# 目　　录

## 上　　册


序言 …… xi

一般的参考书目 …… xv

第一章　经典理论 …… 1

1-1　最小作用原理 …… 1

1-1-1　经典运动 …… 1

Lagrange 方程和 Hamilton 方程．Poisson 括号．相对论性点粒子．正则变换．

1-1-2　电磁场作为一个无穷大动力学系统 …… 10

Maxwell 方程．规范不变性．电磁作用量．

1-1-3　点粒子的电磁相互作用 …… 17

Lorentz 力定律．恒场．迴转磁比率．Thomas 进动．Bargmann-Michel-Telegdi 方程．和平面波的相互作用．

1-2　对称性和守恒定律 …… 27

1-2-1　基本的不变量 …… 27

时间平移和能量守恒．动量和角动量．

1-2-2　能量-动量张量 …… 31

正则张量．电磁对称张量．封闭系统．广义角动量．哈密顿形式．

1-2-3　内部对称性 …… 38

无穷小变换．Noether 定理．荷．具有 Poisson 括号的李代数．最小耦合．

1-3　传播与辐射 …… 43

1-3-1 Green 函数 …… 43
迭加原理. 推迟 Green 函数和超前 Green 函数. Feynman 传播子.
1-3-2 辐射 …… 48
Lienard-Wiechert 势. 辐射功率的 Larmor 公式. Thomson 散射. 韧致辐射. 自相互作用. Lorentz-Dirac 方程. Runaway 解. Acausal 效应.
**第二章 Dirac 方程** …… 60
2-1 相对论性波方程的建立 …… 60
2-1-1 量子力学和相对论 …… 60
Klein-Gordon 方程. 负能量. 不定模方.
2-1-2 Dirac 方程 …… 64
$\gamma$ 矩阵. 具有正密度的守恒流.
2-1-3 相对论协变性 …… 67
变换定律. 质量和自旋. 宇称. 双线型密度.
2-2 物理内容 …… 73
2-2-1 平面波解和投影算符 …… 73
正能解和负能解. 在具有确定动量和极化的态上的投影算符.
2-2-2 波包 …… 79
群速度. Zitterbewegung 和 Klein 的佯谬.
2-2-3 电磁耦合 …… 84
最小耦合. 非相对论极限和 Pauli 方程. 在恒磁场中的解和在电磁平面波中的解.
2-2-4 Foldy-Wouthuysen 变换 …… 91
相对论修正. 自旋-轨道耦合. Darwin 项.
2-3 类氢原子 …… 95
2-3-1 非相对论谱与相对论谱的比较 …… 95
Balmer 谱. Klein-Gordon 方程的预言.
2-3-2 Dirac 理论 …… 97
精细结构分裂. 相对论波函数. 超精细分裂

和辐射效应.
2-4 空穴理论和电荷共轭 …… 111
2-4-1 负能解的重新解释 …… 111
空穴和正电子. 多体理论.
2-4-2 电荷共轭 …… 113
Dirac 方程的电荷共轭算符和不变性.
2-4-3 零质量粒子 …… 115
手征性. 二分量理论. CP 不变性.
2-5 Dirac 传播子 …… 118
2-5-1 自由传播子 …… 118
由空穴理论观点产生的推迟传播子和 Feynman 传播子.
2-5-2 在任意外电磁场中的传播 …… 123
外场中传播子的微扰展开.
2-5-3 对 Coulomb 散射的应用 …… 125
经典的 Rutherford 散射. Mott 公式.
2-5-4 Fock-Schwinger 固有时间方法 …… 131
在恒匀场或平面波场中的传播.
**第三章 自由场的量子化** …… 141
3-1 正则量子化 …… 141
3-1-1 一般形式 …… 143
共轭动量和量子化. 一维晶体. 声子. 正规编序. Bose 对称. Fock 空间.
3-1-2 标量场 …… 153
不变测度. 相对论不变性. 场对易子. 具有固定粒子数的态. 相干态. 场分布.
3-1-3 荷电标量场 …… 161
$U(1)$ 不变性. 守恒荷. 粒子和反粒子. 电荷共轭.
3-1-4 编时乘积 …… 164
Feynman 传播子的复原.

3-1-5 热力学平衡 …… 166
Bose-Einstein 分布．状态方程． 有限温度下的传播子．
3-2 量子化的辐射场 …… 169
3-2-1 不定度规 …… 169
Gupta-Bleuler 量子化．横光子．
3-2-2 传播子 …… 178
Feynman 规范传播子．推广到任意的 λ．
3-2-3 有质量的矢量场 …… 180
Proca 方程和 Stueckelberg 方程．零质量极限．利用恒场方法得到的光子质量的上限．
3-2-4 真空涨落 …… 185
Casimir 效应．Van der Waals 力．
3-3 Dirac 场和不相容原理 …… 191
3-3-1 反对易子 …… 192
Dirac 场的量子化和能量的正定性．
3-3-2 费米子的 Fock 空间 …… 196
荷和自旋．反对称态和 Fermi-Dirac 统计．
3-3-3 自旋和统计之间的关系——传播子 …… 200
定域量子理论表明的自旋和统计之间的联系．
3-4 分立对称性 …… 203
3-4-1 宇称 …… 204
3-4-2 电荷共轭 …… 205
3-4-3 时间反演 …… 208
3-4-4 总结 …… 210
二次型的变换性质． PCT 定理． 形状因子．Fierz 重排定理．
**第四章 和外场的相互作用** …… 220
4-1 和经典源相互作用的量子化的电磁场 …… 220
4-1-1 发射几率 …… 220

S 矩阵. Poisson 分布.
4-1-2 发射的能量和红外灾难 …… 229
有限能量与无限的光子数.
4-1-3 感生吸收和感生发射 …… 233
受激发射.
4-1-4 S 矩阵和演化算符 …… 236
相互作用表象. S 矩阵的普遍形式.
4-2 Wick 定理 …… 242
4-2-1 Bose 场 …… 242
来自生成泛函的 Wick 恒等式.
4-2-2 Fermi 场 …… 245
Grassmann 代数形式.
4-2-3 一般情况 …… 249
4-3 量子 Dirac 场和经典势的作用 …… 250
4-3-1 一般描述 …… 250
Fredholm 行列式. 规范不变性和幺正性.
4-3-2 精确到最低级的发射几率 …… 258
4-3-3 在恒定均匀电场中的粒子对产生 …… 260
非微扰隧道效应.
4-3-4 Euler-Heisenberg 等效拉氏函数 …… 263
缓变场的等效作用量. 场的重整化. 第四阶
表达式.
第五章 基本过程 …… 267
5-1 S 矩阵和渐近理论 …… 267
5-1-1 截面 …… 268
in 态和 out 态. S 矩阵和 T 矩阵. 不变截面.
5-1-2 渐近理论 …… 272
场对易子的真空期待值的 Källen-Lehmann 表示.
5-1-3 约化公式 …… 276
Lehmann-Symanzik-Zimmermann 理论体系.
5-1-4 生成泛函 …… 279

5-1-5 连接部分 …… 283
5-1-6 费米子 …… 286
5-1-7 光子 …… 291
流守恒和协变的编时乘积.
5-2 应用 …… 301
5-2-1 Compton 效应 …… 301
Klein-Nishina 相对论公式.
5-2-2 粒子对湮灭 …… 310
Dirac 公式.
5-2-3 电子偶素 (Positronium) 的寿命…… 313
最低阶的单态和三重态的寿命.
5-2-4 韧致辐射 …… 320
核的 Coulomb 场中光发射的 Bethe-Heitler 截面.
5-3 么正性和因果性 …… 324
5-3-1 么正性和分波分解 …… 325
光学定理. Jacob 和 Wick 的分波展开.
5-3-2 因果性和解析性 …… 331
推迟对易子. 组态和动量空间中支集的特性. 交叉对称性.
5-3-3 Jost-Lehmann-Dyson 表示…… 336
5-3-4 向前色散关系 …… 338
一般的推导. 应用于 $\pi$ 介子-核子的散射. 等效 $\pi$ 介子-核子耦合的确定.
5-3-5 动量转移解析性 …… 345
小的和大的 Lehmann 椭圆. Froissart 界限. Pomeranchuk 定理.
**第六章 微扰论**…… 352
6-1 积分表示和 Feynman 规则…… 352
6-1-1 自作用标量场 …… 353
相互作用表象中的微扰级数. 组态和动量空

间中的 Feynman 规则．对称因子．
6-1-2 旋量电动力学的 Feynman 规则 …… 365
Furry 定理．
6-1-3 电子-电子和电子-正电子散射 …… 372
Møller 公式和 Bhabha 公式．
6-1-4 标量场电动力学 …… 379
标量场电动力学中协变微扰规则的推导和基本过程的计算．
6-2 图论 …… 386
6-2-1 圈展开 …… 386
用 Planck 常数的幂次计算圈数．
6-2-2 截腿的和固有的图形 …… 388
拓扑和代数的定义．Legendre 变换．
6-2-3 参量表示 …… 395
用参量 $\alpha$ 表示的 Feynman 积分的一般表达式．
6-2-4 欧氏空间的 Green 函数 …… 401
在微扰展开式中逐项进行 Wick 转动．
6-3 解析性 …… 405
6-3-1 Landau 方程 …… 406
6-3-2 实奇异性 …… 410
正规阈和反常阈．
6-3-3 简单图的实奇异性 …… 414
单圈泡图，顶角图和箱图．Mandelstam 表示．
6-3-4 物理区奇异性．Cutkosky 规则 …… 422
第七章 辐射修正 …… 428
7-1 单圈图重整化 …… 428
7-1-1 真空极化 …… 429
真空极化张量． 规范不变的正规化． 重整化的荷．关于 Lamb 位移的效应．
7-1-2 电子传播子 …… 443

电子自能的规范依赖性和红外问题。
7-1-3 顶角函数 …… 452
Ward 恒等式。在壳顶角函数。形状因子。
7-1-4 总结 …… 463
抵消项和裸拉氏函数。幂次计数。
7-2 和外场相互作用时的辐射修正 …… 468
7-2-1 等效相互作用和反常磁矩 …… 468
7-2-2 对 Coulomb 散射的辐射修正…… 471
对 Mott 公式的 $\alpha^3$ 阶修正。
7-2-3 软韧致辐射 …… 476
7-2-4 有限的单举截面 …… 478
7-3 新的效应 …… 480
7-3-1 光子-光子散射…… 480
低能和高能行为。在零频率极限下的显表达式。
7-3-2 Lamb位移…… 484
对束缚态能级的辐射修正和领头 $\alpha(Z\alpha)^4$ 阶 Lamb 位移的计算。
7-3-3 大距离处的 Van der Waals 力 …… 494
用静磁化率计算 $r^{-7}$ 规律的系数。

## 下　　册

**第八章　重整化**
**第九章　泛函方法**
**第十章　积分方程和束缚态问题**
**第十一章　对称性**
**第十二章　非阿贝尔规范场**
**第十三章　渐近行为**

# 第一章 经典理论

在这一章中，我们将纵览经典力学中的 Lagrange 形式及其对具有无穷多自由度系统的推广，着重于它们的定域形式的对称性和守恒定律．以电磁学为例，我们引入了 Green 函数和传播子．提出了基本的辐射问题，并以自相互作用的不相容性的研究作为本章的结束．鉴于经典场结构在近代发展中起着日益重要的作用，在后面的章节中我们还将回到这个主题．

## 1-1 最小作用原理

### 1-1-1 经典运动

在经典力学中，运动方程是从最小作用原理推出的．如果用 $q$ 表示组态变量的有限集合，$q \equiv \{q_1, q_2, \cdots, q_N\}$，用 $\dot{q}$ 表示 $t$ 时刻的速度，作用量定义为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[q(t), \dot{q}(t)]. \tag{1-1}$$

Lagrange 函数 $L$ 依赖于位置和速度，对于不封闭的系统，即承受给定外力的系统，$L$ 有时也明显地依赖于时间．最小作用原理表述为：在联接 $t_1$ 时刻的 $q_1$ 和 $t_2$ 时刻的 $q_2$ 的所有轨道 $q(t)$ 中，物理的轨道给出作用量的稳定值．如果 $q_1$，$t_1$ 和 $q_2$，$t_2$ 充分接近，这个稳定值是唯一的极小值．因此，作用量被看作满足边界条件 $q(t_1) = q_1$，$q(t_2) = q_2$ 的所有正则函数 $q(t)$ 的泛函．如 $Q(t)$ 是一条真实的轨道，与此相近的轨道写成 $q(t) = Q(t) + \delta q(t)$．按照 $\delta q$ 的幂次展开作用量

并且我们可以将它看作 $2N$ 个独立函数 $q(t)$ 和 $p(t)$ 的泛函. 再假设 $q(t_1)=q_1$, $q(t_2)=q_2$, 对 $p(t_1)$ 或 $p(t_2)$ 没有任何限制,那么我们就有

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta p\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)+\left(p\frac{d}{dt}\delta q-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right)\right]dt.$$

将 $p(d/dt)\delta q$ 项分部积分,即得

$$\frac{\delta I}{\delta p\ (t)}=\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p},\quad -\frac{\delta I}{\delta q\ (t)}=\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}$$

令变分 $\delta I=0$, 我们重新得到了式(1-8). 注意, 作用量 $I$ 也可改写为

$$I=p_2q_2-p_1q_1-\int_{t_1}^{t_2}qdp+Hdt.$$

因此,在作用量中 $p$ 和 $q$ 起着类似的作用.

现在我们来计算沿稳定轨道的作用量 $I$. 假定 $(q_2,\ t_2)$ 充分靠近 $(q_1,\ t_1)$, 以至稳定轨道是唯一的. 对作用量 $I$ 我们采用记号 $I(q_2,\ t_2;\ q_1,\ t_1)$ 或更简洁的形式 $I(2,\ 1)$.

在一给定时刻找到联接二点的几条轨道决不是少见的. 例如, 对于一个谐振子,在半个周期后无穷多条轨道将返回原点.

很容易验证

$$\delta I(q_2,\ t_2;\ q_1,\ t_1)=(p_2\delta q_2-H_2\delta t_2)-(p_1\delta q_1-H_1\delta t_1),\tag{1-12}$$

式中

$$p_2=\frac{\partial I\ (2,\ 1)}{\partial q_2},\quad H_2=-\frac{\partial I\ (2,\ 1)}{\partial t_2}.$$

此外, 如果 Lagrange 函数明显地依赖于某个参数 $\alpha$, 我们就有

个变换的雅科比函数等于零将会发生什么。由 Legendre 变换即得到 Hamilton 函数

$$H(p, q) = p_i\dot{q}_i(p, q) - L[q, \dot{q}(p, q)], \quad (1\text{-}7)$$

其中指标成对被理解为求和。对上式微分，

$$dH = \left[\dot{q}_i + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i}\left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] dp_i + \left[-\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - p_i\right)\right] dq_i.$$

我们看到，利用共轭动量的表示式，Euler-Lagrange 方程变成如下形式：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1\text{-}8)$$

更一般地，在相空间（$2N$ 个变量 $p$，$q$ 的空间）定义的函数的变化是

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (1\text{-}9)$$

我们已引入了 Poisson 括号

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \quad (1\text{-}10)$$

从式(1-9)可知，如果一个函数不明显地依赖于时间，并且它与$H$的 Poisson 括号等于零，则它是一个运动常数。

值得注意的是，Hamilton 方程(1-8)也可以由稳定性原理导出。实际上，把

$$L(q, \dot{q})dt = pdq - H(p, q)dt$$

代入式(1-1)，使作用量写成

$$I = \int_{t_1}^{t_2} pdq - Hdt, \quad (1\text{-}11)$$

并且我们可以将它看作 $2N$ 个独立函数 $q(t)$ 和 $p(t)$ 的泛函. 再假设 $q(t_1)=q_1$, $q(t_2)=q_2$, 对 $p(t_1)$ 或 $p(t_2)$ 没有任何限制,那么我们就有

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta p\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)+\left(p\frac{d}{dt}\delta q-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right)\right]dt.$$

将 $p(d/dt)\delta q$ 项分部积分,即得

$$\frac{\delta I}{\delta p\ (t)}=\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p},\quad -\frac{\delta I}{\delta q\ (t)}=\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}$$

令变分 $\delta I=0$, 我们重新得到了式(1-8). 注意, 作用量 $I$ 也可改写为

$$I=p_2q_2-p_1q_1-\int_{t_1}^{t_2}qdp+Hdt.$$

因此,在作用量中 $p$ 和 $q$ 起着类似的作用.

现在我们来计算沿稳定轨道的作用量 $I$. 假定 $(q_2,\ t_2)$ 充分靠近 $(q_1,\ t_1)$, 以至稳定轨道是唯一的. 对作用量 $I$ 我们采用记号 $I(q_2,\ t_2;\ q_1,\ t_1)$ 或更简洁的形式 $I(2,\ 1)$.

在一给定时刻找到联接二点的几条轨道决不是少见的. 例如, 对于一个谐振子,在半个周期后无穷多条轨道将返回原点.

很容易验证

$$\delta I(q_2,\ t_2;\ q_1,\ t_1)=(p_2\delta q_2-H_2\delta t_2)-(p_1\delta q_1-H_1\delta t_1),\tag{1-12}$$

式中

$$p_2=\frac{\partial I\ (2,\ 1)}{\partial q_2},\quad H_2=-\frac{\partial I\ (2,\ 1)}{\partial t_2}.$$

此外, 如果 Lagrange 函数明显地依赖于某个参数 $\alpha$, 我们就有

$$\frac{d}{d\alpha} I(q_2, t_2; q_1, t_1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \alpha} [\alpha, Q(t, \alpha), \dot{Q}(t, \alpha)], \qquad (1\text{-}13)$$

式中右边是对 $\alpha$ 取微商，$L$ 对 $\alpha$ 有明显的依赖关系．作为这个结果的一个应用，我们对给定的 Lagrange 函数附加一项 $qF(t)$，它对运动方程将贡献一个外动力 $F(t)$．作用量成为 $F(t)$ 的泛函．对于 $t_1 < t < t_2$，从式(1-13)我们得到

$$\frac{\delta I(2, 1)}{\delta F(t)} = Q(t), \qquad (1\text{-}14)$$

这里 $Q(t)$ 表示存在 $F$ 时的轨道(当 $F = 0$ 时，我们也能将两边计算出来)．这并不是求解运动方程的一种先验的最好的方法，但这说明了生成函数的方法，这是今后经常出现的一种程序．

例如，考虑一个质量为 $m$ 的粒子，在给定的力 $F(t)$ 的作用下被约束在一维轴上运动．它的 Lagrange 函数是

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + qF(t). \qquad (1\text{-}15)$$

运动方程的解可写成

$$Q(t) = \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt' G(t, t') \frac{F(t')}{m}, \qquad (1\text{-}16)$$

式中 Green 函数 $G(t, t')$ 是方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') = \delta(t - t') \qquad (1\text{-}17)$$

的解，它对 $t$ 和 $t'$ 的交换是对称的，且当 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 时等于零．这里 $\delta(t - t')$ 是 Dirac 的点分布，阶跃函数 $\theta(t - t')$ 的微商．我们求得

$$G(t, t') = -\frac{1}{t_2 - t_1} [(t_2 - t)(t' - t_1)\theta(t - t')$$

$$+ (t_2 - t')(t - t_1)\theta(t' - t)\}. \tag{1-18}$$

沿这一轨道的作用量的值为

$$I(q_2, t_2; q_1, t_1) = \frac{m}{2}\frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{q_1(t_2 - t) + q_2(t - t_1)}{t_2 - t_1} F(t) + \frac{1}{2m}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' F(t)G(t, t')F(t'). \tag{1-19}$$

很容易验证，对 $F$ 的泛函微商得出这条轨道．如果我们令 $F = 0$，我们重新得到

$$\frac{\partial I(2,1)}{\partial q_1} = m\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = p_2,$$

$$\frac{\partial I(2,1)}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\left(\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}\right)^2 = -H(p_2, q_2). \tag{1-20}$$

作为第二个例子，让我们回想一下这种形式如何应用到一个自由的相对论性的粒子．令 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{v}$ 为这个粒子的位置和速度，在此之前它们被记作 $q$ 和 $\dot{q}$．空间-时间间隔是

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\mathbf{x}^2 = c^2\Delta\tau^2, \tag{1-21}$$

式中 $\tau$ 是沿轨道的固有时间，$d\tau = (1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{1/2}dt = \gamma^{-1}dt$，$c$ 是光速．用四维矢量记号

$$x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

则

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu,$$

其中度规张量

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu,$$

用于下降或提升 Lorentz 指标．在联合平移 $(a)$ 和齐次 Lorentz 变换 $(\Lambda)$ 的 Poincaré 变换下：

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \Lambda^T g \Lambda = g, \tag{1-22}$$

间隔 $\Delta s^2$ 保持不变．一个 Lorentz 变换能被分解成一个普通的转动和

沿 $\mathbf{n}$ 方向的一个平动的乘积：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{n}[(\cosh\alpha - 1)\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - ct\sinh\alpha],$$
$$ct' = ct\cosh\alpha - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}\sinh\alpha, \tag{1-23}$$

其中 $\mathbf{v} = c\tanh\alpha\mathbf{n}$ 是活动框架的速度．四维速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}(c, \mathbf{v}) \tag{1-24}$$

是不变长度 $c$ 的类时矢量． 它对固有时间的微商 $d^2x^\mu/d\tau^2 = du^\mu/d\tau$ 垂直于 $u^\mu$，因此是类空的．对于一个自由粒子，四维动量满足

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}(c, \mathbf{v}),$$
$$p^2 = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2. \tag{1-25}$$

注意，$\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$． 现在让我们找出相应的 Lagrange 函数，采用的原则是：(1)作用量的相对论不变性；(2)$L$ 中只出现坐标的一阶微商．当然，后面这个要求是从非相对论力学中借用来的，其含意是，坐标和速度应当足以描述其运动．在更加普遍的情况下，这个条件可以放宽到在相对论性的范围内允许有限的信号速度．此外，在自由粒子的情况下，空间和时间坐标的原点彼此无关意味着 $L$ 只依赖于一阶微商，而且在 $|\mathbf{v}| \ll c$ 的极限下我们应当重新得到 $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$，精确到对时间的全微商项．

显然，$L = a\,ds/dt$ 满足(1)和(2)，其中常数 $a$ 由非相对论极限给定．因而我们有

$$L = -mc^2\frac{d\tau}{dt} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$
$$I = \int_{t_1}^{t_2} dtL = -mc\int_{s_1}^{s_2} ds. \tag{1-26}$$

动量和能量由一般的表达式给出：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}},$$
$$E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}.$$

当然和式(1-25)是一致的． 自由的运动方程是 $d\mathbf{p}/dt = 0$，其中用到

广义力 $f^\mu = dp^\mu/d\tau$ 等于零. 沿轨道的作用量

$$I(2,1) = -mc(t_2 - t_1) = -mc^2[c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2]^{1/2}$$

是 Lorentz 标量. 标准的关系式

$$-\frac{\partial I(2,1)}{\partial t_2} = E_2 = E, \quad \frac{\partial I(2,1)}{\partial \mathbf{x}_2} = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$$

表明,相对论性的动量 $-\partial I/\partial x_\mu = p^\mu$ 是一个四矢量.

可以应用作用量的另一种形式:

$$I = -\int_1^2 d\tau \frac{m}{2}\left[\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right]^2, \tag{1-27}$$

其中 $\tau$ 是一个先验的沿轨道的任意参数. 通过要求 $I$ 是稳定的, 可得运动方程 $md^2x^\mu/d\tau^2 = 0$, 这意味着 $\tau$ 正比于固有时间, 并且可以这样选择,使得 $u^2 = (dx/d\tau)^2 = c^2$. 今后我们将令 $c = 1$, 除非另加说明.

Lagrange-Hamilton 形式的一个优点是,指出了一类广泛的变换, 它保持运动方程的结构不变. 这些已超出了组态空间简单的重新参数化的范围, 因为实际上他们已将坐标和动量混合在一起. 一个变换 $(p, q) \longleftrightarrow (p', q')$ (也许依赖时间)是正则的,如果存在 $p', q'$ (或许还有 $t$) 的函数 $H'$, 使得利用新变量的运动方程仍为

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'}, \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial q'},$$

其中指标再一次被删去. 这个性质的充分条件由最小作用原理给出. 我们要求微分形式 $p'dq' - H'dt$ 和 $pdq - Hdt$ 之间至多相差一个全微分项. 这转而意味着,这些组合的外微商相等:

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt = \sum_i dp'_i \wedge dq'_i - dH' \wedge dt. \tag{1-28}$$

这个条件意味着, 对相空间上的函数来说, 采用旧变量

$(q, p)$ 或新变量 $(q', p')$ 表示的 Poisson 括号相等:

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

$$= \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p'_i} \frac{\partial g}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{\partial g}{\partial p'_i} \right). \qquad (1\text{-}29)$$

从式 (1-28) 我们也能导出对于 $H'$ 的方程式，借助于式 (1-29)，结果是这个方程形成一个可积组合:

$$\frac{\partial H'}{\partial p'_i} = \sum_k \left[ \frac{\partial p_k}{\partial p'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial p'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \right],$$

$$\frac{\partial H'}{\partial q'_i} = \sum_k \left[ \frac{\partial p_k}{\partial q'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial q'_i} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \right]. \qquad (1\text{-}30)$$

粗略地看一看式(1-29)和(1-30)，就能使我们认识到，正则变换的一个典型的范例由运动方程的解给出，在那里 $(q', p')$ 相应于 $t_0$ 时刻的初值，而 $(q, p)$ 相应于 $t$ 时刻的相空间位置. 显然，在这种情况下 $H'$ 等于零，而且 Poisson 括号保持不变.

假设 $H$ 不依赖于时间. 由 $q$, $p$ 和 $t$ 表示的 $2N$ 个函数 $q'$, $p'$ 是运动常数，消去 $t$ 即得 $2N-1$ 个(定域的)运动常数，其中只有少数几个能延拓成为在整个相空间上有定义的函数. 由 Poincaré 证明的一个定理表明，后者和运动的对称性相关.

当然，正则变换并不限于运动方程的解，它们的集合生成了一个无限群. 最后我们注意到，限制式 (1-28) 在固定时刻并在两边取 $N$ 次外幂就可看出，正则变换保持相空间上的测度 $\Pi_i dp_i \wedge dq_i$ 不变，这就是 Liouville 定理.

## 1.1-2 电磁场作为一个无穷大动力学系统

在流体力学、电磁学、固态物理学等中，具有无穷多自由度的系统是大家熟悉的．在这里我们将讨论如何将拉格朗日形式推广到电磁场．

为了得到 Lagrange 函数，我们从具有固定外源的场方程出发．我们采用 Heaviside 的单位（其 Coulomb 力为 $QQ'/4\pi r^2$），并取 $c=1$．借助于电磁场 $\mathbf{E}$、磁感应强度 $\mathbf{B}$、荷 $\rho$ 和流密度 $\mathbf{j}$，Maxwell 方程可写成：

$$\text{(a) } \operatorname{div}\mathbf{E}=\rho; \qquad \text{(c) } \operatorname{div}\mathbf{B}=0;$$

$$\text{(b) } \operatorname{curl}\mathbf{B}-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\mathbf{j}; \quad \text{(d) } \operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0. \tag{1-31}$$

定域的荷守恒表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{1-32}$$

现在让我们回忆一下这些方程的积分形式的物理解释：

(a) $\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\int_V \rho d^3x$；穿过封闭表面的 $\mathbf{E}$ 的通量等于所包围的荷（Gauss 定律）．

(b) $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$；沿表面 $S$ 上封闭曲线 $C$ 的 $\mathbf{B}$ 的环流量，等于穿过 $S$ 的通常的流和 Maxwell 位移流 $\partial\mathbf{E}/\partial t$ 的通量之和．

(c) $\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$；穿过封闭表面的 $\mathbf{B}$ 的通量等于零——磁荷（磁单极子）不存在．

(d) $-\oint_C \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_S d\mathbf{S}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$；变化磁通量将产生电动势（Faraday 感应定律）．

对于矢量、张量等显示出相对论协变性的场，采用简洁的

记号是十分方便的. 希腊字母指标取值 0 到 3:

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}), \quad j^\mu = (\rho, \mathbf{j}),$$

写成

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-33}$$

而微商被简记为 $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$. 定义 Levi-Civita 反对称符号 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 等于 1 或 $-1$, 取决于 $(\mu\nu\rho\sigma)$ 是 (0, 1, 2, 3) 的偶置换还是奇置换,否则就等于零. 注意, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. 这个符号被用来将一个反对称张量变换成它的对偶. 作为一个例子

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\nu\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1-34}$$

总之, $\tilde{F}$ 可以从 $F$ 通过替换 $E \to B$, $B \to -E$ 而得到,且有

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma} = -F^{\mu\nu}.$$

在 Lorentz 变换下, $F$ 和 $\tilde{F}$ 象反对称张量一样地变换. 特别是,如果我们施行平动式(1-23),我们便得到 ($c = 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{n}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \\ \mathbf{B}' &= (\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{n}) - \mathbf{v}\times\mathbf{E}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \end{aligned} \tag{1-35}$$

其中

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

这些明显的形式并不总是有用的. 例如，为了找出由 **E** 和 **B** 构成的相对论不变量，采用张量的记号要更容易些，而且可以发现，它们只能是如下的组合：

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2); \\ F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{1-36}$$

注意如下的等式：

$$\tilde{F}_{\mu\lambda}\tilde{F}^{\lambda\nu} = F_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta};$$

$$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\nu\rho} = g^{\mu}_{\rho}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$$

利用这些记号以及 Einstein 的求和惯例，Maxwell 方程具有简洁的形式

$$\text{(a)}\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \text{(b)}\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{1-37}$$

而流守恒作为自然的相容性条件而出现，

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1-38}$$

为了继续进行，我们必须将空间坐标 $x$ 等同于各种自由度的指标 $i$，这种对应使 $\Sigma_i \to \int d^3x$. 然而，一开始我们会感到有些困难，因为如果我们将 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ 和 $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ 等同于组态变量，则在 Maxwell 方程中只出现对时间的一阶微商. 此外，在这一表示中并不自然地呈现 Lorentz 不变性.

为了克服这些困难，我们首先将方程改变成等价的二阶方程. 窍门是引入四维势 $A^\mu$，因为我们认识到齐次方程组 (1-37b) 正好是使我们能够写成

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{1-39}$$

即

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mathrm{curl}\mathbf{A}$$

的条件. 一般地说,这是在原点附近具有形如

$$A^\mu(x) = -\int_0^1 d\lambda\lambda F^{\mu\nu}(\lambda x)x_\nu$$

的特解的一种定域的陈述. 然而,由式(1-39)定义的这样的势不是唯一的,能够通过附加上一项四维梯度项来加以修正. 这称为规范变换

$$A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu\phi. \qquad (1\text{-}40)$$

事实上,对于满足式(1-37)的正规的场,能够在整个空间-时间定义 $A^\mu(x)$,从而得到 Maxwell 方程的等价形式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu, \qquad (1\text{-}41)$$

其中$\Box$表示 d'alembertian 算符,$\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu \equiv (\partial/\partial t)^2 - \Delta$. 显然,规范变换不影响方程(1-41). 电动力学的规范任意性有时会出现某些困难,有时又会产生影响深远的原则. 规范的巧妙选取可以使问题简化,但也可能破坏明显的协变性.

我们已经达到了第一个目的,即得到了一个二阶方程. 可是,简洁的记号可能会引起误会. 因此,让我们更仔细地来考察这些方程,明显地写成

$$\rho = \Box A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A^0}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A}\right)$$

$$= -\Delta A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{j} = \Box\mathbf{A} + \nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}A^0 + \mathrm{div}\mathbf{A}\right).$$

对于某些规范确定条件,例如 $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ (Coulomb 规范),第一个关系式将不出现关于时间的微商项(此时称为 Poisson 方程),它只起约束的作用. 因此,我们可以解出 $A^0$:

$$A^0(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{\rho(t, x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

矢量势为

$$\Box \mathbf{A} = \mathbf{j} - \nabla \int \frac{d^3x'}{4\pi} \frac{(\partial \rho / \partial t)(t, x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

当然，由于流守恒，右边的散度等于零。

有时利用上面的选择，以得到作为进行量子化第一步的拉格朗日形式。这种选择办法有破坏明显的协变性的缺点，纵然相应于消除某些不相干自由度的基本物理图象，但对于象束缚态问题的一些特殊情况可能还是有吸引力的。

然而，我们希望利用保持理论的定域性质的 Lagrange 函数来表述作用量。这就是我们将不用这种具有瞬时 Coulomb 势的规范的原因。定域性深深地扎根于出现于十九世纪的场论表述的物理原理，它的推论是相对论性场论发展的主要基础，直到目前为止，在非常小的空间-时间间隔中定域性的验证(例如通过色散关系)仍是无异议的。

因此，Lagrange 函数应当表示成对所谓拉氏密度 $\mathscr{L}(x)$ 的空间积分，而 $\mathscr{L}(x)$ 将只依赖于场和有限多个场的微商。我们并不真正要求这些场是直接可测量的量；对于规范相关的势 $A_\mu$ 显然就不是这种情况。然而，定域地可测量的量应该用动力学变量的定域的组合来表达。我们可以写成

$$I = \int d^4x \mathscr{L}(x). \tag{1-42}$$

多数情况下我们将不指定这个积分的边界条件。我们假定积分延伸到整个空间，而且在无穷远处场很快趋于零，从而可以分部积分。

为了使作用量是一个 Lorentz 不变量，我们假定 $A^\mu(x)$ 象四维矢量场一样地变换，而拉氏量象标量密度一样变换。我们进一步要求 $\mathscr{L}$ 只依赖于场和场的一阶微商，在规范变换式 (1-40) 下至多相差一散度项。这是 Lagrange 函数的类似性质的自然推广，并保证了运动方程的规范不变性。

一般地说，如果拉氏量依赖于场 $\varphi_i(x)$ 和场的梯度 $\partial_\mu\varphi_i(x)$，则对于场的一个无穷小的改变 $\delta\varphi_i(x)$，作用量的改变为

$$\delta I = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} \delta\varphi_i(x) + \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial[\partial_\mu\varphi_i(x)]} \delta[\partial_\mu\varphi_i(x)] \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial[\partial_\mu\varphi_i(x)]} \right\} \delta\varphi_i(x). \quad (1\text{-}43)$$

由于要求作用量是稳定的，这就导致了推广的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi_i(x)} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial[\partial_\mu\varphi_i(x)]} = 0. \quad (1\text{-}44)$$

因此，在电磁的情况下，根据前面确定的规则，我们必须调整拉氏量

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}[a\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c(\partial_\mu A^\mu)^2 + dA_\mu A^\mu + eA_\mu j^\mu]$$

中的系数 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$，使方程(1-44)和(1-41)完全一致。精确到一个总的系数，简单的计算给出

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{c}{2}[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu],$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是一个缩写符号，代表用势表示的电磁张量的表达式。系数 $c$ 是任意的，并且正如所预料的，与 $c$ 相乘的是一散度项

$$(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu = \partial_\mu[A_\nu(g^{\mu\nu}\partial_\rho A^\rho - \partial^\nu A^\mu)].$$

所以，最后一项可以抛掉，得到作用量

$$I = -\int d^4x \left( \frac{1}{4} F^2 + j \cdot A \right)$$

$$= \int d^4x \left( \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} - \rho A^0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (1\text{-}45)$$

在存在给定外部流的情况下，这个拉氏量不是规范不变的. 在规范变换式(1-40)下，它获得一个附加的贡献，根据流守恒，该贡献是一个散度项：

$$j_\mu \partial^\mu \phi = \partial^\mu (\phi j_\mu).$$

这说明了 Maxwell 方程的不变性. 我们得到结论：流守恒是理论保持规范不变的充要条件.

由于在量子情况下这个问题是十分重要的，给出另一种观点是有趣的. 直到目前为止，我们还没有限制 $A^\mu$ 的任意性. 式(1-41)的结构自然地启发人们提出如下的 Lorentz 条件：

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (1\text{-}46)$$

这样，式(1-41)就简化成

$$\Box A^\mu = j^\mu. \quad (1\text{-}47)$$

当然，此式和式(1-46)是相容的，而且严格限制了规范任意性，因为现在只有满足

$$\Box \phi = 0 \quad (1\text{-}48)$$

的那些变换 $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \phi$ 才是允许的.

Lorentz 约束可用 Lagrange 乘子法，在作用量中增加一项 $\lambda \int d^4x \frac{1}{2} (\partial \cdot A)^2$ 加入到理论中来. 这样，Maxwell 方程被修改，新的方程为

$$\Box A^\mu + (\lambda - 1)\partial^\mu \partial \cdot A = j^\mu. \quad (1\text{-}49)$$

两边取散度，可见对 $\lambda \neq 0$，

$$\Box \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1\text{-}50)$$

因此，如果对大的 $|t|$，$\partial_\mu A^\mu$ 等于零，这就保证了在所有时刻它都等于零，因而式(1-49)等价于 Lorentz 规范中的 Maxwell 方程.

我们概括上述逻辑如下：

1. $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^2 - j\cdot A$，规范不变←→流守恒．最小作用原理——→Maxwell 方程．

2. $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\lambda(\partial\cdot A)^2 - j\cdot A$ 和 $\partial\cdot j = 0$．最小作用原理——→$\Box\partial_\mu A^\mu = 0$．边界条件——→Lorentz规范——→Maxwell 方程．

简短的评述可使我们记住式（1-45）中的符号，而不顾其习惯．$(\partial\mathbf{A}/\partial t)^2$ 中的"动能"项总附带因子 $+\frac{1}{2}$．另外，由于 $\rho^0 A^0$ 是势能，应该带一个负号．其余部分由 Lorentz 不变性得到．还可注意到，在合理化的单位制中 $\int d^3x(\mathbf{E}^2/2)$ 是能量，因此 $\int d^4x(\mathbf{E}^2/2)$ 确实具有作用量的量纲：能量×时间．

### 1-1-3 点粒子的电磁相互作用

荷电点粒子的四维矢量流被局限在它的空间-时间轨道 $x^\mu(\tau)$ 上．因此，

$$j^\mu(t,\mathbf{y}) = e\frac{dx^\mu}{dt}\delta^3[\mathbf{y}-\mathbf{x}(\tau)]\big|_{t=x^0(\tau)}$$

$$= e\int d\tau\frac{dx^\mu}{d\tau}\delta^4[y-x(\tau)], \qquad (1\text{-}51)$$

其中 $e$ 表示守恒荷 $\int d^3y j^0(t,\mathbf{y}) = e$．由式(1-51)表出的流满足连续性方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$．

对于粒子＋场的复合系统，我们简单地将作用量相加，

$$I = -\int d^4x\left(\frac{F^2}{4} + j\cdot A\right) - m\int ds$$

$$= -\int d^4x\frac{F^2}{4} - e\int dx_\mu A^\mu[x(\tau)] - m\int ds$$

$$= \int d^3x \mathscr{L}_{em}(x) + \int dt(-m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} + e\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{v} - eA^0). \tag{1-52}$$

荷电粒子起了源的作用，从而改变了周围的场．作为初级近似，我们将忽略这种影响，并假设 $A_\mu$ 被外部条件所固定．这样我们就可以丢弃式(1-52)中 $\mathscr{L}_{em}$ 的贡献．可以看到，在这种情况下我们采用了和这个讨论开始时所遵循的相反的观点．研究真实的耦合系统，无论是经典的还是量子力学的，显然都是困难的．因此，在考虑更为现实的模型之前，首先研究简化的模型是一种很好的练习．在 1-3-2 节中，我们将简略地研究经典的耦合系统．因而我们首先研究在给定的外场作用下粒子的运动．它的 Lagrange 函数是

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} + e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - A^0). \tag{1-53}$$

我们看到，共轭动量 $\mathbf{p}$ 不同于自由值 $m\mathbf{v}/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$，因为

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + e\mathbf{A}. \tag{1-54}$$

Hamilton 函数表示为

$$H = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + eA^0$$
$$= [m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2]^{1/2} + eA^0 \tag{1-55}$$

而运动方程 $(d/dt)(\partial L/\partial \mathbf{v}) = \partial L/\partial \mathbf{x}$ 取如下形式：

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = -e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla A^0$$
$$+ e\mathbf{v}\times \mathrm{curl}\mathbf{A} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{1-56}$$

这就是关于 Lorentz 力的定律．最后，能量 $\mathscr{E}$ 的变化是

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right)$$
$$= \mathbf{v}\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{1-57}$$

众所周知的结果表明，只有电场才作功。方程式(1-56)和(1-57)能缩记为

$$m\frac{du^\mu}{d\tau}=eF^{\mu\nu}u_\nu, \tag{1-58}$$

其中 $u^\mu=dx^\mu/d\tau$ 是四维速度。

读者能够验证，将变分原理应用于作用量

$I=-\int d\tau m(u^2/2)-\int eA\cdot dx$ 将直接给出式(1-58)。

现在我们来研究三个简单的例子：

1. 在一个不变的均匀场中的运动

假设 $F_{\mu\nu}$ 与 $x$ 无关，方程(1-56)和(1-57)立刻给出

$$\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}-\frac{m\mathbf{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}}=e(\mathbf{E}t+\mathbf{x}\times\mathbf{B}),$$
$$\mathscr{E}-\mathscr{E}_0=e\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}. \tag{1-59}$$

我们也能用矩阵形式直接求解协变方程(1-58)，得

$$u^\mu(\tau)=\left(\exp\frac{e\tau}{m}F\right)^\mu_\nu u^\nu(0).$$

最后，利用旋量表示是有启发性的。对四维矢量 $u$，我们引入 $2\times2$ 矩阵

$$\underline{u}=u_0I+\mathbf{u}\cdot\sigma,$$

其中 $\sigma$ 表示 Pauli 矩阵。利用恒等式 $\sigma\cdot\mathbf{a}\sigma\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})I+i\sigma\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，可将式(1-58)写成

$$\frac{d}{d\tau}\underline{u}=\frac{e}{m}\left(\frac{\mathbf{E}+i\mathbf{B}}{2}\cdot\sigma\underline{u}+\underline{u}\frac{\mathbf{E}-i\mathbf{B}}{2}\cdot\sigma\right). \tag{1-60}$$

由此得到

$$\underline{u}(\tau)=\exp\left(\frac{e\tau}{m}\frac{\mathbf{E}+i\mathbf{B}}{2}\cdot\sigma\right)\underline{u}(0)$$
$$\times\exp\left(\frac{e\tau}{m}\frac{\mathbf{E}-i\mathbf{B}}{2}\cdot\sigma\right).$$

如果 $\mathfrak{n}$ 表示复三维矢量 $\mathbf{E}+i\mathbf{B}$，$a=(e/2m)(\mathfrak{n}^2)^{1/2}$，我们则得到

$$\exp\left[\frac{e\tau}{2m}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})\cdot\sigma\right]=\cosh(a\tau)I$$

$$+\sinh(a\tau)\frac{\mathfrak{n}\cdot\sigma}{(\mathfrak{n}^2)^{1/2}}.$$

在 $\underline{y}(0)=I$，$\underline{x}(0)=0$ 的框架中，当 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$，即参数 $a$ 为实数时，我们得到

$$\underline{y}(\tau)=\left[\cosh^2(a\tau)+\sinh^2(a\tau)\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{\mathfrak{n}^2}\right]I$$

$$+\left[2\sinh(a\tau)\cosh(a\tau)\frac{\mathbf{E}}{(\mathfrak{n}^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+2\sinh^2(a\tau)\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mathfrak{n}^2}\right]\cdot\sigma,$$

$$\underline{x}(\tau)=\left[\tau+\left(\frac{\sinh(2a\tau)}{4a}-\frac{\tau}{2}\right)\left(1+\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{\mathfrak{n}^2}\right)\right]I$$

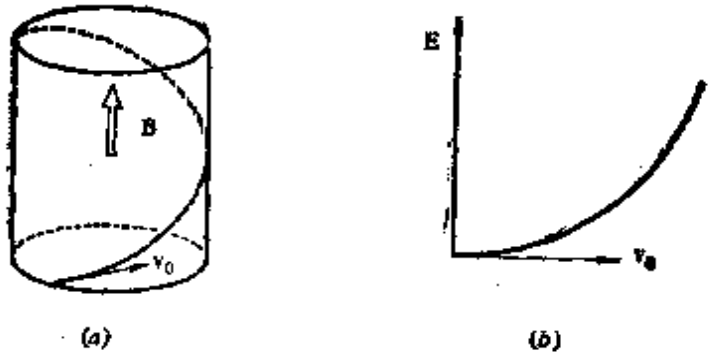
$$+\left[\frac{\cosh(2a\tau)-1}{2a}\frac{\mathbf{E}}{(\mathfrak{n}^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\sinh(2a\tau)-2a\tau}{2a}\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mathfrak{n}^2}\right]\cdot\sigma. \qquad (1\text{-}61)$$

在 $\mathfrak{n}^2=0$，即 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$，$\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2=0$ 的极限情况下，我们有

$$u_0(\tau)=1+\frac{e^2\mathbf{E}^2}{m^2}\frac{\tau^2}{2},$$

$$\mathbf{u}(\tau)=\tau\frac{e\mathbf{E}}{m}+\frac{e^2}{m^2}\frac{\tau^2}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$




(a) (b)

图 1-1 在不变的均匀场中的运动。
(a) $\mathbf{E}=0$，(b) $\mathbf{B}=0$，$\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0=0$。

注意，在 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 方向速度增大比较快。 如果 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 等于零，而 $\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2\neq 0$，实际上我们可以挑选一个坐标系，使得或者 $\mathbf{E}$ 等于零或者 $\mathbf{B}$ 等于零。如果 $\mathbf{E}=0$，粒子描绘出一条螺旋线，其轴平行于 $\mathbf{B}$，不变角速度 $\omega=(eB/m)\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$。 如果 $\mathbf{B}=0$ 且 $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E}=0$，其轨道是一条在 $(\mathbf{v}_0,\mathbf{E})$ 平面内的"悬链线"，它的凹面在 $e\mathbf{E}$ 方向（在非相对论极限下，这条悬链线简化为一条抛物线）（见图 1-1）。

2. 回转磁比率，Thomas 进动，Bargmann-Michel-Telegdi 方程

我们按照这种经典图象，引入内禀磁矩和回转磁比率的概念。如果我们要求一个自洽的理论，这是一个有争议的问题。充其量说，在这里我们只是考虑圆满的量子处理方法的一种有用的极限情况。

我们记得，一个元流圈相当于磁矩 $d\boldsymbol{\mu}=id\boldsymbol{\Sigma}$，其中 $i$ 是流，$d\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{n}d\Sigma$ 表示一个垂直于圈平面的矢量，大小等于其面积。当流是由非相对论的环行电荷产生时，$i=ev/2\pi r$，

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e}{2m}\mathbf{L}, \tag{1-62}$$

其中 $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 是轨道角动量。同样，在一个均匀的外磁感应强度 $\mathbf{B}$ 中，Lagrange 函数的相互作用部分可以写成

$$L_{\text{int}}=e\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}=\frac{e}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{v}=\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}. \tag{1-63}$$

从 Lorentz 力定律

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{r}\times(e\mathbf{v}\times\mathbf{B})=\frac{e}{2m}\mathbf{L}\times\mathbf{B} \tag{1-64}$$

知道，角动量和磁矩都环绕着磁场进动，其经典 Larmor 频率 $\omega=eB/2m$。

1926 年，Uhlenbeck 和 Goudsmit 为了重现 Zeeman 分裂，引入了电子自旋（内禀角动量）和磁矩的概念，磁矩 $\boldsymbol{\mu}=g(e/2m)\boldsymbol{S}\left(|\boldsymbol{S}|=\hbar/2\right.$，按现代的话说，自旋为 $\left.\frac{1}{2}\right)$，而 $g$（约化的回转磁比率）等于 2。不幸的是，对一个在中心位势中运动的电子，同样的值 $g=2$ 给出的自旋-轨道耦合似乎是氢的精细结构所要求的二倍。 我们假设在电子的

静止系中有

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{rest}}, \tag{1-65}$$

如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是电子具有速度 $\mathbf{v}$ 的实验室系中的场，则从式(1-35)有 $\mathbf{B}_{\text{rest}} = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} + O(v^2)$。因此，在低速近似下由自旋引起的磁相互作用能为

$$U' = -\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}). \tag{1-66}$$

如果一个原子核的电场由球形平均位势产生

$$e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dV}{dr} \tag{1-67}$$

则自旋引起的磁相互作用能为

$$U' = -\frac{ge}{2m}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{g}{2m^2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}. \tag{1-68}$$

正如 Thomas 首先指出的，困难是由于没有正确处理转动引起的 Lorentz 变换而造成的。换句话说，从实验室的惯性系到具有角速度 $\boldsymbol{\omega}_T$ 的转动系的一个单纯的平动，使正确的能量应该写成

$$U = U' - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \tag{1-69}$$

这是一种典型的相对论效应，它可以通过考虑二个速度为 $-\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}$ 的平动的乘积而得到，这里 $\delta\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}\delta t$。如同任何 Lorentz 变换一样，这个乘积可以因子化为速度

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\left[\delta\mathbf{v} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - 1\right)\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}\right]$$

的平动和一个三维转动

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_T\delta t = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - 1\right)\frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}\delta t.$$

在目前的情况下，

$$\dot{\mathbf{v}} \simeq -\frac{\mathbf{r}}{mr}\frac{dV}{dr},$$

$$\boldsymbol{\omega}_T \simeq \frac{\mathbf{L}}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}, \tag{1-70}$$

以及

$$U = -\frac{ge}{2m}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} + \left(\frac{g-1}{2m^2}\right)\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr}.$$

如果 $g = 2$，这种效应确实使自旋-轨道耦合减小一半而与观测值相符．对于电子和 $\mu$ 介子，Dirac 的理论（第二章）自然地导出了 $g$ 的数值．但是，对于其它的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，例如质子（$g = 5.59$）或中子（$g = -3.83$），由于其内部结构使它们具有完全不同的 $g$ 值．

现在回来考虑在一个不变磁场中一个有自旋的低速粒子的运动．速度进动具有角频率 $eB/m$，而对于自旋，相应的频率是 $geB/2m$．因此，在一个周期中，相对的相位是 $2\pi(g/2-1)eB/m$．Bargmann，Michel 和 Telegdi 得到了在缓慢变化的外场中这种经典自旋运动的相对论性描述．

用粒子静止系中的三维矢量 $\mathbf{S}$ 表示自旋自由度．用协变记号它用正交于速度 $u^\mu$ 的类空四维矢量 $S^\mu$ 来描写．我们希望将适用于静止系的方程 $d\mathbf{S}/dt = g(e/2m)\,\mathbf{S}\times\mathbf{B}$ 加以推广，在静止系 $S^\mu = (0,\mathbf{S})$．为了保持条件 $S\cdot u = 0$，我们应当有 $S\cdot\dot{u} + \dot{S}\cdot u = 0$，其中点代表对固有时间的微商．在瞬时静止系中，$u = (1,\mathbf{0})$；因此，$\dot{S}^0 = \mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{u}}$，$\dot{S}^\mu = [\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{u}}, (ge/2m)\mathbf{S}\times\mathbf{B}]$．

为了将它们在任意坐标系中表示出来，我们注意到，在静止系中 $F^\mu_\nu S^\nu$ 简化为 $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{S},\ \mathbf{S}\times\mathbf{B})$．因此，要求的方程是

$$\dot{S}^\mu = \frac{g}{2}\,\frac{e}{m}F^\mu_\nu S^\nu + \frac{e}{m}\left(\frac{g}{2}-1\right)u^\mu(S^\alpha F_{\alpha\beta}u^\beta). \qquad (1\text{-}71)$$

从式(1-71)可知，如果 $g = 2$，$S$ 和 $u$ 刚性运动．当 $g\neq 2$ 时，情况就不同．因而，我们导出了一种方法，由它测量粒子的磁反常 $g/2-1$．

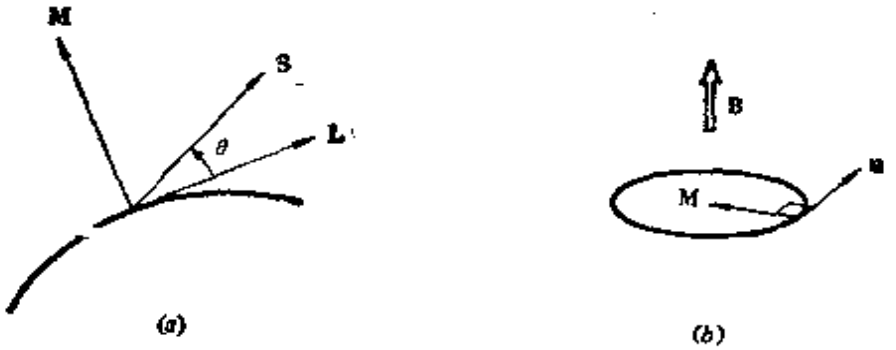
在带时间轴 $i = (1,0)$ 的实验室平面内定义四维矢量 $L$，其中 $\mathbf{L}$ 沿 $\mathbf{u}$，而且 $L\cdot u = 0$，即 $L = (u\cosh\varphi - i)/\sinh\varphi$，$\cosh\varphi = u\cdot i = u^0$．令 $M$ 是 $(S,\ L)$ 平面中正交于 $u$ 和 $L$ 的四维单位矢量．令 $S = L\cos\theta + M\sin\theta$（见图 1-2）．让我们从式（1-71）得出关于 $\theta$ 的运动方程：

$$\dot{S} = \dot{\theta}(-L\sin\theta + M\cos\theta) + \dot{L}\cos\theta + \dot{M}\sin\theta$$

$$= \frac{g}{2}\,\frac{e}{m}(F\cdot L\cos\theta + F\cdot M\sin\theta)$$

$$+\frac{e}{m}\left(\frac{g}{2}-1\right)u(L\cdot F\cdot u\cos\theta+M\cdot F\cdot u\sin\theta).$$

(1-72)




(a) (b)

图 1-2 (a) 具有自旋 S 的粒子的静止系；(b) 在纯磁场中的运动.

取与$M$的标量积，利用 $L\cdot M=u\cdot L=u\cdot M=0$，可得

$$-\dot{\theta}+M\cdot\dot{L}=\frac{g}{2}\frac{e}{m}M\cdot F\cdot L.$$

这时 $M\cdot\dot{L}=\coth\varphi\dot{u}\cdot M=(e/m)\coth\varphi M\cdot F\cdot u$，因而

$$\dot{\theta}=\frac{e}{m}\left(\coth\varphi M\cdot F\cdot u-\frac{g}{2}M\cdot F\cdot L\right), \tag{1-73}$$

或者更明显地写成

$$\dot{\theta}=\frac{e}{m}\left[\left(\frac{g}{2}\sinh^2\varphi-\cosh^2\varphi\right)\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{M}}{\sinh\varphi}+\left(\frac{g}{2}-1\right)\coth\varphi(\mathbf{M}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}\right]. \tag{1-74}$$

在粒子以（固有）Larmor 频率 $\omega=eB/m$ 作圆周运动的纯磁场情况下，混合乘积 $(\mathbf{u}\times\mathbf{M}\cdot\mathbf{B})$ 等于 $\sinh\varphi B$. 因此，

$$\dot{\theta}=\left(\frac{g}{2}-1\right)\omega\cosh\varphi,$$

$$\theta-\theta_0=\left(\frac{g}{2}-1\right)\omega\tau\cosh\varphi.$$

对于一个周期 $\Delta\tau=2\pi/\omega$，

$$\Delta\theta|_{\text{周期}}=\left(\frac{g}{2}-1\right)2\pi\cosh\varphi=\left(\frac{g}{2}-1\right)2\pi\frac{\mathscr{E}}{mc^2}. \tag{1-75}$$

### 3. 在平面波中的运动

最后，我们来研究一个荷电的无自旋的粒子在平面波的电磁场中的运动，为了简单起见假定电磁场是线性极化的．这个波用类光传播矢量 $n^\mu$ 和极化 $\varepsilon^\mu$ 表征．这二个矢量具有性质

$$n^2 = \varepsilon \cdot n = 0, \quad \varepsilon^2 = -1. \tag{1-76}$$

势依赖于变量 $\xi = n \cdot x$ 的任意函数，

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu f(\xi). \tag{1-77}$$

从式(1-76)可推得 $\partial \cdot A = 0$，而场

$$F^{\mu\nu}(x) = (n^\mu \varepsilon^\nu - n^\nu \varepsilon^\mu) f'(\xi), \tag{1-78}$$

满足

$$F_1^{\mu\nu} F^{\lambda\nu} = \tilde{F}_1^{\mu\nu} \tilde{F}^{\lambda\nu} = n^\mu n^\nu f'(\xi)^2,$$

$$F_2^{\mu\nu} \tilde{F}^{\lambda\nu} = 0,$$

$$F^2 = 0.$$

因此，$|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$，而且 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$．因为 $n_\mu F^{\mu\nu} = n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$，经典的 Lorentz 方程

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = e F_\nu^\mu u^\nu, \tag{1-79}$$

致使 $u \cdot n =$ 常数．选择坐标使 $\tau = 0$ 时 $x(0) = 0$，有

$$\xi = x \cdot n = u(0) \cdot n\tau.$$

可以下述方式用变量 $\xi$ 代替式(1-79)中的 $\tau$：

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{m} f'(\xi) \left[ n^\mu \frac{\varepsilon \cdot u}{n \cdot u(0)} - \varepsilon^\mu \right],$$

乘以 $\varepsilon$ 并积分，得到

$$u \cdot \varepsilon = u(0) \cdot \varepsilon + \frac{e}{m} [f(\xi) - f(0)],$$

代入 $du^\mu / d\xi$，得

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{m} f'(\xi) \left\{ n_\mu \frac{\varepsilon \cdot u(0) + (e/m)[f(\xi) - f(0)]}{n \cdot u(0)} - \varepsilon_\mu \right\}, \tag{1-80}$$

再积分即得

$$u^\mu(\xi) = u^\mu(0) + \frac{e}{m}[f(\xi) - f(0)]\left[n^\mu \frac{b \cdot u(0)}{n \cdot u(0)} - b^\mu\right] + \frac{e^2}{2m^2}[f(\xi) - f(0)]^2 \frac{n^\mu}{n \cdot u(0)}. \tag{1-81}$$

如果我们假设在 $\xi$ 大时波减弱，我们有

$$u^\mu(\infty) = u^\mu(0) + \frac{e}{m} f(0) b^\mu - \left[\frac{e}{m} f(0) \frac{b \cdot u(0)}{n \cdot u(0)} - \frac{e^2}{2m^2} \frac{f^2(0)}{n \cdot u(0)}\right] n^\mu. \tag{1-82}$$

注意，这里出现了非线性效应（$f^2$ 项）。

对于单色的平面波，例如 $f(\xi) = a\sin\xi$，我们能够用一种简单的方法计算 $x^\mu$：

$$x^\mu(\xi) = u^\mu(0)\tau - \frac{2e}{m} a \frac{\sin^2\xi/2}{n \cdot u(0)} b^\mu + \frac{e}{m} \frac{n^\mu}{[n \cdot u(0)]^2}\left[2ab \cdot u(0)\sin^2\frac{\xi}{2} + \frac{ea^2}{4m}\left(\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi\right)\right]. \tag{1-83}$$

作用量可表示成

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int_0^\tau d\tau'(m + eA \cdot u) \\ &= -m\tau - \frac{e}{n \cdot u(0)}\int_0^\xi d\xi' f(\xi') \\ &\quad \times\left\{b \cdot u(0) + \frac{e}{m}[f(\xi') - f(0)]\right\} \\ &= -mu(\infty) \cdot x - \int_0^\xi \frac{d\xi}{n \cdot u} \\ &\quad \times\left[eA \cdot u(\infty) - \frac{e^2A^2}{2m}\right]. \end{aligned} \tag{1-84}$$

在得到最后的形式时，我们已利用了式(1-82)定义的 $u(\infty)$，并假定了在无穷远处 $f(\xi)$ 等于零(记住，$n \cdot u$ 是不变的)。从式(1-84)可以得到共轭动量

$$\pi^\mu = -\frac{\delta I(\xi)}{\delta x_\mu} = mu^\mu(\infty) + \frac{n^\mu}{n\cdot u}\left[eA\cdot u(\infty) - \frac{e^2}{2m}A^2\right]. \quad (1\text{-}85)$$

对某些势，定义平均值使 $\bar{A}=0$ 是有意义的（例如，$I(\xi)=e^{-\eta|\xi|}g(\xi)$，其中 $g$ 是周期性的，$\eta\to 0$），由式(1-85)可得

$$\overline{\pi^2} = m^2 - e^2\overline{A^2} = m^2 + e^2|\overline{A^2}| = m_{\text{eff}}^2. \quad (1\text{-}86)$$

由于平面波会引起各向异性，在解释最后这个公式时需要小心．然而，这表明处在强周期性场中的粒子以很大的惯性来响应外部扰动．

直线加速器提供了电子在行波中这种运动的典型例子．

## 1-2 对称性和守恒定律

### 1-2-1 基本的不变量

我们回到具有有限多自由度的系统．当然，主要的任务是求解具有适当边界条件的运动方程．运动的一般性质，例如对称性，是很有用的，因为它们能使计算简化．它们也可以被用来限制动力学模型的种类．我们已经看到了具有 Lorentz 不变性这一类的例子．

对称性可以起双重作用．如果某些变换保持动力学方程不变，对称性可以使我们从某个给定的解得出一类解．对称性还可以导出守恒量，例如电荷、能量、动量等等．这两方面之间的深刻的联系即是我们现在讨论的主题．我们从一个非常简单的例子出发，讨论一个非相对论性的点粒子在与时间无关的位势所产生的力场中的运动．在零时刻给定初始条件所得到的 $t$ 时刻的位置和速度，与在 $\tau$ 时刻给定同样的初始条件而得到的 $t+\tau$ 时刻的位置和速度当然是一样的，这就是时间平移不变性．我们还知道，在这种情况下能量（Hamilton 函数的值）是守恒的．我们来看这两种性质是怎样联系

起来的。相空间上的任意函数随着运动的变化取决于

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\},$$

时间平移不变性等价于 $\partial H/\partial t = 0$。因为 $\{H, H\} = 0$，这实际上给出了

$$\frac{dH}{dt} = 0, \tag{1-87}$$

因而能量是守恒的。这个简单的评述，举例说，足于明显地找出其运动规律，如果粒子被限于一维运动的话。

换一种办法，考虑沿从 $(q_1, t_1)$ 到 $(q_2, t_2)$ 的稳定轨道计算的作用量。时间平移不变性意味着

$$I(q_2, t_2 + \tau; q_1, t_1 + \tau) = I(q_2, t_2; q_1, t_1),$$

或用微分形式

$$\frac{\delta I}{\delta t_2} - \frac{\partial I}{\partial t_1} = 0. \tag{1-88}$$

考虑到式(1-12)，这实际上表示

$$H_2 = H_1, \tag{1-89}$$

守恒定律显然可以从连续不变群的存在导出。与此类似，对于空间平移

$$I(\{q_n + a\}_2, t_2; \{q_n + a\}_1, t_1)$$
$$= I(\{q_n\}_2, t_2; \{q_n\}_1, t_1),$$

再次利用式(1-12)以及对 $a$ 的微商，即得总动量的守恒定律

$$\left(\sum_n p_n\right)_2 = \left(\sum_n p_n\right)_1. \tag{1-90}$$

上述例子可以作为当外部参数 $\alpha$ 变动时，稳定作用量的变分所给出的公式(1-13)的一种特殊情形。的确，$\alpha$ 可以选作表征变换的参数。

如果我们还有转动不变性，考虑一个绕轴 $\mathbf{n}$，角度为 $\delta\alpha$ 的无穷小变换：

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q} + \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{q}.$$

完全一样的公式 $\delta I(2,1) = p\delta q - H\delta t$ 给出

$$\sum_n \mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{q}_n)|_2 = \sum_n \mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{q}_n)|_1.$$

因为 $\mathbf{n}$ 是任意的，我们得到总角动量守恒

$$\sum_n \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n|_2 = \sum_n \mathbf{q}_n \times \mathbf{p}_n|_1. \qquad (1\text{-}91)$$

当然，如果我们只有绕某一轴的转动不变性，相应的角动量分量也只有一个是守恒的.

总之，当动力学问题包含对称性时，稳定的作用量 $I(2,1)$ 和 $I(2',1')$ 相等，其中记号"′"表示变换后的边界条件. 只要变换组成一个连续群，通过对群参数的微商就得到一个守恒定律.

可是，对称性并不需要是连续的. 宇称、时间反演等就属于这种情况. 例如在时间反演下，我们有 $I(q_2,t_2;\ q_1,t_1) = I(q_1,-t_1;\ q_2,-t_2)$，其中边界条件被交换，时间被逆转，相应于 $p_2 \longleftrightarrow -p_1$. 当然，这种不变性并不导致守恒定律.

最后，我们把上述考虑纳入适合于今后推广的形式. 例如，为了明确起见我们回到转动不变性. 在无穷小转动下，$\mathbf{q}$ 变成 $R\mathbf{q} = \mathbf{q} + \delta\alpha \mathbf{n} \times \mathbf{q}$. 当 $R$ 与时间无关时，假定 Lagrange 函数不变. 可是只要 $\delta\alpha(t_2) = \delta\alpha(t_1) = 0$，最小作用原理允许我们在稳定路径 $Q(t)$ 附近选取如下形式的变分：

$$\delta\mathbf{q}(t) = \delta\alpha(t)\mathbf{n} \times \mathbf{Q}(t). \qquad (1\text{-}92)$$

当 $\delta\alpha$ 为常数时，利用 $L$ 的不变性可得

$$\frac{\delta I(Q)}{\delta\alpha(t)} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \delta\dot{\alpha}(t)} = 0.$$

因此，由于 $\partial\dot{q}_i/\partial\delta\dot{\alpha} = \partial q_i/\partial\delta\alpha$，守恒量正比于

$$\frac{\partial L}{\partial \delta\dot{\alpha}} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \delta\dot{q}_i}{\partial \delta\dot{\alpha}(t)} = \sum_i p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial \alpha}. \qquad (1\text{-}93)$$

当然，在目前情况下这是沿 $\mathbf{n}$ 方向的角动量分量.

上述方法应用于时间平移时要小心. 如果无穷小参数 $\delta\alpha$ 是常数，最初的时间和最终的时间被移动. 我们令 $\delta q = \delta\alpha(t)\dot{q}$，$\delta\dot{q} = \delta\alpha\ddot{q} + \delta\dot{\alpha}\dot{q}$，同时，$\delta\alpha(t_1) = \delta\alpha(t_2) = 0$. 在真实轨道的邻域中

$$0 = \delta I = \int_1^2 dt \left[ \delta\alpha \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \delta\dot{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right]$$

$$= \int_1^2 dt \delta\alpha \left[ \frac{d}{dt} \left( L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \right].$$

通常不变性意味着 $\partial L/\partial t$ 等于零，在这种情况下能量 $H = p\dot{q} - L$ 是守恒的；更一般的情况下，$(d/dt)H = -\partial L/\partial t$.

可以出现这样的情况：运动方程是不变的，但 Lagrange 函数不是不变的. 在与时间无关的无穷小变换下，$L$ 被修改，附加上一项关于时间的全微商项. 换句话说，对于依赖于时间的 $\delta\alpha$，$\partial L/\partial\delta\alpha = (d/dt)\phi$，$(d/dt)(\partial L/\partial\delta\dot{\alpha} - \phi) = 0$. 因此我们看到，守恒量不再是 $\partial L/\partial\delta\dot{\alpha}$，而明显地依赖于时间.

作为一个例子，在恒力作用下粒子运动的动力学是平移不变的，而显然动量是不守恒的. Lagrange 函数是 $L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{F}(t)$. 在平移 $\delta\mathbf{a}(t)$ 后，$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{a} = (d/dt) \int^t dt' \mathbf{F}(t') \cdot \delta\mathbf{a}(t')$. 因此，运动积分为 $m\dot{\mathbf{q}} - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{F}(t') =$ 常数，和通常期望的一致. 注意，即使对于常数 $\mathbf{F}$，也明显地依赖于时间. 当然，在物理上要产生这样一个如平移不变性要求的贯穿于全空间的力是不可能的.

这些关系可以毫无困难地推广到无穷系统. 我们将区分二类对称性. 第一类相应于空间和时间的几何变换，在这类变换下拉氏量 $\mathscr{L}(x)$ 变成 $\mathscr{L}(x')$，其中 $x'$ 是变换后的点 (1-2-2 节). 第二类变换保持拉氏量不变，被称为内部的 (1-2-3 节). 对称性起着如此基本的作用，以至在第十一章中我

们将集中作更深入的研究.

### 1-2-2 能量-动量张量

对于无穷系统，我们假定拉氏量只通过场和场的梯度依赖于空间-时间坐标 $x$. 因此，在平移下我们有

$$\mathscr{L}(x+a) = \mathscr{L}[\phi_i(x+a), \partial_\mu\phi_i(x+a)]. \quad (1\text{-}94)$$

考虑一个依赖于 $x$ 的无穷小变换

$$\delta\phi_i = \delta a^\mu(x)\partial_\mu\phi_i(x), \quad (1\text{-}95)$$

$$\delta\partial_\mu\phi_i(x) = \delta a^\nu\partial_\nu\partial_\nu\phi_i(x) + \partial_\mu[\delta a^\nu(x)]\partial_\nu\phi_i(x).$$

分部积分后，相应的作用量的变分是

$$\delta I = \int d^4x \left\{\partial_\nu\mathscr{L} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i(x)\right]\right\}\delta a^\nu(x). \quad (1\text{-}96)$$

用这种方法我们得到了前面所讨论的完全定域形式的能量、动量的推广. 因为对于任意的 $\delta a^\nu(x)$，$\delta I$ 等于零，由此我们推得，用正则张量

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i - g_{\mu\nu}\mathscr{L} \quad (1\text{-}97)$$

描述的能量、动量满足守恒定律

$$\partial_\mu\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0 \quad (1\text{-}98)$$

(从这个推导知道，$\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ 的二个指标起着不同的作用.) 由此可见，只要场对于大的宗量足够快地趋于零，即在无穷远处没有能量或动量漏出，那末相应于总能量 ($\nu = 0$) 和三维动量 ($\nu = 1, 2, 3$) 的四个量

$$P^\nu = \int d^3x\tilde{\Theta}^{0\nu}(\mathbf{x}, t) \quad (1\text{-}99)$$

和时间无关，因为

$$\dot{P}^\nu = \int d^3x\partial_0\tilde{\Theta}^{0\nu}(\mathbf{x}, t) = -\int d^3x\sum_{i=1}^{3}\partial_i\tilde{\Theta}^{i\nu}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

这个结论是 Noether 定理的一种典型情况。 Noether 定理说，保持拉氏量不变的任何连续的单参数集合都和一个定域守恒流相联系。这个流的第四分量在三维空间的积分给出一个守恒"荷"。 按照几何学的意义，拉氏量的不变性意味着我们也允许可能的空间-时间宗量的变换，例如式(1-94)所表示的那样。而且，定义荷的积分可以在带表面元 $d\sigma_\mu$ 的类空曲面 $\sigma$ 上进行，不会影响结果：

$$P^\nu = \int d\sigma_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu}. \tag{1-100}$$

当然，可能会发生拉氏量也明显地依赖于坐标 $x$ 的情形，这时式(1-94)不再成立，式(1-98)也被换成

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -\partial^\nu_{\text{explicit}} \mathscr{L}. \tag{1-101}$$

如果 $\mathscr{L}$ 是不变部分 $\mathscr{L}_0$ 加上耦合外源 $j_i(x)$ 的项 $\mathscr{L}_1 = \Sigma_i \phi_i(x) j_i(x)$ 之和，则就是上面所说的情况。 这时能量-动量张量等于来自 $\mathscr{L}_0$ 的贡献 $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}_0$ 加上来自 $\mathscr{L}_1$ 的附加项，并根据式(1-101)写成

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}^{\mu\nu}_0 - g^{\mu\nu}\mathscr{L}_1, \tag{1-102}$$

和

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -\sum_i \phi_i \partial^\nu j_i.$$

最后的这个方程可以改写为

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \sum_i j_i(x) \partial^\nu \phi_i. \tag{1-103}$$

表示能量和动量的定域变化的这两种方法，根据系统中是否包含相互作用能量 $-\int d^3x \mathscr{L}_1$ 而有所不同。

我们把这种方法应用到与外部守恒流 $j$ 耦合的电磁场，这时拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^2 - j \cdot A, \tag{1-104}$$

并且

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j \cdot A,$$

$$\tilde{\Theta}_0^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2. \qquad (1\text{-}105)$$

即使 $j$ 为零，张量 $\tilde{\Theta}$ 也不是规范不变的！ 在变换 $A \to A + \partial\phi$ 下：

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} \to \tilde{\Theta}^{\mu\nu} + \partial_\rho(g^{\mu\nu} j^\rho \phi - F^{\mu\rho}\partial^\nu\phi) - j^\mu\partial^\nu\phi. \qquad (1\text{-}106)$$

在没有外源时附加项是一散度，如果场在无穷远处等于零，这一项对总能量和总动量的值没有贡献。

能量-动量密度原则上都是可测量的，而且和引力场相耦合。因此，找出依赖于规范的表达式是非常讨厌的。 此外，$\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ 的反对称部分不为零：

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} - \tilde{\Theta}^{\nu\mu} = F^{\nu\rho}\partial^\mu A_\rho - F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho. \qquad (1\text{-}107)$$

我们知道，拉氏量不能由运动方程完全决定。能量-动量张量相应地允许有某些任意性。一般地说，如用 $k^\mu(x)$ 表示守恒流，则当 $k^\mu$ 作变换

$$k^\mu \to k^\mu + \Delta k^\mu \qquad (1\text{-}108)$$

时，只要有

$$\partial_\mu \Delta k^\mu = 0 \qquad (1\text{-}109)$$

和

$$\int d^3x \Delta k^0(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad (1\text{-}110)$$

荷 $K = \int d^3x k^0(\mathbf{x}, t)$ 以及定域守恒定律都不变。这些约束条件的一个解为

$$\Delta k^\mu = \partial_\rho k^{\mu\rho}, \qquad (1\text{-}111)$$

其中 $k^{\mu\rho}$ 是反对称的，而且定域地依赖于场。因为

$$\int d^3x \partial_\rho k^{0\rho} \equiv \int d^3x \sum_i^3 \partial_i k^{0i} = 0, \qquad (1\text{-}112)$$

式(1-109)被证实，式(1-110)也同样是成立的．回到电磁的能量-动量张量，我们看到，我们可以给正则的 $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}$ 加上一项

$$\Delta\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\rho \Theta^{\mu\rho,\nu}, \tag{1-113}$$

其中 $\Theta^{\mu\rho,\nu}$ 对 $(\mu, \rho)$ 是反对称的，而且对场来说是定域的．其中

$$\Delta_{\text{规范}}\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -\partial_\rho(F^{\mu\rho}\partial^\nu\phi) \tag{1-114}$$

的规范依赖性的讨论提出了补偿项

$$\Delta\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu). \tag{1-115}$$

因此，我们令

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} &= \tilde{\Theta}^{\mu\nu} + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)\\ &= g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F^2 + j\cdot A\right) - F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu).\end{aligned} \tag{1-116}$$

利用 Maxwell 方程得到 $\partial_\mu F^{\mu\rho} = -j^\rho$，因此 $\Theta^{\mu\nu}$ 的另一种表达形式为

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + F^{\mu\rho}F^\nu_\rho + g^{\mu\nu}j\cdot A - j^\mu A^\nu. \tag{1-117}$$

在没有源时，这个能量-动量密度具有如下性质：它是规范不变的、守恒的、对称的以及无迹的．按照一般的结构，如果 $j$ 不为零，则

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = A_\rho\partial^\nu j^\rho. \tag{1-118}$$

这也能表述为

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu}_{\text{电}} = \partial_\mu\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + F^{\mu\rho}F^\nu_\rho\right) = j_\rho F^{\rho\nu}, \tag{1-119}$$

因而新的张量 $\Theta_0$ 可以等同于纯电磁的贡献．能量密度 $\Theta^{00}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ 是正的，动量密度 $\Theta^{i0}_0 = (\mathbf{E}\times\mathbf{B})^i$ 是熟悉的 Poynting 矢量．于是我们回到了已经知道的结果

$$-\frac{d}{dt}\int_V d^3x\Theta_0^{00}=\int_S dS\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\int d^3x\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}.$$

在有源的情况下，经过上面这些处理后，$\Theta^{\mu\nu}$ 仍然是规范有关的. 这是不奇怪的，因为这个系统是开放的. 为了看清在有源的封闭系统中所发生的情形，我们考虑一组有电磁相互作用的带电点粒子. 总作用量为

$$I=-\int\frac{1}{4}F^2d^4x-\sum_n\int d\tau_n \times\left[\frac{m_n}{2}\dot{x}_n^2(\tau_n)+e_n\dot{x}_n(\tau_n)\cdot A(x_n)\right]. \tag{1-120}$$

在空间-时间平移下

$$A(x)\to A(x+a),\quad x_n(\tau_n)\to x_n(\tau_n)-a, \tag{1-121}$$

$I$ 是不变的. 如果我们考虑如下形式的无穷小变换：

$$\delta A^\mu(x)=\delta a^\nu(x)\partial_\nu A^\mu(x),\quad \delta x_n^\mu=-\delta a^\mu(x_n), \tag{1-122}$$

我们发现

$$-\frac{\delta I}{\delta a_\nu(x)}=\partial_\mu\bar{\Theta}^{\mu\nu}=0, \tag{1-123}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}^{\mu\nu}(x)=&\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho\\&+\sum_n\int d\tau_n e_n\dot{x}_n^\mu(\tau_n)\delta^4[x-x_n(\tau_n)]A^\nu[x_n(\tau_n)]\\&+\sum_n m_n\int d\tau_n\dot{x}_n^\mu(\tau_n)\dot{x}_n^\nu(\tau_n)\delta^4[x-x_n(\tau_n)].\end{aligned} \tag{1-124}$$

重复导出规范不变张量的做法，即加进 $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$，可得

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu}=&\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2+F^{\mu\rho}F_\rho^\nu\\&+\sum_n m_n\int d\tau_n\dot{x}_n^\mu\dot{x}_n^\nu\delta^4[x-x_n(\tau_n)].\end{aligned} \tag{1-125}$$

所有讨厌的项都已消失，且保持了规范不变性、对称性以及守恒的总能量-动量张量. 我们发现，即使动力学方程把质点和场耦合起来，它们

的贡献却相加地出现在式(1-125)中.

现在我们来研究把关于固定点的 Lorentz 不变性的结论推广到角动量守恒. 用无穷小形式

$$\delta x^{\mu} = \delta\omega^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{1-126}$$

其中 $\delta\omega^{\mu\nu}$ 反对称. 我们看到,在这些只是宗量的变换下,拉氏量一般不是不变的,因为还必须伴随有相应的场的变换. 换句话说,场携带齐次 Lorentz 群的表示. 这个群的元素 $\Lambda$ 按照

$$^{\Lambda}\varphi(x) = S(\Lambda)\varphi(\Lambda^{-1}x) \tag{1-127}$$

变换场. 我们已经把场 $\Psi$ 排成一个列矢量,而 $S(\Lambda)$ 是群的矩阵表示. 对于靠近单位元的 $\Lambda$, $\Lambda^{-1}x$ 将等于 $x - \delta x$, 其中 $\delta x$ 由式 (1-126) 给出, $S(\Lambda)$ 将具有相应的形式. 我们把对电磁场的研究作为这种情况的例子留给读者作为练习,而我们现在来研究一种更加简单的情形,即其中的场是标量 [$S(\Lambda) = 1$]. 为了应用 Noether 定理,我们应当把式(1-126)中的 $\delta\omega^{\mu\nu}$ 作为 $x$ 的函数,并找出在作用量的变分中它们的系数,其中要用到 $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$. 如果 $\Theta^{\mu\nu}$ 表示对称的能量-动量张量,我们发现推广的角动量守恒

$$\begin{aligned} J^{\mu,\nu\rho} &= \Theta^{\mu\nu}x^{\rho} - \Theta^{\mu\rho}x^{\nu}, \\ \partial_{\mu}J^{\mu,\nu\rho} &= 0. \end{aligned} \tag{1-128}$$

在场按 Lorentz 群的非平庸表示变换的情况下,这只代表轨道部分. 为了构成守恒量,相应于内部贡献的附加部分出现在 $J^{\mu,\nu\rho}$ 中. 在第二章和第三章中,我们将详细地研究这种情形. 为了得到这些守恒密度以及有关的不依赖于时间的荷(总共六个)

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x J^{0,\nu\rho}(\mathbf{x}, t), \tag{1-129}$$

具有决定意义的是式(1-128)中的 $\Theta^{\mu\nu}$ 是对称的. 注意, $J^{\nu\rho}$

不是平移不变的．在坐标原点移动 $a^\mu$ 后，轨道部分改变了 $a^\nu P^\rho - a^\rho P^\nu$．为了得到真正可以称为内禀角动量的这个量，我们构造一个 Pauli-Lubanski 矢量

$$W_\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{J^{\beta\gamma}P^\delta}{\sqrt{P^2}}. \tag{1-130}$$

在静止系中（$\mathbf{P}=0$），这个矢量约化为普通的三维角动量．

迄今，在这种相对论性的范围内，我们一直避免应用哈密顿量的形式或引入 Poisson 括号．其原因是我们不愿让时间起特殊的作用．然而，没有任何理由阻止我们这样做．在给定时刻 $t$，对普通的 $\varphi(\mathbf{x},t)$ 我们可以引进共轭场

$$\pi(\mathbf{x},t)=\frac{\partial L}{\partial\partial_0\varphi(\mathbf{x},t)}=\frac{\delta}{\delta\partial_0\varphi(\mathbf{x},t)}\int d^3y\mathscr{L}(y,t). \tag{1-131}$$

类似地，我们定义时刻 $t$ 场 $\varphi$ 和 $\pi$ 的二个泛函 $L_1$ 和 $L_2$ 的 Poisson 括号为

$$\{L_1,L_2\}=-\{L_2,L_1\}=\int d^3x \times\left[\frac{\delta L_1}{\delta\pi(\mathbf{x},t)}\frac{\delta L_2}{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}-\frac{\delta L_1}{\delta\varphi(\mathbf{x},t)}\times\frac{\delta L_2}{\delta\pi(\mathbf{x},t)}\right]. \tag{1-132}$$

这些泛函微商不是完全确切的．例如，如果 $L$ 被表示成对包含场梯度的密度的空间积分，一个适当的分部积分总是不言而喻的．特别是

$$\begin{aligned}&\{\pi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)\}=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\\&\{\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)\}=\{\varphi(\mathbf{x},t),\varphi(\mathbf{y},t)\}=0,\end{aligned} \tag{1-133}$$

和，例如

$$\{\pi(\mathbf{x},t),\nabla\varphi(\mathbf{y},t)\}=-\nabla_x\delta^3(x-y).$$

不难看出，当我们把 Hamilton 函数 $H$ 等同于由 $\varphi(\mathbf{x},t)$，$\nabla\varphi(\mathbf{x},t)$ 和 $\pi(\mathbf{x},t)$ 表示的能量密度的积分

$$H = \int d^3x \Theta^{00}(\mathbf{x}, t) \tag{1-134}$$

时，和非相对论动力学完全类似，场方程(1-44)有如下形式：

$$\begin{aligned}
\partial_0 \varphi(\mathbf{x}, t) &= \{H, \varphi(\mathbf{x}, t)\} = \frac{\delta}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} H, \\
\partial_0 \pi(\mathbf{x}, t) &= \{H, \pi(\mathbf{x}, t)\} = -\frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)} H.
\end{aligned} \tag{1-135}$$

方程(1-135)表示$H$导致了系统的时间平移．读者应该看到，把它推广到空间平移和无穷小 Lorentz 变换是很方便的．

### 1-2-3 内部对称性

许多系统，例如粒子物理系统，都具有内部对称性，在分析它们的谱和相互作用时，这种对称性起着重要的作用．可是据我们所知，大部分的对称性都只是近似的，被比我们讨论的力更弱的力所破坏．尽管如此，下面的做法仍然是可取的：首先假设这些有严格的不变性，然后研究作为次级近似的破坏形式．让我们在这种经典的意义上简略地导出 Noether 定理．

令 $\phi_1 \cdots \phi_N$ 表示$N$个相互作用的场．它们当中有些可以是实的或者复的，而且附带 Lorentz 指标．对于$x$的每一个值，我们把它们作为$N$维空间中的矢量，在这个空间中我们给出群$G$的表示．群$G$可能保持某个子空间不变（如果场在 Lorentz 变换下具有不同的变换性质，则必然是这种情况）．如果$G$是紧致李群，我们用 $T^s(s = 1, \cdots, r)$ 表示相应的生成元，$T^s$ 是反厄米的，并且

$$[T^{s_1}, T^{s_2}] = C_{s_1}^{s_2 s_3} T^{s_3}. \tag{1-136}$$

记得，对于一个紧致群，结构常数 $C_{s_1}^{s_2 s_3}$ 可以选为全反对称．为简洁起见，我们将不区分群和它在$\phi$上的线性实现．

我们来考虑场依赖于空间-时间的变分

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha_r(x)T^r\phi(x),$$
$$\delta\phi^+(x) = -\delta\alpha_r(x)\phi^+(x)T^r. \tag{1-137}$$

在此变换下我们有 $\mathscr{L}(\phi) \to \mathscr{L}(\phi+\delta\phi) = \hat{\mathscr{L}}$，其中 $\hat{\mathscr{L}}$ 是 $\phi$，$\partial_\mu\phi$（和它们的复共轭），$\delta\alpha_r$ 和 $\partial_\mu\delta\alpha_r$ 的函数．在稳定解附近的变动将给出

$$0 = \delta I = \int d^4x\delta\alpha_r(x)\left\{\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\delta\alpha_r(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial[\partial_\mu\delta\alpha_r(x)]}\right\}. \tag{1-138}$$

定义相应的流

$$j_r^\mu(x) = \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial[\partial_\mu\delta\alpha_r(x)]} \tag{1-139}$$

只有包含场微商的那部分拉氏量才对 $j_r^\mu$ 有贡献．从式(1-138)即得 Noether 定理，并给出这些流的散度

$$\partial_\mu j_r^\mu(x) = \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}(x)}{\partial\delta\alpha_r}, \tag{1-140}$$

其中我们已注意到，$\partial\hat{\mathscr{L}}(x)/\partial\delta\alpha_r(x)$ 能等同于对常数变分 $\delta\alpha_r$ 的同样的微商．如果相应的式(1-140)的右边等于零，则流 $j_r^\mu$ 是守恒的，这意味着原先的拉氏量在由 $T_r$ 生成的 $G$ 的一维子群内是不变的．换一种说法，与每一个这样的子群相联系有一个守恒荷

$$Q_r = \int d^3x j_r^0(\mathbf{x},t),$$
$$\frac{dQ_r}{dt} = \int d^3x\partial_\mu j_r^\mu(\mathbf{x},t) = 0. \tag{1-141}$$

回到没有假定流守恒的一般情况，这并不妨碍我们定义 $t$ 时刻的荷 $Q_r(t)$．鉴于 $t$ 将被固定，我们就不明显地写出它．如果 $\mathscr{F}$ 表示 $t$ 时刻场和共轭动量的泛函，我们需要计算 Poisson 括号

$$\{Q_r,\mathscr{F}\} = \int d^3x\sum_a\left(\frac{\delta Q_r}{\delta\pi_a}\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta\phi_a} - \frac{\delta Q_r}{\delta\phi_a}\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta\pi_a}\right). \tag{1-142}$$

$\hat{\mathscr{L}}$ 对 $\partial_0\delta\alpha_s(x)$ 的依赖仅来自 $\mathscr{L}$ 对 $\partial_0\phi_a$ 的依赖. 为了简单起见,我们假定场是实的(这时 $T_r$ 是实的、反对称的). 如果不是这样,我们就应分别考虑实部和虚部. 从而得到

$$\begin{aligned} j_r^0(x) &= \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial[\partial_0\delta\alpha_s(x)]} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial_0\phi_a(x)]} T^r_{ab}\phi_b(x) \\ &= \pi(x)T^r\phi(x), \\ Q^r(x) &= \int d^3x\pi(x)T^r\phi(x). \end{aligned} \tag{1-143}$$

因此,我们有

$$\{Q^r, \mathscr{F}\} = \int d^3x \left(\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta\phi} T^r\phi - \pi T^r \frac{\delta\mathscr{F}}{\delta\pi}\right), \tag{1-144}$$

特别是

$$\begin{aligned} \{Q^r, \phi(x)\} &= T^r\phi(x), \\ \{Q^r, \pi(x)\} &= -\pi(x)T^r = T^r\pi(x), \end{aligned} \tag{1-145}$$

此式能改写为

$$\begin{aligned} \{\delta\alpha_s Q^s, \phi(x)\} &= \delta\phi(x), \\ \{\delta\alpha_s Q^s, \pi(x)\} &= \delta\pi(x), \end{aligned}$$

其中 $\delta\phi(x)$ 和 $\delta\pi(x)$ 是无穷小变换下场的变分式(1-137). 换句话说,用与哈密顿量生成时间平移同样的方法,通过 Poisson 括号荷 $Q^r$ 生成这些无穷小变换. 类似地我们有

$$\begin{aligned} \{Q^{r_1}, Q^{r_2}\} &= -\int d^3x\pi(x)[T^{r_1}, T^{r_2}]\phi(x) \\ &= -C^{r_1r_2}_{r_3}Q^{r_3}, \end{aligned} \tag{1-146}$$

正如显而易见的那样. 为了导出上述关系,并不要求拉氏量的不变性. 实际上,如果$H$表示哈密顿量,我们很容易导出

$$\begin{aligned} \frac{dQ^r(t)}{dt} &= \{H(t), Q^r(t)\} \\ &= \int d^3x \frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial\delta\alpha_r}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{1-147}$$

我们可以将式(1-146)推广到流的时间分量的等时 Poisson 括

号，结果为

$$\{j_0^{s_1}(\mathbf{x},t),\ j_0^{s_2}(\mathbf{y},t)\} = -C_{t_3}^{s_1 s_2}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})j_0^{s_3}(\mathbf{x},t). \tag{1-148}$$

这些关系式的量子化形式导致了流代数的重大进展（见十一章）。

读者会发现，类似地研究能量-动量张量的等时 Poisson 括号是有益的：

$$\begin{aligned}
\{\Theta^{00}(\mathbf{x},t),\ \Theta^{00}(\mathbf{y},t)\} &= [\Theta^{0k}(\mathbf{x},t)+\Theta^{0k}(\mathbf{y},t)]\partial_k^x\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
\{\Theta^{00}(\mathbf{x},t),\ \Theta^{0k}(\mathbf{y},t)\} &= [\Theta^{kl}(\mathbf{x},t)-g^{kl}\Theta^{00}(\mathbf{y},t)]\partial_l^x\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
\{\Theta^{0k}(\mathbf{x},t),\ \Theta^{0l}(\mathbf{y},t)\} &= [\Theta^{0k}(\mathbf{y},t)\partial_l^x+\Theta^{0l}(\mathbf{x},t)\partial_k^x]\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{1-149}$$

由此我们得到 Poincaré 群的李代数

$$\begin{aligned}
&\{P^\mu,P^\nu\}=0,\ \{J^{\mu\nu},P^\sigma\}=P^\mu g^{\nu\sigma}-P^\nu g^{\mu\sigma},\\
&\{J^{\mu\nu},J^{\bar\mu\bar\nu}\}=g^{\mu\bar\nu}J^{\nu\bar\mu}+g^{\nu\bar\mu}J^{\mu\bar\nu}-g^{\mu\bar\mu}J^{\nu\bar\nu}-g^{\nu\bar\nu}J^{\mu\bar\mu}.
\end{aligned} \tag{1-150}$$

作为这一节的最后一部分，我们研究包含二个实场 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的简单的拉氏量，我们用(独立的)复数

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2),\quad \phi^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2) \tag{1-151}$$

描述这二个场．假设在(1,2)空间中的内部转动下或等价地在

$$\phi(x)\to e^{-ie\alpha}\phi(x),\quad \phi^*(x)\to e^{ie\alpha}\phi^*(x) \tag{1-152}$$

时动力学是不变的．这里出现的常数 $e$ 被认为就是电磁场的基本耦合常数，即电荷．例如，假设$\mathscr{L}$有如下形式：

$$\mathscr{L}_{\text{标量}}=(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi)-m^2\phi^*\phi-V(\phi^*\phi), \tag{1-153}$$

其中 $V$ 是一个任意的光滑的函数，比如多项式．Noether 定理给出守恒流

$$j_\mu(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial^\mu\alpha(x)]}=ie[\phi^*\partial_\mu\phi-(\partial_\mu\phi^*)\phi]\equiv ie\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi. \tag{1-154}$$

当然，我们可以直接用运动方程

$$(\Box+m^2)\phi=-\frac{\partial V}{\partial\phi^*},\quad (\Box+m^2)\phi^*=-\frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{1-155}$$

来验证它的守恒．因此，荷

$$Q = \int d^3x j^0(\mathbf{x},t) = ie\int d^3x\phi^*(\mathbf{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(\mathbf{x},t) \qquad (1\text{-}156)$$

是时间无关的．现在我们将此系统和电磁场耦合．因为我们已给出守恒流，所以我们可能会想到把它用到 Maxwell 方程的右边．但是，我们必须小心行事，因为 $\phi$ 和矢量势 $A_\mu$ 的耦合可能会改变流本身的结构．所以，我们设法求得一个总的拉氏量，它等于 $\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{4}F^2$、由式（1-153）给出的 $\mathscr{L}_{标量}$ 以及相互作用项 $\mathscr{L}_{int}(\phi, \phi^*, A_\mu)$ 这三部分的总和：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{em} + \mathscr{L}_{标量} + \mathscr{L}_{int}. \qquad (1\text{-}157)$$

我们假设用总拉氏量式(1-157)由 Noether 定理给出的流就是电磁流，换句话说，我们有

$$J^\mu = j^\mu + \frac{\partial\mathscr{L}_{int}}{\partial[\partial_\mu\alpha(x)]} = \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathscr{L}_{int}}{\partial A_\mu(x)}. \qquad (1\text{-}158)$$

不难确信，相互作用

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{int} &= -ieA_\mu\phi^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi + e^2A^2\phi^*\phi \\ &= -A_\mu j^\mu + e^2A^2\phi^*\phi \end{aligned} \qquad (1\text{-}159)$$

满足这些条件，这时

$$J^\mu = j^\mu - 2e^2A^\mu\phi^*\phi. \qquad (1\text{-}160)$$

因此，总拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F^2 + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^*[(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] \\ &- m^2\phi^*\phi - V(\phi^*\phi),\end{aligned} \qquad (1\text{-}161)$$

它导致了联立方程

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \\ &[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2]\phi = -\frac{\delta V}{\partial\phi^*}.\end{aligned} \qquad (1\text{-}162)$$

我们看到，式(1-161)可以从电磁场的最小耦合原理导出．根据这个原理，任何作用于荷电场（带电荷 $e$）的微商 $\partial_\mu$ 应当替换成协变微商 $\partial_\mu + ieA_\mu$．其结果是，不但在具有常数 $\alpha$ 的变换式(1-152)下拉氏量是不变的，而且在更一般的依赖于 $x$ 的(即定域的)规范变换

$$\phi(x)\to e^{-ie\alpha(x)}\phi(x),\ \phi^*(x)\to e^{ie\alpha(x)}\phi^*(x),$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \qquad (1\text{-}163)$$

下拉氏量也不是不变的．最初导出的 Noether 定理现在已成为电磁耦合的更深刻的性质，这些性质推广了对自由电磁场已讨论过的规范不变性．这种想法适当地扩展到不对易的群就产生了非常有兴趣的模型场论(见第十二章)．

## 1-3 传播与辐射

### 1-3-1 Green 函数

一个有代表性的场论的动力学方程是 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\phi(x) = j(x), \qquad (1\text{-}164)$$

其中 $j$ 可能依赖于场 $\phi$，附加的指标被省略．在 Lorentz 规范中，势所满足的 Maxwell 方程是我们已有的一个例子，在那里没有式(1-164)中的质量项．

我们暂且假定源 $j(x)$ 是给定的，而且 $m \geqslant 0$．因此，我们要探讨的是一个双曲型二阶偏微分方程，它利用 $x$ 点的 $\phi$ 值以及在通过 $x$ 的类空曲面元上 $\phi$ 的法向微商，确定了在 $x$ 的邻域中 $\phi$ 的值．特征元和光锥相切，这表明因果性定域地成立．

在散射理论中，人们很少用上面所指出的方法处理这种问题．$\phi$ 的边界条件加在被类时间隔远远分开的类空曲面上更好些．因此，将式(1-164)右边替换成集中在 $x'$ 点附近的分布，并构造此方程的标准解是很有用的．我们把

$$(\Box + m^2)G(x, x') = \delta^4(x - x') \qquad (1\text{-}165)$$

这类方程的解记为 $G(x, x')$，所带的角标表征加在 $G$ 上的边界条件．$G(x, x')$ 通常总是平移不变的，这是由于相应的 Green 函数(或传播子)只依赖于变量 $x - x'$ 的缘故．由迭

加原理，式(1-164)的解由

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int d^4x' G(x - x') j(x') \quad (1\text{-}166)$$

给出，其中 $\phi^{(0)}(x)$ 满足齐次方程，并选择使 $\phi$ 满足边界条件。

进一步利用平移不变性，通过 Fourier 变换将方程变为代数方程来求解式(1-165)。令

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip\cdot(x-x')} \tilde{G}(p), \quad (1\text{-}167)$$

我们得到

$$(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = 1. \quad (1\text{-}168)$$

为了用 $(-p^2 + m^2)$ 除二边，我们不得不避开这个表达式在双叶双曲面 $p^2 - m^2 = 0$（或者当 $m^2 = 0$ 时为光锥 $p^2 = 0$）上的零点。这又等价于在式(1-167)中规定了一个稍稍变形的积分迴路。我们注意到，所有这些选择对 $\tilde{G}(p)$ 至多相差一项 $g(\mathbf{p}, p_0/|p_0|)\,\delta(p^2 - m^2)$，这是相应于齐次方程解的表达式。当然，这些选择和无穷远处的边界条件有关。

我们首先定义推迟和超前 Green 函数

$$\tilde{G}_{\substack{\text{ret}\\\text{adv}}}(p) = \frac{-1}{(p_0 \pm i\varepsilon) - \mathbf{p}^2 - m^2},$$

$$G_{\substack{\text{ret}\\\text{adv}}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip\cdot x}}{(p_0 \pm i\varepsilon)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}. \quad (1\text{-}169)$$

加入 $\varepsilon$ 等价于在积分 $p_0$ 时的一个微小的迴路变形，而且表示把 $G(x)$ 理解为广义函数。如果我们首先对 $p_0$ 积分，比方在 $G_{\text{ret}}(x)$ 的情况下，如果 $x^0 < 0$，我们可以将积分迴路在复平面的上半平面中闭合而不会遇到任何奇异性。从 Cauchy 定理得到，对于 $x_0 < 0$，$G_{\text{ret}}(x)$ 等于零。对于 $G_{\text{adv}}(x)$ 有相反的结论。可以验证，这些广义函数是 Lorentz 不变的，从

而在朝前光锥的外部 $G_{ret}(x)$ 等于零，而在朝后光锥的外面 $G_{adv}(x)$ 等于零. 这些性质是和因果传播一致的. 我们还注意到，二个 Green 函数都是实的，并有 $G_{adv}(x) = G_{ret}(-x)$. 当 $m^2 = 0$ 时我们回到

$$G_{\substack{ret\\adv}}(x)\,|_{m^2=0} = \frac{1}{2\pi}\theta(\pm x_0)\delta(x^2), \qquad (1\text{-}170)$$

而当 $m^2 > 0$ 时，包含 Bessel 函数的显表达式不是太明了的. 然而，不管 $m^2$ 是什么，在光锥上这些 Green 函数的奇异性仍由式(1-170)给出，这反映了小 $x^2$ 的行为完全被式(1-165)中的微商算符所支配. 质量项则导致了如下事实：支集并不象式(1-170)那样集中在光锥上，但也包含了传播速度比 1 小的信号. 回到积分表示式(1-169)，为了对 $p_0$ 积分，利用分解

$$\frac{1}{(p_0+i\varepsilon)^2-\mathbf{p}^2-m^2} = \frac{1}{2\omega_p}\left(\frac{1}{p_0-\omega_p+i\varepsilon} - \frac{1}{p_0+\omega_p+i\varepsilon}\right),$$

其中 $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. 很容易发现

$$G_{ret}(x-x') = i\,\frac{\theta(x_0-x_0')}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p} \times\left\{e^{-i\omega_p(x_0-x_0')+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{i\omega_p(x_0-x_0')+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right\}.$$

我们希望给出这个公式的物理解释. 为此我们可以设想一个系统，它被封闭在一个边长为 $L$ 的非常大的立方形箱子中. 通过替换 $[1/(2\pi)^3]\int d^3p \to \Sigma_n/L^3$，动量积分被换成了 Riemann 求和，动量的每个分量换成 $2\pi n/L$，其中 $n$ 为任意整数.

这样，我们就有

$$G_{ret}(x-x') \to i\theta(x_0-x_0')[\Sigma\varphi_{+,\mathbf{p}}(x)\varphi^*_{+,\mathbf{p}}(x') - \Sigma\varphi_{-,\mathbf{p}}(x)\varphi^*_{-,\mathbf{p}}(x')], \qquad (1\text{-}171)$$

动量 **p** 只取离散的(但非常稠密)值，函数

$$\varphi_{\pm,\mathbf{p}}(x)=\frac{1}{L^{3/2}\sqrt{2\omega_p}}e^{\pm i\omega_p x_0+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{1-172}$$

表示齐次 Klein-Gordon 方程的周期解. 正、负号相应于频率的符号. 式(1-171)中的相对负号[和前面的因子 $i$ 一起构成一个实数: $\varphi^*_{+,\mathbf{p}}(x)=\varphi_{-,-\mathbf{p}}(x)$] 来自如下事实: 方程的解按照不定"模方"[见公式(2-5)]来归一. 我们会看到，当 $\varphi_+$ 具有正模方时 $\varphi_-$ 具有负模方.

在任何情况下，表达式(1-171)都导致一个很有兴趣的按 $G_{\mathrm{ret}}(x-x')$ 传播的解释. 正频和负频分别地由式 (1-171) 的第一项和第二项随时间向前传播. 对 $G_{\mathrm{adv}}(x-x')$ 我们有 $x$ 和 $x'$ 交换了的类似的表达式.

$G_{\mathrm{ret}}(x)$ 和 $G_{\mathrm{adv}}(x)$ 之差

$$\begin{aligned}G^{(-)}(x)&=G_{\mathrm{ret}}(x)-G_{\mathrm{adv}}(x)\\&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p e^{-ip\cdot x}\varepsilon(p_0)\delta(p^2-m^2) \qquad (1-173)\\&=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2\omega_p}\left(e^{-i\omega_p x_0+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}-e^{i\omega_p x_0+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right),\end{aligned}$$

是一个在光锥外等于零的奇函数，使得

$$\frac{\partial}{\partial x_0}G^{(-)}(x)\Big|_{x^0=0}=\delta^3(\mathbf{x}), \tag{1-174}$$

此式显然满足齐次 Klein-Gordon 方程. 当 $m^2=0$ 时得到

$$\begin{aligned}G^{(-)}(x)|_{m^2=0}&=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2)\\&=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{4\pi^2 i}\left[\frac{1}{(x-i\eta)^2}-\frac{1}{(x+i\eta)^2}\right],\end{aligned} \tag{1-175}$$

其中 $\eta$ 是无穷小的正的类时矢量.

最后，和的一半

$$G^{(+)}(x) = \frac{1}{2}[G_{ret}(x) + G_{adv}(x)]$$

$$= -\frac{\mathbf{PP}}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ip\cdot x}\frac{1}{p^2 - m^2} \qquad (1\text{-}176)$$

是方程(1-165)的一个偶数解. 式(1-176)中的主值记号用于对 $p_0$ 的积分,我们记得

$$\frac{1}{p_0 - \omega_p \pm i\varepsilon} = \mathbf{PP}\frac{1}{p_0 - \omega_p} \mp i\pi\delta(p_0 - \omega_p)$$

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_0 - \omega_p) + \delta(p_0 + \omega_p)}{2\omega_p}. \qquad (1\text{-}177)$$

上面的讨论是在完全经典的范围内进行的. 可是, 在量子化的形式中,我们会碰到首先由 Stueckelberg 和 Feynman 引入的这一方程的另一个偶数解. 在经典物理中它自然不出现的一个原因是,由于它是由

$$G_F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ip\cdot x}\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \qquad (1\text{-}178)$$

定义的一个复的广义函数. 因此,它满足

$$(\Box + m^2)G_F(x) = \delta^4(x), \quad G_F(-x) = G_F(x).$$

如果我们象上面一样分立化处置,我们便得到等价形式

$$G_F(x - x') \to i[\theta(x_0 - x_0')\Sigma\varphi_{+,\mathbf{p}}(x)\varphi^*_{+,\mathbf{p}}(x')$$
$$+ \theta(x_0' - x_0)\Sigma\varphi_{-,\mathbf{p}}(x)\varphi^*_{-,\mathbf{p}}(x')]. \qquad (1\text{-}179)$$

在光锥外前面的 Green 函数等于零, 但对 $G_F$ 情况就不同, 对负的 $x^2$ 它具有指数型的尾部. 让 $x_0 = 0$, 令 $r = |\mathbf{x}|$, 则

$$G_F(0, r) = \frac{i}{(2\pi)^2 r}\int_m^\infty dp \frac{p}{\sqrt{p^2 - m^2}} e^{-pr}$$

$$\sim \frac{ie^{-mr}}{(2\pi)^2 r^2}\left(\frac{\pi m r}{2}\right)^{1/2}. \qquad (1\text{-}180)$$

从式(1-179)知道，按照 $G_F$，正频(负频)随时间向前(向后)传播．正是由于正、负频的这种差别，解释了 $G_F$ 的内在复数性．我们还注意到，和前面的 Green 函数不同，$\tilde{G}_F(p)$ 是复变量 $p^2$ 的半纯函数．

这些表达式可以推广到更加一般的情形，例如电磁场的情形．由于仅仅从 Maxwell 方程

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A) = j^\mu \tag{1-181}$$

还不足于借助守恒流 $j^\mu$ 确定势 $A^\mu$，相应地我们看到，在动量空间中矩阵

$$L^\mu_\nu = p^2 g^\mu_\nu - p^\mu p_\nu \tag{1-182}$$

是奇异的．它的行列式恒等于零．因为

$$L^2 = p^2 L, \tag{1-183}$$

算符 $L$ 事实上正比于一个投影算符．为了避免这种困难，我们可以或者附加一个小的质量项，或者象 1-2 节所做的在拉氏量中引进额外的项 $(\lambda/2)(\partial \cdot A)^2$．修改后的运动方程是

$$[\Box g^\mu_\nu - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\nu]A^\nu = j^\mu, \tag{1-184}$$

而传播子变成

$$G^{\mu\nu}_F(x,\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ip\cdot x} \times \frac{g^{\mu\nu} + [(1-\lambda)/\lambda]p^\mu p^\nu/p^2}{p^2 + i\varepsilon}. \tag{1-185}$$

当 $G^{\mu\nu}_F$ 和守恒流合在一起时，分子中明显的奇异性不起作用．当 $\lambda = 1$ 时我们重新得到了 Feynman 传播子 $g^{\mu\nu}G_F(x)$．在第三章中我们对此将作更多的叙述．

### 1-3-2 辐射

作为 Green 函数的一个基本的应用，我们回想一下对运动的点电荷产生电磁场的计算．令 $x^\mu(\tau)$ 为点电荷的空间-时间轨道，$j^\mu(\mathbf{y}, t)$ 为式(1-51)给出的相关的流．因果性要求用推迟 Green 函数求解势．而且，上节末的评述立即导出

Lorentz 规范中势的表达式

$$A^{\mu}(y)=\frac{1}{2\pi}\int d^4z\theta(y^0-z^0)\delta[(y-z)^2]j^{\mu}(z)$$

$$=\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\theta[y^0-x^0(\tau)]\delta\{[y-x(\tau)]^2\}\dot{x}^{\mu}(\tau),$$

(1-186)

圆点表示对固有时间的微商。令 $x_+\equiv x(\tau_+)$ 为轨道上唯一依赖 $y$ 的推迟点，使得

$$(y-x_+)^2=0,\quad x_+^0<y^0. \tag{1-187}$$

如下的恒等式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\theta[y^0-x^0(\tau)]\delta\{[y-x(\tau)]^2\}f(\tau)$$

$$=\frac{f(\tau_+)}{2\dot{x}_+(y-x_+)}. \tag{1-188}$$

从式(1-187)以及对物理轨道 $\dot{x}_+$ 属于朝前光锥的事实，可得 $\dot{x}_+(y-x_+)>0$。因此，我们得到 Lienard-Wiechert 推迟势

$$A^{\mu}_{\rm ret}(y)=\frac{e}{4\pi}\frac{\dot{x}_+^{\mu}}{\dot{x}_+(y-x_+)}, \tag{1-189}$$

它是 Coulomb 势的相对论性的推广，在 $\dot{x}_+^{\mu}=(1,0,0,0)$ 的坐标系中还原为 Coulomb 势。显然，如果 $\mathbf{r}=\mathbf{y}-\mathbf{x}_+$，$\mathbf{v}_+=(d\mathbf{x}/dt)(\tau_+)$，则

$$A^0_{\rm ret}(y)=\frac{e}{4\pi(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_+)},$$

$$\mathbf{A}_{\rm ret}(y)=\frac{e\mathbf{v}_+}{4\pi(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_+)}, \tag{1-190}$$

略去指标“+”，相应的场为

$$\mathbf{E}=\frac{e}{4\pi}\frac{(\mathbf{r}-r\mathbf{v})(1-\mathbf{v}^2)+\mathbf{r}\times[(\mathbf{r}-r\mathbf{v})\times d\mathbf{v}/dt]}{(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^3},$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{E}}{r}. \tag{1-191}$$

当然，包含了推迟点。$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 都包含只在小距离有贡献的 $1/r^2$ 级的项以及 $1/r$ 级的辐射部分。利用 Poynting 矢量，穿过球面的能量通量为

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \int_s d\mathbf{S}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \int_s d\Omega(\mathbf{r}\times\mathbf{E})^2 > 0. \tag{1-192}$$

在低速时，对于式(1-192)相应的 $1/r$ 级的贡献是

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi r^3}\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\right],$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = e\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{v}/dt}{r^2}, \tag{1-193}$$

这是标准的偶极场。在同样的极限下，辐射功率由 Larmor 公式给出：

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2}{(4\pi)^2}\int\frac{d\Omega}{r^2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{e^2}{8\pi}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2\int d\cos\theta\sin^2\theta = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2. \tag{1-194}$$

这些结果可应用于许多有趣的情形，我们将只考虑其中的几个。

作为一个例子，让一荷电粒子在低频入射平面波的弱电场的感应下作非相对论性的振动：

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\mathbf{E} = \frac{e}{m}\boldsymbol{\epsilon}E_0e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{1-195}$$

这里 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是波的极化，$E_0$ 是它的振幅，$\mathbf{k}$ 是它的波矢量。根据 Larmor 公式，在立体角 $d\Omega$ 中(角度的定义见图 1-3)的辐射功率为

$$dP = \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2\frac{d\Omega}{r^2}$$

$$= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2\sin^2\theta d\Omega, \tag{1-196}$$

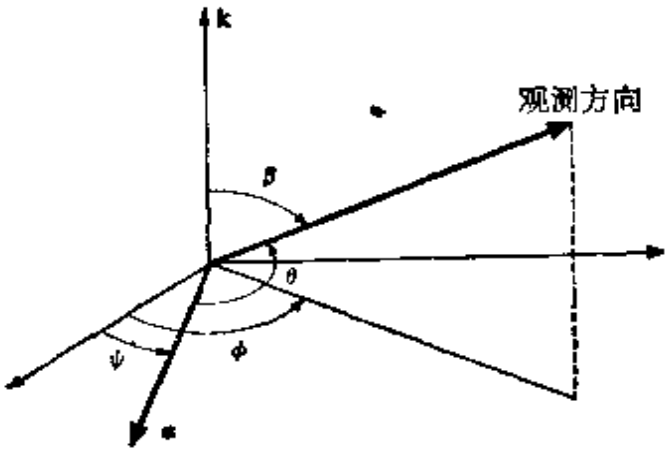



图 1-3　在一波矢为 k、极化为 ε 的平面波中振动的荷电粒子的辐射

如果在一个周期中粒子的位移只是入射波波长的一小部分，则 $(d\mathbf{v}/dt)^2$ 的平均值是

$$\left\langle\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{2} Re \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \frac{e^2}{2m^2}|E_0|^2,$$

因此

$$\left\langle\frac{dP}{d\Omega}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2 |E_0|^2 \sin^2\theta. \qquad (1\text{-}197)$$

单位时间、垂直于传播方向的单位面积上的平均入射能量通量，由入射的 Poynting 矢量的平均给出，且为 $\frac{1}{2}|E_0|^2$。定义微分散射截面 $d\sigma/d\Omega$ 为单位立体角的辐射功率与穿过单位面积的入射功率通量之比：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2 \sin^2\theta = r_e^2 \sin^2\theta. \qquad (1\text{-}198)$$

我们已引入经典电磁半径的记号 $r_e$（恢复光速 $c$）：

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m c^2} = \frac{\hbar\alpha}{mc}. \qquad (1\text{-}199)$$

对于电子，其值为 $2.82\times10^{-13}$ 厘米，$\alpha$ 代表精细结构常数 $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \simeq 1/137$。式(1-198)被称为 Thomson 散射截面；

在这里它是对一个入射极化波给出的。借助于图 1-3 中定义的角 $\beta$, $\phi$ 和 $\psi$, 我们有

$$\sin^2\theta = 1 - \sin^2\beta\cos^2(\phi - \psi).$$

为了得到微分截面,我们只需对 $\psi$ 求平均,

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{不极化}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2\frac{1+\cos^2\beta}{2}, \quad (1\text{-}200)$$

在朝前和朝后方向散射达到最大。总的 Thomson 截面是式(1-200)对 $\Omega$ 的积分,即

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3}r_e^2. \quad (1\text{-}201)$$

对于电子,其值为 $0.66\times10^{-24}$ (厘米)$^2$。我们记得,这个表达式只对弱场和小的频率 $\omega \ll mc^2/\hbar$ 才成立。当 $\hbar\omega \gtrsim mc^2$ 或 $\lambda \lesssim \hbar/mc$ (量子力学的 Compton 波长)时,初始频率不再守恒,我们遇到了量子力学的以及相对论的效应,这种过程被称为 Compton 散射(见第五章)。作为一个好的近似,这时截面由 Klein-Nishina 公式[式(5-116)和(5-117)]给出。在这里我们只引用对 Thomson 散射的最低阶 $\hbar\omega/mc^2$ 级的修正

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3}r_e^2\left(1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \cdots\right). \quad (1\text{-}202)$$

我们可以按照同样的方法研究经典的韧致辐射,即由电荷被突然加速而产生的辐射。令 $u_i = p_i/m$ 和 $u_f = p_f/m$ 是初态和末态的四维速度(见图 1-4)。选取坐标原点位于加速的时空点,可以将其看成理想化的散射过程。空间-时间轨道被参数化为

$$x(\tau) = \begin{cases} \dfrac{p_i}{m}\tau & \tau < 0, \\ \dfrac{p_f}{m}\tau & \tau > 0, \end{cases} \quad (1\text{-}203)$$

而流

$$j_\mu(x) = e\int d\tau \frac{dx_\mu}{d\tau}\delta^4[x - x(\tau)]$$

$$= -\frac{ie}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik\cdot x}\left(\frac{p^i_\mu}{p^i\cdot k} - \frac{p^f_\mu}{p^f\cdot k}\right). \quad (1\text{-}204)$$

在 Fourier 变换后取简单的表达式

$$\tilde{j}_\mu(k) = -ie\left(\frac{p^i_\mu}{p^i\cdot k} - \frac{p^f_\mu}{p^f\cdot k}\right) = \tilde{j}^*_\mu(-k).$$

我们要求，当 $t\to-\infty$ 时电磁场还原为入射粒子的 Coulomb 场，因为流守恒不允许 $t\to-\infty$ 时 $j_\mu(x)$ 等于零。利用定义式(1-173)，在 Lorentz 规范中我们有

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G_{\rm ret}(x-x')j^\mu(x')$$

$$= \int d^4x' G^{(-)}(x-x')j^\mu(x')$$

$$+ \int d^4x' G_{\rm sdv}(x-x')j^\mu(x'). \quad (1\text{-}205)$$

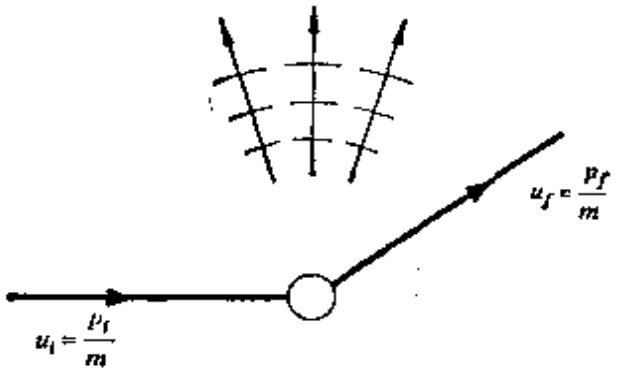



图 1-4 轫致辐射

我们已把 $A^\mu(x)$ 的结构表示成辐射场(齐次 Maxwell 方程的解)和附属于粒子的 Coulomb 场之和。因此，

$$A^\mu_{\rm rad}(x) = \int d^4x' G^{(-)}(x-x')j^\mu(x')$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{-ik\cdot x}\varepsilon(k_0)\delta(k^2)\tilde{j}^\mu(k), \quad (1\text{-}206)$$

而

$$F^{\mu\nu}_{rad}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{-ik\cdot x}\varepsilon(k_0)\delta(k^2)[k^\mu\tilde{j}^\nu(k) - k^\nu\tilde{j}^\mu(k)]. \tag{1-207}$$

辐射能量的密度由式(1-117)给出:

$$\Theta^{00} = F^{0\alpha}F^0_\mu + \frac{1}{4}g^{00}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

对于类光矢量 $k^0 = |\mathbf{k}|$，我们定义两个正交的类空极化矢量 $\varepsilon_\alpha$，它们满足

$$\varepsilon_\alpha^2 = -1, \quad \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_\alpha\cdot k = 0. \tag{1-208}$$

很容易导出，在正时间的发射能量$\mathscr{E}$为

$$\mathscr{E} = \int d^3x\Theta^{00}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2k_0} \times k_0\sum_{\alpha=1,2}|\varepsilon_\alpha\cdot\tilde{j}(k)|^2. \tag{1-209}$$

借助于光量子，即能量、动量为 $\hbar k$ 的光子，我们来预测这个辐射的解释. 今后令 $\hbar = 1$，则在相空间元 $d^3k$ 中发射的能量为

$$d\mathscr{E} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{2}e^2\sum_{\alpha=1,2}\left|\frac{\varepsilon_\alpha\cdot p^i}{k\cdot p^i} - \frac{\varepsilon_\alpha\cdot p^f}{k\cdot p^f}\right|^2 \tag{1-210}$$

除以单个量子的能量 $k^0$，这种半经典的计算使我们得到发射的极化为 $\varepsilon$ 的光子的数目

$$dN = \frac{d\mathscr{E}}{k^0} = e^2\left|\frac{\varepsilon\cdot p^i}{k\cdot p^i} - \frac{\varepsilon\cdot p^f}{k\cdot p^f}\right|^2\frac{d^3k}{2(2\pi)^3k^0}. \tag{1-211}$$

事实上，这个结果和完全量子力学的处理(见 5-2-4 和 7-2-3 节)是一致的. 对 $k$ 积分(对小的 $k$)，我们注意到，总能量是有限的但光子总数不是有限的. 这就是今后要详细讨论的红外灾难.

我们感兴趣的是由式(1-211)给出的角分布. 在 $k^\mu \equiv |\mathbf{k}|(1,1,0,0)$，$\varepsilon_1^\mu = (0,0,1,0)$，$\varepsilon_2^\mu = (0,0,0,1)$ 的坐标系中，考虑到

$k \cdot j(k) = 0$ 意味着 $j^0 = j'$，我们有

$$\sum_a |\varepsilon_a \cdot j(k)|^2 = -j \cdot j^*, \tag{1-212}$$

因此

$$d\mathscr{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} d^3k \left[ \frac{2p^i \cdot p^f}{(k \cdot p^i)(k \cdot p^f)} - \frac{m^2}{(k \cdot p^i)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p^f)^2} \right].$$

利用粒子的初速度和末速度以及 $\hat{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$，可以把它改写为

$$d\mathscr{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|^2} \left\{ \frac{2(1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f)}{(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_i)(1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_f)} - \frac{m^2}{E_i^2(1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2} - \frac{m^2}{E_f^2(1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v}_f)^2} \right\}. \tag{1-213}$$

对于软量子（$|\mathbf{k}| \to 0$）的发射，辐射在初速和末速方向有一个很高的峰，这是轫致辐射的一个典型的特征.

为了计算辐射光子的总数，对式(1-211)积分，从较小的值 $k_{\min}$（这是红外灾难所要求的）积到某个最大动量 $k_{\max}$［这是轨道式(1-203)中不现实的尖角所要求的］. 一个典型的截面 $d\sigma_{\text{coll}}$ 将描写散射过程，而总截面 $d\sigma_{\text{brems}}$ 将包含最终发射的光子. 为了对式（1-211）积分，在极端相对论极限下我们引入记号 $q^2 = (p_f - p_i)^2 \simeq -4E^2 \sin^2\theta/2$，其中 $E_i \sim E_f = E$，$\theta$ 为散射角，而在非相对论极限下 $|\mathbf{v}_i| \sim |\mathbf{v}_f| = v$. 利用 Feynman 积分表示

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2}, \tag{1-214}$$

算得

$$\int \frac{d^3\hat{k}(1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f)}{(1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v}_i)(1 - \hat{k} \cdot \mathbf{v}_f)} = 2\pi \int_0^1 dx \times \frac{2(1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f)}{1 - [x\mathbf{v}_i + (1-x)\mathbf{v}_f]^2}$$

$$\simeq \begin{cases} 4\pi\left(1 + \frac{4}{3} v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + O(v^4), & v \ll 1, \quad \text{非相对论}, \\ 4\pi \ln\left(-\frac{q^2}{m^2}\right) + O\left(\frac{m^2}{q^2}\right), & q^2 \gg m^2, \quad \text{极端相对论}, \end{cases}$$

而且

$$\int d^2\hat{k}\,\frac{m^2}{E^2(1-\hat{k}\cdot\mathbf{v})^2}=4\pi,$$

即得软光子发射截面的最终表达式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{brems}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_f}\right)_{\text{coll}}\left(\ln\frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right)$$

$$\times\frac{2\alpha}{\pi}\begin{cases}\dfrac{4}{3}v^2\sin^2(\theta/2), & \text{非相对论},\\ \ln(-q^2/m^2)-1, & \text{极端相对论}.\end{cases}\qquad(1\text{-}215)$$

在辐射问题的这种简短的概述中，忽略了粒子和它本身发射的场之间的相互作用。在 1-3 节有关运动的讨论中也是一样。当然，作为一种原则这是不对的，但是，除了极端情况之外已证明它仍然是一种很好的近似。的确，从 Larmor 公式(1-194)得到辐射能量 $\mathscr{E}_{\text{rad}}\sim\frac{2}{3}(e^2/4\pi)(d\mathbf{v}/dt)^2(\Delta t/c^3)$。只要 $\mathscr{E}_{\text{rad}}$ 小于所讨论的问题中的典型能量，例如对于一个运动电荷的粒子能量 $\mathscr{E}_0\sim m[(d\mathbf{v}/dt)\Delta t]^2$，我们就可以忽略经典的辐射修正。这就引出了条件

$$\Delta t\gg\tau_0=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi mc^3}=\frac{2}{3}\frac{r_e}{c},\qquad(1\text{-}216)$$

其中引入了特征辐射时间 $\tau_0$。反之，如果在 $\tau_0$ 时间内或在 $c\tau_0$ 级的距离上力的变化很大，经典辐射修正就不能忽略。

在出现观点有很大改变的量子力学之前，包含辐射修正的 Lorentz 的经典点电荷理论，是一个有很多争论的问题。虽然，在大多数情况下这不是一个合适的近似，但是对于在有关点电荷的大多数精心构造的处理中来理解经典力学的局限性是有益的。现在我们来介绍考虑自作用后对 Lorentz 力定律的修正 $f_\mu$ 的一种启发式的推导。记

$$m\dot{u}^\mu\equiv m\frac{du^\mu}{d\tau}=eF^{\mu\nu}_{\text{ext}}u_\nu+f^\mu.\qquad(1\text{-}217)$$

附加项 $f^\mu$ 应当是一个四维矢量，因而在非相对论极限下，对小的速度由式(1-217)得到 Larmor 能量损失为

$$\frac{d\mathscr{E}_{\mathrm{rad}}}{dt} = m\frac{du^0}{dt} \rightarrow -\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2.$$

此外，根据平移不变性，它应该只依赖于 $u$ 和 $u$ 对固有时间的微商．如果粒子没有结构，就不会出现新的和 $e$、$m$ 无关而具有长度量纲的量．最后，我们希望不改变固有时间的定义，以便 $u^2$ 保持等于 1．由此导出 $u \cdot f$ 必须等于零．

四维矢量 $-(\ddot{u}\cdot u)u^\mu = (\dot{u}^2)u^\mu$ 的第四分量，在非相对论极限下简化为 $-(d\mathbf{v}/dt)^2$．$f\cdot u = 0$ 的要求迫使我们构成正交于 $u$ 的组合 $\ddot{u}^\mu - (\ddot{u}\cdot u)u^\mu$．因此，上面的要求导致了如下形式的经典 Lorentz-Dirac 方程：

$$m\dot{u}^\mu = eF^{\mu\nu}_{\mathrm{ext}}u_\nu + \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi}[\ddot{u}^\mu - (u\cdot\ddot{u})u^\mu], \quad (1\text{-}218)$$

其中 $F_{\mathrm{ext}}$ 表示所有外部电荷的贡献．这个方程的时间分量给出能量平衡的相对论性推广

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\tau} = eF^{0\nu}_{\mathrm{ext}}u_\nu + \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi}(\dot{u})^2u_0 + m\tau_0\ddot{u}^0. \quad (1\text{-}219)$$

右边第一项显然相应于外力所作的功，第二项是耗散的 ($\dot{u}^2 < 0$) Larmor 项，第三项（所谓的 Schott 能量项）是一个全微商．在对（差不多是）周期运动求平均后，或更一般地当 $\tau_0$ 级时间间隔中加速度的改变很小时，这一项可以忽略．在 Lorentz 给出式(1-218)的原始推导中，使用了电荷的球形模型，按照相对论的观点这不是没有异议的．在完全相对论的情况下，利用能量和动量的定域守恒，Dirac 得到了同样的方程．可是，他们都不得不在惯性质量中加入一个无穷大的（正的）贡献，它等于电荷所产生的静电 Coulomb 能，这是典型的重整化效应．如果观测到的质量本来就只是电磁质量，我们就不得不

在 Coulomb 能中引入一个小距离截断 $a$，使得 $e^2/4\pi a \sim mc^2$，即 $a \sim c\tau_0 \sim r_e$。因此，这是一个有关距离的极限，在那里经典物理将产生困难。这个数比 Compton 波长 $\lambda = \hbar/mc$ 要小得多 $(r_e/\lambda = \alpha \sim 10^{-2})$，在 Compton 波长上量子效应已变得重要了。因此，后者总是掩盖着小距离经典效应。我们将看到，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的电子的"裸"质量只是对数发散，而不象这里那样是线性发散的(具有长度的倒数)。

即使忽略了这些无穷大，我们可以预料在小距离或短时间处还会有困难。因此，让我们来更仔细地考察运动方程，甚至忽略耗散和相对论效应。用三维的记号把运动方程改写为

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau_0\ddot{\mathbf{v}}) = F_{ext}. \qquad (1\text{-}220)$$

在没有外力时，除了自由运动解 $\mathbf{v}$ = 常数，还允许脱逸自加速解 $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_0 e^{t/\tau_0}$。就数学而言，这起因于方程中高阶微商的出现，它导致了完全非物理的情形。为了得到合理的结果，我们必须坚持边界条件，并用满足这些条件(特别是，如果 $t \to \infty$ 时 $\mathbf{F}_{ext}$ 等于零，则在此极限下 $\dot{\mathbf{v}} \to 0$) 的积分-微分方程代替式(1-220)。那么

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \int_0^\infty ds e^{-s}\mathbf{F}_{ext}(t + \tau_0 s). \qquad (1-221)$$

按照这种形式，脱逸解被去掉了，但是产生了另一种讨厌的性质，即预加速。如果对于负的 $t$，$\mathbf{F}_{ext} = 0$ (图 1-5)，则 $\dot{\mathbf{v}}$ 并不等于零，而在更早的 $\tau_0$(对于电子约为 $10^{-24}$ 秒) 级时刻开始增大，这是光穿越电磁半径所需要的时间。我们可以相信，量子力学将会抹掉这种不需要的特性。在 $\Delta t$ 时间内加进外场意味着能量具有量级为 $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ 的不确定性。如果 $\Delta E$ 的大小和 $mc^2$ 差不多，我们得到 $\Delta t \sim \hbar/mc^2 \sim \tau_0/\alpha \sim 137\tau_0$。因此，经典的非因果效应是不可观察的。

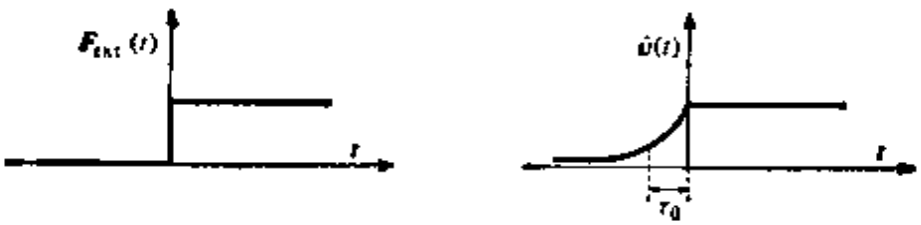



图 1-5　经典电荷的预加速

我们已经评述了和辐射修正有关的困难．然而，这不应当妨碍我们在合适的情况下应用这些修正来研究象谱线宽度增大、对散射的修正等现象．

## 注记

关于经典力学以及在场论中的应用方面的介绍，见 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Mechanics" 和 "The Classical Theory of Fields," Pergamon Press, Oxford, 1969 and 1975．对力学的深刻的论述例如可参看 E. Cartan "Lecons sur les Invariants Integraux," Hermann, Paris, 1958．经典电磁学和辐射的透彻讨论见 J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics," John Wiley, New York, 1975．电磁学的自洽性问题可参阅 F. T. Rohrlich, "Classical Charged Particles," Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965．

# 第二章　Dirac 方　程

为了准备建立完全相对论性量子力学，我们力图按照历史过程来建立单粒子理论．　我们引入 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程，并讨论它们的局限性．　应用包括电磁相互作用、相对论性的氢谱和 Coulomb 散射．　利用反粒子对负能态的空穴解释需要用一种重新表述，即作为多体理论的所谓二次量子化．

## 2-1　相对论性波方程的建立

### 2-1-1　量子力学和相对论

我们的首要目标是试图提供量子力学和相对论不变性的原则，即建立 Lorentz 协变的波方程．沿着这个方向，我们将碰到越来越多的困难和矛盾，它们最终将迫使我们完全重建我们的物理概念．

在量子力学中，系统的状态用 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的归一化矢量 $|\psi\rangle$（或密度矩阵 $\rho=\sum p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$）表示：$|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$（或 $\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle$）是在状态 $|\varphi\rangle$ 中找到这个系统的几率．物理的可观测量等同于作用在空间 $\mathscr{H}$ 上的自伴算符，$A=A^+$（但一般是无界的）．当系统处于状态 $|\psi\rangle$ 时，可观测量 $A$ 的期待值，即在同样准备好的状态上多次测量的平均值，是 $\langle\psi|A|\psi\rangle$．在自作用下或在用经典的给定力场表示的外力作用下，系统随时间的演变用 Schrödinger 方程描述：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=H|\psi(t)\rangle, \tag{2-1}$$

或等价地用

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle,$$

$H$是自伴的，$U$是么正的，并满足

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = H(t_2)U(t_2, t_1).$$

经常出现的是，在某些对称下，例如外力的对称性，系统是不变的。Wigner 定理则说：这种对称性用么正（或反么正[注]）算符表示，这些算符将 Hilbert 空间映照到自身、保持标量积的模方不变，而且和$H$对易。

另一方面，狭义相对论告诉我们，自然定律不依赖于观测的坐标系，只要这个坐标系属于一类坐标系，即“伽利略坐标系”，它们可以通过 Poincaré 群变换互相得到。Poincaré 群是由空间和时间平移、通常的空间转动以及特殊 Lorentz 变换（或平动）生成的。这里的特殊 Lorentz 变换指联系以常数相对速度运动的坐标系的变换（见第一章）。光速 $c$ 是一切信号速度的绝对上限。从空间-时间点 $(\mathbf{x}_0, t_0)$ 发出的信息只能到达未来锥体内部的点 $(\mathbf{x}_1, t_1)$，

$$c^2(t_1 - t_0)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2 \geqslant 0, \quad t_1 - t_0 \geqslant 0.$$

这是因果性的相对论性的表达式。对于比 $c$ 小得多的典型的速度，伽利略力学是一种可靠的近似。

我们可以预料到，在探讨点粒子的相对论性的和量子的描述中会有某些麻烦。的确，相对论使动量标度 $p = mc$ 和质量为 $m$ 的粒子相联系。但是，测不准关系 $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$ 告诉我们，对于比 Compton 波长 $\lambda \equiv \hbar/mc$（对电子 $\lambda = 3.8\times$

---

[注] 如果算符 $B$ 满足

$$B(\lambda|\varphi\rangle + \mu|\psi\rangle) = \lambda^* B|\varphi\rangle + \mu^* B|\psi\rangle$$

则称算符 $B$ 是反线性的。只 $\langle B\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|B^+\psi\rangle^* = \langle B^+\psi|\varphi\rangle$ 定义 $B$ 的伴随 $B^+$，如果 $\langle B\varphi|B\psi\rangle = \langle\varphi|B^+B|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle$，则 $B$ 是反么正的。

$10^{-11}$ 厘米)小的长度标度，点粒子的概念可能会遇到困难. 以较高的精度分析粒子的位置需要和静止质量同量级的能量和动量，因而允许产生新的粒子. 我们看到，我们将不可避免地引入反粒子的概念. 然而，在中间区域相对论量子力学仍是有价值的，并为后来的发展所证实.

为了把相对论不变性和量子力学结合起来，我们回到对应原理. 按照通常量子力学的组态空间表示，我们将算符 $ih(\partial/\partial t)$ 和 $(\hbar/i)\nabla_i = (\hbar/i)(\partial/\partial x^i)$ 分别与能量 $E$ 和动量 $ip$ 联系起来. 对于自由的、有质量的粒子，用动量表示的能量为

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \text{常数} \qquad \text{在非相对论情况下，} \quad (2\text{-}2a)$$

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 \qquad \text{在相对论情况下.} \quad (2\text{-}2b)$$

除明确指出外，我们将用 $\hbar = c = 1$ 这种方便的单位制.

按照同样的方法，对应原理把方程 (2-2a) 变换成对波函数 $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}, t|\psi\rangle$ 的 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi(\mathbf{x}, t).$$

在非相对论情况下，对应原理由式 (2-2b) 导出 Klein-Gordon 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi(\mathbf{x}, t) = 0. \qquad (2\text{-}3)$$

虽然这个方程不具有式(2-1)那样的 Schrödinger 形式，但我们可以通过把它纳入矩阵表示而变成那种形式. 引入记号

$$\psi_{-1} \equiv m\psi, \quad \psi_0 \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad \psi_i \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3.$$

对于一组适当的 $5\times5$ 厄米矩阵，矢量 $\psi = \{\psi_\alpha\}(\alpha = -1, 0, \cdots, 3)$ 满足

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}=\left(m\beta+\frac{1}{i}\alpha\cdot\nabla\right)\psi.$$

读者可以明显地写出这组矩阵，并得到为了重新给出等价于式(2-3)的一组方程而附加的辅助条件.

如果我们要把 $\psi$ 解释为波函数，我们将不得不找出在时间演变下保持不变的非负模方. 实际上的确存在连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\mathrm{div}\mathbf{j}\equiv\partial_\mu j^\mu=0, \tag{2-4}$$

其中四维矢量 $j^\mu\equiv(j^0=\rho, j^i)$ 定义为

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{i}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right),\\ \mathbf{j}&=\frac{1}{2im}\left[\psi^*\nabla\psi-(\nabla\psi)^*\psi\right].\end{aligned} \tag{2-5}$$

用积分形式，等价地有

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3x\rho=\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{j}.$$

这个式子表示体积 $V$ 内总“电荷”的改变，相当于 $\mathbf{j}$ 穿过围绕 $V$ 的表面 $S$ 的通量. 可是，密度 $\rho$ 并不是恒正的，所以可以把它当作一个很好的守恒量（例如电荷）的密度，但不能作为正的几率.

