目　　录

第 I 章　量子场论的泛函积分表述 …… 1

I.1　泛函积分表述的量子化 …… 3

I.2　量子场论的泛函积分表述 …… 21

I.3　微扰展开式 …… 39

I.4　守恒律和 Ward-Takahashi 恒等式的推导 …… 51

I.5　关于泛函方法 …… 62

参考文献 …… 74

第 II 章　规范理论 …… 77

II.1　Faddeev-Popov 形式 …… 79

II.2　量子电动力学 (QED) …… 86

II.3　非阿贝耳规范理论，量子色动力学 …… 93

II.4　Gribov 不确定性 …… 114

II.5　自发对称破缺，Higgs 机制和带质量的矢量玻色子理论 …… 135

参考文献 …… 164

第 III 章　量子味动力学 (QFD) 电弱相互作用理论 … 167

III.1　轻子的 Glashow-Weinberg-Salam 模型 …… 168

III.2　在 R_ξ 规范中 Glashow-Weinberg-Salam 模型对于轻子的 Feynman 图形规则的推导 …… 182

III.3　强子的弱相互作用——六夸克模型 …… 217

III.4　电弱理论标准模型的实验状况 …… 232

III.5　标准模型的短评，模型建筑的某些一般规则，重正化，反常性和普适性 …… 248

参考文献 …… 255

第 I 章　量子场论的泛函积分表述

量子场论的泛函积分或路径积分表述现在已广泛使用. 诸如推导量子场论的微扰展开式，Ward-Takahashi 恒等式，非阿贝耳规范场论量子化的代数关系，等等，量子场论的泛函积分表述给出一个简明的方法. 这个方法的出发点是生成泛函，而生成泛函是由一个体系和它的作用量所给定的. 在应用通常正则量子化方法有困难的情形下，泛函积分方法可能是最方便的量子化方法.

泛函积分方法的方便之处，部分表现在它是一个 c 数表述. 出现在公式中的量是通常的函数，并且在通常的情况下可以熟练运用数学分析的基本方法. 例如，积分变数变换成为很有用的工具. 通常在这个方法中通过简单的代数演算，很快就可以得到很复杂的结果.

1948 年，Feynman[1-4] 为了用拉格朗日函数来描述非相对论量子力学，对所考虑的体系所经历的路径进行积分，把路径积分量子化方法用公式表示出来了. 此后不久，Feynman[5,6] 把他的路径积分表述应用到量子电动力学. Feynman 的工作是受十五年前（1933 年）Dirac[7] 发表的一篇论文“拉格朗日函数的量子力学”所启示. Dirac 写道：“…看来值得探索的问题是，在量子论中什么量相应于经典理论的拉格朗日函数.” Dirac 的陈述理由在于，同经典动力学密切相关的哈密顿理论相比较，拉格朗日理论由于下面两点考虑似乎是更基本的：（1）拉格朗日理论容许把所有的运动方程集合起来，并把运动方程表示为某一作用量的稳定性质.（2）拉格朗日

理论容易推广到相对论体系．另一方面，用正则共轭坐标和动量表述的经典哈密顿函数，具有很简单的量子力学的模拟量．因此，在量子力学中可以直接接受经典的哈密顿函数．然而，对于非相对论量子方案，则不能以直接方式接受经典的拉格朗日函数以及 Euler-Lagrange 运动方程．这是因为 Euler-Lagrange 方程包含拉格朗日函数相对于坐标和速度的偏导数，在非相对量子力学中，Euler-Lagrange 方程没有意义．

非相对论量子力学的 Feynman 表述比之于通常的方法具有下面的特点：

(a) 非相对论量子力学的 Feynman 表述不研究波函数本身而研究波函数的传播子或变换矩阵元(为确切起见，参看方程 (1.1.14))．

(b) 传播子表示为从初空时点到末空时点的一切可能空时路径上的积分．因此引入了函数空间上的积分概念．

(c) 同哈密顿动力学相联系的通常方法相对比，非相对论量子力学的 Feynman 表述，是与拉格朗日经典力学相联系的．而且，非相对论量子力学的 Feynman 表述处理的是经典量而不是量子化的正则共轭坐标和动量．

包括函数空间积分的 Feynman 方法的新奇性，很快地引起了一些数学家的重视．大约在 50 年代中期，这个方法开始引起物理学家的注意．现在泛函积分方法已应用于物理学的大多数分支了，包括量子场论、流体动力学、多粒子理论、固态物理学、统计力学，等等．关于泛函积分方法到 50 年代的发展评述，可以在文献 [8] 中找到，该方法近代发展比较详细的叙述，可以在文献 [9，10 及 11] 中找到．

第一章首先引入非相对论量子力学的泛函表述，接着是量子场论的泛函表述．现在的方法等价于正则算符表述方法，将通过两种类型的理论，由推导适当的量子化规则及运动

方程来加以阐述。这些是等时对易关系和非相对论量子力学的 Schrödinger 方程及场论的 Euler-Lagrange 方程，接着是推导微扰展开式和守恒律。泛函方法的系统讨论及由 Brown 运动例子作为函数空间的积分概念的实例，将在本章最后一节介绍。

I.1 泛函积分表述的量子化

考虑一个一维非相对论量子体系。令 Q_S 为 Schrödinger 图象的广义坐标算符。它有本征态 $|q\rangle$ 和本征值 q：

$$Q_S|q\rangle = q|q\rangle, \tag{I.1.1}$$

这里态矢量 $|q\rangle$ 归一化为

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q - q'). \tag{I.1.2}$$

令 H 为体系的哈密顿算符。在 Heisenberg 图象中，坐标算符 $Q_H(t)$ 与它的 Schrödinger 图象表示的关系为

$$Q_H(t) = e^{iHt}Q_S e^{-iHt},$$
$$Q_H(0) = Q_S. \tag{I.1.3}$$

本征值是 q 的 $Q_H(t)$ 的本征态为

$$|qt\rangle = e^{iHt}|q\rangle, \tag{I.1.4}$$

于是

$$Q_H(t)|qt\rangle = e^{iHt}Q_S|q\rangle$$
$$= q|qt\rangle. \tag{I.1.5}$$

与 Q_S 共轭的广义动量算符用 P_S 来表示。它有本征值为 p 的本征态 $|p\rangle$：

$$P_S|p\rangle = p|p\rangle. \tag{I.1.6}$$

在 Heisenberg 图象中，它为

$$P_H(t) = e^{itH}P_S e^{-itH}.$$

$|p\rangle$ 和 $|q\rangle$ 的内积定义为

$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iqp}. \tag{I.1.7}$$

它保证了 $|p\rangle$ 的归一化条件为

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p' - p). \tag{I.1.8}$$

对于固定 t 的一切态矢量 $|q\rangle$ 集合及所有态矢 $|qt\rangle$ 的集合形成两个完备集:

$$\int dq|q\rangle\langle q| = 1, \tag{I.1.9}$$

$$\int dq|qt\rangle\langle qt| = 1. \tag{I.1.10}$$

在没有分立束缚态时 $|p\rangle$ 也形成一个完备集,即是

$$\int dp|p\rangle\langle p| = 1. \tag{I.1.11}$$

态 $|\alpha\rangle$ 的波函数为

$$\psi_\alpha(q, t) \equiv \langle qt|\alpha\rangle. \tag{I.1.12}$$

波函数随时间的变化由 Schrödinger 方程给出:

$$i\frac{d}{dt}\psi_\alpha(q, t) = H\psi_\alpha(q, t).$$

然而,波函数的时间展开可以不同的方式得到. 利用闭合条件 (I.1.10),它写为

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(q, t) &= \int dq'\langle qt|q't_0\rangle\langle q't_0|\alpha\rangle \\ &= \int dq'\langle qt|q't_0\rangle\psi_\alpha(q', t_0).\end{aligned} \tag{I.1.13}$$

量

$$\begin{aligned}K(q_bt_b, q_at_a) &= \langle q_bt_b|q_at_a\rangle \\ &= \langle q_b|\exp[-i(t_b - t_a)H]|q_a\rangle\end{aligned} \tag{I.1.14}$$

称为从空时点 q_a、t_a 到 q_b、t_b 的变换矩阵元或传播子. 方程 (I.1.13) 表明,如果矩阵元 $K(qt, q't_0)$ 已知,把一切可能点 q' 的贡献加起来,波函数 $\psi(q, t)$ 就可由它在早先时间的

值 $\psi_n(q', t_0)$ 计算出来。因此该方程等价于 Schrödinger 方程。在方程 (I.1.14) 中所给出的变换矩阵是在坐标 q_b 和时间 t_b 找到在以前时刻 t_a 及坐标 q_a 的一个态的几率幅。换言之，变换矩阵元是与体系整个运动相联系的几率幅。它表征体系的动力学。这个表述类似于光传播的 Huygens 原理。在给定点的波强度是由图 I.1 所示的、早先出现的波前各点贡献的总和。

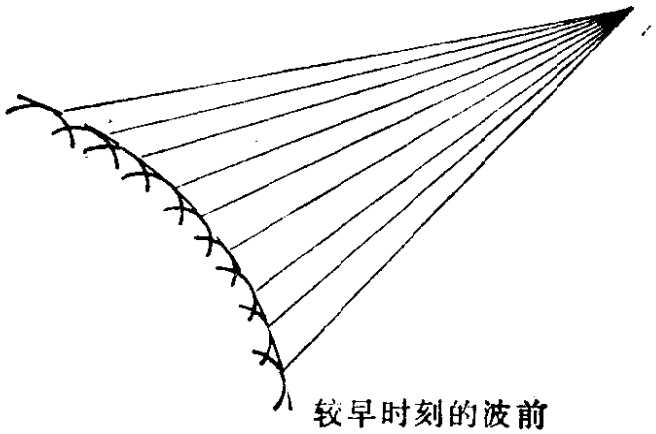


图 I.1

已论证，现在表述的主要量是变换矩阵元 $K(q_bt_b, q_at_a)$，它现在可以表示为对体系路径的泛函积分。Feynman曾假定，一切路径贡献的大小相等；但是每条路径乘以一个相因子，该相因子是 t_a 和 t_b 之间的经典作用量。为了在数学上表达这个公设，把时间间隔 t_a 到 t_b 划分为 n 个区间

$$\Delta t = \frac{t_b - t_a}{n}. \tag{I.1.15a}$$

并且令

$$t_j = t_a + j\Delta t. \tag{I.1.15b}$$

于是

$$t_a = t_0, \quad t_b = t_n. \tag{I.1.15c}$$

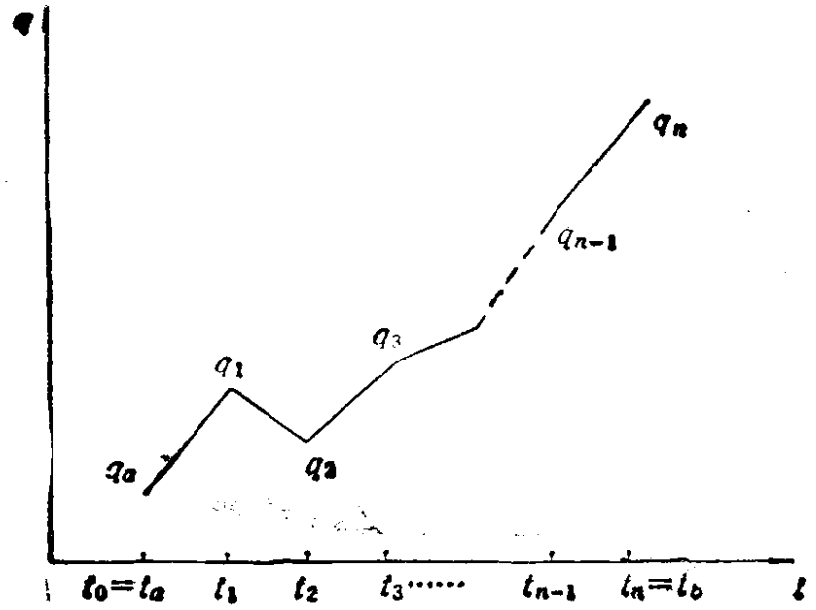


图 1.2

体系的一条典型路径如图 I.2 所示.

Feynman 公设可以表示如下:

$$K(q_bt_b,\ q_at_a)=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{1}{A}\frac{dq_1}{A}\frac{dq_2}{A}\cdots\frac{dq_{n-1}}{A}\times\exp\left\{i\sum_{j=0}^{n}S(q_j,q_{j-1})\right\}$$

$$=\int\left[\frac{dq}{A}\right]e^{iS(q)}. \tag{1.1.16}$$

这里

$$q_0=q_a,\quad q_n=q_b,$$

并且

$$\left[\frac{dq}{A}\right]=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{A}\frac{dq_1}{A}\frac{dq_2}{A}\cdots\frac{dq_{n-1}}{A}\right\}, \tag{1.1.17}$$

为路径上的积分符号,而 A 为归一化因子.

下面从哈密顿函数描述出发,利用正则变量来推导方程

(I.1.16)[12]. 如方程（I.1.15）所示划分的时间间隔，再写出时间平动算符

$$\exp[-i(t_b - t_a)H] = \prod_{j=0}^{n} \exp[-i(t_j - t_{j-1})H], \quad (I.1.18)$$

利用闭合关系方程（I.1.9），可以把变换矩阵元写为

$$K(q_b t_b, q_a t_a) = \int \delta(q_0 - q_a)\delta(q_n - q_b) \cdot \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{k=1}^{n} \langle q_k | e^{-i\Delta t H} | q_{k-1} \rangle. \quad (I.1.19)$$

对于充分小的 Δt，可以作出 Δt 的幂的展开式，只保留 Δt 的第一阶，得到

$$\langle q_j | e^{-i\Delta t H} | q_{j-1} \rangle = \delta(q_j - q_{j-1}) - i\Delta t \langle q_j | H(P_S, Q_S) | q_{j-1} \rangle + O(\Delta t)^2. \quad (I.1.20)$$

为了继续进行，要明显地给出哈密顿函数的一般形式。令

$$H = \frac{1}{2m} P_S^2 + V(Q_S). \quad (I.1.21)$$

它表示质量 m 的单粒子处在通常的势 V 中。于是

$$\begin{aligned} \langle q_j | H(P_S, Q_S) | q_{j-1} \rangle &= \frac{1}{2m} \langle q_j | P_S^2 | q_{j-1} \rangle \\ &\quad + \langle q_j | V(Q_S) | q_{j-1} \rangle \\ &= \frac{1}{2m} \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp[i(q_j - q_{j-1})p_j] p_j^2 \\ &\quad + V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right) \delta(q_j - q_{j-1}) \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp[i(q_j - q_{j-1})p_j] H\left(p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right). \end{aligned} \quad (I.1.22)$$

量

$$H\left(p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right) = \frac{1}{2m} p_j^2 + V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right) \quad (I.1.23)$$

为哈密顿函数的经典形式. 对于 Δt 的第一阶，方程 (I.1.21)，(I.1.22) 及 (I.1.23) 给出

$$\langle q_j | e^{-i\Delta t H} | q_{j-1} \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left[i(q_j - q_{j-1})p_j - i\Delta t H\left(p_j, \frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right)\right]. \quad (I.1.24)$$

把 (I.1.24) 代入 (I.1.19)，我们得到用经典量表示的变换矩阵:

$$K(q_b t_b, q_a t_a) = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \prod_{k=1}^{n} \frac{dp_k}{2\pi} \times \exp\left\{i \sum_{l=0}^{n} \Delta t \left[p_l \frac{(q_l - q_{l-1})}{\Delta t}\right.\right.$$

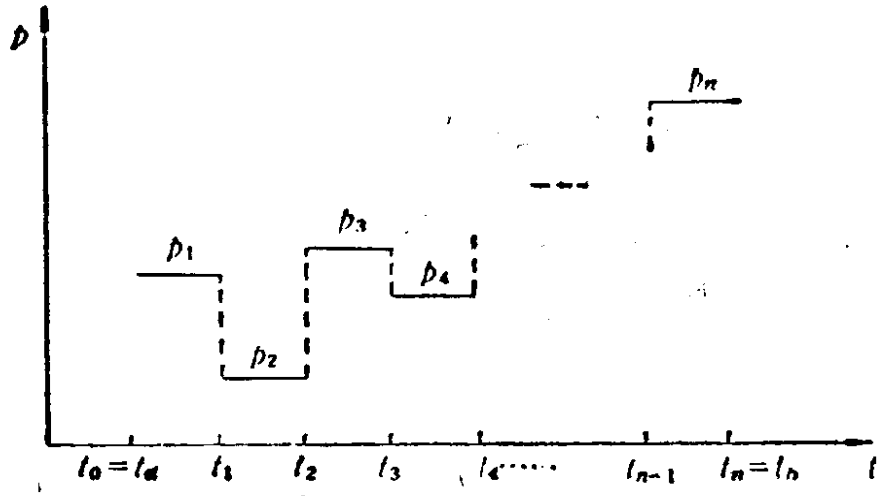


图 1.3

$$- H\left(p_l, \frac{q_l + q_{l-1}}{2}\right)\Big]\Big\}. \qquad (I.1.25)$$

在位形空间内的一条典型路径如图 I.2 所示。在动量空间内的一条路径在时间间隔 t_j 和 t_{j-1} 内可以分段取为常数，而且同 q_j 和 q_{j-1} 相联系的速度是一致的，即是 $(q_j - q_{j-1})/\Delta t$ 分段为常数。在动量空间内的一条路径如图 I.3 所示。在大 n 的极限时，p 和 q 变为 t 的函数。分立编号 q_j 和 p_j 实际上是按时间间隔编号的：

$$q_j = q(t_j) \text{ 及 } p_j = p(t_j).$$

在极限 $n \to \infty$ 时，我们可以写出：

$$K(q_b t_b, q_a t_a) = \int \left[\frac{dq(t)dp(t)}{2\pi}\right] \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b} dt\,[p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))]\right\}. \qquad (I.1.26a)$$

符号

$$\left[\frac{dq(t)dp(t)}{2\pi}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n-1} dq(t_j)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{dp(t_k)}{2\pi}\right) \qquad (I.2.26b)$$

为积分测度，它表示由在 t_b 的边界 q_b 及在 t_a 的边界 q_a 所限定的整个相空间的积分。

哈密顿函数的形式，方程 (I.1.23)，容许显式地计算出动量的积分。可以由方程 (I.1.24) 来做到这点：

$$\begin{aligned}\langle q_j|\exp[i\Delta t H(P_s, Q_s)]|q_{j-1}\rangle &= \int \frac{dp}{2\pi}\exp\left[-i\frac{\Delta t}{2m}p^2 + ip(q_j - q_{j-1}) - i\Delta t V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right)\right] \\ &= \int\frac{dp}{2\pi}\exp\left\{-i\frac{\Delta t}{2m}\left[p - \frac{m(q_j - q_{j-1})^2}{\Delta t}\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2}m\frac{(q_j - q_{j-1})^2}{\Delta t} - i\Delta t V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad (I.1.27)$$

它对 p 的 Gauss 类型积分是一个 Fresnel 积分，它可以由围道积分变为 Gauss 积分。这个积分的证明可以在附录 1 中找到。Fresnel 积分的结果是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iax^2} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}, \tag{I.1.27a}$$

这里 a 为实数。于是我们有

$$\langle q_j | \exp[-itH(P_s, Q_s)] | q_{j-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \Delta t/m}} \times \exp\left\{i\Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta t}\right)^2 - V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right)\right]\right\} \tag{I.1.28}$$

把方程 (I.1.28) 代入方程 (I.1.29)，我们有

$$\begin{aligned} K(q_b t_b, q_a t_a) &= \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi i \Delta t/m}} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dq_j}{\sqrt{2\pi i \Delta t/m}} \\ &\quad \times \exp\left\{i\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{2}\right)^2\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. - V\left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2}\right)\right]\right)\right\} \\ &= \int [dq] \exp\left[i\int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q})\right] \\ &= \int [dq] e^{iS}, \end{aligned} \tag{I.1.29}$$

这里 L 为体系的拉格朗日函数：

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q),$$

而

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}). \tag{I.1.29a}$$

在方程（I.1.29）内的积分测度缩写为：

$$[dq] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\Delta t/m}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{dq_j}{\sqrt{2\pi i\Delta t/m}}. \quad (I.1.30)$$

当

$$A = \sqrt{2\pi i\Delta t/m}$$

时，方程（I.1.29）正好就是方程（I.1.16）.

在方程（I.1.29）中对一切路径的求和确实是一个量子特征。求和包括一切路径，这些路径在经典上都被丢掉了.让我们恢复 S 的固有单位，并且在（I.1.29）中用 $e^{iS/\hbar}$ 代替 e^{iS}. 接近于经典运动的路径在结构上互相干扰，因为 S 沿经典运动有一个极值，$\delta S = 0$. 如果 $\hbar/S$ 是小的，则只有接近于如图I.4所示的，形成大小正比于 $\hbar$ 而包围经典运动的管道路径才可能作出任何有意义的贡献。当 $\hbar/S \to 0$ 时，管道趋近于经典路径，并且我们恢复到经典极限.

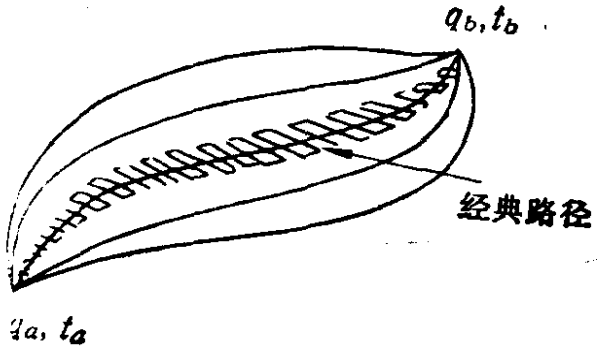


图 I.4

如果哈密顿函数不是由方程（I.2.1）所给出的形式，则出现在传播子［方程（I.1.29)］中的拉格朗日函数不可能由(I.1.29a)给出，而只要哈密顿量是正则变数 p 的平方函数，就可以实现对 p 的积分；如果原来的拉格朗日函数用一个有效的拉格朗日函数代替，则方程（I.1.29）仍然适合。在

Feynman 及 Hibbs[3], Abers 及 Lee[4] 中可以找到这类例子，比如一个粒子在与速度有关的势中. 应该注意，如果在哈密顿函数中 P_s 和 Q_s 的次序是不确定的，则往往首先要在 (1.1.25) 中进行 p 的积分.

在量子论中，必须考虑两个重要因素：量子化规则和算符乘积的时间顺序. 下面论证量子化规则和时间顺序如何由泛函积分表述推导出来.

编时乘积 考虑位置算符 $Q_H(t)$ 夹在态 $|q_at_a\rangle$ 和 $|q_bt_b\rangle$ 之间的矩阵元，而

$$t_a < t < t_b.$$

该矩阵元可以取 t 为方程 (1.1.15) 的某个时间间隔的边界，譬如说

$$t = t_k$$

来进行计算. 因此

$$\begin{aligned}\langle q_bt_b|Q_H(t)|q_at_a\rangle &= \int dq_1\cdots dq_{n-1}\langle q_bt_b|q_{n-1},t_{n-1}\rangle\cdots \\ &\quad \langle q_kt_k|Q(t)|q_{k-1},t_{k-1}\rangle\cdots\langle q_1t_1|q_at_a\rangle \\ &= \int \delta(q_b-q_n)\prod_{j=1}^{n} dq_j\langle q_{j-1}|t_{j-1}\rangle.\end{aligned} \tag{I.1.31}$$

如果哈密顿函数为 (I.1.21) 所给出的形式，则上面的矩阵元变为

$$\begin{aligned}\langle q_bt_b|Q_H(t)|q_at_a\rangle = \int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] q(t)\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p\dot{q}\right. \\ \left. -H(p,q)]dt'\right\}.\end{aligned} \tag{I.1.32}$$

二个位置算符 $Q_H(t_1)$ 和 $Q_H(t_2)$ $(t_1 > t_2)$ 乘积的矩阵元为

$$\begin{aligned}&\langle q_bt_b|Q_H(t_1)Q_H(t_2)|q_at_a\rangle \\ &= \int dq_1\cdots dq_{n-1}\langle q_bt_b|q_{n-1}t_{n-1}\rangle\cdots\langle q_kt_k|Q_H(t_1)|q_{k-1}t_{k-1}\rangle\end{aligned}$$

$$\cdots\langle q_i t_i|Q_H(t_2)|q_{i-1}t_{i-1}\rangle\cdots\langle q_1 t_1|q_a t_a\rangle$$

$$=\int q(t_1)q(t_2)dq_{n-1}dq_{n-2}\cdots dq_1\langle q_b t_b|q_{n-1}t_{n-1}\rangle\cdots$$

$$\langle q_1 t_1|q_a t_a\rangle$$

$$=\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]q(t_1)q(t_2)\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}dt'[p\dot{q}-H(p,q)]\right\},$$

(I.1.33)

这里我们取 $t_1=t_k>t_2=t_i$. 类似地,对于 $t_2>t_1$, 我们有

$$\langle q_b t_b|Q_H(t_2)Q_H(t_1)|q_a t_a\rangle=\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]q(t_2)q(t_1)$$

$$\times\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}dt'[p\dot{q}-H(p,q)]\right\}. \qquad (I.1.34)$$

因为 $q(t_1)$ 和 $q(t_2)$ 为C数函数,它们的顺序是无关的. 方程 (I.1.33) 和 (I.1.34) 共同给出

$$\langle q_b t_b|T(Q_H(t_1)Q_H(t_2))|q_a t_a\rangle$$

$$=\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]q(t_1)q(t_2)\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p\dot{q}-H(p,q)]dt\right\}.$$

(I.1.35)

更普遍地,我们有

$$\langle q_b t_b|T(Q_H(t_1)Q_H(t_2)\cdots Q_H(t_n))|q_a t_a\rangle$$

$$=\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)$$

$$\times\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p\dot{q}-H(p,q)]dt\right\}. \qquad (I.1.36)$$

因此从算符表述的角度证明了泛函积分会导致编时乘积.

量子化规则 首先在 Heisenberg 图象中研究动量算符的矩阵元是必要的:

$$\langle q_b t_b|P_H(t)|q_a t_a\rangle=\int dq_1\cdots dq_{n-1}\langle q_b t_b|q_{n-1}t_{n-1}\rangle\cdots$$

$$\cdots\langle q_k t_k|P_H(t)|q_{k-1}t_{k-1}\rangle\cdots\langle q_1 t_1|q_a t_a\rangle. \qquad (1.1.37)$$

选取时间 t 等于 t_k

$$\langle q_k t_k|P_H(t)|q_{k-1},\ t_{k-1}\rangle = \langle q_k|P_s e^{-i\Delta t H}|q_{k-1}\rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{iq_k p}p\langle p|e^{-i\Delta t H}|q_{k-1}\rangle$$

$$= \int \frac{dpdq}{2\pi} e^{ip(q_k-q)}p\langle q|e^{-i\Delta t H}|q_{k-1}\rangle$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_k}\langle q_k|e^{-i\Delta t H}|q_{k-1}\rangle. \qquad (1.1.38)$$

全部矩阵元（1.1.37）式变为

$$\langle q_b t_b|P_H(t)|q_a t_a\rangle = \int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q(t)}$$

$$\times\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p(t)\dot{q}(t)-H(p,q)]dt\right\}. \qquad (1.1.39)$$

于是显然得到下式：

$$\langle q_b t_b|[Q_H(t),P_H(t)]|q_a t_a\rangle = i\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]$$

$$\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p(t)\dot{q}(t)-H(p,\ q)]dt\right\}. \qquad (1.1.40)$$

这个结果对于一切 $|q_a t_a\rangle$ 和 $|q_b t_b\rangle$ 是正确的，而

$$t_a < t < t_b;$$

因此，它表明一个算符恒等式：$[Q_H(t),\ P_H(t)] = i$.

Schrödinger 方程式 容易证明在方程（1.1.13）中所定义的波函数满足 Schrödinger 方程式. 考虑

$$\psi(q,\ t+\Delta t) = \int dq_0\langle q|e^{-i\Delta t H}|q_0\rangle\psi(q_0,\ t)$$

$$= \psi(q,\ t) - i\Delta t\int dq_0\langle q|H|q_0\rangle\psi(q_0,\ t)$$

$$+ O((\Delta t)^2). \qquad (I.1.41)$$

取H为方程 (I.1.21) 中所给出的形式，并利用方程(I.1.38)，我们由方程 (I.1.39) 得到 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right)\psi(q,t).$$

因此完成了泛函积分方法和非相对论量子力学通常方法等价性的证明.

上面的结果容易推广到多维体系:

$$\begin{aligned} &K(q_{b_1}, q_{b_2}, \cdots, q_{bn}, t_b; q_{a_1}, q_{a_2}, \cdots, q_{a_n}, t_a) \\ &= \langle q_{b_1}, q_{b_2}, \cdots, q_{b_n}, t_b | q_{a_1}, q_{a_2}, \cdots, q_{a_n}, t_a \rangle \\ &= \int \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{dq_j dp_j}{2\pi}\right] \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - H(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (I.1.42)$$

如果哈密顿函数有通常的形式:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j} P_{s_j}^2 + V(Q_{s_1}, Q_{s_2}, \cdots, Q_{s_n}), \qquad (I.1.43)$$

则可以对动量进行积分而给出

$$\begin{aligned} &K(q_{b_1}, q_{b_2}, \cdots, q_{b_n}; t_b; q_{a_1}, q_{a_2}, \cdots, q_{a_n}, t_a) \\ &= \int \prod_{j=1}^{n} [dq_j] \exp\left\{ i \int_{t_a}^{t_b} dt\, L(q_1, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)\right\}, \end{aligned} \qquad (I.1.44)$$

这里

$$L(q_1, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2} \dot{q}_j^2 - V(q_1, \cdots, q_n). \qquad (I.1.44a)$$

其中积分测度 $[dq]$ 已在 (I.1.30) 中定义了.

