	$-\mathrm{i}e\gamma^{\mu}A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(p'-p)$

这里 × 表示外场，$p'-p$ 是在顶角处被传递的四动量即外场的四动量. 将因子 $-\mathrm{i}e\gamma^{\mu}A_{\mu}^{\mathrm{ext}}(p'-p)$ 与 QED 顶角矩阵元(5.100)中的相应因子

$$-\mathrm{i}e\gamma^{\mu}\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)$$

相比可见，在有外场时，不出现 δ 函数，说明初、终态电子间四动量不守恒. 类似情况也出现在其它的一级跃迁振幅中. 注意到对于 $e^-\to e^-$ 和 $e^+\to e^+$ 跃迁总是有 $k^2<0$，而对于 $e^-e^+\to|0\rangle$ 和 $|0\rangle\to e^-e^+$ 跃迁，总是有 $k^2>0$. 这种因外场存在导致的四动量不守恒将对真空－真空跃迁振幅 $\langle 0 \mid S \mid 0\rangle$ 有重要影响. 由于外场存在，将有另外的真空－真空图出现，某些例子列于图 5.11 中.

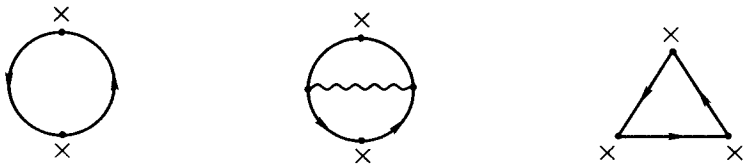


图 5.11 与 A_μ^{ext} 作用导致的某些外加真空 - 真空图

当外场不存在时，由于初终态四动量守恒，有 $S|0\rangle = C|0\rangle$，所以 $\langle 0|S|0\rangle$ 仅为相因子；而当外场存在时，由于初终态四动量不守恒，$S|0\rangle \neq C|0\rangle$，所以 $|\langle 0|S|0\rangle|^2 \neq 1$. 物理上这是因为当外势 $A_\mu^{\text{ext}}(k)$ 中的 $k^2 > (2m)^2$ 时，有可能在真空中产生真实的一对 Fermions，$S|0\rangle$ 将不再是单纯的真空态而是真空态 $|0\rangle$ 和其它有粒子态的叠加. 尽管如此，$\langle 0|S|0\rangle$ 在 S 矩阵中仍然只表现为倍乘因子. 考虑到真空 - 真空跃迁是不可观测的，实际上只需计算给定物理过程相对于真空 - 真空跃迁的几率振幅. 为此我们可以将 S 矩阵元整个地除以 $\langle 0|S|0\rangle$ 因子，这再次允许我们只限于考虑连接图形.

最后我们考虑外电磁场引起的真空极化效应，从而给出(5.125)式的证明[23]. 外电磁场 A_μ^{ext} 可以从真空(海)中激发出虚的正负电子对，从而产生真空极化电流，导致附加的电磁场 δA_μ. 有外场时，总哈氏密度为

$$(\mathcal{H}_{\text{I}})_{\text{总}} = e{:}\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x){:}[A^\mu(x) + (A^{\text{ext}})^\mu] \tag{5.143}$$

这将导致电子与外场作用的高级图，总的图形如图 5.12 所示.

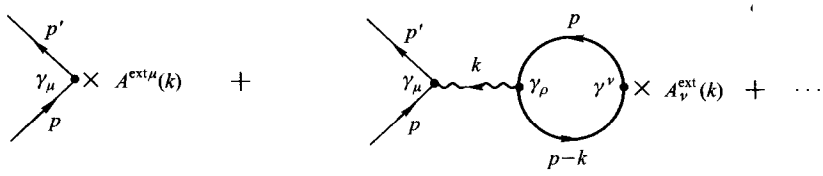


图 5.12 电子与外场相互作用的高级图

相应的 S 矩阵元

$$\langle f|S|i\rangle|_{e^-\to e^-} = -ie\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)A^{\text{ext}\,\mu}(k) + (-ie)\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\frac{-ig^{\mu\rho}}{k^2+i\varepsilon}\Pi_\rho{}^\nu(k)A_\nu^{\text{ext}}(k) + \cdots \tag{5.144}$$

若只近似到二级微扰，比较上式中的头两项可见，真空极化效应引起的附加电磁场为

$$\delta A^\mu(k) = \frac{-i}{k^2+i\varepsilon}\Pi^{\mu\nu}(k)A_\nu^{\text{ext}}(k) \tag{5.145}$$

它与真空极化电流 δj^{μ} 的关系在坐标表象为

$$\Box \delta A^{\mu}(x) = \delta j^{\mu}(x) \tag{5.146}$$

即满足电磁场运动方程(Feynman 规范). 换到动量表象并利用(5.145)，我们得到

$$\delta j^{\mu}(k) = -k^2 \delta A^{\mu}(k) = \mathrm{i}\Pi^{\mu\nu}(k) A_{\nu}^{\mathrm{ext}}(k) \tag{5.147}$$

由于电磁流守恒即

$$\partial_{\mu} \delta j^{\mu}(x) = 0 \tag{5.148}$$

故得

$$k_{\mu}\Pi^{\mu\nu}(k) A_{\nu}^{\mathrm{ext}}(k) = 0 \tag{5.149}$$

它对任意 $A_{\nu}^{\mathrm{ext}}(k)$ 成立[注意 Fermion 圈中的正负电子对是虚的，不一定在电子质壳上，不必有 $k^2 > (2m)^2$]，所以

$$k_{\mu}\Pi^{\mu\nu}(k) = 0$$

这正是(5.125)式. 这就证明了，(5.125)是电磁流守恒的结果.

以上证明仅考虑到二级微扰. 事实上，这一结论对微扰论的任何级都成立. 只要将(5.145)中的 $\Pi^{\mu\nu}$ 代之以包括了所有高级修正的真空极化张量 $\Pi'^{\mu\nu}(k)$，则用同样的论述可以证明，电磁流守恒将导致 $k_{\mu}\Pi'^{\mu\nu}(k) = 0$.

5.5　含标量粒子的 Feynman 规则

在 5.4 节所叙述的旋量 QED 的 Feynman 规则中，只涉及旋量和矢量粒子，不涉及标量粒子. 本节将叙述涉及标量粒子的 Feynman 规则，依次讨论 $\lambda\varphi^4$ 耦合和 π - N 耦合的情况.

5.5.1　实标量场 $\lambda\varphi^4$ 耦合

具有自作用 $\lambda\varphi^4$ 耦合的实标量场系统的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = :\frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{1}{2}\mu_0^2\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4: \tag{5.150}$$

若将自由哈氏密度 $\mathcal{H}_0$ 中的粒子质量取成物理质量，则相互作用哈氏密度成为

$$\mathcal{H}_i(x) = \frac{\lambda_0}{4!}:\varphi^4(x): - \frac{1}{2!}\delta\mu^2:\varphi^2(x): \tag{5.151}$$

$$\delta\mu^2 = \mu^2 - \mu_0^2 \tag{5.152}$$

其中 μ 和 μ_0 分别是物理质量和裸质量. 由于粒子自旋为 0，所以外线因子(即自旋波函数)为 1. 标量粒子内线的 Feynman 规则可以从标量场的收缩(传播子)

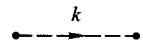
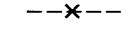
$$\underbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)} = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)} \tag{5.153}$$

读出. 而相互作用顶角的 Feynman 规则可以从 S 矩阵的一级正规乘积形式

$$S^{(1)} = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{H}_{\mathrm{i}}(x) = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\lambda_0}{4!}:\varphi^4(x):-\frac{1}{2!}\delta\mu^2:\varphi^2(x):\right] \tag{5.154}$$

读出. 注意(5.154)中的两项皆为同一个场 φ 的自耦合形式，故分别出现了顶角置换因子 1/4！ 和 1/2!. 除去这些顶角置换因子、场的乘方因子以及 d^4x 积分运算符号，所余因子就是动量表象中顶角的 Feynman 规则. 于是我们可以列出 $\lambda\varphi^4$ 耦合部分新的 Feynman 规则，示于表 5.4 中.

表 5.4 实标量场 $\lambda\varphi^4$ 耦合的部分 Feynman 规则

	图形	S 矩阵中的因子
标量粒子外线		1
标量粒子内线		$\frac{\mathrm{i}}{k^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}$
$\lambda\varphi^4$ 自作用顶角		$-\mathrm{i}\lambda_0$
质量抵消项顶角		$\mathrm{i}\delta\mu^2$
拓扑权因子		W

在有自耦合的情况下，拓扑权因子 W 常常是非平凡的. 下面举出几例，着重说明 W 的计算[12].

例 1 两标量粒子的最低级散射. 示于图 5.13 中.

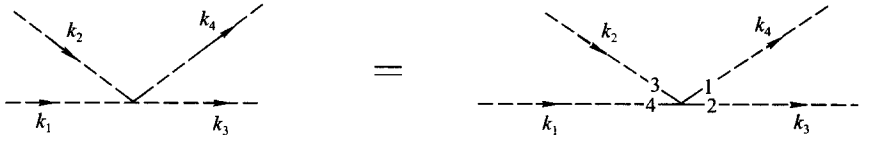


图 5.13 两标量粒子散射的最低级图

此图由一个顶角和四条外线连接而成. 动量为 k_1 的外线与顶角相连有四种方式；当 k_1 外线连好后，k_2 外线与顶角相连有三种方式；当 k_1，k_2 外线连好后，k_3 外线还有两种方式与顶角相连；最后，当 k_1，k_2，k_3 都连好后，k_4 外线再无选择

余地，只有一种方式与顶角相连. 右图中断开处的数字显示了该外线与顶角的连接方式数.

因此，

$$\text{拓扑权} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \tag{5.155}$$

考虑到一级图中顶角置换因子为 1/4!，所以该图的拓扑权因子

$$W = \frac{4!}{4!} = 1 \tag{5.156}$$

相应的 S 矩阵元成为

$$\langle k_3, k_4 \mid S^{(1)} \mid k_1, k_2 \rangle = -\mathrm{i}\lambda_0 (2\pi)^4 \delta^4 (k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \tag{5.157}$$

可以证实，它与直接从正规乘积计算所得结果相同.

例 2　两标量粒子的二级散射. 拓扑上不等价的图有三个，示于图 5.14 中.

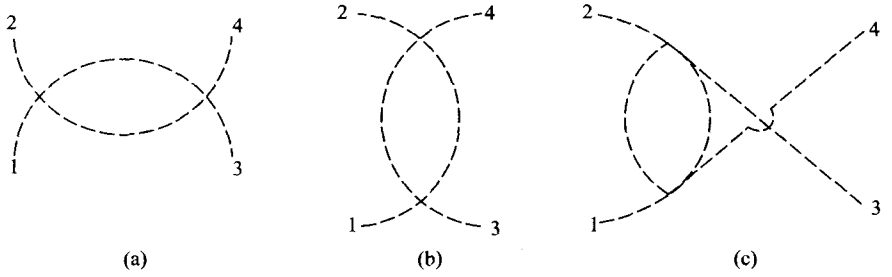


图 5.14　两标量粒子散射的二级图

如看图(a)，它包含两个顶角，四条外线，可作如图 5.15 所示的分解.

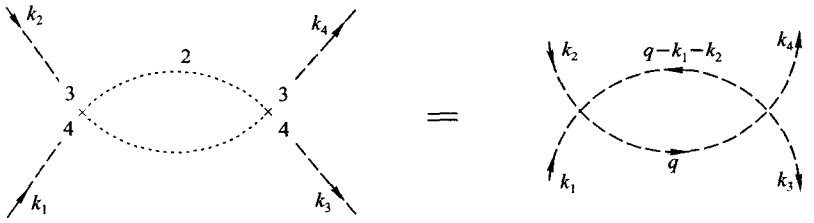


图 5.15　图 5.14(a)的分解. 左图中的数字
标出了相应外线与顶角或顶角与顶角的连接方式数

因此

$$\text{拓扑权} = 2 \times (4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2) = (4!)^2 \tag{5.158}$$

式中最左边的因子 2 来源于 k_1，k_2 外线与 k_3，k_4 外线的同时交换. 考虑到二级

微扰展开中逆阶乘因子为 1/2!，顶角置换因子为 $1/(4!)^2$，故拓扑权因子

$$W=\frac{(4!)^2}{2!\ (4!)^2}=\frac{1}{2} \tag{5.159}$$

相应的 S 矩阵元成为

$$\langle k_3, k_4 \mid S^{(2)} \mid k_1, k_2\rangle = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda_0)^2\int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{\mathrm{i}}{(q-k_1-k_2)^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_4-k_1-k_2) \tag{5.160}$$

例 3 如果 $\lambda_0\varphi^4(x)$ 项未排成正规乘积，则由 Wick 定理，编时乘积

$$T\varphi^4(x)=:\varphi^4(x):+6:\varphi^2(x)\underbrace{\varphi(x)\varphi}(x):+3:\underbrace{\varphi(x)\varphi}(x)\underbrace{\varphi(x)\varphi}(x): \tag{5.161}$$

由于同一点 x 的两个 φ 的收缩 $\underbrace{\varphi(x)\varphi}(x)\neq 0$，结果将导致图 5.16 所示的蝌蚪图.

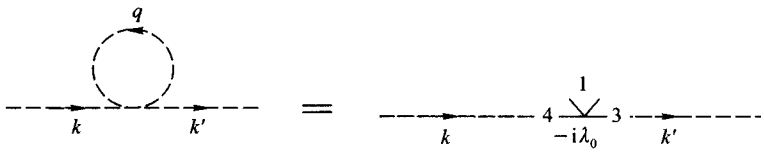


图 5.16 蝌蚪图及其分解

此图含一个顶角，两条外线，

$$\text{拓扑权}=4\times 3=\frac{1}{2}\times 4! \tag{5.162}$$

因而拓扑权因子

$$W=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2}\times 4!\ =\frac{1}{2} \tag{5.163}$$

相应的 S 矩阵元

$$\langle k' \mid S^{(1)} \mid k\rangle = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\lambda_0)\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{q^2-\mu^2+\mathrm{i}\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(k'-k) \tag{5.164}$$

不难证实，它与直接从正规乘积计算所得结果相同.

5.5.2 π－N Yukawa 耦合

这是 π 介子标量场与核子 Dirac 旋量场的耦合. 首先考虑中性 π^0 介子与核子的耦合. 取自由哈氏密度 $\mathcal{H}_0$ 中的粒子质量为物理质量，则相互作用哈氏密度成为

$$\mathcal{H}_i(x) = -ig_0 : \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x) : -\delta m : \bar{\psi}(x)\psi(x) : -\frac{1}{2!}\delta\mu^2 : \varphi^2(x) : \tag{5.165}$$

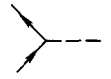
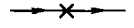
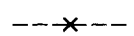
g_0 为裸耦合常数，而

$$\delta m = m - m_0 \tag{5.166}$$

$$\delta\mu^2 = \mu^2 - \mu_0^2 \tag{5.167}$$

其中 m 和 m_0 分别为核子场 ψ 的物理质量和裸质量，μ 和 μ_0 分别为 π^0 介子场 φ 的物理质量和裸质量. 由于 π^0 介子的内外线规则与 $\lambda\varphi^4$ 理论的相同，核子的内外线规则与 QED 中 Fermion 的相同，所以需要特别考虑的将只是顶角的 Feynman 规则，它们可以从一级正规乘积 $S^{(1)}$ 的形式读出，结果列于表 5.5.

表 5.5　π^0 – N 耦合的部分 Feynman 规则

	图形	S 矩阵中的因子
π^0 – N 顶角		$-g_0\gamma_5$
核子质量抵消项顶角		$i\delta m$
介子质量抵消项顶角		$i\delta\mu^2$

其次考虑 π – N 同位旋 SU(2)不变耦合. 取 $\mathcal{H}_0(x)$ 中的质量为物理质量后，相互作用哈氏密度为

$$\mathcal{H}_i(x) = -ig_0 : \bar{N}(x)\gamma_5\vec{\tau}N(x)\cdot\vec{\varphi}(x) : -\delta m : \bar{N}(x)N(x) : -\frac{1}{2}\delta\mu^2 : \vec{\varphi}(x)\cdot\vec{\varphi}(x) : \tag{5.168}$$

部分新的 Feynman 规则，列于表 5.6.

表 5.6　π – N 同位旋 SU(2)不变耦合的部分 Feynman 规则

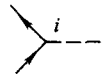
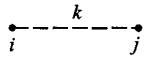
	图形	S 矩阵中的因子
π – N 顶角		$-g_0\gamma_5\tau_i$
介子内线		$\dfrac{i\delta_{ij}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$

表 5.6 中介子内线出现 δ_{ij} 是由于

$$\underbrace{\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)}=0 \quad (\text{当 } i\neq j) \tag{5.169}$$

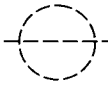
此外，初态和终态核子要分别外加同位旋波函数因子 χ 和 χ^+，而

$$\chi_p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \chi_n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.170}$$

初态和终态 π 的同位旋波函数分别为同位旋矢量 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}^*$，它们要与相耦合顶角中的 $\vec{\tau}$ 点乘，其中

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\pi^\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ \pm\mathrm{i},\ 0),\quad \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\pi^0}=(0,\ 0,\ 1) \tag{5.171}$$

至于 Feynman 规则的其余部分，则与 π^0 – N Yukawa 耦合相同.

问题 5.7 写出 $\lambda\varphi^4$ 耦合理论中，双圈自能图  的 S 矩阵元.

5.6 截面与寿命

本节我们将导出用 S 矩阵元来表示的散射截面与衰变寿命的一般公式.

考虑从初态 $|i\rangle$ 到终态 $|f\rangle$ 的跃迁过程. 初态和终态中的粒子都取为 $H=H_0+H_i$ 中 H_0 的本征态，它们是具有物理质量的自由平面波态，有自作用，但是彼此没有相互作用. 跃迁振幅由 $\langle f|S|i\rangle$ 表示. S 矩阵的幺正性将保证几率守恒. 由于粒子发生散射或衰变的几率是很小的，大多数情况下是相碰而彼此错过或初态粒子不发生衰变，因此可以将 S 矩阵写为

$$S=I+\mathrm{i}R \tag{5.172}$$

其中 R 含有相互作用的信息. S 矩阵元可写为

$$S_{fi}=I_{fi}+\mathrm{i}(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)T_{fi} \tag{5.173}$$

这里 P_i 和 P_f 分别为初态和终态的总四动量，第二项中已明显分离出一个总的四动量守恒因子，因为在无外场时，初态、终态四动量守恒. 显然，T_{fi} 是 Lorentz 不变量. 这是由于算符 S 是 Lorentz 不变量；而当 S 中的场算符作用于初态 $|i\rangle$ 或终态 $\langle f|$ 时，该算符原有的 Lorentz 变换性质并不改变，如 $\varphi^{(+)}(x)a^+(k)|0\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}|0\rangle$，$\psi^{(+)}(x)b_\alpha^+(p)|0\rangle=u^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}|0\rangle$，$\langle 0|b_\beta(p)\bar{\psi}^{(-)}(x)=\langle 0|\bar{u}^{(\beta)}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 等，所以矩阵元 $S_{fi}=\langle f|S|i\rangle$ 也是 Lorentz 不变的.

在整个时空，由于相互作用而发生跃迁的几率为

$$\omega_{fi}=[(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)]^2\,|T_{fi}|^2 \tag{5.174}$$

δ函数平方中将出现因子

$$(2\pi)^4\delta^4(0)=\int d^4x e^{-i(P-P)\cdot x}=VT=\text{四维时空体积} \tag{5.175}$$

因此，单位时空的跃迁几率为

$$\Omega_{fi}=(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)\,|T_{fi}|^2 \tag{5.176}$$

此公式对于 i,f 具有分立本征值时成立. 然而，目前终态为平面波态，有连续的动量本征值，所以还必须乘以终态粒子相空间的态数.

粒子相空间中的态计数，与所用平面波态的归一化方式有关. 对于标量粒子，根据(3.70)，所取平面波态满足归一化

$$\langle p'\,|\,p\rangle=\langle 0\,|\,a(p')a^+(p)\,|\,0\rangle=(2\pi)^3 2p^0\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \tag{5.177}$$

与之相应的单粒子态的完全性条件应表为

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\,|\,p\rangle\langle p\,|=1 \tag{5.178}$$

这是因为，任意单粒子态 $|\psi\rangle$ 可按单粒子平面波态 $|p\rangle$ 展开为

$$|\psi\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\,|\,p\rangle\psi(p)$$

利用 $|p\rangle$ 的正交归一性(5.177)，易证 $\psi(p)=\langle p\,|\,\psi\rangle$，于是可写

$$|\psi\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\,|\,p\rangle\langle p\,|\,\psi\rangle$$

它对任意单粒子态 $|\psi\rangle$ 成立，故得出(5.178). 注意此完全性条件仅限于整个Hilbert空间中由单粒子态构成的子空间. 从(5.178)可见，相空间 $1\cdot d^3p$ 中的态数为 $d^3p/(2\pi)^3 2p^0$.

对于光子，根据(3.145)，平面波态满足归一化

$$\langle p',\lambda'\,|\,p,\lambda\rangle=-g^{\lambda\lambda'}(2\pi)^3 2p^0\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}) \tag{5.179}$$

及完全性

$$\sum_{\lambda=0,1,2,3}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}(-g^{\lambda\lambda})\,|\,p,\lambda\rangle\langle p,\lambda\,|=1 \tag{5.180}$$

对物理光子，$\lambda=1,2$，$-g^{\lambda\lambda}=1$. 因此，对确定的横极化，相空间 $1\cdot d^3p$ 中的态数为 $d^3p/(2\pi)^3 2p^0$.

对于质量 $m\neq 0$ 的Dirac粒子，根据(3.172)，平面波态满足归一化

$$\langle p',\alpha'\,|\,p,\alpha\rangle=(2\pi)^3\frac{p^0}{m}\delta^3(\vec{p}'-\vec{p})\delta_{\alpha'\alpha} \tag{5.181}$$

及完全性

$$\sum_{\alpha}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}|p,\alpha\rangle\langle p,\alpha|=1 \tag{5.182}$$

可见，对确定的极化 α，相空间 $1\cdot\mathrm{d}^3p$ 中的态数为 $[\mathrm{d}^3p/(2\pi)^3]\frac{m}{p^0}$.

对于质量 $m=0$ 的旋量粒子，我们对平面波态的归一化采取不同的定义. 场算符的平面波展开写成

$$\psi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}[b_\alpha(p)u^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+d_\alpha^+(p)v^{(\alpha)}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}] \tag{5.183}$$

注意其中的动量积分测度与玻色子相同，旋量 u，v 的归一化相应取为(2.229)的形式，即

$$u^{(\alpha)+}(p)u^{(\beta)}(p)=v^{(\alpha)+}(p)v^{(\beta)}(p)=2p^0\delta^{\alpha\beta}$$

$$u^{(\alpha)+}(p)v^{(\beta)}(\tilde{p})=v^{(\alpha)+}(p)u^{(\beta)}(\tilde{p})=0$$

$$\tilde{p}^\mu=(p^0,-\vec{p})$$

这将保证

$$b_\alpha(p)=\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u^{(\alpha)+}(p)\psi(x) \tag{5.184}$$

$$d_\alpha^+(p)=\int\mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}v^{(\alpha)+}(p)\psi(x) \tag{5.185}$$

若假定 b，b^+，d，d^+ 满足反对易关系

$$\{b_\alpha(p),b_\beta^+(q)\}=\{d_\alpha(p),d_\beta^+(q)\}=(2\pi)^32p^0\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{\alpha\beta} \tag{5.186}$$

其余反对易

则可以导致场的等时反对易子

$$\{\psi_\xi(x),\psi_\eta^+(y)\}_{x^0=y^0}=\delta_{\xi\eta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

所以(5.186)是正确的反对易关系. 如上的定义表明，对于 $m=0$ 的旋量场，平面波展开中的不变积分测度以及产生、消灭算符反对易关系右边都类似玻色子，故 0 质量旋量粒子平面波态的归一化及完全性将与玻色子相同，因而相空间的态计数也与玻色子相同，即对于确定的极化，相空间 $1\cdot\mathrm{d}^3p$ 中的态数为 $\mathrm{d}^3p/(2\pi)^32p^0$.

以上结果可以小结如下：

对于确定的极化，相空间 $1\cdot\mathrm{d}^3p$ 中的态数总是可以写成

$$\tilde{\mathrm{d}}p=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^32p^0} & \text{（对玻色子和 0 质量旋量粒子）}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\dfrac{m}{p^0} & \text{（对 } m\neq0 \text{ 的旋量粒子）}\end{cases} \tag{5.187}$$

考虑终态 n 个粒子的相空间因子后，单位时空的跃迁几率(5.176)成为

$$\Omega_{\mathrm{fi}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{\mathrm{d}}p_j' \frac{1}{S} \tag{5.188}$$

其中统计因子 $S = \prod_i m_i!$，若终态中有 m_i 个全同的 i 型粒子. 因为 m 个全同粒子在 m 个体积元 $\tilde{\mathrm{d}}p_1' \cdots \tilde{\mathrm{d}}p_m'$ 中的不同排列属于相同的态，故计数不同的态应除以排列数 $m!$.

基于上述结果，很容易给出散射截面和衰变几率的一般公式.

首先考虑散射截面. 设初态为两粒子态，终态为 n 粒子态，则散射过程

$$1 + 2 \to 1' + 2' + \cdots + n' \tag{5.189}$$

的微分截面

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &\equiv \frac{\text{单位时空的跃迁几率}}{\text{入射粒子流} \times \text{靶粒子密度}} \\ &= \frac{1}{v_{12}\rho_1\rho_2} \Omega(1' \cdots n' \mid 12) \prod_{j=1}^{n} \tilde{\mathrm{d}}p_j' \frac{1}{S} \end{aligned} \tag{5.190}$$

其中 ρ_1，ρ_2 为初态两粒子密度，v_{12} 是它们的相对速度. 下面就几种不同情况写出微分截面的具体形式.

(1) 初态为两个玻色子或两个 0 质量旋量粒子. 由于

$$\left.\begin{array}{l} \langle p \mid p \rangle \\ \langle p, \lambda \mid p, \lambda \rangle \mid_{\lambda = 1,2} \\ \langle p, \alpha \mid p, \alpha \rangle \end{array}\right\} = (2\pi)^3 \delta^3(0) 2p^0 = \int \mathrm{d}^3 x 2p^0 = V \cdot 2p^0$$

所以无论哪种情况，都有粒子密度

$$\rho = 2p^0 \tag{5.191}$$

再由狭义相对论的速度相加公式，可以得到

$$\begin{aligned} v_{12}\rho_1\rho_2 &= \left| \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} \right| 2p_1^0 2p_2^0 = \left| \frac{\vec{p}_1}{p_1^0} - \frac{\vec{p}_2}{p_2^0} \right| \frac{4p_1^0 p_2^0}{\left| 1 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 / p_1^0 p_2^0 \right|} \\ &= 4 \left| \vec{p}_1 p_2^0 - p_1^0 \vec{p}_2 \right| \frac{p_1^0 p_2^0}{\left| p_1 \cdot p_2 \right|} = 4 \left[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2} \frac{p_1^0 p_2^0}{\left| p_1 \cdot p_2 \right|} \end{aligned} \tag{5.192}$$

注意两粒子相碰时，通常是靶粒子静止(实验室系)或两粒子三动量反平行(质心系)，故总有

$$\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2 = (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2$$

这一等式在导出(5.192)时已被利用. 将(5.176)和(5.192)代入(5.190)，我们就得出了两粒子散射微分截面的最终表达式

$$d\sigma(1+2\to 1'+\cdots+n')=\frac{1}{4[(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2]^{1/2}}\frac{|p_1\cdot p_2|}{p_1^0p_2^0}|\langle 1'\cdots n'|T|12\rangle|^2$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\tilde{d}p_j'(2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j'-p_1-p_2\Big)\frac{1}{S}\qquad(5.193)$$

注意到，在实验室系，上式中的因子 $|p_1\cdot p_2|/p_1^0p_2^0$ 将化为 1，但在质心系，该因子不能忽略.

(2) 将情况(1)中的一个玻色子或 0 质量旋量粒子换成一个 $m\neq 0$ 的旋量粒子. 相应于这种代换，有

$$\langle p|p\rangle=V\cdot 2p^0\to\langle p,\alpha|p,\alpha\rangle=V\frac{p^0}{m}$$

或

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}\to\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}$$

净效果是作代换 $\frac{1}{2}\to m$. 因此，微分散射截面

$$d\sigma=(5.193)\text{式}\Big|_{\frac{1}{2}\to m(\text{代换后的旋量粒子的质量})}\qquad(5.194)$$

注意无论 $m\neq 0$ 的旋量粒子是在初态或在终态，代换 $\frac{1}{2}\to m$ 皆成立.

其次考虑衰变寿命. 设初态 $|i\rangle$ 为单粒子态，它衰变到终态 $|f\rangle\neq|i\rangle$，则粒子的衰变几率

$$\Gamma\equiv\frac{\text{单位时空的衰变几率}}{\text{初态粒子密度}}$$

分两种情况：

(1) $|i\rangle$ 是玻色子态或 $m=0$ 的旋量粒子态. 这种情况下，初态粒子密度 $\rho_i=2p_i^0$，所以

$$\Gamma=\frac{1}{2p_i^0}\int\prod_j\tilde{d}p_j'\Omega_{fi}\frac{1}{S}\qquad(5.195)$$
$$=\frac{1}{2p_i^0}\int\prod_{j=1}^{n}\tilde{d}p_j'|\langle 1'\cdots n'|T|i\rangle|^2(2\pi)^4\delta^4\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j'-p_i\Big)\frac{1}{S}$$

(2) $|i\rangle$ 是 $m\neq 0$ 的旋量单粒子态. 这时，初态粒子密度 $\rho_i=p_i^0/m$，故

$$\Gamma=(5.195)\text{式}\Big|_{\frac{1}{2}\to m}\qquad(5.196)$$

两种情况下衰变粒子的寿命都由

$$\tau=\frac{1}{\Gamma}\qquad(5.197)$$

决定.

以上的表达式中，T_{fi}通常表示具有确定自旋分量的初、终态间的跃迁，即极化粒子态之间的跃迁. 若初态粒子皆不极化，而我们也不观测终态粒子的极化，则观测到的截面和衰变率应对初态粒子自旋求平均，终态粒子自旋求和，从而得到

$$\sigma_{\text{不极化}}=\frac{1}{4}\sum_{\text{初态自旋}}\sum_{\text{终态自旋}}\sigma_{\text{极化}} \tag{5.198}$$

$$\tau^{-1}_{\text{不极化}}=\frac{1}{2}\sum_{\text{初态自旋}}\sum_{\text{终态自旋}}\tau^{-1}_{\text{极化}} \tag{5.199}$$

注意到电子、光子的自旋自由度都是2，平均时每一自由度的权重皆为1/2.

5.7　应用举例

5.7.1　一些有用的公式

在微扰论的实际计算中，经常要遇到求γ矩阵乘积的迹及有关的运算，为了使用的方便，我们在本节列出一些有用的公式，其中部分公式并给出了证明.

