量子场论

下册

〔法〕C. 依揍克森
J-B. 祖柏尔 著

科学出版社

量子场论

下册

〔法〕C. 依捷克森　J-B. 祖柏尔 著

杜东生　沈齐兴　徐德之　黄　涛 译

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是目前世界上量子场论方面流行的一本教学参考书．其特点是，既囊括了量子场论的主要内容，又包括了量子场论的最新发展，并且每章中都有大量的习题．每章后以“注记”的形式给出了一定数量的参考文献，以给出某种展望、提供材料的来源及进一步的阅读材料．本书分上、下两册出版，全书内容大致可分成两部分，前八章主要论述从标准的电动力学的量子化，直至微扰论重整化，后五章论述泛函方法、相对论束缚态、破缺对称性、非阿贝尔规范场及渐近行为．

本书可供大学物理专业高年级学生、研究生、大学教师及研究工作者参考．

Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber
QUANTUM FIELD THEORY
McGraw-Hill Inc. 1980

量 子 场 论

下 册

〔法〕C. 依捷克森　J-B. 祖柏尔 著
毕树生　沈齐兴　徐德之　黄　涛 译
责任编辑　王昌泰

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街 137 号
[illegible]印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1986 年 10 月第 一 版　开本：787×1092　1/32
1986 年 10 月第一次印刷　印张：14 3/8
印数：0001—3,700　字数：328,000
统一书号：13031・3308
本社书号：4863・13—3
定价：3.35 元

目　　录

上　　册

第一章　经典理论……

第二章　Dirac 方程……

第三章　自由场的量子化……

第四章　和外场的相互作用……

第五章　基本过程……

第六章　微扰论……

第七章　辐射修正……

下　　册

第八章　重整化…… 1

8-1　正规化和幂次计数法 …… 1

8-1-1　引言 …… 1

8-1-2　正规化 …… 3

各种方法的评述

8-1-3　幂次计数法 …… 11

表观发散度，可重整化的相互作用和不可重整化的相互作用

8-1-4　收敛性定理 …… 15

8-2　重整化 …… 19

8-2-1　归一化条件和抵消项的结构 …… 19

归一化条件的重要性和它们的任意性。 重整化运算的相乘特性
8-2-2 Bogoliubov 的递推公式 …… 25
R运算
8-2-3 Zimmermann 的明显解 …… 29
8-2-4 参量空间的重整化 …… 32
在参量空间中 Zimmermann 运算的形式。 关于 Bogoliubov-Parasiuk-Hepp 收敛性定理的启示
8-2-5 有限重整化 …… 36
8-2-6 复合算符 …… 38
矩阵形式的相乘性重整化
8-3 零质量极限，渐近行为和 Weinberg 定理…… 42
8-3-1 无质量理论 …… 42
红外幂次计数法，Kinoshita-Lee-Nauenberg定理。
8-3-2 紫外行为和 Weinberg 定理…… 46
8-4 量子电动力学情况 …… 48
8-4-1 Ward-Takahashi等式的形式推导…… 49
8-4-2 保持到所有级的 Pauli-Villars 正规化…… 53
8-4-3 重整化 …… 56
8-4-4 双圈真空极化 …… 59
利用维数正规化，在无质量量子电动力学中作的一个计算实例
第九章 泛函方法…… 75
9-1 路径积分 …… 75
9-1-1 量子力学中经典作用量的作用 …… 75
时间演化算符的矩阵元。 沿经典轨迹的路径积分。 谐振子和在外力作用下的演化。 微分形式。散射。Eikonal 近似
9-1-2 Bargmann-Fock 空间中的轨迹 …… 88
解析函数的 Hilbert 空间。算符的解析核。正常形式。应用于路径积分

9-1-3 费米子体系 …… 93
外代数．微商和积分．解析函数． 跃迁振幅
9-2 相对论描述 …… 97
9-2-1 用路径积分来表示的 S 矩阵和 Green 函数 …… 98
作为路径积分的生成泛函．运动方程
9-2-2 有效作用量和最陡下降法 …… 105
零经典场附近半经典展开的微扰理论．等效势．直到 $\hbar^2$ 阶的明显的计算
9-3 约束系统 …… 115
9-3-1 一般讨论 …… 115
约束系统的正则结构．辅助条件． 按照原始变量的量子化
9-3-2 以电磁场为例 …… 122
9-4 高阶微扰论 …… 125
9-4-1 引言 …… 125
微扰理论的发散．Borel 变换
9-4-2 非谐振子 …… 130
Feynman-Kac 公式． 欧氏作用量．有限作用量的经典解．在简并极限附近的涨落． 高阶基态能量的 Bender 和 Wu 表达式
第十章 积分方程和束缚态问题 …… 141
10-1 Dyson-Schwinger 方程 …… 141
10-1-1 场方程 …… 141
泛函方法和积分方程
10-1-2 重整化 …… 148
10-2 相对论束缚态 …… 149
10-2-1 齐次 Bethe-Salpeter 方程 …… 150
方程的推导． 解的归一化．
10-2-2 Wick 转动 …… 154
稳定性条件和到欧氏变量的转动．
10-2-3 在梯形近似下无质量标量粒子交换 …… 157

Wick-Cutkosy 模型．共形变换．一维约化．反常解

10-3 正负电子偶素的超精细分裂…… 166

10-3-1 一般讨论 …… 169

瞬时近似．Salpeter 的微扰理论

10-3-2 α' 级计算 …… 176

单态至-重态基态分裂的 Karplus 和 Klein 表示．

第十一章 对称性…… 190

11-1 对称性的量子实现…… 190

11-1-1 问题的叙述 …… 190

11-1-2 基态行为 …… 193

Coleman 定理

11-2 质量谱、多重性和 Goldstone 玻色子…… 195

11-2-1 Gell-Mann 和 Ne'eman 的八重法模型…… 195

同位旋和，幺正对称．表示和权图．Gell-Mann 和 Okubo 的质量公式

11-2-2 自发对称性破缺 …… 203

Goldstone 定理，来自量子修正的不稳定性．较低的临界维数．

11-3 流代数…… 211

11-3-1 流对易子 …… 211

荷和流的代数．Schwinger 项．Cabibbo 和 Radicati 求和规则，Adler 求和规则和 Bjorken 求和规则．

11-3-2 轴矢流近似守恒和手征对称性 …… 222

π 介子作为 Goldstone 粒子．Goldberger-Treiman 关系和以 π 介子极点为主

11-3-3 低能定理和求和规则 …… 224

Compton散射的低能定理．Drell-Hearn求和规则关系．π 介子-核子散射长度以及Adler-Weisberger

11-4 σ 模型 …… 230
11-4-1 模型的描述 …… 231
Gell-Mann 和 Levy 的拉氏量. 明显的和自发的对称破缺.
11-4-2 重整化 …… 234
Ward 恒等式. 软的和硬的破缺. 非线性 σ 模型
11-5 反常 …… 243
11-5-1 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变和流代数 …… 234
Veltman-Sutherland 佯谬
11-5-2 σ 模型中的轴反常 …… 245
在模型中 Adler-Bell-Jackiw 反常的明显计算
11-5-3 一般性质 …… 252
第十二章 非阿贝尔规范场 …… 261
12-1 经典理论 …… 261
12-1-1 规范场 A_μ 和张量 $F_{\mu\nu}$ …… 262
几何解释
12-1-2 经典动力学 …… 268
运动方程和能量-动量张量
12-1-3 经典运动方程的欧氏解 …… 271
基态的简并和瞬子
12-1-4 规范不变性和约束条件 …… 275
12-2 规范场的量子化 …… 278
12-2-1 有约束的量子化 …… 278
12-2-2 对规范群的积分 …… 282
Faddeev-Popov 行列式和鬼态
12-2-3 Feynman 规则 …… 288
协变规范和轴规范
12-3 单圈图近似下的等效作用量 …… 292
12-3-1 一般形式 …… 292

12-3-2 两点函数 …… 295
12-3-3 其它函数 …… 299
12-3-4 单圈重整化 …… 303
耦合常数重整化的普适性
12-4 重整化 …… 304
12-4-1 Slavnov-Taylor 恒等式 …… 304
Becchi-Rouet-Stora 变换
12-4-2 正规函数的恒等式 …… 308
12-4-3 用递推法构造抵消项 …… 311
12-4-4 Green 函数的规范相关性 …… 318
12-4-5 反常 …… 319
12-5 有质量的规范场 …… 321
12-5-1 历史背景 …… 321
有质量矢量场作为弱作用或强作用的中间玻色子
12-5-2 有质量的规范理论 …… 326
有质量矢量理论的不可重整性
12-5-3 自发对称破缺 …… 329
Higgs 现象的群论。't Hooft-Polyakov 单极子解
12-5-4 自发破缺规范理论的重整化 …… 336
12-5-5 规范无关性和 S 矩阵的幺正性 …… 339
't Hooft 规范
12-6 Weinberg-Salam 模型 …… 340
12-6-1 轻子的模型 …… 341
12-6-2 电子-中微子截面 …… 346
12-6-3 高次修正 …… 348
12-6-4 强子的加入 …… 350
粲数。Cabibbo 耦合
第十三章 渐近行为 …… 359

13-1 电动力学中的有效电荷…… 359
13-1-1 Gell-Mann 和 Low 函数 …… 360
重整化群．最低阶的函数 Ψ．Landau 鬼态
13-1-2 Callan-Symanzik 方程 …… 366
电动力学中的 β 函数
13-2 破缺标度不变性…… 371
13-2-1 标度不变性和共形不变性…… 372
经典的标度不变性意味着完全共形群下的不变性
13-2-2 修改的 Ward 恒等式 …… 377
普遍情形下 Callan-Symanzik 方程的导出
13-2-3 最低次近似下的 Callan-Symanzik 系数…… 385
φ^4 理论中的计算和非阿贝尔规范场
13-3 标度不变性的恢复…… 388
13-3-1 耦合常数的演化…… 388
紫外和红外固定点．反常量纲
13-3-2 渐近自由…… 392
非阿贝尔规范场对于渐近自由的必要性
13-3-3 质量修正…… 396
Wilson 判据
13-4 轻子-强子深度非弹性散射和电子-正电子湮灭为强子…… 397
13-4-1 电生…… 398
结构函数的标度无关性
13-4-2 光锥动力学…… 402
部分子模型的预言
13-4-3 电子-正电子湮灭 …… 407
比率 $R = \sigma_{e^+e^-\to\text{强子}}/\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}$。对 R_∞ 的修正
13-5 算符乘积展开…… 412

13-5-1 小距离展开 …… 412
举例说明 Zimmermann 的推导
13-5-2 主导算符和次主导算符，算符混合和守恒定律 ……
…… 420
13-5-3 光锥展开 …… 425
Wilson 展开和结构函数的矩。
附录 …… 438
A-1 度规 …… 438
A-2 Dirac 矩阵和旋量 …… 439
A-3 态的归一化、S 矩阵、么正性和截面 …… 444
A-4 Feynman 规则 …… 446

第八章 重 整 化

对所有级图重整化是场论的核心．在讨论各种正规化方法以后，我们提出 Bogoliubov-Zimmermann 减除方案．给出了关于重整化积分收敛性（Weinberg 定理）证明的提示并研究了紫外行为和无质量理论．简略地讨论了复合算符的重整化．在这一章的最后一部分处理规范不变性和重整化的相互影响．

8-1 正规化和幂次计数法

8-1-1 引言

本章系统地研究重整化的步骤．基本原理已经在上一章量子电动力学中描述过了．我们看到，各种发散可以被吸收到重新定义的各种参量中去，如质量、耦合常数等．一个很方便的方法是我们先摆脱某些量子电动力学所特有的困难，即规范不变性问题，来研究标量理论的重整化．由于有对称性而产生的新问题将在这一章末仅对量子电动力学的情况进行讨论，对于其它内部对称性引起的问题将在第十一章和第十二章中讨论．

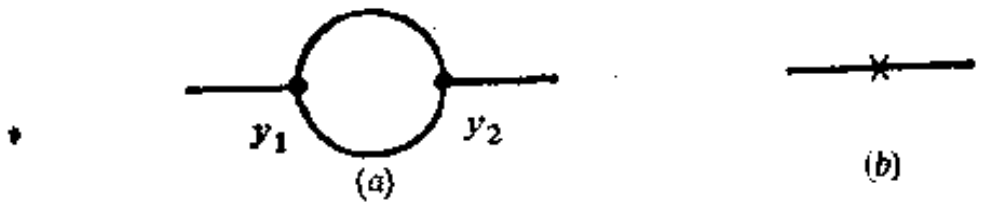


图 8-1 一个发散图形和相关的抵消项

量子场论的奠基者 Tomonaga, Feynman, Dyson, Schwinger 等，首先阐述和研究了重整化的本质和性质. 后来做出贡献的有 Salam, Weinberg, Bogoliubov, Parasiuk 和 Hepp. 近期 Zimmermann 和继他之后的一些科学家，进一步系统地给出了重整化的步骤，而 Epstein 和 Glaser 则提出了一个公理化方法.

这一问题的数学本质是清楚的. 在微扰计算过程中，由于缺乏对广义函数运算的细心处理，出现了发散困难. 例如图8-1a的截腿的自能图就是没有确切定义的表达式 $[G_F(y_1-y_2)]^2$. 当它出现时，这一表达式就没有确切的意义；在动量空间里，它的 Fourier 变换是对数发散的. 正象我们在第七章中见到的，这种发散积分必须被减除. 因为我们要求在位形空间里减除是定域的，这一运算相当于拉氏函数中的参量用一个无穷大量来重新定义. 因此，我们不使用原始拉氏函数中称之为"裸"参量的参量，而用有限的"重整化"的且可观察的参量来重新表达一切计算结果.

在上面的例子里，我们用

$$\Pi(y_1-y_2)=[G_F(y_1-y_2)]^2-S(y_1-y_2)$$

来代替 $G_F^2(y_1-y_2)$，其中 S 是集中在原点的一个广义函数，选取 S 使整个表达式 Π 有意义. 这里选成正比于 δ 函数即可. 例如在 Fourier 表达式里

$$[G_F(y_1-y_2)]^2=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot(y_1-y_2)}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]},$$

将被一个确切定义的表达式

$$\Pi(y_1-y_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip\cdot(y_1-y_2)}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\times\left[\frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+i\varepsilon]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^2}\right]$$

所代替，于是形式上可以写作

$$\Pi(y_1-y_1)=[G_F(y_1-y_2)]^2+A\delta(y_1-y_2). \quad (8\text{-}1)$$

严格地说，常数 A 是一无穷大量，但是形式上在式 (8-1) 中的第二项可以看作图 8-1b 描述的零级抵消项的贡献。对 Π 加上一定的归一化条件后，我们可以明确地确定常数 A。值得强调的是，由于减除是(从而抵消项是)定域的和实的，这一重整化步骤是可行的.

下面我们将见到，这一减除步骤可以用一个系统的办法来叙述。如果在拉氏函数里为了消除 Green 函数的发散困难，仅需要有限类型的附加项，那么重整化理论将依赖于有限数目的参量。这样一个理论就称为可重整化或超可重整化的理论。要证明的是，重整化后的积分是有限的且满足定域性和么正性限制，我们将对这些问题给出简洁的提示。

Dyson 和 Schwinger 提出了一个稍微不同的方法，该方法依赖于固有 Green 函数之间的一组积分方程(见 10-1 节)。遗憾的是，在中间步骤中它也包含有无穷相乘重整化常数。

最后，Epstein 和 Glaser 的最正统的步骤直接依赖于位形空间里定域场论的公理。这一方法没有数学上不确定的量，但隐含着相乘重整化结构。后一点在适当的解释下将导致重整化群的研究(见第十三章)。

8-1-2 正规化

为了对其它形式的、发散的表达式给以确切的意义，作为第一步，重要的是对微扰展开正规化。在作重整化减除以后，可以自由地去掉这一正规化。有好几种方法可达到这一目的。

最终的结果是有限的，且与方法的选择无关。

最简单的方法是作一 Wick 转动，并截断每一个圈的(欧氏）大四动量值。每一个这样的积分将限制在一个紧致的球内，$(k^2)^{\frac{1}{2}} < \Lambda$。这样，当然会使得每一个 Feynman 振幅是有限的，但是它破坏了我们心爱的 Poincaré（或者确切地是欧氏）不变性。因此，它仅仅在启发式地给出重整化思想时采用。另一方法是将时间、空间分立化，即假定位形空间变量 x_μ 仅取分立值，这些分立值，比如说相应于正规晶格的顶点。显然，小距离截断等价于大动量截断。这里也失去了转动不变性。

一个协变的正规化方法可以通过对 Feynman 传播子 $G_F(x-y,m)$ 代以形为

$$G_F^{reg}(x-y) = G_F(x-y,m) + \sum_k C_k G_F(x-y, M_k) \qquad (8\text{-}2)$$

的表达式而得到，其中系数 C_k 是 m 和 M 的函数，适当地选择 C_k 可以去掉 G_F 中某些奇异性。一旦给定了一个收敛性的标准，我们就知道为了使一个给定的理论中的每一个 Feynman 图是有限的可以允许有怎样的奇异度，从而知道在式(8-2)求和中需要多少项。这里我们完全可以说任一给定的图通过这种减除步骤就可以成为有限的。就以引言中所考虑的自能贡献情况为例，如果作下述替代：

$$G_F(x-y,m) \to G_F(x-y,m) - G_F(x-y,M),$$

或在动量空间中作替代

$$\frac{1}{k^2-m^2} \to \frac{1}{k^2-m^2} - \frac{1}{k^2-M^2},$$

在一般情况下，如果总的以 Λ 去标记所有辅助质量 M_k，则令截断参量 Λ 趋向无穷大时，就重新回到原来的传播子。

修改传播子的大动量行为也可以在它的参量表示式中进行。因此这就相当于修改小 α 积分区域为下述形式：

$$\int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)} \to$$

$$\int_0^\infty d\alpha \rho_\Lambda(\alpha) e^{i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)},$$

其中函数 $\rho_\Lambda(\alpha)$ 以及它的某些阶微商在 $\alpha = 0$ 点为零。我们还要求当去掉截断时，即 $\Lambda \to \infty$ 时，对于所有 $\alpha > 0$，有 $\rho_\Lambda(\alpha) \to 1$。例如，$\rho_\Lambda(\alpha)$ 可以取为 $\rho_\Lambda(\alpha) = \theta(\alpha - 1/\Lambda^2)$ 或 $\rho_\Lambda(\alpha) = \alpha^{\lambda-1}$，这里当 $\Lambda \to \infty$ 时 $\lambda \to 1$；后一情况相当于动量空间中的传播子为 $(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-\lambda}$。Speer 曾广泛地研究过这种类型的正规化。

在某些情况里，重要的是应用某些较巧妙的方法来保持某些不变性质，如规范不变性。在前一章提到的 Pauli-Villars 正规化就有这一性质。每一光子传播子被式 (8-2) 形式的求和式所代替。另一方面，费米子传播子仅是那些属于内部封闭费米子圈的被修改。较确切地说，对那些具有 $2n$ 个顶角的闭合圈，改成

$$\mathrm{tr}\left[\prod_{p=1}^{2n} \gamma_{\mu_p} S_F(x_p - x_{p-1}, m)\right]$$

$$- \sum_{s=1}^{S} C_s \mathrm{tr}\left[\prod_{p=1}^{2n} \gamma_{\mu_p} S_F(x_p - x_{p-1}, M_s)\right], \quad (8\text{-}3)$$

其中 $x_0 \equiv x_{2n}$。在 8-4-2 节中将重新详细地考察这一正规化方案。

发散的 Feynman 积分在一个较小的时空维数里将是紫外收敛的。't Hooft 和 Veltman 的维数正规化方案中，是对任一整数时-空维数 d 计算 Feynman 积分，然后将积分结果解析延拓到 d 的任意实数值或复数值。在这一正规化方案里，紫

外发散以 d 的有理数或整数值上的极点形式出现. 我们的最终兴趣是令 d 回到 4，这是物理时-空的维数，因此我们集中注意 $d=4$ 时的单极点和多极点. 这种延拓也可以在 Dirac 矩阵存在时定义，有一个例外就是 γ_5 矩阵，它对 $d=4$（或一般地对偶数时-空维数）是十分特殊的. 这一方法的优点在于它自动地保持不涉及 γ_5 矩阵的内部对称性. 技术上，我们所做的验证 Ward 等式的运算（见第七章或 8-4 节）如象积分变量移动，Lorentz 指标收缩等都是与正规化相一致的.

在作了到欧氏区域的 Wick 转动以后，用第六章得到的参量形式，解析延拓到 d 维时-空是很容易做到的. 确实，我们可以在任意整数维 d 下计算方程(6-94)的振幅(此后省略欧氏动量的脱字号)：

$$(2\pi)^d\delta^d(\sum p)I_G(P)=\int\prod_{l=1}^{I}\frac{d^dk_l}{(2\pi)^d}\cdot\frac{1}{k_l^2+m_l^2}\prod_v(2\pi)^d\delta^d\left(P_v-\sum_l s_{vl}k_l\right). \tag{8-4}$$

6-2-3的方法是很容易做下去的，其结果为

$$I_G(P)=\int_0^\infty\prod_{l=1}^{I}d\alpha_l\frac{\exp-[Q_G(P,\alpha)+\sum\alpha_lm_l^2]}{[(4\pi)^L\mathscr{P}_G(\alpha)]^{d/2}}, \tag{8-5}$$

其中 Q_G 和 $\mathscr{P}_G$ 就是方程(6-86)和(6-87)定义的函数. 如果 $I-dL/2=L\left(1-\frac{d}{2}\right)+V-1>0$，对 α 的齐次性参量 λ 的积分在 $\lambda=0$ 时是收敛的：

$$\begin{aligned}I_G(P)&=\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\lambda^{I-dL/2}\int_0^1\prod_{l=1}^{I}d\alpha_l\cdot\frac{\exp-\lambda[Q_G(P,\alpha)+\sum\alpha_lm_l^2]}{[(4\pi)^L\mathscr{P}_G(\alpha)]^{d/2}}\delta(1-\sum\alpha)\\&=\Gamma\left(1-\frac{dL}{2}\right)\int_0^1\prod_{l=1}^{I}d\alpha_l\delta(1-\sum\alpha)\cdot\frac{[Q_G(P,\alpha)+\sum\alpha_lm_l^2]^{dL/2-I}}{[(4\pi)^L\mathscr{P}_G(\alpha)]^{d/2}}.\end{aligned} \tag{8-6}$$

例如，当 $p,n\geqslant 1$ 时

$$I_G(p)=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p-k)^2+m_1^2]^n(k^2+m_2^2)^p}$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(n+p-d/2)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}$$

$$\cdot\int_0^1 d\alpha\ \alpha^{n-1}(1-\alpha)^{p-1}[\alpha(1-\alpha)p^2+\alpha m_1^2$$

$$+(1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p}. \tag{8-7}$$

对 α 积分后可显示出对 d 的整个依赖关系。对于足够低的 d，其结果是有限的。当 $d\to 4$ 时，方程（8-6）前面的 Euler 函数，或 α 积分，或两者同时会引起紫外发散。然而，对于单圈图来讲，如方程(8-7)，发散仅仅是 $\Gamma(I-dL/2)$。如果 $I-2L$ 是一个非正整数，那么

$$\Gamma\left(I-\frac{dL}{2}\right)\underset{d\to 4}{\sim}\frac{(-1)^{2L-I}}{(2L-I)!}\frac{2}{(4-d)L}, \tag{8-8}$$

因而 $I_G(P)$ 在 $d=4$ 有一个单极点。当来自 α 积分的内部发散也存在时，这个极点可以变成一个多极点（与下面的例子相比较）。

为了完备起见，我们必须讨论如何处理包含 Lorentz 矢量和(或)旋量的积分。前一情况并不具有任何困难。4 矢量变换为 d 矢量，作积分并将结果延拓到任意维数。例如，仍在欧氏空间里，有

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu}{[(p-k)^2+m_1^2]^n(k^2+m_2^2)^p}$$

$$=\frac{p_\mu}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(n+p-d/2)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}$$

$$\times\int_0^1 d\alpha\ \alpha^n(1-\alpha)^{p-1}[\alpha(1-\alpha)p^2+\alpha m_1^2$$

$$+(1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p}, \tag{8-9a}$$

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2+m_1^2]^n(k^2+m_2^2)^p}$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(n)\Gamma(p)}$$

$$\times\left\{\int_0^1 d\alpha\ \alpha^{n-1}(1-\alpha)^{p-1}[\alpha(1-\alpha)p^2+\alpha m_1^2\right.$$

$$+(1-\alpha)m_2^2]^{d/2+1-n-p}\frac{\delta_{\mu\nu}}{2}\Gamma\left(n+p-\frac{d}{2}-1\right)$$

$$+\int_0^1 d\alpha\ \alpha^{n+1}(1-\alpha)^{p-1}[\alpha(1-\alpha)p^2+\alpha m_1^2$$

$$+(1-\alpha)m_2^2]^{d/2-n-p}p_\mu p_\nu\Gamma\left(n+p-\frac{d}{2}\right)\Big\}. \tag{8-9b}$$

在这个表达式里，$\delta_{\mu\nu}$ 是 d 维空间的单位张量，它满足等式

$$\sum_\mu \delta_{\mu\mu}=d. \tag{8-10}$$

在延拓到非整数维数时也保持这个条件. 这种方案保证了此延拓与代数运算自洽，如收缩或积分变量移动. 例如，容易验证

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu\delta^{\mu\nu}-m_2^2}{[(p-k)^2-m_1^2]^n(k^2-m_2^2)^p}$$

$$=\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p-k)^2-m_1^2]^n(k^2-m_2^2)^{p-1}}.$$

有旋量存在时需要更小心点. 首先在原来的四维 Feynman 积分中，我们将费米子圈的 γ 矩阵与那些同外线相联的费米子线相关的 γ 矩阵区分开. 后者用了四维投影算符后就去掉了. 所以对于每一个图我们必须考虑那些仅包含属于费米子圈的 γ 矩阵的形状因子集合. 它们满足下列规则：

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=-2\delta_{\mu\nu} \tag{8-11a}$$

（应记住，我们已经作了 Wick 转动，因此 γ 矩阵现是反厄米的）

$$\mathrm{tr}(\text{奇数个}\ \gamma\ \text{矩阵})=0, \tag{8-11b}$$

$$\mathrm{tr}\ I=f(d), \tag{8-11c}$$

其中 $f(d)$ 是满足 $f(4)=4$ 的一个任意平滑函数，例如 $f(d)=4$ 或 $f(d)=d$. 对于正规化步骤来讲，f 的形式是无关系的.（如果真想去定义 d 维理论 f 的形式并不是无关系的）从式（8-11）规则可以重新构成 γ 矩阵乘积的收缩和求迹的一组等式，闵氏空间 $d=4$ 维的情况已经列在附录中，例如，

$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu=-f(d)\delta_{\mu\nu},$$

$$\gamma_\mu\gamma_\mu=-dI,$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=(d-2)\gamma_\nu,$$

这里还没有定义 d 维 γ_5. 这是因为通常定义 γ_5 要求有 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$，它是全反对称张量，仅对于 4 维特殊情况才有。所以，人们不能延拓包含奇数 γ_5 矩阵的费米子圈图. 在维数正规化体系里，这一表面上很简单的限制反映了一个严重的问题，即可能出现手征反常(第十一章和第十二章).

这套方案对于持怀疑态度的读者来讲似乎是一个很粗糙的方法. 尽管它很可信且已在日常的计算里验算过，但作为我们最好的知识来讲，它的自洽性还没有完全证明过. 特别使问题复杂化的是无质量理论的情况. 例如，对于下述形式的积分

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_p}}{(k^2)^n},$$

它不依赖于任何标度. 这一积分的解析延拓是无确切定义的，因为不存在一个维数 d 使它有意义. 它或者是红外发散，或者是紫外发散的，根据 $d+p-2n\leqslant 0$ 还是 $\geqslant 0$ 而定. 每当必要时，我们将不理这些问题而仍用这个方案，使在维数正规化里这样的无质量蝌蚪图的积分为零.

在用维数正规化计算时，必须记住在 d 维时空里某些耦合常数可以得到一个量纲. 例如电荷，这是无量纲作用量($\hbar = 1$)中积分

$$\int d^dx \ A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

的系数，它获得一个以质量标度的量纲

$$[e] = d - (d-1) - \frac{d-2}{2} = \frac{4-d}{2},$$

因为 $[\psi] = (d-1)/2$ 而 $[A] = (d-2)/2$. 因此，我们用 $\mu^{(4-d)/2}e'$ 代替 e，其中 e' 是无量纲量，μ 或者是问题中某一粒子的质量，或者在所有粒子无质量的情况下是一任意能量标度. 当把结果在 $d = 4$ 附近展开时，将会出现这一标度的对数项.

在 $d = 4$ 邻近，我们是否也展开方程(8-6)中的因子 $(4\pi)^{-Ld/2}$，这是一个尝试，正象在式 (8-11c) 中定义 $f(d)$ 一样. 重要之点在于，在用规范不变方法计算抵消项，或者在比较各种图去验证 Ward 等式时，我们总考虑具有相同总圈数 L 的那类图，也就是具有同样的 4π 的幂次，从而有相同数目的费米子圈数，也就具有同样的 $f(d)$ 的幂次的那些图. 改变方案并不影响 Ward 等式的有效性，仅仅是抵消项修改一个

有限量.

我们以标量电动力学的真空极化为例作一说明. 第六章曾给出了这一理论的 Feynman 规则. 在 Wick 转动(对欧氏外线动量 p) 后, 图 8-2 中的两个图的贡献是

$$\Gamma^{(a)}_{\mu\nu} = -2e^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2}$$

$$= \frac{-2e^2\delta_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)(m^2)^{d/2-1},$$

和

$$\Gamma^{(b)}_{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{(2k + p)_\mu(2k + p)_\nu}{[(p + k)^2 + m^2](k^2 + m^2)}$$

$$= \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \left\{2\delta_{\mu\nu}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)\right.$$

$$\cdot \int_0^1 d\alpha[\alpha(1 - \alpha)p^2 + m^2]^{d/2-1}$$

$$+ p_\mu p_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)\int_0^1 d\alpha(1 - 2\alpha)^2[\alpha(1 - \alpha)p^2$$

$$\left. + m^2]^{d/2-2}\right\}.$$

按照方程(8-8),分出求和式 $\Gamma^{(a)} + \Gamma^{(b)}$ 中在 $d = 4$ 的极点:

$$\Gamma^{(a)}_{\mu\nu} + \Gamma^{(b)}_{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{4 - d} \frac{1}{3}(p_\mu p_\nu - p^2\delta_{\mu\nu})$$

$$+ \text{正规项}, \qquad (8\text{-}12)$$

可以证明(a)正比于 m^2 的发散项在求和式中相消;(b)发散项从而其抵消项的张量结构是垂直于 p 的. 两者结果都与规范不变性所期望的相一致. 有限部分的计算留给读者去做.

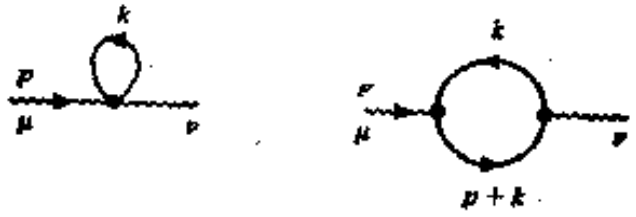


图 8-2 标量电动力学中的单圈图真空极化

还可以创造出其它正规化方案. 重要之点在于最终的重整化结果不依赖于正规化的选择. 严格地说，要找到一个正规化方案，且证明它使所有的图有限是不充分的，还必须证明发散项的结构可以被可接受的抵消项消去，所谓可接受的抵消项是指场的定域的、厄米的多项式. 例如 $\log p^2 \log \Lambda^2$ 形式的发散或者有一个复杂的系数都将是一个灾难. 然而，在最后我们将以不同的方法来计算. 我们将证明对 Feynman 积分作充分的减除会导致一个有限的理论. 因为这些减除正相应于引入可接受的抵消项，所以随即得出结果. 换句话说，是在以后的有限性证明中不涉及正规化. 然而，不求助于明显的正规化其结果和意义将是不清楚的，因而明显的正规化方案是一个方便的且是很普通的工具.

8-1-3 幂次计数法

每当人们基于量纲考虑给出 Feynman 积分的收敛性时，就已经用到了表面发散度的概念. 这一节将系统地讨论这一概念.

在这一节以及以后几节中，将只考虑紫外发散问题，至于由某些无质量粒子而产生的可能的红外麻烦，将放到后面进一步讨论. 目前我们明确地假定所有场是有质量的.

估计一给定的 Feynman 图 G 是否收敛的一个简单而直观的方法，是用一共同的因子 λ 同时地放大其各内部动量，$k_l \to \lambda k_l$，然后找出当 λ 趋向无穷大时它的行为 $I_G \sim \lambda^\omega$. 在参量表示里，这相当于当所有 α 以同样的比率 $\alpha_l \to \lambda^{-2}\alpha_l$ 趋于零时研究被积式. 我们期望，并且不久将证明，如果将 λ 的整个幂次称为表面发散度，用 ω 表示，当 ω 是非负数时，即 $\omega \geqslant 0$，积分一般是发散的. 如果它是负的，某些子积分仍可能是发散的，于是就说积分是表面收敛的，

我们考虑一个包含自旋为 0 或 1 的玻色子场和自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子场的理论。在大动量 λk 时费米子传播子具有 λ^{-1} 的行为，而玻色子的传播子的行为是 λ^{-2}。这里我们假定有质量矢量场传播子取 Stueckelberg 规范[方程(3-147)]。在第十二章中将重新考察有质量场耦合到非守恒流的情况。更高自旋这里不予考虑。

我们用第六章的记号。在相互作用拉氏函数相应的项中含有场量微商时，图 G 的一个顶角 v 具有幂次 λ^{δ_v}。在圈动量上的每一个积分 d^4q 贡献幂次 λ^4。如果 L 是独立圈的数目，I_B 和 I_F 分别是内部玻色子线和费米子线的数目，V 是顶角的总数，那么图 G 的表面发散度 ω 是

$$\omega(G) = 4L + \left(\sum_{\text{顶角}} \delta_v\right) - I_F - 2I_B, \quad (8\text{-}13a)$$

或者

$$\omega(G) - 4 = 3I_F + 2I_B + \sum_{\text{顶角}} (\delta_v - 4). \quad (8\text{-}13b)$$

这是由于有关系式(6-69)：

$$L = I_B + I_F + 1 - V. \quad (8\text{-}14)$$

量 δ_v 是作用在那些收缩后给出内部传播子的顶角 v 上的微商数。如果 $f_v(b_v)$ 是射向顶角 v 的内部费米子(玻色子)线的数目，显然有

$$I_F = \frac{1}{2}\sum_v f_v \text{ 和 } I_B = \frac{1}{2}\sum_v b_v. \quad (8\text{-}15)$$

因为在对顶角求和时每一条内部线计数了两次。这样，方程(8-13b)可以重写作

$$\omega(G) - 4 = \sum_v (\hat{\omega}_v - 4), \quad (8\text{-}13c)$$

其中

$$\hat{\omega}_v = \delta_v + \frac{3}{2} f_v + b_v. \tag{8-16}$$

如果我们记住6-2-1节中的量纲考虑，那么与顶角 v 相联的这个指标的解释是清楚的. 以质量来标度，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子场的量纲是 $\frac{3}{2}$，玻色场的量纲是 1. 因此，ω_v 是对有 f_v 条内部费米子线，b_v 条内部玻色子线和 δ_v 个在内部场上的微商的相互作用单项式的量纲的贡献. 另一种写法是，如果 ω_v 是与包括外部和内部场顶角 v 相联的 L_{int} 单项式的量纲，即

$$\omega_v = \text{玻色场的总数} + \frac{3}{2} \times (\text{费米子场的总数}) + \text{场微商的总数}, \tag{8-17}$$

并且如果 E_F 和 E_B 分别是图中外费米子线和外玻色子线的数目，那么从式 (8-13c) 明显地有

$$\omega(G) - 4 = \sum_{\text{顶角}} (\omega_v - 4) - \frac{3}{2} E_F - E_B - \delta, \tag{8-18}$$

其中 δ 是从 Feynman 积分因子化出的外部动量的总幂次. 当然，顶角的量纲 ω_v 不包括附属于这一顶角的有量纲的耦合常数 g_v 的贡献. 正象在第六章中已经注意到的，

$$\omega_v + [g_v] = 4. \tag{8-19}$$

毫不奇怪费曼积分的收敛性必然与耦合常数的量纲相关. 事实上，如果对于所有的顶角有 $\omega_v < 4$，那么耦合常数 g_v 有一个正量纲. 当微扰论的级数愈来愈高时，g 的幂次愈来愈大. 这样，为了保证总的量纲固定，在大动量时迫使 Feynman 被积式愈来愈快地趋向零. 反之，如果所有 $\omega_v > 4$，可以期望积分愈来愈发散. 所有这些概念也可以应用到任一子图. 一般地说，一个 $\omega(G) > 0$ 的图称为表面发散图.

现在我们可以将场论分为三类：

1. 不可重整化理论. 其中至少包含一个具有 $\omega_v > 4$ 的相互作用单项式. 对于一个给定的 Green 函数，方程(8-18)表明表面发散度随着顶角数而增加，即随着微扰级数而增加. 正象下面将要证明的，在足够高级数下，任何函数都变成了发散的.

2. 可重整化理论. 这是最感兴趣的理论. 所有相互作用单项式都有 $\omega_v \leqslant 4$，并且至少其中之一有 $\omega_v = 4$. 如果所有的单项式有 $\omega_v = 4$，从式 (8-18) 可以见到，对一给定函数有贡献的所有的图有同样的发散度. 仅有限数目的 Green 函数引起总体的发散.

3. 超可重整化理论. 仅有 $\omega_v < 4$ 的顶角. 发散度随着微扰级数的增加而减少. 这种理论仅有有限数目的发散图.

不可重整化一词可以使人产生误解. 它并不意味着这一理论不可能做到有限，而是意味着理论中的发散性增加，从而抵消项增加使得它们在微扰论体系中不现实. 在重整化以后它们将依赖于一个无穷任意参量集合，除非有一更深的原理使它们相关. 我们将不再考虑它们. 另一方面，超可重整化理论形成一个非常有限的类. 所以经常是非期望的

化拉氏函数. 在不可重整化理论之中，我们写出赝矢耦合 $\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_5\psi\partial^\rho\varphi$，费米耦合 $\bar{\psi}\gamma_\rho(1-\gamma_5)\psi$ $\bar{\psi}\gamma^\rho(1-\gamma_5)\psi$ 或 φ 的高级单项式 φ^5，φ^6 等.

上面的分析和列出的各种形式都是在四维空间中讨论的.为了推广或统计力学的需要,把上述分析推广到不同维数是必要的. 读者可毫无困难地得到方程(8-13)到(8-18)的类似的表达式,或确定在哪一维里费米理论或标量理论 φ^3, φ^6, $(\partial_\mu\varphi)^2P(\varphi)$是可重整化的,其中 $P(\varphi)$ 是指 φ 的任意多项式.

8-1-4 收敛性定理

现在进一步分析 Feynman 积分的收敛性和幂次计数法之间的关系. 我们首先注意到,只要传播子包含一个虚部 $i\varepsilon$, 在闵氏空间或在欧氏空间内研究收敛性就是等价的; 这里仅考虑后一种情况.

Bogoliubov 和 Parasiuk 以及 Hepp 已研究过 $\varepsilon\to+0$ 的极限. 他们证明了在定义外动量的解析函数的欧氏空间里的绝对收敛性，与相应的在 $\varepsilon\to+0$ 极限下闵氏空间里趋向于一个慢增（亦即以多项式为限的)广义函数的 Feynman 积分的收敛性相等价.

这里用一个图 G 的子图 g 的有限制的定义，作为图 G 的顶角和 G 中所有连接顶角的内线的子集. 对于每一个连接的固有(即单粒子不可约)图，我们把它所有的连接固有子图联成族 $\mathscr{G}$. 当然 $\mathscr{G}$ 包含 G 本身.

定理 如果对于所有的 $g\in\mathscr{G}$ 有 $\omega(g)<0$，那么相应于 G 的 Feynman 积分是绝对收敛的(在欧氏空间里).

为了简化表示式，我们利用参量表示仅给出没有微商耦合的标量理论情况下的证明,在欧氏区域里其表达式为

$$I_G(P)=\int_0^\infty d\alpha_1\cdots d\alpha_l\,\frac{\exp-[\sum\alpha_i m_i^2+Q(P,\alpha)]}{(4\pi)^{2L}\mathscr{P}(\alpha)^2}, \qquad (8\text{-}20)$$

这里假定对所有 l 有 $m_l^2>0$ 且记住 Q 是外动量的二次正定型并是 α 的 1 阶齐次有理分数. 因此，仅在 $\alpha=0$ 时收敛性是有疑问的. 在原点有限的指数不起作用. 多项式 $\mathscr{P}$ 是 L 阶的单项式的和 [与式 (6-86)相比较]:

$$\mathscr{P}(\alpha)=\sum_{\text{树形图}\mathscr{T}}\prod_{l\notin\mathscr{T}}\alpha_l. \tag{8-21}$$

遵从 Hepp 的做法，将积分区域分为许多分区，

$$0\leqslant\alpha_{\pi_1}\leqslant\alpha_{\pi_2}\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{\pi_I},$$

其中 π 是 $(1,2,\cdots I)$ 的置换. 下面将逐个分区证明收敛性. 对于每一个分区相应于一族 G 的巢状子线集 γ_i (不必要是子图):

$$\gamma_1\subset\gamma_2\subset\cdots\subset\gamma_I=G,$$

其中 γ_i 包含属于 $(\alpha_{\pi_1},\cdots\alpha_{\pi_i})$ 的线. 为了记号的简洁性，我们给出相应于恒等置换的第一个分区中的推理. 在这个分区里，作一变量变换

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=\beta_1^1\beta_2^2\cdots\beta_I^I,\\
\alpha_2&=\quad\beta_2^2\cdots\beta_I^I,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_{I-1}&=\beta_{I-1}^{I-1}\beta_I^I,\\
\alpha_I&=\beta_I^I,
\end{aligned}\tag{8-22}$$

其雅可比行列式是

$$\frac{D(\alpha_1,\cdots\alpha_I)}{D(\beta_1,\cdots\beta_I)}=2^I\beta_1\beta_2^1\cdots\beta_I^{I-1}.$$

这些 β 变量的积分区域 Δ 是

$$0\leqslant\beta_I\leqslant\infty,\qquad\text{以及}\quad 0\leqslant\beta_i\leqslant1,\quad 1\leqslant I\leqslant I-1.$$

即使 γ_i 不必要是连接的，我们也可以定义每个 γ_i 的表面发散度:

$$\omega_i=\omega(\gamma_i)=2L_i-4I_i, \tag{8-23}$$

其中 $I_i=I$ 是 γ_i 的内线数. 用连接部分数 C_i 和顶角数 V_i，可把独立圈数 L_i 写成

$$L_i=I_i+C_i-V_i. \tag{8-24}$$

这个公式 (6-69) 的推广式可以很容易地用归纳法来证明. 当然，我们有 $L_1=0$，$L_I=L$. 作为 β 的函数，$\mathscr{P}$ 是一个多项式，它的各个单项式的系数为 1. 让我们证明它具有下述形式:

$$\mathscr{P}=\beta_1^{2L_1}\beta_2^{2L_2}\cdots\beta_I^{2L_I}[1+O(\beta)]. \tag{8-25}$$

首先，当所有的 α 同时扩大一个因子 ρ 时，有

$$\mathscr{P}(\rho\alpha_1,\cdots,\rho\alpha_I)=\rho^L\mathscr{P}(\alpha_1,\cdots,\alpha_I).$$

现在来研究仅仅属于 γ_i 的 α 被扩大一个因子 ρ 时 $\mathscr{P}$ 的行为：

$$\mathscr{P}(\rho\alpha_1,\cdots\rho\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots\alpha_I), \tag{8-26}$$

方程(8-21)用 G 的树形图来表达 $\mathscr{P}$. G 的每个树形图 $\mathscr{T}$，沿着联接树形图 $\mathscr{T}_1,\cdots,\mathscr{T}C_i'$ 的 $C_i'\geqslant C_i$ 的并集投影在 γ_i 上. 这将在式 (8-21) 中贡献一项，在(8-26)的扩展下其行为象 ρ 的幂次，ρ 是不属于

$$u=\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2\cup\cdots\cup\mathscr{T}C_i'$$

的 γ_i 的线的数目. 因为集合 u 满足具有圈数为零的式(8-24)类型的方程(它是树形图之并集)且联接所有 γ_i 的顶角，所以它的总线数是

$$I_u=V_i-C_i'.$$

因此，在相应的$\mathscr{P}$的单项式里 ρ 的幂次是 $I_i-I_u=I-V_i+C_i'\geqslant I-V_i+C_i=L_i$. 使 $C_i'=C_i$ 的 G 的树形图 $\mathscr{T}$，亦即用按照下述方式投影的树形图：

$$\mathscr{T}|_{\text{投影},\gamma_i}=\bigcup_1^{C_i}\mathscr{T}_i$$

导致 ρ 的最低幂次. 所有这些树形图 $\mathscr{T}$，都可以通过在 γ_i 的每个相连部分里构成独立的连接树形图，且完成它们的并集进入 G 的一个树形图而产生. 因此，它们对$\mathscr{P}$的总贡献因子化为 $\mathscr{P}_{\gamma_i}$ 乘 $\mathscr{P}_{G/\gamma_i}$，$\mathscr{P}_{\gamma_i}$ 是按式(8-21)规则附着于 γ_i 的多项式 $\mathscr{P}$，其中约化图 G/γ_i 是通过把 γ_i 的每个相连部分的所有的线和顶角收缩成唯一的一个顶角而得到的. 于是，得到结果

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}(\rho\alpha_1,\cdots,\rho\alpha_i,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_I)\\&\quad=\rho^{L_I}[\mathscr{P}_{\gamma_I}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)\mathscr{P}_{G/\gamma_I}(\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_I)+O(\rho)].\end{aligned}\tag{8-27}$$

现在回到变量 β. 显然 β_I^I 是属于 $\gamma_I=G$ 的参量的齐次因子，β_{I-1}^I 则是 γ_{I-1} 是 γ_{I-1} 的因子，……等. 因为 γ 是可互相套起来的，方程(8-27)可以重复地应用而得到

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}(\beta_1^I\beta_2^I\cdots\beta_I^I,\beta_2^I\cdots\beta_I^I,\cdots,\beta_{I-1}^I\beta_I^I,\beta_I^I)\\&\quad=\beta_I^{L_I}\mathscr{P}(\beta_1^I\cdots\beta_{I-1}^I,\beta_2^I\cdots\beta_{I-1}^I,\cdots,\beta_{I-1}^I,1)\\&\quad=\beta_I^{L_I}\beta_{I-1}^{L_{I-1}}[\mathscr{P}_{\gamma_{I-1}}(\beta_1^I\cdots\beta_{I-2}^I,\beta_2^I\cdots\beta_{I-2}^I,\cdots,\beta_{I-2}^I,1)\end{aligned}$$

$$\cdot \mathscr{P}_{G/\gamma_{I-1}}(1) + O(\beta_{I-1}^{2})]$$

$$= \cdots, \tag{8-28}$$

结果就是式(8-25). 主导项前面的系数是 1，因为原始多项式 $\mathscr{P}$ 的一个唯一单项式可以有 β 幂次的组合. 现在回到分区 Δ 里的积分式 (8-20). 在这个定理的假定下，即对于任一固有图 g 有 $\omega(g)<0$，容易证明对于任一固有的或非固有的子集 γ，有 $\omega(\gamma)<0$. 因此在精确到一个因子下，被积式最大为

$$\frac{\beta_1^1\beta_2^2\cdots\beta_I^{I-1}}{\beta_1^{1+L_1}\beta_2^{1+L_2}\cdots\beta_I^{I+L_I}} = \prod_{i=1}^{I}\beta_i^{-i+L_i+i-1} = \prod_{i=1}^{I}\beta_i^{-\omega_i-1},$$

而因为 $\omega_i<0$，积分 $\int_0^{\Pi d\beta_i}\beta_i^{-\omega_i-1}$ 在原点是绝对收敛的. 结论是积分式(8-20)在每一个分区中是绝对收敛的. 证毕.

对于一个没有微商耦合的标量理论，前面的证明也表明，只要固有的子图有一个非负的表面发散度，Feynman 积分就是发散的. 事实上，至少在一个分区里存在着发散而积分是正定的，不发生相互抵消. 另一方面，在量子电动力学里，曾经遇到过出现在动量空间的 Feynman 被积函数分子中不同项相消的情况. 例如，前面已经表明，真空极化仅是对数发散而不是平方发散，而光子被光子散射是收敛的.

以后我们必须指出，在把所有 $\omega(g)\geqslant 0$ 的子图减除以后积分是绝对收敛的. 注意，先前关于绝对收敛性的考虑证明了在导出式(8-20)时所作的连算——积分次序的交换和积分变量的改变——是正当的. 作为一个副产品，我们还可知道为了把理论正规化应对通常的传播子式(8-2)减除多少项. 例如，在 φ^4 理论里，作代替 $(k^2-m^2)^{-1}\to(k^2-m^2)^{-1}-(k^2-\Lambda^2)^{-1}$ 就使得除了单圈蝌蚪图外的每个图都有限，因为表面发散度现在是

$$\omega(G) = 4L - 4I = 4(1-V),$$

对于 $V>1$ 它是负的. 单圈蝌蚪图或者可以分别正规化或者

用一个 Wick 次序规定来去掉. 这样，我们就得到一个有限的正规理论结果. 上述分析可以用于量子电动力学情况（见8-4-2节）.

下面是上述定理的一个有用的推论. 如果一个图 G 没有表面发散子图，对于所有子图 $g \neq G$ 有 $\omega(g) < 0$，但是 G 本身是表面发散的，$\omega(G) \geqslant 0$，所以其振幅的发散部分是外部动量 P 和内部质量的一个多项式，其阶数小于或者等于 $\omega(G)$. 事实上，因为 $\omega(G)$ 测度了 $I_G(P)$ 的关于动量和质量的齐次阶数，所以关于 P_i 和 m_i 的第$[\omega(G)+1]$阶微商后阶数就是 -1，因此是表面收敛的. 由于这一定理，微商$[\partial^{\omega+1}/(\partial P)^{\omega+1}]I_G(P)$；[或 $(\partial^{\omega+1}/\partial m^{\omega+1})I_G$ 或这一阶的混合微商]是有限的.

作为一个练习，读者可以很容易地看到，这里给出的定理的证明仍然是合适的.

最后，我们得到

$$I_{G,\mathrm{reg}}(P,m,\Lambda) = I_{\mathrm{fin}}(P) + D(P,m,\Lambda), \qquad (8\text{-}29)$$

其中 $I_{\mathrm{fin}}(P)$ 当截断被去掉以后是有限的，D 是 P 和 m 的多项式，其阶数小于或等于 $\omega(G)$.

8-2 重 整 化

8-2-1 归一化条件和抵消项的结构

这一节来解决重整化运算本身. 这里再一次重复了一般想法，并强调了这一运算的结果.

我们的目的是用与原始图形相联系的重整化的 Feynman 积分，来表示固有 Green 函数. 可以用三种等价方法来达到这一目的. 第一种方法已在第七章中提出过，是对原始的拉氏函数加上一个形式上的抵消项的级数(关于 $\hbar$ 的). 这也相

当于逐级重新定义理论中的参量：出现在拉氏函数里的"裸"参量是重整化参量的隐含函数.前者是不可观察的,且当正规化被去掉后是发散的,而后者是理论中真正有限的参量,是质量、耦合常数等. 最后,我们在下一节中将看到，这两种方法等价于被积函数减除的算法. 这一运算是由 Bogoliubov 给出的,它具有逐图给出有限结果的优点,而无需间接地求助于正规化.

我们准备用三种等价的方法尽可能熟练地来作计算游戏,对每个问题用最合适的方法. 例如,首先将讨论抵消项的循环结构，然后用裸的和重化理整论之间的关系来强调重整化过程的相乘特点. 最后， Bogoliubov 的减除运算将对一个基本收敛定理的(启发式)证明提出一个方便体系.

抵消项的构造可以用归纳法来进行. 假定通过引进恰当的抵消项,一直到给定级 $\hbar^{L-1}$ 上(即 $L-1$ 个圈数)理论已成有限的了. 按照幂次计数法 [方程 (8-13) 到 (8-18)]，到下一级 $\hbar^L$ 时,仅有限数目的固有函数有非负的表面发散度. 除了对称性引起的可能的相消以外，我们可以对它们之中的每一个连上一个场量及其微商的定域单项式. 当然，它是一个 Lorentz 标量;它的结构反映了 Green 函数的本质,因为它自己必须贡献到所研究的过程中去，而它对这个函数的附加到这一级的贡献必须抵消它的发散性. 当然，仍然有有限的任意性. 在引入正规化以后，抵消项系数完全由加在表面发散 Green 函数上的归一化条件所确定. 如果到最低级上 (就是原始拉氏函数表示的树形图近似)，这些归一化条件是满足的，那么要求 Green 函数逐级满足这些归一化条件将毫不含糊地不仅确定抵消项的无穷部分而且也确定了有限部分.

例如，在质量为 m 的可重整的 φ^4 标量场理论中，两点函数 $\Gamma^{(2)}$ 是平方发散的 $[\omega(\Gamma^{(2)})=2]$. 我们要求重整化的

$\Gamma_R^{(2)}$ 满足

$$\Gamma_R^{(2)}(m^2) = 0$$

$$\frac{d}{dP^2}\Gamma_R^{(2)}(m^2) = 1. \tag{8-30}$$

这是物理质量的一个自然条件，因为按照粒子理论解释，要求整个传播子 $G_R^{(2)}(p^2) = i[\Gamma_R^{(2)}(p^2)]^{-1}$ 在 $p^2 = m^2$ 处有一个留数为 i 的极点. 到 L 级为止，已经重整化到 $L-1$ 级的正规化的函数 $\Gamma_{reg}^{(2)}$ 是

$$\Gamma_{reg}^{(2)}(p^2) = \Gamma_{fin}^{(2)}(p^2, m^2, \Lambda^2) + p^2\Delta_1\Gamma^{(2)}(m^2, \Lambda^2) + \Delta_2\Gamma^{(2)}(m^2, \Lambda^2), \tag{8-31}$$

其中 $\Gamma_{fin}^{(2)}(p^2, m^2, \Lambda^2)$ 当 $\Lambda^2 \to \infty$ 时是有限的，而 $\Delta_1\Gamma^{(2)}(m^2, \Lambda^2)$ 行为最坏象 $\ln(\Lambda^2/m^2)$ 的幂次，而 $\Delta_2\Gamma^{(2)}$ 的行为象 Λ^2[倍乘 $\ln^p(\Lambda^2/m^2)$]. 对于 L 级抵消项是

$$\Delta\mathscr{L}^{(L)} = a\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - bm^2\frac{\varphi^2}{2}, \tag{8-32}$$

因此对 $\Gamma^{(2)}$ 有一个附加的贡献，其形式是

$$\Delta\Gamma^{(2)} = ap^2 - bm^2. \tag{8-33}$$

因为条件式(8-30)已经在最低级下满足，所以到 L 级可得

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)[L]}(p^2 = m^2) = \Gamma_{reg}^{(2)}(p^2 = m^2) + (a-b)m^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_R^{(2)[L]}(p^2)\Big|_{p^2=m^2} = \dfrac{\partial\Gamma_{reg}^{(2)}}{\partial p^2}\Big|_{p^2=m^2} + a = 0, \end{cases} \tag{8-34}$$

从而确定了 a 和 b. 一个类似的归一化条件被加在其它的表面发散函数上，即 φ^4 理论中的四点函数. 一个物理上明显的且对称的条件要求，这个函数在质壳(然而是非物理的)点 S_m 上取 $-\lambda$ 值(重整化耦合常数):

$$S_m \begin{cases} p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = m^2 \ \Gamma_R^{(4)}|_{S_m} = -\lambda, \\ S = t = u = \dfrac{4m^2}{3}. \end{cases} \tag{8-35}$$

这明显地是与最低级值 $\Gamma^{(4)[0]} = -\lambda$ 相一致的。在任一可重整化的理论里，都可以且必须引入这些类似的归一化条件。

当然，上面所说的决不是发散性可以用抵消项来处置的证明。特别是，我们并没有完全证明 $\omega(\Gamma^{(2)}) = 2$ 意味着 $\Gamma^{(2)}_{reg}$ 有式(8-31)的行为。事实上，我们并不真正地有推论式(8-29)的条件，因为所有子图并不一定要是表面收敛的，而可以被较低级抵消项重整化。当我们证明了这个步骤的确导致有限重整化理论时，实际上就已给出我们的推理是正确的。这里仅需要回忆一下此方法的逻辑，并强调一下归一化条件的必要性。在这一点上，值得注意的是，在可重整化和不可重整化理论之间的差别正是在于这些条件的数目。对于可重整化理论，有限数目的条件足以用有限数目的重整化参量来定义，而对于不可重整化理论则需要无穷个这类条件；本质上，一个不可重整化的理论是与参量数的无穷性相关的。

在选择归一化条件时有很大的任意性。仅有的附带条件是它们必须在最低级下成立，以便毫不含糊地确定高级减除。下面在(见 8-2-5 节)中将重新考察这一点。由于有这一任意性，用一个较少物理的、中间的重整化更方便。当所有场的质量不等于零时，在动量空间里的原点选择归一化条件是保险的。在上面 φ^4 理论的例子中，这些条件是

$$\Gamma^{(2)}_R(p^2)\big|_{p^2=0} = -m^2$$

$$\frac{d}{dp^2}\Gamma^{(2)}_R\big|_{p^2=0} = 1,$$

$$\Gamma^{(4)}_R(0,0,0,0) = -\lambda. \qquad (8\text{-}36)$$

由式(8-36)定义的量 m^2 不再是物理质量，尽管与它相关。

当处理非零自旋粒子时，必须考虑 Green 函数的张量结构。可能出现只有某些张量的形状因子是发散的(例如在上一章研究顶角函数时 F_2 是有限的，F_1 是发散的)。仅仅后者需

要减除和归一化条件.

先前抵消项的循环构成的结果对它们的结构有影响. 在一个可重整化理论里，抵消项满足可重整性的标准. 这正是在单圈图近似下的旋量电动力学中所见到的，抵消项仅具有下面几种形式：

$$:(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2:,\quad :\bar{\psi}\psi:,\quad \frac{i}{2}:\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi:,\ :\bar{\psi}A\!\!\!/\psi:.$$

与此类似，在 φ^4 理论里，抵消项是：$:(\partial\varphi)^2:$，$:\varphi^2:$，$:\varphi^4:$ 其阶数小于或等于 4. 在标量电动力学里，情况有点不同，因为从最小耦合产生的单项式出发，我们发现同样结构的抵消项，再加上一种新类型的项：$:(\varphi^+\varphi)^2:$. 因此，最后得到一种电动力学和 φ^4 自耦合的混合理论，但理论仍然是可重整化的. 这也意味着标量电动力学与一个附加的不期望的参量有关，这一参量就是在一给定点的四点函数值.

较一般地说，如果一个可重整理论的固有图 G 是表面发散的，

$$0 \leqslant \omega(G) \leqslant 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B - \delta$$

[利用方程(8-18)，其中 $\omega_v \leqslant 4$]，那么相应的抵消项有 E_F 个费米子场，E_B 个玻色子场以及 δ 数的微商. 因此，在方程(8-17)的意义下它的量纲是

$$\omega_{v_c} = \frac{3}{2}E_F + E_B + \delta \leqslant 4 - \omega(G). \qquad (8\text{-}37)$$

这样产生的抵消项有小于或等于 4 的量纲；因此它也是可重整化的.

一旦抵消项具有与原始拉氏函数单项式同样的结构，就可以考虑重新定义理论中的参量. 由于原始单项式附加了抵消项，出现在拉氏函数中的量被看作裸参量. 裸参量作为重

整化量的函数可以在微扰论里逐级确定，所以重整化条件成立．在前一章的电动力学里已经讨论了这种结构（也见下面8-4节）．在 φ^4 理论情况下，拉氏函数加上抵消项是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}&=\mathscr{L}_R-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4\\&\quad+\frac{1}{2}(Z-1)(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{1}{2}(Zm_0^2-m^2)\varphi^2\\&\quad-\frac{1}{4!}(Z^2\lambda_0-\lambda)\varphi^4\\&=\frac{1}{2}Z(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{Zm_0^2}{2}\varphi^2-\frac{Z^2\lambda_0}{4!}\varphi^4\\&=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_0)^2-\frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2-\frac{\lambda_0}{4!}\varphi_0^4,\end{aligned}\tag{8-38}$$

其中

$$\varphi_0=Z^{1/2}\varphi.$$

有时称其为重整化的拉氏函数，这是一个不幸的名称，因为它的系数是无穷大的．拉氏函数 $\mathscr{L}_R$ 具有与原始拉氏函数同样的表达式，只不过作了下述代替：$\varphi\to\varphi_0$，$\lambda\to\lambda_0$，$m\to m_0$．在微扰论里我们有

$$\begin{aligned}&\lambda_0(\lambda,\Lambda/m)=\lambda[1+O(\lambda\hbar)],\\&\frac{m_0(\lambda,\Lambda/m)}{m}=1+O(\lambda\hbar),\\&Z(\lambda,\Lambda/m)=1+O(\lambda^2\hbar^2).\end{aligned}\tag{8-39}$$

最后一个关系式是 φ^4 相互作用所特有的．正是我们所期望的 $Z=1+O(\hbar)$．

重整化归结起来就是参量的重新定义，这一事实意味着未重整化的(或裸的)和重整化的 Green 函数将以下述方式相关：

$$G_R^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,m,\lambda)=Z^{-n/2}G_{reg}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,m_0,\lambda_0,\Lambda),$$

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,m,\lambda)=Z^{n/2}\Gamma_{reg}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n,m_0,\lambda_0,\Lambda). \tag{8-40}$$

这个关系分别对于连接的和固有的函数成立. 事实上，连接的重整化的函数是从拉氏函数 $\mathscr{L}_R=\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}$ 加上一个源项$j\varphi$来计算的，而未重整化的函数可以从 $\mathscr{L}_R$(正规化存在的情况)通过耦合一个源到 φ_0，即 $j\varphi_0$ 来计算. 对 j 取 n 次微商就导出已写出的关系. 在方程(8-40)的右边应理解为 $\Lambda\to\infty$的极限. 最后，在消去单粒子可约图，作了与重整化可对易的运算，并分别对被重整化的或未重整化的传播子截腿以后就得到了固有函数——由此改变了 Z 的幂次.

8-2-2 Bogoliubov 的递推公式

在上一节中，已经对固有函数，即对于一给定级的 Feynman 图求和连上了一项抵消项. 归一化条件的存在，使得对每个用满足归一化条件要求来计算的表面发散图都可连上抵消项.当由于对称性(Bose 或 Fermi 对称性，内部对称性等)而产生相消时，单个图可以比这一级图的和更发散，这就有一些微妙之处. 在这种情况下，仅考虑显示相消的一组图——在量子电动力学里取规范不变的图——是保险的. 下面为了避免这一非本质的复杂性而仅讨论标量无微商理论.

现在研究在一给定的固有 Feynman 图 G 上低级抵消项的效应. 事实上，G 可以包含表面发散固有子图 $\gamma:\omega(\gamma)\geqslant 0$. 对于每个这样的子图可以连上一个 $\hbar^{L_\gamma}$(L_γ 是 γ 的圈数)级的抵消项. 令 $\mathscr{I}_G$ 为动量空间里 Feynman 图 G 的被积式，$\mathscr{R}_G$ 是考虑了所有低级抵消项的被积式，$\mathscr{R}_G$ 是导致有限积分的重整化的被积式. 如果 G 是表面收敛的，则

$$\mathscr{R}_G=\mathscr{R}_G \qquad \omega(G)<0. \tag{8-41}$$

然而，如果 $\omega(G)\geqslant 0$，则 $\mathscr{R}_G$ 与 $\mathscr{R}_G$ 差一个属于 G 本身的抵

消项的贡献. 换而言之，$\mathscr{R}_G$ 必须被减除以得到$\mathscr{R}_G$，它导致满足归一化条件的有限积分. 在对内部动量积分后，

$$\int (\mathscr{R}_G - \mathscr{R}_G)$$

必须是一个阶数小于或等于 $\omega(G)$ 的 G的独立外部动量的多项式. 在中间重整化的体系里(在零动量处减除)，$\mathscr{R}_G - \mathscr{R}_G$ 将只是 $\mathscr{R}_G$ 在原点处关于外动量的 Taylor 展开 $T_G\mathscr{R}_G$，一直到所包含的 $\omega(G)$ 级. 我们将有

$$\mathscr{R}_G = (1 - T_G)\mathscr{R}_G \qquad \omega(G) \geqslant 0. \tag{8-42}$$

剩下的问题是 $\mathscr{R}_G$ 和原始被积式 $\mathscr{I}_G$ 的关系是什么? $\mathscr{R}_G$ 与 $\mathscr{I}_G$ 的差别来自与G的重整化部分 γ 相关的抵消项. 按照 Zimmermann，称为固有表面发散子图，因此按照 8-1-4 节的约定，此图包含着 G 图中联接两个顶角的所有的线. 与 γ 相联系的抵消项的贡献是 $-T_\gamma\mathscr{R}_\gamma$，当在 γ 处嵌入图 G 时给出

$$\mathscr{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma\mathscr{R}_\gamma), \tag{8-43}$$

其中 $T_\gamma\mathscr{R}_\gamma$ 是修改后的被积式 $\mathscr{R}_\gamma$ 关于 γ 的独立外动量的 Taylor 展开，一直到 $\omega(\gamma)$ 级.

这一 Taylor 展开并不象 G 本身情况下定义得那样好，因为需要小心区分内部动量和外部动量之间的差别. 这里将允许总能定义这些外部变量，而认真的读者可以参看所引的文献.

另一方面，$\mathscr{I}_{G/\gamma}$ 是对在原始图中外接到 γ 的线和顶角的被积式的贡献. 特别是它包含了属于联接 γ 和 G 的其余部分的线的传播子. (说明见图 8-3) 方程(8-43)包含与 γ 有关的抵消项的贡献 (可能包含对 $\mathscr{R}_\gamma$ 有贡献的那些项). 现在可以容易地写出与两个不连接重整化部分 γ_1 和 γ_2 有关的两个抵消项的贡献. 这里不连接意味着它们没有共同的线和顶角: $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. 这个贡献是

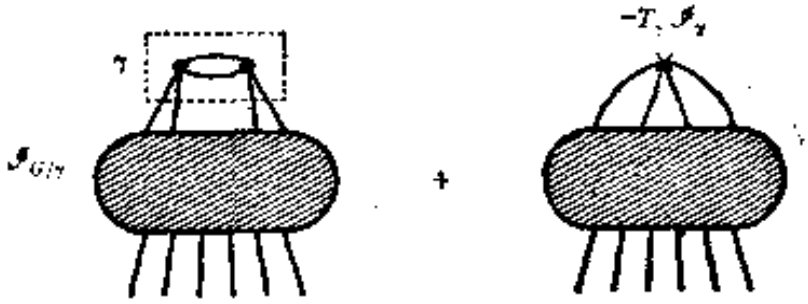


图 8-3 在被积式 $\mathscr{I}_G$ 里减去一个内部重整化部分 γ

$$\cdot\mathscr{I}_{G/(\gamma_1,\gamma_2)}(-T_{\gamma_1}\mathscr{R}_{\gamma_1})(-T_{\gamma_2}\mathscr{R}_{\gamma_2}), \qquad (8\text{-}44)$$

其中 $\mathscr{I}_{G/(\gamma_1,\gamma_2)}$ 是对 G 中除属于 γ_1 或 γ_2 以外的所有线和顶角的原始被积式的贡献. 为什么仅考虑不连接重整化部分的理由是，若不这样做两者就不可能被它们相应的抵消项所代替. 可以继续列举出对 $\mathscr{R}_G$ 的可能贡献. 由 Bogoliubov 给出的递推公式如下:

$$\mathscr{R}_G = \mathscr{I}_G + \sum_{\substack{(\gamma_1,\cdots,\gamma_s)\\ \gamma_a\cap\gamma_b=\emptyset}} \cdot\mathscr{I}_{G/(\gamma_1,\cdots,\gamma_s)}$$

$$\cdot\prod_{a=1}^{s}(-T_{\gamma_a}\mathscr{R}_{\gamma_a}). \qquad (8\text{-}45)$$

右边第一项是原始被积式，求和取遍所有不连接重整化部分的族. 在迭代以后，方程(8-45)与方程(8-41)和(8-42)一起给出重整化积分的表达式. 如果 G 不包含表面发散固有子图，那么 $\mathscr{R}_G = \mathscr{I}_G$. 这是所有在第七章中研究过的图形的情况. 对于单圈图，或者 $\omega(G) < 0$ 而 $\mathscr{R}_G = \mathscr{I}_G$，或者 $\omega(G) \geqslant 0$ 而 $\mathscr{R}_G = (1 - T_G)\mathscr{I}_G$.

现在考虑包含多圈图的一个简单例子. 为了简洁起见，考虑在六维时空中具有相互作用 $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda\varphi^3/3!$ 的标量场 φ 的理论. 尽管这种理论有严重的不合理处，它的哈密顿量没有下限，但它的确给出了有意义的微扰展开. 这是一个可重整化的理论(六维时空). 方程 (8-18)的幂次计数法为下式代替: $\omega(G) = 6L - 2I = 6 - 2E$. 考虑图



图 8-4 巢状发散

8-4 的图形． 在虚线画的长方形内的子图 γ 是除 G 本身以外的仅有的重整化部分，按照式(8-45)有

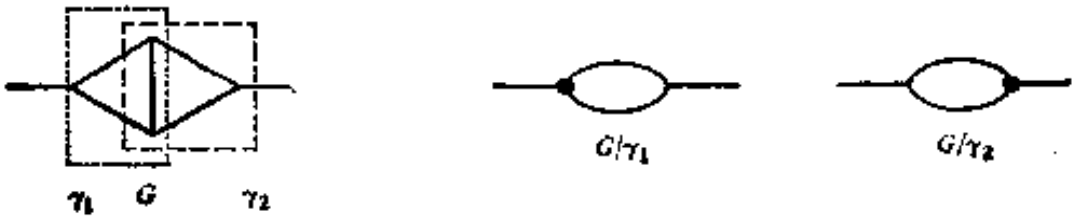


图 8-5 交缠发散

$$\bar{\mathscr{R}}_G = \mathscr{I}_G + \mathscr{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma\bar{\mathscr{R}}_\gamma),$$
$$\bar{\mathscr{R}}_\gamma = \mathscr{I}_\gamma,$$

由此推得

$$\bar{\mathscr{R}}_G = \mathscr{I}_G + \mathscr{I}_{G/\gamma}(-T_\gamma\mathscr{I}_\gamma) \equiv (1 - T_\gamma)\mathscr{I}_G.$$

符号稍有点不恰当，再遵照式(8-42)，则有

$$\bar{\mathscr{R}}_G = (1 - T_G)\bar{\mathscr{R}}_G = (1 - T_G)(1 - T_\gamma)\mathscr{I}_G. \qquad (8\text{-}46)$$

我们看到，对巢状图 $\gamma \subset G$ 已经连上两个因子 $(1-T)$．如果对这个图加更多的(平行的)梯级线，此结果仍然是正确的．作为一个很好的练习，可证明重整化的被积式将导致一个有限的积分．

现在转到图 8-5．这是表面发散的 $[\omega(G) = 2]$，和它的两个重整化部分 γ_1 和 γ_2 一样 $[\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2) = 0]$．这里有一个新现象，即 γ_1 和 γ_2 既不是巢状的也不是不连接的而是交缠的．它们共享一条线和两个顶角，但相互不包含．因此，方程(8-45)变为

$$\bar{\mathscr{R}}_G = \mathscr{I}_G + \mathscr{P}_{G/\gamma_1}(-T_{\gamma_1}\bar{\mathscr{R}}_{\gamma_1}) + \mathscr{I}_{G/\gamma_2}(-T_{\gamma_2}\bar{\mathscr{R}}_{\gamma_2}).$$
$$\bar{\mathscr{R}}_{\gamma_1} = \mathscr{I}_{\gamma_1},$$
$$\bar{\mathscr{R}}_{\gamma_2} = \mathscr{I}_{\gamma_2}.$$

如果令 $T_\gamma\mathscr{I}_G = \mathscr{I}_{G/\gamma}T_\gamma\mathscr{I}_\gamma$，最后有

$$\bar{\mathscr{R}}_G = (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2})\mathscr{I}_G,$$

$$\mathscr{R}_G = (1 - T_G)\bar{\mathscr{R}}_G = (1 - T_G)(1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2})\mathscr{I}_G. \quad (8\text{-}47)$$

我们发现 $\mathscr{R}_G$ 不等于 $(1 - T_G)(1 - T_{\gamma_1})(1 - T_{\gamma_2})\mathscr{I}_G$. 补充项，即 $(1 - T_G)T_{\gamma_1}T_{\gamma_2}$，正相应于交缠子图.

在 8-4-4 节的四维量子电动力学情况中将进一步分析图 8-5 的图形.

8-2-3 Zimmermann 的明显解

上面的例子提出了递推方程 (8-45) 的一般解. 按照 Zimmermann 的方法，把固有表面发散子图 γ 构成的族 U，定义为亚整化部分的一个树丛，使得

$$\text{如果 } \gamma_1 \text{ 和 } \gamma_2 \in U \begin{cases} \text{或者} & \gamma_1 \subset \gamma_2, \\ \text{或} & \gamma_2 \subset \gamma_1, \\ \text{或} & \gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing, \end{cases} \quad (8\text{-}48)$$

其中记号 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$ 表示这些子图没有公共的顶角也没有公共的线. 一个树丛可以是空集. 更进一步，以 V 标记 G 的树丛使得如果 G 本质上是表面发散的，则 G 不属于 V. 当然，如果 G 不是表面发散的，那么两组树丛 $\{U\}$ 和 $\{V\}$ 是恒等的.

如果一组自洽的内部动量选得使运算 T_γ 有意义，则属于不连接的 γ_1, γ_2 的两个这种运算相对易，而当 $\gamma_1 \subset \gamma_2$ 时，T_{γ_1} 将处于 T_{γ_2} 的右边[比较方程(8-46)和(8-47)的例子]. 在这些情况下，可以证明

$$\mathscr{R}_G = \sum_V \prod_{\gamma \in V} (-T_\gamma)\mathscr{I}_G$$

$$\mathscr{R}_G = \sum_U \prod_{\gamma \in U} (-T_\gamma)\mathscr{I}_G \quad (8\text{-}49)$$

是方程(8-45)的解. 我们首先注意到，空树丛相应于 $\mathscr{I}_G$ 项.

其次，如果 G 是重整化部分，对于每一个 V 可以联系两个 U 型树丛，$U_1 = V$ 和 $U_2 = \{G\} \cup V$. 因此方程 (8-49) 在这时导致 $\mathscr{R}_G = (1 - T_G)\mathscr{R}_G$，而当 $\omega(G) < 0$ 时由 V 的定义有 $\mathscr{R}_G = \mathscr{R}_G$. 不论哪一种情况，这是与方程(8-41)和(8-42)相一致的. 为了证明方程(8-49)确实是方程(8-45)的解，可以在假定它对 $L-1$ 圈图的任意图形成立下，然后用数学归纳法证明. 如果 G 有 L 圈，写下方程(8-45)，对于每一个 $\mathscr{R}_\gamma$ 插入方程(8-49)就可以得到

$$\mathscr{R}_G = \mathscr{I}_G + \sum_{\substack{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\} \\ \gamma_a \cap \gamma_b = \phi}} \mathscr{I}_{G/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}} \cdot \prod_{a=1}^{s} - T_{\gamma_a}\Big[\sum_{V_{\gamma_a}} \prod_{\gamma' \in V_{\gamma_a}} (-T_{\gamma'})\, \mathscr{I}_{\gamma_a}\Big]. \tag{8-50}$$

记号有点麻烦，但是清楚的. 容易证实，方程(8-50)产生所有相应于致极元素 $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ 树丛的(8-49)中所有的项. 按定义，一个树丛的致极元素是不包含在这一树丛的其它元素之中的元素 γ. 在不连接集合 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ 上的求和产生一个且仅有一个 G 的所有树丛.

关于归一化条件的选择是分开考虑的. 因为 Taylor 减除的本质依赖于这一选择，最方便的选择是上面定义的中间重整化，亦即零动量处的减除. 例如，在不允许作零动量处减除的无质量理论里，当选择不同点时，为了保持 Lorentz 不变性需要细心处理.

附加的减除，亦即超出了幂次计数法所给的 $\omega(G)$ 级的减除，可以启洽地用一个类似的方法来做. 这里不打算讨论这一点，建议读者看参考文献(也可见 8-2-6 节中最后的某些评注).

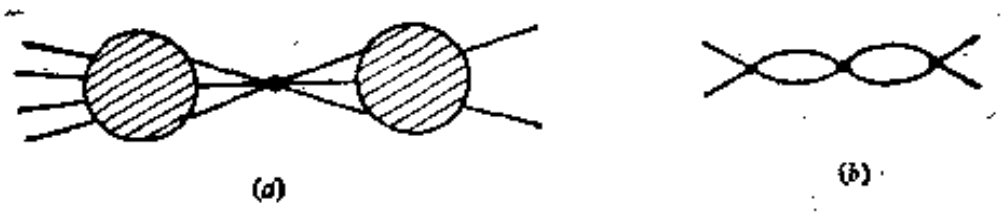
$\mathscr{R}$ 的构成只包括不连接重整化部分，即不存在公共的顶角和线. 作为一致的描述，我们来证明一个相接(或一个顶角可约)图的重整化被积式可以因子化(图 8-6). 作为一个例子，考虑四维 φ^4 理论中图 8-6-b

的图形，其树丛是

$$\emptyset, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \{\gamma_1, G\}, \{\gamma_2, G\}, \{G\},$$

因此

$$\mathscr{R}_G = (1 - T_G - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2} + T_G T_{\gamma_1} + T_G T_{\gamma_2}) \mathscr{I}_{\gamma_1} \mathscr{I}_{\gamma_2}.$$



(a)　　(b)

图 8-6 相接(一个顶角可约)图

对这样的图有 $T_G = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2}$. 因为 G, γ_1 和 γ_2 有同样的发散度，又因为 ω 级的 Taylor 展开不影响 ω 级的多项式，所以有

$$T_G = T_G T_{\gamma_1} = T_G T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2},$$

因此 $\mathscr{R}_G$ 也为

$$\mathscr{R}_G = (1 - T_{\gamma_1}) \mathscr{I}_{\gamma_1} (1 - T_{\gamma_2}) \mathscr{I}_{\gamma_2} = \mathscr{R}_{\gamma_1} \mathscr{R}_{\gamma_2},$$

这个证明不难被推广.

可以直接证实在 G 的所有重整化部分可相互套起来的情况下，方程(8-49)导致对所有 γ 的 $(1 - T_\gamma)$ 算符的乘积. 一般情况是展开同样的乘积且略去所有相应于交缠子图的项. 这两点结构仅是 8-2-2 节最后的特殊例子中给出的性质的推广.

方程(8-49)所表达的结果是很大的成功，但一直要到证明它导致一个收敛积分才能使人满意. 特别麻烦的是交缠子图发散的情况. 问题是在这种例子里包含在方程(8-49)中的方案是真正足以提供的一个有限表达式吗？下面将见到对这一问题的回答是肯定的. 这一结果的证明将指出，用中间正规化是不必要的，因为被积式的减除导致收敛的 Feynman 积分. 然而，处理正规化的振幅常常比处理麻烦的表达式 (8-49)要方便. 在给出收敛性证明梗概之前，首先讨论在参量表示中减除的形式.

8-2-4 参量空间的重整化

在参量表示里可以重新表达减除方案。这个公式可使收敛性定理的证明比较简单。下面将给出主要的步骤。

作为一个初步的例子，再考虑六维 φ^3 理论的单圈自能图（图 8-7）。在欧氏空间里它的值是

$$I(P^2)=\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\,\frac{e^{-[m^2(\alpha_1+\alpha_2)+Q(P,\alpha)]}}{(4\pi)^3\mathscr{P}(\alpha)^3}$$

其中 $\mathscr{P}(\alpha)=\alpha_1+\alpha_2$，$Q(P,\alpha)=[\alpha_1\alpha_2/(\alpha_2+\alpha_2)]P^2$。由于在参量空间的原点的不可积性，它是平方发散的。如果用中间重整化，在原点作了关于 P^2 的截腿 Taylor 展开的减除以后，就得到重整化的形式

$$I_R(P^2)=I(P^2)-I(0)-P^2\frac{dI}{dP^2}\bigg|_0$$

$$=\int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2\,\frac{e^{-m^2(\alpha_1+\alpha_2)}}{(4\pi)^3\mathscr{P}(\alpha)^3}$$

$$\left(e^{-Q(P,\alpha)}-e^{-Q(0,\alpha)}-P^2\frac{d}{dP^2}e^{-Q(P,\alpha)}\bigg|_0\right).\quad(8\text{-}51)$$

如果同时把参量 α_1，α_2 扩大一个因子 λ，减除的被积式的行为就是 λ^{-1}。由于从测度 $d\alpha_1 d\alpha_2$ 多出附加因子 λ，积分在原点将是收敛的。如果记住 Q 和 $\mathscr{P}$ 的齐次性质，且注意到

$$Q(\rho P,\alpha)=Q(P\rho^2\alpha),$$

和

$$[\mathscr{P}(\alpha)]^{-3}\left(e^{-Q(P,\alpha)}-e^{-Q(0,\alpha)}-P^2\frac{d}{dP^2}e^{-Q(P,\alpha)}\bigg|_0\right)$$

$$=[\mathscr{P}(\alpha)]^{-3}e^{-Q(P,\alpha)}-\sum_0^2\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}$$

$$\cdot\{[\mathscr{P}(\alpha)]^{-3}e^{-Q(\rho P,\alpha)}\}\big|_{\rho=0}$$

$$=[\mathscr{P}(\alpha)]^{-3}e^{-Q(P,\alpha)}-\sum_0^2\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}$$

$$\cdot\{\rho^6 e^{-Q(P,\rho^2\alpha)}[\mathscr{P}(\rho^2\alpha)]^{-3}\}\big|_{\rho=0},\qquad(8\text{-}52)$$

那么对 P^2 的减除可以变换为对参量 λ 的减除。

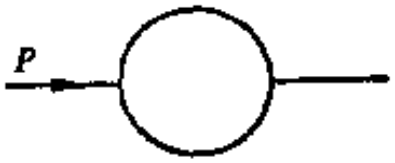


图 8-7泡图

这一简明的例子使我们得到下面的定义．令$f(\rho)$是ρ的函数，使得$\rho^p f(\rho)$对某一整数p在原点是可微的．定义算符$\mathscr{T}^k$是

$$\mathscr{T}^k f(\rho)=\rho^{-p_1}\sum_{s=0}^{k+p_1}\frac{\rho^s}{s!}\frac{d^s}{d\rho^s}[\rho^{p_1}f(\rho)]_{\rho=0}\qquad\forall p_1\geqslant p,\tag{8-53}$$

其中k是整数．可以验证这一定义不依赖于$p_1\geqslant p$，且可以推广到p是非整数的情况．假定$k+p\geqslant 0$（允许k是负的），表达式(8-53)就有意义．按照约定，令

$$\mathscr{T}^k\equiv 0,\ \text{如果}\ k+p<0.$$

这一推广的 Taylor 展开的实质在于

$$(1-\mathscr{T}^k)f(\rho)\sim O(\rho^{k+1}).\tag{8-54}$$

在先前的例子里，重整化的被积式是

$$(1-\mathscr{T}^{-4})\{[\mathscr{P}(\rho^2\alpha)]^{-3}e^{-Q(P,\rho^2\alpha)}\}|_{\rho=1},$$

其中记号意味着在$\rho=0$处进行减除，然后在$\rho=1$处计算函数．

这些运算可以推广到任意情况．返回到四维理论，将式(8-49)平移就得到下面的重整化振幅：

$$I_R(P)=\frac{1}{(4\pi)^{2L}}\int_0^\infty\prod_i^I(d\alpha_i\alpha_i^{-\alpha_i m_i^2})\mathscr{R}(P,\alpha)$$

$$\mathscr{R}(P,\alpha)=\sum_U\prod_{\gamma\in U}(-\mathscr{T}_{\rho_\gamma}^{-2I_\gamma})\{[\mathscr{P}(\alpha)]^{-2}e^{-Q(P,\alpha)}\}|_{\rho_\gamma=1}.\tag{8-55}$$

在放大$\alpha_i\to\rho_\gamma^2\alpha_i$以后，算符$\mathscr{T}_{\rho_\gamma}$作用在与重整化部分$\gamma$相关的参量$\alpha_i$上；$I_\gamma$标记$\gamma$的内线数．减除是在$\rho_\gamma=0$处进行，而结果是在$\rho_\gamma=1$处计算出的．最后，这些计算是在属于一个树从$U$的所有$\gamma$上进行的，且在对$U$求和（$U=\phi$相应于没有减除的恒等式）．在方程(8-55)里，为了简洁起见，我们取了没有微商耦合的标量理论，这是在欧氏区域中讨论而在动量空间的原点重整化的．将它推广到非零自旋、有微商的耦合、高维空间等是不困难的，只是记号复杂而已．

这一参量空间的减除公式具有显著的代数性质. 可以证明，虽然一般地属于交缠子图的两个特殊的 $\mathscr{T}$ 互不对易，但完整的表达式 (8-55)是与 Taylor 减除的次序无关. 另外，对于一给定的图或图的一个有限集合，对幂次 p 上有一个上限. 因此，算符 $\mathscr{T}_{\rho_\gamma}$ 仅依赖于内线数 I_γ，不再依赖于图形的特殊的拓扑性.

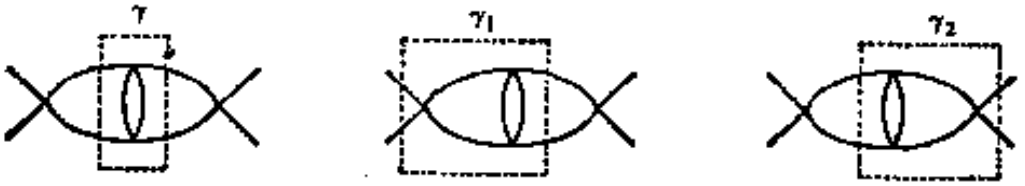


图 8-8　在参量空间里研究交缠发散

甚至在式(8-55)中，最后与拓扑的关系，即列举树丛和重整化部分，也可以被处置. 首先我们来证明

$$\mathscr{R}(P,\alpha) = \Pi(1 - \mathscr{T}_{\rho_\gamma}^{-sI_\gamma})\{[\mathscr{P}(\alpha)]^{-s}e^{-Q(P,\alpha)}\}|_{\rho_\gamma=1}, \quad (8\text{-}56)$$

其中乘积跑遍图形的所有重整化部分. 换句话说，去掉与交缠子图相关的减除. 作为一种解释，我们用图 8-8 作为例子来证实这一性质. 在四维空间里，图 G 与子图 γ_1, γ_2 和 γ 一起是重整化部分. 证明方程(8-55)和(8-56)等价，相当于证明等式

$$0 = (1 - \mathscr{T}_\lambda^{-sI_G})(-\mathscr{T}_{\rho_1}^{-sI_{\gamma_1}})(1 - \mathscr{T}_\rho^{-sI_\gamma})(-\mathscr{T}_{\rho_2}^{-sI_{\gamma_2}})$$
$$\cdot [\mathscr{P}^{-s}(\alpha)e^{-Q(P,\alpha)}]\}_{\rho_1=\rho_2=\rho=\lambda=1},$$

其中 G 的放大参量已用 λ 标记. 如果 f 是括号内的函数，则它满足

$$f \equiv f(\lambda\rho_1\rho_2\rho, \lambda\rho_1, \lambda\rho_2),$$

因为仅是那些属于 γ 的 α 同时被 ρ_1^2 和 ρ_2^2 放大. 因此，$\mathscr{T}_{\rho_2}$ 的作用给出

$$-\mathscr{T}_{\rho_2}^{-sI_{\gamma_2}}f = \sum_{k\leqslant -sI_{\gamma_2}} (\lambda\rho_2)^k f_k(\rho_1\rho, \lambda\rho_1)$$

(k 的下限依赖于理论；在标量理论里它为 $-4L_{\gamma_2}$，依赖于 γ_2 的圈数). 于是，

$$(1 - \mathscr{T}_\rho^{-sI_\gamma})(-\mathscr{T}_{\rho_2}^{-sI_{\gamma_2}})f = \sum_{\substack{k\leqslant -sI_{\gamma_2} \\ m>-sI_\gamma}} (\lambda\rho_2)^k(\rho_1\rho)^m f_{k,m}(\lambda\rho_1),$$

和

$$(-\mathscr{T}_{\rho_1}^{\cdot 2l_{\gamma_2}})(1-\mathscr{T}_{\rho}^{-2l_{\gamma}})(-\mathscr{T}_{\rho_2}^{\cdot 2l_{\gamma_3}})f$$
$$=\sum_{\substack{k\leqslant -2l_{\gamma_2}\\ m>-2l_{\gamma}\\ n+m\leqslant -2l_{\gamma_1}}}(\lambda\rho_2)^k(\rho_1\rho)^m(\lambda\rho_1)^n f_{k,m,n}$$

在求和中每一单项是 λ 的 $k+n$ 级的齐次式. 但是,

$$k+n\leqslant -2(l_{\gamma_1}+l_{\gamma_2})-m\leqslant -2(l_{\gamma_1}+l_{\gamma_2}-l_{\gamma})$$
$$\equiv -2l_G,$$

因此,仅保持大于 $-2l_G$ 级的项的最后一个减除 $(1-\mathscr{T}_1^{-2l_G})$ 的作用给出零结果. 作为练习可将这一证明推广到任意情况.

最后,容易证明,如果在一个不相应于表面发散固有子图的齐次标度参量子集上作减除,那么在整个表达式里它们的效应可为零. 因此,这个分析的最后结果是

$$\mathscr{R}(P,\alpha)=\prod_{\xi}(1-\mathscr{T}_{\rho_\xi}^{-2l_\xi})[\mathscr{P}^{-2}(\alpha)e^{-Q(P,\alpha)}]\big|_{\rho_\xi=1},\qquad (8\text{-}57)$$

其中乘积跑遍 α 参量的 $(2^{l_G}-1)$ 个非零集合. 这一结果仍不依赖于次序. 这个最后的表达式意义是双重的. 第一,它与图形的拓扑学无关. 其次,至少可以定性地理解收敛性证明的论据. 事实上,对于参量 α 的任一族 ξ,可以将算符 $(1-\mathscr{T}_{\rho_\xi}^{-2l_\xi})$ 放到 (8-57) 中乘积的左边,于是从 (8-54) 可以得到被积式的行为是 $\rho_\xi^{-2l_\xi+1}$,由于测度仍包含一个因子 $\rho_\xi^{2l_\xi-1}d\rho_\xi$ 因此对 ρ_ξ 是可积的. 遗憾的是,α 的任一子集的可能的奇异性是可积的这一点,并不足以保证积分的收敛性. 例如在积分

$$\int_0^1\int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2\,\frac{2\alpha_1}{(\alpha_1^2+\alpha_2)^2}$$

中相应于 $\alpha_1\to 0,\alpha_2\neq 0$ 或 $\alpha_2\to 0,\alpha_1\neq 0$ 或 $\alpha_1\sim\alpha_2\to 0$ 的奇异性是可积的,但是对 α_1 的积分导致发散积分

$$\int_0^1\frac{d\alpha_2}{\alpha_2(1+\alpha_2)}.$$

对于 Feynman 积分不发生这种现象的证明是冗长的,这里将不重述这一点. 象在 8-1-4 那样,我们必须把积分区域划分为分区,且要求助于参量函数的齐次性质.

现在通过再一次叙述 Bogoliubov-Parasiuk-Hepp 定理的重要结果，来结束这一长的、技术上的分析. 在方程(8-45)、(8-49)或(8-57)中描述的减除运算给出了一个绝对收敛积分，且定义了欧氏区域中动量的解析函数和在闵氏区域中的广义慢增函数.

8-2-5 有限重整化

至此，我们已经考虑了无穷大的减除. 但是，先前关于抵消项的构成、重整化的相乘特点、减除代数这些发展对有限重整化也适用. 所谓有限重整化，是指需要修正归一化条件的运算，因而用一个有限量改变理论的(重整化)参量. 例如，把归一化条件式(8-30)和(8-35)修改为式 (8-36) 就是这种情况、更一般地说，坚持我们的 φ^4 理论，让我们来考虑下面一组依赖于一个任意质量标度 μ 的重整化条件：

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2)\big|_{p^2=\mu^2} = \mu^2 - m^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_R^{(2)}(p^2)\big|_{p^2=\mu^2} = 1,$$

$$\Gamma_R^{(4)}\big|_{S_\mu} = -\lambda, \tag{8-58}$$

其中 S_μ 象在方程(8-35)中定义的那样，但 m 用 μ 代替.

这是完全合理的选择，因为它对最低级是成立的，且内插在条件式(8-30)和(8-35)以及式(8-36)之间. 然而选择 μ 使得重整化点 $p^2 = \mu^2$ 和 S_μ 分别处在两点和四点函数的解析区域内部是保险的. 否则，上述条件应理解为仅对振幅的实部成立.

现在理论依赖于两个质量标度：m 是进入 Feynman 图传播子的质量，μ 指定是重整化点. 物理质量是由整个传播子的极点来定义的，它是 m，μ 和 λ 的某一函数，且可以在微扰论里进行逐级计算. 还有，极点的留数不再是一，所以 S 矩阵元的计算应将它考虑进去.

相应于两不同 μ 的选择的两个重整化理论如何相关呢？显然，每一个理论都可由另一个来重新构成，其方法是通过引入有限抵消项，这些抵消项逐级被确定以满足新条件．象无限重整化情况那样，只要也允许场的有限波函数重整化，这些参量等于给定点 μ 的 Green 函数值，当改变 μ 为 μ' 时就相当于参量 m,λ (和 1)变为 m', λ' 和 z．因此

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;m,\lambda,\mu) = z^{n/2}\Gamma_R^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;m',\lambda',\mu'), \tag{8-59}$$

其中 m', λ' 和 z 是 m, λ, μ 和 μ' 的函数，可以在微扰论里逐级计算．

可用六维空间中 φ^3 理论的两点函数来解释它，这一可重整化理论的优点是在单圈近似下具有非平庸的波函数重整化．如果

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{3!}:\varphi^3:,$$

图 8-7 的自能贡献是

$$i\Gamma^{(2)[1]}(P^2) = -\lambda^2\int\frac{d^6k}{(2\pi)^6}\frac{1}{[(P-k)^2-m^2](k^2-m^2)},$$

这里理解成作了某种正规化，而指标 1 表示单圈修正．直接运算可以获得

$$\Gamma^{(2)[1]}(P^2) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}\int_{1/\Delta^2}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^2}\int_0^1 d\alpha e^{-\rho[m^2-\alpha(1-\alpha)P^2]}$$

和

$$\frac{\partial^2\Gamma^{(2)[1]}}{(\partial P^2)^2} = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}\int_0^1\frac{d\alpha\alpha^2(1-\alpha)^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)P^2}.$$

满足(5-58)的重整化函数是

$$\Gamma_R^{(2)[1]}(P^2) = \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}\int_0^1 d\alpha\Big\{[m^2-\alpha(1-\alpha)P^2]\ln\cdot\frac{m^2-\alpha(1-\alpha)P^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)\mu^2} + \alpha(1-\alpha)(P^2-\mu^2)\Big\}. \tag{8-60}$$

这里不去费力地给出对 α 的明显的积分. 如果现在把 μ 变成 μ'，不难发现，$\Gamma_R^{(1)} = P^2 - m^2 + \Gamma_R^{(2)(1)}$ 满足方程(8-59)，其中

$$m'^2 = m^2 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}\int_0^1 d\alpha\left[(1-\alpha+\alpha^2)m^2\right.$$

$$\left.\cdot\ln\frac{m^2-\alpha(1-\alpha)\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)\mu'^2}+\alpha(1-\alpha)(\mu^2-\mu'^2)\right], \quad (8\text{-}61)$$

$$x = 1 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3}\int_0^1 d\alpha\alpha(1-\alpha)\ln\frac{m^2-\alpha(1-\alpha)\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)\mu'^2}.$$

函数 λ' 应由计算三点函数来确定. 将此作为练习留给读者.

在任何重整化理论里都可以将此推广到任意条件，并得到类似于方程(8-59)的结论. 方程(8-59)中表示的信息，即改变重整化点或者改变重整化参量的等价性，称为重整化群不变性. 这一方程或它的无穷小形式——所谓重整化群方程——所包含的内容将在第十三章中讨论. 我们将看到，看起来很单纯的在选择归一化条件时的自由性具有非平庸的和重要的结果.

8-2-6 复合算符

至此所考虑的 Green 函数仅涉及到基本场，即是进入拉氏函数中的动力学变量. 或者通过 Bogoliubov 减除 R 运算，或者通过引入抵消项所进行的重整化步骤，推广到包含复合算符在内的一较宽广类的函数. 这是指场算符和它们的微商的定域单项式. 这种算符的典型例子是电磁流 $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. 在很多推论中复合算符起了重要的作用.

为了简便起见，我们仍然只讨论标量 φ^4 理论. 复合算符具有 φ^2，$(\partial\varphi)^2$，$\varphi\Box\varphi$，φ^3，φ^6 等形式，但如果我们构造类矢量或类张量算符，则还有 $\varphi\partial_\mu\varphi$，$\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$，$\cdots$. 按幂次计数法，这些算符明显地分别有量纲 $\omega_i = 2,4,4,4,6,\cdots,3,4,\cdots$. 为了处理包含插入这些算符 $O_i(x)$ 的 Green 函数，在作用量

里加一源 χ_i 与这些算符耦合是方便的. 结果

$$Z(j,\chi)=\left\langle 0\left|T\exp\left\{i\int d^4x[j(x)\varphi(x)+\chi_i(x)O_i(x)]\right\}\right|0\right\rangle \tag{8-62}$$

将产生这些新函数. 连接的 Green 函数可以从 Z 的对数得到，正象在方程 (6-71) 中一样，而第六章中仅对源 j 作的 Legendre 变换将产生固有函数，即单粒子不可约的函数，但具有任意数目 O_i 插入. 如果限于讨论有限数目的情况，将对 χ_i 作有限次数的微商，然后令 $\chi_i=0$.

如果考虑插入 N 个量纲为 ω_i 的算符的图，只用方程(8-13c) 就可显示出新的表面发散度 ω' 与无插入时的发散度之差为

$$\omega'-\omega=\sum_i^N(\omega_i-4). \tag{8-63}$$

在表面收敛图里插入小于或等于 4 阶的算符将保持收敛性，而插入大于 4 阶的算符就破坏了幂次计数法. 然而，不管插入多少(有限)数目的复合算符，总存在一个减除方案，或者等价地说总存在使得固有 Green 函数有限的抵消项. 例如，假如两点(两个外线 φ)函数

$$\langle TO_1(x_1)O_2(x_2)\cdots O_N(x_N)\varphi(y)\varphi(z)\rangle_{\text{固有}} \tag{8-64}$$

是 ω' 阶表面发散的，存在一定域的具有发散度小于或等于 ω' 的微商多项式的抵消项，它是 φ 的二次型，且正比于 $\chi_1(x)\cdots\chi_N(x)$. 很明显，这一抵消项将仅对函数(8-64)有贡献. 下面将用一个简单的例子作说明.

1. φ^2 算符的插入. 这个算符具有量纲 $\omega(\varphi^2)=2$ 因此它的插入改善了幂次计数. 存在着两个具有 φ^2 插入的表面发散的固有函数. 它们可用图 8-9 来解释. 两者都有 $\omega=0$. 对第一个我们连上一 χ 二次方的但与 φ 无关的抵消项，而第

二个则要求形为 $\frac{1}{2}\chi\varphi^2$ 的抵消项. 这样，拉氏函数中的原始项 $\frac{1}{2}\chi\varphi^2$ 将变为

$$\frac{1}{2}(1+\delta_1)\chi\varphi^2+\delta_2\chi^2,$$

其中 δ_1,δ_2 是两个发散的标量. 如果写出

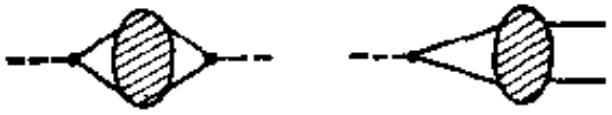
$$1+\delta_1=ZZ_{\varphi^2}$$

作为 Z_{φ^2} 的定义，它依赖于 φ^2 的波函数重整化 Z，则可以见到插入单个 φ^2 的 n 点函数满足

$$\Gamma^{(n)}_{\varphi^2,R}(q;p_1,\cdots p_n,\lambda,m)$$
$$=Z_{\varphi^2}Z^{n/2}\Gamma^{(n)}_{\varphi^2,\mathrm{reg}}(q;p_1,\cdots,p_n,\lambda_0,m_0), \quad (8\text{-}65)$$

其中 q 是在 φ^2 顶角处进入图的动量. 我们看到，象 φ 一样，φ^2 是相乘重整化的，它具有波函数重整化常数 Z_{φ^2}. 可直接推广得到插入几个算符的结果，

$$\Gamma^{(n)}_{\varphi^2\varphi^2,R}(q_1,q_2;p_1,\cdots,p_n,\lambda,m)$$
$$=Z^2_{\varphi^2}Z^{n/2}\Gamma^{(n)}_{\varphi^2\varphi^2,\mathrm{reg}}(q_1,q_2;p_1,\cdots,p_n,\lambda_0,m_0)$$
$$+2\delta_2\delta_{n,0}, \quad (8\text{-}66)$$



(a) (b)

图 8-9 φ^2 插入的发散图

其中最后一项考虑了图 8-9a 的真空图 ($n=0$).

当然，这些新的减除需要新的归一化条件去指定. 例如，我们可加在零动量处的条件

$$\Gamma^{(2)}_{\varphi^2,R}(0;0)=1,\ \Gamma^{(0)}_{\varphi^2\varphi^2,R}(0,0)=0, \quad (8\text{-}67)$$

与最低级一致.

φ^2 算符的重整化是与质量重整化相关的. 因为在拉氏函数中附加

的一项 $\frac{1}{2}\chi(x)\varphi^2(x)$，可以看作与 x 相关的质量的变分 $m^2\to m^2-\chi(x)$，由此可得

$$\Gamma^{(2)}_{\varphi^2,R}(0;p;\lambda,m)=-Z_{\varphi^2}\frac{\partial}{\partial m_0^2}\Gamma^{(2)}_R(p;\lambda,m)\Big|_{\lambda_0},$$

其中微商是在固定 λ_0 点取的．因此，如果减除象方程(8-36)和(8-67)那样是在零动量处作的，则其结果是

$$Z_{\varphi^2}=\frac{\partial m_0^2}{\partial m^2}\Big|_{\lambda_0}. \tag{8-68}$$

2. φ^4 算符插入． 量纲为 4 的算符插入不影响幂次计数．源 χ_{φ^4} 的一次方的抵消项，即与单个插入有关的抵消项将是下列算符的组合：$\{O_i,i=1,\cdots,4\}\equiv\{\varphi^2(x),\varphi^4(x),(\partial\varphi)^2(x),\varphi\Box\varphi(x)\}$(对 x 积分后最后两项是等价的，但一般情况下是不同的)．事实上，这些算符是被重整化混合的．因此，φ^4 不能与那些算符独立地考虑．具体来讲，方程(8-65)的推广是

$$\Gamma^{(n)}_{O_i,R}(q;p_1,\cdots,p_n;\lambda,m)$$
$$=\sum_j Z^{n/2}Z_{ij}\Gamma^{(n)}_{O_j,reg}(q;p_1,\cdots,p_n;\lambda_0,m_0). \tag{8-69}$$

这相当于说重整化的 φ^4 插入，需要在拉氏函数中有下述的源项：

$$\chi_{\varphi^4}\left[Z_{21}Z\frac{\varphi^2}{2}+Z_{22}Z^2\frac{\varphi^4}{4!}+Z_{23}Z\frac{(\partial\varphi)^2}{2}+Z_{24}Z\frac{\varphi\Box\varphi}{2}\right],$$

其中 Z_{ij} 是由引入合适的归一化条件来确定的． 最后，从先前的讨论知道，φ^2 是相乘可重整化的，这意味着当 $j\neq 1$ 时 $Z_{1j}=0$ 而 $Z_{11}=Z_{\varphi^2}$．

较一般地说，在可重整化理论里，一组量纲小于或等于一给定数 D 并具有相同量子数的复合算符的完备集，在先前的

矩阵形式里是相乘可重整化的，至少对于只处理单个插入时是这样的。而且，如果 $\dim O_i < \dim O_j$ 则有 $Z_{ij} = 0$（矩阵 Z_{ij} 不是对称的）。这些显然都是幂次计数法的结果。

作为练习，读者可以研究量纲为 4 的算符的 Z_{ij} 和裸常数 λ_0, m_0, Z 的关系。读者也可以做量纲为 6 算符的重整化分析，或做张量算符，如能动量张量的重整化分析。

在某些例子里，有兴趣的事是对一个算符指定一个比由量纲计数法得到的要大的量纲并把它相应地重整化。例如，如果不把 φ^4 考虑成量纲为 2 的算符而指定它是量纲为 4 的算符，就需要更多的减除(以及归一化常数)。为了区别老的(或软的)算符 $N_2(\varphi^4)$ 而以 $N_4(\varphi^4)$ 标记新的(或硬的)算符，$N_4(\varphi^2)$ 将与 φ^4，$(\partial\varphi)^2$ 和 $\varphi\Box\varphi$ 处于同等地位。特别是 Z_{11} 不再为零。这种在某些应用里有用的推广是 Zimmermann 引进的。

在有 n 种插入的情况里，沿着 Ariadne 思路式(8-63)的规则，我们发现只要原来算符 O_i 的量纲为 4，则抵消项(源的多线性项)将保持量纲为4，但当 $\dim(O_i) > 4$ 时，它们的量纲随着增加。例如，φ^4 和 $\varphi\Box\varphi$ 的双重插入也需要 φ^2，φ^4，$\varphi\Box\varphi$ 和 $(\partial\varphi)^2$ 的抵消项，而 φ^4 和 φ^6 的插入也包含量纲为 6 的所有的算符，而 φ^6 的双重插入则导致量纲为 8 的抵消项。

8-3 零质量极限、渐近行为和 Weinberg 定理

至此，我们回避了所有与零质量有关的问题。这一节将对这些问题的某些方面以及它们与 Weinberg 定理的关系作一些启发式的讨论。后者是处理外动量变得非常大时 Feynman 图的行为的。

8-3-1 无质量理论

当处理内部传播子里的无质量粒子时，面临着出现新的

发散的危险. 下面我们将证明,只要外动量偏离某些特殊值,就不会发生新的发散. 在理论的欧氏（即 Wick 转动后）描述中,当拉氏函数的所有顶角的量纲为 4 (或更高一点)时,在外动量的任一非零和非例外值上固有函数是有限的. 非例外动量是指那些使得入射动量的部分和不为零的组态. 因为外部动量提供一个较低的截断，所以对于小的内部动量积分仍旧是有限的.

在包含超可重整化耦合的理论里这一结果被破坏了. 例如，具有一个 φ^3 顶角(或等价地插入一个零动量 φ^2)的图 8-10a 是红外发散的

$$I_G(P)\sim\int\frac{d^4k}{(k^2)^2(P-k)^2}$$

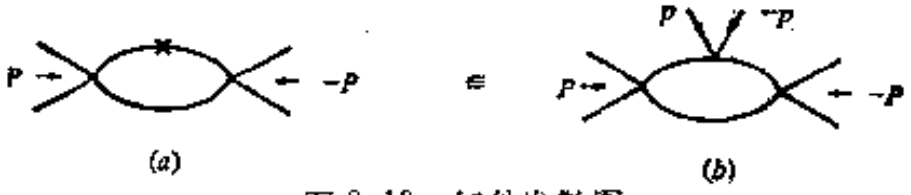


图 8-10　红外发散图

这一振幅也可看作 φ^4 理论中的六点函数 (图 8-10b),但它是对一个例外组态来计算的.

一个严格的证明需要小心地把积分区域分成一些小块，很象证明8-1-4节中定理时一样. 这里避开可能的紫外问题，而在幂次计数法的基础上给出一个简单的论证.

红外幂次计数法，相当于找出在每个顶角保持动量守恒下在图里有多少动量会变成软的. 考虑一外部动量不为零的N点函数，且假定对于这些硬外动量，已选择了一种在图中的确定的动量流通. 因为后者不是例外的,当所有圈动量趋于零时,这些硬外动量所流经的任一内部线不可能有零动量. 而且,同一性质表明,这些硬内部线在图上构成一联结的花样(在图 8-11 例子中的粗黑线). 因此,当只涉及到红外行为时，我们可以将它们收缩成单独的顶角. 对这一顶角附有N条硬外线和 i 条内线，因为这一图形是单粒子不可约的，所以 $i\geqslant 2$. 令 I,L,

V_3和V_4分别是图中的收缩内线数、圈数、三点顶角数和四点顶角数。我们就有通常的拓扑关系

$$L = I + 1 - (V_3 + V_4 + 1),$$

$$N + 2I = 3V_3 + 4V_4 + (N + i).$$

由于按照假定，拉氏函数的所有顶角是 4 阶的，所以每个三点顶角要附上动量的一次幂。因此，当所有内部圈动量同时小时给出表面红外发散度的收缩图的齐次数是

$$\omega_{ir} = 4L - 2I + V_3 = i \geqslant 2,$$

至少它启发地保证了红外收敛。

我们可以怀疑，是否可放松关于在收缩后的所有内部圈动量是小的这一假定，而可以不破坏先前的幂次计数法。例如，假定 $I_H < I$ 数的内部动量保持是硬的且它们构成一个具有 L_H 个圈的花样和每一形式的 V_{3H} 和 V_{4H} 顶角。ω_{ir} 似乎将变为 $\omega'_{ir} = \omega_{ir} - \Delta\omega_{ir}$：

$$\Delta\omega_{ir} = 4L_H + V_{3H} - 2I_H,$$

这样可能会出现麻烦。幸好，并不是这样。硬花样可考虑为一个图(可能是不连接图)，在构成这一图时所有外线都是软的。这样，其行为就是这些动量的 $\Delta\omega_{ir}$ 幂。因此，ω_{ir} 不受影响。因为 ω_{ir} 是这个图的齐次度，所以，有这一结果是毫不奇怪的。

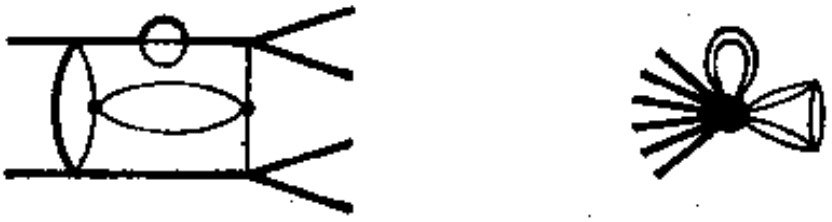


图 8-11　通过图形的硬动量流以及相应的收缩图

我们还可以进一步指出，当有一个动量 p 为零，其它的不为零且非例外时，Green 函数仍旧有限。

读者可以毫不困难地发现，把前面简单的论证推广到那个情况中去且可证明 ω_{ir} 至多减少1。

在这一粗糙的论证中忽略了可能的紫外问题。为了使重整化不破坏，必须选择一恰当的归一化条件。必须避免在零

动量处减除，因为在那一点上 Green 函数一般是发散的。在零动量理论里，重整化点选在动量的欧氏值处，例如 $p^2 = -\mu^2 < 0$ 处，而不取方程(8-34)或(8-36)是安全的。引入非零归一化点的必要性，意味着物理质量参量为零的理论总包含一质量标度 μ。物理量对这一任意选择的无关性，导致了重整化群约束条件，这将在后面讨论。

前面的考虑也适用于同时包含无质量和有质量粒子的理论，如量子电动力学。在任一非零和非例外欧氏动量值上 Green 函数是有限的。当不止一个外动量为零时，情况需要逐个分析。

总之，如果令所有（或某些）Feynman 图的内部质量趋于零，并不遭遇到任何奇异性，只要：

1. 所有顶角是 4 阶的；

2. 外动量不是例外的；

3. 至多存在一个软的外动量；

4. 重整化已在某一固定欧氏点处实行。

当外动量从欧氏值延拓到物理质壳上时，会发生什么情况，这是一个较困难的问题。前面的定理的一个推论是有趣的。考虑一固有两点函数，且假定当避开阈奇异性时可以延拓到闵氏区域。Green 函数保持有限，所以它的吸收部分也保持有限。根据 Cutkosky 规则(见第六章)，这意味着任一衰变到包含无质量粒子终态的总衰变率是有限的。将 Kinoshita 得出的这一结果可和由 Lee 和 Nauenberg 证明的定理加一比较。按照这一定理，在一包含无质量粒子的理论里，对退化态求和后任一跃迁几率都是有限的。当然，这就是我们在第四章和第七章中所发现的例子，在那里我们主要讨论的是软发射。应该明白，当有能量的、共线的、无质量粒子产生时会发生附加的发散性。在先前的讨论里已包含了这些情况。

8-3-2 紫外行为和 Weinberg 定理

我们来找一个在大外动量值下表面紫外发散度 $\omega(G)$ 和 Feynman 积分之间的严格关系. 从量纲考虑，用一个共同的大因子 λ 来重新标度所有的动量，等价于对所有内部质量除以同一因子 λ. 因此，此问题是与上一节所考虑的无质量极限紧密相关的.

为简便起见，再一次考虑没有微商耦合的标量理论. 选取一个在欧氏外动量上计算的 Green 函数，且暂时限于考虑紫外收敛的情况.在总体齐次性变量上积分以后，方程(8-20)变为

$$I_G(P) = \frac{\Gamma[-\omega(G)/2]}{(4\pi)^{2L}} \int_0^1 \prod_l d\alpha_l \delta(1-\Sigma\alpha_l) \cdot \frac{[\Sigma\alpha_l m_l^2 + Q(P,\alpha)]^{\omega(G)/2}}{[\mathscr{P}(\alpha)]^2}.$$

如果 P 被放大，$P \to \lambda P$，则积分具有 $\lambda^{\omega(G)}$ 的行为（记住根据假定有 $\omega(G) < 0$），其条件是

$$\int \Pi d\alpha_l \delta(1-\Sigma\alpha_l) \frac{[Q(P,\alpha)]^{\omega(G)/2}}{[\mathscr{P}(\alpha)]^2}$$

收敛. 这又依赖于 $I_G(P)$ 的零质量极限的存在. 特别是，我们看到大 λ 行为是与 P 的组态相关的. 从前一小节可知，如果欧氏动量不为零且是非例外的，则这样的极限是存在的.这时，渐近行为由紫外幂次计数给出：

$$I_G(\lambda P) \underset{\lambda \to \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)}. \tag{8-70}$$

这一结果可以推广到表面发散但可重整的图形的情况.但是，幂次行为可能被对数幂次所修正，

$$I_G(\lambda P) \sim \lambda^{\omega(G)} \sum_{0}^{q_{max}} C_q \ln^q \lambda [1 + O(\lambda^{-1})]. \quad (8\text{-}71)$$

如果零质量极限是没有确切定义的，例如，如图形包含小于 4 阶的顶角以及(或者)例外的外动量，则可以预期对这一行为有所偏离，即有比 $\lambda^{\omega(G)}$ 更高的幂次和可能的对数修正。

为了解释这一点，考虑图8-12的具有 $n+2$ 条线和顶角的单圈图：n 个这种顶角表示质量插入。表面发散度是 $\omega(G) = -2n$。相应的(欧氏)积分是

$$I_G(P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{n+1}[(P+k)^2 + m^2]}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2 n} \int_0^1 d\alpha \alpha^n [m^2 + \alpha(1-\alpha)P^2]^{-n}.$$

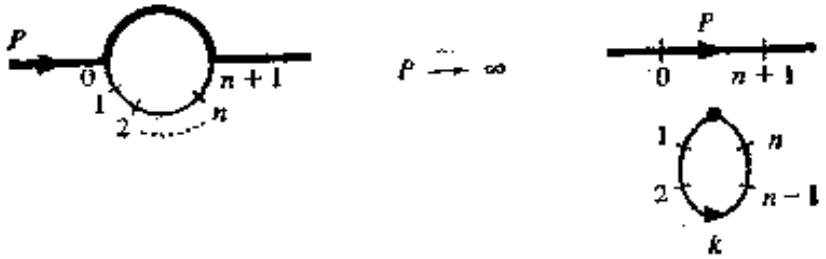


图 8-12 具有 n 个 φ^2 插入的自能图

当 $P^2 \to \infty$ 时，$I_G(P)$ 的行为是

$$I_G(P) \underset{P^2 \to \infty}{\sim} \begin{cases} \frac{1}{P^2} \ln \frac{P^2}{m^2} & n = 1, \\ \frac{m^2}{P^2} \frac{1}{(m^2)^n} & n > 1, \end{cases}$$

粗浅的估计给出 $(P^2)^{-n}$。这可以为下述理由所解释，即大动量流过一单独的传播子(图 8-12 上面的)，给出幂次 $(P^2)^{-1}$，来自传播子下面的链图的系数，$\int^{|P|} d^4k/(k^2+m^2)^{n+1}$，其行为在 $n=1$ 时是 $\ln P^2$，或者当 $n > 1$ 时是常数。

在 Weinberg 研究过的一般情况中，大 λ 行为是与大动

量流所流过的传播子最小数目相关的. 在不具有零质量粒子的可重整化(或超可重整化)理论里下面的结果成立. 当欧氏动量(可能是例外的) 被一个大因子 λ 放大时, Feynman 积分 I_G 主要由下面的行为决定:

$$I_G(\lambda P) \sim \lambda^{\Omega+\varepsilon}, \tag{8-72}$$

其中 ε 是一记号, 表示幂行为 λ^Ω 被一个对数的整数幂所修正, 而 Ω 是

$$\Omega = \sup_g \omega(g), \tag{8-73}$$

其中 g 跑遍 G 的所有子集, 使得(1)可约图 G/g 中, 进入每个它的顶角的总外部动量为零; (2)G/g 的每个连接部分是属于某些外线上的. 简短地说, 这意味着(大)外动量可以流过 g 而没有分流到 G/g(见图 8-13). 还有, $\omega(g)$ 是 g 的紫外表面发散度.



图 8-13 在非例外组态 (a) 和例外组态(b)里大外动量 (粗黑线) 通过方块图的可能流动

当理论是严格地可重整(没有超可重整耦合)且动量是非例外的时, 可以证明 $\omega(G)$ 达到上限 Ω, 这与先前的考虑是一致的. 读者可以把这些一般规则应用到前面图8-12的例子.

这些结果可以推到闵氏动量或到只有一小组动量是大的组态的情况. 还可以得到 λ 的对数幂的限.

8-4 量子电动力学情况

这一节讨论量子电动力学的一些特殊问题, 即与规范不

变性和 Ward 等式相关的问题. 所有这些都已在 7-1-4 节中单圈近似下遇到且处理过了，这里只是用与重整化相自洽的方法对所有级进行分析. 下面将首先用比在第七章中更系统和代数的方法来推出 Ward 等式.

8-4-1 Ward-Takahashi 等式的形式推导

从光子具有质量 μ 的拉氏函数式 (6-25) 出发，根据 Noether 定理，流守恒

$$j_\rho(x) = e{:}\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(x){:} \quad \partial^\rho j_\rho(x) = 0 \qquad (8\text{-}74)$$

是拉氏函数在总体位相变换

$$\psi(x) \to e^{i\chi}\psi(x) \qquad \chi \text{ 是常数}$$

下不变的结果. 这一性质意味着包含单个流算符的 Green 函数和任意数目场量 $\psi, \bar{\psi}, A$ 之间的关系.

这一节计划是，首先推导出作为流守恒结果的一组协变等式，并导出 Minkowski 空间的编时乘积来表达 Green 函数. 然后设法在重整化中保持这些关系. 用这种方法获得的表达式有 Lorentz 协变的形式；所以理解为我们是用协变 T 乘积推导的 (见 5-1-7).