Green 函数 另一个重要的概念是算符编时乘积的基

态值或真空期待值。若算符为坐标算符，则就是一个 Green 函数：

$$G(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \langle 0|T(Q_H(t_1)Q_H(t_2)\cdots Q_H(t_n))|0\rangle$$
$$= \int dq_b dq_a \phi_0^*(q_b t_b)\langle q_b t_b|T(Q_H(t_1)\cdots Q_H(t_n))|q_a t_a\rangle$$
$$\times \phi_0(q_a t_a). \tag{1.1.45}$$

这里基态波函数为

$$\phi_0(qt) = \langle qt|0\rangle,$$

并且 $|0\rangle$ 为所考虑的体系的基态或真空态。于是，利用方程 (1.1.36) 可以写出 n 点 Green 函数为

$$G(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \int dq_a dq_b \phi_0^*(q_b t_b)\phi_0(q_a t_a)$$
$$\times \int \left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] q(t_1)\cdots q(t_n)$$
$$\times \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}[p\dot{q} - H(p, q)]dt\right\}. \tag{1.1.46}$$

这个表达式需要基态波函数的知识，这往往是不可能的，因而是不切实际的。下面的讨论说明，不用知道基态波函数，而运用欧氏时间，如何得到 Green 函数。

考虑一个算符 $O(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 和它的矩阵元

$$\langle q_b t_b|O(t_1, t_2, \cdots, t_n)|q_a t_a\rangle$$
$$= \int dq'_a dq'_b \langle q_b t_b|q'_b t'_b\rangle\langle q'_b t'_b|O(t_1, t_2, \cdots, t_n)|q'_a t'_a\rangle$$
$$\times \langle q'_a t'_a|q_a t_a\rangle, \tag{1.1.47}$$

这里选取 t'_a 和 t'_b 使

$$t_a < t'_a < t_1, t_2, \cdots, t_n < t'_b < t_b.$$

变换矩阵元 $\langle qt|q't'\rangle$ 可以用体系的能量本征函数来表示。令 $|n\rangle$ 为能量 E_n 的一个能量本征态，能量本征函数为

$$\phi_n(q) = \langle q|n\rangle,$$

及

$$\phi_n(q,t)=\langle qt|n\rangle=e^{-iE_nt}\phi_n(q).$$

它可以写为

$$\langle q_bt_b|q_b't_b'\rangle=\sum_n\langle q_b|n\rangle\langle n|e^{-i(t_b-t_{b'})H}|q_b'\rangle$$

$$=\sum_n e^{-i(t_b-t_{b'})E_n}\phi_n(q_b)\phi_n^*(q_b'). \qquad (1.1.48)$$

于是

$$q_bt_b|O(t_1,t_2,\cdots,t_n)|q_at_a\rangle=\sum_{m,n}e^{-iE_n(t_b-t_{b'})}e^{-iE_m(t_a'-t_a)}$$

$$\times\int dq_a'dq_b'\phi_n(q_b)\phi_n^*(q_b')\phi_m(q_a')\phi_m^*(q_a)$$

$$\times\langle q_b't_b'|O(t_1,t_2,\cdots,t_n)|q_a't_a'\rangle. \qquad (I.1.49)$$

上式两端乘以 $e^{iE_0t_b}$ 及 $e^{-iE_0t_a}$，这里 E_0 为基态能量：

$$e^{iE_0t_b}\langle q_bt_b|O(t_1,\cdots,t_n)|q_at_a\rangle e^{-iE_0t_a}$$

$$=\sum_{n,m}e^{-i(E_n-E_0)t_b}e^{i(E_m-E_0)t_a}\phi_n(q_b)\phi_m(q_a)$$

$$\times\int dq_a'dq_b'\phi_n^*(q_b't_b)\phi_m(q_a't_a)\langle q_b't_b'|O(t_1,\cdots,t_n)|q_a't_a'\rangle.$$

(1.1.50)

显然与 t_a 和 t_b 的依赖关系是已知的；因此它们可以从 Minkowski（实数）值解析延拓到 Eudidean（虚数）值，使用代换

$$t\to-i\tau=(e^{-i\frac{\pi}{2}})\tau,$$

这里 τ 为实数。 这相当于如图 1.5 所示，在复数时空内沿顺时针转动 $\frac{\pi}{2}$. 极限 $t_b\to\infty$ 及 $t_a\to-\infty$ 分别相应于 $\tau_b\to+\infty$ 及 $\tau_a\to-\infty$. 于是

$$\lim_{\substack{\tau_b\to\infty\\ \tau_a\to-\infty}}\frac{\langle q_b\tau_b|O(t_1,\cdots,t_n)|q_a\tau_a\rangle}{\langle q_b\tau_b|q_a\tau_a\rangle}$$

$$= \lim_{\substack{t_b\to\infty\\ t_a\to-\infty}} \frac{\langle q_b\tau_b | O(t_1,\cdots,t_n) | q_a\tau_a\rangle}{\phi_0(q_b\tau_b)\phi_0^*(q_a\tau_a)}$$

$$= \int dq_b' dq_a' \phi_0^*(q_b't_b')\phi_0(q_a't_a')$$

$$\times \langle q_b't_b' | O(t_1,\cdots,t_n) | q_a't_a'\rangle, \qquad (I.1.51)$$

上式由第一行写为第二行时，利用了方程 (I.1.48) 中所给出的 $\langle q_b\tau_b | q_a\tau_a\rangle$ 受欧氏时间极限 $\tau_b\to\infty$ 及 $\tau_a\to-\infty$ 的基态支配的事实。而且只有在基态能量和第一激发态能量之间有一间隙，这才是正确的。在 Green 函数方程 (I.1.46) 中应用方程 (I.1.51)，我们有

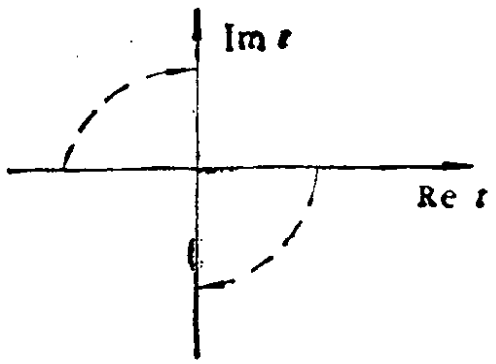


图 I.5(a)

$$G(t_1,\cdots,t_n) = \lim_{\substack{t_b\to\infty\\ t_a\to-\infty}} \frac{\langle q_b\tau_b | T(Q_H(t_1)-Q_H(t_n)) | q_a\tau_a\rangle}{\langle q_b\tau_b | q_a\tau_a\rangle}$$

$$= \lim_{\substack{t_b\to-i\infty\\ t_a\to i\infty}} \int \left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] q(t_1)\cdots q(t_n)$$

$$\times \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b} dt[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \Big/$$

$$\langle q_bt_b | q_at_a\rangle, \qquad (I.1.52)$$

这里利用了 $\tau\to\pm\infty$ 相应于 $t\to\mp i\infty$ 的事实。

n 点 Green 函数可以适当地利用生成泛函 $W[J]$ 得到，其定义如下：

$$W[J]=\frac{1}{N}\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(p,q)+J(t)q(t)]\right\}. \tag{I.1.53}$$

这里 $J(t)$ 为一个固定的外源，

$$W[0]=1,$$

而

$$N=\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}dt[p\dot{q}-H(p,q)]\right\} \tag{I.1.54}$$

正好就是 $\langle q_bt_b|q_at_a\rangle$。 在方程 (I.1.53) 及 (I.1.54) 中，欧氏时间极限理解为

$$t_b\to -i\infty \text{ 及 } t_a\to i\infty. \tag{I.1.55}$$

如果哈密顿函数为形式 (I.1.21)，我们可以写出

$$W[J]=\frac{1}{N'}\int[dq]\exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b}dt[L(q,\dot{q})+J(t)q(t)]\right\}$$

$$N'=\int[dq]\exp\left[i\int_{t_a}^{t_b}dtL(q,\dot{q})\right]. \tag{I.1.56}$$

欧氏时间极限仍理解为 (I.1.55)。 Green 函数现在可以用生成泛函相对于固定外源的泛函微分得到：

$$G(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_n)}W[J]|_{J=0}. \tag{I.1.57}$$

它正好就是方程 (I.1.52) 所给出的表示式。 在上式中利用了一个泛函微分恒等式

$$\frac{\delta J(t)}{\delta J(t')}=\delta(t-t').$$

如上所讨论，由实时间解析延拓到虚时间会导出首先由 Schwinger[13] 及 Nakano[14] 所研究的欧氏场论。对于一个给定拉格朗日函数的体系，欧氏场论 Green 函数解的存在是 Minkowski 场论解存在的必要条件。现在的欧氏场论的空间

有确定度规，例如，不为零的矢量的平方总是正定的：

$$x_\mu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

x_μ，($\mu = 1, 2, 3, 4$) 均为实数，并且具有好的数学性质。这些性质有比较简单的奇点结构和可控制的微分方程。（欧氏场是用椭圆微分方程组描述的；Minkowski 空间是用双曲方程描述的。然而，欧氏场论有缺点，例如，有鉴别物理可观测量的问题。）在该领域内早先工作及文献的短评可以在Symanzik（文献[15]）的工作中找到。欧氏场论概况比较近的讨论可以在文献[15]及[16]中找到。

在欧氏表述中的 Green 函数 $G_E(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 叫做 Schwinger 函数，与 Minkowski Green 函数的关系如下：

$$G_E(t_1, t_2, \cdots, t_n) = (i)^n G(-it_1, -it_2, \cdots, -it_n). \tag{I.1.58}$$

在欧氏表述中的拉格朗日函数 L_E 可以由 Minkowski 拉格朗日函数用 $-it$ 代替 t 得到：

$$L_E = L\left(q, i\frac{dq}{dt}\right). \tag{I.1.59}$$

生成泛函 $W_E[J]$ 为

$$W_E[J] = \int [dq] \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[L_{\text{eff}}\left(q, i\frac{dq}{dt}\right) + J(t)q(t)\right]\right\}, \tag{I.1.60}$$

这里 L_{eff} 为有效拉格朗日函数。如果 Minkowski 体系用方程 (I.1.21) 中所给出的哈密顿函数形式来描述，则

$$W_E[J] = \int [dq] \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q) + J(t)q(t)\right]\right\}. \tag{I.1.61}$$

对于通常的体系，势 $V(q)$ 有下限。在 (I.1.61) 中的指数因

子有很好的性质，并且 $[dq]$ 积分是很好地定义的。在数学的严格性方面，量子论的泛函积分方法应该在欧氏空间[17]内表述。换言之，把欧氏时间极限 (I.1.55) 理解为正确的边界条件。Minkowski 空间的 Green 函数是相应 Schwinger 函数的时间变数的解析延拓。

在结束本节时应该注意，关于 Green 函数和欧氏表述的讨论可以直接推广到场论的情形。

I.2 量子场论的泛函积分表述

在经典物理学中引入场的概念是为了描述相隔某一距离的客体之间的相互作用，即是，利用场来描述在一定距离的相互作用。例如，二稳定带电体的电作用被认为是一物体对另一物体所产生的电场的相互作用。场也用来描述一个扩展客体的运动，比如膜的振动。随着量子论的出现，场的概念通过二次量子化获得了新的意义。实验上观测到的每一种粒子是与一个场 ϕ_α 相联系的，场满足某一类型的波动方程式。量子化方案完成了，场的粒子解释就实现了。场的表达式自动地描述具有无限多自由度的多粒子体系。

在场论和多自由度力学体系之间有类似性。场变量相应于(时间有关的)广义坐标，而场变量的空间坐标就是一组连续的编号。场体系的动力学是由一个拉氏密度规定的，拉氏密度是场及其空时导数的函数。一般的拉格朗日函数表示为

$$\mathscr{L}(\phi_\alpha(x), \phi_{\alpha,\mu}(x)), \qquad \text{(I.2.1)}$$

这里 $\phi_\alpha(x)$ 为一个场，α 表示规定各个场所必要的量子数的指标集合，并且

$$\phi_{\alpha,\mu}(x) \equiv \partial_\mu \phi_\alpha(x).$$

作用量积分为

$$I \equiv \int dx \mathscr{L}(\phi_a(x), \phi_{a,\mu}(x)).$$

本节应用标量 ϕ^4 理论，并且在我们的一般讨论中应用带质量旋量与一个带质量的自旋1矢量玻色子相互作用的理论。更切合实际的理论将在以后各章内讨论。

ϕ^4 理论和带质量的旋量-矢量玻色子理论的拉格朗日函数分别为

$$\mathscr{L}_s = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4}\phi^4(\lambda) \tag{I.2.2a}$$

及

$$\mathscr{L}_m = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu + g\gamma^\mu B_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2B_\mu B^\mu, \tag{I.2.2b}$$

这里

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{I.2.2c}$$

μ, m, 和M分别为标量场 ϕ，旋量场 ψ 及矢量场 B_μ的(裸)质量。这些理论的作用量积分分别为

$$I_S \equiv \int d^4x \mathscr{L}_S \tag{I.2.3a}$$

及

$$I_m = \int d^4x \mathscr{L}_m. \tag{I.2.3b}$$

为了进行量子化，可以直接由 Green 函数的生成函数出发，该函数是外源存在时真空到真空的跃迁幅。它类似于方程(I.1.56)中所定义的非相对论量子力学的生成函数，对广义坐标变数的泛函测度 $[dq]$ 用场变量的泛函测度代替，这些场变量为 C 数，即是

$$Z[J_\alpha]=\frac{1}{N}\int\prod_\alpha \mathscr{D}\phi_\alpha \exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L}(\phi_\alpha,\phi_{\alpha,\mu})+\sum_\alpha J_\alpha(x)\phi_\alpha(x)\right]\right\}. \tag{I.2.4}$$

这里一切场 ϕ_α 为 C 数函数，J_α 为 ϕ_α 的外源，及 $\mathscr{D}\phi_\alpha$ 表示适当的积分测度. 然而，把量子场论认为是无限自由度极限的力学体系的理论并遵循如前节所述的非相对论量子力学的量子化方法，是有益处的.

为简化起见，考虑方程（I.2.2a）的 ϕ^4 理论. 由于把 Minkowski 空间认为是空间点集的极限：

$$q_i(t)\to\phi(x)\equiv\phi(t,\ r),$$

而场变量可以认为是方程（I.1.42）的多维表述的广义坐标. 为使这个认识更准确些[18]，空间体积可以划分为体积 ΔV 的相等同的小格子，各个小格子用一个指标 j 来编号（譬如说，为了识别一个给定小格子的中心，每个 j 实际上是三个数目的集合）. 广义坐标被认为是每个小格子的场的平均. 这如图 1.5b 所示. 我们现在确认：

$$q_j(t)\to\phi_j(t)=\frac{1}{\Delta V}\int d^3r\,\phi_j(t,\ r). \tag{I.2.5}$$

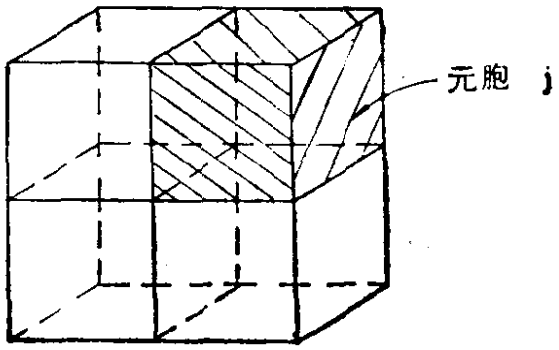


图 I.5(b)

在分立方法中拉格朗日函数为

$$L = \sum_i \Delta V \mathscr{L}_i, \tag{I.2.6}$$

这里

$$\mathscr{L}_i = \mathscr{L}(\phi_i(t), \nabla\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t)), \tag{I.2.7}$$

而

$$\nabla\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_i} d^3r \nabla\phi_i(t, r),$$

它可以用 $\phi_i(t)$ 及相邻小格子的场来表示，同 $\phi_s(t)$ 共轭的正则动量为

$$P_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i(t)} = \Delta V \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \dot{\phi}_i(t)} = \Delta V \cdot \Pi_i(t), \tag{I.2.8}$$

这里

$$\Pi_i(t) = \frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial \dot{\phi}_i(t)}. \tag{I.2.9}$$

它正好就是场 $\phi(x)$ 的共轭动量的格子平均：

$$\Pi_i(t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_i} d^3r \Pi(t, r) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V_i} d^3r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}. \tag{I.2.10}$$

体系的哈密顿函数现在为

$$H = \sum_i p_i\dot{\phi}_i - L = \sum_i \Delta V \mathscr{H}_i, \tag{I.2.11a}$$

这里

$$\mathscr{H}_i = \Pi_i\dot{\phi}_i - \mathscr{L}_i. \tag{I.2.11b}$$

类似于前节所讨论的非相对论量子力学的变换矩阵元，可以写出变换矩阵元为

$$\lim_{\substack{\Delta V\to 0\\ \Delta t\to 0}} \int \prod_i \left(\prod_{k=1}^{n-1} d\phi_i(t_k) \prod_{l=1}^{n} \frac{\Delta V}{2\pi} d\Pi_i(t_l) \right)$$

$$\times \exp\left\{i\Delta t \sum_{k=1}^{n} \Delta V \left[\Pi_j(t_k)\,\frac{\phi_j(t_k)-\phi_j(t_{k-1})}{\Delta t} - \mathscr{H}_j(\Pi_j(t_k), \nabla\phi_j(t_k), \phi_j(t_k))\right]\right\}$$

$$= \int \left[d\phi(x)\,\frac{\Delta V}{2\pi}\,d\Pi(x)\right] \exp\left\{\left[\int_{t_a}^{t_b} [\Pi(t,\boldsymbol{r})\dot{\phi}(t,\boldsymbol{r}) - \mathscr{H}(\Pi(t,\boldsymbol{r}), \nabla\phi(t,\boldsymbol{r}), \phi(t,\boldsymbol{r}))\right]\right\}. \tag{1.2.12}$$

其中积分测度 $\left[d\phi(x)\,\frac{\Delta V}{2\pi}\,d\Pi(x)\right]$ 的定义类似于在方程 (1.1.26a) 中所出现的积分测度，而分立编号遍及空时各点. 因为 ϕ^4 理论的哈密顿函数密度为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \nabla\phi^2 + \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \tag{1.2.13}$$

类似于在 (1.1.21) 所给出的形式，它有形式

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + f(\nabla\phi, \phi),$$

变换矩阵元变为

$$\int \mathscr{D}\phi(x) \exp\left\{i\int_{t_a}^{t_b} dt \int d^3r\, \mathscr{L}(\phi, \nabla\phi, \dot{\phi})\right\}.$$

我们利用了 $\mathscr{D}\phi(x)$ 来表示积分测度:

$$\mathscr{D}\phi(x) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta V\to 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\Delta t\Delta V}} \prod_{i,k} \left(\frac{d\phi_j(t_k)}{\sqrt{2\pi i\Delta t\Delta V}}\right).$$

现在可以对全 Green 函数写出生成函数，类似于非相对论情形方程 (1.1.53) 所定义的，它是在外源函数存在时的归一化变换矩阵元:

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi(x) \exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}(x) + J(x)\phi(x)]\right\}. \tag{1.2.14}$$

这里

$$N = \lim_{J'(x)\to 0} \int \mathscr{D}\phi(x) \exp\left\{ i \int d^4x [\mathscr{L}(x) + J'(x)\phi(x)] \right\} \tag{I.2.15}$$

为归一化因子，使

$$Z[0] = 1.$$

方程(I.2.14)正好就是方程(I.2.4)。如上所述，它可以认为是场论泛函积分表述的出发点。在方程(I.2.14)中，取了无限大的时间极限：

$$t_b \to \infty \quad 及 \quad t_a \to -\infty.$$

对于 Minkowski 时间，由于被积函数对于大 ϕ 值的振动性质生成泛函实际上不是很好定义的。这种情况可以两个方法来补救。第一个方法是引入一个小的截止来减弱大 ϕ 的贡献。另一方法是如前节非相对论表述所做的，使用欧氏时间。

首先讨论截止方法。这要把生成泛函写为

$$Z[J] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{N} \int \mathscr{D}\phi(x) \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathscr{L}(x) + \frac{i}{2} \varepsilon\phi^2(x) + J(x)\phi(x) \right] \right\}. \tag{I.2.16}$$

对于 ϕ^4 理论，这相当于对质量 μ 给出一个小的负虚部。下节将论证，这会导出微扰展开式的 Feynman 传播子。截止方法也可以解决带质量的旋量与带质量的矢量玻色子相耦合的理论。

在欧氏时间表述中，方法类似于上节方程(I.1.50)下面一段所讨论的方法。在(I.1.4)中时间代换为

$$t \to -it,$$

得到欧氏生成泛函为

$$W_E[J]=\frac{1}{N}\int\mathscr{D}\phi(x)\exp\left\{-\int d^3r\,dt\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+(\nabla\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4}\phi^4+J\phi\right]\right\},\tag{I.2.17}$$

这里 $\lambda>0$ 是使理论的能量谱有一个下限[19]. 因此，可以看出，方程 (I.2.17) 现在对于实数场是很好定义的.

由这点讨论限制截止方法的条件是所包含的一切场粒子的质量有一个小的负虚部. 对于由拉格朗日函数 (I.2.1) 所规定的一般理论，全 Green 函数的生成泛函由 (I.2.4) 给出，即是

$$Z[J_\alpha]=\frac{1}{N}\int\prod_\alpha\mathscr{D}\phi_\alpha(x)\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}(\phi_\alpha,\ \phi_{\alpha,\lambda})+\sum_\alpha J_\alpha\phi_\alpha\right]d^4x\right\}\tag{I.2.18a}$$

及

$$N=\lim_{J_\alpha\to0}\int\prod_\alpha\mathscr{D}\phi_\alpha(x)\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}(\phi_\alpha,\ \phi_{\alpha,\lambda})+\sum_\alpha J'_\alpha\phi_\alpha\right]d^4x\right\}.\tag{I.2.18b}$$

往后在讨论微扰展开式中会清楚，归一化因子 N 产生真空图形，它们与泛函积分中所产生的真空图形相抵消. 这如同算符形式中因子 $\langle0|e^{iS}|0\rangle$ 所起的作用一样，这里 $|0\rangle$ 为自由拉格朗日函数的真空态，S 为相互作用表象中包含拉格朗日函数相互作用部分的作用量积分. 在算符表述中，玻色子场和费米子场满足不同的统计. 在现在的方法中这要加以考虑. 玻色子场和费米子场之间的差异由考虑带质量的旋量和矢量玻色子理论，方程 (I.2.2b) 来说明. 生成泛函为

$$Z_m[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]=\frac{1}{N_m}\int \mathscr{D}\phi_\alpha\mathscr{D}\psi_\alpha\mathscr{D}B_\mu\exp\left\{iI_m\right.$$
$$+i\int dx[\bar{\eta}(x)\phi(x)+\psi(x)\eta(x)$$
$$\left.+J_\mu(x)B^\mu(x)]\right\}. \qquad (1.2.19)$$

这里

$$N_m=\lim_{J'_\mu,\eta',\bar{\eta}'\to 0}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\psi\mathscr{D}B_\mu\exp\left\{iI_m\right.$$
$$+i\int dx[\bar{\eta}'(x)\phi(x)+\psi(x)\eta'(x)$$
$$\left.+J'_\mu(x)B^\mu(x)]\right\}, \qquad (1.2.20)$$

并且 I_m 为在 (1.2.3b) 中所给出的作用量积分. 当玻色子场 $B_\mu(x)$ 及其外源 $J_\mu(x)$ 为通常的 C 数函数时，费米子场 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 及其外源 $\eta(x)$ 和 $\bar{\eta}(x)$ 被认为是 Grassman 代数的元素. 因此，ψ，ϕ，η，和 $\bar{\eta}$ 彼此是反对易的:

$$\{\psi,\phi\}=0,\ \{\eta,\psi\}=0,\ \{\eta,\eta\}=0,\ \text{等等}. \qquad (1.2.21a)$$

及

$$\eta^2=\bar{\eta}^2=\psi^2=\phi^2=0. \qquad (1.2.21b)$$

一切费米子量 ψ，ϕ，$\bar{\eta}$ 和 η 与一切玻色子量 B_μ 及 J_μ 都是可对易的. 关于 Grassman 代数的细节将在 I.5 节中给出.

此刻用算符形式来定义一些量将是有用的.

(1) Euler-Lagrange 方程式

我们表示

$$[\mathscr{L}]_{\phi_\alpha(x)}=\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial\phi_\alpha(x)}-\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{\alpha,\lambda}(x)}\right). \qquad (1.2.22)$$

场 ϕ_α 显然满足 Euler-Lagrange 方程式

$$[\mathscr{L}]_{\phi_\alpha}=0.$$

(2) 全 n 点 Green 函数 (n-pgf)

一个全 n 点 Green 函数是 n 个场算符的编时乘积的真空期待值，例如

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \langle 0|T(\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n))|0\rangle, \tag{I.2.23}$$

这里真空态 $|0\rangle$ 和一切场算符 $\phi_{\alpha_1}(x)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n)$ 都是在 Heisenberg 图象中。一个 *n-pfg*（全 n 点 Green 函数）往往用图 I.6 所绘的图形来表示。注意，Green 函数包含外线，外线代表粒子在到达相互作用区域以前用 $\phi_{\alpha_1}(x_1), \phi_{\alpha_2}(x_2), \cdots, \phi_{\alpha_n}(x_n)$ 所表示的粒子的传播，相互作用区域用图 I.6 的圆形区域来表示。

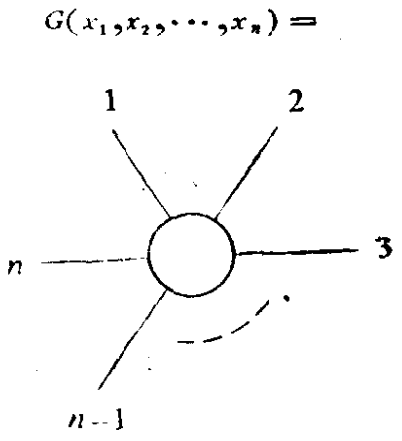


图 I.6

(3) T^* 乘积[20]。

T^* 乘积有二重意义：

(a) 它是一个协变的编时乘积。

(b) 导数被理解为取在 T 乘积的外边，即是

$$\langle 0|T^*(\partial_\mu\phi_\beta(x)\cdots)|0\rangle = \partial_\mu\langle 0|T(\phi_\beta(x)\cdots)|0\rangle. \tag{I.2.24}$$

在方程 (I.2.23) 中所定义的 Green 函数是场论的基本量。一个全 *n-pgf* 是用生成泛函对相应外源的微分来定义的：

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n))|0\rangle\\ &= \frac{1}{N}\int \prod_\beta \mathscr{D}\phi_\beta \prod_{j=1}^{n}\phi_{\alpha_j}(x_j)\exp\left(il + i\sum_\alpha \int d^4x\phi_\alpha J_\alpha\right)\\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta}{\delta J_{\alpha_1}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J_{\alpha_n}(x_n)} Z[J_\alpha]|_{-切J_\alpha=0},\end{aligned} \tag{I.2.25}$$

这里利用了下面的泛函积分恒等式：

$$\frac{\delta J_{\alpha_1}(x)}{\delta J_{\alpha_2}(y)} = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta^{(4)}(x-y). \tag{1.2.26}$$

泛函积分导出编时乘积的事实在非相对论量子力学一节已经论证了。现在，场论情形的证明是相同的（参看推导方程式(1.1.36)的论据）。当所包含的算符包括空时导数时，结果实际上是一个 T^* 乘积。这在论证正则方法和泛函积分方法的等价性中是决定性的。T^* 乘积的证明包括下面很简单的演算。

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T^*(\partial_\mu\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n))|0\rangle \\
&= \lim_{-\text{切}J_\beta\to 0}\frac{1}{N}\int\prod_\beta \mathscr{D}\phi_\beta\partial_\mu\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n) \\
&\quad\times\exp\left[iI+i\sum_\alpha\int d^4x\phi_\alpha J_\alpha\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\left\{\lim_{-\text{切}J_\beta\to 0}\frac{1}{N}\int\prod_\beta\mathscr{D}\phi_\beta\phi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n)\right. \\
&\quad\left.\times\exp\left[iI+i\sum_\alpha\int d^4x\phi_\alpha J_\alpha\right]\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\langle 0|T(\phi_{\alpha_1}(x_1)\phi_{\alpha_2}(x_2)\cdots\phi_{\alpha_n}(x_n))|0\rangle.
\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

推导 Euler-Lagrange 方程需要泛函积的这个性质。

对于费米场，重要的是注意它们的次序。而且，微分算符 $\delta/\delta\eta$ 和 $\delta/\delta\bar{\eta}$ 满足反对易关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\eta(y)=\delta(x-y),\quad \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\bar{\eta}(y)=\delta(x-y) \\
&\left\{\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\right\}=\left\{\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\phi(x)\right\}=\cdots \\
&\qquad=\left\{\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\eta(y)\right\}=0,\ \text{等等}.
\end{aligned} \tag{1.2.28}$$

在带质量的旋量和带质量的矢量玻色子理论中广义 Green 函数为

$$
\begin{aligned}
&G(x_1, \cdots, x_{n_1}; y_1, \cdots, y_{n_2}; z_1, \cdots, z_{n_3}) \\
&\quad = \langle 0 | T^*(\psi(x_1)\cdots\psi(x_{n_1})\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_{n_2}) \\
&\qquad \times B_{\mu_1}(z_1)\cdots B_{\mu_{n_3}}(z_{n_3}))|0\rangle \\
&\quad = \frac{1}{N}\lim_{\eta,\bar{\eta},J_\mu\to 0}\left(\frac{1}{i}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{-i}\right)^{n_2}\left(\frac{1}{i}\right)^{n_3}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\cdots \\
&\qquad \times \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_{n_1})}\cdot\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\eta(y_{n_2})} \\
&\qquad \times \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}(z_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J_{\mu_{n_3}}(z_{n_3})} Z_m[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]\Big|_{\text{一切外源}\to 0}.
\end{aligned}
\tag{I.2.29}
$$

这里 $Z_m[\eta, \bar{\eta}, J_\mu]$ 由方程 (I.2.19) 给出.

不考虑由方程 (I.2.21) 和 (I.2.28) 中所给出的反对易关系的复杂性，Green 函数可以直接由下面的恒等式写出来:

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &\to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}, \\
\bar{\psi}(x) &\to \frac{1}{-i}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}, \\
B_\mu(x) &\to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)},
\end{aligned}
\tag{I.2.30}
$$

此时要维持算符的次序. 上面的规则可用来得到方程 (I.2.29).

正则关系的推导 在通常的算符表述中，把等时对易关系，或量子化规则，及Euler-Lagrange 方程(运动方程)等等作为基本关系来处理. 在泛函积分方法中避免了这些正则关系. 但是，如果二者是等价的(至少对于正则理论)，应该在泛函方法中能够推导出正则关系. 下面试图证明，泛函形式和通常的

形式确实是等价的，由泛函形式能推导出 Euler-Lagrange 方程及等时对易关系。

Euler-Lagrange 方程式[21] 考虑广义拉格朗日方程 (I.2.1) 及相应的生成泛函方程 (I.2.4)。如果改变"积分变数"：

$$\phi_\beta \to \phi'_\beta = \phi_\beta + \omega_\beta, \tag{I.2.31}$$

这里 ω_μ 是无限小的，则对 $\omega^\alpha(x)$ 的第一阶有

$$I \to I' = I + \delta I,$$

$$\delta I = \int d^4x \omega^\alpha(x)[\mathscr{L}]_{\phi_\alpha}. \tag{I.2.32}$$

在得到这个表示式中，可以更确切地假定 $\omega(x)$ 在无限远的空时面上为零。在往后的讨论中，对所用的一切无限小变换参数，均假定有这个性质。可以方便地应用分部积分并略去表面项。方程 (I.2.31) 的雅可比行列式为一。因而生成泛函 $Z[J]$ 不可能依赖于 ω_β，我们有

$$\frac{\delta}{\delta\omega_\rho(x)} Z[J_\beta]|_{\omega_\rho=0} = i\int \prod_\beta \mathscr{D}\varphi_\beta\{[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)} + J_\rho(x)\}$$

$$\times \exp(iI + i\sum_\beta \int d^4x J_\beta\varphi_\beta)$$

$$= 0. \tag{I.2.33}$$

现在把上式对 $J_\alpha(y)$ 进行微分，我们有

$$\int \prod_\beta \mathscr{D}\varphi_\beta\{[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)}\varphi_\alpha(y) - i\delta_{\rho\alpha}\delta(x-y) + J_\rho(x)\varphi_\alpha(x)\}$$

$$\times \exp(iI + i\int d^4x J_\beta\varphi_\beta) = 0. \tag{I.2.34}$$

在算符表述中，对于 $J_\mu \to 0$，为

$$\langle 0|T^*\{[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)}\varphi_\alpha(y) - i\delta_{\rho\alpha}\delta(x-y)\}|0\rangle = 0. \tag{I.2.35}$$

在极限 $y_0 \to \infty$ 及 x_0 为有限时，上式相当的 Fourier 变换给出

$$\langle 0|[\mathscr{L}]_{\varphi_\beta(x)}|1,\alpha,\text{in}\rangle = 0, \tag{I.2.36}$$

这里 $|1,\alpha,\text{in}\rangle$ 为单粒子入射态，α 表示标志态的量子数集合。将方程 (I.2.34) 对外源 $J_\alpha(x)$ 微分 n 次，我们有

$$\begin{aligned} 0 = \int \prod_\beta \mathscr{D}\varphi_\beta \Big\{ &([\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)} + J_\rho(x)) \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i}(y_i) \\ &- i\sum_{i'=1}^{n} \delta_{\rho\alpha_{i'}}\delta(x-y_{i'}) \prod_{i=1}^{n}{}' \varphi_{\alpha_i}(y_i) \Big\} \\ &\times \exp\left(iI + i\int d^4x J_\beta\varphi_\beta\right), \end{aligned} \tag{I.2.37}$$

这里 $\prod_{i=1}^{n}{}'$ 意味着在乘积中项 $i=i'$ 被删去了。在外源为零的极限中，方程 (I.2.37) 有算符形式

$$\begin{aligned} \langle 0|T^*\Big\{ &[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)} \prod_{i'=1}^{n} \varphi_{\alpha_{i'}}(y_i) - i\sum_{i'=1}^{n} \delta_{\rho\alpha_{i'}} \\ &\times \delta(x-y_{i'}) \prod_{i=1}^{n}{}' \varphi_{\alpha_i}(y_i) \Big\} |0\rangle = 0. \end{aligned} \tag{I.2.38}$$

取极限 $y_{0j} \to -\infty$，$j=1,2,\cdots,n$，并且 $y_{0j} \to +\infty$，而 $j=n_1+1, n_1+2, \cdots, n$，我们对固定的 x_μ，并对 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 作相当的 Fourier 变换后，得到

$$\langle n_2,\text{out}|[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)}|n_1,\text{in}\rangle = 0, \tag{I.2.39}$$

这里 $n = n_1 + n_2$。因为入射态 $|n_1,\text{in}\rangle$ 和出射态 $|n_2,\text{out}\rangle$ 是任意的，方程 (I.2.38) 等价于 Euler-Lagrange 方程

$$[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)} = 0.$$

由方程 (I.2.35) 推导方程 (I.2.36)，并由方程 (I.2.38) 推导方程 (I.2.39) 的方法叫做约化公式 (reduction formula)。它将在附录 II 中扼要加以讨论。

作为明显的例子，比如在方程 (I.2.3) 所定义的 $\mathscr{L}_m$ 理论中，可以对费米子场推导出运动方程。在方程 (I.2.19) 中进行积分变数改变：

$$\begin{aligned} &\psi \to \psi, \\ &\bar{\psi} \to \bar{\psi} + \bar{\omega}, \\ &B_\mu \to B_\mu, \end{aligned} \tag{I.2.40}$$

给出

$$\delta I = \int d^4x \bar{\omega}(x)[i\not{\partial} - m + g\gamma^\mu B_\mu(x)]\psi(x). \tag{I.2.41}$$

由方程 (I.2.35) 到方程 (I.2.39) 中所概述的方法给出 Dirac 方程为

$$(i\not{\partial} - m + g\gamma^\mu B_\mu)\psi(x) = 0. \tag{I.2.42}$$

正则等时对易关系[21] 仍从方程 (I.2.38) 出发，这时 x_μ 和 $y_{1\mu}$ 保持为有限的，并且令 $y_{0j} \to -\infty$, $j = 2, 3, \cdots, n_1'$ 及 $y_{0j} \to +\infty$, $j = n_1' + 1, \cdots, n$, 而 $n = n_1 + n_2'$, 在相对于 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ 作相当的 Fourier 变换后，得到

$$\langle n_2', \text{out}|T^*\{[\mathscr{L}]_{\varphi_\rho(x)}\varphi_{\alpha_1}(y_1) - i\delta^4(x - y_1)\}|n_1', \text{in}\rangle = 0. \tag{I.2.43}$$

事实上，方程 (I.2.43) 是等时对易关系的内容，而此时要补充局域性假定。局域性假定的意义是，等时对易关系 $[\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)]_{x_0=y_0}$ 至多包含 $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ 及其有限次的导数。