(1)

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}I=4,\\&\mathrm{tr}\Gamma^{a}=0,\ \text{当}\ \Gamma^{a}=\gamma^{\mu},\gamma_5,\gamma_5\gamma^{\mu},\sigma^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}],\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\end{aligned} \tag{5.200}$$

最后一式的证明：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})&=\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}(\gamma^{\nu\mathrm{T}}\gamma^{\mu\mathrm{T}}\gamma_5^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(C\gamma^{\nu}C^{-1}C\gamma^{\mu}C^{-1}C\gamma_5C^{-1})(-1)^2\\&=\mathrm{tr}(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_5)=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma_5\gamma^{\nu})=-\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})=0\end{aligned}$$

(2) 奇数个γ矩阵乘积的迹为0，即

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}})=0\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{5.201}$$

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}})&=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5^2)=\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5)\\&=(-1)^{2n+1}\mathrm{tr}(\gamma_5^2\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}})=-\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}})=0\end{aligned}$$

(3) 对于偶数个γ矩阵的乘积，有

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n}})=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n-1}}\cdots\gamma^{\mu_1})\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{5.202}$$

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n}})&=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n}})^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}((\gamma^{\mu_{2n}})^{\mathrm{T}}\cdots(\gamma^{\mu_1})^{\mathrm{T}})\\&=\mathrm{tr}(C\gamma^{\mu_{2n}}C^{-1}\cdots C\gamma^{\mu_1}C^{-1})(-1)^{2n}=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_{2n}}\cdots\gamma^{\mu_1})\end{aligned}$$

(4)

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{5.203}$$

因而

$$\mathrm{tr}(\not a\not b) = 4a\cdot b,\quad \not a = \gamma^\mu a_\mu \tag{5.203a}$$

证:

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}\cdot 2g^{\mu\nu}\cdot 4 = 4g^{\mu\nu}$$

(5)

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \tag{5.204}$$

因而

$$\mathrm{tr}(\not a\not b\not c\not d) = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)] \tag{5.204a}$$

证:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \mathrm{tr}([2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu]\gamma^\rho\gamma^\sigma)\\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu)\\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu} + \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho)\\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)
\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$$

(6)

$$\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -\mathrm{i}4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.205}$$

证:因为 $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)\neq 0$, 仅当 $\mu\neq\nu\neq\rho\neq\sigma$. 否则, 如 $\mu=\nu$, $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = \pm\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 0$. 而不同指标的 γ^μ 相互反对易, 故可写 $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = A\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. 为定常数 A, 两边乘 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 并对 μ, ν, ρ, σ 求和. 利用 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \mathrm{i}4!\ \gamma_5$ 和 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$ 我们定出 $A = -4\mathrm{i}$.

(7) 收缩恒等式

$$\not a\not a = a\cdot a \tag{5.206}$$

$$\not a\not b + \not b\not a = 2(a\cdot b) \tag{5.207}$$

$$\gamma^\mu\not a\gamma_\mu = -2\not a \tag{5.208}$$

$$\gamma^\mu\not a\not b\gamma_\mu = 4(a\cdot b) \tag{5.209}$$

$$\gamma^\mu\not a\not b\not c\gamma_\mu = -2\not c\not b\not a \tag{5.210}$$

这些公式可直接利用 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ 证之.

(8) 旋量自旋求和

对于 $m\neq 0$ 的旋量, 有

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(p)\bar u^{(\alpha)}(p) = \frac{\not p + m}{2m} \tag{5.211}$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) = \frac{\not{p}-m}{2m} \tag{5.212}$$

对于 $m=0$ 的旋量，有

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) = \sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) = \not{p} \tag{5.213}$$

这些公式的证明已在第二章叙述.

问题 5.8　证明 Furry 定理，即含有奇数个顶角的 Fermion 圈图对 S 矩阵元的贡献为 0.

5.7.2　Compton 散射截面

光子对自由电子的散射 $\gamma + e^- \to \gamma + e^-$ 至 e^2 级的 Feynman 图示于图 5.17.

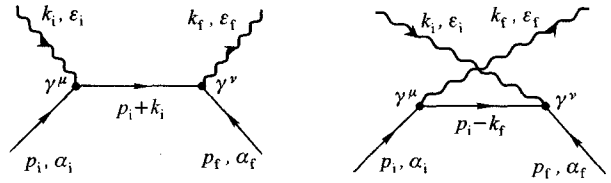


图 5.17　二级 Compton 散射图

相应的 S 矩阵元

$$\langle p_f, \alpha_f, k_f, \varepsilon_f | S^{(2)} | p_i, \alpha_i, k_i, \varepsilon_i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_f + p_f - k_i - p_i) iT_{fi} \tag{5.214}$$

$$iT_{fi} = i(-ie)^2 \left\{ \bar{u}(p_f, \alpha_f) \not{\varepsilon}_f \frac{1}{\not{p}_i + \not{k}_i - m + i\varepsilon} \not{\varepsilon}_i u(p_i, \alpha_i) + (\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_f, k_i \leftrightarrow -k_f) \right\} \tag{5.215}$$

其中

$$\begin{aligned} \not{\varepsilon}_i &= \gamma^\nu \varepsilon_\nu^{(\lambda_i)}(k_i) \\ \not{\varepsilon}_f &= \gamma^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda_f)}(k_f) \end{aligned} \qquad \lambda_i, \lambda_f = 1, 2 \quad \text{（对应物理横光子）} \tag{5.216}$$

电子内线分母中的 $i\varepsilon$ 可以略去，因为目前 p_i, p_f, k_i, k_f 皆在质壳上，所以 $p_i + k_i$, $p_i - k_f$ 皆不在电子质壳上. 若靶电子不极化，而对终态电子不测量极化，则应对初态电子自旋求平均，终态电子自旋求和. 取靶电子静止系（实验室系），根据(5.193)和(5.194)，微分散射截面成为

$$d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i, \alpha_f} \frac{m}{2(p_i \cdot k_i)} |T_{fi}|^2 \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3 2k_f^0} \frac{m d^3p_f}{(2\pi)^3 p_f^0} (2\pi)^4 \delta^4(k_f + p_f - k_i - p_i) \tag{5.217}$$

此时我们有

$$p_i = (m, 0, 0, 0) \tag{5.218}$$

$$\int \mathrm{d}^3 p_f \mathrm{d}^3 k_f \delta^4 (k_f + p_f - k_i - p_i) = \int k_f^{0^2} \mathrm{d}k_f^0 \delta (k_f^0 + p_f^0 - k_i^0 - p_i^0) \mathrm{d}\Omega = \frac{k_f^{0^2}}{\left| \frac{\mathrm{d}(k_f^0 + p_f^0)}{\mathrm{d}k_f^0} \right|} \mathrm{d}\Omega \tag{5.219}$$

注意 $k_f^0 = |\vec{k}_f|$, $\mathrm{d}\Omega$ 是 $\vec{k}_f$ 方向相对于 $\vec{k}_i$ 轴的立体角.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(k_f^0 + p_f^0)}{\mathrm{d}k_f^0} &= 1 + \frac{1}{2p_f^0} \frac{\mathrm{d}p_f^{0^2}}{\mathrm{d}k_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_f^0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_f^0} [m^2 + (\vec{k}_i + \vec{p}_i - \vec{k}_f)^2] \\ &= 1 + \frac{1}{2p_f^0} 2(\vec{k}_i + \vec{p}_i - \vec{k}_f) \cdot \frac{-\vec{k}_f}{|\vec{k}_f|} \\ &= 1 - \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{k}_f}{p_f^0 k_f^0} = \frac{p_f \cdot k_f}{p_f^0 k_f^0} \end{aligned} \tag{5.220}$$

将(5.215), (5.219)和(5.220)代入(5.217), 得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{\alpha_i, \alpha_f} |\bar{u} \cdots u|^2 \frac{(k_f^0 m)^2}{(p_i \cdot k_i)(p_f \cdot k_f)} \mathrm{d}\Omega \tag{5.221}$$

式中

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{5.222}$$

是精细结构常数. 注意目前采用的是 Heaviside - Lorentz 单位制. 由于四动量守恒, $p_f + k_f = p_i + k_i$, 这导致

$$p_f \cdot k_f = p_i \cdot k_i = m k_i^0 \tag{5.223}$$

于是

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{\alpha_i, \alpha_f} |A|^2 \left(\frac{k_f^0}{k_i^0} \right)^2 \mathrm{d}\Omega \tag{5.224}$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left(\not{\varepsilon}_f \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{(p_i + k_i)^2 - m^2} \not{\varepsilon}_i + \not{\varepsilon}_i \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{(p_i - k_f)^2 - m^2} \not{\varepsilon}_f \right) u(p_i, \alpha_i) \\ &= \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left(\not{\varepsilon}_f \frac{2(p_i + k_i) \cdot \varepsilon_i + \not{\varepsilon}_i (-\not{p}_i - \not{k}_i + m)}{2(p_i \cdot k_i)} \right. \\ &\quad \left. + \not{\varepsilon}_i \frac{2(p_i - k_f) \cdot \varepsilon_f + \not{\varepsilon}_f (-\not{p}_i + \not{k}_f + m)}{-2(p_i \cdot k_f)} \right) u(p_i, \alpha_i) \\ &= \bar{u}(p_f, \alpha_f) \left(\not{\varepsilon}_f \frac{2(p_i + k_i) \cdot \varepsilon_i - \not{\varepsilon}_i \not{k}_i}{2(p_i \cdot k_i)} + \not{\varepsilon}_i \frac{2(p_i - k_f) \cdot \varepsilon_f + \not{\varepsilon}_f \not{k}_f}{-2(p_i \cdot k_f)} \right) u(p_i, \alpha_i) \end{aligned} \tag{5.225}$$

以上已利用了(5.207)式即 $\not{a}\not{b} = 2a \cdot b - \not{b}\not{a}$ 以及

$$(-\not{p}_i + m)u(p_i, \alpha_i) = 0$$

选取横光子的极化 ε_i，ε_f 使之与时间轴 $p_i = (m, 0, 0, 0)$ 正交，即它们满足

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \cdot p_i &= \varepsilon_f \cdot p_i = 0 \\ \varepsilon_i \cdot k_i &= \varepsilon_f \cdot k_f = 0 \end{aligned} \tag{5.226}$$

则

$$A = -\bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i) \tag{5.227}$$

$$O = \frac{\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i}{2(p_i \cdot k_i)} + \frac{\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{k}_f}{2(p_i \cdot k_f)} \tag{5.228}$$

进而微分截面成为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\alpha^2}{2} X \left(\frac{k_f^0}{k_i^0}\right)^2 \mathrm{d}\Omega \tag{5.229}$$

其中

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\alpha_i, \alpha_f} |\bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i)|^2 \\ &= \sum_{\alpha_i, \alpha_f} \bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i) (\bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i))^+ \\ &= \sum_{\alpha_i, \alpha_f} \bar{u}(p_f, \alpha_f) O u(p_i, \alpha_i) \bar{u}(p_i, \alpha_i) \gamma^0 O^+ \gamma^0 u(p_f, \alpha_f) \\ &= \mathrm{tr} \sum_{\alpha_i, \alpha_f} O u(p_i, \alpha_i) \bar{u}(p_i, \alpha_i) \gamma^0 O^+ \gamma^0 u(p_f, \alpha_f) \bar{u}(p_f, \alpha_f) \\ &= \mathrm{tr}\left(O \frac{\not{p}_i + m}{2m} \gamma^0 O^+ \gamma^0 \frac{\not{p}_f + m}{2m}\right) \end{aligned} \tag{5.230}$$

以上已将旋量的标量积改写为矩阵求迹并利用了自旋求和公式(5.211). 再由 $\gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 = \gamma^\mu$ 可以证明

$$\gamma^0 O^+ \gamma^0 = \frac{\not{k}_i \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f}{2(p_i \cdot k_i)} + \frac{\not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i}{2(p_i \cdot k_f)} \tag{5.231}$$

于是

$$\begin{aligned} X &= \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i}{2(p_i \cdot k_i)} + \frac{\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{k}_f}{2(p_i \cdot k_f)}\right) \frac{\not{p}_i + m}{2m} \left(\frac{\not{k}_i \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f}{2(p_i \cdot k_i)} + \frac{\not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i}{2(p_i \cdot k_f)}\right) \frac{\not{p}_f + m}{2m}\right] \\ &= \frac{1}{16m^2 (p_i \cdot k_i)^2} \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f (\not{p}_f + m)] + (\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_f, k_i \leftrightarrow -k_f) \\ &\quad + \frac{1}{16m^2 (p_i \cdot k_i)(p_i \cdot k_f)} \{\mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_f + m)] \\ &\quad + \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{k}_f (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f (\not{p}_f + m)]\} \end{aligned} \tag{5.232}$$

考虑到奇数个 γ 矩阵之积的迹为 0，偶数个 γ 矩阵之积次序逆转后求迹相同以及

$$\not{k}_i \not{k}_i = k_i^2 = 0 \tag{5.233}$$

可将 X 写为

$$\begin{aligned} X = & \frac{1}{16m^2(p_i \cdot k_i)^2} T_1 + (\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_f,\ k_i \leftrightarrow -k_f) \\ & + \frac{1}{16m^2(p_i \cdot k_i)(p_i \cdot k_f)} 2T_2 \end{aligned} \tag{5.234}$$

其中 T_1，T_2 的表达式及计算将在下面给出. 利用(5.207)，(5.233)，(5.226)，(5.204a)以及

$$\not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^2 = -1, \quad \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_f = \varepsilon_f^2 = -1 \tag{5.235}$$

可得

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{p}_f] \\ &= \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (2p_i \cdot k_i - \not{k}_i \not{p}_i) \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{p}_f] \\ &= 2(p_i \cdot k_i)\,\mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (2k_i \cdot \varepsilon_i - \not{\varepsilon}_i \not{k}_i) \not{\varepsilon}_f \not{p}_f] \\ &= 2(p_i \cdot k_i)\,\mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{k}_i \not{\varepsilon}_f \not{p}_f] \\ &= 8(p_i \cdot k_i)[(\varepsilon_f \cdot k_i)(\varepsilon_f \cdot p_f) - \varepsilon_f^2 (k_i \cdot p_f) + (\varepsilon_f \cdot p_f)(k_i \cdot \varepsilon_f)] \\ &= 8(p_i \cdot k_i)[2(\varepsilon_f \cdot k_i)(\varepsilon_f \cdot p_f) + (k_i \cdot p_f)] \end{aligned}$$

利用

$$\varepsilon_f \cdot p_f = \varepsilon_f \cdot (k_i + p_i - k_f) = \varepsilon_f \cdot k_i$$

和 $k_f - p_i = k_i - p_f$ 导致的

$$k_f \cdot p_i = k_i \cdot p_f$$

可以消去终态电子动量 p_f，最后得

$$T_1 = 8(p_i \cdot k_i)[2(\varepsilon_f \cdot k_i)^2 + (k_f \cdot p_i)] \tag{5.236}$$

对 T_2 可类似进行计算. 利用 $p_f = p_i + k_i - k_f$ 以及奇数个 γ 矩阵之积的求迹为 0，有

$$\begin{aligned} T_2 &= \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_f + m)] \\ &= \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_i + m)] \\ &\quad + \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{k}_i - \not{k}_f)] \\ &= \mathrm{tr}[\not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_i + m) \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i] \\ &\quad + \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i] - \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_f] \end{aligned}$$

由于(5.207)和 $p_i \cdot \varepsilon_f = p_i \cdot \varepsilon_i = 0$，上式第一项中 $\not{p}_i$ 与 $\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i$ 可以交换，于是

$$\begin{aligned} T_2 &= \mathrm{tr}[\not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_f + m)] \\ &\quad + \mathrm{tr}[\not{k}_i \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i] - \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_f] \\ &= \mathrm{tr}[(2k_i \cdot p_i + (-\not{p}_i + m) \not{k}_i) \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i (\not{p}_f + m)] \\ &\quad + \mathrm{tr}[(2k_i \cdot \varepsilon_f - \not{\varepsilon}_f \not{k}_i) \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i] - \mathrm{tr}[\not{\varepsilon}_f \not{\varepsilon}_i \not{k}_i \not{p}_i \not{k}_f \not{\varepsilon}_f (2\varepsilon_i \cdot k_f - \not{k}_f \not{\varepsilon}_i)] \end{aligned}$$

考虑到

$$-p_i^2+m^2=0,\quad k_i\cdot\varepsilon_i=k_i^2=0,\quad \varepsilon_f\cdot k_f=k_f^2=0$$

上式三个 tr 的第二项都分别为0，结果

$$\begin{aligned}T_2=&2(k_i\cdot p_i)\mathrm{tr}[\not k_f\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not p_i]\\&-2(k_i\cdot\varepsilon_f)\mathrm{tr}[\not k_i\not p_i\not k_f\not\varepsilon_f]+2(\varepsilon_i\cdot k_f)\mathrm{tr}[\not\varepsilon_i\not k_i\not p_i\not k_f]\end{aligned}$$

其中第一项的求迹

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\not k_f\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not p_i]&=\mathrm{tr}[\not k_f\not\varepsilon_f(2\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f-\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i)\not\varepsilon_i\not p_i]\\&=2(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)\mathrm{tr}[\not k_f\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not p_i]-\mathrm{tr}(\not k_f\not p_i)\\&=2(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)4[(k_f\cdot\varepsilon_f)(\varepsilon_i\cdot p_i)+(\varepsilon_f\cdot\varepsilon_i)(k_f\cdot p_i)\\&\quad-(k_f\cdot\varepsilon_i)(\varepsilon_f\cdot p_i)]-4(k_f\cdot p_i)\\&=4(k_f\cdot p_i)[2(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)^2-1]\end{aligned}$$

第二项的求迹

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\not k_i\not p_i\not k_f\not\varepsilon_f]\\=&4[(k_i\cdot p_i)(k_f\cdot\varepsilon_f)-(k_i\cdot k_f)(p_i\cdot\varepsilon_f)+(k_i\cdot\varepsilon_f)(p_i\cdot k_f)]\\=&4(k_i\cdot\varepsilon_f)(p_i\cdot k_f)\end{aligned}$$

第三项的求迹

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\not\varepsilon_i\not k_i\not p_i\not k_f]\\=&4[(\varepsilon_i\cdot k_i)(p_i\cdot k_f)-(\varepsilon_i\cdot p_i)(k_i\cdot k_f)+(\varepsilon_i\cdot k_f)(k_i\cdot p_i)]\\=&4(\varepsilon_i\cdot k_f)(k_i\cdot p_i)\end{aligned}$$

因此，

$$T_2=8(k_i\cdot p_i)(k_f\cdot p_i)[2(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)^2-1]-8(k_i\cdot\varepsilon_f)^2(p_i\cdot k_f)+8(\varepsilon_i\cdot k_f)^2(k_i\cdot p_i)\tag{5.237}$$

将 T_1，T_2 代入(5.234)，并考虑到(5.218)，得到

$$X=\frac{1}{2m^2}\left[\frac{k_f^0}{k_i^0}+\frac{k_i^0}{k_f^0}+4(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)^2-2\right]\tag{5.238}$$

代回(5.229)式，因而极化光子对自由电子散射的微分截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4m^2}\left[\frac{k_f^0}{k_i^0}+\frac{k_i^0}{k_f^0}+4(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)^2-2\right]\left(\frac{k_f^0}{k_i^0}\right)^2\tag{5.239}$$

若初态光子不极化，终态不测量光子的极化，则须对初态光子自旋求平均，终态光子自旋求和，从而得出不极化散射的微分截面

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}}=\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon_i,\varepsilon_f}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\tag{5.240}$$

可以证明，对光子自旋求和有下面的结果：

$$\sum_{\varepsilon_i,\varepsilon_f}(\varepsilon_i\cdot\varepsilon_f)^2\equiv\sum_{\lambda_i,\lambda_f=1,2}(\varepsilon_i^{(\lambda_i)}(k_i)\cdot\varepsilon_f^{(\lambda_f)}(k_f))^2=1+\cos^2\theta\tag{5.241}$$

其中 θ 为 $\vec{k}_f$ 相对于 $\vec{k}_i$ 的夹角.

证：为简化标记，我们略去 $\varepsilon_i^{(\lambda_i)}$ 和 $\varepsilon_f^{(\lambda_f)}$ 中的动量宗量不写. 由于

$$\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_f^{(\lambda'_f)} = g^{\lambda_f\lambda'_f},\ \varepsilon_i^{(\lambda_i)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda'_i)} = g^{\lambda_i\lambda'_i} \tag{5.242}$$

将 $\varepsilon_f^{(\lambda_f)}$ 按 $\varepsilon_i^{(\lambda_i)}$ 展开，则有

$$\varepsilon_f^{(\lambda_f)} = \sum_{\lambda_i=0,1,2,3} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right] g^{\lambda_i\lambda_i}\varepsilon_i^{(\lambda_i)} \tag{5.243}$$

代入 $g^{\lambda_f\lambda_f} = \varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_f^{(\lambda_f)}$，得

$$g^{\lambda_f\lambda_f} = \sum_{\lambda_i=0,1,2,3} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2 g^{\lambda_i\lambda_i} \tag{5.244}$$

考虑 $\lambda_f = 1, 2, 3$ 情况. 取 $\varepsilon_i^{(0)}$ 和 $\varepsilon_f^{(0)}$ 沿共同的时间轴，则有

$$\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(0)} = 0 \quad (\text{对 } \lambda_f = 1, 2, 3) \tag{5.245}$$

于是(5.244)成为

$$-1 = \sum_{\lambda_i=0,1,2,3} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2 g^{\lambda_i\lambda_i} = \sum_{\lambda_i=1,2,3} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2 (-1)$$

由此，

$$1 = \sum_{\lambda_i=1,2,3} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2$$

或

$$\sum_{\lambda_i=1,2} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2 = 1 - \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(3)}\right]^2 \tag{5.246}$$

两边对 $\lambda_f = 1, 2$ 求和，由于 $\varepsilon_f^{(\lambda_f)}$ 和 $\varepsilon_i^{(\lambda_i)}$ 处同等地位，所以

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_i,\lambda_f=1,2} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(\lambda_i)}\right]^2 &= 2 - \sum_{\lambda_f=1,2} \left[\varepsilon_f^{(\lambda_f)} \cdot \varepsilon_i^{(3)}\right]^2 \\ &= 2 - \left(1 - \left[\varepsilon_f^{(3)} \cdot \varepsilon_i^{(3)}\right]^2\right) \\ &= 1 + \frac{\vec{k}_f \cdot \vec{k}_i}{|\vec{k}_f||\vec{k}_i|} \\ &= 1 + \cos^2\theta = \sum_{\varepsilon_i,\varepsilon_f} (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f)^2\end{aligned} \tag{5.247}$$

(5.241)式得证. 结果，不极化散射的微分截面

$$\begin{aligned}\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} &= \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon_i,\varepsilon_f} \frac{\alpha^2}{4m^2}\left[\frac{k_f^0}{k_i^0} + \frac{k_i^0}{k_f^0} + 4(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f)^2 - 2\right]\left(\frac{k_f^0}{k_i^0}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2m^2}\left[\frac{k_f^0}{k_i^0} + \frac{k_i^0}{k_f^0} - \sin^2\theta\right]\left(\frac{k_f^0}{k_i^0}\right)^2\end{aligned} \tag{5.248}$$

式中

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{e^2}{4\pi m} = r_0 = 2.8 \times 10^{-13}\ \text{cm} \tag{5.249}$$

是电子经典半径.

由公式(5.239)和(5.248)给出的 Compton 散射截面与实验符合得很好. 注

意其中的 k_f^0 还可以利用能动量守恒消去. 由

$$k_f - k_i = p_i - p_f \text{ 和 } k_f^0 - k_i^0 = m - p_f^0$$

可得

$$-k_f \cdot k_i = m^2 - p_i \cdot p_f$$

即

$$-k_f^0 k_i^0 (1 - \cos\theta) = m^2 - m p_f^0 = m(m - p_f^0) = m(k_f^0 - k_i^0)$$

由此解出

$$k_f^0 = \frac{k_i^0}{1 + \dfrac{k_i^0}{m}(1 - \cos\theta)} \tag{5.250}$$

在 Tomson 极限下，$k_i^0/m \to 0$，因而 $k_f^0 \to k_i^0$，总散射截面成为

$$\sigma_0 = \int \mathrm{d}\Omega \left.\frac{\overline{\mathrm{d}\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\frac{k_i^0}{m}\to 0} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\int \mathrm{d}\Omega(2 - \sin^2\theta) = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \tag{5.251}$$

此即 Tomson 公式. 事实上，在 $k_i^0/m \to 0$ 极限下，这一公式对微扰论的任何级都成立.

5.7.3　μ衰变寿命

根据(4.82)，表达 μ 衰变过程的相互作用哈氏密度

$$\mathcal{H}_i = -\frac{G}{\sqrt{2}} :\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1 - \gamma_5)\mu \bar{e}\gamma^\lambda (1 - \gamma_5)\nu_e : + \text{h. c.} \tag{5.252}$$

我们考虑由图 5.18 所表示的 μ^- 衰变过程

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

不难看出，(5.252)给出的 Feynman 规则中，四 Fermion作用顶角对应 S 矩阵中因子

$$\mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}\gamma_\lambda (1 - \gamma_5)\cdots\gamma^\lambda (1 - \gamma_5)$$

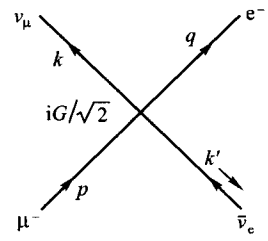


图 5.18　μ^- 衰变图

因此 μ^- 衰变的最低级 S 矩阵元

$$\langle q, k, k'|S^{(1)}|p\rangle = (2\pi)^4\delta^4(q + k + k' - p)\langle q, k, k'|T|p\rangle \tag{5.253}$$

$$\langle q, k, k'|T|p\rangle = \mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}(k)\gamma_\lambda (1 - \gamma_5)u(p)\bar{u}(q)\gamma^\lambda (1 - \gamma_5)v(k') \tag{5.254}$$

为了简洁，省略了旋量的极化指标. (5.253)和(5.254)也可以直接由一级正规乘积项的矩阵元得出.

目前初态为 $m_\mu \neq 0$ 的旋量粒子，衰变几率应由(5.196)给出，因此衰变寿命的倒数

$$\tau^{-1} = \frac{m_\mu}{p^0}\ \frac{1}{2}\sum_{自旋}\int |\langle q,\ k,\ k'|T|p\rangle|^2 \frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\ \frac{m_e}{q^0}\ \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2k^0}$$
$$\times \frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2k^{0\prime}}(2\pi)^4\delta^4(q+k+k'-p)$$
$$= (2\pi)^4 \frac{G^2}{2}\ \frac{m_e m_\mu}{4p^0}\ \frac{1}{(2\pi)^9}\int \frac{\mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{q^0k^0k^{0\prime}}\delta^4(q+k+k'-p)Y \tag{5.255}$$

其中

$$Y = \frac{1}{2}\sum_{自旋}|\bar{u}(k)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)u(p)\bar{u}(q)\gamma^\lambda(1-\gamma_5)v(k')|^2 \tag{5.256}$$

它可以改写为 γ 矩阵的求迹. 记

$$O_\lambda = \gamma_\lambda(1-\gamma_5)$$

则

$$Y = \frac{1}{2}\sum_{自旋}[\bar{u}(k)O_\lambda u(p)\bar{u}(q)O^\lambda v(k')][\bar{u}(k)O_\rho u(p)\bar{u}(q)O^\rho v(k')]^*$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{自旋}\bar{u}(k)O_\lambda u(p)[\bar{u}(k)O_\rho u(p)]^+\bar{u}(q)O^\lambda v(k')[\bar{u}(q)O^\rho v(k')]^+$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{自旋}\mathrm{tr}[O_\lambda u(p)\bar{u}(p)\gamma^0O_\rho^+\gamma^0u(k)\bar{u}(k)]\mathrm{tr}[O^\lambda v(k')\bar{v}(k')\gamma^0O^{\rho\,+}\gamma^0u(q)\bar{u}(q)]$$

利用旋量自旋求和公式(5.211)—(5.213)并考虑到

$$\gamma^0O_\rho^+\gamma^0 = O_\rho = \gamma_\rho(1-\gamma_5)$$

我们得到

$$Y = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\frac{\not p+m_\mu}{2m_\mu}\gamma_\rho(1-\gamma_5)\not k\right]\mathrm{tr}\left[\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\not k'\gamma^\rho(1-\gamma_5)\frac{\not q+m_e}{2m_e}\right]$$
$$= \frac{1}{2m_\mu m_e}\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma_\lambda\not p\gamma_\rho\not k]\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma^\lambda\not k'\gamma^\rho\not q] \tag{5.257}$$

其中利用了奇数个 γ 矩阵之积的 tr 为 0 以及

$$(1\pm\gamma_5)^2 = 2(1\pm\gamma_5)$$

将 Y 代回 τ^{-1} 公式(5.255)，得

$$\tau^{-1} = \frac{G^2}{2^4(2\pi)^5}\ \frac{1}{p^0}\int \frac{\mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{q^0k^0k^{0\prime}}\delta^4(q+k+k'-p)$$
$$\times\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma_\lambda\not p\gamma_\rho\not k]\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma^\lambda\not k'\gamma^\rho\not q] \tag{5.258}$$

tr 的计算要用到公式(5.204)及(5.205)，结果为

$$\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma_\lambda\not p\gamma_\rho\not k]\mathrm{tr}[(1+\gamma_5)\gamma^\lambda\not k'\gamma^\rho\not q] = 64(p\cdot k')(k\cdot q) \tag{5.259}$$

于是，

$$\tau^{-1}=G^2\frac{4}{(2\pi)^5p^0}\int\frac{\mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{q^0k^0k^{0\prime}}\delta^4(q+k+k'-p)(p\cdot k')(k\cdot q) \tag{5.260}$$

现在对中微子动量 k, k'积分. 定义

$$I_{\mu\nu}=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{k^0k^{0\prime}}\delta^4(q+k+k'-p)k_\mu k'_\nu \tag{5.261}$$

取坐标系，其中 $\vec{q}-\vec{p}=0$，则

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu}&=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{k^0k^{0\prime}}\delta(q^0+k^0+k^{0\prime}-p^0)\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')k_\mu k'_\nu\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{k^{0^2}}\delta(q^0-p^0+2k^0)k_\mu\tilde{k}_\nu\qquad\tilde{k}^\mu=(k^0,\ -\vec{k})\\&=\int\mathrm{d}k^0\mathrm{d}\Omega\frac{1}{2}\delta\left(k^0-\frac{p^0-q^0}{2}\right)k_\mu\tilde{k}_\nu\\&=\frac{\pi}{6}(p^0-q^0)^2\begin{cases}3&(\mu=\nu=0)\\-1&(\mu=\nu=i=1,\ 2,\ 3)\\0&(\mu\neq\nu)\end{cases}\end{aligned}$$

若看作矩阵，则

$$(I_{\mu\nu})=\frac{\pi}{6}(p^0-q^0)\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{5.262}$$

另一方面，二阶张量 $I_{\mu\nu}$的一般形式为 $g_{\mu\nu}$和$(p-q)_\mu(p-q)_\nu$ 的组合，故在任意惯性系，可写

$$I_{\mu\nu}=\frac{\pi}{6}(p-q)^2\left[g_{\mu\nu}+2\frac{(p-q)_\mu(p-q)_\nu}{(p-q)^2}\right] \tag{5.263}$$

因为当 $\vec{p}-\vec{q}=0$ 时，它化为(5.262)式. 将 $I_{\mu\nu}$表达式(5.263)代入 τ^{-1}公式(5.260)，经过一些代数运算，得

$$\begin{aligned}\tau^{-1}&=G^2\frac{4}{(2\pi)^5p^0}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{q^0}I_{\mu\nu}q^\mu p^\nu\\&=G^2\frac{4}{(2\pi)^5p^0}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{q^0}\frac{\pi}{6}(p-q)^2\left[q\cdot p+2\frac{((p-q)\cdot q)((p-q)\cdot p)}{(p-q)^2}\right]\\&=\frac{G^2}{48\pi^4p^0}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{q^0}[3(m_\mu^2+m_e^2)(p\cdot q)-4(p\cdot q)^2-2m_e^2m_\mu^2]\end{aligned} \tag{5.264}$$

假设 μ 是静止衰变，则在 μ 静止系，

$$p=(m_\mu,\ 0,\ 0,\ 0) \tag{5.265}$$

μ 静止时的寿命

$$\tau^{-1}=\frac{G^2}{48\pi^4 m_\mu}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{q^0}\left[3(m_\mu^2+m_e^2)m_\mu q^0-4m_\mu^2 q^{0^2}-2m_e^2m_\mu^2\right] \tag{5.266}$$

由于 m_e 很小，可以忽略上式中的 m_e/m_μ 和 m_e/q^0 并有近似 $q^0\simeq|\vec{q}|$，于是

$$\tau^{-1}=\frac{G^2}{48\pi^4 m_\mu}\int_0^{m_\mu/2}|\vec{q}|^2\mathrm{d}|\vec{q}|\,\mathrm{d}\Omega_{\vec{q}}\left[3m_\mu^3-4m_\mu^2|\vec{q}|\right] \tag{5.267}$$

其中电子三维动量 $|\vec{q}|$ 的积分上限已取为 $m_\mu/2$，这是因为能动量守恒条件

$$m_\mu=q^0+k^0+k^{0\prime}\text{和}\ 0=\vec{q}+\vec{k}+\vec{k}'$$

导致

$$|\vec{q}|=|\vec{k}+\vec{k}'|\text{因而}|\vec{q}|_{\max}=|\vec{k}|+|\vec{k}'|=k^0+k^{0\prime}$$

所以

$$m_\mu\simeq 2|\vec{q}|_{\max}$$

或

$$|\vec{q}|_{\max}=\frac{m_\mu}{2} \tag{5.268}$$

将(5.267)中的积分积出，我们最后得 μ^- 衰变寿命的倒数

$$\tau^{-1}=\frac{G^2m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{5.269}$$

利用 τ 和 m_μ 的实验值，通过此公式可以决定弱衰变耦合常数 G(Fermi 常数)的值. 由(5.269)可以求出

$$G^2m_p^4=\frac{192\pi^3}{m_\mu\tau}\left(\frac{m_p}{m_\mu}\right)^4\hbar$$

其中 m_p 为质子质量，$\hbar$ 为 Planck 常数除以 2π. 若取实验值 $\tau_\mu=2.197\,03\times10^{-6}\,\mathrm{s}$，$m_\mu=105.658\,389\,\mathrm{MeV}$，$m_p=938.272\,31\,\mathrm{MeV}$ 和 $\hbar=6.582\,122\times10^{-22}\,\mathrm{MeV\cdot s}$，则得到数值

$$Gm_p^2=1.024\,54\times10^{-5} \tag{5.270}$$

问题 5.9 π 衰变过程 $\pi^\pm\to\mu^\pm+\begin{cases}\nu_\mu\\ \bar{\nu}_\mu\end{cases}$可以用唯象拉氏密度

$$\mathcal{L}_i=g_\pi\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\mu\partial_\lambda\pi^+ + h.c.$$

描述，其中 g_π 为实常数. 用最低级微扰论计算 π^+ 静止时的衰变寿命(不测量终态粒子的极化).

