“十二五”国家重点图书出版规划

物 理 学 名 家 丛 书

量子场论

Quantum Field Theory

段一士 著

高等教育出版社

“十二五”国家重点图书出版规划

物 理 学 名 家 丛 书

量子场论

Liangzi Changlun

Quantum Field Theory

段一士 著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是作者长期讲授量子场论课程的经验总结，本书的讲义在兰州大学使用多年，是我国最早的量子场论教材之一。

本书第一章介绍了量子场论的研究对象：粒子和标准模型，便于初学者结合粒子物理这个量子场论的研究对象学习场论。第二章是经典场论，从四维时空的力学量算符化导出几类粒子的相对论量子力学波动方程。以作者早期提出的广义守恒定理，统一描述了场的守恒定律、守恒荷与微量变换的关系。第三章是自由场的量子化，第四章是场的相互作用 S 矩阵，均以量子电动力学为主，强调其方法可以推广到弱电统一理论和量子色动力学。本书内容化难为易、言简意赅、一语道破而不失深刻内涵。

本书可作为高等学校量子场论课程的教材，也可供粒子物理学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子场论/段一士著. --北京：高等教育出版社，2015.12

(物理学名家丛书)

ISBN 978-7-04-041823-1

Ⅰ.①量… Ⅱ.①段… Ⅲ.①量子场论 Ⅳ.①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 017104 号

策划编辑 高 建　　责任编辑 张海雁　　封面设计 杨立新　　版式设计 王艳红

插图绘制 杜晓丹　　责任校对 王 雨　　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社

社　　址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100120

印　　刷 北京信彩瑞禾印刷厂

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 17.5

字　　数 310 千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

版　　次 2015 年 12 月第 1 版

印　　次 2015 年 12 月第 1 次印刷

定　　价 37.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 41823-00



段一士，男，汉族，祖籍四川武胜县，1927 年生于北京，著名理论物理学家，教授，博士生导师。

1951 年毕业于南京大学前身金陵大学，1953 年至 1956 年在苏联莫斯科大学物理系学习，获副博士学位，1956 年至 1957 年在苏联 Dubna 联合核子研究所工作，1957 年回国后至今在兰州大学物理系（现物理学院）任教，历任兰州大学物理系主任，理论物理研究所所长、名誉所长，中国高能物理学会理事，中国物理学会理事，甘肃省物理学会理事长、名誉理事长。

从事群论、量子场论、粒子物理、广义相对论、拓扑场论等方面的教学和科研工作，取得了许多重要研究成果。在国际上首先提出引力场的广义协变守恒定律、规范势可分解及其内部结构理论，并建立了拓扑场论中严格的拓扑流理论。多次受邀赴美国、意大利等国家讲学。多年来为我国培养了许多理论物理方面的优秀人才，在国内外享有崇高声誉，曾获国家自然科学奖、教育部科技进步奖、中国人民解放军科技进步奖。1984 年被评为全国优秀教师，1990 年被评为全国高等学校先进科技工作者。

《物理学名家丛书》编委会

主　编

冯　端　院士　南京大学

编　委 (按拼音排序)

陈式刚　院士　北京应用物理与计算数学研究所

段一士　教授　兰州大学

龚　敏　教授　四川大学

郭光灿　院士　中国科学技术大学

胡　岗　教授　北京师范大学

金晓峰　教授　复旦大学

马伯强　教授　北京大学

母国光　院士　南开大学

阮　东　教授　清华大学

石　兢　教授　武汉大学

唐孝威　院士　浙江大学

陶瑞宝　院士　复旦大学

田德诚　教授　武汉大学

王克明　院士　山东大学

邢定钰　院士　南京大学

于　渌　院士　中国科学院理论物理研究所

张进修　教授　中山大学

赵光达　院士　北京大学

赵忠贤　院士　中国科学院物理研究所

郑志刚　教授　北京师范大学

朱邦芬　院士　清华大学

“十二五”国家重点图书出版规划

物理学名家丛书

978-704031147-1	半导体微纳电子学	夏建白
978-704031205-8	物理学中的群论	陶瑞宝
978-704019898-0	量子统计物理学	杨展如
978-704021960-9	现代天体力学导论	孙义燧等
978-704009925-6	高等量子力学 (第二版)	喀兴林
978-704011576-5	固体理论 (第二版)	李正中
978-704006997-6	群论及其在固体物理中的应用	徐婉棠
978-704041823-1	量子场论	段一士

前　言

量子场论是研究粒子的理论。20 世纪 20 年代量子力学建立不久，结合相对论，量子场论就开始建立，并且一直是理论物理最活跃的前沿学科之一。量子场论被广泛应用于统计物理学、天体物理学、固体物理学、高能物理学、量子引力等学科和领域。由于量子场论是具有相当深度和难度的现代物理理论，从而使初学者遇到不少困难。大多数量子场论教材起点较高，更使初学者难以适应。鉴于此，作者深感有编写一本比较适用于初学者的教科书的必要。作者 1957 年从苏联莫斯科大学研究生毕业回国后建立兰州大学理论物理专业，编写了量子场论教材并在兰州大学开始主讲这门课程，同时还自编教材给本科生开设了群论和广义相对论课程，持续至今。

本书主要阐述量子场论的基础。第一章绪论主要介绍量子场论的研究对象即粒子及其反应，简单介绍了量子电动力学方法的优点和局限。第二章第一部分主要讲相对论情况下由粒子物理量的算符化得到经典场的各种运动方程，第二部分以作者发现的广义守恒定理 I 和 II 为基础，建立了各种场在相应变换下的守恒定理和守恒量。第三章讲自由场的二次量子化和传播子。第四章讲场的相互作用和 S 矩阵，用微扰论方法导出电磁作用时粒子的反应截面和衰变寿命。

本书的讲义在兰州大学使用多年，得到了学生的普遍好评。本书在出版过程中，得到了高等教育出版社的大力支持，在此表示感谢。

谬误之处，敬希读者指正。

段一士

2014 年 12 月于兰州

目　录

第一章　绪论 ····· 1

§ 1　组成物质的粒子 ····· 1

§ 2　量子场论研究的对象 ····· 5

第二章　场的运动方程式和守恒定律 ····· 7

§ 3　狭义相对论与标量场方程式 ····· 7

§ 4　矩阵空间与旋量 ····· 12

§ 5　旋量场方程式 ····· 18

§ 6　向量场方程式 ····· 30

§ 7　场函数的变换规律 ····· 33

§ 8　场论中的 Lagrange(拉格朗日) 原理 ····· 38

§ 9　经典力学中的广义守恒原理 ····· 46

§ 10　场论中的广义守恒原理 ····· 51

§ 11　能量、动量、张量与能量、动量守恒定律 ····· 57

§ 12　角动量张量与角动量守恒定律 ····· 62

§ 13　电流密度向量与电荷守恒定律 ····· 69

§ 14　经典场论的总结与常用单位 ····· 72

第三章　自由场的二次量子化 ····· 77

§ 15　二次量子化的基础和量子场论的基本假设 ····· 77

§ 16　Schrödinger 表象与 Heisenberg 表象 ····· 82

§ 17　$\delta(x)$、$\delta_{\pm}(x)$、$\theta^{\pm}(x)$、$\gamma(x)$ 和 $\varepsilon(x)$ 等五种函数的性质 ····· 86

§ 18　产生和消灭粒子的算符与场函数的傅里叶表示 ····· 92

§ 19　实标量场的二次量子化 ····· 99

§ 20　实标量场函数 $\varphi(x)$ 的对易关系式与 $\Delta(x)$、$\Delta^{(1)}(x)$ 函数 ····· 109

§ 21　复标量场的二次量子化 ····· 113

§ 22　向量场或电磁场的二次量子化 ····· 119

§ 23　电磁场函数 $A_i(x)$ 的对易关系式与 $D(x)$、$D^{(1)}(x)$ 函数 ····· 132

§ 24　$\Lambda_{\pm}$ 和 $\Sigma_{\pm}$ 投影算符与旋量场函数的傅里叶表示 ····· 135

§ 25　旋量场的二次量子化 ····· 146

§ 26　旋量场函数$\psi(x)$和$\overline{\psi}(x)$的反对易关系式与$S(x)$、$S^{(1)}(x)$两矩阵函数 ····· 154

§ 27 电荷共轭变换 ····· 158
§ 28 场方程式的格林函数与 Feynman 函数 ····· 163
§ 29 $N-$ 乘积、$p-$ 乘积和 $T-$ 乘积 ····· 172
§ 30 场论中常用奇异函数的环路积分表示 ····· 178
第四章 场的相互作用与 S 矩阵 (量子电动力学) ····· 185
§ 31 场的相互作用的 Lagrange 函数 ····· 185
§ 32 场在相互作用情况下的运动方程式与相互作用哈密顿 $\hat{H}$ ····· 190
§ 33 相互作用表象 ····· 194
§ 34 $U(t,t_0)$ 矩阵和它的性质 ····· 198
§ 35 S 矩阵和它在量子电动力学中的形式 ····· 205
§ 36 $T-$ 乘积展开的 Wick 定理和 S 矩阵的展开式 ····· 209
§ 37 S 矩阵的 Feynman 图解 ····· 215
§ 38 Furry 关于电子封闭内线的定理 ····· 222
§ 39 S 矩阵的矩阵元素 ····· 225
§ 40 S 矩阵的动量表象 ····· 231
§ 41 粒子反应的概率和截面 ····· 238
§ 42 光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式 ····· 244
§ 43 在相对论情况下的 Rutherford 散射问题 ····· 248
§ 44 光子和电子的散射 (Compton 效应) ····· 251
§ 45 正负电子对湮没为两个光子 ····· 260
附录：关于 Feynman 图解问题的补充材料 ····· 267

第一章 绪 论

§1 组成物质的粒子

按照现代的观点, 物质是由粒子组成的. 这里所谓的物质, 应该包括组成物体的原子, 太空中飞行着的宇宙射线, 以及它们与原子撞击所产生的新粒子.

随着科学的发展, 粒子的概念有了很大的改变. 人类曾认为原子是物质的最小粒子, 而今大家都知道原子是由原子核中的质子、中子以及围绕着原子核运动的电子所组成的. 到现在为止, 已经发现的粒子有数百种之多, 而物理学家还进行着对于质子和中子内部结构的研究.

在物理学的发展中, 最早发现的粒子有光子 (γ)、电子 (e^-) 和质子 (p). 因此, 现代粒子的分类, 通常以这三种粒子的静止质量为标准, 详述如下:

1. 轻子

静止质量介于光子与电子的静止质量之间的粒子称为轻子, 即

$$m_{光子} \leqslant m_{轻子} \leqslant m_{电子}$$

轻子有以下几种:

(1) 光子 γ

静止质量 $m_\gamma = 0$.

(2) 中微子 ν 和反中微子 $\tilde{\nu}$

静止质量也为零. 但与光子不同, 光子的自旋为 1, 而中微子与反中微子的自旋则为 1/2.

(3) 电子 e^- 与正电子 e^+

静止质量 $m_e = 0.910\ 9 \times 10^{-27}$ g. 正电子与电子相遇会湮没为数个光子,即

$$e^+ + e^- \longrightarrow n\gamma$$

2. 介子

静止质量介于电子与质子的静止质量之间的粒子称为介子, 即

$$m_{电子} < m_{介子} < m_{质子}$$

现在已经发现的介子有下列数种:

(1) $\mu^{\pm}$ 子

静止质量为 $206.7m_e$, μ 子是不稳定的粒子, 可衰变为正负电子、中微子和反中微子:

$$\mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$$

(2) $\pi^{\pm}$ 与 π^0 介子

$\pi^{\pm}$ 介子的静止质量约为 $273m_e$.π^0 介子的质量约为 $264m_e$.

π 介子也是不稳定的粒子, 其衰变的方式如下:

$\pi^{\pm} \longrightarrow \mu \pm \pi + \nu$

$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$

(3) $K^{\pm}$ 与 K^0 介子

静止质量约为 $965m_e$, K 介子依其衰变后产生的粒子不同, 而分为下列五种:

① K_{π^2} 介子

$K^{\pm}_{\pi^2} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^0$

$K^0_{\pi^2} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\mp}$ (或 $\pi^0 + \pi^0$)

K_{π^2} 介子又名 θ 介子 $K^{\pm}_{\pi^2} \equiv \theta^{\pm}, K^0_{\pi^2} \equiv \theta^0$

② K_{π^3} 介子

$K^{\pm}_{\pi^3} \longrightarrow \pi^{\pm} + \pi^{\mp} + \pi^{\pm}$ (或 $\pi^{\pm} + \pi^0 + \pi^0$)

$K^0_{\pi^3} \longrightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ (这个衰变方式存在与否, 尚未最后肯定)

K_{π^3} 介子又名 τ 介子,$K^{\pm}_{\pi^3} \equiv \tau^{\pm}, K^0_{\pi^3} \equiv \tau^0$

③ K_{μ^2} 介子

$K^{\pm}_{\mu^2} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu$

④ K_{μ^3} 介子

$K^{\pm}_{\mu^3} \longrightarrow \mu^{\pm} + \nu + \pi^0$

⑤ K_{e^3} 介子

$K^{\pm}_{e^3} \longrightarrow e^{\pm} + \nu + \pi^0$

以上五种 K 介子, 其本身是不同的粒子, 还是一种粒子而有不同的衰变方式, 这个问题现在还没有最后肯定.

3. 核子

组成原子核的质子和中子以及反质子与反中子统称为核子.

$$m_{\text{核子}} \approx m_{\text{质子}}$$

(1) 质子 p 与反质子 $\tilde{p}$——静止质量为 $1\ 836.15m_e$.

(2) 中子 n 与反中子 $\tilde{n}$——静止质量为 $1\ 838.68m_e$.

中子衰变后变成质子、电子和中微子, 这就是原子核 β 衰变的道理.

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \nu$$

核子与反核子相遇则可变为数个介子:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{n}} \\ \mathrm{p} + \tilde{\mathrm{p}} \\ \mathrm{n} + \tilde{\mathrm{p}} \\ \mathrm{p} + \tilde{\mathrm{n}} \end{array}\right\} n\pi$$

4. 超子

静止质量大于质子的静止质量的粒子称为超子.

$$m_{\text{超子}} > m_{\text{质子}}$$

超子有以下三种:

(1) Λ^0 超子——静止质量约为 2 181m_{e}.

$$\Lambda^0 \longrightarrow \mathrm{p}^{+} + \pi^{-} \quad (\text{或} \mathrm{n} + \pi^0)$$

凡是以 Λ^0 代替中子 n 组成的原子核, 称为超裂片.

(2) $\sum^{\pm}$ 与 $\sum^{0}$ 超子—— $\sum^{+}$ 的静止质量约为 2 327m_{e}.$\sum^{-}$ 为 2 340m_{e}, $m_{\sum^0} \approx m_{\sum^+}$.

$\sum^{+} \longrightarrow \mathrm{p}^{+} + \pi^0 \quad (\text{或} \mathrm{n} + \pi^{+})$

$\sum^{-} \longrightarrow \mathrm{n} + \pi^{-}$

$\sum^{0} \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma$

(3) Ξ^{-} 与 Ξ^0 超子——静止质量约为 2 580m_{e}.

$\Xi^{-} \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^{-}$

$\Xi^{-} \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^0$

关于粒子的较详细情况, 请参看粒子分类表.

在以上所述的粒子中, 介子和超子都是在宇宙射线中发现的. 但这些粒子在宇宙线中很少, 在实验室中, 进行研究异常困难. 自从 1948 年起, 利用加速器人工产了 π 介子以后, π 介子的研究迅速地得到了发展, π 介子的物理学已列入原子核物理学中重要的一章. 利用高能粒子加速器, 1956 年在美国曾发现了反质子与反中子. 狄拉克的相对论量子力学理论的预言又一次得到了强有力的证实. 苏联 Dubna 联合核子研究所的 100 亿电子伏同步稳相加速器运转后, 用人工的方法产生了大量的 K 介子、超子和其他的新粒子. 这对于当时研究核

力与粒子的问题, 起重要的作用. 在 CERN 建造的 LHC 是当时世界上能量最高的加速器, 是一种将质子加速对撞的高能物理设备. 两个对撞加速管中的质子各具有能量 7 TeV, 总撞击能量达 14 TeV. 物理学家希望由加速器来寻找希格斯粒子、超对称粒子和暗物质的存在. 在 2012 年 LHC 上两个探测器 ATLAS 和 CMS 上同时发现了希格斯玻色子. 探讨粒子的性质和它内部的结构是物理学中最重要的问题之一.

粒子是可以相互转化的, 也就是说, 物质可以从一种存在的形式变化为另一种存在的形式, 譬如正电子与电子相遇, 或 π^0 介子的衰变可变为光子:

$$e^+ + e^- \longrightarrow n\gamma$$

$$\pi^0 \longrightarrow z\gamma$$

在过去, 一部分现代的马赫主义唯心论的学者看来, 好像是正电子与负电子相遇便化为乌有了. π^0 介子的衰变, 也似乎是 π^0 介子本身被消灭. 这是由于他们否定了光子也是物质, 他们没有认识到光子即电磁波, 也是物质存在的一种形式. 从唯物辩证的观点看来, 粒子的互相转化, 仅是一种物质变化为另外一种物质而已. 而物质本身并没有被消灭.1908 年在唯物论与经验批判论一书中就明确地指出:

"'物质正在消灭'——这是意味着我们在此以前所知道的物质的界线正在消灭. 我们的认识愈更深入着; 从前看起来是绝对的、不变的、根源的那些特性, 正在消灭. 这些特性现在显示为相对的, 只是物质的某些状态所固有的. "

虽然那时很多粒子的特性还没有发现. 粒子的理论当然也没有建立. 但是当时的概念, 在科学已经相当发达的今天, 还是有着极其伟大的意义. 他对于现代物理学中一切唯心主义的看法, 都给予致命的打击, 也武装了我们物理学的科学研究工作者.

人类不仅要认识世界, 还要改变和创造世界. 我们物理学工作者认识了, 粒子转化的规律. 物质变化的规律, 便可以依我们的愿望, 人工产生我们所需要的粒子, 进行有计划的科学研究工作, 进而使它们为人类服务, 这是有着重大的现实意义的.

参考文献

[1] Shapiro M. Rev. of Modern Phys., 1956, 28(2): 165.

[2] 朗道, 栗弗席兹. 场论. 北京: 高等教育出版社. 2012.

§2 量子场论研究的对象

“场”这个名词, 也是物理学家认识物质的历史产物. 过去认为电荷间互相作用的力是由电磁场产生. 自从发现光子以后才知道光子和电磁场是一种东西. 量子电动力学建立以后, 便用光子的交换来解释电荷间力的作用, 这才把电磁场和光子的概念完全统一起来. 同样的道理, 在经典物理学中认为核子与核子间的作用力, 是由介子场所产生. 量子场论则用核子间交换介子来解释核力. 这说明场和粒子是一种东西的两种不同的说法.

关于物质间作用的重力场产生的原因, 现在还没有得到本质的解释. 也曾有人提出重力场的产生是由于物质之间交换一种新粒子“重力子”所致. 重力子究竟存在与否, 现在尚无法肯定. 现在正在设法用实验说明重力波是否存在的问题, 可能这对重力场的进一步认识有推进作用.

总之, 场与粒子是物质存在的两种不同的形式, 而人类在认识物质的过程中, 给了它们不同的名称, 场应该有它的物质内容, 场的本身就是粒子, 严格地说, 我们应该认为场是同类型的粒子的集合. 因此我们可以称介子的集合为介子场, 电子的集合为电子场, 质子的集合为质子场等, 不过后两种称呼少听见而已.

由此可见, 场论就是研究粒子的理论, 而场论研究的具体对象有:

(1) 研究粒子的运动规律, 即场的运动方程式.

(2) 研究粒子本身的性质.

(3) 研究粒子间的相互作用.

(4) 研究粒子相互转化和产生的概率.

研究光子、电子、正电子的相互间的作用和相互转化的学问, 我们称之为量子电动力学. 这是场论中重要的一部分内容.

量子电动力学得到了光辉的成就. 它比较定量地说明了正负电子和光子互相作用的许多现象, 特别是用量子电动力学的理论计算出来的电子附加磁矩和氢光谱能级, 由于真空效应的移动, 得到了实验的精确证实.

但是早期的量子电动力学还存在着严重的缺点, 就是用量子电动力学的理论计算出电子的自能, 电子本身的质量、电荷以及其他某些量是无限大的, 取消这种无限大的方法, 我们称之为“重整化”. 在 1948 年前后, Bethe Tomonega、 Schwing Dyson 等人对于场的方程式的相对论的形式, 和避免发散问题的重整化的方法都有较大的贡献. 但将此重整化的方法运用到介子场的问题上, 则遇到原则性的困难, 并与实验不符合, 更重要的是这些重整化的方法

多少有些人为的性质, 重整化的假设并没有包含在量子电动力学的原始理论和原始方程式中, 因而破坏了逻辑的完整性. 因此, 现在量子电动力学的理论还不能说是完整的理论.

此外, 关于消除场论的发散问题, Yukawa 等人曾提出非区域性场的理论, 还有 Heisenberg 等人提出的非线性场的理论, 这些理论在目前来说, 还是非常不完整而且是有内在矛盾的理论.

量子电动力学之所以相当的成功, 就是在解其基本方程式时, 能够用以作用常数展开的微扰法. 但是应用于介子与核子互相作用问题时, 由于相互作用强大, 不能用微扰法, 造成了介子场的理论的严重困难.

Nauu 和 Dancoff 提出了不用微扰法来解决介子场理论的方法, 但用他们的方法计算实际问题, 是非常复杂困难的, 同时也有原则的缺点. 此后 Chew 与 Low 在介子场的理论中, 获得了很大的成就, 许多计算结果还与实验比较符合, 但现在应用起来, 也有很大的局限性, 应该加以扩展. 因此现在关于介子场的理论方面, 虽然有了不小的进展, 但存在的困难还是很多的.

至于用量子场论的理论来研究 K 介子与超子的问题, 目前已有很大的进展. 其中一个比较重要的贡献, 就是 Gellmann, Nishijima 等人发现了这些基本粒子的产生和转化的规律, 关于 K 介子与超子问题, 将是以后场论理论研究的另一重要方向.

第二章　场的运动方程式和守恒定律

§3　狭义相对论与标量场方程式

在狭义相对论中, 为了方便起见, 通常采用四维空间坐标:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \mathrm{i}ct \tag{3.1}$$

x, y, z 代表质点的空间直角坐标, t 代表时间, c 为在真空中光进行的速度. 在狭义相对论的理论中要求 c 为一常量.

在四维空间中, 两相邻点之微小距离 $\mathrm{d}s$ 由

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = -\sum_{i=1}^{4} \mathrm{d}x_i^2} \tag{3.2}$$

决定. 将 (3.1) 式代入 (3.2) 式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \\ &= (c^2 - v^2)\mathrm{d}t^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

此处 $v = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 为质点运动的速度.

狭义相对论的理论要求质点或物体的速度不能超过光速. 为了使 $\mathrm{d}s$ 不致变为虚数, 故 (3.2) 式的右边有一个负号. 由 (3.3) 式, $\mathrm{d}s$ 可表示为

$$\mathrm{d}s = c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

$\mathrm{d}s^2$ 对于洛伦兹变换为一不变量. 洛伦兹变换是一个四维空间的正交线性变换:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_i' = a_{ik}x_k \\ \text{或} x' = Ax \end{array}} \tag{3.5}$$

系数 a_{ik} 满足正交条件

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{jk} &= \delta_{ij}\\ \sum_{i=1}^{4} a_{ik}a_{ij} &= \delta_{kj}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

此处

$$x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ x'_3\\ x'_4\end{pmatrix}, \quad A = (a_{ik})$$

符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当} i \neq j\\ 1, & \text{当} i = j\end{cases}$$

A 是一个方阵, 称为洛伦兹变换方阵, 其具体的形式如下:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{v_x^2}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{v_xv_y}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{v_xv_y}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{\mathrm{i}v_x}{c}\alpha\\ \dfrac{v_xv_y}{v^2}(\alpha-1) & 1+\dfrac{v_y^2}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{v_yv_z}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{\mathrm{i}v_y}{c}\alpha\\ \dfrac{v_xv_z}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{v_yv_z}{v^2}(\alpha-1) & 1+\dfrac{v_z^2}{v^2}(\alpha-1) & \dfrac{\mathrm{i}v_z}{c}\alpha\\ -\dfrac{\mathrm{i}v_x}{c}\alpha & -\dfrac{\mathrm{i}v_y}{c}\alpha & -\dfrac{\mathrm{i}v_z}{c}\alpha & \alpha\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

其中 v_x, v_y, v_z 为 (x'_i) 坐标系之原点对于 (x_i) 坐标系原点运动的相对速度,而

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

如 (x'_i) 坐标系运动方向仅在 x 轴方向, 则 $v_y = v_z = 0$, 有

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} & 0 & 0 & \dfrac{+\mathrm{i}\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \dfrac{-\mathrm{i}\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

狭义相对论要求所有物体运动的方程式对于洛伦兹变换皆是协变的, 也即所有物体运动的方程式经过洛伦兹变换以后, 还应保持其原来的形式, 也应该是协变的.

在狭义相对论中四维空间的动量, 可定义为

$$\boxed{p_i = m_0 c \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)} \tag{3.9}$$

其中 m_0 为质点的静止质量, 由 (3.4) 式与 (3.9) 式可得

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = mv_x \\ p_2 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = mv_y \\ p_3 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = mv_z \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

其中

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$p_4 = \frac{\mathrm{i}m_0 c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \mathrm{i}\frac{E}{c} \tag{3.11}$$

其中

$$E = m_0 c^2 \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

p_1, p_2, p_3 恰与经典力学的动量相同, 故 (3.4) 式之定义是恰当的, 将 (3.2) 式以 $\mathrm{d}s^2$ 除之, 并乘以 $m_0^2 c^2$, 可得

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} p_i^2 = -m_0^2 c^2} \tag{3.12}$$

将 (3.10) 式与 (3.11) 式代入 (3.12) 式可得

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 \quad (p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{3.13}$$

(3.13) 式为狭义相对论中, 能量与动量间的关系式.

在量子力学中动量的算符为

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.14}$$

能量的算符为

$$\hat{E} = -\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.15}$$

由 (3.11) 式可知,(3.14) 式与 (3.15) 式可合并为非常对称的四维空间动量算符

$$\boxed{\hat{p}_i = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)} \tag{3.16}$$

这些算符是作用在波函数 φ 上的.

将 (3.16) 式代入 (3.12) 式并将其作用于波函数 φ 上可得

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\varphi = 0} \tag{3.17}$$

$\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 称为 D'Alembert 算符, 可以 $\Box$ 表之, 即

$$\Box \equiv \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.18}$$

设 $\chi \equiv \dfrac{m_0 c}{\hbar}$,(3.17) 式可写为

$$\boxed{\Box\varphi - \chi^2\varphi = 0} \tag{3.19}$$

(3.19) 式称为 Klein−Gordon(克莱因 − 戈尔登) 方程式, 它是狭义相对论中的薛定谔方程式, 普通的薛定谔方程式是将牛顿力学中能量与动量的关系式以算符 (3.14) 及 (3.15) 代替得来的, 而 Klein−Gordon 方程式, 则是以相对论力学中能量与动量的关系式 (3.13) 用算符代替而得.

波函数 φ 与向量不同, 仅有一个分量, 这个只有一个分量的量, 我们称为标量 (标量的详细定义, 以后我们还要谈). 因此, 方程式 (3.19) 也可称为标量场方程式. 这个方程式, 过去日本物理学家 Yukawa 曾用来描写 π 介子, 因为 π 介子的自旋为零, 故仅用一个分量的波函数即可描写.

习　题

1. 由狭义相对论中的动量和能量守恒定律, 试证明静止的 π 介子衰变为 μ 子与中微子, 即

$$\pi \longrightarrow \mu + \nu$$

时,μ 子的动能应为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{(m_{\pi}-m_{\mu})^2}{2m_{\pi}}c^2$$

2. 试证明在没有外场作用下的自由光子不能产生一对正负电子.(用动量与能量守恒定律不能统一的方法证明.)

参 考 文 献

朗道, 栗弗席兹. 场论. 北京：高等教育出版社. 2012.

§4 矩阵空间与旋量

1. 矩阵空间

四维空间的向量一般可以用

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i\boldsymbol{e}_i \tag{4.1}$$

表示,$\boldsymbol{e}_i$ 是 x_i 方向的单位向量, 称为四维空间的向量基底, 不同的 $\boldsymbol{e}_i$ 有相互正交的性质, 故其标积有下列关系式:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i=\delta_{ij} \tag{4.2}$$

或

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i=2\delta_{ij} \tag{4.3}$$

所有 $\boldsymbol{x}$ 组成的空间称四维向量空间.

采用爱因斯坦的求和记法, 在 (4.1) 式中可略去求和符号 $\sum$ 而简书为

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i \tag{4.4}$$

即同一指标出现于某项两乘积之因子, 代表此项指标取其可能之值的诸项之和, 此重复指标称为虚位指标, 所以

$$\sum_{i=1}^{4}a_ib_i\equiv a_ib_i \tag{4.5}$$

由 (4.1) 式和 (4.2) 式可知

$$x^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i^2$$

或

$$x^2=x_ix_i \tag{4.6}$$

此处 $x=|\boldsymbol{x}|$ 代表 $\boldsymbol{x}$ 的大小.

设 $\gamma_i(i$=1, 2, 3, 4) 为一个四行四列的矩阵, 符合与 (4.3) 式相似的条件:

$$\boxed{\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=2\delta_{ij}I\quad(I\text{为单位矩阵})} \tag{4.7}$$

则可以以此四个矩阵 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 为四维空间的基底表示某向量 $\boldsymbol{x}$. 这个以矩阵 γ_i 为基底的新向量用 X 表示之, 即

$$X = \sum_{i=1}^{4} x_i \gamma_i$$

或缩写为

$$\boxed{X = x_i \gamma_i} \tag{4.8}$$

由 (4.8) 式可知 X 本身也是一个矩阵, 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 所对应的矩阵或简称为 $\boldsymbol{x}$ 的向量矩阵. 所有 X 组成的空间我们称为矩阵空间.

由 (4.7) 式的关系式可以证明

$$X^2 = (x_i x_i) I = x^2 I \tag{4.9}$$

所有在向量空间中的式子与在矩阵空间中的式子是一一对应的, 即 (4.3) 式与 (4.7) 式对应, (4.4) 式与 (4.8) 式对应, (4.6) 式与 (4.9) 式对应.

四维向量空间中的梯度算符的定义为

$$\hat{d} = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \boldsymbol{e}_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{4.10}$$

它可缩写为

$$\boxed{\hat{d} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \tag{4.11}$$

由 (4.11) 式与 (4.3) 式可知

$$\hat{d}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Box \tag{4.12}$$

在矩阵空间中所对应的四维空间的梯度算符应为

$$\boxed{D = \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \tag{4.13}$$

由 (4.13) 式与 (4.17) 式可得

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) I = (\Box) I \tag{4.14}$$

(4.12) 式与 (4.14) 式也是向量与矩阵空间中的对应式.

2. 旋量的定义

设四维空间之坐标 x_i 经过洛伦兹变换而得新坐标

$$x_i' = a_{ik} x_k$$

也即
$$\boldsymbol{x}' = a_{ik}x_k\boldsymbol{e}_i \tag{4.15}$$

而$\boldsymbol{x}$的向量矩阵X经过洛伦兹变换后,根据(4.15)式则应变为新矩阵

$$X' = a_{ik}x_k\gamma_i \tag{4.16}$$

从另一方面看,矩阵X与$\boldsymbol{x}$以及矩阵X'与$\boldsymbol{x}'$是一一对应的. 当$\boldsymbol{x}$经过洛伦兹线性变换变为$\boldsymbol{x}'$, 则X变为X', 根据群论中的表示理论, 可证明在这种情况下一定存在一个转换矩阵S, 可将X变化为X', 即

$$X' = SXS^{-1} \tag{4.17}$$

在(4.17)式中S^{-1}为S的逆矩阵, 即

$$S^{-1}S = SS^{-1} = I \tag{4.18}$$

由(4.16)式与(4.17)式可得

$$SXS^{-1} = a_{ik}x_k\gamma_i \tag{4.19}$$

但 $X = x_k\gamma_k$

所以 $Sx_k\gamma_kS^{-1} = a_{ik}x_k\gamma_i$

或 $x_k(S\gamma_kS^{-1}) = a_{ik}x_k\gamma_i$

因此S, γ_i与a_{ik}之间必须满足关系式

$$\boxed{S\gamma_kS^{-1} = a_{ik}\gamma_i} \tag{4.20}$$

现在让我们谈谈什么是旋量, 旋量的定义如下: 设$\psi(x)$为一单列的矩阵函数

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

当四维空间的坐标x受到(3.5)式的正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

作用, $\psi(x)$ 按照规律

$$\begin{pmatrix} \psi_1'(x) \\ \psi_2'(x) \\ \psi_3'(x) \\ \psi_4'(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

变换, 则 $\psi(x)$ 称为旋量. 旋量这个名称的来源, 是因为 Dirac 曾用有 (4.21) 式性质的函数 $\psi(x)$, 作为描写具有自旋的粒子 (电子) 的波函数.

(4.21) 式可简写为

$$\boxed{\psi' = S\psi} \tag{4.22}$$

3. γ_i 矩阵的具体形式

凡是符合 (4.7) 式条件的任何四个矩阵, 都可以作为矩阵空间的基底, 因此 γ_i 矩阵的具体形式是很多的, 下面我们只谈在场论中常用的一种 γ_i 矩阵.

寻找符合 (4.7) 式条件的 γ_i 矩阵, 最简单的是利用 Pauli 的二阶自旋矩阵

$$\sigma_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

σ_1^0,σ_2^0,σ_3^0 满足下列的关系式:

$$\sigma_i^0\sigma_j^0 + \sigma_j^0\sigma_i^0 = 2\delta_{ij}I^0 \quad (i,j = 1,\ 2,\ 3, I^0\text{为二阶单位矩阵}). \tag{4.24}$$

$$\sigma_1^0\sigma_2^0 = \mathrm{i}\sigma_3^0, \quad \sigma_2^0\sigma_3^0 = \mathrm{i}\sigma_1^0, \quad \sigma_3^0\sigma_1^0 = \mathrm{i}\sigma_2^0 \tag{4.25}$$

设

$$\sigma_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma_i^0 & 0 \\ 0 & \sigma_i^0 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

$$\alpha_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i^0 \\ \sigma_i^0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

利用 (4.24) 式很容易证明 σ_i 与 α_i 符合与 (4.24) 式相同的关系:

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I \tag{4.28}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}I \quad (i = 1,2,3) \tag{4.29}$$

设

$$\beta = \begin{pmatrix} I^0 & 0 \\ 0 & -I^0 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

则可知

$$\beta^2 = I$$

并且

$$\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \tag{4.31}$$

场论中常用的 γ_i 矩阵是以 α_i 和 β 矩阵所组成的:

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma_i \equiv -\mathrm{i}\beta\alpha_i \quad (i=1,\,2,\,3)\\ \gamma_4 \equiv \beta\end{array}} \tag{4.32}$$

由 (4.29) 式与 (4.31) 式的关系式很容易证明 (4.32) 式所定义的 γ_i 矩阵符合关系式

$$\boxed{\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}I \quad (i,\,j=1,\,2,\,3,\,4)}$$

将 (4.27) 式与 (4.30) 式代入 (4.32) 式可得 γ_i 矩阵的具体形式:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

由此可知 γ_i 矩阵为厄米矩阵, 即

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma_i^\dagger = \gamma_i \\ \text{或 } \widetilde{\gamma}_i = \gamma_i^*\end{array}} \tag{4.34}$$

此处 $\widetilde{\gamma}_i$ 代表 γ_i 的转置矩阵,γ_i^* 代表 γ_i 的共轭矩阵,$\gamma_i^\dagger$ 代表 γ_i 的转置共轭矩阵. 某矩阵的转置共轭矩阵与其本身相等, 则称为厄米矩阵. 它们的定义如下:

转置矩阵	$(\widetilde{\gamma})_{\alpha\beta} = (\gamma)_{\beta\alpha}$	(4.35)
共轭矩阵	$(\gamma^*)_{\alpha\beta} = (\gamma)^*_{\alpha\beta}$	(4.36)
转置共轭矩阵	$(\gamma^\dagger)_{\alpha\beta} = (\gamma^*)_{\beta\alpha}$	(4.37)
厄米矩阵的条件	$(\gamma)^\dagger_{\alpha\beta} = (\gamma)_{\alpha\beta}$	(4.38)

由 (4.32) 式还可以证明重要的关系式:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{1}{\mathrm{i}}\gamma_2\gamma_3, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\mathrm{i}}\gamma_3\gamma_1, \quad \sigma_3 = \frac{1}{\mathrm{i}}\gamma_1\gamma_2} \tag{4.39}$$

在场论中还常用一个 γ_5 矩阵, 其定义如下:

$$\boxed{\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4} \tag{4.40}$$

或

$$\boxed{\gamma_5 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l} \tag{4.41}$$

符号

$$\varepsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1, & \text{当 } ijkl \text{ 单数置换时} \\ -1, & \text{当 } ijkl \text{ 偶数置换时} \\ 0, & \text{当 } ijkl \text{ 中任意二指标相等时} \end{cases} \tag{4.42}$$

习 题

1. 设 $X = x_i\gamma_i, Y = y_i\gamma_i$, 试证明:

(1) $\frac{1}{2}(XY + YX) = (x_iy_i)I$

(2) $XY - YX = (x_iy_j - x_jy_i)\gamma_i\gamma_j$

2. 试证明当 $n = 2k + 1$, 即 n 为奇数时,$\mathrm{tr}(\gamma_{i1}\gamma_{i2}\gamma_{i3}\cdots\gamma_{in}) = 0$.tr 为矩阵主对角线元素之和的意思.

3. 试证明用 Pauli 矩阵组成的八个元素 $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \mathrm{i}\sigma_1, \mathrm{i}\sigma_2, \mathrm{i}\sigma_3, \mathrm{i}$ 的集合有群的性质.

参 考 文 献

Carmeli M, Malin S. Theory of spinors: an introduction. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.

§5 旋量场方程式

1. Dirac 方程式的导出

Klein−Gordon 标量场方程式虽具有相对论的形式, 但是不能描写有自旋的粒子的运动, 自然也就不能描写自旋为 1/2 的电子的运动. 并且以后将知道, 标量场函数描写的粒子的密度可以为负值, 因而这个密度与量子力学中的意义不同, 不能代表粒子在空间存在的概率. 为了克服这个困难, Dirac 认为电子的相对论波动方程式, 也应和 Schrödinger 方程式一样具有下列的形式:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi \tag{5.1}$$

也就是说, 在方程式中仅含 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的一次式. 相对论中能量与动量的关系式为 (3.13) 式, 即

$$E=c\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2c^2} \tag{5.2}$$

所以哈密顿能量算符应为

$$\hat{H}=c\sqrt{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2+m_0^2c^2} \tag{5.3}$$

于是 (5.1) 式就可写成

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=c\sqrt{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2+m_0^2c^2}\psi \tag{5.4}$$

这个方程式是一个非线性的偏微分方程, 严重破坏了量子力学中状态波函数的叠加原理. 因此要想电子的相对论波动方程式具有 (5.1) 的形式, 必须将 (5.4) 式中的 $\hat{H}$ 线性化, 将 (5.4) 式线性化的结果, 是与直接将 Klein−Gordon 方程式线性化是一样的, 而且这样可以立刻得到场论中通用的具有相对论对称形式的方程式. Dirac 处理这个线性化的问题时应用了矩阵空间的理论. 我们由 (4.14) 式知道, Klein−Gordon 方程式可用四维矩阵空间中的梯度算符表示, 即

$$(\Box-\chi^2)\psi=(D^2-\chi^2)\psi=0 \tag{5.5}$$

或

$$(D-\chi)(D+\chi)\psi=0$$

Dirac 认为线性方程式

$$(D+\chi)\psi=0 \tag{5.6}$$

也即

$$\boxed{\gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \chi \psi = 0} \tag{5.7}$$

就是描写电子相对论的波动方程式. 这个方程式, 我们称为 Dirac 方程式.

在 (5.6) 式中的算符 $D \equiv \gamma_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是一个四行四列的矩阵算符, 因此 Dirac 认为描写电子的波函数应该是一个单列四元的矩阵函数, 也即

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

从 Dirac 方程式可以正确地得到电子的自旋、电子的磁矩和氢光谱的精细结构, 并且在近代的量子电动力学中也得到了有力的实验根据. 这就说明 Dirac 运用矩阵空间的理论将标量场方程式线性化的想法是正确的. Dirac 方程式的导出, 应该说是量子力学发展中的巨大成就.

现在我们再来求 Dirac 方程式的共轭方程式, 将 (5.7) 式中每项取其复共轭, 并从左边乘以 γ_4^*, 可以得到

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \gamma_4^* \gamma_\alpha^* \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\alpha} - \gamma_4^* \gamma_4^* \frac{\partial \psi^*}{\partial x_4} + \chi \gamma_4^* \psi^* = 0 \tag{5.9}$$

将 (5.9) 式写成能量矩阵的形式 (利用转置矩阵乘积公式 $\widetilde{ABC} = \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}$), 可得

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_\alpha} \gamma_\alpha^\dagger \gamma_4 - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_4} \gamma_4^\dagger \gamma_4^\dagger + \chi \psi^\dagger \gamma_4^\dagger = 0 \tag{5.10}$$

其中

$$A^\dagger \equiv \tilde{A}^*$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \tag{5.11}$$

利用 γ_i 的厄米性质 (4.34) 式和关系式 (4.7), 可将 (5.10) 式变为

$$\boxed{\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_i} \gamma_i - \chi \overline{\psi} = 0} \tag{5.12}$$

此处

$$\boxed{\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4} \tag{5.13}$$

(5.12) 式称为 Dirac 方程式的共轭方程式.

2. Dirac 方程式中的波函数 $\psi(x)$ 是旋量

现在我们要由 Dirac 方程式的相对论的协变性证明 Dirac 波函数 $\psi(x)$ 是一个旋量, 也就是要证明当四维空间坐标受洛伦兹变换时,$\psi(x)$ 函数应以 (4.22) 式方式变化, 或

$$\psi = S^{-1}\psi' \tag{5.14}$$

才能使 Dirac 方程式保持其原来的形式. 将 (5.14) 式代入 (5.7) 式, 并利用

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{\partial\psi}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial x_i} = a_{li}\frac{\partial\psi}{\partial x'_l} \tag{5.15}$$

可得

$$\gamma_i a_{li} S^{-1}\frac{\partial\psi'}{\partial x'_l} + \chi S^{-1}\psi' = 0 \tag{5.16}$$

或

$$S\gamma_i S^{-1} a_{li}\frac{\partial\psi'}{\partial x'_l} + \chi\psi' = 0$$

将 (4.20) 式代入上式得

$$a_{ki}a_{li}\gamma_k\frac{\partial\psi'}{\partial x'_l} + \chi\psi' = 0$$

但 $a_{ki}a_{li} = \delta_{kl}$, 所以

$$\gamma_k\frac{\partial\psi'}{\partial x'_k} + \chi\psi' = 0$$

因此, Dirac 方程式中的波动函数 (5.8) 应为一旋量. 所以 Dirac 方程式又可称为旋量场方程式.

同理, 可证明 $\overline{\psi}$ 函数一定要以下列形式的变化:

$$\boxed{\overline{\psi}' = \overline{\psi}S^{-1}} \tag{5.17}$$

才能使 Dirac 的共轭方程式 (5.12) 保持相对论的协变性.

3. Dirac 方程式的各种形式与能量算符 $\hat{H}$

Dirac 方程式利用动量算符

$$\hat{p}_i = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

可变为

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma_i\hat{p}_i + m_0 c)\psi = 0} \tag{5.18}$$

但由 (4.32) 式知

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -\mathrm{i}\beta\alpha_k \quad (k=1,\,2,\,3) \\ \gamma_4 &= \beta \end{aligned} \tag{5.19}$$

将 (5.19) 式 γ 矩阵的具体形式代入 (5.18) 式并从左方乘以 β 可得

$$[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}) + \mathrm{i}\hat{p}_4 + m_0c\beta]\psi(x) = 0 \tag{5.20}$$

也即

$$\boxed{\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} = [c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) + m_0c^2\beta]\psi = 0} \tag{5.21}$$

将 (5.21) 式与 (5.1) 式比较, 可知电子运动的能量算符为

$$\boxed{\hat{H} = [c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) + m_0c^2\beta]} \tag{5.22}$$

对于具有一定动量 p_i 的自由电子的波函数 $\psi(x)$, 应满足方程

$$\hat{p}_i\psi = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = p_i\psi \quad (i=1,\,2,\,3,\,4) \tag{5.23}$$

因此自由电子波函数的形式, 应为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}u(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_ix_i} \tag{5.24}$$

此处 $u(p)$ 是动量与能量的函数, 并且应该是一个旋量, 等号后因子 $\dfrac{1}{\sqrt{V}}$ 是由归一化条件

$$\int_V \psi^\dagger\psi\mathrm{d}V = 1 \tag{5.25}$$

与

$$u^\dagger u = 1 \tag{5.26}$$

得来的, V 为电子在空间存在的范围.

$$p_ix_i = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et \tag{5.27}$$

将 (5.23) 式代入 (5.18) 式或 (5.21) 式可得旋量 $u(p)$ 的方程式:

$$\boxed{[c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}) + m_0c^2\beta]u(p) = Eu(p)} \tag{5.28}$$

也即 $$\hat{H}u(p) = Eu(p)$$

$$\hat{H} = c(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}) + m_0c^2\beta \tag{5.29}$$

为了解方程式方便起见, 设

$$u(p) = N\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} \tag{5.30}$$

$\varphi(p)$ 与 $\chi(p)$ 各为单列二元的矩阵, 也可称为二元旋量. N 为一常数, 将 (5.30) 式,(4.27) 式和 (4.30) 式代入 (5.28) 式可得

$$\begin{aligned} &c\begin{pmatrix}0 & (\boldsymbol{\sigma^0}\cdot\boldsymbol{p})\\ (\boldsymbol{\sigma^0}\cdot p) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix}I^0 & 0\\ 0 & -I^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix}\\ &= E\begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.31}$$

也即

$$\boxed{\begin{aligned} c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\chi(p) + m_0c^2\varphi(p) &= E\varphi(p)\\ c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\varphi(p) - m_0c^2\chi(p) &= E\chi(p)\end{aligned}} \tag{5.32}$$

(5.32) 式也可写为

$$\begin{aligned} (m_0c^2 - E)\varphi(p) + c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\chi(p) &= 0\\ c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\varphi(p) - (m_0c^2 + E)\chi(p) &= 0\end{aligned} \tag{5.33}$$

(5.33) 式如要有不等于零的解必须要求其系数的行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} m_0c^2 - E & c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\\ c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p}) & -(m_0c^2 + E)\end{vmatrix} = 0 \tag{5.34}$$

和用 $(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p}) = p^2$ 的关系式可知

$$E = \pm\varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4} \tag{5.35}$$

所以自由电子的波函数 (5.24) 应写为

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_+(x) + \psi_-(x)\\ \psi_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}u_+(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \varepsilon t)}\\ \psi_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}u_-(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} + \varepsilon t)}\end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

$$u_+(p)=\begin{pmatrix}\varphi_+(p)\\ \chi_+(p)\end{pmatrix},\quad u_-(p)=\begin{pmatrix}\varphi_-(p)\\ \chi_-(p)\end{pmatrix} \tag{5.36'}$$

由此可知自由电子可有负能量状态存在, 这在实验中还没有观察到. 自由电子负能量状态的存在将在后面解释.

4. Dirac 方程式所描写粒子的自旋是 $\frac{1}{2}\hbar$

我们知道电子的轨道角动量算符为

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}} \tag{5.37}$$

由 (5.22) 式可证明 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 是不能对易的, 即

$$\hat{H}\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{L}}\hat{H}\neq 0$$

因此, 电子的轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 不是守恒量. 但我们可以证明

$$\hat{H}\hat{\boldsymbol{J}}-\hat{\boldsymbol{J}}\hat{H}=0 \tag{5.38}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}} \tag{5.39}$$

这说明电子的总角动量 $\boldsymbol{J}$ 应该是守恒的, 并且从这里我们知道电子的自旋算符应为

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} \tag{5.40}$$

所以电子的自旋是 $\frac{1}{2}\hbar$.

从 (5.38) 式和 (5.39) 式可以知道 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\hat{H}$ 是不能对易的, 但是 $\boldsymbol{\sigma}$ 在电子运动方向的分量是可与 $\hat{H}$ 对易的, 即

$$\hat{H}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\hat{H}=0,\quad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{5.41}$$

这就是说, 自旋在电子运动方向的分量与电子的能量是可以同时测量的, 并且算符 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{n})$ 与 $\hat{H}$ 可以有共同的本征函数, 即

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u(p)=\lambda u(p) \tag{5.42}$$

因 $$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2=1$$

所以 $$\lambda=\pm 1$$

所以自由电子自旋的方向是与其运动的方向平行或是反平行的, 即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u(p)=\pm\frac{\hbar}{2}u(p)\\ &\\ &\hat{H}u(p)=\pm\varepsilon u(p) \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

但由 (5.35) 式知

由此可知, 自由电子应该有四个状态, 以下列符号表示之:

$$u_1=u_+^{+\frac{1}{2}},\quad u_2=u_+^{-\frac{1}{2}},\quad u_3=u_-^{+\frac{1}{2}},\quad u_4=u_-^{-\frac{1}{2}} \tag{5.43'}$$

旋量 u 下角的“$\pm$”符号代表能量状态, 上角的 $\pm\dfrac{1}{2}$ 代表不同的自旋状态.

5. 自由电子波函数的解的具体形式

由 (5.32) 式可得

$$\left.\begin{aligned} \varphi(p)&=-\frac{c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})}{m_0c^2-E}\chi(p)\\ \chi(p)&=\frac{c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})}{m_0c^2+E}\varphi(p) \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

$$E=\pm\varepsilon$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} \varphi_-&=-\frac{c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})}{m_0c^2+\varepsilon}\chi_-\\ \chi_+&=\frac{c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})}{m_0c^2+\varepsilon}\varphi_+ \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

(5.45) 式中 $\varphi_+,\varphi_-,\chi_+,\chi_-$ 四函数中有两函数是任意的, 譬如假设一定的 φ_+ 与 χ_- 就可求得 φ_- 与 χ_+, 为了方便起见, 通常设电子运动的方向在 z 轴方向, 即

$$p_1=p_2=0,\quad p_3=p,\quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})=\sigma_3 p \tag{5.46}$$

同时设 φ_+,χ_- 为 σ_3 的本征函数, 即

$$\varphi_+^{+\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_+^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\chi_-^{+\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \chi_-^{-\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{5.47}$$

将 (5.47) 式和 (5.46) 式代入 (5.45) 式可得

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_1 &= N\begin{pmatrix} \varphi_+^{+\frac{1}{2}} \\ \chi_+^{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{cp}{m_0c^2+\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \\
u_2 &= N\begin{pmatrix} \varphi_+^{-\frac{1}{2}} \\ \chi_+^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{cp}{m_0c^2+\varepsilon} \end{pmatrix} \\
u_3 &= N\begin{pmatrix} \varphi_-^{+\frac{1}{2}} \\ \chi_-^{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -\dfrac{cp}{m_0c^2+\varepsilon} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
u_4 &= N\begin{pmatrix} \varphi_-^{-\frac{1}{2}} \\ \chi_-^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{cp}{m_0c^2+\varepsilon} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
} \tag{5.48}
$$

此处

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{H}u_1 &= +\varepsilon u_1, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_1 = +u_1 \\
\hat{H}u_2 &= +\varepsilon u_2, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_2 = -u_2 \\
\hat{H}u_3 &= -\varepsilon u_3, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_3 = +u_3 \\
\hat{H}u_4 &= -\varepsilon u_4, \quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_4 = -u_4
\end{aligned}
\right\} \tag{5.49}
$$

$$
\varepsilon = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}
$$

N 为归一化常数, 其值由 (5.25) 式求得应为

$$
N = \sqrt{\frac{m_0c^2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \tag{5.50}
$$

四个旋量 $u_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 在场论中是常用到的, 称为单位旋量, 且有

$$
\boxed{u_i^\dagger u_j = \delta_{ij}} \tag{5.51}
$$

6. 电子负能量状态的解释, Dirac 的空穴理论

在 Dirac 的电子理论中, 由 (5.35) 式可知, 电子可以有负能量状态存在, 即

$$E = -\sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}$$

这样的电子的负能量状态在实验中还没有观察到, 并且根据电子的辐射理论, 假使有负能量状态存在, 则电子必逐渐放出光子, 减低能量, 最后所有宇宙间的电子都会陷入 $E = -\infty$ 的状态, 这是极不可思议的. Dirac 为了解决这个矛盾, 他假设在宇宙间所有的负能量的状态, 从 $-m_0c^2$ 至 $-\infty$ 都已被电子所占据, 根据 Pauli 原则, 具有正能量的电子, 就不可能再过渡到负能级去了. 过去物理学家认为真空是没任何粒子或电荷存在的空间, 而根据 Dirac 的假设, 则认为真空是所有的负能级都被电子占满, 而正能量状态没有一个电子存在的空间. 因此, 真空是充满了负电荷的.Dirac 又进一步假设这些在负能量状态的电子是不会在空间造成外电场的, 因而这些负能量状态的电子也就不会对其他的粒子有什么作用存在.

Dirac 更进一步认为当大于 $2m_0c^2$ 的光子与物质作用时, 可将负能量状态的电子激发到正能量状态去, 变成了现实可以观察到的电子, 同时在充满了负能量的电子的背景中留下了一个空穴, 这个空穴与其背景比较, 它具有正电荷与负质量的性质, 这个空穴称为正电子, 因此当能量大于 $2m_0c^2$ 的光子与物质作用时就可能同时产生一个正电子和一个负电子, 称为电子对.Dirac 的空穴理论在当时不仅解释了电子负能量状态的意义, 并且预言了正电子的存在, 而且在他的空穴理论提出不到几年以后, 就真正在实验中发现了正电子的存在, 这是他的重要成就之一. 此后多年来, 物理学家们根据 Dirac 的想法, 预言应该有反质子和反中子的存在. 这个预言也在 1956 年被证实了, 这说明 Dirac 的理论基本上是正确的.

在近代的粒子理论中, 并不用空穴的理论来解释反粒子的存在, 因为空穴理论能够比较圆满地解释反粒子存在的现象, 但只适用于遵守 Pauli 原则的 Fermi 粒子. 而现在还存在着一些不遵守 Pauli 原则的 Boson 粒子, 它们也有反粒子存在, 这是 Dirac 的空穴理论所不能解释的. 近代的理论认为反粒子并不是空穴, 它和粒子一样是客观存在着的物质. 近代的粒子理论认为一个粒子处于负能量状态, 就直接认为它是反粒子了, 这一点我们可用经典力学形象地说明. 当然这样的说法是不合适的, 但是可以帮助我们认识问题, 我们知道粒子具有负能量, 就相当于具有负的质量, 因为

$$E = -\sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4} = -mc^2 \tag{5.52}$$

电子所带的电荷是负电荷,$e^- = -e$, 那么具有负能量状态的电子在电磁场中运

动的规律应为

$$(-m)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\right]$$

等号两边的负号相消以后, 便可得

$$(+m)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=+e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\right]$$

因此具有负能量状态的电子在电磁场中运动的规律就和一个具有正质量、正电荷的粒子的运动规律是一样的, 它的轨迹应与电子相反. 这个具有正质量、正电荷的粒子, 我们就称它为正电子.

7. Dirac 波函数的宇称与中微子的性质

设

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \chi(x)\end{pmatrix} \tag{5.53}$$

Dirac 方程式 (5.21) 可变为下列的形式:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}&=c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\chi(x)+m_0c^2\varphi(x)\\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\chi(x)}{\partial t}&=c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\varphi(x)-m_0c^2\chi(x)\end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

若粒子的空间宇称是守恒的, 则当 $\boldsymbol{r}$ 变为 $-\boldsymbol{r}$ 时, 方程式 (5.54) 应该保持原来的形式, 因此 $\varphi(x)$ 与 $\chi(x)$ 要有相应的变化:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(-\boldsymbol{r},t)&=\varphi(\boldsymbol{r},t)\\ \chi(-\boldsymbol{r},t)&=-\chi(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}} \tag{5.55}$$

所以旋量 $\varphi(x)$ 的空间宇称应该是正的, 旋量 $\chi(x)$ 的空间宇称应该是负的, 或情况完全相反, 这就是说 $\varphi(x)$ 与 $\chi(x)$ 应该有不同的宇称.

中微子的自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$, 据现在的看法其质量为零, 即

$$m_\nu=0,\quad E=\pm cp \tag{5.56}$$

所以自由运动的中微子的波动方程式, 由 (5.54) 式应为

$$c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\chi(x)=E\varphi(x) \tag{5.57}$$

$$c(\boldsymbol{\sigma}^0\cdot\boldsymbol{p})\varphi(x)=E\chi(x) \tag{5.58}$$

(5.57) 式与 (5.58) 式两方程式是完全对称的, 将 (5.57) 式中的 $\chi(x)$ 换为 $\varphi(x)$ 就可立刻变为 (5.58) 式. 如粒子的宇称不守恒, 则上两式中的两波函数没有任何的区别, 则可设

$$\varphi(x) = \chi(x)$$

则 (5.57) 式与 (5.58) 式可合为一个方程式, 即

$$c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{5.59}$$

$c(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})$ 为能量算符, 但也是自旋在运动方向分量的算符, 由 (5.56) 式可知 (5.59) 式可缩写为

$$\boxed{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})\varphi(x) = \pm\varphi(x)} \tag{5.60}$$

由 (5.60) 式可得出结论, 假使空间宇称不守恒, 具有正能量的中微子其自旋的方向一定是沿运动方向的, 而具有负能量的中微子即反中微子, 其自旋的方向一定是与运动方向相反的. 由此得出结论, 中微子永远是极化的, 这就是李政道、杨振宁与朗道关于宇称不守恒的理论中对于中微子和反中微子性质的看法.

(5.60) 式称为中微子的波动方程式.

习　题

1. 试证明电子的总角动量守恒定律, 即

$$\hat{H}\hat{\boldsymbol{J}} - \hat{\boldsymbol{J}}\hat{H} = 0$$
$$\hat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{p}} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

2. 试证明当电子的速度很小时, 即 $p \ll m_0 c$ 时, 有

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

并证明在这时有

$$u_1^\dagger \beta u_1 \approx 1, \quad u_2^\dagger \beta u_2 \approx 1$$

$$u_m^\dagger \beta\gamma_i u_n \approx 0 (m,\, n = 1,\, 2, \quad i \neq 4)$$

$$u_m^\dagger \gamma_5 u_n \approx 0 (m,\, n = 1,\, 2)$$

3. 试证明当四维空间坐标有下列的变化时, 为了使 Dirac 方程式保持不变, 旋量场函数应受变化 $\psi'(x)=\Lambda\psi(x)$, 其中 Λ 满足

$$
\begin{aligned}
&\text{当}\quad \boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad x_4'=x_4\text{时},\quad \Lambda=\mathrm{i}\gamma_4\\
&\text{当}\quad \boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x},\quad x_4'=-x_4\text{时},\quad \Lambda=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\\
&\text{当}\quad \boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}_4'=-x_4\text{时},\quad \Lambda=\mathrm{i}\gamma_5
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, 1982.

[2] Heitler W. Quantum Theory of radiation. 1954: §11.

[3] Lee T D(李政道). Conservation law in weak interaction.(Notes on four lecture 1957.)

§6 向量场方程式

以后我们将知道自旋为 $\hbar$ 的粒子是应该用向量函数来描写的, 描写自旋为 $\hbar$ 的粒子的场的方程式称为向量场方程式. 在已发现的粒子中, 肯定自旋为 $\hbar$ 的粒子目前只有光子. 因此我们现在所要讲的向量场方程式, 就是经典电动力学中所熟悉的电磁场方程式, 也就是 Maxwell–Lorentz 方程式. 在没有电荷存在的空间它们的形式如下:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{6.4}$$

磁场函数 $\boldsymbol{H}$ 和电场函数 $\boldsymbol{E}$ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 之间有以下的关系:

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.6}$$

因此知道了 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量与一个 φ 在时空的变化就可以知道电场与磁场的变化. 我们知道 $\boldsymbol{A}$ 与 φ 是不能单值决定 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的, 因为设

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} - \nabla\chi \\ \varphi' &= \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

由 (6.5) 式与 (6.6) 式可知, 可以得到同样结果的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$. 而 χ 是可任意选择的一个函数. 为了在电动力学中解问题方便起见, 我们常常加给 $\boldsymbol{A}$ 与 φ 之间一个关系式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{6.8}$$

这个关系式叫做 Lorentz 附加条件.

在狭义相对论和场论中, 为了便利起见, 我们常将电磁场方程式写成四维空间对称的形式. 设 $A_i(i{=}1, 2, 3, 4)$ 为四维空间的向量位函数, 且

$$A_1 \equiv A_x, \quad A_2 \equiv A_y, \quad A_3 \equiv A_z, \quad A_4 \equiv \mathrm{i}\varphi \tag{6.9}$$

并设电磁场张量函数

$$\boxed{F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}} \tag{6.10}$$

由 (6.5) 式与 (6.6) 式可知 F_{ik} 和 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}E_z \\ \mathrm{i}E_x & \mathrm{i}E_y & \mathrm{i}E_z & 0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

为了容易记忆起见, F_{ik} 可以下列方式表示:

$$\boxed{\begin{pmatrix} F_{23} & F_{31} & F_{12} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_x & H_y & H_z \\ \mathrm{i}E_x & \mathrm{i}E_y & \mathrm{i}E_z \end{pmatrix}} \tag{6.12}$$

由 (6.11) 式或 (6.12) 式可证明 (6.1) 式与 (6.2) 式可合写为一个四维空间的对称式子:

$$\boxed{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0 \quad (i\neq k\neq l, \quad i,k,l=1,2,3,4)} \tag{6.13}$$

(6.3) 式与 (6.4) 式可合写为

$$\boxed{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=0} \tag{6.14}$$

(6.13) 式与 (6.14) 式是 Maxwell−Lorentz 电磁场方程式的四维空间对称形式, 它们之所以能够写成这样对称的形式就是因为 Maxwell−Lorentz 方程式本身具有狭义相对论的协变性的缘故.

利用 (6.9) 式 Lorentz 条件,(6.8) 式可写为

$$\boxed{\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0} \tag{6.15}$$

将 (6.10) 式代入 (6.14) 式并利用 (6.15) 式可得

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2}$$

即

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2}=0$$

也即

$$\boxed{\Box A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)} \tag{6.16}$$

这就是向量场方程式, 在电动力学中称为 D'Alembert 方程式.

我们知道 (6.16) 式是描写静止质量为零的光子的波动方程式. 假使有一种粒子的自旋为 $\hbar$ 而质量不为零, 则描写这种粒子场的方程式, 应写成与标量场相似的形式:

$$\boxed{\Box A_i - \chi^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)} \tag{6.17}$$

过去曾有人为了解决核力的问题, 假设有自旋为 $\hbar$ 的介子存在, 那么 (6.17) 式就是描写自旋为 $\hbar$ 的向量介子场方程式.

习　题

试证明

$$F_{ik}F_{ik} = \boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2$$

$$\varepsilon_{iklm}F_{ik}F_{lm} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}$$

参 考 文 献

Lifshitz E M, Landau L D. Quantum electrodynamics. Butterworth–Heinemann, 1982.

§7 场函数的变换规律

1. 张量的广义定义

张量依其变换的性质的不同, 可分为协变张量与逆变张量.

(1) 协变张量

设有一 n 个指标的量 $U_{ij\cdots l}$, 当时空坐标有下列的变换

$$x_i' = \overline{x}_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7.1}$$

时, $U_{ij\cdots l}$ 按照规律

$$\boxed{U'_{ij\cdots l} = U_{ab\cdots d}\frac{\partial x_a}{\partial \overline{x}_i}\frac{\partial x_b}{\partial \overline{x}_j}\cdots\frac{\partial x_d}{\partial \overline{x}_l}} \tag{7.2}$$

变化, 我们称 $U_{ij\cdots l}$ 为四维空间的 n 阶协变张量 (其指标在下方).

(2) 逆变张量

设有一 n 个指标的量 $U^{ij\cdots l}$, 当时空坐标有 (7.1) 式的变化时, $U^{ij\cdots l}$ 按照规律

$$\boxed{U'^{ij\cdots l} = U^{ab\cdots d}\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_a}\frac{\partial \overline{x}_j}{\partial x_b}\cdots\frac{\partial \overline{x}_l}{\partial x_d}} \tag{7.3}$$

变化, 则 $U^{ij\cdots l}$ 称为四维空间的 n 阶逆变张量 (其指标在上方).

(3) 混合张量

按照规律

$$U'^{pq\cdots t}_{hi\cdots l} = U^{ab\cdots d}_{\alpha\beta\cdots\delta}\frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_a}\cdots\frac{\partial \overline{x}_t}{\partial x_d}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \overline{x}_h}\cdots\frac{\partial x_\delta}{\partial \overline{x}_l}$$

变化的量, 称为混合张量.

2. 狭义相对论中的张量

在狭义相对论中, (7.1) 式的变换规律应为洛伦兹变换

$$\overline{x}_i = a_{ik}x_k \qquad (\text{为清楚起见将}x_i'\text{书为}\overline{x}_i) \tag{7.4}$$

将 (7.4) 式两边乘以 a_{il}, 并对 i 求和, 有

$$a_{il}\overline{x}_i = a_{il}a_{ik}x_k = \delta_{lk}x_k$$

可得

$$x_k = a_{ik}\overline{x}_i \tag{7.5}$$

由 (7.4) 式与 (7.5) 式可知, 若 x_i 的变化规律为洛伦兹变换, 则

$$\boxed{\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_i} = a_{ik}} \tag{7.6}$$

因此在狭义相对论中同阶的协变张量, 逆变张量和混合张量是没有什么区别的, 我们统称为张量. 在狭义相对论中 n 阶张量的变化规律由 (7.2) 式或 (7.3) 式与 (7.6) 式可知应为

$$\boxed{U'_{ij\cdots l} = U_{ab\cdots d}a_{ia}a_{jb}\cdots a_{ld}} \tag{7.7}$$

如有一个张量, 将其任意二指标交换后, 其值不变者, 称为对称张量; 其值变一正负号者, 称为反对称张量, 即

对称张量

$$U_{ijk\cdots l} = U_{ikj\cdots l} \tag{7.8}$$

反对称张量

$$U_{ijk\cdots l} = -U_{ikj\cdots l} \tag{7.9}$$

其中 j 与 k 为任意二指标, 由 (7.9) 式可知反对称张量中二指标相应分量恒为零.