如果在一项上面的脱字号"$\wedge$"表示抛去此号下的量，则有

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\rho\langle 0|Tj_\rho(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)A_{\rho_1}(z_1)\cdots A_{\rho_p}(z_p)|0\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle 0|T\{[j_0(x),\psi(x_i)]\delta(x^0-x_i^0)\bar{\psi}(y_i) \\
&\quad + \psi(x_i)[j_0(x),\bar{\psi}(y_i)]\delta(x^0-y_i^0)\} \\
&\quad \times \psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots\widehat{\psi(x_i)\bar{\psi}(y_i)}\cdots A_{\rho_p}(z_p)|0\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}\langle 0|T\psi(x_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)A_{\rho_1}(z_1)\cdots \\
&\quad [j_0(x),A_{\rho_j}(z_j)]\delta(x^0-z_j^0)\cdots A_{\rho_p}(z_p)|0\rangle. \qquad (8\text{-}75)
\end{aligned}$$

包含 $\partial_\mu j^\mu$ 的项已经去掉，而剩余的项正来自 T 乘积中暗含的 x_0 的依赖性．现在求助于正则对易关系

$$[j_0(x),\psi(x')]\delta(x^0-x'^0)=-e\psi(x)\delta^4(x-x'),$$
$$[j_0(x),\phi(x')]\delta(x^0-x'^0)=e\phi(x)\delta^4(x-x'),$$
$$[j_0(x),A_\rho(x')]\delta(x^0-x'^0)=0. \tag{8-76}$$

它们表示 ψ,ϕ 和 A 产生电荷 $Q=\int j_0(\mathbf{x},t)d^3x$ 的量子，分别等于 $-e,e$ 和零．与从最小耦合方案获得的流的明显形式不同，上面的对易关系，或者至少是它们的积分形式，对于电荷守恒是关键的．Ward-Takahashi 等式(8-75)是

$$\partial_x^\rho\langle 0|Tj_\rho(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots A_{\rho_p}(z_p)|0\rangle$$
$$=e\langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)\cdots A_{\rho_p}(z_p)|0\rangle$$
$$\cdot\sum_{i=1}^{n}[\delta^4(x-y_i)-\delta^4(x-x_i)]. \tag{8-77}$$

我们来进一步研究下述情况：

$n=1$	$p=0$	自能和顶角；
$n=0$	$p=1$	真空极化；
$n=0$	$p=3$	光子．

我们指出，式(8-77)对 Green 函数的连接部分也成立．当避开紫外发散时，下面的讨论是形式的．下一小节中将证明它是对的，那时将给出使保持等式仍成立的正规化．

1. 令 $G_{\rho\sigma}$ 是完全的光子传播子而 $G^{(0)}_{\rho\sigma}$ 是自由光子传播子(图 8-14)：

$$G_{\rho\sigma}(x)=G^{(0)}_{\rho\sigma}(x)$$
$$-i\int d^4x'G^{(0)}_{\rho\sigma'}(x-x')\langle 0|Tj_{\sigma'}(x')A_\sigma(x)|0\rangle. \tag{8-78}$$

从方程(8-77)可以得到

$$\partial_x^\rho G_{\rho\sigma}(x)=\partial_x^\rho G^{(0)}_{\rho\sigma}(x) \tag{8-79}$$

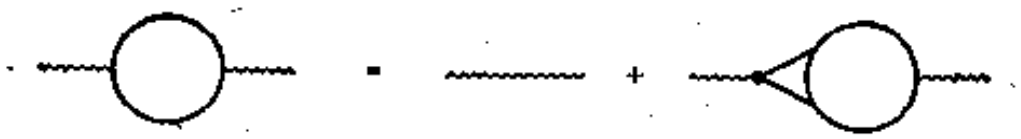


图 8-14　量子电动力学里真空极化

在动量空间解释它，这一方程意味着真空极化的横向性

$$k^\rho \bar{\omega}_{\rho\sigma}(k) = 0, \qquad (8\text{-}80)$$

$$\bar{\omega}_{\rho\sigma}(k) = -i(g_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma)\bar{\omega}(k^2),$$

这是方程(7—6)的推广.

事实上，在动量空间里方程(8-79)是

$$k^\rho G_{\rho\sigma}(k) = k^\rho G^{(0)}_{\rho\sigma}(k) = -i\frac{M^2}{\mu^2(k^2 - M^2)},$$

或者在用 $G^{-1}_{\sigma\rho'} = -i\Gamma_{\sigma\rho'}$ 相乘后

$$k_\rho = -\frac{M^2}{\mu^2(k^2 - M^2)} k^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}(k), \qquad (8\text{-}81)$$

其中 $M^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$. 如果对 $\Gamma_{\sigma\rho}$ 用下述形式参数化:

$$\Gamma_{\sigma\rho}(k) = -[g_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma(1-\lambda)] + g_{\rho\sigma}\mu^2 + \bar{\omega}_{\rho\sigma}(k)$$

$$= A(k^2)(g_{\rho\sigma}k^2 - k_\rho k_\sigma) + B(k^2)k_\rho k_\sigma, \qquad (8\text{-}82)$$

则等式(8-81)导至

$$B(k^2) = \lambda\frac{k^2 - M^2}{k^2}.$$

换句话说，$B(k^2)$ 是不受辐射修正影响的，且 $\bar{\omega}_{\rho\sigma}$ 是横向的.

2. 电子自能和顶角函数之间的关系，可以通过考虑完全的(不必要是固有的但当然是连接的)顶角函数 $\mathscr{V}_\rho(p', p)$ 而得到，其定义为(图 8-15)

$$-ie(2\pi)^4\delta^4(p' - p - q)\mathscr{V}_\rho(p', p)$$

$$= \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'\cdot x_1 - p\cdot y_1 - q\cdot x)}$$

$$\cdot \langle 0|TA_\rho(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle$$

$$= -iG^{[0]}_{\rho\sigma}(q)\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'\cdot x_1 - p\cdot y_1 - q\cdot x)}$$
$$\cdot \langle 0|Tj^{\sigma}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle. \qquad (8\text{-}83)$$

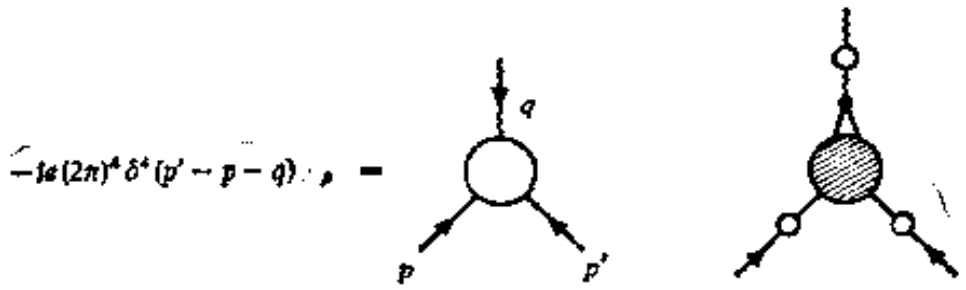


图 8-15　顶角函数以及把它分解为穿上完全传播子衣服的固有顶角

用在方程(7-46)中已遇到的顶角函数 $\Lambda_\rho(p',p)$和完全电子传播子 $iS(p)[S^{[0]}(p) = (\not{p} - m)^{-1}]$ 来表示，则有（比较图 8-15）

$$\Gamma_\rho(p',p) = G_{\rho\rho'}(q)[iS(p')\Lambda^{\rho'}(p',p)iS(p)]. \qquad (8\text{-}84)$$

将方程(8-33)和 k_ρ 收缩，且应用方程(8-84)和(8-79)，则可以得到

$$e(2\pi)^4\delta^4(p' - p - q)q^\rho G^{[0]}_{\rho\sigma}(q)S(p')\Lambda^\sigma(p',p)S(p)$$
$$= -q^\rho G^{[0]}_{\rho\sigma}(q)\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'\cdot x_1 - p\cdot y_1 - q\cdot x)}$$
$$\cdot \langle 0|Tj^{\sigma}(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle. \qquad (8\text{-}85)$$

因为 $q^\rho G^{[0]}_{\rho\sigma}(q)$ 是与 q^σ 成正比的，因此

$$e(2\pi)^4\delta^4(p' - p - q)S(p')q^\rho\Lambda_\rho(p',p)S(p)$$
$$= i\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'\cdot x_1 - p\cdot y_1 - q\cdot x)}$$
$$\cdot \partial^\rho_x\langle 0|Tj_\rho(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle.$$

现在可以用 $n = 1, p = 0$ 时的一般等式

$$e(2\pi^4)\delta^4(p' - p - q)S(p')q^\rho\Lambda_\rho(p',p)S(p)$$
$$= ie\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'\cdot x_1 - p\cdot y_1 - q\cdot x)}$$
$$\cdot \langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(y_1)|0\rangle$$

$$\times [\delta^4(x - y_1) - \delta^4(x - x_1)].$$

因此，

$$S(p')q^\rho \Lambda_\rho(p', p)S(p) = S(p) - S(p'), \qquad (8\text{-}86)$$

$$q^\rho \Lambda_\rho(p', p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p)$$
$$= [\not{p}' - m - \Sigma(p')] - [\not{p} - m - \Sigma(p)]. \qquad (8\text{-}87)$$

在 $q = 0$ 处对 p'^ρ 作微分，可得

$$\Lambda_\rho(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\rho} S^{-1}(p), \qquad (8\text{-}88)$$

与方程(7-47b)一致.

3. 最后，光子-光子散射振幅的 Ward 等式使我们可分出四次外动量幂次，因此可以改进幂次计数. 从 $n = 0, p = 3$ 的方程 (8-77) 可以知道，四光子 Green 函数满足

$$k_1^{\rho_1}\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$$
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0,$$

和类似的相对于 k_2, k_3, k_4 的横向性条件. 由此可得

$$\Gamma_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = k_1^\sigma \Gamma_{1,\sigma\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}(p_1, p_2, p_3, p_4),$$

其中 Γ_1 对于第一对指标 σ, ρ_1 是反对称的. 这一光子动量的分出可以对 k_2, k_3, k_4 继续作下去，而不会引入奇异性. 最后得到一个四点函数，它的有效表面发散度是 −4 而不是零.

剩下的问题是证明这些等式在正规化和重整化运算后仍保持不变.

8-4-2 保持到所有级的 Pauli-Villars 正规化

这里选择传统的 Pauli-Villars 正规化，而不是维数正规化. 后者将在 8-4-4 中双圈图计算里解释. 我们记得 Pauli-Villars 方法相当于独立地将费米子圈和光子传播子正规化.在一个标准形式里光子传播子被自由传播子的叠加所代替. 然而，费米子圈作为一个整体来处理，每一个是相应于最小耦合

到电磁流上的(图 8-16)不同质量费米子的贡献的和。显然，

$$I=\sum_{i=0}^{S}C_i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\not p-M_i+i\varepsilon}\right.$$
$$\left.\cdot\gamma_{\mu_1}\frac{1}{\not p-\not q_1-M_i+i\varepsilon}\cdots\gamma_{\mu_{2n}}\right),\qquad(8\text{-}89)$$

其中约定 $C_0\equiv 1, M_0=m$ 而 $q_1\cdots\cdots q_{2n}$ 是进入圈图中的动量。有理化分母，计算迹，并同时按 M_i^2 幂次展开分子和分母，我们得到

$$I=\sum_{i=0}^{S}C_i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$
$$\cdot\frac{P_n(p^2,p\cdot q_i,q_i^2)+M_i^2P_{n-1}(p^2,p\cdot q_i,q_i^2)+\cdots}{Q_{2n}(p^2,p\cdot q_i,q_i^2)+M_i^2Q_{2n-1}(p^2,p\cdot q_i,q_i^2)+\cdots}$$
$$=\sum_{i=0}^{S}C_i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{P_n}{Q_{2n}}+M_i^2\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{2n}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{P_nQ_{2n-1}}{Q_{2n}^2}\right)+\cdots\right],\qquad(8\text{-}90)$$

其中 P_k 和 Q_k 是 p 的阶数小于或等于 $2k$ 的多项式。对于大 $|p|$，M_i^{2k} 的系数的行为是 $|p|^{-2n-2k}$。因此，如果附加两个条件

$$\sum_{i=0}^{S}C_i=0,\quad\sum_{i=0}^{S}C_iM_i^2=0,\qquad(8\text{-}91)$$

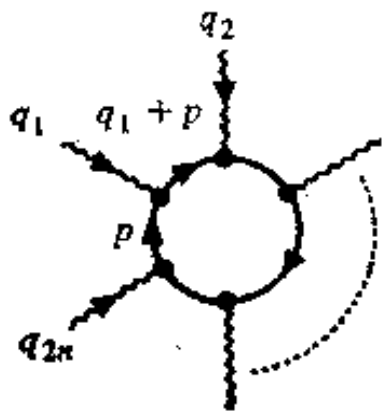


图 8-16 费米子圈图

任一费米子圈图的被积式的行为就是 $|p|^{-6}$（我们丢弃真空图，因此 $n\geqslant 1$），因此是表面收敛的。这样一些条件可以通过仅引入两个辅助质量来实现：

$$M_1^2=m^2+2\Lambda^2,\quad M_2^2=m^2+\Lambda^2\ (M_0^2\equiv m^2),\qquad(8\text{-}92)$$

其中 Λ^2 是截断参量(最终将取 Λ^2 趋于无穷大)这一选择使得

$$C_1 = \frac{M_2^2 - m^2}{M_1^2 - M_2^2} = 1, \quad C_2 = \frac{M_1^2 - m^2}{M_2^2 - M_1^2} = -2. \tag{8-93}$$

坚持 C_1 和 C_2 是整数的理由不久就可以看清. 对于光子传播子,作一简单的减除

$$G_{\rho\sigma,\mathrm{reg}}(k) = \left[-i\left(\frac{g_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2 - \mu^2} - \frac{k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2 - \mu^2/\lambda}\right)\right] - [\mu^2 \to \mu_1^2], \tag{8-94}$$

将使它足够地平滑而给出所有图收敛的结果. 这里应理解成当 $\Lambda^2 \to \infty$ 时 $\mu_1^2 \to \infty$. 所有上面的方案都可以从一个正规化的拉氏函数得到:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{reg}} = \frac{1}{\mu_1^2 - \mu^2}\Big[&-\frac{1}{4}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\Box + \mu^2 + \mu_1^2) \\ &\cdot (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) + \frac{\mu^2\mu_1^2}{2} A^2 \\ &- \frac{\lambda}{2}\partial \cdot A(\lambda\Box + \mu^2 + \mu_1^2)\partial \cdot A\Big] \\ &+ \sum_{s=0}^{3} \bar{\psi}_s(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - M_s)\psi_s. \end{aligned} \tag{8-95}$$

在分部积分以后,A 的二次型是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_A &= \frac{1}{2(\mu_1^2 - \mu^2)} A_\rho K^{\rho\sigma}(\mu^2) K_{\sigma\nu}(\mu_1^2) A^\nu \\ &= \frac{1}{2} A_\tau K^{\tau\rho}(\mu^2)[K(\mu_1^2) - K(\mu^2)]^{-1}_{\rho\sigma} K^{\sigma\nu}(\mu_1^2) A_\nu,\end{aligned}$$

其中微分算符 $K_{\rho\sigma}(\mu^2)$ 定义为

$$K_{\rho\sigma}(\mu^2) = g_{\rho\sigma}(\Box + \mu^2) - \partial_\rho\partial_\sigma(1 - \lambda).$$

于是,可以见到 A 的传播子,即出现在 $\mathscr{L}_A$ 中二次型的倒数,

是 $i[K^{-1}(\mu^2) - K^{-1}(\mu_1^2)]_{\rho\sigma}$. 另一方面，在式(8-95)中我们引入了三个辅助场 ($\phi_0 \equiv \phi$)，它们最小耦合到电磁场上，且具有满足方程(8-92)的质量 M_1, $M_2 \equiv M_3$. 另外，ϕ_1 被看作普通的费米场，而 ϕ_2 和 ϕ_3 是按 Bose 统计量子化的场！这些奇怪的规则的效果自然是重现方案式(8-93). 因为在 ϕ_2 和 ϕ_3 之间是退化的，且它们的闭合圈没有负号，所以 $C_2 = -2$.

我们的目的已经达到了. 因为方程 (8-95) 的 $\mathscr{L}_{reg}$ 是规范不变的 (除了光子质量项和 $\partial \cdot A$ 规范固定横向项)，且先前一节的 Ward 等式明显地成立，所以理论满意地正规化了.

8-4-3 重整化

现在我们必须证明，只要选择合适的归一化条件，在保持 Ward 等式的同时可以进行重整化. 我们要求

$$\Gamma_R^{(2)}(\not{p})\big|_{\not{p}=m} \equiv S_R^{-1}(\not{p})\big|_{\not{p}=m} = 0, \tag{8-96a}$$

$$\frac{\partial \Gamma_R^{(2)}(\not{p})}{\partial \not{p}}\bigg|_{\not{p}=m} = 1, \tag{8-96b}$$

$$\Lambda_R^{\rho}(p, p)\big|_{\not{p}=m} = \gamma^{\rho}, \tag{8-96c}$$

$$\Gamma_R^{\rho\sigma}(k) = -\{(k^2 g^{\rho\sigma} - k^{\rho}k^{\sigma})[1 + \bar{\omega}_R(k^2)] - g^{\rho\sigma}\mu^2 + \lambda k^{\rho}k^{\sigma}\}, \tag{8-96d}$$

$$\bar{\omega}_R(0) = 0. \tag{8-96e}$$

这些条件明显地在最低级成立. 方程 (8-96b, c) 是与等式(8-87)相一致的，而方程 (8-96d,e) 体现了从式 (8-79) 和(8-82)得到的信息. 至于条件(8-96a, b)，因为它们保证了完全传播子在 $\not{p} = m$ 上有一个留数为 1 的极点，所以它们定义了电子的物理质量. 类似地，条件式(8-96a, b)将导致电荷的物理定义，它是在质壳上的费米子和零动量光子之间耦合常数. 然而，正象已经在第七章中注意到的，当光子质量 μ 趋于

零时条件式(8-96b,c,e) 可能不再保持. 事实上,在质壳上自能的微商 $(\partial/\partial p)\Sigma(p)|_{p=m}$, 从而使顶角函数在 μ^2 趋于零时有红外发散的麻烦. 因此,如果要求取 $\mu \to 0$ 极限,就必须选择其它的归一化条件. 为了保险起见,这里使 μ^2 保持是小的但是有限的.

重整化后 Ward 等式被保持的证明可以用归纳法进行. 假定它们到给定级 $\hbar^L$ 上成立. 换句话说,到这一级为止裸量 Z_1, Z_2, Z_3, m_0, μ_0^2 和 λ_0 这样来确定,使拉氏函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{[L]} = &-\frac{Z_3}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\\ &-\frac{\lambda_0 Z_3}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2\\ &+\frac{\mu_0^2 Z_3}{2}A^2 + Z_2\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi + eZ_1\bar{\psi}A\!\!\!/\psi\\ = &-\frac{1}{4}(\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu)(\partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu})\\ &-\frac{\lambda_0}{2}(\partial\cdot A_0)^2 + \frac{\mu_0^2}{2}A_0^2\\ &+\bar{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0 A\!\!\!/_0)\psi_0 \qquad (8\text{-}97)\end{aligned}$$

导致满足式(8-96)的重整化的 Green 函数. 我们提醒读者,

$$A_0 = Z_3^{1/2}A,\ \psi_0 = Z_2^{1/2}\psi \text{ 和 } e_0 = \frac{Z_1 e}{Z_2 Z_3^{1/2}}. \qquad (8\text{-}98)$$

另外,我们假定到这一级为止 Ward 等式意味着

$$Z_3\mu_0^2 = \mu^2,\ Z_3\lambda_0 = \lambda \text{ 和 } Z_1 = Z_2. \qquad (8\text{-}99)$$

到下一级 $\hbar^{L+1}$ 时, Green 函数仍然是发散的. 我们引人象在 8-4-2 节中所显示的那样的规范不变的正规化,将理论正规化且用 $\mathscr{L}^{[L]}$ 来计算 Green 函数,即考虑所有的低级抵消项. 通过 $\mathscr{L}^{[L]}$ 的结构,可以看到这些正规化函数 $\Gamma_{reg}^{[L+1]}$ 满

足在 8-4-1 节得到的等式。用这些等式和归一化条件式（8-96）可以直接证实，到 $L+1$ 级为止所需要的新抵消项目具有在较低级时相同的结构[即不需要$(A^2)^2$ 那样的抵消项]，并仍旧有式(8-99)。

例如，

$$Z_2^{[L+1]} = -\frac{\partial}{\partial p'}\left[\Gamma_R^{(2)[L+1]}(p') - \Gamma_{\text{reg}}^{(2)[L+1]}(p')\right]_{p'=m}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial p'}\Gamma_{\text{reg}}^{(2)[L+1]}(p')\Big|_{p'=m},$$

和

$$Z_1^{[L+1]}\gamma_\rho = \left[\Lambda_{\rho R}^{[L+1]}(p,p) - \Lambda_{\rho,\text{reg}}^{[L+1]}(p,p)\right]_{p=m}$$

$$= -\Lambda_{\rho,\text{reg}}^{[L+1]}(p,p)\Big|_{p=m},$$

最终从方程(8-88)可得到

$$Z_2^{[L+1]} = Z_1^{[L+1]}.$$

在重整化理论里我们通过式

$$\Gamma_R^{(2n,p)}(p_1',p_1,\cdots,p_n',p_n,q_1,\cdots,q_p,m,\mu,e,\lambda)$$
$$= \lim_{\Lambda\to\infty} Z_3^{p/2} Z_2^n \Gamma_{\text{reg}}^{(2n,p)}(p_1',\cdots,q_p,m_0,\mu_0,e_0,\lambda_0,\Lambda), \tag{8-100}$$

得到了与裸正规化函数相关的函数。这些重整化的 Green 函数作为重整化的相乘特点是平庸的结果而满足 Ward 等式。

在电荷重整化 $e_0 = eZ_3^{1/2}$ 里，强调等式 $Z_1 = Z_2$ 的作用是重要的。如果几种荷电粒子（电子、μ 子等）耦合到电磁场上，等式 $Z_1^{(e)} = Z_2^{(e)}$，$Z_1^{(\mu)} = Z_2^{(\mu)}$，$\cdots$，保证了重整化是普适的。仅由于有了这一等式，电荷普适性的概念才有意义。

因为在这种有限制的体系里对电荷量子化不存在自然的解释，所以更恰当地说是重整化的电荷对裸电荷的比率是与荷电粒子的类型无关的。对某种弱相互作用统一模型来说，情况并不如此，在那里电磁规范不变性相应于一个大的不变单纯群的子群。

总之，这一节所描述的方法，是用 Ward 等式表示对称性的结果，且证实它们与重整化是相自洽的．在下面这些不同的内容里(手征对称性、非阿贝尔规范对称性等）还会遇到这一点．

8-4-4 双圈真空极化

双圈真空极化图的计算，将用维数正规化在无质量欧氏量子电动力学 ($\mu = m = 0$) 里进行．

双圈真空极化图在几方面是有教益的：

(a) 它提供了高级修正特有性质的一个例子，即在单圈图计算里见不到的性质．

(b) 它指出了在包含旋量的情况下如何应用维数正规化．

(c) 它给出了一个可信的证据，即使存在交缠发散时，仍旧可以进行重整化．

(d) 它解释了涉及到无质量理论和渐近行为的描述．零质量计算可以认为给出了获得有质量量子电动力学里真空极化 $\bar{\omega}(k^2)$ 的渐近(大 k)行为．

(e) 它被用作验证上一小节获得的一般结果，即，真空极化张量的一般性．

(f) 最后，它显示了真空极化的一个有趣的性质，即在大动量下没有预料到的相消．在计算的末尾我们将详尽阐述这一点．

因为我们是在欧氏理论方案中作计算的，所以利用维数正规化，首先给出一些有用的公式．如同方程(8-11)，反厄米矩阵满足

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}, \tag{8-101}$$

而按照约定，我们选择[与式(8-11c)相比较．]

$$\mathrm{tr}\ I = 4. \tag{8-102}$$

下面列出 γ 矩阵的所有收缩和迹的标准等式 (d 是欧氏空间的维数)：

$$\gamma_\rho \gamma_\rho = -d;$$

$$\not{a}^2 = -a^2;$$

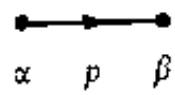
$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\rho = (d-2)\gamma_\mu;$$
$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = -(d-4)\gamma_\mu\gamma_\nu + 4\delta_{\mu\nu};$$
$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\rho = (6-d)\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu - 2(d-4)(\delta_{\mu\nu}\gamma_\sigma - \delta_{\mu\sigma}\gamma_\nu + \delta_{\nu\sigma}\gamma_\mu);$$
$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu = -4\delta_{\mu\nu}; \tag{8-103}$$
$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho});$$
$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu = -i(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}\delta_{\tau\nu} - \text{置换}).$$

在欧氏空间里，无质量量子电动力学的作用量是

$$I_E = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - e\mathcal{A}\!\!\!/)\psi + \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2\right]. \tag{8-104}$$

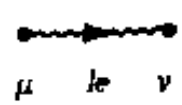
在 Feynman 规范里，$\lambda = 1$，从 e^{-I_E} 得到的微扰规则是

费米传播子



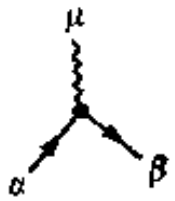
$$\left(\frac{1}{i\not{p}}\right)_{\beta\alpha} = -\frac{(\not{p})_{\beta\alpha}}{p^2}$$

光子传播子



$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}$$

顶角



$$e(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}$$

自然，对于每一个费米子圈有一个负号。当在 $d \neq 4$ 下运算时，电荷 e 象在 8-1-2 中已注意到的那样获得量纲 $(4-d)/2$，如果 μ 是一任意质量标度，我们有

$$e = \mu^{(4-d)/2}e', \tag{8-105}$$

其中 e' 是无量纲的。为了重新得到正确的齐次性质，每当在 $d = 4$ 附近展开结果时我们就利用这一表达式。这样，不可回避地质量标度就潜入无质量理论中了。

作为一种预备，我们首先用这种描述来重新计算单圈真空极化图，费米子自能图和顶角图。

图 7-5 的单圈自能是

$$\Gamma_{\mu\nu}(k) = -e^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}[p\gamma_\mu(p+k)\gamma_\nu]}{p^2(p+k)^2}$$

$$= -e^2\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma)\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}B\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)(k^2)^{d/2-2}$$

$$\times\left[-k_\mu k_\nu\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)+\frac{\delta_{\mu\nu}}{2}k^2\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)\right].$$

利用方程(8-9),依赖于 Euler B 函数

$$B(x,y) = \int_0^1 d\alpha\alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

来完成这一积分,其中 $m_1^2 = m_1^2 = 0$. 当定义 $\varepsilon = 4-d$ 后,就导致

$$\Gamma_{\mu\nu}(k) = -\frac{8e^2}{(4\pi)^{d/2}}B\left(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)$$

$$\cdot\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)^{d/2-2}(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)$$

$$\underset{d\to4}{\simeq}-\frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{2}{\varepsilon}-\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\text{常数}+O(\varepsilon)\right]$$

$$\cdot(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu). \qquad (8\text{-}106)$$

如果令 $\frac{2}{\varepsilon}$ 与 $\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}$ 相等,就与方程(7-9)一致. 用第六章的约定,欧氏固有两点函数是负的传播子的倒数. 因此,在引入抵消项

$$(Z_3-1)^{[1]} = -\frac{\alpha}{3\pi}\frac{2}{\varepsilon}$$

后,四维时空中的重整化真空极化是

$$\Gamma_{\mu\nu}^{[1]} = -(\delta_{\mu\nu}k^2-k_\mu k_\nu)\bar{\omega}^{[1]}(k^2)$$

$$\bar{\omega}^{[1]}(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\text{常数}\right), \qquad (8\text{-}107)$$

常数是无兴趣的 π 和 γ (Euler 常数) 等等的组合. 注意我们已经用了一个新型的归一化条件. 代替在某一点上固定的 $\bar{\omega}(k^2)$ 值,我们决定仅从式(8-106)减去极点项. 我们将坚持这一称之为最小重整化的方便的方案. 这样一个步骤满足 Ward 等式. 图 7-7 和 7-10 的其它两个图同样计算. 费米子自能是

$$\Gamma^{(2)}(p) = -e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\rho k\gamma_\rho}{(p-k)^2k^2}$$

$$= -e^2(d-2)\gamma_\mu\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu}{(p-k)^2k^2}$$

$$= -\frac{e^2(d-2)(p^2)^{d/2-2}}{(4\pi)^{d/2}}\not{p}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

$$\cdot B\left(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}\right)$$

$$\underset{d\simeq4}{\simeq} -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\not{p}\left(\frac{2}{\varepsilon}+\text{有限项}\right). \qquad (8\text{-}108)$$

因此，需要波函数重整化等于

$$(Z_2-1)^{(1)} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{2}{\varepsilon}. \qquad (8\text{-}109)$$

至于顶角函数，它是

$$\Gamma_\mu(p,q) = e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\rho(\not{k}+\not{q})\gamma_\mu k\gamma_\rho}{(p-k)^2(k+q)^2k^2}$$

$$= e^2[(6-d)\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha - 2(d-4)(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta$$

$$-\delta_{\alpha\beta}\gamma_\mu+\delta_{\mu\beta}\gamma_\alpha)]$$

$$\cdot\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(k+q)_\alpha k_\beta}{(p-k)^2(k+q)^2k^2}$$

$$\underset{d\simeq4}{\simeq}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{2}{\varepsilon}\gamma_\mu + \text{有限项}. \qquad (8\text{-}110)$$

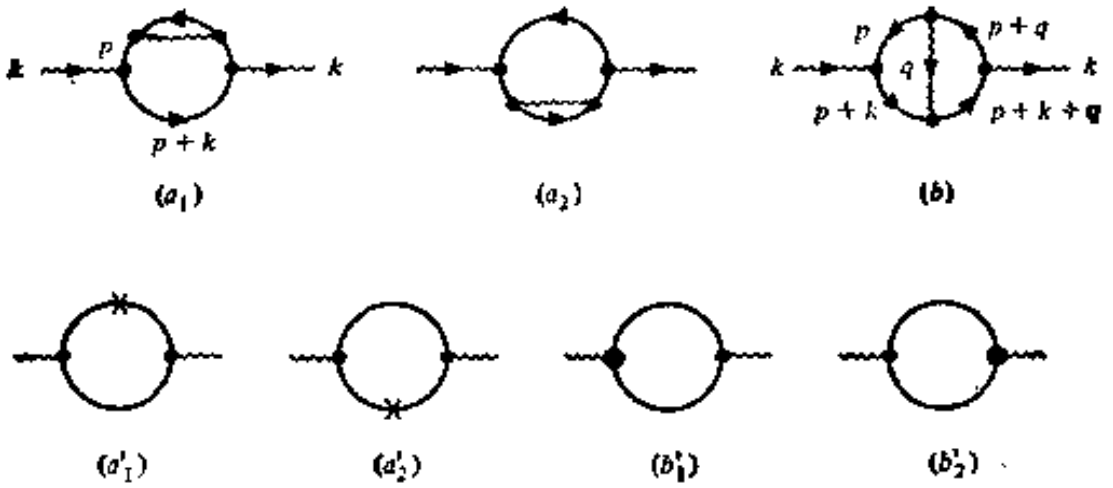
由此导致抵消项为

$$(Z_1-1)^{(1)} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{2}{\varepsilon}. \qquad (8\text{-}110)$$

可以证明，到这一级上等式 $Z_1 = Z_2$ 成立并且 Z_1, Z_2, Z_3 与有质量闵氏理论中的相同，其中 $2/\varepsilon = \ln(\Lambda^2/m^2)$. 这个计算显然是不必要的!

现在来讨论图 8-17a_1, a_2, b 的双圈图，并描绘 $\hbar$ 级抵消项的插入. 图 a_1 和 a_2 明显地给出相等的贡献. 首先我们用方程(8-108)中费米子自能 $\Gamma^{(2)}(p)$ 来计算 $\Gamma^a_{\mu\sigma} = \Gamma^{(a_1)}_{\rho\sigma} + \Gamma^{(a_2)}_{\rho\sigma}$:

$$\Gamma^{(a)}_{\rho\sigma}(k) = -2e^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not{p}+\not{k}}\gamma_\rho\frac{1}{\not{p}}\Gamma^{(2)}(p)\frac{1}{\not{p}}\gamma_\sigma\right]$$



(a_1) (a_2) (b)

(a_1') (a_2') (b_1') (b_2')

图 8-17 双圈图对真空极化的贡献. 同时描绘了 $\hbar$ 级抵消项的贡献.

$$= \frac{2e^4(d-2)}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) B\left(\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}\right)$$

$$\cdot \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{tr}[(\not{p}+\not{k})\gamma_\rho \not{p} \gamma_\sigma]}{(p+k)^2(p^2)^{3-d/2}}.$$

利用等式

$$\frac{1}{(p^2)^{3-d/2}} = \frac{1}{\Gamma(3-d/2)} \int_0^\infty dx\, x^{2-d/2} e^{-xp^2}, \qquad (8\text{-}111)$$

和参量方法可完成关于 p 的积分. 由此得到

$$\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)_\mu p_\nu}{(p+k)^2(p^2)^{3-d/2}}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(3-d/2)} B\left(\frac{d}{2}, d-2\right)(k^2)^{d-4}$$

$$\times \left[-k_\mu k_\nu \Gamma(4-d) + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} k^2 \Gamma(3-d)\right].$$

在某些代数运算以后可得

$$\Gamma^{(a)}_{\rho\sigma}(k) = \frac{8e^4(d-2)}{(4\pi)^d} \frac{B(d/2-1, d/2)B(d/2, d-2)(k^2)^{d-4}}{2-d/2}$$

$$\times [-2k_\mu k_\nu \Gamma(4-d) + \delta_{\mu\nu} k^2 \Gamma(3-d)(1-d/2)$$

$$+ k^2 \delta_{\mu\nu} \Gamma(4-d)]. \qquad (8\text{-}112)$$

在 $d = 4$ 附近展开这个表达式,注意到

$$\Gamma(4-d) = \frac{1}{\varepsilon} + \gamma + O(\varepsilon),$$

$$\Gamma(3-d)=-\frac{1}{\varepsilon}+(\gamma-1)$$

等，可以给出

$$\begin{aligned}\Gamma^{(a)}_{\rho\sigma}(k)=\frac{\alpha^2}{3\pi^2}\Big\{&k_\rho k_\sigma\Big[-\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\gamma+\ln\frac{k^2}{\mu^2}-\frac{7}{4}\Big)\\&-\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}\Big(-\gamma+\frac{7}{4}\Big)+\cdots\cdots\Big]\\&-\delta_{\rho\sigma}k^2\Big[-\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\gamma+\ln\frac{k^2}{\mu^2}-2\Big)\\&-\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}(-\gamma+2)+\cdots\cdots\Big]\Big\},\end{aligned}\tag{8-113}$$

其中已略去常数项．不难计算出抵消项(图 8-17a_1', a_2') 的贡献 $\Gamma^{(a')}_{\rho\sigma}$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(a')}_{\rho\sigma}(k)=&-2e^2\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\mathrm{tr}\Big\{\frac{1}{(\not p+\not k)}\gamma_\rho\frac{1}{\not p}\\&\cdot\Big[\frac{e^2}{(4\pi)^2}\not p\,\frac{2}{\varepsilon}\Big]\frac{1}{\not p}\gamma_\sigma\Big\}\\=&-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}B\Big(\frac{d}{2},\frac{d}{2}\Big)(k^2)^{d/2-2}(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\Gamma\Big(2-\frac{d}{2}\Big)\\\simeq&-\frac{\alpha^2}{3\pi^2}(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\Big\{\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(-\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\frac{5}{3}-\gamma\Big)\\&+\Big[\frac{1}{4}\ln^2\frac{p^2}{\mu^2}+\Big(\frac{\gamma}{2}-\frac{5}{6}\Big)\ln\frac{p^2}{\mu^2}\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{8-114}$$

下面依次给出三点评注：第一，抵消项的贡献是横向的——这是显然的，因为它本质上是先前计算的单圈图——而 $\Gamma^{(a)}_{\rho\sigma}$ 则不是．只有图 8-17的全部贡献的和是横向的．第二，可以看到，在求和 $\Gamma^{(a)}+\Gamma^{(a')}$ 中发散项并不相消．这是可以预料的，因为图形还需要一个整体的减除．骤然看来，主导项 $1/\varepsilon^2$ (或 $\ln^2\Lambda^2$) 并不相消是令人惊奇的，因为内部发散已被抵消项所减除．但是，重整化费米子自能在大 p^2 时行为象 $\ln p^2$；因此在表面发散图里它的插入给出 $\ln^2\Lambda^2$ 的发散

$$\int^{\Lambda}\frac{d^4p}{p^2(p+k)^2}\ln p^2\sim\ln^2\Lambda^2,$$

$\ln(k^2/\mu^2)$的系数依赖于自能图的归一化条件. 从式(8-114)可见，当用一有限量改变抵消项(Z_2-1)[1]时，导致$\ln(k^2/\mu^2)$项的(以及忽略的常数项的)修正. 然而，这一依赖性在$\Gamma_{\sigma\rho}$的完全表达式中不出现. 这就解释了一个事实，即重整化群方程(8-59)仅到一给定级上被 Green 函数满足，即不被单个图满足.

现在进行图 (8-17b) 的较麻烦的计算. 借助于图(8-17)的记号，其振幅是

$$\Gamma^{(b)}_{\rho\sigma}(k)=-e^4\int\frac{d^dq}{(2\pi)^dq^2}\,\mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\lambda)I_{\alpha\beta\mu\nu}(k,q), \tag{8-115}$$

其中

$$I_{\alpha\beta\mu\nu}=\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,\frac{p_\beta(p+k)_\alpha(p+k+q)_\mu(p+q)_\nu}{p^2(p+k)^2(p+q+k)^2(p+q)^2}.$$

首先作关于p的积分. 分别相应于动量线p, $p+q$, $p+q+k$, $p+k$引入 Feynman 参数$\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_4$. 可以得到

$$\begin{aligned}I_{\alpha\beta\mu\nu}&=\int_0^\infty d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3d\alpha_4J_{\alpha\beta\mu\nu},\\ J_{\alpha\beta\mu\nu}&=\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\,p_\beta(p+k)_\alpha(p+k+q)_\mu(p+q)_\nu\\&\quad\times\exp(\alpha_{23}q^2+\alpha_{34}k^2+2\alpha_3k\cdot q+\Sigma p^2\\&\quad+2\alpha_{23}q\cdot p+2\alpha_{34}k\cdot p),\end{aligned}\tag{8-116}$$

其中已用了简略记号$\alpha_{23}=\alpha_2+\alpha_3$等，$\sum=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$. 移动积分变量

$$p'=p+\frac{\alpha_{23}}{\sum}q+\frac{\alpha_{34}}{\sum}k\equiv p+Q,$$

且重写式(8-116)中的分子为

$$\begin{aligned}&p_\beta(p+k)_\alpha(p+k+q)_\mu(p+q)_\nu\\&\quad=(p'+Q)_\beta(p'+k-Q)_\alpha(p'+k+q-Q)_\mu(p'+q-Q)_\nu\end{aligned}$$

是方便的。然后，我们必须处理下述形式的积分:

$$\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\exp(-\sum p'^2)=\frac{1}{(4\pi\sum)^{d/2}},$$

$$\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\,p'_\mu p'_\nu\exp(-\sum p'^2)=\frac{1}{2\sum(4\pi\sum)^{d/2}}\delta_{\mu\nu},$$

$$\int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d}\, p'_\mu p'_\nu p'_\alpha p'_\beta \exp(-\sum p'^2) = \frac{\mathrm{I}}{4\sum^2 (4\pi\sum)^{d/2}} \cdot (\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \tag{8-117}$$

而包含p'奇次幂的积分为零. 我们还需要求 γ 矩阵的迹.从式(8-103)可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\lambda) \\
&\quad = -4(d-2)[\delta_{\alpha\rho}(\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\nu\beta}\delta_{\sigma\mu}) \\
&\qquad + \delta_{\beta\rho}(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\alpha}\delta_{\sigma\mu}) \\
&\qquad - \delta_{\alpha\beta}(\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\rho} - \delta_{\nu\mu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\sigma\mu})] \\
&\quad - 4(6-d)[\delta_{\nu\beta}(\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\mu\rho} - \delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\alpha}) + \delta_{\nu\alpha}(\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\rho}) \\
&\qquad + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\sigma\beta}\delta_{\mu\alpha} - \delta_{\sigma\alpha}\delta_{\mu\beta})].
\end{aligned} \tag{8-118}$$

第一个括号在交换 α 和 β 下是对称的，而第二个括号是反对称的. 冗长无味的直接代数运算给出

$$\begin{aligned}
&(4\pi\sum)^{d/2}\exp\left[\frac{\alpha_{23}\alpha_{14}q^2 + \alpha_{12}\alpha_{34}k^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)q\cdot k}{\sum}\right] \\
&\qquad \cdot J_{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\lambda) \\
&\quad = -4(d-2)\{Q_\rho Q_\sigma(k^2 - 2q^2) + Q_\rho q_\sigma[-k\cdot(k+2q) \\
&\qquad + 4q\cdot Q] + Q_\rho k_\sigma[(k+2q)\cdot q - 2k\cdot Q] \\
&\qquad + k_\sigma q_\sigma Q\cdot(k-2q) - k_\rho k_\sigma Q\cdot(q-Q) \\
&\qquad + 2q_\rho q_\sigma Q\cdot(k-Q) - \delta_{\rho\sigma}(k+q-Q) \\
&\qquad \cdot(q-Q)Q\cdot(k-Q)\} \\
&\qquad + 4(6-d)\{(\delta_{\rho\nu}k^2 - k_\rho k_\sigma)Q\cdot(Q-q) \\
&\qquad - (\delta_{\rho\lambda}k\cdot Q - Q_\rho k_\lambda)[\delta_{\lambda\sigma}k\cdot(Q-q) \\
&\qquad - k_\lambda(Q-q)_\sigma]\} \\
&\qquad - \frac{4(d-2)}{2\sum}\{(2-d)(2q_\rho q_\sigma - k_\rho k_\sigma) \\
&\qquad + (d-2)\delta_{\rho\sigma}[(k+q-Q)\cdot(q-Q) \\
&\qquad - Q\cdot(k-Q)] + 2\delta_{\rho\sigma}(k-2Q)\cdot(k+2q-2Q)\} \\
&\qquad + \frac{4(6-d)}{2\sum}\{[k^2\delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma](d-2)\} \\
&\qquad - \frac{4(d-2)}{4\sum^2}[\delta_{\rho\sigma}d(d+2)]
\end{aligned}$$

$$= -4(d-2)A_1 + 4(6-d)A_2 - \frac{4(d-2)}{2\Sigma} B_1 + \frac{4(6-d)}{2\Sigma} B_2 - \frac{4(d-2)}{4\Sigma^2} C_1, \tag{8-119}$$

其中每一项的来源和名称是清楚的，并且已用了 ρ 和 σ 之间的对称性。

现在必须作关于 q 的积分，写成

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma} \int_0^\infty dx \exp\left(-\frac{x\alpha_{23}\alpha_{14}q^2}{\Sigma}\right). \tag{8-120}$$

当被积式包含

$$\exp\left[-\frac{(x+1)\alpha_{23}\alpha_{14}q^2 + \alpha_{12}\alpha_{34}k^2 + 2(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)q\cdot k}{\Sigma}\right],$$

乘以 q 的幂次时，作一新的积分变量移动

$$q = q' - \alpha k, \tag{8-121}$$

其中

$$\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{(x+1)\alpha_{14}\alpha_{23}}.$$

相应地有

$$Q = \hat{\alpha}_{23}q' + \varkappa k, \tag{8-122}$$

其中

$$\varkappa = \frac{\alpha_{34}}{\Sigma} - \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4}{\Sigma(x-1)\alpha_{14}}, \quad \hat{\alpha}_{23} = \frac{\alpha_{23}}{\Sigma}.$$

此外，令 y 为指数中 q^2 的系数，

$$y = (x+1)\frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma} = \frac{1}{x'}\frac{\alpha_{23}\alpha_{14}}{\Sigma}. \tag{8-123}$$

因此，所要的振幅 $\Gamma^{(b)}_{\rho\sigma}(k)$ 是

$$\Gamma^{(b)}_{\rho\sigma}(k) = -e^4 \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots\cdots d\alpha_4 \int_0^1 \frac{dx'}{x'^2} \frac{1}{(4\pi\Sigma)^{d/2}} \frac{\alpha_{13}\alpha_{24}}{\Sigma}$$

$$\times \exp\left[-\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2}{\Sigma\alpha_{23}\alpha_{14}} k^2\right]$$

$$\times \int \frac{d^dq'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} \left[-4(d-2)A_1 + \cdots\cdots\right.$$

$$- \frac{4(d-2)}{4\sum^2} C_2 \Big]. \tag{8-124}$$

接着纯粹是耐心的计算了，

$$(4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} A_1$$

$$= k_\rho k_\sigma \frac{\alpha_{23}\alpha_{14} + 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}{2y\sum^2} (d-2)$$

$$+ \delta_{\rho\sigma} \Big[(k^2)^2 x(1-x)(\alpha+x)(1-\alpha-x)$$

$$+ \frac{k^2}{2y} \Big\{ 2\hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23})[\alpha + 2x - 2x(\alpha+x)]$$

$$+ \frac{2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sum^2} \Big\}$$

$$- \frac{k^2 d}{2y} [(\alpha+x)(1-\alpha-x)\hat{\alpha}_{23}^2$$

$$+ (1-\hat{\alpha}_{23})^2 x(1-x)]$$

$$+ \frac{d(d+2)}{4y^2} \hat{\alpha}_{23}^2 (1-\hat{\alpha}_{23})^2 \Big],$$

$$(4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} B_1 = (2-d)(2\alpha^2 - 1) k_\rho k_\sigma$$

$$- (d-2)\delta_{\rho\sigma} \Big\{ \frac{1}{y} + k^2 [(\alpha+x)(1-\alpha-x)$$

$$+ x(1-x)] - \frac{d}{2y} [\hat{\alpha}_{23}^2 + (1-\hat{\alpha}_{23})^2] \Big\}$$

$$+ 2\delta_{\rho\sigma} \Big[k^2 (1-2x)(1-2x-2\alpha) - 2\hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23}) \frac{d}{y} \Big],$$

$$(4\pi y)^{d/2} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} e^{-yq'^2} A_2 = \frac{d-2}{2y} \hat{\alpha}_{23}(1-\hat{\alpha}_{23})(k_\rho k_\sigma - k^2 \delta_{\rho\sigma}).$$

因此，

$$\Gamma^{(A_2+B_2)}_{\rho\sigma} = - \frac{e^4}{(4\pi)^d} 4(6-d)(d-2)(k^2\delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma)$$

$$\times \int_0^1 \frac{dx'}{x'^{1-\varepsilon}} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 \cdots\cdots d\alpha_4 \alpha_{23}\alpha_{14}(1-x')}{2\Sigma^{d/2+2} y^{d/2}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2}{\Sigma\alpha_{23}\alpha_{14}} k^2\right]$$

$$= -\frac{e^4}{(4\pi)^d} 2(6-d)(d-2)(k^2\delta_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma)(k^2)^{d-4}$$

$$\times \Gamma(4-d) \times \int_0^1 dx' x'^{d/2-2}(1-x')$$

$$\times \int_0 \frac{d\alpha_1 \cdots\cdots d\alpha_4 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{3d/2-3}}$$

$$\times [\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2]^{d/2-4}.$$

在做如下变量改变后：

$$\alpha_1 = \beta u \quad \alpha_2 = (1-\beta)v \quad \alpha_3 = (1-\beta)(1-v)$$

$$\alpha_4 = \beta(1-u) \quad \alpha_{14} = \beta \quad \alpha_{23} = 1-\beta,$$

$$[\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2]$$

$$= \beta(1-\beta)\{[\beta(1-u) + (1-\beta)(1-v)]$$

$$\times [\beta u + (1-\beta)v] - x'\beta(1-\beta)(u-v)^2\},$$

$$\int_0 d\alpha_1 \cdots\cdots d\alpha_4 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) F(\alpha_i)$$

$$= \int_0^1 d\beta\beta(1-\beta) \int_0^1 du \int_0^1 dv F(\alpha_i),$$

容易验证这一积分在 $d = 4$ 时是收敛的。因此，当象前面那样略去 $\bar{\omega}(k^2)$ 中的常数项时有

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(A_2+B_2)} \underset{d=4-\varepsilon}{\sim} \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln\frac{k^2}{\mu^2} + \cdots\cdots\right)$$

$$\cdot (k_\rho k_\sigma - \delta_{\rho\sigma}k^2). \qquad (8\text{-}125)$$

与以上类似，在 C_1 贡献里

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(C_1)} = \frac{e^4(d-2)d(d+2)\delta_{\rho\sigma}}{(4\pi)^d}(k^2)^{d-3}\Gamma(3-d)$$

$$\times \int_0^1 dx' x'^{d/2-2} \int_0^1 \frac{d\alpha_1 \cdots\cdots d\alpha_4 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{3d/2-4}}$$

$$\times [\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} - x'(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)^2]^{d-3}.$$

在 $d = 4$ 时，β 积分也是收敛的。因此，

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{(C_1)} = -\frac{3\alpha^2}{\pi^2}\delta_{\rho\sigma}k^2\left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln\frac{k^2}{\mu^2} + \cdots\cdots\right)$$

$$\cdot\int_0^1 dx'\int_0^1 d\beta\int_0^1 du\int_0^1 dv$$

$$\times\{[\beta(1-u)+(1-\beta)(1-v)][\beta u+(1-\beta)v]-x'\beta(1-\beta)(u-v)^2\}$$

$$\simeq -\frac{\alpha^2}{\pi^2}\frac{13}{24}\delta_{\rho\sigma}k^2\left(\frac{1}{\varepsilon}-\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\cdots\cdots\right). \qquad (8\text{-}126)$$

相反，A_1 和 B_1 的贡献在 $\beta=0$ 或 1 时具有内部发散性。例如，与 $k_\rho k_\sigma$ 正比的项是

$$\Gamma^{(A_1+B_1)}_{\rho\sigma}=\frac{4e^4}{(4\pi)^d}(d-2)^2\Gamma(4-d)(k^2)^{d-4}k_\rho k_\sigma$$

$$\cdot\int_0^1 dx'x'^{d/2-2}\int_0^1 du\int_0^1 dv$$

$$\times\int_0^1 d\beta[\beta(1-\beta)]^{2-d/2}\{[\beta(1-u)+(1-\beta)(1-v)]$$

$$\times[\beta u+(1-\beta)v]-x'\beta(1-\beta)(u-v)^2\}^{d-4}$$

$$\times\left\{x'\frac{\beta^2u(1-u)+(1-\beta)^2v(1-v)}{\beta(1-\beta)}\right.$$

$$-x'[uv+(1-u)(1-v)]$$

$$\left.+\frac{1+x'}{2}-x'^2(u-v)^2\right\}+\delta^{\rho\sigma}\cdots.$$

但是，如果注意到任一在 0 和 1 点正则的函数 $F(\beta)$ 有

$$\int_0^1 d\beta[\beta(1-\beta)]^{-1+\varepsilon/2}F(\beta)$$

$$=\int_0^1 d\beta[\beta^{-1+\varepsilon/2}+(1-\beta)^{-1+\varepsilon/2}]F(\beta)+O(\varepsilon),$$

则很容易得到 $d=4$ 处的所要求的展开式。最后，我们得到

$$\Gamma^{(A_1+B_1)}_{\rho\sigma}\simeq\frac{\alpha^2}{3\pi^2}k_\rho k_\sigma\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon}\left(\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\gamma-\frac{7}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}\left(\gamma-\frac{7}{4}\right)+\cdots\right]$$

$$-\frac{\alpha^2}{3\pi^2}\delta_{\rho\sigma}k^2\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{3}{8}-\gamma-\ln\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}\left(\gamma-\frac{3}{8}\right)+\cdots\Big]. \quad (8\text{-}127)$$

因此，图 8-17b 的总贡献是

$$\begin{aligned}\Gamma^{(b)}_{\rho\sigma}=\frac{\alpha}{3\pi^2}\Big\{&k_\rho k_\sigma\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{5}{2}-\gamma-\ln\frac{k^2}{\mu^2}\Big)\\&+\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}\Big(\gamma-\frac{5}{2}\Big)+\cdots\Big]\\&-\delta_{\rho\sigma}k^2\Big[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{11}{4}-\gamma-\ln\frac{k^2}{\mu^2}\Big)\\&+\frac{1}{2}\ln^2\frac{k^2}{\mu^2}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}\Big(\gamma-\frac{11}{4}\Big)+\cdots\Big]\Big\}. \quad (8\text{-}128)\end{aligned}$$

我们还要计算象在 8-17b$'_1$,b$'_2$ 中所描绘的顶角抵消项的贡献．但是，由于有 Ward 等式，容易看到它们精确地和自能抵消项 (a'_1,a'_2) 的贡献相消．其实，后者是正比于$(Z_3^{-1}-1)^{(1)}=-(Z_2-1)^{(1)}$ 的，而前者是正比于 $(Z_2-1)^{(1)}$ 的．当然，仅仅对量子电动力学来讲才是这样的．

将式(8-113)和(8-128)贡献相加在一起，可以得到

$$\Gamma^{(2)}_{\rho\sigma}=(k_\rho k_\sigma-\delta_{\rho\sigma}k^2)\varpi^{[2]}(k^2),$$

$$\varpi^{[2]}(k^2)=-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big(-\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{4}\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\cdots\Big). \quad (8\text{-}129)$$

我们发现了所有要求的特点：

1. 不可能被定域抵消项消去的形为 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\ln(k^2/\mu^2)$ 的发散项相消了．

2. 如 Ward 等式所预料的那样，真空极化张量是横向的，这对发散部分和有限部分都成立．因此，前者可以被 k^2 级的横向抵消项重整化．对于大的欧氏 k^2 且一直到 α^2 级，重整化函数 $\varpi_R(k^2)$ 就可由下式给出

$$\varpi_R(k^2)=-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{\mu^2}-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\ln\frac{k^2}{\mu^2}+O(\alpha^3). \quad (8\text{-}130)$$

想硬做的读者，可以检验我们已略去的有限项也是横向的。或者（甚至较好一点）检验 $\varpi(k^2)$ 的完全表达式与规范参量 λ 无关。

3. 幸运的是，结果式（8-130）与其它作者得到的是一致的！其结论是在求和 $\Gamma^{(a)}+\Gamma^{(b)}$ 里对自能归一化条件的依赖性已经去掉。这是显然的事，因为两个抵消项实际上相消。

4. 意外的是，我们发现了 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 中的发散项（在通常正规化中它是 $\ln^2(\Lambda^2/m^2)$），从而相应地 $\ln^2(k^2/m^2)$ 不出现。当限于讨论单费米子圈时，这是对所有级都对的真空极化的一般性质。事实上，可以逐级固定规范参量 λ，使得 $Z_1=Z_2$ 等于 1。因此，所选择的一子集图形不显示任何内部发散性，而它对规范不变量 $\varpi(k^2)$ 的贡献的行为是 $\ln(\Lambda^2/k^2)$ 的单个幂次。

这引起了 Johnson, Willey 和 Baker 以及 Adler 的一些有兴趣的猜测。是否可能对数行为系数 $f(\alpha)$ 对于 α 的非零值为零？因为相同的函数倍乘了 $\ln\Lambda^2$（或 $1/\varepsilon$），这似乎表明重新排列微扰级数，在裸耦合常数的某一适当的值下可以消除紫外发散。

注记

电动力学重整化的一个完整的处理，是由 F. J. Dyson 首先给出的，Phys. Rev. Vol 75, p. 1736, 1949。人们可以遵照 Schwinger 书中对这一问题的早先发展，其书名为“量子电动力学”，Dover, New York, 1958。对重整化做出重要贡献的有 N. N. Bogoliubov 和 O. S. Parasiuk，发表在 Acta Math, Vol 97, p. 227, 1957，也出现在 N. N. Bogoliubov 和 D. V. Shirkov 的教科书中，书名是“量子场论导引”，Interscience, New York, 1959，还有 K. Hepp 的工作，发表在 Comm. Math.

Phys., Vol. 2, p. 301, 1966, 在他的文章中 "Théorie de la Renormalisation", Springer-Verlag,Berlin,1969,详细地发展了关于重整化 Feynman 积分的收敛性。 在七十年代初期，W.Zimmermann 给出了对重整化的深刻理解,包括他的减除被积式的方法，参见"Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Brandeis Summer Institute 1970, edited by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, MIT Press,1970, 和 Ann. of Phye. (N. Y.), Vol. 77, p. 536, 1973. H. Epstein 和 V. Glaser 的优美的而有点抽象的工作确切地解决了证明保持所有定域场论性质的步骤。

每一个正规化方法都有它自己的优点。前面已经引用了 Pauli-Villars 方法(第七章)。 G. 't Hooft 和 M. Veltman 讨论了维数正规化,参见 Nucl. Phys. ser. B, Vol. 44, p. 189, 1972。也参见 E. R. Speer 的 "Renormalization Theory", Erice Summer School 1975, edited by G. Velo and A. S. Wightman, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, and Boston, Mass, 1976.

S. Weinberg 和 K. Hepp 研究了重整化积分的收敛性,参见 S. Weinberg, Phys. Rev., Vol. 118, p. 838, 1960; K. Hepp, Comm. Math. Phys., Vol. 2, p. 301, 1966。关于这一问题在参量空间里的某些方面的问题参见 T. Appelquist, Ann. of Phys. (N. Y.), Vol. 54, p. 27, 1969, M. Bergère 和 J. B. Zuber, Comm. Math. Phys, Vol. 35, p. 113, 1974 以及 M. Bergère 和 Y. M. P. Lam, Comm. Math. Phys., Vol. 39, p. 1, 1974.

K. Symanzik 曾考虑过无质量理论，参见 Comm. Math. Phye., Vol. 34, p. 7, 1973. 对于红外相消问题参见下述文章: T. Kinoshita, J. Math. Phys., Vol. 3, p. 650, 1962, T.

D. Lee 和 M.Nauenberg, Phys. Rev., ser. **B**, Vol. 133, p. 1549, 1964 以及 T. Kinoshita 和 A. Ukawa, Phys. Rev., ser., **D**, Vol. 13. p. 1573,1976.我们所提出的启发式论证是选自于 E. C. Poggio 和 H. R. Quinn, Phys. Rev., ser **D**, Vol. 14, p. 578, 1976.

真空极化到 α^2 级的计算是由 R. Jost 和 J. M. Luttinger 完成的，参见 Helv. Phys. Acta, Vol. 23, p. 201, 1950. 也参见 J. D. Bjorken 和 S. D. Drell 的教科书 "Relativistic Quantum Fields" McGraw-Hill, New York, 1965. 有限量子电动力学的可能性曾为下述文章研究过，K. Johnson, R. Willey and M. Baker, Phys. Rev., Vol. 163, p. 1699, 1967，以及 S. L. Adler, Phys. Rev., ser. **D**, Vol.5, p. 3021, 1972.

第九章 泛函方法

Feynman 和 Kac 的路径积分公式提供了量子力学、场论和统计模型的一个统一图式. 从有限多自由度情况出发，它先被推广到包括费米子的系统，然后推广到无穷多自由度的系统.积分的最陡下降法显示了它与经典力学的紧密关系，并且允许我们回到普通微扰论. 在各种应用中，我们处理了有效作用量概念，约束系统的量子化和微扰论的高阶计算.

9-1 路径积分

用路径积分来表示量子力学振幅的另一种形式起源于 Dirac(1933)的建议，且后来在 1940 年由 Feynman 作出了光辉的贡献. Schwinger 基于泛函微分发展了一个等价的方法. 对这一工作起初有些怀疑，这是由于在数学上要给出一漂亮的表达是困难的. 然而，在七十年代证明它是场论中提出新发展的最灵活的工具，因此值得给一透彻的描述.

9-1-1 量子力学中经典作用量的作用

我们回到量子力学中来研究与哈密顿形式相对的拉氏函数形式的作用. 为了简便起见，讨论由一对共轭算符 Q 和 P 描述的一个自由度的系统，Q 和 P 满足

$$[Q,P]=i, \tag{9-1}$$

这里用大写字母表示算符以区别于它们的经典 c 数对应量. 令哈密顿量是

$$H(P,Q)=\frac{P^2}{2m}+V(Q), \tag{9-2}$$

并以 $|a\rangle,|b\rangle,\cdots$ 标记系统的状态. 我们需要寻找跃迁振幅的表达式

$$\langle b(t')|a(t)\rangle=\langle b|e^{-iH(t'-t)}|a\rangle. \tag{9-3}$$

借助于对易规则式(9-1)的通常表示式,可以引入平方可积函数

$$a(q)=\langle q|a\rangle,$$
$$\tilde{a}(p)=\langle p|a\rangle,$$

并设法解从 (9-2) 给出的 Schrödinger 方程. 这里非固有态 $|q\rangle$和$|p\rangle$使

$$Q|q\rangle=q|q\rangle,\quad P|p\rangle=p|p\rangle,$$
$$\langle q'|q\rangle=\delta(q'-q),$$
$$\langle p'|p\rangle=\delta(p'-p),$$
$$\langle q|p\rangle=\langle p|q\rangle^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipq}, \tag{9-4}$$
$$\langle q|P|p\rangle=p\langle q|p\rangle=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\langle q|p\rangle.$$

回到跃迁振幅上来,注意我们可以用迭加原理插入一组过渡时间的完备集. 这类似于在光学中应用 Hughens 原理. 将时间演化分解为一系列的无穷小步骤 $t\to t+\Delta t$ 而首先来计算

$$\langle q_2(t+\Delta t)|q_1(t)\rangle=\langle q_2|e^{-i\Delta tH}|q_1\rangle.$$

边界条件要求当 Δt 趋于零时上面的振幅变为 $\delta(q_2-q_1)$. 对于小 Δt,当 q_2 与 q_1 明显不同时,不管它的幅度是减少还是位相非常快的谐振,都可以期望矩阵元是可忽略的. 这提示了我们,对于势算符 $V(Q)$,可以以值 $V(q_1)$ 或 $V(q_2)$ 来代替,且相当于如下类型的近似:

$$e^{-i\Delta tH}\sim e^{-i\Delta t(p^2/2m)}e^{-i\Delta tV(Q)}.$$

我们已忽略的项包含 Δt 的较高幂次倍乘以对易子 $[P^2/2m, V(Q)]$. 如果 V 在 q_1 和 q_2 邻近的变化是慢的，则它们是可忽略的. 这意味着在短间隔 Δt 内忽略势能到动能的转变. 对矩阵元可作下述估计:

$$\begin{aligned}\langle q_2(t+\Delta t)|q_1(t)\rangle &\simeq \langle q_2|e^{-i\Delta t(p^2/2m)}e^{-i\Delta tV(Q)}|q_1\rangle \\ &= \left(\frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi\Delta t}\right)^{\frac{1}{2}}\exp i\left[\frac{m}{2}\frac{(q_2-q_1)^2}{\Delta t}-\Delta tV(q_1)\right].\end{aligned} \tag{9-5}$$

可以看到，这一步骤的自洽性. 当 $|q_2-q_1| \gg (\hbar\Delta t/m)^{\frac{1}{2}}$ 时，强谐振衰减了振幅，使得修正项尽可能地小，只要 $|V'/V| \cdot (\hbar\Delta t/m)^{\frac{1}{2}} \ll 1$，其中 V' 是势的微商. 例如，这可以通过用 $\frac{1}{2}[V(q_1)+V(q_2)]$ 代替 $V(q_1)$ 来得到一个较对称的形式.

表达式(9-5)是有启发的. 事实上，$(q_2-q_1)/\Delta t$ 类似于速度 $\dot{q}$，而指数变为 $i\Delta tL(q,\dot{q})$，其中 $L(q,\dot{q})$ 是Lagrange 函数，

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q). \tag{9-6}$$

更确切地说，令 $q(t')$ 是按照经典力学在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内从 q_1 到 q_2 的轨迹，即遵从最小作用量原理. 正象我们刚见到的，在 $\Delta t \to 0$ 的极限下，在 $(\Delta t/m)^{\frac{1}{2}}$ 量级的范围内只有在 q_1 的邻近内 q_2 的核心值. 于是跃迁振幅的位相等价于作用量

$$I(2,1) = \int_{q_1(t)}^{q_2(t+\Delta t)} dt' L(q,\dot{q}), \tag{9-7}$$

这个作用量是沿着从 (q_1,t) 到 $(q_2, t+\Delta t)$ 的经典轨迹计算的. 后者与线性路径

$$q(t') = \left(1 + \frac{t - t'}{\Delta t}\right) q_1 + \frac{t' - t}{\Delta t} q_2$$

没有太大的差别. 因此

$$I(2,1) \simeq \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \int_t^{t+\Delta t} dt' V[q(t')]$$

$$\simeq \frac{m}{2} \frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \Delta t V(q_1), \qquad (9\text{-}8)$$

而

$$\langle q_2(t + \Delta t) | q_1(t) \rangle \simeq \left(\frac{m e^{-i\pi/2}}{2\pi \Delta t}\right)^{1/2} e^{iI(q_2(t+\Delta t), q_1(t))}. \qquad (9\text{-}9)$$

在 $\Delta t \to 0$ 的极限下我来验证它约化为 $\delta(q_2 - q_1)$.

在有限时间间隔内,迭加原理使我们可写出

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \prod_1^{n-1} dq_p \prod_0^{n-1} \langle q_{p+1}, t_{p+1} | q_p, t_p \rangle,$$

$$t_p = t_i + \frac{p}{n}(t_f - t_i), \quad t_0 \equiv t_i, \quad t_n \equiv t_f, \qquad (9\text{-}10)$$

因此

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_1^{n-1} dq_p \left[\frac{n m e^{-i\pi/2}}{2\pi(t_f - t_i)}\right]^{n/2}$$

$$\cdot \exp\left[i \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})\right]. \qquad (9\text{-}11)$$

事实上,原始的位相是求和

$$I = I(n, n-1) + I(n-1, n-2) + \cdots + I(1, 0),$$

即是沿着图 9-1 所表明的破折路径计算的作用量. 当间隔 $\Delta t = (t_f - t_i)/n$ 收缩为零时,可以相信我们将得到沿任意路径的作用量. 确切地定义在这一极限下实质上起作用的一组函数 $q(t)$ 是一非平庸的数学上的工作. 在目前的情况下,对

于足够平滑的 $V(q)$，它们是所谓的 $\frac{1}{2}$ 阶 Lipschitzian 函数，这意味着 $|q(t')-q(t)|$ 是以常数乘 $|t'-t|^{1/2}$ 为限的。细心的读者可以参考关于这个问题上所引的文献。然而，物理学家将毫无顾虑地来计算，且可从象式 (9-11) 那样的公式里成功地取出许多惊人的信息，而不必要在细节上去研究 $n\to\infty$ 极限的含意。

下面我们将用一简略的记号

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle=\int\mathscr{D}(q)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\,L(q,\dot{q})\right]. \tag{9-12}$$

轨迹 $q(t)$ 在泛函空间上的"测度"表示为 $\mathscr{D}(q)$，其中包括归一化因子 $(me^{-i\pi/2}/2\pi\hbar\Delta t)^{1/2}$ 的乘积，而 $q(t)$ 被边界条件 $q(t_i)=q_i$，$q(t_f)=q_f$ 所限制。

路径积分的一个根本性质反映了迭加原理。这意味着如果 t 处于间隔 t_i，t_f 内，则有

$$\int\mathscr{D}(q)e^{iI(t,t')}=\int dq(t)\int\mathscr{D}(q)e^{iI(t,t)}\cdot\int\mathscr{D}(q)e^{iI(t,t')}. \tag{9-13}$$

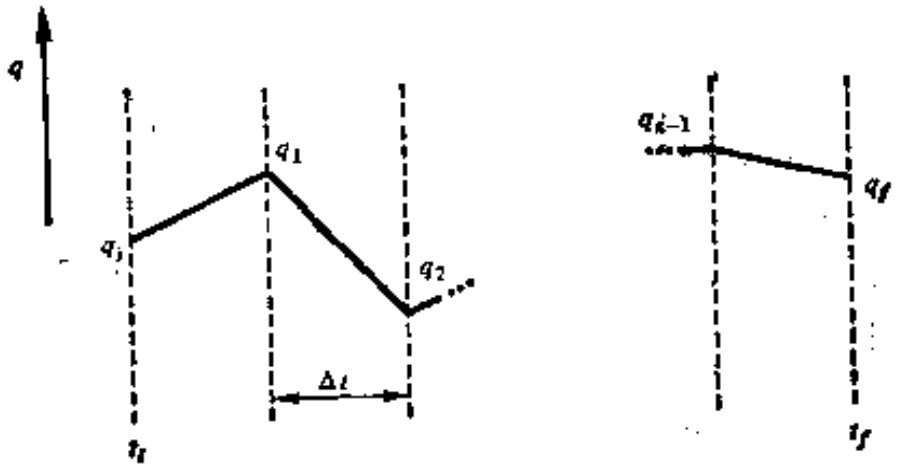


图 9-1　积分的破折路径

如果重新把 $\hbar$ 放入这些表达式中，被积式就变成 $e^{iI/\hbar}$。经典极限 $\hbar\to 0$ 自然地包含用稳定位相方法来计算路径积分。这

样，经典轨迹相应于作用量的极值．因此，量子力学的这一陈述作为一极限情况，以最直接的方法导出了经典力学的动力学原理．如果从 q_i 到 q_f 的经典轨迹是唯一的，我们期望当 $\hbar \to 0$ 时有（可以相差一归一化因子）

$$\langle f|i\rangle \xrightarrow[\hbar\to 0]{} e^{(i/\hbar)I(f,i)}.$$

于是量子力学可以解释为围绕这一经典轨迹的暗含的涨落．

与这一描述相联系的数学上的奥妙在于，“测度” $\mathscr{D}(q)$ 是复的而被积式是一谐振函数．这启示我们在 Wick 转动为虚时间以后，得到了欧氏理论提供了一个较易处理的数学实体．现在它含有算符 e^{-Ht} 的矩阵元，且相应于从 Schrödinger 方程转移为热或扩散方程．事实上，这就是 Wiener 所考虑的情况，他首先在数学内容里讨论了路径积分．总之，现在我们已回答了这一节的标题里所提出的问题，即我们已认识到经典作用量是作为路径积分轨迹的权重的指数出现在量子力学振幅里．

此描述可以被推广到算符的矩阵元．这时我们将回复 Schwinger 的量子力学作用量原理．例如，假定要去计算处于 t_i 和 t_f 之间一时刻 t 的算符 $\mathscr{O}$ 的矩阵元：

$$\begin{aligned}\langle q_f,t_f|\mathscr{O}(t)|q_i,t_i\rangle &= \langle q_f|e^{-iH(t_f-t)}\mathscr{O}e^{-iH(t-t_i)}|q_i\rangle \\ &= \int dq'dq''\int \mathscr{D}(q)e^{iI(q_f,t_f;q'',t)}\langle q''|\mathscr{O}|q'\rangle \\ &\quad\cdot\int\mathscr{D}(q)e^{iI(q',t;q_i,t_i)}.\end{aligned}$$

为简便起见，令 $\mathscr{O}$ 在 q 表象里是对角的，

$$\langle q''|\mathscr{O}|q'\rangle = \mathscr{O}(q')\delta(q''-q').$$

上一表达式可以简记为

$$\langle q_f,t_f|\mathscr{O}(t)|q_i,t_i\rangle = \int \mathscr{D}(q)e^{iI(f,i)}\mathscr{O}[q(t)]. \quad (9\text{-}14)$$

此式可以进而推广到算符的编时乘积

$$\mathscr{O}_1(t_1)\mathscr{O}_2(t_2)\cdots \qquad t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots.$$

如果在 q 表象里它们都是对角的，则有

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}_1(t_1)\mathcal{O}_2(t_2)\cdots | q_i, t_i\rangle$$
$$= \int \mathscr{D}(q) e^{iI(f,i)} \mathcal{O}_1[q(t_1)]\mathcal{O}_2[q(t_2)]. \qquad (9\text{-}15)$$

利用这些结果，可以考虑在 t_i 和 t_f 之间动力学无穷小改变的效应(例如，势或边界条件轻微的改变). 跃迁振幅相应的改变可以表达为

$$\delta\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = i \int \mathscr{D}(q) e^{iI(f,i)} \delta I(f, i).$$

此式具有式(9-14)和(9-15)的形式，其中我们表示为 δI 的算符依赖于中间时间(如果可以是这种情况的话)，所以一般地我们可以写成

$$\delta\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = i\langle q_f, t_f | \delta I | q_i, t_i\rangle. \qquad (9\text{-}16)$$

这一表达式可以作为泛函积分的无穷小的代替式. 例如，如果变分是末态时间从 t_f 增加到 $t_f + \delta t_f$ 的结果，其中 $\delta I = -H\delta t$，那么从公式(9-16)重新得到下述形式的 Schrödinger 方程:

$$\delta\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = -i\langle q_f, t_f | H(t_f) | q_i, t_i\rangle \delta t_f.$$

我们对于一简单的谐振子情况来验证方程(9-11)，

$$V(Q) = \frac{m\omega^2}{2} Q^2, \qquad (9\text{-}17)$$

其中 ω 是频率，其能级为 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$.

我们认为式 (9-11) 成立而来应用它. 在任一短时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内，用一直线路径来近似一任意路径，使作用量的相应的增量是

$$\Delta I(2,1) = \frac{m}{2}\left[\frac{(q_2 - q_1)^2}{\Delta t} - \omega^2 \Delta t \frac{q_2^2 + q_1 q_1 + q_1^2}{3}\right].$$

令 $\tau = t_f - t_i$，可以得到

$$\langle f | i\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_1^{n-1} dq_p \left(\frac{nme^{-i\pi/2}}{2\pi\tau}\right)^{n/2}$$
$$\cdot \exp\left\{i \frac{m}{2} \sum_1^n \left[\frac{n}{\tau}(q_p - q_{p-1})^2\right.\right.$$

$$-\frac{\omega^2 t}{3n}(q_p^2 + q_p q_{p-1} + q_{p-1}^2)\Big]\Big\}. \qquad (9\text{-}18)$$

我们必须对二次型的指数 $e^{i(\frac{m}{2})qMq}$ 作积分，其中 q 是集合 $q_0 \equiv q_t$，$q_1, \cdots, q_{n-1}$，$q_n = q_t$，而 M 是

$$M_{00} = M_{nn} = \frac{n}{t} - \frac{\omega^2}{3n}t,$$

$$M_{k,k} = 2\left(\frac{n}{t} - \frac{\omega^2 t}{3n}\right),$$

$$M_{k,k+1} = M_{k+1,k} = -\left(\frac{n}{t} + \frac{\omega^2 t}{6n}\right) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

所有其它矩阵元是零．积分变量是 $q_1, \cdots, q_{n-1}$．如果 N 是在 M 中删去具有指标 0 和 n 的行、列所得到的矩阵，则有

$$qMq = M_{00}(q_0^2 + q_n^2) + 2M_{01}(q_0 q_1 + q_{n-1}q_n) + \sum_{i,j=1}^{n-1} q_i N_{ij} q_j.$$

利用经典方法计算高斯积分，可以得到

$$\int d^{n-1}q e^{i(m/2)qNq} = \left(\frac{2\pi}{m}e^{i\pi/2}\right)^{(n-1)/2}(\det N)^{-1/2}.$$

指数中的线性项是考虑平移而来的，其结果是

$$\langle t|i\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nme^{-i\pi/2}}{2\pi t}\right)^{n/2}\left(\frac{2\pi e^{i\pi/2}}{m}\right)^{(n-1)/2}(\det N)^{-1/2} \times \exp\left\{\frac{im}{2}\left[M_{00}(q_0^2 + q_n^2) - M_{01}^2(N_{11}^{-1}q_0^2 + N_{n-1,n-1}^{-1}q_n^2 + 2N_{1,n-1}^{-1}q_0 q_n)\right]\right\}.$$

定义 a 为

$$a = \frac{1}{2}\frac{1 + \omega^2 t^2/6n^2}{1 - \omega^2 t^2/3n^2},$$

N 的行列式由下式给出：

$$\det N = 2^{n-1}\left(\frac{n}{t} - \frac{\omega^2 t}{3n}\right)^{n-1}$$

$$\times \det_{n-1}\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots \\ -a & 1 & -a & \cdots \\ 0 & -a & 1 & -a\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix},$$

其余的行列式将用 $I_{n-1}(a)$ 来标记. 对于固定的 a,它满足递推关系式

$$I_p(a) = I_{p-1}(a) - a^2 I_{p-2}(a), I_0(a) = I_1(a) = 1.$$

此式被解为下述形式

$$\begin{pmatrix} I_p(a) \\ I_{p-1}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

在 2×2 矩阵对角化以后,可以得到

$$I_{n-1}(a) = \frac{\lambda_+^n(a) - \lambda_-^n(a)}{\lambda_+(a) - \lambda_-(a)},$$

$$\lambda_\pm(a) = \frac{1 \pm i\sqrt{4a^2 - 1}}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{\pm i\omega t/n}.$$

对于大 n 则有

$$I_{n-1}(a) \sim \frac{n}{2^{n-1}} \frac{\sin\omega t}{\omega t}.$$

因此,

$$\langle f|i\rangle = \left(\frac{m\omega e^{-i\pi/2}}{2\pi\sin\omega t}\right)^{1/2} \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{im}{2}(q_i^2 + q_f^2)\right.$$
$$\left. \cdot (M_{00} - M_{01}^2 N_{11}^{-1}) - 2q_i q_f M_{01}^2 N_{1,n-1}^{-1}\right]\Big\}.$$

当 $\sin\omega t < 0$ 时, 细心的计算使我们可以选择正确的位相. 通过假定 $\omega t < \pi$ 让这一点搁在一边. 结果我们必须计算

$$N_{1,1}^{-1} = \frac{t}{2n(1-\omega^2 t^2/3n^2)} \frac{I_{n-2}(a)}{I_{n-1}(a)} \sim \frac{t}{n}\left(1 - \frac{\omega t}{n}\cot\omega t\right) + O(n^{-3}),$$

$$N_{1,n-1}^{-1} = \frac{t}{2n(1-\omega^2 t^2/3n^2)} \frac{a^{n-2}}{I_{n-1}(a)} \sim \frac{\omega t^2}{n^2 \sin\omega t} + O(n^{-3}).$$

当然,最终的表达式

$$\langle f|i\rangle = \left(\frac{m\omega e^{-i\pi/2}}{2\pi\sin\omega t}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{im\omega}{2}\left[(q_f^2 + q_i^2)\cot\omega t - \frac{2q_f q_i}{\sin\omega t}\right]\right\}, \tag{9-19}$$

与通过较传统方法得到的结果相一致．有趣的是，我们注意到在这特殊情况下，指数的系数等于在有限时间间隔上实际经典轨迹的作用量值．这是二次型哈密顿量的一个特殊性质．

作为第二个例子，读者可以对描述在外力下一维粒子运动的与时间有关的哈密顿量

$$H = \frac{P^2}{2m} - QF(t) \tag{9-20}$$

应用这种方法．相应的振幅是

$$\langle f|i\rangle_F = \left[\frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi(t_f - t_i)}\right]^{1/2} e^{iI(f,i)}, \tag{9-21}$$

其中 $I(f,i)$ 仍是沿经典轨迹计算的作用量，

$$\begin{aligned} I(f,i) = {} & \frac{m}{2}\frac{(q_f - q_i)^2}{t_f - t_i} + \int_{t_i}^{t_f} dtF(t) \\ & \cdot \left(q_f \frac{t - t_i}{t_f - t_i} + q_i \frac{t_f - t}{t_f - t_i}\right) \\ & + \frac{1}{2m}\int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f} dt'dt''F(t')\left[\frac{(t' - t_i)(t'' - t_i)}{t_f - t_i}\right. \\ & \left. - \mathrm{Inf}(t' - t_i, t'' - t_i)\right] F(t''). \end{aligned} \tag{9-22}$$

表达式 $G(t',t'') = t't''/T - \mathrm{Inf}(t',t'')$ 是在第一章已经遇到的经典问题 $\ddot{q} = F(t)/m$ 的对称 Green 函数，它满足边界条件

$$G(0,t'') = G(T,t'') = 0.$$

与方程(9-16)类似，得

$$\frac{\delta}{i\delta F(t)}\langle f|i\rangle_F = \langle f|Q(t)|i\rangle_F. \tag{9-23}$$

这一结果能给出对形为式(9-2)的任意哈密顿量给出跃迁振幅的代数定义．这时可以写作

$$\begin{aligned} & \int \mathscr{D}(q)\exp\left\{i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)\right]\right\} \\ & = \exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} dtV\left[\frac{\delta}{i\delta F(t)}\right]\right\}\langle f|i\rangle_F\Big|_{F=0}. \end{aligned} \tag{9-24}$$

如果展开指数算符为一幂级数，从而变成微扰论，那么此形式的表达式

成为可运算的.

所有这些讨论都可以毫不困难地推广到有限多自由度情况.

现在我们来叙述演化核式(9-12)的显然比较普遍的推导. 其想法是同时用 Hilbert 空间中的$|q\rangle$和$|p\rangle$基. 假定哈密顿量的混合矩阵元可以写为

$$\langle p|H|q\rangle = h(p,q)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipq}, \tag{9-25}$$

在把 c 数换成算符以后"经典"值 $h(p,q)$ 等于量子算符 H, 其次序是 P 处于 Q 的左边. 对于式 (9-2) 形式的哈密顿量,这不会出现任何困难. 对于一无穷小时间间隔 Δt, 从式(9-25)我们可得正规近似式

$$\langle p|e^{-i\Delta tH}|q\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipq-i\Delta th(p,q)}.$$

因此,如果写成

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\int\prod_1^n dp_r\prod_1^{n-1}dq_r\langle q_n|p_n\rangle$$
$$\cdot\langle p_n|e^{-itH/n}|q_{n-1}\rangle\cdots\langle q_1|p_1\rangle\langle p_1|e^{-itH/n}|q_0\rangle,$$

其中 $q_0\equiv q_i$, $q_n\equiv q_f$, $t=t_f-t_i$,则有

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\int\frac{\prod_1^n dp_r\prod_1^{n-1}dq_r}{(2\pi)^n}$$
$$\times\exp\left\{i\left[p_n(q_n-q_{n-1})+\cdots+p_1(q_1-q_0)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{t}{n}h(p_n,q_{n-1})-\cdots-\frac{t}{n}h(p_1,q_0)\right]\right\}$$
$$=\int\mathscr{D}(p,q)\exp\left\{i\int_{t_i}^{t_f}dt\,[p\dot{q}-h(p,q)]\right\}. \tag{9-26}$$

当然, 最后的表达式是一个记号. 注意到积分是在多一个变量 p 上进行的,使边界条件仅包含 q_i 和 q_f. 被积式中正是用正则变量 p 和 q 表示的经典作用量,

$$I(f,i)=\int_{t_i}^{t_f}dt[p\dot{q}-h(p,q)]. \tag{9-27}$$

如果 $h(p,q)$ 象通常一样是 p 的二次型, 那么关于 p 的积分变成高斯型的. 如果对后者作计算,方程(9-26)就重新变成方程(9-12).

同样的描述能使我们去研究散射问题。为了简单起见，只限于讨论一维短程势。因此，在大时间下变成由 H_0 标记的自由演化，而 S 矩阵是在极限情况下得到的，

$$S = \lim_{\substack{t_f\to\infty \\ t_i\to-\infty}} e^{it_fH_0}e^{-i(t_f-t_i)H}e^{-it_iH_0}. \tag{9-28}$$

在态 ψ_f 和 ψ_i 之间的矩阵元由下式给出：

$$\langle\psi_f|S|\psi_i\rangle = \lim\int dq_f dq_i \psi_f^*(q_f,t_f)\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle\psi_i(q_i,t_i). \tag{9-29}$$

记号取为

$$\psi(q) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq}\tilde{\psi}(p),$$

且 $\psi(q,t)$ 定义为自由 Schrödinger 方程的解，使 $\psi(q,0)=\psi(q)$，即

$$\psi(q,t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{i(pq-p^2t/2m)}\tilde{\psi}(p). \tag{9-30}$$

当 $|t|\to\infty$ 时，$\psi(q,t)$ 可以用稳定位相方法来估计，如

$$\psi(q,t) \sim \left(\frac{m}{|t|}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4\mathrm{sign}(t)+imq^2/2t}\tilde{\psi}\left(\frac{mq}{t}\right). \tag{9-31}$$

可将此式引入方程(9-29)，其中我们按照 $q_f = p_ft_f/m$，$q_i = p_it_i/m$ 来改变变量，其结果为

$$\begin{aligned}\langle\psi_f|S|\psi_i\rangle = \lim\int dp_f dp_i &\left(\frac{e^{-i\pi}|t_ft_i|}{m^2}\right)^{1/2} \\ &\times \tilde{\psi}_f^*(p_f)e^{-ip_f^2t_f/2m} \\ &\cdot\left\langle\frac{p_f}{m}t_f,t_f\middle|\frac{p_i}{m}t_i,t_i\right\rangle e^{ip_i^2t_i/2m}\tilde{\psi}_i(p_i).\end{aligned} \tag{9-32}$$

此式可以在平庸情况 $V=0$，$S=1$ 下得到检验。当路径积分被用来表达时间演化算符的矩阵元时，方程 (9-32) 可有一

个有兴趣的解释. 事实上，从这一方程可以得到积分含有渐近行为象自由轨迹那样的路径:

$$t \to \infty \qquad q(t) \to \frac{p_f t}{m},$$

$$t \to -\infty \quad q(t) \to \frac{p_i t}{m}.$$

当然,在一维情况下能量守恒意味着 $p_f = \pm p_i$. 然而，此描述可以很容易地推广到更有兴趣的多维情况.

作为一个应用，我们给出在大能量和小动量转移下的有限力程势 $V(r)$上三维散射的程函近似.

从演化算符的表达式出发，

$$\langle \mathbf{r}_2, t_2 | \mathbf{r}_1, t_1 \rangle = \int \mathscr{D}[\mathbf{r}(t)] \cdot \exp\left\{ i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - V[\mathbf{r}(t)] \right] \right\}. \quad (9\text{-}33)$$

在自由情况下 ($V = 0$) 导致

$$\left[\frac{m e^{-i\pi/2}}{2\pi(t_2 - t_1)} \right]^{3/2} e^{i m (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 / 2(t_2 - t_1)}.$$

在物理上感兴趣的条件下路径积分以经典极值轨迹为主，对于大碰撞参量这一轨迹可用直线来近似:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (9\text{-}34)$$

在分出能量守恒因子,且作 Fourier 变换变到动量空间后，很容易得到下面跃迁算符 $T = (S - 1)/i$ 的矩阵元的表达式:

$$\left\langle \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} \middle| T \middle| \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle \simeq \frac{i|\mathbf{p}|}{m} \int \frac{d^2 b}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} \left\{ \exp\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, V\left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{p}t}{m} \right) \right] - 1 \right\},$$

$$\mathbf{p}^2 \to \infty, \ \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{p}^2} \to 0, \quad (9\text{-}35)$$

其中 $\mathbf{b}(|\mathbf{b}|$ 是碰撞参量）和 $\mathbf{q}$ 是垂直于平均动量的平面上的二维矢量.

这一近似已被推广到相对论情况. 考虑相应于一组交叉梯形图的散射振幅，其中交换粒子是标量玻色子，质量为 μ，耦合常数为 g(图9-2). 可以用类似于式(9-32) 和 (9-33)的路径积分来表示它. 对于大 s（质心系能量平方)和小传递 $t=-q^2$，振幅由下式给出:



图 9-2 交叉梯形图

$$T(s,t)\simeq -2s\int d^2\mathbf{b}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}}\left[\exp\left(\frac{ig^2}{4\pi s}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}}}{\mathbf{k}^2+\mu^2}\right)-1\right]. \qquad (9\text{-}36)$$

读者可以确定当 $s\to\infty$时的函数式 (9-36) 的行为，且进一步推广到电动力学中，其中相应的振幅显示具有正确的非相对论极限[见2-3-2节]的束缚态极点.

9-1-2 Bargmann-Fock 空间中的轨迹

至此已经遇到的积分，都是在位形空间(方程 (9-12)) 或在相空间 (方程(9-26)) 的轨迹上进行的. 在这两种情况下，边界条件在每一种极限下包含有 q 或 p. 我们需要引入一适合于推广到场论中去的新型轨迹. 因为可以认为场论是相互作用谐振子的集合，所以谐振子情况是很鼓舞人的. 这将很容易与对费米子系统的处理相对应起来.

这里应用了第三章中讨论的 Bargmann 和 Fock 相干态. 这种处理给出湮灭和产生算符的表示为

$$a=\frac{Q+iP}{\sqrt{2}},\quad a^\dagger=\frac{Q-iP}{\sqrt{2}},\quad [a,a^\dagger]=1. \qquad (9\text{-}37)$$

它们定义在用复共轭 α 或 $\bar{z}$ 表示的复变量的解析函数空间里. 下面将解释这一选择的理由. 如果原始谐振子问题中含

有频率 ω，在按式(9-37)引入 a 和 $a^\dagger$ 之前，我们可先作一正则变换 $Q \to Q\omega^{-\frac{1}{2}}$，$P \to P\omega^{\frac{1}{2}}$。所考虑的解析函数生成一 Hilbert 空间，其标积为

$$\langle g|f\rangle = \int \frac{dzd\bar{z}}{2i\pi} e^{-z\bar{z}} \bar{g}(z) f(\bar{z}) \tag{9-38}$$

且具有下述对应：

$$a \to \frac{\partial}{\partial z}, \quad a^\dagger \to \bar{z}, \tag{9-39}$$

这正是一对共轭算符。在这一空间中的正交归一基是

$$f_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}. \tag{9-40}$$

一个么正变换把这一描述映在构形变量 q 的平方可积函数的更方便的集合上。f_n 相应于熟知的谐振子的 Hermite 波函数。当然，f_n 是算符 $H = a^\dagger a = \bar{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 具有本征值 n 的本征函数。

在通常的方法里，一个算符 A 是用它的矩阵元来表征的，它使得算符 A 作用在态矢量 ψ 上得到波函数

$$[A\psi](q) = \int dq' \langle q|A|q'\rangle \psi(q').$$

可在 Bargmann-Fock 空间里进行类似地运算。如果 $|n\rangle$ 是相应于方程(9-40)中的函数 f_n 的态，我们有

$$A = \sum_{n,m} |n\rangle A_{n,m} \langle m|, \; A_{n,m} = \langle n|A|m\rangle. \tag{9-41}$$

相应地，对任意态 f，有

$$\langle \bar{z}|Af\rangle = [Af](\bar{z}) = \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \langle m|f\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\bar{\xi}} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} f(\bar{\xi}). \tag{9-42}$$

于是，积分核自然地与 A 相联系，并以 $A(\bar{z},\xi)$ 标记，使得

$$[Af](\bar{z}) = \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\bar{\xi}\xi} A(\bar{z}, \xi) f(\xi)$$

的积分核是

$$A \to A(\bar{z}, \xi) = \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}}. \qquad (9\text{-}43)$$

对于充分正则的A,函数 $A(\bar{z}, \xi)$ 是两个复变量 ξ 和 $\bar{z}$ 的解析函数. 顺便指出,把算符写成这种形式是我们所希望的,它证明对解析函数宗量选复共轭是正当的.

由于 f_n 的正交性表达式,式(9-43)具有下面基本的迭加性质:

$$A_1 A_2(\bar{z}, \xi) = \int \frac{d\eta d\bar{\eta}}{2\pi i} e^{-\bar{\eta}\eta} A_1(\bar{z}, \eta) A_2(\eta, \xi). \qquad (9\text{-}44)$$

返回到方程(9-41),我们将它改写为

$$A = \sum_{n,m} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle A_{n,m} \langle 0| \frac{a^m}{\sqrt{m!}}.$$

我们记得,在基态上的投影算子$|0\rangle\langle 0|$可以用正规乘积表示为

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:, \qquad (9\text{-}45)$$

因此

$$A = \sum_{n,m} A_{n,m} :a^{\dagger n} e^{-a^\dagger a} a^m: = \sum_{n,m} A^N_{n,m} \frac{a^{\dagger n} a^m}{\sqrt{n!\,m!}}. \qquad (9\text{-}46)$$

这一正规形式给出了表示算符 A 的正规核的定义. 我们以 $A^N(\bar{z}, z)$标记它,以区分先前的定义,其中 $\bar{z}$ 和 z 看作独立变量,

$$A^N(\bar{z}, z) = \sum_{n,m} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} A^N_{n,m} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \qquad A = :A^N(a^\dagger, a):. \qquad (9\text{-}47)$$

为了得到 $A^N(\bar{z}, z)$ 和 $A(\bar{z}, z)$ 之间的关系,我们可以或者利用方程 (9-46)或者注意到整个函数的 Hilbert 空间是具有类

似于 Dirac δ 函数形式的再生核，其形式为

$$f(\bar{z}) = \sum_n \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \langle n|f\rangle$$

$$= \sum_n \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\bar{\xi}} \frac{\bar{z}^n \bar{\xi}^n}{n!} f(\bar{\xi})$$

$$= \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\bar{\xi}+\bar{z}\bar{\xi}} f(\bar{\xi}). \tag{9-48}$$

对于算符 $a^{\dagger n}a^m$，有

$$[a^{\dagger n}a^m f](\bar{z}) = \bar{z}^n \frac{d^m}{d\bar{z}^m} f(\bar{z})$$

$$= \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\bar{\xi}+\bar{z}\bar{\xi}} \bar{z}^n \frac{d^m}{d\bar{\xi}^m} f(\bar{\xi})$$

$$= \int \frac{d\xi d\bar{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\bar{\xi}+\bar{z}\bar{\xi}} \bar{z}^n \xi^m f(\bar{\xi}).$$

我们发现

$$A(\bar{z},\xi) = e^{\bar{z}\xi} A^N(\bar{z},\xi), \tag{9-49}$$

且由于它是线性的，这一关系可推广到任意算符上.

从方程(9-44)和(9-49)出发，可以计算相应于量子力学问题中演化算符的积分核. 假定哈密顿量用算符 $a^\dagger$ 和 a 表示为一正规形式. 它的正规积分核可简单地将产生和湮灭算符代以复数而得到. 用 $h(\bar{z},\xi)$ 表示这一函数. 对于无穷小时间间隔 Δt 近似地有

$$U(\bar{z},\xi,\Delta t) \simeq e^{\bar{z}\xi - i\Delta t h(\bar{z},\xi)}. \tag{9-50}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，它正确地导致积分核 1. 在有限间隔里重复应用方程(9-44)就导出了路径积分

$$U(\bar{z}_f,t_f;z_i,t_i) = \lim_{n\to\infty} \int \prod_1^{n-1} \frac{dz_k d\bar{z}_k}{2\pi i}$$

$$\times \exp\left[\bar{z}_n z_{n-1} - \sum_1^{n-1} \bar{z}_k z_k + \bar{z}_1 z_0\right.$$

$$-i\frac{t_f-t_i}{n}\sum_0^{n-1}h(\bar{z}_{k+1},z_k)\Big]. \qquad (9\text{-}51)$$

对此极限用一记号表示，

$$U(\bar{z}_f,t_f;z_i,t_i)=\int\mathscr{D}(z,\bar{z})\exp\left\{\frac{\bar{z}_fz_f+\bar{z}_iz_i}{2}\right.$$

$$\left.+i\int_{t_i}^{t_f}dt\left[\frac{\dot{\bar{z}}z-\bar{z}\dot{z}}{2i}-h(\bar{z},z)\right]\right\}. \qquad (9\text{-}52)$$

在这一表达式里积分变量 $z(t_f)$ 和 $\bar{z}(t_i)$ 仍旧独立于 $\bar{z}(t_f)$ 和 $z(t_i)$，$\bar{z}(t_f)$ 和 $z(t_i)$ 是由边界条件固定的.

再一次清楚地认出了式(9-52)中指数内的经典作用量，事实上，形式 pdq 或更确切地是 $\frac{1}{2}(pdq-qdp)$，按照式(9-37)写作

$$\frac{1}{2}(pdq-qdp)=\frac{1}{2i}(zd\bar{z}-\bar{z}dz), \qquad (9\text{-}53)$$

这要求将 z 和 $\bar{z}$ 处理为独立变量. 显然，所有上述内容都可以直接地推广到时间相关的哈密顿量的情况以及多自由度情况.

我们来计算在时间有关的外力支配下的谐振子的演化算符，哈密顿量为

$$H=\omega a^\dagger a-f(t)a^\dagger-\bar{f}(t)a, \qquad (9\text{-}54)$$

其中 $\bar{f}$ 是 f 的复共轭. 正象方程(9-19)和(9-21)所解释的，其结果应正比于 $e^{iI(f,i)}$，其中 $I(f,i)$ 是作用量，它是在满足经典运动方程

$$\dot{z}+i[\omega z-f(t)]=0,\ z(t_i)=z_i,$$

$$\dot{\bar{z}}-i[\omega\bar{z}-\bar{f}(t)]=0,\ \bar{z}(t_f)=\bar{z}_f$$

的极限轨迹上计算的. 其解是

$$z(t)=z_ie^{-i\omega(t-t_i)}+\int_{t_i}^{t}dt'e^{-i\omega(t-t')}f(t'),$$

$$\bar{z}(t)=\bar{z}_fe^{i\omega(t-t_f)}+i\int_{t}^{t_f}dt'e^{i\omega(t-t')}\bar{f}(t').$$

这些量显然不是共轭的，因为边界条件不具有对称性．相应的沿这一轨迹的路径积分的指数是

$$il = \frac{1}{2}(\bar{z}_f z_f + \bar{z}_i z_i) + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f} dt[\dot{\bar{z}}z - \bar{z}\dot{z} - 2ih(\bar{z}, z, t)]$$

$$= \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f - t_i)} z_i$$

$$+ i\int_{t_i}^{t_f} dt[\bar{z}_f e^{-i\omega(t_f - t)} f(t) + \bar{f}(t) e^{-i\omega(t - t_i)} z_i]$$

$$- \int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f} dt dt' \bar{f}(t) e^{-i\omega(t - t')} f(t') \theta(t - t'). \qquad (9\text{-}55a)$$

由路径积分的显明的计算，简单地给出

$$U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = e^{il}, \qquad (9\text{-}55b)$$

因此在这种描述里受迫的谐振子的情况是很简单的，且积分核到处是正则的．

在这些计算里重复应用的高斯积分公式是值得复述的，因为它是路径积分应用的基础．如果 A 是非奇异二次型矩阵，那么它的厄米部分是正定的，且 z 和 u 是复数列矢量，

$$\int \prod_1^N \frac{dz_k d\bar{z}_k}{2\pi i} e^{-\bar{z}Az + \bar{u}z + u\bar{z}} = (\det A)^{-1} e^{\bar{u}A^{-1}u}. \qquad (9\text{-}56)$$

注意，在上式右边的指数是被积式指数的鞍点值．

9-1-3 费米子体系

因为路径积分显示出经典力学和量子力学之间的密切关系，它似乎是先验的原则，当推广到处理费米子时就会遇到某些困难．幸好 Berezin 用反对易代数设计出一种恰当的结构，我们在第四章中已经使用过了．

从两个算符 a 和 $a^\dagger$ 的二级体系出发，它满足

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \quad a^2 = a^{\dagger 2} = 0. \qquad (9\text{-}57)$$

我们要将它们表示为在“解析函数”的 Hilbert 空间上的作用．和先前对于玻色子所用的关于 z 和 $\bar{z}$ 的无穷级数类比，就提出了下述方案．考虑两个反对易变量 η 和 η 的具有复系数的

级数，它们满足

$$\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0, \quad \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0. \tag{9-58}$$

这些级数约简成下述形式的多项式：

$$P(\bar{\eta},\eta) = p_0 + p_1\eta + \bar{p}_1\eta + p_{12}\eta\eta. \tag{9-59}$$

这些维数为 $2^2 = 4$ 的多项式集合，可以和在二维矢量空间（由1阶齐次多项式产生）上的外代数等同. 结合乘法定义成与规则式(9-58)相一致. 我们还要引入线性微商

$$\partial P = \bar{p}_1 + p_{12}\eta \quad \bar{\partial} P = p_1 - p_{12}\eta. \tag{9-60}$$

它们作用在每一个单项式上，使相应的 η(对 ∂)或当 $\bar{\eta}$ 移到左边后，使 η (对 $\bar{\partial}$)的幂次降低；否则它们给出零的结果.

通过下述条件来定义解析函数的子集：

$$\partial f = 0, \tag{9-61}$$

这一条件意味着 f 仅依赖于 η.

注意

$$\partial^2 P = \bar{\partial}^2 P = 0 \text{ 和 } \bar{\partial}\partial P = -\partial\bar{\partial}P = p_{12},$$

这意味着在微商算符里的多项式与原始的反对易代数有相同的结构. 读者将注意到 $\partial(P_1P_2)$ 不等于 $\partial P_1 P_2 + P_1\partial P_2$，且容易找到这一等式的正确形式. 这种构造可以很容易地推广到几个自由度的情况. 对于 $2n$ 个自由度的情况，外代数将是 2^{2n} 维的，而解析函数空间是 2^n 维的.

回到 $n = 1$ 情况，我们把解析函数写成

$$f = f_0 + f_1\eta,$$

且这样来定义标量积：

$$(g,f) = \bar{g}_0 f_0 + \bar{g}_1 f_1, \tag{9-62}$$

其中在标量上的横线意味着复共轭. 有没有可能象玻色情况那样将此标量积表示为积分呢？回答是肯定的，只要象下面那样令微商和积分恒等即可. 积分记号是从要求

$$\int d\bar{\eta}\bar{\eta} = 1, \quad \int d\eta\eta = 1, \quad \int d\bar{\eta}1 = \int d\eta 1 = 0 \tag{9-63}$$

出发，用线性来定义的．如果我们令 $d\eta$ 和 $d\bar{\eta}$ 也是反对易的，这样 $d\bar{\eta}$ 和 η 或 $d\eta$ 和 η 换在一起时可应用规则式 (9-63)，因而就可看到积分和微商是恒等的．因此，

$$\int d\eta P = \partial P, \int d\bar{\eta} P = \bar{\partial} P, \int d\bar{\eta} d\eta P = \bar{\partial}\partial P. \quad (9\text{-}64)$$

结果，微商的积分为零 ($\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$)，且这一步骤很容易推广到几个自由度的情况．

我们可以改变积分号下的积分变量．如果暂时限于自动遵从式(9-58)结构的线性变换，亦即如下形式的变换：

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix},$$

其中 A 是一非奇异 c 数矩阵，则代入任一多项式后可得

$$P(\eta, \bar{\eta}) = Q(\xi, \bar{\xi}).$$

特别是

$$p_{12}\eta\bar{\eta} = q_{12}\xi\bar{\xi} = (p_{12} \det A)\xi\bar{\xi}.$$

结果有

$$\int d\bar{\eta} d\eta P(\eta, \eta) = \int d\bar{\xi} d\xi (\det A)^{-1} Q(\xi, \bar{\xi}). \quad (9\text{-}65)$$

这里含着一种不同于通常的规则，就是出现了标准的雅可比的倒数，因为

$$\det A = J\left(\frac{\eta, \bar{\eta}}{\xi, \bar{\xi}}\right).$$

选择一个基来定义解析函数时，我们定义复共轭为

$$\bar{f}(\eta) = \bar{f}_0 + \bar{f}_1\eta, \quad (9\text{-}66)$$

于是可以证明

$$(g, f) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \bar{g}(\eta) f(\bar{\eta}) \quad (9\text{-}67)$$

与玻色情况的公式(9-38)类似．现在我们可用一对共轭算符来表示 a 和 $a^\dagger$：

$$a \to \partial, \quad a^\dagger \to \bar{\eta}. \tag{9-68}$$

显然，$a^2 = a^{\dagger 2} = 0$. 进一步还有

$$a(a^\dagger f) = f_0, \quad a^\dagger(af) = f_1\bar{\eta}.$$

结果可给出

$$aa^\dagger + a^\dagger a = 1,$$

而

$$(g, af) = \bar{g}_0 f_1, \quad (f, a^\dagger g) = \bar{f}_1 g_0 = \overline{(g, af)}.$$

更一般地说，可以对解析函数的空间 $\mathscr{H}$ 上的线性算符指定一积分核. 相应于函数 1 和 $\bar{\eta}$ 来考虑正交态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 使得 $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$，我们令

$$A = \sum_{n,m} |n\rangle A_{n,m}\langle m|,$$

$$(Af)(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} A(\bar{\eta}, \xi) f(\xi), \tag{9-69}$$

$$A(\bar{\eta}, \xi) = \sum_{n,m} \bar{\eta}^n A_{n,m} \xi^m.$$

象玻色情况那样，我们把基态上的投影表示为

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}: = 1 - a^\dagger a, \tag{9-70}$$

且把 A 改写为正规形式：

$$A = \sum_{n,m} A_{n,m} :a^{\dagger n} e^{-a^\dagger a} a^m: = \sum_{n,m} A^N_{n,m} a^{\dagger n} a^m, \tag{9-71}$$

相应的正规核

$$A^N(\eta, \eta) = \sum_{n,m} A^N_{n,m} \bar{\eta}^n \eta^m, \tag{9-72}$$

通过式

$$A(\bar{\eta}, \eta) = e^{\bar{\eta}\eta} A^N(\eta, \eta) \tag{9-73}$$

与上面的核相关. 例如，恒等元素的积分核是 $e^{\bar{\eta}\eta}$，所以

$$f(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\xi} f(\xi), \tag{9-74}$$

而算符的乘积由下式给出：

$$A_1A_2(\bar{\eta},\eta)=\int d\xi d\bar{\xi}e^{-\bar{\xi}\xi}A_1(\bar{\eta},\xi)A_2(\xi,\eta). \quad (9\text{-}75)$$

类似于高斯积分公式(9-56)的是

$$\int\prod_1^n d\eta_k d\bar{\eta}_k \exp\left[-\sum_{k,l}\bar{\eta}_k A_{kl}\eta_l+\sum_k(\bar{\eta}_k\xi_k+\bar{\xi}_k\eta_k)\right]$$

$$=\det A\exp\left[\sum_{k,l}\bar{\xi}_k(A^{-1})_{kl}\xi_l\right]. \quad (9\text{-}76)$$

这种与玻色情况紧密的相应性，使我们可直接照抄以得到跃迁振幅的路径积分. 令 $H(a^\dagger,a,t)$ 为一费米子体系的正规次序哈密顿量. 相应的正规核可以按这种次序用 $\bar{\eta}$，η 来代替 $a^\dagger$，a 而得到. 因此，演化算符的核由下式给出：

$$U(\bar{\eta}_f,t_f;\eta_i,t_i)=\int\mathscr{D}(\bar{\eta},\eta)\exp\left\{\frac{\bar{\eta}_f\eta_f+\bar{\eta}_i\eta_i}{2}\right.$$

$$\left.+i\int_{t_i}^{t_f}dt\left[\frac{\bar{\eta}\dot{\eta}-\dot{\bar{\eta}}\eta}{2i}-h(\bar{\eta},\eta,t)\right]\right\}. \quad (9\text{-}77)$$

作为一个练习，考虑一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的，处于沿 z 轴的恒定场 B 作用下的量子运动. 基态定义为相应于自旋值 $S_z=\frac{1}{2}$. 哈密顿量是 $H=\mu B(2a^\dagger a-1)$，其中 μ 是回转磁比率. 方程(9-77)表明

$$U(\bar{\eta}_f,t_f;\eta_i,t_i)=\exp[i\mu B(t_f-t_i)+\bar{\eta}_f\eta_i e^{-2i\mu B(t_f-t_i)}]. \quad (9\text{-}78)$$

请注意它与谐振子的类似性. 这一处理可推广到时间相关的场，特别是包括以频率 ω 转动的横场的情况.

当考察方程(9-76)时，惊人地看到用了“极值轨迹”上的值后也给出了一个二次型的积分，仅差一个因子，亦即对它的指数给了一个稳定值.

9-2 相对论描述

我们把上面的方法推广到无穷的相互作用场体系中去.

9-2-1 用路径积分来表示的 S 矩阵和 Green 函数

我们从考察一熟悉的情况，即与外实 c 数源 $j(x)$ 耦合的中性标量场开始. 经典作用量是

$$I_0(\varphi, j) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi^2) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + j\varphi\right], \quad (9\text{-}79)$$

量子哈密顿量是

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi_{0p}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_{0p})^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_{0p}^2 - j\varphi_{0p}\right]. \quad (9\text{-}80)$$

它描述了与变化的外力相耦合的量子谐振子系统（第三章和第四章）. 在一给定时刻，场量的 Fourier 分解是

$$\varphi_{0p}(\mathbf{x}) = \int d\tilde{k}[a(k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}],$$

$$\pi_{0p}(\mathbf{x}) = -i\int d\tilde{k}\omega(k)[a(k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a^\dagger(k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (9\text{-}81)$$

由此而得

$$H = \int d\tilde{k}[\omega(k)a^\dagger(k)a(k) - f(t,\mathbf{k})a^\dagger(k) - \bar{f}(t,\mathbf{k})a(k)], \quad (9\text{-}82)$$

$$f(t,\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} j(\mathbf{x},t).$$

在这个形式里，哈密顿量是对角的，且能应用公式(9-55)给出演化算符的积分核为

$$\begin{aligned} U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = \exp\Big(\int d\tilde{k}\Big\{ & \bar{z}_f(k)e^{-i\omega(k)(t_f-t_i)}z_i(k) \\ & + i\int_{t_i}^{t_f} dt[\bar{z}_f(k)e^{-i\omega(k)(t_f-t)}f(t,\mathbf{k}) \\ & + \bar{f}(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)(t-t_i)}z_i(k)] \\ & - \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f} dtdt'\bar{f}(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)|t-t'|}f(t',\mathbf{k})\Big\}\Big). \end{aligned} \quad (9\text{-}83)$$

令在 $|t| \to \infty$ 时撤去源，S 矩阵就定义为算符 $e^{it_f H_0}U(t_f, t_i)e^{-it_i H_0}$ 的极限，其中 H_0 是令 $j = 0$ 从 H 得到的. 对于象这里用的那些相干态，e^{-itH_0} 的作用简单地相当于作移动 $z \to ze^{-i\omega t}$，其中 ω 是与由 z 描述的谐振子相联系的频率. 因此，S 矩阵的积分核是

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\bar{z}_f, z_i) = \lim_{-t_i, t_f \to \infty} \exp\Big\{\int d\tilde{k}\Big[&\bar{z}_f(k)z_i(k) \\ &+ i\int_{t_i}^{t_f} dt\,[\bar{z}_f(k)e^{i\omega(k)t}f(t,\mathbf{k}) \\ &+ \bar{f}(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)t}z_i(k)] \\ &- \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f} dt\,dt'\bar{f}(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)|t-t'|}f(t',\mathbf{k})\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{9-84}$$

如果去掉指数中第一个因子，就简单地从方程 (9-49) 得到正规核. 其余部分是用经典渐近场

$$\varphi_{as}(\mathbf{x}, t) = \int d\tilde{k}[z_i(k)e^{-ik\cdot x} + \bar{z}_f(k)e^{ik\cdot x}] \tag{9-85}$$

来解释的，它是齐次 Klein-Gordon 方程的解. 因为 $\bar{z}_f(k)$ 不是 $z_i(k)$ 的复共轭，所以 φ_{as} 由边界条件给定，当 $t \to -\infty$ 时由正频的边界条件，当 $t \to +\infty$ 时由负频的边界条件给出. 我们已知道 Feynman 混合边界条件. 用这些记号有

$$\begin{aligned}&\int d\tilde{k}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,[\bar{z}_f(k)e^{i\omega(k)t}f(t,\mathbf{k}) \\ &\qquad + \bar{f}(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)t}z_i(k)] \\ &= \int d^4x \int d\tilde{k}j(x)[\bar{z}_f(k)e^{i\omega(k)t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\qquad + z_i(k)e^{-i\omega(k)t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \\ &= \int d^4x j(x)\varphi_{as}(x).\end{aligned}$$

此外有

$$\int d\tilde{k}\iint dtdt'j(t,\mathbf{k})e^{-i\omega(k)|t-t'|}j(t',\mathbf{k})$$

$$=\iint d^4xd^4x'j(x)j(x')\int d\tilde{k}e^{-i\omega(k)|t-t'|+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}.$$

在 k 上的积分就是 Feynman 传播子，

$$\int d\tilde{k}e^{-i\omega(k)|t-t'|+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}$$

$$=i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-x')}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$=-iG_F(x-x')$$

$$=\langle 0|T\varphi_{0p}(x)\varphi_{0p}(x')|0\rangle,$$

其中 φ_{0p} 是量子化的自由标量场. 最后有

$$\mathscr{S}^N(\bar{x}_f,x_i)|_j=\exp\left[i\int d^4xj(x)\varphi_{as}(x)\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\iint d^4xd^4x'j(x)G_F(x-x')j(x')\right],\quad(9\text{-}86)$$

事实上这是式 (4-63) 的结果，且用作讨论 Wick 定理的出发点. 相对论协变性以及对传播子的 Feynman 的 $i\varepsilon$ 描述，都在路径积分描述中自然地得到.

为了得到 S 算符，(以后用 $S_0(j)$ 来标记)，我们以 φ_{0p} 代替 φ_{as} 且按正规次序：

$$S_0(j)=:\exp[i\int d^4xj(x)\varphi_{0p}(x)]:Z_0(j),$$

$$Z_0(j)=\exp\left[\frac{i}{2}\iint d^4xd^4x'j(x)G_F(x-x')j(x')\right].\quad(9\text{-}87)$$

因为

$$(\Box+m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}Z_0(j)=j(x)Z_0(j),$$

公式(9-87)可以重新写作

$$S_0(j) = :\exp\left\{\int d^4x\left[\varphi_{0p}(x)(\Box + m^2)\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]\right\}:Z_0(j), \tag{9-88}$$

其中 $(\Box + m^2)\frac{\delta}{\delta j}$ 仅作用在 $Z_0(j)$ 上.

现在考虑更复杂的相互作用. 例如, 通过势 $V(\varphi)$ 引入自耦合,使得作用量取下述形式:

$$I = \int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi)\right],$$

$$I(\varphi, j) = I + \int d^4x j\varphi. \tag{9-89}$$

如其中的记号所表明的那样,为了简便起见 $V(\varphi)$ 仅依赖于 φ,不依赖于它的梯度. 例如, $V(\varphi)$ 可以是 $\lambda\varphi^4/4!$. 为了导出 S 矩阵, 可以用导出方程(9-23)和(9-24)同样的推导. 换句话说,在正规核之间存在下述关系:

$$\mathscr{S}^N = \exp\left[-i\int d^4xV\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right]\mathscr{S}^N(j)\Big|_{j=0}, \tag{9-90}$$

其中 $\mathscr{S}^N(j)$ 由表达式(9-86)给出.

从式(9-90)中展开指数算符可以得到微扰级数. S 矩阵本身可以写作

$$S = :\exp\left[\int d^4x\varphi_{0p}(x)(\Box + m^2)\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]:Z(j)\Big|_{j=0},$$

$$Z(j) = \exp\left[-i\int d^4xV\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right]Z_0(j), \tag{9-91}$$

在 $Z(j)$ 中我们看出, Green 函数的产生泛函和上面的公式是与方程(5-38)恒等的. 这里的新内容是我们导出了 S 矩阵的正规核和 $Z(j)$ 的泛函表达式. 事实上,算符

$$\exp\left[-i\int d^4xV(\delta/i\delta j(x))\right]$$

的产生导致了

$$\mathscr{S}(\bar{z}_f, z_i) = \lim \int \mathscr{D}(z, \bar{z}) \times \exp\left\{\int d\tilde{k}\left[\frac{\bar{z}_f(k)z_f(k) + \bar{z}_i(k)z_i(k)}{2} + iI(f,i)\right]\right\} \tag{9-92}$$

的自作用，其中

$$I(f,i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\tilde{k} \cdot \left[\frac{\dot{\bar{z}}(t,k)z(t,k) - \bar{z}(t,k)\dot{z}(t,k)}{2i} - \omega(k)\bar{z}(t,k)z(t,k) - h_{\text{int}}(\bar{z}, z)\right]. \tag{9-93}$$

在目前情况下，

$$h_{\text{int}} = \int d^3x V[\varphi(x)], \tag{9-94}$$

其中 Φ 是 $z(t,k)$ 和 $\bar{z}(t,k)$ 的泛函，可以通过在式(9-81)中用这些 c 数代替算符 $a(t,k)$ 和 $a^\dagger(t,k)$ 而得到，

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int d\tilde{k}[z(t,k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \bar{z}(t,k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}],$$

$$\pi(\mathbf{x},t) = -i\int d\tilde{k}\omega(k)[z(t,k)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \bar{z}(t,k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \tag{9-95}$$

在作替换以前 H_{int} 必须写成正规形式。为了从演化算符产生 S 矩阵，极限 $t_f, -t_i \to \infty$ 必须为自由渐近条件所补充，

$$\lim_{t\to\infty}\bar{z}(t,k) = \bar{z}_f(k)\,e^{i\omega(k)t},$$
$$\lim_{t\to-\infty} z(t,k) = z_i(k)e^{-i\omega(k)t}. \tag{9-96}$$

路径积分的归一化可以从前面的情况中令 V 等于 $j\varphi$ 而得到。为了简短起见，测度缩写为 $\mathscr{D}(\varphi, \pi)$ 或者甚至于缩写为 $\mathscr{D}(\varphi)$.

与以上类似，泛函 $Z_0(j)$ 和 $Z(j)$ 被表示为积分

$$Z_0(j)=\int\mathscr{D}(\varphi)\exp\left[iI_0(\varphi)+i\int d^4x\varphi(x)j(x)\right],\tag{9-97}$$

$$Z(j)=\int\mathscr{D}(\varphi)\exp\left[iI(\varphi)+i\int d^4x\varphi(x)j(x)\right],\tag{9-98}$$

$$I_0(\varphi)=\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)\right],$$

$$I(\varphi)=\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)-V(\varphi)\right].$$

我们理解为在测度中包含一个 $Z(0)=1$ 的归一化因子.

从 $Z_0(j)$ 的表达式可以得到积分

$$\int\mathscr{D}(\varphi)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{2n})e^{iI_0(\varphi)}$$

$$=\frac{(-i)^n}{2^n n!}\sum_{\text{置换}}G_F(x_{p_1}-x_{p_2})\cdots$$

$$G_F(x_{p_{2n-1}}-x_{p_{2n}}),\tag{9-99}$$

这就是 Wick 定理的明显的形式.

当然，考虑把路径积分(9-98)定义为用方程(9-91)或(9-99)形式幂级数是合理的. 这就使我们能够验证处理积分时一些运算是否是正当的，如积分变量变换和分部积分等. 作为例子，我们来研究形为

$$\varphi(x)=\chi(x)+\varepsilon F(\chi,x)\tag{9-100}$$

的改变变量无穷小的效应，其中 F 是 χ 的任意泛函，这一泛函可以展开为 χ 的幂级数. 这一改变是正则的，其意义是说关系 $\varphi\longrightarrow\chi$ 可以反向(作为一个形式级数). 考虑到来自变量改变的雅可比，精确到 ε 的第一级可以得到

$$Z(j)=\int\mathscr{D}(\chi)\left[1+\varepsilon\int d^4x\frac{\delta F(\chi,x)}{\delta\chi(x)}\right]$$

$$\cdot\left\{1+i\varepsilon\int d^4x\left[\frac{\delta I(\chi)}{\delta\chi(x)}+j(x)\right]F(\chi,x)\right\}$$

$$\times\exp i\left[I(\chi)+\int d^4xj(x)\chi(x)\right].\tag{9-101}$$

将正比于 s 的项收集在一起，并通过用 $\delta/i\delta j(x)$ 代替 χ 来抽出积分前的因子，我们得到

$$\int d^4x \left\{ i\left[\frac{\delta I}{\delta\chi(x)}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right) + j(x)\right] F\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, x\right) + \frac{\delta F}{\delta\chi(x)}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, x\right)\right\} Z(j) = 0, \tag{9-102}$$

也可以写作

$$\int d^4x F\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}, x\right)\left[\frac{\delta I}{\delta\chi(x)}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right) + j(x)\right] Z(j) = 0, \tag{9-103}$$

且可直接从方程(9-98)得到验证.

将这一普遍等式用到特殊情况 $F(\chi, x) = f(x)$ 中去，即变量的改变简单地是场量的定域平移的情况，方程(9-103)约简为

$$\left[\frac{\delta I}{\delta\chi(x)}\left(\frac{\delta}{i\delta j}\right) + j(x)\right] Z(j) = 0, \tag{9-104a}$$

在标量场情况下，此式可明显地写成

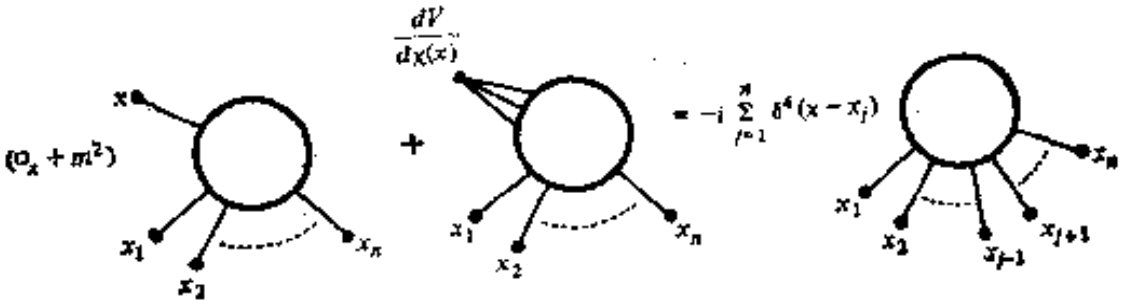


图 9-3　等式(9-104a,b)的图表示

$$\left[(\Box + m^2)\frac{\delta}{i\delta j(x)} + V'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right) - j(x)\right] Z(j) = 0. \tag{9-104b}$$

这一等式——运动方程的直接结果——把 $n+1$，n 和 $n-1$ 点函数联系起来了. 第一项包含 Klein-Gordon 算符，第二项嵌入了 V'. 这些已描绘在图 9-3 中.

练习题

(a) 推导连接 Green 函数产生泛函 $G_c(j)$ 所满足的相应的等式.

(b) 注意，如果泛函 $F(\chi,x)$ 是定域的，即仅包含在 x 点的 χ，方程(9-102)就引入 $\delta F/\delta\chi(x) = F'[\chi(x)]\delta(0)$. 这一项如何解释？证明这一项与式(9-102)中其它项相比是 $\hbar$ 的高阶项，且被在 $F(\chi)$ 和 $\delta I/\delta\chi$ 的$(\Box + m^2)\chi$ 部分之间的 Wick 收缩所补偿.