当我们认识到存在负能解时，就产生了第二个问题. 只要 $E^2=\mathbf{p}^2+m^2$，任何平面波函数

$$\psi(\mathbf{x},t)=Ne^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}$$

都满足式(2-3). 因此，负能 $E=-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 和物理的 $E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 具有同样的地位. 这是一个严重的问题，因为谱不再有下限. 这似乎表示可以从系统中提取无穷无尽的能量. 对于原先是静止的一个粒子，如果一个外界的扰动使它跳过了状态的正、负连续谱之间的能量间隙 $\Delta E=2m$，就

会发生上述情形。这显然是稳定态概念的失败。

当时，这些理由看来似乎是不可抗拒的，以至促使 Dirac 引进了另一种方程。虽然新的方程有正的模方，但是最终我们不得不面临同样的问题，即负能态的物理解释。那时，我们再回到 Klein-Gordon 方程，并把相对论量子力学改变成多体理论，在那里负能态可以解释为反粒子。

### 2-1-2 Dirac 方程

因为已经发现 Klein-Gordon 方程在物理上是不能令人满意的，我们将试图建立一个波方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m\right)\psi\equiv H\psi, \qquad (2\text{-}6)$$

其中 $\psi$ 是矢量波函数，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\beta$ 是厄米矩阵，因而 $H$ 是厄米的，这样就存在一个正的守恒几率密度。我们要求如下三点：

1. $\psi$ 的分量必须满足 Klein-Gordon 方程，以便具有 $E^2=\mathbf{p}^2+m^2$ 的平面波是一个解。

2. 存在一个守恒的四维矢量流密度，它的第四分量是一个正的密度。

3. $\psi$ 的分量不必满足任何辅助条件，即在给定时刻它们是独立的 $x$ 的函数。我们还应该检验这种理论形式的相对论协变性。

Dirac 建议，矩阵 $\alpha_i$ 和 $\beta$ 是平方等于 1 的反对易矩阵：

$$\begin{aligned}&\{\alpha_i,\alpha_k\}=0 \quad (i\neq k),\\ &\{\alpha_i,\beta\}=0,\\ &\alpha_i^2=\beta^2=\mathrm{I},\end{aligned} \qquad (2\text{-}7)$$

其中两个算符的括号 $\{A, B\}$ 表示对称组合 $AB+BA$，称为反对易子。

很容易验证条件 1 是满足的：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m\right)^2 \psi$$

$$= (-\nabla^2 + m^2)\psi,$$

引入记号 $\gamma^\mu$,

$$\gamma^0 = \beta,$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i \quad i = 1, 2, 3, \tag{2-8}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

以及 Feynman 斜横"/":

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu.$$

这样,我们可以将 Dirac 方程改写为

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \equiv (i\not{\partial} - m)\psi = 0, \tag{2-9}$$

乘上 $(i\not{\partial} + m)$, 即得 Klein-Gordon 方程。可以看到,满足式(2-8)的矩阵的最小维数是 4。

矩阵 $\alpha^i$ 和 $\beta$ 有本征值 $\pm 1$; 对 $i \neq j$, $\det\alpha^i\alpha^j = \det -\alpha^i\alpha^j = (-1)^d \det\alpha^i\alpha^j$; 因此它们的维数 $d$ 必须是偶数。由于对 $d = 2$ 只存在三个反对易厄米矩阵,即 Pauli 矩阵,所以我们有 $d \geq 4$。

利用 $2 \times 2$ 单位矩阵 $I$ 和 Pauli 矩阵 $\sigma^i$, 可以给出一个明显的表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-10}$$

在讨论 Dirac 方程的非相对论极限时,这个表示是很有用的。

在通过非奇异变换 $\gamma \to U\gamma U^{-1}$ 得到的所有可能的等价表示中, Majorana 表示起了特殊的作用。它被安排成使得 Dirac 方程是实的。为此,只要在前面的表示中交换 $\alpha_2$ 和 $\beta$,以及改变 $\alpha_1$ 和 $\alpha_3$ 的符号即可:

$\hat{\alpha}_1 = -\alpha_1$, $\hat{\alpha}_2 = \beta$, $\hat{\alpha}_3 = -\alpha_3$, $\hat{\beta} = \alpha_2$. 这样，只有 $\hat{\beta}$ 是虚的，而 Dirac 方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\alpha} \cdot \nabla + i\hat{\beta}m\right)\psi = 0$$

是实的；它的解是实数解的线性组合．很容易确定实现这种表示变换的矩阵 $U$ 以及 $\gamma$ 矩阵的新形式(见附录)．

利用二分量旋量 $\varphi$ 和 $\chi$，按照四维表示式(2-10)，$\psi$ 可以写成双旋量 $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$．由于很快就会明白的理由，$\varphi$ 和 $\chi$ 分别称为大分量和小分量．它们满足

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = m\varphi + \dfrac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\chi, \\ i\dfrac{\partial \chi}{\partial t} = -m\chi + \dfrac{1}{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi. \end{cases} \tag{2-11}$$

有趣的是，这些方程和四个 Maxwell 方程中如下的二个方程之间有相似性：

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

或明显地写成

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S} \cdot \nabla(i\mathbf{B}),$$

$$i\frac{\partial (i\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S} \cdot \nabla(\mathbf{E}),$$

其中 $(S^i)_{jk} = (1/i)\varepsilon_{ijk}$.

对于自旋为 1 的电磁场，自旋矩阵 $S^i$ 所起的作用和自旋为 $\frac{1}{2}$ 时 Pauli 矩阵 $\sigma$ 所起的作用相同，而 $(\mathbf{E}, i\mathbf{B})$ 与 $(\varphi, \chi)$ 相似．

建立 Dirac 方程的主要理由是要得到一个正的几率密度 $\rho = j^0$，以及连续性方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$．因为 $\psi$ 是复的旋量，为了使 $\rho$ 是实的和正的，$\rho$ 必须具有 $\psi^+\mathscr{R}\psi$ 的形式．我们首

先推导对于 $\psi^+$ 的 Dirac 方程。从式(2-9)推得

$$\psi^+(i\gamma^{+\mu}\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0,$$

$\gamma^{\mu+}$ 很容易用 $\gamma^\mu$ 表示

$$\gamma^{0+} = \gamma^0,$$

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = (\beta\boldsymbol{\alpha})^+ = \boldsymbol{\alpha}\beta = \beta(\beta\boldsymbol{\alpha})\beta = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\gamma^0.$$

因此,引入 $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0, \tag{2-12}$$

我们有

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial} + m) = 0. \tag{2-9a}$$

从式(2-9)和(2-9a)式即得

$$\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial} + \vec{\partial})\psi \equiv \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0.$$

因此,我们得到了可以作为流的一种表达形式

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \begin{cases} j^0 = \rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi = \varphi^+\varphi + \chi^+\chi, \\ \mathbf{j} = \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi = \psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi = \varphi^+\boldsymbol{\sigma}\chi + \chi^+\boldsymbol{\sigma}\varphi. \end{cases} \tag{2-13}$$

密度 $\rho$ 是正的。小分量和大分量对 $\rho$ 有同等的贡献,$\mathbf{j}$ 包含交叉项。下面我们将会看到,$j^\mu$ 的变换象一个 Lorentz 四维矢量。

### 2-1-3 相对论协变性

根据相对论原理,我们必须验证,在二个由 Poincaré 变换相联系的坐标中 Dirac 方程的形式不变。换句话说,我们要求通过 Poincaré 变换把在给定坐标系中满足方程和某个边界条件的系统和变换后的一族状态联系起来,这些态满足同样的方程和变换后的边界条件。

按照第一种观点(不依赖于观测者),我们首先注意到,平移不变性是明显的。考虑一个 Lorentz 变换 $A$。在第一个坐标系中我们的系统用波函数 $\psi$ 描述,而在变换后的坐标系中用 $\psi'$ 描述。它们都必须满足 Dirac 方程

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) - m\psi(x) = 0, \qquad (2\text{-}9b)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi'(x') - m\psi'(x') = 0, \quad x' = \Lambda x. \qquad (2\text{-}9c)$$

$\psi$ 和 $\psi'$ 之间必定存在定域的联系，使得当 $\psi$ 给定时，第二个坐标系中的观测者可以重新构造 $\psi'$. 我们假定这种联系是线性的，即

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \qquad (2\text{-}14)$$

式中 $S(\Lambda)$ 是非奇异的 $4 \times 4$ 矩阵. 这样，方程 (2-9c) 就可写成

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} S(\Lambda)\psi(x) - mS(\Lambda)\psi(x) = 0.$$

为了对于任何 $\psi$，都能从式 (2-9b) 导出这个方程，并由于 $\partial x^\nu/\partial x'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$，我们必须有

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \gamma^\nu. \qquad (2\text{-}15)$$

首先对适当的无穷小变换 $\Lambda$ 构造 $S(\Lambda)$，其中 $\Lambda$ 可以写成

$$\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \ (\Lambda^{-1})^\mu_\nu = g^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu + \cdots,$$

这里的无穷小矩阵 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的. 记

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots,$$

$$S^{-1}(\Lambda) = I + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \cdots, \qquad (2\text{-}16)$$

其中矩阵 $\sigma_{\mu\nu}$ 对 $\mu\nu$ 反对称. 到 $\omega$ 的一次项，式(2-15)给出

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^\mu_\alpha\gamma_\beta - g^\mu_\beta\gamma_\alpha). \qquad (2\text{-}17)$$

满足这个关系的一组矩阵 $\sigma_{\alpha\beta}$ 为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \qquad (2\text{-}18)$$

相应于有限变换的 $S$ 为

$$S(\Lambda) = e^{-(i/4)\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}, \tag{2-19}$$

现在的 $\omega^{\alpha\beta}$ 是有限的.

对于空间转动，$S$ 是么正的，而对于 Lorentz 平动，$S$ 是厄米的.

在如下的 $\gamma$ 矩阵的手征表示中最容易导出有限变换的形式:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}[\gamma_0, \gamma_i] = -i\alpha_i = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \tag{2-20}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2}[\alpha_i, \alpha_j] = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}.$$

在这个表示中，双旋量 $\psi$ 分解的二个 Pauli 旋量在转动和平动下独立地变换。Lorentz 群[更严格地说是它的覆盖群 $SL(2, C)$] 的表示可以约化为二个不等价表示的和 $\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}\right)$. 可是，我们将看到，如果把宇称变换(空间反射)包括在内，这个表示是不可约的.

我们知道，Poincaré 群的表示是按照二个 Casimir 算符 $P^2$ 和 $W^2$ 的值来分类的；$P_\mu$ 是动量、能量算符，它是平移的无穷小生成元，而 $W_\mu$ 是由角动量算符 $J_{\mu\nu}$ 构成的，$J_{\mu\nu}$ 为 Lorentz 变换的无穷小生成元，$W_\mu$ 为

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma. \tag{2-21}$$

如果 $M^2$ 表示 $P^2$ 的本征值，则 $W^2$ 只取如下的值:

$$W^2 = -M^2S(S+1),$$

式中自旋 $S$ 是整数或半整数.

对于 Dirac 方程的解 (因此也是 Klein-Gordon 方程的解)，$P^2 = -\partial^2$ 取值 $m^2$，而 $J_{\mu\nu}$ 由下式给出:

$$\psi'(x) = \left(I - \frac{i}{2} J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x)$$

$$= \left(I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x^\rho - \omega^\rho_\nu x^\nu)$$

$$= \left(I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + x_\mu\omega^{\mu\nu}\partial_\nu\right)\psi(x),$$

由此得到

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \qquad (2\text{-}22)$$

然后由式(2-21)算得 $W_\mu$ 为

$$W_\mu = -\frac{1}{4i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma. \qquad (2\text{-}21a)$$

轨道的贡献已消失，这表明 $W_\mu$ 相当于内禀角动量. 利用恒等式

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\mu}_{\alpha'\beta'\gamma'} = -\det(g_{\tau\tau'})$$

$$= -\sum_P (-1)^P g_{\alpha P_{\alpha'}} g_{\beta P_{\beta'}} g_{\gamma P_{\gamma'}}, \qquad (2\text{-}23)$$

式中在第一个式子中的 $\tau$ (或 $\tau'$ 分别地)取值 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$), 在第二个式子中的求和取遍 ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$) 的排列 $P$. 利用 Dirac 方程, 作某些代数运算后即得

$$W^2 = -\frac{3}{4}m^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)m^2, \qquad (2\text{-}24)$$

因此 Dirac 方程描述自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子.

最后，我们来推导空间反射下旋量 $\psi$ 的变换规则. 我们还是先来求满足式(2-15)的 $S(\Lambda)$, 其中 $\Lambda$ 表示矩阵

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \qquad (2\text{-}25)$$

容易看到，

$$\psi'(x') = \eta_P \gamma^0 \psi(x) \tag{2-26}$$

就是所要求的变换. 这里的 $\eta_P$ 是一个任意的不可观测的相位. 重要的一点是，正能解和负能解具有相反的宇称，相应于 $\gamma^0$ 的二个相反的本征值. 在对负能解重新解释后，这表示粒子和反粒子有相反的内禀宇称.

由 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 构成的不同的双线性形式对以下的叙述起着重要的作用. 这一节的剩余部分集中研究它们在 Lorentz 变换下的变换性质. 从式(2-14)可以推得

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S(\Lambda)^+ \gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda),\end{aligned}$$

式中第二个式子可以用 $S(\Lambda)$ 的明显表达式(2-19) [以及对宇称的式(2-26)]来验证. 因此，双线性乘积 $\bar{\psi}(x)A\psi(x)$ 按下式变换：

$$\bar{\psi}'(x')A\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)AS(\Lambda)\psi(x). \tag{2-27}$$

例如，从式(2-15)我们知道 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 的变换象一个四维矢量：

$$\psi'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x), \tag{2-28}$$

而 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 是一个(非正定的)标量密度.

更一般地讲，任何 4 × 4 矩阵都可以用作为基的 16 个矩阵来展开. 可以证明，由 $\gamma$ 矩阵生成的代数——数学家称它为 Clifford 代数——正是这些 4 × 4 矩阵的完备代数. 引入记号[注]

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{2-29}$$

按照式(2-10)，

---

[注] 关于这个记号的用法很不一致，有些作者没有引入因子 $i$ (则 $\gamma_5^2 = -1$)，或者用不同的符号.

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-30}$$

矩阵 $\gamma^5$ 满足

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = I. \tag{2-31}$$

考虑 16 个矩阵：

$$\Gamma^S \equiv I,$$

$$\Gamma^V_\mu \equiv \gamma_\mu,$$

$$\Gamma^T_{\mu\nu} \equiv \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

$$\Gamma^A_\mu \equiv \gamma_5\gamma_\mu,$$

$$\Gamma^P \equiv \gamma_5.$$

它们有如下的性质：

1. $(\Gamma^a)^2 = \pm I$.

2. 对于任何 $\Gamma^a(\Gamma^a \neq \Gamma^S = I)$，必定存在一个 $\Gamma^b$，使得 $\Gamma^a\Gamma^b = -\Gamma^b\Gamma^a$.

3. 因此除 $\Gamma^I$ 外，所有 $\Gamma^a$ 的迹等于零：

$$\mathrm{tr}\Gamma^a(\Gamma^b)^2 = -\mathrm{tr}\Gamma^b\Gamma^a\Gamma^b = -\mathrm{tr}(\Gamma^b)^2\Gamma^a = 0.$$

4. 对任何一对 $(\Gamma^a, \Gamma^b)$，$a \neq b$，存在 $\Gamma^c \neq \Gamma^I = I$，使得 $\Gamma^a\Gamma^b = \Gamma^c$，只差因子 $\pm 1$ 或 $\pm i$.

5. 从这些性质可导出集合 $\{\Gamma^a\}$ 的线性无关性. 假设

$$\sum_a \lambda_a\Gamma^a = 0,$$

逐次用所有的 $\Gamma^a$ 相乘并取迹，便得到对所有的 $a$ 有 $\lambda_a = 0$.

6. 有如下的恒等式：

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \end{aligned} \tag{2-32}$$

这些和另外一些有用的恒等式已在附录中列出.

利用这些基本性质，我们给出在正 Lorentz 变换和宇称变换下相应的双线性型 $\bar{\psi}A\psi$ 的性质：

$$
\begin{aligned}
&S: \quad \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) && \text{标量，}\\
&V: \quad \bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x) && \text{矢量，}\\
&T: \quad \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x) && \text{反对称张量，}\\
&A: \quad \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\mu}\psi'(x') = \det(\Lambda)\Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x) && \text{赝矢量，}\\
&P: \quad \bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det(\Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) && \text{赝标量.}
\end{aligned}
\tag{2-33}
$$

词头“赝”指宇称，而 $x'$ 表示 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$。

## 2-2 物 理 内 容

### 2-2-1 平面波解和投影算符

我们来寻找自由 Dirac 方程(2-9)的平面波解，即下列形式的解：

$$
\begin{aligned}
\psi^{(+)}(x) &= e^{-ik\cdot x}u(k) && \text{正能量，}\\
\psi^{(-)}(x) &= e^{ik\cdot x}v(k) && \text{负能量.}
\end{aligned}
\tag{2-34}
$$

附带条件：$k^0$ 是正的。为了满足 Klein-Gordon 方程，还必须有 $k^2 = m^2$。正的类时四矢量 $k^{\mu}$ 就是粒子的能量、动量(已令 $\hbar$ 等于 1)。Dirac 方程意味着

$$
(\not{k} - m)u(k) = 0 \quad (\not{k} + m)v(k) = 0. \tag{2-35}
$$

我们假设粒子是有质量的，即 $m \neq 0$。在粒子的静止坐标系中，$k^{\mu} = (m, \mathbf{0})$，式(2-35)简化成

$$
\begin{aligned}
(\gamma^0 - 1)u(m, \mathbf{0}) &= 0,\\
(\gamma^0 + 1)v(m, \mathbf{0}) &= 0.
\end{aligned}
$$

显然存在二个线性独立的解 $u$ 和二个 $v$。在通常的表示式

(2-10)中，我们把它们记为

$$u^{(1)}(m,\mathbf{0})=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u^{(2)}(m,\mathbf{0})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$v^{(1)}(m,\mathbf{0})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v^{(2)}(m,\mathbf{0})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2-36}$$

利用由式(2-19)给出的纯 Lorentz 变换，我们可以将这些解从静止系推向具有速度 $v=|\mathbf{k}|/k^0$ 的坐标系。不难看到，

$$(\not{k}-m)(\not{k}+m)=k^2-m^2=0,$$

因此我们记

$$u^{(\alpha)}(k)=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}u^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2}\varphi^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{[2m(m+E)]^{1/2}}\varphi^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\end{pmatrix},$$

$$v^{(\alpha)}(k)=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}v^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{[2m(m+E)]^{1/2}}\chi^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\\ \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2}\chi^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\end{pmatrix}. \tag{2-37}$$

在这里 $E$ 表示正的量：$E\equiv k^0=(\mathbf{k}^2+m^2)^{1/2}$；二分量旋量 $\varphi$ 和 $\chi$ 分别是 $u(m,\mathbf{0})$ 和 $v(m,\mathbf{0})$ 的不为零的分量。

对于共轭旋量，我们有

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)=\bar{u}^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\frac{\not k+m}{\sqrt{2m(m+E)}},$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)=\bar{v}^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\frac{-\not k+m}{\sqrt{2m(m+E)}}. \tag{2-38}$$

已经选择归一化因子，使得

$$\begin{aligned}&\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k)=\delta_{\alpha\beta},\quad &&\bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k)=0,\\&\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k)=-\delta_{\alpha\beta},\quad &&\bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k)=0.\end{aligned} \tag{2-39}$$

考虑矩阵

$$\begin{aligned}\Lambda_+(k)&\equiv\sum_{\alpha=1,2}u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k)\\&=\frac{1}{2m(m+E)}(\not k+m)\frac{1+\gamma^0}{2}(\not k+m)\\&=\frac{\not k+m}{2m},\end{aligned} \tag{2-40}$$

其中已应用对 $k^2=m^2$ 成立的恒等式

$$(\not k+m)\gamma^0(\not k+m)=2E(\not k+m).$$

类似地令

$$\begin{aligned}\Lambda_-(k)&\equiv-\sum_{\alpha=1,2}v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k)\\&=\frac{1}{2m(m+E)}(\not k-m)\frac{1-\gamma^0}{2}(\not k-m)\\&=\frac{-\not k+m}{2m},\end{aligned} \tag{2-41}$$

算符 $\Lambda_+$ 和 $\Lambda_-$ 分别投影出正能态和负能态，它们满足

$$\begin{aligned}&\Lambda_\pm^2(k)=\Lambda_\pm(k),\\&\mathrm{tr}\Lambda_\pm(k)=2,\\&\Lambda_+(k)+\Lambda_-(k)=I.\end{aligned} \tag{2-42}$$

式(2-39)中的归一化是 Lorentz 不变的。可是，每单位体

积的正定密度是 $\rho = j^0(k) = \bar{\psi}(k)\gamma^0\psi(k)$. 让我们对平面波函数来计算这个密度. 对于正能量解有

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(+)(\alpha)}(x)\gamma^0\psi^{(+)(\beta)}(x) &= \bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(k)\\ &= \bar{u}^{(\alpha)}(k)\frac{\{\not{k},\gamma^0\}}{2m}u^{(\beta)}(k)\\ &= \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{2-43a}$$

对于负能解有

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(-)(\alpha)}(x)\gamma^0\psi^{(-)(\beta)}(x) &= \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(k)\\ &= -\bar{v}^{(\alpha)}(k)\frac{\{\not{k},\gamma^0\}}{2m}v^{(\beta)}(k)\\ &= \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2-43b}$$

在静止时旋量已被归一;因为密度乘体积必须保持不变,当体积被收缩因子减小 $E/m$ 倍时,密度必定增大同样的倍数.

考虑一个正能态和一个负能态. 如果它们具有相反的能量但有相同的三维动量,则它们互相正交:

$$\begin{aligned}&\psi^{(+)(\alpha)}(x) = e^{-i(k^0x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}u^{(\alpha)}(k),\\ &\psi^{(-)(\beta)}(x) = e^{i(k^0x^0+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}v^{(\beta)}(\tilde{k}),\quad \tilde{k}\equiv(k^0,-\mathbf{k}),\\ &\bar{\psi}^{(-)(\beta)}(x)\psi^{(+)(\alpha)}(x) = e^{-2ik^0x^0}\bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k})\gamma^0 u^{(\alpha)}(k)\\ &\quad = \frac{1}{2}e^{-2ik^0x^0}\bar{v}^{(\beta)}(\tilde{k})\left(-\frac{\tilde{\not{k}}}{m}\gamma^0+\gamma^0\frac{\not{k}}{m}\right)\\ &\quad\times u^{(\alpha)}(k) = 0.\end{aligned} \tag{2-44}$$

负能解的物理意义还需要弄清楚. 此外,对于质量为零的粒子,我们构造的平面波态没有意义. 这些将在 2-4-3 节中详细研究.

为了表征平面波解 $u$ 和 $v$ 的剩余的简并,我们来构造一个到确定极化态的投影算符. 对于任何与 $k$ 正交的类空归一

的四维矢量 $n(n^2=-1)$，从式(2-21)我们有

$$W\cdot n=-\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^{\mu}k^{\nu}\sigma^{\rho\sigma}$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma_5 n\!\!\!/k\!\!\!/. \qquad (2\text{-}45)$$

因此，在静止系中

$$W^0=0 \quad \frac{\mathbf{W}}{m}=\frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\equiv\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma},$$

用通常的基，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$. 如果我们选取 $n$ 沿 $z$ 轴，$n=n_{(3)}\equiv(0,0,0,1)$，我们看到，解式(2-36)是 $-W\cdot n_{(3)}/m=W^3/m$ 的本征态，对于 $u^{(1)}$ 和 $v^{(1)}$，其本征值为 $+\frac{1}{2}$（自旋向上），对于 $u^{(2)}$ 和 $v^{(2)}$，其本征值为 $-\frac{1}{2}$（自旋向下）. 因此，到 $u^{(1)}(m,\mathbf{0})$ 和 $v^{(2)}(m,\mathbf{0})$ 的投影算符可以写成

$$P(n_{(3)})=\frac{I+\gamma_5 n\!\!\!/_{(3)}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I+\sigma_3 & 0\\ 0 & I-\sigma_3\end{pmatrix}.$$

在 Lorentz 变换后，旋量 $u^{(\alpha)}(k)$，$v^{(\alpha)}(k)$ 是 $-W\cdot n/m$ 的本征态，其中 $n$ 是 $n_{(3)}$ 的变换式：

$$-\frac{W\cdot n}{m}u^{(\alpha)}(k)=\frac{1}{2}\gamma_5 n\!\!\!/u^{(\alpha)}(k)=\pm\frac{1}{2}u^{(\alpha)}(k),$$

$$-\frac{W\cdot n}{m}v^{(\alpha)}(k)=-\frac{1}{2}\gamma_5 v^{(\alpha)}(k)=\pm\frac{1}{2}v^{(\alpha)}(k), \qquad (2\text{-}46)$$

正号适用于 $\alpha=1$，负号适用于 $\alpha=2$. 到 $u^{(1)}(k)$ 和 $v^{(2)}(k)$ 的投影算符为

$$P(n)=\frac{1}{2}(I+\gamma_5 n\!\!\!/). \qquad (2\text{-}47)$$

这个表达式对任意与 $k$ 正交的归一化矢量 $n$ 都是正确的；对于正能解，$P(n)$ 投影的态在其静止系中具有自旋 $\sigma \cdot \mathbf{n}/2 = \frac{1}{2}$，对于负能解，自旋 $\sigma \cdot \mathbf{n}/2 = -\frac{1}{2}$.（注意符号！）

我们将用 $u(p, n)$ 和 $v(p, n)$ 表示 $P(n)$ 的本征矢量（分别有正能和负能）：

$$\begin{aligned} P(n)u(k, n) &= u(k, n), \\ P(n)v(k, n) &= v(k, n). \end{aligned} \tag{2-48}$$

投影算符 $P(n)$ 具有如下性质：

$$[\Lambda_{\pm}(k), P(n)] = 0,$$

$$\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = I,$$

$$\mathrm{tr}\Lambda_{\pm}(k)P(\pm n) = 1.$$

放宽关于 $n$ 的模方的条件，

$$\rho(n) = \frac{1 + \gamma_5 n}{2}, \quad -1 < n^2 < 0,$$

可以解释成自旋密度矩阵

$$\mathrm{tr}\rho = 2, \quad \mathrm{tr}\rho^2 < 4.$$

存在 $n$ 的一种特殊的选择，使得在参考系中 $\mathbf{n}$ 正比于 $\mathbf{k}$，令 $n_k$ 为

$$n_k = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m}, \frac{k^0}{m}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right). \tag{2-49}$$

极化的这种定义称为螺旋性，且有

$$P(n_k)\Lambda_{\pm}(k) = \left(1 \pm \frac{\Sigma \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)\Lambda_{\pm}(k). \tag{2-50}$$

因此，$P(n_k)$ 投影出具有正螺旋性、正能量的态和具有负螺旋性、负能量的态.

在极端相对论极限下，$m/k_0 \to 0$，$|\mathbf{k}|/k_0 \to 1$，$n_k^{\mu} \to k^{\mu}/m$，而且

$$P(\pm n_k)\Lambda_+(k) \to \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\frac{\not{k} + m}{2},$$

$$P(\pm n_h)\Lambda_-(k)\to\frac{1\mp\gamma_5}{2}\frac{-\not k+m}{2}. \qquad (2\text{-}51)$$

## 2-2-2 波包

我们着手构造可归一化的波包. 我们暂时只希望迭加现阶段仅有的物理上合理的正能量平面波. 可是，我们将陷入矛盾从而不得不放弃这种要求. 令 $\psi^{(+)}(x)$为

$$\psi^{(+)}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha=1,2}b(p,\alpha)u^{(\alpha)}(p)e^{-ip\cdot x}. \qquad (2\text{-}52)$$

放进因子 $[1/(2\pi)^3](m/E)$ 是为了使归一化条件简单:

$$\int d^3x j^{(+)0}(t,\mathbf{x})=\int\frac{d^3x}{(2\pi)^6}\iint d^3pd^3p'$$

$$\times\frac{m^2}{EE'}\sum_{\alpha\alpha'}b^*(p,\alpha)b(p',\alpha')u^{(\alpha)+}(p)$$

$$\times u^{(\alpha')}(p')e^{i(E-E')t-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}=\sum_\alpha\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

$$\times\frac{m}{E}|b(p,\alpha)|^2=1 \qquad (2\text{-}53)$$

我们看到，$d^3p/E$ 是一个 Lorentz 不变的测度.

我们也计算总的流

$$\mathbf{J}^{(+)}=\int d^3x\mathbf{j}^{(+)}(t,\mathbf{x})=\int\frac{d^3x}{(2\pi)^6}\iint d^3pd^3p'$$

$$\times\frac{m^2}{EE'}\sum_{\alpha\alpha'}b^*(p,\alpha)b(p',\alpha')u^{(\alpha)+}(p)$$

$$\times\alpha u^{(\alpha')}(p')e^{i(E-E')t-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

$$\times\sum_{\alpha\alpha'}\frac{m^2}{E^2}b^*(p,\alpha)b(p,\alpha')u^{(\alpha)+}(p)$$

$$\times\alpha u^{(\alpha')}(p).$$

在这里我们需要利用 Gordon 恒等式，它表述为：对于 Dirac 方程的任意二个正能解 $u^{(\alpha)}(p)$ 和 $u^{(\beta)}(q)$，我们有

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^{\mu}u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m}\bar{u}^{(\alpha)}(p)[(p+q)^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_{\nu}]u^{\beta}(q). \tag{2-54}$$

实际上，利用 Dirac 方程即得

$$0 = \bar{u}^{(\alpha)}(p)[a(q-m) + (p-m)a]u^{(\beta)}(q)$$
$$= -2m\bar{u}^{(\alpha)}(p)au^{(\beta)}(q) + \bar{u}^{(\alpha)}(p)\left(\left\{\frac{p+q}{2}, a\right\} + \left[\frac{p-q}{2}, a\right]\right)u^{(\beta)}(q),$$

其中 $a$ 是任意的四维矢量。对 $a_{\mu}$ 求微分就推得式 (2-54)。利用这个恒等式以及式(2-39)，我们可以改写成

$$\mathbf{J}^{(+)} = \sum_{\alpha}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}|b(p,\alpha)|^2\frac{\mathbf{p}}{E}$$
$$= \left\langle\frac{\mathbf{p}}{E}\right\rangle. \tag{2-55}$$

因此，对于正能解的迭加，总的流恰好是群速度。这和 Schrödinger 理论中所发生的情形相类似，并且看来似乎是令人满意的。可是，按照只有正能解迭加的假定，就会出现矛盾。

为了举例说明这一点，我们考虑在 $t=0$ 时给定的波包随时间的演变。$t=0$ 时的波包取为半宽度为 $d$ 的高斯分布：

$$\psi(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}}e^{-\mathbf{x}^2/2d^2}w, \tag{2-56}$$

其中 $w$ 是某个固定的旋量，比如 $\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}$。

相应的 Dirac 方程的(可归一化的)解有如下的形式：

$$\psi(t,\mathbf{x})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha}[b(p,\alpha)u^{(\alpha)}(p)e^{-ip\cdot x}+d^*(p,\alpha)v^{(\alpha)}(p)e^{ip\cdot x}]. \tag{2-57}$$

因为高斯型的 Fourier 变换仍为高斯型，

$$\int d^3x e^{-\mathbf{x}^2/2d^2-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}=(2\pi d^2)^{3/2}e^{-\mathbf{p}^2d^2/2},$$

我们可以写成

$$(4\pi d^2)^{3/4}e^{-\mathbf{p}^2d^2/2}w=\frac{m}{E}\sum_{\alpha}[b(p,\alpha)u^{(\alpha)}(p)+d^*(\tilde{p},\alpha)v^{(\alpha)}(\tilde{p})],$$

其中 $\tilde{p}$ 代表 $(p^0,-\mathbf{p})$.

从正交关系式(2-43)得到

$$\begin{aligned}b(p,\alpha)&=(4\pi d^2)^{3/4}e^{-\mathbf{p}^2d^2/2}u^{(\alpha)+}(p)w,\\ d^*(p,\alpha)&=(4\pi d^2)^{3/4}e^{-\mathbf{p}^2d^2/2}v^{(\alpha)+}(p)w.\end{aligned} \tag{2-58}$$

利用显表达式(2-37)可以看到，比 $b/d^*$ 通常是 $|\mathbf{p}|/(m+E)$ 的量级，因而当 $|\mathbf{p}|\sim m$ 时变得很重要. 如果波包扩展到距离 $d\gg 1/m$，动量 $|\mathbf{p}|\sim m\gg 1/d$ 的贡献被大大压低，而且负能分量可忽略，因而单粒子理论是自洽的. 可是，如果我们想把波包限定在象 Compton 波长那样大小的空间区域中，即 $d\lesssim 1/m$，则负能解就起明显的作用. 这种定量的讨论和本章开头提出的启发式的论证是一致的. 对于象式(2-57)那样包含负能贡献的波包，象上面一样计算归一化条件，即

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha}(|b(p,\alpha)|^2+|d(p,\alpha)|^2)=1, \tag{2-59}$$

并用记号 $\tilde{p}=(p^0,-\mathbf{p})$，总的流是

$$J^i(t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left\{\frac{p^i}{E}\sum_{\alpha}[|b(p,\alpha)|^2+|d(p,\alpha)|^2]+i\sum_{\alpha\alpha'}[b^*(\tilde{p},\alpha)d^*(p,\alpha')e^{2iEt}\bar{u}^{(\alpha)}(\tilde{p})\sigma^{i}\right.$$

$$\times v^{(\alpha')}(p) - b(\tilde{p}, \alpha)d(p, \alpha')e^{-2iEt}\bar{v}^{(\alpha')}(p)$$

$$\times \sigma^{i0}u^{(\alpha)}(\tilde{p})] \Big\}. \qquad (2\text{-}60)$$

现在它是依赖于时间的。除群速度项外，还有一项实的振荡项。这些振荡的频率非常高，大于

$$2m\frac{c^2}{\hbar} \simeq 2 \times 10^{21} \text{ 秒}^{-1}.$$

这种按惯例称为颤振运动的现象是在单粒子理论结构中由于负能态而产生困难的一个例子。

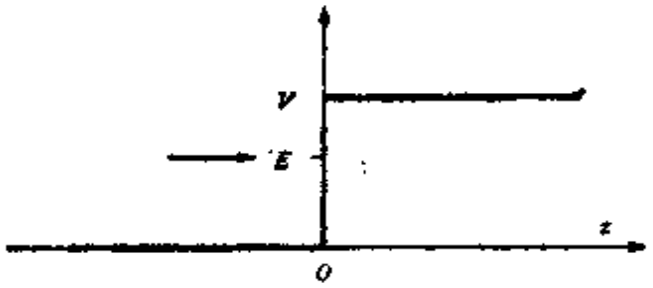



图 2-1　在方形位势中的 Klein 佯谬

一个更引人注目的现象是有名的 Klein 佯谬。让我们用半空间 $x \equiv x^1 > 0$ 中高为 $V$ 的方形位垒将定域化过程理想化(图 2-1)。现在在 $x < 0$ 的半空间中考虑一个沿 $x$ 轴的动量 $k > 0$ 的入射正能平面波

$$\psi_{inc}(x) = e^{ikx}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(自旋向上沿 } x \text{ 轴)},$$

反射波有如下形式:

$$\psi_{ref}(x) = ae^{-ikx}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + be^{-ikx}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{k}{E+m} \end{pmatrix}$$

(自旋向上和自旋向下的正能解的迭加)。在 $z > 0$ 的半空间中，即存在常数位势 $V$ 的半空间中，透射波有类似的形状

$$\psi_{trans}(z) = ce^{iqz}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} + de^{-iqz}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{-q}{E-V+m} \end{pmatrix},$$

其有效动量 $q$ 为

$$q = [(E-V)^2 - m^2]^{1/2}.$$

写出解

$$\psi(z) = \theta(-z)[\psi_{inc}(z) + \psi_{ref}(z)] + \theta(z)\psi_{trans}(z),$$

在 $z = 0$ 时的连续性，即可定出系数 $a, \cdots, d$：

$$b = d = 0 \quad \text{(没有自旋倒向)},$$

$$1 + a = c,$$

$$1 - a = rc, \quad r \equiv \frac{q}{k}\frac{E+m}{E-V+m}.$$

只要 $|E-V| < m$，$q$ 就是虚的，透射波按指数规律衰减；超过几个 Compton 波长，就可以将其忽略不计。如果我们为了限制穿透范围而增大 $V$，则当 $V \geqslant E + m$ 时透射波变成振荡的。

透射流、反射流和入射流的计算给出

$$\frac{j_{trans}}{j_{inc}} = \frac{4r}{(1+r)^2},$$

$$\frac{j_{ref}}{j_{inc}} = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 = 1 - \frac{j_{trans}}{j_{inc}}.$$

几率守恒看起来确实是满足的，即

$$j_{inc} = j_{trans} + j_{ref}.$$

不幸的是，由于 $r < 0$，反射通量大于入射通量！当我们试图把粒子限制在 Compton 波长量级的距离内时，我们再一次陷入困难之中。

尽管有这些困难，只要我们考虑的外力在几个 Compton 波长的尺度上缓慢地变化，Dirac 方程和它的单粒子解释就是非常有用的，在物理上也是合理的。它们为我们提供了对

Schrödinger 图象的初级的相对论修正。在下一节中我们将要详细探讨这一问题，然后再重新回来对负能态的含义作更深入的研究。现在我们认识到，使我们屏弃 Klein-Gordon 方程的那些困难并没有真正解决。尽管如此，我们还将在自旋为 $\frac{1}{2}$ 的理论体系中继续进行这种讨论，这是因为它的物理结论是重要的。我们也可以在同样的适用范围内从事标量情形的研究。这是从后来看来似乎不那么有说服力的动机出发构成重要物理理论的另一个例子。

### 2-2-3 电磁耦合

现在我们来研究 Dirac 粒子和外部(经典的)电磁场的相互作用，后者用它的势 $A_\mu(x)$ 来描述。有关的耦合可以由自由 Dirac 方程通过第一章中给出的最小耦合规则得到：

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu, \tag{2-61}$$

Dirac 方程则为

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi(x) = 0. \tag{2-62}$$

这个方法使方程在如下的规范变换下保持不变：

$$\begin{cases} \psi(x) \to e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x), \end{cases} \tag{2-63}$$

其中 $e$ 代表粒子的电荷；对于电子它是负的，$e = -|e|$. 这个方程的 Lorentz 协变性是明显的。如果我们改变参考系，则电磁势象矢量一样地变换，

$$A'_\mu(x' = \Lambda x) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu(x),$$

因此 2-1-3 节中的分析可以推广到目前的情况。

方程(2-62)能更明显地写成

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{i}\nabla - e\mathbf{A}\right) + \beta m + eA^0\right]\psi$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m)\phi+(-e\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}+eA^0)\phi$$
$$= (H_0+H_{\rm int})\phi. \qquad (2\text{-}64)$$

我们注意到，相互作用部分 $H_{\rm int}$ 和外场中一个经典粒子的哈密顿量 $-e\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}+eA^0$ 极其相似，这与我们把 $\boldsymbol{\alpha}$ 当作速度算符的解释是一致的。在 Heisenberg 表象中，算符 $\mathcal{O}$ 满足运动方程

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O}(t)=i[H,\mathcal{O}(t)]+\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}.$$

因此，位置算符 $\mathbf{r}$ 和规范不变的动量 $\boldsymbol{\pi}\equiv\mathbf{p}-e\mathbf{A}$ 满足

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=i[H,\mathbf{r}]=\boldsymbol{\alpha},$$
$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt}=i[H,\boldsymbol{\pi}]-e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=e(\mathbf{E}+\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{B}), \qquad (2\text{-}65)$$

其中

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla A^0,\quad \mathbf{B}=\mathrm{curl}\mathbf{A}.$$

第二个式子是 Lorentz 力方程的算符形式。可是，按照上一节中指出的佯谬的观点，把 $\mathbf{r}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 解释为位置和动量是有局限性的。

为了研究这些方程的物理含义，我们考虑它们的非相对论极限。记 $\phi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$，用表示

$$\beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}.$$

方程(2-64)导致

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\chi+eA^0\varphi+m\varphi,$$
$$i\frac{\partial\chi}{\partial t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi+eA^0\chi-m\chi. \qquad (2\text{-}66)$$

在非相对论极限下，大的能量 $m$ 是式(2-66)中的主要项，引入随时间缓慢变化的函数 $\Phi$ 和 $X$：

$$\begin{aligned}\varphi &= e^{-imt}\Phi,\\ \chi &= e^{-imt}X.\end{aligned} \tag{2-67}$$

这些旋量满足

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}X + eA^0\Phi,\\ i\frac{\partial X}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\Phi + eA^0X - 2mX.\end{aligned} \tag{2-68}$$

如果我们假设 $eA^0 \ll 2m$，从第二个方程近似地解得

$$X \simeq \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2m}\Phi \ll \Phi,$$

而第一个方程是 Pauli 方程

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi, \tag{2-69}$$

这说明把 $\varphi$ 和 $\chi$（或者分别为 $\Phi$ 和 $X$）称为大分量和小分量是合理的。至于方程(2-69)，它是电磁场情况下 Schrödinger 方程对旋量的推广。经简单的代数运算后给出

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2 &= \sigma_i\sigma_j\pi^i\pi^j = \pi^2 + \frac{1}{4}[\sigma_i,\sigma_j][\pi^i,\pi^j]\\ &= \boldsymbol{\pi}^2 - e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}.\end{aligned}$$

我们可以把式(2-69)改写为

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} + eA^0\right]\Phi, \tag{2-70}$$

仅有的自旋依赖关系来自磁相互作用 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$。重新写进因子 $\hbar$ 和 $c$，则

$$H_{\text{magn}} = -\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}, \tag{2-71}$$

其中磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 定义为

$$\mu = \frac{e}{mc}\frac{\hbar\sigma}{2} = 2\left(\frac{e}{2mc}\right)\mathbf{S}. \qquad (2\text{-}72)$$

自旋算符 $\mathbf{S}$ 是 $\hbar\sigma/2$. 根据 1-1-3 节中的定义，回转磁比率 $g$ 等于 2. 这是 Pauli 方程在非相对论情况下导出的 Dirac 理论的一个非平庸的预言.

真正的 $|\mu|$ 值为

$$|\mu| = \frac{e\hbar}{2mc} = 5.79 \times 10^{-9}\text{eV/G}.$$

实验上测量到的辐射修正对 $g$ 值的影响是一个很小的量，关于这一点我们将在后面讨论.

Pauli 方程(2-70)可以进一步化简. 如果我们考虑一个均匀磁场 $\mathbf{B} = \text{curl}\mathbf{A}$，选择 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$，并且忽略 $A$ 的二次项(弱场近似)，则可得到

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\cdot\mathbf{B}\right]\Phi,$$

其中 $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 是轨道角动量算符. 读者自己来推导解的完备集.

实际上，对于 Dirac 方程的二次形式，即不假设非相对论近似的情况下，上述讨论同样可以进行. 从式(2-62)出发，乘以算符 $(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ + m)$，即得

$$\begin{aligned}[(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/)^2 - m^2]\psi &= \left\{(i\partial - eA)^2 + \frac{1}{2i}\sigma^{\mu\nu}\right.\\ &\left.\times[i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu] - m^2\right\}\psi\\ &= \left[(i\partial - eA)^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\right]\psi = 0.\end{aligned} \qquad (2\text{-}73)$$

因此，在通常的表示中，依赖于自旋的项为

$$-g\frac{e}{2}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}F_{\mu\nu}=-g\left(\frac{e}{2}\right)(i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}),$$

并且相应于迴转磁比率 $g=2$。注意到这个值是从最小法则式(2-61)得到的结果，我们能够写出一个非最小的方程

$$\left[(i\partial-eA)-m+\frac{\Delta g}{2}\frac{e}{4m}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi=0. \quad (2\text{-}74)$$

这将导致 $g=2+\Delta g$。这个方程只能用于研究当 $g$ 因子和 2 相差很大时粒子在弱场中的行为。

确定均匀磁场中的能级是有意义的。假设场 $\mathbf{B}$ 沿 $x$ 轴方向。势矢量 $A$ 可以这样选择，使得 $A^0=A^x=A^z=0$，$A^y=Bx$。对于能量为 $E$ 的稳定解 $\psi=e^{-iEt}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$，方程(2-66)为

$$(E-m)\varphi=\sigma\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\chi,$$
$$(E+m)\chi=\sigma\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\varphi.$$

消去 $\chi$ 即得 $\varphi$ 的方程

$$(E^2-m^2)\varphi=[\sigma\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})]^2\varphi=[(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2-e\sigma\cdot\mathbf{B}]\varphi$$
$$=[\mathbf{p}^2+e^2B^2x^2-eB(\sigma_z+2xp_y)]\varphi,$$

这是谐振子的哈密顿量。因为 $p_y$，$p_z$ 以及 $\sigma_z$ 和右边对易，我们寻找如下形式的解：

$$\varphi(x)=e^{i(p_yy+p_zz)}f(x),$$

其中 $f(x)$ 满足

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+(eBx-p_y)^2-eB\sigma_z\right]f(x)$$
$$=(E^2-m^2-p_z^2)f(x). \quad (2\text{-}75)$$

假设 $B$ 的符号使得 $eB>0$，引入辅助变量

$$\xi=\sqrt{eB}\left(x-\frac{p_y}{eB}\right),$$

$$a=\frac{E^2-m^2-p_z^2}{eB},$$

式(2-75)就被化简为

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2-\sigma_z\right)f=\alpha f.$$

如果 $f$ 是 $\sigma_z$ 的本征矢量，其本征值 $\alpha=\pm1$，

$$f=\begin{pmatrix}f_1\\0\end{pmatrix}\quad\text{对}\quad\alpha=1,\quad f=\begin{pmatrix}0\\f_{-1}\end{pmatrix}\quad\text{对}\quad\alpha=-1,$$

则 $f_n$ 满足

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-\xi^2\right)f_n(\xi)=-(n+\alpha)f_n(\xi)\quad n=\pm1.$$

只要 $n+\alpha=2n+1$，$n$ 是整数 0，1，2，…，那么在无穷远处等于零的解就可以用 Hermite 多项式 $H_n(\xi)$ 表示为

$$f_n=ce^{-\xi^2/2}H_n(\xi).$$

因此，能级被给出为

$$E^2=m^2+p_z^2+eB(2n+1-\alpha),\qquad(2\text{-}76)$$

相应的波函数很容易写出．这些能级既有分立简并（$n,\alpha=-1;n+1,\alpha=1$）又有连续简并(关于 $p_y$)．如果我们所考虑的粒子处于有限大的箱子中，连续简并就简化成分立简并．式(2-76)给出了 Landau 能级的相对论性的推广．值 $g=2$ 使得谱向下延伸到 $E^2=m^2$．

作为第二个例子，我们研究 Dirac 粒子处于电磁平面波中的情况，这是第一章的经典分析的推广．假定平面波是线性极化的，它的传播矢量为 $n_\mu(n^2=0)$，极化矢量为 $\varepsilon_\mu(\varepsilon^2=-1,\ \varepsilon\cdot n=0)$．记 $A_\mu=\varepsilon_\mu f(\xi)$，其中 $\xi\equiv n\cdot x$，于是 $\partial_\mu A_\nu=n_\mu A'_\nu$，$A'_\nu\equiv\varepsilon_\nu f'(\xi)$．二次方程(2-73)具有形式

$$(-\Box-2ieA\cdot\partial+e^2A^2-m^2-ie\not{n}A')\psi=0.\qquad(2\text{-}77)$$

我们把解表示成

$$\psi_p(x)=e^{-ip\cdot x}\varphi(\xi)\qquad(2\text{-}78)$$

其中 $\varphi$ 是 Dirac 旋量，$p$ 为和 $n$ 不正交的四维矢量．对 $p$ 加上某个形如 $\lambda n$ 的量，可以满足条件．

$$p^2=m^2$$

这个四维矢量的解释如下：在 $\varepsilon^0=0$，因此 $A^0=0$ 的坐标系中，E 和 A 沿 0x 方向，B 沿 0y 方向，而 n 沿 0z 方向，算符 $p_z=i\partial_z$，

$p_\mu = i\partial_\mu$ 及 $i(\partial_0 + \partial_3) = p_0 + p_3$ 和 Dirac 哈密顿量对易．将式(2-78)代入式(2-77)，即得条件

$$2in \cdot p\varphi'(\xi) + (e^2A^2 - 2eA \cdot p - ien\dot{A})\varphi(\xi) = 0.$$

很容易积分得出

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \exp\left\{ e\frac{n\dot{A}}{2n \cdot p} - i\int_0^{\xi} d\xi' \left[ e\frac{A(\xi') \cdot p}{n \cdot p} - \frac{e^2A^2(\xi')}{2n \cdot p} \right] \right\} u, \tag{2-79}$$

其中 $u$ 是常数双旋量．因为 $(n\dot{A})^2 = -n^2A^2 = 0$，我们可以写成

$$\psi_p(x) = \left(1 + \frac{e}{2n \cdot p} n\dot{A}\right) \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} ue^{il},$$

其中 $l$ 表示在具有 $p = mu(\infty) = p(\infty)$ 的平面波(在无穷远处减弱)中经典粒子的作用量[比较(1-84)式]：

$$l = -p \cdot x - \int_0^{n\cdot x} d\xi \left[ \frac{e}{n \cdot p} A(\xi) \cdot p - \frac{e^2}{2n \cdot p} A^2(\xi) \right].$$

对于不仅满足二次方程 (2-73) 而且满足原始 Dirac 方程的 $\psi$，$u$ 必须满足某些辅助条件．经过一些代数运算后，我们看到

$$(i\partial - eA - m)\psi_p(x) = \left(\frac{m}{p_0}\right)^{1/2} \times \left(1 + \frac{e}{2p \cdot n} n\dot{A}\right)(\not{p} - m)ue^{il},$$

因此

$$(\not{p} - m)u = 0.$$

于是，$u = u(p)$ 是自由 Dirac 方程的解．读者能验证，解式(2-79)有正确的归一化

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\psi_{p'}^{+}(t,\mathbf{x})\psi_p(t,\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

还可验证有关的流为

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu\psi_p(x) = \frac{1}{p^0}$$

$$\times\left[p^\mu - eA^\mu + n^\mu\left(e\frac{p\cdot A}{n\cdot p} - \frac{e^2A^2}{2n\cdot p}\right)\right].$$

如果 $A(\xi)$ 是 $\xi$ 的准周期函数(在无穷远处缓慢衰减)，$j^\mu$ 的平均值是

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p^0}\left(p^\mu - \frac{e^2}{2n\cdot p}\overline{A^2}n^\mu\right).$$

这和它的经典对应所显示的情形一样. 这些式子最初是 Volkow 于 1935 年导出的.

## 2-2-4 Foldy-Wouthuysen 变换

在上一小节中，我们已经利用非相对论近似讨论了 Dirac 方程的物理意义. 值得指出的是，可以按一种系统的方法进行这种讨论. 这就是 Foldy-Wouthuysen 变换的目的. 为了更清楚起见，我们希望找到一个么正变换

$$\psi = e^{-iS}\psi',$$

使小分量和大分量分开，并且这里 $S$ 可以依赖于时间.

我们把使大、小分量耦合的算符，例如 $\alpha$ 称为奇算符，否则(例如 $I$，$\beta$，$\cdots$) 称为偶算符. 因为 $\psi'$ 满足方程

$$i\partial_t\psi' = [e^{iS}(H - i\partial_t)e^{-iS}]\psi' \equiv H'\psi', \qquad (2\text{-}80)$$

我们的问题是找到 $S$，以便在给定的 $1/m$ 阶去掉 $H'$ 中的奇算符. 实际上，我们所做的将准至量级为 (动能/$m$)$^3$ 或 (动能 $\times$ 位能/$m^2$) 的项. 这将使我们进一步洞悉 Dirac 方程所需要的相对论修正.

在自由的情况下，我们可以精确地构造 $S$. 它是时间无关的，并可选择为

$$S = -i\beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\theta = -i\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\theta.$$

因为 $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)^2 = -I$，我们可以精确地计算出 $e^{iS}$ 和 $H'$：

$$e^{iS} = e^{(\alpha\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)\theta} = \cos\theta + \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} H' &= e^{iS}He^{-iS} \\ &= \left(\cos\theta + \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin\theta\right)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m) \\ &\quad \times \left(\cos\theta - \beta\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\sin\theta\right) \\ &= \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\left(\cos 2\theta - \frac{m}{|\mathbf{p}|}\sin 2\theta\right) \\ &\quad + \beta\,(m\cos 2\theta + |\mathbf{p}|\sin 2\theta). \end{aligned}$$

选取 $\theta$ 使得

$$\sin 2\theta = \frac{|\mathbf{p}|}{E},\quad \cos 2\theta = \frac{m}{E}.$$

这样，正如我们所要求的，消去了奇算符 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}$，剩下

$$H' = \frac{\beta}{E}(\mathbf{p}^2 + m^2) = \beta E = \beta(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}.$$

换句话说，我们已将 $H$ 分解成二个非定域哈密顿量

$$\pm\sqrt{m^2 + p^2}$$

的直接和. 显然，在组态空间中这些平方根不可能用有限多个微分算符来表达.

因此，在相互作用情况下，我们预料 $S$ 是 $m^{-1}$ 阶，我们将 $H'$ 展开到所要求的阶：

$$\begin{aligned} H' &= H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] \\ &\quad - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \frac{1}{24} \\ &\quad \times [S, [S, [S, [S, H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2} \\ &\quad \times [S, \dot{S}] + \frac{1}{6}[S, [S, \dot{S}]] + \cdots. \end{aligned}$$

在这里已利用普遍的恒等式

$$e^{A}Be^{-A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[A,[A,[\cdots[A,B]\cdots]]], \qquad (2\text{-}81)$$

其中一般的求和项中 $A$ 出现 $n$ 次. 计算 $S=0$ 时 $e^{SA}Be^{-SA}$ 的逐次微商,并代入 $S=1$ 的(形式上的) Taylor 展开式中,就很容易导出这个恒等式.

从 $H=\beta m+\mathcal{O}+\mathcal{E}$ 出发,其中 $\mathcal{O}$ 代表奇算符 $\mathcal{O}=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})$, $\mathcal{E}$ 代表偶算符 $eA^{0}$. 自由情况下的解暗示我们取 $S=-i\beta\mathcal{O}/2$ 作为第一阶. 这时,根据上面关于 $H'$ 的表达式,计算得到

$$H'=\beta m+\mathcal{O}'+\mathcal{E}',$$

其中

$$\mathcal{O}'=\frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}]-\frac{\mathcal{O}^{3}}{3m^{3}}+i\frac{\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m},$$

$$\mathcal{E}'=\mathcal{E}+\beta\left(\frac{\mathcal{O}^{2}}{2m}-\frac{\mathcal{O}^{4}}{8m^{3}}\right)-\frac{1}{8m^{2}}\times[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]-\frac{i}{8m^{2}}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}],$$

现在 $\mathcal{O}'$ 是 $m^{-1}$ 阶的. 再重复这个过程,具有 $S'=-i(\beta\mathcal{O}'/2m)$ 的第二个变换 $e^{-iS'}$ 导致

$$H''=\beta m+\mathcal{E}'+\mathcal{O}'',$$

其中 $\mathcal{O}''=O(m^{-2})$. 最后,第三步用 $S''=-(i\beta\mathcal{O}''/2m)$ 消去这个奇的项,留下要求的哈密顿量

$$H'''=\beta\left[m+\frac{(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^{2}}{2m}-\frac{(\mathbf{p})^{4}}{8m^{3}}\right]+eA^{0}-\frac{e}{2m}\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}+\left(-\frac{ie}{8m^{2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{E}-\frac{e}{4m^{2}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right)$$

$$-\frac{e}{8m^2}\mathrm{div}\mathbf{E} \tag{2-82}$$

对每一项的解释都应作些注释。方括号中的项是 $[(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2+m^2]^{1/2}$ 的展开式(直到所要求的阶)。第二项 $eA^0$ 是类点电荷的静电能,而第三项代表 $g=2$ 的磁偶极子的能量。圆括号中的项可以看成相应于自旋-轨道 ($s.\ o.$) 相互作用。实际上,对于静态球对称势,$\mathrm{curl}\mathbf{E}=0$,$\mathbf{E}=-\nabla A^0$。因此,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{p}) &= -\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\\ &= -\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L},\end{aligned}$$

圆括号中的项是

$$H_{s.o.}=\frac{e}{4m^2r}\frac{dA^0}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}$$

作用在粒子上的磁场 $\mathbf{B}'=-\mathbf{V}\times\mathbf{E}$ 导致了这个附加的磁能。它和磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ [式(2-72)]的相互作用给出

$$H_{s.o.}=-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}'=-\frac{e}{2m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{p}).$$

但是,由于 Thomas 进动,这个结果减小了一半。

最后,式(2-82)中的最末一项 $-(e/8m^2)\mathrm{div}\mathbf{E}$ 称为 Darwin 项,可以追溯到颤振运动。电子位置涨落数量为 $\delta r$,它使得 $\langle\delta r^2\rangle\sim 1/m^2$,于是它的有效静电能是平均值

$$\begin{aligned}\langle eA^0(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})\rangle &= eA^0(\mathbf{r})+\frac{e}{2}\\ &\times\frac{\partial^2A^0(\mathbf{r})}{\partial r^i\partial r^i}\langle\delta r^i\delta r^i\rangle+\cdots.\end{aligned}$$

根据球对称性,这个随机涨落是

$$\langle\delta r^i\delta r^i\rangle=\frac{\delta^{ii}}{3}\langle\delta r^2\rangle\simeq\frac{\delta^{ii}}{3m^2}.$$

于是，对 $eA^0(r)$ 的修正为

$$\delta(eA^0) = \frac{e}{6m^2}\Delta A^0 = -\frac{e}{6m^2}\mathrm{div}\mathbf{E},$$

和 Darwin 项的符号和数值符合得很好.

读者可能已经注意到，由于 Foldy-Wouthuysen 变换依赖于时间，$H'$ 在态 $\psi'$ 上的期待值一般和 $H$ 在相应的态 $\psi$ 上的期待值不同.

## 2-3 类氢原子

Dirac 方程的一个重要应用是原子谱精细结构的讨论. 这是以量子力学和包括辐射修正在内的相对论推广的成功而众所周知的一个领域. 鉴于 Foldy-Wouthuysen 方法的复杂性，非常值得注意的是，在静 Coulomb 场中存在 Dirac 方程的精确解，其结果和关于类氢原子的观测值符合得相当好. 2-2 节中讨论过的困难，估计不会起重要作用. 在原子物理中，有关的长度标度 Bohr 半径 $a_0 = \hbar/m_e c\alpha = 0.53$ Å，比电子波长大 137 倍. 对于重的原子，这些困难仍会出现，因此必须提出别的方法.

### 2-3-1 非相对论谱与相对论谱的比较

回顾一下从 Schrödinger 方程得到的非相对论性的结果，即早期量子力学的成就. 波方程为

$$\left[-\frac{\Delta}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi r} - \varepsilon_{n,l}\right]\phi_{n,l}(\mathbf{r}) = 0,$$

其中

$$-\Delta \equiv -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2},$$

$$L^2\phi_{n,l} = l(l+1)\phi_{n,l} \quad l = 0, 1, \cdots,$$

$m$ 是电子核子系统的约化质量，

$$m^{-1} = m_e^{-1} + m_N^{-1} \simeq m_e^{-1}.$$

量子化条件要求 $n' = n - (l+1)$ 必须是非负整数(波函数在零点的值)，于是能级为

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2} \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2-83}$$

在数值上，Rydberg 常数 $m\alpha^2/2$ 等于 13.6eV.

$s$ 态 $(l = 0)$ 波函数在原点的值是

$$\phi(0) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{mZ\alpha}{n}\right)^{3/2}. \tag{2-84}$$

因为对于给定的 $n \geqslant 1$，$l$ 可以取从 0 到 $n-1$ 的整数值，所以每个能级的简并度等于 $\sum_0^{n-1}(2l+1) = n^2$，这和相应于四维空间中按照转动群 $O(4)$的 Coulomb 问题的动力学对称性有关。这是 Pauli 和 Fock 在量子力学的早期为了给出 Balmer 谱式(2-83)的代数推导而使用的简并。在导致能谱精细分裂的相对论性的处理中，不出现这种简并.

暂时忽略自旋的效应，我们来看看当用最小方法引入电磁耦合时 Klein-Gordon 理论的预言。用 $E$ 表示总能量，它等于静止能量 $mc^2$ 加上负的束缚能 $\varepsilon$:

$$\left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 + \Delta - m^2\right]\phi = 0, \tag{2-85}$$

或者

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2 - Z^2\alpha^2}{r^2} - \frac{2Z\alpha E}{r} - (E^2 - m^2)\right]\phi = 0.$$

在作如下代换后，此方程在形式上和 Schrödinger 方程完全一

样：

$$L^2 \to L^2 - Z^2\alpha^2 \equiv \lambda(\lambda+1),$$

$$\alpha \to \alpha\frac{E}{m},$$

$$\varepsilon \to \frac{E^2-m^2}{2m}.$$

轨道量子数被改变 $\delta_l$，$l \to \lambda = l - \delta_l$，其中

$$\delta_l = l + \frac{1}{2} - \left[\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2\right]^{1/2}$$

$$\simeq \frac{Z^2\alpha^2}{2l+1} + O(\alpha^4).$$

由于 $n' = n - (l+1)$ 必须是整数，主量子数 $n$ 类似地移动同样的量. 因此，能级由下式给出：

$$\frac{E_{nl}^2 - m^2}{2m} = -\frac{mZ^2\alpha^2}{2}\frac{E_{nl}^2}{m^2}\frac{1}{(n-\delta_l)^2},$$

或者

$$E_{nl} = \frac{m}{\sqrt{1+[Z^2\alpha^2/(n-\delta_l)^2]}}$$

$$= m - \frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2} - \frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2l+1)}$$

$$+ \frac{3}{8}\frac{mZ^4\alpha^4}{n^4} + O(\alpha^6). \qquad (2\text{-}86)$$

第二项是非相对论束缚能，第三项破坏了 $O(4)$ 简并. 我们不想讨论这种情况下所存在的问题，即由于吸引项 $-(Z^2\alpha^2/r^2)$ 引起的波函数在原点的奇异行为或当 $Z > 137/2$ 时($\delta_l$，从而 $E_{nl}$ 变成复的!)所出现的灾难. 式 (2-86) 和实验情况符合得不好，这表明不能忽略自旋效应.

### 2-3-2 Dirac 理论

现在回到对 Dirac 方程的预言. 在构造波函数之前，象

对 Klein-Gordon 情况时一样，我们首先进行有关谱的简单的推导。为此，象式(2-37)那样把方程简化成二次形式并代入不等于零的势分量 $A_0 = -(Ze/4\pi r)$，因而 $F_{0i} = -F_{i0} = -\partial_i A_0 = E^i$。在 $\gamma$ 矩阵的手征表示式(2-20)中进行计算是方便的，在那里 $\sigma^{0i}$ 是对角的，$\sigma^{0i} = i\begin{pmatrix}\sigma^i & 0\\ 0 & -\sigma^i\end{pmatrix}$。这样，式(2-73)中的自旋项为

$$\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \pm ie\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E} = \mp iZ\alpha\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}}{r^2},$$

其中 $\hat{r}$ 是单位矢量 $\mathbf{r}/r$。类似于式(2-85)的方程是一个二分量旋量方程：

$$\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+(L^2-Z^2\alpha^2\mp iZ\alpha\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r})\frac{1}{r^2}-\frac{2Z\alpha E}{r}-(E^2-m^2)\right]\psi_\pm = 0.$$

总角动量 $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}=\mathbf{L}+\boldsymbol{\sigma}/2$ 和哈密顿量，以及 $L^2$ 都对易。在 $J^2=j(j+1)$，$J_z=m\left(j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots;-j\leqslant m\leqslant j\right)$ 以及 $L^2=l(l+1)$ 的子空间中，整数 $l$ 取二个值，即 $l=j+\frac{1}{2}=l_+$ 和 $l=j-\frac{1}{2}=l_-$。因为 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}$ 没有对角矩阵元，$\langle l_\pm|\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}|l_\pm\rangle=0$，它是厄米的，而且平方等于 1，所以在这个子空间中算符 $[L^2-Z^2\alpha^2\mp iZ\alpha\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}]$ 具有如下形式：

$$L^2-Z^2\alpha^2\mp iZ\alpha\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r} = \begin{pmatrix}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)-Z^2\alpha^2 & \mp iZ\alpha\\ \mp iZ\alpha & \left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)-Z^2\alpha\end{pmatrix}.$$

令 $\lambda(\lambda+1)$ 是它的本征值，

$$\lambda=\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2\alpha^2\right]^{1/2}$$

和

$$\lambda=\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2\alpha^2\right]^{1/2}-1,$$

可以将其写成

$$\lambda=\left(j\pm\frac{1}{2}\right)-\delta_j,$$

其中

$$\delta_j=j+\frac{1}{2}-\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2\alpha^2}$$

$$\simeq\frac{Z^2\alpha^2}{2j+1}+O(Z^4\alpha^4).$$

此外，$n$ 也被改变 $\delta_j$ 以便保持 $n'=(n-\delta_j)-\lambda-1$ 为整数。条件 $n'\geqslant 0$ 对 $j$ 给出了限制：对于 $\lambda=j+\frac{1}{2}-\delta_j$，$j\leqslant n-\frac{3}{2}$；对于 $\lambda=j-\frac{1}{2}-\delta_j$，$j\leqslant n-\frac{1}{2}$。因此，除了态 $j=n-\frac{1}{2}$ 外，存在双重简并度。最后的结果是

$$E_{nj}=\frac{m}{\sqrt{1+[Z^2\alpha^2/(n-\delta_j)^2]}}=m$$

$$-\frac{mZ^2\alpha^2}{2n^2}-\frac{mZ^4\alpha^4}{n^3(2j+1)}+\frac{3}{8}\frac{mZ^4\alpha^4}{n^4}$$

$$+O(\alpha^5),\qquad(2\text{-}87)$$

其中 $n=1,2,\cdots$，$j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots,n-\frac{1}{2}$。对于 $Z=137$，问题又出现了，超过了这个值 $\delta_{1/2}$ 就成了虚数。

简并态可以用它们的轨道角动量 $l$ 来区分，$l$ 取值 $j \pm \frac{1}{2}$ $\left(j = n - \frac{1}{2}\right.$ 除外，这时 $\left. l = n - 1\right)$；这又和态在宇称下的变换性质相关。低能态的能量已如图 2-2 所示，其中我们已应用了通常非相对论的光谱学记号 $nl_j$。

新的现象是出现了精细结构，即对于同样的 $n$ 值，不同 $j$ 的能级之间有能量差。典型情况下，对于 $Z = 1$，

$$E(2P_{3/2}) - E(2P_{1/2}) \simeq \frac{m\alpha^4}{32} = 4.53 \times 10^{-5}\text{eV}$$
$$= 10.9\text{GHz}.$$

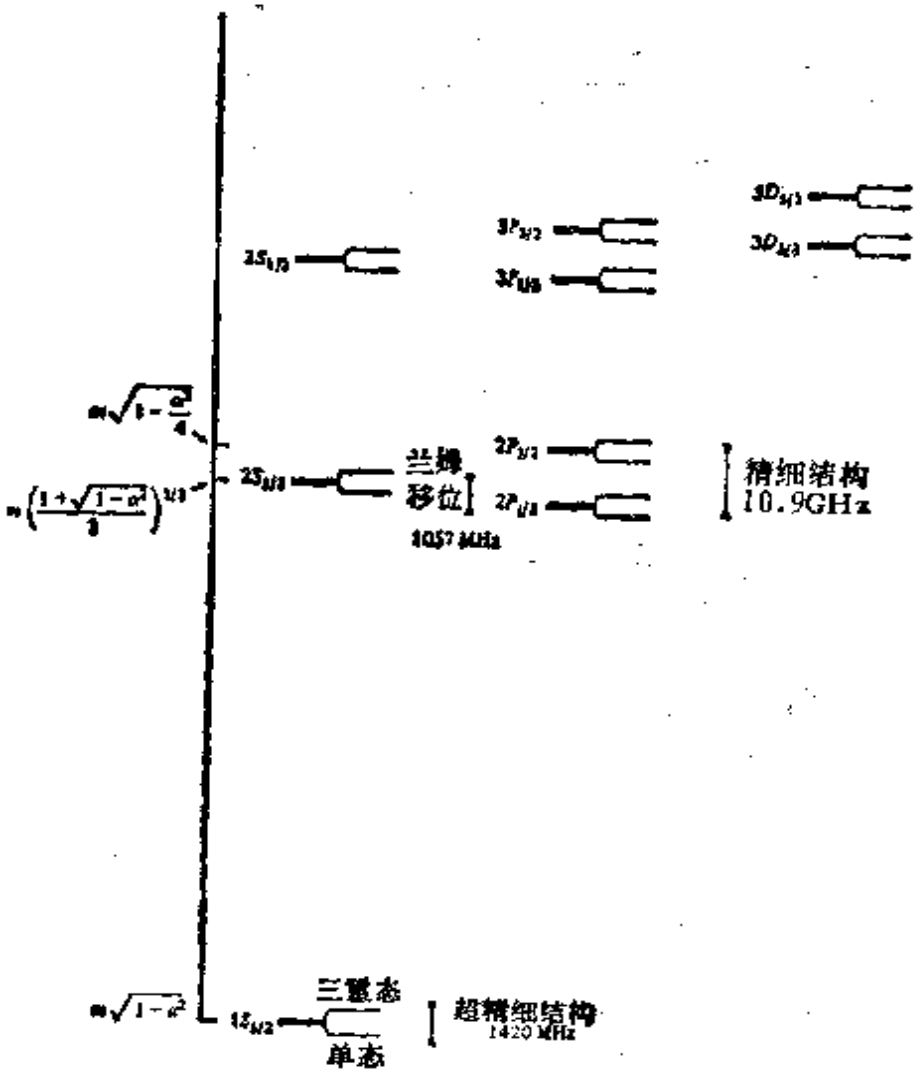


图 2-2 氢的低能级

这种精细分裂可以看成式(2-82)中自旋-轨道耦合的结果:

$$\Delta E = \left\langle \frac{Z\alpha}{4m^2} \frac{\sigma \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right\rangle.$$

对于 $s$ 波,这项等于零,对于 $p$ 波,当 $j=3/2$ 和 $j=1/2$ 时,$\mathbf{L}\cdot\sigma=(\mathbf{J}^2-\mathbf{L}^2-\sigma^2/4)$ 分别取值 1 和 $-2$. 另一方面,按照量纲分析,$1/r^3$ 的期望值为 $\langle nl|1/r^3|nl\rangle = k_{nl}(mZ\alpha)^3$,其中 $k_{nl}$ 是纯数. 量子力学的所有教科书都告诉我们,$k_{nl} = 8/(2l+1)n^3[(2l+1)^2-1]$(对于 $n=2$, $l=1$, $k_{nl}=1/24$),

$$\Delta E_{\text{精细}}(2P_{3/2} - 2P_{1/2}) = \frac{m(Z\alpha)^4}{32},$$

和以前的估计是一致的(对于更大的 $n$ 和 $l$ 值,这个式子也成立).

现在我们来构造旋量,它是这个问题的能量本征态. 回到 Dirac 表示式(2-10),记双旋量 $\phi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$,并寻找二分量旋量,它是 $J^2$, $J_z$ 和 $L^2$ 的本征态,其本征值分别为 $j(j+1)$, $m$ 和 $l(l+1)$. 令 $\varphi^{(\pm)}_{jm}$ 是 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 的本征态.

作为 $L^2$ 的本征态,$\varphi^{(\pm)}_{jm}$ 必须具有形式

$$\varphi^{(\pm)}_{jm} = \begin{pmatrix} a_\mu Y^\mu_l \\ b_{\mu'} Y^{\mu'}_l \end{pmatrix} \quad (\text{对 } \mu \text{ 和 } \mu' \text{ 不求和}),$$

其中我们用了球谐函数的标准记号 $Y^\mu_l$. 它们还必须是 $J_z = L_z + S_z$ 的本征态,其本征值为 $m$; 还必须是 $\mathbf{L}\cdot\sigma = \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{3}{4}$ 的本征态,对于 $\varphi^{(+)}_{jm}$ 其本征值为 $l$,对于 $\varphi^{(-)}_{jm}$ 其本征值为 $-(l+1)$. 第一个条件给出 $\mu = m - \frac{1}{2}$ 和 $\mu' = m + \frac{1}{2}$,第二个条件和归一化条件 $|a|^2 + |b|^2$ 一起确定了 $a$ 和 $b$. 最后,我们得到旋量谐函数

$$\varphi_{j,m}^{(+)}=(2l+1)^{-1/2}\begin{pmatrix}\left(l+m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}Y_l^{m-1/2}\\ \left(l-m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}Y_l^{m+1/2}\end{pmatrix}$$

$$j=l+\frac{1}{2}, \tag{2-88}$$

$$\varphi_{j,m}^{(-)}=(2l+1)^{-1/2}\begin{pmatrix}\left(l-m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}Y_l^{m-1/2}\\ -\left(l+m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}Y_l^{m+1/2}\end{pmatrix}$$

$$j=l-\frac{1}{2},\ l>0. \tag{2-89}$$

选择位相使得

$$\varphi_{j,m}^{(+)}=\sigma\cdot\hat{r}\varphi_{j,m}^{(-)}, \tag{2-90}$$

因为 $\sigma\cdot\hat{r}$ 是赝标算符，$\varphi_{j,m}^{(+)}$ 和 $\varphi_{j,m}^{(-)}$ 有相反的宇称（它们的角动量 $l$ 差一个单位）。为了方便，引入一个共同的记号。如 $j=l+\frac{1}{2}$，$\varphi_{j,m}^{l}$ 表示 $\varphi_{j,m}^{(+)}$；如 $j=l-\frac{1}{2}$，它表示 $\varphi_{j,m}^{(-)}$。容易验证 $\varphi_{j,m}^{l}$ 具有宇称 $(-1)^l$。

因为在 Coulomb 势中的 Dirac 方程

$$E\psi=\left(\frac{1}{i}\alpha\cdot\nabla+\beta m-\frac{Z\alpha}{r}\right)\psi\equiv H\psi. \tag{2-91}$$

在空间反射下是不变的，所以可以构成奇的和偶的本征态，即

$$\beta\psi_{j,m}^{(\pm)}(\hat{x})=\pm\psi_{j,m}^{(\pm)}(x).$$

显然，旋量

$$\psi_{jm}^{l}\equiv\begin{bmatrix}\frac{iG_{lj}(r)}{r}\varphi_{jm}^{l}\\ \frac{F_{lj}(r)}{r}(\sigma\cdot\hat{r})\varphi_{jm}^{l}\end{bmatrix} \tag{2-92}$$

有宇称 $(-1)^l$。为了以后的方便，在式 (2-92) 中引进了因子

$i$ 和 $1/r$. 注意到式(2-91)中的$H$为

$$H=\begin{pmatrix} m-\dfrac{Z\alpha}{r} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -m-\dfrac{Z\alpha}{r}\end{pmatrix}.$$

做中间运算

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}f(r)\varphi^l_{jm}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})f(r)\varphi^l_{jm}$$

$$=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L})f(r)\varphi^l_{jm}$$

$$=-i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}}{r}\left\{r\frac{df(r)}{dr}+\left[1\mp\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]f(r)\right\}\varphi^l_{jm}$$

$$j=l\pm\frac{1}{2},$$

以及类似地做中间运算

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r})f(r)\varphi^l_{jm}=-\frac{i}{r}$$

$$\times\left[r\frac{\partial}{\partial r}+1\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]f(r)\varphi^l_{jm}.$$

经过冗长的变量分离，最后导致联立的径向方程

$$\left(E-m+\frac{Z\alpha}{r}\right)G_{lj}(r)=-\frac{dF_{lj}(r)}{dr}$$

$$\mp\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{F_{lj}(r)}{r},$$

$$\left(E+m+\frac{Z\alpha}{r}\right)F_{lj}(r)=\frac{dG_{lj}(r)}{dr}$$

$$\mp\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{G_{lj}(r)}{r}. \qquad (2\text{-}93)$$

为了求解这个联立方程，我们引入记号 $\lambda=\sqrt{m^2-E^2}$(因为$E^2<m^2$)、新的变量 $\rho=2\lambda r$，以及对于给定 $l$ 和 $j$ 的新的函数 $F_l(\rho)$ 和

$F_2(\rho)$:

$$G(r) = \left(1 + \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\rho/2}(F_1 + F_2)(\rho),$$

$$F(r) = \left(1 - \frac{E}{m}\right)^{1/2} e^{-\rho/2}(F_1 - F_2)(\rho).$$

消去 $F_2$，得到关于 $F_1$ 的二阶微分方程，这个方程的解为

$$F_1 = \frac{\gamma - Z\alpha E/\lambda}{-\lambda + Z\alpha m/\lambda}\rho^\gamma F\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right),$$

$$F_2 = \rho^\gamma F\left(\gamma - \frac{Z\alpha E}{\lambda}, 2\gamma + 1; \rho\right),$$

其中

$$\gamma = \left[\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2\right]^{1/2} = j + \frac{1}{2} - \delta_j,$$

这里 $F(a, b; \rho)$ 表示方程

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + (b - \rho)\frac{d}{d\rho} - a\right]F(a, b; \rho) = 0$$

的退化超几何函数解.对大的 $\rho$，此函数的行为象 $[\Gamma(b)/\Gamma(a)]\rho^{a-b}e^\rho$. 要求 $F_{lj}$ 和 $G_{lj}$ 是可归一的，即 $\int_0^\infty dr\,(F_{lj}^2 + G_{lj}^2) = 1$，意味着 $[\Gamma(\gamma - Z\alpha E/\lambda)]^{-1}$ 必须等于零. 这就是所要求的量子化条件

$$\frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma = n_r \quad (\text{非负整数})$$

$$= n - \left(j + \frac{1}{2}\right).$$

它导致了式(2-87):

$$\frac{Z\alpha E}{(m^2 - E^2)^{1/2}} = n - \delta_j.$$

集中所有的因子即可写出归一化解 $F_{lj}$ 和 $G_{lj}$ 的表达式，因此也就得到了 $\psi_{jm}^l$ 的表达式.

在这里我们只引用基态波函数的形式:

$$\psi_{n=1,\,j=1/2,\,m=1/2} = \frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2}}\left(\frac{1 + \gamma}{2\Gamma(1 + 2\gamma)}\right)^{1/2}$$

$$\times (2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\theta\\\dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix} \tag{2-94}$$

和

$$\psi_{n=1,j=1/2,m=-1/2}=\frac{(2mZ\alpha)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2}}\left(\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}\right)^{1/2}$$

$$\times (2mZ\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mZ\alpha r}\begin{pmatrix}0\\1\\\dfrac{i(1-\gamma)}{Z\alpha}\sin\theta e^{-i\varphi}\\\dfrac{-i(1-\gamma)}{Z\alpha}\cos\theta\end{pmatrix},$$

注意 $\gamma=\sqrt{1-Z^2\alpha^2}\sim 1-(Z^2\alpha^2/2)$. 在非相对论极限下 $\gamma\to 1$，我们重新得到了用 Pauli 旋量相乘后的 Schrödinger 波函数. 另一方面，这些波函数在原点是奇异的，但是仅仅对

$$2mZ\alpha r\lesssim e^{-2/Z^2\alpha^2}\approx 10^{-19300/Z^2},$$

即在相当微小的区域中这种效应才是重要的.

为了将这些结果和实验测得的能级作比较，还必须考虑其他几种效应.

*超精细结构*　作为第一级近似，我们忽略了核子的磁矩所诱导的磁场(今后我们考虑 $Z=1$ 的氢原子). 质子自旋和电子总角动量的耦合将能级分裂成双重线. 为了估计这种效应，我们利用对 $s$ 波的非相对论近似. 新的相互作用是

$$H_{\mathrm{hf}}=-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}_e\cdot\mathbf{B},$$

其中

$$\mathbf{B}=\mathrm{curl}\mathbf{A},\quad \mathbf{A}=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\mu}_p\times\nabla\frac{1}{r},$$

$\sigma_e$ 代表电子的自旋，$\mu_p$ 代表质子的磁矩. 我们记得，对于流分布 $\mathbf{j}(x)$，磁矩是 $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(x)d^3x$，而 $\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{j}$；因此，对于局限在原点的矩，$\mathbf{j} = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla\delta^3(\mathbf{x})$. 所以

$$H_{\mathrm{hf}} = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}_e \cdot [\nabla \times (\boldsymbol{\mu}_p \times \nabla)] \frac{1}{r}$$

$$= \frac{e}{8\pi m}\boldsymbol{\sigma}_e \cdot [\boldsymbol{\mu}_p\Delta - (\boldsymbol{\mu}_p \cdot \nabla)\nabla] \frac{1}{r}.$$

对 $s$ 波，我们只需要 $H_{\mathrm{hf}}$ 的角平均，$\nabla_i\nabla_i$ 可以用 $\frac{1}{3}\Delta\delta_{ij}$ 来替代，于是

$$\bar{H}_{\mathrm{hf}} = -\frac{e}{3m}\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\mu}_p\delta^3(r). \qquad (2\text{-}95)$$

引进质子的迴转磁比率 $g_p$，$\boldsymbol{\mu}_p = -(g_p e/2m_p)(\boldsymbol{\sigma}_p/2)$，我们得到

$$\langle\bar{H}_{\mathrm{hf}}\rangle = \frac{e^2}{12m_e m_p} g_p\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p |\psi(0)|^2.$$

对于基态，$n = 1$ [比较式(2-84)]，

$$|\psi(0)|^2 = \frac{(m_e\alpha)^3}{\pi},$$

而且对于三重态 $\boldsymbol{\sigma}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}_p$ 取值 1，对单态取值 $-3$. 最后，我们得到

$$\Delta E_{\substack{\mathrm{hf} \\ n=1,j=1/2}}(\text{三重态-单态}) = \frac{4}{3} m_e\alpha^4 \frac{m_e}{m_p} g_p$$

$$= 5.89 \times 10^{-6}\mathrm{eV} = 1.42 \times 10^9\mathrm{Hz}.$$

如果将它和精细分裂作比较，我们看到，主要的效应要小一因子 $m_e/m_p \sim \mu_p/\mu_e$. 当然，上述的估计可以推广到更高的波 ($l \geq 1$).

辐射修正　这种修正可以分为几类. 首先，激发态是

不稳定的，它们有一个宽度，而且原子可以自发跃迁到一个较低的态。

在非相对论的偶极子近似下，单位时间二个态 $\lambda$ 和 $\mu$ 之间辐射跃迁的几率是

$$W_{\mu\leftarrow\lambda}=\frac{4}{3}\frac{(E_\lambda-E_\mu)^3}{2j_\lambda+1}|\langle\mu\|D\|\lambda\rangle|^2,$$

其中 $\langle\mu\|D\|\lambda\rangle$ 是偶极子算符 $\mathbf{D}=e\mathbf{r}$ 的约化矩阵元，按 Wigner-Eckart 定理被定义为

$$\langle\mu j_\mu m_\mu|D_q|\lambda j_\lambda m_\lambda\rangle=\frac{1}{(2j_\lambda+1)^{1/2}}\langle j_\mu m_\mu;1q|j_\lambda m_\lambda\rangle\times\langle\mu\|D\|\lambda\rangle.$$

特别是，对于 $2P\rightarrow 1S$ 跃迁，我们得到

$$W_{1S\leftarrow 2P}=6.2\times10^8\mathrm{s}^{-1}=4.1\times10^{-7}\mathrm{eV}.$$

其次是荷电粒子和量子化的电磁场的涨落相互作用。后者只是按其平均值等于零。由于这种相互作用，能级发生了小小的改变。虽然对这种效应的完整而又系统的处理，需要用到我们将在后面描述的量子场论的方法，但是我们可以沿用 Welton 的方法给出主要效应——Lamb 位移——的定性的叙述。这种方法建立在象上一节对 Darwin 项的讨论同一类论证的基础上，只是在这里位置的涨落是由电磁场引起的，而不是由相对论的颤振运动引起的。因此，对哈密顿量的新的贡献为

$$\Delta H_{\mathrm{Lamb}}=\frac{1}{6}\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle\Delta V,$$

其中 $V=-(Z\alpha/r)$，故根据 Poisson 定律 $\Delta V=4\pi Z\alpha\delta^3(r)$。在处理这种微扰到第一阶近似的这种简单的图象中，只有 $s$ 波受影响，第 $n$ 个能级移动数量

$$\Delta E_{\mathrm{Lamb}}(n)=\frac{2\pi Z\alpha}{3}\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle|\psi_n(0)|^2$$

$$= \frac{(2mZ\alpha)^3}{12}\frac{\alpha}{n^3}\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle$$

(对于较高的波，由于波函数在原点等于零使移动减少而变得相当小). $\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle$ 的估算依赖于对涨落场中电子运动的经典描述(比较重的核子不动). 电子振荡满足

$$m\delta\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}.$$

电磁场的频率为 $\omega$ 的 Fourier 分量 $E_\omega$ 贡献

$$m\delta\mathbf{r}_\omega = -\frac{e}{\omega^2}\mathbf{E}_\omega.$$

假设各种模式之间不相关，那么

$$\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle = \frac{e^2}{m^2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^4}\langle\mathbf{E}_\omega^2\rangle.$$

提前利用电磁场的量子方法，我们假定场是平面波的不相干的迭加，并记住场的真空能量是零点能量对所有波数 $k$ 和极化 $\lambda$ 的和，即

$$\frac{1}{2}\int d^3x(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2) = \sum_{\lambda=1,2}\sum_k \frac{\omega_{k\lambda}}{2}.$$

在边长为 $L$ 的大箱中，$\mathbf{k} = (2\pi/L)\mathbf{n}$ ($n_x$, $n_y$ 和 $n_z$ 为整数)，于是

$$\frac{1}{2}\int d^3x\,(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2) = 2L^3\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{2},$$

$$\langle\mathbf{E}^2\rangle = \int d\omega\langle\mathbf{E}_\omega^2\rangle = \frac{1}{L^3}\int d^3x\mathbf{E}^2$$

$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k = \int\frac{d\omega\omega^3}{2\pi^2}.$$

因此，

$$\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle = \frac{2\alpha}{\pi m^2}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}.$$

最后这个积分对小的和大的频率都是发散的. 当 $\omega\to\infty$ 时，

紫外发散来自不完善的量子处理方法；实际上，存在一个截断，对距离为 $\hbar/mc$ 的量级，即对频率为 $\omega \sim mc^2/\hbar$ 的量级。在另一端，对于小频率的红外发散，可通过存在电荷时对电磁场的一种更准确的处理而得到解决。大的波长模式对于低能态的电子态是敏感的。这意味着量级为 $\omega \sim c/a = mc^2\alpha/\hbar$ 的一个红外截断。利用这些粗略的估计，我们期望值

$$\langle \delta \mathbf{r}^2 \rangle \sim \frac{2\alpha}{\pi m^2} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

因此，Lamb 位移

$$\Delta E_{\text{Lamb}}(n, l) \sim \frac{4}{3} \frac{mZ^4\alpha^5}{n^3} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \delta_{l0}.$$

对于氢原子的 $n = 2$ 的能级，计算出的移动 $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ 是

$$\Delta E_{\text{Lamb}} \simeq 660\text{MHz},$$

和观测到的移动 1057 MHz 粗略地相符。这一项和式 (2-82) 中的 Darwin 项的对比表明，减小因子的量级为 $\alpha \ln \frac{1}{\alpha}$。在后面(见第七章)这些近似将被大大改进。

**核效应** 核子具有有限大小，其电荷分布也不是集中在一个点上。对于质子这一点可以用一个形状因子来表示。这主要影响 $s$ 波态，因为较高的 $l$ 波函数在原点等于零。一个有趣的结果是早在 1932 年就预言的同位素的效应，即不同的同位素会有略微不同的能级。

因为电子的约化质量为 $1/m = 1/m_e + 1/m_{\text{nucl}}$，对于较轻的核子主要的贡献来自各种同位素的质量差：

$$\delta E \sim \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{1}{m_{\text{nucl}}}\right) \left\langle \sum_{\text{电子}} p_i^2 \right\rangle.$$

可是，对于重核子，电荷分布的有限大小是主要的影响。在非相对论近似下，将修正记为

$$\delta E \simeq e \int d^3x |\psi(x)|^2 \left[V(r) + \frac{Ze}{4\pi r}\right],$$

其中 $V(r)$ 是真正的势，而 $-(Ze/r)$ 是它的 Coulomb 近似.

$$\delta E \simeq e|\psi(0)|^2\int d^3x\left[V(r)+\frac{Ze}{4\pi r}\right]$$

$$\simeq \frac{e}{6}|\psi(0)|^2\int d^3x r^2\Delta V$$

$$\simeq \frac{e}{6}|\psi(0)|^2 Ze\langle r^2\rangle_{质子},$$

其中我们已代入 $\Delta r^2=6$，做了分部积分，并用了 Poisson 定律 $\Delta V=-\rho$，$\int \rho d^3x=-Ze$. 根据式(2-84)，这种效应正比于 $Z^4$. 实际上，这种效应可用于同位素的分离. 用一束激光将给定的同位素激发到某个能级，再用另一束激光使它电离，即可实现静电分离.

第二个结果是临界值 $Z_c\simeq 137$（超过了这个值基态就变得不稳定）被扩大到一个更大的值 $Z\simeq 175$.

二体相对论修正　一个正确的处理还应当包含核子的反冲. 这是一个困难的问题，可以用相对论的二体方程(第十章)来解决. 然而，一个启发式的论证可以为这个问题提供某些启示. 从 Schrödinger 方程和 Klein-Gordon 方程的预言[式(2-83)和(2-86)]我们看到，在二种情况下它们都可以通过对速度 $v$ 加上如下的条件而得到解释：

$$\frac{i\alpha}{|\mathbf{v}|}=n=\text{正整数}.$$

实际上，在 Schrödinger 情况下

$$E=\frac{m\mathbf{v}^2}{2}=-\frac{m\alpha^2}{2n^2},$$

而对于 Klein-Gordon 方程，$\mathbf{v}^2=\mathbf{p}^2/E^2$，

$$\frac{E^2-m^2}{E^2}=-\frac{\alpha^2}{n^2}$$

或

$$E=\frac{m}{(1+\alpha^2/n^2)^{1/2}}.$$

于是，象式 (2-86) 那样用 $n-\delta_j$ 替换 $n$，即得所要求的结果．在二体问题中，我们假设恰当的速度是相对速度，即在一个粒子的静止系中测得的另一粒子的速度，则

$$E_{tot}^2 = (p+P)^2 = m^2 + M^2 + \frac{2mM}{(1-\mathbf{v}^2)^{1/2}},$$

它对于对换 $m \longleftrightarrow M$ 是对称的．再利用经验规则

$$\mathbf{v}^2 = -\frac{\alpha^2}{(n-\delta_j)^2},$$

我们便得到

$$E_{tot}^2 = m^2 + M^2 + \frac{2mM}{[1+\alpha^2/(n-\delta_j)^2]^{1/2}},$$

或者

$$E_{tot} = m + M - \frac{\alpha}{2n^2}\frac{mM}{m+M} + \frac{\alpha^4}{8n^4}\frac{mM}{m+M} \times \left[3 - \frac{mM}{(m+M)^2}\right] - \frac{\alpha^4}{n^3}\frac{mM}{m+M} \times \frac{1}{2j+1} + O(\alpha^6).$$

这个表达式相当好地再现了用更加精细的处理得到的反冲效应．

## 2-4 空穴理论和电荷共轭

### 2-4-1 负能解的重新解释

不管 Dirac 方程成功的一面，我们必须放弃我们的鸵鸟政策而面对负能解的解释．正如前面所说，负能解的存在是不许可的，因为在最终的分析中它们的存在使所有的正能态都不稳定．

Dirac 早在 1930 年就利用多粒子理论提出了解决办法．

虽然这不是最终的立足点，比如它不适用于标量粒子，但是回顾他的论证是有教益的。它提供了一个在实际情况下有用的直观的物理图象，并容许与不同的情况，例如金属中的电子，作有效的类比。它的主要假设是，在真空态中所有的负能级都被填满。根据 Pauli 不相容原理，这样就阻止了任何电子落入这些负能态，从而保证了正能物理态的稳定性。反过来，负能海的电子可以被激发成为正能态，在海中就留下了一个空穴。处于负能量、负荷电态的空穴表现为正能量、荷正电的粒子——正电子。除了正电子的性质——它的电荷 $|e| = -e$，它的静止质量为 $m_e$ 之外，这个理论还预言了新的可观测的现象：

1. 电子-正电子对的湮灭。一个（正能）电子落入负能海的空穴时伴随辐射的发射。根据能量、动量守恒，至少要发射二个光子，除非存在一个核子来吸收能量和动量。

2. 相反，入射光子束在存在平衡能、动量的靶时，可从真空产生电子-正电子对。这是上面指出的过程：一个空穴产生了，同时被激发的电子获得正能量。

因此，理论预言了正电子的存在，并且的确于 1932 年发现了正电子。由于正电子和电子可以湮灭，我们必须放弃把 Dirac 方程解释成波方程。而且，作为抛弃 Klein-Gordon 方程的理由不再成立。正如我们将要看到的，Klein-Gordon 方程实际上描述无自旋粒子，例如 $\pi$ 介子。可是，空穴解释对玻色子不适用，因为在 Dirac 的论证中 Fermi 统计起了决定性的作用。

即使对于费米子，带无穷多电荷不可观测的海这种概念看来十分费解。我们已用一种真正的多体理论来代替它，这种理论以一种自洽的方法容纳粒子和反粒子。用“二次量子化”，即能够产生或湮灭粒子的量子场的引入，就能做到这一

点。

### 2-4-2 电荷共轭

空穴理论意味着服从同样的方程、具有相同质量和相反电荷的电子和正电子的存在。因此，Dirac 方程必须容纳一种新的相应于正、反粒子交换的对称性。所以，我们要寻找使电荷变号的变换 $\psi \to \psi^c$，即使得

$$(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m)\psi = 0,$$

以及

$$(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi^c = 0. \tag{2-96}$$

我们要求这个变换是定域的，而且变换二次的结果至多使 $\psi$ 乘上一个不可观测的相位。为了构造 $\psi^c$，将第一个方程求厄米共轭并转置，于是得到

$$[\gamma^{\mu T}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\bar{\psi}^T = 0,$$

其中 $\bar{\psi}^T = \gamma^{0T}\psi^*$。在 $\gamma$ 代数的任何表示中必定存在一个矩阵 $C$，它满足

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu. \tag{2-97}$$

例如，在表示式(2-10)中，$C$ 可以取为

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-97a}$$

$$-C = C^{-1} = C^T = C^+. \tag{2-97b}$$

于是，我们将 $\psi^c$ 等同于

$$\psi^c = \eta_c C\bar{\psi}^T, \tag{2-98}$$

其中 $\eta_c$ 是任意的不可观测的相位，通常将它取为 1。按照目前的框架，电荷共轭是一种反线性变换。这和空穴解释是一致的，因为在计算跃迁几率时，在某个态中粒子的存在将用 $\psi$ 来表示，而不存在这种粒子时用 $\psi^*$ 表示。我们更仔细地考察一下电荷共轭的性质。对于处于静止的自旋向下的负能电子

$\psi$，我们来计算 $\psi^c$。不存在外场时，

$$\psi = e^{imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \psi^c = \eta_c C\bar{\psi}^T = \eta_c e^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

因此，自旋向下的负能电子的电荷共轭等于自旋向上的正能电子。

我们知道，对于能动量为 $p$、极化沿 $n$ 的任意解 $\psi$，

$$\psi = \frac{\varepsilon\not{p} + m}{2m}\frac{1+\gamma_5\not{n}}{2}\psi, \quad p^0 > 0,$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$ 代表能量的符号。因为在 Dirac 表示中 $C$ 和 $\gamma_5 = \gamma_5^*$ 是对易的，

$$\begin{aligned}\psi^c = C\bar{\psi}^T &= C\gamma^0\left(\frac{\varepsilon\not{p}+m}{2m}\right)^*\left(\frac{1+\gamma_5\not{n}}{2}\right)^*\psi^* \\ &= \left(\frac{-\varepsilon\not{p}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma_5\not{n}}{2}\right)\psi^c, \qquad (2\text{-}99)\end{aligned}$$

所以 $\psi^c$ 用同样的四维矢量 $p$ 和 $n$ 来描述，但是能量变了号。采用记号式(2-48)，我们有

$$\begin{aligned}u(p,n) &= \eta(p,n)v^c(p,n), \\ v(p,n) &= \eta(p,n)u^c(p,n),\end{aligned} \qquad (2\text{-}100)$$

其中相位 $\eta(p,n)$ 可以依赖于 $p$ 和 $n$。我们记得，按照能量的符号，投影算符 $(1+\gamma_5\not{n})/2$ 投影到沿 $n$ 自旋为 $\pm\frac{1}{2}$ 的态，所以电荷共轭使自旋反向。

此外，我们还注意到，当旋量 $\psi$ 和势 $A$ 一起变换时，

$$\begin{aligned}\psi &\to \psi^c = \eta_c C\bar{\psi}^T, \\ A_\mu &\to A_\mu^c = -A_\mu,\end{aligned} \qquad (2\text{-}98a)$$

Dirac 方程(2-96)保持不变。

在电荷共轭下四维矢量流的变换规则为

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \to j_\mu^c = \bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^c$$
$$= \psi^T C\gamma_\mu C\bar{\psi}^T = \psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T.$$

我们可以很容易地得到结论 $j_\mu^c = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = j_\mu$. 可是，在下一章我们将会看到，$\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 必须看作反对易算符 (Fermi-Dirac 统计). 因此，电荷共轭将改变 $j_\mu$ 的符号，从而保持 $ej\cdot A$ 不变.

当我们对粒子和反粒子有了满意的公式表示时，在第三章中我们将研究最后一个分立对称性——时间反演——的复杂性.

### 2-4-3 零质量粒子

在 2-2-1 节中，当我们构造自由 Dirac 方程的旋量解时，我们去掉了 $m = 0$ 的无质量情形. 可是，中微子是无质量的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子. 另外，我们认为在非常高的能量下，有质量的粒子的行为象无质量粒子一样. 因此，我们需要重新考虑这种情形. 我们从无质量的 Dirac 方程出发，

$$\not{p}\psi = 0, \quad p_\mu = i\partial_\mu, \tag{2-101}$$

用 $\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 乘这个方程，即得

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p}\psi = \gamma^5 p^0\psi, \tag{2-102}$$

这是因为，例如有 $(\gamma^5\gamma^0)\gamma^1 = i\gamma^2\gamma^3 = \sigma^{23} \equiv \Sigma^1$. 手征算符 $\gamma_5$ 和 $\not{p}$ 反对易. 对于正能解

$$\psi(x) = e^{-ik\cdot x}\psi(k),$$

方程 (2-101) 要求 $k^2 = 0$，因此 $k^0 = E = |\mathbf{k}|$，于是方程 (2-102) 意味着

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{k}\psi = \gamma^5\psi, \tag{2-103}$$

因此手征性等于螺旋性(对负能解它们是相反的). 利用它们的手征性标记式(2-101)的独立解：

$$\psi(x)=\begin{cases}e^{-ik\cdot x}u_{\pm}(k)\\ e^{ik\cdot x}v_{\pm}(k)\end{cases}\quad \text{其中 } k^2=0,\ k^0=|\mathbf{k}|>0,$$

$$\gamma_5 u_{\pm}(k)=\pm u_{\pm}(k),$$
$$\gamma_5 v_{\pm}(k)=\pm v_{\pm}(k).$$

在通常的表示中 $\gamma_5=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$,

$$u_{\pm}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a_{\pm}(k)\\ \pm a_{\pm}(k)\end{pmatrix},$$

$$v_{\pm}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}b_{\pm}(k)\\ \pm b_{\pm}(k)\end{pmatrix},$$

$$a_+(k)=\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{k}a_+(k)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}\ e^{i\varphi}\end{pmatrix}=i\sigma_2 a_-^*(k),$$

$$a_-(k)=-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{k}a_-(k)=\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\ e^{-i\varphi}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}=-\ i\sigma_2 a_+^*(k),$$

其中 $\theta$ 和 $\varphi$ 是 $\hat{k}$ 的极角. 类似地有

$$v_+(k)=C\overline{u}_-^{\mathrm{T}}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\times\begin{pmatrix}b_+(k)=-i\sigma_2 a_-^*(k)=-\ a_+(k)\\ b_+(k)\end{pmatrix}=-\ u_+(k),$$

$$v_-(k)=C\overline{u}_+^{\mathrm{T}}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\times\begin{pmatrix}b_-(k)=i\sigma_2 a_+^*(k)=-a_-(k)\\ -b_-(k)\end{pmatrix}=-\ u_-(k).$$

对于给定的 $k$, 只存在二个独立的解.

实验观测表明，只存在手征性为负的中微子。中微子的螺旋性为 $-1$，反中微子的螺旋性为 $+1$。利用二分量旋量将更便于理解。实际上，对于无质量的 Dirac 方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi$$

其中代数

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=2\delta_{ij},$$

可以用三个二维的 Pauli 矩阵来实现，应用四分量旋量的理由不再成立。如果 $\alpha_i$ 等同于 $\sigma_i$，则导致正螺旋性、正能粒子，而 $\alpha_i\to-\sigma_i$ 给出负的螺旋性。由 H. Weyl 引入的这种旋量最初受到了抵制，因为它们和宇称守恒是不相容的(它们改变了宇称的符号)。这不再是一个严重的问题，因为中微子只参与宇称不守恒的弱相互作用。

在式(2-20)中我们已经引进了 $\alpha$ 矩阵的相应的手征表示

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \gamma^0=\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^5=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}.$$

对于正的手征性，$\gamma^5=+1$，$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\end{pmatrix}$，于是 $\gamma\cdot p\psi=0$ 简化为

$$(-p^0+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi=0, \tag{2-104}$$

而对于 $\gamma^5=-1$，$\psi=\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}$，简化为

$$(p^0+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi=0. \tag{2-105}$$

在这二种情况下，我们都得到二分量理论，于是 Dirac 方程等价于二个 Weyl 方程。所谓的电荷共轭 $C$(中微子不带电)联系着二种手征性，并改变了能量的符号。如果自然界只有具

有确定手征性的中微子，就没有 $C$ 不变性．实际上，由于宇称运算 $P$ 也联系着二类解

$$\phi(t, \mathbf{x}) \to \gamma^0 \phi(t, -\mathbf{x})$$

($\gamma^0$ 是反对角的)，联合运算 $CP$ 保持 Weyl 方程不变．在新的表示中，式(2-97)的矩阵 $C$ 为

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & \\ & i\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

因此，对于手征性 $\gamma^5 = \pm 1$，$CP$ 运算所起的作用分别是

$$\phi^{CP}(t, \mathbf{x}) = \eta C \phi^*(t, -\mathbf{x}) = \mp i\eta\sigma_2\phi^*(t, -\mathbf{x}). \tag{2-106}$$

我们看到，有质量解的 Lorentz 不变的归一化条件式(2-43a,b)，在无质量情况下必须修改．这时，我们将写成

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(k) = 2E\delta_{\alpha\beta},$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(k) = 2E\delta_{\alpha\beta},$$

并让读者自己构造合适的平面波解．

## 2-5 Dirac 传播子

### 2-5-1 自由传播子

在第一章中我们提出了经典标量场的 Green 函数的概念．在这里我们将把它推广到自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子．首先考虑自由传播．

我们尝试确定 $t_2$ 时刻 Dirac 方程的解，将它作为更早的 $t_1$ 时刻它的值的函数．这是可能的，因为我们涉及的是一阶方程．于是，我们寻找一个积分核 $K(x_2, x_1)$，使得

$$\phi(t_2, \mathbf{x}_2) = \int d^3x_1 K(t_2, \mathbf{x}_2; t_1, \mathbf{x}_1)\gamma^0\phi(t_1, \mathbf{x}_1), \tag{2-107}$$

$\gamma^0$ 的引入很快将被证明是合适的．任何解 $\phi$ 都是平面波解的

线性迭加，

$$\phi(t,\mathbf{x})=\sum_{(\alpha)}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left[a^{(\alpha)}(k)u^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}+b^{(\alpha)*}(k)v^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x}\right].$$

由关系式(2-43)，我们可以写出

$$\int d^3x\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}\gamma^0\phi(0,\mathbf{x})=a^{(\alpha)}(k),$$

和

$$\int d^3x\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x}\gamma^0\phi(0,\mathbf{x})=b^{(\alpha)*}(k).$$

因此，

$$\phi(t_2,\mathbf{x}_2)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha}\int d^3x_1\left[u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}+v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot(x_2-x_1)}\right]\gamma^0\phi(t_1,\mathbf{x}_1).$$

交换积分次序，我们找到所求的积分核为

$$K(t_2,\mathbf{x}_2;t_1,\mathbf{x}_1)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\sum_{\alpha}\left[u^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}+v^{(\alpha)}(k)\otimes\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot(x_2-x_1)}\right]$$

$$t_2>t_1. \qquad (2\text{-}108)$$

注意到$K$只依赖$(x_2-x_1)$，这是自由方程平移不变性的反映。我们也可以用式(2-40)和(2-41)的投影算符$\Lambda_{\pm}(K)$，重新把$K(x_2,x_1)$写成更紧凑的形式

$$K(x_2,x_1)=\theta(t_2-t_1)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}\times\left[(\not{k}+m)e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}+(\not{k}-m)e^{ik\cdot(x_2-x_1)}\right]. \qquad (2\text{-}109)$$

我们用$K_{+}$表示这个推迟核。我们直接证明它是 Dirac 方程的 Green 函数。将$(i\partial_2-m)$作用于$K_{ret}(x_2,x_1)$，给出

$$(i\partial_2-m)K_{ret}(x_2,x_1)=i\gamma^0\delta(t_2-t_1)\int\frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}$$

$$\times[(\not{k}+m)e^{ik\cdot(x_2-x_1)}+(\not{k}-m)e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}].$$

我们可以将右边第二项中的 $\mathbf{k}$ 改换成 $-\mathbf{k}$，则 $(\gamma\cdot\mathbf{k}+m)$ 的系数等于零，于是得到

$$(i\partial_2-m)K_{ret}(x_2,x_1)=i\delta^4(x_2-x_1). \tag{2-110}$$

也可以利用标量推迟 Green 函数 $G_{ret}(x_2-x_1)$ [式 (1-169)]，将 $K_{ret}(x_2,x_1)$ 表示成

$$K_{ret}(x_2-x_1)=-i(i\partial_2+m)G_{ret}(x_2-x_1).$$

方程(2-110)也可以从 $G_{ret}$ 满足的恒等式(1-165):

$$(\Box_2+m^2)G_{ret}(x_2-x_1)=\delta^4(x_2-x_1)$$

导出．由

$$G_{ret}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{-ik\cdot x}}{(k_0+i\varepsilon)^2-\mathbf{k}^2-m^2},$$

即得

$$K_{ret}(x)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik\cdot x}\frac{\not{k}+m}{(k_0+i\varepsilon)^2-\mathbf{k}^2-m^2},$$

其中首先必须沿图 2-3 中的虚线迴路对 $k_0$ 积分．

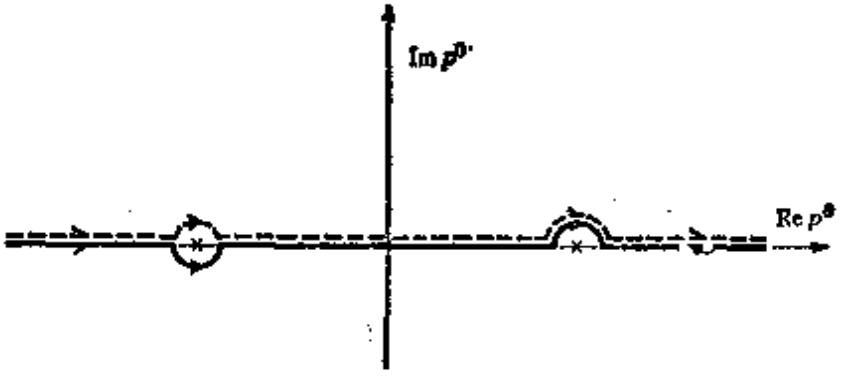



图 2-3　定义 Green 函数的积分迴路．虚线相应于推迟传播子，实线相应于 Feynman 传播子．

空穴理论建议引进各种 Green 函数，Feynman 传播子已在第一章的最后一节中讨论过．它将以自然的方式出现在量子场论中．然而，让我们先概略地叙述一下导致 Feynman 和 Stueckelberg 构造 Green 函数的思想．

一个 Green 函数可以被看成描述连续的三步：

1. 在 $(t_1,\mathbf{x}_1)$ 出现一个电子。

2. 电子从 $(t_1, \mathbf{x}_1)$ 传播到 $(t_2, \mathbf{x}_2)$。

3. 在 $(t_2, \mathbf{x}_2)$ 电子消失。

只要电子的能量是正的，这个过程对于 $t_2 > t_1$ 在物理上就是容许的。另一方面，如果我们处理一个负能电子，我们希望把它的消失解释为一个正电子的出现，而且反过来也是这样。第二步则应看作正电子从 $(t_2, \mathbf{x}_2)$ 传播到 $(t_1, \mathbf{x}_1)$，这只对 $t_2 < t_1$ 才有意义。因此，在空穴理论中，我们希望构造一个 Green 函数，它只对 $t_2 > t_1$ 传播正能解，只对 $t_1 > t_2$ 传播负能解(更精确地说是正电子)：

$$S_F(x_2, x_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} [\theta(t_2 - t_1) a(\not{k} + m) e^{-ik\cdot(x_2-x_1)} + \theta(t_1 - t_2) b(\not{k} - m) e^{ik\cdot(x_2-x_1)}],$$

常数 $a$ 和 $b$ 由下式决定：

$$(i\not{\partial}_2 - m) S_F(x_2, x_1) = \delta^4(x_2 - x_1) \qquad (2\text{-}111)$$

[注意这里的归一化不同于式(2-110)]。简单的计算给出

$$(i\not{\partial}_2 - m) S_F(x_2, x_1) = i\delta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3} \times \gamma^0 [a(\not{k} + m) e^{ik\cdot(x_2-x_1)} - b(\not{k} - m) e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}]$$

$$= i\delta(t_2 - t_1) \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x_2-x_1)} \times \gamma^0 [a(E\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k} + m) - b(E\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k} - m)].$$

只要 $a = -b = 1/i$，条件式(2-111)就被满足。因此，其结果是

$$S_F(x_2 - x_1) = \frac{1}{i} \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3} [\theta(t_2 - t_1)(\not{k} + m) e^{-ik\cdot(x_2-x_1)} - \theta(t_1 - t_2)(\not{k} - m) e^{ik\cdot(x_2-x_1)}, \qquad (2\text{-}112)$$

$K_{ret}(x_2 - x_1)$ 和 $iS_F(x_2 - x_1)$ 可以只相差齐次 Dirac 方程的解。的确，直接计算发现正是这样：

$$K_{ret}(x_2 - x_1) - iS_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3k}{2E(2\pi)^3}$$
$$\times (\not{k} - m)e^{i(k\cdot(x_2-x_1)}.$$

利用积分表示式

$$\theta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2i\pi} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon},$$

可得协变的表达式. 极限 $\varepsilon \to 0_+$ 的意义下面就会明白. 我们处理的量是作用在光滑尝试函数上的广义函数. 将这个表达式代入式(2-112),即得

$$S_F(x) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E} \left[ (\not{k} + m)e^{-ik\cdot x} \int_{-\infty}^{\infty} \right.$$
$$\times \frac{d\omega}{\omega - i\varepsilon} e^{i\omega t} - (\not{k} - m)e^{ik\cdot x}$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - i\varepsilon} e^{-i\omega t} \right].$$

在第一个积分中,我们令 $p^0 = E - \omega$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}[E = k^0 = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}]$, 在第二个积分中令 $p^0 = \omega - E$, $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$, 故

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{2E} \left[ \frac{E\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - m}{E + p^0 - i\varepsilon} \right.$$
$$\left. - \frac{E\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m}{E - p^0 - i\varepsilon} \right].$$

对于趋于零的正数 $\varepsilon$, 我们可以写出

$$(E + p^0 - i\varepsilon)(E - p^0 - i\varepsilon)$$
$$= -(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\varepsilon).$$

最后,

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} \cdot \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \qquad (2\text{-}113)$$

$i\varepsilon$ 项对动量的积分作了规定, 首先沿图 2-3 中表出的实线迴路对 $p^0$ 积分, 然后对 $\mathbf{p}$ 积分. 如果我们把 $m$ 看成复数

$m_c = m - i\varepsilon$，$\varepsilon \to 0_+$，则有

$$\frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\not p + m_c}{p^2 - m_c^2} = \frac{1}{\not p - m_c}$$
$$= \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}.$$

因此，可以把 $S_F(x)$ 的 Fourier 变换写为

$$S_F(p) = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}. \qquad (2\text{-}114)$$

注意，$S_F(x)$ 和标量场的 Feynman 传播子式(1-178)之间的关系为

$$S_F(x) = -(i\not\partial + m)G_F(x). \qquad (2\text{-}115)$$

总之，Feynman 传播子的作用是朝正时方向传播正频率，朝反时间方向传播负频率。

对 $t_1 < t_2$ 和所有的 $\mathbf{x}$，令 $\phi^{(+)}(t_1, \mathbf{x})$ 和 $\phi^{(-)}(t_2, \mathbf{x})$ 分别是 $t_1$ 和 $t_2$ 时解的正频分量和负频分量。传播子 $S_F$ 使我们得到 $t_1$ 和 $t_2$ 之间某个时刻 $t$ 的 $\phi(t, \mathbf{x})$：

$$\phi(t, \mathbf{x}) = i\int d^3y[S_F(t - t_1, \mathbf{x} - \mathbf{y})\gamma^0\phi^{(+)}(t_1, \mathbf{y})$$
$$- S_F(t - t_2, \mathbf{x} - \mathbf{y})\gamma^0\phi^{(-)}(t_2, \mathbf{y})]. \qquad (2\text{-}116)$$

### 2-5-2 在任意外电磁场中的传播

实际上，我们要处理存在障碍时的传播：扩散、外场和与其它粒子的相互作用。我们来讨论在外电磁场中的传播：

$$[i\not\partial_2 - e\not A(x_2) - m]S_A(x_2, x_1) = \delta^4(x_2 - x_1). \qquad (2\text{-}117)$$

除少数例外情况，我们找不到 $S_A$ 的一个简洁的表达式。幸好，通常出现的项 $e\not A$ 总是很小，足以当作微扰来处理，于是 $S_A$ 可以表示成 $e\not A$ 的(渐近的)展开。为了导出它，我们用 $S_F(x_3, x_2)$ 乘式(2-117)的二边，并对 $x_2$ 积分：

$$S_F(x_3, x_1) = \int d^4x_2 S_F(x_3, x_2)[i\vec{\partial}_2 - eA(x_2) - m]S_A(x_2, x_1)$$

$$= \int d^4x_2 S_F(x_3, x_2)[-i\overleftarrow{\partial}_2 - eA(x_2) - m]S_A(x_2, x_1),$$

从式(2-111)即得

$$S_F(x_3, x_2)(-i\overleftarrow{\partial}_3 - m) = \delta^4(x_3 - x_2).$$

因此，确定 $S_A$ 的积分方程为

$$S_A(x_3, x_1) = S_F(x_3, x_1) + e\int d^4x_2 S_F(x_3, x_2) \times A(x_2)S_A(x_2, x_1). \tag{2-118}$$

方程(2-118)适合于用迭代法求得微扰展开式：

$$S_A(x_f, x_i) = S_F(x_f, x_i) + \int d^4x_1 S_F(x_f, x_1)eA(x_1)S_F(x_1, x_i) + \iint d^4x_1 d^4x_2 S_F(x_f, x_2)eA(x_2)S_F(x_2, x_1)eA(x_1) \times S_F(x_1, x_i) + \cdots. \tag{2-119}$$

这个展开式的图解描述见图 2-4。

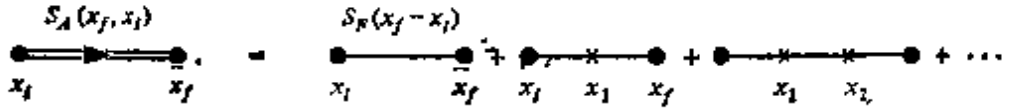



图 2-4　微扰展开式(2-119)的图解表示．$x_k$ 和 $x_l$ 之间的实线表示传播子 $S_F(x_k - x_l)$，叉号表示 $eA(x)$.

引入 $S_A$ 和 $A(x)$ 的 Fourier 变换：

$$S_A(x_f, x_i) = \iint \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_f}{(2\pi)^4} e^{-i(p_f \cdot x_f - p_i \cdot x_i)}S_A(p_f, p_i),$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A_\mu(p)e^{-ip\cdot x}$$

(为了简单起见，在组态空间和动量空间我们用相同的符号)，也可以写出 $S_A(p_f, p_i)$ 的微扰展开式．由于 $S_F(x_f, x_i) = S_F(x_f - x_i)$ 是平移不变的，

$$S_F(p_f, p_i) = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)S_F(p_i)$$

其中 $S_F(p)$ 已给出在(2-114)中，于是

$$S_A(p_f, p_i) = S_F(p_i)(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i) + \int d^4p_1 S_F(p_f)eA(p_1)$$
$$\times S_F(p_i)(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_1 - p_i) + \iint d^4p_1 d^4p_2 S_F(p_f)$$
$$\times eA(p_1)S_F(p_2 + p_i)eA(p_2)S_F(p_i)(2\pi)^4\delta^4(p_f$$
$$- p_1 - p_2 - p_i) + \cdots.$$

## 2-5-3 对 Coulomb 散射的应用

Coulomb 散射将被用作检验传播子方法的基础。要研究的过程是质量为 $m$ 的荷电电子被带电荷 $-Ze$、质量为无穷大的核心的散射。后者产生势 $A_0 = -Ze/4\pi r$，$\mathbf{A} = 0$，其中 $\mathbf{r}$ 表示连接中心和电荷的矢量。

在经典的非相对论力学中，其轨道是双曲线。散射角 $\theta$ 和碰撞参数 $b$（记号见图 2-5）由下列关系相联系：

1. 几何关系：

$$\frac{a}{b} = \tan\frac{\theta}{2}, \quad \frac{b}{c} = \cos\frac{\theta}{2}.$$

2. 能量守恒：

$$\varepsilon = \frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} = \frac{p_A^2}{2m} - \frac{Z\alpha}{c - a}$$

（$p_A$ 是在点 $A$ 的动量）。

3. 角动量守恒：

$$l = p_i b = p_f b = p_A(c - a).$$

消去 $p_i$，$p_A$，$c$ 和 $a$，即得

$$b = \frac{Z\alpha}{2\varepsilon\tan\theta/2}. \tag{2-120}$$

我们考虑密度为 $\rho$、入射速度为 $v = p_i/m = p_f/m$ 的均匀电子通量。单位时间内射入立体角 $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$ 的粒子数，

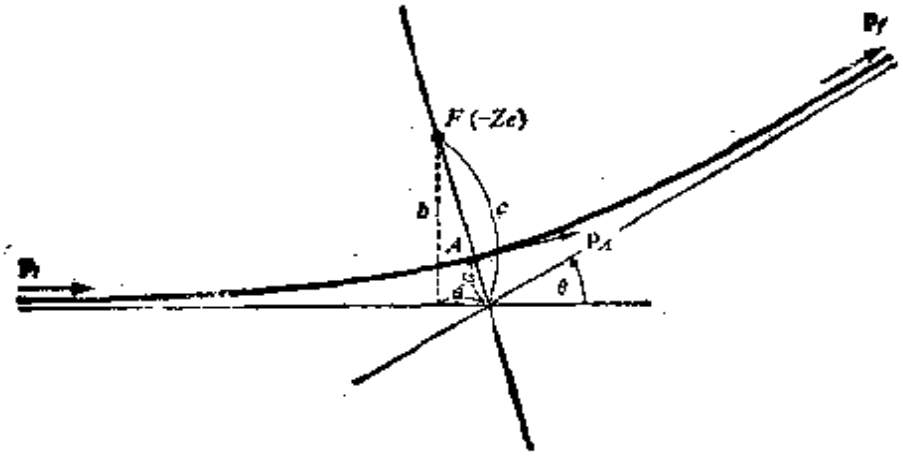



图 2-5　由位于 $F$ 的电荷产生的 Coulomb 散射

等于面积为 $2\pi b\,db$ 的环上的入射粒子数，即

$$\frac{dN}{dt} = \rho v 2\pi b\,db = \rho v \left(\frac{Z\alpha}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}.$$

因此，定义为 $dN/dtd\Omega$ 与入射通量之比的微分截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\sin^4\theta/2}\left(\frac{Z\alpha}{2\varepsilon}\right)^2 = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}, \qquad (2\text{-}121)$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ 是动量转移，并有 $|\mathbf{q}| = 2p_i\sin\theta/2$。式(2-121)是经典的 Rutherford 公式。

现在回到相对论的量子情形。我们将应用在式(2-116)中导出的式子，将 $S_F$ 换成 $S_A$，并取如下的边界条件：对于 $t_1 = -\infty$，$\psi^{(+)}(t_1, \mathbf{x})$ 是正能电子的入射平面波，而对于 $t_2 = +\infty$，$\psi^{(-)}(t_2, \mathbf{x})$ 等于零。由于我们并不知道 $S_A$，我们只取微扰展开式(2-119)的前二级。令 $\psi_{\text{inc}}(t, \mathbf{x})$ 是自由 Dirac 方程的解，当 $t \to t_1 = -\infty$ 时它还原为入射波。按照式(2-119)，微扰波函数为

$$\psi(x) = \psi_{\text{inc}}(x) + \psi_{\text{diff}}(x), \qquad (2\text{-}122)$$

其中

$$\psi_{\text{diff}}(x) = \lim_{t_1\to-\infty} i\int d^3y \int d^4z S_F(x-z)e\mathcal{A}(z)S_F(z-y)$$

$$\times\gamma^0\psi_{\rm inc}(t_1,\mathbf{y})\quad y\equiv(t_1,\mathbf{y}). \tag{2-123}$$

因为对于 $z^0>t_1$，

$$i\int d^3y S_F(z-y)\gamma^0\psi_{\rm inc}(t_1,y)=\psi_{\rm inc}(z),$$

我们有

$$\psi_{\rm diff}(x)=\int d^4z S_F(x-z)e\mathcal{A}(z)\psi_{\rm inc}(z).$$

当 $x^0$ 趋于 $+\infty$ 时，$\psi_{\rm diff}$ 的行为象自由 Dirac 方程的纯正能解。实际上利用表达式(2-112)，我们看到，在这个极限下只有第一项有贡献，于是得到

$$\psi_{\rm diff}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\int d^4z\frac{\not p+m}{2m}e^{-ip\cdot(x-z)}$$
$$\times[-ie\mathcal{A}(z)]\psi_{\rm inc}(z)=\sum_{k_f,\alpha}$$
$$\times\left(\frac{m}{VE_f}\right)^{1/2}e^{-ip_f\cdot x}u^{(\alpha)}(p_f)S_{fi}, \tag{2-124}$$

其中

$$S_{fi}=-ie\int d^4z\left(\frac{m}{VE_f}\right)^{1/2}\bar u^{(\alpha)}(p_f)\mathcal{A}(z)e^{ip_f\cdot z}\psi_i(z). \tag{2-125}$$

在式(2-124)的第二个式子中，求和$\int d^3p/(2\pi)^3$已换成在有限空间体积 $V$ 中对末态的求和：$1/V\sum_{\text{final state}k_f,\alpha}$，于是波 $(m/VE)^{1/2}e^{-ip\cdot x}u^{(\alpha)}(p)$ 描述体积 $V$ 中速度为 $\mathbf{p}/E$、极化为 $\alpha$ 的粒子。因此，态

$$\psi_i(x)=\left(\frac{m}{VE_i}\right)^{1/2}e^{-ip_i\cdot x}u^{(\beta)}(p_i),$$

和类似的态 $\psi_j(x)$ 之间的跃迁振幅是

$$S_{fi}=-ie\frac{m}{V(E_iE_f)^{1/2}}\int d^4z\bar u^{(\alpha)}(p_f)\mathcal{A}(x)$$

$$\times e^{i(p_f-p_i)\cdot x}u^{(\beta)}(p_i). \qquad (2\text{-}125a)$$

对于 Coulomb 问题，$A \equiv (A_0, \mathbf{0})$，$A_0 = -Ze/4\pi r$，因此，

$$S_{fi} = \frac{iZ\alpha}{V}\frac{m}{(E_iE_f)^{1/2}}2\pi\delta(E_f-E_i)\int d^3r \times \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{r}\bar{u}^{(\alpha)}(p_f)\gamma^0u^{(\beta)}(p_i). \qquad (2\text{-}126)$$

令人满意的是重新得到了能量守恒。最后，我们需要势的 Fourier 变换

$$\int d^3r\,\frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{r} = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i.$$

我们用稳定的平面波而不用波包，那么毫不奇怪，振幅 (2-126) 不能自乘。这可以得到补救，如果根据 Fermi 的重要规则考虑有限时间间隔并将 $\delta$ 函数换成

$$2\pi\delta(E_f-E_i) = \int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{i(E_f-E_i)t} \to \int_{-T/2}^{T/2}dt\,e^{i(E_f-E_i)t} = \frac{2\sin[T(E_f-E_i)/2]}{E_f-E_i}.$$

对于大的 $T$，这个表达式的平方的行为象 $T2\pi\delta(E_f-E_i)$。

于是，每单位时间每个入射粒子态 $i$ 和 $f$ 之间的跃迁几率是

$$\frac{dP_{fi}}{dt} = \int\left|\frac{iZ\alpha}{V}\frac{m}{(E_fE_i)^{1/2}}\frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}\bar{u}^{(\alpha)}(p_f)\gamma^0u^{(\beta)}(p_i)\right|^2 \times 2\pi\delta(E_f-E_i)V\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}, \qquad (2\text{-}127)$$

求和遍及所有可能的末态，在动量体积元 $d^3p_f$ 中，可能的末态数是 $Vd^3p_f/(2\pi)^3$。除以入射通量 $(1/V)(|\mathbf{p}_i|/E_i)$，即得微分截面

$$d\sigma_{fi} = \int \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{p}_i|E_f|\mathbf{q}|^4}\delta(E_f - E_i)p_f^2dp_fd\Omega_f$$
$$\times |\bar{u}^{(\alpha)}(p_f)\gamma^0u^{(\beta)}(p_i)|^2.$$

为了对 $p_f$ 进行积分，我们用 $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = p_f$ 以及 $p_fdp_f = E_fdE_f$，于是

$$d\sigma_{fi} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}|\bar{u}^{(\alpha)}(p_f)\gamma^0u^{(\beta)}(p_i)|^2d\Omega_f. \qquad (2\text{-}128)$$

在非相对论极限下，$\bar{u}^{(\alpha)}\gamma^0u^{(\beta)}$正比于 $\delta^{\alpha\beta}$。如果我们不观测末态的极化，就必须对 $\alpha$ 求和，而对不极化的入射态，需对二个等几率的极化 $\beta$ 求平均：

$$\left.\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega}\right|_{\text{非极化}} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\sum_{\alpha}\frac{1}{2}\sum_{\beta}|\bar{u}^{(\alpha)}(p_f)\gamma^0u^{(\beta)}(p_i)|^2$$
$$= \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\mathbf{q}|^4}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m}{2m}\gamma^0\right.$$
$$\left.\times\frac{\not{p}_f + m}{2m}\right). \qquad (2\text{-}129)$$

再一次应用了式(2-40)。现在我们需要 $\gamma$ 矩阵的求迹公式。对于任意奇数个 $\gamma$ 矩阵的乘积，其迹为零。对于偶数个 $\gamma$ 矩阵，通过引入如下的等式可以证明下面一些恒等式：

$$\mathrm{tr}(a_1a_2\cdots a_{2n}) = a_1\cdot a_2\mathrm{tr}(a_3\cdots a_{2n})$$
$$- a_1\cdot a_3\mathrm{tr}(a_2a_4\cdots a_{2n}) + \cdots,$$

在这里它化为

$$\mathrm{tr}\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f = 4(E_iE_f - p_i\cdot p_f + E_iE_f),$$
$$\mathrm{tr}\gamma^0\gamma^0 = 4.$$

我们还需要运动学关系式

$$E_i = E_f = E,$$
$$p_i\cdot p_f = E^2 - p^2\cos\theta = m^2 + 2E^2\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

其中 $\beta = v/c = |\mathbf{p}|/E$ 是入射(或出射)速度,另外

$$|\mathbf{q}|^4 = 16|\mathbf{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2} = 16\beta^2E^2\mathbf{p}^2\sin^4\frac{\theta}{2}.$$

非极化截面 (Mott 截面)的最终表达式是

$$\left.\frac{d\sigma}{dQ}\right|_{\text{非极化}} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\mathbf{p}^2\beta^2\sin^4\dfrac{\theta}{2}}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \quad (2\text{-}130)$$

当 $\beta \to 0$ 时,它还原成 Rutherford 公式. 我们还注意到,相对论修正 $(1-\beta^2\sin^2\theta/2)\ (1-\beta^2)^{-1}$ 主要影响朝后散射.

这是对入射电子导出的结果. 我们再粗略地讨论在同样的 Coulomb 场中正电子的散射. 现在吸引的 Coulomb 力被换成了排斥力. 在经典的非相对论力学中,这将导致同样的 Rutherford 公式(这个值得注意的结果是 Coulomb 场的独特的性质). 我们已知道,在量子处理中理论在电荷共轭下是不变的. 电子离开电荷 $-Ze$ 的散射和正电子离开电荷 $Ze$ 的散射是一样的. 另一方面,最低阶截面是 $Z$ 的偶函数,因此 Mott 截面对正电子也是适用的.

我们可以用直接的计算来验证这一点;更确切地说,我们将用空穴理论来进行解释. 一个四维动量为 $p_f$、极化为 $\alpha$ 的出射正电子,被表示为按时间往回跑的"入射"负能解:

$$\phi^{(-)}(x) = e^{ip_f\cdot x}v^{(-\alpha)}(p_f), \quad p_f^0 > 0.$$

于是,我们回到了式(2-116),这次将用边界条件

$$\phi^{(+)}(t_1, \mathbf{x}) = 0, \quad t_1 = -\infty,$$

$$\phi^{(-)}(t_2, \mathbf{x}) = e^{ip_f\cdot x}v^{(-\alpha)}(p_f), \quad x^0 = t_2 = +\infty,$$

重复从式(2-122)到式(2-125a)的步骤,适当注意其符号,即得

$$S_{fi} = ie\int d^4z\left(\frac{m^2}{V^2E_iE_f}\right)^{1/2}\bar{v}^{(-\beta)}(p_i)e^{i(p_f-p_i)\cdot z}\mathcal{A}(z)v^{(-\alpha)}(p_f),$$

和直接的计算一致. 入射正电子用如下的波函数描述:

$$\phi_i^c(x) = e^{-ip_i\cdot x}u^{(\beta)}(p_i) = Ce^{-ip_i\cdot x}\bar{v}^{(-\beta)T}(p_i)$$

(可以相差一相位). 按照式(2-125),用

$$S_{fi} = ie\int d^4x\bar{\phi}_f^c(x)\mathcal{A}(x)\phi_i^c(x)$$

$$= -ie\left(\frac{m^2}{V^2E_iE_f}\right)^{1/2}\int d^4xv^{(-\alpha)T}(p_f)C^{-1}\mathcal{A}C\bar{v}^{(-\beta)T}(p_i)$$

$$\times e^{i(p_f-p_i)\cdot x} = ie\left(\frac{m^2}{V^2E_iE_f}\right)^{1/2}$$

$$\times\int d^4x\bar{v}^{(-\beta)}(p_i)\mathcal{A}v^{(-\alpha)}(p_f)e^{i(p_f-p_i)\cdot x} \qquad (2\text{-}131)$$

描述电荷为 $-e$ 的正电子的散射. 现在很明显,这个式子导致了截面式(2-128).

读者可以自己去讨论极化效应或由核子的反冲引起的修正. 我们将简单地回忆一下有用的形状因子的概念. 假设代替类点电荷,我们来研究被有限电荷分布、有限半径的核子的散射. 球对称分布 $-Ze\rho(r)$ 按照

$$\int\rho(r)d^3r = 1$$

来归一. 和式(2-126)一样,到 $\alpha$ 的最低阶的截面正比于 $|\tilde{V}(q)|^2$,其中 $\tilde{V}(q)$ 是势 $V(r)$ 的 Fourier 变换. 从 Poisson 方程 $\Delta V = -\rho$ 知道,$\tilde{V}(q)$ 和形状因子

$$\tilde{\rho}(q) = \int\rho(r)e^{-iq\cdot r}d^3r$$

的关系是 $\tilde{V}(q) = (1/q^2)\tilde{\rho}(q)$. 因此,截面必须修改为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Mott}}|\tilde{\rho}(q)|^2. \qquad (2\text{-}132)$$

## 2-5-4 Fock-Schwinger 固有时间方法

为了补充先前的有关传播子的研究,我们将提出由 Fock 和 Schwinger 引入的一种优美的方法,并应用这种方法于两种外电磁场的特殊组态中给出 Dirac 传播子的精确表达式:不变的均匀场和在经典理论

中我们已经碰到过的平面波场.

假定我们寻找

$$H(x, i\partial_x)G(x, x') = \delta^4(x - x') \qquad (2\text{-}133)$$

的 Green 函数 $G(x, x')$ 的解，其中$H$是 $\partial_x$ 的多项式. 基本的想法是把$H$看成描述某个系统随固有时间演变的哈密顿量. 在 $x$ 表象中

$$\begin{aligned} &\langle x|x'\rangle = \delta^4(x - x'), \\ &[x^\mu, p^\nu] = -ig^{\mu\nu}, \qquad p_\mu = i\partial_\mu. \end{aligned} \qquad (2\text{-}134)$$

上面的方程只不过是 $H(x, p)$ 的 Green 函数的定义. 引入么正的演化算符 $U(x, x'; \tau)$:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}U(x, x'; \tau) = H(x, p)U(x, x'; \tau), \qquad (2\text{-}135)$$

它带有边界条件

$$\lim_{\tau\to 0} U(x, x'; \tau) = \delta^4(x - x'), \qquad (2\text{-}136a)$$

$$\lim_{\tau\to -\infty} U(x, x'; \tau) = 0, \qquad (2\text{-}136b)$$

我们有

$$U(x, x'; \tau) = \langle x|e^{-iH\tau}|x'\rangle \equiv \langle x|U(\tau)|x'\rangle, \qquad (2\text{-}137)$$

$$G(x, x') = -i\int_{-\infty}^{0} d\tau U(x, x'; \tau). \qquad (2\text{-}138)$$

方程(2-135)可以改写成

$$\begin{aligned} i\partial_\tau\langle x|U(\tau)|x'\rangle &= \langle x|H(x, p)U|x'\rangle \\ &= \langle x|U(\tau)U^+(\tau)H(x, p)U(\tau)|x'\rangle, \end{aligned}$$

或

$$i\partial_\tau\langle x(\tau)|x'(0)\rangle = \langle x(\tau)|H(x(\tau), p(\tau))|x'(0)\rangle. \qquad (2\text{-}139)$$

所用的记号是显而易见的. 在适当的情况下，我们能求解显示量子方法和经典方法之间的关系的 $x(\tau)$ 和 $p(\tau)$. 然后，把 $H(x(\tau), p(\tau))$ 表示成适当安排次序的算符 $x(\tau)$ 和 $x'(0)$

的函数：

$$\langle x(\tau)|H(x(\tau),p(\tau))|x'(0)\rangle$$
$$=F(x,x';\tau)\langle x(\tau)|x'(0)\rangle,$$

于是关于 $U(x,x';\tau)$ 的方程变成了通常的线性微分方程，它可以积分成

$$U(x,x';\tau)=\exp\left[-i\int^{\tau}d\tau' F(x,x';\tau')\right]C(x,x'),$$

其中 $C(x,x')$ 仍然这样来确定，使得 $U(x,x';\tau)$ 满足位置和动量之间的正确关系，例如

$$[i\partial_\mu^x-eA_\mu(x)]\langle x(\tau)|x'(0)\rangle=\langle x(\tau)|\pi_\mu(\tau)|x(0)\rangle$$
$$[-i\partial_\mu^{x'}-eA_\mu(x')]\langle x(\tau)|x'(0)\rangle=\langle x(\tau)|\pi_\mu(0)|x(0)\rangle$$
$$\pi_\mu\equiv p_\mu-eA_\mu. \qquad (2\text{-}140)$$

在和外电磁场相互作用的 Dirac 粒子的情况下，我们必须求解

$$[i\not\partial-e\not A(x)-m]S_A(x,x')=\delta^4(x-x').$$

用

$$S_A(x,x')=[i\not\partial-e\not A(x)+m]G_A(x,x') \qquad (2\text{-}141)$$

定义的 $G_A(x,x')$，满足

$$HG_A\equiv\left[(i\partial-eA)^2-m^2-\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$
$$\times G_A(x,x')=\delta^4(x-x'). \qquad (2\text{-}142)$$

在 Heisenberg 表象中，算符 $x(\tau)=U^+(\tau)xU(\tau)$ 和 $\pi(\tau)=U^+(\tau)\pi U(\tau)$ 满足 Ehrenfest 关系

$$\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}=i[H,x_\mu]=-2\pi_\mu,$$

$$\frac{d\pi_\mu(\tau)}{d\tau}=i[H,\pi_\mu]=-2eF_{\mu\rho}\pi^\rho-ie\partial^\rho F_{\mu\rho}$$
$$-\frac{e}{2}\partial_\mu F_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}, \qquad (2\text{-}143)$$

这是因为 $[\pi_\mu, \pi_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$.