场论中常用的张量有以下几种:

(1) 标量 U

零阶张量 U 称为标量, 由 (7.7) 式或 (7.2) 式可知零阶张量是一个与变换无关的常量, 即

$$\boxed{U' = U} \tag{7.10}$$

(2) 向量 U_i

一阶张量 U_i 称为向量, 由 (7.7) 式可知其变化规律为

$$\boxed{U'_i = a_{ik}U_k} \tag{7.11}$$

(3) 二阶张量 U_{ij} 与三阶张量 U_{ijk}

其变化规律由 (7.7) 式可知为

$$\boxed{U'_{ij} = a_{il}a_{jm}U_{lm}} \tag{7.12}$$

$$\boxed{U_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}U_{lmn}} \tag{7.13}$$

(4) 赝标量 $\tilde{U}$

设 U_{ijkl} 为一个四阶反对称张量, 定义 $U_{1234} \equiv \tilde{U}$, 则 U_{ijkl} 之值只有 $\tilde{U}, 0, -\tilde{U}$ 三种, 并且可以下式表示:

$$U_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl}\tilde{U} \tag{7.14}$$

但
$$\boxed{\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl}=4!} \tag{7.15}$$

故
$$\boxed{\tilde{U}=\frac{1}{24}\varepsilon_{ijkl}U_{ijkl}} \tag{7.16}$$

以 (7.16) 式定义的 $\tilde{U}$ 称为赝标量. 赝标量与标量的区别如下: 当空间坐标受反号变换
$$\boxed{\boldsymbol{x}_i=-\boldsymbol{x}_i,\quad x_4=x_4} \tag{7.17}$$

时, 按照 (7.2) 式赝标量的变化应为
$$\tilde{U}'\equiv U'_{1234}=\frac{\partial x_a}{\partial x_1}\frac{\partial x_b}{\partial x_2}\frac{\partial x_c}{\partial x_3}\frac{\partial x_d}{\partial x_4}U_{abcd}=-U_{1234}=-\tilde{U}$$

也就是说
$$\boxed{\tilde{U}(-\boldsymbol{x},x_4)=-\tilde{U}(\boldsymbol{x},x_4)} \tag{7.18}$$

而标量在坐标反号时是永远不变的, 即
$$\boxed{U(-\boldsymbol{x},x_4)=U(\boldsymbol{x},x_4)} \tag{7.19}$$

这是赝标量与标量的不同点, 由 (7.18) 式与 (7.19) 式可知**赝标量的空间宇称为负的, 而标量的宇称是正的.**

(5) 赝向量或赝矢量 $\tilde{U}$

设 U_{ijk} 为一个三阶反对称张量, 并设 $U_{234}\equiv\tilde{U}_1, U_{341}\equiv\tilde{U}_2, U_{412}\equiv\tilde{U}_3, U_{123}\equiv\tilde{U}_4$, 则 U_{ijk} 之值可表示为
$$U_{ijk}=\varepsilon_{ijkl}\tilde{U}_l \tag{7.20}$$

将 (7.20) 式乘以 ε_{ijkl}, 并利用 (7.15) 式可知
$$\boxed{\tilde{U}_l=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijkl}U_{ijk}\quad(l=1,2,3,4)} \tag{7.21}$$

以 (7.21) 式所定义的四个量 $\tilde{U}_i$ 称为赝向量, 赝向量与向量的区别在于当空间坐标受 (7.17) 式的反号变号时, 由 (7.2) 式可知
$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{U}_i(-\boldsymbol{x},x_4)&=\tilde{U}_i(\boldsymbol{x},x_4)\quad(i=1,2,3)\\ \tilde{U}_4(-\boldsymbol{x},x_4)&=-\tilde{U}_4(\boldsymbol{x},x_4)\end{aligned}} \tag{7.22}$$

而对于向量, 有
$$\boxed{\begin{aligned}U_i(-\boldsymbol{x},x_4)&=-U_i(\boldsymbol{x},x_4)\quad(i=1,2,3)\\ U_4(-\boldsymbol{x},x_4)&=U_4(\boldsymbol{x},x_4)\end{aligned}} \tag{7.23}$$

普通的向量 U_i 一般常称为极向量, 而赝向量常称为轴向量.

(6) 赝张量 $\tilde{U}_{ij}$

设 U_{ij} 为一个二阶反对称张量, 则赝张量的定义为

$$\tilde{U}_{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}U_{kl} \tag{7.24}$$

赝张量在场论中不常用, 这里我们不详谈.

3. 由旋量 $\boldsymbol{\psi}$ 与 $\boldsymbol{\gamma_i}$ 矩阵可组成的各种量

在研究自旋为 1/2 的质点与其他质点作用时常用到由旋量 ψ 与 γ_i 矩阵所组成的各种量. 现在首先让我们证明, 当时空坐标依洛伦兹变换时,

$$U_{ij\cdots l}=\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\cdots\gamma_l\psi \tag{7.25}$$

是一个张量. 因由 (4.22) 式与 (5.17) 式知

$$\begin{aligned}U'_{ij\cdots l}&=\overline{\psi}'\gamma_i\gamma_j\cdots\gamma_l\psi'=\overline{\psi}S^{-1}\gamma_i\gamma_j\cdots\gamma_lS\psi\\&=\overline{\psi}S^{-1}\gamma_iSS^{-1}\gamma_jS\cdots S^{-1}\gamma_lS\psi\end{aligned} \tag{7.26}$$

但因由 (4.20) 式有

$$\left.\begin{aligned}S^{-1}\gamma_iS&=a_{ia}\gamma_a\\S^{-1}\gamma_jS&=a_{jb}\gamma_b\\&\cdots\cdots\\S^{-1}\gamma_lS&=a_{ld}\gamma_d\end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

所以

$$\begin{aligned}U'_{ij\cdots l}&=a_{ia}a_{jb}\cdots a_{ld}\overline{\psi}\gamma_a\gamma_b\cdots\gamma_d\psi\\&=a_{ia}a_{jb}\cdots a_{ld}U_{ab\cdots d}\end{aligned} \tag{7.28}$$

由此可知 (7.25) 式是一个张量. 那么我们就可以立刻推演出由旋量波函数 ψ 与 γ_i 矩阵所组成的各种量:

(1) $\overline{\psi}\psi$——是标量 (7.29)

(2) $\overline{\psi}\gamma_i\psi$——是向量 (7.30)

(3) $\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi$——是二阶反对称张量 (7.31)

(4) $\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\psi$——是三阶反对称张量 (7.32)

(5) $\overline{\psi}\gamma_5\psi$——是赝标量 (7.33)

因由 (4.41) 式知

$$\overline{\psi}\gamma_5\psi=\frac{1}{24}\varepsilon_{ijkl}\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l\psi$$

这是合乎 (7.16) 式赝标量的定义的. 同理可证明

(6) $\overline{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi$——是赝矢量 (7.34)

(7) $\overline{\psi}\gamma_5\gamma_i\gamma_j\psi$——是赝张量 (7.35)

习　题

1. 试证明 ε_{ijkl} 对于洛伦兹变换是一个张量.(利用 $\varepsilon_{ijkl}a = \varepsilon_{abcd}a_{ia}a_{jb}a_{kc}a_{ld}a = |a_{ik}|$.)

2. 若 φ 为一标量, A_i 为向量, F_{ik} 为二阶张量, 试证明

(1) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$;

(2) A_iA_i;

(3) $F_{ik}F_{ik}$;

(4) $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial A_i}{\partial x_k}$

等量对于洛伦兹变换为不变量.

3. 讨论二阶张量与二阶赝张量有何不同.

参 考 文 献

[1] Wectherburn C E. An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus. §18— §19.

[2] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955, Vol. I: §4a.

§8 场论中的 Lagrange(拉格朗日) 原理

1. Lagrange 原理

在经典力学中, 我们知道质点运动的轨迹 $x_i = x_i(t)$ 应该使作用函数

$$I = \int L(x_i, \dot{x}_i)\mathrm{d}t \tag{8.1}$$

有最小值. L 称为 Lagrange 函数, 也就是说质点运动的轨迹应该使作用函数 I 的变分等于零, 即

$$\delta I = \delta \int L\mathrm{d}t = 0 \tag{8.2}$$

由此用变分法可求得质点运动的方程式:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{8.3}$$

这个方程式称为 Lagrange 方程式, 从数学的观点则叫做 Euler 方程式. 不少人曾发出这么一个问题, 为什么宇宙中质点运动的规律会这么巧, 恰好使作用函数 I 有最小值. 过去有些唯心学者认为这是造物者的智慧, 在下一节中, 我们将详细地分析这个问题. 可证明唯有在 I 最小时, 才能保证质点运动的能量、动量、角动量守恒. 也就是说, 唯有 L 适合 Lagrange 方程式 (8.3) 时, 质点的运动才可能有守恒定律存在, 这就是 Lagrange 原理的本质.

在场论中也可以用 Lagrange 原理来求场的运动方程式. 我们知道场是用一定的场函数描写的. 为了我们的理论有广泛的意义, 我们设 $U^{(\alpha)}$ 为描写场的广义函数, 它可以代表任何一种场, 可以是标量、向量或旋量场等. 其上角的符号 (α) 代表这个场函数的某一个分量, 在场论中场的作用函数可写为

$$\boxed{I = \int_G L(U^{(\alpha)}, U_i^{(\alpha)})(\mathrm{d}x)} \tag{8.4}$$

其中, $U_i^{(\alpha)} \equiv \dfrac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_i}$, $(\mathrm{d}x) \equiv \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$ 为四维时空体积元.G 为场在时空存在的范围, 当然在 G 的边界面 S 上场函数 $U^{(\alpha)}$ 应为零. 同时我们合理地假设在这个边界上 $U^{(\alpha)}$ 的变分也为零, 即

$$\delta U^{(\alpha)}|_S = 0 \tag{8.5}$$

场函数 $U^{(\alpha)}$ 为四维空间坐标函数, 当 G 一定时, 不同形式的场函数 $U^{(\alpha)}$ 对应着不同数值的 I. 因此 I 的数值是与函数 $U^{(\alpha)}$ 一一对应的, 从数学的观点我们

称 I 为函数 $U^{(\alpha)}$ 的泛函. 根据 Lagrange 原理, 场在时空里的运动, 也即场函数 $U^{(\alpha)}$ 的变化应该使 (8.4) 式场的作用函数 I 有最小值. 也即

$$\boxed{\delta I = \delta \int_G L(\mathrm{d}x) = 0} \tag{8.6}$$

这是不值得奇怪的, 我们在下一节将证明唯有在 I 取最小值的情况下, 场才能有能量、动量、角动量以及电荷或其他量的守恒. 由 (8.4) 式根据变分法原理可知

$$\begin{aligned}
&\delta \int_G L(U^{(\alpha)}, U_i^{(\alpha)})(\mathrm{d}x) \\
=&\int_G \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \delta U^{(\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \delta U_i^{(\alpha)} \right] (\mathrm{d}x) \\
=&\int_G \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \delta U^{(\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta U^{(\alpha)} \right] (\mathrm{d}x) \\
=&\int_G \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \right] \delta U^{(\alpha)} (\mathrm{d}x) + \\
&\int_G \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \delta U^{(\alpha)} \right] (\mathrm{d}x)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

用四维空间的 Gauss 定理, 可将 (8.7) 式后一个体积积分变为面积积分, 并且根据 (8.5) 式其值应该等于零, 即

$$\int_G \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \delta U^{(\alpha)} \right] (\mathrm{d}x) = \int \left[\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \delta U^{(\alpha)} \right] \mathrm{d}\sigma_i = 0 \tag{8.8}$$

四维空间的 Gauss 定理为

$$\boxed{\int_G \frac{\partial F_i}{\partial x_i} (\mathrm{d}x) = \int_S F_i \mathrm{d}\sigma_i} \tag{8.9}$$

此处

$$\mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4, \quad \mathrm{d}\sigma_2 = \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \mathrm{d}x_1$$

$$\mathrm{d}\sigma_3 = \mathrm{d}x_4 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2, \quad \mathrm{d}\sigma_4 = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

称为四维空间中超泛面积元. 所以由 (8.7) 式与 (8.8) 式, (8.6) 式写为

$$\int_G \left[\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} \right] \delta U^{(\alpha)} (\mathrm{d}x) = 0 \tag{8.10}$$

但因 $\delta U^{(\alpha)}$ 为任意变化的, 所以

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} = 0} \tag{8.11}$$

这就是场的运动方程式, 也称为 Euler 方程式. (8.11) 式仅是广义场函数一个 $U^{(\alpha)}$ 分量的运动方程式, 若场函数有几个分量, 则应该有几个与 (8.11) 式类似的 Euler 方程式. 为了以后方便起见, 设

$$\boxed{[L]_{U^{(\alpha)}} \equiv \frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}}} \tag{8.12}$$

$[L]_{U^{(\alpha)}}$ 称为 Euler 式. 利用 (8.12) 式场的运动方程式可为

$$\boxed{[L]_{U^{(\alpha)}} = 0} \tag{8.13}$$

2. 场论中 Lagrange 函数应具有的条件

我们知道到现在为止, 在所有已发现的粒子中, 其自旋根据实验观察比较肯定的仅有 $0, \frac{1}{2}, 1$ 三种, 自旋为 0 的粒子用标量波函数描写, 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子用旋量函数描写, 自旋为 1 的利用向量函数描写. 如粒子的空间宇称为负的, 则以其对应的赝量描写. 还有我们以后将证明描写带电粒子的波函数一定是复函数.

下表具体告诉我们什么样的粒子应该用什么性质的波函数描写, 粒子旁注有问号 (?) 的表示还未完全肯定.

函数种类	标量	赝标量	旋量	向量
自旋	0	0	1/2	1
空间宇称	+	−		
函数符号	φ	$\tilde{\varphi}$	ψ	A_i
描写的基本粒子	$\theta^{\pm}$ θ^0	$\pi^{\pm}$ π^0 $\tau^{\pm}$ τ^0	ν、$\tilde{\nu}$ $e^{\pm}$ $\mu^{\pm}$ n、$\tilde{n}$ p、$\tilde{p}$ Λ^0? $\sum^{\pm},\sum^0$? Ξ^0,Ξ^-?	γ

(8.14)

由 (8.4) 式知场的 Lagrange 函数 L 应该是由场的波函数 φ、$\tilde{\varphi}$、ψ、A_i 与这些函数对四维空间坐标的微分所组成的. 为了使 L 具有实际的物理意义, 它必须适合以下三个条件:

(1) L 必须对于洛伦兹变换是一个不变的量, 这样才能保证:

① 场的方程 $[L]_{U(\alpha)}=0$ 对于洛伦兹变换是协变的.

② 场的角动量的守恒.

(2) L 不应该为明显包含时空坐标 x_i 的函数, 这样才能保证动量与能量的守恒.

(3) L 必须是场函数或场函数偏微分二次齐式, 这样才能保证电荷的守恒.

为什么对于场的 Lagrange 函数要加这么多条件才能保证场的角动量、能量、动量、电荷守恒, 这一点我们在下几节中将谈到.

由于函数组成合乎以上三个条件的不变量大约可有下列几种:

标量:
$$\varphi^2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\text{等} \tag{8.15}$$

$$\varphi^*\varphi,\quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\quad(\text{如}\varphi\text{为复量}) \tag{8.16}$$

赝标量:
$$\frac{1}{24}\varphi_{ijkl}\varphi_{ijkl}=\tilde{\varphi}^2$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\varphi_{ijkl}}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial\varphi_{ijkl}}{\partial x_l}\right)=\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_l}\right)^2 \tag{8.17}$$

旋量:
$$\overline{\psi}\psi,\quad \overline{\psi}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i},\quad \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\text{等} \tag{8.18}$$

向量:
$$A_iA_i,\quad \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\text{或直接以}F_{ik}\text{组成} \tag{8.19}$$

$$F_{ik}F_{ik},\quad \varepsilon_{iklm}F_{ik}F_{lm}\text{等}$$

因此各种场的 Lagrange 函数 L 应该是由以上所提到的各种场函数构成的不变量所组成的. 而且 L 不应该是明显的包含 x_i 的函数.

3. 各种自由场的 Lagrange 函数的具体形式

Lagrange 原理在场论中是有重要的意义的.

(1) 如果我们已知场的方程式, 我们知道了 Lagrange 函数, L 便可以计算场的能量、动量、角动量 (包括自旋角动量), 以及各种电荷等重要的守恒量, 以后将知道这些守恒量都能以 Lagrange 函数 L 表示出来.

(2) 对于还不知道场的方程式的场, 我们要寻找它的运动方程式最简单的方法, 就是利用 Lagrange 原理. 因为用这种方法求出来的场的方程式, 立刻可以保证它有物理基本原理中所必需的各种守恒量. 其次场的方程式是一个对于洛伦兹变换有协变性的复杂的微分方程式, 直接去求一种新的场的方程式是比较困难的, 用 Lagrange 原理就简单得多了, 因 Lagrange 函数 L 是由简单的对

于洛伦兹变换的不变量所组成的. 选定了简单的 L, 根据 (8.11) 式就可以立该求出具有对于洛伦兹变换协变性的场的方程式.

这里还必须要说明, 不是所有对于洛伦兹变换有协变性的方程式, 都能描写场的真实运动. 因此对于未知场的方程式的场来说 Lagrange 原理的作用, 就是帮助我们找一个正确的 Lagrange 函数 L, 使得场的方程式 $[L]_{U^{(\alpha)}}=0$ 所得出来的各种结论能与实验符合.

现在我们将已知场的方程式的各种场的 Lagrange 函数写出, 这一章只谈自由场, 即没有其他场作用情况下的 Lagrange 函数, 我们将它以 L_0 表示之.

(1) 实标量场——描写不带电荷、自旋为 0 的粒子.

$$\boxed{L_0=-\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2+\chi^2\varphi^2\right]} \tag{8.20}$$

将 L_0 代入 (8.11)Euler 方程式, 可得实际量场的运动方程式:

$$\Box\varphi-\chi^2\varphi=0 \tag{8.21}$$

这个方程式就是以前所熟知的 Klein−Gordon 方程式, L_0 函数前的常数 $-\dfrac{1}{8\pi}$ 是为了能够得出正确数值的守恒量, 场的运动方程式是与这个常数无关的.

(2) 复标量场——描写带电荷、自旋为 0 的粒子.

$$\boxed{L_0=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\chi^2\varphi^*\varphi\right)} \tag{8.22}$$

设 φ^* 为变分量, 则由 (8.11) 式可得 φ 的方程式:

$$\Box\varphi-\chi^2\varphi=0$$

设 φ 为变分量, 则可得 φ^* 的方程式:

$$\boxed{\Box\varphi^*-\chi^2\varphi^*=0} \tag{8.23}$$

由此可知 φ^* 与 φ 都适合 Klein−Gordon 方程式.

(3) 赝标量场——描写自旋为 0、宇称为负的粒子.

$$L_0=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{6}\frac{\partial\varphi_{ijkl}}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi_{ijkl}}{\partial x_l}+\chi^2\frac{1}{24}\varphi_{ijkl}\varphi_{ijkl}\right) \tag{8.24}$$

φ_{ijkl} 为四阶反对称张量. 由 (7.12) 式可知

$$\varphi_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl}\tilde{\varphi} \tag{8.25}$$

将 (8.25) 式代入 (8.24) 式并利用 (7.13) 式可得

$$\boxed{L_0 = -\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_l}\right)^2 + \chi^2\tilde{\varphi}^2\right]} \tag{8.26}$$

其形式与 (8.20) 式同, 因此赝标量场的方程式也是 Klein–Gordon 方程式:

$$\boxed{\Box\tilde{\varphi} - \chi^2\tilde{\varphi} = 0} \tag{8.27}$$

自由赝标量场的方程式与自由标量场的方程式是没有任何区别的. 他们只是在与其他的场作用时才有区别.

(4) 旋量场——描写自旋为 $\frac{1}{2}$、带电或不带的粒子 (波函数为实的则可描写不带电粒子).

$$\boxed{L_0 = -\hbar c\left[\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right) + \chi\overline{\psi}\psi\right]} \tag{8.28}$$

将 L_0 带入 Euler 方程式 (8.11), 以 $\overline{\psi}$ 为变分量可得 Dirac 方程式:

$$\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \chi\psi = 0 \tag{8.29}$$

以 ψ 为变分量则得 Dirac 方程式之共轭方程式:

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k - \chi\overline{\psi} = 0$$

(5) 向量场——描写自旋为 1 的粒子.

光子的自旋为 1, 静止质量为 0, 它的 Lagrange 函数的形式应为

$$L_0' = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \tag{8.30}$$

将 (8.30) 式代入 (8.16) 式可得电磁场中的 D'Alembert 方程式:

$$\Box A_i = 0 \tag{8.31}$$

用 (8.30) 式形式的 L_0' 是得不到 Maxwell–Lorentz 方程式的, Maxwell–Lorentz 方程式的 Lagrange 函数应为

$$\boxed{L_0 = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{ik}} \tag{8.32}$$

将 (8.32) 式代入 (8.11) 式可得 Maxwell–Lorentz 第二组方程式 (6.14) 式, 其第一组方程式 (6.13) 式是 (6.10) 式的自然结果.

由第 §6 节知道 Maxwell–Lorentz 方程式与 D'Alembert 方程式的差别在于后者多一个附加的 Lorentz 条件:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0 \tag{8.33}$$

因

$$L_0' - L_0 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)^2$$

也即

$$\boxed{L_0' = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{ik} - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)^2} \tag{8.34}$$

所以如果 A_i 符合 Lorentz 条件, 则 L' 与 L 无区别.

描写静止质量不为零的向量场为

$$\boxed{L_0 = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \chi^2 A_i A_i\right)} \tag{8.35}$$

而其对应的场的方程式, 则应为

$$\Box A_i - \chi^2 A_i = 0 \tag{8.36}$$

习　题

1. 设非线性向量场的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{i}E_0}(F_{ik}F_{ik})}\right) \quad (E_0 = \text{常数})$$

试求这个向量场的运动方程式.

2. 在高次导数向量场的理论中

$$L = -\frac{1}{16\pi}\left(F_{ik}F_{ik} - \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}\right) \quad (k_0 = \text{常数})$$

试求其场的运动方程式.

3. 试证明如果 Lagrange 函数 L 对洛伦兹变换为不变量, 则场的方程式 $[L]_{U(\alpha)} = 0$ 对洛伦兹变换是协变的.

参考文献

[1] Pauli W. Rev. of Modern Phys., 1941, 13(3).

[2] Peskin M E. An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press, 1995.

§9 经典力学中的广义守恒原理

1. 经典力学中的守恒定律与空间转换的关系

经典力学中的物理量一般可用一个张量 $T_{ij\cdots k}$ 表示, 例如能量是一个零阶张量 (标量), 速度、加速度、力和动量等是一阶张量 (向量), 角动量则是一个二阶张量.

经典力学中的守恒量, 就是代表这个物理量的张量对于时间是不变的, 即

$$\frac{\mathrm{d}T_{ij\cdots k}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{9.1}$$

也即

$$T_{ij\cdots k}=\text{const.}$$

例如在经典力学中的动量、能量、角动量都是守恒量.

现在我们要证明经典力学中守恒定律与空间转换性质间的关系的一个重要定理. 这个定理的内容如下:

假设经典力学中质点系统的作用函数

$$I=\int L(x_i,\dot{x}_i)\mathrm{d}t \tag{9.2}$$

对于某一个空间坐标变换

$$x_i'=X_i(x_i,\alpha_{ij\cdots n}) \tag{9.3}$$

不变, 并设当 $\alpha_{ij\cdots n}=0$ 时

$$x_i'=x_i \tag{9.4}$$

而且 Lagrange 函数 L 满足 Euler 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=0 \tag{9.5}$$

则存在着一个守恒的张量 $T_{ij\cdots n}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}T_{ij\cdots n}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{9.6}$$

(9.3) 式中的 $\alpha_{ij\cdots n}$ 为广义变换参数, 例如在位移变换时, $x_i'=x_i+\alpha_i$, 在这个情况下变换参数就是 α_i.

这个定理的证明如下: (9.2) 式作用函数 I 经过 (9.3) 式之变换后应为参数 $\alpha_{ij\cdots n}$ 的函数, 即

$$I' = \int L' \mathrm{d}t = \int L(\dot{X}_i, X_i)\mathrm{d}t = I(\alpha_{ij\cdots n}) \tag{9.7}$$

但定理中假设 I 对于 (9.3) 式的变换不变, 即

$$\delta I' = \int \left(\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} \alpha_{ij\cdots n} \right) \mathrm{d}t = 0 \tag{9.8}$$

也即

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} = 0$$

但

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{\partial L'}{\partial X_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_l} \frac{\partial \dot{X}_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} \\
&= \left. \frac{\partial L}{\partial x_l} \frac{\partial X_l}{\partial x_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \frac{\mathrm{d}\partial X_l}{\mathrm{d}t \partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right) \Bigg|_{\alpha=0} + \left(\frac{\partial L}{\partial x_l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) \left. \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0}
\end{aligned} \tag{9.9}$$

设

$$\boxed{T_{ij\cdots n} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0}} \tag{9.10}$$

则 (9.9) 式可写为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_{ij\cdots n}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial L}{\partial x_l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) \left. \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij\cdots n}} \right|_{\alpha=0} = 0} \tag{9.11}$$

由 (9.11) 式可知当 L 满足 Lagrange 方程式

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_l} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = 0} \tag{9.12}$$

时, 有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_{ij\cdots n}}{\mathrm{d}t} = 0} \tag{9.13}$$

也就是说, 只有当 L 满足 Lagrange 方程式时, 才可能存在着一个力学的守恒量 $T_{ij\cdots n}$. 这个定理便被证明了. 从这个定理可以得出重要的结论, 就是所有力学中的守恒量都是与使作用函数 I 不变的某种坐标转换规律相对应着的. 因此守恒定律是与空间的转换有着密切的关系, 同时从这个定理推演的过程中可以明确地看出, 只当 L 满足 Lagrange 方程 (9.12) 式, 也就是只有当 $\delta\int L\mathrm{d}t=0$ 时, 才可能保证有守恒量. 这也就是 Lagrange 原理的哲学本质, 利用 (9.10) 式我们可以求出力学中的各种守恒量.

2. 经典力学中的动量

假设作用函数 I 对于空间位移变换

$$\boxed{X_i=x_i+\alpha_i} \tag{9.14}$$

不变, 则将 (9.14) 式代入 (9.10) 式可知存在着一个一阶的守恒张量

$$T_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_l}\frac{\partial X_l}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_l}\delta_{li}=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_l} \tag{9.15}$$

这个一阶张量, 也即向量, 恰好是力学中的动量, 以 p_i 表示之, 即

$$\boxed{p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_l}} \tag{9.16}$$

同时由 (9.13) 式可知 p_i 应该是守恒量.

因此动量的定义也可用下面的说法, 就是空间位移变换所对应的守恒量我们叫做动量.

3. 经典力学中的角动量

假设作用函数 I 对于微小转动变换

$$X_i=(\delta_{ik}+\alpha_{ik})x_k$$

或

$$\boxed{X_i=x_i+\alpha_{ik}x_k} \tag{9.17}$$

不变, 则存在着一个二阶的守恒张量, 这个张量就是力学中的角动量, (9.17) 式中 α_{ik} 为一微小参数.

这里为什么要用 (9.17) 式的微小转动, 而不用普通的转动

$$X_i=a_{ik}x_k \tag{9.18}$$

因为 (9.18) 式这种变换不适合广义守恒定理中 (9.4) 式的条件.

由于转动变换不应改变两点间的距离, 所以由

$$X_j^2 = x_i^2 + \alpha_{ik} x_i x_k + (\alpha^2)$$

可知

$$\alpha_{ik} x_i x_k = 0$$

即

$$\boxed{\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}} \tag{9.19}$$

将 (9.17) 式代入 (9.10) 式的广义张量式, 并利用 (9.19) 式可得

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ik}} = p_l \frac{\partial \alpha_{lm}}{\partial \alpha_{ik}} x_m = p_i(\delta_{li} x_k - \delta_{lk} x_i) \\ &= p_i x_k - x_i p_k \end{aligned} \tag{9.20}$$

(9.20) 式所代表的二阶张量恰好是力学中的角动量, 以 L_{ik} 表示之, 即

$$\boxed{L_{ik} = p_i x_k - x_i p_k} \tag{9.21}$$

从 (9.13) 式可知角动量也应该是守恒量. 因此和空间转动变换所对应的守恒量叫做角动量.

最后我们要说明在经典力学中的能量守恒定律, 是 Lagrange 方程式本身的结果. 因为由 Lagrange 方程式可知

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L \right) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以能量 H 是守恒的.

在精确的狭义相对论的力学中, 四维空间的动量是四维空间位移变换所对应的守恒量. 因此能量应该是时间平移变换所对应的守恒量, 这点读者可在习题中自己证明.

习　题

在狭义相对论中, 由于质点运动的作用函数 I, 应对洛伦兹变换是一个不变量, 所以

$$I = \int L(\dot{x}_i, x_i) \mathrm{d}S$$

(1) 试由最小作用原理证明, 狭义相对论中质点的运动方程式为

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad \dot{x}_i \equiv \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}S}$$

(2) 试证明在狭义相对论力学中存在一个广义守恒张量

$$T_{ij\cdots l} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{ij\cdots l}}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_{ij\cdots l}}{\mathrm{d}S} = 0$$

其中 $$x_i' = X_i(x_1, x_2, x_3, x_4; \alpha_{ij\cdots l})$$

(3) 证明四维空间力学的能量、动量和角动量守恒定律.

§10 场论中的广义守恒原理

在场论中也可以得到像经典力学中那样性质的广义守恒定律. 这对我们了解场论中的 Lagrange 原理和寻找场论中各种具体的守恒量是有很大的帮助的.

1. 广义守恒定理 I

假设 $\overbrace{\theta_{ij\cdots lm}}^{n}(x)$ 为 n 阶的张量函数, 并设这个张量函数在某个三维空间体积 V 内其值不为零, 在 V 的表面上和在 V 以外的部分其值为零. 如果

$$\frac{\partial\theta_{ij\cdots lm}}{\partial x_m}=0 \tag{10.1}$$

则存在一个 $(n-1)$ 阶的守恒张量

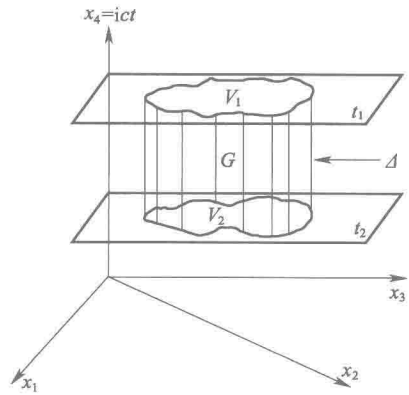
$$\overbrace{T_{ij\cdots l}}^{n-1}(t)\equiv\int\theta_{ij\cdots l4}\mathrm{d}V=\text{const.} \tag{10.2}$$

这个定理的证明如下:

由四维空间的 Gauss 定理 (8.9) 式和 (10.1) 式可知

$$\int_G\frac{\partial\theta_{ij\cdots lm}}{\partial x_m}(\mathrm{d}x)=\int_S\theta_{ij\cdots lm}\mathrm{d}\sigma_m=0 \tag{10.3}$$

我们知道三维空间的体积 V 是四维空间中 t 为常量的超泛平面上的一个面积, 设 (10.3) 式中的积分范围 G 为下图中 V_1、 V_2 两超泛平面间所包含的四维空间的柱体, 其侧面积为 Δ, 因此, $S=V_1+V_2+\Delta$, 由定理的假设可知, 在侧



面积 Δ 上和 Δ 以外, $\theta_{ij\cdots lm}=0$, 并且在 V_1 与 V_2 上由于 t 为常量, 所以 $\mathrm{d}\sigma_1=\mathrm{d}\sigma_2=\mathrm{d}\sigma_3=0$, 因此 (10.3) 式的右式可写为

$$\int_S \theta_{ij\cdots lm}\mathrm{d}\sigma_m=\int_{V_1+V_2+\Delta}\theta_{ij\cdots lm}\mathrm{d}\sigma_m=\int_{V_1+V_2}\theta_{ij\cdots l4}\mathrm{d}\sigma_4=0$$

所以
$$\int_V \theta_{ij\cdots l4}(t_1)\mathrm{d}V-\int_V\theta_{ij\cdots l4}(t_2)\mathrm{d}V=0 \tag{10.4}$$

也即
$$T_{ij\cdots l}(t)\equiv\int\theta_{ij\cdots l4}(t)\mathrm{d}V=\text{守恒量} \tag{10.5}$$

因此, 我们可以知道, 如果在场论中存在一个 n 阶张量 $\theta_{ij\cdots lm}$ 满足四维空间散度为零的关系式, 即

$$\boxed{\frac{\partial\theta_{ij\cdots lm}}{\partial x_m}=0} \tag{10.6}$$

这就意味着有守恒量的存在, 并且这个守恒量是一个 $(n-1)$ 阶的张量, 其值可用 (10.5) 式计算.

2. 广义守恒定理 Ⅱ

这个定理的内容如下:

假设四维空间坐标 x_i 和场函数 $U^{(\alpha)}$ 经过下列形式的变换:

$$\begin{cases} x_i'=X_i(x_1,x_2,x_3,x_4;\alpha_{ij\cdots m}) & (10.7)\\ U'^{(\alpha)}=U'^{(\alpha)}(X_1,X_2,X_3,X_4;\alpha_{ij\cdots m})\\ \qquad\quad =V^{(\alpha)}(x_1,x_2,x_3,x_4;\alpha_{ij\cdots m}) & (10.8)\\ \text{当}\alpha_{ij\cdots n}=0\text{时},\\ x_i'=x_i,\quad U'^{(\alpha)}=U^{(\alpha)} & (10.9)\end{cases}$$

能使场的作用函数

$$I=\int_G L(x_i,U^{(\alpha)},U_k^{(\alpha)})(\mathrm{d}x) \tag{10.10}$$

不变, 则存在着一个张量

$$\theta_{[ij\cdots m]k}\equiv\left[L\frac{\partial X_k}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}+\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}-\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_l^{(\alpha)}\frac{\partial X_l}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}\right]_{\alpha=0} \tag{10.11}$$

满足以下的关系式:

$$\left.\frac{\partial\theta_{[ij\cdots m]k}}{\partial x_k}+[L]_{U^{(\alpha)}}\frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}\right|_{\alpha=0}=0 \tag{10.12}$$

$$W^{(\alpha)}\equiv U'^{(\alpha)}(x_1,x_2,x_3,x_4;\alpha_{ij\cdots m})$$

从这个定理可得出重要的结论, 就是由 (10.12) 式可以知道当场的Lagrange函数 L 满足 Euler 方程式

$$[L]_{U^{(\alpha)}}=0 \tag{10.13}$$

时, 就存在一个由 (10.11) 式所定义的张量 $\theta_{[ij\cdots m]k}$, 满足关系式

$$\boxed{\frac{\partial\theta_{[ij\cdots m]k}}{\partial x_k}=0} \tag{10.14}$$

这也就是说 (根据定理 I), 存在一个守恒的张量

$$\boxed{T_{ij\cdots m}=\int_V\theta_{[ij\cdots m]4}\mathrm{d}V=\text{const.}} \tag{10.15}$$

因此我们说只有当

$$\delta I=\delta\int L(\mathrm{d}x)=0$$

时, 我们所建立的场论才可能有守恒量的存在, 这就是场论中为什么要用Lagrange 原理的道理. 利用定理 Ⅱ我们在以后几节中可以很容易地求得场论中的能量、动量、角动量、电荷等守恒定律.

3. 定理 Ⅱ的证明

(10.10) 式作用函数 I 经过了变换 (10.7) 式与 (10.8) 式后, 可变为

$$\begin{aligned}I'&=\int_{G'}L(x_i',U'^{(\alpha)},U_k'^{(\alpha)})(\mathrm{d}x)'\\&=\int_G L(X_i,V^{(\alpha)},V_k^{(\alpha)})J(\mathrm{d}x)\end{aligned} \tag{10.16}$$

I' 应为变换参数 $\alpha_{ij\cdots m}$ 的函数, 即

$$I'=I(\alpha_{ij\cdots m})$$

而
$$J=\frac{\partial(X_1,X_2,X_3,X_4)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)} \tag{10.17}$$
是 Jacobian 行列式.

在定理中假设 $I(\alpha_{ij\cdots m})$ 对于变换 (10.7) 式与 (10.8) 式不变, 即
$$\delta I=\left.\frac{\partial I(\alpha_{ij\cdots m})}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}\right|_{\alpha=0}\alpha_{ij\cdots m}=0 \tag{10.18}$$
所以
$$\left.\frac{\partial I(\alpha_{ij\cdots m})}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}\right|_{\alpha=0}=0 \tag{10.19}$$
由 (10.16) 式可知
$$\frac{\partial I}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}=\int_G\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial X_l}\frac{\partial X_l}{\partial\alpha_{i\cdots m}}+\frac{\partial L}{\partial V^{(\alpha)}}\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial\alpha_{i\cdots m}}+\frac{\partial L}{\partial V_k^{(\alpha)}}\frac{\partial V_k^{(\alpha)}}{\partial\alpha_{l\cdots m}}\right]J+L\frac{\partial J}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\right\}(\mathrm{d}x) \tag{10.20}$$
但是由 (10.17) 式知
$$\frac{\partial J}{\partial\alpha_{ij\cdots m}}=\sum_{k=1}^{4}J_{i\cdots m}^k$$
其中
$$J_{i\cdots m}^k\equiv\frac{\partial\left(X_1,\cdots,\dfrac{\partial X_k}{\partial\alpha_{ij\cdots m}},\cdots,X_4\right)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial X_4}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial X_4}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3}&\cdots&\dfrac{\partial}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_3}&\cdots&\dfrac{\partial X_4}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial X_1}{\partial x_4}&\cdots&\dfrac{\partial}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_4}&\cdots&\dfrac{\partial X_4}{\partial x_4}\end{vmatrix}$$
但
$$\left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{\alpha=0}=\delta_{ij}$$
所以
$$\left.J_{i\cdots m}^k\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial X_k}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\right|_{\alpha=0}\text{(这里的 }k\text{ 不代表求和的意思)}$$
因此
$$\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha_{i\cdots m}}\right|_{\alpha=0}=\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial X_k}{\partial\alpha_{i\cdots m}} \tag{10.21}$$

将 (10.21) 式代入 (10.20) 式并注意 (10.19) 式可得

$$\int_G \left[\frac{\partial L}{\partial X_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \frac{\partial V_k^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + L \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial X^k}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right]_{\alpha=0} (\mathrm{d}x) = 0 \tag{10.22}$$

因 (10.22) 式对于任意的积分范围 G 皆为零, 因此其被积分函数必恒等于零, 所以

$$\left[\frac{\partial L}{\partial X_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \frac{\partial V_k^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + L \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right]_{\alpha=0} = 0 \tag{10.23}$$

设

$$W^{(\alpha)} = U'^{(\alpha)}(x_1, x_2, x_3, x_4; \alpha_{i\cdots m}) \tag{10.24}$$

则

$$\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} = \frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \tag{10.25}$$

$$\frac{\partial V_k^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} = \frac{\partial W_k^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial U_k^{(\alpha)}}{\partial x_l} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \tag{10.26}$$

将 (10.25) 式与 (10.26) 式代入 (10.23) 式得

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial X_l} + \frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \frac{\partial U_k^{(\alpha)}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + L \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} \frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \frac{\partial W_k^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right]_{\alpha=0} = 0 \tag{10.27}$$

也即

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(L \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \right) \frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right]_{\alpha=0} = 0 \tag{10.28}$$

所以

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[L \frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{i\cdots m}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \left(\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} - U_l^{(\alpha)} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right) \right] + [L]_{U^{(\alpha)}} \frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}} \right\}_{\alpha=0} = 0 \tag{10.29}$$

因此 $$\frac{\partial}{\partial X_k}\left[L\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{i\cdots m}}+\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{i\cdots m}}-\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_l^{(\alpha)}\frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{i\cdots m}}\right]_{\alpha=0}+$$

$$[L]_{U^{(\alpha)}}\frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{ij\cdots m}}\bigg|_{\alpha=0}=0 \tag{10.30}$$

这就是广义守恒定理 II 的证明.

习　题

1. 讨论 Lagrange 原理、时空的转换和守恒定律三者之间的关系.

2. 试说明不用最小作用原理, 仅由守恒定律的要求, 也能求出场的运动方程式是 Euler 方程式.

参 考 文 献

[1] 段一士. 任意自旋场的广义协变方程. 苏联科学院实验与理论物理杂志 (俄文), 1958, 34(3).

[2] Duan Yishi. General Covariant Equations for Fields of Arbitrary Spin. Soviet Physics JETP, 1958, 34(7): 3.

[3] 巴戈留保夫, 等. 量子场论导论 (俄文). 1954: §2.

§11 能量、动量、张量与能量、动量守恒定律

从第 §9 节我们知道在经典力学中的动量是作用函数对于位移的变换不换, 所对应的守恒量. 在场论中四维空间的动量也应该如此定义, 这样才能使它和经典力学中的动量有一样的性质.

假设场的作用函数I(10.10) 式对于下列四维空间的位移变换不变:

$$X_i = x_i + \alpha_i \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{11.1}$$

$$V^{(\alpha)} = U^{(\alpha)} \tag{11.2}$$

也即

$$\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{11.3}$$

则由 (10.11) 式知道必存在有一个张量

$$\begin{aligned}\theta_{ik} &= L\delta_{ik} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} \times 0 - \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U_l^{(\alpha)} \delta_{li} \\ &= \delta_{ik} L - \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U_i^{(\alpha)} \equiv -T_{ik}\end{aligned}$$

即

$$\boxed{T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U_i^{(\alpha)} - \delta_{ik} L} \tag{11.4}$$

这个由 (11.4) 式所定义的张量, 我们称为场的能量动量张量, 以 T_{ik} 表示, 同时由 (10.14) 式可知, T_{ik} 必满足方程式

$$\boxed{\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0} \tag{11.5}$$

也就是说存在着一个守恒的一阶张量, 即向量

$$\boxed{p_i \equiv \frac{\mathrm{i}}{c} \int T_{i4} \mathrm{d}V} \tag{11.6}$$

这个守恒的向量称之为场的四维空间动量. 因为它是对应着位移变换的守恒量, p_1、 p_2、 p_3 代表三维空间的动量在 x、 y、 z 三坐标的分量, $p_4 = \mathrm{i}E/c$, 所以

$$\boxed{E = \int T_{44} \mathrm{d}V} \tag{11.7}$$

对于复数的场函数, $U^{*(\alpha)}$ 与 $U^{(\alpha)}$ 可当成场函数两个不同的分量, 则能量动量张量 (11.4) 式应写为

$$\boxed{T_{ik}=\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_i^{(\alpha)}+\frac{\partial L}{\partial U_k^{*(\alpha)}}U_i^{*(\alpha)}-\delta_{ik}L} \tag{11.8}$$

设 $f_{i[jk]}$ 为任意一个对于 j, k 为反对称的张量, 即

$$f_{i[jk]}=-f_{i[kj]} \tag{11.9}$$

则下列形式的张量 T_{ij}^{S} 也满足 (11.5) 式的守恒定律:

$$T_{ij}^{\mathrm{S}}=T_{ij}-\frac{\partial}{\partial x_k}f_{i[jk]} \tag{11.10}$$

因由 (11.5) 式和 (11.9) 式可知

$$\frac{\partial T_{ij}^{\mathrm{S}}}{\partial x_j}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}f_{i[jk]}=0$$

在一般的情况下, T_{ik} 不是对称的, 但是我们在场论中常常可以选择一个张量 $f_{i[jk]}$ 使得 T_{ij}^{S} 变为对称张量, 即

$$T_{ij}^{\mathrm{S}}=T_{ji}^{\mathrm{S}} \tag{11.11}$$

以后我们将知道, 这样能使 T_{ij}^{S} 对称的函数 $f_{i[jk]}$ 是与场的自旋张量有直接关系的.

设 W 代表能量密度, $G_i(i=1,2,3)$ 代表动量密度, 即

$$\boxed{W=T_{44}} \tag{11.12}$$

$$\boxed{G_i=\frac{\mathrm{i}}{c}T_{i4}\quad(i=1,2,3)} \tag{11.13}$$

也即

$$E=\int W\mathrm{d}V \tag{11.14}$$

$$\boldsymbol{p}=\int \boldsymbol{G}\mathrm{d}V \tag{11.15}$$

现在我们利用 (11.4) 式来具体计算各种场的能量动量张量和能量与动量密度.

1. 实标量场

由 (8.20) 式可知其 Lagrange 函数为

$$L_0 = -\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 + \chi^2\varphi^2\right] \tag{11.16}$$

将其代入 (11.4) 式可得

$$\boxed{T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - L_0\delta_{ik}} \tag{11.17}$$

由此可知

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \chi^2\varphi^2\right]} \tag{11.18}$$

$$\boxed{G_i = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (i = 1,2,3)} \tag{11.19}$$

2. 复标量场

$$L_0 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \chi^2\varphi^*\varphi\right) \tag{11.20}$$

$$\boxed{T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \delta_{ik}L_0} \tag{11.21}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\varphi^*\nabla\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \chi^2\varphi^*\varphi\right)} \tag{11.22}$$

$$\boxed{G_i = -\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} \tag{11.23}$$

3. 赝标量场

T_{ik}, W, G_i 与标量场相同.

4. 旋量场

$$L_0 = -\frac{\hbar c}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right) - \chi\overline{\psi}\psi \tag{11.24}$$

或

$$L_0 = -\frac{\hbar c}{2}\overline{\psi}\left(\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \chi\psi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k - \chi\overline{\psi}\right)\psi$$

$$\boxed{T_{ik}=-\frac{\hbar c}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_k\psi\right)} \tag{11.25}$$

$$\boxed{W=\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(-\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right)} \tag{11.26}$$

$$\boxed{G_i=\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x_i}\psi\right)} \tag{11.27}$$

5. 向量场

用 (8.30) 式所定义的 Lagrange 函数

$$L_0=-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\frac{\partial A_l}{\partial x_k} \tag{11.28}$$

则

$$\boxed{T_{ik}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial A_l}{\partial x_m}\frac{\partial A_l}{\partial x_m}\right)} \tag{11.29}$$

$$\boxed{W=\frac{1}{8\pi}\left[(\nabla A_l)^2+\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_l}{\partial t}\right)^2\right]} \tag{11.30}$$

$$\boxed{G_i=-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial A_l}{\partial X_i}\frac{\partial A_l}{\partial t}} \tag{11.31}$$

如用 (8.32) 式所定义的 Lagrange 函数, 即

$$L_0=-\frac{1}{16\pi}F_{mn}F_{mn}$$

则可得

$$\boxed{T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial Al}{\partial x_i}\right)F_{lk}-L\delta_{ik}} \tag{11.32}$$

这个能量动量张量显然是不对称的. 但是我们很容易找到一个对称的张量

$$\boxed{T^{\mathrm{S}}_{ik}=\frac{1}{4\pi}F_{li}F_{lk}-L\delta_{ik}} \tag{11.33}$$

并且利用 (6.14) 式, 有

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{S}}_{ij}-T_{ij}&=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}F_{kj}\\&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}(A_iF_{jk})\end{aligned} \tag{11.34}$$

将 (11.34) 式与 (11.10) 式比较, 可知

$$\boxed{f_{i[jk]} = -\frac{1}{4\pi} A_i F_{jk}} \tag{11.35}$$

由 (11.33) 式和 (11.12) 式、 (11.13) 式可得

$$W = \frac{1}{4\pi} F_{l4} F_{l4} - L = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$$
$$G_i = \frac{1}{4\pi} F_{li} F_{l4}$$

所以由 (8.32) 式所定义的 Lagrange 函数求得的向量场的能量与动量密度应写为

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \\ \boldsymbol{G} &= \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \end{aligned}} \tag{11.36}$$

这里我们求得的 W 与 $\boldsymbol{G}$ 是与经典电动力学完全符合的, 这是我们理论的一个验证.

习　题

1. 证明本节中旋量场的 T_{ik}, W 与 G_i 的公式.

2. 试直接由公式

$$T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U_i^{(\alpha)} - \delta_{ik} L$$

证明

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

3. 试由 (11.32) 式的 T_{ik} 求电磁场的 W 与 $\boldsymbol{G}$, 并证明由求得的 W 和 $\boldsymbol{G}$ 计算出来的总能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$, 是与用 (11.36) 式的 W 和 $\boldsymbol{G}$ 求得的结果是一样的.

参 考 文 献

[1] 朗道, 栗弗席兹. 场论. 北京：高等教育出版社. 2012.

[2] Kaku Michio. Quantum field theory: A modern Introduction. Oxford University Press, 2005.

§12 角动量张量与角动量守恒定律

在经典力学中角动量是作用函数I对于转动变换所对应的守恒量. 在场论中四维空间的角动量也是如此定义的, 这个转动变换就是洛伦兹变换.

时空坐标的微小洛伦兹变换和场函数$U^{(\alpha)}$的微小转动可以用下列形式表示:

$$X_k = (\delta_{kl} + \alpha_{kl})x_l = x_k + \alpha_{kl}x_l \quad (k = 1,2,3,4) \tag{12.1}$$

$$\boxed{V^{(\alpha)} = U^{(\alpha)} + \sum_{k<l} S_{kl}^{(\alpha)}\alpha_{kl}} \tag{12.2}$$

这里的α_{kl}利用四维空间的距离对转动变换为不变量的道理和 (9.20) 式一样的方法可证明

$$\alpha_{kl} = -\alpha_{lk} \tag{12.3}$$

为什么要用微小的洛伦兹变换而不用普通的变换? 是因为只有这样的微小洛伦兹变换才能满足 (10.9) 式的条件. 由 (12.1) 式和 (12.3) 式可知

$$\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial \alpha_{ij}}x_l = x_j\delta_{ik} - x_i\delta_{jk} \tag{12.4}$$

$$\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{ij}} = \sum_{k<l} S_{kl}^{(\alpha)}\frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial \alpha_{ij}} = S_{ij}^{(\alpha)} \tag{12.5}$$

假设场的作用函数 I 对于 (12.1) 式和 (12.2) 式的变换不变, 则由 (10.11) 式可知必存在一个三阶张量

$$\theta_{[ij]k} = \left[L\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_{ij}} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}\frac{\partial V^{(\alpha)}}{\partial \alpha_{ij}} - \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_l^{(\alpha)}\frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{ij}}\right]_{\alpha=0} \tag{12.6}$$

将 (12.4) 式与 (12.5) 式代入 (12.6) 式并利用公式 (11.4) 式可得

$$\begin{aligned}\theta_{[ij]k} &= L(x_j\delta_{ik} - x_i\delta_{jk}) + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}S_{ij}^{(\alpha)} - \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_l^{(\alpha)}(x_j\delta_{il} - x_i\delta_{jl}) \\ &= x_i\left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_j^{(\alpha)} - \delta_{jk}\right) - x_j\left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_i^{(\alpha)} - \delta_{ik}\right) + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}S_{ij}^{(\alpha)} \\ &= x_iT_{jk} - x_jT_{ik} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}S_{ij}^{(\alpha)}\end{aligned} \tag{12.7}$$

这个三阶张量 $\theta_{[ij]k}$ 称为场的三阶角动量张量, 可以 $J_{[ij]k}$ 表示之, 即

$$\boxed{J_{[ij]k} \equiv x_i T_{jk} - x_j T_{ik} + \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}} \tag{12.8}$$

设

$$\boxed{L_{[ij]k} \equiv x_i T_{jk} - x_j T_{ik}} \tag{12.9}$$

$$\boxed{S_{[ij]k} \equiv \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}} \tag{12.10}$$

此处 $L_{[ij]k}$ 为场的三阶轨道角动量张量, $S_{[ij]k}$ 为场的三阶自旋角动量张量, 则场的三阶总角动量张量

$$\boxed{J_{[ij]k} = L_{[ij]k} + S_{[ij]k}} \tag{12.11}$$

由 (10.14) 式可知

$$\boxed{\frac{\partial J_{[ij]k}}{\partial x_k} = 0} \tag{12.12}$$

将 (12.8) 式代入 (12.12) 式并考虑 (11.5) 式得

$$T_{ji} - T_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}\right) = 0$$

也即

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}\right) = T_{ij} - T_{ji} \tag{12.13}$$

所以 $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}\right)$ 对于 i, j 是一个反对称张量, 但由 (11.10) 式可将 T_{ij} 以对称张量 T_{ij}^{S} 代替之, 则

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)}\right) = T_{ij}^{\mathrm{S}} - T_{ji}^{\mathrm{S}} + \frac{\partial}{\partial x_k}(f_{i[jk]} - f_{j[ik]})$$

但因

$$T_{ij}^{\mathrm{S}} = T_{ji}^{\mathrm{S}}$$

所以

$$\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} S_{ij}^{(\alpha)} = f_{i[jk]} - f_{j[ik]} \tag{12.14}$$

也即

$$\boxed{S_{(ij)k} = f_{i[jk]} - f_{j[ik]}} \tag{12.15}$$

由 (11.10) 式与 (12.15) 式可知, 如果某种场的能量动量张量 T_{ik} 是对称的, 则可得出结论, 这种场所描写的粒子的自旋必为零, 即

$$\boxed{\text{如}\quad T_{ij}=T_{ji},\quad \text{则}\quad S_{[ij]k}=0} \tag{12.16}$$

从 (10.15) 式可知二阶张量

$$\boxed{J_{ij}\equiv\frac{\mathrm{i}}{c}\int J_{[ij]4}\mathrm{d}V} \tag{12.17}$$

是一个守恒量, 这个张量称为二阶角动量张量. 场的二阶轨道角动量张量与二阶自旋角动量张量可定义为

$$\boxed{L_{ij}\equiv\frac{\mathrm{i}}{c}\int L_{[ij]4}\mathrm{d}V} \tag{12.18}$$

$$\boxed{S_{ij}\equiv\frac{\mathrm{i}}{c}\int S_{[ij]4}\mathrm{d}V} \tag{12.19}$$

并且由 (12.17) 式与 (12.11) 式可知

$$\boxed{J_{ij}=L_{ij}+S_{ij}} \tag{12.20}$$

是一个守恒量.

J_{ij} 的空间分量代表场的角动量在 x、y、z 三坐标的分量, 即

$$\left.\begin{array}{lll} J_x=J_{23}, & J_y=J_{31}, & J_z=J_{12} \\ L_x=L_{23}, & L_y=L_{31}, & L_z=L_{12} \\ S_x=S_{23}, & S_y=S_{31}, & S_z=S_{12} \end{array}\right\} \tag{12.21}$$

同理

J_{ij} 的时间分量 J_{i4} 没有什么新的物理意义, 它仅代表场的能量中心的运动速度是常量, 这点我们用经典力学中四维空间的角动量推导可知. 在经典力学中四维空间的角动量

$$J_{ik}=\sum(x_ip_k-x_kp_i)=\text{const.} \tag{12.22}$$

其时间分量

$$J_{i4}=\mathrm{i}c\sum\left(\frac{x_iE}{c^2}-tp_i\right)=\text{const.} \tag{12.23}$$

但质点系统的能量中心

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum E\boldsymbol{r}}{\sum E} \tag{12.24}$$

由 (12.23) 式与 (12.24) 式可知

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E} c^2 t + \text{const.} \tag{12.24'}$$

但因 $\sum \boldsymbol{p} = \text{const.}, \sum E = \text{const.}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E} c^2 = \text{const.} \tag{12.25}$$

这也就是说, 质点系中的能量中心的运动的速度应为常量.

下面我们要用这节所讲的理论来证明标量场方程式是描写自旋为零的粒子, 旋量场方程式描写自旋为 1/2 的粒子. 而向量场方程式则是描写自旋为 1 的粒子的. 场的波函数的数学性质与自旋的关系, 本来是可以用群论中线性表示理论严格证明的.

我们在群论中可以知道, 洛伦兹群有两种线性表示. 一种表示是决定张量场函数变换的; 另一种则决定旋量场函数的变换. 张量场函数是描写自旋为 $\hbar$ 的整数倍的粒子的, 而旋量函数则是描写自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$ 的奇数倍的粒子. 对于初学量子场论者, 我们可以直接用本节所求得的自旋张量公式 (12.19) 来研究各种场的方程式与各种粒子的自旋的关系.

1. 标量场与赝标量场

由 (11.17) 式、 (11.21) 式和 (11.25) 式可知标量场与赝标量场的能量动量张量 T_{ik} 是对称的, 因此根据 (12.16) 式可知这种场函数所描述的粒子的自旋必为零.

2. 旋量场

由 (12.15) 式可知粒子的自旋是与使得不对称的能量动量张量变为对称时所用的 $f_{i[jk]}$ 函数有直接关系的, 我们从 (11.25) 式知道旋量场方程式的能量动量张量是不对称的, 它的形式如下:

$$T_{ij} = -\frac{\hbar c}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_j \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_j \psi\right) \tag{12.26}$$

为了寻找使得 T_{ij} 变为对称张量的 $f_{i[jk]}$ 函数, 我们可以将能量动量张量写成以下的对称形式:

$$T_{ij}^{\mathrm{S}} = -\frac{\hbar c}{4}\left(\overline{\psi}\gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_j \psi + \overline{\psi}\gamma_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_j}\gamma_i \psi\right) \tag{12.27}$$

$$T_{ij}^{\mathrm{S}}-T_{ij}=-\frac{\hbar c}{4}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_j\psi-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\gamma_i\psi-\overline{\psi}\gamma_j\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\overline{\psi}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)$$

$$=-\frac{\hbar c}{4}\left[\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_i+\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\gamma_j\right)\gamma_i\gamma_j\psi+\right.$$

$$\left.\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\left(\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\gamma_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\psi\right] \tag{12.28}$$

上式中的重复指标 i 与 j 不代表求和的意思, 是代表等式右边张量分量的固定指标.

由 Dirac 方程式可知

$$\left.\begin{aligned}\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\gamma_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}&=-\left(\sum_{k\neq i,j}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+\chi\psi\right)\\ \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_i+\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\gamma_j&=-\left(\sum_{k\neq i,j}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k-\chi\overline{\psi}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.29}$$

将 (12.29) 式代入 (12.28) 式可得

$$T_{ij}^{\mathrm{S}}-T_{ij}=\frac{\hbar c}{4}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\gamma_i\gamma_j\psi+\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)$$

$$=\frac{\hbar c}{4}\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\psi}\gamma_k\gamma_i\gamma_j\psi \tag{12.30}$$

这里的 k 与 i、 j 不等.

将 (12.30) 式与 (11.10) 式比较可知

$$f_{i[jk]}=-\frac{\hbar c}{4}\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\psi \tag{12.31}$$

$$S_{[ij]k}=f_{i[jk]}-f_{j[ik]}=-\frac{\hbar c}{4}\overline{\psi}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k-\gamma_j\gamma_i\gamma_k)\psi$$

所以

$$S_{[ij]k}=-\frac{\hbar c}{2}\overline{\psi}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k)\psi \tag{12.32}$$

但由 (12.19) 式可求得自旋二级张量

$$S_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{c}\int S_{[ij]4}\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int\overline{\psi}\gamma_i\gamma_j\gamma_4\psi\mathrm{d}V$$

所以

$$\boxed{\mathrm{S}_{ij}=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int_V\psi^\dagger\gamma_i\gamma_j\psi\mathrm{d}V} \tag{12.33}$$

或由 (12.21) 式与 (4.39) 式可得

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\hbar\int_V\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi\mathrm{d}V} \tag{12.34}$$

将自由电子波函数 (5.36) 式代入 (12.34) 式可得

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\hbar u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u} \tag{12.35}$$

设电子运动方向为 z 轴方向, 则可设 $\boldsymbol{\sigma}=\sigma_3\boldsymbol{n}$, 并且将 (5.48) 式之单位旋量 u_1, u_2, u_3, u_4 分别代入 (12.35) 式, 可证明

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\pm\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{n}} \tag{12.36}$$

这说明旋量方程式描写的粒子的自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$, 并且自旋的方向是平行或反平行于运动方向的.

3. 向量场

由 (11.35) 式知道对于向量场, 有

$$f_{i[jk]}=-\frac{1}{4\pi}A_iF_{jk}$$

则由 (12.15) 式可求得向量场的自旋三阶张量为

$$\boxed{\mathrm{S}_{[ij]k}=-\frac{1}{4\pi}(A_iF_{jk}-A_jF_{jk})} \tag{12.37}$$

其二阶自旋张量由 (12.19) 式应为

$$S_{ij}=-\frac{\mathrm{i}}{4\pi c}\int_V(A_iF_{j4}-A_jF_{i4})\mathrm{d}V \tag{12.38}$$

或由 (12.21) 式与 (6.12) 式可得自旋向量

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\frac{1}{4\pi c}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V} \tag{12.39}$$

但由经典电动力学可知, 对于自由电磁场

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0\sin 2\pi\left(\nu t-\frac{r}{\lambda}\right),\quad \varphi=0$$

有
$$|E| = \left|\mathrm{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right| = \frac{2\pi\nu}{c}|A|$$

$$E = H, \quad \text{在圆极化时,} \quad \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{E}$$

并且其总能量
$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\int E^2\mathrm{d}V$$

因此
$$|S| = \frac{1}{2\pi\nu}|\varepsilon|$$

但由经典量子论,$\varepsilon = h\nu$, 将其代入上式可得

$$\boxed{|S| = \frac{h}{2\pi} = \hbar} \tag{12.40}$$

所以光子的自旋为 1.

以上的证明是不严格的, 因用到经典量子论的假设 $\varepsilon = h\nu$. 这样的结果, 要学到二次量子化时才能严格证明. 这里只是帮助初学者易于了解问题.

习　题

1. 试证明洛伦兹变换矩阵 A[见 (3.8) 式] 有连续群的性质. 在群论中, 如群的每一元素用相应的矩阵代表之, 则这些矩阵称为群的线性表示. 所以洛伦兹变换矩阵 A 是洛伦兹群的一种线性表示.

2. 试证明旋量变换矩阵 S 也有连续群的性质, 它是洛伦兹群的另一种线性表示.

参 考 文 献

[1] 同 §10 的 [1]、[2] 两篇文章.

[2] Pauli W. Rev. of Modern Phys., 1941, 13(3).

§13 电流密度向量与电荷守恒定律

这一节我们是运用广义守恒定律来研究粒子的电流密度向量和电荷守恒的问题. 电荷的守恒也是由于场的作用函数对于某种变换不变的自然结果.

假设场的作用函数对于场函数的相因子乘积的变换不变, 即

$$\left.\begin{aligned} X_i &= x_i \\ V^{(\alpha)} &= U^{(\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \\ V^{*(\alpha)} &= U^{*(\alpha)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

则由 (10.11) 式可知必存在一个一阶张量 (向量)

$$\begin{aligned} \theta_k &= \left[\mathrm{i} \frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U^{(\alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{i} U^{*(\alpha)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \frac{\partial L}{\partial U^{*(\alpha)}} \right]_{\alpha=0} \\ &= \mathrm{i} \left[\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U^{(\alpha)} - U^{*(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial U^{*(\alpha)}} \right] \end{aligned} \tag{13.2}$$

这个向量对应的场的四维空间电流密度向量, 以 j_k 表示之, 有

$$j_k \equiv -\frac{e}{\hbar c} \theta_k$$

e 代表粒子的电荷, 则

$$\boxed{j_k = \frac{e}{\mathrm{i}\hbar c} \left[\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}} U^{(\alpha)} - U^{*(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial U^{*(\alpha)}} \right]} \tag{13.3}$$

其中 j_1, j_2, j_3 代表三维空间的电流密度向量 $\boldsymbol{j}$, 而

$$\boxed{j_4 \equiv \mathrm{i}\rho} \tag{13.4}$$

下面将知道 ρ 代表电荷密度.

由 (10.14) 式可知四维空间的电流密度向量必适合连续方程式

$$\boxed{\frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0} \tag{13.5}$$

也即

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \tag{13.6}$$

并且由 (10.15) 式可知存在一个零阶守恒张量 (标量)

$$\boxed{Q=\frac{1}{\mathrm{i}}\int j_4\mathrm{d}V=\int\rho\mathrm{d}V} \tag{13.7}$$

这个守恒量称为电荷. 由此可见, ρ 代表电荷密度. (13.7) 式的意思就是粒子存在的空间内的电荷是守恒的.

由 (13.3) 式证明, 如某种场的场函数为实函数, 则电流密度向量与电荷密度皆为零, 这就是说实的场函数只能描写中性粒子, 复的场函数才能描写带电的粒子, 即

$$\boxed{U^{(\alpha)}=U^{\star(\alpha)},\quad \text{则}\quad Q=0} \tag{13.7'}$$

下面我们要具体讨论各种场的电流密度向量和电荷密度的公式.

1. 实标量场与实向量场 (电磁场)

这两种场的场函数皆为实函数, (13.7) 式只能描写中性粒子, 故其电流向量与电荷密度都等于零. 电磁场本身是光子, 是不带电荷的, 因此要用实向量场函数描写.

2. 复标量场

将复标量场的 Lagrange 函数 L_0(8.22) 代入 (13.3) 式可得

$$\boxed{j_k=\frac{\mathrm{i}e}{4\pi\hbar c}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)} \tag{13.8}$$

并且由 (13.4) 式知

$$\boxed{\rho=\frac{e}{4\pi\hbar c^2}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)} \tag{13.9}$$

将上式以电荷 e 除之, 所得之式代表复标量场所描写的粒子在空间的密度, 它的值可正可负, 不能代表量子力学中粒子在空间存在的概率, 为什么 (13.9) 式的 φ 可正可负, 这要学到二次量子化时才能说明.

3. 旋量的方程式

将旋量场的 Lagrange 函数 L_0(8.28) 代入 (13.3) 式可得

$$\boxed{j_k=\mathrm{i}e\overline{\psi}\gamma_k\psi} \tag{13.10}$$

并且由 (13.4) 式知

$$\boxed{\rho=e\psi^\dagger\psi} \tag{13.11}$$

上式中 $\psi^\dagger\psi$ 永远为正的, 如加以归一化条件

$$\int_V \psi^\dagger\psi \mathrm{d}V = 1$$

则 $\psi^\dagger\psi$ 在量子力学中代表电子在空间存在的概率密度.

习　题

试直接由 (13.3) 式证明

$$\frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0$$

参 考 文 献

[1] Pauli W. Rev. of Modern Phys., 1941,13(3).

[2] Brown Lowell S. Quantum field theory. Cambridge University Press, 1994.

§14 经典场论的总结与常用单位

1. 经典场论的总结

第二章的内容主要是讲经典场论中各种场的方程式和各种守恒定律, 为什么称为经典的, 是因为这一章没有涉及下章将要谈到的二次量子化的理论, 我们虽然认为场是粒子的集合, 但是在经典场论中是看不到场的粒子性质的. 现在我们将经典场论的要点总结于下:

(1) 场是同类粒子的集合, 场是用一定的场函数来描写的. 标量场函数描写自旋为零的粒子, 旋量场函数描写自旋为 $\hbar/2$ 的粒子, 向量场函数描写自旋为 $\hbar$ 的粒子. 并且实的场函数只能描写中性粒子, 复函数才能描写带电粒子.

(2) 场函数所满足的四维空间坐标的微分方程式称为场的运动方程式, 这个方程式根据狭义相对论的要求, 它对洛伦兹变换一定要有协变的性质.