问题 5.10 求过程 $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ 准至 α^2 级的微分截面和总截面.

问题 5.11 利用四 Fermion 弱作用

$$\mathcal{H}_i=\frac{G}{\sqrt{2}}:\bar{\mu}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu\bar{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma_5)e:$$

计算质心系中反应过程 $\nu_\mu+e^-\to\nu_e+\mu^-$ 的总截面. 设 $m_e=m_\mu=0$.

第 6 章

重整化

只要 Feynman 图中包括圈图，相应的 S 矩阵元中就可能出现紫外发散积分，处理这种发散的方法就是重整化. 我们在 5.4.5 节中讨论的电子自能和光子自能就是两个例子. 不过，那里的情况比较简单，因为圈图都出现在外线上. 电子自能图的发散，通过质量抵消项加以抵消从而保持电子物理质量的定义. 光子自能图因电磁流守恒而对质量没有贡献，这时无须引入光子质量抵消项. 然而，一般来说，圈图不仅出现在外线上也出现在内线和顶角上，因而必须使用标准的重整化方法：首先进行正规化以分离发散而后进行减除即引入适当的抵消项来抵消发散并维持物理参数的定义. 这里所说的物理参数，除了质量以外，还可以是相互作用耦合常数. 这种质量和耦合常数的重整化并不是在任何理论中都可以进行的，关键在于我们是否能用有限个抵消项来消除所有可能的发散并使理论保持自恰. 若能够做到这一点，我们称理论是可重整化的. 值得指出的是，对于物理上感兴趣的大多数理论如 QED，$\lambda\varphi^4$，Yang - Mills 规范场理论都是可以重整化的.

正规化和减除的基本思想已在 5.4.5 节叙述，本章在引入圈展开的概念后将通过QED单圈图的重整化来给出细节，其中详细介绍了现代量子场论中广泛使用的't Hooft - Veltman 维数正规化方法，阐述了重整化的相乘性质，强调了 QED 中 Ward 恒等式的作用，推导了跑动耦合常数并指出它所体现的电荷屏蔽效应. 然后我们以电子的反常磁矩和氢原子的 Lamb 能级移动这两个经典例子说明重整化的物理应用，显示当圈图的紫外发散被抵消后所余有限部分对物理过程产生的辐射修正. 最后我们讨论了一个理论可以重整化的一般判据，并简要叙述了近年来关于不可重整性与等效场论的新观点.

6.1 圈图展开

量子场论的微扰展开有两种方式. 一种是按相互作用耦合常数的幂次来进行,比如前面讨论的 QED 微扰论就是这样. 显然,这种展开方式对于只含单一耦合常数的理论是方便的. 另一种是按照 Feynman 图中独立圈的数目来进行,即零级微扰中不含任何圈图,一级微扰中考虑至单圈图,二级微扰中考虑至双圈图等等. 无疑,这种展开方式对含有不止一个耦合常数的理论更方便. 而重整化的讨论,基于按圈图作展开的概念进行,也是更方便的.

事实上,可以证明,按圈数的展开就等同于按 Planck 常数 $\hbar$ 幂次的展开[13]. 考虑一个连接的 Feynman 图,有 I 条内线, V 个顶角,则该图中独立圈的数目是

$$L = I - (V - 1) \tag{6.1}$$

这是因为, V 个顶角有 V 个四动量守恒条件,除去该图一个总的外线四动量守恒条件外,还余 $(V-1)$ 个条件,将对内线动量加以限制. 该图内线动量总数为 I, 因而自由内动量的数目由 (6.1) 右边给出,它正是独立圈的数目.

为了找出 L 和 $\hbar$ 的幂次之间的关系,须总计出该 Feynman 图中所有的因子 $\hbar$, 但不必计入使质量项得到正确量纲的因子 $\hbar$. 例如 Klein - Gordon 方程应写成 $[\partial^2 + (mc/\hbar)^2]\varphi(x) = 0$, 其中质量项中的因子 $\hbar$ 不在我们考虑之列. 这是因为质量项中的 $\hbar$ 来自四动量算符即 $\hat{p}^\mu/\hbar = \mathrm{i}\partial^\mu$, 我们的平面波展开是按 $\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k\cdot x}$ 进行的,在动量表象中 $\mathrm{i}\partial^\mu$ 成为 $\pm k^\mu$, 其中的 $\hbar$ 仅仅成为变量 k 定义中的一个因子. 事实上,Feynman 图中 $\hbar$ 因子的真正来源有两个. 首先,对易(或反对易)关系中包含因子 $\hbar$. 例如标量场情况下,等时对易关系应为

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = \mathrm{i}\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

与之相应,消灭与产生算符之间的对易关系成为

$$[a(k), a^+(k')] = \hbar\,(2\pi)^3 2k^0\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

这将使每一个传播子有一个因子 $\hbar$, 即

$$\langle 0 \mid T\varphi(x)\varphi(y) \mid 0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\frac{\mathrm{i}\hbar}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

以及使每一条外线获得一个因子 $\hbar$. 因为传播子 $\langle 0 \mid T\varphi(x)\varphi(y) \mid 0\rangle$ 和外线因子

$$\sim \varphi(x)a^+(k) \mid 0\rangle$$

的计算都要利用上述对易关系. 同样的结论对任何 Boson 场和 Fermion 场成立.

其次,演化算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$ 中显含 $\hbar$, 所以

$$\exp\left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathcal{H}_{\mathrm{i}}\mathrm{d}^4x\right)$$

中也含 $\hbar$. 这意味着对每一个顶角有一因子 $\hbar^{-1}$.

于是,对于一个有 I 条内线,V 个顶角和 E 条外线的图形,其 $\hbar$ 的总幂次将是

$$\hbar^{E+I-V}=\hbar^{E-1+L} \tag{6.2}$$

其中已利用了(6.1)式. 由(6.2)式看出,当 Feynman 图的外线数 E 固定时,圈数 L 与 $\hbar$ 的幂次一一对应,即 L 每增加 1,$\hbar$ 的幂次也增加 1. 这就证明了,按圈数的展开等同于按 $\hbar$ 幂次的展开. $\hbar$ 的最低幂次图就是不含圈的图(树图).

还可以证明,在只含单个耦合常数的理论中,按圈数的展开与按耦合常数幂次的展开是一致的. 这是因为,在这种理论中,顶角数 V(耦合常数的幂次)和圈数 L 之间存在一个辅助关系. 如 QED 中,有下面的关系:

$$3V=E+2I \tag{6.3}$$

利用 (6.1) 消去 I, 就得到

$$V=E+2(L-1) \tag{6.4}$$

当外线数 E 固定时,V 与 $2L$ 一一对应:圈数 L 增加 1 则顶角数 V 增加 2 也即耦合常数 e 的幂次坛加 2. 特别,当 $E=2$ 时,$L=1$ 对应 $V=2$,即电子自能或光子自能单圈图与 e^2 或 α 级对应;当 $E=3$ 时,$L=0$ 对应 $V=1$ 而 $L=1$ 对应 $V=3$,即顶角函数的树图对应 e^1 级而单圈图对应 e^3 或 $e\alpha$ 级. 相对于树图所含 $\hbar$ 的最低幂次因子而言,这些单圈图都对应 $\hbar$ 的一次方级.

谈到圈展开时,我们需考虑外线数目固定的连接 Feynman 图. 若将外线替换为树图传播子,则所得图形的解析表达式通常称为(连接的)Green 函数,与之相连的树图传播子称之为腿. 一个 Green 函数图也可能作为某图形的一部分出现,这时从它伸出的腿将或者成为内线或者换为外线. 按照所伸出的腿的数目,Green 函数可分为两点,三点 ……n 点函数等. Green 函数一般定义为 Heisenberg 图像中相互作用场的编时乘积的真空平均值. 设 $\Phi_i\equiv\Phi_i(x_i)$ 表示任何定域场. 两点函数即传播子$\langle 0|T\Phi_1\Phi_2|0\rangle$;三点函数定义为 $\langle 0|T\Phi_1\Phi_2\Phi_3|0\rangle$, 在 QED 中即$(ee\gamma)$顶角;一般的 n 点 Green 函数定义为$\langle 0|T\Phi_1\cdots\Phi_n|0\rangle$. 然而我们将不研究它们的形式理论方面,下面只从 Feynman 图出发,分别讨论 QED 中两点及三点函数的单圈图重整化.

6.2　QED 单圈图重整化——维数正规化方法

重整化理论的关键性质在所谓的链近似下显示得最为清楚,因此我们将在这种近似下讨论 QED 的重整化. 计算只取至单圈图级. 我们将详细叙述'tHooft 和 Veltman 的维数正规化方法并用它来分离圈图的紫外发散,然后引入适当的

抵消项将发散消除. 使用维数正规化方法的一个明显好处是,它能够保持理论几乎所有的对称性(包括规范对称性).

6.2.1 真空极化

动量空间中的光子传播子在树图近似下为

$$G^{[0]}_{\rho\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{6.5}$$

对它的最低级圈图修正为

$$G^{[1]}_{\rho\nu}(k)=G^{[0]}_{\rho\rho'}\Pi^{\rho'\nu'}(k)G^{[0]}_{\nu'\nu}(k)$$

$$\Pi^{\rho\nu}(k)=-(-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\left(\gamma^\rho\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{6.6}$$

正如图 6.1 所示.

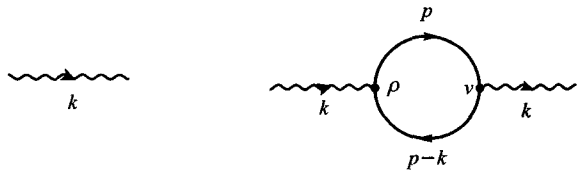


图 6.1 最低级光子传播子

我们确认 (6.6) 中的 e 为电子的物理电荷,它来自 QED 相互作用 哈氏密度 (5.59)或拉氏密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}=-e:\bar\psi\not A\psi:+\delta m:\bar\psi\psi:\quad(\delta m=m-m_0) \tag{6.7}$$

$\Pi^{\rho\nu}(k)$ 的 d^4p 积分表观上是平方紫外发散的. 我们将用维数正规化方法来处理这种发散积分,以使发散按确定的形式分离出来.

维数正规化的基本思想是将时空维数从 4 改变为 2ω, 这里 ω 为一复数. 与此相应,场和耦合常数的量纲将发生改变. 由于拉氏密度的质量量纲现为 2ω, 因此由 Dirac 场的动能项 $\mathrm{i}\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 和电磁场的动能项 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$可以推出, Dirac 场 ψ 和电磁场 A_μ 的质量量纲分别是 $\omega-1/2$ 和 $\omega-1$;而由最小电磁耦合项 $-e\bar\psi\not A\psi$可以推出, 耦合常数 e 将具有质量量纲 $2-\omega$. 但如果作代换

$$e\to e\mu^{2-\omega}$$

其中 μ 为一具有质量量纲的参数,则耦合常数 e 仍将保持为无量纲. 在此情况下,可将(6.7)改写成

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i}}=-e\mu^{2-\omega}:\bar\psi\not A\psi:+\delta m:\bar\psi\psi:\quad(\delta m=m-m_0) \tag{6.8}$$

结果在 2ω 维时空计算的真空极化张量应表达为

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)=-e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{\mathrm{tr}[\gamma^\rho(\not p+m)\gamma^\nu(\not p-\not k+m)]}{(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{6.9}$$

注意在 2ω 维时空，γ^μ 成为 $2^\omega\times 2^\omega$ 矩阵[28]，因而有如下的求迹和求和公式成立：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu&=2^\omega g_{\mu\nu}\\ \mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma&=2^\omega(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\\ \gamma^\mu\gamma_\mu&=2\omega\\ \gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\mu&=-[2-2(2-\omega)]\gamma_\rho\end{aligned} \tag{6.10}$$

在对(6.9)中的分子求迹后，我们得到

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)=-e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{p^\rho(p-k)^\nu+p^\nu(p-k)^\rho-g^{\rho\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{6.11}$$

利用 Feynman 参数化公式

$$\frac{1}{D_1^{a_1}D_2^{a_2}\cdots D_k^{a_k}}=\frac{\Gamma(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_k)}\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k\frac{\delta(1-x_1-\cdots-x_k)x_1^{a_1-1}\cdots x_k^{a_k-1}}{(D_1x_1+\cdots+D_kx_k)^{a_1+\cdots+a_k}} \tag{6.12}$$

可以重新安排圈积分中的动量. 取 $k=2$ 和 $a_1=a_2=1$，则有公式

$$\frac{1}{D_1D_2}=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{[(D_1-D_2)x+D_2]^2} \tag{6.13}$$

由此得

$$\frac{1}{\underbrace{(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)}_{D_1}\underbrace{[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}_{D_2}}=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{\{[p-k(1-x)]^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon\}^2} \tag{6.14}$$

$$M^2=m^2-k^2x(1-x) \tag{6.15}$$

将(6.14)代入(6.11)，我们得出

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)=-e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{p^\rho(p-k)^\nu+p^\nu(p-k)^\rho-g^{\rho\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{\{[p-k(1-x)]^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon\}^2} \tag{6.16}$$

选择 2ω 使 $\mathrm{d}^{2\omega}p$ 积分成为收敛的，则可作积分变量的平移

$$p-k(1-x)\to p$$

从而有

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega) = -e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^{\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1\mathrm{d}x$$
$$\times\frac{[p^{\rho}+k^{\rho}(1-x)](p-kx)^{\nu}+[p^{\nu}+k^{\nu}(1-x)](p-kx)^{\rho}-g^{\rho\nu}\{[p+k(1-x)]\cdot(p-kx)-m^2\}}{(p^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2} \tag{6.17}$$

上式中被积函数的分母为 p 的偶函数，故分子中含 p^{ρ} 奇次的项在对 $\mathrm{d}^{2\omega}p$ 积分后为零. 因此 $\Pi^{\rho\nu}$ 的表达式可以简化为

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega) = -e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^{\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1\mathrm{d}x$$
$$\times\frac{2p^{\rho}p^{\nu}-2k^{\rho}k^{\nu}x(1-x)-g^{\rho\nu}[p^2-k^2x(1-x)-m^2]}{(p^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2} \tag{6.18}$$

上式被积函数分母中的 M^2 由(6.15)所定义. 考虑到

$$0\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}\quad(\text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1)$$

因而有

$$x(1-x)k^2\leqslant\frac{k^2}{4}<m^2\quad(\text{当 } 0\leqslant k^2<4m^2)$$

又

$$x(1-x)k^2<m^2\quad(\text{当 } k^2<0)$$

它们合并表明

$$M^2=m^2-k^2x(1-x)>0\quad(\text{当 } k^2<4m^2) \tag{6.19}$$

我们指出，$4m^2$ 是产生一对粒子——反粒子所需最小能量的平方，称为粒子对的产生阈. 现在选择 k，使 $k^2<4m^2$. 那么不难看出，(6.18)式中被积函数分母的零点出现在

$$p^0=\pm\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\mp\mathrm{i}\delta\quad(\delta=0_+) \tag{6.20}$$

处. 这表明在复 p^0 平面上，对 p^0 的积分路线(从 $-\infty$ 至 $+\infty$)可以逆时针方向转动 $\pi/2$，即作所谓的 Wick 转动而不会遇到奇点，从而变成从 $-\mathrm{i}\infty$ 至 $+\mathrm{i}\infty$. 这一结果可以显示地表达为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p^0=\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p^0=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\bar{p}^0\quad(\bar{p}^0=\mathrm{i}p^0) \tag{6.21}$$

或者

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^{2\omega}p=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p^0\mathrm{d}^{2\omega-1}p=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\bar{p}^0\mathrm{d}^{2\omega-1}p=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p} \tag{6.22}$$

其中

$$\bar{p}^0=\mathrm{i}p^0,\quad\bar{p}^i=p^i \tag{6.23}$$

在变换(6.23)下,(6.18)式被积函数中所有的 p^2 都将成为 $-\bar{p}^2$,而分子中的 $p^\rho p^\nu$ 可以转换成 $-g^{\rho\nu}\bar{p}^2/2\omega$. 结果我们得到

$$\begin{aligned}\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega) &= -\mathrm{i}e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(2\pi)^{2\omega}}\\ &\quad\times\frac{-g^{\rho\nu}\bar{p}^2/\omega-2k^\rho k^\nu x(1-x)+g^{\rho\nu}[\bar{p}^2+k^2x(1-x)]+m^2]}{(\bar{p}^2+M^2)^2}\\ &= -\mathrm{i}(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu)\Pi(k^2,2-\omega)+g^{\rho\nu}\Delta\Pi \qquad (6.24)\end{aligned}$$

其中

$$\Pi(k^2,2-\omega)=e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega\int_0^1\mathrm{d}x2x(1-x)\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{1}{(\bar{p}^2+M^2)^2} \qquad (6.25)$$

$$\Delta\Pi=-\mathrm{i}e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(2\pi)^{2\omega}}\left[\frac{1}{\bar{p}^2+M^2}-\frac{\bar{p}^2}{\omega(\bar{p}^2+M^2)^2}\right] \qquad (6.26)$$

根据(5.4.5)和(5.4.7)节的讨论,电磁流守恒要求 $k_\rho\Pi^{\rho\nu}(k)=0$,进而要求 $\Pi^{\rho\nu}(k)\propto(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu)$. $\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)$ 的第一项具有这种结构但第二项不具有这种结构. 但是,下面将证明,第二项的贡献实际为零. 从(6.25)和(6.26)看出,为了得出 $\Pi(k^2,2-\omega)$ 和 $\Delta\Pi$,一般需要计算如下形式的积分:

$$\int\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}F(\bar{p}^2)$$

实际的做法是先作 N 维积分,然后将结果从 N 维延拓至 2ω 维,由此可得到一系列实用的积分公式[12].

考虑 N 维积分

$$I_N=\int\mathrm{d}^N\bar{p}F(\bar{p}^2) \qquad (6.27)$$

引入 N 维极坐标

$$(\bar{p}^1,\cdots,\bar{p}^N)\to(P,\phi,\theta_1,\cdots,\theta_{N-2})\quad(P^2=\bar{p}^2) \qquad (6.28)$$

则

$$\mathrm{d}^N\bar{p}=P^{N-1}\mathrm{d}P\mathrm{d}\Omega_N,\quad \mathrm{d}\Omega_N=\mathrm{d}\phi\prod_{k=1}^{N-2}\mathrm{d}\theta_k\sin^k\theta_k \qquad (6.29)$$

于是(6.27)式成为

$$I_N=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\prod_{k=1}^{N-2}\int_0^\pi\mathrm{d}\theta_k\sin^k\theta_k\int_0^\infty\mathrm{d}PP^{N-1}F(P^2) \qquad (6.30)$$

利用公式

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}\quad\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,x>0\\ \mathrm{Re}\,y>0\end{pmatrix} \qquad (6.31)$$

可得出

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin^k\theta = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta(\sin^k\theta + \cos^k\theta) = \pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \tag{6.32}$$

从而

$$\int \mathrm{d}\Omega_N = 2\pi \prod_{k=1}^{N-2} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_k \sin^k\theta_k = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2) \tag{6.33}$$

令 $P^2 = x$,则

$$I_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x x^{\frac{N-2}{2}} F(x) \tag{6.34}$$

一般情况下,

$$F(x) = \frac{1}{(x+a^2)^A} \quad (A = 2,3,\cdots)$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^{\frac{N-2}{2}}}{(x+a^2)^A} &= (a^2)^{-A+\frac{N}{2}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^{\frac{N}{2}-1}}{(y+1)^{(A-\frac{N}{2})+\frac{N}{2}}} \\ &= (a^2)^{-A+\frac{N}{2}} B\left(\frac{N}{2}, A-\frac{N}{2}\right) \\ &= (a^2)^{-A+\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma\left(A-\frac{N}{2}\right)}{\Gamma(A)} \end{aligned} \tag{6.35}$$

上式对 $\mathrm{Re}\,\frac{N}{2} > 0$ 和 $\mathrm{Re}\left(A - \frac{N}{2}\right) > 0$ 成立. 以上推导中我们已作了积分变量代换 $y = x/a^2$ 并利用了 B 函数的定义

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{对于 } \mathrm{Re}\,p > 0, \mathrm{Re}\,q > 0) \tag{6.36}$$

将(6.35)代入(6.34),我们得到

$$I_N = \int \mathrm{d}^N\bar{p} \frac{1}{(\bar{p}^2+a^2)^A} = \pi^{N/2} \frac{\Gamma\left(A-\frac{N}{2}\right)}{\Gamma(A)} (a^2)^{-A+\frac{N}{2}} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\frac{N}{2} > 0, \\ \mathrm{Re}\left(A-\frac{N}{2}\right) > 0 \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

现在对 N 作解析延拓,令 $N \to 2\omega$ 成为复数,则将有如下结果:

$$\int \frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(\bar{p}^2+a^2)^A} = \pi^{\omega} \frac{\Gamma(A-\omega)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-\omega}} \tag{6.38}$$

由(6.38)可以导出几个任意维数的积分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(\bar{p}^2+a^2)^A} = \frac{\Gamma(A-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-\omega}} \tag{6.39}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\bar{p}_\mu \bar{p}_\nu}{(\bar{p}^2+a^2)^A} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(A-1-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{\delta_{\mu\nu}}{(a^2)^{A-1-\omega}} \tag{6.40}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{p}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\bar{p}^2}{(\bar{p}^2+a^2)^A} = \frac{\omega\Gamma(A-1-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A-1-\omega}} \tag{6.41}$$

在应用以上任意维数的积分公式时，总可以选择 ω，以使 $\mathrm{Re}(A-\omega)>0$ 和 $\mathrm{Re}(A-1-\omega)>0$.

现在，利用积分公式(6.39)和(6.41)，可以计算 $\Delta\Pi$ 和 $\Pi(k^2,2-\omega)$. 从(6.26)式得出

$$\Delta\Pi = -\mathrm{i}e^2(\mu^2)^{2-\omega}2^\omega \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(4\pi)^\omega}\left[\frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1)} \frac{1}{(M^2)^{1-\omega}} - \omega \frac{\Gamma(1-\omega)}{\omega\Gamma(2)} \frac{1}{(M^2)^{1-\omega}}\right] = 0 \tag{6.42}$$

因而 $\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)$ 只余电磁流守恒所要求的形式：

$$\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega) = -\mathrm{i}(g^{\rho\nu}k^2 - k^\rho k^\nu)\Pi(k^2,2-\omega) \tag{6.43}$$

从(6.25)式可见，当 $2\omega=4$ 时，$\Pi(k^2,2-\omega)$ 是对数紫外发散的，而原来由(6.6)式表达的真空极化张量 $\Pi^{\rho\nu}(k)$ 中的 d^4p 积分在 $p\to\infty$ 时却是平方紫外发散的. 两者相比，发散度从2降到了0. 这是因为，从 $\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)$ 过渡到 $\Pi(k^2,2-\omega)$ 时，已经分离出去一个动量2次方的因子 $-\mathrm{i}(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu)$. 这是一个例子，表明发散度与积分的量纲之间有密切关系. 由于 $\Pi^{\rho\nu}$ 总的量纲是确定的，所以分离出一个动量2次方因子后就使余下的积分量纲减2，发散度也随之减2. 令

$$\varepsilon = 2-\omega \tag{6.44}$$

我们可以将 $\Pi(k^2,2-\omega)$ 的计算结果写为

$$\begin{aligned}\Pi(k^2,2-\omega) &\equiv \Pi(k^2,\varepsilon)\\ &= e^2(\mu^2)^\varepsilon 2^\omega \int_0^1 \mathrm{d}x 2x(1-x) \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2)} \frac{1}{(M^2)^{2-\omega}}\\ &= \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\left(\frac{2\pi\mu^2}{M^2}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)\end{aligned} \tag{6.45}$$

注意到对于 $n=0,1,2,\cdots$ 和 $\varepsilon\to0(\omega\to2)$ 有下述展开公式：

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+\psi(n+1)+\frac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(n+1)-\psi'(n+1)\right]+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right\} \tag{6.46}$$

其中

$$\psi(n+1) = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma, \quad \psi(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Gamma(s)$$

$$\psi'(n+1)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\quad \psi'(1)=\frac{\pi^2}{6} \tag{6.47}$$

而

$$\gamma=-\psi(1)=0.577\,2\cdots \tag{6.48}$$

是 Euler 常数. 由此

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)+\mathcal{O}(\varepsilon) \tag{6.49}$$

将(6.49)代入(6.45),我们得到

$$\begin{aligned}\Pi(k^2,\varepsilon)&=\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\mathrm{e}^{\varepsilon\ln\frac{2\pi\mu^2}{M^2}}\Gamma(\varepsilon)\\&=\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\left(1+\varepsilon\ln\frac{2\pi\mu^2}{M^2}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)+\mathcal{O}(\varepsilon)\right]\\&=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\left\{\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)+\ln\frac{2\pi\mu^2}{m^2}-\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.50}$$

其中已经利用了 M^2 的表示式(6.15)并忽略了所有$\mathcal{O}(\varepsilon)$以上的高级小项,$\alpha=e^2/4\pi$ 为精细结构常数. 记

$$F_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)=\psi(1)-\ln\frac{m^2}{2\pi\mu^2} \tag{6.51}$$

则可以将 $\Pi(k^2,\varepsilon)$表达为

$$\Pi(k^2,\varepsilon)=\frac{\alpha}{3\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}+F_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)-6\int_0^1 \mathrm{d}x x(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right]\right\} \tag{6.52}$$

我们看到,经维数正规化之后,真空极化张量中的单圈图紫外发散以 $\varepsilon=2-\omega$ 的单极点形式被分离出来,而其有限部分完全是任意的,因为 $F_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)$中的标度参数 μ 是可以任意改变的. 利用变量代换 $x=(1-u)/2$,(6.52)式中的积分很容易作出. 我们最后得出如下的解析表示式:

$$\begin{aligned}\Pi(k^2,\varepsilon)=\frac{\alpha}{3\pi}\Bigg\{&\frac{1}{\varepsilon}+F_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)-\frac{1}{3}\\&-2\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\left[\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}\operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}-1\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.53}$$

计算是在假定 $k^2<4m^2$ 下完成的. 不难看出,在 $k^2<4m^2$ 区域,$\Pi(k^2,\varepsilon)$是实的. 这一函数可以在复 k^2 平面上作解析延拓. 为了显示 $\Pi(k^2,\varepsilon)$对 k^2 的解析性质,我们利用它的一个等价的表示式. 从积分表示(6.52)出发,令 $x=(1-u)/2$,作分部积分,再作变量代换 $u=(1-4m^2/k'^2)^{1/2}$,则可推出

$$\Pi(k^2,\varepsilon)=\frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}+F_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)\right]+\frac{\alpha}{3\pi}k^2\int_{4m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k'^2}{k'^2}\frac{1}{k'^2-k^2}\left(1-\frac{4m^2}{k'^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{k'^2}\right) \tag{6.54}$$

此式对于 $k^2<4m^2$ 成立. 对于复 k^2,它显示出 $\Pi(k^2,\varepsilon)$ 非平凡的解析性质. 在实轴上从 $k^2=4m^2$ 至 $+\infty$ 是一条割线,即 $4m^2$ 是复 k^2 平面上的一个支点,它对应物理的粒子对产生阈. 利用公式

$$\frac{1}{k'^2-k^2\mp\mathrm{i}\delta}=P\frac{1}{k'^2-k^2}\pm\mathrm{i}\pi\delta(k'^2-k^2) \tag{6.55}$$

(P 表示积分取主值),可以证明,从上至下穿过割线函数有一不连续的跳断:

$$\begin{aligned}\Pi(k^2+\mathrm{i}\delta,\varepsilon)-\Pi(k^2-\mathrm{i}\delta,\varepsilon)&=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\Pi(k^2+\mathrm{i}\delta)\\&=2\mathrm{i}\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{4m^2}{k^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\end{aligned} \tag{6.56}$$

通常称(6.54)为减除一次的色散关系. 因此,$\Pi(k^2,\varepsilon)$ 在物理区域实的 $k^2>4m^2$ 的值,可以利用(6.53)或(6.54)式在从 $k^2=4m^2$ 至 $+\infty$ 的割线上方取极限值而得到,即定义 $\Pi(k^2,\varepsilon)\equiv\lim\limits_{\delta\to0_+}\Pi(k^2+\mathrm{i}\delta,\varepsilon)$.

完成了 $\Pi^{\rho\nu}$ 的正规化之后,下一步即进行重整化的减除. 首先说明链近似的含义. 我们可以通过在光子线上接连插入更多的 Fermion 单圈图(见图 6.2)来计算光子传播子的高级修正.

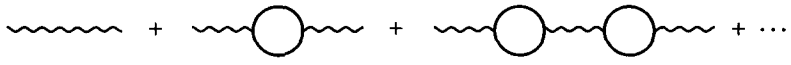


图 6.2　链近似下的光子传播子

这种近似称为链近似. 注意在这种图系列中,所引入的 Fermion 圈都是全同的. 一个 Feynman 图如果可以通过切开一条内线而成为不相连接的两部分,则该图称为一粒子可约图,反之则为一粒子不可约图. 图 6.2 中的高级图,虽然可能含有一个以上的 Fermion 圈,但它们都是一粒子可约的,可以接连进行约化,直至最基本的一粒子不可约图,即由 $\Pi^{\rho\nu}$ 所表达的圈图. 从这个意义上说,上述链近似下基本的一粒子不可约图是单圈图,所以它实际上是单圈图近似.