首先考虑常数场，上面的方程简化成

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = -2\pi_\mu, \quad \frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -2eF_{\mu\rho}\pi^\rho. \tag{2-144}$$

利用矩阵记号

$$\pi(\tau) = e^{-2eF\tau}\pi(0),$$

$$x(\tau) - x(0) = \left(\frac{e^{-2eF\tau} - 1}{eF}\right)\pi(0).$$

这些方程很容易积分。 然后计算 $\pi(\tau)$，把它作为 $x(\tau)$ 和 $x(0)$ 的函数：

$$\pi(\tau) = -\frac{1}{2}eFe^{-eF\tau}[\sinh(eF\tau)]^{-1}[x(\tau) - x(0)],$$

再利用 $F$ 的反对称性

$$\pi^2(\tau) = [x(\tau) - x(0)]K[x(\tau) - x(0)],$$

其中

$$K \equiv \frac{1}{4}e^2F^2[\sinh(eF\tau)]^{-2},$$

重新整理这个表达式，其中要用到对易子 $[x(\tau), x(0)]$：

$$[x_\mu(\tau), x_\nu(0)] = i\left(\frac{e^{-2eF\tau} - 1}{eF}\right)_{\mu\nu}.$$

最后，我们得到 $H$ 为

$$H = \pi(\tau)K\pi(\tau) - 2x(\tau)K\pi(0) + x(0)K\pi(0)$$
$$-\frac{i}{2}\mathrm{tr}[eF\coth(eF\tau)] - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2. \tag{2-145}$$

$U(x, x'; \tau)$ 满足的微分方程是

$$i\partial_\tau U(x, x'; \tau) = \left\{-\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m^2 + (x - x')\right.$$
$$\times K(x - x') - \frac{i}{2}\mathrm{tr}$$

$$\times [eF\coth anh(eF\tau)]\Big\} U(x, x'; \tau),$$

积分后给出

$$U(x, x'; \tau) = C(x, x')\tau^{-2}\exp\Big\{-\frac{1}{2} i\tau \ln$$

$$\times [(eF\tau)^{-1}\sinh(eF\tau)]\Big\}\exp$$

$$\times \Big[\frac{i}{4}(x - x')eF\coth(eF\tau)(x - x')$$

$$+ \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\tau + im^2\tau\Big].$$

函数 $C(x, x')$ 由方程(2-140)确定，它导致了方程

$$\Big[i\partial_\mu^x - eA_\mu(x) - \frac{eF_{\mu\nu}}{2}(x - x')^\nu\Big] C(x, x') = 0,$$

$$\Big[-i\partial_\mu^{x'} - eA_\mu(x') + \frac{eF_{\mu\nu}}{2}(x - x')^\nu\Big] C(x, x') = 0.$$

方程的解具有如下形式：

$$C(x, x') = C(x')\exp - ie\int_{x'}^{x} d\xi$$

$$\cdot \Big[A(\xi) + \frac{1}{2}F(\xi - x')\Big].$$

因为 $A_\mu(\xi) + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\xi - x')^\nu$ 的旋度为零，积分与积分的路径无关. 取从 $x'$ 到 $x$ 的直线作为积分路径，由于 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性，第二项没有贡献，于是我们可以写成

$$C(x, x') = C\exp - ie\int_{x'}^{x} d\xi \cdot A(\xi).$$

最后由式(2-136a)确定的常数 $C$ 为

$$C = -\frac{i}{(4\pi)^2}.$$

概括地说，常数场中的传播子为

$$S_A(x, x') = [i\partial_x - eA(x) + m](-i) \times \int_{-\infty}^{0} d\tau U(x, x'; \tau), \tag{2-141a}$$

其中

$$U(x, x'; \tau) = \frac{-i}{(4\pi)^2\tau^2}\exp\left\{-ie\int_{x'}^{x} d\xi^\mu A_\mu(\xi) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln[(eF\tau)^{-1}\sinh(eF\tau)] + \frac{i}{4}(x-x')eF\coth(eF\tau)(x-x') + \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\tau + i(m^2 - i\varepsilon)\tau\right\}. \tag{2-146}$$

注意到 $-i\varepsilon$ 项的存在［为了满足式 (2-136b)］以及相因子 $\exp -ie\int d\xi \cdot A$ 的存在，它的作用是使 $U$ 规范协变；当 $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$ 时，

$$U(x, x'; \tau) \to e^{-ie\Lambda(x)}U(x, x'; \tau)e^{ie\Lambda(x')}.$$

现在回到平面波的情况。计算和先前的十分相似，所以我们只概述相继的几步。考虑线性极化平面波，并用 2-2-3 节中的符号：$A_\mu = \varepsilon_\mu f(\xi)$，$\xi = n \cdot x$，$n^2 = 0$，$F_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu}f'(\xi)$，其中 $\phi_{\mu\nu} = n_\mu\varepsilon_\nu - n_\nu\varepsilon_\mu$。注意到 $\partial^\rho F_{\mu\rho} = 0$，因此方程 (2-143)有如下形式：

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = -2\pi_\mu,$$

$$\frac{d\pi_\mu}{d\tau} = -2e\phi_{\mu\rho}\pi^\rho f'(\xi) - \frac{e}{2}n_\mu\phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}f''(\xi). \tag{2-147}$$

注意到 $(d/d\tau)(\pi \cdot n) = 0$，$d\xi/d\tau = -2\pi \cdot n$ 及 $[\xi, d\xi/$

$d\tau] = 0$，我们首先求解 $\xi$：

$$\xi(\tau) = n \cdot x(\tau) = \xi(0) - 2\pi \cdot n\tau,$$

然后积分 $\phi^{\nu\mu}\pi_\mu$ 的方程，得到

$$\phi^{\nu\mu}\pi_\mu = en^\nu f(\xi) + C^\nu,$$

其中 $C^\nu$ 是和 $\pi \cdot n$ 对易的常数算符．将此表达式代入式(2-147)并积分，即得

$$-\frac{1}{2}\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} = \pi_\mu(\tau) = \frac{1}{2\pi \cdot n} \times \left[2eC_\mu f(\xi) + e^2 n_\mu f^2(\xi) + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu} f'(\xi)\right] + D_\mu,$$

其中 $D_\mu$ 是和 $\pi \cdot n$ 对易的新的常数算符．再计算 $x(\tau) - x(0)$，并消去 $D_\mu$：

$$\begin{aligned}\pi_\mu(\tau) = &-\frac{x_\mu(\tau) - x_\mu(0)}{2\tau} \\ &+ \frac{\tau}{[\xi(\tau) - \xi(0)]^2}\int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} d\xi \left[2eC_\mu f(\xi) + e^2 n_\mu f^2(\xi) + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu} f'(\xi)\right] \\ &- \frac{\tau}{\xi(\tau) - \xi(0)}\left\{2eC_\mu f[\xi(\tau)] + e^2 n_\mu f^2[\xi(\tau)] + \frac{e}{2} n_\mu \phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu} f'[\xi(\tau)]\right\}.\end{aligned}$$

这样，我们可以把常数 $C_\mu$ 表示成

$$C_\mu = -\frac{1}{2\tau}\phi_{\mu\rho}[x^\rho(\tau) - x^\rho(0)] - \frac{en_\mu}{\xi(\tau) - \xi(0)}\int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} d\xi f(\xi).$$

计算各种对易子

$$[\xi(\tau), x_\mu(0)] = 0,$$
$$[\xi(0), x_\mu(\tau)] = 2in_\mu\tau,$$
$$[x_\mu(\tau), x^\mu(0)] = -8i\tau,$$

于是我们可以把哈密顿量$H$写成

$$H = \frac{1}{4\tau^2}[x^2(\tau) - 2x(\tau)\cdot x(0) + x^2(0)]$$
$$- \frac{2i}{\tau} - (e^2\langle\delta f^2\rangle + m^2) - \frac{e}{2}\phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}$$
$$\times \frac{f[\xi(\tau)] - f[\xi(0)]}{\xi(\tau) - \xi(\tau)}, \qquad (2\text{-}148)$$

其中$\langle\delta f^2\rangle$表示如下的量:

$$\langle\delta f^2\rangle = \int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} \frac{d\xi f^2(\xi)}{\xi(\tau) - \xi(0)} - \left[\int_{\xi(0)}^{\xi(\tau)} \frac{d\xi f(\xi)}{\xi(\tau) - \xi(0)}\right]^2.$$

演化算符具有如下形式:

$$U(x, x'; \tau) = \frac{C(x, x')}{\tau^2}\exp i\left[\frac{(x - x')^2}{4\tau}\right.$$
$$+ \tau(e^2\langle\delta f^2\rangle + m^2) + e\tau\frac{\phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}}{2}$$
$$\left.\times \frac{f(\xi) - f(\xi')}{\xi - \xi'}\right],$$

其中函数 $C(x, x')$ 仍由关系式(2-140)确定. 我们发现

$$C(x, x') = C(x')\exp\left(-ie\int_{x'}^{x} dy_\mu\left\{A^\mu(y)\right.\right.$$
$$- \frac{\phi^{\mu\rho}(y_\rho - x'_\rho)}{n\cdot y - \xi'}\left[\int_{\xi'}^{n\cdot y}\frac{du f(u)}{n\cdot y - \xi'}\right.$$
$$\left.\left.\left. - f(n\cdot y)\right]\right\}\right),$$

其中积分和路径无关. 对于直线,相位中只留下一项 exp —

$ie\int_{x'}^{x} dy_\mu A^\mu(y)$，于是我们最终得到

$$U(x, x'; \tau) = -\frac{i}{(4\pi)^2\tau^2}\exp i\left\{\frac{(x-x')^2}{4\tau}\right.$$
$$+\left[e^2\langle\delta f^2\rangle + m^2 + \frac{e}{2}\phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}\right.$$
$$\times\frac{f(\xi)-f(\xi')}{\xi-\xi'} - i\varepsilon\Big]\tau$$
$$\left.-e\int_{x'}^{x} dy_\mu A^\mu(y)\right\}. \qquad (2\text{-}149)$$

这个结果使我们回想起 1-1-3 节中的经典结果. 对于周期函数 $f(\xi)$，如果我们对几个周期取平均，正比于 $\phi_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu}$ 的项就被抹平. 净效应是质量移动

$$m^2_{eff} = m^2 + e^2\langle\delta f^2\rangle = m^2 + e^2\overline{f^2}.$$

这样的非线性效应很难探测，需要非常强的束流，因为对于频率为 $\omega/2\pi = c/\lambda$、能量密度为 $\mathscr{E} = \overline{E^2} = \overline{f^2}\omega^2 = \rho\hbar\omega$ 的单色平面波，我们有

$$\frac{\Delta m^2}{m^2} = \frac{e^2\overline{f^2}}{m^2c^2} = 4\pi\alpha\lambda_c^2\frac{\rho c}{\omega} = 2\alpha\lambda_c^2\lambda_\rho,$$

这里 $\lambda_c$ 是电子的 Compton 波长，$\rho$ 是入射束中单位体积的光子数. 目前最大功率的激光束也不能使这个比率达到可观的值.

## 注记

这一章的素材是非常标准的，因而我们很难避免援引在许多优秀的教课书中都可以找到的内容，例如见 J. D. Bjorken *and* S. D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill, New York, 1964，也可见 A. Messiah, "Quantum Mechanics", vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1962. 1934

年 P. A. M. Dirac 在 Solvay 的报告中对空穴理论作了极好的叙述，后来由 J. Schwinger 编辑再版于 "Quantum Electrodynamics", Dover, New York, 1958，书中编入了许多有关相对论量子场论的文章。关于传播子的方法见 R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 749—769, 1949。关于固有时间方法，见 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 82, p. 664, 1951。最早用平面波求解 Dirac 方程的是 D. M. Volkow, Z. Physik, *vol.* 94, p. 25, 1935。有关 Klein-Gordon 方程的评论，见 H. Feschbach *and* F. Villars, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 30, *p.*24, 1958. Dirac 方程的非相对论极限的研究，见 L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.*, *vol.* 78, *p.* 29, 1950。有关束缚态能谱的全面的考虑给出在 H. A. Bethe and E. E. Salpeter, "Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms", Springer-Verlag, Berlin, 1957。也可见 M.E. Rose, "Relativistic Electron Theory", John Wiley, New York, 1961. T. A. Welton 给出了 Lamb 位移的一个有趣的半经典的解释在 *Phys. Rev.*, vol. 74, p. 1157, 1948。二分量中微子理论见 R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, vol. 109, p. 193, 1958。

在 M. Nikolic, Gordon 和 Breach 编辑的" Analysis of Scattering and Decay", New York, 1968, P. Moussa 和 R. Stora 给出了相对论量子运动学的叙述。我们提出这个工作是为了补充有关 Poincaré 群的表示和它的应用的细节。

# 第三章　自由场的量子化

量子化是用正则方法给出的，并应用于自由场．从力学的类比出发，我们依次讨论中性的和荷电的标量场．在电磁情况下采用了 Gupta-Bleuler 的不定度规，重点放在规范不变性和由于光子质量为零而引起的问题．用 Casimir 效应漂亮地证明了真空涨落．对于 Dirac 场，真空的稳定性和不相容原理导致了按照反对易规则的量子化．这暗示着自旋和统计之间的联系以及 PCT 定理．

## 3-1　正则量子化

在非相对论情况下，我们通过用算符代替可观测量，用对易子代替 Poisson 括号得到了 Schrödinger 方程．与通常一样，共轭动量是 Lagrange 函数关于速度的微商．在第一章中我们已看到，如果用连续指标代替分立指标，用 Dirac 的 $\delta$ 函数代替 Kronecker 记号，经典的程式可以推广到无穷大系统．因此，我们将首先大胆地把量子化推广到这种情形而不必过分担心．唯一需要小心的是保持 Lorentz 不变性．在电动力学的特殊情况下，至少经典的拉氏量是已知的．在量子化后拉氏量的精确的作用必须加于澄清．这将在第九章中完成，在那里我们将用路径积分的方法研究另一种富有成效的量子化的解释．

显然，量子理论的正确解释依赖于它的动力学(例如，它能导致束缚态的出现等等)．不幸的是，在大多数情况下我们

无法求解运动方程，于是我们不得不用近似方法处理相互作用。这是一个主要的困难，有时它妨碍我们完成符合逻辑的、连贯的描述。通过重整化，部分困难可以得到克服，这种重整化方法通过用测量到的质量和耦合常数重新表示可观测量而隐藏了某些相互作用。

一个更为自洽但困难的公理化方法是 Wightman 创立的。他试图从由理想化的物理要求得到的几个有确切定义的公理出发，导出量子场理论。为了揭示理论的要旨，需要复杂的数学准导。主要用二种方法着手进行。按照其中的一种方法，人们详细地研究了 Green 函数：在动量空间的解析性、代数性质、不连续性等。在适当指明渐近态后，最终我们可以得到散射理论。一个更为雄心勃勃的方案包含了显式地构造基本的算符，例如哈密顿量，以研究它们的谱的性质。后者将提供粒子解释、束缚态、散射态等等。

我们的目标将是比较有节制的，并部分地沿着历史走过的路程。它兼有近似、物理的直觉以及数学的推导。我们可以希望这些不同的方法在某点上将汇合在一起，期望对上面的处理将给出一些严格的基础。

乍看起来场论似乎并不需要用等同于粒子的微观客体来解释。在有关光的理论中，波粒二象性的冗长的故事，是可以引起混乱的证据，这些混乱在某些方面甚至一直保留到现在。量子理论的成就之一就是使人们能较好地理解这种现象。可是，由经典的经验导出的朴素的图象具有局限性，特别是由不可区分的粒子这种概念产生的局限性。由自由场态所组成的 Hilbert 空间——Fock 空间——的结构将反映这一点。

在这里我们将只探讨定域的理论。定域性的意义将随着我们往下进行而变得更清楚。它假设在任意小的区域中空间-时间测量的理想化。作为 Lorentz 不变性和弱形式因果性

的要求，被类空间隔分开的测量互不影响．换句话说，(1)存在定域的可观测量，(2)相对于类空分隔区域的定域的可观测量是对易的．这种假定的实验检验只是间接的，因为我们并不拥有可以和核子或亚核子的大小相比较的设备．在这种情况下，测量必然涉及象研究中的那些相同性质的客体．然而，我们可以公正地说，在小到 $\hbar c/\sqrt{s}$ 的距离上还没有观察到这个原则的破坏，其中 $s$ 是当前的加速器中粒子散射的质心能量的平方(对欧洲核子研究所的 ISR，$\sqrt{s} \lesssim 60\text{GeV}$)．这些长度（$\sim 10^{-15}\text{cm}$）只是原子大小（$10^{-8}\text{cm}$）的微不足道的一部分．

在把微观因果性和相对论不变性结合在一起时出现的引人注目的结论中，我们将引用自旋统计关系(半整数自旋粒子是费米子，整数自旋粒子是玻色子)和所存在的 TCP 不变性．后者包括时间反演($T$)、宇称（$P$）和电荷共轭($C$)的乘积．这意味着具有和相应的粒子一样的运动学不变量，和相反的相加性量子数(电荷、重子数、轻子数等等)的反粒子的存在．

### 3-1-1 一般形式

令 $\varphi_\alpha(x)$ 是我们打算研究其动力学的场．下标 $\alpha$ 表示内部特性(电荷等)或运动学的特性(比如 Lorentz 指标)．目前我们假设这些场是无约束的（这种约束将会减少自由度的数目）．我们暂且不讨论半整数自旋的场，它们的正确处理需要特殊的考虑(3-3 节)．

由固定时间的经典 Lagrange 函数

$$L(t) = \int d^3x \mathscr{L}(\varphi, \partial\varphi), \tag{3-1}$$

得到共轭场

$$\pi_\alpha(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta[\partial_0\varphi_\alpha(t, \mathbf{x})]} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial_0\varphi_\alpha(t, \mathbf{x})]}. \tag{3-2}$$

为了构造哈密顿算符 $H$，我们首先将 $c$ 数场换成算符，这些算符满足正则等时对易规则

$$[\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (3\text{-}3)$$

以及对易子 $[\varphi, \varphi]$ 和 $[\pi, \pi]$ 等于零．从式(3-2)反解出用 $\pi$ 和 $\varphi$ 表示的 $\partial_0\varphi$ 后，我们即得

$$H = \int d^3x \left[\sum_\alpha \pi_\alpha(t, \mathbf{x})\partial_0\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}) - \mathscr{L}(\varphi, \partial\varphi)\right]. \qquad (3\text{-}4)$$

这种处理方法会遇到由于算符的次序引起的常见的弊端．此外，正如我们即将了解的，在相同时刻的场算符的乘法运算将会导致新的困难．这二方面是有联系的．

应当强调的是，在写出式(3-3)时我们还没有指明这些算符作用在哪个 Hilbert 空间．正如我们将要看到的，在自由场的情况下这个问题有一简单的回答，因此在研究围绕这种情况的微小的扰动时可以不加考虑．可是，在一般情况下这就完全不是无关紧要的了，这时问题的回答需要某些动力学的知识．这就是动力学知识和理论的特殊结构有关系的原因．

为明确起见，假设我们只处理经典情形下的单个实场 $\varphi$，在量子情形下的一个厄米的 $\varphi$，其拉氏量

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi), \qquad (3\text{-}5)$$

其中 $V$ 是一个光滑的函数(比如多项式)．经典的运动方程为

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} = \Box\varphi + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0. \qquad (3\text{-}6)$$

如果 $V$ 简单地为二次项 $V(\varphi) = (m^2/2)\varphi^2$，则

$$\mathscr{L}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \qquad (3\text{-}7)$$

由此导出 Klein-Gordon 方程

$$(\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{3-8}$$

在这里它被看成经典场方程，而不看成 Schrödinger 方程的相对论性的推广．对于任意的 $V(\varphi)$，即对于任意不包含微商的自相互作用，共轭动量 $\pi$ 为

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial_0\varphi. \tag{3-9}$$

因此，用 $\varphi$ 和 $\pi$ 表示的哈密顿量是

$$H = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2] + V(\varphi)\right\}. \tag{3-10}$$

于是，在 $V(\varphi)$ 为式(3-7)给出的二次型的简单情况下

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]. \tag{3-11}$$

在这里不存在算符次序的问题，因此引起麻烦的唯一根源，可能来自在同一点的算符的相乘．我们暂且停留在式(3-11)的情况．我们确认耦合谐振子的简单结构．为了揭示它的物理解释，我们假设空间只有一维，坐标 $x$ 不取连续值而只取分立的值，这个值是取作单位的基本长度的整数倍．在这种情况下，式(3-11)被换成

$$H = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}[\pi_n^2 + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + m^2\varphi_n^2], \tag{3-12}$$

$$[\varphi_n, \varphi_{n'}] = [\pi_n, \pi_{n'}] = 0, \quad [\varphi_n, \pi_{n'}] = i\delta_{nn'}.$$

能够用式(3-12)描述的物理模型将是一维“晶体”的振荡，这时 $\varphi_n$ 表示第 $n$ 个原子的位移，$\pi_n$ 表示共轭变数．具有由 $m^2\varphi_n^2$ 项提供的恢复力的每个单独的振子，通过 $(\varphi_n - \varphi_{n\pm1})^2$ 对位能的贡献和它最邻近的振子耦合．为了研究这个模型，很自然地要搜寻适当的模式．利用 $H$ 的分立平移不变性，我们引入如下形式的 Fourier 变换

$$\varphi_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn}\tilde{\varphi}(k), \quad \pi_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn}\tilde{\pi}(k), \tag{3-13}$$

$$\tilde{\varphi}^+(k) = \tilde{\varphi}(-k), \quad \tilde{\pi}^+(k) = \tilde{\pi}(-k),$$

对易规则取为

$$[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}(k')] = [\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}(k')] = 0,$$

$$[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\pi}(-k')] = i\sum_n e^{-i(k-k')n}. \tag{3-14}$$

最后的求和也等于 $2\pi\sum_n \delta(k - k' + 2\pi n)$，这表示如果 $\tilde{\varphi}$ 和 $\tilde{\pi}$ 被延拓为 $k$ 的周期函数，则它简化为 $2\pi\delta(k - k')$. 利用式 (3-13)，厄米的哈密顿量被表示成

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{2\pi} \{\tilde{\pi}^+(k)\tilde{\pi}(k) + \tilde{\varphi}^+(k)[m^2 + 2(1 - \cos k)]\tilde{\varphi}(k)\}. \tag{3-15}$$

为了使它和单独的不耦合的振子的求和相一致，我们令

$$\omega_k = \omega_{-k} = \sqrt{m^2 + 2(1 - \cos k)},$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}[\omega_k\tilde{\varphi}(k) + i\tilde{\pi}(k)], \tag{3-16}$$

$$a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}[\omega_k\tilde{\varphi}^+(k) - i\tilde{\pi}^+(k)],$$

$$[a_k, a_{k'}] = \delta(k - k'),$$

算符 $a_k^+$ 和 $a_k$ 产生或湮灭能量为 $\omega_k$ 的模式 $k$. 哈密顿量 $H$ 为

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} dk\omega_k(a_k^+a_k + a_ka_k^+) = \int_{-\pi}^{+\pi} dkH_k, \tag{3-17}$$

而场被表示成

$$\varphi_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}}(a_ke^{ikn} + a_k^+e^{-ikn}),$$

$$\pi_n = -i\int_{-\pi}^{+\pi} dk\sqrt{\frac{\omega_k}{4\pi}}\,(a_k e^{ikn} - a_k^+ e^{-ikn}) \qquad (3\text{-}18)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}}(a_k e^{-i\omega_k t+ikn} + a_k^+ e^{i\omega_k t-ikn})\right]_{t=0}.$$

把 $a_k$ 和 $a_k^+$ 称为湮灭算符和产生算符的这种命名，可以通过如下的事实得到确认：如果 $|E\rangle$ 是能量为 $E$ 的 $H$ 的本征态，我们有

$$Ha_k|E\rangle = Ea_k|E\rangle + [H, a_k]|E\rangle = (E - \omega_k)a_k|E\rangle,$$
$$Ha_k^+|E\rangle = Ea_k^+|E\rangle + [H, a_k^+]|E\rangle$$
$$= (E + \omega_k)a_k^+|E\rangle. \qquad (3\text{-}19)$$

在这个力学模型中，能量为 $\omega_k$ 的模式 $k$ 被看作点阵原子或声子的相干量子振荡．在这里我们清楚地了解了粒子(声子)和场($\varphi_n$ 是第 $n$ 个原子的位移)之间的关系．物理的直觉可能引导我们首先考虑这类晶体的状态，它们是用对角化场

$$|y\rangle = |\{y_n\}\rangle,\ \varphi_n|y\rangle = y_n|y\rangle$$

得到的波函数来表示其特征的．然而，我们却选择从基态 $|0\rangle$ 和它的声子激发出发来产生状态．我们立即就会碰到一个困难，因为基态能量——哈密顿量的最小本征值——实际上等于无限大．每个模式 $k$ 对零点能贡献量 $\frac{1}{2}\omega_k$．这和测不准关系是一致的，因为每个振子由于其位能而存在最小动量弥散．因为我们有连续的模式，每一部分 $(k, k+dk)$ 导致无穷大的能量——这个事实归结于系统的无穷大尺度．的确，因为对任意的 $k$

$$a_k|0\rangle = 0,\ \langle 0|a_k^+ = 0, \qquad (3\text{-}20)$$

我们有

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} dk\omega_k\langle 0|a_k a_k^+|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\omega_k \langle 0|[a_k, a_k^+]|0\rangle.$$

由于 $[a_k, a_k^+] = \delta(0)$，最后的积分是没有意义的. 可是，如果晶体的大小是有限的 $(-N \leqslant n \leqslant N)$，我们可以认为格点 $n$ 和 $n + p(2N+1)$ 是一样的，而取周期性边界条件来实现循环的安排. 这样，波矢 $k$ 只能取值 $k = [2\pi/(2N+1)]q$，$q$ 是整数，而且 $-N \leqslant q \leqslant N$，于是零点能 $(N/2N)\sum_{-N}^{+N} \omega_q$ 将是有限的. 显然，当 $N$ 趋于无穷时 $(1/2N)\sum_{-N}^{+N} \omega_q$ 具有有限的极限，这表明零点能实际上正比于系统的大小.

通过采用分立的模型代替连续的模型，我们已在动量空间中引入了 Brillouin 晶带 $-\pi \leqslant k \leqslant \pi$，这相当于在原来的模型中的一个紫外截断. 读者一定记得，“紫外灾难”这个词的由来，是由于对电磁场的高频模式的黑体热辐射的贡献是发散的. 此外，空间截断使哈密顿算符有明确的定义，这等同于我们把系统置于箱中. 然而，我们可以采用下面的方法. 零点能是不可观测的，除非我们破坏了晶体. 在场论中基态将被看作真空，而且它甚至更难于破坏. 和晶体的能量交换对于起点的选择是不敏感的，因此按许可我们规定真空的能量为零，于是哈密顿量重新定义为

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\omega_k[(a_k^+ a_k + a_k a_k^+) - \langle 0|(a_k^+ a_k + a_k a_k^+)|0\rangle] = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\omega_k a_k^+ a_k. \quad (3\text{-}21)$$

当然，在相对论理论中我们必须保证这种程式保持 Lorentz 协变性.

在此新的表达式中，产生算符和湮灭算符按“正规次序”

出现，即后者在前者的右边。这也称为 Wick 编序，并用双点记号表示：

$$:\frac{1}{2}(a_k^+a_k + a_ka_k^+): \equiv a_k^+a_k.$$

注意，在正规编序记号下算符相互对易，并且这个定义用自由场基态作为基准。

如果我们恢复点阵间隔 $a$，对于比 Brillouin 晶带的边界 $\pi/a$ 小得多的 $|k|$ 值，频率 $\omega_k$ 可以近似为

$$\omega_k = \sqrt{m^2 + \frac{2}{a^2}(1 - \cos ak)} \to \sqrt{m^2 + k^2}. \qquad (3\text{-}22)$$

如果把 $k$ 看成声子的动量，这正是相对论力学的色散定律的形式。在固态物理中，由于它不因附加 $2\pi/a$ 的倍数而受影响，所以 $k$ 仅仅是准动量。

在其动力学受式(3-12)支配的简谐理论的框架中，声子是完全确定的实体，并且在粒子数算符

$$N = \int_{-\pi}^{+\pi} dk a_k^+ a_k, \qquad (3\text{-}23)$$

和哈密顿量对易这种意义上声子是守恒的。

不同振动模式的迭加导致一个状态，其中的声子仅仅有有限的单独的状态，而在各个格点上的原子能很好地被区分(例如，在其中的一个格点上引进杂质是有意义的)。实际上，声子表现为玻色系统，当我们附加上相互作用时就显示出这种性质。例如，我们可以考虑在能量中附加一非简谐项或将晶体和恒温器相连接。

当我们用产生算符作用在归一化的真空 $|0\rangle$ 上生成状态时，就出现 Bose 对称性。不幸的是，态 $a_k^+|0\rangle$ 不能归一，因为正如前面指出的，由于系统无穷大，$\langle 0|a_ka_k^+|0\rangle = \langle 0|[a_k, a_k^+]|0\rangle = \infty$。可是我们可以用线性迭加构成一个波包

$$a_f^+|0\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} dk f(k) a_k^+ |0\rangle,$$

其中 $f(k)$ 可以选择集中在峰值 $\bar{k}$ 的附近，从而使得

$$\langle 0|a_f a_f^+|0\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \int_{-\pi}^{+\pi} dk_2 f^*(k_1) f(k_2) \langle 0|a_{k_1} a_{k_2}^+|0\rangle$$
$$= \int_{-\pi}^{+\pi} dk |f(k)|^2 < \infty.$$

换句话说，$f(k)$ 必须是平方可积的。为了得到有意义的表达式，基本的算符 $a_k$ 和 $a_k^+$ 必须用尝试函数加于抹平；它们被称为算符取值广义函数。当弥散 $\Delta k$（或 $\Delta\omega_k$）和目前问题中所包含的动量（或能量）相比可以忽略时，有确定动量 $k$ 的理想化的波被看做是一种简化。例如，在晶体中即使 $\Delta k$ 有下限 $(Na)^{-1}$，其影响有时也能被观测到。即使在平移不变的世界中，实验仪器的几何形状总意味着有限的弥散。

态 $a_f^+|0\rangle$ 被看作单粒子（声子）态。为了构造由矢量，例如

$$|r\rangle = a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ \cdots a_{f_r}^+ |0\rangle \qquad (3\text{-}24)$$

生成的态所张成的整个 Hilbert 空间，我们需要利用线性迭加和 Caucby 的完备性这些标准的数学方法。由此构成的空间称为 Fock 空间。考虑 $N$ 和 $H$ 在态 $|r\rangle$ 上的作用。假设波函数 $f_i$ 在值 $k_i$ 附近很强地耸起，则

$$N|r\rangle = r|r\rangle, \quad H|r\rangle \simeq \left(\sum_1^r \omega_{k_i}\right)|r\rangle. \qquad (3\text{-}25)$$

因此，我们有包含 $r$ 个声子的态，它具有几乎完全确定的能量。可是，我们有必要更仔细地考察它的波函数。利用产生算符的对易性，我们可以写出

$$|r\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} dk_1 \cdots \int_{-\pi}^{+\pi} dk_r f_1(k_1) \cdots f_r(k_r) a_{k_1}^+ \cdots a_{k_r}^+ |0\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r \frac{1}{r!} \sum_{\alpha} f_1(k_{\alpha_1}) \cdots$$

$$\cdot f_r(k_{\alpha_r}) a_{k_1}^{\dagger} \cdots a_{k_r}^{\dagger} |0\rangle, \qquad (3\text{-}26)$$

其中在最后一个被积函数中的求和取遍整数集 $(1, \cdots, r)$ 的所有的置换 $\alpha$。精确到一个归一化因子，我们是否可以说 $F_{NS}(k_1, \cdots k_r) = f_1(k_1) \cdots f_r(k_r)$ 或

$$F_S(k_1, \cdots, k_r) = \frac{1}{r!} \sum_{r!}' f_1(k_{\alpha_1}) \cdots f_r(k_{\alpha_r}) \qquad (3\text{-}27)$$

是这个态的波函数呢？如果存在一个可观测量，对于一个或另一个波函数它有不同的平均值，上面这个问题将是有意义的。然而，情况并非如此，实际上即使我们一开始在态 $|r\rangle$ 的表示中表面上引入了非对称的核 $F_{NS}$，产生算符的对易性也自动地将它对称化。作为基本对易规则式 (3-12) 的一个结果，声子是全同粒子，并且服从 Bose 统计。

例如，为了得到归一的 $r$ 个粒子的态，假设单粒子波函数 $f_s(k)$ 是正交归一的：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk f_s^*(k) f_t(k) = \delta_{st}. \qquad (3\text{-}28)$$

如果 $\langle r|r\rangle = 1$，则

$$|r\rangle = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r f_1(k_1) \cdots f_r(k_r) a_{k_1}^{\dagger} \cdots a_{k_r}^{\dagger} |0\rangle.$$

因此，

$$1 = \langle r|r\rangle = |\lambda|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r' f_1^*(k_1) \cdots$$

$$f_r(k_r') \langle 0| a_{k_r} \cdots a_{k_r'}^{\dagger} |0\rangle. \qquad (3\text{-}29)$$

将每个算符 $a_k$ 移到右边，并利用 $a_k a_{k'}^{\dagger} = a_{k'}^{\dagger} a_k + \delta(k - k')$ 以及式 (3-28)，立即便得到

$$|\lambda|^2 = 1, \qquad (3\text{-}30)$$

这表明 $\lambda$ 可以取作相因子。可是，如果单粒子波函数的 $r_1$ 等于 $f_1$，$r_2$ 等于 $f_2$，等等，$f$ 函数还是正交归一的，那么很容易证明，正确地归一化的

态为

$$|r\rangle \equiv |\{r_1, r_2, \cdots\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{r_1!\ r_2!\ \cdots}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r$$
$$f_1(k_1)\cdots f_1(k_{r_1}) f_2(k_{r_1+1})\cdots f_2(k_{r_1+r_2})\cdots a_{k_1}^{+}\cdots a_{k_r}^{+}|0\rangle. \quad (3\text{-}31)$$

更一般地讲，如果 $F(k_1, \cdots, k_r)$是对称的函数，则归一的 $r$ 个粒子的态是

$$|r\rangle = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r F(k_1, \cdots, k_r) a_{k_1}^{+}\cdots a_{k_r}^{+}|0\rangle,$$
$$|\lambda|^{-2} = r! \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_r |F(k_1, \cdots, k_r)|^2. \quad (3\text{-}32)$$

留给读者一个有意思的练习：在使场对角化的基上计算具有固定声子数的态的波函数，特别是基态的波函数。

在固定时刻，比如 $t = 0$，已实现了正则量子化，然而由于在时间平移下理论是不变的，我们可以选择另一参考时刻 $t$，并利用算符 $\varphi_n(t)$、$\pi_n(t)$，使得

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(t) &= i[H, \varphi_n(t)] = \pi_n(t), & \varphi_n(0) &\equiv \varphi_n, \\ \dot{\pi}_n(t) &= i[H, \pi_n(t)], & \pi_n(0) &\equiv \pi_n, \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}33)$$

其中

$$\varphi_n(t) = e^{iHt}\varphi_n e^{-iHt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a_k e^{-i\omega_k t + ikn} + a_k^{+} e^{i\omega_k t - ikn}),$$
$$\pi_n(t) = \dot{\varphi}_n(t). \quad (3\text{-}34)$$

显然，$a_k e^{-i\omega_k t}$ 和 $a_k^{+} e^{i\omega_k t}$ 满足正则对易规则，而 $H$ 和 $N$ 与时间无关。可观测量在时刻 $t$ 和 0 之间的关系由么正的正则变换给出。描述测量的矩阵元不依赖于选择的是 Heisenberg 表象还是 Schrödinger 表象：

$$\langle a|e^{iHt}A(0)e^{-iHt}|a\rangle = (\langle a|e^{iHt}) \times A(0)(e^{-iHt}|a\rangle) \quad \text{(Schrödinger)},$$
$$= \langle a|(e^{iHt}A(0)e^{-iHt})|a\rangle \quad \text{(Heisenberg)}.$$

式(3-34)的结构阐明了场中正频和负频的存在，它们相应于

声子模式的产生和湮灭，后者具有纯粹的正能 ($\hbar\omega$). 因此，$\varphi$ 不能理解为波函数，它是 Fock 空间中的算符，尽管它是用波方程的解写出的. 迭加是加权的，以算符取值振幅为权重. 这种程式称为二次量子化. 晶体的力学的例子为相对论标量场的量子处理作了方法上的准备. 虽然振动的原子解释将不出现，但声子和粒子之间的相似还保留着. 对于令真空能量等于零，我们还有一些顾忌.

### 3-1-2 标量场

为了量子化具有哈密顿量为式 (3-11) 的自由标量场，实质上我们必须在三维连续空间中改写前面的公式. 三维动量 (解释将在下面被确认) 记成 $\mathbf{k}$，而 $k^0$ 还是表示 $\omega_k = \omega_{-k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$. 在全书中，对于玻色子相空间的量度将记成

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0). \quad (3\text{-}35)$$

最后的表达式显示了这个量度的明显的 Lorentz 不变性. 这可以用 $d^3k/\omega_k$ 来直接验证: 在转动下它是不变的; 速度为 $\tanh\theta$ 的平动不改变横向分量 $\mathbf{k}_T$ 以及 $\omega_k^2 - k_L^2$. 因此，

$$dk'_L = \left(\cosh\theta + \sinh\theta \frac{k_L}{\omega_k}\right) dk_L,$$

$$\omega_{k'} = \left(\cosh\theta + \sinh\theta \frac{k_L}{\omega_k}\right) \omega_k,$$

这证明了 $dk'_L/\omega_{k'} = dk_L/\omega_k$.

借助于产生算符和湮灭算符，它们满足如下关系

$$\left.\begin{aligned} [a(k),\ a^+(k')] &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k'), \\ [a(k),\ a(k')] &= [a^+(k),\ a^+(k')] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}36)$$

在时刻 $t = 0$ 服从基本对易规则式 (3.3) 的共轭的场 $\varphi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$ 是

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d\tilde{k}[a(k)e^{ik\cdot x} + a^+(k)e^{-ik\cdot x}],$$
$$\pi(\mathbf{x}) = -i\int d\tilde{k}\omega_k[a(k)e^{ik\cdot x} - a^+(k)e^{-ik\cdot x}]. \tag{3-37}$$

由

$$a(k)|0\rangle = 0,\ \langle 0|0\rangle = 1$$

定义真空基态，而哈密顿量取为

$$H = \frac{1}{2}\int d\tilde{k}\omega_k :a^+(k)a(k) + a(k)a^+(k):$$
$$= \int d\tilde{k}\omega_k a^+(k)a(k). \tag{3-38}$$

根据第一章，我们可以自然地期望，线动量算符 $\mathbf{P}$ 为

$$P^i = \int d^3x\Theta^{0i}(\mathbf{x}) = \int d\tilde{k}k^i\frac{[a^+(k)a(k) + a(k)a^+(k)]}{2}$$
$$= \int d\tilde{k}k^i a^+(k)a(k). \tag{3-39}$$

和能量的情形不同，这里不需要正规编序. 模式 $\mathbf{k}$ 和 $-\mathbf{k}$ 相互补偿，因此真空是平移不变的，即本征值为零的 $\mathbf{P}$ 的本征态. 算符 $H \equiv P^0$ 和 $P^i$ 对易，而且

$$[P^\mu, a^+(k)] = k^\mu a^+(k). \tag{3-40}$$

这表明 $a^+(k)$ 作用在态上增加了四维动量 $k^\mu$.

在可以相差正规编序的条件下，上面的能量、动量张量密度和它的经典的对应的量

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right] \tag{3-41}$$

是一样的，只要用 $\pi(x)$ 代替其中的 $\partial^0\varphi(x)$.

在时刻 $t = x^0$，场 $\varphi$ 为

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{iHt}\varphi(0, \mathbf{x})e^{-iHt} = \int d\tilde{k}[a(k)e^{-ik\cdot x}$$
$$+ a^+(k)e^{ik\cdot x}]. \tag{3-42}$$

这个表达式自动地满足 Klein-Gordon 方程. 如果用记号 $u\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ 表示,

$$u\overleftrightarrow{\partial}v = u(\partial v) - (\partial u)v.$$

我们可以借用 $\varphi(0, \mathbf{x})$ 和 $\pi(0, \mathbf{x})$ 将 $a(k)$ 写成

$$a(k) = \int d^3x e^{-ik\cdot x}[\omega_k\varphi(0, \mathbf{x}) + i\pi(0, x)]$$

$$= i\int d^3x [e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(t, \mathbf{x})]_{t=0}. \tag{3-43}$$

事实上最后的表达式与时间无关. 的确,利用 $k_0^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$, 我们有

$$\partial_0\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x) = \int d^3x\{e^{ik\cdot x}\partial_0^2\varphi(x)$$

$$+ [(m^2 - \Delta)e^{ik\cdot x}]\varphi(x)\}.$$

在所有的应用中,我们都必须考虑归一化的平面波的迭加,在这种情况下拉普拉斯算符的分部积分是合理的. 考虑到 $\varphi(x)$ 满足 Klein-Gordon 方程,我们发现上面的表达式等于零. 因此,

$$a(k) = i\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x),$$

$$a^+(k) = -i\int d^3x e^{-ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi(x). \tag{3-44}$$

Fock 空间中的基可以由归一的 $r$ 个粒子的态

$$|r\rangle = \left(r!\int d\tilde{k}_1\cdots d\tilde{k}_r|F(k_1, \cdots, k_r)|^2\right)^{-1/2}$$

$$\times\int d\tilde{k}_1\cdots d\tilde{k}_r F(k_1, \cdots, k_r)a^+(k_1)\cdots a^+(k_r)|0\rangle \tag{3-45}$$

来构造. 波函数 $F(k_1, \cdots, k_r)$ 对于四维动量 $k_r$ 的交换是对称的,这些 $k_r$ 全部位于双曲面 $k^2 = m^2$, 即所谓的质量壳的上叶. 和 $P^\mu$ 对易的粒子数算符 $N$ 是

$$N = \int d\tilde{k}a^+(k)a(k). \tag{3-46}$$

当然，当它作用在态式(3-45)上时，有

$$N|r\rangle = r|r\rangle. \tag{3-47}$$

具有决定性意义的是验证一直保持相对论不变性. 推导上面的公式用了特殊的参考系，因此我们可以怀疑：在用 Poincaré 变换得到的任何其它的参考系中，量子化是否会导致等价的理论. 如果用加撇表示新参考系中对应的量，我们希望知道是否存在一个量子正则变换，把基本的产生、湮灭算符 $a$ 和 $a^+$ 与在超平面 $t' =$ 常数上量子化得到的相应的 $a'$ 和 $a'^+$ 联系起来. 这是可以做到的，如果对于每个变换 $x \to x' = \Lambda x + a$，我们可以在 Fock 空间中同时引进么正算符 $U(a, \Lambda)$，使得

$$U(a, \Lambda)\varphi(x)U^+(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a). \tag{3-48}$$

假设对于参数 $a$ 和 $\Lambda$ 是可微分的，我们只需研究无穷小变换

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \delta a^\mu,$$

其中 $\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\omega_{\nu\mu} = 0$. 因此，我们希望找到 10 个厄米算符 $M^{\mu\nu}$，($M^{\mu\nu} + M^{\nu\mu} = 0$)，以及 $P^\mu$ 使得

$$U = I - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + i\delta a_\mu P^\mu, \tag{3-49}$$

和

$$i\left[\delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu},\ \varphi(x)\right] = \delta a_\mu \partial^\mu\varphi + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(x^\nu\partial^\mu - x^\mu\partial^\nu)\varphi. \tag{3-50}$$

10 个生成元 $P$ 和 $M$ 必须满足几何学的对易规则

$$\begin{aligned}
&[P^\mu, P^\nu] = 0,\\
&[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i[g^{\mu\lambda}P^\nu - g^{\nu\lambda}P^\mu],\\
&[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}] = i[g^{\mu\lambda}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\lambda}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\lambda} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\lambda}),
\end{aligned} \tag{3-51}$$

其中对易子代替了(相差因子 $i$)经典的 Poisson 括号. 正如我们在导出 $P^\mu$ 时所预期的，可以预料到，这些生成元由 Noether 定理给出：

$$P^\mu = \int_t d^3x\Theta^{0\mu}, \quad M^{\mu\nu} = \int_t d^3x(x^\mu\Theta^{0\nu} - x^\nu\Theta^{0\mu}), \tag{3-52}$$

其中 $\Theta^{\mu\nu}$ 由式(3-41)给出，或者更明显地写成

$$\Theta^{00}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}:(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2):,$$

$$\Theta^{0j}(x) = :\pi\partial^j\varphi:. \tag{3-53}$$

$P^\mu$ 的表达式和式(3-38)、(3-39)是一致的，实际上使得 $i[P^\mu, \varphi(x)] = \partial^\mu\varphi(x)$. 对于 $M^{\mu\nu}$，我们得到

$$M_{0j} = i\int d\tilde{k}a^+(k)\left(\omega_k\frac{\partial}{\partial k^j}\right)a(k),$$

$$M_{ji} = i\int d\tilde{k}a^+(k)\left(k_j\frac{\partial}{\partial k^i} - k_i\frac{\partial}{\partial k^j}\right)a(k) \tag{3-54}$$

我们可以验证，式(3-50)和(3-51)是满足的. 因为 $M^{\mu\nu}$ 仅仅包括角度的贡献，由场 $\varphi$ 产生和湮灭的粒子没有内禀自旋.

在证明了量子理论的协变性后，现在我们要研究借用质量为 $m$、自旋为零的粒子的描述与厄米场 $\varphi$ 之间的关系，这个场可以拥有这组可测量的量.

虽然在固定时刻具有不同位置的场是对易的，但是在不同时刻的场就不再是对易的. 不过，由正则量子化知，二个自由场 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 的对易子具有简单的结构，如同如下形式的 $c$ 数广义函数:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int d\tilde{k}[e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}]$$

$$= i\Delta(x-y). \tag{3-55}$$

借助于函数 $\varepsilon(u) = u/|u|$，实的广义函数 $\Delta(x)$也能写成

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)e^{-ik\cdot x}. \tag{3-56}$$

这表明，它是一个奇的、Lorentz 不变的 Klein-Gordon 方程的解. 事实上，从 $\Delta(0, \mathbf{x}) = 0$ 和 Lorentz 不变性可以看到，在光锥外，即在区域 $x^2 < 0$ 中，$\Delta(x)$ 等于零. 在类空分隔点上的测量互不干扰，这是定域性和因果性的结果. 还可注意到，正则量子化需要

$$\partial_0\Delta(x)\Big|_{x^0=0} = -\delta^3(\mathbf{x}). \tag{3-57}$$

为了构造使量子场的正频部分对角化的相干态，(谐振子的最小波包的类似物)我们假设 $\eta(k)$ 是定义在质壳 $k^2=m^2$, $k^0>0$ 上的可归一的函数:

$$\int d\tilde{k}|\eta(k)|^2<\infty.$$

考虑态 $|\eta\rangle$:

$$|\eta\rangle=\exp\left[\int d\tilde{k}\eta(k)a^+(k)\right]|0\rangle. \tag{3-58}$$

它出现在 *Fock* 空间，作为具有 0，1，2，…个粒子的态的相干迭加. 如果我们允许 $\eta$ 保持任意，$|\eta\rangle$ 可以作为生成函数来得到具有确定粒子数的态. 利用对于和 $[A, B]$ 对易的二个算符 $A$ 和 $B$ 成立的恒等式 $e^Ae^B=e^{A+B+[A,B]/2}$，我们来计算 $|\eta\rangle$的模方，得到

$$\langle\eta_1|\eta_2\rangle=\exp\left[\int d\tilde{k}\eta_1^*(k)\eta_2(k)\right]. \tag{3-59}$$

因此，通常这二个态是不正交的，于是相干态的集合是一个超完备集. 如果我们用 $|\eta)$表示相应于 $|\eta\rangle$的归一化的态:

$$|\eta)=\exp\left[-\frac{1}{2}\int d\tilde{k}|\eta(k)|^2\right]|\eta\rangle.$$

我们有

$$(\eta_1|\eta_2)=\exp\left[\int d\tilde{k}\left(i\mathrm{Im}\eta_1^*\eta_2-\frac{1}{2}|\eta_1-\eta_2|^2\right)\right].$$

真空态相应于 $\eta=0$，更一般地是，$a(k)|\eta\rangle=\eta(k)|\eta\rangle$，因此我们有场的对角化的湮灭(正频)部分

$$\varphi^{(+)}(x)=\int d\tilde{k}a(k)e^{-ik\cdot x},$$

$$\varphi^{(+)}(x)|\eta\rangle=\int d\tilde{k}\eta(k)e^{-ik\cdot x}|\eta\rangle. \tag{3-60}$$

在时间演化过程中，相干态仍然是相干的. 实际上，

$$\begin{aligned}e^{-iHt}|\eta\rangle&=\exp\left\{\int d\tilde{k}\eta(k)[e^{-iHt}a^+(k)e^{iHt}]\right\}|0\rangle\\&=\exp\left[\int d\tilde{k}\eta(k)e^{-ik_0t}a^+(k)\right]|0\rangle\\&=|\eta_t\rangle,\end{aligned} \tag{3-61}$$

其中 $\eta_t(k)=e^{-ik_0t}\eta(k)$.

构造实现变换

$$D(\eta_1)|\eta_2\rangle = |\eta_1 + \eta_2\rangle$$

的么正算符 $D(\eta)$，这也是很有意思的．读者可以确信

$$D(\eta) = \exp\left\{-\int d\vec{k}[\eta^*(\vec{k})a(\vec{k}) - \eta(\vec{k})a^+(\vec{k})]\right\}$$

能实现上述的变换．

因为 $\varphi(x)$ 是算符取值广义函数，我们用尝试函数将它抹平，

$$\varphi_f = \int d^4x f(x)\varphi(x). \tag{3-62}$$

当 $f$ 趋近 $\delta(t)g(\mathbf{x})$ 或 $\delta'(t)g(\mathbf{x})$ 时，我们重新得到了 $\varphi(0,\mathbf{x})$ 或 $\pi(0,\mathbf{x})$ 的空间平均．我们可以研究在相应于确定粒子数 $r$ 的态上 $\varphi_f$ 的几率分布

$$\rho_r(a) = \langle r|\delta(\varphi_f - a)|r\rangle = \int\frac{d\alpha}{2\pi}e^{-i\alpha a}\langle r|e^{i\alpha\varphi_f}|r\rangle. \tag{3-63}$$

为了计算这个量，我们可以用相干态作为生成函数，这样问题就化成计算

$$\langle\eta_1|e^{i\alpha\varphi_f}|\eta_2\rangle = \exp\left\{\int d\vec{k}\left[\eta_1^*\eta_2 + i\alpha(\eta_1^*\tilde{f} + \tilde{f}^*\eta_2) - \frac{\alpha^2}{2}|\tilde{f}|^2\right]\right\}, \tag{3-64}$$

其中 $\tilde{f}$ 是 $f$ 的 Fourier 变换：

$$\tilde{f}(k) = \int d^4k e^{ik\cdot x}f(x).$$

可以看到，只有 $\tilde{f}$ 的质壳分量对式(3-64)有贡献．对于一般的情形，留给读者作为一个练习，我们导出场的真空分布为

$$\rho_0(a) = \int\frac{d\alpha}{2\pi}\exp\left[-i\alpha a - \frac{\alpha^2}{2}\int d\vec{k}|\tilde{f}(k)|^2\right]$$

$$= \left[2\pi\int d\vec{k}|\tilde{f}(k)|^2\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{a^2}{2\int d\vec{k}|\tilde{f}(k)|^2}\right]. \tag{3-65}$$

不出所料，我们得到了在平均值零附近具有均方涨落

$$\sigma = \left[\int d\vec{k}|\tilde{f}(k)|^2\right]^{1/2}$$

的高斯型分布．在相应于 $\tilde{f} = 1$ 的确定的空间-时间点上，场具有无穷大的涨落，因此是不可观测的．但是，即使当函数 $f$ 具有限制在一个固

定时间的支集时，抹平了的算符仍是有意义的．我们注意到，真空不是场为零的态．我们不久将证明，真空涨落是可以观测的．

代替考虑 $\varphi^{(+)}(x)$，我们也可以构造 $\varphi(0,\mathbf{x})$ 的尝试值的完备集：

$$\varphi_n = \int d^3x\varphi(0,\mathbf{x})F_n(\mathbf{x}). \tag{3-66}$$

这相应于 $f_n(x) = \delta(x^0)F_n(\mathbf{x})$，其中

$$\tilde{f}_n(k) = \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}F_n(\mathbf{x}) = \tilde{F}_n(\mathbf{k}). \tag{3-67}$$

按照下式归一：

$$\begin{aligned}\int d\tilde{k}\tilde{F}_n^*(\mathbf{k})\tilde{F}_{n'}(\mathbf{k}) &= \delta_{n,n'},\\ \tilde{F}_n(-\mathbf{k}) &= \tilde{F}_n^*(\mathbf{k}),\\ \sum_n \tilde{F}_n(\mathbf{k})\tilde{F}_n^*(\mathbf{k}') &\equiv (2\pi)^3 2\omega_k\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned} \tag{3-68}$$

不太确切地说，具有本征值 $\varphi_{n,c}$ 的算符 $\varphi_n$ 的本征态可以称为场 $\varphi(0,\mathbf{x})$ 的本征态，其本征值

$$\varphi_c(\mathbf{x}) = \sum_n \varphi_{n,c}\int d\tilde{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}F_n^*(\mathbf{k}), \tag{3-69}$$

使得

$$\int d^3x\varphi_c(\mathbf{x})F_n(\mathbf{x}) = \varphi_{n,c}.$$

我们用 $|\varphi_c\rangle$ 表示相应的态．为了得到它在 Fock 基上的分量，只需知道它和相干态 $|\eta\rangle$的标量积．为此，需要对每个 $n$ 值求解

$$\langle\eta|\varphi_n|\varphi_c\rangle = \varphi_{n,c}\langle\eta|\varphi_c\rangle. \tag{3-70}$$

如果所取的归一化使得

$$I = \int|\varphi_c\rangle\prod_n\frac{d\varphi_{n,c}}{\sqrt{2\pi}}\langle\varphi_c|, \tag{3-71}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\langle\eta|\varphi_c\rangle = \exp\Big\{&-\frac{1}{4}\sum_n\varphi_{n,c}^2 + \int d\tilde{k}\Big[-\frac{1}{2}\eta^*(\mathbf{k})\eta^*(-\mathbf{k})\\ &+\eta^*(\mathbf{k})\sum_n\varphi_{n,c}\tilde{F}_n(\mathbf{k})\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{3-72}$$

由此我们可以研究这些态所包含的物理内容.

### 3-1-3 荷电标量场

厄米标量场的以上叙述不能区分粒子和反粒子. 粒子和反粒子必须携带某些相反的荷量子数，不管这些荷的性质如何. 经典的最小耦合规定至少需要一个复数场. 因此，在量子情况下,我们引入由复的量

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

和它的厄米共轭表示的一对厄米场 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$. 总的拉氏量 $\mathscr{L}_{\text{tot}}$ 等于二个关于 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 的形如式(3-7)的相同形式的拉氏量之和:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{tot}} &= \mathscr{L}(\varphi_1) + \mathscr{L}(\varphi_2) \\ &= (\partial_\mu\varphi)^+(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^+\varphi. \end{aligned} \tag{3-73}$$

在用下标 1 和 2 表征的内部空间的任何转动下，或者等价地当 $\varphi$ 乘于一相位，$\varphi^+$ 乘于共轭的相位时,二次型的$\mathscr{L}$保持不变. 不变群是 $U(1)$ 或 $O(2)$. 量子化是对 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 独立地进行的,其中态用相应于算符

$$N_i = \int d\tilde{k}a_i^+(k)a_i(k), \quad i = 1, 2 \tag{3-74}$$

的类型 1 或 2 的量子数目 $n_1$ 和 $n_2$ 来标记. 借助于场 $\varphi$ 和$\varphi^+$，以及共轭动量

$$\pi = \dot{\varphi}^+ = \frac{\dot{\varphi}_1 - i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}, \quad \pi^+ = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_1 + i\dot{\varphi}_2}{\sqrt{2}}, \tag{3-75}$$

哈密顿量可写成

$$H = \int d^3x :\pi^+\pi + \nabla\varphi^+\nabla\varphi + m^2\varphi^+\varphi:. \tag{3-76}$$

注意,和厄米情形相比,式(3-73)和(3-76)没有因子 $\frac{1}{2}$.

对易规则

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi^+(x), \varphi^+(y)] = 0,$$
$$[\varphi(x), \varphi^+(y)] = i\Delta(x-y), \tag{3-77}$$

在等时情况下简化为

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = [\varphi^+(t, \mathbf{x}), \pi^+(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

场本身可以写成

$$\varphi(x) = \int d\tilde{k}[a(k)e^{-ik\cdot x} + b^+(k)e^{ik\cdot x}],$$
$$\varphi^+(x) = \int d\tilde{k}[b(k)e^{-ik\cdot x} + a^+(k)e^{ik\cdot x}],$$
$$a(k) = \frac{a_1(k) + ia_2(k)}{\sqrt{2}},$$
$$a^+(k) = \frac{a_1^+(k) - ia_2^+(k)}{\sqrt{2}}, \tag{3-78}$$
$$b(k) = \frac{a_1(k) - ia_2(k)}{\sqrt{2}},$$
$$b^+(k) = \frac{a_1^+(k) + ia_2^+(k)}{\sqrt{2}},$$

$$[a(k), a^+(k')] = [b(k), b^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

所有其它的对易子等于零.

我们看到,相应于二个可观测量

$$N_a = \int d\tilde{k} a^+(k)a(k), \quad N_b = \int d\tilde{k} b^+(k)b(k), \tag{3-79}$$

$\varphi$ 湮灭类型 $a$ 的粒子和产生类型 $b$ 的粒子,而 $\varphi^+$ 正好相反. 在我们下面讨论电荷时就会看到,我们选择对角化的 $N_a$ 和 $N_b$ 而不选 $N_1$ 和 $N_2$ 是很自然的,这使人联想起光的圆极化相对线性极化的选择. 当然, $N_a + N_b = N_1 + N_2$. 最后,能量、动量被表达为

$$P^\mu = \int d\tilde{k} k^\mu [a^+(k)a(k) + b^+(k)b(k)], \quad (3\text{-}80)$$

而所有的算符 $a(k)$和 $b(k)$ 使真空湮灭.

将 Noether 定理应用于理论的 $U(1)$ 不变性，我们期待存在守恒流

$$j_\mu = :i\varphi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi:, \quad (3\text{-}81)$$

和相应的与时间无关的荷

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x :i(\varphi^+ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^+ \varphi): \\ &= \int d\tilde{k}[a^+(k)a(k) - b^+(k)b(k)] \\ &= N_a - N_b. \end{aligned} \quad (3\text{-}82)$$

的确，我们可以验证

$$\dot{Q} = i[H, Q] = 0, \ \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3\text{-}83)$$

因此，$a$ 量子携带荷 $+1$，$b$ 量子携带荷 $-1$. 这二种类型起着对称的作用，为了在物理上区分它们，我们必须引入外部耦合.

按惯例将其中的一类等同于粒子，另一类看作反粒子. 理论的对称性要求 $m_a = m_b$，还要求有相同的自旋，在这里自旋都为零. 粒子和反粒子交换的分立对称性称为电荷共轭.

证明我们可以在 Fock 空间中找到一个和哈密顿量对易的幺正算符 $\mathscr{C}$，使得

$$\mathscr{C}\varphi(x)\mathscr{C}^+ = \eta_c \varphi^+(x) \quad |\eta_c| = 1, \quad (3\text{-}84)$$

并讨论它的性质.

具有不同性质的粒子-反粒子标量对的例子是介子 $\pi^+\pi^-$、$K^+K^-$或 $K^0\bar{K}^0$. 在最后一种情况下，相反的"荷"是奇异数.

正如我们在后面将会看到的，通过作为唯一的组合进入电荷共轭不变耦合的复数场 $\varphi$ 给出的统一的描述，显示出粒子和反粒子的动力学性质之间的深刻联系，它超过了它们所具有的相同的运动学不变量这种关系.

### 3-1-4 编时乘积

当算符 $\varphi^+(x)$ 作用在一个态上时，产生一个荷为 $+1$ 的粒子或湮灭一个荷为 $-1$ 的反粒子，在二种情况下都使总的荷增加了$+1$. 与此类似，如果用 $\varphi(x')$ 作用在态上，就湮灭一个单位的荷. 根据 $t'-t$ 的符号，我们可以用二种方法解释保持总荷不变的二个算符的联合作用. 如果 $t'>t$，我们首先在时刻 $t$ 用算符 $\varphi^+(x)$ 产生一个粒子，然后在较后的时刻 $t'$ 用 $\varphi(x')$ 湮灭这个粒子. 相应的振幅用算符

$$\theta(t'-t)\varphi(t',\mathbf{x}')\varphi^+(t,\mathbf{x}) \tag{3-85}$$

的平均值给出. 当 $t'<t$ 时，用 $\varphi(x')$ 产生一个反粒子，然后在时刻 $t$ 用 $\varphi^+(x)$ 吸收它，具有相应的振幅

$$\theta(t-t')\varphi^+(t,\mathbf{x})\varphi(t',x'). \tag{3-86}$$

不管因果性的传播，在二种情况下都是在 $x$ 处荷增加，在 $x'$ 处荷减少. 在 $t>t'$ 的情况下，我们可以不用在 $x'$ 处产生一个反粒子接着在 $x$ 被吸收这种说法，而说成在 $x'$ 出现的空穴在较后的时刻 $t$ 被填满. 于是我们重新得出了第二章中 Dirac 空穴的描述.

二个算符式(3-85)和(3-86)的和

$$\begin{aligned}T\varphi(x')\varphi^+(x) &= \theta(t'-t)\varphi(x')\varphi^+(x)\\ &\quad+\theta(t-t')\varphi^+(x)\varphi(x')\end{aligned} \tag{3-87}$$

被合适地称为 Dyson 编时乘积，因为在记号 $T$ 的作用下算符按时间的增加从右到左排列. 在编时下玻色算符显然对易.

让我们用算符 $\Box_{x'}+m^2$ 作用于编时乘积式(3-87). 应当小心，因为阶梯函数是和时间有关的，因此我们必定得到集中在相同时刻的广义函数而不是得到零. 实际上，

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2}T\varphi(x')\varphi^+(x)=\frac{\partial}{\partial t'}\left\{T\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x')\varphi^+(x)\right.$$

$$+\delta(t'-t)[\varphi(x'),\varphi^+(x)]\Big\}$$

$$=T\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x')\varphi^+(x)+\delta(t'-t)$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x'),\ \varphi^+(x)\right],$$

其中我们已利用了

$$\delta(t'-t)[\varphi(x'),\varphi^+(x)]=i\delta(t'-t)\Delta(0,\mathbf{x}'-\mathbf{x})=0.$$

于是，根据式(3-77)和(3-57)，

$$\delta(t'-t)\left[\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(x'),\ \varphi^+(x)\right]$$

$$=i\delta(t'-t)\frac{\partial}{\partial t'}\Delta(t'-t,\mathbf{x}'-\mathbf{x})$$

$$=-i\delta^4(x'-x).$$

再利用 $(\partial^2/\partial t'^2)\varphi(x')=(\Delta_{x'}-m^2)\varphi(x')$，即得

$$(\Box_{x'}+m^2)T\varphi(x')\varphi^+(x)=-i\delta^4(x'-x). \quad (3\text{-}88)$$

如果场 $\varphi$ 满足 $(\Box+m^2)\varphi(x)=j(x)$，而不是服从齐次 Klein-Gordon 方程，则方程(3-88)将换成

$$(\Box_{x'}+m^2)T\varphi(x')\varphi^+(x)$$

$$=Tj(x')\varphi^+(x)-i\delta^4(x'-x). \quad (3\text{-}89)$$

由此得到，真空期待值

$$G_F(x'-x)=i\langle 0|T\varphi(x')\varphi^+(x)|0\rangle \quad (3\text{-}90)$$

是一种 Klein-Gordon 算符的 Green 函数。简短的计算表明，这实际上是在第一章中遇到的 Feynman 标量传播子：

$$G_F(x-y)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x-y)}. \quad (3\text{-}91)$$

我们得到结论：自由的相对论标量场的量子化，已导致了对带荷或不带荷、服从 Bose-Einstein 统计的无自旋、无相互作用的粒子的令人满意的描述。在没有相互作用存在时，场量子

的数目是守恒的.

### 3-1-5 热力学平衡

在总的三维动量为零的静止系中，可能发生下述情形：上述量子化系统的正确描述是在温度 $T = 1/k\beta$（$k$ 为 Boltzmann 常数）、化学势为 $\mu$ 的热力学平衡态，而不是真空态. 只要量子的总数 $N$ 是守恒的，这是有确切定义的. 我们回到固定体积的量子化，其分立动量

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{V^{1/3}}\mathbf{n}, \quad n_1, n_2, n_3 \text{ 为整数}.$$

于是积分换成求和：

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \to \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}.$$

通过用 Kronecker 记号代替 $\delta$ 函数的对易关系

$$[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}'}^{+}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$

我们用定义

$$a(k) = \sqrt{2\omega_k V}A_{\mathbf{k}}$$

重新安排湮灭算符和产生算符. 因此，我们有

$$H = \int d\bar{k}\omega_k a^{+}(k)a(k) = \sum_k \omega_k A_{\mathbf{k}}^{\dagger}A_{\mathbf{k}},$$

$$N = \int d\bar{k}a^{+}(k)a(k) = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{\dagger}A_{\mathbf{k}}.$$

为了简单起见，假设系统是中性的. 巨配分函数 $\mathcal{Z}$ 由 Fock 空间中的迹给出：

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}e^{-\beta(H-\mu N)} = \mathrm{Tr}\exp[-\beta\sum_{\mathbf{k}}(\omega_k - \mu)A_{\mathbf{k}}^{\dagger}A_{\mathbf{k}}].$$

每个模式贡献一因子化的项，而且因为 $\mathrm{Tr}e^{\lambda A^{+}A} = (1 - e^{\lambda})^{-1}$，

$$\mathcal{Z} = \exp[-\sum_{\mathbf{k}} \ln(1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)})].$$

在体积趋于很大时，热力学势等于

$$\Omega = \log \mathcal{Z} = -V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)}).$$

从热力学知道，如果 $p$ 是压力，则 $\Omega = \beta pV$. 因此

$$p = -\frac{1}{\beta}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{\beta(\omega_k - \mu)}), \tag{3-92}$$

而能量密度的平均值 $\bar{E}/V$（没有零点振动）和粒子密度的平均值 $\bar{N}/V$ 等于

$$\frac{\bar{E}}{V} = -\frac{\partial\Omega}{V\partial\beta}\bigg|_{z\mu=常数} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega_k}{e^{\beta(\omega_k-\mu)}-1}, \tag{3-93}$$

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{1}{\beta V}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\bigg|_{\beta} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta(\omega_k-\mu)}-1}.$$

这是相应于 Bose 统计的熟悉的表达式。在 $m=0$ 的情况下，当粒子数不守恒时(即 $\mu=0$)，除极化外，情况和黑体辐射是类似的。能量密度变成

$$\frac{\bar{E}}{V} = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{|\mathbf{k}|}{e^{\beta|k|}-1} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\frac{k^3}{\beta}\frac{d}{dk}\ln(1-e^{-\beta k}),$$

分部积分后得到

$$\frac{\bar{E}}{V} = -\frac{3}{\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ln(1-e^{-\beta|k|}) = 3p. \tag{3-94}$$

黑体辐射问题中一个熟悉的经典关系告诉我们，只有对角元 $\bar{\theta}_{00}=\bar{E}/V$，$\bar{\theta}_{ii}=p\delta_{ii}$($i,i=1,2,3$) 的平均能量、动量张量 $\bar{\theta}_{\mu\nu}$ 是无迹的：

$$\bar{\theta}^\mu_\mu = \frac{\bar{E}}{V} - 3p = 0.$$

用圆括号表示热力学的平均值(现在我们假设 $\mu=0$，但质量是任意的)，

$$(A) = \frac{\sum_\alpha\exp\{-\beta E_\alpha\}\langle\alpha|A|\alpha\rangle}{\sum_\alpha\exp\{-\beta E_\alpha\}}.$$

我们来考虑在有限温度时的传播。令

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1},$$

则

$$(A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}'}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}f(\omega_k),$$

$$(A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}'}^\dagger) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}[1+f(\omega_k)] = -\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}f(-\omega_k),$$

$$(A_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}'}) = (A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}'}^\dagger) = 0.$$

在体积趋于无穷大时，

$$(\varphi(x)\varphi(y)) = \int d\bar{k}\{e^{-ik\cdot(x-y)}[1+f(\omega_k)] + e^{ik\cdot(x-y)}f(\omega_k)\},$$

编时乘积具有如下形式

$$(T\varphi(x)\varphi(y)) = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$
$$+\int d\tilde{k}\frac{1}{e^{\beta\omega_k}-1}(e^{-ik\cdot(x-y)}+e^{ik\cdot(x-y)}). \qquad (3\text{-}95)$$

这个表达式将有限温度的传播子表示为二项之和，一项是温度为零时的 Feynman 传播子，另一项是齐次 Klein-Gordon 方程的依赖于温度的解，当 $\beta\to\infty(T\to 0)$ 时，这项象 $e^{-\beta m}$ 一样趋于零．这个传播子对于研究偏离平衡的动力学扰动是有意义的．

配分函数的结构暗示，在将微扰论应用于统计系统时，我们可能会遇到一种不同的 "Euclidean" 传播子．从固定时刻的基本的动力学场变量出发，定义对于虚时间

$$x_0 = -i\hat{x}_0$$

的演变，其中 $\hat{x}_0$ 是实的，首先根据

$$\varphi(x) = e^{iHx_0}\varphi(0,\mathbf{x})e^{-iHx_0} = e^{H\hat{x}_0}\varphi(0,\mathbf{x})e^{-H\hat{x}_0}$$

将 $\hat{x}_0$ 限制在间隔 $[0,\beta]$ 中．关于 $\hat{x}_0$ 的编序算符将用记号 $\hat{T}$ 表示，且满足

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}_0^2}-\Delta_x+m^2\right)[\hat{T}\varphi(x)\varphi(y)] = -i\delta(\hat{x}_0-\hat{y}_0)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

它可以延拓为 $\hat{x}_0-\hat{y}_0$ 的周期函数，其周期为 $\beta$．实际上，首先假设 $\hat{y}_0$ 被限制在间隔 $[0,\beta]$ 中，然后由求迹的循环特性

$$[\hat{T}\varphi(x)\varphi(y)]_{\hat{x}_0=0} = (\mathrm{Tr}e^{-\beta H})^{-1}\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}\varphi(y)\varphi(0,\mathbf{x})]$$
$$= (\mathrm{Tr}e^{-\beta H})^{-1}\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}e^{\beta H}\varphi(0,\mathbf{x})e^{-\beta H}\varphi(y)]$$
$$= [\hat{T}\varphi(x)\varphi(y)]_{\hat{x}_0=\beta}$$

在实施这种延拓时，函数 $\delta(\hat{x}_0-\hat{y}_0)$ 被理解为应用于周期函数（在圆周上的函数），且有 $2\pi\delta(\alpha)=\sum_n e^{in\alpha}$．于是，我们可以写成

$$[\hat{T}\varphi(x)\varphi(y)] = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-2i\pi\frac{n}{\beta}(\hat{x}_0-\hat{y}_0)\right]$$
$$\times\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik\cdot(x-y)}\frac{i}{k^2-m^2}$$
$$= \frac{1}{\beta}\sum_{k^0=2i\pi n/\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{i}{k^2-m^2}. \qquad (3\text{-}96)$$

在最后的表达式中，已利用闵可夫斯基记号，和 $k^0$ 一样，$x^0=-i\hat{x}^0$ 是

纯虚数．如果我们用记号$\int^{(\beta)} d^4k/(2\pi)^4$表示联合的分立求和及积分，

$$\frac{1}{\beta}\sum_{k^0=2\pi in/\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

则式(3-96)的结构在形式上就和普通的传播子完全一样．可是我们看到，分母

$$k^2-m^2=-\left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2+\mathbf{k}^2+m^2\right]$$

决不会等于零．读者应当认识到，对于不相关的问题，式(3-95)和(3-96)表示完全不同的量．

## 3-2 量子化的辐射场

上面热力学的例子立即把我们引导到辐射场．实际上，在历史上 Planck 黑体的能谱是场量子化的第一个实例．我们必须简单地把前面的结构推广到用势 $A_\mu(x)$ 描述的自由度．因为我们坚持理论的定域性质，我们不能用规范不变的张量 $F_{\mu\nu}$ 作为基本的动力学变量．我们不得不面临在第一章中已详细讨论过的 $A_\mu$ 的规范依赖性．为了克服这种困难，已采用过种种不同的方法．我们并不试图引用所有这些方法，在这里我们只提供 Gupta-Bleuler 的不定度规量子化．

### 3-2-1 不定度规

我们记得，拉氏量

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^2 \qquad (3\text{-}97)$$

(其中 $F$ 用 $A$ 表示)不适合于正则量子化，因为 $A_0$ 的共轭动量等于零．如果我们不担心明显的 Lorentz 协变性，我们可以

通过约束 $A^0$ 而满足于使用 $A$，并采用形如 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ 的条件．当然，在物理上这是合理的，但这不符合我们的目的．因此，我们采用修改运动方程的方法，其代价是通过适当限制物理态而重新应用 Maxwell 理论，因为我们将引进虚假的自由度．初看起来其代价似乎太大，不仅量子化的 Hilbert 空间是太大了，而且代替正的度规，它将容许负模方的态．所以，仅当我们限于物理的量子——只具有二种极化的光子——时才有通常量子力学的几率解释．我们还记得，为了保持规范不变性——证实上述方法的合理性的要素，我们将不得不核实在引入相互作用时流仍然是守恒的．

因此，我们用任意常数 $\lambda\neq 0$，将式(3-97)修改为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^2-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2. \tag{3-98}$$

于是，Maxwell 方程被换成

$$\Box A_\mu-(1-\lambda)\partial_\mu(\partial\cdot A)=0, \tag{3-99}$$

相应于 $A$ 的四个分量的共轭动量是

$$\pi^\rho=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\rho)}=F^{\rho 0}-\lambda g^{\rho 0}(\partial\cdot A), \tag{3-100}$$

特别是 $\pi^0$ 不再等于零．

无论式(3-99)的右边象自由情形时那样等于零，还是我们用一个守恒流代替右边而不等于零，我们都得到

$$\Box(\partial\cdot A)=0, \tag{3-101}$$

因此 $\partial\cdot A$ 是自由标量场．在经典情况下我们曾证明过，可以对边界值加上适当的条件，以便作为式(3-101)的结果 $\partial\cdot A$ 处处等于零，因此在 Lorentz 规范 $\partial\cdot A=0$ 中恢复了 Maxwell 理论．在量子情况下这是做不到的．实际上，我们将假设正则对易规则

$$[A_\rho(t,\mathbf{x}),\pi^\nu(t,\mathbf{y})]=ig^\nu_\rho\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3-102}$$

这时算符方程 $\partial \cdot A = 0$ 是不相容的，因为 $\partial \cdot A$ 和 $\pi^0$ 只相差一个常数因子，而且 $\pi^0$ 和 $A^0$ 的等时对易子不等于零。我们即将看到，根据式(3-102)的量子化，由于增加了必须消去的非物理性质而做过了头。尽管如此，当 $\lambda$ 保持任意时所有的计算同样能进行，但为了简单起见今后我们将令 $\lambda = 1$，这时式(3-99)简化为

$$\Box A^\mu = 0, \quad \lambda = 1. \tag{3-103}$$

在量子情况下，不太确切地说，$\lambda$ 的选择称为规范的选择，并把 $\lambda = 1$ 称为 Feynman 规范。

这种简化的做法，使我们不能直接验证我们的结果是和 $\lambda$ 无关的。在自由场的情况下，我们把这种验证作为一个练习留给读者自己去做。读者同样可以讨论不同于式（3-98）的其它形式，在那里附加项可以取为 $(\lambda/2)[\partial \cdot A - \varphi(x)]^2$，其中 $\varphi(x)$ 是 $c$ 数经典场；或者取为 $(\lambda/2)[n(x) \cdot A]^2$，其中 $n(x)$ 是经典矢量场(也许是常数)。

要求

$$[A_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] = [\pi_\rho(t, \mathbf{x}), \pi_\nu(t, \mathbf{y})] = 0, \tag{3-104}$$

这就补全了对易规则式(3-102)。由式(3-104)得到，在相同时刻 $A_\rho$ 的空间微商是对易的，从而式(3-102)和(3-104)可以改写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} [A_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] &= [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{y})] \\ &= 0, \\ [\dot{A}_\rho(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] &= i g_{\rho\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}\right\} \tag{3-105}$$

类似于标量情形重复四次。相应于经典势分量的实数性，我们假设它们所对应的量子化的量是厄米的。

因此，动力学系统由式(3-103)和(3-105)确定。可是我们应当注意到，和标量情形相比稍有不同，在标量情况下非平庸的对易子是

$$[\varphi(t,\mathbf{x}),\dot{\varphi}(t,\mathbf{y})]=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad(3\text{-}106)$$

而现在四个分量 $A_\mu(t,\mathbf{x})$ 中只有三个其性质象式(3-106)那样. 包含 $A_0(t,\mathbf{x})$ 的对易子有相反的符号,就象场和它的共轭变量的作用被交换了. 这和 $A_\mu$ 的四维矢量性质有关,而且正如我们即将认识到的, 当我们象前几节那样"求解"式(3-105)时,将生成完全不同的 Hilbert 空间.

为了实现这种方案,我们用式(3-103)的平面波解对场作 Fourier 分解,并令

$$A_\mu(x)=\int d\tilde{k}\sum_{\lambda=0}^{3}[a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)e^{-ik\cdot x}+a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k)e^{ik\cdot x}],\qquad(3\text{-}107)$$

和式(3-35)一样,其中

$$d\tilde{k}=\frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3},\quad k_0=|\mathbf{k}|.\qquad(3\text{-}108)$$

对于正光锥上的每个 $k$, $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ 是四个线性独立矢量的集合,我们可以假定它们是实的. 记号+表示 Fock 空间中非退化标量积的厄米共轭. 正如式(3-108)所表明的,场量子是无质量的.

为了阐明式(3-107)所包含的内容,我们对关于固定参考系的极化矢量 $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ 作明确的选择. 用 $n$ 表示沿时间轴的四维矢量, $n^2=1$, $n^0>0$. 选 $\varepsilon^{(1)}$ 和 $\varepsilon^{(2)}$ 位于正交于 $k$ 和 $n$ 的平面中,使得

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda')}(k)=-\delta_{\lambda,\lambda'}\quad\lambda,\lambda'=1,2,$$

然后在正交于 $n$ 的平面 $(k,n)$ 中挑选 $\varepsilon^{(3)}$ 并归一化,

$$\varepsilon^{(3)}(k)\cdot n=0,\quad[\varepsilon^{(3)}(k)]^2=-1,$$

最后取 $\varepsilon^{(0)}$ 等于 $n$. 按照这些惯例我们分别称 $\varepsilon^{(1)}$ 和 $\varepsilon^{(2)}$ 为横极化, $\varepsilon^{(3)}$ 为纵极化, $\varepsilon^{(0)}$ 为标量极化. 在 $n^0=1$, $\mathbf{k}$ 沿第三轴的参考系中,我们简单地有

$$\varepsilon^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

在任何情况下我们都有

$$\sum_{\lambda}\frac{\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k)\varepsilon_{\nu}^{(\lambda)*}(k)}{\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda)*}(k)}=g_{\mu\nu},$$

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda')*}(k)=g^{\lambda\lambda'}. \tag{3-109}$$

由于不确定的标量积，第一个表达式的分母是需要的．由式(3-107)可知，$A_\mu$ 自动地满足场方程．只要

$$[a^{(\lambda)}(k),\ a^{(\lambda')+}(k')]=-g^{\lambda\lambda'}2k^0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{3-110}$$

即可得到对易关系式(3-105)．此外，不难看到，在任何时刻都有

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=-ig_{\mu\nu}\Delta(x-y), \tag{3-111}$$

其中 $\Delta$ 由 $m=0$ 的式(3-56)确定．当我们看到协变表达式，例如式(3-111)，自然地出现时，我们感到是可靠的．于是我们继续进行，引入被各种算符 $a^{(\lambda)}(k)$ 湮灭的真空态

$$a^{(\lambda)}(k)|0\rangle=0,\quad \lambda=0,1,2,3.$$

但是，当我们表面上引入的极化态比通常认为的光子极化态的数目大一倍时，我们总是感到不放心．当我们构造具有标量极化的单粒子态

$$|1\rangle=\int d\tilde{k}f(k)a^{(0)+}(k)|0\rangle$$

时，麻烦就看得很明显了．计算

$$\langle 1|1\rangle = \iint d\tilde{k}d\tilde{k}' f^*(k)f(k')\langle 0|a^{(0)}(k)a^{(0)+}(k')|0\rangle.$$

根据式(3-110),我们得到佯谬的结果

$$\langle 1|1\rangle = -\langle 0|0\rangle \int d\tilde{k}|f(k)|^2.$$

这表明 Fock 空间具有不确定的度规! 用其它三类极化重复同样的计算，将导致具有正度规的态. 量子力学的几率解释将怎么样呢?

假使我们讨论自由的情形，面临的情况看来不是灾难性的,但相互作用可能激发我们所不希望的态. 关键问题是,直到目前为止,我们并没有真正处理 Maxwell 理论，因为我们已明显地修改了拉氏量. 为了重新得到 Maxwell 理论,我们希望令 $\partial \cdot A = 0$,但作为算符方程这是不可能的. 因此,我们至少可以尝试挑选态 $|\phi\rangle$，使得 Lorentz 条件在平均值的意义上成立:

$$\langle \phi|\partial \cdot A|\phi\rangle = 0. \qquad (3\text{-}112)$$

为了保持物理的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 的线性结构,我们要求 $\partial \cdot A$ 的湮灭(正频)部分湮灭 $\mathscr{H}_1$:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}|\phi\rangle = 0. \qquad (3\text{-}113)$$

显然,能从式(3-113)得到式(3-112).

现在我们来分析属于 $\mathscr{H}_1$ 的态. 因为条件式(3-113)是线性的,我们可以考虑基底态,它们是用属于各种极化的产生算符的(抹平的)乘积作用在真空上得到的. 因此，我们将这些态因子化为

$$|\phi\rangle = |\phi_T\rangle|\phi\rangle, \qquad (3\text{-}114)$$

这里 $|\phi_T\rangle$ 相应于横光子，$|\phi\rangle$ 是用纵向算符和标量算符作用在真空上得到的. 这种分解依赖于我们对极化矢量的习惯选取. 显然,我们只需考察条件式(3-113)作用在 $|\phi\rangle$态上的结果,因为 $\partial \cdot A^{(+)}$ 只包含纵向极化和标量极化:

$$i\partial \cdot A^{(+)} = \int d\tilde{k} e^{-ik\cdot x} \sum_{\lambda=0,3} a^{(\lambda)}(k)\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k. \quad (3\text{-}115)$$

因此，式(3-113)简化为

$$\sum_{\lambda=0,3} k \cdot \varepsilon^{(\lambda)}(k) a^{(\lambda)}(k)|\phi\rangle = 0. \quad (3\text{-}116)$$

我们不能认为式(3-116)可以完全确定 $|\phi\rangle$. 此外，我们必须考虑到选取横向极化矢量时的任意性，我们可以随意加上正比于 $k$ 的项. 在态的 $|\phi\rangle$ 部分必定会反映出这种任意性，因此我们至多可以认为，一个给定的物理状态在 $\mathscr{H}_1$ 中用一类等价的矢量表示. 当然，我们必须验证，在这个子空间中的矢量有正的平方模方.

式(3-116)的等价形式是

$$[a^0(k) - a^{(3)}(k)]|\phi\rangle = 0. \quad (3\text{-}117)$$

态 $|\phi\rangle$可以是相应于 0, 1, 2,… 个标量"光子"或纵向"光子"态的线性组合:

$$\left.\begin{aligned} &|\phi\rangle = C_0|\phi_0\rangle + C_1|\phi_1\rangle + \cdots + C_n|\phi_n\rangle + \cdots, \\ &|\phi_0\rangle \equiv |0\rangle. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}118)$$

借助于式(3-110)(注意负号)，这些光子的粒子数算符为

$$N' = \int d\tilde{k}[a^{(3)+}(k)a^{(3)}(k) - a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k)]. \quad (3\text{-}119)$$

满足式(3-117)的态 $|\phi_n\rangle$，将使得

$$n\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 0.$$

因此

$$\langle\phi_n|\phi_n\rangle = \delta_{n,0}.$$

所以，如果 $n \neq 0$，这个态的模方等于零. 形如式(3-118)的一般解具有

$$\langle\phi|\phi\rangle = |C_0|^2 \geqslant 0,$$

系数 $C_i$ 仍是任意的，每个 $|\phi_n\rangle$ 满足式(3-117). 尚须证明，

$|\phi\rangle$ 的任意性并不影响物理的可观测量。例如考虑能量。哈密顿量为

$$H = \int d^3x : \pi^\mu A_\mu - \mathscr{L} : = \frac{1}{2}\int d^3x :$$

$$\sum_{i=1}^{3} [\dot{A}_i^2 + (\nabla A_i)^2] - \dot{A}_0^2 - (\nabla A_0)^2 :$$

$$= \int d\tilde{k}\omega_k \left[ \sum_{1}^{3} a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k) \right.$$

$$\left. - a^{(0)+}(k)a^{(0)}(k) \right]. \qquad (3\text{-}120)$$

当 $H$ 作用在 $\mathscr{H}_1$ 中的态上时，通常我们得到来自非物理部分 $|\phi\rangle$ 的贡献，但当我们取平均值时这个贡献等于零，因为借助于式(3-117)，

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{\left\langle \psi_T \middle| \int d\tilde{k}\omega_k \sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)+}(k)a^{(\lambda)}(k) \middle| \psi_T \right\rangle}{\langle\psi_T|\psi_T\rangle}. \qquad (3\text{-}121)$$

就动量而论，这个公式和将 $\omega_k$ 换成 $\mathbf{k}$ 是类似的。因为只有平均值才能被观察，就此而言我们看到，当限于 $\mathscr{H}_1$ 时不仅负几率不出现，而且标量光子和纵向光子也无贡献。只出现二个物理的横极化态。

认识到下面这一点是很微妙的：$|\phi\rangle$的任意性反映为 $A_\mu$ 在这些态上的平均值是一个纯梯度。作为一个练习，我们来计算这个值。从式(3-118)很容易计算得到

$$\langle\phi|A_\mu(x)|\phi\rangle = C_0^* C_1 \langle\phi_0| \int d\tilde{k} e^{-ik\cdot x}[\varepsilon_\mu^{(3)}(k)a^{(3)}(k)$$

$$+ \varepsilon_\mu^{(0)}(k)a^{(0)}(k)]|\phi_1\rangle + cc \text{（复数共轭）}.$$

所有其它的分量 $|\phi_n\rangle$ 都没有贡献，因为 $A_\mu$ 使 $n$ 改变一个单位；$|\phi_0\rangle$可以取成等于$|0\rangle$，而 $|\phi_1\rangle$ 必定有如下形式：

$$|\phi_1\rangle = \int d\tilde{q} f(q)[a^{(3)+}(q) - a^{(0)+}(q)]|0\rangle.$$

选取实的极化矢量，我们有

$$\langle\phi|A_\mu(x)|\phi\rangle = \int d\tilde{k}[\varepsilon_\mu^{(1)}(k) + \varepsilon_\mu^{(0)}(k)][C_0^* C_1 e^{-ik\cdot x} f(k) + cc].$$

我们记得，$\varepsilon^{(0)}(k) = n$，并且根据它的定义

$$\varepsilon^{(3)}(k) = \frac{k - n(k\cdot n)}{(k\cdot n)},$$

因此

$$\varepsilon_\mu^{(3)}(k) + \varepsilon_\mu^{(0)}(k) = \frac{1}{(n\cdot k)} k_\mu.$$

所以，假如积分有意义，

$$\langle\phi|A_\mu(x)|\phi\rangle = \partial_\mu \int \frac{d\tilde{k}}{(k\cdot n)} [iC_0^* C_1 e^{-ik\cdot x} f(k) + cc] = \partial_\mu \Lambda(x), \quad (3\text{-}122)$$

其中标量 c 数函数 $\Lambda(x)$ 是 $\Box\Lambda(x) = 0$ 的解，并且可以通过调整矢量$|\phi\rangle$而被任意选择. 这是$|\phi\rangle$的任意性反映没有实际效果的 $A_\mu$ 的规范任意性的另一证明.

通过强加 $|\phi\rangle = |0\rangle$，我们可以在形如$|\phi_T\rangle|\phi\rangle$的态矢量的等价类中选择一个方便的代表，这又以极化矢量基底的选取为基准. 代替选择横的、实的和正交的极化矢量，我们经常选取复的组合 $(\varepsilon^{(1)} \pm i\varepsilon^{(2)})/\sqrt{2}$ 来表示光子的二种螺旋性.

我们不想去仔细推敲 Lorentz 不变性的证明. 显然，$\mathscr{H}_1$ 和表示给定物理态的等价类都是 Lorentz 不变的. 读者可以自己来明显地构造 Lorentz 变换的生成元 $M^{\mu\nu}$. 读者将可以验证，光子不仅是无质量的，而且具有螺旋性 $\pm 1$. 有时我们说，光子有自旋 1.

尽管只有 $\mathscr{H}_1$中的矢量有物理解释，值得强调的是，整个具有不定模方的 Fock 空间必须保持定域性. 通常定域性以对中间态完全求和的形式出现.

作为一个练习，我们可以在目前的体系中很容易地推广 3-1-5 节的讨论，以得到黑体能谱.

### 3-2-2 传播子

我们预料，和标量的情况一样，传播子用编时乘积的真空期待值来定义. 到目前为止，我们一直用 Feynman 规范. 象式(3-87)那样，通过用阶梯函数乘上场的乘积实现编时.

$$TA_\mu(x)A_\nu(y) = \theta(x^0 - y^0)A_\mu(x)A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0)A_\nu(y)A_\mu(x). \tag{3-123}$$

然而，有时这种编时可能太简单. 这个表达式在等时情况下没有先验地给出定义. 幸好，在目前情况下我们没有碰到这种困难. 代入式(3-107)并利用对易子式(3-110)，我们得到

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = ig_{\mu\nu}G_F(x-y)|_{m=0} = -ig_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}. \tag{3-124}$$

场的每个分量独立地起作用，我们注意到了空间分量和时间分量之间符号的改变. 显然，当 $m=0$ 时 $x$ 空间中的 Feynman 传播子为

$$G_F(x) = -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2+i\varepsilon} = \frac{1}{4i\pi^2}\frac{1}{x^2-i\varepsilon}. \tag{3-125}$$

这些公式和电磁场测量过程的关系已在 Bohr 和 Rosenfeld 的经典的文章中讨论过了.

让我们对式(3-98)中参数 $\lambda$ 的任意选择作最后的评述. 从式(3-98)我们可以导出场方程(3-99)和具有更复杂结构的等时对易子:

$$\begin{aligned}
&[A_\mu(t,\mathbf{x}),\ A_\nu(t,\mathbf{y})] = 0,\\
&[\dot{A}_\mu(t,\mathbf{x}),\ A_\nu(t,\mathbf{y})] = ig_{\mu\nu}\left(1+\frac{1-\lambda}{\lambda}g_{\mu 0}\right)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
&[A_i(t,\mathbf{x}),\ \dot{A}_j(t,\mathbf{y})] = [\dot{A}_0(t,\mathbf{x}),\ \dot{A}_0(t,\mathbf{y})] = 0,\\
&[\dot{A}_0(t,\mathbf{x}),\ A_i(t,\mathbf{y})] = i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{3-126}$$

因此，不同分量被耦合. 如果我们把式(3-99)的经典解写成

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{-ik\cdot x}\tilde{A}_\mu(k),$$

则我们得到齐次矩阵条件

$$[k^2 g^\mu_\nu - (1-\lambda)k^\mu k_\nu]\tilde{A}^\nu(k) = 0. \tag{3-127}$$

为了求得非平庸解，行列式 $\lambda(k^2)^4$ 必须等于零，这意味着在 $k^2 = 0$ 的锥面上存在 $\tilde{A}_\mu(k)$ 的支集. 可是，这不可能是简单的形式 $a_\mu(k)\delta(k^2)$，这将表示 $A_\mu(x)$ 满足齐次 Klein-Gordon 方程，这不是目前讨论的情形. 当然，$\tilde{A}_\mu(k)$ 包含 $\delta(k^2)$和 $\delta'(k^2)$. 一个等价的考虑方法是考察不等于零的 $k^2$，我们有

$$[k^2 I - (1-\lambda)k\otimes k]^{-1} = \frac{I}{k^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k\otimes k}{(k^2)^2}. \tag{3-128}$$

在这种情况下，给出态的不定度规空间结构的细节，这个任务将留给读者自己来完成. 然而，让我们论述一下传播子的构造. 由简单的定义我们有

$$\begin{aligned}
&[\Box_x g^\mu_\rho - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\rho]\langle 0|TA^\rho(x)A^\nu(y)|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|T[\Box_x g^\mu_\rho - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\rho]A^\rho(x)A^\nu(y)|0\rangle \\
&\qquad + \delta(x^0-y^0)\langle 0|[\dot{A}^\mu(x),\ A^\nu(y)]|0\rangle \\
&\qquad -(1-\lambda)g^{\mu 0}\delta(x^0-y^0)\langle 0|[\partial_\rho A^\rho(x),\ A^\nu(y)]|0\rangle.
\end{aligned} \tag{3-129}$$

利用场方程和等时对易子，我们看到非协变项已不出现，剩下

$$\begin{aligned}
&[\Box_x g^\mu_\rho - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\rho]\langle 0|TA^\rho(x)A^\nu(y)|0\rangle \\
&\qquad = ig^{\mu\nu}\delta^4(x-y).
\end{aligned} \tag{3-130}$$

因此，利用式(3-128)和 Feynman 的 $i\varepsilon$ 规定

$$\begin{aligned}
\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \\
\times\left[\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} + \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\varepsilon)^2}\right].
\end{aligned} \tag{3-131}$$

例如第二项的分母为 $(k^2+i\varepsilon)^2$ 而不是 $(k^2)^2+i\varepsilon$，这并不是显而易见的. 这只能通过完全的计算得到验证，但当我们研究有质量的矢量场时就立即变得十分明显.

当 $\lambda = 1$ 时，我们重新得到了 Feynman 规范. 当 $\lambda \to 0$ 时，我们可以看到所出现的奇异性的类型. 在极限 $\lambda \to \infty$ 时，被称为 Landau 规范. 物理结果不应当因 $\lambda$ 的不同取值而受影响. 例如，如果我们计算

具有光滑守恒流的积分

$$\int d^4y\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle j_\nu(y),$$

很容易验证，积分实际上不依赖于 $\lambda$ 的值.

### 3-2-3 有质量的矢量场

按照 Maxwell 理论光子是无质量的，或者等价地说，电磁力具有无穷大的力程. 零质量是红外灾难的根源，每当带电粒子被加速时就发射无穷多的软光子. 我们来研究一个小的质量将如何影响这种特性. 按运动学，将存在一个新的(纵向)极化态. 因此，耦合应当是，在质量 $\mu$ 趋于零的极限下，纵向和横向模式耦合的比率趋于零.

经典的自旋为 1 的有质量的粒子，可用对于四维矢量场 $A_\mu(x)$ 的 Proca 方程来描述:

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} + \mu^2 A^\nu = 0, \quad F^{\rho\nu} = \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho. \tag{3-132}$$

对这个方程取散度，我们得到

$$\mu^2 \partial \cdot A = 0. \tag{3-133}$$

对于 $\mu^2 \neq 0$，即得 $A$ 的散度等于零，于是式(3-132)简化为

$$(\Box + \mu^2)A_\rho = 0, \quad \partial \cdot A = 0. \tag{3-134}$$

$\partial \cdot A = 0$ 确保 $A_\mu$ 的四个自由度之一按协变方式被消去，因此场量子的确具有自旋 1. 显然，导致方程(3-132)的拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2} \mu^2 A^2. \tag{3-135}$$

注意，质量项前面的正号和标量场时式 (3-7) 中类似的项 $-(m^2/2)\varphi^2$ 是相当的. 如果我们考虑到对不变的平方贡献为负的类空分量代表物理的自由度，这是很容易想到的.

在量子化后，场 $A_\rho(x)$ 将有如下的展开式:

$$A_\rho(x)=\int d\tilde{k}\sum_{\lambda=1,2,3}[a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)e^{-ik\cdot x}$$
$$+a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_\rho^{(\lambda)*}(k)e^{ik\cdot x}]|_{k^0=\sqrt{k^2+\mu^2}},$$
$$[a^{(\lambda)}(k),\ a^{(\lambda')+}(k)]=\delta_{\lambda\lambda'}2k^0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \quad (3\text{-}136)$$

三个类空的正交归一矢量 $\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)$ 同时正交于类时矢量 $k_\rho$，因此如果我们假定它们是实的，则

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot\varepsilon^{(\lambda')}(k)=\delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\sum_\lambda\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k)=-\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right).$$

简单构造编时乘积导致了非协变的传播子

$$\langle 0|TA_\rho(x)A_\nu(y)|0\rangle=-i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{g_{\rho\nu}-k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$$
$$-\frac{2i}{\mu^2}\delta_{\rho 0}\delta_{\nu 0}\delta^4(x-y), \quad (3\text{-}137)$$

而对易子等于

$$[A_\rho(x),A_\nu(y)]=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-\mu^2)e^{-ik\cdot(x-y)}$$
$$\times\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right). \quad (3\text{-}138)$$

然而，对编时乘积的非协变贡献是在重合点的定域分布．我们已经注意到，时间编序留下了这种不确定的分布．因此，我们可以简单地忽略这些项，定义一个协变的传播子而不影响它的特性．在第五章中我们将对这种现象给出更加详尽的讨论．

如果我们对描述极限零质量情形不感兴趣，上面关于有质量的自旋为 1 的粒子的描述将是完全足够的．它采用只有物理态的正模方 Fock 空间，但当我们试图令 $\mu=0$ 时会遇到奇异性．这反映在如下事实中：在没有规范约定的情况

下，极限拉氏量 $-\frac{1}{4}F^2$ 是不合适的。 我们来寻找具有正确的零质量极限的等价方法。

该方法很象我们对电磁场所做的那样，窍门是引入带有辅助条件的不定度规的 Fock 空间。因此，我们研究 Stueckelberg 的拉氏量

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{2}\mu^2 A^2 - \frac{1}{2}\lambda(\partial \cdot A)^2, \quad (3\text{-}139)$$

这时对 $\lambda \neq 0$，极限 $\mu^2 \to 0$ 不是奇异的。为了在极限情况下重新得到规范不变的理论，场 $A_\mu$ 必须耦合一个守恒流。

根据式(3-139)，变分方程为

$$(\Box + \mu^2)A^\rho - (1-\lambda)\partial^\rho(\partial \cdot A) = 0. \quad (3\text{-}140)$$

如果我们两边取散度，即得

$$\lambda\left[\Box + \frac{\mu^2}{\lambda}\right]\partial \cdot A = 0. \quad (3\text{-}141)$$

如果式(3-140)的右边有守恒流而不是零，上式仍然成立。

对于 $\lambda \neq 0$，$\partial \cdot A$ 是满足 Klein-Gordon 方程的标量场，具有平方质量 $m^2 = \mu^2/\lambda$（$m^2$ 可能是负的；但是为了不发生这种情况，我们将假定 $\lambda$ 是正的）。作为式(3-141)的一个结果，场

$$A_\rho^T = A_\rho + \frac{1}{m^2}\partial_\rho\partial \cdot A = A_\rho + \frac{\lambda}{\mu^2}\partial_\rho\partial \cdot A \quad (3\text{-}142)$$

的散度为零

$$\partial^\rho A_\rho^T = 0. \quad (3\text{-}143)$$

相应的 $A$ 到“横向”（自旋 1）部分和“标量”部分的分解是

$$A_\rho = A_\rho^T - \frac{\lambda}{\mu^2}\partial_\rho(\partial \cdot A). \quad (3\text{-}144)$$

正则量子化引入四个产生算符和四个湮灭算符，它们满足

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')+}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

$$1 \leqslant \lambda, \lambda' \leqslant 3, \tag{3-145}$$

$$[a^{(0)}(k), a^{(0)+}(k')] = -(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

所有其它的对易子等于零. 式(3-145)的最后一个对易子中的负号是不定度规情形的征象. 在矢量和标量情况下出现二个不同的质量. 在二个双曲面上,场本身有分量

$$A_\rho(x) = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}} \times \sum_{\lambda=1}^{3} [a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_\rho^{(\lambda)}(k)e^{-ik\cdot x} + a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon_\rho^{(\lambda)*}(k)e^{ik\cdot x}] + \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \frac{k_\rho}{\mu} [a^{(0)}(k)e^{-ik\cdot x} + a^{(0)+}(k)e^{ik\cdot x}]. \tag{3-146}$$

与前面一样,对于 $\lambda = 1, 2, 3$, $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ 是正交于 $k(k^2 = \mu^2)$ 的三个相互正交的类空矢量. 很容易验证,表达式(3-146)满足式(3-143)和(3-140),而相应的协变传播子是

$$\langle 0|TA_\rho(x)A_\nu(y)|0\rangle = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)}\left(\frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\right), \tag{3-147}$$

$$m^2 = \frac{\mu^2}{\lambda},$$

对易子为

$$[A_\rho(x), A_\nu(y)] = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\left[\frac{1}{2k_0}(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}) \times \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right)\right]_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}} + \left[\frac{1}{2k_0}(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}) \times \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right]_{k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\right. \tag{3-148}$$

欢迎读者研究极限 $\mu \to 0$ 和 $\lambda \to 0$。

(a) 当 $\lambda \to 0$, $\mu \neq 0$ 时，证明我们重新得到 Proca 的理论。

(b) 如果 $\lambda \neq 0$, $\mu \to 0$, $m$ 也趋于零。证明在此极限下 Green 函数趋于上一小节中给出的值。

特别是，因为

$$\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\mu k_\nu/\mu^2}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

$$+ \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2/\lambda + i\varepsilon)(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)}, \qquad (3\text{-}149)$$

我们看到，正如式(3-131)中所预料的，双极点项趋于 $1/(k^2 + i\varepsilon)^2$。今后，特别是在第四章中，我们还会回来研究这种零质量极限。还应当注意，在 $k$ 空间中 Stueckelberg 形式的传播子对于大的 $k$ 其行为象 $1/k^2$，而对于有质量的 Proca 传播子式(3-137)却不同。作为一个补充的练习，读者可以检验理论的协变性，并构造 Poincaré 群的生成元 $P_\mu$ 和 $M_{\mu\nu}$。在这里我们没有对光子的运动学特征给出十分详尽的描述。关于这一方面，读者可以参阅在注记中引用的工作。然而，我们已经考虑到为在第十二章中将要讨论的规范理论的新近进展铺平道路。

我们用叙述一种方法的原理来结束这一小节，这种方法可使我们估计出地球上测量的光子质量的上限。这就是所谓的 Schrödinger 的恒场方法。作为第一步近似，假定地球可以用理想的点磁偶极子 $\mathbf{M}$ 来模拟。相应的定域守恒流使得

$$\mathbf{M} = \int d^3x \ \mathbf{x} \times \mathbf{j}(x),$$

于是可以写成 $\mathbf{j} = -\frac{1}{2}\mathbf{M} \times \nabla\delta^3(\mathbf{x})$。在静态情况下，我们从 Proca方程来导出相应的矢量势，使得 $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$，这个条件和这些方程是相容的。由此得出

$$(-\triangle + \mu^2)\mathbf{A} = \mathbf{j} = -\frac{1}{2}\mathbf{M} \times \nabla\delta^3(\mathbf{x})$$

$$= -\frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{M} \times \mathbf{k}.$$

它的一个解是

$$A(\mathbf{x}) = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\mathbf{M}\times\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2+\mu^2}$$
$$= -\mathbf{M}\times\nabla\left(\frac{e^{-\mu r}}{8\pi r}\right),$$

相应的磁感应强度是

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl}\mathbf{A} = -\nabla\times(\mathbf{M}\times\nabla)\frac{e^{-\mu r}}{8\pi r}$$
$$= [(\mathbf{M}\cdot\nabla)\nabla - \mathbf{M}\Delta]\frac{e^{-\mu r}}{8\pi r}.$$

我们取 $z$ 轴沿 $\mathbf{M}$ 方向，单位矢量为 $\hat{z}$，因此 $\mathbf{B}$ 具有形式

$$\mathbf{B} = \frac{e^{-\mu r}}{8\pi r^3}|\mathbf{M}|\left\{\left[\hat{r}(\hat{r}\cdot\hat{z}) - \frac{1}{3}\hat{z}\right](\mu^2r^2 + 3\mu r + 3)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{3}\hat{z}\mu^2r^2\right\},$$

场已被分成二部分．第一部分中，$\left[\hat{r}(\hat{r}\cdot\hat{z}) - \frac{1}{3}\hat{z}\right]$已被以因子形式分离出来，相应于 $\mu\to 0$ 时磁场的角分布．在给定距离 $r$ 处出现一均匀的附加项，它反平行于地球的偶极子．对磁场角分布的仔细扫描，使我们得到了关于质量 $\mu$ 数量级的上限 $4\times10^{-48}g(3\times10^{-15}\text{eV}\sim10^{-10}\text{cm}^{-1})$．采用不同方法的最新测量使这个结果又改进了一个数量级．

### 3-2-4 真空涨落

在着手研究耦合的非线性问题之前，先研究由场的量子化引起的简单效应是有启发的．特别有趣的是那些似乎不依赖于粒子解释——在目前情况下有关光子方面的解释——的现象．对于和真空涨落中差异的可观察性有关的二种情况，我们将给出概要的描述．在第二章中提出 Lamb 位移的 Welton 解释时，我们已遇到过这种现象．

利用修改迄今在自由空间中考虑的场的边界条件，我们可以考虑简单的宏观源．这种方法多少有点不令人满意，因为它没有说明导致这些边界条件的微观机制．但是，对于初

步的计算这种方法是合适的. Casimir (1948)的最初看法是，在真空中电磁场并不真正等于零，而有一些涨落（参看 3-1-2 节）. 如果我们引入宏观物体(即使不带电)，为了施加适当的边界条件，有必要作某些计算. 没有关于这种效应的直观的征象，因此就某种代数意义而言，这里的计算是指二个组态之间零点能的差. 原来，我们已经忽略了对哈密顿量的（无穷大)贡献$\sum\frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha$，认为它是不可观测的. 然而，它的变化是可以测量的.

我们以 Casimir 首先考虑的二块大的平行的理想导体板的简单构形为例来说明这一点. 当然，我们可以研究不同的几何形状和不同的材料而得到类似的结果（也许对于重要的征兆例外). 我们设想二块大的平行的长为 $L$ 的正方形板，相距为 $a$（见图 3-1)，其中 $a \ll L$. 考虑导体每单位表面积相对于真空的能量. 它的微商即为每单位表面积的力，其量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$（其中$M$是质量，$L$是长度，$T$是时间). 在这个

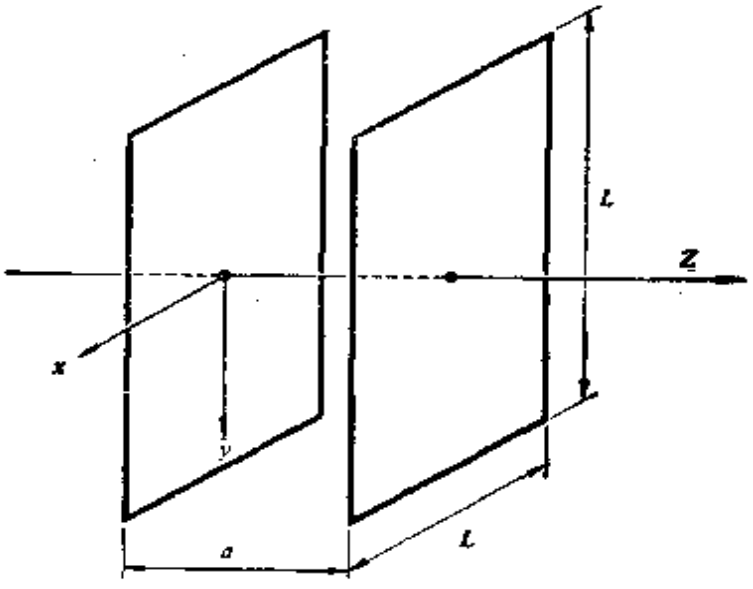



图 3-1 二块平行板之间的 Casimir 效应

问题中出现的量只有 $\hbar$，$c$ 和间隔 $a$（在界面处 **E** 垂直于板和 **B** 平行于板的边界条件并不引进任何有量纲的量）. 当然，和零点能一样，其效应正比于 $\hbar$. 因此，每单位表面的力正比于 $\hbar c/a^4$，这是具有所要求的量纲的唯一的量. 我们将看到，这个力是吸引力.

考虑体积 $L^2a$ 内的模式，其中 $L \gg a$，并忽略边缘的贡献. 正如我们所知道的，只有横向模式贡献能量. 如果垂直于板的分量 $k_z$ 不为零，考虑到板上的波节，$k_z$ 只能取分立值 $k_z = n\pi/a (n = 1, 2, \cdots)$，并存在二种极化态. 可是，如果 $k_z$ 等于零，就只剩下一种模式，从而组态的零点能等于

$$E = \sum \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha = \frac{\hbar c}{2}\sum_\alpha |\mathbf{k}_\alpha|$$

$$= \frac{\hbar c}{2}\int L^2 \frac{d^2k_{//}}{(2\pi)^2}\left[ |\mathbf{k}_{//}| + 2\sum_{n=1}^{\infty} \times\left( \mathbf{k}_{//}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)^{1/2}\right].$$

当然，按照实际情况，这个表达式等于无穷大而无意义. 但是，我们必须减去自由值，它在同样的体积中的贡献量

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2}\int \frac{L^2 d^2k_{//}}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a dk_z}{2\pi} 2\sqrt{\mathbf{k}_{//}^2 + k_z^2}$$

$$= \frac{\hbar c}{2}\int \frac{L^2 d^2k_{//}}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dn 2\sqrt{\mathbf{k}_{//}^2 + n^2\pi^2/a^2}.$$

因此，每单位表面的能量是

$$\mathscr{E} = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2\pi}\int_0^{\infty} k dk$$

$$\times\left(\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2} - \int_0^{\infty} dn\sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2}\right).$$

由于紫外(大的 $k$)发散,这个量显然仍没有定义. 可是,对于比原子大小更短的波长,利用理想导体近似是不现实的. 因此,我们在上面的积分中引入一个光滑的截断函数 $f(k)$,当 $k \lesssim k_m$ 时它等于 1,当 $k \gg k_m$ 时它等于零,其中 $k_m$ 是原子大小倒数的量级. 令 $u = a^2k^2/\pi$,则

$$\mathscr{E} = \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3}\int_0^\infty du\left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u}\right)\right.$$
$$+ \sum_1^\infty \sqrt{u+n^2}\, f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right)$$
$$\left. - \int_0^\infty dn\sqrt{u+n^2}\, f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right)\right],$$

$$\mathscr{E} = \hbar c \frac{\pi}{4a^3}\left[\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \cdots\right.$$
$$\left. - \int_0^\infty dnF(n)\right],$$

这里我们已定义

$$F(n) = \int_0^\infty du\sqrt{u+n^2}\, f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right).$$

由于截断函数存在时的绝对收敛性,上面求和和积分次序的交换是合理的. 当 $n \to \infty$ 时,$F(n) \to 0$. 我们可以利用 Euler-Maclaurin 公式计算出现在上面方括号中的求和与积分之差:

$$\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \cdots - \int_0^\infty dnF(n)$$
$$= -\frac{1}{2!}B_2F'(0) - \frac{1}{4!}B_4F'''(0) + \cdots.$$

Bernoulli 数 $B_\nu$ 由级数定义:

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{\nu=0}^\infty B_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}.$$

于是 $B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=-\frac{1}{30}$，…．我们有

$$F(n)=\int_{n^2}^{\infty}du\sqrt{u}\,f\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{a}\right),$$

$$F'(n)=-2n^2f\left(\frac{\pi n}{a}\right).$$

假定 $f(0)=1$，它的所有的微商在原点等于零，于是，$F'(0)=0$，$F'''(0)=-4$，$F$ 的更高阶的导数等于零．因此，在最后的结果中不出现和截断有关的项：

$$\mathscr{E}=\frac{\hbar c\pi^2}{a^3}\frac{B_4}{4!}=-\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{a^3},$$

每单位面积的力为

$$\mathscr{F}=-\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}=-\frac{0.013}{(a_{\mu m})^4}\ \mathrm{dyn/cm^2},\qquad(3\text{-}150)$$

负号对应于吸引力．

Sparnay（1958）已从实验上证实了这个非常微小的力，他观察到了力的大小以及和板间距离的依赖关系．

由于看起来我们没有顾及板外的效应，上面的推导可能会受到批评．在目前的情况下，可以证明它们恰好抵消．我们学到的是，真空涨落的表现形式和粒子产生或吸收中遇到的完全不同．通过考虑影响真空组态的不同类型的物体，我们可以对作用于它们的力给出一个有趣的解释．这是可以被记住的一种思考方法，由此我们可以认识到探讨量子场现象的 Schwinger 源理论的某些起因．

作为另一个例子，我们对中性原子或分子间的 Van der Waals 力作一粗略的讨论．通过研究存在和上面十分相似的二个系统时场的涨落，可以提供对这种力的讨论．归根到底，利用组元间的剩余力，我们应当能够给出宏观物体间 Casimir 效应的微观描述．实际上，我们并不想这样做，我们将沿用 Feinberg 和 Sucher 的陈述．一个更为详尽

的论述将在第七章中给出. 由第一章我们记得，电磁场的经典能量密度是 $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/2$. 一个中性系统可以和电磁场相互作用. 令 $\alpha_E(\alpha_B)$ 为静电(磁)磁化率. 在静电场中，如果用 $\rho$ 表示电荷密度，由于系统是中性的，$\int d^3x\rho(x) = 0$. 极化定义为 $\mathbf{P} = \int d^3x\rho(x)\mathbf{x}$，如果电场的变化 $\delta\mathbf{E} = -\nabla\delta V$ 在系统的范围内差不多是常数，由于 $\delta\mathbf{E}$ 引起的对于能量的相应的贡献是 $\int d^3x\rho\delta V = -\int d^3x\rho(x)\mathbf{x}\cdot\delta E = -\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{E}$. 对于弱场，磁化率使得 $\mathbf{P} = \alpha_E\mathbf{E}$，因此对小的变化 $\delta\mathbf{E}$，相互作用能的变化等于 $-\alpha_E\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E} = \delta[-\alpha_E(\mathbf{E}^2/2)]$. 类似的推论可给出磁的贡献，因此对相互作用能，我们有

$$E_{\text{int}} = -\frac{1}{2}(\alpha_E\mathbf{E}^2 + \alpha_B\mathbf{B}^2).$$

我们设法对此结果作相对论的唯象的量子推广. 我们希望写出拉氏量的相互作用部分，使得它在三维空间上的积分在静电场和非相对论极限下给出上面表达式的负值. 中性系统可以用厄米标量场 $\varphi$ 来描述. 唯一的具有所要求的性质的 $F_{\mu\nu}$ 和 $\varphi$ 的 Lorentz 标量二次式为

$$-\mathscr{L}_{\text{int}} = g_1\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi F^{\alpha\rho}F^{\beta}_{\rho} + g_2\varphi^2F^2,$$

$g_1$ 和 $g_2$ 与 $\alpha_E$ 和 $\alpha_B$ 有如下关系:

$$g_1 = \frac{1}{2m}(\alpha_E + \alpha_B),\quad g_2 = -\frac{m}{4}\alpha_B.$$

这些关系以及 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 是 $\varphi$ 的二次式(例如不是线性式)的要求来自下列事实：为了和非相对论极限作比较，我们必须按单粒子态取平均. 在非相对论极限下，$\left\langle 1\middle|\int d^3x{:}\varphi^2(x){:}\middle|1\right\rangle \simeq 1/m\langle 1|1\rangle$，$\left\langle 1\middle|\int d^3x{:}(\partial_0\varphi)^2{:}\middle|1\right\rangle \simeq m\langle 1|1\rangle$. 因为 $-\mathscr{L}_{\text{int}} = \mathscr{H}_{\text{int}}$，从上面的表达式，我们可以得到二个中性的可极化系统间静电位势的渐近形式. 在下面将进行的对荷电系统间 Coulomb 势的类似推导后，即可模仿其论证. 电荷 1 和场的相互作用能可写成 $\int d^3xj^{(1)}(x)\cdot A(x)$，$A(x)$由电荷 2 生成，如 $A(x) = \int d^4yG(x-y)j^{(2)}(y)$. 因为假定 $j^{(2)}$ 不依赖于时间，我们可以利用

$$G_F(x) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x_0^2 - \mathbf{x}^2 - i\varepsilon}.$$

首先对 $y^0$ 积分，得到

$$A = \int d^3y \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j^{(2)}(\mathbf{y}).$$

因此得到通常的 Coulomb 积分

$$E_{int} = \int d^3x d^3y j^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j^{(2)}(\mathbf{y}).$$

回到我们现在讨论的情形，显然我们有兴趣的是二次型算符，例如 $F^2$（作为 $g_2$ 的系数出现）的 Green 函数。如果用 $G_{\rho\sigma,\alpha\beta}(x-y)$ 表示 $\langle 0|TF_{\rho\sigma}(x)F_{\alpha\beta}(y)|0\rangle$，$F^2$ 的 Green 函数将正比于上式的平方，即 $G_{\rho\sigma,\alpha\beta}(x-y)G^{\rho\sigma,\alpha\beta}(x-y)$。这个广义函数是典型的 $1/(x^2-i\varepsilon)^4$ 的形式。由 $g_1$ 产生的贡献有类似的结构。因此，我们预料位能正比于

$$V(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \sim \int dy_0 \frac{1}{[(x_0-y_0)^2 - (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 - i\varepsilon]^4}$$
$$\sim \frac{\text{常数}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^7}.$$

这个最初由 Casimir 和 Polder 导出的结果和 Van der Waals 力的非相对论处理是不一致的，后者的结论是：在大距离时位势按 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-6}$ 的规律减小。在第七章中我们将推导由 Feinberg 和 Sucher 给出的大间距下位势的完整的表达式：

$$V_{ab}^{asympt}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = -\frac{1}{(4\pi)^3|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^7}[23(\alpha_E^a\alpha_E^b + \alpha_B^a\alpha_B^b)$$
$$- 7(\alpha_E^a\alpha_B^b + \alpha_E^b\alpha_B^a)],$$

并评述公式的适用范围，顺便解释和非相对论规律 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-6}$ 的矛盾。

## 3-3 Dirac 场和不相容原理

在上一章中我们已经引进了 Dirac 粒子，并对把这种理论作为多体理论描述的要求作了论证。迄今，借助于 Bose-Einstein 粒子，正则量子化已经有了一种解释，但是实验明确

表明，象电子和核子这样的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子满足 Pauli 不相容原理，并服从 Fermi-Dirac 统计．因此，在处理半整数自旋的粒子时，我们必须修改其规则．

### 3-3-1 反对易子

我们必须在与 Maxwell 方程类似的基础上考虑 Dirac 方程，两者都是经典场方程．所以，我们必须引入拉氏量以及复场 $\psi$ 和 $\psi^+$（或 $\bar{\psi}=\psi^+\gamma^0$）的共轭动量．在自由情况下，方程

$$(i\gamma\cdot\vec{\partial}-m)\psi=0,\quad \bar{\psi}(i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}+m)=0. \tag{3-151}$$

由一阶拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi)-(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi]-m\bar{\psi}\psi \tag{3-152}$$

作为密度的作用量的变分导出．例如，我们有

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}=\frac{i}{2}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\psi$$

$$+\frac{i}{2}\partial_\mu(\gamma^\mu\psi)=0,$$

在 $\psi$ 改变时也是类似的．当 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 满足场方程时，拉氏量式(3-152)等于零．因为正则量子化失去作用，我们宁愿采用如下的程式．假定 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 是作用在某个 Hilbert 空间上的量子化的算符．现在我们来研究在哪些条件下按照 Noether 定理构成的 Poincaré 群的生成元，能通过第二章中考虑过的变换定律将场变成所要求的形式．因为这些生成元以及所有的可观测量都由动力学变量 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 表示，这就保证了理论的协变性，并且我们将验证，在类空间隔上这些可观测量是对易的．

利用运动方程，由式 (3-152) 得到的能量、动量张量密度为

$$\Theta^{\mu\nu} = \partial^\nu\phi \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\phi})} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathscr{L}$$

$$= \frac{i}{2} \bar{\phi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \phi. \tag{3-153}$$

因为没有任何规定，我们已任意地安排了这个表达式的次序，让 $\bar{\phi}$ 在 $\phi$ 的左边. 显然，我们只是启发式地叙述. 张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 似乎也不是对称的. 因此，我们来研究推广的角动量密度，并正确地考虑内部变量(即旋量指标). 考虑一个无穷小的齐次 Lorentz 变换，在这个变换下我们应该有

$$\phi(x) \to \phi'(x) = S(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x) + \delta\phi(x),$$

$$\Lambda = I - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta},$$

$$M^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = -M^{\beta\alpha}_{\mu\nu} = i(g^\alpha_\mu g^\beta_\nu - g^\alpha_\nu g^\beta_\mu),$$

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}, \tag{3-154}$$

$$\delta\phi(x) = -\frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\left[\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} + i(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\right]\phi(x)$$

$$= -\frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}\phi(x).$$

算符 $L^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta} + i(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)$ 作用在旋量指标以及组态变量上. 相应地有

$$\delta\bar{\phi}(x) = \delta\phi(x)^+\gamma^0 = \frac{i}{2}\bar{\phi}(x)\bar{L}^{\alpha\beta}\delta\omega_{\alpha\beta},$$

其中

$$\bar{L}^{\alpha\beta} = \gamma^0 L^{\alpha\beta+}\gamma^0 = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2} - i(x^\alpha\overleftarrow{\partial}^\beta - x^\beta\overleftarrow{\partial}^\alpha).$$

如果 $\delta\omega^{\alpha\beta}$ 与 $x$ 无关，我们可以证明作用量是不变的. 因此我们得到，当 $\delta\omega^{\alpha\beta}$ 随 $x$ 改变时，在稳定点附近的变化为

$$\delta I = \int d^4x \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[\left\{\gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2}\right\} + i(x^\alpha\vec{\partial}^\beta - x^\beta\vec{\partial}^\alpha)\gamma^\mu\right]\psi\frac{\partial_\mu\delta\omega_{\alpha\beta}}{2}$$

$$= -\int d^4x(\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta})\frac{\delta\omega_{\alpha\beta}}{2} = 0.$$

因此，推广的角动量张量密度可以选择为

$$J^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[i(x^\alpha\vec{\partial}^\beta - x^\beta\vec{\partial}^\alpha)\gamma^\mu + \left\{\gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2}\right\}\right]\psi$$

$$= x^\alpha\Theta^{\mu\beta} - x^\beta\Theta^{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\psi}\left\{\gamma^\mu, \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{2}\right\}\psi. \quad (3\text{-}155)$$

我们可以直接验证 $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$. 这个张量包括轨道和自旋二部分. 上面的结构中 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 起了类似的作用. 当我们决定了场的对易规则后，$\Theta^{0\mu}$ 和 $J^{0,\alpha\beta}$ 的空间积分将给出群的量子生成元. 我们附带说明，相位变换 $\psi \to e^{i\alpha}\psi$，$\bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}$ 下的不变性导致守恒流

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3\text{-}156)$$

在第二章的单粒子理论中，为了在对 $J^0$ 积分时将态归一，我们曾用过这个守恒流. 在量子化的方案中有必要给出更加一般的解释.

为了完成我们的方案，用 Dirac 方程的 $c$ 数平面波解展开算符 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$，其中 $b, b^+, d$ 和 $d^+$ 为算符取值振幅:

$$\psi(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x} + d_\alpha^+(k)v^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x}],$$

$$\bar{\psi}(x) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha^+(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x} + d_\alpha(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}]. \quad (3\text{-}157)$$

旋量 $u$ 和 $v$ 已由上一章的式(2-37)和(2-38)给出. 算符 $b$ 和 $d$ 必定满足对易规则，使得

$$\psi(x+a) = e^{iP\cdot a}\psi(x)e^{-iP\cdot a},$$

或用不同的形式表示为

$$\partial_\mu\phi(x) = i[P_\mu, \phi(x)], \quad \partial_\mu\bar{\phi}(x) = i[P_\mu, \bar{\phi}(x)]. \tag{3-158}$$

利用分解式(3-157)表示 $P_\mu$，结果是

$$P_\mu = \int d^3x\Theta^0_\mu = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}k_\mu\sum_\alpha[b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) - d_\alpha(k)d^+_\alpha(k)]. \tag{3-159}$$

我们必须从此式中减去真空的贡献. 从式(3-159)知道，如果用 $b_\alpha(k)|0\rangle = d_\alpha(k)|0\rangle = 0$ 定义真空，并按照对易子来量子化，那么 $b$ 粒子和 $d$ 粒子对能量的贡献有相反的符号. 这样，理论就不容许有稳定的基态.

如果

$$[P_\mu, b_\alpha(k)] = -k_\mu b_\alpha(k), \quad [P_\mu, d_\alpha(k)] = -k_\mu d_\alpha(k),$$
$$[P_\mu, b^+_\alpha(k)] = k_\mu b^+_\alpha(k), \quad [P_\mu, d^+_\alpha(k)] = k_\mu d^+_\alpha(k), \tag{3-160}$$

根据式(3-158)，平移不变性被满足. 代入 $P_\mu$ 的展开式，这等价于

$$\left[\sum_\beta[b^+_\beta(q)b_\beta(q) - d_\beta(q)d^+_\beta(q)], \ b_\alpha(k)\right] = -(2\pi)^3\frac{k^0}{m}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})b_\alpha(k),$$

和三个类似的关系式. 如果我们假定

$$[d_\beta(q)d^+_\beta(q), b_\alpha(k)] = 0,$$

这个条件可写成

$$\sum_\beta[b^+_\beta(q)\{b_\beta(q), b_\alpha(k)\} - \{b^+_\beta(q), b_\alpha(k)\}b_\beta(q)] = -(2\pi)^3\frac{k^0}{m}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})b_\alpha(k).$$

因此，作为一种替代，利用基本的产生算符 $b^+$、$d^+$ 和湮灭算符 $b$，$d$ 之间的反对易子(上面的大括号)代替对易子，就可以保证能量和动量的正确的解释. 同时，这也解决了上面指出的

稳定性问题，因为减去真空能量后只剩下对能量的正的贡献．因此，我们令

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{\alpha\beta},$$
$$\{d_\alpha(k), d_\beta^+(q)\} = (2\pi)^3 \frac{k^0}{m} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{\alpha\beta}, \tag{3-161}$$

所有其它的反对易子等于零，因而

$$\{\psi_\xi(t,\mathbf{x}), \psi_\eta^+(t,\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{\xi\eta}. \tag{3-162}$$

于是，我们可以很容易地验证条件式（3-160）被满足，还可验证由齐次变换下协变性的要求产生的，包含生成元 $J^{\alpha\beta} = \int d^3x J^{0,\alpha\beta}$ 和场的对易子的类似的条件．式（3-160）的解释是，$b^+(k)$ 和 $d^+(k)$ 产生［$b(k)$ 和 $d(k)$ 湮灭］四维动量 $k^\mu$．

Wick 乘积可以推广到 Fermi 场．在把产生的算符重新安排在湮灭算符的左边时，必须引入一个负号，它相应于交换的宇称．因此，总的能量、动量的正确的定义是

$$P^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1,2} :b_\alpha^+(k)b_\alpha(k) - d_\alpha(k)d_\alpha^+(k):$$
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k^0} k^\mu \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha^+(k)b_\alpha(k) + d_\alpha^+(k)d_\alpha(k)]. \tag{3-163}$$

它导致了对量子态能量的正的贡献的求和．下面让我们来详细说明相应的 Fock 空间的结构．

### 3-3-2 费米子的 Fock 空间

我们首先考虑单粒子态．在动量空间中必要的标平被暗暗地省去．我们看到，对于给定的四维动量，现在我们有四重简并．相应的态记为 $|\alpha\rangle(\alpha = 1, 2, 3, 4)$：

$$|1\rangle = b_1^+(k)|0\rangle, \quad |2\rangle = b_2^+(k)|0\rangle,$$

$$|3\rangle = d_1^+(\vec{k})|0\rangle,\quad |4\rangle = d_2^+(\vec{k})|0\rangle,$$

它们满足 $P_\mu|a\rangle = k_\mu|a\rangle$. 为了区分这些态，我们寻找和 $P_\mu$ 对易的可观测量. 其中的一个可观测量是电荷（对于单粒子态归一到 $\pm 1$）

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x :\psi^+(x)\psi(x):$$

$$= \int d\tilde{k} \sum_{a=1,2} [b_a^+(k)b_a(k) - d_a^+(k)d_a(k)]. \quad (3\text{-}164)$$

在处理 Dirac 粒子时，符号 $d\tilde{k}$ 将表示 $[d^3k/(2\pi)^3](m/k^0)$，而不是象对玻色子那样等于 $d^3k/(2\pi)^3 2k_0$. 因为真空的电荷为零，而且

$$[Q, b_a^+(k)] = b_a^+(k),\quad [Q, d_a^+(k)] = -d_a^+(k),$$

所以我们有

$$Q|a\rangle = \begin{cases} +|a\rangle & a = 1, 2, \\ -|a\rangle & a = 3, 4. \end{cases}$$

与"经典的"情况截然不同，在那里我们试图把式(3-164)解释成正的平方模，我们已看到，在量子情况下并不是这样. 反对易子的利用使情况完全相反，现在能量是正的，而电荷是不确定的量.

因此 Dirac 的量子化理论描述二类粒子. 按照电动力学 $eQ$ 将是电荷，于是 $\psi$ 将湮灭电子和产生正电子. 因为 $[Q, P_\mu] = 0$，$Q$ 不依赖于时间，并且 $[Q, \psi(x)] = -\psi(x)$，$[Q, \bar{\psi}(x)] = \bar{\psi}(x)$.

为了完全表示单粒子态的性质，还需引入自旋. 类似于式(3-158)，对于 Lorentz 变换我们有

$$[J^{\mu\nu}, \psi(x)] = -\left[i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right]\psi(x). \quad (3\text{-}165)$$

因为

$$b_\alpha(k)=\int d^3x\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x}\gamma^0\psi(x),$$

$$d_\alpha^+(k)=\int d^3x\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}\gamma^0\psi(x),$$

我们得到

$$[J^{\mu\nu},b_\alpha^+(k)]=\int d^3x\psi(x)\left[\frac{1}{i}(x^\mu\vec{\partial}^\nu-x^\nu\vec{\partial}^\mu)+\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right]\gamma^0u^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x},\tag{3-166}$$

$$[J^{\mu\nu},d_\alpha^+(k)]=-\int d^3x\bar{v}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}\gamma^0\times\left[i(x^\mu\vec{\partial}^\nu-x^\nu\vec{\partial}^\mu)+\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right]\psi(x).$$

现在考虑在态$|a\rangle$上 Pauli-Lubanski 算符 $W_\sigma=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}J^{\mu\nu}P^\rho$ 的作用. 算符 $P^\rho$ 被它的本征值 $k^\rho$ 代替. 令 $t=(1,0,0,0)$是时间轴，

$$n=\left(t-k\frac{k\cdot t}{m^2}\right)\frac{m}{|\mathbf{k}|}$$

是在二维平面 $(t,k)$ 中正交于 $k$ 的归一的类空四维矢量.显然，它的空间分量沿 $\mathbf{k}$ 方向. 选择第三轴沿 $\mathbf{k}$ 方向. 于是 $(W\cdot n/m)|a\rangle$ 简化为

$$\frac{W\cdot n}{m}|a\rangle=J^{12}|a\rangle.$$

当作用于态 $|a\rangle$ 时，显然不出现对 $J^{12}$ 的轨道的贡献,又因为 $J^{12}|0\rangle=0$，我们得到

$$\frac{W\cdot n}{m}b_\alpha^+(k)|0\rangle=\frac{m}{k^0}\sum_\beta u^{+(\beta)}(k)\times\frac{\sigma^{12}}{2}u^{(\alpha)}(k)b_\beta^+(k)|0\rangle.$$

为了继续往下进行，我们必须选取旋量基 $u^{(\alpha)}$, $v^{(\alpha)}$. 令

$$u^{(\alpha)}(k)=\frac{\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}\varphi^{(\alpha)}\\0\end{pmatrix},$$

其中

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\varphi^{(\alpha)}=\begin{cases}\varphi^{(\alpha)} & \alpha=1,\\ -\varphi^{(\alpha)} & \alpha=2,\end{cases}$$

相应的态是螺旋性态. 因为已选择第三轴沿 $\mathbf{k}$ 方向，我们得到

$$\frac{m}{k^0}u^{+(\beta)}(k)\frac{\sigma_{12}}{2}u^{(\alpha)}(k)=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}\delta^{\alpha\beta},$$

$$\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=-1,$$

其结果是

$$\frac{W\cdot n}{m}|a\rangle=\begin{cases}\dfrac{1}{2}|a\rangle & a=1,\\ -\dfrac{1}{2}|a\rangle & a=2.\end{cases}\tag{3-167}$$

类似地有

$$\frac{W\cdot n}{m}d_a^+(k)|0\rangle=-\frac{m}{k^0}\sum_\beta v^{+(\alpha)}(k)$$

$$\times\frac{\sigma_{12}}{2}v^{(\beta)}(k)d_\beta^+(k)|0\rangle.$$

定义

$$v^{(\alpha)}(k)=\frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(k^0+m)}}\begin{pmatrix}0\\\chi^{(\alpha)}\end{pmatrix},$$

其中

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\chi^{(\alpha)}=\begin{cases}\chi^{(\alpha)} & \alpha=1,\\ -\chi^{(\alpha)} & \alpha=2,\end{cases}$$

我们得到

$$\frac{m}{k^0}\,v^{+(\alpha)}(k)\,\frac{\sigma_{12}}{2}\,v^{(\beta)}(k)=\frac{\varepsilon_\alpha}{2}\,\delta^{\alpha\beta},$$

$$\varepsilon_1=1,\quad \varepsilon_2=-1,$$

于是

$$\frac{W\cdot n}{m}|a\rangle=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}|a\rangle & a=3,\\ +\dfrac{1}{2}|a\rangle & a=4.\end{cases}\tag{3-168}$$

公式(3-167)和(3-168)完善了态的表征：$|1\rangle$和$|4\rangle$具有螺旋性$\frac{1}{2}$，$|2\rangle$和$|3\rangle$具有螺旋性$-\frac{1}{2}$.

我们看到了旋量 $u$ 和 $v$ 之间的典型的反转性. 具有自旋 $\sigma_3=-1$ 的旋量 $v^{(4)}$ 相应于正的螺旋性，这和空穴解释是一致的.

现在考虑多粒子态. 用集体记号 $a^+$ 表示产生算符，因而省去动量、电荷和自旋的所有指标. 态

$$a^+(1)\cdots a^+(n)|0\rangle$$

组成了 Fock 空间的基. 由于产生算符的反对易性，这些态对于波函数变量 $1,\cdots,n$ 是反对称的，特别如果这些变量中有二个一样时，这个态将等于零. 按照这种形式，我们重新得到了对于电子，更一般地讲对于所有全同的费米子成立的 Pauli 不相容原理. 利用反对易子的量子化自然地导致了 Fermi-Dirac 统计.

读者可能对热平衡下的自由的相对论电子气感兴趣. 如果只有总电荷的守恒，电子和正电子数不是分别守恒，将会发生什么情况呢?

### 3-3-3 自旋和统计之间的关系——传播子

从式(3-161)可以得出在任意间隔下二个自由场的反对易子. 显然，$\psi(x)$ 和 $\psi(x')$ 反对易，$\bar{\psi}(x)$ 和 $\bar{\psi}(x')$ 也反对易，而

$$\{\psi_\xi(x),\ \bar{\psi}_{\xi'}(x')\} = \int d\tilde{k} \sum_\alpha [e^{-ik\cdot(x-y)} u_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k) + e^{ik\cdot(x-y)} v_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k)], \quad (3\text{-}169)$$

其中 $\xi$ 和 $\xi'$ 是 Dirac 指标. 由式(2-40)和(2-41)我们有

$$\sum_\alpha u_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{u}_{\xi'}^{(\alpha)}(k) = \left(\frac{\not{k}+m}{2m}\right)_{\xi\xi'},$$

$$\sum_\alpha v_\xi^{(\alpha)}(k)\bar{v}_{\xi'}^{(\alpha)}(k) = \left(\frac{\not{k}-m}{2m}\right)_{\xi\xi'}.$$

由此得到

$$\{\psi_\xi(x),\ \bar{\psi}_{\xi'}(x')\} = (i\not{\partial}_x + m)_{\xi\xi'} i\Delta(x-x'), \quad (3\text{-}170)$$

其中 $i\Delta(x-y)$ 是在类似的 Bose 场的情况下在式(3-77)和(3-56)中出现的表达式. 由式(3-170)得到,当 $(x-y)$ 是类空间隔时,反对易子等于零. 此外,如果 $x^0 = y^0 = t$, 则

$$\{\psi_\xi(t,\mathbf{x}),\ \bar{\psi}_{\xi'}(t,\mathbf{y})\} = -\gamma^0_{\xi\xi'}\partial_0\Delta(x^0-y^0,\mathbf{x}-\mathbf{y})|_{x^0=y^0}$$
$$= \gamma^0_{\xi\xi'}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (3\text{-}171)$$

和式(3-162)一致. 虽然我们不用正则量子化的方法,正如拉氏量式(3-152)所暗示的,在反对易的意义上 $i\phi^+$ 表现为 $\phi$ 的共轭量.

我们可能想知道,从这样的正则量子化会得出什么结果. 自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子将表现为玻色子,能量将没有下限. 而且,二个场之间的对易子由类似于式(3-169)的式子给出,但右边二项之间的相对符号为负号. 因此,结果为

$$(i\not{\partial}_x + m)\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(e^{-ik\cdot(x-y)} + e^{ik\cdot(x-y)}).$$

这个积分是齐次 Klein-Gordon 方程的偶的解,

$$\Delta_1(x-y) = \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(e^{-ik\cdot(x-y)} + e^{ik\cdot(x-y)}), \quad (3\text{-}172)$$

对于 $(x-y)^2 < 0$, 它不等于零.

研究类空区域中 $\Delta_1(x-y)$ 的大间隔行为.

换句话说,定域的可观测量在等时时将不对易,于是定域性被破坏. 在按照 Fermi 统计量子化的标量理论中,也会出现类似的破坏.

这些性质是由定域的相对论量子理论推出的自旋和统计之间的关系的实例. 半整数自旋的场必须按照 Fermi-Dirac 统计量子化,即用反对易子;整数自旋的场按照 Bose-Einstein 统计量子化,即用对易子. 利用公理化框架可以给出更加一般的证明. 在某种程度上,注意到这种深刻的联系确实需要这些概念是非常吸引人的,这种联系对于离相对论范围显然非常遥远的情况下物质的稳定性是必不可少的.

二个 Dirac 场的编时乘积定义为

$$T\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)=\theta(x^0-y^0)\psi_\xi(x)\psi_{\xi'}(y)-\theta(y^0-x^0)\psi_{\xi'}(y)\psi_\xi(x), \quad (3\text{-}173)$$

因此

$$T\psi_\xi(x)\psi_{\xi'}(y)=\langle 0|T\psi_\xi(x)\psi_{\xi'}(y)|0\rangle+:\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y):,$$

$$\langle 0|T\psi_\xi(x)\psi_{\xi'}(y)|0\rangle=iS(x-y)_{\xi\xi'}, \quad (3\text{-}174)$$

$$S(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\frac{\not k+m}{k^2-m^2+i\varepsilon},$$

和式(2-113)一致. 我们注意到

$$S(x)=-(i\not\partial+m)G_F(x)=(i\not\partial+m)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\times\frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2-m^2+i\varepsilon}. \quad (3\text{-}175)$$

因为 $G_F(x)$ 是 $x$ 的偶函数,从而得到

$$S^T(-x)=-(-i\not\partial^T+m)G_F(x).$$

借助于在式(2-97)中引进的矩阵 $C$,它使得 $C\gamma^{\mu T}C^{-1}=-\gamma^\mu$,

我们有

$$CS^T(-x)C^{-1} = S(x). \qquad (3\text{-}176)$$

这个对称性推广了 $G_F(x)$ 的对称性. 在下一小节中我们将研究这种对称性的含意.

## 3-4 分立对称性

似非而是地说,在对称性由于外部原因,例如由于测量仪器而被破坏时,它才得到最好的理解. 在这里,我们将简要地评述在非相互作用量子场范围内出现的某些分立对称性. 以前我们已讨论了运动学的不变性,在第十一章中我们将重新考虑内部对称性的问题.

从积极的观点来看,我们利用对称性来了解态之间,或者更确切地说是纯态的密度矩阵之间的一一对应 $|\phi\rangle\langle\phi| \to |\phi^{tr}\rangle\langle\phi^{tr}|$,它不改变跃迁几率

$$|\langle\phi_f^{tr}|e^{-iH(t_f-t_i)}|\phi_i^{tr}\rangle|^2 = |\langle\phi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\phi_i\rangle|^2.$$

这个定义受到某些限制,因为它挑出了时间变数,因此纯 Lorentz 变换或时间反演必须单独地讨论. 时间反演不变性将在下面讨论. 根据 Wigner 定理,具有性质 $\mathrm{tr}(\rho_1\rho_2) = \mathrm{tr}(\rho_1'\rho_2')$ 的纯态密度矩阵的任何一对一的映象 $\rho \to \rho'$,都能够推广到 Hilbert 空间中的么正或反么正算符.

从对密度矩阵附加对称性出发来调整态的相位,以便在 Hilbert 空间上产生一个线性的(或反线性的)算符. 通过具有 $U(g_1)U(g_2) = e^{i\omega(g_1,g_2)}U(g_1,g_2)$ 的投影表示,其中 $\omega(g_1, g_2)$ 是相位,通常可以实现一个对称群.

在上面所限制的意义上,和哈密顿量对易的每个么正算符 U 产生一种对称性. 在这里我们主要处理 Dirac 场,读者可以自己去重新考虑标量或矢量 Bose 场的情形.