对于 ϕ^4 理论，方程 (I.2.43) 给出

$$\langle n_2', \text{out}|T\left([\mathscr{L}]_{\varphi(x)}\varphi(y) + \delta(x_0 - y_0)\left[\frac{\delta}{\delta x_0}\varphi(x), \varphi(y)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_0}\{\delta(x_0 - y_0)[\varphi(x), \varphi(y)]\} + i\delta^4(x - y)\right)|n_1, \text{in}\rangle$$

$$= 0.$$

利用 Euler-Lagrange 方程，我们有

$$\delta(x_0 - y_0)\left[\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x),\ \varphi(y)\right] + \frac{\partial}{\partial x_0}\{\delta(x_0 - y_0)$$

$$\times [\varphi(x),\ \varphi(y)]\} = -i\delta^4(x - y). \qquad \text{(I.2.44a)}$$

由局域性条件，和假定 (I.2.44a) 左边两项是独立的，我们对带质量的旋量及带质量的矢量玻色子理论得到正则量子化条件为：

$$[\varphi(y),\ \partial_0\varphi(x)]_{x_0=y_0} = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

及

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{x_0=y_0} = 0.$$

首先认为

$$\varphi_c(x) \to \phi(x) \quad 及 \quad \varphi_s(y) \to \phi(y).$$

方程 (I.2.44a) 现在可以写为

$$\langle 0|T\{(i\partial\!\!\!/ - m + gB_\mu\gamma^\mu)\phi(x)\phi(y)\}|n-1;\ \alpha_2\cdots\alpha_n;\ \text{in}\rangle$$
$$+ i\langle 0|T(\gamma_0\{\phi(x),\phi(y)\}\delta(x^0 - y^0))|n-1;\ \alpha_2\cdots\alpha_n;\ \text{in}\rangle$$
$$= i\delta^4(x - y)\langle 0|n-1;\ \alpha_2\cdots\alpha_n,\ \text{in}\rangle.$$

利用费米子的运动方程 (I.2.42)，我们有

$$\langle 0|T(\{\phi(x),\ \phi(y)\}\delta(x^0 - y^0))|n-1;\ \alpha_2\cdots\alpha_n;\ \text{in}\rangle$$
$$= \delta^4(x - y)\gamma_0\langle 0|n-1;\ \alpha_2\cdots\alpha_n;\ \text{in}\rangle.$$

更普遍而言，我们对于任意的 $|n',\ \text{out}\rangle$ 和 $|n,\ \text{in}\rangle$ 可以写出：

$$\langle n',\ \text{out}|T(\{\phi(x),\ \phi(y)\}\delta(x^0 - y^0)$$
$$- \gamma_0\delta^4(x - y))|n,\text{in}\rangle = 0.$$

这等价于算符方程

$$\{\phi(x),\ \phi(y)\}\delta(x^0 - y^0) = \gamma_0\delta^{(4)}(x - y). \qquad \text{(I.2.44b)}$$

推导矢量玻色子场分量之间的等时对易子是比较冗长的，但论证是类似的。考虑场变数的改变：

$$\phi(x) \to \phi(x),$$

$$\psi(x) \to \psi(x), \tag{I.2.45}$$
$$B_\mu(x) \to B_\mu(x) + \omega_\mu(x).$$

作用量的变分为

$$\delta I = \int d^4x \omega^\mu(x)\{[g_{\mu\nu}(\partial^\rho\partial_\rho + M^2) - \partial_\mu\partial_\nu]B^\nu + g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\} + O(\omega_\mu^2). \tag{I.2.46}$$

把方程 (I.2.45) 和 (I.2.46) 代入 (I.2.19)，并对 $\omega^\mu(x)$ 微分，得到

$$0 = \int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu \mathscr{D}B_\mu\{[g_{\mu\nu}(\partial^\rho\partial_\rho + M^2) - \partial_\mu\partial_\nu]B^\nu(x) + g\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) + J_\mu(x)\} \times \exp\left[iI_M + i\int d^4x(\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu B^\mu)\right]. \tag{I.2.47}$$

遵循 (I.2.34) 的论证，导出矢量玻色子的运动方程为

$$[g_{\mu\nu}(\partial^\rho\partial_\rho + M^2) - \partial_\mu\partial_\nu]B^\nu(x) + g\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) = 0. \tag{I.2.48}$$

现在可以推导矢量场的辅助条件，并证明流 $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ 是守恒的。作积分变数改变：

$$\begin{aligned}\psi &\to \exp[-ig\chi(x)]\psi,\\ \bar{\psi} &\to \exp[ig\chi(x)]\bar{\psi},\\ B_\mu &\to B_\mu - \partial_\mu\chi(x),\end{aligned} \tag{I.2.49}$$

这里 $\chi(x)$ 为 x 的无限小函数，我们有

$$\delta I = M^2\int d^4x\chi(x)\partial^\mu B_\mu.$$

因为变换的雅可比行列式为 1，这导出辅助条件为

$$\partial^\mu B_\mu = 0. \tag{I.2.50}$$

(I.2.48) 对 x^μ 微分，并考虑到辅助条件，我们得到守恒流方程为

$$\partial^\mu\{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\} = 0. \tag{I.2.51}$$

得到包括流守恒作为特殊情形的普遍结果是更有用的。考虑积分变数改变：

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to\exp[-i\chi(x)]\psi(x),\\&\bar{\psi}(x)\to\psi(x)\exp[-i\chi(x)],\\&B_\mu(x)\to B_\mu(x),\end{aligned}\tag{I.2.52}$$

导出

$$\delta I=-\int d^4x\chi(x)\partial^\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)).$$

于是

$$\begin{aligned}0=\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu\mathscr{D}B_\mu\{&\partial^\mu[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)]+i\bar{\eta}(x)\psi(x)\\&-i\bar{\psi}(x)\eta(x)\}\exp\left[iI+i\int d^4x(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_\mu B^\mu)\right],\end{aligned}\tag{I.2.53}$$

它容许我们恢复到 (I.2.51)。我们把它对 $J_\nu(y)$ 微分，得到

$$\begin{aligned}0=\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu\mathscr{D}\beta_\mu\{&\partial^\mu[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)]B_\nu(y)\\&-i\bar{\eta}(x)\psi(x)B_\nu(y)-i\bar{\psi}(x)\eta(x)\}\\&\times\exp\left[iI+i\int d^4x(\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi+J^\mu B_\mu)\right].\end{aligned}\tag{I.2.54}$$

该方程容许我们在外源为零的极限中得到下式

$$[\bar{\psi}(x)\gamma_0\psi(x),B_\nu(y)]\delta(x_0-y_0)=0.\tag{I.2.55}$$

注意，在方程 (I.2.49) 和 (I.2.52) 中所给出的变换也有其值为 1 的雅可比行列式，因为这些变换包含平动和共轭成对的幺正变换。回到方程 (I.2.47)，对 χ_μ 进行微分：

$$\begin{aligned}0=\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu\mathscr{D}B_\mu\{&M^2\partial^\mu B_\mu(x)+g\partial^\mu[\bar{\psi}(x)\\&\gamma_\mu\psi(x)]+\partial^\mu J_\mu(x)\}\end{aligned}$$

$$\times \exp\left[iI_\mu + i\int d^4x(\bar{\eta}\phi + \phi\eta + J^\mu B_\mu)\right]. \qquad (I.2.56)$$

方程 (I.2.50) 和 (I.2.51) 不能运用于上面的方程式中，因为这些方程在外源存在时不成立。然而，由方程 (I.2.56)，可以推导出关系：

$$\langle n', \text{out}|T^*(M^2\partial^\mu B_\mu(x)B_\nu(y) + g\partial^\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))B_\nu(y) - i\partial_\nu\delta(x-y)\}|n,\text{in}\rangle = 0. \qquad (I.2.57)$$

现在可以利用方程 (I.2.50)，(I.2.51) 及 (I.2.55)，得到

$$[B_\lambda(x), B_\nu(y)]\delta(x_0 - y_0) = \frac{i}{M^2}\partial_\nu\delta^{(4)}(x-y). \qquad (I.2.58)$$

由 (I.2.47)，我们又有

$$\langle n', \text{out}|\{T^*([g_{\mu\nu}(\partial^\rho\partial_\rho + M^2) - \partial_\mu\partial_\nu]B^\nu(x)B_\lambda(y) + g\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)B_\nu(y)) - ig_{\mu\lambda}\delta^4(x-y)\}|n, \text{in}\rangle = 0. \qquad (I.2.59)$$

这给出关系式：

$$\partial_0\{\delta(x_0-y_0)[B_\mu(x) - \delta_{\mu 0}B_0(x), B_\lambda(y)]\} + \delta_{\mu 0}\delta(x_0-y_0)[\nabla\boldsymbol{B}(x), B(y)] + \delta(x_0-y_0)[\partial_0 B_\mu(x) - \partial_\mu B_0(x), B_x(y)] = ig_{\nu\lambda}\delta^4(x-y),$$

它导出下面的关系式：

$$\delta(x_0-y_0)[\nabla\boldsymbol{B}(x), B_0(y)] = i\delta^4(x-y), \qquad (I.2.60a)$$

$$\delta(x_0-y_0)[\nabla\boldsymbol{B}(x), B_k(y)] = 0, \qquad (I.2.60b)$$

$$\partial_0\{\delta(x_0-y_0)[B_l(x), B_0(y)]\} + \delta(x_0-y_0) \times [\partial_0 B_k(x) - \partial_k B_0(x), B_0(y)] = 0, \qquad (I.2.60c)$$

$$\partial_0\{\delta(x_0-y_0)[B_l(x), B_k(y)]\} + \delta(x_0-y_0)[\partial_0 B_l(x) - \partial_l B_0(x), B_k(y)] = ig_{kl}\delta^4(x-y), \qquad (I.2.60d)$$

这里 B_l 和 B_k 为矢量场的空间分量。对方程 (I.2.60) 应用局域性条件，我们得到两个正则对易关系式：

$$[B_l(x), B_k(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0,$$

及

$$\delta(x_0 - y_0)[\partial_0 B_l(x) - \partial_l B_0(x), B_k(y)] = ig_{kl}\delta^4(x - y). \tag{I.2.61}$$

注意，在方程（I.2.58）和（I.2.60a）之间没有矛盾，因为在包含 $B_k(x)$ 及 $B_0(y)$ 的对易子中，空间微分及作用量（令 $x_0 = y_0$）是不能交换的。可以确信，研究无质量的矢量玻色子理论时(参阅方程（I.2.63)），就是这种情形。在上面所推导的矢量场之间的各种对易关系是与正则量子化规则有关的约束类（the restricted class）的对易关系一致的，并且对自由矢量场 $B_\mu^{(f)}$ 更普遍的关系成立：

$$[B_\mu^{(f)}(x),\ B_\nu^{(f)}(y)] = -i\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{M^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta(x - y), \tag{I.2.62}$$

这里

$$\Delta(x) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p \in (p_0)\delta(p^2 - M^2)\exp(-ipx).$$

这是证明泛函积分方法和通常正则方法等价性的最后一步。

I.3 微扰展开式

希望利用泛函积分能得到场论的闭合解，但是这个希望未能实现。下面的讨论表明，生成泛函可以用所包含的粒子的传播子表示为闭合形式（closed form)；然而，大多数物理上感到兴趣的解只能通过小耦合常数极限的微扰展开式才能得到。

微扰展开式简单地以下面的方式用生成泛函来实现：
(a) 把给定的拉格朗日函数分开为两部分，自由拉格朗日函数 $\mathscr{L}_0$，和相互作用拉格朗日函数 $\mathscr{L}_I$；自由部分只包括场的

平方项.

$$\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I.$$

这是进行微扰展开的标准方法.

(b) 用外源的微分再写出 $\mathscr{L}_I$，因此它可以在泛函积分外面进行因子分解.

(c) 作变数改变，使场和源在其余的项中分开. 利用带质量的旋量和带质量的矢量玻色子理论来说明这个方法.

首先要引入下面的恒等式.给出一个函数 $F(\psi, \bar{\psi}, B_\mu)$，我们有

$$\exp\left[F(\psi, \bar{\psi}, B_\mu) + i\int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu B^\mu)d^4x\right]$$

$$= \exp\left[F\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{1}{-i}\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu}\right)\right]$$

$$\times \exp\left[i\int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu B^\mu)d^4x\right]. \qquad (1.3.1)$$

这可以对指数的第一项作幂级数展开来加以证明. 把生成泛函方程 (1.2.19) 再写为

$$Z_\mu[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \exp\left[+ g\int d^4x\xi(x)\right]$$

$$\times \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}B_\mu \exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}D\psi + \frac{1}{2}B^\mu K'_{\mu\nu}B^\nu\right]\right\}$$

$$\times \exp\left[i\int (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + B_\mu J^\mu)d^4x\right], \qquad (1.3.2)$$

这里

$$\xi(x) = \frac{\partial}{\partial\eta(x)}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}(x)}\frac{\partial}{\partial B^\mu(x)}, \qquad (1.3.3)$$

$$D(x) = i\gamma^\mu\partial_\mu - m, \qquad (1.3.4)$$

$$K'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(\partial^\lambda\partial_\lambda + M^2) - \partial_\mu\partial_\nu. \qquad (1.3.5)$$

由矢量玻色子拉格朗日函数方程 (1.2.3) 的自由部分，即

$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$，用分部积分法对 B_μ 之一计算一切微分，从而得到 (I.3.2) 中对 B_μ 为平方的项。为使泛函积分是很好定义的，要记住，质量 M 和 m 有小的虚部：

$$m \to m - i\varepsilon \quad 及 \quad M \to M - i\varepsilon.$$

显然这对于费米子场是正确的方法，因为小的虚部给出一个收敛因子

$$\exp\left(-\varepsilon\int d^4x\psi(x)\psi(x)\right).$$

对于矢量场，这个因子是

$$\exp\left(\varepsilon M\int d^4x B_\mu B^\mu\right)=\exp\left[\varepsilon M\int d^4x(B_0^2-\boldsymbol{B}^2)\right],$$

它表明，B_0 必须作为一个虚数积分变数来处理。令在方程 (I.3.4) 和 (I.3.5) 中所定义的 $D(x)$ 和 $K'_{\mu\nu}(x,y)$ 的逆函数为 $S_F(x,y)$ 及 $D'_{\mu\nu}(x,y)$，因而

$$D(x)S_F(x,y)=\delta^4(x-y), \tag{I.3.6}$$

$$g^{\nu\lambda}K'_{\mu\nu}(x)D'_{F\lambda\rho}(x,y)=g_{\mu\rho}\delta^4(x-y). \tag{I.3.7}$$

函数 $S_F(x,y)$ 和 $D'_{F\mu\nu}(x,y)$ 分别为旋量场和矢量玻色子场的 Feynman 传播子：

$$S_F(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4p e^{-ip(x-y)}\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon}, \tag{I.3.8}$$

$$D'_{F\mu\nu}(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4k\frac{-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/M^2}{k^2-M^2+i\varepsilon}e^{-ik(x-y)}. \tag{I.3.9}$$

现在改变积分变数

$$\psi(x)\to\psi(x)-\int S_F(x,y)\eta(y)d^4y,$$

$$\bar\psi(x)\to\bar\psi(x)-\int\bar\eta(y)S_F(y,x)d^4y,$$

$$B_\mu(x) \to B_\mu(x) - \int D'_{F\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) d^4y. \qquad (1.3.10)$$

因为变换都是平动，变换的雅可比行列式为 1。我们得到

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \frac{1}{N} \exp\left[g \int d^4x \xi(x)\right] \exp\left\{-i \int d^4x d^4y \left[\bar{\eta}(x)\right.\right.$$

$$\left.\left. \times S_F(x-y)\eta(y) + \frac{1}{2} J^\mu(x) D'_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)\right]\right\}$$

$$\times \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\bar{\phi} \prod_\mu \mathscr{D} B_\mu e^{iI_S}. \qquad (1.3.11)$$

利用 (1.2.20)，在归一化因子 N 中可以作类似的积分变数变换，得到

$$N = \lim_{\eta', \bar{\eta}', J'_\mu \to 0} \exp\left[g \int d^4x \xi'(x)\right] \exp\left\{-i \int d^4x d^4y \left[\bar{\eta}'(x)\right.\right.$$

$$\left.\left. \times S_F(x, y)\eta'(y) + \frac{1}{2} J'(x) D'_{F\mu\nu}(x, y) J'^\nu(y)\right]\right\}$$

$$\times \int \mathscr{D}\phi \mathscr{D}\bar{\phi} \prod_\mu B_\mu e^{iI_S}. \qquad (1.3.12)$$

依赖于场变量的项相抵消，并且

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \frac{1}{\bar{N}} \exp\left[+g \int d^4x \xi(x)\right] \exp\left\{-i \int d^4x d^4y\right.$$

$$\left. \times \left[\bar{\eta}(x) S_F(x, y)\eta(y) + \frac{1}{2} J^\mu(x) D'_{F\mu\nu}(x, y) J^\nu(y)\right]\right\}$$

(1.3.13)

这里 $\bar{N}$ 为 (1.3.12) 中不依赖于场变量的项。现在生成泛函只依赖于传播子函数。利用 *n-pgf* 的定义 (1.2.26)，可以直接实现微扰展开式。

现在可以开始推导带质量的旋量和带质量的玻色子理论的 Feynman 规则。

(a) 旋量的自由传播子

旋量的全传播子或二点函数定义为

$$i\bar{S}_F(x,y)\equiv\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y))|0\rangle \tag{I.3.14}$$

自由传播子为全传播子微扰展开式中的零阶项：

$$iS_F(x,y)=\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y)|0\rangle|_{g=0}$$

$$=\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}Z[\eta,\bar{\eta},J_\mu]|_{\substack{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0\\ g=0}}. \tag{I.3.15}$$

在动量空间内这当然为

$$iS_F(p)=i\int d^4xS_F(x,0)e^{ipx}$$

$$=\frac{i}{\not{p}-m+i\varepsilon}. \tag{I.3.16}$$

(b) 自由矢量玻色子的传播子

矢量玻色子的全传播子定义为

$$i\bar{D}'_{F\mu\nu}(x,y)\equiv\langle 0|T(B_\mu(x)B_\nu(y))|0\rangle. \tag{I.3.17}$$

它的零阶项给出自由传播子为

$$iD'_{F\mu\nu}(x,y)=\langle 0|T(B_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle|_{g=0}$$

$$=-\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{\delta}{\delta J^\nu(y)}Z[\eta,\bar{\eta},J^\mu]|_{\substack{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0\\ g=0}}. \tag{I.3.18}$$

在动量空间内，我们有

$$iD'_{F\mu\nu}(x,y)=i\int d^4xe^{ikx}D'_{\mu\nu}(x)$$

$$=\frac{i(-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/M^2)}{k^2-M^2+i\varepsilon}. \tag{I.3.19}$$

(c) 顶角

$\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y)B_\mu(z)|0\rangle|_{g\text{的第一阶}}$

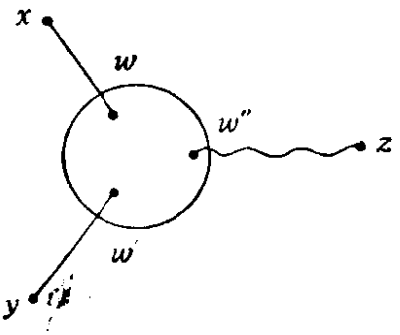
$$= -\imath \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \frac{\delta}{\delta J^{\mu}(z)} Z[\eta, \eta, J^{\mu}]|_{g\text{的第一阶}}$$

$$= \int d\omega d\omega' d\omega'' iS_F(x, \omega)\Gamma^{\lambda}(\omega, \omega', \omega'')$$
$$\times iS_F(\omega', y) i\bar{D}'_{F\lambda\mu}(\omega'', z)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= ig \int d^4\omega iS_F(x, \omega)\gamma^{\lambda} iS_F(\omega, y) iD'_{F\lambda\mu}(\omega, z). \quad (I.3.20)$$

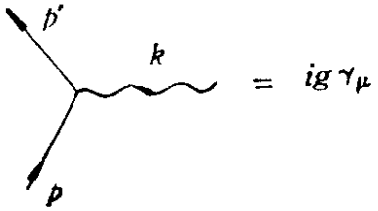
乘以费米子的逆传播子和矢量玻色子的逆传播子，即是，乘以

$$[iS_F]^{-1} \text{ 及 } [iD'_{F\mu\nu}]^{-1},$$

我们得到



$$\Gamma_{\mu}(x, y; z)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= -iS_F^{-1}(x, x')\langle 0|T(\phi(x')$$
$$\times \phi(y')B^{\lambda}(z'))|0\rangle$$
$$\times S_F^{-1}(y', y)$$
$$\times \bar{D}'_{\lambda\mu}(z', z)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= ig\gamma_{\mu}\delta^4(x - y)\delta^4(x - z). \quad (I.3.21)$$



$= ig\gamma_{\mu}$

图 1.7

在动量空间内为

$$\Gamma_{\mu}(p', p; k)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= \int dxdydz e^{ixp'} e^{-iyp} e^{-ikz}$$
$$\times \Gamma_{\mu}(x, y; z)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= (2\pi)^4\delta(p' - k - p)$$
$$\times \{ig\gamma_{\mu}\}. \quad (I.3.22)$$

上面的结果用图形可以总结为：

(d) 一条闭合费米子回路有因子 -1。

作为一个简单的例子，考虑包含二费米传播子的闭合回路。这在连通部分内展开指数 $\exp[-g\int d^4x\xi(x)]$ 到 g 的第二阶就得到了。

$$g^2\int d\omega d\omega'\xi(\omega)\xi(\omega')\exp\left\{-i\int d^4xd^4y\right.$$
$$\left.\times\left[\bar{\eta}(x)S_F(x,y)\eta(y)+\frac{1}{2}J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x,y)J^\nu(y)\right]\right\}$$
$$=g^2\int d^4xd^4y\mathrm{Tr}\{-iS_F(x,y)(ig\gamma_\nu)iS_F(y,x)(ig\gamma_\mu)$$
$$\times\frac{\delta}{i\delta J_\mu(x)}\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\exp\left\{-i\int d^4\omega d^4\omega'\left[\bar{\eta}(\omega)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times S_F(\omega,\omega')\eta(\omega')+\frac{1}{2}J^\mu(\omega)D_{F\mu\nu}(\omega,\omega')J^\nu(\omega')\right]\right\}.$$

(I.3.23)

负号的理由在于，微分之一，比如说，$\delta/\delta\eta$ 要通过奇数次的其它导数，及(或)对 η 和 $\bar{\eta}$ 的导数．上面的结果，方程(I.3.16)，(I.3.19)，(I.3.22)，及闭合回路的负号是熟知的理论的 Feynman 规则．在下节中讨论规范理论，将进一步研究 Feynman 规则．

连通的 n 点 Green 函数 在方程 (I.2.3) 中所定义的全 n-*pgf* (全 n 点 Green 函数)包括连通部分以及不连通部分．不连通部分由于把 n 个点 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 分为 2，3 …，n 个点群而形成的．在一群中每个元素本身是一个全 Green 函数．如图 I.8 所示．例如出现在图 I.8 中具有外线的影团表示连通的 Green 函数，为

$$G_c(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\langle 0|T(\varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)\cdots$$
$$\varphi_{\alpha_n}(x_n))|0\rangle_c. \qquad (I.3.24)$$

用图形表示为图 I.9．举一具体例子，一个全 4 点 Green 函数 (4-*pgf*) 包含一个连通部分和十一个不连通的部分．不连通部分由下面的一组全 Green 函数组成：四个全 Green 函数由一个 3-*pgf* 和一个 1-*pgf* 的乘积组成；三个为二个2-

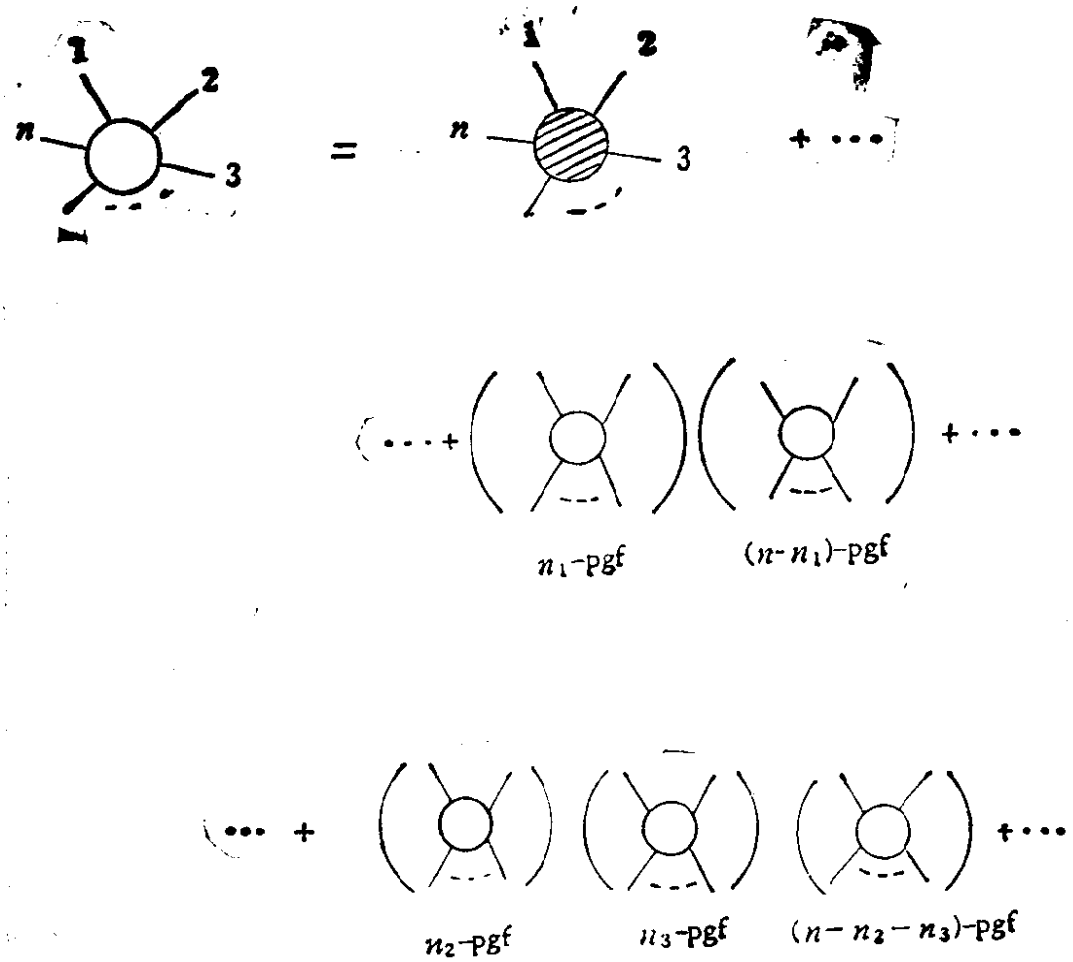


图 I.8

*pgf*的乘积组成；三个为由一个 2-*pgf* 和二个 1-*pgf* 的乘积组成；一个为由四个 1-*pgf* 的乘积组成.

连通的 Green 函数可以由不同的生成函数 $W[J_\beta]$ 产生，与全生成泛函的关系为

$$iW[J_\beta] = \ln Z[J_\beta]. \tag{I.3.25}$$

为了说明 $W[J_\beta]$ 确实产生连通的 *n-pgf*. 考虑一个4-*pgf*:

$$G_c(x_1, x_2, x_3, x_4) = i\frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\frac{\delta}{\delta J_3}\frac{\delta}{\delta J_4}W[J_\beta]$$

$$= \frac{1}{Z}\frac{\delta^4 Z}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4} - \left[\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_1}\right)\right.$$

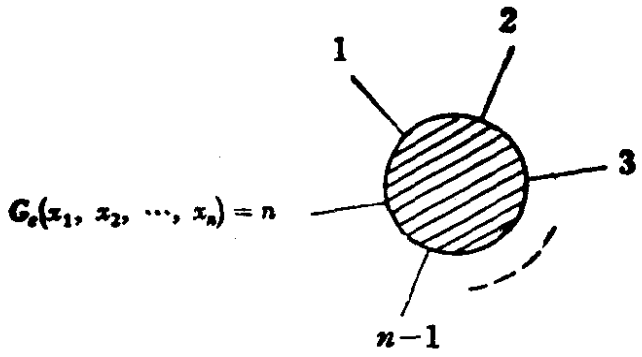


图 I.9

$$\times\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta^3 Z}{\delta J_2\delta J_3\delta J_4}\right)+\text{其余 3 项}\Big]$$
$$-\Big[\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1\delta J_2}\right)\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_3\delta J_4}\right)$$
$$+\text{其余 2 项}\Big]+2\Big[\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_1}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_2}\right)\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J_3\delta J_4}\right)+\text{其余 5 项}\Big]$$
$$-6\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_1}\right)\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_2}\right)\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_3}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J_4}\right). \qquad \text{(I.3.26)}$$

由计算连通部分和不连通部分，可以确信，只有连通的 4-*pgf* 残留在 (I.3.26) 中.

一粒不可约的 (1*PI*) *n*-*pgf* 一个连通的 *n*-*pgf* 包括如图 I.10 所示的一粒子极点部分. 例如，一个连通的 4-*pgf* 用图形可以表示为图 I.11. 图-o-表示一个全传播子. 图 I.11 的最后三个图形是一粒子可约的. 在图 I.11 等号右边的第一个图形是一粒子不可约的.