(c) 用运动方程来证明算符 $\int d^4x\varphi(x)[\delta I/\delta\varphi(x)]$ 的嵌入计及了 Green 函数的外线数.

(d) 证明等价定理. 后者叙述了当场变量的无穷小可反向的改变修改了 Green 函数时，它不影响 S 矩阵. 换句话说，如果 $F(\varphi) = O(\varphi^2)$，通过把方程(9-91)应用到 $Z'(j)$ 上.

$$Z'(j) = \int \mathcal{D}(\varphi)\exp i\left\{I(\varphi) + \int d^4x j(x)[\varphi(x) + F(\varphi,\chi)]\right\}, \tag{9-105}$$

而得到的 S 矩阵是与用 $Z(j)$ 计算的 S 矩阵是一致的. 实际上，当如在(6-91)中的算符$(\Box + m^2)$所表明的那样截去外线时，$F(\varphi)$ 的影响仅相当于波函数的重整化.

(e) 证明即使在相互作用拉氏函数包含微商项的情况下，路径积分的微扰展开仍导致协变的 Feynman 规则.

(f) 最后，把这一描述推广到 Fermi 场. 对费米子与标量玻色子的 Yukawa 耦合情况和电动力学情况写出产生泛函 $Z(j)$. 对于后面的情况证明一无穷小规范变换形式的变量改变，导致第八章讨论的一组 Ward 等式.

导出 Green 函数之间一些等式的泛函技巧将在下面几章中广泛地应用.

9-2-2 有效作用量和最陡下降法

我们已经按照

$$Z(j) = \exp[G_c(j)] \tag{9-106}$$

定义了连接 Green 函数 $G_c(j)$ 的产生泛函，且通过 Legendre 变换

$$\varphi(x,j) = \frac{\delta}{i\delta j(x)} G_c(j),$$

$$i\Gamma(\varphi) = G_c(j) - i\int d^4x j(x)\varphi(x), \qquad (9\text{-}107)$$

定义了有效作用量. 为了从路径积分计算 $Z(j)$, 可以在指数里保持作用量的二次型部分，把其余部分展成级数且应用 Wick 定理式(9-99). 基本假定是耦合常数小. 路径积分表示本身也给出了有点一般性的推理. 由于能够以封闭形式作的积分仅是高斯型积分，所以我们的想法是用最陡下降法或稳定位相方法(在闵氏空间情况)去选择级数展开的最佳点. 这里的小参量是 Planck 常数 $\hbar$——如果量纲是明确的且作用量 I 为 $I/\hbar$ 所代替，这一点就是清楚的. 因此，上述方法自然地相应于量子力学中的半经典近似，且导致按圈数展开的级数.

因此首要的目标是找到积分式(9-98)中指数的极值，就是满足经典方程

$$(\Box + m^2)\varphi_0 + V'(\varphi_0) = j \qquad (9\text{-}108)$$

的场量 φ_0. 我们假定对于 $j = 0$ 解约化为平庸情况 $\varphi_0 = 0$, 所以至少在形式级数意义下解是唯一的. 在式(9-108)的解里用的 Green 函数包含 Feynman 的 $i\varepsilon$ 规定.

在没有源的情况下仅有平庸解的假定对于许多物理上有兴趣的情况是不成立的. 为了作出合理的解释这种经典作用量的非平庸极值要求逐一分析.

我们在此极值轨迹的附近移动积分变量 $\varphi \to \varphi_0 + \varphi$, 在指数中保持场量的二次型部分及微扰展开高级项. 由于有稳定条件式(9-108), 线性项是没有的，且象通常那样归一化要求 $Z(0) = 1$. 因此, 我们有

$$Z(j) = e^{(i/\hbar)(\varphi_0 \cdot j)}\int \mathscr{D}(\varphi)$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x \left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\varphi^2}{2}[m^2 + V''(\varphi_0)]\right.\right.$$

$$-\sum_{p\geqslant 3}\frac{\varphi^p}{p!}V^{(p)}(\varphi_0)\Big)\Big\}. \tag{9-109}$$

新的二次型部分是

$$\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{\varphi^2}{2}[m^2+V''(\varphi_0)]\right\}$$

$$=-\int d^4x\,\frac{1}{2}\varphi[\Box+m^2+V''(\varphi_0)]\varphi, \tag{9-110}$$

且通过它对 φ_0 的依赖性导致一个非平庸的传播子. 为了得到 $\hbar$ 展开，我们重新标度场量成 $\varphi\to\hbar^{\frac{1}{2}}\varphi$，使得

$$Z(j)=e^{G_c(j)/\hbar}$$

$$=e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right)I(\varphi_0,j)}\int\mathscr{D}(\varphi)$$

$$\times\exp\left(i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{\varphi^2}{2}[m^2+V''(\varphi_0)]\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{p\geqslant 3}\hbar^{p/2-1}\frac{\varphi^p}{p!}V^{(p)}(\varphi_0)\right\}\right). \tag{9-111}$$

Wick 定理应用到式(9-111)，仅是对 Φ 的偶次多项式给出不为零的贡献. 因此，在圈数展开里仅有 $\hbar$ 的整数幂. 从方程(9-111)我们看到，$G_c(j)$ 的主导项 ($\hbar^0$ 级) 是 $I(\varphi_0, j)$. 我们来计算下一项. 对二次型部分的积分给出

$$\int\mathscr{D}(\varphi)\exp\left\{-i\int d^4x\varphi[\Box+m^2+V''(\varphi_0)]\,\varphi\right\}$$

$$=(\mathrm{Det}K_0^{-1}K_V)^{-\frac{1}{2}},$$

$$K_V=\{\Box_x+m^2+V''[\varphi_0(x)]\}\delta^4(x-y),$$

$$K_0=(\Box_x+m^2)\delta^4(x-y). \tag{9-112}$$

象第四章那样，用大写字母标记无穷维算符的行列式和迹. 由归一化引入的 K_0 的逆被选作为 $G_F(x-y)$. 因此

$$K_0^{-1}K_V=\delta^4(x-y)+G_F(x-y)V''[\varphi_0(y)].$$

因为行列式可以写作

$$\mathrm{Det}A = e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}, \tag{9-113}$$

我们发现

$$-iG_c(j) = I(\varphi_0, j) + \frac{i}{2}\hbar\mathrm{Tr}\ln[1 + G_F V''(\varphi_0)] + O(\hbar^2). \tag{9-114}$$

为了得到 $\Gamma(\varphi)$，必须将关系式

$$\varphi(x,j) = \frac{\delta G_c(j)}{i\delta j(x)}$$

倒过来. 按照式(9-114)和(9-108),在精确到 $\hbar$ 级修正下，φ 由 φ_0 给出它的主导项. 另外,因为 I 在 φ_0 处是稳定的,我们有 $I(\varphi,j) - I(\varphi_0,j) = O(\hbar^2)$. 最后，为了得到 Γ，必须从 $-iG_c(j)$ 减去 $\int d^4x\varphi(x)j(x)$，因此给出

$$\Gamma(\varphi) = I(\varphi) + \frac{i}{2}\hbar\mathrm{Tr}\ln[1 + G_F V''(\varphi)] + O(\hbar^2) \tag{9-115}$$

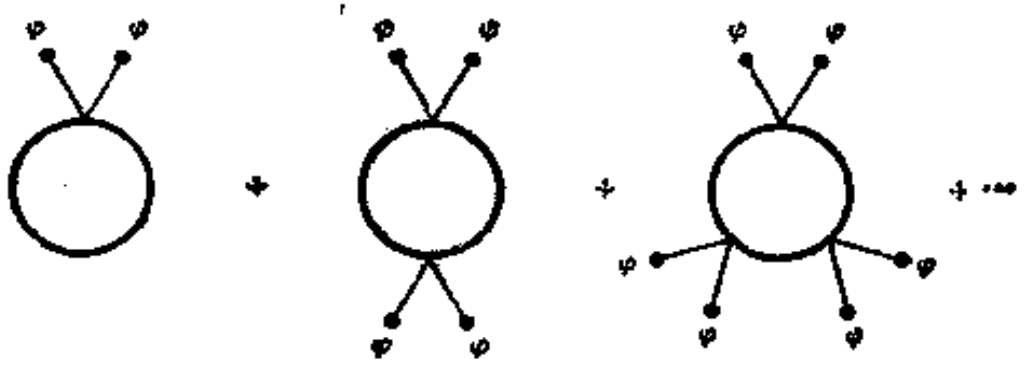


图 9-4　单圈级的有效势

如果把第二项展开为

$$\frac{i\hbar}{2}\mathrm{Tr}\ln[1 + G_F V''(\varphi)]$$

$$= i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \mathrm{Tr}\{[G_F V''(\varphi)]^n\}$$

$$= i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G_F(x_1 - x_2) V''[\varphi(x_2)]$$

$$\cdot G_F(x_2 - x_3) \cdots V''[\varphi(x_n) G_F(x_n - x_1) V''[\varphi(x_1)],$$

则它的微扰解释是清楚的. 这是 n 个传播子 $-iG_F(x-y)$和 n 个顶角 $-iV''(\varphi)$构成的单圈图贡献之和. 对于 $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$，情况描绘在图 9-4 上. 注意，求和式的每一项前面的因子 $\frac{1}{2n}$是相应图的对称因子（n 是转动，2 是反射）；与此类似，在 φ^4 理论情况中，$V''(\varphi) = \lambda\varphi^2/2$ 的因子 1/2 是由每个顶角上的两个外腿之间的对称性来的.

这一展开可以对所有级进行. G_c 的一系列的项是由相互作用项 $-\sum_{p\geq 3} \hbar^{p/2-1}(\varphi^p/p!)V^{(p)}(\varphi_0)$ 产生的连接 Feynman 图所表示的，其传播子是核 $\Box + m^2 + V''(\varphi_0)$ 的逆.

就涉及到的 $\Gamma(\varphi)$ 而言，Legendre，变换的结果是前面的图中只选取单粒子不可约图，且到处用任意宗量 φ 来代替 φ_0. 自然，任何实际计算都必须作紫外减除.

简言之，最陡下降法或稳定位相方法极好地导致了按圈数的半经典展开. 为了得到超出微扰理论要求或者围绕非平庸极值展开或者用某种完全不同的方法去近似路径积分.

回到 $\Gamma(\varphi)$ 上来. 我们知道，它的关于 φ 的展开产生了单粒子不可约 Green 函数. 就粒子物理而言，一般总是这样的. 我们也可以坚持把 $\Gamma(\varphi)$ 看作有效作用量. 考虑了平移不变性后，可以发现如下形式的包含场量 φ 的愈来愈高阶微商的展开：

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \left[-V_{\mathrm{eff}}(\varphi) + \frac{1}{2} Z_{\mathrm{eff}}(\varphi)(\partial\varphi)^2 + \cdots\right]. \tag{9-116}$$

在式(9-116)中，第一项包含了所有零外动量处的固有函

数的求和，第二项包含了在同一点的所有二阶微商的求和，等等．原则上函数 $\varphi(x)$ 仍旧是任意的．然而，如果我们仅想计算 V_{eff} 就可以满足于用常数 φ 来计算，只要能够毫不含糊地分出关于 x 的四维体积发散积分．

作为例子，我们从方程 (9-114) 和(9-115)抽出 V_{eff} 一直到 $\hbar$ 级．一般地有

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}^{(0)} + \hbar V_{\text{eff}}^{(1)} + \hbar^2 V_{\text{eff}}^{(2)}. \tag{9-117}$$

利用式(9-114)，首先有

$$V_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + V(\varphi). \tag{9-118}$$

在式(9-112)中的行列式里 φ 现在是一常数，因而传播子在动量空间里是对角的：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\ln\{[\Box + m^2 + V''(\varphi)](\Box + m^2)^{-1}\}\\ &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left[1 - V''(\varphi)\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right],\end{aligned} \tag{9-119}$$

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{-i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left[1 - V''(\varphi)\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right].$$

当然，这一表达式在紫外减除之前是无意义的．为了具体起见，取势

$$V(\varphi) = \frac{\lambda\varphi^4}{4!},\quad V''(\varphi) = \frac{\lambda\varphi^2}{2}.$$

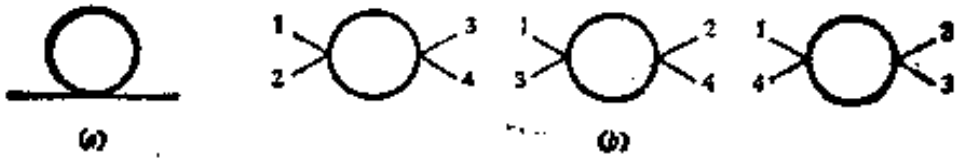
为了遵守正规次序的规定还要附加一 φ^2 项．否则，必须包括相应于在同一顶角两个场量收缩的蝌蚪图．

这正是两点函数 $\Gamma^{(2)}$ (图 9-5a)仅有的发散单圈图，而且它在 $V_{\text{eff}}^{(1)}$ 展开里贡献一项与 φ^2 成正比的二次发散项，

$$\frac{\lambda\varphi^2}{4}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

到这一级上还有四点函数的对数发散 $\Gamma^{(4)}$，它与图9-5b相联：

$$\frac{i}{4}\left(\frac{\lambda\varphi^2}{2}\right)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2-m^2+i\varepsilon)^2},$$



(a) (b)

图 9-5 单圈级的发散图

φ的高幂次导致收敛积分。重整化引入了所需要的抵消项，以保证

$$\Gamma^{(2)}(m^2_{\rm phys})=0,\quad \frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(m^2_{\rm phys})=1, \tag{9-120}$$

并引入了对四点函数的约束条件，给以重整化耦合常数的意义，例如它在质壳对称点 S 上的值：

$$\begin{aligned} &p_i^2=m^2_{\rm phys},\\ &(p_i+p_j)^2=\frac{4}{3}m^2_{\rm phys}\qquad i\neq j,\\ &\Gamma^{(4)}(p_i)\big|_S=-\lambda_{\rm phys}. \end{aligned} \tag{9-121}$$

在处理某些散射问题的实际应用时，这些条件是有用的。然而，计算在零动量展开的有效作用量中的各种量是很麻烦的。

对有限重整化，可以用

$$\Gamma^{(2)}(0)=-m^2,\quad \frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(0)=1,\quad \Gamma^{(4)}(0)=-\lambda, \tag{9-122}$$

代替式(9-120)和(9-121)。为了强调它们的区别，我们用“物理的”来标记先前归一化中的质量和耦合常数。

方程(9-122)的优点在于，可以将其解释成在有效重整化势和函数 $Z_{\rm eff}(\varphi)$ 上所加的条件为

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}V_{\rm eff}(0)=m^2,$$

$$\frac{d^4}{d\varphi^4} V_{\text{eff}}(0) = \lambda, \tag{9-123}$$

$$Z_{\text{eff}}(0) = 1.$$

这些要求显然象 (9-118)所表明的那样，到 $\hbar^0$ 级上是满足的. 在这一级还有

$$Z_{\text{eff}}^{(0)} = 1. \tag{9-124}$$

φ^2 和 φ^4 的抵消项消去了 V_{eff} 和 Z_{eff} 中相应的高级项. 因此，对有效势的正确的单圈贡献是

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{-i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\ln\left(1 - \frac{\lambda\varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right) + \frac{\lambda\varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{(\lambda\varphi^2/2)^2}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}\right]. \tag{9-125}$$

在这一步作 Wick 转动 $p_0 \to ip_0$ 是有用的. 以 k 标记相应的欧氏 4 动量，于是

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\ln\left(1 + \frac{\lambda\varphi^2/2}{k^2 + m^2}\right) - \frac{\lambda\varphi^2/2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\varphi^2/2}{k^2 + m^2}\right)^2\right]. \tag{9-126}$$

完成积分并把此表达式加到式(9-118)给出的零级项，就给出

$$V_{\text{eff}} = \frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4!} + \frac{1}{(8\pi)^2}\left[\left(\frac{\lambda\varphi^2}{2} + m^2\right)^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{\lambda\varphi^2}{2m^2}\right) - \frac{\lambda\varphi^2}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\lambda\varphi^2}{2} + m^2\right)\right] + \cdots. \tag{9-127}$$

我们注意到，$V(\varphi)$ 的大 φ 行为被量子修正所修改. 为了更明显地表明这一点，再引入另一组能使 $m = 0$ 的归一化约定是有用的. 定义一个新的耦合常数 λ_M，

$$\lambda_M = \frac{d^4}{d\varphi^4} V_{\text{eff}}(\varphi)|_{\varphi=M}. \tag{9-128}$$

从式(9-127)可以得到

$$\lambda_M = \lambda + \frac{\lambda^2}{(8\pi)^2}\left[6\ln\frac{\lambda M^2}{2m^2} + 16 + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right)\right]$$

在式(9-127)中用这一定义，并考虑到无质量极限理论，就有

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \lambda_M \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\lambda_M^2\varphi^4}{(16\pi)^2}\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right) + \cdots. \tag{9-129}$$

这一结果是由 Coleman 和 Weinberg 给出的。在方程(9-127)中直接令 $m = 0$ 是不可能的。这是由方程(9-126)中的紫外减除结构造成的。其中第二项使有条件 $(d^4V_{\text{eff}}/d\varphi^4)(0) = 0$ 的项，在 $m = 0$ 的极限下要引入红外发散。我们必须选择一任意的、但不为零的减除点 $\varphi = M$，来定义无质量理论。换而言之，当 m 趋于零时，由式(9-127)展开式产生的零动量处的 Γ 函数是奇异的。由于 V 的量纲是 4，除相差 $\frac{\varphi}{M}$ 的对数外使主导项必须正比于 φ^4，因而 $\varphi \to \infty$ 时的行为是清楚的。注意，M 点的任意性意味着 M 和 λ_M 的相互有关的改变必须保持 V_{eff} 不变。这里我们遇到了在后面将讨论的重整化群现象。

在 φ^4 模型里，对于圈展开的第一级不存在波函数重整化。然而，到这一级上函数 $Z_{\text{eff}}(\varphi)$ 即使不包含对数项也还是非平庸的。利用有效作用量式(9-115)，可以证明它等于

$$Z_{\text{eff}}(\varphi) = 1 + \frac{\lambda^2}{6(4\pi)^2}\frac{\varphi^2}{2m^2 + \lambda\varphi^2} + \cdots. \tag{9-130}$$

象在式(9-129)中那样，我们可以得到无质量极限。计算可以进行到更高级。下面给出一直到二级的结果以及相应的图。我们利用缩写记号

$$x = \frac{\lambda\varphi^2}{2m^2},\quad \alpha = \frac{\hbar\lambda}{(4\pi)^2}, V_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{m^4}{\lambda}v(x,\alpha),$$

$$Z_{\text{eff}}(\varphi) = s(x,\alpha), \tag{9-131}$$

可以得到

图	v	z
——	x	1
	$\frac{x^2}{6}$	0
	$\frac{\alpha}{4}\left[(1+x)^2\ln(1+x)-\left(x+\frac{3x^2}{2}\right)\right]$	$\frac{\alpha}{6}\frac{x}{1+x}$
	$\frac{\alpha^2}{8}[(1+x)\ln(1+x)-x]^2$	$\frac{\alpha^2}{12}\frac{x}{1+x}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]$
	$\frac{\alpha^2}{2}x\left[\frac{1+x}{2}\ln^2(1+x)-2(1+x)\right.$ $\left.x\ln(1+x)+2x\right]$	$\frac{\alpha^2}{6}\left\{-\frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right.$ $+\frac{2x}{1+x}\left[\ln(1+x)+\frac{4A}{3}-1\right]$ $-\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[\ln(1+x)+\frac{5}{3}(A-1)\right]$ $\left.+\frac{4}{3}\frac{x^2}{(1+x)^2}+B\right\}$

(9-132)

其中 B 是依赖于归一化约定的常数，A 由下式给出：

$$A=-\int_0^1 du\,\frac{\ln u}{1-u+u^2}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_0^\infty\left[\frac{1}{(1+3p)^2}-\frac{1}{(2+3p)^2}\right]$$

$$=1.17195. \tag{9-133}$$

这里讨论的有效作用量类似于电磁学(见 4-3-4 节)的 Euler-Heisenberg 拉氏函数．我们留给读者去详细说明这一关系的细节．

S 矩阵具有与 Green 函数相类似的 $\hbar$ 的幂展开．我们指出对它的正规核来说前面两项是由下式给出的

$$\varphi(\bar{x}_f,x_i)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}I\left(\varphi_{\text{class}}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln\left[1+G_F V''(\varphi_{\text{class}})\right]+O(\hbar)\right\}, \tag{9-134}$$

其中 φ_{class} 是方程

$$(\Box+m^2)\varphi_{\text{class}}+V'(\varphi_{\text{class}})=0 \tag{9-135}$$

具有 Feynman 边界条件的解；φ_{class} 也可由积分方程

$$\varphi_{\text{class}}(x) = \varphi_{as}(x) - \int d^4y G_F(x-y) V'[\varphi_{\text{class}}(y)] \quad (9\text{-}136)$$

给出，其中 φ_{as} 由方程(9-85)给出.

对有效作用量可以给以一个更为物理的定义. 特别是，$V_{eff}(\varphi)$ 可以解释为在场量的平均值一致地等于 φ 的约束下的基态能量密度. 这能揭示出系统的可能的不稳定性（第十一章).

9-3 约束系统

一些动力学系统可以由确定时间下受到约束的可观察量来描述. 作为一个熟悉的例子，可以引用量子电动力学. 这种系统的量子化不是直截了当的，而且在非阿贝尔规范理论里将遇到更严重的困难. 路径积分提供了一理想的框架去处理这样的系统，因为它们与易处理的经典情况紧密相关. 量子化方法要求消去与约束条件一样多的正则共轭变量对. 这些约束条件必须满足下面将给出的适当相容条件.

在开始时我们可略过这一技巧的发展，当转到对规范场的具体应用时(第十二章)再重新考虑它，那里用了结果式(9-159).

9-3-1 一般讨论

令具有 $n(n>1)$ 自由度的经典系统首先受到唯一的一个约束

$$f(p,q) = 0, \quad (9\text{-}137)$$

称 C 为由式(9-137)所标征的相空间中的$(2n-1)$维流形. 我们定域地应用这种考虑，即在属于 C 点的邻近来考虑. 另外，我们将不区分在 C 上两个都为零的函数 f 和 F，即使得

$$F(p,q) = a(p,q)f(p,q)$$

的函数. 令 $\mathscr{A}$ 是 C 上为零的(可微分)函数的环. 这里用记号 $F \sim 0$ 来表示 $F \in \mathscr{A}$.

我们可以用时间相关的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 把约束条件放进作用量中. 运动方程可从

$$I = \int dt[p\dot{q} - h(p,q) - \lambda(t)f(p,q)] \qquad (9\text{-}138)$$

的稳定条件得到. 这些方程包括通过变化 λ 得到的方程 (9-137),以及

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (9\text{-}139)$$

当然,在 C 上可变量 (p_i,q_i) 是太多了. 自然的相容性条件是演化方程(9-139)允许流形 C 不变. 用 Poisson 括号表示,可以记作

$$\{h,f\} \sim 0. \qquad (9\text{-}140)$$

更一般地说,由此得到任一 $F \sim 0$ 将和属于 $\mathscr{A}$ 的 h 有 Poisson 括号,

$$F \sim 0 \Longrightarrow \{h,F\} \sim 0. \qquad (9\text{-}141a)$$

在 Poisson 括号下 $\mathscr{A}$ 是稳定的,因为它具有唯一的生成元

$$F \sim 0 \Longrightarrow \{f,F\} \sim 0, \qquad (9\text{-}141b)$$

而方程 (9-141a,b) 意味着这个函数环 (但不必要单独地) 在演化式(9-139)下是稳定的. 令 F 是在 $\mathscr{A}$ 里的任一固定元素. 在 C 上定义等价关系如下: 考虑在相空间里由 F 产生的流,在无穷小形式里它由下述方程描述

$$\frac{dq_i}{du}(u) = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{du}(u) = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad F \sim 0. \qquad (9\text{-}142)$$

当且仅当 C 上两点属于流式(9-142)的同一轨迹时,它们才是

等价的．这一等价关系 E 是(1)与在 $\mathscr{A}$ 里的 F 选择无关的和(2)在时间演化下不变的．

实际上，注意到如果流的线通过属于 C 的点，那么它完全包含在 C 里．进一步，如果 F' 是 $\mathscr{A}$ 中的另一个元素，则因为 $F = aF'$，两个流的切矢量在 C 上是正比的，这就证明了第一点．从式(9-141)得知，在 C 的流线上 h 是常数．最后，令 G 在 C 里沿着流线式(9-142)是一任意的函数常数，也就是说使得

$$F \sim 0 \Longrightarrow \{G,F\} \sim 0, \qquad (9\text{-}143)$$

在一无穷小时间间隔 δt 内它随时间的演化由 $G \to G + \dot{G}\delta t$ 给出，其中 $\dot{G} = \{h + \lambda f, G\} \sim \{h, G\}$ 而 $\{\{h,G\},F\} = \{h,\{G,F\}\} - \{G,\{h,F\}\} \sim 0$，这可以由 Jacobi 等式和条件式 (9-141a)和(9-143)得到．因此 $G + \delta G$ 又是沿流线的常数，这就证明了第二点．

这样，流形 C 以时间无关的方式按照 E 分裂为一组等价类．商空间 C/E 又可考虑为 $2n-2$ 维相空间，只要在函数 f 上的某一正规条件被满足．所有方程 (9-142)类型的流在 C 上是等价的，而物理上可观察的量(如能量)在这些流下是常数．因此，仍以一正则的方式在每一类里选择一个表示是充分的．在最后，我们用另一个由辅助条件

$$g(p,q) = 0 \qquad (9\text{-}144)$$

描述的流与 C 相截，使它们每个流线与这横截面只有唯一的相交．如果 g 沿每一流线单调地变化，则这是被保证的，如果

$$\{f,g\} \neq 0 \qquad (9\text{-}145)$$

单调性将被遵循．用这样一种选择，可以通过作正则变换

$$(P_i,q_i) \to (P_i,Q_i) \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

$$P_n = g(p,q), \qquad (9\text{-}146)$$

明显地将 C/E 参量化．在新变量里 f 和 g 之间的括号将是

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial Q_n},$$

而条件式(9-145)使我们能解出方程

$$f(Q, P) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q_n} \neq 0, \tag{9-147}$$

Q_n 是 $Q_1, \cdots, Q_{n-1}, P_1, \cdots, P_n$ 的函数，

$$Q_n \equiv Q_n(Q_1, \cdots Q_{n-1}, P_1, \cdots, P_n). \tag{9-147a}$$

商空间 C/E 的定义是由条件式(9-144)来完成的，条件式(9-144)可写成下面的形式：

$$P_n = 0. \tag{9-148}$$

最后，量

$$H(Q_1, \cdots, Q_{n-1}, P_1, \cdots, P_{n-1}) = h(q_i, p_i)\Big|_{\substack{Q_n \equiv Q_n(Q_1 \cdots P_{n-1}, 0) \\ P_n = 0}} \tag{9-149}$$

是其余空间中的有效哈密顿量，这是容易验证的.

要求满足方程(9-145)的函数 g 的选择的任意性，在全相空间中作总体定义时会产生某些困难.

很容易把这种结构推广到有 $m < n$ 个独立约束条件的情况，

$$f_1(p, q) = 0, \cdots, f_m(p, q) = 0. \tag{9-150}$$

环 $\mathscr{A}$ 包含在由上述方程定义的流形 C 上为零的平滑函数，亦即具有形式

$$F(p, q) = \sum_1^m \alpha_k(p, q) f_k(p, q), \tag{9-151}$$

且要求如果 F 属于 $\mathscr{A}$，则 $\{h, F\}$ 也属于 $\mathscr{A}$：

$$F \sim 0 \Rightarrow \{h, F\} \sim 0. \tag{9-152}$$

为了在 C 上能定义消除 m 个其它坐标的等价关系，我们还要求 $\mathscr{A}$ 在 Poisson 括号下是不变的，

$$F_1, F_2 \sim 0 \Rightarrow \{F_1, F_2\} \sim 0. \qquad (9\text{-}153)$$

当 $\mathscr{A}$ 只有一个生成元时，此条件自动地被满足.

象前面所做的那样，可以通过考虑经过 C 上任何一点由任一元素 $F \sim 0$ 产生的轨迹集合，在 C 上定义一纤维丛. 这些轨迹的切线在 C 的 $(2n-m)$ 维切空间中构成 m 维线性流形. 时间无关的等价关系 E，使属于由 $\mathscr{A}$ 产生的同一 m 维流形的点恒等，且 C/E 具有自然相空间结构. 后者可以通过引入在一唯一的点上与 C 的 m 维纤维相交的 m 个辅助条件

$$g_1(p,q) = 0, \cdots, \quad g_m(p,q) = 0 \qquad (9\text{-}154)$$

而看清楚. 要这一性质成立，充分条件是

$$\det\{g_k, f_l\} \neq 0 \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant m. \qquad (9\text{-}155)$$

正则变换 $(q,p) \to (Q,P)$ 是这样定义的:

$$P_{n-m+1} = g_1, \cdots, P_n = g_m. \qquad (9\text{-}156)$$

条件式 (9-150) 和 (9-155) 使我们能在 C 上按照 $Q_1, \cdots, Q_{n-m}, P_1, \cdots, P_n$ 解出 $Q_{n-m+1}, \cdots, Q_n$ 而 C/E 最终地表征为

$$P_{n-m+1} = 0, \cdots, P_n = 0. \qquad (9\text{-}157)$$

在其余的空间上，动力学是由哈密顿量产生的，此哈密顿量 H 是从原始 $h(p,q)$ 通过考虑上述有限制的步骤后作正则变换得来的.

证明 m 个约束条件的结构，是从在仅有一个约束条件情况下给定的结构通过递推得到的.

为了用独立的正则变量 P 和 Q，哈密顿量 H 以及相应的可观察量将这种体系量子化，我们简单地把跃迁振幅写为

$$\langle f|i\rangle = \int \mathscr{D}(P,Q) \exp\left\{i \int dt [P\dot{Q} - H(P,Q)]\right\}. \qquad (9\text{-}158)$$

在实际情况里，作导致 C/E 的正则参量化的消除，一般地讲是不切实际的. 因此，我们寻找用原来的约束变量 (p,q) 来表示的式(9-158)的表达式. 为此，在路径积分里把每一时刻

的测度改写为

$$\prod_{1}^{n-m} dP_k dQ_k = \prod_{1}^{n} dP_k dQ_k \cdot \prod_{n-m+1}^{n} \delta(P_s)\delta[Q_s - Q_s(Q_1,\cdots,Q_{n-m},P_1,\cdots,P_n)].$$

因为 $\prod_{1}^{n} dP_k dQ_k$ 是正则不变的，所以它等于 $\prod_{1}^{n} dp_k dq_k$。此外有，$\prod_{n-m+1}^{n} \delta(P_s) = \prod_{1}^{m} \delta(g_k)$，于是关于 δ 函数的熟悉的规则给出

$$\prod_{n-m+1}^{n} \delta[Q_s - Q_s(Q_1,\cdots,Q_{n-m},P_1,\cdots,P_n)] = \prod_{1}^{m} \delta[f_k(p,q)] \frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(Q_{n-m+1},\cdots,Q_n)}.$$

从式(9-156)可以得到雅可比正是 $\det\{g_k,f_l\}$，为简便起见把它写为 $\{g,f\}$。

利用积分表达式

$$\prod_{1}^{m} \delta(f_k) = \int \prod_{1}^{m} \frac{d\lambda_k}{2\pi} \exp\left(-i\sum_{1}^{m} \lambda_k f_k\right),$$

并重新把各部分聚集起来可以得到

$$\langle f|i\rangle = \int \mathscr{D}(p,q,\lambda) \prod_{t} [\delta(g)\det\{g,f\}] \cdot \exp\left[i\int dt(p\dot{q} - h - \lambda f)\right]. \qquad (9\text{-}159)$$

约束条件明显地被表示出来了，并且找到了式(9-138)所给定的作用量。变量 λ 没有其共轭量出现。

为了使这一构成有意义，必须强制它不受辅助条件 $g_A = 0$ 的不同选择的影响．下面以无穷小形式来证明这一点．考虑下述小改变的影响：

$$g_k + \delta g_k = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{9-160}$$

由于有式(9-155)，线性体系

$$\delta g_k = \sum_{r=1}^{m} \delta v_r \{f_r, g_k\} \tag{9-161}$$

允许有唯一的解．这意味着

$$\delta g_k \sim \{\delta F, g_k\} \quad \delta F = \sum_r \delta v_r f_r. \tag{9-162}$$

相应的 δF 产生正则变换

$$p \to p + \delta p \quad q \to q + \delta q \quad \delta p = \{\delta F, p\} \quad \delta q = \{\delta F, q\}, \tag{9-163}$$

保留测度 $\prod dpdq$ 不变．记起方程 (9-153)，可以知道 δF 也使约束条件产生一个非奇异变换

$$f \to (1 + \delta A) f, \tag{9-164}$$

其中矩阵 δA 一般依赖于点 (p,q)．最后，作用量 $\int dt(p\dot{q} - h)$ 至多被由于取了新的边界条件而需要的边界项所修改．

如果对 λ 积分以后把式(9-159)重新写为

$$\langle f|i\rangle = \int \mathscr{D}(p,q) \prod_t [\delta(f)\delta(g)\det\{g,f\}] \exp\left[i\int dt(p\dot{q} - h)\right],$$

则可以看到，由于 $\delta(f)$ 的存在，所有量的定义都可以相差一 $\mathscr{M}$ 的函数．然后，我们应用正则改变式(9-163)；利用

$$\prod_k \delta(f_k) \to \det(1 + \delta A)^{-1} \prod_k \delta(f_k),$$

可以看到

$$\prod_k [\delta(f_k)\delta(g_k)]\det\{g,f\}$$

$$\to \det(1 + \delta A)^{-1} \prod_k [\delta(f_k)\delta(g_k + \delta g_k)]$$

$$\times \det\{g + \delta g, f + \delta f\},$$

因为差 $\delta g - \{\delta F, g\}$ 以及它们与 f 和 $f + \delta f$ 的 Poisson 括号在 C 上

为零. 最后，

$$\det\{g+\delta g, f+\delta f\} = \det(1+\delta A)\det\{g+\delta g, f\}.$$

总之，

$$\prod_k [\delta(f_k)\delta(g_k)]\det\{g,f\} \to$$

$$\prod_k [\delta(f_k)\delta(g_k+\delta g_k)]\det\{g+\delta g, f\}. \qquad (9\text{-}165)$$

因此，我们已经证明了除了差一位相上的边界项外，路径积分式 (9-159)确实与辅助条件的无穷小改变无关. 读者能否解释这些边界项的作用等于 $\exp\{i[p\partial\delta F/\partial p]\}$? 人们能否把这种论证推广到与时间相关的辅助条件的情况呢?

9-3-2 以电磁场为例

为了加深对这一量子化方法的认识，现在回到与 c 数外守恒流耦合的电磁场情况，它的作用量为

$$I = \int d^4x \left(\frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2} - \rho A^0 + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\right).$$

代替仅用势作为动力学变量，我们选择所谓第一级描述，它的场和势都作为原始实体. 把 I 改写为

$$I = \int d^4x \left[-\mathbf{E}\cdot(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}) - \mathbf{B}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{2} - \rho A^0 + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\right]. \qquad (9.166)$$

如果用 A^0 和 $\mathbf{A}$ 代替 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$，就又回到了先前的表达式. 将作用量作关于场的变分，我们重新获得场和势之间的关系

$$\mathbf{E} = -(\nabla A^0 + \dot{\mathbf{A}}) \quad \mathbf{B} = \mathrm{curl}\mathbf{A}, \qquad (9\text{-}167a)$$

它就是第一组齐次 Maxwell 方程

$$\mathrm{curl}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad (9\text{-}167b)$$

对 A 变分就给出第二对方程

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho \qquad \operatorname{curl}\mathbf{B}-\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{j}. \tag{9-168}$$

注意，

$$\frac{\delta}{\delta\mathbf{A}(x)}\int d^3y\ \mathbf{B}(\mathbf{y})\cdot\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{y})=\operatorname{curl}\mathbf{B}(\mathbf{x}).$$

在这些方程中 $\mathbf{B}=\operatorname{curl}\mathbf{A}$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho$ 作为约束条件而出现，在各处简单地用 curl $\mathbf{A}$ 代替 $\mathbf{B}$ 就可解第一个方程，这相当于在分部积分以后把作用量改写为

$$I=\int d^4x\left\{-\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{A}}-\left[\frac{\mathbf{E}^2+(\operatorname{curl}\mathbf{A})^2}{2}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\right]\right.$$

$$\left.+A^0(\operatorname{div}\mathbf{E}-\rho)\right\}. \tag{9-169}$$

如果将它与式 (9-138) 相比较，我们看到 A^0 象 λ 一样起到一个没有任何共轭变量的 Lagrange 乘子的作用．这样就导致了将正则变量 (p_i,q_i) 分别等同于 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$．Poisson 括号是通过

$$\{A_i(\mathbf{x}),E_j(\mathbf{y})\}=\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{9-170}$$

来定义的．为了复制 ρ 依赖于时间的情况，必需推广相容方程(9-152)．现在这些方程可写为

$$F\sim 0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial t}+\{h,F\}\sim 0, \tag{9-171}$$

其中对时间微商作用在明显与时间有关的量上．对于现在的情况 $F=\operatorname{div}\mathbf{E}-\rho$，因而

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{E}-\rho)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

条件式(9-171)约化成

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left\{\int d^3y\left[\frac{\mathbf{E}^2+(\operatorname{curl}\mathbf{A})^2}{2}+\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\right],\right.$$

$$\left.\operatorname{div}\mathbf{E}-\rho\right\}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}-\operatorname{div}\mathbf{j}=0, \tag{9-172}$$

此等式成立是由于流守恒. 这样，撇开这一轻微的推广，目前的情况可以放进前一小节讨论的情况中.

我们还要选择辅助条件 $g(\mathbf{E},\mathbf{A})=0$. 当然，对大部分情况来说这是任意的. 如果象约束条件 $\mathrm{div}\mathbf{E}-\rho=0$ 那样 g 是动力学变量的线性函数，就可将它极大的简化. 这时 $\det\{g,f\}$ 将与变量无关，因此可以被吸收在路径积分的归一化里. 一个可能的条件是

$$\partial_\mu A^\mu \equiv \dot{A}^0+\mathrm{div}\mathbf{A}=c(x,t), \tag{9-173}$$

其中含有一任意函数 c.

我们回到协变记号，并把跃迁振幅写为

$$\int\mathscr{D}(F,A)\prod_x\delta(\partial\cdot A-c)\exp\left\{i\int d^4x\cdot\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)-j\cdot A\right]\right\}. \tag{9-174}$$

在 $\mathbf{B}$ 上的高斯积分自动地实现了 $\mathbf{B}\to\mathrm{curl}\mathbf{A}$ 的替换. 与此类似，在 $\mathbf{E}$ 上积分就将电场替换为它的值 $-(\nabla A^0+\dot{\mathbf{A}})$. 在这样做后，就得到振幅为

$$\int\mathscr{D}(A)\prod_x\delta(\partial\cdot A-c)\exp\left\{-i\int d^4x\cdot\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)+j\cdot A\right]\right\}. \tag{9-175}$$

此式并不完全是先前几章用的表达式. 然而，因为式(9-175)是与任意函数 $c(\mathbf{x},t)$ 无关的，所以我们可以通过在具有一权重 $\exp\left[-\left(\frac{i\lambda}{2}\right)\int d^4xc^2\right]$ 的函数 c 上积分来使它们等同起来. 如果用 $F_{\mu\nu}$ 表示量 $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，路径积分的最终形式是熟悉的

$$\int \mathscr{D}(A)\exp\left\{-i\int d^4x\left[\frac{F^2}{4}+\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2+j\cdot A\right]\right\}.$$

(9-176)

这一表示解释了规范不变性所暗含的任意性. 将它与算符描述相比较也是值得的.

9-4 高阶微扰论

9-4-1 引言

泛函积分为我们研究场论的许多方面提供了新的工具. 作为一种解释, 我们通过讨论微扰论的高阶行为来结束这一章. 当然, 做这一研究的一个目的, 是想更好地理解在量子电动力学以及其它允许的强耦合模型中一系列近似的惊人的精确性. 另一个动机是希望克服微扰级数的很强的局限性, 从而可以用来处理强相互作用现象. 尽管目前的知识还远不能满足, 但已经得到一些有趣的进展, 表明这一努力是正确的. 这也促使我们在处理路径积分中引进某些有用的技巧.

微扰级数的本质, 是与在零点邻域的耦合常数的 Green 函数解析性质相关的. 这种研究是可能的, 但极困难.

幸运的是, 有一个不太严格的但是可处理的方法, 它可导致类似的结论, 即微扰级数在所有感兴趣的情况中是很强地发散的. 不管这一事实时, 它可能很有用, 这将要在下面做出解释.

这样, 问题可以分为两个不同部分. 第一部分是寻找对由一组确切定义的 Feynman 规则和重整化方案所给出的 Green 函数展开式中大阶的估计. 这一部分的某些方面已经完成. 值得注意的是, 这是与级数是否定义了一个唯一的数学量的问题无关的. 对于一定的实际目的来讲, 第一步就足

够了. 例如,量子电动力学象它现在所表现的那样,可能不是完全自洽的,但它关于 α 的幂级数在一个更深理论的范围内仍然是渐近的.

问题的第二个方面,实际上是试图从这些展开式按照某一定的方案重新来构造一个唯一的理论. 显然这是一个令人生畏的任务,它需要某些独立的信息,这些信息必须由一种不同的构造所提供. 尽管如此,我们仍然可以在级数结构里获得某些提示,它对级数求和提供了合理方法.

发散性的典型特性可以容易地通过一个简单的例子来理解,为此用普通积分代替路径积分,

$$Z(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\varphi\, e^{-(\varphi^2/2+g\varphi^4}. \qquad (9\text{-}177)$$

当然,这一情况是足够平庸的,使我们可以得到封闭形式的 $Z(g)$. 点 $g=0$ 是本性奇异点. 当 Reg 变成负的时(以及 $|\mathrm{Arg}\, g|<\pi$),我们仍可以在式(9-177)里转动积分迴路. 当 g 达到负实轴时,这就不再可能了,且对大的 φ, 积分就破坏了. 我们可以将 φ 看作在一点具有 $\varphi^2/2+g\varphi^4$ 设想为作用量的场量值. 负的 g 值相应于不稳定情况,其"势"没有下限. 这可以从下面的微扰展开式反映出来:

$$Z(g)=\sum_{0}^{\infty}g^kZ_k,$$

$$Z_k=\frac{(-)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\varphi\frac{\varphi^{4k}}{k!}\,e^{-\varphi^2/2}$$

$$=(-)^k4^k\frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,k!}. \qquad (9\text{-}178)$$

利用 Stirling 公式,对于大 k 有

$$k!\sim\sqrt{2\pi k}\,e^{k\ln k-k}.$$

可以发现，Z_k 的行为是

$$Z_k \sim \frac{(-16)^k}{\sqrt{\pi}} e^{(k-\frac{1}{2})\ln k - k}. \qquad (9\ 179)$$

然而，g 的幂级数在沿负实轴割开的复 g 平面里是渐近的，因为

$$\left| Z(g) - \sum_0^n Z_k g^k \right|$$

$$< \frac{4^{n+1}\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(n+1)!} \frac{|g|^{n+1}}{\left[\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\ g\right)\right]^{2n+\frac{3}{2}}}. \qquad (9\text{-}180)$$

它意味着对于固定 n 和足够小的 g，右边可以变得任意小。

Z_k 的渐近行为是通过把 Stirling 公式用到精确表达式上得到的。在较实际的情况里，后者将是不适用的。然而，这提示我们，在大 k 时，可对下式应用最陡下降法：

$$Z_k = \frac{(-)^k}{k!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty d\varphi e^{-\varphi^2/2+4k\ln\varphi}. \qquad (9\text{-}181)$$

鞍点的位置是

$$\varphi_c^2 = 4k. \qquad (9\text{-}182)$$

对 φ_c 的二次偏差积分得到

$$Z_k \sim \frac{(-1)^k}{k!}\sqrt{2}\, e^{2k\ln 4k - 2k}$$

$$= \frac{(-16)^k}{\sqrt{\pi}} e^{(k-\frac{1}{2})\ln k - k}, \qquad (9\text{-}183)$$

与前面的结果一样。

对于这样一个发散级数，除了利用它在渐近意义下计算小 g 的函数外还能做什么呢？在象这里讨论的某些幸运的情况里，幂级数式(9-178)实际上包含了足够的可以毫不含糊地

重新构成函数的信息. 自然，我们可以争议说，我们可以沿正实轴加任意一个象$\exp(-1/\sqrt{g})$那样的在原点微商为零的函数. 然而，在一类很好定义的函数中排斥了这些问题[$Z(g)$属于这样情况]，Borel 变换使我们可以从 $Z(g)$ 的发散微扰级数中重新找到 $Z(g)$.

引入

$$B(t)=\sum_{0}^{\infty}\frac{Z_k t^k}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}, \tag{9-184}$$

其中 $\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)$ 的选择是由方程 (9-179)的增长行为所证实的，且可以在类似的情况里作轻微的修正. 式(9-184)右边的级数在复 t 平面上一个有限半径的圆内收敛. 如果$B(t)$可以沿整个正实轴延拓，且在无穷远处不增加得太快，那么 $Z(g)$ 将由下式给出：

$$Z(g)=\int_0^{\infty} dt\, t^{1/2} B(gt) e^{-t}. \tag{9-185}$$

微扰级数的知识不足以证明 Borel 可求和性. 然而，足以证明当 $B(t)$ 在正实轴上发现有一个奇异性时它不成立. 例如，如果 Z_k 渐近地有相等位相，就出现上述情况.

对于我们的简单例子，可以发现

$$B(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-u},$$

$$u=\frac{\sqrt{1+16t}-1}{\sqrt{1+16t}+1}, \tag{9-186}$$

而 $B(t)$ 在从 $-\frac{1}{16}$ 到 $-\infty$ 割开的平面内是解析的.

为了得到 $Z(g)$ 的收敛展开式，将割开的 t 平面映射到

一个圆上，且原点保持不变(这里是通过选择变量 u 给出的)，然后从对 t 展开的知识导出 $\tilde{B}(u)$ 的收敛 Taylor 级数

$$B(t) = \tilde{B}(u) = \sum_0^\infty b_k[u(t)]^k, \qquad (9\text{-}187)$$

于是

$$Z(g) = \sum_0^\infty b_k \int_0^\infty dt t^{1/2}[u(gt)]^k e^{-t}. \qquad (9\text{-}188)$$

因为这里 b_k 象 $k^{-3/2}$ 那样递减，不难看到这一新级数将象 $e^{-3\left(\frac{k}{2}g^{1/2}\right)^{2/3}}$ 那样收敛.

这个例子所显示的行为，与场论中遇到的某些发散性有紧密的关系，因为 $Z(g)$ 对 g 的幂级数展开的系数是等于 φ^4 模型中真空图形的数目. 这可以很容易地从下述事实得到：Wick 定理应用于单项式对高斯权重的积分.

这里的评论也适用于其它场论. 例如在量子电动力学里考虑积分

$$\tilde{Z}(j,\bar{\eta},\eta) = \frac{1}{\pi}\int dAd\bar{\phi}d\phi e^{-A^2/2-\bar{\phi}(1-eA)\phi+\bar{\phi}\eta+\bar{\eta}\phi+jA}$$

$$= \int \frac{dA}{1-eA} e^{-A^2/2+\bar{\eta}\eta/(1-eA)+jA}, \qquad (9\text{-}189)$$

其中 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 是复共轭的 c 数变量. $\ln\tilde{Z}$ 对 e 的幂级数展开，除了产生由 Furry 定理所暗含的相消以外，还产生一些连接函数图形数. 这些是通过将荷电圈的产生函数关于 e 作对称化，$\ln(1-eA)\to\frac{1}{2}\ln(1-e^2A^2)$ 而完成的，这就是说用 Z 代替 $\tilde{Z}$，

$$Z(j,\bar{\eta},\eta) = \int \frac{dA}{\sqrt{1-e^2A^2}} e^{-A^2/2+\bar{\eta}\eta/(1-eA)+jA}, \qquad (9\text{-}190)$$

这个积分对负的 e^2 是有意义的. 对于与真空极化 ϖ 和自能 Σ 相关的光子和电子传播子 G 和 S，分别得到

$$G = (1-\varpi)^{-1} = \langle A^2\rangle,$$

$$S = (1-\Sigma)^{-1} = \left\langle \frac{1}{1-e^2A^2}\right\rangle, \qquad (9\text{-}191)$$

其中平均是在测度 $(dA/\sqrt{1-e^2A^2})e^{-A^2/4}$ 上取的。令人惊奇的是，这两个表示式相等：

$$G = S = -2z\left[1 + \frac{d}{dz}\ln K_0(z)\right] \quad z = -\frac{1}{4e^2}, \tag{9-192}$$

其中 $K_0(z)$ 是修正的 Bessel 函数，

$$K_0(z) = \int_0^\infty d\theta e^{-z\cosh\theta}.$$

式(9-192)对于大 z 的展开给出

$$\begin{aligned} G = S &= 1 + e^2 + 4e^4 + 25e^6 + 208e^8 + 2146e^{10} \\ &\quad + 26368e^{12} + \cdots, \\ \bar{\omega} = \Sigma &= e^2 + 3e^4 + 18e^6 + 153e^8 + 1638e^{10} \\ &\quad + 20898e^{12} + \cdots. \end{aligned} \tag{9-193}$$

它是可以与只有一个荷电圈的真空极化图形数相比的，

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \Sigma(2n-1)!!e^{2n} = e^2 + 3e^4 + 15e^6 \\ &\quad + 105e^8 + 945e^{10} + 10395e^{12} + \cdots. \end{aligned} \tag{9-194}$$

与此类似，顶角图形 Γ 的产生函数等于

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4z(1-S)S^{-2}G^{-1} \\ &= 1 + e^2 + 7e^4 + 72e^6 + 891e^8 + 12672e^{10} + \cdots. \end{aligned} \tag{9-195}$$

极有勇气的人正在着手计算直到 8 阶的 891 个电子反常图，但是任何人想计算直到 10 阶的 12672 个图形都是梦想。

9-4-2 非谐振子

这一节应用先前的思想来研究量子力学体系。虽然这一方法对任一多项式势都适用，但这里为了确定起见考虑非谐振子的基态能量，其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \varphi^2) + g\varphi^4. \tag{9-196}$$

用 φ 表示位形变量，p 是它的共轭动量，以此来强调在形式上与高维场论是类似的。按 g 的幂级数展开的问题，可以在 Schrödinger 方程的框架内考虑。我们预期对无穷小的负 g 值

有不稳定性，这种情况可以用 WKB(Wentzel, Kramers, Brillouin)近似来研究. 因为这个方法在高维情况下是不适用的，所以在先前例子之后用一个特定的另一种方法是有教益的.

演化算符 e^{-itH} 的矩阵元可以表达为路径积分. $e^{-\beta H}$ 的迹也可以这样做，它可以解释为振子的正则系综的配分函数. 这里 β^{-1} 等于绝对温度与 Boltzmann 常数的乘积，而

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln(\mathrm{Tr}e^{-\beta H}) \tag{9-197}$$

是自由能. 当温度趋于零或 β 趋于无穷时，F 约化成基态能量.

于是，我们可以把配分函数 $Z(g)$ 表示为对一个欧氏作用量的指数的 Feynman-Kac 路径积分（与通常的表达式相比较，动能和势能贡献有一个相对符号的改变). 组态 $\varphi(t)$ 是"时间"的周期函数，$\varphi(0)=\varphi(\beta)$. 为了遵从下述事实，即计算迹

$$\mathrm{Tr}e^{-\beta H} = Z(g) = \int \mathscr{D}\varphi \times \exp\left[-\int_0^\beta dt\left(\frac{\dot{\varphi}^2+\varphi^2}{2}+g\varphi^4\right)\right], \tag{9-198}$$

基态能量由下面公式给出：

$$E(g)-E(0) = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{1}{\beta}\ln\frac{Z(g)}{Z(0)}\right], \tag{9-199}$$

其中 $Z(g)$ 是通过式(9-198)来表示的.

$Z(g)/Z(0)$ 对 g 的幂次展开是

$$\frac{Z(g)}{Z(0)} = \sum_0^\infty Z_k g^k,$$

$$Z_k = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{Z(0)}\int \mathscr{D}\varphi \times \exp\left[-\int_0^\beta dt\frac{\dot{\varphi}^2+\varphi^2}{2}+k\ln\left(\int_0^\beta dt\,\varphi^4\right)\right]. \tag{9-200}$$

对于大的 k，我们用最陡下降法来计算 Z_k. 找出使 $\varphi_c(0)=\varphi_c(\beta)$ 的鞍点 $\varphi_c(t)$，且使有效作用量

$$I=\int_0^\beta dt\frac{\dot\varphi^2+\varphi^2}{2}-k\ln\left(\int_0^\beta dt\varphi^4\right) \tag{9-201}$$

最小，即使得

$$\ddot\varphi_c-\varphi_c+\frac{4k\varphi_c^3}{\int_0^\beta dt'\varphi_c^4(t')}=0. \tag{9-202}$$

按照

$$\varphi_c(t)=\left[\frac{4k}{\int_0^\beta dt'\tilde\varphi^4(t')}\right]^{1/2}\tilde\varphi(t) \tag{9-203}$$

来重新标度 φ_c，就得到方程

$$\ddot{\tilde\varphi}-\tilde\varphi+\tilde\varphi^3=0. \tag{9-204}$$

它表示当 φ_c 象 $k^{\frac{1}{2}}$ 那样增长时 $\tilde\varphi$ 具有 1 的数量级. 当与通常的运动方程相比较时，方程(9-204)显示了在重新标度以外的两个符号的改变，它使耦合变得不重要. 首先，由于转动到欧氏时间中，使得势，因而使力的符号相反(另一个方法是令 it 代替 t 使得加速度反号). 其次，象在谐振 ($\tilde\varphi$) 和非谐振 ($\tilde\varphi^3$) 贡献之间的相对符号表明的那样，有效耦合是负的. 有效势描绘在图 9-6 上. 方程是时间平移不变的，且有 $\tilde\varphi\to-\tilde\varphi$ 的对称性.

通过重新标记 t，可以用一时间对称间隔$[-\beta/2,\beta/2]$代替$[0,\beta]$. 在 $\beta\to0$ 极限下间隔是无穷大的，而且使作用量最小的解是

$$\tilde\varphi_\tau(t)=\frac{\sqrt{2}}{\cosh(t-\tau)}. \tag{9-205}$$

在式(9-205)中可以总的相差一符号，并且时间 τ 可有任意的原点. 显然，这一表达式满足周期边界条件，而且这里还要补充作用量有限的条件. 这样，我们有无穷退化的鞍点，它们满

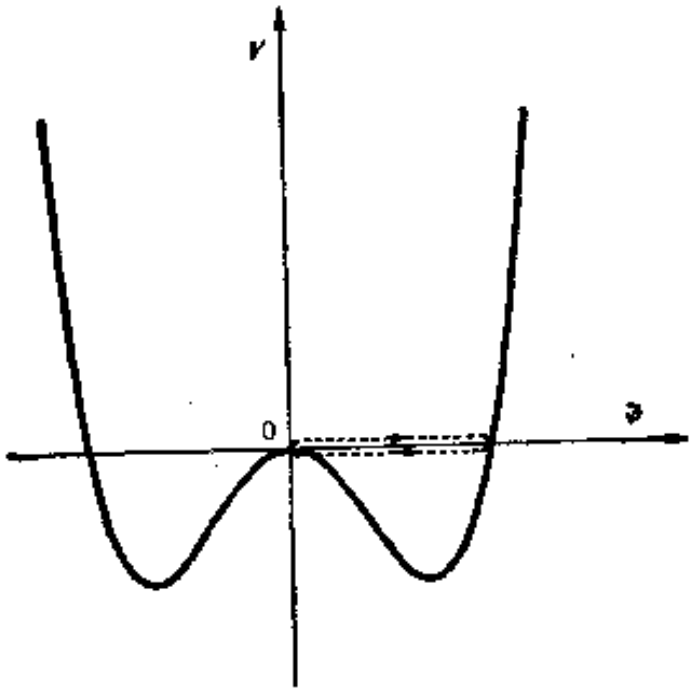


图 9-6 欧氏空间的有效势 $V(\tilde{\varphi}) = -\tilde{\varphi}^2/2 + \tilde{\varphi}^4/4$.
极限运动是用点线表示的.

足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \frac{\tilde{\varphi}^2}{2} = 2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \frac{\tilde{\varphi}^4}{4} = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \frac{\dot{\tilde{\varphi}}^2}{2} = \frac{2}{3}, \tag{9-206}$$

而

$$I_c = \lim_{\beta\to\infty}\left[\int_0^\beta dt\ \frac{\dot{\varphi}_c^2 + \varphi_c^2}{2} - k\ln\left(\int_0^\beta dt\,\varphi_c^4\right)\right]$$

$$= -k\ln(3k^2) + 2k. \tag{9-207}$$

在这一极限下 φ_c 和 $\tilde{\varphi}$ 之间的关系是

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{3k}{4}}\,\tilde{\varphi}. \tag{9-208}$$

由于从问题的对称性而获得的鞍点是退化的，所以对从最小

值开始的二次偏差量上的积分需要细心处理. 因为我们寻找的是围绕作用量的经典极值的量子谐振子频率，故称它为量子化问题是合适的. 每当一个经典鞍点是近似路径积分的出发点时，问题就发生了，而且由于连续不变性发生了退化，有一个或几个模式将具有零频率. 这里它们相应于时间平移，且在 τ 上积分以后首先分离出来以给出因子 β. 当然，关键的是尽管 β 很大但要保持有限，即使对于那些允许有限极限的量它可以取为无穷大. 这一问题与 9-3 节中研究的约束系统的量子化有紧密的关系.

这样，我们就要分别处理来自于平移运动的集体模式. 为此，在路径积分中引入如下形式的因子 1:

$$1 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \delta(\theta_\varphi - \tau), \tag{9-209}$$

其中 θ_φ 由条件

$$\int dt \phi(t - \theta_\varphi)\varphi(t) = 0 \tag{9-210}$$

定义，而函数 ϕ 是相应于，比如说，$\tau = 0$ 的 $\tilde{\varphi}$ 的归一化的微商:

$$\phi(t) = \frac{\dot{\tilde{\varphi}}(t)}{\left(\int dt\ \dot{\tilde{\varphi}}^2\right)^{1/2}}. \tag{9-211}$$

这一选择的理由将立即变得很清楚.

如果 φ 用量 τ 通过 $\varphi(t) \to \varphi_\tau(t) = \varphi(t - \tau)$ 来平移，这时极限作用量以及路径积分测度保持不变，但是 θ_φ 改变为 $\theta_\varphi + \tau$. 这样，就可以明显地做出关于 τ 的积分，且象所期望的那样得到因子 β。于是，

$$Z_k = \beta \frac{(-)^k}{k!} e^{-I_c} \frac{1}{Z(0)} \int \mathscr{D}\varphi \delta(\theta_\varphi) e^{-(I - I_c)}. \tag{9-212}$$

除了符号不确定外，δ 函数将选择出唯一的鞍点. 可以在两

个解中的一个(例如正的)附近进行展开，因为从对称性知两者贡献相同，只要乘因子 2 即可. 令

$$\varphi = \varphi_c + \chi, \tag{9-213}$$

且保留 χ 展开中的主导项，那么，就可得到

$$\delta(\theta_\varphi) = \left|\int dt\,\dot{\phi}(\varphi_c + \chi)\right| \delta\left(\int dt\,\dot{\phi}\chi\right). \tag{9-214}$$

对主导级略去 $\int dt\,\dot{\phi}\chi$，且注意到

$$-\int dt\,\dot{\phi}\varphi_c = \sqrt{\frac{3k}{4}}\left(\int dt\,\tilde{\varphi}^2\right)^{1/2} = \sqrt{k}, \tag{9-215}$$

而 $I - I_c$ 的关于 χ 的第二级是

$$I - I_c = \frac{1}{2}\left[\int dt\left(\dot{\chi}^2 + \chi^2 - \frac{6\chi^2}{\cosh^2 t}\right) + \left(\int dt\,u\chi\right)^2\right],$$

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\varphi}^3. \tag{9-216}$$

利用 Dirac 的记号得到

$$Z_k = \beta\frac{(-1)^k}{k!}e^{-I_c}(2k^{1/2}) \cdot \frac{\int \mathscr{D}\chi\delta(\langle\phi|\chi\rangle)\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\chi|(K+1+|u\rangle\langle u|)|\chi\rangle\right]}{\int \mathscr{D}\chi\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\chi|(K_0+1)|\chi\rangle\right]}, \tag{9-217}$$

其中Schrödinger算符 K 是

$$K = -\frac{d^2}{dt^2} - \frac{6}{\cosh^2 t}, \tag{9-218}$$

而 K_0 相应于自由部分 $K_0 = -d^2/dt^2$. 有教益的是在与 ϕ 正交的子空间里积分 $\tilde{\varphi}$ 的归一化形式. $K+1$ 的谱包含一分裂的零模式，其波函数由 ϕ 给出. 实际上，将方程 (9-204) 对时间微分且插入解式(9-205)，则有

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+1-\frac{6}{\cosh^2 t}\right)\tilde{\varphi}=0. \tag{9-219}$$

由于有 δ 函数，所以这不影响积分．而且，因为 ϕ 有一个节点，所以有一个相应于 $K+1$ 的负本征值的唯一的归一化的 χ_i 谱的其余部分是正的连续谱．从 u 的定义可看到

$$\langle\phi|u\rangle=0.$$

算符 K 相应于有所谓 Bargmann 势的新的 Schrödinger 问题，可以明显地将其解出．我们需要在正交于 $|\phi\rangle$ 的空间里计算 $K+1+|u\rangle\langle u|$ 的非零行列式．

Z_k 的最终结果是

$$Z_k=\beta\frac{(-1)^k}{k!}e^{-I_0(2k^{1/2})N}$$

$$N^{-2}=2\pi\frac{\det(K+1+|u\rangle\langle u|)_\perp}{\det(K_0+1)_\perp}. \tag{9-220}$$

因子 2π 来自 ϕ 模式的高斯积分，当考虑 $(K_0+1)_\perp$ 时，这已在分母中省去．如果不选择将 ϕ 归一的话，这一因子将被修改．注意到

$$(K+1)\tilde{\varphi}=-2\tilde{\varphi}^3=-\frac{4}{\sqrt{3}}u, \tag{9-221}$$

附加的投影算符 $|u\rangle\langle u|$ 就很易处理．

正象上面所注意到的，因为 $|u\rangle$ 属于与 ϕ 正交的子空间，这意味着方程(9-221)在这一空间里可以被倒过来而给出

$$\det(K+1+|u\rangle\langle u|)_\perp=\det(K+1)_\perp\left(1+\left\langle u\left|\frac{1}{K+1}\right|u\right\rangle\right)$$

$$=\det(K+1)_\perp\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\langle\tilde{\varphi}|u\rangle\right)$$

$$=-\det(K+1)_\perp \tag{9-222}$$

由于有 $(K+1)_\perp$ 的其余的唯一负本征值负号是必需的．在

实际的项中，为了分离横向模式的贡献，可以用一极限步骤，以 $K+z$ 代替 $K+1$，然后当 $z\to 1$ 时抽出 $(z-1)$ 的系数。因此，

$$N^{-2}=-2\pi\frac{\det(K+1)_{\perp}}{\det(K_0+1)_{\perp}}$$

$$=-2\pi\lim_{z\to 1}\frac{1}{z-1}\frac{\det(K+Z)}{\det(K_0+z)}. \qquad (9\text{-}223)$$

现在有几种方法可以用来得到这种 Fredholm 行列式的明显表示式。最有启发的是将路径积分里围绕鞍点的涨落计算与普通的波函数的 WKB 近似连系起来，这可以推广到任意一维势的情况。在这一特殊情况里还可以看到涨落问题变为一可解的方程。两种方法都已用在文献中，而得到

$$\frac{\det(K+z)}{\det(K_0+z)}=\frac{\Gamma(1+\sqrt{z})\Gamma(z)}{\Gamma(3+\sqrt{z})\Gamma(\sqrt{z}-2)}. \qquad (9\text{-}224)$$

从此式可得到

$$N^{-2}=\frac{\pi}{6}. \qquad (9\text{-}225)$$

将所有因子放在一起，其结果是

$$Z_k=\beta\frac{(-1)^k}{k!}2k^{1/2}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,e^{k\ln(3k^2)-2k}. \qquad (9\text{-}226)$$

正象所期望的那样获得 $k!$ 的增长，

$$Z_k=\beta\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)(-3)^k\left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{1/2}. \qquad (9\text{-}227)$$

由于这种剧烈的变化行为，我们很容易用能量展开来解释这一结果。实际上，在 $\log(1+\sum_1^{\infty}c_p g^p)$ 的级数里，当 c_k 象 $k!$ 那样增长时，g^k 系数的主导贡献是 $c_k\left[1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$。这样，当应用了公式(9-199)后，我们发现因子 β 去掉了，而得到

$$E(g) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} g^k E_k$$

$$E_k = (-1)^{k+1}\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) 3^k \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{1/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] \quad (9\text{-}228)$$

这一结果首先是由 Bender 和 Wu 得到的.

在非谐振子的情况里，Graffi，Grecchi 和 Simon 已能证明函数 $E(g)$ 是 Borel 可求和的，即可以用式 (9-185) 类型的 Borel 变换来表示.

然后，我们可以利用标准微扰技巧围绕鞍点进行 $\frac{1}{k}$ 幂次的系统修正. 通过在鞍点作用量里保留 $e^{-\beta}$ 级的项，且按 $e^{-\beta}$ 幂次展开 $e^{-1/\epsilon}$ 可以将此方法推广到激发态的情况中去.

最后给一个评注，注意到当寻找周期为 β 的周期性轨迹时，我们有带分数周期 $\beta/2, \beta/3, \cdots$，的其它解，它们也导出鞍点. 它们的经典作用量是最低的二倍、三倍，…. 这样它们对结果仅贡献指数型的小修正.

原则上这些方法可以直接推广到场论中去，至少是还没有讨论重整化时可以推广. 我们以同样的方式来注意一下小耦合时出现的不稳定性. 它们引起了 Borel 变换平面里的奇异性. 只要它们不达到正实轴（假定相应于物理情况）那么理论是合理的. 这一附加的信息使我们能以最有效的方式，利用微扰级数的前几项来精确确定物理量. 这一方法已经在三维玻色子 φ^4 模型的统计力学的某些应用中取得了很大的成功. 它可以推广到费米子场的情况. 但是，即使在半经典的（如第十二章中讨论的规范理论情况）情况下，也可能遇到正实轴上的奇异性，它起源于实际的不稳定性. 因此，我们说，为了得到微扰级数，必须在几个退化的经典能量极小值之中挑选一个. 于是，级数的发散性反映了在这些基态之间的量子隧道效应. 具有有限作用量 I 的场方程的经典欧氏群内插在这些态之间，且贡献跃迁振幅 $e^{-I/\epsilon}$. 于是，为了构成一个有意义的理论，必需通过引入附加量子数来去掉这一退化性。

附加的奇异性也可能是重整化的结果。看来这也提出了关于重整化场论自洽性的困难问题。

注记

在量子力学中，通过迭加原理引进路径积分的想法，起源于 P. A. M. Dirac 的工作，*Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Vol. 3, p. 64, 1933，而后来由 R. P. Feynman 进一步加以发展，*Rev. Mod. Phys.*, Vol.20, p. 367, 1948。在 R. P. Feynman 和 A. R. Hibbs 的书中可以发现一些详细阐述的观点，见 "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill, New York, 1965。如何处理费米子是由 F. A. Berezin 给出的，"The Method of Second Quantization", Academic Press, New York, 1966。在许多近来提出的文章中，我们可以引用下列的文章：J. Zinn-Justin 在 1974 年 Bonn 夏季学校的讲演，收集在由 H. Rollnik 和 K. Dietz 编的 "Trends in Elementary Particle Theory"，物理讲演集 No. 37, Springer-Verlag, Berlin, 1975，以及 L. D. Faddeev 在 1975 年 Les Houches 暑期学校的讲演，收集在由 R. Balian 和 J. Zinn-Justin 编的 "Methods in Field Theory", North-Holland, Amsterdam, 1976。泛函微商方法是由 J. Schwinger 发展的，*Phys. Rev.*, Vol. 82, p. 914, 1951。

场论中程函近似的讨论，比如说可以参见 H. D. I. Abarbanel 的文章，收集在由 D. Bessis, Gordon 和 Breach 编的 "Cargése Lectures in Physics" Vol.5, New York, 1970。

关于有效势的讨论可以参见下述文章：S. Coleman 和 E. Weinberg, *Phys. Rev.*, Ser. **D**, Vol.7, p. 1888, 1973，和 S. Coleman 在 Erice 1973 年的讲演，题为 "Secret Symmetry" in "Laws of Hadronic Matter"，收集在由 A. Zichichi 编的

第11届国际 "Ettore Majorana" 学校的进展，Academic Press, New York, 1975。在课文中所引的计算，可以在 J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin 的文章中见到，*Rev. Mod. Phys.*, Vol. 47, p. 165, 1975。

关于约束系统量子化的一般讨论，首先是由 P. A. M. Dirac 给出的，*Proc. Roy. Soc.*, ser. **A**, Vol. 246, p. 326, 1958。L. D. Faddeev 曾详细阐述过路径积分的来龙去脉，*Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 1, p.1, 1969。

真空不稳定性和它们与微扰展开发散性的关系，是由 F. J. Dyson 提出的，*Phys. Rev.*, Vol. 85, p. 631, 1952。Borel 可求和性的早期研究，是由 A. M. Jaffe 给出的，*Comm. Math. Phys.*, Vol. 1, p. 127, 1965。S. Graffi, V. Grecchi 和 B. Simon 证明了非谐振子，*Phys. Lett.*, ser. **B**, Vol. 32, p. 631, 1970。非谐振子公式是由 C. M. Bender 和 T. T. Wu 得到的，*Phys. Rev.*, Vol. 184, p. 1231, 1969; *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 27, p. 461, 1971; 以及 *Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 7, p. 1620, 1973。围绕经典极值的量子化的讨论，见 R. F. Dashen, **B**. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 10, p. 4114, 1974。

下述文章研究过对场论中高阶行为的估计，L. N. Lipatov. *JETP*, Vol. 45, p. 216, 1977 以及 E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. *Phys. Rev.*, sev. **D**, Vol. 15, pp. 1544 和 1558, 1977。

第十章　积分方程和束缚态问题

在振幅之间建立积分方程的目的是研究非微扰性质．特别是我们希望找到一个研究相对论束缚态的合适的体系．我们将集中注意这方面的问题，而将其它有兴趣的应用问题放在一边．下面将详细描述这一体系，并以正负电子素的超精细分裂为例来解释它．

10-1　Dyson-Schwinger 方程

Schwinger 和 Dyson 曾利用不同的技巧独立地得到了作为场方程结果的 Green 函数的积分方程，亦即动力学拉氏函数的特殊结构．这已在第九章中关于自耦合标量场情况碰到过．

当作了适当的重整化后，这些方程可以用来作为与微扰论不同的另一种方法．通过仔细观察，我们发现了含有无穷层的方程体系．因此，且不管普遍性质的讨论，它们的适用性要受到为将它们化成可以处理的形式而所作的近似的限制．造成这种不幸的情况，可能是由于在这种讨论中所用的自然的数学工具是泛函微积分学的原因，这是一种不太熟悉的数学工具．

10-1-1　场方程

为了确定起见，我们来处理电动力学情况，但技巧是普适的．我们象通常一样引入产生泛函，其电磁势的源为 $J_\mu(x)$，

电子和正电子场的源是反对易的 $\eta(x)$ 和 $\bar{\eta}(x)$。对这一泛函的路径积分表达式是

$$Z(J,\eta,\bar{\eta}) = e^{G(J,\eta,\bar{\eta})} = \int \mathscr{D}(A,\psi,\bar{\psi})e^{i\sigma},$$

$$\sigma = I(A,\psi,\bar{\psi}) + \int d^4x[J_\mu(x)A^\mu(x) + \eta(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)], \tag{10-1}$$

其中 I 是作用量，它是在式(6-25)中给出的 A，ψ，$\bar{\psi}$ 的函数，且应理解为有一归一化因子，以保证连接泛函满足 $G(0)=0$，这里为了简单起见，省去了指标 c。

为了进行重整化，可以将作用量正规化并引入抵消项。为了简单起见，在推导的末尾才讲清楚这些。

注意到微商的积分为零，就可以得到场方程。例如，我们有

$$0 = \int \mathscr{D}(A,\psi,\bar{\psi})\left[\frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)} + J_\mu(x)\right]e^{i\sigma}$$

$$= \left[\frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)}\left(\frac{1}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i\delta\eta}\right) + J_\mu(x)\right] \times Z(J,\eta,\bar{\eta}). \tag{10-2}$$

若写下

$$\frac{\delta I}{\delta A^\mu(x)} = [\Box g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{10-3}$$

那么方程(10-2)为

$$J_\mu(x) + [\Box g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu]\frac{\delta G}{i\delta J_\nu(x)} - e\frac{\delta G}{\delta\eta} \times \gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\bar{\eta}} - e\frac{\delta}{\delta\eta}\left(\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\bar{\eta}}\right) = 0. \tag{10-4}$$

对于不可约函数

$$G(J,\eta,\bar{\eta}) = i\Gamma(A,\phi,\bar{\phi}) + i\int d^4x(J\cdot A + \bar{\phi}\eta + \bar{\eta}\phi), \tag{10-5}$$

作 Legendre 变换是有利的. 式(10-5)中的量满足下列关系:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J^\mu(x)},\quad \phi(x) = \frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta\bar{\eta}(x)},$$

$$\bar{\phi}(x) = -\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta\eta(x)},\quad J_\mu(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)}, \tag{10-6}$$

$$\eta(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\phi}(x)},\qquad \bar{\eta}(x) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)}.$$

在式(10-4)里放入这些定义,且认识到

$$-\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y) = \frac{1}{i}\int d^4z\,\frac{\delta^2 G}{\delta\eta_\alpha(x)\delta\bar{\eta}_\gamma(z)}\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_\gamma(z)\delta\bar{\phi}_\beta(y)}\Big|_{\substack{\eta=\bar{\eta}=0\\ \phi=\bar{\phi}=0}}. \tag{10-7}$$

于是,当费米子源为零时,就可以把它重新表达为

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)}\Big|_{\phi=\bar{\phi}=0} = [\Box g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu]A^\nu(x) - ie\,\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\phi}\delta\phi}\right)^{-1}(x,x)\right]. \tag{10-8}$$

$\delta^2\Gamma/\delta\bar{\phi}(x)\delta\phi(y)$ 的逆是有外场时包括辐射修正在内的电子传播子. 对它取关于 A 的一阶微商,并令此微商等于零. 这样,就碰到了顶角函数式(7-46),

$$\frac{\delta}{\delta A^\mu(x)}\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\phi}(y)\delta\phi(z)}\Big|_{A,\phi,\bar{\phi}=0} = e\Lambda_\mu(x;y,z). \tag{10-9}$$

真空极化振幅

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(x)\delta A^\nu(y)}\Big|_{A,\phi,\bar{\phi}=0} = [\Box g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu]$$

$$\times \delta^4(x-y)+(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)\varpi(x-y), \quad (10\text{-}10)$$

以及完全电子传播子 $iS(x,y)$，满足下述关系式（见图 10-1）：

$$(g_{\nu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu)\varpi(x,y)$$
$$=ie^2\int d^4z_1d^4z_2\mathrm{tr}[\gamma_\mu S(x,z_1)\Lambda_\nu(y;z_1,z_2)S(z_2,x)]. \quad (10\text{-}11)$$

归一化的选取使得精确到最低级时有

$$\Lambda_\nu(y;z_1,z_2)=\gamma_\nu\delta^4(y-z_1)\delta^4(y-z_2)+\cdots,$$
$$S(x,y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p-m-\Sigma(p)}. \quad (10\text{-}12)$$

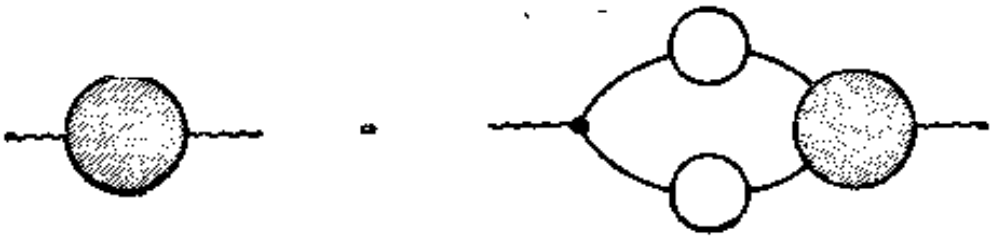


图 10-1　真空极化的积分方程

换句话说，方程(10-4)是 Maxwell 方程的复杂形式，式(10-11) 仅是这些方程的一小部分．更高阶的泛函微商将导致进一步的关系．由图 10-1 给出的图形解释，自然可以被用来作直接的推导．与此类似，Dirac 方程将从下面等式得到：

$$0=\int\mathscr{D}(A,\bar\psi,\psi)\left[\frac{\delta I}{\delta\bar\psi(x)}+\eta(x)\right]e^{iI}$$
$$=\left[\frac{\delta I}{\delta\bar\psi(x)}\left(\frac{\delta}{i\delta J},\frac{\delta}{i\delta\bar\eta},-\frac{\delta}{i\delta\eta}\right)+\eta(x)\right]Z(J,\eta,\bar\eta). \quad (10\text{-}13)$$

用完全 Green 函数讨论问题是方便的，它们没有由 $Z(J,\eta,\bar\eta)/Z(J,0,0)$ 微商得到的不连接的光子振幅．为了简短起见，令 $Z(J,0,0)\equiv Z(J)$，从而得到

$$\left[\eta(x)+\left(i\not{\partial}-m-e\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(x)}\right)\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)}\right]$$
$$\times Z(J,\eta,\bar{\eta})=0. \tag{10-14}$$

将它对 η 取微商，且令 $\eta=\bar{\eta}=0$，得

$$\delta^4(x-y)Z(J)-\left[i\not{\partial}-m-e\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(x)}\right]$$
$$\times Z(J)S(x,y;J)=0,$$

其中 $S(x,y;J)$ 描述有源 J 时的传播子．如果令

$$A_{\mu}(x;J)=Z^{-1}(J)\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(x)}Z(J)$$
$$=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)}G(J,0,0),$$

那么此方程可以重写为

$$\delta^4(x-y)-\left[i\not{\partial}-m-e\not{A}(x;J)-e\gamma^{\mu}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(x)}\right]$$
$$\times S(x,y;J)=0, \tag{10-15}$$

其中省去了旋量指标的 Kronecker δ 函数．在式(10-15)中可以作关于 J 的微分，再令源等于零，其结果是 $A(x;J)|_{J=0}=0$．这就得到

$$(i\not{\partial}-m)S(x,y)-ie^2\int d^4zd^4x'd^4y'\gamma_{\mu}G^{\mu\nu}(x,z)$$
$$\times S(x,x')A_{\nu}(z;x',y')S(y',y)=\delta^4(x-y). \tag{10-16}$$

因为完全的三点函数包含了与两个费米子的传播子以及光子传播子

$$G^{\mu\nu}(x,y)=\int d^4k e^{-ik\cdot(x-y)}\left\{-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2[1+\varpi(k^2)]}+\text{纵向项}\right\} \tag{10-17}$$

卷积的不可约顶角．方程(10-16)可最恰当地理解为，以如下

的形式给出自质量算符的意义：

$$[(i\not\partial - m - \Sigma)S](x, y) = \delta^4(x - y), \quad (10\text{-}18)$$

其中

$$\Sigma(x, y) = ie^2 \int d^4z d^4x' \gamma_\mu G^{\mu\nu}(x, z) S(x, x') \Lambda_\nu(z; x', y). \quad (10\text{-}19)$$

这一公式在图 10-2 里得到了解释.

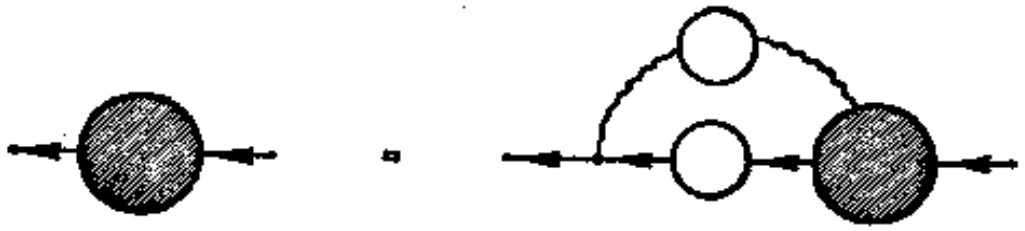


图 10-2　自质量算符的表示

如果令 $\eta = \bar{\eta} = 0$，可以把方程(10-4)改写为

$$[\Box g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu] A^\nu(x; J) = -J_\mu - ie\,\mathrm{tr}[\gamma_\mu S(x, x; J)]. \quad (10\text{-}20)$$

与式(10-15)相结合就得到一封闭的泛函组，其中宗量是源 J. 我们也可用另一种方法来写出一组等价的宗量为外势 A 的方程. 为此，令 $G_{\nu\rho}(x, y; A)$ 是光子传播子. 将方程(10-20)相对 J 微分就得到

$$[\Box_x g^\nu_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial^\nu] G_{\nu\rho}(x, y; A) + ie \int d^4z \,\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu \frac{\delta S(x, x; A)}{\delta A^\nu(z)} G_{\nu\rho}(z, y; A)\right] = g_{\mu\rho}\delta^4(x - y), \quad (10\text{-}21)$$

而式(10-15)可以重写为

$$[i\not\partial_x - m - e\not A(x)] S(x, y; A) - ie \int d^4z \gamma_\mu G^{\mu\rho}(x, z; A) \frac{\delta S(x, y; A)}{\delta A^\rho(z)}$$

$$= \delta^4(x - y). \tag{10-22}$$

这又是一个确定 S 和 G 的完备集. 遗憾的是由于缺乏处理这些表达式的经验,所以这种方法没有多少用处.

回到方程(10-14),如果取关于旋量源的更高阶微商,便可以得到进一步的知识. 最有兴趣的是含有两个荷电粒子传播子的 Green 函数: $S(x_1, x_2; y_1, y_2; J)$. 象前面所做的那样就得到

$$\left[i\partial\!\!\!/_{x_1} - m - eA(x_1; J) - e\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)} \right]$$
$$\times S(x_1, x_2; y_1, y_2; J) = \delta^4(x_1 - y_1)S(x_2, y_2; J)$$
$$- \delta^4(x_1 - y_2)S(x_2, y_1; J). \tag{10-23}$$

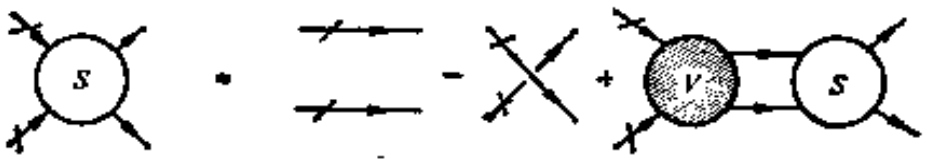


图 10-3 Bethe-Salpeter 方程的核 V.
斜杠表示截去相应的传播子线.

在右边的反对称组合反映了 Pauli 原理. 考虑到由两点函数所满足的关系式(10-18)后,可以用算符 $i\partial\!\!\!/ - m - \Sigma$ 作用在变量 x_2 上. (在不同的情况下我们可能对作用在其余两个变量之一(y_1 或 y_2)上有兴趣). 当令 $J = 0$ 时,对任何情况都得到

$$(i\partial\!\!\!/_{x_2} - m - \Sigma)(i\partial\!\!\!/_{x_1} - m - \Sigma)S(x_1, x_2; y_1, y_2)$$
$$= \delta^4(x_1 - y_1)\delta^4(x_2 - y_2) - \delta^4(x_1 - y_2)\delta^4(x_2 - y_1)$$
$$+ (i\partial\!\!\!/_{x_2} - m - \Sigma)\left[e\gamma^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu(x_1)} - \Sigma \right]$$
$$\times S(x_1, y_1; x_2, y_2; J)|_{J=0}. \tag{10-24}$$

容易看出,右边的第一项是不连接振幅的贡献. 第二项可以从一个图分析来很好地理解. 写成卷积积分

$$\int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2) S(z_1, z_2; y_1, y_2).$$

它包含了用截腿四费米子图描述的核 $V(x_1, x_2; y_1, y_2)$，此图不能通过切断两费米子线而变成不连接图（图 10-3）。取最低级，且在 γ 矩阵上加一上标，以标记它们作用在哪一个指标上，我们就有

$$V(x_1, x_2; y_1, y_2) = ie^2\gamma_\mu^{(1)} G^{\mu\nu}(x_1 - x_2)\gamma_\nu^{(2)}\delta^4(x_1 - y_1)\delta^4(x_2 - y_2). \tag{10-25}$$

用这一记号，我们把最后的 Bethe-Salpeter 方程写成

$$\begin{aligned}(i\partial\!\!\!/_{x_1} - m - \Sigma)(i\partial\!\!\!/_{x_1} - m - \Sigma)S(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \delta^4(x_1 - y_1)\delta^4(x_2 - y_2) - \delta^4(x_1 - y_2)\delta^4(x_2 - y_1) \\ &+ \int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2) S(z_1, z_2; y_1, y_2).\end{aligned} \tag{10-26}$$

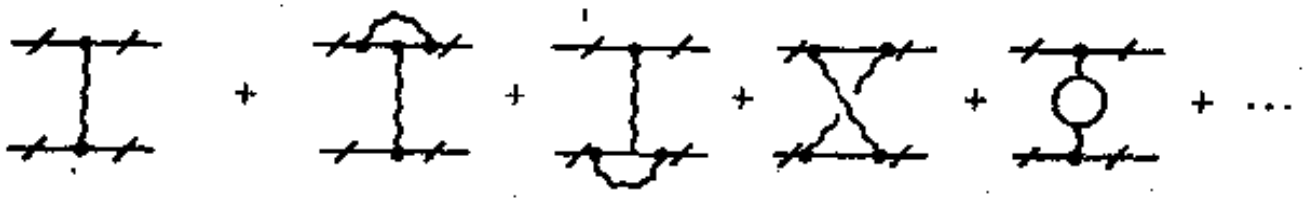


图 10-4 Bethe-Salpeter 方程

它已图示在图 10-4 里，在图中的斜杠表示截去相应的传播子线。

象方程所表明的那样，它是在双电荷的电子-电子道里写下的。当然，它也可以在交叉的电子-正电子道里建立，研究正负电子束缚态时这是合适的。

10-1-2 重整化

场方程显然需要重整化。前面为了避免复杂的记号，在

作用量里没有引入抵消项. 现在必须恢复它们. 但是，因为这不是我们主要关心的事，所以这里不详细做了，我们只是概述一下. 当用物理质量和耦合常数表示方程时，由于考虑了 Green 函数的相乘重整化而导致的对这些方程的修改.

首先考虑电子传播子的方程 (10-15). 用电子波函数 (Z_2) 和顶角重整化(Z_1)，可恰当地将其写为

$$\delta^4(x-y)-\left\{Z_2(i\partial\!\!\!/-m)-eZ_1\left[A(x,J)+\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}\right]\right\}S(x,y;J)=0. \tag{10-27}$$

Ward 等式要求 $Z_1=Z_2$，然而两者都是无穷大量. 与此类似，光子传播子方程(10-21)是

$$\begin{aligned}&Z_3[\Box_x g^\nu_\mu-\partial_\mu\partial^\nu]G_{\nu\rho}(x,y)+\lambda\partial_\mu\partial^\nu G_{\nu\rho}(x,y)\\&+iZ_1e\int d^4z\,\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu\frac{\delta S(x,x)}{\delta A^\nu(z)}G_{\nu\rho}(z,y)\right]\\&=g_{\mu\rho}\delta^4(x-y).\end{aligned} \tag{10-28}$$

这又意味着，当对有限的 Green 函数 G 和 S 迭代这些方程时，为了得到有限的结果，需要无穷大重整化常数.

这是有点令人不愉快的情况，除非我们回到微扰论展开式来.

练　　习

(a) 推导方程(10-11)和(10-19)的重整化形式.

(b) 找出顶角函数和 Bethe-Salpeter 核的关系并考察方程(10-26)的重整化性质.

(c) 在 φ^4 模型中得到等价的方程，并讨论它们的重整化性质.

10-2　相对论束缚态

在相对论情况里，束缚态和共振都以在 Green 函数里的

极点形式出现. 遗憾的是不能将 Schrödinger 方程作简单的推广，除非在象讨论有静态外源时的 Dirac 方程那样的极限情况下.

事实上，一般的困难有两方面. 首先必须面对延迟效应，它在问题中引入了一个额外的相对时间变量. 另一种描述用了场的传递. 但是，不能忽略后者的量子问题. 这样，所出现的两体束缚态的概念看来仅是，例如是实际情况的过分简化. 但是不管各种人为情况如何——实际上可能具有很大的重要性——一旦需要一种基本的描述，我们就必须回到普遍场论体系这一点仍然是正确的. 如果需要进一步引入辐射修正，也是这种情况.

在这一课题中做了大量的工作，这里提供的仅是其中一小部分，但希望是有代表性的部分. 请记住在第二章中曾经讨论过的类氢原子束缚态，以及在第七章中计算的最低级下 Lamb 移动修正.

10-2-1 齐次 Bethe-Salpeter 方程

代替处理很复杂的旋量问题，我们考察较简单的标量粒子模型，其相互作用是通过交换另一类型的标量粒子来进行的. 当然，这是为了显示实际问题的某些特点而做的一个理论练习. 核 V 也是截腿的. 此外，我们假定这两种荷电粒子是不同的，因而可忽略统计效应.

方程(10-26)可以用记号形式写作

$$S^{(12)} = S^{(1)}S^{(2)} + S^{(1)}S^{(2)}VS^{(12)}, \qquad (10\text{-}29)$$

其中 $S^{(1)}$ 现在是粒子 1 的完全传播子，它不久将被包含物理质量的自由传播子所近似，且重整化效应已被抛弃. 当定义 D 为乘积 $S^{(1)}S^{(2)}$ 的倒数核时，这一方程形式上可以理解为下述形式:

$$S^{(12)} = -(D + V)^{-1}. \tag{10-30}$$

这表明，一旦 $D+V$ 有零本征值时，就出现极点．这样就得到了描述束缚态性质的齐次方程．为了确切起见，定义

$$\begin{aligned} S^{(12)} &= \langle 0 | T\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_1^\dagger(y_1)\varphi_2^\dagger(y_2)|0\rangle, \\ S^{(1)} &= \langle 0 | T\varphi_1(x_1)\varphi_1^\dagger(y_1)|0\rangle. \end{aligned} \tag{10-31}$$

质量为 M 的束缚态对 $S^{(12)}$ 的贡献(为了简单起见假定非退化)将具有下述形式:

$$\int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 2\sqrt{P^2+M^2}} \chi_P(x_1, x_2)\bar{\chi}_P(y_1, y_2), \tag{10-32}$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_P(x_1, x_2) &= \langle 0 | T\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)|P\rangle, \\ \bar{\chi}_P(y_1, y_2) &= \langle P | T\varphi_1^\dagger(y_1)\varphi_2^\dagger(y_2)|0\rangle \\ &= \langle 0 | \bar{T}\varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)|P\rangle^*, \end{aligned} \tag{10-33}$$

这里 $\bar{T}$ 是反编时乘积次序． 可以直接推广到一组退化束缚态的情况．用自由传播子

$$S^{(i)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_i^2 + i\varepsilon} e^{-ik\cdot(x_i - y_i)} \tag{10-34}$$

来近似 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$，我们得到

$$\begin{aligned} &(\Box_{x_1} + m_1^2)(\Box_{x_2} + m_2^2)\chi_P(x_1, x_2) \\ &\quad + \int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1, x_2; z_1, z_2)\chi_P(z_1, z_2) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{10-35}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\chi}_P(y_1, y_2)(\overleftarrow{\Box}_{y_1} + m_1^2)(\overleftarrow{\Box}_{y_2} + m_2^2) \\ &\quad + \int d^4z_1 d^4z_2 \bar{\chi}_P(z_1, z_2)V(z_1, z_2; y_1, y_2) = 0. \end{aligned}$$

方程(10-35)将足以解释在处理 Bethe-Salpeter 方程时的推理方式．

尽管它与非相对论 Schrödinger 情况有某些类似性，但它们是两个非常不同的方程．这反映在多个位形变量中，反映

在我们处理的是四阶积分-微分方程中，反映在出现一个微扰论里必须有的核 V 中，还反映在束缚态的能动量进入方程的方法中.

从平移不变性可以得到

$$\chi_P(x_1+a, x_2+a) = e^{-iP\cdot a}\chi_P(x_1, x_2), \tag{10-36}$$

引入相对时空坐标 $x = x_1 - x_2$ 是自然的. 然而，整体位形变量是先验任意的. 我们可以选择两个正量 η_1 和 η_2，使得

$$\begin{aligned} &\eta_1 + \eta_2 = 1, && x_1 = X + \eta_2 x, \\ &X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2, && x_2 = X - \eta_1 x. \end{aligned} \tag{10-37}$$

这是雅可比为 1 的变换，并把约化的 Bethe-Salpeter 振幅写为

$$\begin{aligned} \chi_P(x_1, x_2) &= e^{-iP\cdot X}\chi_P(x), \\ \bar{\chi}_P(x_1, x_2) &= e^{iP\cdot X}\bar{\chi}_P(x). \end{aligned} \tag{10-38}$$

按照式(10-33)，χ 和 $\bar{\chi}$ 是不会同波函数混淆的，它表示推广的形状因子.因为它们含有相对时间变量 x_0，因此归一化条件不是直接的.这看起来是没有什么问题的问题，已经成为需要努力阐述的课题. 当然，归一化的作用是在 χ 函数和四点 Green 函数之间提供一个正确的关系. 另外，对方程(10-35)选择合适的解是本质的. 我们回到非齐次方程 (10-29). 通过下式引入粒子对(1，2)的整体动量

$$\begin{aligned} &S^{(12)}(x_1, x_2; y_1, y_2 | P) \\ &= \int d^4a\, e^{iP\cdot a} S^{(12)}(x_1+a, x_2+a; y_1, y_2), \end{aligned}$$

束缚态和它的 CPT 变换态贡献一 P^2 变量上的极点：

$$\begin{aligned} &S^{(12)}(x_1, x_2; y_1, y_2 | P) \\ &= \frac{i\chi_P(x_1, x_2)\bar{\chi}_P(y_1, y_2)}{P^2 - M^2 + i\varepsilon} + R, \end{aligned} \tag{10-39}$$

其中 R 在 $P^2 = M^2$ 邻域是正则的. 极点留数的因子化性质对于用束缚态来解释是本质的，且必须适当地推广到退化情

况中去.

将方程 $(D+V)S^{(12)}=-1$ 写成 $S^{(12)}(D+V)S^{(12)}=-S^{(12)}$ 形式作迭代，插入式 (10-39) 且利用 $(D+V)\chi=\bar{\chi}(D+V)=0$ 来比较 $P^2=M^2$ 处两边的留数. 其结果是

$$\lim_{P^2\to M^2}\frac{\bar{\chi}(D+V)\chi}{P^2-M^2}=i,$$

或者等价地有协变表达式

$$\bar{\chi}\left[\frac{\partial}{\partial P^\mu}(D+V)\right]\chi=2iP_\mu, \tag{10-40}$$

其中左边包含在相对变量上的积分. 一般地归一化条件依赖于"势"V，这与非相对论情况是不同的.

在动量空间里写下这些方程是有用的. 令 P 是 x 的共轭变量. 根据式(10-37)则有

$$P=p_1+p_2 \qquad p=\eta_2 p_1-\eta_1 p_2, \tag{10-41}$$

其中 $p_1=\eta_1 P+p$ 和 $p_2=\eta_2 P-p$ 分别是场 φ_1 和 φ_2 所携带的动量 (图 10-5). 这里没有象在非相对论运动里变量分离所给出相对动量的自然定义，在非相对论运动里这是从特殊的选择 $\eta_{1,2}=m_{1,2}/(m_1+m_2)$ 而得出的结果. 然而，在相对论情况下，为作比较这一选择可能是好的候选者. 对 Fourier 变换量用同样的记号，且考虑到平移不变性，就有

$$\chi_P(p)=\int e^{ip\cdot x}\chi_P(x)d^4x,$$

$$\begin{aligned}&[(\eta_1 P+p)^2-m_1^2][(\eta_2 P-p)^2-m_2^2]\chi_P(p)\\&+\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}V(p,p';P)\chi_P(p')=0,\\&\bar{\chi}_P(p)[(\eta_1 P+p)^2-m_1^2][(\eta_2 P-p)^2-m_2^2]\\&+\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\bar{\chi}_P(p')V(p',p;P)=0.\end{aligned} \tag{10-42}$$

质量为 μ 的标量粒子的交换在 Born 近似下导致

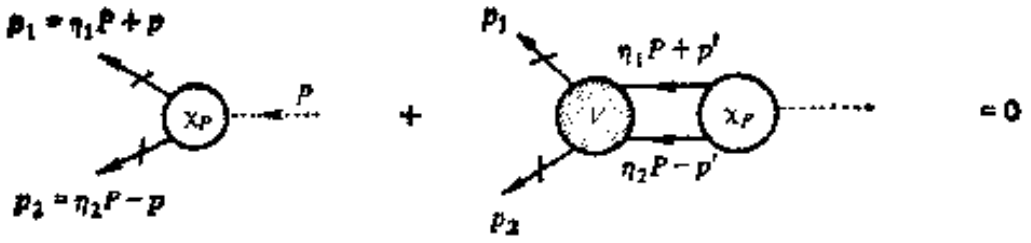


图 10-5　束缚态振幅 χ 的齐次方程.

$$V_1(p,p';\ P)=-\frac{ig_1g_2}{(p-p')^2-\mu^2+i\varepsilon},$$

其中 g_1 和 g_2 是交换粒子与粒子 1 和 2 的耦合常数，亦即使得相应的相互作用拉氏函数是 $\mathscr{L}_{\text{int}}=(g_1\varphi_1^{\dagger}\varphi_1+g_2\varphi_2^{\dagger}\varphi_2)\phi$，$V_1$ 与 P 无关. 显然，归一化条件是

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\bar{\chi}_P(p')\frac{\partial}{\partial P^\mu}\{[(\eta_1P+p)^2-m_1^2]\\&\times[(\eta_2P-p)^2-m_2^2](2\pi)^4\delta^4(p-p')\\&+V(p',p;\ P)\}\chi_P(p)=2iP_\mu.\end{aligned}\tag{10-43}$$

当有了方程(10-35)和(10-40)或等价地有方程(10-42)和(10-43)时，我们就有了研究某些确定模型的基本要素.

10-2-2　Wick 转动

束缚态方程是在 Minkowski 空间中得到的. 在 Wick 的早先工作中，他将它解析延拓到欧氏变量中，这就是 Wick 转动的来由. 当忽略了象这里研究的那些可能的新奇异性时，很容易证实这一步骤是微扰地(即严格地)正确的. 为了把它推广到现在的情况，需要作细心的考虑. 本质的物理要点是保证满足稳定性标准. 当然，利用这一诀窍的好处是可将此方程变为便于简单分析的形式.

我们通过对 $X=0$ 写出如下的等式而直接来进行运算:

$$\begin{aligned}\chi_P(x)&=\theta(x^0)f(x,\ P)+\theta(-x^0)g(x,\ P),\\\bar{\chi}_P(x)&=\theta(x^0)g^*(x,\ P)+\theta(-x^0)f^*(x,\ P),\end{aligned}\tag{10-44}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x, P) &= \langle 0 | \varphi_1(\eta_2 x)\varphi_2(-\eta_1 x) | P \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} f(p; P), \\ g(x, P) &= \langle 0 | \varphi_2(-\eta_1 x)\varphi_1(\eta_2 x) | P \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot x} g(p; P). \end{aligned} \tag{10-45}$$

利用

$$\theta(x^0) = -\frac{1}{2i\pi}\int d\omega \frac{e^{-i\omega x_0}}{\omega + i\varepsilon}, \tag{10-46}$$

可以得到动量空间中的 χ 和 $\bar{\chi}$，即

$$\begin{aligned} \chi_P(p) &= -\frac{1}{2i\pi}\int dq_0 \frac{f(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 + i\varepsilon} \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int dq_0 \frac{g(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 - i\varepsilon}, \\ \bar{\chi}_P(p) &= -\frac{1}{2i\pi}\int dq_0 \frac{f^*(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 + i\varepsilon} \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int dq_0 \frac{g^*(q_0, \mathbf{p}, P)}{p^0 - q^0 - i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{10-47}$$

χ 和 $\bar{\chi}$ 之间的关系是使得它们的不连续量是共轭的。只要 f 和 g 在变量 q_0 上具有合适的支集，就允许转动到虚轴上去。这是从它们的定义通过插入中间态而得到的，

$$\begin{aligned} f(q, P) &= \int d^4x e^{iq\cdot x} \sum_n \langle 0 | \varphi_1(0) | n \rangle \\ &\quad \times \langle n | \varphi_2(0) | P \rangle e^{-i(p_n - \eta_1 P)\cdot x} \\ &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q - p_n + \eta_1 P)\langle 0 | \varphi_1(0) | n \rangle \\ &\quad \times \langle n | \varphi_2(0) | P \rangle, \\ g(p, P) &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - \eta_2 P)\langle 0 | \varphi_2(0) | n \rangle \end{aligned} \tag{10-48}$$

$$\times \langle n|\varphi_1(0)|P\rangle.$$

粒子1的稳定性在第一个表达式里要求 $p_n^2 \geqslant m_1^2$, $p_n^0 > 0$. 这意味着 $f(q_0, P)$ 为零，除非 $(\eta_1 P + q)^2 \geqslant m_1^2$, $\eta_1 P_0 + q_0 > 0$. 与此类似，在第二个表达式里要求 $p_n^2 \geqslant m_2^2$, $p_n^0 > 0$, 因此 $g(q, P)$ 为零，除非 $(\eta_2 P - q)^2 \geqslant m_2^2$, $\eta_2 P_0 - q_0 > 0$. 在表示式(10-47)里，f（或 f^*)的积分从 ω_+ 延伸到 $+\infty$, g（或 g^*)的积分从 $-\infty$ 延伸到 ω_-，其中

$$\omega_+ = \sqrt{m_1^2 + (\eta_1 \mathbf{P} + \mathbf{p})^2} - \eta_1 P_0, \qquad (10\text{-}49)$$

$$\omega_- = -\sqrt{m_2^2 + (\eta_2 \mathbf{P} - \mathbf{p})^2} + \eta_2 P_0.$$

如果 $\omega_- < \omega_+$ 就可转动到虚轴上而不绕过奇异性. 对一稳定束缚态，有 $P_0 < \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \mathbf{P}^2}$. 如果选择质心系 $\mathbf{P} = 0$ 和 $\eta_{1,2} = m_{1,2}/(m_1 + m_2)$，那么

$$\omega_+ = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2} - \frac{m_1 P_0}{m_1 + m_2} > 0$$

和

$$\omega_- = \frac{m_2 P_0}{m_1 + m_2} - \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}^2} < 0.$$

因此，在积分表达式(10-47)里，两割线之间有一间隙.

现在回到 Bethe-Salpeter 方程，且利用这些结果作 Wick 转动. 为了简便起见，保留质心系和先前对 $\eta_{1,2}$ 的规定. 除此而外，只限于讨论所谓梯形近似，即核 V 是在 Born 近似下计算的，

$$V = -\frac{ig_1 g_2}{(p - p')^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \qquad (10\text{-}50)$$

方程取下述形式：

$$\left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} P_0 + p_0\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m_1^2\right]$$

$$\times \left[\left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} P_0 - p_0\right)^2 - \mathbf{p}^2 - m_2^2\right] \chi_P(p)$$

$$-\frac{ig_1g_2}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,\frac{\chi_p(p')}{(p-p')^2-\mu^2+i\varepsilon}=0. \tag{10-51}$$

考虑解析延拓 $p^0\to p^0e^{i\theta}$，θ 从 0 变化到 $\pi/2$. 对于式 (10-51)中的第一项，利用表示式(10-47)，且分别考察情况 $p^0>0$ 和 $p^0<0$. 利用性质 $\omega_-<0<\omega_+$，可以看到在解析延拓过程中不遇到奇异性. 对于第二项同时进行转动 $p^0\to p^0e^{i\theta}$，$p'^0\to p'^0e^{i\theta}$，并且由于同样的理由，既不会在 $\chi_p(p')$ 中遇到任何奇异性，也不在分母中遇到任何奇异性. 对于 $\theta=\frac{\pi}{2}$，利用欧氏宗量函数的同样记号，最终结果采取下述形式:

$$\left[\left(p_0-\frac{im_1}{m_1+m_2}P_0\right)^2+\mathbf{p}^2+m_1^2\right]$$
$$\times\left[\left(p_0+\frac{im_2}{m_1+m_2}P_0\right)^2+\mathbf{p}^2+m_2^2\right]\chi_p(p)$$
$$-\frac{g_1g_2}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,\frac{\chi_p(p)}{(p-p')^2+\mu^2}=0. \tag{10-52}$$

在式(10-52)中所用的度规是欧氏度规

$$(p-p')^2=\sum_{i=0}^{3}(p_i-p_i')^2.$$

把上述方法推广到较高阶核的情况中去，需要对在几个变量下作更精细的分析. 对于散射情况也可以作类似的研究，其积分迴路部分仍夹在两割缝之间. 我们将它作为一个练习留给读者去考察.

10-2-3 在梯形近似下无质量标量粒子交换

这里给出由 Wick 和 Cutkosky 得到的当 $\mu^2=0$ 时的方程(10-52)的解，以此作为研究相对论束缚态方程时所遇到的方法和问题的解释. 从物理观点看，这种选择并不是完全任意的，因为不管由于忽略自旋（特别是交换场）而造成的过

分简化时，其情况与实际情形同正负电子偶素的情形有某些类似之处．而且，它允许有一几乎是解析的解，且显示出可能在较复杂的模型里出现的特殊性质．

这组梯形图初看来好象是非相对论势理论的自然推广．然而，这种近似忽略了相对论量子理论的本质特点．由于忽略交叉梯形图，它破坏了$(s-u)$交叉对称性．这意味着在相对论相互作用的固有时间次序之间的对应性，因此当一个质量变大时，不适当地处理了相对论静止极限．在处理实际问题时，这是一个严格的限制．例如，在电动力学里，除非找到某些令人信服的理由，如在特别的规范(如非协变的 Coulomb 规范)里，否则这一近似将不是规范不变的；当一个粒子质量变得很大时，它也不满足变成 Klein-Gordon 方程(或自旋为$\frac{1}{2}$时的 Dirac 方程)的合理的标准．

为了满足这一标准，至少应包括导出无穷大核 ν 的一组交叉梯形图．请用方程(10-23)和(10-24)的泛函语言找出相应的近似．

记住这些限制，我们回到方程(10-52)上来，并令 $\mu^2=0$．注意到在动量空间中与氢原子问题的类似性后，Wick 和 Cutkosky 提议在五维空间的单位球上用立体映射． Fock 在非相对论情况下引人的这一方法，使我们能明确地应用共形变换，且显示出系统的动力学对称性．为了方便起见，引入无量纲量

$$\lambda=\frac{g_1g_2}{16m_1m_2\pi}. \tag{10-53}$$

这一选择告诉我们，g 是有量纲的 φ^3 耦合常数．可将其与电磁情况相比较，λ 与精细结构常数相类似．我们首先限于考虑等质量的情况，$m_1=m_2=m$． 取 m 为能量单位，得到

$$\left[\left(p-i\frac{P}{2}\right)^2+1\right]\left[\left(p+i\frac{P}{2}\right)^2+1\right]\chi_P(p)$$

$$=\frac{\lambda}{\pi^3}\int d^4p'\,\frac{\chi_P(p')}{(p-p')^2}, \tag{10-54}$$

其中 P 是 $(P_0, \mathbf{0})$. 可将其看作耦合常数为 λ 的本征值方程，且要求 Fredholm 理论可证明它有分立谱. 第十三章中详细考虑的立体投影，相当于把在 R^4 上的一点 p 和五维空间中以 $\frac{1}{2}\sqrt{1-P^2/4}$ 为半径的球上的矢量 z 连系起来，它沿 p 有四维投影，而极角 ζ 满足 $\tan\zeta/2=|p|/\sqrt{1-P^2/4}$（见图 10-6）. 用$(\beta, \theta, \varphi)$标记 p 的其它极角，因此 $p\cdot P=|p||P|\times\cos\beta$，且有

$$\left[\left(p-i\frac{P}{2}\right)^2+1\right]\left[\left(p+i\frac{P}{2}\right)^2+1\right]$$

$$=\frac{1}{\cos^4\zeta/2}\left(1-\frac{P^2}{4}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{P^2}{4}+\frac{P^2}{4}\sin^2\zeta\cos^2\beta\right). \tag{10-55}$$

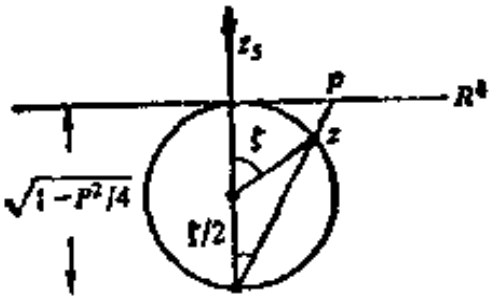


图 10-6　从四维 p 空间投影到直径为 $\sqrt{1-P^2/4}$ 的球上.

如果 $d\Omega_4$ 是球上的立体角元，它按 $\int d\Omega_4=\frac{8\pi^2}{3}$ 归一化，那么

$$\frac{d^4p'}{(p-p')^2}=\frac{(1-P^2/4)}{8}$$
$$\times\frac{\cos^2\zeta/2}{\cos^6\zeta'/2}\frac{d\Omega_4'}{1-\cos\alpha},\qquad(10\text{-}56)$$

其中 α 是相应的矢量 z 和 z' 之间的夹角，即 $z\cdot z'=[(1-P^2/4)/4]\cos\alpha$. 最后，按下式定义一新的函数 $K(z)$:

$$K(z)=\frac{1}{\cos^6\zeta/2}\chi(p).\qquad(10\text{-}57)$$

由此可得到

$$\left(1-\frac{P^2}{4}+\frac{P^2}{4}\sin^2\zeta\cos^2\beta\right)K(z)$$
$$=\frac{\lambda}{8\pi^3}\int\frac{d\Omega_4'}{1-\cos\alpha}K(z').\qquad(10\text{-}58)$$

极限 $P^2=0$ 的情况具有 $O(5)$ 不变性，其 K 正比到五维球的谐波. 令 $N-1$ 是球谐波的阶，这意味着乘上因子 $|z|^{N-1}$ 就得到五维空间的谐振函数. 为了计算本征值 [其退化度为 $N(N+1)(2N+1)/6, N=1,2,\cdots$]，只要把式(10-58)应用到仅依赖于与第五轴的夹角的特殊球谐波就足够了. 这些是通过将基本 Green 函数

$$\frac{1}{|z-z'|^3}=\frac{1}{|z_>|^3[1+z_<^2/z_>^2-2(z_</z_>)\cos\alpha]^{3/2}},$$
$$\frac{1}{[1+t^2-2t\cos\alpha]^{3/2}}\qquad(10\text{-}59)$$
$$=\sum_{N=1}^{\infty}C_{N-1}(\cos\alpha)t^{N-1},$$

按 $z_</z_>$ 的幂次展开而得到的正交多项式(推广的 Legendre 多项式).

这样，把 z 选成沿第五轴，λ_N 就由下式给出:

$$C_{N-1}(1)=\frac{\lambda_N}{8\pi^3}\int d\Omega_4'\frac{C_{N-1}(\zeta')}{1-\cos\zeta'}$$

$$= \frac{\lambda_N}{4\pi}\int_0^\pi \frac{d\zeta \sin^3\zeta C_{N-1}(\zeta)}{1-\cos\zeta},$$

或当 $|t|<1$ 等价地有

$$\sum_1^\infty \frac{t^{N-1}}{\lambda_N} C_{N-1}(1)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{1-\cos\zeta}\frac{1}{(1+t^2-2t\cos\zeta)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-t)}.$$

从它的定义式(10-59),有 $C_{N-1}(1)=N(N+1)/2$;因此

$$\frac{\lambda_N}{\pi} = N(N+1). \tag{10-60}$$

在一般情况下 $0<P^2<4$,方程(10-58)显示了 $O(4)$ 不变性,与氢原子情况非常类似. 撇开 $O(5)$ 不变性的表达式,这是由于只有与 x 在第零轴上(即沿 P)的投影成正比的 $\sin\zeta\times\cos\beta$ 的组合进入方程. 因此,$O(4)$ 不变性属于保持第零轴不变的转动.

于是,在 R^5 内的单位球可以投回到欧氏空间 R^4 上,但现在是从沿第零轴的一点投影的. 如果 γ 使得 $\cos\gamma=\sin\zeta\times\cos\beta$, 令 q 是从单位球投影的四矢量 $|q|=\tan(\gamma/2)$, 而 $\tilde{\chi}(q)=\cos^6(\gamma/2)K(x)$. 作与式(10-55)和(10-56)相类似的变换,就得到明显的 $O(4)$ 不变方程

$$\left[q^4+2q^2\left(1-\frac{P^2}{2}\right)+1\right]\tilde{\chi}(q)$$

$$= \frac{\lambda}{\pi^3}\int \frac{d^4q'}{(q-q')^2}\tilde{\chi}(q'). \tag{10-61}$$

从 p 到 q 和从 χ 到 $\tilde{\chi}$ 的变换,当然可以直接进行. 如果 n 是沿第零轴的单位矢量,则有

$$p=\sqrt{1-\frac{P^2}{4}}\left(n+2\frac{q-n}{q^2-2q\cdot n+1}\right), \tag{10-62}$$

以及

$$\chi(p)=\left(1-\frac{P^2}{4}\right)^2(q^2-2q\cdot n+1)\tilde{\chi}(q).$$

利用 $O(4)$ 正交球谐波 $\mathscr{Y}_{nlm}(\hat{q})$，方程(10-61)的不变性可以用来在 R^4 上作分波分析. 正整数 $n\geqslant 1$ 标记了维数为 n^2 的 $O(4)$ 表示，与原子物理中主量子数相类似. 普通的轨道角动量 l 可在 0 和 $n-1$ 之间取值.

如果 $O(4)$ 和 $SU(2)\times SU(2)/Z_2$ 恒等，那么 $\mathscr{Y}_{nlm}$ 构成了(i,i)表示的基，其中 $n=2i+1$. 不为组合变换式(10-62)所修改的 $O(3)$ 子群是 $SU(2)\times SU(2)/Z_2$ 的对角子群.

在 R^4 里我们有类似于式(10-59)的分解，即

$$\frac{1}{(q-q')^2}=\frac{2\pi^2}{q_>^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_<}{q_>}\right)^{n-1}\times\frac{1}{n}\sum_{l,m}\mathscr{Y}_{nlm}(\hat{q})\mathscr{Y}^*_{nlm}(\hat{q}'). \tag{10-63}$$

通过下式定义径向振幅：

$$\tilde{\chi}(q)=\frac{R_n(q^2)}{|q|^{n+1}[q^4+2q^2(1-P^2/2)+1]}\mathscr{Y}_{nlm}(\hat{q}). \tag{10-64}$$

于是，当插入式(10-61)时，方程(10-63)和(10-64)就将它约化成变量 $x=q^2$ 的一维方程

$$R_n(x)=\frac{\lambda}{n\pi}\int_0^{\infty}dx'\left[\theta(x-x')+\left(\frac{x}{x'}\right)^n\theta(x'-x)\right]\times\frac{R_n(x')}{x'^2+2x'(1-P^2/2)+1}, \tag{10-65}$$

它等价于微分方程

$$x\frac{d^2R_n}{dx^2}-(n-1)\frac{dR_n}{dx}+\frac{\lambda}{\pi}\frac{R_n}{x^2+2x(1-P^2/2)+1}=0, \tag{10-66}$$

加上边界条件 $x \to 0$ 时 R_n 的行为象 x^n 那样趋于零而当 $x \to \infty$时以 R_n^*/x^n 趋于零.

Wick 和 Cutkosky 利用变量

$$z = \frac{x-1}{x+1}, \tag{10-67}$$

其范围从−1到+1并利用函数 g_n,

$$R_n(x) = \frac{1}{(1-z)^n} g_n(z). \tag{10-68}$$

写下与式(10-65)和(10-66)等价的形式:

$$g_n(z) = \frac{\lambda}{2\pi n}\int_{-1}^{+1} dz' \left[\theta(z'-z)\left(\frac{1+z}{1-z'}\right)^n + \theta(z-z')\left(\frac{1-z}{1-z'}\right)^n\right] \frac{g_n(z')}{1-(P^2/4)(1-z'^2)}, \tag{10-69}$$

以及

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} + 2(n-1)z\frac{d}{dz} - n(n-1) + \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{1-P^2/4+(P^2/4)z^2}\right] g_n(z) = 0, \tag{10-70}$$

其中 $g_n(\pm 1) = 0$.

对式(10-66)或(10-70)作标准分析表明,对 $0 \leqslant P^2 \leqslant 4$, λ_n 有分立谱,这可以作数值计算. 对固定的 n (和 P^2) 则有以整数 $K(K = 0, 1, \cdots)$ 为指标的一系列的解, K 等于径向波函数的零点数(除去边界点).

在质量不等的情况下可以作类似的处理,结果又显示出 $O(4)$ 对称性,并且事实上将它映射在等质量情况上. 我们仍然令 $\eta_{1,2} = m_{1,2}/(m_1 + m_2)$,并定义如下的量:

$$\Delta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\varepsilon^2 = (1-\Delta^2)\left[1 - \frac{P^2}{(m_1+m_2)^2}\right],$$

$$\operatorname{tg}\theta = i\frac{\sqrt{(1-\Delta^2-\varepsilon^2)(1-\Delta^2)}}{\varepsilon\Delta}, \qquad (10\text{-}71)$$

$$p = \frac{m_1+m_2}{2}\frac{\varepsilon}{D}\{\sin\theta(1+q^2)n + 2q - 2n[(1+\cos\theta)q\cdot n + \sin\theta]\},$$

$$D = 1+\cos\theta+(1-\cos\theta)q^2 - 2\sin\theta q\cdot n.$$

单位矢量 n 是沿 P 的，而这些公式定义了一个复共形变换。我们将积分迴路变形，使得被

$$\tilde{\chi}(q) = D^{-3}\chi(p) \qquad (10\text{-}72)$$

所满足的最终的方程是实的，且写成

$$\left\{q^4 + 2q^2\left[\frac{2\varepsilon^2}{(1-\Delta^2)^2} - 1\right] + 1\right\}\tilde{\chi}(q) = \frac{\lambda}{\pi^3}\int d^4q'\frac{\tilde{\chi}(q')}{(q'-q)^2}. \qquad (10\text{-}73)$$

此方程与式(10-61)相类似，因为

$$\frac{2\varepsilon^2}{(1-\Delta^2)^2} - 1 = \frac{2}{1-(m_1-m_2)^2/(m_1+m_2)^2}\times\left[1-\frac{P^2}{(m_1+m_2)^2}\right] - 1.$$

再记住在方程(10-61)里公共质量 m 已取作能量单位，所以当 $m_1 = m_2$ 时它就导致了式(10-61)。

这样，通过适当的变量变换就可以将等质量结果变成不等质量的结果。因此，我们回到等质量情况以及方程(10-66)或(10-70)。

特别有趣的是靠近阈 $P^2 = 4$ 的行为，在阈处，核可以用下式近似：

$$\frac{1}{\pi[x^2+2x(1-P^2/2)+1]}$$

$$\equiv \frac{1}{\pi[(x-1)^2+x(4-P^2)]}$$

$$\underset{P^2\to 4}{\simeq} \frac{\delta(x-1)}{\sqrt{4-P^2}}.$$

这样，从式(10-65)就有

$$R_n(x) \simeq \frac{\lambda}{n\sqrt{4-P^2}} R_n(1)[\theta(x-1) + x^n\theta(1-x)]. \tag{10-74}$$

如要求自洽性，即 $x=1$，两边一致[我们形式地令 $\theta(0)=\frac{1}{2}$]，则需要求

$$\sqrt{4-P^2}=\frac{\lambda}{n}. \tag{10-75}$$

这是用 B 表示的熟悉的氢原子谱，束缚能 $P^2=(2-B/m)^2$：

$$B=\frac{m}{2}\frac{\lambda^2}{2n}+\cdots, \tag{10-76}$$

其中 $m/2$ 是约化质量，而 λ 等于 $\frac{e^2}{4\pi}$. 遗憾的是，事情并未结束.