由图 6.2 所得出的光子传播子将是一个几何级数的和

$$\begin{aligned}G_{\rho\nu}(k)&=G^{[0]}_{\rho\nu}(k)+G^{[0]}_{\rho\rho'}\Pi^{\rho'\nu'}(k)G^{[0]}_{\nu'\nu}(k)+\cdots\\&=G^{[0]}_{\rho\nu}(k)+G^{[0]}_{\rho\rho'}\Pi^{\rho'\nu'}(k)G_{\nu'\nu}(k)\end{aligned} \tag{6.57}$$

根据 Lorentz 变换性质,可以写

$$G_{\rho\nu}(k)=A(k^2)g_{\rho\nu}+B(k^2)k_\rho k_\nu \tag{6.58}$$

将 $G_{\rho\nu}^{[0]}$ 的表达式(6.5)、$\Pi^{\rho'\nu'}$ 的表式(6.43)以及(6.58)代入(6.57),令两边 $g_{\rho\nu}$ 和 $k_\rho k_\nu$ 的系数相等,可以得出

$$A(k^2)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2[1+\Pi(k^2)]},B(k^2)=\frac{1}{k^2}\Pi(k^2)A(k^2) \tag{6.59}$$

这里我们简记了 $\Pi^{\rho\nu}(k)\equiv\Pi^{\rho\nu}(k,2-\omega)\equiv\Pi^{\rho\nu}(k,\varepsilon)$ 和 $\Pi(k^2)\equiv\Pi(k^2,\varepsilon)$. 于是链近似下的传播子成为

$$\mathrm{i}G_{\rho\nu}(k)=\frac{1}{k^2[1+\Pi(k^2)]}\left[g_{\rho\nu}+\frac{k_\rho k_\nu}{k^2}\Pi(k^2)\right] \tag{6.60}$$

注意其中仅含一个 Fermion 圈图即 $\Pi^{\rho\nu}(k)$ 中的发散部分 $\Pi(k^2)$,这说明了链近似的单圈图性质. 更明显的是,若考虑传播子 $G_{\rho\nu}(k)$ 的逆——所谓两点 proper 顶角,则有

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\nu}(k)\equiv G_{\rho\nu}^{-1}(k)&=\mathrm{i}[k^2g_{\rho\nu}+(g_{\rho\nu}k^2-k_\rho k_\nu)\Pi(k^2)]\\&=G_{\rho\nu}^{[0]}(k)^{-1}-\Pi_{\rho\nu}(k)\end{aligned} \tag{6.61}$$

其中除树图级贡献 $[G_{\rho\nu}^{[0]}]^{-1}$ 以外,仅含一个 $\Pi_{\rho\nu}(k)$ 圈图的贡献. $\Gamma_{\rho\nu}(k)$ 正是单圈图近似下的两点 proper 顶角. 两点函数即传播子的单圈级重整化实质上可归结为两点 proper 顶角的单圈级重整化.

通常,为了得到物理信息,要计算如

$$j_1^{\rho}(k)G_{\rho\nu}(k)j_2^{\nu}(-k)$$

这样的组合,其中 j_1 和 j_2 是守恒流,满足 $j\cdot k=0$. 这使得传播子中的 $k_\rho k_\nu$ 项对物理矩阵元没有贡献. 我们可以等效地写

$$\mathrm{i}G_{\rho\nu}(k)=\frac{g_{\rho\nu}}{k^2[1+\Pi(k^2)]} \tag{6.62}$$

作为准至单圈级修正的光子传播子.

由(6.52)式可见,当 $k^2=0$ 时,$\Pi(0)=\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)$,不存在 $k^2=0$ 的奇异性. 所以单圈图近似下传播子极点的位置仍然在 $k^2=0$. 这意味着光子的质量为0,无需作质量重整化,本质上这是电磁流守恒的结果. 然而,(6.62)表明,单圈级修正改变了传播子的极点 $k^2=0$ 处的留数,使之从 $1\to\frac{1}{1+\Pi(0)}$. 由于 $G_{\rho\nu}(k)$ 两端耦合到电磁作用顶角,物理上这相当于改变了耦合常数 e^2. 由于 $\Pi(0)$ 是紫外发散的,上述改变将使得原来的物理耦合常数 e^2 变成没有定义的量. 为了保持 e 仍为物理耦合常数,我们可以在原始的拉氏密度中引入抵消项,以消除单圈图引起的发散. 所需要的抵消项是

$$\delta\mathcal{L}_{F^2}^{[1]}=-\frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\rho\nu}F^{\rho\nu} \tag{6.63}$$

$$Z_3=\frac{1}{1+\Pi(0)}=1-\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)+\cdots \tag{6.64}$$

将 $\delta\mathcal{L}_{F^2}^{[1]}$ 看作相互作用，由其一级 S 矩阵表示式不难看出，它提供新的顶角 Feynman 规则，示于表 6.1.

表 6.1　抵消项 $\delta\mathcal{L}_{F^2}^{[1]}$ 产生的顶角 Feynman 规则

图形	S 矩阵中的因子
	$-\mathrm{i}(Z_3-1)(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu)$

注意到 Z_3-1 与 e^2 成正比，这一点与单圈图 $\Pi^{\rho\nu}(k)$ 相同，因此表 6.1 中所示图形与 $\Pi^{\rho\nu}(k)$ 单圈图的贡献同级，可以利用前者来抵消后者的发散. 事实上，在图 6.2 所示的链近似中，可将全部一粒子不可约单圈图都用它与表 6.1 中所示的抵消项图之和来代替，这将导致真空极化张量作如下的修正：

$$\Pi^{\rho\nu}(k,\varepsilon)\to\Pi^{\rho\nu}(k,\varepsilon)-(Z_3-1)\mathrm{i}(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu) \tag{6.65}$$

于是

$$\begin{aligned}\Pi(k^2,\varepsilon)&\to\Pi(k^2,\varepsilon)+(Z_3-1)\\&=\Pi(0)+Z_3-1+\Pi(k^2)-\Pi(0)\\&=\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)+Z_3-1+\Pi(k^2)-\Pi(0)\\&\simeq\Pi(k^2)-\Pi(0)\equiv\Pi^R(k^2)\end{aligned} \tag{6.66}$$

推导中利用了(6.64)并注意到我们只计算至单圈级即 α 级. 上述结果表明，由于抵消项 $\delta\mathcal{L}_{F^2}^{[1]}$ 的引入，$\Pi(k^2)$ 中的发散项被消除了，余下部分是个有限量.

在(6.62)中作(6.66)所示的代换，就得到重整化的光子传播子为

$$\mathrm{i}G_{\rho\nu}^R=\frac{g_{\rho\nu}}{k^2[1+\Pi^R(k^2)]}+k_\rho k_\nu\text{ 的项} \tag{6.67}$$

它成为有限量并且在 $k^2=0$ 处的留数为 1.

应当指出，抵消项在抵消圈图中的发散部分时，可以差到一个有限部分，因为无穷大加任何有限量仍是无穷大. 这一有限部分随抵消项前面的无穷大系数（当 $\varepsilon\to0$ 时）的选择不同而异. 为了决定这一有限部分从而决定抵消项的系数，通常都是利用物理参数的定义. 例如在以上讨论中，抵消项(6.63)中的系数选择为 $Z_3-1=-\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)$，这表明它所抵消的不仅是发散的 $1/\varepsilon$ 项，而且还多了一个有限项 F_3. 这种选择事实上对应了物理电荷平方的一种定义. 其结果是，当 $\Pi(k^2)$ 中的发散被抵消后，只余有限部分 $\Pi(k^2)-\Pi(0)$，从而导致重整化的传播子与物理电荷平方的乘积成为

$$-\mathrm{i}e^2 G^R_{\rho\nu}(k) \xrightarrow{k^2\to 0} -e^2\frac{g_{\rho\nu}}{k^2}$$

若在两电子的质心系中考虑它们交换类空光子的相互作用，则有 $k^2=-\vec{k}^2$，上式右边将成为 $e^2 g_{\mu\nu}/\vec{k}^2$，它是动量表象中两电子单光子交换的相互作用位势. 通过三维 Fourier 变换将它变换到坐标表象即为 $e^2/4\pi r$，这里 $r=|\vec{x}_1-\vec{x}_2|$ 是两电子的空间距离. 由于 $|\vec{k}|$ 与 r 相互共轭，故 $\vec{k}^2\to 0$ 对应 $r\to\infty$. 所以上面对抵消项系数的选择相当于将物理电荷平方 e^2 定义为相距无穷远的两个电子 Coulomb 静电势 $1/4\pi r$ 的系数.

利用(6.53)和(6.54)式，我们可以得出重整化的量 $\Pi^R(k^2)$ 的显示表式为

$$\begin{aligned}\Pi^R(k^2) &= \frac{\alpha}{3\pi}k^2\int_{4m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k'^2}{k'^2}\frac{1}{k'^2-k^2}\left(1-\frac{4m^2}{k'^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{k'^2}\right)\\ &= -\frac{\alpha}{3\pi}\left\{\frac{1}{3}+2\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\left[\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}\operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.68}$$

它对实数 $k^2<4m^2$ 有意义. 对于 $k^2>4m^2$，则须在割线上方作解析延拓.

重整化的传播子 $\mathrm{i}G^R_{\rho\nu}$ 中所含的因子 $1/[1+\Pi^R(k^2)]$ 是发散被抵消后所余的有限量，它有直接的物理结果. 例如，它将修改点电荷相互作用的 Coulomb 定律. 仍考虑两电子在其质心系交换类空光子的相互作用. 利用 $k^2=-\vec{k}^2$ 以及 $\Pi^R(k^2)$ 的下述极限

$$\Pi^R(k^2)=\frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m^2}+O\left(\frac{k^4}{m^4}\right)\quad(k^2\to 0) \tag{6.69}$$

则可得出，Coulomb 定律的修改成为

$$\frac{e^2}{\vec{k}^2}\longrightarrow\frac{e^2}{\vec{k}^2[1+\Pi^R(-\vec{k}^2)]}\simeq\frac{e^2}{\vec{k}^2}\left(1+\frac{\alpha}{15\pi}\frac{\vec{k}^2}{m^2}\right) \tag{6.70}$$

上述减除是通过在拉氏密度中引入抵消项来消除圈图的发散，使传播子极点的位置和留数保持不变. 为了实现同一目的，我们可以采取另一种等价的看法，即所谓重整化的裸参数观点. 正如出现在原始拉氏密度中的电子质量是裸质量 m_0 一样，我们可以认为出现在拉氏密度如(6.7)中的耦合常数也是裸电荷 e_0. 这里裸的含义是它们未受到相互作用的修正. 因此，在理论上进行微扰计算时，耦合常数都应取为裸电荷 e_0. 然而，实验上观测到的电荷却不是 e_0 而是有相互作用修正的物理电荷 e. 由于相互作用修正总是来自圈图，所以若只计算到树图近似，则 e_0 不会受到修正，这时可以确认 e_0 就是物理电荷 e. 一旦圈图进入，两者就不再相同. 例如在链近似(图 6.2)下，光子传播子与电荷平方之积的结果为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}e_0^2 G_{\rho\nu}^0(k) &= \frac{e_0^2 g_{\rho\nu}}{k^2[1+\Pi_0(k^2)]} \\ \Pi_0(k^2) &= \Pi(k^2)\Big|_{e\to e_0} \end{aligned} \tag{6.71}$$

我们已经略去了与 $k_\rho k_\nu$ 成正比的项. 上式表明,单圈图修正导致了裸电荷 e_0^2 的改变,而且改变与一对数发散量 $\Pi_0(k^2)$ 有关. 注意到裸电荷 e_0 原是没有定义的,有定义的只是物理上观测到的电荷 e,它应当是一有限量. 因此,可以适当选择 e_0,在一个特定的虚光子动量值处,定义有限的物理电荷. 显然,最方便的选择是取 $k^2=0$,即与前述做法相同,仍然通过使 $k^2=0$ 极点的留数为 1 来定义物理电荷的平方. 这一定义现在可写为

$$e^2 = e_0^2 Z_3$$

$$Z_3 = \frac{1}{1+\Pi_0(0)} = 1-\frac{\alpha_0}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)+\cdots \simeq 1-\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+F_3\right)+\cdots \tag{6.72}$$

至单圈级,这里的 Z_3 与(6.64)给出的相同. 上式显示了重整化的另一观点的核心,Z_3 中的无穷大量被吸收到物理耦合常数 e^2 的定义之中. 于是,(6.71)式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}e_0^2 G_{\rho\nu}^0(k) &= \frac{e_0^2}{1+\Pi_0(0)} \frac{g_{\rho\nu}}{k^2\left[1+\dfrac{\Pi_0(k^2)-\Pi_0(0)}{1+\Pi_0(0)}\right]} \\ &= e^2 \frac{g_{\rho\nu}}{k^2[1+\Pi(k^2)-\Pi(0)]} \\ &= \mathrm{i}e^2 G_{\rho\nu}^R(k) \end{aligned} \tag{6.73}$$

导致了与抵消项观点相同的结果,虽然在这种观点中,并不需要显示地引入抵消项.

6.2.2　电子传播子

动量空间中的最低级电子自能图如图 5.7 所示,它可以表达为一个 4×4 矩阵

$$-\mathrm{i}\Sigma(p) = (-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} \frac{-\mathrm{i}g_{\rho\nu}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\rho \tag{6.74}$$

与(5.117)式不同,在(6.74)式的光子传播子中,我们引进了一个小的平方质量参数 η^2,即赋予光子一个小质量 η,计算之后再令 $\eta\to 0$. 这一做法相当于一种正规化. 若无此参数,(6.74)中对 d^4k 的积分在 $k\to 0$ 时是红外发散的,引入 η^2 将使红外发散能以确定的形式分离出来.

$\Sigma(p)$ 在 $k\to\infty$ 时是线性紫外发散的,因此必须进行正规化. 下面将会看到,

紫外发散可以被约化为对数发散. 我们仍采用维数正规化,步骤与 6.2.1 节对真空极化张量 $\Pi^{\rho\nu}(k)$ 所采取的相同. 首先将时空维数转换至 2ω 维. 利用 Feynman 参数化公式(6.13),可以得出

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\Sigma(p,2-\omega) &= -e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{\gamma_\rho(\not p-\not k+m)\gamma^\rho}{(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}\\ &= -e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\\ &\quad\times\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\gamma_\rho(\not p-\not k+m)\gamma^\rho}{\{[k-p(1-x)]^2+p^2x(1-x)-m^2(1-x)-\eta^2x+\mathrm{i}\varepsilon\}^2}\end{aligned}\tag{6.75}$$

假定 $\mathrm{d}^{2\omega}k$ 积分收敛,则可作积分变量的平移

$$k-p(1-x)\to k\tag{6.76}$$

于是有

$$-\mathrm{i}\Sigma(p,2-\omega) = -e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{[2(2-\omega)-2]\not p x+2\omega m}{(k^2-\tilde M^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}\tag{6.77}$$

其中已经忽略了被积函数中含 k^μ 的奇次项并利用了(6.10)中 2ω 维时空中 γ 矩阵的求和公式,而

$$\tilde M^2=m^2(1-x)+\eta^2x-p^2x(1-x)\tag{6.78}$$

从(6.77)可见,由于 $-\mathrm{i}\Sigma(p,2-\omega)$ 的表示式中已经分出了一个含 $\not p$ 和 m 的因子,其质量量纲为 1,因而余下的积分在 $2\omega=4$ 时将只是对数发散的. 根据 $\tilde M^2$ 的定义式(6.78),当

$$p^2\leqslant\frac{m^2(1-x)+\eta^2x}{x(1-x)}\tag{6.79}$$

时将有 $\tilde M^2\geqslant 0$. 容易证实,由于 $0<x<1$,上式右方在 $x=m/(m+\eta)$ 时达到其最小值 $(m+\eta)^2$. 所以当 $p^2<(m+\eta)^2$ 时,总有 $\tilde M^2>0$. 在此情况下,可以在(6.77)式中对 k^0 的积分路线作 Wick 转动,使之从实轴逆时针方向转 $\pi/2$ 成为虚轴. 这将导致

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^{2\omega}k=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^{2\omega}\bar k,\quad \bar k^0=\mathrm{i}k^0,\bar k^i=k^i\tag{6.80}$$

于是电子自能的表达式成为

$$-\mathrm{i}\Sigma(p,2-\omega) = -\mathrm{i}2e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{[(2-\omega)-1]\not p x+\omega m}{(\bar k^2+\tilde M^2)^2}\tag{6.81}$$

利用任意维数的积分公式(6.39)、定义式(6.44)和展开式(6.49)，我们最终得到正规化的电子自能

$$\begin{aligned}\Sigma(p,2-\omega) &\equiv \Sigma(p,\varepsilon)\\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{\not p}{2}-m+\left(2m-\frac{\not p}{2}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right.\\ &\quad\left.+\int_0^1 \mathrm{d}x(2m-\not p x)\ln\frac{m^2}{m^2(1-x)+\eta^2 x-p^2x(1-x)}\right\} \qquad (6.82)\end{aligned}$$

它对于 $p^2<(m+\eta)^2$ 成立. (6.82)式表明，$\Sigma(p,\varepsilon)$ 中的单圈图紫外发散已经以 $\varepsilon=2-\omega$ 的单极点形式被分离出来.

由于当 $p^2<(m+\eta)^2$ 时，在(6.82)式中 ln 函数的分母 $m^2(1-x)+\eta^2x-p^2x(1-x)=\tilde{M}^2>0$，所以在物理的两粒子阈以下，$\Sigma(p,\varepsilon)$ 是“实的”，即 $\bar{\Sigma}=\gamma^0\Sigma^\dagger\gamma^0=\Sigma$. 为了看出 $\Sigma(p,\varepsilon)$ 在阈以上的行为，我们注意到当 $\tilde{M}^2=0$ 时，$\Sigma(p,\varepsilon)$ 将出现奇异性. $\tilde{M}^2=0$ 即对应在(6.79)式中取等号. 已经证明当 $x=m/(m+\eta)$ 时，(6.79)式的右方，此时也即 p^2，将达到最小值 $(m+\eta)^2$. p^2 的这个最小值 $(m+\eta)^2$ 即成为复 p^2 平面上沿实轴伸至∞远处的割线的支点. 当超过两粒子阈即 $p^2>(m+\eta)^2$ 时，(6.82) ln 函数的分母可能变得小于0，因而 $\Sigma(p,\varepsilon)$ 将获得一个“虚部”，它对应虚电子→实电子+光子的过程. 这和 $\Pi(k^2,\varepsilon)$ 在 $k^2>4m^2$ 时也出现一个虚部对应虚光子可产生实正负电子对的情形类似. 这里的难点在于，当 $\eta^2\to0$ 时，阈和物理质壳 $p^2=m^2$ 重合，在实际世界中将不可能把电子传播子的极点从由该点出发的割线分离出来. 这是我们保持 $\eta^2>0$ 的理由. 当 $\eta^2=0$ 时，$\tilde{M}^2$ 的一个0点出现在积分上限 $x=1$，由(6.79)中的等式看出，此时 $p^2=m^2$ 为奇异点，因而不再能围绕该点作展开.

但是，我们可以对 $p^2<m^2$ 来考虑极限 $\eta^2\to0$ 而不会遇到奇异性. 这有大大简化(6.82)中积分的好处. 结果为

$$\begin{aligned}\Sigma(\not p,\varepsilon,\eta^2=0) &= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right]\left(2m-\frac{1}{2}\not p\right)\right.\\ &\quad+2m\left[\frac{3}{2}+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\\ &\quad\left.-\frac{\not p}{2}\left[1+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)+\frac{m^2}{p^2}\right]\right\} \qquad (6.83)\end{aligned}$$

即使 $p^2\to m^2$，上式仍保持有限，但 Σ 对 p 的导数将变成无穷大.

以上我们完成了电子自能的正规化，以下作电子传播子的减除，仍在单圈链近似下进行. 电子传播子将如图6.3所示.

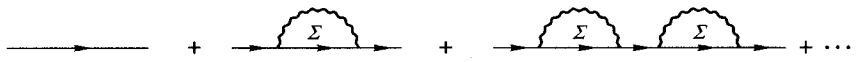


图 6.3 链近似下的电子传播子

总的传播子将是一个几何级数

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}S(p)\\
&=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}+\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}[-\mathrm{i}\Sigma(p)]\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}+\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}[-\mathrm{i}\Sigma(p)]\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}[-\mathrm{i}\Sigma(p)]\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}+\cdots\\
&=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}+\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}[-\mathrm{i}\Sigma(p)]\mathrm{i}S(p)
\end{aligned}
$$

因此

$$\mathrm{i}S(p)=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma(p)} \tag{6.84}$$

电子自能 $\Sigma(p)$ 显然将移动传播子极点的位置和留数. 这里又存在两种等价的观点:或者通过裸参数 m_0 和 e_0 来定义物理参数 m 和 e;或者不提到裸参数,而在拉氏密度中引入抵消项使极点的位置和留数保持不变. 我们将采用后一种观点.

可以将 $\Sigma(\not p,\varepsilon)$ 在 $\not p=m$ 附近作 Taylor 展开

$$\Sigma(\not p,\varepsilon)=A-B(\not p-m)+\Sigma^R(\not p) \tag{6.85}$$

$$A=\Sigma(\not p,\varepsilon)\Big|_{\not p=m},\quad B=-\frac{\partial\Sigma(\not p,\varepsilon)}{\partial\not p}\Big|_{\not p=m} \tag{6.86}$$

而 $\Sigma^R(\not p)$ 满足

$$\Sigma^R(\not p)\Big|_{\not p=m}=0,\quad \frac{\partial\Sigma^R(\not p)}{\partial\not p}\Big|_{\not p=m}=0 \tag{6.87}$$

一般情况下,$\Sigma(\not p,\varepsilon)$ 是线性发散的,故从展开式(6.85)各项的量纲考虑,发散只包含在 A,B 之中,$\Sigma^R(\not p)$ 是有限量. 为了抵消发散项 A,可以引入质量抵消项

$$\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\bar\psi\psi}=\delta m\,\bar\psi\psi \tag{6.88}$$

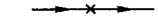
为了抵消发散项 B,可以引入抵消项

$$\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\mathrm{i}\bar\psi\not\partial\psi-m\bar\psi\psi}=(Z_2-1)(\mathrm{i}\bar\psi\not\partial\psi-m\bar\psi\psi) \tag{6.89}$$

其中系数 δm 和 (Z_2-1) 由发散相消要求决定.

(6.88)和(6.89)产生了新的顶角 Feynman 规则,如表 6.2 所示.

表 6.2 抵消项 $\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\bar\psi\psi}$ 和 $\delta\mathcal{L}^{[1]}_{\mathrm{i}\bar\psi\not\partial\psi-m\bar\psi\psi}$ 产生的顶角 Feynman 规则

图形	S 矩阵中的因子
	$\mathrm{i}\delta m+\mathrm{i}(Z_2-1)(\not p-m)$

若在链近似下,加入这种图形的贡献,则对应代换

$$-\mathrm{i}\Sigma(\not p)\to-\mathrm{i}[A-B(\not p-m)+\Sigma^R(\not p)-\delta m-(Z_2-1)(\not p-m)]$$

因此，只要取抵消项的系数

$$\delta m=A,\quad -(Z_2-1)=B \tag{6.90}$$

则 $\Sigma(\not p)\to\Sigma^R(\not p)$ 成为有限量. 这时重整化的电子传播子成为

$$\mathrm{i}S^R(p)=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma^R(\not p)} \tag{6.91}$$

它的极点位置保持在 $\not p=m$，极点的留数保持为 1. 我们指出，这是按照(6.90)来决定抵消项系数的结果.

δm 和 Z_2 的显示式可由(6.90)和(6.86)求出. 由于当 $p^2\to m^2$ 时 $\Sigma(\not p,\varepsilon,\eta^2=0)$ 有限，所以对于 δm 可以忽略红外奇异性，由(6.82)或(6.83)得出. 结果为

$$\begin{aligned}\delta m=A&=\Sigma(\not p=m,\varepsilon)=m\frac{3\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}+F_{\delta m}\left(\frac{m}{\mu}\right)\right]\\ F_{\delta m}\left(\frac{m}{\mu}\right)&=\psi(1)-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}+\frac{4}{3}\end{aligned} \tag{6.92}$$

为了得到 $-(Z_2-1)$，须回到(6.82)式，即保持 $\eta^2\neq0$. 注意 $p^2=\not p\not p$，于是

$$\begin{aligned}-(Z_2-1)=B&=-\frac{\partial}{\partial\not p}\Sigma(\not p,\varepsilon,\eta)\Big|_{\not p=m}\\&=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right.\\&\quad\left.+\int_0^1\mathrm{d}x x\left[\ln\frac{1}{(1-x)^2+x\eta^2/m^2}-\frac{2(2-x)(1-x)}{(1-x)^2+x\eta^2/m^2}\right]\right\}\\&=\frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}+F_2\left(\frac{m}{\mu}\right)+2\ln\frac{\eta^2}{m^2}+O\left(\frac{\eta}{m}\right)\right]\\F_2\left(\frac{m}{\mu}\right)&=\psi(1)-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}+4\end{aligned} \tag{6.93}$$

其中除了紫外发散项 $1/\varepsilon$ 外，还含有红外发散项 $\ln\frac{\eta^2}{m^2}$. 利用(6.85)和(6.90)，Σ 的重整化值成为

$$\Sigma^R(\not p)=\Sigma(\not p,\varepsilon)-\delta m-(Z_2-1)(\not p-m)$$

对于 $p^2<m^2$，$|p^2-m^2|>>\eta^2$，利用(6.83)表示的 $\Sigma(\not p,\varepsilon)$，我们从上式得到

$$\begin{aligned}\Sigma^R(\not p)=\frac{\alpha}{2\pi}&\left\{2m\left[\frac{5}{8}+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\right.\\&-\frac{1}{2}\not p\left[\frac{3}{2}+\frac{m^2}{p^2}+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\\&\left.+(\not p-m)\left(\ln\frac{\eta^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right)\right\}\end{aligned} \tag{6.94}$$

对于 $p^2-m^2>>\eta^2$，可通过在从 $(m+\eta)^2$ 出发的割线上方作解析延拓，这将使 $\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\to\ln\left(\frac{p^2}{m^2}-1\right)-\mathrm{i}\pi$，因而 $\Sigma^R(\not p)$ 相应获得一个虚部.

最后我们指出，(6.93)式表明，若只准至单圈级或 α 级，则

$$Z_2=1-O(\alpha),\quad Z_2^{-1}=1+O(\alpha)$$

从而

$$-(Z_2-1)=Z_2^{-1}-1$$

我们可以用后者来代替前者. 因此准至单圈级的 Σ 又可写为

$$\Sigma(\not p,\varepsilon)=\delta m-(Z_2^{-1}-1)(\not p-m)+Z_2^{-1}\Sigma^R(p) \tag{6.95}$$

改写的目的在于使之与从裸参数观点出发进行重整化所得结果相同.

6.2.3 顶角函数、Ward 恒等式

真空极化和电子自能是两点函数，其图形可以连接到两条腿或外线. 现在来研究三点顶角函数 $(e\bar e\gamma)$，其图形可以连接到三条腿或外线，其中唯一的单粒子不可约图示于图 6.4. 表示式为

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}e\Gamma_\mu^{[1]}(p',p)\\&=(-\mathrm{i}e)^3\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\sigma}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(\gamma^\sigma\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\rho\right)\end{aligned} \tag{6.96}$$

其中与光子传播子相关的红外发散已通过引进光子小质量 η 作了正规化. 与(6.96)对应，0 级顶角函数 $\Gamma_\mu^{[0]}\equiv\gamma_\mu$. 定义

$$\Lambda_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p',p) \tag{6.97}$$

为完全的顶角函数，其中 $\Gamma_\mu(p',p)$ 考虑了所有高级微扰修正. 而(6.96)即给出了对 Γ_μ 的单圈级贡献.

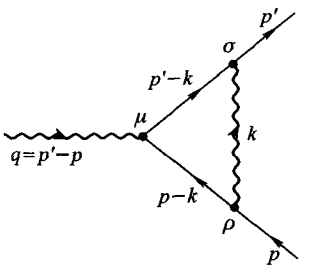


图 6.4 单圈级的顶角图

回忆最小电磁耦合是通过代换 $\partial_\mu\to\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu$ 或 $\not p\to\not p-e\not A$ 引入的；而电子传播子的逆 $S^{-1}(p)$ 在树图近似下为 $\not p-m$，在单圈图近似下为 $\not p-m-\Sigma^{[1]}(p)$，这里 $\Sigma^{[1]}(p)$ 表示单圈电子自能图的贡献. 因此可以预期电子传播子之逆和顶角函数之间有密切关系. 事实的确如此，表达这一关系的就是所谓的 Ward 恒等式[29].

我们从微扰论的结果来考察这一关系. 树图级的电子传播子之逆 $S^{-1[0]}(p)=\not p-m$，显然有

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}S^{-1[0]}(p)=\gamma_\mu \tag{6.98}$$

准至单圈级的电子传播子之逆

$$S^{-1[1]}(p)=\not{p}-m-\Sigma^{[1]}(p) \tag{6.99}$$

对 p^μ 的微商为

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}S^{-1[1]}(p)=\gamma_\mu-\frac{\partial\Sigma^{[1]}(p)}{\partial p^\mu} \tag{6.100}$$

利用 $\Sigma^{[1]}(p)$ 的表示式(6.74)以及等式

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{6.101}$$

我们有

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\Sigma^{[1]}(p)}{\partial p^\mu}&=(-\mathrm{ie})^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{ig}_{\rho\sigma}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\sigma\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\rho\\&=(-\mathrm{ie})^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{ig}_{\rho\sigma}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(\gamma^\sigma\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma^\rho\right)\\&=\Gamma_\mu^{[1]}(p,p)\end{aligned} \tag{6.102}$$

它是图 6.4 中当 $p'=p$ 即外光子线的动量 $q=0$ 时对应的顶角函数,因此

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}S^{-1[1]}(p)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu^{[1]}(p,p)=\Lambda_\mu^{[1]}(p,p) \tag{6.103}$$

(6.98)和(6.103)分别就是树图级和单圈级的 Ward 恒等式.

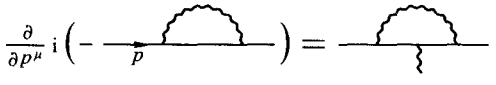
事实上,这一等式在微扰论的任何级都成立. 为证明这一点,我们指出,Ward 恒等式所表示的关系,可以有直观的图形对应. 注意到(6.101)右边也可以用下述办法得到:

$$\frac{\partial}{\partial(-eA^\mu)}\frac{1}{\not{p}-e\not{A}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\bigg|_{A=0}=\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\varepsilon}$$

即先将电子内线上的 $\not{p}\to\not{p}-e\not{A}$,这里 A 是一常数四矢量;然后将表达式对 $-eA^\mu$ 作展开,取 $(-eA^\mu)$ 线性项的系数. 这一操作在图形上可解释为在一条电子内线上先插入一条动量为 0 的光子线然后将其拿掉. 所得表达式正是(6.101)式的右边. 这表明在电子内线上零动量光子线的插入正比于该电子内线对外动量 p 的微商. 等式(6.102)的得出本质上在于这一操作,由于 $-\Sigma^{[1]}(p)$ 中仅含一条电子内线,履行此操作即导致

$$-\Sigma^{[1]}(p)\to-\frac{\partial}{\partial(-eA^\mu)}\Sigma^{[1]}(p-eA)\bigg|_{A=0}=-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^{[1]}(p)=\Gamma_\mu^{[1]}(p,p) \tag{6.104}$$

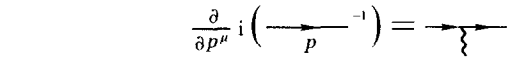
因此,(6.102)式可以有如下的图形表示:



其中右边图中的外光子线应理解为已被拿掉. 而树图级 Ward 恒等式(6.98)的右边也可由同一操作即从等式

$$\frac{\partial}{\partial(-eA^{\mu})}(\not{p}-e\not{A}-m)\Big|_{A=0}=\gamma_{\mu}$$

得到,因而(6.98)式也可用图形表示为



上述操作可应用于表达电子传播子之逆的图形中的每一条电子内线. 因此,如果在表达电子传播子之逆的图形中以各种可能的方式在带电粒子内线上插入零动量的外光子线,就可以得到 Ward 恒等式. 图 6.5 给出了树图级、单圈级以及全部微扰级的情况.