为了定义 1*PI* 的 *n*-*pgf* (一粒子不可约的 *n* 点 Green 函数)的生成泛函，源 $J_\theta(x)$ 的共轭可以定义为

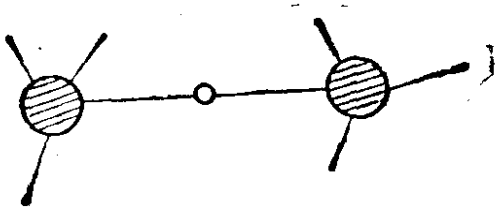


图 I.10

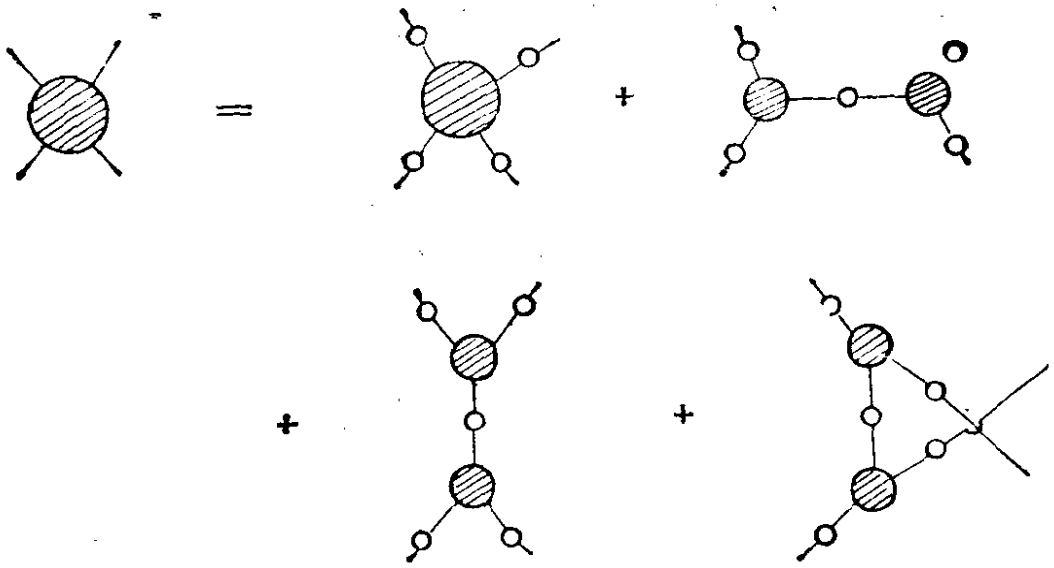


图 I.11

$$\tilde{\varphi}_\beta(x) = \frac{\delta W[J_\alpha]}{\delta J_\beta(x)}. \tag{I.3.27}$$

称它为唯象场.容易看出，$\tilde{\varphi}_\beta(x)$ 只是在外源存在时场 $\varphi_\beta(x)$ 的真空期待值. $1PI$ 的 n-pfg (一粒子不可约 n 点 Green 函数)的生成泛函是 $W[J_\alpha]$ 相对于共轭对 $J_\alpha(x)$ 和 $\tilde{\varphi}_\alpha(x)$ 的 Legendre 变换[22]:

$$A[\tilde{\varphi}_\alpha] \equiv W[J_\alpha] - \int dx J_\beta(x)\tilde{\varphi}_\beta(x). \tag{I.3.28}$$

与方程 (I.3.27) 共轭的关系为

$$J_\beta(x) = -\frac{\delta A[\tilde{\varphi}_\alpha]}{\delta\tilde{\varphi}_\beta(x)}. \tag{I.3.29}$$

传播子函数（2-*pgf*）可再写为

$$G_{\alpha\beta}(x,\ y)=\frac{\delta^2 W}{\delta J_\alpha(x)\delta J_\beta(y)}=\frac{\delta\tilde{\varphi}_\alpha(x)}{\delta J_\beta(y)}. \tag{I.3.30}$$

因而我们定义动能核为

$$K_{\alpha\beta}(x,\ y)=\frac{\delta^2 A[\tilde{\varphi}_\lambda]}{\delta\tilde{\varphi}_\alpha(x)\delta\tilde{\varphi}_\beta(y)}=-\frac{\delta J_\alpha(x)}{\delta\tilde{\varphi}_\beta(y)}. \tag{I.3.31}$$

下面可以看出，$G_{\alpha\beta}(x,y)$ 和 $K_{\alpha\beta}(x,y)$ 彼此互逆．定义链微分规则为

$$\frac{\delta}{\delta J_\beta(x)}=\int d^4y\,\frac{\delta\tilde{\varphi}_\alpha(y)}{\delta J_\beta(x)}\,\frac{\delta}{\delta\tilde{\varphi}_\alpha(y)}. \tag{I.3.32}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\delta J_\alpha(x)}{\delta J_\beta(y)}&=\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y)\\&=\int d^4z\,\frac{\delta\tilde{\varphi}_\lambda(z)}{\delta J_\beta(y)}\,\frac{\delta J_\alpha(x)}{\delta\tilde{\varphi}_\lambda(z)}\\&=-\int d^4z\,G_{\alpha\lambda}(x,z)K_{\lambda\beta}(z,y).\end{aligned} \tag{I.3.33}$$

这个关系被定义为

$$\mathbf{K}=-\mathbf{G}^{-1}. \tag{I.3.34}$$

证明 $A[\tilde{\phi}_\beta]$ 产生 1*PI* *n*-*pgf*'*s*，将 (I.3.33) 对 J 微分，

$$\int d^4z\left\{K(1,\ z)\frac{\delta}{\delta J_3}G(z,\ 2)+\frac{\delta}{\delta J_3}K(1,z)G(z,2)\right\}=0.$$

两边乘以 $G(4,1)$，并对变数 1 积分：

$$\frac{\delta G(1,\ 2)}{\delta J_3}=\int d^4x d^4y G(1,x)\,\frac{\delta K(x,\ y)}{\delta J_3}\,G(y,\ 2). \tag{I.3.35}$$

这用符号写为

$$\frac{\delta\mathbf{G}}{\delta J}=-\frac{\delta}{\delta J}\mathbf{K}^{-1}=\mathbf{K}^{-1}\,\frac{\delta\mathbf{K}}{\delta J}\,\mathbf{K}^{-1}=\mathbf{G}\,\frac{\delta\mathbf{K}}{\delta J}\,\mathbf{G}.$$

在 (I.3.35) 中，利用 (I.3.30) 和 (I.3.32)，我们有

$$\frac{\delta^3 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} = \int dy_1 dy_2 dy_3 G(1, y_1) G(2, y_2) G(3, y_3) \times \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)\delta\varphi(y_3)}. \tag{I.3.36}$$

这个关系用图形表示如图 I.12。

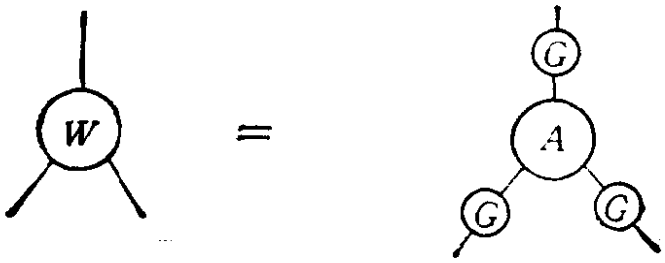


图 I.12

对于一个 4-*pgf*，我们将 (I.3.36) 对 J_4 微分，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\delta^4 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} = &\int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 G(1, y_1) G(2, y_2)\, G(3, y_3) \\ &\times G(4, y_4) \frac{\delta^4 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(y_1)\delta\tilde{\varphi}(y_2)\delta\tilde{\varphi}(y_3)\delta\tilde{\varphi}(y_4)} \\ &+ \int dy_1 dy_2 dy_3 dz_1 dz_2 dz_3 \Big\{ G(1, z_1) G(4, z_2) \\ &\times \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(z_1)\delta\tilde{\varphi}(z_2)\delta\tilde{\varphi}(y_1)} G(y_1, z_3) \\ &\times \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}_1(z_3)\delta\tilde{\varphi}(y_2)\delta\tilde{\varphi}(y_3)} G(2, y_2) G(3, y_3) \\ &+ G(2, z_1) G(4, z_2) \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(z_1)\delta\tilde{\varphi}(z_2)\delta\tilde{\varphi}(y_2)} \\ &\times G(y_2, z_3) \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(z_3)\delta\tilde{\varphi}(y_1)\delta\tilde{\varphi}(y_3)} \\ &\times G(1, y_1) G(3, y_3) + G(3, z_1) G(4, z_2)\end{aligned}$$

$$\times \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(z_1)\delta\tilde{\varphi}(z_2)\delta\tilde{\varphi}(y_3)} G(y_3, z_3)$$

$$\times \frac{\delta^3 A[\tilde{\varphi}]}{\delta\tilde{\varphi}(z_3)\delta\tilde{\varphi}(y_1)\delta\tilde{\varphi}(y_2)} G(1, y_1)$$

$$\times G(2, y_2)\Big\}. \qquad (1.3.37)$$

图 1.13 的图形给出方程 (1.3.37) 的图形表示:

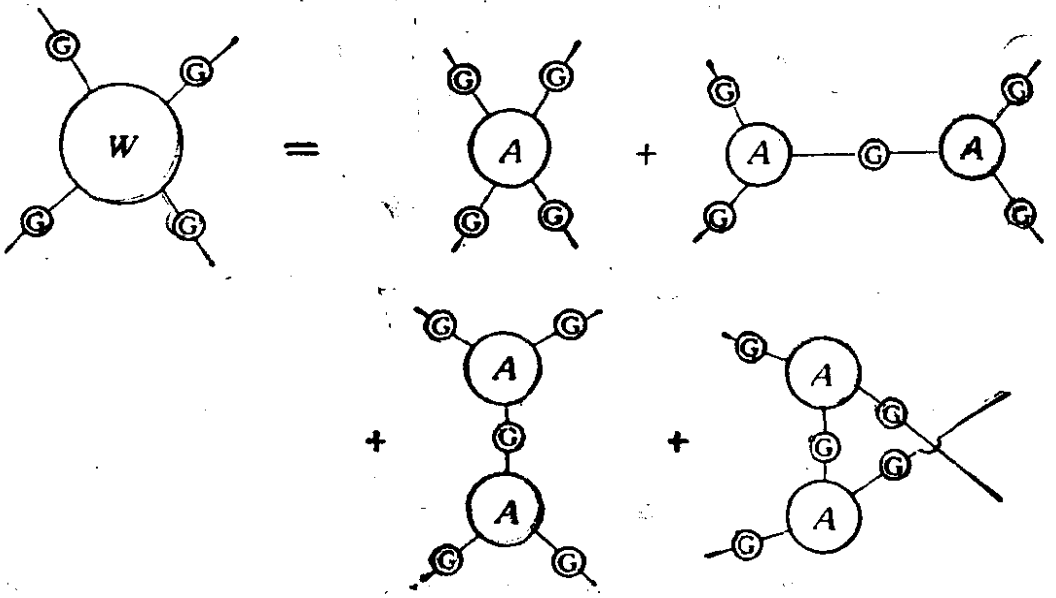


图 1.13

这表明，$A[\tilde{\varphi}]$ 产生 $1PI$ 的 n-pfg；当一切外动量被限制在质量壳层上时，它是一个 $1PI$ n 粒子 S 矩阵元。

1.4 守恒律和 Ward-Takahashi 恒等式的推导

由一个体系在某些变换(称为对称变换)下的不变性所引起的对称关系，对理解像量子场论这样复杂体系是起决定作用的.对称关系取二种相关形式之一：守恒律或 Ward-Takahashi 恒等式 (WTI). 守恒律定义了运动常数，它是内部空间(诸如同位旋空间)整体对称变换和时空变换的结果，例如，

能量动量守恒和角动量守恒就是这样. 局域的，即依赖于空时变换的内对称变换，导致微分守恒律和 Ward-Takahashi 恒等式 (WTI). WTI 使不同的 n-pfg 彼此联系. 二种形式之间的关系是由电荷守恒对电磁流密散度为零及量子电动力学中著名的 Ward-Takahashi 恒等式的比较，由轴矢量荷的不守恒对部分守恒轴矢量流 (PCAC) 及 PCAC WTI 等等的比较为例来说明的. 守恒律的重要性是明显的. WTI 在粒子物理学的两个领域内都是必须的：流代数，及量子电动力学和非阿贝耳规范理论的重正化理论；流代数是在唯象应用中把不同的物理反应联系起来. 在非阿贝耳规范理论可重正性的证明中，WTI 的运用是必不可少的.

守恒律和 Ward-Takahashi 恒等式 (WTI) 的推导在泛函积分方法中是直捷了当的. 基本的步骤与推导 Euler-Lagrange 方程的步骤是相同的：求出一个适当的(场)积分变数的改变，它包含与空时有关的无限小参数，把变换得到的生成泛函对无限小参数进行微分. 除一切变换是局域的以外，场变数的改变是与算符形式的改变等同的. 因为生成泛函不依赖于无限小的参数，对无限小参数的微分给出一个为零的结果. 这正是 WTI 的内容.

某些 n 点函数包含除场变数以外的量，例如矢量流密度 V^a_μ；轴矢量流密度 A^a_μ；标量密度 S^a 和赝标量密度 P^a，这里 a 是一个内对称指标；并且包含能量动量张量 $\theta_{\mu\nu}$. 为了推导这些函数的 WTI，可以考虑一个有效生成泛函，包括这些量及其相联系的外源 $v^a_\mu(x)$，$a^a_\mu(x)$，$s^a(x)$，$p^a(x)$，$\theta_{\mu\nu}$. 例如

$$\tilde{Z}[J_a, v^a, a^a, \cdots, \theta^{\mu\nu}] = \frac{1}{N}\int \prod \mathscr{D}\varphi_\beta$$

$$\times \exp\left\{il + i\int d^4x \varphi_\beta J_\beta + i\sum_a \int d^4x \left[v^a_\mu V^{a\mu} + a^a_\mu A^{a\mu}\right.\right.$$

$$+ s^a S^a + p^a P^a + \theta^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}]\Big\}. \tag{I.4.1}$$

对于带质量的旋量和带质量的矢量玻色子的理论，$SU(N)$ 流可以定义为

$$V_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi(x),$$

$$A_\mu^a(x) = \psi(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2}\psi(x),$$

$$S^a(x) = \bar{\psi}(x)\frac{\lambda^a}{2}\psi(x),$$

$$P^a(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2}\psi(x), \tag{I.4.2}$$

这里 λ^a, $a = 1, 2, \cdots, N^2 - 1$，为生成元的表示矩阵，满足对易关系

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c,$$

并且 f^{abc} 为 $SU(N)$ 的结构常数。对于 $SU(3)$，λ^a 为 Gell-Mann 矩阵。理论的对称能量动量张量用 Belinfante 张量[33]来定义：

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4}[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi(x) + \mu\longleftrightarrow\nu] - B_{\mu\lambda}(x)B_\nu^\lambda(x)$$

$$- \frac{1}{2}[\partial^\lambda B_{\lambda\mu}(x)B_\nu(x) + \mu\longleftrightarrow\nu] - g_{\mu\nu}\mathscr{L}_M, \tag{I.4.3}$$

这里 $\mathscr{L}_M$ 和 $B_{\mu\nu}$ 在方程 (I.2.2b) 及 (I.2.2c) 中给出。

为了推导 WTI，考虑场变数的无限小改变：

$$\varphi_\beta \to \varphi_\beta + \delta\varphi_\beta. \tag{I.4.4}$$

一般可以写出

$$\delta\varphi_\beta = \omega_{[\nu]}F_\beta^{[\nu]}(\varphi_\lambda, \varphi_{\alpha,\lambda}) + \partial_\mu\omega_{[\nu]}G_\beta^{\mu[\nu]}(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,\lambda}), \tag{I.4.5}$$

这里 $[\nu]$ 为指标集，$W_{[\nu]}$ 为无限小的张量函数，它在 4 维

Minkowski（无限远）边界上连同它的头 m 次导数为零. 因而

$$\delta\varphi_{\beta,\lambda} = \omega_{[\nu]}\partial_\lambda F_\beta^{[\nu]} + \partial_\lambda\omega_{[\nu]}F_\beta^{[\nu]} + \partial_\lambda\partial_\mu\omega_{[\nu]}G_\beta^{\mu[\nu]} + \partial_\mu\omega_{[\nu]}\partial_\lambda G_\beta^{\mu[\nu]}. \quad (1.4.6)$$

场变数改变（1.4.4）导致 I，V_μ^a，A_μ^a，等等的改变，它们的改变表示为 δI，δV_μ^a，δA_μ^a，等等. 它也可以引起一个非平凡的雅可比行列式 $J[\phi_\beta, \omega_{[\nu]}]$. 于是对于无限小参数 $\omega_{[\nu]}$ 的最低阶，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{Z}[J_\beta, v_\mu^a, \cdots] = N^{-1}\int \prod_\beta \mathscr{D}\varphi_\beta J[\varphi_\beta, \omega_{[\nu]}] \\ \times \exp\left\{iI + i\int d^4x\varphi_\beta J_\beta \right. \\ \left. + i\sum_a \int d^4x[v_\mu^a V^{a\mu} + \cdots]\right\} \\ \times\left\{1 + i\delta I + i\int d^4x J_\beta\varphi_\beta \right. \\ \left. + i\sum_a\int d^4x[v_\mu^a V^{a\mu} + \cdots]\right\}.\end{aligned} \quad (1.4.7)$$

应该注意，在方程（1.4.5）中所给出的场变分 $\delta\phi_\beta$ 应该以这样的形式使所诱导出的作用量改变 δI 要与推导 WTI 时对能量动量张量求迹关系情形的量或其求迹的散度成正比. 方程（1.4.7）对 $\omega_{[\beta]}$ 微分，并令 $\omega_{[\beta]} = 0$，我们有

$$\begin{aligned}0 = N^{-1}\int \prod_\beta \mathscr{D}\varphi_\beta \exp\left\{iI + i\int d^4x\varphi_\beta J_\beta \right. \\ \left. + i\sum_a\int d^4x[v_\mu^a V^{a\mu} + \cdots]\right\}\frac{\delta}{\delta\omega_{[\nu]}}\left\{J[\varphi_\beta, \omega_{[\nu]}] \right. \\ \left. + i\delta I + i\int d^4x J_\beta\delta\varphi_\beta + i\sum_a\int d^4x[v_\mu^a V^{a\mu} + \cdots]\right\}.\end{aligned} \quad (1.4.8)$$

这是由变换 (I.4.4) 和 (I.4.5) 所引起的全 n-pfg 的WTI 内容. 上面的方法表明,一旦场的变换方程 (1.4.5) 和雅可比行列式是已知的,则 WTI 的推导是直捷了当的. 现在方法的简单性在于这样的事实,运用运动方程,即运用 Euler-Lagrange 方程, 并运用等时对易关系, 是旁通的, 在通常的方法中则是必不可少的. 下面的例子阐明带质量的旋量和带质量的矢量玻色子理论中对矢量流, 轴矢量流及对称的能量动量张量求迹恒等式推导 WTI 的步骤. 这些练习也给出计算变换的雅可比行列式的演算,有时可能是冗长的.

矢量流的 Ward-Takahashi 恒等式 矢量流的 WTI 是把 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T(V^a_\mu(x)\cdots)|0\rangle$ 与其他 n-pfg 相联系的. 所需要的场变换为

$$\psi(x)\to\left[1+i\omega^a(x)\frac{1}{2}\lambda^a\right]\psi(x),$$

$$\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}(x)\left[1-i\omega^a(x)\frac{1}{2}\lambda^a\right],$$

$$B_\mu(x)\to B_\mu(x). \tag{I.4.9}$$

各种流和作用量积分的变分为:

$$\delta I=\int d^4x\omega^a(x)\partial^\mu V^a_\mu(x),$$

$$\delta j^b_\nu(x)=\omega^a(x)f_{abc}j^c_\nu(x), \tag{I.4.10}$$

$$\delta\Theta_{\lambda\rho}(x)=-\frac{1}{2}[g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}-2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}]V^{a\mu}(x)\partial^\nu\omega(x).$$

这里 j^a_ν 为方程 (I.4.2) 中所列举的四维流之一. 把方程 (I.4.10) 代入(全 n-pgf 的)生成泛函中,并对 $\omega(x)$ 微分,然后令它为零,我们得矢量流的 WTI 为:

$$0=\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu\mathscr{D}B_\mu\exp\left\{iI+i\int(\eta\psi+\bar{\psi}\eta\right.$$

$$+ J^{\mu}B_{\mu}) + \sum_{a}\int d^{4}x(v^{a}_{\mu}V^{a\mu} + \cdots)\Big\}$$

$$\times\Big\{i\partial^{\mu}V^{a}_{\mu}(x) - \eta\frac{\lambda^{a}}{2}\phi + \phi\frac{\lambda^{a}}{2}\eta + if^{abc}[v^{b}_{\mu}V^{c\mu}$$

$$+ a^{b}_{\mu}A^{c\mu} + s^{b}S^{c} + p^{b}P^{c}] - \frac{i}{2}\int dy\theta^{\lambda\rho}(y)[g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}$$

$$+ g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - 2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}]V^{a\mu}(x)\partial^{\nu}\delta(x-y)\Big\}. \quad (1.4.11)$$

上式对相应的外源项微分可以得到一般的 WTI:

$$-i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\langle 0|T^{*}(V^{a}_{\mu}(x)\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial z_{\rho}}\delta(z-x)$$

$$\times\langle 0|T(V^{a\lambda}(x)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n)|0\rangle + \cdots$$

$$+ f_{abc}\langle 0|T^{*}(\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{c}_{v_j}(y_j)\cdots$$

$$j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle. \quad (1.4.12)$$

如果能量动量张量 $\Theta_{\lambda\rho}$ 不出现，则右边的第一项应该略去. 方程 (1.4.12) 的特别结果是矢量流守恒:

$$\partial^{\mu}V^{a}_{\mu} = 0.$$

注意，变换方程 (1.4.9) 的雅可比行列式对 $\omega(x)$ 的第一阶为一. 对这一阶，这是因为由 $\phi(x)$ 改变的贡献与由 $\phi(x)$ 改变的贡献相抵消；这也可以由 λ^{a} 求迹为零的事实得到. 雅可比行列式的详细讨论将在 § 1.5 中给出.

轴矢量流的 Ward-Takahashi 恒等式 为了推导轴矢量流的 WTI，场以下面的方式改变:

$$\phi(x) \to \left[1 + i\omega^{a}(x)\gamma_{5}\frac{1}{2}\lambda^{a}\right]\phi(x),$$

$$\phi(x) \to \phi(x)\left[1 + i\omega^{a}(x)\gamma_{5}\frac{1}{2}\lambda^{a}\right],$$

$$B_\mu(x) \to B_\mu(x). \tag{1.4.13}$$

它们导致作用量和流的改变为

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4x\omega^a(x)[\partial^\mu A^a{}_\mu(x) - 2mP^a(x)],\\
\delta V^a{}_\mu(x) &= \omega^a(x)f^{abc}A^c_\mu(x),\\
\delta A^b_\mu(x) &= \omega^a(x)f^{abc}V^c_\mu(x),\\
\delta S^b(x) &= \omega^a(x)d^{abc}P^c(x),\\
\delta P^b(x) &= -\omega^a(x)d^{abc}S^c(x),\\
\delta\Theta_{\lambda\rho}(x) &= g_{\lambda\rho}[\partial^\mu\omega^a(x)A^a_\mu(x) + 2m\omega^a(x)P^a(x)]\\
&\quad - \frac{1}{2}[\partial_\lambda\omega^a(x)A^a_\rho(x) + \partial_\rho\omega^a(x)A^a_\lambda(x)].
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

变换的雅可比行列式仍为 1。[进一步的讨论参看 § I.5]。按照推导方程 (I.4.11) 相同的方法，得到轴矢量 WTI 的生成函数为：

$$\begin{aligned}
0 = N^{-1}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi \prod_\lambda \mathscr{D}B_\lambda \exp\Big\{&iI_M + i\int(\phi\eta\\
&+ \bar\eta\phi + J_\mu B^\mu)d^4x + i\sum_a\int d^4x[v^a_\mu V^{a\mu} + \cdots]\Big\}\\
&\times\Big\{i[\partial^\mu A^a_\mu(x) - 2mP^a(x)] - \bar\eta(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\phi(x)\\
&- \bar\phi(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\eta(x) + if^{abc}[v^b_\mu(x)A^{c\mu}(x)\\
&+ a^b_\mu(x)V^{c\mu}(x)] + id^{alc}[s^b(x)P^c(x) - p^b(x)S^c(x)]\\
&+ i\int dy\theta^{\lambda\rho}(x)\Big[g_{\lambda\rho}(A^a_\mu(y)\partial^\mu + 2mp^a(y))\delta(x-y)\\
&- \frac{1}{2}\Big(A^a_\rho(y)\frac{\partial}{\partial y^\lambda} + A^a_\lambda(y)\frac{\partial}{\partial y_\rho}\delta(x-y)\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

一般的轴矢量的 WTI 为

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T^*(A^a_\mu(x)\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle\\
&=-2mi\langle 0|T^*(P^a(x)\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle\\
&\quad-\frac{1}{2}(g^\tau_\rho g^\sigma_\lambda+g^\sigma_\rho g^\tau_\lambda-2g_{\lambda\rho}g^{\tau\sigma})\frac{\partial}{\partial z^\tau}\delta(z-x)\\
&\quad\times\langle 0|T^*(A^a_\sigma(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle+2m\delta(z\\
&\quad-x)g_{\lambda\rho}\langle 0|T^*(P^a(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle\\
&\quad+\delta(y_i-x)\langle 0|T^*(\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots\\
&\qquad\begin{bmatrix} f^{ab_ic}\begin{pmatrix}A^c_{v_i}(x)\\ V^c_{v_i}(x)\end{pmatrix}\\ d^{ab_ic}\begin{pmatrix}P^c(x)\\ -S^c(x)\end{pmatrix}\end{bmatrix}\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{I.4.16}
$$

如果能量动量张量 $\Theta_{\lambda\rho}$ 不出现，则右边的第二和第三项被略去了。下面是一个简单的例子

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T(A^a_\mu(x)V^b_\nu(y)V^c_\lambda(z))|0\rangle\\
&=2m\langle 0|T(P^a(x)V^b_\nu(y)V^c_\lambda(z))|0\rangle\\
&\quad+i\delta(x-y)f^{abb'}\langle 0|T(A^{b'}_\nu(y)V^c_\lambda(z))|0\rangle\\
&\quad+i\delta(x-y)f^{acc'}\langle 0|T(V^b_\nu(y)V^{c'}_\lambda(z))|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{I.4.17}
$$

在下节中将进一步说明这个 WTI.

能量动量张量的 Ward-Takahashi 恒等式 其次考虑

$$
\frac{\partial}{\partial z_\lambda}\langle 0|T^*(\Theta_{\lambda\rho}(z)j^{b_1}_{v_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{v_n}(y_n))|0\rangle, \tag{I.4.18}
$$

用方程 (I.4.5) 的符号，场变数的变换为

$$
\begin{aligned}
F^{[\mu]}_a&=\phi^\mu_a,\\
G^{\lambda[\mu]}_\alpha&=\frac{1}{2}(\Sigma^{\lambda\rho})_{\alpha\beta}\varphi_\beta,
\end{aligned}
\tag{I.4.19}
$$

这里自旋张量 $(\Sigma_{\lambda\rho})_{\alpha\beta}$ 为

$$(\Sigma_{\lambda\rho})_{\alpha\beta}=\begin{cases}0,\text{ 对于自旋为 0 的场和流,}\\ \dfrac{1}{4}[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]_{\alpha\beta},\text{ 对于自旋 }\dfrac{1}{2}\text{ 的场,}\\ g_{\lambda\alpha}g_{\rho\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\rho\alpha},\text{ 对于矢量和轴矢量的场和流.}\end{cases}\tag{I.4.20}$$

因此

$$\psi(x)\to\left\{1+\omega^\lambda(x)\partial_\lambda+\frac{1}{8}\partial^\lambda\omega^\rho(x)[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\right\}\psi(x),$$

$$\psi(x)\to\psi(x)\left\{1+\partial_\lambda\omega^\lambda(x)-\frac{1}{8}\partial^\lambda\omega^\rho(x)[\gamma_\lambda,\gamma_\rho]\right\}.$$

$$B_\mu(x)\to\Big\{g_{\mu\nu}(1+\omega^\lambda(x)\partial_\lambda)+\frac{1}{2}\partial^\lambda\omega^\rho(x)$$

$$\times(g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}-g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu})\Big\}B^\nu(x).\tag{I.4.21}$$

这里 $\tilde{\partial}_\lambda$ 意味着对出现在微分符号左边的函数的微分。 这些导致改变为

$$\delta I=-\int dx\omega^\rho(x)\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\Theta_{\lambda\rho}(x),\tag{I.4.22a}$$

及

$$\delta j^a_\mu(x)=\omega^\lambda(x)\partial_\lambda j^a_\mu(x)+\frac{1}{2}\partial^\lambda\omega^\nu(x)(\Sigma_{\lambda\rho})_{\mu\nu}j^{a\nu}(x),\tag{I.4.22b}$$

这里 $j^a_\mu(x)$ 为流的四类型之一，$\Sigma_{\lambda\rho}$ 在方程 (I.4.20) 中定义了。在 § 1.5 中阐述变换的雅可比行列式为一的证明。 由推导流的 WTI 相同的步骤，我们有

$$i\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\langle 0|T^*(\Theta_{\lambda\rho}(x)j^{b_1}_{\nu_1}(y_1)\cdots j^{b_n}_{\nu_n}(y_n))|0\rangle$$

$$=\cdots+\left\{\delta^{\tau_j}_{\nu_j}\delta(x-y_j)\frac{\partial}{\partial y^\rho_j}+\frac{1}{2}(\Sigma_{\sigma\rho})^{\tau_j}_{\nu_j}\right.$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y_{j\sigma}} \delta(y_j - x)\Big\}\langle 0 | T(j^{b_1}_{\nu_1}(y_1)\cdots j^{b_i}_{\nu_i}(y_i)\cdots$$

$$j^{b_n}_{\nu_n}(y_n))|0\rangle. \tag{I.4.23}$$

能量动量张量求迹恒等式 所需要的变换是

$$\phi(x) \to \left[1 + \frac{3}{2}\omega(x)\right]\phi(x),$$

$$\psi(x) \to \left[1 + \frac{3}{2}\omega(x)\right]\psi(x),$$

$$B_\mu(x) \to [1 + \omega(x)]B_\mu(x). \tag{I.4.24}$$

下面是诱导出的变分:

$$\delta I = -\int d^4x\omega(x)[g^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} - \Theta], \tag{I.4.25}$$

这里

$$\Theta(x)' = M\phi(x)\psi(x) - M^2 B_\mu(x)B^\mu(x) \tag{I.4.26}$$

为能量动量张量 $\Theta_{\mu\nu}$ 的求迹,并且对四种类型的流密度

$$\delta j^a_\mu(x) = 3\omega(x)j^a_\mu(x). \tag{I.4.27}$$

注意,如果利用场的运动方程,如在方程 (I.4.10), (I.4.14) 和 (I.4.21) 中给出一切作用量的变分所做的一样, 则方程 (I.4.25) 恒为零. 然而, 在外源 η, $\bar{\eta}$ 和 J_μ 存在时, 运动方程 $[\mathscr{L}]\phi_\beta = 0$ 并不成立. 进一步,因为涉及到对 T^* 乘积的导数是取在 T 乘积符号的外边, 所以运动方程再不能直接应用了.

变换 (I.4.24) 的雅可比行列式不为1. 表示为

$$J(\omega) = J_\phi(\omega)J_{\bar{\psi}}(\omega)J_B(\omega), \tag{I.4.28}$$

这里 $J_\phi(\omega)$, 等等为 $\phi(\alpha)$ 等的变换的雅可比行列式. 求迹恒等式的生成泛函为

$$0 = N^{-1}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\psi\prod_\mu \mathscr{D}B_\mu \exp\left\{iI_M + i\int d^4x[\bar{\eta}\phi\right.$$

$$+\bar{\phi}\eta+J_\mu B^\mu]\Big\}\Big\{\frac{\delta J(\omega)}{\delta\omega(x)}-i[g^{\lambda\rho}\Theta_{\lambda\rho}-\Theta]$$

$$+i\frac{3}{2}\bar{\phi}(x)\eta(x)+i\frac{3}{2}\eta(x)\phi(x)+iJ_\mu(x)$$

$$\times B^\mu(x)+3i\sum_b[v_\mu^b V^{b\mu}+a_\mu^b A^{b\mu}+s^b S^b$$

$$+p^b P^b]+\theta^{\lambda\rho}\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\delta\Theta_{\lambda\rho}|_{\omega=0}\Big\}, \qquad (1.4.29)$$

这里 $\delta\Theta_{\lambda\rho}$ 是把方程 (1.4.24) 代入 $\Theta_{\lambda\rho}$，即代入方程 (1.4.3) 而得到的，因而，如果只在一个 n-pfg 利用能量动量张量，则 $\delta\Theta_{\lambda\rho}$ 并不在计算中出现.

为了计算方程 (1.4.29) 中的 $\delta J(\omega)/\delta\omega(x)|_{\omega=0}$，令一切外源项为零，得到

$$\frac{\delta J(\omega)}{\delta\omega(x)}\Big|_{\omega=0}-i\langle 0|T^*(g^{\lambda\rho}\Theta_{\lambda\rho}(x)-\Theta(x))|0\rangle=0. \qquad (1.4.30)$$

注意，不管求迹的算符形式，$g^{\lambda\rho}\Theta_{\lambda\rho}=\Theta$，第二项并不为零. 这是因为包含等时的场乘积，它需要定义为不同时间的极限. 于是 T^* 乘积将使它不为零. 在 § 1.5 中由明确的计算证明了它的两项，方程 (1.4.30).

方程 (1.4.29) 给出全 n-pfg 的求迹恒等式. 不连通部分可以利用式 (1.4.30) 逐次分开；于是连通部分的恒等式取形式

$$\begin{aligned}&g^{\lambda\rho}\langle 0|T^*(\Theta_{\lambda\rho}(x)j_{\nu_1}^{b_1}(y_1)\cdots j_{\nu_n}^{b_n}(y_n))|0\rangle_c\\&\quad=\langle 0|T^*(\Theta(x)j_{\nu_1}^{b_1}(y_1)\cdots j_{\nu_n}^{b_n}(y_n))|0\rangle_c\\&\qquad-3i[\delta^4(x-y_1)+\cdots+\delta^4(x-y_n)]\\&\qquad\times\langle 0|T^*(j_{\nu_1}^{b_1}(y_1)\cdots j_{\nu_n}^{b_n}(y_n))|0\rangle_c. \qquad (1.4.31)\end{aligned}$$

这完成了推导 WT1 的论证. 必须注意，上面某些 WTI 实际

上在微扰论中并不成立. 一般称之为反常关系的改进工作 (*modifications*) 在某些轴矢量的 WTI 和能量动量张量求迹恒等式情形中是必要的. 在轴矢量流的 WTI 中的反常叫做 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常; 在求迹中的反常性叫做求迹反常,这些反常将在第 IV 章内再加以讨论,在那里将计算某些反常.

I.5 关于泛函方法

至今所提及的泛函方法或多或少被认为是记忆法. 本节将较详细地讨论泛函方法. 泛函计算包括微分和积分,它们都是在点集空间上所定义的微分和积分的推广. 泛函微分是代替实数或复数对函数进行微分的. 泛函积分是在函数空间而不在实数或复数空间内相对于所定义的测度进行积分的. 首先将讨论表示玻色子场的通常的泛函,接着讨论费米子场的情形,费米子场是 Grassman 代数元素.

玻色子场 简言之,泛函是函数的函数. 它定义函数集和数集或函数集之间的关系. 可以把通常的一个函数认为是一个泛函,即是

$$F_x[g] = g(x), \tag{I.5.1}$$

这里 $g(x)$ 为通常的函数,而 $F_x[g]$ 表示一个泛函. 在方程 (I.5.1) 左边的 x 在这里被认为是参数而不是变数. 对于固定的 x, 当函数 $g(x)$ 取不同的容许形式时, $F_x[g]$ 取不同的值. 另一简单的情形是

$$F_x[g] = \int dy K(x, y) g(y). \tag{I.5.2}$$

这里 x 和 y 均为参数. 核 $K(x, y)$ 是固定的. 当 $g(x)$ 的函数形式变化时,泛函 $F_x[g]$ 取不同的值. 另一泛函可以由方

程（I.5.2）右边对 x 进行积分来定义，即是

$$F[g] = \int dx \int dy K(x, y) g(x). \tag{I.5.3}$$

一个泛函可以用无限多变数的集合来表示. 这可以用正交函数的无限集合来展开一切容许的函数 $g(x)$ 来进行，假设这样的展开式是存在的. 令 $\phi_n(x)$，$n = 1, 2, \cdots$为正交归一函数的完备集

$$\int dx \varphi_n(x) \varphi_{n'}(x) = \delta_{nn'} \tag{I.5.4}$$

及

$$\sum_n \varphi_n(x) \varphi_n(y) = \delta(x - y). \tag{I.5.5}$$

我们可以写出

$$g(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x).$$

一个给定的函数唯一由展开式系数 a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$的集合所确定. 如像在方程（I.5.2）中所定义的泛函一样，可以认为是无限多变数集合的函数，即 a_n 的函数. 因此

$$F_x[g] = \sum_n a_n \xi_n(x), \tag{I.5.6}$$

这里

$$\xi(x) \equiv \int dy K(x, y) \varphi_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{I.5.7}$$

为固定的已知函数. 十分清楚，$F_x[g]$ 随 a_n 而变化，因此名为泛函.