表达式(10-74)给出了一个没有节点（$K=0$）的函数. 因此不给出相应于 $K\geqslant 1$ 的本征值的极限. 这些相应于反常解，它们的 λ 在零束缚极限下不为零，因此不存在非相对论类似! Wick 和 Cutkosky 曾证明，具有 K 个节点的函数的相应的本征值在 $P^2\to 4$ 极限下趋于 n 个独立的极限：

$$\frac{\lambda_K}{\pi}\underset{P^2\to 4}{\simeq}\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{[\ln(1-P^2/4)]^2} \quad K\geqslant 1. \tag{10-77}$$

这不是这一模型的唯一的弊病. 我们可研究对一组敏感解

($K=0$)的修正，这个解在最低级下重新得到非相对论结果，即方程(10-75)和(10-76)。这一分析的结果表明 $2n\varepsilon/\lambda$ 具有下述形式的表达式，其中 $\varepsilon=\sqrt{1-P^2/4}$：

$$\frac{2n\varepsilon}{\lambda}=1+\varepsilon(a_{11}\ln\varepsilon+a_{12})+\varepsilon^2[a_{21}(\ln\varepsilon)^2+a_{22}(\ln\varepsilon)+a_{23}]+\cdots, \tag{10-78}$$

它具有 λ 级的 ε。在比梯形级数更物理的近似里，不出现这些对数项。

即使这样还不够，Nakanishi 已证明某种解还具有负模！他们称为"鬼态"，我们不清楚它们是由于近似的不合适造成的，还是由于更深的理论上的不自洽性造成的。

上面的讨论可以推广到振幅的非齐次方程，特别是交叉道（相应于交换粒子）的高能行为。我们可以寻找一种具有可计算的轨迹函数 $\alpha(t)$ 的 Regge 行为 $S^{\alpha(t)}$。

曾作过许多努力来引入有效势（或准势）近似，以减少相对论束缚态问题的自由度数，特别是麻烦的相对时间。即使它们导致有趣的实际结果，但它们这样或那样地使精确理论破碎了，且一般还要引入膺(Spurious)奇异性。

10-3 正负电子偶素的超精细分裂

我们不应该得出结论说，对于两体系统不能得到与实验一致的相对论弱束缚修正。相反，正负电子偶素态给出了成功的相一致的例子。我们将用它来解释理论。公正地说，应该承认准确的预言还需要实践者的艺术天才。迄今还没有设计出一种系统的方法来得到完全满意的修正。

这里只引出一些有意义的结果，而对于初步的研究则请

参考 2-3 节和 5-2 节. 即使在正负电子偶素的研究中，我们也限于讨论几乎是纯粹的电磁系统，所用的某些方法对于其它例子，如强子的 quark 束缚态模型是有用的.

在正负电子偶素中，较高的三重态 (ortho) 和较低的单态 (para) 分别记为 1^3S_1 和 1^1S_0 (这里用了谱适表示记号 $n^{S+1}L_J$)，在这两基态之间的能级差现已很精确地测量出来了. 对这种精确分裂 ΔE_{ts} 引用的值是

$$\Delta E_{ts} = 2.033870(16) \times 10^5\text{MHz},$$

(Mills 和 Bearman),

$$\Delta E_{ts} = 2.033849(12) \times 10^5\text{MHz} \qquad (10\text{-}79)$$

(Egan, Frieze, Hughes 和 Yam),

有时这个间隔也称为正负电子偶素的精细结构. 近来，Mills, Berko 和 Canter 还测量了 $n = 2$ 的三重态激发能级之间的间隔:

$$E(2^3S_1) - E(2^3P_2) = 8624 \pm 2.8\text{MHz}. \qquad (10\text{-}80)$$

我们记得，所有这些态都是不稳定的. 基态辐射宽度已在最低级近似下讨论过了(见 5-2 节).

对于正负电子偶素的单态和三重态分裂的大小和符号，可以通过注意到它相应于两个效应的和去理解. 磁相互作用是由 Fermi 在讨论氢原子问题时作的估计给出的 (见 2-3-2 节). 用电子-正电子具有通转磁因子等于 2 的参量，它表达为

$$\Delta E_b = \frac{e^2}{6m^2} |\varphi_0|^2 \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle,$$

其中 $|\varphi_0|^2$ 是两个等质量粒子体系的非相对论零点波函数，$|\varphi_0|^2 = (m\alpha)^3/8\pi$.

正象在早先讨论电子-正电子散射时(见 6-1-3)所说的，我们还必须处理相应于湮灭道的新效应. 如果限于最低级效应，它相应于单光子道，由于它的奇电荷共轭性，这个道只对三重态贡献一个 α 级的 s 波相互作用能. 所要求的能级移动可以从有效势来计算，有效势与相应

的在阈上的 T 矩阵元 ($S = I + iT$) 乘以 $|\varphi_0|^2$ 相等. 从第六章可知，在阈上的散射振幅是

$$-e^2\frac{\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\bar{u}(1)\gamma_\mu v(2)}{(2m)^2}.$$

我们已经细心地处理了符号，而 $u(v)$ 表示在阈上电子(正电子)旋量，

$$u(1)=\begin{pmatrix}\chi_1\\0\end{pmatrix},\qquad \bar{u}(1)=(\chi_1^\dagger,0),$$

$$v(2)=C\bar{u}^T(2)=\begin{pmatrix}0\\-i\sigma_2\chi_2^*\end{pmatrix},$$

矩阵元显然是

$$-\frac{e^2}{4m^2}\chi_2^T(-i\sigma_2)\sigma\chi_1\cdot\chi_1^\dagger\sigma(-i\sigma_2)(\chi_2^\dagger)^T$$

$$=\frac{e^2}{4m^2}\left(\frac{3}{2}\chi_2^\dagger\chi_2\chi_1^\dagger\chi_1+\frac{1}{2}\chi_2^\dagger\sigma\chi_2\cdot\chi_1^\dagger\sigma\chi_1\right),$$

其中已利用了 Fierz 变换. 于是可得

$$\Delta E_A=\frac{e^4}{4m^4}|\varphi_0|^2\left\langle\frac{3+\sigma_1\cdot\sigma_2}{2}\right\rangle,$$

其中 $\langle(3+\sigma_1\cdot\sigma_2)/2\rangle$ 项正是 $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}=(\sigma_1+\sigma_2)/2$ 是总自旋；因此，它只对三重态贡献一个正的能量. 计算到最低级时，能级移动对总基态自旋的依赖关系可以期望是

$$\Delta(E_b+E_A)=\frac{e^4}{2m^4}|\varphi_0|^2\left\langle\frac{\sigma_1\cdot\sigma_2}{3}+\frac{\mathbf{S}^2}{2}\right\rangle.$$

为了得到超精细分裂，我们取出相应于 $S=1$ 和 0 的值. 因此，

$$\Delta E_{hf}=\frac{7}{6}\alpha^2\mathrm{Ryd},\tag{10-81}$$

其中 Ryd 是 Rydberg 常数，

$$\mathrm{Ryd}=\frac{m\alpha^2}{2}=3.28984\times10^{15}\mathrm{Hz}.\tag{10-82}$$

方程(10-81)预言 $\Delta E=2.04\times10^4\mathrm{MHz}$. 在精确到 α 级时，它可与实验结果符合得很好. 幸运的是，它比单态的双光子衰变率 $\Gamma_{2\gamma}=\alpha^5\mathrm{Ryd}$ 要大两个数量级. 因此，超精细分裂的计算将是对量子电动力学和 Bethe-Salpeter 方程的应用的精确的考验.

10-3-1 一般讨论

这里所讲的内容将模仿 Karplus 和 Klein 的原始工作. 出发点与在电子-正电子道写下的方程(10-26)相类似. 束缚态振幅 $\chi = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|P\rangle$ 是 Dirac 指标空间中的 4×4 矩阵. 应强调指出，χ 是规范协变量. 因此，如果 χ 满足一近似可解方程，选择一特殊规范是没有关系的. 实际上，因为相对速度很小，所以我们希望对束缚能取非相对论近似是一个合理的出发点. 这就是

$$E_0 = 2m - \frac{m\alpha^2}{4n^2}, \tag{10-83}$$

而 χ 由 Pauli-Schrödinger 波函数所给出.

非协变的辐射规范对得到这一结果似乎是最合适的. 然而，这是一个危险的选择，因为高级修正需要重整化. 另一方面，我们知道为了以相对论方式保证规范协变性，必须在核 V 中包含一无穷的交叉图级数. 这就面临一个进退维谷的问题，在实际中是这样来解决的. 我们将用协变规范，明确地说是 Feynman 规范，且必须从推迟相互作用中分出瞬时相互作用. 这是因为我们不能精确地解出与 Wick-Cutkosky 相对论方程的等价的方程. 于是，推迟相互作用将和 V 中的高级项处于同等地位，故可作为微扰论来处理. 如果其修正越来越小，且确与实验一致，那么至少这一方法可以认为是有用的，尽管它的理论基础贫乏. 这在 α^3 Ryd 级的修正下是对的. 然而，在这一问题上取得的发展表明，甚至有经验的专家在处理高级修正时也会遇到麻烦，为了与非常准确的实验分辨力相比较，这些高级修正又是需要的.

人们提出了一些改进，如用乘以协变量的 Lorentz 不变标量振幅将 χ 展开，对 Wick 转动振幅作完全的角动量分析，

或设法寻找与相对论梯形近似等价的但是可解的形式.

首先忽略辐射修正,写下动量空间里 χ 所满足的方程

$$\left(\frac{\not p}{2}+\not p-m\right)\chi\left(\frac{\not p}{2}-\not p+m\right)=(V_B+V_a)\chi,$$

$$V_B\chi=i\frac{\alpha}{4\pi^3}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\gamma_\mu\chi(p')\gamma^\mu, \qquad (10\text{-}84)$$

$$V_a\chi=-i\frac{\alpha}{4\pi^3}\cdot\frac{1}{p^2}\gamma^\mu\int d^4p'\mathrm{tr}[\gamma_\mu\chi(p')],$$

其中 V_B 代表交叉 t 道里的单光子交换相互作用,而 V_a 是单光子湮灭相互作用. 即使在这最初的描述里,复杂性也有点惊人了.

用 K 来进行运算是方便的, K 是通过将反对称电荷共轭矩阵 C 作用在 χ 的第二个指标上得到的,

$$K_{\alpha\beta}=C_{\beta\beta'}\chi_{\alpha\beta'}. \qquad (10\text{-}85)$$

这一振幅与相应于粒子-粒子道的振幅有相同的变换性质,除了后者没有电磁束缚态以外. 它满足

$$\left(\frac{\not p}{2}+\not p-m\right)_1\left(\frac{\not p}{2}-\not p-m\right)_2K$$

$$=(V_B+V_a)K(p),$$

$$V_BK=i\frac{\alpha}{4\pi^3}\int\frac{d^4p'}{(p-p')^2}\gamma_{1\mu}\gamma_2^\mu K(p'), \qquad (10\text{-}86)$$

$$V_aK=-i\frac{\alpha}{4\pi^3}\frac{1}{p^2}\gamma_\mu C\int d^4p'\mathrm{tr}[\gamma^\mu K(p')C].$$

为了将电子变量和正电子变量区分开来,我们在 γ 矩阵的乘积上加了一个下标.

结构 $\gamma_{1\alpha}\gamma_2^\mu/k^2$ 来源于用了 Feynman 规范,其中 $k=(p-p')$. 然而,我们可以在总的静止参考系 $P=(E,\mathbf{0})$ 中将此相互作用按照下式分为瞬时和推迟部分:

$$\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0-\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2}{k^2}=-\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0}{\mathbf{k}^2}$$

$$+\left(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0k_0^2}{k^2\mathbf{k}^2}-\frac{\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2}{k^2}\right). \qquad (10\text{-}87)$$

右边第二项既包含了推迟作用又包含了磁相互作用．将用微扰论来处理它(希望我们能做的更好)；所以是湮灭贡献．

K 的零级近似，是通过在 V_B 中按照式(10-87)将 Coulomb 部分 V_0 从用 V_b 表示的其余部分分离出来而得到．因此，在瞬时近似下我们有

$$\left(\frac{\not P}{2}+\not p-m\right)_1\left(\frac{\not P}{2}-\not p-m\right)_2K(p)$$

$$=-i\frac{\alpha}{4\pi^3}\int\frac{d^4p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\gamma_1^0\gamma_2^0K(p'). \qquad (10\text{-}88)$$

该式表明，通过将式(10-88)两边除以波算符，并对 p^0 积分，

$$\varphi(\mathbf{p})=\int dp^0K(p^0,\mathbf{p}), \qquad (10\text{-}89)$$

就得到一个方程，这就是

$$\varphi(\mathbf{p})=-i\frac{\alpha}{4\pi^3}\int dp^0\frac{(\not P/2+\not p+m)_1}{(P/2+p)^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\times\frac{(\not P/2-\not p+m)_2}{(P/2-p)^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$\times\int\frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\gamma_1^0\gamma_2^0\varphi(\mathbf{p}'). \qquad (10\text{-}90)$$

分母中的 $i\varepsilon$ 是从方程的推导中得到的．关于 p^0 的积分是收敛的，且可以通过封闭上半平面的迴路来计算，其中在 $p_0=\mp E/2+\omega-i\varepsilon$ 处有极点，$\omega=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$．如果利用 Dirac 记号 $\beta=\gamma^0$ 和 $\boldsymbol{\alpha}=\beta\boldsymbol{\gamma}$ 以及定义

$$H(\mathbf{p})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m,$$

$$\Lambda^{\pm}(\mathbf{p})=\frac{\omega\pm H(\mathbf{p})}{2\omega}, \qquad (10\text{-}91)$$

$$\Lambda^{\pm\pm} = \Lambda_1^{\pm}(\mathbf{p})\Lambda_2^{\pm}(-\mathbf{p}),$$

那么关于 p^0 的积分结果为

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\Lambda^{++}}{\omega - E/2} + \frac{\Lambda^{--}}{\omega + E/2}\right) \times \frac{\alpha}{2\pi^3}\int \frac{d^3p'\varphi(\mathbf{p}')}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}. \tag{10-92}$$

注意在 Feynman 传播子的两种描述之间的等价性，

$$S = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \left[\frac{\Lambda^+(\mathbf{p})}{p_0 - \omega + i\varepsilon} + \frac{\Lambda^-(\mathbf{p})}{\mathbf{p}_0 + \omega - i\varepsilon}\right]\gamma^0.$$

因为

$$H(\mathbf{p})\Lambda^{\pm}(\mathbf{p}) = \pm\omega\Lambda^{\pm}(\mathbf{p}),$$

方程(10-92)也可以写成等效的单体方程

$$[H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{p}) - E]\varphi(\mathbf{p}) = (\Lambda^{++} - \Lambda^{--})\frac{\alpha}{2\pi^3}\int \frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\varphi(\mathbf{p}'). \tag{10-93}$$

定义 $\varphi^{\pm\pm} = \Lambda^{\pm\pm}\varphi$，则方程(10-93)等价于一组耦合方程

$$\begin{aligned}
&(2\omega - E)\varphi^{++}(\mathbf{p}) \\
&= \Lambda^{++}\frac{\alpha}{2\pi^2}\int \frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}[\varphi^{++}(\mathbf{p}') + \varphi^{--}(\mathbf{p}')], \\
&(2\omega + E)\varphi^{--}(\mathbf{p}) \\
&= \Lambda^{--}\frac{\alpha}{2\pi^2}\int \frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}[\varphi^{++}(\mathbf{p}') + \varphi^{--}(\mathbf{p}')],
\end{aligned} \tag{10-94}$$

$$\varphi^{+-}(\mathbf{p}) = \varphi^{-+}(\mathbf{p}) = 0.$$

对于我们的目的来讲，无论式(10-88)还是式(10-92)都是不够的，因为它略去了对于超精细分裂很关键的推迟部分 V_b 和湮灭核．当它们都被包括时，我们就得到了原来 Breit 对这种问题讨论过的方程的正确形式．

为了讨论这一效应，这里我们满足于利用 Salpeter 原来

得到的微扰理论形式．它是为了克服在方程的微分算符里以二次型出现的能量 E（在普遍核里以参量形式）所产生的困难而产生的，而且对瞬时未微扰相互作用也是适用的．

回到方程(10-88)，两边乘以 $\gamma_1^0\gamma_2^0$ 就得到

$$\left[\frac{E}{2}+p_0-H_1(\mathbf{p})\right]\left[\frac{E}{2}-p_0-H_2(-\mathbf{p})\right]K$$

$$=-\frac{i}{2\pi}v\varphi(\mathbf{p}),$$

$$v\varphi(p)=\frac{\alpha}{2\pi^2}\int\frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\varphi(\mathbf{p}') \tag{10-95}$$

假定 φ 是已知的，且对作用于 K 上的 D 算符的逆采用同样的 $i\varepsilon$ 规定，则有

$$K=D^{-1}\frac{1}{2i\pi}v\varphi,$$

$$D^{-1}=\sum_{\pm\pm}\frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E/2+p_0\mp(\omega-i\varepsilon)]}$$

$$\times\frac{1}{[E/2-p_0\mp(\omega-i\varepsilon)]}. \tag{10-96}$$

在 p_0 上积分就回到方程 (10-92)．为了简便起见，定义 η 使得

$$(H-E)\eta=v\varphi, \tag{10-97}$$

其中已令

$$H(\mathbf{p})=H_1(\mathbf{p})+H_2(-\mathbf{p}).$$

从方程(10-93)得到

$$\varphi=(\Lambda^{++}-\Lambda^{--})\eta, \tag{10-98}$$

而 K 由下式给出：

$$K=(H-E)\frac{1}{2i\pi}D^{-1}\eta. \tag{10-99}$$

对于相应于方程的一个给定解固定的 η，我们通过与式(10-

99）类似的表达式但其能量 E 被 E' 代替，定义振幅 Q. 注意 D 也依赖于 E，所以

$$Q = (H - E')\frac{1}{2i\pi}D^{-1}(E')\eta, \tag{10-100}$$

考虑组合

$$\left[D(E') - \frac{1}{2i\pi}\int dp^0 v\right]Q$$

$$= (H - E')\frac{1}{2i\pi}\eta - \frac{1}{2i\pi}\int dp^0 v(H - E')$$

$$\times \frac{1}{2i\pi}D^{-1}(E')\eta.$$

我们发现，当 E' 变为 E，Q 变为 K 时，其左边等于零. 右边对 p^0 变量的唯一的依赖性在传播子 $D^{-1}(E')$ 中. 积分和上边的一样，导致

$$\left[D(E') - \frac{1}{2i\pi}\int dp^0 v\right]Q$$

$$= (H - E')\frac{1}{2i\pi}\eta - \frac{1}{2i\pi}v(\Lambda^{++} - \Lambda^{--})\eta$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}(E' - E)\eta. \tag{10-101}$$

最后一个等式可从方程(10-97)和(10-98)得到. 与此类似，如果

$$\tilde{Q} = \eta^{\dagger}(H - E')\frac{1}{2i\pi}D^{-1}(E'), \tag{10-102}$$

则 H 和 v 的厄米性导致

$$\tilde{Q}D(E') - \frac{1}{2i\pi}\int dp^0\tilde{Q}v$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\eta^{\dagger}(E' - E). \tag{10-103}$$

现在我们来讨论微扰

$$\delta V = \gamma_1^0\gamma_2^0(V_b + V_a) \tag{10-104}$$

对瞬时 Coulomb 相互作用的效应. 新的波函数 K' 和能级 E' 将满足

$$\left[D(E') - \frac{1}{2i\pi}\int dp^0 v - \delta V \right] K' = 0. \tag{10-105}$$

用 $\tilde{Q}$ 乘方程的左边，$\tilde{Q}$ 象上面一样定义成与 E' 相关，然后对四动量 p 积分. 从方程(10-103)可得到

$$(E' - E)\int d^3p\eta^\dagger(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p})$$

$$= -2i\pi\int d^4p\tilde{Q}(p)(\delta VK')(p),$$

这是一个精确的结果. 为了把它用作第一级结果，我们简单地用 φ 代替 φ'，用 K 代替 K' 和 Q. 因此，

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{i}{(2\pi)^2}\int d^4p\tilde{K}(p)(\delta VK)(p). \tag{10-106}$$

只要我们用归一化条件

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\eta^*(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}[|\varphi^{++}(\mathbf{p})|^2 - |\varphi^{--}(\mathbf{p})|^2] = 1, \tag{10-107}$$

为了以后的目的我们还需要第二级能级移动. 原则上它包含完全传播子的逆

$$\left[D(E) - \frac{1}{2\pi i}\int dp^0 v\right]^{-1}.$$

然而，对于目前的应用，可以只限于用自由双粒子传播子，使得

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{i}{(2\pi)^2}\int d^4p(\tilde{K}\delta V)(p)D^{-1}(E;p)$$

$$\times(\delta VK)(p). \tag{10-108}$$

从 10-2 节得出的观点来研究归一化条件，并得到它与束缚态能量微扰展开的关系式.

10-3-2 α^5 级计算

将注意力放在超精细问题上，这意味着处理球对称的 $n=1$ 态.用未微扰方程(10-92)或(10-93)的足够精确的解，我们可以计算能级的移动. 精确到最低级时它的贡献有两部分:

$$\Delta E_b^{(1)} = \frac{\alpha}{\pi(2\pi)^4}\int d^4p\,d^4p'\,\bar{K}(p')\frac{1}{(p'-p)^2}$$
$$\times\left[\gamma_1^0\gamma_2^0\frac{(p_0-p_0')^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}-\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2\right]K(p);$$
$$\Delta E_a^{(1)} = -\frac{\alpha}{\pi(2\pi)^4}\frac{1}{4m^2} \tag{10-109}$$
$$\times\int d^4p\,d^4p'\,\mathrm{tr}[\,\bar{K}(p')\gamma_\mu C\,]\,\mathrm{tr}[\,C\gamma^\mu K(p)\,],$$

其中 $\bar{K}$ 是 $\tilde{K}\,\gamma_1^0\gamma_2^0$.

当包括辐射修正时，我们想得到精确到 α^5 级的 ΔE，而主导级是 α^4 级. 因此，希望得到方程(10-92)或(10-93)的瞬时波函数 φ 解的适当的近似. 我们记得，满足

$$\varphi_s(\mathbf{p}) = \frac{m}{\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/4}\frac{\alpha}{2\pi^2}$$
$$\times\int\frac{d^3p'}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\varphi_s(\mathbf{p}') \tag{10-110}$$

的相应的 Schrödinger 波函数，即 E 由最低级近似式 (10-83) 给出，而 ω 展开到 p^2 级的波函数是

$$\varphi_s(\mathbf{p}) = \frac{4\pi\alpha m}{(\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/4)^2}\varphi_0, \tag{10-111}$$

其中 φ_0 是位形空间中的零点波函数，

$$|\varphi_0|^2 = \frac{(m\alpha)^3}{8\pi}, \tag{10-112}$$

如果这一表达式[乘以两个静止的旋量的乘积，即

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

这里没有明显地写出]被插入到式(10-96)中，就可得到一个近似，它足以满足我们的要求：

$$K(p) = \frac{2\alpha}{i} \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + p_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \times \frac{1}{[E_0/2 - p_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \times \frac{\varphi_0}{(\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4)}, \tag{10-113}$$

这里 E_0 由方程(10-83)给出。因此，计算到所要求的准确度时有

$$\Delta E_b^{(1)} = -\frac{2\alpha^3}{\pi^2} \frac{|\varphi_0|^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4p\, d^4p'}{(p-p')^2 + i\varepsilon} \times \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4)(\mathbf{p}'^2 + m^2\alpha^2/4)} \times \left\langle \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + p_0' \mp (\omega' - i\varepsilon)]} \times \frac{1}{[E_0/2 - p_0' \mp (\omega' - i\varepsilon)]} \times \left[\frac{(p_0 - p_0')^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2} - \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2\right] \times \sum \frac{\Lambda^{\pm\pm}}{[E_0/2 + p_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \times \frac{1}{[E_0/2 - p_0 \mp (\omega - i\varepsilon)]} \right\rangle, \tag{10-114}$$

括号表示静止的旋量乘积之间的平均值. 我们注意到式(10-114)前面有因子 α^6. 因此，我们打算计算的项只能来自 $1/\alpha^2$ 级或 $1/\alpha$ 级对积分的贡献. 从分母 $[\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/4]\times[\mathbf{p}'^2+m^2\alpha^2/4]$ 的存在，可明显地见到小 $|\mathbf{p}|$，$|\mathbf{p}'|$ 区域给出了主要项，且每个因子 $|\mathbf{p}|$ 或 $|\mathbf{p}'|$ 将贡献一额外的因子 α. 在平均值里我们发现了推迟 Coulomb 相互作用和 Breit 相互作用 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$. 在 Coulomb 作用中可以有 α^2 级的相对误差，用 $(p-p')^2$ 代替 $(p_0-p_0')^2$，从而压低了光子分母. 因此，可以进行 p_0 和 p_0' 的积分，且可看到自旋有关的效应中包含了分子上三动量的四幂次. 因此，对于 α^5 级来说它是可以忽略的.

下面讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2'$ 的 Breit 项. 通过对波函数作 Fourier 变换，引入相对时间变量是方便的. 我们把括号中的项改写为

$$\int\frac{dp_0dp_0'}{(p-p')^2+i\varepsilon}\langle\ \rangle$$

$$=\int\frac{2\pi dtdk_0}{k_0^2-\mathbf{k}^2+i\varepsilon}e^{itk_0}\langle D^{-1}(-t)(-\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2)D^{-1}(t)\rangle, \tag{10-115}$$

其中 $\mathbf{k}$ 是 $\mathbf{p}-\mathbf{p}'$，而

$$D^{-1}(t)=\sum\Delta^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\int\frac{dp_0}{}e^{-itp_0}$$

在这一求和里唯一具有危险性分母的部分相应于 Λ^{++}，因为 $E_0 - 2\omega \simeq -(1/m)(\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4)$，且小 $\mathbf{p}^2$ 区域在要做的积分中是占优势的．如果我们寻找占优势的 α^4 贡献，只要保留乘以在正能量上的投影的项就够了．然而，为了达到下一级修正，我们将被迫用到整个表达式．幸而 $\mathbf{p}^2$ 级的贡献可以忽略．这是因为只要 $\mathbf{p}^2$ 与保证得到足够紫外收敛的因子相联系，它们产生相应的 α^2 级的修正．只要可能用 $2m$ 代替 E_0，则对 $D^{-1}(t)$ 就可得到一满意的近似

$$D^{-1}(t) \simeq \frac{im}{2\omega(\mathbf{p}^2 + m^2\alpha^2/4)}\left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}}{2m}\right) \times \left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}}{2m}\right)[(\omega + m)e^{-i|t|(\omega - m)} - (\omega - m)e^{-i|t|(\omega + m)}]. \tag{10-117}$$

利用与以前相同的原理，并在矩阵元中只保留那些对超精细分裂有贡献的项，我们就得到

$$\left\langle\left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}'}{2m}\right)\left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}'}{2m}\right)(-\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2) \times \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}}{2m}\right)\left(1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}}{2m}\right)\right\rangle$$

$$\simeq -\frac{\mathbf{k}^2}{4m^2}\langle(\boldsymbol{\sigma}_1 - \hat{k}\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{k}) \times (\boldsymbol{\sigma}_2 - \hat{k}\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{k})\rangle.$$

积分的其余部分是转动不变的，所以右边进一步可以用 $-(\mathbf{k}^2/4m^2)\frac{2}{3}\langle\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\rangle$ 来代替．把这些表达式插到式(10-115)中，且对 t 积分，就得到

$$\Delta E_b^{(1)} = -\frac{2\alpha^3}{3\pi}\frac{|\varphi_0|^2}{(2\pi)^3}\langle\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\rangle \times \int \frac{d^3p\,d^3p'\,dk_0}{(\mathbf{p}^2 + \alpha^2m^2/4)^2(\mathbf{p}'^2 + \alpha^2m^2/4)^2}$$

$$\times \frac{1}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\varepsilon)}$$

$$\times \left(\frac{i}{k_0 - \omega - \omega' + 2m + i\varepsilon} \right.$$

$$\left. - \frac{i}{k_0 + \omega + \omega' - 2m - i\varepsilon} \right).$$

通过闭合上半平面的迴路可以很容易地对 k_0 积分，并得到

$$\Delta E_b^{(1)} = \frac{4\alpha^3}{3(2\pi)^3} |\varphi_0|^2 \langle \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle$$

$$\times \int \frac{d^3p d^3p'}{(\mathbf{p}^2 + \alpha^2 m^2/4)^2 (\mathbf{p}'^2 + \alpha^2 m^2/4)^2}$$

$$\times \frac{|\mathbf{k}|}{4\omega\omega'} \left[\frac{(\omega + m)(\omega' + m)}{\omega + \omega' + |\mathbf{k}| - 2m} \right.$$

$$- 2 \frac{(\omega\omega' - m^2)}{\omega + \omega' + |\mathbf{k}|}$$

$$\left. + \frac{(\omega - m)(\omega' - m)}{\omega + \omega' + |\mathbf{k}| + 2m} \right]. \qquad (10\text{-}118)$$

最后一项可以略去，因为当我们令两个分母中的 α^2 等于零时积分收敛．利用等式 $(\omega + m)(\omega' - m) + (\omega - m)(\omega' + m) = 2(\omega\omega' - m^2)$ 和积分的对称性在中间一项上去掉分母中的一个 α^2，就得到

$$- 2 \int \frac{d^3p d^3p'}{\mathbf{p}^2 (\mathbf{p}'^2 + m^2\alpha^2/4)^2}$$

$$\times \frac{(\omega' + m)|\mathbf{k}|}{4(\omega + m)\omega\omega'(\omega + \omega' + |\mathbf{k}|)},$$

如果我们重新标度，使 $\mathbf{p}' \to (m\alpha/2)\mathbf{p}'$ 而 $\mathbf{p} \to m\mathbf{p}$，且保留主要的 α^{-1} 项的贡献，就得到一个简单的积分

$$-\frac{2}{m^2\alpha} (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$\times \frac{p}{(1 + \sqrt{1 + p^2})(1 + p + \sqrt{1 + p^2})}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{dp'p''}{(1+p'^2)^2} = -\frac{(2\pi)^3}{m^3\alpha}(1-\ln 2).$$

式(10-118)的第一个积分包含了主要的效应。我们将它写作

$$\int \frac{d^3pd^3p'}{(\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/4)^2(\mathbf{p}'^2+m^2\alpha^2/4)^2}$$
$$\times\frac{(\omega+m)(\omega'+m)}{4\omega\omega'}\frac{|\mathbf{k}|}{\omega+\omega'+|\mathbf{k}|-2m}$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{(2\pi)^3}{m^3\alpha^2}+\int\frac{d^3pd^3p'}{(\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/4)^2(\mathbf{p}'^2+m^2\alpha^2/4)^2}$$
$$\times\left[\frac{(\omega+m)(\omega'+m)}{4\omega\omega'}\frac{|\mathbf{k}|}{\omega+\omega'+|\mathbf{k}|-2m}-1\right],$$

这里不可能直接应用上面相同的方法。如果那样做，将从能量分母$(\omega+\omega'+|\mathbf{k}|-2m)$中产生一额外的红外发散性。为了克服这一困难，我们人为地引入光子质量μ，因此在分母中用$\sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}$来代替$|\mathbf{k}|$。如果$\mu$使得$m\alpha/2\ll\mu\ll m$，我们便可以象前面一样进行计算。因此，可以很容易地计算出其余的积分，它为

$$-\frac{(2\pi)^3}{m^3\alpha}\left[1+\ln\left(\frac{m}{\mu}\right)\right].$$

集中所有的结果，就有

$$\Delta E_b^{(1)}=\frac{2\pi\alpha}{3m^2}|\varphi_0|^2\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle$$
$$\times\left[1-\frac{4\alpha}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{m}{2\mu}\right)\right]. \quad (10\cdot119)$$

当然，α^4贡献与原来的估计是一致的。下一级修正包含了由估计积分的方法产生的赝红外发散性（自然当象上面所解释的那样选择μ时它是正确的）。当将所有同样大小的项收集起来后$\ln(m/\mu)$项将不出现。

我们不去直接计算湮灭的贡献，而转到二级效应上来以显示已说过的相消。然而，如果不引入双光子交叉交换（图10-7b)对 Bethe-Salpeter 核的修正以保持规范协变性，就计算V_b势的二级效应，这是愚蠢的。以$\Delta E^{(2)}_{\omega+x}$表示这些贡献的

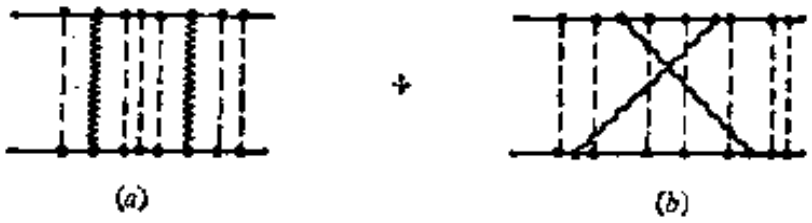


图 10-7　二级交换：(a) 到二级的推迟相互作用 V_b 和(b)交叉光子交换. 破折线代表瞬时交换，V 字形梯级线代表推迟相互作用而波浪线代表协变光子传播子.

和. 在应用方程(10-108)时我们要作进一步的简化. 我们注意到，在此关系中已用自由传播子代替了电子-正电子对的中间传播子. 这在图 10-7a 中相当于忽略了在两个 V_b 相互作用之间的瞬时相互作用. 按照同样的想法，我们可以对 K(和 $\tilde{K}$)代入它的零级近似，即位形空间中的零点波函数

$$K(p) \to \int d^4p K(p) = (2\pi)^3 \varphi_0.$$

总之，

$$\begin{aligned}\Delta E^{(2)}_{\text{光}+x} = \frac{4i\alpha^2}{(2\pi)^2}\,|\varphi_0|^2 \int \frac{d^4k}{(k^2+i\varepsilon)^2} \\ \times \Big\langle \Big\{ \Big(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0 k_0^2}{\mathbf{k}^2} - \gamma_1\cdot\gamma_2 \Big) \\ \times \frac{(\not{p}/2 + \not{k} + m)_1}{[(k_0+m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon]} \\ \times \frac{(\not{p}/2 - \not{k} + m)_2}{[(k_0-m)^2 - \omega^2 - i\varepsilon]} \\ \times \Big(\frac{\gamma_1^0\gamma_2^0 k_0^2}{\mathbf{k}^2} - \gamma_1\cdot\gamma_2 \Big) \Big\} \\ + \frac{\gamma_1^\mu(\not{p}/2 + \not{k} + m)_1 \gamma_{1\nu}\gamma_2^\nu(\not{p}/2 + \not{k} + m)_2\gamma_{2\mu}}{[(k_0+m)^2 - \omega^2 + i\varepsilon]^2} \Big\rangle.\end{aligned} \tag{10-120}$$

当然，第二项是交叉光子交换. ω 是 $\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ 而这里 P 取

为$(2m, \mathbf{O})$. 考虑到在$\mathbf{k}$上可以作球平均，我们来进行矩阵代数运算. 这样，对分裂有贡献的部分是

$$\left\langle\left(\gamma_1^0\gamma_2^0\,\frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2}-\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2\right)\left(\frac{\not{p}}{2}+\not{k}+m\right)_1\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\not{p}}{2}-\not{k}+m\right)_2\left(\gamma_1^0\gamma_2^0\frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2}-\boldsymbol{\gamma}_1\cdot\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right\rangle$$

$$\xrightarrow[\text{平均}]{}\frac{2}{3}\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle k_0^2,$$

$$\left\langle\gamma_1^\mu\left(\frac{\not{p}}{2}+\not{k}+m\right)_1\gamma_{1\nu}\gamma_2^0\left(\frac{\not{p}}{2}+\not{k}+m\right)_2\gamma_{2\mu}\right\rangle$$

$$\xrightarrow[\text{平均}]{}\frac{2}{3}\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle(3k_0^2-2\mathbf{k}^2),$$

所以我们得到

$$\begin{aligned}\Delta E_{bb+x}^{(2)}=&\frac{8i\alpha^2}{3\pi}|\varphi_0|^2\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle\int_0^\infty k^2dk\\&\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{(k_0^2-k^2+i\varepsilon)^2}\\&\times\left\{\frac{k_0^2}{[(k_0+m)^2-\omega^2+i\varepsilon]}\right.\\&\times\frac{1}{[(k_0-m)^2-\omega^2+i\varepsilon]}\\&\left.+\frac{3k_0^2-2\mathbf{k}^2}{[(k_0-m)^2-\omega^2+i\varepsilon]^2}\right\}.\end{aligned}$$

恢复光子质量μ，且利用和上面类似的技巧，就得到

$$\Delta E_{bb+x}^{(2)}=\frac{4\alpha^2}{3m^2}|\varphi_0|^2\langle\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2\rangle\left(\frac{5}{4}+\ln\frac{m}{2\mu}\right),\tag{10-121}$$

这里红外发散的根源在于用了自由双粒子传播子，但因为$\ln(m/\mu)$项在式(10-119)和(10-121)之间相消，所以如所期望的那样，这一近似被证明是正确的.

二级辐射修正 $\Delta E_R^{(2)}$，通过真空极化修改了顶角和 V_b 势. 后面一个修正在精确到 α^5 级时不影响单态-三重态之间的分裂，因为它是一短程效应，而前面一个修正可以通过放进电子和正电子反常磁矩而加以考虑，即在式（10-119）中用 $(1+\alpha/2\pi)^3$ 乘主导项. 这样，精确到所要求的级时有

$$\Delta E_R^{(2)} = \frac{2\alpha^2}{3m^2}|\varphi_0|^2\langle \sigma_1 \cdot \sigma_2\rangle. \qquad (10\text{-}122)$$

现在回到方程(10-109)的湮灭部分 $\Delta E_a^{(1)}$，在现在的计算中已证明其中分母中 P^2 由 $4m^2$ 代替是对的. 这里出现一个新的困难，因为在这一贡献里，通过放进 Coulomb 波函数暗含地遇到了顶角电荷重整化部分. 这清楚地表示在图 10-8 中. 由于有单光子交换势的非协变分裂，在作减除时必须小心. 为了恢复这一方法的协变性，必须包括二级项 $V_bD^{-1}V_a+V_aD^{-1}V_b$. 这有使光子传播子变成协变形式的效果. 事实上，从在二级能级移动里的自由双粒子传播子近似，可以得出 V_b 势直接地作用在湮灭顶角的前面或湮灭顶角的后面. 当然，主导的 α^4 贡献对这一效应是不敏感的. 这样我们直接组合成 $\Delta E_a^{(1)}+\Delta E_{ab+ba}^{(2)}$，

$$\begin{aligned}
&\Delta E_a^{(1)}+\Delta E_{ab+ba}^{(2)}\\
&=-\frac{\alpha}{4\pi(2\pi)^4m^2}Z_1^2\Big\{d^4p'\,\mathrm{tr}\{[\bar{K}(p')+\Delta\bar{K}'(p')]\gamma_\mu C\}\\
&\quad\times\int d^4p\,\mathrm{tr}\{C\gamma^\mu[K(p)+\Delta K(p)]\},\\
&\int d^4p\,\mathrm{tr}[C\gamma^\mu K(p)]\\
&=4\pi\alpha m^2\int\frac{d^3p}{\omega(\mathbf{p}^2+m^2\alpha^2/2)^2}\\
&\quad\times\mathrm{tr}\Big\{C\gamma^\mu\Big[\Big(1+\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\mathbf{p}}{2m}\Big)\Big(1-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\mathbf{p}}{2m}\Big)
\end{aligned}$$

$$+\frac{\mathbf{p}^2}{4m^2}\Big]\varphi_0\Big\},$$

$$\int d^4p\,\mathrm{tr}[C\gamma^\mu\Delta K(p)]$$

$$=2i\alpha\int d^4p\left\{\frac{\mathrm{tr}[C\gamma^\mu D^{-1}(p,P)(p_0^2/\mathbf{p}^2-\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2)\varphi_0]}{p^2-\mu^2+i\varepsilon}\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{tr}[C\gamma^\mu D^{-1}(p,0)\gamma_1^\nu\gamma_{2\nu}\varphi_0]}{p^2-\Lambda^2+i\varepsilon}\right\}. \qquad (10\text{-}123)$$

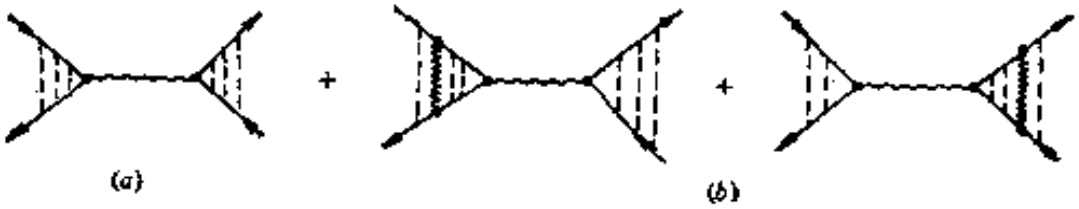


图 10-8　湮灭图：(a) 最低级项和 (b) 交叉项 $V_a D^{-1} V_b + V_b D^{-1} V_a$ 的二级贡献

注意，这时在 $K(p)$ 里保留了完全双粒子自由传播子，而 φ_0 仍理解为包含描述态极化的二分量旋量的乘积 $\chi_1\otimes\chi_2$，因此是一个在求迹号下的矩阵．在 $\Delta K(p)$ 里我们已对 Coulomb 波函数用了它的动量空间的原点值，且用了红外截断 μ．顶角重整化象第七章一样通过减去大光子质量 Λ 处的类似的表达式，并在 Feynman 规范里利用象方程(7-34)中同样的方法计算的重整化常数 $Z_1=Z_2$，而得到

$$Z_1=1-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln\frac{\Lambda}{m}+2\ln\frac{\mu}{m}+\frac{9}{4}\right). \qquad (10\text{-}124)$$

我们已经注意到，在前一小节中只有是虚湮灭光子极化(指标 μ)的类空值对分裂有贡献．而且电荷共轭矩阵

$$C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_2\\ -i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}$$

在我们所用的表象里是奇的，这意味着

$$\mathrm{tr}[C\gamma(\ )_1(\ )_2\varphi_0]$$

被解释为

$$(0,\ \chi_2^T(-i\sigma_2))[\,C^{-1}(\ )_2^TC\gamma(\ )_1]\begin{pmatrix}\chi_1\\0\end{pmatrix}\varphi_0.$$

利用这个评论，通过直接的(但是长而费力的)计算就得到

$$\begin{aligned}&\Delta E_a^{(1)}+\Delta E_{ab+ba}^{(2)}\\&=\frac{\pi\alpha}{m^2}\left(1-\frac{4\alpha}{\pi}\right)\mathrm{tr}(\varphi_0^\dagger\gamma C)\cdot\mathrm{tr}(C\gamma\varphi_a)\\&=-\frac{\pi\alpha}{m^2}\left(1-\frac{4\alpha}{\pi}\right)[\chi_1^\dagger\boldsymbol{\sigma}(-i\sigma_2)\chi_2^*]\\&\quad\times[\chi_2^T(-i\sigma_2)\boldsymbol{\sigma}\chi]|\varphi_0|^2\\&=\frac{\pi\alpha}{m^2}\left(1-\frac{4\alpha}{\pi}\right)|\varphi_0|^2\langle\mathbf{S}^2\rangle.\end{aligned}\tag{10-125}$$

上面的表达式仍必须乘一因子 $[1-\bar{\omega}(4m^2)]$，以包括由于 α 级真空极化引起的辐射修正．在这一描述里，此效应是由二级 $V_aD^{-1}V_a$ 项引起的，

$$\bar{\omega}(4m^2)=\frac{8\alpha}{9\pi}.\tag{10-126}$$

它导致一个附加的贡献

$$\Delta E_{aa}^{(2)}=\frac{\pi\alpha}{m^2}\left(-\frac{8\alpha}{9\pi}\right)|\varphi_0|^2\langle\mathbf{S}^2\rangle\tag{10-127}$$

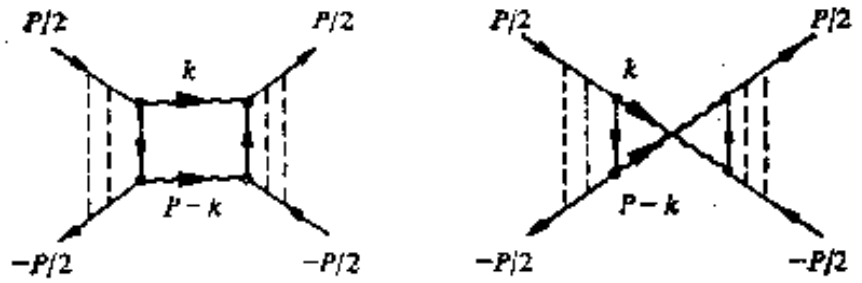


图 10-9　双光子湮灭图

这一疑难的最后一部分是双光子湮灭项，其虚部(负的)

等于单态能级宽度的一半（图 10-9）. 它的表达式是通过在 Bethe-Salpeter 核里加上一新项而得到的. 最好回到方程(10-84)上来，且用非相对论零点值来近似波函数，于是在偶电荷共轭道里得到主导的 α^5 级效应. 为了保持各种系数的踪迹，利用相对论记号是比较简单的，其中 $u(1)$，$v(2)$ 是静止的旋量:

$$\begin{aligned}\Delta E_{2\gamma}^{(2)} - i\frac{\Gamma_{2\gamma}}{2} &= \frac{i\alpha^2}{\pi^2}|\varphi_0|^2 \\ &\times \int \frac{d^4k}{[k^2+i\varepsilon][(P-k)^2+i\varepsilon]} \\ &\times \bar{v}(2)\gamma^\nu \frac{1}{\not{P}/2 - \not{k} - m}\gamma^\mu u(1) \\ &\times \bar{u}(1)\left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{P}/2 - \not{k} - m}\gamma_\nu \right. \\ &\left. + \gamma_\nu \frac{1}{-\not{P}/2 + \not{k} - m}\gamma_\mu\right) v(2). \qquad (10\text{-}128)\end{aligned}$$

积分和自旋矩阵元的计算给出与在单态上的投影成正比的系数:

$$\begin{aligned}\Delta E_{2\gamma}^{(2)} &- \frac{i\Gamma_{2\gamma}}{2} \\ &= -\frac{\alpha^2}{m^2}|\varphi_0|^2\langle 2 - \mathbf{S}^2\rangle(2 - 2\ln 2 + i\pi), \qquad (10\text{-}129)\end{aligned}$$

其虚部给出 $\Gamma_{2\gamma} = m\alpha^5/2$，正是式(5-128)中发现的结果.

现在我们有了精确到α^5级的正负电子偶素的超精细分裂的完整值. 对交换道的方程(10-119)、(10-121)和(10-122)，而湮灭道取式(10-125)、(10-127)和(10-129)，且减去 $S=1$ 和 $S=0$ 态的值，就得到 Karplus 和 Klein 结果

$$\Delta E_{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha^2 \mathrm{Ryd}\left[\frac{7}{3} - \left(\frac{32}{9} + 2\ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi}\right]. \qquad (10\text{-}130)$$

这个值还不足以与实验结果相比较. 读者要正确评价为抽出 α^4 项所需要的努力. 困难部分地在于要很好地控制反冲效应,即正确地处理相对论 Coulomb 波函数，事实上它导致 $\alpha^6\ln(1/\alpha)$ 级的项. 其它效应,如交换道的真空极化也对这一项有贡献,所以修正是 $(\alpha^4/2)\mathrm{Ryd}\times[B\alpha^2\ln(1/\alpha)+C]$ 型的。1977 年 Lepage 报告的最新的值是 $B=-\frac{1}{6}$. 当加到式（10-130）上时，这将给出理论的预言为 2.033774×10^7MHz，是与式(10-79)的结果可比较的.

Bethe-Salpeter 公式也可以用来得到衰变宽度的辐射修正，以及对其它系统,象氢原子的辐射修正. 作为一个练习，读者可从这里的描述来得到精确到 α^4 级正负电子偶素的激发谱:

$$E^S_{n,LJ}=2m+\mathrm{Ryd}\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{11\alpha^2}{32n^4}+\frac{\alpha^2}{n^3}\,\mathcal{B}^S_{LJ}\right),$$

$$\mathcal{B}^0_{LJ}=-\delta_{L,J}\frac{1}{2L+1}, \tag{10-131}$$

$$\mathcal{B}^1_{LJ}=-\frac{1}{2L+1}+\frac{7}{6}\delta_{L,0}+\frac{1-2\delta_{L0}}{2(2L+1)}$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{3L+4}{(L+1)(2L+3)} & J=L+1,\\ -\dfrac{1}{L(L+1)} & J=L,\\ -\dfrac{(3L-1)}{L(2L-1)} & J=L-1.\end{cases}$$

将此结果与方程(10-80)的三重态分裂相比，结果如何?

注记

场方程方面的工作参见 F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, Vol. 75, p. 1736, 1949, 以及 J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, Vol. 37, pp. 452, 455, 1951.

束缚态方程具有较长的历史，这可以从 H. A. Bethe 和 E. E. Salpeter 的书中找到，"Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms" Springer-Verlag, Berlin, 1957. 近代的发

展是由下述作者的工作所激励的，文章中所引的 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, Vol. 82, p. 309, 1951, Vol. 84, p. 1232, 1951, 以及 M. Gell-Mann and F. Low, *Phys. Rev.*, Vol. 84, p. 350, 1951. 对梯形交换的处理见 Y. Nambu, *Progr. Theor. Phys.*, Vol. 5, p. 614, 1950, G. C. Wick, *Phys. Rev.*, Vol. 96, p. 1124, 1954, 以及 R. E. Cutkosky, *Phys. Rev.*, Vol. 96, p. 1135, 1954. N. Nakanishi 的总结文章，*Suppl. Prog. Theor. Phys.*, Vol 43, p. 1, 1969, 包括了一直到六十年代后期他自己的工作与很多人的贡献.

正负电子偶素的超精细分裂的微扰论，是由下述工作发展起来的：[1]E. E. Salpeter, *Phys. Rev.*, Vol. 87, p. 328, 1952, R. Karplus and A. Klein, *Phys. Rev.*, Vol. 87, p. 848, 1952. 近来准确的测量见 A. P. Mills and G. H. Bearman, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 34, p. 246, 1975, 以及 P. O. Egan, W. E. Frieze, V. W. Hughes, and M. H. Yam, *Phys. Lett.*, ser. **A**, Vol. 54, p. 412, 1975. 在课文中所讲的激发三重态分裂，选自 A. P. Mills, S. Berko, and K. F. Canter, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 34, p. 1541, 1975. A. Stroscio 总结了正负电子偶素的问题，发表在 *Phys. Rep.*, Ser. **C**, Vol. 22, p.215, 1975. 近来做出贡献的还有 G. P. Lepage, *Phys. Rev.* Ser. **A**, Vol. 16, p. 863, 1977, 以及 G. T. Bodwin and D. R. Yennie *Phys. Rep.*, Ser. **C**, Vol. 43, p. 267, 1978, 这篇文章中包括了很多有关早先工作的参考文献.

J. Schwinger 讨论了正负电子偶素谱，见"Particles, Sources and Fields", Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, 1973.

第十一章　对称性

量子系统和粒子物理中对称性的重要性，已促使人们对它进行了一系列专门的研究．构造模型和了解基本相互作用时，需要确定各种不变性并了解它们是怎样实现的，近似的或甚至破坏的．这些研究为在么正对称性、流代数和手征不变性上取得的引人注目的结果，以及对强子的夸克亚结构的日益增长的兴趣所支持．另一方面，类似的考虑是宏观介质中有序-无序跃迁理论的核心，再一次强调表明了场论和统计力学之间的深刻关系．这里将提出一些模型，对这些模型的研究有助于理解一些特殊的场论现象，例如几乎退化的多重态自发对称性破缺和量子反常．

11-1　对称性的量子实现

我们已经遇到几个对称性的例子．有些是分立的，如宇称、时间反演和电荷共轭．其它一些是连续的，如运动学 Lorentz 不变性，或甚至与时空相关的对称性，如规范不变性．我们现在将集中论述连续的内部对称性，并讨论在拉氏函数场论内量子对称性的实现，尽管某些叙述和结果并不需要这样一个特殊的框架．

11-1-1　问题的叙述

我们在经典范围内来考虑在连续变换群下的理论不变性．更确切地说，这意味着象第一章中所讨论的那样，拉氏函数(或哈密顿量)，因而运动方程在这些变换下是不变的．现

在的问题是要阐明这一性质在量子系统中是如何反映出来的，特别是要研究它对态的谱有什么结果.

在量子理论里，对称性的讨论意味着存在一个作用在物理可观察量上，从而作用在动力学场变量上的变换群(定域自同构). 写成无穷小形式，就构造出相关连的四矢量流密度和积分电荷. 于是，重要的是要知道在 Hilbert 态空间上是否可以通过么正变换来实行这些变换. 定域上讲我们需要研究流守恒，而总体来讲是要问这电荷是否产生与 S 矩阵对易的么正算符.

在第一章里，我们已经在经典理论中描述了如何能把一组无穷小变换与相应的一组 Noether 流联系起来. 给定一个依赖于无穷小参量 $\delta\alpha^a$ 的场变换

$$\begin{aligned}&\phi(x)\to\phi(x)+\delta\phi(x),\\&\delta\phi(x)=\mathscr{F}_a(x)\delta\alpha^a,\end{aligned}\tag{11-1}$$

流是通过下式定义的:

$$j^a_\mu(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\delta\phi(x)}{\delta\alpha^a},\tag{11-2}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是拉氏函数. 不管作用量是否在这些变换下不变这一等式都成立，只要拉氏函数仅是场量和它们的一阶微商的函数. 利用 Euler-Lagrange 运动方程，$\mathscr{L}$ 的变分导致

$$\delta\mathscr{L}=\partial^\mu j^a_\mu\delta\alpha^a,\tag{11-3}$$

于是荷

$$Q^a(t)=\int d^3x j^a_0(\boldsymbol{x},t)\tag{11-4}$$

是这些变换的生成算符，因为其 Poisson 括号运算为

$$\{Q^a(t),\phi(\mathbf{x},t)\}=\frac{\delta\phi}{\delta\alpha^a}(\boldsymbol{x},t).\tag{11-5}$$

方程(11-5)假定 ϕ 与 $\delta\phi$ 的 Poisson 括号为零. 如果 $\delta\phi$ 不

依赖于ϕ的共轭动量，这是对的。特别是，量 $Q^a(t)$ 满足由变换群的李代数所描写的对易关系，其结构常数为 C_c^{ab}（见方程(1-146)）：

$$\{Q^a(t), Q^b(t)\} = -C_c^{ab}Q^c(t). \qquad (11\text{-}6)$$

按照式(11-3)，如果$\mathscr{L}$是不变的，则流作为经典量是守恒的：

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0, \qquad (11\text{-}7)$$

而电荷是时间无关的。利用 Stokes 定理并忽略空间表面项，即可看到这一点。

在量子理论里我们将重做上述步骤，特别是要构造一个守恒流。然而，因为后者一般是场量的定域多项式，这就可能遇到某些困难。预先将它正规化有时可能是有用的。例如，它可以包含场量宗量的轻微相对移动，发散项的减除等，其结果是守恒定律的合适性不再以平庸的形式出现。实际上我们并不总是掌握了对易规则，所以我们可以验证在适当的重整化后它是否与假定在微扰论中守恒定律逐级成立相一致。这一方案是通过证明与由 Green 函数所给出的一组等式的等价性来完成的。这些与量子电动力学的 Ward 等式相类似，且可以用微扰论来检验。在 Gell-Mann 和 Levy 的σ模型中的手征对称性的例子里，我们发现紫外发散引起的反常可以使经典守恒定律不成立。因此，这类研究不是学院式的。

还必须考虑问题的总体方面，即对称性的么正实现和它在谱上的效应。这时有两种情况，第一种是极熟悉的，并且是自从 Weyl 和 Wigner 写出了早期的工作以来已有了详细的研究。它相应于 Hilbert 态空间中对称群的么正表示 $g \to U(g)$。它在可观察量上的作用由下式给出：

$$A \to {}^gA = U(g)AU^{-1}(g). \qquad (11\text{-}8)$$

Poincaré 不变性就是这种情况。它包含了导致单纯连接覆盖群表示的相因子的讨论（Wigner 定理）。态是按相应于不可

约表示的多重态来分类的. 特别是，真空态或基态相应于恒等表示. 有时对称性是在近似下成立的，例如忽略较弱的相互作用.同位旋不变性就是这种情况,通常同位旋不变性微弱地受到电磁力的破坏. 下面将简洁地回顾一下这种情况. 但是，也可能发生下述情况：对称性仅反映在动力学问题中而真空不是不变的. 我们把它称之为 Goldstone 实现. 这时么正算符 $U(g)$ 不存在,而对称性发生自发破缺. 态不再按多重态分类，而且在一定条件下出现了无质量粒子. 这一情况在物理学中不是稀罕的，铁磁体和自旋波就是一个例子. 在粒子物理情况里，π 介子动力学行为似乎是这一图象的近似.

11-1-2 基态行为

一个系统的对称性质可以由它的基态行为来表征. 如下面将见到的那样,如果真空是为一组荷湮灭的,则相应的流是守恒的,而对称群以么正形式实现. 相反，假定有一守恒流，如果真空不是不变的,则对称性自发破缺.

如果真空不是唯一的，那么当将所有对易的厄米可观察量对角化时，可以在此最低能量子空间里定义一组正交基. 为了简便起见，假定这些态是分立的集合. 考虑某一对可观察量 $A(x)$，$B(y)$. 当它们的宗量是无穷的类空间隔时，按照 Riemann-Lebesgue 引理的推广，仅是那些中间的平移不变的基态才对它们乘积的矩阵元有贡献，

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\langle n|A(\mathbf{x})B(0)|m\rangle$$

$$=\sum_{p}\langle n|A(0)|p\rangle\langle p|B(0)|m\rangle,$$

其中 $|p\rangle$ 取遍所有的基态. 按照因果性，对易关系的矩阵元 $\langle n|[A(\mathbf{x}),\ B(0)]|m\rangle$ 在 $|\mathbf{x}|\to\infty$ 的极限下为零. 矩阵 $\langle n|A(0)|m\rangle$ 和 $\langle n|B(0)|m\rangle$ 对易，所以可以同时对角化.

在一给定的部分内，当定域算符乘积的真空矩阵元的类空间隔变大时可因子化．这称之为集团性．

作为一粗劣近似的结果，可能发生明显的真空退化．真正的基态是使能量最小状态的唯一的组合．一个例子是在量子力学里势为 $V(x) = (x^2 - 1)^2$ 的一维系统具有两个相等的最小值．量子力学允许位垒穿透，所以导致唯一的对称基态．

我们可以通过要求使有效势 $V_{eff}(\phi)$ 最小，以平移不变的方式来达到基态．$V_{eff}(\phi)$ 在一具有给定的场量平均值的态里起着势能密度的作用．

这里引出了一个可以从定域性得到的重要性质．假定已构成了一个守恒流算符 $j^\mu(x)$，所以 $\partial_\mu j^\mu = 0$．在空间的有限区域里，定义 $j^0(\mathbf{x}, t)$ 的积分 $Q_V(t)$ 为

$$Q_V(t) = \int_V d^3x j^0(\mathbf{x}, t). \tag{11-9}$$

这一算符明显地比它的极限 $Q(t)$ 定义得要好，$Q(t)$ 是在全空间上的积分．对于足够大的 V，$Q_V(t)$ 与一定域可观察量 A 的对易关系是时间无关的：

$$\lim_{V\to\infty} \frac{d}{dt}[Q_V(t), A] = 0. \tag{11-10}$$

实际上，从流守恒我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x[\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}, t), A] \\ &= \frac{d}{dt}\int_V d^3x[j^0(\mathbf{x}, t), A] + \int_s d\mathbf{S}[\mathbf{j}(\mathbf{x}, t), A]. \end{aligned}$$

当 V 变得足够大时，因为对易子包含被非常大的类空间隔所分开的定域算符，所以面积分为零．

这一陈述的合适性可推广到更普遍的情况．特别是，A 可以被任一多重定域算符所代替．这一证明甚至可以推广到非相对论系统中，只要仅出现短程力．

但是，初看起来是完全平庸的事——真空可以是不变的

也可不是——却包含了丰富的极不同的物理内容. 如果真空确实是不变的则会怎样? Coleman 定理证明相关的流是守恒的. 假定 $Q(t)$, j^0 的空间积分是很好定义的, (至少在包括基态的 Hilbert 空间的密集子集中)且使真空湮灭

$$Q(t)|0\rangle = \int d^3x j_0(\mathbf{x}, t)|0\rangle = 0. \tag{11-11}$$

如果理论容许有一能隙, 从平移不变性可得到任一具有零动量的态将使得

$$\langle n, \mathbf{P}_n = 0|j_0(\mathbf{x}, t)|0\rangle = 0,$$

因为上面的量是与积分为零的 $\mathbf{x}$ 无关的量. 这里耍了点轻微的手法,因为严格地讲这个态不是可归一化的. 然而,要精细地做也可以解决. 因此,

$$\langle n, \mathbf{P}_n = 0|\partial_0 j^0(\mathbf{x}, t)|0\rangle$$

$$= \langle n, \mathbf{P}_n = 0|\partial_\mu j^\mu(\mathbf{x}, t)|0\rangle = 0. \tag{11-12}$$

最后一个等式是从 $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = i[\mathbf{P}, \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)]$ 得到的. 假定 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ 的矩阵元是有意义的, 则它的三维散度在零动量态之间的矩阵元必定为零. 最后, 因为 $\partial_\mu j^\mu(x)$ 是一个 Lorentz 标量,方程(11-12)可以推广到在真空和任一其它态之间的任意矩阵元. 因此, $\partial_\mu j^\mu$ 湮灭了真空. 人们可以证明这仅对定域算符才是可能的,如果它为零.

其结论是

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{11-13}$$

对称性是精确的,且么正地用形为 $U = e^{i\omega Q}$ 的算符来实现.

11-2 质量谱、多重性和 Goldstone 玻色子

11-2-1 Gell-Mann 和 Ne'eman 的八重法模型

当内部对称性形成一紧致李群时, 我们可以选择表示算

符的位相来得到它的覆盖群的么正表示. 这一表示分解为作用在原来 Hilbert 空间的子空间上的不可约表示. 因此，子空间是由态的多重性产生的.

这里将简洁地描述一下 $SU(3)$ 对称性或称八重法模型，它是以某种近似程度在强相互作用范围内适用的. 它推广了 Heisenberg 在 1930 年引入的核力同位旋不变性.

现在所称的较大的味群，表现在较高能量上. 通过研究新的几个 GeV 处的窄共振，已得到一些 $SU(4)$ 对称性的证据，并且这可能不是事情的结尾.

基本同位旋二重态的成员(质子和中子)，是按同位旋第三分量 T_3 的本征值来分类的，它们的本征值是 $\pm\frac{1}{2}$，使得

$$Q = \frac{N}{2} + T_3, \tag{11-14}$$

其中 N 是重子荷. 在拉氏理论框架里，相应的场量将构成一同位旋旋量 ϕ，并且当忽略质量差时，动能项

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\phi}(i\partial\!\!\!/ + M)\phi,$$

在下述同位旋转动下是不变的:

$$\phi \to U\phi \qquad \phi \to \phi U^{\dagger}, \tag{11-15}$$

其中 U 是 2×2 么模么正矩阵. 在最简单的情况下，我们将这个场以不变的方式耦合到同位旋矢量 $\boldsymbol{\pi}$ 介子上 (见第五章). 对于 π 介子，有类似于式(11-14)的关系，其中取 $N=0$ 而 T_3 取 $+1$，0，或 -1. 利用 π 介子的赝标特点可得唯一的(可重整化的)不变相互作用是

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = ig_{\pi NN}\bar{\phi}\gamma^5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\phi. \tag{11-16}$$

对 Pauli 矩阵或 π 介子场，用了黑体字表示同位旋空间的量. 方程 (11-16) 以紧凑的形式表达了各种耦合常数之间的一组关系:

$$g_{\pi^+pn} = \sqrt{2}\, g_{\pi^0pp} = -\sqrt{2}\, g_{\pi^0nn}, \qquad (11\text{-}17)$$

肯定了对称性的动力学内容. 这些关系是在注意到通常的场量 $\pi^{(+)}$, $\pi^{(-)} = (\pi^{(+)})^\dagger$ 和 $\pi^{(0)}$ 是通过下式与笛卡儿坐标相关的以后得到的:

$$\frac{1}{2}(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2) = \pi^{(-)}\pi^{(+)} + \frac{1}{2}\pi^{(0)2},$$

$$\pi^{(0)} = \pi_3, \qquad (11\text{-}18)$$

$$\pi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2).$$

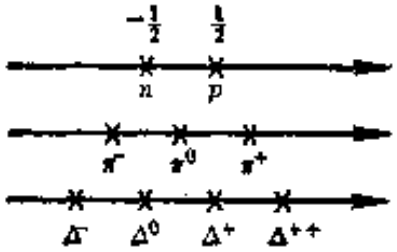


图 11-1 $SU(2)$ 的权图

注意, $\pi^{(-)}$ 产生一正 π 介子和湮灭一负 π 介子. 当讨论 π 介子-核子散射时,曾提到了这一对称性的某些动力学结果, 如截面的三角不等式. 在六十年代初, Gell-Mann 和 Ne'eman 成功地把同位旋对称性推广到较大群 $SU(3)$. 较确切地说, 所有已知的多重态相应于商群 $SU(3)/Z_3$ 的表示,其中 Z_3 是恒等元素的立方根产生的 $SU(3)$ 的阿贝尔中心. 因此,后者在强子态上的作用象一个恒等元素, 强子态被称为具有三重性为零.

我们记得, 表示是很方便地用群的无穷小厄米生成元的李代数来描述的. 其步骤在量子力学中是熟知的. 将一互相对易的生成元的最大集合(Cartan 子代数)对角化. 基础态是用在维数等于李代数的秩,即是 Cartan 子代数的维数的空间

中的权矢量来表示的，其分量等于这些算符的本征值．对于熟悉的秩为 1 的 $SU(2)$ 例子，权图是一维的，横坐标是 T_3 的本征值（图 11-1）．通过对易的线性作用而作用在李代数本身上的伴随表示起着特别的作用．在 $SU(2)$ 情况下它相应于同位旋 1，并有

$$\begin{aligned} T_\pm &= T_1 \pm iT_2, \\ [T_3, T_\pm] &= \pm T_\pm. \end{aligned} \tag{11-19}$$

此结果可推广到具有八个（3×3 无迹厄米的）生成元和秩为 2 的李代数的 $SU(3)$ 上．两个对角的生成元是同位旋 T_3 和超荷 Y 的线性组合，Y 等于重子数和奇异数之和．Gell-Mann 和 Nishjima 公式给出了与电荷的关系，从而推广了方程(11-14)：

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3, \qquad Y = N + S. \tag{11-20}$$

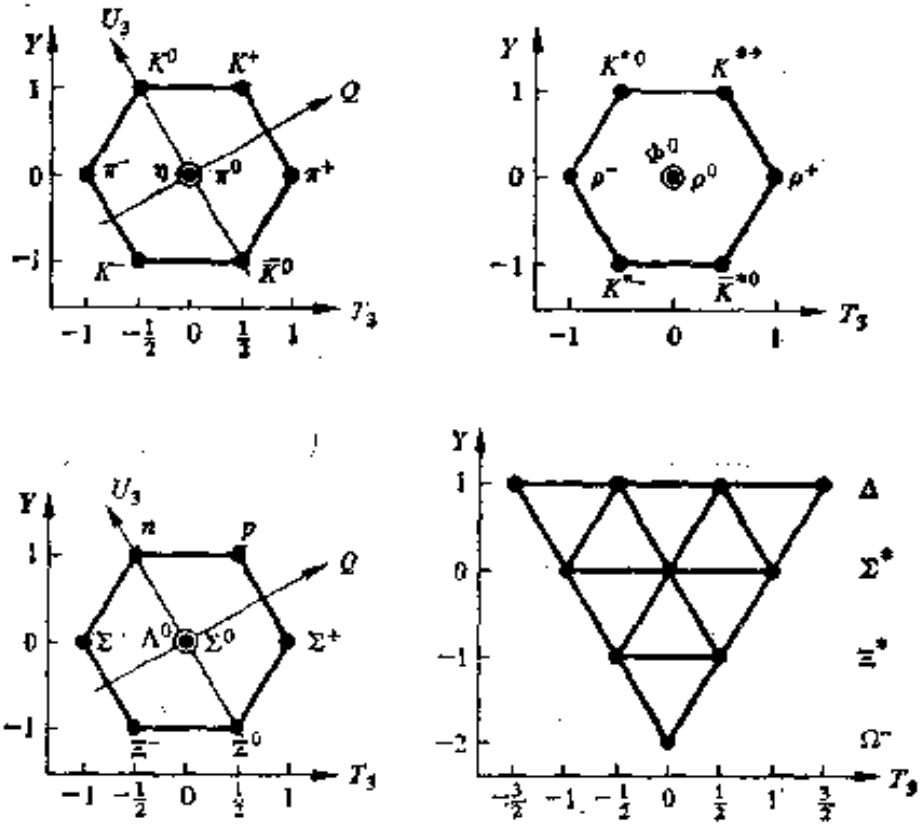


图 11-2　Gell-Mann 和 Neéman 模型中介子和重子八重态及共振十重态

重子和赝标介子(相应于 $SU(3)$ 的共轭表示)的最低维八重态,以及导致发现 Ω^- 粒子的共振十重态,示于图 11-2.

推广 Pauli 矩阵后的李代数的基由 Gell-Mann 矩阵给出:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_8=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&0&0\\0&1/\sqrt{3}&0\\0&0&-2/\sqrt{3}\end{pmatrix}. \tag{11-21}$$

这些矩阵是按下式归一化的:

$$\mathrm{tr}(\lambda_k\lambda_l)=2\delta_{lk},$$

并满足对易和反对易关系

$$[\lambda_k,\lambda_l]=2if_{klm}\lambda_m,$$

$$\{\lambda_k,\lambda_l\}=\frac{4}{3}\delta_{kl}+2d_{klm}\lambda_m, \tag{11-22}$$

其中 f_{klm} 是全反对称的,而 d_{klm} 是全对称的,它们的不为零的元素在下表给出:

klm	$2f_{klm}$	klm	$2d_{klm}$	klm	$2d_{klm}$
1 2 3	2	1 1 8	$2/\sqrt{3}$	3 6 6	-1
1 4 7	1	1 4 6	1	3 7 7	-1
1 5 6	-1	1 5 7	1	4 4 8	$-1/\sqrt{3}$
2 4 6	1	2 2 8	$2/\sqrt{3}$	5 5 8	$-1/\sqrt{3}$
2 5 7	1	2 4 7	-1	6 6 8	$-1/\sqrt{3}$
3 4 5	1	2 5 6	1	7 7 8	$-1\sqrt{3}$
3 6 7	-1	3 3 8	$2/\sqrt{3}$	8 8 8	$-2/\sqrt{3}$
4 5 8	$\sqrt{3}$	3 4 4	1		
6 7 8	$\sqrt{3}$	3 5 5	1		

(11-23)

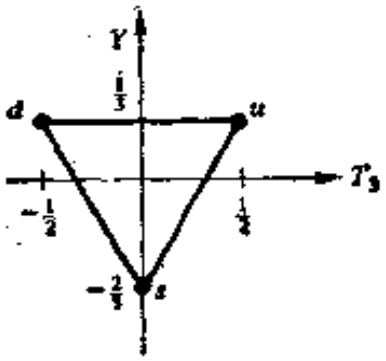


图 11-3　夸克三重态

从它引入的时候起，由于没有非零三重性的多重态，所以对么正对称性一直是有疑问的。最简单的是由 Gell-Mann 和 Zweig 引入的假想的夸克三重态。这些粒子[一个同位旋二重态(u, d)和一个同位旋单态(s)]具有分数电荷和分数重子数（图 11-3）。如果么正群变得比 $SU(3)$ 大，那么就要求有更多的携带新量子数的夸克，如粲夸克（c），它是电荷为 2/3 而超荷为 1/3 的同位旋单态。相应的新对称群 $SU(4)$ 的秩为 3。它的(四维)基础表示和(15 维)伴随表示的权图，如图

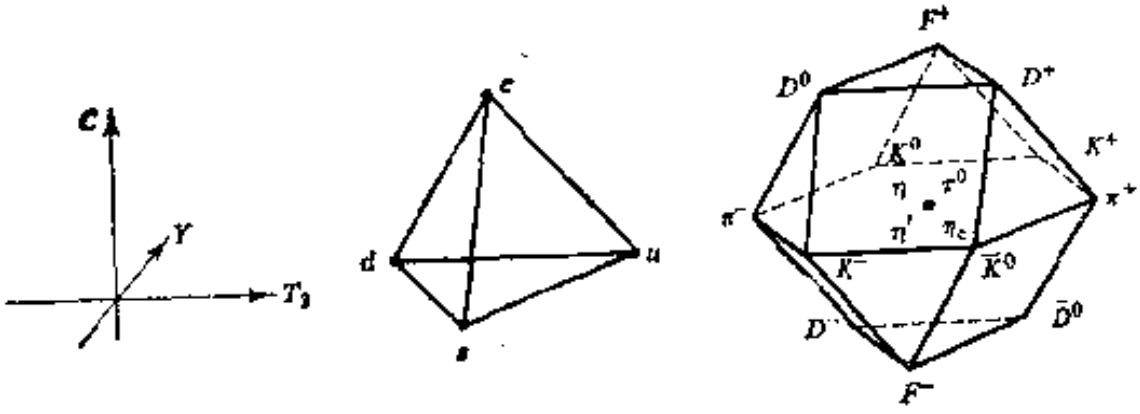


图 11-4　$SU(4)$ 的基础表示和伴随表示.
图中已表示出新的粲粒子.

11-4 所示.

曾做了很多不成功的尝试来探测自由夸克，大多数是测量它们的分数电荷.　看来所有已知的强子都是夸克的束缚态. 夸克可能永远被束缚的思想导致了"禁闭"这一术语，并且人们已提议了几种机制. 一个最有希望的是按照定域不变性假定有一不破缺的色对称性，下一章将讨论它.

强相互作用只是近似地遵从八重法对称性. 对一些更大的不变群尤是如此.尽管这样，对称性破缺的方式似乎是非常正规的，主要遵从所谓八重态规则. 只举一个例子来说，考虑同一多重态成员之间的质量差. 为了确定起见，考虑核子、Λ，Σ 和 Ξ 粒子的重子八重态的质量差. 在等效拉氏函数里，假定只有同位旋不变性，质量将有系数 m_N，m_Λ，m_Σ，m_Ξ. 每个双线性场量乘积(如 $\bar{p}p + \bar{n}n + \cdots$) 在 $SU(3)$ 变换下象两个八重态表示的乘积那样变换，它可按照 Clebsch-Gordan 系列分解为不可约部分.

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8' \oplus 8'' \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27, \qquad (11\text{-}24)$$

中性意味着在质量矩阵中没有非自共轭表示 10 和 $\overline{10}$. 这意味着四个物理质量可以重新表达为四个参量的线性组合，它们具有确定的变换性质，并按照下式组合:

$$
\begin{aligned}
m_N &= (m_1 - 2m_8' + m_8'' - 3m_{27}),\\
m_\Lambda &= (m_1 - m_8' - m_8'' + 9m_{27}),\\
m_\Sigma &= (m_1 + m_8' + m_8'' + m_{27}),\\
m_\Xi &= (m_1 + m_8' - 2m_8'' - 3m_{27}).
\end{aligned}
\tag{11-25}
$$

当然，这一改变并没有多大意思，除非某些不可约参量为零．然而，我们来假设质量分裂是在更基本的拉氏函数中被夸克质量项 $\bar{\psi}(a + b\lambda_8)\psi$ 所产生的，这种项仅有单态和八重态表示，并设这一性质在相互作用下被（奇迹般地）保留下来了．这表示在方程(11-25)中 m_{27} 为零，于是就导致了 Gell-Mann 和 Okubo 关系

$$
\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = \frac{1}{4}(3m_\Lambda + m_\Sigma). \tag{11-26}
$$

实验上很好地满足

$$
\frac{1}{2}(m_N + m_\Xi) = 1.128\text{Gev}
$$

$$
\frac{1}{4}(3m_\Lambda + m_\Sigma) = 1.134\text{Gev}.
$$

对于赝标八重态(K, π, η)，类似的公式成立，经验上是质量平方形式的关系，

$$
4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2. \tag{11-27}
$$

我们将允许与第九个 η' 介子有某种混合，给出九重态．利用方程(11-27)，根据公布的数值，它预言了 $m_\eta^2 = 0.320\text{Gev}^2$，实验值是 $m_\eta^2 = 0.301\text{Gev}^2$．

将八重态为主应用到共振十重态上导致等质量间隔，这与观察到的数据符合得相当好，而它对 Ω^- 粒子的完全量子数集合的预言被看作是一个巨大的胜利：

$$
m = m_0 + m_8 Y \qquad
\begin{aligned}
m_{\Sigma^*} - m_\Delta &= 152\text{Mev},\\
m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} &= 149\text{Mev},\\
m_\Omega - m_{\Xi^*} &= 139\text{Mev}.
\end{aligned}
\tag{11-28}
$$

么正对称性在散射振幅之间导致很多关系，它们与实验令人满意地一致. 当讨论流代数的应用时再详细讨论它.

11-2-2 自发对称性破缺

当基态在变换群下非不变时，就出现自发对称性破缺. 变换群作用在一个较大的不可分离的 Hilbert 空间，正象在无限铁磁体转动下的行为(第四章)所说明的那样. 下面启发式的评论可使我们相信这点. 让我们来计算态 $Q|0\rangle$ 的模，其中 Q 是总电荷

$$\langle 0|Q^2|0\rangle = \int d^3x\langle 0|j_0(x)Q|0\rangle. \qquad (11\text{-}29)$$

从平移不变性可知，这也等于

$$\int d^3x\langle 0|j_0(0)Q|0\rangle.$$

当 $Q|0\rangle \neq 0$ 时显然这是无穷大.

Goldstone 分析出的最惊人的结果是，当破缺对称性是连续时，会出现无质量粒子. 这些态是由使真空无穷小转动到退化真空的算符产生的，因为在物理态上这种变换不花费任何能量.

为了证明 Goldstone 定理，假定存在一守恒流，且考虑任一算符 A 使得

$$\delta a(t) \equiv \lim_{V\to\infty}\langle 0|[Q_V(t), A]|0\rangle \neq 0. \qquad (11\text{-}30)$$

存在这种可观察量，正好表示真空不是不变的. 在上述关系中插入一组具有确定四动量的完备中间态：

$$\begin{aligned}\delta a(t) = \lim_{V\to\infty}\sum_n\int_V d^3x[&\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iP_n\cdot x}\\ &-\langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iP_n\cdot x}]\\ =\sum_n(2\pi)^3&\delta^3(\mathbf{P}_n)[\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iE_nt}\end{aligned}$$

$$-\langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iE_n t}] \neq 0. \quad (11\text{-}31)$$

在方程(11-10)中已证明流守恒意味着

$$\frac{d}{dt}\delta a(t) = 0, \quad (11\text{-}32)$$

因此

$$0 = \sum_n (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{P}_n)E_n[\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|A|0\rangle e^{-iE_n t} + \langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle e^{iE_n t}]. \quad (11\text{-}33)$$

于是，从方程(11-31)和(11-33)得到必须存在态 $|n\rangle$ 使得 $\langle 0|A|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle \neq 0$，这时 $E_n\delta^3(\mathbf{P}_n)$ 为零. 这是一个与 j_0(和 A)具有相同量子数的无质量态，因为它是从真空中用这个算符生成的.

这些无质量态称之为 Goldstone 玻色子，它们是与对称性破缺相联系的. 如果 j_0 是波色型算符，它们实际上是玻色子. 较一般地说，如近来超对称性理论那样，令 j_μ 实际上可以携带半整数自旋，则相联系的无质量粒子将是费米子. 换句话说，这些态的自旋与 $j_\mu(x)$的 Lorentz 变换性质有关系.

微妙之处在于无质量态不必要是可观察量. 这一评论适用于具有不可观察态的非物理部分的理论(如在 Gupta-Bleuler 规范下的量子电动力学)，而当我们要避开定理的结论时，这一评论可能是有关的.

自发对称性破缺的机制是由它的美妙的要求所表征的，这与特定的破缺方案相反，如讨论八重态模型中所遇到的那些破缺方案. 就它不引入任何新参量来讲这是经济的. 这也是理论上的优点，因为它保持了可重整化性质. 作为一种副产品，无质量粒子的出现在某些应用里可能是不令人高兴的. 下一章我们将遇到一种很好的方法，那就是利用 Higgs 机制去处理它们.

作为自发对称性破缺的一个极端的例子，考虑一自由的无质量标量场，其拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2. \tag{11-34}$$

它在场量的平移变换下

$$\phi(x) \to \phi(x) + \lambda \tag{11-35}$$

是不变的．相关的守恒流是

$$j^\mu(x) = \partial^\mu\phi(x). \tag{11-36}$$

当然，真空在这些变换下不是不变的．如果在方程(11-30)中用 $\phi(x)$ 代替 A 可得

$$\delta\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \lambda\langle 0|0\rangle \neq 0, \tag{11-37}$$

或者说总"电荷"

$$\lim_{V\to\infty} Q_V(t) = \lim_{V\to\infty}\int_V d^3x\partial_0\phi(\mathbf{x}, t) \tag{11-38}$$

不是很好的定义．这时 Goldstone 玻色子是场量 ϕ 本身的量子．这个例子的一个有趣的地方是，可以考察通过 $e^{i\lambda Q_V}$ 作用得到的态．从场量的 Fourier 分解

$$\phi(x) = \int\frac{d^3k}{2k^0(2\pi)^3}[a(k)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik\cdot x}] \tag{11-39}$$

可以得到，在无穷体积极限下态

$$|\lambda\rangle = \lim_{V\to\infty} e^{i\lambda Q_V(0)}|0\rangle \tag{11-40}$$

可以取为形式

$$\begin{aligned}|\lambda\rangle &= \lim_{V\to\infty}\exp\Big\{\lambda\int_V d^3x \\ &\quad\times\int\frac{d^3k}{2(2\pi)^3}[a(k)e^{ik\cdot x} - a^\dagger(k)e^{-ik\cdot x}]\Big\}|0\rangle \\ &= e^{(\lambda/i)[a(0)-a^\dagger(0)]}|0\rangle,\end{aligned} \tag{11-41}$$

因此它是零动量态的相干迭加．为了证明$\langle\lambda|0\rangle$为零，必须更细心地处理无穷体积极限．最好引入一平滑的空间截断，例如

$$Q_V = \int d^3x\partial_0\phi(\mathbf{x}, 0)e^{-\mathbf{x}^2/V^{2/3}}. \tag{11-42}$$

读者可以容易地证明

$$\langle 0|\lambda\rangle = e^{-\pi(\lambda V^{1/3})^2/64} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{11-43}$$

显示自发对称性破缺的物理上有意义的模型，是一组 n 个互相耦合的标量场模型，其拉氏函数为

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2}(\partial\boldsymbol{\phi})^2 - \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\phi}^2)^2, \tag{11-44}$$

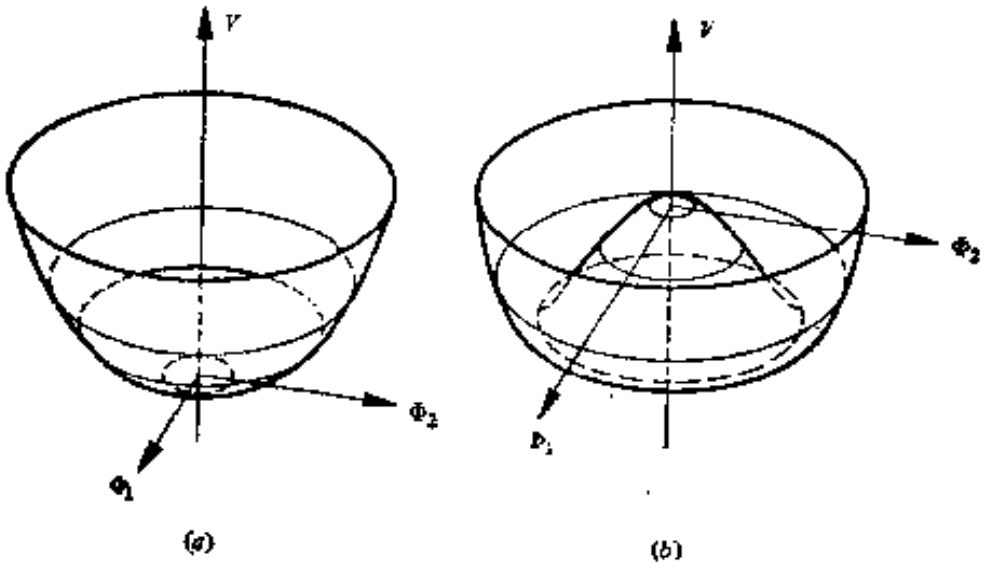


图 11-5 势 $V(\boldsymbol{\phi}) = (\mu^2/2)\boldsymbol{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\phi}^2)^2$.
(a) $\mu^2>0$; (b) $\mu^2<0$.

在内部 $O(n)$ 对称群下它是不变的. 其中 $\boldsymbol{\phi}$ 是这些场量的列矢量，如果裸质量参量 μ^2 是负的，那么将发生对称性破缺. 在经典范围内基态不是由零平均场值所描述的，这是由于势

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\phi}^2)^2 \tag{11-45}$$

在非零场量值

$$|\boldsymbol{\phi}| = v = \left(-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)^{1/2} \tag{11-46}$$

处有极小(图 11-5). 为了保证理论的稳定性，我们当然假定 $\boldsymbol{\phi}$ 的大值是被抑制的，这意味着 $\lambda > 0$. 这就好象真空是退化的，每个具有 $|\boldsymbol{\phi}| = v$ 的态是一当然的候补者. 然而，每

一选择都导致一不等价的 Hilbert 空间. 注意，基态值 ϕ_v 的这种选择将保留一 $O(n-1)$ 子群不破缺，相应于象恒等元素那样作用在 ϕ_v 上的那些变换.

为确定起见，在内部空间中取一坐标系，使得 $\phi_v = \langle 0| \times |\phi|0\rangle$ 只有第 n 个分量不为零，且用径向位移 ρ 以及 $(n-1)$ 个正交转动将场量参量化:

$$\phi = e^{t\cdot\xi/v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v+\rho \end{pmatrix}, \tag{11-47}$$

t_a, $1 \leqslant a \leqslant n-1$ 为有效地作用在矢量 ϕ_v 上的 $O(n)$ 群的 $n-1$ 个生成元. 换句话说，$O(n)$ 的李代数除了 $O(n-1)$ 生成元外还包括 $n-1$ 个 t_a 的生成元. 当依赖于新动力学变量 ρ 和 ξ 表示时，拉氏函数是

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial\xi)^2 - \frac{\mu^2}{2}(v+\rho)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+\rho)^4. \tag{11-48}$$

由此可以见，ξ 相应于 $(n-1)$ 个退耦的无质量场，正象 Goldstone 定理所预言的那样.

在 11-4 节中将详细地研究前面的例子，在经典范围里基态的退化是明显的. 然而，在第七章中我们已知道量子修正可以改变势，辐射修正的结果可能产生真空退化. 正象 Coleman 和 Weinberg 所指出的那样，下述标量电动力学模型就是这种情况. 将一个复的无质量玻色场最小地耦合到电磁场上. 拉氏函数是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{em} + \frac{1}{2}(\partial\phi_1 - eA\phi_2)^2$$

$$+\frac{1}{2}(\partial\phi_2+eA\phi_1)^2$$

$$-\frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2, \tag{11-49}$$

复场ϕ是用它的两个实分量ϕ_1和ϕ_2写出来的，而且非谐振耦合常数表示为$\lambda/4!$. 比较等效势的单圈计算和拉氏函数

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{11-50}$$

算出的方程(9-129)，可得到结果

$$V=\frac{\lambda}{4!}\phi^4+\frac{\lambda^2\phi^4}{(16\pi)^2}\left(\ln\frac{\phi^2}{M^2}-\frac{25}{6}\right). \tag{11-51}$$

第九章中是在场量值等于M的点上进行重整化的以保证，

$$\lambda=\frac{d^4}{d\phi^4}V(\phi)|_{\phi=M}. \tag{11-52}$$

当回到标量电动力学时，我们可以利用表示在图11-6上的ϕ_1^4对V贡献的对称因子来重复类似的计算. 其结果是

$$V=\frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2+\left(\frac{5}{1152\pi^2}\lambda^2+\frac{3e^4}{64\pi^2}\right)\times(\phi_1^2+\phi_2^2)^2\left[\ln\left(\frac{\phi_1^2+\phi_2^2}{M^2}\right)-\frac{25}{6}\right]. \tag{11-53}$$

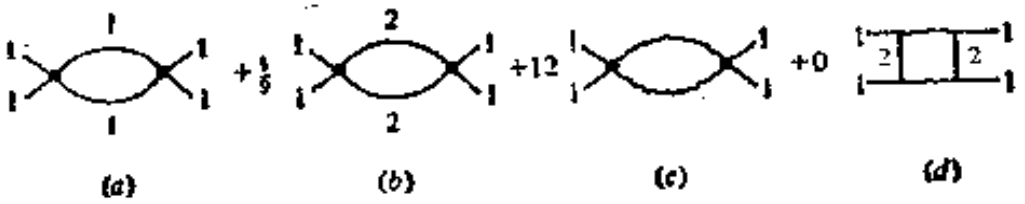


图11-6 具有四个ϕ_1场的Green函数的单圈图的相对权重

计算是在Landau规范中进行的. 最后一个图，图11-6d，在零动量处给出零贡献. 图(c)中的因子3来自$(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/k^2)$的迹. 其余的权

来自顶角.

假定 λ 和 e^4 是可比较的，这是自洽的. 实际上，λ 耦合是由在 e^4 级出现的额外发散性产生的. 因此，与 e^4 比较可以忽略 λ^2 级. 这样方程(11-53)的势对非零值 $\phi_v^2 = \phi_{v,1}^2 + \phi_{v,2}^2$ 有一极小，由下式给出

$$\left[\frac{\lambda}{6} - 11\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\right] + 3\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \ln\frac{\phi_v^2}{M^2} = 0. \tag{11-54}$$

如果选择 ϕ 的大小使得 $M^2 = \phi_v^2$，即

$$\lambda = \frac{d^4V}{d\phi^4}\bigg|_{\phi^2=\phi_v^2}, \tag{11-55}$$

我们发现，关系式

$$\lambda = 66\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \tag{11-56}$$

确实给出 e^4 级的 λ 值. 现在理论的参量是 e 和 ϕ_v.

类似的推理不适用于方程(11-50)的纯 φ^4 理论. 对 ϕ_v 势 V 的确有一极小值，使得

$$\frac{\lambda}{6} - \frac{11\lambda^2}{192\pi^2} + \frac{\lambda^2}{64\pi^2}\ln\frac{\phi_v^2}{M^2} = 0, \tag{11-57}$$

即

$$\lambda\ln\frac{\phi_v^2}{M^2} = -\frac{32}{3}\pi^2 + O(\lambda). \tag{11-78}$$

然而，现在量 $\lambda\ln(\phi_v^2/M^2)$ 是相当大的，所以我们预期高级量子修正是不可忽略的. 换而言之，在这种情况下令 $\phi_v^2 = M^2$ 是不合理的，因为这意味着 λ 值很大，因而微扰级数是不可信的.

对于标量电动力学，自发对称性破缺不出现任何无质量玻色子. 相反，矢量和标量粒子都获得质量，它们由下式给出：

$$m_\phi^2 = 6\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\phi_v^2,$$

$$m_A^2 = e^2\phi_v^2, \tag{11-59}$$

其引人注意的结果是

$$\frac{m_\phi^2}{m_A^2} = O(e^2). \tag{11-60}$$

下一章将详细研究出现这一行为的原因.

在结束这一节时我们讨论一下时空维数的作用. 由 Mermin 和 Wagner 给出的定理，是说连续对称性仅可能在维数大于 2 时发生自发破缺. 对于分立对称性这个低的临界维数是 1. 事实上这是已知的，因为在有限多自由度的量子力学里(相应于一维场论)，在退化经典极小之间的隧道效应考虑的是一唯一的对称基态. 也可以考虑场论中分立的类似情况，最简单的例子是统计力学中的 Ising 模型. 路径积分被 $e^{-E/kT}$ 类型项的和所代替，其中 E 是组态能量. 对于 Ising 模型，$E = -J\Sigma_{(ij)}\sigma_i\sigma_j$，其中求和取遍邻近格点，而分立的"自旋" σ_i 取 ± 1 值. 这种模型容许有一分立对称性，相应于将所有自旋反向 $\sigma_i \to -\sigma_i$. 这一对称性在维数大于或等于 2 时，在临界点以下的低温相里自发地破缺，但在维数为 1 时无跃迁 (Peierls, 1938).

一个类似的模型是经典的 Heisenberg 模型，它是用在球上的单位矢量代替变量 σ_i. 这时如果 S_i 有 n 个分量，则有连续的 $O(n)$ 群作用，且在三维以下没有自发磁化.

Coleman 在场论的框架内重新叙述了 Mermin-Wagner 定理. 通过证明一连续对称性的自发破缺将导出 Goldstone 玻色子，我们可建立这一性质. 但是，在二维时空里，不可能构成无质量标量场算符. 实际上，相应的两点 Wightman 函数

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle &= \int \frac{d^2k}{2\pi}\,\theta(k^0)\delta(k^2)e^{ik\cdot x} \\ &= \int_0^\infty \frac{dk^1}{2\pi k^1}\cos(k^1x^1)e^{ik^1x^0}\end{aligned} \tag{11-61}$$

是无意义的红外发散积分. 设计不出一种减除步骤可以绕过这一困难而不破坏场论的基本性质，如 Hilbert 空间度规的正定性. 由于严重的红外发散性，在二维世界里无质量标量场论是无定义的. 用统计语言来说，在这个维数里是涨落压倒了毁坏长程级的能量.

一个简单的论证可显示出这个现象的本质. 我们利用格点上的分

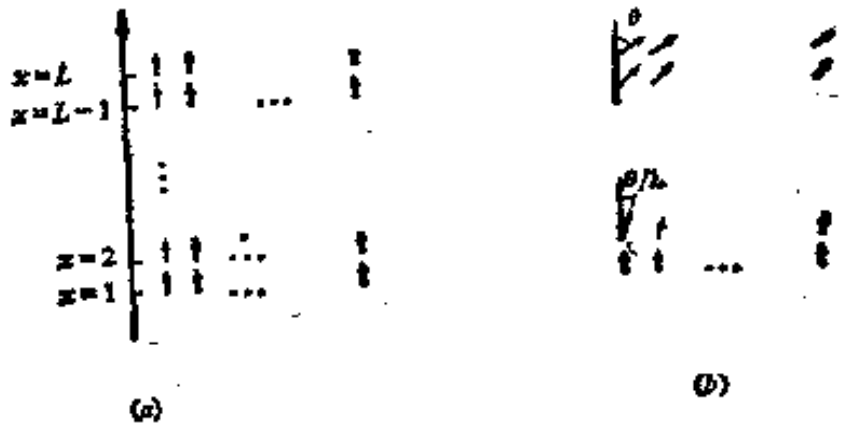


图 11-7　在 d 维格点上经典 Heisenberg 模型的两个组态，其中一个方向选来表明平均自旋的连续转动效应.

立的经典 Heisenberg 模型. 比较在图 11-7 中表示的两个组态，图中“自旋”的方位允许沿比如说第一轴的方向变化. 其作用量分别以与 $E_a = -L^d$ 和 $E_b = -L^{d-1}\sum_{1}^{L}\cos(\theta/L)$ 成正比的能量来代替. 这些组态的相对权重由 Boltzmann 因子给出，

$$e^{\beta(E_b - E_a)} \sim e^{-\beta\theta^2 L^{d-2}/2}.$$

对于比 2 大的 d 维来讲，可以看到(b)组态的热力学极限和足够低的温度下有可忽略的权重，这意味着有利于有序. 对于 $d = 2$ 的情况，在涨落上的平均将破坏这个有序. 对分立对称性可作类似的讨论，证明较低的临界维数这时等于 1.

11-3　流 代 数

11-3-1　流对易子

弱相互作用的研究促使我们详细地考虑强子流的结构和性质. 唯象地讲，这些相互作用可以很好地由一等效的流-流拉氏函数形式来描述，

$$\mathscr{L} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^{\mu}(x) J^{\dagger}_{\mu}(x), \qquad (11\text{-}62)$$

其中 G 是 Fermi 常数，

$$G = (1.026 \pm 0.001) \times 10^{-5} m_p^{-2}. \qquad (11\text{-}63)$$

总的流 $J_\mu(x)$ 是轻子流 (l_μ) 和强子流 (h_μ) 的贡献之和，

$$J_\mu(x) = l_\mu(x) + h_\mu(x). \qquad (11\text{-}64)$$

不考虑新发现的大质量轻子的贡献时，轻子流仅包含负螺旋度电子 e^-，μ^- 以及中微子 ν_e，ν_μ：

$$l_\alpha(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\rho(1-\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}(x). \qquad (11\text{-}65)$$

强子流本身是奇异数守恒部分 $h_\rho^{(\Delta S=0)}$ 和奇异数改变部分 $h_\rho^{(\Delta S=1)}$ 的组合，

$$h_\mu = \cos\theta_c h_\rho^{(\Delta S=0)} + \sin\theta_c h_\rho^{(\Delta S=1)}, \qquad (11\text{-}66)$$

其中 θ_c 是 Cabibbo 角，近似地等于

$$\theta_c \simeq 0.25. \qquad (11\text{-}67)$$

这样的分解意味着，可以把与具有不同量子数的跃迁相联系的各种分量的大小连系起来．这种大小是由流对易子非线性代数给出的．

每个流象轻子流一样是矢量和轴矢量部分的迭加 $V-A$．在么正对称性框架里，它们属于由 V^a 和 $A^a(a=1,\cdots,8)$标记的八重态流：

$$\begin{aligned} h_\mu^{(\Delta S=0)} &= (V_\mu^1 - iV_\mu^2) - (A_\mu^1 - iA_\mu^2), \\ h_\mu^{(\Delta S=1)} &= (V_\mu^4 - iV_\mu^5) - (A_\mu^4 - iA_\mu^5). \end{aligned} \qquad (11\text{-}68)$$

读者不要混淆了这里用的 A_μ 记号，这里的 A_μ 是轴矢流，在电动力学里它的意义是势，两者都是习惯的记号．

由这些假设所补充的流-流弱相互作用导致了显著的普适性质．例如，考虑在中子 β 衰变中测量的矩阵元

$$G\langle p|h_\mu^{(\Delta S=0)}|n\rangle = \bar{u}_p\gamma_\mu(G_V - G_A\gamma_5)u_n. \qquad (11\text{-}69)$$

由于中子-质子质量差很小，所以右边的形状因子 G_V 和 G_A 是在零动量迁移处计算的．在 1% 的范围内 G_V 的观察值与 μ 衰变中测量到的相应量一致．在式(11-63)中引用的值，是

从考虑了辐射修正的 μ 衰变中得来的. 涉及强相互作用粒子的最确切的测量,通常是在核态之间的允许 β 跃迁($0^+ \to 0^+$)中进行的. 要细心地考虑各种修正效应,如辐射修正、Cabibbo 角等. 某些最近的值是

$$^{14}\mathrm{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}\mathrm{N} \qquad G_V/G = 1.006,$$

$$^{26}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{26}\mathrm{Mg} \qquad G_V/G = 1.011.$$

如果循着 Gell-Mann 和 Feynman, 我们假定矢量流 V_μ 是守恒的,则 $G_V(0)$ 不为强相互作用所重整化这一事实,就可得到自然的解释因而事实上产生了强子么正对称性. 换句话说, $V_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ 是同位旋流的分量, 且当忽略了 $SU(3)$ 破坏时 $V_\mu^{(\Delta S=1)}$ 近似地守恒. 因此,强子电磁流是

$$j_\mu^{em} = V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8.$$

这里为了便于比较在 j^{em} 的定义里略去了因子 e. 这一假设是电磁情况的推广, 在电磁情况下流守恒意味着电荷重整化是普适的. 我们记得, 在第七章和第八章中表示守恒定律的 Ward 等式, 意味着电荷重整化完全是由于真空极化引起的. 所有费米子相互作用仅导致波函数重整化常数 $Z_2 = Z_1$.

因此, 矢量强子弱流的某些分量和电磁流的同位旋矢量部分,是同一多重态的成员, 所以同时守恒. Gell-Mann 和 Feynman 的守恒矢量流假设, 可以通过比较同一同位旋多重态成员的弱和电磁衰变率来检验. 在粒子物理中我们得到了对 $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu$ 和 $\pi^- \to \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 跃迁的预言. 由于动量转移很小, 振幅是通过一同位旋转动直接用相应的电荷矩阵元来归一化的. 这便使衰变率为

$$\Gamma_{\pi^\pm \to \pi^0 + (e\nu)} = \frac{G^2 (m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^5}{30\pi^3} = 0.45 s^{-1},$$

其中已忽略了 $m_\pi^2/(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2 \sim 10^{-2}$ 量级项,这是与实验值

$$\Gamma_{\pi^\pm \to \pi^0 + (e\nu)} = (0.39 \pm 0.03) s^{-1}$$

可比较的. 在核物理中也可以进行准确的检验.

相反，轴矢流即使在精确的 $SU(3)$ 不变性极限下也不守恒. 因此，在 β 衰变中测量的轴矢耦合常数不等于矢量部分

$$\frac{G_A}{G_V} = 1.22 \pm 0.02. \tag{11-70}$$

然而，可以设想来研究轴矢流守恒的极限，至少是研究奇异数守恒流. 这种守恒将相应于由荷 Q^a 和 Q_5^a 生成的附加手征 $SU(2) \times SU(2)$ 不变群.

如果适于描述强子的基本动力学变量包括夸克场，则可以得到一明显的流表达式

$$V_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x)$$

$$A_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(x). \tag{11-71}$$

于是，可以得到流以及相应的荷

$$Q^a(t) = \int d^3x V_0^a(\mathbf{x}, t)$$

$$Q_5^a(t) = \int d^3x A_0^a(\mathbf{x}, t) \tag{11-72}$$

的等时对易关系. Gell-Mann 曾假定从夸克模型得到的这些对易关系仍然成立，与强子的结构无关. 如果 $SU(3)$ 不是精确地正确，则某些电荷会依赖于时间，而等时代数仍然是时间无关的：

$$\begin{aligned} &[Q^a, Q^b] = if_{abc}Q^c, \\ &[Q^a, Q_5^b] = if_{abc}Q_5^c, \\ &[Q_5^a, Q_5^b] = if_{abc}Q^c. \end{aligned} \tag{11-73}$$

我们看到，这一对易规则正是群 $SU(3) \times SU(3)$ 的李代数的对易规则. 容易通过构造下述左、右手组合来证实这一点：

$$Q_{\mp}^{a}=\frac{1}{2}\left(Q^{a}\mp Q_{5}^{a}\right). \tag{11 74}$$

它们满足

$$\begin{aligned}&[Q_{\pm}^{a},\ Q_{\pm}^{b}]=if_{abc}Q_{\pm}^{c},\\&[Q_{+}^{a},Q_{-}^{b}]=0.\end{aligned} \tag{11-75}$$

普通么正群是 $SU(3)\times SU(3)$ 对角的子群，而宇称算符交换了两组荷

$$\mathscr{P}Q_{+}\mathscr{P}^{-1}=Q_{-}. \tag{11-76}$$

荷代数赋予它的意义于普适性概念，因为它基本上是非线性的．例如，从

$$[Q^{1\pm i2},\ Q^{1-i2}]=2Q^{3} \tag{11-77}$$

可以得到，进入弱作用振幅的左边的矩阵元是普适地相对于同位旋被归一化．

关系式（11-73）可以分两步推广．首先写下表示在 $SU(3)\times SU(3)$ 变换下 V_{μ}^{a} 和 A_{μ}^{a} 行为的荷与流之间的对易关系．因而从夸克模型得出了这样的事实：流是属于表示 $(1,8)\oplus(8,1)$ 的：

$$\begin{aligned}&[Q^{a}(t),\ V_{\mu}^{b}(\mathbf{x},t)]=if_{abc}V_{\mu}^{c}(\mathbf{x},t),\\&[Q^{a}(t),\ A_{\mu}^{b}(\mathbf{x},t)]=if_{abc}A_{\mu}^{c}(\mathbf{x},t),\\&[Q_{5}^{a}(t),\ V_{\mu}^{b}(\mathbf{x},t)]=-if_{abc}A_{\mu}^{c}(\mathbf{x},t),\\&[Q_{5}^{a}(t),\ A_{\mu}^{b}(\mathbf{x},t)]=if_{abc}V_{\mu}^{c}(\mathbf{x},t).\end{aligned} \tag{11-78}$$

将方程(11-78)对空间积分，就得到了荷的对易关系．

第二步夸克模型提出对时间分量有如下的对易关系：

$$\begin{aligned}&[V_{0}^{a}(\mathbf{x},t),\ V_{0}^{b}(\mathbf{y},t)]\\&=if_{abc}V_{0}^{c}(\mathbf{x},t)\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\&[V_{0}^{a}(\mathbf{x},t),\ A_{0}^{b}(\mathbf{y},t)]\\&=if_{abc}A_{0}^{c}(\mathbf{x},t)\delta^{3}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\&[A_{0}^{a}(\mathbf{x},t),\ A_{0}^{b}(\mathbf{y},t)]\end{aligned} \tag{11-79}$$

$$= if_{abc}V_0^c(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

这些时间分量之间的关系似乎是没问题的. 可以推测，如果想将它推广到包含所有分量的情况，将不会是这样的. 很可能出现包含 δ 函数微商的项. 例如，我们会有

$$[V_0^a(\mathbf{x},t)V_i^b(\mathbf{y},t)]$$
$$= if_{abc}V_i^c(\mathbf{x},t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + S_{ab,ij}\partial_j\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{11-80}$$

这种附加项最早是 Schwinger 在讨论守恒电磁流[$U(1)$ 对称性]时引入的. 这时我们假定下述关系成立:

$$[j_0(\mathbf{x},t),\ j_i(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{11-81}$$

由于在此阿贝尔情况中结构函数为零，右边不出现 δ 函数的贡献，其结果为

$$[j_0(\mathbf{x},t),\ \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{11-82}$$

由于流守恒，这也意味着

$$[j_0(\mathbf{x},t),\ \partial_0 j_0(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{11-83}$$

取真空平均值且插入能量本征态的完备集，在 $\mathbf{x}\to\mathbf{y}$ 极限下将导致

$$\sum_n E_n|\langle 0|j_0(0)|n\rangle|^2 = 0. \tag{11-84}$$

从能量的正定性可得 j_0 为零! 至少在这种情况下 Schwinger 项是不可避免的.

在由积分得到的量[Q, j_μ]中不出现这些附加的贡献. 当处理空间分量的等时对易子时，情况更复杂，它们很强地与模型相关，所以在下面将不用它们.

在 5-1-7 节中，在试图写下编时乘积真空平均值的谱表示或电磁流对易子时，我们已遇到过 Schwinger 项. 我们注意到在 Schwinger 项和朴实的编时乘积 ($\widetilde{T}$) 与它的协变守恒部分(T)的定域非协变差之间的关系. 我们曾得到

$$\langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle$$
$$=\langle 0|\tilde{T}j_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle - i(g_{\mu\nu}-g_{\mu 0}g_{\nu 0})\delta^4(x-y)\xi, \tag{11-85}$$

其中 ξ 是在谱函数上的积分，

$$\xi=\int dM^2\,\frac{\rho(M^2)}{M^2}. \tag{11-86}$$

另一方面，已经证明过

$$\langle 0|[j_0(\mathbf{x},t),\ j_k(\mathbf{y},t)]|0\rangle$$
$$=i\partial_k\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\xi. \tag{11-87}$$

如果假定 Schwinger 项和任意流与态的朴实的编时乘积的非协变部分(海鸥项)之间的关系成立，那么在应用流代数时这些不期望的贡献都相消了. 事实上，从协变编时乘积所满足的 Ward 等式可以得到一个典型的结果

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle A|Tj^\mu(x)j^\nu(y)|B\rangle$$
$$=\langle A|T\partial_\mu j^\mu(x)j^\nu(y)|B\rangle+\delta(x^0-y^0)$$
$$\times\langle A|[j^0(x),\ j^\nu(y)]|B\rangle$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\text{海鸥项}). \tag{11-88}$$

如果最后一项被源于等时对易子的 Schwinger 项所抵消，那么两者都可去掉而等式成为朴实的结果:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle A|Tj^\mu(x)j^\nu(y)|B\rangle=\langle A|T\partial_\mu j^\mu(x)j^\nu(y)|B\rangle$$
$$+\delta(x^0-y^0)\langle A|[j^0(x),\ j^\nu(y)]|B\rangle|_{\text{naive}}, \tag{11-89}$$

这将认为是理所当然的. 一旦关于流散度的某些信息是可靠的，就可用 Ward 等式来得到低能定理和求和规则. 对轴矢流可以假定部分守恒律成立 (PCAC)，它的确切形式将在下面叙述. 然而，我们首先指出如何检验定域对易关系. 它使

我们能引入一个新的方法，即所谓 Dirac，Fubini和 Furlan 的无穷大动量系方法。

对于 A 和 B 选择等动量 p 的核子态且对它们的极化取平均，于是定义

$$W_{\mu\nu}(p,q)=\frac{1}{2\pi}\int d^4x e^{iq\cdot x}\times\frac{1}{2}\sum_{\text{极化}}\langle p|[j^a_\mu(x),j^b_\nu(0)]|p\rangle. \tag{11-90}$$

对 q_0 积分产生等时对易子

$$\int dq^0 W_{00}(p,q)=\int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\times\frac{1}{2}\sum_{\text{极化}}\langle p|[j^a_0(\mathbf{x},0),j^b_0(0)]|p\rangle. \tag{11-91}$$

在典型的应用里流被选为矢量密度 $j^{a,b}_0=V^{1\pm i2}_0$ 或 $V^{4\pm i5}_0$，它们的对易子等于 V^3_0 和 V^8_0 的组合。例如，

$$\begin{aligned}&\int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\frac{1}{2}\sum_{\text{极化}}\langle p|[V^{1+i2}_0(\mathbf{x},0),V^{1-i2}_0(0)]|p\rangle\\&=4\int d^3x\delta^3(\mathbf{x})\frac{1}{2}\sum_{\text{极化}}\langle p|V^3_0(0)|p\rangle\\&=4\frac{p_0}{m}T^3,\end{aligned} \tag{11-92}$$

其中 T^3 是核子同位旋的第三分量，而状态已按照 $\langle p|p'\rangle=(p_0/m)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ 来归一化了。

协变振幅 $W_{\mu\nu}$ 是按下式分解的：

$$W_{\mu\nu}=-W_1g_{\mu\nu}+W_2\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}-iW_3\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p_\rho q_\sigma}{2m^2}+W_4\frac{q_\mu q_\nu}{m^2}+W_5\frac{p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu}{2m^2}$$

$$+ iW_5 \frac{p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu}{2m^2}, \tag{11-93}$$

其中 $W_1, \cdots, W_6$ 是 Lorentz 不变量 q^2 和 $\nu = q \cdot p$ 的函数. 因此,

$$\int dq^0 W_{00}(p, q) = p_0 \int d\nu \left(\frac{-W_1}{p_0^2} + \frac{W_2}{m^2} + \frac{q_0^2}{p_0^2 m^2} W_4 + \frac{q_0}{p_0 m^2} W_5 \right)_{\text{固定}q}. \tag{11-94}$$

如果选择一参考系使 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$, 因此有 $q_0 = \nu/p_0$ 且 $q^2 = (\nu/p_0)^2 - \mathbf{q}^2$, 可以重写式(11-94)为

$$\int dq^0 W_{00}(p, q) = p_0 \int d\nu \left(\frac{-W_1}{p_0^2} + \frac{W_2}{m^2} + \frac{\nu^2 W_4}{p_0^4 m^2} + \frac{\nu W_5}{p_0^2 m^2} \right)_{\text{固定}q}. \tag{11-95}$$

求和规则的解释仍然是复杂的,因为它依赖于 P_0. 不选择使 $P_0 = m$ 的核子静止系, 而是用 P_0 趋于无穷, q^2 固定的极限系是比较聪明的办法.

$$\begin{aligned} &P_0, \ |\mathbf{p}| \to \infty \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0, \\ &q^2 \to -\mathbf{q}^2 \quad \text{固定}. \end{aligned} \tag{11-96}$$

如果极限和积分可以交换,就得到

$$\frac{1}{m^2} \int d\nu W_2(\nu, q^2 = -\mathbf{q}^2) = \lim_{p_0 \to \infty} \frac{1}{p_0} \int dq^0 W_{00}. \tag{11-97}$$

在式(11-91)和(11-92)看来这是一严厉的约束, 因为特别是它意味着左边与 q^2 无关. 这便检验了流代数的定域特征.

这种类型的求和规则有几个应用, 这里举其中几个. 当将方程(11-97)用到同位旋矢量流 V^{1+i2}, V^{1-i2} 上时,就得到

Cabbibo-Radicati 求和规则

$$2\frac{dF_1^V}{dq^2}(0)=\left[\frac{F_2^V(0)}{2m}\right]^2+\frac{1}{2\pi^2\alpha}\times\int_{\nu_{\text{thresh}}}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}(2\sigma_{1/2}^V-\sigma_{3/2}^V),\tag{11-98}$$

其中 $F_1^V(q^2)$，$F_2^V(q^2)$ 是同位旋矢量核子形状因子，即使得电磁流矩阵元为

$$\langle p_2|j_\mu^{em}(0)|p_1\rangle=\bar{u}_2\left[\gamma_\mu\left(\frac{F_1^S+F_1^V\tau_3}{2}\right)+\frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2m}q^\nu\left(\frac{F_2^S+F_2^V\tau_3}{2}\right)\right]u_1,\tag{11-99}$$

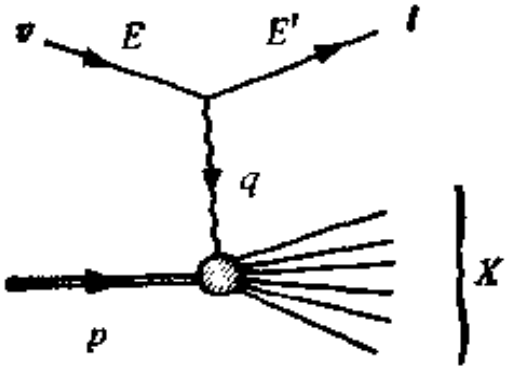


图 11-8 单举过程 $\nu+N\to l+X$

而 $\sigma_{1/2}^V$ 和 $\sigma_{3/2}^V$ 分别是在总同位旋道 $\frac{1}{2}$ 或 3/2 里“同位旋矢量”光子在核上散射的总强子截面．求和规则两边的实验值是很好地一致的．以 π 介子质量平方的倒数为单位可得

$$2\frac{dF_1^V}{dq^2}(0)=0.132m_\pi^{-2},$$

$$\left[\frac{F_2^V(0)}{2m}\right]^2+\frac{1}{2\pi^2\alpha}\int_{\nu_{\text{thresh}}}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}(2\sigma_{1/2}^V-\sigma_{3/2}^V)=0.126m_\pi^{-2}.\tag{11-100}$$

对中微子 (ν) 或反中微子($\bar{\nu}$) + 核子(N) → 轻子 (l)+ X 过程的单举截面，其中 X 是未确认出的强子态，此单举截面

可用出现在表达式(11-93)中的 W_1，W_2，W_3 结构函数来表示，

$$\frac{d\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{d|q^2|d\nu}=\frac{G^2}{2\pi m}\frac{E'}{E}\left(2W_1^{(\nu,\bar{\nu})}\sin^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$+W_2^{(\nu,\bar{\nu})}\cos^2\frac{\theta}{2}\mp W_3^{(\nu,\bar{\nu})}$$
$$\left.\times\frac{E+E'}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{11-101}$$

运动学变量 ν 和 q^2 是与入射中微子能量 E、终态轻子能量 E' 及实验室散射角 θ 有关的，

$$\nu=p\cdot q=m(E-E'),$$
$$q^2=-4EE'\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{11-102}$$

对于高能实验，可忽略轻子质量．这便解释了式(11-101)中没有 W_4，W_5，W_6 以及动量转移的简单的表达式．在第十三章中将详细研究这类过程．

对固定的 q^2 和 ν，当 E（因此 E'）增加时，θ 趋于零，截面近似地可以只用 W_2 的贡献来近似．因此，

$$\lim_{E\to\infty}\frac{d\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{d|q^2|}=\frac{G^2}{2\pi m}\int_{-q^2/2}^{\infty}d\nu W_2^{(\nu,\bar{\nu})}(\nu,q^2). \tag{11-103}$$

交叉对称性意味着

$$W_i^{(\nu)}(\nu,q^2)=-W_i^{(\bar{\nu})}(-\nu,q^2), \tag{11-104}$$

于是流代数使我们能写下 Adler 求和规则

$$\lim_{E_1\to\infty}\left(\frac{d\sigma^{(\nu)}}{d|q^2|}-\frac{d\sigma^{(\bar{\nu})}}{d|q^2|}\right)$$
$$=\frac{G^2}{\pi}\left[2T_3\cos^2\theta_c+\left(T_3+\frac{3Y}{2}\right)\sin^2\theta_c\right], \tag{11-105}$$

其中 T_3 是同位旋第三分量，Y 是靶的超荷，而 θ_c 是 Cabbibo 角．利用矢量流 V^{1+i2} 后，类似的结果也适用于单举非弹性

电子散射 $e + N \to e + X$. 因为流代数不适用于电磁流的同位旋标量部分，所以由 Bjorken 得到的预言仅是在中子和质子靶上求和的不等式:

$$\lim_{q_1 \to \infty} \left(\frac{d\sigma^{en}}{d|q^2|} + \frac{d\sigma^{ep}}{d|q^2|} \right) \geqslant \frac{2\pi\alpha^2}{(q^2)^2}. \qquad (11\text{-}106)$$

11-3-2 轴矢流近似守恒和手征对称性

$SU(2) \times SU(2)$ 李代数是由矢量和轴矢量荷的对易规则产生的. 假定轴矢流近似守恒，则得到的对称性被称为手征对称性. 它是在 Goldstone 模式里实现的，其中 π 介子被看作无质量粒子. 这一假设使我们能从求和规则形式的流代数和低能定理推出新结果. 推广到包括奇异数改变流的 $SU(3) \times SU(3)$ 是有问题的.

考虑在 π 介子态和真空态之间的轴矢流矩阵元

$$\langle 0 | A_\mu^i(x) | \pi^k(p) \rangle = i p_\mu \delta^{ik} f_\pi e^{-ip \cdot x}. \qquad (11\text{-}107)$$

这一振幅确定 $\pi \to \mu^- \nu$ 的衰变率为

$$\Gamma_{\pi \to \mu\nu} = \frac{G^2 m_\mu^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4\pi m_\pi^3} \cos^2\theta_c. \qquad (11\text{-}108)$$

实验上测量出的 f_π 为

$$f_\pi \simeq 93\text{MeV}. \qquad (11\text{-}109)$$

从式(11-107)得 $\partial^\mu A_\mu(x)$ 的矩阵元是

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^i(x) | \pi^k(p) \rangle = m_\pi^2 \delta^{ik} f_\pi e^{-ip \cdot x}, \qquad (11\text{-}110)$$

因此流守恒意味着 $f_\pi m_\pi^2 = 0$. 存在两种可能的选择. f_π 和 m_π^2 必有一个是零，这与实验事实相矛盾. 尽管如此，作为尝试性近似，我们大胆设想一个具有无质量 π 介子的世界. 如果 $SU(2) \times SU(2)$ 群是用不变真空来实现的，这就导致一个具有宇称退化多重态和相应的选择规则的不现实世界. 另一方面，Goldstone 实现是与 π 介子的质量比其它介子的小得多

这一事实一致的.

因此，让我们来揭示令 $\partial^\mu A_\mu = 0$ 和 $m_\pi^2 = 0$ 时的结果. 计算在核子态之间的轴矢流矩阵元

$$\langle N(p_2)|A_\mu^i(0)|N(p_1)\rangle = \bar{u}(p_2)\frac{\tau^i}{2}[\gamma_\mu\gamma_5 g_A(q^2) + q_\mu\gamma_5 h_A(q^2)]u_1(p_1), \tag{11-111}$$

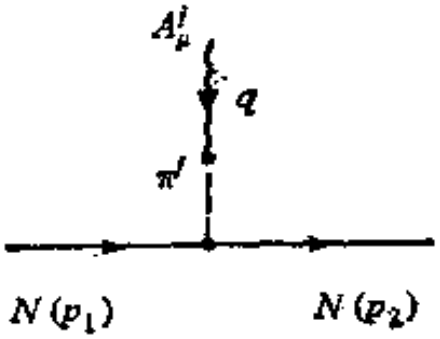


图 11-9 π 介子对核子态之间的轴矢流矩阵元的贡献

其中 $q = p_2 - p_1$. 与式(11-69)相比较可得

$$g_A(0) = G_A/G_V \simeq 1.22. \tag{11-112}$$

流守恒意味着

$$2mg_A(q^2) + q^2 h_A(q^2) = 0, \tag{11-113}$$

由此就得到结论 $g_A(0) = 0$ 是不明智的. 实际上，形状因子 $h(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 处有一个极点相应于 π 介子交换(图 11-9). 相应的贡献是

$$if_\pi \frac{q_\mu}{q^2} ig_{\pi NN}\bar{u}(p_2)\gamma_5\tau^i u(p_1), \tag{11-114}$$

其中 $g_{\pi NN}$ 是 π-N 等效耦合常数(5-3-4 节)，它近似地为

$$\frac{g^2_{\pi NN}}{4\pi} = 14.6. \tag{11-115}$$

从式(11-113)和(11-114)我们得到了零动量转移下 Goldberger-Treiman 关系

$$g_A(0) = \frac{G_A}{G_V} = g_{\pi NN}\frac{f_\pi}{m}, \qquad (11\text{-}116)$$

它在 10% 的误差内与实验数据是一致的[式(11-116)的右边是 1.34，与 1.22 是可比较的]. 这是一个相当惊人的结果，因为它把强相互作用量($g_{\pi NN}$)和弱相互作用量(f_π, G_A/G_V)联系起来了. 在 π 介子有质量的真实世界里，我们希望对从 $q^2 = 0$ 到 $q^2 = m_\pi^2$ 外推有某些控制. 这是通过假定部分守恒定律(PCAC)

$$\partial^\mu A_\mu^i(x) = m_\pi^2 f_\pi \pi^i(x) \qquad (11\text{-}117)$$

而得到成功的，它将流的散度与平滑的内插 π 介子场相等起来. 我们已经知道 $\partial^\mu A_\mu$ 有正确的量子数. 从方程(11-110)可知，如果 $m_\pi^2 f_\pi \neq 0$，它确实可以用来产生渐近 π 介子态. 方程(11-117)由质壳外的形状因子的平滑外推假设所补充. 这意味着对于小动量转移值 $|q^2| \lesssim m_\pi^2$，$\partial^\mu A_\mu$ 的矩阵元是以 π 介子的极点为主的，

$$D(q^2) = \langle A|\partial^\mu A_\mu|B\rangle = \frac{C}{q^2 - m_\pi^2} + \cdots, \qquad (11\text{-}118)$$

其中 C 是待确定的留数. 实际上，这就是轴矢流部分守恒的意义.