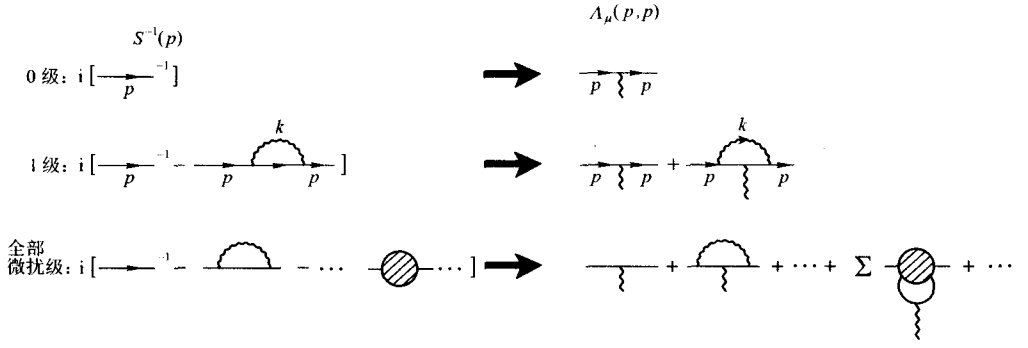
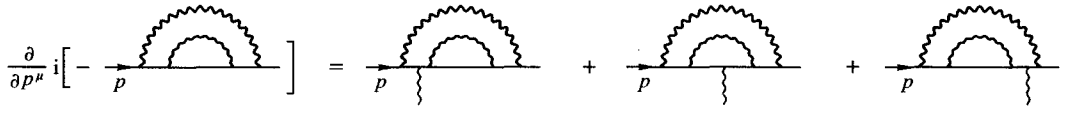


图 6.5 在电子传播子之逆的图中插入外光子线,就得到 Ward 恒等式

应当指出,对于较复杂的图如双圈图,零动量的光子线可以有几种不同的方式插到电子内线上,但考虑到等式(6.101),其总效果仍然只是该图对电子外动量的微商. 下面的图形方程是这种关系的一例.



其解析式对应

$$-\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\Sigma^{[2]}(p)=\Gamma_{\mu}^{[2]}(p,p) \tag{6.105}$$

这里会出现一个问题,即图 6.5 所示的运算是否给出了所有的顶角图? 回答显然是“没有”. 考虑在自能图中的一个内线封闭的 Fermion 圈. 根据 Furry 定理(见

问题5.8)，一个 Fermion 圈上如果有奇数个顶点，则该种图形对 S 矩阵元的贡献为0. 这意味着，一个 Fermion 圈上只可能附有偶数条光子线(外光子线或内光子线). 因此我们可以有如图6.6所示的图形，其中内外光子线总数为偶数 $2p$，但它们不是由零动量光子线插入自能图得到的，因为假如去掉该图的外光子线，则所余部分根据 Furry 定理已经被忽略掉.

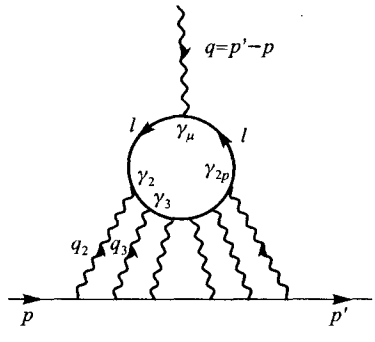


图6.6　不能从 $\Sigma(p)$ 通过正文所述步骤来得到的图例

然而，如果设外光子线的动量 $q=p'-p=0$，并考虑外光子线在 Fermion 圈的各种位置上的插入，则这种图形之和的贡献为0. 事实上，从这些图形的贡献中可分离出下面形式的因子

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4 l\ \mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_2\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_3\frac{1}{\not l+\not q_2+\not q_3-m+\mathrm{i}\varepsilon}\cdots\gamma_{2p}\right]\\
&+\int \mathrm{d}^4 l\ \mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_2\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_3\frac{1}{\not l+\not q_2+\not q_3-m+\mathrm{i}\varepsilon}\cdots\gamma_{2p}\right]\\
&+\cdots(\text{零动量外光子线的其它不同插入项})\\
=&\int \mathrm{d}^4 l\ \mathrm{tr}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial l^\mu}\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\right)\gamma_2\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_3\frac{1}{\not l+\not q_2+\not q_3-m+\mathrm{i}\varepsilon}\cdots\gamma_{2p}\right]\\
&+\int \mathrm{d}^4 l\ \mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_2\left(-\frac{\partial}{\partial l^\mu}\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\right)\gamma_3\frac{1}{\not l+\not q_2+\not q_3-m+\mathrm{i}\varepsilon}\cdots\gamma_{2p}\right]\\
&+\cdots\\
=&\int \mathrm{d}^4 l\left(-\frac{\partial}{\partial l^\mu}\right)\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not l-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_2\frac{1}{\not l+\not q_2-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_3\cdots\gamma_{2p}\right] \qquad (6.106)
\end{aligned}$$

其中我们利用了公式(6.101)即零动量外光子线的插入正比于电子传播子对动量的微商. (6.106)的被积函数是对 l 的全微商. 若发散积分以规范不变的方式正规化，比如作维数正规化，则该积分为0. 这就证明了，图6.6所示的那种额外的图对顶角的贡献为0. 因此，顶角只是由外光子线插入一组特别的、包含外动量的 Fermion 内线而生成，这种插入等同于该图表达式对此动量微商，正如从 $\Sigma^{[1]}(p)$ 导致 $\Gamma_\mu^{[1]}$ 和从 $\Sigma^{[2]}(p)$ 导致 $\Gamma_\mu^{[2]}$ 那样. 于是，对全部微扰级，我们有

$$\Gamma_\mu(p,p)=-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p) \qquad (6.107)$$

$\Sigma(p)$ 是完全的电子自能. 加入零级贡献，我们就得到 Ward 恒等式

$$\Lambda_\mu(p,p)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p,p)=\frac{\partial}{\partial p^\mu}[\not p-m-\Sigma(p)]=\frac{\partial}{\partial p^\mu}S^{-1}(p) \qquad (6.108)$$

Ward 恒等式本质上是电磁场耦合到一个守恒流的结果，它可以推广到非零动量交换的情形，这就是 Takahashi 给出的形式

$$(p'-p)^{\mu}\Lambda_{\mu}(p',p)=[\not{p}'-m-\Sigma(p')]-[\not{p}-m-\Sigma(p)] \tag{6.109}$$

很容易证明，由(6.109)可得出(6.108).(6.109)又称为 Ward－Takahashi 恒等式[30].

在进行上面给出的简略证明时，显然需要小心，特别是需要一个自恰的、规范不变的正规化. 量子电动力学重整化的目的之一，就是明确地把形式的 Ward－Takahashi恒等式变成重整化的有限量之间的关系.

现在回到单圈图的计算上来，并去掉指标[1]. 由(6.96)可知，$\Gamma_{\mu}(p',p)-\Gamma_{\mu}(p,p)$是收敛的，因为当 $k\to\infty$ 时，其中的积分 $\sim\int \mathrm{d}^4k/|k|^5$. 而 $\Gamma_{\mu}(p,p)$ 可由 Ward 恒等式得出. 于是

$$\Gamma_{\mu}(p',p)=\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\Sigma(p)+\Gamma_{\mu}(p',p)-\Gamma_{\mu}(p,p) \tag{6.110}$$

利用 $\Sigma(p)$的表示式(6.95)，得到

$$\Gamma_{\mu}(p',p)=\gamma_{\mu}(Z_2^{-1}-1)+\Gamma_{\mu}(p',p)-\Gamma_{\mu}(p,p)-Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\Sigma^R(p) \tag{6.111}$$

我们通过

$$\Gamma_{\mu}(p',p)=\gamma_{\mu}(Z_1^{-1}-1)+Z_1^{-1}\Gamma_{\mu}^R(p',p) \tag{6.112}$$

来定义(无穷大的)顶角重整化常数 Z_1. 当只计算到单圈级时，在重整化的顶角修正 Γ_{μ}^R 前的因子 Z_1^{-1} 可以用 1 来代替，有限量 $\Gamma_{\mu}^R(p',p)$的归一化则由下面的条件

$$\bar{u}(p')\Gamma_{\mu}^R(p',p)u(p)\Big|_{\substack{p^2=p'^2=m^2\\ p=p'}}=0 \tag{6.113}$$

来决定，即 $\Gamma_{\mu}^R(p',p)$在两个 Dirac 旋量间的矩阵元为 0，这两个旋量的动量皆在质壳上，其间的动量交换为 0. 由于抵消发散项后准至单圈级的重整化顶角成为 $-\mathrm{i}e(\gamma_{\mu}+Z_1^{-1}\Gamma_{\mu}^R)$，所以条件(6.113)意味着物理电荷 e 的一种定义. 考虑到 $p'=p$对应 $k^2=0$，而 $p^2=m^2$ 对应$\not{p}=m$，所以物理电荷 e 的此种定义与由光子传播子在 $k^2=0$ 处留数为 1 的定义相一致，也与由电子传播子在$\not{p}=m$ 处留数为 1 的定义相一致. 比较(6.111)和(6.112)可得

$$\gamma_{\mu}(Z_2^{-1}-1)+\Gamma_{\mu}(p',p)-\Gamma_{\mu}(p,p)-Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\Sigma^R(p)=\gamma_{\mu}(Z_1^{-1}-1)+Z_1^{-1}\Gamma_{\mu}^R(p',p) \tag{6.114}$$

取 $p'=p$，将上式两边在 $\bar{u}(p)$和 $u(p)$($p^2=m^2$)间求矩阵元. 此时显然有 $\Gamma_{\mu}(p',p)-\Gamma_{\mu}(p,p)=0$；而 $-\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\Sigma^R(p)$的矩阵元也是 0，因为此算符正比于($\not{p}-m$). 再考虑到条件(6.113)，于是得出

$$Z_2 = Z_1 \tag{6.115}$$

然后再从(6.114)得到

$$\Gamma_\mu^R(p',p) = Z_1[\Gamma_\mu(p',p) - \Gamma_\mu(p,p)] - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p) \tag{6.116}$$

在(6.116)式中令 $p' = p$,则将导致

$$\Gamma_\mu^R(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p) \tag{6.117}$$

它表明 Ward 恒等式对重整化的量继续成立.

在有质量的光子理论中,我们仍然可以有 Ward 恒等式. 事实上,在上述关于 Ward 恒等式的证明中,就已经引入了光子的小质量 η. 不难证实,顶角函数(6.112)中所含的单圈级紫外发散可以通过抵消项

$$\delta\mathcal{L}_{\bar\psi A\psi}^{(1)} = -e\mu^\varepsilon(Z_1 - 1)\bar\psi \not{A}\psi \tag{6.118}$$

加以抵消,这里我们已经假定使用了维数正规化.

余下的事情是计算 $\Gamma_\mu^R(p',p)$. 要考虑的只是 p' 和 p 在质壳上而 Γ_ρ 又夹在两个 Dirac 旋量 $\bar u(p')$ 和 $u(p)$ 之间的情况. 我们不明显写出旋量,但将自由地应用 Gordon 关系

$$\bar u(p')\gamma_\rho u(p) = \frac{1}{2m}\bar u(p')[(p'+p)_\rho + \mathrm{i}\sigma_{\rho\nu}(p'-p)^\nu]u(p) \tag{6.119}$$

重整化的顶角函数由(6.116)给出. 考虑到(当 Lorentz 指标从 $\mu\to\rho$ 后) $-\frac{\partial}{\partial p^\rho}\Sigma^R(p)$ 的矩阵元是0,而准至单圈级 Z_1 可用1代替,于是重整化的顶角函数 $\Gamma_\rho^R(p',p)$ 可写为

$$\Gamma_\rho^R(p',p) = \Gamma_\rho(p',p) - \Gamma_\rho(p,p) \tag{6.120}$$

采用维数正规化方法,则由(6.96)式,发散的单圈顶角函数 $\Gamma_\rho(p',p)$ 有如下正规化表示式:

$$\Gamma_\rho(p',p,2-\omega) = -\mathrm{i}e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \times \frac{\gamma_\mu(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma_\rho(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\mu}{[(p'-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon][(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon](k^2 - \eta^2 + \mathrm{i}\varepsilon)} \tag{6.121}$$

在 Feynman 参数化公式(6.12)中取 $k=3$ 和 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$,则得到公式

$$\frac{1}{D_1D_2D_3} = 2\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\frac{\theta(1-x_1-x_2)}{[D_1x_1 + D_2x_2 + D_3(1-x_1-x_2)]^3} \tag{6.122}$$

令 $D_1 = [(p'-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon]$, $D_2 = [(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon]$, $D_3 = (k^2 - \eta^2 + \mathrm{i}\varepsilon)$,则有

$$\frac{1}{[(p'-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon][(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon](k^2 - \eta^2 + \mathrm{i}\varepsilon)}$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \frac{\theta(1-x_1-x_2)}{[(k-p'x_1-px_2)^2-\bar{M}^2+\mathrm{i}\varepsilon]^3} \tag{6.123}$$

其中

$$\bar{M}^2 = m^2(x_1+x_2)^2 - q^2x_1x_2 + \eta^2(1-x_1-x_2) \tag{6.124}$$

而

$$q = p'-p \tag{6.125}$$

是动量转移. 将(6.123)代入(6.121),利用(6.10)中 2ω 维时空 γ 矩阵的求和公式计算被积函数的分子,注意到 $\Gamma_\rho(p',p,2-\omega)$ 两边的旋量分别满足 Dirac 方程 $\bar{u}(p')(\not{p}'-m)=0$ 和 $(\not{p}-m)u(p)=0$. 然后作积分变量的平移

$$k-p'x_1-px_2 \to k$$

并略去分子中积分后为 0 的 k 的奇次项,我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho(p',p,2-\omega) = & -\mathrm{i}2e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\\ &\times\Big\{-2(1-\omega)\left[k^2+m^2(x_1^2+x_2^2)+2p'\cdot px_1x_2\right]\gamma_\rho\\ &+4(1-\omega)\left[\not{k}k_\rho+m^2(x_1+x_2)(p'_\rho x_1+p_\rho x_2)\right]-4m(p'_\rho x_1+p_\rho x_2)\\ &+4[p'\cdot p(1-x_1-x_2)-m^2(x_1+x_2)]\gamma_\rho+4m(x_1+x_2)(p'_\rho+p_\rho)\Big\}\\ &/(k^2-\bar{M}^2+\mathrm{i}\varepsilon)^3\end{aligned} \tag{6.126}$$

考虑到被积函数的分母是 k^2 的函数,而下面又将对 k^0 的积分路线作 Wick 转动,故在分子中可作代换

$$\not{k}k_\rho \to \frac{k^2}{2\omega}\gamma_\rho$$

而从(6.124)可见,分母中的 $\bar{M}^2$ 对于交换 $x_1\leftrightarrow x_2$ 是对称的,所以在分子中又可作代换

$$p'_\rho x_1 + p_\rho x_2 \to \frac{x_1+x_2}{2}(p'_\rho+p_\rho)$$

于是我们可将(6.126)式改写成

$$\begin{aligned}\Gamma_\rho(p',p,2-\omega) = & 4\mathrm{i}e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\\ &\times\left[\left(2-\omega-\frac{1}{\omega}\right)k^2\gamma_\rho+f_\rho(p',p,\omega)\right]/(k^2-\bar{M}^2+\mathrm{i}\varepsilon)^3\end{aligned} \tag{6.127}$$

其中

$$\begin{aligned}&f_\rho(p',p,\omega)\\ &=\{m^2[(x_1+x_2)^2(1-\omega)+4(x_1+x_2)-2]+q^2[1-x_1-x_2+(\omega-1)x_1x_2]\}\gamma_\rho\\ &\quad -m(x_1+x_2)[1+(1-\omega)(x_1+x_2)](p'_\rho+p_\rho)\end{aligned}$$

$$= \{m^2[(x_1+x_2)^2(\omega-1)-2(1-x_1-x_2)]+q^2[1-x_1-x_2+(\omega-1)x_1x_2]\}\gamma_\rho$$
$$+2m^2(x_1+x_2)[1+(1-\omega)(x_1+x_2)]\frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu \tag{6.128}$$

在上述推导中，已使用了关系式

$$p'\cdot p = m^2 - q^2/2$$

以及 Gordon 关系(6.119). 考虑(6.127)式被积函数分母中的 $\bar{M}^2$，它大于 0 的条件是

$$\frac{q^2}{4m^2} < \frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1x_2}$$

上式右边在 $x_1=x_2=1/2$ 时达到最小值 1，由此可以得出结论：

$$\bar{M}^2>0, \quad \text{若 } q^2<4m^2. \tag{6.129}$$

事实上如果 p'和 p 皆在电子质壳上，则 $q^2=(p'-p)^2\leqslant 0<4m^2$，所以必有 $\bar{M}^2>0$. 于是我们可以对(6.127)中 k^0 的积分路线作导致(6.80)的 Wick 转动，结果得到

$$\Gamma_\rho(p',p,2-\omega) = 4e^2(\mu^2)^{2-\omega}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^1 \mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)$$
$$\times\int\frac{\mathrm{d}^{2\omega}\bar{k}}{(2\pi)^{2\omega}}\left\{\left[\frac{1}{\omega}-(2-\omega)\right]\bar{k}^2\gamma_\rho+f_\rho(p',p,\omega)\right\}/(\bar{k}^2+\bar{M}^2)^3 \tag{6.130}$$

利用任意维数的积分公式(6.39)和(6.41)，作出 $\mathrm{d}^{2\omega}\bar{k}$ 的积分，再借助于公式(6.49)将结果在 $2-\omega=\varepsilon\to 0$ 点附近作展开，我们求出 $\Gamma_\rho(p',p,2-\omega)$ 的如下表达式：

$$\Gamma_\rho(p',p,\varepsilon) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^1 \mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)$$
$$\times\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-2+\ln\frac{4\pi\mu^2}{\bar{M}^2}\right]\gamma_\rho+f_\rho(p',p)/\bar{M}^2\right\} \tag{6.131}$$

其中

$$f_\rho(p',p)\equiv f_\rho(p',p,\omega=2)$$
$$= \{m^2[(x_1+x_2)^2-2(1-x_1-x_2)]+q^2(1-x_1-x_2+x_1x_2)\}\gamma_\rho$$
$$+2m^2(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)\frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu \tag{6.132}$$

根据(6.120)式，重整化的顶角函数 $\Gamma^R_\rho(p',p)$ 应是 $\Gamma_\rho(p',p,\varepsilon)$ 与 $\Gamma_\rho(p,p,\varepsilon)$ 之差，所以 $\Gamma_\rho(p',p,\varepsilon)$ 与 $\Gamma_\rho(p,p,\varepsilon)$ 中的发散部分都将彼此相消. 确切地说，(6.131)式被积函数中的 $\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-2+\ln(4\pi\mu^2)\right]\gamma_\rho$ 项都将彼此相消，因而在计算 $\Gamma^R_\rho(p',p)$ 时可以将其忽略. 结果，重整化的单圈级顶角函数可以写成

$$\Gamma_\rho^R(p',p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \theta(1-x_1-x_2)[-\ln \bar{M}^2 \gamma_\rho + f_\rho(p',p)/\bar{M}^2 - (q=0)]$$

$$= \gamma_\rho F_1(q^2) + \frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu F_2(q^2) \tag{6.133}$$

其中 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$ 分别称为电形状因子和磁形状因子，目前对它们的计算只准至 α 级. 加入零级项即在 F_1 上加 1. $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$ 的定义为

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \theta(1-x_1-x_2)$$

$$\times \left\{ \frac{m^2[(x_1+x_2)^2 - 2(1-x_1-x_2)] + q^2(1-x_1-x_2+x_1x_2)}{m^2(x_1+x_2)^2 - q^2x_1x_2 + \eta^2(1-x_1-x_2)} \right.$$

$$\left. - \ln[m^2(x_1+x_2)^2 - q^2x_1x_2 + \eta^2(1-x_1-x_2)] - (q=0) \right\} \tag{6.134}$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \theta(1-x_1-x_2) \frac{m^2(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)}{m^2(x_1+x_2)^2 - q^2x_1x_2 + \eta^2(1-x_1-x_2)} \tag{6.135}$$

动量转移 q 可以用双曲角 θ 来参数化，它使

$$p' \cdot p = m^2 \cosh\theta, \quad q^2 = -4m^2 \sinh^2 \frac{\theta}{2} \tag{6.136}$$

先作磁形状因子 F_2 的计算. 精确到这一级时，它不包含任何红外发散性，所以可令 $\eta^2 = 0$. 于是

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \theta(1-x_1-x_2) \frac{x_1+x_2-(x_1+x_2)^2}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta}$$

插入 $\int_0^\infty \mathrm{d}x\delta(x-x_1-x_2) = 1$，并作变量代换 $x_i \to x x_i (i=1,2)$，上式可进一步化为

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \delta(1-x_1-x_2) \frac{1}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta} \int_0^1 \mathrm{d}x(1-x)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\beta \frac{1}{\beta^2 + (1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta)\cosh\theta}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta^2} \frac{1}{\{1+[(1-\beta)/\beta]\mathrm{e}^\theta\}\{1+[(1-\beta)/\beta]\mathrm{e}^{-\theta}\}}$$

将 $(1-\beta)/\beta$ 当作积分变量，很容易算出最后一个积分，结果是

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\sinh\theta} \tag{6.137}$$

特别是，当 $q^2 \to 0$ 时，$\theta \to 0$，所以

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{6.138}$$

其次我们再来计算 F_1，注意它有红外发散性. 考虑到 $q^2 = 2m^2(1-\cosh\theta)$，(6.134)式可以写成

$$F_1(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\left\{\frac{\cosh\theta-(x_1+x_2)\cosh\theta-2x_1x_2(1-\cosh\theta)}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta+\frac{\eta^2}{m^2}(1-x_1-x_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left[x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta+\frac{\eta^2}{m^2}(1-x_1-x_2)\right]\right\}-(\theta=0)$$

$$=\sum_{j=1}^{4}\mathcal{T}_j+\text{常数} \tag{6.139}$$

常数来自 $-(\theta=0)$ 部分，它的值应使 $F_1(0)=0$ 以满足 $\Gamma_\rho^R(p',p)$ 的归一化条件即 $\Gamma_\rho^R(p,p)=\gamma_\rho F_1(0)=0$. $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$，$\mathcal{T}_3$ 和 $\mathcal{T}_4$ 中只有 $\mathcal{T}_1$ 有红外奇异性，计算中必须保持 $\eta^2\neq 0$，而对其余 $\mathcal{T}_j$ 的计算皆可令 $\eta^2=0$. 在小 η^2 极限下，上式求和中各项的贡献如下：

$$\mathcal{T}_1 = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\frac{\cosh\theta}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta+\frac{\eta^2}{m^2}(1-x_1-x_2)}$$

插入 $\int_0^\infty \mathrm{d}x\delta(x-x_1-x_2)=1$，作积分变量代换 $x_i\to xx_i(i=1,2)$，则可得

$$\mathcal{T}_1 = -\frac{\alpha}{\pi}\cosh\theta\int_0^1\mathrm{d}\beta\int_0^1\mathrm{d}x\frac{x}{x^2[\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta]+\frac{\eta^2}{m^2}(1-x)}$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\cosh\theta\int_0^1\mathrm{d}\beta\frac{\ln[\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta]-\ln\frac{\eta^2}{m^2}}{\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta}$$

作变量代换

$$1-2\beta=\frac{\tanh\varphi}{\tanh(\theta/2)}$$

此积分就化为

$$\mathcal{T}_1=\frac{\alpha}{\pi}\theta\coth\theta\ln\frac{\eta}{m}-\frac{2\alpha}{\pi}\coth\theta\int_0^{\theta/2}\mathrm{d}\varphi\varphi\tanh\varphi \tag{6.140}$$

类似的推导给出

$$\mathcal{T}_2=\frac{\alpha}{\pi}\cosh\theta\int_0^1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\frac{x_1+x_2}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta}$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\coth\theta \tag{6.141}$$

$$\mathcal{T}_3 = \frac{2\alpha}{\pi}(1-\cosh\theta)\int_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta} \tag{6.142}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{\theta}{\sinh\theta}-1\right)$$

$$\mathcal{T}_4 = -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\theta(1-x_1-x_2)\ln(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cosh\theta) \tag{6.143}$$

$$= -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{\theta}{\tanh\frac{\theta}{2}} + \text{常数}$$

将(6.140)—(6.143)代入(6.139),我们得到

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\theta\coth\theta\ln\frac{\eta}{m} - \frac{2\alpha}{\pi}\coth\theta\int_0^{\theta/2}\mathrm{d}\varphi\varphi\tanh\varphi$$

$$+\frac{\alpha}{\pi}\coth\theta+\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{\theta}{\sinh\theta}-1\right)-\frac{\alpha}{4\pi}\frac{\theta}{\tanh(\theta/2)}+\text{常数}$$

由 $F_1(\theta=0)=0$ 定出常数为 $\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{\eta}{m}+1\right)$,因而最终可表达

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\eta}{m}+1\right)(\theta\coth\theta-1)-2\coth\theta\int_0^{\theta/2}\mathrm{d}\varphi\varphi\tanh\varphi-\frac{\theta}{4}\tanh(\theta/2)\right] \tag{6.144}$$

在 $q^2=0$ 的邻域中有 $q^2/m^2\simeq-\theta^2$,所以精确到 q^2 的主导级时有如下的近似式:

$$F_1(q^2)_{q^2\to0}\simeq\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right) \tag{6.145}$$

利用(6.133)、(6.137)和(6.144)可得在旋量间计算的重整化顶角函数的完全表示式

$$\Lambda_\rho^{\mathrm{R}} = \gamma_\rho+\Gamma_\rho^{\mathrm{R}}$$

$$= \gamma_\rho\left[1+\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right)\right]+\frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\frac{\alpha}{2\pi}+\cdots \tag{6.146}$$

$$= \frac{(p'+p)_\rho}{2m}\left[1+\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right)\right]+\frac{\mathrm{i}}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)+\cdots$$

以上表示式仅对 $q^2\leqslant0$ 成立. 在复变量 θ 平面上作解析延拓就可得到 $q^2>0$ 的表示式. 如设 $\theta=\mathrm{i}\psi$,即向正虚轴方向作解析延拓,将有

$$q^2 = -4m^2\sinh^2\frac{\theta}{2}=4m^2\sin^2\frac{\psi}{2}\quad(0\leqslant\psi\leqslant\pi) \tag{6.147}$$

则

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\eta}{m}+1\right)(\psi\cot\psi-1)+2\cot\psi\int_0^{\psi/2}\mathrm{d}\varphi\varphi\tan\varphi+\frac{\psi}{4}\tan\frac{\psi}{2}\right] \tag{6.148}$$

$$F_2(q^2)=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\psi}{\sin\psi} \tag{6.149}$$

由此，F_1，F_2 被延拓至 $0\leqslant q^2\leqslant 4m^2$，而至这一级，它们仍然是实的. 这一结果从(6.129)式看来是显然的.

6.2.4　重整化的相乘性、跑动耦合常数

我们来总结一下消除了紫外发散后的结果. 至此，我们定义了三个发散常数：

1. $Z_1=Z_2$，它们也是红外发散的. 由于 Ward 恒等式，它们相等.

2. Z_3 和 δm，它们是红外有限的.

我们的结果是在 Feynman 规范（$\lambda=1$）下取得的. 一般情况下，可以证明，$Z_1=Z_2$ 是规范相关的，而 Z_3 和 δm 是规范无关的. 对于 $Z_1-1=Z_2-1$，Z_3 和 δm，我们都作了准至单圈级的计算. 于是，准至这一级的拉氏密度为

$$\mathcal{L}^{\text{ren}}=\mathcal{L}+\mathcal{L}_{\text{c.t.}} \tag{6.150}$$

$\mathcal{L}^{\text{ren}}$ 名为重整化的拉氏密度，其中原来的拉氏密度

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^2+\frac{\hat{\eta}^2}{2}A^2-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2+\mathrm{i}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi-m\bar{\psi}\psi-e\mu^{\varepsilon}\bar{\psi}A\!\!\!/\psi \tag{6.151}$$

抵消项拉氏密度

$$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}=-\frac{1}{4}(Z_3-1)F^2+(Z_2-1)(\mathrm{i}\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi-m\bar{\psi}\psi)+Z_2\delta m\bar{\psi}\psi-e\mu^{\varepsilon}(Z_1-1)\bar{\psi}A\!\!\!/\psi \tag{6.152}$$

后者是抵消项(6.63)、(6.89)、(6.88)和(6.118)之和，其中质量抵消项系数换成了 $Z_2\delta m$ 是为了方便. 实际上准至单圈级，$Z_2\delta m$ 与 δm 是相同的. (6.151)式中的 $\frac{\hat{\eta}^2}{2}A^2$ 对应虚设的光子的小质量项，其中用了 $\hat{\eta}$ 而未用 η，这是因为实际的光子质量 η 与 $\hat{\eta}$ 之间还差一有限的重整化因子. 事实上，假如我们仍按照（6.66）的方式来进行减除，则不难证实，有质量光子的重整化的传播子将成为

$$G^R_{\rho\nu}(k,\eta)=\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\nu}}{k^2[1+\Pi^R(k^2)]-\hat{\eta}^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

其极点位置即光子质量平方 η^2 由方程 $\eta^2[1+\Pi^R(\eta^2)]-\hat{\eta}^2=0$ 决定. 显然，η^2 已从 $\hat{\eta}^2$ 移开，二者之间差一有限的常数因子.

拉氏密度(6.150）给出了至单圈级有限的、重整化的两点和三点函数. 现在需要证实，更多点的 Green 函数也是有限的，因为我们已经选定了可观测的质量、耦合常数和极点留数，不再留有选择的余地. 由于只局限于单圈级，所以我们来一般地考虑单圈图的紫外发散行为.

设有一个含单圈的一粒子不可约 Feynman 图，含 V 个顶角，I_{F} 条 Fermion 内

线，I_B 条 Boson 内线，根据(6.1)，有下面的拓扑关系成立：

$$1 = I_F + I_B - (V - 1)$$

或

$$V = I_F + I_B \tag{6.153}$$

当 Feynman 积分中被积函数的积分变量 k 很大时，每一条 Fermion 内线贡献一个因子 $|k|^{-1}$，每一条 Boson 内线贡献一个因子 $|k|^{-2}$，因而该图积分的大 k 行为是

$$|k|^{4-I_F-2I_B}$$

因此我们定义

$$\Omega(G) = 4 - I_F - 2I_B \tag{6.154}$$

为表观发散度. 当

$$\Omega(G) \geqslant 0$$

时，积分是表观发散的. 更方便的是，将 $\Omega(G)$ 通过外线数目来表示. 注意到一个顶角伸出两条 Fermion 线和一条 Boson 线，一条内线和两个顶角相连，因而有下面的关系成立：

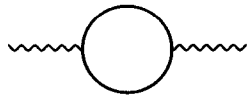
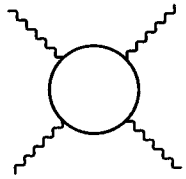
$$2V = 2I_F + E_F, \quad V = 2I_B + E_B \tag{6.155}$$

从(6.154)、(6.155)和(6.153)中可消去 I_F 和 I_B，得到

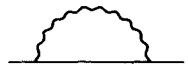
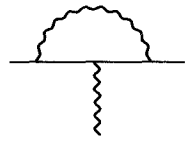
$$\Omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \tag{6.156}$$

可见，随着图形外线数目的增加，积分变得更加收敛. 特别是，$\Omega \geqslant 0$ 的图形的数目是有限的，它们列于表 6.3 中.

表 6.3 QED 单圈图的紫外发散行为

E_F	E_B	单圈图	表观发散度	有效发散度
0	2		2	0
0	3	被电荷共轭不变性排除		
0	4		0	−4

续表

E_F	E_B	单圈图	表观发散度	有效发散度
2	0		1	0
2	1		0	0

其中三光子顶角恒等于0,因为它在电荷共轭下是奇的(Furry 定理). 除了光子 - 光子散射图以外,其余的基本发散图形正是我们在前几节分别讨论过的真空极化、电子自能和顶角函数. 值得注意的是,在 QED 中,由于运动学使得积分的有效发散度低于它的表观发散度. 例如真空极化的表观发散度 $\Omega=2$,但因流守恒分出了因子 $(g^{\rho\nu}k^2-k^\rho k^\nu)$ 使有效发散度成为0,即只留下了对数发散. 同样,电子自能图的表观发散度 $\Omega=1$,但由于 $\Sigma(p)$ 正比于有量纲的量 m 和 $\not{p}$,使有效发散度降为0. 对于顶角函数,表观与有效的发散度相符,皆为0,但此情形下,也发现只有一个形状因子 F_1 是发散的. 至于光子 - 光子散射图,虽然其表观上是对数发散的,但实际计算表明,它是收敛的. 这是规范不变性的结果. 此处我们不作详细计算,而只是指出,光子 - 光子散射振幅正比于

$$I_{\rho\sigma\mu\nu}(k_1,k_2,k_3,k_4)\varepsilon^\rho(k_1)\varepsilon^\sigma(k_2)\varepsilon^\mu(k_3)\varepsilon^\nu(k_4)$$

其中 $k_i,\varepsilon(k_i)(i=1,2,3,4)$ 是外光子的动量和极化矢量. 规范不变性要求当 $\varepsilon^\rho(k)\to\varepsilon^\rho(k)+ck^\rho$($c$ 为任意常数)时,上述振幅不变. 所以,与 $\varepsilon^\rho(k_1)$ 耦合部分必须有形式

$$k_{1\sigma}\varepsilon^\rho(k_1)-k_1^\rho\varepsilon_\sigma(k_1)$$

它是相应外线的电磁场强度. 对每条外线皆如此. 结果总的散射振幅必定分出一个含外动量4次方的因子,积分的有效发散度将不是0而是 -4,从而积分成为收敛的.