考虑一维自由 Brown 运动比较直观的例子. 一个 Brown 粒子的运动用 Langevin 方程来描述：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{T_0} \frac{dx}{dt} + f(t), \tag{I.5.8}$$

这里 m 为粒子的质量，T_0 为弛豫时间，$-\frac{m}{T_0}\frac{dx}{dt}$ 为摩擦力．函数 $f(t)$ 为在统计学上由介质热状态可以推导出的一个无规力．运动的速度可以直接由方程 (I.5.8) 得到

$$v(t) = N_0 \exp\left(\frac{-t+t_0}{T_0}\right) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' f(t') \times \exp\left(\frac{t'-t}{T_0}\right), \tag{I.5.9}$$

这里 t_0 为起始时间，$v_0 = v(t_0)$ 为初速度．为了计算在时间 $t > t_0$ 的速度，需要从 t_0 到 t 的力的全部知识．对于另外的 Brown 粒子，无规力将是不同的，譬如说，用 $\tilde{f}(t)$ 来表示．如假定这个粒子也有相同的初速度 v_0，则这个速度可以方程 (I.5.9) 用 $\tilde{f}(t)$ 代替 $f(t)$ 而得到，因为要研究从粒子到粒子的运动，就要得到力的集合，譬如说，为 $f_i(t)$，$i = 1, 2, \cdots$，每一个力产生一个速度 $v_i(t)$．成对的速度和力，使得可以用 Langevin 方程来描述 Brown 粒子整个系综的运动，作成一个速度泛函．因此

$$V(t) = V_t[f]. \tag{I.5.10}$$

泛函导数 泛函微分的讨论从简单的定义出发：

$$\frac{\delta F_x[g]}{\delta g(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(F_x[g + \varepsilon\delta y] - F_x[g]\right), \tag{I.5.11}$$

这里

$$g + \varepsilon\delta y = g(z) + \varepsilon\delta(z - y). \tag{I.5.12}$$

对于在方程 (I.5.2) 中所给出的例子，我们有

$$\frac{\delta F_x[g]}{\delta g(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int dz K(x, z)\{[g(z) + \varepsilon\delta(z - y)] - g(z)\} = K(x, y).$$

因此，规则是

$$\frac{\delta g(z)}{\delta g(y)} = \delta(z - y). \tag{I.5.13}$$

微分的链规则 令

$$G_x = G_x[F_y], \quad F_y = F_y[g],$$

则

$$\frac{\delta G_x}{\delta g(y)} = \int dz \frac{\delta G_x}{\delta F_z[g]} \frac{\delta F_z[g]}{\delta g(y)}. \tag{I.5.14}$$

这是在方程 (I.3.31) 中所用的规则.

泛函 Taylor 级数 类似于通常的 Taylor 级数展开式,可以定义泛函的 Taylor 级数展开式. 给出 $F[g + \lambda\tilde{g}]$, 这里 $g(x)$ 和 $\tilde{g}(x)$ 为两个函数,而 λ 为一个参数. 可以作出 λ 的一个幂级数展开式:

$$F[g + \lambda\tilde{g}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \times \frac{\delta^n F[g]}{\delta g(x_1) \cdots \delta g(x_n)} \tilde{g}(x_1)\tilde{g}(x_2) \cdots \tilde{g}(x_n). \tag{I.5.15}$$

它是一个泛函的 Taylor 级数展开式.

泛函积分 进行泛函积分是冗长的. 如 § 1.3 所述,由于进行场的变数改变,至少在微扰论中,往往可以避免泛函积分. 唯一已知的可积形式是 Gauss 类型,叫做 Wiener 积分[24]和 Feynman 路径积分的 Fresnel 类型. 两种类型的例子分别在欧氏空间和 Minkowski 空间内是泛函可积的. 在文献 I.25 中可以找到泛函积分数学研究的评论.

Fresnel 积分类型相应于自由场论. 在相互作用中出现高于平方的一切项可以利用对某些外源的微分来表示. 这是在方程 (I.3.2) 中所应用的方法. 为了进一步说明泛函积分的概念,再来研究本节中上面所讨论的经典的 Brown 运动.

如所讨论的，Langevin 方程是对所有各个 Brown 粒子在一个系综内的运动方程. 假定一个 Brown 粒子所经受的无规力 $f(t)$ 是周围介质的热骚动的结果，因为碰撞之间的时间间隔是极短的，为 10^{-20} 秒量级，所以在每个瞬间，或在一个比弛豫时间 T_0 小得多的极短时间间隔内，力 $f(t)$ 可以认为是无规力的分布. 给出无规力的分布，有利于研究一个粒子的平均速度. 因为在方程 (I.5.9) 中所给出的速度是力的泛函，所以它的平均是一个泛函问题. 按照 § 1.1 的处理，再把时间间隔划分为相等长度的 n 个子间隔:

$$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n = t, \tag{I.5.16}$$

重写 (I.5.9)，我们有

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} V_t^{(n)}[f],$$

这里

$$V_t^{(n)}[f] = V_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_0}\right) + \frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{n}\exp\left(-\frac{t-t_j}{T_0}\right)\right.$$
$$\left.\times f(t_j)\Delta t\right]. \tag{I.5.17}$$

为了进一步继续进行，关于热骚动的力的性质作两个假定:

(a) 在一个短的时间间隔 t 和 $t+\Delta t$ 内，而 $\Delta t \ll T_0$，求出无规力具有值位于 $f(t)$ 和 $f(t)+\Delta f(t)$ 之间的几率为

$$P(f(t))df(t) = \left(\frac{\Delta t}{2mc}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2c}f^2(t)\Delta t\right\} df(t), \tag{I.5.18}$$

这里 c 为常数.

(b) 在二不同时间的无规力是不相关联的. 于是在子间隔内对无规力的联合几率可以写为各个间隔的几率乘积:

$$P_n[f]\prod_{j=1}^{n} df(t_j) = \exp\left\{-\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2c}f^2(t_j)\Delta t\right\}$$

$$\times \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\Delta t}{2\pi c}\right)^{\frac{3}{2}} df(t_j). \qquad (1.5.19)$$

因此一个 Brown 粒子的速度平均值为

$$\langle V_t[f]\rangle = \lim_{n\to\infty} \int P_n[f] V_t^{(n)}[f] \prod_{j=0}^{n} df(t_j).$$

无规力的相关是使

$$\int \prod_{j=0}^{n} df(t_j) P_n[f] \begin{Bmatrix} 1 \\ f(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (1.5.20)$$

我们有

$$\langle V_t[f]\rangle = V_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{T}\right). \qquad (1.5.21)$$

这利用经典统计物理学完成了泛函积分的具体说明.

进行泛函积分的另一方法[26,27]是利用上面所讨论的正交归一展开式. 取泛函 (1.5.6), 对 $F_x[g]$ 的泛函积分可以定义为

$$\int \mathscr{D}_g F_x[g] \equiv \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{\infty} da_j W(a_1, a_2, \cdots, a_n) F_x[g], \qquad (1.5.22)$$

这里 $W(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为积分测度的权重函数

$$\mathscr{D}_g = \lim_{n\to\infty} \{W(a_1, a_2, \cdots, a_n) \prod_{j=1}^{n} da_j. \qquad (1.5.23)$$

记住, $a_1, a_2, \cdots$ 是类函数 $\{g(x)\}$ 用函数完备正交归一集合的展开式系数.

费米子场的泛函方法 费米子泛函不是通常的泛函, 而是 Grassman 代数元素.

有限维 Grassman 代数[28] 考虑一个代数的生成元 $t_1, t_2, \cdots, t_n, t_1^*, t_2^*, \cdots, t_n^*$, 它们满足

$$\{t_j, t_k\} = \{t_j, t_k^*\} = \{t_j^*, t_k^*\} = 0, \quad j, k = 1, 2, \cdots, n. \qquad (1.5.24)$$

这叫做一个 Grassman 代数。代数的基为 2^n 个单项式：

$$1;\ t_1, \cdots, t_n, t_1^*, \cdots, t_n^*;\ t_1t_2, \cdots, t_1t_1^*, \cdots,$$
$$t_nt_n^*;\ \cdots, t_1t_2\cdots t_nt_1^*\cdots t_n^*. \tag{1.5.25}$$

为往后讨论方便起见，也用 $t_{n+1}, t_{n+2}, \cdots, t_{2n}$ 来表示 t_1^*, $t_2^*, \cdots, t_n^*$：

$$t_1^* \equiv t_{n+1},\ t_2^* \equiv t_{n+2},\ \cdots,\ t_n^* \equiv t_{2n}. \tag{1.5.26}$$

下面是 Grassman 代数的某些性质：

(a) 微分

$$\frac{\delta}{\delta t_k}(t_{l_1}t_{l_2}\cdots t_{l_j}) = \delta_{kl_1}t_{l_2}t_{l_3}\cdots t_{l_j} - \delta_{kl_2}t_{l_1}t_{l_3}\cdots t_{l_j}$$
$$+ \cdots + (-1)^{j-1}\delta_{kl_j}t_{l_1}t_{l_2}\cdots t_{l_{j-1}}. \tag{1.5.27}$$

(b) 微分的链规则

令

$$\tilde{t}_l = \sum a_{lk}(x)t_k,$$
$$f(\tilde{t}) = f(\tilde{t}(t)),$$

这里 $a_{lk}(x)$ 为参数 x 的标量函数。

$$\frac{\partial f(\tilde{t})}{\partial t_l} = \sum_k \frac{\partial \tilde{t}_k}{\partial t_l}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k} f(\tilde{t})$$
$$= \sum_k a_{kl}(x)\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k} f(\tilde{t})$$

及

$$\frac{d}{dx} f(\tilde{t}) = \sum_k \frac{d\tilde{t}_k}{dx}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k} f(\tilde{t})$$
$$= \sum_{k,l} \frac{da_{kl}(x)}{dx} t_l \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_k} f(\tilde{t}).$$

(c) 有限维 Grassman 代数的积分

积分元为 dt_1, dt_1^*, dt_2, dt_2^*, $\cdots$, dt_n, dt_n^*, 它们满足关系

$$\{dt_l, dt_k\} = 0, \qquad l, k = 1, 2, \cdots, 2n. \tag{I.5.28}$$

单积分定义为

$$\int dt_l = 0,$$

$$\int t_l dt_k = \delta_{lk}, \text{ 对于 } l, k = 1, 2, \cdots, 2n. \tag{I.5.29}$$

重积分和包括 t_l 及 t_k^* 的任意函数的积分可以利用(I.5.24)和(I.5.29)来计算.

变数的改变对 Grassman 代数的积分也适合. 但是变换的雅可比行列式是通常积分的变换的逆雅可比行列式. 考虑

$$I_1 = \int \left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right) \prod_{k=1}^{2n} dt_k = (-1)^{n(2n-1)}. \tag{I.5.30}$$

改变积分变数

$$t_l = \sum_{k=1}^{2n} a_{lk} \tilde{t}_k, \qquad l = 1, 2, 3, \cdots, 2n. \tag{I.5.31}$$

并且表示具有元素 a_{lk} 的矩阵为

$$A \equiv (a_{lk}).$$

于是

$$\prod_{j=1}^{2n} dt_j = J(A) \prod_{k=1}^{2n} d\tilde{t}_k. \tag{I.5.32}$$

由于 (I.5.24), 我们有

$$\prod_{j=1}^{2n} t_j = \det(A) \tilde{t}_j. \tag{I.5.33}$$

把 (I.5.32) 和 (I.5.33) 代入 (I.5.30), 我们得到

$$J(A) = (\det(A))^{-1}. \tag{I.5.34}$$

因此,一般

$$\int f(t) \prod_{j=1}^{2n} dt_j = (\det(A))^{-1} \int f(A\tilde{t}) \prod_{j=1}^{2n} d\tilde{t}_j, \tag{I.5.35}$$

这里方程 (I.5.31) 集体地表示为矩阵符号 $t = A\tilde{t}$.

Gauss 积分 考虑

$$I_G = \int \exp\left\{\sum_{ik} t_i^* b_{ik} t_k\right\} dt_1 dt_1^* dt_2 dt_2^* \cdots dt_n dt_n^*. \quad \text{(I.5.36)}$$

假定存在着 $t_1, t_2, \cdots, t_n^*$ 的一个真正交变换使 (b_{ik}) 对角化.

$$(b_{ik}) \to (\lambda_i \delta_{ik}) \quad \text{(I.5.37)}$$

$$I_G = \int \exp\left(\sum_i \lambda_i t_i^* t_i\right) dt_1 dt_1^* \cdots dt_n dt_n^*$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t_i^* t_i} dt_i dt_i^*$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(b_{ij}). \quad \text{(I.5.38)}$$

对于通常的 Gauss 积分，结果将正比于 $(\det(b_{ij}))^{-1}$. 在 § II.3 中将要利用的事实是识别非阿贝耳规范理论的鬼拉格朗日函数. 费米子场 $\psi(x)$和 $\bar{\psi}(x)$的讨论涉及到的Grassman代数是空间和时间的函数. 下面的泛函积分公式是需要的:

$$\frac{\delta\psi(x)}{\delta\psi(y)} = \delta(x-y)$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}\{\psi(x)\psi(z)\cdots\} = -\psi(x)\delta(y-z)\cdots + \cdots$$

(I.5.39)

及

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x)} = \int dy \frac{\delta F[\psi(x)]}{\delta\psi(y)} \frac{\delta}{\delta F[\psi(y)]}. \quad \text{(I.5.40)}$$

这里 $F[\psi(x)]$ 是 $\psi(x)$ 的某个泛函，并且可能是另外的场.

场变换雅可比行列式的讨论 因为像在方程 (I.2.19) 和 (I.2.20) 中所给出的生成泛函是对泛函空间的泛函积分，场变数的改变并不改变原来生成泛函的值. 然而，变数的改变

可以引入非平凡的雅可比行列式.首先,已注意到,在§I.4中所用的一切场变数改变是线性的. 特别是平动变换, 方程(I.2.31),显然有一个幺正的雅可比行列式. 下面讨论§I.4中所用的变换的雅可比行列式.

考虑场变数的改变:

$$\phi_\alpha(x) \to \phi'_\alpha(x) = \int A_{\alpha\beta}(x, y)\phi_\beta(y)d^4y, \qquad (I.5.41)$$

这里 $A_{\alpha\beta}(x, y)$ 为变换核, α 和 β 为空时和内对称指标. 把 $A_{\alpha\beta}(x, y)$ 认为是多维矩阵 $A(x, y)$ 的元素. 例如,出现在方程 (I.4.13) 中的费米子场 $\psi(x)$ 的变换给出

$$A(x, y) = \delta^4(x - y)\left\{1 + i\omega(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\right\}. \qquad (I.5.42)$$

令 A 为一个算符,它在态 $|x\rangle$ 和 $|y\rangle$ 上的期待值给出核 $A(x, y)$, 即

$$\langle x|A|y\rangle \equiv A(x, y). \qquad (I.5.43)$$

在方程 (I.4.5) 中所定义的变换的雅可比行列式用符号通过算符 A 可以写为

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\delta\phi'_\alpha}{\delta\phi_\beta}\right) &= \begin{cases}\det(A)\\ [\det(A)]^{-1}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\exp\{\mathrm{Tr}(\ln A)\}\\ \exp\{-\mathrm{Tr}(\ln A)\}\end{cases}\\ &= \begin{cases}1 + \mathrm{Tr}(A - 1), \text{对于玻色子}\\ 1 - \mathrm{Tr}(A - 1), \text{对于费米子}\end{cases} \end{aligned} \qquad (I.5.44)$$

可以看出,中心量是

$$\mathrm{Tr}\{\langle x|(A - 1)|y\rangle\}. \qquad (I.5.45)$$

这里"Tr"符号表示相对于一切自旋和内对称指标的求迹,并对空时变数积分.

(I.5.45) 对§I.4中所讨论的各种变换的计算如下.

变换方程 (I.4.9) 对两个场 ψ 和 ϕ,我们有

$$\langle x|(A_\psi - 1)|y\rangle = \delta^4(x-y)\left\{\frac{i}{2}\omega^a(x)\lambda^a\right\}$$

及 (I.5.46a)

$$\langle x|(A_{\bar\psi} - 1)|y\rangle = \delta^4(x-y)\left\{-\frac{i}{2}\omega^a(x)\lambda^a\right\}. \quad \text{(I.5.46b)}$$

当相对于内对称空间 λ^a 求迹时，上面的两个表示式为零. 因此变换的雅可比行列式为 1.

变换方程 (I.4.13) 我们有

$$\langle x|(A_\psi - 1)|y\rangle = \langle x|(A_{\bar\psi} - 1)|y\rangle = \delta^4(x-y)\left\{\frac{i}{2}\omega^a(x)\gamma_5\lambda^a\right\}. \quad \text{(I.5.47)}$$

它相对于自旋空间 γ_5 或内对称空间 λ^a 的求迹为零. 雅可比行列式仍然为 1.

变换方程 (I.4.21) 这里我们有

$$\begin{aligned}
\langle x|(A_\psi - 1)|y\rangle &= \left\{\omega^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{8}\partial^\lambda\omega^\rho(x)[\gamma_\lambda, \gamma_\rho]\right\} \\
&\quad \times \delta^4(x-y), \\
\langle x|(A_{\bar\psi} - 1)|y\rangle &= \left\{\omega^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \frac{1}{8}\partial^\lambda\omega^\rho(x)[\gamma_\lambda, \gamma_\rho]\right\} \\
&\quad \times \delta^4(x-y), \\
\langle x|(A_B - 1)|y\rangle &= \left\{g_{\mu\nu}\omega^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}\partial^\lambda\omega^\rho(x)\right. \\
&\quad \left.\times (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\right\}\delta^4(x-y).
\end{aligned} \quad \text{(I.5.48)}$$

这三个表示式右边第二项由于在自旋空间内的求迹，即

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\lambda, \gamma_\rho] = 0,$$

及

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) = 0$$

均为零. 在动量内考查第一项，可以看出，除像 $g_{\mu\nu}$ 的平凡因子以外，第一项也都有形式

$$\int d^4x d^4y e^{ipx}\omega^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta^4(x-y)e^{-ip'x}$$

$$=ip_\lambda\int d^4x\omega^\lambda(x)e^{-i(p-p')x}. \qquad (I.5.49)$$

包括令 $p=p'$ 并对 4 动量从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个范围的求和在内，求迹为零. 更直接，这可以由空时形式

$$\omega^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta^4(x-y)$$

看出. 求迹要令 $x=y$，但是 δ 函数的导数在零自变量处为零.

变换方程 (I.4.24) 我们写出

$$\langle x|(A_\phi-1)|y\rangle=d\phi\omega(x)\delta^4(x-y),$$

这里 $d\phi=\dot{d}\phi=3/2$，并且 $dB=1$. 于是

$$\mathrm{Tr}(A_\phi-1)=c\delta^4(x=0)\int d^4x\omega(x),$$

这里对于自旋 1 和自旋 $\frac{1}{2}$ 场 $c=4$，对于自旋 0 场 $c=1$.

由方程 (I.4.28) 给出雅可比行列式，为

$$J(\omega)=1-8\delta^4(x=0)\int d^4x\omega(x).$$

$$\frac{\delta J(\omega)}{\delta\omega(x)}=-8\delta^4(x=0). \qquad (I.5.50)$$

由方程 (I.4.3)，(I.4.26) 和 (I.2.3a) 可以计算出方程 (I.4.30) 的第二项，我们得到

$$\langle 0|T^*(\Theta^\mu_\mu(x)-\Theta(x))|0\rangle$$
$$=-3\langle 0|T^*\{\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu-m+g\gamma^\mu B_\mu]\psi\}|0\rangle$$
$$-\langle 0|T^*\{[K'_{\mu\nu}(x)B^\nu+g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]B^\mu\}|0\rangle,$$

这里 $K'_{\mu\nu}(x)$ 在 (I.3.5) 中给出。利用在方程 (I.2.30) 中所定义的规则，及费米子场变数彼此反对易的事实，

$$
\begin{aligned}
&-3\langle 0|T^*\{\phi[i\gamma^\mu\partial_\mu - m + g\gamma^\mu B_\mu]\phi\}|0\rangle \\
&\quad = -3\mathrm{Tr}\langle 0|T^*\{[i\gamma^\mu\partial_\mu - m + g\gamma^\mu B_\mu]\phi\phi\}|0\rangle \\
&\quad = 3\lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left\{[i\gamma^\mu\partial_\mu - m + g\gamma^\mu B_\mu(x)]\right. \\
&\qquad \left.\times\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}Z_m[\eta,\bar{\eta},J_\mu]\right\}_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \\
&\quad = 12i\delta^4(x=0), \qquad (I.5.51)
\end{aligned}
$$

这里 $Z_m[\eta,\bar{\eta},J_\mu]$ 在方程 (I.2.19) 中给出。而且

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T^*\{[K'_{\mu\nu}(x)B^\nu(x) + g\phi(x)\gamma_\mu\phi(x)]B^\mu(x)\}|0\rangle \\
&\quad = \lim_{y\to x}\left\{\frac{\delta}{\delta J_\mu(y)}\left[K'_{\mu\nu}(x)\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+ g\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right]Z_m[\eta,\bar{\eta},J_\mu]\right\}_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \\
&\quad = 4i\delta^4(x=0). \qquad (I.5.52)
\end{aligned}
$$

因此由方程 (I.5.50)，(I.5.51) 和 (I.5.52)，我们有

$$\langle 0|T^*(\Theta^\mu_\mu(x) - \Theta(x))|0\rangle = 8i\delta^4(x=0).$$

由方程 (I.5.49) 和 (I.5.53)，可以看出，方程 (I.4.30) 是满足的。

参 考 文 献

I.1 R. P. Feynman Rev. Mod Phys., **20**, 367(1984).

I.2 R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York; 1965).

I.3 量子化的 Feynman 方法的讨论也可以在非相对论的量子力学教科书中查到，例如，参阅：R. J. Finkelstein, *Non-relativistic Mechanics* (Benjamin, Reading, Mass; 1973), Ch. 3.

I.4 关于非相对论量子力学和量子场论的泛函积分，好的介绍可以查阅 E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys Rept.*, 90. 1(1973).

I.5 R. F. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 769(1949); *ibid*, **80**, 440(1960).

I.6 R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **84**, 108(1951).

I.7 P. A. M. Dirac, *Physicalische Zeitschrift der Sowjetunion*, **3**, 64(1933).

I.8 I. M. Gel'fand and A. M. Yagjom, *J. Math. Phys.*, **1**, 48(1960).

I.9 *Functional Integration and Its Applications*, ed. A. M. Arthurs (Clarendon Press, Oxford, England; 1975).

I.10 *Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical, and Solid State Physics*, ed. G. J. Papadopoulos and J. T. Devereese (Plenum Press, New York; 1977). 路径积分的发展简史可以查阅此书第 85 页 G. J. Papadopoulos 的文章.

I.11 *Feynman Path Integrals*, Proceedings of the International Colloquium. Marseille, 1978, published in *Lecture Notes in Physics*, **106**, ed. S. Albeverio, Ph. Combe, R. Hoegh-Krohn, G. Rideau, M. Sirugue-Collin, M. Sirugue, and R. Stora (Springer-Verlag, Berlin; 1979).

I.12 这里所采取的方法应归于 C. Garrod, *Rev. Mod. Phys.*, 38, 483(1966).

I.13 J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **44**, 956(1958).

I.14 T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* (*Kyoto*), **21**, 241(1959).

I.15 K. Symanzik, *J. Math. Phys.*, **7**, 510(1966), and "Euclidean Local Quantum Field Theory", in International School of Physics "Enrico Fermi" (Academic Press, New York; 1969).

I.16 "Constructive Quantum Field Theory", Proceedings of the 1973 "Ettore Majorana" International School of Mathematical Physics, Ed. G. Velo and A. Wightman, These Proceedings comprise the volume of *Lecture Notes in Physics*, **25** (Springer-Verlag, Berlin; 1973)

I.17 Feynman 路径积分只有在欧氏范畴内在数学上才有严格的意义. 例如参看: E. Nelson's article appearing in Ref. 16, and K. Oster-walder and R. Schrader, *Phys. Rev. Lett.*, 29, 1423(1972).

I.18 例如, 参看: G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields* (Interscience, New York; 1949).

I.19 ϕ^4 理论的 Hamiltonian 密度, 方程 (I.2.2) 为

$$\mathscr{H}_s = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2) + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

对于大的场值, $\mathscr{H}_s$ 受 ϕ^4 项支配. 因此, 为使能量谱有一个下限, $\lambda>0$ 是必要的.

I.20 K. Nishijima, *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 813(1950); Z. Koba, *ibid*, **5**, 696 (1950).

I.21 这里所采用的方法是按照: H. Suura and Bing-Lin Young, *Phys. Rev.*, **D8**, 4353(1973).

I.22 Legendre 变换是某一函数的独立变数用它的共轭变数来代换, 共轭变数定义为该函数相对于所考虑的变数的偏导数. 该变换在数学分析、力学及热力学中有重要的应用. 哈密顿函数和拉氏函数之间的关系事实上是一个 Legendre 变换. 关于文献, 例如, 参看: R. Courant and D. Hi-

lbert, *Methods of Mathematical Physics* Vol. II, pp. 32—39 (Interscience, New York; 1962); A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Academic Press, New York), p. 42; C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Univ. of Toronto, Toronto; 1960), Ch. VI.

I.23 例如，参看 J. M. Jauch and F. Röhrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Reading, Mass.; 1955) pp. 21—22.

I.24 N. Wiener, *J. Math. and Phys.*, **2**, 131(1923). See also Ref. I.8.

I.25 I. Segal, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71**, 419(1965).

I.26 S. F. Edwards, *Phi. Mag.*, **45**, 758(1954).

I.27 P. T. Matthews and A. Salam, *Nuovo Cimento*, **2**, 120(1955).

I.28 P. Berezin, *The Method of Second Qouantization* (Academic Press, New York; 1966).

第 II 章　规 范 理 论

处理局部规范不变理论需要新的因素. 在场论中局部规范不变性的存在引进了下面的复杂性，这种复杂性引起了量子化的困难.

(a) 在规范理论中，规范矢量场必须是无质量的. 于是，像 (I.3.5) 那样具有 $M = 0$ 的通常的动能算符并没有逆关系存在，换言之，动能算符不作某种修正，像方程 (I.3.7) 就不存在. 这点容易从下面看出：令

$$K_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}\partial^{\lambda}\partial_{\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\nu},$$

并且令它的逆为 $D^{0}_{\mu\nu}$. 我们可以写出

$$D^{0}_{\mu\nu}(x,\ y) = \int d^{4}k e^{-ik(x-y)}[A(k^{2})k_{\mu}k_{\nu} + B(k^{2})g_{\mu\nu}],$$

于是

$$g^{\lambda\lambda'}K_{\mu\lambda}(x)D^{0}_{\lambda'\nu}(x,\ y) = \int d^{4}k e^{-ik(x-y)}B(k^{2})[k^{2}g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}],$$

它不可能化为 $g_{\mu\nu}\delta(x-y)$ 形式. 因此，动能算符的修正是必要的.

(b) 拉氏函数相对于局部规范变换是简并的. 因此在场变数的积分中有无限多的剩余度 (*redundance*). 这种类型的简并性在非规范理论中并不存在. 为了消去剩余度，可以考虑具有约束的量子化.

在阿贝耳规范理论情形中，比如量子电动力学 (QED)，为了克服这些困难，发展了许多技巧，这些技巧包括 Fermi 方法和引入不定度规的 Gupta-Bleuler[1] 方法. 然而，正如 Fe-

ynman[3]首先所注意到的这些技巧对 Yang-Mills[2] 的非阿贝耳规范理论无效. Feynman 发现了在包含闭合圈的图形中所出现的困难. 在一圈情形中,为使 S 矩阵元是幺正的和横向的, Feynman 提出了特殊的规则[3]. 接着 de Witt[4] 提出了对闭合圈的 Feynman 规则较详细的规定. 然而,这些规则推广到任意数目的圈图就失效了. Yang-Mills 理论首先成功的量子化是由 Faddeev 及 Popov[5,6] 基于泛函积分方法完成的. 这是一个突破,通过这个突破导致 Yang-Mills 场论可重正性的证明[7-10],并且广泛承认泛函积分方法是处理复量子体系的有力工具. 在随后的发展中加入自发对称破缺[11-14]及 Higgs 机制[15-18],建立了非平凡的带质量的矢量玻色子理论框架[19],这使电弱理论,即 Glashow-Weinberg-Salam 模型[20-22]在数学严格性方面与量子电动力学并列. Yang-Mills 理论的结果证明比它的阿贝尔先驱量子电动力学有更加丰富的结构,随着高能唯象学的进展, Yang-Mills 理论的方案也对强相互作用物理学提供一个框架,进一步有前途的工作是把这个表述推广到引力相互作用.

电弱相互作用理论——像电磁的 Maxwell 理论一样——把非常不同的耦合强度的现象统一起来,它确实在我们探索自然规律中是一个卓越的里程碑. 可能把强相互作用和电弱相互作用统一,即所谓大统一理论 (GUT)[23,24], 也有希望在非阿贝耳规范理论中建立起来. 这种类型的理论预言了各种新现象. 在这方向上进一步的工作是把强、电磁、弱和引力所有四种类型的力统一起来. 只有通过有力的实验努力才可能认识,单一理论的思想能否构成微观世界一切现象的基础.然而,对微观物理学定律的数学结构的两个柱石: 不变性规范原理[25]和可重正性的要求[26],进行讨论似乎是可行的,当然,它们是彼此相关的. 根据局部规范不变性,建立了包括带质

量的自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子，带质量的自旋 0 玻色子和无质量的自旋 1 玻色子理论，保证是可重正化的。这种类型的理论的可重正性的要求导致不变性规范原理[25]。这些都是密切相关的。

本章开始讨论局部规范不变量理论量子化的 Faddeev-Popov 形式及具有约束的量子化。这些理论首先应用到熟知的量子电动力学的阿贝耳规范理论情形，然后应用到非阿贝耳理论，例如量子色动力学。对两种类型的规范理论推导 Feynman 图形规则。在 § II.4 中对一般场论的非阿贝耳理论情形在 Coulomb 规范中讨论 Gribov 不确定性 (Gribov *ambiquities*)。在 § II.5 中将讨论自发对称破缺，Higgs 机制和非平凡的带质量的矢量玻色子理论的表述。

II.1 Faddeev-Popov 形式

像在本章序中所讨论的一样，为了克服规范场论量子化的困难，Faddeev 及 Popov[5,6] 提出了利用泛函积分的巧妙方法。当 $\mathscr{L}(\phi_\beta, \phi_{\alpha,\lambda})$ 为局部规范不变量的拉氏函数时，首先应该作下面的考察。即是，在局部规范变换下

$$\phi_\beta(x) \to \phi^\Omega_\beta(x), \tag{II.1.1}$$

这里 $\phi^\Omega_\beta(x)$ 为被变换的规范场，$\Omega(x)$ 为规范群 G 的一个元素，具有与空时有关的参数，拉氏函数是不变的

$$\mathscr{L}(\phi^\Omega_\beta(x), \phi^\Omega_{\alpha,\lambda}(x)) = \mathscr{L}(\phi_\beta(x), \phi_{\alpha,\lambda}(x)).$$

对于一个给定的 ϕ_β，在 G 下，它的轨迹可以定义为由规范变换与 ϕ_β 相联系的场的集合；即，在方程 (II.1.1) 中所定义的，对于一切 $\Omega \in G$，为形式 ϕ^Ω_β 的一切场的集合。因为作用量积分在轨道上为常数，泛函积分在轨道上是简并的。泛函积分正比于群体积

$$\int \prod_x d\Omega(x),$$

它可能是无限大的. 因此群体积必须分解为因子，使场的流形排列为轨迹，然后在该流形内建立一个“超曲面”，超曲面与每条轨道只相交一次，从而使群体积分解为因子. 超曲面和场流形如图 II.1 所示.

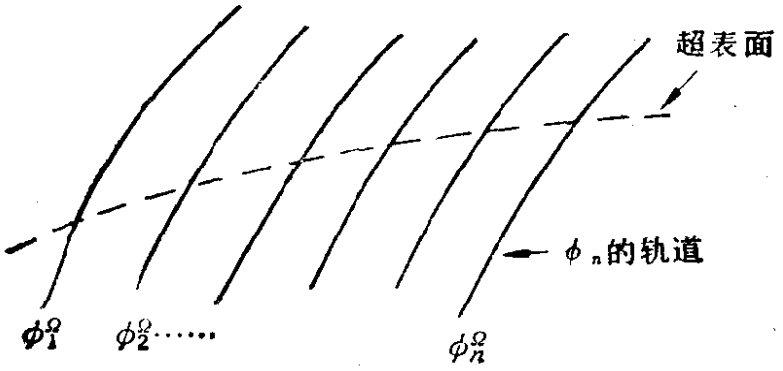


图 II.1

超曲面表示为

$$F^a[\phi_\beta] = 0, \qquad \text{(II.1.2)}$$

这里 a 为列举定义曲面的条件的一个指标. 为了保证超曲面方程 (II.1.2) 仅与每条轨道只相交一次，对于一个固定的规范场 ϕ_β，方程

$$F^a[\phi_\beta^\Omega] = 0 \qquad \text{(II.1.3)}$$

对于一个群元素 Ω 有唯一的解，是必要的.