### 3-4-1 宇称

我们假定有可能通过实验仪器的适当改进得到宇称改变的态. 从场的观点看,我们要寻找一个么正算符 $\mathscr{P}$,满足

$$\mathscr{P}\psi(x)\mathscr{P}^{+}=\eta_{p}\gamma^{0}\psi(\tilde{x}),\quad \tilde{x}^{\mu}=x_{\mu},\quad |\eta_{p}|=1. \tag{3-177}$$

因为从上一章我们知道,$\gamma^{0}\psi(\tilde{x})$ 满足宇称改变的 Dirac 方程. 因此,我们预期 $\mathscr{P}$ 与 $H$ 对易. 为了满足方程 (3-177),需要

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{P}b_{\alpha}(p)\mathscr{P}^{+}=\eta_{p}b_{\alpha}(\tilde{p}),\quad \gamma^{0}u^{(\alpha)}(\tilde{p})=u^{(\alpha)}(p),\\&\mathscr{P}d_{\alpha}(p)\mathscr{P}^{+}=-\eta_{p}^{*}d_{\alpha}(\tilde{p}),\quad \gamma^{0}v^{(\alpha)}(\tilde{p})=-v^{(\alpha)}(p).\end{aligned}\right\}\tag{3-178}$$

如果不管相位 $\eta_{p}$, 费米子-反费米子系统的相对宇称等于 $-1$, $\mathscr{P}_{\psi}^{2}$ 等于单位算符的倍数. 满足上述要求的么正算符是

$$\begin{aligned}\mathscr{P}=\exp i\int d\tilde{k}\sum_{\alpha=1,2}\Big\{&b_{\alpha}^{+}(k)\Big[\lambda b_{\alpha}(k)+\frac{\pi}{2}b_{\alpha}(\tilde{k})\Big]\\&-d_{\alpha}^{+}(k)\Big[(\lambda+\pi)d_{\alpha}(k)+\frac{\pi}{2}d_{\alpha}(\tilde{k})\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{3-179}$$

其中 $\lambda$ 是任意的, $\eta_{p}=e^{-i(\lambda+\pi/2)}$. 特别是,如果 $\lambda=-\pi/2$, 则 $\eta_{p}=1$. 验证 $\mathscr{P}$ 确实是一种对称性的一种简单的方法,是注意到在时间平移下

$$\begin{aligned}e^{iHa}b_{\alpha}(k)e^{-iHa}&=e^{-ik^{0}a}b_{\alpha}(k),\\e^{iHa}d_{\alpha}(k)e^{-iHa}&=e^{-ik^{0}a}d_{\alpha}(k),\end{aligned}$$

因此,

$$e^{iHa}\mathscr{P}e^{-iHa}=\mathscr{P}.$$

我们可以进一步验证 $\mathscr{P}P^{\mu}\mathscr{P}^{+}=P^{\mu}$. 在耦合理论中,完全的宇称算符是属于不同场的宇称算符的乘积. 特别是对于电磁场,我们构造 $\mathscr{P}_{A}$ 使得

$$\mathscr{P}_{A}A^{\mu}(x)\mathscr{P}_{A}^{+}=A_{\mu}(\tilde{x}). \tag{3-180}$$

证明双线性 Dirac 流有类似的性质:

$$\mathscr{P}_\psi{:}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x){:}\mathscr{P}_\psi^+ = {:}\bar{\psi}(\bar{x})\gamma_\mu\psi(\bar{x}){:}, \tag{3-181}$$

由此并利用 $d^4x = d^4\bar{x}$, 即得相互作用拉氏量

$$\int d^4x{:}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x){:}A_\mu(x)$$

是宇称不变量.

### 3-4-2 电荷共轭

我们已看到,量子化的场可以描述具有相同质量和自旋、荷相反的粒子. 相应的荷根据其物理内容可以有不同的解释. 它可以是电荷、重子数、轻子数等等, 无论哪种情形都可以. 因此,电荷共轭不变性意味着:

1. 反粒子的存在;
2. 二类量子的对称行为.

荷电标量场是我们的第一个例子. 可是, 粒子和反粒子也可以是相同的,光子就属于这种情况,在那里由于下面将会明白的理由,相应的算符 $\mathscr{C}$ 刚好使场反号,

$$\mathscr{C}A_\mu(x)\mathscr{C}^+ = -A_\mu(x). \tag{3-182}$$

从第二章知,对 Dirac 场相应的作用是

$$\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^+ = \eta_c C\bar{\psi}^T(x), \tag{3-183}$$

其中转置只涉及 Dirac 指标. 在 $\gamma$ 矩阵的标准表示中

$$C = i\gamma^0\gamma^2.$$

为了明确起见,我们选取螺旋性态 $b(k, \pm)$ 和 $d(k, \pm)$ 的产生算符和湮灭算符. 于是

$$u(k, \pm 1) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}}\begin{pmatrix}\varphi_\pm(\hat{k})\\ 0\end{pmatrix}, \tag{3-184a}$$

其中

$$\sigma\cdot\hat{k}\varphi_\pm(\hat{k}) = \pm\varphi_\pm(\hat{k}),\quad \varphi_\varepsilon^+(\hat{k})\varphi_{\varepsilon'}(\hat{k}) = \delta_{\varepsilon\varepsilon'},$$

并且根据定义

$$v(k,\pm) = C\bar{u}^T(k,\pm)$$

$$= \frac{-\not{k}+m}{\sqrt{2m(m+k^0)}}\begin{pmatrix}0\\ \chi_\pm(\hat{k})\end{pmatrix}. \qquad (3\text{-}184b)$$

在通常的表示中，$\chi_\pm(\hat{k}) = -i\sigma_2\varphi^*_\pm(\hat{k})$，我们可以证明，$\sigma\cdot\hat{k}\chi_\pm(\hat{k}) = \mp\chi_\pm(\hat{k})$. 此外，

$$Cv^T(k,\pm) = u(k,\pm). \qquad (3\text{-}185)$$

按照这些选择，从式(3-183)我们很容易导出

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{C}b(k,\pm)\mathscr{C}^+ &= \eta_c d(k,\pm),\\ \mathscr{C}d^+(k,\pm)\mathscr{C}^+ &= \eta_c b^+(k,\pm).\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}186)$$

我们也可以一开始就利用这些关系，而式(3-183)作为其结论. 精确到一个相因子，$\mathscr{C}$ 互换具有相同动量、能量和螺旋性的粒子和反粒子. 真空仍是不变的. $\mathscr{C}$ 的显式表示是

$$\mathscr{C}_\phi = \mathscr{C}_1\mathscr{C}_2, \qquad (3\text{-}187)$$

$$\mathscr{C}_1 = \exp -i\int d\tilde{k}\sum_{\varepsilon=\pm1}\lambda[b^+(k,\varepsilon)b(k,\varepsilon) - d^+(k,\varepsilon)d(k,\varepsilon)],$$

$$\mathscr{C}_2 = \exp i\frac{\pi}{2}\int d\tilde{k}\sum_{\varepsilon=\pm1}[b^+(k,\varepsilon) - d^+(k,\varepsilon)]\times[b(k,\varepsilon) - d(k,\varepsilon)], \qquad (3\text{-}188)$$

具有 $\eta_c = e^{i\lambda}$. $\mathscr{C}_1$ 的作用只是产生这个相因子，并且 $\eta_c=1$ 对应于 $\mathscr{C}_1 = 1$. 读者还可以证明，流：$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$：在电荷共轭下是奇的.

作为一个应用，我们根据电荷共轭将费米子-反费米子系统的最低束缚态分类，这种正反费米子系统的最初的例子是电子偶素.

电子偶素是$(e^+e^-)$的系统，类似于氢原子$(pe^-)$，其中的质子被正电子代替. 由于电磁束缚力很弱，作为第一步近似，非相对论的描述被证明是合理的. 基态是 $s$ 波，$n=1$，但超精细效应将三重态正 (ortho) 电子偶素(如果我们用记号 $^{2S+1}L_J$，则它为 $^3S_1$) 与单态仲 (para) 电子

偶素（$^1S_0$）分开了。对自旋量子化采用固定轴，从量子数的观点，简化的波函数被适当地写成

$$|J=1,\ M=0,\ \text{ortho}\rangle \propto \int d^3\mathbf{q}\varphi_1(|\mathbf{q}|)[b^\pm(\mathbf{q})d^\mp(-\mathbf{q}) + b^\mp(\mathbf{q})d^\pm(-\mathbf{q})]|0\rangle,$$

$$|J=0,\ M=0,\ \text{para}\rangle = \int d^3\mathbf{q}\varphi_0(|\mathbf{q}|)[b^\pm(\mathbf{q})d^\mp(-\mathbf{q}) - b^\mp(\mathbf{q})d^\pm(-\mathbf{q})]|0\rangle.$$

相对动量波函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_0$ 只依赖于 $\mathbf{q}$ 的大小，$b^\pm(\mathbf{q})$ [或 $d^\pm(\mathbf{q})$]表示动量为 $\mathbf{q}$，沿固定轴的自旋为 $\pm\frac{1}{2}$的电子(正电子)的产生算符．电荷共轭为

$$\mathscr{C}b^\pm(\mathbf{q})\mathscr{C}^+ = \eta_c^* d^\pm(\mathbf{q}),\quad \mathscr{C}d^\pm(\mathbf{q})\mathscr{C}^+ = \eta_c b^\pm(\mathbf{q}).$$

当 $\mathscr{C}$ 作用在这些态上时，任意的相位 $\eta_c$ 不出现，其结果是

$$\mathscr{C}|\text{ortho}\rangle = -|\text{ortho}\rangle,\qquad \mathscr{C}|\text{para}\rangle = |\text{para}\rangle. \tag{3-189}$$

符号的产生如下所述：电荷共轭交换了电子和正电子，其结果使相对动量改变符号，对 $s$ 波这导致了因子 $(-1)^L = 1$；自旋指标的交换对三重(单重)态导致一正(负)号；最后，算符 $b^+$ 和 $d^+$ 的反对易性产生附加的一个负号．这是 Fermi-Dirac 统计的一种间接的和意外的表现形式．

电子偶素态是不稳定的，它通过发射电子而缓慢地衰变．由式(3-182)知，在 $\mathscr{C}$ 变换下电磁势是奇的．事实上，这是电磁相互作用在 $\mathscr{C}$ 变换下不变的条件．因此，对于 $n$ 个光子的态，有

$$\mathscr{C}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle.$$

相应地，正电子偶素必定衰变成奇数个光子，而仲电子偶素必定衰变成偶数个光子．对于正电子偶素态，单光子衰变被能量、动量守恒所禁戒，它至少必须衰变成三个光子，而仲电子偶素可以衰变成二个光子，因此它的寿命短得多．耦合常数是精细结构常数 $\alpha$，所以对于寿命 $\tau$，我们料想比率$\tau_{\text{单态}}/\tau_{\text{三重态}} \sim O(\alpha)$．在第五章中我们将计算这些量．到 $\alpha$ 的最低级

$$\Gamma_1 = \tau_s^{-1} = \frac{m\alpha^5}{2} = 0.53\times 10^{-3}\text{eV},\ \tau_s = 1.25\times 10^{-10}\ \text{秒},$$

$$\Gamma_t = \tau_t^{-1} = 2\frac{\pi^2-9}{9\pi}m\alpha^6 = 4.75\times 10^{-9}\text{eV}, \tag{3-190}$$

$$\tau_t = 1.410\times 10^{-7}\ \text{秒}.$$

数值上的意外使 $\tau_t$ 比 $\alpha\tau_s$ 还要小一个量级. 超精细的分裂将在第十章中讨论.

### 3-4-3 时间反演

时间反演不变性的经典的意义是明显的. 如果基本的动力学具有时间反演不变性,通过倒转最终组态的速度,系统按原路折回到某个初始的组态. 因此,初态和终态被交换,具有相同的位置和相反的速度. 由这种交换得到的结果是,在量子力学中对应的算符 $\mathscr{T}$ 是反么正的,即

$$\langle \mathscr{T}\varphi|\mathscr{T}\phi\rangle = \langle\phi|\varphi\rangle,\ \mathscr{T}^+\mathscr{T} = 1.$$

如果 $H$ 是哈密顿量,$\mathscr{T}$ 变换下不变性的要求意味着

$$\mathscr{T}H\mathscr{T}^+ = H.$$

我们假定时间平移不变性总是满足的,因此

$$\mathscr{T}e^{-iH(t_2-t_1)}\mathscr{T}^+ = e^{-iH(t_1-t_2)}.$$

从时刻 $t_i$ 的态 $|\varphi_i\rangle$ 到时刻 $t_f$ 的态 $|\varphi_f\rangle$ 的跃迁振幅,等于相应的从时刻 $t_i$ 的态 $|\mathscr{T}\varphi_f\rangle$ 到时刻 $t_f$ 的态 $|\mathscr{T}\varphi_i\rangle$ 的跃迁振幅. 实际上

$$\begin{aligned}\langle\varphi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\varphi_i\rangle &= \langle\mathscr{T}\varphi_f|(\mathscr{T}e^{-iH(t_f-t_i)}\mathscr{T}^+)|\mathscr{T}\varphi_i\rangle^*\\ &= \langle\mathscr{T}\varphi_f|e^{-iH(t_i-t_f)}|\mathscr{T}\varphi_i\rangle^*\\ &= \langle\mathscr{T}\varphi_i|e^{-iH(t_f-t_i)}|\mathscr{T}\varphi_f\rangle.\end{aligned} \tag{3-191}$$

由于在 $\mathscr{T}$ 变换下动量被反向,而位置不变,所以轨道角动量改变符号,因此自旋必定改变符号. 特别是,螺旋性是不变的.

对于满足 Klein-Gordon 方程的标量的相对论量子场 $\varphi$,

$\mathscr{T}\varphi(t,\mathbf{x})\mathscr{T}^{+}$ 等于 $\varphi(-t,\mathbf{x})$，可能相差正负号（因为 $\varphi$ 是厄米的）. 这将导致

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{T}a(k)\mathscr{T}^{+}&=\eta a(\tilde{k})\\ \mathscr{T}\varphi(t,\mathbf{x})\mathscr{T}^{+}&=\eta\varphi(-t,\mathbf{x})\end{aligned}\right\}\ \eta=\pm1. \tag{3-192}$$

对于电磁势，相应的变换是

$$\mathscr{T}A^{\mu}(x)\mathscr{T}^{+}=A_{\mu}(-\tilde{x}). \tag{3-193}$$

最后考虑旋量场，我们选取螺旋性基. 要求是

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{T}b^{+}(k,\varepsilon)\mathscr{T}^{+}&=\eta_T^{*}b^{+}(\tilde{k},\varepsilon)e^{i\theta_b(k,\varepsilon)},\\ \mathscr{T}d^{+}(k,\varepsilon)\mathscr{T}^{+}&=\eta_T d^{+}(\tilde{k},\varepsilon)e^{-i\theta_d(k,\varepsilon)},\end{aligned}\right\} \tag{3-194}$$

其中 $\eta_T$ 是固定的相位. 我们希望通过使 $\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{+}$ 满足时间反演后的 Dirac 方程，来选择 $\theta_b(k,\varepsilon)$ 和 $\theta_d(k,\varepsilon)$. 由 $\mathscr{T}$ 的反线性特性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{T}\psi(x)\mathscr{T}^{+}=\eta_T\int d\tilde{k}\sum_{\varepsilon}\big[&b(\tilde{k},\varepsilon)u^{*}(k,\varepsilon)e^{-i\theta_b(k,\varepsilon)}e^{ik\cdot x}\\ &+d^{+}(\tilde{k},\varepsilon)v^{*}(k,\varepsilon)e^{-i\theta_d(k,\varepsilon)}e^{-ik\cdot x}\big].\end{aligned}$$

在式(3-184)中定义了旋量 $u$ 和 $v$. 我们把积分的 $k$ 改成 $\tilde{k}$. 如果存在一个确定的矩阵 $A$，使得

$$\left.\begin{aligned}Au(k,\varepsilon)&=e^{-i\theta_b(\tilde{k},\varepsilon)}u^{*}(\tilde{k},\varepsilon),\\ Av(k,\varepsilon)&=e^{-i\theta_d(\tilde{k},\varepsilon)}v^{*}(\tilde{k},\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{3-195}$$

那么我们将有

$$\mathscr{T}\psi(t,\mathbf{x})\mathscr{T}^{+}=\eta_T A\psi(-t,\mathbf{x}). \tag{3-196}$$

因为 $\gamma^0$ 是厄米的，而 $\boldsymbol{\gamma}$ 是反厄米的，由此得到

$$(\not{k}^{T}-m)u^{*}(\tilde{k},\varepsilon)=0,\quad(\not{k}^{T}+m)v^{*}(\tilde{k},\varepsilon)=0.$$

乘上 $\gamma^5C$，即得

$$\begin{aligned}(\not{k}-m)\gamma^5Cu^{*}(\tilde{k},\varepsilon)&=0,\\ (\not{k}+m)\gamma^5Cv^{*}(\tilde{k},\varepsilon)&=0.\end{aligned}$$

因此，只要二分量旋量 $\varphi_{\pm}(\hat{k})$ 和 $\varphi_{\pm}(-\hat{k})$ 被正确地联系起来，我们预料 $A^{-1}$ 和 $\gamma^5C$ 之间只差一个相位因子. 实际上，在

$\gamma$ 矩阵的标准表示中

$$\gamma^5 C u^*(\vec{k}, \varepsilon) = \gamma^5 C \frac{\vec{k}^* + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(k^0 + m)}} \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此，全部要求归结为除一相位外 $-i\sigma_2\varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})$ 等于 $\varphi_\varepsilon(\hat{k})$. 这的确是满足的，因为 $-i\sigma_2$ 是么正的，并且

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{k})[-i\sigma_2\varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})] = -i\sigma_2[-(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{k})^*\varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})]$$

$$= \varepsilon[-i\sigma_2\varphi_\varepsilon^*(-\hat{k})].$$

因此

$$-i\sigma_2\varphi_\varepsilon^*(-\hat{k}) = e^{i\theta_b(k,\varepsilon)}\varphi_\varepsilon(\hat{k}),$$

并且

$$\gamma^5 C u^*(\hat{k}, \varepsilon) = e^{i\theta_b(k,\varepsilon)} u(k, \varepsilon).$$

因为 $(\gamma^5 C)^{-1} = -\gamma^5 C$，所以至少对于旋量 $u$，除了一个可以吸收进 $\eta_T$ 的因子外，我们的确找到了在式 (3-195) 中所要求的矩阵 $A$. 对于旋量 $v$ 可以进行类似的计算. 相位的标准的选取是

$$A = i\gamma^1\gamma^3 = -i\gamma^5 C, \tag{3-197}$$

于是式(3-196)完全被确定.

### 3-4-4 总结

现在我们可以总结一下在分立对称下 Dirac 场的各种二次型的变换性质. 根据它们的张量性质，定义

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= :\bar{\psi}(x)\psi(x):, \\ V^\mu(x) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x):, \\ T^{\mu\nu}(x) &= :\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x):, \\ A^\mu(x) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x):, \\ P(x) &= i:\psi(x)\gamma^5\psi(x):. \end{aligned}\right\} \tag{3-198}$$

最后一式中选取因子 $i$ 是为了保持厄米性。当然，对赝矢(或"轴"矢)流(见下面)的记号 $A$ 是按惯例采用的，不应和矢量势相混淆。利用上一小节的结果，并记住场是反对易的，$\mathscr{T}$ 是反么正的，我们即得下表：

| | $S(x)$ | $V^\mu(x)$ | $T^{\mu\nu}(x)$ | $A^\mu(x)$ | $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{P}$ | $S(\tilde{x})$ | $V_\mu(\tilde{x})$ | $T_{\mu\nu}(\tilde{x})$ | $-A_\mu(\tilde{x})$ | $-P(\tilde{x})$ |
| $\mathscr{C}$ | $S(x)$ | $-V^\mu(x)$ | $-T^{\mu\nu}(x)$ | $A^\mu(x)$ | $P(x)$ |
| $\mathscr{T}$ | $S(-\tilde{x})$ | $V_\mu(-\tilde{x})$ | $-T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$ | $A_\mu(-\tilde{x})$ | $-P(-\tilde{x})$ |
| $\Theta$ | $S(-x)$ | $-V^\mu(-x)$ | $T^{\mu\nu}(-x)$ | $-A^\mu(-x)$ | $P(-x)$ |

(3-199)

这个表中的每一项表示在相应的密度上算符的效应。例如，$\mathscr{T}T^{\mu\nu}(x)\mathscr{T}^+ = -T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$。我们还增加了一行表示联合的反么正运算 $\Theta = \mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}$。电磁矢量势 $A^\mu_{em}(x)$ 的相应的变换规则是

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{P}A^\mu_{em}(x)\mathscr{P}^+ = A_{em,\mu}(\tilde{x}),\\
&\mathscr{C}A^\mu_{em}(x)\mathscr{C}^+ = -A^\mu_{em}(x),\\
&\mathscr{T}A^\mu_{em}(x)\mathscr{T}^+ = A_{em,\mu}(-\tilde{x}),\\
&\Theta A^\mu_{em}(x)\Theta^+ = -A^\mu_{em}(-x).
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}200)$$

因此，组合

$$:\phi(x)\gamma_\mu\phi(x):A^\mu_{em}(x)$$

的变换性质象标量密度 $S(x)$。最后，在宇称变换下 $A^\mu(x)$和 $P(x)$ 的变换性质表明，把它们分别命名为赝矢流和赝标密度是合理的。表(3-199)中所有相位的任意性都已不出现。

在这一节中我们已经讨论了最常见的分立对称，并用基本的自由场构成相应的么正(或反么正)算符。构造这些算符的必要性是显然的，因为只有如此我们才能确保变换后的态确实存在。探讨考虑相互作用后动力学是否保持不变，这是

另一个问题．这就要求我们考察是否有 $UHU^+ = H$． 当我们考虑这种相互作用的场时，我们将试图根据上面的规则定义作用在态和场上的对称算符．于是问题将是，是否具有按照动力学标准的不变性?

首先由 Pauli、Zumino 和 Schwinger 讨论的定域量子理论的基本性质表明，在任何情况下 $\Theta$ 总是理论的一种不变性．这就是著名的 PCT 定理．这里概述的证明限于拉氏量的场论，对于更加一般的证明，读者可以参阅注记中引用的工作．令定域量子场论由包含厄米的 Lorentz 不变的拉氏量的作用量原理来描述．这是由基本场表示的定域标量密度的组合，最后进行正规编序．量子化遵循自旋统计关系．PCT 定理表述为：即使 $P$，$C$ 和 $T$ 分别不是不变的，但它们的组合是不变的．特别是，PCT 定理暗示着荷电场反粒子的存在（反粒子和相应的粒子具有相等的质量和自旋），以及对中性场粒子与反粒子是全同的．总之我们要证明，在 $\Theta$ 变换下拉氏量 $\mathscr{L}(x)$ 的性质象一个中性标量场，

$$\Theta\mathscr{L}(x)\Theta^+ = \mathscr{L}(-x). \qquad (3\text{-}201)$$

一般来说，对标量场我们应当附加

$$\Theta\varphi(x)\Theta^+ = \varphi^+(-x). \qquad (3\text{-}202)$$

如果式(3-201)被满足，作用量将保持不变．在这里我们将满足于拉氏量依赖于可能携带内部指标的标量 ($\varphi$)、矢量 ($A_\mu$) 和旋量 ($\psi$)．对于更高自旋的场，定理仍然是正确的．显然，$\mathscr{L}$ 可以用 $A_\mu$，$\psi$，$\bar{\psi}$ 以及厄米的标量场构成，如果必要，荷电标量场简化成 $\varphi_1 = (\varphi + \varphi^+)/\sqrt{2}$，$\varphi_2 = (\varphi - \varphi^+)/i\sqrt{2}$ ($\Theta\varphi_i(x)\Theta^+ = \varphi_i(-x)$)．于是，我们可以把 $\Theta$ 的作用概括以下：

1. 它将场的自变量 $x$ 变成 $-x$；

2. 因此微商改变符号，$\partial_\mu \to -\partial_\mu$；

3. 矢量场 $A^\mu(x)$ 获得附加的负号，即其行为象标量场的梯度；

4. $(\bar{\phi}, \phi)$ 型的任何二次式获得符号 $(-1)^P$，其中 $P$ 表示 $\gamma$ 矩阵或微商所带的 Lorentz 指标的数目，这是从表(3-199)和规则 2 导出的结果；

5. 最后，常数被复数共轭.

因为 $\mathscr{L}$ 是标量，单项展开式中的每一项是通过缩并偶数个 Lorentz 指标得到的. 来自矢量场、微商或 $(\bar{\phi}, \phi)$ 的二次式的负号被抵消. 因此，最后的效果是将 $\mathscr{L}(x)$ 变成 $\mathscr{L}^+(-x) = \mathscr{L}(-x)$，因为矢量场和标量场对易，表 (3-199) 中已考虑了 $\phi$ 场的反对易性，所以在正规编序下算符的次序是无关紧要的. 因此，如果真空在 $\Theta$ 变换下是不变的，动力学将也是不变的.

证明在 $\Theta$ 变换下等时对易规则不变，这是有意思的. 这个证明包含某些技巧，因为相互作用可能修改共轭变量的表示. 例如，对于荷电玻色子的电磁相互作用，以及更加一般地当 $\mathscr{L}$ 的相互作用部分包含微商时情况就是这样. 我们也可以证明哈密顿量密度具有性质

$$\Theta\mathscr{H}(0, \boldsymbol{x})\Theta^+ = \mathscr{H}(0, -\boldsymbol{x}),$$

因此

$$\Theta H\Theta^+ = H.$$

上面的证明忽略了和构造相互作用场论有关的困难. 这种场论必须对在其它情况下不确定的算符乘积给出精确的含意. 然而，这种运算保持了 PCT 定理所暗示的代数性质.

作为一个应用，我们来讨论形状因子——电荷分布的相对论推广. 首先考虑二个单粒子态之间自由 Dirac 理论的流 $V^\mu(x)$ 的矩阵元

$$\langle p', \beta | V^\mu(x) | p, \alpha\rangle = e^{-i(p-p')\cdot x}\langle p', \beta | V^\mu(0) | p, \alpha\rangle,$$

希腊字母指标 $\alpha, \beta, \cdots, \delta$ 表示极化，$|p, \alpha\rangle = b_\alpha^\dagger(p)|0\rangle$，而

$$V^\mu(0) = :\bar{\psi}(0)\gamma^\mu\psi(0):$$

$$= \iint d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \sum_{\gamma,\delta} \bar{u}^{(\gamma)}(k_1)\gamma^\mu u^{(\delta)}(k_2) b_\gamma^\dagger(k_1) b_\delta(k_2) + \cdots.$$

我们没有明显地给出对矩阵元贡献为零的项. 由

$$\langle p', \beta | b_\gamma^\dagger(k_1) b_\delta(k_2) | p, \alpha \rangle = (2\pi)^6 \frac{k_1^0 k_2^0}{m^2} \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}')$$

$$\times \delta^3(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\delta\alpha},$$

得出

$$\langle p', \beta | V^\mu(0) | p, \alpha \rangle = \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^\mu u^{(\alpha)}(p).$$

这和电荷的定义是一致的:

$$\langle p', \beta | Q | p, \alpha \rangle = \int d^3x \langle p', \beta | V^0(0, \mathbf{x}) | p, \alpha \rangle$$

$$= \int d^3x e^{i(p'-p)\cdot x} \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^0 u^{(\alpha)}(p)$$

$$= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \bar{u}^{(\beta)}(p') \gamma^0 u^{(\alpha)}(p) = \langle p', \beta | p, \alpha \rangle,$$

记得 $\bar{u}_\beta(p')\gamma^0 u_\alpha(p)$ 被归一到 $\delta_{\alpha\beta}(p^0/m)$.

假定 $j^\mu(x)$ 是厄米的四维矢量流密度,在分立对称下具有和 $V^\mu(x)$ 一样的变换性质,它的单粒子矩阵元的一般结构可写成

$$\langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = e^{-i(p'-p)\cdot x} \bar{u}^{(\beta)}(p') O^\mu(p', p) u^{(\alpha)}(p).$$

今后我们总是把数值矩阵 $O^\mu(p', p)$ 理解为夹在二个旋量 $\bar{u}$ 和 $u$ 之间. 根据 Lorentz 协变性, $O^\mu(p', p)$ 必须满足

$$S(\Lambda) O^\mu(p', p) S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu O^\nu(\Lambda p', \Lambda p),$$

并且由厄米性得到

$$\gamma^0 O^\mu(p', p)^+ \gamma^0 = O^\mu(p', p).$$

我们可以考虑如下事实: 通过用

$$O^\mu(p', p) \to \frac{\not{p}' + m}{2m} O^\mu(p', p) \frac{\not{p}' + m}{2m}$$

代替任何 $O^\mu(p', p)$, 旋量满足自由 Dirac 方程. 特别是,这需要利用 Gordon 恒等式

$$\gamma^\mu \to \frac{1}{2m} [(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu].$$

我们也要求流 $j^\mu(x)$ 是守恒的,即

$$0 = \langle p', \beta | \partial_\mu j^\mu(x) | p, \alpha \rangle = i(p' - p)_\mu \langle p', \beta | j^\mu(x) | p, \alpha \rangle.$$

因此，$(p'-p)_\mu O^\mu(p',p)$ 等于零. 我们将类空的差 $p'-p$ 记为 $q$，由于 $p^2=p'^2=m^2$，只有 $q^2$ 是不变的标量. 考虑到在 16 个 Dirac 矩阵的基上 $O^\mu$ 的更加一般的分解，并利用 Lorentz 不变性、守恒性和厄米性，我们得到

$$\bar{u}^{(\beta)}(p')O^\mu(p',p)u^{(\alpha)}(p)=\bar{u}^{(\beta)}(p')\left[\gamma^\mu F_1(q^2)+i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\right.$$

$$\left.+\gamma^5\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_3(q^2)\right]u^{(\alpha)}(p), \qquad (3\text{-}203)$$

其中 $F_i(q^2)$ 是实的形状因子——平方动量转移 $q^2$ 的函数. 量子化的自旋沿着固定轴，从式(3-178)和(3-199)导出，宇称变换下的对称性意味着

$$\langle p',\beta|j^\mu(x)|p,\alpha\rangle=\langle\tilde{p}',\beta|j_\mu(\tilde{x})|\tilde{p},\alpha\rangle.$$

因为 $u^{(\alpha)}(\tilde{p})=\gamma^0u^{(\alpha)}(p)$，这表明 $O^\mu(p',p)=\gamma^0O_\mu(\tilde{p}',\tilde{p})\gamma^0$，由此得到 $F_3(q^2)=-F_3(q^2)$. 因此，宇称守恒仅仅给出 $F_3=0$. 可是，宇称可以被某些相互作用(实际上是弱相互作用)所破坏.

在很长时间内，人们一直相信所有的相互作用在宇称乘以电荷共轭的变换下都是对称的. 根据 PCT 定理，这意味着在 $T$ 变换下也是对称的. 这使得 $F_i^*(q^2)=\varepsilon_iF_i(q^2)$，其中 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\varepsilon_3=1$. 从厄米性知道，函数 $F$ 是实的，因此又得到 $F_3=0$. 可是，自从 Fitch 和 Cronin 在中性 $K$ 介子衰变中发现 $T$ 对称性的破坏后，大家知道 $T$ 不是所有相互作用的对称性.

作为一个例子，假设 $j^\mu(x)$ 是相互作用理论中的电磁流. 通过考虑二个接近于静止的归一化态，读者能毫无困难地证明有如下的对应：

$$eF_1(0)=\text{电荷 } Q,$$

$$\frac{e}{2m}[F_1(0)+F_2(0)]=\text{磁矩 }\mu\text{(非相对论磁耦合 }-\mu\sigma\cdot\mathbf{B}),$$

$$-\frac{e}{2m}F_3(0)=\text{电偶极矩 }d\text{(非相对论电耦合 }-d\sigma\cdot\mathbf{E}).$$

利用电子与氢靶和氘靶的散射，已完成了对核子形状因子的广泛的测量. 对于这种情况，在 $q^2$ 的很大的范围内 $F_1$ 和 $F_2$ 已为大家所了解. 可是，迄今 $F_3$ 还未被揭示. 特别是，已报道的(Ramsey)中子静电偶极

矩的范围表明，$d_{中子}/e \lesssim 10^{-23}$ 厘米。 这个电偶极矩的大小是 CP 破坏机制的敏感的检验。

对于带电粒子，总的迴转磁比率等于 $2[F_1(0) + F_2(0)]/F_1(0)$. 例如，对于质子(按惯例具有 $e = |e|$)，$F_1(0) = 1$，$F_2(0) = 1.79$，迴转磁比率等于 5.58. 在文献中我们经常看到 Sachs 组合 $G_E = F_1 + (q^2/4m^2)F_2$ 和 $G_M = F_1 + F_2$，对于表示有关散射的实验数据，这种组合是更为方便的。 这些形状因子可以解析延拓到 $q^2$ 为正的(类时)值，在那里它们和过程光子→费米子+反费米子相联系。

在标量(或赝标量)粒子的情况下，相应的流的矩阵元具有如下形式:

$$\langle p'|j^\mu(x)|p\rangle = e^{iq\cdot x}\frac{(p'+p)^\mu}{2m}F(q^2). \tag{3-204}$$

我们以一个代数练习来结束这一节. 我们将讨论 Dirac 场的四次式，这些场出现在协变的标量密度中，而这些标量密度出现在(比如)低能弱相互作用的等效 Fermi 拉氏量中。 目的在于考察重新编序所产生的影响，这种编序将场结合在一起构成一个 Lorentz 标量，基本的成分是在表(3-199)中给出的二次的量. 这就是 Fietz 定理. 用 $\Gamma^\alpha$ 综合表示16个 Dirac 矩阵:

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_S & & \Gamma_V^\mu & & \Gamma_T^{\mu\nu} & \Gamma_A^\mu & \Gamma_P \\ I & & \gamma^\mu & & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] & \gamma^5\gamma^\mu & i\gamma^5. \end{array} \tag{3-205}$$

令 $\Gamma_\alpha = (\Gamma^\alpha)^{-1}$，可以看到 $\gamma^0(\Gamma^\alpha)^+\gamma^0 = \Gamma^\alpha$，因而形式 $\bar\psi\Gamma^\alpha\psi$ 是厄米的. 用这些记号，有

$$\mathrm{Tr}\Gamma^\alpha\Gamma_\beta = 4\delta^\alpha_\beta,\quad 1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 16. \tag{3-206}$$

任意的 $4\times4$ 矩阵 $X$ 可以展开成

$$X = x_\alpha\Gamma^\alpha = \frac{1}{4}\Gamma^\alpha\mathrm{Tr}(X\Gamma_\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma_\alpha\mathrm{Tr}(X\Gamma^\alpha).$$

比较 $X_{ab}$ 的系数即得如下的恒等式，其中拉丁指标取值 1 到 4:

$$\delta_{a\bar a}\delta_{b\bar b} = \frac{1}{4}\Gamma_{\alpha,b\bar b}\Gamma^\alpha_{a\bar a}. \tag{3-207}$$

将它应用到 $\Gamma^\alpha\Gamma_\beta$，我们得到

$$\Gamma^\alpha\Gamma_\beta=\rho^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma,\quad \rho^\alpha_{\beta\gamma}\equiv\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\Gamma^\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma. \tag{3-208}$$

记 $\Gamma_\alpha=\varepsilon_\alpha\Gamma^\alpha$，其中 $\varepsilon_\alpha=\pm1$，很容易看到，在循环置换下 $\rho_{\alpha\beta\gamma}=\varepsilon_\alpha\rho^\alpha_{\beta\gamma}$ 是不变的，于是在给定二个指标的值后，仅仅对于第三个指标的一个值它才不等于零．不为零的项只有

$$\rho^\alpha_{\beta\delta}=\rho^\alpha_{\delta\beta}=\delta^\alpha_\beta,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\rho V_\mu T_{\rho\sigma}V_\nu=-\rho V_\mu V_\nu T_{\rho\sigma}=i(g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma}-g_{\rho\sigma}g_{\nu\rho}),\\
&\rho V_\mu T_{\rho\sigma}A_\nu=\rho T_{\sigma\rho}V_\mu A_\nu=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},\\
&\rho V_\mu A_\nu P=-\rho A_\nu V_\mu P=-ig_{\mu\nu},\\
&\rho T_{\mu\nu}A_\sigma A_\rho=-\rho A_\sigma T_{\mu\nu}A_\rho=i(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}),\\
&\rho T_{\mu\nu}PT_{\rho\sigma}=\rho PT_{\mu\nu}T_{\rho\sigma}=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},\\
&\rho T_{\mu\nu}T_{\rho\sigma}T_{\tau\kappa}=i[g_{\mu\rho}(g_{\nu\tau}g_{\sigma\kappa}-g_{\nu\kappa}g_{\tau\sigma})+g_{\mu\sigma}(g_{\nu\kappa}g_{\rho\tau}-g_{\nu\tau}g_{\kappa\rho})\\
&\qquad-g_{\mu\tau}(g_{\nu\sigma}g_{\rho\kappa}-g_{\nu\rho}g_{\sigma\kappa})+g_{\mu\kappa}(g_{\tau\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\nu\sigma}g_{\rho\tau})].
\end{aligned} \tag{3-209}$$

现在考虑五个 Lorentz 标量

$$\begin{aligned}
s&=\bar u(4)u(2)\bar u(3)u(1),\\
v&=\bar u(4)\gamma^\mu u(2)\bar u(3)\gamma_\mu u(1),\\
t&=\frac{1}{2}\bar u(4)\sigma^{\mu\nu}u(2)\bar u(3)\sigma_{\mu\nu}u(1),\\
a&=\bar u(4)\gamma^5\gamma^\mu u(2)\bar u(3)\gamma_\mu\gamma^5u(1),\\
p&=\bar u(4)\gamma^5u(2)\bar u(3)\gamma^5u(1),
\end{aligned} \tag{3-210}$$

这里 $u(1)$ 表示具有动量 $p_1$、极化 $\alpha_1$ 的旋量 $u(p_1,\alpha_1)$．我们将用记号 $s(4,2;3,1)$ 表示 Dirac 指标被缩并的方式，对于其它的振幅也用类似的方法表示．任何这样的一个量都可以写成

$$b(4,2;3,1)=\bar u_{\alpha_3}(3)\bar u_{\alpha_4}(4)\Gamma^\alpha_{\alpha_4\alpha_2}\Gamma_{\alpha,\alpha_3\alpha_1}u_{\alpha_1}(1)u_{\alpha_2}(2).$$

这些量和 4 与 1 缩并、3 与 2 缩并后的相应的量是怎样联系的呢？这个定理告诉我们，存在联系这二组量的 $5\times5$ 的数值矩阵 $F$．矩阵 $F$ 和它的逆矩阵必定相等．在继续进行之前，我们注意到，对于 $x$ 空间中的算符形式：$\bar\psi_4(x)\psi_2(x)\bar\psi_3(x)\psi_1(x)$:，我们可以探讨类似的问题．由于 Fermi 场的反对易性，相应的矩阵则为 $-F$．对于这五个量 $b(4,2;3,1)$ 中的任何一个，我们都可以用式(3-207)改写

$$u_{a_2}(2)u_{a_1}(1) = \delta_{a_2\bar{a}_2}\delta_{a_1\bar{a}_1}u_{\bar{a}_2}(2)u_{\bar{a}_1}(1) = \frac{1}{4}\Gamma_{\beta,a_2\bar{a}_1}\Gamma^{\beta}_{a_1,\bar{a}_2}u_{\bar{a}_2}(2)u_{\bar{a}_1}(1).$$

因此，借助于式(3-208)，即得

$$b(4,2;3,1) = \frac{1}{4}\bar{u}_{a_4}(4)\bar{u}_{a_3}(3)\Gamma^{\alpha}_{a_4a_2}\Gamma_{\beta,a_2\bar{a}_1}\Gamma_{\alpha,a_3a_1}\Gamma^{\beta}_{a_1\bar{a}_2}u_{\bar{a}_2}(2)u_{\bar{a}_1}(1)$$

$$= \frac{1}{4}\rho^{\alpha}_{\beta\gamma}\rho^{\beta\delta}_{\alpha}\bar{u}(4)\Gamma^{\gamma}u(1)\bar{u}(3)\Gamma_{\delta}u(2).$$

再利用式(3-209)，即得所需要的结果

$$\begin{pmatrix} s \\ v \\ t \\ a \\ p \end{pmatrix}(4,2;3,1) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s \\ v \\ t \\ a \\ p \end{pmatrix}(4,1;3,2).$$

读者可以证明 $F^2 = 1$，并将矩阵对角化，在分立对称下各种振幅的性质是什么？

## 注记

在 N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kgl. Danske Videnskab. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, vol. 12, p. 8 和 *Phys. Rev.*, vol.78, p. 794, 1950 中，分析了电动力学中量子对易关系的物理意义。有关光子质量的限度见 A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 43, p. 277, 1971。H. B. G. Casimir, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.*, ser. B, vol.51, p. 793, 1948 一文中考虑了真空涨落的宏观效应。也可见 M. Fierz, *Helv. Phys. Acta*, vol. 33, p. 855, 1960; T. M. Bo-

yer, *Annals of Physics* (*New York*), vol. 56, p. 474, 1970; 和 R. Balian and B. Duplantier, *Annals of Physics* (*New York*), vol. 112, p. 165, 1978. M. J. Sparnaay, *Physica*, vol. 24, p. 751, 1958 一文中讨论了实验数据. 有关 Van der Waals 力的研究可以在下面的工作中找到: G. Feinberg and J. Sucher, *Phys. Rev.*, ser. A, vol. 2, p. 2395, 1970. 在有限温度下的量子场论的提出, 例如可见 L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, ser. D, vol. 9, p. 3320, 1974.

场论的一般的公理化描述以及某些基本性质的推导, 见 R. F. Streater and A. S. Wightman, "PCT, Spin and Statistics, and All That," Benjamin, New York, 1964 and R. Jost, "The General Theory of Quantized Fields," AMS, Providence, R. I., 1965.

# 第四章　和外场的相互作用

和外场的相互作用给出了动力学系统的简单例子．我们将引进相互作用表象和 Wick 恒等式的重要概念．应用包括经典源的辐射和红外灾难，在费米子的情况下它的物理的对应是通过 $c$ 数电磁场的对产生过程．

## 4-1　和经典源相互作用的量子化的电磁场

### 4-1-1　发射几率

我们首先考虑量子化的电磁场与一个给定外源的相互作用．因此，物理问题是通过经典守恒流 $j_\mu(x)$：

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{4-1}$$

光子的发射和吸收．由电磁作用量

$$I = -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu\right), \tag{4-2}$$

我们导出运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu \partial \cdot A = j^\nu. \tag{4-3}$$

和自由情形时一样，在场的量子化时所遇到的困难可以通过附加如下的作用量而被解决：

$$-\frac{1}{2}\int d^4x(\partial \cdot A)^2.$$

在这种规范中，运动方程简化为

$$\Box A^\mu = j^\mu. \tag{4-4}$$

算符 $A_\mu(x)$ 作用于具有不定度规的空间，并满足和自由

情形时一样的对易关系

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{y})] = -g_{\mu\nu} i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \qquad (4\text{-}5)$$

如果我们假定式(4-4)的解定义在和自由场一样的 Fock 空间上，自由场和相互作用场之间的联系相当于一个正则变换。在具有有限个自由度的量子力学中，这将由么正变换来完成。可是，对于无穷多的自由度可能会出现困难。我们用一个简单的模型来举例说明这一点。

令有限的量子系统由在三维立方晶格的顶点上的 $N$ 个半整数自旋所组成。例如它们可以携带磁矩。可观测量是 $3N$ 个算符 $\sigma_1(n)$，$\sigma_2(n)$，$\sigma_3(n)$，$n$ 是格点指标。状态是 $\sigma_3$ 的本征矢量的线性组合，用$|\pm\pm\cdots\pm\rangle$表示。这些态可以用 $\sigma_-$作用在态$|0\rangle\equiv|+++\cdots+\rangle$上而产生。考虑转动算符

$$\tau_1(n) = \sigma_1(n)\cos\theta - \sigma_3(n)\sin\theta,$$
$$\tau_2(n) = \sigma_2(n),$$
$$\tau_3(n) = \sigma_1(n)\sin\theta + \sigma_3(n)\cos\theta,$$

显然

$$\tau_\alpha(n) = \exp\left[-i\frac{\theta}{2}\sum_{p=1}^{N}\sigma_2(p)\right]\sigma_\alpha(n)$$
$$\times\exp\left[i\frac{\theta}{2}\sum_{p=1}^{N}\sigma_2(p)\right].$$

这表明生成同样代数的算符 $\sigma$ 和 $\tau$ 是么正地等价的。用 $|\theta\rangle$ 表示 $\tau$ 的新的基态：

$$|\theta\rangle = \exp\left[-i\frac{\theta}{2}\sum_{p=1}^{N}\sigma_2(p)\right]|0\rangle,$$

很容易算出标量积 $\langle 0|\theta\rangle = (\cos\theta/2)^N$。假定在极限 $N\to\infty$时，由基态 $|0\rangle\equiv|+++\cdots+\rangle$ 通过有限个产生算符 $\sigma_-$ 的作用以及 Cauchy 完全性来构成态的 Hilbert 空间。我们可以再将算符 $\sigma$ 转动成 $\tau$，并定义和 $|0\rangle$类似的态$'|\theta\rangle$。于是，

我们可以寻找一个完成这个转动的么正变换 $U(\theta)$:

$$|\theta\rangle = U(\theta)|0\rangle,\ \tau_a(n) = U(\theta)\sigma_a(n)U^+(\theta).$$

当 $N\to\infty$ 时,这种么正算符显然并不存在. 在这一极限下,转动后的态和未转动的态的任何标量积都趋于零,例如,$\langle 0|\theta\rangle = (\cos\theta/2)^N \underset{N\to\infty}{\to} 0$. 由此得到的教益是,在无穷多自由度的情况下,物理上等价的可观测量,即实现相同的对易关系的代数等等,不一定是么正地等价的. 当我们注意到场 $A_\mu$ 满足自由的对易关系式(4-5)时,我们必须记住这一点.

回到场方程(4-4),我们可以写出一个 $c$ 数特解

$$A^\mu_c(x) = \int d^4y G(x-y)j^\mu(y).$$

这个解是用如下的 d'Alembertian 算符 $\Box_x$ 的某个 Green 函数 $G(x-y)$ 来表示的:

$$\Box_x G(x-y) = \delta^4(x-y).$$

因此,式(4-4)的一般解是

$$A_\mu(x) = A^{(0)}_\mu(x) + \int d^4y G(x-y)j_\mu(y), \qquad (4\text{-}6)$$

其中 $A^{(0)}$ 是量子自由场. Green 函数的精确形式由边界条件确定. 假定流 $j^\mu(y)$ 在有限时间间隔内绝热地引入. 利用式(1-170)的超前和推迟的 Green 函数

$$G^{\text{ret}}_{\text{adv}}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ip\cdot x}}{(p_0\pm i\varepsilon)^2-\mathbf{p}^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\theta(\pm x_0)\delta(x^2),$$

我们可以写成

$$A^\mu(x) = A^\mu_{\text{in}}(x) + \int d^4y G_{\text{ret}}(x-y)j^\mu(y)$$

$$= A^\mu_{\text{out}}(x) + \int d^4y G_{\text{adv}}(x-y)j^\mu(y). \qquad (4\text{-}7)$$

自由场 $A^{\mu}_{\text{in}}$ 和 $A^{\mu}_{\text{out}}$ 分别描述和流 $j$ 相互作用之前和之后的光子场. 形式上我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x_0\to-\infty} A^{\mu}(x) &= A^{\mu}_{\text{in}}(x),\\ \lim_{x_0\to+\infty} A^{\mu}(x) &= A^{\mu}_{\text{out}}(x).\end{aligned} \tag{4-8}$$

这些表达式的精确的数学意义依赖于源 $j$. 至少我们可以要求，在归一化态之间场的某些定域平均的矩阵元满足这些关系. 这种弱形式的极限完全依赖于当 $|t|\to\infty$ 时源绝热地趋于零的假定. 实际上，这经常是不能实现的，因此我们必须有保留地对待式(4-8).

构造是在给出的 Hilbert 空间，例如入射光子的 Fock 空间中进行的. 真空则是被算符 $a^{(\lambda)}_{\text{in}}(k)$ 湮灭的态，我们设法寻找用么正算符 $S$ 表示的正则变换，它将 in 场和 out 场联系起来，即

$$A^{\mu}_{\text{out}}(x) = S^{-1}A^{\mu}_{\text{in}}(x)S. \tag{4-9}$$

in 态和 out 态的联系是

$$|\text{out}\rangle = S^{-1}|\text{in}\rangle = S^{+}|\text{in}\rangle, \tag{4-10}$$

或

$$|\text{in}\rangle = S|\text{out}\rangle.$$

假定在时刻 $t=-\infty$ 系统处于给定的态，例如处于真空，即不含(物理的)光子. 终态以某些可计算的几率包含 0 个，1 个，2 个等发射的光子. 例如，仍留在基态的几率振幅是

$$\langle 0_{\text{out}}|0_{\text{in}}\rangle = \langle 0_{\text{in}}|S|0_{\text{in}}\rangle = \langle 0_{\text{out}}|S|0_{\text{out}}\rangle.$$

为了使这种解释有意义，我们应当证明几率 $p_0=|\langle 0_{\text{out}}|0_{\text{in}}\rangle|^2$ 小于 1. 几率 $p_1, p_2, \cdots$，最后的极化以及角分布都可以用类似的方法来计算. 因此，算符 $S$ 包含了有关终态的全部知识.

现在我们回来确定算符 $S$. 式(4-7)表明，

$$A^{\mu}_{\text{out}}(x) = A^{\mu}_{\text{in}}(x) + \int d^4y\,[G_{\text{ret}}(x-y) - G_{\text{adv}}(x-y)]j^{\mu}(x)$$
$$= A^{\mu}_{\text{in}}(x) + A^{\mu}_{\text{cl}}(x). \qquad (4\text{-}11)$$

当然，式(4-11)右边的第二项是齐次方程的解，它就是流 $j$ 辐射的经典场 $A^{\mu}_{\text{cl}}$ [式 (1-206)]. 组合 $G^{(-)} \equiv G_{\text{ret}} - G_{\text{adv}}$ 曾经在第一章中遇到过[见式(1-173)]:

$$G^{(-)}(x) = G_{\text{ret}}(x) - G_{\text{adv}}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p e^{-ip\cdot x}\varepsilon(p_0)\delta(p^2)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(x^2) = -\Delta(x).$$

它和无质量自由标量场的对易子$\Delta$[式(3-56)]只差一负号. 因此，我们可以将式(4-11)改写成

$$A^{\mu}_{\text{out}}(x) = S^{-1}A^{\mu}_{\text{in}}(x)S = A^{\mu}_{\text{in}}(x) - i\int d^4y[A^{\mu}_{\text{in}}(x),$$
$$A_{\text{in}}(y)\cdot j(y)]. \qquad (4\text{-}12)$$

这使我们回忆起公式(2-81):

$$e^{A}Be^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A,[A, B]] + \cdots,$$

因为 $A$ 和 $B$ 表示自由场，它们的对易子是 $c$ 数，所以上式右边实际上只有前二项不等于零. 因此，可以写成

$$S = \exp\left[-i\int d^4x A_{\text{in}}(x)\cdot j(x)\right]$$
$$= \exp\left[-i\int d^4x A_{\text{out}}(x)\cdot j(x)\right]. \qquad (4\text{-}13)$$

这个形式满足所有的条件，包括不定度规空间中的幺正性. 在 $S$ 中只有可能依赖于 $j$ 的 $c$ 数相位仍是任意的，但这不影响物理的量.

将 $S$ 按正规次序写出是方便的. 我们把 $A^{\mu}_{\text{in}}$ 分成湮灭算符 $A^{\mu(+)}_{in}$ 和产生算符 $A^{\mu(-)}_{in}$ 之和. 我们看到 $\partial_{\mu}A^{\mu(+)}_{\text{in}} = \partial_{\mu}A^{\mu(+)}_{\text{out}}$，因此 $S$ 必定保持正度规的物理的子空间不变. $A^{\mu(-)}$

和 $A^{\nu(+)}$ 的对易子是 $c$ 数函数:

$$[A_{\text{in}}^{\mu(-)}(x),\ A_{\text{in}}^{\nu(+)}(y)] = g^{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\,e^{-ik\cdot(x-y)} \times\theta(k^0)\delta(k^2). \tag{4-14}$$

因此,我们可以利用当 $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$ 时有效的恒等式

$$e^Ae^B = e^{A+B+[A,B]/2}, \tag{4-15}$$

并写出 $S$ 的正规形式:

$$\begin{aligned} S &= \exp\left[-i\int d^4y A_{\text{in}}(y)\cdot j(y)\right] \\ &= \exp\left[-i\int d^4y A_{\text{in}}^{(-)}(y)\cdot j(y)\right] \\ &\quad\times\exp\left[-i\int d^4y A_{\text{in}}^{(+)}(y)\cdot j(y)\right] \\ &\quad\times\exp\left\{\frac{1}{2}\iint d^4xd^4y\,[A_{\text{in}}^{(-)}(x)\cdot j(x),\ A_{\text{in}}^{(+)}(y) \right. \\ &\quad\left.\times j(y)]\right\}. \end{aligned} \tag{4-16}$$

引进流 $j(x)$ 的 Fourier 变换

$$J^\mu(k) = \int d^4x j^\mu(x)e^{-ik\cdot x}, \tag{4-17}$$

$j$ 的实数性质和守恒律可表示成

$$J^\mu(-k) = J^{\mu*}(k) \text{ 和 } k_\mu J^\mu(k) = 0. \tag{4-18}$$

式(4-16)中最后一项的指数是

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\iint d^4xd^4y[A_{\text{in}}^{(-)}(x)\cdot j(x),\ A_{\text{in}}^{(+)}(y)\cdot j(y)] \\ &\quad=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}J^*(k)\cdot J(k)|_{k^0=|\boldsymbol{k}|}. \end{aligned}$$

正如所料,只有相应于类光变量的源的 Fourier 分量有贡献. 此外,对于 $k^2=0$,我们可以分解

$$J^\mu(k) = k^\mu J_l(k) + J^\mu_{tr}(k), \qquad (4\text{-}19)$$

其中 $J_l(k)$ 是数，$J^\mu_{tr}(k)$ 是与 $k$ 正交的类空矢量. 例如，如果 $k = (k^0, \mathbf{k})$，我们引入类空的四维矢量 $\varepsilon_1 = (0, \mathbf{e}_1)$，$\varepsilon_2 = (0, \mathbf{e}_2)$，其中 $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$，$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$. 于是，我们可以选 $J^\mu_{tr}(k) = -\sum_{i=1,2} J_i(k)\varepsilon_i^\mu(k)$，其中 $J_i(k) = \varepsilon_i \cdot J(k)$. 利用这些分解，很容易看到

$$\begin{aligned} J^*(k) \cdot J(k) &= J^*_{tr}(k) \cdot J_{tr}(k) \\ &= -[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]. \end{aligned}$$

换句话说，只有横向分量对式(4-16)的最后一项有贡献：

$$\begin{aligned} S = &\exp\left[-i\int d^4x A^{(-)}_{in}(x) \cdot j(x)\right] \\ &\times \exp\left[-i\int d^4x A^{(+)}_{in}(x) \cdot j(x)\right] \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]\right\}. \end{aligned} \qquad (4\text{-}20)$$

发射几率可以用这些横向分量表示. 实际上，对于 $p_0$ 我们得到

$$\begin{aligned} p_0 &= |\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 = |\langle 0_{in}|S|0_{in}\rangle|^2 \\ &= \exp\left\{-\int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]\right\}. \end{aligned} \qquad (4\text{-}21)$$

为了计算不观测动量和极化时的相应于发射 $n$ 个光子的几率 $p_n$，我们回想起 $n$ 个光子的态可表示成

$$|k_1\lambda_1, k_2\lambda_2, \cdots, k_n\lambda_n\rangle = a^{+(\lambda_1)}(k_1)\cdots a^{+(\lambda_n)}(k_n)|0\rangle,$$

具有归一化

$$\begin{aligned} &\langle k_1\lambda_1, \cdots, k_n\lambda_n | k'_1\lambda'_1, \cdots, k'_n\lambda'_n\rangle \\ &= \sum \delta_{\lambda_1\lambda'_{P_1}} \cdots \delta_{\lambda_n\lambda'_{P_n}} (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{P_1}) \cdots \\ &\quad (2\pi)^3 2k_n^0 \delta^3(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{P_n}), \end{aligned}$$

其中求和取遍所有的置换. 由于 Bose 统计，$n$ 个光子态上的

投影算符为

$$P_n = \frac{1}{n!}\int d\tilde{k}_1\cdots d\tilde{k}_n \sum_{\lambda_i=1,2} |k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n\rangle \times\langle k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n|. \tag{4-22}$$

因此，我们必须考虑矩阵元

$$\begin{aligned}\langle k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n,\ \mathrm{out}|0_{\mathrm{in}}\rangle &= \langle k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n,\ \mathrm{in}|S|0_{\mathrm{in}}\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2+|J_2(k)|^2]\right\} \\ &\quad\times\langle k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n,\ \mathrm{in}|\exp\left[-i\int d^4x A^{(-)}_{\mathrm{in}}(x)\right. \\ &\quad\left.\times j(x)\right]|0_{\mathrm{in}}\rangle.\end{aligned} \tag{4-23}$$

现在

$$\begin{aligned}\int d^4x A^{(-)}_{\mathrm{in}}(x)\cdot j(x) &= \int d\tilde{k}\sum_{\lambda=0}^{3} a^{(\lambda)+}(k)\varepsilon^{(\lambda)}(k)\cdot J(k) \\ &= \int d\tilde{k}\sum_{\lambda=1,2} a^{(\lambda)+}(k)J_\lambda(k),\end{aligned}$$

流守恒又使求和限于横向自由度，如果在投影算符 $P_n$ 中包含“纵向”光子和“标量”光子，它们的贡献将自动地抵消．在式(4-23)中具有 $n$ 个产生算符的项仅仅给出贡献

$$\begin{aligned}\frac{(-i)^n}{n!}\langle k_1\lambda_1,\cdots,k_n\lambda_n|\int d\tilde{q}_1\cdots d\tilde{q}_n a^{(\sigma_1)+}(q_1)J_{\sigma_1}(q_1)\cdots \\ a^{(\sigma_n)+}(q_n)J_{\sigma_n}(q_n)|0\rangle \\ = (-i)^n J_{\lambda_1}(k_1)\cdots J_{\lambda_n}(k_n).\end{aligned} \tag{4-24}$$

因为存在 $n!$ 个相等的项，因子 $1/n!$ 已不出现．几率 $P_n$ 为

$$\begin{aligned}P_n &= \langle 0_{\mathrm{in}}|P_n|0_{\mathrm{in}}\rangle \\ &= \frac{1}{n!}\left\{\int d\tilde{q}[|J_1(q)|^2+|J_2(q)|^2]\right\}^n \\ &\quad\times\exp\left\{-\int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2+|J_2(k)|^2]\right\}.\end{aligned} \tag{4-25}$$

定义

$$\bar{n} \equiv \int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2], \tag{4-26}$$

我们得到 Poisson 分布

$$p_n = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \tag{4-27}$$

这个分布是归一的:

$$\sum_0^\infty p_n = 1,$$

于是发射光子的平均值是 $\bar{n}$:

$$\sum_0^\infty n p_n = \bar{n}.$$

Poisson 分布式 (4-27) 反映了相继发射光子的统计独立性,它也可以看成是矩阵元式 (4-24) 的因子化结构所带来的结果. 另一方面, 我们来考察终态的性质. 我们从 $-\infty$ 时刻的真空态 $|0_{in}\rangle$ 出发,这个态是湮灭部分 $A_{in}^{\mu(+)}$ 的本征矢:

$$A_{in}^{\mu(+)}(x)|0_{in}\rangle = 0.$$

我们可以用算符的时间演化代替态的时间演化,因此考虑

$$A_{out}^{\mu(+)}(x)|0_{in}\rangle = S^{-1}A_{in}^{\mu(+)}(x)S|0_{in}\rangle = A_{cl}^{\mu(+)}(x)|0_{in}\rangle, \tag{4-28}$$

这里 $A_{cl}^{\mu(+)}$ 是式(4-11)中包含的经典场的正频部分:

$$A_{cl}^{\mu(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{2k^0} e^{-ik\cdot x} J^\mu(k)|_{k^0=|\mathbf{k}|}. \tag{4-29}$$

因此,我们有

$$\begin{aligned}\langle 0_{in}|A_{out}^\mu(x)|0_{in}\rangle &= A_{cl}^\mu(x) \\ &= \int d^4y G^{(-)}(x-y) j^\mu(y).\end{aligned} \tag{4-30}$$

式(4-28)意味着终态是一个相干态(参看第三章). 这和发射的 Poisson 分布并不矛盾. 实际上, 算符 $A^{(+)}$ 的本征态的这种性质和相继发射的统计独立性之间存在深刻的联系. 不严

格地说，忽略量子涨落，终态中的场是 $A_{\rm cl}(x)$。这就是式(4-30)式所表示的结果。

### 4-1-2 发射的能量和红外灾难

为了得到过程中发射能量的平均值，我们考虑

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{E}} &= \langle 0_{\rm in}|H(A_{\rm out})|0_{\rm in}\rangle \\ &= \langle 0_{\rm in}|S^{-1}H(A_{\rm in})S|0_{\rm in}\rangle \\ &= \left\langle 0_{\rm in}|S^{-1}\int d\tilde{k}k^0\sum_{\lambda=1,2}a_{\rm in}^{(\lambda)+}(k)a_{\rm in}^{(\lambda)}(k)S|0_{\rm in}\right\rangle. \end{aligned}\tag{4-31}$$

我们看到，正如所意料的，非物理的自由度的贡献在求和时抵消。从式(4-11)即得

$$a_{\rm out}^{(\lambda)+}(k) = S^{-1}a_{\rm in}^{(\lambda)+}(k)S = a_{\rm in}^{(\lambda)+}(k) - iJ_\lambda(k),\quad \lambda = 1, 2,$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{E}} &= \int d\tilde{k}k^0[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2] \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]. \end{aligned}\tag{4-32}$$

这个结果和经典理论是一致的！的确，相应于势 $A_{\rm cl}^\mu$ 的辐射电磁场 $F^{\mu\nu}$ 是

$$\begin{aligned}F_{\rm cl}^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu A_{\rm cl}^\nu - \partial^\nu A_{\rm cl}^\mu \\ &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k^0)\delta(k^2)e^{-ik\cdot x}[k^\mu J^\nu(k) - k^\nu J^\mu(k)],\end{aligned}$$

能量密度是

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3}[F_{\rm cl}^{0\alpha}(x)]^2 + \sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant3}[F_{\rm cl}^{\alpha\beta}(x)]^2\right\},$$

它的积分对长时间间隔的平均为

$$\bar{\mathscr{E}}_{\rm cl} = \overline{\int d^3x\varepsilon(x)} = \int d\tilde{k}\frac{1}{2k^0}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}|k^0J^\alpha(k) - k^\alpha J^0(k)|^2\right.$$

$$+\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}|k^{\alpha}J^{\beta}(k)-k^{\beta}J^{\alpha}(k)|^{2}\Big\}.$$

在光锥上利用分解式(4-19)，$J$ 的纵向分量没有贡献，于是我们得到

$$\mathscr{E}_{\mathrm{cl}}=\int d\tilde{k}k^{0}[\,|J_{1}(k)|^{2}+|J_{2}(k)|^{2}],\qquad(4\text{-}33)$$

和(4-32)一致．这个结果和式(4-26)提供的结果被解释为：在相空间元 $d\tilde{k}$ 中发射的光子数是

$$d\bar{n}=\hbar^{-1}d\tilde{k}[\,|J_{1}(k)|^{2}+|J_{2}(k)|^{2}],\qquad(4\text{-}34)$$

它们的能量等于

$$d\bar{\mathscr{E}}=\hbar k^{0}d\bar{n}.\qquad(4\text{-}35)$$

特别是，如果有限数量的能量以低频率发射，软光子的数目 $d\bar{n}=d\bar{\mathscr{E}}/\hbar k^{0}$ 就会很大．典型地是，对于某个流 $J$，可能发生 $\int d\bar{\mathscr{E}}$ 是有限的，而 $\int d\bar{\mathscr{E}}/\hbar k^{0}$ 是发散的．这就是在第一章中已遇到过的有名的红外灾难．在那里我们已看到，当电荷被突然地从动量 $p_i$ 加速到动量 $p_f$ 时，就产生一个流

$$J^{\mu}(k)=ie\left(\frac{p_{f}^{\mu}}{p_{f}\cdot k}-\frac{p_{i}^{\mu}}{p_{i}\cdot k}\right),$$

从而辐射出一光子流，其有限的总能量 $\mathscr{E}\sim\int dk^{0}$．不幸的是，粒子的总数象 $\bar{n}\sim\int dk^{0}/\hbar k^{0}$ 一样发散．因此，从荷电粒子的辐射场抽象出一个荷电粒子是不可能的．可是，正如第一章中所强调的，计算发射软光子的数目是没有意义的，物理上可测量的量只是发射的能量．

在数学上，这种情况实在是灾难性的．的确，当 $\bar{n}\to\infty$ 时，从式(4-21)和(4-26)得到

$$|\langle 0_{\mathrm{out}}|0_{\mathrm{in}}\rangle|=e^{-\bar{n}/2}\to 0,$$

in 态和 out 态之间的每个矩阵元都趋于零. 显然，从 "in" 空间构造 "out" Fock 空间是不可能的，也不可能找到么正算符 $S$. 这和本节开始时讨论的简单模型的情况是完全一样的. 对于具有无穷多自由度并处于某种情况下(在这里 $\bar{n}=\infty$)的系统，可能存在正则对易关系的不等价表示. 我们在这里陷入烦恼是不足为奇的，因为我们试图把终态描述为有限多个光子态的迭加，而我们知道它们的实际的数目是无限的.

在物理上，我们可以割去一部分相空间，即选定只在某个能量、动量的范围内观察最终的光子. 实际上这相当于一个实验上的限制. 每个光子探测器具有给定的有限分辨率，于是能量低于这个分辨率的光子是不能观测的. 令 $R$ 是不可观测的相区域，$C_R$ 是它的补集. 只在 $R$ 中发射的总几率，即没有探测到光子的总几率

$$p^R=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^R=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\bar{n}}\frac{(\bar{n}_R)^n}{n!}=e^{-(\bar{n}-\bar{n}_R)}=\exp(-\bar{n}_{C_R})$$

不为零，因为

$$\bar{n}_{C_R}=\int_{C_R}d\tilde{k}[|J_1(k)|^2+|J_2(k)|^2]$$

是有限的，而当 $\bar{n}\to\infty$ 时，求和的每一项都趋于零，对于足够小的 $R$，观测到的辐射能量 $\bar{\mathscr{E}}(C_R)=\bar{\mathscr{E}}-\bar{\mathscr{E}}(R)$ 如所要求的那样接近于 $\bar{\mathscr{E}}$，并且至少探测到一个动量在 $R$ 外的光子的几率 $1-\exp(-\bar{n}_{C_R})$ 是有限的.

存在另外一种可能性，可以避免上述处理红外发散的不太可靠的微妙性，至少可避免数学上的困难. 为了量子化这种场，我们给光子一个很小的质量 $\mu$，并利用第三章的 Stueckelberg 规范. 这样做将会割去低能区域，因为现在有 $k^0>\mu$，从而消除了红外发散. 可是，我们必须证明，额外的自由度不会带来任何虚假的效应，也就是说，在极限 $\mu\to 0$ 时，可观测的量不受影响.

因此，我们考虑与一个守恒流耦合的有质量的光子场. 在无质量

的情况下我们记得，不定度规态不起作用，只有横向自由度被激发。在这里与此类似，在 Stueckelberg 规范下，流的守恒定律使得只有横场

$$A_\mu^T = A_\mu + \frac{\lambda}{\mu^2}\partial_\mu(\partial \cdot A).$$

与流耦合

$$\int A_\mu^T(x) j^\mu(x) d^4x = \int A_\mu(x) j^\mu(x) d^4x,$$

因此负度规态不出现。可是，纵向极化态仍有贡献。例如，我们可以从式(4-16)和(3-148)计算出 $\bar{n}$：

$$\bar{n} = -\int d^4x d^4y [A_{in}^{(-)}(x) \cdot j(x),\ A_{in}^{(+)}(y) \cdot j(y)]$$

$$= -\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} J(k) \cdot J^*(k)|_{k^0=(k^2+\mu^2)^{1/2}}. \qquad (4\text{-}36)$$

正如我们上面所回忆的，对于一个加速的电荷，典型地有 $J \cdot J^* \sim 1/k_0^2$。在某个 $|\mathbf{k}| = k_{max}$ 处截断积分，我们得到潜在地发散的 $\bar{n}$：

$$\bar{n} \sim \int_0^{k_{max}} \frac{dk k^2}{(k^2+\mu^2)^{3/2}} \sim \ln \frac{k_{max}}{\mu},$$

而发射的能量

$$\bar{\varepsilon} \sim \int_0^{k_{max}} \frac{dk k^2}{k^2+\mu^2} \sim k_{max} - \mu\frac{\pi}{2}.$$

当 $\mu \to 0$ 时具有光滑的性质。我们也发现，给定动量 $\mathbf{k}$ 的纵向光子的贡献 $\bar{n}_L$ 与横向光子的贡献 $\bar{n}_T$ 相比是一个趋于零的小量：

$$\frac{\bar{n}_L}{\bar{n}_T} \sim \frac{|J_t|^2 - |J_0|^2}{|\mathbf{J}_{tr}|^2} = \frac{\mu^2}{|\mathbf{k}|^2}\frac{|J_0|^2}{|\mathbf{J}_{tr}|^2}, \qquad (4\text{-}37)$$

其中利用了由流守恒得到的 $|J_t| = (k_0/|\mathbf{k}|)|J_0|$。这个小的光子质量的引入提供了红外发散的一种方便的正规化。可是，第三种极化态的存在会修改黑体辐射谱，使它乘上因子 3/2。这个困难是可以避免的，只要假定第三种模式的平衡时间是如此地大，以致其效应是完全不能观测的。

通过上面的讨论可以明白，量子电动力学的红外发散的最重要特征本质上是经典的，它依赖于外部流的性质，也依赖

于实验上的分辨率. 可是,量子效应一定会显示出来,例如表现为发射光子数的涨落. 假定 $\bar{n}$ 是有限的,我们计算

$$\overline{\Delta n^2} \equiv \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \bar{n},$$

因此

$$\frac{\overline{\Delta n}}{\bar{n}} = \bar{n}^{-1/2} \tag{4-38}$$

如果 $\bar{n}$ 很大,这些涨落是非常小的. 类似,能量的涨落为

$$\overline{\Delta \mathscr{E}^2} = (\overline{\mathscr{E}^2} - \bar{\mathscr{E}}^2) = \int d\tilde{k} k_0^2 [|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]. \tag{4-39}$$

如果在值 $\langle k^0 \rangle$ 附近辐射频率有一个很强的峰,我们将有

$$\overline{\Delta \mathscr{E}} \sim (\hbar \langle k^0 \rangle \bar{\mathscr{E}})^{1/2}, \quad \bar{\mathscr{E}} \sim \bar{n} \hbar \langle k^0 \rangle.$$

因此,正如所料

$$\frac{\overline{\Delta \mathscr{E}}}{\bar{\mathscr{E}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} = \frac{\overline{\Delta n}}{\bar{n}}. \tag{4-40}$$

### 4-1-3 感生吸收和感生发射

我们可以利用对于 $S$ 矩阵所得到的明显的表达形式 (4-13) 和 (4-16),简略地讨论某些感兴趣的情形. 也就是说,我们或许想知道初态中光子的存在是怎样影响源 $j$ 的辐射的.

从式(4-28)我们已经看到,经典流从真空产生一个相干态. 这个相干态又可以看作第二个源 $j$ 的初态. 换句话说,假定生成初态

$$|j_{\text{inc}}\rangle = \exp\left[-i \int d^4x A_{\text{in}}(x) \cdot j_{\text{inc}}(x)\right] |0_{\text{in}}\rangle \tag{4-41}$$

的第一个源 $j_{\text{inc}}$ 可以很好地和第二个源 $j(x)$ 区分开. 终态在 out 态上的投影为

$$\langle b_{\text{out}} | j_{\text{inc}} \rangle = \langle b_{\text{in}} | \exp\left[-i \int d^4x A_{\text{in}}(x) \cdot j(x)\right]$$
$$\times \exp\left[-i \int d^4y A_{\text{in}}(y) \cdot j_{\text{inc}}(y)\right] |0_{\text{in}}\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{2}\iint d^4x d^4y j_\mu(x) G^{(+)}(x-y) j^\mu_{\rm inc}(y)\right]$$

$$\times \langle b_{\rm in}|\exp\left\{-i\int d^4y A_{\rm in}(y)\cdot[j_{\rm inc}(y)+j(y)]\right\}|0_{\rm in}\rangle. \quad (4-42)$$

最后一式中的第一个因子是和态 $b$ 无关的纯相位，因此是不可观测的。第二项告诉我们，终态是由 $j_{\rm inc}+j$ 产生的。用 $J+J_{\rm inc}$ 代替式 (4-26)中的 $J$，即得光子的总数 $\bar{n}_{\rm tot}$，用差 $\bar{n}_{\rm tot}-\bar{n}_{\rm inc}$ 定义的辐射光子的(平均)数是

$$\bar{n}_{\rm rad} = \bar{n}_{\rm tot} - \bar{n}_{\rm inc} = \int d\vec{k}\,|\mathbf{J}_{\rm tr}(k)|^2$$

$$+ 2Re\int d\vec{k}\,\mathbf{J}_{\rm tr}(k)\cdot\mathbf{J}^*_{\rm inc,tr}(k). \quad (4-43)$$

式(4-43)右边的第一项是仅仅由源 $j$ 发射的光子数，而第二项是典型的干涉项，它表示受激吸收或受激发射。我们看到，这一项对于 $j_{\rm inc}$(或 $F^{\mu\nu}_{\rm inc}$) 是线性的。于是相应于不同频率的项是退耦的。这再次反映了各种模式的独立性。读者可以计算存在 $j_{\rm inc}$ 时的辐射能量，并再次发现这种干涉现象。一方面我们知道，二个经典的源干涉和能量干涉必定意味着光子数的干涉，因为 $d\bar{n}(k)=d\bar{\varepsilon}(k)/\hbar k^0$。另一方面，鉴于发射的随机性，发现发射光子数的干涉是有点意外的。这清楚地表明了这种随机解释的局限性。由于发射源也可以吸收光子，发射和吸收是有联系的。等式 $\bar{n}_{\rm tot}=\bar{n}_{\rm inc}+\bar{n}_j$ 则意味着吸收是不可能的。

将这种情形和初态具有确定光子数的情况相比较是有启发的。为了简单起见，我们假定所有的光子处于相同的模式：

$$|\bar{n}_{\rm inc}{\rm in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}_{\rm inc}!}}\left[\int d\vec{k}\sum_{\lambda=1,2} f_\lambda(k) a^{(\lambda)+}(k)\right]^{\bar{n}_{\rm inc}}|0_{\rm in}\rangle. \quad (4-44)$$

函数 $f_\lambda$ 被归一：

$$\int d\vec{k}\sum_{\lambda=1,2}|f_\lambda(k)|^2 = 1,$$

并且认为在平均值附近 $f(k)$ 有峰值。我们将只计算终态中光子的平均数目

$$\bar{n}_{\rm tot} = \langle \bar{n}_{\rm inc}{\rm in}|N_{\rm out}|\bar{n}_{\rm inc}{\rm in}\rangle,$$

其中

$$N_{out} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} a_{out}^{(\lambda)+}(k) a_{out}^{(\lambda)}(k)$$

$$= S^{+} \int d\tilde{k} \sum_{\lambda} a_{in}^{(\lambda)+}(k) a_{in}^{(\lambda)}(k) S$$

$$= \int d\tilde{k} \sum_{\lambda} [a_{in}^{(\lambda)+}(k) - iJ_{\lambda}(k)][a_{in}^{(\lambda)}(k) + iJ_{\lambda}^{*}(k)]. \quad (4-45)$$

我们只需考虑横光子的数目，因为初态中没有纵光子和标量光子，并且它们不能被发射．因此，

$$\bar{n}_{out} = \bar{n}_{inc} + \int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]$$

$$+ \langle \bar{n}_{inc} | \int d\tilde{k} \Big[ \sum_{\lambda} i a^{(\lambda)+}(k) J_{\lambda}(k) + \text{厄米共轭} \Big] \bar{n}_{inc} \rangle$$

$$= \bar{n}_{inc} + \int d\tilde{k}[|J_1(k)|^2 + |J_2(k)|^2]. \quad (4-46)$$

辐射光子的平均数和初态中没有光子的情形完全一样！平均说来，不存在受激吸收或受激发射，但这并不意味着发射几率是不变的．实际上，我们可以计算在终态中找到 $\bar{m}$ 个光子的几率．一个很容易的计算给出

$$p_{\bar{n}_{inc} \to \bar{m}} = \frac{1}{\bar{n}_{inc}! \bar{m}!} \frac{\partial^{\bar{n}_{inc}}}{\partial z^{\bar{n}_{inc}}} \frac{\partial^{\bar{n}_{inc}}}{\partial \bar{z}^{\bar{n}_{inc}}} \Big( \exp - \Big\{ \bar{n}_{i} + \int d\tilde{k} \Big[ z \sum_{\lambda=1,2} J_{\lambda}^{*}(k) f_{\lambda}(k) + \text{复共轭} \Big] \Big\}$$

$$\times \Big[ \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_{\lambda}(k) + z f_{\lambda}(k)|^2 \Big]^{\bar{m}} \Big) \Big|_{z=\bar{z}=0}. \quad (4-47)$$

对于一个弱源 $J$，我们可以只保留 $J$ 的最低阶．在这一阶，不为零的跃迁几率只有

$$p_{\bar{n}_{inc} \to \bar{n}_{inc}+1} = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_{\lambda}(k)|^2$$

$$+ \bar{n}_{inc} \Big| \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} f_{\lambda}^{*}(k) J_{\lambda}(k) \Big|^2,$$

$$p_{\bar{n}_{inc} \to \bar{n}_{inc}} = 1 - \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1,2} |J_{\lambda}(k)|^2$$

$$- 2\bar{n}_{\text{inc}}\left|\int d\vec{k}\sum_{j=1,2} f_j^*(k)J_\lambda(k)\right|^2, \tag{4-48}$$

$$p_{\bar{n}_{\text{inc}}\to\bar{n}_{\text{inc}}+1} = \bar{n}_{\text{inc}}\left|\int d\vec{k}\sum_{j=1,2} f_j^*(k)J_\lambda(k)\right|^2$$

$$= 1 - p_{\bar{n}_{\text{inc}}\to\bar{n}_{\text{inc}}} - p_{\bar{n}_{\text{inc}}\to\bar{n}_{\text{inc}}+1},$$

第一个表达式可以和

$$p_{0\to 1} = \int d\vec{k}\sum_{j=1,2}|J_\lambda(k)|^2$$

相比较. 这表明初态中光子的存在增大了发射的几率. 这是受激发射的基本结果. 从式(4-48)很容易证明,辐射光子的平均数仍然等于$\bar{n}_f$.

### 4-1-4 $S$ 矩阵和演化算符

式(4-13)中 $S$ 矩阵的导出依赖于如下的假定: 源不是一个独立的动力学变量,也就是说,它随时间的演化一旦被给定就永远确定了. 这种方法在 $S$ 中保留了一个任意的依赖于源的相位. 因此,建立 $S$ 矩阵的普遍形式,并和这个特殊情况下的结果作比较将是合理的. 基本的想法是: 构造一个实现依赖于时间的正则变换的算符,这种变换使相互作用的场 $A^H$ 和入射场 $A_{\text{in}}^H$ 相联系:

$$A^H(t,\mathbf{x}) = U^{-1}(t)A_{\text{in}}^H(t,\mathbf{x})U(t). \tag{4-49}$$

正如已经讨论并在式(4-8)中所表示的, $A_{\text{in}}^H$ 是当 $t\to-\infty$ 时 $A^H$ 的某种弱极限,因此在这个极限下 $U$ 简化成单位元

$$\lim_{t\to-\infty} U(t) = I. \tag{4-50}$$

在正则量子化中,我们处理算符 $A(t)$ 和 $\pi(t)$, $A(t)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}A(t,\mathbf{x}) = i[H(t), A(t,\mathbf{x})]. \tag{4-51}$$

对于 $\pi(t)$ 有类似的方程. 这里 $H(t) = H[A(t), \pi(t), j(t)]$ 表示哈密顿量. 与此类似, in 场 $A_{\text{in}}$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) = i[H_0^{\text{in}}, A_{\text{in}}(t, \mathbf{x})],$$

其中 $H_0^{\text{in}}$ 是用 in 产生算符和 in 湮灭算符表示的与时间无关的自由的哈密顿量 [参看式 (3-120)]. 现在我们来推导算符 $U(t)$ 的时间演化方程. 么正性要求

$$\left[\frac{d}{dt} U(t)\right] U^{-1}(t) + U(t) \frac{d}{dt} U^{-1}(t) = 0.$$

此外,从式(4-49)推得

$$U(t)H(A(t), \pi(t), j(t))U^{-1}(t) = H(A_{\text{in}}(t), \pi_{\text{in}}(t), j(t)),$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} A_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} [U(t)A(t, \mathbf{x})U^{-1}(t)] \\
&= \frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t)A_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) + iU(t)[H(A(t), \\
&\qquad \pi(t), j(t)), A(t, \mathbf{x})]U^{-1}(t) \\
&\quad + A_{\text{in}}(t, \mathbf{x})U(t) \frac{d}{dt} U^{-1}(t) \\
&= \left[\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + iH(A_{\text{in}}(t), \right. \\
&\qquad \left. \pi_{\text{in}}(t), j(t)), A_{\text{in}}(t, \mathbf{x})\right] \\
&= i[H_0^{\text{in}}, A_{\text{in}}(t, \mathbf{x})].
\end{aligned}$$

对 $\pi_{\text{in}}$ 有类似的方程. 我们得到结论,算符

$$\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) + i[H(A_{\text{in}}(t), \pi_{\text{in}}(t), j(t)) - H_0^{\text{in}}]$$

和每个"in"算符对易,因此它是一个 $c$ 数. 这个数对 $U$ 的归一化矩阵元没有贡献(这一点将在后面证明),因此以后我们将丢掉这种项. 于是,$U$ 满足演化方程

$$i\frac{dU}{dt} = [H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t)) - H_0^{in}]U$$

$$\equiv H_{int}(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j(t))U \equiv H_I(t)U. \quad (4-52)$$

在我们的情况下，$H_0^{in} = H(A_{in}(t), \pi_{in}(t), j)|_{j=0}$，并且相互作用哈密顿量 $H_I(t)$ 和 $j$ 一起趋于零. 因此，由算符 $U(t)$ 支配的演化被称为相互作用表象. 我们注意到，$H_I(t)$ 对时间的依赖既来自通过 $j(t)$ 对时间的依赖，又来自通过 $A_{in}(t)$ 和 $\pi_{in}(t)$ 对时间的依赖. 用相应的积分方程

$$U(t) = I - i\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)U(t_1) \quad (4-53)$$

的迭代可以求解方程(4-52)，其中已经考虑了边界条件式(4-50)，其结果是

$$\begin{aligned} U(t) = I &- i\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \\ &\times \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \cdots \\ &+ (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \\ &\times dt_n H_I(t_1)\cdots H_I(t_n) + \cdots. \end{aligned} \quad (4-54)$$

在这些表达式中，算符的次序是重要的，这和它们的时间变数的次序有关. $n$ 个算符编时乘积(简称 $T$ 乘积)的一般的定义是

$$T[A_1(t_1)\cdots A_n(t_n)] = \sum_P \theta(t_{P_1}, t_{P_2}, \cdots, t_{P_n}) \times \varepsilon_P A_{P_1}(t_{P_1})\cdots A_{P_n}(t_{P_n}), \quad (4-55)$$

其中求和取遍所有的置换 $P$，$\theta$ 函数实施条件

$$t_P \geqslant t_{P_2} \geqslant \cdots \geqslant t_{P_n},$$

$\varepsilon_P$ 表示在这个乘积中所包含的费米子算符置换的符号差(后面这一点目前没有用，但不久将对我们有用). 这里，$T$ 乘积是对称的，我们可以写出

$$U(t) = \sum_0^\infty (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \times \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n T[H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \cdots \times \int_{-\infty}^{t} dt_n T[H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)]$$

$$= T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{t} dt' H_I(t')\right]. \qquad (4\text{-}56)$$

最后一个表达式是记号性的，它的含意由上一行给出。可是，指数的$T$乘积具有一种很容易被证明的重要性质。对于 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$，

$$T\exp\int_{t_1}^{t_3} dt0(t) = T\exp\int_{t_2}^{t_3} dt0(t) T \times \exp\int_{t_1}^{t_2} dt0(t).$$

如果当 $t \to -\infty$ 时 $H_I(t) \to 0$，式(4-56)的算符 $U(t)$ 就满足要求式(4-50)。如果在遥远的过去流被绝热地撤除，这正是在我们的情况下所发生的。$S$ 矩阵被定义为极限形式：

$$S = \lim_{t\to+\infty} U(t) = T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t')\right]. \qquad (4\text{-}57)$$

在目前的情况下，$H_I = \int j(x)\cdot A_{\text{in}}(x) d^3x$，于是我们得到

$$S = T\exp\left[-i\int d^4x j_\mu(x) A^\mu_{\text{in}}(x)\right]. \qquad (4\text{-}58)$$

在这个表达式中，符号$T$只包含与确定的时间坐标的联系。这看起来好象是非协变的，但由于定域对易性，如果 $(x-y)^2 < 0$，则密度 $\mathscr{H}_I(x) \equiv j^\mu(x)A_\mu(x)$ 和 $\mathscr{H}_I(y)$ 对易。因此，参考系的改变并不会修改$T$乘积的表达式。在所有不包含微

商耦合的理论中，我们有

$$H_I(t) = \int d^3x \mathscr{H}_I(x) = -\int d^3x \mathscr{L}_I(x), \quad (4\text{-}59)$$

其中不言而喻，$x^0$ 表示 $t$，所有的算符是 in 算符．最后，$S$ 矩阵的一般"协变的"表达式为

$$S = T\exp\left[i\int d^4x \mathscr{L}_I(x)\right]. \quad (4\text{-}60)$$

引号使人们回忆起我们上述有关定域性的论证，并不排除当二个自变量重合时的小距离——先验的非协变奇异性的出现．这些奇异性的处理是重整化理论的主题．

我们来将一般的表达式[式(4-58),(4-60)]和我们以前的结果式(4-13)进行比较．为了使二个量一致，差别应当只是不可观测的相位．我们将利用具有 $c$ 数对易子的自由场的性质来证明这一点．在这里我们给出一个简单的启发式的证明，并让读者作进一步的推敲．在任何情况下，这种性质与重要的 Wick 定理有关，这个定理将被详细地加以考虑．将 $S$ 矩阵写成极限形式

$$S = \lim_{\substack{t_i\to-\infty \\ t_f\to+\infty}} T\exp\left[-i\int_{t_i}^{t_f} dt H_I(t)\right].$$

把间隔 $t_f - t_i$ 分成 $N$ 等分 $\Delta t = (t_f - t_i)/N$，并用 $t_k = t_i + [(2k-1)/2]\Delta t (k = 1, \cdots, N)$ 表示每个等分的中点．当 $N$ 趋于很大时，$T$ 乘积可以近似地表示成

$$T\exp\left[-i\int_{t_i}^{t_f} dt H_I(t)\right] = e^{-i\Delta t H_I(t_N)} e^{-i\Delta t H_I(t_{N-1})} \cdots \cdot e^{-i\Delta t H_I(t_1)}.$$

因为对易子 $[H_I(t), H_I(t')]$ 是一个 $c$ 数，利用恒等式(4-15)，可以把这个乘积改写为

$$\exp\left\{-i\Delta t\sum_1^N H_I(t_k) - \frac{1}{2}\Delta t^2 \sum_{1\le k<l\le N} [H_I(t_k), H_I(t_l)]\right\}.$$

让$N$趋于无穷大，然后取极限 $t_i \to -\infty$，$t_f \to \infty$，我们得到

$$S = \exp\left[-i\int d^4x A_{\text{in}}(x)\cdot j(x)\right]$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y \theta(x^0-y^0)\right.$$
$$\left.\times [A_{\text{in}}(x)\cdot j(x), A_{\text{in}}(y)\cdot j(y)]\right\}. \quad (4\text{-}61)$$

算符 $A_{\text{in}}(x)\cdot j(x)$ 和 $A_{\text{in}}(y)\cdot j(y)$ 是厄米的自由场，因此它们的对易子是一个虚的 $c$ 数。的确，我们知道推迟对易子的表达式[式(1-169)和(1-170)]：

$$\theta(x^0-y^0)[A^\mu_{\text{in}}(x), A^\nu_{\text{in}}(y)]$$
$$= ig^{\mu\nu}\theta(x^0-y^0)G^{(-)}(x-y) = ig^{\mu\nu}G_{\text{ret}}(x-y),$$

其中

$$G_{\text{ret}}(x-y) = -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{(k_0+i\varepsilon)^2-\mathbf{k}^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\theta(x^0-y^0)\delta[(x-y)^2].$$

最后得到

$$S = \exp\left[-i\int d^4x A_{\text{in}}(x)\cdot j(x)\right]$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\iint d^4x d^4y j^\mu(x)G_{\text{ret}}(x-y)j_\mu(y)\right]. \quad (4\text{-}62)$$

象式(4-16)那样，我们可以把这个表达式写成正规形式：

$$S = :\exp\left[-i\int d^4x A_{\text{in}}(x)\cdot j(x)\right]:$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x d^4y j_\mu(x)\{[A^{(-)\mu}_{\text{in}}(x), A^{(+)\nu}_{\text{in}}(y)]\right.$$
$$\left.-\theta(x^0-y^0)[A^\mu_{\text{in}}(x), A^\nu_{\text{in}}(y)]\}j_\nu(y)\right).$$

在第二个指数中的大括号内的量是一个 $c$ 数，因此等于它的

真空平均值(在态$|0_{in}\rangle$中)。为简单起见，我们忽略下标"in"，并写成

$$\begin{aligned}
&\langle 0|[A^{(-)\mu}(x), A^{(+)\nu}(y)] - \theta(x^0-y^0)[A^\mu(x), A^\nu(y)]|0\rangle \\
&= -\langle 0|A^\nu(y)A^\mu(x) + \theta(x^0-y^0)[A^\mu(x), A^\nu(y)]|0\rangle \\
&= -\langle 0|\theta(x^0-y^0)A^\mu(x)A^\nu(y) + \theta(y^0-x^0)A^\nu(y)A^\mu(x)|0\rangle \\
&= -\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle \\
&= ig^{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}.
\end{aligned}$$

总而言之，$S$ 矩阵的正规形式为

$$\begin{aligned}
S = {} & :\exp\left[-i\int d^4x A_{in}(x)\cdot j(x)\right]: \\
& \times\exp\left[-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y\langle 0_{in}|TA_{in}(x)\right. \\
& \left.\cdot j(x)A_{in}(y)\cdot j(y)|0_{in}\rangle\right]. \qquad (4\text{-}63)
\end{aligned}$$

我们再一次强调指出，这个结果和式(4-16)给出的表示式只相差一个不可测量的相位。

## 4-2 Wick 定理

在这一节中我们来研究一种代数运算，它使我们可以把在相互作用表象中出现的那种算符的 $T$ 乘积，重新排列成一种正规乘积的形式，以便更方便地在 Fock 空间中对矩阵元进行实际的计算。下面的讨论中，所有的场都是自由场。

### 4-2-1 Bose 场

我们刚才已对无质量矢量场推导出等式

$$T\exp\left[-i\int d^4x A(x)\cdot j(x)\right]$$

$$= :\exp\left[-i\int d^4x A(x)\cdot j(x)\right]:$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y\langle 0|TA(x)\right.$$
$$\left.\cdot j(x)A(y)\cdot j(y)|0\rangle\right]. \qquad (4\text{-}64)$$

这个结果既不依赖于场的矢量性质，也不依赖于场的无质量性质．这个公式对任何玻色场都成立.所以，我们就不特别注明处理的是标量场还是矢量场、张量场等等，并且在以后略去所有的 Lorentz 指标．方程(4-64)可以看作是一组称为 Wick 定理的等式的生成函数． 将它的指数展开，并在对 $x_1\cdots x_n$ 进行对称化后，使 $j(x_1)\cdots j(x_n)$ 项的系数相等(因为最后要对这个乘积和它的系数在 $x_1\cdots x_n$ 上进行积分)， 我们就得到

$$T[A(x_1)A(x_2)] = :A(x_1)A(x_2): + \langle 0|TA(x_1)A(x_2)|0\rangle,$$
$$T[A(x_1)A(x_2)A(x_3)] = :A(x_1)A(x_2)A(x_3):$$
$$+ :A(x_1):\langle 0|TA(x_2)A(x_3)|0\rangle$$
$$+ :A(x_2):\langle 0|TA(x_1)A(x_3)|0\rangle$$
$$+ :A(x_3):\langle 0|TA(x_1)A(x_2)|0\rangle,$$
$$T[A(x_1)\cdots A(x_n)] = :A(x_1)\cdots A(x_n):$$
$$+\sum_{k<l}:A(x_1)\cdots\widehat{A(x_k)}\cdots\widehat{A(x_l)}\cdots$$
$$A(x_n):\langle 0|TA(x_k)A(x_l)|0\rangle + \cdots$$
$$+\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{2p}}:A(x_1)\cdots\widehat{A(x_{k_1})}\cdots$$
$$\times\widehat{A(x_{k_{2p}})}\cdots\cdots A(x_n):$$
$$\times\sum_P\langle 0|T[A(x_{k_{p_1}})A(x_{k_{p_2}})]|0\rangle\cdots$$
$$\times\langle 0|T[A(x_{k_{p_{2p-1}}})A(x_{k_{p_{2p}}})]|0\rangle. \qquad (4\text{-}65)$$

这些公式中的一些项上的脱字符号(∧)表示此因子应从乘积中去掉，求和 $\Sigma_p$ 取遍所有的、得到不同表示式的置换．用文字来说就是方程(4-65)把 $T$ 乘积表示成所有可能的正规乘积之和，其中某几对场量被去掉了而代之以它们的收缩，即它们的 $T$ 乘积的真空平均值．

直接证明等式(4-65)是一个很好的练习．用归纳法很易证明．我们还要读者自己来确证可以把它们推广到不同场的 $T$ 乘积 $TA_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$ 上．还可进一步推广到形为

$$T:[A(x_1)\cdots A(x_k)]:\cdots:[A(x_l)\cdots A(x_n)]:$$

的表示式上，其中限制在只有不同正规乘积之间才有收缩．为了用正规乘积来表示普通乘积 $A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$，我们可以写出类似于式(4-65)那样的等式．唯一的改变是这时的收缩表示普通乘积的真空平均值，

$$\begin{aligned}A_1(x_1)\cdots A_n(x_n) = \sum_p :A_1(x_1)\cdots\widehat{A_{k_1}(x_{k_1})}\cdots \\ \widehat{A_{k_{2p}}(x_{k_{2p}})}\cdots A_n(x_n):\\ \times\{\langle 0|A_{k_1}(x_{k_1})A_{k_2}(x_{k_2})|0\rangle\cdots\\ \times\langle 0|A_{k_{2p-1}}(x_{k_{2p-1}})A_{k_{2p}}(x_{k_{2p}})|0\rangle + \text{置换项}\}.\end{aligned}$$

最后，类似的等式还把 $T$ 乘积和普通乘积联系起来．这时，收缩表示为推迟 Green 函数，例如

$$TA(x)A(y) = A(x)A(y) + \theta(y^0 - x^0)[A(y), A(x)].$$

从方程(4-65)得到

$$\langle 0|T[A(x_1)\cdots A(x_{2p-1})]|0\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\langle 0|T[A(x_1)\cdots A(x_{2p})]|0\rangle \\ = \sum_p \langle 0|TA(x_{p_1})A(x_{p_2})|0\rangle\cdots\\ \times\langle 0|TA(x_{p_{2p-1}})A(x_{p_{2p}})|0\rangle.\end{aligned}\qquad (4\text{-}66)$$

右端的对称形式被 Caianiello 称为“哈芬函数”(haffnian)．利

用式(4-66)，可将方程(4-65)改写成比较简便的形式

$$TA(x_1)\cdots A(x_n)=\sum_{p=0}^{[n/2]}\sum_{k_1<\cdots<k_{2p}}:A(x_1)\cdots \times \widehat{A(x_{k_1})}\cdots\widehat{A(x_{k_{2p}})}\cdots A(x_n):\times\langle 0|T[A(x_{k_1})\cdots A(x_{k_{2p}})]|0\rangle. \tag{4-67}$$

### 4-2-2 Fermi 场

当有 Fermi 场时，方程(4-65)中唯一的改变是符号。象 Bose 场的情况一样，我们要推导出一个把 $T$ 乘积的和正规乘积的生成函数联系起来的等式。对玻色子场，推导是在等式(4-15)的基础上进行的。为了只用到对易子，当有费米子场时，我们对 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 引进反对易源 $\bar{\eta}$ 和 $\eta$。这两个量之间是反对易的，也和 $\psi$ 及 $\bar{\psi}$ 反对易。我们认为它们纯粹是一个数学上的量(它们是 Grassmann 代数(即反对易代数)的元素)。用它们可写出等式

$$[\bar{\eta}(x)\psi(x),\bar{\psi}(y)\eta(y)]=\bar{\eta}(x)\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}\eta(y). \tag{4-68}$$

所有其它的 $\bar{\eta}\psi$，$\bar{\psi}\eta$ 的对易子都为零。现在引进一个虚构的相互作用拉氏函数

$$\mathscr{L}_I(x)=\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x), \tag{4-69}$$

和相应的 $S$ 矩阵

$$S=T\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)]. \tag{4-70}$$

因为对易子 $[\mathscr{L}_I(x),\mathscr{L}_I(y)]$ 和 $\mathscr{L}_I(z)$对易，所以可以再应用我们所喜欢用的等式(4-15)而得到

$$T\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)]=\exp\left\{i\int d^4x(\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x))\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y\theta(x^0-y^0)[\bar{\eta}(x)\phi(x)\right.$$

$$\left.+\phi(x)\eta(x),\bar{\eta}(y)\phi(y)+\phi(y)\eta(y)]\right\}. \quad (4\text{-}71)$$

同样，可以把 $\eta\phi+\phi\eta$ 分解为湮灭的正频部分(上标+)，和产生部分(上标−)之和，并写成

$$\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\phi(x)\eta(x)]$$

$$=\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\phi^{(-)}(x)+\phi^{(-)}(x)\eta(x)]$$

$$\times\exp i\int d^4x[\eta(x)\phi^{(+)}(x)+\phi^{(+)}(x)\eta(x)]$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\iint d^4xd^4y[\eta(x)\phi^{(-)}(x)+\phi^{(-)}\right.$$

$$\left.\times(x)\eta(x),\eta(y)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(+)}(y)\eta(y)]\right\}. \quad (4\text{-}72)$$

象上面一样，我们将 $c$ 数

$$\int d^4xd^4y\{\theta(x^0-y^0)[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\phi(x)\eta(x)$$

$$\times\eta(y)\phi(y)+\phi(y)\eta(y)]-[\eta(x)\phi^{(-)}(x)$$

$$+\phi^{(-)}(x)\bar{\eta}(x),\bar{\eta}(y)\phi^{(+)}(y)+\phi^{(+)}(y)\eta(y)]\}$$

代以它的真空平均值，即

$$\langle 0|\iint d^4xd^4y\{\theta(x^0-y^0)[\mathscr{L}_I(x),\mathscr{L}_I(y)]$$

$$+\mathscr{L}_I(y)\mathscr{L}_I(x)\}|0\rangle$$

$$=\langle 0|\iint d^4xd^4yT[\mathscr{L}_I(x)\mathscr{L}_I(y)]|0\rangle.$$

由于 $\eta$ 是反对易的，所以此式正是

$$\iint d^4xd^4y[\eta_\alpha(x)\langle 0|\theta(x^0-y^0)\phi_\alpha(x)\phi_\beta(y)$$

$$-\theta(y^0-x^0)\phi_\beta(y)\phi_\alpha(x)|0\rangle\eta_\beta(y)$$

$$+\eta_\alpha(x)\langle 0|\theta(x^0-y^0)\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(y)$$
$$-\theta(y^0-x^0)\bar{\phi}_\beta(y)\phi_\alpha(x)|0\rangle\bar{\eta}_\beta(y)].$$

注意，其它的 $\phi\phi$ 或 $\bar{\phi}\bar{\phi}$ 的项都不出现于积分中．我们看到，Fermi 场的 $T$ 乘积的定义[见方程(3-173)或(4-55)]为：

$$\iint d^4x d^4y[\bar{\eta}_\alpha(x)\langle 0|T\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(y)|0\rangle\eta_\beta(y)$$
$$+\eta_\alpha(x)\langle 0|T\bar{\phi}_\alpha(x)\phi_\beta(y)|0\rangle\bar{\eta}_\beta(y)].$$

在积分号下交换变量 $x$ 和 $y$ 后，两项给出同样的结果．最后我们得到

$$T\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\bar{\phi}(x)\eta(x)]$$
$$=:\exp i\int d^4x[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\bar{\phi}(x)\eta(x)]:$$
$$\times\exp\left[-\iint d^4xd^4y\bar{\eta}(x)\langle 0|T\phi(x)\bar{\phi}(y)\right.$$
$$\left.\times|0\rangle\eta(y)\right].\qquad(4\text{-}73)$$

它和相应的 Bose 场的公式(4-64)只差在最后一个指数前没有 1/2 因子．这是因为是费米子荷的缘故．如果从一个带电的非厄米 Bose 场 $A$ 出发，就有 $\mathscr{L}_I(x)=[A^*(x)j(x)+j^*(x)A(x)]$，并且在指数 $\langle 0|\iint d^4xd^4yT[\mathscr{L}_I(x)\mathscr{L}_I(y)]|0\rangle$ 中得到两项相等的贡献，于是也没有因子 $\frac{1}{2}$．当将式(4-73)展开，并考虑了 $\eta$，$\bar{\eta}$ 的反对易性后，就得到了编时乘积和正规乘积之间的明显的关系．例如，计算场量的二级项时，我们得到

$$\frac{1}{2}\iint d^4xd^4yT[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\bar{\phi}(x)\eta(x)]$$
$$\times[\bar{\eta}(y)\phi(y)+\bar{\phi}(y)\eta(y)]$$

$$= \frac{1}{2}\iint d^4x d^4y :[\bar{\eta}(x)\phi(x) + \phi(x)\eta(x)]$$
$$\times [\bar{\eta}(y)\phi(y) + \phi(y)\eta(y)]:$$
$$+ \iint d^4x d^4y \bar{\eta}(x)\langle 0|T[\phi(x)\bar{\phi}(y)]|0\rangle\eta(y),$$

以及下面的等式

$$\begin{aligned} T\phi(x)\phi(y) &= :\phi(x)\phi(y):, \\ T\bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y) &= :\bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y):, \\ T\phi(x)\bar{\phi}(y) &= :\phi(x)\bar{\phi}(y): \\ &\quad + \langle 0|T\phi(x)\bar{\phi}(y)|0\rangle, \\ T\bar{\phi}(x)\phi(y) &= :\bar{\phi}(x)\phi(y): \\ &\quad + \langle 0|T\bar{\phi}(x)\phi(y)|0\rangle. \end{aligned} \tag{4-74}$$

注意，最后两个等式是等价的，因为

$$T[\phi_\xi(x)\bar{\phi}_\eta(y)] = -T[\bar{\phi}_\eta(y)\phi_\xi(x)]$$

($\xi$ 和 $\eta$ 是旋量指标)。为了紧凑起见，将时空坐标、Dirac 指标和区分 $\phi_\alpha(x)$ 及 $\bar{\phi}_\alpha(x)$ 的分立指标都包括在 $\phi$ 的宗量中是方便的。在此约定下，Fermi 场的 Wick 定理的一般表示式就写为

$$\begin{aligned} T[\phi(1)\cdots\phi(n)] = \sum_{p=0}^{[n/2]} \sum_P \sigma_P :&\phi(1)\cdots \\ &\times \widehat{\phi(k_1)}\cdots\widehat{\phi(k_{2p})}\cdots\phi(n): \\ &\times \langle 0|T\phi(k_{P_1})\phi(k_{P_2})|0\rangle\cdots \\ &\times \langle 0|T\phi(k_{P_{2p-1}})\phi(k_{P_{2p}})|0\rangle. \end{aligned} \tag{4-75}$$

求和是对所有不同的收缩进行的，$\sigma_P = \pm 1$ 表征了从 $\{1, \cdots, n\}$ 变到 $\{1, \cdots, \hat{k}_1, \cdots, \hat{k}_{2p}, \cdots, n, k_{P_1}, \cdots, k_{P_{2p}}\}$ 的置换性质。我们用四个场量的 $T$ 乘积来解释这条规则：

$$T\{\phi(1)\phi(2)\phi(3)\phi(4)\} = :\phi(1)\phi(2)\phi(3)\phi(4):$$

$$
\begin{aligned}
&+ :\phi(1)\phi(2):\langle 0|T\phi(3)\phi(4)|0\rangle\\
&- :\phi(1)\phi(3):\langle 0|T\phi(2)\phi(4)|0\rangle\\
&+ :\phi(1)\phi(4):\langle 0|T\phi(2)\phi(3)|0\rangle\\
&+ :\phi(2)\phi(3):\langle 0|T\phi(1)\phi(4)|0\rangle\\
&- :\phi(2)\phi(4):\langle 0|T\phi(1)\phi(3)|0\rangle\\
&+ :\phi(3)\phi(4):\langle 0|T\phi(1)\phi(2)|0\rangle\\
&+ \langle 0|T\phi(1)\phi(2)|0\rangle\langle 0|T\phi(3)\phi(4)|0\rangle\\
&- \langle 0|T\phi(1)\phi(3)|0\rangle\langle 0|T\phi(2)\phi(4)|0\rangle\\
&+ \langle 0|T\phi(1)\phi(4)|0\rangle\langle 0|T\phi(2)\phi(3)|0\rangle.
\end{aligned}
$$

方程(4-75)可以特别写成真空平均值的形式

$$\langle 0|T\phi(1)\cdots\phi(2n-1)|0\rangle = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T\phi(1)\cdots\phi(2n)|0\rangle &= \sum_{\text{不同的项}} \varepsilon_P\langle 0|T\phi(P_1)\phi(P_2)|0\rangle\cdots\\
&\times\langle 0|T\phi(P_{2n-1})\phi(P_{2n})|0\rangle\\
&= \sum_{\text{各种置换}} \frac{1}{2^n n!}\varepsilon_P\langle 0|T\phi(P_1)\phi(P_2)|0\rangle\cdots\cdots\\
&\times\langle 0|T\phi(P_{2n-1})\phi(P_{2n})|0\rangle. \qquad (4\text{-}76)
\end{aligned}
$$

式(4-76)右端的表示式是泼法夫式(pfaffian)，即 $2n\times 2n$ 的反对称矩阵的行列式的平方根，此矩阵的一般元素为

$$\langle 0|T\phi(i)\phi(j)|0\rangle.$$

### 4-2-3 一般情况

在同时有费米子场和玻色子场的一般情况下，可以很容易地推出 Wick 定理的表示式。不同的费米子场反对易，不同的玻色子场对易，并假定玻色子场和费米子场对易(后面这一点只是一个约定)。我们决定象上面那样用一种紧凑的记法：$\phi$既表示玻色子场，也表示费米子场，但用一个分立的指标来区分这种性质。这时读者必定很清楚，如果把符号 $\sigma_p$ 理

解成只表征 Fermi 场的置换性质，那么公式(4-75)仍然是成立的。结果可直接从生成函数(4-73)得到，不管是什么场，此生成函数都有同样的形成。

在这一节中讨论的 Wick 定理和具有高斯权重的几个变量多项式的积分计算有密切的关系。在后面讨论泛函积分时将看到，这种类似不是偶然的。

## 4-3 量子 Dirac 场和经典势的作用

### 4-3-1 一般描述

在描述了上面这段代数之后，现在来讨论另外一种二次拉氏函数的情形，即有经典电磁场时的电子-正电子场的情形。电子-正电子对可能在此外场中产生。这是 4-1 节中讨论的问题的物理对应过程，而上一节中的反对易源产生或湮灭单个电子则是它的数学对应过程。

除了有象粒子对产生这种有趣的现象外，显然它没有相应的经典现象，这种研究也使我们看清了量子化场 $\psi$ 的 Dirac 方程

$$[i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/(x) - m]\psi(x) = 0 \qquad (4\text{-}77)$$

的作用。这里 $A^\mu(x)$是给定的 $c$ 数外场。此方程相应于下面的相互作用拉氏函数：

$$\mathscr{L}_I(x) = -\mathscr{H}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \qquad (4\text{-}78)$$

在 4-1-4 中得到相互作用表象及 $S$ 矩阵的所有步骤都可在此重复。结果得到表示式

$$S = T\exp\left[-ie\int d^4x\bar{\psi}_{\text{in}}(x)\gamma^\mu\psi_{\text{in}}(x)A_\mu(x)\right]. \qquad (4\text{-}79)$$

但是，现在把此表示式写成正规形式是很有价值的。这是因为相互作用拉氏函数是场量的二次式，而不是一次式，从而两

个流 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 的对易子不是 $c$ 数. 还要注意到我们不知道在任意外场 $A_\mu$ 中 Dirac 方程(4-77)的一般解.

尽管有这些困难，但我们还是可以按我们的意愿来运用 Wick 定理，所以可以找到问题的形式解. 我们集中来讨论没有粒子对发射的几率振幅

$$S_0(A) = \langle 0\text{in}|S|0\text{in}\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int dx_1 \cdots\cdots dx_n \langle 0|T[\bar{\psi}(x_1)$$

$$\times A(x_1)\psi(x_1)\cdots\bar{\psi}(x_n)A(x_n)\psi(x_n)]|0\rangle, \qquad (4\text{-}80)$$

这里指标"in"都略去了. 按照 Wick 定理，式(4-80)中的每一项都是形为

$$\langle 0|TA(x_k)\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)|0\rangle$$

的收缩的乘积之和.

对给定的 $x_k$ 和 $x_l$，引进 $4\times4$ 矩阵

$$C(\alpha_k, x_k; \alpha_l, x_l) = -ie\sum_{\alpha}\langle 0|T[A_{\alpha_k\alpha}(x_k)$$

$$\times\psi_\alpha(x_k)\bar{\psi}_{\alpha_l}(x_l)]|0\rangle. \qquad (4\text{-}81)$$

$S_0(A)$ 用 $c$ 来表示就成为

$$S_0(A) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1\cdots dx_n \sum_{P} \varepsilon_P$$

$$\times \sum_{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n} C(\alpha_1, x_1; \alpha_{P_1}, x_{P_1})\cdots$$

$$\times C(\alpha_n, x_n; \alpha_{P_n}, x_{P_n}). \qquad (4\text{-}82)$$

将分立指标 $\alpha_i$ 和连续变量 $x_i$ 放在同等地位上来考虑，并把它们放在一个 Dirac 记号 $|x,\alpha\rangle$中是很方便的. 这些矢量$|x,\alpha\rangle$的空间正是经典旋量的空间. 我们引进一般元素为

$$\langle x,\alpha|\Gamma|y,\beta\rangle = C(x,\alpha;\ y,\beta) \qquad (4\text{-}83)$$

的矩阵 $\Gamma$. 用这个矩阵记号，可以写出

$$S_0(A) = \mathrm{Det}(I - \Gamma) = \exp[\mathrm{Tr}\ln(I - \Gamma)]. \quad (4\text{-}84)$$

下面这些表示式实际上对任何有限维的矩阵 $\Gamma$ 都成立:

$$\begin{aligned}\det\ (I - \Gamma) &= \exp[\mathrm{tr}\ \ln\ (I - \Gamma)] \\ &= 1 \quad \sum_a \Gamma_{aa} + \frac{(-1)^2}{2}\sum_{a,b}(\Gamma_{aa}\Gamma_{bb} - \Gamma_{ab}\Gamma_{ba}) + \cdots \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{a_1\cdots a_n}\ \sum_{P\text{的置换}(1,\cdots,n)} \varepsilon_P \Gamma_{a_1 a_{P_1}}\cdots\Gamma_{a_n a_{P_n}} + \cdots, \end{aligned} \quad (4\text{-}85)$$

这是从行列式的 Cayley-Hamilton 公式得到的结果.

对有限的 $d$ 维矩阵，此展开在 $d$ 级处截止. $d$ 级项当然是 $(-1)^d \det\Gamma$. 此公式将行列式表示成反对称化的张量乘积的迹之和.对逆行列式有一个类似的公式

$$\begin{aligned}\det{}^{-1}(I - \Gamma) &= \exp[-\mathrm{tr}\ln(I - \Gamma)] \\ &= 1 + \sum_a \Gamma_{aa} + \frac{1}{2}\sum_{a,b}(\Gamma_{aa}\Gamma_{bb} + \Gamma_{ab}\Gamma_{ba}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\sum_{a_1\cdots a_n}\ \sum_{P\text{的置换}(1,\cdots,n)} \Gamma_{a_1 a_{P_1}}\cdots\Gamma_{a_n a_{P_n}} + \cdots, \end{aligned} \quad (4\text{-}86)$$

即是对称化的张量乘积的迹之和. 后面一个表示式和量子化玻色子场与外场的耦合问题有关.

在对 $\Gamma$ 的行为作适当的假定下，这些表示式可推广到在 Fredholm 理论框架中的无穷维矩阵的情况. 我们用了大写字母 Det 和 Tr，以表示这些运算还意味着对连续变量积分.在式(4-78)中应用正规乘积,相当于假定 $\Gamma_{aa} \equiv 0$，也就是相当于去掉式(4-85)中的 $\Sigma\Gamma_{aa}$ 项.

如第二章的最后一节那样,引进作用于态 $|x, \alpha\rangle$ 上的算符 $X_\mu$ 和 $P_\mu$ 是方便的:

$$X_\mu|x, \alpha\rangle = x_\mu|x, \alpha\rangle,$$

$$\langle x, \alpha|P_\mu|\varphi\rangle = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle x, \alpha|\varphi\rangle.$$

它们具有正则对易关系

$$[X_\mu, P_\nu] = -i\mathscr{G}_{\mu\nu}, \tag{4-87}$$

而 $P_\mu$ 的本征矢量 $|p\rangle$ 使

$$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^* = \frac{e^{ip\cdot x}}{(2\pi)^2}.$$

用这些矩阵记号以及 Dirac 传播子的表示式(3-174),我们得到

$$\Gamma = e\not{A}(x)\frac{1}{\not{P} - m + i\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} S_0(A) &= \mathrm{Det}\left[1 - e\not{A}(x)\frac{1}{\not{P} - m + i\varepsilon}\right] \\ &= \mathrm{Det}\left\{[\not{P} - e\not{A}(x) - m + i\varepsilon]\frac{1}{\not{P} - m + i\varepsilon}\right\} \\ &= \exp\left\{-\mathrm{Tr}\ln\left[(\not{P} - m)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times\frac{1}{\not{P} - e\not{A}(x) - m + i\varepsilon}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4-88}$$

最后一个表示式表示在外场 $A_\mu(x)$ 中的 Feynman 传播子。

检验下面的规范不变性是一个很好的练习。在规范变换

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Phi(x)$$

下,有

$$\not{P} - e\not{A}(x) - m \to \not{P} - e\not{A}(x) - e\not{\partial}\Phi(x) - m,$$

关系式(4-87)意味着有

$$e^{-ie\Phi(x)}[\not{P} - e\not{A}(x) - m]e^{ie\Phi(x)} = \not{P} - e\not{A}(x) - e\not{\partial}\Phi(x) - m.$$

于是,规范变换相当于在经典旋量空间中的幺正变换。它不影响行列式,所以保持 $S_0(A)$ 不变。

我们来考察一下 $S$ 矩阵的幺正性的结果。引进一个定义如下的单体散射算符 $\mathscr{T}(A)$ 是方便的:

$$\mathscr{T}(A) = eA(x) + eA(x)\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\mathscr{T}(A). \quad (4\text{-}89)$$

我们假定势 $A_\mu(x)$ 是实的. 对每一个在矢量 $|x,\alpha\rangle$ 空间上的算符 $B$,令

$$\bar{B} \equiv \gamma^0 B^+ \gamma^0,$$

其中厄米共轭作用于指标 $\alpha$ 和 $x$ 上. 这种运算改变了$\mathscr{T}(A)$中 $i\varepsilon$ 的符号:

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{T}}(A) &= eA(x) + eA(x)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}\bar{\mathscr{T}}(A)\\ &= eA(x) + \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}eA(x), \quad (4\text{-}90)\end{aligned}$$

于是

$$eA(x) = \bar{\mathscr{T}}(A) - \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}eA(x).$$

将此式代入式(4-89)中得到

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(A) &= eA(x) + \left[\bar{\mathscr{T}}(A) - \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}eA(x)\right]\\ &\quad \times \frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\mathscr{T}(A)\\ &= eA(x) + \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\mathscr{T}(A)\\ &\quad - \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}[\mathscr{T}(A) - eA(x)]\\ &= \bar{\mathscr{T}}(A)\left[\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}\right]\mathscr{T}(A)\\ &\quad + eA(x) + \bar{\mathscr{T}}(A)\frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}eA(x)\\ &= \bar{\mathscr{T}}(A)\left[\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not p - m - i\varepsilon}\right]\mathscr{T}(A)\\ &\quad + \bar{\mathscr{T}}(A),\end{aligned}$$

于是

$$\mathscr{T}(A)-\mathscr{T}(A)=\mathscr{T}(A)\left(\frac{1}{P-m+i\varepsilon}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{P-m-i\varepsilon}\right)\mathscr{T}(A)$$

$$=\mathscr{T}(A)\left(\frac{1}{P-m+i\varepsilon}-\frac{1}{P-m-i\varepsilon}\right)\mathscr{T}(A)$$

$$=\mathscr{T}(A)\left[\frac{2\pi}{i}(P+m)\delta(P^2-m^2)\right]\mathscr{T}(A). \quad (4\text{-}91)$$

算符 $2\pi(P+m)\delta(P^2-m^2)$ 可分解成在正能和负能态上的投影算符之和:

$$2\pi(P+m)\delta(P^2-m^2)=\rho^{(+)}+\rho^{(-)}$$

$$\rho^{(\pm)}(P)\equiv 2\pi(P+m)\theta(\pm P^0)\delta(P^2-m^2). \quad (4\text{-}92)$$

这些投影到质壳上的算符,将自然地在象 $|S_0(A)|^2$ 一类的物理量的计算中出现.

如果回到 $S_0(A)$ 的原来的式子(4-82),在右端的每一项都可以分解成一些如下的循环:

$$C(\alpha_1,x_1;\alpha_2,x_2)C(\alpha_2,x_2;\alpha_3,x_3)\cdots C(\alpha_k,x_k;\alpha_1,x_1).$$

如果用推迟传播子来代替 Feynman 传播子,则所有这些循环项都为零,这是因为推迟 Green 函数在未来光锥内有支集,于是循环项有空的支集. 如在第二章中写出的那样,推迟传播子形为

$$\frac{P+m}{(P+i\varepsilon)^2-m^2}=\frac{1}{P-m+i\not{\varepsilon}},$$

其中 $\varepsilon_\mu$ 是一个无穷小的、正定的类时四维矢量. 我们的结果为

$$\mathrm{Det}\left[1-eA(x)\frac{1}{P-m+i\not{\varepsilon}}\right]=i, \quad (4\text{-}93)$$

但

$$\frac{1}{\not P - m + i\not\varepsilon} = (\not P + m)\left[\mathrm{PP}\left(\frac{1}{P^2 - m^2}\right) - i\pi\varepsilon(P^0)\delta(P^2 - m^2)\right],$$

其中 PP 表示主值部分. 于是

$$\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not P - m + i\not\varepsilon} = -i\rho^{(-)},$$

所以

$$\begin{aligned}
1 &= \mathrm{Det}\left[I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\not\varepsilon}\right] \\
&= \mathrm{Det}\left[I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon} - ie\not A(x)\rho^{(-)}\right] \\
&= \mathrm{Det}\left\{I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - i\left[I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon}\right]\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}\right\} \\
&= \mathrm{Det}\left\{\left[I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon}\right]\right. \\
&\quad \left.\times[I - i\mathscr{T}(A)P^{(-)}]\right\} \\
&= \mathrm{Det}\left[I - e\not A(x)\frac{1}{\not P - m + i\varepsilon}\right] \\
&\quad \times \mathrm{Det}[I - i\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}]. \qquad (4\text{-}94)
\end{aligned}$$

从这些表示式和式(4-91)得到

$$\begin{aligned}
[S_0(A)]^{-1} &= \mathrm{Det}[I - i\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}], \\
[S_0(A)]^{-2} &= \mathrm{Det}\{[I - i\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}][I + i\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}]\} \\
&= \mathrm{Det}\{I + i[\mathscr{T}(A) - \mathscr{T}(A)]\rho^{(-)} \\
&\qquad + \mathscr{T}(A)\rho^{(-)}\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}\} \qquad (4\text{-}95) \\
&= \mathrm{Det}[I - \mathscr{T}(A)\rho^{(+)}\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}] \\
&= \exp\{\mathrm{Tr}\ln[I - \mathscr{T}(A)\rho^{(+)}\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}]\}.
\end{aligned}$$

令

$$|S_0(A)|^2 = \exp\left[-\int d^4x w(x)\right], \qquad (4\text{-}96)$$

其中

$$w(x) = \mathrm{tr}\langle x|\ln[I - \mathscr{T}(A)\rho^{(+)}\mathscr{T}(A)\rho^{(-)}]|x\rangle \qquad (4\text{-}97)$$

(现在求迹只对 Dirac 指标进行)，并把 $w(x)$ 解释成粒子对产生的几率密度. 如果把四维空间分成在各点 $x_i$ 处的、体积为 $\Delta x_i$ 的小网格，就可以近似地有

$$|S_0(A)|^2 \simeq \prod_i [1 - \Delta x_i w(x_i)],$$

这更证实了上面的解释. 每个网格都对发射几率给出独立的贡献. 这也可通过明确地计算发射一对、两对等等的几率而看出. 由于有投影算子 $\rho^{(\pm)}$，几率 $w(x)d^4x$ 是用粒子态和空穴态之间的质壳上的 $\mathscr{T}$ 矩阵元表示出来的. 用下面的方法引进一个约化算符 $t$ 就更清楚了. 利用在第二章中引进的归一化的正能和负能解 $u^{(a)}(p)$，$v^{(a)}(p)$，定义如下的质壳上的矩阵 $t$:

$$\langle \mathbf{p}a|t|\mathbf{p}'b\rangle = 2\pi \sum_{\alpha,\beta} \frac{m}{\omega_p^{1/2}\omega_{p'}^{1/2}} \bar{u}_\alpha^{(a)}(p)\langle p, \alpha|\mathscr{T}|p', \beta\rangle \times v_\beta^{(b)}(-p') \qquad (4\text{-}98)$$

其中 $\omega_p \equiv (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. 从投影算符的表示式

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(a)}(p)\bar{u}^{(a)}(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad \text{对 } p^0 > 0,$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(a)}(-p)\bar{v}^{(a)}(-p) = -\frac{\not{p} + m}{2m} \quad \text{对 } p^0 < 0,$$

我们就得到

$$W_{\mathrm{tot}} = \int d^4x w(x) = \int d^3p \,\mathrm{tr}\ln(1 + tt^+) \qquad (4\text{-}99)$$

这清楚地表明了 $W_{\mathrm{tot}}$ 的正定性. 我们现在以两个特殊的例

子来明确地计算这个几率.

### 4-3-2 精确到最低级的发射几率

把方程(4-97)中的对数和 $\mathscr{T}(A)$ 展开，我们可以得到一个按 $\alpha = e^2/4\pi$ 的幂次展开的$W$的表示式. 精确到最低级时有

$$W^{(1)} = -\mathrm{Tr}(eA\rho^{(+)}eA\rho^{(-)}). \tag{4-100}$$

令

$$\langle p|A_\mu(X)|p'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}a_\mu(p-p')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x A_\mu(x)e^{i(p-p')\cdot x}, \tag{4-101}$$

于是

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi}\int d^4q\delta^4(q-p_1-p_2)\int\frac{d^3p_1}{2\omega_1}$$

$$\times\frac{d^3p_2}{2\omega_2}\mathrm{tr}[(P_1+m)a(q)(P_2-m)a(-q). \tag{4-102}$$

如果 $q = p_1 + p_2$，我们就有

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,[(P_1+m)a(q)(P_2-m)a(-q)]$$

$$= \left[-\frac{q^2}{2}a(q)\cdot a(-q) + p_1\cdot a(q)P_2\cdot a(-q)\right.$$

$$\left. + p_1a(-q)p_2\cdot a(q)\right].$$

我们计算出积分 $[q^2 = (p_1+p_2)^2 \geqslant 4m^2]$:

$$I = \int\frac{d^3p_1}{\omega_1}\frac{d^3p_2}{\omega_2}\delta^4(q-p_1-p_2)$$

$$= 4\pi\int_{2m}^{\infty}p_1\frac{d\omega_1}{\omega_1}\delta(\sqrt{q^2}-2\omega_1)$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2}\theta\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right), \qquad (4\text{-}103a)$$

$$I^{\mu\nu} = \iint\frac{d^3p_1}{\omega_1}\frac{d^3p_2}{\omega_2}\delta^4(q-p_1-p_2)p_1^\mu p_2^\nu$$

$$= \frac{I}{12}\left[\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}(2q^2+4m^2)+g^{\mu\nu}(q^2-4m^2)\right]. \qquad (4\text{-}103b)$$

事实上 $I_{\mu\nu}$ 的一般形式为 $I_{\mu\nu}=I_1g_{\mu\nu}+I_2q_\mu q_\nu$，依次用 $q_\mu q_\nu$ 及 $g_{\mu\nu}$ 来缩并，就得到式(4-103b)．因此，给出 $W^{(1)}$ 为

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{3}\int\frac{d^4q}{q^2}\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2}\theta(q^0)$$

$$\times\theta\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right)(2q^2+4m^2)$$

$$\times\{q\cdot a(q)q\cdot a(-q)-q^2a(q)\cdot a(-q)\}. \qquad (4\text{-}104)$$

如果引进电磁场的 Fourier 变换

$$F_{\mu\nu}(q) = -i[q_\mu a_\nu(q)-q_\nu a_\mu(q)],$$

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(q)F^{\mu\nu}(-q) = |\mathbf{B}(q)|^2-|\mathbf{E}(q)|^2$$

$$= q^2a(q)\cdot a(-q)-q\cdot a(q)q\cdot a(-q),$$

这个结果就更明了了．最后，因为式(4-104)中的被积函数是偶的，我们可以忘掉限制 $q^0>2m$：

$$W^{(1)} = \frac{\alpha}{3}\int d^4q\theta(q^2-4m^2)[|\mathbf{E}(q)|^2-|\mathbf{B}(q)|^2]$$

$$\times\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{q^2}\right). \qquad (4\text{-}105)$$

这是场论的一个非平庸的结果，但它能够通过仔细的空穴理论的解释来得到．注意到对 $q^2>0$，存在一个 $\mathbf{q}=0$ 的坐标架，于是 $\mathbf{B}(q)=-i\mathbf{q}\times\mathbf{a}(q)$ 为零，这表示 $|\mathbf{E}(q)|^2-|\mathbf{B}(q)|^2\geqslant 0$，即粒子对产生是电效应．不过 $q^2>4m^2$ 的电磁模式不易为现代技术所产生．

我们还要引用相应的无自旋带电玻色子的粒子对产生几率，精确到最低级时有

$$W^{(1)}_{\text{bosons}} = \frac{\alpha}{12}\int d^4q\theta(q^2-4m^2)[|\mathbf{E}(q)|^2 - |\mathbf{B}(q)|^2]\left(1-\frac{4m^2}{q^2}\right)^{3/2}. \tag{4-106}$$

### 4-3-3 在恒定均匀电场中的粒子对产生

在恒定均匀场的情况下，可以推出一个精确的、非微扰的结果。回到方程(4-88)，并写成

$$\ln S_0(A) = \mathrm{Tr}\ln\left\{[P - eA(x) - m + i\varepsilon]\times\frac{1}{P-m+i\varepsilon}\right\}. \tag{4-107}$$

因为在算符的转置下其迹是不变的，并且因为电荷共轭矩阵 $C$ 满足

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T,$$

所以可以得到

$$\ln S_0(A) = \mathrm{Tr}\ln\left\{[P - eA(x) + m - i\varepsilon]\times\frac{1}{P+m-i\varepsilon}\right\}, \tag{4-108}$$

而式(4-107)及(4-108)之和为

$$2\ln S_0(A) = \mathrm{Tr}\ln\left(\{[P - eA(x)]^2 - m^2 + i\varepsilon\}\times\frac{1}{P^2-m^2+i\varepsilon}\right). \tag{4-109}$$

下面的有用等式

$$\ln\frac{a}{b} = \int_0^\infty\frac{ds}{s}\left(e^{is(b+i\varepsilon)} - e^{is(a+i\varepsilon)}\right), \tag{4-110}$$

使我们可以把所要的几率写成

$$w(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m^2-i\varepsilon)}\mathrm{tr}(\langle x|e^{is(P-eA(x))^2}|x\rangle - \langle x|e^{isP^2}|x\rangle)$$

$$= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m^2-i\varepsilon)} \times \langle x|\Big(\exp\Big\{is\Big[(P-eA(x))^2 + \frac{e}{2} \times \sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x)\Big]\Big\} - e^{isP^2}\Big)|x\rangle. \quad (4\text{-}111)$$

对恒定场，此几率与 $x$ 无关. 另外，$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 和所有其它的算符对易，我们可计算它的指数. 以后假定电磁场是纯电场(我们在上一节中已看到粒子对产生是电效应)，并且电场是沿 $z$ 轴的. 我们还选择这样一种规范，使得只有 $A^3(x) = -Et$ ($t \equiv x^0$) 不为零. 于是，

$$\mathrm{tr}\, e^{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2} = 4\cosh(seE). \quad (4\text{-}112)$$

再利用对易关系 $[X_0, P_0] = -i$，我们便得到

$$(P-eA)^2 - m^2 = P_0^2 - \mathbf{P}_T^2 - (P^3 + eEX^0)^2$$

$$= e^{-iP^0P^3/eE}(P_0^2 - \mathbf{P}_T^2 - e^2E^2X^{02})e^{iP^0P^3/eE}. \quad (4\text{-}113)$$

于是，

$$\mathrm{tr}\langle x|e^{is[(P-eA)^2+\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2]}|x\rangle$$

$$= 4\cosh(seE)\int\frac{d^3P}{(2\pi)^4}\,d\omega d\omega'\, e^{i(\omega'-\omega)(t+p^3/eE)-isp_T^2} \times\langle\omega|e^{is(P_0^2-e^2E^2X_0^2)}|\omega'\rangle$$

$$= \frac{2eE}{(2\pi)^2 is}\cosh(eEs)\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\langle\omega|e^{is(P_0^2-e^2E^2X_0^2)}|\omega\rangle. \quad (4\text{-}114)$$

最后一个积分可以看作具有纯虚数频率的简谐振子的演化算符的迹. 这是从对应 $P_0 \to P$, $-X_0 \to Q$, $2ieE \to \omega_0$, $\frac{1}{2} \to$

$m_0$，$P_0^2 - e^2E^2X_0^2 \to P^2/2m_0 + \frac{1}{2}m_0\omega_0^2Q^2$ 得来的结果。这样一个体系的能级是已知的，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \exp\left[is\left(\frac{P^2}{2m_0}+\frac{m_0\omega_0^2}{2}Q^2\right)\right]&\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[is\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0\right]&\\ =\frac{i}{2\sin s\omega_0/2},&\end{aligned}\tag{4-115}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\langle\omega|e^{is(P_0^2-e^2E^2X_0^2)}|\omega\rangle=\frac{1}{2\sinh(seE)}.\tag{4-116}$$

把所有这些项集中起来，就得到

$$\begin{aligned}W=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2}\left[eE\coth(eEs)-\frac{1}{s}\right]&\\ \times\mathrm{Re}(ie^{-is(m^2-i\varepsilon)}),&\end{aligned}\tag{4-117}$$

$1/s$ 这一项相应于式(4-111)在 $e=0$ 处作减除。我们必定注意到积分在两端是收敛的：$s\to\infty$ 时的红外收敛性是由 $m^2-i\varepsilon$ 的规定保证的，而 $s\to 0$ 时，$\mathrm{Re}(ie^{-ism^2})=\sin sm^2\simeq sm^2$，括弧中的量象 $s$ 一样趋向零，于是被积函数是有限的。式(4-117)中的积分可用留数方法来计算。首先变为在$(-\infty,+\infty)$上的积分，然后变成包围负虚轴的迴路，再取双曲余切函数的极点的贡献。这就得到了每单位体积和每单位时间中粒子对产生几率的最后表示式

$$w=\frac{\alpha E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right).\tag{4-118}$$

由于典型的$|eE|$比$m^2$小很多，所以在恒定场中的粒子对产生从来没有直接观察到过。例如，我们记得在氢原子的 Bohr 轨道上的电场 $E_{at}$ 是 $eE_{at}\sim m^2\alpha^3\sim 4\times 10^{-7}m^2$ 的数量级。

产生无自旋玻色子的类似表示式为

$$w_{\text{boson}} = \frac{\alpha E^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{|eE|}\right). \quad (4\text{-}119)$$

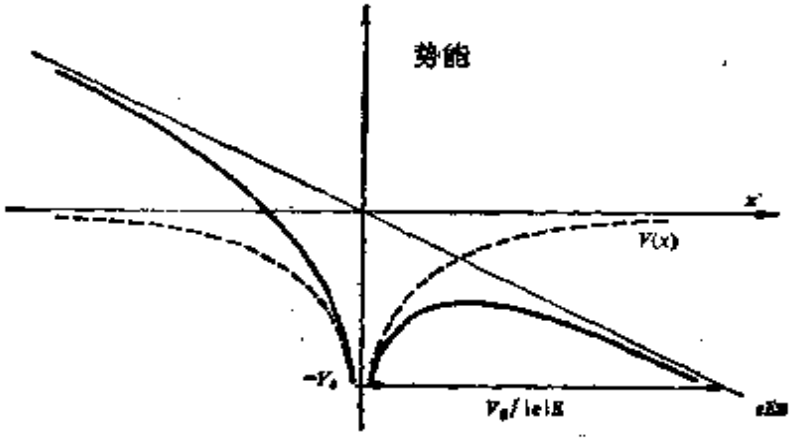



图 4-1　电子在束缚位势 $V(x)$（虚线）和电势 $eEx$ 下的位能（实线）

在此式中，实质性的因子 $\exp(-\pi m^2/|eE|)$ 是非微扰的。这使人想起穿过一个位垒的量子隧道现象。我们来实际考虑原子物理中一个被位阱束缚（图 4-1 中的虚线）、并受到一个外加电势 $eEx$ 作用的电子。最后的位势如图 4-1 中实线所示。在束缚能为 $-V_0$ 时，电离几率正比于

$$\exp\left\{-2\int_0^{V_0/|eE|} dx\sqrt{2m(V_0 - |eE|x)}\right\}$$
$$= \exp\left(-\frac{4}{3}\sqrt{2mV_0}\,\frac{V_0}{|eE|}\right).$$

如果考虑一个掉入位阱 $|V_0| \sim 2m$ 中的负能电子，就得到因子 $\exp$（一常数 $\times\, m^2/|eE|$），和精确的结果在定性上是一致的。

### 4-3-4　Euler-Heisenberg 等效拉氏函数

作为量子效应的一个结果，经典电磁场可以产生粒子对。

这意味着经典电磁场的动力学中包含着量子修正. 直到现在为止，我们只研究了吸收效应. 还存在一种色散效应. 我们把这些量子修正总结在一个等效的拉氏函数中:

$$\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L}_0 + \delta\mathscr{L},$$

其中

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2),$$
$$\delta\mathscr{L} \equiv \delta\mathscr{L}[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2]. \tag{4-120}$$

这里假定，至少对缓变场来说，修正 $\delta\mathscr{L}$ 是定域的，并已把它写成不变量 $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ 和 $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2$ 的函数. 我们知道，物质的平均极化性质是通过引进电感应矢量 $\mathbf{D}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 来表示的. 类似地，$\delta\mathscr{L}$ 的作用是为了考虑真空的极化性，即电磁场和电子-正电子场的真空涨落的作用. 振幅 $S_0(A)$ 将出现于所有的电磁效应的计算中，因为它表示了真空涨落的动力学. 于是我们期待 $\delta\mathscr{L}$ 由下式给出:

$$\langle 0|S|0\rangle = S_0(A) = \exp\left[i\int d^4x\,\delta\mathscr{L}(x)\right], \tag{4-121}$$

$\delta\mathscr{L}$ 的实部描写了色散效应，而它的虚部是吸收部分. 泛函 $\delta\mathscr{L}(A)$ 可能具有复杂的形式，但如果只处理低频情况，则只要考虑缓变场、甚至恒定场，并精确到最低级就够了. 于是，上一节的计算方法是适用的. 对纯电场，我们有

$$\delta\mathscr{L}(E) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\left[eE\coth(eEs) - \frac{1}{s}\right]e^{-ism^2}, \tag{4-122}$$

而在一般情况下

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}e^{-ism^2}\left[e^2ab\frac{\cosh(eas)\cos(ebs)}{\sinh(eas)\sin(ebs)}\right.$$

$$-\frac{1}{s^2}\Big], \qquad (4\text{-}123)$$

其中 $a^2-b^2=\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2$，$ab=\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$. 读者也可由在2-5-4节中给出的 Dirac 传播子表示式，用关系

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)}\int d^4x\delta\mathscr{L}=e\mathrm{tr}\langle x|\gamma_\mu\frac{i}{i\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/-m}|x\rangle$$

来推导出式(4-123).

和式(4-117)不同，式(4-123)中的积分有一个正比于 $a^2-b^2$ 的发散部分，这要用重整化来解决. 其思想是把 $\delta\mathscr{L}$ 写成

$$\delta\mathscr{L}=\frac{1}{2}C(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)+\delta\mathscr{L}_{\text{finite}},$$

其中 $C$ 是无穷大的数，再把式(4-120)中的 $\mathscr{L}_0$ 变成 $(1-C)\mathscr{L}_0$. 这种改变是不能检测的，因为按照假设，只有 $\mathscr{L}_0+\delta\mathscr{L}$ 才是可观察到的. 现在 $\mathscr{L}_0+\delta\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=(1-C)\frac{\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2}{2}+\delta\mathscr{L}$$

$$=\frac{\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2}{2}+\delta\mathscr{L}_{\text{finite}}, \qquad (4\text{-}124)$$

$\delta\mathscr{L}_{\text{finite}}$ 是从 $\delta\mathscr{L}$ 通过减去发散项而得来的. 当然，在减去中有某些任意性. 我们将在下一章中充分地讨论重整化运算和它的任意性.

$\delta\mathscr{L}$ 的吸收部分及其所有的导数在 $e=0$ 处都为零. 只有色散效应可用微扰论来计算. 例如，我们发现，将式(4-123)展开到 $\alpha$ 的第二级时有

$$\delta\mathscr{L}^{(4)}=\frac{2\alpha^2}{45m^4}[(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)^2+7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2], \qquad (4\text{-}125)$$

Euler-Heisenberg 等效拉氏函数式(4-123)及(4-124)，可用来讨论由量子修正引起的各种非线性效应.