以上分析表明,除了真空极化、电子自能和顶角函数是真正的发散图以外,所有其它更多点的单圈 Green 函数都是有限的. 而上述三种图的发散已经由于(6.150)中的抵消项而加以消除,所得出的理论在单圈级是有限的,其中只出现物理的质量和耦合常数,并可对物理观测作出预言. 这一理论微扰地满足幺正性和因果性的一般原理,因为所引入的抵消项的形式都是原拉氏密度中所含有的,它们不会改变理论的基本性质.

事实上,若将方程(6.150)中$\mathcal{L}$和$\mathcal{L}_{c.t.}$的各项重新整理,可写

$$\mathcal{L}^{\text{ren}} = -\frac{1}{4}Z_3F^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2 Z_3 A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 + Z_2[\mathrm{i}\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (m-\delta m)\bar{\psi}\psi] - Z_1 e\mu^{\varepsilon}\bar{\psi}\not{A}\psi \tag{6.157}$$

此表示式对重整化导致了一个自然的解释. 这里出现的 $\psi,\bar{\psi}$ 和 A 是重整化的场量,与之相应的是在单粒子极点处留数为 1 的传播子;e 和 m 是重整化的电荷和质量. 现在通过它们定义未重整化的场或称裸场 $\psi_0,\bar{\psi}_0$ 和 A_0 以及与紫外发散极点参数 ε 有关的裸参数 η_0^2, m_0, e_0 如下:

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = Z_2^{1/2}(\varepsilon)\psi, \quad && m_0 = m - \delta m(\varepsilon)\\
&\bar{\psi}_0 = Z_2^{1/2}(\varepsilon)\bar{\psi}, \quad && \eta_0^2 = Z_3^{-1}(\varepsilon)\hat{\eta}^2\\
&A_0 = Z_3^{1/2}(\varepsilon)A, \quad && e_0 = Z_1(\varepsilon)Z_2^{-1}(\varepsilon)Z_3^{-1/2}(\varepsilon)e\mu^{\varepsilon} = Z_3^{-1/2}(\varepsilon)e\mu^{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{6.158}$$

以上最后一式中已考虑了 Ward 恒等式的结果之一(6.115). 于是拉氏密度(6.157)可用裸量表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{ren}} = &-\frac{1}{4}F_0^2 + \frac{\eta_0^2}{2}A_0^2 - \frac{\lambda}{2}Z_3^{-1}(\Lambda)(\partial \cdot A_0)^2\\
&+ \mathrm{i}\bar{\psi}_0\not{\partial}\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0\not{A}_0\psi_0
\end{aligned} \tag{6.159}$$

除了耦合常数和场的标记不同外,它的形式与原始的拉氏密度(6.151)相同. 这表明,采用了有限多类抵消项不仅足以使微扰级数逐项收敛,并使理论的真正结构在重整化后保持下来. 其中关键在于,$\mathcal{L}_{\text{c.t.}}$ 中所引入的所有抵消项的形式都是原来的拉氏密度$\mathcal{L}$中所含有的. $\mathcal{L}^{\text{ren}}$实现一个有限理论的方式是,巧妙地将无穷大放进裸量,然后拉出来抵消发散,由重整化所吸收,从而导致有限的结果. 可以证明,对于 QED,同一结论在微扰论的任何级都成立. 因此,我们说 QED 是可重整化的理论.

我们注意,$(\partial \cdot A)^2$ 是不受抵消项影响的,这是 QED 的一个特殊性质. 类似于裸质量"η_0"的引入,形式上我们可引入裸参数

$$\lambda_0 = Z_3^{-1}(\Lambda)\lambda \tag{6.160}$$

这样(6.159)中就全部成为裸量.

利用$\mathcal{L}^{\text{ren}}$来计算的 Green 函数,将全部包含裸量,但由它可以定义出重整化的 Green 函数. 假定(6.158)所表达的裸量与重整化的量之间的关系对全部微扰论级成立,则可在 Heisenberg 图像中通过场的编时乘积的真空平均值定义一般的 Green 函数为

$$\langle 0 \mid T\psi_{01}\bar{\psi}_{01}\cdots\psi_{0n}\bar{\psi}_{0n}A_{0\mu_1}\cdots A_{0\mu_l} \mid 0\rangle = Z_2^n(\varepsilon)Z_3^{l/2}(\varepsilon)\langle 0 \mid T\psi_1\bar{\psi}_1\cdots\psi_n\bar{\psi}_n A_{\mu_1}\cdots A_{\mu_l} \mid 0\rangle \tag{6.161}$$

它表达了裸 Green 函数与重整化的 Green 函数间的关系. 在动量表象中,上式化为

$$\begin{aligned} &G^0(p_1,\cdots,p_{2n},k_1,\cdots,k_l;\eta_0,m_0,e_0,\lambda_0,\varepsilon) \\ &=Z_2^n(\varepsilon)Z_3^{l/2}(\varepsilon)G^R(p_1,\cdots,p_{2n},k_1,\cdots,k_l;\eta,\ m,e,\lambda) \end{aligned} \tag{6.162}$$

其中 $p_1,\cdots,p_{2n}(k_1,\cdots,k_l)$ 表示 Fermion(光子)外动量. (6.162)式也对微扰论的各级成立. 我们可以用已知的单圈级结果来对它进行验证. 准至单圈级,如对于光子传播子,由(6.73)和(6.72)式可直接写出

$$G^0_{\rho\nu}(k)=\frac{e^2}{e_0^2}G^R_{\rho\nu}(k)=Z_3(\varepsilon)G^{\mathrm{R}}_{\rho\nu}(k) \tag{6.163}$$

而对于电子传播子,由(6.84)和(6.95)式但将其中各量全部换成裸量后,我们得出

$$\begin{aligned} \mathrm{i}S^0(p)&=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m_0-\Sigma^0(p)}=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m_0-Z_2^{-1}\delta m+(Z_2^{-1}-1)(\not p-m_0)-Z_2^{-1}\Sigma^{0R}(p)} \\ &=Z_2\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma^R(p)}=Z_2\mathrm{i}S^R(p) \end{aligned} \tag{6.164}$$

其中已使用了下述近似:至单圈级,$\delta m\simeq Z_2^{-1}\delta m$ 以及 $Z_2^{-1}e_0^2=Z_2^{-1}Z_3^{-1}e^2\simeq Z_2^{-1}e^2$ 因而 $Z_2^{-1}\Sigma^{0R}(p)\simeq Z_2^{-1}\Sigma^R(p)$. (6.163)和(6.164)式表明,关系式(6.162)对QED单圈级两点Green函数(传播子)明显成立.

由于关系式(6.158)和(6.162)的缘故,我们称重整化是相乘性的. 虽然至此我们只在单圈级给出了证明,但这种相乘性重整化,在微扰论的任何级皆成立.

在QED中,值得强调的是Ward恒等式的作用. 其结果之一是

$$e_0A_0=e\mu^{\varepsilon}A\Big|_{\varepsilon\to 0}=eA \tag{6.165}$$

因为等式两边皆有限,可以令 $\varepsilon\to 0$. 这一等式表明,重整化保持了最小耦合的意义. 另一方面,同一等式对其它带电粒子也成立,不同的只是 e 和 e_0 要差同一倍数. 若两个不同粒子有相同的裸电荷 e_0,则必定也有相同的物理电荷 e. 因此,对所有带电粒子,可以在同一动量标度来定义物理电荷,从而使电磁作用的标度有了意义.

电荷 e 随动量标度的变化表现为跑动耦合常数. 由(6.158)式可知,裸耦合 e_0 与重整化耦合 e 之间存在关系

$$e_0=e\mu^{\varepsilon}Z_3^{-1/2}\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right) \tag{6.166}$$

其中的 $Z_3\left(\varepsilon,\dfrac{m}{\mu}\right)$,根据(6.64)和(6.51)式,可以表为

$$Z_3\left(\varepsilon,\frac{m}{\mu}\right)=1-\frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi(1)-\ln\frac{m^2}{2\pi\mu^2}\right] \tag{6.167}$$

正如6.2.1节已叙述过的,作为抵消项的系数,Z_3 中除 $1/\varepsilon$ 外还包含一有限项

$\psi(1)-\ln\frac{m^2}{2\pi\mu^2}$，后者的存在是为了恰好抵消 $\Pi(0)$，保证光子传播子在极点 $k^2=0$ 处的留数为 1. 这种减除方案对应了重整化电荷 e 的一种定义方法. 若在减除时改变 Z_3 的有限部分即换一种减除方案，则等同于改变 e 的定义方法. 由于有限部分是可以随意选取的，因而 e 的定义方法就存在任意性. 现在如果考虑动量很大的紫外区域，那么除了紫外发散项 $1/\varepsilon$ 外，所有的有限项都是可以忽略的，结果 Z_3 中将仅余 $1/\varepsilon$ 发散项. 这表明我们可以选择一种减除方案，其中只消除发散的极点项. 这种方案称之为最小减除方案[31]，其好处是 Z_3 将与质量无关，所以它是一种与质量无关的减除方案. 利用最小减除方案，很容易得出 e 随标度 μ 变化的情况. 当忽略 Z_3 中的有限项之后，我们可以从(6.166)和(6.167)式得出

$$e_0=e\mu^{\varepsilon}\left[1+\frac{e^2}{24\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right] \tag{6.168}$$

在用裸量进行计算时，e_0 是作为独立变量看待的，因而它与 μ 无关. 但 e 却与 μ 有关. 因此，若保持 e_0，ε 固定，将上式两边对 μ 微商，则得到

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}e_0=0=\mu^{\varepsilon}\left[\varepsilon\left(e+\frac{e^3}{24\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right)+\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}\left(1+\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \tag{6.169}$$

此式的含义是，μ 的改变将伴随着 e 的改变，从而保持 e_0 不变. 由于 $\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}$ 在 $\varepsilon\to0$ 时是有限的，故可设

$$\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}=\beta(e,\varepsilon)=\beta_0+\beta_1\varepsilon \tag{6.170}$$

代入(6.169)式可得

$$\varepsilon e+\frac{e^3}{24\pi^2}+\beta_0+\beta_1\varepsilon+\beta_1\frac{e^2}{8\pi^2}+\beta_0\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}+\cdots=0 \tag{6.171}$$

由(6.171)式中 ε 的一次幂系数为零得出

$$\beta_1=-e \tag{6.172}$$

而由 ε^0 系数为零得出

$$\beta_0=-\beta_1\frac{e^2}{8\pi^2}-\frac{e^3}{24\pi^2}=\frac{e^3}{12\pi^2} \tag{6.173}$$

至于 ε^{-1} 项，它与 e_0 中更高阶极点留数有关. 这已超出了单圈图近似，同目前 $\beta(e,\varepsilon)$ 的决定无关. 于是

$$\beta(e,\varepsilon)=\frac{e^3}{12\pi^2}-e\varepsilon \tag{6.174}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，我们有

$$\mu\frac{\partial e}{\partial \mu}=\beta(e)\equiv\frac{e^3}{12\pi^2} \tag{6.175}$$

此方程决定了电荷 e 随标度 μ 的变化，右边的 $\beta(e)$ 通常称为 β - 函数，目前它仅包含 e^+e^- 单圈图的贡献. 令 $\alpha=e^2/4\pi^2$，则上述方程可以写成

$$\mu\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}=\frac{2}{3\pi}\alpha^2 \tag{6.176}$$

它有解

$$\alpha(\mu)=\frac{\alpha(M^2)}{1-\dfrac{\alpha(M^2)}{3\pi}\ln\dfrac{\mu^2}{M^2}}\quad(\text{对大的平方动量}\ \mu^2) \tag{6.177}$$

其中 M 为一参考动量. $\alpha(\mu)$ 称之为跑动耦合常数. 设 μ^2，M^2 皆对应负类空动量平方 $-k^2$ 的值，则 $\alpha(\mu)$ 描述了等效电荷如何依赖于两个带电粒子之间的距离. 当 μ^2 减小即两个带电粒子之间的距离增大时，$\alpha(\mu)$ 也减小，这意味着等效电荷变小. 物理上这反映出真空极化对电荷产生的屏蔽效应，注意到决定跑动耦合 $\alpha(\mu)$ 的是重整化常数 Z_3，它来自真空极化的圈图计算. 当 μ^2 增大即两个带电粒子之间的距离减小时，$\alpha(\mu)$ 也增大，这表明等效电荷变大. 这也是从反面表现出真空极化的电荷屏蔽效应. 这种电荷屏蔽效应不限于单圈图近似，它在 QED 微扰论的任何级都继续保持. 从(6.177)式还可看出，当

$$\mu=Me^{\frac{3\pi}{2\alpha(M)}} \tag{6.178}$$

时，将有 $\alpha(\mu)\to\infty$. 此即著名的 Landau 奇异性. 不过，在到达 Landau 奇异点(6.178)之前，对于大动量标度，只用单圈图近似结果(6.177)已不再是正确的. 如果将数值代入(6.177)式就会发现，在所有实际上可达到的 μ^2 值，$\alpha(\mu)$ 随 μ^2 值的变化都是很小的. 如取参考动量 $M=1$ MeV，则 $\alpha(\mu)$ 的数值将从 1/137 极其缓慢地增加. 当然，随着 μ^2 的增加，我们也必须加入其它带电 Fermion 对如 $\mu^+\mu^-$，$\bar{u}u$，…形成的圈图对 $\beta(e)$ 的贡献，这导致公式(6.177)会有相应的修改.

6.3　辐射修正

我们将考虑两个例子用以说明圈图计算对物理过程产生的辐射修正，其一为反常磁矩，其二为氢原子的 Lamb 能级移动.

6.3.1　等效相互作用和反常磁矩

有外场 A_μ^{ext} 存在时，电子与电磁场的相互作用哈氏密度由(5.143)给出. 当精确到 A^{ext} 的一级时，电子与外场相互作用的最低级图见图 6.7.

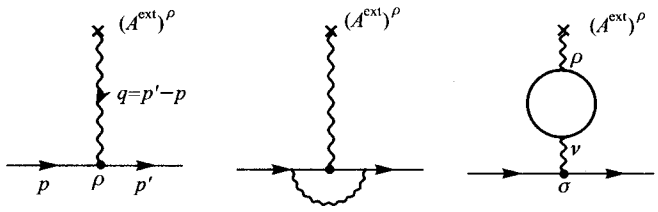


图 6.7 与外场相互作用的最低级贡献

其中包括了单圈图的贡献. 结果电子与外场 A^{ext} 的基本相互作用顶角 $e(A^{ext})^\rho\gamma_\rho$ 改变为等效相互作用顶角

$$e(A^{ext})^\rho(\gamma_\rho+\Gamma^R_\rho+\Pi^R_{\rho\nu}G^{\nu\sigma}\gamma_\sigma) \tag{6.179}$$

其中 Γ^R_ρ 和 $\Pi^R_{\rho\nu}$ 已在 6.2 节算出. $G^{\nu\sigma}$ 是自由光子传播子. 对电子已假定在质壳上,所以不考虑在外线上插入自能图,它们已被吸收到正确的质量定义和态的适当归一化中.

在低动量转移 $q=p'-p$ 下,根据 (6.43)、(6.66)和(6.69),

$$\begin{aligned}\Pi^R_{\rho\nu}(q) &= -\mathrm{i}(g_{\rho\nu}q^2-q_\rho q_\nu)\Pi^R(q^2)\\ &\simeq -\mathrm{i}(g_{\rho\nu}q^2-q_\rho q_\nu)\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}\quad(\text{当 } q\to 0)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Pi^R_{\rho\nu}G^{\nu\sigma}\gamma_\sigma &= -\mathrm{i}\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}(g_{\rho\nu}q^2-q_\rho q_\nu)\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\sigma}}{q^2+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\sigma\\ &= -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}(\gamma_\rho q^2-q_\rho \not{q})\frac{1}{q^2}\\ &= -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}\gamma_\rho\end{aligned}$$

我们已考虑到当夹在 $\bar{u}(p')$ 和 $u(p)$ 之间时,$\not{q}=\not{p}'-\not{p}=m-m=0$. 而 $\gamma_\rho+\Gamma^R_\rho$ 已由(6.146)式给出,结果等效相互作用顶角(6.179)成为

$$e(A^{ext})^\rho\left\{\gamma_\rho\left[1+\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{\mathrm{i}}{2m}\frac{\alpha}{2\pi}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\right\} \tag{6.180}$$

在准静止极限 $q\to 0$,此结果有一简单的解释. 为此,我们将上式变到坐标表象. 在位形空间,q^ν 可用 $A^{ext}(x)$ 上的微商算符 $\mathrm{i}\partial^\nu$ 来代替,所以导致(6.180)的等效哈密顿量可写成

$$\begin{aligned}\Delta H = e\int \mathrm{d}^3x\Big\{&\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x)\left[1-\frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\partial^\mu\partial_\mu\right](A^{ext}(x))^\rho\\ &+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}\bar{\psi}(x)\sigma_{\nu\rho}\psi(x)\partial^\nu(A^{ext}(x))^\rho\Big\}\end{aligned} \tag{6.181}$$

利用 Gordon 关系式

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x)=\frac{\mathrm{i}}{2m}\bar{\psi}(x)\overleftrightarrow{\partial}_\rho\psi(x)+\frac{1}{2m}\bar{\psi}(x)\sigma_{\nu\rho}\psi(x)\partial^\nu$$

和

$$\sigma_{\nu\rho}\partial^\nu(A^{\mathrm{ext}}(x))^\rho=\frac{1}{2}\sigma_{\nu\rho}(F^{\mathrm{ext}}(x))^{\nu\rho}$$

$$(F^{\mathrm{ext}}(x))^{\nu\rho}=\partial^\nu(A^{\mathrm{ext}}(x))^\rho-\partial^\rho(A^{\mathrm{ext}}(x))^\nu$$

又可写

$$\Delta H\simeq e\int\mathrm{d}^3x\left\{\bar{\psi}(x)\frac{i}{2m}\overleftrightarrow{\partial}_\rho\psi(x)\left[1-\frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Box\right](A^{\mathrm{ext}}(x))^\rho\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{4m}\bar{\psi}(x)\sigma_{\nu\rho}(F^{\mathrm{ext}}(x))^{\nu\rho}\psi(x)\right\}\tag{6.182}$$

其中已经忽略了含$\Box(F^{\mathrm{ext}}(x))^{\nu\rho}$的项，这意味着我们考虑的是随时空缓慢变化的外场.

(6.181)和(6.182) 是等效哈密顿量的两个等价的表示式.

(6.182)的第一项包含了红外发散的影响. 第二项则有一简单的解释. 在常数外磁场情况下，它代表粒子磁矩与外磁场的相互作用能量. 事实上，从 $F^{12}=-B^3, F^{23}=-B^1, F^{31}=-B^2$ 和 $\sigma_{12}=\Sigma_3, \sigma_{23}=\Sigma_1, \sigma_{31}=\Sigma_2$，(6.182)的第二项成为

$$-\vec{B}\cdot\vec{\mu}=-\vec{B}\cdot\left[\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)2\cdot\frac{e}{2m}\int\mathrm{d}^3x\bar{\psi}(x)\frac{\vec{\Sigma}}{2}\psi(x)\right]\tag{6.183}$$

由此可见，粒子的磁矩为

$$\vec{\mu}=g\frac{e}{2m}\frac{\vec{\Sigma}}{2}$$

其中

$$g=2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

是回转磁化率. 对于 Dirac 粒子，自旋磁矩的回转磁比率 $g=2$. 而当精确至单圈级时，量子修正使 g 改变为 $g=2(1+a)$，a 称为反常回转磁化率，它等于$\alpha/2\pi$. 这一结果首先由 Schwinger 于 1948 年推出[32]，已经由大量精确实验所验证. 通过电子和 μ 子的反常磁矩实验，可以检验 QED 的高级修正. 准至最低级，上述结果对电子和 μ 子同样适用. 但准至高级项时，要求考虑所有的带电粒子与电磁场的作用，结果由于质量有差别，反常磁矩也有差别. 目前电子的反常磁矩已计算到三圈图，即至$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$ 级，结果为

$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{th}}=1\ 159\ 652\ 359(282)\times10^{-12}$$

(括号中数字表示不确定部分). 最近的实验值与之接近,

$$a_e^{exp} = 1\ 159\ 652\ 410(200) \times 10^{-12}$$

μ 子的反常磁矩已计算到$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4$级,考虑到强子修正引起的不确定性之后,

$$a_\mu^{th} = 1\ 165\ 919(10) \times 10^{-9}$$

与最近的实验测量值

$$a_\mu^{exp} = 1\ 165\ 923(8) \times 10^{-9}$$

合理地符合.

(6.182)的第一项因含有红外奇异项 $\ln\frac{m}{\eta}$而出现了麻烦. 这种奇异来自单圈顶角中单个虚光子传播子 $-ig_{\mu\nu}/[k^2-\eta^2+i\varepsilon]$在动量 $k\to 0$ 的行为,实质上是由于我们让相应的 Green 函数中只有一个孤立极点而引起的. 然而,在实验的能量分辨率之内,这样一个单虚光子态是不可能从由软韧致辐射所产生的、含有任意数目软光子的态中分离出来的. 由于韧致辐射,每当带电粒子的速度发生改变哪怕是极小的改变时,也总会激发出这些软光子. 因此,一旦考虑由(6.182)所体现的虚电磁效应,我们就必须同时包括在外场中软光子的真实发射或吸收的过程. 这样一来,在物理问题的最终答案中,虚设的光子质量就不再出现,代替它的是实验的分辨率. 例如,若用(6.182)计算电子与核库仑场的散射过程,设能量分辨率为 ΔE,由于能量低于 ΔE 的软光子是测量不出来的,所以物理上测量的将是微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{弹性库仑散射}} + \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{软韧致辐射}\omega \lesssim \Delta E}$$

上式右边两项皆含有 $\ln\frac{m}{\eta}$项,但相加之后彼此相消,结果将只与 $\ln\Delta E$ 有关.

6.3.2 Lamb 位移

按照 Dirac 理论,氢原子的能级 $2S_{1/2}$ 与 $2P_{1/2}$ 是简并的,因为它们有相同的主量子数 n 和总角动量 j. 但是,Lamb 等[33]所进行的精确实验指出,这两个能级的结合能并不完全相等,$2S_{1/2}$ 态的能级略高于 $2P_{1/2}$ 态的能级,它们之间的差别是

$$E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = (1\ 057.8 \pm 0.1)\ \text{MHz} \qquad (6.184)$$

能级间的这一差别称为"能级的 Lamb 移动".

计算 QED 的高级微扰所引起的辐射修正,将能解释这一现象,而且理论计算与实验测量之间符合得很好. 这里将只提出处理这一问题的主要思路和所得的结果,而略去计算的细节.

最早的计算是由 Bethe(1947),Kroll and Lamb(1949)以及 French and Weiss-

kopf(1949)进行的[34]. 他们将 Dirac 理论和辐射修正结合起来，出发点是电子和外场的等效相互作用(6.181). 由它可得修改的 Dirac 方程

$$\left[\mathrm{i}\not{\partial}-m-\left\{\gamma_\rho\left[1-\frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Box\right]+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\nu\rho}}{2m}\partial^\nu\right\}eA^\rho(x)\right]\psi(x)=0 \tag{6.185}$$

它包括了用缓变外场来计算的真空极化和顶角修正. 大括号内的微分算符只作用在外 Coulomb 势 $A^\rho(x)$ 上. 量 ψ 解释为有外场时的场算符在真空态与单电子态之间的矩阵元，相当于经典 Dirac 方程中的单粒子波函数. 因此，可以完全按照量子力学的微扰论来进行讨论.

Coulomb 势 $A^\rho(x)$ 取为

$$A^\rho(x)=-\frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|}g^{\rho 0}=A^0(\vec{x})g^{\rho 0} \tag{6.186}$$

将(6.185)左乘 $-\gamma^0$，利用 $\gamma^0\gamma^j=\alpha^j,\gamma^0=\beta,E^j=\partial^jA^0$，可得

$$(-\mathrm{i}\partial^0+H_0+\delta H)\psi(x)=0 \tag{6.187}$$

其中

$$H_0=-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m+eA^0(\vec{x}) \tag{6.188}$$

$$\delta H=\frac{\alpha e}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\Delta A^0(\vec{x})+\frac{\alpha e\mathrm{i}}{4\pi m}\vec{\gamma}\cdot\vec{E}(\vec{x}) \tag{6.189}$$

能级移动由 δH 的一次微扰给出

$$\delta E=\int\mathrm{d}^3x\psi^+(\vec{x})\delta H\psi(\vec{x}) \tag{6.190}$$

$\psi(\vec{x})$ 是 H_0 的本征态，具有 n,l,j 量子数.

计算 δE 时，将作一些近似，甚至可以对方程(6.190)中的 $\psi(\vec{x})$ 用非相对论值. 然而，主要的困难在于 δH 中包含红外奇异项 $\ln\frac{m}{\eta}$，它在 $\eta\to 0$ 时发散.

为了克服这一困难，必须注意到，我们的出发点，即等效相互作用(6.181)只对自由电子才是正确的，而对氢原子中的电子就不完全正确. 当虚光子的能量远大于氢原子结合能时，电子可当作自由电子对待，(6.181)可用；而当虚光子能量接近于氢原子结合能时，电子就不能看作自由的，(6.181)不可用. 因此，我们须对虚光子找一三维动量截断 K，使之满足

$$mZ^2\alpha^2<<K<<m$$

这是可能的，因左边是束缚能的量级，右边是电子静质量，前者远远小于后者. 对 $|\vec{k}|>K$，可忽略束缚效应，运用(6.181)进行计算；而对 $|\vec{k}|<K$，可以用非相对论量子力学另作计算，其中只包括 $|\vec{k}|<K$ 的软虚光子的贡献. 可以证明，截断 K 与小质量 η 之间有明确的关系. 例如，我们考虑电子在外场中散射并放出软光子这一现象(软韧致辐射)，并对其截面作两种等价的计算：一种计算中取

$\eta \neq 0$;另一计算中取 $\eta = 0$,但略去所有能量小于 K 的光子贡献. 比较这两种计算的结果就可以得出 K 与 η 的确定关系. 经过相当复杂的计算,可以得出 δE 的表示式. 人们发现,其中 $|\vec{k}| > K$ 与 $|\vec{k}| < K$ 两部分贡献中包含 K、η 的项彼此相消,从而最后结果对 η,K 的依赖消失了.

由此得到氢原子的 Lamb 位移为

$$E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = 1\ 052.1\ \text{MHz} \tag{6.191}$$

它与(6.184)给出的 1953 年的测量值相比较,是令人满意的.

Lamb 位移的理论计算和实验测量方面以后都有新的改进结果. 理论方面有

$$1\ 057.916 \pm 0.010\ \text{MHz}(1971)$$

$$1\ 057.864 \pm 0.014\ \text{MHz}(1975)$$

而实验方面有

$$1\ 057.893 \pm 0.020\ \text{MHz}(1975)$$

$$1\ 057.862 \pm 0.020\ \text{MHz}(1976)$$

理论与实验值之间符合得很好.

6.4 原始发散、可重整化的一般判据

为了消除圈图的紫外发散,我们总是可以在拉氏密度中引入适当的抵消项. 显然,对任何发散图形都可以引入相应的抵消项. 但是,抵消了发散并不等于我们就得到了一个自恰的量子场论. 正如在 QED 单圈级重整化的讨论中所见,重整化应当具有相乘的性质. 这意味着用来抵消全部紫外发散的抵消项,在数目上应当是有限的,在形式上必须是原来的$\mathcal{L}$中已有的. 这同时也意味着,理论中发散图形的类别必须是有限的. 否则,若发散图形有无限多种,则我们必须引入无限多种在原来$\mathcal{L}$中并不存在的抵消项形式来逐一消除各类图形的发散,这样得出的理论仍然是无意义的. 因此,一个理论中发散图形的类别有限是该理论可重整化的必要条件.

为讨论这一问题,我们考虑一个任意 Feynman 图的表观发散度. 设该图有 L 个圈,I_F 条 Fermion 内线,I_B 条 Boson 内线,E_F 条 Fermion 外线,E_B 条 Boson 外线和 V 个顶角,而每个顶角连有 N_F 条 Fermion 线和 N_B 条 Boson 线并可能含有 n 次时空微商(假定只有一种相互作用耦合,而 N_F 为偶数). 该图的表观发散度为

$$\Omega(G) = 4L - I_F - 2I_B + nV \tag{6.192}$$

圈的数目由(6.1)式给出

$$L = I_F + I_B - V + 1$$

Fermion 线总数为

$$N_F V = 2I_F + E_F \tag{6.193}$$

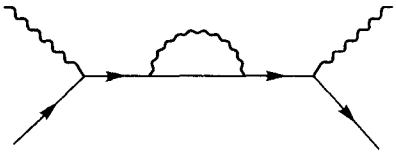
Boson 线总数为

$$N_B V = 2I_B + E_B \tag{6.194}$$

可以从(6.192)中消去 L, I_F 和 I_B 而将 $\Omega(G)$ 通过 E_F, E_B 和 V 表示出来，结果是

$$\Omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B - V\left(4 - \frac{3}{2}N_F - N_B - n\right) \tag{6.195}$$

若 $\Omega(G) < 0$，则称该图形是表观收敛的. 说收敛是表观的，是因为该图形并不一定有限，它很可能含有一些发散的子图. 例如 QED 中，如下图形



的 $\Omega = 4 - 3 - 2 = -1$，它是表观收敛的，但其中插入的电子自能图却是紫外发散的. 一个Feynman图只有当它的表观发散度及其所有子图的表观发散度皆负的情况下才是真正收敛的. 这就是著名的 Weinberg 定理[35].

另一方面，若 $\Omega(G) \geqslant 0$，则一般来说，该图形是发散的. 当然也有个别例外. 如基本相互作用顶角的 $\Omega = 0$，但并不存在发散；又如 QED 中的光子 - 光子散射图，也有 $\Omega = 0$，但由于规范不变性，它是收敛的. 我们称 $\Omega(G) \geqslant 0$ 的发散图形为原始发散图. 一个理论是否可以重整化，首先取决于其原始发散图的类别是否有限.

由(6.195)可见，一个图形的表观发散度，不仅与外线数目有关，一般来说，还与图形中顶角的数目有关. 我们分几种情况来讨论.