注意，超曲面方程 (II.1.2) 正好就是规范条件. 在一个超曲面上场的约束同时完成两件事：有关场的消去和(无限)群体积的划分，二者都是由规范自由 (*gauge freedom*) 引起的. 下面叙述 Faddeev-Popov 技巧，它把约束条件引入泛函积分中. 定义一个规范场泛函 $\Delta_F[\phi_\beta]$，使

$$\Delta_F[\phi_\beta]\int\prod_x d\Omega(x)\prod_{a,x}\delta(F^a[\phi^\Omega_\beta])=1. \quad (II.1.4)$$

注意，$\Delta_F[\phi_\beta]$ 是规范不变的:

$$\Delta_F[\phi^\Omega_\beta]=\Delta_F[\phi_\beta]. \quad (II.1.5)$$

这可以直接证明如下. 考虑一个规范交换场 ϕ^Ω_β，于是

$$\Delta_F[\phi^\Omega_\beta]\int\prod_x d\Omega(x)\prod_{a,x}\delta(F^a[(\phi^\Omega_\beta)^\Omega])=1. \quad (II.1.6)$$

因为群测度 $\prod_x d\Omega(x)$ 用左乘法[27,28]是不变量

$$\begin{aligned}&\int\prod_x d\Omega(x)\prod_{a,x}\delta(F^a[(\phi^\Omega_\beta)]^\Omega)\\&=\int\prod_x d(\tilde{\Omega}\Omega)\prod_{a,x}\delta(F^a[(\phi^{\tilde{\Omega}}_\beta)]^\Omega)\\&=\int\prod_x d\Omega\prod_{a,x}\delta(F^a[\phi^\Omega_\beta]),\end{aligned} \quad (II.1.7)$$

它连同方程 (II.1.6) 给出方程 (II.1.5). 现在把 (II.1.4) 引入到(真空到真空)变换矩阵元

$$\int\prod_\beta\mathscr{D}\phi_\beta\Delta_F[\phi_\beta]\int\prod_x d\Omega(x)\prod_{a,x}\delta(F^a[\phi^\Omega_\beta])e^{iI}, \quad (II.1.8)$$

交换群积分和场积分，并进行规范变换

$$\phi_\beta\to\phi^\Omega_\beta,$$

利用作用量，规范场泛函 $\Delta_F[\phi_\beta]$，和场积分测度在局部规范变换下都是不变量的事实，就可以把群元素的积分从场积分中分离出来:

$$\int d\Omega(x)\int\prod_\beta\mathscr{D}\phi_\beta\Delta_F[\phi_\beta]\prod_{a,x}\delta(F^a[\phi_\beta])e^{iI}. \quad (II.1.9)$$

当考虑阿贝耳和非阿贝耳规范场论的显然例子时，将再讨论场积分测度的不变性. 因为群空间积分从场积分分离出来

了，群空间积分可以吸收在生成泛函的归一化因子内，得到

$$Z[J_\beta] = N^{-1}\int \prod_\alpha \mathscr{D}\phi_\beta \Delta_F[\phi_\beta]\delta(F^\alpha[\phi_\beta]) \times \exp\left(il + i\int d^4x\phi_\beta J_\beta\right), \qquad \text{(II.1.10)}$$

这里

$$N = \lim_{J'_\beta\to 0}\int \prod_\beta \mathscr{D}\phi_\beta \Delta_F[\phi_\beta]\delta(F^\alpha[\phi_\beta])\exp\left(il + i\int d^4x\phi_\beta J'_\beta\right). \qquad \text{(II.1.11)}$$

在方程（II.1.10）中 δ 函数是难于使用的；它可以由重新定义生成泛函[29]而变为不同的形式。取不同的规范条件

$$\delta(F^\alpha[\phi_\beta]) \to \delta(F^\alpha[\phi(x)] - f^\alpha(x)], \qquad \text{(II.1.12)}$$

这里 $f^\alpha(x)$ 为任意函数。生成泛函定义为方程（II.1.10）中所给出的泛函的加权平均，其中要用规范条件方程（II.1.12）的代换：

$$Z[J_\beta] \to \int \prod_\alpha \mathscr{D}f^\alpha(x)\exp\left[-\frac{i}{2\xi}\int d^4x(f^\alpha(x))^2\right] Z[J_\beta], \qquad \text{(II.1.13)}$$

这里所谓规范参数 α 不是负的，

$$0 \leqslant \xi < \infty, \qquad \text{(II.1.14)}$$

进行方程（II.1.13）的泛函积分，求出生成泛函的最后形式为

$$Z[J_\beta] = N^{-1}\int \prod_\beta \mathscr{D}\phi_\beta \exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}(\phi_\beta) - \frac{i}{2\xi}\int d^4x(F^\alpha[\phi_\beta])^2 + i\int d^4x J^\beta\phi_\beta\right\}, \qquad \text{(II.1.15)}$$

这里

$$N = \lim_{J'_\beta\to 0}\int \prod_\beta \mathscr{D}\phi_\beta \Delta_F[\phi_\beta]\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}(\phi_\beta)\right.$$

$$-\frac{i}{2\xi}\int d^4x(F^a[\phi_\beta])^2+i\int d^4x J'^\beta\phi_\beta\Big\}. \quad \text{(II.1.16)}$$

因而生成泛函仍然是归一化的。 方程（II.1.15）连同方程（II.1.16）完成了局部规范不变理论量子化的讨论。 一旦在特殊的规范下给出了一个特定的理论，就可以计算出规范泛函 $\Delta_F[\phi_\beta]$.

由方程（II.1.10）得到方程（II.1.15）更直观的论证是把 δ 函数的 Gauss 表示

$$\delta(x)=\lim_{b\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi b}}e^{-x^2/b} \quad \text{(II.1.17)}$$

推广到 Fresnel 类型的函数

$$\prod_{x,a}\delta(F^a[\phi_\beta])\propto\lim_{b\to 0}\exp\left\{-\frac{i}{b}\sum_a\sum_x(F^a[\phi_\beta])^2\right\}$$

$$=\lim_{\substack{b\to 0\\ \Delta x\to 0}}\exp\left\{\frac{-i}{b(\Delta x)^4}\int d^4x(F^a[\phi_\beta])^2\right\}$$

$$=\lim_{\xi\to 0}\exp\left\{\frac{-i}{2\xi}\int d^4x(F^a[\phi_\beta])^2\right\}. \quad \text{(II.1.18)}$$

如果要求 $\xi\to 0$ 用 $\xi\geqslant 0$ 代替，把上式代入方程 (II.1.10) 就给出方程 (II.1.15).

下面讨论具有约束[30]的场的量子化方法，它可以应用于非规范理论. 在这样的理论中出现在拉氏函数中的场并不都是独立的. 先讨论一维体系，接着，推广到多维体系.

给出一个体系，该体系的哈密顿函数为

$$\tilde{H}=\tilde{H}(p,q;r), \quad \text{(II.1.19)}$$

这里共轭成对的 q 及 p 分别为广义坐标和广义动量. 孤变数 r 没有共轭量. 体系的拉氏函数为

$$L=p\dot{q}-\tilde{H}(p,q;r) \quad \text{(II.1.20)}$$

我们可以得到变数 r 的运动方程，$[\mathscr{L}]_r$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} \equiv f(p, q; r) = 0. \qquad \text{(II.1.21)}$$

注意，r 不是一个独立的变数。这里，可以假定，$\tilde{H}$ 至多是 r 平方的，

$$\tilde{H}(p, q; r) = H(p, q) + \alpha(p, q)r + \frac{1}{2}\beta(p, q)r^2. \qquad \text{(II.1.22)}$$

系数 α 和 β 是 p 和 q 的任意函数。拉氏函数现在为

$$L = p\dot{q} - H(p, q) - \alpha(p, q)r - \frac{1}{2}\beta(p, q)r^2. \qquad \text{(II.1.23)}$$

运动方程（II.1.21）能够对 r 求解

$$r = -\beta^{-1}(p, q)\alpha(p, q). \qquad \text{(II.1.24)}$$

把方程（II.1.24）代入（II.1.23），可以消去有关变数 r，

$$\tilde{L} = p\dot{q} - H(p, q) + \frac{1}{2}\beta^{-1}(\beta, q)\alpha^2(p, q). \qquad \text{(II.1.25)}$$

按照 § I.1 的讨论，特别是方程（I.1.26），体系的变换矩阵元写为

$$\int \left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] \exp\left\{i\int dt \left[p\dot{q} - H(p, q) + \frac{1}{2}\beta^{-1}(p, q)\alpha^2(p, q)\right]\right\}. \qquad \text{(II.1.26)}$$

为了得到这个表示式，独立变数 r 必须消去，所得到的拉氏函数是颇为复杂的。由写出变换矩阵元为

$$\int \left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] [dr] \sqrt{\beta(q, p)} \exp\left\{i\int dt \left[p\dot{q} - H(p, q) - \alpha(p, q)r - \frac{1}{2}\beta(p, q)r^2\right]\right\} \qquad \text{(II.1.27)}$$

就可以避免这个可能的复杂性。显然，当完成独立变数 r 的

Fresnel 积分时，上式可以约化为方程 (II.1.2) 的表示式 [参看附录 1]。

上面所讨论的表述可以推广到多维体系，写出哈密顿函数为

$$\begin{aligned}\tilde{H}(p_1, q_1; \cdots; p_n, q_n; r_1, \cdots, r_n) &= H(p_1, q_1; \cdots; p_n, q_n) + \alpha^T(p_1, q_1; \cdots; p_n, q_n)r \\ &+ \frac{1}{2} r^T\beta(p_1, q_1; \cdots; p_n, q_n)r. \end{aligned} \tag{II.1.28}$$

这里有 n 个独立的共轭成对的变数，$q_1, p_1; q_2, p_2; \cdots; q_n, p_n$ 及 l 个有关的变数 $r_1, r_2, \cdots, r_l$。符号 r 表示一个列矢量

$$r \equiv \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \tag{II.1.29}$$

α^T 为 l 个元素的行矢量，用 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)$ 来表示，它们是 n 个共轭成对变数的函数。β 是一个 $l \times l$ 矩阵，它有元素 $\beta_{jk}, j, k = 1, 2, \cdots, l$，一切元素都是共轭成对变数的函数。$r$ 的运动方程为

$$r = -\beta^T\alpha. \tag{II.1.30}$$

用独立变数，我们有

$$\tilde{H}(p_1, q_1; \cdots; r_1, \cdots) = H(p_1, q_1; \cdots) - \frac{1}{2}\alpha^T\beta^{-1}\alpha. \tag{II.1.31}$$

该体系的变换矩阵元为

$$\int \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{dq_j dp_j}{2\pi}\right] \exp\left\{i\int\left[\sum_{j=1}^{n} p_j\dot{q}_j - H(p_1, q_1; \cdots) + \frac{1}{2}\alpha^T\beta^{-1}\alpha\right]dt\right\} \sim \int \prod_{j=1}^{n}\left[\frac{dq_j dp_j}{2\pi}\right]\prod_{k=1}^{r}[dr_k]$$

$$\times [\det(\beta)]^{-1} \cdot \exp\left\{i\int\left[\sum_{i=1} p_i\dot{q}_i - H(p_1, q_1; \cdots)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \alpha^T r - \frac{1}{2} r^T\beta r\right] dt\right\}. \qquad \text{(II.1.32)}$$

在泛函积分中内含有关变数，特别是在 $\det[\beta(p, q)]$ 为常数的情形，会使量子化步骤简化。

II.2 量子电动力学 (QED)

从 § II.1 所提出的形式来评述这个熟习的理论. 拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \psi(i\partial\!\!\!/ - m - eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad \text{(II.2.1)}$$

把拉氏函数分为自由部分 $\mathscr{L}_0$ 和相互作用部分 $\mathscr{L}_I$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I,$$

$$\mathscr{L}_0 = \psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

$$\mathscr{L}_I = -e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi. \qquad \text{(II.2.2)}$$

拉氏函数在下面的阿贝尔局部规范变换下为不变量:

$$\psi(x) \to e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x),$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{ie\Lambda(x)},$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \qquad \text{(II.2.3)}$$

这里规范函数 $\Lambda(x)$ 为空间和时间的标量函数. 超曲面可以选取为 Lorentz-Landau 规范或 Coulomb (横向或辐射) 规范

$F_L[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu = 0$, Lorentz-Landau 规范.

$F_c[A_\mu] = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, Coulomb 规范.

这里在方程 (II.1.15) 和 (II.1.16) 的形式中应用了协变的

Lorentz-Landau 规范. 生成泛函为

$$Z[\eta,\eta,J_\mu]=\frac{1}{N}\int\mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi\prod_\mu\mathscr{D}A_\mu\cdot\Delta_F[A_\nu]\cdot\exp\left\{iI-\frac{i}{2\xi}\int d^4x(\partial^\mu A_\mu)^2+i\int d^4x(\eta\phi+\phi\eta+A_\mu J^\mu)\right\}. \quad (II.2.4)$$

注意,泛函积分测度由于两个原因在规范变换 (II.2.3) 下是不变量的: 1) ϕ 和 ϕ 变换的雅可比行列式为一; 2) A_μ 的变换为平动,因此变换的雅可比行列式也为一.

有必要知道 $\Delta_F[A_\mu]$. 应该假定, 在达到方程 (II.1.10) 所表示的程度以后,并在完成泛函积分以前,就进行 $\Delta_F[A_\mu]$ 的计算. 因此,它总是乘以 δ 函数的乘积 $\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu)$. 由 $\Delta_F[A_\mu]$ 的定义,方程 (II.1.4) 和它是规范不变量的事实,我们有

$$\begin{aligned}\Delta_F^{-1}[A_\mu]&=\Delta_F^{-1}[A_\mu+\partial_\mu\Lambda]\\&=\int\prod_x d\Lambda(x)\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu(x)+\partial^\mu\partial_\mu\Lambda(x))\\&=\int\prod_x d\Lambda(x)\prod_x\delta(\partial^\mu\partial_\mu\Lambda(x)),\end{aligned} \quad (II.2.5)$$

这里条件 $\partial^\mu\partial_\mu\Lambda(x)=0$ 是由于 δ 函数 $\delta(\partial^\mu A_\mu)$. 可以看出, $\Delta_F[A_\mu]$ 是与规范场 A_μ 无关的,因此, 在归一化因子 N 中可以由一个类似的因子抵消. 然而,下节将证明,在 Yang-Mills 理论中, $\Delta_F[\phi_B]$ 与规范有关, 并且实际上导致鬼拉氏函数. 方程 (II.2.4) 可以用有效拉氏函数再写为

$$Z[\eta,\eta,J_\mu]=\frac{1}{N}\int\mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi\prod_\mu\mathscr{D}A_\mu\cdot\exp\left\{i\int\mathscr{L}_{\text{eff}}d^4x+i\int d^4x[\eta\phi+\phi\eta+J_\mu A^\mu]\right\}, \quad (II.2.6)$$

这里

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \psi(i\partial\!\!\!/ - m + eA\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \tag{II.2.7}$$

它是 $\xi = 1$ 的 Fermi 拉氏函数[31]。

为了进行微扰计算，遵循 § I.3 的步骤，把方程(II.2.2)中所定义的相互作用拉氏函数 $\mathscr{L}_I$ 重写为一个泛函微分

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \frac{1}{N} \exp\left[-e\int d^4x \xi(x) \int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A_\mu\right] \\ \times \exp\left\{i\int d^4x \left[\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right]\right\} \\ \cdot \exp\left[i\int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu) d^4x\right], \end{aligned} \tag{II.2.8}$$

这里

$$\xi(x) = \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \gamma^\mu \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}.$$

自由地利用分部积分，并略去曲面项，就可以写出方程

$$\begin{aligned} &\int d^4x \left\{\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2\right\} \\ &= \int d^4x \left\{\bar{\psi}(x)D(x)\psi(x) + \frac{1}{2} A^\mu(x)K_{\mu\nu}(x)A^\nu(x)\right\}, \end{aligned} \tag{II.2.9}$$

这里

$$\begin{aligned} D(x) &= i\partial\!\!\!/ - m, \\ K_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu. \end{aligned} \tag{II.2.10}$$

$D(x)$ 和 $K_{\mu\nu}(x)$ 的逆函数用 $S_F(x, y)$ 和 $D_{\nu\lambda}(x, y)$ 表示如下：

$$D(x)S_F(x, y) = \delta(x - y),$$

$$g^{\lambda\rho}K_{\mu\lambda}(x)D_{F\mu\nu}(x,y)=g_{\mu\nu}\delta(x-y), \quad \text{(II.2.11)}$$

这里

$$S_F(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4p e^{-ip(x-y)}\frac{1}{\not p-m+i\varepsilon},$$

$$D_{\mu\nu}(x,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^4k\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \quad \text{(II.2.12)}$$

$\xi=1$ 为 Feynman 规范，而 $\xi=0$ 为 Lorentz-Landau 规范。微扰展开式可以由类似于在方程 (I.3.10) 中的场变数变换来实现。按照 § 1.3 中所叙述的相同步骤，

$$Z[\eta,\bar\eta,J_\mu]=\exp\left[+e\int d^4x\xi(x)\right]\times\exp\left\{-i\int d^4xd^4y[\bar\eta(x)S_F(x,y)\eta(y)+\frac{1}{2}J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x,y)J^\nu(y)]\right\}. \quad \text{(II.2.13)}$$

Feynman 规则可以按照 § 1.3 对带质量的旋量和带质量的矢量玻色子理论所叙述的相同步骤推导出来，唯一的差别是，矢量玻色子的传播子用光子的传播子代替

$$iD_{\mu\nu}(k)=\frac{i}{k^2+i\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \quad \text{(II.2.14)}$$

接着将推导 Ward-Takahashi 恒等式。作类似于 (II.2.3) 的无限小的变换改变：

$$\psi(x)\to(1+i\Lambda(x))\psi(x),$$

$$\bar\psi(x)\to(1-i\Lambda(x))\psi(x),$$

及

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x), \quad \text{(II.2.15)}$$

这里 Λ 现在是无限小的。于是

$$\delta I = \int d^4x \Lambda(x) \partial^\mu j_\mu(x),$$

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \tag{II.2.16}$$

变换的雅可比行列式为 1。

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \frac{1}{N} \int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} \mathscr{D}A_\mu \times \exp\left[iI - \frac{i}{2\xi}\int (\partial_\mu A^\mu)^2 d^4x\right] \times \exp\left\{i\int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu)\right\} d^4x \times \exp\left[i\int d^4x \Lambda(x)(\partial^\mu j_\mu + i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta)\right]. \tag{II.2.17}$$

对 $\Lambda(x)$ 微分，并令 $\Lambda(x) = 0$，给出

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} \mathscr{D}A_\mu [\partial^\mu j_\mu(x) + i\bar{\eta}(x)\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\eta(x)] \exp\left[iI - \frac{i}{2\xi}\int d^4x (\partial_\mu A^\mu)^2 + i\int d^4x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu)\right]. \tag{II.2.18}$$

对 $\eta(y)$ 和 $\eta(z)$ 微分，给出

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} \mathscr{D}A_\mu \left\{\partial^\mu j_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z) + \delta(x-y)\psi(x)\bar{\psi}(z) - \delta(x-z)\psi(y)\bar{\psi}(x)\right\} \times \exp\left[iI - \frac{i}{2\xi}\int d^4x(\partial_\mu A^\mu)^2 + i\int d^4x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu)\right]. \tag{II.2.19}$$

在算符形式中，这变为

$$\partial_x^\mu \langle 0| T(j_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)|0\rangle = [\delta^4(x-z)$$

$$-\delta^4(x-y)]\bar{S}_F(y,z), \qquad \text{(II.2.20)}$$

这里

$$i\bar{S}_F(x,y)=\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle$$

为费米子的全传播子函数. 在动量空间内 (II.2.20) 变为

$$(p-q)^\mu\Gamma_\mu(p,q;p-q)=\bar{S}_F^{-1}(p)-\bar{S}_F^{-1}(q), \qquad \text{(II.2.21)}$$

它是量子电动力学 (QED) 熟知的结果. 矢量函数 $\Gamma_\mu(p,q;p-q)$ 为没有外传播子的动量空间的费米子光子顶角函数，$\bar{S}_F^{-1}(p)$ 为全费米子传播子的逆函数.

结束本节之前，举一实例. 在物理规范，即 Coulomb 规范中，电磁场的哈密顿函数只与物理变量有关. 在 Coulomb 规范中变换矩阵元为

$$\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu \mathscr{D}A_\mu\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}(x)\right\}, \qquad \text{(II.2.22)}$$

这里 $\mathscr{L}(x)$ 在方程 (II.2.1) 中给出，并且规范场泛函 $\Delta_F[A_\mu]$ 被略去了，因为如同在方程 (II.2.5) 中所阐明的一样，它与场变量无关. 可以引入一个反对称张量

$$F_{\mu\nu}(x)=-F_{\nu\mu}(x),$$

并且认为是一个独立变量. 变换矩阵元 (II.2.22) 为

$$\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_{\mu,\nu,\lambda}\mathscr{D}A_\mu\mathscr{D}F_{\nu\lambda}\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\exp\left\{i\int d^4x\tilde{\mathscr{L}}(x)\right\}, \qquad \text{(II.2.23)}$$

这里

$$\tilde{\mathscr{L}}(x)=\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/-m)\psi-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad \text{(II.2.24)}$$

$F_{\mu\nu}$ 的运动方程给出

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \qquad \text{(II.2.25)}$$

可以证明在方程（II.2.23）中所给出的新的真空到真空变换矩阵元是等价于在方程（II.2.22）中所给出的原来的变换矩阵元。用方程（II.2.23）中作积分变数改变

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \tag{II.2.26}$$

把方程（II.2.23）重写为

$$\int \prod_{\nu\lambda} \mathscr{D} F_{\nu\lambda} \exp\left\{\frac{i}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} \int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} \prod_{\mu} \mathscr{D} A_\mu$$

$$\times \exp\left\{i \int d^4x \mathscr{L}(x)\right\}. \tag{II.2.27}$$

可以看出，关于 $F_{\mu\nu}$ 和 A_μ 的相关性是分开了。$F_{\mu\nu}$ 的积分是 Fresnel 类型的，并且显然可以进行积分。因此恢复了变换矩阵元原来的形式（II.2.22）。通过电场和磁场

$$E_j = F_{0j}, \quad j = 1, 2, 3 \tag{II.2.28}$$

$$B_j = -\frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}F^{kl}, \quad j, k, l = 1, 2, 3 \tag{II.2.29}$$

重写出方程（II.2.27），这里 ε_{jkl} 为由

$$\varepsilon_{123} = 1$$

所定义的 3 维全反对称符号。用该符号，拉氏函数（II.2.24）变为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) = {} & \psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) \\ & - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \nabla\cdot(A_0\boldsymbol{E}) \\ & + A_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E} - ej_0),\end{aligned} \tag{II.2.30}$$

这里

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x).$$

空间全导数项 $\nabla\cdot(A_0\boldsymbol{E})$ 对作用量积分并无贡献，于是方程（II.2.23）变为

$$\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi} \prod_{\mu} \mathscr{D} A_\mu \prod_{j} \mathscr{D} E_j \prod_{k} \mathscr{D} B_k \delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

$$\cdot \exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)-\boldsymbol{E}\cdot\partial_0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$\left.\left.+A_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E}-ej_0)\right]\right\}. \qquad \text{(II.2.31)}$$

A_0 的积分给出一个 δ 函数，$\boldsymbol{B}_i$ 积分是 Fresnel 类型的，它给出一个常数因子。完成了这些积分以后，由方程 (II.2.31)，略去无关紧要的常数因子，得到下面的变换矩阵元：

$$\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_i \mathscr{D}A_i\prod_k \mathscr{D}E_k\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{E}+j_0)$$

$$\cdot\exp\left\{i\int d^4x\left[\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\boldsymbol{E}\cdot\partial_0\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2)\right]\right\}. \qquad \text{(II.2.32)}$$

这个结果类似于具有约束的无限维力学体系，其中 $\boldsymbol{A}$ 为广义坐标，$-\boldsymbol{E}$ 为共轭动量。这是通常的结果。此外，也得到规范方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}-ej_0=0$ 和横向性条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。这些分别为约束条件和辅助条件。它们相应于规范场 A_μ 只具有两个独立偏振的熟知事实。

在不同的规范中量子电动力学（QED）的规范泛函 $\Delta_F[\psi]$ 为常数的事实，使量子化步骤相对地简单。如前节末所讨论的，这也可以由具有约束的量子化公式看出来。把方程 (II.2.30) 写为方程 (II.1.23) 的形式，可以看出，相应的矩阵函数 β 为常数。

II.3 非阿贝耳规范理论。量子色动力学

在阿贝耳局部规范理论中，要求局部规范变换不变就必

须要求无质量的矢量场存在，这个无质量的矢量场传递物质场之间的长程相互作用. 当然，所考虑的矢量场是量子电动力学情形的光子场. 在规范场和物质场之间的耦合通过一个守恒流实现. 流的时间分量的空间积分是群荷算符. 对于非阿贝耳规范理论，物质场形成非阿贝耳群的表示，假定该群有秩 n，因此有 n 个线性无关的生成元. 为了保持体系在规范变换下的不变性，需要 n 个无质量的矢量场，对于群的每个生成元有一个场. 在规范场和物质场之间的耦合仍然是守恒流类型. 规范群荷，即这些流的时间分量的空间积分是运动常数. 在阿贝耳理论中，不同的物质场与规范场之间的耦合常数是更重要的，彼此无关的，然而，不同的是，对于一个给定的非阿贝耳规范理论，有一个唯一的常数. 这是由于下述事实，除规范场所起的作用以外，规范矢量场也形成规范群的一个非平凡的表示. 这就确定物质场和规范场之间的唯一耦合常数，因此对非阿贝耳理论构成一个有力的约束. 如何出现这个约束，在下面的讨论中将变得十分清楚.

考虑自旋 $\frac{1}{2}$ 的费米子场的集合，它们具有两个不同的内对称性. 这些场表示为

$$\psi_\alpha^i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n_f, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n_c. \tag{II.3.1}$$

代表场自旋态的第三种指标被删去了. 用拉丁字母表示的上指标是内对称群的指标，称为“味”群，包括同位旋，奇异性，粲，底，顶，等等量子数. 用希腊字表示的下指标代表“色”自由度. 它们二者都是特殊幺正群，分别用 $SU(n_f)$ 和 $SU(n_c)$ 来表示. 在方程 (II.3.1) 中所给出的费米子场属于两个群的基本表示. 进一步假定，味群 $SU(n_f)$ 有整体对称性，而色群 $SU(n_c)$ 有局部对称性.

下面的讨论涉及到所谓量子色动力学的体系，它在味指标中是对角化的，并且在局部色规范变换下是不变量的。体系的拉氏函数可以写为

$$\mathscr{L} = \delta_{jk}\psi^j_\alpha (i\delta_{\alpha\beta}\partial\!\!\!/ + g T^a_{\alpha\beta} A\!\!\!/^a - \delta_{\alpha\beta} m)\psi^k_\beta - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}, \tag{II.3.2}$$

这里 T^a，$a = 1, 2, \cdots, n_c^2 - 1$ 为基本表示中群生成元的表示矩阵。它们满足对易关系

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \tag{II.3.3}$$

这里 f^{abc}，$a, b, c = 1, 2, \cdots, n_c^2 - 1$，为群 $SU(n_c)$ 的结构常数。T^a 的归一化为

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{II.3.4}$$

规范场张量定义为

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{II.3.5}$$

在下面，费米子场的味和色指标被删去了，但除显然有必要表达这些指标以外。这里应该引入符号

$$\mathbf{A}_\mu \equiv A^a_\mu T^a, \tag{II.3.6}$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu} T^a. \tag{II.3.7}$$

拉氏函数方程 (II.3.2) 在下面的局部规范变换下为不变量的：

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\to \psi^\Omega(x) = U(\Omega(x))\psi(x), \\
\phi(x) &\to \phi^\Omega(x) = \phi(x)U^{-1}(\Omega(x)), \\
\mathbf{A}_\mu(x) &\to \mathbf{A}^\Omega_\mu(x) = U(\Omega(x))\mathbf{A}_\mu(x)U^{-1}(\Omega(x)) \\
&\qquad + \frac{i}{g} U(\Omega(x))\partial_\mu U^{-1}(\Omega(x)), \\
\mathbf{F}_{\mu\nu}(x) &\to \mathbf{F}^\Omega_{\mu\nu}(x) = U(\Omega(x))\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)U^{-1}(\Omega(x)),
\end{aligned} \tag{II.3.8}$$

这里 $U(\Omega(x))$为规范群的一个元素。对于 $SU(n_c)$ 群，$\Omega(x)$ 表示 n_c^2-1 个参数的函数 $\theta_1(x)$，$\theta_2(x)$，$\cdots$，$\theta_{n_c^2-1}(x)$，它们定义一个给定的变换，并且 $U(\Omega(x))$ 是一个幺正矩阵

$$U(\Omega(x))=\exp\left\{-i\sum_{a=1}^{n_c^2-1}T^a\theta_a(x)\right\}. \qquad (\text{II}.3.9)$$

对于 $SU(3)$ 色群

$$T^a=\frac{\lambda^a}{2},$$

这里 λ^a，$a=1,2,\cdots,8$ 为 Gell-Mann 矩阵。连同相应的结构常数 f^{abc}，在基本表示中它们的数值矩阵形式在附录 III 中给出。

在方程 (II.3.2) 所给出的拉氏函数中，将只考虑物质场属于群 $SU(n_c)$ 的相同基本表示的情形。由非阿贝耳理论的规范场本身带有规范群荷的事实推导出，整个 $SU(n_c)$ 有一个唯一的耦合常数，因此在物质场不存在时彼此互相作用。在规范场之间的耦合强度确定物质场与规范场之间的耦合强度，说明如下。使用无限小的变换是充分的。虽然在方程 (II.3.6) 中所定义的场 $\mathbf{A}_\mu$ 按照方程 (II.3.8) 变换，该变换与物质场的表示有关，当然它与规范场 A_μ^a 的变换相耦合，但与物质场的任何特别表示无关。由方程 (II.3.8)，对于无限小的变换可以得到下式：

$$A_\mu^a(x)\to A'^a_\mu(x)=A_\mu^a-\frac{1}{g}D_\mu^{ab}(x)\varepsilon^b(x), \qquad (\text{II}.3.10)$$

这里 $\varepsilon^b(x)$，$b=1,2,\cdots,n_c^2-1$ 为无限小的参数函数，$D_\mu^{ab}(x)$ 为协变导数

$$D_\mu^{ab}(x)\equiv\delta^{ab}\partial_\mu-gf^{abc}A_\mu^c(x). \qquad (\text{II}.3.11)$$

在任意的表示中一个物质场 ϕ_β 与规范场的耦合取下面的形式

$$D_\mu\phi_\beta(x) \equiv (\partial_\mu - ig'T^a A^a_\mu(x))\phi_\beta(x), \quad \text{(II.3.12)}$$

这里物质场的协变导数为

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig'T^a A^a_\mu(x). \quad \text{(II.3.13)}$$

在无限小的变换下，物质场的变换为

$$\phi_\beta(x) \to \phi'_\beta(x) \equiv (1 - i\Sigma T^a\varepsilon^a(x))\phi_\beta(x). \quad \text{(II.3.14a)}$$

规范不变性要求 $D_\mu\phi_\beta(x)$ 按照如同 ϕ_β 一样的变换而变换，即是

$$D_\mu\phi_\beta(x) \to (1 - i\Sigma T^a\varepsilon^a(x))D_\mu\phi_\beta(x). \quad \text{(II.3.14b)}$$

如下所注意到的，这意味着

$$g' = g. \quad \text{(II.3.15)}$$

由方程 (II.3.10) 和 (II.3.14a)，被变换的 $D_\mu\phi_\beta(x)$ 可以写为

$$D_\mu\phi_\beta(x) \to (1 - i\Sigma T^a\varepsilon^a(x)) \left\{D_\mu \pm i\left(\frac{g'}{g} - 1\right)\right.$$

$$\left. \times \sum_b T^b\partial_\mu\varepsilon^b(x)\right\} \phi_\beta(x). \quad \text{(II.3.16)}$$

由 (II.3.16) 与 (II.3.14b) 的比较，得到 (II.3.15). 因为 ϕ_β 的表示是任意的，可以得到结论，只有一个耦合常数，模 Clebsch-Gordon 系数，由规范矢量场之间的耦合常数来确定.