11-3-3 低能定理和求和规则

利用流代数和 PCAC，我们现在来推出低能定理. 情况和在电动力学中行之有效的情况相类似. 因此，我们将从研究低能 Compton 散射开始.

为了简化起见，写下光子在无自旋的单位电荷靶上的散射振幅(图 11-10)

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)\mathscr{T}$$
$$= ie^2\int d^4x d^4y \varepsilon_2^\mu \varepsilon_1^\nu e^{i(k_2\cdot x - k_1\cdot y)}\langle p_2|Tj_\mu(x)j_\nu(y)|p_1\rangle$$

$$\mathscr{T} = ie^2\int d^4x\varepsilon_2^\mu\varepsilon_1^\nu e^{ik_2\cdot x}\langle p_2|Tj_\mu(x)j_\nu(0)|p_1\rangle$$
$$= e^2\varepsilon_2^\mu\varepsilon_1^\nu T_{\mu\nu}. \tag{11-119}$$

为方便起见，选择极化矢量使得 $\varepsilon_1\cdot k_1 = \varepsilon_2\cdot k_2$，并且考虑 Lorentz 和时间反演不变性，就可写下 $T_{\mu\nu}$ 的普遍形式为

$$T_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + BP_\mu P_\nu + C(P_\nu k_{1\mu} + P_\mu k_{2\nu}) + Dk_{1\mu}k_{2\nu}, \tag{11-120}$$

其中 P 是平均靶动量 $P = (p_1 + p_2)/2$，而标量振幅 A，B，C 和 D 无运动学奇异性. 从流守恒可以得到 $k_2^\mu T_{\mu\nu} = 0$. 因此

$$\begin{aligned} A + P\cdot k_2 C + k_1\cdot k_2 D &= 0, \\ P\cdot k_2 B + k_1\cdot k_2 C &= 0. \end{aligned} \tag{11-121}$$

在低能极限 k_1，$k_2 \to 0$ 时，振幅 B，C 和 D 是以由具有重整化留数的 Born 项给出的动力学极点项为主的. 做初等的运

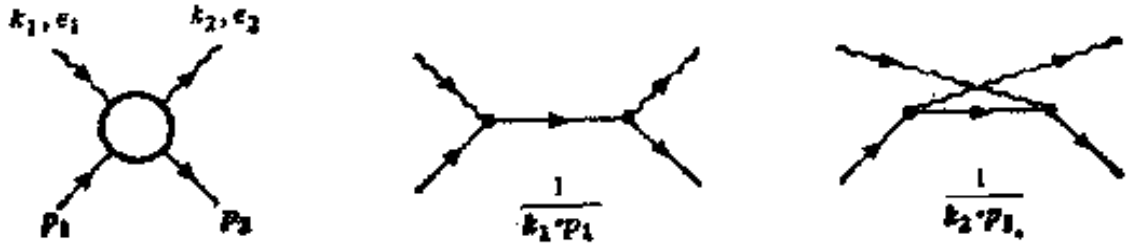


图 11-10 Compton 振幅和 Born 项

算可得到振幅 A 在阈上的值为

$$\lim_{k_1,k_2\to 0} A = 2. \tag{11-122}$$

在此极限下，然而没有作任何微扰近似，我们可以得到截面

$$\lim_{k_1,k_2\to 0}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)^2, \tag{11-123}$$

与第一章中的经典计算和最低级计算(5-2-1)是一致的. 首先给出这一论证的是 Low, Gell-Mann 和 Goldberger，他们从同样的假设得到了自旋为 $\frac{1}{2}$ 的靶的下一个 k_1 和 k_2 的线性项.

向前散射的振幅$\mathscr{T}$写为(ω 是实验室系能量 $\omega = p \cdot k/m$)

$$\mathscr{T} = f_1(\omega^2)\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 + i\omega f_2(\omega^2)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (11\text{-}124)$$

现在极化取时间分量为零. 于是,低能定理为

$$f_1(0) = -\frac{e^2}{m},$$

$$f_2(0) = -\frac{e^2}{8m^2}(g-2)^2. \quad (11\text{-}125)$$

振幅 f_2 包含靶的磁矩的反常部分(对于质子 $g-2 = 3.58$). 当然,第一个关系等价于式 (11-122). 这个预言是难以检验的. 最好将它变换成 Drell 和 Hearn 提出的求和规则. 对于 $f_2(\omega^2)$,用一个未减除的色散关系 [对于相应的 $f_1(\omega)$ 的色散关系至少要求一次减除]可写出

$$f_2(\omega^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega'^2 \frac{\mathrm{Im} f_2(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\omega'^2 \frac{\sigma_-(\omega'^2) - \sigma_+(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2},$$

其中 $\sigma_\pm(\omega^2)$ 是自旋分别平行或反平行于靶自旋的圆极化光子总截面. 螺旋性转向所表示的 t 道交换,指出了在微分截面上的积分大有希望是收敛的,因此证明了我们的未减除的色散关系的假定是正确的. 从这一关系得到

$$\frac{\alpha\pi^2(g-2)^2}{2m^2} = \int\frac{d\omega}{\omega}[\sigma_+(\omega) - \sigma_-(\omega)]. \quad (11\text{-}126)$$

对于质子,左边等于 205μb,而右边按照高能数据的处理是在 200 和 270μb 之间.

我们把类似的技巧应用到包含轴矢流的振幅上去. 这将给出低能 π-核子散射的某些信息. 引入在初态核子和终态 π-核子态之间的轴矢量矩阵元

$$(2\pi)^4\delta^4(P_1 + q_1 - P_2 - q_2)T_\mu^{ik}$$

$$= \int d^4x e^{-iq_1\cdot x}\langle \pi^j(q_2)N(p_2)|A_\mu^k(x)|N(p_1)\rangle.$$

(11-127)

按照(11-117),这是与 π-核子振幅 $\mathscr{T}_{\pi N}$ 相关的. 为了看出这一点,我们用 q_1 来收缩式(11-127)两边,于是得到

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta^4(p_1+q_1-p_2-q_2)q_1^\mu T_\mu^{ik}\\
&= -i\int d^4x e^{-iq_1\cdot x}\langle \pi^j(q_2)N(p_2)|\partial^\mu A_\mu^k(x)|N(p_1)\rangle\\
&= -i\frac{m_\pi^2}{m_\pi^2-q_1^2}f_\pi\int d^4x e^{-iq_1\cdot x}\\
&\quad\times(\Box_x+m_\pi^2)\langle \pi^j(q_2)N(p_2)|\pi^k(x)|N(p_1)\rangle,
\end{aligned}$$

因此

$$q_1^\mu T_\mu^{ik} = -if_\pi\frac{m_\pi^2}{m_\pi^2-q_1^2}\mathscr{T}_{\pi N}^{ik}(p_2,q_2;\ p_1,q_1). \quad (11\text{-}128)$$

当 q_1 趋于零时左边为零,除非 T_μ^{ik} 具有奇异性. 唯一的奇异性是从核子的极点(图 11-11)来的. 但是,与 Compton 散射所遇到的情况相反,这一奇异性被分子的零点所抵消,所以当 $q_1\to 0$ 时, $q_1^\mu T_\mu^{ik}\sim q_1^2/q_1\cdot p_1\to 0$.

这样便有外推振幅的 Adler 相容性条件

$$\lim_{q_1\to 0}\mathscr{T}_{\pi N}^{ik}(p_2,q_2;\ p_1,q_1)=0. \quad (11\text{-}129)$$

当然,软 π 极限是非物理的. 另一种推导是直接假定 $m_\pi=0$,于是 $\partial_\mu A^\mu=0$. 从 $q_\mu^1 T^\mu=0$,通过将 π 介子极点与其它奇异性分离可得到式(11-129).

如果继续在这具有零质量 π 介子的有点不现实的世界里讨论,我们可对振幅写出类似于式(11-89)的 Ward 等式

$$T_{\mu\nu}^{ik} = \int d^4x e^{iq\cdot x}\langle H(p_2)|TA_\mu^i(x)A_\nu^k(0)|H(p_1)\rangle,$$

(11-130)

其中 H 是任意的强子态.

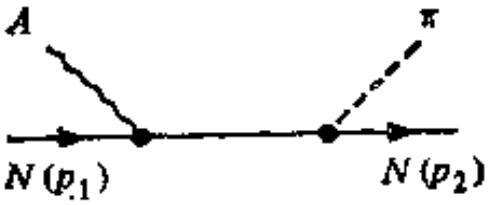


图 11-11　核子极点对矩阵元 $\langle \pi N|A|N\rangle$ 的贡献

由此可得

$$q^\mu T^{ik}_{\mu\nu} = i\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle H(p_2)|\delta(x^0)[A^i_0(x),\ A^k_\nu(0)]|H(p_1)\rangle$$

$$= -\varepsilon^{ikl}\int d^4x e^{iq\cdot x}\delta^4(x)\langle H(p_2)|V^l_\nu(0)|H(p_1)\rangle$$

$$= -\varepsilon^{ikl}(p^\nu_1 + p^\nu_2)T^l_H, \qquad (11\text{-}131)$$

式中已经用到了流代数和 V^i_μ 是同位旋流这一点，所以 T^l_H 是强子的同位旋。当 $p_1 = p_2$ 时，$T^{\mu\nu}$ 在 $q^2 = 0$ 有一个双重极点，其留数与阈上的 πN 散射振幅成正比，

$$T^{ik}_{\mu\nu} = i\frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^2} f^2_\pi \mathscr{T}^{ik}_{\pi H} + \cdots. \qquad (11\text{-}132)$$

因此，$\mathscr{T}_{\pi H}$ 的阈值(在 $p\cdot q = m_\pi m_H$ 的真实世界里)由下式给出:

$$\mathscr{T}_{\pi H}\Big|_{阈} \simeq -\frac{m_\pi m_H}{f^2_\pi}\langle 2\boldsymbol{T}_H\cdot\boldsymbol{T}_\pi\rangle. \qquad (11\text{-}133)$$

如果 T 是 s 道的总同位旋，则有关系式

$$\langle 2\boldsymbol{T}_H\cdot\boldsymbol{T}_\pi\rangle = T(T+1) - T_H(T_H+1) - 2. \qquad (11\text{-}134)$$

这一结果可以用各种同位旋道的 s 波散射长度重新表示为

$$\mathscr{T}^T_{\pi H}\Big|_{阈} = 8\pi(m_H + m_\pi)a_T. \qquad (11\text{-}135)$$

对于 π-核子散射，得到

$$a_{1/2} = 0.166m^{-1}_\pi, \quad a_{3/2} = -0.083m^{-1}_\pi,$$

$$a_{1/2} + 2a_{3/2} = 0, \qquad (11\text{-}136)$$

此值惊人地与实验测量值一致，

$$a_{1/2}^{\exp} = (0.171 \pm 0.005) m_\pi^{-1},$$
$$a_{3/2}^{\exp} = -(0.088 \pm 0.004) m_\pi^{-1}. \qquad (11\text{-}137)$$

对于 π-π 或 π-K 散射也可做类似的成功的计算.

利用色散关系我们还可以把这些低能定理重新表达成求和规则的形式. 将 π-核子振幅分为在交叉对称性下是偶的或奇的部分(见 5-3-4 节):

$$\mathscr{T}_{\pi N}^{ik} = \mathscr{T}^+ \delta^{ik} + i\varepsilon^{ikl}\tau^l \mathscr{T}^-, \qquad (11\text{-}138)$$

并用变量 $\nu = p \cdot q$ 和动量转移 t. 唯象的考虑预言在 $t = 0$ 处这些振幅大 ν 时的行为

$$\mathscr{T}^+ \underset{\nu\to\infty}{\sim} \nu(\ln\nu)^\alpha \quad \mathscr{T}^- \underset{\nu\to\infty}{\sim} \nu^{0.5}.$$

因此，很可能 $\mathscr{T}^-(\nu, 0)/\nu$ 满足未减除的色散关系. 于是，下面得到的求和规则将对这一假定提供自洽的检验. 利用在 $2\nu + m_\pi^2 = 0$ 处核子中间态的极点的贡献，可得向前色散关系是

$$\frac{\mathscr{T}^-(\nu, 0)}{\nu} = \frac{m_\pi^2 g_{\pi NN}^2}{\nu^2 - m_\pi^4/4} + \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi m_N}^{\infty} d\nu' \frac{I_m \mathscr{T}^-(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2}. \qquad (11\text{-}139)$$

从式(11-133)我们得到在阈处的值(在 Born 项分母中与 m_N^2 相比忽略了 m_π^4)

$$\frac{1}{f_\pi^2} = \frac{g_{\pi NN}^2}{m_N^2} + \frac{2}{\pi}\int_{m_\pi m_N}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \mathrm{Im}\mathscr{T}^-(\nu) + O\left(\frac{m_\pi^2}{m_N^2}\right). \qquad (11\text{-}140)$$

最后，借助于光学定理用总截面来表示 $\mathrm{Im}\mathscr{T}$，并利用 Gold-

berger-Treiman 关系将 f_π 用 G_A/G_V 来代替，就得到 Adler-Weisberger 求和规则

$$1-\frac{G_V^2}{G_A^2}=\frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi NN}^2}\cdot\int_{m_N m_\pi}^{\infty}\frac{d\nu}{\nu}\left[\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^+ p}(\nu)-\sigma_{\mathrm{tot}}^{\pi^- p}(\nu)\right], \tag{11-141}$$

此结果也令人十分信服地与实验一致。数值计算给出 G_A/G_V 的值在 1.16 和 1.24 之间，与 β 衰变值 1.22 ± 0.02 是可比较的。

流代数和软 π 介子技巧对弱作用半轻子或非轻子衰变，有许多给人深刻印象的应用，读者可参考有关文献。

总之，手征对称性在强子物理中是一个很好的近似。推广到 $SU(3)\times SU(3)$ 群时，正象大 K 和 η 质量所表明的那样，并不是可靠的。Gell-Mann, Oakes 和 Renner 曾给出破缺的 $SU(3)\times SU(3)$ 的唯象描述，它的强相互作用的等效哈密顿量为

$$H=H_0+H_1, \tag{11-142}$$

其中 H_1 项是 $SU(3)\times SU(3)$ 破缺项，它具有下述形式：

$$H_1=\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_8 u_8, \tag{11-143}$$

其中 u_0 在 $SU(3)$ 变换下是标量，u_8 在 $SU(3)$ 变换下是八重态的第八个分量。唯象分析表明 $\varepsilon_8/\varepsilon_0$ 接近于 $-\sqrt{2}$ 而不是零。这表明 $SU(2)\times SU(2)$ 比 $SU(3)$ 具有较好的近似对称性。

11-4 σ 模型

现在我们来描述最早由 Gell-Mann 和 Levy(1960) 引入的一个场论模型，它们是作为实现手征对称性和轴矢流部分守恒的例子引入的。σ 模型的名字来自于其中的一个记号。我们借此机会来研究重整化和对称性的相互影响。遵循 Lee 和 Symanzik 的想法，可使我们引入 Ward 等式机制，这在研

究规范场时是有用的.

11-4-1 模型的描述

σ 模型中包含零裸质量的费米子同位旋二重态场 ψ、赝标 π 介子三重态和标量场 σ. 相应的拉氏函数写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_S + C\sigma,\\ \mathscr{L}_S &= \bar{\psi}[i\partial\!\!\!/ + g(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)]\psi\\ &\quad + \frac{1}{2}[(\partial\boldsymbol{\pi})^2 + (\partial\sigma)^2]\\ &\quad - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2.\end{aligned} \tag{11-144}$$

根据在下面将要讨论的理由,通常称其为线性模型.

$\mathscr{L}_S$ 部分 (指标 S 表示对称) 在按下列方式作用在 $SU(2)\times SU(2)$ 手征群上是不变的. 右手和左手的组合 $\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$, $\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$, 分别按照表示 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 来变换,而集合 $(\sigma,\boldsymbol{\pi})$ 属于 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 表示.

为了看出这一点,重写耦合项为

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)\psi\\ &= \bar{\psi}_L(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})\psi_R + \bar{\psi}_R(\sigma - i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})\psi_L.\end{aligned}$$

如果 (U, V) 是 $SU(2)\times SU(2)$ 的一个元素,其中 U 和 V 独立地变化,则变换 $(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}) \to V(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})U^{-1}$ 是一允许变换,它导出实的 σ' 和 $\boldsymbol{\pi}'$ 场. 因此,如果同时作同位旋转动 $\psi_R \to U\psi_R$, $\psi_L \to V\psi_L$, 那么相互作用项显然是不变的. 正比于 $(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})$ 的行列式的量 $(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ 也是不变的. 最后,动能项 $\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi$ 等于 $\bar{\psi}_R i\partial\!\!\!/\psi_R + \bar{\psi}_L i\partial\!\!\!/\psi_L$, 表

明了整个拉氏函数的不变性.

相应的无穷小变分是由手征荷 $Q^a_{R,L}$ 生成的，其中 a 从 1 到 3：

$$[Q^a_R, \psi_R] = -\frac{1}{2}\tau^a\psi_R, \quad [Q^a_L, \psi_L] = -\frac{1}{2}\tau^a\psi_L,$$

$$[Q^a_R, \psi_L] = 0, \quad [Q^a_L, \psi_R] = 0,$$

$$[Q^a_R, \sigma] = \frac{i}{2}\pi^a, \quad [Q^a_L, \sigma] = -\frac{i}{2}\pi^a, \tag{11-145}$$

$$[Q^a_R, \pi^\beta] = -\frac{i}{2}\delta^{a\beta}\sigma + \frac{i}{2}\varepsilon^{a\beta\gamma}\pi^\gamma,$$

$$[Q^a_L, \pi^\beta] = \frac{i}{2}\delta^{a\beta}\sigma + \frac{i}{2}\varepsilon^{a\beta\gamma}\pi^\gamma.$$

$(\sigma, \boldsymbol{\pi})$ 变换的紧凑记号是

$$[Q^a_R, (\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})] = (\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})\frac{\tau^a}{2},$$

$$[Q^a_L, (\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau})] = -\frac{\tau^a}{2}(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}). \tag{11-146}$$

这是一种使得拉氏函数的不变性容易得到验证的形式. $SU(2)\times SU(2)$ 的李代数同构于它的一个商群 $O(4) = SU(2)\times SU(2)/Z_2$，而 $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$ 在 $O(4)$ 下是矢量.

在没有破缺项 $c\sigma$ 的情况下，矢量和轴矢量流是守恒的. 它们是

$$V^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\psi + \varepsilon^{a\beta\gamma}\pi^\beta\partial_\mu\pi^\gamma,$$

$$A^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi + (\sigma\partial_\mu\pi^a - \pi^a\partial_\mu\sigma). \tag{11-147}$$

破缺项 $c\sigma$ 保留对角的 $SU(2)$ 群不破坏. 矢量流仍旧守

恒，而表示式不改变的轴矢流获得一不为零的散度

$$\partial^\mu A_\mu^a = c\pi^a. \tag{11-148}$$

因此，这一模型结合了所有需要的特点，而轴矢流的散度自然地正比于 π 介子场量.

线性破缺项意味着量子 σ 场有一不为零的真空平均值 $\langle 0|\sigma|0\rangle = v$，这表示考虑到场的真空涨落时必须围绕 v 值而不是零值作微扰展开. 这是通过移动场量成

$$\sigma' = \sigma - v,$$

并要求 σ' 有零真空平均值来达到的. 用 σ' 重新表达整个拉氏函数，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = {} & \bar{\psi}[i\partial\!\!\!/ + gv + g(\sigma' + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)]\psi \\ & + \frac{1}{2}[(\partial\boldsymbol{\pi})^2 + (\partial\sigma')^2] \\ & - \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v^2)\sigma'^2 - \frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda v^2)\boldsymbol{\pi}^2 \\ & - \lambda v\sigma'(\sigma'^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma'^2)^2 \\ & + \sigma'(c - \mu^2 v - \lambda v^3).\end{aligned} \tag{11-149}$$

平移的效应有三方面. 介子场的质量退化不出现了. 细心审查上面的表达式可以看到这些质量是

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \mu^2 + \lambda v^2, \\ m_\sigma^2 &= \mu^2 + 3\lambda v^2. \end{aligned} \tag{11-150}$$

另外，费米子获得了质量

$$m_N = -gv. \tag{11-151}$$

最后，得到了一项新的三线性耦合 $\sigma'\pi\pi$.

真空平均值 v 将被约束，以满足一复杂的条件 $\langle\sigma'\rangle = 0$. 所能做的最佳方法，是通过要求对 $\sigma' \to$ 真空跃迁的蝌蚪图为零来微扰地实现它（图 11-12）. 从式(11-149)得到，对这



图 11-12 蝌蚪图振幅

一条件的 Born 近似是

$$c - \mu^2 v - \lambda v^3 = 0.$$

如果回到方程(11-117),则得到下面的等式:

$$f_\pi m_\pi^2 = -c = -v(\mu^2 + \lambda v^2) = -v m_\pi^2.$$

因此,

$$\begin{aligned} f_\pi &= -v, \\ m_N &= g f_\pi, \end{aligned} \tag{11-152}$$

这是到这一级的 Goldberger-Treiman 关系,其中 $G_A/G_V=1$.

当 C 趋于零时,会出现两个不同的情况. 一个可能性是 v 也趋于零,这时我们得到上面描述的具有无质量核子的正常的对称性模式. 另一个可能性是在 $\mu^2 < 0$ 时发生,且其极限相应于

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}, \tag{11-153}$$

这就是在 11-2-2 节中研究过的具有零 π 介子质量的 Goldstone 现象.

$$m_\pi^2 = \mu^2 + \lambda v^2 = 0,$$

在这个相里 σ 模型可以用来得到 π-π 或 π-核子散射的低能定理.

11-4-2 重整化

上面在 σ 场平移后得到的拉氏函数 $\mathscr{L}(\sigma', \pi, \psi)$, 或它

的相应于 Goldstone 模式的极限 $c=0$ 下的形式，在幂次计数的意义下是可重整的. 在相互作用拉氏函数中，所有单项式的量纲都小于或等于 4；可能的抵消项也同样是这样. 我们还要证明拉氏函数加上它的抵消项后的形式类似于式(11-149)，这是原来结构式(11-144)的剩余部分. 特别是，PCAC 关系式(11-148)的命运怎样？我们将证明在对称的正常相里进行重整化，并且将证明只要处理明显的($c\neq 0$)或自发($c=0$，$\mu^2<0$) 对称性破缺情况就足够了以后，这些性质仍将保留.

为了简化起见我们略去费米场. 完全的处理并不出现任何新的困难. 我们仍用紧凑的记号 $\boldsymbol{\phi}$ 表示 n 个场的多重态，它们按照对称群 $O(n)$ 的矢量表示来变换. 在前面的例子里 n 等于 4. 我们写下拉氏函数

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_S+\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi},$$

$$\mathscr{L}_S=\frac{1}{2}(\partial\boldsymbol{\phi})^2-\frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{\phi}^2-\frac{\lambda}{4}(\boldsymbol{\phi}^2)^2, \tag{11-154}$$

因此 $\mathscr{L}_S$ 在变换

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\phi}\to\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}\\&\delta\phi_i=\delta\omega_a T^a_{ik}\phi_k\end{aligned} \tag{11-155}$$

下是不变的，其中 T^a_{ik} 是群的无穷小生成元的表示，在现在的情况下是 $n\times n$ 的反对称实矩阵 $T^a_{ik}+T^a_{ki}=0$.

我们首先以一不变的方式来将理论正规化. 例如，可以通过把动能项修改成下述形式来做到这一点：

$$\int d^4x(\partial\boldsymbol{\phi})^2=\int d^4x\boldsymbol{\phi}(-\Box)\boldsymbol{\phi}\to$$

$$-\int d^4x\boldsymbol{\phi}\Box\left(1+a\frac{\Box}{\Lambda^2}+b\frac{\Box}{\Lambda^4}+\cdots\right)\boldsymbol{\phi};$$

由此式可得到在大动量下足够平滑行为的传播子，从而保证

了所有的 Feynman 积分的收敛性. 这一正规化在后面将被理解，但并没有明显地写出来.

现在来考虑对称理论中联接 Green 函数的产生泛函

$$e^{G_S(\mathbf{j})}=\int\mathscr{D}(\boldsymbol{\phi})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_S(\boldsymbol{\phi})+\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\phi}]\right\}. \tag{11-156}$$

作为（正规化）拉氏函数在变换式（11-55）下不变性的结果，$G_S(\mathbf{j})$ 满足

$$G_S(\mathbf{j})=G_S[\mathbf{j}+\delta\omega(T\mathbf{j})], \tag{11-157a}$$

或者等价地

$$\int d^4x j_k(x)T^a_{kl}\frac{\delta G_S(\mathbf{j})}{\delta j_l(x)}=0. \tag{11-157b}$$

为了显示发散性结构，对于在下述 Legendre 变换后得到的不可约 Green 函数，需要一类似的等式

$$i\Gamma_S(\boldsymbol{\phi})+i\int d^4x\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\phi}=G_S(\mathbf{j})$$

$$\phi_k(x)=\frac{\delta G_S(\mathbf{j})}{i\delta j_k(x)}, \tag{11-158}$$

因为反过来有

$$j_k(x)=-\frac{\delta\Gamma_S(\boldsymbol{\phi})}{\delta\phi_k(x)}.$$

我们可得 $\Gamma_S(\boldsymbol{\phi})$ 在变换式（11-155）下具有同样的不变性质：

$$\int d^4x\phi_k(x)T^a_{kl}\frac{\delta\Gamma_S(\boldsymbol{\phi})}{\delta\phi_l(x)}=0. \tag{11-159}$$

因此，只要归一化条件是对称的，重整化所要求的所有抵消项就必须是对称的. 实际上假定了这一性质一直到 L 圈级是对的. 因为 $\mathscr{L}_S$ 是最一般的四阶对称多项式，所以抵消项的效应仅能重整化质量 μ 和耦合常数 λ，以及乘以波函数重整化

因子 Z 来影响(所有分量)场量. 因为 $\mathscr{L}_s + \Delta\mathscr{L}_s^{(L)}$ 具有象 $\mathscr{L}_s$ 一样的不变性，由此可知用它来计算的 Γ 一直到$(L+1)$级满足同样的约束式(11-159). 它的$(L+1)$级发散部分是生成$(L+1)$级抵消项的定域对称多项式. 这里的这种归纳法的证明是学院式的. 在作更精细的讨论时，变换的参量化可能会逐级被重整化所修改，但是上面所描述的框架仍是有用的.

现在来考虑完整的拉氏函数 $\mathscr{L}$，它包括线性破坏项 $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}$. 为了生成正确的微扰论，在 $\boldsymbol{\phi}$ 上的变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\phi}' + \mathbf{v}\\ \langle\boldsymbol{\phi}\rangle &= \mathbf{v}\end{aligned} \tag{11-160}$$

是必要的. 省略一撇，就有

$$e^{G(\mathbf{j})} = \frac{\int \mathscr{D}(\boldsymbol{\phi})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_s(\boldsymbol{\phi}+\mathbf{v}) + \boldsymbol{\phi}\cdot(\mathbf{j}+\mathbf{c})]\right\}}{\int \mathscr{D}(\boldsymbol{\phi})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_s(\boldsymbol{\phi}+\mathbf{v}) + \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{c}]\right\}}, \tag{11-161}$$

其中分母保证了 $G(0)=0$. 因为 $\boldsymbol{\phi}$ 是名义上的变量，可以去掉平移

$$e^{G(\mathbf{j})} = \frac{\int \mathscr{D}(\boldsymbol{\phi})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_s(\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\phi}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{j}+\mathbf{c})]\right\}}{\int \mathscr{D}(\boldsymbol{\phi})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_s(\boldsymbol{\phi}) + (\boldsymbol{\phi}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{c}]\right\}}, \tag{11-162}$$

并用对称泛函将 $G(\mathbf{j})$ 表示为

$$G(\mathbf{j}) = G_S(\mathbf{j}+\mathbf{c}) - G_S(\mathbf{c}) - i\int d^4x\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}, \tag{11-163}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是由下述条件确定的，即 $G(\mathbf{j})$ 在 $\mathbf{j}=0$ 处关于 $\mathbf{j}$ 的微商为零：

$$v_k = \frac{\delta G_S(\mathbf{j})}{i\delta j_k(x)}\bigg|_{\mathbf{j}(x)=\mathbf{c}}, \tag{11-164}$$

类似地有

$$\begin{aligned} i\Gamma(\boldsymbol{\phi}) &= G(\mathbf{j}) - i\int d^4x\,\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\phi} \\ &= G_S(\mathbf{j}+\mathbf{c}) - G_S(\mathbf{c}) \\ &\quad - i\int d^4x\,\mathbf{j}\cdot(\boldsymbol{\phi}+\mathbf{v}), \end{aligned} \tag{11-165}$$

其中

$$\phi_k(x) = \frac{\delta G(\mathbf{j})}{i\delta j_k(x)} = \frac{\delta G_S(\mathbf{j}+\mathbf{c})}{i\delta j_k(x)} - v_k. \tag{11-166}$$

于是

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{\phi}) &= \Gamma_S(\boldsymbol{\phi}+\mathbf{v}) - \Gamma_S(\mathbf{v}) + \int d^4x\,\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}(x) \\ c_k &= -\frac{\delta\Gamma_S(\mathbf{v})}{\delta v_k}, \end{aligned} \tag{11-167}$$

依赖于 $\Gamma(\boldsymbol{\phi})$ 来表达的等式(11-159)叙述为

$$\int d^4x[\phi_k(x)+v_k]T^a_{kl}\left[\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi_l(x)} - c_l\right] = 0. \tag{11-168}$$

我们较详细地来看看式(11-168)的内容。例如，取关于 $\boldsymbol{\phi}$ 的一次微商，并令 $\boldsymbol{\phi}=0$：

$$\begin{aligned} &\Gamma^a_{kl}\left[\frac{\delta\Gamma(\boldsymbol{\phi})}{\delta\phi_l(x)} - C_l\right]\bigg|_{\phi=0} \\ &\quad + v_m\Gamma^a_{ml}\int d^4y\,\frac{\delta^2\Gamma(\boldsymbol{\phi})}{\delta\phi_k(x)\delta\phi_l(y)}\bigg|_{\phi=0} = 0. \end{aligned} \tag{11-169}$$

考虑到 $\delta\Gamma(\boldsymbol{\phi})/\delta\phi_l(x)|_{\phi=0}=0$，这是从 $\mathbf{v}$ 的定义得到的，再考虑到矩阵 T 的反对称性，这意味着对于在零动量时的逆传播子 $\Gamma^{(2)}_{mk}(p^2)$ 有下列关系式：

$$T^a_{ml}[c_l\delta_{mk}+v_l\Gamma^{(2)}_{mk}(0)]=0. \tag{11-170}$$

这表明 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{v}$ 是共线的，从方程(11-167)已清楚地看到这一点。如果设想 $\mathbf{c}$ 为外磁场，于是磁化强度 $\mathbf{v}$ 是沿 $\mathbf{c}$ 方向的。横向态(相对于 $\mathbf{c}$)的质量参量按下式定义：

$$\Gamma^{(2)}_T(0)=-m_T^2, \tag{11-171}$$

和

$$\mathbf{c}=m_T^2\mathbf{v}. \tag{11-172}$$

m_T 量起着在 σ 模型中 π 介子质量的作用，所以推广了 11-4-1 节中得到的结果。从式(11-167)得到一旦对称理论是重整化的，破缺理论也就是重整化的。很明显，如果

$$\Gamma_{SR}(\boldsymbol{\phi},\mu^2,\lambda)=\Gamma_{S,\mathrm{reg}}(Z^{1/2}\boldsymbol{\phi},\mu^2+\delta\mu^2,\lambda_0), \tag{11-173}$$

那么破缺对称情况下相应的重整化泛函是

$$\Gamma_R(\boldsymbol{\phi},\mu^2,\lambda,\mathbf{c})=\Gamma_{\mathrm{reg}}(Z^{1/2}\boldsymbol{\phi},\mu^2+\delta\mu^2,\lambda_0,Z^{-1/2}\mathbf{c}). \tag{11-174}$$

重新标度对称性破缺参量

$$\mathbf{c}_0=Z^{-1/2}\mathbf{c} \tag{11-175}$$

是必要的，以使 $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}$ 保持不变，$\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}=\mathbf{c}_0\cdot\boldsymbol{\phi}_0$，且保证了

$$\mathbf{v}_0=Z^{1/2}\mathbf{v},$$

$$c_k=-\frac{\delta\Gamma_{SR}(\mathbf{v})}{\delta v_k}, \tag{11-176}$$

$$c_{0k}=-\frac{\delta\Gamma_{S,\mathrm{reg}}(\mathbf{v}_0)}{\delta v_{0k}}.$$

方程(11-167)意味着，破缺对称下的振幅是由在对称性理论中将蝌蚪图嵌入重新求和而得到的。例如，p 点 Green 函数 ($p>1$) 可以

写作(图 11-13)

$$\Gamma^{(p)}_{k_1,\cdots,k_p}(x_1,\cdots,x_p)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\int d^4y_1\cdots d^4y_n\,\Gamma^{(n+p)}_{S,k_1,\cdots,k_p,1,\cdots,1}$$

$$\times(x_1,\cdots x_p,y_1,\cdots,y_n). \tag{11-177}$$

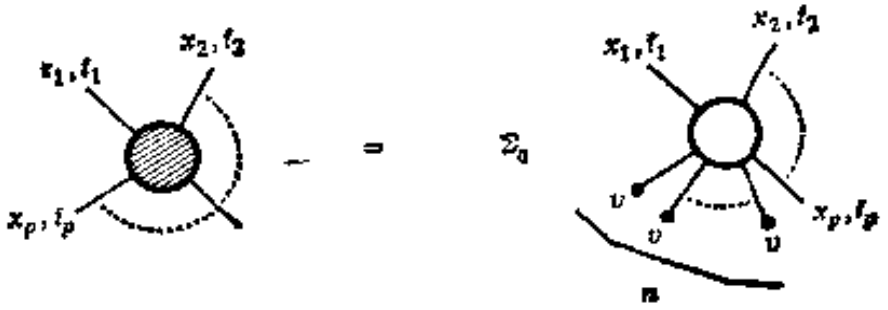


图 11-13 对蝌蚪图求和

为紧凑起见,我们假定 ν 沿同位旋空间的第一轴.

当破缺项更复杂且包含高量纲算符时,也可以进行这种重整化的讨论. 从 Symanzik 的工作可以得出的教训是,量纲 $\omega<4$ 的破缺项仅需要量纲低于或等于 ω 的抵消项. 例如,质量破坏项($\omega=2$)将不影响 3 阶或 4 价的抵消项,它们将仍是对称的.

这些紫外发散的性质,在重整化的 Green 函数的大动量渐近行为上有它们的对应部分,至少在欧氏区域是如此. 这是 Weinberg 定理(见 8-3-2 节)的另一面. 这样一个软破缺将不影响保持对称的渐近区域.

读者可能想知道这种讨论和下面的 Ward 等式之间有什么联系:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle Tj^a_\mu(x)A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)\rangle$$

$$=\langle T\partial^\mu j^a_\mu(x)A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)\rangle$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\langle TA_1(x_1)\cdots\delta(x^0-x^0_p)$$

$$\times[j^a_0(x),A_p(x_p)]\cdots A_n(x_n)\rangle. \tag{11-178}$$

此等式是在量子电动力学或在流代数的应用里遇到的. 我们容易使人相信前者是式(11-178)对 x 积分的关系. 场量 $A_p(x_p)$ 与 $\phi_{k_p}(x_p)$ 恒等,而 j 是 Noether 流 $j^a_\mu(x)=[\partial_\mu\phi_k(x)]\,T^a_{kl}[\phi_l(x)+v_l]$. 积分后

左边因为在缺少无质量态情况下全微商没有边界贡献而为零. 右边 $\partial^\mu j^a_\mu(x)$ 等于 $c_i T^a_{im}[\phi_m(x) + v_m]$，而最后一项包含场量的变分

$$\delta(x^0 - y^0)[j^a_0(x), \phi_k(y)] = \delta^4(x - y)T^a_{kl}[\phi_l(y) + v_l],$$

因此我们得到等式(11-168).

注意到式(11-178)不受变量的改变 $\phi \to \phi + \delta\phi$ 的影响，读者可从泛函积分式 (11-62) 得到式 (11-178)，其中 $\delta\phi = (T^a\phi)\delta\omega_a(x)$，$\delta\omega_a(x)$ 是 x 相关的. 这种依赖性按照流的定义给出变分 $\delta\mathscr{L}_S(\phi) = j \cdot \partial(\delta\omega)$. 相对于 $\delta\omega$ 作微商可得到方程(11-178). 这一等式的重整化可以首先在对称性理论中加以研究，以证明流没有被重整化，或者换句话说，$Z_j = 1$. 而且，这一性质不受软破缺项的影响，所以流的相乘重整化常数等于1. 当试图导出有几个流的等式时，是否会出现新问题呢?

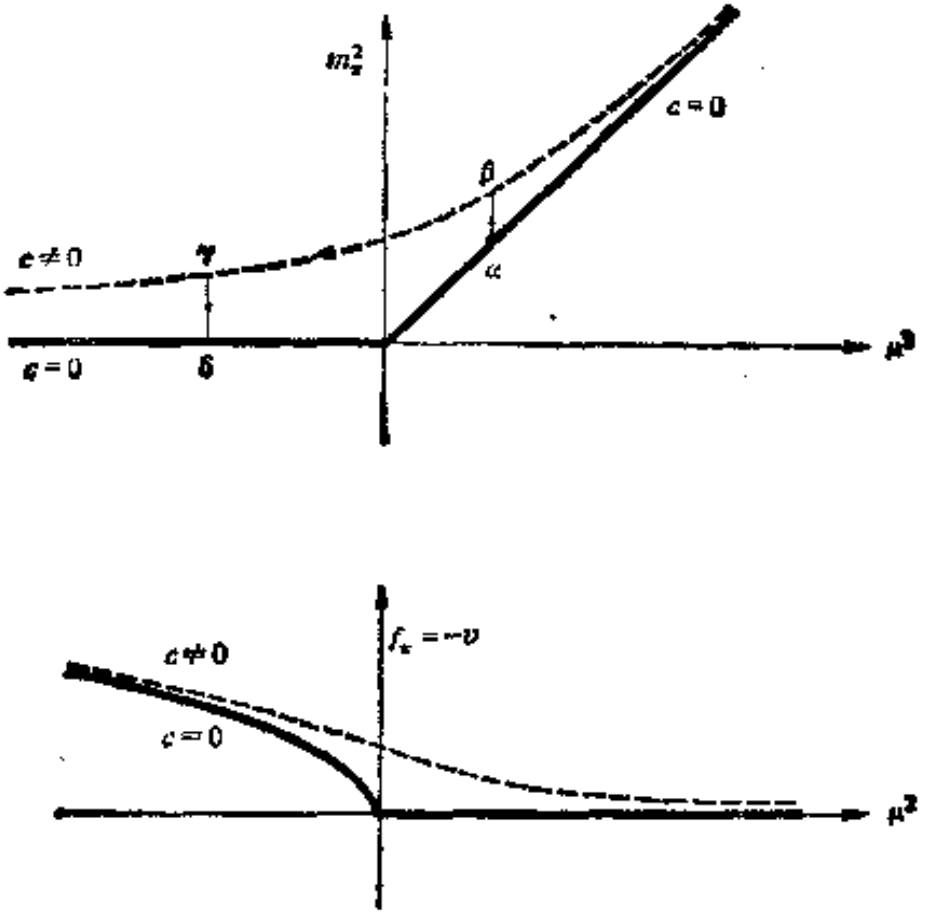


图 11-14 m_π^2 和 $f_\pi = -v$ 作为 μ^2 函数的行为，实线表示没有外场 c 的情况，虚线表示有外场 c 的情况.

现在我们来讨论具有自发对称性破缺的有趣情况. 骤然看来,从 $\mu^2 > 0$ 的重整化对称性理论出发,然后延拓到 $\mu^2 < 0$ 区域是合理的. 麻烦在于这一步骤包含了通过奇点的跃迁. 如 $m_i^2(\mu^2, c)$ 那样的物理量对于 $c = 0$ 将不是关于 μ^2 解析的. 为了克服这一困难,我们可引入一个小的线性破坏项 ($c \neq 0$)来绕过奇异性. 在图 11-14 中表明了可以如何通过一系列改变 c 和 μ^2 沿路径 $\alpha\beta\gamma\delta$ 达到 Goldstone 相. 从先前的分析得到,属于对称性理论(点 α)的抵消项将保证在破缺对称点 β 处的有限性. 对称的质量抵消项将相应于 μ^2 从 β 变到 γ. 最后,在 c 为零(点 δ)的极限下,重整化的函数满足等式

$$\int d^4x[\phi_k(x) + v_k]T^a_{kl}\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi_l(x)} = 0, \qquad (11\text{-}179)$$

而方程(11-170)的极限是

$$v_l T^a_{lm}\Gamma^{(2)}_{mk}(0) = 0. \qquad (11\text{-}180)$$

这意味着($n - 1$)个横向玻色子是无质量的,即是自发破缺对称性的 Goldstone 玻色子.

方程(11-179)暗含了在 Goldstone 相的 Green 函数之间的所有关系,且暗含了一系列的低能定理.

线性 σ 模型和它的 Goldstone 极限证实,即使在 Born 项范围内流代数和 PCAC 的所有约束也都成立,这一事实指出,我们可以利用它作为唯象的拉氏函数,就象弱相互作用的 Fermi 理论. 事实上,我们可以发现许多具有这一性质的唯象相互作用. 这种方法的精神是忽略重整化问题,并利用在最低级时过程之间发生的关系.

非线性 σ 模型提供了一个例子. 这一名称来自在此流形上手征群的非线性实现,

$$\sigma^2(x) + \pi^2(x) = f_\pi^2. \qquad (11\text{-}181)$$

用 π 介子场表达 σ，总拉氏函数可写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 + \frac{1}{2}\frac{(\pi\cdot\partial\pi)^2}{\sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}}. \qquad (11\text{-}182)$$

在经典范围内，我们可以看到手征对称性是在 Goldstone 模式里实现的. 复合场 $\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}$ 有一非零值，而 π 介子是无质量的.

即使这一理论在四维时空里按照通常标准是不可重整化的，它也已在统计力学的应用中引起了很大的兴趣，在统计力学里它描述了经典的 Heisenberg 模型的连续形式. 而且，正像(11-182)的理论在维数为 2 时是可重整的，这时标量场是无量纲的，而 Ward 等式可以表明约束抵消项结构. 于是，它具有一些与近代强相互作用场论共同的特性.

11-5 反　　常

到目前为止我们所遇到的例子中，重整化与经典水平上的显然的对称性都不冲突. 这一节我们将讨论更有趣的情形，那里事情正相反，并且重整化揭示出了许多新的特点. 第十三章中，当处理标度不变性时也会出现类似的现象. 我们从流代数应用中出现的明显的佯谬来引入这一问题.

11-5-1 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变和流代数

在 11-3 节综述流代数的成就时，我们谨慎地略去了它对 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变（图 11-15）初看起来似乎是一个失败的应用. 现在让我们来讨论这一过程. 其振幅可写成

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}(q^2)\Big|_{q^2=m_\pi^2} = \lim_{q^2\to m_\pi^2} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(q^2),$$

(11-183)

$$\mathscr{T}(q^2) = (q^2 - m_\pi^2)e^2\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu \times \int d^4x d^4y \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)\pi(0)|0\rangle e^{i(k_1x+k_2y)}. \tag{11-184}$$

我们已经给出了与两个光子(k_1, ε_1 和 k_2, ε_2)耦合的两个电磁流和 π 介子场的编时乘积. 这里 $q = k_1 + k_2$,并且光子是在质壳上的, $k_1^2 = k_2^2 = 0$. 按式(11-117) PCAC 的精神,我们应当用轴矢流的散度取代中性 π 介子场,略去同位施指标 3,因此有

$$\mathscr{T}(q^2) = \frac{m_\pi^2 - q^2}{f_\pi m_\pi^2}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\rho T_{\mu\nu\rho}, \tag{11-185}$$

其中

$$T_{\mu\nu\rho} = -ie^2\int d^4x d^4y e^{i(k_1x+k_2y)} \times \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)A_\rho(0)|0\rangle. \tag{11-186}$$

为了把作用于轴矢流的微商算符从时序记号中抽出来,我们已经利用了如下的事实: 对易子 $\delta(x^0 - y^0)[j_\mu(x), A_0(y)]$ 对式(11-186)中的量子数来说等于零. 现在让我们写下张量 $T_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2)$ 最一般的分解. 这要涉及到轴矢流的负宇称、联合交换 $(k_1, \mu)\longleftrightarrow(k_2, \nu)$ 的对称性(光子满足 Bose 统计)和由电磁流守恒导致的对 k_1^μ, k_2^ν 的横波性

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\rho} = k_2^\nu T_{\mu\nu\rho} = 0. \tag{11-187}$$

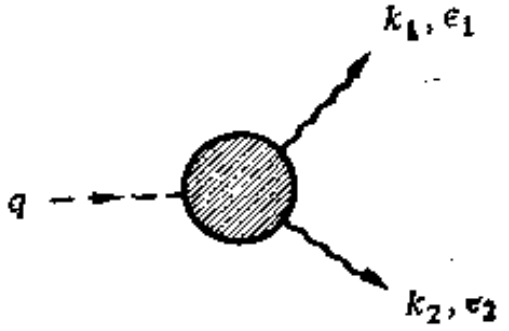


图 11-15 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变

有了这些知识，当 $k_1^2 = k_2^2 = 0$ 时我们可写下如下的表达式：

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2) = {} & \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}k_1^\sigma k_2^\tau q_\rho T_1(q^2) \\ & + (\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}k_{2\nu} - \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau}k_{1\mu})k_1^\sigma k_2^\tau T_2(q^2) \\ & + [(\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau}k_{1\nu} - \varepsilon_{\nu\rho\sigma\tau}k_{2\mu})k_1^\sigma k_2^\tau \\ & - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1^\sigma - k_2^\sigma)k_1 \cdot k_2]T_3(q^2), \end{aligned} \tag{11-188}$$

由此得出

$$q^\rho T_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}k_1^\sigma k_2^\tau q^2[T_1(q^2) + T_3(q^2)]. \tag{11-189}$$

我们在电磁作用领头的级下来计算这些振幅．因为没有参予强相互作用的零质量的粒子（$m_\pi^2 \neq 0$），由式(11-189)得

$$\mathscr{T}(0) = 0. \tag{11-190}$$

为了让软 π 理论能适用，这个式子应理解为 $\mathscr{T}(m_\pi^2)$ 被压低了：

$$\mathscr{T}(m_\pi^2) \simeq 0. \tag{11-191}$$

根据 Sutherland 和 Veltman 的这一观察，$\pi^0 \to 2\gamma$ 的主导部分是戒禁的．值得庆幸的是，由于重整化效应的存在，上述结论是不正确的． 我们必须强调一下，这并不怀疑从式 (11-190)外推到式(11-191)的适用性，但的确表明式(11-189)或(11-190)必须修正．解决这个问题的一种办法是在一给定的模型中进行微扰计算．对这个结果的解释是，在存在电磁作用时我们必须修正式(11-117)式的 PCAC 关系．

11-5-2 σ 模型中的轴反常

作为特例，我们采用有费米子的 σ 模型．为简单起见，我们只保留一个电荷为 +1 的费米子场（质子）和两个介子 π^0 和 σ．由 11-4-1 节知，拉氏量为

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}[i\partial\!\!\!/ - m + g(\sigma + i\pi\gamma_5)]\psi$$

$$+\frac{1}{2}(\partial\pi)^2+\frac{1}{2}(\partial\sigma)^2-\frac{m_\pi^2}{2}\pi^2$$

$$-\frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2-\lambda v\sigma(\sigma^2+\pi^2)$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\pi^2+\sigma^2)^2. \tag{11-192}$$

在最低次近似下

$$m=-gv,\quad m_\sigma^2-m_\pi^2=2\lambda v^2. \tag{11-193}$$

质子是唯一对流有贡献的带电粒子;因此

$$j_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi,$$

轴矢流

$$A_\mu=\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi+(\sigma\partial_\mu\pi-\pi\partial_\mu\sigma)+v\partial_\mu\pi \tag{11-194}$$

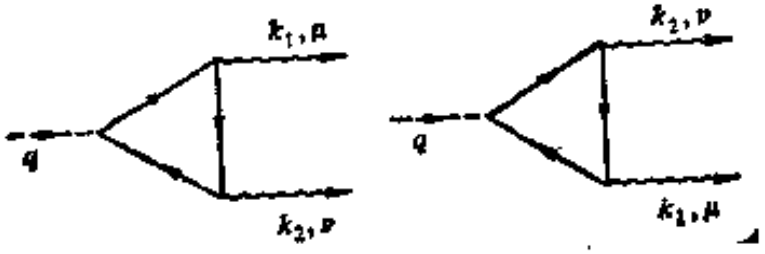


图 11-16 π^0 衰变的单圈图

的散度形式上由

$$\partial^\mu A_\mu=m_\pi^2 f_\pi\pi,\quad f_\pi=-v \tag{11-195}$$

来确定。π^0 衰变振幅在单圈近似下(图 11-16)为

$$T_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1,k_2)+T_{\nu\mu}^{(1)}(k_2,k_1), \tag{11-196}$$

$$T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1,k_2)=ge^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

$$\times\frac{\mathrm{tr}[(q+p-k_1+m)\gamma_\mu(q+p+m)\gamma_5(p+m)\gamma_\nu]}{[(q+p-k_1)^2-m^2][(q+p)^2-m^2](p^2-m^2)}.$$

分子上的迹等于 $4im\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma(\varepsilon_{0123}=-1)$，并且剩下的积分是收敛的：

$$T_{\mu\nu}^{(1)}(k_1,k_2)=4ige^2m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma \times\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(q+p-k_1)^2-m^2]} \times\frac{1}{[(q+p)^2-m^2](p^2-m^2)}$$

$$=4ge^2m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma \times\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy \times\frac{1}{m^2-xk_1^2-yk_2^2+(xk_1-yk_2)^2}. \quad (11\text{-}197)$$

在质壳上我们有 $k_1^2=k_2^2=0$，$2k_1\cdot k_2=q^2$，则这两个图的贡献为

$$\mathscr{T}(q^2)=\frac{e^2gm}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu k_1^\rho k_2^\sigma \times\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{m^2-xyq^2}. \quad (11\text{-}198)$$

这与(11-190)式矛盾，因为此时 $\mathscr{T}(0)\neq 0$，而是

$$\mathscr{T}(0)=\frac{e^2g}{4\pi^2m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu k_1^\rho k_2^\sigma. \quad (11\text{-}199)$$

注意，式(11-198)表示在 $q^2=0$ 附近一个平滑的外推，它由下式给出：

$$\mathscr{T}(q^2)=\left(1+\frac{q^2}{12m^2}+\cdots\right)\mathscr{T}(0). \quad (11\text{-}200)$$

利用 $g/m=1/f\pi$，$f_\pi\sim 93\text{MeV}$，由带头贡献 $\mathscr{T}(0)$ 所得的数值宽度为

$$\Gamma = \frac{1}{2m_\pi}\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{4(2\pi)^6\omega_1\omega_2}\,|\mathscr{T}|^2(2\pi)^4$$

$$\times\delta(q-k_1-k_2) = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.63\text{eV} \quad (11\text{-}201)$$

由于用 Bose 统计，式中只在 2π 立体角上积分．实验宽度为

$$\Gamma^{\text{exp}} \sim (7.37\pm1.5)\text{eV}, \quad (11\text{-}202)$$

这与上面的估算值很接近．事实上，早在 1949 年，Steinberger 在不知道流代数的这些微妙之处的情况下已经导出了类似的结果．

在夸克模型中，电磁流耦合于带分数电荷的费米子(电荷 Q_i)．轴矢流为

$$A_\mu^3 = \sum_i \bar{\psi}_i\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau_3^i}{2}\psi_i + \text{介子的贡献},$$

振幅 $\mathscr{T}$ 要乘次因子 $x = \sum_i \tau_3^i Q_i^2$．对夸克三重态 (u, d, s)，电荷为 $Q_i=(2/3, -1/3, -1/3)$，而 τ_3^i 为 $(1,-1,0)$，因此 $x = 1/3$．这与实验是不一致的，除非夸克按隐藏的色量子数是三倍简并的．这实际上是具有这种简并的必要性的最直接的验证之一，另一个则是重子态的统计问题．

我们现在必须设法弄清是什么使 Veltman-Sutherland 的结果不适用了．为此，我们在同一模型中计算式(11-186)定义的振幅 $T_{\mu\nu\rho}$．根据式(11-194)，轴矢流要么与 π 耦合，耦合因子为 $iq_\rho v = -iq_\rho f_\pi$，要么直接与质子耦合．因此，在最低次近似下，我们有

$$T_{\mu\nu\rho} = \hat{T}_{\mu\nu\rho} + f_\pi q_\rho\frac{1}{m_\pi^2-q^2}T_{\mu\nu}. \quad (11\text{-}203)$$

图 11-17 中的前两个图对 $\hat{T}_{\mu\nu\rho}$ 有贡献，后两个图与 π 介子的振幅 $T_{\mu\nu}$ 有关．可能有疑问的等式(11-185)取下面的形式：

$$\frac{m_\pi^2-q^2}{f_\pi m_\pi^2}q^\rho T_{\mu\nu\rho} = T_{\mu\nu}. \quad (11\text{-}204)$$

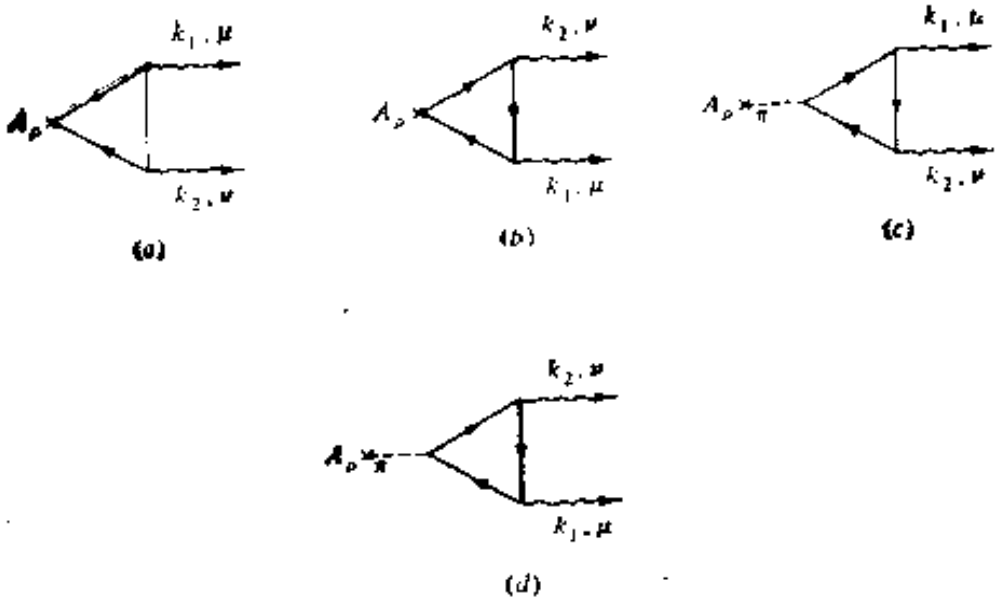


图 11-17　振幅 $T_{\mu\nu\rho}$ 的最低阶 Feynman 图

或者用

$$q^\rho \hat{T}_{\mu\nu\rho} = f_\pi T_{\mu\nu} = \frac{m}{g} T_{\mu\nu}. \tag{11-1025}$$

当然，我们要保证重整化不破坏电磁流守恒式 (11-187)。让我们先来计算图 11-17 中的前两个图。

由式(11-194)的定义有一因子 1/2，我们有

$$\hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) = \hat{T}^{(2)}_{\nu\mu\rho}(k_2, k_1)$$
$$= i\frac{e^2}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr\left(\frac{i}{\not p - m}\gamma_\mu \times \frac{i}{\not p + \not k_1 - m}\gamma_\rho\gamma_5\frac{i}{\not p - \not k_2 - m}\gamma_\nu\right), \tag{11-206}$$

与 q^ρ 缩并，得

$$q^\rho \hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) = \frac{e^2}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \times \frac{tr[(\not p + m)\gamma_\mu(\not p + \not k_1 + m)(\not k_1 + \not k_2)\gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2)[(p + k_1)^2 - m^2][(p - k_2)^2 - m^2]}. \tag{11-207}$$

求迹的中间的一项可重新组织为下述形式：

$$
\begin{aligned}
&(\not p + \not k_1 + m)(\not k_1 + \not k_2)\gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\\
&= (\not p + \not k_1 + m)(\not p + \not k_1 - m + \not k_2 + m - \not p)\\
&\quad \times \gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\\
&= 2m(\not p + \not k_1 + m)\gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\\
&\quad + [(p + k_1)^2 - m^2]\gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\\
&\quad + (\not p + \not k_1 + m)\gamma_5[(p - k_2)^2 - m^2],
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
q^\rho \hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2) &= \frac{m}{g} T^{(1)}_{\mu\nu}(k_1, k_2)\\
&+ \frac{e^2}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, tr\left\{\frac{(\not p + m)\gamma_\mu\gamma_5(\not p - \not k_2 + m)\gamma_\nu}{(p^2 - m^2)[(p - k_2)^2 - m^2]}\right.\\
&\left. - \frac{(\not p + \not k_1 + m)\gamma_\nu\gamma_5(\not p + m)\gamma_\mu}{[(p + k_1)^2 - m^2](p^2 - m^2)}\right\}. \qquad (11\text{-}208)
\end{aligned}
$$

第一项已被确认为 π^0 衰变的振幅 $T^{(1)}_{\mu\nu}(k_1, k_2)$[式(11-196)]，因此，式(11-205)的适用性依赖于其余的贡献是否为零. 初看起来，我们可能认为积分中的每一项都为零，因为它是依赖于一个四维矢量变量的 Lorentz 膨张量. 而且我们或许也可推测，积分变量的平移 $p \to p + k_2$ 使 $q^\rho \hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}$ 的被积函数中的第一项与 $q^\rho \hat{T}^{(2)}_{\mu\nu\rho}$ 中的第二项相消. 这两种想法都是不对的，因为积分是线性发散的. 比较安全的办法是用 Pauli-Villars 规范不变的正规化手续. 维数正规化方法在这里不适用，因为 γ_5 或 $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 只对特殊的四维时空才存在.

大质量(M)的正规子场的引入将式(11-208)变为

$$
\begin{aligned}
&q^\rho[\hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}(m) - \hat{T}^{(1)}_{\mu\nu\rho}(M)]\\
&= \left[\frac{m}{g} T^{(1)}_{\mu\nu}(m) - \frac{M}{g} T^{(1)}_{\mu\nu}(M)\right], \qquad (11\text{-}209)
\end{aligned}
$$

这是因为以前的讨论只适用于式(11-208)中的正规化了的有限积分. 由前面的计算易知

$$\lim_{M\to\infty}\frac{M}{g}\,T^{(1)}_{\mu\nu}(M)=\frac{\alpha}{2\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^{\rho}k_2^{\sigma}. \qquad (11\text{-}210)$$

正规化的结果就是揭示出这一有限项，它代表了式(11-208)中第二个积分的效应. 最后，将图11-17中的(a)、(b)两图的贡献相加得

$$q^{\rho}\hat{T}_{\mu\nu\rho}=\frac{m}{g}\,T_{\mu\nu}-\frac{\alpha}{\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^{\rho}k_2^{\sigma}, \qquad (11\text{-}211)$$

右端出现了修正式(11-205)的反常项. 注意，等式(11-187)仍然保持.

我们可能要问，是否可用一种不同的减除方案来消去式(11-211)中新的项. 然而，虽然 $q^{\rho}T_{\mu\nu\rho}$ 是有限的，但 $\hat{T}_{\mu\nu\rho}$ 却线性发散. 未知的减除项 $\Delta\hat{T}_{\mu\nu\rho}$ 必须是一个 k_1, k_2 的线性多项式，并且是对 $(k_1,\mu)\longleftrightarrow(k_2,\nu)$ 交换对称的 Lorentz 赝张量. 这样的项只有如下的形式:

$$\Delta\hat{T}_{\mu\nu\rho}=\text{常数}\times\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1-k_2)^{\sigma}, \qquad (11\text{-}212)$$

但它不满足(11-187)式. 我们可以找到一个对轴矢量流无反常的 Ward 恒等式[即式(11-205)的形式]，但代价是失去了通常的规范不变性.

出现在式(11-211)中的反常是值得欢迎的，因为它导致了满意的 π^0 寿命. 我们不想再集聚全部弊病来保持 PCAC 关系，而用 α 一次项去修改它会更为有效:

$$\partial^{\mu}A_{\mu}^{3}=f_{\pi}m_{\pi}^{2}\pi^{0}-\frac{\alpha}{8\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}, \qquad (11\text{-}213)$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是电磁场强. 以前得到的结果并不受这一改正的影响. 对于正规化了的或重整化了的理论，要保持经典近似下的全部 Ward 恒等式是不可能的. 这正说明了为什么我们称它们为反常 Ward 恒等式. 让我们来研究一下它们的某些性质和结果.

11-5-3 一般性质

在 σ 模型中分析的现象对所有的具有与轴矢流耦合的费米子、并且同时满足轴矢和矢量 Ward 恒等式的理论是共同的。早在 1951 年 Schwinger 首先发现了这件事，并且在电动力学中首先被 Adler，在 σ 模型中首先被 Bell 和 Jackiw 详尽地进行了研究。

在电动力学中我们想证明关系

$$\partial_\mu j_5^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = 2mi\bar{\psi}\gamma_5\psi = 2mj_5. \quad (11\text{-}214)$$

这个式子说明，由于费米子质量项的存在轴矢流不再守恒。式(11-214)中的轴矢量流与上面讨论的差一个因子 2。式(11-214)的一个结果将是 Green 函数之间类似于式(11-205)的关系(图 11-18)

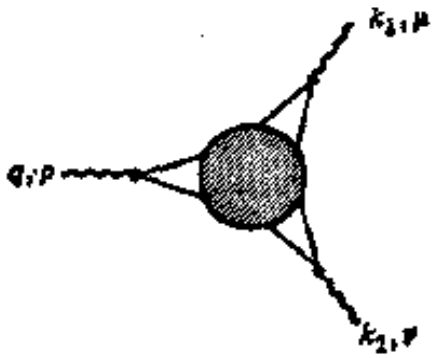


图 11-18 具有两个矢量流和一个轴矢流的 Green 函数

$$\begin{aligned} q^\rho R_{\mu\nu\rho} &= ie^3 q^\rho \int d^4x d^4y e^{i(k_1x+k_2y)} \langle T j_\mu(x) j_\nu(y) j_{5\rho}(0)\rangle \\ &= 2me^2 \int d^4x d^4y e^{i(k_1x+k_2y)} \langle T j_\mu(x) j_\nu(y) j_5(0)\rangle \\ &= 2m R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (11\text{-}215)$$

让我们引入轴矢流的正规函数和赝标密度：

$$\Gamma_{5\mu}(p', p) = \int d^4x d^4y e^{i(p'y-px)} \langle T j_{5\mu}(0)\phi(y)\phi(x)\rangle_I,$$

$$\Gamma_5(p',\ p) = \int d^4x d^4y e^{i(p'y-px)}\langle T j_5(0)\psi(y)\bar{\psi}(x)\rangle_T,$$

(11-216)

其中下标 T 表示已截断了费米子的传播子。由式 (11-214) 有

$$(p'_\mu - p_\mu)\Gamma^\mu_5(p',\ p)$$
$$= -2im\Gamma_5(p',\ p) + \gamma_5 S^{-1}(p) + S^{-1}(p')\gamma_5.$$

(11-217)

按照我们通常的记号，$iS(p)$ 是费米子的总传播子，使得在最低阶近似下 $S^{-1}(p) = \not{p} - m$。式(11-217)类似于顶角函数的 Ward 恒等式(8-87):

$$(p'_\mu - p_\mu)\Lambda^\mu(p',p) = S^{-1}(p') - S^{-1}(p). \quad (11\text{-}218)$$

式(11-217)意味着 mj_5 和 j^μ_5 有共同的相乘性重整化，其重整化常数 $Z_5 = 1$.

事实上，等式(11-214)和它的结果式(11-215)及式(11-217)是不能在微扰意义下证明的。它们将被三角图导致的反常所修改，象同 σ 模型的情况一样。前节的计算很容易推广到目前的情形，得到式(11-215)的单圈图修正形式

$$q^\rho R_{\mu\nu\rho} = 2mR_{\mu\nu} + \frac{2}{\pi}\alpha\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma. \quad (11\text{-}219)$$

用算符形式，反常为

$$\partial_\mu j^\mu_5(x) = 2mj_5(x) - \frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}. \quad (11\text{-}220)$$

与此类似，式(11-217)被修改为

$$(p'_\mu - p_\mu)\Gamma^\mu_5(p',p) = -2im\Gamma_5(p',p) + \gamma_5 S^{-1}(p)$$
$$+ S^{-1}(p')\gamma_5 + i\frac{\alpha}{4\pi}F(p',\ p),$$

$$F(p',\ p) = \int d^4x d^4y e^{i(p'y-px)}$$

$$\times \langle T\psi(y)\phi(x)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(0)\rangle_T. \qquad (11\text{-}221)$$

作为式（11-221）在零动量下的计算结果，$2mj_5$ 的重整化常数仍然等于 1，但是对 j_5^μ 则不然．手征对称的破坏现在要涉及硬分量 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$．

在一个可重整的理论中，如果费米子场具有某种与矢量、轴矢量、标量和赝标量场耦合的内部对称性，则这个理论中的反常结构可用同样的方法来分析．普遍的结论是，只有含与矢量和轴矢量流耦合的费米子圈的图才有反常．轴矢量流沿费米子圈必须出现奇数次．而且，任何一个包含标量或赝标量耦合的圈可以用一适当的减除消去．如果我们坚持矢量流的通常的 Ward 恒等式，则图 11-19 中的图形将导致轴矢流的反常．象在三角图的情形一样，在证明等式 $\partial_\mu j_5^\mu = 2mj_5$ 的计算过程涉及多至五角图的发散积分．

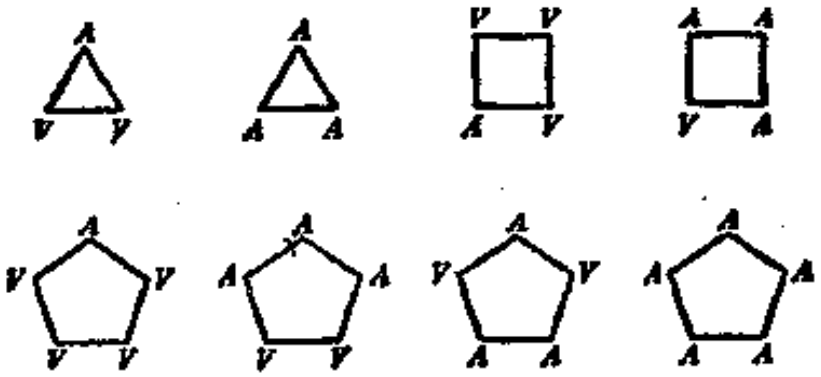


图 11-19　导致轴矢流 Ward 恒等式中反常的费米子单圈图

令 $\mathscr{V}_\mu$ 和 $\mathscr{A}_\mu$ 代表矢量和轴矢量场矩阵，这些矩阵作用于费米子的内部对称指标上，使得相互作用拉氏量取如下形式：

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \bar{\psi}\gamma^\mu(\mathscr{V}_\mu + \gamma_5\mathscr{A}_\mu)\psi, \qquad (11\text{-}222)$$

相应的流

$$J^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathscr{V}_\mu^T}, \qquad J_5^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathscr{A}_\mu^T} \qquad (11\text{-}223)$$

对内部对称性指标而言也是矩阵. 按照我们的假设，矢量 Ward 恒等式取通常形式：

$$\partial_\mu J^\mu(x) = j(x), \tag{11-224}$$

而轴矢流反常取下面的形式：

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = j_5(x) - \frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{4}F^V_{\mu\nu}F^V_{\rho\sigma}\right.$$

$$+\frac{1}{12}F^A_{\mu\nu}F^A_{\rho\sigma}+\frac{2}{3}i\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}_\nu F^V_{\rho\sigma}$$

$$+\frac{2}{3}iF^V_{\mu\nu}\mathscr{A}_\rho\mathscr{A}_\sigma+\frac{2}{3}i\mathscr{A}_\mu F^V_{\nu\rho}\mathscr{A}_\sigma$$

$$\left.-\frac{8}{3}\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}_\nu\mathscr{A}_\rho\mathscr{A}_\sigma\right). \tag{11-225}$$

在这些表达式中，j 和 j_5 代表流的简单的散度，并且

$$F^V_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathscr{V}_\nu-\partial_\nu\mathscr{V}_\mu-i[\mathscr{V}_\mu,\mathscr{V}_\nu]-i[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu],$$

$$F^A_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathscr{A}_\nu-\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-i[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{V}_\nu]-i[\mathscr{V}_\mu,\mathscr{A}_\nu]. \tag{11-226}$$

只要适当定义重整化了的算符，表达式(11-213)、(11-221)或(11-225)中出现的系数及其结构就不为高次修正所修改. 为了弄清这一点，首先让我们考虑电动力学的情形. 论述的基础是，存在一个光子传播子的正规化，例如形如 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(1+\Box^2/\Lambda^4)F^{\mu\nu}$，使得除单圈图外所有有关的图都是表观收敛的. 的确，对有 E_F 个外部费米子线、E_A 个光子线或流的嵌入，和 L 个圈的图形，幂次计算法给出 $\omega=8-\frac{7}{2}E_F-E_A-4L$. 因此，$L\geqslant 2$ 的振幅将是表观收敛的. 当然，我们必须作如下的理解，即标准的量子电动力学的重整化已经处理了所有内部的发散. 这种正规化是规范不变的，因而不修改

轴矢流的结构. 结果，反常只能从单圈子图中产生，这正是刚才我们已分析过的.

我们注意到，可以定义一个不同的轴矢流，使其具有通常的 Ward 恒等式但破坏规范不变性. 例如，在电动力学中，下面的情况就是如此:

$$\hat{j}_{\mu 5} = j_{\mu 5} + \frac{\alpha}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^{\nu}F^{\rho\sigma}, \qquad (11\text{-}227)$$

它满足

$$\partial_{\mu}\hat{j}_{5}^{\mu} = 2mj_{5}. \qquad (11\text{-}228)$$

这些不同的可能性可以用不同的语言来解释. 我们将尝试在有外部势时用场 ψ 和 $\bar{\psi}$ 直接构造算符 j_5^{μ}. 因组合 $\psi(x)\bar{\psi}(y)$ 在 $x \to y$ 时的极限情况下是奇异的，我们用一无穷小类空间隔 ε 将这些变量分离开，因而定义

$$j_{5}^{(\varepsilon)\mu}(x, \varepsilon) = \bar{\psi}(x + \varepsilon)\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi(x). \qquad (11\text{-}229)$$

这个新的算符不是规范不变的. 按照 Schwinger 的建议，可作如下的修改. 用一相因子乘式(11-229)，这一相因子涉及到矢量势沿一类空路径从 x 到 $x + \varepsilon$ 的积分，沿这个路径各分量互相对易:

$$j_{5}^{\mu}(x, \varepsilon) = \bar{\psi}(x + \varepsilon)\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi(x) \times \exp\left\{-ie\int_{x}^{x+\varepsilon} dz^{\rho}A_{\rho}(z)\right\}. \qquad (11\text{-}230)$$

如果我们启发式地采用运动方程，这一算符的散度可写成

$$\partial_{\mu}j_{5}^{\mu}(x, \varepsilon) = 2mi\bar{\psi}(x + \varepsilon)\gamma_{5}\psi(x)\exp\left[-ie\int_{x}^{x+\varepsilon} dz^{\rho}A_{\rho}(z)\right] - ie j_{5}^{\mu}(x, \varepsilon)F_{\mu\nu}(x)\varepsilon^{\nu}[1 + O(\varepsilon)]. \qquad (11\text{-}231)$$

右边第二项在 $\varepsilon \to 0$ 时是奇异的. 有外场时 j_5^{μ} 的真空矩阵元具有 $1/\varepsilon$ 的行为，由此在极限情况下我们回到

$$\langle 0|\partial_{\mu}j_{5}^{\mu}(x)|0\rangle = \langle 0|2mi\bar{\psi}(x)\gamma_{5}\psi(x)|0\rangle - \frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}(x). \qquad (11\text{-}232)$$

在有电磁作用时，轴反常修改了 PCAC 表达式[式(11-213)]. 附加的项是硬项，它改变轴矢流的重整化. 我们可回到

π^0 衰变，并且把振幅表示为

$$\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(q^2) = (m_\pi^2 - q^2) \times \langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2)|\pi(0)|0\rangle. \tag{11-233}$$

按照式(11-213)，它可写成

$$\varepsilon_1^\mu q_2^\nu T_{\mu\nu}(q^2) = \frac{m_\pi^2 - q^2}{m_\pi^2 f_\pi} \times [\langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2)|\partial^\rho A_\rho^3(0)|0\rangle + \frac{\alpha}{8\pi}\varepsilon_{\rho_1\sigma_1\rho_2\sigma_2}\langle \gamma(k_1, \varepsilon_1), \gamma(k_2, \varepsilon_2) \times |F^{\rho_1\sigma_1}F^{\rho_2\sigma_2}|0\rangle]. \tag{11-234}$$

至 α 最低阶，第二项矩阵元为 $\frac{\alpha}{\pi}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma$，而第一项在 $q^2 = 0$ 时消失。由此我们得出结论

$$T_{\mu\nu}(0) = \frac{\alpha}{\pi f_\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1^\rho k_2^\sigma. \tag{11-235}$$

这与式(11-199)是一致的。这一低能定理事实上适用于 α 的所有阶，这是由反常的重整化性质决定的。另一方面，外推到 $q^2 = m_\pi^2$ 将依赖于近似的阶。

我们得出结论，反常不是艺术品而是重整化的真正的产品，它涉及到场论的更深刻的方面。每当有了可解模型时，我们总可以详尽地检验它们，正象在二维具有零质量费米子的 Schwinger 电动力学模型中所做的那样，它总有一个可计算的形如：

$$\partial_\mu j_5^\mu = c\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{11-236}$$

的反常。在渐近行为中(第十三章)，反常量纲的出现将给于这种现象一更新的窥视。

注记

么正对称之父 M. Gell-Mann 和 Y. Ne'eman 在书"The Eightfold Way", Benjamin, New York, 1964. 中讨论过么正对称. 夸克模型由 M. Gell-Mann, *Phys. Lett.*, vol. 8, p. 214, 1963, 和 G. Zweig(未出版的 CERN Report, 1963)分别独立地提出.

与对称破缺相联系的谱,曾被 J. Goldstone, *Nuov. Cim.*, Vol. 19, p. 154, 1961; Y. Nambu 和 G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, vol. 122, p. 345, 1961;以及 J. Goldstone, A. Salam, 和 S. Weinberg, *Phys. Rev.*, Vol. 127, p. 965, 1962 讨论过. 二维空间中连续对称破缺的不可能性,由 N. D. Mermin 和 H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 17, p. 1133, 1966, 在统计力学范围内所证明,并且由 S. Coleman, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 31, p. 259, 1973 推广到了场论. 具有分立对称的格点系统相变的证明,是由 R. E. Peierls, *Phys. Rev.*, Vol. 54, p. 918, 1938 给出的. S. Coleman, *J. Math. Phys.*, Vol. 7, p. 787, 1966, 分析过基态不变性. 对称性问题的一般评述由 G. S. Guralnik, C. R. Hagen,和 T. W. Kibble, "Advances in Particle Physics", edited by R. L. Cool 和 R. E. Marshak, Interscience, New. York, 1968; S. Coleman, "Laws of Hadronic Matter", edited by A. Zichichi, Academic Press, New York, 1975 所给出.

关于流代数的大量工作,可以从 S. Adler 和 R. Dashen 的书 "Current Algebras", Benjamin, New York, 1968; V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, 和 C. Rossetti 的书 "Currents in Hadron Physics", North-Holland, Amsterdam, 1973; 和 S. Weinberg 的讲演 "Lectures on Elementary Particles and

Quantum Field Theory (Brandeis, 1970)", edited by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970; 和 S. B. Treiman 的书 "Lectures on Current Algebra and Its Applications", Princeton University Press, 1972 中找到。

S. Gasiorowicz 和 D. A. Geffen *Rev. Mod. Phys.* Vol. 41, p. 531, 1969 讨论了唯象拉氏量。

对课文中讨论的一些特殊的论点，其参考文献如下：

求和规则：

N. Cabibbo and L. A. Radicati, *Phys. Lett.*, Vol. 19, p. 697, 1966.

S. Adler, *Phys., Rev.*, Vol. 143, p. 1144, 1966.

J. D. Bjorken, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 16, p. 408, 1966.

PCAC 的结果：

M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, Vol. 110, p. 1178, 1958.

低能定理：

F. E. Low, *Phys. Rev.*, Vol. 96, p. 1428, 1954, and Vol. 110, p. 974, 1958.

M. Gell-Mann and M. L. Goldberger, *Phys. Rev.*, Vol. 96, p. 1433, 1954.

S. D. Drell and A. C. Hearn *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 16, p. 908, 1966.

S. L. Adler, *Phys. Rev.*, Vol. 140, ser. **B**, p. 736, 1965.

W. I. Weisberger, *Phys. Rev.*, Vol. 143, p. 1302, 1966.

软 π 定理：

S. Adler, *Phys. Rev.*, Vol. 139, ser. **B**, p. 1638, 1965.

S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 17, p. 616, 1966.

$SU(3) \times SU(3)$ 破缺:

M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.*, Vol. 175, p. 2195, 1968.

M. Gell-Mann 和 M. Lévy, *Nuov. Cim.*, Vol. 16, p. 705, 1960, 提出了 σ 模型, 并由 B. W. Lee, "Chiral Dynamics", Gordon and Breach, 1972 做了综述.

J. Stein berger, *Phys. Rev.*, Vol. 76, p. 1180, 1949, 曾研究过中性 π 的衰变, 并且 D. G. Sutherland, *Nucl. Phys.*, ser. **B**, Vol. 2, p. 433, 和 M. Veltman, *Proc. Roy. Soc.*, ser. **A**, Vol. 301, p. 107, 1967, 在流代数范围内做了讨论.

反常出现在 J. Schwinger 的工作 *Phys. Rev.*, Vol. 82, p. 664, 1951, 中,并且由 S. Adler, *Phys. Rev.*, Vol. 177, p. 2426, 1969, 和 J. S. Bell 和 R. Jackiw, *Nuov. Cim.*, Vol. 60, Ser. **A**, p. 47, 1969, 做了分析. W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, Vol. 184, *p.* 1848, 1969, 讨论了反常的一般结构. 也可参阅 Brandeis 1970 Lectures, edited by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970, 和参阅 R. Jackiw, "Lectures on Current Algebra and Its Applications", Princeton University Press, 1972. J. Schwinger, *Phys. Rev.*, Vol. 128, p. 2425, 1962, 解决了无质量的二维量子电动力学问题.

第十二章　非阿贝尔规范场

首先复习下杨-Mills 场的几何基础，然后再详细讨论它的量子理论．重点讨论对称和自发破缺两种情况下的量子化和重整化方法．真空简并和经典解只是简单地提一下．对弱作用和电磁作用统一理论的应用，只是在 Weinberg-Salam 模型框架中加以研究．

12-1　经 典 理 论

1954 年杨和 Mills 首先把规范不变性推广到非阿贝尔群．这是一个非常自然和吸引人的想法．虽然由此导致了大量的研究工作，但一直到廿世纪六十年代末非阿贝尔规范理论才有了迅速的发展．此时，诸如量子化、重整化、质量产生等重要问题相当漂亮地被解决了，而且人们还相信，这类理论可以对弱作用和电磁作用，甚至可能还包括强作用提供统一的描述．

这些模型是极其复杂的．对它们量子化和重整化是困难的，它们的对称性破缺机制是异乎寻常的．此外，它们有独特的小距离行为，然而，其大距离行为的多数方面至今仍然不完全清楚．最近人们发现，甚至其经典理论也具有奇妙的复杂性．

在不长的篇幅中要讨论这么多内容几乎是不可能的．我们将只限于讨论基本的内容，稍提一下可能的发展和存在的问题．

12-1-1 规范场 A_μ 和张量 $F_{\mu\nu}$

杨-Mills 模型是基于具有 $Su(2)$ 整体不变的同位旋对称性. 是否有可能把这种整体不变性变成定域的，因而不同时空点定义同位旋的参考系可以不同呢？ 如果可以的话，则在一给定的时空点产生一个"质子"这件事，对另一个观察者则是无意义的，除非有某种办法可以把这两个不同的观察者的不同参考系加以比较. 规范场正是起这种作用. 这很象电动力学的情形，那里荷电场在不同点的相对位相只有通过比较电磁势后才有意义.

为了更明瞭起见，让我们考虑 N 个场（为简单只考虑 Lorentz 标量），它们按某个紧致李群 G 的一个不可约表示 U 变换：

$$\phi(x) \to ({}^g\phi)(x) = U(g)\phi(x), \qquad (12\text{-}1)$$

这里 $U(g)$ 是一个 $N \times N$ 么正（或正交）矩阵. 假定拉氏量在变换式(12-1)下不变. 我们想构造一个更复杂的理论，使其在 g 依赖于时空点 x 时仍然是不变的. 令 $g(x)$ 为群 G 上取值的函数. 当我们比较场 $\phi(x+\delta x)$ 和 $\phi(x)$ 时，由于它们各自独立地按式 (12-1) 变换，$\partial_\mu\phi$ 失去了固有的意义. 要想比较这两个场，必须引入新的东西.

考虑一无穷小变换

$$g = e + \delta\alpha_a t^a, \qquad (12\text{-}2)$$

式中 e 为群 G 的恒等变换，t^a 是相应的李代数的元素，它满足下述对易关系

$$[t^a, t^b] = C_c^{ab} t^c. \qquad (12\text{-}3)$$

在场 ϕ 为基的表示中，用反厄米矩阵 T^a 来表示此李代数元素 t^a，因此在式 (12-2) 表示的变换 g 下

$$\phi(x) \to ({}^g\phi)(x) = \phi(x) + \delta\phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha_a T^a \phi(x) \equiv \delta\alpha\phi. \qquad (12\text{-}4a)$$

如果无穷小参量 $\delta\alpha_a(x)$ 依赖于 x，这些变换就称作(定域)规范变换，变换群—规范群—形式上是一无穷乘积 $\Pi_x G_x$：

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha(x)\phi(x) = \delta\alpha_a(x) T^a \phi(x). \qquad (12\text{-}4b)$$

我们引入规范场 $x \to A_a^\mu(x)$，它们是矢量场并带有群 G 的伴随表示的指标 a，我们用 A^μ 表示相应的李代数元素：

$$A^\mu(x) = A_a^\mu(x) t^a, \qquad (12\text{-}5)$$

并且我们用同样的记号记它的任何表示 $A_a^\mu(x)T^a$. 从上下文便可以知道它具体代表什么.

对一无穷小路径 $(x, x+dx)$，规范场与群元素

$$g(x+dx, x; A) = e + dx^\mu A_\mu(x) \qquad (12\text{-}6)$$

相联系，这个群元素提供了比较两相邻参考系的方法. 可将此推广到由 x_1 至 x_2 的有限长路径 C. 如果将此有限路径参数化为 $s \to x(s)$，$0 \leqslant s \leqslant 1$；$s(0) = x_1$，$s(1) = x_2$，则与 C 相联系的群 G 的元素为

$$g(C; A) = P\exp\left(\int_0^1 ds \frac{dx}{ds} \cdot A\right)$$

$$= \sum_0^\infty \int_0^1 ds_n \int_0^{s_n} ds_{n-1} \cdots \int_0^{s_2} ds_1 \frac{dx}{ds_n} \cdot A[x(s_n)] \cdots$$

$$\frac{dx}{ds_1} \cdot A[x(s_1)]. \qquad (12\text{-}7)$$

路径编序算符 P 与熟知的编时算符 T 类似.

采用微分几何的语言，A^μ 形成一个联络并定义了群表示空间几何客体的一个平行移动，场中从 x 到 $x+dx$ 的平行移动由下式定义：

$$\phi_t(x) = g(x+dx, x)\phi(x) = \phi(x) + dx \cdot A(x)\phi(x). \qquad (12\text{-}8)$$

由此自然可以导出协变微分的定义

$$dx^\mu D_\mu\phi(x) \equiv \phi(x+dx) - \phi_t(x)$$
$$= dx^\mu[\partial_\mu - A_\mu(x)]\phi(x),$$
$$D_\mu \equiv \partial_\mu - A_\mu(x), \qquad (12\text{-}9a)$$

或用分量形式写成

$$(D_\mu)^B_A = \partial_\mu\delta^B_A - (T^c)^B_A A_{\mu c}(x). \qquad (12\text{-}9b)$$

特别是，在伴随表示中 $(T^c)^b_a = C^{cb}_a = -C^{bc}_a$，

$$(D_\mu)^b_a = \partial_\mu\delta^b_a + C^{bc}_a A_{\mu c}(x). \qquad (12\text{-}9c)$$

如果G为 $U(1)$ 群，这将退化为电动力学中所熟悉的情形. 在规范变换下，规范场被赋予一种变换规律，使得 $\phi_t(x)$ 按 $\phi(x+dx)$ 的方式变换，为此只要使

$$g(x+dx, x; A+\delta A)$$
$$= g(x+dx)g(x+dx, x; A)g^{-1}(x) \qquad (12\text{-}10)$$

就足够了，因此

$$\phi_t(x) \to U[g(x+dx, x: A+\delta A)]U[g(x)]\phi(x)$$
$$= U[g(x+dx)]\phi_t(x), \qquad (12\text{-}11)$$

这正是我们希望的. 对无穷小形式，我们有

$$\delta D_\mu\phi(x) = \delta\alpha(x)D_\mu\phi(x). \qquad (12\text{-}12)$$

这表明，$D_\mu\phi(x)$ 的变换方式与 $\phi(x)$ 相同. 将式 (12-10) 展开到 $\delta\alpha$ 一次项，得

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\delta\alpha(x) + [\delta\alpha, A_\mu] = D_\mu\delta\alpha(x), \qquad (12\text{-}13a)$$

这里将 $\delta\alpha$ 看成按伴随表示变换. 写成明显的形式

$$\delta A_{\mu a}(x) = \partial_\mu\delta\alpha_a(x) + C^{bc}{}_a\delta\alpha_b(x)A_{\mu c}(x). \qquad (12\text{-}13b)$$

对一有限的规范变换，式 (12—10) 给出

$$A_\mu(x) \to {}^g A_\mu(x)$$
$$= [\partial_\mu g(x)]g^{-1}(x) + g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x). \qquad (12\text{-}14)$$

与阿贝尔情况相比，这里出现了新的特点，对于常数的 g (或 $\delta\alpha$)，A_μ 按属于伴随表示的荷电场的变换方式变，由式 (12-13) 和 (12-14) 的右端的第二项便可看出来这点.

在经典电动力学中，只相差一非奇异定域规范变换的两个势物理上是等价的，因而由相同的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 所表征．我们想构造出非阿贝尔情况下的类似的曲率张量 $F_{\mu\nu}$．为达到此目的，我们先来考察某个代表场 ϕ 沿一无穷小闭合迴路 C 上的平行移动．回到起始点后，ϕ 场被转动了

$$g(C;A) = P\exp\left[\int_C dx \cdot A(x)\right].$$

如果以 l 表示迴路 C 的维数，我们把 $g(C;A)$ 展开到 l^2 项：

$$g(C;A) = e + \int_C dx \cdot A + \int_C\int_C dx_2 \cdot A(x_2)dx_1 \cdot A(x_1) + O(l^3),$$

这里象前面一样，编序表示曲线已被参数化，且 $x_0 = x(0) = x(1)$．把 $A_\mu[x(s)]$ 也展开成

$$A_\mu[x(s)] = A_\mu(x_0) + [x^\nu(s) - x_0^\nu]\partial_\nu A_\mu(x_0) + \cdots,$$

于是得到

$$g(C;A) = e + \frac{1}{2}\iint_{\mathscr{A}} dx^\mu \wedge dx^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]) + O(l^3), \tag{12-15}$$

这里 $\mathscr{A}$ 为 C 所包围的无穷小面积．我们令

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$$
$$= (\partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - C^{bc}{}_a A_{\mu b} A_{\nu c})t^a, \tag{12-16}$$

因而推广了电磁场的定义．这个张量经常被算作场强张量．由前面的推导可得到一个有用的恒等式

$$[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu}. \tag{12-17}$$

在规范变换下，$g(C;A)$ 按如下的方式变：

$$g(C;A) \to g(x_0)g(C;A)g^{-1}(x_0)$$

[比较式 (12-10)]，因此 F 的变换方式与属于伴随表示的荷电场一样，

$$F(x) \to g(x)F(x)g^{-1}(x), \tag{12-18}$$

其无穷小形式为

$$\begin{aligned} F &\to F + \delta F, \\ \delta F &= [\delta\alpha(x), F], \\ \delta F_{\mu\nu a}(x) &= C^{bc}{}_a \delta\alpha_b(x) F_{\mu\nu c}(x). \end{aligned} \tag{12-19}$$

特别是，F 的协变微商为

$$D_{\mu a}{}^b F_{\nu\rho b} t^a = [D_\mu, F_{\nu\rho}] = \partial_\mu F_{\nu\rho} - [A_\mu, F_{\nu\rho}].$$

在电磁学中，微分形 $A_\mu(x)dx^\mu$ 的外微分，即 $\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$，是一个二级封闭型

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \text{cyclic permutations} = 0. \tag{12-20}$$

这个性质等阶于齐次 Maxwell 方程 $\text{div}\mathbf{B} = 0$，$\text{curl}\mathbf{E} + \partial\mathbf{B}/\partial t = 0$. 反之，给定这样一个封闭型 Poincaré 引理使得势 A 的定域存在成为必要，而 F 是由 A 导出的(1-1-2 节)，在非阿尔贝情形下，情况稍微有点不同，此时的确存在一个类似的恒等式

$$[D_\mu, F_{\nu\rho}] + [D_\nu, F_{\rho\mu}] + [D_\rho, F_{\mu\nu}] = 0. \tag{12-21}$$

此式可由雅可比恒等式和式(12-17)导出，可是应注意到，式(12-21)假定了 A 场的存在，因为协变微商 D_μ 中含 A. 而且，可以证明，如果 $F_{\nu\rho}$ 和 A 满足式 (12-21)，F 并不一定非是 A 的场强张量不可，因此场强张量 F 不能唯一确定所有的规范不变量，这一点与阿贝尔情况不同.

如果 $F_{\mu\nu}$ 在一点的邻域为零，则 A_μ 是一个纯规范场，

$$F_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \exists g(x): A_\mu(x) = [\partial_\mu g(x)]g^{-1}(x). \tag{12-22}$$

的确，若 $F = 0$，则沿路径 C 从原点到 x 对 A_μ 的积分不依赖于曲线本身. 由 F 的定义可导出

$$g(x) = g(x, 0; A) = P\exp\left[\int_C dx \cdot A(x)\right].$$

这个元素 $g(x)$ 满足式 (12-22). 反之，一个纯规范场 A_μ 的场强张量 F 显然等于零.

由于规范的任意性，有时我们可以要求势定域地满足某

个特定条件，这称为规范的选取. 例如，令 n^μ 为一固定的四维矢量，存在一个规范变换，$A \to A'$，使得

$$n \cdot A'(x) = 0, \tag{12-23}$$

这就是所谓的轴规范.

为证明这种轴规范的选取是可能的，让我们引进四维矢量 N^μ，使得 $N \cdot n \neq 0$（如 $N = n$，如果 $n^2 \neq 0$ 的话）每个点 x 可唯一地写成

$$x = \lambda(x)n + x_\perp, \quad x_\perp \cdot N = 0,$$

式中

$$\lambda(x) = \frac{N \cdot x}{N \cdot n}, \quad x_\perp = x - n\frac{N \cdot x}{N \cdot n}.$$

考虑一线段 C，$x(s) = s\lambda(x)n + x_\perp (0 \leqslant s \leqslant 1)$，和积分

$$g(x) = P\exp\left\{\int_0^1 ds \frac{dx}{ds} \cdot A[x(s)]\right\}$$

$$= P\exp\left[\int_0^{\lambda(x)} d\lambda n \cdot A(\lambda n + x_\perp)\right].$$

引入

$$A'_\mu = (\partial_\mu g^{-1})g + g^{-1}A_\mu g,$$

我们可以看出

$$n \cdot A' = (n \cdot \partial g^{-1})g + g^{-1}n \cdot Ag = g^{-1}(n \cdot A - n \cdot \partial)g.$$

由 $g(x)$ 的定义可得

$$\frac{\partial}{\partial\lambda(x)} g(x) = n \cdot \partial g(x) = n \cdot A(x)g(x),$$

因而 $n \cdot A' = 0$.

我们可以类似地证明，通过一规范变换，我们总可以定域地满足 Lorentz 规范条件

$$\partial \cdot A = 0, \tag{12-24}$$

或满足任何由式 (12-23) 或 (12-24) 右方换成在李代数上取值的函数所得的条件.

12-1-2 经典动力学

我们现在的目的是定义一个规范不变的作用量. 至于与荷电场(物质场)的耦合，采用最小耦合就足够了. 我们把所有地方的普通微商都换成协变微商，

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - A_\mu, \tag{12-25}$$

这里 $A_\mu = A_{\mu a}T^a$ 理解为在物质场表示中写出的，作用量中只依赖于 A 的部份必须是 Lorentz 标量，规范不变量——至多含微商的二次项. 唯一的这种项是在某个不可约表示中 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 的迹 $(\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$. 对一个单纯李群，不同的不可约表示中求得的迹是成比例的. 这是因为在这个李代数中只有一个二次不变量. 例如，我们可以挑出基础表示(维数最低)，并将其生成元按下式归一化.

$$\mathrm{tr}(t^a t^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{12-26}$$

这里负号与我们选取 t 为反厄米的惯例有关. 例如，对 $SU(2)$ 和 $SU(3)$，我们可分别取

$$t^a = \frac{i\sigma^a}{2} \qquad a = 1, 2, 3,$$

和

$$t^a = \frac{i\lambda^a}{2} \qquad a = 1, 2, \cdots\cdots 8.$$

与 A 场相应的作用量为

$$I = \frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$= -\frac{1}{4g^2}\int d^4x \sum_a F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu}{}_a. \tag{12-27}$$

无量纲参量 g (不要与群元素相混)起着耦合常数的作用. 这一点是显然的，只要将 A 重新标度为

$$A \to gA,$$

则

$$I \to \frac{1}{2}\int d^4x \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}),$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu]$$
$$= -\frac{1}{g}[D_\mu, D_\nu],$$

$$D_\mu = \partial_\mu - gA_\mu. \tag{12-28}$$

但是，为简洁起见，等到推导 Feynman 规则时再来进行重新标度.

对于一般的不变群，其李代数是单纯李代数的直接和，再加上一些阿贝尔因子. 其中的每一项可能与一个二次不变量和一个独立的耦合常数相联系. 以群 $SU(2) \times U(1)$ 为基础的弱电. 相互作用的 Weinberg-Salam 模型就是一例，其中的两个耦合常数与 Fermi 耦合常数及电荷相联系（见下面的 12-6 节).

从作用量式 (12-27) 的稳定性条件很容易导出经典运动方程

$$0 = \delta I = \frac{2}{g^2}\int d^4x \mathrm{tr}[\delta A^\nu(\partial^\mu F_{\mu\nu} - [A^\mu, F_{\mu\nu}])],$$

故

$$[D^\mu, F_{\mu\nu}] = \partial^\mu F_{\mu\nu} - [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0,$$

或

$$(D^\mu)_a{}^b F_{\mu\nu b} = 0. \tag{12-29}$$

此方程提供了一个 Maxwell 方程的非阿贝尔推广的例子. 方程式(12-29)的非线性特点使得它们的解并不是显而易见的.

这些方程具有所希望的协变性质. 如果 A_μ 是一个解，则其规范变

换后得到的场仍是解.此外,必须弄清楚,方程组 (12-29) 是相容的.特别是与 ∂^ν 的缩并等于零:

$$\begin{aligned}\partial^\nu\alpha^\mu F_{\mu\nu} &= \partial^\nu[A^\mu, F_{\mu\nu}]\\ &= [\partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}] + [A^\mu, \partial^\nu F_{\mu\nu}]\\ &= [\partial^\nu A^\mu, F_{\mu\nu}] + [A^\mu, [A^\nu, F_{\mu\nu}]]\\ &= \frac{1}{2}[\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - [A^\nu, A^\mu], F_{\mu\nu}] = 0.\end{aligned}$$

令 $g = 1$，正则能量动量张量为[比较方程 (1-105)]

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = 2\mathrm{tr}\left(F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right),$$

但它不是规范不变的. 这可用减去一项全微分 $\Delta\hat{\Theta}^{\mu\nu}$ 的办法来补救:

$$\Delta\hat{\Theta}^{\mu\nu} = 2\mathrm{tr}[F^{\mu\rho}(\partial_\rho A^\nu + [A^\nu, A_\rho])] = 2\partial_\rho \mathrm{tr}(F^{\mu\rho}A^\nu)$$

这里已用了运动方程 (12-29):

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} &= \hat{\Theta}^{\mu\nu} - \Delta\hat{\Theta}^{\mu\nu}\\ &= 2\mathrm{tr}\left(F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right)\\ &= \sum_a \left(F_a^{\mu\rho} F_{\rho a}^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_\rho{}^\sigma F_{\rho\sigma a}\right). \qquad (12\text{-}30)\end{aligned}$$

我们引入与电场和磁场类似的场

$$E_a^i = F_a^{i0} \quad B_a^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}{}_a \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (12\text{-}31)$$

其中脚标 i, j, k 是空间指标 ($i, j, k = 1, 2, 3$)，且全章都如此规定,而 a, b, c 是李代数指标. 借助于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$,

$$\begin{aligned}\Theta^{00} &= \frac{1}{2}\sum_a (\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a + \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_a) = -\mathrm{tr}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2),\\ \Theta^{0i} &= \sum_a (\mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a)^i = -2\mathrm{tr}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i.\end{aligned} \qquad (12\text{-}32)$$

12-1-3 经典运动方程的欧氏解

经典解的寻找工作为下列事实所推动：一是相信半经典方法可能对更基本的量子世界有某些启示，二是相信使作用量取稳定值的场的经典组态（configuration）起着重要的作用.

特别感兴趣的是场的具有有限能量的非耗散组态，这种组态的能量局限于有限的空间范围内，且不扩散到无穷远去.这类组态可用来描述量子意义上的广延体系. 倘若它们对衰变是稳定的，则它们就是基本场的相干态. 稳定性来源于某些守恒定律，也许是拓扑性质的守恒定律. 人们称这种体系为"孤子"（soliton）或能团（Energy Lump）. 由于它们起源于围绕作用量的一个非平庸稳定点的展开，这些能团和它们的量子激发表现出了一些特征，这些特征不可能从通常的微扰展开中觉察到. 在 12-5-3 节我们将考虑一个涉及标量场的四维规范理论的例子，这个理论具有有限能量的解. 另一方面，可以证明，在只有规范场的非阿贝尔规范理论中，不存在非平庸的有限能量的非耗散解.换句话说，任何一个这类的解都等价于 $A^a=0$.

考虑一个时间有关的解的拉氏函数，即拉氏量的空间积分.

$$L = L_1 - L_2 = \frac{1}{2}\int d^3x(\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a - \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B}_a),$$

此处沿用式(12-31)的记号. 总能量 H 为 $L_1 + L_2$，因而其有限性意味着 L_1，L_2 和 L 都是有限的. 一个解，如果存在的话，在标度变换下是不稳定的：

$$A_a^0(\mathbf{x}) \to \rho\lambda A_a^0(\lambda\mathbf{x}),$$
$$A_a^i(\mathbf{x}) \to \lambda A_a^i(\lambda\mathbf{x}).$$

拉氏函数变为

$$L \to \rho^2\lambda L_1 - \lambda L_2,$$

但它应当在 $\rho=\lambda=1$ 时是稳定的. 这意味着

$$L_1 = L_2 = 0,$$

因此

$$F_{\mu\nu} = 0.$$

于是，将定域成立的方程（12-22）作整体扩充可以看出，此时的规范场处处都是纯规范. 这种无标度性的论述（由 Coleman 提出），可以被证

明能阻止任何非四维空间中时间无关解的发生．这已被推广到更普遍的非耗散组态．

然而，经典场方程的非平庸四维欧氏解是存在的，在说明这些欧氏解的性质和作用之前，让我们先进一步分析一下非阿贝尔规范理论的基态的结构．

要进行这种分析，加上规范条件 $A_0 = 0$ 更方便．从经典意义上讲，基态必定对应着零能密度的时间无关的场组态．

因而，我们有 $F_{\mu\nu} \equiv 0$，这意味着场 $\mathbf{A}$ 是个纯规范，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \partial[g(\mathbf{x})]g^{-1}(\mathbf{x}). \tag{12-33}$$

我们进一步假设我们可以对变换函数 $g(\mathbf{x})$ 施加限制，使之在空间所有方向上有相同的极限．我们可以取这个极限为群中的恒等变换

$$g(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}|\to\infty]{} e \tag{12-34}$$

（实际上没有令人信服的理由来说明这种限制是否合理）．在这种情况下，由式 (12-33)、(12-34) 给出的所有的场的组态可以被看做是描述基态的．我们可能要问，这些真空是否等价？即是否存在一个连续的规范变换，它在空间无穷远处趋于零，并且把上述的任何两个真空联系起来？令人惊奇的回答是，不能！为确定起见，假定规范群为 $SU(2)$，任何一个 $SU(2)$ 矩阵都可参数化为

$$g(\mathbf{x}) = u_0 + i\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{12-35}$$

这里σ为 Pauli 矩阵，u 为实的且满足 $u_0^2 + \mathbf{u}^2 = 1$．因此，$SU(2)$ 与一个三维球面 S_3 同构，S_3 由 $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ 表示。另一方面，如果把所有无穷远点看成是一个点时，整个三维空间也拓扑地等价于 S_3．因而，与每一个真空相联系的规范变换 $g(\mathbf{x})$ 是一个从 S_3 到 S_3 的映射．根据同伦理论，这些映射可分成等价类．如果存在一个连续的从 $g_1(\mathbf{x})$ 到 $g_2(\mathbf{x})$ 的形变，则两个映射 $\mathbf{x}\to g_1(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{x}\to g_2(\mathbf{x})$ 属同一类．目前情况下，这些类是由正的或负的整数标记的．这些整数称为这个类的绕数或 Pontryagin 数．这个整数表征 S_3 映射到自身的次数，它等于

$$n = \frac{1}{2\pi^2}\int d^3x \det\{A_\mu^k(x)\}, \tag{12-36}$$

其中 $iA_\mu^k(\mathbf{x})\sigma^k$ 由式 (12-33) 给出．由 $n = 1$ 标记的类的有代表性的例子有

$$g_1(\mathbf{x}) = -\exp\left\{i\pi \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right\} \text{ 或 } g_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + 2i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}}{x^2+1},$$

并且 $g_n(\mathbf{x}) = g_1^n(\mathbf{x})$ 属于第 n 类. 对于其它的单纯群的情况，同样的结论也成立. 这就是说，存在一组由整数 n 标记的离散的不等价真空 $|n\rangle$.

正如第十一章中所说的，基态的这种简并是不允许的，且实际上为量子隧道效应所解救. 真正的真空是退化的近似真空 $|n\rangle$ 的线性迭加. 由于上面的规范变换使绕数改变一个单位，而且因为真正的真空在任何规范变换下必须是不变的（最多只差一个相因子），它须有如下的形式：

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle, \tag{12-37}$$

这里 θ 是理论中的一个新的任意的(也是意外的)参量.

然后我们可以设法更好地理解一下在两个退化的真空 $|n\rangle$ 之间如何发生隧道效应. 为此我们回忆一下 Feynman-Kac 公式 [方程 (9-198)]：

$$\langle n_2|e^{-TH}|n_1\rangle = \int \mathscr{D}(A)e^{-I}, \tag{12-38}$$

这里 H 是系统的哈密顿量，I 是时间 0 和 T 之间的欧氏作用量：

$$I = \frac{1}{4g^2}\int_0^T d\tau \int d^3x F_a^{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2g^2}\int_0^T d\tau \int d^3x(\mathbf{E}_a\cdot\mathbf{E}_a + \mathbf{B}_a\cdot\mathbf{B}_a). \tag{12-39}$$

我们已把场强张量的定义推广到了欧氏变数的情形. 式 (12-38) 中的泛函积分受绕数 $n(A)$ 的边界条件的限制：

$$\begin{aligned} n[A(\mathbf{x},\tau=0)] &= n_1, \\ n[A(\mathbf{x},\tau=T)] &= n_2. \end{aligned} \tag{12-40}$$

这里我们打了一点马虎眼，因为测度 $\mathscr{D}(A)$ 还没有被适当地定义. 它的精确的定义在 12-2 节量子化方法中才能弄清楚. 现在我们来看另外一种基态分类的解释，即按 $S_3 \to S_3$ 的同伦类分类. 对 $T\to\infty$ 的情形，我们来看这样一些组态，其邻域对 Feynman-Kac 公式的贡献是有限的.

由于它们的欧氏作用量是有限的，$F_{\mu\nu}$ 在欧氏空间各方向上的无穷远点都为零，这意味着 A_μ 是一个纯规范场，并给出从 S_3（四维欧氏空间中无穷远处的三维表面）到群，例如，$SU(2)\sim S_3$ 的一个映射．而且，可以证明，与此映射相关的绕数 n 可表达为一个欧氏积分

$$n = \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}_a F^{\rho\sigma}_a = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4xF^{\mu\nu}_a\tilde{F}^{\mu\nu}_a, \quad (12\text{-}41)$$

其中对偶张量为 $\tilde{F}^{\mu\nu}{}_a = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}{}_a$．我们看到

$$F^{\mu\nu}{}_a\tilde{F}^{\mu\nu}{}_a = \partial^\mu K^\mu$$

$$K^\mu = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A^\nu_a\left(\partial^\rho A^\sigma_a - \frac{1}{3}\varepsilon_{abc}A^\rho_b A^\sigma_c\right). \quad (12\text{-}42)$$

对于很大的 T，我们期望积分式（12-38）的主要贡献来自某些稳定组态的邻域，这些稳定组态是欧氏经典运动方程

$$D^\mu_{ab}F^{\mu\nu}{}_b = 0 \quad (12\text{-}43)$$

的解，且满足边界条件（12-40）或者等价地满足

$$n \equiv n_2 - n_1 = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4xF^{\mu\nu}{}_a\tilde{F}^{\mu\nu}{}_a. \quad (12\text{-}44)$$

这样的解的作用量具有用 n 表示的下界，这一点可从下面的表达式的正定性看出：

$$0 \leqslant \int d^4x(F^{\mu\nu}{}_a \pm \tilde{F}^{\mu\nu}{}_a)^2 = 2\int d^4x[(F^{\mu\nu}{}_a)^2 + F^{\mu\nu}{}_a\tilde{F}^{\mu\nu}{}_a]. \quad (12\text{-}45)$$

由此得

$$I = \frac{1}{4g^2}\int d^4x(F^{\mu\nu}{}_a)^2 \geqslant \frac{1}{4g^2}\left|\int d^4xF^{\mu\nu}{}_a\tilde{F}^{\mu\nu}{}_a\right|$$

$$= \frac{8\pi^2|n|}{g^2}. \quad (12\text{-}46)$$

对自对偶或反自对偶组态，$F = +\tilde{F}$，上面的不等式中等号成立，因此时由于恒等式（12-21），运动方程自动得到满足．

任意绕数的显式解最近已被找到．对 $n = \pm 1$，Belavin, Polyakov, Schwartz 和 Tyupkin 找到的解为

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \lambda^2}[\partial_\mu g(x)]g^{-1}(x), \quad (12\text{-}47)$$

其中

$$g(x)=\frac{x_0\pm i\sigma\cdot x}{(x^2)^{1/2}}.$$

显然，在无穷远处，A_μ 退化为纯规范场，这是由于此时是从 S_3 到 S_3 的恒等映射.因此，我们期待且可用直接的计算验证这个解具有 $n=\pm1$. 更普遍地讲，如果采用下面的参数化：

$$A_a^i=(\varepsilon_{aik}\partial_k\mp\delta_{ai}\partial_0)\ln f\quad i,\ k=1,2,3,$$
$$A_a^0=\pm\partial_a\ln f. \tag{12-48}$$

方程 $F=\pm\tilde{F}$ 简化为

$$\frac{1}{f}\Box_E f=0,\quad \Box_E\equiv\partial_0^2+\nabla^2. \tag{12-49}$$

$n=\pm1$ 的情形对应于 $f^{(1)}=1+\lambda^2/x^2$，但绕数为 $\pm n$ 的解可以写成

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i^2}{(x-x_i)^2}, \tag{12-50}$$

它们依赖于 $n+1$ 个任意标度 λ_i 和位置 x_i. 这样的解被称作赝标量粒子(相对于虚时间坐标而言)或瞬子(因为与三维孤子比较，它们对时间是定域的).我们知道，一定还存在另外的解. 例如，对 $SU(2)$，一般解(可相差一规范变换)依赖于 $8n-3$ 个参量. 我们将不详细讨论这个发展很快的问题，也不详述另外一些有关的课题，如当存在无质量费米子时如何修改这种图象的问题.

这些整体性质虽然很吸引人，但在下面章节中我们将省去不谈. 这是合理的，因为我们将集中讨论微扰展开，而微扰展开对真空的选择并不敏感.

12-1-4 规范不变性和约束条件

在时间 t_0 给定一组 Cauchy 条件，光靠运动方程不足以确定场 $A_\mu(x)$. 通过一个规范变换 $g(x)$ [当 $t\leqslant t_0$ 时 $g(x)=e$] 彼此可以互相得到两个解满足同样的 Cauchy 条件，但这两个解当 $t>t_0$ 时可以不同. 因此，这种规范的任意性必须通过引入辅助条件来加以限制，但这些辅助条件不能

影响规范不变的物理观测量.下面的讨论(是由 Paddeev 给出的)将导至第九章所讲的泛函量子化.

我们将限于讨论单纯紧致李群的情形，象在阿贝尔情况一样,首先用独立变量 F 和 A 把作用量改写成

$$I = \frac{1}{g^2}\int d^4x \mathrm{tr}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu])F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \tag{12-51}$$

对 F 和 A 变分，我们分别得到式 (12-16) 和 (12-29). 引入方程 (12-31) 中的记号 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$，并用 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 间的时间无关的关系式可消去 $\mathbf{B}$. 下面，$\mathbf{B}$ 代表 $\mathbf{B}(\mathbf{A})$，分部积分之后，我们有

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{g^2}\int d^4x \mathrm{tr}\left[(\partial^0\mathbf{A} + \nabla A^0 - [A^0, \mathbf{A}])\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\right] \\ &= \frac{2}{g^2}\int d^4x \mathrm{tr}\left[\partial^0\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - A^0(\nabla\cdot\mathbf{E} + [\mathbf{A},\mathbf{E}])\right], \end{aligned} \tag{12-52}$$

因 $\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ 为能量密度，我们面临的是一个典型的约束系统问题. 这里正则变量 p 和 q 为 $\mathbf{A}/g$ 和 $\mathbf{E}/g$. 对约束条件

$$\Gamma(x) \equiv \nabla\cdot\mathbf{E} + [\mathbf{A},\mathbf{E}] = 0 \tag{12-53}$$

而言，变量 A^0 起着 Lagrange 乘子的作用. 式 (12-53) 是运动方程(12-29)的 $\nu = 0$ 的分量. 借助于对角的度规式(12-26)(这使得我们有全反对称的结构常数 C_{abc})，我们可把等时 Poisson 括号写成

$$\{A^i{}_a(x), E^j{}_b(y)\}_{x_0=y_0} = g^2\delta^{ij}\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (12\text{-}54)$$

我们还需要括号 $\{H,\Gamma\}$ 和 $\{\Gamma,\Gamma\}$，其中

$$H = \frac{1}{2g^2}\int d^3x \sum_a (\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{B}_a^2), \quad (12\text{-}55)$$

因此

$$\begin{aligned}\{\mathbf{E}_a(x), \Gamma(y)\}_{x^0=y^0} &= g^2[\mathbf{E}(x), t^a]\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ \{\mathbf{A}_a(x), \Gamma(y)\}_{x^0=y^0} &= g^2\{\mathbf{D}_y, t^a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})],\end{aligned} \quad (12\text{-}56)$$

其中 $\mathbf{D}_y$ 代表 $\nabla_y + \mathbf{A}(y)$，并且对易运算对微分和李代数同时实行. 另一方面，对于一个时间无关的无穷小规范变换，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$ 作如下的变换:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{E}_a(x) &= C_{abc}\delta\alpha_b(x)\mathbf{E}_c(x)\\ &= \frac{1}{g^2}\int_{y_0=x_0} d^3y \left\{\mathbf{E}_a(x), \sum_b \delta\alpha_b(y)\Gamma_b(y)\right\},\\ \delta\mathbf{A}_a(x) &= -\nabla\delta\alpha_a(x) + C_{abc}\delta\alpha_b(x)\mathbf{A}_c(x)\\ &= \frac{1}{g^2}\int_{y_0=x_0} d^3y \left\{\mathbf{A}_a(x), \sum_b \delta\alpha_b(y)\Gamma_b(y)\right\}.\end{aligned}$$

因此，Γ 是这种哈密顿形式中时间无关的规范变换的无穷小生成元. 不需要作进一步的计算，我们可得到结论

$$\begin{aligned}&\{\Gamma_a(x), \Gamma_b(y)\}_{x_0=y_0}\\ &\quad = g^2C_{abc}\Gamma_c(y)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \{\mathbf{H}, \Gamma_a(x)\} = 0.\end{aligned} \quad (12\text{-}57)$$

运动方程为

$$\begin{aligned}\partial_0 E^i &= (\mathrm{curl}\mathbf{B})^i + \varepsilon_{ijk}[A^j, B^k] + [A^0, E^i],\\ \partial_0\mathbf{A} &= -\mathbf{E} - \nabla A^0 + [A^0, \mathbf{A}],\end{aligned} \quad (12\text{-}58)$$

且约束条件为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} + [\mathbf{A}, \mathbf{E}] &= 0,\\ B^i &= (\mathrm{curl}\mathbf{A})^i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[A^j, A^k],\end{aligned} \quad (12\text{-}59)$$

可观测量是 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$ 的泛函. $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$ 是限制在流形式 (12-59) 之上的，使得在这个流形上可观测量与 $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ 的 Poinsson

括号等于零，因而可观测量在时间无关的规范变换下是不变的. 例如，哈密顿量密度就属于这种情形.

12-2 规范场的量子化

下一步是把理论量子化并导出计算 Green 函数的微扰规则. 至于物理解释，虽然在量子电动力学的情况具有指导意义，在这里却不清楚. 特别是，我们不知道量子化时是否会出现类似于光子的质量为零的渐近态.

12-2-1 有约束的量子化

第 9-3 节的方法基本上是哈密顿方法，且动力学变量是用非协变方式选取的，但我们希望最终能表示成协变形式.

r 个约束方程（r 是李群的阶）

$$\Gamma = \nabla \cdot \mathbf{E} + [\mathbf{A},\mathbf{E}] \equiv \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad (12\text{-}60)$$

与H以及它们之间的 Poinsson 括号在流形式 (12-60) 上为零，式 (9-152) 和 (9-153) 中已给出这一点. 满足式 (12-60) 的两组 $(\mathbf{A},\mathbf{E})$ 是等价的，如果它们位于流式 (9-142)

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \{\Gamma,\mathbf{A}\} \quad \frac{d\mathbf{E}}{du} = \{\Gamma,\mathbf{E}\}$$

的同一条轨迹上，也就是说，如果它们彼此可通过一个时间无关的规范变换互相得到. 因此，我们必须引入一个辅助条件从每个等价类中选取一个单一的代表.

我们总可以作一个规范变换使得每一点都有 [见方程 (12-23)]

$$A^3 = 0. \qquad (12\text{-}61)$$

如果我们假定在空间无穷远处足够快地趋于零，这 r 个轴规范的辅助约束条件在每个轨迹上就定义了一个唯一的元素.

由于保持 $A^3 = 0$ 的规范变换是与 x^3 无关的，且在无穷远点必定退化为恒等变换，则这些规范变换在全空间也保持同样的性质．这个条件也排除实行任何整体变换的可能性．

下一步我们必须算出 Γ 和辅助条件之间的 Poinsson 括号．轴规范式 (12-61) 的优点在于这些括号不依赖于动力学变量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$．的确，$\{\Gamma, A^3\}$ 是 A^3 的一个无穷小变换，但却限于 $A^3 = 0$，因而不依赖于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$．出现在路径积分式 (9-159) 中方括号里的行列式可以吸收到归一化中去，以下我们将不再写出．Green 函数的生成泛函可写成

$$e^{G}A^{(J)} = \int \mathscr{D}(\mathbf{E},\mathbf{A},A^0) \prod_x \delta(A^3)$$
$$\times \exp\left\{\frac{2i}{g^2}\int d^4x \mathrm{tr}\left[\partial^0\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)\right.\right.$$
$$\left.\left. - A^0\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - gA\cdot J\right]\right\}. \qquad (12\text{-}62)$$

对 A^μ 的四个分量，我们已经附加上了源，尽管 A^3 等于零并且 A^0 可以明显地被积分掉．

引进源的项我们就能探究这个系统．有些答案（例如 Green 函数）可能依赖于规范的选取，并且只是获得物理知识的中间步骤．当然，直接考虑规范不变量，例如 S 矩阵，将是非常吸引人的．不幸的是，我们并不知道渐近态，且任何 S 矩阵元的计算都将遇到虽有趣但很严重的红外发散困难．这个理论需要重整化，而且还需要找到不依赖于 Green 函数的消除紫外发散的方案．

因在式 (12-62) 的指数上 $\mathbf{E}$ 只以平方形式出现，高斯积分可以积出来：

$$e^{G}A^{(J)} = \int \mathscr{D}(A^\mu) \prod_x \delta(A^3)$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{g^2}\int d^4x[\mathscr{L} - 2g\mathrm{tr}(A\cdot J)\right\},$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \tag{12-63}$$

$G_A(J)$ 的下脚标 A 强调下述事实，即 Green 函数依赖于规范的选取. 尽管这种轴规范十分简单，但导出的费曼规则不是 Lorentz 协变的. 因此，考虑更一般的条件是自然的. 我们将分几步来进行讨论.

我们先来研究另外一种非协变规范——Coulomb 规范，它由下面的辅助条件来定义：

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0. \tag{12-64}$$

正如上面所讲的，我们总可以找到一个规范变换使式 (12-64) 得到满足. 这个条件通常被看作是唯一确定了规范变换 g. 换句话说，如果 $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$，习惯上认定 $\mathrm{div}({}^{g}\mathbf{A}) = 0$ 的解 g 在适当条件下在空间的无穷远点退化为恒等变换. 阿贝尔情形正是这样. 如果 $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$，$\mathrm{div}\mathbf{A}' = 0$，且 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$，则调和函数 Λ 在无穷远为零，因而处处为零. 然而，正如 Gribov 最近指出的，在非阿贝尔情形这一点不再成立. g 的方程与 $\mathbf{A}$ 有关，并且允许存在 $\mathbf{A}$ 足够大时的解. 给定 $\mathbf{A}$ 使 $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$，让我们找一个时间无关的无穷小规范变换 $A'^i = A^i + [\delta\alpha, A^i] + \partial^i\delta\alpha$，使得 $\mathrm{div}\mathbf{A}' = 0$：

$$\partial_i(\partial^i\partial\alpha + [\delta^a, A^i]) = 0. \tag{12-65}$$

对足够小的 $\mathbf{A}$（等价于足够小的耦合常数），我们可以作展开

$$\delta\alpha = \delta\alpha^{[0]} + g\delta\alpha^{[1]} + \cdots,$$

和 $\quad \Delta\delta\alpha^{[0]} = 0 \quad \Delta\delta\alpha^{[1]} - \partial_i[\delta\alpha^{[0]}, A^i] = 0$ 等等.