第一种情况是

$$4 - \frac{3}{2}N_F - N_B - n < 0 \tag{6.196}$$

这时，$\Omega(G)$ 将随图形中顶点数目的增加而增加. 这意味着，越是高级的图形越发散，我们最终将得到无穷多个不同的原始发散图形. 为了抵消发散而需引入的抵消项的形式也有无穷多种. 这种情况下，我们说理论是不可重整化的. 条件(6.196)有一个简单的物理解释. 注意到 Fermion 场的质量量纲为 $+3/2$，Boson 场的质量量纲为 $+1$，相互作用 $\mathcal{L}_i$ 的质量量纲为 $+4$，它含有 N_F 个 Fermion 场，N_B 个 Boson 场和一个相互作用耦合常数 g，因此必有 $\mathcal{L}_i$ 的质量量纲

$$[\mathcal{L}_i] = 4 = [g] + \frac{3}{2}N_F + N_B + n$$

从而条件(6.196)等同于

$$[g] < 0 \tag{6.197}$$

这表明，当相互作用耦合常数具有负的质量量纲时，理论必定是不可重整的. 这种明显不可重整的相互作用的例子有四 Fermion 弱作用($n=0$)

$$\mathcal{L}_i = \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_4, \quad [G] = -2 \tag{6.198}$$

含微商的 π - N 耦合($n=1$)

$$\mathcal{L}_i = f\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial^\mu\varphi, \quad [f] = -1 \tag{6.199}$$

以及标量场自作用耦合($n=0$)

$$\mathcal{L}_i = \lambda\varphi^N, \quad N>4, \quad [\lambda]<0 \tag{6.200}$$

第二种情况是 $\Omega(G)$ 中

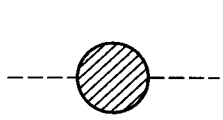
$$4 - \frac{3}{2}N_F - N_B - n = 0 \tag{6.201}$$

这里 N_F 为偶数. 它意味着 $\mathcal{L}_i$ 中的相互作用耦合常数 g 是无量纲的. 这时表观发散度

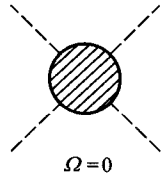
$$\Omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \tag{6.202}$$

与图形中顶角的数目 V 无关，它只依赖于图形的外线数. 尤其重要的是，图形的外线数目越多越收敛，因而原始发散图形的类别必定是有限的. 如果为抵消这有限类的发散而引入的抵消项的形式又是原来 $\mathcal{L}$ 中所存在的，则有理由相信将导致一个可重整化的量子场论. 这正是物理上感兴趣的情况. 条件(6.201)对于 $n=0$ 的解及其相应的耦合如下：

1. $N_F=0, N_B=4$. 对应 $\lambda\varphi^4$ 理论. 仅有的原始发散图为



$\Omega=2$



$\Omega=0$

其中带阴影的圈表示它可以包含单圈级以上的高级修正. 两点函数的发散可引入动能及质量抵消项加以消除，四点函数的发散可由 φ^4 自耦合形式的抵消项加以抵消，这两种抵消项都是原来 $\mathcal{L}$ 中所有的. 因此可以相信，$\lambda\varphi^4$ 理论是可以重整化的.

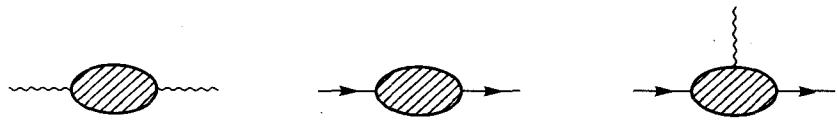
2. $N_F=2, N_B=1$. 即相互作用顶角含两个 Fermion 场，一个 Boson 场. 有两种相互作用具有这种形式. 一是 Fermion 场与矢量场的最小耦合

$$\mathcal{L}_i = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

二是 Fermion 场与标量场的 Yukawa 耦合

$$\mathcal{L}_i = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$$

量子电动力学处理的正是第一种相互作用. 它的原始发散图只有三类：



至于光子－光子散射和三光子外线图由于和单圈图讨论中同样的理由已被排除. 显然，同单圈图的讨论一样，抵消这三种原始发散的抵消项形式都是原来$\mathcal{L}$中所具有的. 对于 Yukawa 耦合，也有类似的结果. 因此可以相信，QED 和 Yukawa 耦合都是可重整化的理论.

第三种情况是 $\Omega(G)$ 中

$$4-\frac{3}{2}N_{\mathrm{F}}-N_{\mathrm{B}}-n>0 \tag{6.203}$$

这意味着$\mathcal{L}_i$中耦合常数的质量量纲是正的. 由(6.195)可见，这时表观发散度 $\Omega(G)$将随顶角数目 V 的增加而变得越来越负，即图形中顶角数目越多，积分越收敛. 显然，原始发散图的类别必定是有限的. 我们称这种理论为超可重整化的. 一个例子是 φ^3 自耦合作用. 然而，这类理论由于太受局限而经常是不现实的，所以并不是物理上感兴趣的情况.

以上给出的是理论是否可重整化的一般判据. 满足可重整化的判据是一个理论可重整化的必要条件. 在此基础上，人们已经给出了一些理论可重整性的严格证明，它们可以在有关著作和文献中找到.

6.5　不可重整性与等效场论

近年来物理学界关于可重整性的观点产生了一些变化，主要反映在以下几个问题上.[15]

1. 量子场论的可重整性要求是否为必须？

长期以来，人们都将可重整性作为一个合理的量子场论必须满足的关键条件之一. 然而，从本章前面的讨论可知，可重整性要求相互作用的耦合常数具有非负的质量量纲，这就大大限制了被允许的量子场论的数目. 如果不考虑可重整性要求，仅仅加以对称性(如 Lorentz 不变性，规范不变性等)限制，则被允许的相互作用项是很多的. 例如在 QED 中，可以加入一种非最小耦合项 $g\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$，它是LT，规范变换和$\mathcal{PC}$不变的，但由于它不可重整而通常被排除. 这一项的物理效应会修改电子和 μ 子的磁矩值. 但是最小电磁耦合项 $-e\bar{\psi}\not{A}\psi$ 所导致的电子和 μ 子的磁矩值与实验符合得极好，这一事实支持了可重整化原则. 另一个例子

是,在描述粒子的强、弱和电磁作用的标准模型中,仅从对称性考虑,也可以加入夸克与轻子的四费密子作用项.然而,同样由于它们不可重整而被排除.标准模型的理论预言与实验符合得相当好,这也支持了可重整化原则,因为标准模型是可重整化的量子场论.

尽管如此,人们仍然会问:不可重整化的理论是否绝对不可接受?回答应当为否.首先,从理论上说,不可重整化的理论也可以看成可以重整化的理论,只要拉氏密度中包含了全部(无限多)由对称性所允许的相互作用项.其次,许多物理学家已经转变观点,开始认为可重整性并非一个基本的物理要求,任何现实的量子场论应当既包含可重整项也包括不可重整项.促使他们转变观点的根源在于,构造一个可重整化的引力理论的企图一直受挫.譬如,Einstein 的广义相对论就是不可重整化的,因为其中的引力耦合常数 $8\pi G_N = (2.43 \times 10^{18}\ \mathrm{GeV})^{-2}$ 具有负的质量量纲.

然而,如果可重整性不是一个基本的物理原则,那么又如何解释可重整化理论如 QED 和标准模型的成功?这可以通过量纲分析来说明.以 QED 为例,如前所述,对称性允许有不可重整项 $g\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$.由于耦合常数 g 的质量量纲等于 -1,故可假定

$$g = \frac{e}{M}$$

其中 e 为电子的电荷,M 是某个大的质量标度.若只考虑低能过程,即动量 $k \ll M$ 的情况,则该作用项的贡献中将出现因子 $k/M \ll 1$.因此,只要 M 足够大,该不可重整项的贡献就可以忽略,仅留下 QED 中可重整项的贡献.那么,M 需大到何种程度?对此可以作一简单估计.注意到耦合项

$$\frac{e}{M}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}$$

将贡献一个电子磁矩值 $4e/M$.目前电子磁矩实验已精确至 $10^{-11}e/2m_e$,其中 m_e 为电子的质量.因此,只要

$$\frac{4e}{M} < 10^{-11}\frac{e}{2m_e}$$

就不会与现有实验相矛盾.上式将导致

$$M > 8 \times 10^{11} m_e = 4 \times 10^8\ \mathrm{GeV} \tag{6.204}$$

由此可见,可重整化理论 QED 的成功并不排除不可重整项的存在,只要 M 足够大.

2. 不可重整化的相互作用是可以探测和有用的.

不可重整化的相互作用在实验上是可能有观测效应的.一个例子就是,重子数和轻子数破坏过程可以由不可重整化的夸克与轻子间的四费密子作用项产

生. 当然,强度要被高度压低,所产生的破坏效应是极小的. 另一个例子就是引力,它是完全不可重整化的相互作用,但却是完全可以探测的. 因为引力有很特殊的性质,一个宏观物体中的所有粒子的引力场可以相干地叠加起来,产生可观测的效应. 另一方面,在理论上,当对称性禁戒了可重整化的相互作用时,某种不可重整化的量子场论就是有用的. 一个简单的例子是,对于标量场 φ,若要求拉氏密度$\mathcal{L}$对于变换

$$\varphi \to \varphi + \varepsilon, \quad \varphi \to -\varphi$$

有不变性,这里 ε 为任意常数,则被允许的拉氏密度将为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{g}{4}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi)^2 + \cdots$$

这里 $g \sim M^{-4}$. 此拉氏密度是不可重整的,但它可用于实际过程的计算. 计算中将按 k/M 的幂次展开而只考虑 k/M 的最低幂次图. 类似于在用四费密子作用计算 μ 衰变时,只考虑至树图级.

3. 不可重整化的场论只是等效场论.

不可重整化的场论仅仅在 $k/M \ll 1$ 时有用,而当 $k/M > 1$ 时会破坏幺正性.

一个熟知的例子是不可重整化的四费密子弱作用. 下述相互作用

$$\mathcal{H}_i = \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\mu}\gamma\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1-\gamma_5)e \tag{6.205}$$

可以描述反应过程

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$$

设电子和 μ 子的质量为 0 即 $m_e = m_\mu = 0$. 利用计算散射截面的一般公式(5.193),可以得出该过程在质心系的总截面为

$$\sigma = \frac{4}{\pi}G^2 k^2 \tag{6.206}$$

此处 k 为质心系中 ν_μ 的三维动量值. 另一方面,我们注意到,此反应仅含总角动量 $J=0$ 的分波. 因为我们处理的是力程为零的接触作用,而参加反应的四个零质量费密子皆为左旋,很容易看出,质心系中总角动量为 0. 根据散射的一般理论[36],这一过程的总截面可以表达为

$$\sigma = \frac{\pi}{2k^2}|\alpha_0|^2 \leqslant \frac{\pi}{2k^2} \tag{6.207}$$

这里 α_0 表示 $J=0$ 的分波振幅,1/2 反映了只有左旋的电子参与反应. 最后一步的不等式表达了幺正性(几率守恒)所加的限制条件 $|\alpha_0| \leqslant 1$. 事实上,由 J 分波下 S 矩阵的幺正性条件

$$S_J^+ S_J = I$$

以及 J 分波散射矩阵的定义

$$T_J = \frac{1}{\mathrm{i}}(S_J - I)$$

可以证明

$$|(T_J)_{mn}| \leqslant 1 \quad (\text{当 } m \neq n)$$

目前 α_0 正是矩阵 T_0 的非对角元，故有 $|\alpha_0| \leqslant 1$. 将(6.206)代入(6.207)，我们得出

$$\frac{4}{\pi} G^2 k^2 \leqslant \frac{\pi}{2k^2}$$

因此，当

$$k > \frac{\pi^{1/2}}{8^{1/4} G^{1/2}} \simeq 300 \text{ GeV} \tag{6.208}$$

时，幺正性将受到破坏. 可以假定，在 $k \sim M \simeq 300$ GeV 的动量标度上，将有新物理出现. 此例说明，不可重整化的场论仅仅是真正的基础理论在 $k << M$ 标度上的等效. 上述四费密子弱作用正是更基本的弱电统一规范理论(Weinberg - Salam - Glashow 模型)在 $k << G^{-1/2}$ 标度上的等效.

由于目前的量子场论(强、弱和电磁作用的标准模型)对一些基本问题不能回答，例如，为什么时空维数为 4？为什么会有玻色子和费密子两种粒子？是什么决定了标准模型的结构和参数？对称性破坏的实质是什么？特别是，如何将引力纳入一个统一的相互作用理论框架之中？这使得一些物理学家相信，整个低能量子场论，包括可重整化与不可重整化的理论，可能都是来自更高能量标度上的某种基本理论的等效理论. 基本理论的一个热门候选者就是在 10^{19} GeV (Planck 标度)上的弦理论.

附录　一些数学推导和证明

*一、Lorentz 变换(LT)满足群公理的证明

证:LT 必须满足 $g = L^{\mathrm{T}} g L$.

1. 设 L_1 满足 $g = L_1^{\mathrm{T}} g L_1$, L_2 满足 $g = L_2^{\mathrm{T}} g L_2$,

则有 $g = L_2^{\mathrm{T}} g L_2 = L_2^{\mathrm{T}} L_1^{\mathrm{T}} g L_1 L_2 = (L_1 L_2)^{\mathrm{T}} g (L_1 L_2)$.

所以 $L_1 L_2$ 也是 LT.

2. 设 L_1 满足 $g = L_1^{\mathrm{T}} g L_1$, L_2 满足 $g = L_2^{\mathrm{T}} g L_2$, L_3 满足 $g = L_3^{\mathrm{T}} g L_3$,

则有

$$g = L_3^{\mathrm{T}} g L_3 = L_3^{\mathrm{T}} L_2^{\mathrm{T}} g L_2 L_3 = L_3^{\mathrm{T}} L_2^{\mathrm{T}} L_1^{\mathrm{T}} g L_1 L_2 L_3$$

从上式可得

$$g = L_3^{\mathrm{T}} (L_1 L_2)^{\mathrm{T}} g (L_1 L_2) L_3 = [(L_1 L_2) L_3]^{\mathrm{T}} g (L_1 L_2) L_3$$

另一方面,又可写

$$g = (L_2 L_3)^{\mathrm{T}} L_1^{\mathrm{T}} g L_1 (L_2 L_3) = [L_1 (L_2 L_3)]^{\mathrm{T}} g L_1 (L_2 L_3)$$

比较上面两式的右边得出 $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$. 由此,结合律满足.

3. 恒等变换 I 满足 $g = I^{\mathrm{T}} g I$,所以 $I \in \mathrm{LT}$.

4. 设 $L^{-1} L = I$, $g = L^{\mathrm{T}} g L$,

则有 $g = I^{\mathrm{T}} g I = (L L^{-1})^{\mathrm{T}} g (L L^{-1}) = (L^{-1})^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} g L L^{-1} = (L^{-1})^{\mathrm{T}} g L^{-1}$

所以 $$L^{-1} \in \mathrm{LT}$$

由此,LT 满足群公理得证.

二、Dirac 旋量的正交归一条件(2.193)的证明

注意到

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} k^0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k^0 \end{pmatrix}$$

我们将有

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(k) u^{(\beta)}(k) &= \frac{1}{2m(k^0 + m)} \bar{u}_0^{(\alpha)} (\not{k} + m)(\not{k} + m) u_0^{(\beta)} \\ &= \frac{1}{2m(k^0 + m)} \bar{u}_0^{(\alpha)} 2m(\not{k} + m) u_0^{(\beta)} = \frac{1}{(k^0 + m)} \bar{u}_0^{(\alpha)} (\not{k} + m) u_0^{(\beta)} \\ &= \frac{1}{(k^0 + m)} (\varphi^{(\alpha)+}, 0) \begin{pmatrix} k^0 + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k^0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{(\beta)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(k^0+m)}(\varphi^{(\alpha)+},0)\begin{pmatrix}(k^0+m)\varphi^{(\beta)}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{(\beta)}\end{pmatrix} = \delta^{\alpha\beta}$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = \frac{1}{2m(k^0+m)}\bar{v}_0^{(\alpha)}(-\not{k}+m)(-\not{k}+m)v_0^{(\beta)}$$

$$= \frac{1}{2m(k^0+m)}\bar{v}_0^{(\alpha)}2m(-\not{k}+m)v_0^{(\beta)} = \frac{1}{(k^0+m)}\bar{v}_0^{(\alpha)}(-\not{k}+m)v_0^{(\beta)}$$

$$= \frac{1}{(k^0+m)}(0,-\chi^{(\alpha)+})\begin{pmatrix}-k^0+m & \vec{\sigma}\cdot\vec{k}\\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{k} & k^0+m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \chi^{(\alpha)}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(k^0+m)}(0,-\chi^{(\alpha)+})\begin{pmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\chi^{(\beta)}\\ (k^0+m)\chi^{(\beta)}\end{pmatrix} = -\delta^{\alpha\beta}$$

而

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = \frac{1}{2m(k^0+m)}\bar{u}_0^{(\alpha)}(\not{k}+m)(-\not{k}+m)v_0^{(\beta)} = 0,$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = \frac{1}{2m(k^0+m)}\bar{v}_0^{(\alpha)}(-\not{k}+m)(\not{k}+m)u_0^{(\beta)} = 0$$

因为

$$(\not{k}+m)(-\not{k}+m) = -k^2+m^2 = 0$$

三、标量场的 $H,\vec{P}$ 通过 $a(k)$ 和 $a^+(k)$ 来表达的公式(3.71)和(3.72)的推导

标量场 $\varphi(x)$ 的哈密顿量

$$H = \int d^3x\,\mathcal{H}(\pi,\varphi) = \frac{1}{2}\int d^3x\{\pi^2(\vec{x},t) + [\nabla\varphi(\vec{x},t)]^2 + m^2\varphi^2(\vec{x},t)\}$$

通过分部积分,丢掉表面项,可写

$$\int d^3x[\nabla\varphi(\vec{x},t)]^2 = -\int d^3x\varphi(\vec{x},t)\ \nabla^2\varphi(\vec{x},t)$$

因此

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x[\pi^2 + \varphi(-\nabla^2+m^2)\varphi]$$

利用

$$\pi(\vec{x},t) = \int \tilde{dk}(-i\omega_k)[a(k)e^{-ik\cdot x} - a^+(k)e^{ik\cdot x}] \quad (\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2+m^2})$$

$$(-\nabla^2+m^2)\varphi(\vec{x},t) = \int \tilde{dk}\omega_k^2[a(k)e^{-ik\cdot x} + a^+(k)e^{ik\cdot x}]$$

代入 H,得到

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\int \tilde{dk}\int \tilde{dk}'$$

$$\times\{(-\mathrm{i}\omega_k)(-\mathrm{i}\omega_{k'})[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-a^+(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}][a(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}-a^+(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}]$$
$$+\omega_{k'}^2[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+a^+(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}][a(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}+a^+(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}]\}$$
$$=\frac{1}{2}\int\tilde{\mathrm{d}}k\int\tilde{\mathrm{d}}k'\{(-\omega_k\omega_{k'}+\omega_{k'}^2)a(k)a(k')(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k+\omega'_k)x^0}$$
$$+(\omega_k\omega_{k'}+\omega_{k'}^2)a(k)a^+(k')(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$
$$+(\omega_k\omega_{k'}+\omega_{k'}^2)a^+(k)a(k')(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$
$$+(-\omega_k\omega_{k'}+\omega_{k'}^2)a^+(k)a^+(k')(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k+\omega'_k)x^0}\}$$

考虑到当 $\vec{k}=\pm\vec{k}'$ 时，$\omega_k=\omega_{k'}$，所以上式中的一、四项为零. 而从二、三项，在完成 $\tilde{\mathrm{d}}k'$ 的积分后，得到总哈密顿量

$$H=\frac{1}{2}\int\tilde{\mathrm{d}}k\frac{1}{(2\pi)^3\cdot 2\omega_k}2\omega_k^2[a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)](2\pi)^3$$
$$=\frac{1}{2}\int\tilde{\mathrm{d}}k\omega_k[a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)]$$

标量场 $\varphi(\vec{x},t)$ 的总动量

$$\vec{P}=-\int\mathrm{d}^3x\pi(\vec{x},t)\ \nabla\varphi(\vec{x},t)$$
$$=-\int\mathrm{d}^3x\int\tilde{\mathrm{d}}k(-\mathrm{i}\omega_k)[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-a^+(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]$$
$$\times\int\tilde{\mathrm{d}}k'(\mathrm{i}\vec{k}')[a(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}-a^+(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}]$$
$$=-\iint\tilde{\mathrm{d}}k\,\tilde{\mathrm{d}}k'\omega_k\vec{k}'\{[a(k)a(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega_k t}+a^+(k)a^+(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_k t}]\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')(2\pi)^3$$
$$-[a(k)a^+(k')+a^+(k)a(k')]\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')(2\pi)^3\}$$
$$=\frac{1}{2}\int\tilde{\mathrm{d}}k\vec{k}[a(k)a(\tilde{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega_k t}+a^+(k)a^+(\tilde{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega_k t}]$$
$$+\frac{1}{2}\int\tilde{\mathrm{d}}k\vec{k}[a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)]$$

这里 $\tilde{k}$ 的定义为 $\tilde{k}^\mu=(k^0,-\vec{k})$，即 $\tilde{k}$ 的三维动量与 k 的三维动量差一负号. 注意到积分

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\vec{k}a(k)a(\tilde{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega_k t}=0,$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\vec{k}a^+(k)a^+(\tilde{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega_k t}=0$$

理由是：在上述积分的被积函数中，由于 $a(k)$ 与 $a(\tilde{k})$ 对易，$a^+(k)$ 与

$a^+(\tilde{k})$对易，所以$a(k)a(\tilde{k})$和$a^+(k)a^+(\tilde{k})$都是$\vec{k}$的偶函数，这使得两个积分的被积函数都成为$\vec{k}$的奇函数，而积分是在对称区间$(-\infty,\infty)$进行的，故两个积分都得零. 结果，最终得到标量场的总动量

$$\vec{P}=\int \mathrm{d}\tilde{k}\,\frac{\vec{k}}{2}[a(k)a^+(k)+a^+(k)a(k)]$$

四、实标量场 Fock 空间基矢的归一化$\langle r\mid r\rangle=1$的例证[(3.94)式]

以两粒子态$\mid r=2\rangle$为例，它的模方

$$\begin{aligned}\langle r=2\mid r=2\rangle &=\mid C\mid^2\langle 0\mid\int \mathrm{d}\tilde{k}_1'\,\mathrm{d}\tilde{k}_2'F^*(k_1',k_2')a(k_1')a(k_2')\\&\quad\times\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2F(k_1,k_2)a^+(k_1)a^+(k_2)\mid 0\rangle\\&=\mid C\mid^2\int \mathrm{d}\tilde{k}_1'\,\mathrm{d}\tilde{k}_2'\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2F^*(k_1',k_2')F(k_1,k_2)\\&\quad\times\langle 0\mid a(k_1')\underline{a(k_2')a^+(k_1)}a^+(k_2)\mid 0\rangle\end{aligned}$$

这里C是态的归一化常数. 从$a(k)$和$a^+(k)$的对易关系可得下划线部分为

$$\underline{a(k_2')a^+(k_1)}=a^+(k_1)a(k_2')+(2\pi)^3 2\omega_2'\delta^3(\vec{k}_2'-\vec{k}_1)$$

重复使用这一关系，可将消灭算符a换到右真空态$\mid 0\rangle$的左侧，产生算符a^+换到左真空态$\langle 0\mid$的右侧，再利用

$$a(k)\mid 0\rangle=0,\quad \langle 0\mid a^+(k)=0$$

于是可以得到

$$\begin{aligned}\langle r=2\mid r=2\rangle &=\mid C\mid^2\int \mathrm{d}\tilde{k}_1'\,\mathrm{d}\tilde{k}_2'\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2F^*(k_1',k_2')F(k_1,k_2)\\&\quad\times\{(2\pi)^3 2\omega_1'\delta^3(\vec{k}_1'-\vec{k}_1)(2\pi)^3 2\omega_2'\delta^3(\vec{k}_2'-\vec{k}_2)\\&\quad+(2\pi)^3 2\omega_2'\delta^3(-\vec{k}_1+\vec{k}_2')(2\pi)^3 2\omega_1'\delta^3(\vec{k}_1'-\vec{k}_2)\}\\&=\mid C\mid^2\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2\{F^*(k_1,k_2)+F^*(k_2,k_1)\}F(k_1,k_2)\\&=\mid C\mid^2\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2\{F^*(k_1,k_2)+F^*(k_1,k_2)\}F(k_1,k_2)\\&=\mid C\mid^2 2\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2\mid F(k_1,k_2)\mid^2\end{aligned}$$

其中已利用了$F^*(k_1,k_2)$是k_1和k_2的对称函数的性质. 由$\langle r=2\mid r=2\rangle=1$得(取$C$为实数)

$$C=(2!\int \mathrm{d}\tilde{k}_1\,\mathrm{d}\tilde{k}_2\mid F(k_1,k_2)\mid^2)^{-1/2}$$

五、标量场传播子 $G_F(x'-x)$ 的表达式(3.131)的验证

我们从右向左进行验证. 表达式

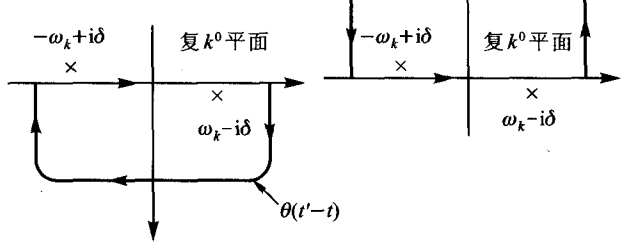
$$G_F(x'-x) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \quad (\varepsilon = 0_+)$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(t'-t)}}{k^{0^2}-\omega_k^2+i\varepsilon}, \quad \omega_k^2 = \vec{k}^2+m^2$$

(被积函数的极点:$k^0 = \pm\sqrt{\omega_k^2 - i\varepsilon} = \pm\omega_k \mp i\delta, \delta = 0_+$)

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\int dk^0 \frac{e^{-ik^0(t'-t)}}{(k^0-\omega_k+i\delta)(k^0+\omega_k-i\delta)}$$

现将对 k^0 的积分延拓到整个复 k^0 平面. 注意到当 $t'-t>0$ 时,$e^{-ik^0(t'-t)}$ 在复 k^0 的下半平面是收敛的,积分回路应绕下半平面;而当 $t'-t<0$ 时,$e^{-ik^0(t'-t)}$ 在复 k^0 的上半平面是收敛的,积分回路应绕上半平面. 正如下面的图形所示.



于是,利用留数定理,我们得到

$$G_F(x'-x) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\Big[\theta(t'-t)\underbrace{(-2\pi i)\frac{e^{-i\omega_k(t'-t)}}{2\omega_k}}_{k^0\text{积分绕下半平面}}$$

$$+\theta(t-t')\underbrace{(2\pi i)\frac{e^{i\omega_k(t'-t)}}{-2\omega_k}}_{k^0\text{积分绕上半平面}}\Big]$$

$$= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}[\theta(t'-t)e^{-i\omega_k(t'-t)}+\theta(t-t')e^{i\omega_k(t'-t)}]$$

$$= i\int \tilde{dk}[\theta(t'-t)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}e^{-i\omega_k(t'-t)}+\theta(t-t')e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}e^{i\omega_k(t'-t)}]$$

$$= i\int \tilde{dk}[\theta(t'-t)e^{-ik\cdot(x'-x)}+\theta(t-t')e^{ik\cdot(x'-x)}]$$

其中对第二项的积分变量曾做了代换 $\vec{k}\to-\vec{k}$. 由此(3.131)式得证.

六、电磁场等时对易关系的形式转化[(3.137)和(3.138)→(3.139)]

电磁场的等时对易关系

$$[\pi^{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = -\mathrm{i}g_{\nu}^{\rho}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.137}$$

和

$$[A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = [\pi_{\rho}(\vec{x},t),\pi_{\nu}(\vec{y},t)] = 0 \tag{3.138}$$

可以转换成

$$\begin{aligned}&[A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = [\dot{A}_{\rho}(\vec{x},t),\dot{A}_{\nu}(\vec{y},t)] = 0\\&[\dot{A}_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = \mathrm{i}g_{\rho\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{3.139}$$

证明:因为

$$\pi_{\rho} = F_{\rho 0} - g_{\rho 0}(\partial\cdot A)$$

所以

$$\pi_{i} = F_{i0} = \partial_{i}A_{0} - \partial_{0}A_{i},\quad \pi_{0} = -(\partial\cdot A)$$

根据

$$[A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = 0$$

显然可得

$$\begin{aligned}[\partial_{i}A_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] &= 0\\[A_{\rho}(\vec{x},t),\partial_{i}A_{\nu}(\vec{y},t)] &= 0\\[\partial_{i}A_{\rho}(\vec{x},t),\partial_{j}A_{\nu}(\vec{y},t)] &= 0\end{aligned}$$

即 A_{ρ} 的空间微商与 A_{ν} 对易,A_{ρ} 的空间微商彼此对易. 再从(3.137)可得

$$[\pi_{\rho}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = -\mathrm{i}g_{\rho\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$

1. 取 $\rho=0$, 则有

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}g_{0\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) &= [\pi_{0}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= [-\partial\cdot A(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= -[\partial_{0}A_{0}(\vec{x},t) - \partial_{i}A_{i}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= -[\dot{A}_{0}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\end{aligned}$$

所以

$$\underline{[\dot{A}_{0}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)] = \mathrm{i}g_{0\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})}$$

2. 取 $\rho=i$, 则有

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}g_{i\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) &= [\pi_{i}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= [F_{i0}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= [\partial_{i}A_{0}(\vec{x},t) - \partial_{0}A_{i}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\\&= -[\dot{A}_{i}(\vec{x},t),A_{\nu}(\vec{y},t)]\end{aligned}$$

因此

$$\underline{[\dot{A}_i(\vec{x},t),A_\nu(\vec{y},t)]=\mathrm{i}g_{i\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}$$

将 1 与 2 的结果合起来，有

$$\underline{[\dot{A}_\rho(\vec{x},t),A_\nu(\vec{y},t)]=\mathrm{i}g_{\rho\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}$$

又从

$$[\pi_\rho(\vec{x},t),\pi_\nu(\vec{y},t)]=0$$

3. 取 $\rho=\nu=0$，得

$$\begin{aligned}0&=[\pi_0(\vec{x},t),\pi_0(\vec{y},t)]\\&=[-\partial\cdot A(\vec{x},t),-\partial\cdot A(\vec{y},t)]\\&=[\partial_0A_0(\vec{x},t)-\partial_iA_i(\vec{x},t),\partial_0A_0(\vec{y},t)-\partial_iA_i(\vec{y},t)]\\&=[\dot{A}_0(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]-\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{[A_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]}-\frac{\partial}{\partial y^i}\underline{[\dot{A}_0(\vec{x},t),A_i(\vec{y},t)]}\\&=[\dot{A}_0(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]=0\end{aligned}$$

因为上面式子中下划线部分的对易子为零.

4. 取 $\rho=i,\nu=0$，得

$$\begin{aligned}0&=[\pi_i(\vec{x},t),\pi_0(\vec{y},t)]\\&=[\partial_iA_0(\vec{x},t)-\partial_0A_i(\vec{x},t),-\partial_0A_0(\vec{y},t)+\partial_jA_j(\vec{y},t)]\\&=-[\partial_iA_0(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]+[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]-[\dot{A}_i(\vec{x},t),\partial_jA_j(\vec{y},t)]\\&=[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]-\frac{\partial}{\partial x^i}[A_0(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]-\frac{\partial}{\partial y^j}[\dot{A}_i(\vec{x},t),A_j(\vec{y},t)]\\&=[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]-\frac{\partial}{\partial x^i}(-\mathrm{i}g_{00})\delta^3(\vec{x}-\vec{y})-\frac{\partial}{\partial y^j}(\mathrm{i}g_{ij})\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\\&=[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]+i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\\&=[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_0(\vec{y},t)]=0\end{aligned}$$

其中利用了等式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\delta(x^i-y^i)=\frac{\partial}{\partial\xi}\delta(\xi)\Big|_{\xi=x^i-y^i}(1-1)=0$$

5. 取 $\rho=0,\nu=i$，有

$$\begin{aligned}0=[\pi_0(\vec{x},t),\pi_i(\vec{y},t)]&=-[\pi_i(\vec{y},t),\pi_0(\vec{x},t)]\\&=-[\dot{A}_i(\vec{y},t),\dot{A}_0(\vec{x},t)]=0\end{aligned}$$

6. 取 $\rho=i,\nu=j$，则有

$$\begin{aligned}0&=[\pi_i(\vec{x},t),\pi_j(\vec{y},t)]\\&=[\partial_iA_0(\vec{x},t)-\partial_0A_i(\vec{x},t),\partial_jA_0(\vec{y},t)-\partial_0A_j(\vec{y},t)]\\&=-\frac{\partial}{\partial x^i}[A_0(\vec{x},t),\dot{A}_j(\vec{y},t)]-\frac{\partial}{\partial y^i}[\dot{A}_i(\vec{x},t),A_0(\vec{y},t)]+[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_j(\vec{y},t)]\end{aligned}$$

$$=[\dot{A}_i(\vec{x},t),\dot{A}_j(\vec{y},t)]=0$$

将 3,4,5 和 6 的结果合并,则得到

$$[\dot{A}_\rho(\vec{x},t),\dot{A}_\nu(\vec{y},t)]=0$$

以上全部结果可以总结为

$$[A_\rho(\vec{x},t),A_\nu(\vec{y},t)]=[\dot{A}_\rho(\vec{x},t),\dot{A}_\nu(\vec{y},t)]=0,$$

$$[\dot{A}_\rho(\vec{x},t),A_\nu(\vec{y},t)]=\mathrm{i}g_{\rho\nu}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

此即(3.139)式.