## 注记

红外灾难的物理解释要追溯到 F. Bloch and A. Nordsieck 的工作，*Phys. Rev.*, Vol. 52, P. 54, 1937. 在微扰论范围内的完整的讨论发表在 D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, *Ann. Phys. (New York)*, Vol. 13, P. 379, 1961. 用相干态来证明量子和经典电磁学之间的联系，是在 R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, Vol. 131, P. 2766 (1963) 中首先完成的. 进一步的进展可以在，例如，"Quantum Optics and Electronics", edited by C. De Witt, A. Blandin, and. C. Cohen-Tannoudji, Les Houches, 1964, Gordon and Breach, New York (1965) 中找到.

相互作用表象的工作是在 F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, Vol. 75, P. 486 (1949) 中完成的，而 G. C. Wick 的原始工作在 *Phys. Rev.*, Vol. 80, P. 268, 1950 中给出.

电磁场的等效拉氏函数是从 W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Physik*, Vol. 98, P. 714 (1936) 中引出的，而在 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, Vol. 82, P. 664 (1951) 中进行了细致的研究，这些工作是 4-3 节的来源. 也可参考 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, Vol. 93, P. 615, and Vol. 94, P. 1362, 1954.

# 第五章　基本过程

我们通过 Lehmann, Symanzik 和 Zimmermann 的约化公式，来讨论截面的测量和 Green 函数所给出的场论的动力学内容之间的关系．接着讨论它对最低级电磁过程的基本应用．本章还描述了么正性和因果性的一般性质，并将其用于引进分波展开和色散关系．

## 5-1　$S$ 矩阵和渐近理论

在着手对跃迁振幅作微扰计算前，我们必须先完成运动学描述．在本章中，我们介绍一下一般的情况，这可使我们把这些计算和感兴趣的物理过程联系起来．

在实际中最主要的研究工具是粒子在各种靶上的散射．从宏观尺度上来看，相互作用时间是极短的，因此不必考虑在基本散射事件中怎样随时间细致地发展的问题．我们只能给出下面的图象．在碰撞前很久，分开的波包独立地和自由地演化．如已在第四章的特例中讨论过的那样，这一组人态构造了一个 Fock 空间，即与自由场联系的 in 空间．注意到下面这一点是很重要的：　这些 in 态必须精确地表示孤立粒子的单个的特征，如质量和电荷．换句话说，自作用效应必须被吸收到这些可测量的参量中去．然后，碰撞过程发生了，包括散射、新粒子的吸收或产生，它们要服从基本的守恒定律，即能量、动量、角动量、宇称、电荷共轭、内部对称等等守恒．在碰撞以后很久，自由波包分开了，表示一个出态．它们又

由自由粒子运动学和相应的自由场来描写. 按照量子力学假设,振幅

$$\langle b,\text{out}|a,\text{in}\rangle,$$

可使我们得到入态 $|a\rangle$ 随时间发展，并在 $|b\rangle$ 态中被测到的几率.

对一个接连的过程,可用入态来表示出态. 例如,当我们制备次级束时就是这种情况. 于是，在 in 和 out Fock 空间之间一定存在同构. 我们的目的是把上面的跃迁振幅和实际的测量联系起来. 换而言之，要建立 Fermi 黄金规则的相对论性约定,并给出截面的表示式.

### 5-1-1 截面

作为一个简单的情况，我们首先来观察两个不同的、无自旋粒子的散射. 入态是用在动量空间中的入射波包写出来的，

$$|i,\text{in}\rangle = \int \frac{d^3p_1}{2p_1^0(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{2p_2^0(2\pi)^3} f_1(p_1)f_2(p_2)|p_1,p_2,\text{in}\rangle. \quad (5\text{-}1)$$

与这些波包相联系的是具有相应质量的 Klein-Gordon 方程的正能解 $\tilde{f}(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} e^{-ip\cdot x}f(p), \quad (5\text{-}2)$$

以及流

$$i\int d^3x\tilde{f}^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\tilde{f}(x) = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}|f(p)|^2. \quad (5\text{-}3)$$

跃迁到末态 $|f,\text{out}\rangle$ 的几率为

$$W_{f\leftarrow i} = |\langle f,\text{out}|i,\text{in}\rangle|^2. \quad (5\text{-}4)$$

在没有外源时,平移不变性意味着如果能量和动量不守恒,则矩阵元为零. 另外，如在第四章中讨论过的那样，out 态和

in 态之间同构的假定意味着存在一个么正算符 $S$，通常称 $S$ 矩阵，它使

$$\langle f,\text{out}|i,\text{in}\rangle = \langle f,\text{in}|S|i,\text{in}\rangle. \tag{5-5}$$

为了使几率守恒，$S$ 必须是么正的。严格地讲，$S$ 按照式 (5-5) 把 out 态作用到 in 态上。不严谨的说法是，在 in 空间中取它的矩阵元，所以我们将去掉指标 in，除非有必要。我们将它分解为

$$S = I + iT, \tag{5-6}$$

其中 $T$ 包含了相互作用的信息。如果把末态理想化为平面波态，则可以按下述方式分出能动量守恒的 $\delta$ 函数，

$$\langle f|T|p_1,p_2\rangle = (2\pi)^4\delta^4(P_f - p_1 - p_2)\langle f|\mathscr{T}|p_1p_2\rangle, \tag{5-7}$$

所以约化算符 $\mathscr{T}$ 是作用于能量壳上的。当把分解式 (5-6) 代入矩阵元式 (5-5) 时，其中的 $I$ 只对向前散射有贡献，并表示不受相互作用影响的入射波包部分。在大部分实验中，我们只对偏转部分感兴趣。这说明，只保留跃迁振幅中的 $\mathscr{T}$ 的贡献是正确的，

$$\begin{aligned} W_{f\leftarrow i} = \int & d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2 d\tilde{p}'_1 d\tilde{p}'_2 f_1^*(p_1) f_2^*(p_2) f_1(p'_1) f_2(p'_2)(2\pi)^4 \\ & \times \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)(2\pi)^4\delta^4(P_f - p_1 - p_2) \\ & \times \langle f|\mathscr{T}|p_1,p_2\rangle^*\langle f|\mathscr{T}|p'_1,p'_2\rangle. \end{aligned} \tag{5-8}$$

如果末态不是一个严格定义的动量本征态，上面的公式必须明显地稍作推广。在大部分情况下，我们制取的初态粒子几乎都有确定的动量，它的宽度在 $\mathscr{T}$ 矩阵元的变量的尺度上来说是可忽略的。简单地说，$f_i(p_i)$ 在平均值 $\bar{p}_i$ 处有一个宽度为 $\Delta p_i$ 的峰，于是

$$\langle f|\mathscr{T}|p'_1p'_2\rangle \simeq \langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1,\bar{p}_2\rangle \simeq \langle f|\mathscr{T}|p_1p_2\rangle.$$

用此近似及积分表示

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')=\int d^4x\,e^{-ix\cdot(p_1'+p_2'-p_1-p_2)},$$

我们得到

$$W_{f\leftarrow i}=\int d^4x|\vec{f}_1(x)|^2|\vec{f}_2(x)|^2(2\pi)^4\delta^4$$
$$\times(P_f-\bar{p}_1-\bar{p}_2)|\langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1,\bar{p}_2\rangle|^2. \quad (5\text{-}9)$$

它可解释为每单位时间、单位体积中的跃迁几率

$$\frac{dW_{f\leftarrow i}}{dV\,dt}=|\vec{f}_1(x)|^2|\vec{f}_2(x)|^2(2\pi)^4\delta^4(P_f-\bar{p}_1-\bar{p}_2)$$
$$\times|\langle f|\mathscr{T}|\bar{p}_1,\bar{p}_2\rangle|^2. \quad (5\text{-}10)$$

现在 $\vec{f}_i(x)=e^{-i\bar{p}_i\cdot x}F_i(x)$，其中 $F_i(x)$ 是一个 $x$ 的缓变函数，它使得

$$i\vec{f}^*(x)\vec{\partial}_\mu\vec{f}(x)\simeq 2\bar{p}_\mu|\vec{f}(x)|^2. \quad (5\text{-}11)$$

为了具体化，我们假设粒子 1 是入射粒子，粒子 2 是在实验室系中静止的粒子．在靶中，每单位体积的粒子数是 $dn_2/dV=2\bar{p}_2^0|\vec{f}_2(x)|^2$，$\bar{p}_2^0=m_2$．入射通量是速度 $|\bar{\mathbf{p}}_1|/\bar{p}_1^0$ 乘密度 $2\bar{p}_1^0|\vec{f}_1(x)|^2$，等于 $2|\bar{\mathbf{p}}_1||\vec{f}_1(x)|^2$．

这就给方程 (5-10) 以这样的解释：$dW_{f\leftarrow i}/dV\,dt=$ 每单位时间、单位体积中从态 $|i\rangle$ 到态 $|f\rangle$ 的跃迁几率＝靶密度 $[2m_2|\vec{f}_2(x)|^2]\times$ 入射通量 $[2|\bar{\mathbf{p}}_1||\vec{f}_1(x)|^2]\times$ 截面 $d\sigma$：

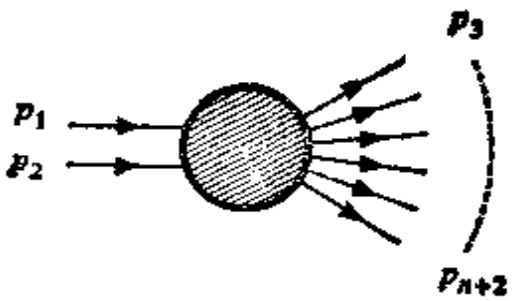



图 5-1　一般散射过程运动学

$$d\sigma_{n+2} = \frac{1}{4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2]^{1/2}} \int_\Delta d\tilde{p}_3\cdots d\tilde{p}_{n+2} \times |\langle p_3,\cdots,p_{n+2}|\mathscr{T}|p_1,p_2\rangle|^2(2\pi)^4\delta^4 \times (p_1+p_2-p_3-\cdots p_{n+2}), \tag{5-13}$$

这里注意到在实验室系中有

$$m_2|\mathbf{p}_1| = m_2[(p_1^0)^2 - m_1^2]^{1/2} = [(p_2\cdot p_1)^2 - m_1^2m_2^2]^{1/2}$$

后，我们已把因子 $m_2|\mathbf{p}_1|$ 用相对论不变量表示出来了。这样，截面就被定义成 Lorentz 不变量. 我们要提醒读者，对玻色子来说 $d\tilde{p}$ 是 Lorentz 不变的测度 $d\tilde{p} = d^3p/2p^0(2\pi)^3$。当然，这些公式是假定单粒子态是按

$$\langle p'|p\rangle = 2p^0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$$

来归一化的，即这些态是用正则产生算符从真空态产生出来的. 此归一化解释了用波函数 $f$ 来表示的通量密度.

当讨论有质量的费米子时，因子 $2p^0$ 要用 $p^0/m$ 来代替. 例如，如果两个碰撞的粒子是费米子，则式 (5-13) 前的因子 $\frac{1}{4}$ 就要代以 $m_1m_2$；如果费米子出现于末态中，则相空间元 $d\tilde{p}$ 就理解为 $(m/p^0)[d^3p/(2\pi)^3]$. 但是，如果在散射过程中包含的是无质量费米子，则保留玻色子相空间因子.

我们建议读者研究一下与式 (5-13) 不同的情况，即某些粒子是全同的和/或带着某种自旋的情况. 如果初态不是一个纯的态，而必须要

用极化密度矩阵来描写时，将会怎样？在这里，我们已给出了不变跃迁振幅$\mathcal{T}$和截面之间的关系．物理上另一件重要的事情是计算一个不稳定复合体系的衰变几率．将在 5-23 节讨论电子偶素时讨论这一问题．

### 5-1-2 渐近理论

研究碰撞的中心问题是计算质壳态之间的 $S$ 矩阵元．正如在上一章中研究量子场和外源耦合的行为时所看到的那样，拉氏形式的场论为我们提供了计算这个量的一种方法．定域动力学使我们能够极其详细地来考究这个 $S$ 算符，并用更基本的量，即基本 Green 函数，来表示它．为了使这种描述尽可能地保持简单，我们将在自相互作用标量场的情况中来论述它．将它推广到更复杂的，如电动力学的情况中去，只要多加一些运动学的讨论即可，不会影响论述的逻辑．这将留待以后来作．

我们来总结一下．态的 Fock 空间是从唯一的真空态，用表示为 $\varphi_{in}$ 的自由场来产生的．这是整个动力学过程的发生阶段．在最理想的情况下，物理上可观察的量都可用此唯一的自由场来表示．特别对相互作用场 $\varphi(x)$ 更是如此．我们直观地想象这两个场之间的关系如下．在遥远的过去，$\varphi_{in}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的适当的极限．这当然要涉及到某种所考虑的确定的过程，所以只当在碰撞过程中的基本碰撞体彼此完全分开时才适用．为了实现这种想法，可以假定运动方程中的耦合项受某种绝热截断函数的影响，此函数在有限的时间内等于 1，当 $|t| \to \infty$ 时，平滑地变为零．于是，必须在去掉绝热变换时的极限下来理解所有的物理量．绝热假设认为，在这些条件下有

$$x_0 \to -\infty \qquad \varphi(x) \to Z^{1/2}\varphi_{in}(x). \tag{5-14a}$$

这立即引起了两个问题．因子 $Z^{1/2}$ 的意义是什么？我们

期待这个极限在什么数学意义上成立？首先，式(5-14a)中的因子是由于场是由等时对易关系自然地归一而引起的，$\varphi_{in}$作用在真空态上只产生单粒子态，而$\varphi$还要产生有额外的粒子对的态(假定拉氏函数是$\varphi$的偶函数)．振幅$\langle 1|\varphi_{in}(x)|0\rangle$和$\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$有同样的对$x$的函数关系，这是由运动学所决定的．于是，归一化因子$Z^{1/2}$是考虑到状态$\varphi(x)|0\rangle$的内容不为矩阵元$\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$完全表述而加入的，如果用$\varphi_{in}$来代替$\varphi$，就是正确的了．这样，我们可直观地期望$Z^{1/2}$是0到1之间的一个数．

另外，在方程(5-14a)中的极限只能是一个弱极限，即分别对每一个矩阵元成立．如果不这样，则除了差一个$Z$以外，我们就会导致两个场$\varphi$的对易子等于相应的自由场的$c$数对易子．在此情况下，正则量子化要求$Z=1$，所以立即发现$\varphi$是自由场！这表明必须小心处理绝热条件．如下所述，Lehmann和Källen指出，常数$Z$可以和两个相互作用场的对易子的谱表示联系起来．我们来考虑此对易子的真空平均值．为简单起见，设场是厄米的．利用平移不变性得

$$\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle = \sum_{\alpha}[\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle e^{-ip_\alpha(x-y)} \times\langle\alpha|\varphi(0)|0\rangle - (x\longleftrightarrow y)], \tag{5-15}$$

其中求和取遍正能态$\alpha$的完全集合．为了将它和两个质量为$m$的自由场的对易子

$$i\Delta(x-y;m)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\varepsilon(q^0)\delta(q^2-m^2)e^{-iq\cdot(x-y)} \tag{5-16}$$

比较，在式(5-15)中插入等式

$$1=\int d^4q\delta^4(q-p_\alpha),$$

就得到

$$\langle 0|[\varphi(x),\varphi(y)]|0\rangle=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\rho(q)(e^{-iq\cdot(x-y)}-e^{iq\cdot(x-y)}).$$

这里，我们引进了密度

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_{\alpha} \delta^4(q - p_\alpha)|\langle 0|\varphi(0)|\alpha\rangle|^2,$$

它显然是正定的，并且当 $q$ 不在向前光锥内时为零. 另外，正如场 $\varphi$ 的相应的性质所要求的那样，它在 Lorentz 变换下是不变的. 于是，可写为

$$\rho(q) = \sigma(q^2)\theta(q^0), \quad \text{如果 } q^2 < 0 \text{ 则 } \sigma(q^2) = 0.$$

一般来说它是一个正定的测度，其中可能有 $\delta$ 函数奇异性. 最后，我们得到带有正权重的、自由对易子贡献的叠加 (Källen-Lehmann 表示)

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = i\int_0^\infty dm'^2\sigma(m'^2)\Delta(x - y; m'). \tag{5-17}$$

用同样的推理易见，对编时乘积的真空平均值有类似的结果，并有同样的谱函数 $\rho$.

用渐近条件，我们可以明显地分出式 (5-17) 中的单粒子态贡献，而写成

$$\langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = iZ\Delta(x - y; m) + i\int_{m_1^2}^\infty dm'^2\sigma(m'^2)\Delta(x - y; m'), \tag{5-18}$$

其中 $m$ 是粒子的质量，$m_1 > m$ 是多粒子阈. 如果相互作用拉氏函数中没有场量的导数，则 $\dot{\varphi}$ 与 $\varphi$ 共轭. 在式 (5-18) 两边取对时间的导数，并使 $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 的系数相等，我们发现正则量子化意味着

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^\infty dm'^2\sigma(m'^2), \tag{5-19}$$

$\sigma$ 的正定性正确地表示成

$$0 \leqslant Z < 1. \tag{5-20}$$

如果 $\varphi$ 的某个不同于 $\langle 1|\varphi(x)|0\rangle$ 和 $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ 的矩阵元不为零，则 $Z$ 不能等于 1. 显然，$Z = 1$ 要求 $\varphi = \varphi_{in}$.

从 Källen-Lehmann 表示很易知道不能在此强意义上理解渐近极限．我们还可验证，当 $|x^0-y^0|\to\infty$ 时，主要的贡献来自单粒子的贡献，其余的项被强烈振荡的因子所衰减．而且式(5-19)对密度 $\sigma(m^2)$ 加上了限制． 多粒子态使 $\sigma(m^2)$ 有一个扩展到无穷远的支集，所以有很强的破坏 $Z$ 的正定性的趋势

和遥远过去的渐近极限(5-14a)类似，我们还期待有

$$x_0\to+\infty \quad \varphi(x)\to Z^{1/2}\varphi_{\text{out}}(x), \tag{5-14b}$$

其中 $\varphi_{\text{out}}$ 又是一个具有和 $\varphi_{\text{in}}$ 同样质量 $m$ 和同样常数 $Z^{1/2}$ 的自由场．真空的唯一性表示 $|0,\text{in}\rangle=|0,\text{out}\rangle=|0\rangle$（可能的相对位相约定为 1）． 另外，我们假定单粒子态是稳定的．在这些条件下 $|1,\text{in}\rangle=|1,\text{out}\rangle$．因为 $\langle 0|\varphi(x)|1\rangle$ 对 $x$ 的依赖关系和相应的 $\varphi_{\text{in}}$ 或 $\varphi_{\text{out}}$ 的矩阵元对 $x$ 的依赖关系一样，$\varphi_{\text{in}}$ 和 $\varphi_{\text{out}}$ 的归一化是由它们的自由场特性所确定的，所以我们必须有

$$\langle 0|\varphi(x)|1\rangle=Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{\text{in}}(x)|1\rangle=Z^{1/2}\langle 0|\varphi_{\text{out}}(x)|1\rangle. \tag{5-21}$$

$S$ 矩阵导致 in 和 out 态之间同构．从方程(5-5)得到

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{in}}(x)&=S\varphi_{\text{out}}(x)S^{-1},\\ |i,\text{in}\rangle&=S|i,\text{out}\rangle,\\ \langle f,\text{in}|S|i,\text{in}\rangle&=\langle f,\text{out}|S|i,\text{out}\rangle,\end{aligned} \tag{5-22}$$

而且

$$\begin{aligned}\langle 0|S|0\rangle&=\langle 0|0\rangle=1,\\ \langle 1|S|1'\rangle&=\langle 1|1'\rangle,\end{aligned} \tag{5-23}$$

其中单粒子态上的指标略去了，于是我们解释了这些态的稳定性．

么正的 $S$ 矩阵必须和 Poincaré 变换对易，从而使理论具有协变性

$$U(a,\Lambda)SU^{-1}(a,\Lambda)=S. \tag{5-24}$$

如果我们象 Bogoliubov 和 Shirkov 那样允许拉氏函数中的耦合常数和时空有关，则我们还能表示出 $S$ 矩阵的意义深远的定域性。关于这方面的系统应用，我们为读者提出了一些教科书。

### 5-1-3 约化公式

这里我们要应用渐近条件 (5-14a, b) 将 $S$ 矩阵元和相互作用场的一般 Green 函数联系起来。考虑跃迁振幅 $\langle p_1, \cdots, \text{out} | q_1, \cdots, \text{in}\rangle$，这里为了简单起见略去了归一化所需要的平缓的尝试函数。为了约化此矩阵元，我们依次抽出用来构造初态或末态的 in 或 out 产生算符。按照定义有

$$\langle p_1, \cdots, \text{out} | q_1, \cdots, \text{in}\rangle = \langle p_1, \cdots, \text{out} | a^+_{\text{in}}(q_1) | q_2, \cdots, \text{in}\rangle$$
$$= \int_t d^3x e^{-iq_1\cdot x} \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \cdots, \text{out} | \varphi_{\text{in}}(x) | q_2, \cdots, \text{in}\rangle,$$

最后的积分是在任意时刻 $t$ 完成的。于是，我们选一个大的负值，使得可以用 $Z^{-1/2}\varphi$ 来代替 $\varphi_{\text{in}}$：

$$\langle p_1, \cdots, \text{out} | q_1, \cdots, \text{in}\rangle = \lim_{t\to-\infty} Z^{-1/2} \int_t d^3x e^{-iq_1\cdot x}$$
$$\times \frac{1}{i} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \cdots, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \cdots, \text{in}\rangle.$$

现在，对任意的积分都有

$$\left(\lim_{t\to+\infty} - \lim_{t\to-\infty}\right) \int d^3x \phi(\mathbf{x}, t)$$
$$= \lim_{t_f\to+\infty, t_i\to-\infty} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x \phi(\mathbf{x}, t).$$

用任意大的正时刻的渐近条件，我们得到

$$\langle p_1, \cdots, \text{out} | q_1, \cdots, \text{in}\rangle = \langle p_1, \cdots, \text{out} | a^+_{\text{out}}(q_1) | q_2, \cdots, \text{in}\rangle$$
$$+ iZ^{-1/2} \int d^4x \partial_0 [e^{-iq_1\cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1, \cdots, \text{out} | \varphi(x) | q_2, \cdots, \text{in}\rangle], \tag{5-25}$$

其中积分在整个时空中进行。方程 (5-25) 右边第一项是不

连接项之和(相应于至少有一个粒子不受碰撞过程影响的情况):

$$\langle p_1,\cdots,\text{out}|a^+_{\text{out}}(q_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle = \sum_1^n 2p_k^0(2\pi)^3\delta^3$$
$$\times(\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{q}_1)\langle p_1,\cdots,\hat{p}_k,\cdots,\text{out}|q_2,\cdots,\text{in}\rangle,$$

这里假定所有的粒子属于同一种类. 当不是这种情况时,显然必须加以改变. 我们发现当初态和末态的动量没有相同时,不连接项就没有了.

现在来仔细地考察一下方程 (5-25) 右边的第二项. 因为它被理解为用波包来作尝试的核,所以对空间变量作分部积分是可行的. 当然,对时间变量就不是这种情况了,否则所有的计算都要失败. 考虑到这一点,用 $m$ 来表示粒子的质量,并记得 $q_1^2=m^2$, 就有

$$\int d^4x\partial_0[e^{-iq_1\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\langle\beta,\text{out}|\varphi(x)|\alpha,\text{in}\rangle$$
$$=\int d^4x\{[(-\Delta+m^2)e^{-iq_1\cdot x}]\langle\beta,\text{out}|\varphi(x)|\alpha,\text{in}\rangle$$
$$+e^{-iq_1\cdot x}\partial_0^2\langle\beta,\text{out}|\varphi(x)|\alpha,\text{in}\rangle\}$$
$$=\int d^4x e^{-iq_1\cdot x}(\Box+m^2)\langle\beta,\text{out}|\varphi(x)|\alpha,\text{in}\rangle.$$

第一步约化公式为:

$$\langle p_1,\cdots,p_n,\text{out}|q_1,\cdots,q_l,\text{in}\rangle = \sum_1^n 2p_k^0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}_k-\mathbf{q}_1)$$
$$\times\langle p_1,\cdots,\hat{p}_k,\cdots,p_n,\text{out}|q_2,\cdots,q_l,\text{in}\rangle$$
$$+iZ^{-1/2}\int d^4x e^{-iq_1\cdot x}(\Box+m^2)$$
$$\times\langle p_1,\cdots,p_n,\text{out}|\varphi(x)|q_2,\cdots,q_l,\text{in}\rangle. \qquad (5\text{-}26)$$

现在可以一次又一次地重复同样的步骤. 为了确定起见,我们来对末态中的一个粒子作约化. 对不连接项,不出现新的

东西，所以我们不写出相应的贡献．但是，对第二项就不是这样，对此项可写出

$$\begin{aligned}&\langle p_1,\cdots,\text{out}|\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle\\&=\langle p_2,\cdots,\text{out}|a_{\text{out}}(p_1)\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle\\&=\lim_{y_1^0\to\infty} iZ^{-1/2}\int d^3y_1 e^{ip_1\cdot y_1}\overleftrightarrow{\partial}_{y_1^0}\\&\quad\times\langle p_2,\cdots,\text{out}|\varphi(y_1)\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle.\end{aligned}$$

如前面所做的那样，我们用一个四维积分来代替最后的积分．很清楚，为了使来自积分下限的算符 $a_{\text{in}}(p_1)$ 直接作用在状态 $|q_2,\cdots,\text{in}\rangle$ 上，需要运用某种技巧．场量的编时乘积

$$T\varphi(y_1)\varphi(x_1)=\begin{cases}\varphi(y_1)\varphi(x_1) & y_1^0>x_1^0,\\ \varphi(x_1)\varphi(y_1) & x_1^0>y_1^0,\end{cases}$$

正好有这种所要的性质，它能把算符排成与两个极限有关的、合适的次序．于是，我们可以将 $T$ 乘积替换进去而不影响以前的表示式，然后象第一步那样继续进行推导，结果为

$$\begin{aligned}&\langle p_1,\cdots,\text{out}|\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle\\&\quad=\langle p_2,\cdots,\text{out}|\varphi(x_1)a_{\text{in}}(p_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle\\&\qquad+iZ^{-1/2}\int d^4y_1 e^{ip_1\cdot y_1}(\Box_{y_1}+m^2)\\&\qquad\times\langle p_2,\cdots,\text{out}|T\varphi(y_1)\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle,\end{aligned}$$

右端第一项给出不连接项．

约化两个粒子后，结果就为

$$\begin{aligned}\langle p_1,\cdots,\text{out}|q_1,\cdots,\text{in}\rangle&=\langle p_1,\cdots,\text{in}|S|q_1,\cdots,\text{in}\rangle\\&=\text{不连接项}\\&+(iZ^{-1/2})^2\int d^4x_1 d^4y_1 e^{ip_1\cdot y_1-iq_1\cdot x_1}(\Box_{y_1}+m^2)\\&\times(\Box_{x_1}+m^2)\langle p_2,\cdots,\text{out}|T\varphi(y_1)\\&\times\varphi(x_1)|q_2,\cdots,\text{in}\rangle.\end{aligned}\tag{5-27}$$

迄今得到的不连接项包含了一个或两个 $\delta^3$ 函数。现在可以继续进行同样的推导，一直到所有的 in 粒子和 out 粒子都被约化为止：

$$\begin{aligned}
&\langle p_1,\cdots,p_n,\text{out}|q_1,\cdots,q_l,\text{in}\rangle \\
&\quad=\langle p_1,\cdots,p_n,\text{in}|S|q_1,\cdots,q_l,\text{out}\rangle = \text{不连接项} \\
&\qquad+(iZ^{-1/2})^{n+l}\int d^4y_1\cdots d^4x_l \\
&\qquad\times\exp\left(i\sum_1^n p_k\cdot y_k-\sum_1^l q_r\cdot x_r\right) \\
&\qquad\times(\Box_{y_1}+m^2)\cdots(\Box_{x_l}+m^2) \\
&\qquad\times\langle 0|T\varphi(y_1)\cdots\varphi(x_l)|0\rangle. \qquad (5\text{-}28)
\end{aligned}$$

Lehmann，Symanzik 和 Zimmermann 得到的这个表示式的显著的性质是，它们给出了质壳上的跃迁振幅和相互作用理论的一般 Green 函数之间的关系。后者恰好是场量的编时乘积的真空平均值。关系式(5-28)意味着在动量空间中 Green 函数在变量 $p_i^2$ 上有极点，这里 $p_i$ 共轭于 $x_i$。除了一个归一化常数外，$S$ 矩阵元正是此多重极点的留数。

我们还注意到 in 态动量 $(q_1,\cdots)$和 out 态动量 $(p_1,\cdots)$之间有显著的对称性。可以把 out 态动量 $(p_1,\cdots)$换成具有负能分量的 in 态动量 $(-p_1,\cdots)$。这样，所有的动量就处于同等的地位上。

### 5-1-4 生成泛函

我们可以得到关系式(5-28)的一个紧凑的算符形式。为了简化记号，用下面的方式把因子 $Z^{-1/2}$ 吸收到 $\varphi$ 中去：在这一小节中 $\varphi$ 的归一化取成使 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\varphi=\varphi_{\substack{\text{out}\\\text{in}}}$。为了和上面的叙述一致，我们用一个统一的符号来表示产生和吸收算符，为此对任意的在质壳 $k^2=m^2$ 上的四维矢量 $k$，令

$$a^{\#}_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(k)=\begin{cases}a^{\text{in}}_{\text{out}}(k) & k^0>0,\\ a^{+}_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(-k) & k^0<0,\end{cases}\tag{5-29}$$

这使得

$$a^{\#}_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(k)=i\varepsilon(k^0)\int d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\varphi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(x).\tag{5-30}$$

令 $B_1,\cdots,B_n$ 是定域 Bose 场. 方程 (5-28) 等价于算符形式的关系式

$$[ST[B_1(x_1)\cdots B_n(x_n)],a^{\#}_{\text{in}}(k)]=-i\varepsilon(k^0)S$$
$$\times\int d^4y e^{ik\cdot y}(\Box_y+m^2)T[\varphi(y)B_1(x_1)\cdots B_n(x_n)].\tag{5-31}$$

取 in 态矩阵元,应用 $a^{\#}_{\text{in}}S=Sa^{\#}_{\text{out}}$, 并通过式 (5-30) 用场量来表示 $a^{\#}$, 就很易证明此式. 于是,所要求的关系可象上面那样通过用对时间导数的积分来代替时间边界项而得到. 迭代后得出更一般的对易式

$$[\cdots[ST[B_1(x_1)\cdots B_n(x_n)],a^{\#}_{\text{in}}(k_1)],\cdots,a^{\#}_{\text{in}}(k_p)]$$
$$=(-i)^p\varepsilon(k_1^0)\cdots\varepsilon(k_p^0)\int d^4y_1\cdots d^4y_p$$
$$\times\exp\left(i\sum_1^p k_r\cdot y_r\right)(\Box_{y_1}+m^2)\cdots(\Box_{y_p}+m^2)$$
$$\times ST[\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_p)B_1(x_1)\cdots B_n(x_n)].\tag{5-32}$$

此式可应用于有几类粒子和场的情况.

为了理解式 (5-32) 可用作产生 $S$ 本身的工具,我们要提醒一下,Fock 空间是由 Hilbert 空间的乘积构造起来的,每一个 Hilbert 空间相应于一个确定的模式(这里用动量 $k$ 标志). 对一个具有满足 $[a,a^+]=1$ 的基本算符和真空态 $|0\rangle$ 的给定的谐振子,其归一化的激发态是 $|n\rangle=a^{+n}/(n!)^{1/2}|0\rangle$. 投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 具有如下的表示式:

$$|0\rangle\langle 0|=:e^{-a^+a}:\tag{5-33}$$

这实际上是保持真空态不变的厄米算符,并使

$$[:e^{-a^+a}:,a^+]=\sum_1^\infty\frac{(-a^+)^n}{n!}[a^n,a^+]=\sum_1^\infty\frac{(-a^+)^n a^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$=-a^+:e^{-a^+a}:,$$

或 $$:e^{-a^+a}:a^+ = 0.$$

结果得 $:e^{-a^+a}:|n\rangle = \delta_{n0}|n\rangle$，证明了式(5-33)。

现在令 $Q$ 表示一个正则到足以使以后的运算有意义的算符。我们用它的矩阵元将它展开成

$$Q = \sum_{n,m=0}^{\infty} |m\rangle\langle m|Q|n\rangle\langle n| = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a^{+m}|0\rangle\langle 0|a^n}{m!n!}\langle 0|a^m Q a^{+n}|0\rangle$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \cdot \frac{a^{+m}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial\alpha^m} :e^{-a^+a}: \frac{a^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\bar{\alpha}^n}\langle 0|e^{\alpha a}Qe^{\bar{\alpha}a^+}|0\rangle|_{\alpha=\bar{\alpha}=0},$$

在此表示式中，$\alpha$ 和 $\bar{\alpha}$ 取作独立的变量，而矩阵元前面的算符排成正规次序。于是，我们得

$$Q = :e^{a^+\partial/\partial\alpha+a\partial/\partial\bar{\alpha}} - e^{a^+a}:\langle 0|e^{\alpha a}Qe^{\bar{\alpha}a^+}|0\rangle|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}.$$

这并不完全是我们所要求的、想从中得到 $Q$ 在归一化相干态之间的矩阵元的结果，此相干态即是在真空态上作用么正算符 $e^{\bar{\alpha}a^+-\alpha a}$ 而得到的态。但是，关系式

$$e^{\bar{\alpha}a^+-\alpha a}|0\rangle = e^{-\alpha\bar{\alpha}/2}e^{\bar{\alpha}a^+}|0\rangle,$$

使我们能把 $Q$ 改写成

$$Q = :e^{a^+\partial/\partial\alpha+a\partial/\partial\bar{\alpha}-a^+a}:e^{\alpha\bar{\alpha}}\langle 0|e^{\alpha a-\bar{\alpha}a^+}Qe^{\bar{\alpha}a^+-\alpha a}|0\rangle|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}.$$

另外，还可以将 $e^{\alpha\bar{\alpha}}$ 和作用于它左边的微商对易，使得最后可应用条件 $\alpha=\bar{\alpha}=0$。在正规乘积下，符号 $a$ 和 $a^+$ 对易，并且要注意到 $e^{a^+\partial/\partial\alpha}$ 使 $\alpha$ 变成 $a^+$。于是，得到最后的表示式为

$$Q = :e^{a^+\partial/\partial\alpha+a\partial/\partial\bar{\alpha}}:\langle 0|e^{a\alpha-\bar{\alpha}a^+}Qe^{\bar{\alpha}a^+-\alpha a}|0\rangle|_{\alpha=\bar{\alpha}=0}. \qquad (5-34)$$

当然，从式(5-34)就表面地得出结论说，只用 $Q$ 在相干态基底间的对角矩阵元的知识，就足以重新构造算符本身，是不对的。正如公式所表明的那样，为了完成所要求的推导，$\alpha$ 和 $\bar{\alpha}$ 必须取为独立的变量。

现在回到有无穷多自由度的物理 Fock 空间，我们可以把单位算符写成

$$I = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\int d\tilde{k}_1\cdots d\tilde{k}_p|k_1,\cdots,k_p\rangle\langle k_1,\cdots,k_p|, \qquad (5-35)$$

其中认为起始项是从方程(5-33)推广出的真空投影算子，即

$$|0\rangle\langle 0| = :\exp\left[-\int d\tilde{k}a_{\rm in}^{+}(k)a_{\rm in}(k)\right]:, \qquad (5\text{-}36)$$

所以 $S$ 矩阵可表示为

$$\begin{aligned} S = {} & :\exp\int d\tilde{k}\left[a_{\rm in}^{+}(k)\frac{\delta}{\delta\alpha(k)} + a_{\rm in}(k)\frac{\delta}{\delta\bar{\alpha}(k)}\right]: \\ & \times\langle 0|\exp\int d^3k[a_{\rm in}(k)\alpha(k) - a_{\rm in}^{+}(k)\bar{\alpha}(k)]S \\ & \times\exp\int d^3k[a_{\rm in}^{+}(k)\bar{\alpha}(k) - a_{\rm in}(k)\alpha(k)]|0\rangle|_{\alpha=\beta=0}, \end{aligned} \qquad (5\text{-}37)$$

和式 (5-34) 完全相似. 在我们的归一化约定下,出现于相干态指数上的是测度 $d^3k$ 而不是 $d^3\tilde{k}$. 现在把此结果和取 $B$ 等于 1 时的方程式 (5-32) 结合起来. 在此方程右端引进一个源,它就成为如下的简单形式:

$$\begin{aligned} & \varepsilon(k_1^0)\cdots\varepsilon(k_p^0)[a_{\rm in}^{\#}(k_1),\cdots,[a_{\rm in}^{\#}(k_p),S]\cdots] \\ & = S\prod_{r=1}^{p}\left[\int d^4y_r e^{ik_r\cdot y_r}(\Box_{y_r}+m^2)\frac{\delta}{\delta j(y_r)}\right] \\ & \times T\exp i\int d^4x j(x)\varphi(x)|_{j=0}. \end{aligned}$$

因为真空是稳定的,即 $S|0\rangle = |0\rangle$, 于是就得到

$$\begin{aligned} & \langle 0|\exp\int d^3k[a_{\rm in}(k)\alpha(k) - a_{\rm in}^{+}(k)\bar{\alpha}(k)]S \\ & \times\exp\int d^3k[a_{\rm in}^{+}(k)\bar{\alpha}(k) - a_{\rm in}(k)\alpha(k)]|0\rangle \\ & = \exp\left\{\int d^4y\tilde{\alpha}(y)(\Box_y+m^2)\frac{\delta}{\delta j(y)}\right\} \\ & \times\langle 0|T\exp i\int d^4x j(x)\varphi(x)|0\rangle|_{j=0}, \end{aligned}$$

这里把齐次 Klein-Gordon 方程的解 $\tilde{\alpha}(y)$ 表示成了

$$\tilde{\alpha}(y) = \int d^3k[\alpha(k)e^{ik\cdot y} + \bar{\alpha}(y)e^{-ik\cdot y}].$$

把上面的矩阵元放入方程 (5-37) 中，我们看到

$$S = :\exp\left\{\int d^4y\varphi_{in}(y)(\Box_y + m^2)\frac{\delta}{\delta j(y)}\right\}:\langle 0|T\exp i$$

$$\times\int d^4x j(x)\varphi(x)|0\rangle|_{j=0}, \qquad (5\text{-}38)$$

这里已自然地用自由 in 场的 Fourier 分解引进了自由 in 场 [式 (5-30) 的逆式]，

$$\varphi_{in}(y) = \int d\tilde{k}[a_{in}(k)e^{-ik\cdot y} + a_{in}^{+}(k)e^{ik\cdot y}].$$

我们要提醒读者，场 $\varphi$ 的适当的归一化，要求在最后的 $T$ 乘积中将它代以 $Z^{-1/2}\varphi$. 此冗长的代数结果是 $S$ 矩阵和相互作用场 Green 函数的生成泛函

$$Z(j) = \langle 0|T\exp i\int d^4x\varphi(x)j(x)|0\rangle \qquad (5\text{-}39)$$

之间的一个紧凑的关系式. 它和第四章讨论的外源问题在形式上有些类似. 当然，其差别是，在这里的情况下，我们对 $Z(j)$ 没有简单的封闭表示式.

泛函 $Z(j)$ 是场论的核心. 我们可设想它包含的信息比计算质壳上跃迁振幅所需要的更多. 但是，在目前的技术下，有几个理由说明这是不对的. 为了以自洽的方式来消除微扰方法中出现的紫外无穷大，需要完全的 Green 函数. 为了讨论束缚态，还需要离壳方程. 另外，在场论中对相互作用的小距离行为是理想化地进行研究的. 但是，尽管如此，一些显著的成就还是可归功于 $S$ 矩阵方法，它从方程 (5-38) 那样的关系式中只概括出散射振幅的非常一般的性质，再由此进行讨论. 这已超出了本书的范围，在 5-3 节中将只给出这条思路的一个简单设想的大意.

### 5-1-5 连接部分

跃迁振幅中的某些不连接部分(但不是所有的)没有在方程 (5-28) 中表示出来，但现在可以借助于方程 (5-38) 来对它进行充分的研究.

简单地说，在碰撞过程中几组粒子可以独立地发生相互作用．于是，自然地要寻找一个连接部分的定义，使 $S$ 矩阵元是连接图的所有可能的相乘方式之和，而这些连接图中包含各组相互作用的粒子：

$$\langle P_I|S|q_J\rangle = \sum_{UI_\alpha=I, UJ_\beta=J} \prod_{\alpha,\beta} \langle pI_\alpha|S^c|qJ_\beta\rangle \qquad (5\text{-}40)$$

我们对一组指标用一个简写的符号，$|p_I\rangle = \Pi_{i\in I}a^+(p_i)|0\rangle$，$\alpha(p_I)=\Pi_{i\in I}\alpha(p_i)$．连接矩阵元递推地由方程的右端来定义，其中求和取遍初末态粒子组的所有的划分法．如果 $|I|$ 表示 $I$ 中的元素数目，则定义

$$S^c(\alpha,\bar\alpha) = \sum_{II,IJ,} \frac{1}{|I|!|J|!}\int \prod_{i\in I} d^3p_i \prod_{i\in J} d^3q_i\alpha(p_I)$$

$$\times\langle p_I|S^c|q_J\rangle\bar\alpha(q_J) = \langle 0|\exp\int d^3p\alpha(p)a(p)S^c$$

$$\times\exp\int d^3q\bar\alpha(q)a^+(q)|0\rangle, \qquad (5\text{-}41)$$

其中 $S^c(0,0)=0$．类似地有

$$S(\alpha,\bar\alpha) = \langle 0|\exp\int d^3p\alpha(p)a(p)S\exp\int d^3q\bar\alpha(q)a^+(q)|0\rangle, \quad (5\text{-}42)$$

它使 $S(0,0)=1$．递推关系式 (5-40) 可简单地写成

$$S(\alpha,\bar\alpha) = e^{S^c(\alpha,\bar\alpha)}. \qquad (5\text{-}43)$$

如果用生成泛函 $Z(j)$ 的定义式 (5-39)，则有

$$S(\alpha,\bar\alpha) = \exp\left\{\int d^3k2k^0(2\pi)^3\alpha(k)\bar\alpha(k) + \int d^4y\bar\alpha(y)(\Box_y + m^2)\right.$$

$$\left.\times\frac{\delta}{\delta j(y)}\right\}Z(j)|_{j=0}. \qquad (5\text{-}44)$$

比较式 (5-43) 与 (5-44)，自然地可用

$$Z(j) = e^{G_c(j)} \qquad (5\text{-}45)$$

来定义连接 Green 函数．因为 $\exp\left[\int d^4y\bar\alpha(y)(\Box_y + m^2)\delta/\delta j(y)\right]$ 是一个平移算符，把式 (5-43)、(5-44) 和 (5-45) 结合起来，就得到关系式

$$S^c(\alpha,\bar\alpha) = \int d^3k2k^0(2\pi)^3\alpha(k)\bar\alpha(k) + G_c[(\Box + m^2)\bar\alpha]. \quad (5\text{-}46)$$

我们来使这个公式更为明了．用与写出式子*

$$Z(j) = \left\langle 0 \middle| T\exp i\int d^4x\varphi(x)j(x) \middle| 0 \right\rangle$$

$$= \sum_0^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n j(x_1)\cdots j(x_n)G(x_1,\cdots,x_n), \qquad (5\text{-}47)$$

$$G(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle,$$

同样的方法，我们定义

$$G_c(j) = \sum_1^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n j(x_1)\cdots j(x_n)G_c(x_1,\cdots,x_n), \quad (5\text{-}48)$$

于是方程 (5-46) 的意思是

$$S^c(\alpha,\bar\alpha) = \int d^3k 2k^0(2\pi)^3\alpha(k)\bar\alpha(k)$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{i^n}{n!}\int d^4y_1\cdots d^4y_n\bar\alpha(y_1)\cdots\bar\alpha(y_n)$$

$$\times(\Box y_1 + m^2)\cdots(\Box y_n + m^2)G_c(y_1,\cdots,y_n). \quad (5\text{-}49)$$

如果放进 $\bar\alpha$ 的定义和展开式(5-41)，我们看到对 $n = |I| + |J| > 2$，可得到基本约化公式

$$\langle p_I|S^c|q_J\rangle = i^n\int d^4y_1\cdots d^4y_n$$

$$\times\exp\left(i\sum_1^{|I|}p_i\cdot y_i - \sum_1^{|J|}q_j\cdot y_{|I|+j}\right)\prod_1^n(\Box y_i + m^2)G_c(y_1,\cdots,y_n),$$

(5-50)

它将连接的 $S$ 矩阵元用连接的 Green 函数表示出来。当将它和方程 (5-28) 进行比较时，我们看到明显不连接项消失了．由于用 $G_c$ 代替了 $G$，额外的不连接项被去掉了．要记住，正确的 $\varphi$ 归一化要求用 $Z^{n/2}$ 去除右端．$n = 2$ 的情况是除外的．根据式 (5-40)，我们有

$$\langle p|S^c|q\rangle = \langle p|S|q\rangle = 2p^0(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \qquad (5\text{-}51)$$

另外，我们必须假定 $G(x) = 0$，它表示场量的真空平均值为零。用 Källen-Lehmann 表示式 (5-17)，两点 Green 函数可写为

---

* 对二点函数，它和自由场情况中的标准选取相差一个因子 $i$［例如和方程 (3-90)比较］，但在一般讨论中这是方便的．希望读者可以按照上下文，毫无困难地从一种约定转变为另一种约定．

$$G_c(x,y) = G(x,y) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$
$$= i\int_0^\infty d\mu^2\sigma(\mu^2)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}e^{ik\cdot(x-y)}.$$

这表明，$G_c(x,y)$ 只依赖于 $x-y$，并且在 Fourier 变换变量的 $k^2=m^2$ 处有一极点．这表示

$$\int d^4y_1\int d^4y_2 e^{i(p\cdot y_1-q\cdot y_2)}(\Box y_1+m^2)(\Box y_2+m^2)G_c(y_1,y_2)=0,$$

所以只有方程(5-49)的右端第一项对 $\langle p|S^c|q\rangle$ 有贡献，于是我们可以很容易地证明关系式(5-51)是成立的．即使 $G(x)\neq 0$，平移不变性也要求它是与 $x$ 无关的，所以 $G_c(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 最多差一常数，因而前面的推理仍然成立．读者可以毫无困难地证明

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\cup I_\alpha=I}\prod_\alpha G_c(x_{I_\alpha}), \tag{5-52}$$

其中 $I=(1,\cdots,n)$．这样，连接 $S$ 矩阵元的自然的定义，使我们得到与任何图的展开无关的连接 Green 函数的定义．在第六章中对此将作更详细的讨论．我们注意到，有时我们用了约定 $Z(j)=e^{iG_c(j)}$．最后我们注意到，在弹性两体散射过程中，分成几个连接部分正好相应于令 $S=I+iT$，并在用来构成截面的跃迁振幅中只保留 $T$．

### 5-1-6 费米子

我们把前面的叙述推广到在初末态中有用内插旋量场 $\psi(x)$ 描写的、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子的情况．在电磁学中，习惯上把影响场的归一化常数称 $Z_1$，所以在弱意义下有

$$\psi(x)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{} Z_2^{1/2}\psi_{\substack{\text{out}\\\text{in}}}(x), \tag{5-53}$$

反对易关系的真空平均值形为

$$i\langle 0|\{\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(y)\}|0\rangle = i\sum_n[\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle$$
$$\times\langle n|\bar\psi_\beta(0)|0\rangle e^{-ip_n\cdot(x-y)}+\langle 0|\bar\psi_\beta(0)|n\rangle$$
$$\times\langle n|\psi_\alpha(0)|0\rangle e^{ip_n\cdot(x-y)}],$$

矩阵谱密度

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n - q)\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle\langle n|\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle,$$

可以展开为十六个独立的 4 × 4 矩阵的组合。由相对论不变性可得

$$\rho(q) = \rho_1(q^2)q + \rho_2(q^2) + \rho_3(q^2)q\gamma^5 + \rho_4(q^2)\gamma^5.$$

如果我们象在电磁学中那样讨论宇称不变的理论，则存在一个么正算符使

$$\mathscr{P}|0\rangle = |0\rangle \qquad \mathscr{P}\psi(x)\mathscr{P}^{-1} = \gamma^0\psi(\tilde{x}),$$

由此得到条件

$$\rho(q) = \gamma^0\rho(\tilde{q})\gamma^0, \qquad \tilde{q} = (q^0, -\mathbf{q}),$$

并要求包含 $\gamma^5$ 的项为零，即 $\rho_3 = \rho_4 = 0$。因此

$$\rho(q) = \rho_1(q^2)q + \rho_2(q^2),\ \rho_i(q^2) = 0.\ \text{如果}\ q^2 < 0$$

由于 PCT 不变性，反么正算符 $\Theta$ 使真空保持不变，并且如下那样作用于场量上：

$$\Theta\psi_\alpha(x)\Theta^{-1} = i\gamma^5_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\beta(-x),\quad \Theta\bar{\psi}_\alpha\Theta^{-1} = -i\psi_\beta(-x)(\gamma^5\gamma^0)_{\beta\alpha}.$$

这使我们可以根据

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle = -\gamma^5_{\alpha\tau}\langle 0|\psi_\tau(-x)\bar{\psi}_{\tau'}(-y)|0\rangle\gamma^5_{\tau'\beta},$$

把反对易子中的第二项和第一项联系起来。所以，有

$$i\langle 0|\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\theta(q^0)[\rho_1(q^2)i\not{\partial}_x + \rho_2(q^2)]_{\alpha\beta} \times (e^{-iq\cdot(x-y)} - e^{iq\cdot(x-y)}). \tag{5-54}$$

利用在正实轴上 $\rho_i(q^2)$ 的支集性质，我们就得到自由场反对易子的叠加

$$i\langle 0|\{\psi^{in}(x), \bar{\psi}^{in}(y)\}|0\rangle = -(i\not{\partial}_x + m)\Delta(x-y, m) = S(x-y, m),$$

$$\Delta(x-y, m) = i\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}). \tag{5-55}$$

在相互作用场的情况下，我们有

$$i\langle 0|\{\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)\}|0\rangle = -\int_0^\infty d\mu^2[\rho_1(\mu^2)i\partial\!\!\!/_x + \rho_2(\mu^2)]_{\alpha\beta}\Delta(x-y,\mu) = \int_0^\infty d\mu^2\{\rho_1(\mu^2) \times S_{\alpha\beta}(x-y,\mu) + [\mu\rho_1(\mu^2)-\rho_2(\mu^2)] \times \delta_{\alpha\beta}\Delta(x-y,\mu)\}, \tag{5-56}$$

这里 $\mu$ 理解为 $\mu^2$ 的正的平方根. 对传播子有一个类似的公式，并有同样的谱密度 $\rho_1$ 和 $\rho_2$：

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \times \int_0^\infty d\mu^2 \frac{k\!\!\!/\rho_1(\mu^2)+\rho_2(\mu^2)}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}. \tag{5-57}$$

由关系式 $\rho^+(q) = \gamma^0\rho(q)\gamma^0$ 得到 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 是实的. 另外，由于量 $\mathrm{tr}[\gamma^0\rho(q)]$ 和 $\mathrm{tr}[\gamma^0(q\!\!\!/-\mu)\rho(q)(q\!\!\!/-\mu)]$ (其中 $q^2=\mu^2$) 分别正比于正的量 $\sum_\alpha |\langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle|^2$ 和 $\Sigma_\alpha|\langle 0|[(i\partial\!\!\!/-\mu)\psi]_\alpha|n\rangle|^2$，所以有如下的正定性条件：

$$\rho_1(\mu^2)\geqslant 0 \quad \mu\rho_1(\mu^2)-\rho_2(\mu^2)\geqslant 0. \tag{5-58}$$

最后，可以取出单粒子贡献. 利用宇称不变性可知，$\mu\rho_1(\mu^2)-\rho_2(\mu^2)$ 只在连续态上有支集，所以在式 (5-56) 中第一项只有来自 $\mu=m$ 的分立单粒子态的贡献. 这当然假定了我们可从连续态中分离出单粒子态，因而在有无质量粒子(如光子)的严格意义下是不成立的. 所以，光子的小的虚构质量要在处理了可能的红外发散后的最后计算阶段中才被去掉，否则单个(带电)粒子的极点就会成为规范有关的分支奇点，处理就要稍微复杂一些了.

因而，假定 $\rho_1$ 包含了形为 $Z_2\delta(\mu^2-m^2)$ 的项而 $m_1$ 表示连续阈，就有

$$i\langle 0|T\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = Z_2 S(x-y,m)$$
$$-\int_{m_1^2}^{\infty} d\mu^2[\rho_1(\mu^2)i\partial_x + \rho_2(\mu^2)]\Delta(x-y,\mu). \qquad (5\text{-}59)$$

如果令 $x^0 = y^0$，则左端就约化到正则反对易子 $i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\times\gamma^0_{\alpha\beta}$。利用等式

$$\Delta(x-y,\mu)|_{x^0=y^0} = 0,$$
$$\partial_0\Delta(x-y,\mu)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

就得到

$$1 = Z_2 + \int_{m_1^2}^{\infty} d\mu^2\rho_1(\mu^2).$$

加上式 (5-58) 的正定性，就得到和标量场情况同样的结论，即

$$0 \leqslant Z_2 < 1. \qquad (5\text{-}60)$$

由此可以推导出如在 5-1-3 节中那样的约化公式。Dirac 算子代替了 Klein-Gordon 算子。自由场的 Fourier 分解为

$$\psi_{\text{in}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k^0}\sum_{\varepsilon=\pm1}[b_{\text{in}}(k,\varepsilon)u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x} + d^+_{\text{in}}(k,\varepsilon)v(k,\varepsilon)e^{ik\cdot x}],$$

其中确定螺旋性的旋量满足 $v(k,\varepsilon) = C\bar{u}^T(k\varepsilon)$。产生和湮灭算符表示为

$$\begin{aligned}
b_{\text{in}}(k,\varepsilon) &= \int_t d^3x\bar{u}(k,\varepsilon)e^{ik\cdot x}\gamma^0\psi_{\text{in}}(x),\\
d^+_{\text{in}}(k,\varepsilon) &= \int_t d^3x\bar{v}(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x}\gamma^0\psi_{\text{in}}(x),\\
b^+_{\text{in}}(k,\varepsilon) &= \int_t d^3x\bar{\psi}_{\text{in}}(k,\varepsilon)\gamma^0e^{-ik\cdot x}u(k,\varepsilon),\\
d_{\text{in}}(k,\varepsilon) &= \int_t d^3x\bar{\psi}_{\text{in}}(k,\varepsilon)\gamma^0e^{ik\cdot x}v(k,\varepsilon).
\end{aligned} \qquad (5\text{-}61)$$

对给定螺旋性和动量的单粒子态有一个符号的不确定性。在不考虑波包的有限大小时，我们可以，比如说，对初态中的电

子写出[和式 (5-26) 比较]

$$\langle \text{out}|b_{\text{in}}^{+}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle = \lim_{t\to-\infty} Z_2^{-1/2}\int d^3x\langle \text{out}|\bar{\psi}(x)\gamma^0|\text{in}\rangle$$
$$\times e^{-ik\cdot x}u(k,\varepsilon) = \langle \text{out}|b_{\text{out}}^{+}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle - iZ^{-1/2}$$
$$\times\int d^3x[\langle \text{out}|\bar{\psi}(x)|\text{in}\rangle \times \frac{1}{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\gamma^0u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x}$$
$$+\langle \text{out}|\bar{\psi}(x)|\text{in}\rangle\frac{1}{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\gamma^0u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x}].$$

旋量 $u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x}$ 满足齐次 Dirac 方程，所以它的时间微商可以代以空间微商。分部积分后得到

$$\langle \text{out}|b_{\text{in}}^{+}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle = \text{disc.} - iZ_2^{-1/2}\int d^4x\langle \text{out}|\bar{\psi}(x)|\text{in}\rangle$$
$$\times(-i\overleftrightarrow{\partial}_x - m)u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x} \qquad (5\text{-}62\text{a})$$

这里 disc. 表示不连接项，式 (5-62a) 表示约化了初态中的一个粒子后的结果。我们可以得到相应的、约化初态中一个反粒子或末态中一个粒子或反粒子的表示式。它们依次为

$$\langle \text{out}|d_{\text{in}}^{+}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle = \text{disc.} + iZ_2^{-1/2}\int d^4x\bar{v}(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x}$$
$$\times(i\overleftrightarrow{\partial}_x - m)\langle \text{out}|\psi(x)|\text{in}\rangle, \qquad (5\text{-}62\text{b})$$

$$\langle \text{out}|b_{\text{out}}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle = \text{disc.} - iZ_2^{-1/2}\int d^4x\bar{u}(k,\varepsilon)e^{ik\cdot x}$$
$$\times(i\overleftrightarrow{\partial}_x - m)\langle \text{out}|\psi(x)|\text{in}\rangle, \qquad (5\text{-}62\text{c})$$

$$\langle \text{out}|d_{\text{out}}(k,\varepsilon)|\text{in}\rangle = \text{disc.} + iZ_2^{-1/2}\int d^4x\langle \text{out}|\bar{\psi}(x)|\text{in}\rangle$$
$$\times(-i\overleftrightarrow{\partial} - m)v(k,\varepsilon)e^{ik\cdot x} \qquad (5\text{-}62\text{d})$$

当将式 (5-62a) 和相应于一个电子进入相互作用过程或一个正电子离开此过程的式 (5-62d) 比较时，我们看到了在描写空穴理论(第二章)时讨论过的特有的替换

$$u(k,\varepsilon)e^{-ik\cdot x} \to -v(k,\varepsilon)e^{ik\cdot x},$$

末态中的正电子等价于在初态中具有相反能动量的电子。同

样的论述也适用于式 (5-62b) 和式 (5-62c) 这一对.

应用前面同样的技巧，即编时乘积方法，现在可以很容易地继续这种约化过程，只是要时常注意费米子场的反对易性. 为了简化一般表示式，我们略去旋量和算符对极化的明显的依赖性.

假定用 $(k_1, \cdots)$ 标记的粒子和用 $(k'_1, \cdots)$ 标记的反粒子是进来的粒子，粒子 $(q_1, \cdots)$ 和反粒子 $(q'_1, \cdots)$ 是出去的. 共轭的时空变量分别表示为 $x$，$x'$，$y$ 和 $y'$. 最后，$n$ 和 $n'$ 表示粒子和反粒子总数. 散射振幅就取形式

$$\begin{aligned}
&\langle \text{out}|\cdots d_{\text{out}}(q'_1)\cdots b_{\text{out}}(q_1)b^{+}_{\text{in}}(k_1)\cdots d^{+}_{\text{in}}(k'_1)\cdots|\text{in}\rangle \\
&\quad = \text{disc.} + (-iZ_2^{-1/2})^{n}(iZ_2^{-1/2})^{n'}\int d^4x_1\cdots d^4y'_1\cdots \\
&\quad \times \exp[-i\Sigma(k\cdot x + k'\cdot x' - q\cdot y - q'\cdot y')]\cdots \\
&\quad \times \bar{u}(q_1)(i\vec{\partial}_{y_1} - m)\cdots\bar{v}(k'_1)(i\vec{\partial}_{x'_1} - m) \\
&\quad \times \langle 0|T[\cdots\bar{\psi}(y'_1)\cdots\psi(y_1)\bar{\psi}(x_1)\cdots\psi(x'_1)\cdots]|0\rangle \\
&\quad \times (-i\tilde{\partial}_{x_1} - m)u(k_1)\cdots(-i\tilde{\partial}_{y'_1} - m)v(q'_1)\cdots .
\end{aligned} \tag{5-63}$$

当然，我们可重新排列 $T$ 符号下的场量 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$，这时或许要改变符号.

广义 Green 函数是场量的编时乘积的真空平均值. 基本的假设是对每一种粒子不仅有一个渐近的自由场，还有一个相互作用的(或内插的)场与之相应. 如果可以产生束缚态的话，其中某些场还可以是用基本拉氏函数变量复合起来的场. 这是一个非平庸的情况，需要进行彻底的研究. 这些束缚态表示为某些 Green 函数在相应的能动量变量上的极点.

对包含费米子场的过程定义连接函数，并讨论相应的生成泛函.

### 5-1-7 光子

在光子的情况下，由于有规范不变性，我们预期会有另外

的复杂性。按照 Stueckelberg 方法引进一个虚构的质量 $\mu$ 和不定度规 Hilbert 空间。物理的矢量光子质量为 $\mu$，而标量鬼粒子态质量为 $m$ ($\mu^2/m^2 = \lambda$)。相互作用场满足变形的 Maxwell 方程

$$(\Box + \mu^2)A^\rho - (1 - \lambda)\partial^\rho\partial \cdot A = j^\rho, \qquad (5\text{-}64)$$

而在自由场的情况中，守恒流 $j$ 为零。$A_\rho$ 的共轭量是

$$\pi^\rho = \partial^\rho A^0 - \partial^0 A^\rho - \lambda g^{\rho 0}\partial \cdot A. \qquad (5\text{-}65)$$

我们来考虑场量对易子的真空平均值。插进一个正能中间态的完备系后，得到一般形式

$$\begin{aligned}&\langle 0|[A_\rho(x), A_\nu(y)]|0\rangle \\ &= -\int_0^\infty dM^2 \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}\left(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}\right) \\ &\quad \times \left[\pi_1(M^2)g_{\rho\nu} - \pi_2(M^2)\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right], \qquad (5\text{-}66)\end{aligned}$$

这里认为 $k^0$ 等于 $(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2}$，而谱测度支集的下限大于或等于 $\inf(\mu^2, m^2)$。由于流守恒，所以标量分量是自由场

$$(\Box + m^2)\partial \cdot A = 0, \qquad (5\text{-}67)$$

于是得到

$$\langle 0|[(\Box + m^2)\partial \cdot A(x), A_\nu(y)]|0\rangle = 0.$$

此式给出关系式

$$(m^2 - M^2)[\pi_1(M^2) - \pi_2(M^2)] = 0.$$

该式表明 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 最多差一个正比于 $\delta(M^2 - m^2)$ 的项。为了方便，令

$$\pi_1(M^2) = \pi(M^2),$$

$$\pi_2(M^2) = \pi(M^2) - \frac{Z_3 z}{\lambda}\delta(M^2 - m^2),$$

所以

$$\langle 0|[A_\rho(x),A_\nu(y)]|0\rangle$$
$$=-\int_0^\infty dM^2\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)})$$
$$\times\left[\pi(M^2)\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right)+\frac{Z_{3\alpha}}{\lambda}\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\delta(M^2-m^2)\right].$$
(5-68)

这表示有一个权重为 $\pi(M^2)$ 的横向部分和一个集中于 $M^2=m^2$ 处的纵向部分.

现在我们仍用等时对易子为零. 在右端，相应的贡献正比于 $\delta$ 函数的梯度. 令它的系数为零，就得到求和规则

$$Z_{3\alpha}=\int_0^\infty dM^2\pi(M^2)\frac{\mu^2}{M^2}. \tag{5-69}$$

下面来计算势和它的共轭场量的等时对易子. 利用方程(5-65)，经过简单的计算给出

$$\langle 0|[A_\rho(x),\pi^\nu(y)]|0\rangle|_{x^0=y^0}=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$\times\left\{g_\rho^\nu\int_0^\infty dM^2\pi(M^2)+g_\rho^0g_0^\nu\left[Z_{3\alpha}-\int_0^\infty dM^2\pi(M^2)\right]\right\}.$$
(5-70)

我们希望此对易子是正则的，这表示它等于 $ig_\rho^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. 当只讨论空间分量时，令

$$\int_0^\infty dM^2\pi(M^2)=1, \tag{5-71}$$

就可得到这个结果. 为了把这个结果推广到时间分量上，必须满足

$$Z_{3\alpha}=\int_0^\infty dM^2\pi(M^2).$$

但是，一般来说这是和方程 (5-69) 不相容的. 我们将要看到 $\pi(M^2)$ 是一个正测度. 于是，若这两个关系都成立，就得到支集 $M^2=\mu^2$ 的测度，这只对自由场才成立. 可以做到的最好的办法是允许空间和时间分量的正则对易规则有不同的归一

化，即假定

$$[A_\rho(x),\pi^\nu(y)]|_{x^0=y^0}=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})(g_\rho^\nu+ag_{\rho 0}g^{\nu 0}),$$

$$a=Z_3z-1=\int_0^\infty dM^2\pi(M^2)\frac{\mu^2-M^2}{M^2}. \qquad (5\text{-}72)$$

到此为止，尚未用到渐近条件。因为动力学不会以类似的方式来影响场的各部分，因而假定当 $x^0\to-\infty$ 时，除了归一化常数外 $A_\rho(x)$ 趋向自由场(即使是弱的)显然是不明智的。较为实际的是如下那样定义 in 场的横向分量：

$$A_\rho^{T,\mathrm{in}}(x)=A_\rho^{\mathrm{in}}(x)+\frac{1}{m^2}\partial_\rho\partial\cdot A^{\mathrm{in}}(x), \qquad (5\text{-}73a)$$

并假定

$$A_\rho(x)\xrightarrow[x^0\to-\infty]{}Z_3^{1/2}\left[A_\rho^{T,\mathrm{in}}-z^{1/2}\frac{1}{m^2}\partial_\rho\partial\cdot A^{\mathrm{in}}(x)\right]. \qquad (5\text{-}73b)$$

此条件特别要求

$$\langle 0|A_\rho(x)|1\rangle=Z_3^{1/2}\left[\langle 0|A_\rho^{T,\mathrm{in}}(x)|1\rangle-z^{1/2}\frac{1}{m^2}\partial_\rho\langle 0|\partial\cdot A^{\mathrm{in}}(x)|1\rangle\right]. \qquad (5\text{-}74)$$

对三个横向极化态，只有第一项有贡献，而如果讨论标量态时，只有第二项有贡献。于是，单粒子态对对易子的贡献可以算得为

$$\begin{aligned}&\langle 0|[A_\rho(x),A_\nu(y)]|0\rangle|_{1\mathrm{particle}}\\&=-Z_3\int dM^2\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)})\\&\times\left[\delta(M^2-\mu^2)\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right)+\frac{z}{\lambda}\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right.\\&\left.\times\delta(M^2-m^2)\right]. \qquad (5\text{-}75)\end{aligned}$$

如果 $M_0^2$ 表示连续阈，我们得到

$$\langle 0|[A_\rho(x),A_\nu(y)]|0\rangle$$
$$=-Z_3\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}\left(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}\right)$$
$$\times\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\right)\Big|_{k^0=(k^2+\mu^2)^{1/2}}-Z_3z\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}$$
$$\times\left(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}\right)\frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\Big|_{k^0=(k^2+m^2)^{1/2}}$$
$$-\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\pi(M^2)\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}\left(e^{-ik\cdot(x-y)}-e^{ik\cdot(x-y)}\right)$$
$$\times\left(g_{\rho\nu}-\frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right)\Big|_{k^0=(k^2+M^2)^{1/2}}. \tag{5-76}$$

$$1=Z_3+\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\pi(M^2), \tag{5-77}$$

$$Z_3(z-1)=\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\pi(M^2)\frac{\mu^2}{M^2}. \tag{5-78}$$

相应地，只是由于连续态的贡献才偏离了正则行为，而对自由场则为零，这是因为式(5-72)成为

$$a=\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\pi(M^2)\frac{\mu^2-M^2}{M^2}, \tag{5-79}$$

相应的协变传播子的分解为

$$i\langle 0|T[A_\rho(x)A_\nu(y)]|0\rangle=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}$$
$$\times\left[Z_3\left(\frac{g_{\rho\nu}-k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}+z\frac{k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2-m^2+i\varepsilon}\right)\right.$$
$$\left.+\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\pi(M^2)\frac{g_{\rho\nu}-k_\rho k_\nu/M^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right] \tag{5-80}$$

(见本节末协变性问题的讨论)。即使纵向部分是动力学退耦的，上面写出的协变表示式，也意味着对这一项有一个非平庸的归一化因子 $Z_3z$；方程(5-77)和(5-78)不允许我们令 $z=1$ 或 $Z_3z=1$。

一旦我们证明了测度 $\pi(M^2)$ 是正的时，虽然存在不定度规态，$Z_3$ 的物理解释也就清楚了，它起的作用和 Z 在标量场中的作用类似。

为了证明这点，我们从方程 (5-64) 和 (5-76) 中取出流对易子的真空平均值

$$\langle 0|[j_\rho(x)j_\nu(y)]|0\rangle = -\int_{M^2}^{\infty} dM^2 \int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} \times (e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)}) \times \pi(M)^2(\mu^2 - M^2)^2 \times \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right). \tag{5-81}$$

此公式表明 (1) 没有单粒子态贡献：$\langle 0|j|$ 单光子$\rangle = 0$ 和 (2) 流守恒。在有确定度规的空间中，我们很易从式 (5-81) 推得密度 $\pi(M^2)$ 是正的。但是，这里我们有

$$\sum_\alpha \delta(p_\alpha^2 - M^2)(-1)^{n_\alpha}\langle 0|j_\rho(x)|\alpha\rangle\langle\alpha|j_\nu(y)|0\rangle = -\int \frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3} e^{-ik\cdot(x-y)}\pi(M^2)(\mu^2 - M^2)^2 \times \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{M^2}\right), \tag{5-82}$$

其中 $n_\alpha$ 表示中间态 $|\alpha\rangle$ 中的标量光子数，而 $\langle 0|j_\nu(0)|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|j_\nu(0)|0\rangle$。在第四章中，我们曾遇到纵向和标量贡献相消的例子。这里因为这两类有不同质量，所以我们预期有不同的机制。首先注意到在式 (5-81) 中不出现包含一个标量粒子的态。另外，方程 (5-64) 和 (5-76) 指出

$$\langle 0|[j_\rho(x), \partial\cdot A(y)]|0\rangle = 0. \tag{5-83}$$

这个关系式可以很容易地推广到其它矩阵元上，所以更一般地我们有算符关系

$$[j_\rho(x), \partial\cdot A(y)] = 0. \tag{5-84}$$

它表示了流的规范不变性，并提醒我们 $\partial\cdot A$ 是自由场：

$$\partial \cdot A = (\varepsilon Z_3)^{1/2}\partial \cdot A^{in} = (\varepsilon Z_3)^{1/2}\partial \cdot A^{out}. \quad (5\text{-}85)$$

把式(5-84)和(5-85)结合起来，就得到 $|\alpha\rangle$ 中有标量光子的矩阵元 $\langle 0|j_\rho(x)|\alpha\rangle$ 必须为零. 这表明，右端所有的项都是正的贡献，因而

$$\pi(M^2) > 0. \quad (5\text{-}86)$$

这样，求和规则式(5-77)的解释就和标量情况一样了. 更详细的研究表明，如在前面的论述中提出的那样，$Z_3$ 事实上是与规范参量 $\lambda$ 无关的.

于是可直接推出包含横光子的态的约化公式. 例如，考虑包含发射一个动量为 $k$、极化为 $\varepsilon(\varepsilon \cdot k = 0)$ 的光子的过程:

$$\langle \beta, k, \varepsilon, \text{out}|\alpha, \text{in}\rangle = \langle \beta, \text{out}|a^{(\varepsilon)}_{\text{out}}(k)|\alpha, \text{in}\rangle$$

$$= -i\int_{t_i} d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\langle \beta, \text{out}|\varepsilon \cdot A^{T,\text{out}}(x)|\alpha, \text{in}\rangle.$$

有一个类似于式(5-73)的渐近关系成立，其中 $t = t_f \to \infty$，$A^{\text{in}}$ 用 $A^{\text{out}}$ 代替. 于是，上面的矩阵元可写为

$$\lim_{t_f\to\infty}\left[-iZ_3^{-1/2}\int_{t_f} d^3x e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_0\langle \beta, \text{out}|\varepsilon \cdot A(x) + \frac{1}{m^2}\right.$$

$$\left.\times \varepsilon \cdot \partial\partial \cdot A(x)|\alpha, \text{in}\rangle\right] = \text{disc.} - iZ_3^{-1/2}$$

$$\times\int d^4x e^{ik\cdot x}(\Box_x + \mu^2)\langle \beta, \text{out}|\varepsilon \cdot A(x)$$

$$+ \frac{1}{m^2}\varepsilon \cdot \partial\partial \cdot A(x)|\alpha, \text{in}\rangle.$$

现在

$$(\Box_x + \mu^2)\frac{1}{m^2}\partial_\rho\partial \cdot A(x) = \frac{\mu^2 - m^2}{m^2}$$

$$\times \partial_\rho\partial \cdot A(x) = (\lambda - 1)\partial_\rho\partial \cdot A(x),$$

于是出现于矩阵元中的组合是 $\varepsilon \cdot j(x)$，所以具有可能的不连接项的最后表示式为

$$\langle \beta, k, \varepsilon, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle = \text{disc.} - iZ_3^{-1/2} \times \int d^4x e^{ik\cdot x} \langle \beta, \text{out} | \varepsilon \cdot j(x) | \alpha, \text{in} \rangle. \tag{5-87}$$

这样的步骤可以一次又一次地进行。我们写出初态光子 $(k_i, \varepsilon_i)$ 散射到末态 $(k_f, \varepsilon_f)$ 的结果，得到

$$\langle \beta, k_f, \varepsilon_f, \text{out} | \alpha, k_i, \varepsilon_i, \text{in} \rangle = \text{disc.} - Z_3^{-1} \times \int d^4x d^4y e^{i(k_f\cdot x - k_i\cdot y)} (\Box_y + \mu^2) \times \left\langle \beta, \text{out} \middle| T\varepsilon_f \cdot j(x) \times \left[ \varepsilon_i \cdot A(y) + \frac{1}{m^2} \varepsilon_i \cdot \partial\partial \cdot A(y) \right] \middle| \alpha, \text{in} \right\rangle.$$

作用了 Klein-Gordon 算符后，我们用 $\langle \beta, \text{out} | T[\varepsilon_f \cdot j(x)\varepsilon_i \cdot j(y)] | \alpha, \text{in} \rangle$ 来代替矩阵元。由于有编时定义引起的不确定性，这两个量之间最多可差一个集中在流形 $x = y$ 上的广义函数。我们这样来修改 $T$ 记号的定义，使这两个表示式是恒等的：

$$\langle \beta, k_f, \varepsilon_f, \text{out} | \alpha, k_i, \varepsilon_i, \text{in} \rangle = \text{disc.} - Z_3^{-1} \int d^4x d^4y e^{i(k_f\cdot x - k_i\cdot y)} \times \langle \beta, \text{out} | T\varepsilon_f \cdot j(x)\varepsilon_i \cdot j(x) | \alpha, \text{in} \rangle. \tag{5-88}$$

此公式将应用于 Compton 效应的初步讨论中。

因为我们漏过了对易子的表示式 (5-76) 和协变 $T$ 乘积式 (5-80) 之间的详细论述，所以现在回到协变编时乘积的定义上来。当处理张量算符时，事情并不那么简单，所以值得作一些说明。为了作解释，我们研究两个守恒流的乘积。用 $\rho(M^2)$ 表示谱函数 $(\mu^2 - M^2)^2\pi(M^2)$，于是就有

$$W_{\mu\nu}(x - y) = \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = -\int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0)\delta(k^2 - M^2) e^{-ik\cdot(x-y)} \times \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right). \tag{5-89}$$

显然，流是守恒的，而右端前面的负号来自 *Lorentz* 度规，这与正的 $\rho(M^2)$ 是一致的。令

$$W_M(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2-M^2)\theta(k^0)e^{-ik\cdot(x-y)}$$
$$=\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle, \tag{5-90}$$

是质量为 $M$ 的两个自由标量场的 Wightman 函数。对对易子，显然有

$$\langle 0|[j_\rho(x),j_\nu(y)]|0\rangle=W_{\rho\nu}(x-y)-W_{\nu\rho}(y-x). \tag{5-91}$$

我们首先设法这样来定义一个自然的编时算符(表示为 $\tilde{T}$)，

$$\langle 0|\tilde{T}j_\rho(x)j_\nu(y)|0\rangle=\theta(x^0-y^0)\langle 0|j_\rho(x)j_\nu(y)|0\rangle$$
$$+\theta(y^0-x^0)\langle 0|j_\nu(y)j_\rho(x)|0\rangle. \tag{5-92}$$

不幸的是，用了式(5-89)后，立即发现由 $\tilde{T}$ 得不到一个协变量。对质量为 $M$ 的自由场有

$$i\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle=i\theta(x^0-y^0)W_M(x-y)$$
$$+i\theta^0(y^0-x^0)W_M(y-x)=-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}$$
$$\times\frac{1}{k^2-M^2+i\varepsilon}=G_F(y-x), \tag{5-93}$$

因此

$$i\langle 0|\tilde{T}j_\rho(x)j_\nu(y)|0\rangle=-\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\rho(M^2)$$
$$\times\left[i\theta(x^0-y^0)\left(g_{\rho\nu}-\frac{\partial_\rho^x\partial_\nu^y}{M^2}\right)M_M(x-y)+(x\leftrightarrow y)\right]. \tag{5-94}$$

定义协变 $T$ 乘积为

$$i\langle 0|Tj_\rho(x)j_\nu(y)|0\rangle=iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y)+i\Delta T_{\rho\nu}(x,y), \tag{5-95}$$

其中

$$iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y)=-\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\rho(M^2)$$
$$\times\left[i\left(g_{\rho\nu}-\frac{\partial_\rho^x\partial_\nu^y}{M^2}\right)\theta(x^0-y^0)W_M(x-y)+(x\leftrightarrow y)\right]$$
$$=-\int_{M_0^2}^{\infty}dM^2\rho(M^2)\left(g_{\rho\nu}-\frac{\partial_\rho^x\partial_\nu^y}{M^2}\right)G_F(x-y)$$

$$= \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu / M^2}{k^2 - M^2 + i\varepsilon},$$

(5-96)

这里 $i\Delta T_{\rho\nu}(x,y)$ 是一个定域的(即集中于 $x = y$ 上的)协变项，我们暂时不确定它。我们将看到，可调节得使流守恒。下面来研究这两个编时量之间的差别。为此考虑到 $W_M(x-y)$ 只与 $(x-y)^2$ 有关。把方程(5-96)的方括号中的项改写为

$$\begin{aligned}
\square &= i\left(g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2}\right)\theta(x^0 - y^0) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y) \\
&= i\left[\theta(x^0 - y^0)\left(g_{\rho\nu} - \frac{\partial_\rho^x \partial_\nu^y}{M^2}\right) W_M(x-y) + (x \leftrightarrow y)\right] \\
&\quad + \frac{i}{M^2} g_{\rho 0}\delta(x^0 - y^0)\partial_\nu^x [W_M(x-y) - W_M(y-x)].
\end{aligned}$$

从正则量子化很清楚，可得

$$ig_{\rho 0}\delta(x^0 - y^0)\partial_\nu^x [W_M(x-y) - W_M(y-x)] = g_{\rho 0} g_{\nu 0}\delta^4(y-x),$$

于是

$$\begin{aligned}
&iT_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) - i\langle 0|\bar{T} j_\rho(x) j_\nu(y)|0\rangle = -g_{\rho 0} g_{\nu 0}\delta^4(x-y) \\
&\quad \times \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}.
\end{aligned} \tag{5-97}$$

它们的差局限于 $x = y$ 上的接触项，但不协变。

我们用此表示式来研究等时对易子的，或在目前的情况下是它们的真空平均值的一个有趣的性质。由式(5-96)得

$$\begin{aligned}
\partial_l^x T_{\rho\nu}^{(1)}(x-y) &= -i\int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} k_\nu \\
&\quad \times \frac{1 - k^2/M^2}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = -\partial_\nu \delta^4(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}.
\end{aligned}$$

根据方程(5-97)，它必须等于

$$-g_{\nu 0}\partial_0 \delta^4(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} + i\partial_k^x \langle 0|\bar{T} j_\rho(x) j_\nu(y)|0\rangle.$$

流是守恒的，所以自然的编时符号的发散性必须等于等时对易子，因此

$$\begin{aligned}
&-(\partial_\nu - g_{\nu 0}\partial_0)\delta^4(x-y) \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \\
&\quad = i\delta(x^0 - y^0)\langle 0|[j_0(x), j_\nu(y)]|0\rangle.
\end{aligned}$$

这表示

$$\langle 0|[j_0(x), j_0(y)]|0\rangle|_{x^0=y^0} = 0,$$
$$\langle 0|[j_0(x), j_k(y)]|0\rangle|_{x^0=y^0}$$
$$= i\partial_k\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\int_{M_0^2}^{\infty} dM^2\,\frac{\rho(M^2)}{M^2}. \tag{5-98}$$

Schwinger 首先注意到，由于有协变性和正定性，使在流的时间和空间分量的等时对易子中有一个 $\delta$ 函数的梯度，所以将它命名为 $c$ 数 Schwinger 项，以提醒人们，它甚至会出现于真空平均值中．流的两个时间分量的等时对易子为零表示对空间积分后，它们就产生了守恒的电荷．如果理论允许有比 $U(1)$ 大的不变群，流就带着相应于对称性的各个生成元的内部指标，所以讨论等时对易子时就要涉及到群的李代数(见第十一章)．

现在可以回到出现于方程(5-95)中的 $i\Delta T_{\rho\nu}(x,y)$ 项上来，并选得使其满足

$$i\partial_x^{\rho}\langle 0|Tj_{\rho}(x)j_{\nu}(y)|0\rangle = 0. \tag{5-99}$$

下面的选择

$$i\Delta T_{\rho\nu}(x,y) = g_{\rho\nu}\delta^4(x-y)\int_{M_0^2}^{\infty} dM^2\,\frac{\rho(M^2)}{M^2}, \tag{5-100}$$

满足所有的要求，所以协变 $T$ 乘积的完全的表示式为

$$i\langle 0|Tj_{\rho}(x)j_{\nu}(y)|0\rangle = \int_{M_0^2}^{\infty} dM^2\,\frac{\rho(M^2)}{M^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}$$
$$\times\frac{k^2g_{\rho\nu}-k_{\rho}k_{\nu}}{k^2-M^2-i\varepsilon}. \tag{5-101}$$

## 5-2 应　　用

在下一章叙述协变微扰论之前，让我们用几个简单的、包括光子和带电费米子的例子来解释一下迄今已得到的方法．

### 5-2-1 Compton 效应

在第一章中计算了光子对一个带电中心的经典弹性

Thomson 散射. 1923 年 A.H.Compton 在研究X射线时发现了频率移动的散射过程,此过程是以他的名字来命名的.

为了明确起见,靶取为自由电子. 我们把公式(5-88)作为推导的基础,来计算此效应的精确到 $e$ (即电子电荷)的最低级的振幅. 到这一级时, $Z_3$ 等于1, 所以流可以和自由电子流恒等,即

$$j_\rho(x) = e:\bar{\psi}_{in}(x)\gamma_\rho\psi_{in}(x). \qquad (5\text{-}102)$$

以后我们去掉指标"in", 并使 in 和 out 电子态恒等, 这表示振幅计算到 $e^2$ 级. 过程本身如图 5-2 所示, 那里的波线表示光子,而实线表示电子. 连接的 $S$ 矩阵元( $c$ 表示连接)为

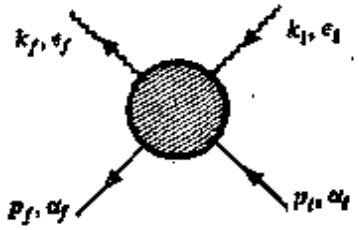



图 5-2 Compton 效应的一般运动学

$$S^c_{f\leftarrow i} = -e^2\iint d^4x d^4y\, e^{i(k_f\cdot x - k_f\cdot y)}$$
$$\times\langle p_f|T:\bar{\psi}(x)\not{\varepsilon}_f\psi(x)::\bar{\psi}(y)\not{\varepsilon}_i\psi(y):|p_i\rangle^c. \qquad (5\text{-}103)$$

编时算符是通过 Wick 定理用正规乘积表示出来的,它包含了作为系数的收缩

$$\overbrace{\psi_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)} = -\overbrace{\bar{\psi}_{\xi'}(y)\psi_\xi(x)} = iS^F_{\xi\xi'}(x-y)$$
$$= i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{-iq\cdot(x-y)}\left(\frac{1}{q-m+i\varepsilon}\right)_{\xi\xi'},$$

$$\overbrace{\psi_\xi(x)\psi_{\xi'}(y)} = \overbrace{\bar{\psi}_\xi(x)\bar{\psi}_{\xi'}(y)} = 0.$$

我们来应用方程(4-75). 由于流中有正规次序, 所以抛去同一点算符之间的收缩. 于是有

$$T:\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x)::\bar{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y):$$
$$=i:\bar{\psi}(x)\gamma_\rho S^F(x-y)\gamma_\nu\psi(y):$$
$$+i:\bar{\psi}(y)\gamma_\nu S^F(y-x)\gamma_\rho\psi(x):+\cdots,$$

其余的项对连接矩阵元没有贡献. 我们用产生和湮灭算符来展开自由场 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ [方程 (3-157)]. 如果 $\alpha_i$ 和 $\alpha_f$ 表示初末态的电子极化,

$$|p_i\rangle = b^+(p_i,\alpha_i)|0\rangle, \quad |p_f\rangle = b^+(p_f,\alpha_f)|0\rangle,$$

我们必须代表性地计算

$$\langle 0|b(p_f,\alpha_f):\bar{\psi}_\xi(x)\psi_\eta(y):b^+(p_i,\alpha_i)|0\rangle$$
$$=\iint\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{q_1^0q_2^0}e^{i(q_1\cdot x-q_2\cdot y)}$$
$$\times\sum_{\alpha_1,\alpha_2}\bar{u}_\xi(q_1,\alpha_1)u_\eta(q_2,\alpha_2)\langle 0|b(p_f,\alpha_f)b^+(q_1,\alpha_1)$$
$$\times b(q_2,\alpha_2)b^+(p_i,\alpha_i)|0\rangle = e^{i(p_f\cdot x-p_i\cdot y)}$$
$$\times\bar{u}_\xi(p_f,\alpha_f)u_\eta(p_i,\alpha_i).$$

于是我们计算出 $S^c_{f\leftarrow i}$ 为

$$S^c_{f\leftarrow i}=-ie^2\iint d^4xd^4ye^{i(k_f\cdot x-k_i\cdot y)}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$
$$\times\left[e^{i(p_f-q)\cdot x-i(p_i-q)\cdot y}\bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_f\frac{1}{\not{q}-m+i\varepsilon}\right.$$
$$\times\not{\epsilon}_iu(p_i,\alpha_i)+e^{i(p_f-q)\cdot y-i(p_i-q)\cdot x}\bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_i$$
$$\left.\times\frac{1}{\not{q}-m+i\varepsilon}\not{\epsilon}_fu(p_i,\alpha_i)\right].$$

对 $x$, $y$ 和 $q$ 完成积分,得到

$$S^c_{f\leftarrow i}=-ie^2(2\pi)^4\delta^4(k_f+p_f-k_i-p_i)$$
$$\times\left[\bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_f\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}_i-m}\not{\epsilon}_iu(p_i,\alpha_i)\right.$$
$$\left.+\bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_i\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}_f-m}\not{\epsilon}_fu(p_i,\alpha_i)\right]. \quad (5\text{-}104)$$

对形态空间变量的积分产生了能动量守恒的 $\delta$ 函数。在费米子传播子中的 $i\varepsilon$ 的约定可去掉，因为对质壳上的动量加上或减掉一个类光矢量($k$)时，必定离开了质壳。

从 5-1 节给出的讨论可知，括弧中的系数是约化跃迁矩阵元，

$$\mathscr{T}_{f\leftarrow i} = -e^2\bar{u}(p_f,\alpha_f) \times\left(\not{\varepsilon}_f\frac{1}{\not{p}_i+\not{k}_i-m}\not{\varepsilon}_i+\not{\varepsilon}_i\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}_f-m}\not{\varepsilon}_f\right) \times u(p_i,\varepsilon_i). \tag{5-105}$$

出现于 $\mathscr{T}$ 中的两项可用 Feynman 图来表示(图 5-3)。外线带着极化函数 $\varepsilon$，$u$ 或 $\bar{u}$ 和相应的动量。内线相应于传播子。在表示相互作用 $e\gamma$ 的每一个顶角上能动量是守恒的。这就解释了为什么第一个图的传播子相应于 $k_i+p_i=k_f+p_f$，而第二个相应于 $p_i-k_f=p_f-k_i$。于是，整个图的总能量也守恒。光子的 $\mu\to 0$ 的极限是平庸的，于是很易验证，如果有一个极化是纵向的(指标为 3)，贡献就为零。所以可以限制在只有两个横向极化。

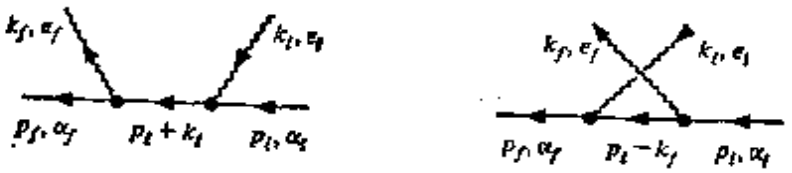



图 5-3 Compton 效应的最低级 Feyaman 图

我们用式(5-105)来计算当不测量末态电子极化时，光子在不极化电子上的散射。这相当于对初态(电子)极化的几率求平均，并对末态的求和。于是，确定到运动学因子时，我们应计算 $\frac{1}{2}\sum_{\alpha_i,\alpha_f}|\mathscr{T}_{f\leftarrow i}|^2$。由于出现了初态电子[通量因子为 $(2/m)p_i\cdot k_i$] 和末态电子[相空间因子为 $md^3p_f/(2\pi)^3p_f^0$]，

所以散射截面由方程(5-13)作适当修改后给出. 我们得到表示式

$$d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\alpha_f,\alpha_i}(2\pi)^4\delta^4(p_f + k_f - p_i - k_i)|\mathscr{T}_{f\leftarrow i}|^2 \times \frac{m}{2p_i\cdot k_i}\frac{d^3k_f}{2k_f^0(2\pi)^3}\frac{md^3p_f}{(2\pi)^3p_f^0}$$

我们用实验室系变量及

$$\int d^3p_f d^3k_f \delta^4(p_f + k_f - p_i - k_i) = (k_f^0)^2\left|\frac{dk_f^0}{d(p_f^0 + k_f^0)}\right| d\Omega,$$

这里$\Omega$是相对于入射动量来测量的发射光子的立体角. 于是,有

$$\frac{dp_f^0 + dk_f^0}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_f^0}\frac{d(p_f^0)^2}{dk_f^0} = 1 + \frac{1}{2p_f^0}\frac{d}{dk_f^0}[m^2 + (\mathbf{k}_f - k_i)^2] = \frac{p_f\cdot k_f}{p_f^0k_f^0},$$

所以

$$d\sigma = \alpha^2\frac{1}{2}\sum_{\alpha_f,\alpha_i}|\bar{u}\cdots u|^2\frac{(k_f^0m)^2}{p_i\cdot k_ip_f\cdot k_f}d\Omega,$$

这里运动学因子是从动量守恒推得的,

$$(p_i + k_i)^2 = (p_f + k_f)^2 \quad p_ik_i = p_f\cdot k_f\text{lab}mk_f^0.$$

对光子我们用记号$k = k^0 = |\mathbf{k}|$, 于是有

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{2}\sum_{\alpha_f,\alpha_i}\left|\bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_f\frac{1}{\not{p}_i + \not{k}_i - m}\not{\epsilon}u(p_i,\epsilon_i) + \bar{u}(p_f,\alpha_f)\not{\epsilon}_i\frac{1}{\not{p}_i - \not{k}_f - m}\not{\epsilon}_fu(p_i,\alpha_i)\right|^2\left(\frac{k_f}{k_i}\right)^2 d\Omega. \tag{5-106}$$

将分母有理化,并利用 Dirac 方程,矩阵元就可改写为

$$\bar{u}(p_f,\alpha_f)\left(\not\varepsilon_f\frac{1}{\not p_i+\not k_i-m}\not\varepsilon_i+\not\varepsilon_i\frac{1}{\not p_i-\not k_f-m}\not\varepsilon_f\right)$$
$$\times u(p_i,\alpha_i)=\bar{u}(p_f,\alpha_f)\left(\not\varepsilon_f\frac{\not p_i+\not k_i+m}{2p_i\cdot k_i}\not\varepsilon_i\right.$$
$$\left.-\not\varepsilon_i\frac{\not p_i-\not k_f+m}{2p_i\cdot k_f}\not\varepsilon_f\right)u(p_i,\alpha_i)=\bar{u}(p_f,\alpha_f)$$
$$\times\left[\not\varepsilon_f\frac{2(p_i+k_i)\cdot\varepsilon_i-\not\varepsilon_i\not k_i}{2p_i\cdot k_i}\right.$$
$$\left.-\not\varepsilon_i\frac{2(p_i-k_f)\cdot\varepsilon_f+\not\varepsilon_f\cdot\not k_f}{2p_i\cdot k_f}\right]u(p_i,\alpha_i).$$

横光子极化 $\varepsilon_i$，$\varepsilon_f$ 可以选成正交于“时间”轴 $p_i$ 和 $k_i$（对 $\varepsilon_i$）或 $k_f$（对 $\varepsilon_f$）. 所以，上面的矩阵元形为

$$-\bar{u}(p_f,\alpha_f)\left(\frac{\not\varepsilon_f\not\varepsilon_i\not k_i}{2p_i\cdot k_i}+\frac{\not\varepsilon_i\not\varepsilon_f\not k_f}{2p_i\cdot k_f}\right)u(p_i\alpha_i).$$

我们应注意到，两个 Feynman 图的总贡献在交换

$$(\varepsilon_i;k_i)\longleftrightarrow(\varepsilon_f,-k_f) \tag{5-107}$$

下，即将初末态光子的变量置换一下并将动量改号，是不变的. 这是跃迁振幅的一种新对称性的例子，称为交叉对称性，以后将要用到它（5-3-2节）. 利用

$$\sum_{\alpha}u_\xi(p,\alpha)\bar{u}_{\xi'}(p,\alpha)=\left(\frac{\not p+m}{2m}\right)_{\xi\xi'}. \tag{5-108}$$

现在可对电子极化求和，

$$X=\sum_{\alpha_i,\alpha_f}|\bar{u}(p_f,\alpha_f)Ou(p_i,\alpha_i)|^2=$$
$$\mathrm{tr}\left(O\frac{\not p_i+m}{2m}\bar{O}\frac{\not p_f+m}{2m}\right), \tag{5-109}$$

其中 $\bar{O}=\gamma^0O^+\gamma^0$，而求迹是对 Dirac 指标进行的. 在目前的情况下，我们得到一个繁复的表示式

$$X = \mathrm{tr}\left[\left(\frac{\not\varepsilon_f \not k_i \not\varepsilon_i}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\not\varepsilon_i \not k_f \not\varepsilon_f}{2p_i \cdot k_f}\right)\frac{\not p_i + m}{2m}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\not\varepsilon_i \not k_i \not\varepsilon_f}{2p_i \cdot k_i} + \frac{\not\varepsilon_f \not k_f \not\varepsilon_i}{2p_i \cdot k_f}\right)\frac{\not p_f + m}{2m}\right]. \qquad (5\text{-}110)$$

求迹可分为四项：两项是对角的，每一项都可从另一项通过替代式(5-107)而得到，还有两项是交叉项．后面两项是相等的，因为奇数个 $\gamma$ 矩阵的迹为零，而

$$\mathrm{tr}(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n}) = \mathrm{tr}(\gamma_{2n}\cdots\gamma_2\gamma_1)$$

这可通过转置，并用电荷共轭矩阵 $C$ 把 $\gamma$ 和 $\gamma^T$ 联系起来而得到．剩下的是要计算两个非平庸的迹．我们要尽可能地用等式 $k_i^2 = k_f^2 = 0$，$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_f^2 = -1$，为此通过反复地用等式 $ab = -ba + 2a \cdot b$，把有关的动量移到一起，

$$\begin{aligned}
T_1 &= \mathrm{tr}[\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not k_i (\not p_i + m)\not k_i \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f (\not p_f + m)] \\
&= \mathrm{tr}[\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not k_i \not p_i \not k_i \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not p_f] = 2p_i k_i \mathrm{tr}(\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not k_i \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not p_f) \\
&= 2p_i k_i \mathrm{tr}(\not\varepsilon_f \not k_i \not\varepsilon_f \not p_f) \\
&= 8p_i k_i (2\varepsilon_f \cdot k_i \varepsilon_f \cdot p_f + k_i \cdot p_f) \\
&= 8p_i \cdot k_i [2(\varepsilon_f \cdot k_i)^2 + k_f \cdot p_i],
\end{aligned}$$

这里最后一步中用了动量守恒，这意味着 $k_i \cdot p_f = k_f \cdot p_i$ 及 $\varepsilon_f \cdot p_f = \varepsilon_f \cdot (p_i + k_i - k_f) = \varepsilon_f \cdot k_i$（我们选了 $\varepsilon_f \cdot p_i = \varepsilon_i \cdot p_i = 0$）．类似地有

$$\begin{aligned}
T_2 &= \mathrm{tr}[\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not k_i (\not p_i + m)\not k_f \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_f + m)] \\
&= \mathrm{tr}[\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not k_i (\not p_i + m)\not k_f \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_i + \not k_i - \not k_f + m)] \\
&= \mathrm{tr}[\not k_i (\not p_i + m)\not k_f \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_i + m)] \\
&\quad + 2k_f \cdot \varepsilon_i \mathrm{tr}(\not\varepsilon_i \not k_i \not p_i \not k_f) - 2k_i \cdot \varepsilon_i \mathrm{tr}(\not k_i \not p_i \not k_f \not\varepsilon_i) \\
&= 2k_i \cdot p_i \mathrm{tr}(\not k_f \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_i) \\
&\quad + 8(k_f \cdot \varepsilon_i)^2 k_i \cdot p_i - 8(k_i \cdot \varepsilon_f)^2 p_i \cdot k_f \\
&= 8k_i \cdot p_i k_f \cdot p_f [2(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 1] \\
&\quad + 8(k_f \cdot \varepsilon_i)^2 k_i \cdot p_i - 8(k_i \cdot \varepsilon_f)^2 p_i \cdot k_f,
\end{aligned}$$

第二个交叉项 $T_3$ 等于 $T_2$。最后，通过替代式 (5-107) 由 $T_i$ 得到 $T_4$。把这些量配上出现于方程 (5-110) 中的适当的因子后加起来，并用实验室系运动学就得到

$$X = \frac{1}{2m^2}\left[\frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} + 4(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 2\right]. \quad (5\text{-}111)$$

将上式代入方程 (5-106) 中，就最后得到在自由电子上的 Compton 散射的 Klein-Nishina (1929) 散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k_f}{k_i}\right)^2\left[\frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} + 4(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2 - 2\right]. \quad (5\text{-}112)$$

将四维矢量等式 $k_f - k_i = p_i - p_f$ 平方起来，很易得出频移与散射角 $\theta$ 的关系。我们有 $-2k_i^0k_f^0(1-\cos\theta) = 2m(k_f^0 - k_i^0)$。于是，

$$k_f = \frac{k_i}{1 + (k_i/m)(1-\cos\theta)}.$$

在低能极限下 $k_i/m \to 0$，公式 (5-112) 约化成 Thomson 表示式(见 1-3-2 节)，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}(\varepsilon_f \cdot \varepsilon_i)^2, \quad \frac{\alpha}{m} = r_0 = 2.8 \times 10^{-13}\text{cm}. \quad (5\text{-}113)$$

在接近向前的方向上，即当 $\theta \to 0$ 时，不管入射能量是多少，Klein-Nishina 表示式都约化成非相对论结果式 (5-113)。

如果入射光子束是不极化的，并且不测量末态光子的极化，则如电子的情况一样，也要对 $\varepsilon_i$ 求平均，并对 $\varepsilon_f$ 求和，以得到不极化的截面

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon_i,\,\varepsilon_f}\frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

如在第一章中那样，$\sum_{\varepsilon_i,\,\varepsilon_f}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f)^2 = 1 + \cos^2\theta$，由此得到

$$\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{k_f}{k_i}\right)^2\left(\frac{k_f}{k_i} + \frac{k_i}{k_f} - \sin^2\theta\right). \quad (5\text{-}114)$$

最后，对角度 ($x = \cos\theta$) 积分，给出总截面

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\int_{-1}^{+1} dx \left\{\frac{1}{[1+(k_i/m)(1-x)]^3}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+(k_i/m)(1-x)} - \frac{1-x^2}{[1+(k_i/m)(1-x)]^2}\right\}.$$

如果 $\sigma_0$ 表示总 Thomson 截面，而 $\omega$ 为初态能量与电子静止能量之比，

$$\sigma_0 = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}, \quad \omega = \frac{k_i}{m}, \tag{5-115}$$

我们就得到

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \frac{3}{4}\left\{\frac{1+\omega}{\omega^3}\left[\frac{2\omega(1+\omega)}{1+2\omega} - \ln(1+2\omega)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\ln(1+2\omega)}{2\omega} - \frac{1+3\omega}{(1+2\omega)^2}\right\}. \tag{5-116}$$

从方程 (5-116) 得到低能 ($\omega \ll 1$) 和高能 ($\omega \gg 1$) 的极限：

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \begin{cases} 1 - 2\omega + O(\omega^2) & \omega \ll 1, \\ \dfrac{3}{8\omega}\left[\ln 2\omega + \dfrac{1}{2} + O\left(\dfrac{\ln\omega}{\omega}\right)\right] & \omega \gg 1. \end{cases} \tag{5-117}$$

比值 $\bar{\sigma}/\sigma_0$ 如图 5-4 所示。

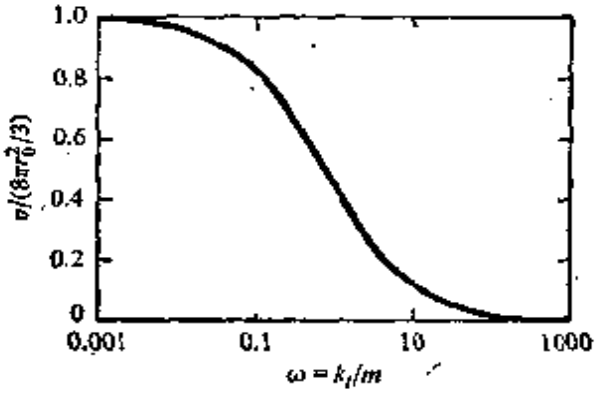



图 5-4　作为入射能量 $\omega = k_i/m$ 的函数的不极化 Compton 散射截面与 Thomson 截面之比

我们已证明了到 $e$ 的最低级的 Compton 振幅的交叉对称性。通过考察表示式(5-88)，读者可以把这个性质推广到所有的级上．正如 5-1-3 节和 5-1-4 节的约化公式所表明的那样，可将其推广到包含两个电荷共轭粒子的更复杂的过程，其中一个在初态，另一个在末态．在交换 in 粒子和 out 反粒子，并使四维动量反向时，此振幅是不变的．当然，相应的振幅是非物理的，因为它出现了负能，但振幅的解析延拓可通过约化公式本身而得到(见下面的 5-3-2 节)。

## 5-2-2 粒子对湮灭

可以修改一下上面的计算，以得到相关过程的几率，即带电粒子对湮灭成两个光子的过程，它是在第四章中研究过的过程的反过程，出发点是类似于式 (5-88) 的表示式，只是相应于在末态中约化两个光子．但是，Bose 统计表示，如果 $\Omega$ 表示其中一个发射光子的立体角，则将 $\frac{1}{2}\,d\sigma/d\Omega$ 在 $4\pi$ 上积分，即 $d\sigma/d\Omega$ 在 $2\pi$ 上积分，就得到总截面．当然，我们的表示式必须在交换这两个光子时对称．

图 5-5a 中表示了它的运动学，其中一个电子 $(p_1,\alpha_1)$ 和一个正电子 $(p_2,\alpha_2)$ 湮灭后发射出光子 $(k_1,\varepsilon_1)$，$(k_2,\varepsilon_2)$。相应的振幅是

$$S_{f\leftarrow i} = -Z_3^{-1}\iint d^4x\,d^4y\,e^{i(k_1\cdot x+k_2\cdot y)}$$
$$\times\langle 0|T\{\varepsilon_1\cdot j(x)\varepsilon_2\cdot j(y)\}|p_1,\alpha_1,p_2,\alpha_2\mathrm{in}\rangle$$

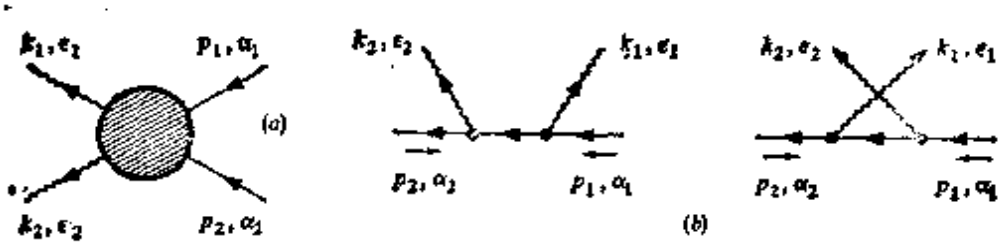



图 5-5　粒子对湮没：(a) 一般运动学和 (b) 最低级 Feynman 图

正如前面那样，这是考虑了同样类型的贡献后精确到最低级的计算. 直接的计算得到

$$S_{f\leftarrow i} = -ie^2(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$$
$$\times \bar{v}(p_2,\alpha_2)\left\{\not{\varepsilon}_2 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1 - m}\not{\varepsilon}_1 + \not{\varepsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m}\not{\varepsilon}_2\right\} u(p_1,\alpha_1), \qquad (5\text{-}118)$$

此式明显地和相应的 Compton 振幅类似. 将其表示在图 5-5 b 中，在那里费米子线是按照电荷 $e$ 的流向来取向的. 这表示当考虑正电子动量流动时取相反的方向. 作简单的替换，就可从 Compton 效应的方程 (5-104) 导出方程 (5-118). 这种替换是

$$\begin{aligned} &(k_i,\varepsilon_i)\to(-k_1,\varepsilon_1) \quad u(p_i,\alpha_i)\to u(p_1,\alpha_1) \quad p_i\to p_1,\\ &(k_f,\varepsilon_f)\to(k_2,\varepsilon_2) \quad \bar{u}(p_f,\alpha_f)\to \bar{v}(p_2,\alpha_2) \quad p_f\to -p_2. \end{aligned} \qquad (5\text{-}119)$$

交叉对称性被湮灭振幅的 Bose 对称性所替代，而替换式 (5-119) 给出了另一种过程之间的交叉关系的例子.

从矩阵元式 (5-118) 可推出对不极化的电子和正电子的截面. 通量因子是 $(1/m^2)[(p_1\cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}$，而统计平均给出因子 $\frac{1}{4}$. 用类似于方程 (5-109) 的关系和

$$-\sum_{\alpha} v(p,\alpha)\bar{v}(p,\alpha) = \frac{-\not{p} + m}{2m},$$

截面就为

$$d\sigma = \frac{-m^2e^4}{[(p_1\cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}}\int \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\left\{\left(\frac{\not{\varepsilon}_2\not{k}_1\not{\varepsilon}_1}{2p_1\cdot k_1} + \frac{\not{\varepsilon}_1\not{k}_2\not{\varepsilon}_2}{2p_1\cdot k_2}\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\times\left(\frac{\not{\varepsilon}_1\not{k}_1\not{\varepsilon}_2}{2p_1\cdot k_1} + \frac{\not{\varepsilon}_2\not{k}_2\not{\varepsilon}_1}{2p_1\cdot k_2}\right)\frac{-\not{p}_2 + m}{2m}\right\}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)\frac{d^3k_1}{2k_1^0(2\pi)^3}\frac{d^3k_2}{2k_2^0(2\pi)^3}$$

光子极化 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 取成正交于 $p_1$（还分别正交于 $k_1$ 和 $k_2$）。将替换规则式(5-119)用到式(5-111)上，得到迹为

$$\mathrm{tr}(\cdots)=\frac{1}{2m^2}\left[-\left(\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}\right)+4(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)^2-2\right].$$

在电子静止系中进行计算得到

$$d\sigma=-\frac{1}{4}\int\mathrm{tr}(\cdots)\frac{e^4m}{|\mathbf{p}_2|}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{4k_1^0k_2^0}d\Omega_1\frac{k_1^{0\,2}dk_1^0}{d(k_1^0+k_2^0)},$$

其中 $k_2^0$ 由能动量守恒给出。所以，

$$\frac{d(k_1^0+k_2^0)}{dk_1^0}=1+\frac{1}{2k_2^0}\frac{d}{dk_1^0}(\mathbf{p}_2-\mathbf{k}_1)^2=\frac{k_1\cdot k_2}{k_1^0k_2^0},$$

$$k_1\cdot k_2=m(m+E_2)=k_1^0(m+E_2-|\mathbf{p}_2|\cos\theta).$$

最后

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{8|\mathbf{p}_2|}\frac{m+E_2}{(m+E_2-|\mathbf{p}_2|\cos\theta)^2}\times\left[\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_1}{k_2}-4(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)+2\right],\tag{5-120}$$

给出了相应于一个正电子 $(E_2,\ \mathbf{p}_2)$ 打在一个静止的电子上时，其中一个光子在由立体角 $\Omega$ 所确定的方向上发射的微分截面。在式(5-120)中，$k_1$ 和 $k_2$ 表示光子能量，而

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{E_2-|\mathbf{p}_2|\cos\theta}{m}.\tag{5-121}$$

为了得到总截面，我们对光子极化求和：

$$\sum_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)^2=1+\left[1-\left(\frac{m}{k_1}+\frac{m}{k_2}\right)\right]^2,$$

并在总的 $4\pi$ 立体角的一半上积分，就得到

$$\sigma=\frac{\pi r_0^2}{1+\gamma}\left\{\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right],\tag{5-122}$$

其中

$$r_0 = \frac{\alpha}{m}, \qquad \gamma = \frac{E_2}{m} \geqslant 1.$$

在两个极限情况 $\gamma \to 1$（阈）和 $\gamma \to \infty$（高能）下，得到

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{\pi r_0^2}{\sqrt{1-\gamma^{-2}}} = \dfrac{\pi r_0^2}{v_2}, & \gamma \to 1, v_2 = \text{正电子速度}, \\ \dfrac{\pi r_0^2}{\gamma}[\ln(2\gamma) - 1], & \gamma \to \infty. \end{cases} \tag{5-123}$$

迄今所用的 Born 近似，在电子和正电子通过长程 Coulomb 力发生相互作用的低能区是不太好的．但是，如果把式(5-123)用作初步的估算，则我们发现，一个缓慢运动的正电子在每单位时间内的湮灭几率

$$w = \sigma \times \text{入射通量} \times \text{靶密度} \simeq \sigma v_2 nZ = nZ\pi r_0^2, \tag{5-124}$$

与它的速度是无关的．这里 $n$ 表示每单位体积的原子数，而 $Z$ 为它们的原子序数．于是，在介质中，低能正电子的寿命近似地为

$$\tau = w^{-1} \simeq (nZ\pi r_0^2)^{-1}. \tag{5-125}$$

例如，在铅中，$\tau \sim 10^{-10}$ 秒．一般公式(5-122)是 Dirac 于 1930 年首先得到的．

### 5-2-3 电子偶素（Positronium）的寿命

我们刚才研究了忽略 Coulomb 力时，电子和正电子的自由湮灭．Coulomb 力可以通过在中性电子偶素体系中两个粒子的束缚而表现出来，这是一种类似于已在第二章中讨论过的原子束缚态的轻子．我们可以推广以前的结果，以得到仲(para-)和正(ortho-)电子偶素的 $s$ 波基态的衰变几率．因为湮灭是一个慢过程，所以此不稳定态的宽度和非相对论束缚能相比是很小的．这表明可分两步处理，首先忽略湮灭来计算束缚，然后忽略束缚来计算湮灭．在严格的做法中，电子偶素不是一个稳定的渐近态，而只在不稳定的激发态中出现．精确到零级时，电子和正电子是由一个非相对论的各向同性

的波函数来描写的，

$$\psi(r) = \frac{1}{(\pi a^3)^{1/2}} e^{-r/a} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq\cdot r}\tilde{\psi}(\mathbf{q})$$
$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iq\cdot r} \frac{8(\pi a^3)^{1/2}}{(1 + a^2q^2)^2}, \qquad (5\text{-}126)$$

这里 $a$ 是氢原子的 Bohr 半径的两倍(因为约化质量是电子质量的一半)

$$a = 2a_0 = \frac{2}{m\alpha}. \qquad (5\text{-}127)$$

有意义的电子或正电子的动量是 $1/a = \alpha m/2 \ll m$ 的量级，所以在一级近似下计算湮灭时，可以把两个粒子看成相对静止的. 于是，第二步是计算静止的自由粒子的单态和三重态的宽度.

在第三章中已得到，电荷共轭不变性表示单态要衰变为偶数个光子，所以最低的可能数目是 2. 我们用以前的结果乘 4，因为这里是一个给定自旋态的衰变，而不是对四个极化态的平均.

另外，必须重新考虑 5-1-1 节中的推导，此推导给出了截面和单位时间的跃迁几率之间的关系，这里表示为 $\tau_{\text{sing}}^{-1}$. 为了得到 $\tau_{\text{sing}}^{-1}$，我们用如下那样构造出来的归一化因子去乘 $4\sigma$. 对通量因子

$$m^2[(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{-1/2} = \frac{m}{|\mathbf{p}_2|} \underset{|\mathbf{p}_2|\to 0}{\simeq} v_2^{-1},$$

代以权重

$$\left|\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\tilde{\psi}(q)\right|^2 = |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3}.$$

这是在目前的情况下，重复方程 (5-4) 到方程 (5-13) 的计算后得到的，于是

$$\tau_{\text{sing}}^{-1}=\frac{1}{\pi a^3}\lim_{\substack{E_2\to m\\ v_2\to 0}}(4v_2\sigma)=\frac{1}{\pi a^3}(4\pi r_0^2)=\frac{m\alpha^5}{2}. \tag{5-128}$$

我们注意到，其实比值 $\tau_{\text{sing}}^{-1}/B$ 是 $\alpha^3\sim 10^{-6}$ 的量级，这里 $B$ 是束缚能，$B=m\alpha^2/4$. 这就证明了上面的处理是正确的.

上面的计算可以解释为用阈处的跃迁矩阵元来给出单位时间的衰变几率，它为

$$\tau^{-1}=\sum_f(2\pi)^4\delta(P_f^0-2m)\delta^3(\mathbf{P}_f)\times|\langle f|\mathscr{T}|e^+e^-\rangle|^2|\psi(0)|^2. \tag{5-129}$$

此公式可用来讨论正电子偶数的情况，这时发射光子的最少数目是 3. 从约化公式得到，精确到最低级时有

$$\begin{aligned}S_{f\leftarrow i}=(-ie)^3\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3\exp\left(i\sum_1^3 k_i\cdot x_i\right)\\ \times\langle 0|T[:\bar\psi(x_1)\not\epsilon_1\psi(x_1)::\bar\psi(x_2)\not\epsilon_2\\ \times\psi(x_2)::\bar\psi(x_3)\not\epsilon_3\psi(x_3):]|e^+e^-,\ \text{triplet}\rangle.\end{aligned} \tag{5-130}$$

对矩阵元，Wick 定理给出

$$\begin{aligned}\sum_{\text{置换}}\langle 0|:\bar\psi(x_1)\not\epsilon_1 iS(x_1-x_2)\not\epsilon_2 iS(x_2-x_3)\not\epsilon_3\\ \times\psi(x_3):|e^+,e^-,\text{triplet}\rangle.\end{aligned}$$

将此式放入式 (5-130) 中，积分后得

$$\begin{aligned}S_{f\leftarrow i}&=i(2\pi)^4\delta(P_f^0-2m)\delta^3(\mathbf{p}_f)\mathscr{T}_{fi}\\ &=-ie^3(2\pi)^4\delta(P_f^0-2m)\delta^3(\mathbf{p}_f)\\ &\quad\times\sum_{\text{置换}}\bar v^{(\alpha)}\not\epsilon_1\frac{1}{\not p-\not k_2-\not k_3-m}\\ &\quad\times\not\epsilon_2\frac{1}{\not p-\not k_3-m}\not\epsilon_3 u^{(\beta)}.\end{aligned} \tag{5-131}$$

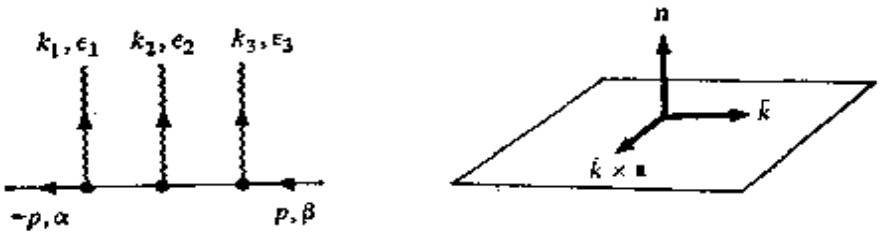
这里，$u^{(\beta)}$ 和 $\bar v^{(\alpha)}$ 表示静止的电子和正电子的 Dirac 旋量，并且必须投影到三重态上. 费米子的共同的能动量是 $p\equiv(m,0)$，而 $(k_1,\epsilon_1)$，$(k_2,\epsilon_2)$ 及 $(k_3,\epsilon_3)$ 是末态光子的动量和极

化，$P_f = \Sigma_1^3 k_i$。当然，如 Bose 统计所要求的那样，$\mathscr{T}$ 对光子变量是对称的。在相空间上的积分必须除以 3!。在方程 (5-131) 中表示的结果，可以表示为六个象在图 5-6 a 中画出的那样的 Feynman 图的和，它们可通过置换光子变量而得到。为了继续进行计算，我们引进记号

$$\mathscr{T}_{f\leftarrow i} = -e^3 \chi_+^{c\,+} \Sigma a_{123} \chi_- \quad \chi_+^{c\,-} = \chi_+^T i\sigma_2, \qquad (5\text{-}132)$$

其中 $\chi_\pm$ 表示描写费米子的二分量旋量。我们来叙述一种方法，它和把 $\mathscr{T}_{f\leftarrow i}$ 平方时的求迹计算不同，即我们来明显地算出 $2\times 2$ 矩阵 $a_{123}$。在明确的记号下，可从 $4\times 4$ 的矩阵推得：

$$a_{123} = (0,1)\not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 - m} \not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_3 - m} \not{\epsilon}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$




(a) (b)

图 5-6 正电子偶素的三光子衰变。(a) 描写最低级过程的六个图中的一个；(b) 测量光子极化时轴的选取，n 是反应平面的法向。

令 $\omega_i = k_i^0$，$\hat{k}_i = \mathbf{k}_i/\omega_i$，再选取 $\varepsilon_i$，$p = 0$，$i = 1,2,3$，并把 $\hat{k}_i \times \varepsilon_i$ 写为 $\delta_i$。这是一个单位矢量，因为 $\hat{k}_i \cdot \varepsilon_i = 0$。于是，有

$$(0,1)\not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 - m} = (0,1)\not{\epsilon}_1 \frac{\not{k}_1 - \not{p} + m}{(k_1 - p)^2 - m^2}$$

$$= -(0,1)\frac{\not{\epsilon}_1 \not{k}_1}{2m\omega_1} = -\frac{1}{2m\omega_1}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1, 0)$$

$$\times \begin{pmatrix} \omega_1 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}_1 & -\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2m}(\sigma \cdot \varepsilon_1, i\sigma \cdot \delta_1).$$

类似地有

$$\frac{1}{\not p - \not k_3 - m}\not\varepsilon_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2m}\begin{pmatrix}i\sigma\cdot\delta_3\\ \sigma\cdot\varepsilon_3\end{pmatrix},$$

于是

$$a_{123} = \frac{1}{4m^2}(\sigma\cdot\varepsilon_1, i\sigma\cdot\delta_1)\begin{pmatrix}0 & -\sigma\cdot\varepsilon_2\\ \sigma\cdot\varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\sigma\cdot\delta_3\\ \sigma\cdot\varepsilon_3\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4m^2}(\sigma\cdot\varepsilon_1\sigma\cdot\varepsilon_2\sigma\cdot\varepsilon_3 + \sigma\cdot\delta_1\sigma\cdot\varepsilon_2\sigma\cdot\delta_3).$$

所要的组合 $\sum_{\text{perm}} a_{123}$ 形为 $\sigma\cdot\mathbf{V}$. 其实，它的迹为零，因为它正比于

$$\sum_{\text{置换}}[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) + (\delta_1,\varepsilon_2,\delta_3)] = 0.$$

回忆起 $\mathrm{tr}\sigma_i\sigma_j\sigma_k = 2i\varepsilon_{ijk}$. 于是 $\sum_{\text{置换}} a_{123} = \sigma\cdot\mathbf{V}$，其中

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{2m^2}\sum_{\text{循环}}[\varepsilon_1(\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3 - \delta_2\cdot\delta_3) + \delta_1(\varepsilon_2\cdot\delta_3 + \varepsilon_3\cdot\delta_2)]. \qquad (5\text{-}133)$$

显然，正电子偶素的寿命是与它的极化状态无关的. 但是，当我们观察光子极化时，角分布与初极化状态有关. 这里我们限于讨论总几率. 通过对三个自旋态取平均，可以计算非极化正电子偶素的总几率. 于是

$$\tau^{-1}_{\text{三重态}} = \frac{1}{6}\int\frac{d^3k_1d^3k_2d^3k_3}{8\omega_1\omega_2\omega_3(2\pi)^9}(2\pi)^4\delta(\Sigma\omega_i - 2m)\delta^3(\Sigma\mathbf{k}_i) \times \frac{e^6}{\pi a^3}\sum_{\text{光子极化}}\frac{1}{3}(|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2). \qquad (5\text{-}134)$$

在写出式(5-134)时，我们已用到了明显地写在方程(5-132)中的因子 $i\sigma_2$. 例如，状态 $|J=1, J_z=1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

的衰变振幅正比于矩阵元 $\chi^T_{1/2} i\sigma_2 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{V}\chi_{1/2} = V_1 + iV_2 \equiv V_+$，而状态 $|J=1, J_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ 的相应的振幅中包含了

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^T_{-1/2} i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{V}\chi_{1/2} + \chi^T_{1/2} i\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{V}\chi_{-1/2}) = -\sqrt{2}\,V_3 \equiv V_0.$$

对最后一个振幅 $|J=1, J_z=-1\rangle$ 引进 $V_- = -V_1 + iV_2$. 于是.

$$\frac{1}{3}(|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2) = \frac{2}{3}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) = \frac{2}{3}\mathbf{V}^2.$$

为了完成计算，应用复极化 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} = \boldsymbol{\varepsilon} \pm i\boldsymbol{\delta}$ 是方便的，它满足

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm 2} = 0,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^- = 2,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\pm}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} = \boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\delta}_1\cdot\boldsymbol{\delta}_2 \pm i(\boldsymbol{\varepsilon}_1\cdot\boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\cdot\boldsymbol{\delta}_1),$$

于是

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{4m^2}\sum_{\text{循环}} \boldsymbol{\varepsilon}_1^+(\boldsymbol{\varepsilon}_2^-\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3^-) + \boldsymbol{\varepsilon}_1^-(\boldsymbol{\varepsilon}_2^+\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3^+),$$

$$\frac{2}{3}\mathbf{V}^2 = \frac{1}{12m^4}\mathrm{Re}\sum_{\text{循环}}\{2|\boldsymbol{\varepsilon}_2^+\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3^+|^2 + 2(\boldsymbol{\varepsilon}_1^+\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2^+) \times(\boldsymbol{\varepsilon}_2^-\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3^-)(\boldsymbol{\varepsilon}_3^-\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1^-) + [(\boldsymbol{\varepsilon}_1^+\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2^-) \times(\boldsymbol{\varepsilon}_2^-\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3^-)(\boldsymbol{\varepsilon}_3^+\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1^+) + cc]\}.$$

现在对光子极化求和，对每一个光子选取两个正交的基础态 (a) 和 (b)，它们的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 沿着反应平面的法向或沿 $\mathbf{k}\times\mathbf{n}$ (见图 5-6 b)：

(a) $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\delta} = \hat{k} \times \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} + i\hat{k} \times \mathbf{n}$,

$\boldsymbol{\varepsilon}^- = \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{n} - i\hat{k} \times \mathbf{n}$;

(b) $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{k} \times \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^+ = -i\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^- = i\boldsymbol{\alpha}^*$.

于是，

$$\sum_{\text{光子极化}} \frac{2}{3} \mathbf{V}^2 = \frac{4}{3m^4} \sum_{\text{循环}} |\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3|^2.$$

只有 $\mathbf{V}$ 表示式中的第一项才对光子极化的和有贡献. 另外，

$$\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_3 = (\mathbf{n} + i\hat{k}_2 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} + i\hat{k}_3 \times \mathbf{n}) = 1 - \cos\theta_{23},$$

其中 $\cos\theta_{23} = \hat{k}_2 \cdot \hat{k}_3$. 现在可把最后的表示式

$$\frac{1}{3}(|V_+|^2 + |V_0|^2 + |V_-|^2) = \frac{2}{3}\mathbf{V}^2$$

$$= \frac{4}{3m^4} \sum_{\text{循环}} (1 - \cos\theta_{23})^2 \qquad (5\text{-}135)$$

代入式 (5-134) 中，而给出

$$\tau^{-1}_{\text{三重态}} = \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} \frac{(4\pi)^3 \alpha^3}{m^4} \frac{4}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{8\omega_1\omega_2\omega_3}$$

$$\times \delta^3(\Sigma \mathbf{k}_j)\delta(\Sigma\omega_j - 2m) \times \sum_{\text{循环}} (1 - \cos\theta_{23})^2.$$

循环求和中的每一项贡献相等. 于是，有

$$\tau^{-1}_{\text{三重态}} = \frac{\alpha^6}{6\pi m} \iint_D d\omega_1 d\omega_2 (1 - \cos\theta_{12})^2,$$

$$1 - \cos\theta_{12} = 2m \frac{\omega_1 + \omega_2 - m}{\omega_1\omega_2}. \qquad (5\text{-}136)$$

积分的范围是 Mandelstam 三角形 $D: \omega_1 + \omega_2 \geqslant m$, $0 \leqslant \omega_1$, $\omega_2 \leqslant m$. 我们写成

$$\tau^{-1}_{\text{triplet}} = \frac{2\alpha^6}{3\pi} mA, \quad A = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dy \frac{(x + y - 1)^2}{x^2 y^2}. \qquad (5\text{-}137)$$

积分 $A$ 为

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}[x(1-x) + x + 2(1-x)\ln(1-x)]$$

$$= -3 + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}.$$

最后的求和 $\sum_1^\infty 1/n^2$ 等于 $\pi^2/6$，所以 $A = (\pi^2 - 9)/3$，我们就得到在第三章中引用的最后的值：

$$\tau_{\text{三重态}}^{-1} = m\frac{2\alpha^6}{9\pi}(\pi^2 - 9). \qquad (5\text{-}138)$$

从上面的表示式可以很容易地推导出发射光子的能谱。

### 5-2-4 韧致辐射

在第一章中给出了一个带电粒子的速度突然改变时发射出光子的经典辐射几率。这里，作为例子，我们更为严格地来处理在第二章中讨论过的，在固定核（电荷为 $-Ze$）上的 Coulomb 散射。如果讨论单光子发射，有兴趣的矩阵元就是式 (5-87)。假定

$$\frac{Z\alpha}{v} \ll 1, \qquad (5\text{-}139)$$

这里 $v$ 是入射电子的速度，我们将按 $Ze$ 及 $e$ 作展开，并且只保留带头的贡献。我们来进行启发式的推导，外场是通过用有外场 $A^{\text{ext}}$ 的 Dirac 方程的解来代替自由旋量而得到反映的。

$$A_0^{\text{ext}} = -\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}^{\text{ext}} = 0.$$

于是，令 $\psi^{\text{ext}}$ 表示

$$(i\not{\partial} - e\not{A}^{\text{ext}} - m)\psi^{\text{ext}}(x) = 0$$

在适当边条件下的解。我们可写出辐射振幅为

$$S_{f\leftarrow i} = -ie\int d^4x e^{ik\cdot x}\bar{\psi}_{\text{out}}^{\text{ext}}(x)\not{\epsilon}\psi_{\text{in}}^{\text{ext}}(x), \qquad (5\text{-}140)$$

其中 $k^2=0$，$\varepsilon^2=-1$，$\varepsilon\cdot k=0$. 入射电子是渐近地由它的动量 $p_i$ 和极化 $\alpha$ 来标志的，而出射粒子则用 $p_f$ 和 $\beta$ 来标志. 算到 $A^{\text{ext}}$ 的最低级时，我们在第二章中已看到有

$$\psi_{\text{in}}^{\text{ext}}(x)=\psi_{\text{in}}(x)+\int d^4y S^F(x-y)e\not{A}^{\text{ext}}(y)\psi_{\text{in}}(y)+\cdots,$$

$$\bar{\psi}_{\text{out}}^{\text{ext}}(x)=\bar{\psi}_{\text{out}}(x)+\int d^4y\bar{\psi}_{\text{out}}(y)e\not{A}^{\text{ext}}(y)S^F(y-x)+\cdots, \tag{5-141}$$

这里 $\psi_{\text{in}}$，$\bar{\psi}_{\text{out}}$ 表示相应的 Dirac 方程的解

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}}(x)&=e^{-ip_i\cdot x}u(p_i,\alpha),\\ \bar{\psi}_{\text{out}}(x)&=e^{ip_f\cdot x}\bar{u}(p_f,\beta).\end{aligned} \tag{5-142}$$

当然，其中 $p_i^2=p_i^2=m^2$. 当把式 (5-141) 代入式 (5-140) 时，我们发现 $k^2=0$ 时，正比于 $\int d^4x e^{ik\cdot x}\bar{\psi}_{\text{out}}(x)\not{\psi}_{\text{in}}(x)$ 的贡献为零. 于是，计算到最低级时有

$$\begin{aligned}S_{f\leftarrow i}=-ie^2\int d^4xd^4y[&e^{ik\cdot x}\bar{\psi}_{\text{out}}(x)\not{S}^F(x-y)\not{A}^{\text{ext}}(y)\\&\times\psi_{\text{in}}(y)+e^{ik\cdot y}\bar{\psi}_{\text{out}}(x)\not{A}^{\text{ext}}(x)S^F(x-y)\not{\psi}_{\text{in}}(y)].\end{aligned} \tag{5-143}$$

我们注意到它和 Compton 振幅有点相似，在这里，外势 $A^{\text{ext}}(x)$ 代替了自由光子波函数 $e^{-ik\cdot x}\varepsilon(k)$. 应用式 (5-142) 及势的 Fourier 变换

$$A_0^{\text{ext}}(x)=-\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}=-Ze\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\delta(q^0)e^{-iq\cdot x}\frac{1}{|\mathbf{q}|^2}, \tag{5-144}$$

很易得到

$$\begin{aligned}S_{f\leftarrow i}=&\frac{iZe^3}{|\mathbf{p}_f+\mathbf{k}-\mathbf{p}_i|^2}2\pi\delta(p_i^0-p_f^0-k_i^0)\bar{u}(p_f,\beta)\\&\times\left[\not{\varepsilon}\frac{1}{\not{p}_f+\not{k}-m}\gamma^0+\gamma^0\frac{1}{\not{p}_i-\not{k}-m}\not{\varepsilon}\right]\\&\times u(p_i,\alpha).\end{aligned} \tag{5-145}$$

因为出现了中心力，平移不变性受到了破坏，所以只保留了能量守恒.

截面也必须作修改，结果为

$$d\sigma = \frac{mZ^2e^6}{p_i^0|\mathbf{V}_i|}\int 2\pi\delta(p_f^0 + k^0 - p_i^0)\left|\frac{[\quad]}{|\mathbf{p}_f + \mathbf{k} - \mathbf{p}_i|^2}\right|^2 \times \frac{md^3p_fd^3k}{2p_f^0k^0(2\pi)^6}, \tag{5-146}$$

其中 $p_i^0|\mathbf{V}_i|/m = |\mathbf{p}_i|/m$ 是通量因子，而方括号就是出现于式(5-145)中的方括号.

为了得到不极化的截面，我们对 $\varepsilon$ 和 $\beta$ 求和，对 $\alpha$ 求平均. 为了简化记号，把交换的动量写为 $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_f + \mathbf{k} - \mathbf{p}_i)$. 令 $\omega = k^0$，而 $\Omega_\gamma$，$\Omega_e$ 分别是出射光子和电子的方向，就有

$$d\sigma = \frac{Z^2e^3}{\pi^2}\frac{m^2|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i||q|^4}F\omega d\omega d\Omega_\gamma d\Omega_e, \tag{5-147}$$

$$F = \frac{1}{2}\sum_\varepsilon \mathrm{tr}\left[\left(\not\varepsilon\frac{\not p_f + \not k + m}{2p_f\cdot k}\gamma^0 - \gamma^0\frac{\not p_i - \not k + m}{2p_i\cdot k}\not\varepsilon\right)\left(\frac{\not p_i + m}{2m}\right)\left(\gamma^0\frac{\not p_f + \not k + m}{2p_f\cdot k} - \not\varepsilon\frac{\not p_i - \not k + m}{2p_i\cdot k}\gamma^0\right)\left(\frac{\not p_f + m}{2m}\right)\right]. \tag{5-148}$$

量 $F$ 可分解成三部分：

$$F = \frac{1}{2^5m^2}(F_1 + F_2 + F_3),$$

$$F_1 = \frac{1}{(p_f\cdot k)^2}\sum_\varepsilon \mathrm{tr}[\not\varepsilon(\not p_f + \not k + m)\gamma^0 \times(\not p_f + \not k + m)\not\varepsilon(\not p_f + m)],$$

$$F_2 = F_1(p_i \longleftrightarrow -p_f),$$

$$F_3 = -\frac{1}{(p_f\cdot k)(p_i\cdot k)}\mathrm{tr}\{[\gamma^0(\not p_i - \not k + m)\not\varepsilon$$

$$\times(\not p_i + m)\gamma^0(\not p_f + \not k + m)\not\varepsilon(\not p_f + m)]$$
$$+ (p_i \longleftrightarrow -p_f)\}.$$

选取 $\varepsilon^0 = 0$ 时，我们得到

$$F_1 = \frac{8}{(p_f \cdot k)^2}\sum_{\varepsilon}[2(\varepsilon \cdot p_f)^2(m^2 + 2p_i^0p_i^0 + 2p_i^0\omega - p_ip_f - p_i \cdot k) + 2\varepsilon \cdot p_f\varepsilon \cdot p_ik \cdot p_f + 2p_i^0\omega k \cdot p_f - p_i \cdot kp_i \cdot k],$$

$$F_2 = F_1(p_i \longleftrightarrow -p_i),$$

$$F_3 = \frac{16}{(p_f \cdot k)(p_i \cdot k)}\sum_{\varepsilon}[\varepsilon \cdot p_i\varepsilon \cdot p_f(p_i \cdot k - p_f \cdot k + 2p_i \cdot p_f - 4p_i^0p_f^0 - 2m^2) + (\varepsilon \cdot p_f)^2k \cdot p_i - (\varepsilon \cdot p_i)^2k \cdot p_f + p_ikp_f \cdot k - m^2\omega^2 + \omega(\omega p_i \cdot p_f - p_i^0p_f \cdot k - p_f^0p_i \cdot k)].$$

令 $\theta_f$ 是矢量 $\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{p}_f$ 间的夹角，$\theta_i$ 是 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}_i$ 之间的夹角，而 $\varphi$ 是平面 $(\mathbf{k},\mathbf{p}_f)$ 和 $(\mathbf{k},\mathbf{p}_i)$ 之间的夹角，如图 5-7 所示。

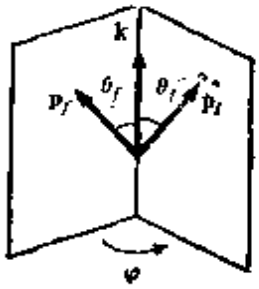



图 5-7　韧致辐射过程的运动学

应用

$$\sum_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_f)^2 = |\mathbf{p}_f|^2\sin^2\theta_f,\quad \sum_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_i)^2 = |\mathbf{p}_i|^2\sin^2\theta_i,$$

$$\sum_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_f)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_i) = |\mathbf{p}_f||\mathbf{p}_i|\sin\theta_f\sin\theta_i\cos\varphi,$$

可完成对光子极化的求和。为了得到最后的公式，我们用记

号

$$p_f^0 = E_f,\ p_i^0 = E_i,\ |\mathbf{p}_f| = p_f,\ |\mathbf{p}_i| = p_i,\ |\mathbf{q}|^2 = q^2. \tag{5-149}$$

于是 Bethe 和 Heitler 在 1934 年得到的微分截面就可写为

$$\begin{aligned} d\sigma = {} & \frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2}\frac{p_f}{p_i q^4}\frac{d\omega}{\omega}\,d\Omega_f d\Omega_e \\ & \times\left[\frac{p_f^2\sin^2\theta_f}{(E_f - p_f\cos\theta_f)^2}(4E_i^2 - q^2)\right. \\ & + \frac{p_i^2\sin^2\theta_i}{(E_i - p_i\cos\theta_i)^2}(4E_f^2 - q^2) \\ & + 2\omega^2\frac{p_f^2\sin^2\theta_i + p_i^2\sin^2\theta_f}{(E_f - p_f\cos\theta_f)(E_i - p_i\sin\theta_i)} \\ & - 2\frac{p_f p_i\sin\theta_i\sin\theta_f\cos\varphi}{(E_f - p_f\cos\theta_f)(E_i - p_i\cos\theta_i)} \\ & \left.\times\ (4E_iE_f - q^2 + 2\omega^2)\right]. \end{aligned} \tag{5-150}$$

此结果的结构有些复杂，当 $\omega \to 0$ 时，它显示出现在已熟悉的灾难性的(!)行为。

当 $\omega \longrightarrow 0$ 时，方程 (5-147) 和 (5-148) 可近似地写为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e}\underset{k\to 0}{\simeq}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_e}\right)_{\text{elastic}} e^2\frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3}\sum\left(\frac{\varepsilon\cdot p_f}{k\cdot p_f} - \frac{\varepsilon\cdot p_i}{k\cdot p_i}\right)^2, \tag{5-151}$$

和第一章中得到的一样，在那里已给出了积分截面的结果。

从这个例子我们认识到，对小的 $k$，实际的观察无法使我们区别算到 $e^2$ 级修正的弹性截面和算到同一级的非弹性截面。于是，只能期望精确到这一级时，两者之和有一有限的极限。在第七章中将对此作进一步的讨论。

## 5-3 么正性和因果性

约化振幅把可测量的质壳上的散射振幅和一般的 Green

函数联系起来．本书以后的大部分内容，是在用拉氏函数描写的定域相对论动力学框架上计算这些函数．但是，强调和概括出如么正性和定域性这样重要的物理要求，也是很重要的，这些性质对不同的动力学体系是共同的，并且可能比目前的应用更广泛．这种分析得到的主要结果之一，是证明了振幅的一种特定的解析结构，当补充上沿各个不连续区的边界值的规则时，可得到一个或几个变量上的色散关系．但是，除了说明它们的重要性，并引用一些有意义的结果外，我们不想详细研究这些内容．在下一章中，将看到解析性是如何反映到微扰表示中去的．

### 5-3-1 么正性和分波分解

$S$ 矩阵的么正性反映了几率守恒这条基本原理．虽然，在某些情况下必须在 Hilbert 空间中引进不定度规这种人为的技巧，但是物理量总是对具有正定归一化的态而言的，这种正定性在时间的演化中是不变的，形式的演算不会掩盖反映在一些关系中的这种重要事实，Bohr, Peierls 和 Placzek 的光学定理是其中一个典型的关系．

现在我们来看一看 $S$ 矩阵的么正性所意味的限制．按照方程(5-6)，此性质可写成

$$S^+S = I = I + i(T - T^+) + T^+T. \qquad (5\text{-}152)$$

插进动量守恒

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\mathscr{T}_{fi}, \qquad (5\text{-}153)$$

就得到振幅之间的非线性关系

$$(\mathscr{T}_{fi} - \mathscr{T}^*_{if}) = i\sum_n (2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i)\mathscr{T}^*_{nf}\mathscr{T}_{ni}, \qquad (5\text{-}154)$$

它包含了对所有可能和 $|i\rangle$ 及 $|f\rangle$ 耦合的中间态 $|n\rangle$ 求和．

在实际情况中，散射过程的始态是两体状态．我们集中讨论两体弹性散射．广义地讲，我们可说粒子按照相应的守恒定律来交换自旋或内部量子数，这些守恒律规定它们总在同一个对称多重态中(见第十一章)．为了简单起见，我们不讨论全同粒子的情况．首先在方程 (5-154) 中取 $|f\rangle = |i\rangle$．这相应于初末态的自旋和内部变量相等的向前散射情况．这里必须假设没有长程力．于是，方程 (5-154) 的左端就约化为 $2i\mathrm{Im}\mathscr{T}_{ii}$．右端除了一个初态贡献的通量因子外，是和总截面 $\sigma_{\mathrm{tot}}(i)$ 有关的．为了明确起见，用 $(m_a, S_a)$ 和 $(m_b, S_b)$ 表示初态粒子的质量和自旋．对给定的自旋态 $i$ 和总的质心能量的平方 $s$，我们从式 (5-13) 推出

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(i) = \frac{1}{2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \sum_n \times (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathscr{T}_{ni}^* \mathscr{T}_{ni}, \qquad (5\text{-}155)$$

其中

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1. \qquad (5\text{-}155a)$$

在式 (5-155) 中，我们用了和不变相空间元 $d^3p/2E(2\pi)^3$ 相应的态的规一化．在质心系中，粒子 $A$ 和 $B$ 的共同的三维动量 $|\mathbf{p}|$ 通过 $4s\mathbf{p}^2 = \lambda(s, m_a^2, m_b^2)$ 和 $s$ 联系起来．用式 (5-155) 可得到如下的光学定理：

$$\mathrm{Im}\mathscr{T}_{ii} = \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\sigma_{\mathrm{tot}}(i), \qquad (5\text{-}156)$$

振幅 $\mathscr{T}_{ii}$ 出现于向前弹性截面的表示式中．我们假设这样来极化，使得初态在绕入射动量旋转下不变．于是可将弹性截面对方位角积分，并不用散射角的余弦，而用动量转移将它表示出来．在过程 $A + B \to A + B$ 中，令 $(p_a, p_b)$ 和 $(p_a', p_b')$ 分别为初末态的动量，它们满足能动量守恒 $p_a + p_b = p_a' + p_b'$．Mandelstam 变量定义为

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p'_a + p'_b)^2,$$
$$t = (p_a - p'_a)^2 = (p_b - p'_b)^2,\ s+t+u = 2(m_a^2+m_b^2), \quad (5\text{-}157)$$
$$u = (p_a - p'_b)^2 = (p_b - p'_a)^2.$$

微分弹性截面可写为

$$\frac{d\sigma_{el}(s,t)}{dt} = \frac{|\mathscr{T}(s,t)|^2}{16\pi\lambda(s,m_a^2,m_b^2)}. \quad (5\text{-}158)$$

向前散射是用 $t = 0$ 来标志的，所以 $\mathscr{T}(s,0)$ 就是上面表示为 $\mathscr{T}_{ii}$ 的量. 因此，有

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt}(s,0) = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{(\mathrm{Re}\mathscr{T}_{ii})^2}{\lambda(s,m_a^2,m_b^2)} + \sigma_{tot}^2(i)\right] > \frac{\sigma_{tot}^2(i)}{16\pi}. \quad (5\text{-}159)$$

在很高能量碰撞时，可能会发生向前散射振幅的虚部比实部占优势的情况. 这时，假定总截面是已知的，方程 (5-159) 就可用来将微分弹性截面归一化.