如果假定 α 在无穷远为零，则所有的 $\alpha^{[k]}$ 在无穷远都为零. 这将不存在非平庸解. 然而，方程 (12-65) 可看成 Schrödinger 方程. 对足够大的势 $\mathbf{A}$，我们可以验证，束缚态确实存在，即方程

$$\Delta\alpha + \partial_i[\alpha, A_i] = E\alpha$$

确实存在 $E < 0$ 的解. 因此，对中等大小的 $\mathbf{A}$，一定存在零能解，这些解在无穷远迅速衰减.

这种异常情况似乎使我们的方案进退维谷，因为比较不同规范下的量子化是建筑在连接这些不同规范的变换是唯一的这种假设基础上的．然而，由于这种现象只出现在场的值很大的情形，所以它不影响构造微扰级数，因本质上这是围绕一给定的经典组态的小场（小的涨落）的展开．以后我们将不考虑这种 Gribov 现象．每当我们谈到规范选取式(12-64)的唯一性时，我们总是在微扰的意义下理解的．

辅助条件式(12-64)与约束有一非平庸的 Poinsson 括号

$$\{\mathrm{div}\mathbf{A}_a, \Gamma_b(y)\}_{x_0=y_0} = \frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}\,\mathrm{div}A'_a(x)$$
$$= [-\delta_{ab}\Delta_x + C_{abc}\nabla_x \cdot \mathbf{A}_c(x)]\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (12\text{-}66)$$

我们引入算符$\mathscr{M}$：

$$\mathscr{M}_{ab}(x,y) = [-\Delta_x\delta_{ab} + C_{abc}\nabla_x \cdot \mathbf{A}_c(x)]\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$= [-\Delta_x\delta_{ab} + C_{abc}\mathbf{A}_c(x) \cdot \nabla_x]\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (12\text{-}67)$$

其中最后一个等式只是当$\mathscr{M}$限制在约束的流形上时才成立．因此，在库仑规范下我们把 Green 函数的生成泛函写作

$$e^{G_C(J)} = \int \mathscr{D}(A) \prod_t \left[\det\mathscr{M} \prod_x \delta(\nabla \cdot \mathbf{A})\right]$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{g^2}\int d^4x[\mathscr{L} - 2g\mathrm{tr}(J \cdot A)]\right\}. \qquad (12\text{-}68)$$

通过修改方程(12-68)的归一化，我们可用 $\det\mathscr{M}\cdot\mathscr{M}_0^{-1}$ 取代 $\det\mathscr{M}$，这里

$$\mathscr{M}_0 = -\Delta\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

利用 $\det\mathscr{M}\cdot\mathscr{M}_0^{-1} = \exp[\mathrm{tr}\ln(\mathscr{M}\cdot\mathscr{M}_0^{-1})]$ 和

$$\mathrm{tr}\ln(1+A) = \sum[(-1)^{n-1}/n]\mathrm{tr}A^n,$$

我们可以导出这种规范下的费曼规则．然而，这些费曼规则也不是协变的．

12-2-2 对规范群的积分

至此以前，我们用的规范变换都是与时间无关的，为了使 Lorentz 协变性能显而易见，考虑时间有关的变换是更适宜的．把它们补进来的方法将作为另一个不同的问题的付产品而出现．我们如何证明轴规范和库仑规范的等价性呢？

让我们先扔掉与外源 J 耦合的部分，代之以与规范不变量 $O_i(x)$ 耦合的源，并且考虑泛函积分(在一给定时间)

$$X = \int \mathscr{D}(\mathbf{A},\mathbf{E}) \prod_x \delta(A^3)\mu(\mathbf{A},\mathbf{E}), \quad (12\text{-}69)$$

其中 μ 为规范不变的泛函，

$$\mu(\mathbf{A},\mathbf{E}) = \exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}(x) + J_i(x)O_i(x)]\right\}.$$

在规范变换下

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\to ({}^g\mathbf{A}) = -(\nabla g)g^{-1} + g\mathbf{A}g^{-1}, \\ \mathbf{E} &\to ({}^g\mathbf{E}) = g\mathbf{E}g^{-1}, \end{aligned} \quad (12\text{-}70)$$

其中 g 看做乘积 $\prod_x g(x)$ 且 μ 是不变的．测度 $\mathscr{D}(\mathbf{A},\mathbf{E})$ 也是不变的，因这个规范变换是正则的．因此，

$$X = \int \mathscr{D}(\mathbf{A},E) \prod_x \delta^3({}^gA^3)\mu(\mathbf{A},\mathbf{E}).$$

由于条件 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ 或 $A^3 = 0$ 是在每个等价类中单一确定(在微扰意义下)一个点的两种等价的方法，那就必然存在一个 $g_0(\mathbf{A})$，使得

$${}^{g^0}A^3 = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \quad (12\text{-}71)$$

让我们来计算这个变换的雅可比行列式．我们令

$$\Delta^{-1}(A) = \int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta(\nabla\cdot{}^g\mathbf{A}), \quad (12\text{-}72)$$

其中 $\mathscr{D}(g)$ 代表在每个空间点 x 上都同构于群 G 的紧致群上

不变测度的无穷乘积，$\mathscr{D}(g) = \prod_x Dg(x)$.

测度的不变性 $Dg' = D(gg')$ 要求

$$\Delta({}^g\mathbf{A}) = \Delta(\mathbf{A}). \tag{12-73}$$

我们用

$$1 = \Delta(A)\int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta(\nabla \cdot {}^g\mathbf{A}) \tag{12-74}$$

乘方程 (12-69)，交换积分次序，并利用方程 (12-73) 得

$$\begin{aligned} X = &\int \mathscr{D}(\mathbf{A},\mathbf{E})\mu(\mathbf{A},\mathbf{E}) \prod_x \delta[A^3(x)] \\ &\times \int \mathscr{D}(g) \prod_y \delta[\nabla \cdot {}^g\mathbf{A}(y)]\Delta(A) \\ = &\int \mathscr{D}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{E})\mu(\mathbf{A},\mathbf{E})\Delta(A) \prod_y \delta[\nabla \cdot \mathbf{A}(y)] \\ &\times \int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta[g^{-1}A^3(x)]. \end{aligned} \tag{12-75}$$

由于测度 $\mathscr{D}(g)$ 是不变的，我们在上面最后一个积分中可把 g^{-1} 变成 gg_0，其中 g_0 满足 ${}^{g_0}A^3 = 0$. 为简单起见，我们用 $\mathbf{B}$ 代表 ${}^{g_0}\mathbf{A}$，得

$$\int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta[g^{-1}A^3(x)] = \int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta[{}^gB^3(x)].$$

因 $B^3 = 0$，只在恒等变换邻域内考虑无穷小变换 g 和完成群的积分就足够了(至少在微扰理论范围内)，

$$g(x) = e + \alpha(x),$$

其中 α 是无穷小. 在这种情况下，每个点上的测度 $Dg(x)$ 化为乘积 $\Pi_i d\alpha_i(x)$，且

$${}^gB^3(x) = -\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^3},$$

因此积分

$$\int \mathscr{D}(g)\prod_x \delta[{}^gB^3(x)] = \int \mathscr{D}(\alpha)\prod_x \delta\left[\frac{\delta\alpha(x)}{\partial x^3}\right]$$

与 $\mathbf{A}$ 无关，且可吸收到归一化中去. 所以，借助于一个与 μ 无关的总的归一因子 N，我们得到

$$X = N\int \mathscr{D}(\mathbf{A},\mathbf{E})\Delta(A)\mu(\mathbf{A},\mathbf{E})$$

$$\times \prod_x \delta[\nabla\cdot\mathbf{A}(x)]. \tag{12-76}$$

为了回到式 (12-68)，我们必须证明 $\Delta(A)$ 正比于由式 (12-67) 定义的算符 μ 的行列式. 由于式 (12-67) 中 $\Delta(A)$ 是被 $\delta(\nabla\cdot\mathbf{A})$ 乘的，只对横场 $\mathbf{A}$ 计算就够了，因此只有无穷小的 g 才对定义 Δ 的积分有贡献:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(A) &= \int \mathscr{D}(g)\prod_x \delta[\nabla\cdot{}^g\mathbf{A}(x)]\\ &= \int \mathscr{D}(\alpha)\prod_x \delta(\nabla\cdot\{-\mathbf{V}\alpha(x)\\ &\qquad + [\alpha(x),\mathbf{A}(x)]\})\\ &= det^{-1}\mathscr{M},\end{aligned} \tag{12-77}$$

其中，象在式 (12-67) 中一样

$$\mathscr{M}_{ab}(x,y) = \frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}[\nabla\cdot{}^g\mathbf{A}_a(x)]|_{\alpha=0}.$$

在涉及规范不变量 $\mu(\mathbf{A},\mathbf{E})$ 的计算时，我们刚才已经证明了轴规范和库仑规范的等价性. 对源的项，因而对 Green 函数，将会怎样我们还没有研究. 然而，在前面推导中场变量只实行了定域和正则变化. 借助于第九章提到的等价定理，我们不期望这些变换会修改理论的物理内容.

前面的方法是很有趣的，因它允许我们处理时间有关的规范变换和加上协变的辅助条件. 令

$$\mathscr{F}(A) = 0 \tag{12-78}$$

为这种条件. $\mathscr{F}$ 是 A 的定域泛函，即 $A(x)$ 及其微商的函数，且在李代数上取值和可能依赖于 A^0. 用上面同样的方法我们发现(相当于归一化)

$$X = \int \mathscr{D}(A) \prod_x \delta[\mathscr{F}(A)]\det\mathscr{M}_g\mu(A),$$

因此我们考虑由下式产生的 Green 函数:

$$e^{G_g(J)} = \int \mathscr{D}(A) \prod_x \delta[\mathscr{F}(A)]\det\mathscr{M}_g \times \exp\left\{\frac{i}{g^2}\int d^4x[\mathscr{L} - 2g\mathrm{tr}(J\cdot A)]\right\}, \quad (12\text{-}79)$$

其中

$$\Delta_g^{-1}(A) = (\det\mathscr{M}_g)^{-1} = \int \mathscr{D}(g) \prod_x \delta[\mathscr{F}({}^gA)] \quad (12\text{-}80)$$

是在 $\mathscr{F}(A) = 0$ 条件下计算的. 只有无穷小变换才对这个积分有贡献，并且

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{ab}(x,y) &= -\frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}\mathscr{F}_a[{}^gA(x)]_{g=e} \\ &= \frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}\left[\frac{\delta\mathscr{F}_a}{\delta A_c^\mu(x)}D^\mu_{cd}\alpha_d(x)\right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{\delta\mathscr{F}_a}{\delta A_c^\mu(x)}D^\mu_{x,cb}\delta^4(x-y), \end{aligned} \quad (12\text{-}81)$$

其中

$$D^\mu_{x,cb} = \partial^\mu_x\delta_{cb} + C_{cbd}A^\mu_d(x).$$

例如，如果我们用 Lorentz 规范，

$$\mathscr{F}(A) \equiv \partial_\mu A^\mu = 0,$$

算符 $\mathscr{M}$ 为

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{L,ab}(x,y) &= \partial_\mu D^\mu_{ab}\delta^4(x-y) \\ &= [\Box\delta_{ab} + C_{abc}\partial^\mu_x A_{\mu c}(x)]\delta^4(x-y)\end{aligned}$$

$$= [\Box\delta_{ab} + C_{abc}A_{\mu c}(x)\partial_x^\mu]\delta^4(x-y). \tag{12-82}$$

回到轴规范，

$$\mathscr{F} \equiv n \cdot A = 0,$$

我们容易看到，当局限于约束条件的流形上时，$\mathscr{M}$ 与 A 无关，因此 $\det\mathscr{M}$ 可吸收到归一化中去.

若不用正则哈密顿量子化和相继的泛函运算，我们也许可以修改没有确切定义的积分

$$X = \int \mathscr{O}(A)\mu(A).$$

修改的办法是插入恒等变换

$$1 = \int \mathscr{O}(g)\Delta(A) \prod_x \delta[\mathscr{F}({}^gA)],$$

$\mu(A)$，$\Delta(A)$ 和测度 $\mathscr{O}(A)$ 的规范不变性使我们能够把无穷大的群体积分离出来，

$$X = \left[\int \mathscr{O}(g)\right]\int \mathscr{O}(A)\mu(A)\Delta(A) \prod_x \delta[\mathscr{F}(A)].$$

这种粗略的论证有其优点，即能清楚地显示出自由度的无穷多简并，而这正是问题的根源.

前面的方法很容易推广到辅助条件

$$\mathscr{F}(A) = C$$

的情形，其中 $\mathscr{F}$ 和给定的函数 $C(x)$ 都取值在其李代数上. 这种修改不影响式 (12-80) 中的算符 μ 的形式.

变分 $\frac{\delta}{\delta_x}[\mathscr{F}({}^gA) - C]$ 不依赖于 C，$\Delta\mathscr{F}$ 对 C 的唯一的依赖来自 $\mathscr{F}({}^{g_0}A) = C$ 中的规范变换 g_0：

$$\Delta_{\mathscr{F}}(A,C) = \Delta({}^{g_0}A).$$

我们可写出

$$1 = \int \mathscr{O}(g)\Delta({}^{g_0}A)\delta[\mathscr{F}({}^gA) - C]$$

$$= \int \mathscr{D}(g)\Delta({}^{g}A)\delta[\mathscr{F}({}^{g}A) - C],$$

其中第二个等式成立是因为 δ 函数使 $g = g_0$. Δ_F 对 C 的任何关系都消失了.

因为规范不变量不应当对辅助条件的改变敏感，对 C 进行高斯加权平均是可能的，即可用下面的量来代替 $\delta[\mathscr{F}(A) - C]$:

$$\int \mathscr{D}(C)\exp\left[\frac{i\lambda}{g^2}\int d^4x\mathrm{tr}(C^2)\right]\delta[\mathscr{F}(A) - C]$$

$$= \exp\left\{\frac{i\lambda}{g^2}\int d^4x\mathrm{tr}[\mathscr{F}^2(A)]\right\}.$$

生成函数的最终形式为

$$e^{G(J)} = \int \mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}_g$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{g^2}\int d^4x\{\mathscr{L}(x) + \lambda\mathrm{tr}[\mathscr{F}^2(A)]\right.$$

$$\left. - 2g\mathrm{tr}(J\cdot A)\}\right). \qquad (12\text{-}83)$$

$\det\mathscr{M}$ 的微扰展开导致规范场之间的非定域相互作用.将行列式 $\det\mathscr{M}$ 作最后一次处理，并把它表示成假想的场的定域相互作用是最方便不过的. 在 Grassmann 代数上的积分的讨论已经获得如下的公式 (9-76):

$$\det\mathscr{M} = \int \prod_k d\bar{\eta}_k d\eta_k e^{-\eta\mathscr{M}\eta},$$

其中 $\mathscr{M}$ 表示 $n \times n$ 矩阵，把 $\mathscr{M}$ 换成 $i\mathscr{M}$ 并将此结果推广到无穷维代数，我们可把行列式 $\det\mathscr{M}_F$ 写成一个泛函积分

$$e^{G(J)} = \int \mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})\exp\left(\frac{i}{g^2}\int d^4x\{\mathscr{L} + \lambda\mathrm{tr}[\mathscr{F}^2(A)]\right.$$

$$\left. - \bar{\eta}\mathscr{M}\eta - 2g\mathrm{tr}(J\cdot A)\}\right). \qquad (12\text{-}84)$$

修改后的或等效拉氏量

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\eta,\bar{\eta})=\mathscr{L}(A)+\lambda\mathrm{tr}\mathscr{F}^2(A)-\bar{\eta}\mathscr{M}\eta \quad (12\text{-}85)$$

与规范场 A 和新的反对易的辅助标量场，即所谓的 Fadeev-Popov 鬼场 η 和 $\bar{\eta}$ 有关. 我们要强调指出，这些鬼场不是物理的，他们只起代数的作用. 为了保持整体不变性，η 和 $\bar{\eta}$ 要按伴随表示变换，拉氏量式 (12-85) 中的鬼项为

$$\int d^4x\bar{\eta}\mathscr{M}_g\eta=\iint d^4xd^4y\bar{\eta}_a(x)\frac{\delta\mathscr{F}_a[{}^gA(x)]}{\delta\alpha_b(y)}\eta_b(y)$$

$$=\int d^4x\bar{\eta}_a(x)\frac{\partial\mathscr{F}_a(A)}{\partial A^\mu_b}D^\mu_{bc}\eta_c(x), \quad (12\text{-}86)$$

其中

$$(D^\mu\eta)_a=\partial^\mu\eta_a+C_{abc}\eta_bA^\mu_c.$$

一般而言，核 $\mathscr{M}_F$ 不是厄米的，因此一个 Feynman 图中的鬼线必须标明方向. 例如，如果 $\mathscr{F}$ 是 Lorentz 协变条件 $\mathscr{F}=\partial_\mu A^\mu$，我们有

$$\int d^4x\bar{\eta}\mathscr{M}\eta=\int d^4x\bar{\eta}_a\partial_\mu D^\mu_{ab}\eta_b. \quad (12\text{-}87)$$

在这种情况下，拉氏量式 (12-85) 可写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\lambda\mathrm{tr}(\partial\cdot A)^2-\bar{\eta}\partial_\mu D^\mu\eta. \quad (12\text{-}88)$$

参数 λ (文献中也写作 α^{-1} 或 ξ^{-1}) 告诉我们辅助条件的任意性. 选取 $\lambda=1$ 或 $\lambda^{-1}=0$，分别称作 Feynman 规范或 Landau 规范.

12-2-3 Feynman 规则

由于方程(12-88)提供了等效拉氏量的一个定域 Lorentz 协变表达式，因此它对量子化问题给出了所期望的解. 由于

条件 $\mathscr{F}=C$ 已经从每一个等价类中挑出了单一的代表类，使得 A 的二次项是可逆的.

现在我们可以写下 Feynman 规则了. 我们用耦合常数 g 重新标度场 A, η 和 $\bar{\eta}$. 因 Feynman 图也包含鬼场，引入(反对易的)与 η, $\bar{\eta}$ 耦合的源 ξ, $\bar{\xi}$ 是有帮助的. 由此可得

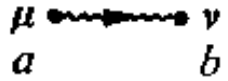
$$e^{G(J,\bar{\xi},\xi)}=\int\mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_{ett}(A,\eta,\bar{\eta};g,\lambda)+J_a^\mu A_{\mu a}+\bar{\xi}_a\eta_a+\bar{\eta}_a\xi_a]\right\},\tag{12-89}$$

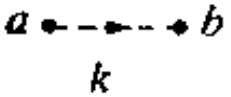
$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{ett}(A,\eta,\bar{\eta};g,\lambda)=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu}\\&-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_a^\mu)^2+\partial_\mu\bar{\eta}_a(D^\mu\eta)_a,\\F_a^{\mu\nu}=&\partial^\mu A_a^\nu-\partial^\nu A_a^\mu-gC_{abc}A_b^\mu A_c^\nu,\\(D^\mu\eta)_a=&\partial^\mu\eta_a-gC_{abc}A_b^\mu\eta_c.\end{aligned}\tag{12-90}$$

规范场和鬼场的传播子分别为

$$\{-i[\Box-(1-\lambda)\partial\otimes\partial]\}^{-1}$$

$$=-i\delta_{ab}\left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}-(1-\lambda^{-1})\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+i\varepsilon)^2}\right],\tag{12-91}$$

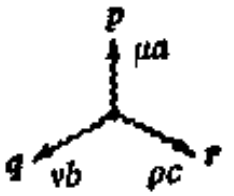




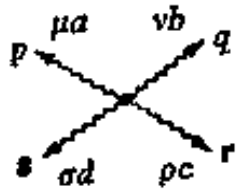
$$(i\Box)^{-1}=\frac{i\delta_{ab}}{k^2+i\varepsilon},$$

且在大的动量下按 k^{-2} 变化. 因此，两种场在紫外幂次计算中贡献的量纲都为 1，耦合常数 g 是无量纲的. 共有三种顶角. 如果我们把鬼线的方向定为从 η 到 $\bar{\eta}$ (正如我们对真正的费米子所做的那样)并且把 $\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}_{int}(x)\right]$ 展开式中

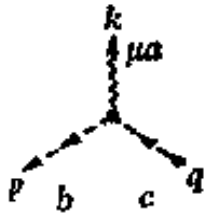
的 i 包括在内，我们有



$$gC_{abc}(2\pi)^4\delta^4(p+q+r)[g_{\mu\nu}(p-q)_\rho + g_{\nu\rho}(q-r)_\mu + g_{\rho\mu}(r-p)_\nu],$$



$$\begin{aligned}-ig^2(2\pi)^4\delta^4(p+q+r+s)&\times\{C_{eab}C_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})\\&+C_{eac}C_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})\\&+C_{ead}C_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}-g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\},\end{aligned}\tag{12-92}$$



$$-gC_{abc}p_\mu(2\pi)^4\delta^4(k+p-q).$$

请注意最后一个顶点(预期)的不对称性. 按照我们的惯例，出射鬼线携带由微分产生的动量. 对于一个实际的计算，上面的规则还必须补充以第六章中导出的规定，即对所有内部动量按测度 $d^4k/(2\pi)^4$ 积分，分离出总的能量动量 δ 函数、对称因子，以及每一个鬼圈加一个因子 (-1).

在物质场以最小耦合方式加入时，让我们来完善 Feynman 规则. 我们在拉氏量式 (12-90) 上分别对费米子和玻色子场加上

$$\mathscr{L}_f = i\bar{\psi}\gamma\psi\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

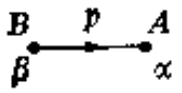
或

$$\mathscr{L}_b = (D^\mu\phi)^+(D_\mu\phi) - m^2\phi^+\phi - P(\phi^+\phi)\tag{12-93}$$

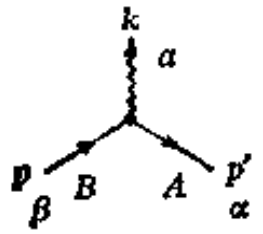
的项，式中 ψ 和 ϕ 代表按某个群表示 R 变换的场的多重态，群的无穷小生成元为反厄米矩阵 T^a，而 P 是一个多项式. 我们知道 D^μ 代表

$$D^\mu = \partial^\mu - gA_a^\mu T^a,$$

数附加的费曼规则为



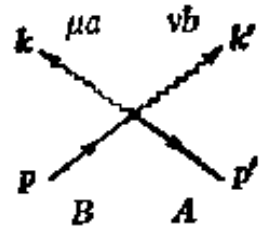
$$\left(\frac{i}{\not p - m}\right)_{\alpha\beta}\delta_{AB} \text{ 和 } \frac{i}{p^2 - m^2}\delta_{AB},$$



$$g(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}T^a_{AB}(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k)$$

和

$$gT^a_{AB}(p_\mu + p'_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k), \tag{12-94}$$



$$-ig^2g_{\mu\nu}\{T^a, T^b\}_{AB} \times (2\pi)^4\delta^4(p - p' - k - k').$$

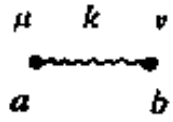
第一列指费米子，第二列指的是玻色子，在后一种情况下，多出的顶角来源于多项式 $P(\phi^+\phi)$ 的自耦合.

为完整起见，我们在这里也给出轴规范下的 Feynman 规则，为此我们在拉氏量中加上一项 $(n\cdot A)^2$：

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \sum_a\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F^{\mu\nu}_a - \frac{\lambda}{2}(n_\mu A^\mu_a)^2\right]. \tag{12-95}$$

轴规范是通过令 $\lambda^{-1}\to 0$ 来实现的，如上面所证明的，在这种极限下不需要鬼项.

相应的传播子为



$$\begin{aligned}&[-i(\Box - \partial\otimes\partial - \lambda n\otimes n)]^{-1}\\ &= -i\delta_{ab}\left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{(k^2 + \lambda n^2)k_\mu k_\nu}{\lambda k^2(k\cdot n)^2} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k^2 k\cdot n}\right]\end{aligned} \tag{12-96}$$

$$\xrightarrow[\lambda^{-1}\to 0]{} -i\delta_{ab}\frac{g_{\mu\nu} - (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)(k\cdot n)^{-1} + n^2(k\cdot n)^{-2}k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

我们这里将不研究上式分母中新类型的奇异性所引起的问题.

要注意的是，传播子的行为只是在 $\lambda^{-1}\to 0$ 的极限情况下才象 k^{-2}. 最后，A^3 和 A^4 顶角与在式(12-92)中一样.

12-3 单圈图近似下的等效作用量

按照幂次计算法，前面的 Feynman 规则导致一个可重整的理论，因为所有传播子的行为如同 k^{-2}，并且所有顶角的量纲都为 4. 然而，问题在于如何证明重整化保持规范不变性. 在进行一个冗长而又相当技术性的到所有级的证明之前，做一个单圈等效作用量的显式计算是很有启发的.

12-3-1 一般形式

为了避免过多的指标，我们用一种更紧凑的泛函记号. 象在方程 (6-73) 或 (9-107) 中一样，我们通过一个 Legendre (勒让德)变换得到等效作用量.

$$i\Gamma(A,\eta,\bar{\eta}) = G(J,\xi,\bar{\xi}) - i\int d^4x(J\cdot A + \bar{\xi}\eta + \bar{\eta}\xi), \tag{12-97}$$

其中

$$A = \frac{\delta G}{i\delta J},\quad \eta = \frac{\delta G}{i\delta\bar{\xi}},\quad \bar{\eta} = \frac{\delta G}{i\delta\xi}.$$

Lorentz 和群的指标都已省去，对反对易变量的微商都理解为左微商. 换句话说，我们写成

$$\delta G(J,\xi,\bar{\xi}) = \int d^4x\left[\delta\xi(x)\frac{\delta G}{\delta\xi(x)} + \delta\bar{\xi}(x)\frac{\delta G}{\delta\bar{\xi}(x)}\right]$$
$$+\int d^4xd^4y\,\delta\xi(x)\delta\bar{\xi}(y)\frac{\delta^2 G}{\delta\bar{\xi}(y)\delta\xi(x)} + \cdots.$$

这种规定在式 (12-97) 对 η 的表达式中正好给出负号.

在最低次近似下，Γ 简化为如下的作用量：

$$\Gamma^{[0]} = I(A,\eta,\bar{\eta}) = \int d^4x\mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\eta,\bar{\eta};g,\lambda), \tag{12-98}$$

而一次修正 $\Gamma^{[1]}$ 是对展开到二级近似的作用量的带撇的变量作高斯积分得到的：

$$I \approx \int d^4x \mathscr{L}_{\text{eff}}(A + A', \eta + \eta', \bar{\eta} + \bar{\eta}; g, \lambda).$$

我们把二次项明显地写作

$$\begin{aligned} I_q = 2\int d^4x \mathrm{tr}\Big\{ & \frac{1}{4}([D_\mu, A'_\nu] - [D_\nu, A'_\mu])([D^\mu, A'^\nu] \\ & - [D^\nu, A'^\mu]) - \frac{g}{2} F^{\mu\nu}[A'_\mu, A'_\nu] \\ & + \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A'_\mu)^2 - \partial_\mu \bar{\eta}'[D^\mu, \eta'] + g\partial_\mu \bar{\eta}[A'_\mu, \eta'] \\ & + g\partial_\mu \bar{\eta}'[A'^\mu, \eta]\Big\}, \end{aligned} \tag{12-99}$$

式中使用了矩阵的记号，如 $\eta = \eta_a t^a$，等等。这种相当复杂的形式把对易的和反对易的变量混在一起了。我们记得，对易和反对易变量的高斯积分分别为

$$\int \prod_1^n \frac{dx_i}{(2\pi)^{1/2}} e^{-xQx/2 + u\cdot x} = [\det Q]^{-1/2} e^{uQ^{-1}u/2}, \tag{12-100}$$

$$\int \prod_i^n d\bar{\eta}_i d\eta_i e^{-\bar{\eta}\mathscr{M}\eta + \bar{\xi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\xi} = \det\mathscr{M}\, e^{\bar{\xi}\mathscr{M}^{-1}\xi},$$

在混和的情形，我们有

$$\begin{aligned} & \int \Pi \frac{dx_i}{(2\pi)^{1/2}} \Pi(d\bar{\eta}_i d\eta_i) \exp\Big(-\frac{1}{2}xQx + \bar{\eta}\alpha x \\ & \quad + x\beta\bar{\eta} - \bar{\eta}\mathscr{M}\eta + \mu\cdot x + \bar{\xi}\cdot\eta + \bar{\eta}\cdot\xi\Big) \\ & = \det\mathscr{M}[\det\tilde{Q}]^{-1/2}\exp\Big\{\frac{1}{2}[u + \bar{\xi}\mathscr{M}^{-1}\alpha \\ & \quad + (\beta\mathscr{M}^{-1}\xi)^T]\tilde{Q}^{-1}[u + (\bar{\xi}\mathscr{M}^{-1}\alpha)^T + \beta\mathscr{M}^{-1}\xi] \\ & \quad + \bar{\xi}\mathscr{M}^{-1}\xi\Big\}. \end{aligned} \tag{12-101}$$

矩阵 Q 和 $\mathscr{M}$ 具有可对易的矩阵元，而矩阵 α 和 $\bar{\beta}$ 的矩阵元属于 Grassmann 代数，$\tilde{Q}$ 表示对称矩阵，

$$\tilde{Q} = Q - \bar{\beta}\mathscr{M}^{-1}\alpha - (\bar{\beta}\mathscr{M}^{-1}\alpha)^T.$$

方程 (12-101) 可从重复使用前面的公式得到. 只要记住鞍点法对高斯积分是严格的，就可得到导出式 (12-101) 的另外一种方法.

这些公式可用于二次型式 (12-99)，其中，

$$\begin{aligned}(\tilde{Q}A)^\mu \equiv {} & [D_\nu,[D^\nu,A'^\mu] - [D^\mu,A'^\nu]] - g[F^{\mu\nu},A'^\nu] \\ & + \lambda\partial^\mu\partial\cdot A' + g\{\partial^\mu\eta,\eta'\} + g\{\partial^\mu\eta',\eta\},\end{aligned} \tag{12-102}$$

且 η' 和 $\bar{\eta}'$ 可从下面的方程得到：

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\eta' \equiv {} & \partial_\mu[D^\mu,\eta'] = g\partial_\mu[A'^\mu,\eta], \\ & [D^\mu,\partial_\mu\bar{\eta}'] = -g[\partial_\mu\bar{\eta},A'_\mu].\end{aligned} \tag{12-103}$$

如果 $g = 0$，$\mathscr{M}$ 和 $\tilde{Q}$ 简化为

$$\mathscr{M}_0 = \Box,\quad Q_0 = \Box - (1-\lambda)\partial\otimes\partial.$$

它们的逆就是自由的传播子，因此归一化到 $\Gamma^{[1]}(0) = 0$ 的单圈等效作用量为

$$i\Gamma^{[1]}(A,\eta,\eta) = \mathrm{tr}\left[\ln(\mathscr{M}_0^{-1}\mathscr{M}) - \frac{1}{2}\ln(\tilde{Q}Q_0^{-1})\right]. \tag{12-104}$$

求迹运算是对内禀和 Lorentz 指标及时空变量进行的.

要获得更明显的表达式是不可能的. 由于矩阵 Q 和 $\mathscr{M}$ 作用于伴随表示，把 A_μ 和 η 看成在那个表示中的矩阵是更方便的[与方程 (12-9c) 加以比较]. 明显地写出来有

$$\begin{aligned}(A^\mu)_{bc} = {} & A^\mu_a T^a_{bc} = C_{bac}A^\mu_a, \\ (\eta)_{bc} = {} & C_{bac}\eta_a.\end{aligned} \tag{12-105}$$

因此，与式 (12-26) 的归一不同，这里我们有

$$\mathrm{tr}(T^aT^b) = -\sum_{c,d} C_{cda}C_{cdb} = -C\delta^{ab}. \tag{12-106}$$

对 $Su(N)$, $C=N$, 利用这些记号我们可写出

$$\mathscr{M}_0^{-1}\mathscr{M}(1,2)=\delta(1,2)-ig\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2}k\cdot A(x_2),$$

$$\begin{aligned}QQ_0^{-1}(1,2)=&\delta(1,2)+g\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4(k^2)^2}\\&\times\{(-ik\cdot A+\partial\cdot A-gA^2)[k^2g_{\mu_1\mu_2}\\&-(1-\lambda^{-1})k_{\mu_1}k_{\mu_2}]\\&+[k^2A_{\mu_2}-(1-\lambda^{-1})k\cdot Ak_{\mu_2}](ik_{\mu_1}+gA_{\mu_1})\\&-[k^2\partial_{\mu_2}-(1-\lambda^{-1})k_{\mu_2}k\cdot\partial]A_{\mu_1}\\&+[k^2F_{\mu_1\mu_2}-(1-\lambda^{-1})F_{\mu_1\rho}k^\rho k_{\mu_2}]\}_{x_1}e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}.\end{aligned}\tag{12-107}$$

在花括号中，A 或 F 的宗量为 x_1，微商作用在右方的所有与 x_1 有关的项上. 核 $\tilde{Q}$ 与 Q 相差鬼项，这里没有写出. 下面，我们用同样的记号表示一个函数和它的 Fourier 变换：

$$A(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik\cdot x}A(k),$$

现在我们集中讨论表观发散函数.

12-3-2 两点函数

由 $\mathrm{Tr}\ln(\mathscr{M}_0^{-1}\mathscr{M})-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(Q_0^{-1}\tilde{Q})$ 的展开式，我们可得对两点函数的三种贡献(图 12-1)：

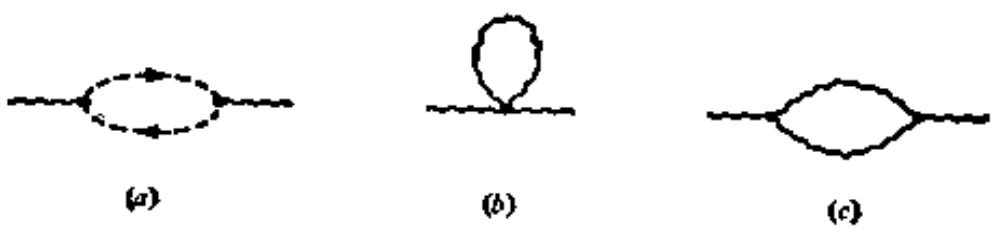


图 12-1 对矢量自能的单圈贡献，虚线表示鬼传播子.

$$\frac{1}{2}\int [dk]\mathrm{tr}[A(k)\Gamma(k)A(-k)]$$

$$=\frac{g^2}{2}\int [dk][dq]\frac{1}{q^2(q+k)^2}\mathrm{tr}[(q+k)\cdot A(k)q\times A(-k)]$$

$$+\frac{g^2}{2}\int [dk][dq]\frac{1}{(q^2)^2}\mathrm{tr}\{q^2(d-1)A(k)\cdot A(-k)+(1-\lambda^{-1})[q\cdot A(k)q\cdot A(-k)-q^2A(k)\cdot A(-k)]\}$$

$$-\frac{g^2}{4}\int [dk][dq]\frac{1}{(q^2)^2(q'^2)^2}\mathrm{tr}\{(q+q')\times A[q^2-(1-\lambda^{-1})q\otimes q]-q\otimes[q^2A-(1-\lambda^{-1})q\cdot Aq]-A\otimes[q^2q'-(1-\lambda^{-1})q\cdot q'q]+q^2(k\otimes A-A\otimes k)-(1-\lambda^{-1})\times(kq\cdot A-q\cdot kA)\otimes q\}_k$$

$$\times\{(q+q')\cdot A[q'^2-(1-\lambda^{-1})q'\otimes q']-q'\otimes[q'^2A-(1-\lambda^{-1})q'\cdot Aq']-A\otimes[q'^2q-(1-\lambda^{-1})q\cdot q'q']-q'^2(k\otimes A-A\otimes k)+(1-\lambda^{-1})[(kq'\cdot A-k\cdot q'A)\otimes q']\}_{-k}$$

(12-108)

在最后一项求迹中，$q'\equiv q+k$，且第一个花括号中的宗量为 k，第二个花括号中的宗量为 $-k$. 为简单起见，我们采用了张量记号，对动量和矢量场的时间分量已经进行了 Wick 转动:

$$k^0\to ik^0,\quad q^0\to iq^0,\quad A^0(k)\to iA^0(k).$$

我们采用维数正规化来保持规范不变性，且 $[dk]$ 代表测度 $d^dk/(2\pi)^d$. 显然，上面的表达式也可以直接由式 (12-91) 和

(12-92)的费曼规则导出来.

正如第八章所解释的,在维数正规化的范围内,把式(12-108)右端的第二个积分看成恒等于零是自洽的. 鬼态的贡献即式(12-108)右方的第一项,很容易用 Euler 函数计算:

$$\Gamma_{gh}(k)=\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}B\left(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}\right)(k^2)^{d/2-2}\left[\frac{1}{2}k^2\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)-k\otimes k\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\right]. \tag{12-109}$$

经过冗长的代数运算,我们得到总的两点函数为

$$\begin{aligned}\Gamma(k)=\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}(k^2)^{d/2-2}(k^2-k\otimes k)\Big\{&2\left[B\left(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}\right)-B\left(\frac{d}{2}-1,\ \frac{d}{2}-1\right)\right]\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\\&+(1-\lambda^{-1})\left[4B\left(\frac{d}{2}-1,\ \frac{d}{2}\right)\times\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right)-2B\left(\frac{d}{2}-1,\ \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\right]\\&-(1-\lambda^{-1})^2\frac{1}{4}\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right)\cdot B\left(\frac{d}{2}-1,\ \frac{d}{2}-1\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{12-110}$$

在这些表达式中,必须把 $\Gamma(k)$ 理解为伴随表示中正比于单位矩阵的矩阵.

对于得到关于 k 的横波性,鬼态的贡献式(12-109)是决定性的,因为单个的贡献并不满足横波性. 表达式(12-110)适合于在 $d-4=-\varepsilon\to 0$ 时挑出发散部分. 回顾一下第八章,g^2 实际上应写成 $g^2\mu^\varepsilon$,其中 μ 是一个任意质量标度,我们有

$$\Gamma(k)\underset{\varepsilon\to 0}{\simeq}\frac{g^2}{(4\pi)^2}(k^2-k\otimes k)\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\right]$$

$$\cdot\left(-\frac{2}{\varepsilon}+\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\text{常数}\right), \tag{12-111}$$

其中常数项(与 k 无关但依赖于人)还没有计算. 明显地写出群指标并回到 Minkowski 空间，就可将此式表达成另一种等价形式. 对于 $A_a^\mu(k)A_b^\nu(-k)$ 的二点正规函数为

$$\Gamma_{ab}^{(2)\mu\nu}=-C\delta_{ab}\frac{g^2}{16\pi^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)\cdot\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\right]\left[-\frac{2}{\varepsilon}+\ln\left(-\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right]. \tag{12-112}$$

现在已经很清楚，发散部分可以通过引入下面的抵消项来消除:

$$\delta\mathscr{L}_{A^2}=(Z_3-1)\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\cdot(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)]\right\}, \tag{12-113}$$

其中

$$Z_3=1+\frac{g^2C}{16\pi^2}\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\right]\frac{2}{\varepsilon}. \tag{12-114}$$

在这一级近似下，$2/\varepsilon$ 项可以看做对应于通常的正规化方法中的 $\ln(\Lambda^2/\mu^2)$ 项. 波函数的重整化 Z_3 是规范有关的. 这是因为非阿贝尔规范场也起荷电场的作用. 函数式 (12-110) 的横波性的基本后果是，对 A^2 和 $(\partial\cdot A)^2$ 项不需要抵消项.

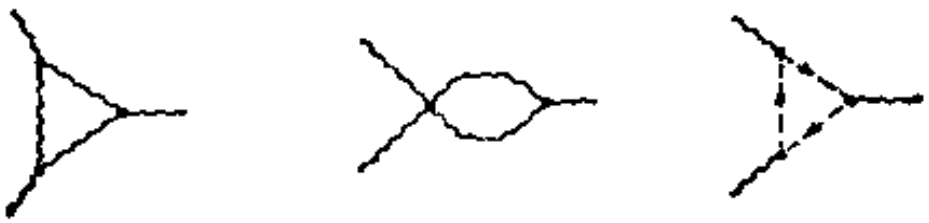


图 12-2 三点函数

式(12-110)中的发散项来自 Γ 函数的极点，然而用不同的方法计算时，它们也可能来自 B 函数的奇点。这反映了如下的事实：在一个零质量的理论中，紫外发散和红外发散的区分变得不那么严格了。例如，$\Gamma^{\mu\nu}$ 的被积函数中正比于 $(1-\lambda^{-1})\delta^{\mu\lambda}$ 的项具有形式

$$\frac{(k^2-q^2)^2}{q^2(q+k)^4},$$

且在维数正规化手续中导致一个紫外有限但红外发散的积分

$$I=\int\frac{d^dq(k^2-q^2)^2}{q^2(k+q)^4}$$

$$=\int\frac{d^dq(k^2)^2}{q^2(k+q)^4}\propto B\left(\frac{d}{2}-2,\ \frac{d}{2}-1\right)\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right).$$

然而，更换变量之后，$q\to q'=q+k$，这个积分看上去紫外发散而红外有限：

$$I=\int\frac{d^dq'[k^2-(q'-k)^2]^2}{(q'-k)^2q'^4}$$

$$\propto 4B\left(\frac{d}{2}-1,\ \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right)$$

$$-2B\left(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right).$$

当然，这两个表达式是一致的，但重要的是，当在 $d=4$ 附近展开时要挑出所有的奇异项。

12-3-3 其它函数

对其它的表观发散正规函数，我们只给出发散项的结构。

图 12-2 给出了对三点函数有贡献的 Feynman 图。所需要的抵消项为

$$\delta\mathscr{L}_{A^3}=(Z_1-1)(-g\mathrm{tr}\{(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)[A^\mu,A^\nu]\}),\tag{12-115}$$

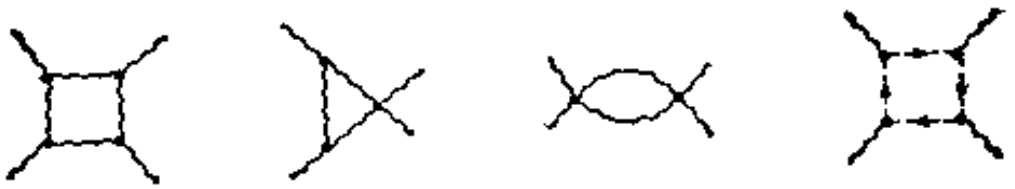


图 12-3　四点函数

$$Z_1 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2}\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{4}(1-\lambda^{-1})\right]\frac{2}{\varepsilon}.$$

与以上类似，对四点函数有贡献的 Feynman 图(图 12-3)需要一抵消项

$$\delta\mathscr{L}_{A^4} = (Z_{4-1})\left\{\frac{g^2}{2}\mathrm{tr}([A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu])\right\}, \tag{12-116}$$

$$Z_4 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2}\left[-\frac{1}{3} + (1-\lambda^{-1})\right]\frac{2}{\varepsilon}.$$

抵消项与拉氏量中原始的项具有相同的形式。毫不奇怪，$\delta\mathscr{L}_{A^4}$ 正是这种情况，因表达式(12-115)是唯一的具有 Lorentz 不变性、场的三次式、维数为 4 和在群的(整体)变换下不变的表达式。对于四次项情况并不是这样，因而抵消项式(12-116)的形式是一种巧合。

还应当计算具有鬼场外线的函数所属的抵消项。幸好我们可以利用式(12-102)和(12-103)定义的算符 $\hat{Q}$，或等价地利用 Feynman 规则式(12-92)，总可以把出射鬼线的动量分离出来。这样可以减小与鬼场有关的函数的等效表观发散度，且只剩两种发散函数，即鬼场自能(图 12-4)和鬼场-矢量场顶角(图 12-5)。根据上述的特性，前者不需要质量抵消项，我们发现

$$\delta\mathscr{L}_{\bar{\eta}\eta} = (\tilde{Z}_3 - 1)(-\bar{\eta}_a\partial^2\eta_a), \tag{12-117}$$

$$\tilde{Z}_3 = 1 + \frac{g^2 C}{16\pi^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1-\lambda^{-1}}{4}\right)\frac{2}{\varepsilon},$$



图 12-4　单圈近似下的鬼场自能图　　图 12-5　对鬼-矢量顶角的单图贡献

和

$$\delta\mathscr{L}_{\bar{\eta}A\eta}=(\tilde{Z}_1-1)(C_{abc}A_a^\mu\partial_\mu\bar{\eta}_b\eta_c),$$
$$\tilde{Z}_1=1-\frac{g^2C}{16\pi^2}\frac{\lambda^{-1}}{2}\frac{2}{\varepsilon}. \tag{12-118}$$

实际上，在 Landau 规范中 ($\lambda^{-1}=0$) 对所有级，$\tilde{Z}_1$ 都简化为 1，原因是矢量传播子具有横波性和入射的鬼场动量是因子化的.

在实用的情况中，物质场也与规范场耦合. 我们列出与旋量场有关的抵消项以及由旋量场诱导出的对 $\delta\mathscr{L}_{A^2}$，$\delta\mathscr{L}_{A^3}$ 和 $\delta\mathscr{L}_{A^4}$ 的附加的贡献. 耦合已在方程 (12-93) 中写出了. 对场的表示中的二阶 Casimir 算子，我们采用下面的记号：

$$\mathrm{tr}(T^aT^b)=-T_f\delta^{ab},$$
$$\sum_a(T^a)^2=-C_fI. \tag{12-119}$$

如果以 r 代表群的阶 [李代数生成元的个数，例如对 $SU(N)$，$r=N^2-1$]，n_f 代表费米子表示的维数[对 $SU(N)$ 的基础表示，$n_f=N$]，我们有关系

$$T_fr=C_fn_f. \tag{12-120}$$

对伴随表示，$n=r$，因而对 $SU(N)$ $T=C[=N]$，而对 $SU(N)$ 的基础表示 $T_f=\frac{1}{2}$，$C_f=\frac{N^2-1}{2N}$.

图 12-6 和 12-7 中的 Feynman 图产生的抵消项为

$$\delta\mathscr{L}_{\bar{\psi}\psi}=(Z_2-1)\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi-\left(Z_2\frac{m_0}{m}-1\right)m\bar{\psi}\psi,$$



图 12-6　费米子自能　　图 12-7　费米子-矢量场顶角

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2}\lambda^{-1}\frac{2}{\varepsilon},$$

$$Z_2\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2}[4 - (1-\lambda^{-1})]\frac{2}{\varepsilon}, \qquad (12\text{-}121)$$

且

$$\delta\mathscr{L}_{\bar{\psi}A\psi} = (Z_{1F}-1)(-ig\bar{\psi}A_a T^a\psi),$$

$$Z_{1F} = 1 - \frac{g^2 C_f}{16\pi^2}\left\{\left[1 - \frac{(1-\lambda^{-1})}{4}\right]C + \lambda^{-1}C_f\right\}\frac{2}{\varepsilon}. \qquad (12\text{-}122)$$

如果我们令 $C_f = 1$, $C = 0$, $g^2/4\pi = \alpha$, 则这些表达式退化为第七章中量子电动力学中的式子.

最后,一个内部费米子圈(图 12-8)产生的修正可表示成

$$\delta\mathscr{L}(A)|_{费米子} = \delta Z^{(F)}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\right], \qquad (12\text{-}123)$$

$$\delta Z^{(F)} = \delta Z_3^{(F)} = \delta Z_1^{(F)} = \delta Z_4^{(F)} = -\frac{T_f g^2}{16\pi^2}\frac{4}{3}\frac{2}{\varepsilon}.$$

对于标量场和规范矢量场耦合的情形，读者自己计算是没有困难的.



图 12-8　费米子对两点、三点和四点函数的贡献

12-3-4 单圈重整化

我们已经发现，所有的抵消项都与原始拉氏量中的某个单项具有相同的结构. 但是，这还不足以保证重正化了的拉氏量与裸的拉氏量具有相同的对称性. 暂且略去物质场，我们发现

$$\begin{aligned}\mathscr{L}+\delta\mathscr{L}=\mathrm{tr}\Big\{&\frac{1}{2}Z_3(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\\&+\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2\\&-gZ_1(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)[A^\mu,A^\nu]\\&+\frac{g^2}{2}Z_4[A_\mu,A_\nu][A^\mu,A^\nu]\Big\}\\&+\tilde{Z}_3\partial_\mu\bar{\eta}\partial^\mu\eta+g\tilde{Z}_1(\partial_\mu\bar{\eta}_b A^\mu_a\eta_c C_{abc}).\end{aligned}\tag{12-124}$$

我们根据下面的式子来定义裸场和各种参量：

$$\begin{aligned}&A_0=Z_3^{1/2}A,\quad \eta_0=\tilde{Z}_3^{1/2}\eta,\quad \eta_0=\tilde{Z}_3^{1/2}\bar{\eta},\\&g_0=Z_1Z_3^{-3/2}g,\quad \lambda_0=\lambda Z_3^{-1},\end{aligned}\tag{12-125}$$

则 $\mathscr{L}+\delta\mathscr{L}$ 可以被看做是用裸量写出的原始拉氏量

$$\mathscr{L}(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0;g_0,\lambda_0),$$

条件是下面的恒等式成立：

$$\frac{Z_4}{Z_1}=\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}.\tag{12-126a}$$

稍看一下表达式(12-114)到(12-118)就足以使我们相信，它们只是在单圈近似下被满足.这些恒等式(它们是量子电动力学中的关系式 $Z_1=Z_2$ 的推广)表达了如下的事实：三次项、四次项和 $\eta\bar{\eta}A$ 顶角的耦合常数的重整化是互相重合的，即重整化保持了耦合常数的普适性. 然而，在有物质场，例如费米子时，我们要求

$$\frac{Z_4}{Z_1}=\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}=\frac{Z_{1F}}{Z_2}. \tag{12-126b}$$

这个关系同样为表达式(12-121)至(12-123)所满足.

最后,我们写出有费米场时的耦合常数重整化:

$$g_0=Z_g g,$$
$$Z_g=1-\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{6}C-\frac{2}{3}T_f\right)\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \tag{12-127}$$

注意,规范依赖性已经消失,为将来的需要,$2/\varepsilon$ 已为 $\ln(\Lambda^2/\mu^2)$ 所取代.

12-4 重 整 化

这一节处理具有不破缺的对称性的非阿贝尔规范理论的重整化. 定域对称自发破缺时发生什么现象,将在以后讨论. 问题在于重整化能否保持规范理论的惊人特性,特别是耦合常数的普适性. 正规化是在中间步骤中引入的;在实际应用中,维数正规化是最方便的. 所期望的性质将从 Ward 恒等式得到. Slavnov 和 Taylor 首先给出了这种情况下的 Ward 恒等式. 读者可能发现在第八和十一章中已经反复使用过这样的恒等式;但这里要复杂一些. 然而,非阿贝尔规范理论更错综复杂,并需要更为深入细致的分析.

12-4-1 Slavnov-Taylor 恒等式

我们从生成泛函

$$e^{G(J)}=\int\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}$$
$$\times\exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}-\frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2+J\cdot A\right)\right]$$

开始,其中 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{F}$ 相对于一个规范变换的变分:

$$\delta A = D\delta\alpha,$$
$$\delta\mathscr{F} = \mathscr{M}\delta\alpha. \tag{12-128}$$

我们将要探讨一种性质，即测度 $\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}$ 在这个变换下是不变的，甚至当 $\delta\alpha$ 本身依赖于 A 时也是如此. 换句话说，如果

$$A = A' + \delta A,$$

且

$$\mathscr{F}'(A') = \mathscr{F}[A(A')] = \mathscr{F}(A') + \delta\mathscr{F},$$

则

$$\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}_{\mathscr{F}}(A) = \mathscr{D}(A')\det\mathscr{M}_{\mathscr{F}}(A'). \tag{12-129}$$

证明是显然的. 我们用 $\Delta(A)$ 代替 $\det\mathscr{M}(A)$:

$$\begin{aligned}\int\mathscr{D}(A)\Delta_{\mathscr{F}}(A) &= \int\mathscr{D}(A)\mathscr{D}(A')\Delta_{\mathscr{F}}(A)\delta(A' - A + \delta A)\\ &= \int\mathscr{D}(A)\mathscr{D}(A')\mathscr{D}(g)\Delta_{\mathscr{F}}(A)\delta(A' - {}^{g}A)\Delta_{\mathscr{F}}(A)\delta\\ &\quad\times[\mathscr{F}'({}^{g}A) - \mathscr{F}(A)]\\ &= \int\mathscr{D}(g)\mathscr{D}(A')\Delta_{\mathscr{F}}({}^{g^{-1}}A')\Delta_{\mathscr{F}}({}^{g^{-1}}A')\delta[\mathscr{F}'(A')\\ &\quad - \mathscr{F}(g^{-1}A')]\\ &= \int\mathscr{D}(A')\Delta_{\mathscr{F}'}(A'),\end{aligned}$$

其中已经用了测度 $\mathscr{D}(A)$ 和 $\Delta_{\mathscr{F}}(A)$ 在 $A\to{}^{g}A$ 变换下的不变性.

因此，

$$e^{G(J)} = \int\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}\exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L} - \frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2 + J\cdot A\right.\right.$$
$$\left.\left. - \lambda\mathscr{F}\mathscr{M}\delta\alpha + J\cdot D\delta\alpha\right)\right].$$

如果我们取 $\delta\alpha = \mathscr{M}^{-1}\delta\omega$，这个恒等式的内容更容易看清. 这相应于一个非定域的规范变换，它把 $\mathscr{F}$ 平移 $\delta\omega$. 准至 $\delta\omega$ 的最低阶，我们有

$$0 = \int \mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}\int d^4x(\lambda\mathscr{F} - J\cdot D\mathscr{M}^{-1})\delta\omega$$
$$\cdot \exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L} - \frac{1}{2}\mathscr{F}^2 + J\cdot A\right)\right],$$

或者用 $\frac{\delta}{i\delta J}$ 代替 A 之后有

$$\left\{\lambda\mathscr{F}_a\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right] - \int d^4y J_b(y)D_{bc}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right.$$
$$\left.\times \mathscr{M}^{-1}_{ca}\left(y, x; \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} e^{G(J)} = 0, \qquad (12\text{-}130)$$

其中重复指标要求和. 表达式

$$G_{ca}(y,x) = \mathscr{M}^{-1}_{ca}\left(y, x; \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{G(J)} \qquad (12\text{-}131)$$

可看成是有源 J 存在时鬼场的传播子.

Slavnov-Taylor 恒等式最后可写成

$$\lambda\mathscr{F}_a\left[\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right] e^{G(J)} = \int d^4y\left[J_bD_{bc}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right](y)G_{ca}(y,x),$$

$$\mathscr{M}_{bc}\left[\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right]G_{ca}(y,x) = \delta_{ba}\delta^4(x-y)e^{G(J)}. \qquad (12\text{-}132)$$

作用于单粒子不可约函数上的 Slavnov-Taylor 恒等式很难用一种紧凑的方式表示出来. Becchi, Rouet 和 Stora 发现的变换使我们能达到此目的. 在作用量中重新引入鬼场

$$I = \int d^4x\left(\mathscr{L} - \frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2 - \eta\mathscr{M}\eta\right). \qquad (12\text{-}133)$$

不难证明,这个作用量在变量的联合变换

$$\begin{cases}\delta A^\mu_a(x) = D^\mu_{ab}(x)\eta_b(x)\delta\zeta \equiv sA\delta\zeta,\\ \delta\bar{\eta}_a(x) = \lambda\mathscr{F}_a[A(x)]\delta\zeta \equiv s\bar{\eta}\delta\zeta,\\ \delta\eta_a(x) = -\frac{g}{2}C_{abc}\eta_b(x)\eta_c(x)\delta\zeta \equiv s\eta\delta\zeta\end{cases} \qquad (12\text{-}134)$$

下是不变的. 这个变换,与上面遇到的不同,是定域的. 它引

入了与 x 无关的反对易参量 $\delta\zeta$，并把对易的和反对易的变量混合起来.

很容易证明 I 的不变性. 首先，由于 δA 是一个特殊的规范变换，因而 $\mathscr{L}$ 是不变的. 其次，由于 η 和 $\delta\zeta$ 反对易，

$$\delta\left(-\frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2\right)-(\delta\bar{\eta})\mathscr{M}\eta=0.$$

最后，

$$\delta(\mathscr{M}\eta)=\delta\left[\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta A_a^\mu}(D^\mu\eta)_a\right]$$

$$=\frac{-\delta^2\mathscr{F}}{\delta A_b^\nu\delta A_a^\mu}(D^\nu\eta)_b(D^\mu\eta)_a\delta\zeta+\frac{\delta\mathscr{F}}{\delta A_a^\mu}\delta(D^\mu\eta)_a.$$

因 $(D^\nu\eta)_b(D^\mu\eta)_a$ 在交换 (μa) 和 (νb) 时反对称，上式的第一项为零. 而由式(12-134)和 Jacobi 恒等式，容易看出

$$\delta(D^\mu\eta)=0. \tag{12-135}$$

为了后面的应用，我们也可用类似的方法导出

$$\delta(C_{abc}\eta_b\eta_c)=0. \tag{12-136}$$

Becchi-Rouet-Stora 变换 s 定义为式(12-134)对 $\delta\zeta$ 的右微商，即 $sA=D\eta$，$s\eta_a=-gC_{abc}\eta_b\eta_c/2$，方程(12-135)和(12-136)给出 $s^2A=0$，$s^2\eta=0$.

这个不变性暗示了 Green 函数之间的恒等式. 让我们首先证明如何恢复 Slavnov-Taylor 恒等式(12-130). 我们从

$$\int\mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})\eta_a(x)\exp\left[i\left(I+\int d^4y\,J\cdot A\right)\right]=0$$

开始，此式来源于被积函数对鬼变量是奇函数，然后按式(12-134)更换积分变量；容易验证这个变量更换的雅可比行列式为 1，因而不影响积分值，故

$$0=\int\mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})\left[\lambda\mathscr{F}_a(x)+\eta_a(x)\right.$$

$$\cdot \int d^4y\, i J_b(y)(D\eta)_b(y)\Big]$$

$$\cdot \exp\left[i\left(I + \int d^4y\, J\cdot A\right)\right] = 0. \qquad (12\text{-}137)$$

对 $\eta,\bar{\eta}$ 的积分需要做替换

$$\eta_a(x)\eta_b(y) \to i\mathscr{M}^{-1}_{ab}(y,x)$$

于是给出式 (12-130).

12-4-2 正规函数的恒等式

恒等式首先是用联接函数表示出来的. 不仅对鬼场而且对变换式 (12-134) 所涉及的复合算符也引入源则更方便.我们有

$$e^{G(J,\xi,\bar{\xi},K,L)} = \int \mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})\exp\left[i\int d^4y \left(\mathscr{L} - \frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2 \right.\right.$$

$$- \bar{\eta}\mathscr{M}\eta + J\cdot A + \xi\eta + \bar{\eta}\xi$$

$$\left.\left. + KsA - Ls\eta\right)\right], \qquad (12\text{-}138)$$

$$G(J) = G(J,\xi,\bar{\xi},K,L)|_{\xi=\bar{\xi}=K=L=0},$$

这里 $K^\mu_a(y)$ 和 $L_a(y)$ 分别是与 $sA_{\mu a}(y) = (D_\mu\eta)_a(y)$ 和 $-s\eta_a(y) = gC_{abc}\eta_b(y)\eta_c(y)/2$ 耦合的定域源，因而分别是反对易或对易的量. 更准确地说，如果赋于 η 的鬼数 $\gamma = -1$ (且 η 的鬼数为 $+1$)，K 和 L 具有 $\gamma = 1$ 和 2，则对幂次计算法，sA 和 $s\eta$，K 和 L 的量纲为 2，此处和以下我们假定函数 $\mathscr{F}$ 对 A 是线性的:

$$\mathscr{F}_a(y) = \phi^\mu_{ab}A_{\mu b}(y). \qquad (12\text{-}139)$$

例如，推广了的 Feynman 规范对应于 $\phi^\mu_a = \partial^\mu\delta_{ab}$. 采用非线性规范条件 $\mathscr{F}$ 将需要在式 (12-138) 中引入与之耦合的额外的源.

因为 sA 和 $s\eta$ 也是不变的，作式 (12-134) 形式的变量

代换后，我们得

$$0 = \int \mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta}) \int d^4x (J \cdot sA + \xi s\eta - \lambda \mathscr{F}\xi)(x)$$
$$\cdot \exp\left[i \int d^4y (\cdots) \right].$$

此式可写成

$$\int d^4x \left[J \cdot \frac{\delta}{i\delta K} - \xi \frac{\delta}{i\delta L} - \lambda \xi \mathscr{F}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right) \right](x)$$
$$\times e^{G(J,\xi,\bar{\xi},K,L)} = 0.$$

根据式 (12-139) 的假定，泛函微分算符是线性的. 因此，

$$\int d^4x \left[J \frac{\delta}{\delta K} - \xi \frac{\delta}{\delta L} \right.$$
$$\left. - \lambda \xi \mathscr{F}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right) \right] G(J,\xi,\bar{\xi},K,L) = 0. \qquad (12\text{-}140)$$

在前一节中，恒等式 (12-130) 是由鬼场传播子的运动方程所补充的[方程 (12-132)]. 这里也有类似的情况，这因泛函积分式 (12-138) 在无穷小改变 $\eta \to \eta + \delta\eta$ 下是不变的，其中 $\delta\eta$ 是任意的. 我们可得定域关系

$$\int \mathscr{D}(A,\eta,\bar{\eta})(-\mathscr{M}\eta + \xi)(x) \exp\left[i \int d^4y (\cdots) \right] = 0,$$

或者因 $\mathscr{M}\eta = s\mathscr{F} = \phi \cdot sA$:

$$\left(\xi - \phi \frac{\delta}{i\delta K} \right)(x) e^{G(J,\xi,\bar{\xi},K,L)} = 0.$$

对联接函数，此式简化为

$$\phi \frac{\delta}{i\delta K(x)} G(J,\xi,\bar{\xi},K,L) = \xi(x). \qquad (12\text{-}141)$$

方程 (12-140) 和 (12-141) 现在必须用正规函数表示出来，这可通过如下的 Legendre 变换来达到：

$$\Gamma(A,\eta,\bar{\eta},K,L) = -iG(J,\xi,\bar{\xi},K,L) - \int d^4y(J\cdot A + \xi\eta + \bar{\eta}\xi), \tag{12-142}$$

其中

$$A = \frac{\delta G}{i\delta J},\ \eta = \frac{\delta G}{i\delta\bar{\xi}},\ \bar{\eta} = -\frac{\delta G}{i\delta\xi},$$

或等价地

$$J = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A},\ \xi = \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta},\ \bar{\xi} = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}}.$$

在这个计算中，源 K 和 L 只是被动的旁观者：

$$\frac{\delta G}{i\delta K} = \frac{\delta\Gamma}{\delta K},\ \frac{\delta G}{i\delta L} = \frac{\delta\Gamma}{\delta L}. \tag{12-143}$$

恒等式(12-140) 和(12-141) 用 Γ 表示为

$$\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A}\frac{\delta\Gamma}{\delta K} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta}\frac{\delta\Gamma}{\delta L} - \lambda\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\eta}}\mathscr{F}(A)\right](x) = 0, \tag{12-144}$$

和

$$\phi^{\mu}_{ab}\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{\mu}_{b}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta_{a}(x)} = 0. \tag{12-145}$$

如果引入修改过的等效作用量 $\tilde{\Gamma}$，则

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma + \frac{\lambda}{2}\int d^4y\,\mathscr{F}^2[A(y)]. \tag{12-146}$$

方程 (12-144) 和 (12-145) 取更简单的形式

$$\int d^4x\left(\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta A}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\eta}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta L}\right)(x) = 0,$$

$$\phi^{\mu}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K^{\mu}} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{\eta}} = 0. \tag{12-147}$$

恒等式 (12-147) 具有普遍形式。它们不再涉及任何受重整化影响的参量，如耦合常数，且没有涉及群的结构，而这

已隐藏在源的定义中了. 因此,它们也适用于作用量,因而适宜于研究抵消项的结构.

容易证明,恒等式(12-144)和(12-145)在最低次近似下也能被满足. 第一个恒等式表示作用量在 Becchi-Rouet-Stora 变换下的不变性:

$$\delta A = \frac{\delta \Gamma^{[0]}}{\delta K}\delta\xi,\quad \delta\eta = -\frac{\delta\Gamma^{[0]}}{\delta L}\delta\xi,$$

$$\delta\bar{\eta} = \lambda\mathscr{F}(A)\delta\xi.$$

雅可比行列式等于1的条件是

$$\frac{\delta^2\Gamma^{[0]}}{\delta A\delta K} = 0,\quad \frac{\delta^2\Gamma^{[0]}}{\delta\eta\delta L} = 0. \tag{12-148}$$

显然,这一条件是被满足的.

对阿贝尔情形,在某个规范下,例如需要引入鬼场的规范

$$\mathscr{F} = \partial_\mu A^\mu + A^2/2$$

下,进行类似的分析是一个很好的练习.

12-4-3 用递推法构造抵消项

在前面的考虑中,理论是被隐晦地维数正规化了. 我们现在想用一种能维持前面的恒等式的方法把理论重整化. 象在12-3节单圈图计算中一样,实行8-4-4节定义的最小重整是方便的. 换句话说,我们满足于当维数 d 趋于4时消除发散项. 在 $\hbar$ 的每一级,我们将写下

$$\tilde{\Gamma}^{[n]}_{\text{reg}} = \tilde{\Gamma}^{[n]}_{R} + \tilde{\Gamma}^{[n]}_{\text{div}}, \tag{12-149}$$

其中 $\tilde{\Gamma}^{[n]}_{\text{reg}}$ 是考虑了所有最低次的抵消项计算出来的. 可以代入更多的物理条件,只要这些条件与恒等式(12-144)和(12-145)自洽.

方程(12-147)告诉我们,所有的泛函对 K 和 η 的依赖是通过组合 $K-\eta\phi$ 实现的. 我们将采用更紧凑的记号

$$\Gamma_1 * \Gamma_2 \equiv \int d^4x\left(\frac{\delta\Gamma_1}{\delta A}\frac{\delta\Gamma_2}{\delta K} + \frac{\delta\Gamma_1}{\delta\eta}\frac{\delta\Gamma_2}{\delta L}\right). \tag{12-150}$$

按 $\hbar$ 展开的幂级数

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^{[0]} + \tilde{\Gamma}^{[1]} + \tilde{\Gamma}^{[2]} + \cdots$$

满足恒等式(12-147). 因此,对第 n 级,我们有

$$\sum_{p+q=n} \tilde{\Gamma}^{[p]} * \tilde{\Gamma}^{[q]} = 0. \tag{12-151}$$

我们要找出抵消项使得重整化了的 $\tilde{\Gamma}_R^{[p]}$ 满足

$$\sum_{p+q=n} \tilde{\Gamma}_R^{[p]} * \tilde{\Gamma}_R^{[q]} = 0. \tag{12-152}$$

我们用递推的方法来作. 对最低阶, $\tilde{\Gamma}^{[0]} = \tilde{\Gamma}_R^{[0]}$ 简化为

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^0 = \tilde{I}(A,\eta,\bar{\eta},K,L) &= \int d^4x[\mathscr{L}(A) - \bar{\eta}\mu\eta \\ &\quad + K\cdot sA - Ls\eta] \\ &= \int d^4x[\mathscr{L} + (K - \eta\phi)\cdot sA - Ls\eta]. \end{aligned}\tag{12-153}$$

上式当然满足式(12-152). 在一级近似下,我们有

$$\begin{cases} \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]} + \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]} * \tilde{I} = 0, & (12\text{-}154a) \\ \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_R^{[1]} + \tilde{\Gamma}_R^{[1]} * \tilde{I} = 0. & (12\text{-}154b) \end{cases}$$

方程(12-154b)就是所期望的恒等式(12-152)在 $n=1$ 的情况,而方程(12-154a)给出了一级抵消项的结构. 可以偿试把 $\tilde{I}$ 修改成

$$\tilde{I} \to \tilde{I}_1 \triangleq \tilde{I} - \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]} \tag{12-155}$$

来消除发散部分. 然而,递推法要能成立只有当重整化了的作用量 $\tilde{I}_1$ 本身象 $\tilde{I}$ 一样满足

$$\tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = 0 \tag{12-156}$$

才行. 对式(12-155),情况并非如此,因为

$$\tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]} * \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]}.$$

然而,右方为 $\hbar^2$ 量级. 因此,我们可定义

$$\tilde{I}_1 = I - \tilde{\Gamma}_{\text{div}}^{[1]} + \Delta_1,$$

其中附加的部分 Δ_1 是一个场的四次定域多项式的积分,其量

级为 $\hbar^2$，并且以这样一种方式定义，使式 (12-156) 得到满足. 当然，它不影响一级量，因而保持 $\tilde{\Gamma}_R^{[1]}$ 的有限性和归一化条件.

这种复杂性是与非线性恒等式有关的对称性的特征. 例如，同样的现象也出现在二维非线性 σ 模型中，此模型曾在第十一章末介绍过.

Δ_1 的结构将以 $\Gamma_{\mathrm{div}}^{[1]}$ 的结构导出. 如果我们能够证明

$$(\tilde{I} - \tilde{\Gamma}_{\mathrm{div}}^{[1]})(A,\eta,\bar{\eta},K,L;g) = \tilde{I}(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0,K_0, L_0;g_0) + O(\hbar^2), \tag{12-157}$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= Z_3^{1/2}A, \quad \eta_0 = \tilde{Z}_3^{1/2}\eta, \quad \bar{\eta}_0 = \tilde{Z}_3^{1/2}\bar{\eta}, \\ K_0 &= \tilde{Z}_3^{1/2}K, \quad L_0 = Z_L^{1/2}L, \quad g_0 = Z_g g, \end{aligned} \tag{12-158}$$

且 $Z_3 = 1 + z_3\hbar$，等等，一个自然的选择将是

$$\tilde{I}_1(A,\eta,\bar{\eta},K,L;g) = \tilde{I}(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0,K_0,L_0;g_0).$$

这个新的作用量 $\tilde{I}_1$ 将满足

$$\tilde{I}_1 * \tilde{I}_1 = \int d^4x \left[\tilde{Z}_3^{1/2} Z_3^{1/2} \frac{\delta \tilde{I}(A_0,\cdots;g_0)}{\delta A_0} \frac{\delta \tilde{I}(A_0,\cdots)}{\delta K_0} + \tilde{Z}_3^{1/2} Z_L^{1/2} \frac{\delta \tilde{I}(A_0,\cdots)}{\delta \eta_0} \frac{\delta \tilde{I}(A_0,\cdots)}{\delta L_0} \right].$$

此外，如果

$$Z_L = Z_3, \tag{12-159}$$

则条件式 (12-156) 将被满足，于是递推法可以进行下去. 因此，下面的技术性讨论的目的就是证明式 (12-157) 和 (12-159).

我们寻找方程

$$\sigma \tilde{\Gamma}_{\mathrm{div}}^{[n]} \equiv \tilde{I} * \tilde{\Gamma}_{\mathrm{div}}^{[n]} + \tilde{\Gamma}_{\mathrm{div}}^{[n]} * \tilde{I} = 0 \tag{12-160}$$

的普遍解. 此方程是给定 n 级，且所有低于 n 级的抵消项都考虑在发散部分 $\tilde{\Gamma}_{\mathrm{div}}^{[n]}$ 所满足的方程内.

式 (12-160) 中的运算 σ，作为 Becchi-Rouet-Stora 变换 s 的一个推

广，是幂零的，

$$\sigma^2 = 0. \tag{12-161}$$

这一点容易从下面 σ 的形式看出：

$$\sigma = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中对易和反对易变量已经集体地分别以 x 和 θ 代表；在我们的问题中，$\{x_i\} = \{A, L\}$，$\{\theta_i\} = \{\eta, K\}$，则 (12-161) 可由 $\tilde{I}$ 所满足的恒等式

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i} = 0 \tag{12-162}$$

得到。明显写出来有

$$\begin{aligned}\sigma^2 = &\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right.\\ &\left. - \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_j}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \theta_j}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i}\right)\frac{\partial}{\partial \theta_j}\\ &- \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{I}}{\partial \theta_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

由于反对易性第一个括号为零，按方程 (12-162)，后两项也为零。另一方面，任何只含 A 规范不变的泛函 $R_{inv}(A)$ 满足

$$\begin{aligned}\sigma R_{inv}(A) &= \int d^4x \frac{\delta R_{inv}}{\delta A}\frac{\delta \tilde{I}}{\delta K}\\ &= \int d^4x \frac{\delta R_{inv}}{\delta A^a_\mu(x)}(D^\mu \eta)_a(x) = 0.\end{aligned}$$

因此，形式为

$$R = R_{inv}(A) + \sigma R' \tag{12-163}$$

的表达式是 $\sigma R = 0$ 的解。可以证明，这就是 $\tilde{\Gamma}^{[n]}_{div}(A)$ 的方程的普遍解，甚至在原始拉氏量中加上与规范不变复合算符耦合的附加源时也是这样。然而，在现在的情况下，我们可通过考察以下的事实来证明它：幂次计数法和鬼数守恒将 $\tilde{\Gamma}^{[n]}_{div}$ 的形式限制为

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathrm{div}} = \int d^4x \left\{ l(A) + [K^\mu_a - (\bar{\eta}\phi^n)_a] \Delta_{\mu ab}\eta_b + \frac{1}{2} d_{abc} L_a \eta_b \eta_c \right\}.$$

在这个表达式中，$l(A)$ 的量纲为 4，$\Delta_{\mu ab}$ 的量纲为 1，因而至多对 A 是线性的，且 $d_{abc} = -d_{acb}$ 是数，如果我们假定整体对称性不被破坏(利用规范的选取)，则

$$\Delta_{\mu ab} = \alpha \partial_\mu \delta_{ab} + \beta g C_{abc} A_{\mu c},$$

$$d_{abc} = \gamma g C_{abc},$$

其中 α, β, 和 γ 是纯数目．将这些表达式代入式 (12-160) 得

$$\beta = \gamma,$$

$$D^\mu_{ab} \frac{\delta l(A)}{\partial A^\mu_b} + g(\beta - \alpha) C_{abc} A^\mu_c \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\mu_b} = 0.$$

第二个方程的特解为

$$l(A) = (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\delta A^\mu_a}.$$

再加上一个 A 场的规范不变的、场的次数为四的泛函即 $\mathscr{L}(A)$ 乘以常数的项就得普遍解

$$l(A) = a\mathscr{L}(A) + (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\mu_a}.$$

总括起来，$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathrm{div}}$ 具有如下的形式:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathrm{div}} = \int d^4x \Big[a\mathscr{L}(A) + (\beta - \alpha) A^\mu_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\mu_a} + \alpha (K - \bar{\eta}\phi)^\mu_a \times (D_\mu \eta)_a + (\beta - \alpha) g (K - \bar{\eta}\phi)^\mu_a C_{abc} A_{\mu c} \eta_b + \beta \frac{g}{2} L_a C_{abc} \eta_b \eta_c \Big], \tag{12-164}$$

其中 a, α, β 为 $\hbar^n$ 量级．简单的代数运算并利用 $\mathscr{L}$ 的齐次性

$$2\mathscr{L} = A^\mu_a(x) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^\mu_a(x)} - g \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g},$$

我们可把 $\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathrm{div}}$ 写成

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\mathrm{div}} = \Big(\int d^4x \Big\{ \Big(\beta - \alpha + \frac{a}{2} \Big) \Big[A^\mu_a(x) \frac{\delta}{\delta A^\mu_a(x)}$$

$$+ L_a(x)\frac{\delta}{\delta L_a(x)}\Big] + \frac{\alpha}{2}\Big[K_a(x)\frac{\delta}{\delta K_a(x)}$$

$$+ \eta_a(x)\frac{\delta}{\delta \eta_a(x)} + \bar{\eta}_a(x)\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_a(x)}\Big]\Big\}$$

$$- \frac{a}{2} g \frac{\partial}{\partial g}\Big) \tilde{I}(A,\eta,\bar{\eta},K,L;g). \tag{12-165}$$

这正是所期待的结果. 所有抵消项起源于原始作用量中参量的重整化. 而且，A 和 L 以同样的方式被重整化. 根据递推假设，如果我们把重整化到 $n-1$ 级的作用量写做

$$\tilde{I}_{n-1} = \tilde{I}(Z_{3,n}^{1/2}A, \tilde{Z}_{3,n}^{1/2}\eta, \bar{Z}_{3,n}^{1/2}\bar{\eta}, \tilde{Z}_{3,n-1}^{1/2}K, Z_{3,n-1}^{1/2}L; Z_{g,n-1}g),$$

则刚才我们已经证明了

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n &= \tilde{I}_{n-1} - \tilde{P}_{\mathrm{div}}^{[n]} + O(\hbar^{n+1}) \\ &= \tilde{I}(Z_{3,n}^{1/2}A, \tilde{Z}_{3,n}^{1/2}\eta, \bar{Z}_{3,n}^{1/2}\bar{\eta}, \tilde{Z}_{3,n}^{1/2}K, Z_{3,n}^{1/2}L; Z_{g,n}g),\end{aligned} \tag{12-166}$$

其中

$$Z_{3,n}^{1/2} = Z_{3,n-1}^{1/2} - \left(\beta - \alpha + \frac{a}{2}\right),$$

$$\tilde{Z}_{1,n}^{1/2} = \tilde{Z}_{3,n-1}^{1/2} - \frac{\alpha}{2},$$

$$Z_{g,n} = Z_{g,n-1} + \frac{a}{2},$$

这就完成了归纳法的证明.

我们已经证明，在维持 Slavnon-Taylor 恒等式 (12-144) 和 (12-145) 所表达的规范不变性的情况下，对非阿贝尔规范理论进行重整化是可能的. 幸运的是，整个运算简化为对波函数和耦合常数的重整化，如果我们采用作用量

$$I_R(A,\eta,\bar{\eta},K,L;g,\lambda) = I(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0,K_0,L_0;g_0,\lambda_0), \tag{12-167}$$

其中记号与式 (12-158) 同，且 $Z_L = Z_3$，$\lambda_0 = Z_3^{-1}\lambda$，这里已考虑了规范项 $\frac{\lambda}{2}\mathscr{F}(A)^2$ 的非重整性 ($\mathscr{F}$ 为线性函数)，则

我们可产生有限的 Green 函数。作为式(12-167)的结果，Green 函数被相乘性地重整：

$$\Gamma_R(A,\eta,\bar{\eta},K,L;g,\lambda)=\Gamma_{reg}(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0,K_0,L_0;g_0,\lambda_0),\tag{12-168}$$

并且满足恒等式(12-144)和(12-145)。完成了这个证明之后，我们当然可以在前面的两个方程(12-167)和(12-168)中去掉辅助的源 K 和 L。

前面的考虑可以推广到有最小耦合的物质场的情形。如果存在费米场，我们暂且假定耦合与 λ 矩阵无关(这一点将在12-4-5节讨论)。维数正规化使理论有限，Becchi-Rouet-Stora 变换和恒等式(12-147)可以被推广，并且正如我们从单圈图计算中所预期的，类似于式(12-167)和(12-168)的方程也成立，关键的特点当然是耦合常数重整化的普适性。

Ward 恒等式的紧缩形式可能已经使某些简单的事实变得模糊不清了。我们要强调指出，单圈计算的结果纯粹是方程(12-147)的结果。例如，如果抵消项 Z_1，$\tilde{Z}_1$，Z_4 被复原成式(12-124)中的样子，容易看出，式(12-167)表明至所有级

$$\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}=\frac{Z_4}{Z_1},$$

利用方程(12-147)也可以证明，对传播子 $\Gamma_{\mu\nu}$ 的逆的所有级的修正都是横波性的。

Lee 和 Zinn-Justin 研究的另一种不同的正规化方法，是基于在原始拉氏量中引入高阶协变微商。这将改善规范场的大动量行为，并使所有高于单圈的图为有限。而单圈图必须用一种规范不变的方法独立地被整规化。

读者可以完成轴规范下的重整化方案；在泛函积分中用 Lagrange 乘子来写条件 $n\cdot A=0$ 是更为方便的。尽管鬼场并不真正与规范场耦合，它们的引入使我们能使用稍稍修改过的 Becchi-Rouet-Stora 变换来导出一系列的恒等式。

12-4-4 Green 函数的规范相关性

由于在计算的末尾我们总要检验物理量的规范无关性，因此控制 Green 函数的规范相关性是十分重要的. 我们发现，变换 $\delta A = D\mathscr{M}^{-1}\delta\omega$，将 $\mathscr{F}$ 移动成为 $\mathscr{F}+\delta\omega$，并将式(12-133)中的作用量 I_g 修改为

$$I_g+\delta I = I_g - \int d^4x\left[\lambda\mathscr{F}_a\delta\omega_a+\eta_a\frac{\delta(\delta\omega_a)}{\delta A_b^\mu}(D^\mu\eta)_b\right]$$

$$= I_{g+\delta\omega}. \tag{12-169}$$

因此，函数 $\mathscr{F}$ 的一个无穷小改变可以被场 A 的规范变换抵消. 后者只影响源项，而根据 9-2-1 节的等价定理这不会修改物理量，如 S 矩阵元:

$$\exp[G_{g+\Delta g}(J)]$$

$$=\int\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}_{g+\Delta g}$$

$$\times\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L}-\frac{\lambda}{2}(\mathscr{F}+\Delta\mathscr{F})^2+J\cdot A\right]\right\}$$

$$=\int\mathscr{D}(A)\det\mathscr{M}_g\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L}-\frac{\lambda}{2}\mathscr{F}^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+J\cdot(A-D\mathscr{M}^{-1}\Delta\mathscr{F})\right]\right\}. \tag{12-170}$$

这个讨论在这点上说是十分形式化的，因为在到目前为止所研究的规范理论中，由于严重的红外发散，S 矩阵并没有被确定.

利用 Becchi-Rouet-Stora 变换，前面的性质可由 δI 的结构反映出来:

$$\delta I = -\int d^4x\left[\lambda\mathscr{F}_a\Delta\mathscr{F}_a+\bar{\eta}_a\frac{\delta\Delta\mathscr{F}_a}{\delta A_b^\mu}(D^\mu\eta)_b\right]$$

$$=s\int(-\bar{\eta}_a\Delta\mathscr{F}_a)d^4x.$$

这便使人们能够研究正规函数和抵消项的规范相关性，例如它们对参

量 λ 的依赖关系. 作为一个典型的结果，人们可以证明，耦合常数重整化 Z_g 是 λ 无关的，至少在最小重整化中如此. 在别的方案中，这可能是不对的. 最后的评注暗示，对非阿贝尔规范耦合常数的观测和物理解释可能是很困难的.

12-4-5 反常

我们现在考虑一种在物理上感兴趣的情况，而这点在 12-4-3 节末曾提到过. 让我们假定费米子与规范场通过轴矢流耦合. 在前一章中我们已经看到，反常有可能发生在这种流的守恒(或准守恒)中，这来源于当保持手征对称时理论的不可正规化. 在第十一章研究的例子中，即量子电动力学或 σ 模型中，这种反常是可接受的，并且在分析 $\pi^0 \to 2\gamma$ 过程中是物理上感兴趣的. 如果规范场(阿贝尔或非阿贝尔的)与反常流耦合，情况就有很大的不同. Slavnov-Taylor 恒等式可能不适用，并且可重整性可能受到破坏. 在规范场保持零质量的理论中，例如到目前为止我们所讨论的情形，这意味着需要所有可能的、量纲为 4 的抵消项，这将破坏耦合常数重整化的普适性. 当对称性被自发破缺时，问题变得更加严峻. 正如我们下节将看到的，规范场获得质量，可重整性只能从更根本的规范不变性得到. 因此，反常是有害的，并且可以构造一些模型，反常的存在，使得理论不可重整. 因而，寻找一个判据来排除反常是重要的.

象前一章一样，分析可局限于单圈图. 存在规范不变的正规化，它可在高阶保持手征不变性 (12-4-3 节). 考虑一基于紧致群的规范理论. 换句话说，我们允许阿贝尔乘子. 包含费米子场的拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} + \phi(i\not{\partial} - m - ig\not{A}^a \Gamma^a)\phi, \tag{12-171}$$

其中 Γ^a 代表 T^a 和 $T^a\gamma_5$ 的某种组合. 很容易验证，轴矢流

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi$$

的反常，正如式 (11-225) 给出的，正比于组合

$$d_{abc} \equiv \mathrm{tr}(T^a\{T^b, T^c\}). \qquad (12\text{-}172)$$

可以通过与规范场耦合的每种费米子(每种表示)来实现使这个量为零；特别是对实表示更是如此，因此时矩阵 T 是反对称的：

$$d_{abc} = \mathrm{tr}(T^{aT}\{T^b, T^c\}^T) = -d_{abc} = 0. \qquad (12\text{-}173)$$

但是，这个条件也可以由不同种类费米子间的相消来实现. 在 12-6-4 节我们将具体给出.

在与规范场耦合的轴矢流中发生的反常才是有害的. 例如，如果组合 $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\lambda^a\psi$ 对内部群 G 是单态，则这种流的反常在这里是不重要的. 矩阵 λ^a 可以是另外的量子数集合，如，与色相对的味道. 相应的反常正比于

$$d_{abc} = \mathrm{tr}(\lambda^a\{T^b, T^c\}) = \mathrm{tr}\lambda^a \mathrm{tr}\{T^b, T^c\}$$

因 $\mathrm{tr}\lambda^a = 0$，这个量在 $SU(3)$ 对称情况下为零. 只有 $U(1)$ 流

$$J_{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \qquad (12\text{-}174)$$

是反常的：

$$\begin{aligned}\partial^\mu J_{\mu 5} &= 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + Cg^2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_a^{\mu\nu}F_a^{\rho\sigma} \\ &= 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + 2Cg^2\partial^\mu\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_a^\nu(\partial^\rho A_a^\sigma \\ &\quad - \partial^\sigma A^\rho a - \frac{2}{3}gC_{abc}A_b^\rho A_c^\sigma), \qquad (12\text{-}174a)\end{aligned}$$

其中

$$C = -T_1/16\pi^2.$$

另一方面，存在一个守恒流

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\mu 5} &= J_{\mu 5} - 2Cg^2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_a^\nu \\ &\quad \times\left(\partial^\rho A_a^\sigma - \partial^\sigma A_a^\rho - \frac{2}{3}gC_{abc}A_b^\rho A_c^\sigma\right), \qquad (12\text{-}175)\end{aligned}$$

但它不是规范不变的.

12-5 有质量的规范场

12-5-1 历史背景

到目前为止，我们所考虑的非阿贝尔规范理论都具有严格的定域对称性，因而规范场是无质量的．现在用这类理论来构造强相互作用模型．然而，在历史上，在杨和 Mills 引入了非阿贝尔规范场之后，物理学家们奋斗了多年企图建立一个有意义的、规范场是有质量的，因而定域对称性要明显地被破坏的理论．

建立这类理论的动机来自对弱相互作用的研究．回忆一下第十一章的内容，流-流 Fermi 理论提供了一个惊人的唯象的框架．弱作用的拉氏量(或哈密顿量，只差符号)可写作(与式(11-62)比较)

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^{\mu}(x) J_{\mu}^{\dagger}(x). \qquad (12\text{-}176)$$

显然，这是一个零程相互作用．

尽管它对低能现象是很成功的，但模型却遇到了严重困难．正如耦合常数 G 的量纲所表明的，这个理论是不可重整的．换句话说，幂次计算表明乘积 $J^{\mu}J_{\mu}^{\dagger}$ 的量纲为 6，在足够高的能量，Born 近似并不令人满意．为了使散射振幅满足么正条件，至少在微扰意义上必须考虑高次项．然而，这些修正受紫外发散的烦扰，而要消去这些发散需要引入越来越多的任意参量．在实用中，这种不可重整性使这种计算成为不可能．

这个问题的另一方面来自用 Born 近似计算某个截面 σ．按量纲分析，在高能下我们预期截面的行为是

$$\sigma \sim \text{常数} \times G^2 s, \qquad (12\text{-}177)$$

其中 s 是质心系总能量平方，而对每一个分波，么正极限为

$$\sigma \sim \frac{\text{常数}}{s}. \tag{12-178}$$

因此，我们预期在能量接近 $\sqrt{s} \sim G^{-1/2} \sim 300\text{GeV}$ 时么正性将被破坏.

作为一个很好的练习，对轻子过程

$$\nu\bar{\nu} \to \nu\bar{\nu},\quad \bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^- \quad 和 \quad \nu_\mu e^- \to \nu_e \mu^-,$$

现在可计算出式(12-177)和(12-178)中的常数.

这两个方面，即理论的不可重整性和 Born 近似的坏的高能行为，都是同一现象的体现. 这是非常明显的，如果我们用色散关系，并借助于弹性散射振幅的不连续性，即借助于某个 Born 截面来计算单圈图对弹性散射振幅的贡献，其结果是在色散积分中出现严重的发散.

因此，将 Fermi 理论转变为可重整的理论是不可避免的. 一种尝试性假定是引入一个带电矢量场 W_μ，并使它与流 J_μ 耦合，

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g J^\mu(x) W_\mu^+(x) + hc, \tag{12-179}$$

与电磁理论的相似性是显然的. 以场 W_μ 表示的中间玻色子是弱相互作用的量子. 为解释 Fermi 理论在低能下的适用性，我们假定 W 是很重的. 式(12-179)所包含的内容只在高能下才与式(12-176)不同. 作为例子，让我们考虑 μ 衰变. Fermi 理论给出的振幅为(图 12-9a)

$$-\frac{iG}{\sqrt{2}} \bar{u}(p_e)\gamma_\rho(1-\gamma_5)v(p_{\bar{\nu}_e})\bar{u}(p_{\nu_\mu})\gamma^\rho(1-\gamma_5) \times u(p_\mu),$$

而 W 玻色子的贡献为

$$ig^2\bar{u}(p_e)\gamma_\rho(1-\gamma_5)v(p_{\bar{\nu}_e})\frac{g^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma / M_W^2}{k^2 - M_W^2}$$

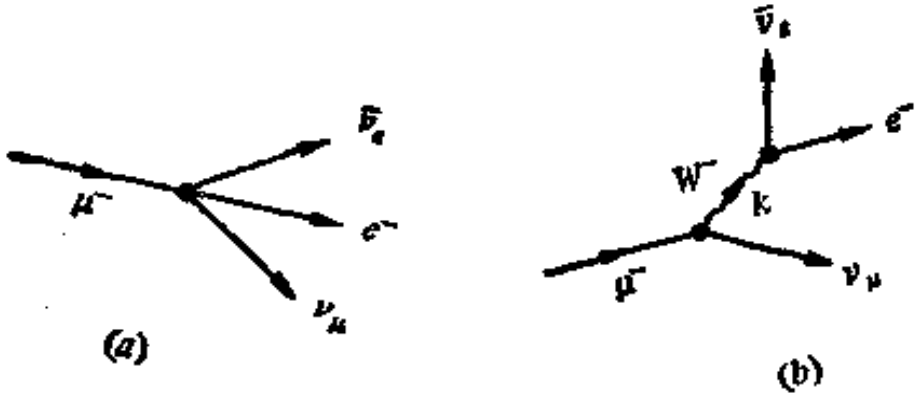


图 12-9 μ 衰变. (a) Fermi 理论, (b) 由中间矢量玻色子传递的情形.

$$\times \bar{u}(p_{\nu_\mu})\gamma_\sigma(1-\gamma_5)u(p_\mu).$$

若

$$\frac{g^2}{M_W^2}=\frac{G}{\sqrt{2}}, \tag{12-180}$$

且 $k^2 \equiv (p_e + p_{\nu_e})^2 \ll M_W^2$, 则两个振幅吻合. 与以上类似, 对散射振幅, 例如 $\nu\bar{\nu} \to \nu\bar{\nu}$ 的 Born 近似, 在高能下相对于 Fermi 振幅将有一个压低因子 M_W^2/s. 表面上看, 么正性的破坏已被消除. 实际上, $\nu\bar{\nu} \to W^+W^-$ 的振幅仍然有坏行为. 这给出了引入更多的场和耦合的必要性.

现在不得不阐述有质量的规范场的动力学了. 考虑到传播子的大动量行为,

$$\left(1g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}\right)(k^2-M_W^2)^{-1} \underset{k^2\gg M_W^2}{\sim} \text{常数},$$

可重整问题是特别麻烦的. 然而, 我们记得, 在量子电动力学中引入光子质量并没有破坏可重整性. 如果我们坚持在一个理论中更多的对称性, 将减少发散的数目这种偏爱, 可以尝试把 W_μ 看成一组规范场中的一员. $SU(2)$ 可以作为对称群的候选者, 并且定域不变性明显地被 W 质量项所破坏. 这将导致 W 的一个普适耦合. 因 $SU(2)$ 规范场必定构成一个三重态, 必须引入第三个中性矢量场. 可以证明, 这种模型经过适

当改进是可重整的.

为完整起见，我们介绍一下引入有质量的矢量场的另外一个历史原因. 将强作用理论建筑在规范原理之上是在廿世纪六十年代初提出的. 不变群为 $SU(3)\times U(1)$，相应于八重对称和重子荷守恒. ρ, K^*, ω 和 ϕ 粒子被看作是矢量玻色子——有质量的规范场.

这样一个模型的一个有趣的性质是，同位旋反平行的粒子间的力是吸引的，而同位旋平行的粒子间的力是排斥的，这是异号电荷电磁力相吸的一个推广. 这种性质与低能的实验事实是相符的.

为了看清这一点，让我们来计算两个标量粒子的弹性散射振幅，这两个标量粒子属于一个单纯李群的实表示(1)和(2). 最低阶贡献(矢量场的交换如图 12-10 所示)来自拉氏量的下列各项:

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(D_\mu^{(1)}\phi^{(1)})(D^{(1)\mu}\phi^{(1)})+\frac{1}{2}(D_\mu^{(2)}\phi^{(2)})(D^{(2)\mu}\phi^{(2)}), \tag{12-181}$$

其中

$$D^{(1)\mu}=\partial^\mu-gA_a^\mu T^{(1)a},$$

$T^{(1)a}$ 反对称，$a=1,\cdots,\gamma$,

我们有

$$\mathscr{T}=g^2\frac{s-u}{M^2-t}\sum_{a=1}^{\gamma}T_{\alpha\gamma}^{(1)a}T_{\beta\delta}^{(2)a}. \tag{12-182}$$

必须把量

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta}=\sum_{a=1}^{\gamma}T_{\alpha\gamma}^{(1)a}T_{\beta\delta}^{(2)a}$$

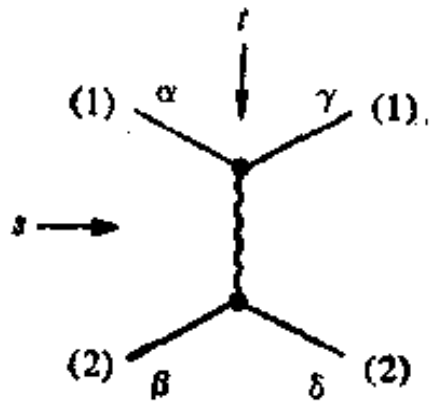


图 12-10 最低阶散射振幅

投影到不可约表示上去。为此，我们引入表示 (1) 和 (2) 乘积的 Clebsch-Gordan 矩阵。若 n_1, n_2 为两个表示的维数，$n_1 \times n_2$ 矩阵 $M^{(I)A}$ 满足正交性和完备性关系

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(M^{(I)A}M^{(I')B}) = \delta^{II'}\delta^{AB} \quad A,B = 1,2,\cdots,n_1n_2, \\ &\sum_{A,I} M^{(I)A}_{\alpha\beta}M^{(I)A}_{\alpha'\beta'} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}, \end{aligned} \tag{12-183}$$

并且按表示 (I) 变换，

$$T^{(1)a}M^{(I)A} - M^{(I)A}T^{(2)a} = T^{(I)a}_{AB}M^{(I)B}. \tag{12-184}$$

借助于表示 (1)、(2) 和 (I) 的 Casimer 算符[见式 (12-119)]容易看出，

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \sum_a T^{(1)a}_{\alpha\gamma}T^{(2)a}_{\beta\delta} \\ &= -\sum_{a,A,I} M^{(I)A}_{\alpha\beta}T^{(1)a}_{\gamma\alpha'}M^{(I)A}_{\alpha'\beta'}T^{(2)a}_{\beta'\delta} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{A,I}[C(1) + C(2) - C(I)]M^{(I)A}_{\alpha\beta}M^{(I)A}_{\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{12-185}$$

Casimir 算符的值随表示维数的增加而增加。例如，在 $SU(2)$ 情形下，同位旋为 I 的表示有 $C(I) = I(I+1)$。所要求的性质可以 $(s-u)/(M^2-t)$ 在物理区的正定性导出

这种交叉矩阵的计算在这里与内部自由度有关，并且与第三章的 Fierz 重排类似。

曾被 Sakurai 研究过的这个模型也可以预言矢量玻色子的宽度。略去 $\omega - \phi$ 混合(这种混合可改进计算)并使八重态 (π, K, η) 和 (ρ, K^*, ϕ) 以规范不变的方式耦合，可得在 Born 近似下的 $\pi\pi$, πK, $K\bar{K}$ 弹性道 P 波振幅

$$\mathscr{T}_{I=1} = \alpha\frac{g^2}{16\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{M^2 - s},$$

其中 $\mathbf{q}$ 为质心系的三维动量，对上述三个道 α 分别为 8/3，1 和 2，么正振幅 t_I 可写成下面的形式：

$$t_I = \frac{\mathscr{T}_I}{1 - i\rho\mathscr{T}_I}, \quad \mathrm{Im}t_I = \rho|t_I|^2,$$

其中 $\rho = 2|\mathbf{q}|/\sqrt{s}$ $\left(\text{对 } \pi\pi\text{，因是全同粒子要乘以 } \frac{1}{2}\right)$ 是相空间因子．这个振幅在 $s \simeq M^2 - i\rho\alpha\mathbf{q}^2g^2/16\pi$ 处有一个极点，相应于一个宽度 $\Gamma \simeq \rho\alpha\mathbf{q}^2g^2/16\pi M|_{s=M^2}$ 的共振．调节数值 $g^2/16\pi = 0.63$，得 $\Gamma_\rho \simeq 130\text{MeV}$，$\Gamma_{K^*} \simeq 38\text{MeV}$ 和 $\Gamma_\phi \simeq 4.5\text{MeV}$，这与实验值(分别为 125，50，3.2)相当接近．

12-5-2 有质量的规范理论

一个具有人为地加入质量项的规范理论是否可重整化呢?

在电动力学中，情况是乐观的．在把规范场分成横向和纵向两部分之后，在传播子中引起坏的行为的纵向部分 $k_\mu k_\nu/M^2$ 对 S 矩阵不做贡献．这是因为纵向和横向分量之间没有相互作用，且场是与守恒流耦合的．在一个非阿贝尔理论中，这些性质没有一条被满足．纵向和横向部分的确有相互作用，而规范场所耦合的流也不守恒．另一方面，在单圈级上出乎意料的发散相消使理论看起来似乎是可重整的．这就是为什么经过了很长时间才弄清楚理论是不可重整的．这种不愉快的情形的出路，是求助于自发的对称破缺机制，下一小节我们再来加以说明．

目的是构造一个可重整的理论，且满足如下的要求：物理态只有有质量的矢量场．如果我们采用辅助场，象在电磁场的 Stueckelberg 方法中一样，我们必须验证，只有每个有质量的矢量玻色子的三个物理自由度才对么正性做贡献．在下面的方法中，变量的定域改变将在泛函积分中进行，以便改善传播子的行为．这个要求可利用等价定理来满足．为此，我们考虑产生泛函

$$e^{G(J)} = \int \mathscr{D}(A)\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L} - 2\mathrm{tr}\left(J\cdot A\right)\right]\right\}, \quad (12\text{-}186)$$

其中我们再次利用了矩阵记号

$$\mathscr{L} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - M^2A_\mu A^\mu\right) \quad (12\text{-}187)$$

因为 $\pi_{0i}=\delta\mathscr{L}/\delta\partial_0 A_i^0\equiv 0$，正则量子化可能有麻烦．然而，质量项的存在保证了传播子的存在，因此也保证了在微扰意义上前面的泛函积分的确定性．Faddeev-Popov 手续不是必需的，但我们还是做了，目的是改善传播子的行为．我们选取与 12-2-2 节相同的规范条件

$$\mathscr{F}(A)=C,$$

并且在式(12-186)中插入恒等式

$$1=\int\mathscr{D}(g)\prod_x\delta[\mathscr{F}({}^gA)-C]\det\mathscr{M}_g(A), \qquad (12\text{-}188)$$

我们得

$$e^{G(J)}=\int\mathscr{D}(A)\mathscr{D}(g)\prod_x\delta[\mathscr{F}({}^gA)-C]\det\mathscr{M}_g$$

$$\times\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}-2\mathrm{tr}(J\cdot A)]\right\}.$$

与零质量的情形相反，$\mathscr{L}$ 在规范变换 $A\to{}^gA$ 下不再是不变的．如果我们将 $g(x)$ 参数化为

$$g(x)=e^{\xi(x)},$$

不难证明

$$\mathrm{tr}(A^\mu A_\mu)=\mathrm{tr}\left[{}^gA^\mu{}^gA_\mu-\frac{2}{g}\partial_\mu\xi^g A^\mu+\frac{1}{g^2}\partial_\mu\xi P^\mu({}^gA,\xi)\right],$$

其中 P^μ 代表形式上的级数，

$$P^\mu(A,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}[\cdots[D^\mu\xi,\xi],\xi],\cdots\xi], \qquad (12\text{-}189)$$

其一般项有 n 个括号．若用 $J\cdot{}^g\vec{A}$ 代替源项 $J\cdot A$，S 矩阵不受影响．作变量替换 $A\to{}^{g^{-1}}A$ 并完成对 C 的高斯积分，新的产生泛函为

$$e^{G'(J)}=\int\mathscr{D}(A,\xi,\eta,\bar{\eta})\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}'(A,\xi,\eta,\bar{\eta})-2\mathrm{tr}(J\cdot A)]\right\}, \qquad (12\text{-}190)$$

它与拉氏量

$$\mathscr{L}'(A,\xi,\eta,\bar{\eta})=\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-M^2A_\mu A^\mu+\lambda\mathscr{F}^2(A)\right.$$

$$\left.+2\frac{M^2}{g}A^\mu\partial_\mu\xi\right.$$

$$-\frac{M^2}{g^2}\partial_\mu\xi P^\mu(A,\xi)\Big]-\bar{\eta}\mathcal{M}_g\eta \qquad (12\text{-}191)$$

有关. 此拉氏量含场 A_μ, Faddeev-Popov 鬼场 $\eta,\bar{\eta}$, 和一个新场 ξ, 并且具有通常的对易关系. 如果 $M^2=0$, 场 ξ 将从拉氏量中消失,并且 ξ 的积分给出一个对 $e^{G'(0)-G'(0)}$ 无贡献的(无穷大)因子.

选择 Landau 规范, $\mathscr{F}\leftarrow\partial_\mu A^\mu$, $\lambda\to\infty$, 来计算矢量传播子

$$-i(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/k^2)(k^2-m^2)^{-1}$$

是方便的. ξ 和 η 的传播子按 $1/k^2$ 变化. L 圈图的表观发散度为

$$\omega=2L+2+\sum_i n_i(d_i-2)\leqslant 2L+2,$$

其中 n_i 为类型 (i) 的顶角数, d_i 是在这样的顶角上场的微商的数目. 对于有 E 条外线(它们中间没有 ξ 线)的正规图形,我们有

$$\omega\leqslant 2L+2-E+\sum_{\text{内部顶角}} n_i(d_i-2)\leqslant 2L+2-E, \qquad (12\text{-}192)$$

而在原来的理论式 (12-187) 中

$$\omega\leqslant 6L+E-2.$$

我们可以看出,对阿贝尔理论, $P_\mu=\partial_\mu\xi$, 场 ξ 和 η 不与矢量场耦合. 我们正好回到了第八章的结果,即按照幂次计算法有质量的电动力学是可重整的.

在非阿贝尔情形, 如果我们限于单圈近似, 方程 (12-192) 给出与可重整理论中相同的表观发散度 $\omega=4-E$. 准至这一级, 在 Landau 规范下对没有 ξ 和 η 外线的图形,有效拉氏量可写成

$$\mathscr{L}_1'=\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-M^2A_\mu A^\mu-\frac{M^2}{g^2}\partial_\mu\xi D^\mu\xi\right)-\bar{\eta}\partial_\mu D^\mu\eta. \qquad (12\text{-}193)$$

对 ξ,η 和 $\bar{\eta}$ 的高斯积分可以积出来,前者给出 $\det{}^{-1/2}\mathcal{M}_g$, 后者给出

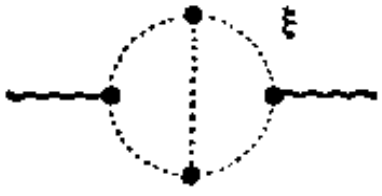


图 12-11 重规范理论中具有四次发散的图形. 点线表示辅助场 ξ 的传播子.

$\det^{-\frac{1}{2}}\mathscr{M}_g$. 因此，准至这一级，单个辅助场就足够了，办法是对每个封闭的鬼圈附上因子 $(-1/2)$. 与零质量情况下的因子 (-1) 相比，因子 $(-1/2)$ 表明，极限 $M\to 0$ 一定是奇异的. 在 12-3 节我们已经看到，鬼场的贡献(带有因子 -1) 在零质量情形下对于维持规范不变性是关键性的. 因此，我们期望修改我们的方案来修改抵消项. 例如，它导至了质量项或规范项的重整化，并且更严重的是导致了另外的四点耦合项. 因此，虽然在这一级上理论看起来是可重整的，但抵消项的对称性失掉了，在高阶出现了严重困难. 例如，按照方程 (12-192)，图 12-11 所给的图形具有四次发散，$\omega = 4$.

因此，我们得出结论，尽管发散相消，有质量的规范理论还是不可重整的.

12-5-3 自发对称破缺

在第十一章中我们已经研究过自发对称破缺，那里边界条件允许我们在一组退化的基态中进行选择. 在连续对称的情况下这种现象的一个惊人的特点，是零质量粒子的出现. 这些 Goldstone 玻色子是把各种可能的真空态之间连系起来的零能激发. 在规范理论中(阿贝尔或非阿贝尔理论)重新考察这种现象是很自然的，因为在这种情况下存在长程力，或者换个说法，在 Hilbert 空间可能存在非物理区. 可以证明，在存在破缺规范对称的情况下，长程力被屏蔽了. Goldstone 玻色子和规范场联合产生有质量的激发，且无质量的激发是观察不到的.

这种现象曾在超导现象中被发现和研究过. 产生超导性的电子对可以用波函数 $\psi = \rho e^{i\theta/\hbar}$ 来描写. 正比于 $\psi^*\psi = \rho^2$ 的电荷密度必须在整个晶体中为常数，以便将离子的背景电荷中性化. 在存在矢量势为 $\mathbf{A}$ 的磁场的情况下，流 $\mathbf{J}$ 为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m}\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - 2g\mathbf{A}\right)\psi = \frac{\rho^2}{m}(\nabla\theta - q\mathbf{A}),$$

其中 $q = 2e$ 是电子对的电荷. $\mathbf{J}$ 的散度为零，因此在横规范下 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$，我们有 $\Delta\theta = 0$. 对一个简单的几何位形，θ 是常数；因而 Maxwell 方程

$$\Delta \mathbf{A} = -q\mathbf{J}$$

给出

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{q^2\rho^2}{m}\mathbf{A}, \tag{12-194}$$

矢量势 $\mathbf{A}$ 在一个特征长度 $\lambda = \sqrt{m}/|q\rho|$ 上被屏蔽. 这就是 Meissner 效应，它阻止磁场贯穿超导体.

回到场论中来，考虑一个荷电场 ϕ 与阿贝尔规范场的耦合，拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - V(\phi). \tag{12-195}$$

势 $V(\phi)$ 在定域变换 $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$ 下不变，并且对于 $\phi^*\phi$ 的非零值它出现极小(比较图 11-5). 例如，

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \tag{12-196}$$

其中 $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$. 在基态下 $\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2}$ 且有

$$\mu^2 + \lambda|v|^2 = 0. \tag{12-197}$$

因 $\langle\phi\rangle$ 与 x 无关，一个整体转动总可以把 $\langle\phi\rangle$ 变成实数值. 因此，我们假定

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \langle\phi_1\rangle = v, \quad \langle\phi_2\rangle = 0, \tag{12-198}$$

并将 ϕ 平移：

$$\phi_1(x) = \phi_1'(x) + v, \quad \langle\phi_1'\rangle = 0. \tag{12-199}$$

利用 ϕ' (下面将把撇略去)，可把拉氏量写成

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$
$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2)$$
$$-\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1)$$
$$+\frac{e^2A^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1 + v^2)$$
$$-\frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2v\phi_1 + v^2)^2$$
$$-eA_\mu\phi_2\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi_1 + evA^\mu\partial_\mu\phi_2. \qquad (12\text{-}200)$$

根据方程(12-197)，ϕ_2^2 的系数为零；ϕ_2 为 Goldstone 玻色子，但请不要性急！已经出现了 A_μ 的质量项：$\frac{1}{2}e^2v^2A^2$，同时出现的还有混合项 $evA_\mu\partial^\mu\phi_2$. A 和 ϕ_2 的二次型可被组合

$$B_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu\phi_2}{ev} \qquad (12\text{-}201)$$

对角化，这个组合好象是个规范变换. 因此，$\mathscr{L}$ 的二次项为

$$\mathscr{L}_q = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)$$
$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}e^2v^2B^2$$
$$-\frac{1}{2}(2\lambda v^2)\phi_1^2. \qquad (12\text{-}202)$$

最后的结果如下：规范场获得了质量，而 ϕ_2 已消失，至少是从 $\mathscr{L}_q$ 中消失了. 事实上，如果我们采用一种不同的 ϕ 的参数化方法：

$$\phi(x) = e^{i\theta(x)/v}\frac{v + \rho(x)}{\sqrt{2}}, \qquad (12\text{-}203)$$

其中 v 和 ρ 是厄米场，则可以把 ϕ_2 完全消去. 经过一个定域

规范变换，

$$\phi \to \phi' = e^{i\theta/v}\phi = \frac{v+\rho}{\sqrt{2}}, \qquad (12\text{-}204)$$

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta.$$

拉氏量取下面的形式：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)(\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu)\\ &+(\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi'^*(\partial^\mu + ieA'^\mu)\phi'\\ &-\mu^2\phi'^2 - \lambda\phi'^4. \qquad (12\text{-}205)\end{aligned}$$

将 $\phi' = (\rho+v)/\sqrt{2}$ 展开，我们可以证明 A 确实得到了质量 $M = |e|v$，并且 Goldstone 玻色子已经消失。我们是从这样一个系统开始的，这个系统包含一个荷电标量场（两个态），和一个具有两种极化态的无质量规范场。自发对称破缺之后，我们有一个实标量场和一个有三个极化态的有质量的规范场。自由度数目是守恒的，并且 Goldstone 玻色子已被转变为矢量场的纵向极化态。这就是 Englere, Brout 和 Higgs 发现的现象。剩下的有质量的标量玻色子被称作 Higgs 玻色子。

前面的机制可被推广到非阿贝尔对称的情形。我们将沿着 Kibble,Lee 和 Jinn-Justin 的分析往前走。令 G 为 r 阶的规范群，但不一定是半单纯群，并且令规范场与标量场 ϕ 的多重态耦合，这个多重态按某个 n 维不可约表示变换。拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu}\\ &+[(\partial_\mu - g_a T^a A_{\mu a})\phi]^+[(\partial_\mu - g_a T^a A_{\mu a})\phi]\\ &-V(\phi). \qquad (12\text{-}206)\end{aligned}$$

反厄米 T 矩阵是这个表示的无穷小生成元，且耦合常数可能

依赖于群的单纯分量. 最后,假定 V 是 G 不变的,并且它的极小值在 $\langle\phi\rangle = v$ 时达到. 令 H 是群 G 的保持 v 不变的子群(阶为 s), H 的性质与群 G, ϕ 选取的表示和 V 的形式有关.

例:

(a) $G = O(n)$, ϕ 为矢量 (n 维)表示, $H = O(n-1)$.

(b) $G = SU(3)\times SU(3)$, $\phi = M$ 为一个属于 $(3, \bar{3})$ 表示的 3×3 矩阵,且

$$V(M) = \alpha \mathrm{tr}(MM^+)^2 + \beta[\mathrm{tr}(MM^+)]^2 + \gamma(\det M + \det M^+) + \delta \mathrm{tr}(MM^+).$$

读者将会发现,对厄米的 $\langle M\rangle$, H 至少包含 $SU(2)\times U(1)$.

令 H 的无穷小生成元对应 $T^a(a = 1, 2, \cdots, s)$, 其余的生成元 $T^a(a = s+1, \cdots r)$ 生成陪集空间 G/H, 我们将 $\phi(x)$ 参数化为

$$\phi(x) = \exp\left[\sum_{a=s+1}^{r} T^a \frac{\xi_a(x)}{v}\right][\rho(x) + v]/\sqrt{2}, \quad (12\text{-}207)$$

其中 ρ 和 ξ 的真空期望值为零(注), ρ 场具有 $n-(r-s)$ 个有效分量. 没有规范场时, ξ 就是所谓的 Goldstone 玻色子,然而规范不变性允许我们消去它们. 我们进行一个变换

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \exp\left[-\sum_{a=s+1}^{r} T^a \frac{\xi_a(x)}{v}\right]\phi(x)$$

$$= [\rho(x) + v]/\sqrt{2},$$

$$\sum_{a=1}^{r} g_a T^a A_{\mu a}(x) \to \sum_{a=1}^{r} g_a T^a A'_{\mu a}(x)$$

$$= \exp\left[-\sum_{s+1}^{r} \frac{T^a \xi_a(x)}{v}\right]$$

(注) 式 (12-207) 右方的因子 $\sqrt{2}$ 在讨论实场时将被略去,如同第十一章所做的那样.

$$\times\left[-\partial_\mu+\sum_{a=1}^{r} g_a T^a A_{\mu a}(x)\right]$$

$$\times\exp\left[\sum_{s+1}^{r}\frac{T^a\xi_a(x)}{v}\right]. \qquad (12\text{-}208)$$

它把式(12-206)变为

$$\mathscr{L}(A',\phi')=-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu a}F'^{\mu\nu}_{a}$$
$$+[D_\mu(A')\phi']^{+}[D^\mu(A')\phi']$$
$$-V(\phi'), \qquad (12\text{-}209)$$

其中

$$D_\mu=\partial_\mu-\sum_{a=1}^{r} g_a A'_{\mu a}T^a.$$

任何与所谓 Goldstone 玻色子 ξ 有关的东西都消失了，且矢量场的厄米非负的质量矩阵为

$$(M^2)_{ab}A^\mu_a A_{\mu b}=g_a g_b(T^a v)^{+}(T^b v)A^\mu_a A_{\mu b}. \qquad (12\text{-}210)$$

因头 s 个生成元 $T^a(a=1,\cdots,s)$ 将 v 映射成零，所以矩阵是分区对角的，只有低阶的 $(r-s)\times(r-s)$ 矩阵是正定的，且对应于有质量的矢量玻色子，其余 s 个无质量的场相应于没破缺的子群 H 的规范对称. 象在阿贝尔群时一样，自由度总数是守恒的.

现在我们可以重新考察在 12-1-3 节勾画的半经典图象，并在涉及规范场和标量场的理论中寻找运动方程的解. 在只有规范场或只有标量场的情况下，有限能量的非平庸静态解是不存在的. 然而，同时涉及规范场和标量场的理论在三维空间可有有趣的经典解.

对一个能量有限的静态解，在空间无穷远处，场必定趋于最低能量组态中的一个. 否则，在一个无穷大的区域，能量密度将偏离零一个有限量. 保证非平庸解的稳定性的一个可能的途径是存在一组退化的真空态. 因而我们可以假定，场在无穷远处不同的空间方向上趋于不同的真空组态. 如果存在一个解，并且如果它在空间无穷远处把一个 S_2

球面以非平庸方式映射到可能的真空流形上，即陪集空间 G/H 上，则这个解是拓扑稳定的. 充分条件是对称性是自发破缺的，且同伦群 $\pi_2(G/H)$ 是非平庸的.

为确定起见，让我们考察 Georgi-Glashow 模型，这是一个对称群为 $SO(3)$ 的规范理论，其中一个标量场的三重态与规范场的三重态耦合. 对称性自发地破缺到 $U(1)=SO(2)$. 如果把剩余的无质量的规范场看成电磁场，我们得到一个基于 $SO(3)$ 群的量子电动力学模型. 记住这一切，以后我们把耦合常数算做 e. 数学家告诉我们，$\pi_2[SO(3)/U(1)]=Z$ 是一个整数的群，这意味着这些解是以整数拓扑荷 n 来表征的.

't Hooft 和 Polyakov 已经研究了 $n=1$ 的解. 这相应于一边界条件，使 ϕ_a 在无穷远处指向沿 S_2 球面的法线方向(以 S_2 到

$$SO(3)/U(1)\sim S_2$$

的恒等映射):

$$\phi_a(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}\frac{x_a}{|x|}v, \tag{12-211}$$

其中 v 为实场 ϕ 的真空期望值. 如果我们选取规范 $A_a^0=0$，附加 $\mathbf{D}\phi$ 渐近趋于零的条件，将导致

$$A_a^i\to\frac{1}{e}\varepsilon_{iab}\frac{x_b}{\mathbf{x}^2}, \tag{12-212}$$

因而有可以证明满足这些边界条件的正规解 $\phi_a(\mathbf{x})$，$\mathbf{A}_a(\mathbf{x})$ 的存在性.

拓扑不变的 n 可以被解释为磁荷. 对这种时间无关的解，电场为零. 在无穷远处，磁场是径向的:

$$B^k=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ij}=\frac{x^k}{er^3},$$

这是因为它是从真空组态 $\langle\phi\rangle=v$ 通过一规范变换得到的.

按照在球面内包含的磁荷 g 的定义，它穿过表面的通量为

$$\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{e}\int\frac{1}{r^2}r^2d\Omega=\frac{4\pi}{e}\equiv g. \tag{12-213}$$

更高的拓扑荷 n 的解所带的磁荷为 $4\pi n/e$.

作为任意一个这类半经典的组态，其组态能量，即磁单极的静止质量正比于耦合常数平方的倒数 $1/e^2$. 't Hooft 已经证明，这个质量的量级为 M_W/α，其中 M_W 是通过自发对称破缺而获得的矢量玻色子的质量. 这样的磁单极将非常重.

12-5-4 自发破缺规范理论的重整化

很清楚，规范式(12-208)，即所谓么正规范(因它只涉及物理自由度)，并不适合于研究重整化，因为传播子具有坏的大动量行为. 我们需要用原始的规范，那里可重整性更加明显，但因此我们需要证明非物理态对 S 矩阵无贡献.

核心的想法与自发破缺的 σ 模型的情况一样（第十一章)，重整化与对称是严格的还是自发破缺的无关. 为了记述的简洁起见，我们给出 $G = O(n)$ 和实的标矢量多重态 $\boldsymbol{\phi}$ 的情形的分析. 包括规范场和鬼场项的完整的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_S(\mu^2) = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 - \bar{\eta}\partial_\mu D^\mu\eta \\ &+\frac{1}{2}D_\mu\boldsymbol{\phi}D^\mu\boldsymbol{\phi} - \frac{\mu^2}{2}\boldsymbol{\phi}^2 \\ &-\frac{\lambda_\phi}{4}(\boldsymbol{\phi}^2)^2. \qquad (12\text{-}214)\end{aligned}$$

为了避免与规范参量的混淆，ϕ^4 的耦合常数用 λ_ϕ 来标记. 对 $\mu^2 < 0$，场 ϕ 获得一真空期望值 $\langle\phi\rangle = v$. 我们想证明，对称的理论 ($\mu^2 > 0$) 的抵消项，足可以使破缺理论 ($\mu^2 < 0$) 在准至 μ^2 的重整化意义上为有限的. 如同第十一章一样，我们不能盲目地将 μ^2 从正值延拓至负值，因 $\mu^2 = 0$ 不是一解析点. 在这点上将产生相变. 然而，较安全的办法是引入一个小的与 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ 场耦合的外源 $\mathbf{c}$，且在整个空间为常数，

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_S(\mu^2) + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}(x). \qquad (12\text{-}215)$$

这个明显的破坏导致了 $\boldsymbol{\phi}$ 场的一个与 $\mathbf{c}$ 平行的真空期望值

$\mathbf{v}$. 的确，对线性 σ 模型导出的一个恒等式[方程(11-170)]在这里仍然成立. 若 $\Gamma_T^{(2)}(0) = -m^2$ 表示横向分量 ϕ_T 的传播子的逆在零动量下的值，则

$$\mathbf{c} = -\mathbf{v}\Gamma_T^{(2)}(0). \tag{12-216}$$

在最低次近似下，简化为 $\mathbf{c} = (\mu^2 + \lambda_\phi v^2)\mathbf{v}$，并表示真空期望值 $\mathbf{v} = \langle\boldsymbol{\phi}\rangle$ 使拉氏量式(12-214)稳定.