(3) 场的运动方程式是可以用 Lagrange 原理, 也即最小作用原理求得的. 这就是说场函数要适合 Euler 方程式. 因为只有这样才能保证各种物理的基本守恒定律. 并且用 Lagrange 原理可以便于我们寻找新的场的方程式.

(4) 场的守恒定律是与场的作用函数对于某种变换的不变性有着密切的关系的. 因此我们利用场的作用函数对于各种变换的不变性, 就可以求得各种不同的守恒定律. 我们曾求得了场的广义的守恒定律, 它在经典场论中是有很大用处的.

(5) 如果场的作用函数对于时空的位移变换不变, 则可求得场的能量动量张量, 和能量与动量的守恒定律.

(6) 如果场的作用函数对于洛伦兹时空转动变换不变, 则可求得场的角动量张量与角动量守恒定律.

(7) 如果场的作用函数对于场函数的相因子乘积的变换不变, 则可求得场的电流密度向量和电荷守恒定律.

2. 现代场论中常用的单位

现代场论的书籍与杂志中常采用一种简化的单位. 用了这种单位, 场论中的各种公式都变得比较简化, 便于计算, 易于记忆. 因此, 我们以后各章中将采取这个单位, 简化单位的内容如下:

(a) 约化 Plank 常量与光在真空的速度等于 1:

$$\hbar = c = 1 \tag{14.1}$$

(b) Boson 质点场函数采取 Heaviside 单位:

$$U^{(\alpha)}_{\text{Heav}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} U^{(\alpha)} \tag{14.2}$$

利用这个单位, 这章中所讲的场的各种方程式和公式将变为以下的形式.

(1) 实标量场

$$\text{场的方程式} \qquad \Box\varphi - m^2\varphi = 0 \tag{14.3}$$

$$L_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2 + m^2\varphi^2\right] \tag{14.4}$$

$$T_{ik} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + L\delta_{ik}\right) \tag{14.5}$$

$$W = \frac{1}{2}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + m^2\varphi^2\right] \tag{14.6}$$

$$G_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (i = 1,2,3) \tag{14.7}$$

(2) 复标量场

$$\text{场的方程式} \qquad \Box\varphi - m^2\varphi = 0 \tag{14.8}$$

$$\Box\varphi^* - m^2\varphi^* = 0 \tag{14.9}$$

$$L_0 = -\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + m^2\varphi^*\varphi\right) \tag{14.10}$$

$$T_{ik} = -\left[\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \delta_{ik}L_0\right] \tag{14.11}$$

$$W = \left(\nabla\varphi^*\nabla\varphi + \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m^2\varphi^*\varphi\right) \tag{14.12}$$

$$G_i = -\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \tag{14.13}$$

$$j_k = \mathrm{i}e\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \tag{14.14}$$

$$\rho = e\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{14.15}$$

(3) 赝标量场

与标量同.

(4) 旋量场

$$\text{场的方程式:}\quad \gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+m\psi=0 \tag{14.16}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k-m\overline{\psi}=0 \tag{14.17}$$

$$L_0=-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right)-m\overline{\psi}\psi \tag{14.18}$$

$$T_{ik}=-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_k\psi\right) \tag{14.19}$$

$$W=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) \tag{14.20}$$

$$G_i=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x_i}\psi\right) \tag{14.21}$$

$$j_k=\mathrm{i}e\overline{\psi}\gamma_k\psi \tag{14.22}$$

$$\rho=e\psi^\dagger\psi \tag{14.23}$$

$$S_{ij}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_V(\psi^\dagger\gamma_i\gamma_j\psi)\mathrm{d}V \tag{14.24}$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\int_V\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi\mathrm{d}V \tag{14.25}$$

(5) 向量场

$$\text{场的方程式}\qquad \Box A_i=0 \tag{14.26}$$

$$L_0=-\frac{1}{4}F_{ik}F_{ik} \tag{14.27}$$

$$L_0'=-\frac{1}{2}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \tag{14.28}$$

$$T_{ik}'=-\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\delta_{ik}\frac{\partial A_l}{\partial x_m}\frac{\partial A_l}{\partial x_m}\right) \tag{14.29}$$

$$W=\frac{1}{2}\left[(\nabla A_l)^2+\left(\frac{\partial A_l}{\partial t}\right)^2\right]\quad\text{或}\quad W=\frac{1}{2}(E^2+H^2) \tag{14.30}$$

$$G_i=-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial A_l}{\partial t} \tag{14.31}$$

或

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{14.32}$$

$$S_{ij} = -\mathrm{i}\int_V (A_i F_{j4} - A_j F_{i4})\mathrm{d}V \tag{14.33}$$

$$\boldsymbol{S} = \int_V (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}V \tag{14.34}$$

(6) 其他公式

$$\chi \equiv \frac{mc}{\hbar} = m \qquad \text{以后用 } m \text{ 代表静止质量}$$

$$p_4 = \mathrm{i}\frac{E}{c} = \mathrm{i}E \qquad \text{以后有时用 } p_0 \text{ 代表 } E$$

则

$$p_4 = \mathrm{i}p_0 \tag{14.35}$$

能量与动量的关系式变为

$$p_i^2 + m^2 = 0 \tag{14.36}$$

或

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2} \tag{14.37}$$

第三章　自由场的二次量子化

§15　二次量子化的基础和量子场论的基本假设

1. 二次量子化问题的提出

上一章我们所谈的理论, 只是限于经典场论的范围. 在经典场论中我们是看不出场的粒子的性质的. 在前一章我们已经提到过, 场是同类型粒子的集合. 在物理史中第一次证实场有粒子的性质的实验, 就是爱因斯坦 (Einstein) 的光电效应和康普顿 (Compton) 效应. 这两个效应说明了只有假设电磁场有粒子的性质, 而且要遵守粒子的能量与动量守恒定律, 计算的结果才能与实验符合. 并且从这两个实验证明了相应于频率为 ν 的电磁波的粒子应具有的能量和动量各为

$$\left.\begin{aligned} E &= h\nu \\ k &= \frac{h\nu}{c} \end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

这样的粒子被 Einstein 称为光量子, 或简称为光子. 不同动量的各种光子集合的总能量应为

$$E = \sum_k N_k h\nu_k \tag{15.2}$$

N_k 代表具有动量为 k(或电磁波的频率为 ν_k) 的光子的数目. 利用光量子的假设 (15.2) 式, 可以导出与实验符合的 Plank 黑体辐射公式, 以及 Stefan-Boltzmann 辐射总能量应与绝对温度四次方成正比的定律. 假使不采用光量子的假设, 这个辐射总能量将变为无穷大, 这与实验是完全不符合的. 从现代的观点看来, 当时 Einstein 和 Plank 光量子的假设, 基本上是正确的.

但是从经典电动力学的理论的角度看来, 电磁场的能量应为

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_V (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\mathrm{d}V \tag{15.3}$$

或由广义的经典场论的观点出发, 场的总能量应为

$$E = \int_V w\mathrm{d}V, \quad w = T_{44} \tag{15.4}$$

看到了这个公式, 我们很自然地会提出这样的问题, 既然 (15.3) 式与 (15.2) 式都代表电磁场的能量, 那么能否由经典场论的能量公式 (15.3) 推导出 Einstein 的能量公式 (15.2), 它们内在的关系究竟是怎样的? 我们知道在量子力学的理论中, 在实验里能直接或间接观察到的粒子的能量应该是某个能量算符的本征值, 这个能量算符也称为哈密顿算符. 它是与经典力学质点运动的能量相对应的, 是将经典力学的能量公式, 依据 (3.14) 式的量子力学算符规则变换得来的. 为了解决上面提出的问题,Dirac,Jordan 和 Pauli 在 1928 年左右, 仿照了量子力学算符与本征值的关系, 提出了场的二次量子化的理论, 他们认为电磁场的能量公式 (15.3), 应该可以表示为算符的形式, 这个算符称为电磁场的哈密顿算符.

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi}\int_V (\hat{\boldsymbol{E}}^2 + \hat{\boldsymbol{H}}^2)\mathrm{d}V \tag{15.5}$$

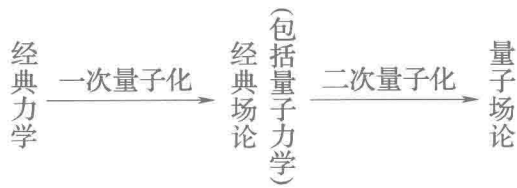
而 (15.2) 式,Einstein 提出的与实验观察符合的能量值, 可以看成是 (15.5) 式电磁场能量算符的本征值, 即

$$\hat{H}\Psi = \left(\sum_k N_k h\nu_k\right)\Psi \tag{15.6}$$

(15.6) 式中的 Ψ 在量子场论中称为概率幅, 相当于量子力学中的波函数, 它能够决定粒子系统的状态. 但是这里的 Ψ 显然不是空间坐标的函数, 因为 (15.5) 式的 $\hat{H}$ 算符中的空间坐标已积分掉了. 因此这个算符应该作用在不是空间坐标的函数 Ψ 上, 以后将知道 Ψ 可以是粒子数目 N_k 的函数, 也可以用 Φok(苏联院士福克) 的方法表示成泛函的形式, 或是以矩阵的形式表示之. Ψ 的具体形式, 决定于 $\hat{H}$ 中的算符表示为何种形式, 通常在量子场论中的算符, 总可表示为矩阵的形式, 在这种将算符用矩阵表示的情况下, Ψ 应该认为也是一个矩阵, 但在量子场论中我们一般并不注重 Ψ 的具体形式, 而注重 Ψ 被算符作用后的变化, 或是被算符作用后的本征值, 因此我们常把算符用一个规定了运算规则的符号表示, 那么被算符作用的 Ψ 也就不必问其具体形式, 而是一个抽象的符号就可以了. 以后将知道用这种抽象的符号给量子场论中的运算带来很大的方便.

将 (15.3) 式的能量公式变为算符, 也就等于把电磁场函数 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 或是 A_i 变为算符, 而且由 (15.6) 式可知, 由这些算符所组成的哈密顿算符 $\hat{H}$ 有不连续的本征值 $\sum N_k h\nu_k$, 这样将场的函数或能量公式变为算符的过程, 我们称为场的二次量子化. 在经典场论中, Schrödinger 或是 Dirac 方程式是将经典力学中的能量与动量变为算符得来的, 这个过程称为一次量子化. 因此将经典场论中的能量、动量等再变为算符的过程, 就称为二次量子化. 量子场论的内容就是用经典场二次量子化的方法来研究粒子的理论. 在量子场论中, 场函数 $U^{(\alpha)}$ 不

再是普通的波函数了, 而是二次量子化的算符, 经典力学、经典场论与量子场论三者的关系可以用下图表示:



为了简便起见, 我们常称没有经过二次量子化的经典场论中的量为“c”量 (classical), 而经过二次量子化的量子场论中的量则称为“q”量 (quantum),c 量与 q 量是有本质的区别的,c 量不是算符, 而 q 量则一定包含二次量子化的算符.

2. 量子场论的基本假设

I. 任何的粒子系统的状态都可以用态矢量 Ψ 完全描写.

II. 两态矢量 Ψ_1 与 Ψ_2 的标积以符号

$$(\Psi_1, \Psi_2) \tag{15.7}$$

表示, 如果 Ψ 的具体形式未定,(15.7) 式只是代表一种抽象的乘积的规律, 量子场论要求态矢量的标积必须满足以下的条件:

$$(\Psi_1 + \Psi_2, \Psi) = (\Psi_1, \Psi) + (\Psi_2, \Psi) \tag{15.8}$$

$$(\Psi_1, a\Psi_2) = a(\Psi_1, \Psi_2)(a\text{是常数}) \tag{15.9}$$

$$(\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_2, \Psi_1)^* \tag{15.10}$$

“*”代表复共轭.

$$(\Psi, \Psi) \geqslant 0, \quad (\Psi, \Psi) = 0\text{仅在}\Psi = 0\text{时成立} \tag{15.11}$$

按数学的观点, 满足以上四个条件的 Ψ 所组成的空间称为 Hilbert 空间.

Ψ 是 Hilbert 空间的一个向量, 完全系统的态矢量 Ψ 应满足归一化条件

$$(\Psi, \Psi) = I \tag{15.12}$$

如果我们将量子场论中的算符以矩阵表示, 则 Ψ 也是一个矩阵, 其标积定义为

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \Psi_1^* \Psi_2 \tag{15.13}$$

在量子力学中, 波函数也可看成 Hilbert 空间中的向量, 其标积

$$(\psi_1(x), \psi_2(x)) \equiv \int \psi_1^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x$$

Ⅲ. 没有一个粒子的状态我们称之为真空状态, 真空状态的态矢量用 Ψ_0 表示, 并假设

$$(\Psi_0, \Psi_0) = I \tag{15.14}$$

Ⅳ. 任何经典场论中的物理量 $\theta_{ij\cdots k}$ 在量子场论中都对应着一个线性厄米算符 $\hat{\theta}_{ij\cdots k}$, 因为在经典场论中所有的物理量都是由场函数 $U^{(\alpha)}$ 组成的, 因此 $U^{(\alpha)}$ 也是一个算符.

厄米算符的定义为有下列性质的算符:

$$(\Psi_1, \hat{\theta}_{i\cdots k}\Psi_2) = (\hat{\theta}_{i\cdots k}\Psi_1, \Psi_2) \tag{15.15}$$

V. 概率幅 Ψ 应该服从场论中的 Schrödinger 方程式:

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (\hbar = 1)} \tag{15.16}$$

$\hat{H}$ 为场的哈密顿算符, 它是将经典场论中的能量式换为算符得来的:

$$\boxed{\hat{H} = \int w\mathrm{d}V, \quad w = T_{44}} \tag{15.17}$$

Ⅵ. 假设概率幅 Ψ 是某个算符 $\hat{F}$ 的本征函数, 即

$$\hat{F}\Psi = \alpha\Psi \tag{15.18}$$

则其本征值 α 应为实验中 $\hat{F}$ 所对应的物理量的观测值.

Ⅶ. 某算符 $\hat{F}$ 所对应的物理量的平均值定义为

$$\langle\hat{F}\rangle = (\Psi, \hat{F}\Psi) \tag{15.19}$$

习　题

1. 试证明以 (15.15) 式定义的厄米算符的本征值是实数.

2. 设厄米标符 $\hat{F}$ 的本征概率幅 Ψ_i, Ψ_j 的本征值分别为 α_i 与 α_j, 试证明 Ψ_1 与 Ψ_2 的标积有下列正交的性质:

$$(\Psi_i, \Psi_j) = \delta_{ij}$$

3. 设 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$ 为几个互相正交的概率幅, 试证明任意的概率幅 Ψ 皆能由这一组正交的概率幅表示, 即

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_i$$

$$C_i = (\Psi_i, \Psi)$$

参考文献

[1] Friedrichs K O. Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields.(Remarks about Functional and spectral Representation.)

[2] Heitler W. The quantum theory of Radiation. Dover Publications, 2010: §7.

§16 Schrödinger 表象与 Heisenberg 表象

1. Schrödinger 表象

我们由 (11.7) 式知道在量子场论中封闭系统的能量

$$E = \int w(x)\mathrm{d}V, \quad w = T_{44} \tag{16.1}$$

是一个不随时间变化而变化的守恒量, 因此量子场论中的哈密顿算符

$$\hat{H} = \int \hat{w}(x)\mathrm{d}V, \quad \hat{w} = \hat{T}_{44} \tag{16.2}$$

也是一种不随时间变化而变的算符:

$$\hat{H}(t_1) = \hat{H}(t_2) = \hat{H}(0) \tag{16.3}$$

但是粒子的概率幅 Ψ 是随时间变化而变化的, 并且由 (15.16) 式知道, Ψ 应该服从量子场论中的 Schrödinger 方程式:

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\,\Psi(t) \tag{16.4}$$

这样物理算符 $\hat{F}$ 与时间无关, 而概率幅 $\Psi(t)$ 是随时间变化的表象, 在场论中我们称之为 Schrödinger 表象.

在 Schrödinger 表象中物理算符 $\hat{F}$ 虽与时间无关, 但是它的平均值 (因为 Ψ 是时间的函数), 却一般是随时间变化的:

$$\bar{F}(t) \equiv \langle F\rangle = (\Psi^{\dagger}(t), \hat{F}\,\Psi(t))$$

在这一节中为了初学者清楚起见, 算符 $\bar{F}$ 以矩阵表示, 则

$$\langle F\rangle = \Psi^{\dagger}(t)\hat{F}\,\Psi(t) \tag{16.5}$$

因此, 在 Schrödinger 表象中是不能直接看出算符对时间变化的规律的, 它首先要知道 $\Psi(t)$ 随时间的变化, 然后才可由 (16.5) 式间接地知道算符的平均值对于时间的变化.

为了与其他的表象区别开, 在 Schrödinger 表象中, 算符以 $\hat{F}_{\mathrm{S}}$ 表示, 而概率幅则以 Ψ_{S} 表示. 因此 Schrödinger 表象的特征应该是

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{16.6}$$

$$\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}}{\partial t} \neq 0, \quad \mathrm{i}\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}}{\partial t} = H_{\mathrm{S}}\,\Psi_{\mathrm{S}} \tag{16.7}$$

2. Heisenberg 表象

Heisenberg 表象是概率幅不随时间变化, 而物理算符随时间变化的表象. 设将 Schrödinger 表象中的概率幅 Ψ_{S} 用一个与时间有关的么正变换 $V(t)$ 变为另外一种表象的概率幅 $\Phi(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &= V(t)\,\Psi_{\mathrm{S}}(t) \\ V(t)V^{\dagger}(t) &= V^{\dagger}(t)V(t), \quad V^{\dagger}(t) = V^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

因此

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mathrm{i}\left[\frac{\partial V(t)}{\partial t}\Psi_{\mathrm{S}} + V(t)\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}}{\partial t}\right] \tag{16.9}$$

假如我们要寻找一个概率幅不随时间而变的表象, 由 (16.9) 式知, 必须有

$$\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\Psi_{\mathrm{S}} + \mathrm{i}V(t)\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}}{\partial t} = 0$$

或

$$\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\Psi_{\mathrm{S}} + V(t)\hat{H}_{\mathrm{S}}\Psi_{\mathrm{S}} = 0$$

也即

$$\boxed{\mathrm{i}\,\frac{\partial V(t)}{\partial t} = -V(t)\hat{H}_{\mathrm{S}}} \tag{16.10}$$

在这种特殊变换情况下的表象, 称为 Heisenberg 表象, 其概率幅以 Φ_{H} 表示之, 它是不随时间变化的, 即

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{H}}}{\partial t} = 0 \tag{16.11}$$

在 Heisenberg 表象中某物理量的算符 $\hat{F}_H$ 的平均值应以

$$\langle F\rangle = (\Phi_{\mathrm{H}}, \hat{F}_{\mathrm{H}}\Phi_{\mathrm{H}}) = \Phi_{\mathrm{H}}^{\dagger}\hat{F}_{\mathrm{H}}\Phi_{\mathrm{H}} \tag{16.12}$$

表示.

但在 Schrödinger 表象中其对应的算符平均值由 (16.5) 式知应为

$$\begin{aligned} \langle F\rangle &= \Psi_{\mathrm{S}}^{\dagger}(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}\Psi_{\mathrm{S}}(t) = (V^{-1}(t)\Phi_{\mathrm{H}})^{\dagger}\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)\Phi_{\mathrm{H}} \\ &= \Phi_{\mathrm{H}}^{\dagger}V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)\Phi_{\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{16.13}$$

将 (16.13) 式与 (16.12) 式比较可知

$$\boxed{\hat{F}_H(t) = V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)} \tag{16.14}$$

将 (16.14) 式对时间微分, 并考虑 (16.6) 式, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{H}}}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial t}\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1} + V F_{\mathrm{S}}\frac{\partial V^{\dagger}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}V^{\dagger}\hat{F}_{\mathrm{H}} + \hat{F}_{\mathrm{H}}V\frac{\partial V^{\dagger}}{\partial t}\end{aligned}$$

但由 (16.7) 式与 (16.10) 式知

$$V^{\dagger}\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V^{\dagger}}{\partial t}V = \mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{S}}$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial t}V^{\dagger} = -V\frac{\partial V^{\dagger}}{\partial t} = \mathrm{i}V\hat{H}_{\mathrm{S}}V^{\dagger} = \mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{H}} \tag{16.15}$$

所以

$$\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{H}}}{\partial t} = \mathrm{i}(\hat{H}_{\mathrm{H}}\hat{F}_{\mathrm{H}} - \hat{F}_{\mathrm{H}}\hat{H}_{\mathrm{H}})$$

或

$$\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{H}}}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}_{\mathrm{H}}, \hat{F}_{\mathrm{H}}]_{-} \tag{16.16}$$

其中

$$[a, b]_{\pm} \equiv ab \pm ba$$

这就是在 Heisenberg 表象中算符对于时间变化的规律. 由 (16.10) 式可知变换矩阵 $V(t)$ 的具体形式应为

$$\boxed{V(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{s}}t}} \tag{16.17}$$

因此

$$\Phi_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{s}}t}\,\Psi_{\mathrm{S}}(t)$$

也即

$$\Psi_{\mathrm{S}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{s}}t}\,\Phi_{\mathrm{H}}$$

或

$$\boxed{\Psi_{\mathrm{S}}(0) = \Phi_{\mathrm{H}}} \tag{16.18}$$

现在我们将 Heisenberg 表象的特征总结于下:

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{H}}}{\partial t} = 0 \tag{16.19}$$

$$\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{H}}}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{H}}}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}_{H}, \hat{F}]_{-} \tag{16.20}$$

因此在量子场论中凡是算符对时间是变化的, 都应该用 Heisenberg 表象, 或以后将要谈到的相互作用表象.

习　题

写出旋量场与标量场在量子场论中的Schrödinger方程式［在Schrödinger表象中算符不依时间而变，场函数算符 $\hat{U}(\boldsymbol{r},t)$，在此表象中应为 $\hat{U}_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}) = \hat{U}(\boldsymbol{r},0)$］.

参考文献

Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955, Vol. I: §13a.

§17 $\delta(x)$、$\delta_{\pm}(x)$、$\theta^{\pm}(x)$、$\gamma(x)$ 和 $\varepsilon(x)$ 等五种函数的性质

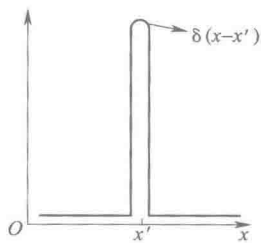
1. $\delta(x)$ 函数的定义

$\delta(x)$ 函数是一种函数, 它具有以下的性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')\mathrm{d}x=1 \tag{17.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x=f(x') \tag{17.2}$$

这也是 $\delta(x-x')$ 函数的定义,$f(x)$ 在 x' 附近为连续函数.$\delta(x-x')$ 的形式可以用下图表示:



在数学里我们知道任何函数 $\phi(x)$ 可以用傅里叶积分表示:

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{17.3}$$

而且

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{17.4}$$

现在我们问 $\delta(x)$ 函数的傅里叶积分是什么形式?

设 $\phi(x)$=$\delta(x)$, 则由 (17.4) 式与 (17.2) 式可知

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi} \tag{17.5}$$

将 (17.5) 式代入 (17.3) 式可得

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{17.6}$$

或
$$\boxed{\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k} \tag{17.7}$$

n 维空间的 $\delta(x-x')$ 函数的定义为

$$\delta(x_1-x_1',x_2-x_2',\cdots,x_n-x_n')\equiv\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')\cdots\delta(x_n-x_n') \tag{17.8}$$

由 (17.7) 式知

$$\boxed{\delta(x_1-x_1',\cdots,x_n-x_n')=\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\cdots\mathrm{d}k_n} \tag{17.9}$$

并且可有与 (17.1) 式和 (17.2) 式相仿的关系式:

$$\boxed{\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\delta(x_1-x_1',x_2-x_2',\cdots,x_n-x_n')\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=1} \tag{17.10}$$

$$\boxed{\underbrace{\int\cdots\int}_{n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\delta(x_1-x_1',\cdots,x_n-x_n')\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=f(x_1',x_2',\cdots,x_n')} \tag{17.11}$$

(17.9)— (17.11) 式的积分式, 没有写积分的上下限, 以后不写上下限的积分, 则代表极限为 $-\infty$ 到 $+\infty$.

因此, 常用的四维空间的 $\delta(x)$ 函数可写为

$$\boxed{\delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}k)} \tag{17.12}$$

其中
$$(\mathrm{d}k)\equiv\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}k_0$$

2. $\delta(x)$ 函数的其他性质

因为
$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\mathrm{d}k$$

所以
$$\boxed{\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\,kx\mathrm{d}k} \tag{17.13}$$

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为正交函数, 即

$$\int \varphi_i^*(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}k = \delta_{ij} \tag{17.14}$$

任何函数 $f(x)$ 可以用这样一组完备的正交函数展开:

$$f(x) = \sum_i c_i\varphi_i(x) \tag{17.15}$$

而且

$$c_i = \int \varphi_i^*(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{17.16}$$

将 (17.16) 式代入 (17.15) 式可得

$$f(x') = \sum_i c_i\varphi_i(x') = \int (\sum_i \varphi_i^*(x)\varphi(x'))f(x)\mathrm{d}x \tag{17.17}$$

将 (17.17) 式与 (17.2) 式比较可得

$$\boxed{\delta(x-x') = \sum_i \varphi_i^*(x)\varphi_i(x')} \tag{17.18}$$

由此可知 $\delta(x)$ 函数可以用任何一组完备的正交函数表示.

此外,$\delta(x)$ 函数还有其他的重要性质, 这里不一一证明.

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{17.19}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{17.20}$$

$$x\delta(x) = 0 \tag{17.21}$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{17.22}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|} \quad (a\text{为常数}) \tag{17.23}$$

3. $\delta_+(x)$ 与 $\delta_-(x)$ 函数

$\delta_\pm(x)$ 函数的定义如下:

$$\boxed{\delta_\pm(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k} \tag{17.24}$$

所以

$$\boxed{\delta_+(x)+\delta_-(x) = \delta(x)} \tag{17.25}$$

并且因

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin\, mx\mathrm{d}x = \frac{m}{a^2+m^2} \tag{17.26}$$

当 a=0 时, 有

$$\boxed{\int_0^\infty \sin\, mx\mathrm{d}x = \frac{1}{m}} \tag{17.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (\cos\, kx \pm \mathrm{i}\sin\, kx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\delta(x) \pm \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

所以

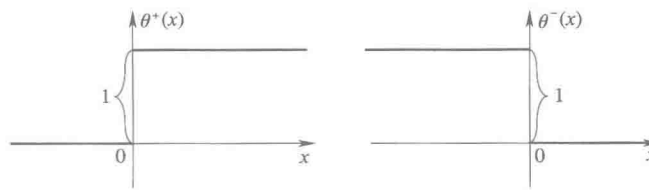
$$\boxed{\delta_\pm(x) = \frac{1}{2}\left[\delta(x) \pm \frac{\mathrm{i}}{\pi x}\right]} \tag{17.28}$$

4. $\theta^+(x), \theta^-(x)$ 与 $\gamma(x)$ 函数

$\theta^\pm(x)$ 函数的定义如下:

$$\boxed{\begin{aligned}\theta^+(x) &\equiv \begin{cases}1, & \text{当} x>0\\ 0, & \text{当} x<0\end{cases}\\ \theta^-(x) &\equiv \theta^+(-x)\end{aligned}} \tag{17.29}$$

$\theta^\pm(x)$ 函数可以用下图表示:



因此

$$\boxed{\theta^+(x) + \theta^-(x) = 1} \tag{17.30}$$

$\gamma(x)$ 函数的定义为

$$\boxed{\gamma(x) \equiv \begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当} x>0\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{当} x<0\end{cases}} \tag{17.31}$$

$\gamma(x)$ 函数可以 $\gamma(x,\alpha)$ 函数的极限表示:

$$\gamma(x,\alpha) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha k}\frac{\sin\, kx}{k}\mathrm{d}k = \frac{1}{\pi}\arctan\,\frac{x}{\alpha} \tag{17.32}$$

由 (17.32) 式可知 $$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha)=\gamma(x)$$

也即 $$\boxed{\gamma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\, kx}{k}\mathrm{d}k} \tag{17.33}$$

设 $$\delta(x,\alpha)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha k}\cos\, kx\mathrm{d}k$$

由上式与 (17.13) 式可知

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\delta(x)$$

或 $$\boxed{\delta(x)=\frac{\partial\gamma(x)}{\partial x}} \tag{17.34}$$

但由 (17.29) 式与 (17.31) 式知

$$\boxed{\gamma(x)=\theta^+(x)-\frac{1}{2}=-\theta^-(x)+\frac{1}{2}} \tag{17.35}$$

所以 $$\boxed{\delta(x)=\frac{\partial\theta^+(x)}{\partial x}=-\frac{\partial\theta^-(x)}{\partial x}} \tag{17.36}$$

5. $\varepsilon(x)$ 函数

$\varepsilon(x)$ 函数的定义为

$$\boxed{\varepsilon(x)\equiv\begin{cases}+1, & \text{当}x>0\\ -1, & \text{当}x<0\end{cases}} \tag{17.37}$$

所以 $$\boxed{\varepsilon(x)\equiv\frac{x}{|x|}} \tag{17.38}$$

$\varepsilon(x)$ 函数与 $\theta^{\pm}(x)$ 由 (17.29) 式可知有下列关系:

$$\boxed{\varepsilon(x)=\theta^+(x)-\theta^-(x)} \tag{17.39}$$

或 $$\theta^+(x)=\frac{1}{2}[1+\varepsilon(x)] \tag{17.40}$$

$$\theta^-(x)=\frac{1}{2}[1-\varepsilon(x)] \tag{17.41}$$

$\varepsilon(x)$ 与 $\gamma(x)$ 的关系如下:

$$\boxed{\varepsilon(x) = 2\gamma(x)} \tag{17.42}$$

由 (17.33) 式知

$$\varepsilon(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\, kx}{k}\mathrm{d}k = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{k}\mathrm{d}k \tag{17.43}$$

所以

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}\mathrm{d}k} \tag{17.44}$$

习　题

1. 试证明

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}$$

其中 x_k 为方程式 $f(x) = 0$ 之根.

2. 由上题的结果证明 (17.22) 式与 (17.23) 式两公式.

3. 证明 (17.19)— (17.21) 式等三个公式.

参 考 文 献

Zee A. Quantum field theory in a Nutshell. Princeton University Press, 2003.

§18 产生和消灭粒子的算符与场函数的傅里叶表示

1. 广义场函数 $U^{(\alpha)}$ 的傅里叶积分表示

广义场函数的每一分量 U(为方便起见将指标 α 省略) 可以用下列傅里叶积分表示:

$$U(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}f(k)(\mathrm{d}k) \tag{18.1}$$

其中

$$(\mathrm{d}k)\equiv \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\mathrm{d}k_0,\quad k_4=\mathrm{i}k_0 \tag{18.2}$$

k_i 为四维空间的动量.(18.1) 式积分前加一个常数 $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ 是为了使以后各节所求的公式简化, 没有特别的意思.

由上一章可知任何一种场的波函数的分量都必须满足 D'Alembert 方程, 所以

$$\boxed{(\Box-m^2)U(x)=0} \tag{18.3}$$

将 (18.1) 式代入 (18.3) 式可得

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int -(k_i^2+m^2)f(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}k)=0$$

因此

$$(k_i^2+m^2)f(k)=0$$

但由 (17.21) 式可知 $f(k)$ 函数最广义的形式应为

$$f(k)=\delta(k_i^2+m^2)U(k) \tag{18.4}$$

$U(k)$ 为 k_i 的任意不为零的函数, 将 (18.4) 式代入 (18.1) 式可得

$$\boxed{U(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{e}^{ik_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)U(k)(\mathrm{d}k)} \tag{18.5}$$

这个 $U(x)$ 的傅里叶积分只有在

$$\boxed{k_i^2+m^2=0} \tag{18.6}$$

时才有意义. 这保证了动量与能量之间必须有 (14.36) 式的正确关系.

也即

$$k_0=\pm\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2} \tag{18.7}$$

因

$$\theta^+(k_0)+\theta^-(k_0)=1$$

所以 (18.5) 式可分解为对二次量子化有重要意义的 $U^{(-)}(x)$ 与 $U^{(+)}(x)$ 两函数:

$$\boxed{\begin{aligned} U^{(-)}(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)\theta^+(k_0)U(k)(\mathrm{d}k) \qquad (18.8)\\ U^{(+)}(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)\theta^-(k_0)U(k)(\mathrm{d}k) \qquad (18.9)\end{aligned}}$$

注意这里 $U^{(\pm)}$上角的正负号恰与 $\theta^{\pm}$上角的正负号相反.

$$\boxed{U(x)=U^{(-)}(x)+U^{(+)}(x)} \qquad (18.10)$$

将 (18.9) 式中的 k_i 以 $-k_i$ 置换, 则其积分的上下限也要倒换, 才能保持原来的符号不变, 但因对于四次积分

$$\iiiint_{+\infty}^{-\infty} = \iiiint_{-\infty}^{+\infty}, \quad (\mathrm{d}(-k))=(\mathrm{d}k)$$

并且 $\theta^-(-k_0)=\theta^+(k_0)$, 所以

$$U^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)\theta^+(k_0)U(-k)(\mathrm{d}k) \qquad (18.11)$$

因当 $k_0<0$ 时,$\theta^+(k_0)=0$, 所以 (18.8) 式与 (18.10) 式两式的积分都是在 $k_0>0$ 的范围. 准确地说,k_0 必须等于 $+\varepsilon$, 这两个积分才有意义, 即

$$\boxed{k_0=+\varepsilon=+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}} \qquad (18.12)$$

设

$$\left.\begin{aligned} U^{(-)}(k)&=\theta^+(k_0)U(k)\\ U^{(+)}(k)&=\theta^+(k_0)U(-k)\end{aligned}\right\} \qquad (18.13)$$

(18.8) 式与 (18.11) 式可变为

$$U^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{k_0>0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)U^{(-)}(k)(\mathrm{d}k) \qquad (18.14)$$

$$U^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{k_0>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)U^{(+)}(k)(\mathrm{d}k) \qquad (18.15)$$

因为

$$k_ix_i=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varepsilon_k t, \quad k_0=\varepsilon_k>0 \qquad (18.16)$$

k_0 在波动学中有频率的性质,$\varepsilon_k t = \omega t$, 因此 $U^{(+)}(x)$ 与 $U^{(-)}(x)$ 正好对应于 $U(x)$ 的正频率与负频率部分, 即

$$\boxed{\begin{aligned} U^{(+)} &\longrightarrow \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varepsilon_k t} \\ U^{(-)} &\longrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_k t} \end{aligned}} \tag{18.17}$$

$U^{(+)}$ 与 $U^{(-)}$ 的物理意义, 将在下一小节中讨论.

以后我们称 (18.14) 式与 (18.15) 式为场函数的第一种傅里叶表示.

2. 产生和消灭粒子的算符

$U^{(+)}(x)$ 与 $U^{(-)}(x)$ 两场函数, 在量子场论中应该是算符而不再是普通的函数了. 而且因为 $U^{(+)}(x)$ 与 $U^{(-)}(x)$ 不仅依赖空间变化而且还随着时间变化. 因此研究 $U^{(+)}$ 与 $U^{(-)}$ 算符对于时间的变化最好是用 Heisenberg 表象. 由 (16.16) 式知

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U^{(+)}(x)}{\partial t} &= \mathrm{i}[\hat{H}, U^{(+)}(x)]_- \\ \frac{\partial U^{(-)}(x)}{\partial t} &= \mathrm{i}[\hat{H}, U^{(-)}(x)]_- \end{aligned}\right\} \tag{18.18}$$

将 (18.14) 式与 (18.15) 式代入 (18.18) 式, 并利用 (18.16) 式可得

$$\left.\begin{aligned} [\hat{H}, U^{(+)}(x)]_- &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{k_0>0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i} \delta(k_i^2+m^2)\varepsilon_k \delta(k_i^2+m^2) U^{(+)}(k)(\mathrm{d}k) \\ [\hat{H}, U^{(-)}(x)]_- &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{k_0>0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i} \delta(k_i^2+m^2)\varepsilon_k \delta(k_i^2+m^2) U^{(-)}(k)(\mathrm{d}k) \end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

由此可得下列关系式:

$$\left.\begin{aligned} [\hat{H}, U^{(+)}(k)]_- &= \varepsilon_k U^{(+)}(k) \\ [\hat{H}, U^{(-)}(k)]_- &= -\varepsilon_k U^{(-)}(k) \end{aligned}\right\} \tag{18.20}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}U^{(+)}(k) &= U^{(+)}(k)\hat{H} + \varepsilon_k U^{(+)}(k) \\ \hat{H}U^{(-)}(k) &= U^{(-)}(k)\hat{H} - \varepsilon_k U^{(-)}(k) \end{aligned}\right\} \tag{18.21}$$

设 Φ_E 为哈密顿算符 $\hat{H}$ 的本征概率幅, 其本征值为 E, 即

$$\boxed{\hat{H}\Phi_E = E\Phi_E} \tag{18.22}$$

将 (18.22) 式代入 (18.21) 式得

$$\boxed{\hat{H}(U^{(+)}(k)\Phi_E) = (E+\varepsilon_k)(U^{(+)}(k)\Phi_E)} \tag{18.23}$$

$$\boxed{\hat{H}(U^{(-)}(k)\Phi_E) = (E-\varepsilon_k)(U^{(-)}(x)\Phi_E)} \tag{18.24}$$

由 (18.23) 式与 (18.24) 式可得出重要的结论:

$$\boxed{\Phi_{E+\varepsilon_k} = U^{(+)}(k)\Phi_E} \tag{18.25}$$

是 $\hat{H}$ 算符具有本征值 $(E+\varepsilon_k)$ 的本征概率幅:

$$\boxed{\Phi_{E-\varepsilon_k} = U^{(-)}(k)\Phi_E} \tag{18.26}$$

是 $\hat{H}$ 算符具有本征值 $(E-\varepsilon_k)$ 的本征概率幅. 因此 $U^{(+)}(k)$ 可解释为增加或产生一个具有能量为 $\varepsilon_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$, 质量为 m 的粒子的算符;$U^{(-)}$ 为减少或消灭一个具有能量为 ε_k, 质量为 m 的粒子的算符. 因此, 在量子场论中

$$\boxed{\begin{array}{l} U^{(+)}(k)\text{是产生粒子的算符} \\ U^{(-)}(k)\text{是消灭粒子的算符} \end{array}} \tag{18.27}$$

设 Φ_0 为真空状态的概率幅, 也就是没有一个粒子的概率幅, 因为粒子的数目 N 不能为负, 所以

$$\boxed{U^{(-)}(k)\Phi_0 = 0} \tag{18.28}$$

并且推广 (18.25) 式可知, 具有能量为 $\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}, \cdots, \varepsilon_{k_n}$ 的 n 个粒子的概率幅应写为

$$\boxed{\Phi_{\varepsilon_{k_1},\varepsilon_{k_2},\cdots,\varepsilon_{k_n}} = U^{(+)}(k_1)U^{(+)}(k_2)\cdots U^{(+)}(k_n)\Phi_0} \tag{18.29}$$

因为由 (18.23) 式可证明

$$\hat{H}\,\Phi_{\varepsilon_{k_1}\cdots\varepsilon_{k_n}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{k_i}\right)\Phi_{\varepsilon_{k_1}\cdots\varepsilon_{k_n}} \tag{18.30}$$

这就是说, 任何数目和任何状态的粒子的概率幅, 都可以用真空状态和产生粒子的算符 $U^{(+)}$ 组成.

关于算符 $U^{(\pm)}$ 的具体形式, 以后几节中才会谈到, 现在大家只是先了解它的物理意义.

在 §13 我们曾证明, 带电的粒子一定要用复的广义场函数 U 和 U^* 来描写. 在量子场论中 U 和 U^* 是有它们特殊重要的物理意义的, 不久以后我们将

知道,U^* 是增加电荷 $+e$ 的算符,U 是减少电荷 $+e$ 的算符,U 和 U^* 又可分为 $U^{(+)},U^{(-)},\overset{*}{U}{}^{(+)}$ 与 $\overset{*}{U}{}^{(-)}$ 等不同的四个算符. 根据 (18.27) 式可知它们的物理意义应为

$$\boxed{\begin{array}{l}\overset{*}{U}{}^{(+)}\text{是产生一个带正电荷的粒子的算符}\\ \overset{*}{U}{}^{(-)}\text{是消灭一个带负电荷的粒子的算符}\\ U^{(+)}\text{是产生一个带负电荷的粒子的算符}\\ U^{(-)}\text{是消灭一个带正电荷的粒子的算符}\end{array}} \tag{18.31}$$

3. 广义场函数 U 的另外两种傅里叶表示

(1) 广义场函数的三重傅里叶积分表示

在以后研究自由场二次量子化具体问题的时候, 我们常用场函数的三重傅里叶积分表示, 它的推导如下:

由 (18.7) 式我们知道

$$k_i^2+m^2=(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2})^2-k_0^2=\varepsilon_k^2-k_0^2 \tag{18.32}$$

$$\varepsilon_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$$

利用 (17.19) 式和 (17.23) 式可知

$$\begin{aligned}&\delta(k_i^2+m^2)=\delta(k_0^2-\varepsilon_k^2)\\ &=\frac{1}{2\varepsilon_k}[\delta(k_0+\varepsilon_k)+\delta(k_0-\varepsilon_k)]\end{aligned} \tag{18.33}$$

因此 (18.14) 式和 (18.15) 式可写为

$$\begin{aligned}U^{(\pm)}(x)=&\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{k_0>0}\frac{e^{\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-k_0t)}}{2\varepsilon_k}[\delta(k_0+\varepsilon_k)\\ &+\delta(k_0-\varepsilon_k)]U^{(\pm)}(k)(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\mathrm{d}k_0\end{aligned} \tag{18.34}$$

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{k})=\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3$$

但因 k_0 的积分是在大于零的范围, 利用 (17.2) 式, 则 (18.34) 式可变为

$$U^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{U^{(\pm)}(k)}{2\varepsilon_k}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varepsilon_kt)}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{18.34'}$$

为了以后运算方便设

$$U^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\equiv\frac{U^{(\pm)}(k)}{\sqrt{2\varepsilon_k}} \tag{18.35}$$

将 (18.34) 式代入 (18.34′) 式可得

$$\boxed{\begin{aligned} U^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{U^{(+)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \\ U^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{U^{(-)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \end{aligned}} \tag{18.36}$$

这就是广义场函数三重傅里叶积分的表示, 以后我们称之为场函数的第二种傅里叶表示.

(2) 广义场函数傅里叶级数的表示

假如动量 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则 (18.36) 式可表示为傅里叶级数的形式. 我们在量子力学中知道, 在相空间

$$(\mathrm{d}V)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}k_x\ \mathrm{d}k_y\ \mathrm{d}k_z \tag{18.37}$$

内粒子应有的状态数目为

$$\mathrm{d}T = \frac{(\mathrm{d}V)(\mathrm{d}\boldsymbol{k})}{h^3} \tag{18.38}$$

若粒子在空间活动范围为 V, 则其状态数目应为

$$\boxed{\Delta T = \frac{V(\mathrm{d}\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} \quad (h = 2\pi\hbar = 2\pi)} \tag{18.39}$$

或

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) = \frac{(2\pi)^3}{V}\Delta T \tag{18.40}$$

则一个状态所占的动量空间的体积为

$$\Delta\boldsymbol{k} = \frac{(2\pi)^3}{V} \times 1$$

因此

$$\boxed{\int f(\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k})\Delta\boldsymbol{k} = \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k})} \tag{18.41}$$

或

$$\boxed{\int \cdots (\mathrm{d}\boldsymbol{k}) = \frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} \cdots} \tag{18.41′}$$

利用 (18.41) 式, 并设

$$\boxed{\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}}U^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) \equiv U_k^{(\pm)}} \tag{18.42}$$

则 (18.36) 式可表示为傅里叶级数的形式:

$$\boxed{\begin{aligned} U^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{U_k^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i} \\ U^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{U_k^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_i x_i} \end{aligned}} \tag{18.43}$$

或

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}(U_k^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i} + U_k^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_i x_i})} \tag{18.44}$$

(18.43) 式或 (18.44) 式以后我们称之为场函数的第三种傅里叶表示.

参 考 文 献

[1] 巴戈留保夫, 等. 量子场论导论（俄文）.1954: §3.2, §9.3. §9.4.

[2] Schwarz Albert S. Quantum field theory and Topology. Springer, 1993.

§19 实标量场的二次量子化

1. 实标量场的三种傅里叶表示

设 $U(x)=\varphi(x)$, 由 (18.14) 式和 (18.15) 式可知, 实标量场的第一种傅里叶表示应为

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{k_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)\varphi^{(+)}(k)(\mathrm{d}k) &(19.1)\\ \varphi^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{k_0>0}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}\delta(k_i^2+m^2)\varphi^{(-)}(k)(\mathrm{d}k) &(19.2)\end{aligned}}$$

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x) \tag{19.3}$$

由 (18.36) 式可知, 实标量场的第二种傅里叶表示为

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) &(19.4)\\ \varphi^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) &(19.5)\end{aligned}}$$

$$k_0=\varepsilon_k=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2} \tag{19.6}$$

由 (18.43) 式可知, 实标量场的第三种傅里叶表示为

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\varphi_k^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i} &(19.7)\\ \varphi^{(-)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\varphi_k^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i} &(19.8)\end{aligned}}$$

或
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}(\varphi_k^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}+\varphi_k^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}) \tag{19.9}$$

由 (18.41) 式与 (18.42) 式可知,(19.4) 式、(19.5) 式与 (19.7) 式、(19.8) 式的关系可记忆为

$$\boxed{\begin{aligned}\int\cdots(\mathrm{d}\boldsymbol{k})&=\frac{(2\pi)^3}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\cdots\\ \varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})&=\frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\varphi_k^{(\pm)}\end{aligned}} \tag{19.10}$$

2. 实标量场能量算符的表示

由 (14.6) 式可知实标量场在量子场论中的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\int\frac{1}{2}\left[(\nabla\varphi)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+m^2\varphi^2\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{19.11}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\equiv\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)$$

代入 (19.11) 式, 并注意在量子场论中 $\varphi^{(+)}$ 与 $\varphi^{(-)}$ 已是二次量子化的算符, 其乘积先后的次序是不可颠倒的, 则有

$$\begin{aligned}\hat{H}=\int\frac{1}{2}[&(\nabla\varphi^{(+)}(x))^2+(\nabla\varphi^{(-)}(x))^2+\nabla\varphi^{(+)}(x)\nabla\varphi^{(-)}(x)+\\&\nabla\varphi^{(-)}(x)\nabla\varphi^{(+)}(x)+\left(\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}\right)^2+\\&\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}+m^2(\varphi^{(+)}(x)^2+\\&\varphi^{(-)}(x)^2+\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x))](\mathrm{d}\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{19.12}$$

但由 (19.4) 式可知

$$\begin{aligned}&\int\left[(\nabla\varphi^{(+)}(x))^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}\right)^2+m^2\varphi^{(+)}(x)^2\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r})\\=&\frac{1}{(2\pi)^3}\int(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-\varepsilon_k\varepsilon_{k'}+m^2)\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k+\varepsilon_{k'})t]}\cdot\\&\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\varepsilon_k}\sqrt{2\varepsilon_{k'}}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\\=&\int(\boldsymbol{k}^2-\varepsilon_k^2+m^2)\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\varepsilon_k}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k})}{2\varepsilon_k}\end{aligned} \tag{19.13}$$

其中用到

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \tag{19.14}$$

而

$$\varepsilon_k^2=\boldsymbol{k}^2+m^2 \tag{19.15}$$

所以

$$\int\left[(\nabla\varphi^{(+)}(x))^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}\right)^2+m^2\varphi^{(+)}(x)^2\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r})=0 \tag{19.16}$$

同理可证明

$$\int\left[(\nabla\varphi^{(-)}(x))^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}\right)^2+m^2\varphi^{(-)}(x)^2\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r})=0 \tag{19.17}$$

所以 (19.12) 式可简化为

$$\begin{aligned}\hat{H}=\int\frac{1}{2}[&\nabla\varphi^{(+)}(x)\nabla\varphi^{(-)}(x)+\nabla\varphi^{(-)}(x)\nabla\varphi^{(+)}(x)+\\&\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}+\\&m^2(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)+\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x))](\mathrm{d}\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{19.18}$$

将 (19.4) 式与 (19.5) 式代入 (19.18) 式可得

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'+\varepsilon_k\varepsilon_{k'}+m^2)(\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}))\cdot\\&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})t]}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\varepsilon_k}\sqrt{2\varepsilon_{k'}}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

但因

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

所以

$$\boxed{\hat{H}=\frac{1}{2}\int\varepsilon_k[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k})} \tag{19.19}$$

如动量 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (19.10) 式可得

$$\boxed{\hat{H}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\varepsilon_k(\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)}+\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)})} \tag{19.20}$$

(19.20) 式也可直接用 (19.7) 式与 (19.8) 式代入 (19.12) 式求得, 其结果是一样的, 不过利用 (19.10) 的变换式要简单得多.

3. 实标量场动量算符的表示

由 (14.7) 式知实标量场的动量应为

$$\boldsymbol{p}=-\int\nabla\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{19.21}$$

将 (19.3) 式代入 (19.21) 式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}=-\int\Bigg(&\nabla\varphi^{(+)}\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial t}+\nabla\varphi^{(-)}\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial t}+\\&\nabla\varphi^{(+)}\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial t}+\nabla\varphi^{(-)}\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial t}\Bigg)(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{19.22}$$

将 (19.4) 式与 (19.5) 式代入 (19.22) 式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}=&-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\{\boldsymbol{k}\varepsilon_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k+\varepsilon_{k'})t]}\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')+\\&\boldsymbol{k}\varepsilon_{k'}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k+\varepsilon_{k'})t]}\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')-\\&\boldsymbol{k}\varepsilon_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})t]}\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')-\\&\boldsymbol{k}\varepsilon_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})t]}\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\}\cdot\\&\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\varepsilon_k}\sqrt{2\varepsilon_{k'}}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\\=&\int\{\boldsymbol{k}\varepsilon_k[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varepsilon_k t}+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varepsilon_k t}]+\\&\boldsymbol{k}\varepsilon_k[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]\}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k})}{2\varepsilon_k}\end{aligned}$$

在上面的积分式中, 前两项由于在正 $\boldsymbol{k}$ 的空间与负 $\boldsymbol{k}$ 的空间的积分的数值相等, 而符号相反, 因此在整个的 $\boldsymbol{k}$ 空间的积分等于零. 所以实标量场的动量算符应为

$$\boxed{\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{k}(\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}))(\mathrm{d}\boldsymbol{k})} \tag{19.23}$$

如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (19.10) 式可得

$$\boxed{\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}(\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)}+\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)})} \tag{19.24}$$

此处对 $\boldsymbol{k}$ 的求和是从 $\boldsymbol{k}=-\infty$ 到 $\boldsymbol{k}=+\infty$.

4. 实标量场的二次量子化算符的性质

前面我们已经提到过, 在场论中场函数 $\varphi^{(+)}(x)$ 与 $\varphi^{(-)}(x)$ 已经不单纯是函数, 而且是二次量子化的算符, 并且由 (18.27) 式知道 $\varphi^{(+)}(x)$ 是产生粒子的算符,$\varphi^{(-)}(x)$ 是消灭粒子的算符.$\varphi^{(+)}(x)$ 与 $\varphi^{(-)}(x)$ 都是随时间变化的, 因此它们在 Heisenberg 表象中, 必须满足 (16.20) 式的变化规律:

$$\frac{\partial\varphi^{(+)}(x)}{\partial t}=\mathrm{i}[\hat{H},\varphi^{(+)}(x)]_- \tag{19.25}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(-)}(x)}{\partial t}=\mathrm{i}[\hat{H},\varphi^{(-)}(x)]_- \tag{19.26}$$

哈密顿标符 $\hat{H}$ 由 (19.19) 式可知为

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int\varepsilon_k[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{19.27}$$

将 (19.4) 式,(19.5) 式分别代入 (19.25) 式和 (19.26) 式可得

$$\varepsilon_k\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) = \hat{H}\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\hat{H} \tag{19.28}$$

$$-\varepsilon_k\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) = \hat{H}\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) - \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\hat{H} \tag{19.29}$$

或

$$\begin{aligned}+\varepsilon_k\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) =& \frac{1}{2}\int \varepsilon_{k'}\{[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \\ & \varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')] + [\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \\ & \varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')]\}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')\end{aligned} \tag{19.30}$$

$$\begin{aligned}-\varepsilon_k\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) =& \frac{1}{2}\int \varepsilon_{k'}\{[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) - \\ & \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')] + [\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) - \\ & \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')]\}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')\end{aligned} \tag{19.31}$$

为了满足 (19.30) 式与 (19.31) 式两方程式, 我们必须假设

$$\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}) - \varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}') = \varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{19.32}$$

$$\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) - \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}') = -\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{19.33}$$

或

$$\begin{aligned}&\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')[\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}'),\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]_- - [\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')]_-\varphi^{(\mp)}(\boldsymbol{k}') \\ &\quad = \pm\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\end{aligned} \tag{19.34}$$

由此可知方程式 (19.34) 的解应为

$$\boxed{\begin{aligned}&[\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}'),\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]_- = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\ &[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}),\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_- = 0 \\ &[\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}),\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_- = 0\end{aligned}} \tag{19.35}$$

如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则 $\varphi_k^{(+)}$ 与 $\varphi_k^{(-)}$ 之间也存在着与 (19.35) 式类似的关系式, 为了求这个关系式, 首先让我们证明

$$\boxed{\frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')} \tag{19.36}$$

因由 (19.10) 式知道

$$\int f(\boldsymbol{k})\left(\frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}=f(\boldsymbol{k}')$$

所以 $\dfrac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$ 是具有 δ 函数的性质的.

将 (19.10) 式的第二式代入 (19.35) 式, 并利用 (19.36) 式可证明 $\varphi_k^{(+)}$ 与 $\varphi_k^{(-)}$ 之间必须满足下列关系式:

$$\boxed{[\varphi_k^{(-)},\varphi_{k'}^{(+)}]_-=\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}} \tag{19.37}$$

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi_k^{(+)},\varphi_{k'}^{(+)}]_-=0\\&[\varphi_k^{(-)},\varphi_{k'}^{(-)}]_-=0\end{aligned}\right\} \tag{19.38}$$

以后我们简称 (19.35) 式为 $\varphi(k)$ 的对易关系式. 而 (19.37) 式、(19.38) 式为 φ_k 的对易关系式.

为了满足 φ_k 的对易关系式 (19.37) 式、(19.38) 式, 我们必须要求算符 $\varphi_k^{(\pm)}$ 有下列的具体性质:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_k^{(+)}\Phi_{N_k}=\sqrt{N_k+1}\Phi_{N_k+1}\\&\varphi_k^{(-)}\Phi_{N_k}=\sqrt{N_k}\Phi_{N_k-1}\end{aligned}\right\} \tag{19.39}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_k^{(+)}\Phi_{N_{k'}}=0\\&\varphi_k^{(-)}\Phi_{N_{k'}}=0\end{aligned}\right\} \tag{19.40}$$

Φ_{N_k} 代表 N_k 个具有动量为 $\boldsymbol{k}$, 能量为 $\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ 的粒子的概率幅. $\varphi_k^{(+)}$ 是增加粒子的算符, $\varphi_k^{(-)}$ 是减少粒子的算符.

由 (19.39) 式可知

$$\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)}\Phi_{N_k}=N_k\Phi_{N_k} \tag{19.41}$$

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)}\Phi_{N_k}=(N_k+1)\Phi_{N_k} \tag{19.42}$$

所以

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)}-\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)}=I$$

同理, 由 (19.40) 式可证明 (19.37) 式, (19.38) 式等其他 φ_k 的对易关系式也是满足的.

由 (19.41) 式我们知道算符 $\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)}$ 的本征值恰好是 N_k, 因此这个算符可称为粒子数目的算符, 以 $\widehat{N}_k$ 表示, 即

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)} \equiv \widehat{N}_k \\ &\widehat{N}_k \Psi_{N_k} = N_k \Psi_{N_k}\end{aligned}} \tag{19.43}$$

由 (19.43) 式和 (19.37) 式可知

$$\boxed{\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)} = \widehat{N}_k + 1} \tag{19.44}$$

将 (19.43) 式和 (19.44) 式代入 (19.20) 式与 (19.24) 式可得实标量场二次量子化以及能量与动量的公式:

$$\boxed{H = \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k \left(N_k + \frac{1}{2} \right)} \tag{19.45}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} \left(N_k + \frac{1}{2} \right)$$

但因

$$\frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{k} = 0$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{k}} N_k \boldsymbol{k}} \tag{19.46}$$

由 (19.45) 式可知, 当粒子的数目 $N_k = 0$ 时, 也即在真空状态时实标量场的能量 H 不为零 (其他的场也为如此), 而为

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k = \infty} \tag{19.47}$$

这个真空状态的能量在场论中称为零点能. 真空状态所具有的零点能是量子场论的重要结果之一, 它给予真空实际的物理意义, 从量子场论的角度看来, 真空并不是一无所有的空间, 而是具有无穷大的能量的. 虽然这个无穷大的真空状态的能量在实验中无法观察到, 但是以后将知道真空与粒子的相互作用, 已在实验中得到了证实. 至于真空本身的结构究竟是怎样的? 真空状态所具有的无穷大的能量是从何而来的? 真空的本质究竟是什么? 这些问题到现在物理学家还没有一致的看法, 多半是避而不谈. 我们认为了解和研究真空的性质, 对场论和粒子理论的发展是具有重要的意义的.

(19.45) 与 (19.46) 两式, 具体地说明了场的粒子性质, 并且场是粒子的集合, 同时证明了场的总能量或总动量应该是个别粒子的能量或动量之和. 不过总能量还要加上真空状态的能量, 这是与经典量子论不完全相同的地方.

产生量子的算符 $\varphi_k^{(+)}$ 与消灭粒子的算符 $\varphi_k^{(-)}$ 一般可表示为矩阵的形式:

$$\varphi_k^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{19.48}$$

$$\varphi_k^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{19.49}$$

而 N_k 个具有动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子的概率幅在这种表象中应为

$$\Phi_{N_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{19.50}$$

其不为零的元素为第 $N_k + 1$ 个元素.

所以真空状态

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{19.51}$$

用矩阵的乘积法不难证明 (19.48) 式、 (19.49) 式和 (19.50) 式是符合 (19.39)

式所要求的 $\varphi_k^{(\pm)}$ 的算符性质的. 同时由 (19.48) 式和 (19.49) 式知道

$$\varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{19.52}$$

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{19.52'}$$

由此可知由 (19.48) 式和 (19.50) 式所定义的算符是满足 (19.37) 式 $\varphi_k^{(\pm)}$ 的对易关系式的:

$$\varphi_k^{(-)}\varphi_k^{(+)} - \varphi_k^{(+)}\varphi_k^{(-)} = I$$

在这一节的最后还要说明, 具有动量为 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n$, 而其所对应的粒子数为 $N_{k_1}, N_{k_2}, \cdots, N_{k_n}$ 等 $N(=\sum_i N_{k_i})$ 个粒子的总概率幅应为

$$\Phi_{N_{k_1}, N_{k_2}, \cdots, N_{k_n}} = \Phi_{N_{k_1}} \Phi_{N_{k_2}} \cdots \Phi_{N_{k_n}} \tag{19.53}$$

并且算符 $\varphi_{k_i}^{(\pm)}$ 仅作用在概率幅 $\Phi_{N_{k_i}}$ 之上.

习　题

1. 试证明

$$[\widehat{N}_k, \widehat{N}_{k'}]_- = 0$$
$$[\widehat{H}, \widehat{N}_k]_- = 0$$

因此粒子数目的算符 $\widehat{N}_k$ 可与哈密顿算符有共同的本征概率幅.

2. 试证明

$$[\varphi_k^{(-)}, \widehat{N}_k]_- = \varphi_k^{(-)}$$
$$[\varphi_k^{(+)}, \widehat{N}_k]_- = -\varphi_k^{(+)}$$

3. 试证明在 Heisenberg 表象中

$$\varphi'^{(+)}_{\mathrm{H}k} = \varphi_k^{(+)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_k t}$$
$$\varphi'^{(-)}_{\mathrm{H}k} = \varphi_k^{(-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_k t}$$

因此实标量场的傅里叶积分表示可变为

$$\varphi_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} (\varphi'^{(+)}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \varphi'^{(-)}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$$

4. 证明 $\widehat{H}$ 是厄米算符.

参 考 文 献

[1] 巴戈留保夫, 等. 量子场论导论（俄文）.1954: §3.

[2] Zee A. Quantum field theory in a Nutshell. Princeton University Press, 2003.

§20 实标量场函数$\varphi(x)$的对易关系式与$\Delta(x)$、$\Delta^{(1)}(x)$函数

1. $\varphi^{(\pm)}(x)$ 的对易关系式

利用场函数的第二种傅里叶表示与 (19.35) 式可证明对易式

$$\begin{aligned}[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]_- &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_ix_i-k'_ix'_i)}}{2\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k'}}}[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}),\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_ix_i-k'_ix'_i)}}{2\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k'}}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}')\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}}{2\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}\delta(k_i^2+m^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (20.1)\end{aligned}$$

将 (20.1) 式的 k_i 以 $-k_i$ 置换, 则可得

$$[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}\delta(k_i^2+m^2)\theta^-(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (20.2)$$

设

$$\Delta^{(+)}(x-x') \equiv \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}\delta(k_i^2+m^2)\theta^-(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (20.3)$$

则
$$\boxed{[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]_- = \mathrm{i}\Delta^{(+)}(x-x')} \qquad (20.4)$$

同理可证明

$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}\delta(k_i^2+m^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (20.5)$$

设

$$\Delta^{(-)}(x-x') \equiv -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x'_i)}\delta(k_i^2+m^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (20.6)$$

可得
$$\boxed{[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')]_- = \mathrm{i}\Delta^{(-)}(x-x')} \qquad (20.7)$$

由 (19.35) 式还可证明

$$\boxed{[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(+)}(x')]_- = [\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(-)}(x')]_- = 0} \qquad (20.8)$$

2. $\varphi(x)$ 的对易关系式与 $\Delta(x)$ 函数

由 (20.4) 式与 (20.7) 式可知

$$\begin{aligned}[\varphi(x),\varphi(x')]_- &= (\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x))(\varphi^{(+)}(x')+\varphi^{(-)}(x')) \\ &\quad -(\varphi^{(+)}(x')+\varphi^{(-)}(x'))(\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)) \\ &= [\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(x')]_- + [\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')]_- \\ &= \mathrm{i}[\Delta^{(+)}(x-x')+\Delta^{(-)}(x-x')] \end{aligned} \tag{20.9}$$

设

$$\boxed{\Delta(x-x')=\Delta^{(+)}(x-x')+\Delta^{(-)}(x-x')} \tag{20.10}$$

则

$$\boxed{[\varphi(x),\varphi(x')]=\mathrm{i}\Delta(x-x')} \tag{20.11}$$

将 (20.3) 式, (20.6) 式代入 (20.10) 式, 并利用

$$\varepsilon(k_0)=\theta^+(k_0)-\theta^-(k_0)$$

可知

$$\boxed{\Delta(x-x')=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2+m^2)\varepsilon(k_0)(\mathrm{d}k)} \tag{20.12}$$

由上式可以明显地看出, $\Delta(x-x')$ 是满足 Klein−Gordon 方程式的, 即

$$\boxed{(\Box-m^2)\Delta(x-x')=0} \tag{20.13}$$

$\Delta(x)$ 函数也可表示成三重积分的形式. 因

$$\begin{aligned}\Delta(x) =& \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t}\frac{\delta(k_0+\varepsilon_k)+\delta(k_0-\varepsilon_k)}{2\varepsilon_k} \\ & \varepsilon(k_0)(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\mathrm{d}k_0 \\ =& -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_k t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_k t}}{2\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \\ =& -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\sin\varepsilon_k t}{\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{20.14}$$

所以

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\sin\varepsilon_k t}{\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \\ \varepsilon_k &= \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}\end{aligned}} \tag{20.15}$$

3. $[\varphi(x),\varphi(x')]_+$ 的真空平均值与 $\Delta^{(1)}(x)$ 函数

$$\begin{aligned}<[\varphi(x),\varphi(x')]_+>_0 &= \Phi_0^\dagger[\varphi(x),\varphi(x')]_+\Phi_0 \\ &= \Phi_0^\dagger\varphi(x)\varphi(x')\Phi_0+\Phi_0^\dagger\varphi(x')\varphi(x)\Phi_0 \end{aligned} \tag{20.16}$$

由 (18.28) 式知

$$\boxed{\varphi^{(-)}\Phi_0=0} \tag{20.17}$$

也即 $$\Phi_0^\dagger\varphi^{\dagger(-)}=0$$

但由 (19.7) 式、 (19.8) 式和 (19.48) 式、 (19.49) 式知

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi^{\dagger(-)}=\varphi^{(+)}\\ \varphi^{\dagger(+)}=\varphi^{(-)}\end{array}} \tag{20.18}$$

所以

$$\boxed{\Phi_0^\dagger\varphi^{(+)}=0} \tag{20.19}$$

利用 (20.17) 式, (20.19) 式和 (20.7) 式可证明

$$\Phi_0^\dagger\varphi(x)\varphi(x')\Phi_0=\Phi_0^\dagger\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x')\Phi_0=\Phi_0^\dagger[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x')]_-\Phi_0$$

所以

$$\Phi_0^\dagger\varphi(x)\varphi(x')\Phi_0=\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x-x') \tag{20.20}$$

同理可证明

$$\Phi_0^\dagger\varphi(x')\varphi(x)\Phi_0=-\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x-x') \tag{20.21}$$

将 (20.20) 式与 (20.21) 式代入 (20.16) 式可得

$$<[\varphi(x),\varphi(x')]_+>_0=\mathrm{i}[\Delta^{(-)}(x-x')-\Delta^{(+)}(x-x')] \tag{20.22}$$

设

$$\boxed{\Delta^{(1)}(x-x')=\mathrm{i}[\Delta^{(-)}(x-x')-\Delta^{(+)}(x-x')]} \tag{20.23}$$

则

$$\boxed{<[\varphi(x),\varphi(x')]_+>_0=\Delta^{(1)}(x-x')} \tag{20.24}$$

由 (20.23) 式, (20.7) 式与 (20.3) 式并利用

$$\theta^+(k_0)+\theta^-(k_0)=1$$

可得
$$\boxed{\Delta^{(1)}(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x-x_i')}\delta(k_i^2+m^2)(\mathrm{d}k)} \tag{20.24'}$$

由 (20.24) 式可知, $\Delta^{(1)}(x-x')$ 也是满足 Klein−Gordon 方程式的, 即

$$\boxed{(\Box-m^2)\Delta^{(1)}(x-x')=0} \tag{20.25}$$

$\Delta^{(1)}(x)$ 可表示为三重积分的形式. 因

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}k_0t}\frac{\delta(k_0+\varepsilon_k)+\delta(k_0-\varepsilon_k)}{2\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\mathrm{d}k_0\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_kt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_kt}}{2\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

所以
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^{(1)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\cos\varepsilon_kt}{\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\\ \varepsilon_k&=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}\end{aligned}} \tag{20.26}$$

习　题

1. 试证明
$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F(r,t)$$
$$F(r,t)=\begin{cases}+J_0(m\sqrt{t^2-r^2}), & \text{当}t>r\\ 0, & \text{当}-r<t<r\\ -J_0(m\sqrt{t^2-r^2}), & \text{当}t<-r\end{cases}$$

2. 试证明　$\Delta^{(1)}(x)=\dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{1}{x_i^2}$

$$\Delta(x)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi r}[\delta(r+t)-\delta(r-t)]$$

参 考 文 献

[1] 巴戈留保夫, 等. 量子场论导论（俄文）.1954: §3.