量子化 进行量子化，需要一个规范条件，表示为

$$F^a[A^b_\mu] = 0, \text{ 对于一切 } a = 1, 2, \cdots, n_c^2 - 1. \quad \text{(II.3.17)}$$

将考虑连续形变到单位元素的规范变换，但是限于线性规范条件. 生成泛函写为

$$z[\eta, \bar{\eta}, J^a_\mu] = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\bar{\phi} \prod_{a,\mu} \mathscr{D}A^a_\mu \Delta_F[A^a_\mu]$$

$$\cdot \exp\left\{il - \frac{i}{2\alpha}\int d^4x (F^a[A^b_\mu])^2\right.$$

$$+ i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^a_\mu A^{a\mu}]\Big\}. \quad \text{(II.3.18)}$$

注意，泛函积分测度在 (II.3.8) 所定义的规范变换下为不变量.这可以由这样的事实看出来，ψ 和 $\bar{\psi}$ 的变换是幺正的，$\mathbf{A}_\mu$ 的变换是一个幺正变换加一个平动. 为了计算 $\Delta_F[A^a_\mu]$，把 (II.1.4) 写为

$$\Delta_F^{-1}[A^a_\mu] = \int \prod_x d\Omega(x) \prod_{a,x} \delta(F^a[A^b_\mu]). \quad \text{(II.3.19)}$$

进行如同在方程 (II.3.10) 中所表达的无限小规范变换：

$$F^a[A^a_\mu] \to F^a[(A^b_\mu)^\varepsilon]$$
$$= F^a[A^b_\mu] - \frac{1}{g}\int d^4y \frac{\delta F^a[A^b_\mu]}{\delta A^c_\nu(y)} D^{cd}_\nu(y)\varepsilon^d(y), \quad \text{(II.3.20)}$$

这里利用了泛函 Taylor 展开式方程 (I.5.15). 把 (II.3.20) 代入 (II.3.19)，并考虑到 $\Delta_F[A^a_\mu]$ 往往伴随着如同在方程 (II.1.10) 中所表达的 δ 函数 $\delta(F^a[A^b_\mu])$. 方程 (II.3.19) 重写为

$$\Delta_F^{-1}[A^a_\mu] = \int \prod_{a,x} d\varepsilon^a(x) \prod_{a,x} \delta\Big(\frac{1}{g}\int d^4y \times \frac{\delta F^a[A^b_\mu(x)]}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cd}_\nu(y)\varepsilon^d(y)\Big)$$
$$= (\det(M_F))^{-1}. \quad \text{(II.3.21)}$$

这里 M_F 为空间和时间的连续参数的一个“矩阵”及规范群指标的分立编号. 在 δ 函数内的 $\left(-\frac{1}{g}\right)$ 因子可以删去，δ 函数的自变数为

$$\int d^4y \frac{\delta F^a[A^b_\mu(x)]}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cd}_\nu(y)\varepsilon^d(y). \quad \text{(II.3.22)}$$

表示

$$M^{ad}(x,\ y) \equiv \frac{\delta F^a[A^b_\mu(x)]}{\delta A^c_\nu(y)} D^{cd}_\nu(y). \qquad \text{(II.3.23)}$$

对于协变的 Lorentz 规范，例如

$$F^a(x) = \partial^\mu A^a_\mu(x), \qquad \text{(II.3.24)}$$

于是

$$M^{ad}(x,y) = D^{ad}_\mu(y)\partial^\mu_x \delta^4(x-y). \qquad \text{(II.3.25)}$$

如果作一个变数改变

$$\varepsilon^a(y) = \int d^4z \zeta^{ab}(y,\ z)\varepsilon'^b(z), \qquad \text{(II.3.26)}$$

这里 $\zeta^{ab}(y,z)$ 为 $M^{ab}(x,y)$ 的逆函数，因而

$$\int d^4y M^{ab}(x,\ y)\zeta^{bc}(y,\ z) = \delta^{ac}\delta^4(x-z). \qquad \text{(II.3.27)}$$

略去因子 $\left(-\frac{1}{g}\right)$，方程 (II.3.31) 可以重写为

$$\Delta_F^{-1}[A^a_\mu] = \int \prod_{c,x} d\varepsilon^c(x) \times \prod_{a,x} \delta\left(\int d^4y M^{ab}(x,\ y)\varepsilon^b(y)\right). \qquad \text{(II.3.28)}$$

注意，$(\det(M_F))^{-1}$ 正好就是变换 (II.3.26) 的雅可比行列式，因此

$$\Delta_F[A^a_\mu] = \det(M_F). \qquad \text{(II.3.29)}$$

由包含 Grassman 代数的 Gauss 积分的性质，并引入二标量函数 $C^a(x)$ 及 $\bar{C}^a(x)$，该二函数为虚设的费米子类型的场，于是

$$\Delta_F[A^a_\mu] = \det(M_F) \sim \int \prod_d \mathscr{D}C^d\mathscr{D}\bar{C}^d \times \exp\left\{i\int d^4x d^4y \bar{C}^a(x)M^{ab}(x,\ y)C^b(y)\right\}. \qquad \text{(II.3.30)}$$

在 Lorentz-Landau 规范中

$$\Delta_F[A_\mu^a] \sim \int \prod_a \mathscr{D}C^a \mathscr{D}\bar{C}^a$$

$$\times \exp\left\{-i\int d^4x \partial^\mu \bar{C}^a(x) D_\mu^{ab}(x) C^b(x)\right\}. \qquad \text{(II.3.31)}$$

记住

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab}\partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c.$$

虚设场 $C^a(x)$ 及 $\bar{C}^a(x)$ 彼此反对易，并且与其他费米子函数 ψ, ψ, η 及 η 反对易. 虚设场 $C^a(x)$ 及 $\bar{C}^a(x)$ 称为 Faddeev-Popov 鬼场. 生成泛函的最后形式为

$$z[\eta, \eta, J_\mu^a] = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\psi \prod_{x,\mu} \mathscr{D}A_\mu^a \mathscr{D}C^b \mathscr{D}\bar{C}^b$$

$$\cdot \exp\left\{iI_{\text{eff}} + i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \psi\eta\right.$$

$$\left. + J_\mu^a A^{a\mu} + \bar{C}^a K^a + \bar{K}^a C^a]\right\}, \quad \text{(II.3.32)}$$

这里 K^a 及 $\bar{K}^a$ 为鬼场的外源，并且

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{mf}} + I_{\text{gauge}} + I_{\text{gf}} + I_{\text{ghost}}, \qquad \text{(II.3.33)}$$

$$I_{\text{mf}} = \int d^4x \psi(i\not{\partial} + g\not{A} - m)\psi, \qquad \text{(II.3.34a)}$$

$$I_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2}\int d^4x \,\text{Tr}(\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}), \qquad \text{(II.3.34b)}$$

$$I_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \qquad \text{(II.3.34c)}$$

$$I_{\text{ghost}} = -\int d^4x \partial^\mu \bar{C}^a(x) D_\mu^{ab}(x) C^b(x)$$

$$= -\int d^4x \partial^\mu \bar{C}(x)[\delta^{ab}\partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c(x)]C^b(x). \qquad \text{(II.3.35)}$$

费米子及鬼的一切场及外源均彼此反对易，一切与玻色子相联系的场和外源互相对易，而且费米子的量与玻色子的量对

易. 可以看到,把单位量 (II.1.4) 引入生成函数的 Faddeev·Popov 技巧完成了两件事: (a) 它用要求 $F[A^a_\mu]=0$ 固定了规范条件. (b) 它提供鬼拉氏函数 (II.3.35). 鬼的效应导致在高阶过程中某种类型的闭合回路以保持 S 矩阵元的横向性及幺正性.

轴规范[32] 鬼的存在事实上是与规范泛函 $\Delta_F[A^a_\mu]$ 或与方程 (II.1.25) 所定义的 $\det(\beta)$ 因子依赖于规范场相联系的. 然而,有一种规范,叫做轴规范[32],它并不引入鬼项. 在这样的规范中,选取规范场的空间分量之一为零,例如

$$A^a_3(x)=0. \tag{II.3.36}$$

为了具体说明在轴规范中的量子化,考虑只包含规范场的体系是充分的. 由于自相互作用,这是一个相互作用理论. 步骤类似于 § II.2 所提出的 Coulomb 规范中量子电动力学 (QED) 的处理. 在第一阶形式中写出该体系的拉氏函数为

$$\tilde{\mathscr{L}}_A=\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{2}F^{a\mu\nu}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu) \tag{II.3.37}$$

反对称张量

$$F^a_{\mu\nu}=-F^a_{\nu\mu},\quad a=1,2,\cdots,n_c^2-1$$

被认为是独立的变量. 对于 $F^a_{\mu\nu}$ 的运动方程,$[\mathscr{L}]_{F^a_{\mu\nu}}=0$ 给出

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{II.3.38}$$

是 A^a_μ 的运动方程,$[\mathscr{L}]_{A^a_\mu}=0$ 为

$$D^{ab}_\mu F^{b\mu\nu}=0. \tag{II.3.39}$$

特别是,由

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)}=-F^{a\mu\nu}. \tag{II.3.40}$$

可以看出，A^{a1} 及 A^{a2} 为正则坐标，$-F^a_{01}$ 及 $-F^a_{02}$ 为它们相应的共轭动量。其余的 A^a_0，F^a_{03}，F^a_{31}，F^{32}_a 及 F^a_{12} 为不独立的变数，即是，为方程（II.1.25）的 γ 类型的变数。拉氏函数方程（II.2.37）可以写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &- F^a_{01}\dot{A}^{a1} - F_{02}\dot{A}^{a2} - \frac{1}{2}[(F^a_{01})^2 + (F^a_{02})^2] \\ &- F^a_{01}D^{ab}_1 A^b_0 - F^a_{02}D^{ab}_2 A^b_0 + \frac{1}{2}[(F^a_{12})^2 + (F^a_{23})^2 \\ &+ (F^a_{31})^2 - (F_{03})^2] + (\partial_1 A^{a2} - \partial_2 A^{a1} \\ &- gf^{abc}A^{b1}A^{c2})F^a_{12} - \partial_3 A^{a2}F^a_{23} - \partial_3 A^{a1}F^a_{13} \\ &- F^a_{03}\partial_3 A^a_0,\end{aligned} \tag{II.3.41}$$

这里

$$\dot{A}^{aj} \equiv \frac{\partial A^{aj}}{\partial x_0}.$$

为了把方程（II.3.4）与在 § II.1 末所给出的具有约束的量子化表述加以比较，不独立的变数排列为

$$r^a \equiv \begin{pmatrix} A^a_3 \\ F^a_{03} \\ F^a_{12} \\ F^a_{23} \\ F^a_{31} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}(\alpha^a)^T \equiv (&F^b_{01}D^{ba}_1 + F^b_{02}D^{ba}_2,\ 0,\ -\partial_1 A^{a2} + \partial_2 A^{a1} \\ &+ gf^{abc}A^{b1}A^c_2,\ \partial_3 A^{a2},\ -\partial_3 A^{a1}).\end{aligned}$$

矩阵 β 为

$$\beta^{ab}=-\delta^{ab}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\partial}{\partial x^2} & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial x^2} & -1 & \\ & & 1\\ 0 & & 1\\ & & & 1\end{pmatrix} \tag{II.3.42}$$

它不包含场变数．作为量子化的结果而没有鬼．写出变换矩阵元

$$\int \prod_{\mu,a}\mathscr{D}A^a_\mu \prod_{\nu,\lambda,b}\mathscr{D}F^b_{\nu\lambda}\prod_{d,x}\delta(A^d_3(x))\exp\left\{i\int d^4x\,\tilde{\mathscr{L}}_A(x)\right\}. \tag{II.3.43}$$

可以着手进行量子化，这里 $\tilde{\mathscr{L}}_A(x)$ 在方程（II.3.41）中给出，并进行不独立变数的积分．由 Faddeev-Popov 方法可以得到相同的结论．考虑轴规范中的规范泛函

$$\Delta_F^{-1}[A^a_3]=\int\prod_x d\Omega(x)\prod_{i,a}\delta(A^a_3(x)). \tag{II.3.44}$$

方程（II.3.10）的无限小变换给出

$$A^a_3(x)\to A^a_3(x)-\frac{1}{g}D^{ab}_3\varepsilon^b(x).$$

δ 函数 $\delta(A^a_3(x))$ 表明

$$\Delta_F^{-1}[A^a_3]=\int\prod_{x,a}d\varepsilon^a\prod_{b,x}\delta\left(-\frac{1}{g}\partial_3\varepsilon^b(x)\right), \tag{II.3.45}$$

如所希望的，它与场变数无关．因此规范泛函因子可以删去，并且变换矩阵简单地变为

$$\int\prod_{\mu,a}\mathscr{D}A^a_\mu\prod_{b,x}\delta(A^b_3(x))\exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2\right]\right\}. \tag{II.3.46}$$

由方程（II.3.43）中的变数改变

$$F^a_{\mu\nu}\to F^a_{\mu\nu}-(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)$$

并利用 $\mathscr{L}_A$ 的 (II.3.37)，可以看出，变换矩阵元 (II.3.43) 与 (II.3.46) 中所给出的矩阵元只差一个无关紧要的常数因子.

另外的无鬼规范，所谓时间的或空间的规范是由令规范场的时间分量为零来定义的:

$$A_0^a = 0, \quad a = 1, 2, \cdots, n_c^2 - 1. \qquad \text{(II.3.47)}$$

这个规范适合于哈密顿形式的量子化，因为协变时间导数化为通常的时间导数[33]

$$D_0^{ab} = \delta^{ab} \frac{\partial}{\partial x_0}. \qquad \text{(II.3.48)}$$

虽然没有鬼，但轴规范和空间规范二者却会损失显然的 Lorentz 协变性. 特别是，由于规范玻色子的传播子的奇点结构，要定义回路积分是困难的[34].

不同规范的等价性 对于三种不同的规范: 一般线性规范方程 (II.3.24)，轴规范方程 (II.3.36) 及时间规范，已讨论了 Yang-Mills 理论的量子化. 还有另外的规范，比如 Coulomb 规范，及更一般的非线性规范. 当然，不同的规范是等价的. 下面是这个事实的说明. 泛函积分方法是特别方便的，并能迅速达到目的. 如果从轴规范 $A_3^a = 0$ 出发，希望把轴规范变换为一般的线性规范 $\partial^\mu A_\mu^a$，则这两种规范可以用某个有限的线性变换

$$A_0^a \to (A_0^a)^\omega$$

联系起来. 如果从变换矩阵元方程 (II.3.36) 出发，为了得到另外的规范，必须适当选择规范变换 Ω. 为了从轴规范变换为一般的线性规范，δ 函数 $\delta(A_3^a)$ 必须用 $\delta(\partial^\mu A_\mu^a)$ 来表示. 注意下面的恒等式

$$\prod_{a,x} dA_3^a(x)\delta(A_3^a(x)) = \prod_{b,y} d(\partial^\mu A_\mu^b(y))\delta(\partial^\mu A_\mu^b(y)), \qquad \text{(II.3.49)}$$

于是

$$\prod_{a,x}\delta(A_3^a(x))=\det\left(\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu^b(x))}{\partial(A_3^c(z'))}\right)\prod_{d,y}\delta(\partial^\mu A_\mu^d(y)).$$

(II.3.50)

为了计算上面关系的行列式，场通过无限小的规范变换：

$$A_3^a(x)\to A_3^a(x)-\frac{1}{g}D_3^{ac}(x)\varepsilon^c(x),\quad\text{(II.3.51a)}$$

$$\partial^\mu A_\mu^b(y)\to\partial^\mu A_\mu^b(y)-\frac{1}{g}\partial^\mu D^{bd}(y)\tilde{\varepsilon}^d(y),\text{(II.3.51b)}$$

用它们的规范变换的对应部分来代替. 因为二规范是由Ω所表示的一个规范变换相联系的，$\tilde{\varepsilon}^b(x)$是规范变换的$\varepsilon^b(x)$：

$$\tilde{\varepsilon}^b(x)=(\varepsilon^b(x))^\Omega.\quad\text{(II.3.52)}$$

于是

$$\det\left(\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu^b(y))}{\partial(A_3^c(x))}\right)=\det\left(\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu^b(y))}{\partial(\tilde{\varepsilon}^{b'}(z))}\right)\det\left(\frac{\partial\tilde{\varepsilon}^{b'}(z)}{\partial\varepsilon^{c'}(z')}\right)\times\det\left(\frac{\partial\varepsilon^{c'}(z')}{\partial A_3^c(x)}\right).\quad\text{(II.3.53)}$$

由方程（II.3.51b），我们有

$$\det\left(\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu^b(y))}{\partial\varepsilon^c(z)}\right)=\det\left(-\frac{1}{g}D_\mu^{bc}(y)\partial_y^\mu\delta(y-z)\right).$$

(II.3.54)

方程（II.3.53）右边的另外两个行列式不依赖于场变数；非平凡的因子由方程（II.3.54）给出. 因为因子$-\frac{1}{g}$可以从行列式分解出来，可以看出

$$\det\left(\frac{\partial(\partial^\mu A_\mu^b(y))}{\partial A_3^c(x)}\right)\propto\det(M^{bc}(x,y)),\quad\text{(II.3.55)}$$

这里$M^{ab}(x,y)$在由方程（II.3.25）给出. 于是

$$\prod_{a,x}\delta(A_3^a(x))\propto\det(M^{ab}(x,y))\prod_{c,y}\delta(\partial^\mu A_\mu^a(y)),$$

(II.3.56)

把方程（II.3.56）代入方程（II.3.46），得到了一般线性规范的变换矩阵元，并且与本节以前推导的结果一致.

生成泛函的约化 为微扰展开式作预备，把拉氏函数分为自由部分 $\mathscr{L}_0$，及相互作用部分 $\mathscr{L}_I$，这里

$$\mathscr{L}_0=\psi(i\partial\!\!\!/-m)\psi-\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a)^2-\frac{2}{\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2\right]-\partial^\mu\bar{C}^a\partial_\mu C^a,\qquad(\text{II.3.57})$$

$$\mathscr{L}_I=g\bar{\psi}A\psi-\frac{1}{4}\{2gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a)A^{b\mu}A^{c\nu}+g^2f^{abc}f^{ade}A_\mu^bA_\nu^cA^{d\mu}A^{e\nu}\}+gf^{abc}\partial^\mu\bar{C}^aC^bA_\mu^c,$$

(II.3.58)

利用分部积分，丢掉所有的全导数，$\mathscr{L}_0$ 可以重写为

$$\mathscr{L}_0=\psi D\psi+\frac{1}{2}A_\mu^aK^{\mu\nu}A_\nu^a+\bar{C}^a\Box C^a,\qquad(\text{II.3.59})$$

$$D\equiv i\partial\!\!\!/-m,$$

$$K_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\Box-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\partial_\nu.\qquad(\text{II.3.60})$$

利用外源导数，重写出 $\mathscr{L}_I$，给出

$$Z[\eta,\bar{\eta},J_\mu^a,K,\bar{K}]=N^{-1}\exp\left\{V\left(\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}},\frac{\delta}{\delta J_\mu^a},\frac{\delta}{\delta K^a},\frac{\delta}{\delta\bar{K}^a}\right)\right\}\cdot\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_a\mathscr{D}A_\mu^a\mathscr{D}C^a\mathscr{D}\bar{C}^ae^{iI_0}\cdot\exp\left\{i\int d^4x[\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_\mu^aA^{a\mu}+\bar{K}^aC^a+\bar{C}^aK^a]\right\},\qquad(\text{II.3.61})$$

这里

$$I_0 = \int d^4x \left[\phi D \phi + \frac{1}{2} A^a_\mu K^{\mu\nu} A^a_\nu + \bar{C}^a \Box C^a \right],$$

及

$$V\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, \cdots\right) \equiv + g \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta\eta} \gamma_\mu T^a \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta J^a_\mu} \right)$$
$$+ \int d^4x \left\{ \frac{g}{2} f^{abc} \left[\partial_\mu \frac{\delta}{\delta J^{a\nu}} \right.\right.$$
$$\left. - \partial_\nu \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}} \right] \frac{\delta}{\delta J^b_\mu} \frac{\delta}{\delta J^c_\nu} - \frac{i}{4} g^2 f^{abc} f^{ade}$$
$$\left. \times \frac{\delta}{\delta J^{b\mu}} \frac{\delta}{\delta J^{c\nu}} \frac{\delta}{\delta J^d_\mu} \frac{\delta}{\delta J^e_\nu} \right\} + g f^{abc}$$
$$\times \int d^4x \left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta K^a} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{K}^b} \frac{\delta}{\delta J^c_\mu}, \qquad \text{(II.3.62)}$$

改变积分变数

$$\phi(x) \to \phi(x) - \int d^4y S_F(x, y) \eta(y),$$

$$\bar{\phi}(x) \to \phi(x) - \int d^4y \bar{\eta}(y) S_F(y, x),$$

$$A^a_\mu(x) \to A^a_\mu(x) - \int d^4y D^{ab}_{F\mu\nu}(x, y) J^{b\nu}(y),$$

$$C^a(x) \to C^a(x) - \int d^4y D^{ab}_F(x, y) K^b(y)$$

$$\bar{C}^a(x) \to \bar{C}^a(x) - \int d^4y \bar{K}^b(y) D^{ba}_F(y, x), \qquad \text{(II.3.63)}$$

这里

$$S_F(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon},$$

$$D^{ab}_{\mu\nu}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k e^{-ik(x-y)} \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \left[- g_{\mu\nu} \right.$$
$$\left. + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right],$$

$$D_F^{ab}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4q e^{-iq(x-y)} \frac{(-1)}{q^2 + i\varepsilon} \delta^{ab}, \quad \text{(II.3.64)}$$

及

$$\begin{aligned} D(x)S_F(x, y) &= \delta(x - y), \\ g^{\lambda\rho}K_{\mu\lambda}^{ab}(x)D_{F\rho\nu}^{bc}(x, y) &= \delta^{ab}\delta(x - y)g_{\mu\nu}, \\ \Box_x D_F^{ab}(x, y) &= \delta^{ab}\delta(x - y), \end{aligned} \quad \text{(II.3.65)}$$

我们得到

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu^a K^a \bar{K}^a] = N^{-1} \exp &\left\{ V\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, \cdots\right) \right. \\ &\cdot \exp\left\{ -i \int dxdy \left[\bar{\eta}(x)S_F(x,y)\eta(y) \right.\right. \\ &+ \frac{1}{2} J^{a\mu}(x)D_{F\mu\nu}^{ab}(x, y)J^{b\nu}(y) \\ &\left.\left. + \bar{K}^a(x)D_F^{ab}(x, y)K^b(y) \right] \right\}. \end{aligned} \quad \text{(II.3.66)}$$

定义归一化因子 N，使

$$Z[0, 0, 0] = 1.$$

(II.3.66) 是微扰展开式的基础.

Feynman 规则 推导 Feynman 规则的步骤已经在 §I.2 中举例说明了.

(a) 费米子的传播子

$$\begin{aligned} iS_F(x, y) &\equiv \langle 0 | T(\phi(x)\bar{\phi}(y)) | 0 \rangle |_{g=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(y)} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu^a] |_{g=0}. \end{aligned}$$

在动量空间内这为

$$\begin{aligned} iS_F(p) &= i \int d^4x e^{ipx} S_F(x, 0) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad \text{(II.3.67)}$$

(b) 胶子的传播子.

$$iD^{ab}_{F\mu\nu}(x,y)=\langle 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(y))|0\rangle|_{g=0}$$

$$=-\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)}\frac{\delta}{\delta J^{b\nu}(y)}Z[\eta,\eta,J^a_\mu]|_{g=0}.$$

在动量空间内

$$iD^{ab}_{F\mu\nu}(k)=\frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon}\left(-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right).$$

(II.3.68)

(c) 鬼传播子

$$iD^{ab}_F(x,y)=\langle 0|T(C^a(x)\bar{C}^b(y))|0\rangle$$

$$=\frac{\delta}{\delta\bar{K}^a(x)}\frac{\delta}{\delta K^b(y)}Z[\eta,\eta,J^a_\mu]|_{g=0}$$

在动量空间内

$$iD^{ab}_F(q)=\frac{-i\delta^{ab}}{q^2+i\varepsilon}.\qquad\text{(II.3.69)}$$

(d) 夸克胶子顶角

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y)A^a_\mu(z))|0\rangle$$

$$=-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(z)}Z[\eta,\bar{\eta},J^a_\mu]|_{g\text{的一阶}}$$

$$=\int d\omega d\omega' d\omega'' i\bar{S}_F(x,\omega)\Gamma^{b\lambda}(\omega,\omega',\omega''$$

$$\times i\bar{S}_F(\omega',y)i\bar{D}^{h\lambda}_{F\lambda\mu}(\omega'',z)|_{g\text{的一阶}}$$

$$=ig\int d^4\omega iS_F(x,\omega)\gamma^\lambda\frac{\lambda^b}{2}iS_F(y,\omega)iD^{ba}_{F\lambda\mu}(\omega,z).$$

(II.3.70)

$\bar{S}_F$ 及 $\bar{D}^{ba}_{F\mu\nu}$ 仍为全传播子. 乘以夸克和胶子传播子的逆函数，给出

$$\Gamma^a_\mu(x,y;z)|_{g\text{的第一阶}}=-i\bar{S}_F^{-1}(x,x')\langle 0|T(\psi(x')$$

$$\times \psi(y')A^{b\lambda}(z')|0\rangle iS_F^{-1}(y', y)$$
$$\cdot iD^{cc'}_{F\lambda\mu}(z', z)^{-1}|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= ig\gamma_\mu \frac{\lambda^c}{2}\delta(x-y)\delta(x-z). \qquad (\text{II}.3.71)$$

在动量空间内，为

$$\Gamma^a_\mu(p', p; k)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= \int d^4x d^4y d^4z e^{ixp'} e^{-iyp} e^{ikz}\Gamma^a_\mu(x, y; z)|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= (2\pi)^4\delta^4(p'+k-p)\{ig\gamma_\mu T^a\}. \qquad (\text{II}.3.72)$$

(e) 胶子三线性顶角.

$$\langle 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^c_\lambda(z))|0\rangle$$
$$= i\frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)}\frac{\delta}{\delta J^{b\nu}(y)}\frac{\delta}{\delta J^{c\lambda}(z)}Z[\eta, \eta, J^a_\mu]|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= i\frac{gf^{dch}}{2}\int d\omega\left[\partial^\sigma\frac{\delta}{\delta J^d_\tau(\omega)} - \partial^\tau\frac{\delta}{\delta J^d_\sigma(\omega)}\right]$$
$$\times \frac{\delta}{\delta J^{e\sigma}(\omega)}\frac{\delta}{\delta J^{h\tau}(\omega)}(-i)^3\int dx' D^{aa'}_{F\mu\mu'}(x, x')$$
$$\times J^{a'\mu'}(x')\int dy' D^{bb'}_{F\nu\nu'}(y, y')J^{b'\nu'}(y')$$
$$\times \int dz' D^{cc'}_{F\lambda\lambda'}(z, z')J^{c'\lambda'}(z'). \qquad (\text{II}.3.73)$$

乘以三胶子传播子的逆函数：

$$[iD^{aa'}_{F\mu\mu'}(x, x')]^{-1}[iD^{bb'}_{F\nu\nu'}(y, y')]^{-1}[iD^{cc'}_{F\lambda\lambda'}(z, z')]^{-1}$$
$$\times\langle 0|T(A^{a'\mu}(x')A^{b'\nu}(y')A^{c'\lambda}(z'))|0\rangle|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= i\frac{1}{2}gf^{dch}\int d^4\omega\left[\partial^\sigma\frac{\delta}{\delta J^d_\tau(\omega)} - \partial^\tau\frac{\delta}{\delta J^a_\sigma(\omega)}\right]$$
$$\times \frac{\delta}{\delta J^{e\sigma}(\omega)}\frac{\delta}{\delta J^{h\tau}(\omega)}\{J^a_\mu(x)J^b_\nu(y)J^c_\lambda(x)\}$$
$$= -igf^{dch}\int d^4\omega\{\delta^{ad}\delta^{be}\delta^{ch}[g_{\tau\mu}\partial^\omega_\tau - g_{\sigma\mu}\partial^\omega_\tau]$$

$$\times \delta^4(\omega - x)g^{\sigma}_{\nu}g^{\tau}_{\lambda}\delta^4(y - \omega)\delta^4(z - \omega)$$
$$+ \delta^{db}\delta^{ea}\delta^{hc}[g_{\tau\nu}\partial^{\omega}_{\sigma} - g_{\sigma\nu}\partial^{\omega}_{\tau}]\delta^4(\omega - y)g^{\sigma}_{\mu}g^{\tau}_{\lambda}\delta^4(\omega - x)\delta^4(\omega - z) + \delta^{dc}\delta^{ea}\delta^{hb}[g_{\sigma\lambda}\partial^{\omega}_{\sigma} - g_{\sigma\lambda}\partial^{\omega}_{\tau}]$$
$$\times \delta^4(\omega - z)g^{\sigma}_{\mu}g^{\tau}_{\nu}\delta^4(\omega - x)\delta^4(\omega - y)\}. \tag{II.3.74}$$

在动量空间内，把所有的三个动量引入顶角：

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{-ixk_1}e^{-iyk_2}e^{-izk_3}[iD^{aa'}_{F\mu\mu'}(x, x')]^{-1}$$
$$\times [iD^{bb'}_{F\nu\nu'}(y, y')]^{-1}[iD^{cc'}_{F\lambda\lambda'}(z, z')]^{-1}$$
$$\times \langle 0|T(A^{a'\mu'}(x')A^{b'\nu'}(y')A^{c'\lambda'}(z'))|0\rangle|_{g\text{的第一阶}}$$
$$= gf^{abc}\{g_{\mu\nu}(k_3 - k_2)_{\lambda} + g_{\nu\lambda}(k_1 - k_3)_{\mu} + g_{\lambda\mu}(k_2 - k_1)_{\nu}\}. \tag{II.3.75}$$

(E) 胶子四顶角

$$\langle 0|T(A^a_{\mu}(x)A^b_{\nu}(y)A^c_{\lambda}(z)A^d_{\rho}(\omega)|0\rangle|_{\text{仅含 } g^4\text{ 的连通部分}}$$
$$= \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)}\frac{\delta}{\delta J^{b\nu}(y)}\frac{\delta}{\delta J^{c\lambda}(z)}\frac{\delta}{\delta J^{d\rho}(\omega)}$$
$$\times Z[\eta, \bar{\eta}, J^a_{\mu}]|_{\text{含 } g^4\text{ 的连通项}}$$
$$= -\frac{i}{4}g^2 f^{ich}f^{ic'h'}\int d^4u \frac{\delta}{\delta J^{c\sigma}(u)}\frac{\delta}{\delta J^{h'\tau}(u)}$$
$$\times \frac{\delta}{\delta J^{c'}_{\sigma}(u)}\frac{\delta}{\delta J^{h'}_{\tau}(u)}(-i)^4\int d^4x' D^{aa'}_{F\mu\mu'}$$
$$\times (x, x')J^{a'\mu'}(x')\int d^4y' D^{bb'}_{F\nu\nu'}(y, y')J^{b'\nu'}(y')$$
$$\times \int dz' D^{cc'}_{F\lambda\lambda'}(z, z')J^{c'\lambda'}(z')$$
$$\times \int d\omega' D^{dd'}_{F\rho\rho'}(\omega, \omega')J^{d'\rho'}(\omega'). \tag{II.3.76}$$

乘以四胶子传播子的逆函数：

$$[i\bar{D}^{aa'}_{F\mu\mu'}(x, x')]^{-1}[i\bar{D}^{bb'}_{F\nu\nu'}(y, y')]^{-1}[i\bar{D}^{cc'}_{F\lambda\lambda'}(z, z')]^{-1}$$
$$\times [iD^{dd'}_{F\rho\rho'}(\omega, \omega')]^{-1}\langle 0|T(A^{a'\mu'}(x')A^{b'\nu'}(y')$$

$$\times A^{c'\lambda'}(z')A^{d'\rho'}(\omega'))|0\rangle|_{\text{含 } g^4 \text{ 的连通项}}$$

$$= -\frac{i}{4}g^2 f^{jch}f^{jc'h'}\int d^4u\,\frac{\delta}{\delta J^{c\sigma}(u)}\,\frac{\delta}{\delta J^{h\tau}(u)}\,\frac{\delta}{\delta J^{c'\sigma'}(u)}$$

$$\times\frac{\delta}{\delta J^{h'}_{\tau}(u)}J^a_\mu(x)J^b_\nu(y)J^c_\lambda(z)J^d_\rho(\omega)$$

$$= -\frac{i}{4}g^2 f^{jch}f^{jc'h'}\int d^4u\{\delta^{ac}\delta^{bh}(g_{\nu\lambda}g_{\nu\rho}\delta^{cc'}\delta^{dh'}①$$

$$+ g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\delta^{ch'}\delta^{dc} + \delta^{ac}\delta^{ch}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\delta^{bc'}\delta^{dh'}②$$

$$+ g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\delta^{dc'}\delta^{bc'}) + \delta^{ac}\delta^{dh}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\delta^{bc}\delta^{ch'}③$$

$$+ g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\delta^{cc'}\delta^{bh'}) + \delta^{bc}\delta^{ah}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}\delta^{cc'}\delta^{dh'}①$$

$$+ g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}\delta^{dc'}\delta^{ch'}) + \delta^{bc}\delta^{ch}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\delta^{ac'}\delta^{dh'}③$$

$$+ g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}\delta^{dc'}\delta^{ac'}) + \delta^{bc}\delta^{dh}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\delta^{ac'}\delta^{ch'}②$$

$$+ g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}\delta^{cc'}\delta^{ah'}) + \delta^{cc}\delta^{ah}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}\delta^{bc'}\delta^{dh'}②$$

$$+ g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}\delta^{dc'}\delta^{bh'}) + \delta^{cc}\delta^{bh}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}\delta^{ac'}\delta^{dh'}③$$

$$+ g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}\delta^{dc'}\delta^{ah'}) + \delta^{cc}\delta^{dh}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}\delta^{ac'}\delta^{bh'}①$$

$$+ g_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}\delta^{bc'}\delta^{ah'}) + \delta^{dc}\delta^{ah}(g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}\delta^{bc'}\delta^{ch'}③$$

$$+ g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}\delta^{cc'}\delta^{bh'}) + \delta^{dc}\delta^{bh}(g_{\rho\mu}g_{\lambda\tau}\delta^{ac'}\delta^{ch'}②$$

$$+ g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}\delta^{cc'}\delta^{ah'}) + \delta^{dc}\delta^{ch}(g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}\delta^{ac'}\delta^{bh'}①$$

$$+ g_{\rho\nu}g_{\mu\lambda}\delta^{bc'}\delta^{ah'})\delta^4(x-u)\delta^4(y-u)$$

$$\times\delta^4(z-u)\delta^4(\omega-u)$$

$$= -ig^2\int d^4u\delta^4(x-u)\delta^4(y-u)\delta^4(z-u)\delta^4(\omega$$

$$-u)\{f^{jab}f^{jcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$

$$+ f^{jac}f^{jbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})$$

$$+ f^{jad}f^{jcb}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}). \qquad (\text{II}.3.77)$$

在动量空间内为

$$-ig^2\{f^{jab}f^{jcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{jac}f^{jbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\lambda\tau})$$

$$+ f^{jad}f^{jcb}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})\}. \qquad (\text{II}.3.78)$$

(g) 胶子鬼顶角

$$\langle 0|T(C^a(x)\bar{C}^b(y)A^c_\mu(z))|0\rangle$$

$$= -i\frac{\delta}{\delta\bar{K}^a(x)}\frac{\delta}{\delta K^b(y)}\frac{\delta}{\delta J^{cu}(z)}z[\eta,\eta,J^a_\mu]\text{ 的第一项}$$

$$= gf^{dch}\int d^4w\,\partial^\lambda_w D^{ad}_F(x,\omega)D^{eb}_F(w,y)D^{fh}_{F\lambda\mu}(z,\omega). \tag{II.3.79}$$

乘以三个传播子的逆函数：

$$-iD^{aa'}_F(x,x')^{-1}iD^{bb'}_F(y,y')^{-1}iD^{cc'}_{F\mu\lambda}(z,z')^{-1}$$
$$\times\langle 0|T(C^{a'}(x)\bar{C}^{b'}(y')A^{c'\lambda}(z')(|0\rangle$$
$$= igf^{abc}\int d\omega\,\partial^\omega_\mu\delta^4(x-\omega)\delta^4(y-\omega)\delta^4(z-\omega). \tag{II.3.80}$$

在动量空间内，即是，把上式放在积分符号

$\int d^4xd^4yd^4ze^{-iq_1x}e^{-iq_2y}e^{-ikz}$ 内，我们得到

$$(2\pi)^4\delta(q_1+q_2+k)(gf^{abc}q_{1\mu}). \tag{II.3.81}$$

所有三个动量都进入顶角了。

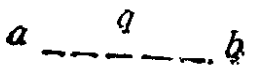
Feynman 规则总结在图 II.2 的图形中：



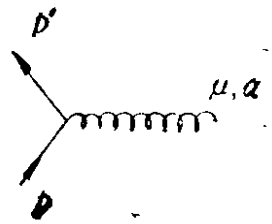
$$iS_F(p)=\frac{i}{\not p-m+i\varepsilon}$$



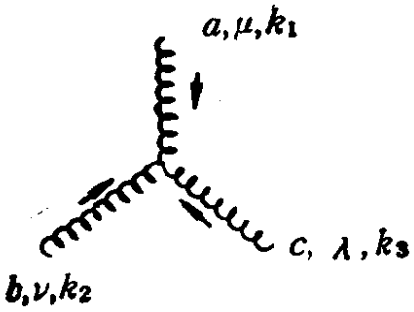
$$iD^{ab}_{F\mu\nu}(k)=\frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$



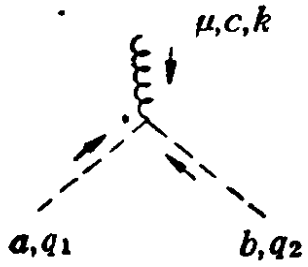
$$iD^{ab}_F(q)=\frac{-i\delta^{ab}}{q^2+i\varepsilon}$$



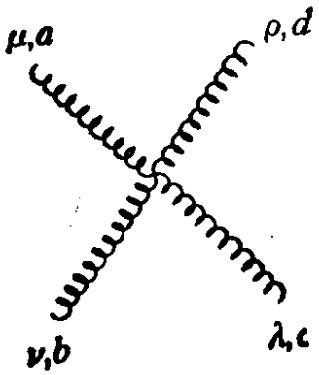
$$ig\gamma_\mu T^a$$



$$gf^{abc}\{g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2-k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3-k_1)_\nu\}$$



$$gf^{abc}q_{1\mu}$$



$$-ig^2\{f^{iab}f^{icd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f^{iac}f^{ibd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}) + f^{iad}f^{icb}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})\}$$

图 II.2

注意，在胶子鬼顶角中的动量因子并不是对称的。其动量出现在顶角函数中的鬼线用一点来标志。

II.4 Gribov 不确定性

如§§II.2 和 II.3 所讨论的，局部规范不变性理论的成

就依靠的事实是，规范固定条件能够对唯一的一组物理变数起作用. 在 Faddeev-Popov 表述中，这就是说，存在着规范约束方程的唯一解，使方程 (II.1.3) 中所定义的超曲面与规范场的每个轨迹只相交一次. 假定这个形式要完成两件事：(a) 要消去由规范变换自由度所引起的泛函积分的积分测度的简并性，(b) 要容许泛函积分包括只由规范无关的场所组成的全部规范场空间. 注意，为了实现这两件事，对规范场赋予一定的边界条件，可能是必要的.