七、电磁场平面波展开中极化矢量 $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 完全性公式(3.144a)的说明

设 k 空间中的任一四矢量 $A_\mu(k)$ 可以按 $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 展开为

$$A_\mu(k)=\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)a^{(\lambda)}(k)$$

则

$$a^{(\lambda)}(k)=\varepsilon^{(\lambda)*}(k)\cdot A(k)g^{\lambda\lambda}(\lambda\text{ 不求和})$$

因为上式右边可写为

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)\sum_{\lambda'}\varepsilon^{(\lambda')\mu}(k)a^{(\lambda')}(k)g^{\lambda\lambda}=\sum_{\lambda'}g^{\lambda\lambda'}g^{\lambda\lambda}a^{(\lambda')(k)}=\sum_{\lambda'}\delta^{\lambda\lambda'}a^{(\lambda')}(k)=a^{(\lambda)}(k)$$

所以

$$A_\mu(k)=\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon^{(\lambda)*}(k)\cdot A(k)g^{\lambda\lambda}$$

$$=\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k)A^\nu(k)g^{\lambda\lambda}$$

上式两边若对任意 $A_\mu(k)$ 成立,则要求

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k)g^{\lambda\lambda}=g_{\mu\nu}$$

或

$$\sum_{\lambda,\lambda'} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda')*}(k)g^{\lambda\lambda'}=g_{\mu\nu}$$

此即完全性公式(3.144a).

八、自由电磁场哈密顿量 H 的表达式(3.156)的推导

$$H=\int \mathrm{d}^3x:\pi^\mu\dot{A}_\mu-\mathcal{L}:$$

$$=\int \mathrm{d}^3x:(F^{\mu 0}-g^{\mu 0}\partial\cdot A)\dot{A}_\mu+\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2:$$

$$=\int \mathrm{d}^3x:(\partial^\mu A^0-\partial^0A^\mu)\dot{A}_\mu-(\partial\cdot A)\dot{A}^0+\frac{1}{2}F^{\mu 0}F_{\mu 0}+\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}+\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2:$$

$$= \int \mathrm{d}^3x :(\partial^\mu A^0)\dot{A}_\mu - \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - (\partial \cdot A)\dot{A}^0 + \frac{1}{2}(\partial^\mu A^0 - \dot{A}^\mu)(\partial_\mu A_0 - \dot{A}_\mu)$$

$$+ \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + \frac{1}{2}(\partial \cdot A)^2 :$$

$$= \int \mathrm{d}^3x :(\partial^\mu A^0)\dot{A}_\mu - \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - (\dot{A}^0)^2 - (\nabla \cdot \vec{A})\dot{A}^0 + \frac{1}{2}(\dot{A}^0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla A_0)\cdot(\nabla A_0)$$

$$- \dot{A}^\mu \partial_\mu A_0 + \frac{1}{2}\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + \frac{1}{2}\dot{A}_0^2 + \dot{A}_0(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{A})^2 :$$

$$= \int \mathrm{d}^3x : -\frac{1}{2}\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla \cdot \vec{A})^2 :$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x : \dot{A}_i^2 - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 + \frac{1}{2}F^{ij}F_{ij} + (\nabla \cdot \vec{A})^2 :$$

注意到

$$\frac{1}{2}F^{ij}F_{ij} + (\nabla \cdot \vec{A})^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial_i A_j - \partial_j A_i) + (\partial_i A_i)(\partial_j A_j)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_i A_j)(\partial_i A_j) + \frac{1}{2}(\partial_j A_i)(\partial_j A_i) - \frac{1}{2}(\partial_j A_i)(\partial_i A_j) - \frac{1}{2}(\partial_i A_j)(\partial_j A_i) + (\partial_i A_i)(\partial_j A_j)$$

$$= (\partial_i A_j)(\partial_i A_j) - (\partial_i A_j)(\partial_j A_i) + (\partial_i A_i)(\partial_j A_j)$$

$$= (\partial_i A_j)(\partial_i A_j) - \partial_i(A_j \partial_j A_i) + A_j \partial_i \partial_j A_i + \partial_i(A_i \partial_j A_j) - A_i \partial_i \partial_j A_j$$

$$= (\partial_i A_j)(\partial_i A_j) = (\partial_j A_i)(\partial_j A_i)$$

$$= (\nabla A_i)\cdot(\nabla A_i) = (\nabla A_i)^2$$

在上面的推导中，已经丢掉了三维散度项 $-\partial_i(A_j \partial_j A_i)$ 和 $\partial_i(A_i \partial_j A_j)$. 因此，最终有

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x : \sum_{i=1}^{3} [\dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2] - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 :$$

此即(3.156)式.

九、Dirac 场等时反对易关系(3.173)式的推导

从产生和消灭算符所满足的反对易关系

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^+(q)\} = \{d_\alpha(k), d_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{k^0}{m}\delta^3(\vec{k} - \vec{q})\delta_{\alpha\beta},$$

所有其他反对易子为 0

和 Dirac 场的平面波展开式(3.166)，有

$$\{\psi_\xi(\vec{x}, t), \psi_\eta^+(\vec{y}, t)\} = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{m}{q^0}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta=1,2} \{b_\alpha(k) u_\xi^{(\alpha)}(k) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + d_\alpha^+(k) v_\xi^{(\alpha)}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},$$

$$
\begin{aligned}
&b_\beta^+(q)u_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}+d_\beta(q)v_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\}\\
=&\iint\frac{\mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^6}\ \frac{m^2}{q^0k^0}\sum_{\alpha,\beta}[u_\xi^{(\alpha)}(k)u_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x+\mathrm{i}q\cdot y}\\
&+v_\xi^{(\alpha)}(k)v_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x-\mathrm{i}q\cdot y}](2\pi)^3\frac{q^0}{m}\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\delta_{\alpha\beta}\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\sum_\alpha[u_\xi^{(\alpha)}(k)u_\eta^{(\alpha)+}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\\
&+v_\xi^{(\alpha)}(k)v_\eta^{(\alpha)+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\sum_\alpha[u_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{u}_{\eta'}^{(\alpha)}(k)+v_\xi^{(\alpha)}(\tilde{k})\bar{v}_{\eta'}^{(\alpha)}(\tilde{k})]\gamma_{\eta'\eta}^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\\
&\qquad\qquad(\text{其中},\tilde{k}^\mu=(k^0,-\vec{k}))\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\ \frac{1}{2m}(\not{k}+m+\not{\tilde{k}}-m)_{\xi\eta'}\gamma_{\eta'\eta}^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\ \frac{1}{2m}2k^0\gamma_{\xi\eta'}^0\gamma_{\eta'\eta}^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\delta_{\xi\eta}\\
=&\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{\xi\eta}
\end{aligned}
$$

其中利用了自旋求和公式

$$
\sum_{\alpha=1,2}u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)=\frac{\not{k}+m}{2m},\ \sum_{\alpha=1,2}v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)=\frac{\not{k}-m}{2m}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\{\psi_\xi(\vec{x},t),\psi_\eta(\vec{y},t)\}=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{q^0}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\\
&\times\sum_{\alpha,\beta=1,2}\{\underline{b_\alpha(k)}u_\xi^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\underline{d_\alpha^+(k)}v_\xi^{(\alpha)}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},\\
&\underline{b_\beta(q)}u_\eta^{(\beta)}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}+\underline{d_\beta^+(q)}v_\eta^{(\beta)}(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}\}\\
=&0
\end{aligned}
$$

因为下划线的算符彼此反对易. 同理,

$$
\begin{aligned}
\{\psi_\xi^+(\vec{x},t),\psi_\eta^+(\vec{y},t)\}=&\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{q^0}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\ \frac{m}{k^0}\\
&\times\sum_{\alpha,\beta=1,2}\{\underline{b_\alpha^+(k)}u_\xi^{(\alpha)+}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+\underline{d_\alpha(k)}v_\xi^{(\alpha)+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},\\
&\underline{b_\beta^+(q)}u_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot y}+\underline{d_\beta(q)}v_\eta^{(\beta)+}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\}\\
=&0
\end{aligned}
$$

十、量子 Dirac 场的广义角动量为厄密算符即 $M^{\mu\nu}=(M^{\mu\nu})^{+}$ 的证明

$$M^{\mu\nu}=\int \mathrm{d}^3x\psi^{+}\left[\mathrm{i}(x^{\mu}\partial^{\nu}-x^{\nu}\partial^{\mu})+\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right]\psi,$$

$$(M^{\mu\nu})^{+}=\int \mathrm{d}^3x\left[-\mathrm{i}(x^{\mu}\partial^{\nu}\psi^{+}-x^{\nu}\partial^{\mu}\psi^{+})\psi+\psi^{+}\frac{\sigma^{\mu\nu+}}{2}\psi\right]$$

$$(M^{ij})^{+}=\int \mathrm{d}^3x\left[-\mathrm{i}(x^{i}\partial^{j}\psi^{+}-x^{j}\partial^{i}\psi^{+})\psi+\psi^{+}\frac{\sigma^{ij+}}{2}\psi\right]\quad(\text{作分部积分})$$

$$=\int \mathrm{d}^3x\left[\mathrm{i}(\underline{g^{ij}\psi^{+}\psi}+x^{i}\psi^{+}\partial^{j}\psi\ \underline{-g^{ij}\psi^{+}\psi}-x^{j}\psi^{+}\partial^{i}\psi)+\psi^{+}\frac{\sigma^{ij+}}{2}\psi\right]$$

（注意 $\sigma^{ij+}=\sigma^{ij}$；下划线的两项相消）

$$=\int \mathrm{d}^3x\psi^{+}\left[\mathrm{i}(x^{i}\partial^{j}-x^{j}\partial^{i})+\frac{\sigma^{ij}}{2}\right]\psi$$

$$=M^{ij}$$

$$(M^{i0})^{+}=\int \mathrm{d}^3x\left[-\mathrm{i}(x^{i}\partial^{0}\psi^{+}-x^{0}\partial^{i}\psi^{+})\psi+\psi^{+}\frac{\sigma^{i0+}}{2}\psi\right]$$

利用 Heisenberg 方程

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma_{\mu}\overleftarrow{\partial}^{\mu}-m)=0$$

即

$$-\mathrm{i}\partial^{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}-m\bar{\psi}=0$$

或

$$-\mathrm{i}\partial^{0}\psi^{+}\gamma^{0}\gamma_{0}-\mathrm{i}\partial^{k}\bar{\psi}\gamma_{k}-m\bar{\psi}=0$$

得

$$-\mathrm{i}\partial^{0}\psi^{+}=\mathrm{i}\partial^{k}\bar{\psi}\gamma_{k}+m\bar{\psi}$$

考虑到此式以及

$$\sigma^{i0}=\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^{i}\gamma^{0}-\gamma^{0}\gamma^{i})=\mathrm{i}\gamma^{i}\gamma^{0},$$

$$\sigma^{i0+}=-\mathrm{i}\gamma^{0+}\gamma^{i+}=\mathrm{i}\gamma^{0}\gamma^{i}=-\mathrm{i}\gamma^{i}\gamma^{0}=-\sigma^{i0}$$

我们可以写

$$(M^{i0})^{+}=\int \mathrm{d}^3x\left[x^{i}(\mathrm{i}\partial^{k}\bar{\psi}\gamma_{k}+m\bar{\psi})\psi+\mathrm{i}x^{0}(\partial^{i}\psi^{+})\psi-\psi^{+}\frac{\sigma^{i0}}{2}\psi\right]\quad(\text{作分部积分})$$

$$=\int \mathrm{d}^3x\left[-\mathrm{i}g^{ik}\bar{\psi}\gamma_{k}\psi-\mathrm{i}x^{i}\bar{\psi}\gamma_{k}\partial^{k}\psi+x^{i}m\bar{\psi}\psi-\mathrm{i}x^{0}\psi^{+}\partial^{i}\psi-\psi^{+}\frac{\sigma^{i0}}{2}\psi\right]$$

$$=\int \mathrm{d}^3x\left[\psi^{+}(-\mathrm{i}\gamma^{0}\gamma^{i})\psi-x^{i}\bar{\psi}\ \underline{(\mathrm{i}\gamma_{k}\partial^{k}-m)\psi}-\mathrm{i}x^{0}\psi^{+}\partial^{i}\psi-\psi^{+}\frac{\sigma^{i0}}{2}\psi\right]$$

$$=\int \mathrm{d}^3x\left[\psi^{+}\left(\sigma^{i0}-\frac{\sigma^{i0}}{2}\right)\psi-x^{i}\bar{\psi}\ \underline{(-\mathrm{i}\gamma_{0}\partial^{0})\psi}-\mathrm{i}x^{0}\psi^{+}\partial^{i}\psi\right]$$

$$= \int \mathrm{d}^3x\left[\psi^+\frac{\sigma^{i0}}{2}\psi + \psi^+\,\mathrm{i}(x^i\partial^0 - x^0\partial^i)\psi\right]$$

$$= \int \mathrm{d}^3x\psi^+\left[\mathrm{i}(x^i\partial^0 - x^0\partial^i) + \frac{\sigma^{i0}}{2}\right]\psi$$

$$= M^{i0}$$

以上推导中，下划线部分再次使用了 Dirac 方程. 于是$(M^{\mu\nu})^+ = M^{\mu\nu}$得证，$M^{\mu\nu}$是厄密算符.

十一、Dirac 场非等时反对易子 Lorentz 不变性的证明

根据(3.194a)式，Dirac 场非等时反对易子定义为

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\} \equiv \psi(x)\bar{\psi}(y) + [\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(y)\psi^{\mathrm{T}}(x)]^{\mathrm{T}} = (\mathrm{i}\not{\partial}_x + m)\mathrm{i}\Delta\ (x-y) \quad (\mathrm{A})$$

其中 T 表示旋量的转置. 证明中对于场的变换，我们将借助经典场的变换形式. 在 Lorentz 变换下，坐标和场的变换分别为

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \partial_{x^\mu} \to \partial_{x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_{x^\nu};$$

$\psi(x) \to \psi'(x') \equiv U^{-1}(\Lambda)\psi(x')U(\Lambda) = S(\Lambda)\psi(x)$，因而 $\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$；

$\bar{\psi}(y) \to \bar{\psi}'(y') \equiv U^{-1}(\Lambda)\bar{\psi}(y')U(\Lambda) = \bar{\psi}(y)S^{-1}(\Lambda)$，因而 $\bar{\psi}(y) = \bar{\psi}'(y')S(\Lambda)$；

这里 $U(\Lambda)$是 Hilbert 空间中的幺正算符，$S(\Lambda)$是旋量空间中的 4×4 矩阵.

于是

$$\psi(x)\bar{\psi}(y) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')\bar{\psi}'(y')S(\Lambda),$$

$$\begin{aligned}[\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(y)\psi^{\mathrm{T}}(x)]^{\mathrm{T}} &= [(\bar{\psi}'(y')S)^{\mathrm{T}}(S^{-1}\psi'(x'))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &= [S^{\mathrm{T}}\bar{\psi}'^{\mathrm{T}}(y')\psi'^{\mathrm{T}}(x')(S^{-1})^{\mathrm{T}})]^{\mathrm{T}} \\ &= S^{-1}(\Lambda)[\bar{\psi}'^{\mathrm{T}}(y')\psi'^{\mathrm{T}}(x')]^{\mathrm{T}}S(\Lambda).\end{aligned}$$

注意在做旋量的转置运算时，场算符乘积$\bar{\psi}'^{\mathrm{T}}(y')\psi'^{\mathrm{T}}(x')$中的算符次序是不能变动的. 因此(A)式变换成

$$S^{-1}(\Lambda)\{\psi'(x'),\bar{\psi}'(y')\}S(\Lambda) = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_{x^\mu} + m)\mathrm{i}\Delta\ (x-y)$$

或

$$\begin{aligned}\{\psi'(x'),\bar{\psi}'(y')\} &= [\mathrm{i}S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\partial_{x^\mu} + m]\mathrm{i}\Delta(x-y) \\ &= [\mathrm{i}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu\partial_{x^\mu} + m]\mathrm{i}\Delta(x-y) \\ &= [\mathrm{i}(\Lambda^{\mathrm{T}})^\mu{}_\nu\gamma^\nu\partial_{x^\mu} + m]\mathrm{i}\Delta(x-y) \\ &= [\mathrm{i}\gamma^\nu(\Lambda)_\nu{}^\mu\partial_{x^\mu} + m]\mathrm{i}\Delta(x-y) \\ &= (\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_{x'^\nu} + m)\mathrm{i}\Delta(x'-y') \\ &= (\mathrm{i}\not{\partial}_{x'} + m)\mathrm{i}\Delta(x'-y')\end{aligned}$$

其中我们已经考虑了 Lorentz 变换的基本性质

$$\Lambda^{\mathrm{T}}g\Lambda = g \to (\Lambda^{\mathrm{T}})^\mu{}_\nu g^{\nu\sigma}\Lambda_{\sigma\rho} = g^\mu{}_\rho$$

$$\to (\Lambda^{\mathrm{T}})^\mu{}_\nu\Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\mu_\rho$$

从而有

$$(\Lambda^{\mathrm{T}})^{\mu}_{\ \nu}=(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}$$

以及函数 $\Delta(x-y)$ 的 Lorentz 不变性

$$\Delta(x-y)=\Delta(x'-y')$$

由此我们证明了，在带“′”的惯性系内，Dirac 场的非等时反对易子的形式保持不变.

十二、Dirac 旋量正频解的电荷共轭运算[(3.247)式]

根据(3.244)式，Dirac 旋量正频解取为

$$u(k,\ \pm)=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}$$

其中 $\varphi_{\pm}(\hat{k})$ 为二维旋量. 令 $C=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$ 表示电荷共轭矩阵，则 $u(k,\ \pm)$ 的电荷共轭定义为

$$v(k,\pm)=C\bar{u}^{\mathrm{T}}(k,\pm)=C\gamma^{0^{\mathrm{T}}}u^{*}(k,\pm)$$

$$=C\gamma^{0^{\mathrm{T}}}CC\frac{\not{k}^{*}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}CC\begin{pmatrix}\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}=\gamma^0\frac{\not{k}^{+}-m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}C\begin{pmatrix}\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\not{k}-m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\gamma^0C\begin{pmatrix}\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}(-\gamma^0C)\begin{pmatrix}\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\sigma^2\\-\mathrm{i}\sigma^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\\0\end{pmatrix}=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{i}\sigma^2\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi_{\pm}(\hat{k})\end{pmatrix},$$

$$\chi_{\pm}(\hat{k})=-\mathrm{i}\sigma^2\varphi^{*}_{\pm}(\hat{k})$$

此即(3.247)式. 上述推导中，我们已经利用了关系

$$C\gamma^{0^{\mathrm{T}}}C=\gamma^0,\quad C\gamma^{\mu^{*}}C=\gamma^{\mu^{+}},\quad CmC=-m,\quad \gamma^0\not{k}^{+}\gamma^0=\not{k}$$

参考文献

（打＊号者为主要参考著作）

[1] Schiff L I. Quantum Mechanics. 3rd Edition. New York: Mc - Graw - Hill, 1968.

[2] 曾谨言. 量子力学. 北京：科学出版社，1982.

[3] Schrödinger E. Ann. der Physik, 1926, 81: 109.
Gordon W. Zeit. Physik, 1926, 40: 117.
Klein O. Zeit. Physik, 1926, 37: 895; 1927, 41: 407.

[4] Dirac P A M. Proc. Roy. Soc. (London), 1928, A117: 610; 1928, A118:351.
狄拉克 P A M. 量子力学原理. 第四版. 北京:科学出版社，1965. 第十一章.

[5] 比约肯 J D，德雷尔 S D. 相对论量子力学. 北京：科学出版社，1984.

[6] Pauli W, Weisskopf V. Helv. Phys. Acta., 1934, 7: 709.

[7] Heisenberg W, Pauli W. Zeit. Physik, 1929, 56: 1; 1930, 59: 168.

[8] Fermi E. Rev. Mod. Phys., 1932, 4: 87.
Rosenfeld L. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1931, 1: 25.
Heitler W. The Quantum Theory of Radiation. 3rd Edition. Oxford: Mc - Graw - Hill, 1954.

[9] Dirac P A M. Physikalische Zeitschrift Sowjetunion, Band 3, Heft,1933, 1: 64.
Feynman R P. Rev. Mod. Phys. 1948, 20: 267; Phys. Rev. 1950, 80: 440.
Feynman R P, Hibbs A R. *Quantum Mechanics and Path Integral*. New York: McGraw - Hill, 1965.

[10] Abers E S, Lee B W. Phys. Rep. C, 1973, 9: 1.
Fadeev L D. in Methods in Field Theory. eds. Balian R, Zinn - Justin J. Amsterdam: North - Holland, 1976. 1.

＊[11] 比约肯 J D，德雷尔 S D. 相对论量子场. 北京：科学出版社，1984.

＊[12] Ramond P. Field Theory: A Modern Primer. 2nd Edition. Massachusetts: Benjamin/Cummings, 1990.

＊[13] Itzykson C, Zuber J - B. Quantum Field Theory. New York:Mcgraw - Hill, 1981.

＊[14] Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to Quantum Field Theory.
Westview, 1995. reprinted by Beijing: Beijing World Publishing Corp., 2006.

＊[15] Weinberg S. The Quantum Theory of Fields: Vol. I. New York: Cambridge University Press, 1995.

[16] 参阅 Itzykson C, Zuber J - B. Quantum Field Theory. New York: Mcgraw - Hill, 1981:42 - 44.

＊[17] 李政道. 粒子物理和场论简引. 北京:科学出版社，1984.

[18] Casimir H B G. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap. Ser. B, 1948, 51: 793.
Itzykson C, Zuber J - B. Quantum Field Theory. New York: Mcgraw - Hill, 1981. 138.

[19] Spergel D N, et al. [WMAP Collaboration]. Astrophys. J. Suppl., 2003, 148:175; astro - ph/

0603449 - 452.

M. Tegmark et al. [SDSS collaboration]. Phys. Rev. D, 2004, 69: 103501.

[20] 例如,参阅评论文章 Copeland E J, Sami M, Tsujikawa S. Dynamics of Dark Energy. Int. J. Mod. Phys., 2006, D15: 1753 - 1936.

[21] Lurié D. Particles and Fields. New York: John Wiley & Sons, 1968.

[22] Gupta S N. Proc. Phys. Soc., 1950, A63: 681.

Bleuler K. Helv. Phys. Acta., 1950, 23: 567. Mcgraw - Hill, 1981. 142.

[23] 朱洪元. 量子场论. 北京: 科学出版社,1960.

[24] Schweber S S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York: Row, Peterson and Co., 1961: 320 - 325.

Lee T D, Nauenberg M. Phys. Rev., 1964, 133: B1549, Appendix A.

[25] Wick G C. Phys. Rev., 1950, 80: 268.

[26] Pauli W, Villars F. Rev. Mod. Phys., 1949, 21: 434.

[27] 't Hooft G, Veltman M. Nucl. Phys. B, 1972, 44: 189.

[28] de Wit B, Freedman D Z. Supergravity - The Basics and Beyond. Bonn Superym. ASI, 1984: 0135 (QCD161: N16: 1984)

[29] Ward J C. Phys. Rev. 1950, 78: 182.

[30] Takahashi Y. Nuovo Cim., 1957, 6: 371.

[31] Gross D J. Application of Renormalization Group to High Energy Physics. in Methods in Fields Theory, eds by Balian R, Zinn - Justin J. Amsterdam: North - Holland, 1976. 140.

[32] Schwinger J. Phys. Rev., 1948, 73: 416.

[33] Lamb W E, Retherford R C. Phys. Rev., 1947, 72: 241.

Triebwasser S, Dayhoff E S, Lamb W E. Phys. Rev., 1953, 89: 98.

[34] Bethe H A. Phys. Rev., 1947, 72: 339.

Kroll N M, Lamb W E. Phys. Rev., 1949, 75: 388.

French J B, Weisskopf V F. Phys. Rev. 1949, 75: 1240.

[35] Weinberg S. Phys. Rev., 1960, 118: 838.

[36] Jacob M, Wick G C. Ann. Phys., 1959, 7: 404.

索　引

（本书所使用的部分名词索引，英文按英文字母顺序排列，中文按汉语拼音字母顺序排列。）

A

暗能量　dark energy　63

B

Bose – Einstein 统计　Bose – Einstein statistics　64
编时乘积　time – ordered product　70,80,91,132
标量场　scalar field　18,31,59,67,92
标量光子　scalar photon　77
表观发散度　superficial degree of divergence　213,223
不定度规量子化　indefinite metric quantization　73
不可重整性　non – renormalizability　226
不连接图　disconnected diagram　157

C

Cabibbo 角　Cabibbo angle　119
Califord 代数　Califord algebra　20
Casimir 算符　Casimir operator　14
Casimir 效应　Casimir effect　63
Compton 散射　Compton scattering　172
产生和消灭算符　creation and annihilation operator　53,64,74,82
重整化　renormalization　182
重整化的 Green 函数　renormalized Green function　215
重整化的拉氏密度　renormalized Lagrangian　212
重整化的裸参数观点　point of view from bare parameter on renormalization　195

D

Dirac 表象　Dirac representation　20
Dirac 方程　Dirac equation　2,20,34
Dirac 旋量场　Dirac spinor field　20,22
带电流　charged current　117,119
等时对易子　equal – time commutator　59,74,83

等效场论 effective field theory 226
电磁流守恒 electromagnetic current conservation 108
电荷共轭 charge conjugation 25,44,98
电荷屏蔽 charge screening 218
电荷守恒 charge conservation 116
定域场论 local field theory 4,26
定域对称性 local symmetry 105
抵消项 counterterm 154,193,199,206

E

Euler – Lagrange 方程 Euler – Lagrange equation 27

F

Fermi – Dirac 统计 Fermi – Dirac statistics 89
Fermi 常数 G Fermi constant G 118
Feynman 参数化 Feynman parametrization 186
Feynman 传播子 Feynman propagator 70,80,91
Feynman 规范 Feynman gauge 73
Feynman 规则 Feynman rules 148,161,164,194,199
Fock 空间 Fock space 65,76,84
Furry 定理 Furry theorem 172,203
反常磁矩 anomalous manetic moment 218
反对易子 anticommutator 81
反幺正算符 antiunitary operator 102
非最小(电磁)耦合 non – minimal (electromagnetic) coupling 226
分立对称性 descrete symmetry 92
辐射规范 radiation gauge 47,73
负模方态 state with negative square norm 76
复标量场 complex scalar field 67

G

Gordon 关系 Gorden relation 206,220
Green 函数 Green function 71,184,215
(场的)共轭动量 (field's) conjugate momentum 55
广义的角动量 generalized angular momentum 33,35,48
规范不变性 gauge invariance 47,105

H

Heisenberg 方程 Heisenberg equation 51

Heisenberg 图像	Heisenberg picture(representation) 51,127
helicity	15,99
Hilbert 空间	Hilbert space 53,57
哈氏密度	Hamiltonian density 56,109
横光子	transverse photon 77
红外发散	infrared divergence 196,201,221,222

J

减除	subtraction 154,192,198,206
截面	cross section 165
经典场	classical field 6
γ 矩阵	γ matrix 20

K

Klein – Gordon 方程	Klein – Gordon equation 2,32
蝌蚪图	tadpole diagram 163
可重整化的	renormalizable 113,215,223

L

Lamb 位移	Lamb shift 221
Landau 规范	Landau gauge 81
Landau 奇异性	Landau singularity 218
Legendre 变换	Legendre transformation 50,55
Lorentz – Dirac 方程	Lorentz – Dirac equation 26
Lorentz 变换(LT)	Lorentz transformation (LT) 9
Lorentz 条件	Lorentz condition 47
LT 生成元	LT generator 12,58
拉氏密度	Lagrangian 26
连接图	connected diagram 159
链近似	chain approximation 184,192,198
量子电动力学(QED)	quantum electrodynamics (QED) 4,107,135
量子反常	quantum anomaly 59
裸参数	bare parameter 130,154,215
裸场	bare field 215

M

Majorana 旋量	Majorana spinor 25
Maxwell 方程	Maxwell equation 45

N

Noether 定理 Noether theorem 8,29
内禀宇称 intrinsic parity 93,96
内部对称性 internal symmetry 33,35
能量 - 动量张量 energy - momentum tensor 32,34,48

P

Pauli - Lubanski 四矢量 Pauli - Lubanski four - vector 14
Pauli - Villars 正规化 Pauli - Villars regularization 155,156
PCT 定理 PCT theorem 122
Poincaré 变换 Poincaré transformation 13
Poincaré 代数 Poincaré algebra 14
Poincaré 群的表示 representation of Poincaré group 14
proper 顶角 proper vertex 193
平动 boost 10

Q

奇异数 strangeness 70,119
强子弱流 weak current of hadrons 118
圈图和树图 loop diagram and tree diagram 151
圈图展开 loopwise expansion 183

R

软轫致辐射 soft bremsstrahlung 221,222
弱电统一规范理论 united gauge theory of electroweak interactions 4,119,229

S

Sine - Gordon 拉氏密度 Sine - Gordon Lagrangian 32
SO(3,1)代数 SO(3,1) algebra 12
S 矩阵 *S* matrix 127,130,134
色散关系 dispersion relation 192
时空平移变换 space - time translation transformation 13
时空平移生成元 space - time translation generator 13,58
实光子与虚光子 real photon and virtual photon 150
矢量场 vector field 18
手征不变性 chiral invariance 41
手征性与 helicity chirality and helicity 42

寿命	lifetime	165
μ 衰变	μ decay	178
四 Fermion 弱作用	four fermion weak interaction	117
四动量	four – momentum	13,32,34,48
算符的收缩	contraction of operators	137

T

'tHooft – Veltman 维数正规化	'tHooft – Veltman dimension regularization	155,184
同位旋 SU(2)	isospin SU(2)	114
投影算符	projective operator	37,41
拓扑权	topological weight	149
拓扑权因子	topological weight factor	149

U

U 矩阵	U matrix	127,129
U(1)规范场	U(1) gauge field	105
U(1)相位不变性	U(1) phase invariance	35,68

W

Ward 恒等式	Ward identity	201
Ward – Takahashi 恒等式	Ward – Takahashi identity	205
Weyl 旋量	Weyl spinor	25,43
Weinberg 定理	Weinberg theorem	224
Wick 定理	Wick theorem	136
Wick 转动	Wick rotation	187,197
微观因果性	microcausality	66
唯象相互作用	phenomenological interactions	112
物理质量	physical mass	131,135

X

相乘性重整化	multiplicative renormalization	216
相互作用图像	interaction picture(representation)	127
协变微商	covariant derivative	106
旋量双线性量	bilinear product from spinors	23,124

Y

Yang – Mills 规范场	Yang – Mills gauge field	107
Yukawa 耦合	Yukawa coupling	113

幺正性 unitarity 129,165
一粒子不可约图 one - particle irreducible diagram 192
一维谐振子 one - dimension harmonic oscillator 51
有效发散度 effective divergent degree 213
宇称 parity 92
原始发散 primitive divergence 223

Z

张量场 tensor field 18
真空 vacuum 63
真空极化 vacuum polarization 159,185
整体变换 global transformation 29
正反粒子 particle and antiparticle 67,85
正规乘积 normal ordering 63,84
正规化 regularization 154
正则变换 canonical transformation 28
正则对易关系 canonical commutation relation 50
正则量子化 canonical quantization 50,54
质壳条件 mass - shell condition 145
质量重正化 mass renormalization 154
中性流 neutral current 117,119
重子数守恒 baryon number conservation 116
转动 rotation 10
紫外发散 ultraviolet divergence 148,154
自能 self energy 135,151,153
自然单位 natural unit 1
自旋与统计 spin and statistics 89
纵光子 longitudinal photon 77
最小电磁耦合 minimal electromagnetic coupling 107
最小减除方案 minimal subtraction scheme 217
最小作用原理 least action principle 25
作用量 action 6,25