[2] Zee A. Quantum field theory in a Nutshell. Princeton University Press, 2003.

§21 复标量场的二次量子化

1. 复标量场的能量、动量和电荷的算符表示

复标量场函数 $\varphi(x)$ 与 $\overset{*}{\varphi}(x)$ 的三重傅里叶积分由 (18.36) 式可知, 应为以下形式:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\\ \varphi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\end{aligned}\right\} \tag{21.1}$$

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x) \tag{21.2}$$

设 $$[\varphi^{(+)}]^*\equiv\overset{*}{\varphi}{}^{(-)},\quad [\varphi^{(-)}]^*\equiv\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\\ \overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

$$\overset{*}{\varphi}(x)=\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x)+\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x) \tag{21.4}$$

由 (14.12) 式, (14.13) 式与 (14.15) 式我们知道复标量场的总能量、动量与电荷各应为

$$H=\int\left[\nabla\varphi^*(x)\nabla\varphi(x)+\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial t}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}+m^2\varphi^*(x)\varphi(x)\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{21.5}$$

$$\boldsymbol{p}=-\int\left[\nabla\varphi^*(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial t}\nabla\varphi(x)\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{21.6}$$

$$Q=-\mathrm{i}e\int\left[\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial t}\varphi(x)-\varphi^*\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{21.7}$$

将 (21.1)— (21.4) 式代入 (21.5)— (21.7) 式, 并利用 $k_i^2+m^2=0$, 经过简化后可得

$$\widehat{H}=\int\varepsilon_k[\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{21.8}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}=\int\boldsymbol{k}[\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{21.9}$$

$$\widehat{Q}=e\int[\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})-\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{21.10}$$

在量子场论中,$\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 皆为二次量子化的算符, 因此 $\widehat{H},\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{Q}$ 等也都是算符.

如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (18.41) 式与 (18.42) 式可将 (21.8)— (21.10) 式变为

$$\widehat{H}=\sum_{\boldsymbol{k}}\varepsilon_k[\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(-)}+\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}] \tag{21.11}$$

$$\widehat{\boldsymbol{p}}=\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}[\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(-)}+\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}] \tag{21.12}$$

$$\widehat{Q}=\sum_{\boldsymbol{k}}e[\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(-)}-\overset{*}{\varphi}{}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}] \tag{21.13}$$

2. $\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 的对易关系式与二次量子化算符

用第 §19 节中求 $\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 的对易关系式的方法, 可求得复标量场 $\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 的对易关系式. $\varphi^{(\pm)}(x)$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(x)$ 是随时间变化的算符, 它们对时间的变化在 Heisenberg 表象中, 由 (16.20) 式知应该服从下列的规律:

$$\frac{\partial\varphi^{(\pm)}(x)}{\partial t}=\mathrm{i}[\widehat{H},\varphi^{(\pm)}(x)]_- \tag{21.14}$$

$$\frac{\partial\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(x)}{\partial t}=\mathrm{i}[\widehat{H},\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(x)]_- \tag{21.15}$$

或

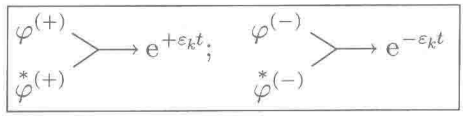
$$\pm\,\varepsilon_k\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})=[\widehat{H},\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]_- \tag{21.16}$$

$$\pm\,\varepsilon_k\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})=[\widehat{H},\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]_- \tag{21.17}$$

为了满足 (21.16) 式与 (21.17) 式两方程式, 用与第 §19 节相同的方法可以证明,$\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 之间应该有以下的对易关系式:

$$\begin{aligned}&[\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(\boldsymbol{k}),\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\&[\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}),\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\&\text{其他情况的对易关系式皆等于零}\end{aligned} \tag{21.18}$$

由 (21.1) 式和 (21.3) 式我们知道 $\varphi^{(+)}$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}$ 对应于正频率, $\varphi^{(-)}$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}$ 对应于负频率, 即 $\varphi^{(+)}$、$\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}$ 是产生粒子的算符, $\varphi^{(-)}$、$\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}$ 是消灭粒子的算符.



(21.19)

因此 (21.18) 式说明了凡是频率符号相同的算符, 都是可以对易的, 并且带 * 的两算符或不带 * 的任意两算符也是可以对易的. 了解这个规律, 可以帮助我们记忆 (21.18) 式.

如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (19.36) 式、 (19.10) 式可将 (21.18) 式变为

$$
\begin{aligned}
&[\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)}, \varphi_{k'}^{(+)}]_- = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\
&[\varphi_k^{(-)}, \overset{*}{\varphi}{}_{k'}^{(+)}]_- = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\
&\text{其他情况的对易关系式皆等于零}
\end{aligned}
\tag{21.20}
$$

为了满足对易关系式 (21.20), 我们必须假设

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)}\varphi_k^{(-)} &= \widehat{N}_k^+ \\
\varphi_k^{(+)}\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)} &= \widehat{N}_k^- \\
\varphi_k^{(+)}\overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)} &= \widehat{N}_k^+ + 1 \\
\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)}\varphi_k^{(+)} &= \widehat{N}_k^- + 1
\end{aligned}
\tag{21.21}
$$

将 (21.21) 式代入 (21.11)— (21.13) 式可得

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k (N_k^+ + N_k^- + 1) \tag{21.22}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} (N_k^+ + N_k^- + 1) \tag{21.23}$$

$$Q = e \sum_{\boldsymbol{k}} (N_k^+ - N_k^- - 1) \tag{21.24}$$

由 (21.24) 式可知 $\widehat{N}_k^+$ 代表正电荷的粒子数, 而 $\widehat{N}_k^-$ 代表负电荷的粒子数, 即

$$
\begin{aligned}
N_k^+ &\longrightarrow \text{正电荷的粒子数} \\
N_k^- &\longrightarrow \text{负电荷的粒子数}
\end{aligned}
\tag{21.25}
$$

(21.22) 式、 (21.23) 式告诉我们复标量场的能量或动量是带正电荷的粒子与带负电荷的粒子的能量或动量的总和. 不过总能量还要加上真空状态的能量.

在真空状态

$N_k^+ = N_k^- = 0$

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k = \infty \\ \boldsymbol{p}_0 &= \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} = 0 \\ Q_0 &= -\sum_{\boldsymbol{k}} e = -\infty \end{aligned}\right\} \tag{21.26}$$

由此可知复标量场的真空状态不仅具有无穷大的能量, 而且还具有无穷大的电荷.

3. 增加与减少电荷的算符

由 (21.21) 式与 (21.20) 式可证明下列关系式:

$$\left.\begin{aligned} &[\widehat{N}_k^{\pm}, \varphi_k^{(\pm)}]_- = 0 \\ &[\widehat{N}_k^{\pm}, \overset{*}{\varphi}_k^{(\mp)}]_- = 0 \\ &[\widehat{N}_k^{\pm}, \varphi_k^{(\mp)}]_- = \mp\varphi_k^{(\mp)} \\ &[\widehat{N}_k^{\pm}, \overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)}]_- = \pm\overset{*}{\varphi}_k^{(\mp)} \end{aligned}\right\} \tag{21.27}$$

(21.24) 式的电荷算符形式应为

$$\widehat{Q} = e\sum_k (\widehat{N}_k^+ - \widehat{N}_k^- - 1) \tag{21.28}$$

利用 (21.27) 式与 (21.28) 式可证明重要关系式:

$$\boxed{\begin{aligned} [\widehat{Q}, \varphi_k^{(\pm)}]_- &= -e\varphi_k^{(\pm)} \\ [\widehat{Q}, \overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)}]_- &= +e\overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)} \end{aligned}} \tag{21.29}$$

或

$$\boxed{\begin{aligned} [\widehat{Q}, \varphi_k]_- &= -e\varphi_k \\ [\widehat{Q}, \overset{*}{\varphi}_k]_- &= +e\overset{*}{\varphi}_k \end{aligned}} \tag{21.30}$$

由 (21.29) 式可知

$$\left.\begin{aligned} Q\varphi_k^{(\pm)} &= \varphi_k^{(\pm)}\widehat{Q} - e\varphi_k^{(\pm)} \\ \widehat{Q}\overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)} &= \overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)}\widehat{Q} + e\overset{*}{\varphi}_k^{(\pm)} \end{aligned}\right\} \tag{21.31}$$

设 Φ_Q 为 $\widehat{Q}$ 的本征概率幅, 其本征值为 Q, 即

$$\widehat{Q}\,\Phi_Q = Q\,\Phi_Q \tag{21.32}$$

将 (21.31) 式作用于 Φ_Q, 并利用 (21.32) 式可知

$$\widehat{Q}(\varphi_k^{(\pm)}\Phi_Q) = (Q-e)(\varphi_k^{(\pm)}\Phi_Q) \tag{21.33}$$

$$\widehat{Q}(\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\pm)}\Phi_Q) = (Q+e)(\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\pm)}\Phi_Q) \tag{21.34}$$

故

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_{Q-e} &= \varphi_k^{(\pm)}\Phi_Q \\ \Phi_{Q+e} &= \overset{*}{\varphi}{}_k^{(\pm)}\Phi_Q\end{aligned}} \tag{21.35}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi_k^{(\pm)}\text{是减少电荷的算符} \\ &\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\pm)}\text{是增加电荷的算符}\end{aligned}} \tag{21.35$'$}$$

但因 $\varphi_k^{(+)}$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)}$ 是产生粒子的算符, $\varphi_k^{(-)}$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)}$ 是消灭粒子的算符, 所以 $\varphi_k^{(\pm)}$ 与 $\overset{*}{\varphi}{}_k^{(\pm)}$ 等算符的物理意义应为

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi_k^{(+)}\text{是产生带负电荷粒子的算符} \\ &\varphi_k^{(-)}\text{是消灭带正电荷粒子的算符} \\ &\overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)}\text{是产生带正电荷粒子的算符} \\ &\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)}\text{是消灭带负电荷粒子的算符}\end{aligned}} \tag{21.36}$$

4. 复标量场场函数 $\varphi(x)$、$\overset{*}{\varphi}(x)$ 的对易关系式

利用 (21.20) 式、 (21.1) 式、 (21.3) 式和 (20.3) 式、 (20.6) 式可证明

$$\boxed{\begin{aligned}[\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')]_- &= \mathrm{i}\Delta^{(-)}(x-x') \\ [\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(x')]_- &= \mathrm{i}\Delta^{(+)}(x-x')\end{aligned}} \tag{21.37}$$

并且由 (21.2) 式、 (21.4) 式和 (21.37) 式可知

$$\boxed{\begin{aligned}[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(x')]_- &= \mathrm{i}\Delta(x-x') \\ [\overset{*}{\varphi}(x), \varphi(x')]_- &= \mathrm{i}\Delta(x-x')\end{aligned}} \tag{21.38}$$

用 §20 同样的方法可证明

$$\boxed{\begin{aligned}< [\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(x')]_+ >_0 &= \Delta^{(1)}(x-x') \\ < [\overset{*}{\varphi}(x), \varphi(x')]_+ >_0 &= \Delta^{(1)}(x-x')\end{aligned}} \tag{21.39}$$

习　题

1. 证明 (21.8) 式、 (21.9) 式和 (21.10) 式三个公式.
2. 证明 (21.37) 式与 (21.38) 式.
3. 证明 (21.39) 式.

参 考 文 献

Pauli W. Relativistic Field Theories of Elementary Particles Ⅱ. §I.

§22 向量场或电磁场的二次量子化

1. 向量场的能量、动量与自旋的算符表示

这一节所研究的向量场是指自旋为 1 的光子场, 也即电磁场. 它是用向量函数 $A_i(x)$ 描写的, 由 (18.36) 式和 (18.43) 式可知 $A_i(x)$ 的第二种和第三种傅里叶表示应为

$$\boxed{\begin{aligned} A_i^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{A_i^{(+)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \\ A_i^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{A_i^{(-)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \\ & i=1,2,3,4 \end{aligned}} \tag{22.1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} rlA_i^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{A_{k_i}^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i} \\ A_i^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{A_{k_i}^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i} \end{aligned}} \tag{22.2}$$

$$A_i(x) = A_i^{(+)}(x) + A_i^{(-)}(x) \tag{22.3}$$

从 (14.30) 式、 (14.31) 式和 (14.34) 式知道电磁场的总能量、动量和自旋的公式为

$$H = \frac{1}{2}\int\left[\nabla A_l(x)^2 + \left(\frac{\partial A_l(x)}{\partial t}\right)^2\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{22.4}$$

$$\boldsymbol{p} = -\int\left[\nabla A_l(x)\frac{\partial A_l(x)}{\partial t}\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{22.5}$$

$$\boldsymbol{S} = \int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A})(\mathrm{d}\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{S} = \int\left(\boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V \tag{22.6}$$

将 (22.1) 式分别代入 (22.4) 式、 (22.5) 式和 (22.6) 式, 并考虑光子的能量与动量的关系式

$$\boxed{k_i^2 = 0, \quad m_{\text{光子}} = 0} \tag{22.7}$$

$$\boxed{\varepsilon_k = |\boldsymbol{k}|} \tag{22.8}$$

可得

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_k[A_i^{(+)}(\boldsymbol{k})A_i^{(-)}(\boldsymbol{k})+A_i^{(-)}(\boldsymbol{k})A_i^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{22.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{2}\int\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{k}[A_i^{(+)}(\boldsymbol{k})A_i^{(-)}(\boldsymbol{k})+A_i^{(-)}(\boldsymbol{k})A_i^{(+)}(\boldsymbol{k})](\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{22.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\int\big\{&\mathrm{i}[\boldsymbol{A}^{(-)}(\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{A}^{(+)}(\boldsymbol{k})]-\mathrm{i}[\boldsymbol{A}^{(+)}(\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{A}^{(-)}(\boldsymbol{k})]+\\&A_4^{(+)}(\boldsymbol{k})[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}^{(-)}(\boldsymbol{k})]-A_4^{(-)}(\boldsymbol{k})[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}^{(+)}(\boldsymbol{k})]\big\}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{22.11}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (18.41) 式、 (18.42) 式可将 (22.9) 式、 (22.10) 式和 (22.11) 式变为

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_k[A_{k_i}{}^{(+)}A_{k_i}{}^{(-)}+A_{k_i}{}^{(-)}A_{k_i}{}^{(+)}] \tag{22.12}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{k}[A_{k_i}{}^{(+)}A_{k_i}{}^{(-)}+A_{k_i}{}^{(-)}A_{k_i}{}^{(+)}] \tag{22.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\Big\{&\mathrm{i}[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}]-\mathrm{i}[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}]\\&+A_{k_4}^{(+)}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}]-A_{k_4}^{(-)}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}]\Big\}\end{aligned} \tag{22.14}$$

在量子场论中 $A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 或 $A_{k_i}^{(\pm)}$ 已经是二次量子化的算符, 因此 $\hat{H}$,$\hat{\boldsymbol{p}}$,$\hat{\boldsymbol{S}}$ 等也都是算符.

这里还须注意 $A_{k_i}^{(\pm)}$ 下方的 k 不是和 i 一样代表向量的指标, 而是代表动量的意思.

用 §19 中求 $\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 的对易关系式的方法, 可求得向量场 $A_i{}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 之间的对易关系式.$A_i{}^{(\pm)}(x)$ 是随时间而变化的算符，它们在 Heisenberg 表象中应该服从下列的变化规律:

$$\frac{\partial A_i^{(\pm)}(x)}{\partial t}=\mathrm{i}[\hat{H},A_i^{(\pm)}(x)]_- \tag{22.15}$$

将 (22.1) 式代入上式可得

$$\pm\varepsilon_k A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})=[\hat{H},A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]_- \tag{22.16}$$

为了满足上式的要求, 用与 §19 同样的方法可以证明 $A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 之间必须要有下列的对易关系式:

$$\boxed{[A_i^{(-)}(\boldsymbol{k}), A_j^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_- = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')} \tag{22.17}$$

$$\left.\begin{aligned}[A_i^{(+)}(\boldsymbol{k}), A_j^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_- &= 0\\ [A_i^{(-)}(\boldsymbol{k}), A_j^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_- &= 0\end{aligned}\right\} \tag{22.18}$$

式中,i，j=1，2，3，4. 如 $\boldsymbol{k}$ 为不连续的, 则利用 (18.42) 式与 (19.36) 式可将 (22.17) 式、 (22.18) 式变为

$$\boxed{\begin{aligned}[A_{k_i}^{(-)}, A_{k_j'}^{(+)}]_- &= \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\\ [A_{k_i}^{(+)}, A_{k_j'}^{(+)}]_- &= 0\\ [A_{k_i}^{(-)}, A_{k'j}^{(-)}]_- &= 0\end{aligned}} \tag{22.19}$$

由 (22.19) 式的第一式可知

$$([A_{k_i}^{(-)}, A_{k_j}^{(+)}]_-)^\dagger = \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$$

即

$$[\overset{\dagger}{A}{}_{k_j}^{(+)}, \overset{\dagger}{A}{}_{k_i}^{(-)}]_- = \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$$

由上式, 并由 $\hat{H}$ 为厄米算符的要求可知

$$\boxed{\begin{aligned}\overset{\dagger}{A}{}_{k_i}^{(+)} &= A_{k_i}^{(-)}\\ \overset{\dagger}{A}{}_{k_i}^{(-)} &= A_{k_i}^{(+)}\end{aligned}} \tag{22.20}$$

2. 光子的极化坐标内的各种表示

从 §6 中我们知道, 磁场的场函数 (A_i) 是四维空间直角坐标的一个向量, 设这个四维空间坐标的向量基底为 $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4})$. 用这个基底，电磁场的场函数可表示为下列形式:

或

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) &= A_i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e_i}\\ \boldsymbol{A}^{\pm}(\boldsymbol{k}) &= A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e_i}\end{aligned}\right\} \tag{22.21}$$

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{22.22}$$

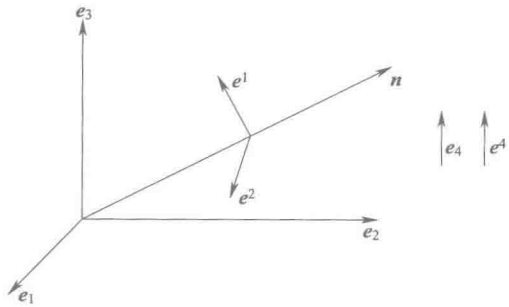
[无指标的 $A(\boldsymbol{k})$ 代表四维空间的向量,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ 代表三维空间的向量.]

为了研究光子的极化性质, 我们采用一种新的四维空间直角坐标, 这个新坐标的向量基底以 $(\boldsymbol{e^1},\ \boldsymbol{e^2},\ \boldsymbol{e^3},\ \boldsymbol{e^4})$ 表示, 它们的性质如下:

$$\boxed{\boldsymbol{e}^1\perp\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{e}^2\perp\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{e}^3=\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{e}^4//\boldsymbol{e_4}} \tag{22.23}$$

$$(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j)=\delta_{ij} \tag{22.24}$$

$\boldsymbol{n}$ 为光子运动的方向, $\boldsymbol{e}^i$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 间的关系如下图所示.



四维空间的动量 k, 在新坐标中应为

$$(k^1,\ k^2,\ k^3,\ k^4)=(0,\ 0,\ k,\ \mathrm{i}k^0) \tag{22.25}$$

对于光子

$$k=|\boldsymbol{k}|=\varepsilon_k=k^0=k_0 \tag{22.26}$$

电磁场的向量场函数在新坐标中的分量以 $A^i(\boldsymbol{k})$ 表示, 则

$$\left.\begin{aligned} A(\boldsymbol{k})&=A^i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}^i\\ A^{(\pm)}(\boldsymbol{k})&=A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}^i\end{aligned}\right\} \tag{22.27}$$

设

$$\boxed{e^i_j=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\cos\,\theta^i_j} \tag{22.28}$$

则

$$\boxed{\begin{aligned} e^i_je^k_j&=\delta_{ik}\\ e^j_ie^j_k&=\delta_{ik}\end{aligned}} \tag{22.29}$$

由 (22.21) 式、 (22.27) 式和 (22.28) 式可知两种坐标中的向量场函数可有以下的关系:

$$\boxed{\begin{aligned} A^{(\pm)}_i(\boldsymbol{k})&=A^{j(\pm)}(\boldsymbol{k})e^j_i\\ A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k})&=A^{(\pm)}_j(\boldsymbol{k})e^i_j\end{aligned}} \tag{22.30}$$

当 $\boldsymbol{k}$ 在不连续的情况下, 有

$$\boxed{\begin{aligned} A_{k_i}^{(\pm)} &= A_k^{j(\pm)} e_i^j \\ A_k^{i(\pm)} &= A_{k_j}^{(\pm)} e_j^i \end{aligned}} \tag{22.31}$$

由 (22.30) 式、 (22.31) 式和 (22.29) 式可知

$$\left.\begin{aligned} A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) &= A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k}) A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k}) \\ A_{k_i}^{(\pm)} A_{k_i}^{(\pm)} &= A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)} \end{aligned}\right\} \tag{22.32}$$

上式对于任何四种 (±) 的排列组合皆适合.

利用 (22.32) 式可将 (22.9)— (22.14) 式等能量、动量与自旋的公式以新坐标场函数的分量表示:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_k [A^{i(+)}(\boldsymbol{k}) A^{i(-)}(\boldsymbol{k}) + A^{i(-)}(\boldsymbol{k}) A^{i(+)}(\boldsymbol{k})] (\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{22.33}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{k} [A^{i(+)}(\boldsymbol{k}) A^{i(-)}(\boldsymbol{k}) + A^{i(-)}(\boldsymbol{k}) A^{i(+)}(\boldsymbol{k})] (\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{22.34}$$

$$\hat{S}_n = \mathrm{i} \int [A^{2(+)}(\boldsymbol{k}) A^{1(-)}(\boldsymbol{k}) - A^{1(+)}(\boldsymbol{k}) A^{2(-)}(\boldsymbol{k})] (\mathrm{d}\boldsymbol{k}) (\mathrm{d}\boldsymbol{k}) \tag{22.35}$$

S_n 代表自旋在光子运动方向的分量, 它是一个可观察的守恒量. 当 $\boldsymbol{k}$ 不连续时,有

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_k [A_k^{i(+)} A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)} A_k^{i(+)}] \tag{22.36}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{k} [A_k^{i(+)} A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)} A_k^{i(+)}] \tag{22.37}$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}_n = \mathrm{i} \sum_{\boldsymbol{k}} [A_k^{2(+)} A_k^{1(-)} - A_k^{1(+)} A_k^{2(-)}] \tag{22.38}$$

(22.35) 式和 (22.38) 式的自旋算符表示式, 可用 (22.39) 式和 (22.40) 式等对易关系式简化.

同样利用 (22.30) 式和 (22.29) 式也可将 (22.17)— (22.19) 式等 $A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 和 $A_{k_i}^{(\pm)}$ 的对易关系式变成 $A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 和 $A_k^{i(\pm)}$ 的对易关系式:

$$\boxed{\begin{aligned}&[A^{i(-)}(\boldsymbol{k}), A^{j(+)}(\boldsymbol{k}')]_- = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\&[A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k}), A^{j(\pm)}(\boldsymbol{k}')]_- = 0 \quad (i,j=1,2,3,4)\end{aligned}} \tag{22.39}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&[A_k^{i(-)},\ A_{k'}^{j(+)}]_- = \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\\&[A_k^{i(\pm)},\ A_{k'}^{j(\pm)}]_- = 0 \quad (i,j=1,2,3,4)\end{aligned}} \tag{22.40}$$

在光子极化的坐标中, 以后我们称与电子运动方向垂直的电磁场函数的分量 $A_k^{1(\pm)}$ 和 $A_k^{2(\pm)}$ 为横分量, 平行于光子运动方向的 $A_k^{3(\pm)}$ 称为纵分量, 而 $A_k^{4(\pm)}$ 则称为时间分量. 它们所描写的光子分别称为“横”光子、“纵”光子和“时间”光子.

$$\boxed{\begin{aligned}&A_k^{1(\pm)}、A_k^{2(\pm)}——\text{横分量 (描写横光子)}\\&A_k^{3(\pm)}——\text{纵分量 (描写纵光子)}\\&A_k^{4(\pm)}——\text{时间分量 (描写时间光子)}\end{aligned}} \tag{22.41}$$

3. 在狭义洛伦兹条件下电磁场的二次量子化

我们在光学中知道电磁波是横波, 但是 Maxwell 方程式的解除了有与光波行进方向垂直振动的横波 $A^1(x)$ 和 $A^2(x)$ 之外, 还有与光波行进方向平行振动的纵波 $A^3(x)$, 在经典电动力学中是用狭义洛伦兹条件

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0, \quad A^4 = \mathrm{i}A^0 = 0} \tag{22.42}$$

消去实验上没有观察到的纵波, 在量子场论中也可以用这个同样的条件消灭纵光子. 同时假设 $A^4=0$, 也就是等于假设没有“时间”光子存在.

将 (22.1) 式代入 (22.42) 式的第一式, 可得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}^{(\pm)}(k)=0 \tag{22.43}$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{A}^{(\pm)}\perp\boldsymbol{k}} \tag{22.44}$$

这说明了向量场函数 $\boldsymbol{A}^{(\pm)}$ 是在垂直于光子行进的方向 $\boldsymbol{k}$ 的平面内振动的,$\boldsymbol{A}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 在 $\boldsymbol{k}$ 的平行方向是没有分量的, 因此 (22.41) 式的条件保证了没有纵波存在, 也即

$$\boxed{A_k^{3(\pm)}=0} \tag{22.45}$$

这也就是说没有纵光子存在.

为了具体研究电磁场的二次量子化和自旋状态的关系, 我们假设

$$\left.\begin{aligned} A_k^{1(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{k_1}^{(+)} + C_{k_2}^{(+)}] \\ A_k^{2(+)} &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[C_{k_1}^{(+)} - C_{k_2}^{(+)}] \end{aligned}\right\} \tag{22.46}$$

并且由 (22.20) 式的要求可知

$$\left.\begin{aligned} A_k^{1(-)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{k_1}^{(-)} + C_{k_2}^{(-)}] \\ A_k^{2(-)} &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[C_{k_1}^{(-)} - C_{k_2}^{(-)}] \end{aligned}\right\} \tag{22.46'}$$

$$C_{k_i}^{(+)} \equiv \overset{\dagger}{C}{}_{k_i}^{(-)} \quad (i = 1, 2)$$

将 (22.46) 式、 (22.46′) 式代入 (22.36) 式、 (22.37) 式和 (22.38) 式可得

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_k[C_{k_i}^{(+)}C_{k_i}^{(-)} + C_{k_i}^{(-)}C_{k_i}^{(+)}] \tag{22.47}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{k}[C_{k_i}^{(+)}C_{k_i}^{(-)} + C_{k_i}^{(-)}C_{k_i}^{(+)}] \tag{22.48}$$

$$\hat{S}_z = \sum_{\boldsymbol{k}}[C_{k_1}^{(+)}C_{k_1}^{(-)} - C_{k_2}^{(+)}C_{k_2}^{(-)}] \tag{22.49}$$

将 (22.46) 式代入 $A_k^{i(\pm)}$ 的对易关系式 (22.40) 式可得 $C_{k_i}^{(\pm)}$ 的对易关系式:

$$\begin{aligned} [C_{k_i}^{(-)}, C_{k'_j}^{(+)}]_- &= \delta_{ij}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ [C_{k_i}^{(\pm)}, C_{k'_j}^{(\pm)}]_- &= 0 \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{22.50}$$

为了满足上面的对易关系式, 我们必须假设

$$\begin{aligned} C_{k_i}^{(+)}C_{k_i}^{(-)} &= \hat{N}_{k_i} \\ C_{k_i}^{(-)}C_{k_i}^{(+)} &= \hat{N}_{k_i} + 1 \end{aligned} \tag{22.51}$$

把 (22.51) 式代入 (22.47) 式、 (22.48) 式、 (22.49) 式可得

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k (N_{k_1} + N_{k_2} + 1) && (22.52)\\ \boldsymbol{p} &= \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} (N_{k_1} + N_{k_2} + 1) && (22.53)\\ \boldsymbol{S} &= \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{n} (N_{k_1} - N_{k_2}) && (22.54) \end{aligned}}$$

在真空状态的情况下, 即在 $N_{k_i} = 0$ 的情况下, 有

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\boldsymbol{k}} \varepsilon_k = \infty \\ \boldsymbol{p}_0 &= \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} = 0 \\ \boldsymbol{S}_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22.55)$$

(22.54) 式证明了光子的自旋为 1, 并且告诉我们光子的自旋有两个不同的状态, 即平行于运动方向的状态 ($S_z = +1$) 和反平行于运动方向的状态 ($S = -1$). 而且 N_{k_1} 代表动量为 $\boldsymbol{k}$ 而自旋状态 $S_z = +1$ 的光子数,N_{k_2} 代表自旋状态 $S_z = -1$ 的光子数. 电磁场的总能量或总动量由 (22.52) 式和 (22.53) 式知道, 应该是这两种自旋状态的光子的能量或动量的总和. 并且光子真空状态的能量也是发散的.

$$\boxed{\begin{aligned} N_{k_1} &\longrightarrow S = +1\text{状态的光子数} \\ N_{k_2} &\longrightarrow S = -1\text{状态的光子数} \end{aligned}} \qquad (22.56)$$

由 (22.50) 式和 (22.51) 式我们还可以知道 $C_{k_1}^{(+)}$ 和 $C_{k_1}^{(-)}$ 是产生和消灭自旋状态为 $S_z = 1$ 的光子的算符, 而 $C_{k_2}^{(+)}$ 和 $C_{k_2}^{(-)}$ 是产生和消灭自旋状态为 $S_z = -1$ 的光子的算符.

4. 在广义洛伦兹条件下电磁场的二次量子化和产生的矛盾问题

我们知道上一小节中所用的狭义洛伦兹条件, 虽然可以消去实验中没有观察到的纵光子, 正确地将电磁场二次量子化, 并且阐明了光子自旋的性质, 但是狭义洛伦兹条件有一个重要的缺点, 就是这条件形式的本身破坏了特殊相对论的协变性. 为了克服这个缺点, 我们还是应该用 (6.15) 式具有特属相对论协变性的洛伦兹条件, 这样的条件为了与前者区别称之为广义洛伦兹条件:

$$\boxed{\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i} = 0}$$

将 (22.1) 式或 (22.2) 式代入上式可知

$$k_i A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 0$$

$$k_i A_{k_i}^{(\pm)} = 0 \tag{22.57}$$

或

$$\boxed{\begin{aligned} k^i A^{i(\pm)}(\boldsymbol{k}) &= 0 \\ k^i A_k^{i(\pm)} &= 0 \end{aligned}} \tag{22.58}$$

设 $$A^4 = \mathrm{i}A^0$$

即 $$A_k^{4(\pm)} = \mathrm{i}A_k^{0(\pm)} \tag{22.59}$$

将 (22.59) 式和 (22.25) 式代入 (22.58) 式可得

$$kA_k^{3(\pm)} = k_0 A_k^{0(\pm)} \tag{22.60}$$

但是对于光子

$$k = k_0$$

所以 $$\boxed{A_k^{3(\pm)} = A_k^{0(\pm)}} \tag{22.61}$$

由此得到了以后将知道的不正确的结论: 电磁场的四个二次量子化算符 $A_k^{i(\pm)}$ 不是完全独立的. 从 (22.61) 式可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)} &= \left(\sum_{i=1}^{2} A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)} \right) + A_k^{3(\pm)} A_k^{3(\pm)} - A_k^{0(\pm)} A_k^{0(\pm)} \\ &= \sum_{i=1}^{2} A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)} \end{aligned}$$

即 $$\boxed{\sum_{i=1}^{4} A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)} = \sum_{i=1}^{2} A_k^{i(\pm)} A_k^{i(\pm)}} \tag{22.62}$$

上式对于所有四种 $(\pm)$ 指标的组合皆成立.

(22.62) 式告诉我们另一个重要的结论, 就是 $A_k^{i(\pm)}$ 的标积, 由于广义洛伦兹条件的限制, 其纵分量部分 $A_k^{3(\pm)} A_k^{3(\pm)}$ 总是与时间分量部分互相抵消的. 利用 (22.62) 式可将 (22.36) 式和 (22.37) 式写为

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_k [A_k^{i(+)} A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)} A_k^{i(+)}] \qquad (22.63) \\ \hat{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{k} [A_k^{i(+)} A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)} A_k^{i(+)}] \qquad (22.64) \end{aligned}}$$

也就是说, 广义洛伦兹条件不但消灭了纵光子, 同时也消灭了“时间”光子. 所以在能量和动量算符中只剩下了横光子部分的算符. 因此我们可以用和上一小节中一样的方法将电磁场二次量子化, 最后所得结果和用狭义洛伦兹条件所得的结果也是完全一样的.

但是我们将知道用广义洛伦兹条件所得的结果, 即 (22.61) 式会产生一个很严重的矛盾.(22.40) 式中, $A_k^{3(\pm)}$ 和 $A_k^{4(\pm)}$ 的对易关系式各应为

$$[A_k^{3(-)}, A_k^{3(+)}]_- = 1 \tag{22.65}$$

$$[A_k^{4(-)}, A_k^{4(+)}]_- = 1 \tag{22.66}$$

如将 $A_k^{4(\pm)} = \mathrm{i}A_k^{0(\pm)}$ 代入 (22.66) 式, 则可得

$$[A_k^{0(-)}, A_k^{0(+)}]_- = -1 \tag{22.67}$$

但是将 (22.61) 式的 $A_k^{3(\pm)} = A_k^{0(\pm)}$ 代入 (22.65) 式则得到

$$[A_k^{0(-)}, A_k^{0(+)}]_- = +1 \tag{22.68}$$

(22.67) 式与 (22.68) 式的等号左边是一样的, 而右边差一个正负号, 这个结果是绝对矛盾的. 但是这个矛盾在 1950 年以前是一直没有得到合理解决的, 多半认为 $A^{3(\pm)}$ 与 $A^{0(\pm)}$ 是不可以量子化的. 也就是说没有纵光子与“时间”光子的存在. 这样的看法根据现代的观点是不正确的. 以后我们将知道当电磁场与电子互相作用的时候, 纵光子与时间光子都是应该存在的. 而且纵光子与时间光子不能互相抵消, 而是产生库仑作用力.

以上 (22.67) 式与 (22.68) 式的矛盾, 应该说是产生于 (22.61) 式. 也就是产生于四个 $A_k^{i(\pm)}$ 算符间的不独立性. 我们知道在场论中应该认为四个 $A_k^{i(\pm)}$ 算符是完全独立的, 否则我们描写电磁场就用不着四维空间的向量 $A_i(x)$ 了.

为了解决这个矛盾, 我们应该认为, 洛伦兹条件在量子场论中不直接是电磁场函数算符 $A_i(x)$ 的四维空间的散度等于零, 而是 $A_i(x)$ 的散度作用在概率幅上为零, 即

$$\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i}\Phi = 0 \tag{22.69}$$

将 (22.1) 式代入 (22.69) 式可得

$$\left.\begin{aligned} &k_i A_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\Phi = 0 \\ \text{或}\quad &k_i A_{k_i}^{(\pm)}\Phi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{22.69'}$$

在光子的极化坐标内则为

$$k^i A_k^{i(\pm)}\Phi = 0$$

也即
$$(A_k^{3(\pm)} - A_k^{0(\pm)})\Phi = 0 \tag{22.70}$$

或
$$A_k^{3(+)}\Phi = A_k^{0(+)}\Phi \tag{22.71}$$

$$A_k^{3(-)}\Phi = A_k^{0(-)}\Phi \tag{22.72}$$

但是我们将发现 (22.71) 式也是不能成立的, 因为将 (22.71) 式乘以 $A_k^{3(-)}$, 并设 $\Phi = \Phi_0$, 则
$$A_k^{3(-)}A_k^{3(+)}\Phi_0 = A_k^{3(-)}A_k^{0(+)}\Phi_0 \tag{22.73}$$

算符 $A_k^{3(-)}$ 与 $A_k^{0(+)}$ 由 (22.40) 式知道是可以对易的, 并且 $A_k^{3(-)}\Phi = 0$, 因此可得
$$[A_k^{3(-)},\ A_k^{3(+)}]_-\Phi_0 = 0 \tag{22.74}$$

但由 (22.40) 式知道 $[A_k^{3(-)},\ A_k^{3(+)}]_- = 1$, 故得出与 (22.74) 式完全矛盾的结论
$$[A_k^{3(-)}, A_k^{3(+)}]_-\Phi_0 = \Phi_0 \neq 0 \tag{22.75}$$

所以 (22.71) 式是不能成立的, 只有 (22.72) 式的要求可以成立. 也就是说在量子场论中洛伦兹条件应改写为更狭义的要求:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial A_i^{(-)}(x)}{\partial x_i}\Phi = 0\\ &(A_k^{3(-)} - A_k^{0(-)})\Phi = 0\end{aligned}} \tag{22.76}$$

利用 (22.20) 式, 由 (22.76) 式可得

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi^\dagger\frac{\partial A_i^{(+)}(x)}{\partial x_i} = 0\\ &\Phi^\dagger(A_k^{3(+)} - A_k^{0(+)}) = 0\end{aligned}} \tag{22.77}$$

(22.76) 式与 (22.77) 式是完全等价的, 是一种条件的两种不同的写法. 将 (22.76) 式的第一式左乘 $\Phi^\dagger$,(22.77) 式的第一式右乘 Φ, 相加得
$$\Phi^\dagger\frac{\partial A_i^{(+)}(x)}{\partial x_i}\Phi + \Phi^\dagger\frac{\partial A_i^{(-)}(x)}{\partial x_i}\Phi = 0 \tag{22.78}$$

所以
$$\Phi^\dagger\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i}\Phi = 0$$

也即
$$\boxed{\left\langle \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i} \right\rangle = 0} \tag{22.79}$$

所以在量子场论中, 电磁场的洛伦兹条件, 并不是 $A_i(x)$ 的四维空间的散度为零, 而是 $A_i(x)$ 的四维空间的散度的平均值为零.

从 (22.77) 式或 (22.76) 式的洛伦兹条件还可以得到另外一个重要的结果, 就是

$$\Phi^\dagger(A_k^{3(+)}A_k^{3(-)} - A_k^{0(+)}A_k^{0(-)})\Phi = \Phi^\dagger(A_k^{3(+)} - A_k^{0(+)})A_k^{3(-)}\Phi = 0$$

即
$$\boxed{\left\langle A_k^{3(+)}A_k^{3(-)} - A_k^{0(+)}A_k^{0(-)} \right\rangle = 0} \tag{22.80}$$

由 (22.80) 式可得出重要结论, 就是电磁场的能量与动量的平均值, 也即我们观察到的自由电磁场的能量与动量是与纵光子和时间光子无关的. 因利用 (22.80) 式, 可将 (22.36) 式和 (22.37) 式变为

$$H = \langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_k \left\langle (A_k^{i(+)}A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)}A_k^{i(+)}) \right\rangle \tag{22.81}$$

$$\boldsymbol{p} = \langle \boldsymbol{p} \rangle = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^{2} k \left\langle (A_k^{i(+)}A_k^{i(-)} + A_k^{i(-)}A_k^{i(+)}) \right\rangle \tag{22.82}$$

(22.81) 式与 (22.82) 式中没有将纵光子和时间光子的真空能量包括进去.

至于光子的自旋 S_n, 由 (22.38) 式知道, 它本来就是与纵光子和时间光子无关的.

这也就是说用 (22.76) 式或 (22.77) 式的洛伦兹条件, 是可以消去纵光子及时间光子, 而没有 (22.67) 式与 (22.68) 式之间的矛盾的.

详细研究电磁场的二次量子化的问题. 还可看出有其他的矛盾和缺点, 例如纵光子和时间光子的概率幅 $\Phi_{N_3N_0}$ 的标积等于无穷大, 因此它是无法归一化的. 关于这些矛盾和缺点的解决, 请参看本节参考文献中 Gaupta 的文章. 对初学场论者, 不详谈这个问题.

习　题

证明 (22.11) 式自旋 $\boldsymbol{S}$ 的算符表示式.

参考文献

[1] Greiner W. Quantum Electrodynamics. Springer−verlag, 1997.
[2] Guapta S N. Proc. Phys. Soc., 1950, 63: 681: 1951, 64, 850.

§23 电磁场函数 $A_i(x)$ 的对易关系式与 $D(x)$、$D^{(1)}(x)$ 函数

1. $A_i^{(\pm)}(x)$ 的对易关系式

利用 (22.1) 式和 (22.17) 式并考虑光子的质量为零, 可证明对易关系式

$$\begin{aligned}[A_i^{(+)}(x), A_j^{(-)}(x')]_- &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_ix_i-k_i'x_i')}}{2\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k'}}}[A_i^{(+)}(\boldsymbol{k}), A_j^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}') \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_ix_i-k_i'x_i')}}{2\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k'}}}\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')(\mathrm{d}\boldsymbol{k})(\mathrm{d}\boldsymbol{k}') \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}}{2\varepsilon_k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\delta_{ij} \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (23.1)\end{aligned}$$

将 (23.1) 式的 k_i 以 $-k_i$ 置换, 则可得

$$[A_i^{(+)}(x), A_j^{(-)}(x')] = -\frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)\theta^-(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (23.2)$$

设
$$\boxed{D^{(+)}(x-x') \equiv \frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)\theta^-(k_0)(\mathrm{d}k)} \qquad (23.3)$$

则可知
$$\boxed{[A_i^{(+)}(x), A_j^{(-)}(x')]_- = \mathrm{i}\delta_{ij}D^{(+)}(x-x')} \qquad (23.4)$$

同理可证明

$$[A_i^{(-)}(x), A_j^{(+)}(x')]_- = \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k) \qquad (23.5)$$

设
$$\boxed{D^{(-)}(x-x') \equiv -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)\theta^+(k_0)(\mathrm{d}k)} \qquad (23.6)$$

可得
$$\boxed{[A_i^{(-)}(x), A_j^{(+)}(x')]_- = \mathrm{i}\delta_{ij}D^{(-)}(x-x')} \qquad (23.7)$$

由 (22.18) 式还可证明

$$\boxed{[A_i^{(+)}(x), A_j^{(+)}(x')]_- = [A_i^{(-)}(x), A_j^{(-)}(x')]_- = 0} \qquad (23.8)$$

将 (23.3) 式、 (23.6) 式与 (20.3) 式、 (20.6) 式比较可知

$$\boxed{\Delta^{(\pm)}(x-x')|_{m=0}=D^{(\pm)}(x-x')} \tag{23.9}$$

2. $A_i(x)$ 的对易关系式与 $D(x)$ 函数

由 (23.4) 式与 (23.7) 式可知

$$\begin{aligned}[A_i(x),A_j(x')]_- &= (A_i^{(+)}(x)+A_i^{-}(x))(A_j^{(+)}(x')+A_j^{(-)}(x'))\\ &\quad -(A_j^{(+)}(x')+A_j^{(-)}(x'))(A_i^{(+)}(x)+A_i^{(-)}(x))\\ &=[A_i^{(+)}(x),A_j^{(-)}(x')]_-+[A_i^{(-)}(x),A_j^{(+)}(x')]_-\\ &=\mathrm{i}[D^{(+)}(x-x')+D^{(-)}(x-x')]_-\delta_{ij}\end{aligned}$$

设

$$\boxed{D(x-x')=D^{(+)}(x-x')+D^{(-)}(x-x')} \tag{23.10}$$

则

$$\boxed{[A_i(x),A_j(x')]_-=\mathrm{i}\delta_{ij}D(x-x')} \tag{23.11}$$

将 (23.10) 式与 (20.10) 式比较并利用 (23.9) 式可知

$$\boxed{\Delta(x-x')|_{m=0}=D(x-x')} \tag{23.12}$$

由 (20.13) 式、 (20.15) 式和 (23.12) 式可得

$$\boxed{\Box D(x-x')=0} \tag{23.13}$$

$$\boxed{D(x)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\sin\ kt}{k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})\quad k=|\boldsymbol{k}|} \tag{23.14}$$

3. $[A_i(x),A_j(x)]_+$ 的真空平均值与 $D^{(1)}(x)$ 函数

$$\begin{aligned}&<[A_i(x),A_j(x')]_+>_0=\Phi_0^\dagger[A_i(x),A_j(x')]_+\Phi_0\\ &=\Phi_0^\dagger A_i(x)A_j(x')\Phi_0+\Phi_0^\dagger A_j(x')A_i(x)\Phi_0\end{aligned} \tag{23.15}$$

因

$$\boxed{A_i^{(-)}(x)\Phi_0=0} \tag{23.16}$$

所以

$$\Phi_0^\dagger A_i^{(-)\dagger}(x)=0 \tag{23.17}$$

将 (22.20) 式代入上式可得

$$\boxed{\Phi_0^\dagger A_i^{(+)}(x)=0} \tag{23.18}$$

利用 (23.16) 式、 (23.18) 式和 (23.7) 式可证明

$$\begin{aligned}\Phi_0^\dagger A_i(x)A_j(x')\Phi_0 &= \Phi_0^\dagger A_i^{(-)}(x)A_j^{(+)}(x')\Phi_0 \\ &= \Phi_0^\dagger[A_i^{(-)}(x), A_j^{(+)}(x')]_-\Phi_0\end{aligned}$$

所以

$$\Phi_0^\dagger A_i(x)A_j(x')\Phi_0 = \mathrm{i}D^{(-)}(x-x')\delta_{ij} \tag{23.19}$$

同理可证明

$$\Phi_0^\dagger A_j(x')A_i(x)\Phi_0 = -\mathrm{i}D^{(+)}(x-x')\delta_{ij} \tag{23.20}$$

将 (23.19) 式和 (23.20) 式代入 (23.15) 式可得

$$< [A_i(x), A_j(x')_+] >_0 = \mathrm{i}[D^{(-)}(x-x') - D^{(+)}(x-x')]\delta_{ij} \tag{23.21}$$

设

$$\boxed{D^{(1)}(x-x') = \mathrm{i}[D^{(-)}(x-x') - D^{(+)}(x-x')]} \tag{23.22}$$

则

$$\boxed{< [A_i(x), A_j(x')]_+ >_0} = D^{(1)}(x-x')\delta_{ij} \tag{23.23}$$

将 (23.22) 式与 (20.23) 式比较并考虑 (23.9) 式可知

$$\boxed{\Delta^{(1)}(x-x')|_{m=0} = D^{(1)}(x-x')} \tag{23.24}$$

由 (23.24) 式和 (20.24′) 式、 (20.25) 式、 (20.26) 式可知

$$D^{(1)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}\delta(k_i^2)(\mathrm{d}k) \tag{23.25}$$

$$\boxed{\Box D^{(1)}(x-x') = 0} \tag{23.26}$$

$$\boxed{D^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\cos kt}{k}(\mathrm{d}\boldsymbol{k})} \tag{23.27}$$

习　题

试证明:

$$[F_{ij}(x), F_{kl}(x')]_- = \mathrm{i}\left(\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k} - \delta_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}\right.$$

$$\left.-\delta_{il}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k} + \delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}\right)D(x-x')$$

参 考 文 献

[1] Greiner W. Quantum Electrodynamics. Springer−verlag, 1997.

[2] Guapta S N. Proc. Phys. Soc., 1950, 63: 681: 1951, 64, 850.

§24 $\Lambda_{\pm}$ 和 $\Sigma_{\pm}$投影算符与旋量场函数的傅里叶表示

1. 正电子与负电子的状态旋量

从 §5 我们知道单位旋量 $u_i(\boldsymbol{p})$ 满足动量表象的 Dirac 方程式

$$(\mathrm{i}\gamma_i p_i + m)u_j(\boldsymbol{p}) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{24.1}$$

$u_i(\boldsymbol{p})$ 之间有正交的性质，即

$$u_j^{\dagger}(\boldsymbol{p})u_k(\boldsymbol{p}) = \delta_{jk} \tag{24.2}$$

$u_i(\boldsymbol{p})$ 是能量算符的本征旋量, 并且 $u_1(\boldsymbol{p})$、$u_2(\boldsymbol{p})$ 代表正能量状态, $u_3(\boldsymbol{p})$、$u_4(\boldsymbol{p})$ 代表负能量状态, 如设

$$p_4 = \mathrm{i}p_0 \tag{24.3}$$

则

$$\boxed{\begin{array}{c} u_1(\boldsymbol{p}), u_2(\boldsymbol{p}) \quad \text{代表} \quad p_0 = +E_p\text{的状态} \\ u_3(\boldsymbol{p}), u_4(\boldsymbol{p}) \quad \text{代表} \quad p_0 = -E_p\text{的状态} \\ E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \end{array}} \tag{24.4}$$

如果 $u_i(\boldsymbol{p})$ 是描写电子的状态旋量, 则 $u_3(\boldsymbol{p})$、$u_4(\boldsymbol{p})$ 是代表电子处于负能量状态的本征旋量, 严格地讲它们并不能直接描写正电子, 因为对于自由粒子来说, 负能量状态不是现实存在的.§5 中已经详细谈过, 自由的电子处于负能量状态, 就相当于它具有负的质量, 但是质量是不应该有负值的, 那么具有负能量的粒子, 而质量是正的, 就等于它的动量向量倒换了方向, 或是时间的进展倒换了方向. 因为动量的量纲为 ML/T, 故有

$$\frac{(-\mathrm{M})\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = -\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}} = \dim(-\boldsymbol{p}) \tag{24.5}$$

或

$$\frac{(-\mathrm{M})\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{ML}}{-\mathrm{T}}, \quad \mathrm{T}' = -\mathrm{T} \tag{24.5'}$$

所以

$$\boxed{\text{具有}(-E_p)\text{的电子} = \text{具有}(+m), (-\boldsymbol{p})\text{的正电子}} \tag{24.6}$$

因此描写正电子的旋量严格地说不直接是 $u_3(\boldsymbol{p})$、$u_4(\boldsymbol{p})$, 而应该是 $u_3(-\boldsymbol{p})$ 和 $u_4(-\boldsymbol{p})$. 为了以后方便起见, 我们设

$$\boxed{\begin{array}{l} u_3(-\boldsymbol{p}) \equiv v_1(\boldsymbol{p}) \\ u_4(-\boldsymbol{p}) \equiv v_2(\boldsymbol{p}) \end{array}} \tag{24.7}$$

则 $v_1(\boldsymbol{p})$、$v_2(\boldsymbol{p})$ 是真正描写现实的具有正质量的正电子的状态旋量,$v_1(\boldsymbol{p})$ 是描写自旋与运动方向相同的状态, 而 $v_2(\boldsymbol{p})$ 是描写自旋与运动方向相反的状态.

由 (24.1) 式知道电子的状态旋量 $u_1(\boldsymbol{p})$、$u_2(\boldsymbol{p})$ 应服从方程式

$$\boxed{\begin{array}{c}(\mathrm{i}\gamma_i p_i + m)u_j(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (j = 1,2) \\ p_0 = +E_p\end{array}} \tag{24.8}$$

而正电子的状态旋量 $U_1(\boldsymbol{p})$、$U_2(\boldsymbol{p})$ 所遵守的方程式, 可用以下的方法求得, 我们知道 $u_3(\boldsymbol{p})$、$u_4(\boldsymbol{p})$ 服从 Dirac 方程式

$$\left.\begin{array}{c}(\mathrm{i}\gamma_i p_i + m)u_j(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (j = 3,4) \\ p_0 = -E_p\end{array}\right\} \tag{24.9}$$

如将上式中的 $\boldsymbol{p}$ 换为 $(-\boldsymbol{p})$, 则

$$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + \gamma_4 E_p + m)u_j(-\boldsymbol{p}) = 0 \quad (j = 3,4) \tag{24.10}$$

如设

$$p_0 = +E_p$$

则 (24.10) 式可缩写为

$$(\mathrm{i}\gamma_i p_i - m)u_j(-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{24.11}$$

因此正电子的状态旋量 $U_1(\boldsymbol{p})$、$U_2(\boldsymbol{p})$ 应该遵守方程式

$$\boxed{\begin{array}{c}(\mathrm{i}\gamma_i p_i - m)v_j(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (j = 1,2) \\ p_0 = +E_p\end{array}} \tag{24.12}$$

由 (24.7) 式和 (5.48) 式可知, 当电子和正电子运动的方向为 z 轴时, 有

$$\begin{aligned} u_1(\boldsymbol{p}) &= N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p}{m+E_p} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{p}{m+E_p} \end{pmatrix} \\ v_1(\boldsymbol{p}) &= N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{m+E_p} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-p}{m+E_p} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.13}$$

$$N = \sqrt{\frac{m+E_p}{2E_p}} \tag{24.14}$$

$$E_p = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$$

$u_1(\boldsymbol{p})$、 $u_2(\boldsymbol{p})$、 $v_1(\boldsymbol{p})$, $v_2(\boldsymbol{p})$ 之间由 (24.2) 式或直接由 (24.13) 式可知具有正交的性质, 即

$$\boxed{\begin{aligned} &u_i^\dagger(\boldsymbol{p})u_j(\boldsymbol{p}) = \delta_{ij} \\ &v_i^\dagger(\boldsymbol{p})v_j(\boldsymbol{p}) = \delta_{ij} \\ &u_i^\dagger(\boldsymbol{p})v_j(\boldsymbol{p}) = v_i^\dagger(\boldsymbol{p})u_j(\boldsymbol{p}) = 0 \\ &i,j = 1,2 \end{aligned}} \tag{24.15}$$

(24.8) 式和 (24.12) 式可写成下列的形式:

$$(\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - \gamma_4 E_p + m)u_j = 0 \tag{24.16}$$

$$(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - \gamma_4 E_p - m)v_j = 0 \tag{24.17}$$

$$j = 1,2$$

(24.16) 式和 (24.17) 式的共轭方程式, 利用 γ_i 矩阵的厄米性质, 可写为

$$u_i^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - \gamma_4 E_p + m) = 0 \tag{24.18}$$

$$v_i^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - \gamma_4 E_p - m) = 0 \tag{24.19}$$

$$i = 1,2$$

将 (24.16) 式从左方乘以 $u_i^\dagger$, 将 (24.18) 式从右方乘以 u_j, 并将所得的两式相加可得

$$u_i^\dagger\gamma_4 E_p u_j = m u_i^\dagger u_j \tag{24.20}$$

将 (24.17) 式从左方乘以 $U_i^\dagger$, 将 (24.19) 式从右方乘以 U_j, 并将此两式相加可得

$$v_i^\dagger\gamma_4 E_p U_j = -m v_i^\dagger v_j \tag{24.21}$$

设

$$\overline{u}_i = u_i^\dagger\gamma_4, \quad \overline{v}_i = v_i^\dagger\gamma_4 \tag{24.22}$$

并考虑 (24.15) 式的正交关系, (24.20) 式和 (24.21) 式可变为

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{u}_i u_j &= \frac{m}{E_p}\delta_{ij} \\ \overline{v}_i v_j &= \frac{-m}{E_p}\delta_{ij} \end{aligned}} \tag{24.23}$$

同理可证明

$$\boxed{\overline{v}_i u_j = \overline{u} v_j = 0} \tag{24.24}$$

以后将知道这些公式在场论中具体计算问题时是很有用的.

2. 正负电子的投影标符 $\Lambda_\pm$

设 Λ_+ 与 Λ_- 为两个有以下定义的矩阵算符:

$$\Lambda_\pm(p) \equiv \frac{1}{2m}(m \pm \mathrm{i}\gamma_i p_i) \tag{24.25}$$

Λ_+ 和 Λ_- 有下面几个重要的性质. 首先由上式可知

$$\boxed{\Lambda_+ + \Lambda_- = 1} \tag{24.26}$$

并且

$$\Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = \frac{1}{4m^2}(m^2 + p_i^2)$$

所以

$$\boxed{\Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0} \tag{24.27}$$

将 (24.26) 式先后分别乘以 Λ_+ 和 Λ_-, 并利用 (24.27) 式可得

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda_+^2 &= \Lambda_+ \\ \Lambda_-^2 &= \Lambda_- \end{aligned}} \tag{24.28}$$

将 (24.8) 式和 (24.12) 式除以 $2m$, 并考虑 (24.25) 式可知

$$\boxed{\begin{aligned} &\Lambda_+ u_i = 0 \\ &\Lambda_- v_i = 0 \\ &i = 1,2 \end{aligned}} \tag{24.29}$$

因为

$$\Lambda_- u_j = \frac{1}{2m}(m - \mathrm{i}\gamma_i p_i) = \frac{1}{2m}[2m - (\mathrm{i}\gamma_i p_i + m)]u_j \tag{24.30}$$

$$\Lambda_+ v_j = \frac{1}{2m}(m + \mathrm{i}\gamma_i p_i) = \frac{1}{2m}[2m + (\mathrm{i}\gamma_i p_i - m)]v_j \tag{24.31}$$

将 (24.8) 式和 (24.12) 式代入上两式, 可求得 $\Lambda_\pm$ 算符的重要运算公式:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Lambda_- u_j = u_j \\ &\Lambda_+ v_j = v_j \\ &j = 1,2 \end{aligned}} \tag{24.32}$$

因为 u_1、u_2、v_1、v_2 之间有正交的性质, 因此任何旋量 $f(p)$ 都可以用这四个正交的单位旋量的展开式表示, 即

$$f(p)=\sum_{i=1}^{2}(a_iu_i+b_iv_i) \tag{24.33}$$

并且

$$a_i=u_i^{\dagger}f,\quad b_i=v_i^{\dagger}f, \tag{24.34}$$

将 (24.33) 式先后乘以 Λ_+、Λ_-, 并考虑 (24.29) 式和 (24.32) 式可知

$$\Lambda_+f(p)=\sum_{i=1}^{2}b_iv_i \tag{24.35}$$

$$\Lambda_-f(p)=\sum_{i=1}^{2}a_iu_i \tag{24.36}$$

(24.35) 式和 (24.36) 式说明了 Λ_+ 与 Λ_- 的重要性质, 就是将 Λ_+ 作用于任何状态的旋量上, 结果只剩下正电子的状态旋量部分; 如以 Λ_- 作用之, 则结果只剩下负电子的状态旋量部分. 因此, Λ_+ 和 Λ_- 可分别称为正负电子的投影算符, 即

$$\boxed{\begin{array}{l}\Lambda_+\text{——正电子的投影算符}\\ \Lambda_-\text{——负电子的投影算符}\end{array}} \tag{24.37}$$

设四行四列的矩阵

$$A\equiv(u_1,u_2,v_1,v_2) \tag{24.38}$$

因 u_i、v_i 各为四行单列的矩阵, 所以 A 是一个四行四列的矩阵, 则

$$A^{\dagger}=\begin{pmatrix}u_1^{\dagger}\\ u_2^{\dagger}\\ v_1^{\dagger}\\ v_2^{\dagger}\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\overline{A}=A\gamma_4=\begin{pmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \overline{v}_1\\ \overline{v}_2\end{pmatrix} \tag{24.39}$$

也是四行四列的矩阵. 利用 A 和 $A^{\dagger}$ 可将 (24.23) 式和 (24.24) 式表示为矩阵的形式, 即

$$\overline{A}A=\frac{m}{E_p}\gamma_4$$

或

$$A^{\dagger}\gamma_4A=\frac{m}{E_p}\gamma_4 \tag{24.40}$$

但由 (24.13) 式知道

$$A^{\dagger} = A \tag{24.41}$$

所以

$$A\gamma_4 A^{\dagger}\gamma_4 = \frac{m}{E_p} I$$

或

$$A\gamma_4 \overline{A} = \frac{m}{E_p} I \tag{24.42}$$

将 (24.38) 式和 (24.39) 式代入 (24.42) 式可得

$$u_1\overline{u}_1 + u_2\overline{u}_2 - v_1\overline{v}_1 - v_2\overline{v}_2 = \frac{m}{E_p} I \tag{24.43}$$

因此

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2}(u_i\overline{u}_i - v_i\overline{v}_i) = \frac{m}{E_p} I} \tag{24.44}$$

上式中 $u_i\overline{u}_i$ 和 $v_i\overline{v}_i$ 都是四行四列的矩阵, 其矩阵的每一元分别应为 $(u_i\overline{u}_i)_{\alpha\beta} = (u_i)_\alpha(\overline{u}_i)_\beta, (v_i\overline{v}_i)_{\alpha\beta} = (v_i)_\alpha(\overline{v}_i)_\beta$. 所以 (24.44) 式也可以用矩阵元素的形式表示, 即

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2}[(u_i)_\alpha(\overline{u}_i)_\beta - (v_i)_\alpha(\overline{v}_i)_\beta] = \frac{m}{E_p}\delta_{\alpha\beta}} \tag{24.44'}$$

将 (24.44) 式先后分别乘以 Λ_+ 与 Λ_-, 并考虑 (24.29) 式和 (24.32) 式可得

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} u_i\overline{u}_i &= \frac{m}{E_p}\Lambda_- \\ \sum_{i=1}^{2} v_i\overline{v}_i &= -\frac{m}{E_p}\Lambda_+\end{aligned}} \tag{24.45}$$

或将 (24.25) 式代入上式可得

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} u_i\overline{u}_i &= -\frac{1}{2E_p}(\mathrm{i}\gamma_i p_i - m) \\ \sum_{i=1}^{2} v_i\overline{v}_i &= -\frac{1}{2E_p}(\mathrm{i}\gamma_i p_i + m)\end{aligned}} \tag{24.46}$$

3. 自旋投影算符 $\Sigma_{\pm}$

设 Σ_+ 与 Σ_- 为两个矩阵算符, 它们的定义如下:

$$\boxed{\begin{gathered}\Sigma_{\pm}=\frac{1}{2}[1\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})]\\ \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\end{gathered}} \tag{24.47}$$

由 (5.43) 式知道

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_1&=+u_1\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u_2&=-u_2\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})v_1&=+v_1\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})v_2&=-v_2\end{aligned}\right\} \tag{24.48}$$

因此 u_1 和 v_1 是描写电子与正电子自旋与运动方向同向的状态旋量, 而 u_2 与 v_2 则是描写电子与正电子自旋与运动方向反向的状态旋量.

由 (24.47) 式和 (24.48) 式可知

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_-u_1=0,\quad \Sigma_+u_2=0\\ \Sigma_-v_1=0,\quad \Sigma_+v_2=0\end{aligned}} \tag{24.49}$$

并且

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_+u_1=u_1,\quad \Sigma_-u_2=u_2\\ \Sigma_+v_1=v_1,\quad \Sigma_-v_2=v_2\end{aligned}} \tag{24.50}$$

将 Σ_+ 与 Σ_- 先后分别作用于 (24.33) 并考虑 (24.49), (24.50) 可得

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_+f(p)=a_1u_1+b_1v_1\\ \Sigma_-f(p)=a_2u_2+b_2v_2\end{aligned}} \tag{24.51}$$

这就是说将 Σ_+ 作用于任意的状态的旋量上, 结果只剩下其自旋与运动方向同向的部分, 如用 Σ_- 作用之, 则其结果只剩下自旋与运动方向相反的部分. 故 $\Sigma_{\pm}$ 是正负电子的自旋投射标符.

$$\boxed{\begin{aligned}&\Sigma_+\text{——自旋与正负电子同向的投射标符}\\ &\Sigma_-\text{——自旋与正负电子反向的投射标符}\end{aligned}} \tag{24.52}$$

4. 旋量场函数的傅里叶表示

设旋量场函数 $\psi(X)$ 为 Dirac 方程式之解:

$$\left(r_i\frac{\partial}{\partial X_i}+m\right)\psi(X)=O \tag{24.53}$$

则 $\psi(X)$ 可以四维空间的傅里叶积分表示:

$$\psi(X)=\frac{1}{(2\pi)^3/2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}f(p)(\mathrm{d}p) \tag{24.54}$$

(24.54) 式积分前加一个常数 $1/[(2\pi)^3/2]$, 是为了把以后二次量子化的公式简化, 没有别的意思.

将 (24.54) 式代入 (24.53) 式则可得

$$(\mathrm{i}r_ip_i+m)f(p)=O \tag{24.55}$$

利用 (24.25) 式和 (17.21) 式可知 (24.55) 方程式最广义的解应为

$$f_{(p)}=\Lambda_-(p)\psi(p)\delta(p_i^2+m^2) \tag{24.56}$$

上式中的 $\psi(p)$ 为一任意 p 的旋量函数, (24.56) 为 (24.55) 的广义解是显而易见的. 因为

$$(\mathrm{i}r_ip_i+m)\Lambda_-(p)=\frac{1}{2m}(p_i^2+m^2) \tag{24.57}$$

将 (24.56) 式代入 (24.54) 式可得

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}\Lambda_-(p)\psi(p)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p) \tag{24.58}$$

因 $$\theta^+(p_0)+\theta^-(p_0)=1$$

故 (24.58) 式可分解为 $\psi^{(+)}(x)$ 和 $\psi^{(-)}(x)$, 则有

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x) \tag{24.59}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}\Lambda_-(p)\psi(p)\theta^-(p_0)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p) &(24.60)\\ \psi^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}\Lambda_-(p)\psi(p)\theta^+(p_0)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p) &(24.61)\end{aligned}}$$

将 (24.60) 式中的 p_i 换为 $(-p_i)$, 并考虑 $\theta^-(-p_0)=\theta^+(p_0)$ 和

$$\boxed{\Lambda_-(-p)=\Lambda_+(p)} \tag{24.62}$$

可得

$$\boxed{\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}\Lambda_+(p)\psi(-p)\theta^+(p_0)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p)} \tag{24.63}$$

(24.61) 式和 (24.63) 式两个积分中都包含了 $\theta^{+}(p_0)$, 因此它们只有在 $p_0>0$ 时, 也即只有当 $p_0=+E_p$ 时才不为零.