如果我们至少能够部分地将 $\mathscr{T}$ 算符对角化，则就能从么正条件引出更多的结果. 在两体散射中取总角动量的本征态为基，就可做到这点.

Jacob 和 Wick 的螺旋性描述，最适宜于用来作相应的投影. 令 $\lambda_a$ 和 $\lambda_b$ ($\lambda'_a$, $\lambda'_b$) 为初 (末) 态粒子在质心系中的螺旋性，令 $\theta$ 和 $\varphi$ 是相对三维动量 $\mathbf{p}$ 关于固定坐标系的极角. 把 $R_{\theta,\varphi}$ 看成绕 $\hat{y}$ 轴转 $\theta$ 角，接着绕 $\hat{z}$ 轴转 $\varphi$ 角的乘积. 此旋转变换把单位矢量 $\hat{z}$ 变到矢量 $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. 总角动量为 $J$、在 $\hat{z}$ 轴上投影为 $M$ 的态为

$$|J,M;\lambda_a,\lambda_b\rangle = \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2}\int d\varphi \sin\theta d\theta \times \mathscr{D}^J_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\varphi})|p_a,\lambda_a;p_b,\lambda_b\rangle. \quad (5\text{-}160)$$

螺旋性定义为自旋沿三维动量的分量，从而推广了 Dirac 粒子的情况. 此概念可推广到无质量粒子的情况.

我们记得 Wigner $\mathscr{D}$ 函数是如下那样从特殊的么正性 $2\times2$ 矩阵形式的 $SU(2)$ 群表示得来的．一个作用于任意矢量 $\mathbf{p}$ 上的旋转 $R$ 可以用一对 $U,-U$ 变换，通过 $U\sigma\cdot\mathbf{p}U^{+}=\sigma\cdot(R\mathbf{p})$ 表示出来．如果我们更一般地讨论一个任意的复矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，可将其看成作用于用两个变量 $u_{1/2}$，$u_{-1/2}$ 构成的齐次多项式上的算符． 为了得到 $\mathscr{D}^{j}_{m,m'}$，我们把这种作用推广到在 $2j$ 阶多项式上的作用，它的基为 $u_{jm}=[(j+m)!\times(j-m)!]^{-1/2}u^{j+m}_{1/2}u^{j-m}_{-1/2}$．如果

$$u'_{1/2}=au_{1/2}+bu_{-1/2},$$
$$u'_{-1/2}=cu_{1/2}+du_{-1/2},$$
$$u'_{j,m}=\mathscr{D}^{j}_{m,m'}u_{j,m'},$$

那么

$$\mathscr{D}^{j}_{m,m'}(A)=[(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{-1/2}\times\sum_{\substack{n_1+n_2=j+m,\ n_3+n_4=j-m\\ n_1+n_3=j+m',\ n_2+n_4=j-m'}}\frac{a^{n_1}}{n_1!}\frac{b^{n_2}}{n_2!}\frac{c^{n_3}}{n_3!}\frac{d^{n_4}}{n_4!}.\tag{5-161a}$$

这些矩阵具有下列性质：

$$\mathscr{D}^{j}(A_1A_2)=\mathscr{D}^{j}(A_1)\mathscr{D}^{j}(A_2),\quad\mathscr{D}^{j}(A^{T})=\mathscr{D}^{j}(A)^{T},$$
$$\mathscr{D}^{j}(A^{*})=\mathscr{D}^{j}(A)^{*},\quad\mathscr{D}^{j}_{mm'}(\lambda I)=\lambda^{2j}\delta_{mm'},\tag{5-161b}$$
$$\mathscr{D}^{j}_{mm'}(e^{i\sigma_3\theta/2})=e^{im\theta}\delta_{mm'}.$$

特别是，如果 $A$ 是么正的，则 $\mathscr{D}^{j}$ 也是．回到 $SU(2)$ 群，方程 (5-160) 的记法把旋转 $R_{\theta,\varphi}$ 和它的 2 乘 2 的表示等同起来了，使

$$\mathscr{D}^{j}_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\varphi})=\mathscr{D}^{j*}_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi,\theta,0)=e^{iM\varphi}d^{j}_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\theta)$$
$$d^{j}_{m_1m_2}(\theta)=(-1)^{m_1-m_2}d^{j}_{-m_1,-m_2}(\theta)=(-1)^{m_1-m_2}d^{j}_{m_2,m_1}(\theta).\tag{5-161c}$$

相位约定可以这样来取，使得如果 $\eta_a$ 和 $\eta_b$ 表示粒子 $A$ 和 $B$ 的内禀宇称，则在空间反射 $\mathscr{P}$ 和时间反演 $\mathscr{T}$ 下，这些态的变换律为*

$$\mathscr{P}|J,M;\lambda_a,\lambda_b\rangle=\eta_a\eta_b(-1)^{J-s_a-s_b}|J,M;-\lambda_a,-\lambda_b\rangle,$$

* 读者不要把本节中的时间反演算符 $\mathscr{T}$ 和散射振幅混淆起来

$$\mathscr{T}|J,M;\lambda_a,\lambda_b\rangle=(-1)^{J-M}|J,-M;\lambda_a,\lambda_b\rangle. \tag{5-162}$$

这些关系式反映了螺旋性在空间反射，甚至在时间反演下是奇的.

利用 Wigner-Eckart 定理，考虑了旋转不变性后，我们可对矩阵元 $\mathscr{T}_{fi}$ 写出如下的展开：

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{fi}&=\langle p'_a,\lambda'_a;p'_b,\lambda'_b|\mathscr{T}|p_a,\lambda_a;p_b,\lambda_b\rangle\\&=16\pi\sum_J(2J+1)\mathscr{T}^J_{\lambda'_a,\lambda'_b;\lambda_a,\lambda_b}(s)\\&\quad\times\mathscr{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,\lambda'_a-\lambda'_b}(\varphi,\theta,0).\end{aligned} \tag{5-163}$$

来自关系式

$$\int\frac{dp_a^3dp_b^3}{(2\pi)^3(2E_a)(2\pi)^3(2E_b)}(2\pi)^4\delta^4(p_a+p_b-P)$$
$$=\frac{\lambda^{1/2}(s,m_a^2,m_b^2)}{8s(2\pi)^2}d\Omega_p$$

的运动学因子，将出现于下面给出的么正性表示式中. 在方程 (5-163) 中 $z$ 轴选在入射动量 $\mathbf{p}_a$ 上，而 $\theta$，$\varphi$ 是 $\mathbf{p}'_a$ 的极角. 最后，根据在初态或末态中出现偶数个还是奇数个半整数自旋，来确定对 $J$ 求和取遍整数还是半整数. Jacob 和 Wick 的展开式 (5-163)，很易推广到任意两个粒子到两个粒子的散射过程中去.

如果在空间反射下不变，则表示有

$$\mathscr{T}^J_{\lambda'_a,\lambda'_b;\lambda_a,\lambda_b}(s)=\mathscr{T}^J_{-\lambda'_a,-\lambda'_b;-\lambda_a,-\lambda_b}(s). \tag{5-164}$$

与此类似，如果时间反演不变成立，则有

$$\mathscr{T}^J_{\lambda'_a,\lambda'_b;\lambda_a,\lambda_b}(s)=\mathscr{T}^J_{\lambda_a,\lambda_b;\lambda'_a,\lambda'_b}(s), \tag{5-165}$$

它表示了散射矩阵的对称性.

当总能量 $s^{1/2}$ 低于非弹性阈时，只有原来的两体道对方程 (5-154) 中的中间态求和有贡献. 投影到角动量 $J$ 上时，得

到关系

$$\mathscr{T}^J(s) - \mathscr{T}^{J+}(s) = 2i\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)s^{-1}\mathscr{T}^{J+}(s)\mathscr{T}^J(s), \tag{5-166}$$

其中 $\mathscr{T}^J(s)$ 被看成在螺旋性态空间中的 $(2s_a+1)(2s_b+1)\times(2s_a+1)(2s_b+1)$ 的矩阵. 用时间反演不变性，可将左端代以 $2i\mathscr{T}^J(s)$.

如果粒子是无自旋的，公式就显著地简化. 特别是，$\mathscr{D}^{J*}_{0,0}(\varphi, \theta, 0)$ 正是 Legendre 多项式 $P_J(\cos\theta)$，而方程 (5-166) 可通过如下的等式引进相移 $\delta_J(s)$ 而被解出来：

$$\frac{2\lambda^{1/2}}{s}\mathscr{T}^J(s) = -i(e^{2i\delta_J(s)} - 1) = 2e^{i\delta_J(s)}\sin\delta_J(s). \tag{5-167}$$

如果矩阵 $\mathscr{T}^J(s)$ 在某些适当的基下是对角的，则对每一个对角元素都有同样的表示式.

例如，对 $\pi$ 核子散射就是这种情况. 两个独立的振幅 $\mathscr{T}^I_{1/2,1/2}$ 和 $\mathscr{T}^I_{-1/2,1/2}$ 可用

$$\mathscr{T}^I_{\pm} = \mathscr{T}^I_{1/2,1/2} \pm \mathscr{T}^I_{-1/2,1/2}$$

来代替，它们相应于在宇称为 $\pm(-1)^{J+\frac{1}{2}}$ 态中的散射.

我们来把对无自旋粒子的弹性散射成立的表示式汇集起来. 令 $q$ 是质心系动量，$\theta$ 是散射角，而 $\delta_l$ 是 $l$ 分波的相移(可能是复的)，则

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi sq^2}|\mathscr{T}|^2,$$

$$\mathscr{T} = 16\pi\sum_0^\infty (2l+1)\mathscr{T}_l P_l(\cos\theta),$$

$$\mathscr{T}_l = \frac{s^{1/2}}{2q}e^{i\delta_l}\sin\delta_l, \tag{5-168}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2qs^{1/2}}\operatorname{Im}\mathscr{T}(\cos\theta = 1) = \frac{8\pi}{qs^{1/2}}\sum_0^\infty (2l+1)\operatorname{Im}\mathscr{T}_l,$$

$$|\mathscr{T}_l|^2 \leqslant \frac{s^{1/2}}{2q}\operatorname{Im}\mathscr{T}_l$$

在非弹性阈以下，最后一个不等式变为等式。

### 5-3-2 因果性和解析性

宏观物理中，我们要求在发生作用后，结果是明确的，这不仅要求事件可以毫不含糊地确认，还意味着有热力学不可逆性概念，这是微观物理领域外的现象．幸而信号速度有限，使我们可有一个较弱的描述，这种描述意味着不对时间的箭头选取一个特别的方向．我们遵守这样的观点，即类空分隔的区域彼此没有影响．换一种说法是，属于这种区域的定域可观察量可以对易．我们已看到，这可进一步描写成基本场量的对易（或反对易）．为简单起见，这里只讨论 Bose 场的情况．在数学上，场量对易子的这种相应的性质变为它们的 Fourier 变换的解析性．这一发现是 Kramers 和 Kronig 最早讨论介质中联系色散和吸收的光的衍射率的基础．所以解析表示称"色散关系"．

有一个例子可以用来解释这种概念．考虑粒子 $A$（质量为 $m_a$）在靶粒子 $B$（质量为 $m_b$）上的弹性散射．为了避免繁复的技术细节，我们假定两个粒子都是无自旋的，但可以有电荷，这不会改变实质性的结论．于是，我们可以把粒子 $A$ 和反粒子 $\bar{A}$ 区分开来，并用一个复数场 $\varphi$ 来描写它们．如果 $q_1$ 和 $q_2$ 表示粒子 $A$ 的初末态的动量，$p_1$ 和 $p_2$ 是 $B$ 粒子的相应的动量，则散射振幅的连接部分可表示为

$$S_{fi} = -\int d^4x\, d^4y\, e^{i(q_2\cdot y - q_1\cdot x)}(\Box_y + m_a^2) \times (\Box_x + m_a^2)\langle p_2 | T\varphi^+(y)\varphi(x) | p_1\rangle. \quad (5\text{-}169)$$

我们已把因子 $Z^{-1/2}$ 吸收到场量的定义中去了．由于 $q_1$ 和 $q_2$ 在向前光锥内，所以方程（5-169）右端的编时乘积可用推迟对易子来代替，

$$T\varphi^+(y)\varphi(x) \to \theta(y^0 - x^0)[\varphi^+(y), \varphi(x)],$$

而不影响 $S_{fi}$ 的值。从 5-1-3 的原始推导中看出便可看出这一点。通过

$$(\Box + m_i^2)\varphi(x) = j(x) \tag{5-170}$$

来定义场量 $\varphi(x)$ 的源 $j(x)$，并且为了简单起见，假定 $\varphi$ 和 $j$ 等时对易。考虑了平移不变性后，可写出

$$S_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1)i\mathscr{T},$$

$$\mathscr{T} = i\int d^4z e^{iq\cdot z}\langle p_2|\theta(z^0) \times\left[j^+\left(\frac{z}{2}\right), j\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle, \tag{5-171}$$

$$q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2).$$

Lorentz 不变性意味着 $\mathscr{T}$ 只与动量间的标量积有关，即与质壳上粒子的三个 Mandelstam 变量中的两个有关。

从定域性知，推迟对易子

$$\langle p_2|\theta(z^0)[j^+(z/2), j(-z/2)]|p_1\rangle$$

为零，除非 $z^2 > 0$，$z_0 > 0$. 考察一下方程 (5-171)，发现 $\mathscr{T}$ 在由条件 $\mathrm{Im}q$ 是正的类时矢量来定义的向前区域中，是四维矢量 $q$ 的解析函数，这是从假设场量的矩阵元是广义慢增函数而得到的(即以多项式为界)。实际上，如果 $q = q_R + iq_I$，当 $z$ 和 $q_I$ 都是正的类时矢量时，式 (5-171) 的指数给出一个衰减因子 $e^{-z\cdot q_I}$。

此例子表明了相对论场论的定域性和 Green 函数的解析性之间的直接的关系。

在分析此结果的数学结论前，我们先回忆一下交叉对称性。代替过程 $A(q_1) + B(p_1) \to A(q_2) + B(p_2)$，假定我们来研究反应 $\bar{A}(\bar{q}_1) + B(p_1) \to \bar{A}(\bar{q}_2) + B(p_2)$，它是反粒子

$\bar{A}$ 在同样的靶 $B$ 上的散射. 相应的振幅 $\bar{\mathscr{T}}$ 是

$$\bar{\mathscr{T}} = i\int d^4z e^{i\bar{q}\cdot z}\langle p_2|\theta(z^0)$$
$$\times\left[j\left(\frac{z}{2}\right),\ j^+\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle,$$
$$\bar{q} = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2).$$

将积分变量 $z$ 变为 $-z$，还可写为

$$\bar{\mathscr{T}} = i\int d^4z e^{-i\bar{q}\cdot z}\langle p_2|-\theta(-z_0)$$
$$\times\left[j^+\left(\frac{z}{2}\right),\ j\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle, \qquad (5\text{-}172)$$

它和方程(5-171)给出的振幅 $\mathscr{T}$ 有两方面的差别. 动量 $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ 被 $-\bar{q} = \frac{1}{2}(-\bar{q}_2 - \bar{q}_1)$ 所代替，而推迟对易子被超前对易子代替，

$$\langle p_2|\theta(z^0)\left[j^+\left(\frac{z}{2}\right),\ j\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle \to \langle p_2|-\theta(-z^0)$$
$$\times\left[j^+\left(\frac{z}{2}\right),\ j\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle.$$

我们可以研究任意宗量值下的量 $\mathscr{T}$ 和 $\bar{\mathscr{T}}$，而不是只讨论 $q$ 和 $\bar{q}$ 在向前光锥中的实际的物理过程. 我们来证明

$$\mathscr{T}(q) - \bar{\mathscr{T}}(\bar{q})|_{\delta=-q} = iC(q)$$

在某个区域内为零. 它是对易子的 Fourier 变换，

$$C(q) = \int d^4z e^{iz\cdot q}\langle p_2|\left[j^+\left(\frac{z}{2}\right),\ j\left(-\frac{z}{2}\right)\right]|p_1\rangle$$
$$= (2\pi)^4\sum_n \langle p_2|j^+(0)|n\rangle\langle n|j(0)|p_1\rangle$$
$$\times\delta^4\left(q + \frac{p_1 + p_2}{2} - p_n\right) - (2\pi)^4$$

$$\times \sum_n \langle p_2|j(0)|n\rangle\langle n|j^+(0)|p_1\rangle$$

$$\times \delta^4\left(q - \frac{p_1 + p_2}{2} + p_n\right). \qquad (5\text{-}173)$$

如果真空是谱中孤立的点，这表示没有无质量粒子，则对上面和式中的每一项有贡献的态 $|n\rangle$ 中，有一个最低的正值 $p_n^2$（真空的贡献被连接假说排除了）。因此，$C(q)$ 在图 5-8 中的、以两个双曲面为边界的区域外为零。一个相应于质量 $M_+$，另一个为 $M_-$，并且它们分别以 $-\frac{1}{2}(p_1+p_2)$ 及 $\frac{1}{2}\times(p_1+p_2)$ 为中心。我们的结论是，在相应于图 5-8 中非阴影区的非物理点上，振幅 $\mathscr{T}(p_2,q_2;\ p_1,q_1)$ 和 $\mathscr{T}(p_2,-q_1;\ p_1,-q_2)$ 重合。这就是交叉对称性，它把一些过程联系起来了，在这些过程中，出现于反应一端的粒子被反应另一端的相反四维动量的反粒子所取代(因而是非物理的)。如果我们能证明，从物理的动量值出发可以解析延拓到重合的区域中，则有关交叉对称性的论述就是有意义的。这个性质是场论的一个值得注意的结果。

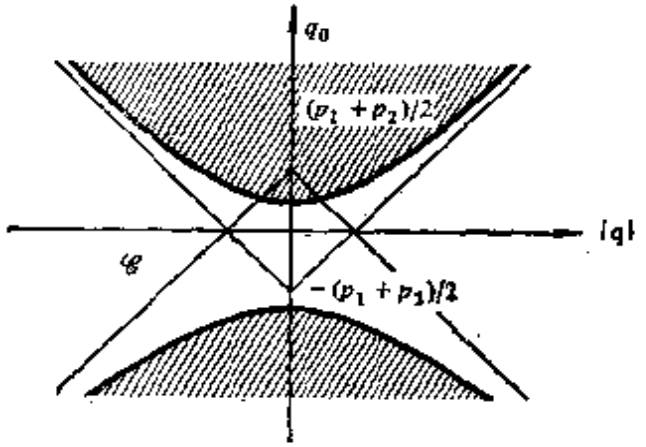



图 5-8　在动量空间中限制对易子支集的两个双曲面。非阴影区是重合的区域，用 $\mathscr{C}$ 表示。

我们用 $\mathscr{T}(q)$ 表示在式 (5-172) 中以 $q$ 代替 $-q$ 后给出的式子，就发现 $\mathscr{T}(q)$ 在向后区域中，即在 $\mathrm{Im}q$ 是负的类时

矢量区中，是解析的。

这样，$\mathscr{T}(q)$ 和 $\bar{\mathscr{T}}(q)$ 有一个先验的不相连的解析区，而在实数区 $\mathscr{C}$ 中是重合的。Bremermann, Oehme 和 Taylor 得到的著名的楔形物的边缘定理，使我们知道 $\mathscr{T}$ 和 $\bar{\mathscr{T}}$ 互为解析延拓，而公共的解析区域大于向前、向后区域和 $\mathscr{C}$ 的并集。

如果我们讨论只有一个复变量的函数，则问题就容易解决了。事实上，如果 $f^{\pm}(z)$ 分别在上和下半复 $z$ 平面上解析，并在一段实轴上重合，则简单地用 Cauchy 定理就可证明它们是同一解析函数的分枝。重合点事实上是解析点。目前的情况显然比较复杂。每一个重合点周围有洞，它们相应于类空的虚部方向，在那里 $\mathscr{T}$ 和 $\bar{\mathscr{T}}$ 都没有定义。所以，这种图形命名为"楔形物的边缘"。另外，在有几个复变量的分析中发现了一些新的性质，它们与单复变量情况没有相当性。这就是全纯包络面（holomorphy envelope）的概念。在区域 $\mathscr{D}$ 中解析的几个变量的函数至少可推广到区域 $\bar{\mathscr{D}} \supset \mathscr{D}$ 中，它有这样的性质：通过它的任何一个边界点，我们都可发现一个解析流形，即解析函数的一组零点，除了问题中的边界点外完全在 $\bar{\mathscr{D}}$ 外。这种性质称赝凸面体性（和普通的凸面体类似），其解析流形代替了平面。在目前的情况中，即使 $\bar{\mathscr{D}}$ 的纯几何结构是可能的，从对易子平均值的 Källen-Lehmann 表示推广出来的有趣的表示，对解决问题也是有价值的。

读者可能会问，在简单的情况中，如 $p_1 = p_2 = p$，$q_1 = q_2 = q$ 的向前散射情况中，包括向前和向后区域的原始的解析区域是否不够。下面的解释可以消除这种疑问。令复矢量 $q$ 在质壳上，并写成 $q = q_R + iq_I$。于是条件 $m_0^2 = q^2 = q_R^2 - q_I^2 + 2iq_R \cdot q_I$ 表示 $q_R$ 和 $q_I$ 是正交的，所以 $q_I$ 不可能是类时的。如果是的话，则由正交条件可得 $q_R$ 应是类空的，即 $q_R^2 < 0$，于是 $q_R^2 - q_I^2$ 是负的。这样，只有具有负的或复的质量平方的 $q$ 才属于此区域。对这样的非物理值，立即可写出色散关系，但为了得到一些关于物理过程的信息，我们还要得到在 $q^2$ 上的适当的解析延拓。

### 5-3-3 Jost-Lehmann-Dyson 表示

这是在方程 (5-173) 中给出的对易子矩阵元 $C(q)$ 的表示，它和动量空间的谱的性质以及形态空间中支集的性质是一致的。回忆一下自由场对易子 $\Delta(x, \mu^2)$ 的表示式 [方程 (3-55) 和 (3-56)]，它在光锥外为零，并且有集中于质量为 $\mu^2$ 的双曲面上的奇性 Fourier 变换。Jost-Lehmann-Dyson 表示把 $C(q)$ 写成这种自由场对易子在形态空间中的叠加，或在动量空间中的卷积，

$$C(q) = \int_{\mathscr{C}} d^4k d\mu^2 \varepsilon(q^0 - k^0) \times \delta[(q-k)^2 - \mu^2]\rho(k, \mu^2), \quad (5\text{-}174)$$

权重 $\rho$ 只对那些使双曲面 $(q-k)^2 = \mu^2$ 不穿过区域 $\mathscr{C}$ 的 $k$ 和 $\mu^2$ 值才不为零，这时的双曲面称为允许的。这种双曲面有一个中心 $k$，它位于中心在 $-[(p_1+p_2)/2]$ 的未来光锥和中心在 $(p_1+p_2)/2$ 的过去光锥相交所围成的区域内，于是对 $\mu$ 积分的最低限为

$$\mu_{\inf} = \max\left\{0, M_+ - \sqrt{\left(\frac{p_1+p_2}{2}+k\right)^2}, \quad M_- - \sqrt{\left(\frac{p_1+p_2}{2}-k\right)^2}\right\}.$$

显然，式 (5-174) 给出的 $C(q)$ 具有所有需要的性质。Dyson 曾证明反过来也对，即 $C(q)$ 必须允许这种形式的表示。我们为对此有兴趣的读者在注记中引了一些文章。

为了对振幅推导出相应的表示，我们只要比较一下方程 (5-171) 和 (5-173) 即可。除了因子 $i$ 外，它们差一个和形态空间中的对易子相乘的阶跃函数。我们必须小心对待这种相乘的广义函数，它可能会给出一些集中于 $x$ 空间原点处的

不确定的贡献，目前暂时不去考虑这种复杂问题，我们得到动量空间的卷积，它给出

$$\mathscr{T}(q) = -\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{d^4k\,d\mu^2\rho(k,\mu^2)}{(q-k)^2-\mu^2}. \qquad (5\text{-}175)$$

对 $q$ 取实的正类时值极限，但在向前光锥中有极小的虚部，就重新得到了物理振幅。

对 $\mu^2$ 积分时，在大值处可能会遇到发散，这反映在动量空间中推迟对易子无确切定义。但是，可作如下形式的减除：

$$\mathscr{T}(q) = -\frac{1}{2\pi}\int_s d^4k\,d\mu^2 \frac{\rho(k,\mu^2)}{(q-k)^2-\mu^2} \times\left[\frac{(q-k)^2+\mu_0^2}{\mu^2+\mu_0^2}\right]^n + P(q), \qquad (5\text{-}176)$$

其中 $n$ 是整数，$P(q)$ 是 $q$ 的多项式，这样作不改变从式(5-175)得出的解析性。所以，我们将不明显地写出此减除。

表示式(5-175)表明，$\mathscr{T}g$ 是所有不在允许双曲面上的实数和复数点的解析函数。

从 Jost-Lehmann-Dyson 表示推得的解析区域 $\mathscr{D}$，很难具体化。我们从 Bros, Froissart, Omnes 和 Stora 的工作中借用了一种有用的几何结构。他们的技巧是引进第五个坐标 $z$，并把原来的复四维 $q$ 空间映射到二次曲面 $P$ 上：$z = q^2$。这样，方程 (5-175) 中的分母被线性($z$ 和 $q$ 的)表示式 $z - 2q\cdot k + k^2 - \mu^2$ 所代替，而允许双曲面被相应的平面所代替，其中 $(k,\mu^2)$ 属于 $S$。于是，我们把每一个复数点 $(z,q)$ 和一条被 $\mathrm{Re}z + \lambda\mathrm{Im}z$, $\mathrm{Re}q + \lambda\mathrm{Im}q$ 参数化地描写的直线 $L(z,q)$ 联系起来了。如果 $(z,q)$ 属于 $P$，则它的共轭也属于 $P$，所以 $L(z,q)$ 与 $P$ 交于两点(相应于 $\lambda = \pm i$)。从二次曲面的性质得到，$L(z,q)$ 的实数点(由实的 $\lambda$ 得到)不能在 $P$ 上，所以在实数图中，$L(z,q)$ 完全在 $P$ 以上，或者完全在 $P$ 以下[特殊的情况是 $L(z,q)$ 完全在 $P$ 中]。

实的重合区域在两个平面 $[(p_1+p_2)/2]^2 \pm q\cdot(p_1+p_2) + z < M_\pm^2$

所限定的区域中，被映射到 $P$ 上，而允许平面不和重合区 $\mathscr{C}$ 相交．由 $\mu^2>0$ 可得，它们在和 $P$ 相切的平面之上．因为我们讨论的是平面，所以这定义了一个被排除的区域，即 $\mathscr{C}$ 的凸包（称为 $\bar{\mathscr{C}}$），它不会被允许平面相截（图 5-9）．现在我们可这样来描述解析区域．在下面的任一种情况下，复数点 $(x,q)$ 都属于此解析区域：

(a) $L(x,q)$ 完全在 $P$ 的下面，这种情况相应于原来的区域

(b) $L(x,q)$ 和 $\bar{\mathscr{C}}$ 相截．事实上，如果 $(x,q)$ 属于允许平面，则它的共轭也这样．于是由于线性性质，$L(x,q)$ 就属于允许平面，所以就不会和 $\bar{\mathscr{C}}$ 相截．

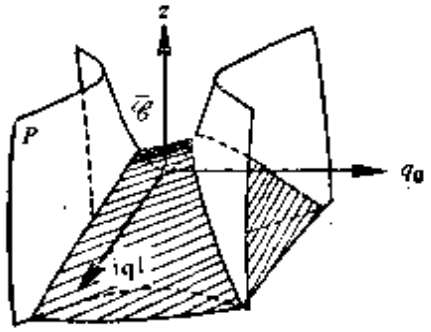



图 5-9　$\bar{\mathscr{C}}$ 区域(阴影区)，在五维空间中重合区域的凸包．

## 5-3-4　向前色散关系

现在我们要来考察 $q_1=q_2=q$，$p_1=p_2=p$ 时的弹性向前振幅对入射能量 $\nu=q\cdot p/m_b=(s-m_a^2-m_b^2)/2m_b$ 的函数关系．我们希望证明它在一个割开的平面上是解析的，割线在一部分实轴上．按照 5-3-2 末尾的论述，这是一个非平庸的结果．当然，我们要求满足物理质壳条件 $q^2=m_a^2$．

这是用平面 $x=m_a^2$ 去截由前面构造出来的曲面 $P$ 而得到的，结果是一个双曲面．我们必须研究相应的和 $\bar{\mathscr{C}}$ 的相截．对在质壳上的复数 $q$，实数线 $L(m_a^2,q)$ 与此双曲面不相交，它与双曲面已有两个公共的复数点 $(m_a^2,q)$ 和 $(m_a^2,q^*)$．我们注意到，对固定的 $p$，Lorentz 不变性表示 $\mathscr{D}$ 只是 $q$ 在 $p$ 上的分量的函数．把 $p$ 取成沿时间轴，表示我们只要注意有两个不为零的分量（比如说 $q_0$ 和 $q_1$）的矢量 $q$．这个问题事实

上是两维的，第三个分量 $z$ 是为了方便才加上去的. 双曲线 $q_0^2 - q_1^2 = m_a^2$ 上的复数点 $(m_a^2, q)$ 满足 $(\mathrm{Im}q)^2 < 0$，所以假定 $L(m_a^2, q)$ 在平面 $(q_0, q_1)$ 中和凸包 $\bar{\mathscr{G}}$ 相交，则它是一个解析点，其条件是 $\mathscr{G}$ 和质壳双曲线的两枝都相遇.

现在，$\mathscr{G}$ 是由 $(p \pm q)^2 < M_\pm^2$，或等价地是由 $m_b^2 \pm 2p \cdot q + z < M_\pm^2$ 给定的. $\mathscr{G}$ 和上分枝相遇的条件是 $m_b^2 + 2m_a m_b + m_a^2 \leqslant M_+^2$ 或 $(m_a + m_b)^2 \leqslant M_+^2$. 类似地 $\mathscr{G}$ 和下分枝相遇的条件是 $(m_a + m_b^2) \leqslant M_-^2$. 于是，这些是使复奇异性不在复 $\nu$ 平面上出现的判据. 另一方面，我们知道 $M_\pm^2 \leqslant (m_a + m_b)^2$，它相应于在方程 (5-173) 中求和号下的中间态 $A + B$ 或 $\bar{A} + B$. 由此我们得出，用上面的方法最多只能勉强地证明向前色散关系(没有复奇异性).

$M_+$ 或 $M_-$，或两者同时可能会严格地比弹性阈小. 有一个我们经常遇到的、处理起来可以没有太大困难的情况，即中间孤立态[质量 $M_0^2 < (m_a + m_b)^2$] 出现在阈以下的情况. 它的贡献是能量变量上的一个极点. 把振幅乘以 $(p \pm q)^2 - M_0^2$ 时不改变解析性，但消除了奇异性. 例如，在 $\pi$-核子散射中，核子中间态就是贡献这样一个极点.

我们假定除开这种极点时，条件 $M_\pm^2 \geqslant (m_a + m_b)^2$ 是满足的. 于是，我们的结论是，下面的性质对向前散射的情况成立:

1. 除了实轴上从 $m_a$ 到 $+\infty$ 和从 $-\infty$ 到 $-m_a$ 的割线以及它们之间的可能的极点以外，振幅在复 $\nu$ 平面上是解析的.

2. 在两条割线之间振幅是实的，所以穿过割线的不连续量是纯虚的. 这可从适用于向前散射的方程 (5-173) 得到.

3. 对大的 $\nu$，振幅是多项式有界的. 这是由假定场有慢增的性质得来的，对复数的 $\nu$ 更是如此.

4. 最后，如果 $A \equiv \bar{A}$，则交叉对称性要求 $\mathscr{T}(-\nu^*) = \mathscr{T}(\nu)^*$.

用这些知识和 Cauchy 公式，可得到一个简单的解析表

示。为了简单起见，如性质 4 那样假设 $A \equiv \bar{A}$，并设在无穷远处 $\mathscr{T}$ 为零。于是，可以写出

$$\mathscr{T}(\nu) = \text{极点项} + \frac{1}{\pi}\int_{(m_a+m_b)^2}^{\infty} d\nu' \mathrm{Im}\mathscr{T}(\nu') \times\left(\frac{1}{\nu'-\nu} + \frac{1}{\nu'+\nu}\right). \tag{5-177}$$

如果 $\mathscr{T}(\nu)$ 象 $\nu$ 的幂次那样上升，则将 $\nu$ 除以 $\nu$ 的实多项式得到的函数也有类似的表示式。

我们必须强调，上面的表示式中只有物理上可测量的量。吸收部分 $\mathrm{Im}\mathscr{T}(\nu)$ 是通过光学定理，即方程 (5-156) 和总截面联系起来的，而可能的极点项以耦合常数的乘积为留数。事实上，我们可能够用式 (5-177) 类型的公式来测量这种耦合常数。

作为一种解释，我们来考虑 $\pi$-核子散射的比较可靠的例子。把任意电荷下的两个独立振幅写成

$$\mathscr{T} = \bar{u}(p_2)\left[A + \frac{1}{2}(q_1+q_2)B\right]u(p_1), \tag{5-178}$$

其中 $\bar{u}(p_2)$，$u(p_1)$ 是描写末态(动量为 $p_2$)及初态(动量为 $p_1$)核子的在质壳上的 Dirac 旋量。入射 $\pi$ 的动量为 $q_1$，末态的为 $q_2$。运动学不变量为

$$\begin{aligned} s &= W^2 = (p_1+q_1)^2, \\ t &= (q_1-q_2)^2 = -2q^2(1-\cos\theta), \\ u &= (p_1-q_1)^2 = 2M^2 + 2\mu^2 - s - t. \end{aligned} \tag{5-179}$$

其中 $M$ 和 $\mu$ 分别为核子和 $\pi$ 的质量，$\theta$ 为质心系散射角，$q$ 是 $\pi$ 在此系中的三维动量，$W$ 为质心系总能量，它使

$$q^2 = \frac{[(W+M)^2-\mu^2][(W-M)^2-\mu^2]}{4W^2}. \tag{5-180}$$

由 5-1-1 可知，微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{M}{4\pi W}\right)^2 |\mathscr{T}|^2, \tag{5-181}$$

而在式(5-178)中，$A$和$B$只与不变量有关．先作关于对称性的讨论(第十一章)，我们知道，强作用是同位旋不变的，核子同位旋为$\frac{1}{2}$，而$\pi$同位旋为1．于是，所有的道是用相应于总同位旋为$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$的两个约化矩阵元来描写的，即对有确定电荷的任何一个过程，$A$，$B$分别是$A^1$、$A^3$和$B^1$、$B^3$的组合．这就给出了如下的表：

$$\left.\begin{matrix}\pi^+p\to\pi^+p\\ \pi^-n\to\pi^-n\end{matrix}\right\}\ \mathcal{T}^3=\mathcal{T}^{(+)}-\mathcal{T}^{(-)},$$

$$\left.\begin{matrix}\pi^-p\to\pi^-p\\ \pi^+n\to\pi^+n\end{matrix}\right\}\ \frac{1}{3}(\mathcal{T}^1+2\mathcal{T}^1)=\mathcal{T}^{(+)}+\mathcal{T}^{(-)},\qquad(5\text{-}182)$$

$$\left.\begin{matrix}\pi^-p\to\pi^0n\\ \pi^+n\to\pi^0p\end{matrix}\right\}\ \frac{\sqrt{2}}{3}(\mathcal{T}^3-\mathcal{T}^1)=-\sqrt{2}\,\mathcal{T}^{(-)}.$$

最后一对过程称为电荷交换反应．因为只有两个约化振幅可用来描写三个可测量的过程，这表示在截面之间有一些三角不等式．引进下面的组合是方便的：

$$\mathcal{T}^{(+)}=\frac{\mathcal{T}^1+2\mathcal{T}^3}{3}$$

$$\mathcal{T}^{(-)}=\frac{\mathcal{T}^1-\mathcal{T}^3}{3}\qquad \mathcal{T}^{(\pm)}(q_1,q_2)=\pm\mathcal{T}^{(\pm)}(-q_2,-q_1).\qquad(5\text{-}183)$$

在交换$s\leftrightarrow u$的情况下，它们分别为偶的或奇的．从方程(5-178)的明显的结构，并利用变量

$$\nu=\frac{s-u}{4M}\qquad(5\text{-}184)$$

在交叉变换下的奇性(注意对$s=0$它和实验系中入射$\pi$的能量一致)，就得到

$$\begin{aligned}A^{(\pm)}(-\nu,t)&=\pm A^{(\pm)}(\nu,t),\\ B^{(\pm)}(-\nu,t)&=\mp B^{(\pm)}(\nu,t).\end{aligned}\qquad(5\text{-}185)$$

$t=0$时，振幅在沿实轴从弹性阈$[s=(M+\mu)^2,\ \nu=\mu]$到无穷远($s$割线)和从负无穷远到$u$道阈$[u=(M+\mu)^2,\ \nu=-u]$割开的平面上解析(关于$\nu$)．

另外，在$s$道和$u$道中，沿实轴有相应于核子中间态的孤立极点．我们可写出等效的赝标$\pi$-核子相互作用

$$\mathscr{L}_{\pi N}=ig_{\pi NN}\bar{\psi}\pi_\alpha\tau_\alpha\gamma_5\psi, \tag{5-186}$$

其中 $\tau_\alpha$ 是核子同位旋矩阵，$\pi_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 是 $\pi$ 场的三个厄米分量．于是，极点的贡献为

$$\mathscr{T}_{\text{pole}}=g_{\pi NN}^2\bar{u}(p_2)\tau_\beta\tau_\alpha\gamma_5\frac{\not p_1+\not q_1+M}{\mu^2+2p_1\cdot q_1}\gamma_5u(p_1)$$
$$+g_{\pi NN}^2\bar{u}(p_2)\tau_\alpha\tau_\beta\gamma_5\frac{\not p_1-\not q_1+M}{\mu^2-2p_1\cdot q_1}\gamma_5u(p_1). \tag{5-187}$$

现在 $2p_1\cdot q_1=2M_p-t/2$，我们可用质壳旋量所满足的 Dirac 方程来写出，

$$\mathscr{T}_{\text{pole}}=\frac{g_{\pi NN}^2}{2M}\bar{u}(p_2)\left[\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha]\right)\frac{(\not q_1+\not q_2)/2}{\nu_p-\nu}\right.$$
$$\left.-\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha]\right)\frac{(\not q_1+\not q_2)/2}{\nu_p+\nu}\right]u(p_1), \tag{5-188}$$
$$\nu_p=-\frac{\mu^2}{2M}+\frac{t}{4M}.$$

我们看到极点只对 $B$ 振幅有贡献，而

$$B_p^{(+)}=\frac{g_{\pi NN}^2}{2M}\left(\frac{1}{\nu_p-\nu}-\frac{1}{\nu_p+\nu}\right),$$
$$B_p^{(-)}=\frac{g_{\pi NN}^2}{2M}\left(\frac{1}{\nu_p-\nu}+\frac{1}{\nu_p+\nu}\right). \tag{5-189}$$

注意，极点的位置是与 $t$ 有关的．

放进 $t=0$ 时的 $\nu_p$ 值，并暂时不考虑减除问题，就得到向前色散关系为

$$A^{(\pm)}(\nu,0)=\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\nu'\operatorname{Im}A^{(\pm)}(\nu',0)\left(\frac{1}{\nu'-\nu}\pm\frac{1}{\nu'+\nu}\right), \tag{5-190}$$

$$B^{(\pm)}(\nu,0)=\frac{g_{\pi NN}^2}{2M}\left(\frac{1}{\nu_p-\nu}\mp\frac{1}{\nu_p+\nu}\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\nu'\operatorname{Im}B^{(\pm)}(\nu',0)\left(\frac{1}{\nu'-\nu}\mp\frac{1}{\nu'+\nu}\right).$$

事实上，我们可对在有限范围 $-t_M\leqslant t\leqslant 0$ 内固定的 $t$ 来证明关于 $s$ 的解析性，故式(5-190)可推广为

$$A^{(\pm)}(\nu, t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu+t/4M}^{\infty} d\nu' \mathrm{Im}A^{(\pm)}(\nu', t)\left(\frac{1}{\nu'-\nu} \pm \frac{1}{\nu'+\nu}\right),$$

(5-191)

$$B^{(\pm)}(\nu, t) = \frac{g_{\pi NN}^2}{2M}\left(\frac{1}{\nu_p - \nu} \mp \frac{1}{\nu_p + \nu}\right) + \frac{1}{\pi}\int_{\mu+t/4M}^{\infty} d\nu' \mathrm{Im}B^{\pm}(\nu', t)\left(\frac{1}{\nu'-\nu} \mp \frac{1}{\nu'+\nu}\right).$$

这些关系式可以按照 5-3-1 节中的步骤和分波分析合在一起应用. 为此把出现于截面式 (5-181) 中的量 $(M/4\pi W)\mathscr{T}$ 改写为

$$\frac{M}{4\pi W}\bar{u}(p_2,\lambda_2)\left[A + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)B\right]u(p_1,\lambda_1) = \chi_2^{+}(\lambda_2)\left[f_1 + \frac{(\sigma\cdot\mathbf{q}_2)(\sigma\cdot\mathbf{q}_1)}{\mathbf{q}^2}f_2\right]\chi_1(\lambda_1), \quad (5\text{-}192)$$

这里 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是初末态核子的螺旋性，$\chi$，$\chi^+$ 是如下的 Pawli 旋量 [与式 (2-37) 比较]:

$$u(p,\lambda) = \frac{p + M}{\sqrt{2M(M+E)}}\begin{pmatrix}\chi(\lambda)\\ 0\end{pmatrix}.$$

令 $E$ 表示核子在质心系的能量，这给出

$$f_1 = \frac{E+M}{8\pi W}[A + (W - M)B],$$
$$f_2 = \frac{E-M}{8\pi W}[-A + (W + M)B], \quad (5\text{-}193)$$

对式 (5-192) 中的 $2\times 2$ 矩阵可作如下的角动量分解:

$$f_{\lambda_2,\lambda_1} = \frac{1}{q}\sum_J\left(J + \frac{1}{2}\right)f^J_{\lambda_2,\lambda_1}\mathscr{D}^{J*}_{\lambda_1,\lambda_2}(\varphi,\theta,0), \quad (5\text{-}194)$$

其中 $J$ 取遍所有的半整数值.

宇称不变性给出 $f^J_{1/2,1/2} = f^J_{-1/2,-1/2}$ 和 $f^J_{1/2,-1/2} = f^J_{-1/2,1/2}$. 时间反演不给出任何新的关系. 利用有确定螺旋性的旋量，我们得到 $\varphi = 0$ 时有

$$f_{1/2,1/2} = f_{-1/2,-1/2} = (f_1 + f_2)\chi_2^{+}\left(\frac{1}{2}\right)\chi_1\left(\frac{1}{2}\right) = (f_1 + f_2)\cos\frac{\theta}{2}, \quad (5\text{-}195)$$

$$f_{1/2,-1/2} = -f_{-1/2,1/2} = (f_1 - f_2)\chi_2^+\left(\frac{1}{2}\right)\chi_2\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= (f_1 - f_2)\sin\frac{\theta}{2}.$$

正如已说过的那样，宇称把矩阵 $f_{\lambda_1,\lambda_2}$ 如下那样对角化，使

$$f_\pm^J = f^J_{1/2,1/2} \pm f^J_{-1/2,1/2} = 2e^{i\delta_{J,\pm}}\sin\delta_{J,\pm}. \tag{5-196}$$

相移 $\delta_{J,\pm}$ 在非弹性阈以下是实的，它相应于在总角动量为 $J$、宇称为 $\pm(-1)^{J+\frac{1}{2}}$ 的道中散射. 在非相对论记法中，这些态是用确定轨道角动量 $l$ 和 $J = l \pm \frac{1}{2}$ 来得到的，所以相应的相移也习惯地分别用 $\delta_{l,+}$ 和 $\delta_{l,-}$ 来表示. 现在，我们应用 Wigner[8] 函数的显式：

$$\left(J + \frac{1}{2}\right) d^J_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2}\left(P'_{l+(1/2)} - P'_{l-(1/2)}\right),$$
$$\left(J + \frac{1}{2}\right) d^J_{-1/2,1/2} = \sin\frac{\theta}{2}\left(P'_{l+(1/2)} + P'_{l-(1/2)}\right). \tag{5-197}$$

用 $l$ 的记号 ($\delta_{J,+} \equiv \delta_{l,+}$, $\delta_{J,-} \equiv \delta_{l+1,-}$) 时，就给出下面的展开式：

$$f_1(\cos\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[P'_{l+1}(\cos\theta)f_{l,+} - P'_{l-1}(\cos\theta)f_{l,-}\right],$$
$$f_2(\cos\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} P'_l(\cos\theta)(f_{l,+} - f_{l,-}), \tag{5-198}$$
$$f_{l,\pm} = \frac{e^{i\delta_{l,\pm}}\sin\delta_{l,\pm}}{q}.$$

当然，对 $l = 0$，唯一留下的振幅是 $f_{0,+}$. 现在来研究色散关系中的减除问题. 我们在下一节中才来作一般的叙述，这里我们只是说，在 $\pi$-核子散射中可以证明只有振幅 $A^{(+)}$ 需要作减除.

方程 (5-190) 的经典应用，是确定等效耦合常数. 此方法的原则是从低能相移分析来精确地计算 $\pi^+$- 核子弹性散射振幅 $B$ (事实上，主要是 $J = \frac{3}{2}$, $T = \frac{3}{2}$ 的共振)，并将它的向前方向的实部和色散积分给出的值作比较. 后者也是低能贡献占优势. 所以，此方法是自洽的. Hamiltom 和 Woolcock 引用的值是

$$f^2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{g_{\pi NN}\mu}{2M}\right)^2 = 0.081 \pm 0.002. \tag{5-199}$$

色散积分在解决各种中间能量的相移问题时，起着主导的作用．作为一个习题，我们建议大家把上面的描述推广到 $\pi$ 道反应 $\pi\pi\to N\bar{N}$ 中去．

## 5-3-5 动量转移解析性

下面我们不考虑外粒子的自旋．虽然把自旋考虑进去并非是直接的，但我们仍可以这样做而不改变结果．我们不象 5-3-2 那样，把在初末态中各约化一个粒子的约化公式作为讨论的出发点，而来约化弹性过程的两个初态粒子，它们的动量为 $p_1$ 和 $q_1$，与之相联系的场量为 $\psi$ 和 $\varphi$．于是我们先写出连接的 $S$ 矩阵元

$$\langle p_2,q_2|S|p_1,q_1\rangle_c = -\int d^4xd^4y e^{-i(p_1\cdot x+q_1\cdot y)}(\Box_x+m_b^2)$$
$$\times(\Box_y+m_a^2)\langle p_2,q_2|T\psi(x)\varphi(y)|0\rangle_c. \qquad (5\text{-}200)$$

再回过来推导此公式时，发现在弹性过程的物理区域中也可用推迟对易子来代替时序乘积．去掉不重要的接触项，我们就可以作如下的替代（$j_\psi$ 和 $j_\varphi$ 是 $\psi$ 和 $\varphi$ 场的源）：

$$(\Box_x+m_b^2)(\Box_y+m_a^2)\langle p_2,q_2|T\psi(x)\varphi(y)|0\rangle_c\to$$
$$\langle p_2,q_2|\theta(x^0-y^0)[j_\psi(x),j_\varphi(y)]|0\rangle_c. \qquad (5\text{-}201)$$

考虑到动量守恒，我们得到

$$\langle p_2,q_2|S|p_1,q_1\rangle_c=(2\pi)^4\delta^4(p_2+q_2-p_1-q_1)i\mathscr{T}_{fi}, \qquad (5\text{-}202)$$

$$\mathscr{T}_{fi}=i\int d^4x e^{i(q_1-p_1)\cdot x/2}$$
$$\times\langle p_2,q_2|\theta(x^0)\left[j_\psi\left(\frac{x}{2}\right),j_\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]|0\rangle_c.$$

此表示式指出，$\mathscr{T}$ 关于变量 $q=(q_2-q_1)/2$ 是解析的，这和从 Jost-Lehmann-Dyson 公式得到的一样，所以可以重复对向前散射所作的分析．取总的入射动量 $p=p_1+q_1$ 作为时间轴．这样，我们就可在质心系中进行讨论，并利用式（5-202）来得到关于散射角余弦的解析性．也会被用到的超前和推迟对易子的重合区是被两个双曲面限定的，它们相应于分别对矩阵元

$$\langle p_2,q_2|j_\psi(0)|n\rangle\langle n|j_\varphi(0)|0\rangle,\quad \langle p_2,q_2|j_\varphi(0)|n\rangle\langle n|j_\psi(0)|0\rangle,$$
$$\left(\frac{p}{2}+q\right)^2<M_1^2, \qquad \left(\frac{p}{2}-q\right)^2<M_2^2. \qquad (5\text{-}203)$$

有贡献的中间态 $|n\rangle$ 的最低质量为 $M_1$ 和 $M_2$。粒子 $a$（动量为 $q_1$）和 $b$（动量为 $p_1$）的稳定性意味着

$$M_1^2 > m_a^2 \qquad M_2^2 > m_b^2. \tag{5-204}$$

对质壳上的散射有

$$\left(\frac{p}{2}+q\right)^2 = q_1^2 = m_a^2, \quad \left(\frac{p}{2}-q\right)^2 = p_1^2 = m_b^2. \tag{5-205}$$

在五维空间 $x$，$q$ 中看到（记住我们在 $x = q^2$ 的曲面上讨论），这两个线性条件确定了一个三维线性流形，它显然必定和 $P$ 有一个实交点。另外，由

$$\frac{p^2}{4} + 2p\cdot q + x = M_1^2, \qquad \frac{p^2}{4} - 2p\cdot q + x = M_2^2 \tag{5-206}$$

定义的平面，和 $P$ 交于限定 $\mathscr{C}$ 的两个双曲面上。我们用 $\bar{\mathscr{C}}$ 表示它的凸包。由于稳定性条件，使表示质壳式（5-205）的三维线性流形沿着相对三维动量 $\mathbf{q}^2 = \mathbf{p}_1^2 = \mathbf{q}_1^2$ 为常数的球 $S_1$，和 $P$ 相截。和 $\bar{\mathscr{C}}$ 的相截也是一个球 $S_2$，其半径 $R$ 大于 $|\mathbf{p}|$，并是质量的函数（图 5-10）。这样，解析区域可以完全用 $\mathbf{q}$ 来描写。对 $S_1$ 上的任意一个复数点，有

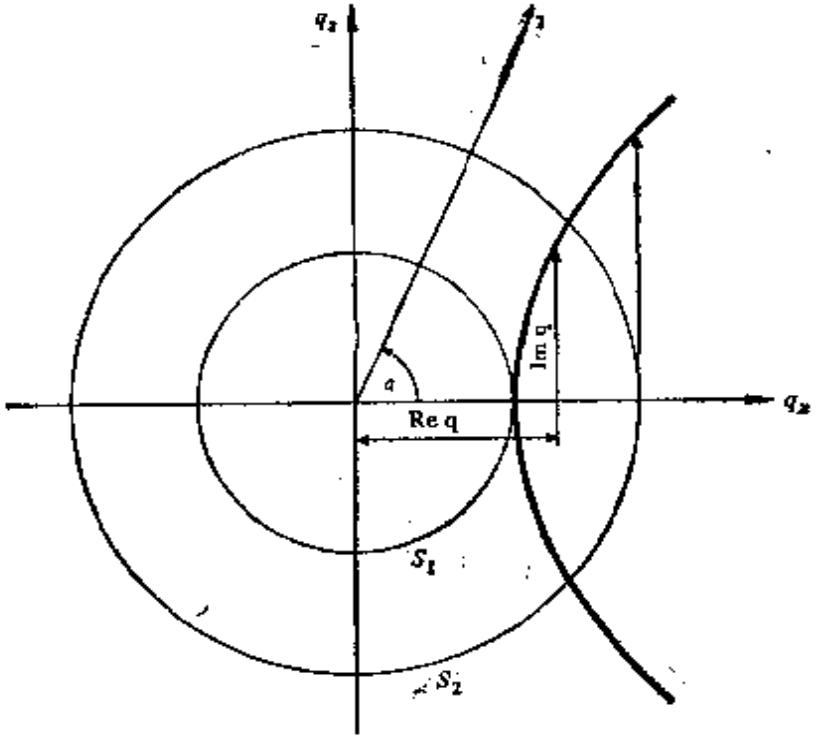



图 5-10　在质壳相对三维动量上的解析性，此质壳有实的截线。

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\mathbf{q}\cdot\mathrm{Im}\mathbf{q} &= 0, \\ \mathrm{Re}\mathbf{q}^2 - \mathrm{Im}\mathbf{q}^2 &= \mathbf{q}^2. \end{aligned} \tag{5-207}$$

我们记得，$\mathbf{q}^2$ 被看成是在质心系中弹性散射的共同三维动量的长度平方．作为解析点，复数点 $\mathrm{Re}\mathbf{q}+i\mathrm{Im}\mathbf{q}$ 必须使实数线 $\mathrm{Re}\mathbf{q}+\lambda\mathrm{Im}\mathbf{q}$ 截 $S_2$．因为 $\mathrm{Im}\mathbf{q}$ 正交于 $\mathrm{Re}\mathbf{q}$，这意味着 $\mathrm{Re}\mathbf{q}$ 在 $S_2$ 的内部，而第一个条件说 $\mathrm{Re}\mathbf{q}^2>|\mathbf{p}_1|^2$．边界相应于 $(\mathrm{Re}\mathbf{q})^2=R^2$．我们用散射角

$$x=\cos\theta=\frac{\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2}{\sqrt{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2}}$$

来说明这些结果．长度平方 $\mathbf{q}_1^2$ 也固定为 $\mathbf{q}^2$．于是 $\sqrt{\mathbf{q}_1^2}x=\mathbf{q}\cdot\hat{q}_2$，其中 $\hat{q}_2$ 是单位固定矢量，而变量 $x$ 在一个由方程(5-207)得到的、如下所示的椭圆所包围的复数区域内变动：

$$\sqrt{\mathbf{q}_1^2}\,\mathrm{Re}x=R\cos\alpha \qquad \sqrt{\mathbf{q}_1^2}\,\mathrm{Im}\,x=\sqrt{R^2-\mathbf{q}_1^2}\sin\alpha, \tag{5-208}$$

称其为小 Lehmann 椭圆

$$\frac{\mathrm{Re}^2x}{R^2}+\frac{\mathrm{Im}^2x}{R^2-\mathbf{q}^2}=\frac{1}{\mathbf{q}^2}. \tag{5-209}$$

此椭圆的焦点是 $x=\pm1$，长半轴为 $R/\sqrt{\mathbf{q}^2}$．

更一般地讲，此证明适用于任何一个形为 $\langle p_{\mathrm{out}}|p_1,q_1,\mathrm{in}\rangle$ 的矩阵元，从而给出足够的解析性，并使它可以按相对角度作收敛的球谐展开，这表示 $S$ 矩阵的旋转不变性。

椭圆区域是分波分解的自然收敛区域，在最简单的情况下，此分解是 Legendre 多项式级数．要计算 $R$ 的实际值不是那么容易的．其结果为

$$\frac{R^2}{\mathbf{q}^2}=1+\frac{(M_1^2-m_a^2)(M_2^2-m_b^2)}{\mathbf{q}^2[s-(M_1-M_2)^2]}. \tag{5-210}$$

对弹性振幅存在椭圆解析区，意味着它的吸收部分是在一个大的椭圆中(大 Lehmann 椭圆)解析的．在非弹性阈以下，可以这样来看这一点．记得从方程(5-168)有

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= 16\pi\sum_0^\infty(2l+1)\mathcal{T}_l(s)P_l(\cos\theta), \\ \mathrm{Im}\mathcal{T}_l &= \frac{2q^0}{\sqrt{s}}|\mathcal{T}_l|^2. \end{aligned} \tag{5-211}$$

从对大 $l$ 的 Legendre 多项式的估计可得，展开式(5-211)在长主轴 $\cos\theta_0>1$ 的椭圆中收敛的充要条件，(Taylor 级数的广义 Abel 标准)是 $|\mathcal{T}_l|^{1/l}$ 的最小上限是

$$\frac{1}{\cos\theta_0+\sqrt{\cos^2\theta_0-1}},$$

吸收部分(虚部)是通过类似的级数来定义的，其中 $\mathcal{T}_l$ 用 $\mathrm{Im}\mathcal{T}_l$ 来代替. 从式(5-211)知它在长半轴为 $\cos\theta_1$ 的椭圆中收敛，而 $\cos\theta_1$ 由下式给出:

$$\frac{1}{\cos\theta_1+\sqrt{\cos^2\theta_1-1}}=\left(\frac{1}{\cos\theta_0+\sqrt{\cos^2\theta_0-1}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\theta_0-1+\sqrt{(2\cos^2\theta_0-1)^2-1}},$$

即

$$\cos\theta_1=\cos 2\theta_0.$$

这些分别得到的、关于 $s$ 和 $t$ 的解析性，通过 Mandelstam, Lehmann, Bros、Epstein 和 Glaser 的工作，而推广到了关于两个变量联合的解析性，而 Martin 和他的合作者更进一步有利地用了吸收部分的正定性. 在第六章讨论微扰展开时，我们还有机会回到这个问题上来.

在结束这一节时，我们要提出两个重要的结果，它们对大能量行为加上了限制，并和解析性有密切的关系.

第一个是 Froissart 得到的对大 $s$ 总截面行为的限制. 直观的想法是，如果强作用的力程是有限的，则总截面在无穷大处就有界. 但是，事实上，即使从经验上来看，事情也不是那么简单. 理由是，当相互作用通过交换有自旋的粒子传递时，预期会有与速度有关的力.

推导中需要如下的假设:

1. 解析性区域作这样的扩大，使对固定的 $|t|<t_0$ 可写出关于 $s$ 的色散关系，其中最多有 $n$ 次减除. 在公理化的框架上得到了多项式有界，并且也是拉氏函数场论逐项的结果. 事实上，例如对 $\pi$-核子散射过程，可以证明 $t_0$ 等于 $4m_\pi^2$.

2. 从关系式 $t=-2q^2(1-\cos\theta)$ 及下面的事实：可以证明吸收部分的 Legendre 级数在长半轴为 $\cos\theta_0=1+t_0/2q^2$ 的椭圆内是收敛的(对由正定性得来的大 Lehmann 椭球是一改善)，可得到

$$\mathrm{Im}\mathscr{T}_l<\frac{s^n}{(2l+1)P_l(1+t_0/2q^2)}. \tag{5-212}$$

对大于 1 的固定的 $x$，$P_l(x)$ 是正的，并且随 $l$ 指数增加.

实质上，$P_l(x)$ 的行为如 $(x+\sqrt{x^2+1})^l$ 那样，所以吸收部分的级数在某一 $l_{\max}$ 处有效地截断，对大的 $s$，其量级为

$$l_{\max}=n\ln s\frac{q}{\sqrt{t_0}}. \tag{5-213}$$

从么正性有

$$|\mathscr{T}_l|^2<\frac{\sqrt{s}}{2q}\mathrm{Im}\mathscr{T}_l.$$

在 $|P_l(\cos\theta)|\leqslant 1$ 的物理区内，振幅级数的上限为 $16\pi\times\sum_0^{l_{\max}}(2l+1)|\mathscr{T}_l|$，而从么正性又得 $|\mathscr{T}_l|<\sqrt{s}/2q\sim 1$，于是

$$|\mathscr{T}(s,\cos\theta)|<16\pi l_{\max}^2=\text{常数}\times s(\ln s)^2. \tag{5-214}$$

用最大的减除数 $n$ 可以精确地估计其中的常数. 事实上，用和式(5-214)类似的 $u$ 道中的限制，和 Phragmen-Lindelöf 定理，来证明在复数方向上的上限为 $s(\ln s)^2$，就可把减除减为 2 次，于是 $n=2$. 所以 Froissart 上限的最后估计是

$$|\mathscr{T}(s,\cos\theta)|<16\pi\frac{q^2}{t_0}(\ln s)^2. \tag{5-215}$$

再从光学定理得

$$\sigma_{\mathrm{tot}}<\frac{1}{t_0}(\ln s)^2, \tag{5-216}$$

即使对数的标度是不确定的，最新一代加速器所得到的高能资料所显示的趋势，在定性上也明显地和这个预言的上限一致。用等效的不透明半径 $\rho = l_{\max}/q \sim \ln s/\sqrt{t_0}$ 来解释角动量截断 (5-213) 是令人感兴趣的。根据位势类比可得 $\rho$ 是 $1/\sqrt{t_0}$ 的量级(对 $\pi$-核子散射为 $1/2\,m_\pi$)。上面的结果和此粗糙的预言只差一个随能量对数增加的因子。

在解析性基础上预言的另一个性质是，粒子和反粒子从一个给定靶上散射的总截面渐近地相等。

理论上最早是 Pomeranchuk 发现的。由于对大的 $s$ 截面可如 $(\ln s)^2$ 那样增加，所以他的定理的陈述需要一些条件。如果 $\sigma$ 和 $\bar{\sigma}$ 表示这两个截面，于是在适当的假设下，我们可证明当 $s$ 趋向无穷时 $\sigma/\bar{\sigma} \to 1$。

对定域性和解析性在讨论散射过程中起的作用问题还可以，并且也应该谈得更多一些。无疑地，读者可以在大量的关于这个问题的文献中找到更丰富的论述。

## 注记

关于 Källen-Lehmann 表示见 G. Källen, "Quantum Electrodynamics" Springer-Verlag, Berlin, 1972。渐近理论包含在 H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, vol. 1, p. 205, 1955 的工作中。在 J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 3, p. 296, 1959 中讨论了流对易关系中的增加项。

微扰计算已作为课堂上的练习。关于 Compton 效应的许多资料都可在 R. D. Evans, *Handbuch der. Physik*, vol. XXXIV, p. 218, 1958 中找到。

关于色散关系的基础，读者可根据各人的爱好，从下面的一些参考书中来选择：N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov,

"Introduction to the Theory of Quantized Fields" Interscience, New York, 1959; Proceedings of the 1960 Les Houches Summer School, "Dispersion Relations and Elementary Particles" edited by C. de Witt and Omnes, Hermann, Paris, 1960, 特别是其中的 M. L. Goldberger, A. S. Wightman 和 R. Omnes 的讲演; 1960 Scottish Universities' Summer School, "Dispersion Relations", edited by G. R. Screaton, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961; 以及 Proceedings of the International 1964 School of Physics Enrico Fermi, "Dispersion Relations and Their Connection with Causality" edited by E. P. Wigner, Academic Press, New York, 1964, 特别是 M. Froissart 的讲演.

关于 $\pi$-核子散射, 例如可参看 "Strong Interactions and High Energy Physics", 1963 Scottish Universities' Summer School, edited *by* R. G. Moorhouse, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1964 中的 J. Hamilton 的讲演.

关于解析性以及它的由主要原理, 包括对各种高能限制的讨论, 推出的物理结果的总结可参见 "Physique des Particules", Les Houches 1971 Summer School, edited *by* C. de Witt and C. Itzykson, Gordon and Breach, New York, 1973 中 A. Martin 的讲演.

$S$ 矩阵理论的基础在 "The $S$-Matrix", *by* D. Iagolnitzer, North Holland, Amsterdam, 1978 中进行了研究.

# 第六章　微　扰　论

这里我们来推出相对论性的微扰论，并介绍图技术，讨论一些相互作用中有微商的情况．我们把展开写成关于 Planck 常数的级数，并研究它的一些基本的拓朴性．引进 Feynman 积分的参量表示，用来定义欧氏延拓，并给出了解析性和不连续性公式．

## 6-1　积分表示和 Feynman 规则

基本的问题是计算 Green 函数，即相互作用场的编时乘积的真空平均值

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)]|0\rangle. \tag{6-1}$$

为了简洁起见，我们考虑普通的标量场 $\varphi$（或场的集合），而在下一节中我们将把注意力集中于量子电动力学上．把所有的 Green 函数都放到生成泛函中来是方便的，

$$\begin{aligned}Z(j)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n j(x_1)\cdots j(x_n)G(x_1,\cdots,x_n)\\&=\langle 0|T\exp\left[i\int d^4x j(x)\varphi(x)\right]|0\rangle.\end{aligned}\tag{6-2}$$

$S$ 矩阵可以表示成方程 (5-38) 那样的紧凑的形式：

$$\begin{aligned}S=:&\exp\left(\int d^4y\left\{\varphi_{\text{in}}(y)\left[(\Box_y+m^2)\frac{1}{Z^{1/2}}\frac{\delta}{\delta j(y)}\right]\right\}\right)\\&:Z(j)|_{j=0}.\end{aligned}\tag{6-3}$$

此关系式本身是约化公式的生成泛函．场量 $\varphi(x)$ 满足从拉

氏函数

$$\mathscr{L}(\varphi) = \mathscr{L}_0(\varphi) + \mathscr{L}_{\text{int}}(\varphi) \qquad (6\text{-}4)$$

推导出来的动力学方程，其中 $\mathscr{L}_0$ 是二次自由拉氏函数，而 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 是相互作用拉氏函数. 为了简单起见，首先假定 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 中没有场量的微商. 因为一般来说，我们不能找到 Green 函数的精确的表达式，所以就要依靠微扰方法，而把 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 看作对 $\mathscr{L}_0$ 的小的微扰. 一般情况下，$\mathscr{L}_{\text{int}}$ 与一个或几个耦合常数有关，所以微扰展开是关于这个或这几个耦合常数的幂级数. 即使耦合常数很小，如在电动力学中 $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$，我们也不期望它会收敛. 正如以后将要看到的那样，有一些迹象表明，它更可能是一个发散的渐近级数. 但是，无论如何微扰展开可认为是一种形式的数学级数，我们可从中引出许多结果.

当理论中有几个耦合常数时，自然的"小"参数可认为是 $\hbar$. 相应的级数还有一种拓朴特性. 这是按有关图中独立圈数的增加而写出的圈图展开. 所以，这种展开同时可看作一种小耦合常数级数，或一种关于自由场组态的半经典展开，或一种拓朴上有确切定义的步骤.

如在前章中那样，我们启发式地进行讨论，并在开始时避开各种困难，如无穷大体积极限、可能出现的紫外发散、或拉氏函数的固有定义. 这些将在以后再考虑.

### 6-1-1 自作用标量场

如上所述，首先我们只限于讨论单个标量场 $\varphi$. 在第四章中已证明形式上存在一个么正算符 $U(t)$，它把自由场 $\varphi_{\text{in}}$ 变为相互作用场 $\varphi$:

$$\varphi(x) = U^{-1}(t)\varphi_{\text{in}}(x)U(t)，\text{其中 } t = x^0. \qquad (6\text{-}5)$$

这里

$$U(t)=T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{t}dt'H_{\rm int}(t')\right]. \tag{6-6}$$

因为耦合项不包含场量的微商，所以

$$H_{\rm int}(t)=-\int_{x^0=t}d^3x\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi_{\rm in}(x)]. \tag{6-7}$$

更一般地讲，令 $U(t_2,t_1)$ 表示

$$\begin{aligned}&U(t_2,t_1)=T\exp\left[i\int_{t_1}^{t_2}dt'\int d^3x\mathscr{L}_{\rm int}(\mathbf{x},t')\right],\\&U(t,t)=1,\end{aligned} \tag{6-8}$$

这里 $\mathscr{L}_{\rm int}$ 象以前那样用 $\varphi_{\rm in}$ 来表示．此算符具有如下的性质：

$$U(t,-\infty)=U(t),\quad U(t_1t_2)U(t_2,t_3)=U(t_1,t_3).$$

现在我们要推导出基本关系

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\exp[i\int d^4xj(x)\varphi(x)]|0\rangle\\&=\frac{\langle 0|T\exp\left[i\int d^4x\{\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi_{\rm in}(x)]+j(x)\varphi_{\rm in}(x)\}\right]|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi_{\rm in}(x)]\right\}|0\rangle},\end{aligned} \tag{6-9}$$

或等价地把两端的 $j$ 的 $n$ 级项恒等后有

$$\begin{aligned}&G(x_1,\cdots,x_n)\\&=\frac{\langle 0|T\varphi_{\rm in}(x_1)\cdots\varphi_{\rm in}(x_n)\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi_{\rm in}(x)]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi_{\rm in}(x)]\right\}|0\rangle}.\end{aligned} \tag{6-10}$$

在方程 (6-9) 和 (6-10) 的右端，$T$ 符号作用于整个表示式上．这表示在把指数按 $\mathscr{L}_{\rm int}$ 的幂次展开后，所有的场量 $\varphi_{\rm in}$ 必须编时．真空态 $|0\rangle$ 理解为 "in" 真空态 $|0,{\rm in}\rangle$．

假定在无穷远的过去，相互作用被绝热地去掉，于是 $\lim_{t\to\infty}U(t)=1$．我们考虑一组编时点 $x_1,\cdots,x_n$，它们满足

$x_1^0 > x_2^0 > \cdots > x_n^0$。于是有

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle$$
$$= \langle 0|U^{-1}(t_1)\varphi_{in}(x_1)U(t_1,t_2)\varphi_{in}(x_2)\cdots$$
$$\times U(t_{n-1},t_n)\varphi_{in}(x_n)U(t_n)|0\rangle.$$

引进很大的时间 $t$，使 $t \gg t_1$，$-t \ll t_n$，就可写出

$$U(t_n) = U(t_n,-t)U(-t)$$

和

$$U^{-1}(t_1) = U^{-1}(t)U(t,t_1),$$

于是

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle$$
$$= \langle 0|U^{-1}(t)T\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n)$$
$$\times \exp\left\{-i\int_{-t}^{t} dt' H_{int}(t')\right\} U(-t)|0\rangle. \quad (6\text{-}11)$$

此公式对在间隔 $(-t,t)$ 中的时间 $x_1^0, \cdots, x_n^0$ 的任意次序都成立。令 $t$ 趋向无穷，就得到

$$\lim_{t\to\infty} U(-t)|0\rangle = |0\rangle. \quad (6\text{-}12)$$

因为假定真空是稳定的，所以在同样的极限下，除了一个位相外，$\langle 0|U^{-1}(t)$ 必定等于 $\langle 0|$。于是

$$\lim_{t\to\infty}\langle 0|U^{-1}(t) = \lim_{t\to\infty}\langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle\langle 0|$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\langle 0|U(t)|0\rangle}\langle 0|. \quad (6\text{-}13)$$

把式 (6-12) 及 (6-13) 代入式 (6-11)，就得到所要求的方程 (6-10)。这个推导只是一种启发性的，所以我们可把方程 (6-9) 和 (6-10) 看作纯粹是一种定义。

方程 (6-9) 和 (6-10) 导致明显的协变的表示式，这是令人满意的——在相对论性微扰论的早期，这不是当然的事——用 Wick 定理，可把 $T$ 乘积的计算约化为正规乘积和协变传播子的组合，我们可以把这种组合的书写形式变为图的语言，现在我们就来介绍它。

把方程(6-10)的分子中的指数作展开. 从现在起,略去指标"in":

$$G(x_1,\cdots x_n)\langle 0|T\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}_{\rm int}(x)\right]|0\rangle$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$$

$$\times\int d^4y_1\cdots d^4y_p\mathscr{L}_{\rm int}(y_1)\cdots\mathscr{L}_{\rm int}(y_p)|0\rangle. \quad (6\text{-}14)$$

为了明确起见,考虑所谓 $\varphi^4$ 理论,

$$\mathscr{L}_{\rm int}[\varphi(x)]=\frac{-\lambda}{4!}:\varphi^4(x):, \quad (6\text{-}14a)$$

但下面所有的推理都可以很容易地推广到任意无微商的多项式相互作用理论. 归一化因子 1/4! 是为了以后的方便而引进的,它将消去组合因子. 耦合常数前的负号就是用在总拉氏函数为 $(\partial_\mu\varphi)^2/2-m^2\varphi^2/2-\lambda\varphi^4/4!$ 的经典场论中的负号,以保证运动方程的解 $\varphi=0$ 的稳定性. 把式(6-14a)代入式(6-14)中后,得到

$$G(x_1,\cdots,x_n)\langle 0|T\exp\left[-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x:\varphi^4(x):\right]|0\rangle$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i\lambda)^p}{p!}\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$$

$$\times\int d^4y_1\cdots d^4y_p\,\frac{:\varphi^4(y_1):}{4!}\cdots\frac{:\varphi^4(y_p):}{4!}|0\rangle. \quad (6\text{-}15)$$

为了计算自由场量编时乘积的真空平均值,我们应用包含基本收缩

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)}=\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x-y)} \quad (6\text{-}16)$$

的 Wick 定理[方程(4-65)]. 我们记得，出现于同一个符号 :: 中的两个场量一定是不收缩的. 对一组给定的收缩可以方便地用一个图来表示，它的贡献可用首先在形态空间中描写的规则来给出. 因为在式(6-14a)的理论中只有包含偶数个外场的 Green 函数不为零，所以以后用 $2n$ 来代替 $n$. 对 $p$ 级项

$$(-i\lambda)^p\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n}) :\frac{\varphi^4(x_1)}{4!}:\cdots:\frac{\varphi^4(x_p)}{4!}:|0\rangle, \tag{6-17}$$

我们得到一些贡献的和，每一项贡献相应于一个 Feynman 图. 在这些图中，$x_1,\cdots,x_{2n}$ 是外线的端点，而 $y_1,\cdots,y_p$ 是顶角. 每一个顶角上引出四条线，每条线连结两个不同的点：$x_a$ 和 $x_b$，或 $x_a$ 和 $y_\alpha$，或 $y_\alpha$ 和 $y_\beta(\alpha\neq\beta)$. 连结 $z_i$ 和 $z_j$ 的一条线($z=x_a$ 或 $y_\alpha$)相应于传播子 $\overbrace{\varphi(z_i)\,\varphi(z_j)}$. 每一个顶角放上权重 $-i\lambda$. 最后还有一个对称因子，它表示得到同一个图的各种可能收缩的数目. 如果把单项 $:\varphi^4(y_\alpha):/4!$ 中的四个场量和四个不同宗量的场量收缩，就得到组合因子 4!，它将和因子 1/4! 相消. 另一方面，如果两条从 $y_\alpha$ 引出的线终止在同一点 $y_\beta$ 上，则顶点 $y_\alpha$ 和 $y_\beta$ 的因子 1/4! 只是部分地消去了. 在图 6-1a 的情况中，因子是 1/2!. 它来自于 1/4!×1/4!(原始顶角因子)×4×3(可能的收缩 $z_1-y_1$，$z_2-y_2$ 的数目)×4×3(收缩 $z_3-y_2$，$z_4-y_2$)×2($y_1$ 和 $y_2$ 之间的收缩). 与此类似，在图 6-1b 的情况中，因子是 1/3!. 更一般的情况下，最后的对称因子是 $1/S$，$S$ 是图的对称群的级，即当顶角固定时线的置换群的级.

我们总结一下 $T$ 乘积式(6-17)的 Feynman 规则：

1. 画出所有的有 $2n$ 个外点 $x_1,\cdots,x_{2n}$，$p$ 个顶角 $y_1,\cdots,y_p$ 的不同的图，并按下面的规则把这些贡献加起来.

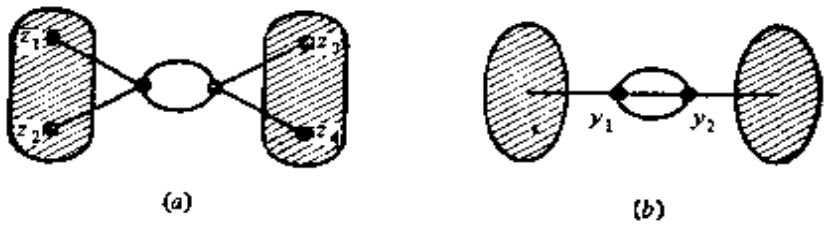



图 6-1　有对称因子的图例．在情况 $(a)$ 中 $S=2!$，在情况 $(b)$ 中为 $S=3!$．

2. 对每一顶角给以因子 $-i\lambda$。

3. 对每一条 $z_i$ 和 $z_j$ 之间的线给以因子 $\overbrace{\varphi(z_i)\,\varphi(z_j)}$，它由式 (6-16) 给出。

4. 每一个图必须除以对称因子 $S$。

作为一个例子，我们来考虑精确到低级的两点函数

$$(-i\lambda)^p\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2):\varphi^4(y_1):/4!:\cdots:\varphi^4(y_p):/4!|0\rangle.$$

对 $p=0$，得到 $\overbrace{\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)}$，$p=1$ 的贡献是没有的，因为我们禁止收缩 $\overbrace{\varphi(y)\,\varphi(y)}$。对 $p=2$，有三项贡献，画在图 6-2 中。

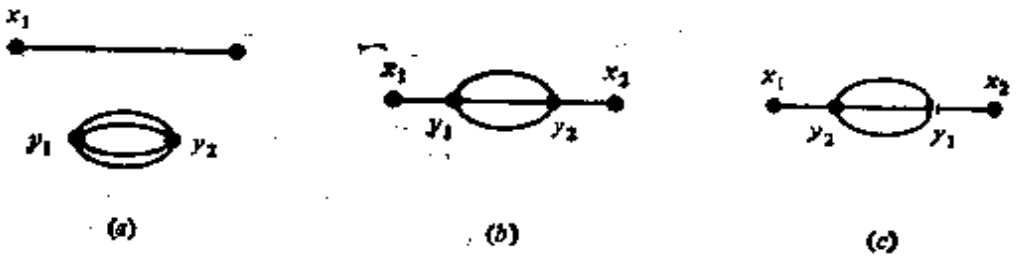



图 6-2　$\varphi^4$ 理论中对两点函数的低级贡献

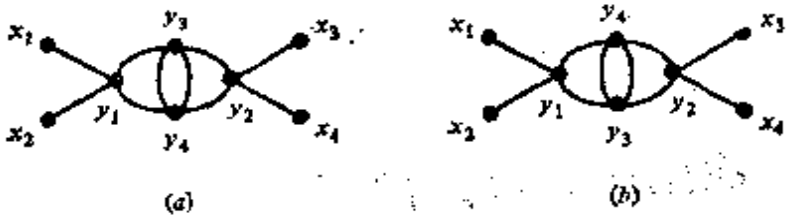
$(a)$　$\dfrac{(-i\lambda)^2}{4!}\overbrace{\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)}[\overbrace{\varphi(y_1)\,\varphi(y_2)}]^4$，

$(b)$　$\dfrac{(-i\lambda)^2}{3!}\overbrace{\varphi(x_1)\,\varphi(y_1)}[\overbrace{\varphi(y_1)\,\varphi(y_2)}]^3\overbrace{\varphi(y_2)\,\varphi(x_2)}$，

$(c)$　和 (b) 一样，只是交换 $y_1\longleftrightarrow y_2$。

我们要强调一下在上面规则1中"不同"这一词的重要性和意义.在形态空间中,所有的点 $x_i$ 和 $y_j$ 都固定后,如果图是拓朴不同的,就认为它们是不同的图. 例如图 6-2 中的图 (b) 和 (c) 是不同的,而图 6-3 中的图 (a) 和 (b) 则不是. 在后面的情况中只要考虑其中一个图.

我们把这些图分为两类. 第一类不包含真空-真空子图,即不和外点相连的子图(如图 6-2 a 中的一个); 第二类包含这种子图. 对每一个第一类图,我们可通过加上真空-真空子图而联出一组第二类图. 用上指标 (1) 来表示第一类图对 Green 函数的贡献,就可写出




(a) (b)

图 6-3 没有区别的图例,只要考虑其中一个.

$$G(x_1,\cdots,x_{2n})\langle 0|T\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{int}}[\varphi(x)]\right\}|0\rangle$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\int d^4y_1\cdots d^4y_p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$$

$$\times\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n})\mathscr{L}_{\text{int}}(y_1)\cdots\mathscr{L}_{\text{int}}(y_k)|0\rangle^{(1)}$$

$$\times\langle 0|T\mathscr{L}_{\text{int}}(y_{k+1})\cdots\mathscr{L}_{\text{int}}(y_p)|0\rangle. \qquad (6\text{-}18)$$

这是因为 $(p-k)$ 级真空-真空子图相应于 $p-k$ 个相互作用拉氏函数的编时乘积的真空平均值,而组合因子

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$$

是因为对 $y_1,\cdots,y_p$ 积分后, $y$ 的所有可能的置换给出相等的贡献而来的. 易见在方程 (6-18) 两端都有真空振幅

$$\langle 0|T\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{int}}(x)\right]|0\rangle$$

的因子，所以

$$G(x_1,\cdots,x_{2n})=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\int d^4y_1\cdots d^4y_p$$
$$\times\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n})\mathscr{L}_{\rm int}(y_1)\cdots$$
$$\mathscr{L}_{\rm int}(y_p)|0\rangle^{(1)}. \tag{6-19}$$

只有没有真空子图的图才对方程(6-19)的右端有贡献.

在动量空间中写出 Teynman 规则比较简单，即取 Fourier 变换 $\tilde{G}$:

$$G(x_1,\cdots,x_{2n})=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_{2n}}{(2\pi)^4}$$
$$\times\exp\left(i\sum_1^{2n}p_j\cdot x_j\right)\tilde{G}(p_1,\cdots,p_{2n}), \tag{6-20}$$
$$\tilde{G}(p_1,\cdots,p_{2n})=\int d^4x_1\cdots d^4x_{2n}$$
$$\times\exp\left(-i\sum_{j=1}^{2n}p_j\cdot x_j\right)G(x_1,\cdots,x_{2n}).$$

按照我们的约定，所有的 $p$ 是入动量. 平移不变性给出动量守恒 $\sum_1^{2n}p_j=0$，它意味着

$$\tilde{G}(p_1,\cdots,p_{2n})=(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_{2n})G(p_1,\cdots,p_{2n}). \tag{6-21}$$

为了简单起见，在 $x$ 或 $p$ 空间中用同样的符号. 我们必须对整个时空点 $x$ 和 $y$ 来积分，以从式(6-19)和(6-20)得到 $\tilde{G}$. 用基本收缩的 Fourier 表示式(6-16)，对 $x_j$ 积分后就得每一条外线的贡献为 $i(p_j^2-m^2+i\varepsilon)^{-1}$. 我们留下了对 $y_j$ 和 $k_l$ 的积分，$k_l$ 是内线的动量. 下面集中讨论给定线和顶角组态的图的贡献，它具有固定的内动量和给定的外形态宗量 $x_1,\cdots,x_{2n}$. 内顶角指标 $y_1,\cdots,y_p$ 的每一种置换都给出同样的贡献. 然而，不是 $y$ 的所有 $p!$ 种置换都在原来的形态空间

中产生拓朴不同的图. 但是,如果是的话,就得到因子 $p!$,抵消了方程 (6-19) 中出现的因子 $(p!)^{-1}$. 有可能遇到对某些图来说,两个(或更多个)顶角起着同等的作用 (图 6-3 a 的例子就是这种情况,那里 $y_3$ 和 $y_4$ 是这种顶角). 如果 $p$ 个顶角分成有 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ 个顶角的一些组,每组中的顶角起着同样的作用 $(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_s = p)$,则对 $y$ 变量积分后就给出退化因子 $p!/\nu_1!\cdots\nu_s!$. 它只是部分地抵消了方程 (6-19) 中的因子 $(p!)^{-1}$,而留下顶角对称因子 $1/\nu_1!\cdots\nu_s!$,该因子和上面讨论的线对称因子相乘. 例如在动量空间中,图 6-3 a 的图有整体对称因子 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

最后,每一个关于 $y$ 的积分形为

$$\int d^4y_j e^{-iy_j \cdot q_j} = (2\pi)^4 \delta^4(q_j),$$

这里 $q_j$ 表示所有走向顶角 $y_j$ 的外线或内线的动量之和. 在每一个顶角上动量是守恒的,所以也是整体守恒的.

现在对 Green 函数 $\tilde{G}(p_1, \cdots, p_{2n})$ 可在动量空间中写出如下的 Feynman 规则:

1. 画出有 $2n$ 条入动量为 $p_1, \cdots, p_{2n}$ 的外线,而没有真空子图的所有的拓朴不同的图. 对每一个图用 $k_1, \cdots, k_l$ 表示内线动量. 在没有微商耦合的标量场理论中,内线方向的选取是没有关系的.

2. 对第 $j$ 条外线给以因子 $i/(p_j^2 - m^2 + i\varepsilon)$.

3. 对第 $l$ 条内线给以 $[d^4k_l/(2\pi)^4][i/(k_l^2 - m^2 + i\varepsilon)]$.

4. 对每一个顶角给以 $(-i\lambda)(2\pi)^4\delta^4(q_j)$,其中 $q_j$ 是在顶角 $j$ 处所有入动量之和.

5. 把所有这些贡献的乘积对 $k$ 变量积分,并除以图的内线和顶角的对称因子.

6. 把所有拓朴不同的图的贡献相加.

一般地讲,如果 $V$ 是顶角的数目(以前称 $p$), $I$ 是内线数目,在分出整体守恒式(6-21)后,在 $k$ 之间有 $V-1$ 条守恒规则,所以最多有 $I-V+1$ 个非平庸的积分.

当有几条外线根本不和顶角相连时, Feynman 规则必须稍微改变一下. 例如图 6-4 的单个传播子在形态空间中给出贡献

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip\cdot(x_k-x_l)},$$

而在动量空间中为

$$\frac{i}{p_k^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_k+p_l).$$

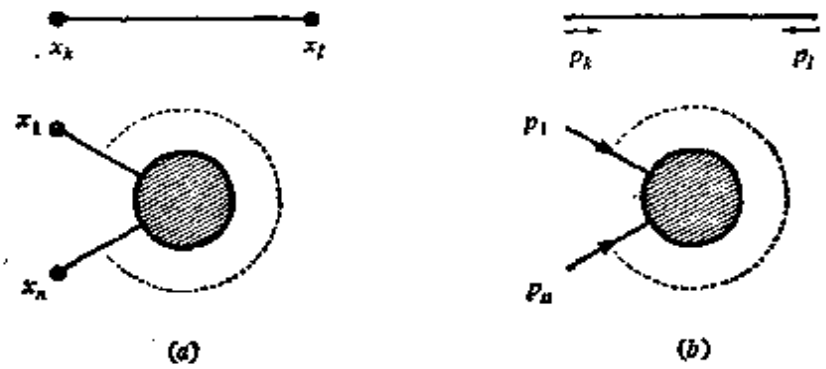



图 6-4 在形态空间(a)或动量空间(b)中,有短路传播子的图.

我们用最低级两点和四点 Green 函数来解释这些规则. 分出整体动量守恒 $\delta$ 函数后,图 6-5 对两点函数 $G_2(p,-p)$ 的贡献为

(a) $$\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon},$$

(b) $$\frac{(-i\lambda)^2}{3!}\left(\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\right)^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}$$
$$\times\frac{i^3}{(k_1^2-m^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2+i\varepsilon)[(p-k_1-k_2)^2-m^2+i\varepsilon]}.$$

与此类似，图 6-6 的图对 $G_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$（满足 $p_1+p_2+p_3+p_4=0$）的贡献为

(a)
$$i^2(2\pi)^4\left[\frac{\delta^4(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2+i\varepsilon)(p_2^2-m^2+i\varepsilon)}+\frac{\delta^4(p_1+p_3)}{(p_1^2-m^2+i\varepsilon)(p_2^2-m^2+i\varepsilon)}+\frac{\delta^4(p_1+p_4)}{(p_1^2-m^2+i\varepsilon)(p_2^2-m^2+i\varepsilon)}\right],$$

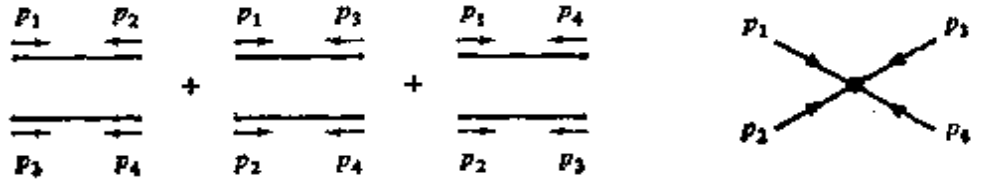
(b)
$$\frac{i^4(-i\lambda)}{(p_1^2-m^2+i\varepsilon)(p_2^2-m^2+i\varepsilon)(p_3^2-m^2+i\varepsilon)(p_4^2-m^2+i\varepsilon)},$$

(c)
$$\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{4}\frac{i}{p_j^2-m^2+i\varepsilon}(-i\lambda)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\times\frac{i^2}{(k^2-m^2+i\varepsilon)[(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon]},$$




(a) (b)

图 6-5 动量空间中对两点函数的低级贡献




(a) (b)




(c) (d) (e)

图 6-6 对四点函数的低级贡献

(d)或(e)和(c)一样，但作变换$p_2 \longleftrightarrow p_3$或$p_2 \longleftrightarrow p_4$。

在相应的$S$矩阵元的计算中，外传播子$i(p_i^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}$正好被约化公式(5-28)中的算符$i(\Box_{x_i} + m^2)$抵消。在后面，最后一个对$x_i$的积分使得在式(6-20)中定义的Green函数的入动量等于$S$矩阵元的物理质壳动量。所以，为了得到给定的Feynman图对$S$矩阵的贡献，我们去掉外传播子而把外动量取在质壳上。以后将看到，此规则还必须补充上质量和波函数的重整化。

当图是不连接的时候，Green函数$G$还包含表示一部分外动量之和守恒的$\delta$函数。在第五章中，我们用循环的表示式

$$G(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{UI_\alpha = I} \prod_\alpha G_c(x_{I_\alpha}), \qquad (6\text{-}22)$$

和初始条件$G(x_1, x_2) = G_c(x_1, x_2)$(对$\varphi^4$理论)，一起来定义连接Green函数，其中$I = \{1, \cdots, n\}$，$x_I = \{x_1, \cdots, x_n\}$。没有真空子图的图是(拓朴上)连接的，这种真空子图包括在$G(x_1, x_2)$的微扰展开中。可用归纳法更一般地加以证明，只有连接图才对$G_c(x_1, \cdots, x_n)$有贡献。我们设对$(2n-2)$点函数这是对的，并把式(6-22)改写成

$$G(x_1, \cdots, x_{2n}) = G_c(x_1, \cdots, x_{2n}) + \sum_{\substack{UI_\alpha = I \\ |\alpha| > 1}} \prod_\alpha G_c(x_{I_\alpha}). \qquad (6\text{-}23)$$

对$G(x_1, \cdots, x_{2n})$和右端求和中每一个$G_c$代以图展开后，每一个不连接图对$G(x_1, \cdots, x_{2n})$的贡献就是求和中的一项，反过来也对。这就证明了连接性的代数定义[方程(6-22)]可以和拓朴定义等同起来。

我们回到式(6-14a)的相互作用拉氏函数的正规次序的

作用上来. 如果用普通的乘积 $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda/4!\varphi^4(x)$，将出现新的图，即出现属于同一顶点的场量收缩的图. 例如，在两点函数中将出现图 6-7 的"蝌蚪"图. 在某些情况中，用普通的乘积，然后来处理蝌蚪图是比较方便的. 例如，当我们要对场作定域的非齐次变换(比如说平移)，同时还要保持某些对称性时，就遇到了这种情况. 对 $\varphi^4$ 理论来说，从一种乘积变到另一种乘积，简单地相当于改变质量项. 质量的改变实际上是无穷大，它可包括在我们就要研究的质量重整化中.



图 6-7 "蝌蚪"图

推出了自相互作用标量场的 Feynman 规则后，现在立即要对更细致的和物理上更有兴趣的理论，即对旋量和标量量子电动力学，作同样的推导. 另一些有内部对称的场的情况也将在以后几章中谈到. 总之，应当搞清楚推导出 Feynman 规则的一般方法. 在有疑问的情况下，特别是当对对称因子有怀疑时，回到出发点，即方程 (6-10) 和 Wick 定理，是保险的.

### 6-1-2 旋量电动力学的 Feynman 规则

描写光子、电子和正电子相互作用体系的总拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0^{\gamma} + \mathscr{L}_0^{e^+,e^-} + \mathscr{L}_{\text{int}} \tag{6-24}$$

其中

$$\mathscr{L}_0^{\gamma} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{\mu^2}{2}A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2,$$

$$\mathscr{L}_0^{e^+,e^-}=\frac{i}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi,\qquad(6\text{-}25)$$

$$\mathscr{L}_{\rm int}=-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

每一项都已在第三、四章中遇到过了. 在第一项中我们引进了有质量的光子,它的质量 $\mu$ 比电子质量 $m$ 小很多,并且还需要不定度规. 相互作用项是在电子拉氏函数上应用最小耦合规定 $i\partial_\mu\to i\partial_\mu-eA_\mu$ 而得到的.

对包含在收缩中的两类传播子用不同的记号. 电子-正电子传播子用实线表示,它指向电荷($e$)的传播方向,

$$\underset{x,\alpha}{\bullet}\!\longleftarrow\!\underset{y,\beta}{\bullet}=\langle0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle=\overbrace{\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)}$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}\left(\frac{i}{\not k-m+i\varepsilon}\right)_{\alpha\beta}.\qquad(6\text{-}26)$$

众所周知,这个传播子不是 $x$ 和 $y$ 的对称函数,但满足方程(3-176). 另一方面,光子传播子用波线来标记:

$$\underset{x,\rho}{\bullet}\!\sim\!\underset{y,\nu}{\bullet}=\langle0|TA_\rho(x)A_\nu(y)|0\rangle=\overbrace{A_\rho(x)\,A_\nu(y)}$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot(x-y)}(-i)$$

$$\times\left(\frac{g_{\nu\rho}-k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}+\frac{k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right).\qquad(6\text{-}27)$$

为了避免和电子质量混淆,令 $M^2=\mu^2/\lambda$. 注意,我们期望 $\lambda$ 和 $M^2$ 是不出现于物理结果中的.

由于电荷守恒,Green 函数有相等数目的 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 场量:

$$G(x_1,\cdots,x_n;x_{n+1},\cdots,x_{2n};y_1,\cdots,y_p)$$

$$=\langle0|T\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(x_{n+1})\cdots\psi(x_{2n})$$

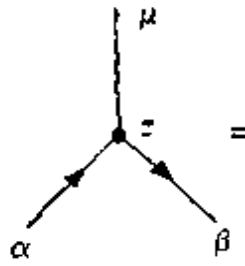
$$\times A_{\nu_1}(y_1)\cdots A_{\nu_p}(y_p)|0\rangle.\qquad(6\text{-}28)$$

为简洁起见,在 $G$ 的宗量中略去了旋量和矢量指标. 如方程

(6-14)那样，我们推导出了用 in 场来表示的$G$的表达式：

$$G(x_1,\cdots x_{2n};y_1\cdots y_p)$$
$$=\left\{\langle 0|T\psi_{\rm in}(x_1)\cdots\bar{\psi}_{\rm in}(x_{2n})A^{\rm in}_{\nu_1}(y_1)\cdots\right.$$
$$\left.A^{\rm in}_{\nu_p}(y_p)\exp i\int d^4z\mathscr{L}_{\rm int}(z)|0\rangle\right\}\Big/$$
$$\left\{\langle 0|T\exp i\int d^4z\mathscr{L}_{\rm int}(z)|0\rangle\right\},\qquad(6\text{-}29)$$

其中 $\mathscr{L}_{\rm int}=\mathscr{L}_{\rm int}[\psi_{\rm in}(x),\bar{\psi}_{\rm in}(x),A_{\rm in}(x)]$ 假定是正规次序的. 以后略去"in"指标. 将式(6-29)按$e$的幂次展开，并用 Wick 定理，就建立了传播子式(6-26)和(6-27)及顶角




$$=-ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}\qquad(6\text{-}30)$$

的 Feynman 规则. 此顶角有一个矢量和两个旋量指标，它们和相应的光子和费米子传播子的指标缩并. 如在标量情况中那样，方程(6-29)中分母的作用是消除真空-真空子图.

我们来总计一下费米子的 Wick 规则引进的符号. 由于电荷守恒，所以图中有两类费米子线，即封闭的圈线或终端在点 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，和从点 $x_{k_i}(n+1\leqslant k_i\leqslant 2n)$ 出发的开放的线. 封闭线是由拉氏函数中的场量之间顺序相连的传播子组成的，

$$\overbrace{\psi(z_1)\bar{\psi}(z_k)}\overbrace{\psi(z_k)\bar{\psi}(z_l)}\cdots\overbrace{\psi(z_q)\bar{\psi}(z_1)}.\qquad(6\text{-}31)$$

因为拉氏函数在$T$记号下对易，所以可把$T$乘积重新排列成

$$\langle 0|T\cdots[\bar{\psi}(z_1)A(z_1)\psi(z_1)][\bar{\psi}(z_k)A(z_k)\psi(z_k)]\cdots$$
$$[\bar{\psi}(z_q)A(z_q)\psi(z_q)]\cdots|0\rangle$$

而不会引进任何符号。收缩的乘积式(6-31)是把 $\phi(z_1)$ 和奇数个场量置换后得到的，所以对每一个费米子圈要加上一个负号.

另一方面，开放的线确定了点 $x_i$ 的置换：$x_1 x_{k_1} x_2 x_{k_2} \cdots x_n x_{k_n}$，这里我们记得 $x_{k_p}$ 是终止于 $x_p$ 的一条线的起点。于是，又要加上一个符号，它标记了置换

$$(1,2,\cdots,2n) \to (1,k_1,2,k_2,\cdots,n,k_n)$$

的奇偶性. 两个只是费米子方向不同的图，只有当它们是拓朴不同的时候才都有贡献. 例如图 6-8 的两个图显然是一样的，它们中只有一个才对 $G(y_1,y_2)$ 有贡献.

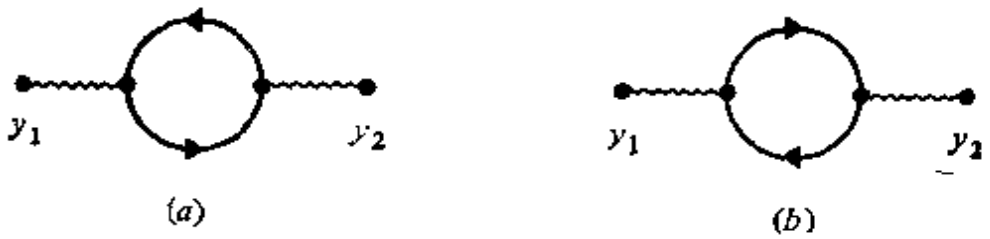
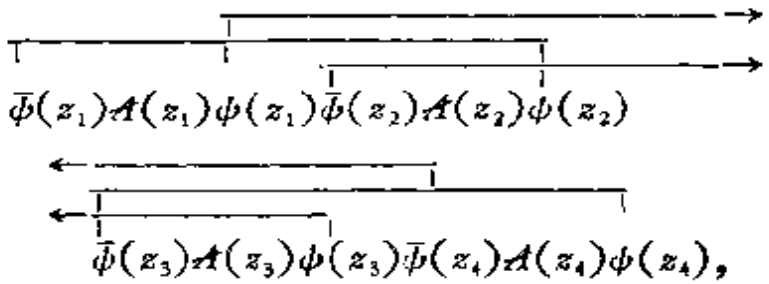



图 6-8 在旋量电动力学中全同图的例子，只要保留其中一个.

相反，图 6-9 中的前两个图对四光子函数都有贡献(光子-光子散射). 它们相应于两组不同的收缩：

(a)

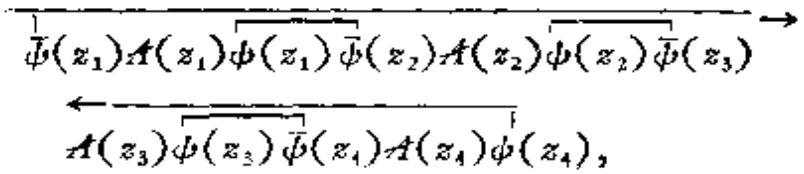


$$\bar{\phi}(z_1)A(z_1)\phi(z_1)\bar{\phi}(z_2)A(z_2)\phi(z_2)$$

$$\bar{\phi}(z_3)A(z_3)\phi(z_3)\bar{\phi}(z_4)A(z_4)\phi(z_4),$$

和

(b)



$$\bar{\phi}(z_1)A(z_1)\phi(z_1)\bar{\phi}(z_2)A(z_2)\phi(z_2)\bar{\phi}(z_3)$$

$$A(z_3)\phi(z_3)\bar{\phi}(z_4)A(z_4)\phi(z_4),$$

其中 $A(z_1)$ 和 $A(y_1)$ 收缩，等等. 在形态空间中，四点函

数 $G(y_1,\cdots,y_4)$ 得到 4! × 3! 个不同图的贡献，它们是从图 6-9 a 通过 $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ 及 $y_2$, $y_3$, $y_4$ 的置换而得到的，就是说图 6-9 a 是从图 6-9 b 通过置换 $y_2\longleftrightarrow y_4$, $z_2\longleftrightarrow z_4$ 而得到的。当对 $z$ 积分后，4! 种关于 $z$ 的置换给出了一个因子，它抵消了来自 $\exp i\int dz\mathscr{L}_{\rm int}(z)$ 展开的 1/4! 的因子。留下六个不同的图(没有因子)(见图 6-9 c).

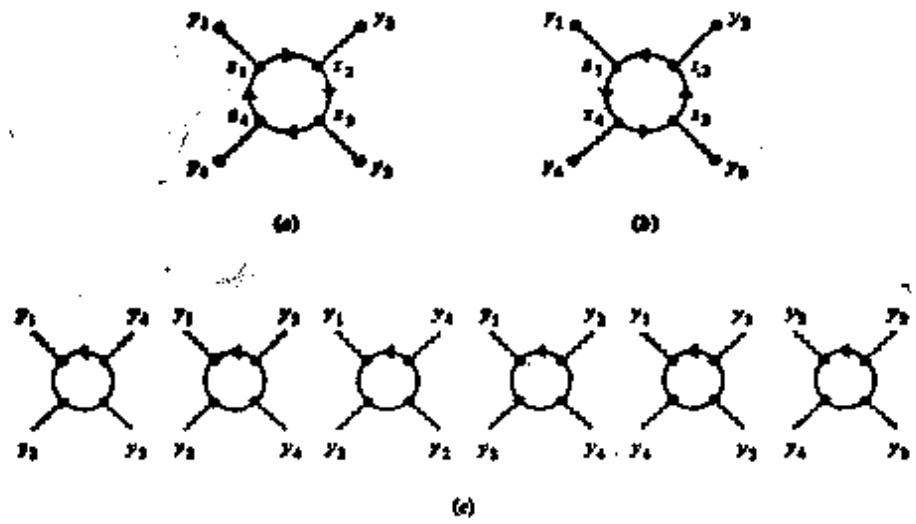


图 6-9 最低级的四光子振幅. 图(*a*)和(*b*)在形态空间中是不全同的. 在对 $z$ 变量求和后，我们留下六个不同的图，画在(*c*)中.

动量空间中的表示式是由 Fourier 变换得到的。对一个连接函数，我们令

$$\begin{aligned}G_c(x_1,\cdots,x_n;x_{n+1},\cdots,x_{2n};y_1,\cdots,y_p)&=\int\prod_1^{2n}\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\prod_1^{p}\frac{d^4q_i}{(2\pi)^4}\\&\times\exp\left(i\sum_1^{2n}p_i\cdot x_i+i\sum_1^{p}q_i\cdot y_i\right)\\&\times\tilde{G}_c(p_1,\cdots,p_n;p_{n+1},\cdots,p_{2n};q_1,\cdots,q_p),\end{aligned}\tag{6-32}$$

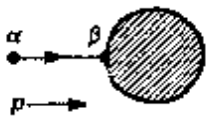
其中所有的动量都是进入的。现在我们总结一下计算 $\tilde{G}_c$ 的 Feynman 规则。画出所有可能的拓朴不同的图并给以列在表

6-1 中的因子. 然后,沿费米子线缩并所有的旋量指标(于是对每一个封闭圈计算一个迹),再沿光子线缩并所有的矢量指标. 最后对所有的内部动量积分.

**表 6-1　旋量电动力学的 Feynman 规则**

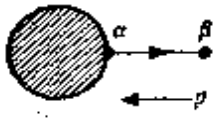
1. 外线

入费朱子线



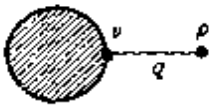

$$\left(\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$

出费朱子线




$$\left[\frac{1}{(-\not p) - m + i\varepsilon}\right]_{\alpha\beta}$$

入射光子线



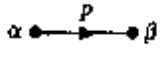

$$-i\left(\frac{g_{\rho\nu} - q_\rho q_\nu/\mu^2}{q^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{q_\rho q_\nu/\mu^2}{q^2 - M^2 + i\varepsilon}\right)$$

2. 顶角

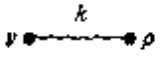



$$-ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma\text{入动量})$$

3. 传播子




$$\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{\not p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$




$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i)\left(\frac{g_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}\right)$$

4. 对每一费米子封闭圈有一负号,还有一个与外线的配置有关的整体符号,象上面所指出的那样计算它.

对 $r$ 级的图(有 $r$ 个顶角的图),完成了对 $r$ 个 $x$ 变量和它们的置换的积分后,就抵消了来自 $\exp i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{int}}(x)$ 的展开中的因子 $1/r!$. 于是,在这组规则下,当只考虑拓朴不同的图时,在费米子电动力学中就不出现任何对称因子. 我们

请读者把图 6-8 a 或图 6-10 和类似的标量图，如图 6-6 c 或图 6-3 a，作比较. 当对每一个费米子圈选定一个方向时，前者没有任何对称因子，但后者分别有权重 $1/2!$ 和 $(1/2!)^2$.

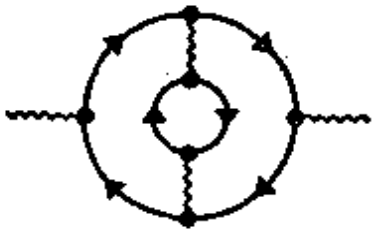


图 6-10　没有任何对称因子的旋量电动力学图

**Furry 定理**　在计算 Green 函数时，所有的有奇数个顶角的费米子圈图都可抛掉. 事实上，两个方向的圈（图6-11)的贡献的符号相反. 为了证明这点，把相应于第一种方向的贡献写成

$$G_1 = \mathrm{tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_s)\gamma_{\mu_s} S_F(x_s, x_{s-1})\gamma_{\mu_{s-1}} \cdots \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1)],$$

并求助于矩阵 $C$，它满足[和式(3-176)比较]

$$\begin{aligned} CS_F(x,y)C^{-1} &= S_F^T(y,x), \\ C\gamma_\mu C^{-1} &= -\mu_\mu^T. \end{aligned} \tag{6-33}$$

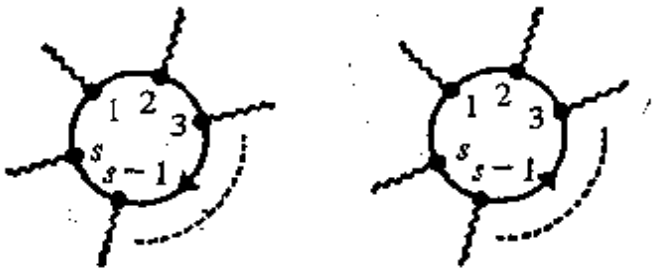



图 6-11　旋量圈方向相反的两个图

在传播子间插进 $CC^{-1}$，并改写为

$$\begin{aligned} G_1 &= (-1)^s \mathrm{tr}[\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(x_s, x_1)\gamma_{\mu_s}^T S_F^T(x_{s-1}, x_s)\gamma_{\mu_{s-1}}^T \cdots \gamma_{\mu_2}^T S_F^T(x_1, x_2)] \\ &= (-1)^s \mathrm{tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1 x_1)\gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_s} S_F(x_s, x_1)]. \end{aligned} \tag{6-34}$$

除了符号 $(-)^s$ 外，这正是第二种方向的贡献. 对奇数的 $s$，这两个贡献相消，这证明了命题.

### 6-1-3 电子-电子和电子-正电子散射

作为图技术的解释，我们来计算精确到最低级的电子-电子散射截面。从上章中推导出的约化公式出发，

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{c} = \left(\frac{-i}{Z_2^{1/2}}\right)^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_1' d^4x_2'\, e^{i(p_1'\cdot x_1' + p_2'\cdot x_2' - p_1\cdot x_1 - p_2\cdot x_2)} \\
\times \bar{u}(p_1', \varepsilon_1')(i\bar{\partial}_{x_1'} - m)\bar{u}(p_2', \varepsilon_2')(i\bar{\partial}_{x_2'} - m) \\
\times \langle 0 | T\psi(x_1')\psi(x_2')\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2) | 0\rangle^c \\
\times (-i\bar{\partial}_{x_1} - m)u(p_1, \varepsilon_1)(-i\bar{\partial}_{x_2} - m) \\
\times u(p_2, \varepsilon_2), \qquad (6\text{-}35)
\end{aligned}
$$

记号都已写在图 6-12 中。注意，这里 $p_1'$，$p_2'$ 是出射电子的动量。精确到最低级时，图 6-13 的两个图对 Green 函数有贡献，并且 $\varepsilon_2 = 1$。式(6-35) 中的 Dirac 算符和积分抵消了与外线连在一起的因子，并把外动量变成质壳动量。这时，利用每一个顶角处的动量守恒后就不留下积分号了。这两个图有

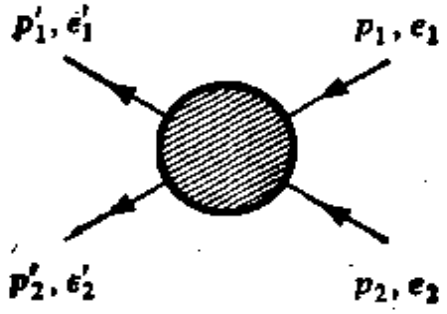



图 6-12 对电子-电子散射有贡献的图的一般形式

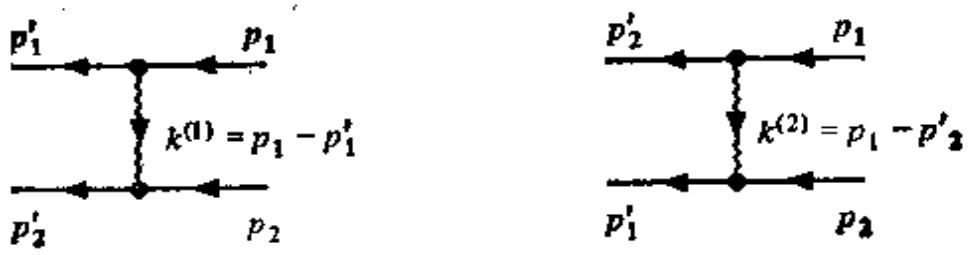



图 6-13 对电子-电子散射的最低级贡献

一个相对负号，于是

$$S_{fi}^{c} = (2\pi)^4\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)(-ie)^2$$
$$\times \Big\{-\bar{u}(p_1',\varepsilon_1')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1)(-i)$$
$$\times\left(\frac{g_{\nu\rho} - k_{\nu}^{(1)}k_{\rho}^{(1)}/\mu^2}{k^{(1)2} - \mu^2} + \frac{k_{\nu}^{(1)}k_{\rho}^{(1)}/\mu^2}{k^{(1)2} - M^2}\right)$$
$$\times\bar{u}(p_2',\varepsilon_2')\gamma^{\rho}u(p_2,\varepsilon_2) + \bar{u}(p_2',\varepsilon_2')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1)$$
$$\times(-i)\left(\frac{g_{\nu\rho} - k_{\nu}^{(2)}k_{\rho}^{(2)}/\mu^2}{k^{(2)2} - \mu^2} + \frac{k_{\nu}^{(2)}k_{\rho}^{(2)}/\mu^2}{k^{(2)2} - M^2}\right)$$
$$\times\bar{u}(p_1',\varepsilon_1')\gamma^{\rho}u(p_2,\varepsilon_2)\Big\}, \qquad (6\text{-}36)$$

其中

$$k^{(1)} \equiv p_1 - p_1' = p_2' - p_2,$$
$$k^{(2)} \equiv p_1 - p_2' = p_1' - p_2.$$

于是有

$$k_{\nu}^{(1)}\bar{u}(p_1',\varepsilon_1')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1) = \bar{u}(p_1',\varepsilon_1')(\not{p}_1 - \not{p}_1')u(p_1,\varepsilon_1) = 0,$$

和

$$k_{\nu}^{(2)}\bar{u}(p_2',\varepsilon_2')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1) = \bar{u}(p_2',\varepsilon_2')(\not{p}_1 - \not{p}_2')u(p_1,\varepsilon_1) = 0.$$

传播子中 $k_{\nu}k_{\rho}$ 项没有贡献，于是在计算弹性散射截面时，我们可以取 $\mu = 0$ 极限而不会遇到任何红外发散：

$$S_{fi}^{c} = -ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)\mathscr{T},$$

其中

$$\mathscr{T} = \frac{\bar{u}(p_1',\varepsilon_1')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1)\bar{u}(p_2',\varepsilon_2')\gamma_{\nu}u(p_2,\varepsilon_2)}{(p_1 - p_1')^2}$$
$$- \frac{\bar{u}(p_2',\varepsilon_2')\gamma^{\nu}u(p_1,\varepsilon_1)\bar{u}(p_1',\varepsilon_1')\gamma_{\nu}u(p_2,\varepsilon_2)}{(p_1 - p_2')^2}. \qquad (6\text{-}37)$$

现在，初态和末态明显地是反对称的。这里没有由粒子全同而引起的因子，但是，总截面当然是通过只对半个末态相空间积分而得到的。

我们来计算不极化初束的微分截面，而不观察末态的极化．在质心系中的反应运动学表示在图 6-14 中，其中 $\theta$ 是在此系中的散射角，能量 $E$ 是守恒的．令 $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p = \sqrt{E^2 - m^2}$．应用一般公式 (5-13)，并小心处理费米子的归一化，就得到

$$d\sigma = \frac{m^4}{[(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}} \int \frac{d^3p_1'}{(2\pi)^3 E_1'} \frac{d^3p_2'}{(2\pi)^3 E_2'} \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) e^4 \overline{|\mathscr{T}|^2}. \tag{6-38}$$

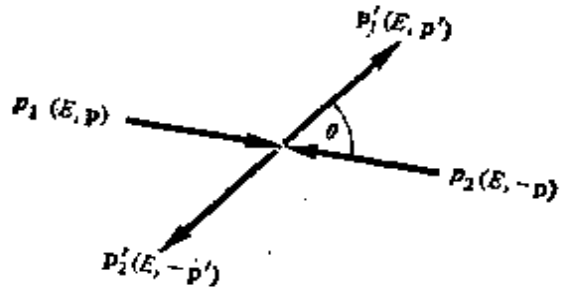



图 6-14　在质心系中的电子-电子散射运动学

在振幅的模的平方中，要对初态极化求平均，对末态极化求和．积掉了能动量守恒的 $\delta$ 函数后，有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^4 e^4}{4E^2(2\pi)^2} \overline{|\mathscr{T}|^2}, \tag{6-39}$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{|\mathscr{T}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_1' \epsilon_2'} |\mathscr{T}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \mathrm{tr}\left( \gamma_\rho \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\rho \frac{\not{p}_1' + m}{2m} \right) \right. \\ &\quad \times \mathrm{tr}\left( \gamma^\rho \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\rho \frac{\not{p}_2' + m}{2m} \right) \frac{1}{[(p_1' - p_1)^2]^2} \\ &\quad \left. - \mathrm{tr}\left( \gamma_\rho \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\rho \frac{\not{p}_2' + m}{2m} \gamma^\rho \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right. \right.\end{aligned}$$

$$\times\gamma^{\rho}\frac{\not p_1'+m}{2m}\Big)\frac{1}{(p_1'-p_1)^2(p_2'-p_1)^2}$$

$$+(p_1'\longleftrightarrow p_2')\Big\}. \tag{6-40}$$

迹是很易算得的，

$$\mathrm{tr}[\gamma_\nu(\not p_1+m)\gamma_\rho(\not p_1'+m)]$$
$$=4(p_{1\nu}p_{1\rho}'-g_{\nu\rho}p_1\cdot p_1'+p_{1\rho}p_{1\nu}'+m^2g_{\nu\rho})$$
$$\mathrm{tr}[\gamma_\nu(\not p_1+m)\gamma_\rho(\not p_1'+m)]\mathrm{tr}[\gamma^\nu(\not p_2+m)\gamma^\rho(\not p_2'+m)]$$
$$=32[(p_1\cdot p_2)^2+(p_1\cdot p_2')^2+2m^2$$
$$\times(p_1\cdot p_2'-p_1\cdot p_2)],$$

以及

$$\gamma_\nu(\not p_1+m)\gamma_\rho(\not p_2'+m)\gamma^\nu$$
$$=-2\not p_2'\gamma_\rho\not p_1+4m(p_{2\rho}'+p_{1\rho})-2m^2\gamma_\rho$$
$$\mathrm{tr}[\gamma_\nu(\not p_1+m)\gamma_\rho(\not p_2'+m)\gamma^\nu(\not p_2+m)\gamma^\rho(\not p_1'+m)]$$
$$=-32[(p_1\cdot p_2)^2-2m^2p_1\cdot p_2],$$

于是

$$\overline{|\mathscr{T}|^2}=\frac{1}{2m^4}\Big\{\frac{(p_1\cdot p_2)^2+(p_1\cdot p_2')^2+2m^2(p_1\cdot p_2'-p_1\cdot p_2)}{[(p_1'-p_1)^2]^2}$$
$$+\frac{(p_1\cdot p_2)^2+(p_1\cdot p_1')^2+2m^2(p_1\cdot p_1'-p_1\cdot p_2)}{[(p_2'-p_1)^2]^2}$$
$$+2\frac{(p_1\cdot p_2)^2-2m^2p_1\cdot p_2}{(p_1'-p_1)^2(p_2'-p_1)^2}\Big\}. \tag{6-41}$$

我们可以用能量 $E$ 和散射角 $\theta$ 来表示所有的不变量：

$$p_1\cdot p_2=2E^2-m^2,$$
$$p_1\cdot p_1'=E^2(1-\cos\theta)+m^2\cos\theta,$$
$$p_1\cdot p_2'=E^2(1+\cos\theta)-m^2\cos\theta.$$

最后得到 Møller 公式 (1932)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2(2E^2-m^2)^2}{4E^2(E^2-m^2)^2}\left[\frac{4}{\sin^4\theta}-\frac{3}{\sin^2\theta}\right.$$

$$+\frac{(E^2-m^2)^2}{(2E^2-m^2)^2}\left(1+\frac{4}{\sin^2\theta}\right)\Bigg|. \qquad (6\text{-}42)$$

在极端相对论极限下，$m/E \to 0$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{ur}} = \frac{\alpha^2}{E^2}\left(\frac{4}{\sin^4\theta}-\frac{2}{\sin^2\theta}+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E^2}\left(\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}+1\right), \qquad (6\text{-}43)$$

而在非相对论极限下，$E^2 \simeq m^2$，$v^2 = (E^2-m^2)/E^2$，

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{nr}} = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{1}{4v^4}\left(\frac{4}{\sin^4\theta}-\frac{3}{\sin^2\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{1}{16v^4}\left(\frac{1}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{\cos^4\theta/2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2}\right). \qquad (6\text{-}44)$$

这个结果首先是 Mott 得到的 (1930)。请读者把这些截面在实验室系中重新表示出来。把式 (6-44) 和 Coulomb 散射的非相对论极限 Rutherford 公式作比较也是有练习意义的。我们令其中的 $Z=1$，约化质量等于 $m/2$。

现在我们来考虑电子-正电子散射。运动学和最低级图如图 6-15 和 6-16 所示。极化指标略去了，而在图 6-16 中四维动量按照电荷的流向来取向。于是，散射振幅可从式 (6-37) 通过替代

$$\begin{aligned}
&u(p_1)\to u(p_1)\quad p_1\to p_1,\\
&u(p_1')\to u(p_1')\quad p_1'\to p_1',\\
&u(p_2)\to v(q_1')\quad p_2\to q_1',\\
&u(p_2')\to v(q_1)\quad p_2'\to -q_1,
\end{aligned} \qquad (6\text{-}45)$$

并改变振幅的符号而得到。很易算得质心系中的截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^4e^4}{4E^2(2\pi)^2}\overline{|\mathscr{T}|^2},$$

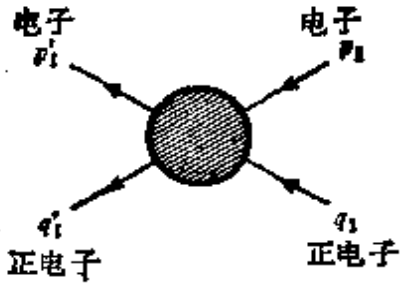



图 6-15　对电子-正电子散射有贡献的图的一般形式

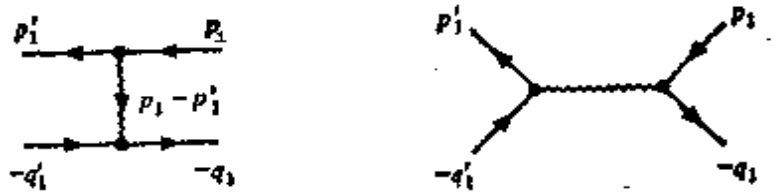



图 6-16　对电子-正电子散射的最低级贡献

其中

$$|\mathscr{T}|^2=\frac{1}{2m^4}\left\{\frac{(p_1\cdot q_1')^2+(p_1\cdot q_1)^2-2m^2(p_1\cdot q_1-p_1\cdot q_1')}{[(p_1'-p_1)^2]^2}\right.$$
$$+\frac{(p_1\cdot q_1')^2+(p_1\cdot p_1')^2+2m^2(p_1\cdot p_1'+p_1\cdot q_1')}{[(p_1+q_1)^2]^2}$$
$$\left.+2\,\frac{(p_1\cdot q_1')^2+2m^2p_1\cdot q_1'}{(p_1-p_1')^2(p_1+q_1)^2}\right\}. \tag{6-46}$$

于是，直接可写出截面的表示式：

$$\frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega}=\frac{\alpha}{2E^2}\left[\frac{5}{4}-\frac{8E^4-m^4}{E^2(E^2-m^2)(1-\cos\theta)}\right.$$
$$+\frac{(2E^2-m^2)^2}{2(E^2-m^2)^2(1-\cos\theta)^2}$$
$$+\{2E^4(-1+2\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$+4E^2m^2(1-\cos\theta)(2+\cos\theta)$$
$$\left.+2m^4\cos^2\theta\}/\{16E^4\}\right]. \tag{6-47}$$

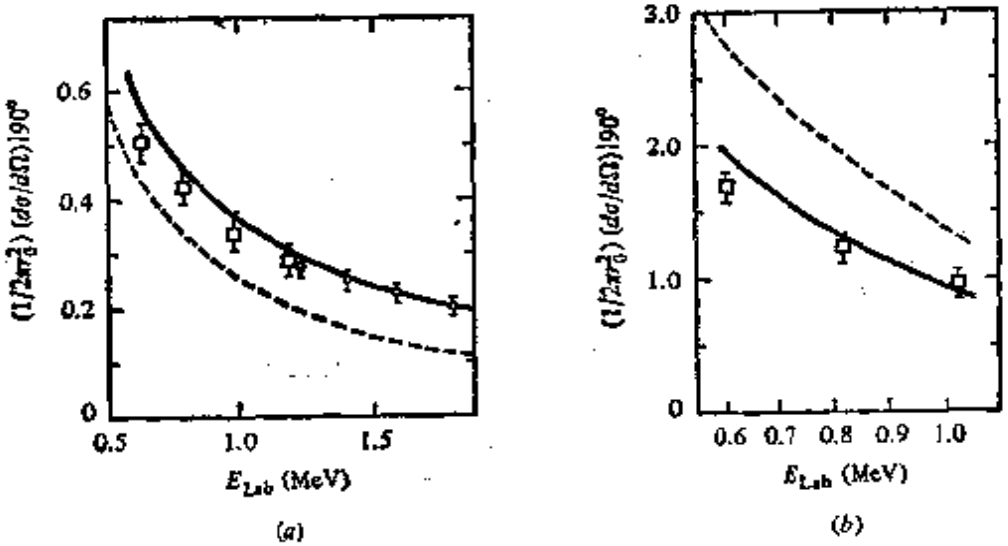
极端相对论和非相对论极限分别为

$$\frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega_{ur}} = \frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4\theta/2}{\sin^4\theta/2}+\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\right.$$
$$\left.-2\frac{\cos^4\theta/2}{\sin^2\theta/2}\right], \tag{6-48}$$

$$\frac{d\sigma^{e^-e^+}}{d\Omega_{ur}} = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{1}{16v^4\sin^4\theta/2}. \tag{6-49}$$

注意，湮灭图对后面一种情况没有贡献. 这些表示式是 Bhabha (1936) 得到的.

方程(6-42)和(6-47)可和实验数据作比较. 在图6-17中画出了 Ashkin, Page 和 Woodward (1954) 得到的在90度处的低能电子-电子散射数据. 它和 Møller 的公式(6-42)符合得很好，而和相应的适用于无质量粒子的表示式[将在下面导出，见方程(6-65)]不符合. 电子-正电子散射结果也和 Bhabha 截面符合得很好. 去掉湮灭项后就破坏了这种符合.在横坐标上的实验室系中画的，入射粒子的能量选在非相对论和极端相对论近似都不成立的中间能量范围中. 这些数值显示




(a) (b)

图6-17 $\theta = 90°$ 处的电子-电子和电子-正电子散射的实验数据，它是实验室系中入射电子能量的函数. (*a*) 电子-电子散射. 实线是 Møller 公式，虚线是略去自旋项的 Møller 公式. (*b*)电子-正电子散射. 实线是 Bhabha 公式，虚线是去掉湮灭项后的预言. (取自 A. Ashkin, L. A. Page, and W. M. Woodward, *Phys. Rev.*, Vol. 94, p. 357, 1974).

出和 $e^-e^-$ 及 $e^-e^+$ 截面之间的比值 2:1 有显著的不同，这个预言的比值是从两个电子不可分辨性的粗糙论证得到的.

为了和比较近的数据进行比较，这些最低级计算的预言可以用辐射修正来修改(见第七章)，这些数据是在电子-正电子储存环的极端相对论能量下取得的. 如图 6-18 所示，在质心系能量平方为 2 到 9 $GeV^2$ 的范围中，理论和实验的一致是惊人的，数据是在 Frascati 的 Adone 机器上工作的小组得到的.

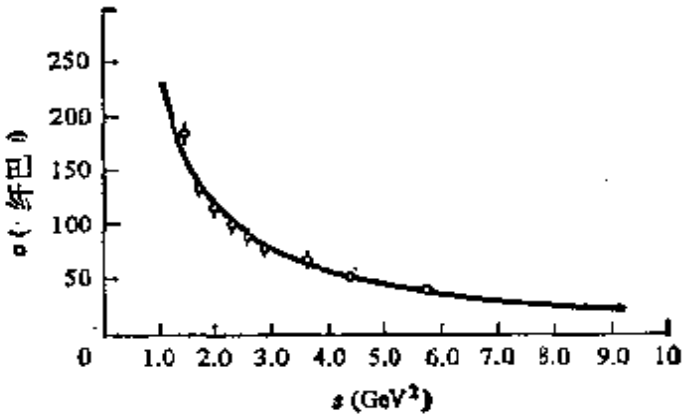



图 6-18 高能 Bhabha 散射截面，散射角为 $45°<\theta<135°$，它是总能动量平方 $s$ 的函数. 实线是有第一级辐射修正的量子电动力学计算结果. (取自 K. Strauch in "Proceedings of the Sixth Symposium on Electron and Photon Interaction at High Energies" edited by H. Rollnik and W. Pfeil, North-Holland, Amsterdam, 1974).

## 6-1-4 标量场电动力学

作为导出 Feynman 规则的最后一个解释，现在我们来介绍标量场电动力学的情况，即带电零自旋粒子的电动力学. 它使我们可以把此理论对基本过程的预言和费米子量子电动力学的预言作比较，从而了解自旋在费米子量子电动力学中的作用. 在理论上，标量电动力学是一个有趣的情况，因为它的相互作用拉氏函数中包含微商，因而不等于负的相互作用哈密顿量.

我们从自由荷电标量场的拉氏函数出发

$$\mathscr{L}_0(\varphi) = \partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^+\varphi \qquad (6\text{-}50)$$

(注意,没有因子 1/2!),并作最小替换 $\partial_\mu\varphi \to (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi$. 再加上方程 (6-25) 的电磁场拉氏函数 $\mathscr{L}_0^r(A)$, 就给出

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0(\varphi) + \mathscr{L}_0^r(A) + \mathscr{L}_{int}, \qquad (6\text{-}51a)$$

$$\mathscr{L}_{int} = -ieA^\mu(\varphi^+\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi) + e^2A^2\varphi^+\varphi. \qquad (6\text{-}51b)$$

因为相互作用拉氏函数中包含微商, 所以正则动量需加以改变:

$$\pi^+ = \frac{2\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi^+)} = \partial^0\varphi + ieA^0\varphi,$$

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} = \partial^0\varphi^+ - ieA^0\varphi^+, \qquad (6\text{-}52)$$

哈密顿量为

$$H = H_0^r + H_0(\varphi;\pi) + H_{int},$$

$$H_0(\varphi,\pi) + H_{int} = \int d^3x(\pi\dot{\varphi} + \pi^+\dot{\varphi}^+ \qquad (6\text{-}53)$$

$$- \mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_{int}),$$

这里 $H_0$ 是方程 (3-76) 的自由哈密顿量,

$$H_0(\varphi,\pi) = \int d^3x(\pi^+\pi + \partial_k\varphi^+\partial_k\varphi + m^2\varphi^+\varphi), \qquad (6\text{-}54)$$

$H_{int}$ 取为(空间指标 $k$ 取 1,2,3)

$$H_{int} = \int d^3x\mathscr{H}_{int} = \int d^3x[ieA^0(\pi^+\varphi^+ - \pi\varphi)$$

$$+ ieA^k(\varphi^+\overleftrightarrow{\partial}_k\varphi) - e^2A^kA_k\varphi^+\varphi]. \qquad (6\text{-}55)$$

如果把式 (6-52) 代入式 (6-55), 我们发现

$$\mathscr{H}_{int}(\varphi) = -\mathscr{L}_{int}(A,\varphi) - e^2A^{0^2}\varphi^+\varphi.$$

另一方面, 我们可正则变换到相互作用表象, $\varphi$, $\pi$, $A$ 就变为 $\varphi_{in}$, $\pi_{in}$, $A_{in}$, 而 $\pi_{in} = \partial_0\varphi_{in}^+$. 于是,在此表象中

$$\mathscr{H}_{int} = ieA_{in}^0(\pi_{in}^+\varphi_{in}^+ - \pi_{in}\varphi_{in})$$

$$+ ieA^{k}_{in}\varphi^{+}_{in}\overleftrightarrow{\partial}_{k}\varphi_{in} - e^{2}A_{in,k}A^{k}_{in}\varphi^{+}_{in}\varphi_{in}$$
$$= ieA^{\mu}_{in}\varphi^{+}_{in}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\varphi_{in} - e^{2}A_{in}\varphi^{+}_{in}\varphi_{in} + e^{2}A^{02}_{in}\varphi^{+}_{in}\varphi_{in}$$
$$= -\mathscr{L}_{int}(A_{in},\varphi_{in}) + e^{2}A^{02}_{in}\varphi^{+}_{in}\varphi_{in}. \qquad (6\text{-}56)$$

哈密顿量和负的拉氏函数差一非协变项(注意在这一项前面的符号的改变),它似乎危及了理论的协变性.

但是,考虑一个此理论的典型 Green 函数

$$G(x_1,\cdots,x_n;x_{n+1},\cdots,x_{2n};y_1,\cdots,y_p)$$
$$= \langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi^{+}(x_{n+1})\cdots\varphi^{+}(x_{2n})$$
$$\times A(y_1)\cdots A(y_p)|0\rangle$$
$$= \left\{\langle 0|T\varphi_{in}(x_1)\cdots A_{in}(y_p)\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-i\int d^{4}z\mathscr{H}_{int}(z)\right]|0\rangle\right\}\Big/$$
$$\left\{\langle 0|T\exp\left[-i\int d^{4}z\mathscr{H}_{int}(z)\right]|0\rangle\right\}. \qquad (6\text{-}57)$$

在它的微商项的时序乘积中,出现了第二类非协变项. 为了最终得到协变的结果,我们希望这两类非协变项精确地相消. 事实上正是这样.

因为我们迴避与微扰展开的紫外发散有关的问题,所以只对此性质给一个形式的证明.