可重整性的证明基于下述两点. 首先，如同在线性 σ 模型中一样，对于对称的和破缺的理论的正规函数的产生泛函为下式所联系：

$$\Gamma(\boldsymbol{\phi},\mathbf{c},\mathbf{v}) = \Gamma_S(\boldsymbol{\phi}+\mathbf{v}) - \Gamma_S(\mathbf{v}) + \int d^4x\,\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}, \tag{12-217}$$

其中

$$\mathbf{c} = -\frac{\delta\Gamma_S(\mathbf{v})}{\delta\mathbf{v}}. \tag{12-218}$$

Γ 和 Γ_S 的其它宗量，例如 $A_\mu, \eta, \bar{\eta}, g, \cdots$，已被省去. 我们要强调指出，$\Gamma$ 是围绕不对称真空的涨落的 Green 函数的产生泛函. 这个等式是很重要的，因为我们已经知道如何重整化对称的理论. 由 12-4-3 节有，

$$\Gamma_{S,R}(\boldsymbol{\phi},A,\eta,\cdots;g,\lambda_\phi,\mu^2) = \Gamma_{S,\text{裸}}(Z_2^{1/2}\phi, Z_3^{1/2}A, \tilde{Z}_3^{1/2}\eta,\cdots;g_0,\lambda_{\phi_0},\mu^2+\delta\mu^2). \tag{12-219}$$

因此，对称情况下的抵消项也将使破缺的理论有限：

$$\Gamma_R(\boldsymbol{\phi},\mathbf{c},\mathbf{v},A,\cdots,\mu^2) = \Gamma_{\text{裸}R}(Z_2^{1/2}\phi,\mathbf{c}_0,\mathbf{v}_0, Z_3^{1/2}A,\cdots,\mu^2+\delta\mu^2), \tag{12-220}$$

只要 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{c}$ 被重整使得 $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\phi}$ 为有限，且使式(12-218)仍成立：

$$\mathbf{c}_0 = Z_2^{-1/2}\mathbf{c},\quad \mathbf{v}_0 = Z_2^{1/2}\mathbf{v}. \tag{12-221}$$

其次，我们讨论 μ^2 的改变.

幂次的计算告诉我们，在没有破缺的理论中，这样一种变

化只要求修改抵消项 $\delta\mu^2$. 等式(12-217)表明，这种修改同样足以使破缺的理论有限. 在这种情况下，我们可以设想，μ^2 的改变也要求修改矢量场的质量项 M_A^2，这样就有可能使我们的证明不再适用. 然而，方程(12-217)表明，这种 M_A^2 的修改只是来源于作为 μ^2 的函数的 v 的改变.

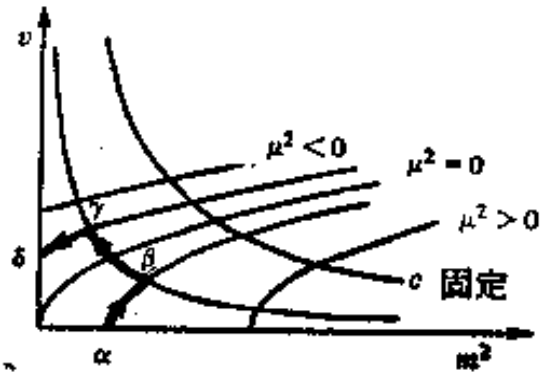


图 12-12 (m^2,v) 平面上 μ^2 和 c 为常数的曲线

由此我们得出结论，我们可以达到 (m^2, v) 平面(图 12-12) 的任何一点，并且用对称抵消项来重整相应的理论. 只修改 μ^2 的抵消项，我们可以将自发破缺理论重整化 [$c=0$, $m^2=0$, v 给定(图 12-12 上的 δ 点)]对于 (μ^2,m^2) 或 (μ^2,v) 平面的图示参看图 11-14.

相应的各种正规函数的归一化条件还没有被明显地给出来. 它们可由等式(12-217)和对称的函数的归一化条件导出；我们可以不用这种中间阶段的归一化条件，而宁可采用更物理的条件，例如将耦合常数定义为三点函数在某个质壳点上的值的那些条件. 不用说，这些新的归一化条件必须与从式(12-217)和 Γ_S 满足的方程式中导出的等式一致.

这里用的方法是经济的，因为它为了重整化自发破缺理论而借助于更简单的对称理论. 然而，避免依靠无质量的不破缺的理论是完全可能的. 这样一来问题将归结为证明自发破缺理论所满足的 Slavnov-Taylor 恒等式可以被重整化保持.

前面的分析在可重整的规范下已经做了，那里破缺的和不破缺的理论之间的比较是显然的. 这个规范在物理上是不能令人满意的，因为它显示出了非物理的特点，如 φ_T 的无质量模式(当 $c\to 0$ 时 $m^2\to 0$). 然而，在么正规范下[例如方程(12-208)所示]来研究重整化将更加困难，因为此时理论表面看起来是不可重整的，并且失掉了与对称的

情形的联系。

12-5-5 规范无关性和 S 矩阵的么正性

我们想证明，所有的非物理态——假想的 Goldstone 玻色子、矢量场附加的极化态和 Faddeev-Popov 场——实际上都对 S 矩阵元没有贡献。所有这些非物理场的传播子在 $k^2=0$ 处都有一个极点。它等同于证明这种奇异性对中间态没有贡献。

一种简单的证明是利用 S 矩阵的规范无关性来引入 't Hooft 规范

$$\mathscr{F}_a=\left[\partial_\mu A_a^\mu-\frac{g}{\lambda}(v,T^a\phi')\right]. \tag{12-222}$$

我们假定群是单纯的，因而只有单一的耦合常数，再假定标量场 ϕ 属于实表示，且 ϕ' 是平移后获得的场：$\phi=\phi'+v$，$\langle\phi'\rangle=0$。这种规范有许多优点，'t Hooft 对它的发明是规范场理论发展的主要的一步。它明显地破坏整体不变性。因此，可能出现的 Goldstone 玻色子获得一质量矩阵

$$-\frac{1}{2}(m_\phi^2)_{\alpha\beta}\phi'_\alpha\phi'_\beta=-\frac{g^2}{2\lambda}(\phi'_\alpha T^a_{\alpha\beta}v_\beta)(\phi'_\gamma T^a_{\gamma\delta}v_\delta), \tag{12-223}$$

而且 Faddeev-Popov 鬼也获得质量。算符 $\mathscr{M}_{ab}$ 为

$$\mathscr{M}_{ab}(x,y)=\left\{\partial_\mu D^\mu_{ab}-\frac{g^2}{\lambda}(v,T^aT^b(\phi'+v))\right\}\delta^4(x-y). \tag{12-224}$$

因为它来源于 $\mathscr{F}$ 中的无穷小规范变换，这一变换同时作用于 A 和 ϕ'，因而鬼质量矩阵为

$$(m^2)_{ab}=\frac{g^2}{\lambda}(T^av,T^bv). \tag{12-225}$$

最后，这种选择使 A 和 ϕ' 的二次型对角化。表达式

$$-(\lambda/2)\mathscr{F}^2$$

中的交叉项正好抵消由 $1/2(D_\mu\phi,\ D^\mu\phi)$ 产生的 $-g(\partial_\mu\phi^l, A_\mu^a T^a v)$ 项. 由此,利用方程 (12-210) 的质量矩阵,可得矢量传播子为

$$\Delta^{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2-M^2+i\varepsilon}\left[g^{\mu\nu}-(1-\lambda^{-1})\times\frac{k^\mu k^\nu}{k^2-\lambda^{-1}M^2+i\varepsilon}\right] \tag{12-226}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时, 可回到横向 (Landau) 规范下的 Feynman 规则,而当 $\lambda\to 0$ 时,所有的非物理质量变成无穷大. 在后一种情形下,我们不期望具有很大质量的态对 S 矩阵做贡献. 在 12-4-4 节我们证明了 S 矩阵不依赖于规范的选取. 应归于红外发散的形式上的论述现在就被证明了. 我们得出结论,在任何规范下,特别是在 Landau 规范下,非物理态不做贡献. 更谨慎的分析还必须给重整化以适当的注意. 关于这一点请读者去看文献.

虽然非物理粒子已经从物理子空间中消失,自发破缺机制的某些痕迹,即某些有质量的标量场仍然残留下来了. 除了这些标量 Higgs 场之外,我们记得,某些矢量场仍然是没有质量的. 我们可能要问是否非得引入标量场不可? 是否可能以束缚态,例如,费米子——反费米子对的形式产生这些标量场? 这种动力学破缺曾被 Schwinger 在两维无质量电动力学中说明过. 真空极化在零动量处有一极点,费米子从理论中消失了,并且唯一留下的单粒子态是一个质量为 $e/\sqrt{\pi}$ 的玻色型束缚态. 尽管这种机制很有吸引力,现在我们仍不知道如何在四维情况下实现它.

12-6 Weinberg-Salam 模型

我们给出一个现实的弱作用和电磁作用的统一模型. 此

模型是由 Weinberg 和 Salam 在自发破缺规范理论的基础上独立地提出来的. 在所有这类模型中间, Weinberg-Salam 模型是独一无二的,这是因为它是最早提出的,它的参量少,并且由于中性流和粲粒子的发现它已得到了某些实验的证实.

12-6-1 轻子的模型

电子和它的中微子 ν_e 与 μ 子和它的中微子 ν_μ 被同等处理. 荷电粒子的左旋分量

$$e_L = (1-\gamma_5)e/2 \left[\mu_L = (1-\gamma_5)\mu/2\right]$$

和它的中微子 $\nu_e(\nu_\mu)$ 被一起放入一个列矩阵:

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}. \tag{12-227}$$

这提醒我们引入一个轻子同位旋群, L_e 和 L_μ 都是这个群的二重态,而右手分量 $e_R = (1+\gamma_5)e/2 \equiv R_e$ 和 $\mu_R \equiv R_\mu$ 是单态. 对每个场我们都指定一个轻子超荷 Y,使类似的 Gell-mann-西岛规则得到满足:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \tag{12-228}$$

对左手二重态 $Y = -1$,对右手单态 $Y = -2$,弱同位旋 $\mathbf{T}$ 和超荷 Y 对易;因此,这个变换群为 $SU(2) \times U(1)$.

我们用这个不变群可以构造一个规范理论,这涉及 $SU(2)$ 的规范场三重态 $\mathbf{A}_\mu$, 它的荷为 g,和一个 $U(1)$ 的规范场 B_μ, $U(1)$ 的耦合常数用 $g'/2$ 代表. 因为我们要求在自发破缺后只有一个规范场(光子场)保持零质量,我们引入一个复标量场的二重态

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \tag{12-229}$$

它的超荷 $Y = +1$. 对 ϕ 而言,最一般的可重整的不变势为

$$V(\phi^+\phi) = \mu^2\phi^+\phi + \lambda(\phi^+\phi)^2. \qquad (12\text{-}230)$$

对 $\mu^2 < 0$，ϕ 沿 ϕ^0 方向获得一非零真空期望值，我们可假定它是实的：

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix},\quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} + O(\lambda). \qquad (12\text{-}231)$$

$SU(2)\times U(1)_Y$ 对称性被破缺，但 $U(1)_Q$ 对称性仍然保留．这就达到了我们预期的结果，因为此时只有与电荷耦合的矢量场保持零质量．

拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}\mathbf{A}_{\mu\nu}\mathbf{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\\ &+\Big[\bar{R}_e(i\partial\!\!\!/ - g'B\!\!\!/)R_e + \bar{L}_e\Big(i\partial\!\!\!/ - \frac{g'}{2}B\!\!\!/\\ &+ g\frac{\tau_i}{2}A_i\!\!\!/\Big)L_e - G_e(\bar{L}_eR_e\phi + \phi^+\bar{R}_eL_e) + e\longleftrightarrow\mu\Big]\\ &+\Big(\partial_\mu\phi - i\frac{g'}{2}B_\mu\phi - \frac{ig}{2}\tau^iA_{\mu i}\phi\Big)^+\\ &\times\Big(\partial^\mu\phi - i\frac{g'}{2}B^\mu\phi - \frac{ig}{2}\tau^iA^\mu{}_i\phi\Big)\\ &- V(\phi^+\phi), \qquad (12\text{-}232)\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A}_{\mu\nu}$ 和 $B_{\mu\nu}$ 代表场强张量，

$$\mathbf{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu - \partial_\nu\mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{A}_\nu,$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

且 $\tau^i(i=1,2,3)$ 为 Pauli 矩阵．$SU(2)$ 对称性不允许我们写下电子和 μ 子的质量项，但它不禁止引入与标量场的耦合，其耦合常数分别以 G_e，G_μ 代表．

为了弄清这个模型的物理内容，让我们采用么正规范．我们采用参数化

$$\phi(x) = e^{i\xi_i(x)\tau^i/2v}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{v+\rho(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{12-233}$$

并实行 $SU(2)$ 规范变换

$$\begin{cases}\phi(x)\to\phi'(x)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{v+\rho(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\\ \dfrac{\tau^i}{2}A_{\mu i}(x)\to\dfrac{\tau^i}{2}A'_{\mu i}(x)\\ \qquad\qquad=e^{-i\xi_i\tau^i/2v}\left(\dfrac{i}{g}\partial_\mu+\dfrac{\tau^i}{2}A_{\mu i}\right)e^{i\xi_i\tau^i/2v},\\ L\to L'=e^{-i\xi_i\tau^i/2v}L,\\ B,R\text{ 不变},\end{cases} \tag{12-234}$$

方程(12-232)可表示成

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}\mathbf{A}_{\mu\nu}\mathbf{A}^{\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\\ &+\Big[\bar{e}_R(i\partial\!\!\!/-g'B\!\!\!/)e_R+\bar{L}_e\Big(i\partial\!\!\!/-\frac{g'}{2}B\!\!\!/\\ &+g\frac{\tau^i}{2}A\!\!\!/_i\Big)L_e\\ &-G_e\frac{v+\rho}{\sqrt{2}}(\bar{e}_Re_L+\bar{e}_Le_R)+e\longleftrightarrow\mu\Big]\\ &+\frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho+\frac{1}{8}(v+\rho)^2[(g'B_\mu-gA^3_\mu)^2\\ &+g^2(A^1_\mu A^{1\mu}+A^2_\mu A^{2\mu})]-V\left[\frac{(v+\rho)^2}{2}\right].\end{aligned} \tag{12-235}$$

标量场 (Higgs) ρ 具有质量 $\sqrt{-2\mu^2}$. 电子和 μ 子分别获得质量 $m_e=G_ev/\sqrt{2}$ 和 $m_\mu=G_\mu v/\sqrt{2}$. 荷电矢量场

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \tag{12-236}$$

也获得质量，且为

$$M_W = \frac{vg}{2}. \tag{12-237}$$

最后，A^3 和 B 的二次型已被

$$\begin{aligned} Z_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2}(-gA_\mu^3 + g'B_\mu), \\ A_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2}\ (gB_\mu + g'A_\mu^3) \end{aligned} \tag{12-238}$$

所对角化，使得

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{v}{2}(g^2 + g'^2)^{1/2}, \\ M_A &= 0. \end{aligned} \tag{12-239}$$

于是，$\mathscr{L}$ 中轻子型的相互作用项可用物理场 $W^\pm$，Z 和 A 改写为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{lept}}^{\text{int}} = &\frac{g}{2\sqrt{2}}[\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + hc] \\ &- \frac{e}{2}[\tan\theta_W(2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L) \\ &- \cot\theta_W(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e)]Z_\mu \\ &- eA_\mu\bar{e}\gamma^\mu e + \{e\leftrightarrow\mu, \nu_e\leftrightarrow\nu_\mu\}. \end{aligned} \tag{12-240}$$

在式(12-240)中我们已经引入了 Weinberg 角 θ_W，它由下式定义：

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \tan\theta_W = \frac{g'}{g}, \tag{12-241}$$

或

$$e = g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W.$$

式(12-240)中最后一项是通常的对场 A_μ 的电磁耦合，而第一项具有式(12-176)的形式。它的耦合通过式

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \tag{12-242}$$

与 Fermi 常数联系起来. 由 G 的知识，我们导出 $W^{\pm}$ 和 Z 的质量的下限

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{gv}{2} = \frac{38}{\sin\theta_W}\,\mathrm{GeV} \geqslant 38\mathrm{GeV}, \\ M_Z &= \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{76}{\sin 2\theta_W}\,\mathrm{GeV} \geqslant 76\mathrm{GeV}, \\ M_W &< M_Z. \end{aligned} \tag{12-243}$$

耦合常数 G_e 和 G_μ 由电子和 μ 子的质量确定

$$\begin{aligned} G_e &= \sqrt{2}\,\frac{m_e}{v} = 2^{3/4}G^{1/2}m_e \sim 2 \times 10^{-6}, \\ G_\mu &= \frac{m_\mu}{m_e}\,G_e \sim 4 \times 10^{-4}. \end{aligned} \tag{12-244}$$

这个模型包含了一种新型的 Z_μ 与中性的、宇称破坏的弱流的耦合，这个流是由 e_L, e_R, ν_e（和 μ_L, μ_R, ν_μ）构造成的. 大多数可重整的弱作用模型都有这个特点. 它们或者引入一个中性流及与之耦合的矢量场，或者引入新的轻子，且假定它很重，以便符合实验事实，或者两者同时引入. 在前一种情形，流的显式形式依赖于模型，即依赖各种不同场的表示的选择等等. Weinberg-Salam 模型以一种自然的方式加入了电子-μ 子普适性. 只有 G_e 和 G_μ 对轻子的性质敏感. 另一方面，这个模型对电荷量子化没有提供任何自然的解释.

对于另外一些基于单纯群的模型，如 Georgi-Glashow 模型（见 12-5-3 节），情况就不同了. 作为弱作用和电磁作用的模型，由于它不包含中性流，现在已被实验排除. 在三个规范场中，两个获得质量（与 Weinberg-Solam 模型中的 $W^{\pm}$ 类似），而最后一个仍保持零质量（光子），处理单纯群的优点是电荷是量子化的.

12·6-2 电子-中微子截面

为了揭示中性轻子流存在的惊人结果，我们现在用 Weinberg-Salam 模型在最低近似下计算 e-ν 弹性散射截面.有关的费曼图在图 12-13 中给出. 在入射中微子能量比W和Z质量小得多的极限情况下，我们可以满足于采用等效拉氏量，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff,int}} = -\sqrt{2}\,G\Big\{&\Big[\frac{1}{2}\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\Big][\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e]\\&+(\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu\nu_\mu+\bar{\nu}_e\gamma^\mu\nu_e)(2\sin^2\theta_W\bar{e}_R\gamma_\mu e_R\\&-\cos 2\theta_W\bar{e}_L\gamma_\mu e_L)\Big\},\end{aligned}\tag{12-245}$$

其中第一项和第二项分别代表W和Z的贡献. 对第一项实行 Fierz 变换，

$$\begin{aligned}&\Big(\bar{\nu}_e\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e\Big)\Big(\bar{e}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\nu_e\Big)\\&=\Big(\bar{\nu}_e\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\nu_e\Big)\Big(\bar{e}\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}e\Big).\end{aligned}\tag{12-246}$$

这个相互作用为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff,int}} = -\sqrt{2}\,G\Big\{&\Big(\bar{\nu}_e\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\nu_e\Big)\Big[\bar{e}\gamma_\mu\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\\&+2\sin^2\theta_W\Big)e\Big]+\Big(\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\nu_\mu\Big)\\&\times\Big[\bar{e}\gamma_\mu\Big(-\frac{1-\gamma_5}{2}+2\sin^2\theta_W\Big)e\Big]\Big\}.\end{aligned}\tag{12-247}$$

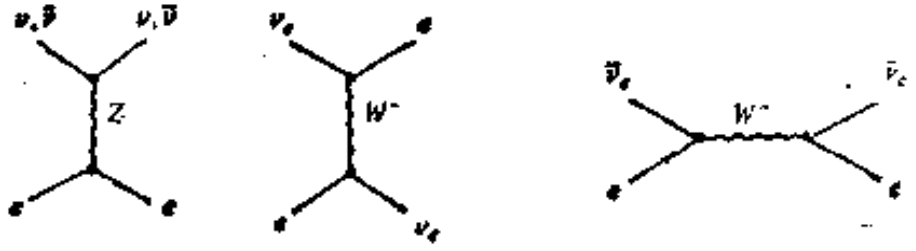


图 12-13 最低次近似下电子-中微子的散射

一个更普通的表达式

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\sqrt{2}\,G\left(\bar{\nu}\gamma^{\mu}\frac{1-\gamma_5}{2}\nu\right)\times\left[\bar{e}\gamma_{\mu}\left(C_L\frac{1-\gamma_5}{2}+C_R\frac{1+\gamma_5}{2}\right)e\right], \tag{12-248}$$

其中 C_L 和 C_R 为实系数. 导致过程 $e(p)+\bar{\nu}(q)\to e(p')+\bar{\nu}(q')$ 的截面

$$\frac{d\sigma}{dE'_e}=\frac{G^2}{2\pi m_e E_\nu^2}[C_L^2(p\cdot q)^2+C_R^2(p\cdot q)^2-C_LC_Rm_e^2(p\cdot q)^2] \tag{12-249}$$

交换 C_L 和 C_R 便可得到过程 $e\nu\to e\nu$ 的截面. 当 λ 射中微子能量远大于电子质量时,我们有

$$(p\cdot q)^2=m_e^2E_\nu^2,$$

$$(p\cdot q')^2=m_e^2E_\nu^2\left(1-\frac{E'_e}{E_\nu}\right)^2,$$

$$m_e^2q\cdot q'\simeq m_e^2p\cdot p'=m_e^2E_\nu^2\frac{E'_e}{E_\nu}\frac{m_e}{E_\nu},$$

且式(12-249)中的最后一项可以忽略. 对各种不同的道我们最后得

$$\sigma(\bar{\nu}_e e\to\bar{\nu}_e e)=\frac{G^2m_eE_\nu}{2\pi}\times\left[4\sin^4\theta_W+\frac{1}{3}(1+2\sin^2\theta_W)^2\right],$$

$$\sigma(\nu_e e\to\nu_e e)=\frac{G^2m_eE_\nu}{2\pi}\times\left[(1+2\sin^2\theta_W)^2+\frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right],$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e \to \bar{\nu}_\mu e) = \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \times \left[4\sin^4\theta_W + \frac{1}{3}(1 - 2\sin^2\theta_W)^2\right],$$

$$\sigma(\nu_\mu e \to \nu_\mu e) = \frac{G^2 m_e E_\nu}{2\pi} \times \left[(1 - 2\sin^2\theta_W)^2 + \frac{4}{3}\sin^4\theta_W\right]. \tag{12-250}$$

这些表达式与观察到的少量 $\nu_\mu e$，$\bar{\nu}_\mu e$ 事例以及从中微子-核子单举反应中导出的 θ_W 数值

$$\sin^2\theta_W \simeq 0.25 \pm 0.02 \tag{12-251}$$

相符.

中性流结构的实验研究至今仍在非常活跃地进行着，特别是在原子物理领域中.

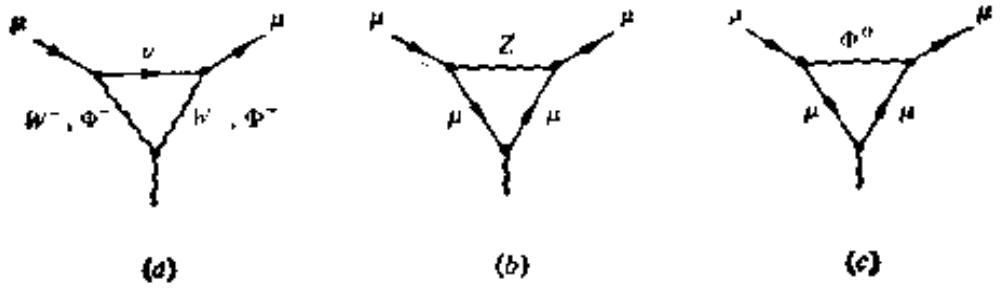
12-6-3 高次修正

弱作用的可重整理论使我们能计算高次修正. 实际上，到现在为止所给出的模型中只能考虑轻子过程，例如弱作用对 μ 子反常磁矩的贡献或对 μ 子衰变的辐射修正.

弱作用对 $(g_\mu - 2)$ 的贡献如图 12-14 所示. 对这种单圈图的计算，最保险的办法是用式(12-232)形式的可重整规范. 图 12-14a, b, c 给出如下形式的贡献:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad g^2 \int \frac{d^4k}{(k^2 - M^2)^2} \frac{O(k m_\mu, m_\mu^2)}{(p-k)^2}, \\
&\text{(b)} \quad g^2 \int \frac{d^4k}{k^2 - M^2} \frac{O(k m_\mu, m_\mu^2)}{[(p-k)^2 - m_\mu^2]^2}, \\
&\text{(c)} \quad \frac{m_\mu^2 g^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{k^2 - m_{\Phi_0}^2} \frac{O(k m_\mu, m_\mu^2)}{[(p-k)^2 - m_\mu^2]^2}.
\end{aligned} \tag{12-252}$$

在(a)和(b)的情形下，M 代表 W，Z，或某个假想的 Goldstone



(a) (b) (c)

图 12-14 μ 子反常磁矩的弱作用修正

粒子 $\phi^{\pm}$ 的质量. 假定我们已选取了一个规范，在这个规范下 $\phi^{\pm}$ 的质量是很大的，约为 M_W 量级，例如当 λ 有限时方程(12-223)所给出的那样. 相应于组合 $(\phi_0 - \phi_0^+)/\sqrt{2}$ 的质量也是很大的，而物理分量 $(\phi_0 + \phi_0^+)/\sqrt{2}$ 具有未知的质量 m_{ϕ_0}，然而，我们假定 $m_{\phi_0} \gg m_\mu$. 在贡献 (c) 中，我们已经考虑了 μ-标量耦合，

$$G_\mu = \frac{\sqrt{2}\, m_\mu}{v} = \frac{m_\mu g}{\sqrt{2}\, M_W}. \tag{12-253}$$

由于形状因子 F_2 不要求任何紫外减除，我们预期前面那些积分为 m_μ^2/M^2 或 $m_\mu^2/M_{\phi_0}^2$ 再乘上一个可能的对数因子. 因此，对反常磁矩的弱作用修正至多为

$$g^2 \frac{m_\mu^2}{M_W^2} \sim G m_\mu^2 \sim 10^{-7} \tag{12-254}$$

量级. 这正好是实验和理论不确定性的量级(后者是由于强子的贡献):

$$\left.\frac{g-2}{2}\right|_{\text{exp}} = (11659.22 \pm 0.09) \times 10^{-7},$$
$$\left.\frac{g-2}{2}\right|_{\text{th}} = (11659.19 \pm 0.10) \times 10^{-7}. \tag{12-255}$$

然而，对数因子 $\ln(m_\mu^2/M_W^2)$ 使得弱作用贡献是相当可观的. 注意，Higgs 玻色子的贡献与其它两种相比被压低一个因子 m_μ^2/M_W^2，因而是可以忽略的. 在实际的计算中没有对数出现，弱作用修正是很小的:

$$\left.\frac{g-2}{2}\right|_{\text{weak}}=\frac{Gm_\mu^2}{\sqrt{2}\,\pi^2}\left(\frac{2}{3}\sin^4\theta_W-\frac{1}{3}\sin^2\theta_W+\frac{1}{4}\right)$$
$$\sim 2\times 10^{-9}. \tag{12-256}$$

也可对电子进行类似的计算. 实验和理论的精度要高一些($\sim 10^{-9}$),但弱作用贡献仍要被压低一个附加的因子 $m_e^2/m_\mu^2\sim 10^{-5}$.

我们也可得到 μ 衰变的辐射修正. 当然,用重整化了的量表示时结果是有限的,并且归结为 Fermi 耦合常数 G 的重整化. 与不同的弱过程(例 β 衰变)的耦合常数比较,这种 α 量级的修正是可能被观察到的. 可惜的是,没有另外的纯轻子衰变,而与一个强子系统的比较要涉及强作用的修正.

12-6-4 强子的加入

在前面的框架中加入强子的一个很自然的方法,就是使夸克多重态与规范场耦合. 已经有了借助于通常的夸克 u, d, s 表示的荷电强子流的结构(11-3 节).它包含奇异数守恒和奇异数改变的分量,并且带有 Cabbibo 混合角.在弱作用的规范理论的框架中也许可能预言这个混合角.除了荷电流之外,与 Z 玻色子耦合的中性流出现在类似于 Weinberg-Salam 模型一类的理论中. 由中性流引起的奇异数改变的过程,不应与实验发生很大矛盾,这一条限制被证明是一个很严厉的要求,并且需要至少引入一种新的夸克.

我们从三种夸克 u, d, s 出发,并且暂时忽略它们与 Higgs 标量的耦合. 假定 Cabbibo 角 θ_c 是已知的. 通常的荷电强子流将被重新产生出来,只要我们对夸克场给出下面的填充:

$$N_L\equiv\begin{pmatrix}u\\ d_\theta\equiv d\cos\theta_c+s\sin\theta_c\end{pmatrix}_L \tag{12-257}$$

是弱同位旋二重态，$Y = 1/3$，而 u_R，d_R，s_R 和

$$s_{\theta L} \equiv (s\cos\theta_c - d\sin\theta_c)_L$$

是单态，且 $Y = 4/3, -2/3, -2/3, -2/3$. 相互作用拉氏量

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{int}} = \bar{N}_L\left(gA\cdot\frac{\tau}{2}+\frac{1}{3}\frac{g'}{2}B\right)N_L \\ +\left[\bar{s}_{\theta L}\left(-\frac{g}{3}B\right)s_{\theta L}\right. \\ \left.+(s_{\theta L}\to d_R)+(s_{\theta L}\to s_R)\right]+\frac{2}{3}u_R g'Bu_R.\end{aligned} \tag{12-258}$$

可借助于式(12-236)、(12-238)中的场 W, A, Z 改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{g}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ h^\mu + hc) + eA^\mu j_\mu^{em} \\ -\sqrt{g^2+g'^2}\,Z^\mu\left(\bar{N}_L\frac{\tau_3}{2}\gamma_\mu N_L - \sin^2\theta_W j_\mu^{em}\right),\end{aligned} \tag{12-259}$$

其中如所预期的

$$h_\mu = \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(d\cos\theta_c + s\sin\theta_c),$$

$$j_\mu^{em} = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}(\bar{d}\gamma_\mu d + \bar{s}\gamma_\mu s).$$

中性玻色子 Z 与电磁流耦合，并且也与

$$\begin{aligned}\bar{N}_L\tau_3\gamma_\mu N_L = \bar{u}_L\gamma_\mu u_L - \cos^2\theta_c\bar{d}_L\gamma_\mu d_L \\ -\sin\theta_c\cos\theta_c(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L + \bar{s}_L\gamma_\mu d_L) - \sin^2\theta_c\bar{s}_L\gamma_\mu s_L\end{aligned}$$

耦合，正比于 $\sin\theta_c\cos\theta_c$ 的项是奇异数改变的中性流. 它是令人为难的. 因为实验上 $\Delta s = 1$ 或 $\Delta s = 2, \Delta Q = 0$ 的过程被强烈地压低. 例如，

$$\frac{\Gamma(K^\pm\to\pi^\pm\nu\bar{\nu})}{\Gamma(K^\pm\to\text{all})}\simeq 6\times10^{-7},\quad \frac{\Gamma(K^0\to\mu^+\mu^-)}{\Gamma(K^0\to\text{all})}\simeq 10^{-8}. \tag{12-260}$$

这个谜在 1970 年被 Glashow, Iliopoulos 和 Maiani 解决了. 他们引入了第四种夸克，用 c 代表，象 u 夸克一样其电荷为 2/3，并带有一个新的量子数——粲数 (charm). 假定左手分量 C_L 与组合 $s_{\theta L} = -d_L \sin\theta_c + s_L \cos\theta_c$ 构成同位旋二重态. 换句话说，现在有两个左手二重态

$$\begin{pmatrix} u \\ d_\theta \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s_\theta \end{pmatrix}_L \quad Y = 1/3, \tag{12-261}$$

和四个右手单态 u_R, d_R, s_R, c_R, 其 Y 分别等于 4/3, − 2/3, − 2/3, 4/3.

不难看出，中性玻色子现在与

$$(\bar{u}, \bar{d}_\theta)_L \frac{\tau_3}{2} \gamma_\mu \begin{pmatrix} u \\ d_\theta \end{pmatrix}_L + (\bar{c}, s_\theta)_L \frac{\tau_3}{2} \gamma_\mu \begin{pmatrix} c \\ s_\theta \end{pmatrix}_L - \sin^2\theta_W j_\mu^{em} \tag{12-262}$$

耦合. 奇异数改变的中性流出现在式 (12-262) 的第一项与第二项中，但恰好互相抵消. 这意味着我们所不希望的流在准至 G 的量级上已被消去. 然而，荷电流的高次交换所引起的奇异数改变的中性跃迁仍可能危及这个理论. 图 12-15 给出的费曼图正是这种情况，它的量级为 G_α，因此与实验上观察到的非常低的衰变率式 (12-260) 相矛盾.

然而，引进 c 夸克之后，荷电流的形式变为

$$h_\mu = \bar{u}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)d_\theta + \bar{c}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)s_\theta. \tag{12-263}$$

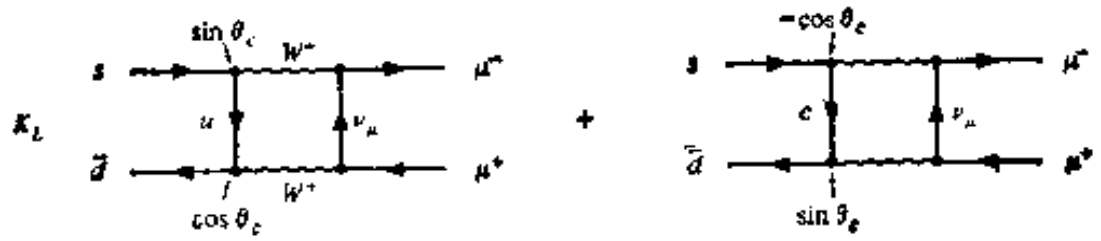


图 12-15 $K^0 \to \mu^+\mu^-$ 衰变

当把所有的贡献都考虑在内时，我们发现，这个危险的振幅正比于 $(m_c^2 - m_u^2)/M_W^2$，因为粲夸克比W玻色子轻得多，即

$$m_c \leqslant 1.5 - 2\text{GeV},$$

与实验的矛盾将不再存在.

除了压低 $\Delta s \neq 0$ 的中性流的性质之外，粲夸克还有一种美的魅力. 它恢复了四种轻子和四种夸克之间的对称性，并且作为一种额外的收获，它消除了 Weinberg-Salam 模型中的反常. 的确，前一节研究的轻子模型遇到了手征反常的困难. 如果我们在只有弱同位旋单态和二重态的情况下应用 12-4 节的分析，我们容易发现，唯一不为零的反常正比于

$$\sum_{\text{费米子}} \mathrm{tr}(T^a T^a Y) \propto \sum_{\text{二重态}} Y,$$

与以前一样，T^a 是弱同位旋的某个分量，且 Y 代表弱超荷. 这对应于例如 $A^a A^a B$ 三角图形. 由此得出，轻子对反常的贡献不等于零. 由式 (12-227) 的二个轻子二重态 L_e，L_μ 我们有

$$\sum_{\text{轻子二重态}} Y = 2 \times (-1). \qquad (12\text{-}264)$$

然而，如果我们按前面的框架加入强子，式 (12-261) 的两个二重态的贡献为

$$\sum_{\text{强子二重态}} Y = 2 \times \frac{1}{3}. \qquad (12\text{-}265)$$

此外，如果我们假设——象在第十一章讨论 π^0 衰变时那样——夸克有三种退化的不可观察的色，式 (12-265)，则还必须补充上对色求和，即乘以因子 3. 因此，轻子和强子对反常的贡献相消. 我们要强调指出，有相等数目的轻子和强子二重态(对于前面的弱同位旋和电荷的填充而言)，和色简并

因子对于这个论证的适用性是非常重要的.

π^0 衰变的计算不受现在的相消机制的影响. 的确，π^0 只与普通的轴同位旋流的第三分量，即 $(\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu\gamma_5\tau_3/2\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ 的散度耦合.

到目前为止，我们一直忽略了标量介子对夸克的类汤川耦合和夸克质量项. 在自发破缺发生之前，理论必须是

$$SU(2) \times U(1)$$

不变的，这就禁戒了夸克质量项. 然而，自发破缺和 Higgs 场移动之后，夸克获得质量

$$\mathscr{L}_m = -\bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}\mathscr{M}\psi - \bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2}\mathscr{M}^+\psi, \tag{12-266}$$

其中 $\mathscr{M}$ 是一个矩阵，它并不先验地是对角的，也不一定是实的，而是只限于与电荷算符 Q 对易. 对左手和右手分量重新独立地进行么正的定义，可以把它对角化:

$$\begin{aligned} \psi'_L &= U_L\psi_L, \\ \psi'_R &= U_R\psi_R, \\ U_R\mathscr{M}U_L^+ &= M \text{ 对角}, \end{aligned} \tag{12-267}$$

$$\mathscr{L}_m = -\bar{\psi}'\frac{1-\gamma_5}{2}M\psi' - \bar{\psi}'\frac{1+\gamma_5}{2}M^+\psi'. \tag{12-268}$$

质量矩阵的本征态 ψ' 就是夸克 u, d, s, c. 另一方面，带电流

$$h_\mu \propto \bar{\psi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\tau^-\psi \tag{12-269}$$

变成

$$h_\mu \propto \bar{\psi}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)U_{1L}^+U_{2L}\psi', \tag{12-270}$$

其中 U_{1L} 和 U_{2L} 分别代表 U_L 的作用于上分量 (u, c) 和下分

量 (d, s) 的分量. 进一步重新定义夸克之间的相对位相[当然,对式 (12-268) 是不可观察的],此式变成

$$h_\mu = (\bar{u}, \bar{c})\gamma_\mu(1-\gamma_5)\begin{pmatrix}\cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d \\ s\end{pmatrix}, \quad (12\text{-}271)$$

与式 (12-263) 一致. 我们得出结论: Cabbibo 角来源于质量矩阵本征态与带电流中的夸克分量之间的不搭配.

讲述弱作用模型还应当包括它们的推论的综述, 特别是中微子在强子上的散射. 明智的办法是让读者去查阅权威作者们的透彻的讨论.

纵观近来的实验发现,前面的理论框架可能而且必须被推广,以便包含更多的夸克和轻子. 我们这里只想给一个简单的注释. Cabbibo 混合矩阵在只有四种夸克的情形下取简单的形式 (12-271), 一般可能依赖于更多的参量,其中某些可能是复的,因而导致 CP 破坏. 近年来已经出现了一大批理论模型,涉及各种不同的群、多重态填充、可能的右手耦合等等. 任何一种讨论注定很快就会变得陈旧的.

强作用将如何进入这个框架呢? 由于下章将讨论的原因, 今天强相互作用的非阿贝尔规范理论似乎是一个好的候选者. 规范群可能是 $SU(3)_C$, 它与 Gell-Mam 和 Ne'eman 的八重态对称无关. 八个规范场——所谓的胶子——将与夸克三重态的色量子数耦合. 与弱作用和电磁作用的自发破缺对称相反,这种定域 $SU(3)_C$ 对称性是严格的, 因而胶子将总是无质量的. 在这种弱、电磁和强作用的规范描述中,夸克携带色和味两种量子数. 另一方面,矢量玻色子 W,Z,… 或光子是无色的,而胶子既不带味,也不带电.

最后,我们可以猜想, 群 $G_W \times SU(3)_C$ [对 Weinberg-Salam 模型 $G_W = SU(2)\times U(1)$] 起源于一个更大的单纯群的破缺. 这样一种超统一甚至可以推广到引力.

注记

非阿贝尔规范场是由杨振宁和 R. L. Mills 首先提出的 (*Phys. Rev.*, Vol. 96, p. 191, 1954), 此后许多人研究了

它．这里我们只列出与我们讲的内容直接有关的参考文献．

R. P. Feynman (*Acta Phys. Polonica*, Vol. 24, p. 697, 1963), L. D. Faddeev 和 V. N. Popov(*Phys. Lett.*, Vol. 25, ser. **B**, p. 29, 1967), 以及 B. S. Dewitt (*Phys. Rev.*, Vol. 162, pp. 1195 和 1239, 1967) 发展了量子化．大约在同一时间，S. Weinberg (*Phys. Rev. Lett.*, Vol. 19, p. 1264, 1967) 和 A. Salam. ("Elementary Particle Theory", N. Svartholm, Almquist 和 Wiksells 编辑，Stockholm, 1968) 建议把弱相互作用理论建筑在自发破缺规范模型之上．这一现象早已被 F. Englert 和 R. Brout (*Phys. Rev. Lett.*, Vol. 13, p. 321, 1964), P. W. Higgs (*Phys. Lett.*, Vol. 12, p. 132, 1964, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 13, p. 508, 1964, 和 *Phys. Rev.*, Vol. 145, p. 1156, 1966), G. S. Guralnik, C. R. Hagen 和 T. W. B. Kibble (*Phys. Rev. Lett.*, Vol. 13, p. 585, 1964), 以及 T. Kibble (*Phys. Rev.* Vol. 155, p. 1554, 1967) 讨论过．早期的在超导性范围内的讨论是由 P. W. Anderson 给出的 (*Phys. Rev.*, Vol. 112, p. 1900, 1958, 和 Vol. 130, p. 439, 1963).

这些导致了对重整化手续的广泛的研究．一些关键性的文章是：G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, ser. **B**, Vol. 33, p. 173, 1971 和 ser. **B**, Vol. 35, p. 167, 1971; A. A. Slavnov, *Theor. and Math. Phys.*, Vol. 10, p. 99, 1972; J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, ser. **B**, Vol. 33, p. 436, 1971; B. W. Lee 和 J. Zinn-Justin. *Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 5, pp. 3121, 3137 和 3155, Ser. **D**, Vol. 7, p. 1049, 1972; G. 't Hooft 和 M. T. Veltman, *Nucl. Phys.*, ser. **B**, Vol. 50, p. 318, 1972; 以及 C. Becchi, A. Rouet 和 R. Stora, "Renormalization Theory," G. Velo, A. S. Wightman 和 D. Reidel 编辑，

Dordrecht, Holland, and Boston, Mass., 1976年出版.

评述性文章可参阅 E. S. Abers 和 B. W. Lee, *Phys. Rep.*, ser. **C**, Vol. 9, p. 1, 1973; M. T. Veltman, "Proceedings of the sixth International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies." 由 H. Rollnik 和 W. Pfeil 编辑, North-Holland, Amsterdam, 1974 年出版; J. Zinn-Justin, "Trends in Elementary Particle Theory," 由 H. Rollnik 和 K. Dietz 编辑, Springer-Verlag, Berlin, 1975年出版; B. W. Lee. "Methods in Field Theory," 由 R. Balian 和 J. Zinn-Justin 编辑 North-Holland, Amsterdam, 1976年出版;以及 W. Marciano 和 H. Pagels, *Phys. Rep.* ser. **C**, Vol. 36, p. 137, 1978. J. C. Taylor 的教科书 "Gauge Theories of Weak Interactions", Cambridge University Press, 1976 给出了一个一般的综述.

弱相互作用模型到包括强子的推广是由 S. L. Glashow, J. Iliopoulos 和 L. Maiani 关于粲量子数 (Charm) 的建议所激励的 (*Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 2, p. 1285, 1970).

规范场几何学由吴大峻和杨振宁重新表述 (*Phys. Rev.*, ser **D**, Vol. 12, p. 3843, 1975). 经典解的一般讨论可从 S. Coleman 的讲演中找到, 该讲演收在 "New Phenomena in Subnuclear Physics," A. Zichichi 编辑, Plenum Press, New York, 1977 年出版. 规范磁单极由 G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, ser. **B**, Vol. 79, p. 276, 1974, 和 A. M. Polyakov, *JETP Lett.*, Vol. 20, p. 194, 1974, 分别独立地发现. A. A. Balavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, 和 Y. S. Tyupkin 引入了欧氏瞬子 (Euclidean instanton), *Phys. Lett.*, ser. **B**, Vol. 59, p. 85, 1975.

V. N. Gribov 讨论了规范固定的不确定性 (*Nucl. Phys.*,

ser. **B**, Vol. 139, p. 1, 1978)

关于μ反常请参阅第七章。K. Fujikawa, B. W. Lee 和 A. I. Sanda 计算了弱作用修正 (*Phys. Rev.*, ser **D**, Vol. 6, p. 2923, 1972).

第十三章　渐近行为

早在50年代，Stueckelberg，Peterman，Gell-Mann 和 Low 就已讨论过大动量或小距离行为与可重整性之间的关系．到了廿世纪七十年代，以 Wilson，Symanzik 和 Callan 为首，又使这个专题放出了异彩．我们不应低估由对临界现象的研究汇合而产生的新思想的潮流，它是与 Kadanoff，Fisher 和 Wilson 的名字联系在一起的．产生麻烦的小距离奇异性，曾迫使我们使用重整化这一复杂的技术，已证明这是算符无标度性的关键．我们可以写下一组微分方程，来表示标度的一个无穷小改变所产生的非平庸的效应．经积分之后，这些方程揭示出，在适当的情况下，在给定场和复合算符的反常量纲时，小距离行为获得一个普适的特点．

这些想法被成功地应用于深度非弹性轻子散射、正负电子湮灭、和其它高能过程．小距离展开、渐近自由等概念丰富了理论家的武器库，并且激发了发展一个强作用基本理论的希望．

在统计力学中平行的发展是非常巨大的，并且在与实验事实比较方面取得了可观的成就．

本章只能对这个很宽的领域做一简单的介绍．我们将避免错综复杂的数学证明，而多数情况下靠启发式的讨论和举例，并且追随历史的发展而不惜有时作些重复．

13-1　电动力学中的有效电荷

为了介绍某些思想，我们首先从 Gell-Mann 和 Low 研

究的量子电动力学的情形开始.

基本的量是电荷，或更确切地说是精细结构常数 $\alpha = 1/137$.这个常数是在低能实验中(例如原子物理实验中)测量的，即在比带电费米子的 Compton 波长(为简单起见，我们假定这费米子就是电子)大得多的距离上测量的. Compton 波长决定基本长度. 在高能实验中，我们更感兴趣的是相互作用的定域和准瞬时的性质. 我们将直观地预期，这种性质是由出现在哈密顿量中的裸参量决定的. 不幸的是，由于重整化，裸的和重整化了的电荷之间的关系被无穷大所困扰，至少在微扰的意义上是如此. 这些无穷大互相补偿的方式施加了一些限制，这些限制在渐近行为中有所反映. "渐近"这个词的意义将在下面讲清楚.

13-1-1 Gell-Mann 和 Low 函数

考虑光子的传播子及其与真空极化的关系

$$G_{\rho\nu}(q) = -i\frac{g_{\rho\nu}}{q^2[1+\bar{\omega}(q^2)]} + G^L_{\rho\nu}(q). \qquad (13\text{-}1)$$

为简单起见，没有引入假想的光子质量.以 $q_\rho q_\nu$ 表示出来的纵向部分 $G^L_{\rho\nu}$ 在下面不起作用.电荷的归一化由条件 $\bar{\omega}(0) = 0$ 保证，因而满足低能相互作用或软光子辐射的要求.真空极化是 q^2，α 和电子质量 m 的函数. 考虑与光子传播子有关的组合 $\alpha G_{\rho\nu}$，我们可以定义动量 q 下的有效电荷 $d(\alpha, q^2, m)$，

$$\alpha G_{\rho\nu}(q) = -i\frac{g_{\rho\nu}}{q^2}d(\alpha, q^2, m^2) + \alpha G^L_{\rho\nu}(q),$$

$$d(\alpha, q^2, m^2) = \frac{\alpha}{1+\bar{\omega}(\alpha, q^2, m^2)} \qquad (13\text{-}2)$$

$$d(\alpha, 0, m^2) = \alpha,$$

减除通常是在 $q^2 = 0$ 点进行的. 考虑挑选一个不同的减除

点 $q^2 = \lambda^2 < 0$（在欧氏区域远离奇点）的效应。微扰级数可利用参量

$$\alpha_\lambda = d(\alpha, \lambda^2, m^2) \tag{13-3}$$

来定义。利用参量 α_λ，有效电荷将是函数 D，使得

$$D(\alpha_\lambda, q^2, m^2, \lambda^2) = d(\alpha, q^2, m^2), \tag{13-4}$$

及

$$\alpha_\lambda = D(\alpha_\lambda, \lambda^2, m^2, \lambda^2). \tag{13-5}$$

方程（13-4）表示一个明显地无实在意义的事实，即物理内容不会被一个纯粹的惯例的改变所修改。不同的减除点导致的对 α_λ 的修改都不改变函数 D，这里的讨论由于量子电动力学中的 Ward 恒等式 $Z_1 = Z_2$，$\alpha = Z_3\alpha_0$ 而简化，这意味着只归因于真空极化的处理是自洽的。

由于 D 函数是无量纲的，我们可以写成

$$\begin{aligned} D\left(\alpha_\lambda, \frac{q^2}{\lambda^2}, -\frac{m^2}{\lambda^2}\right) &= d\left(\alpha, -\frac{q^2}{m^2}\right), \\ \alpha_\lambda = D\left(\alpha_\lambda, 1, -\frac{m^2}{\lambda^2}\right) &= d\left(\alpha, -\frac{\lambda^2}{m^2}\right), \end{aligned} \tag{13-6}$$

并将这些关系用于深度欧氏区，那里 $-q^2/m^2$ 变得很大。原则上我们已知道真空极化 $(\alpha d)^{-1} - 1$ 的微扰展开。略去行为如 $(m^2/q^2)[\ln(-q^2/m^2)]^n$ 的项，我们可以逐级推断出它的渐近行为。这就定义了一个函数 $d^{as}(\alpha, -q^2/m^2)$，它也可以由无质量的量子电动力学得出，而把 m^2 只看做一个能量标度参量。因此，我们要研究区域 $-q^2/m^2 \to \infty$，$\alpha\ln(-q^2/m^2) \to 0$，希望被忽略的项相加之后不要变成不可忽略的。这样一种假设在这一阶段还不可能进行严格地分析。

当令 $x = -q^2/m^2$ 时，方程（13-6）右端变为 $d^{as}(\alpha, x)$。如果选取减除点使得 $m^2 \ll -\lambda^2 \leqslant -q^2$，则我们在方程的左端可以略去对 m^2 的依赖，因为我们从第八章中知道，相应的

质量为零的极限是存在的．在极限情况下，D 被 D^{as} 所取代，λ^2 成为标度参量．令 $y=-\lambda^2/m^2$，我们有

$$D^{as}\left(\alpha_y, \frac{x}{y}\right)=d^{as}(\alpha, x), \tag{13-7}$$

其中

$$\alpha_y=d^{as}(\alpha, y)=D^{as}(\alpha_y, 1). \tag{13-8}$$

这些关系表明，d^{as} 可以被看作只是单个变量的函数．为了看清这一点，我们按 Gell-Mann 和 Low 的方法定义函数

$$\phi(z)=\frac{\partial}{\partial x} D^{as}(z, x)|_{x=1}. \tag{13-9}$$

将式(13-7)对 x 微商并令 $y=x$，我们有

$$\phi(\alpha_x)=\frac{\partial}{\partial x} x d^{as}(\alpha, x). \tag{13-10}$$

利用式(13-8)，上式可积分，并给出

$$\ln\frac{x_2}{x_1}=\int_{d^{as}(\alpha,x_1)}^{d^{as}(\alpha,x_2)}\frac{dz}{\phi(z)}. \tag{13-11}$$

此式等价于下面的级数

$$d^{as}(\alpha, x_2)=\sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left(\ln\frac{x_2}{x_1}\right)^n\left\{\left[\phi(z)\frac{d}{dz}\right]^n z\right\}\Big|_{x=d^{as}(\alpha,x_1)}. \tag{13-12}$$

在进行一般讨论之前，首先让我们回忆一下式(8-130)关于真空极化的结果．我们还记得，α 的幂次是由圈的数目给出的．准至 α^2 阶，

$$\bar{\omega}^{as}(\alpha, x)=-\frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln x-\frac{5}{3}\right)-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}(\ln x-C_2)+0(\alpha^3), \tag{13-13}$$

其中 C_2 是一数值常数. 如果 α_1 代表

$$\alpha_1 = d^{as}(\alpha, 1) = \frac{\alpha}{1 + 52/9\pi + C_2(\alpha^2/4\pi^2) + \cdots},$$

(13-14)

我们有

$$d^{as}(\alpha, x) = \frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_1/3\pi)\ln x - (\alpha_1^2/4\pi^2)\ln x + \cdots}.$$

(13-15)

为得到函数 $\phi(\alpha_1)$ 我们在 $x = 1$ 处计算微商 $(\partial/\partial x)\, d^{as}(\alpha_1, x)$. 让我们把 Baker 和 Johnson 的三圈图计算结果也包括进去. 这样便给出

$$\phi(z) = z^2/3\pi + z^3/4\pi^2 + z^4/3\pi^3\left[\xi(3) - \frac{101}{96}\right] + 0(z^5),$$

(13-16)

其中 ξ 为 Riemann 函数,

$$\xi(3) = 1.202\cdots. \qquad (13\text{-}17)$$

Gell-Mann 和 Low 的方程 (13-10) 的解表明,知道了低次近似下的 d^{as} (因而就知道了 ϕ) 就可以知道真空极化准至 n 级的主导行为. 让我们在将 ϕ 局限于二圈值

$$\phi(z) = z^2/3\pi + z^3/4\pi^2 + \cdots$$

时用例子来说明这一点,并且导出 d 中的主导项 $\alpha^3(\ln x)^2$, 由方程 (13-11) 有

$$\ln x = \int_{\alpha_1}^{d^{as}(\alpha, x)} \frac{dz}{\phi(z)} = f(d^{as}(\alpha, x)) - f(\alpha_1),$$

$$f(z) = \text{常数} - \frac{3\pi}{z} - \frac{9}{4}\ln z + 0(z). \qquad (13\text{-}18)$$

反解此式得

$$d^{as}(\alpha, x) =$$

$$\frac{\alpha_1}{1-(\alpha_1/3\pi)\ln x-(\alpha_1^2/4\pi^2)\ln x-(\alpha_1^3/24\pi^3)(\ln x)^2+0(\alpha_1^3\ln x)}$$

$$\alpha_1=\frac{\alpha}{1+5\alpha/9\pi+C_2\alpha^2/4\pi^2}=\alpha-\frac{5}{9\pi}\alpha^2+\cdots. \tag{13-19}$$

因此，我们确实找到了准至 α^3 的主导行为. 或更恰当地说，如果我们仅用 ψ 中的第一项，我们将在 ϖ 的双圈计算中发现 $\alpha^3(\ln x)^2$ 项是相消的，而在第八章中我们费了好大气力才得到这个结果. 然而，应当注意的是，仅仅得到 $\alpha^3\ln x$ 的系数是不够的.

如果在式(13-19)中用 α 的函数替换 α_1，我们将可重新找回至给定级的非领头的贡献. 不管怎样，由式(13-19)得出的结论是，当 $-q^2$ 趋于无穷时，对 ϖ 的三圈图贡献的行为

$$\sim-(\alpha^3/24\pi^3)[\ln(-q^2/m^2)]^2.$$

因此，重整化群使我们能导出新的结果，而初看来好象我们在陈述一些显而易见的东西. 下面我们将证明，到目前为止，所得到的数字表达式足够预言所有形如 $\alpha^n[\ln(-q^2/m^2)]^{n-1}$ 的项.

对函数 ψ 我们不知道的只是它在原点附近的幂级数展开式. 我们不能保证此级数的收敛性. 相反，我们怀疑，这样一个级数至多是渐近的(9-4 节). 我们记得，它的适用范围要求当 $-q^2/m^2\to\infty$ 时 $\alpha\ln(-q^2/m^2)\to 0$. 这就说明了为什么在非物理欧氏点

$$-q^2=m^2e^{3\pi/\alpha}\sim m^2\times 10^{560}$$

的领域，在 d 中极点的存在是相当令人怀疑的. 这样一个极点有时被称作 Landau 鬼，它只是在 ϖ 只保留一级贡献时才出现. 由于这个奇异性显然是在渐近区，精确的研究将需要 d^{ar} 的完全的表达式，而其所有的项大小是可比拟的. 因此，在这

一阶段，作任何关于“量子电动力学不自洽”的结论都是危险的。

另一方面，假定 ϕ 是有意义的，对这个函数作某些精确的假设，就可从整体上对这个理论做某些猜测。从这个函数的定义就可得出结论，它具有不依赖于归一化惯例的普适性。

让我们来研究一些可能性。正如它的展开式中第一项所暗示的那样，我们假定 $\phi(x)$ 在区间 $0 < x < \alpha_\infty$ 上是正的。为了自洽，我们假定 α_1 是包含在这个区间内的。

如果 α_∞ 是无穷大，即如果 $\phi(x)$ 只在原点为零，则积分 $\int^{\infty} dx/\phi(x)$ 在它的上限以这样的方式发散，使得当 $x \to \infty$ 时 $d^{\alpha'}(\alpha, x)$ 也趋于无穷。否则对一个非物理的值

$$q^2 = -m^2 \exp\left[\int_{\alpha_1}^{\infty} dx/\phi(x)\right]$$

$d^{\alpha'}(\alpha, x)$ 变为无穷，且对完全的函数 d，情况可能也是这样。换句话说，我们得到一个真正的 Landau 鬼。很清楚，ϕ 中的前几项不可能对检验这个假设给出合适的暗示。

第二种可能是，$\phi(x)$ 有一个有限的正零点 α_∞。对 $0 < \alpha_1 < \alpha_\infty$，$\phi(x)$ 的正定性意味着 $d^{\alpha'}(x)$ 是一个递增函数，并且我们要求 $\int^{\alpha_\infty} dx/\phi(x)$ 发散。如果 $\phi(x)$ 有一个一阶零点，情况确实如此。在这些条件下，当 $x \to \infty$ 时 $d^{\alpha'}(\alpha, x) \to \alpha_\infty$。事实上，由于 $\phi(x)$ 在这一点的邻域中是递减的，不管 α_1 比 α_∞ 是大还是小，$d^{\alpha'}$ 都趋于 α_∞。我们称 α_∞ 是紫外吸引点（或稳定的固定点）来表征这一特性。在 $\alpha_1 = \alpha_\infty$ 的情况下，$d^{\alpha'}$ 将退化为常数 α_∞。

用一个更定量的方式，当靠近 $x = \alpha_\infty$ 时我们写下

$$\phi(x) = \nu(\alpha_\infty - x) + \cdots, \quad \nu > 0. \qquad (13\text{-}20)$$

将式（13-11）积分得

$$d^{-1}(\alpha, -q^2/m^2) = \alpha_\infty - k(-q^2/m^2)^{-\nu} + \cdots, \quad (13\text{-}21)$$

其中正的常数 k 依赖于 Φ 的精确形式. 临界指标 $\nu[\nu = -(d\psi/dz)(\alpha_\infty) > 0]$ 表征接近固定值 α_∞ 时的方式，对这个固定点，光子传播子假定取其自由场的值. α_∞ 将相应地描写小距离下的电磁耦合常数，好象裸常数是有限的一样.

13-1-2 Callan-Symanzik 方程

我们不去比较改变重整化点的效应，而是采用截断 $\Lambda \gg m$ 回到裸的正规化了的 Green 函数，这在表面上看似乎是倒退了一步. 适当选取裸参量，我们有如下的关系:

$$d(\alpha, q^2, m^2) = \lim_{\Lambda\to\infty} d(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2). \quad (13\text{-}22)$$

这个关系如我们所知道的那样，只是在微扰的意义上成立，并且不涉及任何由 Ward 恒等式产生的相乘性的波函数因子. 进一步我们有

$$\alpha = Z_3\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}, \alpha\right)\alpha_0. \quad (13\text{-}23)$$

上式我们总是理解成取 $\Lambda \to \infty$ 的极限，但多数情况下这点并不明显地写出. 非常重要的一点是，由于取极限，重整化了的振幅对一维参量的依赖，比对正规化了的参量的依赖要少.

考虑不可约函数 $d^{-1} = \alpha^{-1}(1 + \bar{\omega})$. 对式

$$m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} d^{-1}(\alpha_0, q^2, m_0^2, \Lambda^2)$$

有贡献的图是表观收敛的，除了因子 $g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu$ 之外，这些图相应于 Green 函数 (图 13-1)

$$\int d^4x e^{-iqx}\langle 0|Tj^\mu(x)j^\nu(0)\int d^4y\, im_0 : \phi_0\phi_0(y) : |0\rangle$$

的不可约部分.

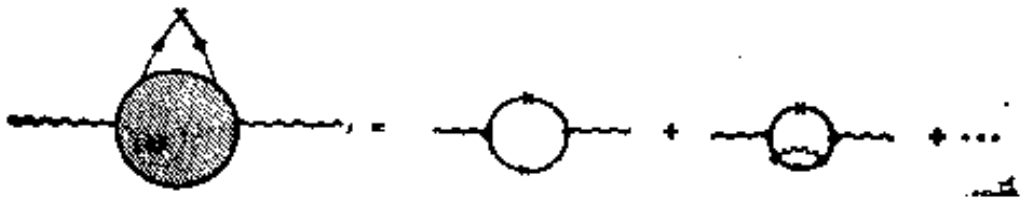


图 13-1　对 $m_0\frac{\partial}{\partial m_0}d^{-1}$ 有贡献的图形

表观收敛性假定了流的守恒．插入算符 $im_0\int d^4y:\phi\phi(y):$ 将使 Feynman 积分中某个分母的次数增加一个单位．然而，正如第八章所讨论的，由于 $m_0\phi_0\psi_0$ 插入费米子自能子图引起的内部发散的减除要求引入新的抵消项，或者等价地用 $Z_{\phi\psi}$ 去乘 $\phi_0\psi_0$．最后，

$$\Delta(\alpha,-q^2/m^2)=Z_{\phi\psi}m_0\frac{\partial}{\partial m_0}d^{-1}(\alpha_0,q^2,m_0^2,\Lambda^2),\tag{13-24}$$

在 $\Lambda\to\infty$ 时将是有限的．在最低次近似下，Δ 可从式(7-9)导出．对大的 $-q^2/m^2$，它的行为如同 $-(m^2/q^2)\ln\times(-q^2/m^2)$，对 n 级，Δ 可表示为 $-m^2/q^2$ 乘以 $\ln(-q^2/m^2)$ 的多项式，因而它的渐近极限 Δ_{as} 在微扰意义上为零．

现在我们固定 α_0 和 Λ，考虑 m（因而 α）的改变．由式(13-23)有

$$m\frac{\partial}{\partial m}\alpha|_{\alpha_0,\Lambda}=\alpha m\frac{\partial}{\partial m}\ln Z_3|_{\alpha_0,\Lambda}.$$

如果此式当 α 和 m 固定 $\Lambda\to\infty$ 时有极限，则它所依赖的唯一无量纲参量为 α．因此，由量纲分析我们可以定义

$$\begin{aligned}\beta(\alpha)&=\lim_{\Lambda\to\infty}\alpha m\frac{\partial}{\partial m}\ln Z_3|_{\alpha_0,\Lambda}\\&=-\lim_{\Lambda\to\infty}\alpha\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\ln Z_3\left(\frac{\Lambda^2}{m^2},\alpha_0\right).\end{aligned}\tag{13-25}$$

我们将证明，$\beta(\alpha)$ 在微扰的意义上是存在的。为此目的，我们计算 d^{-1} 相应的微商：

$$\lim_{\Lambda\to\infty} m\frac{\partial}{\partial m}d^{-1}|_{\alpha_0,\Lambda}=\left[m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]d^{-1}(\alpha,-q^2/m^2).$$

由式(13-24)，上式左边也可以写成

$$\lim_{\Lambda\to\infty} m\frac{\partial}{\partial m}d^{-1}(\alpha_0,q^2,m_0^2,\Lambda^2)|_{\alpha_0,\Lambda}$$

$$=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{m}{m_0}\frac{\partial m_0}{\partial m}\cdot m_0\frac{\partial}{\partial m_0}d^{-1}(\alpha_0,q^2,m_0^2,\Lambda^2)|_{\alpha_0,\Lambda}$$

$$=\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\frac{m}{m_0}\frac{\partial m_0}{\partial m}\right)Z_{\psi\bar{\psi}}^{-1}\Delta(\alpha,-q^2/m^2).$$

如果 $\beta(\alpha)$ 有限，则

$$1+\delta(\alpha)=\lim_{\Lambda\to\infty}Z_{\bar{\psi}\psi}^{-1}\frac{m}{m_0}\frac{\partial m_0}{\partial m}\Big|_{\alpha_0,\Lambda}\qquad(13\text{-}26)$$

也是有限的，并导致 Callan-Symanzik 方程

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]d^{-1}(\alpha,-q^2/m^2)$$

$$=[1+\delta(\alpha)]\Delta(\alpha,-q^2/m^2).\qquad(13\text{-}27)$$

因 Δ_{as} 为零，我们还可以得到

$$\left[-2x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]d_{as}^{-1}(\alpha,x)=0.\qquad(13\text{-}28)$$

方程(13-28)表明，$\beta(\alpha)$ 在微扰的意义上是有限的。对某个确定的 x 值，使用这个方程就足够了。反之，我们可以从研究这个方程及其对 Green 函数的推广来导出可重整性。

对于费米子的量子电动力学，由 Rafaël 和 Rosnes 对三圈图的计算，我们得

$$\beta(\alpha)=\frac{2\alpha^2}{3\pi}+\frac{\alpha^3}{2\pi^2}-\frac{121}{144}\frac{\alpha^4}{\pi^3}+0(\alpha^5).\qquad(13\text{-}29)$$

与函数 ψ 截然不同，函数 β 依赖于定义重整化了的耦合常数 α 的惯例，但它的头两项除外。上面的表达式表明，当 $\alpha \to +0$ 时，$\beta(\alpha)$ 是正的。

正如我们在前面所保证了的，现在让我们利用式(13-28)和(13-29)来导出到任意大级的真空极化的带头行为。我们将形式上的级数

$$d_{ss}^{-1} = \alpha^{-1}\left[1 + \sum_{1}^{\infty} \alpha^n p_n(x)\right]$$

$$\beta(\alpha) = \sum_{1}^{\infty} b_n \alpha^{n+1}, \qquad (13\text{-}30)$$

其中 $b_1 = \frac{2}{3\pi}$, $b_2 = \frac{1}{2\pi^2}$,

代入式(13-28)，得方程

$$2\frac{d}{d\ln x} p_{n+1}(x) = \sum_{q=2}^{n}(q-1)\, p_q(x) b_{n-q+1}, \quad n \geqslant 2, \qquad (13\text{-}31)$$

其解为

$$P_1(x) = -\frac{b_1}{2}\ln x + C_1 \qquad (13\text{-}32)$$

$$p_n(x) = -\left(\frac{b_1}{2}\right)^{n-1}\frac{b_2}{2}\frac{(\ln x)^{n-1}}{n-1} + O(\ln x^{n-2}) \quad n \geqslant 2.$$

这一结果表明，准至两圈图的计算得 b_1, b_2，而 b_1, b_2，又决定了准至 n 级的带头行为。

我们可把 d_{ss}^{-1} 的展开式中的各项重新组织，依次先将带头对数项加起来，再把次带头项加起来，…，

$$d_{ss}^{-1}(\alpha, x) = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln x\right)$$

$$+ \frac{3}{4\pi}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln x\right) + C_1 + \cdots. \qquad (13\text{-}33)$$

不幸的是，对于大的 x 值。这种方法并不能使我们得到 $d_G^{-1}(\alpha, x)$。例如，如果我们要保持带头对数项，我们就得令 $1-(2/3\pi)\ln x = 0$ 来控制非物理的 Landau 鬼。此时式(13-33)中第二项是对数发散的，这就违背了它是次主导的假定。换句话说，式(13-33)给出的级数重排只在 $|\alpha \ln x| \ll 1$ 时才有用。要想找出大 x 时的真正的行为，我们必须对所有对数项求和，或等价地回到原始方程(13-27)和(13-28)。

为了得到任意级的带头对数项的系数，知道 b_1 和 b_2 就足够了。为什么是这样，从图形的角度来理解是很有趣的。我们记得在第八章曾经讨论过，当对规范不变的图形类求和时，$\ln x$ 的带头幂次等于内部费米子圈数。读者将会发现，用下面的方法导出这种性质是有启发性的，这种方法就是引进 N 种退化的费米子并研究对 N 的依赖性。对于 α 的给定的级，具有最大数目的费米子圈的图形的类型如图 13-2 所示。得出的结构表明了为什么两圈计算给出的主导项系数准至 n 级是正比于 $b_1^{n-1}b_2(\ln x)^{n-1}$。

由式(13-25)得出，常数 Z_3 满足

$$\left[-2y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\beta(\alpha)}{\alpha}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha} - 1\right)\right] Z_3(y, \alpha) = 0,$$

$$y = \frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{13-34}$$

因此，只要我们对函数 $\beta(\alpha)$ 做某些假设，就有可能研究截断为无穷时即 $y\to\infty$ 的极限。

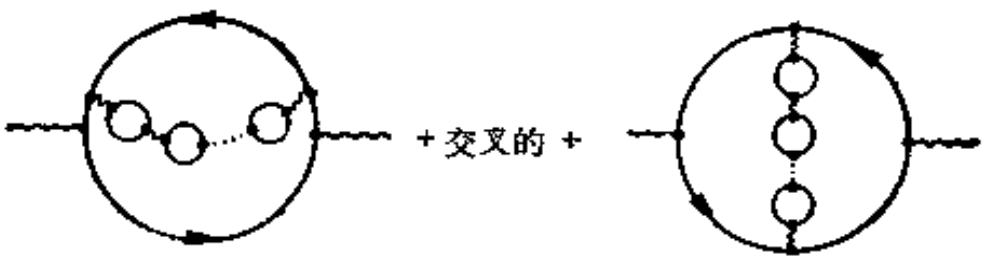


图 13-2　在 n 级上，对真空极化有贡献的具有最大费米子圈数 $(n-1)$ 的图形

Gell-Mann 和 Low 函数 ψ 及 Callan-Symanzik 系数 $\beta(\alpha)$ 当然是有联系的. 例如,将式(13-11)对 x_2 取微商并代入式(13-28),得

$$\psi[d_{ai}(\alpha, x)] = \frac{1}{2}\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}d_{ai}(\alpha, x). \quad (13\text{-}35)$$

此式可对 x 的某个值专门加以研究. 一种可能的选择是 $x=1(q^2=-m^2)$,此时 $d^{ai}(\alpha, 1)=\alpha_1(\alpha)=\alpha-\frac{5\alpha^2}{9\pi}+\cdots$,并且

$$\psi(\alpha_1) = \frac{1}{2}\beta(\alpha)\frac{d\alpha_1}{d\alpha}. \quad (13\text{-}36)$$

这表明两个函数的零点是有联系的. 如果 α_c 使 $\beta(\alpha_c)=0$,则当 $\alpha_\infty=\alpha_1(\alpha_c)$ 时 $\psi=0$. 特别是,如这个值是一紫外固定点,当 $x\to\infty$ 时,$d_{ai}\to\alpha_\infty$. 更进一步讲,根据式(13-34),Z_3 是有限的,α_∞ 起着裸电荷平方的作用. Adler 详尽地讨论了 α_c 等于观测到的物理的精细结构常数的可能性. 可惜的是,目前我们缺少一个确定的非微扰方法来计算这些函数,因而整个事情还停留在猜测阶段.

对电动力学的其它 Green 函数导出类似的 Callan-Symanzik 方程.

13-2 破缺标度不变性

继 Gell-Mann 和 Low 的早期研究之后不久,一个更普遍的观点是研究在可重整理论中当所有有关的距离都是类空的且同时趋于零时 Green 函数的小距离行为. 这个问题似乎是纯理论性的,因它涉及的振幅都是远离质壳的. 幸运的是,这是一个错误的印象. 一些间接的方法,如轻子在强子靶

上的深度非弹性散射，使我们能够探测小距离的相互作用. Bjorken 和 Feynman 从理论上预言的这类实验的结果，部分地启发了 Wilson，Symanzik 和 Callan 对这些 Green 函数小距离行为的研究.

期望在大动量下质量可被忽略时，理论变为标度不变的事实上是太简单化了. 渐近行为是由相应的无质量理论给出的. 正如第八章所讨论的，重整化迫使我们选取一任意能量标度. 这个能量标度破坏了量纲分析. 正是这种任意性事实上挽救了我们. 标度的改变可以归结为耦合常数的修改. 相应的流由类似于前面遇到的 β 系数的函数所主宰，因此重整化群变换取代了简单的量纲分析.

这个流中的紫外固定点(假如它们存在)，当 λ 增大至无穷时将吸引耦合常数. 对耦合常数的特殊值，这将导致小距离标度不变性的恢复. 这些耦合常数的特殊值在很大程度上不依赖于初始数据. 特别是，一般而言观察到的场(或其他复合算符)的量纲将依赖于动力学.

原点为紫外固定点的情况是特别有趣的. 这种情况称为渐近自由. 对简单的无标度性的对数修正，将作为重整化的结果出现.

13-2-1 标度不变性和共形不变性

如果在一个经典的作用量中所有有量纲的常数都不存在，我们预期这个理论是标度不变的. 对于一个有质量的理论，在小距离上(典型情况为 $m|x| \ll 1$)也可能发生这种情况.

如果组态变量被重新标度，

$$x \to {}^{\lambda}x = \lambda^{-1}x \quad \lambda > 0, \tag{13-37}$$

则场(通常记作 φ)将按下式变换:

$$\varphi(x) \to {}^{\lambda}\varphi(x) = U(\lambda)\varphi(\lambda x), \qquad (13\text{-}37a)$$

其中 $U(\lambda)$ 代表膨胀阿贝尔群的有限维表示. 我们将假定这个表示是完全可约的. 这意味着我们可以写出

$$U(\lambda) = e^{D\ln\lambda},$$

其中矩阵 D 可以被对角化. 对无穷小形式，当 $\ln\lambda = \delta\varepsilon$ 时，变换规律为

$$\delta\varphi = \delta\varepsilon\left(x\frac{\partial}{\partial x} + D\right)\varphi. \qquad (13\text{-}38)$$

在一个经典的无质量的理论中，只要 D 的本征值对 Bose 场为 $1\left(\frac{d}{2}-1\right)$，对 Fermi 场为 $\frac{2}{3}\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)$，则式 (13-37) 或 (13-38) 就会导致一种不变性. 括号中的量可以用于任何维数 d，而不只是四维.

我们也可以考虑这种变换在有质量的理论中的效应，因而得到反映标度不变性破坏的 Ward 恒等式. 在这个意义上讲，这里的分析与纯粹的量纲分析是不同的，因为我们这里考虑的是动力学变量(场)变换的效应，而不是有量纲的参量(例如质量)的变换的效应. 如果我们打算这样做，我们就会把两种不同的物理情况联系起来.

对于我们喜欢的例子[注]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - g\varphi^4/4!, \qquad (13\text{-}39)$$

我们得到变分

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varepsilon} = x\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x} + 2(D+1)\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - 4Dg\frac{\varphi^4}{4!} - 2D\frac{m^2}{2}\varphi^2. \qquad (13\text{-}40)$$

〔注〕 为了避免与标度参量 λ 混淆，φ^4 的耦合常数在这一章将用 g 表示.

因此，若 $D=1$，

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \varepsilon}=\left(x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+4\right)\mathscr{L}+m^2\varphi^2,$$

积分 $\int d^4x\lambda^4\mathscr{L}(\lambda x)$ 与 λ（正的）无关．在 $\lambda=1$ 处取微分，得

$$\int d^4x\left(x\frac{\partial}{\partial x}+4\right)\mathscr{L}(x)=0.$$

这意味着 $\left[x\frac{\partial}{\partial x}+4\right]\mathscr{L}(x)$ 是一个散度，并且作用量 I 的变分为

$$\delta I=\delta\varepsilon\int d^4x m^2\varphi^2(x). \tag{13-41}$$

显然，当 $m=0$ 时我们得到了经典的标度不变性．

让我们证明共形不变性是标度不变性的一个结果．

共形群定义为保持角度不变的变换的集合．这将转到 Minkowski 空间，在此空间我们来处理双曲形和圆形的角．将关于任意一点（例如原点）的反演附加到 Poincaré 变换上就得到这个群，

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=\frac{dx^\mu}{x^2}. \tag{13-42}$$

为了使这个定义有意义，通常的 R^4 空间必须被在无穷远的锥所封闭．让我们引入一个有用的几何表示．我们考虑一个具有（2,4）度规的六维空间，即

$$dz^2=(dz_0)^2-(dz_1)^2-(dz_2)^2-(dz_3)^2-(dz_4)^2-(dz_{-1})^2.$$

属于各向同性锥 $z^2=0$ 的线等同于通常的 R^4 空间，这个 R^4 空间被无穷远处的锥所封闭．这可以通过下面的方法来实现，例如用超平面 $z_{-1}=1$ 切割锥 $z^2=0$，并且把所得的单叶双曲面从 R^5 空间的（0，0，0，0，−1）点球极投影到 R^4 上即可．显式的公式为

$$y_\mu=\frac{2x_\mu}{1-x^2},\qquad y_5=\frac{1+x^2}{1-x^2},$$

$$y_\mu y^\mu-(y_4)^2=-1,\quad 0\leqslant\mu\leqslant 3, \tag{13-43}$$

$$x_\mu = \frac{y_\mu}{1 + y_4}, \quad x^2 = \frac{y_4 - 1}{y_4 + 1}.$$

四叶赝正交群 $O(2,4)$ 的作用在 Minkowski 空间上表现为共形变换。特别是膨胀对应于 x_4, x_{-1} 平面的双曲转动:

$$x' = e^{\vartheta} x \Leftrightarrow y'_\mu = \frac{y_\mu}{\cos h\vartheta + y_4 \sinh\vartheta}, \quad y'_4 = \frac{y_4 \cos h\vartheta + \sinh\vartheta}{y_4 \sinh\vartheta + \cos h\vartheta}$$

$$\Leftrightarrow x'_\mu = x_\mu, x'_4 = x_4 \cos h\vartheta + x_{-1} \sinh h\vartheta,$$

$$x'_{-1} = x_{-1} \cos h\vartheta + x_4 \sinh\vartheta. \tag{13-44}$$

作为练习，请找出另外四种共形变换，进而给出生成元数目到 15。在 Minkowski 空间写下相应的变换，在四维欧氏空间情况下完成类似的构造。因而共形群为 $O(1,5)$，并且被无穷远点所封闭的 R^4 可等同于五维空间中单位球面的球极投影。

因此，为了证明无质量的 φ^4 理论的共形不变性，只需研究反演的效应就足够了。在一个五维的 y 空间，这个变换相应于单位双曲面的 $y \longleftrightarrow -y$ 的对称性。我们必须对场选择一个变换规则。方程(13-37a)，即 $^t\varphi(x) = \lambda\varphi(\lambda x)$ 启发我们定义

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{x}{x^2}\right). \tag{13-45}$$

由此得出

$$I' = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi')^2 - g \frac{\varphi'^4}{4!}\right]$$

$$= I + \int d^4x \frac{4}{x^2} \varphi(x)\left(1 + x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x).$$

多出的项是一四维散度

$$\frac{4}{x^2} \varphi\left(1 + x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi = 2\partial_\mu \left[\frac{x^\mu}{x^2} \varphi^2(x)\right]$$

形式上（即除了可能的奇异性之外）作用量和运动方程是共形不变的。

练习

(a) 在五维空间中用定义在单位双曲面（Minkowski 情形)或单位

球(欧氏情形)上的动力学变量来表示无质量 φ^4 理论. 写下相应的拉氏量和运动方程. 用推广的球谐函数展开经典自由场方程的解.

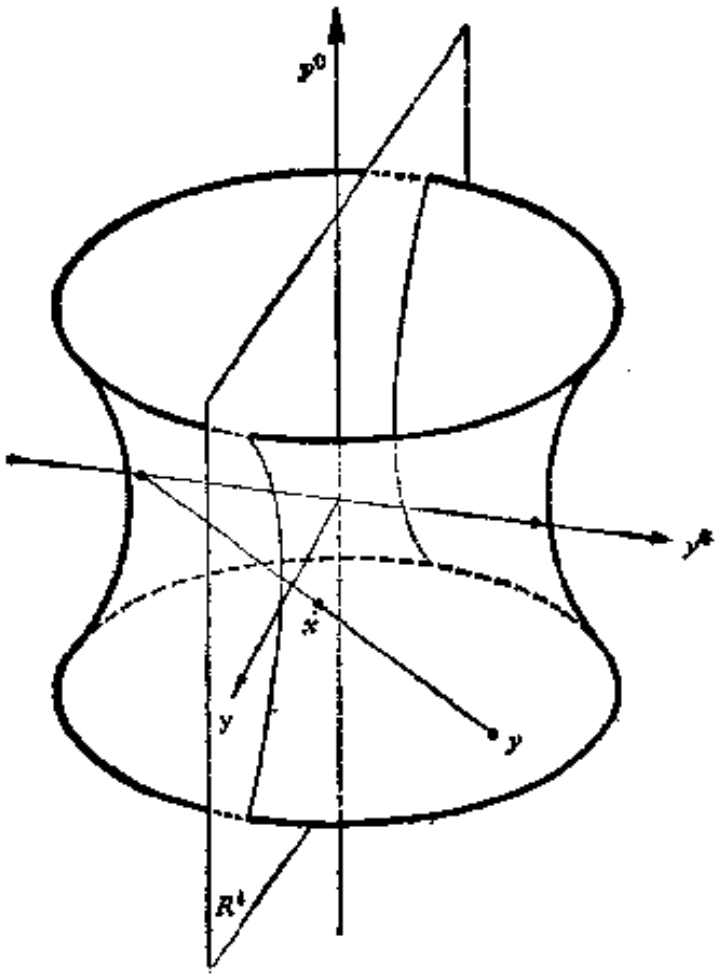


图 13-3 (1, 4) 双曲面在 Minkowski 空间上的投影

(b) 试证明，一个有质量的理论，其作用量在一膨胀下的变分[方程(13-41)]可以写成一个膨胀流的四维散度的积分. 这个膨胀流与修改后的能量动量张量(使在零质量情况下迹为零)有如下联系:

$$\delta I = \int d^4x \partial_\mu S^\mu \delta\theta,$$

$$S^\mu = x_\nu T^{\nu\mu}, \tag{13-46}$$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathscr{L} + \frac{1}{6}(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)\varphi^2.$$

这方面的讨论可参看 Callan, Coleman 和 Jackiw 的工作.

(c) 研究有费米场情况下的标度不变性和共形不变性.

13-2-2 修改的 Ward 恒等式

我们实行 Wick 转动来研究欧氏理论. 对于小距离行为问题这意味着没有限制. 我们写下归一化了的产生泛函为

$$e^{iG(j)}=\int\mathscr{D}(\varphi)\exp\left\{-I+\int d^4x j\varphi\right\}, \qquad (13\text{-}47)$$

欧氏作用量 I 可分解为

$$I=I_1+I_2,\ I_1=\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2+g\frac{\varphi^4}{4!}\right],$$

$$I_2=\int d^4x\frac{m^2}{2}\varphi^2. \qquad (13\text{-}48)$$

标度变换 $\varphi(x)\to\lambda\varphi(x)$ 在这里可被看作一个简单的积分变量更换,在这个更换下

$$I_1\to I_1,\ I_2\to\lambda^{-2}I_2,$$

$$\int d^4x j\varphi\to\lambda\int d^4x j(x)\varphi(\lambda x).$$

测度的改变可被吸收到归一化中,我们回复到下面的简单的 Ward 恒等式

$$\int d^4x\left\{m^2\left[\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]^2+j(x)\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\delta}{\delta j(x)}\right\}e^{iG(j)}$$

$$-(j=0)=0. \qquad (13\text{-}49)$$

$(\delta/\delta j)^2$ 项可以用对算符 φ^2 的源的微商来代替. 当然,由于重整化效应,我们预期式(13-49)需要修改.在以前遇到的大多数情况下,例如规范不变性或整体对称性,我们能够给出一个正规化和重整化的框架,这个框架能保持对称性,因而 Ward 恒等式不变. 但是,手征反常提醒我们,在量子情况下可能出现修改.

在展示上面提到的修改之前,让我们解开式(13-49)的代数结构并写作

$$\int d^4x \left(j(x) \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\delta G}{\delta j(x)} + m^2 \left\{ \left[\frac{\delta G}{\delta j(x)} \right]^2 + \frac{\delta^2 G}{\delta j(x)^2} \right\} \right) - (j = 0) = 0. \tag{13-50}$$

对不可约函数的 Legendre 变换式(6-97),在欧氏变数下为

$$\begin{aligned} G(j) - \Gamma(\varphi) &= \int d^4x j(x)\varphi(x), \\ \varphi(x) &= \frac{\delta G(j)}{\delta j(x)}, \\ j(x) &= -\frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(x)}, \end{aligned} \tag{13-51}$$

其中 $$\int d^4z \frac{\delta j(z)}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta \varphi(y)}{\delta j(z)} = \delta^4(x - y).$$

这表明核 $\delta^2 G(j)/\delta j(x)\delta j(y)$ 和 $\delta^2 \Gamma(\varphi)/\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)$ 是互逆的. 为了简化记号,我们把它们记成

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y; \varphi) &= \frac{\delta^2 \Gamma(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}, \\ \Gamma^{-1}(x, y; \varphi) &= -\frac{\delta^2 G(j)}{\delta j(x)\delta j(y)}, \end{aligned} \tag{13-52}$$

使得式(13-50)取下面的形式:

$$0 = \int d^4x \left\{ \left[\left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) \right] \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} + m^2 [-\varphi^2(x) + \Gamma^{-1}(x, x; \varphi) - \Gamma^{-1}(x, x; 0)] \right\}. \tag{13-53}$$

为了得到属于 n 点不可约函数的相应的恒等式,将式(13-53)展成 φ 的幂级数.

准至 $\hbar$ 的零级,式(13-53)简化为经典讨论中的平庸的情况(差一 Wick 转动):

$$\Gamma^{(0)} = -\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + g\frac{\varphi^4}{4!}\right], \qquad (13\text{-}54)$$

$$\int d^4x\left[\left(1 + x\cdot\frac{\partial}{\delta x}\right)\varphi(x)\right]\frac{\delta\Gamma(0)}{\delta\varphi(x)}$$

$$= -\int d^4x\left[\left(1 + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]\left(-\Box\varphi + m^2\varphi + g\frac{\varphi^3}{3!}\right)$$

$$= \int d^4x m^2\varphi^2(x). \qquad (13\text{-}55)$$

式(13-53)的确被满足了，因为 $[\Gamma^{-1}(x,x;\varphi)-\Gamma^{-1}(x,x;0)]$ 为 $\hbar$ 的量级，正如恢复因子 $\hbar(\Gamma\longrightarrow\Gamma/\hbar,\ ,\delta/\delta_\varphi\longrightarrow\hbar\delta/\delta_\varphi)$ 后容易看出的. 准至 1 的量级，这个量可写成

$$-m^2\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{-\Box + m^2 + g\varphi^2/2} - \frac{1}{-\Box + m^2}\right),$$

并且形式上

$$\Gamma^{[1]} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\ln\left[\left(-\Box + m^2 + g\frac{\varphi^2}{2}\right)\frac{1}{-\Box + m^2}\right]\right\}. \qquad (13\text{-}56)$$

因为

$$\int d^4x\left[\left(1 + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\Gamma(\lambda_\varphi)\Big|_{\lambda=1},$$

由此可得

$$\int d^4x\left[\left(1 + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]\frac{\delta\Gamma^{[1]}}{\delta\varphi(x)} = -m\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^{[1]}$$

$$= m^2\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{-\Box + m^2 + g\varphi^2/2} - \frac{1}{-\Box + m^2}\right). \qquad (13\text{-}57)$$

要不是因为必要的紫外减除，式(13-53)是会被满足的.

泛函

$$\Gamma_\Delta(\varphi) = \frac{1}{2}\int d^4x m^2[-\varphi^2(x) + \Gamma^{-1}(x,x;\varphi) - \Gamma^{-1}(x,x;0)].$$

(13-58)

被解释为利用插入算符 $-\frac{m^2}{2}\int d^4x\varphi^2(x)$ 来生成不可约Green函数.这一点从式(13-49)看得很清楚,在那里 $m^2\int d^4x[\delta/\delta j(x)]^2$ 项来源于对 $m^2\int d^4x\varphi^2(x)$ 的路径积分. 我们从式(13-57)在 $\hbar$ 的量级上可以检验这一点. 相应的图形展开见图13-4. 我们称它为质量嵌入.

幂次计算表明,准至 $\hbar$ 量级,这种嵌入在两点函数中引进了对数奇异性. 用算符的语言,相关的 Green 函数为

$$\int d^4x\langle 0|T\varphi^2(x)\varphi(y)\varphi(z)|0\rangle.$$

让我们来确定归一化条件. 在没有遇到困难之前,采用零动量中间重整化将是很方便的:

$$\Gamma_R^{(2)}(0)=-m^2,\quad \left.\frac{d\Gamma_R^{(2)}(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=0}=-1,\quad \Gamma_R^{(4)}(0)=-g, \tag{13-59}$$

其中 m 正比于,但不等于物理质量.

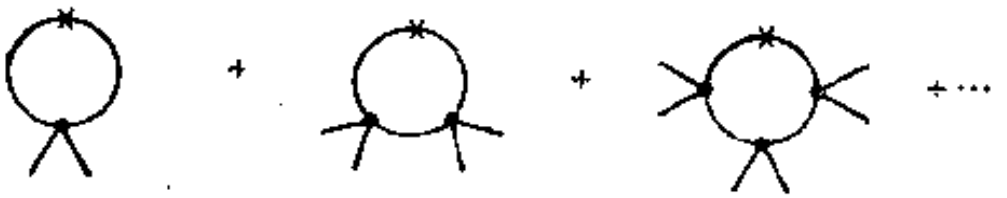


图 13-4 准至单圈级的质量嵌入

利用具有大的截断 Λ 的正规化方法,并在拉氏量中加入所需要的抵消项,我们就显然修改了标度变换的 Ward 恒等式. 裸的和重整化了的不可约 Green 函数之间的关系为

$$\Gamma_R(\varphi,m,g)=\Gamma_b(Z^{1/2}\varphi,m_0,g_0), \tag{13-60}$$

其中右边截断因子 Λ 出现在波函数重整化因子 Z、裸质量 m_0、和裸参量 g_0 中,但当 $\Lambda\to\infty$, m 和 g 固定时,它们的组合 Γ_R 却有一个有限的极限. 通常的量纲分析表明, Z , g_0 和

m_0^2/m^2 只是通过组合 Λ^2/m^2 而依赖于 Λ。

质量嵌入的裸产生泛函为

$$\Gamma_{\Delta\cdot b}(\varphi, m_0, g_0) = m_0 \frac{\partial}{\partial m_0} \Gamma_b(\varphi, m_0, g_0)|_{g_0,\Lambda}. \quad (13\text{-}61)$$

现在我们已有条件研究标度反常了。固定 g_0 和 Λ，改变 m_0，意味着改变重整化了的参量 g 和 m，并且满足

$$0 = dg_0 = \frac{\partial g_0}{\partial m} dm + \frac{\partial g_0}{\partial g} dg. \quad (13\text{-}62)$$

由式 (13-60) 和 (13-61) 我们有

$$2\frac{dm_0}{m_0}\Gamma_\Delta(Z^{1/2}\varphi, m_0, g_0)$$

$$= \left[dm\frac{\partial}{\partial m} + dg\frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2}d(\ln Z)\int d^4x\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right]$$

$$\times \Gamma_R(\varphi, m, g). \quad (13\text{-}63)$$

而通常的量纲分析给出

$$\left\{m\frac{\partial}{\partial m} + \int d^4x\left[\left(1 + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right]\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right\}\Gamma_R(\varphi, m, g)$$

$$= 0. \quad (13\text{-}64)$$

这样就允许我们将式 (13-63) 改成

$$\left\{m\frac{\partial}{\partial m}g\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right)\frac{\partial}{\partial g}\right.$$

$$-\int d^4x\left[1 + \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial m}\ln Z\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right) + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right]\varphi(x)$$

$$\left.\times\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\right\}\Gamma_R(\varphi, m, g) = 2\left[\frac{m}{m_0}\frac{\partial m_0(\Lambda/m, g)}{\partial m}\right]$$

$$\cdot\Gamma_{\Delta\cdot b}(Z^{1/2}\varphi, m_0, g_0). \quad (13\text{-}65)$$

让我们预言，当 g 和 m 固定，$\Lambda\to\infty$ 时，左端的无量纲系数有一个有限的极限。根据量纲分析，这些系数在这个极限下只

能依赖于 g. 令

$$\beta(g) = m\frac{\partial}{\partial m} g\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right) = -\Lambda\frac{\partial}{\partial \Lambda} g\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right), \quad (13\text{-}66)$$

$$\gamma(g) = \frac{1}{2} m\frac{\partial}{\partial m} \ln Z\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln Z\left(\frac{\Lambda}{m}, g_0\right). \quad (13\text{-}67)$$

正如记号所表明的，微商是在固定 g_0 下取的. 当然，这里暗含着 $\Lambda \to \infty$，这意味着在微扰计算中，所有当 $\Lambda \to \infty$ 而变为零的项都应当略去.

根据第八章的分析，质量嵌入是相乘性地可重整的. 存在一个常数 Z_{φ^2}，使得

$$Z_{\varphi^2}\Gamma_{\Delta,b}(Z^{1/2}\varphi, m_0, g_0) = \Gamma_{\Delta,R}(\varphi, m, g), \quad (13\text{-}68)$$

其中 $\Gamma_{\Delta,R}(\varphi, m, g)$ 是有限的. 定义

$$1 + \delta(g) = Z_{\varphi^2}^{-1}\frac{m}{m_0}\frac{\partial m_0(\Lambda/m, g_0)}{\partial m}, \quad (13\text{-}69)$$

这里假定对一个很好地定义了的嵌入归一化方案，上式的极限是存在的.

扔掉下标 R，我们得到 Callan-Symanzik 方程的最终形式

$$\beta(g)\frac{\partial \Gamma}{\partial g} - \int d^4x \left\{\left[1 + \gamma(g) + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right]\varphi(x)\right\}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)}$$

$$= 2[1 + \delta(g)]\Gamma_\Delta. \quad (13\text{-}70)$$

将这个表达式与忽略了重整化的不正确的公式 (13-53) 加以比较，我们看到它不同于后者之处在于出现了与系数 $\beta(g)$，$\gamma(g)$，$\delta(g)$ 有关的项. 在证明它们的有限性之前，我们先就其解释说几句.

首先，它们与手征不变性的反常类似，修改了经典的 Ward 恒等式. 我们认为 $\gamma(g)$ 起着增加场的量纲的作用，这

个增加与耦合常数有关. $\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}$ 项是因为在 g 和 g_0 的关系中存在有量纲的截断 Λ 而造成的剩余物. 这意味着一个无穷小的标度变换不得不伴之以耦合常数的小的改变. 最后, $\delta(g)$ 可以被吸收到质量嵌入的有限的重整化中去.

为了证明这些系数是有限的, 我们将式 (13-70) 按 φ 的幂次展开(对 φ^4 理论为偶次幂). 在动量空间我们有

$$\begin{aligned}-\sum_1^{n-1} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\Gamma^{(n)}(p) &+ \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\Gamma^{(n)}(p)\\ &+ \{4-n[1+\gamma(g)]\}\Gamma^{(n)}(p)\\ &= 2[1+\delta(g)]\Gamma_\Delta^{(n)}(0;p).\end{aligned} \tag{13-71}$$

为确定起见,我们由

$$\Gamma_\Delta^{(2)}(0;0) = -m^2 \tag{13-72}$$

来完成归一化条件式(13-59). 其中在 $\hbar^0$ 量级证明了式 (13-72),并且已足够证明 Γ_Δ 的有限性.对 $n=2$,应用式(13-71)到 $p=0$ 的邻域,我们得到两个关系式:

$$\begin{aligned}&\gamma(g)+\delta(g)=0;\\ &\gamma(g)-[1+\delta(g)]\left.\frac{\partial\Gamma_\Delta^{(2)}(0;p^2)}{\partial p^2}\right|_{p^2=0}=0.\end{aligned} \tag{13-73}$$

这就证明了 $\gamma(g)$ 和 $\delta(g)$ 是有限的. 因此由式 (13-71) 可得, $\beta(g)$ 也是有明确定义的. 我们要强调指出,一般情况下这些系数依赖于归一化条件. 在实际计算中,有时采用式 (13-66)、(13-67) 和 (13-69) 更有优越性,这些式子将与微扰论中的发散联系起来计算. 这表明,至最低阶 ($\hbar^1$), β 和 γ 事实上与任何惯例约定无关.

上面的论述强烈地依赖于具有无穷大截断 Λ 的裸理论. 细心的读者可能认为,避免这种曲折,并且在一个有限的可重整的理论中导出式 (13-70) 是可能的. 这种办法的代价是缺少直观的魅力. 另一方面, Callan-Symanzik 方程可作为构造可重整理论的基础.

我们已经强调过对相应于破缺标度不变的 Ward 恒等式的修改所做的解释. 这实际上是 Callan-Symanzik 方程有用的一个方面. 然而, Callan-Symanzik 方程也可被解释为重整化群方程. 这一点可在无质量理论中将膨胀因子从动量移到任意的减除点 μ 来实现, 此时方程(13-71)可写成

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma(g)\right]\Gamma^{(n)}(p,g,\mu)=0.$$

很清楚,这个推导也可推广到其它可重整理论中去. 在有几个无量纲常数的情况下, 函数 $\beta(g)$ 变为一矢量场. 在规范理论中, 不管是否是阿贝尔的,一般而言,Green 函数依赖于规范参量 λ,并在式(13-71)的左端出现一个新的项 $\zeta(g,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}$, 其中

$$\zeta(g,\lambda)=m\frac{\partial}{\partial m}\lambda\left(\frac{\Lambda}{m},g_0,\lambda_0\right)\Big|_{\Lambda,g_0,\lambda_0}. \tag{13-74}$$

因为 λ_0 通过

$$\lambda=Z_3\lambda_0$$

与规范场的波函数重整化 Z_3 相联系,我们有

$$\zeta(g,\lambda)=2\lambda\gamma(g,\lambda),$$

其中 $\gamma=\frac{1}{2}m(\partial/\partial m)\ln Z_3$ 为反常量纲. 在非阿贝尔理论中, γ 及其它物质场的反常量纲都依赖于 λ. 对 $\beta(g)$ 情况则不同,至少对某些归一化条件是如此,这点在第十二章曾指出过.

可以把式(13-71)与电动力学中类似的结果式(13-28)加以比较. 注意, 在 β 与电磁场的反常量纲 γ 之间有一个关系. 这是 Ward 恒等式的结果: $e^2=e_0^2Z_3$.

前面的分析也可推广到与复合算符有关的函数. 每组具有相同量纲的算符被一重整化矩阵 Z 相乘性地重整[见式(8-69)]. 正规函数[为简单起见只考虑无质量理论]满足

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma(g)\right]\Gamma^{[O_i']}_{O_i'}+\gamma_{ij}(g)\Gamma^{[O_j']}_{O_i'}=0, \tag{13-75}$$

其中

$$\gamma_{ij}(g) = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{ik}\Big|_{g_0} (Z^{-1})_{kj}.$$

我们很快就会明白式(13-67)和(13-75)中符号为什么不同.

13-2-3 最低次近似下的 Callan-Symanzik 系数

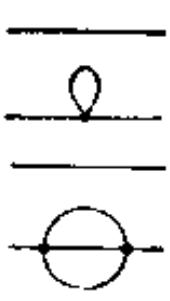
对 φ^4 理论，我们可以用在第 9 章中给出的准至 $\hbar^2$ 级的结果. 从拉氏量中的抵消项导出 β 和 γ 可能更有启发性. 具体地说,我们这里可以假定一个高斯正规化

$$\frac{1}{p^2+m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2+m^2)} \to \int_{1/\Lambda^2}^\infty d\alpha e^{\alpha(p^2+m^2)}$$
$$= \frac{e^{-(p^2+m^2)/\Lambda^2}}{p^2+m^2}$$

来计算为 g_0, m_0, Λ 的函数的 $\Gamma^{(2)}(0)$, $(d/dp^2)\Gamma^{(2)}(0)$ 和 $\Gamma^{(4)}(0)$. 我们将不略去蝌蚪图项，这些项在计算的终了将被抵消.

为此目的,计算 $\Gamma^{(2)}(0)$ 至 $\hbar$ 级项就足够了;我们记得,在 φ^4 理论中到这一级是没有波函数重整化的. 我们将 Feynman 图写在相应的表达式右端. 如在前面的章节中一样，γ 代表 Euler 常数. 写作常数的项表示与 Λ 无关. 我们发现

$$\Gamma_b^{(2)}(0) = \begin{cases} -m_0^2, \\ -\frac{1}{2}\frac{g_0}{(4\pi)^2}\left[\Lambda^2 - m_0^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} - m_0^2(1-\gamma)\right], \end{cases}$$



$$\frac{d\Gamma_b^{(2)}}{dp^2}(0) = \begin{cases} -1, \\ -\frac{1}{12}\frac{g_0^2}{(4\pi)^4}(\ln \Lambda^2/m_0^2 + \text{constant}), \end{cases}$$

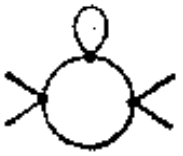
$$\Gamma_b^{(4)}(0) =$$

$$
\begin{cases}
-g_0, \\
+\dfrac{3}{2}\dfrac{g_0^3}{(4\pi)^2}(\ln \Lambda^2/m_0^2 - \gamma - 1 - \ln 2), \\
-3\dfrac{g_0^3}{(4\pi)^4}\left[\dfrac{1}{2}(\ln \Lambda^2/m_0^2)^2 - \ln\dfrac{\Lambda^2}{m_0^2}(\gamma+\ln 2) + \text{constant}\right], \\
-\dfrac{3}{4}\dfrac{g_0^3}{(4\pi)^4}[(\ln \Lambda^2/m_0^2)^2 - 2(\gamma+1+\ln 2)\ln\dfrac{\Lambda^2}{m_0^2} \\
\quad +(\gamma+1+\ln 2)^2] - \dfrac{3}{4}\dfrac{g_0^5}{(4\pi)^4} \\
\quad \times\left(\dfrac{\Lambda^2}{m_0^2} - \ln\dfrac{\Lambda^2}{m_0^2} + \gamma - 1\right).
\end{cases}
\tag{13-76}
$$









按照 (13-5-9 节),我们有

$$
\Gamma_b^{(2)}(0) = -m^2 Z^{-1}, \quad \frac{d\Gamma_b^{(2)}}{dp^2}(0) = -Z^{-1},
$$

$$
\Gamma_b^{(4)}(0) = -Z^{-2} g.
$$

因此,方程 (13-76) 获得 Z, g 和 m 为 m_0, g_0 和 Λ 的函数. 用 m^2 代替 m_0^2, 仅保留到 g^2 项,并利用

$$
\alpha = \frac{g}{(4\pi)^2}, \quad \alpha_0 = \frac{g_0}{(4\pi)^2}, \tag{13-77}
$$

得

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= 1 + \frac{\alpha_0^2}{12}(\ln \Lambda^2/m^2 + \text{constant}) + \cdots \\
\alpha &= \alpha_0 Z^2 \left\{1 - \frac{3}{2}\alpha_0(\ln \Lambda^2/m^2 - \gamma - 1 - \ln 2)\right. \\
&\quad + \alpha_0^2 \left[\frac{9}{4}(\ln \Lambda^2/m^2)^2 - \ln \Lambda^2/m^2\left(\frac{9}{2}\gamma + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\ln 2\right)\right. \\
&\quad \left.\left. + \text{constant}\right] + \cdots\right\}.
\end{aligned}
\tag{13-78}
$$

值得庆幸的是，正比于 Λ^2 的项消失了，只剩下对数项。利用式 (13-66) 的定义，得

$$\frac{-\beta(g)}{2(4\pi)^2} = \left.\frac{\partial\alpha}{\partial\ln\Lambda^2}\right|_{m,\alpha_0}$$

$$= 2\alpha\frac{\partial\ln Z}{\partial\ln\Lambda^2} + Z^2\alpha_0\left[-\frac{3\alpha_0}{2} + \alpha_0^2\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{9}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{9}{2}\gamma - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\ln 2\right) + \cdots\right],$$

因子 Z^2 在这一级可用 1 来代替。用 α 重新来表示 α_0，我们得

$$\beta(g) = 3\frac{g^2}{(4\pi)^2} - \frac{17}{3}\frac{g^3}{(4\pi)^4} + \cdots. \quad (13\text{-}79a)$$

类似地有

$$\gamma(g) = \frac{\partial}{\partial\ln\Lambda^2}\ln Z^{-1}\Big|_{m,g_0} = \frac{g^2}{12(4\pi)^4} + \cdots, \quad (13\text{-}79b)$$

$$\delta(g) = -\gamma(g) = -\frac{1}{12}\frac{g^2}{(4\pi)^4} + \cdots. \quad (13\text{-}79c)$$

正如所预期的，所有系数都是有限的。而且，Euler 常数 γ 和 $\ln 2$ 虽然作为我们正规化方案的结果曾出现在中间步骤中，现在却已经消失了。

练习

(a) 验算 $\beta(g)$ 准至 $\hbar^2$ 级上与所用惯例无关。

(b) 研究由一内部 $O(n)$ 对称群所产生的修改。

(c) 由式 (13-70) 导出第九章中的 $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 和 $Z_{\text{eff}}(\varphi)$ [方程 (9-116)] 所满足的 Callan-Symanzik 方程，并证明式 (9-132) 中的表达式在微扰的意义上遵从这些方程。

我们也可用第十二章关于规范场的结果来得到相应的 β 函数。至最低次近似，重整化了的和裸的耦合常数之间的关系为

$$g = g_0\left[1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C - \frac{4}{3}T_f\right)\ln\frac{\Lambda}{\mu} + O(g_0^4)\right]. \quad (13\text{-}80)$$

能量标度 μ 是为了保证在不存在导致真正物理质量的 Higgs 现象时，使 g 仍有定义而引入的. 由式 (13-80) 我们获得了准至 g^5 级的 $\beta(g)$. 让我们也附加上 Caswell, Jones, Belavin, and Migdal 所给的双圈图的贡献:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C - \frac{4}{3}T_f\right) + \frac{g^5}{(4\pi)^4}\left(-\frac{34}{3}C^2 + \frac{20}{3}CT_f + 4C_fT_f\right) + O(g^7). \tag{13-81}$$

这个结果的一个很有趣的特点是，与量子电动力学或 φ^4 理论中类似的表达式 (13-29) 或式 (13-79) 相反，这里当 $g \to 0$ 时 $\beta(g)$ 与 g 符号相反$\left(\text{只要 } T_f < \frac{11}{4}C\right)$. 后面我们将看到这个注解的重要性. 反常量纲的计算，先验地看只是对规范不变的算符才是重要的. 我们将不得不再回到这个问题上来.

练习

(a) 证明当我们令 $C = 0, T_f = C_f = 1$ 且取 $\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha} = \beta'(e)\frac{\partial}{\partial e}$ 时，量子电动力学中的计算与式 (13-81) 一致.

(b) 讨论规范场与标量玻色子耦合的情况. 给出它们在最低次近似下的贡献，并证明如果它们对应于实光子，这贡献只有费米子的1/8.

13-3 标度不变性的恢复

13-3-1 耦合常数的演化

严格的 Callan-Symanzik 方程，当与质量嵌入有关的右端可以忽略时，会有最有趣的应用. 如果情况不是这样，我们将

不得不面对一个级联泛函组 Γ, Γ_Δ, $\Gamma_{\Delta\Delta}$, $\cdots$, 这个级联泛函组包含了振幅在它整个运动学区的全部复杂性. 这里我们感兴趣的只是所有动量都变得很大的深度欧氏区. 当然, 只对某些质量标度才有意义. 这里我们可求助于第八章的 Weinberg 定理. 它对于严格可重整的理论的应用表明, 在微扰论意义上方程(13-71)中的 $\Gamma_\Delta^{(n)}$ 与左端相比被 p^2 的幂所压低(相差一对数因子). 因此, 只要选取非零动量下的归一化条件, 就存在理论的无质量极限. 这就给出了一个能量标度的选择. 因而, $\Gamma_{ur}^{(n)}$ 将表示相应的无质量 Green 函数. 它们满足齐次方程

$$\left\{-\sum_1^{n-1} p_k \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + 4 - n[1+\gamma(g)]\right\} \cdot \Gamma_{ur}^{(n)}(p_i;g) = 0. \tag{13-82}$$

对 $\Gamma_\Delta^{(n)}$ 也可以导出类似的方程. 如果它的解与 $\Gamma^{(n)}$ 相比可以忽略, 则可检验我们的假设的首尾一致性.

式(13-82)的解将显示一种结构, 这一结构使我们联想起裸的和重整化了的理论之间的关系. 其原因清楚地寄于导出这些方程的方法. 差别是不再涉及无穷大. 有限的重整化效应将伴随动量标度的改变. 为说明这一点, 令 $g(\lambda)$ 是方程

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}g(\lambda) = \beta[g(\lambda)],\ g(1) = g \tag{13-83}$$

的解. 有多个耦合常数时此式可推广为一阶微分方程组. 我们还引入

$$Z(\lambda) = \exp\left\{\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'}\gamma[g(\lambda')]\right\} = \exp\left[\int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')}\gamma(g')\right],\ Z(1) = 1. \tag{13-84}$$

方程 (13-82) 变为

$$\lambda \frac{d}{d\lambda}\{\lambda^{4-n}Z(\lambda)^{-n}\Gamma_{ar}^{(n)}[\lambda^{-1}p_i;\ g(\lambda)]\} = 0. \quad (13\text{-}85)$$

这意味着

$$\Gamma_{ar}^{(n)}(\lambda p_i;g) = \lambda^{4-n}Z(\lambda)^{-n}\Gamma_{ar}^{(n)}[p_i;\ g(\lambda)]. \quad (13\text{-}86)$$

这里与简单的无标度因子 λ^{4-n} 的不同点在于，出现了反常量纲 $[Z(\lambda)^{-n}]$ 和耦合常数 $g(\lambda)$ 的改变. 特别是，我们必须研究 $g(\lambda)$ 的极限行为. 由方程 (13-83) 可清楚地看到，关键问题是 $\beta(g)$ 零点的位置. 可能出现例外的情况，此时初始耦合 $g(1)$ 正好与某个零点 g_∞ 重合. 在这种情况下，$g(\lambda) = g_\infty$ 与 λ 无关.

一般情况下，随着 $\lambda \to \infty$，$g(\lambda)$ 将改变；如果 $\beta > 0$，$g(\lambda)$ 将增加，如果 $\beta < 0$ 则 $g(\lambda)$ 将减小. 这种变化只有碰到 β 的零点时才会终止. 一种可能的情况是，当 λ 增大时 g 直接趋向无穷大. 如果 β 对所有的 g 都与 g 同号，并且只在原点为零，就会发生上述的情况. 这种强耦合的情形是很难分析的.

为了使 $g(\lambda)$ 在 $\lambda \to \infty$ 时有一个有限的极限 g_∞，必须使 $\beta(g_\infty)$ 为零，并且使 $(g - g_\infty)\beta(g)$ 在 g_∞ 的邻域为负值. g_∞ 称为紫外固定点 (图 13-5). 可能发生下面的情况：一个固定点在一边是紫外吸引的，在另一边则是紫外排斥的. 如果两个一阶零点重合，就会发生这种情况. 对于一个一阶吸引零点，$\ln\lambda$ 将按如下的方式发散：

$$\ln\lambda \sim \int^{g(\lambda)} \frac{dg}{g_\infty - g},$$

而 $g(\lambda)$ 按 λ 的负幂趋于 g_∞. 也可对多重零点进行类似的分析. 另一方面，在 g_∞ 的邻域，对 $\gamma(g)$ 而言没有什么特别的东西. 如果 $\gamma_\infty = \gamma(g_\infty)$，准至一个与 λ 无关的因子

$$Z(\lambda)\underset{\lambda\to\infty}{\sim}\lambda^{\gamma_\infty}.$$

在一般情况下，吸引的和排斥的固定点依次出现在 g 轴上. 按照初始值 $g(1)$，当 $\lambda\to\infty$ 时有效耦合常数 $g(\lambda)$ 将趋于最近的紫外吸引固定点.

对紫外不稳定点，$(g-g_\infty)\beta(g)>0$，这些点是红外吸引的，并且相应于 $\lambda\to 0$ 时 $g(\lambda)$ 的极限. 对于无质量理论，只有当我们研究与紫外截断相比是大距离或小动量时的极限时，这才是有趣的. 这正是临界现象的理论的目的，那里 $m=0$ 对应于临界温度，并且我们研究的是关联的长程尾部.

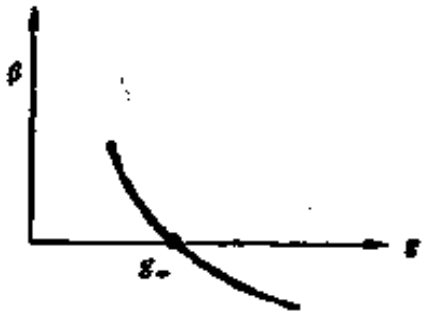


图 13-5 紫外固定点

回到我们原来的问题，从存在一个近处的紫外固定点我们可以得出结论，对大的 λ，振幅的渐近行为取下面的形式：

$$\Gamma^{(n)}(\lambda p_i;\ g)\underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}\Gamma^{(n)}_{ar}(\lambda p_i;\ g)\sim\lambda^{4-n(1+\gamma^\infty)}\Gamma^{(n)}_{ar}(p_i;g)_\infty.$$

(13-87)

标度不变性已被恢复，它相应于耦合的一个特殊值 g_∞，并且场的有效量纲为

$$d_{eff}(\varphi)=1+\gamma_\infty. \tag{13-88}$$

具有质量嵌入 Δ 的 Green 函数遵从

$$\left(-\Sigma p_h\cdot\frac{\partial}{\partial p_h}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\{2-n[1+\gamma(g)]+\gamma_\Delta(g)\}\right)$$

$$\Gamma^{(n)}_{\Delta r}(0;p_i;g)=0,$$

其中 $\gamma_\Delta(g)=\partial\ln Z_{\varphi^2}/\partial\ln\Lambda$ [见式(13-75)]. 只要 $\gamma_\Delta(g_\infty)<2$，将渐近体制与无质量理论等同起来的微扰假设就是自洽的. 否则，质量嵌入实际上将对应一硬算符，并且理论应当被重新表述. 对这一点的进一步讨论见 13-3-3 节.

这一漂亮的论证，本质上是 Wilson 给出的，它表明重整

化群方程如何成为在恢复非平庸的无标度行为方面的有力工具. 现在的关键是 $\beta(g)$是否有这样的零点. 然而,由于在没有相互作用时 $\beta(g)=0$, 原点总是这样的零点, 所以从微扰的意义上明确这一固定点的性质是特别有趣的.

练习

(a) 讨论多重零点对渐近无标度定律的影响, 并且找出对主导行为的修正.

(b) 证明在两点函数的 Lehman-Källen 表示中正测度意味着 $\gamma \geqslant 0$,并且证明 $\gamma_\infty = 0$ 意味着一自由理论,Parisi, Callan 和 Gross 曾指出过这一点.

13-3-2 渐近自由

我们已经给出了自耦合标量场和阿贝尔或非阿贝尔规范场情况下, 对小的 g 如何计算 $\beta(g)$ 的例子. 结果如图 13-6 所示. 对电动力学我们已把量 $4\pi\beta(\alpha)/2e[\beta(\alpha)$ 由式(13-29)给出] 作为 e 的函数来作图. 如果原点是一紫外固定点, 我们称理论是渐近自由的. 在这里给出的例子中, 只有具有少量费米子的非阿贝尔规范场才有这种性质. 表面上看, 对 $g<0$, φ^4 理论也属于这种情况. 但是,它很可能对负的 g 是不稳定的. 因为渐近自由意味着至少在大动量区辐射修正在微扰意义下是可计算的, 因此我们总能找到一个无界的有效势. 根据 Coleman 的论证,我们得出结论,对 $g<0$, 理论是不稳定的.

Coleman 和 Gross 的详尽检验确定了下述结果: 除非理论本身包含非阿贝尔规范场, 任何可重整理论在四维时空中都不可能是渐近自由的.

我们简要列出这一重要结果的推导.

(a) 标量理论

φ^4 相互作用可推广至下述形式的任意一组相互作用的标量场:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -g_{ijkl}\varphi_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l,$$

这里 g_{ijkl} 是全对称的. 至 h 量级,

$$\beta_{ijkl} = \lambda\frac{d}{d\lambda}g_{ijkl}(\lambda)$$

$$= A\sum_{\text{各对}}[g_{ijmn}(\lambda)g_{klmn}(\lambda) + \text{各种置换}],$$

其中 $A>0$. 为使理论稳定,我们假定四次项 $g_{ijkl}\varphi_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l$ 是正的,从而导出 $\beta_{iiii}>0$.

(b) Yukawa 相互作用

相互作用拉氏量为

$$\mathscr{L}_I = -g_{ijkl}\varphi_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l + \varphi_k\bar{\psi}^a(A^k_{ab} + i\gamma_5 B^k_{ab})\psi^b.$$

β_{iiii} 的正定性可能被破坏,但不可能所有的 Yukawa 耦合常数都渐近地趋于零. 的确,如果

$$g^k = A^k + i\gamma_5 B^k,$$

则

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\text{tr}[g^k(\lambda)g^{k\dagger}(\lambda)]\geqslant 0.$$

由于阿贝尔规范场也不是渐近自由的,唯一的可能是包含非阿贝尔规范场.

如果杨-Mills 场与费米子耦合,对单纯规范群就必须满足 $11C>4T_f$ 的条件. 如果还存在玻色场,情况就要更复杂一些了. 首先,为保持 $\beta(g)<0$ (g 为规范耦合),这些玻色场的数目不能太多. 其次,这些场具有特有的自耦合. 例如,假定存在一个属于伴随表示的唯一的标量场,在最低次近似下,它的自耦合 g_φ 将遵从如下的方程:

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}g_\varphi(\lambda) = Ag^2_\varphi(\lambda) + B'g_\varphi(\lambda)g^2(\lambda) + Cg^4(\lambda),$$

其中 $A>0$. 量 $\alpha = g_\varphi/g^2$ 将按下式变化:

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda) = A\alpha^2(\lambda) + B\alpha(\lambda) + C.$$

此外,我们还必须假定 g_φ 至少为 g^2 量级,否则正的项 $A\alpha^2$ 将起主导作

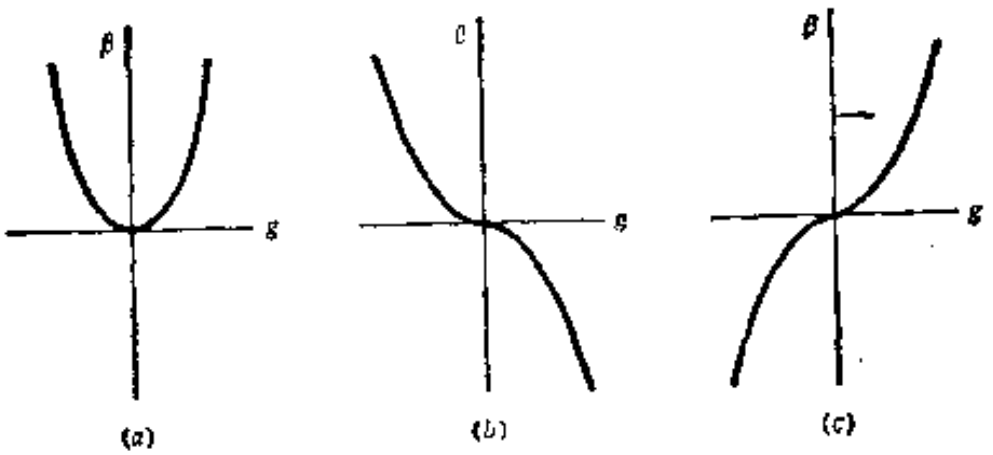


图 13-6　原点附近的 $\beta(g)$ 函数.
(a) 自耦合标量场; (b) $11C>4T_f$ 时的非阿尔贝规范场;
(c) $11C<4T_f$ 时的非阿贝尔规范场,电动力学 $C=0, T_f=1$
或 Yukawa 耦合.

用并破坏渐近自由. 右端在 $B^2>4AC$ 时允许有两个量级为 1 的根 α_1 和 α_2. 因附加的费米子会使 B 增大,这要求场的数目之间有一个精细的平衡. 如果这一点可以满足,则当 $\lambda\longrightarrow\infty$ 时 $g_\varphi(\lambda)$ 按照 $\alpha g^2(\lambda)$ 变化,其中 α 是方程的一个根. 这样就可保持所要求的性质. 具有 n 个玻色场的普遍情况更加复杂,需要逐个详细研究.

玻色场的引入可能来自通过自发破缺机制产生质量的愿望. 实际上要想把渐近自由和对称破缺结合起来是很困难的. 引入 Yukawa 相互作用 $g\bar{\psi}\phi\psi$, 我们至多只能在 $(g, g\bar{\psi}\phi\psi)$ 平面中,沿着一条吸引线达到一个不稳定的情形. 对这点的讨论请参看本章末尾注解中引用的 Gross 的讲演.

由 $g=0$ 附近最初几项的计算所得出的结论,当然是建筑在微扰级数是渐近的假定之上的. 当讨论高级近似时(第九章)我们已经看到,这是我们所希望的最好的情况. 整个级数可能在原点以本性奇异的方式发散.不用说,寻找远离原点时 $\beta(g)$的行为,仍然是对未来的挑战.