$\psi(-p)$ 和 $\psi(p)$ 为任意的旋量, 它们可用 (24.15) 式的四个正交的单位旋量展开:

$$\psi(-p)=\sum_{i=1}^{2}(a_i^{(+)}(p)u_i(\boldsymbol{p})+b_i^{(+)}(p)v_i(\boldsymbol{p})) \tag{24.64}$$

$$\psi(p)=\sum_{i=1}^{2}(a_i^{(-)}(p)u_i(\boldsymbol{p})+b_i^{(-)}(p)v_i(\boldsymbol{p})) \tag{24.65}$$

将 (24.64) 式和 (24.65) 式分别以 Λ_+ 和 Λ_- 作用之, 并考虑 (24.29) 式和 (24.32) 式可知

$$\boxed{\Lambda_+\psi(-p)=\sum_{i=1}^{2}b_i^{(+)}(p)v_i(\boldsymbol{p})\equiv\psi^{(+)}(p)} \tag{24.66}$$

$$\boxed{\Lambda_-\psi(p)=\sum_{i=1}^{2}a_i^{(-)}(p)u_i(\boldsymbol{p})\equiv\psi^{(-)}(p)} \tag{24.67}$$

将 (24.66) 式和 (24.67) 式分别代入 (24.63) 式和 (24.61) 式可得

$$\boxed{\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}\psi^{(+)}(p)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p)} \tag{24.68}$$

$$\boxed{\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i}\psi^{(-)}(p)\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p)} \tag{24.69}$$

或

$$\boxed{\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}b_i^{(+)}(p)v_i(\boldsymbol{p})\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p)} \tag{24.70}$$

$$\boxed{\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i}a_i^{(-)}(p)u_i(\boldsymbol{p})\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{d}p)} \tag{24.71}$$

这是旋量场函数的第一种傅里叶积分表示. 因为

$$\delta(p_i^2+m^2)=\frac{\delta(p_0+E_p)+\delta(p_0-E_p)}{2E_p} \tag{24.72}$$

$$(\mathrm{d}p)=(\mathrm{d}\boldsymbol{p})\mathrm{d}p_0$$

将 (24.72) 式代入 (24.68) 式和 (24.71) 式可得旋量场函数的三重傅里叶积分表示:

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})v_i(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{24.73}$$

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i}a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})u_i(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{24.74}$$

上式中

$$\left.\begin{aligned}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})&\equiv\frac{b_i^{(+)}(p)}{2E_p}\\ a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})&\equiv\frac{a_i^{(-)}(p)}{2E_p}\end{aligned}\right\} \tag{24.75}$$

如设

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{2}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})v_i(\boldsymbol{p})\\ \psi^{(-)}(\boldsymbol{p})&=\sum_{i=1}^{2}a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})u_i(\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{24.76}$$

则 (24.73) 式和 (24.74) 式可简化为

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{24.77}$$

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i}\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{24.78}$$

这是旋量场函数的第二种傅里叶表示.

利用 (18.41) 式并设

$$\left.\begin{aligned}b_{p_i}^{(+)}&=\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})\\ a_{p_i}^{(-)}&=\frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}}a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})\end{aligned}\right\} \tag{24.79}$$

可将 (24.73) 式和 (24.74) 式变为傅里叶级数的形式:

$$\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}b_{p_i}^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i} \tag{24.80}$$

$$\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}a_{p_i}^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i} \tag{24.81}$$

因此

$$\psi_{(x)}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}(a_{p_i}^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_ix_i}+b_{p_i}^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}) \tag{24.82}$$

这是旋量场函数的第三种傅里叶表示.

习　题

试证明:

(1) $\Sigma_+\Sigma_-=\Sigma_-\Sigma_+=0$

(2) $\Sigma_++\Sigma_-=0$

(3) $\Sigma_\pm^2=\Sigma_\pm$

(4) $[\Sigma_\pm,\Lambda_\pm]_-=0$

参 考 文 献

Jauch J M. The theory of photons and electrons. Springer, 1980: §3−8 and A2−3.

§25 旋量场的二次量子化

1. 旋量场的能量、动量、电荷和自旋的算符表示

旋量场的第二种傅里叶表示由 (24.73) 式和 (24.74) 式可知为

$$\boxed{\psi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})v_i(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p})} \tag{25.1}$$

$$\boxed{\psi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_i x_i}a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})u_i(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p})} \tag{25.2}$$

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x) \tag{25.3}$$

设

$$\boxed{\overset{\dagger}{\psi}{}^{(-)}\equiv(\psi^{(+)})^{\dagger},\quad \overset{\dagger}{\psi}{}^{(+)}\equiv(\psi^{(-)})^{\dagger}} \tag{25.4}$$

$$\boxed{\overset{\dagger}{a}{}_i^{(-)}\equiv a_i^{(+)},\quad \overset{\dagger}{b}{}_i^{(+)}=b_i^{(-)}} \tag{25.5}$$

并考虑 (24.22) 式, 则由 (25.1) 式和 (25.2) 式可得

$$\boxed{\overset{\dagger}{\psi}{}^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}b_i^{(-)}(\boldsymbol{p})v_i^{\dagger}(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p})} \tag{25.6}$$

$$\boxed{\overset{\dagger}{\psi}{}^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}a_i^{(+)}(\boldsymbol{p})u_i^{\dagger}(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p})} \tag{25.7}$$

$$\psi^{\dagger}(x)=\overset{\dagger}{\psi}{}^{(+)}(x)+\overset{\dagger}{\psi}{}^{(-)}(x) \tag{25.8}$$

由 (14.20) 式、(14.21) 式、(14.23) 式和 (14.25) 式可知旋量场的能量、动量、电荷与自旋各应为

$$H=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int\left[-\psi^{\dagger}(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}+\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial t}\psi(x)\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{25.9}$$

$$\boldsymbol{p}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int\left[\psi^{\dagger}(x)(\nabla\psi(x))-(\nabla\psi^{\dagger}(x))\psi(x)\right](\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{25.10}$$

$$Q=e^{-}\int\psi^{\dagger}(x)\psi(x)(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\quad(e^{-}=-e) \tag{25.11}$$

$$S_z=\frac{1}{2}\int\psi^{\dagger}(x)\sigma_3\psi(x)(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{25.12}$$

将 (25.1) 式、(25.2) 式、(25.6) 式和 (25.7) 式代入 (25.9)— (25.12) 式利用 $u_i(\boldsymbol{p})$ 和 $v_i(\boldsymbol{p})$ 的正交性质, 并考虑能量和动量的关系式

$$p_i^2 + m^2 = 0 \tag{25.13}$$

可得

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \int E_p [a_i^{(+)}(\boldsymbol{p}) a_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) - b_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})] (\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{25.14}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{2} \int \boldsymbol{p} [a_i^{(+)}(\boldsymbol{p}) a_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) - b_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})] (\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{25.15}$$

$$\hat{Q} = -e \sum_{i=1}^{2} \int [a_i^{(+)}(\boldsymbol{p}) a_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) + b_i^{(-)}(\boldsymbol{p}) b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})] (\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{25.16}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z = \frac{1}{2} \int & [a_1^{(+)}(\boldsymbol{p}) a_1^{(-)}(\boldsymbol{p}) - a_2^{(+)}(\boldsymbol{p}) a_2^{(-)}(\boldsymbol{p}) \\ & - b_1^{(-)}(\boldsymbol{p}) b_1^{(+)}(\boldsymbol{p}) + b_2^{(-)}(\boldsymbol{p}) b_2^{(+)}(\boldsymbol{p})] (\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{25.17}$$

如$\boldsymbol{p}$为不连续的, 则利用 (18.41) 式和 (24.79) 式可将 (25.14)— (25.17) 式变为

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{2} E_p [a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} - b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)}] \tag{25.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{p} [a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} - b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)}] \tag{25.19}$$

$$\hat{Q} = -e \sum_{\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{2} [a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} + b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)}] \tag{25.20}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z = & \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{p}} [a_{p_1}^{(+)} a_{p_1}^{(-)} - a_{p_2}^{(+)} a_{p_2}^{(-)} \\ & - b_{p_1}^{(-)} b_{p_1}^{(+)} + b_{p_2}^{(-)} b_{p_2}^{(+)}] \end{aligned} \tag{25.21}$$

在量子场论中 $a_{p_i}^{(\pm)}$ 和 $b_{p_i}^{(\pm)}$ 皆为二次量子化的算符.

2. $a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ 和 $b_i^{(\pm)}$ 间的反对易关系式和二次量子化算符的性质

在量子场论中, 旋量场函数 $\psi^{(\pm)}(x)$ 是随时间变化的二次量子化的算符, 因此它对时间变化的规律, 必须服从 Heisenberg 方程式:

$$\frac{\partial \psi^{(\pm)}(x)}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}, \psi^{(\pm)}(x)]_- \tag{25.22}$$

$$\frac{\partial \overset{\dagger}{\psi}{}^{(\pm)}(x)}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}, \overset{\dagger}{\psi}{}^{(\pm)}(x)]_- \tag{25.23}$$

将 (25.1) 式、(25.2) 式、(25.6) 式和 (25.7) 式代入以上两个方程式, 并利用 $u_i(p)$ 和 $v_i(p)$ 间的正交性质, 仿照 §19 的方法可证明, $a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$、 $b_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ 之间必须满足以下的反对易关系式:

$$\boxed{\begin{aligned}[a_i^{(-)}(\boldsymbol{p}), a_j^{(+)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \\ [b_i^{(-)}(\boldsymbol{p}), b_j^{(+)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\end{aligned}} \tag{25.24}$$

$$\boxed{\begin{aligned}[a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), a_j^{(\pm)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= 0 \\ [b_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= 0 \\ [a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= 0 \\ [a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{p}), b_j^{(\mp)}(\boldsymbol{p}')]_+ &= 0\end{aligned}} \tag{25.25}$$

如 $\boldsymbol{p}$ 为不连续的, 则用 (24.79) 式和 (19.36) 式可将 (25.24) 式和 (25.25) 式变为

$$\boxed{\begin{aligned}[a_{p_i}^{(-)}, a_{p_j'}^{(+)}]_+ &= \delta_{ij}\delta_{pp'} \\ [b_{p_i}^{(-)}, b_{p_j'}^{(+)}]_+ &= \delta_{ij}\delta_{pp'}\end{aligned}} \tag{25.26}$$

$$\boxed{\begin{aligned}[a_{p_i}^{(\pm)}, a_{p_j'}^{(\pm)}]_+ &= [b_{p_i}^{(\pm)}, b_{p_j'}^{(\pm)}]_+ = 0 \\ [a_{p_i}^{(\pm)}, b_{p_j'}^{(\pm)}]_+ &= [a_{p_i}^{(\pm)}, b_{p_j'}^{(\mp)}]_+ = 0\end{aligned}} \tag{25.27}$$

这里我们要注意, 旋量场的反对易关系式是与标量和向量场的对易关系式不同的, 它是正柏松括号 $[\quad]_+$ 而不是负柏松括 $[\quad]_-$.

为了满足 (25.26) 式和 (25.27) 式等反对易关系式, 我们必须假设

$$\boxed{\begin{aligned}a_{p_i}^{(+)}a_{p_i}^{(-)} &= \hat{N}_{p_i}^- \\ a_{p_i}^{(-)}a_{p_i}^{(+)} &= (1-\hat{N}_{p_i}^-) \\ b_{p_i}^{(+)}b_{p_i}^{(-)} &= \hat{N}_{p_i}^+ \\ b_{p_i}^{(-)}b_{p_i}^{(+)} &= (1-\hat{N}_{p_i}^+)\end{aligned}} \tag{25.28}$$

我们还须注意旋量场函数是描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子的. 根据 Pauli 原则可知, 具有一定动量状态 $\boldsymbol{p}$ 的粒子数不能大于 1, 即

$$\boxed{\hat{N}_{p_i}^{(\pm)} = 0\text{或}1} \tag{25.29}$$

因此具有一定动量 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的概率幅的矩阵表象仅有两种, 即

$$\text{当 } \hat{N}_{p_i}^{\pm} = 1 \text{ 时}, \quad \Phi_{N_{p_i}^{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25.30}$$

$$\text{当 } \hat{N}_{p_i}^{\pm} = 0 \text{ 时}, \quad \Phi_{N_{p_i}^{\pm}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi_0 \tag{25.31}$$

而 $a_{p_i}^{(\pm)}$ 和 $b_{p_i}^{(\pm)}$ 等算符的矩阵表象应为

$$\left.\begin{aligned} a_{p_i}^{(+)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{p_i}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ a_{p_i}^{(-)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{p_i}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{25.32}$$

由 (25.32) 式可知

$$\left.\begin{aligned} a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(+)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{25.33}$$

因此

$$\begin{aligned} a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(+)} + a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} &= 1 \\ b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)} + b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)} &= 1 \end{aligned}$$

所以 (25.32) 式 $a_{p_i}^{(\pm)}$ 和 $b_{p_i}^{(\pm)}$ 的矩阵是完全满足 (25.26) 式的反对易关系的. 将 (25.28) 式代入 (25.18)— (25.21) 式可得

$$H=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}E_p(N_{p_i}^{+}+N_{p_i}^{-}-1) \tag{25.34}$$

$$\boldsymbol{p}=\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{p}(N_{p_i}^{+}+N_{p_i}^{-}) \tag{25.35}$$

$$Q=e\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}(N_{p_i}^{+}-N_{p_i}^{-}-1) \tag{25.36}$$

$$S_z=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}}(N_{p_1}^{+}+N_{p_1}^{-}-N_{p_2}^{+}-N_{p_2}^{-}) \tag{25.37}$$

如果我们所研究的旋量场的对象是电子和正电子, 则由 (25.36) 式和 (25.37) 式可明显地知道

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}N_{p_i}^{+}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{的正电子数}\\&\sum_{i=1}^{2}N_{p_i}^{-}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{的负电子数}\end{aligned}\right\} \tag{25.38}$$

$$\begin{aligned}&N_{p_1}^{+}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{和自旋状态为}S_z=+\frac{1}{2}\text{的正电子数}\\&N_{p_2}^{+}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{和自旋状态为}S_z=-\frac{1}{2}\text{的正电子数}\\&N_{p_1}^{-}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{和自旋状态为}S_z=+\frac{1}{2}\text{的电子数}\\&N_{p_2}^{-}\text{是具有动量为}\boldsymbol{p}\text{和自旋状态为}S_z=-\frac{1}{2}\text{的电子数}\end{aligned} \tag{25.39}$$

由 (25.34) 式和 (25.35) 式可知旋量场的总能量或总动量是所有不同自旋状态的正电子和负电子的能量或动量的总和.

正、负电子的真空状态为 $N_{p_i}^{\pm}=0$ 的状态, 因此, 在真空状态时

$$\left.\begin{aligned}&H_0=-\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}E_p=-\infty\\&\boldsymbol{p}_0=0,\quad S_{z_0}=0\\&Q_0=e\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{i=1}^{2}(-1)=-\infty\end{aligned}\right\} \tag{25.40}$$

也就是说, 旋量场的真空状态是具有负无穷大的能量和负无穷大的电荷的. 这样的真空状态可解释为所有负能量状态都充满了电子的状态, 这恰巧是与 Dirac 的空穴理论完全一致的. Dirac 曾用这个旋量场二次量子化所得出的真空状态作为他的空穴理论的重要根据. 但是这样的根据我们应该认为是没有决定性作用的. 因为其他的场的真空状态的发散问题, 是无法用空穴理论加以解释的, 并且在 §5 中已经提到过, 根据现代的看法, 不用空穴理论是完全可以解释电子的负能状态和建立正电子的理论的. 因此, 旋量场真空状态的发散问题, 应该认为是与其他的场一样的, 是一个没有被实质解决的场论的基本问题.

3. 产生和消灭正负电子的算符

由 (25.26) 式可知

$$[a_{p_i}^{(-)}, a_{p_i}^{(+)}]_+ = 1 \tag{25.41}$$

$$[b_{p_i}^{(-)}, b_{p_i}^{(+)}]_+ = 1 \tag{25.42}$$

或

$$a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} = 1 - a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(+)} \tag{25.43}$$

$$b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)} = 1 - b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)} \tag{25.44}$$

将 (25.43) 式从右方乘以 $a_{p_i}^{(\pm)}$, 将 (25.44) 式从右方乘以 $b_{p_i}^{(\pm)}$, 则

$$a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(\pm)} = a_{p_i}^{(\pm)} - a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(\pm)} \tag{25.45}$$

$$b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(\pm)} = b_{p_i}^{(\pm)} - b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(\pm)} \tag{25.46}$$

利用 (25.26) 式的反对易关系式, 可将 (25.45) 式和 (25.46) 式变为

$$a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)} a_{p_i}^{(\pm)} = a_{p_i}^{(\pm)} (1 - a_{p_i}^{(+)} a_{p_i}^{(-)}) \tag{25.47}$$

$$b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)} b_{p_i}^{(\pm)} = b_{p_i}^{(\pm)} (1 - b_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(-)}) \tag{25.48}$$

或

$$\hat{N}_{p_i}^{-} a_{p_i}^{(\pm)} = a_{p_i}^{(\pm)} (1 - \hat{N}_{p_i}^{-}) \tag{25.49}$$

$$\hat{N}_{p_i}^{(+)} b_{p_i}^{(\pm)} = b_{p_i}^{(\pm)} (1 - \hat{N}_{p_i}^{+}) \tag{25.50}$$

将 (25.49) 式和 (25.50) 式分别作用在概率幅 $\Phi_{N_i^-}$ 和 $\Phi_{N_i^+}$, 并因

$$\hat{N}_{p_i}^{\pm} \Phi_{N_i^{\pm}} = N_{p_i}^{\pm} \Phi_{N_i^{\pm}}$$

则
$$\hat{N}_{p_i}^{-}(a_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i^-}) = (1-N_{p_i}^{-})(a_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i^-}) \tag{25.51}$$
$$\hat{N}_{p_i}^{+}(b_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i^+}) = (1-N_{p_i}^{+})(b_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i^+}) \tag{25.52}$$

由 (25.51) 式和 (25.52) 式可知 $a_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i^-}$ 是 $\hat{N}_{p_i}^{-}$ 的本征概率幅, $b_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_i}^{+}$ 是 $\hat{N}_{p_i}^{+}$ 的本征概率幅, 并且由 (25.51) 式和 (25.52) 式还可知:

(1) 当 $N_{p_i}^{\pm}=0$ 时,$N_{p_i}^{\pm}+1=1$, 所以

$$\left.\begin{aligned}\hat{N}_{p_i}^{-}(a_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^-}) &= (N_{p_i}^{-}+1)(a_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_{p_i}^-})\\ N_{p_i}^{+}(b_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^+}) &= (N_{p_i}^{+}+1)(b_{p_i}^{(\pm)}\Phi_{N_{p_i}^+})\end{aligned}\right\} \tag{25.53}$$

而由 (25.31) 式和 (25.32) 式知道

$$a_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^-} = b_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^-} = 0 \tag{25.54}$$

(2) 当 $N_{p_i}^{\pm}=1$ 时,$N_{p_i}^{\pm}-1=0$, 所以

$$\left.\begin{aligned}\hat{N}_{p_i}^{-}(a_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^-}) &= (N_{p_i}^{-}-1)(a_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^-})\\ N_{p_i}^{+}(b_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^+}) &= (N_{p_i}^{+}-1)(b_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^+})\end{aligned}\right\} \tag{25.55}$$

而由 (25.30) 式和 (25.32) 式知道

$$a_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^-} = b_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^+} = 0 \tag{25.56}$$

由 (25.53) 式和 (25.56) 式可知 $a_{p_i}^{(+)}$ 和 $b_{p_i}^{(+)}$ 分别为产生一个电子和正电子的算符, 而 $a_{p_i}^{(-)}$ 和 $b_{p_i}^{(-)}$ 分别为消灭电子和正电子的算符. 所以

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{N_{p_i}^-+1} &= a_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^-}\\ \Phi_{N_{p_i}^++1} &= b_{p_i}^{(+)}\Phi_{N_{p_i}^-}\end{aligned}\right\} \tag{25.57}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{N_{p_i}^--1} &= a_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^-}\\ \Phi_{N_{p_i}^+-1} &= b_{p_i}^{(-)}\Phi_{N_{p_i}^+}\end{aligned}\right\} \tag{25.58}$$

由 (25.54) 式和 (25.56) 式可知

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}N_{p_i}^{\pm}=1\text{时}, \quad \Phi_{N_{p_i}^{\pm}+1}=0\\ &\text{当}N_{p_i}^{\pm}=0\text{时}, \quad \Phi_{N_{p_i}^{\pm}-1}=0\end{aligned}\right\} \tag{25.59}$$

这保证了 Pauli 原则的成立, 即具有一定动量和自旋状态的电子和正电子的数目不能大于1, 如果大于1, 则其概率幅就会等于零, 也就是说没有这样的状态存在, 同时 (25.59) 式的第二式保证了粒子数目不可能为负值.

因此, 旋量场的二次量子化的算符的性质, 可以总结如下:

$$\left.\begin{matrix} a^{(+)}_{p_1} \\ a^{(+)}_{p_2} \end{matrix}\right\rangle \text{是产生一个} S_z = \left\langle\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{状态的电子的算符}$$

$$\left.\begin{matrix} a^{(-)}_{p_1} \\ a^{(-)}_{p_2} \end{matrix}\right\rangle \text{是消灭一个} S_z = \left\langle\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{状态的电子的算符}$$

$$\left.\begin{matrix} b^{(+)}_{p_1} \\ b^{(+)}_{p_2} \end{matrix}\right\rangle \text{是产生一个} S_z = \left\langle\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{状态的正电子的算符}$$

$$\left.\begin{matrix} b^{(-)}_{p_1} \\ b^{(-)}_{p_2} \end{matrix}\right\rangle \text{是消灭一个} S_z = \left\langle\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \text{状态的正电子的算符}$$

并且同一状态的正负电子的数目 $N^{\pm}_{p_i} \leqslant 1$

习　题

试证明: (25.14) 式、 (25.16) 式、 (25.17) 式.

参 考 文 献

Greiner W. Quantum Electrodynamics. Springer-verlag, 1997.

§26 旋量场函数$\psi(x)$和$\overline{\psi}(x)$的反对易关系式与$S(x)$、$S^{(1)}(x)$两矩阵函数

1. $\psi_\alpha^{(\pm)}(x)$ 和 $\overline{\psi}_\beta^{(\pm)}(x)$ 的反对易关系式

从 §25 我们知道

$$\psi_\alpha^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}b_i^{(+)}(\boldsymbol{p})(v_i(\boldsymbol{p}))_\alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{26.1}$$

$$\psi_\alpha^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}a_i^{(-)}(\boldsymbol{p})(u_i(\boldsymbol{p}))_\alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{26.2}$$

$\psi_\alpha^{(\pm)}(x)$ 代表旋量矩阵 $\psi^{(\pm)}(x)$ 的第 α 个元素, $(v_i(\boldsymbol{p}))_\alpha$ 和 $(u_i(\boldsymbol{p}))_\alpha$ 各代表单位旋量矩阵 $v_i(\boldsymbol{p})$ 和 $u_i(\boldsymbol{p})$ 的第 α 个元素, α=1, 2, 3, 4.

$$\overline{\psi}_\alpha^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}a_i^{(+)}(\boldsymbol{p})(\overline{u}_i(\boldsymbol{p}))_\alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{26.3}$$

$$\overline{\psi}_\alpha^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}b^{(-)}(\boldsymbol{p})(\overline{v}_i(\boldsymbol{p}))_\alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{26.4}$$

$$\overline{\psi}_\alpha^{(\pm)}(x)=(\overset{\dagger}{\psi}{}^{(\pm)}(x)\gamma_4)_\alpha \tag{26.5}$$

由 (26.1)— (26.4) 式并利用 (24.46) 式可得以下各种 $\psi_\alpha^{(\pm)}(x)$ 和 $\overline{\psi}_\beta^{(\pm)}(x)$ 的反对易关系式:

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_ix_i-p_i'x_i')}\times$$

$$(u_l(\boldsymbol{p}))_\alpha(\overline{u}_m(\boldsymbol{p}'))_\beta\cdot[a_l^{(-)}(\boldsymbol{p}),a_m^{(+)}(\boldsymbol{p}')]_+(\mathrm{d}\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}')$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_ix_i-p_i'x_i')}(u_l(\boldsymbol{p}))_\alpha(\overline{u}_m(\boldsymbol{p}')_\beta\delta_{lm}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')(\mathrm{d}\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}')\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{p_0>0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i(x_i-x_i')}\frac{(\mathrm{i}\gamma_ip_i-m)_{\alpha\beta}}{2E_p}(\mathrm{d}\boldsymbol{p})\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i(x_i-x_i')}\delta(p_i^2+m^2)\theta^+(p_0)(\mathrm{i}\gamma_ip_i-m)_{\alpha\beta}(\mathrm{d}\boldsymbol{p})\\
&=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)_{\alpha\beta}\frac{1}{\mathrm{i}}\Delta^{(-)}(x-x')
\end{aligned} \tag{26.6}$$

所以

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)_{\alpha\beta}\frac{1}{\mathrm{i}}\Delta^{(-)}(x-x') \tag{26.7}$$

同理可证明

$$[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_+=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)_{\alpha\beta}\frac{1}{\mathrm{i}}\Delta^{(+)}(x-x') \tag{26.8}$$

设

$$\boxed{S^{(+)}(x)\equiv\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{(+)}(x)} \tag{26.9}$$

$$\boxed{S^{(-)}(x)\equiv\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{(-)}(x)} \tag{26.10}$$

则 (26.7) 式和 (26.8) 式可变为

$$\boxed{[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+=\frac{1}{\mathrm{i}}S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')} \tag{26.11}$$

$$\boxed{[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_+=\frac{1}{\mathrm{i}}S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')} \tag{26.12}$$

除此以外, 利用 (26.1)— (26.4) 式还可以证明

$$\boxed{\begin{aligned}&[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+=0 &(26.13)\\&[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_+=0 &(26.14)\\&[\psi_\alpha^{(\pm)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')]_+=0 &(26.15)\\&[\overline{\psi}_\alpha^{(\pm)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')]_+=0 &(26.16)\end{aligned}}$$

(26.15) 式和 (26.16) 式中的 (±) 符号对于任何一种组合皆可.

2. $\psi_\alpha(x)$ 和 $\overline{\psi}_\beta(x)$ 的反对易关系式和 $S(x)$ 矩阵函数

利用 (26.11)— (26.16) 式可求得 $\psi_\alpha(x)$ 与 $\overline{\psi}_\beta(x)$ 的反对易关系式:

$$\begin{aligned}[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_+&=(\psi_\alpha^{(+)}(x)+\psi_\alpha^{(-)}(x))(\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')+\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x'))+\\&\quad(\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')+\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x'))(\psi_\alpha^{(+)}(x)+\psi_\alpha^{(-)}(x))\\&=[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_++[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}[S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')+S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')]\end{aligned}$$

设
$$\boxed{S(x-x')=S^{(+)}(x-x')+S^{(-)}(x-x')} \tag{26.17}$$

则
$$\boxed{[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_+=\frac{1}{\mathrm{i}}S_{\alpha\beta}(x-x')} \tag{26.18}$$

同理可证明
$$\boxed{\begin{aligned}&[\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x')]_+=0\\&[\overline{\psi}_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_+=0\end{aligned}} \tag{26.19}$$

将 (26.9) 式和 (26.10) 式代入 (26.17) 式可得
$$S(x)=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)(\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x)) \tag{26.20}$$

因此
$$\boxed{S(x)=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta(x)} \tag{26.21}$$

由 (26.21) 式和 (20.13) 式可知
$$\begin{aligned}\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m\right)S(x)&=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m\right)\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta(x)\\&=(\Box-m^2)\Delta(x)=0\end{aligned} \tag{26.22}$$

所以 $S(x)$ 是满足 Dirac 方程式的, 即
$$\boxed{\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m\right)S(x)=0} \tag{26.23}$$

将 (20.12) 式代入 (26.21) 式可得
$$\boxed{S(x)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}\delta(p_i^2+m^2)(\mathrm{i}\gamma_ip_i-m)\varepsilon(p_0)(\mathrm{d}p)} \tag{26.24}$$

3. $[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_-$ 的真空平均值和 $S^{(1)}(x)$ 矩阵函数

因为
$$\boxed{\psi^{(-)}(x)\Phi_0=0} \tag{26.25}$$

所以
$$\Phi_0^\dagger(\psi^{(-)}(x))^\dagger=\Phi_0^\dagger\overset{\dagger}{\psi}{}^{(+)}(x)=0 \tag{26.26}$$

也即
$$\boxed{\Phi_0^\dagger\overline{\psi}^{(+)}(x)=0}$$

利用 (26.25) 式和 (26.26) 式可证明:
$$<[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_->_0=<\psi_\alpha^{(-)}(x)\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')>_0-<\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')\psi_\alpha^{(+)}(x)>_0 \tag{26.27}$$

但因

$$\boxed{\begin{aligned}<\psi_\alpha^{(-)}(x)\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')>_0 &=<[\psi_\alpha^{(-)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(+)}(x')]_+>_0=\frac{1}{\mathrm{i}}S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')\\ <\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')\psi_\alpha^{(+)}(x)>_0 &=<[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi}_\beta^{(-)}(x')]_+>_0=\frac{1}{\mathrm{i}}S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')\end{aligned}} \tag{26.28}$$

将 (26.28) 式代入 (26.27) 式可得

$$<[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]_->_0=-\mathrm{i}[S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x')-S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x')]$$

设

$$\boxed{S^{(1)}(x-x')=\mathrm{i}[S^{(-)}(x-x')-S^{(+)}(x-x')]} \tag{26.29}$$

则

$$\boxed{<[\psi_\alpha(x),\overline{\psi}_\beta(x')]>_0=-S_{\alpha\beta}^{(1)}(x-x')}$$

将 (26.9) 式和 (26.10) 式代入 (26.29) 式可知

$$S^{(1)}(x)=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\mathrm{i}[\Delta^{(-)}(x)-\Delta^{(+)}(x)] \tag{26.30}$$

因此

$$\boxed{S^{(1)}(x)=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{(1)}(x)} \tag{26.31}$$

用与证明 (26.23) 式同样的方法可证明:

$$\boxed{\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m\right)S^{(1)}(x)=0} \tag{26.32}$$

所以, $S^{(1)}(x)$ 也是满足 Dirac 方程式的.

习　题

证明 (26.12) 式和 (26.13) 式.

参 考 文 献

巴戈留保夫, 等. 量子场论导论（俄文）. 1954: §12.

§27 电荷共轭变换

电荷共轭变换是一种场函数的变换, 它使得这种场的电流密度或场的电荷变一个正负号, 而其他所有的物理量, 如能量、动量、角动量等保持不变. 我们已经讲过的带电质点的场, 仅有复标量场和旋量场, 因此这一节我们就谈谈这两种场的电荷共轭变换.

1. 复标量场的电荷共轭变换

复标量场的四维空间的电流密度由 (14.14) 式可知为

$$j_k = \mathrm{i}e\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\varphi - \varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \tag{27.1}$$

因此, 显而易见复标量场的电荷共轭变换应为

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = \overset{*}{\varphi}(x) \\ \overset{*}{\varphi}(x) \longrightarrow \overset{*}{\varphi}(x) = \varphi(x)\end{array}} \tag{27.2}$$

将 (27.2) 式代入 (27.1) 式可知

$$\begin{aligned} j'_k &= \mathrm{i}e\left(\frac{\partial\overset{*}{\varphi}'}{\partial x_k}\varphi' - \overset{*}{\varphi}'\frac{\partial\varphi'}{\partial x_k}\right) \\ &= \mathrm{i}e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\overset{*}{\varphi} - \varphi\frac{\partial\overset{*}{\varphi}}{\partial x_k}\right) \end{aligned} \tag{27.3}$$

即

$$\boxed{j'_k = -j_k} \tag{27.4}$$

同时由 (14.12) 式、 (14.13) 式可知复标量场的能量和动量是对于 (27.2) 式的变换不变的, 因此 (27.2) 式的变换是满足我们的电荷共轭变换的要求的.

由 (18.42) 式、 (21.1) 式和 (21.3) 式我们知道

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}[\varphi_k^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i} + \varphi_k^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}] \tag{27.5}$$

$$\overset{*}{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}[\overset{*}{\varphi}_k^{(+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ix_i} + \overset{*}{\varphi}_k^{(-)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_ix_i}] \tag{27.6}$$

所以 (27.2) 式的复标量场的电荷共轭变换, 相当于以下四种产生和消灭粒子算

符的变换:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_k'^{(+)} &= \overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)}\\ \varphi_k'^{(-)} &= \overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)}\\ \overset{*}{\varphi}{}_k'^{(+)} &= \varphi_k^{(+)}\\ \overset{*}{\varphi}{}_k'^{(-)} &= \varphi_k^{(-)}\end{aligned}} \tag{27.7}$$

即经过电荷共轭变换以后:

产生和消灭正电荷的算符变成产生和消灭负电荷的算符;

产生和消灭负电荷的算符变成产生和消灭正电荷的算符.

利用 (27.7) 式和 (21.21) 式还可以得到电荷共轭变换的重要结论:

$$N_k'^{+} = \overset{*}{\varphi}{}_k'^{(+)}\varphi_k'^{(-)} = \varphi_k^{(+)}\overset{*}{\varphi}{}_k^{(-)} = N_k^{-} \tag{27.8}$$

$$N_k'^{-} = \varphi_k'^{(+)}\overset{*}{\varphi}{}_k'^{(-)} = \overset{*}{\varphi}{}_k^{(+)}\varphi_k^{(-)} = N_k^{+} \tag{27.9}$$

即

$$\boxed{\begin{aligned}N_k'^{+} &= N_k^{-}\\ N_k'^{-} &= N_k^{+}\end{aligned}} \tag{27.10}$$

2. 旋量场的电荷共轭变换

为了使旋量场的电流密度

$$j_k = \mathrm{i}e\overline{\psi}\gamma_k\psi \tag{27.11}$$

经过电荷共轭变换后变一个正负号, 而其他的物理量保持不变, 我们假设旋量场的场函数具有以下形式的电荷共轭变换:

$$\boxed{\begin{aligned}\psi'(x) &= C[\overline{\psi}(x)]^{\mathrm{T}}\\ \overline{\psi}'(x) &= [C^{-1}\psi(x)]^{\mathrm{T}}\end{aligned}} \tag{27.12}$$

其中 A^{T} 代表矩阵 A 的转置矩阵.(27.12) 式中的 C 为电荷共轭变换矩阵, 它必须适合以下的三个条件:

$$C^{-1}\gamma_i C = -(\gamma_i)^{\mathrm{T}} \tag{27.13}$$

因γ_i为厄米矩阵, $(\gamma_i)^{\mathrm{T}}=(\gamma_i)^{*}$

$$C^{\mathrm{T}} = -C \tag{27.14}$$

C是一个反对称的矩阵

$$C^{\dagger}C = 1 \tag{27.15}$$

C是一个么正变换

将 (27.12) 式代入 (27.11) 式, 利用 (27.13)— (27.15) 式并考虑 $\overline{\psi}$ 与 ψ 的反对易关系可知

$$\begin{aligned} j'_k &= \mathrm{i}e\overline{\psi}'\gamma_k\psi' \\ &= \mathrm{i}e(C^{-1}\psi)^{\mathrm{T}}\gamma_k C(\overline{\psi})^{\mathrm{T}} \\ &= \mathrm{i}e\psi^{\mathrm{T}}(C^{-1})^{\mathrm{T}}\gamma_k C(\overline{\psi})^{\mathrm{T}} \\ &= -\mathrm{i}e\psi^{\mathrm{T}}(C^{-1})^{\mathrm{T}}\gamma_k C^{\mathrm{T}}(\overline{\psi})^{\mathrm{T}} \\ &= \mathrm{i}e[\overline{\psi}C(\gamma_k)^{\mathrm{T}}C^{-1}\psi]^{\mathrm{T}} = -\mathrm{i}e\overline{\psi}\gamma_k\psi \end{aligned} \tag{27.16}$$

因此

$$j'_k = -j_k$$

利用 (27.13)— (27.15) 式还可证明变换 (27.12) 式是使旋量场的能量、动量和角动量不变的. 因此 (27.12) 式的变换和 (27.13)— (27.15) 式的条件是满足电荷共轭变换的要求的.

现在我们来研究 Dirac 方程式

$$\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + m\psi = 0 \tag{27.17}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_i}\gamma_i - m\overline{\psi} = 0 \tag{27.18}$$

对于电荷共轭变换后的形式.

易知 (27.12) 式的逆变换应为

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= C[\overline{\psi}'(x)]^{\mathrm{T}} \qquad (27.19) \\ \overline{\psi}(x) &= [C^{-1}\psi'(x)]^{\mathrm{T}} \qquad (27.20) \end{aligned}}$$

将 (27.19) 式代入 (27.17) 式可知

$$\gamma_i C\frac{\partial(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}}}{\partial x_i} + mC(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}} = 0$$

$$C^{-1}\gamma_i C\frac{\partial(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}}}{\partial x_i} + m(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}} = 0 \tag{27.21}$$

由 (27.13) 式可将上式变为

$$(\gamma_i)^{\mathrm{T}}\frac{\partial(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}}}{\partial x_i} - m(\overline{\psi}')^{\mathrm{T}} = 0$$

或

$$\boxed{\frac{\partial\overline{\psi}'}{\partial x_i}\gamma_i - m\overline{\psi}' = 0} \tag{27.22}$$

同理由 (27.20) 式, 可将 (27.18) 式变为

$$\boxed{\gamma_i \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} + m\psi' = 0} \tag{27.23}$$

因此电荷共轭变换的结果是将 Dirac 方程式变为其对应的共轭方程式.

利用 (26.1)— (26.4) 式和 (27.12) 式可以得到旋量场电荷共轭变换的重要关系式:

$$\boxed{\begin{aligned} v_i' &= C(\overline{u}_i)^{\mathrm{T}} \\ u_i' &= C(\overline{v}_i)^{\mathrm{T}} \\ \overline{v}_i' &= (C^{-1}u_i)^{\mathrm{T}} \\ \overline{u}_i' &= (C^{-1}v_i)^{\mathrm{T}} \end{aligned}} \tag{27.24}$$

和

$$\boxed{\begin{aligned} b_i'^{(+)} &= a_i^{(+)} \\ b_i'^{(-)} &= a_i^{(-)} \\ a_i'^{(+)} &= b_i^{(+)} \\ a_i'^{(-)} &= b_i^{(-)} \end{aligned}} \tag{27.25}$$

利用 (27.25) 式和 (25.28) 式可证明

$$\boxed{\begin{aligned} N'^{+}_{p_i} &= N^{-}_{p_i} \\ N'^{-}_{p_i} &= N^{+}_{p_i} \end{aligned}} \tag{27.26}$$

由此可知电荷共轭变换是将所有的粒子变为反粒子. 这个说法可以看成电荷共轭变换的更广义的定义.

这里我们还应该知道, 对于中性粒子也可以有电荷共轭变换的. 中性粒子一般可分为两种, 第一种中性粒子如 π^0 介子和光子 γ. 它们的反粒子和粒子本身是没有区别的. 因此, 经过电荷共轭变换以后仍为粒子的本身. 第二种中性粒子如中子 n 和中微子 ν, 它们的反粒子是和粒子有区别的, 经过电荷共轭变换以后这种中性粒子就变为中性的反粒子. 关于中性粒子的电荷共轭变换的详细情况, 可参考 Gell-mann 和 Pais 的文章, 这里不详谈.

3. 电荷共轭变换矩阵 C 的具体形式

满足 (27.13)— (27.15) 式三个条件的电荷共轭变换矩阵 C 的具体形式

应为

$$\boxed{C=\gamma_4\gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}} \tag{27.27}$$

由 (27.27) 式直接可知, 其所定义的 C 矩阵满足条件 (27.14) 式, 即

$$C^{\mathrm{T}}=-C$$

由 γ_i 是厄米矩阵的性质可知

$$C^{\dagger}=(\gamma_4\gamma_2)^{\dagger}=\gamma_2\gamma_4$$

因此

$$C^{\dagger}C=1$$

所以 (27.27) 式所定义的 C 矩阵是满足条件 (27.15) 式的.

因从 (4.33) 式 γ_i 矩阵的具体形式知

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_1&=-(\gamma_1)^{\mathrm{T}}\\\gamma_2&=(\gamma_2)^{\mathrm{T}}\\\gamma_3&=-(\gamma_3)^{\mathrm{T}}\\\gamma_4&=(\gamma_4)^{\mathrm{T}}\end{aligned}} \tag{27.28}$$

由 (27.28) 式可证明

$$C^{-1}\gamma_iC=-(\gamma_i)^{\mathrm{T}}$$

$$C^{-1}=C^{\dagger}=\gamma_2\gamma_4$$

因此 (27.27) 式所定义的 C 矩阵也是满足条件 (27.13) 式的.

习　题

证明 (27.2) 式和 (27.12) 式的电荷共轭变换分别使标量场和旋量场的能量和动量不变.

参考文献

[1] Pauli W. Rev. of Modern Phys., 1941, 13: 203.

[2] Schwinger. J. Phys. Rev., 1948, 74 (10): 1439.

[3] Gell-mann M, Pais A. Phys. Rev., 1955, 97: 1387.

§28 场方程式的格林函数与 Feynman 函数

1. 线性偏微分方程的广义格林函数

设
$$L = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots \tag{28.1}$$

为一线性常系数的偏微分算符.

线性偏微分方程

$$L\varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0 \tag{28.2}$$

称为齐次线性偏微分方程, 其解以 $G_0(x_1, \cdots, x_n)$ 表示, 即

$$LG_0 = 0 \tag{28.3}$$

方程式
$$L\varphi(x_1, \cdots, x_n) = -\rho(x_1, \cdots, x_n) \tag{28.4}$$

称为非齐次线性偏微分方程, $\rho(x_1, \cdots, x_n)$ 称为外源函数.

方程式 (28.4) 的特解可表示为以下的形式:

$$\varphi(x_i) = -L^{-1}\rho(x_i) \tag{28.5}$$

L^{-1} 为 L 的逆算符.

利用 δ 函数的性质, 外源函数 $\rho(x_i)$ 可以用下列的形式表示:

$$\rho(x_i) = \int \rho(x_i')\delta(x_i' - x_i)(\mathrm{d}x_i') \tag{28.6}$$
$$(\mathrm{d}x_i') = \mathrm{d}x_1' \cdots \mathrm{d}x_n'$$

将 (28.6) 式代入 (28.5) 式可得

$$\varphi(x_i) = -\int \rho(x_i')L^{-1}\delta(x_i' - x_i)(\mathrm{d}x_i') \tag{28.7}$$

设
$$\boxed{G(x_i', x_i) \equiv -L^{-1}\delta(x_i' - x_i)} \tag{28.8}$$

则

$$\boxed{\varphi(x_i) = \int \rho(x_i')G(x_i', x_i)(\mathrm{d}x_i')} \tag{28.9}$$

(28.8) 式所定义的函数 $G(x_i', x_i)$ 称为方程式 (28.4) 的格林函数, 由 (28.9) 式可知, 只要我们知道了格林函数的具体形式, 我们就可求得方程式 (28.4) 式的特解.

将 (28.8) 式从左方以 L 乘之, 则可得

$$\boxed{LG(x_i', x_i) = -\delta(x_i' - x_i)} \tag{28.10}$$

这是格林函数所必须满足的方程式, 但这个方程式的解并不是单一的, 因为任何下面形式的函数, 都可以是方程式 (28.10) 的解:

$$G' = G + \alpha G_0 \tag{28.11}$$

此处 α 为任意常数, G_0 为 $LG_0 = 0$ 的解.

从 (17.9) 式知道

$$\delta(x_i' - x_i) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i' - x_i)} (\mathrm{d}k_i) \quad (\mathrm{d}k_i) = \mathrm{d}k_1 \cdots \mathrm{d}k_n \tag{28.12}$$

将 (28.12) 式代入 (28.7) 式可知线性偏微分方程的广义格林函数应有以下的具体的形式:

$$G(x_i' - x_i) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int L^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i' - x_i)} (\mathrm{d}k_i)$$

或

$$\boxed{G(x_i' - x_i) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i' - x_i)} (\mathrm{d}k_i)}{a_0 + \mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} k_i a_i - \sum_{i,j=1}^{n} k_i k_j a_{ij} + \cdots}} \tag{28.13}$$

此外, 格林函数还可以用算符 L 的本征函数表示.

设

$$L\varphi_n(x_i) = \lambda_n \varphi_n(x_i) \tag{28.14}$$

$\varphi_n(x_i)$ 为算符 L 的本征函数, λ_n 为其对应的本征值. 因为本征函数有正交的性质, 由 (17.18) 式可知 δ 函数可以用此正交函数表示:

$$\delta(x_i' - x_i) = \sum \varphi_n^*(x_i') \varphi_n(x_i) \tag{28.15}$$

将 (28.15) 式代入 (28.8) 式并考虑 (28.14) 式可知

$$\boxed{G(x_i' - x_i) = \sum \frac{\varphi_n^*(x_i') \varphi_n(x_i)}{\lambda_n}} \tag{28.16}$$

2. 标量场方程式的格林函数 $\Delta^{\mathrm{G}}(x)$

自由标量场的方程式由 (14.3) 式可知为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}-m^2\varphi=0 \tag{28.17}$$

具有外源函数的标量场方程式为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}-m^2\varphi=-\rho(x) \tag{28.18}$$

由 (28.1) 式和 (28.2) 式知道对于标量场方程式, 算符 L 的具体形式为

$$L=-m^2+\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{28.19}$$

将 (28.19) 式与 (28.1) 式比较可知

$$a_0=-m^2,\quad a_i=0,\quad a_{ij}=\delta_{ij} \tag{28.20}$$

把 (28.20) 式代入 (28.13) 式可知标量场方程式的格林函数应为

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{G}}(x'-x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i'-x_i)}}{k_i^2+m^2}(\mathrm{d}k)} \tag{28.21}$$

由 (28.10) 式知道 $\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')$ 为下列方程式的特解:

$$\boxed{(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')=-\delta(x-x')} \tag{28.22}$$

设

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{G}}(k)=\frac{1}{k^2+m^2}} \tag{28.23}$$

则

$$\Delta^{\mathrm{G}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\Delta^{\mathrm{G}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}(\mathrm{d}k) \tag{28.24}$$

并且由 (28.23) 式可得

$$\boxed{(k_i^2+m^2)\Delta^{\mathrm{G}}(k)=1} \tag{28.25}$$

由 (28.9) 式可知方程式 (28.18) 的解应为

$$\boxed{\varphi(x)=\int\rho(x')\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')(\mathrm{d}x')} \tag{28.26}$$

3. 电磁场方程式的格林函数 $D^{\mathrm{G}}(x)$

电磁场即光子的质量为零, 因此, 非齐次电磁场方程式

$$\Box A_i = -\rho_i(x) \tag{28.27}$$

的格林函数 $D^{\mathrm{G}}(x-x')$, 由 (28.18) 式和 (28.21) 式可知应为

$$\boxed{D^{\mathrm{G}}(x-x') = \Delta^{\mathrm{G}}(x-x')|_{m=0}} \tag{28.28}$$

或

$$\boxed{D^{\mathrm{G}}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i-x_i')}}{k_i^2}(\mathrm{d}k)} \tag{28.29}$$

$D^{\mathrm{G}}(x-x')$为方程式

$$\Box D^{\mathrm{G}}(x-x') = -\delta(x-x') \tag{28.30}$$

的特解. 设

$$\boxed{D^{\mathrm{G}}(k) = \frac{1}{k_i^2}} \tag{28.31}$$

则

$$D^{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int D^{\mathrm{G}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i}(\mathrm{d}k) \tag{28.32}$$

并且

$$\boxed{k_i^2 D^{\mathrm{G}}(k) = 1} \tag{28.33}$$

方程式 (28.27) 的解, 由 (28.9) 式可知应为

$$\boxed{A_i(x) = \int \rho_i(x')D^{\mathrm{G}}(x-x')(\mathrm{d}x')} \tag{28.34}$$

4. 旋量场方程式的格林函数

非齐次旋量场方程式

$$\gamma_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + m\psi = -\rho(x) \tag{28.35}$$

的格林函数 $S^{\mathrm{G}}(x-x')$, 由 (28.10) 式可知, 应为方程式

$$\gamma_i\frac{\partial S^{\mathrm{G}}}{\partial x_i} + mS^{\mathrm{G}} = -\delta(x-x') \tag{28.36}$$

的特解.

不难知 $S^{\mathrm{G}}(x-x')$ 的具体形式应为

$$\boxed{S^{\mathrm{G}}(x-x')=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')} \tag{28.37}$$

因将 (28.37) 式代入 (28.36) 式的左方并考虑 (28.22) 式可知

$$\begin{aligned}&\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+m\right)\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')\\=&(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{G}}(x-x')=-\delta(x-x')\end{aligned} \tag{28.38}$$

所以 (28.37) 式是方程式 (28.36) 的一个特解, 也就是说 (28.37) 式是方程式 (28.38) 的格林函数.

将 (28.21) 式代入 (28.37) 式可得 $S^{\mathrm{G}}(x)$ 的具体形式:

$$\boxed{S^{\mathrm{G}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{(\mathrm{i}\gamma_i p_i-m)}{p_i^2+m^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}(\mathrm{d}p_i)} \tag{28.39}$$

设

$$\boxed{S^{\mathrm{G}}(p)=\frac{\mathrm{i}\gamma_i p_i-m}{p_i^2+m^2}} \tag{28.40}$$

则

$$\boxed{S^{\mathrm{G}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int S^{\mathrm{G}}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}(\mathrm{d}p_i)} \tag{28.41}$$

并且由 (28.40) 式可知

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma_i p_i+m)S^{\mathrm{G}}(p)=1} \tag{28.42}$$

方程式 (28.35) 的解由 (28.9) 式知可以用 $S^{\mathrm{G}}(x)$ 表示:

$$\boxed{\psi(x)=\int\rho(x')S^{\mathrm{G}}(x-x')(\mathrm{d}x')} \tag{28.43}$$

5. Feynman 函数 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$、$D^{\mathrm{F}}(x)$ 和 $S^{\mathrm{F}}(x)$

Feynman 函数 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$、$D^{\mathrm{F}}(x)$、$S^{\mathrm{F}}(x)$ 和格林函数 $\Delta^{\mathrm{G}}(x)$、$D^{\mathrm{G}}(x)$、$S^{\mathrm{G}}(x)$ 的关系如下:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{F}}(x)&=-2\mathrm{i}\Delta^{\mathrm{G}}(x)\\D^{\mathrm{F}}(x)&=-2\mathrm{i}D^{\mathrm{G}}(x)\\S^{\mathrm{F}}(x)&=-2\mathrm{i}S^{\mathrm{G}}(x)\end{aligned}} \tag{28.44}$$

这也是 Feynman 函数的定义.

因此, 由 (28.22) 式、(28.30) 式、(28.36) 式知, $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$、$D^{\mathrm{F}}(x)$ 和 $S^{\mathrm{F}}(x)$ 分别应为下列三个方程式的特解:

$$\boxed{\begin{aligned}&(\Box - m^2)\Delta^{\mathrm{F}}(x) = 2\mathrm{i}\delta(x) \qquad (28.45)\\ &\Box D^{\mathrm{F}}(x) = 2\mathrm{i}\delta(x) \qquad (28.46)\\ &\left(\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m\right) S^{\mathrm{F}}(x) = 2\mathrm{i}\delta(x) \qquad (28.47)\end{aligned}}$$

并且由 (28.21) 式、(28.29) 式、(28.39) 式和 (28.44) 式可知

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{F}}(x) = \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i}}{k_i^2 + m^2} (\mathrm{d}k)} \qquad (28.48)$$

$$\boxed{D^{\mathrm{F}}(x) = \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i}}{k_i^2} (\mathrm{d}k)} \qquad (28.49)$$

$$\boxed{S^{\mathrm{F}}(x) = \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathrm{i}\gamma_i p_i - m}{p_i^2 + m^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i} (\mathrm{d}p)} \qquad (28.50)$$

或设

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta^{\mathrm{F}}(k) \equiv \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k_i^2 + m^2} \qquad (28.51)\\ &D^{\mathrm{F}}(k) \equiv \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_i^2} \qquad (28.52)\\ &S^{\mathrm{F}}(p) \equiv \frac{2}{\mathrm{i}} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}\gamma_i p_i - m}{p_i^2 + m^2} \qquad (28.53)\end{aligned}}$$

则

$$\Delta^{\mathrm{F}}(x) = \int \Delta^{\mathrm{F}}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i} (\mathrm{d}k) \qquad (28.54)$$

$$D^{\mathrm{F}}(x) = \int D^{\mathrm{F}}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i} (\mathrm{d}k) \qquad (28.55)$$

$$S^{\mathrm{F}}(x) = \int S^{\mathrm{F}}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i} (\mathrm{d}p) \qquad (28.56)$$

6. $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$ 函数与 $\Delta^{(1)}(x)$、$\Delta(x)$ 函数的关系

(28.48) 式所定义的 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$ 函数, 可写成以下的形式:

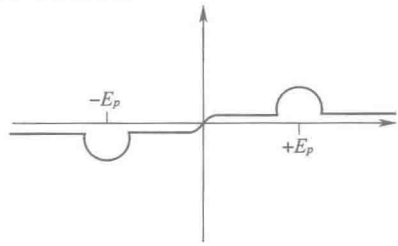
$$\Delta^{\mathrm{F}}(x) = -\frac{2}{(2\pi)^4 \mathrm{i}} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} I(\boldsymbol{p}) (\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \qquad (28.57)$$

其中

$$I(\boldsymbol{p})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{p_0^2-E_p^2}\mathrm{d}p_0 \tag{28.58}$$

$$E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{28.59}$$

从 (28.58) 式我们知道 $I(\boldsymbol{p})$ 的被积分函数在 p_0 轴上有 $p_0=\pm E_p$ 两个极点.(28.58) 式可利用复变数函数中的残数定理和 Jordan 定理进行积分, 但积分值是与绕过极点所采取的路径有关的, 因此必须规定 $I(\boldsymbol{p})$ 的积分是采用下图中的路径, 这也是 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$ 函数的具体定义.



因

$$I(\boldsymbol{p})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2E_p}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{p_0-E_p}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{p_0+E_p}\right)\mathrm{d}p_0 \tag{28.59'}$$

$$\frac{1}{2E_p}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{(p_0-E_p)}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_pt}}{2E_p}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0-E_p)t}}{p_0-E_p}\right] \tag{28.60}$$

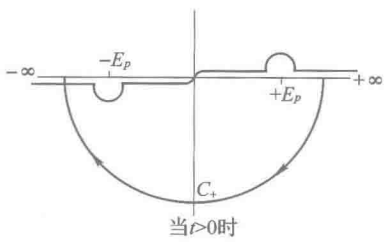
$$\frac{1}{2E_p}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{(p_0+E_p)}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_pt}}{2E_p}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_0+E_p)t}}{p_0+E_p}\right] \tag{28.61}$$

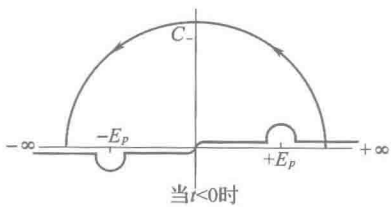
由 (28.60) 式和 (28.61) 式可知 $I(\boldsymbol{p})$ 的被积分函数在极点 $p_0=+E_p$ 的留数应为

$$R_+=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_pt}}{2E_p} \tag{28.62}$$

在极点 $p_0=-E_p$ 的留数应为

$$R_-=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_pt}}{2E_p} \tag{28.63}$$





根据 Jordan 定理可知当 $t>0$ 时, $I(\boldsymbol{p})$ 的积分路径应为 C_+, 而当 $t<0$ 时, $I(\boldsymbol{p})$ 的积分路径应为 C_-, 如上图所示. 并且由复变数函数的留数定理可知:

当 $t>0$ 时, $I(\boldsymbol{p})$=$2\pi\mathrm{i}(-R_+)$, 即

$$I(\boldsymbol{p})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{E_p}(\cos E_pt-\mathrm{i}\sin E_pt) \tag{28.64}$$

当 $t<0$ 时, $I(\boldsymbol{p})$=$2\pi\mathrm{i}(R_-)$, 即

$$I(\boldsymbol{p})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{E_p}(\cos E_pt+\mathrm{i}\sin E_pt) \tag{28.65}$$

(28.64) 式和 (28.65) 式可合写为

$$E(\boldsymbol{p})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{E_p}[\cos E_pt-\varepsilon(t)\mathrm{i}\sin E_pt] \tag{28.66}$$

将 (28.66) 式代入 (28.57) 式可知

$$\Delta^{\mathrm{F}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\cos E_pt}{E_p}(\mathrm{d}p)-\varepsilon(t)\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\sin E_pt}{E_p}(\mathrm{d}p) \tag{28.67}$$

因此由 (20.14) 式和 (20.26) 式可得

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{F}}(x)=\Delta^{(1)}(x)+\mathrm{i}\varepsilon(t)\Delta(x)} \tag{28.67'}$$

但由 (20.10) 式和 (20.23) 式知道

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta^{(1)}(x)+\mathrm{i}\Delta(x)=2\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x)\\&\Delta^{(1)}(x)-\mathrm{i}\Delta(x)=-2\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x)\end{aligned}} \tag{28.68}$$

所以

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{当}t>0\text{时},\quad \Delta^{\mathrm{F}}(x)=2\mathrm{i}\Delta^{(-)}(x)\\&\text{当}t<0\text{时},\quad \Delta^{\mathrm{F}}(x)=-2\mathrm{i}\Delta^{(+)}(x)\end{aligned}} \tag{28.69}$$

同理可证明

$$\boxed{\begin{aligned}&D^{\mathrm{F}}(x)=D^{(1)}(x)+\mathrm{i}\varepsilon(t)D(x)\\&\text{当}t>0\text{时},\quad D^{\mathrm{F}}(x)=2\mathrm{i}D^{(-)}(x)\\&\text{当}t<0\text{时},\quad D^{\mathrm{F}}(x)=-2\mathrm{i}D^{(+)}(x)\end{aligned}} \tag{28.70}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&S^{\mathrm{F}}(x)=S^{(1)}(x)+\mathrm{i}\varepsilon(t)S(x)\\&\text{当}t>0\text{时},\quad S^{\mathrm{F}}(x)=2\mathrm{i}S^{(-)}(x)\\&\text{当}t<0\text{时},\quad S^{\mathrm{F}}(x)=-2\mathrm{i}S^{(+)}(x)\end{aligned}} \tag{28.71}$$

因为

$$S^{\mathrm{F}}(x)=\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-m\right)\Delta^{\mathrm{F}}(x) \tag{28.72}$$

(28.69) 式、(28.70) 式和 (28.71) 式还可以变成下列的有用形式:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{F}}(x)&=2\mathrm{i}[\Delta^{(-)}(x)\theta^{+}(t)-\theta^{-}(t)\Delta^{(+)}(x)]\\ D^{\mathrm{F}}(x)&=2\mathrm{i}[D^{(-)}(x)\theta^{+}(t)-\theta^{-}(t)D^{(+)}(x)]\\ S^{\mathrm{F}}(x)&=2\mathrm{i}[S^{(-)}(x)\theta^{+}(t)-\theta^{-}(t)S^{(+)}(x)]\end{aligned}} \tag{28.73}$$

习　题

1. 试证明方程式 $\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})=-\varphi(\boldsymbol{r})$ 的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi R},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\quad R=|R|$$

2. 试证明方程式 $\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})-\chi_0^2\varphi=-\rho(\boldsymbol{r})$ 的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{e}^{-\chi_0 R}}{4\pi R}$$

参 考 文 献

[1] 朗道, 栗弗席兹. 场论. 北京：高等教育出版社. 2012.
[2] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. §17d. 1955.

§29 $N-$ 乘积、$p-$ 乘积和 $T-$ 乘积

1. 场函数对易关系式的总结

设 $U_\alpha(x)$ 为广义场函数的一个分量, $\overline{U}_\alpha(x)$ 为其共轭复量, 即

$$U_\alpha^{(\pm)}\text{代表}\begin{cases}\varphi^{(\pm)}(x)\\ A_\alpha^{(\pm)}(x)\\ \psi_\alpha^{(\pm)}(x)\end{cases}\tag{29.1}$$

$$\overline{U}_\alpha^{(\pm)}\text{代表}\begin{cases}\overset{*}{\varphi}{}^{(\pm)}(x)\\ \overset{*}{A}{}_\alpha^{(\pm)}(x)\\ \overline{\psi}_\alpha^{(\pm)}(x)\end{cases}\tag{29.2}$$

由 §20、§21、§23 和 §26 等节可知, 各种场的对易关系式可表示为以下的广义形式:

$$\boxed{[U_\alpha^{(-)}(x_1),\overline{U}_\beta^{(+)}(x_2)]_\pm=\mathrm{i}\,\Pi_{\alpha\beta}^{(-)}(x_1-x_2)}\tag{29.3}$$

$$\boxed{[U_\alpha^{(+)}(x_1),\overline{U}_\beta^{(-)}(x_2)]_\pm=\mathrm{i}\,\Pi_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1-x_2)}\tag{29.4}$$

上两式中

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x)\text{代表}\begin{cases}\Delta^{(\pm)}(x)\\ D^{(\pm)}(x)\delta_{\alpha\beta}\\ -S_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x)\end{cases}\tag{29.5}$$

$$\boxed{[U_\alpha(x_1),\overline{U}_\beta(x_2)]_\pm=\mathrm{i}\Pi_{\alpha\beta}(x_1-x_2)}\tag{29.6}$$

上式中

$$\Pi_{\alpha\beta}(x)\text{代表}\begin{cases}\Delta(x)\\ D(x)\delta_{\alpha\beta}\\ -S_{\alpha\beta}(x)\end{cases}\tag{29.7}$$

(29.3)、(29.4) 和 (29.6) 等式中, 对于 Boson 粒子的场函数用负泊松括号, 对于 Fermi 粒子的场函数用正泊松括号.

此外, 广义场函数的对易关系式可有以下形式的真空平均值:

$$\boxed{\left\langle [U_\alpha(x_1), \overline{U}_\beta(x_2)]_\mp \right\rangle_0 = \Pi^{(1)}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.8}$$

上式中

$$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)\text{代表} \begin{cases} \Delta^{(1)}(x) \\ D^{(1)}(x)\delta_{\alpha\beta} \\ -S^{(1)}_{\alpha\beta}(x) \end{cases} \tag{29.9}$$

(29.8) 式中, 对于 Boson 粒子的场函数用正泊松括号, 而对于 Fermi 粒子的场函数则用负泊松括号.

$\Pi^{(\pm)}(x_1 - x_2), \Pi(x_1 - x_2)$ 和 $\Pi^{(1)}(x_1 - x_2)$ 等称为广义对易函数, 它们之间有以下的关系:

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi(x_1 - x_2) &= \Pi^{(+)}(x_1 - x_2) + \Pi^{(-)}(x_1 - x_2) \\ \Pi^{(1)}(x_1 - x_2) &= \mathrm{i}\left[\Pi^{(-)}(x_1 - x_2) - \Pi^{(+)}(x_1 - x_2)\right] \end{aligned}} \tag{29.10}$$

由上式可知

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi^{(1)}(x) + \mathrm{i}\Pi(x) &= 2\mathrm{i}\Pi^{(-)}(x) \\ \Pi^{(1)}(x) - \mathrm{i}\Pi(x) &= -2\mathrm{i}\Pi^{(+)}(x) \end{aligned}} \tag{29.11}$$

2. $N-$ 乘积 (标准乘积)

设 $u^{(+)}$ 代表产生粒子的广义算符, $u^{(-)}$ 代表消灭粒子的广义算符, 即

$$u^{(+)}\text{代表}U^{(+)}\text{或}\overline{U}^{(+)}$$

$$u^{(-)}\text{代表}U^{(-)}\text{或}\overline{U}^{(-)}$$

标准乘积 ($N-$ 乘积) 是一种场函数的乘积, 在这种乘积中所有消灭粒子的算符 $u^{(-)}$ 都要放在产生粒子算符 $u^{(+)}$ 的右边. 这种算符的次序称为标准次序. 为了与普通的乘积区分, 算符的标准乘积前面冠之以符号 N, 譬如

$$\boxed{N[u^{(-)}(x_1)u^{(+)}(x_2)] \equiv \mp u^{(+)}(x_2)u^{(-)}(x_1)} \tag{29.12}$$

上式中对于 Boson 粒子取 (+) 号, 对于 Fermi 粒子取 (−) 号. 这是两个算符标准乘积的定义. 因为 $u^{(-)}(x)\Phi_0 = 0$, 所以由标准乘积的定义可知, 任意数目的场函数算符 $u^{(\pm)}$ 的标准乘积的真空平均值必为零, 即

$$\boxed{\Phi_0^+ N[u(x_1)\cdots u(x_n)]\Phi_0 = 0} \tag{29.13}$$

上式中 $u(x)$ 代表 $u^{(+)}(x)$ 或 $u^{(-)}(x)$. 当然 (29.13) 式中至少要包含有一个消灭粒子的算符 $u^{(-)}(x)$, 才能普遍成立. 在前几节中, 我们研究各种自由场的二次量子化的时候, 曾发现场的某些物理量如能量和电荷等的真空平均值常是无穷大的, 为了消去这种观察不到的发散的真空物理量, 我们可以预先将这些物理量中的算符排成标准次序. 由 (29.13) 式可知, 这样就可以避免真空的发散问题. 因此标准乘积对量子场论的实际运算是有重要意义的.

现在我们来研究 $U(x_1)$ 和 $\overline{U}(x_2)$ 的普通乘积和 $N-$ 乘积的关系. 因为

$$\begin{aligned} U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2) =& U_\alpha^{(+)}(x_1)\overline{U}_\beta^{(+)}(x_2) + U_\alpha^{(-)}(x_1)\overline{U}_\beta^{(-)}(x_2) \\ &+ U_\alpha^{(+)}(x_1)\overline{U}_\beta^{(-)}(x_2) \mp \overline{U}_\beta^{(+)}(x_2)U_\alpha^{(-)}(x_1) \\ &+ [U_\alpha^{(-)}(x_1), \overline{U}_\beta^{(+)}(x_2)]_\pm \end{aligned} \tag{29.14}$$

所以

$$U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2) = N[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)] + [U_\alpha^{(-)}(x_1), \overline{U}_\beta^{(+)}(x_2)]_\pm \tag{29.15}$$

或利用 (29.3) 式可将上式变为

$$\boxed{U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2) = N[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)] + \mathrm{i}\Pi_{\alpha\beta}^{(-)}(x_1 - x_2)} \tag{29.16}$$

同理可证明

$$\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1) = N[\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)] \pm [U_\alpha^{(1)}(x_1), \overline{U}_\beta^{(-)}(x_2)]_\pm \tag{29.17}$$

或

$$\boxed{\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1) = N[\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)] \pm \mathrm{i}\Pi_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1 - x_2)} \tag{29.18}$$

在 (29.15) 式和 (29.17) 式中, 对于 Boson 粒子取负泊松括号, 对于 Fermi 粒子取正泊松括号.

由 (29.16) 式和 (29.18) 式可知

$$\boxed{\begin{aligned} \left\langle U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)\right\rangle_0 &= \mathrm{i}\Pi_{\alpha\beta}^{(-)}(x_1 - x_2) \\ \left\langle \overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)\right\rangle_0 &= \pm\mathrm{i}\Pi_{\alpha\beta}^{(+)}(x_1 - x_2) \end{aligned}} \tag{29.19}$$

最后我们还应该知道, 几个算符的标准乘积的定义如下:

$$\boxed{N[u(x_1)u(x_2)\cdots u(x_n)] = (-1)^\varepsilon u^{(+)}(x_{i_1})\cdots u^{(-)}(x_{i_n})} \tag{29.20}$$

这里 $u(x)$ 代表 $u^{(+)}(x)$ 或 $u^{(-)}(x)$ 任意一种算符.ε 是使序列 $(1,2,\cdots,n)$ 变为 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 的费米算符的置换次数.$(-1)^{\varepsilon}$ 一般简称为费米置换宇称.