我们更仔细地考察一下微商项引起的非协变收缩. 在下面,指标"in"去掉了,我们列出有关的传播子:

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi^{+}(y)|0\rangle = \langle 0|T\varphi(y)\varphi^{+}(x)|0\rangle$$
$$= i\int\frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}}\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^{2}-m^{2}+i\varepsilon}, \qquad (6\text{-}58a)$$
$$\langle 0|T\partial_{\mu}\varphi(x)\varphi^{+}(y)|0\rangle = \partial^{x}_{\mu}\langle 0|T\varphi(x)\varphi^{+}(y)|0\rangle, \qquad (6\text{-}58b)$$
$$\langle 0|T\partial_{\mu}\varphi(x)\partial_{\nu}\varphi^{+}(y)|0\rangle = \partial^{x}_{\mu}\partial^{y}_{\nu}\langle 0|T\varphi(x)\varphi^{+}(y)|0\rangle$$
$$- ig_{\mu 0}g_{\nu 0}\delta^{4}(x-y). \qquad (6\text{-}58c)$$

因为只有 $\varphi$ 的传播子有非协变项,所以在下面的论证中可以把场量 $A$ 看作经典的,并通过引进产生泛函

$$Z(j)\equiv\langle 0|T\exp\left\{-i\int d^4x\left[\mathscr{H}_{\rm int}(y)+j^*(y)\varphi(y)\right.\right.$$
$$\left.\left.+j(y)\varphi^+(y)\right]\right\}|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\sum_r\frac{e^r}{r!}\int d^4x_1\cdots d^4x_r A^{\mu_1}(x_1)\varphi^+(x_1)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}$$
$$\times\varphi(x_1)\cdots A^{\mu_r}(x_r)\varphi^+(x_r)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_r}\varphi(x_r)$$
$$\times\exp\left[-i\int d^4x(-e^2A^2\varphi^+\varphi+e^2A^{02}\varphi^+\varphi\right.$$
$$\left.+j^*\varphi+j\varphi^+)\right]|0\rangle, \qquad (6\text{-}59)$$

来处理 $\varphi$ 和 $\varphi^+$ 的所有的 Green 函数。我们只把相互作用哈密顿量的微商部分展开成 $e$ 的幂级数，因为它引起了非协变收缩式(6-58c)。我们引进另外一个记号：协变时序乘积 $\hat{T}$，除了式(6-58c)的最后一项以外，它和方程(6-58)的 $T$ 乘积是一致的：

$$\langle 0|\hat{T}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\nu\varphi^+(y)|0\rangle\equiv\partial_\mu^x\partial_\nu^y\langle 0|T\varphi(x)\varphi^+(y)|0\rangle. \qquad (6\text{-}60)$$

考虑 $s$ 个非协变收缩 $-ig_{\mu_0\mu_0}g_{\nu_0\nu_0}\delta^4(x-y)$ 的贡献。在 $r$ 个顶角中选取 $2s$ 个顶角的方式有 $\binom{r}{2s}=r!/(2s)!(r-2s)!$ 种，并且有 $(2s)!/2^ss!$ 种方法把它们收缩成 $s$ 对。每两个顶角的非协变收缩给出

$$eA^\mu(x)\varphi(x)[\langle 0|T\partial_\mu\varphi^+(x)\partial_\nu\varphi(y)|0\rangle$$
$$-\langle 0|\hat{T}\partial_\mu\varphi^+(x)\partial_\nu\varphi(y)|0\rangle](-e)A^\nu(y)\varphi^+(y)+(\varphi\leftrightarrow\varphi^+)$$
$$=2ie^2A_0^2\varphi^+(x)\varphi(x)\delta^4(x-y),$$

这里我们不明显地假定了 Wick 次序。于是，得到

$$Z(j)=\langle 0|\hat{T}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^r}{r!}\left[\int d^4x'A^\mu(x')\varphi^+(x')\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi(x')\right]^r$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ie^2)^s}{s!}\left[\int d^4x''A_0^2(x'')\varphi^+(x'')\varphi(x'')\right]^s$$
$$\times\exp\left[-i\int d^4x(-e^2A^2\varphi^+\varphi+e^2A_0^2\varphi^+\varphi\right.$$
$$\left.+j\varphi^++j^*\varphi)\right]|0\rangle. \qquad (6\text{-}61)$$

我们看到，非协变收缩可以指数化，所以它们的贡献被非协变顶角 $e^2A_0^2\varphi^+\varphi$ 抵消了。

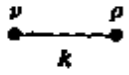
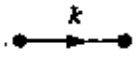
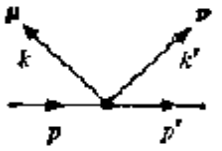
最后可用协变 $\hat{T}$ 乘积式(6-60)来写出

$$G(x_1,\cdots,y_p)=\left\{\langle 0|\hat{T}\varphi_{\rm in}(x_1)\cdots A_{\rm in}(y_p)\right.$$
$$\left.\times\exp i\int d^4z\mathscr{L}_{\rm int}(z)|0\rangle\right\}\Big/\left\{\langle 0|\hat{T}\exp i\int d^4z\mathscr{L}_{\rm int}(z)|0\rangle\right\},\tag{6-62}$$

和协变拉氏函数

$$\mathscr{L}_{\rm int}=-ieA^{\mu}_{\rm in}\varphi^{+}_{\rm in}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\varphi_{\rm in}+e^2A^2_{\rm in}\varphi^{+}_{\rm in}\varphi_{\rm in}.\tag{6-63}$$

**表 6-2　标量场电动力学的 Feynman 规则**

| | | |
|---|---|---|
| 光子 |  | $-i\left(\frac{g_{\nu\rho}-k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}+\frac{k_\nu k_\rho/\mu^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}\right)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ |
| 玻色子 |  | $\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ |
| 顶角 |  | $-ie(p_\mu+p'_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k)$ |
| |  | $2ie^2g_{\mu\nu}(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k-k')$ |

最后的 Feynman 规则总结在表 6-2 中. 第二类顶角("海鸥项")中的因子 2 是因为 $A$ 的二次项是 $A^2$，而不是 $A^2/2!$. 我们还要记住，在标量场电动力学中，每当一对光子在一对海鸥顶角间被收缩时(图 6-19)，就有一个对称因子 1/2. 相反，



图 6-19　对称因子 $1/s=1/2$ 的标量场电动力学的图

只要只考虑拓朴不同的圈，有取向的封闭标量圈就不给出对称因子.

现在我们简短地重述一下在费米子电动力学中已研究过的一些基本过程.

(a) Compton 散射

用 5-2-1 中同样的记号，我们有

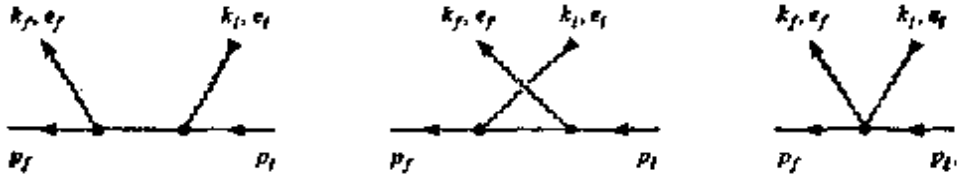



图 6-20 标量场电动力学中 Compton 散射的最低级图.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k_f}{k_i}\right)^2 |\mathscr{T}|^2.$$

精确到最低级时，图 6-20 中的三个图有贡献，但如果选取极化矢量满足 $e_i \cdot p_i = e_f \cdot p_f = 0$，则只有第三个图不为零:

$$|\mathscr{T}|^2 = 4(e_f \cdot e_i)^2, \tag{6-64}$$

于是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}\left(\frac{k_f}{k_i}\right)^2 (e_f \cdot e_i)^2,$$

和 Klein-Nishina 公式 (5-112) 类似.

(b) 两个全同电荷的散射

用和 6-1-3 节及图 6-12，6-13 同样的记号和图. 在质心系中有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2}|\mathscr{T}|^2,$$

其中

$$|\mathscr{T}|^2 = 4\left[\frac{p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2'}{(p_1 - p_1')^2} + \frac{p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_1'}{(p_1 - p_2')^2}\right],$$

所以

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2}\left(\frac{2E^2 - m^2}{E^2 - m^2}\right)^2\left[\frac{2}{\sin^2\theta} - \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2}\right]^2, \tag{6-65}$$

和方程 (6-42) 可比.

(c) 粒子对湮没成两个光子

用和 5-2-2 节同样的记号,以及和图 6-20 同样的图:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4}\frac{m+E_2}{(m+E_1-p_2\cos\theta)^2p_2}|\mathcal{T}|^2, \tag{6-66}$$

其中 $|\mathcal{T}|^2=4(\varepsilon_f\cdot\varepsilon_i)^2$。如果不观察末态极化,则

$$\sigma_{tot}=\frac{\pi r_0^2}{1+\gamma}\left[\frac{2(3+\gamma)}{\sqrt{\gamma^2-1}}-\frac{4\gamma}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})\right], \tag{6-67}$$

其中 $\gamma=E_2/m$, $r_0=\alpha/m$。非相对论极限下,$\gamma\to1$,所以 $\sigma_{tot}\sim 2\pi r_0^2/v_2$,即是 $e^+e^-\to\gamma\gamma$ 截面的两倍。

(d) 韧致辐射

用与 5-2-4 节中同样的记号,图画在图 6-21 中。极化矢量 $\varepsilon$ 取得使 $\varepsilon\cdot k=0$, $\varepsilon^0=0$。于是,第三个图没有贡献:

$$S_{fi}=\frac{-ie^2(-Ze)}{(\mathbf{p}_f+\mathbf{k}'-\mathbf{p}_i)^2}2\pi\delta(p_f^0+k^0-p_i^0)$$
$$\times\left[\frac{2p_f\cdot\varepsilon(p_i^0+p_f^0+k^0)}{(p_f+k)^2-m^2}+\frac{2p_i\cdot\varepsilon(p_i^0+p_f^0-k^0)}{(p_i-k)^2-m^2}\right],$$
$$d\sigma=\frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p_f}{p_i}\frac{\omega d\omega d\Omega_\gamma d\Omega}{q^4}\left(\frac{p_f\cdot\varepsilon}{p_i\cdot k}p_i^0+\frac{p_i\cdot\varepsilon}{p_f\cdot k}p_f^0\right)^2.$$

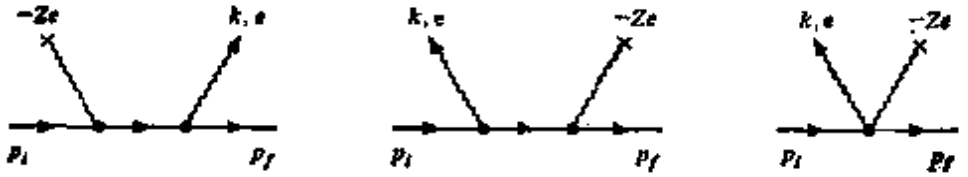



图 6-21 标量场电动力学中,韧致辐射的最低级图。

对极化求和得

$$d\sigma_{unpol}=\frac{Z^2\alpha^3}{(2\pi)^2}\frac{p_f}{p_i}\frac{1}{q^4}\frac{d\omega}{\omega}d\Omega_\gamma d\Omega$$
$$\times\left[\frac{p_f^2\sin^2\theta_f}{(E_f-p_f\cos\theta_f)^2}4E_i^2+\frac{p_i^2\sin^2\theta_i}{(E_i-p_i\cos\theta_i)^2}4E_f^2\right.$$
$$\left.+\frac{2p_ip_f\sin\theta_i\sin\theta_f\cos\varphi}{(E_i-p_i\cos\theta_i)(E_f-p_f\cos\theta_f)}4E_iE_f\right]. \tag{6-68}$$

## 6-2 图　论

迄今所遇到的 Born 图（或称树形图）都是很简单的，因为它们不包含对内动量的积分．但是，在一般情况下，必须处理更复杂的图．本节将概述一下这些一般性质，以及涉及 Feynman 图的术语．为了简单起见，除非明确指明，所有的内容都用单个中性标量场理论来描述．

### 6-2-1 圈展开

圈的微扰展开，即按照连接 Feynman 图的独立圈数目的增加来作的展开，可和用 $\hbar$ 的幂次展开等同起来．按照定义，当考虑了每一个顶角处的守恒定律后，独立圈的数目正是独立的内四维动量的数目．对有 $I$ 条内线和 $V$ 个顶角的连接图，我们有 $V$ 个表示这种守恒的 $\delta^4$ 函数，而分出入动量的守恒后，留下 $V-1$ 个限制．于是，独立动量或圈的数目是

$$L = I - (V - 1). \tag{6-69}$$

注意，$L$ 不是可用图的内线构成的面或封闭回路的数目．例如，图 6-22 的四面体图有四个封闭回路，但只有三个独立圈．



图 6-22　四面体图只有三个独立圈

为了找到 $L$ 和 $\hbar$ 的幂次之间的关系，我们总计出所有的因子 $\hbar$，但不计入使质量项得到正确量纲的因子 $\hbar$．换言之，Klein-Gordon 方程将写成 $[\partial_x^2 + (mc/\hbar)^2]\varphi = 0$，它表示质量项是量子的起源．在下面不考虑这一现象．于是，这个因子的来源有两个．首先，对

易关系(或反对易)包含因子 $\hbar$，例如

$$[\varphi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

它使每一个传播子有一因子 $\hbar$，

$$\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \frac{i\hbar}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

其次，演化算符 $e^{-iHt/\hbar}$ 中明显地包含 $\hbar$，所以

$$\exp(i/\hbar)\int \mathscr{L}_{\text{int}}(\varphi_{\text{in}})d^4z$$

中也包含 $\hbar$，于是对每一传播子有一个因子 $\hbar$，对每一个顶角有一个因子 $\hbar^{-1}$. 对一个有 $E$ 条外线的图，其总的幂次就是 $\hbar^{I+E-V} = \hbar^{E-1-L}$. 外线数目固定时，即对一给定的 Green 函数，就得到所说的结果.

在 $c = 1$ 的单位中，标量场量 $\varphi$ 的量纲为 $[\varphi]\sim$(能量/长度)$^{1/2}$，$\mathscr{L}_{\text{int}} = \lambda\varphi^4$ 的耦合常数 $\lambda$ 的量纲为 $[\hbar]^{-1}\sim$(能量×长度)$^{-1}$，而旋量场量的量纲为 $[\psi]\sim$(能量)$^{1/2}$/长度. 因而使作用量

$$I = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4\right],$$

$$\text{或}\quad I = \int d^4x\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - \frac{M}{\hbar}\right)\psi,$$

有正确的量纲.

当然，$\hbar$ 最低级的图是前面计算过的、没有任何圈的 Born 图.

读者可能会奇怪，在有单个耦合常数的理论中，为什么拓朴圈的展开会和按耦合常数的幂次展开一致. 这是因为在这种理论中，顶角数目 $V$ ($\lambda$ 的幂次)和 $L$ 之间存在一个辅助关系. 例如取 $\varphi^4$ 理论时，数一下在每一个顶角处入射线的总数目就会告诉我们，对有 $E$ 条外线的图有

$$4V = E + 2I.$$

借助于式(6-69)消去 $I$，我们就得到 $L-1+\frac{E}{2}=V$ ($E$ 是偶数)。

### 6·2·2 截腿的和固有的图形

我们来引进一些以后将证明是有用的术语。

截腿的 (truncated) 函数定义成动量空间中的 Green 函数(没有总能动量守恒的 $\delta^4$ 函数)乘以与每一条外线相联系的两点函数的倒数，即

$$G^{(n)}_{\text{trunc}}(p_1,\cdots,p_n)\equiv\prod_{k=1}^{n}[G^{(2)}(p_k,-p_k)]^{-1}\times G^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\quad n>2, \tag{6-70}$$

两点函数 $G^{(2)}$ 称为完全传播子。对 $p^2\sim m^2$，有 $[G^{(2)}(p,-p)]^{-1}\sim(iZ)^{-1}(p^2-m^2)$，其中 $Z$ 是在第五章中引进的波函数重整化常数。所以，除了 $Z$ 的幂次以外，此截腿函数的质壳值就是约化公式中的量。例如，方程(5-28)的矩阵元的连接部分为

$$\langle p_1,\cdots,p_n,\text{out}|q_1,\cdots,q_m\text{in}\rangle_c = Z^{(n+m)/2}G^{(n+m)}_{\text{trunc}}(-p_1,\cdots,-p_n,q_1,\cdots,q_m)\big|_{p_i^2=q_j^2=m^2}\times(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p_i-\Sigma q_j).$$

截腿函数的微扰展开是用截腿图(即在它们的外线上没有自能部分的图)来表示的。另外，在 Feynman 规则中，没有一个因子或传播子是由外线给出的(解释见图 6-23)。最后，如果我们象上节那样重新写进因子 $\hbar$，则 $L$ 圈的截腿图有因子 $\hbar^{L-1}$。

最后来定义固有的(proper)或单粒子不可约的图。这是这样一种截腿连接图，当切断它们的任意一条内线时仍是连接的(见图 6-23)。

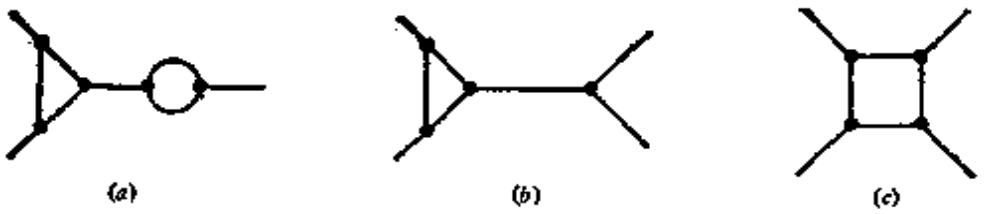



图 6-23　非截腿图的例子(a)，截腿的、但不是固有的图(b)，和固有图(c)．在情况(b)和(c)中，没有一个动子是由外线给出的．

用按固有图的微扰展开来定义的固有函数是微扰论的基本组份，因为在每一个给定图的固有子图中对内动量的积分可独立进行．由于同样的原因，它在重整化过程中起着主要的作用(见第八章)，因为为了避免所有的紫外发散，必须且只须使它们有限即可．

除了这个拓朴定义外，还可用代数来定义固有函数．如 Jona-Lasinio 证明的那样，固有顶角的生成泛函是连接图生成泛函的 Legendre 变换．后者用 $G_c(j)$ 表示，在第五章中将它定义成所有的 Green 函数的生成泛函的对数：

$$Z(j)=\langle 0|T\exp\left[i\int d^4x\varphi(x)j(x)\right]|0\rangle=eG^c(j). \quad (6\text{-}71a)$$

我们在 6-1 节中已证明，事实上它和连接 Feynman 图相应，其中

$$G_c(j)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_nG_c(x_1,\cdots,x_n)\times j(x_1)\cdots j(x_n). \quad (6\text{-}71b)$$

现在我们作 Legendre 变换如下．令 $\varphi_c(x,j)$ 是通过

$$\varphi_c(x,j)=\frac{\delta}{i\delta j(x)}G_c(j) \quad (6\text{-}72)$$

来定义的 $j$ 的泛函，并假定关系 $\varphi_c(x)=\varphi_c(x,j)$ 可以倒过来给出 $j(x)=j_c(x,\varphi_c)$．至少在假定 $(\delta G_c/\delta j)|_{j=0}=0$ 时，作为一个形式的级数这是可以的，这表示一点函数为零而

$[\delta^2 G_c/\delta j(x)\delta j(y)]|_{j=0} \neq 0$. 这就是我在下面所采取的情况. $\varphi_c$ 中的指标 $c$ 提醒我们，$\varphi_c$ 是普通的 $c$ 数函数，不要和量子场量 $\varphi$ 混淆了.

泛函 $\Gamma(\varphi_c)$ 定义为

$$i\Gamma(\varphi_c) = \left\{G_c(j) - i\int d^4x j(x)\varphi_c(x)\right\}\Big|_{j(x)=j_c(x,\varphi_c)}, \tag{6-73}$$

因子 $i$ 是为了以后方便而引入的. 从式 (6-73) 对 $\varphi_c(x)$ 微分后得到

$$i\frac{\delta}{\delta\varphi_c(x)}\Gamma(\varphi_c) = \int d^4y \left\{\left[\frac{\delta G_c(j)}{\delta j(y)} - i\varphi_c(y)\right]_{j=j_c(\varphi_c)} \times\frac{\delta j_c(y,\varphi_c)}{\delta\varphi_c(x)}\right\} - ij_c(x,\varphi_c).$$

由于有式 (6-72)，所以右端第一项为零，于是

$$j_c(x,\varphi_c) = -\frac{\delta\Gamma(\varphi_c)}{\delta\varphi_c(x)}. \tag{6-74}$$

众所周知，在经典力学或热力学的类似例子中，Legendre 变换是复杂的. 我们还注意到，$i\Gamma(\varphi_c)$ 可以看成是

$$G_c(j) - i\int d^4x j(x)\varphi_c(x)$$

($j$ 和 $\varphi_c$ 是独的)在关于 $j$ 的稳定点上的值.

我们要证明 $\Gamma(\varphi_c)$ 是固有函数 $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ 的生成泛函:

$$\Gamma(\varphi_c) = \Sigma\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) \times\varphi_c(x_1)\cdots\varphi_c(x_n). \tag{6-75}$$

将方程 (6-72) 对 $\varphi_c(y)$ 微商，得到

$$\delta^4(x-y) = \frac{\delta}{\delta\varphi_c(y)}\left[\frac{\delta}{i\delta j(x)}G_c(j)|_{j=j_c(\varphi_c)}\right]$$

$$= -i\int d^4z\,\frac{\delta j_c(z,\varphi_c)}{\delta\varphi_c(y)}\,\frac{\delta^2 G_c(j)}{\delta j(z)\delta j(x)}\Big|_{j=j_c(\varphi_c)}$$

$$= i\int d^4z\,\frac{\delta^2\Gamma(\varphi_c)}{\delta\varphi_c(z)\delta\varphi_c(y)}\,\frac{\delta^2 G_c(j)}{\delta j(z)\delta j(x)}\Big|_{j=j_c(\varphi_c)},\tag{6-76}$$

这里，在最后一式中用了方程(6-74)．所以，核

$$[\delta^2\Gamma/\delta\varphi_c(y)\delta\varphi_c(z)]\ \text{是}\ i[\delta^2 G_c/\delta j(z)\delta j(x)]_{j=j_c}$$

的逆式．现在我们可以根据假定 $(\delta G_c/\delta j)|_{j=0}=0$ 取 $\varphi_c=0$．上面的恒等式告诉我们，连接的两点函数

$$G_c^{(2)}(z-x) = -[\delta^2 G_c/\delta j(z)\delta j(x)]_{j=0},$$

是函数

$$-i\Gamma^{(2)}(y-z) = -i[\delta^2\Gamma/\delta\varphi_c(y)\delta\varphi_c(z)]_{\varphi_c=0}$$

的逆式(对卷积)．由于平移不变，$\Gamma^{(2)}$ 只与差 $y-z$ 有关，而

$$\int d^4z\,\Gamma^{(2)}(y-z)G_c^{(2)}(z-x) = i\delta^4(x-y).\tag{6-77}$$

在动量空间中，它为

$$G^{(2)}(p,-p)\Gamma^{(2)}(p,-p) = i,$$

这里 $\Gamma$ 的 Fourier 变换如在式(6-20)和(6-21)中那样定义．今后对两点函数用缩写 $G^{(2)}(p)\equiv G^{(2)}(p,-p)$，$\Gamma^{(2)}(p)\equiv\Gamma^{(2)}(p,-p)$．如果把前者写为

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2-m^2-\Sigma(p)},\tag{6-78}$$

其中 $\Sigma(p)$ 称为自能，则有

$$\Gamma^{(2)}(p) = i[G^{(2)}(p)]^{-1} = p^2-m^2-\Sigma(p).\tag{6-79}$$

现在我们可把式(6-78)展开成(见图 6-24)

$$G^2(p) = \frac{i}{p^2-m^2}+\frac{i}{p^2-m^2}\frac{1}{i}\Sigma(p)\frac{i}{p^2-m^2}$$

$$+\frac{i}{p^2-m^2}\frac{1}{i}\Sigma(p)\frac{i}{p^2-m^2}\frac{1}{i}\Sigma(p)$$

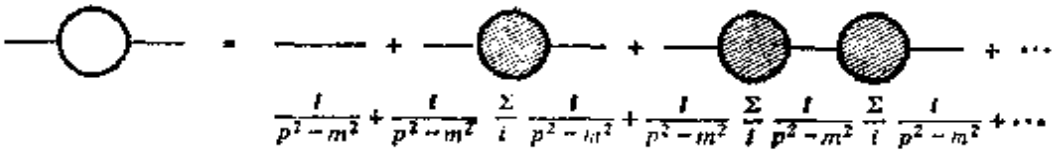


图 6-24　方程 (6-79) 的图示．白圈表示完全传播子 $G^{(2)}(p)$，阴影圈表示固有自能 $-i\Sigma$．

$$\times\frac{i}{p^2-m^2}+\cdots.$$

这表示 $-i\Sigma$ 是对两点函数的单粒子不可约微扰贡献．加上零级贡献 $i(p^2-m^2)$ 后，得到 $i\Gamma^{(2)}$．

在 $\varphi_c=0$ 处，对主要的等式 (6-76) 接连求微商，就可把高级函数 $\Gamma^{(n)}$ 解释为单粒子不可约的（固有的）函数．例如，再对 $\varphi_c(u)$ 求一次微商后，我们得到（见图 6-25）

$$0=i\int d^4z\Gamma^{(3)}(z,y,u)G^2(z,x)$$
$$+\int d^4zd^4v\Gamma^{(2)}(z,y)G^{(3)}(x,z,v)\Gamma^{(2)}(v,u).$$

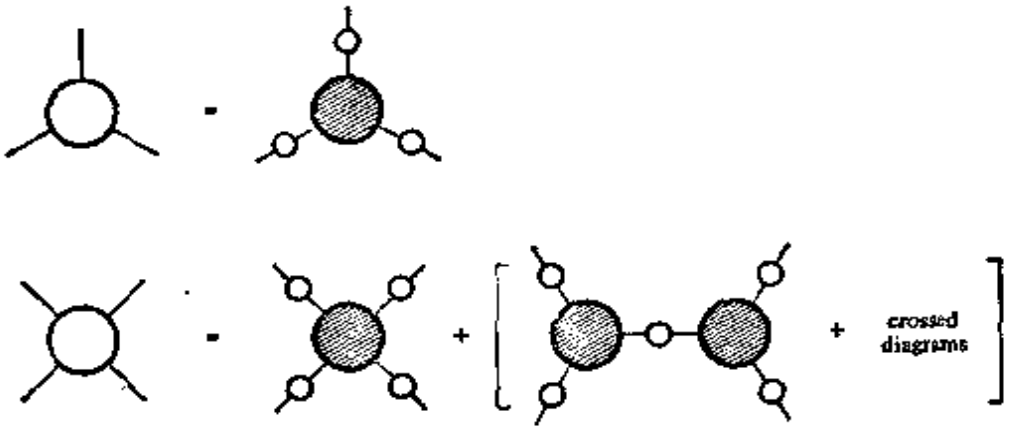



图 6-25　方程 (6-80) 和四点函数的类似等式的图示．如图 6-24 那样，白圈表示连接函数 $G^{(n)}$，阴影圈表示固有函数 $i\Gamma^{(n)}$．

再用式 (6-77)，就有

$$\Gamma^{(3)}(x,y,z)=\int d^4x'd^4y'd^4z'G^{(3)}(x',y',z')$$

$$\times\Gamma^{(2)}(x',x)\Gamma^{(2)}(y',y)\Gamma^{(2)}(z',z)$$
$$=-iG^{(3)}_{\text{trunc}}(x,y,z)。\qquad(6\text{-}80)$$

于是 $i\Gamma^{(3)}$ 是截腿函数（或单粒子不可约函数，对三点函数来说，这是没有区别的）。读者可继续做下去，从而可以确信，高级函数 $i\Gamma^{(n)}$ 事实上是单粒子不可约函数。

用方程 (6-74) 和 (6-72) 把

$$\Gamma(\varphi_c)=\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\Gamma^{(2)}(x-y)\varphi_c(x)\varphi_c(y)+\hat{\Gamma}(\varphi_c)$$

改写成下式是比较简单的：

$$-\int d^4x\Gamma^{(2)}(y-x)\frac{\delta G_c}{i\delta j(x)}$$
$$=j(y)+\frac{\delta}{\delta\varphi_c(y)}\hat{\Gamma}\left(\varphi_c=\frac{\delta G_c}{i\delta_j}\right)。$$

用方程 (6-77) 就得到

$$\frac{\delta G_c(j)}{i\delta j(x)}=i\int d^4yG_c^{(2)}(x-y)\left[j(y)+\frac{\delta\hat{\Gamma}}{\delta\varphi_c(y)}\left(\frac{\delta G_c(j)}{i\delta_j}\right)\right]。\qquad(6\text{-}81)$$

这个方程在图 6-26 的图示中已表示得很清楚。任何一个连接图或者对两点函数 $G_c^{(2)}$ 有贡献，或者是一个由与完全传播子 $G_c^{(2)}$ 连接的广义顶角 $\Gamma^{(n)}$ $(n\geqslant 3)$ 构成的树形结构。另一方面，我们知道每一个连接图都可分解成一些单粒子不可约的子图，为了把这些子图和 $i\Gamma^{(n)}$ 等起来，还要弄清楚所有的图有正确的计数因子。这正是我们所要考察的。

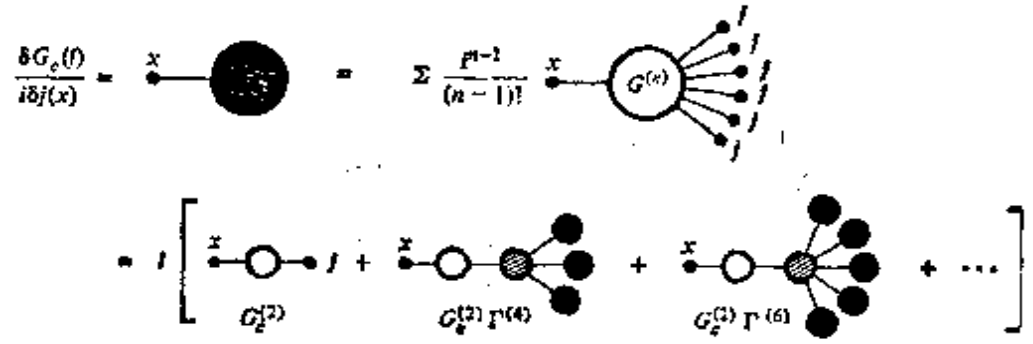



图 6-26　等式 (6-81) 的图示。采取和图 6-24 及 6-25 上同样的约定；黑团表示生成泛函 $\delta G_c(j)/i\delta_j(x)$。

在第九章中将继续对这些值得注意的等式进行解释，在那里我们将给出泛函积分方法．我们还要提到，可以进一步用 Legendre 变换来定义双粒子不可约核等等．

通过这里的讨论已很清楚，精确到最低级（树形图）时，$\Gamma(\varphi_c)$ 约化为

$$\Gamma_{\text{tree}}(\varphi_c) = \frac{1}{\hbar}\int d^4x \mathscr{L}[\varphi_c(x)], \tag{6-82}$$

$\hbar$ 因子已按上面导出的规则被重新放进去了．事实上，精确到最低级时，固有两点函数为

$$\Gamma^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\hbar}\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1\cdot x + p_2\cdot y)}(2\pi)^4 \times \delta^4(p_1+p_2)(p_1^2 - m^2),$$

因而对 $\Gamma(\varphi_c)$ 贡献

$$\frac{1}{2}\int d^4x d^4y \Gamma^{(2)}(x,y)\varphi_c(x)\varphi_c(y) = \frac{1}{2}\int d^4x[(\partial\varphi_c)^2 - m^2\varphi_c^2],$$

而精确到同一级 $\hbar^{-1}$ 时，高级 $\Gamma^{(n)}$ 约化到拉氏函数的普通顶角．

函数 $\Gamma(\varphi)$ 之所以重要，是因为它把经典作用量推广到了高级项．$\Gamma(\varphi)$ 经常被称为等效作用量．它在讨论稳定的基本场组态时，例如将在第十一章看到的自发对称破缺的讨论中，将起重要的作用．

上面的考虑可以毫无困难地推广到有几类标量场，或有非零自旋场的情况．在半整数自旋的情况中，我们必须用反对易源（如 4-3 节中那样），而“经典”场 $\phi_c$——类似于 $\varphi_c$ 的场——也属于这种反对易代数．在运算这些反对易函数时要小心一些，但 Legendre 变换仍然给出固有顶角的生成泛函．

### 6-2-3 参量表示

我们现在考虑标量场论中的任意一个固有图 $G$，并计算 Feynman 规则给出的相应的贡献 $I(G)$. 我们假定 $G$ 没有蝌蚪图，即没有出发和终止于同一顶角上的内线. 如前那样，$I$ 和 $V$ 分别表示内线和顶角的数目. 对每一条内线给一个任意的方向是方便的. 定义入射矩阵 $\{\varepsilon_{vl}\}$，

$$\varepsilon_{vl}=\begin{cases}1 & \text{如果顶角 } v \text{ 是线 } l \text{ 的出发点},\\ -1 & \text{如果顶角 } v \text{ 是线 } l \text{ 的终止点},\\ 0 & \text{如果 } l \text{ 不射到 } v \text{ 上},\end{cases}$$

它的指标分别取遍顶角和内线. 这个 $V\times I$ 的矩阵表征了图的拓朴性.再引进下面的定义: $G$ 的子图 $G'$ 是 $G$ 的一组顶角和线，其中没有一个顶角是孤立的. 我们不假定在给定 $G'$ 的两个顶角时，所有的 $G$ 中连接此两顶角线都属于 $G'$. $G$ 上的树形图是一个子图，它包含 $G$ 的所有的顶角，但没有圈. $G$ 可以从它的一个树形图通过加线而重新构造出来. 从方程 (6-69) 我们知道，树形图有 $V-1$ 条内线. 它的 $V\times(V-1)$ 的入射矩阵的秩数少于或等于 $V-1$. 现在我们来证明实际上是 $V-1$ 秩的.如果我们丢掉树形图的任意一个顶角，则在线 $l_1,\cdots,l_{V-1}$ 和余下的顶角 $v_1,\cdots,v_{V-1}$ 之间有唯一的一种一一对应，使 $\varepsilon_{v_kl_k}\neq 0$. 对任何其它的对应，至少有一个 $\varepsilon_{v_kl_k}$ 为零. 这表示相应的入射矩阵的 $(V-1)\times(V-1)$ 子式等于 $\pm 1$. 这对所有这种子式都是成立的，于是树形图的入射矩阵是 $V-1$ 秩的.

对任意的连接图，条件 $L=I+1-V>0$ 表示 $V\times I$ 的入射矩阵的秩数 $\rho$ 小于或等于 $V$.因为对任何 $l=1,\cdots,I$，有 $\Sigma_v\varepsilon_{vl}=0$，所以 $\rho\leqslant V-1$. 又因为 $\varepsilon$ 是通过在树形子图的 $V-1$ 秩矩阵上再加上一列而得到的，所以 $\rho=V-1$.

现在把 $G$ 考虑成对某个固有 Green 函数 $\Gamma(p_1,\cdots,p_n)$ 有贡献的 Feynman 图。 $p$ 是入动量，$\Sigma_i^n p_i = 0$，并用 $P_v = \Sigma p_v$ 来表示在顶角 $v$ 处的入动量之和，显然 $\Sigma_{v=1}^{V} P_v = 0$。 $G$ 对 $i\tilde{\Gamma}(p_i) = (2\pi)^4\delta(\Sigma p_i)\,i\Gamma(p_i)$ 的贡献 $\tilde{I}_G(P)$ 只与 $P$ 有关。当然，我们假定考虑的是没有微商耦合的理论。此量形为

$$\tilde{I}_G(P) = \frac{C(G)}{S(G)}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma P)I_G(P)$$

$$= \frac{C(G)}{S(G)}\int \prod_{l=1}^{I} \frac{d^4k_l}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k_l^2 - m_l^2 + i\varepsilon}\right)$$

$$\times \prod_{v=1}^{V}(2\pi)^4\delta^4\left(P_v - \sum_{l=1}^{I}\varepsilon_{vl}k_l\right), \qquad (6\text{-}83)$$

这里 $S(G)$ 是图的对称因子，而 $C(G)$ 表示所有附在顶角上的因子，如在 $\lambda(\varphi^4/4!)$ 理论中，$C(G) = (-i\lambda)^V$。四维动量 $k_l$ 按照沿第 $l$ 条内线选取的方向来取向。所研究的理论中可以有不同类的标量场，所以在质量 $m_l$ 上有指标。在有微商耦合的标量场论中，或在有非零自旋场的情况中，在式 (6-83) 的被积函数的分子上就会出现 $k$ 的多项式。这只是使讨论稍微复杂了一些，我们将在以后的章节中通过一个实际的例子来解释它。 下面我们用如下的自由标量场传播子和 $\delta^4$ 函数的积分来表示：

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \qquad (6\text{-}84a)$$

$$(2\pi)^4\delta^4\left(P_v - \sum_l \varepsilon_{vl}k_l\right) = \int d^4y_v$$

$$\times \exp\left[-iy_v\cdot\left(P_v - \sum_l \varepsilon_{vl}k_l\right)\right]. \qquad (6\text{-}84b)$$

在式 (6-84a) 中，由于有 $i\varepsilon$，所以积分在上限处收敛。在后面，这个 $i\varepsilon$ 将被省略去 ($m^2$ 可以看作有一个小的虚部)。

把表示式(6-84)代入式(6-83),并大胆地交换积分次序.如果积分不是绝对收敛的(实际上往往如此),则这种做法是不太合理的,但在第八章中我们将通过正规化和重整化过程来证明这是可以的. 对每个四维动量 $k_l$ 的积分,很易积出

$$\int \frac{d^4k_l}{(2\pi)^4}\exp\left[i\alpha_l\left(k_l^2+\frac{1}{\alpha_l}\sum_v y_v\cdot\varepsilon_{vl}k_l\right)\right]$$

$$=\int\frac{d^4k_l}{(2\pi)^4}\exp\left\{i\alpha_l\left[\left(k_l+\frac{1}{2\alpha_l}\sum_v y_v\varepsilon_{vl}\right)^2-\frac{1}{4\alpha_l^2}\left(\sum_v y_v\varepsilon_{vl}\right)^2\right]\right\}$$

$$=AA^{*3}\exp\left[-\frac{i}{4\alpha_l}\left(\sum_v y_v\varepsilon_{vl}\right)^2\right],$$

其中 $A$ 表示 Fresnel 积分,

$$A=\int\frac{dk}{2\pi}e^{i\alpha k^2}=\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\alpha_l}},$$

$$AA^{*3}=\frac{-i}{(4\pi\alpha_l)^2},$$

所以有

$$(2\pi)^4\delta^4(\Sigma P)I_G(P)=\int\prod_v d^4y_v\int_0^\infty\prod_l\left(d\alpha_l\frac{-i\exp\left\{-i\left[\alpha_l m_l^2+\left(\sum_v y_v\varepsilon_{vl}\right)^2/4\alpha_l\right]\right\}}{(4\pi\alpha_l)^2}\right)e^{-i\sum_v y_v\cdot p_v},$$

(6-85)

通过变量变换

$$y_1=z_1+z_V,$$

$$y_2=z_2+z_V,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{V-1}=z_{V-1}+z_V,$$

$$y_V = z_V,$$

将积分变量重新改组，它的雅各比行列式为 1. 因为 $\Sigma_\nu \varepsilon_{\nu l}=0$ (线 $l$ 连结两个，并且只有两个顶角)，所以 $z_V$ 只出现在式 (6-85) 的最后一个指数上. 于是，对 $z_V$ 积分给出能动量守恒的 $\delta^4$ 函数，从而得到

$$I_G(P)=\int\prod_{\nu=1}^{V-1}d^4z_\nu\int_0^\infty\prod_l\left(d\alpha_l\frac{-i\exp\left\{-i\left[\alpha_l m_l^2+\left(\sum_{\nu=1}^{V-1}z_\nu\varepsilon_{\nu l}\right)^2/4\alpha_l\right]\right\}}{(4\pi\alpha_l)^2}\right)\times e^{-i\sum_{\nu=1}^{V-1}z_\nu\cdot P_\nu}.$$

可以证明，定义为

$$[d_G(\alpha)]_{\nu_1\nu_2}=\sum_l\varepsilon_{\nu_1 l}\frac{1}{\alpha_l}\varepsilon_{\nu_2 l}$$

的 $(V-1)\times(V-1)$ 矩阵 $d_G(\alpha)$ 是非奇异的，它的行列式为

$$\Delta_G(\alpha)\equiv\det[d_G(\alpha)]=\sum_{\mathcal{g}}\prod_{l\in\mathcal{g}}\frac{1}{\alpha_l},$$

其中求和取遍 $G$ 的所有的树形图. 因为 $G$ 的每一个树形图有 $V-1$ 条线，所以 $\Delta_G$ 显然是 $\alpha_l^{-1}$ 的齐次多项式. 对 $\alpha>0$，$\Delta$ 是正的. 于是，其余 $(V-1)$ 个四维矢量 $z$ 可以积掉，结果是

$$I_G(P)=\int_0^\infty\prod_l\left(d\alpha_l\,e^{-im_l^2\alpha_l}\right)\times\frac{\exp i\left\{\sum_{\nu_1\nu_2=1}^{V-1}P_{\nu_1}\cdot[d_G^{-1}(\alpha)]_{\nu_1\nu_2}P_{\nu_2}\right\}}{[i(4\pi)^2]^L[\alpha_1\cdots\alpha_l\Delta_G(\alpha)]^2}.$$

此公式把 $I_G(P)$ 表示成了外动量的不变标量积 $P_{\nu_1}\cdot P_{\nu_2}$ 的

函数．在指数上或在分母上出现的 $\alpha$ 的函数，可以写成与顶角 $V$ 的选取无关的形式．一方面，分母

$$\mathscr{P}_G(\alpha) \equiv \alpha_1 \cdots \alpha_I \Delta_G(\alpha) = \sum_{\mathscr{T}} \prod_{l \in \mathscr{T}} \alpha_l, \qquad (6\text{-}86)$$

显然是一个与 $V$ 无关的 $L$ 次齐次多项式．另一方面，二次型

$$\mathscr{Q}_G(P,\alpha) \equiv \sum_{v_1,v_2=1}^{V-1} P_{v_1} \cdot [d_G^{-1}(\alpha)]_{v_1 v_2} P_{v_2},$$

可以表示成

$$\mathscr{Q}_G(P,\alpha) = \frac{1}{\mathscr{P}_G(\alpha)} \sum_C s_C \prod_{l \in C} \alpha_l, \qquad (6\text{-}87)$$

其中求和取遍所有可能的 $L+1$ 条线的“割断” $C$，这些割断把图分成、并且刚好分成两个连接的部分 $G_1(C)$、$G_2(C)$．这种分割是从 $G$ 的树形图通过割断第 $(L+1)$ 条线而得到的．而 $s_C$ 表示在 $G_1(C)$ 或 $G_2(C)$ 中的动量 $P$ 的平方：

$$s_C = \Big(\sum_{v \in G_1(C)} P_v\Big)^2 = \Big(\sum_{v \in G_2(C)} P_v\Big)^2, \qquad (6\text{-}88)$$

于是 $Q_G$ 是两个分别为 $L+1$ 次和 $L$ 次的齐次多项式的比值．

最后的参量形式为

$$I_G(P) = \int_0^\infty \prod_1^I (d\alpha_l e^{-i\alpha_l m_l^2}) \times \frac{e^{i\mathscr{Q}_G(P,\alpha)}}{[i(4\pi)^2]^L [\mathscr{P}_G(\alpha)]^2}, \qquad (6\text{-}89)$$

其中 $\mathscr{P}_G$ 和 $Q_G$ 在方程 (6-86) 到 (6-88) 中给出，而我们要记住 $L = I + 1 - V$．结果式(6-86)到(6-88)的证明，以及在这里的初步描述中略去的函数 $\mathscr{P}_G$，$Q_G$ 的详细性质，可在参考文献中找到．

我们用一个明确的例子来解释规则式 (6-86) 到 (6-88)．图 6-27 的图对 $\varphi^4$ 理论的四点函数有贡献．我们记得，对称因子是 $S(G) = 2$ 而

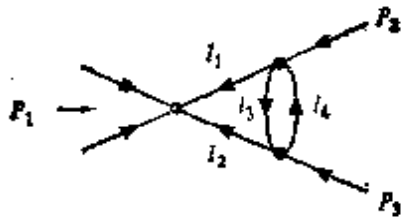



图 6-27　对四点函数有贡献的图样

$C(G) = (-i\lambda)^3$. 树形图 $\mathscr{T}$ 是 $(l_1l_2)$, $(l_1l_3)$, $(l_1l_4)$, $(l_2l_3)$, $(l_3l_4)$. 所以，多项式 $\mathscr{P}_G$ 等于

$$\mathscr{P}_G = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3.$$

现在把割断 $C$ 和相应的 $s_C$ 列出来：

$$\begin{aligned}
(l_1l_2l_3) \quad & s_C = P_1^2 = (P_2 + P_3)^2, \\
(l_1l_2l_4) \quad & s_C = P_1^2 = (P_3 + P_3)^2, \\
(l_1l_3l_4) \quad & s_C = P_2^2 = (P_1 + P_3)^2, \\
(l_2l_3l_4) \quad & s_C = P_3^2 = (P_1 + P_2)^2.
\end{aligned}$$

选 $P_1$ 和 $P_2$ 为独立的变量，有

$$\mathscr{Q}_G(P,\alpha) = \mathscr{P}_G^{-1}[P_1^2\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + P_1^2\alpha_1\alpha_3\alpha_4 + (P_1 + P_2)^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4].$$

我们可用 $\mathscr{P}_G$ 和 $Q_G$ 的齐次性

$$\begin{aligned}
Q_G(P,\lambda\alpha) &= \lambda Q_G(P,\alpha), \\
\mathscr{P}(\lambda\alpha) &= \lambda^L\mathscr{P}_G(\alpha),
\end{aligned}$$

进一步来简化方程 (6-89). 把等式

$$1 = \int_0^\infty d\lambda\,\delta\left(\lambda - \sum_i^I \alpha_i\right)$$

代进被积函数，并重新标度，即 $\alpha_i \to \lambda\alpha_i$. 于是

$$\begin{aligned}
I_G(P) = {} & \frac{1}{[i(4\pi)^2]^L}\int_0^1 \prod_1^I d\alpha_i \frac{\delta(1 - \Sigma\alpha_i)}{[\mathscr{P}_G(\alpha)]^2} \\
& \times\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda}\,\lambda^{I-2L}\exp\left\{i\lambda\left[\mathscr{Q}_G(P,\alpha) - \sum_i^I m_i^2\alpha_i\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{6-90}$$

对 $\alpha$ 的积分由于有 $\delta$ 函数而被压缩到间隔 (0，1) 中. 由于 $m_i^2$ 中暗含着 $i\varepsilon$，所以在对 $\lambda$ 的积分中，上限处的收敛性问题

没有引起任何麻烦。 假定 $2V - I - 2 > 0$，则积分在低端是收敛的。用 Euler 的 $\Gamma$ 函数得到

$$I_G(P) = \frac{i^{3(V-1)-2I}}{(4\pi)^{2L}} \Gamma(2V - I - 2) \int_0^1 \prod_1^I d\alpha_l \times \frac{\delta\left(1 - \sum_1^I \alpha_l\right)}{[\mathscr{P}_G(\alpha)]^2 \left[\mathscr{Q}_G(P,\alpha) - \sum_1^I \alpha_l m_l^2\right]^{2V-I-4}}. \tag{6-91}$$

改写成 $2L - 4V + 4 < 0$ 的收敛条件，正好表示 $I_G(P)$ 有负方次的能量量纲。可在方程 (6-83) 或方程 (6-91) 中看出这一点，因为 $Q_G$ 的量纲为 $[E]^2$。当此量纲为非负的时候，积分在下限 $\lambda \sim 0$ 处发散，这当然说明了在此参量表示中积分式(6-83)在大的 $k$ 值处的紫外发散性。量纲和出现发散性之间的关系揭示了幂次计算法，这是重整化步骤中的判断标准。

参量表示式 (6-89) 到 (6-91)，在许多方面都是有趣和有用的。它们提供了一种在实际计算中可能是(也可能不是)方便的显式。它们也可能在研究 Green 函数的解析性或进行重整化时是有用的。最后，它们显示出和电路理论有许多类似的地方。

### 6-2-4 欧氏空间的 Green 函数

一个(标量场)理论的 Green 函数是它们外动量的不变标量积的函数，这些外动量是实的 Lorentz 四维矢量。如在上章末和将在下一节中所看到的那样，这些函数是解析的，并可以延拓到非物理区中去。这里我们详细地叙述如何延拓到欧氏区域中去。在此区域中，场论表现出和统计力学问题有有趣的类似。我们不从头来描述欧氏理论，只是导出它的微扰规则。还是为了简单起见，我们来讨论标量场理论。

考虑一个固有函数 $\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$，并假定它的宗量满足条件

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k p_k\right)^2 \leqslant 0 \qquad \text{(欧氏区)}, \tag{6-92}$$

$(u_k)$ 取任何的实数. 满足此条件的流形是动量空间的线性类空子空间(超空间). 把 $\Gamma^{(n)}$ 看作不变量 $p_i \cdot p_j (i, j = 1, \cdots, n-1)$ 的函数，我们来计算没有这个限制时全流形的维数，以及子流形式(6-92)的维数. 当然，我们必须记住，在四维空间中，任何一个多于四个矢量的矢量组都是线性相关的. 所以对 $n \geqslant 6$, $p$ 是不独立的. 因此，对 $n \geqslant 4$，不变量 $p_i \cdot p_j$ 属于 $4n-10$ 维的流形 ($n=2$, 3 时，分别为 1 和 3 维). 如果考虑了条件式(6-92)，则 $n \geqslant 4$ 时，它们限制于只能是 $3n-6$ 维的子流形 ($n=2,3$ 时分别为 1 和 3 维). 对 $n=4$，两者都有 6 维(例如 $s, t, u, p_1^2, \cdots, p_4^2$ 满足 $\Sigma p_i^2 = s+t+u$)，而对 $n \geqslant 5$，欧氏子流形式(6-92)的维数小于整个空间的维数.

在欧氏区域式(6-92)中，所有的 $p$ 正交于某一个类时矢量 $n$. 经过 Lorentz 变换后，可选 $n=(1,0,0,0)$，于是对所有的 $i$ 有 $p_i^0 = 0$. 这使我们可以对每一个 $p_i$ 对应一个欧氏空间 $R^4$ 中的矢量 $\hat{p}_i$：在那个系中 $\hat{p}_i^0 = p_i^0 = 0$，而 $\hat{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i$. 于是

$$\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j = \hat{p}_i^0 \hat{p}_j^0 + \hat{p}_i^1 \hat{p}_j^1 + \hat{p}_i^2 \hat{p}_j^2 + \hat{p}_i^3 \hat{p}_j^3 = -p_i \cdot p_j .$$

如果现在取一个对 $\Gamma^{(n)}$ 有贡献的图，并用方程(6-89)来表示它的贡献，则我们就可定义进入顶角 $v$ 的动量 $p_l$ 的和 $P_v$，而对图的每一种"割断" $C$，对应地有[比较式(6-87)和(6-88)]

$$\hat{s}_C \equiv \left(\sum_{v \in G_1(C)} \hat{P}_v\right)^2 = -\left(\sum_{v \in G_1(C)} P_v\right)^2 = -s_C$$

$$\mathscr{Q}_G(\hat{P}, \alpha) = \frac{1}{\mathscr{P}_G(\alpha)} \sum_C \hat{s}_C \prod_{l \in C} \alpha_l = -\mathscr{Q}_G(P, \alpha).$$

于是，按照流形式(6-92)，可以把式(6-90)改写成

$$I_G(P) = \int_0^1 \left(\prod_1^I d\alpha_l\right) \delta(1 - \Sigma\alpha_l) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{I-2L} \times \frac{\exp\{-i\lambda[\mathscr{Q}_G(\hat{P}, \alpha) + \Sigma\alpha_l m_l^2]\}}{[i(4\pi)^2]^L [\mathscr{P}_G(\alpha)]^2}.$$

我们记得，$m_l^2$ 中隐含一个负的虚部. 这一点加上指数括弧内的正值性(对 $m_l^2 > 0$)，使我们可以把复 $\lambda$ 平面中的积分回路旋转 $-\pi/2$ (即顺时

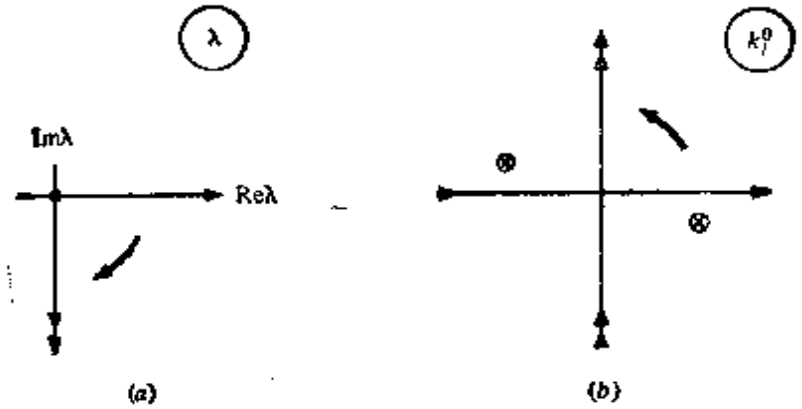



图 6-28　在参量空间(a)或动量空间(b)中的 Wick 转动．原来的积分回路用单箭头表示，后来的用双箭头表示．在(b)中叉号⊗表示极点 $k_l^0 = \pm[(\mathbf{k}_l + \Sigma\mathbf{p})^2 + m_l^2 - i\varepsilon]^{1/2}$ 的位置．

针转)(图 6-28)．当然，这等价于方程(6-89)中的所有变量 $\alpha$ 同时作 $-\pi/2$ 的旋转．我们必须强调，$i\varepsilon$ 的约定在告诉我们允许作怎样的旋转这一点上，是有决定性的作用的，并且如果某个 $m_l^2$ 为负的，则通常所称的 Wick 转动是不合适的．在动量空间中[和式(6-83)相比]，Wick 转动相当于在所有的 $p_l^0 = 0$ 的系中，所有的 $k_l^0$ 旋转 $\pi/2$(反时针转)．这是和位于

$$k_l^0 = \pm[(\mathbf{k}_l + \Sigma\mathbf{p})^2 + m_l^2 - i\varepsilon]^{1/2}$$

的传播子的极点位置是协调的．旋转以后，我们得到在欧氏区域中有

$$I_G(P) \equiv (-i)^V \, {}^1\hat{I}_G(\hat{P}) = (-i)^{V-1} \int_0^\infty \prod_1^I d\alpha_l \times \frac{\exp\{-[\mathscr{Q}_G(\hat{P},\alpha) + \Sigma\alpha_l m_l^2]\}}{(4\pi)^{2L}[\mathscr{P}_G(\alpha)]^2}, \tag{6-93}$$

$I_G(P)$ 前面的因子 $C(G)$[和式(6-83)比较]中包含 $i^V$，它是从 $\exp\left[i\int d^4z\,\mathscr{L}_{\text{int}}(z)\right]$ 展开的第 $V$ 级来的．我们令 $C(G) = i^V\hat{C}(G)$，并把式(6-93)改写成

$$\frac{C(G)}{S(G)} I_G(P) = i\,\frac{\hat{C}(G)}{S(G)}\,\hat{I}_G(\hat{P}).$$

例如，在 $\lambda\varphi^4$ 理论中 $\hat{C}(G) = (-\lambda)^V$．我们记得，从 6-2-2 节的分析中得到，固有函数是和通过 Legendre 变换式(6-73)和(6-75)定义的

$i\Gamma^{(n)}$ 恒等的。于是，幸亏有此最后一个因子 $i$，才使这些函数 $\Gamma^{(n)}$ 和实的欧氏 Green 函数 $\hat{\Gamma}^{(n)}$ 相等：

$$\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) = \hat{\Gamma}^{(n)}(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_n).$$

这些函数定义成每个图的贡献 $[\hat{C}(G)/S(G)]\hat{I}_G(\hat{P})$ 之和，通过倒着重复 6-2-3 中同样的计算，易见

$$(2\pi)^4\delta^4(\Sigma\hat{p})\frac{\hat{C}(G)}{S(G)}\hat{I}_G(\hat{P}) = \frac{\hat{C}(G)}{S(G)}\int\prod_l\frac{d^4\hat{k}_l}{(2\pi)^4}$$
$$\times\frac{1}{\hat{k}_l^2+m_l^2}\prod_v(2\pi)^4\delta^4\left(\hat{P}_{v1}-\sum_l s_{vl}\hat{k}_l\right). \quad (6\text{-}94)$$

现在这里的 $\hat{k}_l$ 是欧氏四维动量，$\hat{k}_l^2 = \sum_{i=0}^{3}(\hat{k}_l^i)^2$。和方程 (6-93) 一样，这里的被积函数是正的。当然，方程 (6-94) 表示 $\hat{\Gamma}$ 可用欧氏 Feynman 规则来计算：

顶角　　$-\lambda$　　代替了　$-i\lambda$，

传播子　　$\frac{1}{\hat{k}^2+m^2}$　　代替了　$\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}$。　(6-95)

从此规则我们知道，在重合区域式 (6-92) 中，连接 Green 函数(有外传播子的)之间的联系为

$$G_C^{(n)}(p_1,\cdots,p_n) = i(-i)^n\hat{G}_C^{(n)}(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_n). \quad (6\text{-}96)$$

在形态空间中，这些函数为

$$\hat{G}_C(x_1,\cdots,x_n) = \int\prod_1^n\frac{d^4q_k}{(2\pi)^4}e^{-i\hat{q}_k\cdot x_k}(2\pi)^4$$
$$\times\delta^4(\Sigma q_l)\hat{G}_C(\hat{q}_1,\cdots,\hat{q}_n),$$

其中 $x\cdot\hat{q} = x^0q^0 + x^1q^1 + x^2q^2 + x^3q^3$。现在我们引进生成泛函

$$\hat{G}_C(j) = \Sigma\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n j(x_1)\cdots j(x_n)\hat{G}_C(x_1,\cdots x_n),$$

和对 $\hat{\Gamma}(\varphi_c)$ 的类似的表示式。将在方程 (6-71b)、(6-72)、(6-73) 和 (6-96) 中所有的 $i$ 因子总计起来，就直接可验证，$\hat{\Gamma}(\varphi_c)$ 是 $\hat{G}_C$ 的 Legendre 变换：

$$\hat{\Gamma}(\varphi_c) = \left[\hat{G}_c(j) - \int d^4x j(x)\varphi_c(x)\right], \quad (6\text{-}97)$$

其中 $\varphi_c$ 和 $j$ 的关系为

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta \hat{G}_C(j)}{\delta j(x)}. \tag{6-98}$$

$\varphi^4$ 理论中最低级的欧氏函数为

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{tree}(\varphi_c) &= -\int d^4x \mathscr{L}_E[\varphi_c(x)] \\ &= -\int d^4x \left( \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} \partial_k \varphi_c \, \partial_k \varphi_c + \frac{m^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi_c^4 \right). \end{aligned}$$

注意，和式 (6-82) 相比，$(\partial_0 \varphi)^2$ 项的符号是不同的.

欧氏理论可看成统计力学理论，每一个场组态的权重是

$$\exp\left[ -\int d^4x \mathscr{L}_E(\varphi) \right].$$

在引进泛函积分后(第九章)，这就显得更明白了.

作为一个练习，读者可讨论有自旋为 1/2 的场时 Wick 转动的意义，即 $\gamma$ 矩阵会怎样，$\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 之间有什么关系. 然后，大家便可写出欧氏量子电动力学的 Feynman 规则.

## 6-3 解 析 性

在第五章的最后一节中，我们从定域因果性的一般原理推得了振幅的解析性. 作为一个典型的例子，证明了当粒子质量满足适当的条件时，两体向前弹性散射振幅对于能量变量是解析的. 解析区域是分枝点在 $s = M_+^2$ 和 $u = 2(m_a^2 + m_a^2) - s = M^2(t = 0$ 时)处的割开的平面，这两点相应于直接道 ($s$) 和交叉道 ($u$) 中的最低中间态. 穿过割线的不连续量通过光学定理和该道的总截面联系起来. 于是，我们可预期在沿实轴上，所有相应于开放一个新阈的能值处，振幅有奇异性，新的能阈表示出现一个新的可能末态. 例如，对 $\pi N \to \pi N$ 向前散射振幅，预期在 $s$ (或 $u$) $= (m_N + m_\pi)^2$, $(m_N + 2m_\pi)^2$ 等等处有奇异性.

在本节中我们将粗略地讨论一下 Feynman 积分的解析

性．研究这种解析性的兴趣有三方面．首先是在微扰论范围内检验一下严格推出来的一般解析性，这是很重要的．每当我们可以从一般的公理来证明存在一个解析区域时，任何一个图的贡献都必须顺次经历证明的各步，所以必须具有这种解析性，更正确地说是它们的等价的微扰表示式具有这种解析性．但是，当质量值使一般的证明失败时，则可证明对单个图的研究是有用的．其次，这种研究可用来找出复杂的奇异性或研究几个变量的解析性．即使我们怀疑微扰级数不收敛，从而使精确的振幅与单个的图有不同的性质，这种研究也可提出许多猜想．最后，一个或几个变量的色散关系在计算 Feynman 振幅时可能是一个有用的工具．

我们经常要讨论散射振幅的物理叶．要考虑到从阈出发并用 Feynman $i\varepsilon$ 约定所作的解析延拓达到的区域．在此过程中，不考虑穿过由振幅的奇异性结构引起的各种割线的可能性．

### 6-3-1 Landau 方程

在用沿回路 $C$（例如实轴的一个区间 $(a,b)$）的积分定义的函数

$$F(z)=\int_C dx f(x,z)$$

中，有两类奇异性．我们假定除了在 $x=x_k(z)$ 处的奇异性外，函数 $f(x,z)$ 关于变量 $x$，$z$ 是解析的．显然，$F(z)$ 对任何 $z$ 值都是解析的，因此存在一个没有奇异性的 $C$ 的开邻域．如果某种奇异性 $x_k(z)$ 接近了回路 $C$，而回路可以改变，从而避开了此奇异性，则 $F$ 仍是解析的．所以，$F$ 作为 $z$ 的函数，在两种回路不再能改变的情况下有奇异性．

1．一个奇异性 $x_r(z)$ 逼近回路的一端：$z\to z_0$ 时，

$x_i(z) \to a$ 或 $b$；$z_0$ 称为端点奇异点。

2. 回路 $C$ 夹在两个奇异性 $x_1(z)$ 和 $x_2(z)$ 之间(图 6-29)：当 $z \to z_0$ 时，$x_1(z)$ 和 $x_2(z)$ 从上面和下面逼近回路；这时 $z_0$ 称夹持奇异点




图 6-29 回路夹在被积函数的奇异性 $x_1(z)$ 和 $x_2(z)$ 之间引起的奇异性

下面的积分给出了一些初等的例子：

$$F(z) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + z} = \frac{2}{\sqrt{z}} \arctan \frac{1}{\sqrt{z}}, \tag{6-99a}$$

$$F(z) = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-2)(x-z)} = \frac{1}{z-2} \ln \left[\frac{2(z-1)}{z}\right], \tag{6-99b}$$

$$F(z) = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1 - x^2 z} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}. \tag{6-99c}$$

在第一例中，$z = 0$ 是夹持奇异点。当 $z \to 0_+$ 时，回路陷进了两个极点 $x = i\sqrt{z}$ 和 $x = -i\sqrt{z}$ 之间。在第二例中，$z = 0$ 和 $z = 1$ 是端点奇异点。$z = 2$ 的夹持奇异性出现于对数的所有的 Riemann 叶上，只有第一叶除外(相应于主值)。事实上，在第一叶上积分回路不穿过 $x = 2$ 点。但是，进入后面的叶上时，我们不得不改变积分回路。这就可能发生夹持的情况。同样的现象也出现于第三个例子式 (6-99c) 中。这里，$z = 1$ 处的奇异性是端点奇异性，而在除第一叶外的每一叶上，$z = 0$ 的奇异性是无穷远处的夹持奇异性。如果把积分变量 $x$ 变为 $u = 1/x$，这一点就更清楚了。

这种讨论必须推广到有几个复变量 $x_i$ 和 $z_i$ 的函数中去，即 $F(z_i) = \int_H \prod_i dx_i f(x_i, z_i)$。积分区的边界，即超回路 $H$，是由一组解析关系 $\mathscr{P}_r(x, z) = 0$ 来确定的。被积函数 $f(x_i,$

$z_i$)的奇异性出现于解析流形 $\mathscr{S}_s(x, z) = 0$ 上。当超回路 $H$ 被夹在两个或更多个奇异面中，或当奇异面碰到了边界面时，就出现奇异性。更严格地说，可以证明出现奇异性的必要条件是存在一组不全等于零的复参数 $\lambda_s$, $\tilde{\lambda}_r$，使得在 $x_i = x_i^0$, $z_i = z_i^0$ 处有

$$\begin{aligned} &\lambda_s \mathscr{S}_s(x^0, z^0) = 0 \quad \text{对所有 } s, \\ &\tilde{\lambda}_r \mathscr{T}_r(x^0, z^0) = 0 \quad \text{对所有 } r, \end{aligned} \tag{6-100}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_r \tilde{\lambda}_r \mathscr{T}_r(x, z) + \sum_s \lambda_s \mathscr{S}_s(x, z)\right]\Big|_{x^0, z^0} = 0$$

对所有 $i$.

最后一个条件表示超曲面在夹持点相切。这只是一个必要条件。要确定超曲面确实被夹持，还需要详细的研究。

我们把这些一般的结果用到首先在闵氏动量空间中表示出来的 Feynman 积分上去。考虑

$$I_G(P) = \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \prod_{i=1}^{I} \frac{i}{k_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon}, \tag{6-101}$$

其中的记号和方程 (6-83) 中的一样，只是所有的内动量 $k$ 用一组圈变量 $q_l$ 和外动量 $P$ 来表示。积分区域的边界在无穷远处。在初步的讨论中，我们不考虑在无穷远处可能出现的端点奇异性，并且不引进 $\mathscr{T}_r$ 项。被积函数的奇异性是由方程 $k_i^2 - m_i^2 = 0$ 给出的。Landan 方程就是在此情况中的必要条件 (6-100) 的表示式：

$$\begin{cases} \lambda_i(k_i^2 - m_i^2) = 0 \quad \text{对所有的 } i = 1, \cdots, I, & \text{(6-102a)} \\ \sum_i \lambda_i k_i \cdot \dfrac{\partial k_i}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, \cdots, L. & \text{(6-102b)} \end{cases}$$

第二个方程可改写为

$$\sum_{i \in \mathscr{C}_l} (\pm)\lambda_i k_i = 0, \tag{6-103}$$

这里用到了这样的事实，即与圈变量 $q_l$ 线性相关的 $k$ 沿着用 $\mathscr{L}_l$ 表示的单个圈。第一个方程 (6-102a) 的解释是，对一条内线来说，只当其四维动量在质壳 $k_i^2 = m_i^2$ 上，或参量 $\lambda_i$ 为零时，才有奇异性。在后一种情况中，第 $i$ 条线决不会出现于奇异性方程中。这种奇异性是第 $i$ 条线收缩成一点的约化图的奇异性。

我们来看看在其它积分表示中如何推得 Landau 方程是有好处的。在考虑 6-2-3 中研究的参量形式之前，我们引进一个混合表示

$$\frac{1}{(I-1)!} I_G(P) = i^I \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \prod_{i=1}^{I} d\alpha_i \times \frac{\delta(1-\Sigma\alpha_i)}{\left[\sum_{i=1}^{I} \alpha_i (k_i^2 - m_i^2)\right]^I}, \tag{6-104}$$

它是从方程 (6-101) 应用等式

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_I} = (I-1)! \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_I \delta(1-\Sigma\alpha_i)}{\left(\sum_{i=1}^{I} \alpha_i A_i\right)^I} \tag{6-105}$$

而得到的。现在，$I_G(P)$ 的奇异性是分母 $\mathscr{S} = \Sigma_1^I \alpha_i (k_i^2 - m_i^2)$ 的零点引起的，它们在 $(\alpha, q)$ 空间中夹持超回路或者碰到边界 $\mathscr{S}_i = \alpha_i = 0$。奇异性方程为

$$\lambda' \mathscr{S} = 0, \tag{6-106a}$$

$$\lambda_i' \alpha_i = 0 \qquad i = 1, \cdots, I, \tag{6-106b}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\lambda' \mathscr{S} + \sum_i \lambda_i' \alpha_i\right) = 0 \qquad l = 1, \cdots, L, \tag{6-106c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\lambda' \mathscr{S} + \sum_i \lambda_i' \alpha_i\right) = 0 \qquad j = 1, \cdots, I, \tag{6-106d}$$

$\lambda' = 0$ 的情况导致对所有的 $i$ 有 $\lambda_i' = 0$。我们弃去此平庸解，而取 $\mathscr{S} = 0$。于是，方程 (6-106c) 给出

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q_l} = 2 \sum_i \alpha_i k_i \frac{\partial k_i}{\partial q_l} = 0,$$

而方程 (6-106b,d) 导致

$$\alpha_j(k_j^2 - m_j^2) = 0 \qquad j = 1,\cdots,l.$$

我们回到了前面的方程(6-102)，只是 $\lambda$ 被 $\alpha$ 所代替.

对表面紫外有限的图成立 [即 $2L - 4(V-1)<0$] 的参量表示式(6-91)，是从方程(6-104)通过对圈动量 $q$ 的积分而得到的. 在不考虑有来自 $\mathscr{D}_G(\alpha)$ 的零点的可能奇异性时，我们取 $\mathscr{S} = \Omega_G(P,\alpha) - \sum_{j=1}^{l}\alpha_j m_j^2$, $\tilde{\mathscr{S}} = \alpha_j$，并把奇异性条件写成

$$\begin{aligned} &\lambda'\mathscr{S} = 0, \\ &\lambda_j'\alpha_j = 0 \qquad j = 1,\cdots,l, \\ &\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\lambda'\mathscr{S} + \sum_i \lambda_i'\alpha_i\right) = 0 \qquad j = 1,\cdots,l, \end{aligned} \tag{6-107}$$

$\lambda' = 0$ 仍是平庸解. 奇异性条件可改写成对每一个 $j$ 有 $\alpha_j\partial\mathscr{S}/\partial\alpha_j = 0$. 由于 $\mathscr{S}$ 是齐次的，所以它表示 $\mathscr{S} = \Sigma_j\partial\mathscr{S}/\partial\alpha_j = 0$. 为了证明它和 Landau 方程(6-102)是等价的，我们需要对每一条内线重新引入动量变量 $k_i$，它们是用外动量和参量 $\alpha$ 来定义的. 并选得满足式(6-103)型的方程，其中 $\lambda_i$ 用 $\alpha_i$ 来代替. 用这个定义，条件 $\alpha_j\partial\mathscr{S}/\partial\alpha_j = 0$ 简缩成方程(6-102a).

在找方程组(6-106)或(6-107)的解时，条件 $\Sigma\alpha_i = 1$ 可以抛去，因为函数 $\mathscr{S}$ 是齐次的.

在两种表示中，相应于对所有 $i$ 的 $\lambda_i$(或 $\alpha_i$) $\neq 0$ 的解，称为主导的奇异性，而对 $i \in \mathscr{S}$ 的 $\lambda_i$(或 $\alpha_i$) $= 0$ 的解称为非主导的奇异性. 在伴随约化图 $R = G/\mathscr{S}$ 中(其中所有的线 $i \in \mathscr{S}$ 收缩到一点)，奇异性是主导的.

Landau 方程的用处是用来考虑以代数形式确定奇异性的位置. 但是，甚至对简单的图要找到这些方程的解，也是一种艰苦的工作. 我们只在实奇异性的情况中来进行这种计算.

### 6-3-2 实奇异性

实奇异性是物理面上不变量 $s_{ij} = P_i \cdot P_j$ 的实数值处出现的奇异性. 注意，这些不变量的实数值不需要相应于物理上

可能的运动学组态。例如，区域 $s=(p_a+p_b)^2<(m_a+m_b)^2$ 是两个质量为 $m_a$，$m_b$ 的质壳上粒子的弹性散射的实数区域，但不是物理区域。

当不变量 $s_{ij}$ 取实数值，并给内线粒子质量一个非零虚部 $(-i\varepsilon)$ 时，在沿参量空间的实积分回路上没有奇异性。所以，只在极限 $\varepsilon\to 0$ 时才出现奇异性。

可以证明，Landau 方程的任何实数解都相应于 $\varepsilon\to 0$ 时积分回路被夹持的情况，这就导致了积分的奇异性。

为了明了这一点，我们利用积分的参量形式(6-91)。首先考虑出现于不变量的某个实数值 $s=s^0$ 处的主导奇异性。Landau 方程 $\partial\mathscr{G}/\partial\alpha_i=0$ 有实数解 $\alpha_i=\alpha_i^{(0)}(i=1,\cdots,I)$。在这点附近有

$$\Delta\mathscr{G}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{I-1}\left.\frac{\partial^2\mathscr{G}}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right|_{\alpha^{(0)},s^{(0)}}\Delta\alpha_i\Delta\alpha_j+O(\Delta\alpha^3).$$

把这个二次型对角化后

$$\Delta\mathscr{G}=\frac{1}{2}\Sigma\sigma_i\Delta\beta_i^2,$$

其中 $\sigma_i$ 为实本征值。我们看到，在任何变量 $\beta_i$ 下 $(i=1,\cdots,I-1)$，$\Delta\mathscr{G}-i\varepsilon=0$ 的解从两方面接近实轴，对 $\sigma_i=0$ 的例外组态可能不这样。于是，在每一个顺次对 $\beta_i$ 的积分中，有一个夹持奇异性。非主导奇异性的情况是易于处理的。假设 $n$ 个参量 $\alpha_i$ 在 Landan 方程的解处为零：$\alpha_i^{(0)}=0$，$i\in\mathscr{S}$。在原点的邻域对这些参量积分后，就回到第一种情况。

同样的方法可用来研究奇异性的类型。假设我们在奇异性近处，即 $s\simeq s^{(0)}$ 处，并考虑 $\alpha=\alpha^0$ 邻域对积分的贡献。写出

$$\Delta\mathscr{G}=\Sigma\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial s_a}\Delta s_a+\sum_{\substack{i\in\mathscr{S}\\ i=1,\cdots,n}}\frac{\partial\mathscr{G}}{\partial\alpha_i}\Delta\alpha_i+\frac{1}{2}$$

$$\times\sum_{\substack{i,j\in R\\ i,j=n+1,\cdots,I-1}}\frac{\partial^2\mathscr{G}}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\Delta\alpha_i\Delta\alpha_j,$$

其中第一项来自不变量的改变 $\Delta s_a=s_a-s_a^{(0)}$，第二项来自零附近的 $n$ 个参量 $(i\in\mathscr{S})$，而第三项来自约化图 $R$ 的参量。当 $\alpha_i$ 为零时 $(i\in\mathscr{S})$，

方程(6-91)中的分母 $\mathscr{D}_G(\alpha)$ 如 $L(\mathscr{I})$ 次幂那样趋于零，其中 $L(\mathscr{I})$ 是与 $\mathscr{I}$ 相关的子图的独立圈数．简单地用计数的方法来论证，就得到作为约化图的圈和内线数目的函数的积分式 $I_G(P)$ 的行为是

$$I_G(P)\sim(\Delta s)^k, \tag{6-108}$$

其中

$$k=(2L-1)+[n-2L(\mathscr{I})]+\frac{1}{2}(I-1-n)$$

$$=\frac{1}{2}[4L(R)-I(R)-1].$$

当 $k$ 是非负的整数时，此结果就要用对数来修改，

$$I_G(P)_{s=s(0)}\sim(\Delta s)^k\ln^m|\Delta s| \qquad k=0,1,\cdots. \tag{6-109}$$

此结果实际上是与奇异性是实的这一点无关的．我们的结论是，典型的是 Feynman 积分有对数或平方根分枝点，它们是不变标量积 $s_{ij}=P_i\cdot P_j$ 的函数．

我们可以证明一些有关实奇异性的有趣的性质．在参量空间中，Landau 方程的解处的微商 $\partial\mathscr{S}/\partial\alpha_i$ 对所有的非零 $\alpha_i^{(0)}$ 为零．于是，这样的解或者相应于定域极值，或者相应于 $\mathscr{S}$ 在紧致集 $\Delta=\{0\leqslant\alpha_i\leqslant 1,\ \Sigma\alpha_i=1\}$ 上的鞍点．另一方面，可以证明它不能是最小值．例如，图 6-30 的自能图在 $P^2=(m_1+m_2)^2$ 处是奇异的．对此图，函数为

$$\mathscr{S}=\frac{\alpha_1\alpha_2P^2}{\alpha_1+\alpha_2}-\alpha_1m_1^2-\alpha_2m_2^2,$$

对 $P^2=(m_1+m_2)^2$，它在 $\Delta$ 上的 Landau 方程的解 $\alpha_1=m_2/(m_1+m_2)$，$\alpha_2=m_1/(m_1+m_1)$ 处达到最大值零．另一方面，对 Feynman 积分看来没有鞍点组态(虽然作者不知道关于这一点的证明)．因此，我们只有相应于 $\mathscr{S}$ 的定域最大值的解，称为阈．在此解中，振幅的实部和虚部都是奇异的．我们将看到，虚部在阈以上给出另外的新贡献，而实部的高级微商是发散的．

把阈进一步分类是有用的．正如在本节引言中提到的，

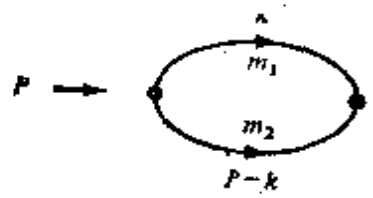



图 6-30　汽泡图

正常的阈是那种预期会从么正性得到的奇异性．我们引进下面的定义．如果把 $G$ 的 $l$ 条内线中的 $l-1$ 条割断，图仍是连续的，而再割断一条就使图分成两部分 $G_1$，$G_2$ 了，每一部分都有入射的外动量，则此 $l$ 条内线就说成是 $G$ 的中间态．注意，和在方程 (6-87) 中引进的割断 $C$ 的概念不一样，$G_1$ 和 $G_2$ 仍可包含圈．如在方程 (6-88) 中那样，我们定义（见图 6-31）

$$s=\left(\sum_{v\in G_1}P_v\right)^2=\left(\sum_{v\in G_2}P_v\right)^2,$$

于是

$$s=s^{(0)}=\left(\sum_{\text{中间态}}m_i\right)^2 \tag{6-110}$$

是振幅的正常阈．物理上，$s^{(0)}$ 是能产生质量为 $m_1,\cdots,m_l$ 的物理态的不变量 $s$ 的最小值．

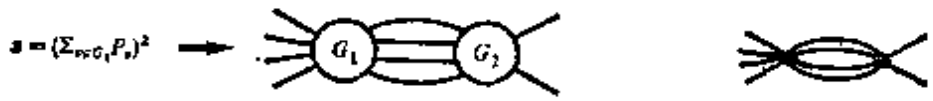



图 6-31　有质量为 $m_1,\cdots,m_l$ 的中间态的图以及相应的约化图

我们来证明，这样的中间态不相应于 Landau 方程的解．我们使所有不属于中间态的线上的 $\alpha$，比如说 $\alpha_{l+1},\cdots,\alpha_I$，都等于零，于是对约化图有

$$\mathscr{D}(\alpha_1,\cdots,\alpha_l,0,\cdots,0)=\frac{S}{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^{-1}}-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i m_i^2.$$

方程 $\partial\mathscr{D}/\partial\alpha_i=0$ 在 $\sqrt{S}=\Sigma m_i$ 处有一个解 $\alpha_i=m_i^{-1}/(\Sigma m_i^{-1})$，易见

它是 $\mathscr{D}$ 的零点，并且是最大点.

和粗糙的估计不一致，还有另外的实奇异性，称为反常阈. 这种奇异性总有一点麻烦，因为它们对振幅的吸收部分的贡献不能通过么正性和物理过程直接联系起来. 在散射振幅中有反常阈的条件，相当于色散关系的公理化推导不再成立的情况. 所以，控制这种可能出现的新奇异性是重要的. 这是一个困难的问题，所以我们只在下一节中用一个简单的例子来解释这个现象.

在动量空间中，正常和反常阈之间的差别可以用在 Landau 方程解处，用约化图内部动量 $k_i$ 所张开的空间维数来解释. 对正常阈，这些动量构成了一个一维空间. 从描写图 6-30 中的约化图的方程组 (6-102) 可清楚地看到这一点. 这些方程表示所有的动量 $k_i(i=1,\cdots,I)$ 是共线的，所以和外动量 $P=\sum_{v\in G_1}^{I}P_V$ 也是共线的. 相反，对反常阈来说，此维数大于 1.

### 6-3-3 简单图的实奇异性

我们用单圈图来解释一般的考虑. 首先考虑图 6-30 的泡图. 我们对关于变量 $s=P^2$ 的解析性感兴趣，这里 $P$ 是进入其中某一个顶角的总动量. 此图可以表示 $\varphi^3$ 理论中的自能贡献，或 $\varphi^4$ 理论中的散射振幅等等. 在任何情况下，Landau 方程的解都是平庸的. 我们把动量空间中的积分写成

$$T_G(P^2)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{(k^2-m_1^2)[(P-k)^2-m_2^2]},\quad (6\text{-}111)$$

这里我们代替在 (6-83) 和 (6-101) 中定义的 $I_G(P)$，来考虑量

$$T_G(P)=(-i)^{V+1}I_G(P),$$

它是对方程 (5-171) 的散射振幅的附加贡献. Landau 方程表示存在两个实数 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，使

$$\begin{cases}\lambda_1(k^2-m_1^2)=0,\\ \lambda_2[(P-k)^2-m_2^2]=0,\\ \lambda_1k_\mu-\lambda_2(P-k)_\mu=0.\end{cases}\quad (6\text{-}112)$$

这表示 $P$ 和 $k$ 是共线的，所以得到 $m_1^2\lambda_1^2 = m_2^2\lambda_2^2$，$s = P^2 = (m_1 \pm m_2)^2$. 值 $(m_1 + m_2)^2$ 就是所期待的正常阈，而对另一个 $(m_1 - m_2)^2$ 立即可以证明它不在物理叶上出现。初看来我们似乎在闲扯，因为积分式 (6-111) 是对数紫外发散的，所以要重整化。只有在某点减除后的 $T_G(P^2)$ 值才是有意义的。但是，这种减除既不改变 Landau 方程，又不改变奇异性结构。从方程 (6-90) 易见，如果在某一个任意值 $s_1$ 处对被积函数作了减除，再对 $\lambda$ 积分，则在参量空间中，减除后的积分为

$$T_G(s) - T_G(s_1) = -\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \times \ln\left[\frac{\alpha_1\alpha_2 s/(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2}{\alpha_1\alpha_2 s_1/(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2}\right].$$

奇异性是由 $\mathscr{S} = \alpha_1\alpha_2 s/(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_1 m_1^2 - \alpha_2 m_2^2$ 可能为零而引起的，而方程 $\partial\mathscr{S}/\partial\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2)$ 导致

$$m_1^2 = \frac{\alpha_1^2 s}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \qquad m_2^2 = \frac{\alpha_2^2 s}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}.$$

因为 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > 0$，所以 $s = (m_1 + m_2)^2$. 积分可明显地计算出来，

$$4\pi^2[T_G(s) - T_G(s_1)] = \left[\frac{\lambda^{1/2}}{2s}\ln\left(\frac{m_1^2+m_2^2-s+\lambda^{1/2}}{m_1^2+m_2^2-s-\lambda^{1/2}}\right) - \frac{m_1^2-m_2^2}{2s}\ln\frac{m_1^2}{m_2^2}\right] - [s = s_1]. \tag{6-113}$$

此表示式中的最后一项提醒我们，振幅是在 $s = s_1$ 处减除的，而 $\lambda$ 是在式 (5-155a) 中引入的函数

$$\lambda = \lambda(s, m_1^2, m_2^2) = s^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2(m_1^2+m_2^2)s - 2m_1^2m_2^2$$
$$= [s - (m_1+m_2)^2][s - (m_1-m_2)^2].$$

对数中的宗量可改写为

$$\frac{m_1^2+m_2^2-s+\lambda^{1/2}}{m_1^2+m_2^2-s-\lambda^{1/2}} = \left[\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-s}+\sqrt{(m_1-m_2)^2-s}}{\sqrt{(m_1+m_2)^2-s}-\sqrt{(m_1-m_2)^2-s}}\right]^2.$$

从此形式中可清楚看到，在相应于对数主值的物理叶中，$T_G(s)$ 在 $s = (m_1 - m_2)^2$ 处是没有奇异性的。另一方面，在非物理叶中，则在 $s = 0$ 及 $s = (m_1 - m_2)^2$ 处出现奇异性。

我们可对此复杂奇异性稍作研究，虽然这不是本节的主要目的. 我们看到在 $s=(m_1-m_2)^2$ 处的奇异性（也叫腰阈）相应于参量空间中负的 $\alpha_1$ 或 $\alpha_2$ 处的 Landau 方程的解，所以在原始积分区域之外. 这一表示要过渡到非物理阈，必须把积分回路从 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 变为复的路径. 这和例子式（6-99b）中讨论的现象是类似的. 同样，在 $s=0$ 处的奇异性是和式（6-99c）的情况类似的. 这种不作为第一组 Landau 方程的解而出现的奇异性，是一种所谓第二类奇异性的例子，在假定了动量空间中无穷远处的积分区域的边界是无关紧要的之后，我们就抛弃了这类奇异性. 但是，事实上它们不是这样，如在积分式（6-111）中看到的那样，因为在无穷远处可以出现夹持，它将在 $s=0$ 处导致奇异性. Landau 方程表示，当 $P^2=(m_1\pm m_2)^2$ 时，双曲面 $k^2=m_1^2$ 和 $(P-k)^2=m_2^2$ 是相切的，但当中心重合或相隔零长度矢量（即 $s=P^2=0$）时，在无穷远处也可能相接触.

在 $s=0$ 处出现奇异性警示我们，复杂奇异性的分析确实是复杂的!

在物理叶上，穿过从 $(m_1+m_2)^2$ 到 $+\infty$ 的割线时，$T_G(s)$ 的虚的不连续量是

$$T_G(s+i\varepsilon)-T_G(s-i\varepsilon)=2i\Delta T_G(s)$$
$$=2i\frac{\lambda^{1/2}(s,m_1^2,m_2^2)}{4\pi s}\theta[s-(m_1+m_2)^2]. \qquad (6\text{-}114)$$

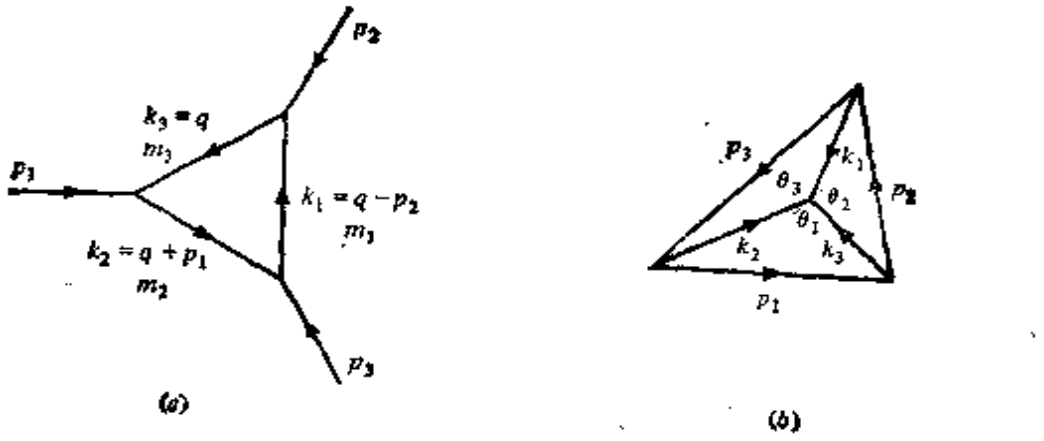



图 6-32　三角顶点图及其对偶图

由此吸收部分，可用减除一次的色散关系，即沿包围割线的回路的 Cauchy 公式，重新得到振幅 $T_G(s) - T_G(s_1)$，

$$T_G(s) - T_G(s_1) = \frac{s - s_1}{\pi} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \frac{ds' I_m T_G(s')}{(s' - s_1)(s' - s)}. \quad (6\text{-}115)$$

现在我们回到图 6-32 a 的顶角图：

$$T_G(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \frac{1}{(k_1^2 - m_1^2)(k_2^2 - m_2^2)(k_3^2 - m_3^2)}, \quad (6\text{-}116)$$

其中 $k_1 = q - p_2$, $k_2 = q + p_1$, $k_3 = q$。 Landau 方程由下列方程组构成：

$$\lambda_i(k_i^2 - m_i^2) = 0$$

$$\sum_i \lambda_i k_i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

对主导奇异性来说，没有一个 $\lambda$ 为零，所以标量积 $(k_i \cdot k_j)$ 的行列式必定为零。可把它更方便地改写成

$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} \\ y_{12} & 1 & y_{23} \\ y_{13} & y_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (6\text{-}117)$$

其中 $y_{ij} = k_i k_j / m_i m_j = (p_k^2 - m_i^2 - m_j^2)/2m_i m_j$, $(i, j, k)$ 是 $(1, 2, 3)$ 的一种置换。

与此类似，譬如说对在 $\lambda_3 = 0$ 处出现的非主导奇异性，我们必有

$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12} \\ y_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$y_{12} = \pm 1, \quad p_3^2 = (m_1 \pm m_2)^2.$$

我们在 $s = p_3^2 = (m_1 + m_2)^2$ 处找到了正常阈，而在 $p_3^2 = (m_1 - m_2)^2$ 处的奇异性却没有出现在物理叶上，这和泡图的情况一样。通过对参量空间中的 Landau 方程的分析便可看出这一点。穿过从 $(m_1 + m_2)^2$ 到 $+\infty$ 的割线时的不连续量是(其中 $s = p_3^2$)

$$T_G(s+i\varepsilon)-T_G(s-i\varepsilon)$$
$$=\frac{2\pi}{4\pi\lambda^{1/2}(m_1^2,m_2^2,s)}\ln\frac{a+b}{a-b},\qquad(6\text{-}118)$$

这里

$$a=s^2-s(p_1^2+p_2^2+m_1^2+m_2^2-2m_3^2)-(m_1^2-m_2^2)(p_1^2-p_2^2),$$

而

$$b=\lambda^{1/2}(m_1^2,m_2^2,s)\lambda^{1/2}(p_1^2,p_2^2,s).$$

当然，在 $p_1^2$ 和 $p_2^2$ 道中有类似的正常阈.

为了分析反常阈，我们引进图 6-32 b 中的对偶图. 这是在三维欧氏空间中的四面体，它的边长的平方为 $p_i^2$ 和 $k_i^2$. 这是可能的，因为 $p_i^2>0$，而 $k_i$ 在质壳上，$k_i^2=m_i^2$. 内和外粒子的稳定性条件，保证了通过

$$\cos\theta_3=-\frac{p_3^2-m_1^2-m_2^2}{2m_1m_2}$$

定义的角 $\theta_i(0\leqslant\theta_i\leqslant\pi)$ 是实的. 方程 (6-117) 表示对偶图位于一个平面中. 最后，实数性条件要求图 6-32 b 的中心点在三角形的内部. 这表示 $\theta_1+\theta_2>\pi$，或等价地 $\cos\theta_1+\cos\theta_2<0$，即

$$m_1(p_1^2-m_2^2-m_3^2)+m_2(p_2^2-m_1^2-m_3^2)>0.\qquad(6\text{-}119)$$

我们利用参量表示，在特殊情况 $p_1^2=p_2^2=p^2$，$m_1^2=m_2^2=m^2$ 下来导出此结果. 函数 $\mathscr{S}$ 为

$$\mathscr{S}=\frac{\alpha_1\alpha_2p_3^2+\alpha_2\alpha_3p_1^2+\alpha_3\alpha_1p_2^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}-\alpha_1m_1^2-\alpha_2m_2^2-\alpha_3m_3^2.$$

在消去 $\alpha_1=1-\alpha_2-\alpha_3$ 后，Landau 方程给出，对 $\alpha=\alpha_2=\alpha_3$ $\left(0<\alpha<\frac{1}{2},\text{因为 }0<\alpha_1<1\right)$ 有

$$\begin{cases}\alpha^2(4p^2-p_3^2)=m_3^2,\\(4p^2-p_3^2)(\alpha^2-\alpha)=m^2-p^2.\end{cases}$$

$\alpha$ 的解在 0 和 $\frac{1}{2}$ 之间，假定

$$p^2>m^2+m_3^2,\qquad(6\text{-}120)$$

它表示了在特殊情况下的条件 (6-119). 反常阈出现于

$$p_3^2 = -\frac{1}{m_3^2}\lambda(p^2, m^2, m_3^2)$$

$$= 4m^2 - \frac{1}{m_3^2}(p^2 - m^2 - m_3^2)^2.$$

如果我们考虑一个物理例子，如核子的电磁形状因子，似乎会有些麻烦，因为反常阈可能会出现于正常阈的下面. 事实上，和光子耦合的最低态是双 $\pi$ 体系，$m = m_1 = m_2 \geqslant m_\pi$，而和质壳核子 ($p^2 = p_1^2 = p_2^2 = M_N^2$) 耦合的最低态是 $\pi$ 核子态，所以 $m + m_3 \geqslant m_\pi + M_N$. 如果取 $m_3 = m = (m_\pi + m_N)/2$，则上面所有的条件都满足，方程 (6-120) 约化为

$$M_N^2 \geqslant \frac{1}{2}(M_N + M_\pi)^2, \qquad \text{即} \ (\sqrt{2} - 1)M_N \geqslant m_\pi.$$

它显然被实验上的质量值所满足. 幸好这个推理没有考虑各种守恒律，例如重子数守恒，它告诉我们任何和核子耦合的状态，至少包含一个质量大于 $M_N$ 的重子. 于是条件式 (6-120) 不能满足了，所以是没有问题的. 类似地，反常阈是不出现于 $\pi$ 或 $K$ 的形状因子中的，但出现于超子和氘中.

画在图 6-33 a 中的方匣图的散射振幅的解析性可按同样的思路来进行研究:

$$T_G = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{1/\{[(p_1 + k)^2 - m_2^2] \times [(p_1 - p_3 + k)^2 - m_4^2][(p_2 - k)^2 - m_1^2](k^2 - m_3^2)\}\right\}. \tag{6-121}$$

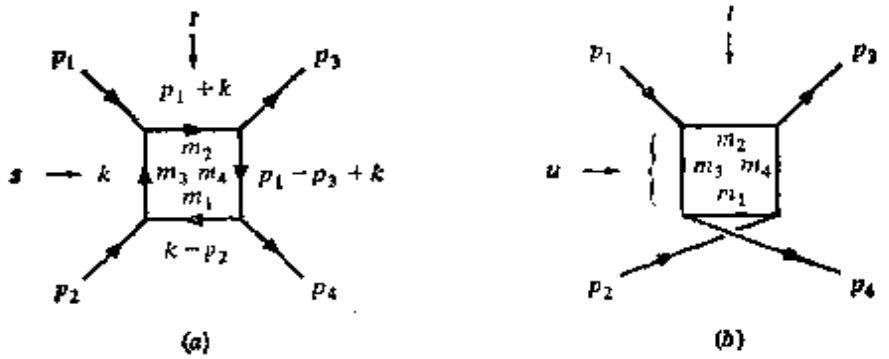



图 6-33 $s$-$t$ 道中的 (a) 和交叉的 $u$-$t$ 道中的 (b) 方匣图

在 $s$ 道中，我们在 $s=(m_1+m_2)^2$ 处找到了一个正常阈［$t$ 道中在 $t=(m_3+m_4)^2$ 处］. 可以算得穿过相应割线的不连续量为

$$T_G(s+i\varepsilon,t)-T_G(s-i\varepsilon,t)=2i\Delta_sT_G(s,t)$$
$$=2i\frac{2s\lambda^{1/2}(s,m_1^2,m_2^2)}{4\pi D^{1/2}}\ln\left[\frac{(ac-bd\cos\theta)+D^{1/2}}{(ac-bd\cos\theta)-D^{1/2}}\right]$$
$$\times\theta[s-(m_1+m_2)^2], \tag{6-122}$$

其中 $\theta$ 表示质心系中的散射角，

$$\cos\theta=\frac{t}{\lambda^{1/2}(s,p_1^2,p_2^2)\lambda^{1/2}(s,p_3^2,p_4^2)}$$
$$\times\left[t-u+\frac{(p_1^2-p_2^2)(p_3^2-p_4^2)}{s}\right].$$

$a$ 和 $b$ 的表示式在式 (6-118) 中给出，而 $c$ 和 $d$ 是从 $a$ 和 $b$ 通过把 $p_1$ 变为 $p_3$，$p_2$ 变为 $p_4$，$m_3$ 变为 $m_4$ 而得到的. 最后有

$$D=(ac-bd\cos\theta)^2-(a^2-b^2)(c^2-d^2).$$

在等质量的情况中，$m_1^2=m_2^2=m^2$，$m_3^2=m_4^2=m'^2$，$p_1^2=p_2^2=p_3^2=p_4^2=p^2$，此表示式简化为

$$\frac{2s\lambda^{1/2}(s,m_1^2,m_2^2)}{D^{1/2}}=\{st[(s-4m^2)(t-4m'^2)$$
$$-4(p^2-m^2-m'^2)^2]\}^{-1/2}. \tag{6-123}$$

作为 $t$ 的函数的不连续量 $\Delta_tT_G$ 本身在 $t$ 道中有一个不连续量，称为双重谱函数 $\rho_{st}$：

$$\rho_{st}(s,t)=\frac{1}{2i}[\Delta_sT_G(s,t+i\varepsilon)-\Delta_sT_G(s,t-i\varepsilon)]$$
$$=\frac{2s\lambda^{1/2}(s,m_1^2,m_2^2)}{4D^{1/2}}\theta[s-(m_1+m_2)^2]$$
$$\times\theta[t-(m_3+m_4)^2]\theta(D). \tag{6-124}$$

于是，$T_G(s,t)$ 满足固定 $s$ 或 $t$ 的色散关系，或甚至满足一组变量 $s$ 和 $t$ 的解析表示式

$$T_G(s,t)=\frac{1}{\pi}\int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty}ds'\frac{\Delta_sT_G(s',t)}{s'-s}$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\iint ds'\,dt'\frac{\rho_{st}(s',t')}{(s'-s)(t'-t)}. \tag{6-125a}$$

式(6-125a)中包含双重不连续量 $\rho_{st}$ 的第二个表示式，是 Mandelstam 表示的一个特殊情况。这里考虑的方框图的双重谱函数 $\rho_{su}$ 或 $\rho_{tu}$ 为零。图 6-33 b 中的交叉图不是这种情况，它只有 $\rho_{tu}$ 不为零，所以满足固定 $s$ 的色散关系

$$T_G(t,u)=\frac{1}{\pi}\int_{(m_3+m_4)^2}^{\infty}dt'\,\frac{\Delta_t T_G(t',u'=\Sigma p_i^2-t'-s)}{t'-t}+\frac{1}{\pi}\int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty}du'\,\frac{\Delta_u T_G(t'=\Sigma p_i^2-s-u',u')}{u'-u},\quad(6\text{-}125b)$$

或 Mandelstam 表示

$$T_G(t,u)=\frac{1}{\pi^2}\iint dt'du'\,\frac{\rho_{tu}(t',u)}{(t'-t)(u'-u)},\qquad(6\text{-}125c)$$

所有这些并不是完全对的。在前文中，我们假定了所有的外粒子是稳定的，不能衰变，即 $p_i^2<(m_1+m_2)^2$，等等，并且不出现反常阈。它的严格的条件可用和顶角情况所用的同样的方法来研究。

我们曾猜测，更一般地是，在良好的情况中，如 $\pi$-核子散射中，物理散射振幅满足一般的 Mandelstam 表示，它形为

$$\begin{aligned}T_G(s,t,u)=&\,T_G(s_1,t_1,u_1)+\frac{s-s_1}{\pi}\\&\times\int_{M_s^2}^{\infty}\frac{\rho_1(s')}{(s'-s)(s'-s_1)}ds'+\frac{(t-t_1)}{\pi}\\&\times\int_{M_t^2}^{\infty}\frac{\rho_2(t')}{(t'-t)(t'-t_1)}dt'+\frac{(u-u_1)}{\pi}\\&\times\int_{M_u^2}^{\infty}\frac{\rho_3(u')}{(u'-u)(u'-u_1)}du'+\frac{(s-s_1)(u-u_1)}{\pi^2}\\&\times\iint ds'du'\,\frac{\rho_{su}(s',u')}{(s'-s)(s'-s_1)(u'-u)(u'-u_1)}\\&+\frac{(t-t_1)(u-u_1)}{\pi^2}\iint dt'\,du'\\&\times\frac{\rho_{tu}(t',u')}{(t'-t)(t'-t_1)(u'-u)(u'-u_1)}\\&+\frac{(s-s_1)(t-t_1)}{\pi^2}\iint ds'dt'\\&\times\frac{\rho_{st}(s',t')}{(s'-s)(s-s_1)(t'-t)(t'-t_1)},\end{aligned}\qquad(6\text{-}126)$$

其中双重谱函数 $\rho_{st}$, $\rho_{tu}$ 和 $\rho_{us}$ 在确定的区域中是不为零的(图 6-34 的阴影区). 在方程(6-126)中我们假定减除是需要的.

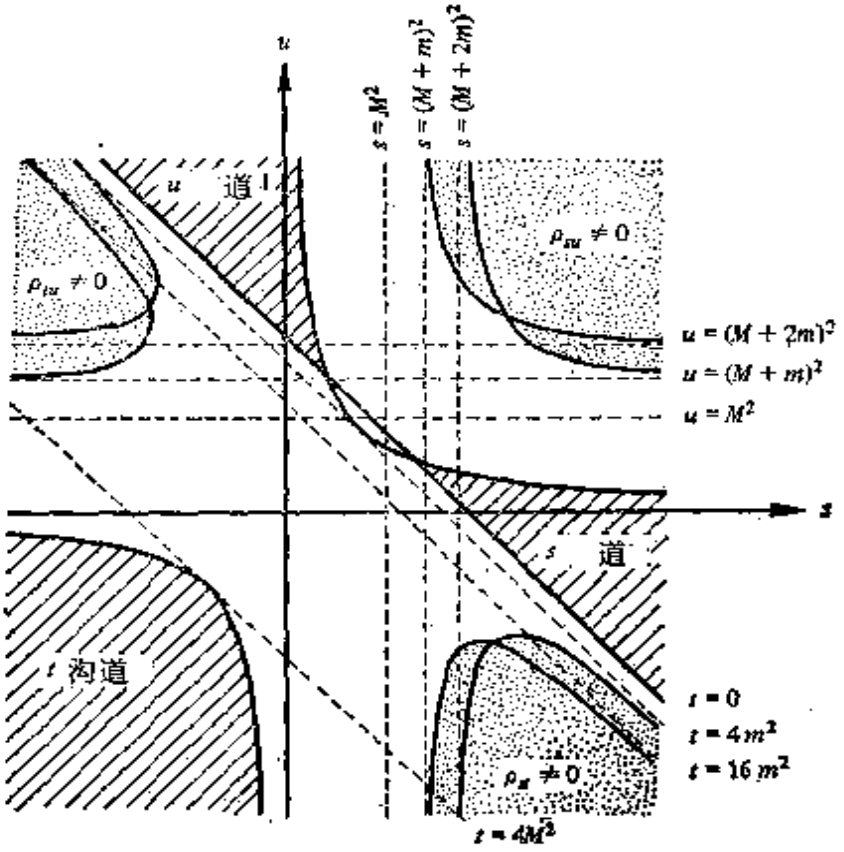



图 6-34 $\pi$ 核子散射的 stu 平面. 用斜线画出的阴影区是 $s$ 道 $\pi N \to \pi N$, $u$ 道 $\pi N \to \pi N$ 和 $t$ 道 $\pi\pi \to N\bar{N}$ 的物理区, $m$ 和 $M$ 分别为 $\pi$ 和核子的质量. 双重谱区域用点来涂出.

除了作为解释以外, 对这个简单图的研究还可作为讨论更复杂情况以前的准备步骤. 例如, 通过许多技巧的应用, 高级图的解析性可从原始图的解析性来推得. 我们对这一方面给了更详细的参考文献.

### 6-3-4 物理区奇异性. Cutkosky 规则

物理区奇异性和实的外四维动量相应. 正常阈就是这种情况, 而反常阈则在物理区不作为主导奇异性出现, 如果外粒子的稳定性条件成立, 即如果对每一个顶角, 入射四维动量的平方 $P_0^2$ 小于该道的最低正常阈的话.

Coleman 和 Norton 找到了下面的简单解释. 当且仅当图 $G$ 的顶角可看作实的时空点，并且它们的内线可看成实际的在质壳上的相对论粒子的轨道时，$G$ 的主导奇异性才在物理区中出现.

为了证明这条命题，用方程 (6-104) 那样的混合表示是比较方便的. 对物理区的奇异性，积分变量 $\alpha_i$ 和 $q_l$ 必须取在 Landau 方程解处的实数值. 方程为 [和方程 (6-102)、(6-103)，及式 (6-106) 比较]

$$k_i^2 = m_i^2, \tag{6-127a}$$

$$\sum_{i\in\mathscr{C}_l}(\pm)\alpha_i k_i = 0. \tag{6-127b}$$

外动量 $P$ 和积分变量 $q$ 的实数性表示 $k$ 是实数. 由于有式 (6-127a)，这些四维动量是在它们的质壳上的. 至于方程 (6-127b)，它表示如果粒子 $i$ 以动量 $(\pm k_i)$，在固有时间间隔 $\alpha_i m_i(\alpha_i > 0)$ 中传播，则沿封闭圈的总的时空位移为零. 换而言之，此图可看作一个真正的物理过程.

Cutkosky 规则对穿过由物理区奇异性引起的割线的不连续量给了一个紧凑的表示式. 令 $I_G(P)$ 是方程 (6-101) 的 Feynman 振幅，$T_G(P) = (-i)^{V+1}I_G(P)$ 就是相应的对散射振幅的贡献. 在一个给定的道中，就可这样来得到和一条特定的割线有关的不连续量 $2i\Delta T_G(P)$：令 $(I - I_1 - I_2)$ 个内动量在质壳上，$k_l^2 = m_l^2$，而 $I_1 + I_2$ 个动量不在质壳上. 它们还可细分为两群，分属于两个子图 $G_1$ 和 $G_2$，每一个有 $l_i$ 条内线和 $V_i$ 个顶角(图 6-35)，于是有下面的公式：

$$\Delta T_G(P) = \frac{1}{2}(-i)^{V_1-V_2}\int \prod_1^{\cdot\cdot} \frac{d^4q_l}{(2\pi)^4}$$

$$\times \prod_{l_1=1}^{I_1} \frac{i}{k_{l_1}^2 - m_{l_1}^2 + i\varepsilon} \prod_{l_2=1}^{I_2} \frac{-i}{k_{l_2}^2 - m_{l_2}^2 - i\varepsilon}$$

$$\times \prod_{j=l_1+l_2+1}^{I} (2\pi)\theta(k_j^0)\delta(k_j^2 - m_j^2). \qquad (6\text{-}128)$$

$\delta$ 函数的作用是把相应于中间态的粒子放到它们的正能量质壳上. 在物理区域中，方程(6-128)是因为单个图要满足么正条件而得来的.

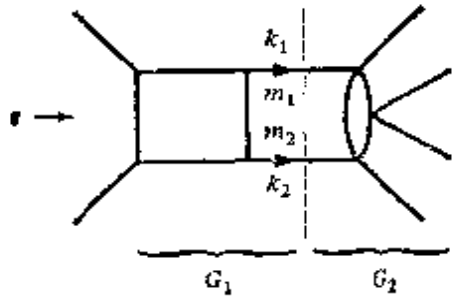



图 6-35 Cutkosky 规则的解释：虚线表示的割线对 $s = (m_1 + m_2)^2$ 处的奇异性有贡献. 动量 $k_1$ 和 $k_2$ 在质壳上：$k_1^2 = m_1^2, k_2^2 = m_2^2$.

下面的漂亮的证明引用了 Nakanishi 的结果. 我们从任意一个图出发，为了简单起见，假定它是标量场理论中的图. 我们发现总是可以构造一个厄米的拉氏函数，使一个确定过程的最低级散射振幅正是所考虑的图. 为此，对图的每一条内线 $l$ 附上不同种类的、质量为 $m_l$ (相应传播子的质量)的场 $\varphi_l$. 另外，如果动量为 $P_v^2$ 的外线(或外线组)进入顶角 $v$，我们对此顶角附上质量平方为 $M_v^2 = P_v^2$ 的场 $\phi_v$，假定 $P_v^2 > 0$，则原来的图就可看作是对用 $\phi_1$，$\phi_2$，… 来描写的粒子在质壳上的散射振幅的最低级贡献，它是从拉氏函数

$$\mathscr{L}_1 = \sum_{l=1}^{I} \frac{1}{2}[(\partial\varphi_l)^2 - m_l^2\varphi_l^2] + \sum_{v} \frac{1}{2}[(\partial\phi_v)^2 - M_v^2\phi_v^2]$$
$$+ \sum_{v=1}^{V} \phi_v \Big( \prod_{l:\varepsilon_{vl}\neq 0} \varphi_l \Big) \qquad (6\text{-}129)$$

推得的. 如果没有一条外线射入 $v$，则在最后一项求和中的 $\phi_v$ 必须用 1 来代替，而乘积要取遍所有射入 $v$ 的内线. 图 6-36 解释了这种构造. 如果 $i$ 表示初态(用 $P_v^0 > 0$ 表征)，$f$ 是末态，则直接可验证

$$\mathscr{T}_{fi} = T_G(P).$$

这里 $\mathscr{T}_{fi}$ 是从 $\mathscr{L}_1$ 计算出的，而 $T_G$ 就是与原始的 Feynman 图 $G$ 相联系

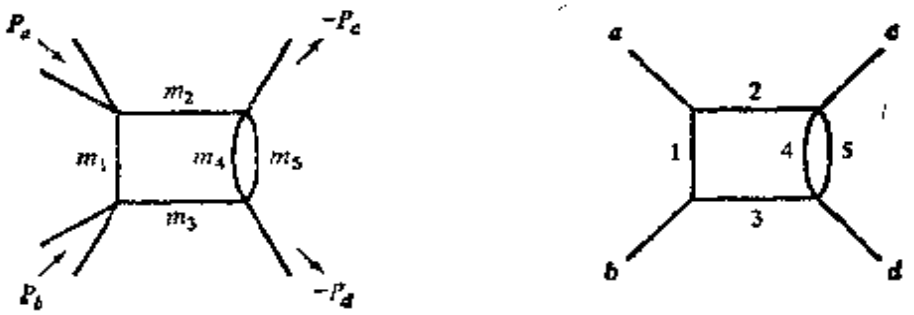



图 6-36　图 (a) 具有与图 (b) 同样的解析性，后者可看作是对由

$$\mathscr{L}_1 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2}[(\partial\varphi_i)^2 - m_i^2\varphi_i^2] + \sum_{a,b,c,d} \frac{1}{2}[(\partial\phi_a)^2 - M_a^2\phi_a^2]$$
$$+ \phi_a\varphi_1\varphi_3 + \phi_b\varphi_1\varphi_3 + \phi_c\varphi_2\varphi_4\varphi_5 + \phi\varphi_2\varphi_4\varphi_5$$

描写的理论中，$a+b\to c+d$ 的质壳振幅的最低级贡献.

的振幅. 因为么正性对质壳上的过程成立[方程 (5-154)]，所以有

$$\mathscr{T}_{fi} - \mathscr{T}_{if}^* = i\sum_n (2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i)\mathscr{T}_{nf}^*\mathscr{T}_{ni}$$
$$= 2i\Delta T_G(P). \qquad (6\text{-}130)$$

用 Feynman 图的语言就是求和取遍所有可能的物理中间态 $n$，即传递的动量在它们的质壳上

$$k_l^2 = m_l^2, \qquad k_l^2 > 0, \qquad l \in \mathscr{I}. \qquad (6\text{-}131)$$

于是，么正性给出

$$2\Delta T_G(P) = \Sigma T_{G_1}(P)T_{G_2}^*(P)$$

其中求和取遍把 $G$ 分成两个子部分 $G_1$，$G_2$ 的所有的分法，$G_1$，$G_2$ 分别与初态 $i$ 和末态 $f$ 连接，而 $G$ 是和集 $G_1 \cup G_2 \cup \{\mathscr{I}\}$. 求和也包括在中间态相空间上的积分. 这样就得到了 Cutkosky 规则.

读者可在单圈图的情况下来证明这个规则.

我们也可以将它推广到物理区外，从而推广么正性，例如，如果我们要计算在上一节中定义的双重谱函数，这就正是所需要的. 但是，证明此一般的 Cutkosky 规则要求一种非平庸的方法. 特别是，因为对复变量 $k$ 的 $\delta^{(+)}$ 广义函数的意义变得很危险，所以要非常小心.

## 注记

协变微扰论诞生于四十年代中期，是在 S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.*, vol. 1, p.27, 1946; J. Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 74, p. 1439, 1948, vol. 75, p. 651, 1949, vol. 76, p. 790,1949; R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, vol. 76 p. 769, 1949 and F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, vol 75, p. 486 and 1736, 1949 中给出的。协变传播子的定义最早出现在 E. C. G. Stueckelberg 的工作中，参见他和 D. Rivier 的文章，*Phys Rev.*, vol. 74, p. 218, 1948.

在 P. T. Matthews, *Phys Rev.*, vol. 80, p. 292, 1950 中考虑了标量场电动力学。本书中所用的方法取自 F. Rohrlich, *Phys Rev.*, vol. 80, p. 666, 1950.

关于电子-电子和电子-正电子散射的最早的计算，写在 N. F. Nott and H. S. W. Massey, "Theory of Atomic Collisions," Oxford, 1956 中；特别参见第二十二章。在 W. H. McMaster, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 33, p.8, 1961 中讨论了极化效应.

Legendre 变换是在 G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento*, vol. 34, p. 1790, 1964 中引入到场论中来的。关于图技术的一般叙述，可参见 G. 'tHooft and M. Veltman, "Diagrammar," Cern report 73—9, Geneva, 1973.

在 N. Nakanishi, "Graph Theory and Feynman Integrals", Gordon and Breach, New York, 1970 中，研究了 Feynman 图的拓扑性质和参量表示。该书中还介绍了解析性.

在关于这些研究的众多文献中，我们推荐 L. D. Landau, *Nucl. Phys.*, vol. 13, p. 181, 1959; S. Mandelstam, *Phys. Rev.*, vol. 112, p. 1344, 1958, vol. 115, p. 1741, 1959; and

R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.*, vol. 1, p. 429, 1960. 关于物理区奇异性的解释可在 S. Coteman and R. E. Norton, *Nuovo Cimento*, vol. 38, p. 438, 1965 中找到。

更细致的讨论和参考书可在 "The Analytic S-Matrix" by R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, Cambridge University Press, 1966; "Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory" by I. T. Todorov, Pergamon Press, Oxford, 1971; 和教科书 J. D. Bjorken and S. D. Drell, "Relativistic Quantum Fields", McGraw-Hill, New York, 1965 中找到。

# 第七章　辐射修正

本章介绍量子场论的重整化方法，并在电动力学中计算到单圈图级．然后，用它计算反常磁矩、Coulomb 散射的辐射修正(包括红外发散分析)、原子的 Lamb 位移和光子-光子散射．并讨论相对论范围内中性粒子之间的感应电磁长程力．

## 7-1　单圈图重整化

在本章中我们来研究微扰论的高级项．这个初看来只是一种直接的、或许要一些分析技巧的练习性计算，由于有紫外发散而变成了极不平常的问题．　对重整化理论的一般描写，我们推到下一章来进行．为了熟悉此理论，这里我们集中注意力来计算量子电动力学中最低级的辐射修正．这一计算使我们可以看到如何从显然定义不确的表示式中取出有意义的结果，以将它们和实验作比较，从而成功地引进重整化的概念．这个方法的严重缺陷是，这时电动力学是一个相当复杂的理论．我们必须妥善处理规范不变性，并把红外发散性和紫外发散性分开．但是，它的惊人的成就当然使这种努力很有价值，并证明了这种颠倒的逻辑是正当的．

拉氏函数中的质量和耦合常数这一类参量不是直接可测量的量．例如，在经典点粒子理论中，我们必须在裸质量上加上电磁贡献，以得到物理的惯性质量．当然，后者是有限的，而前者却可以是无穷的．因此，我们将对这些基本参量(有限的

数)给以一个运算上的定义. 重整化理论将证明,当用这些物理参量来表示时, Green 函数的微扰表示式是有限的. 一般地讲,我们把质量定义为两点函数的孤立极点. 作为和散射振幅相乘的常数出现的相应的留数,将吸收到重整化场量的定义中去. 最后,通过在动量空间适当的点上固定某一个振幅的值来选定耦合常数.

为了完成此过程,最好首先处理定义确切的有限量. 发散的原因是 Green 函数在小的相对距离处是奇异的. 也就是在动量空间中的 Fourier 变换,在无穷远处没有足够快地趋向零. 所以,要在中间步骤中把理论正规化,即用一个比较平滑的函数来代替原来的表示式,使积分成为有限. 因此,我们将分三步进行: (1) 正规化; (2) 重整化;和 (3) 消去正规化参量. 如果结果得到一个有限的量,则重整化就成功了.

### 7-1-1 真空极化

首先看一下动量空间中的光子传播子. 我们将在无圈图的贡献

$$G^{[0]}_{\rho\nu}(k) = -i\left(\frac{g_{\rho\nu} - k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}\right)$$
$$M^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{7-1}$$

上加一个修正. 按照第六章的规则,精确到最低级的修正为(见图 7-1)

$$G^{[1]}_{\rho\nu}(k) = G^{[0]}_{\rho\rho'}(k)\varpi^{\rho'\nu'}G^{[0]}_{\nu'\nu}(k),$$
$$\varpi^{\rho\nu}(k) = -(-ie)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{7-2}$$
$$\times \mathrm{tr}\left(\gamma^\rho\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{i}{\not p - \not k - m + i\varepsilon}\right),$$

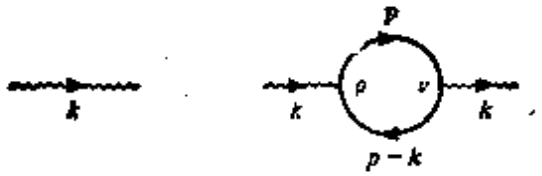



图 7-1　最低级光子传播子

外加的负号是费米子圈引起的. 看来对大的内动量 $p$ 的积分是二次发散的. 为了使它有意义，我们用 Pauli-Villars 正规化. 这相当于把光子以最小耦合方式耦合到一个具有很大质量 $\lambda_s m$ 的、另外的旋量场上. 这些场可相应于 Hilbert 空间的不定度规部分. 对真空极化张量 $\varpi^{\rho\nu}(k)$ 来说，此方法意味着作下述替代:

$$\varpi^{\rho\nu}(k,m) \to \varpi^{\rho\nu}(k,m) + \sum_{s=1}^{S} C_s \varpi^{\rho\nu}(k,\lambda_s m), \tag{7-3}$$

其中替换理解成是在方程 (7-2) 的积分号下作的. 要不是积分发散的话，在极限 $\lambda_s \to \infty$ 时，我们就回到了原来的值. 常数 $C_s$ 是为了消去发散性而选取的. 外加场的最小耦合意味着在此正规化手续中保持规范不变性.

我们总的用符号 $\Lambda$ 来表示大质量 $\lambda_s m$，并令 $\varpi^{\rho\nu}(k,m,\Lambda)$ 表示式 (7-3) 的右端. 这样便有

$$\varpi^{\rho\nu}(k,m,\Lambda) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \times \left\{ \frac{\mathrm{tr}\gamma^\rho(\not p + m)\gamma^\nu(\not p - \not k + m)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} + \sum_{s=1}^{S} C_s(m \to \lambda_s m) \right\} = -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \times \left\{ \frac{p^\rho(p-k)^\nu + p^\nu(p-k)^\rho - g^{\rho\nu}(p^2 - p\cdot k - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{s} C_i(m \to \lambda_i m)\Big\}, \tag{7-4}$$

函数 $\bar{\omega}^{\rho\nu}(k)$ 是流-流 Green 函数的 Fourier 变换. 精确到任何一级，由流守恒都可得到条件

$$k_\rho \bar{\omega}^{\rho\nu}(k) = 0. \tag{7-5}$$

它是形式地被满足的，因为

$$k_\rho \bar{\omega}^{\rho\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left( \not{k} \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \right) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
$$\times \mathrm{tr}\left( \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} - \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right).$$

这里我们用 $(\not{p} - m + i\varepsilon) - (\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon)$ 代替了 $\not{k}$，并用了迹的循环不变性. 如果积分是收敛的，则在第一项中将积分变量作平移 $p \to p + k$，就可知道条件式(7-5)是满足的. 当此平移对原来的表示式是无意义的时候，则可证明，对正规化张量来说，这种运算是正确的. 这就证明了我们的正规化是合理的.

为了计算式(7-4)，我们运用在上一章中引入的参量表示. 这时又有了其它的复杂性，这是由费米子传播子的分子引起的. 于是，可写出

$$\bar{\omega}_{\rho\nu}(k, m, \Lambda) = -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
$$\times \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z_1^\rho} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} + \frac{\partial}{\partial z_1^\nu} \frac{\partial}{\partial z_2^\rho} - g_{\rho\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + m^2 \right) \right] \right.$$
$$\times \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \exp\{ i\{ \alpha_1(p^2 - m^2)$$
$$\left. + \alpha_2[(p - k)^2 - m^2] + z_1 \cdot p + z_2 \cdot (p - k) \} \right]$$

$$+\sum_{s=1}^{S} C_s(m \to \lambda_s m)\Big\}_{z_1=z_2=0},$$

这里引进了辅助的四维矢量 $z_1$ 和 $z_2$，以便通过微商产生式(7-4)中的被积函数。对 $p$ 积分，并完成所需要的微商，就得到

$$\varpi_{\rho\nu}(k,m,\Lambda) = \frac{i\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}$$
$$\times\left(\left\{-\frac{2\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu}\left[\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}+m^2\right]\right\}\exp\left\{i\left[-m^2(\alpha_1+\alpha_2)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right]\right\}+\sum_{s=1}^{S}C_s(m\to\lambda_s m)\right).$$

出现在积分中的 $k$ 的多项式可重新排成

$$2(k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu}k^2)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}$$
$$-g_{\rho\nu}\left[m^2-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}k^2-\frac{i}{(\alpha_1+\alpha_2)}\right].$$

我们的计算保持了协变性，但 $\varpi_{\rho\nu}$ 不明显地表示出流守恒，流守恒要求 $\varpi_{\rho\nu}$ 正比于组合 $k_\rho k_\nu - g_{\rho\nu}k^2$。上面的表示式中的第二项没有这样的结构，它的贡献为 $g_{\rho\nu}\Delta\varpi$，其中

$$\Delta\varpi = -\frac{i\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\sum_{s=0}^{S}C_s$$
$$\times\left[-\frac{\alpha_1\alpha_2 k^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}-\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2}+m_s^2\right]$$
$$\times\exp\left\{i\left[-m_s^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right]\right\}.$$

这里，按照规定有 $C_0=1$，$m_0^2=m^2$，$m_s^2=\lambda_s^2 m^2$。它也可写成

$$\Delta\bar{\omega} = -\frac{i\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3} i\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\sum_{s=0}^{S} C_s$$
$$\times \exp\left\{i\rho\left[-m_s^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right]\right\}\Big|_{\rho=1}.$$

对固定的 $m_s$，常数 $C_s$ 选得使积分在 $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$ 的邻域收敛. 暗含在质量中的 $i\varepsilon$ 规定保证了大 $\alpha$ 部分的收敛性. 因而可以把对 $\rho$ 的微商和积分交换. 于是我们发现表示式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^3\rho}\sum_{s=0}^{S} C_s$$
$$\times \exp\left\{i\rho\left[-m_s^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}k^2\right]\right\}$$

是与 $\rho$ 无关的，这可通过变量改变 $\alpha_i \to \rho^{-1}\alpha_i$ 而得到证明，所以 $\Delta\bar{\omega}$ 为零. 真空极化张量的其余项为

$$\bar{\omega}_{\rho\nu} = -i(g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu)\bar{\omega}$$
$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}$$
$$\times\sum_{s=0}^{S} C_s \exp\left\{i\left[-m_s^2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)}k^2\right]\right\}. \tag{7-6}$$

利用齐次性，我们在积分号下引进因子 $1=\int_0^\infty d\rho\,\delta(\rho-\alpha_1-\alpha_2)$，并按照 $\alpha_i \to \rho\alpha_i$ 来改变变量，就得到

$$\bar{\omega}(k^2, m, \Lambda) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1\alpha_2$$
$$\times\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho}\sum_{s=0}^{S} C_s e^{i\rho[-m_s^2+\alpha_1\alpha_2 k^2]}.$$

看来关于 $\rho$ 的积分在点 $\rho=0$ 处是对数发散的. 在从 $\bar{\omega}^{\rho\nu}$ 变到 $\bar{\omega}$ 时，分出了动量的二次方，这使发散度从 2 减到 0. 这是一个发散度和积分的量纲之间有紧密关系的例子.

如果将 $C_s$ 取得使

$$\sum_{s=0}^{S} C_s = 1 + \sum_{s=1}^{S} C_s = 0, \tag{7-7}$$

则对 $\rho$ 的正规化的积分是收敛的. 进一步将 $k$ 取成 $k^2 < 4m^2$, 这相应于粒子对产生阈. 因为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 在 0 和 1 之间,并满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, 所以 $\alpha_1\alpha_2 \leqslant \frac{1}{4}$. 于是 $(m_s^2 - \alpha_1\alpha_2 k^2)$ 是正的,复 $\rho$ 平面上的积分迴路就可转动 $-\pi/2$, 使积分为

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho}\sum_{s=0}^{S}C_s e^{-\rho(m_s^2-\alpha_1\alpha_2k^2)}$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\sum_{s=0}^{S}C_s\left(-e^{-\rho}\ln\rho\Big|_{\eta(m_s^2-\alpha_1\alpha_2k^2)}\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}d\rho e^{-\rho}\ln\rho\right).$$

条件式 (7-7) 消除了积分后的表示式中的危险项 $\ln\eta$. 对固定的 $k^2 < 4m^2$ 及 $m_s^2 = \lambda_s^2 m^2 \to \infty$, 结果为

$$-\left[\ln(m^2 - \alpha_1\alpha_2k^2) + \sum_{s=1}^{\infty}C_s\ln m_s^2\right]$$

$$= -\left[\ln\left(1 - \frac{\alpha_1\alpha_2k^2}{m^2}\right) + \sum_{s=1}^{\infty}C_s\ln\lambda_s^2\right],$$

这里,和 $m_s^2$ 比较我们忽略了 $k^2$. 把 $A$ 定义成

$$\sum_{s=1}^{\infty}C_s\ln\lambda_s^2 = -\ln\frac{A^2}{m^2}, \tag{7-8}$$

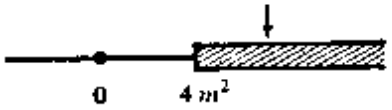



图 7-2 真空极化表示式的复 $k^2$ 平面. 箭头表示在阈以上物理区是如何达到的.

结果得到如下正规化的真空极化表示式：

$$\bar{\omega}(k^2,m,\Lambda)=-\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 d\beta\beta(1-\beta)$$
$$\times\left\{-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\left[1-\beta(1-\beta)\frac{k^2}{m^2}\right]\right\}.$$

可以很容易地算出其余的积分，于是得到如下的解析表示式：

$$\bar{\omega}(k^2,m,\Lambda)=-\frac{\alpha}{3\pi}\left\{-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{3}+2\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}\operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2}-1\right)^{1/2}-1\right]\right\}. \tag{7-9}$$

计算是在假定 $k^2<4m^2$ 下完成的．相应的函数可以在复 $k^2$ 平面上作解析延拓． $k^2>4m$ 时的值是通过在从点 $k^2=4m^2$ 出发的割线上面取极限值而得到的（图 7-2）． 穿过割线的不连续量是 $\bar{\omega}(k^2+i\varepsilon)-\bar{\omega}(k^2-i\varepsilon)=2i\mathrm{Im}\bar{\omega}(k^2+i\varepsilon)$．利用上面给出的最后一个积分表示式，令 $\beta=(1-u)/2$，作部分积分，并把变量变为 $u=(1-4m^2/k'^2)^{1/2}$ 也可推出此式．我们得到

$$\bar{\omega}(k^2,m,\Lambda)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}k^2\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dk'^2}{k'^2}$$
$$\times\frac{1}{k'^2-k^2}\left(1-\frac{4m^2}{k'^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{k'^2}\right). \tag{7-10}$$

这是减除一次的色散关系，它显示出上面的解析性，而

$$\mathrm{Im}\bar{\omega}(k^2,m)=\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{4m^2}{k^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right). \tag{7-11}$$

此吸收部分是与正规化截断 $\Lambda$ 无关的，所以不会受重整化的影响．它和早先计算的外场中的粒子对产生结果[方程(4-105)]是一致的，它表示为相应振幅的平方(图7-3)，并且到此一级为止是由下式给出的：

$$W^{(1)}=\mathrm{Re}\int d^4k a_\rho(k)\bar{\omega}^{\rho\nu}(k)a_\nu(-k)$$
$$=\int d^4k\mathrm{Im}\bar{\omega}(k)[|\mathbf{E}(k)|^2-|\mathbf{B}(k)|^2]$$

正规化的唯一的效应是给出了常数 $(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)$，当令 $\Lambda$ 趋向无

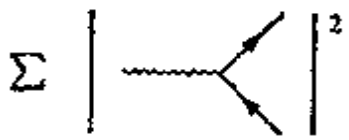


图 7-3　在外场中粒子对产生的几率，它给出了真空极化张量的跳断量.

穷时它当然是发散的.

在应用重整化之前，让我们回到原来的表示式 (7-1) 和 (7-2). 我们并不真正地想这样来计算光子传播子！加在 $G^{[0]}$ 上的贡献 $G^{[1]}$，除了产生单极点以外还产生双重极点.当按照圈的数目来讨论微扰论的级序时，我们必须考虑到单粒子不可约 Green 函数，在目前的情况中，它是传播子的逆. 对此量的零圈图贡献是 $G^{[0]-1}_{\rho\nu}$，而单圈图贡献为 $-\varpi^{[1]}_{\rho\nu}$，这里我们加了指标 1，以表明它计算到一级:

$$G^{[0]-1}_{\rho\nu} - \varpi^{[1]}_{\rho\nu} = i[(k^2 - \mu^2)g_{\rho\nu} - (1 - \lambda)k_\rho k_\nu + (g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu)\varpi^{[1]}]. \tag{7-12}$$

把此式倒过来，就得到了传播子，它被图示成一个和式，其每一项是一串泡图 (图 7-4). 更一般地讲，如果我们成功地证明了，当精确到所有级时，真空极化张量都是标量函数乘以组合 $(g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu)$ 的形式，则去掉指标 1 以后方程 (7-12) 就给出了传播子和 $\varpi = \varpi^{[1]} + \varpi^{[2]} + \cdots$ 之间的一般关系

$$iG_{\rho\nu} = \frac{g_{\rho\nu} - [1 + \varpi(k^2)]k_\rho k_\nu/\mu^2}{k^2[1 + \varpi(k^2)] - \mu^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\frac{1}{k^2 - \mu^2/\lambda}. \tag{7-13}$$

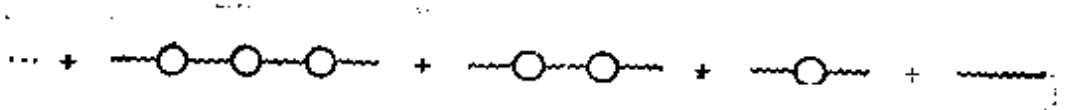


图 7-4　用真空极化表示的光子传播子.

方程(7-13)可以和公式(5-80)来进行比较。这时我们不去考虑质量重整化和发散性。更确切地说，是假定式(7-13)中的分母可有形为

$$\frac{1}{k^2[1+\bar{\omega}(k^2)]-\mu^2}=\int_0^\infty dk'^2\,\frac{\rho(k'^2)}{k^2-k'^2} \tag{7-14}$$

的积分表示。如果 $\bar{\omega}$ 仍然满足式(7-10)型的色散关系($\mu^2\to 0$ 时阈在原点，而不象精确到最低级时那样阈在 $4m^2$)，我们就有关系

$$\rho(k^2)=\frac{k^2}{\pi}\frac{\mathrm{Im}\bar{\omega}(k^2)}{\{k^2[1+\mathrm{Re}\bar{\omega}(k^2)]-\mu^2\}^2+[k^2\mathrm{Im}\bar{\omega}(k^2)]^2}$$
$$+\text{极点贡献项}.$$

如果我们写出的积分仍有意义，就得到

$$\frac{1+\bar{\omega}(k^2)}{k^2[1+\bar{\omega}(k^2)]-\mu^2}=\frac{1}{k^2}\left\{1+\frac{\mu^2}{k^2[1+\bar{\omega}(k^2)]-\mu^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{k^2}+\frac{\mu^2}{k^2}\int_0^\infty dk'^2\,\frac{\rho(k'^2)}{k^2-k'^2}=\mu^2\int_0^\infty dk'^2$$
$$\times\frac{\rho(k'^2)}{k'^2(k^2-k'^2)}+\frac{1}{k^2}\left[1-\mu^2\int_0^\infty\frac{dk'^2}{k'^2}\rho(k'^2)\right]. \tag{7-15}$$

根据式(7-14)，取 $k=0$，并假定 $\bar{\omega}(0)$ 有限，上面公式的括号中的最后一项就为零。结果，方程(7-13)为

$$iG_{\rho\nu}(k)=\int_0^\infty dk'^2\rho(k'^2)\,\frac{g_{\rho\nu}-k_\rho k_\nu/k'^2}{k^2-k'^2}+\frac{k_\rho k_\nu}{\mu^2}\,\frac{1}{k^2-\mu^2/\lambda}. \tag{7-16}$$

它实际上和方程(5-80)是可以相比的。

方程(7-12)和(7-13)所暗含的再次求和产生了一种新的现象。事实上，自由场论在 $k^2=\mu^2$ 处的孤立极点最多被移动一下位置，移到相应于表示式 $k^2[1+\bar{\omega}(k^2)]-\mu^2$ 的零点。对光子传播子来说，这不是太厉害的。实际上 $\mu^2$ 只是为了方便，为了割去计算中间的红外发散而引入的。我们经常要计算如 $j_1^\rho(k)G_{\rho\nu}(k)j_2^\nu(-k)$ 那样的组合，以得到物理的信息，这里 $j_1$ 和 $j_2$ 是守恒流 $[k\cdot j(k)=0]$。此组合消除了 $k_\rho k_\nu$ 项，所以可取极限 $\mu^2\to 0$。如果我们改成令 $\mu^2=0$，于是 $G$ 就为

$$iG_{\rho\nu}(k)=\frac{g_{\rho\nu}}{k^2[1+\varpi(k^2)]}+\frac{k_\rho k_\nu}{k^4}\frac{1+\varpi(k^2)-\lambda}{\lambda[1+\varpi(k^2)]}$$

$$\mu^2=0, \qquad (7\text{-}17)$$

量 $k^2[1+\varpi(k^2)]$ 在 $k^2=0$ 处仍为零，除非 $\varpi(0)=\infty$.

我们可不精确地把性质 $k^2[1+\varpi(k^2)]|_{k^2=0}=0$ 说成是对光子没有真正的质量重整化. 但是，有波函数重整化，因为现在在 $k^2=0$ 处的极点的留数等于 $[1+\varpi(0)]^{-1}$，而不是 1. 单圈图的贡献有一个引人注目的情况，即在正规化下，我们发现了在 $\varpi$ 中唯一的潜在发散性，因而是未知项，是常数，可取成 $\varpi$ 在 $k^2=0$ 处的值. 如果只有 $j\cdot G\cdot j$ 是可测量的，则我们可用两个相隔很远的全同源来定义用电荷平方表示的量. 我们把它定义成在大距离处 Coulomb 静电势 $1/4\pi r$ 的系数，这里表示为 $e^2=e_0^2/[1+\varpi(0)]=Z_3e_0^2$，其中我们引进了指标 0，以标志直到现在为止在微扰级数中使用的裸耦合常数. 上面 $Z_3$ 的定义和第五章中给出的极限 $\mu^2=0$ 下的定义是一致的. 于是，得到如下的结论：

$$e^2=Z_3e_0^2,$$

$$Z_3=\frac{1}{1+\varpi(0)}=1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\cdots. \qquad (7\text{-}18)$$

为了一致起见，必须把所有的量表示成一个参量的级数，此参量计算了裸 Feynman 图中圈的数目 $L$. 如在 6-2-1 节中所见到的那样，应该用因子 $\hbar^L$ 去乘这种图. 为此，如果只讨论 $\hbar^1$ 级项，我们可在有限的余数 $\varpi^{[1]}(k^2)-\varpi^{[1]}(0)$ 中用 $\alpha$ 来替代 $\alpha_0$，因为它和 $\alpha-\alpha_0$ 一样已是 $\hbar$ 级的. 这也证明了在式 (7-18) 的右端用 $\alpha$ 是正确的.

按照电荷的这种定义，重整化传播子为

$$iG^R_{\rho\nu}(k)=\frac{g_{\rho\nu}}{k^2[1+\varpi(k^2)-\varpi(0)]}+k_\rho k_\nu \text{的项}. \qquad (7\text{-}19)$$

它在光子极点 $k^2 = 0$ 处的留数为 1，并且是用物理电荷来表示的.

我们看到，重整化方法显示出：当 Green 函数用物理的重整化量表示出来时，不确定的和潜在的发散量就没有了.

当我们令 $\sum_1^s C_r \ln \lambda_r^2 = -\ln(\Lambda^2/m^2)$ 时，它的符号是选得和条件式 (7-7) 一致的. 式 (7-18) 的直观内容是，在大距离处裸电荷被因子 $Z_3 = 1 - (\alpha/3\pi)\log(\Lambda^2/m^2)$ 屏蔽了，此因子小于 1，并且只要 $\Lambda^2/m^2$ 不十分大，它就是正的. 当从远处看时，相应于虚的电子-正电子对产生的真空极化压低了检验粒子的电荷.

在推导如式 (7-19) 那样的方程时，我们可取另一种看法. 它相当于认为，原始拉氏函数只是使我们可以用来定义微扰振幅的一种书写形式. 它是从经典和量子力学之间的某种直觉的对应原理出发所作的假定. 同样，它可被量子修正来修改. 于是，我们假定精确到最低级时，$\mathscr{L}$ 是用物理参量来表示的. 这就需要构造形为 $\delta\mathscr{L}$ 的，称为抵消项的微扰修正(当截断趋向无穷时，它的系数成为无穷)，以保持这些物理参量有适当的定义:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{tot}} &= \mathscr{L}(e,m) + \delta\mathscr{L}, \\ \delta\mathscr{L} &= \delta\mathscr{L}^{[1]} + \delta\mathscr{L}^{[2]} + \cdots, \end{aligned} \tag{7-20}$$

$\delta\mathscr{L}$ 中的各部分是按照 $\hbar$ 的相应的幂次来分的，此幂次是原始图中圈的数目. 圈的数目可表示为 $\hbar$ 的幂次这一事实，是很好地与以前的叙述紧密相关的.

于是，我们的计算可解释为在 $\delta\mathscr{L}^{[1]}$ 中有如下形式的贡献:

$$\delta\mathscr{L}_{\text{em}}^{[1]} = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)^{[1]} F_{\rho\nu}F^{\rho\nu}. \tag{7-21}$$

把这种项加到 $\mathscr{L}$ 上，就产生精确到 $\hbar$ 级的附加图(图 7-5)，这就按如下的方式修改了原来的(正规化的)张量：

$$\varpi_{\rho\nu}(k) \to \varpi_{\rho\nu}(k) - (Z_3 - 1)^{[1]} i(g_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\nu),$$

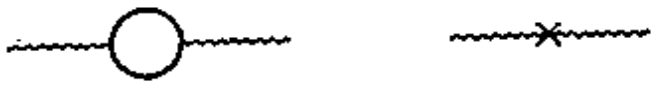


图 7-5　在抵消项方法中真空极化的两个 $\hbar$ 级的图

于是

$$\varpi(k^2, \Lambda) \to \varpi(k^2, \Lambda) + (Z_3 - 1)^{[1]}$$
$$= \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + (Z_3 - 1)^{[1]} + [\varpi(k^2) - \varpi(0)].$$

新的规则表示在各处都用 $\alpha$，而不是 $\alpha_0$. 还有，在方程 (7-9) 中与 $\ln(\Lambda^2/m^2)$ 无关的项在 $k^2 = 0$ 时为零，这就证明了引进重整化的量 $\varpi^R(k^2) = \varpi(k^2) - \varpi(0)$ 是对的. 从方程(7-18)得到 $(Z_3 - 1)^{[1]} + (\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2) = 0$，于是

$$\varpi^R(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dk'^2}{k'^2} \frac{1}{k'^2 - k^2} \left(1 - \frac{4m^2}{k'^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left(1 + \frac{2m^2}{k'^2}\right) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{\frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right)\right.$$
$$\left. \times \left[\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} \operatorname{arccot}\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} - 1\right]\right\}. \quad (7\text{-}22)$$

此表示式对小于 $4m^2$ 的实数 $k^2$ 是有意义的. 对 $k^2 > 4m^2$，它必须在割线上面作解析延拓. 注意下面有趣的极限：

$$\varpi^R(k^2) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{15\pi} \dfrac{k^2}{m^2} + O\left(\dfrac{k^4}{m^4}\right) & k^2 \to 0, \\ -\dfrac{\alpha}{3\pi} \ln\left(-\dfrac{k^2}{m^2}\right) + \dfrac{5\alpha}{3\pi} + O\left[\alpha \dfrac{m^2}{k^2} \ln\left(-\dfrac{k^2}{m^2}\right)\right] & \\ & k^2 \to -\infty. \end{cases}$$

在大的负 $k^2$ 值处的行为显著地和包含截断的原始发散项类

似(包括系数). 当然,这并不是偶然的,所以在适当的时候要更好地来了解它.