一个渐近自由理论的大动量行为, 只有当原点是最近的固定点时才是可计算的, 这就是物理学家们特别偏爱这种情形的原因. 然而,"渐近自由"这个名字是有点含糊的,因为即

使如此，无标度行为与自由场的情形还是相差一个对数因子的．用

$$\beta(g) = -bg^3 + O(g^5) \quad b > 0, \tag{13-89}$$

对 $g(\lambda)$ 我们得

$$g^2(\lambda) = \frac{1}{2b\ln\lambda} + O\left[\frac{\ln(\ln\lambda)}{(\ln\lambda)^2}\right]. \tag{13-90}$$

对大多数有兴趣的算符，函数 $\gamma(g)$ 将是 g^2 量级的，

$$\gamma(g) = cg^2 + O(g^4). \tag{13-91}$$

因此，无标度因子将包含对数项

$$s(\lambda) \sim \exp\left[-\int_g^{g(\lambda)} \frac{c}{b}\frac{dg'}{g'}\right] \sim (2bg^2\ln\lambda)^{c/2b}. \tag{13-92}$$

因而，涉及算符 O_i 的 Green 函数将按 $(2bg^2\ln\lambda)^{c_i/2b}$ 变化，而与 λ 的正则幂不同．

渐近自由理论的存在，对建立强作用模型这一目的具有影响深远的结果．这样便使我们能把两个似乎是矛盾的方面协调起来．在低能和中能，相互作用的确很强，并且由于有许多共振而复杂化．近似的 $SU(3)$ 或 $SU(4)$ 味道对称性给出了强子作为夸克束缚态的定性描述．任何企图把这些组元分离出来的尝试，到目前为止都失败了．然而，在高能下，夸克的相互作用是很弱的，它们就好象是自由粒子一样．由于实验的限制，所能达到的与此有关的区域是类光分离区域．然而，正如我们在 13-4，13-5 节中将要看到的，把迄今为止所讨论的小距离展开推广到这个区域是可能的．因而，只要假定某个更基本的渐近自由场论，就能解释这种似非而是的行为．灾难性的红外发散很可能维持夸克的永久禁闭．这些吸引人的猜测必然要求这样的模型要包含非阿贝尔规范场与没有观察到的(或许是不可观测的)色自由度的耦合．

推广到有多个耦合常数和相应的多维流动，将揭示出非常丰富的

现象，如稳定固定点、极限环，多态经历行为，等等．在离开原点的区域获得这个流动的可靠知识是困难的，这在某种意义上使人们对这类研究的兴趣受到了限制．

13-3-3 质量修正

我们回到无质量渐近理论的自洽性问题上来．在微扰振幅的大动量行为中非带头幂已被略去了．它们反映了拉氏量中存在着量纲小于 4，因而相应于能量量纲为正的耦合项．经典的这类项是质量项．我们已经提到过，由于这类项的相乘可重整性，我们可以对复合算符 O_i（例如 φ^2，$\bar{\phi}\phi$）定义反常量纲．为简单起见，我们假定相应的重整化矩阵是对角的，并且形式为 $Z_i(\Lambda/m, g_0)$．定义

$$\gamma_i(g) = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \ln Z_i(\Lambda/m, g_0). \tag{13-93}$$

如果 g_∞ 是一紫外固定点，算符 O_i 的等效量纲 d_i^{eff} 将与正则量纲 d_i 不同，

$$d_i^{\text{eff}} = d_i + \gamma_i(g_\infty), \tag{13-94}$$

这里我们只处理 $d_i < 4$ 的情形．一般地讲，只要 Wilson 判据

$$d_i^{\text{eff}} < 4 \tag{13-95}$$

被满足，质量修正将仍然是可忽略的．这一点在 $\gamma_i(g_\infty) = 0$ 的渐近自由理论中自动得到证明．然而，要记住，对数性修正仍然影响正则行为．

Weinberg 提出了与此紧密相关的方法．它基于构造独立于重整化质量的抵消项，但可差一平庸的量纲因子．换句话说，我们不把量纲因子明显地固定下来．获得这一结果的方法是维数正规化和重整化．因此，在重整化群方程中我们不应该再忽略质量项的嵌入．在 φ^4 理论中，相应的方程的解

具有如下的形式:

$$\Gamma_n(\lambda p_i;\ g,\ m^2) = \lambda^{4-n}[z(\lambda)]^{-n}\Gamma_n[p_i;\ g(\lambda),\ m^2(\lambda)], \tag{13-96}$$

其中

$$m^2(\lambda) = \frac{m^2}{\lambda^2}\exp\left[\int_g^{g(\lambda)}\frac{dg'}{\beta(g')}\gamma_\Delta(g')\right].$$

证明在最低次近似下图 13-7 中的单圈图的贡献为 $\gamma_\Delta = g/(4\pi)^2$.



图 31-7 φ^6 理论中最低次质量嵌入

当 $\lambda \to \infty$ 时，$m^2(\lambda) \to 0$ 的条件是 $\gamma_\Delta(g_\infty) < 2$，此条件与 Wilson 判据式 (13-95) 等价. 只有在这种情况下，一个无质量的标度不变的理论才是有意义的，尽管这一条件并不在微扰意义上出现. 从上面的分析中我们不应当得出结论，认为软的质量嵌入可用微扰方法处理. 的确，Green 函数对一个足够高阶的质量的微商在质量趋于零的极限下是奇异的. 原因在于，在某个点之后，增加嵌入数目不能改善紫外行为(见第八章关于 Weinberg 定理的讨论). 一种直观的讨论如下：对一个玻色(费米)传播子的质量 m 的二次(三次)微商，在一般情况下当 $m \to 0$ 时在 Feynman 图中诱导出一个对数型红外奇异性. 因此，对小的质量，我们预期有形如

$$m_B^2(\ln m_B)^a[m_F^3(\ln m_F)^a]$$

的奇异性.

13-4 轻子-强子深度非弹性散射和电子-正电子湮灭为强子

这里我们更仔细地来考虑在第十一章中已引入的问题. 在下一节中，我们的目的是讨论一个场论模型对描写轻子诱导的大横动量现象所能得到的结果.

13-4-1 电生

我们先讨论一个带电轻子(电子或 μ 子)在核子上的电磁散射. 这个过程如图 13-8 所示. 始末态轻子动量分别为 l 和 l',在高能下我们略去轻子质量. 动量为 p(质量为 m)的始态核子碎裂为末态 X,我们并不观测末态,因而得名单举过程. 略去辐射修正,只考虑最低次电磁作用. 光子携带从轻子到强子顶点的动量转移 $q = l - l'$.

实际上,测量的是实验室中的轻子始、末态能量 E, E' 和散射角 ϑ. 这里我们将不讨论极化现象. 运动学不变量为

$$\begin{aligned} -q^2 &= 4EE'\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \\ \nu &= p\cdot q = m(E-E'), \\ M^2 &= (p+q)^2 = m^2 + 2m(E-E') - 4EE'\sin^2\frac{\vartheta}{2}. \end{aligned} \tag{13-97}$$

因核子是重子数为 1 的最轻的态,稳定条件 $M^2 \geqslant m^2$ 表明,Bjorken 变量

$$x = \omega^{-1} = -q^2/2\nu \tag{13-98}$$

满足不等式

$$0 < x \leqslant 1. \tag{13-99}$$

上限相应于弹性散射. 记号 x 和 ω 都可从文献中找到.

令 J_μ 为电磁流的强子分量. 散射振幅可写为

$$\begin{aligned} S_{fi} &= i(2\pi)^4\delta^4(p_X + l' - p - l)\bar{u}(l')\gamma^\mu u(l) \\ &\cdot \frac{e^2}{q^2}\langle p_X|J_\mu(0)|p\rangle. \end{aligned} \tag{13-100}$$

因此,对非极化的轻子和核子,单举过程的截面为

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{1}{EE'}\frac{d^3l'}{(2\pi)^3}\sum_X (2\pi)^4\delta^4(p_X + l' - p - l) \\ \cdot\left(\frac{e^2}{q^2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\frac{\not{l}}{2}\gamma^\nu\frac{\not{l}'}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{2}\sum_{\text{pol}}\langle p|J_\mu(0)|p_X\rangle\langle p_X|J_\nu(0)|p\rangle,$$

记号 $\sum_{\text{pol}}$ 表示对核子的极化求和。显式的计算给出

$$\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu l\gamma^\nu l')=\frac{1}{2}(l^\mu l'^\nu+l^\nu l'^\mu-g^{\mu\nu}l\cdot l')$$

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\sum_X(2\pi)^4\delta^4(p_X-p-q)$$

$$\cdot\sum_{\text{pol}}\langle p|J_\mu(0)|p_X\rangle\langle p_X|J_\nu(0)|p\rangle$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{\text{pol}}\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle p|J_\mu(x)J_\nu(0)|p\rangle.$$

在有兴趣的运动学区域，$W_{\mu\nu}$ 也可表示为流对易子的 Fourier 变换：

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\sum_{\text{pol}}\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle p|[J_\mu(x),J_\nu(0)]|p\rangle. \quad (13\text{-}101)$$

相对论不变性、流守恒，以及电磁作用情况下的宇称，使得我们能用两个结构函数 W_1 和 W_2 来表示 $W_{\mu\nu}$。W_1 和 W_2 为弹性形状因子的推广[比较式(3-203)]，

$$W_{\mu\nu}=W_1(\nu,q^2)\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-g_{\mu\nu}\right)$$

$$+W_2(\nu,q^2)\frac{1}{m^2}\left(p_\mu-\frac{\nu}{q^2}g_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{\nu}{q^2}q_\nu\right). \quad (13\text{-}102)$$

截面可表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}W_2+2\sin^2\frac{\theta}{2}W_1\right). \quad (13\text{-}103)$$

实验条件 $\sin^2(\theta/2)\ll 1$ 使得要抽取 W_1 是很困难的。

振幅 $W_{\mu\nu}$ 与极化的虚光子在核子上的散射有关. 称 σ_T 和 σ_L 为横向的和纵向的截面〔$q^2 = 0$ 时 $\sigma_L = 0$〕. 证明

$$W_1(\nu, q^2) = \frac{2\nu + q^2}{8\pi^2\alpha m}\sigma_T,$$

(13-104)

$$W_2(\nu, q^2) = \frac{2\nu + q^2}{8\pi^2\alpha m}\frac{1}{1-\nu^2/m^2q^2}(\sigma_L + \sigma_T),$$

其中 σ_T 和 σ_L 中通量因子，习惯上是把虚光子看成同样能量的实光子来计算的.

从这些表达式导出 W_1 和 W_2 正定的条件. 对于弹性散射 ($\omega = 1$)，导出下面的由电和磁形状因子 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 所表示的关系:

$$W_1^{el}(\nu, q^2) = -\frac{q^2}{2m}G_M^2(q^2)\delta(2\nu + q^2), \qquad (13\text{-}105)$$

$$W_2^{el}(\nu, q^2) = \frac{2m}{1 - q^2/4m^2}\left[G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4m^2}G_M^2(q^2)\right]\delta(2\nu + q^2).$$

在第十一章中我们已经知道，中微子的散射涉及第三类结构函数 W_3. 中微子 (ν) 和反中微子 ($\bar{\nu}$) 的截面为〔比较式(11-101)〕

$$\frac{d\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{d\Omega' dE'} = \frac{EE'm}{\pi}\frac{d\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{d\nu dq^2}$$

$$= G^2\frac{E'^2}{2\pi^2}\left(\cos 2\frac{\theta}{2}W_2^{(\nu,\bar{\nu})} + \sin^2\frac{\theta}{2}W_1^{(\nu,\bar{\nu})}\right.$$

$$\left. \mp \frac{E + E'}{m}\sin 2\frac{\theta}{2}W_3^{(\nu,\bar{\nu})}\right), \qquad (13\text{-}106a)$$

$$\frac{d\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{dxdy}$$

$$= m\frac{G^2E}{2\pi}\left[(1-y)\frac{\nu W_2}{m} + xy^2mW_1 \mp x\left(1 - \frac{y}{2}\right)\frac{\nu W_3}{m}\right], \qquad (13\text{-}106b)$$

其中变量

$$y = \frac{E - E'}{E} = \frac{\nu}{mE}. \tag{13-107}$$

额外的贡献表明，矢量流和轴矢流部分之间有干涉．在高能极限下，末态轻子(电子或 μ 子)的质量已被忽略，流的非守恒部分已经消失．

实验结果表明，在共振激发区域之外，对 $-q^2$ 和 ν 很大的深度非弹区域，截面仍然是相当可观的．对固定的 q^2，对 ν 的积分与点核子上散射 Mott 截面是可比拟的．不同角度下的精确测量可使我们分开 W_1 和 W_2 并获得比值 $R = \sigma_s/\sigma_T$，其中 σ_s，σ_T 如式 (13-104) 所定义．这个比值是很小的，$R \sim 0.15$．然而，最惊人的现象是 Bjorken 和 Feynman 所预言的无标度性．在深度非弹性区，无量纲量 $2mW_1$ 和 $\nu W_2/m$ 趋于无标度变量 $\omega = 2\nu/-q^2$ 的非平庸函数．这一点已示于图 13-8 中，其中 $\nu W_2/m$ 表示成修改的变量 $\omega' = (2\nu + m^2)/-q^2 \sim \omega$ 的函数．在中微子散射过程中也有类

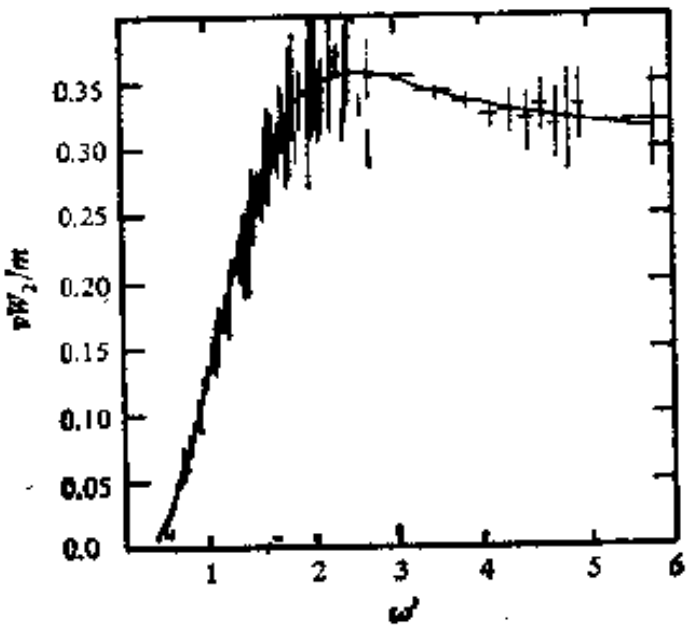


图 13-8　函数 $\nu W_2/m$ 对修改了的无标度变量 $\omega' = (2\nu + m^2)/-q^2$ 的图示．$R \sim 0.18$．数据取自 SLAC 并且于 1975 年在 Palerme 会议上在 R. E. Tayler 的报告中对此做过评述．$-q^2/m^2$ 的值是很大的，且抹掉了 ω' 很小时的共振．

似情况.

这些现象提出了一种对散射源的解释，即散射源是一种点状的几乎无相互作用的组元，它们中的大部分具有自旋 1/2（这对应比值 $R = 0$）. 这样一种唯象的部分子模型是由 Bjorken 和 Feynman 命名的，它给出了一系列与实验数据吻合的求和规则. 渐近自由场论模型给出了一个首尾一贯的框架，其中组元就是基本的量子：夸克和规范胶子.

13-4-2 光锥动力学

让我们进一步研究深度非弹实验中所探测的运动学区域. 在高能下，我们检验的是对易子 $[J_\mu(x), J_\nu(0)]$ 的奇异性. 奇异性发生在小距离 ($x \sim 0$) 或类光间隔 ($x^2 \sim 0$) 上. 由于对易子在光锥外为零，所以 Minkowski 空间的小距离是指类时的距离. 为了研究这样的区域，在动量空间要求研究大 q 小 ω 区. 然后，物理的边界为 $\omega \geqslant 1$. 在实验条件中我们可以将 q 写成 $q = \lambda n - q_0$，其中 n 是类光的，λ 很大. 当 $\lambda \to \infty$ 时，$-q^2 \sim 2\lambda(n \cdot q_0) \to \infty$，$\nu \sim \lambda(n \cdot p) \to \infty$，而且 $\omega \sim p \cdot n / q_0 \cdot n$ 趋于一有限的极限. 我们期望定性地

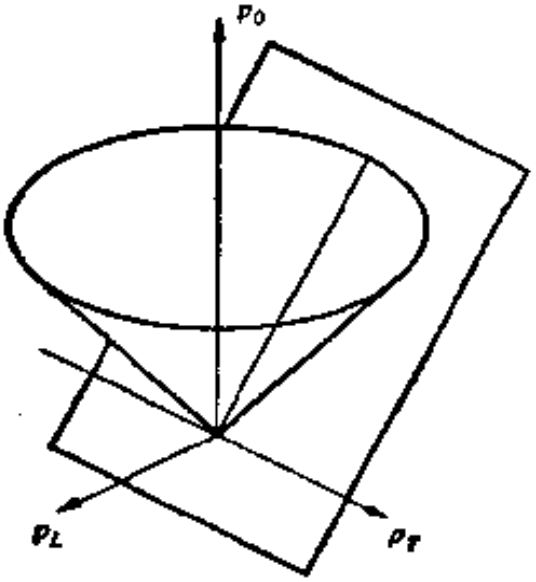


图 13-9 无穷大动量系

探测一个 $(n\cdot x)\sim 1/\lambda$ 的区域，使得 $x^2\sim O(1/\lambda)\sim O(1/-q^2)$. 因此，我们研究的是在光锥邻域中流对易子的奇异结构. 这样，在所谓无穷大动量系中描述部分子模型假设更具有吸引力(图 13-9).

我们从一个包含类光方向的超平面出发来考虑动力学演化. 类光方向适宜于描述能量和纵向动量都很大且可比拟的情况. 让我们简要地勾画出部分子模型的直观的推理过程. 令 P 代表质子在质心系内大的纵向动量的模，则它的 4 动量近似地为 $p\backsimeq(P,0,0,P)$. 靶被想象为 N 个基本组元的集合，这些组元在电磁作用过程中被看做自由粒子，它们的纵向动量为 x_iP，而横向动量与 $\sqrt{-q^2}$ 相比可以忽略. 在这个坐标系中，虚光子的 4 动量近似地取为 $q\backsimeq(\nu/2P,\sqrt{-q^2},0,-\nu/2P)$. 在无穷大动量系中的 Feynman 规则与在非相对论性微扰论中的情形类似，因此，第 i 个组元对散射截面的贡献将正比于

$$Q_i^2\frac{m}{P}\delta(E'-E-q_0),$$

其中 Q_i 为该组元的电荷(图 13-10). 因它的初始动量为 x_iP，我们有

$$E'-E-q_0\sim\sqrt{-q^2+\left(x_iP-\frac{\nu}{2P}\right)^2}$$

$$-x_iP-\frac{\nu}{2P}\sim-\frac{q^2}{2x_iP}-\frac{\nu}{P}.$$

因此，上面的贡献也可写成

$$x_iQ_i^2\frac{m}{\nu}\delta(x_i+q^2/2\nu).$$

此式给出了无标度变量 $x=\omega^{-1}$ 的解释，即 x 为被虚光子散射的组元所带总动量的份额. 假定发生这种过程的几率为 $f(x)$，则有

$$\int_0^1 dx f(x)=1.$$

这就完成了对这个模型的描述. 为简单起见，我们这里已经认为 $f(x)$ 不依赖于组元的类型 i. 因此，结构函数 W_2 可写为

$$\frac{\nu}{m}W_2(\nu, q^2) = F_2(-q^2/2\nu),$$

$$F_2(x) = \sum_i Q_i^2 x f(x), \tag{13-108}$$

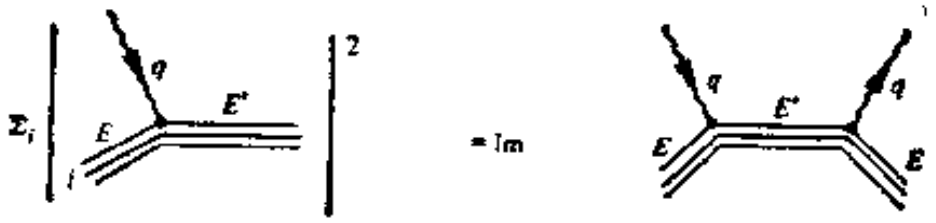


图 13-10　部分子对结构函数的贡献

并且自动满足无标度性. 与此类似，$mW_1(\nu, q^2)$ 等于函数 $F_1(-q^2/2\nu)$. F_1 和 F_2 之间的关系依赖于组元的自旋，对自旋为 1/2 的组元，

$$2xF_1(x) = F_2(x), \tag{13-109}$$

相应于 $R = \sigma_s/\sigma_T = 0$. 由总能量动量守恒 $\left(\sum_i x_i = 1\right)$ 我们可导出下面的求和规则：

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu}\left[\frac{\nu}{m}W_2(\nu, q^2)\right] = \int_0^1 \frac{dx}{x}F_2(x) = \sum_i Q_i^2,$$

$$-\frac{q^2}{2m}\int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu}W_3(\nu, q^2) = \int_0^1 dxF_3(x) = \sum_i \frac{Q_i^2}{N}. \tag{13-110}$$

这种描述方法的关键性假设，是在与外流相互作用过程中部分子的准自由行为和忽略横向自由度.

一种等价的描述方法是将自由组元场代入式(13-101)来估算强子流在光锥区的贡献. 强子流可写为

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu Q\psi(x), \tag{13-111}$$

其中 ψ 为自由费米子场，Q 为电荷矩阵. 利用反对易子式(3-170)，

$$\{\phi(x),\phi(y)\}=\frac{1}{2\pi}\partial_x\varepsilon(x^0-y^0)\delta[(x-y)^2]$$
$$+O[m^2(x-y)^2],$$

我们有

$$[J_\mu(x),J_\nu(y)]\underset{(x-y)^2\to 0}{\simeq}[\phi(x)Q^2\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\phi(y)$$
$$-\phi(y)Q^2\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu\phi(x)]\partial^\alpha\frac{\varepsilon(x^0-y^0)}{2\pi}\delta[(x-y)^2].$$

当我们对一个对角元的极化求和时，只有 $\mu\longleftrightarrow\nu$ 交换为偶的项有贡献. 我们将场的乘积做 Taylor 展开，

$$\phi(x)\phi(-x)=\sum\frac{(-1)^n}{n!}x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_n}\phi(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n}\phi(0),$$

并利用

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu)=(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})\gamma^\beta,$$

得

$$\frac{1}{2}\{[J_\mu(x),J_\nu(-x)]+[J_\nu(x),J_\mu(-x)]\}$$
$$=i\sum_{n\text{odd}}x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}\frac{1}{n!}O^{\beta\mu_1\cdots\mu_n}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})$$
$$\times\frac{1}{8\pi}\partial^\alpha\varepsilon(x^0)\delta(x^2),$$

$$O^{\beta\mu_1\cdots\mu_n}=i\phi(0)Q^2\gamma^\beta\overleftrightarrow{\partial}^{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}^{\mu_n}\phi(0). \quad (13\text{-}112)$$

在 $x^2=0$ 的邻域，对易子已被展开成乘以相同的 c 数分布的正规定域算符的无穷级数. 为了在 Bjorken 极限下计算张量 $W_{\mu\nu}$，我们需要矩阵元

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{pol}}\langle p|\frac{1}{2^n}O^{\beta\mu_1\cdots\mu_n}|p\rangle$$
$$=a_{n+1}(p^\beta p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_n}+\text{迹项}) \quad (13\text{-}113)$$

涉及两个指标缩并的迹项乘以类似于式 (13-112) 式中的坐

标链时将不作贡献。我们有

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{2\pi}\int d^4y e^{iq\cdot y}\frac{1}{2}\sum_{\text{pol}}\langle p|\left[J_\mu\left(\frac{y}{2}\right),\ J_\nu\left(-\frac{y}{2}\right)\right]|p\rangle$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int d^4y e^{iq\cdot y}\sum_{n\text{odd}}\frac{1}{n!}y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_n}\frac{1}{2}\sum_{\text{pol}}\langle p|\frac{1}{2^n}O^{\alpha\mu_1\cdots\mu_n}|p\rangle$$

$$\times(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}-g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})\partial^\alpha\frac{\varepsilon(y^0)}{2\pi}\delta(y^2)。$$

我们将式(13-113)插入这个表达式并定义一个函数$f(x)$,其中x将被证明是无标度变量(不要与组态变量混淆),使得

$$\sum_{n\text{odd}}\frac{(y\cdot p)^n}{n!}a_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2i}\int dx e^{ix(y\cdot p)}\frac{f(x)}{x}。\qquad(13\text{-}114)$$

这表示矩阵元a_{n+1}是分布$f(x)$的矩。与$(p\cdot q)$相比略去$p^2=m^2$,我们发现

$$W_{\mu\nu}=\frac{i}{4\pi}\int d^4y e^{iq\cdot y}\int dx e^{ix(y\cdot p)}\frac{f(x)}{x}$$

$$\times[p_\mu(q+xp)_\nu+p_\nu(q+xp)_\mu-g_{\mu\nu}p\cdot q]$$

$$\cdot\frac{\varepsilon(y^0)}{\pi}\delta(y^2)。$$

对y积分得

$$W_{\mu\nu}=\frac{f(x)}{2x}\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-g_{\mu\nu}\right)$$

$$+\frac{f(x)}{\nu}\left(p_\mu-\frac{\nu}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu-\frac{\nu}{q^2}q_\nu\right),\qquad(13\text{-}115)$$

其中$x=\omega^{-1}=-q^2/2\nu$。

我们用结构函数来辨认部分子模型的结果

$$\frac{\nu W_2}{m} = F_2(x) = mf(x),$$

$$mW_1 = F_1(x) = \frac{mf(x)}{2x}, \qquad (13\text{-}116)$$

$$F_2(x) = 2xF_1(x).$$

为什么想法如此简单的近似却与实验符合的这么好？所预期的修正是什么？要回答这些问题，需要转向渐近自由理论。详细结果将在 13-5 节讨论

实验上可用极化的轻子-核子散射来测量流对易子的反对称部分。在入射束方向上测量自旋，证明

$$\frac{d\sigma^{\uparrow\downarrow}}{d\Omega' dE'} - \frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\Omega' dE'}$$

$$= \frac{4\alpha^2 E'}{-q^2 E}\frac{1}{4\pi m}[(E + E'\cos\theta)d(\nu, q^2)$$

$$- (E - E'\cos\theta)(E + E')mg(\nu, q^2)], \qquad (13\text{-}117)$$

其中 $d(\nu, q^2)$, $g(\nu, q^2)$ 可由下式定义：

$$\frac{1}{4\pi}\int d^4x e^{-iq\cdot x}\{\langle p, S|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|p, S\rangle$$

$$- \langle p, -S|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|p, -S\rangle\} = \frac{1}{4\pi m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho[-S^\sigma d(\nu, q^2)$$

$$+ p^\sigma S\cdot q g(\nu, q^2)], \qquad (13\text{-}117a)$$

并且核子的极化 4 矢量 S 满足 $S\cdot p = S^2 + 1 = 0$。

13-4-3 电子-正电子湮灭

在很高能量下(几个 GeV)，电子-正电子湮灭为强子是一个富有惊人研究成果的领域。窄共振，例如 ψ 和 ψ' 的发现和相应的谱，由于篇幅的限制将不在这里讨论。

截面约为几十个毫微靶 (10^{-33}cm^2)，并且与 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 电磁湮灭的速率不相上下。这个过程可用图 13-11a 表示。在很高能量下，质心系能量平方 q^2 比质量大得多，截面

可由下式给出:

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \int \frac{d^3P_+ d^3P_-}{(2\pi)^6 P_+^0 P_-^0 p_+^0 p_-^0 v_{+-}} \frac{e^4}{(2q^2)^2} \cdot (2\pi)^4\delta^4(p_+ + p_- - P_+ - P_-) \times \sum_{\text{pol}} |\bar{u}(P_-)\gamma^\mu v(P_+)\bar{v}(p_+)\gamma_\mu u(p_-)|^2$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} = \frac{86 \cdot 9}{q^2(\text{GeV}^2)}\ \text{nb}. \qquad (13\text{-}118)$$

强湮灭与流 J_μ 的矩阵元有关. 对未极化的电子和正电子,考虑到 J_μ 的厄米性,截面取下面的形式:

$$\sigma_{e^+e^-\to\text{强子}} = \frac{e^4}{2(q^2)^3}(g^{\mu\nu}p_+ \cdot p_- - p_+^\mu p_-^\nu - p_+^\nu p_-^\mu) \times \sum_f (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_+ - p_-) \cdot \langle 0|J_\mu(0)|f\rangle\langle f|J_\nu(0)|0\rangle. \qquad (13\text{-}119)$$

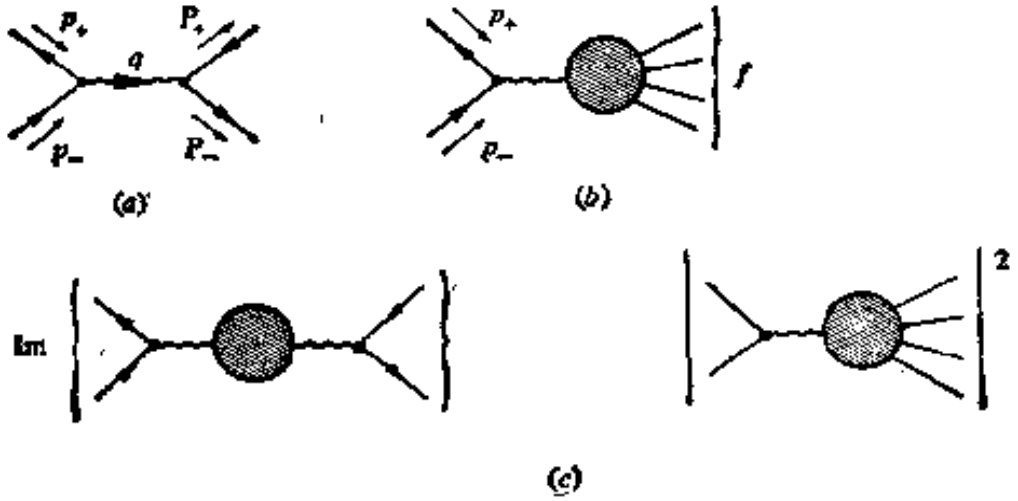


图 13-11 (a) $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的 Born 图;
(b) $e^+e^-\to$强子过程;
(c) 用强子对真空极化的贡献来表示截面 $\sigma_{e^+e^-\to\text{强子}}$

因 q 是类时的,因而是正的,我们也可写出

$$\sum_f (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_+ - p_-)\langle 0|J_\mu(0)|f\rangle\langle f|J_\nu(0)|0\rangle$$

$$= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle$$

$$= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle 0|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|0\rangle. \qquad (13\text{-}120)$$

因此，高能下的湮灭可用来检验流对易子在类时小距离下的真空矩阵元。我们再次来研究渐近区。然而，从类空到类时小距离的改变并不只是一个简单的修改。

式(13-120)中对易子的 Fourier 变换通过式

$$\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle 0|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|0\rangle$$

$$= 2\mathrm{Im}\left[i\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle 0|TJ_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle\right], \qquad (13\text{-}121)$$

与向前振幅的强子贡献联系起来(图 13-11c)。这也是真空极化张量的强子部分，只差因子 e^2：

$$i\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\langle 0|TJ_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle = (g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\bar{\omega}^h(q^2) \qquad (13\text{-}122)$$

因此，

$$\sigma_{e^+e^-\to\text{强子}} = \frac{16\pi^2\alpha^2}{q^2}\,\mathrm{Im}\bar{\omega}^h(q^2). \qquad (13\text{-}123)$$

注意，如果 $\mathrm{Im}\bar{\omega}^h$ 被 μ 子圈的贡献式(7-11)取代 $\mathrm{Im}\bar{\omega}^h$，则 $\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}$ 与 $\sigma_{e^+e^-\to\text{强子}}$ 具有相同的形式

$$\mathrm{Im}\bar{\omega}_{\mu^+\mu^-}(q^2)$$

$$= \frac{1}{e^2}\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{4m_\mu^2}{q^2}\right)^{3/2}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{q^2}\right)\xrightarrow[m_\mu^2/q^2\to 0]{}\frac{1}{12\pi}. \qquad (13\text{-}124)$$

因此，

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \frac{16\pi^2\alpha^2}{q^2}\,\mathrm{Im}\bar{\omega}_{\mu^+\mu^-}(q^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2},$$

与式(13-118)一致.

强子湮灭与电磁湮灭截面之比通常也叫做 R：

$$R(q^2) = \frac{\sigma_{e^+e^-\to\text{强子}}}{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}} = 12\pi\mathrm{Im}\bar{\omega}^h(q^2). \qquad (13\text{-}125)$$

部分子模型的简单应用可得到这个比值的极限值

$$\lim_{q^2\to\infty} R(q^2) = R_\infty = \sum_i Q_i^2. \qquad (13\text{-}126)$$

这正是把带电的自旋 1/2 基本组元的最低阶相互作用的贡献简单地相加.

强子态内部对称性不同的模型得到的 R_∞ 的值也不同. 它依赖于组元的数目、类型、和电荷. 对八重态夸克模型，夸克电荷为 $2/3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$，并且有三种颜色，则预期的值为 $R_\infty = 2$. 如果存在更多的量子数，这个比值将增加. 例如，电荷为 2/3 的粲夸克将额外贡献 4/3，从而使 $R_\infty = 10/3$. 成对产生且不能与强子态区分的 2GeV 左右的重轻子，将使 R_∞ 再增加一个单位. 到 1976 年为止，各种情况的实验结果见图 13-12. 此图支持如下的想法，即 $R(q^2)$ 可能稳定在所预言的值附近. 新一代的实验可能会提供惊人的东西.

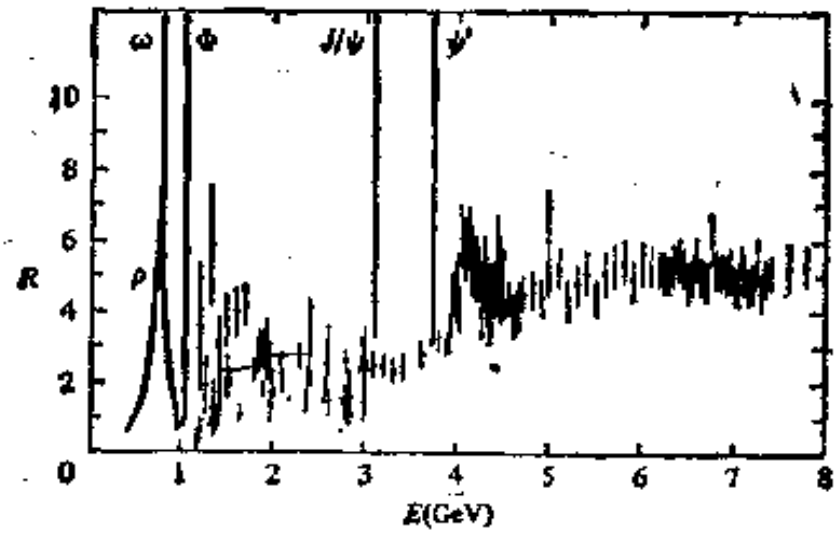


图 13-12 在 SLAC 测量的比值 $R = \sigma_{e^+e^-\to\text{强子}}/\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}$ 与质心系总能量 $E = \sqrt{q^2}$ 的函数关系. 数据是由 R. F. Schwitters 和 K. Strauch 编辑的，*Ann. Rev. Nucl. Sci.*, Vol. 26, p. 89, 1976.

渐近性质式 (13-126)，可以等价地用假定 $x = 0$ 附近的真空矩阵元的自由场行为来描述:

$$\langle 0|J_\mu(x)J_\nu(0)|0\rangle \underset{x\to 0}{\sim} \frac{R_\infty}{12\pi^4}(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\Box)$$

$$\cdot \frac{1}{(x^1 - i\varepsilon x_0)^2}. \tag{13-127}$$

我们从渐近自由场论模型可以猜测对 R_∞ 修正的类别。因为守恒流是不被重整的(见下面)，我们预期对大的 q^2，函数 R 可以近似地由下式给出：

$$R(\lambda^2 q^2, g) \simeq R[q^2, g(\lambda)]$$

$$\simeq R_\infty\left[1 + \frac{3g^2(\lambda)}{16\pi^2}T_f + \cdots\right], \tag{13-128}$$

其中 $g(\lambda)$ 是跑动的耦合常数。式(13-128)的值是真空极化双圈图计算[式(13-13)]来估算 $\mathrm{Im}\varpi^h$ 中的 $g^2(\lambda)$ 项。求迹因子 T_f 表示内部费米子量子数，并且 R_∞ 由式(13-126)给出。对大的 λ，按照式(13-81)和(13-90)，$g^2(\lambda)$ 由下式给出：

$$g^2(\lambda) \sim \frac{3(4\pi)^2}{(11C - 4T_f)\ln\lambda^2}. \tag{13-129}$$

从以上可以看出，这样的修正预言 $R(q^2)$ 缓慢地趋于 R_∞[按 $(\ln q^2)^{-1}$ 的方式]。在通常的微扰展开中，主导贡献是靠将式(13-124)按 m^2/q^2 的幂展开来获得的，结果为

$$R(q^2)\underset{q^2\to\infty}{\sim} R_\infty\left[1 - 8\left(\frac{m^2}{q^2}\right)^2 + \cdots\right], \tag{13-130}$$

即有一个负的变化很快的修正项。

我们已经省略了许多漂亮的深度非弹现象的实验结果。我们的目的仅仅是想举例说明粒子物理中的一个领域，这里新的思想允许定量预言，而这些预言是可以严格检验的。对非渐近自由理论，如量子电动力学，其小距离行为我们知道的很少。

13-5 算符乘积展开

前面的讨论表明，研究复合算符乘积矩阵元的行为的意义，在于下述几个有明确定义的极限情况：

1. 类空间隔趋于零(欧几里德情形)；
2. 类时间隔趋于零(闵科夫斯基情形)；
3. 间隔的平方趋于零(类光极限情形)。

问题 2 和 3 是粒子物理的特殊情况。一般而言，有关的算符是守恒的或部分守恒的流。问题 1 是可以最彻底地分析的问题之一。其结果可以直接用于统计力学。最重要的贡献是由 Wilson 和 Zimmermann 给出的。

13-5-1 小距离展开

考虑两个定域算符的乘积。为简单起见，我们只指出它们对组态变量的依赖关系。Wilson 提出了一种小距离展开，形如

$$A(x)B(y) \underset{x\to y}{\sim} \sum_N C_N(x-y)O_N\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (13\text{-}131)$$

O_N 是一定域正规算符系列，而 c 数系数 $C_N(x-y)$ 在 $x \to y$ 极限下是奇异的。从微扰的意义上讲，这些系数的行为准至对数项由相应算符的正则量纲所决定，

$$\lim_{x\to 0} C_N(x) \sim x^{\gamma_N}(\mathrm{mod}\ln|x|),$$

$$\gamma_N = d_{O_N} - d_A - d_B, \quad (13\text{-}132)$$

O_N 的量纲越高，C_N 趋于零越快。当然，这些观念将以某种方式被重整化群效应所修改。

当处理欧氏理论时，算符这个名字在某种意义上说是有点滥用的。我们心里已经有了构造推广的 Green 函数

$G^{(n)}_{AB}(x, y; z_1, \cdots, z_n)$ 的可能性，使得 n 个宗量 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 标志基本场，其余两个宗量标志 A 和 B。式(11-131)的意义在于，根据它们的量纲将 O_N 编序时，

$$\lim_{x\to y}\left\{\left[G^{(n)}_{AB}(x, y; z_1, \cdots, z_n) - \Sigma^{N\max} C_N(x-y)\, G^{(n)}_{O_N}\left(\frac{x+y}{2}; z_1, \cdots, z_n\right)\right] \times c^{-1}_{N\max}(x-y)\right\} = 0. \tag{13-133}$$

Wilson 展开为下述事实所表征：在极限 $x \to y$ 情况下产生的奇异性由 c 数系数 $C_N(x-y)$ 给出，且与出现在 Green 函数中的基本场的宗量和类型无关。在 Minkowski 空间，式(13-133)可以理解为物理态之间弱意义下的矩阵元的一个渐近级数。显然，这是前面考虑过的情况到所有间隔都同时趋于零的情况的推广。我们将看到，写下系数 C_N 的重整化群方程是可能的。

我们不准备给出繁琐的一般性证明，而满足于给出一个简单的标量场理论的例子。取算符 A 和 B 作为基本场，而找出主导系数

$$\varphi(x)\varphi(y) \xrightarrow[x\to y]{} C(x-y)\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right) + O[(x-y)^2], \tag{13-134}$$

由式(13-132)我们预期在给定的级、准至 $(x-y)^2$ 项，$C(x-y)$ 为 $\ln|x-y|$ 的多项式。为了证明这一点，我们考虑两组联接的 Green 函数

$G^{(n+2)}(q_1, q_2, p_1, \cdots, p_n)$ 和 $G^{(n)}_{\varphi^2}(q_1+q_2; p_1, p_2, \cdots, p_n)$，研究为构造 $G^{(n)}_{\varphi^2}$ 所需要附加的减除，并与定义 $G^{(n+2)}$ 时所必需的减除相比较。与 $G^{(4)}$ 和 $G^{(2)}_{\varphi^2}$ 有关的例子见图 13-13。

与 $G_{\varphi^2}^{(n)}$ 有关的 Feynman 被积函数可由下面的方法获得：把两个属于 $G^{(n+2)}$ 的外部顶角等同为单一的顶角并调整对称系数。然而，这里需要实行的减除是不同的。为了进行重整化，考虑单粒子不可约函数 $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$ 就足够了。然而，在 $G^{(n+2)}$ 中需要缩并掉的两条外线不需要截腿。令 $G'^{(n+2)}(q_1, q_2; p_1, \cdots, p_n)$ 代表单粒子不可约 $(n+2)$ 点函数，在动量 q_1, q_2 的外线上具有完整的传播子。再令 R_{φ^2}，R 分别为 $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$，$G'^{(n+2)}$ 的重整化了的被积函数。它们的关系是

$$R_{\varphi^2} = R + \mathscr{S}, \tag{13-135}$$

其中 $\mathscr{S}$ 来自包含 φ^2 算符的顶角 v 的重整化部分的减除。这一重整化部分是具有两条 φ 外线的不可约 Green 函数；它们的表观度为零，如果 φ^2 量纲为 2 的话。根据第八章，用 $\mathscr{F}$ 表示重整化部分的"森林"，其中之一含 v。如果 τ 为含顶角 v 的 $\mathscr{F}$ 的最小重整化部分，我们记

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \tau \cup \mathscr{F}_2, \tag{13-136}$$

其中 $\mathscr{F}_2$ 为一组包含在 τ 中的重整化部分，而 $\mathscr{F}_1$ 是一组包含 τ 的或与 τ 不相交的重整化部分。令 I 是 $\Gamma_{\varphi^2}^{(n)}$ 和 $G'^{(n+2)}$ 公共的未减除的被积函数，$\mathscr{S}$ 的显示表达式为

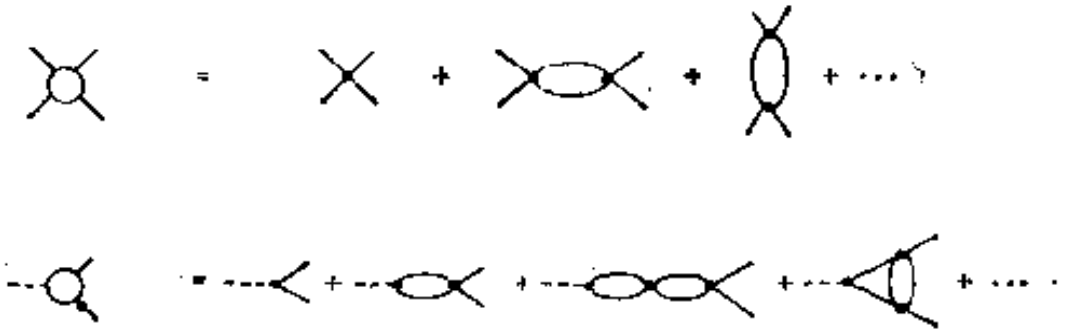


图 13-13　联接 Green 函数 $G^{(4)}$ 和 $G_{\varphi^2}^{(2)}$

$$\mathscr{S} = \sum_{\tau, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2} \left[\prod_{\gamma \in \mathscr{F}_1} (-T^\gamma) \right] (-T^\tau) \left[\prod_{\gamma \in \mathscr{F}_2} (-T^\gamma) \right] I. \tag{13-137}$$

我们可以按下面的方法来安排求和运算. 我们先对含 v 的重整化部分 τ 求和，再对不含 τ 本身的 τ 的"森林" $\mathscr{F}_2$ 求和，再对约化的图 G/τ 的"森林" $\mathscr{F}_1$ 求和. 约化的图是函数 $\Gamma^{(n)}_{\varphi^2}$ 的一种可能的图. 令 σ 为属于相应于 τ 的 $G^{(n+2)}$ 的图的一部分. 这是一个不可约四点函数，相差的是一些传播子，和 τ 中在顶点 v 联接的两条线上可能的自能嵌入. 我们称它为 $\tilde{\Gamma}^{(4)}$.

对每个 τ，被积函数 I 因子化为 $I = I_{G/\tau} \cdot I_\tau$. 在中间重整化中，算符 T^τ 代表零动量的 Taylor 级数. "森林" $\mathscr{F}_2$ 是 σ 的 Taylor 级数，$\mathscr{F}_1$ 是 G/τ 的 Taylor 级数，T^τ 的作用是把 $R(\sigma)$ 限制在它的常数项 $R_0(\sigma)$. 这个运算可由图 13-14 说明，那里给出了对 $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ 的贡献，其中两条线被选为在 v 相交. 运算 T^τ 使外部动量为零，但 τ 中可能的循环动量 k 除外. 如果用符号表示，这意味着

$$\mathscr{S} = -\sum_\tau R_{\varphi^2}(G/\tau)R_0(\sigma). \qquad (13\text{-}138)$$

因此，由式 (13-135) 有

$$R = R_{\varphi^2} + \sum_\tau R_{\varphi^2}(G/\tau)R_0(\sigma). \qquad (13\text{-}139)$$

$G^{(n+2)}$ 的重整化了的被积函数，是以一种能表明暗示 v 的减除的方法表达出来的，当然这些减除被右方的第二项所补偿. 记号 R_{φ^2} 有点含混，因它还涉及到 $n+2$ 个宗量，并且与 Green 函数 $\langle 0|T[\varphi(x)\varphi(y)]_2\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$ 有关.

对迴路动量积分并对图形求和之后，我们可把 Green 函数写为

$$G^{(n+2)}(x, y, z_1, \cdots, z_n) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$

$$= \sum_G \int \frac{d^4q_1 d^4q_2 \prod_i d^4p_a}{(2\pi)^{4(n+2)}} (2\pi)^4 \delta^4\left(q_1 + q_2 + \sum_a p_a\right)$$

$$\times e^{i(q_1 x + q_2 y + \sum p_a z_a)} \int \prod_b \frac{d^4k_b}{(2\pi)^4} R(q, p, k; G).$$

(13-140a)

定义

$$\langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(y)]_2 \varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$

$$= \text{前式中 } R \to R_{\varphi^2}, \tag{13-140b}$$

$$\langle 0 | T[\varphi^2(x)]_2 \varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$

$$= \text{前式中} R \to R_{\varphi^2} \text{并令 } x = y, \tag{13-140c}$$

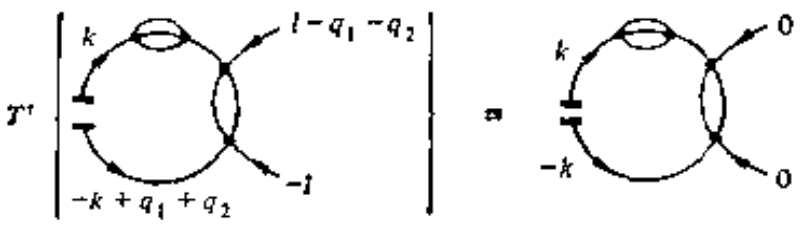


图 13-14 $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ 的零动量减除

记号 $[\,]_2$ 是为使我们记住方括号内的算符的量纲为 2。为记号是简洁的，我们已用了 Minkowski 编时记号。令

$$\tilde{\varphi}(0) = \int d^4z \varphi(z) \tag{13-141}$$

为零动量 Fourier 变换，由恒等式 (13-139) 我们有

$$\langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$

$$= \langle 0 | T[\varphi(x)\varphi(y)]_2 \varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$

$$+ \frac{1}{2}\langle 0 | T\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\varphi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$\cdot \tilde{\varphi}(0)\tilde{\varphi}(0)|0\rangle^P \langle 0 | T\left[\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]_2$$

$$\cdot \varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle, \tag{13-142}$$

指标 P 使我们回忆起问题中的点，是从不可约的 $\Gamma^{(4)}$ 在两条

外线上加上完整的传播子而得到的。上面的办法读者可用具体例子试一试，并确信在式(13-142)中存在一个对称因子1/2。

这种代数构造方法很适合于研究$x \to y$的极限情况。的确，重整化理论意味着减除后的积分的收敛性。特别是，涉及$[\varphi(x)\varphi(y)]_2$的 Green 函数在可差形如$(x-y)^2(\ln|x-y|)^\alpha$的修正的前提下逐级趋于涉及$[\varphi^2(x)]_2$的 Green 函数，至少在欧氏区是如此。由此，式(13-142)使我们能分离出$G^{(n+2)}$中最奇异的部分，形如

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle$$
$$\xrightarrow[x\to y]{} C(x-y)\langle 0|T\left[\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]_2 \cdot\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)|0\rangle, \tag{13-143}$$

$$C(x-y)=1+\frac{1}{2}\langle 0|T\varphi\cdot\left(\frac{x-y}{2}\right)\varphi\left(\frac{y-x}{2}\right)\bar{\varphi}(0)\bar{\varphi}(0)|0\rangle^F.$$

至每一级，$C(x)$的行为如同$\ln|x|$的多项式。例如，在最低级，$C(x)$正比于

$$C(x)\sim\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{iqx}\frac{1}{(q^2+m^2)^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}K_0(m|x|)$$
$$\sim\frac{1}{(2\pi)^3}\left[-\ln\frac{m|x|}{2}+O(m^2x^2)\right]. \tag{13-144}$$

人们可以改进上面的推导，以便给出 Wilson 展开中相继的项。我们将跳过这一冗长的任务，仅取其结果，集中研究系数C的重整化群的结果。由式(13-143)，这意味着分析特殊动量下的 Green 函数。

由上面的例子可以清楚地看到，$C(x)$在其微扰行为中可能包含次主导项。因此，我们要么采用原始的 Callan-Syman-

zik 的方法而具有零动量质量嵌入，要么采用 Weinberg 的质量无关的重整化条件的办法。为确定起见，我们采用第一种办法，并称 $C_0(x)$ 为 $C(x)$ 的渐近部分，$C(x)$ 可由丢掉微扰次主导项得到。我们想证明 $C_0(x)$ 满足方程

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+2\gamma_\varphi(g)-\gamma_\Delta(g)\right]C_0(x)=0. \tag{13-145}$$

联接函数遵从

$$\left\{x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z_a\frac{\partial}{\partial z_a}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+(n+2)[1+\gamma_\varphi(g)]\right\}\times G^{(n+2)}(x,y,z_a)=G_\Delta^{(n+2)}(x,y,z_a). \tag{13-146}$$

上面我们已把因子 $2[1+\delta(g)]$ 吸收到 Δ 的定义中去了。

当 $x\to y$ 时，我们代入 Wilson 展开并只保留主导项。在这个极限下，左边为

$$\left\{\left[(x-y)\frac{\partial}{\partial(x-y)}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+2\gamma_\varphi(g)-\gamma_\Delta(g)\right]\cdot C_0(x-y)\right\}G_{\varphi^2}^{(n)}\left(\frac{x+y}{2},z_a\right)$$
$$+C_0(x-y)\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z_a\frac{\partial}{\partial z_a}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+n+2+n\gamma_\varphi(g)+\gamma_\Delta(g)\right]G_{\varphi^2}^{(n)}\left(\frac{x+y}{2},z_a\right).$$

对 $G_{\varphi^2}^{(n)}$，Callan-Symanzik 方程

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+z_a\frac{\partial}{\partial z_a}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+n+2+n\gamma_\varphi(g)+\gamma_\Delta(g)\right]\cdot G_{\varphi^2}^{(n)}(x,z_a)=G_{\Delta\cdot\varphi^2}^{(n)}(x,z_a) \tag{13-147}$$

也成立. 只要当 $x \to y$ 时式(13-146)右端与 $C_0 G^{(n)}_{\Delta,\varphi^2}$ 相等，

$$G^{(n+2)}_{\Delta}(x, y, z_a) \xrightarrow[x \to y]{} C_0(x-y) G^{(n)}_{\Delta,\varphi^2}\left(\frac{x+y}{2}, z_a\right), \tag{13-148}$$

就会得出我们所要的结果.式(13-148)的成立，是前面所勾画的同样的分析的结果，只是这里推广了具有质量嵌入 Δ 的 Green 函数. Δ 是在对 $C(x-y)$ 作贡献的重整化部分 r 的外面，因为唯一具有两个 φ^2 嵌入的发散函数是真空到真空的振幅. 由此我们得出结论，式(13-148)是成立的. 这就证明了 $C_0(x)$ 遵从重整化群方程(13-145).

所有这些都可以推广到算符展开中相继的项. 回到一般的乘积 $A(x)B(y)$，我们看到，方程(13-132)必须修改为

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+d_A+\gamma_A(g)+d_B+\gamma_B(g)-d_{O_N}-\gamma_{O_N}(g)\right] C_N(x)=0, \tag{13-149}$$

其中 d_A, d_B, d_{O_N} 为算符的正则量纲，γ_A, γ_B, γ_{O_N} 为算符的反常量纲，且假定这些量都是可以被相乘性地重整的.

严格地说，式(13-145)和(13-149)只适用于欧氏区域. 只有 Feynman 的 $i\varepsilon$ 保持有限时它们才适用于 Minkowski 情形. 真正的 Minkowski 极限，正如 e^+e^- 湮灭所暗示的，需要对大动量下可能的振荡作细致的讨论.

Wilson 展开只是在弱的意义上建立的. 例如，它对于 n 个基本场 φ 和算符 A, B 的每一个函数 $G^{(n)}_{AB}$ 都是成立的. 但不能保证式(13-131)简单地用到别的包含额外的复合算符的 Green 函数上去. 例如，

$$\lim_{x \to y}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)\varphi^4(z)|0\rangle \neq C(x-y)\langle 0|T\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi^4(z)|0\rangle.$$

在这种情况下，由于整体函数是原始发散的，对小距离行为的贡献除了两个场 φ 的贡献而产生的系数 $C(x-y)$ 之外，还有新的贡献. 我们还

必须考虑整个图形的减除，它将附加一个与 x 无关的新的函数 $\tilde{C}(x-y)$：

$$\lim_{x\to y}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)\varphi^2(x)|0\rangle$$
$$= C(x-y)\langle 0|T\varphi^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi^2(x)|0\rangle + \tilde{C}(x-y). \tag{13-150}$$

由展开所得的结论依赖于非微扰的存在或紫外固定点的不存在。如果这种固定点存在，我们回到修改了的量纲分析结果，即

$$C_N(x) \sim |x|^{d_{O_N}+\gamma_{O_N}(g_\infty)-d_A-\gamma_A(g_\infty)-d_B-\gamma_B(g_\infty)}. \tag{13-151}$$

在一个渐近自由理论中，函数 $\gamma(g)$ 是 g^2 的量级，我们可象在 13-3 节中一样写下

$$\beta(g) = -bg^3 + \cdots,$$
$$\gamma(g) = cg^2 + \cdots. \tag{13-152}$$

将式 (13-149) 积分得

$$C_N(x) \sim |x|^{d_{O_N}-d_A-d_N}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{(C_A+C_B-C_{O_N})/2b}, \tag{13-153}$$

因而得到与正则无标度性的对数偏离。

要想把上述技术用于具体例子，我们必须指明有关的算符，研究它们的守恒定律，并把分析推广到类光间隔上去。

13-5-2 主导算符和次主导算符，算符混合和守恒定律

在乘积 $\varphi(x)\varphi(y)$ 的简单例子中，展开式的算符 O_N 是场及其微商的定域单项式，并且与对称性一致。例如，在 $\varphi\to-\varphi$ 保持不变的理论中，次主导项是正则量纲为四的项，并可以写成

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$= C_2(x)\varphi^2(0) + C_4^{(1)}(x)(\partial\varphi)^2(0)$$
$$+ C_4^{(2)}(x)\varphi\Box\varphi(0) + C_4^{(3)}(x)\varphi^4(0) + \cdots, \tag{13-154}$$

这里记号 $C_2(x)$ 代表前面所给的 $C(x)$. 算符的数目随着正则量纲的增加而增加. 即使是处理第一个次主导项，新的困难也会产生. 我们记得，重整化使具有相同的正则量纲和量子数的算符混合. 而且，重整化并不是严格的相乘性的，因为量纲为 d 的算符的嵌入必须引入量纲等于或小于 d 的抵消项. 要处理 $C_4^{(j)}(x)$ 中产生的对 $C_2(x)$ 的 m^2x^2 修正，就需要引入特殊的约定. 在无质量的理论中，这类问题不存在，我们只需处理这些算符的相乘性的矩阵重整化. 因此，$C_N^{(j)}$ 的主导行为由下面的方程给出:

$$\left\{\left[x\frac{\partial}{\partial x} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + d_A + \gamma_A(g) + d_B + \gamma_B(g) \right.\right.$$
$$\left.\left. - d_N\right]\delta^{ij} - (\gamma_N^T)^{ij}(g)\right\} C_N^{(j)}(x) = 0, \tag{13-155}$$

其中 $(\gamma_N^T)^{ij}(g) = \gamma_N^{ji}(g)$ 为由于重整化而混合了的算符 $O_N^{(j)}$ 的反常量纲矩阵的转置[见(13-75)式]. 在紫外固定点 g_∞ 的情况下，$\gamma_N^{ij}(g)$ 的对角化将给出观察到的反常量纲. 类似的对角化对矩阵 C^{ij} 也是需要的，这里 C^{ij} 是渐近自由理论中式(13-152)的常数 C 的推广.

由于特殊的动力学框架，算符 O_N 之间可能存在某些联系. 运动方程就是这种例子.

正规化了的 φ^4 理论的裸联接 Green 函数在欧氏空间满足运动方程

$$\left[(-\Box + m_0^2)_A\frac{\delta}{\delta j(x)} + \frac{g_0}{3!}\frac{\delta^3}{\delta j(x)^3} - j(x)\right] e^{G_B(j)} = 0, \tag{13-156}$$

其中 $(-\Box + m_0^2)_A$ 为正规化了的传播子的逆. 对 $j(y)$ 取微商且令 $x\to y$，我们获得转移到正规函数上的恒等式

$$\Gamma_{\varphi(-\Box+m_0^2)_A\varphi(x),b}+\frac{g_0}{3!}\Gamma_{\varphi^4(x),b}=\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\Gamma_b. \quad (13\text{-}157)$$

这个关系的重整化形式把量纲为 2 和 4 的算符混合起来. 因此，存在函数 $a_i(g)$和$b(g)$，使得

$$a_1(g)\Gamma^{(n)}_{\varphi\Box\varphi}(q;p_a)+a_2(g)\Gamma^{(n)}_{\varphi^2}(q;p_a)+a_3(g)\Gamma^{(n)}_{(\partial\varphi)^2}(q;p_a)$$

$$+b(g)\Gamma^{(n)}_{m^2\varphi^2}(q;p_a)=\sum_{a=1}^{n}\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_a+q,\cdots,p_n). \quad (13\text{-}158)$$

在无质量理论中，给出主导行为时，正比于 b 的贡献为零. 从与式(13-158)两边有关的 Callan-Symanzik 方程我们得出结论，属于量纲为 4 的算符的矩阵元 τ^{ij} 必然有一个零本征值.

类似的现象也发生在当算符 O_N 之一(或 O_N 的一个组合)是一个连续对称的生成元、守恒流、能动量张量，等等的时候. 相应的反常量纲为零. 在电动力学中我们已经遇到过这种情况，结果是，对不变荷，方程(13-28)中出现了一个唯一的 β 系数. 在 σ 模型中，当对称性被软破缺时，即被拉氏量中量纲 $d<4$ 的项破缺时，我们将遇到更普遍的情形. 我们记得，Symanzik 的结果表明，量纲高于 d 的抵消项有可能保持对称. 特别是波函数的重整化是对称的.

在这种情况下，令 J_0^μ 为裸流(量纲为 3)，D_0 为其散度. 后者量纲小于 4 是基于如下的假设[见式 (11-3)]:

$$\partial_\mu J_0^\mu=D_0, \quad (13\text{-}159)$$

$$\delta(x^0-y^0)[J_0^0(x),\varphi_0(y)]=\tau\varphi_0(x)\delta^4(x-y),$$

其中 φ_0 为裸场，是内部空间的矢量，而 τ 是生成元的矩阵表示. Ward 恒等式

$$\partial_\mu^x\langle 0|TJ_0^\mu(x)\varphi_0(y_1)\cdots\varphi_0(y_n)|0\rangle$$

$$=\langle 0|TD_0(x)\varphi_0(y_1)\cdots\varphi_0(y_n)|0\rangle$$

$$+\sum_{a=1}^{n}\langle 0|T\varphi_0(y_1)\cdots\tau\varphi_0(y_a)\cdots\varphi_0$$

$$(y_n)|0\rangle\delta^4(x-y_a). \tag{13-160}$$

在没有反常时重整化后的形式变为

$$\begin{aligned} &Z_J^{-1}Z^{n/2}\partial_x^\mu\langle 0|TJ_\mu(x)\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)|0\rangle \\ &\quad - Z_D^{-1}Z^{n/2}\langle 0|TD(x)\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)|0\rangle \\ &\quad + Z^{n/2}\sum_{a=1}^{n}\langle 0|T\varphi(y_1)\cdots\tau\varphi(y_a)\cdots\varphi \\ &\quad (y_n)|0\rangle\delta^4(x-y_a), \end{aligned} \tag{13-161}$$

在写下式(13-161)时我们已经考虑了波函数重整化是对称的,即不依赖于φ的分量. 因为重整化了的函数是有限的,因而$Z_J=Z_D$是有限的,并且与式(13-159)协调一致的适当的归一化给出

$$Z_J=Z_D=1. \tag{13-162}$$

因此,严格的或软的破缺对称对应于

$$\gamma_J=\gamma_D=0 \tag{13-163}$$

的流. 要想使散度D的量纲小于4,它必须包含对理论中的质量参量的明显依赖. 例如,在一个费米子的理论中,手征不变性被量纲为3的质量项所破坏,轴矢流守恒被软破缺. 在没有反常的情况下

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)=2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \tag{13-164}$$

采用与质量无关的重整化,m依赖于膨胀因子λ,如同在式(13-96)中一样. 令γ_m为算符$\bar{\psi}\psi$的反常量纲. 由式(13-163)我们将有

$$\begin{aligned} &\left\{-q\frac{\partial}{\partial q}-p_a\frac{\partial}{\partial p_a}+\gamma_m(g)m\frac{\partial}{\partial m}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right. \\ &\quad \left.+4+\gamma_m(g)-\sum_1^n[d_a+\gamma_a(g)]\right\}\Gamma^{\langle\bar{\psi}\gamma^5\psi\rangle}(q;p_a) \\ &=0. \end{aligned} \tag{13-165}$$

对m的明显的依赖已经贡献了额外的项γ_m,这被解释为

$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 的反常量纲，因而与 $\bar{\psi}\psi$ 的反常量纲相同：

$$\gamma_{i\bar{\psi}\gamma^5\psi} = \gamma_{\bar{\psi}\psi}.$$

这个结果并不奇怪，因为两种反常量纲都可在手征极限下计算出来，而此时两者显然是重合的。

让我们把这些想法用到强子对称性，以及这种对称性与非轻子弱相互作用等效拉氏量的关系上去。

考虑一个强、弱、电磁相互作用模型，它是基于乘积群 $G_S \otimes G_W$ 的规范理论，并且是按第十二章末勾画的方法构造的。群 G_S 将为典型的色群［如 $SU(3)$］，G_W 将被自发破缺到电荷的 $U(1)_Q$ 相因子群。



图 13-15　对等效非轻子拉氏量的最低阶贡献。
(a) 规范玻色子；(b) Higgs 介子；(c) 蝌蚪项。

保留 α 零次项，并且 $G_F \sim \alpha / M_W^2$，强作用拉氏量为

$$\mathscr{L}_S = i\bar{\psi}\mathcal{D}_S\psi - \bar{\psi}M\psi - \frac{1}{4}F_{S,\mu\nu}F_S^{\mu\nu},$$

这里 M 是一质量矩阵，它的起源可能部分地或全部地与 G_W 的破缺有关。Weinberg 已经证明，适当地重新定义场，总可以将 M 简化成没有 γ_5 的实对角形式，并且保持动能项不变。换句话说，保留 α 零次项，宇称和奇异量子数自然地是守恒的，而同位旋对称要求 d 和 u 夸克质量相等即 $M_u = M_d$ 的附加假设。让我们证明宇称和奇异数在 α 量级上不被破坏，但在 $G_F \sim \alpha / M_W^2$ 量级上被破坏。

为了证明这一点，我们引入非轻子弱作用的等效拉氏量，它是由最低阶交换计算出来的(图 13-15)：

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -g_W^2 \int d^4x \Delta^{\mu\nu}(x, m^2) \langle T J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \rangle + \mathscr{L}_{(b)} + \mathscr{L}_{(c)}. \tag{13-166}$$

我们只写出了第一项，它相应于规范玻色子。其余两项表示 Higgs 介子交换 $\mathscr{L}_{(b)}$ 和导致质量矩阵 M 重整化的 Higgs 介子真空期望值。我们

预期 Higgs 玻色子的贡献至少为 $\alpha(m^2/m_W^2)$ 的量级，其中 m 为典型的强子质量.

至于第一项，除零质量的光子的贡献外，其余的与重 W 和 Z 介子传播有关的部分，可以用两个流乘积的小距离展开来分析. 量级为 $\alpha\sim g_W^2$ 的主导项导致质量矩阵附加的重整化，而次主导项包含因子 $\alpha/M_W^2\sim G$，矩阵 $M+\delta M$ 仍然可能简化为实对角形. 简言之，在 α 级，宇称和奇异数仍自然地被保持了. 对同位旋不变性情况就不同了. 但甚至到今天，以绝对的方法预言电磁质量差的尝试仍然没有取得任何真正的成功.

同样的小距离展开可用来理解非轻子弱跃迁中观察到的动力学选择规则，例如 $\Delta I=1/2$ 和 $|\Delta S|=1$ 规则. 主导贡献来自与四费米子有关的量纲为 6 的算符. 的确，量纲为 3 的算符的贡献只是使质量矩阵重新定义，而量纲为 4 的算符的贡献则可被吸收到波函数重整化中去. Gaillard, 和 Lee, Altarelli 和 Maiani 四人所做的计算给出，$\Delta I=1/2$ 的跃迁比 $\Delta I=3/2$ 的跃迁增强一对数因子 $[\ln(m_W^2/m^2)]^\gamma$，其量级根据不同的模型分别为 5～7，而观测到的增强因子的量级为 20. 讨论这类过程的困难，在于缺少一个对有关算符矩阵元的绝对归一化.

13-5-3 光锥展开

为了分析对深度非弹现象的部分子模型的修正，我们必须将小距离展开加以推广. 正如式 (13-112) 所给出的，到类光间隔的推广可由自由场的情况来预言. 略去流所带的指标，我们要证明一个渐近级数

$$J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\underset{x^2\to 0}{\sim}\sum_{N,\alpha}C_{N,\alpha}(x^2)x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_n}O_{N,\alpha}^{\mu_1\cdots\mu_n}(0) \tag{13-167}$$

的适用性，其中算符 $O_N^{\mu_1\cdots\mu_n}$ 对 Lorentz 指标是对称的和无迹的. 在微扰的意义上并准至对数因子，我们期望系数 $C_{N,\alpha}(x^2)$ 按下式与标度无关:

$$C_{N,\alpha}(x^2)\underset{x^2\to 0}{\sim}(x^2)^{(d_{O_{N,\alpha}}-N-2d_J)/2}, \tag{13-168}$$

其中 d_J 是 J 的正则量纲.

与以前的情况相反，有无穷多项对光锥附近的行为，特别是主导行为，做出贡献. 这些项是按 Gross 和 Treiman 定名的扭曲度（twist）来分类的. 扭曲度是指算符的量纲与其自旋之差

$$\Delta = d^{O}_{N,a} - N. \tag{13-169}$$

严格说来，自旋表征相应的齐次 Lorentz 群的表示. 需要无穷多项是件好事，因为流乘积的矩阵元必须给出标度无关的函数 $F(x)$. 要知道这样一个函数等价于知道一无穷系列的数字，例如它的矩. 当轻子-强子碰撞的结构函数被描写为 Compton 振幅的吸收部分时，整数 N 将是 t 道交换自旋的上限.

带头贡献来自最低扭曲度算符. 对具有自旋 1/2 的费米子、标量和规范玻色子的理论，这个值对电磁流的对角矩阵元来说是 2. 这些算符是场的双线型，但可差一协变微商. 它们可写成

$$\begin{aligned} &i^N\varphi^*\overleftrightarrow{D}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_N}\varphi, \\ &i^{N-1}\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\overleftrightarrow{D}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_N}\psi, \\ &i^{N-1}F_{\mu_1\rho}\overleftrightarrow{D}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_{N-1}}F^{\nu}_{\mu_N}. \end{aligned} \tag{13-170}$$

上面暗含了对称化和去迹运算. 在这个表示中我们只列了“物理”场. 关于规范理论的一些特别的微妙之处可参看后面的评注.

为证明式 (13-167)，我们把它与小距离展开联系起来. 办法是投影出交叉 Compton 振幅给定的自旋交换. 这个量只依赖于虚光子动量的平方 q^2，并且在 $-q^2 \to \infty$ 时由 Wilson 展开中相应的自旋和扭曲度为 2 的算符所主宰. 这可给出结构函数的矩的确定的信息.

为节省篇幅，我们继续忽略流的矢量特性和相继的结构

函数的张量分析. 因此,我们假托是在处理标量振幅

$$A(q^2, \nu) = i\int d^4x e^{iqx}\langle p|TJ\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)|p\rangle.$$

(13-171)

对有限的 q^2, ν, 它可以在变量 $z = i\nu/m\sqrt{-q^2}$ 的正交多项式基上展开, z 的作用相当于四矢量 p 和 q 夹角的余弦. 这些多项式对测度 $dz\sqrt{1-z^2}$ 是正交的,并且把与 $O(3)$ 不变性有关的 Legendre 多项式推广到 $O(4)$. 对这一投影的详细讨论和由结构函数的正定性产生的限制,可参看 Nachtmann 的工作(见注记). 这里我们将满足于简化的叙述.

将式 (13-167) 代入定义式 (13-171), 我们得

$$A(q^2, \nu) = i\int d^4x e^{iqx}\sum_{N,\alpha}C_{N,\alpha}(x^2 - i\varepsilon)$$
$$\times x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_N}\langle p|O^{\mu_1\cdots\mu_N}_{N,\alpha}|p\rangle.$$

我们已经注意到, x 空间的解析性给变量 x^2 一个无穷小的负虚部. 定义

$$\langle p|O^{\mu_1\cdots\mu_N}_{N,\alpha}|p\rangle = a_{N,\alpha}(p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_N} + \text{迹项}),$$

$$\tilde{C}_{N,\alpha}(q^2) = i\left(-iq^2\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^N\int d^4x e^{iqx}C_{N,\alpha}(x^2 - i\varepsilon).$$

(13-172)

利用上式, $A(q^2, \nu)$ 的主导项由下式给出:

$$A(q^2, \nu) \simeq \sum_{N\alpha}\left(\frac{2p\cdot q}{-q^2}\right)^N a_{N,\alpha}\tilde{C}_{N,\alpha}(q^2). \quad (13\text{-}173)$$

算符 $O_{N,\alpha}$ 的贡献与 A 的 Taylor 级数的系数有关, 这个级数是以无标度变量 $\omega = x^{-1} = 2p\cdot q/-q^2$ 的幂次形式出现的, 而实验测量的是 $\omega > 1$ 时 A 的吸收部分. 因此, 为了用小距离展开来研究大的负 q^2 下的 $\tilde{C}_{N,\alpha}(q^2)$, 必须将 ω^N 的系数分离出来. 在这一讨论中,变量 ω 比它的倒数 x 更方便.

因 $\omega = 0$ 是在实验区之外,因而解析延拓是不可避免的.

这可以通过虚 Compton 振幅 A 的朝前色散关系表示出来，而把结构函数 $W(q^2, \nu)$ 做为不连续的。这个色散关系中的变量是能量 ν/m，或量 ω，ω 与 ν/m 在固定 q^2 时是一样的。为了定义 $\omega < -1$ 时的不连续性，必须利用交叉性质。在这里假想的标量情况下，$W(q, p) = -W(-q, p)$ 或 $W(q^2, -\omega) = -W(q^2, -\omega)$。在实际的矢量情况下，$W_{\mu\nu}(q, p) = -W_{\nu\mu}(-q, p)$，这意味着所有三个结构函数 W_1，W_2，W_3 可看成 ω 的奇函数。

我们还必须提供关于均匀的大的负 q^2 值下减除次数 k 的进一步信息。由 $\mathrm{Im}A = \pi W$，和系数依赖于 q^2 的 ω 的 $k-1$ 次多项式 P_{k-1}，我们有

$$A(q^2, \omega) = P_{k-1}(q^2, \omega) + \int_{|\omega'|>1} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^k W(q^2, \omega'). \quad (13\text{-}174)$$

在原点附近展开，也可得

$$A(q^2, \omega) = P_{k-1}(q^2, \omega) + \sum_{N \geq k} \omega^N \int_{|\omega'|>1} \frac{d\omega'}{\omega'^{N+1}} W(q^2, \omega'). \quad (13\text{-}175)$$

对 $N \geq k$，我们可得到结构函数的矩 $M_N(q^2)$ 与 Wilson 系数之间所希望的关系

$$M^{(N)}(q^2) = \int_{|\omega|>1} \frac{d\omega}{\omega^{N+1}} W(q^2, \omega) \underset{-q^2 \to \infty}{\sim} \sum_a a_{N,a} \tilde{C}_{N,a}(q^2). \quad (13\text{-}176)$$

对固定的 N，右手边的带头项对应于扭曲度为 2 的算符。W 的正定性条件导致矩对变量 N 的凸性 (Convexity properties)。N 越小，$M^{(N)}$ 对渐近区越敏感，因为对大的 N 我们主要检验 $\omega \sim 1$ 的区域。

按照各种假设，对大 q^2，我们有如下的可能性：

$$M^{(N)}(q^2) \sim \begin{cases} \text{常数} & \text{简单的无标度性，} \\ (-q^2)^{-\gamma_{O_N}(g_\infty)/2} & \text{非平庸固定点，} \\ [\ln(-q^2)]^{-c_{O_N}/2b} & \text{渐近自由} \end{cases} \quad (13\text{-}177)$$

实验似乎对最后一种情况有利.

读者可能想弄明白，倘若所有的 $\gamma_{O_N}(g_\infty)$ 为零，观察到的无标度性与存在一个非平庸固定点 g_∞ 是否不一致. 然而，这将意味着基本场的反常量纲本身也为零:

$$\gamma_{O_N}(g_\infty) = 0, \ \forall N \Rightarrow \gamma(g_\infty) = 0,$$

这与正定性一起使理论是自由的. 因此，我们剩下渐近自由做为唯一的可能性.

为了综观通常在这种情况下产生的特殊复杂性，我们简要地回到渐近自由所要求的规范理论上来. 物理上可观测的算符的乘积，因而规范不变量，在它们的小距离展开中可以涉及非物理算符，特别是鬼场. 这样的非物理算符出现在对 Green 函数的抵消项中，因而对计算物理的反常量纲而言是不可缺少的. 这些附加的算符是用第十二章发展的无嵌入 Green 函数的 Ward 恒等式方法来表征的. 式(12-163)的结果可用下面的方法加以推广. 利用这一章中同样的记号，量纲为 d 的规范不变的算符 O 产生量纲 $\leqslant d$ 且与算符 O 有相同量子数的抵消项，它们或是规范不变的，或形如 $\sigma O'$. 这一第二类算符在重整化时是稳定的，因为 $\sigma^2 = 0$. 因此，我们可以在形如 $\{O^i_{\text{inv.}}, \sigma O'^j\}$ 的基底上进行反常量纲的计算. 重整化矩阵则按块成上三角形. 只有在子空间 O^i_{inv} 中的子矩阵才进入规范不变的物理反常量纲的计算. 在有利的情况下，某些论证允许我们用直接计算这个子矩阵的方法来简化分析. 最后，规范不变的物理矩阵元和它们的反常量纲不依赖于规范参量. 因而式(13-74)中引入的 $\xi(\partial/\partial\lambda)$ 项可以丢掉.

作为结尾，我们把强作用规范理论用于轻子产生 (lepto-production) 所得的结果作一小结. 强作用的规范理论是由 Georgi, Politzer, Gross 和 Wilczek 首先提出的. 对于电子 (μ 子)产生过程，前面的分析可用于结构函数 mW_1, $\nu W_2/mx$

(一起用 $f_a(q^2, x)$ 表示)和它们的矩

$$M_a^{(N)}(q^2) = \int_0^1 dx x^{N-1} f_a(q^2, x). \qquad (13\text{-}178)$$

在这种情况下，式 (13-170) 中最后两组算符有贡献. 对固定的 N，我们不得不面对两类算符的混合问题. 由于我们处理的是渐近自由理论，简单无标度性为可计算的对数幂所破坏，

$$M^{(N)}(q^2) \sim \sum_a \tilde{a}_{N,a} (\ln -q^2)^{-A_{N,a}}, \qquad (13\text{-}179)$$

其中求和取遍重整化矩阵的本征矢量算符. 一般说来，式 (13-179) 中的系数 $\tilde{a}_{N,a}$ 仍然是未知的.

最低次矩 $N = 2$ 是最容易处理的. 它意味着反常量纲为零的守恒的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 和另外的次带头算符. 此外，质子态之间的 $T_{\mu\nu}$ 的对角矩阵元是知道的:

$$\langle p | T_{\mu\nu} | p \rangle = 2 p_\mu p_\nu.$$

这导致了下面的求和规则:

$$\lim_{-q^2 \to \infty} \int_0^1 dx x [2m W_1(q^2, x)]$$
$$= \lim_{-q^2 \to \infty} \int_0^1 dx \left[\frac{\nu W_2(q^2, x)}{m} \right] = a, \qquad (13\text{-}180)$$

其中 a 由费米子组元的均方电荷值 $\langle Q^2 \rangle$ 给出，

$$a = \langle Q^2 \rangle \frac{T_f}{2C_f + T_f} = \frac{\langle Q^2 \rangle}{1 + 2(N^2 - 1)/nf}. \qquad (13\text{-}181)$$

最后一个表达式适用于 $SU(N)$ 规范群的同一个 n 维表示的 f 种味的费米子多重态. 例如，对 $SU(3)$ 的三个三重态，其电荷分别为 $2/3, -1/3, -1/3$，a 的值为 $2/25$，对电荷分别为 $2/3, -1/3, -1/3, 2/3$ 的四个三重态，$a = 5/42 \sim 0.12$. 在自由的部分子模型中，按式 (13-110)，相应的值为 $a = \langle Q^2 \rangle$. 在渐近自由模型中，a 的减小是因为部分能动量为中性胶子所带走.

对$N \geqslant 4$，只保留最低反常量纲的本征算符是合理的近似．对大的N，A_N的行为与$\ln N$相同．

虽然由它们的矩来重新构造结构函数在没有进一步的信息时是没有希望的，但由正定性和式(13-179)所给出的行为还是可以导出某些结果的．例如，对任意的N，我们可以写成

$$f(q^2, x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} dy \left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} f(q^2, y)$$

$$< \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 dy \left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} f(q^2, y)$$

$$\leqslant \text{常数} \cdot \frac{1}{x^{N-1}} (\ln -q^2)^{-A_N}. \qquad (13\text{-}182)$$

因$N \to \infty$时$A_N \sim \ln N$，我们期望，对固定的x，f的减小将比$\ln(-q^2)$的任何次幂来得快．这种性质与式(13-180)的求和规则一起表明，当$-q^2$增加时，结构函数在$x = 0$的邻域必定增大．

矩的渐近区是缓慢地达到的，因为次主导项只是被$\ln[\ln(-q^2/\mu^2)]/\ln(-q^2/\mu^2)$量级的因子压低．这一压低来自对有效电荷的双圈图的贡献[式(13-90)]．接近的速率依赖于未知标度，在这一标度上有效电荷变小．而且，对有限的q^2，质量效应可能是相当可观的．

另一方面，矩是不容易从实验数据中获得的，因为它们涉及到在很高能量(小x)的测量，而且对任何有限的q^2，变量x变为$x' = x + O\left(\frac{1}{q^2}\right)$，这可能会以某种方式修改结果．

尽管有这些困难，理论与实验的比较似乎还是相当成功的．更方便的是用一个确定标度的单一参量A来重新写出等效耦合式(13-129)：

$$\frac{g^2(q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33-2f)\ln(-q^2/\lambda^2)}, \qquad (13\text{-}183)$$

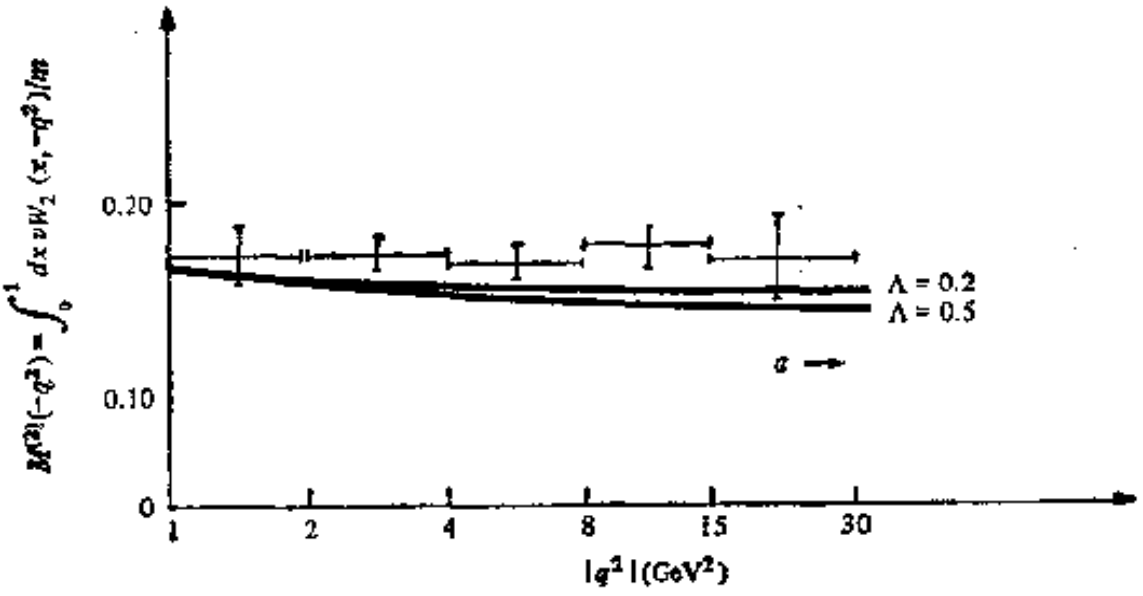


图 13-16 μ 产生过程结构函数的二次矩的理论预言与实验数据的比较. 实验取自 H. L. Anderson et al. *Phys. Lett.*, ser. **B**, Vol. 38, p. 1450, 1977.这个图和图 13-17 由 G. Altarelli 提供.

其中色群为 $SU(3)(C=3)$,且夸克三重态数为 f (味). 对 $f=4$, $\Lambda = 400\pm200$MeV 时得到最好的拟合，如 1977 年做的那样. 图 13-16 中将 μ 产生的矩 $M^{(2)}$ 的实验数据与理论预言进行了比较. 箭头表示式 (13-180) 的极限(当 $f=4$ 时 $a=0.12$). 对高次矩 (图 13-17)，只有比值 $M^{(N)}(q^2)/M^{(N)}(q_0^2)$ 可以与实验比较.

对非弹性中微子散射，类似的分析也可应用于弱流乘积 $(V_\mu - A_\mu)^{1+\beta}(x)(V_\nu - A_\nu)^{1-\beta}(0)$ 的用扭曲度为 2 的算符的光锥展开. 扭曲度为 2 的算符有:

$$\text{(a)}\ i^{N-1}\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\overleftrightarrow{D}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_N}(1\pm\gamma_5)\psi;$$

$$\text{(b)}\ i^{N-1}\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\overleftrightarrow{D}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_N}(1\pm\gamma_5)\frac{\lambda^a}{2}\psi; \qquad (13\text{-}184)$$

$$\text{(c)}\ i^{N-2}F_{\mu_1\nu}\overleftrightarrow{D}_{\mu_2}\cdots\overleftrightarrow{D}_{\mu_{N-1}}F^{\nu}_{\mu_N}.$$

还涉及到第三类结构函数 $f_3 = \nu W_3/m$ [见式 (13-106)]. 联合中微子和反中微子在质子和中子靶上的振幅，可以分离出具有给定量子数的特殊道. 例如，只有八重态算符的式 (13-184b) 与差 $W^{(\nu)} - W^{(\bar{\nu})}$ 有关.

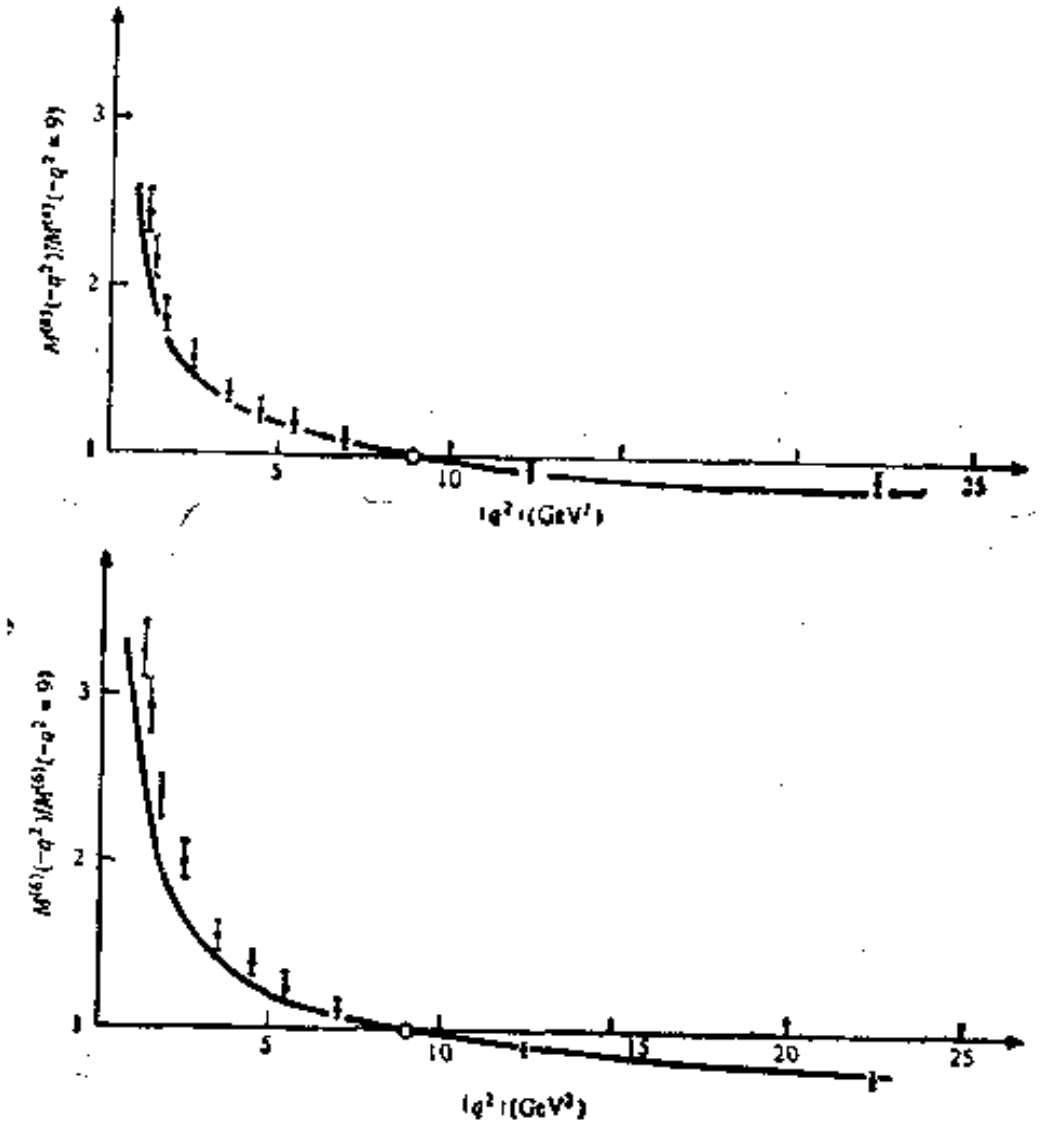


图 13-17 μ 产生过程的四次和六次矩，归一化是在 $-q^2 = 9\text{GeV}^2$ 进行的. 实验数据取自 Anderson et al. (Hambourg 会议上的报告，1977).

与规范群对易的强子对称性产生的求和规则继续有效. 因此，Adler 的求和规则式 (11-105) 对所有 q^2 都成立:

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega} \left(\nu W_2^{(\nu n)} - \nu W_2^{(\nu p)}\right) = 2m \qquad (13\text{-}185)$$

其它的求和规则都是渐近的，而且是对数地趋近的. Callan-

Gross 求和规则就是一例，可写成

$$\frac{\int_1^\infty (d\omega/\omega^{N+1})W_L(\omega,q^2)}{\int_1^\infty (d\omega/\omega^{N+1})\nu W_2(\omega,q^2)} \underset{-q^2\to\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{\ln -q^2}\right) \quad (13\text{-}186)$$

其中分子中的量 $W_L=\frac{2}{\omega}W_1-\nu W_2/m^2$ 在部分子模型中为零[式(13-109)]。

注记

关于重整化群的早期工作是由 E. C. G. Stueckelberg 和 A. Peterman (*Helv. Phys. Acta*, vol. 26, p. 499, 1953) 以及 M. Gell-Mann 和 F. E. Low (*Phys. Rev.*, vol. 95, p. 1300, 1954) 完成的。

M. Baker 和 K. Johnson (*Phys. Rev.*, vol. 183, p. 1292, 1969, 他们计算了对函数 Φ 的三阶贡献)以及 S. L. Adeler (*Phys. Rev.*, ser.**D**, vol. 5, P. 3021, 1972) 讨论了对量子电动力学的应用。L. D. Landau, A. A. Abrikosov, 和 I. M. Khalatnikov 研究了自洽问题 (*Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 95, p. 1177, 1954)。电动力学中的 β 函数准至三阶是由 E.de Rafaël 和 J. L. Rosner 给出的 [*Ann. of Phys.* (New York), vol. 82, p. 369, 1974]。

破缺标度不变情况下的 Ward 恒等式出现在 K. Symanzik (*Comm. Math. Phys.*, vol. 18, p. 227, 1970) 和 C. G. Callan (*Phys. Rev.*, ser. **D**, vol. 2, p. 1541, 1970) 的工作中。C. G. Callan, S. Coleman 和 R. Jackiw给出了膨胀流的早期讨论 [*Ann. of Phys.* (New York), vol. 59, p. 42, 1970]。S. Weinberg 给出了这些恒等式的推广形式 (*Phys. Rev.*, ser. **D**, vol. 8, p. 3497, 1973)。

D. J. Gross 和 F. Wilczek (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, p. 1343, 1973) 以及 H. D. Politzer (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, p. 1346, 1973) 完成了非阿贝尔规范场的 β 函数的单圈计算. W. E. Caswell (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 33, p. 244, 1974), D. R. T. Jones (*Nucl. Phys.*,ser. **B**, vol. 75, p. 531, 1974), 以及 A. A. Belavin 和 A. A. Migdal (*JETP Lett.*, vol. 19, p. 181, 1974) 给出了准至二阶的计算.

G. Parisi (*Nuov. Cim. Lett.*, vol.7, p. 84, 1973), 以及 C. G. Callan 和 D. J. Gross (*Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 8, p. 4383, 1973) 讨论了反常量纲正定性的后果.

S. Coleman 和 D. J. Gross 证明了渐近自由定理 (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 31, p. 851, 1973).

深度非弹性散射的评论，可参阅 F. Gilman 的报告 ("Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, London 1974", 由 Science Research Council, Rutherford Laboratory, Chilton, Didcot, U. K. 出版).

关于无穷大动量系中的部分子动力学，可参阅R. P. Feynman (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, p. 1415, 1969), J. D. Bjorken 和 E. A. Paschos (*Phys. Rev.*, vol. 185, p. 1975, 1969), 以及 S. D. Drell 和 T. M. Yan [*Ann. of Phys.* (New York), vol. 66, p. 578, 1971]. Y. Frishman 评述了唯象模型和光锥展开的关系 ("Proceedings of the Sixteenth Internutional Conference on High Energy Physics, Batavia", vol. 4, 编辑为 J. D. Jackson 和 A. Roberts, National Accelerator Laboratory, Batavia, *Ill.*, 1972). 这个问题的详细论述，可参阅 R. P. Feynman 的书 "Photon-Hadron Interactions", Benjamin, Reading, Mass., 1972.

小距离展开是 K. Wilson 提出的 (*Phys. Rev.*, vol. 179,

p. 1499, 1969, 和 *Phys. Rev.* ser. **D**, vol. 3, p. 1818, 1971)。详细的研究是由 W. Zimmermann 完成的 [*Ann. of Phys.* (New York), vol. 77, p. 536 和 570, 1973]。

对弱相互作用中选择规则的应用可在 S. Weinberg 的工作中找到 (*Phys. Rev. Lett.*, vol 31, p. 494, 1973, *Phys. Rev.*, ser. **D**, vol. 8, p. 4482, 1974, 和 *Rev. Mod. Phys.*, vol. 46, p. 255, 1974)。关于非轻子衰变中 $\Delta I = 1/2$ 的规则,可参阅 M. K. Gaillard 和 B. W. Lee (*Phys. Rev. Lett.*, vol. 33, p. 108, 1974), 以及 G. Altarelli 和 L. Maiani (*Phys. Lett.*, ser. **B**, vol. 52, p. 351, 1974)。

将 Wilson 展开扩充到光锥无穷求和,是由 R. A. Brandt 和 G. Preparata 完成的(*Nucl. Phys.*, ser. **B**, vol. 27, p. 541, 1971)。O. Nachtmann 讨论了群论方面的问题和正定性约束。(Nucl. Phys., Ser. B, Vol. 63, p. 237, 1973) J. A. Dixon (*Nucl. Phys.*, ser. **B**, vol. 99, p.420, 1975), H. Kluberg-Stern 和 J. B. Zuber (*Phys. Rev.*, ser. **D**, vol. 12, p. 3159, 1975),以及 B. W. Lee 和 S. Joglekar [*Ann. of Phys.* (New York), vol. 97, p. 160, 1976] 研究了规范不变性问题。

H. Georgi 和 H. D. Politzer (*Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 9, p. 416, 1974), 以及 D. J.Gross 和 F. Wilczek (*Phys. Rev.*, ser. **D**, Vol. 9, p. 920, 1974) 考虑了渐近自由理论对深度非弹结构函数的矩的应用。

对这个很不完全的目录我们还应当补充上以下的评述和讲演,它们对于准备这一章是最有用的: S. Coleman "Properties of the Fundamental Interactions", A. Zichichi 编辑, Editrice Compositori, Bologna, 1973; R. J. Crewther "Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies, Cargése 1975", M. Lévy, J. L. Basdevant, D. Speiser, 和 R.

Gastmans 编辑，Plenum Press, New York 1976; C. G. Callan 和 D. J. Gross "Methods in Field Theory", R. Balian 和 J. Zinn-Justin 编辑，North-Holland, Amsterdam, 1976; 和 H. D. Politzer, *Phys. Rep.*, vol. 14, p. 129, 1974.

E. Brézin, J. C. Le Guillou 和 J. Zinn-Justin ("Phase Transitions and Critical Phenomena", vol. VI, C. Domb 和 M. S. Green 编辑，Academic Press, New York, 1977)，和 D. Amit (教科书 "Field Theory, the Renormalizition Group, and Critical Phenomena", McGraw-Hill New York, 1978) 讨论了渐近自由场论对临界现象的联系和应用.

附　录

A-1 度　规

度规张量：

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A-1}$$

对逆变坐标（x^{μ}）或协变坐标（x_{μ}）的微商有时简写为

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad \partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}. \tag{A-2}$$

重复的 Lorentz 指标（希腊字母）或空间指标(拉丁字母)，除明显地声明外都理解为求和：

$$\begin{aligned} V \cdot W &= V_{\mu} W^{\mu} = V^{\mu} W_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} \\ &= g^{\mu\nu} V_{\mu} W_{\nu} = V^0 W^0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \\ &= V^0 W^0 - V^i W^i. \end{aligned} \tag{A-3}$$

粗体字母表示三维矢量或逆变四维矢量的三维部分：

$$\mathbf{V} = \{V^i, i = 1, 2, 3\} = \{V_x, V_y, V_z\}, \tag{A-4}$$

唯一的例外是三维梯度

$$\begin{aligned} \nabla &= \{\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z\} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i\right) \\ &= \left(-\partial^i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \tag{A-5}$$

达郎贝尔算符为

$$\Box = \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \partial_0^2 - \nabla^2, \tag{A-6}$$

并且四维动量算符为

$$p^{\mu} = i\partial^{\mu} = \{i\partial^0, -i\nabla\}. \tag{A-7}$$

全反对称 Levi-Civita 张量：

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{如果 } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ 为 } \{0, 1, 2, 3\} \text{ 的偶置换，} \\ -1 & \text{如果为奇置换，} \\ 0 & \text{其它情况，} \end{cases} \tag{A-8}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{A-9}$$

有用的恒等式:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}) \quad \alpha = \mu, \nu, \rho, \sigma, \\
&\qquad\qquad \alpha' = \mu', \nu', \rho', \sigma', \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu}^{\ \nu'\rho'\sigma'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}) \quad \alpha = \nu, \rho, \sigma, \\
&\qquad\qquad \alpha' = \nu', \rho', \sigma', \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu}^{\ \ \rho'\sigma'} &= -2(g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'} - g^{\rho\sigma'}g^{\sigma'\sigma}), \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho}^{\ \ \ \sigma'} &= -6g^{\sigma\sigma'}, \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24.
\end{aligned} \tag{A-10}$$

三维反对称张量:

$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = 1$,如果 (i, j, k) 是 $(1, 2, 3)$ 的偶置换.

A-2 Dirac 矩阵和旋量

γ 矩阵满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{A-11}$$

其中 γ^0 是厄米的,γ^i 是反厄米的,它们与 β 和 α 矩阵的关系为

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma = \beta\alpha, \tag{A-12}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5 = \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \\
&= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \gamma_5^\dagger,
\end{aligned} \tag{A-13}$$

$$\gamma_5^2 = 1,$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{A-14}$$

γ 矩阵的对易子:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{A-15}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu},$$

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \tag{A-16}$$

$$\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma},$$

$$\gamma_5\gamma^0\gamma = \Sigma \text{ 其中 } \Sigma^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}. \tag{A-17}$$

厄米共轭:

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger},$$
$$\gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5,$$
$$\gamma^0(\gamma_5\gamma^\mu)\gamma^0 = (\gamma_5\gamma^\mu)^\dagger, \tag{A-18}$$
$$\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger.$$

对任意两个旋量 ψ_1, ψ_2 和任意 4×4 矩阵 Γ,

$$(\bar{\psi}_1\Gamma\psi_1)^* = \bar{\psi}_2(\gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0)\psi_1, \tag{A-19}$$

而对两个自旋 1/2 的反对易的场，其相应的恒等式要多一个附加的负号.

电荷共轭矩阵:

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T,$$
$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T,$$
$$C\sigma_{\mu\nu}C^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^T,$$
$$C(\gamma_5\gamma_\mu)C^{-1} = (\gamma_5\gamma_\mu)^T. \tag{A-20}$$

Pauli 矩阵:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A-21}$$

Dirac 表象:

$$\gamma^0 = \beta = \sigma^3\otimes I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$
$$\alpha = \sigma^1\otimes\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \beta\alpha = i\sigma^2\otimes\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \sigma^1\otimes I,$$
$$\gamma^5\gamma^0 = -i\sigma^2\otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{A-22}$$
$$\gamma^5\gamma = -\sigma^3\otimes\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$
$$\gamma^5\gamma^0\gamma = \Sigma = I\otimes\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{0i} = i\sigma^1 \otimes \sigma^i = i\alpha^i = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} I \otimes \sigma^k = \varepsilon_{ijk}\Sigma^k = \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.$$

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -i\sigma^1 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^T = C^\dagger = -C \quad CC^\dagger = C^\dagger C = I \quad C^2 = -I. \tag{A-23}$$

Majorana 表象:

$$\gamma^0 = \beta = \sigma^1 \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^1 = -\sigma^1 \otimes \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^2 = \sigma^3 \otimes I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$\alpha^3 = -\sigma^1 \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A-24}$$

$$\gamma^1 = iI \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = -i\sigma^2 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = -iI \otimes \sigma^1 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \sigma^3 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix},$$

$$C = -i\sigma^1 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

也满足式 (A-23). 与 Dirac 表象的关系为

$$\gamma^\mu_{\text{Majorana}} = U\gamma^\mu_{\text{Dirac}}U^\dagger, \text{其中} \quad U = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix}.$$

手征表象为

$$\gamma^0 = \beta = -\sigma^1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \sigma^3 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix},$$

$$\gamma = i\sigma^2 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \text{(A-25)}$$

$$C = -i\sigma^3 \otimes \sigma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \text{满足式 (A-23)},$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}.$$

与 Dirac 表象的关系:

$$\gamma^\mu_{\text{Chiral}} = U\gamma^\mu_{\text{Dirac}} U^\dagger, \text{ 其中 } U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_5\gamma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \qquad \text{(A-26)}$$

缩并指标:

$$\begin{gathered} a\!\!\!/ b\!\!\!/ = a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \\ \gamma^\lambda \gamma_\lambda = 4, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda = -2\gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda = 4g^{\mu\nu}, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\lambda = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu, \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\lambda = 2(\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma), \\ \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma_\lambda = 0, \\ \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\lambda = 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu}. \end{gathered} \qquad \text{(A-27)}$$

迹:

$$\begin{gathered} \mathrm{tr} I = 4, \\ \mathrm{tr}\gamma^\mu = 0, \\ \mathrm{tr}\gamma^5 = 0. \end{gathered} \qquad \text{(A-28)}$$

奇数个 γ 矩阵乘积的迹等于零:

$$\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu) = 0,$$
$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4d^{\mu\nu},$$
$$\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0,$$
$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0, \tag{A-29}$$
$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}),$$
$$\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},$$
$$\mathrm{tr}(a_1a_2\cdots a_{2n}) = \mathrm{tr}(a_{2n}\cdots a_2a_1),$$
$$\mathrm{tr}(a_1\cdots a_{2n}) = a_1\cdot a_2\mathrm{tr}(a_3\cdots a_{2n}) - a_1\cdot a_3\mathrm{tr}(a_2a_4\cdots a_{2n}) + \cdots + a_1\cdot a_{2n}\mathrm{tr}(a_2\cdots a_{2n-1})$$
$$= 4\Sigma\delta(a_{i_1}\cdot a_{j_1})\cdots(a_{i_n}\cdot a_{j_n}), \tag{A-30}$$

δ 是表征不同置换 $i_1i_1\cdots i_ni_n$ 的信号，并且求和跑遍 $(2n)!/2^nn!$ 个不同的对儿，并且满足 $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_n$; $i_k < j_k$。

Dirac 方程

$$(\not{p} - m)u^{(\alpha)}(p) = 0,$$
$$(\not{p} + m)v^{(\alpha)}(p) = 0 \tag{A-31}$$

的解，Dirac 旋量 u 和 v 是在质壳上的动量 p 的函数，其中 $p^0 = E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$，并且它们用极化指标 α 来编号 $\alpha = 1,2$。

共轭旋量：

$$\bar{u} = u^\dagger\gamma^0 \quad \bar{v} = v^\dagger\gamma^0, \tag{A-32}$$
$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)(\not{p} - m) = 0,$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)(\not{p} + m) = 0. \tag{A-33}$$

归一化：

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) = \delta^{\alpha\beta},$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p) = -\delta^{\alpha\beta}, \tag{A-34}$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p) = 0.$$

密度：

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^0u^{(\beta)}(p) = u^{\dagger(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p)$$
$$= \bar{u}^{(\alpha)}(\tilde{p})u^{(\beta)}(p) = \frac{E_p}{m}\delta^{\alpha\beta},$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)\gamma^0v^{(\beta)}(p) = v^{\dagger(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p)$$
$$= -\bar{v}^{(\alpha)}(\tilde{p})v^{(\beta)}(p) = \frac{E_p}{m}\delta^{\alpha\beta}, \tag{A-35}$$

$$\bar{p} = (p^0, \ -\mathbf{p}).$$

到正能态和负能态的投影算符:

$$\Lambda_+(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} = \sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(p),$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{m - \not{p}}{2m} = -\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(p). \qquad \text{(A-36)}$$

到沿类空矢量 n 方向 (n 与 p 正交, $n \cdot p = 0$) 有确定的极化态的投影算符:

$$u(p, n) \otimes \bar{u}(p, n) = \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2},$$

$$-v(p, n) \otimes \bar{v}(p, n) = \frac{m - \not{p}}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}. \qquad \text{(A-37)}$$

对螺旋态的评注见 2-2-1 节.

Gordon 恒等式:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m} \bar{u}^{(\alpha)}(p)[(p + q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p - q)_\nu]u^{(\beta)}(q),$$

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^\mu\gamma^5 u^{(\beta)}(q) = \frac{1}{2m} u^{(\alpha)}(p)[(p - q)^\mu\gamma^5 + i\sigma^{\mu\nu}(p + q)_\nu\gamma^5]u^{(\beta)}(q). \qquad \text{(A-38)}$$

特别是

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)qu^{(\beta)}(p) = \delta^{\alpha\beta} \frac{p \cdot q}{m},$$

$$u^{(\alpha)\dagger}(p)\alpha u^{(\beta)}(p) = \delta^{\alpha\beta} \frac{p}{m}. \qquad \text{(A-39)}$$

A-3 态的归一化、S 矩阵、么正性和截面

单玻色子态的归一化:

$$\langle p | p' \rangle = 2\omega_p(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \qquad \text{(A-40)}$$

其中 $\omega_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, 并且省去了极化指标.

单费米子态:

$$\langle p|p'\rangle = \frac{\omega_p}{m}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{A-41}$$

(对无质量的费米子，例如中微子，在中间计算阶段用式(A-40)形式的归一化条件更保险些)。

S 矩阵和不变散射振幅：

$$S = I + iT,$$

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\mathscr{T}_{fi}. \tag{A-42}$$

由不包含有质量的费米子的初态 $i=\{1,2\}$ 到末态 $f=\{3,4,\cdots,n\}$ 的散射微分截面

$$d\sigma = \frac{1}{4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2]^{1/2}}\frac{|\mathscr{T}_{fi}|^2}{S}d\tilde{p}_3\cdots d\tilde{p}_n(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f), \tag{A-43}$$

因子 S 为

$$S = \prod_i k_i!, \tag{A-44}$$

其中末态中有 k_i 个第 i 类全同粒子。测度 $d\tilde{p}$ 一般地表示成

$$d\tilde{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p}, \tag{A-45a}$$

但对有质量的费米子，上式应改为

$$d\tilde{p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega_p}. \tag{A-45b}$$

相应地，如果入射粒子 1 和(或) 2 是有质量的费米子，则表达式(A-43)必须乘以 $2m_1$ 和(或) $2m_2$。

公式(A-44)可能还必须补充以对初态极化平均和对末态极化求和。

质量为 M 的粒子衰变到粒子 3，4，……n 的衰变率 $d\Gamma = d(\tau^{-1})$，在它的静止坐标系中由方程(A-43)的右端给出，但通量因子 $1/4[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2]^{1/2}$ 需由 $1/2M$ 来取代。当存在费米子时，需要做上面讨论过的同样的修改。

非全同粒子两体散射 $1+2\to3+4$ 的微分截面

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s\mathbf{q}^2}|\mathscr{T}(s,t)|^2, \tag{A-46a}$$

或
$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \frac{|\mathbf{q}'|}{|\mathbf{q}|}\frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{T}(s,t)|^2, \tag{A-46b}$$

其中 $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ 为 Mandelstam 变量,

$$4\mathbf{q}^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{s} = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}{s},$$

$$4'\mathbf{q}'^2 = \frac{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}{s}, \tag{A-47}$$

为初、末态质心动量.

光学定理: 利用向前弹性散射振幅 $\mathcal{T}_{ii}(s, t = 0)$ 的虚部总截面 $i\to\cdots$ 可表示为

$$\sigma_{tot}(i) = \frac{\mathrm{Im}\mathcal{T}_{ii}(s, t = 0)}{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}. \tag{A-48}$$

对无自旋粒子,到分波振幅的分解为

$$\mathcal{T}_{fi}(s, t) = 16\pi\sum_l (2l + 1)P_l(\cos\theta)\mathcal{T}_{fi}^l(s), \tag{A-49}$$

其中

$$4|\mathbf{q}||\mathbf{q}'|\cos\theta = t - u + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s},$$

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

在非弹性阈以下,么正性导致

$$\mathcal{T}^l(s) = \frac{s^{1/2}}{2|\mathbf{q}|}e^{i\delta_l(s)}\sin\delta_l(s), \tag{A-50}$$

在第五章已讨论过推广到有自旋粒子的情形.

A-4 Feynman 规则

计算某个确定的 Green 函数或散射振幅的 Feynman 规则:

1. 在所要求的近似的阶,画出所有可能的、对所研究的过程有贡献的、拓扑上不同的图——联接的或不联接的但不能有真空——真空子图.

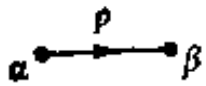
2. 对每个图的每条内线加上传播子:

对质量为 μ、自旋为 1 的玻色子和 Stueckelberg 规范,即拉氏量的动能

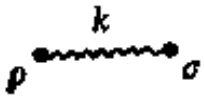


$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$ 对自旋为零的玻色子 (A-51)

$$\left(\frac{i}{p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha}$$ 对自旋为 1/2 的费米子 (A-52)



$$-i\left(\frac{g_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} + \frac{k_\rho k_\sigma/\mu^2}{k^2 - \mu^2/\lambda + i\varepsilon}\right)$$ (A-53a)



$$= -i\left[\frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} - \frac{(1 - \lambda^{-1})k_\rho k_\sigma}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(k^2 - \mu^2/\lambda + i\varepsilon)}\right]$$ (A-53b)

项为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 + \frac{\mu^2}{2}A^2.$$

3. 每个顶点都要加上一个权重，它是从相互作用拉氏量中有关的单项式中导出的. 这个权重包括: 由顶角上全同粒子的简并导致的因子;出现在 $i\mathscr{L}_{int}$ 中的耦合常数; 内部指标的可能的张量; 表示能量动量守恒的 δ 函数 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$. 与每个场的微商 $\partial_\mu\phi$ 相联系的是 $-ip_\mu$,其中 p 是相应的入射动量. 下面列出了最常用的理论的顶角.

4. 对所有具有测度 $d^4k/(2\pi)^4$ 的内部动量积分，也可正规化以后再积分.

5. 每个图的贡献乘以:

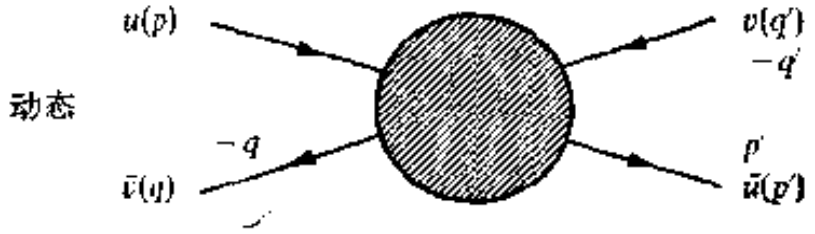
(a) 对称因子 $1/S$，其中 S 是内线和顶角的置换群的阶，此置换群在固定外线的情况下保持图形不变;

(b) 每个费米子圈有一因子 (-1);

(c) 与所讨论的问题中的 Green 函数的宗量比较，费米子外线的排列产生的整体的符号(见第六章).

这些规则得到在外线上无任何因子的截腿的函数. 只要回到联接图并把传播子式 (A-51) 至 (A-53) 放到外线上，我们就得到联接函数 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)G_c(p_1, \cdots, p_n)$. 对正规 Green 函数 $i(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\Gamma(p_1, \cdots, p_n)$ 的贡献来自单粒子不可约图. 最后，相差一重整化时，散射振幅 $i\mathscr{T}(2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)$可按前面的规则由下述方法得到: 把外线放到质壳上，即令 $p_i^2 = m_i^2$，根据费米子外线是进入还是离开图形和是属于初态

或末态分别代之以旋量 $u(p),v(q'),\bar{u}(p'),\bar{v}(q)(p=p'=m,q=q'=-m)$.



标准理论

(a) φ^4 理论:

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{\lambda\varphi^4}{4!},$$

传播子式 (A-51),

顶点 $-i\lambda(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$.

(b) 量子电动力学;

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2$$

$$-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2+\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-e\!\!\!/A-m)\psi,$$

光子传播子式 (A-53b) 且 $\mu^2=0$,

费米子传播子式 (A-52),

顶点 

$-ie(\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$.

(c) 标量电动力学:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2-\frac{\lambda}{2}(\partial\cdot A)^2$$

$$+[(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi]^\dagger[(\partial^\mu+ieA^\mu)\varphi]$$

$$-m^2\varphi^\dagger\varphi-\frac{g}{4}(\varphi^\dagger\varphi)^2,$$

光子传播子式 (A-53) 且 $\mu^2=0$,

标量传播子式 (A-51) 指向电荷流动方向,

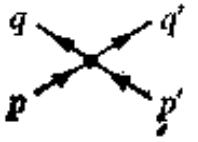
顶点:



$$-ie(p_\mu + p'_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k)$$



$$2ie^2 g_{\mu\nu}(2\pi)^4\delta^4(p - p' - k - k')$$



$$-ig(2\pi)^4\delta^4(p + p' - q - q')$$

(d) 非阿贝尔规范理论:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - gC_{abc}A_{\mu b}A_{\nu c})(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu$$

$$- gC_{abc}A_b^\mu A_c^\nu) - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_a^\mu)^2 - \bar{\eta}_a\partial_\mu(\partial^\mu\delta_{ac}$$

$$- gC_{abc}A_b^\mu)\eta_c + \bar{\psi}[i\gamma_\mu(\partial^\mu - gA_a^\mu T^a) - m]\psi$$

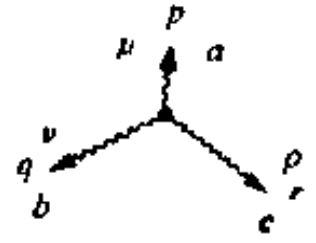
$$+ [(\partial^\mu - gA_a^\mu T^a)\phi]^\dagger[(\partial_\mu - gA_{\mu a}T_a)\phi] - m_\phi^2\phi^\dagger\phi.$$

矢量传播子如式 (A-53b) 且 $\mu^2 = 0$,

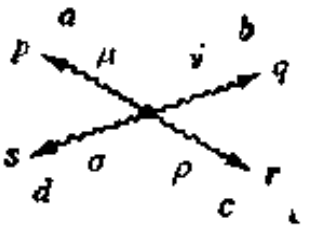
鬼场 η 传播子如式 (A-51),

每一鬼圈有一负号,

顶角:



$$gC_{abc}(2\pi)^4\delta^4(p + q + r)[g_{\mu\nu}(p - q)_\rho + g_{\nu\rho}(q - r)_\mu + g_{\rho\mu}(r - p)_\nu],$$



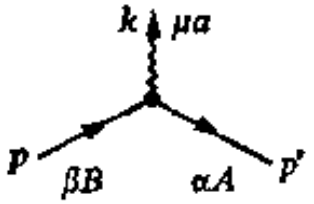
$$-ig^2(2\pi)^4\delta^4(p+q+r+s)[C_{eab}C_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + C_{eac}C_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + C_{ead}C_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})].$$

鬼场-矢量场顶角:



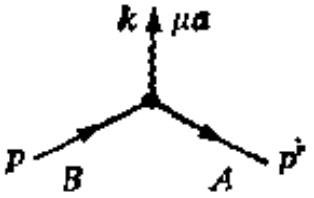
$$-gC_{abc}p_{\mu}(2\pi)^4\delta^4(k+p-q)。$$

费米场-矢量场顶角：

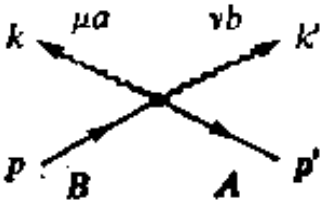


$$g(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}T^{a}_{AB}(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k)。$$

标量场-矢量场顶角：



$$gT^{a}_{AB}(p_{\mu}+p'_{\mu})(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k),$$



$$-ig^2g_{\mu\nu}\{T^a,T^b\}_{AB}(2\pi)^4\delta^4(p-p'-k-k')。$$

T^a 为反厄密的

封面 1
内封 2
内容简介 2
目录 4
第八章 重整化 12
8-1 正规化和幂次计数法 12
引言 12
正规化 14
幂次计数法 22
收敛性定理 26
8-2 重整化 30
归一化条件和抵消项的结构 30
Bogoliubov的递推公式 36
Zimmermann的明显解 40
参量空间的重整化 43
有限重整化 47
复合算符 49
8-3 零质量极限 渐进行为和Weinberg定理 53
无质量理论 53
紫外行为和Weinberg定理 57
8-4 量子电动力学情况 59
Ward-Takahashi等式的形式推导 60
保持到所有级的Pauli-Villars正规化 64
重整化 67
双圈真空极化 70
注记 83
第九章 泛函方法 86
9-1 路径积分 86
量子力学中经典作用量的作用 86
Bargmann-Fock空间中的轨迹 99
费米子体系 104
9-2 相对论描述 108
用路径积分来表示S矩阵和Green函数 109
有效作用量和最陡下降法 116
9-3 约束系统 126
一般讨论 126
以电磁场为例 133
9-4 高阶微扰论 136
引言 136
非谐振子 141
注记 149
第十章 积分方程和束缚态问题 152
10-1 Dyson-Schwinger方程 152
场方程 152
重整化 159
练习 160
10-2 相对论束缚态 160
齐次Bethe-Salpeter方程 161
Wick转动 165
在梯形近似下无质量标量粒子交换 168
10-3 正负电子偶素的超精细分裂 177
一般讨论 180
a^5级计算 187

注记 199
第十一章 对称性 201
11-1 对称性的量子实现 201
问题的叙述 201
基态行为 204
11-2 质量谱 多重性和Goldstone玻色子 206
Gell-Mann和Ne'eman的八重法模型 206
自发对称性破缺 214
11-3 流代数 222
流对易子 222
轴矢流近似守恒和手征对称性 233
低能定理和求和规则 235
11-4 sigma模型 241
模型的描述 241
重整化 245
11-5 反常 254
pi^0->2gamma衰变和流代数 254
sigma模型中的轴反常 256
一般性质 263
注记 269
第十二章 非阿贝尔规范场 272
12-1 经典理论 272
规范场A_mu和张量F_mu-v 272
经典动力学 279
经典运动方程的欧式解 282
规范不变形和约束条件 286
12-2 规范场的量子化 289
有约束的量子化 289
对规范群的积分 293
Feynman规则 299
12-3 单圈图近似下的等效作用量 303
一般形式 303
两点函数 306
其他函数 310
单圈重整化 314
12-4 重整化 315
Slavnov-Taylor恒等式 315
正规函数的恒等式 319
用递推法构造抵消项 322
Green函数的规范相关性 329
反常 330
12-5 有质量的规范场 332
历史背景 332
有质量的规范理论 337
自发对称破缺 340
自发破缺规范理论的重整化 347
规范无关性和S矩阵的么正性 350
12-6 Weinberg-Salam模型 351
轻子的模型 352
电子-中微子截面 357
高次修正 359
强子的加入 361
注记 366
第十三章 渐进行为 370

13-1 电动力学中的有效电荷 370
Gell-Mann和Low函数 371
Callan-Symanzik方程 377
13-2 破缺标度不变性 382
标度不变形和共形不变形 383
修改的Ward恒等式 387
最低次近似下的Callan-Symanzik系数 396
练习 398
13-3 标度不变形的恢复 399
耦合常数的演化 399
渐进自由 403
质量修正 407
13-4 轻子-强子深度非弹性散射和电子-正电子湮没为强子 408
电生 409
光锥动力学 413
电子-正电子湮灭 418
13-5 算符乘积展开 423
小距离展开 423
主导算符和次主导算符 算符混合和守恒定律 431
光锥展开 436
注记 445
附录 449
A-1 度规 449
A-2 Dirac矩阵和旋量 450
A-3 态的归一化 S矩阵 么正性和截面 455
A-4 Feynman规则 457