3. $p-$ 乘积 (时序乘积) 和 $T-$ 乘积

在下一章我们将知道, 在计算粒子的散射矩阵时, 要用到算符的 $p-$ 乘积和 $T-$ 乘积, 它们的定义如下:

算符的 $p-$ 乘积就是把所有的算符依照它们时间的大小, 即时间的先后次序从左至右排列起来的普通乘积, 即

$$\boxed{p[u_1(x_1)u_2(x_2)\cdots u_n(x_n)]=u_{i_1}(x_{i_1})u_{i_2}(x_{i_2})\cdots u_{i_n}(x_{i_n})} \tag{29.21}$$

其中 $x_{i_1},\cdots,x_{i_n}$ 的次序是把 $x_1,\cdots,x_n$ 按照时间分量的大小重新排列的, 即

$$\boxed{t_{i_1}\geqslant t_{i_2}\geqslant\cdots\geqslant t_{i_n}} \tag{29.22}$$

$T-$ 乘积的定义就是把 $p-$ 乘积前面加一个费米置换宇称 $(-1)^{\varepsilon}$, 即

$$\boxed{T[u_1(x_1)u_2(x_2)\cdots u_n(x_n)]=(-1)^{\varepsilon}u_{i_1}(x_{i_1})\cdots u_{i_n}(x_{i_n})} \tag{29.23}$$

因此对于 Boson 粒子, 算符的 $p-$ 乘积和 $T-$ 乘积是没有任何区别的.

场函数 $U_\alpha(x_1)$ 和 $\overline{U}_\beta(x_2)$ 的 $T-$ 乘积和 $N-$ 乘积有下列的重要关系.

当 $t_1>t_2$ 时, 由 (29.16) 式可知

$$\begin{aligned}T[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)]&=U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)\\&=N[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)]+\mathrm{i}\Pi^{(-)}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)\end{aligned} \tag{29.24}$$

当 $t_1<t_2$ 时, 由 (29.18) 式知

$$\begin{aligned}T[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)]&=\mp\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)\\&=\mp N[\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)]-\mathrm{i}\Pi^{(+)}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)\\&=N[U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)]-\mathrm{i}\Pi^{(+)}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)\end{aligned} \tag{29.25}$$

通常 $T-$ 乘积与 $N-$ 乘积之差以耦合符号 $\overbrace{\quad}$ 表示, 即

$$\boxed{T[u(x_1)u(x_2)]-N[u(x_1)u(x_2)]\equiv\overbrace{u(x_1)u(x_2)}} \tag{29.26}$$

因此

$$\boxed{\text{当}t_1 > t_2\text{时},\ \overbrace{U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)} = +\mathrm{i}\Pi^{(-)}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.27}$$

$$\boxed{\text{当}t_1 < t_2\text{时},\ \overbrace{U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)} = -\mathrm{i}\Pi^{(+)}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.28}$$

(29.27) 式和 (29.28) 式两式利用 (28.69) 式, (28.70) 式, (28.71) 式可合写为

$$\boxed{\overbrace{U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}\Pi^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.29}$$

$$\Pi^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x) = 2\mathrm{i}\left[\Pi^{(-)}_{\alpha\beta}(x)\theta^+(t) - \theta^-(t)\Pi^{(+)}_{\alpha\beta}(t)\right] \tag{29.30}$$

由 (29.5) 式、 (28.73) 式和 (29.30) 式可知

$$\Pi^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \Delta^{\mathrm{F}}(x) \\ D^{\mathrm{F}}(x)\delta_{\alpha\beta} \\ -S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x) \end{cases} \tag{29.31}$$

(29.29) 耦合式的具体形式利用 (29.1) 式、 (29.2) 式和 (29.31) 式可知应为

$$\boxed{\overbrace{\varphi(x_1)\ \varphi^*(x_2)} = \frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)} \tag{29.32}$$

$$\boxed{\overbrace{A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)\delta_{\alpha\beta}} \tag{29.33}$$

$$\boxed{\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)} = -\frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.34}$$

由 $T-$ 乘积与 $N-$ 乘积的定义和 (29.26) 式可知

$$\overbrace{U_\alpha(x_1)\overline{U}_\beta(x_2)} = (-1)^{\varepsilon}\overbrace{\overline{U}_\beta(x_2)U_\alpha(x_1)} \tag{29.34$'$}$$

因此 (29.34) 式也可以写成

$$\boxed{\overbrace{\overline{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)} = \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)} \tag{29.35}$$

利用 (26.19) 式和 (29.26) 式还可以证明重要的关系式:

$$\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = 0 \tag{29.36}$$

$$\overbrace{\overline{\psi}_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)} = 0 \tag{29.37}$$

$$\overbrace{\psi_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \overbrace{\overline{\psi}_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = 0 \tag{29.38}$$

习　题

1. 试证明

$$N(\psi(x_1)\psi(x_2)) = \psi(x_1)\psi(x_2)$$

$$N(\overline{\psi}(x_1)\overline{\psi}(x_2)) = \overline{\psi}(x_1)\overline{\psi}(x_2)$$

$$N(\overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)) + N(\psi(x_2)\overline{\psi}(x_1)) = 0$$

2. 试证明

$$\left\langle p(\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(x'))\right\rangle_0 = \frac{1}{2}\varepsilon(t'-t)S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x-x')$$

参 考 文 献

Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955: §17a.

§30 场论中常用奇异函数的环路积分表示

在这一节前, 我们曾讲过 $\Delta(x)$、 $\Delta^{(1)}(x)$、 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$、 $\Delta^{\mathrm{G}}(x)$ 等四种场论中常用的函数. 这四种是较基本的函数, 其他的函数如 $D(x)$、 $D^{(1)}(x)$、 $D^{\mathrm{F}}(x)$、 $D^{\mathrm{G}}(x)$ 等函数, 则是以上四种基本函数 $m=0$ 时的一种特殊情况. 而 $S(x)$、 $S^{(1)}(x)$、 $S^{\mathrm{F}}(x)$、 $S^{\mathrm{G}}(x)$ 等函数, 则是算符 $\left(\gamma_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}-m\right)$ 作用于这四种基本函数的结果.

场论中还有其他形式的基本函数, 这些函数是在一般的杂志中常用到的. 因此, 我们在下面将要介绍这些函数, 一般讲场论中常用的函数, 包括以前所讲的 $\Delta(x)$、 $\Delta^{(1)}(x)$、 $\Delta^{\mathrm{F}}(x)$、 $\Delta^{\mathrm{G}}(x)$ 四种函数, 都可以下列的环路积分表示:

$$\Delta^{l}(x)=\int_{C_l}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p) \tag{30.1}$$

为了计算方便起见, 上式可改写为

$$\Delta^{l}(x)=-\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}I(\boldsymbol{p})(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{30.2}$$

其中

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{p})&=\oint_{C_l}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0t}}{p_0^2-E_p^2}\mathrm{d}p_0\\ E_p&=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\end{aligned} \tag{30.3}$$

(30.3) 积分式中的被积分函数在 $p_0=\pm E_p$ 处有两个极点, 环路积分 $I(\boldsymbol{p})$ 的性质, 是与封闭曲线 C_l 绕过这两点极点的方式有关的. 根据复变数函数中的留数定理, 环路积分 $I(\boldsymbol{p})$ 的数值, 应该等于这个封闭曲线内所有留数的和乘以 $2\pi\mathrm{i}$, 即

$$I(\boldsymbol{p})=2\pi\mathrm{i}[C_l\text{中所包含的留数的和}] \tag{30.4}$$

也即

$$\Delta^{l}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[C_l\text{中所包含的留数的和}](\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{30.5}$$

由 (28.62) 式知道: 在 $p_0=+E_p$ 处的留数

$$R_+=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_pt}}{2E_p}=\frac{1}{2E_p}[\cos E_pt-\mathrm{i}\sin E_pt] \tag{30.6}$$

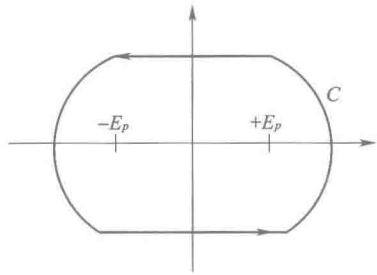
在 $p_0=-E_p$ 处的留数

$$R_-=-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}E_pt}}{2E_p}=\frac{1}{2E_p}[-\cos E_pt-\mathrm{i}\sin E_pt] \tag{30.7}$$

下面我们就具体谈谈场论中常用的各种函数的环路积分表示.

1. $\Delta(x)$ 函数的环路积分表示

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)$$



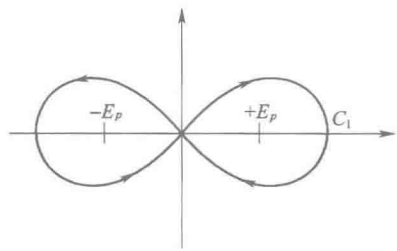
因由 (30.5) 式、 (30.6) 式和 (30.7) 式可知

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[R_++R_-](\mathrm{d}\boldsymbol{p})=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\sin E_pt}{E_p}(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \tag{30.8}$$

这个结果是与 (20.15) 式相同的, 因此 $\Delta(x)$ 可以用 (30.8) 式的环路积分表示.

2. $\Delta^{(1)}(x)$ 函数的环路积分表示

$$\Delta^{(1)}(x)=\frac{1}{\mathrm{i}(2\pi)^4}\int_{C_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p) \tag{30.9}$$



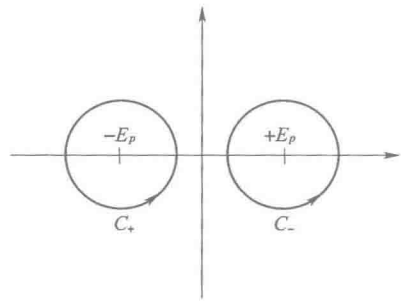
因由 (30.5) 式、(30.6) 式、(30.7) 式可知

$$\Delta^{(1)}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[R_- - R_+](\mathrm{d}\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\cos E_p t}{E_p}(\mathrm{d}\boldsymbol{p})$$

这个结果与 (20.26) 式相同.

3. $\Delta^{(+)}(x)$ 与 $\Delta^{(-)}(x)$ 函数的环路积分表示

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_+}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)\\ \Delta^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_-}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)\end{aligned}\right\}\tag{30.10}$$



因由 (30.5) 式、(30.6) 式和 (30.7) 式可知

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[R_-](\mathrm{d}\boldsymbol{p})=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_p t}}{2E_p}\right](\mathrm{d}\boldsymbol{p})\\ &=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}\delta(p_i^2+m^2)\theta^-(p_0)(\mathrm{d}p)\end{aligned}\tag{30.11}$$

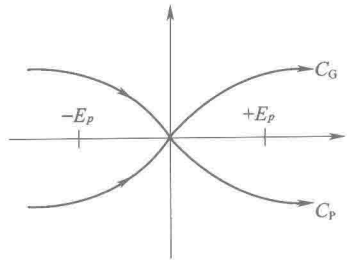
同理可证明

$$\begin{aligned}\Delta^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[R_+](\mathrm{d}\boldsymbol{p})\\ &=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}\delta(p_i^2+m^2)\theta^+(p_0)(\mathrm{d}p)\end{aligned}\tag{30.12}$$

这个结果与 (20.3) 式、(20.6) 式 $\Delta^{(\pm)}$ 的定义是相同的.

4. $\Delta^{\mathrm{G}}(x)$ 与 $\Delta^{\mathrm{P}}(x)$ 函数的环路积分表示

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{G}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{\mathrm{G}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)\\ \Delta^{\mathrm{P}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{\mathrm{P}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)\end{aligned}\right\}\tag{30.13}$$



由 (30.5) 式、 (30.6) 式、 (30.7) 式以及复变数函数中的 Jordon 定理可知

$$\left.\begin{aligned} &\text{当}t>0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{G}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[-R_+](\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \\ &\text{当}t<0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{G}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[R_-](\mathrm{d}\boldsymbol{p}) \end{aligned}\right\} \tag{30.14}$$

由 (30.11) 式和 (30.12) 式得

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{当}\,t>0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{G}}=-\Delta^{(-)} \\ &\text{当}\,t<0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{G}}=+\Delta^{(+)} \end{aligned}} \tag{30.15}$$

同理可知

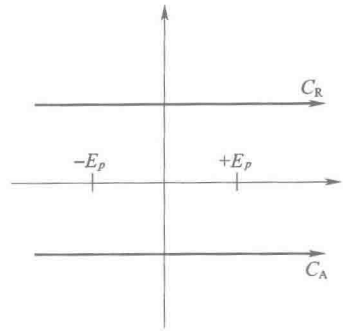
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{当}\,t>0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{P}}=-\Delta^{(+)} \\ &\text{当}\,t<0\text{时}, \quad \Delta^{\mathrm{P}}=+\Delta^{(-)} \end{aligned}} \tag{30.16}$$

并且

$$\left.\begin{aligned} &(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{G}}(x)=-\delta(x) \\ &(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{P}}(x)=-\delta(x) \end{aligned}\right\} \tag{30.17}$$

5. $\Delta^{\mathrm{R}}(x)$ 与 $\Delta^{\mathrm{A}}(x)$ 函数的环路积分表示

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{\mathrm{R}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{\mathrm{R}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p) \\ \Delta^{\mathrm{A}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{\mathrm{A}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p) \end{aligned}\right\} \tag{30.18}$$



$$\text{当 } t>0 \text{ 时,}\quad \Delta^{\mathrm{R}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[-R_+-R_-](\mathrm{d}\boldsymbol{p})$$

$$\text{当 } t<0 \text{ 时,}\quad \Delta^{\mathrm{R}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}[0](\mathrm{d}\boldsymbol{p})$$

即

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{当}t>0\text{时,}\quad \Delta^{\mathrm{R}}=-\Delta\\ \text{当}t<0\text{时,}\quad \Delta^{\mathrm{R}}=0\end{array}} \tag{30.19}$$

同理可证明

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{当}t>0\text{时,}\quad \Delta^{\mathrm{A}}=0\\ \text{当}t<0\text{时,}\quad \Delta^{\mathrm{A}}=\Delta\end{array}} \tag{30.20}$$

并且

$$\left.\begin{aligned}(\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{R}}(x)&=-\delta(x)\\ (\Box-m^2)\Delta^{\mathrm{A}}(x)&=-\delta(x)\end{aligned}\right\} \tag{30.21}$$

6. 各种 $\Delta^{l}(x)$ 函数间的关系

(1) 由 $C=C_{\mathrm{A}}-C_{\mathrm{R}}$ 可得

$$\boxed{\Delta=\Delta^{\mathrm{A}}-\Delta^{\mathrm{R}}} \tag{30.22}$$

(2) 由 $C_1=C_{\mathrm{G}}-C_{\mathrm{P}}$ 和 (30.9) 式可得

$$\boxed{\mathrm{i}\Delta^{(1)}=\Delta^{\mathrm{G}}-\Delta^{\mathrm{P}}} \tag{30.23}$$

(3) 由 $C=C_+-C_-$ 可知

$$\boxed{\Delta=\Delta^{(+)}+\Delta^{(-)}} \tag{30.24}$$

这个结果是与 (20.10) 式相同的.

(4) 由 $C_1 = C_+ - C_-$ 可知

$$\boxed{\mathrm{i}\Delta^{(1)} = \Delta^{(+)} - \Delta^{(-)}} \tag{30.25}$$

这个结果与 (20.23) 式相同的.

(5) 由 (28.44) 式与 (28.67) 式知

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta^{\mathrm{F}} &= \frac{2}{\mathrm{i}}\Delta^{\mathrm{G}} \\ \Delta^{\mathrm{F}} &= \Delta^{(1)} + \mathrm{i}\varepsilon(t)\Delta \end{aligned}} \tag{30.26}$$

7. $D^l(x)$ 函数与 $S^l(x)$ 函数

$$\boxed{D^l(x) \equiv \Delta^l(x)|_{m=0}} \tag{30.27}$$

$$\boxed{S^l(x) \equiv \left(\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} - m\right)\Delta^l(x)} \tag{30.28}$$

$\Delta^l(x)$ 代表 Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(+)}$, $\Delta^{(-)}$, Δ^{G}, Δ^{P}, Δ^{A}, Δ^{R}, Δ^{F} 等函数.

$D^l(x)$ 与 $S^l(x)$ 为其对应的函数, 其定义为 (30.27) 式与 (30.28) 式.

第四章　场的相互作用与 S 矩阵 (量子电动力学)

§31　场的相互作用的 Lagrange 函数

1. 场的相互作用的 Lagrange 函数

前两章我们较详细地叙述了自由场的运动方程式、守恒定律和二次量子化. 这些是粒子运动最简单的规律, 也是研究量子场论的基础. 在绪论中我们曾谈过, 量子场论主要的目的, 是研究粒子间的相互作用和粒子相互转化和产生的规律. 要研究这些问题, 首先我们应该研究各种场相互作用的 Lagrange 函数. 因为我们知道了场的相互作用的 Lagrange 函数的形式, 便可以求得场在相互作用情况下的运动方程式和场的相互作用的哈密顿算符, 然后我们才有条件研究具体的问题.

场在相互作用的情况下, 它们的总 Lagrange 函数 L 应该是自由场的 Lagrange 函数 L_0 加上它们之间相互作用的 Lagrange 函数 L_1, 即

$$\boxed{L = L_0 + L_1} \tag{31.1}$$

场的相互作用的 Lagrange 函数, 也和自由场的 Lagrange 函数一样, 必须要求它们对于洛伦兹变换为一个不变量. 因此, 场的相互作用的 Lagrange 函数的广义形式应为

$$\boxed{L_1 = gT^1_{ij\cdots m}T^2_{ij\cdots m}} \tag{31.2}$$

其中 $T^1_{ij\cdots m}$ 和 $T^2_{ij\cdots m}$ 为两种不同的场函数所组成的同阶张量, 其标积必为一不变量. 常数 g 称为作用常数, 代表这两种场相互作用的大小. 严格地说, 两种场的作用常数, 应该与这两种场的粒子的内部结构有关, 但到现在为止, 我们对于粒子内部结构的知识, 知道的还很少. 那么现代场论中的作用常数的大小, 还不能从理论上求得, 而是根据实验的数据间接求得的.

譬如, 电子与电磁场的作用常数 e, 我们就可以利用电子在电磁场中的运动规律, 和实验比较求得.

$T_{ij\cdots m}$ 的各种形式如下:

零阶张量T	$\varphi, \tilde{\varphi}, \bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, A_iA_i, F_{ij}\,F_{ij}\ , \cdots$
一阶张量T_i	$A_i, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}, \bar{\psi}\gamma_i\psi, \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi\ , \cdots$
二阶张量T_{ij}	$F_{ij}\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \bar{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi, \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\gamma_j\psi\ , \cdots$

(31.3)

利用上表和 (31.2) 式我们就可写出各种场相互作用的具体形式.

2. 各种场相互作用的具体形式

(1) Bose 粒子与 Fermi 粒子的作用

这两种粒子的相互作用可有下面的几种形式:

① 标量场与旋量场的作用

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\psi}\psi\varphi\\ \bar{\psi}\gamma_i\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\end{array}\right\} \tag{31.4}$$

这两种作用的例子为 θ 介子与核子的作用, 因为 θ 介子的自旋为零, 宇称为正, 应该用标量函数 φ 来描写, 而核子的自旋为 $\dfrac{1}{2}$, 则用旋量场描写.

② 赝标量场与旋量场的作用

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\psi}\gamma_5\psi\tilde{\varphi}\\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}\end{array}\right\} \tag{31.5}$$

这两种作用形式一般是用来描写 π 介子与核子的作用, 因为 π 介子的自旋为零, 宇称为负, 故用赝标量 $\tilde{\varphi}$ 来描写. 这两种作用在研究核力问题与 π 介子对核子散射时是非常重要的, 但在这两种作用之间, 哪一种形式起主要作用, 现在还没有最后完全肯定.

③ 向量场与旋量场的作用

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\psi}\gamma_i\psi A_i\\ \bar{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi F_{ij}\end{array}\right\} \tag{31.6}$$

这两种作用形式从理论上说, 都可以用来描写电子或质子与光子的作用. 但从量子电动力学中各种理论与实验比较, 现在已经肯定, 第一种形式 (即 $\bar{\psi}\gamma_i\psi A_i$) 起着主要的作用. 因此, 在量子电动力学中, 光子与电子的作用, 应该以第一种形式表示. $\mu^{\pm}$ 介子的自旋为 $\dfrac{1}{2}$, 应该用旋量场函数描写. 多年来, $\mu^{\pm}$

介子与核子的散射问题, 理论计算的结果与实验比较, 还有很大程度的不符合. 因此, $\mu^{\pm}$ 介子与光子的作用, 是否第二种形式也起作用, 是颇值得研究的.

在 Bose 粒子与 Fermi 粒子相互作用的各种 Lagrange 形式中, 最常用到的, 是 π 介子与核子的作用和电子与光子的作用, 它们的具体表示形式如下:

④ π 介子与核子的作用

$$\boxed{L_1 = \mathrm{i}G\bar{\psi}\gamma_5\psi\tilde{\varphi} + \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}} \tag{31.7}$$

上式中的第一项, 一般称为赝标量形式的耦合, 第二项则为赝矢量形式的耦合. 为了使 G 与 g 的量纲一致, 通常在介子场的理论中, 将 g 以 μ 除之, μ 为介子 Compton 波长的倒数, 即

$$\mu = \frac{1}{\lambda_\pi} = \frac{m_\pi c}{\hbar} \tag{31.8}$$

在 $c = \hbar = 1$ 的单位制中, $\mu = m_\pi$.

⑤ 电子与光子的作用

$$\boxed{L_1 = \mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_i\psi A_i} \tag{31.9}$$

(2) Fermi 粒子与 Fermi 粒子的作用

Fermi 粒子与 Fermi 粒子的作用, 也即旋量场和旋量场的相互作用, 其最典型的例子, 就是核子的 β^- 衰变与 $\mu^{\pm}$ 介子的衰变, 即

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \nu$$

$$\mu^{\pm} \to \mathrm{e}^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$$

这种作用也称为四种旋量场函数的直接作用, 是 Fermi 首先提出来的, 它的具体形式如下, 一共有五种:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{标量耦合} & (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi) \\ \text{赝标量耦合} & (\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \\ \text{矢量耦合} & (\bar{\psi}\gamma_i\psi)(\bar{\psi}\gamma_i\psi) \\ \text{赝矢量耦合} & (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi)(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi) \\ \text{张量耦合} & (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi)(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi) \end{array}\right\} \tag{31.10}$$

以上五种 Fermi 粒子与 Fermi 粒子的耦合可合写为下列形式:

$$\boxed{L_1 = \sum_{i=1}^{5} C_i\bar{\psi}O_i\psi} \tag{31.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} O_1 &\equiv O_{\mathrm{S}} = 1 \\ O_2 &\equiv O_{\mathrm{P}} = \gamma_5 \\ O_3 &\equiv O_{\mathrm{V}} = \gamma_i \\ O_4 &\equiv O_{\mathrm{A}} = \gamma_5\gamma_i \\ O_5 &\equiv O_{\mathrm{T}} = \gamma_i\gamma_j \end{aligned}\right\} \tag{31.12}$$

C_i 为第 i 种耦合的作用常数.

1957 年, 物理学家李政道、杨振宁以及苏联的物理学家朗道, 提出在弱作用的情况下宇称不守恒的理论, 他们的理论已在 β^- 衰变与 $\mu^{\pm}$ 介子衰变的实验中证实. 这是量子场论与粒子理论的重要的发现. 按照他们的理论, 四种旋量场的直接作用, 还应该有五种宇称不守恒的部分. 于是在宇称不守恒的情况下, Fermi 粒子与 Fermi 粒子的相互作用的 Lagrange 函数应具有以下的形式:

$$\boxed{L_1 = \sum_{i=1}^{5} C_i\bar{\psi}O_i\psi + \sum_{i=1}^{5} C_i'\bar{\psi}\gamma_5 O_i\psi} \tag{31.13}$$

(3) Bose 粒子与 Bose 粒子的作用

两种 Bose 粒子的相互作用, 常见的有以下两种形式:

$$\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}^*}{\partial x_i}\tilde{\varphi} - \overset{*}{\tilde{\varphi}}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}\right) A_i \tag{31.14}$$

$$\overset{*}{\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}A_iA_i \tag{31.15}$$

这两种作用是在研究光生 π 介子的问题时要用到的, 此外两种 Bose 粒子的相互作用, 还有

$$F_{ij}F_{ij}\varphi$$

$$\varepsilon_{ijkl}F_{ij}F_{kl}\tilde{\varphi}$$

等形式, 这些相互作用的形式, 曾经有人用来研究中性 π 介子的衰变问题. 但是按照现在的理论, π^0 介子衰变为两个光子是通过核子与反核子进行的. 因此, 这两种形式现在已经不用了.

3. 场的作用常数的问题

前面已经谈过场的作用常数是代表两种或两种以上的粒子相互作用的大小, 通常也称为“荷”, 比如电子与电磁场的作用常数称为“电荷”, 核子与介子场的作用常数称为“核荷”. 作用常数是“荷”的大小, 通常是用间接的方法测定的. 比如, 电荷的大小可以利用电子在电磁场中运动的理论与实验比较测定, 核荷的大小则可用核子散射或氘核的理论与实验比较测定. 由于电动力

学的理论比较完整, 并且静电库仑作用力是长距的, 可以用宏观的方法进行测量, 因此电荷数值的大小, 今天是已经精确肯定了的. 核荷的大小的情况就不同了, 因为介子场的理论到现在为止, 还不完整. 因此核荷的大小是因介子场的各种不同的理论和处理的方法而有差异的. 核荷的大小, 现在只知道大概它的数量级, 至于其他粒子间的作用常数的大小, 更是如此.

由于作用常数 g^2 被 $\hbar c$ 除, 是一个量纲一的量, 因此通常比较作用常数的大小, 常用 $g^2/\hbar c$ 进行比较.

粒子的作用常数, 依其大小, 通常可分为四类.

(1) 强作用——π 介子与核子、超子的相互作用的常数, 即研究这些粒子的产生和散射时所用到的常数.

$\frac{G_\pi^2}{\hbar c} \sim 15$(Levy 的理论, 用赝标量形式的耦合)

$\frac{g_\pi^2}{\hbar c} \sim 0.08$(Cbew 和 Low 的理论, 用赝矢量形式的耦合)

(2) 中强作用——K 介子与核子、超子的相互作用常数.

$\frac{G_K^2}{\hbar c} \sim 1$(Gell−mann 的理论, 用赝标量形式的耦合)

(3) 电磁作用——电子与电磁场的作用.

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

(4) 弱作用——中子、π 介子、K 介子和超子衰变时的作用常数.

$$\frac{g^2}{\hbar c} \sim 10^{-13}$$

以上就是各种粒子间相互作用常数的数量级.

习　题

θ^- 介子与 τ^- 介子、核子的相互作用, 应各为何种耦合形式? 并述其理由.

参 考 文 献

[1] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955, Vol. I: §11, §12.

[2] Lee T D (李政道). Conservation law in weak interaction. (Notes on four lecture 1957.)

[3] Gell−mann M. Phys. Rev., 1957, 106(6): 1296.

§32 场在相互作用情况下的运动方程式与相互作用哈密顿 $\hat{H}$

在上一节中曾谈过场在相互作用的情况下, 它们的总 Lagrange 函数应该是这些场的自由 Lagrange 函数 L_0 与相互作用 Lagrange 函数 L_1 之和, 即

$$L = L_0 + L_1 \tag{32.1}$$

寻求场在相互作用情况下的运动方程式, 也和寻求自由场的运动方程式一样, 只要把总 Lagrange 函数 L 代入 (8.11) 式的 Euler 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial U^{(\alpha)}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial U_i^{(\alpha)}} = 0 \tag{32.2}$$

1. 电子与电磁场作用的运动方程式

电子与电磁场在相互作用情况下的总 Lagrange 函数由 (32.1) 式、(14.28) 式、(14.17) 式和 (31.9) 式可知, 应为

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_k\frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right) - \\ & m\bar{\psi}\psi + \mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_i\psi A_i \end{aligned} \tag{32.3}$$

分别设 $U^{(\alpha)}$ 等于 A_i、$\bar{\psi}$ 和 ψ, 将 (32.3) 式代入 (32.2) 式可得

$$\boxed{\Box A_i = -\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_i\psi} \tag{32.4}$$

由 (14.22) 式知

$$\Box A_i = j_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\gamma_k\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m\psi = \mathrm{i}e\gamma_k A_k\psi \\ &\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k - m\bar{\psi} = -\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_k A_k \end{aligned}} \tag{32.5}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \mathrm{i}eA_k\right)\psi + m\psi = 0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i}eA_k\right)\bar{\psi}\gamma_k - m\bar{\psi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{32.6}$$

(32.4) 式为电磁场在电子作用下的运动方程式, 而 (32.5) 式或 (32.6) 式则为电子在电磁场作用下的运动方程式.

2. 核子与介子场作用的运动方程式

核子的自旋为 $\frac{1}{2}$, 应该用旋量场来描述, 核子与介子场在相互作用情况下的总 Lagrange 函数 L 由 (14.4) 式、(14.18) 式和 (31.7) 式可知应为

$$\boxed{\begin{aligned} L=&-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)^2+m^2\tilde{\varphi}^2\right]\\ &-\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k\psi\right)-m\bar{\psi}\psi\\ &+\mathrm{i}G\bar{\psi}\gamma_5\psi\tilde{\varphi}+\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}\end{aligned}} \tag{32.7}$$

分别设 $U^{(\alpha)}$ 等于 $\tilde{\varphi}$、$\bar{\psi}$、ψ, 将 (32.7) 式代入 (32.2) 式可得

$$\boxed{\Box\tilde{\varphi}-m^2\tilde{\varphi}=-\mathrm{i}G\bar{\psi}\gamma_5\psi+\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\psi)} \tag{32.8}$$

及

$$\boxed{\begin{aligned}&\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+m\psi=\mathrm{i}G\gamma_5\psi\tilde{\varphi}+\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\gamma_5\gamma_i\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}\\ &\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k-m\bar{\psi}=-\mathrm{i}G\tilde{\varphi}\bar{\psi}\gamma_5-\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_i\end{aligned}} \tag{32.9}$$

(32.8) 式为介子场在核子作用下的运动方程式, (32.9) 式则为核子在介子场作用下的运动方程式.

3. 场的相互作用哈密顿 H_1

由 (11.4) 式知道场的能量动量张量

$$T_{ik}=\frac{\partial L}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_i^{(\alpha)}-\delta_{ik}L \tag{32.10}$$

将 (32.1) 式代入上式, 可得场在相互作用情况下的能量动量张量

$$\boxed{T_{ik}=T_{ik}^0+T_{ik}^1} \tag{32.11}$$

其中

$$T_{ik}^0=\frac{\partial L_0}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_i^{(\alpha)}-\delta_{ik}L_0 \tag{32.12}$$

$$T_{ik}^{1}=\frac{\partial L_1}{\partial U_k^{(\alpha)}}U_i^{(\alpha)}-\delta_{ik}L_1 \tag{32.13}$$

即场的总能量动量张量 T_{ik} 也可分离为自由场的能量动量张量 T_{ik}^0 与相互作用的能量动量张量 T_{ik}^1 两部分.

由 (16.2) 式知道场的哈密顿

$$\hat{H}=\int T_{44}\mathrm{d}V \tag{32.14}$$

因为

$$T_{44}=T_{44}^0+T_{44}^1$$

所以

$$\boxed{\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1} \tag{32.15}$$

上式中 H_0 为自由场的哈密顿:

$$\boxed{\hat{H}_0=\int T_{44}^0\mathrm{d}V} \tag{32.16}$$

H_1 为场相互作用的哈密顿:

$$\boxed{\hat{H}_1=\int T_{44}^1\mathrm{d}V} \tag{32.17}$$

场的总哈密顿应该是自由场的哈密顿与相互作用哈密顿之和.

将 (31.9) 式和 (31.7) 式分别代入 (32.13) 式可知电子与电磁场、核子与介子场的相互作用的能量动量张量各应为

$$T_{ik}^{1}=-\delta_{ik}\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_j\psi A_j \tag{32.18}$$

$$\begin{aligned}T_{ik}^{1}=&\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_k\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_i}-\\&\delta_{ik}\left(\mathrm{i}G\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi+\mathrm{i}\frac{g}{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j\psi\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_j}\right)\end{aligned} \tag{32.19}$$

将 (32.18) 式代入 (32.17) 式可知电子与电磁场相互作用的哈密顿为

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{H}_1=-\mathrm{i}e\int\bar{\psi}\gamma_i\psi A_i\mathrm{d}V\\&\text{或}\quad\hat{H}_1=-\int j_iA_i\mathrm{d}V\end{aligned}} \tag{32.20}$$

而核子与介子场的相互作用哈密顿, 由 (32.19) 式和 (32.17) 式可知应为

$$\hat{H}_1 = -\mathrm{i}G\int \bar{\psi}\gamma_5\psi\tilde{\varphi}\mathrm{d}V - \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\int \bar{\psi}\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\psi\nabla\tilde{\varphi}\mathrm{d}V \tag{32.21}$$

但由 (4.39) 式和 (4.40) 式知

$$\boxed{\gamma_4\gamma_5\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma}}$$

所以 (32.21) 式可写为

$$\boxed{\hat{H}_1 = -G\int \psi^\dagger\rho_2\psi\tilde{\varphi}\mathrm{d}V - \frac{g}{\mu}\int \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi\nabla\tilde{\varphi}\mathrm{d}V} \tag{32.22}$$

上式中 $\rho_2 = \mathrm{i}\gamma_4\gamma_5$.

习　题

试证明在旋量场与标量场相互作用的情况下, 它们运动的方程式应为

$$\Box\varphi - m^2\varphi = -\mathrm{i}G\bar{\psi}\psi + \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\psi}\gamma_i\psi$$

$$\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + m\psi = \mathrm{i}G\psi\varphi + \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\gamma_i\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_k}\gamma_k - m\bar{\psi} = -\mathrm{i}G\varphi\bar{\psi} - \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\bar{\psi}\gamma_i$$

参 考 文 献

Schwinger J. Phys. Rev., 1948, 74(10): 1439.

§33 相互作用表象

1. 相互作用表象中概率幅的运动方程式

我们由 (16.4) 式知道在 Schrödinger 表象中, 场在作用的情况下, 概率幅 Ψ_{S} 随时间的变化规律应为

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}(t)}{\partial t} = (\hat{H}_{\mathrm{S0}} + \hat{H}_{\mathrm{S1}})\,\Psi_{\mathrm{S}}(t) \tag{33.1}$$

其中 $\hat{H}_{\mathrm{S0}}$ 为在 Schrödinger 表象中自由粒子的哈密顿算符, $\hat{H}_{\mathrm{S1}}$ 则为粒子间相互作用的哈密顿算符. $\hat{H}_{\mathrm{S0}}$ 和 $\hat{H}_{\mathrm{S1}}$ 都是不随时间而变化的.

Schrödinger 表象有一个缺点, 就是在研究粒子的相互作用的时候, 概率幅的变化不仅与相互作用的哈密顿 $\hat{H}_{\mathrm{S1}}$ 有关, 而且还与自由粒子的哈密顿有关, 这样造成处理问题不必要的复杂化. 事实上在研究粒子的相互作用、相互转化的时候, 这些问题应该仅与相互作用的哈密顿有关. 为了达到这个目的, 我们可使概率幅经过某种变换, 经过了这种变换以后, 新的概率幅对时间的变化可以仅与相互作用的哈密顿有关. 这种表象称为相互作用表象.

设状态幅度 $\Psi_{\mathrm{S}}(t)$ 经过一个变换矩阵 $V(t)$ 的作用变为新的概率幅 $\Phi(t)$:

$$\boxed{\Phi(t) = V(t)\,\Psi_{\mathrm{S}}(t)} \tag{33.2}$$

或

$$\Psi_{\mathrm{S}}(t) = V^{-1}(t)\,\Phi(t) \tag{33.3}$$

并设 $V(t)$ 为一个么正变换, 即

$$\boxed{V^{\dagger}V = VV^{\dagger} = I, \quad V^{\dagger} = V^{-1}} \tag{33.4}$$

由 (33.2) 式并考虑 (33.1) 式可知

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} &= \mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\,\Psi_{\mathrm{S}}(t) + \mathrm{i}V(t)\frac{\partial \Psi_{\mathrm{S}}}{\partial t} \\ &= \mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\,\Psi_{\mathrm{S}}(t) + V(t)\hat{H}_{\mathrm{S0}}\,\Psi_{\mathrm{S}}(t) + V(t)\hat{H}_{\mathrm{S1}}\,\Psi_{\mathrm{S}}(t)\end{aligned} \tag{33.5}$$

为了使概率幅的变化仅与 $\hat{H}_{\mathrm{S1}}$ 有关, 我们设

$$\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t} = -V(t)\hat{H}_{\mathrm{S0}} \tag{33.6}$$

即
$$V(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{S}0}t} \tag{33.7}$$

在这种特殊变换的情况下的表象, 我们称为相互作用表象, 其概率幅以 $\Phi_{\mathrm{I}}(t)$ 表示, 即
$$\Phi(t)\equiv\Phi_{\mathrm{I}}(t) \tag{33.8}$$

将 (33.6) 式代入 (33.5) 式并利用 (33.4) 式和 (33.2) 式可知
$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t}&=V(t)\hat{H}_{\mathrm{S}1}V^{-1}(t)V(t)\,\Psi_{\mathrm{S}}(t)\\&=V(t)\hat{H}_{\mathrm{S}1}V^{-1}(t)\,\Phi(t)\end{aligned} \tag{33.9}$$

设在相互作用表象中的相互作用的哈密顿算符为
$$\boxed{\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)=V(t)\hat{H}_{\mathrm{S}1}V^{-1}(t)} \tag{33.10}$$

则由 (33.9) 式知
$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t}=\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)\,\Phi_{\mathrm{I}}(t)} \tag{33.11}$$

这是在相互作用表象中概率幅随时间变化的方程式, 其变化仅与相互作用的哈密顿 $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ 有关, 在 Schrödinger 表象中算符 $\hat{H}_{\mathrm{S}1}$ 是与时间无关的. 但因变换矩阵 $V(t)$ 与时间有关, 因此由 (33.10) 式知道, 在相互作用表象中, 哈密顿算符 $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ 是与时间有关的, 这也是相互作用表象与 Schrödinger 表象的不同点.

2. 在相互作用表象中物理量的算符随时间变化的规律

将 (33.10) 式的关系式扩充, 则在 Schrödinger 表象和在相互作用表象中物理量算符间的关系应定义为
$$\boxed{V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)=\hat{F}_{\mathrm{I}}(t)} \tag{33.12}$$

$\hat{F}_{\mathrm{S}}$ 是在 Schrödinger 表象中的算符, 它是不随时间而变的, 即
$$\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{S}}}{\partial t}=0 \tag{33.12$'$}$$

将 (33.12) 式对时间微分, 并考虑 (33.12′) 式可得
$$\mathrm{i}\frac{\partial F_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)+\mathrm{i}V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}\frac{\partial V^{-1}(t)}{\partial t} \tag{33.13}$$

但因
$$V^{-1}V=I \tag{33.14}$$

则
$$\frac{\partial V^{-1}}{\partial t}V + V^{-1}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

或
$$\frac{\partial V^{-1}}{\partial t} = -V^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1} \tag{33.15}$$

将 (33.6) 式和 (33.15) 式代入 (33.13) 式, 并考虑 (33.14) 式可得

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t} &= \mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t) - \mathrm{i}V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)\frac{\partial V(t)}{\partial t}V^{-1}(t) \\ &= -V(t)\hat{H}_{\mathrm{S0}}V^{-1}(t)V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t) + \\ &\quad V(t)\hat{F}_{\mathrm{S}}V^{-1}(t)V(t)\hat{H}_{\mathrm{S0}}V^{-1}(t) \end{aligned} \tag{33.16}$$

利用 (33.12) 式可将上式变为

$$\boxed{\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{I}}}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}_{\mathrm{I0}}, \hat{F}_{\mathrm{I}}]_-} \tag{33.17}$$

其中 $\hat{H}_{\mathrm{I0}} = V(t)\hat{H}_{\mathrm{S0}}V^{-1}(t)$, (33.17) 式就是物理量算符在相互作用表象中对时间变化的规律.

现在让我们来总结一下, 相互作用表象的特点是什么? 它与其他表象有什么异同之处?

(1) 在相互作用表象中概率幅 $\Phi_{\mathrm{I}}(t)$ 和算符 $\hat{F}_{\mathrm{I}}$ 都是随时间而变化的.

(2) $\Phi_{\mathrm{I}}(t)$ 随时间变化的规律, 在形式上和 Schrödinger 表象一样, 即

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t} = \hat{H}_{\mathrm{I}}(t)\Phi_{\mathrm{I}}(t)$$

但 $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)$ 仅是相互作用的哈密顿, 并且是随时间而变的.

(3) 物理量算符 $\hat{F}_{\mathrm{I}}$ 随时间的变化, 在形式上和 Heisenberg 表象一样, 即

$$\frac{\partial \hat{F}_{\mathrm{I}}}{\partial t} = \mathrm{i}[\hat{H}_{\mathrm{I0}}, \hat{F}_{\mathrm{I}}]_-$$

但应注意其中的哈密顿算符不是总哈密顿算符而是自由粒子的哈密顿算符 $\hat{H}_{\mathrm{I0}}$.

3. 在相互作用表象中概率幅变化的积分方程式

我们知道在相互作用表象中, 概率幅随时间变化的规律由 (33.11) 式可知为

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}{\partial t} = -\mathrm{i}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)\Phi_{\mathrm{I}}(t) \tag{33.18}$$

将上式对 t 进行积分可得

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t) = -\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} H_{\mathrm{I}}(t_1)\,\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)\mathrm{d}t_1 + C \tag{33.19}$$

C 为积分常数. 设 $t = t_0$, 则 (33.19) 式中的积分因上下限皆为 t_0, 应该等于零, 因此

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t_0) = C$$

所以

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{I}}(t) = \Phi_{\mathrm{I}}(t_0) - i\int_{t_0}^{t} H_{\mathrm{I}}(t_1)\,\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)\mathrm{d}t_1} \tag{33.20}$$

这个方程式是包含未知函数 $\Phi_{\mathrm{I}}(t)$ 的积分方程式, 也是在相互作用表象中决定概率幅随时间变化的方程式.

习　题

试证明在相互作用表象中, 自由粒子的哈密顿算符和在 Schrödinger 表象中的相同, 即

$$\hat{H}_{\mathrm{I}0} = \hat{H}_{\mathrm{S}0}$$

参 考 文 献

[1] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955: §15a.

[2] Dyson F J. Phys. Rev., 1949, 75: 486.

§34 $U(t,t_0)$ 矩阵和它的性质

1. $U(t,t_0)$ 矩阵的定义

$U(t,t_0)$ 矩阵是一个变换矩阵, 它可以将相互作用表象中 t_0 时刻的概率幅 $\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)$ 变为 t 时刻的概率幅, 即

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{I}}(t)=U(t,t_0)\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)} \tag{34.1}$$

这就是说, 只要我们寻找到 $U(t,t_0)$ 变换矩阵, 并且知道了某一时刻 t_0 粒子的概率幅, 依据 (34.1) 式, 我们就可以求得任何时刻的概率幅. 因此知道了 $U(t,t_0)$ 矩阵, 可以使我们研究讨论的问题大大简化. $U(t,t_0)$ 矩阵既然是将某一时刻的概率幅变为另一时刻的概率幅, 那么它一定是两个时刻的函数, 即 t 和 t_0 的函数.

(34.1) 式也是 $U(t,t_0)$ 矩阵的定义.

为了研究 $U(t,t_0)$ 矩阵的具体形式, 我们必须首先求得 $U(t,t_0)$ 矩阵所遵守的方程式. 由 (33.20) 式我们知道

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t)=\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)\mathrm{d}t_1 \tag{34.2}$$

将 (34.1) 式代入上式可得

$$U(t,t_0)\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)=\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)U(t_1,t_0)\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)\mathrm{d}t_1 \tag{34.3}$$

(34.3) 式等号右边积分中的 $\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)$ 与被积分变量 t_1 无关, 故 $\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)$ 可从等号两边消去, 而得

$$\boxed{U(t,t_0)=1-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)U(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1} \tag{34.4}$$

这就是 $U(t,t_0)$ 矩阵所必须遵守的积分方程式.

将 (34.1) 式代入 (33.11) 式还可求得 $U(t,t_0)$ 矩阵的微分方程式:

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}=\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0)} \tag{34.5}$$

(34.4) 式也可以由 (34.5) 式直接求得.

2. $U(t,t_0)$ 矩阵的性质

(1) $$\boxed{U(t_0,t_0)=U(t,t)=1} \tag{34.6}$$

设 (34.1) 式中的 $t=t_0$, 则

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)=U(t_0,t_0)\Phi_{\mathrm{I}}(t_0)$$

所以 $$U(t_0,t_0)=1 \tag{34.7}$$

同理, 设 (34.1) 式中的 $t_0=t$, 可证明

$$U(t,t)=1 \tag{34.8}$$

(2) $$\boxed{U(t_1,t_3)=U(t_1,t_2)U(t_2,t_3)} \tag{34.9}$$

因为 $$\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)=U(t_1,t_2)\Phi_{\mathrm{I}}(t_2) \tag{34.10}$$

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t_2)=U(t_2,t_3)\Phi_{\mathrm{I}}(t_3) \tag{34.11}$$

将 (34.11) 式代入 (34.10) 式可知

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)=U(t_1,t_2)U(t_2,t_3)\Phi_{\mathrm{I}}(t_3) \tag{34.12}$$

但从另一方面按照 $U(t_1,t_3)$ 的定义, 有

$$\Phi_{\mathrm{I}}(t_1)=U(t_1,t_3)\Phi_{\mathrm{I}}(t_3) \tag{34.13}$$

将 (34.13) 式与 (34.12) 式比较可知

$$U(t_1,t_3)=U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) \tag{34.14}$$

(3) $$\boxed{U(t,t')=U(t,t_1)U(t_1,t_2)\cdots U(t_n,t')} \tag{34.15}$$

利用 (34.9) 式重复多次可证明上式.

(4) $$\boxed{U(t_2,t_1)=U^{-1}(t_2,t_1)}$$

设 (34.9) 式中的 $t_1=t_3$, 则

$$U(t_1,t_1)=U(t_1,t_2)U(t_2,t_1) \tag{34.16}$$

因为 $$U(t_1,t_1)=1 \tag{34.17}$$

则

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_1)=1$$

但因 $$U(t_1,t_2)U^{-1}(t_1,t_2)=1 \tag{34.18}$$

将 (34.17) 式与 (34.18) 式比较可得

$$U(t_2,t_1)=U^{-1}(t_1,t_2) \tag{34.19}$$

(5) $$\boxed{\begin{array}{l}U^{\dagger}(t_1,t_2)U(t_1,t_2)=1\\ U(t_1,t_2)U^{\dagger}(t_1,t_2)=1\end{array}} \tag{34.20}$$

即 $U(t_1,t_2)$ 为一个么正变换矩阵. 其证明如下:

由 (34.5) 式知

$$\mathrm{i}\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}=\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)U(t,t_0) \tag{34.21}$$

因为哈密顿算符是一个厄米算符, 即

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}^{\dagger}=\hat{H}_{\mathrm{I}} \tag{34.22}$$

利用这个性质可知 (34.21) 式的共轭方程式应为

$$-\mathrm{i}\frac{\partial U^{\dagger}(t,t_0)}{\partial t}=U^{\dagger}(t,t_0)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) \tag{34.23}$$

将 (34.21) 式从左方乘以 $U^{\dagger}(t,t_0)$, (34.23) 式从右方乘以 $U(t,t_0)$, 并将所得两式相减, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}[U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)]=0 \tag{34.24}$$

所以 $$U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)=C \tag{34.25}$$

C 为一不依时间而变的常数, 在 (34.25) 式中, 设 $t=t_0$, 并考虑 (34.6) 式的性质, 可知

$$U(t_0,t_0)=1,\quad U^{\dagger}(t_0,t_0)=1$$

所以 $$U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)=1 \tag{34.26}$$

同理, 可证明 (34.20) 式的第二式.

3. $U(t,t_0)$ 矩阵的级数解

场的相互作用, 哈密顿一般可写为下面的形式:

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t)=gK(t) \tag{34.27}$$

g 为相互作用常数, $k(t)$ 为场函数或场函数组成的不变量, 设

$$\lambda=(-\mathrm{i}g) \tag{34.28}$$

则利用 (34.27) 式和 (34.28) 式, (34.4) 式可变为下面的形式:

$$U(t,t_0)=1+\lambda\int_{t_0}^{t}K(t_1)U(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1 \tag{34.29}$$

(34.29) 式为一含有参数 λ 的积分方程式. 如果

$$|\lambda|<1 \tag{34.29'}$$

即在电磁场作用的情况下, 或是其他弱作用的情况下, (34.29) 式的积分方程式, 可有以 λ 展开的级数解, 设这个解的形式为

$$U(t,t_0)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k U_k(t,t_0) \tag{34.30}$$

上式中 $U_k(t,t_0)$ 为展开式中参数 λ 的 k 次方的系数, 这个系数应为 t 和 t_0 的函数.

为了求 $U_k(t,t_0)$ 的具体形式, 将 (34.30) 式代入 (34.29) 式, 则

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k U_k(t,t_0)=&1+\lambda\int_{t_0}^{t}K(t_1)\\&\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k U_k(t_1,t_0)\right]\mathrm{d}t_1\end{aligned} \tag{34.31}$$

(34.30) 式既为 (34.29) 式的解, 则 (34.31) 式等号两边参数 λ 同方次的系数必须相等, 利用比较系数的方法可知

$$\left.\begin{aligned} U_1(t,t_0) &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 K(t_1) \\ U_2(t,t_0) &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 K(t_1) U_1(t,t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 K(t_1)K(t_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_k(t,t_0) &= \int_{0}^{t} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} \mathrm{d}t_k K(t_1)K(t_2)\cdots K(t_k) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{34.32}$$

将 (34.32) 式中各 $U_k(t,t_0)$ 代入 (34.30) 式, 可知积分方程 (34.29) 式的解应具有以下的形式:

$$\begin{aligned} U(t,t_0) =& 1 + \lambda \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 K(t_1) + \lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 K(t_1)K(t_2) + \cdots \\ &+ \lambda^k \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} \mathrm{d}t_k K(t_1)K(t_2)\cdots K(t_k) + \cdots \end{aligned} \tag{34.33}$$

利用 (34.28) 式和 (34.27) 式, 将 (34.33) 式中的 $K(t_i)$ 还原为 $\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_i)$, 则

$$\begin{aligned} U(t,t_0) =& 1 + (-\mathrm{i}) \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1) + (-\mathrm{i})^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2) + \\ &\cdots + (-\mathrm{i})^k \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{k-1}} \mathrm{d}t_k \hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\cdots\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_k) + \cdots \end{aligned} \tag{34.34}$$

(34.34) 式中各个积分的上限为 $t_1, t_2, \cdots, t_{k-1}$, 各不相同, 因此, 计算起来比较困难, 为了使这些积分的上限一致, 我们研究下面的二重积分:

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)] \tag{34.35}$$

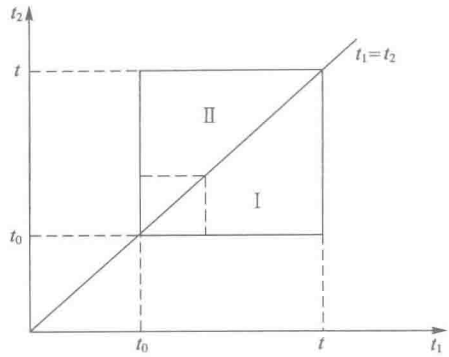
因由 (29.21) 式 $p-$ 乘积的定义可知

$$p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)] = \begin{cases} \hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2), & \text{当} t_1 \geqslant t_2 \\ \hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1), & \text{当} t_1 \leqslant t_2 \end{cases} \tag{34.36}$$

所以 (34.35) 式的积分应分解为两个积分:

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)]$$

$$=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1) \tag{34.36'}$$



利用上面可知, (34.36′) 式右边第一个积分的积分范围为三角形 I, 等二个积分的积分范围为三角形 Ⅱ. 在第二个积分中也可先对 t_1 进行积分, 然后再对 t_2 进行积分, 则其等值的积分应为

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_1\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1) \tag{34.37}$$

将上式中的积分变量 t_1 变为 t_2, t_2 变为 t_1, 其结果根据积分的原理应该不变. 因此, (34.36′) 式右边第二个积分

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2) \tag{34.37'}$$

所以 (34.36′) 右边两个积分是完全一样的, 利用这个结果, 则有

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)]=2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2) \tag{34.38}$$

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)=\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)] \tag{34.38'}$$

利用上述方法, 可将 (34.38) 式推广到 n 重积分的情况, 其结果应为

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\cdots\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_n)\\ =\ &\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_n p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\cdots\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_n)]\end{aligned} \tag{34.39}$$

(34.39) 式等号左边的积分的上限是不一样的, 而右边的积分的上限则完全是一致的, 这样可帮助我们进行计算.

将 (34.39) 式代入 (34.34) 式, 可知 $U(t,t_0)$ 矩阵应具有以下的形式:

$$\boxed{\begin{aligned} U(t,t_0) = \; & 1+\frac{(-\mathrm{i})}{1!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)]+ \\ & \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)]+\cdots+ \\ & \frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_k p[\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\cdots\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_k)]+\cdots \end{aligned}} \tag{34.40}$$

(34.40) 式的级数, 也可形式地表示为下面的指数形式:

$$\boxed{U(t,t_0)=p[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\hat{H}_{\mathrm{I}}(t')}]} \tag{34.41}$$

习　题

试直接由相互作用表象中概率幅积分方程式

$$\Phi(t)=\Phi(t_0)-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\Phi(t_1)\mathrm{d}t_1$$

证明其解为

$$\begin{aligned}\Phi(t)=&\Big[1+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)+(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{H}_{\mathrm{I}}(t_2)\\&+\cdots\Big]\Phi(t_0)\end{aligned}$$

由此也可求得 $U(t,t_0)$ 具有 (34.34) 式的形式.

参 考 文 献

[1] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955.

[2] Hochstadt H. Integral Equations. Wiley InterScience, 1989.

§35 S 矩阵和它在量子电动力学中的形式

1. S 矩阵的定义

量子场论主要的目的是研究粒子的相互作用和它们相互转化的规律, 粒子的系统在没有相互作用以前的状态，我们称为初态；相互作用了以后或是已经转化了的状态, 则称为末态. 比如拿正负电子湮没的现象来说,

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \longrightarrow \gamma + \gamma'$$

在这个粒子反应中的初态是一个自由正电子和一个自由负电子的状态, 而末态则是两个自由光子的状态.

在量子力学中, 一般来说所研究的粒子是没有产生和消灭的, 也就是说没有研究粒子相互转化的现象. 因此, 在量子力学中, 初态和末态的差别, 仅是粒子的能量和动量上有所不同, 而在量子场论中初态和末态的意义要更广泛一些, 除了初态和末态的粒子的能量和动量可以有不同之处, 初态和末态中所包含的粒子也可以完全不相同, 刚才所谈到的正负电子湮没而变成两个光子的现象, 就是这样的例子.

一般来说粒子相互作用的时间是有限的, 我们假设粒子相互作用的时间是在 $t=0$ 附近先后的一段时间范围, 则粒子初态的概率幅, 可以用 $\Phi(-\infty)$ 来表示, 而末态则可用 $\Phi(+\infty)$ 来表示. 因为在 $t=-\infty$ 时, 这些粒子还没有相互作用, 而 $t=+\infty$ 时, 这些粒子作用完毕了. 因此, 有

$$\text{初态} \quad \Phi_{\mathrm{i}} \equiv \Phi(-\infty), \quad \text{末态} \quad \Phi_{\mathrm{f}} \equiv \Phi(+\infty) \tag{35.1}$$

但由上一节知道 $\Phi(t_2) = U(t_2, t_1)\,\Phi(t_1)$

所以

$$\Phi(+\infty) = U(+\infty, -\infty)\,\Phi(-\infty) \tag{35.2}$$

这个使粒子系统的概率幅由初态变到末态的变换矩阵 $U(+\infty, -\infty)$, 我们称为 S 矩阵, 即

$$\boxed{S \equiv U(+\infty, -\infty)} \tag{35.3}$$

(35.3) 式也是 S 矩阵的定义.

因此利用 S 矩阵和 (35.1) 式,(35.2) 式可以简写为

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{f}} = S\Phi_{\mathrm{i}}} \tag{35.4}$$

(35.4) 式说明了只要知道了 S 矩阵, 就可以知道初态和末态的关系, 以后我们将进一步了解到, 只要我们知道了 S 矩阵, 就可以计算出粒子相互作用和相互

转化的概率, 以及它们的散射的截面. 因此研究 S 矩阵的性质, 和如何具体地计算它，是量子场论中相当重要的一部分.

因为 $U(t,t_0)$ 矩阵是一个么正变换矩阵, 所以 S 矩阵也是一个么正变换矩阵, 即

$$\boxed{S^\dagger S = SS^\dagger = I, \quad S^\dagger = S^{-1}} \tag{35.5}$$

在 (34.40) 式中, 如我们假设 $t=+\infty, t_0=-\infty$, 则可以得到 S 矩阵的级数展开形式:

$$\begin{aligned} S =& 1 + \frac{(-\mathrm{i})}{1!}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 p[H_{\mathrm{I}}(t_1)] + \\ & \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_2 p[H_{\mathrm{I}}(t_1)H_{\mathrm{I}}(t_2)] + \cdots \\ & + \frac{(-\mathrm{i})^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_k p[H_{\mathrm{I}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{I}}(t_k)] + \cdots \end{aligned} \tag{35.6}$$

(35.6) 式也可形式地表示为

$$S = p[\mathrm{e}^{(-\mathrm{i})\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t' H_{\mathrm{I}}(t')}] \tag{35.7}$$

为了将来具体计算 S 时方便起见, 我们通常设

$$\boxed{S_n \equiv \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t_n p[H_{\mathrm{I}}(t_1)\cdots H_{\mathrm{I}}(t_n)]} \tag{35.8}$$

S_n 称为第 n 级的 S 矩阵, 由 (35.6) 式可知

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \quad \text{并且} \quad S_0 \equiv I} \tag{35.9}$$

2. 量子电动力学中的 S 矩阵

由 (32.20) 式我们知道电子或正电子与光子相互作用的哈密顿算符为

$$\hat{H}_{\mathrm{I}}(t) = -\mathrm{i}e\int \bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x)A_i(x)(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{35.10}$$

为了书写简化起见, 我们常设

$$\boxed{\hat{A}(x) \equiv \gamma_i A_i(x)} \tag{35.11}$$

则 (35.10) 式可简写为

$$\boxed{\hat{H}_I(t) = -\mathrm{i}e \int \bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)(\mathrm{d}\boldsymbol{r})} \tag{35.12}$$

将 (35.12) 式代入 (35.8) 式可得量子电动力学中 S 矩阵的具体形式:

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{(-e)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_n p \left[\int \bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1) \cdots \right. \\ & \left. \int \bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n)(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_n) \right] \end{aligned} \tag{35.13}$$

但因 $$(\mathrm{d}x_i) = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i)\mathrm{d}t_i$$

则 (35.13) 式的 S_n 矩阵可写为四维空间积分的形式, 即

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{(-e)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{d}x_1) \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{d}x_n) p[(\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)) \cdots \\ & (\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n))] \end{aligned} \tag{35.14}$$

在 (35.14) 式 S_n 矩阵中同一个时间坐标的费米场函数是成对的, 因此, 将 (35.14) 式的被积分函数中的场函数进行时序的排列时, 这些成对的同时间的费米场函数 $\bar{\psi}_\alpha(x_i)\psi_\beta(x_i)$ 总是应该同时置换的, 也就是说它们进行时序排列时的费米场函数的置换总次数永远是偶数, 它们置换的费米宇称, 因此是永远不变的. 在这种情况下,$p-$ 乘积和 $T-$ 乘积是没有什么区别的, 所以在量子电动力学中 S_n 矩阵的被积分函数, 通常是用 $T-$ 乘积表示, 即

$$\boxed{\begin{aligned} S_n =& \frac{(-e)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{d}x_1) \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{d}x_n) T[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1) \\ & \cdots \bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n)] \end{aligned}} \tag{35.15}$$

以后我们将知道用 $T-$ 乘积对于 S_n 矩阵的进一步展开是有很大的好处的.

习　题

试由 S 矩阵的么正性质证明

$$\begin{aligned} & S_1^\dagger + S_1 = 0 \\ & S_1^\dagger S_1 + S_2^\dagger + S_2 = 0 \\ & S_1^\dagger S_2 + S_2^\dagger S_1 + S_3^\dagger + S_3 = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

参考文献

[1] Dyson F J. Phys. Rev., 1949, 75: 486.

[2] Lifshitz E M, Landau L D. Quantum Electrodynamics. Butterworth-Heinemann, 1982.

§36 $T-$ 乘积展开的 Wick 定理和 S 矩阵的展开式

1. $T-$ 乘积展开的 Wick 定理

从上一节中, 我们知道量子电动力学中的 S 矩阵的具体形式为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S_n,\quad S_0\equiv I \tag{36.1}$$

$$\begin{aligned}S_n=&\frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{d}x_1)\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{d}x_n)T[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\cdots\\&\bar{\psi}(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n)]\end{aligned} \tag{36.2}$$

(36.2) 式的积分式中, 被积分函数是数个场算符的 $T-$ 乘积. 因此我们要计算这个积分, 就必先研究 $T-$ 乘积的展开式. 也就是两个以上的场算符的 $T-$ 乘积的展开的规律. 这个规律首先是 Wick 得到的, 因此我们称为 $T-$ 乘积展开的 Wick 定理, 其内容如下:

"n 个场算符的 $T-$ 乘积等于这 n 个算符的 $N-$ 乘积与包括了所有可能的各种耦合式的 $N-$ 乘积之和."

Wick 定理的数学表示如下:

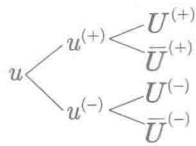
$$\begin{aligned}T[u_1u_2u_3\cdots u_n]=&N[u_1u_2u_3\cdots u_n]+\\&\sum_{i\neq j,i,j=1,\cdots,n}N[u_1u_2\cdots\overbrace{u_i\cdots u_j}\cdots u_n]+\\&\sum_{l\neq m,l,m=1,\cdots,n}N[u_1\cdots\overbrace{u_i\cdots u_j}\cdots\overbrace{u_l\cdots u_m}\cdots u_n]+\\&\cdots+\sum N[u_i\text{全部可能的耦合}]\end{aligned} \tag{36.3}$$

其中

$$\begin{aligned}N[u_1\cdots\overbrace{u_i\cdots u_j}\cdots u_n]\equiv&(-1)^{\varepsilon_{ij}}\overbrace{u_iu_j}N[u_1\cdots\\&u_{i-1}u_{i+1}\cdots u_{j-1}u_{j+1}\cdots u_n]\end{aligned} \tag{36.4}$$

ε_{ij} 代表将算符 u_i 和 u_j 依次置换到所有算符的最左方时, 所需要的费米算符的置换次数. 如 u_i、 u_j 为玻色场算符, 则 $\varepsilon_{ij}=0$.

u 代表任何一种场函数的产生或消灭粒子的算符, 即



(36.5)

为了方便起见,u_i 中的四维空间坐标以 x_i 表示之, 即

$$u_i \equiv u_i(x_i) \tag{36.6}$$

现在让我们来证明 Wick 定理:

因为 (36.3) 式的定理对于任何一种次序的 u_i 算符的排列皆满足, 为了证明过程简便起见, 我们可假设这几个算符 $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ 已经按着时序的次序排列好了, 即

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant t_3 \geqslant \cdots \geqslant t_n$$

因此按 $T-$ 乘积的定义, 应该有

$$T[u_1 u_2 u_3 \cdots\cdots u_n] = [u_1 u_2 u_3 \cdots u_n] \tag{36.6'}$$

但是

$$[u_1 u_2 \cdots u_n] = (-1)^{\varepsilon_{ij}} u_i u_j [u_1 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_{j-1} u_{j+1} \cdots u_n] \tag{36.7}$$

但从 (29.26) 式我们知道

$$T[u_i u_j] = N[u_i u_j] + \overbrace{u_i u_j} \tag{36.8}$$

因 $u_i u_j$ 已按时序次序排列, 所以

$$u_i u_j = N[u_i u_j] + \overbrace{u_i u_j} \tag{36.9}$$

将 (36.9) 式代入 (36.7) 式可得

$$\begin{aligned}[u_1 u_2 \cdots u_n] =& (-1)^{\varepsilon_{ij}} N[u_i u_j][u_1 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_{j-1} u_{j+1} \cdots u_n] \\ &+ (-1)^{\varepsilon_{ij}} \overbrace{u_i u_j} [u_1 \cdots u_{i-1} u_{i+1} \cdots u_{j-1} u_{j+1} \cdots u_n]\end{aligned} \tag{36.10}$$

利用 (36.4) 式的表示法, 并用 N_{ij} 符号代表 u_i 和 u_j 两算符是按标准次序排列, 则可将 (36.10) 式变为

$$[u_1 u_2 \cdots\cdots u_n] = N_{ij} [u_1 \cdots u_i \cdots u_j \cdots u_n] + [u_1 \cdots \overbrace{u_i \cdots u_j} \cdots u_n] \tag{36.11}$$

这样继续对 (36.11) 式多次重复进行 (36.7)— (36.10) 式的步骤, 最后就可得到 (36.3) 式.

2. 量子电动力学中的耦合式

量子电动力学的 S 矩阵中包含正负电子的旋量场函数 $\psi_\alpha(x)$、$\Psi_\alpha(x)$ 和光子的向量场函数 $A_i(x)$, 因此它们的耦合式可有下列几种 [参看 (29.33)— (29.38) 等式]:

$$\boxed{\begin{aligned}&\overbrace{A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\delta_{\alpha\beta}\\&\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} = -\frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)\\&\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\beta\alpha}(x_2-x_1)\end{aligned}} \tag{36.12}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = \overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} = 0\\&\overbrace{\psi_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = 0\end{aligned}} \tag{36.12$'$}$$

因此在计算量子电动力学 S 矩阵中的耦合式的时候, 仅需计算 (36.12) 式中三种耦合情况即可, 其余 (36.12′) 式中的四种耦合形式皆为零, 可不必考虑.

此外, 在量子电动力学的 S 矩阵中因为有 $\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x)$ 形式的因子存在, 因此还有

$$\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)} = \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\beta\alpha}(0) \tag{36.13}$$

类型的耦合式存在, 其中 $\bar{\psi}_\alpha(x)$ 和 $\psi_\beta(x)$ 的四维空间坐标是完全相同的, 这就造成了严重的发散问题.