真空极化所表示的电荷屏蔽具有物理的结果. 应用重整化的表示式, 并集中讨论 $k^2 = -\mathbf{k}^2$ 的静态情况, 我们就看到,替换 $e^2 \to e^2/[1 + \bar{\omega}(-\mathbf{k}^2)]$ 修改了 Coulomb 定律,这很象在电介质中我们有 $e^2/\varepsilon(\mathbf{k})$, 其中 $\varepsilon$ 是介电常数. 对足够小的 $\mathbf{k}^2$ (和确定标度的 $m^2$ 比较),可把 Coulomb 作用近似为

$$\frac{e^2}{\mathbf{k}^2} \to \frac{e^2}{\mathbf{k}^2[1 + \bar{\omega}^R(-\mathbf{k}^2)]} \simeq \frac{e^2}{\mathbf{k}^2}\left(1 + \frac{\alpha}{15\pi}\frac{\mathbf{k}^2}{m^2}\right),$$

这是最初由 Uehling 得到的结果.

在形态空间中,对位于原点的、电荷为 $-Ze$ 的无限重的原子核,这意味着如下的修正:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} \to \left(1 - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{\Delta}{m^2}\right)\frac{-Ze^2}{4\pi r}$$
$$= \frac{-Ze^2}{4\pi r} - \frac{\alpha}{15\pi}\frac{Ze^2}{m^2}\delta^3(\mathbf{r}).$$

增加项的效应必须计算到一级,否则就和在 $\bar{\omega}^R$ 中只保留 $\alpha$ 级的项不一致了. 围绕零点展开到 $(\mathbf{k}^2/m^2)$ 的主导级, 在形态空间中就产生了奇异性. 但是, 我们只需要位势在未微扰态中的平均值, 所以用 $\delta$ 函数来代替在小 $r$ 处有一个尖锐的峰的实际修正是没有关系的. 我们发现, 在小 $r$ 处的增大是和在小距离处不受屏蔽地与裸电荷耦合的想法是一致的.

将上面的微扰用到类氢原子上, 就由下式给出 $s$ 波能级的移动:

$$\delta E_{n,l} = -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2}\int d^3r\,\phi^*_{n,l}(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r})\phi_{n,l}(\mathbf{r})$$
$$= -\frac{Z\alpha e^2}{15\pi m^2}\delta_{l,0}|\phi_{n,0}(0)|^2 = -\frac{4}{15\pi}\frac{Z^4\alpha^5}{n^3}m\delta_{l,0},$$

(7-23)

这里我们用了 Coulomb 零点波函数的值 $\psi_{n,0}(0)=(\pi n^3\alpha^3)^{-1/2}$，$a=(Zm\alpha)^{-1}$。在 Dirac 理论中，两个宇称相反的、$n=2$，$j=\frac{1}{2}$ 的能级 $2S_{1/2}$，$2P_{1/2}$ 是退化的。真空极化修正使 $s$ 态低了 $\Delta E/\hbar=(1/\hbar)(E_{2S_{1/2}}-E_{2P_{1/2}})\simeq -27\text{MHz}$（图 7-6）。Lamb 在 1947 年测到了此能级分裂的数量级为 +1000 MHz，这说明其它的效应大大地超过了真空极化修正。在 7-3-2 中将给出和实验符合的完整的理论，从而给出这种电荷屏蔽的非直接的证据。

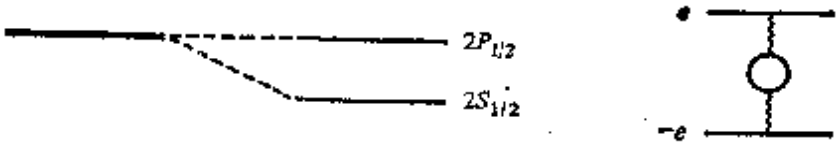



图 7-6　真空极化对 $2S_{1/2}$-$2P_{1/2}$ 氢能级分裂的贡献

当然，我们可以避免用小 $\mathbf{k}$ 近似，在原点的静电荷将感应出变形的 Coulomb 势，精确到 $\alpha$ 级时，它为

$$\frac{e}{4\pi r}\to V(r)=\frac{e}{4\pi r}Q(r),$$

$$Q(r)=1+\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty du e^{-2mru}\left(1+\frac{1}{2u^2}\right)\frac{(u^2-1)^{1/2}}{u^2},\tag{7-24}$$

$$Q(r)=\begin{cases}1+\dfrac{\alpha}{3\pi}\left[\ln\dfrac{1}{(mr)^2}-2\gamma-\dfrac{5}{3}+\cdots\right] & mr\ll 1,\\ 1+\dfrac{\alpha}{4\pi^{\frac{1}{2}}(mr)^{3/2}}e^{-2mr}+\cdots & mr\gg 1,\end{cases}$$

其中 $\gamma$ 等于 Euler 常数 $-\int_0^\infty du\ln u e^{-u}=0.5772\cdots$。按照电荷的定义有 $Q(\infty)=1$。我们又看到，当 $r$ 减小时 $Q(r)$ 增加，当 $r$ 趋向零时 $Q(r)$ 甚至成为无穷大。在方程 (7-23) 中应用的近似只是大体上成立的。

最后我们指出，上面的约定相当于用了在光子极点处留数为 1 的（当 $\mu^2\to 0$ 时）光子传播子。所以，附在散射振幅的光子线上的因子 $Z_3^{-1/2}$ 用 1 代替。

## 7-1-2 电子传播子

有两条外电子线的、单粒子不可约 Green 函数（也称电子自能）的第一级非平庸贡献图，如图 7-7 所示，它为

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[ \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(\lambda k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)} \right] \times \gamma^\rho \frac{i}{\not p - \not k - m + i\varepsilon} \gamma^\sigma. \tag{7-25}$$

不幸的是，这个 $I$ 的 $4 \times 4$ 矩阵函数表示式有各种可能的问题. 它明显地有线性紫外发散（这表示对大的 $k$，积分象 $\int d^4k/|k|^3$ 那样）. 我们将看到，它可约化为对数发散. 对小的 $k$ 和某些特殊的外动量值还会有红外发散. 于是，为了稳妥起见，我们保持 $\mu^2 \neq 0$. 还预期有象在关于荷电粒子波函数的非相对论物理中那样的规范有关性.

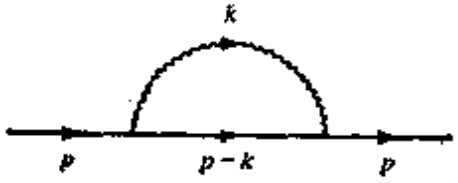



图 7-7 最低级电子自能图

为了使被处理的量有意义，需要象前面那样用到自由传播子的正规化. 为了避免记号繁杂，我们假定用一种适当的方法，但不明显地引进截断 $\Lambda^2$. 我们写出

$$\Sigma(p) = \Sigma^a(p) + \frac{1-\lambda}{\lambda} \Sigma^b(p), \tag{7-26}$$

使 $\Sigma^{(a)}(p)$ 相应于选取 Feynman 规范 ($\lambda = 1$)，并用传播子的参量表示把对圈动量 $k$ 积分之后的 $\Sigma^{a,5}$ 表示为

$$\overset{a}{\sum}(p)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\left(2m-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\not{p}\right)$$
$$\times\exp\left[i\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2\right)\right],\qquad(7\text{-}27a)$$

$$\overset{b}{\sum}(p)=-\frac{i\alpha}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}$$
$$\times\left\{m\left(2i+\frac{\alpha_2^2p^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)\right.$$
$$\left.+\not{p}\left[-i-\frac{3i\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+\frac{\alpha_2^2(\alpha_1+\alpha_3)p^2}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}\right]\right\}$$
$$\times\exp\left\{i\left[\frac{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}p^2-\alpha_1\mu^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\alpha_3\frac{\mu^2}{\lambda}-\alpha_2m^2\right]\right\}.\qquad(7\text{-}27b)$$

在质量中理解成有一个趋于零的负的虚部，以保证大 $\alpha$ 时的收敛性。

如光子的情形那样，自能部分是按圈的数目来分类的，把这个级数加起来就得到总的传播子(图 7-8)：

$$\frac{i}{\not{p}-m}+\frac{i}{\not{p}-m}[-i\Sigma(p)]\frac{i}{\not{p}-m}+\frac{i}{\not{p}-m}$$
$$\times[-i\Sigma(p)]\frac{i}{\not{p}-m}[-i\Sigma(p)]\frac{i}{\not{p}-m}+\cdots$$
$$=\frac{i}{\not{p}-m-\Sigma(p)}.\qquad(7\text{-}28)$$

我们接着来计算 $\overset{a}{\sum}(p,\Lambda)$。当要对 $\alpha$ 参量的公共扩大因子

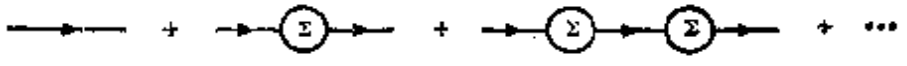



图 7-8　用自能 $\Sigma$ 的幂级数表示的电子传播子

积分时，这里的截断 $\Lambda$ 立即就会出现

$$\sum^{a}(p,\Lambda)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\delta(1-\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}(2m-\alpha_1\not{p})e^{i\rho(\alpha_1\alpha_2p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2)}. \quad (7\text{-}29)$$

与经典自能部分的线性发散不同(第一章)，由于分出了运动学因子 $m$ 和 $\not{p}$，它对 $\rho$ 的积分只是对数发散的。如果 $m$ 大到使 $|p|\ll\Lambda\ll m$，这相当于静态经典极限，则我们将发现它是随 $\Lambda$ 线性发散的。

为了得到相对论不变的正规化，我们可从 $\sum^{a}$ 中减去有虚构质量的光子的贡献，其中 $\mu$ 用 $\Lambda$ 来代替。这里的 $\Lambda$ 值与真空极化中所用的是没有关系的。如果需要对大而有限的截断来研究与 $\Lambda$ 相关的部分，则引进一个统一的正规化手续是明智的。于是，我们用替换

$$\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}e^{i\rho(\alpha_1\alpha_2p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2)}\to$$

$$\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}(e^{i\rho(\alpha_1\alpha_2p^2-\alpha_1\mu^2-\alpha_2m^2)}-e^{-i\rho\alpha_1\Lambda^2}),$$

其中当 $\Lambda^2$ 趋于无穷时，所有其它的质量参量和它相比都忽略了。用等式

$$\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}(e^{i\rho(z_1+i\varepsilon)}-e^{i\rho(z_2+i\varepsilon)})=\ln\frac{z_2}{z_1}$$

我们可写出

$$\sum^{a}(p,\Lambda)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta(2m-\beta\not{p})$$

$$\times\ln\left[\frac{\beta\Lambda^2}{m^2(1-\beta)+\beta\mu^2-\beta(1-\beta)p^2-i\varepsilon}\right]. \quad (7\text{-}30)$$

对 $\Lambda$ 的相关性将影响 $\not{p}$ 的线性项系数，其余的表示式是有限

的.

红外问题使情况有一些复杂. 只要 $\mu^2$ 是有限的,在对数中出现的二次型在 $p^2 < (m+\mu)^2$ 时就是正的. 其实,对 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 和阈以下的 $p^2$,我们有 $0 \leqslant \beta(1-\beta) \leqslant \frac{1}{4}$,所以

$$\begin{aligned}(1-\beta)m^2 + \beta\mu^2 - \beta(1-\beta)p^2 &\geqslant (1-\beta)m^2 \\ &+ \beta\mu^2 - \beta(1-\beta)(m+\mu)^2 \\ &= [(1-\beta)m - \beta\mu]^2.\end{aligned}$$

在此区域中 $\sum^a$ 是"实的",即 $\overline{\sum^a} = \gamma^0 \sum^{a+} \gamma^0 = \sum^a$. 超过这一点, $\sum^a$ 就获得一个"虚部",它相应于过程

虚电子→实电子+光子,

这和在产生粒子对的阈外的光子情形类似. 这里复杂之处在于, $\mu^2 \to 0$ 时阈和物理质量壳 $p^2 = m^2$ 重合. 在实际世界中,不可能把传播子中的电子极点从由该点出发的割线中分离出来. 这就解释了我们为什么要保持 $\mu^2 > 0$. 当 $\mu^2 = 0$ 时,二次型的一个零点到达积分区间的上限 $\beta = 1$ 处,于是不再能在奇异性 $p^2 = m^2$ 附近作展开.

一种类似的,但不同的现象也出现于很高级的光子情况中(四个或更多的圈),它相应于有三个、五个、…光子的中间态. 它使带着极小系数的光子传播子的大距离行为有幂次型的修正. 由于它很小,所以这种效应尚未测量到.

但是,我们可对 $p^2 < m^2$ 的值来考虑极限 $\mu^2 \to 0$,而不会遇到奇异性. 这有大大地简化方程 (7-30) 中的积分的优点,结果为

$$\sum^a (p, \Lambda, \mu = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \left( 2m - \frac{1}{2} p \right) \right.$$

$$+2m\left[1+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\not{p}\left[\frac{3}{2}+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\right.$$
$$\left.\times\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)+\frac{m^2}{p^2}\right]\Bigg\}. \tag{7-31}$$

当 $p^2$ 趋向 $m^2$ 时，此表示式保持有限，但它的微商变为无穷大.

把这样的自能部分插到公式(7-28)中，显然就移动了传播子的极点的位置，并改变了它的留数. 这又可能有两种等价的看法. 或者我们把 $m_0$(和 $e_0$)称作原始拉氏函数中的参量，而把 $m$ 定义为改变后的极点的位置，并把 Green 函数重新用物理质量和耦合常数表示出来. 或者不提到裸参量，而在拉氏函数中引进抵消项，使极点的位置和它的留数不变.

我们可通过在 $\not{p}=m$ 附近展开 $\not{p}(\not{p}^2=p^2)$ 的函数 $\Sigma$ 而来进行运算:

$$\begin{aligned}\Sigma(\not{p},\Lambda)&=\delta m(\Lambda)-[Z_2^{-1}(\Lambda)-1](\not{p}-m)\\&\quad+Z_2^{-1}(\Lambda)\Sigma_R(\not{p}),\\ \delta m&=\Sigma(\not{p},\Lambda)|_{\not{p}=m},\\ -[Z_2^{-1}(\Lambda)-1]&=\frac{\partial\Sigma}{\partial\not{p}}(\not{p},\Lambda)|_{\not{p}=m}.\end{aligned}\tag{7-32}$$

精确到 $\hbar$ 级时，$\Sigma_R(\not{p})$ 前面的因子 $Z_2^{-1}(\Lambda)$ 可以不管，而因为

$$\Sigma_R(\not{p})|_{\not{p}=m}=0,\quad 和\quad \frac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma_R(\not{p})|_{\not{p}=m}=0.$$

所以，第一个方程成为 Taylor 展开. 但是，更清楚的是把这个关系改写为

$$\not{p}-m-\Sigma_R(\not{p})=Z_2(\Lambda)[\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})].$$

在 Feynman 规范中，我们用式 (7-30) 来分出 $\delta m$ 和 $Z_2^{-1}$. 事实上，对 $\delta m$ 我们可以不管红外发散，并应用方程(7-31)得：

$$\delta m^a(\Lambda) = m\frac{3\alpha}{4\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right). \tag{7-33}$$

为了分出 $Z_2^{-1}(\Lambda)-1$，我们必须回到式 (7-30)，并保持当 $\mu^2\to 0$ 时贡献是奇异的或有限的. 这就给出了

$$\begin{aligned}
&[Z_2^{-1}(\Lambda)-1]^a = -\frac{\partial}{\partial \not p}\sum^a(\not p,\Lambda,\mu)|_{\not p=m}\\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta\beta\left\{\ln\left[\frac{\beta\Lambda^2}{(1-\beta)^2m^2}\right]\right.\\
&\left.-\frac{2(1-\beta)(2-\beta)}{(1-\beta)^2+\beta\mu^2/m^2}\right\} = \frac{\alpha}{2\pi}\\
&\times\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{9}{4}+O\left(\frac{\mu}{m}\right)\right],
\end{aligned} \tag{7-34}$$

$\Sigma$ 的重整化值是通过减除 $\delta m-(Z_2^{-1}-1)(\not p-m)$ 而得到的. 在范围 $|p^2-m^2|\gg\mu^2$ 中，用式 (7-31) 就得到结果

$$\begin{aligned}
\sum_R^a(p) &= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{2m\left[\frac{5}{8}+\frac{m^2-p^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\right.\\
&-\frac{\not p}{2}\left[\frac{3}{2}+\frac{m^2}{p^2}+\frac{m^4-(p^2)^2}{(p^2)^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\\
&\left.+(\not p-m)\left(\frac{9}{4}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{7-35}$$

对 $p^2-m^2\gg\mu^2$，通过在从 $(m+\mu)^2$ 出发的割线的上面作解析延拓 $\ln(1-p^2/m^2)\to\ln(p^2/m^2-1)-i\pi$，使对数获得了虚部. 在极限 $\mu^2\to 0$ 时，相应的 $\Sigma$ 的吸收部分是

$$\begin{aligned}
\text{abs}\sum_R^a(p) &= \alpha\left(1-\frac{m^2}{p^2}\right)\\
&\times\left[m-\frac{\not p}{4}\left(1+\frac{m^2}{p^2}\right)\right]\theta(p^2-m^2).
\end{aligned} \tag{7-36}$$

为了考察在 $p^2 = m^2$ 邻域中的 $\Sigma_R$，要对它进行单独的研究．由于要在质壳上进行重整化，所以原来在方程(7-31)中消失的附加的红外奇异性又出现了．

我们来看一下，上面的在 Feynman 规范中成立的结果，在任意规范下将作怎样的改变．换而言之是要计算 $\Sigma^b$，我们把它在动量空间中改写成

$$\sum^b(p) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \times \frac{1}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(k^2-\mu^2/\lambda+i\varepsilon)} \times\left[\frac{\not k(p^2-m^2)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon} - \frac{k^2(\not p-m)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon} - \not k\right]. \tag{7-37}$$

令 $I_1$，$I_2$，$I_3$ 依次表示被积函数中的三项贡献．假定我们用协变的正规化，由于 $I_3$ 是 $k$ 的奇函数，所以它为零(它只可能正比于 $\not p$，但相应的积分与 $p$ 无关)．正规化后我们看到，对 $\not p = m$，$\Sigma^b$ 为零，所以对 $\delta m$ 没有贡献．事实上，$I_1$ 是紫外发散的．但是，它在 $\not p = m$ 处的微商是红外奇异的，所以 $\mu^2$ 必须保持有限，以分出它对波函数重整化，即对 $(Z_2^{-1}-1)^b$ 的贡献．最后，$I_2$ 有对数紫外发散性，但是红外收敛的．对 $|p^2-m^2| \gg \mu^2$，我们得到

$$\frac{1-\lambda}{\lambda}\sum^b(p,\Lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\alpha}{4\pi} \times\left\{\not p\frac{p^2-m^2}{p^2}\left[1+\frac{m^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right] - (\not p-m)\left[\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+1-\frac{p^2-m^2}{p^2}\right.\right.$$

$$\times \ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\Big]\Big\}. \tag{7-38}$$

在 $p^2=m^2$ 的邻域内，我们用

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{\ln(\mu^2/\lambda m^2)-\lambda\ln(\mu^2/m^2)}{1-\lambda}\right]$$

来代替第一个括号 $[1+(m^2/p^2)\ln(1-p^2/m^2)]$. 因此，我们可把 $[(1-\lambda)/\lambda]\sum^b$ 分成如下那样的重整化部分和随 $p\to m$ 线性趋向零的项之和，

$$\begin{aligned}\frac{1-\lambda}{\lambda}\sum^{b}(p,\Lambda) &= -(\not p-m)\frac{\alpha}{4\pi}\\ &\times\left[\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\mu^2}{\lambda m^2}\right]\\ &+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1-\lambda}{\lambda}\left\{\not p\frac{p^2-m^2}{p^2}\left[1+\frac{m^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right]\right.\\ &-(\not p-m)\left[1-\frac{p^2-m^2}{p^2}\ln\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)\right.\\ &\left.\left.+\frac{\ln(\mu^2/\lambda m^2)-\lambda\ln(\mu^2/m^2)}{1-\lambda}\right]\right\},\end{aligned} \tag{7-39}$$

它在 $|p^2-m^2|\gg\mu^2$ 时成立. 于是，

$$\begin{aligned}[Z_2(\Lambda)^{-1}-1]^b &= \frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right.\\ &\left.+\ln\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\mu^2}{\lambda m^2}\right).\end{aligned} \tag{7-40}$$

在公式 (7-39) 及 (7-40) 中，截断 $\Lambda$ 的意义和用来计算 $\sum^a$ 的 $\Lambda$ 一样.

考虑了组合 $(Z_1^{-1}-1)^{a+b}$ 时，我们发现红外奇异项 $\ln(\mu^2/m^2)$ 的系数正比于 $3-1/\lambda$. 选取 $\lambda=\frac{1}{3}$ (Yennie 和 Fried)，到这一级就消去了红外发散. 在极限 $\mu^2\to 0$ 下，它相应于光子传播子为 $-i(g_{\rho\sigma}/k^2+2k_\rho k_\sigma/k^4)$. 所以 $\sum_R^{a+b}$ 也是没有红外奇异性的.

我们现在必须在拉氏函数上加一项抵消项来抵消紫外发散，以保持物理参量有适当的定义．原始拉氏函数中有一项 $-m\bar{\psi}\psi$，用 $-m_0\bar{\psi}\psi = -m\bar{\psi}\psi + \delta m\bar{\psi}\psi$ 来替代它．于是，精确到第一级时，我们引进

$$\delta\mathscr{L}^{[1]}_{\text{抵}} = \delta m\bar{\psi}\psi, \tag{7-41}$$

其中

$$\delta m = \delta m^a = \frac{3\alpha}{4\pi} m\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2}\right). \tag{7-42}$$

注意，$\delta m$ 是规范无关的，这是物理上合理的结果，它只有对数发散性．在拉氏函数上加上的部分将对固有两点函数贡献一项 $i\delta m$（图 7-9）．根据定义式(7-25)，这将使从 $\Sigma$ 中减去 $\delta m$，以保证 $m$ 实际上是物理质量．在形式幂级数的意义下，精确到第一级时，我们有 $(Z_2-1)^{[1]} = -(Z_2-1)^{[1]}$．于是，抵消项

$$\delta\mathscr{L}^{[1]}_{(i/2)\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi} = (Z_2-1)\left(\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi\right), \tag{7-43}$$

$$(Z_2-1) = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 3\ln\frac{\mu^2}{m} - \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\mu^2}{\lambda m^2} + \frac{9}{4}\right), \tag{7-44}$$

将抵消一级修正下的 $\not{p} - m$ 发散项．留下来的有限传播子 $[\not{p} - m - \Sigma_R^{a+b}(p)]^{-1}$，在 $\not{p} = m$ 处有一个极点，其留数为 1．



图 7-9　对电子两点函数的单圈抵消项 $\delta\bar{\psi}\psi + (Z_2-1)[(i/2)\times\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi]$ 的图示

**注解**

(a) 精确到 $\hbar$ 级时，我们无法区分抵消项 $\delta m\bar{\psi}\psi$ 和 $Z_1\delta m\bar{\psi}\psi$，因为 $(Z_2\delta m)^{[1]} = \delta m^{[1]}$.

(b) 在 Landau 规范 $\lambda\to\infty$ 中，精确到第一级时，$Z_1^{-1}$ 的紫外发散消去了. 不幸的是不能唯一地取一种规范来消除所有的微扰紫外发散.

(c) 迄今为止所有引进的抵消项的结构都和原始拉氏函数中的项类似，这就使重整化方法获得成功.

最早发现电子自能只有对数发散的是 Weisskopf (1939)，而最早的完全的计算是 Karplus 和 Kroll (1950) 给出的.

## 7-1-3 顶角函数

在研究了两点函数以后，现在我们面对着三点顶角函数 $(e\bar{e}\gamma)$. 在图 7-10 中画出了属于此过程的唯一的单粒子不可约图，其表示式为

$$-ie\Gamma_\mu^{[1]}(p', p) = (-ie)^3\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}$$
$$\times\left[\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(\lambda k^2-\mu^2+i\varepsilon)}\right]$$
$$\times\left(\gamma^\rho \frac{i}{\not p'-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma^\rho\right). \tag{7-45}$$

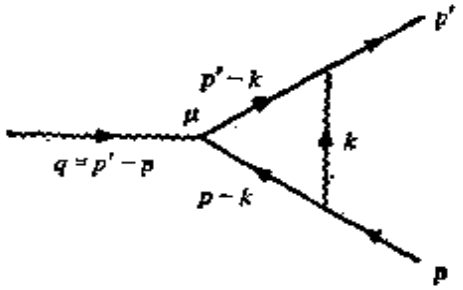



图 7-10 单圈级的顶角图

用同样的记号，零级值为 $\gamma^\mu$. 相应地我们可以写出完全的单粒子不可约三点函数

$$\Lambda_\mu(p',p) = \gamma_\mu + \Gamma_\mu(p',p). \tag{7-46}$$

方程 (7-45) 给出了对 $\Gamma_\mu$ 的第一级非平庸的贡献.

如果我们记起电磁耦合是通过最小替代 $\not{p} \to \not{p} - e\not{A}$ 来引入的，我们就可预期在电子传播子和顶角函数之间有密切的关系. 实际上的确是这样，Ward 把它具体化在一个等式中.

考虑在电子自能图中，以各种可能的方式在内荷电粒子传播子上插入零动量的外光子线(图7-11). 零级项给出 $i(\not{p}-m) \to ie\not{A}$，而如图 7-11 中画出的单圈图贡献导致

$$-ie\Sigma^{[1]}(p) \to -ieA^\mu\Gamma_\mu^{[1]}(p,p)$$

等等. 这种图的对应性可以解释如下：在自能图的每一条为荷电粒子的传播子中，我们用 $\not{p} - e\not{A}$ 来代替跑动的动量 $\not{p}$，$A_\mu$ 是固定的常数四维矢量. 然后，按 $eA$ 的幂次来展开，并分出线性项的系数. 这就是 $\Gamma_\mu(p,p)$.

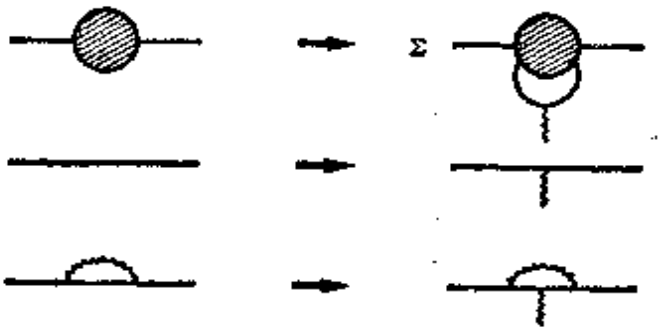



图 7-11　在电子自能图中插入一条外光子线，就得到 Ward 等式.

例如，如果我们把这个手续用到对 $\Sigma(p)$ 的单圈图贡献上，就得到

$$\Sigma(p) \to \frac{\partial}{\partial eA^\mu}(-ie)^2 i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\times\frac{1}{i}\left[\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}+\frac{(1-\lambda)k_\rho k_\sigma}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(\lambda k^2-\mu^2+i\varepsilon)}\right]$$

$$\times\gamma^{\rho}\frac{i}{\not p-\not P-e\not A-m+i\varepsilon}\gamma^{\sigma}\Big|_{A=0}.$$

因为

$$\frac{1}{\not p-\not P-e\not A-m+i\varepsilon}=\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}e\not B\frac{1}{\not p-\not k-e\not B-m+i\varepsilon},$$

所以微分后，并令 $A$ 等于零，就得到和方程(7-45)一致的 $\Gamma^{\mu}(p,p)$ 的表示式.

我们可能会问，上面的运算是否给出了所有的顶角图. 回答显然是“不”. 考虑在自能图中的一个内线封闭费米子圈. 根据 Furry 定理，有偶数条光子线附在此圈上（如果我们约定断开每一条起止于此圈上的内光子线). 同样，根据 Furry 定理，我们不可能从上面的步骤中得到如图 7-12 的例子所画的那样的顶角贡献，其中内线费米子圈通过奇数条光子线连到图的其余部分. 这表示我们只得到这样的图，其中的外光子线连到携带着起源于外线中的电荷流的费米子线上. 如果我们来找 $\Sigma$ 和 $\Gamma$ 之间的关系，初看起来这是麻烦的. 幸好当在零动量交换 $q$ 处计算时，以各种方式将外线连到内电子圈上的所有图的和为零. 通过分离出形为

$$\Sigma\int d^4p\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\gamma_{\mu}\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\gamma_2\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\not p+\not q_2-m+i\varepsilon}\gamma_3\frac{1}{\not p+\not q_2+\not q_3-m+i\varepsilon}\cdots\gamma_{2p}\right)$$

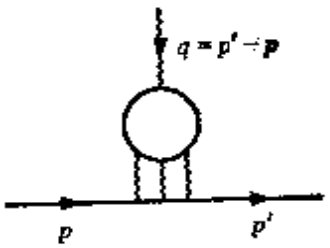



图 7-12 不能从 $\Sigma(p)$ 通过在正文中描写的步骤来得到的图例

的因子，而对圈图作适当的 Panli-Villars 正规化后，我们就可看出这点，其中所有进入此圈的动量之和 $q_2+q_3+\cdots+q_{2p}$ 为零。如前述那样有

$$\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}.$$

对固定的内部光子动量值，把所有可能的外光子线插入加起来，就得到被积函数是一个全微商。如果正规化是规范不变的，则积分为零。我们的结论是，只对一组特别的、带外电荷流的电子传播子联上外光子线。可以看到，这样一组图带着电子的动量流。这种处理方法等价于对此动量微商，这就给出了 Ward 恒等式为

$$\Gamma_\mu(p,p)=-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p). \tag{7-47a}$$

如果包括零级贡献，就为

$$\Lambda_\mu(p,p)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p,p)$$
$$=\frac{\partial}{\partial p^\mu}[\not p-m-\Sigma(p)]. \tag{7-47b}$$

在下一章中，将把此等式推广到如下的非零动量交换的情形，这是 Takahashi 给出的形式

$$(p'-p)^\mu\Lambda_\mu(p'p)=[\not p'-m-\Sigma(p')]$$
$$-[\not p-m-\Sigma(p)], \tag{7-48}$$

并要讨论它和流守恒的关系。我们可以很容易地证明式(7-47a)是从式(7-48)得来的。在进行上面所给出的简略的证明时显然需要小心，特别是需要一个自洽的、规范不变的正规化。事实上，量子电动力学的重整化的目的之一，是明确地把形式的 Ward-Takahashi 等式变成重整化的有限量之间

的关系.

我们回到单圈图的计算上来，并去掉指标 1. 由方程 (7-45) 可知 $\Gamma(p',p)-\Gamma(p,p)$ 是有限的，而 $\Gamma(p,p)$ 是从 $\Sigma(p)$ 的 Ward 等式得到的. 这表示

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p',p) &= -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p)+\Gamma_\mu(p',p)-\Gamma_\mu(p,p)\\ &= \gamma_\mu(Z_2^{-1}-1)+\Gamma_\mu(p',p)-\Gamma_\mu(p,p)\\ &\quad -Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p'}\Sigma^R(p).\end{aligned}\tag{7-49a}$$

我们通过

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu(Z_1^{-1}-1)+Z_1^{-1}\Gamma_\mu^R(p',p)\tag{7-49b}$$

来定义（无穷的）顶角重整化常数 $Z_1$. 当计算到第一级时，在重整化的顶角修正 $\Gamma_\mu^R$ 前的因子 $Z_1^{-1}$ 又可用 1 来代替，而 $\Gamma_\mu^R(p',p)$ 是通过要求在质壳上 $(p'^2=p^2=m^2)$ 和零动量交换下，它在 Dirac 旋量之间的矩阵元为零来归一化的:

$$\bar{u}(p')\Gamma_\mu^R(p',p)u(p)\big|_{\substack{p'=p'=m\\ p=p'}}=0.\tag{7-50}$$

显然，当 $p=p'$ 时，$\Gamma_\mu(p',p)-\Gamma_\mu(p,p)$ 为零，矩阵元 $(\partial/\partial p^\mu)\Sigma^R(p)$ 也为零，因为此算符正比于 $(\not{p}-m)$. 把 (7-49a) 和 (7-49b) 作比较，我们得到下面的结果:

$$Z_2=Z_1,\tag{7-51a}$$

而

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^R(p',p) &= Z_1[\Gamma_\mu(p',p)-\Gamma_\mu(p,p)]\\ &\quad -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p).\end{aligned}\tag{7-51b}$$

在有质量的光子理论中，Ward 等式仍成立. 我们让读者来证明，形为

$$\delta\mathscr{L}^{[1]}_{\bar{\psi}A\psi}=-e(Z_1-1)\bar{\psi}A\psi\tag{7-52}$$

的单圈抵消项，在精确到这一级时的确消去了顶角对数发散.

余下来要做的是计算 $\Gamma_\mu^R(p',p)$. 我们将满足于讨论 $p$ 和

$p'$在质壳上的情形，并把 $\Gamma_\rho$ 夹在 Dirac 旋量中来考虑，即考虑 $\bar{u}(p')\Gamma_\rho(p',p)u(p)$. 我们不明显地写出旋量，但是自由地应用 Gordon 关系

$$\bar{u}(p')\gamma_\rho u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p+p')_\rho + i\sigma_{\rho\nu}(p'-p)^\nu]u(p). \tag{7-53}$$

我们要计算的量有一个规范无关的有限部分. 事实上，在方程 (7-45) 中正比于 $(1-\lambda)$ 的项包含对

$$\not{k}\frac{1}{\not{p}'-\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma_\rho\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\varepsilon}\not{k}.$$

的积分. 我们可以用 $\not{k}-\not{p}+m$ 来代替右面的 $\not{k}$，用 $\not{k}-\not{p}'+m$ 来代替左面的 $\not{k}$，于是得到一个与 $p$ 及 $p'$ 无关的量，用归化条件就可把它吸收到 $(Z_1^{-1}-1)$ 中去. 至于 $(Z_1^{-1}-1)$，我们知道它是与规范的选取有关的. 于是，令 $\lambda=1$，就有

$$\Gamma_\rho(p',p) = i(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\gamma_\sigma \times\frac{\not{p}'-\not{k}+m}{(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon}\gamma_\rho\frac{\not{p}-\not{k}+m}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\gamma^\sigma.$$

用质壳条件，此表示式中的分子可写为

$$4\left\{\gamma_\rho\left[(p'-k)\cdot(p-k)-\frac{k^2}{2}\right]+(p'+p-k)_\rho\not{k}-mk_\rho\right\}.$$

辅助积分是

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot z}\times\frac{1}{(k^2-\mu^2+i\varepsilon)(k^2-2p'\cdot k+i\varepsilon)(k^2-2p\cdot k+i\varepsilon)} = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty\frac{d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2}$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\alpha_1\mu^2+\frac{(z/2-\alpha_2 p'-\alpha_3 p)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right]\right\}.$$

在被积函数中引进的因子 $e^{ik\cdot x}$，使我们可通过微商来得到所需要的 $\Gamma_\rho$ 的分子上的表示式。将 $\alpha_2$ 和 $\alpha_3$ 对称化后，得到下面的表示式：

$$\Gamma_\rho(p',p)=\frac{\alpha}{i\pi}\int_0^\infty\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3}$$
$$\times\Bigg(\gamma_\rho\left\{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)p\cdot p'-(\alpha_2+\alpha_3)\frac{(p'+p)^2}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}+\frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}[m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2-\alpha_2\alpha_3 q^2]\right\}$$
$$+\frac{m}{2}(p'+p)_\rho\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\Bigg)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}[\alpha_2\alpha_3 q^2-(\alpha_2+\alpha_3)^2m^2\right.$$
$$\left.-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\mu^2]\right\},$$

其中我们令 $q=p'-p$。当我们对 $\alpha_i$ 参数的齐次标度积分时，遇到了所预期的对数奇异性。在考虑了归一化条件式(7-50)后，可将它减除。我们发现，如果 $p$ 和 $p'$ 在质壳上，则 $q^2\leqslant 0$。经过 Wick 转动使 $\alpha_i\to\alpha_{i/i}$ 后，我们得到

$$\Gamma_\rho^R(p',p)=-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\,\delta\left(1-\sum_1^3\alpha_i\right)$$
$$\times\gamma_\nu\left\{\frac{\{\gamma_\rho\{m^2-q^2/2-(\alpha_2+\alpha_3)(2m^2-q^2/2)\right.}{\left.+\frac{1}{2}[(\alpha_2+\alpha_3)^2m^2-\alpha_2\alpha_3 q^2]\}\}}{(m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3 q^2)}$$
$$+(m/2)\frac{(p'+p)_\rho\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3 q^2}$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_0\ln[m^2(\alpha_1+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3q^2]\Big\}$$

$$-(p'=p,q=0).$$

因为从式(7-51b)可得，精确到第一级时，质壳顶角函数的重整化相当于在 $q=0$ 处的减除. 我们来分出形状因子 $F_1(q^2)$ 和 $F_2(q^2)$，把它们定义成

$$\Gamma^R_\mu(p',p)=\gamma_\mu F_1(q^2)+\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2(q^2). \tag{7-54}$$

当然，只计算对这些形状因子的精确到 $\alpha$ 级的贡献. 零级项在 $F_1$ 上加 1. 我们得到

$$F_1(q^2)=-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\delta\left(1-\sum_1^3\alpha_j\right)$$

$$\times\left\{\frac{\left(m^2-q^2/2-(\alpha_1+\alpha_3)(2m^2-q^2/2)\right.}{\left.+m^2\left[(\alpha_2+\alpha_3)-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)^2\right]-\alpha_2\alpha_3(q^2/2)\right)}{m^2(\alpha_1+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3q^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln[m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3q^2]-(q^2=0)\right\}, \tag{7-55}$$

$$F_2(q^2)=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\delta\left(1-\sum_1^3\alpha_j\right)$$

$$\times\frac{m^2\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{m^2(\alpha_2+\alpha_3)^2+\alpha_1\mu^2-\alpha_2\alpha_3q^2}. \tag{7-56}$$

动量转移可以用双曲角 $\theta$ 来参量化，它使

$$p\cdot p'=m^2\cosh\theta,\quad q^2=-4m^2\sinh^2\frac{\theta}{2}. \tag{7-57}$$

最容易计算的是磁形状因子 $F_2$. 精确到这一级时，它不包含

任何红外发散性，所以可以令 $\mu^2 = 0$. 对 $\alpha_1$ 的积分给出

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 \theta(1-\alpha_2-\alpha_3) \times \frac{\alpha_2+\alpha_3-(\alpha_2+\alpha_3)^2}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cosh\theta}.$$

引进一个新的齐次参量后，它可进一步被约化成

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1-\alpha_2-\alpha_3) \times \frac{1}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cosh\theta}\int_0^1 dx(1-x) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\beta \times \frac{1}{\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \frac{d\beta}{\beta^2} \times \frac{1}{\{1+[(1-\beta)/\beta]e^{\theta}\}\{1+[(1-\beta)/\beta]e^{-\theta}\}}.$$

把 $(1-\beta)/\beta$ 当作积分变量，可以很容易地算出最后一个积分，结果是

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\theta}{\sinh\theta}. \tag{7-58}$$

特别是当 $q^2 \to 0$ 时，$\theta \to 0$，所以

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{7-59}$$

我们回到 $F_1$ 的计算上来，注意它的红外发散性. 对 $\alpha_1$ 积分后，我们发现 $F_1$ 可表示成四项之和：

$$F_1(q^2) = \sum_i^4 \mathscr{T}_i + 常数,$$

常数调节得使 $F_1(0) = 0$. 在小 $\mu^2$ 极限下，各项的贡献如下：

$$\mathscr{T}_1 = -\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha_2 \int_0^{1-\alpha_2} d\alpha_3$$

$$\times\frac{\cosh\theta}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cosh\theta+(\mu^2/m^2)(1-\alpha_2-\alpha_3)}$$

$$=-\frac{\alpha}{\pi}\cosh\theta\int_0^1 d\beta\int_0^1 dx$$

$$\times\frac{x}{x^2[\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta]+(\mu^2/m^2)(1-x)}$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\cosh\theta\int_0^1 d\beta$$

$$\times\frac{\ln[\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta]-\ln(\mu^2/m^2)}{\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cosh\theta}.$$

按照

$$1-2\beta=\frac{\tanh\varphi}{\tanh(\theta/2)}$$

来改变变量，此积分就约化为

$$\mathscr{T}_1=\frac{\alpha}{\pi}\theta\coth\theta\ln\frac{\mu}{m}-\frac{2\alpha}{\pi}\coth\theta\int_0^{\theta/2}d\varphi\varphi\tanh\varphi.$$

此疑难积分的其余部分为

$$\mathscr{T}_2=\frac{\alpha}{\pi}\cosh\theta\int_0^1 d\alpha_2\int_0^{1-\alpha_2}d\alpha_3\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cosh\theta}$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\theta\coth\theta,$$

$$\mathscr{T}_3=\frac{2\alpha}{\pi}(1-\cosh\theta)\int_0^1 d\alpha_2\int_0^{1-\alpha_2}d\alpha_3$$

$$\times\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_2\alpha_3\cosh\theta}=\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{\theta}{\sinh\theta}-1\right),$$

$$\mathscr{T}_4=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 d\alpha_2\int_0^{1-\alpha_2}d\alpha$$

$$\times\ln\left[(\alpha_2+\alpha_3)^2+4\alpha_2\alpha_3\sinh^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\theta/2}{\tanh(\theta/2)} + \text{常数}.$$

最后调节归一化，就得到完全的表示式为

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\mu}{m}+1\right)(\theta\coth\theta - 1) - 2\coth\theta \times\int_0^{\theta/2} d\varphi\,\varphi\tanh\varphi - \frac{\theta}{4}\tanh\frac{\theta}{2}\right]. \tag{7-60}$$

在 $q^2 = 0$ 的邻域中有 $q^2/m^2 \simeq -\theta^2$，所以精确到 $q^2$ 的主导级时有

$$F_1(q^2)_{q^2\to 0} \simeq \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8}\right). \tag{7-61}$$

这表示在旋量之间计算的重整化顶角函数的完全表示式为

$$\begin{aligned}\Lambda_\rho^R &= \gamma_\rho\left[1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8}\right)\right] \\ &\quad + \frac{i}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\frac{\alpha}{2\pi} + \cdots = \frac{(p+p')_\rho}{2m} \\ &\quad \times\left[1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8}\right)\right] \\ &\quad + \frac{i}{2m}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \cdots.\end{aligned} \tag{7-62}$$

在复变量 $\theta$ 平面上作解析延拓，就得到正 $q^2$ 值的 $\Gamma_\rho^R$。例如令 $\theta = i\phi$，我们得到对 0 到 $4m^2$ 之间的 $q^2$ 成立的表示式。此式中，精确到这一级时，$F_1$，$F_2$ 仍是实的，

$$q^2 = 4m^2\sin^2\frac{\phi}{2} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, \tag{7-63}$$

而

$$F_1 = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\ln\frac{\mu}{m}+1\right)(\phi\cot\phi - 1) + 2\cot\phi\int_0^{\phi/2} d\varphi\varphi\tan\varphi + \frac{\phi}{4}\tan\frac{\phi}{2}\right], \tag{7-64}$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\phi}{\sin\phi}.$$

把这个表示式延拓到 $4m^2$ 之外，并解释形状因子的虚部，是一个有用的习题．大 $q^2$ 下其行为如何?

## 7-1-4 总结

我们来总结一下消除了紫外发散后得到了什么．迄今为止，我们定义了三个发散常数:

1. $Z_1 = Z_2$，它是规范有关的，且是红外发散的，但由于有 Ward 等式，所以它们相等．

2. $Z_3$ 和 $\delta m$ 都是规范无关的和红外有限的．我们计算了精确到 $\hbar$ 级的 $Z_1 - 1 = Z_2 - 1$，$Z_3 - 1$ 和 $\delta m$，使精确到同一级时拉氏函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F^2 + \frac{\hat{\mu}^2}{2}A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\phi}\overleftrightarrow{\partial}\phi \\ &- m\bar{\phi}\phi - e\bar{\phi}A\phi - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)F^2 + (Z_2 - 1) \\ &\times\left(\frac{i}{2}\bar{\phi}\overleftrightarrow{\partial}\phi - m\bar{\phi}\phi\right) + Z_2\delta m\bar{\phi}\phi \\ &- e(Z_1 - 1)\bar{\phi}A\phi \end{aligned} \tag{7-65}$$

给出有限的、重整化的两点和三点函数．我们将看到对高级 Green 函数这也同样成立．

我们用了 $(\hat{\mu}^2/2)A^2$ 来表示光子“质量项”．正如我们所指出的那样，因为真空极化张量只有整体发散性，所以在有质量的理论中，极点的真正的位置被辐射修正移动了一个和波函数重整化常数 $Z_3$ 有联系的量．把相应的有量纲的参量定义成(负的)零动量处传播子倒数中的 $g_{\mu\nu}$ 项的系数是比较简单的，

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\mu_0^2}{1 + \bar{\omega}(0)} = Z_3\mu_0^2, \tag{7-66}$$

这里 $\mu_0$ 表示(无穷大的)裸质量. 所以，$\hat{\mu}^2\Delta^2 = Z_3\mu_0^2\Delta^2$. 在有质量的矢量玻色子理论中，实际的质量 $\mu$ 通过一个有限的重整化因子和 $\hat{\mu}$ 联系起来.

因为现在我们已选取了可测量的质量、耦合常数、和极点留数，从而取完了所有可能的选择，所以现在需要来证明高级 Green 函数是有限的. 这种分析是令人感兴趣的，因为仍然存在光子-光子散射的潜在的危险振幅. 如果我们讨论的是零自旋的荷电玻色子，则在 Born 图这一级上，显然没有新的物理常数会由于重整化的需要而出现. 这时我们必须给出荷电粒子弹性散射振幅的归一化.

引起单圈图积分中紫外发散的机制可以描写如下：如果 $k$ 表示流过圈的动量，我们感兴趣的是 Feynman 积分中被积函数的大 $k$ 行为. 每一个费米子传播子贡献一因子 $|k|^{-1}$，而每一个玻色子传播子贡献一因子 $|k|^{-2}$. 有 $\gamma_\mu$ 耦合的顶角是与 $k$ 无关的. 固有函数是按照费米子外线的数目 0,2,4 等等来分类的. 典型图如图 7-13 所示.

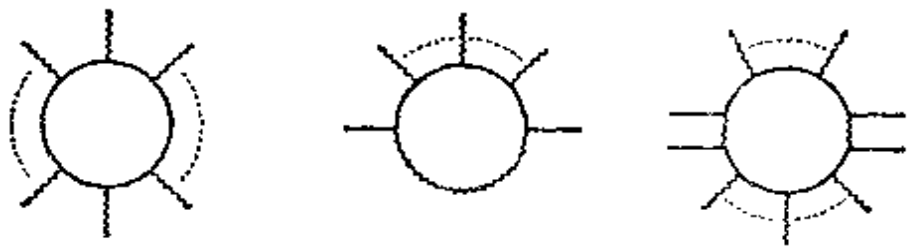


图 7-13 具有 0，2，4，…条外费米子线的单圈图例

如果 $\Lambda$ 表示某个紫外截断，积分的行为就是

$$\Lambda^{4-I_F-2I_B} \qquad 4 - I_F - 2I_B > 0,$$

$$\ln\Lambda \qquad 4 - I_F - 2I_B = 0,$$

其中 $I_F(I_B)$ 表示圈中的费米子(玻色子)线的数目. 如果

$$\omega(G) = 4 - I_F - 2I_B \geqslant 0, \qquad (7\text{-}67)$$

则积分是表面发散的，其中 $\omega(G)$ 称为表面发散度. 在电动力学中，运动学使情况稍微复杂了一些. 我们早已遇到过象真空极化那样的例子 ($I_B = 0$, $I_F = 2$)，在那里上面的计算似乎表示有二次发散性 $\omega = 2$，但流守恒分出了因子 $(k^2 g^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma)$，只留下了对数发散. 与此类似，对电子自能图有 $\omega = 1$，但同样由于 $\Sigma$ 正比于有量纲的量 $m$ 和 $\not{p}$，使发散度减少一. 对顶角函数此计数是正确的，$\omega = 0$. 但是，即使在此情况中，也发现只有一个形状因子是发散的. 由于在每一个顶角上有两条费米子线和一条玻色子线相遇，所以我们可以用（偶的）外费米子线数 $E_F$ 和外玻色子线数 $E_B$ 来表示 $\omega(G)$. 沿着圈的顶角数等于内传播子线数，

$$V = I_F + I_B,$$

于是根据前面的论证有

$$2V = 2I_F + E_F, \qquad V = 2I_B + E_B,$$

因为每条传播子线和两个顶角相连. 消去 $V$，$I_F$ 和 $I_B$，我们得

$$\omega = 4 - \frac{3}{2} E_F - E_B. \tag{7-68}$$

因此，推得下页的表（见下页）. 当外线数目增加时，积分变得更收敛，所以表 (7-69) 表明，除了其中的光子-光子散射外，我们已列出了所有可能的发散图. 同样，由于规范不变性，光子-光子散射实际上是收敛的，规范不变性给出了某种运动学结构，它使积分具有很好的行为. 这可从早先的 Euler-Heisenberg 等效拉氏函数的讨论中得到（见 3-3-4 节），下面还要详细地讨论.

因为抵消项相当于色散关系中的减除，即它们不改变解析性，也不改变不连续性规则，所以现在我们得到了一个精确到 $\hbar$ 级的有限的可作预言的理论，此理论微扰地满足么正性

| $E_r$ | $E_n$ | | 表面发散度 | F有效发散度 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 |  | 2 | 0 |
| 0 | 3 | 被电荷共轭不变性排除 | | |
| 0 | 4 |  | 0 | |
| 2 | 0 |  | 1 | 0 |
| 2 | 1 |  | 0 | 0 |

(7-69)

和因果性的一般原理. 另一个关于这一点的证明就是我们用了定域厄米拉氏函数.

现在回到方程 (7-65)，并把各项重新整理成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} Z_3 F^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 Z_3 A^2 - \frac{\lambda}{2} (\partial \cdot A)^2$$

$$+ Z_2 \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi - (m - \delta m) \bar{\psi} \psi \right] - Z_1 e \bar{\psi} A \psi. \quad (7\text{-}70)$$

由此表示式可以得到一个自然的解释. 这里出现的场量 $\psi$，$\bar{\psi}$ 和 $A$ 是重整化的场量，和它们相应的是在单粒子极点处留数等于 1 的传播子. 我们用下列各式:

$$\begin{aligned} &\psi_0 = Z_2^{1/2}(\Lambda)\psi, \quad m_0 = m - \delta m(\Lambda), \\ &\bar{\psi}_0 = Z_2^{1/2}(\Lambda)\bar{\psi}, \quad \mu_0^2 = Z_3^{-1}(\Lambda)\mu^2, \\ &A_0 = Z_3^{1/2}(\Lambda)A, \quad e_0 = Z_1(\Lambda)Z_2^{-1}(\Lambda)Z_3^{-1/2}(\Lambda)e \\ &\qquad\qquad = Z_3^{-1/2}(\Lambda)e, \end{aligned} \quad (7\text{-}71)$$

来定义未重整化场量 $\phi_0$，$\psi_0$ 和 $A_0$，以及与截断有关的裸参量 $\mu_0^2$，$m_0$，$e_0$. 于是，用裸的量表示的拉氏函数式(7-70)类似于原始的拉氏函数。

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_0^2 + \frac{\mu_0^2}{2}A_0^2 - \frac{\lambda}{2}Z_3^{-1}(\Lambda)(\partial \cdot A_0)^2$$

$$+\frac{i}{2}\bar{\psi}_0\overleftrightarrow{\partial}\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 - e_0\bar{\psi}_0A_0\psi_0. \quad (7\text{-}72)$$

有限多类抵消项不仅足以使微扰级数逐项收敛(我们将看到，此性质对 $\hbar$ 的所有级都成立)，并使理论的许多结构在重整化后保持下来。

值得强调的是 Ward 等式的作用。它的一个结果是

$$e_0A_0 = eA, \quad (7\text{-}73)$$

它使电磁作用的标度有意义，并保持了最小耦合的意义.

还要注意 $A^2$ 和 $(\partial \cdot A)^2$ 是不受抵消项影响的，这是电动力学的一个特殊的性质. 用引进"裸"质量 $\mu_0$ 同样的方式，我们可引入裸参量 $\lambda_0$，

$$\lambda_0 = Z_3^{-1}(\Lambda)\lambda,$$

拉氏函数式(7-72)给出如下定义的重整化 Green 函数：

$$G_0(p_1, \cdots, p_{2n}, k_1, \cdots, k_l; \mu_0, m_0, e_0, \lambda_0\Lambda)$$
$$= Z_2^n(\Lambda)Z_3^{l/2}(\Lambda)G_R(p_1, \cdots, p_{2n}, k_1, \cdots, k_l; \mu, m, e, \lambda). \quad (7\text{-}74)$$

这里 $p_1, \cdots, p_{2n}(k_1, \cdots, k_l)$ 表示外费米子(光子)动量. 它也是在按 $\hbar$ 的微扰展开下成立的，而到现在为止我们只证明到 $\hbar^1$ 级. 关系式(7-71)和(7-74)说明，把重整化称为相乘性的是对的.

当作微扰展开时，波函数重整化常数 $Z_2^{1/2}$ 和 $Z_3^{1/2}$ 是无穷的. 这说明至少在此意义上，此方法的一个所用的假设，即自由的和相互作用的图象的正则等价性，在数学上是没有很好

的根据的。但是，我们还是成功地克服了这个困难，并且以后还要看到，这些显然是无穷的量具有一些有趣的物理意义。

第八章的内容就是把这个方法推广到所有的级上。

## 7-2 和外场相互作用时的辐射修正

这一章的其余部分讨论辐射修正的例子，其中一个内容就是了解由长程电磁力引起的红外发散的意义。这里的概述只是一种说明，算不上是完善的。

### 7-2-1 等效相互作用和反常磁矩

在第二、四章中我们已从各个方面描述了带电粒子和 $c$ 数外场的相互作用。这里要讨论的是，当将 $A_q$ 用 $A_q + A_c$ 来代替时产生的量子修正，其中 $A_c$ 是经典场。

精确到 $A_c$ 的第一级时，我们导出了用图 7-14 的前三个图表示的等效相互作用，它包括单圈量子修正。这表示基本相互作用 $e\gamma_\rho A_c^\rho$ 变为

$$eA_c^\rho\gamma_\rho \to eA_c^\rho(\gamma_\rho + \Gamma_\rho + \varpi_{\rho\nu}G^{\nu\alpha}\gamma_\alpha), \qquad (7\text{-}75)$$

这里的 $\Gamma$ 和 $\varpi$ 已在上一节中算得，$G$ 是自由光子传播子。我们已假定电子在质壳上，所以不考虑在外线上插入自能图，它已吸收到正确的质量定义和态的适当的归一化中去了。

在低能动量转移 $q = p' - p$ 下，只保留 $\mu \to 0$ 时的主要项，我们就得到

$$eA_c^\rho\left\{\gamma_\rho\left[1 + \frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\right] + \frac{i}{2m}\frac{\alpha}{2\pi}\sigma_{\rho\nu}q^\nu\right\}. \qquad (7\text{-}76)$$

在推导式(7-76)时，正比于 $q^\nu q^\rho$ 的规范有关项 $G^{\nu\alpha}$ 作用在

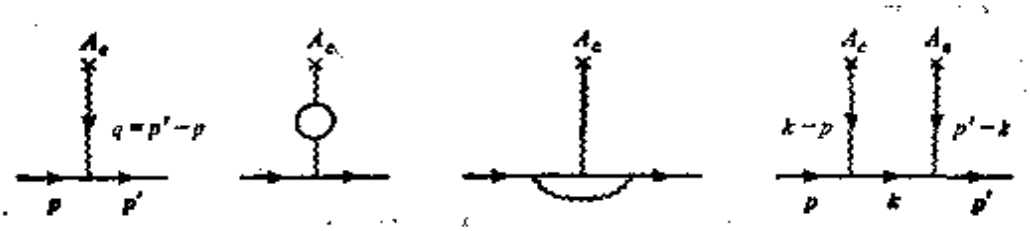



图 7-14　与外场相互作用时的最低级的贡献

真空极化上没有贡献．当在质壳上计算时，$q=p'-p$ 的项也没有了．因此，其余的表示式在下面的意义上保持规范不变性，即如果用 $A_c^\rho+q^\rho f(q)$ 来代替 $A_c^\rho$，则外加的项在质壳上为零．

对准静止极限 $q\to 0$，可以有一个简单的解释．在形态空间中，动量转移 $q$ 可被作用于 $A_c$ 上的微商算符来代替．用 Gordon 等式，我们得到缓变(在空间和时间中)外场和荷电的有旋粒子相互作用哈密顿量的两个等价表示式：

$$\begin{aligned}\Delta H \simeq e\int d^3x\Big\{&\bar\psi(x)\gamma_\rho\psi(x)\Big[1-\frac{\alpha}{3\pi m^2}\\&\times\Big(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\Big)\Box\Big]A_c^\rho(x)\\&+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}\psi(x)\sigma_{\nu\rho}\psi(x)\partial^\nu A_c^\rho(x)\Big\}\\\simeq e\int d^3x\Big\{&\frac{i}{2m}\psi(x)\overleftrightarrow{\partial}_\rho\psi(x)\Big[1-\frac{\alpha}{3\pi m^2}\\&\times\Big(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\Big)\Box\Big]A_c^\rho(x)\\&+\Big(1+\frac{\alpha}{2\pi}\Big)\frac{1}{4m}\psi(x)\sigma_{\nu\rho}\psi(x)F_c^{\nu\rho}(x)\Big\}.\end{aligned}\tag{7-77}$$

在第二种形式的第一项中引进了和标量粒子情况中类似的传导电流，它和 $A_c$ 的相互作用受到红外发散的影响．第二项有一个简单的解释．在恒定的 $F_c$ 极限下，它约化成等效的磁偶

极能量. 令 $F$ 表示恒定磁场 $F^{12}=-B^3$, $F^{13}=-B^2$, $F^{31}=-B^1$, $\sigma_{12}=\sigma_3$ 等等，于是它就为

$$-\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\mu}=-\mathbf{B}\cdot\left[\frac{e}{2m}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\times 2\int d^3x\psi(x)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi(x)\right]. \tag{7-78}$$

当讨论 Dirac 方程时，我们得到迴转磁比率为 2，它使得磁偶极矩为

$$\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}=2\frac{e}{2m}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

我们看到，精确到 $\hbar$ 级时，量子修正使迴转磁比率改变为 $g=2(1+a)$，$a$ 称为反常迴转磁比率，它等于 $a=\alpha/2\pi$. 这个首先被 Schwinger 于 1948 年推出的结果，已被大量的精确的实验所证实，这种实验可用来检验高级修正.

精确到最低级时，电子的反常磁矩是与质量无关的. 所以，对任何基本的、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，例如 $\mu$ 子，都可用这个结果. 精确到高级项的完全的理论，要求考虑所有的荷电粒子和电磁场的作用. 结果，由于质量有差别，使反常磁矩也有差别. 目前已计算到第三级（三圈图），它们为

$$a_e^{th}=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi}-0.328478445\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2+1.183(11)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$$
$$=1159652359(282)\times 10^{-12}$$

（括弧中的数字表示不确定部分）. 最近测量的精确度和它差不多：

$$a_e^{exp}=1159652410(200)\times 10^{-12},$$

但看来在不久的将来可以得到改进. 为了能和这种改进作比较，理论上要更精确地算出 $(\alpha/\pi)^3$ 项，还要计算下一级［因为 $(\alpha/\pi)^4\sim 29\times 10^{-12}$］，它有 891 个 Feynman 图之多！这种微小的贡献包括在虚光子传播子中插入 $\mu$ 子圈真空极化修正（$\sim 2\times 10^{-12}$）以及强子的（$\sim 1.4\times 10^{-12}$）或弱作用的（$\sim 0.05\times 10^{-12}$）贡献. 通过理论和实验技术的极

好的结合，看来在不久的将来电子反常磁矩的测量，将成为得到精细结构常数的最精确的工具之一.

在讨论 $\mu$ 子的反常磁矩情况时，强子修正的不确定性限制了理论预言的精确度. 最近的测量给出

$$a_\mu^{\exp} = 1165922(9)\times 10^{-9},$$

纯电动力学的贡献为

$$a_\mu^{\mathrm{qed}} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\pi} + 0.765782\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 24.45(0.06)$$

$$\times\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 128.3(71.4)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 = 1165851.8(2.4)\times 10^{-9},$$

其中 $\alpha^4$ 项是用大的比值 $m_\mu/m_e$ 来估计的，而强子修正的数量级为

$$a_\mu^{\mathrm{hadr}} = 66.7(9.4)\times 10^{-9},$$

理论预言为

$$a_\mu^{\mathrm{th}} = 1155919(10)\times 10^{-9},$$

它和实验有合理的符合. 弱作用效应的贡献预期为 $a_\mu^{\mathrm{Weak}}\sim 2\times 10^{-9}$ 的量级.

等效哈密顿量式 (7-7) 中的第一项由于有红外奇异性而出现了麻烦，这是由于我们让左相应的 Green 函数中有一个孤立的极点而引起的. 但是，这种状态不可能从有任意数目软光子的态中分出来. 每当荷电粒子速度改变时，不管改变多么小，这种软光子总要被激发出来. 所以，每当我们讨论体现在方程 (7-77) 中的虚电磁效应时，必须包括在外场中真正发射或吸收软光子的过程. 在对一个物理上正确的问题的最后答案中，不出现虚构的光子质量，它被实验的分辨率所代替.

### 7-2-2 对 Coulomb 散射的辐射修正

作为一个例子，我们考虑在小 $Z$ 原子核上的 Coulomb 散射，这种 $Z$ 值使 $Z\alpha$ 仍可看作小的参量. 我们忽略原子的修正（第一级近似中的屏蔽效应）. 用等效相互作用式 (7-75)

来计算对非极化电子的 Mott 截面 [方程 (2-130)] 的所有精确到 $\alpha^3$ 级的修正. 如果 $E$ 和 $p$ 是电子的能量和三维动量的大小, $\beta$ 表示它的速度 $\beta = p/E$, 则我们记得, 在 $\theta$ 角处的散射截面为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2\alpha^2}{4p^2\beta^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \quad (7\text{-}79)$$

因为第一级修正应是 $Z^2\alpha^3$ 级的, 所以必须包括二级 Born 近似, 它和主导项的相干将产生 $Z^2\alpha^3$ 级的贡献. 假定 $Z$ 足够小, 这是和顶角及真空极化重整化效应可比的. 对这样精确的计算感兴趣的原因是, 它还使我们能讨论与 Coulomb 力的长程特征有关的红外奇异性. 这种 Coulomb 力在散射的平面波上引起无穷大的相移. 为了防止发生这种情况, 我们可引进一个屏蔽因子, 在自洽的理论中, 它应和虚构的光子质量 $\mu$ 有关. 为了证明这种红外发散在截面中将被抵消掉, 我们将分别通过引进独立的屏蔽长度 $\sigma$, 和研究极限 $\sigma \to 0$ 的情况来把这种发散区分出来.

对散射振幅有贡献的图, 如图 7-14 所示, 外势 $A_c$ 等于屏蔽的 Coulomb 作用,

$$\mathbf{A}_c = 0 \quad A_c^0(x) = -\frac{Z_e e^{-\sigma r}}{4\pi r} = Z_e\int\frac{d^4q}{(2\pi)^3}\frac{\delta(q_0)}{q^2-\sigma^2}e^{iq\cdot x}.$$

图 7-14 的前三个图 (1)、(2) 和 (3) 给出

$$\begin{aligned} S_{123} = &-iZe^4(2\pi)\delta(p_0-p_0')\frac{1}{q^2-\sigma^2}\bar{u}(p')\gamma^0 \\ &\times\left\{1+\frac{\alpha}{\pi}\left[\left(1+\ln\frac{\mu}{m}\right)(2\varphi\coth 2\varphi-1)\right.\right. \\ &-2\coth 2\varphi\int_0^{\varphi}d\varphi'\varphi'\tanh\varphi'-\frac{1}{2}\varphi\tanh\varphi \\ &\left.\left.+\left(1-\frac{\coth^2\varphi}{3}\right)(\varphi\coth\varphi-1)+\frac{1}{9}\right]\right. \end{aligned}$$

$$-\frac{q}{2m}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\varphi}{\sinh 2\varphi}\Big\}u(p), \tag{7-80}$$

其中 $p\cdot p'=m^2\cosh 2\varphi$ 而 $q=p'-p$. 第四个图加上量

$$S_4=(-iZe)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\Big[\frac{2\pi\delta(p_0'-k_0)}{(p'-k)^2-\sigma^2}$$

$$\times e\gamma^0\frac{i}{\not k-m+i\varepsilon}e\gamma^0\frac{2\pi\delta(k^0-p^0)}{(k-p)^2-\sigma^2}\Big]u(p).$$

从运动学约束条件得 $p^0=p'^0=E$, $|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|$. 令

$$I_1=\int d^3k\frac{1}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{k})^2+\sigma^2][(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2+\sigma^2](\mathbf{p}^2-\mathbf{k}^2+i\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{p}')I_2$$

$$=\int d^3k\frac{\mathbf{k}}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{k})^2+\sigma^2][(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2+\sigma^2](\mathbf{p}^2-\mathbf{k}^2+i\varepsilon)},$$

于是 $S_4$ 的形式为

$$S_4=-2i\frac{Z^2\alpha^2}{\pi}2\pi\delta(p_0'-p_0)\bar{u}(p')[m(I_1-I_2)$$

$$+\gamma^0E(I_1+I_2)]u(p). \tag{7-81}$$

当然，我们只对 $I_1$ 和 $I_2$ 的小 $\sigma$ 极限有兴趣. 从 Feynman 等式

$$\frac{1}{(a+\lambda)(b+\lambda)}=-\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^1 d\beta\frac{1}{[\beta a+(1-\beta)b+\lambda]},$$

我们可得

$$I_1=-\int_0^1 d\beta\frac{\partial}{2M\partial M}\int d^3k$$

$$\times\frac{1}{(\mathbf{p}^2-\mathbf{k}^2+i\varepsilon)[(\mathbf{k}-\mathbf{P})^2+M^2]},$$

其中 $M^2=\sigma^2+4\beta(1-\beta)\mathbf{p}^2\sin^2(\theta/2)$，而 $\mathbf{P}=\beta\mathbf{p}+(1-\beta)\mathbf{p}'$. 类似地有

$$\frac{1}{2}(p+p')_a I_2 = \int_0^1 d\beta \left(\frac{\partial}{2\partial P_a} - \frac{P_a}{2M}\frac{\partial}{\partial M}\right)$$
$$\times \int d^3k \frac{1}{(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\varepsilon)[(\mathbf{k}-\mathbf{P})^2 + M^2]},$$

中间的积分是很易计算的，结果为

$$\int d^3k \frac{1}{(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2 + i\varepsilon)[(\mathbf{k}-\mathbf{P})^2 + M^2]}$$
$$= \frac{i\pi^2}{P} \ln \frac{p - P + iM}{p + P + iM},$$

这里要适当地选取分支割线，以定义对数. 在极限 $\sigma \to 0$ 下，相应的 $I_1$ 和 $I_2$ 的表示式为

$$I_1 = \frac{\pi^2}{2ip^3 \sin^2(\theta/2)} \ln \frac{2p\sin(\theta/2)}{\sigma} \tag{7-82}$$

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2p^3\cos^2(\theta/2)} \left\{\frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{\sin(\theta/2)}\right]\right.$$
$$\left. - i\left[\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \ln \frac{2p\sin(\theta/2)}{\sigma} + \ln\frac{\sigma}{2p}\right]\right\}. \tag{7-83}$$

把这些表示式代入方程(7-81)，就得到最后的矩阵元. 于是，不极化的截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \Sigma_{\text{pol}} |\bar{u}(p')Tu(p)|^2, \tag{7-84}$$

其中 $T$ 表示 $S_{123} + S_4$ 中 $(iZe^2/|\mathbf{q}|^2)\,2\pi\delta(p^0 - p'^0)$ 的系数，即

$$T = \gamma^0(1 + A) + \gamma^0 \frac{q}{2m} B + C,$$

$$A = \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(1 + \ln\frac{\mu}{m}\right)(2\varphi\coth 2\varphi - 1) - 2\coth 2\varphi\right.$$
$$\left. \times \int_0^\varphi d\varphi' \varphi' \tanh\varphi' - \frac{\varphi}{2}\tanh\varphi + \left(1 - \frac{1}{3}\coth^2\varphi\right)\right.$$

$$\times(\varphi\coth\varphi-1)+\frac{1}{9}\Big]-\frac{Z_a}{2\pi^2}|\mathbf{q}|^2E(I_1+I_2),$$

(7-85)

$$B=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{\varphi}{\sinh2\varphi},$$

$$C=-\frac{Z_a}{2\pi^2}m|\mathbf{q}|^2(I_1-I_2).$$

为了一致起见，在方程(7-84)中只保留到 $\alpha^3$ 级项. 注意，只有 $I_1$ 和 $I_2$ 是复数量. 对极化求和，就给出

$$m^2\Sigma_{\text{pol}}|\bar{u}(p')Tu(p)|^2=m^2\text{tr}\left(T\frac{\not p+m}{2m}\bar{T}\frac{\not p'+m}{2m}\right)$$
$$=(1+2\text{Re}A)(2E^2)[1-\beta^2\sin^2(\theta/2)]$$
$$+2B(2E^2)\beta^2\sin^2(\theta/2)+2\text{Re}C(2mE)+O(\alpha^2).$$

正如所预期的那样，所有的对出现于 $A$ 和 $C$ 的虚部中的屏蔽因子 $\sigma$ 的相关性都没有了，于是包括第一级非平庸修正的弹性散射截面为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{elastic}}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left\{1+\frac{2\alpha}{\pi}\left[\left(1+\ln\frac{\mu}{m}\right)\right.\right.$$
$$\times(2\varphi\coth2\varphi-1)-2\coth2\varphi\int_0^{\varphi}d\varphi'\varphi'\tanh\varphi'$$
$$-\frac{\varphi}{2}\tanh\varphi+\left(1-\frac{\coth^2\varphi}{3}\right)(\varphi\coth\varphi-1)$$
$$+\frac{1}{9}-\frac{\varphi}{\sinh2\varphi}\frac{\beta^2\sin^2(\theta/2)}{1-\beta^2\sin^2(\theta/2)}$$
$$\left.\left.+Z\alpha\pi\frac{\beta\sin(\theta/2)[1-\sin(\theta/2)]}{1-\beta^2\sin^2(\theta/2)}\right\}\right. \qquad (7\text{-}86)$$

我们记得，$E$ 和 $p$ 是电子的能量和动量，$\beta=p/E$ 是它的速度，$\theta$ 是散射角，$\cosh2\varphi=p\cdot p'/m^2$，$\sinh\varphi=(p/m)\times\sin(\theta/2)$，而 $|\mathbf{q}|^2=4m^2\sinh^2\varphi=4p^2\sin(\theta/2)$.

在方程(7-86)中，我们留下了真正的红外发散性，为了得到合理的结果，我们必须计算并加上发射软光子的截面.

### 7-2-3 软韧致辐射

在5-2-4节中我们已遇到过Coulomb场中的电子韧致辐射问题. 我们得到了Bethe-Heitler公式，它显示出典型的$d\omega/\omega$谱，其中$\omega$是光子的能量，也相当于电子的能量损失. 如果我们考虑典型的能量分辨率$\Delta E$，就可预期积分后会得到$Z^2\alpha^3\ln(\Delta E/\mu)$量级的辐射几率，它可很好地补偿在弹性截面中的类似项. 所以，我们现在的任务是将Bethe-Heitler表示式在光子变量上积分，其积分范围确定为$\omega \leqslant \Delta E$. 我们假定$\mu \ll \Delta E \ll E$. 这就可能会对此效应提出异议，因为在第五章中实际上假定了$\mu \approx 0$. 事实上，在极限$\mu/E \ll \Delta E/E \to 0$下，唯一的危险项是从传播子中来的. 于是，我们可以应用对零光子动量成立的公式(5-151). 如果此贡献表示为$[(d\sigma/d\Omega)(\Delta E)]_{\text{inelastic}}$，则有

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{\text{inelastic}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \int_{\omega\leqslant\Delta E} \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} e^2 \times\left[\frac{2p\cdot p'}{k\cdot pk\cdot p'} - \frac{m^2}{(k\cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k\cdot p')^2}\right]. \quad (7\text{-}87)$$

能量分辨率可以随运动学条件而变化，对它要用完全的Bethe-Heitler表示式来作更仔细的计算. 这里我们只想阐明基本的补偿机制. 在公式(7-87)中，原则上有$E = E' + \omega$，但我们只寻求$\Delta E$的主要的贡献. 所以，只要允许，我们就取极限$E' \to E$，$|\mathbf{p}| \to |\mathbf{p}'|$. 当然$\omega = (\mathbf{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$. 令$B$表示$(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$的系数. 用Feynman技巧我们写出

$$B = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int_{-1}^{+1} dz \int_{\omega\leqslant\Delta E} \frac{d^3k}{2\omega}$$

$$\times\left[\frac{2p\cdot p'}{(k\cdot P)^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p')^2}\right],$$

其中 $P=\frac{1}{2}[(p+p')+Z(p'-p)]$。考虑到 $|\mathbf{k}|<[(\Delta E)^2-\mu^2]^{1/2}\sim\Delta E$，就有

$$\begin{aligned}\int_{\omega\leqslant\Delta E}\frac{d^3k}{\omega(k\cdot P)^2}&=4\pi\int_0^{\Delta E}\frac{d|\mathbf{k}|}{(\mathbf{k}^2+\mu^2)^{1/2}}\\&\times\frac{|\mathbf{k}|^2}{[\mathbf{k}^2(P_0^2-\mathbf{P}^2)+\mu^2P_0^2}\\&=4\pi\int_0^{\arctan(\Delta E/\mu)}d\phi\ \frac{\sin\phi\tan\phi}{P_0^2-\mathbf{P}^2\sin^2\phi}\\&\simeq\frac{4\pi}{P_0^2-\mathbf{P}^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{P_0}{2|\mathbf{P}|}\ln\frac{P_0+|\mathbf{P}|}{P_0-|\mathbf{P}|}\right).\end{aligned}$$

把此式代入 $B$ 的表示式中，其中记号 $p=|\mathbf{p}|$，$p'=|\mathbf{p}'|$ 而 $P=|\mathbf{P}|$（希望读者不会混淆这些记号），我们就留下对 $z$ 上的一维积分

$$\begin{aligned}B=\frac{\alpha}{\pi}\Bigg\{&2\ln\frac{2\Delta E}{\mu}\left[-1+\frac{p\cdot p'}{2}\int_{-1}^{+1}dz\right.\\&\left.\times\frac{1}{P_0^2(z)-P^2(z)}\right]+\frac{E}{2p}\ln\frac{E+p}{E-p}\\&+\frac{E'}{2p'}\ln\frac{E'+p'}{E'-p'}-\frac{p\cdot p'}{2}\int_{-1}^{+1}dz\\&\times\frac{1}{P_0^2(z)-P^2(z)}\frac{P_0(z)}{P(z)}\ln\frac{P_0(z)+P(z)}{P_0(z)-P(z)}\Bigg\}.\end{aligned}$$

用前面的记号，我们发现 $P_0^2(z)-P^2(z)=m^2(\cosh^2\varphi-z^2\sinh^2\varphi)$。因此有

$$\begin{aligned}\frac{p\cdot p'}{2}\int_{-1}^{+1}dz\ \frac{1}{P_0^2(z)-P^2(z)}&=\cosh2\varphi\\&\times\int_0^1dz\ \frac{1}{\cosh^2\varphi-z^2\sinh^2\varphi}=2\varphi\coth2\varphi.\end{aligned}$$

对最后一个积分式引进变量 $\xi = P(x)/\beta P(x)$，并取精确到 $\Delta E/E$ 级修正的极限 $E' \to E$，$p' \to p$. 我们发现 $\xi$ 还等于 $[\cos^2(\theta/2) + x^2\sin^2(\theta/2)]^{1/2}$，于是

$$\frac{p \cdot p'}{2}\int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{P_0^2(x) - P^2(x)} \frac{P_0(x)}{P(x)}$$
$$\times \ln \frac{P_0(x) + P(x)}{P_0(x) - P(x)} = \cosh 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin(\theta/2)}$$
$$\times \int_{\cos(\theta/2)}^{1} d\xi \frac{1}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}}$$
$$\times \ln \frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi}.$$

把所有的式子放在一起，软光子发射截面就为

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{\text{inelastic}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \frac{2\alpha}{\pi}\left\{(2\varphi\coth 2\varphi - 1)\right.$$
$$\times \ln \frac{2\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{2}\cosh 2\varphi$$
$$\times \frac{1-\beta^2}{\beta\sin(\theta/2)}\int_{\cos(\theta/2)}^{1} d\xi$$
$$\left.\times \frac{1}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi^2 - \cos^2(\theta/2)]^{1/2}} \ln\frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi}\right\}. \tag{7-88}$$

### 7-2-4 有限的单举截面

用 $(d\sigma/d\Omega)(\Delta E)$ 表示的物理上可测量的量，是弹性和非弹性贡献之和

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{elastic}} + \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{\text{inelastic}}, \tag{7-89}$$

两项都计算到 $\alpha^3$ 级，它们分别由方程 (7-86) 和 (7-88) 给出. 首先计算这种修正的 Schwinger 引进了记号 $\delta_R$ 和 $\delta_B$，

分别表示由虚或实的光子发射和二级 Born 近似引起的有关修正．这时

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}(1-\delta_R+\delta_B). \qquad (7\text{-}90)$$

当把方程 (7-86) 和 (7-88) 的结果加起来时，正如所预期的那样，所有的红外截断都没有了．虚构的质量 $\mu$ 只是为了使计算的中间步骤有意义而引入的，而当细心考虑了实验分辨率时，现在取 $\mu\to 0$ 的极限是完全合理的．最后的结果当然对 $\Delta E$ 是敏感的．

在把这两个贡献加起来时，我们可用下面的等式，它是在比较对 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{elastic}}$ 和 $(d\sigma/d\Omega)_{\text{inelastic}}$ 积分时所作的变量变换而得到的．记起 $\varphi=[\beta/(1-\beta^2)^{1/2}]\sin(\theta/2)$，我们有

$$\int_0^{\varphi}d\psi\psi\tanh\psi=-\frac{\varphi}{2}\ln(1-\beta^2)$$
$$+\frac{1-\beta^2}{4\sin(\theta/2)}\sinh 2\varphi\int_{\cos(\theta/2)}^{1}d\xi$$
$$\times\frac{\xi\ln(1-\beta^2\xi^2)}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi^2-\cos^2(\theta/2)]^{1/2}},$$

所以得到

$$\delta_R=\frac{2\alpha}{\pi}\left\{(1-2\varphi\coth 2\varphi)\left(1+\ln\frac{2\Delta E}{m}\right)\right.$$
$$+\varphi\tanh\varphi+(1-\varphi\tanh\varphi)\left(1-\frac{\coth^2\varphi}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{9}+\frac{1}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}-\varphi\coth 2\varphi\ln(1-\beta^2)$$
$$+\frac{\beta^2\sin^2(\theta/2)}{1-\beta^2\sin^2(\theta/2)}\frac{\varphi}{\sinh 2\varphi}+\frac{1}{2}\cosh 2\varphi$$
$$\times\frac{1-\beta^2}{\beta\sin(\theta/2)}\int_{\cos(\theta/2)}^{1}d\xi\frac{1}{[\xi^2-\cos^2(\theta/2)]^{1/2}}$$

$$\times\left\{\frac{\ln(1+\beta\xi)}{1-\beta\xi}-\frac{\ln(1-\beta\xi)}{1+\beta\xi}\right]\Bigg\}, \tag{7-91}$$

$$\delta_B=Z\alpha\pi\frac{\beta\sin(\theta/2)[1-\sin(\theta/2)]}{1-\beta^2\sin^2(\theta/2)}. \tag{7-92}$$

数字计算发现，由于这些修正随能量而增加，它们远远不能忽略. 当 $\Delta E/m\to 0$ 时，上面的公式就不成立了. 成立的判据是

$$\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{m}{\Delta E}<1.$$

为了得到更多的结果，就要计算发射几个、甚至于无穷多个光子的高级项. 因此，可知道软光子的贡献是因子化成指数形式的，这表明在极限 $\Delta E/m\to 0$ 下，这个过程的几率为零.

## 7-3 新的效应

微扰级数中的高级项会引起新的效应，现在我们简单地来描述一下其中的一些效应.

### 7-3-1 光子-光子散射

四光子相互作用没有相应的经典过程，它是虚荷电粒子对的量子涨落引起的. 从理论上来看，阐明规范不变性和流守恒如何象 7-1 节的讨论中预期的那样来消除其余的潜在发散振幅是令人感兴趣的.

我们首先概述一下用量纲所作的论证. 基本振幅(图 7-15)是 $\alpha^2$ 级的，所以截面的形状为

$$\sigma\sim\int\frac{d^3k_3}{\omega_3}\frac{d^3k_4}{\omega_4}\frac{\alpha^4|M|^2}{k_1\cdot k_2}\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4), \tag{7-93}$$

其中光子的能量和动量的记号是明确的. 有量纲的参量是质心系中共有的能量 $\omega$ 和电子质量 $m$. 这里 $M$ 表示无量纲的矩阵元，所以 $\sigma$ 正确地具有面积的量纲.



图 7-15　光子-光子散射的基本图

我们期望规范不变性会从$M$中分出动量的四次方．这一点将在以后得到证实．因此，对小的 $\omega$，$|M|^2$ 至少是 $(\omega/m)^8$ 形的．在此极限下，$k_1 \cdot k_2$ 正比于 $\omega^2$．于是我们预言在低能时有

$$\sigma \sim a\alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} \qquad \frac{\omega}{m} \ll 1, \tag{7-94}$$

其中 $a$ 是一个常数．因为 $\alpha^4/m^2 \sim 10\mu b$，所以一直到几百个 keV 的范围内，此截面都是极小的．另一方面，对 $\omega/m \gg 1$ 的情况，由于过程是收敛的，所以不会遇到质量奇异性，于是简单地算一下量纲就可得到

$$\sigma \sim b\alpha^4 \frac{1}{\omega^2} \qquad \frac{\omega}{m} \gg 1, \tag{7-95}$$

其中 $b$ 是第二个常数．换而言之，看来在典型的、数量级为 1 的 $\omega/m$ 值处，$\sigma$ 有一峰．

我们不给出非常完美的计算，但证明第四章最后一节的结果可用来计算低能行为中的常数 $a$ 的数值．为此，我们注意到 Euler-Heisenberg 拉氏函数[方程 (4-123)] 包含了所有单圈图的和，每个图都在同一个恒定的电磁场上积分，有多少条外线就积多少次．注意，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是外动量的线性函数．另外，在给定的 $e$ 的某一级上，所有的图（相应于外线指标的置换）之和是规范不变的．当和质壳过程中的极化矢量

$\varepsilon_\rho(k)$ 收缩时，它在变换 $\varepsilon_\rho(k) \to \varepsilon_\rho(k) + \lambda k_\rho$ 下是不变的. 这表示这个收缩量只能通过组合 $\varepsilon_\rho(k)k_\sigma - \varepsilon_\sigma(k)k_\rho$ 而和 $\varepsilon(k)$ 有关. 除了因子 $i$ 外，这是相应的电磁场的 Fourier 变换 $f_{\rho\sigma}(k)$. 于是，正比于 $e^4$ 级的项至少包含动量的四次方. 所以，在低能极限下，研究零频率时组合 $\prod_1^4 f^{(i)}_{\rho_i\sigma_i}$ 的系数就够了. 如果外电磁场重合，则相应的量是用恒定场算出的等效拉氏函数的四级项，它就是方程 (4-125) 给出的

$$i\delta\mathscr{L}_4 = i\frac{2\alpha^2}{45m^4}[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2]$$

$$= \frac{i2\alpha^2}{45m^4}\left[\left(\frac{f^2}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{f\cdot\tilde{f}}{4}\right)^2\right]. \qquad (7\text{-}96)$$

为了得到散射振幅，我们必须简单地用和式 $f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)}$ 来代替 $f$，并用 4! 来除多重线性组合 $\prod_1^4 f^{(i)}$ 的系数. 作替换 $f_{\rho\sigma} = i(k_\rho\varepsilon_\sigma - k_\sigma\varepsilon_\rho)$ 后，在极限 $\omega/m \to 0$ 下就得到所要求的式子.

作为一种缩写，我们令 $f_\rho^\sigma$ 为一矩阵，而求迹取遍四个 Lorentz 指标的值. 于是，很容易看出

$$(f^2)^2 = (\mathrm{tr}f^2)^2 \quad (f\cdot\tilde{f})^2 = 4\mathrm{tr}f^4 - 2(\mathrm{tr}f^2)^2.$$

从上面的叙述得到振幅 $M$ 为

$$M = -\frac{i\alpha^2}{45m^4}\frac{1}{12}[5(\mathrm{tr}f^{(1)}f^{(2)}\mathrm{tr}f^{(3)}f^{(4)} + \mathrm{tr}f^{(1)}f^{(3)}\mathrm{tr}f^{(2)}f^{(4)}$$
$$+ \mathrm{tr}f^{(1)}f^{(4)}\mathrm{tr}f^{(2)}f^{(3)}) - 7\mathrm{tr}(f^{(1)}f^{(2)}f^{(3)}f^{(4)}$$
$$+ f^{(2)}f^{(1)}f^{(3)}f^{(4)} + f^{(3)}f^{(1)}f^{(2)}f^{(4)} + f^{(2)}f^{(3)}f^{(1)}f^{(4)}$$
$$+ f^{(3)}f^{(2)}f^{(1)}f^{(4)} + f^{(1)}f^{(3)}f^{(2)}f^{(4)})]. \qquad (7\text{-}97)$$

不极化的截面中包含 $M$ 的绝对值平方的平均：

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4}\sum_{s^{(i)}}|M|^2.$$

在质心系中截面为

$$d\sigma = \frac{1}{4(k_1 \cdot k_2)} \int \frac{d^3k_3}{2\omega_3(2\pi)^3} \frac{d^3k_4}{2\omega_4(2\pi)^3} (2\pi)^4 \times \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \overline{|M|^2} = \frac{1}{64\omega^2(2\pi)^2} \times \overline{|M|^2}\, d\Omega. \tag{7-98}$$

为了对极化求和，我们注意到

$$\sum_{\text{极}} f_\rho^{*\sigma} f_{\rho'}^{\sigma'} = -(g_{\rho\rho'}k^\sigma k^{\sigma'} + k_\rho k_{\rho'} g^{\sigma\sigma'} - g_\rho^{\sigma'} k^\sigma k_{\rho'} - g_{\rho'}^{\sigma} k_\rho k^{\sigma'}).$$

冗长的计算给出

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\alpha^4}{(90)^2 m^8} 139[(k_1 \cdot k_2)^2(k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2(k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2(k_2 \cdot k_3)^2]. \tag{7-99}$$

可以进入此表示式的第二个不变组合，即 $\sum_{\text{不同置换}}(k_1 \cdot k_2)\times(k_2 \cdot k_3)(k_3 \cdot k_4)(k_4 \cdot k_1)$，等于方程 (7-99) 中括弧内的量的一半。如果 $\theta$ 是质心系中的散射角，我们就有

$$k_1 \cdot k_2 = k_3 \cdot k_4 = 2\omega^2,$$
$$k_1 \cdot k_3 = k_2 \cdot k_4 = \omega^2(1 - \cos\theta),$$
$$k_1 \cdot k_4 = k_2 \cdot k_3 = \omega^2(1 + \cos\theta),$$

所以不极化的微分截面等于

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{(90)^2} \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} (3 + \cos^2\theta)^2 \qquad \omega/m \ll 1. \tag{7-100}$$

由于 Bose 统计性，此表示式在作交换 $\theta \to \pi - \theta$ 下是对称的。所以，为了得到总弹性截面，只要在半个单位球的立体角内积分即可，结果为

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{139}{(90)^2} \left(\frac{56}{11}\right) \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} \qquad \omega/m \ll 1. \tag{7-101}$$

此结果和我们以前的估计是一致的，于是就得到了所要求的系数 $a$.

作为一个练习，读者可计算截面的高能行为式(7-95)中的系数 $b$. 光子-光子诱导相互作用表示在荷电靶上可能发生相干散射，这时图 7-15 中的两条线表示与核的 Coulomb 作用. 它和核场中的粒子对产生有关，并可和 Compton 过程比较. 值得研究的另外一个过程是当光子打在靶 $(-Ze)$ 上时，产生两个光子的光子"分裂"振幅.

## 7-3-2 Lamb 位移

1947 年 Lamb 和 Retherford 对氢原子状态 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 之间的能移的测量，是促进量子场论发展的令人难忘的事件，按照 Dirac 理论的预言，它们是退化的. 这里我们只满足于对此效应作一简单的说明，而不去叙述与相对论束缚态理论的描述有关的更基本的问题. 事实上，Lamb 和 Retherford 测量的是 $2P_{1/2}$—$2S_{1/2}$ 跃迁，它是所用的磁场的函数. 在零场极限下，观察值近似为 1000 MHz，低于从精细结构间隔预言的值 $m\alpha^4/32 \sim 10{,}960$MHz.

为了分析这一矛盾，如在本章开始时讨论的那样，我们将跟随 Bethe 的原始工作，把 Dirac 理论和辐射修正结合起来. 我们看到，通过修改等效势，真空极化使 $2S_{1/2}$ 能级相对于 $2P_{1/2}$ 态增加了 27 MHz. 所以，这不可能是主要的效应，因为实验观察要求 $2S_{1/2}$ 能级在 $2P_{1/2}$ 能级上面很高. 当然，完善的理论需要考虑到所有的同级效应，所以要包括原子核修正(磁矩、反冲、形状因子、极化等等). 另外，所有的激发能级都是亚稳的，这表示每一条有一个自然的线宽度.

在第二章中我们说到了 Welton 的论证，它表示束缚的电子和涨落的真空电子场有相互作用，从而估计出有正确符号的能移，其大小为

$$\delta E_{n,l} \simeq \frac{4}{3\pi} m \frac{Z^4\alpha^5}{n^3} \ln \frac{1}{Z\alpha} \delta_{l,0}. \tag{7-102}$$

现在我们来进行更为定量的计算.

出发点是电子和外场的等效相互作用式(7-77). 由它得到修改的 Dirac 方程,形为

$$\left[i\partial\!\!\!/ - m - \left\{\gamma_\rho \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\Box\right] + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\sigma_{\nu l}}{2m} \partial^\nu\right\} eA^\rho(x)\right] \psi(x) = 0, \tag{7-103}$$

它包括用缓变外场来计算的真空极化和顶角修正. 花括弧内的微分算符只作用在 Coulomb 势 $A^\rho(x)$ 上.

量 $\psi$ 解释为有外场时的场算符在真空态和单电子态之间的矩阵元. 根据微扰规则,附加的项只能考虑到第一级,否则我们的计算在逻辑上是不自洽的. 未微扰态是 Dirac 方程的解

$$(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/)\psi(x) = 0 \quad A^\rho(x) = -\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|} g^{\rho 0}, \tag{7-104}$$

已在 2-3 节中讨论过了. 因此,能级移动由下式给出:

$$\delta E = e\alpha \int d^3x \psi^+(\mathbf{x}) \left\{\frac{1}{3\pi m^2}\left(\ln \frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) \times \Delta[A^0(\mathbf{x})] + \frac{i}{4\pi m} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})\right\} \psi(\mathbf{x}), \tag{7-105}$$

其中 $\psi$ 是方程(7-104)的、属于量子数 $(n,l,j)$ 的解.

作为第一级近似,我们甚至可对方程(7-105)中的 $\psi$ 用非相对论值,使

$$\Delta A^0(\mathbf{x}) = Ze\delta^3(\mathbf{x}), \quad |\psi_n^{nr}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_n^3} = \frac{(Z\alpha m)^3}{\pi n^3}.$$

这便给出了

$$e\int d^3x\phi^+_{n,l,j}(\mathbf{x})[\Delta A^0(\mathbf{x})]\phi_{n,l,j}(\mathbf{x})$$

$$=\delta_{l,0}\frac{4m^3}{n^3}(Z\alpha)^4.$$

现在定义式(7-105)中两项的分别贡献为

$$\delta E=\delta E^{(1)}+\delta E^{(2)}, \tag{7-106}$$

由此得

$$\delta E^{(1)}_{n,l,j}=\frac{e\alpha}{3\pi m^2}\int d^3x\phi^+_{n,l,j}(\mathbf{x})\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\times[\Delta A^0(\mathbf{x})]\phi_{n,l,j}(\mathbf{x})=\delta_{l,0}\frac{4m\alpha}{3\pi n^3}(Z\alpha)^4$$

$$\times\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right). \tag{7-107}$$

相对论波函数在原点是奇异的. 更严格的处理要求避免把等效相互作用按 $q^2/m^2$ 的幂展开. 因为在表示式(7-105)中只有势的平均值,所以上面的结果仍精确到 $\alpha(Z\alpha)^4$ 级.

现在转到第二项 $\delta E^{(2)}$, 我们将在同样的精神下来计算它. 因为 $\gamma$ 矩阵把大小分量联系起来了, 所以对 Dirac 方程的使用要有些限制. 为此把 $\delta E^{(2)}_{n,l,j}$ 表示为

$$\delta E^{(2)}_{n,l,j}=\frac{ie\alpha}{4\pi m}\int d^3x\phi^+_{n,l,j}(\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})\phi_{n,l,j}(\mathbf{x}). \tag{7-108}$$

它表示对一运动电子感应出电偶极矩的反常磁矩效应. 不考虑 Coulomb 势效应时, $\phi$ 的大分量($\varphi$)和小分量($\chi$)近似地由下式联系起来:

$$\chi(x)=-i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla}{2m}\varphi(x).$$

因为 $e\mathbf{E}(\mathbf{x})=-Z\alpha(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3)$, 而

$$\phi^+ \frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^4}\phi = \varphi^+ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\chi - \chi^+ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\varphi$$

$$\simeq \frac{1}{2im}\left(\varphi^+ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{|\mathbf{x}|^3}\varphi + hc\right)$$

所以分部积分后得到

$$\int d^3x\phi^+(\mathbf{x})\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\phi(\mathbf{x}) \simeq \frac{i}{2m}\int d^3x\varphi^+ \times\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\right]\varphi.$$

象在超精细相互作用情况中那样，在处理 $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ 那样的奇异量时要小心。我们记得 $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3 = -\nabla(1/|\mathbf{x}|)$ 而 $\Delta(1/|\mathbf{x}|) = -4\pi\delta^3(\mathbf{x})$。把 $\varphi$ 取作 Panli 旋量，并用非相对论角动量算符 $\mathbf{L} = (1/i)\mathbf{x}\times\nabla$ 和等式

$$[\sigma_a A_a, \sigma_b B_b] = \delta_{ab}(A_a B_b - B_b A_a) + i\varepsilon_{abc}\sigma_c(A_a B_b + B_b A_a),$$

就得到

$$\delta E^{(2)}_{n,l,j} = \frac{Z\alpha^2}{8\pi m^2}\int d^3x\varphi^+_{n,l,j}(\mathbf{x}) \times\left[4\pi\delta^3(\mathbf{x}) + 4\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{x}|^3}\right]\varphi_{n,l,j}(\mathbf{x}).$$

我们已知道波函数在原点的值。$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ 的矩阵元等于

$$(1-\delta_{l,0})\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\Big/2.$$

最后，$1/|\mathbf{x}|^3$ 在等于或大于 1 的角动量态中的平均值是

$$\left\langle\frac{1}{|\mathbf{x}|^3}\right\rangle_{n,l,j} = \frac{2}{l(l+1)(2l+1)n^3}(Zm\alpha)^3.$$

把所有这些归集起来，我们得到

$$\delta E^{(2)}_{n,l,j} = \frac{\alpha(Z\alpha)^4}{2\pi n^3} m \frac{1}{2l+1} C_{j,l},$$

$$C_{j,l}=\delta_{l,0}+(1-\delta_{l,0})\frac{j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}}{l(l+1)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{l+1} & \text{如果 } j=l+\dfrac{1}{2},\\ -\dfrac{1}{l} & \text{如果 } j=l-\dfrac{1}{2},\ l\geqslant 1.\end{cases}\tag{7-109}$$

对非零轨道角动量的态，$\delta E^{(1)}$ 为零，而 $\delta E^{(2)}$ 有一个数量级为 $\alpha(Z\alpha)^4$ 的、由电子反常磁矩产生的很小贡献.

对 $S$ 态，$\delta E$ 的计算中仍包含虚构的质量 $\mu$，而当 $\mu\to 0$ 时发散，这表明我们抛去了一些实质性的贡献. 如定性的论证中所指出的那样，等效的红外截断预期是 Bohr 半径 $(Zm\alpha)^{-1}$ 的数量级，而不是任意值 $\mu^{-1}$. 错误在于对任意大的波长用了等效相互作用式 (7-77). 对和 Bohr 半径可比或大于此半径的波长，作辐射修正还应考虑到 Coulomb 作用，即考虑到它们不适用于自由电子，而只适用于束缚电子.

为了修正此效应，要用到束缚能和静止质量能的比是很小的这一发现，它为 $\frac{1}{2}Z^2\alpha^2$ 的量级. 我们对虚光子的三维动量引入截断 $K$，使 $mZ^2\alpha^2\ll K\ll m$. 对 $k\ll K$，可用非相对论近似来处理电子，并且可以把核位势考虑进去. 对 $k>K$，可忽略束缚效应，并应用前面的结果. 但是，我们要求在 $K$ 和 $\mu$ 之间有一个精确的关系.

为此，回到 7-2-3 节. 在那里，我们是通过积分

$$B=\frac{\alpha}{4\pi^2}\int_{\omega<\Delta E}\frac{d^3k}{2\omega}\times\left[\frac{2p\cdot p'}{k\cdot pk\cdot p'}-\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p')^2}\right]$$

来计算软韧致辐射几率的. 此积分是对 $\mu\ll\Delta E$ 的情况来计

算的，但 $\mu \neq 0$. 现在令 $\mu = 0$，代替它用光子三维动量上的低端截断 $K(K \ll \Delta E)$，再重复上面的计算. 把这样的量表示为 $B_1$. 比较 $B$ 和 $B_1$，就给出了联系 $K$ 和 $\mu$ 的方法. 保留双曲角 $\varphi$ 的定义为 $p \cdot p' = m^2\cosh 2\varphi$，我们有

$$B_1 = \frac{2\alpha}{\pi}(2\varphi\coth 2\varphi - 1)\ln\frac{\Delta E}{K}.$$

上面对 $B$ 的结果是[方程 (7-88)]

$$B = \frac{2\alpha}{\pi}\left\{(2\varphi\coth 2\varphi - 1)\ln\frac{2\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right.$$
$$-\frac{1}{2}\cosh 2\varphi\,\frac{1-\beta^2}{\beta\sin(\theta/2)}\int_{\cos(\theta/2)}^{1} d\xi$$
$$\left.\times\frac{1}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi^2-\cos^2(\theta/2)]^{1/2}}\ln\frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi}\right\},$$

束缚电子的速度是很小的 $(\beta \sim Z\alpha)$. 于是，在极限情况 $\beta \to 0$，$\varphi \sim \beta\sin(\theta/2)$ 下，比较一下 $B_1$ 和 $B$ 是合适的. 在此情况下，出现于 $B$ 表示式中的积分近似地等于

$$2\beta\sin\frac{\theta}{2}\left[1 + \frac{4}{9}\beta^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots\right].$$

于是，可以令 $B$ 和 $B_1$ 恒等，给出

$$\ln\frac{\mu}{2K} = -\frac{5}{6}. \tag{7-110}$$

Lamb 位移计算中只含一条虚光子线. 另外，原子核指定了一个特殊的坐标架，在其中将 $k$ 分成 $k \lesseqgtr K$ 是合理的. 相应地，将 $\delta E^{(1)}$ 分成，$\delta E^{>}$ 和 $\delta E^{<}$ 两部分. 对 $\delta E^{>}$，用结果式 (7-107)，并用式 (7-110) 作替换. 对其余部分 $\delta E^{<}$，要作新的计算. 我们的更正确的表示式是

$$\delta E^{(1)} = \delta E^{<} + \delta E^{>}, \tag{7-111}$$
$$\delta E^{>} = \frac{4}{3\pi}m\alpha\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}\left(\ln\frac{m}{2K} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\delta_{l,0}.$$

如果 $\delta E^<$ 和 $\delta E^>$ 中的对 $K$ 的依赖关系抵消了，则此式是有意义的.

为了得到 $\delta E^<$，我们回到原来的计算辐射修正的步骤，并使在虚的辐射场中出现的动量小于 $K$，所以可以用从下列 Schrödinger 方程出发的二级非相对论微扰论来处理：

$$(E+\delta E^<)\phi = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla - e\mathbf{A}_q\right)^2 + e(A^0 + A_q^0)\right]\phi. \tag{7-112}$$

这里，$\phi$ 是电子和辐射场 $(A_q^0, \mathbf{A}_q)$ 两者的波函数，它描写在未微扰态中的束缚电子和电磁真空. 量子部分等效地约化为

$$\mathbf{A}_q(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{k}|<K} \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|(2\pi)^3}\left[\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \times a^{(\lambda)}(k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + hc\right], \tag{7-113}$$

$$A_q^0(\mathbf{x}) = 0.$$

将和辐射场的相互作用算到最低非零级，就得到两类贡献. 第一类是由 $\mathbf{A}_q$ 的二次项引起的"海鸥"贡献. 它可以作为对质量重整化的贡献而再吸收到 $E$ 中去，因为它毫无例外地影响所有的级. 第二类为

$$\delta E_n^< = \sum_{n'}\int_{k<K}\frac{d^3k}{2k(2\pi)^3}\sum_\lambda\frac{e^2}{(2m)^2}\int d^3x \times\{|\phi_n^*(\mathbf{x})[(1/i)\nabla\cdot\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})\cdot(1/i)\nabla]\phi_{n'}(\mathbf{x})|^2\}/\{E_n - E_{n'} - k\}, \tag{7-114}$$

其中 $E_n$ 和 $E_{n'}$ 表示未微扰能级，$E_n \simeq m - mZ^2\alpha^2/2n^2$. $\mathbf{x}$ 的积分范围有效地被 Bohr 半径所限制. 相应地有 $K|\mathbf{x}| \lesssim K/mZ\alpha$. 根据对 $K$ 的假设，可认为它是很小的，这就证明了偶极近似是正确的，在此近似中 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 被 1 代替. 定义 $V_{op} = (1/im)\nabla$，并注意到

$$\sum_{\lambda=1,2}|\langle n|\mathbf{v}_{\rm op}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda(\mathbf{k})|n'\rangle|^2$$
$$=\left(\delta_{\rm op}-\frac{k^ak^b}{k^2}\right)\langle n|v^a_{\rm op}|n'\rangle^*\langle n'|v^b_{\rm op}|n\rangle,$$

和

$$\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(\delta^{ab}-\frac{k^ak^b}{k^2}\right)=\frac{2}{3}\delta_{ab},$$

我们就得到结果

$$\delta E_n^<=\frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{n'}\int_0^K\frac{dkk}{E_n-E_{n'}-k}|\langle n|\mathbf{v}_{\rm op}|n'\rangle|^2. \tag{7-115}$$

公式(7-115)还不是正确的结果，因为就我们在$\mathbf{v}_{\rm op}$中用了物理质量表示式的意义上讲，它没有考虑质量重整化，还必须从中减除十分软的光子($k<K$)对自质量的贡献。换而言之，在哈密顿量中必须放进形为

$$-(\delta m/2m^2)\mathbf{p}^2_{\rm op}=-(\delta m/2)\mathbf{v}^2_{\rm op}$$

的抵消项，其中$\delta m$调节得使对自由电子来说$\delta E^<$为零。因为$\langle n|\mathbf{v}^2_{\rm op}|n\rangle=\Sigma_{n'}|\langle n|\mathbf{v}_{\rm op}|n'\rangle|^2$，而$K\gg|E_n-E_{n'}|$，所以$\delta E^<$的正确的表示式显然为

$$\delta E_n^<=\frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{n'}\int_0^K dkk\left(\frac{1}{E_n-E_{n'}-k}+\frac{1}{k}\right)$$
$$\times\langle|n|\mathbf{v}_{\rm op}|n'\rangle|^2=\frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{n'}(E_{n'}-E_n)$$
$$\times\ln\left|\frac{K}{E_n-E_{n'}}\right||\langle n|\mathbf{v}_{\rm op}|n'\rangle|^2. \tag{7-116}$$

到这一步，我们只能做数值估算了。首先确定此非相对论贡献的 Bethe 引进了如下的对数平均。对属于$s$波的状态$|n\rangle$，通过

$$\ln\langle E_n\rangle = \frac{\sum_{n'} |\langle n|\mathbf{v}_{op}|n'\rangle|^2 (E_{n'}-E_n)\ln|E_{n'}-E_n|}{\sum_{n'} |\langle n|\mathbf{v}_{op}|n'\rangle|^2 (E_{n'}-E_n)}$$

$$l=0, \qquad (7\text{-}117)$$

用任意的，但固定的能量标度来定义 $\langle E_n\rangle$. 对高分波 ($l\neq 0$)，这个定义没有意义，我们立即可看出，这时它的分母为零. 于是，在此情况中 $\delta E^<$ 与 $K$ 无关，这是很侥幸的情况. 但尽管如此，我们对这种情况还是要通过

$$\delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{n'} |\langle n|\mathbf{v}_{op}|n'\rangle|^2 (E_{n'}-E_n) \times \ln\frac{1}{|E_n-E_{n'}|} = \frac{4\alpha}{3\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{n^3} m\ln\frac{Z^2\mathrm{Ryd}}{\langle E_n\rangle}$$

$$l\neq 0, \qquad (7\text{-}118)$$

$$\mathrm{Ryd}=\frac{m\alpha^2}{2},$$

来定义 $\langle E_n\rangle$. 对 $s$ 波，利用方程 (7-117) 得到

$$\delta E_{n'}^< = \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{n'} |\langle n|v_{op}|n'\rangle|^2 (E_{n'}-E_n)\ln\frac{K}{\langle E_n\rangle}$$

$$l=0.$$

我们来变换一下这个表示式. 如果 $H_0$ 是包含 Coulomb 势的 Schrödinger 哈密顿量，则可写出

$$\sum_{n'}(E_{n'}-E_n)|\langle n|\mathbf{v}_{op}|n'\rangle|^2$$

$$=\langle n|[\mathbf{v}_{op},H_0]\cdot\mathbf{v}_{op}|n\rangle = \langle n|\mathbf{v}_{op}\cdot[H_0,\mathbf{v}_{op}]|n\rangle$$

$$=-\frac{1}{2m^2}\langle n|\left\{\left[\mathbf{p}_{op},\frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|}\right]\cdot\mathbf{p}_{op} + \mathbf{p}_{op}\cdot\left[\frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|},\mathbf{p}_{op}\right]\right\}|n\rangle = \frac{1}{2m^2}\int d^3x \times\nabla\left(\frac{Z\alpha}{|\mathbf{x}|}\right)\cdot\nabla[\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})]$$

$$=\frac{Z\alpha}{2m^2}4\pi|\phi(0)|^2=\frac{2m(Z\alpha)^4}{n^3}\delta_{l,0},$$

于是对 $s$ 波得到

$$\delta E_n^{<}=\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}m\ln\frac{K}{\langle E_n\rangle}\qquad l=0. \tag{7-119}$$

现在把各部分结合起来：$\delta E^{<}$ 由式(7-118)和(7-119)给出，$\delta E^{>}$ 由式(7-111)给出，$\delta E^{(2)}$ 由式(7-109)给出(它也对 $l=0$ 态有贡献)。任意的量 $\mu$ 和 K 消失了，而得到 Lamb 位移为

$$\delta E_{n,l,j}=\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}m \times\begin{cases}\ln\dfrac{m}{2\langle E_{n,0}\rangle}+\dfrac{19}{30} & \text{对 } l=0,\\ \ln\dfrac{Z^2\mathrm{Ryd}}{\langle E_{n,l}\rangle}+\dfrac{3}{8}\dfrac{C_{lj}}{2l+1} & \text{对 } l\neq 0,\end{cases} \tag{7-120}$$

其中 $C_{l,j}$ 由式(7-109)给出。

主要的贡献是 Bethe 计算的，而 $\alpha(Z\alpha)^4$ 项是 Kroll 和 Lamb 及 French 和 Weisskopf 得到的。

对氢原子用下面的数值时：

$$\langle E_{2S}\rangle=16.640\mathrm{Ryd},\quad \langle E_{2P}\rangle=0.9704\mathrm{Ryd}, \tag{7-121}$$

公式(7-120)预言 $2S_{1/2}$—$2P_{1/2}$ 分裂的值为

$$E_{2S_{1/2}}-E_{2P_{1/2}}=\frac{m\alpha^5}{6\pi}\left(\ln\frac{m\langle E_{2P}\rangle}{2\mathrm{Ryd}\langle E_{2S}\rangle}+\frac{91}{120}\right)$$
$$=1052.1\mathrm{MHz}, \tag{7-122}$$

和 1953 年 Triebwasser, Dayhoff 和 Lamb 的测量值 $1057.8\pm0.1$ MHz 比较，是令人满意的。

为了改进计算，需要发展一种更精细的理论。进一步的修正要考虑到 Coulomb 场中电子传播子的改进($Z\alpha$ 的高次和对数项)，并要处理高级辐射修正。在得到最近 Erickson 算得的理论值(1971)

$$1057.916\pm0.010\mathrm{MHz},$$

或 Mohr 算得的 (1975)

$$1057.864 \pm 0.014\text{MHz}$$

时，还包括了表示核反冲的项 $[(m/M)(Z\alpha)^4$ 和 $(m/M)(Z\alpha)^5$ 级]，和有限半径 $R_N$ 效应 $[(R_N m)^2(Z\alpha)^4$ 级]. 这里主要的不确定性来自于第二级 $(\alpha^2)$ 电子自能中的结合因子 $(Z\alpha)$ 的高级项. Lundeen 和 Pipkin 的最近的实验值为 (1975)

$$1057.893 \pm 0.020\text{MHz},$$

而 Andrews 和 Newton 的为 (1976)

$$1057.862 \pm 0.020\text{MHz}.$$

## 7-3-3 大距离处的 Van der Waals 力

我们回到在第三章中引入的可极化中性体系之间的大距离位势问题. 这里的推导仿照了 Feinberg 和 Sucher 的工作.

我们已看到，唯象的哈密顿量密度，可以说明由缓变场中的标量厄米场 $\varphi$ 所描写的可极化中性粒子的作用能. 它为

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = g_1 \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi F^{\alpha\gamma} F^{\beta}_{\gamma} + g_2 \varphi^2 F^2,$$

$$g_1 = \frac{\alpha_E + \alpha_B}{2m}, \tag{7-123}$$

$$g_2 = -\frac{m}{4}\alpha_B.$$

耦合常数 $g_1$ 和 $g_2$ 与电 $(\alpha_E)$ 和磁 $(\alpha_B)$ 的磁化率有关，它使得静止粒子贡献形为

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = -\alpha_E \frac{\mathbf{E}^2}{2} - \alpha_B \frac{\mathbf{B}^2}{2} \tag{7-124}$$

的相互作用能量. 所考虑的体系可以例如是原子，除了参量 $\alpha_E$ 和 $\alpha_B$ 外，体系的内部结构是不考虑的. 注意，这些量具有体积的量纲. 为了在这种体系之间定义一个静态相互作用位势，我们这样来做. 设 $\alpha_E$ 和 $\alpha_B$ 足够小，使低能区域的散射振幅的 Born 项按照黄金规则和势的 Fourier 变换恒等:

$$d\sigma_{ab}^{\text{Born}} = \frac{1}{v_{ab}} |-i\tilde{V}(\mathbf{q})|^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(E_f - E_i), \tag{7-125}$$

这里 $v_{ab}$ 是粒子 $a$ 和 $b$ 的相对速度，$\mathbf{q}$ 是转移的动量，而 $\tilde{V}(q)$ 定义为

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \tag{7-126}$$

令 $\mathscr{F}$ 是由相互作用式 (7-123) 引起的、精确到最低级的完全相对论散射振幅（见图 7-16）。我们来研究相对论散射截面的阈行为，即极限 $(p_a + p_b)^2 \to (m_a + m_b)^2$ 时的行为：

$$d\sigma^R_{ab} = \frac{1}{4[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2}} |\mathscr{F}|^2 \times \frac{d^3p'_a d^3p'_b}{(2\pi)^3(2E'_a)(2\pi)^3(2E'_b)} (2\pi)^4 \delta^4(p'_a + p'_b - p_a - p_b).$$

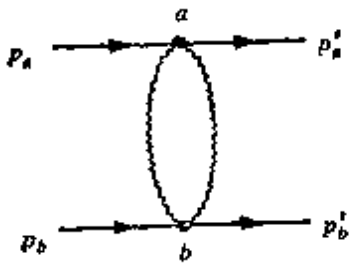



图 7-16　由电和磁的磁化率引起的中性体系之间的相互作用

在此极限下，$p_a \cdot p_b \simeq m_a m_b + (p^2/2)[(m_a + m_b)^2/m_a m_b]$，其中 $p = |\mathbf{p}|$ 等于质心系中粒子 $a$ 和 $b$ 的共同的三维动量的大小。于是，

$$[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2} \simeq (m_a + m_b)p \simeq m_a m_b \left| \frac{\mathbf{p}}{m_a} - \frac{-\mathbf{p}}{m_b} \right| = m_a m_b v_{ab},$$

而

$$d\sigma^R \to \frac{1}{v_{ab}} \left| \frac{\mathscr{F}}{4m_a m_b} \right|^2 \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(E_f - E_i). \tag{7-127}$$

这表示接近阈处有

$$-i\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{\mathscr{F}}{4m_a m_b}, \tag{7-128}$$

这里 $-\mathbf{q}^2$ 可以和相对论动量转移的平方 $q^2 = (p_a - p'_a)^2$ 恒等，而质心系能量的平方 $s = (p_a + p_b)^2$ 取成等于 $(m_a + m_b)^2$。

从式 (7-123) 可对 $\mathscr{F}$ 计算到图 7-16 所示的 $g^2$ 级。这又是一个有很强的紫外发散的单圈图。由于耦合常数有量纲，所以基于式 (7-123)

上的理论是不可重整的．但是，我们允许只将它作为唯象的描写，并且照样可以到任何一级进行有限次数的紫外减除，而不修改我们所要寻找的 $V$ 的长程行为．于是，对我们的目的来说是没有问题的．微扰论中所要的基本收缩是

$$\langle 0|TF_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y)|0\rangle = -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik\cdot(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}K_{\mu\nu,\rho\sigma}(k),$$
$$K_{\mu\nu,\rho\sigma}(k)=k_\rho k_\sigma g_{\nu\sigma}-k_\nu k_\rho g_{\mu\sigma}-k_\mu k_\sigma g_{\nu\rho}+k_\nu k_\sigma g_{\mu\rho}. \tag{7-129}$$

在任何减除之前，Feynman 规则给出下列形式的振幅 $\mathscr{F}$：

$$\mathscr{F}=\int\frac{d^4kd^4k'\delta(k+k'-q)}{(2\pi)^4(k^2+i\varepsilon)(k'^2+i\varepsilon)}d(k,k'),$$
$$\begin{aligned}d(k,k')=&8g_1^ag_1^bK_{\mu\nu,\rho\sigma}(k)K^{\mu\nu,\rho\sigma}(k')\\&+[4g_1^ag_1^b(p_\alpha^ap'^\alpha_\beta+p_\beta^ap'^\alpha_\alpha)K^{\alpha\nu,\rho\sigma}(k)K^\beta_{\alpha,\rho\sigma}(k')\\&+(a\longleftrightarrow b)]+g_1^ag_1^b[(p_\alpha^cp'^\alpha_\beta+p_\beta^ap'^\alpha_\alpha)K^{\alpha\nu,\alpha'\nu'}(k)\\&\times K^\beta_{\nu'}{}^{,\beta'}_{\nu'}(k')(p_{\alpha'}^bp'^b_{\beta'}+p_{\beta'}^bp'^b_{\alpha'})+(k\longleftrightarrow k')].\end{aligned}\tag{7-130}$$

我们发现对固定的 $s=(p_a+p_b)^2$，$\mathscr{F}$ 是沿半轴 $q^2<0$ 解析的(并是纯虚的)，由此可找到一个在不修改长程行为下完成紫外减除的方便的方法．它的沿实轴的割线是由实部引起的，而我们只对 $q^2=0$ 的邻域感兴趣．于是，可写成

$$\mathscr{F}=\frac{1}{i\pi}\int_0^{M^2}dm^2\frac{\mathscr{F}_R(m^2)}{m^2-q^2-i\varepsilon}+\Delta\mathscr{F}(q^2), \tag{7-131}$$

其中 $\Delta\mathscr{F}$ 在 $q^2=0$ 的邻域内是正则的，$M^2$ 是正的和任意的．因此，从式(7-126)和(7-128)得到势的渐近部分为

$$\begin{aligned}V_{as}(r)&=\frac{1}{16\pi^2i\,m_am_br^2}\int_0^{M^2}dm^2\mathscr{F}_R(m^2)e^{-mr}\\&=\frac{1}{16\pi^2m_am_br^3}\int_0^{M^2r^2}dy^2\mathscr{F}_R\left(\frac{y^2}{r^2}\right)e^{-y}.\end{aligned}\tag{7-132}$$

我们将立即看到，$q^2\to0$ 时 $\mathscr{F}_R(q^2)$ 的行为象 $-A^2(q^2)$ 那样，所以 $V$ 的主要部分将通过在式(7-132)中取极限 $Mr\to\infty$ 而得到，即

$$V_{as}(r)=\frac{-A}{16\pi^2m_am_br^7}\int_0^\infty dx^2x^4e^{-x}=-\frac{5!A}{8\pi^2m_am_br^7}. \tag{7-133}$$

剩下来的是要计算 $A$．为了作此计算，我们注意到式(7-130)的每一

个分母都可以按照 $1/(k^2+i\varepsilon)=PP/k^2-i\pi\delta(k^2)$ 来分成两项. 这里 $PP$ 表示主值部分，我们把它缩写为 $P-i\pi\delta$. 除了多项式 $d$ 以外，式 (7-130) 中的被积函数形为

$$(P-i\pi\delta)(P'-i\pi\delta')=PP'-\pi^2\delta\delta'-i\pi(\delta P'+\delta' P).$$

当然，这正是形态空间中 $[G_F(x-y)]^2$ 的 Fourier 变换，而 $G_F$ 是 Feynman 传播子. 于是，$d$ 的效应是作为微商的多项式而作用于这个量上. 现在如果不用 $G_F^2$ 而用最多在 $x=y$ 处有一支集的乘积 $G_{adv}(x-y)G_{ret}(x-y)$，则通过 Fourier 变换我们得到一个定义不确的动量的多项式，它对 $\mathscr{F}$ 的实部没有贡献. 因此，在我们的讨论中，替代

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\frac{1}{k'^2+i\varepsilon}\longrightarrow\frac{1}{k^2+i(k^0/|k^0|)\varepsilon}\frac{1}{k'^2-i(k'^0/|k'^0|)\varepsilon}$$

将导致零. 这意味着我们可以对上面的贡献减去组合

$$(P-i\pi\varepsilon\delta)(P'+i\pi\varepsilon'\delta')=PP'+\pi^2\varepsilon\varepsilon'\delta\delta'+i\pi(P\varepsilon'\delta'-P'\varepsilon\delta),$$

其中 $\varepsilon\delta$ 表示 $(k^0/|k^0|)\delta(k^2)$. 结果是

$$(PP'-\pi^2\delta\delta')-(PP'+\pi^2\varepsilon\varepsilon'\delta\delta')=-\pi^2(1+\varepsilon\varepsilon')\delta\delta'.$$

注意，如果 $k^0$ 和 $k'^0$ 是同号的，则 $1+\varepsilon\varepsilon'=2$，否则为零，而 $\delta$ 函数把光子投影在质壳上. $q^2>0$ 时，能动量守恒 $k+k'=q$ 表示我们可以只保留两种可能性 $k^0>0$，$k'^0>0$ 中的一种. 现在我们有

$$\mathscr{F}_R=-\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{2k'^0(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(k+k'-q)\times d(k,k')|_{k^2=k'^2=0}\qquad(7\text{-}134)$$

这种冗长的推导正是 Cutkosky 规则(第六章)对此特殊情形的应用. 当然，方程 (7-134) 给出的量 $\mathscr{F}_R$ 是收敛的，所以只要它在 $q^2=0$ 附带的主导行为. 我们首先来计算式 (7-130) 中的 $d(k,k')$. 它的显式稍为有些复杂:

$$\begin{aligned}d(k,k')|_{k^2=k'^2=0}=&\,64g_1^ag_1^b(k\cdot k')^2+16g_1^ag_1^b(p^a\cdot p'^a)(k\cdot k')^2\\&+16g_1^bg_2^a(p^b\cdot p'^b)(k\cdot k')^2+4g_1^ag_1^b[(p^a\cdot p^b)\\&\times(p'^a\cdot p'^b)(k\cdot k')^2-(p^a\cdot p^b)(p'^a\cdot k)\\&\times(p'^b\cdot k')(k\cdot k')-(p^a\cdot p^b)(p'^a\cdot k')(p'^b\cdot k)(k\cdot k')\\&-(p'^a\cdot p'^b)(p^a\cdot k')(p^b\cdot k)(k\cdot k')-(p'^a\cdot p'^b)\end{aligned}$$

$$\times(p^a\cdot k)(p^b\cdot k')(k\cdot k')+(p'^a\cdot p^b)(p^a\cdot p'^b)$$
$$\times(k\cdot k')^2-(p'^a\cdot p^b)(p^a\cdot k)(p'^b\cdot k')(k\cdot k')$$
$$-(p'^a\cdot p^b)(p^a\cdot k')(p'^b\cdot k)(k\cdot k')-(p^a\cdot p'^b)$$
$$\times(p'^a\cdot k')(p^b\cdot k)(k\cdot k')-(p^a\cdot p'^b)(p'^a\cdot k)$$
$$\times(p^b\cdot k')(k\cdot k')+(p^a\cdot p'^a)(p^b\cdot k)(p'^b\cdot k')(k\cdot k')$$
$$+(p^a\cdot p'^a)(p^b\cdot k')(p'^b\cdot k)(k\cdot k')+(p^b\cdot p'^b)$$
$$\times(p^a\cdot k)(p'^a\cdot k')(k\cdot k')+(p^b\cdot p'^b)(p^a\cdot k')$$
$$\times(p'^a\cdot k)(k\cdot k')+2(p^a\cdot k')(p'^a\cdot k')(p^b\cdot k)(p'^b\cdot k)$$
$$+2(p^a\cdot k)(p'^a\cdot k)(p^b\cdot k')(p'^b\cdot k')]. \qquad (7\text{-}135)$$

我们有 $2k\cdot k'=q^2$，所以来求积分后 $(q^2)^2$ 的系数．和 $(q^2)^2$ 相乘的 $p^a\cdot p^b$ 或 $p^a\cdot p'^a$，$\cdots$ 型的标量积，可以用 $m_a m_b$，$m_a^2$，$\cdots$来代替．我们得到

$$\mathscr{T}_R=-\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{2k'^0(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(k+k'-q)d$$
$$=-\frac{\theta(q^2)}{16\pi}\langle d\rangle, \qquad (7\text{-}136)$$

其中 $\langle d\rangle$ 只是接近阈的 $q^2$ 的函数，它为

$$\langle d\rangle=\frac{\int(d^3k/k^0)(d^3k'/k'^0)\delta^4(k+k'-q)d}{\int(d^3k/k^0)(d^3k'/k'^0)\delta^4(k+k'-q)}. \qquad (7\text{-}137)$$

我们要用到

$$\langle k_\mu k'_\nu\rangle=\frac{1}{6}q_\mu q_\nu+\frac{1}{12}g_{\mu\nu}q^2, \qquad (7\text{-}138)$$

这是在注意到迹是 $q^2/2$ 后得到的，还要用到

$$\langle k'_\mu k'_\nu k_\alpha k_\beta\rangle=aq_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta+b(q_\mu q_\nu g_{\alpha\beta}+q_\alpha q_\beta g_{\mu\nu})q^2$$
$$+cq^2(q_\mu q_\alpha g_{\nu\beta}+q_\nu q_\alpha g_{\mu\beta}+q_\mu q_\beta q_{\nu\alpha}+q_\nu q_\beta g_{\mu\alpha})$$
$$+d(q^2)^2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}+e(q^2)^2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}), \qquad (7\text{-}139)$$

式(7-139)的形式是忽略了所有的、具有 $q^2$ 的高幂次行为的项，并应用了在交换 $(\mu\leftrightarrow\nu)$，$(\alpha\leftrightarrow\beta)$，$(\mu,\ \nu\leftrightarrow\alpha,\ \beta)$ 下的明显对称性后得到的．为了得到五个系数 $a$，$b$，$c$，$d$ 和 $e$，我们用下面五个条件：

(a) 对 $(\mu,\nu)$ 取部分迹时必须得到零(质壳条件)，这表示

$$a + 4b + 4c = 0, \quad b + 4d + 2e = 0.$$

(b) 对 $(\nu,\alpha)$ 取部分迹时，得到早已算得的 $(q^2/2)\langle k'_\mu k_\beta\rangle$；于是

$$a + 2b + 6c = \frac{1}{12}, \quad c + d + 5e = \frac{1}{24}.$$

(c) 最后，和 $q^\rho q^\sigma q^\alpha q^\beta$ 缩并得到 $(q^2/2)^4$；于是

$$a + 2b + 4c + d + 2e = \frac{1}{16}.$$

解此方程组，就得到以后需要的系数为

$$d = e = \frac{1}{15\times 16}. \tag{7-140}$$

在阈处，我们有

$$\begin{aligned}\langle d\rangle = {} & 64 g_1^a g_2^b \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 + 16 g_1^a g_1^b \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 m_a^2 \\ & + 16 g_1^b g_1^a \left(\frac{q^2}{2}\right)^2 m_b^2 + 4 g_1^a g_1^b \left(2 m_a^2 m_b^2 \left(\frac{q^2}{2}\right)^2\right. \\ & - \frac{q^2}{12}\{(p^a\cdot p^b)[2(q\cdot p'^a)(q\cdot p'^b) + q^2(p'^a\cdot p'^b)] \\ & + (p'^a\cdot p'^b)[2(q\cdot p^a)(q\cdot p^b) + q^2(p^a\cdot p^b)] \\ & + (p'^a\cdot p^b)[2(q\cdot p^a)(q\cdot p'^b) + q^2(p^a\cdot p'^b)] \\ & + (p^a\cdot p'^b)\{2(q\cdot p'^a)(q\cdot p'^b) + q^2(p'^a\cdot p^b)]\} \\ & + \frac{q^2}{12}\{(p^a\cdot p'^a)[2(q\cdot p^b)(q\cdot p'^b) + q^2(p^b\cdot p'^b)] \\ & + (p^b\cdot p'^b)[2(q\cdot p^a)(q\cdot p'^a) + q^2(p^a\cdot p'^a)]\} \\ & \left. + 4\langle (p^a\cdot k')(p'^a\cdot k')(p^b\cdot k)(p'^b\cdot k)\rangle\right),\end{aligned} \tag{7-141}$$

但 $q\cdot p^a$, $q\cdot p'^a$, $q\cdot p^b$, $q\cdot p'^b$ 都正比于 $q^2$. 例如

$$q\cdot p^a = (p'^a - p^a)\left(\frac{p^a + p'^a}{2} + \frac{p^a - p'^a}{2}\right) = -\frac{q^2}{2}.$$

于是，当分出 $(q^2)^2$ 的系数时，所有包含以 $q$ 与外动量的标量积作为系数的项都忽略了. 特别是最后一个平均值的贡献约化为

$$\begin{aligned}&\langle (p^a\cdot k')(p'^a\cdot k')(p^b\cdot k)(p'^b\cdot k)\rangle \\ &\quad = m_a^2 m_b^2 (q^2)^2 (d + 2e) = \frac{m_a^2 m_b^2 (q^2)^2}{80}.\end{aligned}$$

用 $\mathscr{F}_R = -A(q^2)^2 + \cdots$ 定义的系数 $A$ 就等于

$$A=\frac{1}{16\pi}\left[16g_2^4g_1^b+4\left(m_a^2g_1^ag_2^b+m_b^2g_1^bg_2^a\right)\right.$$
$$\left.+\frac{23}{15}m_a^2m_b^2g_1^ag_1^b\right]=\frac{m_am_b}{16\pi}\left[\alpha_E^a\alpha_B^b-\frac{1}{2}(\alpha_E^a+\alpha_B^a)\alpha_B^b\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\alpha_E^b+\alpha_B^b)\alpha_B^a+\frac{23}{60}(\alpha_E^a+\alpha_B^a)(\alpha_E^b+\alpha_B^b)\right]. \quad (7\text{-}142)$$

回到方程(7-133)，就得到 Van der Waals 力的渐近行为为

$$V_{as}(r)=\frac{[23(\alpha_E^a\alpha_E^b+\alpha_B^a\alpha_B^b)-7(\alpha_E^a\alpha_B^b+\alpha_E^b\alpha_B^a)]}{(4\pi)^3r^7}. \quad (7\text{-}143)$$

作为本节的结尾，我们来简短地评述一下在不考虑延迟效应时，$1/r^7$ 型的相对论势和通常非相对论的 $1/r^6$ 律之间的关系. 在非相对论计算中，我们只包含瞬时 Coulomb 力. 为简单起见，考虑两个相距 $|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|$ 的氢原子，其中电子位于 $\mathbf{r}_a+\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_b+\mathbf{r}_2$ 处. 忽略自旋和 Pauli 原理，相互作用的势就可写为

$$V=\frac{e^2}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|}+\frac{1}{|\mathbf{r}_a+\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_b-\mathbf{r}_2|}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{r}_a+\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_b|}-\frac{1}{|\mathbf{r}_b+\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_a|}\right).$$

在大的间距下，忽略对角度的依赖关系时，定性上它形为 $(e^2/4\pi r_{ab}^3)r_1r_2$，但是，由于对角度有依赖关系，使微扰的第一级效应为零(我们用了绝热近似). 精确到第二级时，我们得到如下的负的贡献:

$$V^{\text{nr}}\sim-\frac{1}{(r_{ab})^6}\langle e^2r_1^2\rangle_a\langle e^2r_2^2\rangle_b\frac{1}{\Delta E},$$

这里 $\Delta E$ 是特征原子激发能. 与此类似，每个原子的(电)磁化率 $\alpha$ 是通过对微扰 $e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$ 计算到第二级而得到的，结果为

$$\alpha\sim\frac{\langle e^2r^2\rangle}{\Delta E}.$$

总起来我们得到

$$V^{\text{nr}}\sim-\frac{\Delta E\alpha_a\alpha_b}{(r_{ab})^6}.$$

于是，我们预期 $r^{-6}$ 和 $r^{-7}$ 律之间的内插公式，包含了正比于 $\hbar/\Delta E$ 的特

征延迟时间 $\tau$. 两个区域之间的跃迁将出现于 $c\tau = \hbar c/\Delta E$ 量级的距离上，这里 $\Delta E$ 可取为电离能的一部分. 对氢原子，估计为 $10^2$ 倍 Bohr 半径的量级. 在实际的流体理论中，这表示我们总是可以用非相对论近似.

## 注记

辐射修正在所有的教科书中都有讨论，许多原始文献在 Schwinger 的 "Quantum Eectrodynamics", Dover, New York, 1958 都有引用. 这里，我们列一个简单的表.

各个内容的文献如下： 规范不变的正规化在 W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 21, p. 434, 1949 中；真空极化，$k^0 \to 0$ 极限在 E. A. Uehling, *Phys. Rev.*, Vol. 48, p. 55, 1935 中；在 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, Vol. 75, p. 651, 1949 中有完整的讨论；Ward 等式在 J. C. Ward, *Phys. Rev.*, Vol. 78, p. 182, 1950, 和 Y. Takahashi, Nuovo Cim., vol. 6, p. 371, 1957 中；精确到 $\alpha$ 级的电子反常在 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 73, p. 416, 1948 中；精确到 $\alpha$ 级的电子形状因子在 R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, vol. 76, p. 769, 1949 中；60 年代关于高级修正的工作总述在 B. Lautrup, A. Peterman, and E. de Rafael, *Physics Reports*, vol. 3C, p. 193, 1972 中；本书中引用的最新的理论值来自 P. Cvitanovic and T. Kinoshita, *Phys. Rev.*, ser. D, vol. 10, p. 4007, 1974. 许多理论物理学家对这种努力都有贡献. 惊人的精确的实验值归功于 R. S. Van-Dyck, P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, p. 310, 1977. $\mu$ 反常的实验值取自 J. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, F. Farley, J. Field, W. Flegel, P. Hattersley, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, and W. Von Rüden, *Phys. Lett.*,

vol. 68*B*, p. 191, 1977, 而理论的预言值取自 J. Calmet, S. Narison, M. Perrottet, and E. de Rafael, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 49, p. 21, 1977. 对 Coulomb 散射的辐射修正的最早的讨论,归功于 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 75, p. 1912, 1949. 我们部分地跟随着 A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, "Quantum Electrodynamics", Interscience Publishers, New York, 1965 的描述, 该书中有极为详尽的计算. 关于红外发散,我们向读者推荐在第四章引用的 D. Yennie, S. Frautchi, and H. Suura 的工作. 关于 Lamb 位移及氢原子体系的一般讨论,可参考 H. A. Bethe and E. Salpeter, "Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms", Springer-Verlag, Berlin, 1957. 关键的实验证据来自 W. E. Lamb and R. C. Retherford, *Phys. Rev.*, vol. 72, p. 241, 1947. 50 年代中更精细的测量是 S. Triebwasser, E. S. Dayhoff, and W. E. Lamb 作的, *Phys. Rev.*, vol. 89, p. 98, 1953.

本书中引用的最新值取自 S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 34, p. 1368, 1975 和 D. A. Andrews and G. Newton, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, p. 1254, 1976. 早期的理论贡献有: H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, vol. 72, p. 339, 1947, 他讨论了非相对论情形; N. M. Kroll and W. E. Lamb, *Phys. Rev.*, vol. 75, p. 388, 1949, 和 J. B. French and V. F. Weisskopf, Phys. Rev., vol. 75, p. 1240, 1949, 他们讨论了相对论情形. 关于精确到所有级效应的自洽的理论,例如可参见 G. W. Erickson and D. R. Yennie, *Annals of Physics*, vol. 35, p. 271 和 447, 1965. 理论预言值取自 G. W. Erickson, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 27, p. 780, 1971 和 P. J. Mohr, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 34, p. 1050, 1975.

关于这些较高级计算所达到的精确度的最新的估计, 我

们可参考 T. Kinoshita 在 "Perspective of Quantum Physics", published by Iwanami Shoten, Tokyo 中的评述.

自不待言,上面所列的简短的参考文献表,并没有完全公平地对待关于量子电动力学的大量的、漂亮的理论和实验工作.

目录 1
第一章 经典理论 9
1-1 最小作用原理 9
经典运动 9
电磁场作为一个无穷大动力系统 17
点粒子的电磁相互作用 25
1-2 对称性和守恒定律 35
基本的不变量 35
能量-动量张量 39
内部对称性 46
1-3 传播与辐射 50
Green函数 50
辐射 56
注记 67
第二章 Dirac方程 68
2-1 相对论波动方程的建立 68
量子力学和相对论 68
Dirac方程 72
相对论协变性 75
2-2 物理内容 81
平面波解和投影算符 81
波包 87
电磁耦合 92
Foldy-Wouthuysen变换 99
2-3 类氢原子 103
非相对论谱与相对论谱的比较 103
Dirac理论 105
2-4 空穴理论和电荷共轭 119
负能解的重新解释 119
电荷共轭 121
零质量粒子 123
2-5 Dirac传播子 126
自由传播子 126
在任意外电磁场中的传播 131
对Coulomb散射的应用 133
Fock-Schwinger固有时间方法 139
注记 147
第三章 自由场的量子化 149
3-1 正则量子化 149
一般形式 151
标量场 161
荷电标量场 169
编时乘积 172
热力学平衡 174
3-2 量子化的辐射场 177
不定度规 177
传播子 186
有质量的矢量场 188
真空涨落 193
3-3 Dirac场和不相容原理 199
反对易子 200
费米子的Fock空间 204
自旋和统计之间的关系--传播子 208

3-4 分立对称性 211
宇称 212
电荷共轭 213
时间反演 216
总结 218
注记 226
第四章 和外场的相互作用 228
4-1 和经典源相互作用的量子化电磁场 228
发射机率 228
发射的能量和红外灾难 237
感生吸收和感生发射 241
S矩阵和演化算符 244
4-2 Wick定理 250
Bose场 250
Fermi场 253
一般情况 257
4-3 量子Dirac场和经典势的作用 258
一般描述 258
精确到最低级的发射几率 266
在恒定均匀电场中的粒子对产生 268
Euler-Heisenberg等效拉氏函数 271
注记 274
第五章 基本过程 275
5-1 S矩阵和渐进理论 275
截面 276
渐进理论 280
約化公式 284
生成泛函 287
连接部分 291
费米子 294
光子 299
5-2 应用 309
Compton效应 309
粒子对湮灭 318
电子偶素的寿命 321
韧致辐射 328
5-3 么正性和因果性 332
么正性和分波分解 333
因果性和解析性 339
Jost-Lehmann-Dyson表示 344
向前色散关系 346
动量转移解析性 353
注记 358
第六章 微挠论 360
6-1 积分表示和Feynman规则 360
自作用标量场 361
旋量电动力学的Feynman规则 373
电子-电子和电子-正电子散射 380
标量场电动力学 387
6-2 图论 394
圈展开 394
截脚和固有的图形 396
参量表示 403
欧氏空间的Green函数 409

6-3 解析性 413
Landau方程 414
实奇异性 418
简单图的实奇异性 422
物理区奇异性 Cutkosky规则 430
注记 433
第七章 辐射修正 436
7-1 单圈图重整化 436
真空极化 437
电子传播子 451
顶角函数 460
总结 470
7-2 和外场相互作用时的辐射修正 476
等效相互作用和反常磁矩 476
对Coulomb散射的辐射修正 479
软韧致辐射 484
有限的单举截面 486
7-3 新的效应 488
光子-光子散射 488
Lamb位移 492
大距离处的Van der Waals力 502
注记 508