因为由 (28.50) 式知道

$$S^{\mathrm{F}}(0) = \frac{2}{\mathrm{i}}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{i}\gamma_i p_i - m}{p_i^2+m^2}(\mathrm{d}p)$$

在这个积分中包括了发散形式的积分

$$\int\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{p}^2+(m^2-p_0^2)} = \int_0^\infty\frac{4\pi p^2\mathrm{d}p}{p^2+(m^2-p_0^2)} = \infty$$

所以

$$\boxed{S^{\mathrm{F}}(0)=\infty} \tag{36.14}$$

也即

$$\boxed{\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)}=\infty} \tag{36.15}$$

现在我们来研究这个发散的原因和它的物理意义, 由 (14.22) 式知道, 自由正负电子的电流密度为

$$j_i = \mathrm{i}e\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x) = \mathrm{i}e\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)(\gamma_i)_{\alpha\beta} \tag{36.16}$$

因为

$$T[\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)] = N[\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)] + \overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} \tag{36.17}$$

利用上式可导出

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x) &= \lim_{x_1\to x_2} T[\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)] \\ &= N[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)] + \overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)}\end{aligned} \tag{36.18}$$

但因标准乘积的真空平均值等于零, 所以由 (36.18) 式和 (36.16) 式以及 (36.15) 式可得出重要的结论, 即

$$\langle j_i\rangle_0 = \langle \mathrm{i}e\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)(\gamma_i)_{\alpha\beta}\rangle_0 = \infty$$

$$\boxed{\langle j_i\rangle_0 = \infty} \tag{36.19}$$

这就是说, 正负电子电流密度的真空平均值等于无限大. 这个现象是不值得奇怪的, 因为我们从前曾知道在真空中正负电子的电荷是无限大的, 那么电流密度发散的问题也就是自然的了.

由于这个发散的真空电流密度不是我们在现实物理现象中真正观察到的, 因此在计算 S 矩阵的时候, 我们也就没有必要去计算 (36.15) 式类型的耦合式, 也就是说, 在 S 矩阵中, 四维空间坐标相同的 $\bar{\psi}_\alpha(x)$ 和 $\psi_\beta(x)$ 的耦合式, 我们可以不必考虑它.

有些量子电动力学的书中, 为了消除上述的发散问题, 假设正负电子的电流密度不是 (36.16) 式的形式, 而是

$$\boxed{j_i = \mathrm{i}eN[\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x)]} \tag{36.20}$$

但由 (36.17) 式知道,(36.20) 式形式电流密度的假设, 也就等于不考虑其真空发散的部分, 从物理意义上来说, 它们消除这种发散问题的方法是和我们完全一致的.

3. S 矩阵的具体展开形式

现在我们利用 Wick 定理和 (36.12) 式中必要考虑的耦合式来研究量子电动力学中 S 矩阵的具体展开形式.

由 (36.1) 式和 (36.2) 式我们知道

$$S_0 = 1 \tag{36.21}$$

$$S_1 = -e\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{d}x_1)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1) \tag{36.22}$$

$$S_2 = \frac{e^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{d}x_1)\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{d}x_2)T\{[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)][\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)]\}$$

由 (36.3) 式的 Wick 定理可知, 上式中的被积分函数, 应为下列八项之和:

$$\begin{aligned}
&T[\bar{\psi}(x_1)\gamma_i\psi(x_1)A_i(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_j\psi(x_2)A_j(x_2)]\\
&\quad = N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_i\psi(x_1)A_i(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_j\psi(x_2)A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\overbrace{\bar{\psi}_\mu(x_1)\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)}(\gamma_j)_{\lambda\sigma}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\overbrace{\bar{\psi}_\mu(x_1)\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)}\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)(\gamma_j)_{\lambda\sigma}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\bar{\psi}_\mu(x_1)\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}\overbrace{A_i(x_1)\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)(\gamma_j)_{\lambda\sigma}}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\bar{\psi}_\mu(x_1)\overbrace{\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)}\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)(\gamma_j)_{\lambda\sigma}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\bar{\psi}_\mu(x_1)\overbrace{\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)}(\gamma_j)_{\lambda\sigma}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\bar{\psi}_\mu(x_1)\overbrace{\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)}\bar{\psi}_\lambda(x_2)\overbrace{\psi_\sigma(x_2)(\gamma_j)_{\lambda\sigma}}A_j(x_2)]\\
&\qquad + N[\bar{\psi}_\mu(x_1)\overbrace{\psi_\nu(x_1)(\gamma_i)_{\mu\nu}A_i(x_1)\bar{\psi}_\lambda(x_2)\psi_\sigma(x_2)(\gamma_j)_{\lambda\sigma}}A_j(x_2)]
\end{aligned} \tag{36.23}$$

或

$$\begin{aligned}
&T[\bar{\psi}(x_1)\gamma_i\psi(x_1)A_i(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_j\psi(x_2)A_j(x_2)]\\
&=N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_i\psi(x_1)A_i(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_j\psi(x_2)A_j(x_2)]\\
&\quad -\frac{1}{2}N[\bar{\psi}(x_2)\gamma_jA_j(x_2)S^{\mathrm{F}}(x_2-x_1)\gamma_iA_i(x_1)\psi(x_1)]\\
&\quad +\frac{1}{2}N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_iA_i(x_1)S^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\gamma_jA_j(x_2)\psi(x_2)]\\
&\quad +\frac{1}{2}N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_i\psi(x_1)D^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\bar{\psi}(x_2)\gamma_i\psi(x_2)]\\
&\quad -\frac{1}{2}N[\mathrm{tr}(S^{\mathrm{F}}(x_2-x_1)\gamma_iS^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\gamma_j)A_i(x_1)A_j(x_2)]\\
&\quad -\frac{1}{4}N[\bar{\psi}(x_2)\gamma_jS^{\mathrm{F}}(x_2-x_1)\gamma_i\psi(x_1)D^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\delta_{ij}]\\
&\quad +\frac{1}{4}N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_iS^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\gamma_j\psi(x_2)D^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\delta_{ij}]\\
&\quad -\frac{1}{8}N[\mathrm{tr}(S^{\mathrm{F}}(x_2-x_1)\gamma_iS^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\gamma_j)D^{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\delta_{ij}]
\end{aligned} \tag{36.23'}$$

(36.23′) 中的符号 $\mathrm{tr}(A)$ 代表矩阵 A 的主对角线元素之和, 即

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = A_{\alpha\alpha}} \tag{36.24}$$

依此定义可知

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB) = A_{\alpha\beta}B_{\beta\alpha}} \tag{36.25}$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB\cdots K) = A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}\cdots K_{\kappa\alpha}} \tag{36.26}$$

(36.23′) 式就是 S_2 矩阵被积函数的展开, 按同样方法可将 $S_3, S_4, \cdots$ 等高级的矩阵用 Wick 定理展开, 不过其形式更为复杂.

习　题

试用 Wick 定理将 S_3 矩阵的被积分函数的展开式中包含三个耦合式的各项写出.

参 考 文 献

Wick G C. Phys.Rev., 1950, 80(2): 268.

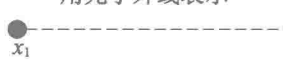
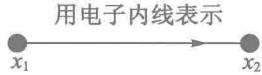
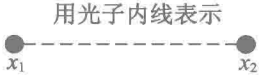
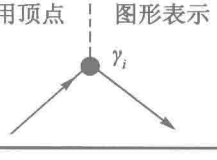
§37 S 矩阵的 Feynman 图解

1. Feynman 图解的规则

从上一节知道 S 矩阵是各级 S_n 矩阵之和, 而每一级的 S_n 矩阵又可用 Wick 展开定理分解成许多项, 这里每一项都应该有一定的物理意义, 也就是说,S 矩阵分解到最后的每一项都代表着粒子相互作用的某种反应. 对量子电动力学来说, 每项都代表着正负电子和光子相互作用中的某种反应. 为了使 S 矩阵有具体的物理意义, 也就是说要使 S 矩阵展开式和物理现象中的粒子各种反应联系起来,Feynman 创造了 S 矩阵的图解法, 这种图解法是非常形象化的, 对于我们具体研究、了解和计算 S 矩阵有很大帮助.

Feynman 图解的规则如下:

$$\left.\begin{array}{l}\text{正电子和负电子的运动用实线“————”代表}\\ \text{光子的运动用虚线“– – – –”代表}\end{array}\right\} \tag{37.1}$$

	S 矩阵中的数学符号	Feynman 图解表示法
1	$\psi(x_1)$, 即 $\psi^{(+)}(x_1)$ 或 $\psi^{(-)}(x_1)$, 各代表放出正电子或吸收负电子的算符	用入向电子外线表示 
2	$\overline{\psi}(x_1)$, 即 $\psi^{(+)}(x_1)$ 或 $\psi^{(-)}(x_1)$, 各代表放出负电子或吸收正电子的算符	用出向电子外线表示 
3	$A_i(x_1)$ 代表光子的放出或吸收	用光子外线表示 
4	耦合式 $\overbrace{\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\beta\alpha}(x_2 - x_1)$ 代表中间态的正负电子	用电子内线表示 
5	耦合式 $\overbrace{A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x_2 - x_1)\delta_{\alpha\beta}$ 代表中间态的光子或虚光子	用光子内线表示 
6	γ_i 矩阵代表正负电子和光子有一次作用 (有一个 γ_i 就有一个 e 或一个 $\hat{A}$)	用顶点 图形表示 

2. 量子电动力学中 Feynman 图解的实例

我们知道各级的 S_n 矩阵用 Wick 定理展开后, 可以有许多项, 每一项都代表正负电子和光子的相互作用的一种反应. 一定的反应就对应着一定形式的 S_n

矩阵展开后的被积分函数. 因此我们在研究 S 矩阵与粒子的反应的对应关系的时候, 只要具体地研究 S_n 矩阵展开后的被积分函数的形式就可以了, 至于它们前面的系数如 $(-e)^n$、$\dfrac{1}{n!}$ 等, 我们可以暂时不管. 知道了被积分函数的形式, 我们根据 Feynman 图解的规则就可判断, 它究竟是代表电动力学中的哪一种反应.

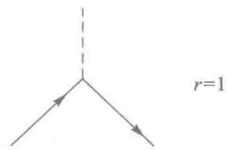
一般说来,S_n 矩阵的被积分函数和粒子的反应, 还不是完全一一对应的, 往往在 Wick 的展开式中, 有两种或两种以上的展开项是代表着一种 Feynman 图解, 我们用 r 来代表同一 Feynman 图解所对应的不同形式的 S_n 矩阵展开式的数目. 以后我们简称 r 为 Feynman 图解的等值数.

(1) 一级 S 矩阵的 Feynman 图解 $(n=1)$

一级 S 矩阵的展开式只有一项, 即

$$\bar{\psi}\hat{A}\psi \tag{37.2}$$

它的 Feynman 图解根据 (37.1) 的规则应为



这个 Feynman 图解可以代表以下几种量子电动力学中的反应:

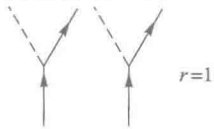
电子或正电子在电磁场中的散射;

光子被电子或正电子的吸收或放出;

正负电子偶的湮没或产生 (正负电子偶湮没为一个光子是不可能的).

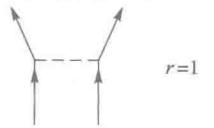
(2) 二级 S 矩阵的 Feynman 图解 $(n=2)$

① $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



两个完全独立产生的一级正负电子和光子的反应.

② $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

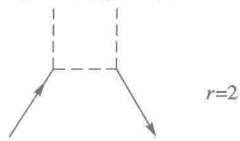


电子和电子的散射;

正电子和正电子的散射;

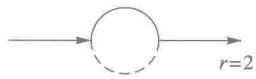
正电子和电子的散射.

③ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



光子对电子的散射 (Compton 效应);
正电子或电子放出或吸收两个光子;
正电子或电子在外场作用下的两次散射;
正电子或电子的韧致辐射;
正负电子偶的产生;
正负电子偶湮没为两个光子.

④ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



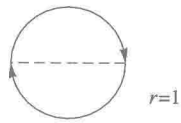
电子的自能 (电子与光子真空的作用).

⑤ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



光子的自能 (光子与正负电子真空的作用).

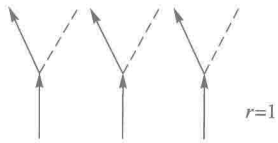
⑥ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



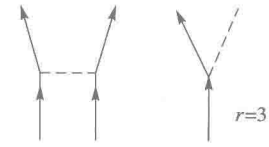
虚光子产生虚正负电子偶, 虚电子偶又湮没为虚光子 (真空—真空的过渡).

(3) 三级 S 矩阵的 Feynman 图解 $(n=3)$

① $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



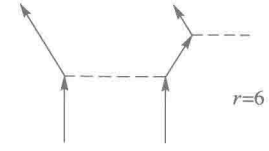
② $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



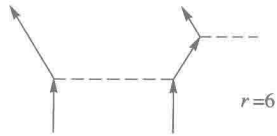
③ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



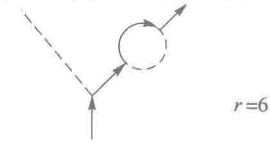
④ $(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)(\overline{\psi}\hat{A}\psi)$



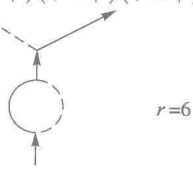
⑤ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



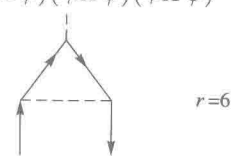
⑥ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



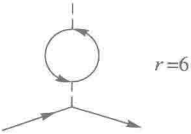
⑦ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



⑧ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



⑨ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

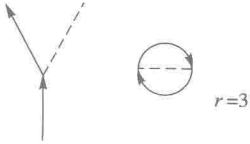


⑩ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

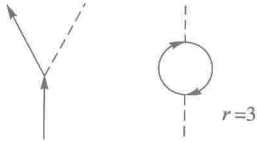


$(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

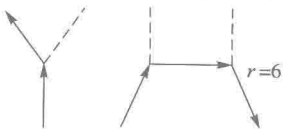
⑪ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



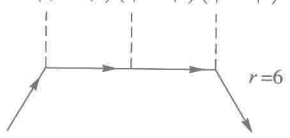
⑫ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



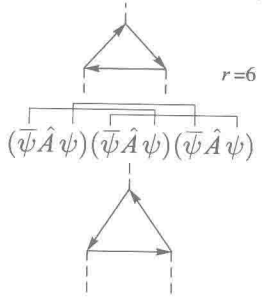
⑬ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



⑭ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



⑮ $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$



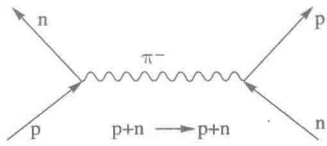
以上的 15 种三级 S 矩阵的 Feynman 图解的物理意义, 读者可作为练习自己解释.

3. 其他粒子间相互作用和转化的低级 Feynman 图解的几种例子

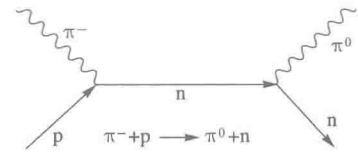
(1) π 介子与核子的作用:

——→ 代表核子线　　∿∿∿ 代表 π 介子线

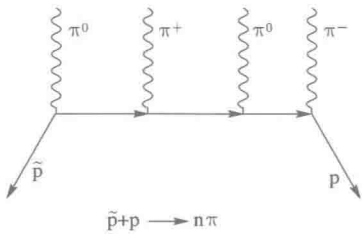
① 核子与核子的散射 (核力)



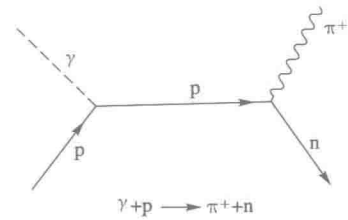
② π 介子与核子的非弹性散射



③ 核子与反核子湮没后产生数个 π 介子



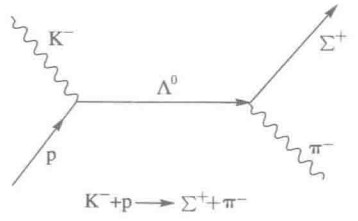
④ 光生 π 介子



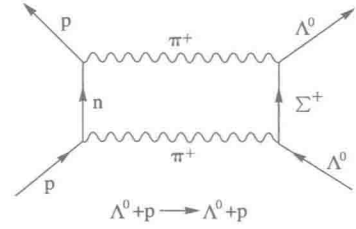
(2) 奇异粒子、核子与π介子间的互相作用[注一](强作用奇异量子数守恒)

——→ 代表核子或超子　　∿∿∿ 代表 K 介子或π介子

① K^-介子与核子的非弹性散射

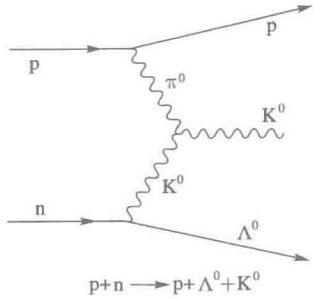


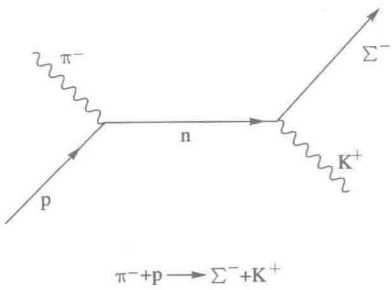
② Λ^0 超子与核子的作用 (超核核力)[注二]



③ 核子与核子碰撞产生超子与 K^0 介子

④ 介子与核子碰撞产生超子与 K^+ 介子





[注一]:

以上奇异粒子、核子与 π 介子的作用都是强作用, 在强作用的粒子的反应中必须核子数 n 守恒, 奇异量子数 S 守恒, 电荷守恒, 粒子的核子数与奇异量子数如下:

粒子	n	S	I_z(同位旋)
π^+, π^0, π^-	0	0	1,0,−1
p, n	1	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
K^+, K^0	0	+1	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
$K^-, \tilde{K}^0$	0	−1	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
Λ^0	1	−1	0
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1	−1	+1,0,−1
Ξ^-, Ξ^0	1	−2	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

Gell−mann 和 Nishijma 假设粒子的电荷, 核子数, 同位旋与奇异量子数有下面重要的关系:

$$S = 2\left(Q - I_z - \frac{N}{z}\right)$$

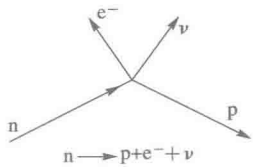
由这个关系可求得粒子的奇异量子数, 这个公式虽然是经验式, 但到目前为止, 还是与实验完全符合的.

[注二]:

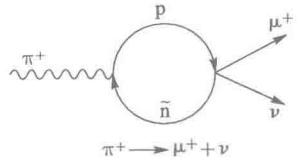
Λ^0 与核子组成的原子核, 称为超核.Λ^0 与核子间的作用力, 称为超核力.

(3) 基本粒子的衰变 (弱作用奇异量子数不守恒)

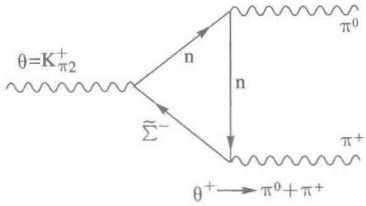
① 核子的 β 衰变 (直接的作用)



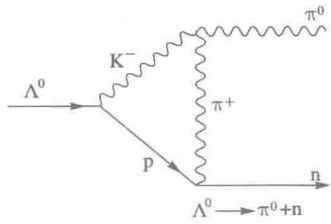
② π 介子的衰变



③ K 介子的衰变



④ 超子的衰变



习　题

1. 试解释三级 S 矩阵 Feynman 图解中⑧和⑭的物理意义.

2. 试画出下列 S 矩阵的 Feynman 图解:

(1) $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

(2) $(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$

参 考 文 献

[1] Lifshitz E M, Landau L D. Quantum Electrodynamics. Butterworth-Heinemann, 1982.

[2] Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955: §18.

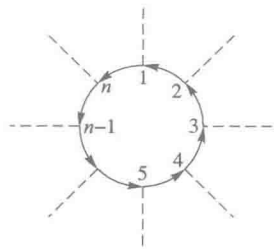
§38 Furry 关于电子封闭内线的定理

1. 电子封闭内线 S 矩阵的计算

这一节我们对于电子封闭内线的 S 矩阵进行研究. 为了使我们的理论有普遍的意义, 我们一开始就研究包含有 n 个电子封闭内线的 S_n 矩阵. 在这种情况 S_n 矩阵的被积分函数应该是

$$O_n = \overbrace{\bar{\psi}_i(x_1)\hat{A}_{ij}(x_1)\psi_j(x_1)\bar{\psi}_l(x_2)\hat{A}_{lm}(x_2)\psi_m(x_2)\bar{\psi}_n(x_3)\hat{A}_{no}(x_3)}$$
$$\psi_o(x_3)\cdots\bar{\psi}_q(x_n)A_{qr}(x_n)\psi_r(x_n) \tag{38.1}$$

它的 Feynman 图解, 根据 (37.2) 式应为



在 (38.1) 式中, 可将最后面的 $\psi(x_n)$ 移到前面, 这样可以得到比较对称的式子. 因为除了 $\psi(x_n)$ 函数本身之外, 在它的前面还有 $(2n-1)$ 个费米函数, 所以将 $\psi(x_n)$ 置换到最前面时的费米置换宇称为 $(-1)^{2n-1}=-1$, 因此 (38.1) 式可变为

$$O_n = -\overbrace{\psi_r(x_n)\bar{\psi}_i(x_1)\hat{A}_{ij}(x_1)\psi_j(x_1)\bar{\psi}_l(x_2)\hat{A}_{lm}(x_2)\psi_m(x_2)}\cdots\bar{\psi}_q(x_n)\hat{A}_{qr}(x_n) \tag{38.2}$$

但因

$$\overbrace{\psi_i(x_1)\bar{\psi}_j(x_2)} = -\frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{ij}(x_1-x_2) \tag{38.3}$$

所以上式又可写成

$$O_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n S^{\mathrm{F}}_{ri}(x_n-x_1)\hat{A}_{ij}(x_1)S^{\mathrm{F}}_{jl}(x_1-x_2)\hat{A}_{lm}(x_2)\cdots$$
$$S^{\mathrm{F}}_{pq}(x_{n-1}-x_n)\hat{A}_{qr}(x_n) \tag{38.4}$$

(38.4)式根据矩阵的理论恰好是矩阵乘积之迹,因为它的最前一个矩阵元素的指标是与最后一个相同的［参看(36.26)式］,因此O_n应表示为矩阵的迹的形式,即

$$\boxed{\begin{aligned} O_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{tr}[&S^{\mathrm{F}}(x_n - x_1)\hat{A}(x_1)S^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)\hat{A}(x_2)\cdots \\ &S^{\mathrm{F}}(x_{n-1} - x_n)\hat{A}(x_n)] \end{aligned}} \tag{38.5}$$

这就是计算电子封闭内线的S_n矩阵的公式.

2. Furry定理

Furry定理是关于n个电子封闭内线的S_n矩阵的重要性质的定理,它的内容如下:

奇数个电子封闭内线的图解对于 S 矩阵没有任何贡献

现在让我们来证明这个定理.我们知道

$$\hat{A}(x) = \gamma_i A_i(x)$$

$$S^{\mathrm{F}}(x) = (\gamma_i \frac{\partial}{\partial x^i} - m)\Delta^{\mathrm{F}}(x) \tag{38.6}$$

因为$A_i(x)$和$\Delta^{\mathrm{F}}(x)$都是普通的函数,而不是矩阵,所以(38.5)式的O_n事实上是各种不同的γ_i矩阵乘积的迹,由§4的习题2,我们知道奇数个γ_i矩阵乘积的迹恒等于零.因此,O_n中剩下来的不为零的各项都是偶数个γ_i矩阵乘积的迹.也就是说(38.5)式的O_n函数,对于$\gamma_i \longrightarrow -\gamma_i$的变换是不变的.

但因$\Delta^{\mathrm{F}}(x) = \Delta^{\mathrm{F}}(-x)$,从(38.6)式我们就可看出$\gamma_i \longrightarrow -\gamma_i$的变换,就相当于$S^{\mathrm{F}}(x_i - x_j) \longrightarrow S^{\mathrm{F}}(x_j - x_i)$的变换.由于每个$\hat{A}(x)$还包含了一个$\gamma_i$矩阵,所以(38.5)式可改写为

$$\begin{aligned} O_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n \mathrm{tr}[&S^{\mathrm{F}}(x_1 - x_n)\hat{A}(x_1)S^{\mathrm{F}}(x_2 - x_1)\hat{A}(x_2)\cdots \\ &S^{\mathrm{F}}(x_n - x_{n-1})\hat{A}(x_n)] \end{aligned} \tag{38.7}$$

可是

$$\mathrm{tr}(\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_n}) = \mathrm{tr}(\gamma_{i_n}\cdots\gamma_{i_2}\gamma_{i_1}) \tag{38.8}$$

所以(38.7)式又可改写为

$$\begin{aligned} O_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-1)^n \mathrm{tr}[&\hat{A}(x_n)S^{\mathrm{F}}(x_n - x_{n-1})\cdots \\ &\hat{A}(x_2)S^{\mathrm{F}}(x_2 - x_1)\hat{A}(x_1)S^{\mathrm{F}}(x_1 - x_n)] \end{aligned} \tag{38.9}$$

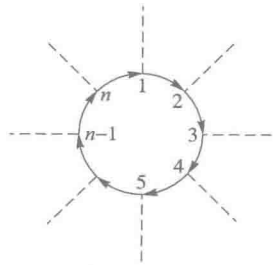
从另外一方面考虑问题,S_n矩阵的展开式中,还包含有下列一种形式的电子封闭内线的耦合式,即

$$O'_n=\overbrace{\bar{\psi}(x_n)A(x_n)\psi(x_n)\bar{\psi}(x_n-1)\hat{A}(x_n-1)\psi(x_n-1)\cdots\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)}$$

或

$$O'_n=-A(x_n)\overbrace{\psi(x_n)\bar{\psi}(x_n-1)}\hat{A}(x_n-1)\cdots\hat{A}(x_2)\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}\hat{A}(x_1)\overbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_n)} \tag{38.10}$$

上式的Feynman图解,也是一个n个电子封闭内线的形式,不过它的电子线进行的方向恰与(38.2)式的图解的方向相反,即



按照(38.2)—(38.5)式同样的步骤,可将(38.10)式变为

$$O'_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{tr}[\hat{A}(x_n)S^{\mathrm{F}}(x_n-x_{n-1})\cdots \hat{A}(x_2)S^{\mathrm{F}}(x_2-x_1)\hat{A}(x_1)S^{\mathrm{F}}(x_1-x_n)] \tag{38.11}$$

将上式与(38.9)式进行比较可知

$$O_n=(-1)^nO'_n$$

也即

$$O_n+O'_n=[1+(-1)^n]O'_n \tag{38.12}$$

这就是说,当n =奇数时,S_n矩阵的展开式中,电子封闭内线的O_n项与O'_n项恰好相消,而对于S矩阵没有任何贡献,这就是Furry定理的证明.

参考文献

Umezawa H. Quantum Field Theory. 1956. Ch. XIII, §16, Ex.2.

§39 S 矩阵的矩阵元素

1. 产生和消灭粒子的算符与概率幅的作用

α 个具有动量为 $p_1,\cdots,p_\alpha$, 自旋状态为 $i_1,\cdots,i_\alpha$ 的正负电子, 和 r 个具有动量为 $k_1,\cdots,k_r$, 极化状态为 $j_1,\cdots,j_r$ 的光子系统的概率幅由 (18.29) 式可知应为

$$\boxed{\Phi_{p_1i_1\cdots p_\alpha i_\alpha k_1j_1\cdots k_rj_r}=a^{(+)}_{p_1i_1}\cdots b^{(+)}_{p_\alpha i_\alpha}A^{j_1(+)}_{k_1}\cdots A^{j_r(+)}_{k_r}\Phi_0} \tag{39.1}$$

其中 $a^{(+)}_{pi}$ 和 $b^{(+)}_{pi}$ 为产生动量为 p, 自旋状态为 i 的电子和正电子的算符; $A^{j(+)}_k$ 为产生动量为 k, 极化状态为 j 的光子的算符. 为了以后方便起见, (39.1) 式的具有固定动量, 自旋或极化状态的正负电子和光子的系统的概率幅, 我们简写为 $\Phi_{\alpha,r}$, 即

$$\boxed{\Phi_{\alpha,r}\equiv\Phi_{p_1i_1\cdots p_\alpha i_\alpha k_1j_1\cdots k_rj_r}} \tag{39.2}$$

现在让我们来研究产生和消灭粒子的算符与概率幅的作用, 首先研究一个消灭电子的算符 $a^{(-)}_{pi}$ 作用在一个电子的概率幅 $\Phi_{p'i'}$ 上的最简单的情况, 即 $a^{(-)}_{pi}\Phi_{p'i'}$ 的情况. 因为根据 (39.1) 式, 有

$$\Phi_{p'i'}=a^{(+)}_{p'i'}\Phi_0 \tag{39.3}$$

则
$$a^{(-)}_{pi}\Phi_{p'i'}=a^{(-)}_{pi}a^{(+)}_{p'i'}\Phi_0$$

但因
$$a^{(-)}_{pi}a^{(+)}_{p'i'}+a^{(+)}_{p'i'}a^{(-)}_{pi}=\delta_{pp'}\delta_{ii'}$$

$$a^{(-)}_{pi}\Phi_0=0$$

所以
$$a^{(-)}_{pi}\Phi_{p'i'}=\Phi_0\delta_{pp'}\delta_{ii'} \tag{39.4}$$

则
$$\boxed{a^{(-)}_{pi}\Phi_{p'i'}=\begin{cases}\Phi_0 & \text{当}p=p',i=i'\\ 0 & \text{当}p\neq p',i\neq i'\end{cases}} \tag{39.5}$$

(39.5) 式的物理意义是很明显的, Φ_{pi} 是一个具有 (p,i) 状态的电子的概率幅, $a^{(-)}_{pi}$ 是消灭一个 (p,i) 状态的电子的算符, 因此, $a^{(-)}_{pi}$ 作用在 Φ_{pi} 上就变成了真空状态.

(39.5) 式显而易见可以推广到 α 个正负电子和 r 个光子的系统的情况, 即

$$
\begin{aligned}
&a^{(-)}_{p_1 i_1}\cdots b^{(-)}_{p_\alpha i_\alpha}A^{j_1(-)}_{k_1}\cdots A^{j_r(-)}_{k_r}\Phi_{p'_1 i'_1\cdots p'_\alpha i'_\alpha k'_1 j'_1\cdots k'_r j'_r}\\
&=\begin{cases}\Phi_0 & \text{当}\begin{cases}p=p',i=i'\\ k=k',j=j'\end{cases}\\ 0 & \text{当}\begin{cases}p\neq p',i\neq i'\\ k\neq k',j\neq j'\end{cases}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{39.6}
$$

因为

$$
[a^{(-)}_{pi}]^\dagger=a^{(+)}_{pi};\quad [b^{(-)}_{pi}]^\dagger=b^{(+)}_{pi};\quad [A^{j(-)}_{k}]^\dagger=A^{j(+)}_{k} \tag{39.7}
$$

所以从 (39.5) 式和 (39.6) 式可推导出

$$
\Phi^\dagger_{p'i'}a^{(+)}_{pi}=\begin{cases}\Phi_0 & \text{当}p=p',i=i'\\ 0 & \text{当}p\neq p',i\neq i'\end{cases} \tag{39.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi^+_{p'_1 i'_1\cdots p'_\alpha i'_\alpha k'_1 j'_1\cdots k'_r j'_r}a^{(+)}_{p_1 i_1}\cdots b^{(+)}_{p_\alpha i_\alpha}A^{j_1(+)}_{k_1}\cdots A^{j_r(+)}_{k_r}\\
&=\begin{cases}\Phi_0 & \text{当}\begin{cases}p=p',i=i'\\ k=k',j=j'\end{cases}\\ 0 & \text{当}\begin{cases}p\neq p',i\neq i'\\ k\neq k',j\neq j'\end{cases}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{39.9}
$$

由 (22.2) 式、 (22.31) 式、 (24.80) 式和 (24.81) 式, 我们知道

$$
\left.\begin{aligned}
A^{(+)}_i(x)&=\sum_{k,j}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}A^{j(+)}_k e^j_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i}\\
A^{(-)}_i(x)&=\sum_{k,j}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}}A^{j(-)}_k e^j_i \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_i x_i}
\end{aligned}\right\} \tag{39.10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\psi^{(+)}(x)&=\sum_{p,i}b^{(+)}_{pi}U_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}\\
\psi^{(-)}(x)&=\sum_{p,i}a^{(-)}_{pi}u_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_i x_i}
\end{aligned}\right\} \tag{39.11}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\bar\psi^{(+)}(x)&=\sum_{p,i}a^{(+)}_{pi}\overline{u}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}\\
\bar\psi^{(-)}(x)&=\sum_{p,i}b^{(-)}_{pi}\overline{U}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_i x_i}
\end{aligned}\right\} \tag{39.12}
$$

(39.10)— (39.12) 等式中为方便起见, 已假设归一化的体积 $V=1$. 利用 (39.6) 式、 (39.9) 式和 (39.10)— (39.12) 式可证明

$$\boxed{\begin{aligned} A_i^{(-)}(x)\Phi_{kj} &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} e_i^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x_i}\Phi_0 \\ \psi^{(-)}(x)\Phi_{pi} &= u_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}\Phi_0 \\ \bar{\psi}^{(-)}(x)\Phi_{pi} &= \overline{U}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x_i}\Phi_0 \end{aligned}} \tag{39.13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{kj}^{\dagger} A_i^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} e_i^j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i x_i}\Phi_0^{\dagger} \\ \Phi_{pi}^{\dagger}\psi^{(+)}(x) &= U_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}\Phi_0^{\dagger} \\ \Phi_{pi}^{\dagger}\bar{\psi}^{(+)}(x) &= \overline{u}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i}\Phi_0^{\dagger} \end{aligned}} \tag{39.14}$$

在量子场论中算符 $\hat{O}$ 由初态 Φ_{i} 过渡到末态 Φ_{f} 的矩阵元素定义为

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{f}}^{\dagger}\hat{O}\Phi_{\mathrm{i}} = \langle \mathrm{f}|\hat{O}|\mathrm{i}\rangle} \tag{39.15}$$

一般 $\hat{O}$ 为产生和消灭粒子的算符的 $N-$ 乘积. 因为

$$U^{(-)}\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0^{\dagger}U^{\dagger} = 0$$

并且由于 (39.6) 式和 (39.8) 式, 我们知道只有在下列情况 $\hat{O}$ 的矩阵元素才有可能不为零:

只有当 $\hat{O}$ 中的消灭粒子的算符的数目和种类与初态 Φ_{i} 中的粒子数目和种类完全相等, 并且 $\hat{O}$ 中的产生粒子的算符的数目和种类与末态 Φ_{f} 中的粒子数目和种类也完全相等时, $\langle \mathrm{f}|\hat{O}|\mathrm{i}\rangle$ 才有可能不为零.

如果上述 $\langle \mathrm{f}|\hat{O}|\mathrm{i}\rangle$ 不为零的条件完全符合, 则还必须要求在初态和末态中的粒子的动量和自旋状态与 $\hat{O}$ 中的产生和消灭粒子的算符的动量和自旋状态完全相等时, $\langle \mathrm{f}|\hat{O}|\mathrm{i}\rangle$ 才真正不为零.

因由 (39.6) 式和 (39.8) 式我们知道

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi_{p_{\mathrm{f}}i_{\mathrm{f}}\cdots k_{\mathrm{f}}j_{\mathrm{f}}}^{\dagger}[a_{pi}^{(+)}\cdots A_k^{j(+)}a_{p'i'}^{(-)}\cdots A_{k'}^{j'(-)}]\Phi_{p_{\mathrm{i}}i_{\mathrm{i}}\cdots k_{\mathrm{i}}j_{\mathrm{i}}} \\ &= \begin{cases} \Phi_0^{\dagger}\Phi_0 = 1 & \text{当} \begin{cases} p = p_{\mathrm{f}}, i = i_{\mathrm{f}}, k = k_{\mathrm{f}}, j = j_{\mathrm{f}} \\ p' = p_{\mathrm{i}}, i' = i_{\mathrm{i}}, k' = k_{\mathrm{i}}, j' = j_i \end{cases} \\ 0 & \text{当} \begin{cases} p \neq p_{\mathrm{f}}, i \neq i_{\mathrm{f}}, k \neq k_{\mathrm{f}}, j \neq j_{\mathrm{f}} \\ p' \neq p_{\mathrm{i}}, i' \neq i_{\mathrm{i}}, k' \neq k_{\mathrm{i}}, j' \neq j_{\mathrm{i}} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}} \tag{39.16}$$

2. S 矩阵的矩阵元素

由 (35.9) 式知道 S 矩阵可分解为 S_n 矩阵:

$$S=\sum S_n \tag{39.17}$$

S_n 矩阵又可用 T– 乘积展开的 Wick 定理分解为数项, 在这数项中, 在 §37 中曾谈到有 r 项是可以用同一 Feynman 图解代表的. 这个在 S_n 矩阵的展开式中可用同一 Feynman 图解代表的项, 我们用 M^n 表示, 则

$$\boxed{S_n=\sum M^n} \tag{39.18}$$

M^n 的一般形式由 §36 可知, 应为许多 $\bar{\psi}_\alpha^{(\pm)}$、$\psi_\alpha^{(\pm)}$、$A_i^{(\pm)}$ 等产生或消灭粒子的算符与 $D_{ik}^{\mathrm{F}}, S_{\alpha\beta}^{\mathrm{F}}$ 等 Feynman 函数的 $N-$ 乘积的 n 重四维空间体积的积分, 即

$$M^n=\frac{r}{n!}(-e)^n\int(\mathrm{d}x_1)\cdots\int(\mathrm{d}x_n)NF(\bar{\psi}_\alpha^{(\pm)},\psi_\alpha^{(\pm)},A_i^{(\pm)},D_{ik}^{\mathrm{F}},S_{\alpha\beta}^{\mathrm{F}}) \tag{39.19}$$

上式中 F 函数前有一个 $N-$ 乘积, 结果使所有产生粒子的算符都移至最左方, 而消灭粒子的算符则移至最右方, 于是 (39.19) 式就变成

$$M^n=\frac{r}{n!}(-e)^n\int(\mathrm{d}x_1)\cdots\int(\mathrm{d}x_n)F_{\mathrm{f}}(\bar{\psi}_\alpha^{(+)},\psi_\alpha^{(+)},A_i^{(+)})$$
$$F_{\mathrm{m}}(D_{ik}^{\mathrm{F}},S_{\alpha\beta}^{\mathrm{F}})F_{\mathrm{i}}(\bar{\psi}_\alpha^{(-)},\psi_\alpha^{(-)},A_i^{(-)}) \tag{39.20}$$

设 F_{i} 中消灭正负电子和光子的算符数各为 α_{i}' 和 r_{i}';F_{f} 中产生正负电子和光子的算符数各为 α_{f}' 和 r_{f}'. 则 M^n 所代表的粒子反应, 应该是在初态消灭了 α_{i}' 个正负电子和 r_{i}' 个光子, 而在末态最后产生了 α_{f}' 个正负电子和 r_{f}' 个光子. 因此 (39.20) 式的 M^n 矩阵中又可明确地简写为

$$M^n=M^n(\alpha_{\mathrm{f}}'r_{\mathrm{f}}',\alpha_{\mathrm{i}}'r_{\mathrm{i}}') \tag{39.21}$$

现在让我们来计算 S 矩阵的矩阵元素, 假设我们要研究的粒子反应的初态为 α_{i} 个正负电子和 r_{i} 个光子, 末态为 α_{f} 个正负电子和 r_{f} 个光子, 则这个粒子反应, 应该以下列的 S 矩阵的矩阵元素决定:

$$\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger S\Phi_{\mathrm{i}}=\sum_n\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger S_n\Phi_{\mathrm{i}}=\sum_n\sum\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger M^n\Phi_{\mathrm{i}} \tag{39.22}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}\text{初态}\Phi_{\mathrm{i}}=\Phi_{\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}}(\alpha_{\mathrm{i}}\text{个正负电子和}r_{\mathrm{i}}\text{个光子的概率幅})\\ \text{末态}\Phi_{\mathrm{f}}=\Phi_{\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}}}(\alpha_{\mathrm{f}}\text{个正负电子和}r_{\mathrm{f}}\text{个光子的概率幅})\end{array}\right\} \tag{39.23}$$

将 (39.21) 式和 (39.23) 式代入 (39.22) 式, 根据上一小节中算符矩阵元素性质可知矩阵元素 $\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger M^n\Phi_{\mathrm{i}}$ 只有在下列情况下才可能不为零:

$$\Phi^{\dagger}_{\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}}}M^{n}(\alpha'_{\mathrm{f}}r'_{\mathrm{f}},\alpha'_{\mathrm{i}}r'_{\mathrm{i}})\Phi_{\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}}\neq 0,\quad \text{只有当}\quad \begin{cases}\alpha'_{\mathrm{f}}=\alpha_{\mathrm{f}},r'_{\mathrm{f}}=r_{\mathrm{f}}\\ \alpha'_{\mathrm{i}}=\alpha_{\mathrm{i}},r'_{\mathrm{i}}=r_{\mathrm{i}}\end{cases}\text{时}$$

设 $M(\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}})$ 为所有不同级的 S_n 矩阵的展开式中具有初态为 $\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}$, 而末态为 $\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}}$ 的各项之和, 即

$$\boxed{M(\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}})=\sum_{n=l}^{\infty}M^{n}(\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}})} \tag{39.24}$$

上式中的 l 表示可能发生上述粒子反应的最低级的 S_n 矩阵为 l 级, 因此 (39.22) 式的矩阵元素中可能不为零的就只剩下了一项, 即

$$\boxed{\Phi^{\dagger}_{\mathrm{f}}S\Phi_{\mathrm{i}}=\Phi^{\dagger}_{\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}}}M(\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}},\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}})\Phi_{\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}}} \tag{39.25}$$

但是由于初态和末态是我们可以进行观察和测量的状态, 一般初态和末态的粒子都是具有固定的动量和自旋状态的. 所以初态和末态的概率幅, 应该有固定的动量和自旋状态的指标, 即

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{i}}=\Phi_{\alpha_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}}&=\Phi\underbrace{p_{\mathrm{i}}i_{\mathrm{i}}}_{\alpha_{\mathrm{i}}\text{个}}\cdots\cdots\underbrace{k_{\mathrm{i}}j_{\mathrm{i}}}_{r_{\mathrm{i}}\text{个}}\\ \Phi_{\mathrm{f}}=\Phi_{\alpha_{\mathrm{f}}r_{\mathrm{f}}}&=\Phi\underbrace{p_{\mathrm{f}}i_{\mathrm{f}}}_{\alpha_{\mathrm{f}}\text{个}}\cdots\cdots\underbrace{k_{\mathrm{f}}j_{\mathrm{f}}}_{\alpha_{\mathrm{f}}\text{个}}\end{aligned}\right\} \tag{39.26}$$

上式中 p 和 i 代表正负电子的固定动量和自旋状态, 而 k 和 j 则代表光子的固定动量和极化状态.

由 (39.16) 式我们知道, 假使初态 Φ_{i} 和末态 Φ_{f} 的粒子具有固定的动量和自旋状态, 那么 (39.20) 式的 F_{i} 函数中的消灭粒子的算符 $\bar{\psi}^{(-)}_{\alpha}$、$\psi^{(-)}_{\alpha}$、$A^{(-)}_{i}$ 等的傅里叶级数中, 只有其动量和自旋状态与 Φ_{i} 中的动量和自旋状态完全相同时, 并且 F_{f} 函数中的产生粒子的算符 $\bar{\psi}^{(+)}_{\alpha}$、$\psi^{(+)}_{\alpha}$、$A^{(+)}_{\alpha}$ 等的傅里叶级数中, 只有其动量和自旋状态与 Φ_{f} 中的动量和自旋状态完全相同时, (39.25) 式的 S 矩阵元素才不为零. 因此我们在计算有固定动量和自旋状态的初态和末态的 S 矩阵元素时, 就不必将 (39.10)— (39.12) 式等复杂的傅里叶级数代入 S 矩阵中, 只要将具有一定动量和自旋状态的傅里叶分量 (39.13) 式和 (39.14) 式代入 S 矩阵, 即可计算出不为零的 S 矩阵元素.

也就是说, 在计算 S 矩阵元素时, 其外线部分只需将下列形式的函数代入即可:

$$\left.\begin{aligned} A_i^{(\pm)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} e_i^j \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} k_i x_i} \\ \psi^{(+)}(x) &= U_i(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_i x_i} \\ \psi^{(-)}(x) &= u_i(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{+\mathrm{i} p_i x_i} \\ \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \overline{u}_i(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p_i x_i} \\ \bar{\psi}^{(-)}(x) &= \overline{U}_i(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{+\mathrm{i} p_i x_i} \end{aligned}\right\} \tag{39.27}$$

这里必须指出 (39.27) 式中的 $A_i^{(\pm)}$、$\psi^{(\pm)}$ 和 $\bar{\psi}^{(\pm)}$ 已经不是产生和消灭粒子的算符, 由 (39.13) 式和 (39.14) 式或 (39.6) 式和 (39.9) 式我们知道它们的消灭粒子的算符 $a_{pi}^{(-)}$、$b_{pi}^{(-)}$ 和 $A_k^{j(-)}$ 等已与初态概率幅 Φ_{i} 作用而变为真空概率幅 Φ_0, 而产生粒子的算符 $a_{pi}^{(+)}$、$b_{pi}^{(+)}$ 和 $A_k^{j(+)}$ 等则已与末态概率幅作用而变为真空概率幅 $\Phi_0^\dagger$. 由于 $\Phi_0^\dagger \Phi_0 = 1, S^{\mathrm{F}}$ 和 D^{F} 不是算符而是函数, 所以我们最后所得到的 (39.25) 式形式的 S 矩阵元素就不再是算符了, 其中也不包含有概率幅.

以后这个 S 矩阵具有一定初态和末态的矩阵元素, 我们用下列的形式表示:

$$\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger S \Phi_{\mathrm{i}} \equiv \langle \mathrm{f}|S|\mathrm{i}\rangle = \langle \mathrm{f}|M|\mathrm{i}\rangle \tag{39.28}$$

或

$$\Phi_{\mathrm{f}}^\dagger S \Phi_{\mathrm{i}} \equiv S_{\mathrm{i-f}} = M_{\mathrm{i-f}}$$

§40 S 矩阵的动量表象

1. S 矩阵动量表象问题的讨论

为了研究粒子各种反应的概率, 就必须具体计算 S 矩阵的矩阵元素, 而 S 矩阵的计算, 最方便是用动量表象, 现在就让我们来研究 S 矩阵如何由四维空间的表象过渡到动量表象.

由 (39.19) 式我们知道代表某种粒子反应的 Feynman 图解在 S 矩阵展开式中的对应项, 应该为下列的形式, 即

$$M^n = \frac{r}{n!}(-e)^n \int (\mathrm{d}x_1)\cdots\int (\mathrm{d}x_n) NF(\bar{\psi}^{(\pm)}, \psi^{(\pm)}, A_i^{(\pm)}, D^{\mathrm{F}}, S^{\mathrm{F}}) \tag{40.1}$$

(40.1) 式中的被积分函数 F 是按照 §37 中所谈到的 Feynman 图解的规则, 将 $\bar{\psi}^{(\pm)}, \psi^{(\pm)}, A_i^{(\pm)}, D^{\mathrm{F}}, S^{\mathrm{F}}$ 等算符或函数妥当安排起来的, 它应该是 n 个不同的四维空间坐标, 即 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数.

从 §39 我们知道, 如果我们所研究的粒子反应的初态和末态的粒子是具有固定的动量和自旋状态, 那么只要将下列形式的 $\bar{\psi}^{(\pm)}$、 $\psi^{(\pm)}$、 $A_i^{(\pm)}$、 D^{F}、 S^{F} 等函数代入 (40.1) 式, 则 (40.1) 式就可变为我们所研究的粒子反应的 S 矩阵元素:

$$\boxed{A_i^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k}} e_i^j \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k_i x_i}} \tag{40.2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= U_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i} \\ \psi^{(-)}(x) &= u_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_i x_i} \end{aligned}} \tag{40.3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \overline{u}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x_i} \\ \bar{\psi}^{(-)}(x) &= \overline{U}_i(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p_i x_i} \end{aligned}} \tag{40.4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}(x-x') &= \int \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i(x_i - x_i')}(\mathrm{d}p) \\ \frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}(p) &= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\hat{p} - m}{p_i^2 + m^2} \end{aligned}} \tag{40.5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x-x') &= \int \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i(x_i - x_i')}(\mathrm{d}k) \\ \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(k) &= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_i^2} \end{aligned}} \tag{40.6}$$

将 (40.2)— (40.6) 式代入 (40.1) 式以及由 (39.28) 式我们知道, (40.1) 式不再是 M^n 矩阵了, 而是 S^n 矩阵或 M^n 矩阵由初态过渡到末态的矩阵元素, 即

$$\langle \mathrm{f}|S^n|\mathrm{i}\rangle = S^n_{\mathrm{i-f}} = M^n_{\mathrm{i-f}}$$

这就是说将 (40.2)— (40.6) 代入 (40.1) 式以后, $M^n \to M^n_{\mathrm{i-f}}$, 即

$$M^n_{\mathrm{i-f}} = \frac{r}{n!}(-e)^n \int (\mathrm{d}x_1)\cdots\int (\mathrm{d}x_n) F(\bar{\psi}^{(\pm)}, \psi^{(\pm)}, A_i^{(\pm)}, D^{\mathrm{F}}, S^{\mathrm{F}}) \tag{40.7}$$

在量子电动力学中, 当我们研究电子或正电子在其他粒子, 如原子核产生的电磁场中的散射问题时, 往往我们采取经典的近似, 将 $\boldsymbol{A}$ 及 $A_4 = \mathrm{i}\varphi$ 当成已知的外场的场函数 $\left($ 譬如静电场的情况, $\varphi = \dfrac{Q}{r}\right)$, 这样可使我们计算的问题大大简化. 外场函数 $A_i^{\mathrm{e}}(x)$ 也可变成为傅里叶积分的形式:

$$\boxed{\begin{aligned} A_i^{\mathrm{e}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int a_i(q)\mathrm{e}^{iq_ix_i}(\mathrm{d}q) \\ a_i(q) &= \int A_i^{\mathrm{e}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_ix_i}(\mathrm{d}x_i) \end{aligned}} \tag{40.8}$$

假使在我们研究的粒子反应中有外场的作用, 要寻找 S 矩阵的动量表象, 则必须将 (40.8) 式代入 (40.7) 式.

我们知道在 Feynman 图解规则中, $\bar{\psi}^{(\pm)}$ 和 $\psi^{(\pm)}$ 代表正负电子的外线, $A_i^{(\pm)}(x)$ 代表光子外线, $\dfrac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)\delta_{ik}$ 代表 x_1 和 x_2 两点间的光子内线, $\dfrac{1}{2}S^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)$ 代表 x_1 和 x_2 两点间的正负电子内线, $A_i^{\mathrm{e}}(x)$ 代表外场.

在 Feynman 图解规则中我们还知道每一个顶点代表电子或正电子与光子有一次作用, 由于每次作用必定有一项 $e\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x)A_i(x)$, 因此每一个顶点就有一个 γ_i 矩阵. 而且每一个顶点也必定有一个固定指标的四维空间的坐标.

假设我们所研究的正负电子和光子反应的 Feynman 图解中有:

n 个顶点 (即 n 级 S 矩阵);

E_{e} 个正负电子外线;

E_γ 个光子外线;

I_{e} 个正负电子内线;

I_γ 个光子内线;

S 个电磁外场线.

则外线的总数为

$$E = E_{\mathrm{e}} + E_\gamma$$

内线的总数为

$$I = I_{\mathrm{e}} + I_\gamma$$

现在让我们来具体研究将 $M^n_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵元素由四维空间表象过渡到动量表象. 我们首先将 (40.2)— (40.6) 式以及 (40.8) 式代入 (40.7) 式. 并对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

等 n 个四维空间坐标进行积分. 因为在 Feynman 图解中, 每一个四维空间坐标 x 必定有一个顶点, 而每个顶点必定有三根线 (包括内线、外线和外场线). 但是由 (40.2)—(40.6) 式和 (40.8) 式我们知道, 这每一根 Feynman 图解线都有一个包含着同一顶点坐标 x 的指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_ix_i}$、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_ix_i}$. 那么这个顶点的三根线的指数就可合写为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sum p_i)x_i}$, 当它被顶点的坐标积分以后, 就变成 $(2\pi)^4\delta(\sum p_i)$, 这个 δ 函数代表着在这个顶点处正负电子和光子相互作用前后的动量和能量的守恒定律.

这样将 n 个顶点坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 全部积分以后, 就得到 n 个乘积起来的 $(2\pi)^4\delta(\sum p_i)$ 函数, 即

$$n\text{个顶点对应着}\text{——}(2\pi)^{4n}\prod_n\delta(\sum p_i) \tag{40.9}$$

由 (40.3) 式和 (40.4) 式我们知道, 当 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}p_ix_i}$ 被积分掉以后, E_e 个正负电子外线就对应着 E_e 个 $u_i(\boldsymbol{p}),\overline{u}_i(\boldsymbol{p}),U_i(\boldsymbol{p})$ 或 $\overline{U}_i(\boldsymbol{p})$, 即

$$E_\mathrm{e}\text{ 个正负电子外线对应着}\text{——}E_\mathrm{e}\text{ 个}\begin{cases}u_i(\boldsymbol{p})\\ \overline{u}_i(\boldsymbol{p})\\ U_i(\boldsymbol{p})\\ \overline{U}_i(\boldsymbol{p})\end{cases} \tag{40.10}$$

i 代表着正负电子固定自旋状态.

因为每个光子外线的终点必单独有一个顶点, 而每个顶点有一个 γ_i, 由 (40.2) 式我们就得到

$$E_\gamma\text{ 个光子外线对应着}\text{——}E_\gamma\text{ 个}\frac{\hat{e}^j}{\sqrt{2\varepsilon_k}} \tag{40.11}$$

$\hat{e}^j=e_i^j\gamma_i$, 代表光子的固定极化状态.

因为每一个正负电子内线有一个 $\dfrac{1}{2}S^\mathrm{F}(x-x')$ 函数, 由 (40.5) 式我们就知道:

$$I_\mathrm{e}\text{ 个正负电子内线对应着}\text{——}\begin{cases}I_\mathrm{e}\text{个}\dfrac{\mathrm{i}\widehat{p}-m}{p_i^2+m^2}\\ \text{系数}\left[\dfrac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_\mathrm{e}}\\ \text{对}\displaystyle\prod_{I_e}(\mathrm{d}p)\text{积分}\end{cases} \tag{40.12}$$

由于每一个光子内线有一个 $\frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x-x')\delta_{ik}$ 函数, 但是这个内线的两端点有两个 γ_i 和 γ_k 矩阵, 从 (40.6) 式我们就知道:

$$I_\gamma \text{ 个光子内线对应着}\longrightarrow\begin{cases} I_\gamma \text{ 个}\gamma_k\dfrac{1}{k_i^2}\gamma_k \\ \text{系数}\left[\dfrac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_\gamma} \\ \text{对}\displaystyle\prod_{I_\gamma}(\mathrm{d}k)\text{积分}\end{cases} \tag{40.13}$$

最后由 (40.8) 式我们还知道每个外场线表示有一个 $A_i^{\mathrm{e}}(x)$, 但是由于每个外场线必定有一个顶点, 而每个顶点有一个 γ_i 矩阵, 则

$$S \text{ 个外场线对应着}\longrightarrow\begin{cases} S \text{ 个}\hat{a}(q)=a_i(q)\gamma_i \\ \text{系数}\left[\dfrac{1}{(2\pi)^4}\right]^{S} \\ \text{对}\displaystyle\prod_{S}(\mathrm{d}q)\text{积分}\end{cases} \tag{40.14}$$

经过这样的讨论我们就知道, $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 矩阵不再是 n 个四维空间坐标的积分式了, 而应该对光子和正负电子内线以及外线的动量进行积分, 即

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{4(I_{\mathrm{e}}+I_\gamma+S)}\cdots\cdots\prod_{I_{\mathrm{e}}}(\mathrm{d}p)\prod_{I_\gamma}(\mathrm{d}k)\prod_{S}(\mathrm{d}q) \tag{40.15}$$

并且 $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 矩阵前的系数应为

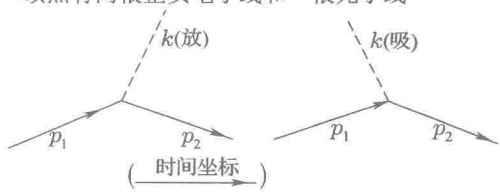
$$\frac{r}{n!}(-e)^n(2\pi)^{4n}\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_{\mathrm{e}}}\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_\gamma}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\right]^{S}$$

或

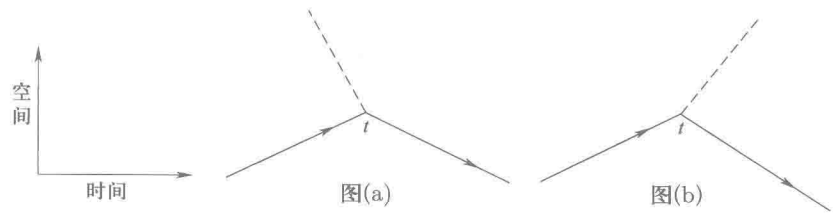
$$\frac{r}{n!}(-e)^n(-\mathrm{i})^I(2\pi)^{4(n-I-S)} \tag{40.16}$$

2. S 矩阵动量表象的 Feynman 图解规则

根据上一小节的讨论, 从 (40.9)— (40.16) 式我们可以得到一个 $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 矩阵元素动量表象的 Feynman 图解规则, 知道了这个规则, 我们便可以由 Feynman 图解的形式直接写出在动量表象中 $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 的矩阵元素. 这对于我们具体计算 $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 矩阵元素和粒子的反应概率是非常方便的. 这个 Feynman 图解和 $M_{\mathrm{i-f}}^n$ 矩阵元素的对应规则如下:

	Feynman图解中的要素和其他	M^n_{i-f}矩阵元素中的因子
1	自旋状态为 i 的电子初态外线	$u_i(\boldsymbol{p})$
2	自旋状态为 i 的电子末态外线	$\overline{u}_i(\boldsymbol{p})$
3	自旋状态为 i 的正电子初态外线	$\overline{U}_i(\boldsymbol{p})$
4	自旋状态为 i 的正电子末态外线	$U(\boldsymbol{p})$
5	极化状态为 e^j 的光子初态或末态的外线 γ_i	$\dfrac{\widehat{e}^j}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\quad(\widehat{e}^j=e^j_i\gamma_i)$
6	电子或正电子内线 (虚电子或虚正电子)	$\dfrac{\mathrm{i}\widehat{p}-m}{p_i^2+m}$
7	光子内线 (虚光子) γ_i γ_i	$\gamma_i\cdots\dfrac{1}{k_i^2}\cdots\gamma_i$, 它的两端顶点各有一个 γ_i
8	顶点有两根正负电子线和一根光子线 	$\delta(p_2-p_1\pm k)$ 出向粒子动量为正 入向粒子动量为负
9	电子或正电子封闭内线	$\dfrac{\mathrm{i}\widehat{p}-m}{p_i^2+m}$ 与 γ_i 间隔乘积之迹
10	外场线 γ_i	$\widehat{a}(q)=a_i(q)\gamma_i$
11	M^n_{i-f} 矩阵元素前应有一个常数因子	$\dfrac{r}{n!}(-e)^n(-\mathrm{i})^{\mathrm{I}}(2\pi)^{4(n-S-I)}$
12	对光子和正负电子内线的动量以及外场线的动量进行积分	$\int\cdots\int\cdots\prod_{I_e}(\mathrm{d}p)\prod_{I_\gamma}(\mathrm{d}k)\prod_{S}(\mathrm{d}q)$
13	各因子 ($\overline{u}_i$,$\overline{U}_i$, u_i, U_i以及作用其上的矩阵算符)应按照电子线进行的次序在 M^n_{i-f} 中从右到左依次安排	

以前我们用的光子线 (虚线) 可以代表吸收光子的过程, 也可代表放出光子的过程. 为了在 Feynman 图解中能够明确地表达正负电子和光子的反应是吸收光子还是放出光子的过程, 以后我们规定粒子反应的进行方向在 Feynman 图解中为从左到右, 也即时间坐标的方向为从左到右.

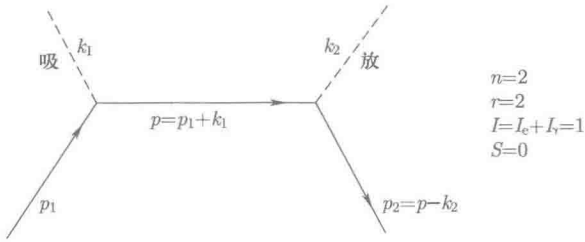


这样图 (a) 就可代表吸收光子的过程, 因为在光子和电子相互作用的时间 t 以前有光子存在, 而在时间 t 以后便没有光子了. 相反地, 图 (b) 是代表放出光子的过程, 因而在时间 t 以前没有光子, 而在 t 以后, 则出现了光子.

3. Feynman 规则应用的实例

(1) Compton 效应

Compton 效应是电子先吸收一个光子, 变为中间态, 然后又放出一个光子的过程 (或先放出然后又吸收光子的过程). 它的 Feynman 图解如下:

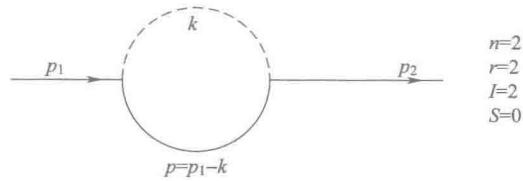


根据 Feynman 图解规则和上图, Compton 效应的 $M^2_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵在动量表象中应为

$$\begin{aligned} M^2_{\mathrm{i-f}} &= -e_i^2(2\pi)^4 \int \overline{u}_i(\boldsymbol{p}_2)\frac{\hat{e}^2}{\sqrt{2\varepsilon_{k2}}}\frac{i\hat{p}-m}{p^2+m^2}\frac{\hat{e}^1}{\sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} \\ &\quad u_k(\boldsymbol{p}_1)\delta(p-k_1-p_1)\delta(p_2+k_2-p)(\mathrm{d}p) \\ &= -e_i^2(2\pi)^4\left[\bar{\boldsymbol{u}}_i(\boldsymbol{p}_2)\frac{\hat{e}^2}{\sqrt{2\varepsilon_{k_2}}}\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m}{(p_1+k_1)^2+m^2}\frac{\hat{e}^1}{\sqrt{2\varepsilon_{k_1}}}u_k(\boldsymbol{p}_1)\right] \\ &\quad \delta(p_2-p_1+k_2-k_1) \end{aligned} \tag{40.17}$$

$\delta(p_2-p_1+k_2-k_1)$ 函数保证 Compton 效应反应前后的能量和动量守恒.

(2) 电子的自能: 电子自能的 Feynman 图解如下:

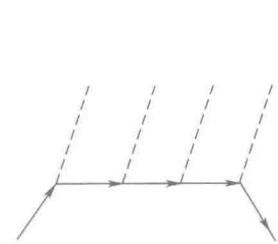


它的 $M^2_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵在动量表象中应为

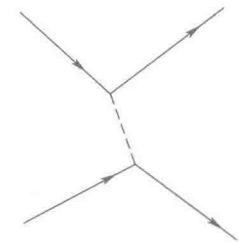
$$\begin{aligned} M^2_{\mathrm{i-f}} &= -e^2\int \overline{u}_i(\boldsymbol{p}_2)\gamma_i\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}\gamma_i\frac{1}{k^2}u_k(\boldsymbol{p}_1)\delta(p-p_1+k)\delta(p_2-p-k)(\mathrm{d}p)(\mathrm{d}k) \\ &= -e^2\left[\int \overline{u}_i(\boldsymbol{p}_2)\gamma_i\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k})-m}{(p_1-k)^2+m^2}\gamma_i\frac{1}{k^2}u_k(\boldsymbol{p}_1)(\mathrm{d}k)\right]\delta(p_2-p_1) \end{aligned} \tag{40.18}$$

习　题

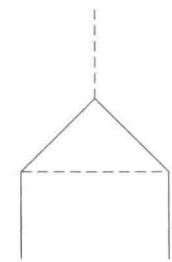
试写出下列 Feynman 图解所对应的在动量表象中的 $M^n_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵:



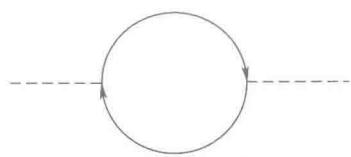
(1) 电子放出4个光子



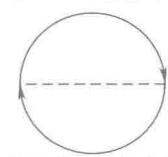
(2) 电子与电子的散射



(3) 电子在外场中散射的三级修正



(4) 光子的自能



(5) 电子真空和光子真空的过渡

参考文献

[1] Lifshitz E M, Landau L D. Quantum Electrodynamics.
[2] Butterworth-Heinemann, 1982.

§41 粒子反应的概率和截面

1. 单位时间单位空间粒子反应的过渡概率

由 (39.28) 式我们知道粒子反应由一定的初态 Φ_{i} 过渡到末态 Φ_{f} 的 S 矩阵的矩阵元素应为

$$\langle \mathrm{f}|S|\mathrm{i}\rangle = M_{\mathrm{i-f}} \tag{41.1}$$

$M_{\mathrm{i-f}}$ 是我们所要研究的某种粒子反应的 Feynman 图解在 S 矩阵的展开式中所对应的那项的矩阵元素.§40 中我们知道, 在 $M_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵中, 中间态的粒子的动量已经被积分掉, 因此 $M_{\mathrm{i-f}}$ 只是初态和末态粒子的动量的函数, 即 p^{i} 和 p^{f} 的函数. 并且由上一节的例子中我们已看出, $M_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵计算的结果, 它的后面总要包含一个代表反应过程中能量和动量守恒的 $\delta(p^{\mathrm{f}} - p^{\mathrm{i}})$ 函数, 因此 $M_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵一般可写成

$$\boxed{M_{\mathrm{i-f}} = M(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})\delta(p^{\mathrm{f}} - p^{\mathrm{i}})} \tag{41.2}$$

其中

$$p^{\mathrm{f}} = \sum p^{\mathrm{f}}, \quad p^{\mathrm{i}} = \sum p^{\mathrm{i}}$$

某种具有一定的初态 Φ_{i} 和末态 Φ_{f} 的粒子反应的概率是由其对应的 S 矩阵元素的绝对值的平方决定的, 即应由

$$|\langle \mathrm{f}|S|\rangle|^2 = |M_{\mathrm{i-f}}|^2 \tag{41.3}$$

决定. 但是由于 $M_{\mathrm{i-f}}$ 中的空间和时间的积分的上、下限都是无限大的, 这就是说 (41.3) 式所决定的概率, 是这种粒子反应在所有空间和时间中进行的概率, 这个概率不是我们所要求的, 而且是没有实际的意义的. 因为我们所观察到的粒子反应都是在有限空间和有限时间中进行的.

在粒子的理论中, 为了比较某种粒子反应发生的概率的大小, 通常是用单位时间单位空间的反应概率来决定, 这个概率我们用 Γ 来表示.

设 $\Omega = VT$ 为基本粒子进行反应的四维空间的体积, 则

$$\boxed{\Gamma = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{|M_{\mathrm{i-f}}|^2_{\Omega}}{\Omega}} \tag{41.4}$$

由 (41.2) 式得

$$\begin{aligned}\Gamma &= \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega}\{|M(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2[\delta(p^{\mathrm{f}} - p^{\mathrm{i}})]^2\}_{\Omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{\Omega} \left\{ |M(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \left[\int_{\Omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^{\mathrm{f}}_k - p^{\mathrm{i}}_k)x_k} \mathrm{d}x \right]^2 \right\}\end{aligned} \tag{41.5}$$

(41.5) 式后面的积分可以分解为四个下列形式的积分:

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\left[\int_{-L/2}^{+L/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right]^2&=\lim_{L\to\infty}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kL}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kL}{2}}\right)\right]^2\\&=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{Lk^2}\left(2\sin\frac{kL}{2}\right)^2=\lim_{L\to\infty}2\frac{\sin kL}{k}=2\pi\delta(k)\end{aligned}\tag{41.6}$$

所以

$$\boxed{\Gamma=\frac{1}{(2\pi)^4}|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}})}\tag{41.7}$$

上式是具有固定的初态和末态的粒子单位时间和单位空间的反应概率. 但在实验室中研究粒子的反应时, 其末态中的每个粒子的动量和能量不是那么容易精确测定的. 我们知道粒子的四维空间动量在 p_k 和 $p_k+\mathrm{d}p_k$ 范围内的状态数为

$$\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p})}{h^3}=\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p})}{(2\pi)^3}\tag{41.8}$$

因此, 末态的粒子的动量在 p_k 和 $p_k+\mathrm{d}p_k$ 的范围内的单位时间单位空间的反应概率就应该为

$$\mathrm{d}w=\Gamma\prod_f\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{f}})}{(2\pi)^3}$$

或

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{(2\pi)^4}|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}})\prod_f\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3}\tag{41.9}$$

我们曾假设自由粒子归一化的体积 $V=1$, 那就是说 (41.9) 式的 $\mathrm{d}w$ 是代表初态参与反应的每种粒子单位体积只有一个粒子的情况[注] 的概率. 在一般的情况下, 单位体积有 N 个粒子, 而反应的概率应该与初态粒子数的乘积成正比, 所以

$$\boxed{\mathrm{d}w=\frac{1}{(2\pi)^4}\left(\prod_i N_i\right)|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}})\prod_f\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3}}\tag{41.10}$$

上式中 N_i 为某种初态粒子单位体积的粒子数.

2. 粒子反应的截面

粒子反应的微分截面的定义是以下列的公式表示的, 即

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{[\text{单位时间单位体积粒子反应的概率}]}{[\text{单位面积单位时间入射的初态粒子流的强度}]}\tag{41.11}$$

或
$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}w}{J}} \tag{41.12}$$

它的量纲恰好是面积的量纲.

在一般的粒子反应中初态只有两种粒子, 在这种情况下, 有

$$\boxed{J = N_1 N_2 v_{12}} \tag{41.13}$$

上式中 N_1 和 N_2 为参与反应的两种初态粒子的密度, 即单位体积的粒子数, v_{12} 为这两种粒子的相对速度.

在初态只有两个粒子的情况下, 由 (41.10) 式知道

$$\mathrm{d}w = \frac{1}{(2\pi)^4} N_1 N_2 |M(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \delta(p^{\mathrm{f}} - p^{\mathrm{i}}) \prod_f \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3} \tag{41.14}$$

将 (41.13) 式和 (41.14) 式代入 (41.12) 式, 可得在这种情况下粒子反应的微分截面公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{v_{12}} |M(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \delta(p^{\mathrm{f}} - p^{\mathrm{i}}) \prod_f \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3} \tag{41.15}$$

现在让我们来求两个初态粒子相对速度 v_{12} 的公式. 为了方便起见, 我们求 v_{12} 在动量中心坐标的公式 (在其他的坐标里, 这个公式的形式也是一样的). 设 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 为这两个初态粒子在动量中心坐标中的动量, 则

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0 \tag{41.16}$$

因此可设

$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p} \tag{41.17}$$

但是根据相对论力学, 有

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\varepsilon_1}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\varepsilon_2}$$

$$\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\varepsilon_1} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{\varepsilon_2}$$

或
$$\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{p}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{\boldsymbol{p}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

则
$$v_{12} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{[p(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)]^2} \tag{41.18}$$

由于
$$\varepsilon_1 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_2^2}$$

$$[\boldsymbol{p}(\varepsilon_2+\varepsilon_1)]^2=2\boldsymbol{p}^4+(m_1^2+m_2^2)\boldsymbol{p}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{p}^2 \tag{41.19}$$

但因 $$p_{1i}p_{2i}=\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2-\varepsilon_1\varepsilon_2=-(\boldsymbol{p}^2+\varepsilon_1\varepsilon_2)(i=1,2,3,4)$$

则 $$(p_{1i}p_{2i})^2=2\boldsymbol{p}^4+(m_1^2+m_2^2)\boldsymbol{p}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{p}^2+m_1^2m_2^2 \tag{41.20}$$

将 (41.20) 式与 (41.19) 式比较可知

$$[\boldsymbol{p}(\varepsilon_2+\varepsilon_1)]^2=(p_{1i}p_{2i})^2-m_1^2m_2^2 \tag{41.21}$$

将 (41.21) 式代入 (41.18) 式, 便可得到 v_{12} 的公式

$$\boxed{v_{12}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sqrt{(p_{1i}p_{2i})^2-m_1^2m_2^2}} \tag{41.22}$$

在其他的坐标系中, 根据相对论协变性的要求, v_{12} 也具有 (41.22) 式的形式 (其证明可参考 Moller 的文章).

因此, 由 (41.15) 式和 (41.22) 式就可得到在初态为两个粒子的反应的微分截面公式:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{F}|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}})\prod_f\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3}\\&F=\sqrt{(p_{1i}p_{2i})^2-m_1^2m_2^2}\end{aligned}} \tag{41.23}$$

而总截面的公式则为

$$\boxed{\sigma=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{F}|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}})\prod_f\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3}} \tag{41.24}$$

3. 在外场作用的情况下粒子反应的截面

从 §40$M_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵动量表象的 Feynman 规则我们知道, 在有外场作用的情况下, 在 $M_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵元素中, 我们须要将外场函数 $A_i^{\mathrm{e}}(x)$ 的傅里叶分量 $\hat{a}(q)$ 代入, 然后对 q_i 进行积分:

$$\hat{a}(q)=a_i(q)\gamma_i \tag{41.25}$$

$$a_i(q)=\int A_i^{\mathrm{e}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}(\mathrm{d}x) \tag{41.26}$$

假设我们研究的外场问题是静电场问题, 则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{e}}(x)=0,\quad A_4^{\mathrm{e}}(x)=\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{41.27}$$

也即
$$\boldsymbol{a}_i(q)=0,\quad a_4(q)=\mathrm{i}a_0(q) \tag{41.28}$$

因此
$$\hat{a}(q)=\mathrm{i}a_0(q)\gamma_4 \tag{41.29}$$

将 (41.27) 式和 (41.28) 式代入 (41.26) 式可得

$$\begin{aligned} a_0(q)&=\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}q_0t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\mathrm{d}t\\ &=2\pi\delta(q_0)\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{41.30}$$

将上式代入 (41.29) 式就可得到 $\hat{a}(q)$ 在静电场时的形式:

$$\boxed{\hat{a}(q)=2\pi\mathrm{i}\delta(q_0)\gamma_4\int\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})} \tag{41.31}$$

现在让我们来讨论, 在静电外场作用的情况下 $M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}$ 应该具有怎样的形式. 我们先假设静电外场的光子只有一种动量 q, 则由 (41.2) 式和 (41.31) 式可知, $M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}$ 矩阵的形式应写为

$$M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}=M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}},q)\delta(q_0)\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}}+q) \tag{41.32}$$

但是根据 Feynman 规则, 由于外场的动量 q 是不固定的, 则还必须对 q 进行积分, 因此实际上 $M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}$ 矩阵的形式应为

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}&=\int M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}},q)\delta(q_0)\delta(p^{\mathrm{f}}-p^{\mathrm{i}}+q)(\mathrm{d}q)\\ &=\int M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}},q)\delta(q_0)\delta(\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{q})\delta(E^{\mathrm{f}}-E^{\mathrm{i}}+q_0)(\mathrm{d}\boldsymbol{q})\mathrm{d}q_0\\ &=\left[\int M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}},\boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{i}}+\boldsymbol{q})(\mathrm{d}\boldsymbol{q})\right]\delta(E^{\mathrm{f}}-E^{\mathrm{i}}) \end{aligned} \tag{41.33}$$

上式中的积分式对 $\boldsymbol{q}$ 积分以后就不显 $\boldsymbol{q}$ 的函数了, 我们将它以 $M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})$ 表示之, 则

$$\boxed{M_{\mathrm{i}-\mathrm{f}}=M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})\delta(E^{\mathrm{f}}-E^{\mathrm{i}})} \tag{41.34}$$

由此可知在外场作用的情况下, 粒子反应的能量是守恒的, 而动量则不是守恒的. 这点是和一般的粒子反应不同的地方.

按照上一节的方法, 可求得单位时间的反应概率应为

$$\begin{aligned} \Gamma_0&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})\delta(E^{\mathrm{f}}-E^{\mathrm{i}})|_T^2\\ &=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E^{\mathrm{f}}-E^{\mathrm{i}})}\mathrm{d}t\right]^2 \end{aligned} \tag{41.35}$$

利用 (41.6) 式上式可变为

$$\boxed{\Gamma_0 = \frac{1}{2\pi}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \delta(E^{\mathrm{f}} - E^{\mathrm{i}})} \tag{41.36}$$

如果在我们所研究的反应中, 初态的粒子只有一种 (不包括产生外场的外源), 其单位体积的粒子数不为 1 而为 N_1, 并且末态的粒子的动量不是固定的, 则在这种情况下的单位时间反应的概率应为

$$\mathrm{d}w_0 = \frac{N_1}{2\pi}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \delta(E^{\mathrm{f}} - E^{\mathrm{i}}) \prod_f \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3} \tag{41.37}$$

在外场作用的情况下, 由于我们不考虑产生外场的外源粒子以及外场本身的二次量子化问题, 粒子反应的截面的定义就应改写为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{[\text{单位时间粒子反应的概率}]}{[\text{单位面积入射粒子的流量}]} = \frac{\mathrm{d}w_0}{J_0} \tag{41.38}$$

它的量纲和 (41.11) 式一样, 也恰好是面积的量纲.

在初态只有一种粒子的情况, 单位面积入射的初态粒子的流量 J_0 应为

$$J_0 = N_1 v \tag{41.39}$$

此处 v 为入射粒子相对产生外场的固定外源粒子的速度.

将 (41.39) 式和 (41.37) 式代入 (41.38) 式, 可得在有外场作用的情况下粒子反应截面的公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{v}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2 \delta(E^{\mathrm{f}} - E^{\mathrm{i}}) \prod_f \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3} \tag{41.40}$$

[注]: 单位体积的粒子的数目为 1, 是产生于体积归一化和概率幅归一化条件, 即

$$V = 1 \quad \text{和} \quad \Phi^\dagger \Phi = 1$$

在有两个粒子的情况下

$$\Phi = a_{pi}^{(+)} a_{qj}^{(+)} \Phi_0, \quad \Phi^\dagger = \Phi_0^+ a_{qj}^{(-)} a_{pi}^{(-)}$$

所以

$$\Phi^\dagger \Phi = \Phi_0^\dagger a_{qj}^{(-)} a_{pi}^{(-)} a_{pi}^{(+)} a_{qj}^{(+)} \Phi_0 = N_{pi} N_{qj} = 1$$

也即

$$N_{pi} = N_{qj} = 1$$

参考文献

Jauch J M, Rohrliech F. The Theory of Photons and Electrons. 1955: §8.

§42 光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式

在一般的粒子反应中, 初态或末态同类的粒子的自旋状态不是完全一样的, 这种情况我们称为这个反应的初态或是末态的粒子的状态是非极化的. 在非极化的情况下, 我们往往就不去着重地研究粒子的自旋状态.

如果末态的粒子的状态是非极化的, 我们所求得的粒子的反应概率或截面就应该对末态粒子所有可能的自旋状态进行求和, 这样才是我们实验中所真正测量到的反应截面或概率.

如果初态的粒子的状态是非极化的, 则我们所求得的粒子反应的概率或截面还应该对初态粒子所有可能的自旋状态进行平均.

1. 对电子或正电子末态自旋状态的求和

从上一节 (41.24) 式, 我们知道粒子反应的截面主要是决定于 $|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2$, 在通常的反应中, 往往 $M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})$ 具有以下的形式:

$$M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})=\overline{u}_f(\boldsymbol{p})Ou_i(\boldsymbol{p}') \tag{42.1}$$

其中 O 是某种矩阵.

因为

$$M^\dagger(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})=u_i^\dagger(\boldsymbol{p}')O^+\overline{u}_f^\dagger(\boldsymbol{p})=\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')\gamma_4O^\dagger\gamma_4u_f(\boldsymbol{p})$$

假设

$$\overline{O}=\gamma_4O^\dagger\gamma_4 \tag{42.2}$$

则

$$|M|^2=M^\dagger M=\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')\overline{O}u_f(\boldsymbol{p})\overline{u}_f(\boldsymbol{p})Ou_i(\boldsymbol{p}') \tag{42.3}$$

如果对末态的自旋状态求和, 则

$$\sum_{f=1}^{2}|M|^2=\sum_{f=1}^{2}\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')\overline{O}u_f(\boldsymbol{p})\overline{u}_f(\boldsymbol{p})Ou_i(\boldsymbol{p}') \tag{42.4}$$

但由 (24.45) 式我们知道

$$\sum_{j=1}^{2}u_j(\boldsymbol{p})\bar{u}_j(\boldsymbol{p})=\frac{m}{E_p}\Lambda_-(\boldsymbol{p}) \tag{42.5}$$

其中

$$\Lambda_-(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2m}(m-\mathrm{i}\gamma_ip_i) \tag{42.6}$$

因此
$$\boxed{\sum_f |M|^2 = \frac{m}{E_p}\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')\overline{O}\Lambda_-(\boldsymbol{p})Ou_i(\boldsymbol{p}')} \tag{42.7}$$

上式中 $\sum_f$ 代表对末态的自旋状态求和.

2. 对电子或正电子末态自旋状态求和应对初态自旋状态平均

如果除了对末态自旋状态求和以外, 还要对初态的自旋状态进行平均, 则

$$\sum_f |\overline{M}|^2 = \frac{1}{2}\sum_i\sum_f |M|^2 \tag{42.8}$$

将 (42.7) 式代入上式, 可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_i\sum_f |M|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{m}{E_p}\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')\overline{O}\Lambda_-(\boldsymbol{p})Ou_i(\boldsymbol{p}') \\ &= \frac{1}{2}\frac{m}{E_p}\sum_i [\overline{u}_i(\boldsymbol{p}')]_\alpha \overline{O}_{\alpha\beta}\Lambda_-(\boldsymbol{p})_{\beta\gamma}O_{\gamma\delta}[u_i(\boldsymbol{p}')]_\delta\end{aligned} \tag{42.9}$$

但因
$$\sum_{j=1}^{2}[u_j(\boldsymbol{p})]_\delta[\overline{u}_j(\boldsymbol{p})]_\alpha = \frac{m}{E_p}\Lambda_-(\boldsymbol{p})_{\delta\alpha} \tag{42.10}$$

所以
$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j |M|^2 = \frac{m^2}{2E_pE_{p'}}\Lambda_-(\boldsymbol{p}')_{\delta\alpha}\overline{O}_{\alpha\beta}\Lambda_-(\boldsymbol{p})_{\beta\gamma}O_{\gamma\delta}$$

因此
$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_i\sum_f |M|^2 = \frac{m^2}{2E_pE_{p'}}\mathrm{tr}[\Lambda_-(\boldsymbol{p}')\overline{O}\Lambda_-(\boldsymbol{p})O]} \tag{42.11}$$

3. 对光子的极化状态求和

由 (22.29) 式我们知道光子的极化向量 e^i_j 有下列的关系:

$$\sum_{i=1}^{4} e^i_j e^i_k = \delta_{jk} \tag{42.12}$$

一般光子极化向量在 $|M|^2$ 中出现的情况为 $(\cdots\hat{e}^i\cdots\hat{e}^i\cdots)$, 因此对光子极化状态进行求和

$$\sum_i |M|^2 = \sum_{i=1}^{4}(\cdots\hat{e}^i\cdots\hat{e}^i\cdots) = (\cdots\gamma_j\cdots\gamma_k\cdots)\sum_{i=1}^{4} e^i_j e^i_k$$

利用 (42.12) 式, 可知

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4}(\cdots\hat{e}^i\cdots\hat{e}^i\cdots) = (\cdots\gamma_k\cdots\gamma_k\cdots)} \tag{42.13}$$

4. 计算 S 矩阵时常用的 γ_i 矩阵的运算公式

(1)

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{tr}\,(\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_n})=0\ ,\ \text{当}\ n=2k+1\text{时}\\&\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,(\gamma_i\gamma_k)=\delta_{ik}\\&\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,(\gamma_i\gamma_k\gamma_l\gamma_m)=\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\,\delta_{km}\end{aligned}}\qquad\begin{aligned}&(42.14)\\&(42.15)\\&(42.16)\end{aligned}$$

(42.15) 式的证明如下：因为

$$\gamma_i\gamma_k+\gamma_k\gamma_i=2\delta_{ik}I,\qquad \mathrm{tr}(I)=4$$

$$\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_k)+\mathrm{tr}(\gamma_k\gamma_i)=8\delta_{ik}$$

又因

$$\boxed{\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)}\qquad(42.17)$$

所以

$$\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_k)=4\delta_{ik}$$

(2)

$$\boxed{\begin{aligned}&\gamma_i S\gamma_i=4S\\&\gamma_i\hat{A}\gamma_i=-2\hat{A}\\&\gamma_i\hat{A}\hat{B}\gamma_i=4AB\\&\gamma_i\hat{A}\hat{B}\hat{C}\gamma_i=-2\hat{C}\hat{B}\hat{A}\end{aligned}}\qquad\begin{aligned}&(42.18)\\&(42.19)\\&(42.20)\\&(42.21)\end{aligned}$$

(42.19) 式的证明如下：因为

$$\hat{A}=A_j\gamma_j,\quad \gamma_i\gamma_j\gamma_i=-2\gamma_j\qquad(42.22)$$

所以

$$\gamma_i\hat{A}\gamma_i=A_j\gamma_i\gamma_j\gamma_i=-2A_j\gamma_j=-2\hat{A}$$

(3)

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2)=A_1A_2\\&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4)=(A_1A_2)(A_3A_4)\\&\quad+(A_1A_4)(A_2A_3)-(A_1A_3)(A_2A_4)\\&\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\hat{A}_1+a_1)(\hat{A}_2+a_2)(\hat{A}_3+a_3)(\hat{A}_4+a_4)]\\&\quad=(A_1A_2+a_1a_2)(A_3A_4+a_3a_4)\\&\qquad+(A_1A_4+a_1a_4)(A_2A_3+a_2a_3)\\&\qquad-(A_1A_3-a_1a_3)(A_2A_4-a_2a_4)\end{aligned}}\qquad\begin{aligned}&(42.23)\\&(42.24)\\&(42.25)\end{aligned}$$

(42.23) 式的证明如下：

$$\hat{A}_1 = A_{1i}\gamma_i, \quad \hat{A}_2 = A_{2j}\gamma_j$$

$$\mathrm{tr}(\hat{A}_1\hat{A}_2) = A_{1j}A_{2j}\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_j) = 4A_{1i}A_{2j}\delta_{ij} = 4A_1A_2$$

(4)
$$\gamma_4\hat{A}^\dagger\gamma_4 = -\hat{A} \tag{42.26}$$

$$\gamma_4(\hat{A}_1\hat{A}_2\cdots\hat{A}_n)^\dagger\gamma_4 = \pm\hat{A}_n\cdots\hat{A}_2\hat{A}_1 \tag{42.27}$$

当 n 为偶数时用正号,n 为奇数时用负号.

(5) 若
$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

则
$$\boxed{(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}} \tag{42.28}$$

(42.28) 式的证明如下：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{B}) &= \sum_{i,j=1}^{3}\gamma_i\gamma_jA_iB_j \\ &= \sum_{i=1}^{3}\gamma_i^2A_iB_i + \sum_{i\neq j,i,j=1}^{3}\gamma_i\gamma_jA_iB_j \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) + \sum_{i>j}\gamma_i\gamma_j(A_iB_j - B_iA_j) \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

习　题

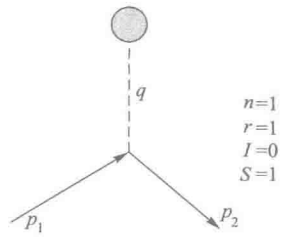
试证明 (42.16) 式、(42.20) 式和 (42.24) 式等公式.

参 考 文 献

Bethe A, Hoffmann De. Mesons and Fields. 1955.

§43 在相对论情况下的 Rutherford 散射问题

Rutherford 散射是带电粒子 (如 α 粒子或电子等) 与原子核的散射, 这是量子电动力学中最简单的问题. 为了便利起见, 在量子电动力学中是采取把原子核与带电粒子的作用当成库仑外场的作用. 它的 Feynman 图解如下:



根据 Feynman 规则, 我们便可写出代表上图反应的 $M'_{\mathrm{i-f}}$ 矩阵为

$$M'_{\mathrm{i-f}} = -e\int \bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\hat{a}(q)u_i(\boldsymbol{p}_1)\delta(p_2-p_1+q)(\mathrm{d}q) \tag{43.1}$$

但由 (41.31) 式知道在静电外场的情况下

$$\hat{a}(q) = 2\pi\mathrm{i}\delta(q_0)\int \varphi(\boldsymbol{r})\gamma_4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{43.2}$$

因为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{ze}{r}\int \varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = ze\int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{4\pi ze}{|\boldsymbol{q}|^2} \tag{43.3}$$

所以

$$\hat{a}(q) = 8\pi^2\mathrm{i}ze\frac{\gamma_4}{|\boldsymbol{q}|^2}\delta(q_0) \tag{43.4}$$

将 (43.4) 式代入 (43.1) 式可得

$$\begin{aligned} M'_{\mathrm{i-f}} &= -8\pi^2\mathrm{i}ze^2\int \frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4u_i(p_1)\delta(q_0)\delta(p_2-p_1+q)(\mathrm{d}q) \\ &= -8\pi^2\mathrm{i}ze^2\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1|^2}\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4u_i(\boldsymbol{p}_1)\right]\delta(E_2-E_1) \end{aligned} \tag{43.5}$$

将 (43.5) 式与 (41.34) 式对照可知

$$M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}}) = -8\pi^2\mathrm{i}ze^2\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1|^2}\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4u_i(\boldsymbol{p}_1)\right] \tag{43.6}$$

因在有外场情况下, 散射截面为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{v}|M^{\mathrm{e}}(p^{\mathrm{i}}, p^{\mathrm{f}})|^2\delta(E^{\mathrm{f}} - E^{\mathrm{i}})\prod_f \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_f)}{(2\pi)^3} \tag{43.7}$$

将 (43.6) 式代入 (43.7) 式可以得到 Rutherford 散射截面公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{v}\cdot 64\pi^4 z^2 e^4 \frac{1}{|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|^4}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4 u_i(\boldsymbol{p}_1)|^2\delta(E_2 - E_1)\frac{p_2^2\mathrm{d}p_2\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3} \tag{43.8}$$

但因

$$E_2^2 = \boldsymbol{p}_2^2 + m^2, \quad E_2\mathrm{d}E_2 = p_2\mathrm{d}p_2$$

所以对末态的动量积分就等于对末态的能量积分, 积分后可得单位立体角的散射截面为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= 4z^2e^4\int\frac{1}{v}\frac{p_2E_2}{|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|^4}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4 u_i(\boldsymbol{p}_1)|^2\delta(E_2 - E_1)\mathrm{d}E_2 \\ &= 4z^2e^4\frac{p_2E_1}{v}\frac{1}{|\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1|^4}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4 u_i(\boldsymbol{p}_1)|^2 \end{aligned} \tag{43.8'}$$

由于 $\delta(E_2 - E_1)$ 的存在, 这说明在 Rutherford 的散射实验中能量是守恒的, 即

$$E_1 = E_2 = E$$

或

$$\boldsymbol{p}_1^2 + m^2 = \boldsymbol{p}_2^2 + m^2, \quad |\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2| = p \tag{43.9}$$

因此

$$(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)^2 = 2p^2 - 2p^2\cos\ \theta = 4p^2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{43.10}$$

如果我们研究的问题是非极化的散射问题, 则还需对初态和末态的自旋进行平均. 由 (42.11) 式知道

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{i,f}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4 u_i(\boldsymbol{p}_1)|^2 = \frac{m^2}{2E^2}\mathrm{tr}[\gamma_4\Lambda_-(p_2)\gamma_4\Lambda_-(p_1)] \\ &= \frac{1}{8\varepsilon^2}\mathrm{tr}[\gamma_4(m - \mathrm{i}\hat{p}_2)\gamma_4(m - \mathrm{i}\hat{p}_1)] = \frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{1}{4}\mathrm{tr}(m^2 - \gamma_4\hat{p}_2\gamma_4\hat{p}_1) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{1}{4}\mathrm{tr}(m^2 - p_{1i}p_{2j}\gamma_4\gamma_j\gamma_4\gamma_i)\end{aligned} \tag{43.11}$$

但因

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_j\gamma_4\gamma_i) = 2\delta_{4i}\delta_{4j} - \delta_{ij}$$

所以
$$\frac{1}{2}\sum_{i,f}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\gamma_4 u_i(\boldsymbol{p}_1)|^2=\frac{1}{2\varepsilon^2}(m^2-2p_{14}p_{24}+p_{1j}p_{2j})$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon^2}(m^2+\varepsilon^2+p^2\cos\ \theta)=\frac{1}{2\varepsilon^2}[2\varepsilon^2-p^2(1-\cos\ \theta)]$$
$$=\left(1-\frac{p^2}{\varepsilon^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{43.12}$$

$$\frac{p}{\varepsilon}=v$$

将 (43.12) 式和 (43.10) 式代入 (43.8′) 式可得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{ze^2}{2vp}\right)^2\frac{\left(1-v^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}} \tag{43.13}$$

这就是在相对论的情况下电子与原子核散射的公式. 当电子的速度很小时 (α 粒子的速度很小), 则 (43.13) 式变为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{ze^2}{2vp}\right)^2\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}} \tag{43.14}$$

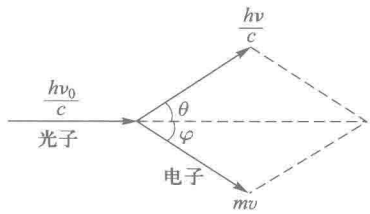
这便是在非相对论情况下, 普通的 Rutherford 散射公式.

§44 光子和电子的散射 (Compton 效应)

X 射线和原子内电子的散射问题, 是证明经典光量子理论强有力的实验之一. 这个实验是 Compton 在 1923 年提出的, 因此称为 Compton 效应. 它的内容如下：

设动量为 $\frac{h\nu_0}{c}$ 的光子 (X 射线) 和静止于 O 点质量为 m 的电子碰撞, 其结果为, 电子以速度 v 向 φ 角方向运动. 而光子则以动量 $\frac{h\nu}{c}$ 向 θ 角方向偏转 (由于原子中电子的速度较小, 可视为静止的).

如果假设原始 X 射线的波长为 λ_0, 和电子碰撞后的波长为 λ. 则根据光子和电子系统的能量和动量的守恒定律可证明, X 射线波长的改变应为



$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\ \theta) \qquad (44.1)$$

这个公式是由光子的动量为 $\frac{h\nu}{c}$, 能量为 $h\nu$ 的假设出发推导得来的.Compton 证明了这个公式与实验的结果非常符合, 因而也就给光量子的假设找到了强有力的根据.

1. Compton 效应的 $M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}$ 矩阵元素

Compton 效应从量子场论的角度出发, 应该看成是原子内的电子先吸收一个动量为 k_1 的光子, 变为中间态, 然后又放出一个动量为 k_2 的光子 [图 (a)]; 和先放出一个动量为 k_2 的光子, 然后再吸收一个动量为 k_1 的光子 [图 (b)] 等两种粒子反应的过程. 它们的 Feynman 图解如下：

$$n = 2, \quad r = 2, \quad I = 1, \quad S = 0$$

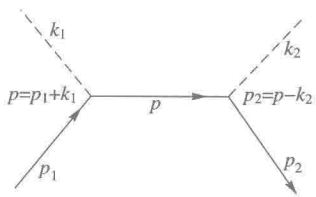


图 (a)

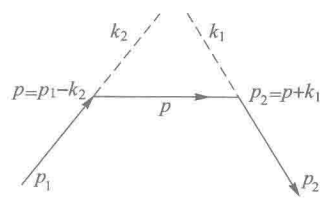


图 (b)

这个 Feynman 图解因为有两个顶点, 因此它们对应的 S 矩阵应该是二级的, 它们的 $M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}$ 矩阵, 根据 §40 中 Feynman 规则可知应为

$$M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}=\frac{-\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\int[\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}\hat{e}^1u_i(\boldsymbol{p}_1)\delta(p-p_1-k_1)\delta(p_2-p+k_2)$$

$$+\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m}\hat{e}^2u_i(\boldsymbol{p}_1)\delta(p-p_1+k_2)\delta(p_2-p-k_1)](\mathrm{d}p) \tag{44.2}$$

i 和 f 代表初态和末态电子的自旋状态, $\hat{e}^1$ 和 $\hat{e}^2$ 代表动量为 k_1 和 k_2 两光子的极化向量. 将 (44.2) 式对 p 进行积分, 则

$$M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}=\frac{-\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)\left[\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m}{(p_1+k_1)^2+m^2}\hat{e}^1\right.$$

$$\left.+\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m}{(p_1-k_2)^2+m^2}\hat{e}^2\right]u_i(\boldsymbol{p}_1)\delta(p_2-p_1+k_2-k_1) \tag{44.3}$$

上式中的 δ 函数, 代表 Compton 效应的光子和电子系统在反应前后的能量和动量守恒. 由 (42.1) 式知道 $M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})$ 矩阵的形式应为

$$M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})=\frac{-\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)Ou_i(\boldsymbol{p}_1) \tag{44.4}$$

其中
$$O=\left[\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1}+\hat{k_1})-m}{(p_1+k_1)^2+m^2}\hat{e}^1+\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1}-\hat{k_2})-m}{(p_1-k_2)^2+m^2}\hat{e}^2\right] \tag{44.4'}$$

现在让我们来研究 Compton 效应中光子和电子的动量之间的关系, 它们必须服从前面所说过的能量和动量的守恒定律:

$$p_1+k_1=p_2+k_2 \tag{44.5}$$

因为初态和末态的电子和光子都是自由粒子, 因此

$$p_1^2+m^2=0,\quad p_2^2+m^2=0 \tag{44.6}$$

$$k_1^2=0,\quad k_2^2=0 \tag{44.7}$$

将 (44.5) 式平方, 并利用 (44.6) 式和 (44.7) 式可证明

$$p_1k_1=p_2k_2 \tag{44.8}$$

因为
$$p_1-k_2=p_2-k_1 \tag{44.9}$$

将 (44.9) 式平方, 同理可得到

$$p_1k_2 = p_2k_1 \tag{44.10}$$

利用 (44.6)— (44.10) 式还可证明对于以后计算有用的公式:

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + k_1)^2 + m^2 &= 2p_1k_1\\ (p_1 - k_2)^2 + m^2 &= -2p_1k_2\end{aligned}\right\} \tag{44.11}$$

及

$$\left.\begin{aligned}p_1p_2 + m^2 &= p_1(k_1 - k_2)\\ k_1k_2 &= p_1(k_1 - k_2)\end{aligned}\right\} \tag{44.12}$$

或

$$p_1p_2 = k_1k_2 - m^2 \tag{44.13}$$

如果假设初态的电子为静止的, 即 $\boldsymbol{p}_1 = 0$, 则

$$E_1 = \sqrt{(\boldsymbol{p}_1)^2 + m^2} = m \tag{44.14}$$

并且因为光子的质量为零, 故

$$\varepsilon_1 = |\boldsymbol{k}_1|, \quad \varepsilon_2 = |\boldsymbol{k}_2| \tag{44.15}$$

将 (44.14) 式和 (44.15) 式代入 (44.13) 式, 可得

$$m\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = (1 - \cos\theta), \quad \cos\theta = \frac{\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \tag{44.16}$$

如果设 $\varepsilon = h\nu$, 由 (44.16) 式很容易就可得到 (44.1) 式, 由 (44.16) 式还可得到 ε_1 和 ε_2 之间的明显函数关系:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 + \dfrac{\varepsilon_1}{m}(1 - \cos\theta)} \tag{44.17}$$

利用 (44.11) 式可将 (44.4′) 式变为便于以上计算的形式:

$$O = \left[\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1} + \hat{k_1}) - m}{2(p_1k_1)}\hat{e}^1 - \hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1} - \hat{k_2}) - m}{2(p_1k_2)}\hat{e}^2\right] \tag{44.18}$$

并且由 (44.18) 式和 (42.27) 式可证明

$$\bar{O} \equiv \gamma_4O^\dagger\gamma_4 = \left[\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1} + \hat{k_1}) - m}{2(p_1k_1)}\hat{e}^2 - \hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p_1} - \hat{k_2}) - m}{2(p_1k_2)}\hat{e}^1\right] \tag{44.19}$$

2. Compton 效应截面公式的计算

Compton 效应的初态和末态的粒子数皆为 2, 根据 (41.23) 式可知, Compton 效应截面公式应为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{E_1\varepsilon_1}{F}|M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})|^2\delta(p_2-p_1+k_2-k_1)\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2)}{(2\pi)^3}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2)}{(2\pi)^3} \tag{44.20}$$

其中 F 由 (41.23) 式计算可知, 在 $\boldsymbol{p}_1=0$ 的情况为

$$F = |p_1k_1| = E_1\varepsilon_1 \tag{44.21}$$

将 (44.4) 式和 (44.21) 式代入 (44.20) 式, 可得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)Ou_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{p}_1)|^2\delta(p_2-p_1+k_2-k_1)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{44.22}$$

在 Compton 效应的实验中, 初态和末态的电子与光子都是没有固定的自旋和极化状态的, 因此, 我们必须对初态的电子自旋状态进行平均, 末态的电子自旋状态进行求和, 对于光子初态和末态的极化状态也要进行平均和求和. 根据 (42.11) 式和 (42.3) 式我们知道, 在这样的非极化的情况下,(44.22) 式中的 $|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)Ou_i(\boldsymbol{p}_1)|$ 应该以下式代替, 即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{e^1,e^2}\frac{1}{2}\sum_{i,f}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)Ou_i(\boldsymbol{p}_1)|^2\\ &=\frac{1}{4}\sum_{e^1,e^2}\mathrm{tr}[\bar{O}\Lambda_-(p_2)O\Lambda_-(p_1)]\end{aligned} \tag{44.23}$$

上式中 $\sum\limits_{e^1,e^2}$ 代表对光子初态和末态的极化状态进行求和,$\sum\limits_{i,f}$ 代表对电子的初态和末态的自旋状态进行求和, 因为

$$\Lambda_-(p) = -\frac{1}{2E}(\mathrm{i}\hat{p}-m) \tag{44.24}$$

所以 (44.23) 式可简写为

$$\frac{1}{2}\sum_{e^1,e^2}\frac{1}{2}\sum_{i,f}|\bar{u}_f(\boldsymbol{p}_2)Ou_i(\boldsymbol{p}_1)|^2 = \frac{1}{2E_1E_2}Y \tag{44.25}$$

其中

$$Y = \frac{1}{8}\sum_{e^1,e^2}\mathrm{tr}[\bar{O}(\mathrm{i}\hat{p}_2-m)O(\mathrm{i}\hat{p}_1-m)] \tag{44.26}$$

将 (44.25) 式代入 (44.22) 式可将截面公式变为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^4}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{1}{E_1E_2}Y\delta(p_2-p_1+k_2-k_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2)(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2) \tag{44.27}$$

现在让我们来计算 Y 函数. 将 (44.18) 式和 (44.19) 式代入 (44.26) 式, 并改写 (42.13) 式, 即将 $\hat{e}^1$ 换为 γ_i, $\hat{e}^2$ 换为 γ_j, 可得

$$Y = \frac{A}{(p_1k_2)^2} + \frac{B}{(p_1k_2)^2} - \frac{C+D}{(p_1k_1)(p_1k_2)} \tag{44.28}$$

其中

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{32}\mathrm{tr}\{&\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_2-m)\\ &\gamma_j[\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m]\gamma_i(\mathrm{i}\hat{p}_1-m)\} \end{aligned} \tag{44.29}$$

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{32}\mathrm{tr}\{&\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_2-m)\\ &\gamma_j[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m]\gamma_i(\mathrm{i}\hat{p}_1-m)\} \end{aligned} \tag{44.30}$$

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{32}\mathrm{tr}\{&\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_2-m)\\ &\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_1-m)\} \end{aligned} \tag{44.31}$$

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{32}\mathrm{tr}\{&\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k}_2)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_2-m)\\ &\gamma_i[\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m]\gamma_j(\mathrm{i}\hat{p}_1-m)\} \end{aligned} \tag{44.32}$$

由 (44.29)— (44.32) 式我们知道, 将 A 和 C 中的 k_1 置换为 $(-k_2)$,k_2 置换为 $(-k_1)$, 就可得到 B 和 D, 因此我们实际上只要计算出 A 和 C 就可以了.

A 的计算如下, 利用 (42.19) 式、(42.25) 式, 并考虑 (44.11) 式、(44.6) 式、(44.7) 式, 可将 (44.29) 式写为

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{8}\mathrm{tr}\{[\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m][\mathrm{i}\hat{p}_2+2m][\mathrm{i}(\hat{p}_1+\hat{k}_1)-m][\mathrm{i}\hat{p}_1+2m]\}\\ =& \frac{1}{2}\{2[\mathrm{i}(p_1+k_1)p_2+2m^2][(p_1+k_1)p_1+2m^2]\\ &-[(p_1+k_1)^2-m^2](p_1p_2-4m^2)\}\\ =& (p_1k_1+m^2)^2-(p_1k_1)(p_1k_1-p_1k_2+3m^2) \end{aligned} \tag{44.33}$$

将上式化简, 可得

$$A = m^4+(p_1k_1)(p_1k_2)-(p_1k_1)m^2 \tag{44.34}$$

将上式中 k_1、k_2 进行 $k_1 \to -k_2, k_2 \to -k_1$ 的置换, 可得

$$B = m^4 + (p_1k_1)(p_1k_2) + (p_1k_2)m^2 \tag{44.35}$$

同理, 利用 $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}$, 不难证明

$$C = m^4 + m^2(p_1k_2) - \frac{1}{2}(p_1k_1)m^2 \tag{44.36}$$

$$D = m^4 - m^2(p_1k_2) - \frac{1}{2}(p_1k_2)m^2 \tag{44.37}$$

将所求得的 A、B、C、D 代入 (44.28) 式可求得

$$Y = \left[\frac{m^2}{(p_1k_2)} - \frac{m^2}{(p_1k_1)}\right]^2 + 2\left[\frac{m^2}{(p_1k_2)} - \frac{m^2}{(p_1k_1)}\right] + \left(\frac{p_1k_2}{p_1k_1} + \frac{p_1k_1}{p_1k_2}\right) \tag{44.38}$$

但由 (44.14) 式可知

$$p_1k_1 = -m\varepsilon_1, \quad p_1k_1 = -m\varepsilon_2 \tag{44.39}$$

因此

$$Y = \left(\frac{m}{\varepsilon_1} - \frac{m}{\varepsilon_2}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{\varepsilon_1} - \frac{m}{\varepsilon_2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \tag{44.40}$$

3. Compton 效应光子的角分布公式

要求得 Compton 效应光子的角分布公式, 则须将 (44.27) 式的截面公式对 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 进行积分. 经过积分以后, 其中的 δ 函数就可消掉, 因为

$$\delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) = \delta(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}_1)\delta(E_2 + \varepsilon_2 - E_1 - \varepsilon_1) \tag{44.41}$$

上式中右边的第一个 δ 函数代表动量守恒定律, 第二个 δ 函数代表能量守恒定律. 如将 (44.27) 式对 $\boldsymbol{p}_2$ 进行积分, 则相当于下列的置换:

$$\delta(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \longrightarrow 1 \tag{44.42}$$

并且要将 $\mathrm{d}\sigma$ 中的 $\boldsymbol{p}_2$ 换为 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$. 这就是说, 在 Compton 效应中, 光子和电子的动量不是完全独立的, 它们必须服从动量守恒定律.

现在再来研究对 $\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2$ 的积分问题, 因为 $|\boldsymbol{k}_2| = \varepsilon_2$, 所以

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2) = \varepsilon_2^2 \mathrm{d}\varepsilon_2 \mathrm{d}\Omega \tag{44.43}$$

由于 $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{p}_1 = 0$, 故

$$E_2^2 = (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)^2 + m^2$$

或

$$E_2^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \cos\ \theta \tag{44.44}$$

因初态光子的能量 ε_1 是固定的, 则由上式知道 E_2 应该是 ε_2 的函数, 根据 §17 习题 1 可知

$$\delta[E_2(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 - E_1 - \varepsilon_1] = \frac{\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^0)}{\left|\dfrac{\partial(E_2 + \varepsilon_2)}{\partial\varepsilon_2}\right|} \tag{44.45}$$

ε_2^0 为方程式

$$E_2(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 = E_1 + \varepsilon_1 \tag{44.46}$$

的根. 因此 (44.27) 式对 $\boldsymbol{k}_2$ 进行积分, 就相当于下列的置换:

$$\delta(E_2 + \varepsilon_2 - E_1 - \varepsilon_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2) \longrightarrow \frac{\varepsilon_2^2}{\left|\dfrac{\partial(E_2 + \varepsilon_2)}{\partial\varepsilon_2}\right|}\mathrm{d}\Omega \tag{44.47}$$

并且 $\mathrm{d}\sigma$ 中的 ε_2 要换为 ε_2^0, 这就是说, Compton 效应还一定要服从动量守恒定律的能量守恒定律 (44.46) 式.

由 (44.44) 式和 (44.16) 式可证明

$$\frac{\partial(E_2 + \varepsilon_2)}{\partial\varepsilon_2} = -\frac{m\varepsilon_1}{E_2\varepsilon_2} \tag{44.48}$$

将 (44.40) 式代入 (44.27) 式, 对 $\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 进行积分, 并考虑 (44.42) 式、(44.47) 式和 (44.48) 式以及 (44.14) 式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\left[\left(\frac{m}{\varepsilon_1} - \frac{m}{\varepsilon_2}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{\varepsilon_1} - \frac{m}{\varepsilon_2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right] \tag{44.49}$$

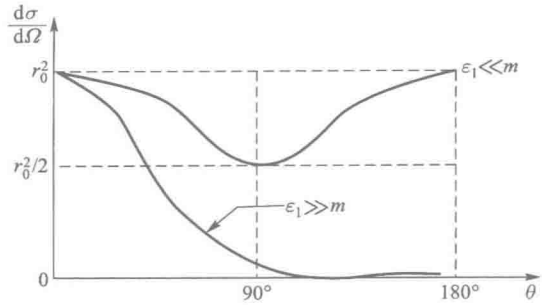
其中 $r_0 = \dfrac{e^2}{4\pi m}$ 为电子的经典半径 $\left(\text{在普通的单位制中 } r_0 = \dfrac{e^2}{mc^2}\right)$.

利用 (44.16) 式可将上式变为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) - \sin^2\theta\right]} \tag{44.50}$$

这个公式首先被 Klein 和 Nishina 于 1929 年求得. 因为 ε_1 和 ε_2 也不是完全独立的, 如将 (44.17) 式代入 (44.50) 式, 则可得 Compton 效应被散射后光子的角分布公式:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\frac{(1 + \cos^2\theta)}{\left[1 + \dfrac{\varepsilon_1}{m}(1 - \cos\theta)\right]^2}\left\{1 + \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_1}{m}\right)^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)\left[1 + \dfrac{\varepsilon_1}{m}(1 - \cos\theta)\right]^2}\right\}} \tag{44.51}$$



当 $\frac{\varepsilon_1}{m}\ll 1$ 时, 即当入射光子的能量比电子静止能量小很多时, (44.51) 式可变为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta),\quad \text{当}\varepsilon_1\ll m} \tag{44.52}$$

由此可知, 在小能量的情况下光子被电子散射, 其向前散射和向后散射的概率是一样的 (参看上图).

当 $\frac{\varepsilon_1}{m}\gg 1$, $\theta>0$ 时, 有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=-\frac{r_0^2}{2}\frac{m}{\varepsilon_1}\frac{1}{(1-\cos\theta)}} \tag{44.53}$$

当 $\frac{\varepsilon_1}{m}\gg 1, \theta\approx 0$ 时, 有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=r_0^2} \tag{44.54}$$

这就是说, 当光子的能量比电子的静止能量大很多时, 光子对电子的散射, 其向前散射的概率比向后散射的概率大 (参看上图).

4. Compton 效应的总截面公式

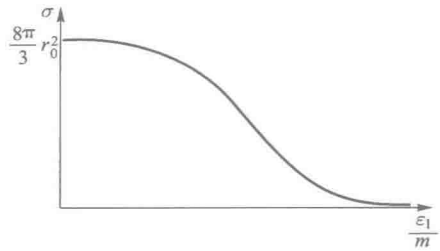
因为立体角元素

$$\mathrm{d}\Omega=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{44.55}$$

则将 (44.51) 式对 θ 从 0 到 180° 进行积分, 可得 Compton 效应的总截面公式:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma=2\pi r_0^2\Big\{&\frac{1+\eta}{\eta^3}\Big[\frac{2\eta(\eta+1)}{1+2\eta}-\ln(1+2\eta)\Big]\\&+\frac{1}{2\eta}\ln(1+2\eta)-\frac{1+3\eta}{(1+2\eta)^2}\Big\}\end{aligned}} \tag{44.56}$$

上式中 $\eta\equiv\frac{\varepsilon_1}{m}$. 并且有



$$\boxed{\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon_1}{m} + \cdots\right) \quad \text{当} \varepsilon_1 \ll m \text{时}} \tag{44.57}$$

$$\boxed{\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{\varepsilon_1} \left(\ln \frac{2\varepsilon_1}{m} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{当} \varepsilon_1 \gg m \text{时}} \tag{44.58}$$

因此, 光子对电子的散射, 当光子的能量愈大时, 其总截面愈小, 当光子的能量愈小时, 其总截面愈大, 并以 $\sigma = \dfrac{8\pi}{3} r_0^2$ 为极限.

习　题

证明 (44.31) 式.

参 考 文 献

[1] Lifshitz E M, Landau L D. Quantum Electrodynamics. Butterworth–Heinemann, 1982.

[2] Zee A. Quantum Field Theory in a Nutshell. Princeton University Press, 2003.

§45 正负电子对湮没为两个光子

当正电子和负电子相遇时就要湮没为数个光子. 在 §3 的习题中曾经谈到, 自由的正负电子对相遇时不可能湮没为一个光子, 因为在这种情况下, 能量和动量守恒定律是互相矛盾的. 但这里我们必须知道, 当正电子和非自由状态的电子相遇时, 还是可以湮没为一个光子的, 比如正电子和原子核外的电子相遇就可以转化为一个光子.

这一节我们着重讨论一对自由的正负电子湮没为两个光子的问题,

即
$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \longrightarrow \gamma + \gamma'$$

这个反应的 Feynman 图解如下:

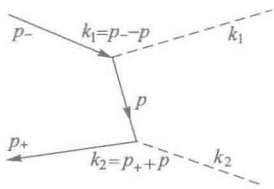


图 (a)

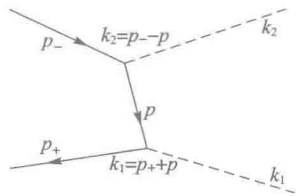


图 (b)

图 (a) 代表四维动量为 p_+ 的正电子和四维动量为 p_- 的电子相遇, 先放出一个四维动量为 k_1 的光子, 然后又放出一个四维动量为 k_2 的光子; 图 (b) 则代表正负电子对相遇先放出 k_2 光子, 然后再放出 k_1 光子的过程.

1. 自由正负电子对湮没为两个光子的截面公式计算

上面所谈的正负电子对湮没为两个光子的 Feynman 图解有两个顶点, 因此它们的 S 矩阵也和 Compton 效应一样, 应该是二级的. 根据 §40 的 Feynman 规则, 图 (a) 和图 (b) 的 $M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}$ 矩阵元素应为

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{i-f}}^{(2)} = -\frac{\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \int \Big[& (\bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)\hat{e}^2 \frac{\mathrm{i}\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \\ & \hat{e}^1 u_i(\boldsymbol{p}_-)\delta(p + k_1 - p_-)\delta(p_+ + p - k_2) + \\ & \bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)\hat{e}^1 \frac{\mathrm{i}\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \hat{e}^2 u_i(\boldsymbol{p}_-) \\ & \delta(p + k_2 - p_-)\delta(p_+ + p - k_1)\Big] (\mathrm{d}p) \end{aligned} \tag{45.1}$$

对 p 积分以后得

$$M_{\mathrm{i-f}}^{(2)}=-\frac{\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)\Big[\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_--\hat{k}_1)-m}{(p_--k_1)^2+m^2}\hat{e}^1+$$
$$\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_--\hat{k}_2)-m}{(p_--k_2)^2+m^2}e^2\Big]u_i(\boldsymbol{p}_-)\delta(p_++p_--k_1-k_2) \tag{45.2}$$

因此

$$M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})=\frac{\mathrm{i}e^2(2\pi)^4}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)Ou_i(\boldsymbol{p}_-) \tag{45.3}$$

$$O\equiv\Big[\hat{e}^2\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_--\hat{k}_1)-m}{(p_--k_1)^2+m^2}\hat{e}^1+\hat{e}^1\frac{\mathrm{i}(\hat{p}_--\hat{k}_2)-m}{(p_--k_2)^2+m^2}\hat{e}^2\Big] \tag{45.4}$$

并且由 (45.2) 式右方的 δ 函数可知, 反应的能量和动量守恒定律应为

$$p_++p_-=k_1+k_2 \tag{45.5}$$

(45.3) 式的 $M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})$ 矩阵与 (45.5) 式的守恒定律和上节中 Compton 效应的正负号不同, 由 (44.4) 式和 (44.5) 式可知, 只要将 Compton 效应的 $M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})$ 和守恒定律经过下列的置换, 就可变成 (45.3) 式和 (45.5) 式:

$$\left.\begin{array}{l}k_1\longrightarrow-k_1\\k_2\longrightarrow+k_2\\p_1\longrightarrow+p_-\\p_2\longrightarrow-p_+\end{array}\right\} \tag{45.6}$$

这里必须注意, 在进行 (45.6) 式的置换 $p_2\longrightarrow-p_+$ 时, 由 (40.3) 式可知电子的状态旋量就变成了正电子的状态旋量, 即

$$u_i(-\boldsymbol{p}_+)\longrightarrow v_i(\boldsymbol{p}_+)$$

由 (41.23) 式可知正负电子对湮没为两个光子的微分截面应为

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{E_+E_-}{F}\mid M(p^{\mathrm{i}},p^{\mathrm{f}})\mid^2\delta(p_++p_--k_1-k_2)\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1)}{(2\pi)^3}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2)}{(2\pi)^3} \tag{45.7}$$

在电子静止的坐标内

$$\boldsymbol{p}_-=0,\quad E_-=m \tag{45.8}$$

因此

$$F=\sqrt{(mE_+)^2-m^4}=m\mid\boldsymbol{p}_+\mid \tag{45.9}$$

将 (45.3) 式和 (45.9) 式代入 (45.7) 式, 可得

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{1}{\beta_+} \mid \bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)Ou_i(\boldsymbol{p}_-) \mid^2$$
$$\delta(p_+ + p_- - k_1 - k_2)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2) \tag{45.10}$$

上式中
$$\beta_+ = \frac{\mid \boldsymbol{p}_+ \mid}{E_+} \tag{45.11}$$

因为在一般正负电子对湮没为光子的实验中, 初态的正负电子都是非极化的, 末态的光子也不着重去研究某种特殊极化状态的概率, 因此在计算 (45.10) 式的截面公式时, 必须对初态正负电子的自旋状态进行平均, 末态光子的极化状态进行求和. 它的结果只需将 (44.25) 式和 (44.40) 式进行 (45.6) 式的置换, 就可得到, 即

$$\sum_{e^1,e^2}\frac{1}{4}\sum_{i,j} \mid \bar{v}_j(\boldsymbol{p}_+)Ou_i(\boldsymbol{p}_-) \mid^2 = \frac{1}{2E_+E_-}X \tag{45.12}$$

其中
$$X = 2\left(\frac{m}{\varepsilon_1}+\frac{m}{\varepsilon_2}\right) - \left(\frac{m}{\varepsilon_1}+\frac{m}{\varepsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \tag{45.13}$$

将 (45.12) 式和 (45.13) 式代入 (45.10) 式, 就可得到正负电子对湮没为两个光子的微分截面公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{1}{E_+E_-}\frac{1}{\beta_+}X\delta(p_+ + p_- - k_1 - k_2)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2) \tag{45.14}$$

2. 末态光子的角分布

由 (45.5) 式可知

$$p_+ - k_1 = k_2 - p_-, \quad p_+ - k_2 = k_1 - p_- \tag{45.15}$$

将上两式进行平方, 并考虑

$$p_+^2 + m^2 = 0, \quad k_1^2 = k_2^2 = 0 \tag{45.16}$$

可得
$$p_+k_1 = p_-k_2, \quad p_+k_2 = p_-k_1 \tag{45.17}$$

设 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{p}_+$ 的夹角分别为 φ_1、φ_2, 并设

$$\gamma = \frac{E_+}{m} \tag{45.18}$$

则由 (45.17) 式、(45.8) 式、(45.11) 式和 (45.18) 式, 可得

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \gamma(1 - \beta_+ \cos\varphi_1) \tag{45.19}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \gamma(1 - \beta_+ \cos\varphi_2) \tag{45.20}$$

所以 φ_1 与 φ_2 之间有关系式

$$\gamma(1 - \beta_+ \cos\varphi_2) = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{(1 - \beta_+ \cos\varphi_1)} \tag{45.21}$$

因

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = E_+ + m \tag{45.22}$$

由 (45.19) 式和 (45.20) 式, 并考虑 (45.21) 式, 可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{m} &= \frac{1+\gamma}{1+\gamma(1-\beta_+\cos\varphi_1)} \\ \frac{\varepsilon_2}{m} &= \frac{\gamma(1+\gamma)(1-\beta_+\cos\varphi_1)}{1+\gamma(1-\beta_+\cos\varphi_1)} \end{aligned}\right\} \tag{45.23}$$

将 (45.23) 式和 (45.19) 式代入 (45.13) 式, 则可求得

$$X = \frac{(1+\gamma f)^2}{\gamma(1+\gamma)f}\left[\gamma + 3 - \frac{(1+\gamma f)^2}{\gamma(1+\gamma)f} - \frac{2\gamma f(1+\gamma)}{(1+\gamma f)^2}\right] \tag{45.24}$$

其中

$$f \equiv (1 - \beta_+ \cos\varphi_1) \tag{45.25}$$

(45.14) 式中的 $\delta(p_+ + p_- - k_1 - k_2)$ 函数可以分为两个 δ 函数的乘积, 即 $\delta(\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\delta(E_+ + E_- - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. 第一个 δ 函数保证反应前后的动量守恒, 第二个 δ 函数则代表反应前后的能量守恒. 仿照处理 Compton 效应的积分问题, 将 (45.14) 式对 $\boldsymbol{k}_2$ 积分相当于下列的置换:

$$\delta(\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2 \longrightarrow 1 \tag{45.26}$$

$$\boldsymbol{k}_2 \longrightarrow \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}_1$$

因为 ε_1 和 ε_2 不是完全独立的, ε_2 是 ε_1 的函数:

$$\varepsilon_2^2 = (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}_1)^2 = p_+^2 + \varepsilon_1^2 - 2 \mid \boldsymbol{p}_+ \mid \varepsilon_1 \cos\varphi_1 \tag{45.27}$$

由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 = \varepsilon_1^2 \mathrm{d}\varepsilon_1 \mathrm{d}\Omega_1$$

则将 (45.10) 式对 k_1 积分, 相当于下列的置换:

$$\delta(E_+ + E_- - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1) \longrightarrow \varepsilon_1^2 \mathrm{d}\Omega_1 \Big/ \frac{\partial(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1} \tag{45.28}$$

利用 (45.27) 式和 (45.24) 式, 可证明

$$\frac{\partial(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1} = \frac{[1 + \gamma f]^2}{\gamma(1+\gamma) f} \tag{45.29}$$

将 (45.14) 式对 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 进行积分, 并将 (45.29) 式代入, 则可求得正负电子对湮没为两个光子的末态光子的角分布公式:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_1} = \frac{r_0^2}{2} \frac{1}{\beta_+ \gamma^2 f} \left[\gamma + 3 - \frac{(1+\gamma f)^2}{\gamma(1+\gamma) f} - 2 \frac{\gamma f (1+\gamma)}{(1+\gamma f)^2} \right] \tag{45.30}$$

或

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_1} = \frac{r_0^2}{2} \frac{1}{\beta_+ \gamma^2 (1 - \beta_+ \cos\varphi_1)} \\ &\left\{ \gamma + 3 - \frac{[1 + \gamma(1 - \beta_+ \cos\varphi_1)]^2}{\gamma(1+\gamma)(1 - \beta_+ \cos\varphi_1)} - 2 \frac{\gamma(1+\gamma)(1 - \beta_+ \cos\varphi_1)}{[1 + \gamma(1 - \beta_+ \cos\varphi_1)]^2} \right\} \end{aligned}} \tag{45.31}$$

3. 正负电子对湮没为两个光子的总截面公式

因

$$\mathrm{d}\Omega_1 = 2\pi \sin\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \tag{45.32}$$

将 (45.31) 式对 φ_1 由 0 至 π 进行积分, 则可得正负电子对湮没为两个光子的总截面公式:

$$\sigma = \frac{r_0^2 \pi}{\beta_+^2 \gamma(\gamma+1)} \left[\left(\gamma + 4 + \frac{1}{\gamma} \right) \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \beta_+ (\gamma + 3) \right] \tag{45.33}$$

但由

$$\beta_+ = \frac{|\,\boldsymbol{p}_+\,|}{E_+} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \tag{45.34}$$

得

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi r_0^2}{\gamma + 1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]} \tag{45.35}$$

上式中

$$\gamma = \frac{E_+}{m}$$

因此在电子为静止的情况, 总截面仅是正电子能量的函数.

当 $E_+ \gg m$ 时, 有

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m}{E^+} \left(\ln \frac{2E_+}{m} - 1 \right) \tag{45.36}$$

因为当 $E_+ \gg m$ 时, $\dfrac{m}{E_+}$ 很小, 因此在正电子的能量较大时截面 σ 较小, 这就是说, 只有当正电子的能量较小时, 正负电子对才容易湮没为光子.

当 $E_+ \approx m$ 时, 有

$$\boxed{\sigma = \pi r_0^2 \frac{1}{\beta_+}} \tag{45.37}$$

这是小能量的正电子湮没为光子的截面公式, 它与正电子速度成反比.

现在让我们来计算慢正电子在物质中存在的寿命. 因为在电子为静止的情况下, 由 (41.11) 式知

$$\sigma = \frac{w}{N_+ N_- v_+} \quad \text{或} \quad w = N_+ N_- v_+ \sigma \tag{45.38}$$

w 为单位体积有 N_+ 个正电子, N_- 个负电子, 而正电子入射的速度为 v_+ 时正负电子湮没的概率. 因此单位时间一个正电子和单位体积 N_- 个电子湮没的平均概率应为

$$W = \frac{w}{N_+} = N_- v_+ \sigma \tag{45.39}$$

设 N 为单位体积中的原子数, Z 为其原子序数, 则

$$N_- = ZN \tag{45.40}$$

并且由于在 $c = 1$ 的单位制中

$$\beta_+ = \frac{v_+}{c} \tag{45.41}$$

将 (45.37) 式代入 (45.39) 式, 并考虑 (45.40) 式和 (45.41) 式, 我们就可得到一个正电子在原子序数为 Z 的物质中单位时间湮没为光子的平均概率

$$\boxed{W = ZN\pi r_0^2 c} \tag{45.42}$$

固体的 N 比气体的 N 大, 因此正电子在固体中湮没的概率大. 这就是说, 正电子在气体中的寿命比在固体中长, 并且正电子在原子序数 Z 愈大的物质中寿命愈短. 正电子在物质中的寿命 τ 的定义为正电子在物质中生存的时间, 也就是正电子在物质中产生湮没现象而需要的平均时间, 因此是 W 的倒数, 即

$$\boxed{\tau = \frac{1}{W} = \frac{1}{ZN\pi r_0^2 c}} \tag{45.43}$$

铅的原子序数 $Z = 82$, 计算的结果慢正电子在铅中存在的寿命为

$$\tau = 2 \times 10^{-10}\ \text{s}$$

原子核和正电子有排斥的力量, 因为实际上, 正电子是不容易和原子内层的电子起作用的. 因此有效的单位体积的电子数应少于 ZN. 所以实际上, 正电子在物质中湮没的概率应比 (45.42) 式所计算的概率小. 也就是说, 正电子在物质中存在的寿命比 (45.43) 式所计算的结果要长. 因此, 如果考虑了原子核的库仑斥力, 则正电子在铅中的寿命不是 10^{-10} s 而是 10^{-8} s.

参考文献

[1] Jauch J M, Rohrlich F. The Theory of Photons and Electrons. 1955: 12-4.

[2] Tamm E. Zs. f. phys., 1930, 62: 545.

附录: 关于 Feynman 图解问题的补充材料

为什么 Feynman 函数 Δ^{F}、D^{F}、S^{F} 代表粒子的内线?

由 (29.26) 式, 我们知道耦合式的定义为

$$\overbrace{u(x_1)u}(x_2) = T[u(x_1)u(x_2)] - N[u(x_1)u(x_2)]$$

因为

$$\langle N[u(x_1)u(x_2)]\rangle_0 = 0$$

所以

$$\overbrace{u(x_1)u}(x_2) = \langle T[u(x_1)u(x_2)]\rangle_0$$

为了说明问题方便起见, 我们设 $t_1 > t_2$, 因此

$$\begin{aligned} T[u(x_1)u(x_2)] &= [u^{(+)}(x_1) + u^{(-)}(x_1)][u^{(+)}(x_2) + u^{(-)}(x_2)] \\ &= u^{(+)}(x_1)u^{(+)}(x_2) + u^{(-)}(x_1)u^{(-)}(x_2) + \\ &\quad u^{(+)}(x_1)u^{(-)}(x_2) + u^{(-)}(x_1)u^{(+)}(x_2) \end{aligned}$$

因为

$$u^{(-)}(x)\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0^{\dagger}u^{(+)}(x) = 0$$

所以, 上式中的前三项的真空平均值为零, 而不为零的只有最后一项, 因此

$$\overbrace{u(x_1)u}(x_2) = \langle T[u(x_1)u(x_2)]\rangle_0 = \Phi_0^{\dagger}u^{(-)}(x_1)u^{(+)}(x_2)\Phi_0$$

由于上式中 Φ_0 是代表场函数 $u(x)$ 所描写的粒子的真空状态, 并且由于 $t_2 < t_1$, 则耦合公式的物理意义, 由上面计算的结果可以看出, 应该是: 在 x_2 点从这种粒子的真空状态, 产生了一个粒子, 然后在 x_1 点就被 $u^{(-)}(x_1)$ 算符消灭了. 因此, 耦合式便代表在 t_2 时刻产生了粒子, 而在 t_1 时刻又消灭了的过程, 也就是代表这种粒子仅存在 $\Delta t = t_1 - t_2$ 这一段时间的过程, 于是它的 Feymnan 图解应该是



因为场函数的耦合式是与 Feymnan 函数有直接关系的, 即

$$\overbrace{\varphi(x_1)\varphi^*(x_2)} = \frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)$$

$$\overbrace{A_\alpha(x_1)A_\beta(x_2)} = \frac{1}{2}D^{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)\delta_{\alpha\beta}$$

$$\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\overline{\psi}_\beta(x_2)} = -\frac{1}{2}S^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

因此 Δ^{F}、D^{F} 和 S^{F} 的物理意义就代表着它们的场函数可描写的粒子的内线.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010)82086060
反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn
通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

ISBN 978-7-04-041823-1



9 787040 418231 >

定价 37.20 元

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　绪论
1　组成物质的粒子
2　量子场论研究的对象
第二章　场的运动方程式和守恒定律
3　狭义相对论与标量场方程式
4　矩阵空间与旋量
5　旋量场方程式
6　向量场方程式
7　场函数的变换规律
8　场论中的Lagrange（拉格朗日）原理
9　经典力学中的广义守恒原理
10　场论中的广义守恒原理
11　能量、动量、张量与能量、动量守恒定律
12　角动量张量与角动量守恒定律
13　电流密度向量与电荷守恒定律
14　经典场论的总结与常用单位
第三章　自由场的二次量子化
15　二次量子化的基础和量子场论的基本假设
16　Schrodinger表象与Heisenberg表象
17　δ（x）、δ±（x）、θ±（x）、γ（x）和ε（x）等五种函数的性质
18　产生和消灭粒子的算符与场函数的傅里叶表示
19　实标量场的二次量子化
20　实标量场函数ψ（x）的对易关系式与△（x）、△（1）（x）函数
21　复标量场的二次量子化
22　向量场或电磁场的二次量子化
23　电磁场函数Ai（x）的对易关系式与D（x）、D（1）（x）函数
24　Λ±和∑±投影算符与旋量场函数的傅里叶表示
25　旋量场的二次量子化
26　旋量场函数ψ（x）和-ψ（x）的反对易关系式与S（x）、S（1）（x）两矩阵函数
27　电荷共轭变换
28　场方程式的格林函数与Feynman函数
29　N－乘积、p－乘积和T－乘积

30 场论中常用奇异函数的环路积分表示
第四章 场的相互作用与S矩阵（量子电动力学）
31 场的相互作用的Lagrange函数
32 场在相互作用情况下的运动方程式与相互作用哈密顿H
33 相互作用表象
34 U（t, t0）矩阵和它的性质
35 S矩阵和它在量子电动力学中的形式
36 T－乘积展开的Wick定理和S矩阵的展开式
37 S矩阵的Feynman图解
38 Furry关于电子封闭内线的定理
39 S矩阵的矩阵元素
40 S矩阵的动量表象
41 粒子反应的概率和截面
42 光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式
43 在相对论情况下的Rutherford散射问题
44 光子和电子的散射（Compton效应）
45 正负电子对湮没为两个光子
附录：关于Feynman图解问题的补充材料
封底