这个概念必须比较详细地反复重申. 例如，考虑一般的线性协变规范

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = \mathbf{a}(x) \tag{II.4.1}$$

这里 $\mathbf{a}(x)$ 为未定函数. 把分别用 $\mathbf{A}_{L\mu}$ 和 $\mathbf{A}_{T\mu}$ 表示的 $\mathbf{A}_\mu$ 的纵向和横向部分写为[35]

$$\mathbf{A}_{L\mu} = \partial_\mu \frac{1}{\Box} \partial^\nu \mathbf{A}_\nu, \tag{II.4.2a}$$

及

$$\mathbf{A}_{T\mu} = \mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_{L\mu}, \tag{II.4.2b}$$

这里达朗伯算符为

$$\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu.$$

并且 $\Box^{-1}$ 为它的逆算符. $\mathbf{A}_\mu$ 的两部分在二维空间内作图，如图 II.3 所示. 规范条件方程 (II.4.1) 用水平线 $\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = \mathbf{a}$ 来表示. 彼此用规范变换，即是一条典型轨迹相联系的典型规范场用 L 来表示. 它是 $\mathbf{A}_{T\mu}$ 和 $\mathbf{A}_{L\mu}$ 空间内的一条曲线. 分别用 L_1, L_2, 和 L_3 表示的三种不同的情形，如图 II.3 所示. L_1 与规范条件曲线有唯一的交点，因此相应于图 II.1 的情形. L_2 与规范条件曲线多重相交，因此规范约束有多重解. L_3 相应于没有规范等价场集合的成员而满足约束方程 (II.4.1) 的那些规范场. L_2 和 L_3 二者从 Faddeev-Popov 量

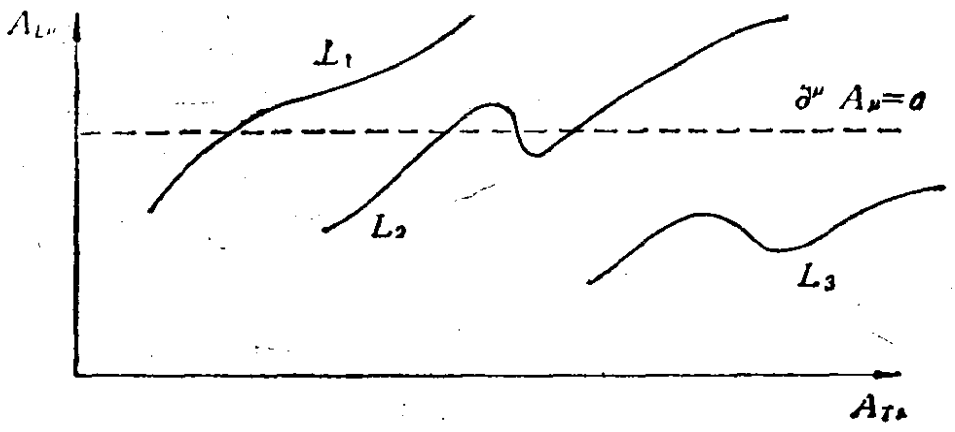


图 II.3

子化方法的观点看，是合乎需要的. 没有 L_3 类型的例子. 然而，对于大的规范场和大的耦合常数，有规范场位于类型 L_2 的曲线上. 因此，在原来 Faddeev-Popov 情形中断言：一切规范场都是位于像 L_1 的曲线上，这是不正确的. 这首先由 Gribov[36] 指出，并且被称为 Gribov 不确定性. 称规范固定条件的多重解为 Gribov 拷贝. 因为不确定性只出现在大规范场和大耦合常数的情形中，它可能在非微扰计算中展现它的效应，但是它并不修改 § II.3 中所发展的微扰论. 本节提出 Gribov 不确定性的初步讨论，证明对微扰论没有影响，并说明这个不确定性及它在 Coulomb 规范中的量子化中的影响.

Gribov 不确定性特别展现在 Coulomb 规范中. 为了对比起见，将首先考虑阿贝耳规范理论，确实证明，一旦选取 Coulomb 规范，并对规范变换函数赋予一个适当的边界条件，则没有残留的规范自由度. 然后，我们进行讨论非阿贝耳规范理论，它是完全不同的情况.

考虑阿贝耳规范理论，其中选取规范场 A_μ 满足 Coulomb 规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = 0. \tag{II.4.3}$$

当规范变换如 (II.2.3) 所给出时

$$\boldsymbol{A}(x) \to \boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) - \nabla \Lambda(x), \tag{II.4.4}$$

这里 $\Lambda(x)$ 为规范变换函数. Coulomb 规范约束意味着

$$\nabla^2 \Lambda(x) = 0. \tag{II.4.5}$$

如果赋予"边界"条件为规范变换函数 $\Lambda(x)$, 它对空间坐标 r 的一切值是很正规的函数,则 Laplace 方程 (II.4.4) 的解方程为[37]

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_0)$$

它与 r 无关. 可以看出, 规范变换函数对被变换的场没有贡献,因而规范场完全固定, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

接着讨论非阿贝耳规范理论,再取 Coulomb 规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = 0, \tag{II.4.6}$$

这里 $\boldsymbol{A}(x)$ 在方程 (II.3.6) 中定义了. 在下面的讨论中,往往考虑一个固定的时间. 在规范变换下,我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}'(x) &= U(\Omega)\boldsymbol{A}(x)U^{-1}(\Omega) - \frac{i}{g} U(\Omega)\nabla U^{-1}(\Omega) \\ &= U(\Omega)\boldsymbol{A}(x)U^{-1}(\Omega) + \frac{i}{g} \nabla U(\Omega)U^{-1}(\Omega),\end{aligned} \tag{II.4.7}$$

这里 Ω 为规范群的一个元素, $U(\Omega)$ 为如同在 (II.3.9) 中所给出的变换矩阵. 注意上式右边与 (II.3.8) 比较有符号的差异. 如在符号一节中所解释的, 这个差异来自四矢量和空间导数的符号约定. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 的 Coulomb 条件给出

$$\nabla \cdot (\nabla U U^{-1}) + ig[\boldsymbol{A}'(x) \cdot , \nabla U U^{-1}] = 0, \tag{II.4.8}$$

利用符号

$$[\boldsymbol{A}(x) \cdot , \nabla U U^{-1}] \equiv \sum_{j=1}^{3} [\boldsymbol{A}^j(x), (\partial_j U)U^{-1}]. \tag{II.4.9}$$

由 (II.4.7) 的第二行借助于变换矩阵的幺正关系 $UU^{-1}=1$ 得到了方程 (II.4.8)，因而

$$U\nabla U^{-1}+\nabla UU^{-1}=0. \qquad \text{(II.4.10)}$$

当对变换函数赋予适当的边界条件时，如果 Coulomb 条件方程 (II.4.6) 完全固定规范场，像对阿贝耳情形所做的一样，则方程 (II.4.8) 的解应该导致一个常数变换矩阵 $U(\Omega)$. 在这种情形下，规范变换是整体的，并且局部规范自由度的问题变为无关重要的.

为使符号简化，协变梯度算符 $\vec{\nabla}(\boldsymbol{A})$ 定义为

$$(\vec{\nabla}(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\phi}=\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+ig[\boldsymbol{A}\cdot,\boldsymbol{\phi}], \qquad \text{(II.4.11)}$$

这里

$$\boldsymbol{\phi}=\sum_{a=1}^{n}T^a\phi^a,$$

并且 T^a, $a=1,2,\cdots,n$ 为规范群生成元的矩阵表示. Coulomb 规范条件 (II.4.8) 可以用协变梯度写出：

$$\vec{\nabla}(\boldsymbol{A}')\cdot(\nabla UU^{-1})=0. \qquad \text{(II.4.12)}$$

该式可以理解为下面的本征值方程[38]

$$\vec{\nabla}(\boldsymbol{A}')\cdot\vec{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\phi}} \qquad \text{(II.4.13)}$$

的零波模（本征值）解，这里 $\boldsymbol{\lambda}$ 为本征值矢量. 可以看出，Coulomb 规范的唯一性是协变梯度算符的零波模本征值解的非平凡解不存在所要求的. 事实上，上面的本征值方程是与 Faddeev-Popov 表述的鬼拉氏函数相联系的. 这可以由计算 Coulomb 规范的 Faddeev-Popov 矩阵来说明. 在 Coulomb 规范中，方程 (II.3.24) 的规范固定条件被代换为

$$F[A^a_\mu]=\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(x)=0, \qquad \text{(II.4.14)}$$

并且相应的 Faddeev-Popov 矩阵方程 (II.3.25) 变为

$$\begin{aligned}M^{ab}_c(\boldsymbol{x})&=-D^{ab}_k(x)\partial^k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\&=(\delta^{ab}\nabla+gf^{abc}\boldsymbol{A}^c)\cdot\nabla\delta(x-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \qquad \text{(II.4.15)}$$

鬼拉氏函数现在为

$$\Delta_c[A_k^a] \propto \int \mathscr{D}C\mathscr{D}\bar{C}\exp\left[i\int d^4x\partial^k\bar{C}^a(x)D_k^{ab}(x)C^b(x)\right]. \tag{II.4.16}$$

另一方面，用群分量表式可以把方程（II.4.11）重写为

$$\mathrm{Tr}\{2T^a\nabla(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\varphi}\} = (\delta^{ab}\nabla + gf^{cbc}\boldsymbol{A}^c)\cdot\boldsymbol{\varphi}. \tag{II.4.17}$$

因此方程(II.4.12)的零波模存在表明，相应的Faddeev-Popov行列式为零，因而规范场泛函[参看方程（II.3.21）]为零。所以规范场函数 $\Delta_c[A_k^a]$ 不可能用方程（II.3.21）中所说明的方式来计算。下面研究方程（II.4.13）具有一个非平凡零波模解的情况。这将导致规范变换矩阵不是常数；因此 $\boldsymbol{A}' \neq \boldsymbol{A}$，用规范固定条件来唯一规定规范场失效了。

首先考虑一个无限小的变换，由方程（II.3.9）可以写出下式

$$U = 1 - iT^a\varepsilon^a(x). \tag{II.4.18}$$

(II.4.7) 给出

$$\boldsymbol{A}'^a(x) = \boldsymbol{A}^a(x) + \frac{1}{g}\boldsymbol{D}^{ab}(x)\varepsilon^b(x), \tag{II.4.19}$$

这里

$$\boldsymbol{D}^{ab}(x) = \delta^{ab}\nabla + gf^{abc}\boldsymbol{A}^c(x). \tag{II.4.20}$$

对 $\boldsymbol{A}'^a$ 和 $\boldsymbol{A}^a$ 赋予 Coulomb 规范条件，得到

$$\boldsymbol{D}^{ab}(x)\cdot\nabla\varepsilon^a(x) = 0, \tag{II.4.21}$$

它正好就是群参数 $\varepsilon^a(x)$ 最低阶的方程（II.4.12）。对于小耦合常数 g 和(或)小的场，因而

$$|gA_k^a| < 1, \tag{II.4.22}$$

$\varepsilon^a(x)$ 可以用 g 的幂来展开：

$$\varepsilon^a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n\varepsilon_n^a(x). \tag{II.4.23}$$

把方程（II.4.23）代入方程（II.4.21），我们得到

$$\nabla^2\varepsilon_0^a(x) = 0, \tag{II.4.24a}$$

$$\nabla\varepsilon_1^a(x) + f^{abc}A^c(x)\cdot\nabla\varepsilon_0^b(x) = 0, \tag{II.4.24b}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\nabla^2\varepsilon_n^a(x) + f^{abc}A^c(x)\cdot\nabla\varepsilon_{n-1}^a(x) = 0. \tag{II.4.24c}$$

赋予条件：$\varepsilon_n^a(x)$，$n = 0, 1, \cdots$，对于 r 的一切值都是很正规的。于是上面的方程组化为

$$\varepsilon_n^a = \text{常数}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{II.4.25}$$

类似于阿贝耳情形，变换矩阵为一个常数相因子，并且变换方程（II.4.7）化为一个整体的类型，因此对于这种考虑是无关重要的。这个结果意味着，在微扰论中，其中只考虑小的场和小的耦合常数的情形，因而方程（II.4.21）中所给出的条件满足，没有 Gribov 不确定性。

当 A_μ 和 g 大时，上面的微扰论证并不适合。证明方程（II.4.12）的解在 $|gA| \sim O(1)$ 情形存在，将推迟到制订 Coulomb 规范的量子化时进行，并且在这样的解存在[39]时困难就突出了。为简化起见，将限于只讨论由规范场组成的理论。此论证可以直接推广到包括物质场。按照 Faddeev-Popov 公式，在第一阶形式中，可以写出真空到真空的变换矩阵为

$$\int \prod_{\mu,a} \mathscr{D}A_\mu^a \prod_{\nu,b,x} F_{\nu k}^b \Delta_c[A_\mu^a] \int \prod_{z,x} d\Omega^a(x) \prod_{b,y} \delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^b(y)) \cdot \exp\left[i\int \mathscr{L}_A(x)d^4x\right], \tag{II.4.26}$$

这里 $\Delta_c[A_\mu^a]$ 为 Coulomb 规范的规范场泛函。在第一阶形式中，拉氏函数在方程（II.3.37）中给出。利用不同的分量可以写出

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}(F_{0j}^a)^2 + \frac{1}{4}(F_{jk}^a)^2 - \frac{1}{2}F^{ajk}(\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gf^{abc}A_j^b A_k^c) - F^{a0j}(\partial_0 A_j^a$$

$$-\partial_i A_0^a + g f^{abc} A_0^b A_i^c). \qquad \text{(II.4.27)}$$

重写出方程（II.4.27）的最后一项，得到

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}(F_{0i}^a)^2 + \frac{1}{4}(F_{ik}^a)^2 - \frac{1}{2}F^{aik}(\partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a + g f^{abc} A_i^b A_k^c) - \partial_0 A_i^a F^{a0i} - A_0^b D_i^{ab} F^{b0i} + \partial_i(A_0^a F^{a0i}). \qquad \text{(II.4.28)}$$

把方程（II.4.28）代入方程（II.2.26）中，并删去散度项 $\partial_i(A_0^a F^{a0i})$，对 A_0^a 和 F_{ik}^a 进行积分，得到

$$\int \mathscr{D}A_k^{a_1}\mathscr{D}F^{a_1 0k}\Delta_c(A_i^{a_2})\int \prod_{b_1,x} d\Omega^{b_1}(x) \prod_{b_2,y}\delta(\nabla\cdot \boldsymbol{A}^{b_2}(y)) \times \prod_{d,z}\delta(D_i^{dc}(z)F^{c0j}(z))\cdot \exp\left\{i\int\left[-\frac{1}{2}((F_{0j}^a)^2+(B_i^a)^2) - \partial_0 A_i^a(x)F^{a0j}(x)\right]d^4x\right\}, \qquad \text{(II.4.29)}$$

这里 δ 函数 $\Pi\delta(D_i^{dc}(z)F^{c0j}(z))$ 是对 A_0^a 积分的结果，并且量 B_i^a 定义为

$$B_i^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}(\partial^k A^{al} - \partial^l A^{ak} + g f^{abc} A_l^b A_k^c). \qquad \text{(II.4.30)}$$

注意，已删去了由积分引起的无关重要的相乘常数.

为了计算规范场泛函 $\Delta_c[A_i^a]$，我们将利用不同的方法，正如在 Faddeev-Popov 方法中所用的方法一样，避免 $\Delta_c^{-1}[A_i^a]$ 的计算. 一个矢量的纵向部分有一个为零的旋度，因此等于一个标量函数的散度. 所以，为了分离 F^{a0j} 的纵向部分，方程 (II.4.29) 乘以下面的量

$$\int \prod_{a,x} df^a(x)\delta(\nabla^2 f^a(x) - \partial_j F^{a0j}) \sim (\det(\nabla^2)). \qquad \text{(II.4.31)}$$

注意，$\partial_i f^a(x)$ 是 F^{a0j} 的纵向部分. 因为方程 (II.4.31) 是一个常数，与变数无关，真空到真空变换矩阵之方程 (II.4.29) 并

不改变。现在，在方程 (II.4.29) 中作一个变数改变：

$$\tilde{F}^a_{0i} \to F^a_{0i} - \partial_i f^a. \tag{II.4.32}$$

新变数正好就是原来变数的横向部分，所以

$$\int \prod_a df^a \prod_{a',i} A^{a'}_i \prod_{a'',j'} \tilde{F}^{a''0j'} \Delta_c[A^{a'''}_{i'''}] \int \prod_{b,x} d\Omega^b(x)$$

$$\times \Pi\delta(\nabla \cdot \boldsymbol{A}^{b'}(x)) \cdot \Pi\delta(\partial_k \tilde{F}^{b'0k}(y)) \Pi\delta(+\nabla^2 f^{b''}(y)$$

$$- g f^{b''cd} A^d_{k'}(y)[\tilde{F}^{c0k'}(y) - \partial^{k'} f^c(y)] \cdot \exp\left\{ i \int d^4x \right.$$

$$\times \left[-\frac{1}{2}((B^{d'}_{k''})^2 + (\tilde{F}^{d'0k''})^2) + (\partial_{k''} f^{d'})^2 \right]$$

$$\left. - \partial_0 A^{d'}_{k''} \tilde{F}^{d'0k''} \right\}. \tag{II.4.33}$$

在得到上式中，借助分部积分，并利用 δ 函数，删去项 $\tilde{F}^{a0j}\partial_i f^a$ 及 $\partial_0 A^a_i \partial^i f^a$.

由于方程 (II.4.33) 中的第三个 δ 函数，f^a 必须满足非齐次微分方程

$$(\delta^{ab}\nabla^2 + g f^{abc} \boldsymbol{A}^c \cdot \nabla) f^b(x) = - g f^{abc} A^c_i(x) F^{b0i}(x). \tag{II.4.34}$$

这个方程可以利用 Green 函数 $G^{ab}(x, y; A^c_i)$ 来求解，该 Green 函数满足具有点源的类似的微分方程

$$[\delta^{ab}\nabla^2_x + g f^{acd} \boldsymbol{A}^d(x) \cdot \nabla] G^{cb}(x, y; A^c_k)$$
$$= - \delta^{ab}\delta(x - y). \tag{II.3.35}$$

于是方程 (II.4.34) 的解可以写为

$$\tilde{f}^a(x) = f^a_0(x) + g \int d^4y G^{aa'}(x, y; A^d_k) f^{a'bc} F^{b0i}(y) A^c_i(y), \tag{II.4.36}$$

这里 f^a_0 为下面的齐次微分方程的一个解：

$$(\delta^{ab}\nabla^2 + g f^{abc} \boldsymbol{A}^c \cdot \nabla) f^b_0(x) = 0. \tag{II.4.37}$$

注意，没有适当的边界条件，齐次微分方程的归一化是任意

的. 因此 f_0^a 的存在使 $\hat{f}^a$ 不确定，除非 f_0^a 可以由一个边界条件来固定. 我们可以用 $\hat{f}^a$ 来代替出现在方程 (II.4.33) 指数中的 f^a. 在这个代换以后，作另外的变数改变：

$$f^a \to f^a + \hat{f}^a,$$

它只影响 (II.4.33) 的第三个 δ 函数，

$$\int \prod_{a,x} df^a(x) \prod_{i,y} \delta(\nabla^2 f^b(y) - g f^{bcd} A_i^d(y) \partial^i f^c(y) + g f^{bcd} A_i^d(y) F^{c0i}(y)) \to \int \prod_{a,x} df^a(x) \Pi \delta(\nabla^2 f^b(y) - g^{bcd} A_i^d(y) \partial^i f^c(y)). \tag{II.4.38}$$

这在 Coulomb 规范中恒等于

$$\int \prod_{a,x} d\Omega^a(x) \delta(F_c[A_k^q]). \tag{II.4.39}$$

因此，方程 (II.4.38) 乘以 $\Delta_c[A_k^q]$ 后正好为一. 真空到真空变换的最后形式为

$$\int \Pi \mathscr{D} A_i^a \Pi \tilde{F}^{a'0i} \Pi \delta(\nabla \cdot \boldsymbol{A}^b) \Pi(\partial_k F^{b'0k}) \cdot \exp\left\{ i \int d^4x \times \left[-\frac{1}{2}((B_i^a)^2 + (\tilde{F}^{a0i})^2 - \partial_0 A_i^a \tilde{F}^{a0i} + \frac{1}{2}(\nabla \hat{f}^a)^2 \right] \right\}. \tag{II.4.40}$$

为了得到 $\hat{f}^a$，完成论证，知道 Green 函数是必要的. $G^{ab}(x, y; A_i^c)$ 的方程 (II.4.35) 可以微扰求解. 令

$$G^{ab}(x, y; A_i^c) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n G_n^{ab}(x, y; A_i^c), \tag{II.4.41}$$

在代入方程 (II.4.35) 时，得到下面的微分方程组：

$$\nabla^2 G_0^{ab} = -\delta^{ab} \delta(x - y), \tag{II.4.42a}$$

.....

$$\nabla^2 G_n^{a'a} + g f^{ab'c} A^c \cdot \nabla G_{n-1}^{b'b} = 0, \qquad \text{(II.4.42b)}$$

$$\cdots\cdots$$

解为

$$G_0^{ab}(x,\ y;\ A_i^c) = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta^{ab}}{|x-y|},$$

$$G_1^{ab}(x,\ y;\ A_i^c) = \frac{g}{(4\pi)^2}\int d^3z\ \frac{1}{|x-z|} f^{abc} A^c \cdot \nabla \frac{1}{|z-y|},$$

$$G_2^{ab}(x,\ y;\ A_i^c) = \frac{g^2}{(4\pi)^3}\int d^3z d^3z'\ \frac{1}{|x-z|} f^{ab'c'} A_k^{c'}(z) \cdot \nabla_z \frac{1}{|z-z'|} \cdot f^{b'bc} A^c(z') \cdot \nabla_{z'} \frac{1}{|z'-y|},$$

$$\cdots\cdots \qquad \text{(II.4.43)}$$

于是

$$G^{ab}(x,\ y;\ A_i^c) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{g}{(4\pi)^2}\int d^3z \times \frac{1}{|x-z|} f^{abc} A^c(z) \cdot \nabla \frac{1}{|z-y|}. \qquad \text{(II.4.44)}$$

现在可以转到(II.4.40).因为齐次项的存在使 $\vec{f}^a$ 不确定，从而上面的量子化方法不会给出一个唯一的哈密顿函数，除非 f_0^a 可以由赋予适当的边界条件来消去. 如所证明的，齐次微分方程 (II.4.37) 正好就是方程 (II.4.21)，它对于小耦合常数和小的规范场具有一个平凡的常数解. 常数齐次项 f_0^a 对于 $\nabla\vec{f}^a$ 将无贡献，因此给出一个唯一的哈密顿函数，并且量子化是适合的.

情形

$$|gA_k^a| \sim O(1) \tag{II.4.45}$$

从考察方程 (II.4.34) 着手，方程 (II.4.34) 可以由下面形式的作用量积分得到：

$$I_1 = \int d^3x \{(\nabla f_0^a(x))^2 - f^{abc}A^c(x)(\nabla f_0^b(x))f_0^a(x)\}. \tag{II.4.46}$$

研究是在经典水平实现的. 首先考虑真空态，其中规范场由规范变换与零场相联系. 这些场被认为是纯规范场，这些纯规范场的场张量 $F_{\mu\nu}^i = 0$. 其次，考虑其中导致不为零的场张量情况.

对于纯规范场，我们有

$$A_{(\nu)\mu} = \frac{i}{g} U\partial_\mu U^{-1}, \tag{II.4.47}$$

它的张量场为零，因此作用量积分为零. 赋予 Coulomb 规范条件

$$\nabla \cdot (U\nabla U^{-1}) = 0. \tag{II.4.48}$$

由显然的结构可以证明，该方程有非平凡的解. 然而，解会导致发散的哈密顿函数，因此是不容许的. 一般，由赋予平方可积性条件可以排除不为零的纯规范场. 为简化起见，解的显然结构限制为 $SU(2)$ 群；平方可积性条件一般适合.

在 $SU(2)$ 中写出

$$U = \exp[-i\sigma \cdot \hat{r}\theta(r)] = \cos\theta(r) - i\sigma \cdot \hat{r}\sin\theta(r), \tag{II.4.49}$$

这里 $\hat{r}$ 为向径方向的单位矢量. 于是

$$\nabla U^{-1} = [\sin\theta(r) + i\sigma \cdot \hat{r}\cos\theta(r)]\nabla\theta(r) + i\left[\frac{\sigma}{r} - \frac{(\sigma \cdot r)r}{r^3}\right]\sin\theta(r),$$

$$U\nabla U^{-1} = i\sigma \cdot \hat{r}\nabla\theta(r) + \frac{i}{2r}[\sigma \cdot (\sigma \cdot \hat{r})\hat{r}]\sin 2\theta(r)$$

$$+\frac{1}{r}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r})\boldsymbol{\sigma}-\hat{r}]\sin^2\theta(r),$$

$$\nabla(U\nabla U^{-1})=i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}\left[\nabla^2\theta(r)-\frac{1}{r^2}\sin 2\theta(r)\right]. \quad (\text{II}.4.50)$$

由方程（II.4.47），这给出规范场为

$$A_{(r)}=\frac{-1}{g}\left\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r})\nabla\theta(r)+\frac{1}{2r}[\boldsymbol{\sigma}-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r})\cdot\hat{r}]\right.$$
$$\left.\times\sin 2\theta(r)+\frac{\boldsymbol{\sigma}\times\hat{r}}{r}\sin^2\theta(r)\right\} \quad (\text{II}.4.51)$$

或[39]

$$A^a_{(r)j}=\frac{2}{g}\frac{1}{r}\left\{\hat{r}^a\hat{r}^j\theta'(r)+\frac{1}{2}[\delta_{ij}-\hat{r}^a\hat{r}^j]\sin 2\theta(r)\right.$$
$$\left.+\sum_l\varepsilon^{jal}\hat{r}^l\sin^2\theta(r)\right\}. \quad (\text{II}.4.52)$$

在得到上面两个表达式过程中利用了恒等式：

$$\sigma^j\sigma^k=\delta^{jk}+i\varepsilon^{jkl}\sigma^l$$

Coulomb 规范条件方程（II.4.48）化为 θ 的非线性微分方程：

$$\frac{d^2\theta(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta(r)}{dr}-\frac{1}{r^2}\sin 2\theta(r)=0, \quad (\text{II}.4.53)$$

这是 t 的齐次方程，并且可以用对数的导数表示，得到一个力学体系的模拟量。令

$$t=\ln r,$$

我们可以把方程（II.4.53）重写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}-\sin 2\theta=0. \quad (\text{II}.4.54)$$

该方程描述在一个位势

$$V(\theta)=-2\sin^2\theta \quad (\text{II}.4.55)$$

影响下具有一个单位摩擦力而进行运动的一个摆。摆的位置用“角”变数 θ 来描述。摆的位置对位势作图，如图 II.4 的图

形所示。可以求出方程（II.4.54）的非奇点解。对于 $r \to 0$，即 $t \to -\infty$，$\theta(r)$ 展开为 r 的幂

$$\theta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{nt}. \quad \text{(II.4.56)}$$

为使 r 逐阶满足微分方程，要求

$$\lim 2\theta \xrightarrow[r \to 0]{} \lim(2a_0) = 0, \quad \text{(II.4.57)}$$

它得到 a_0 的解及初始条件

$$\theta(r) \xrightarrow[r \to 0]{} a_0 = \frac{m\pi}{2} \quad \text{(II.4.58)}$$

这里 m 为整数。m 的偶数值相应于粒子起始于势的峰值的情形；m 的奇数值相应于粒子起始于势的谷底。把方程（II.4.56）代入方

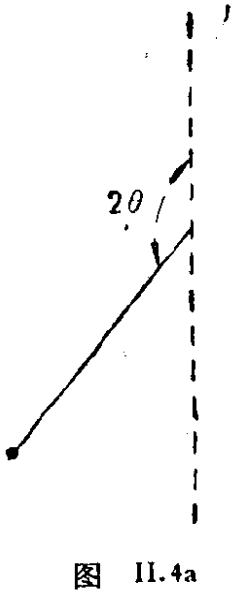


图 II.4a

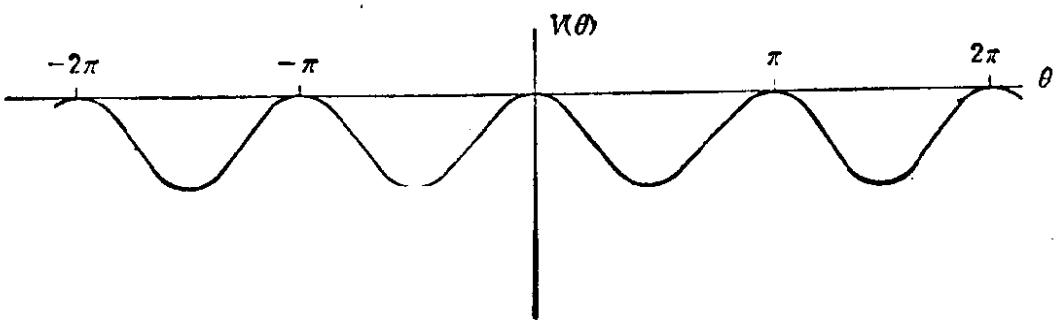


图 II.4b

程（II.4.54），并利用方程（II.4.58），得到前几个系数的条件为：

$$[(-1)^m - 1]a_1 = 0,$$

$$[3(-1)^m - 1]a_2 = 0,$$

$$[6(-1)^m - 1]a_3 + \frac{2}{3}a_1^3 = 0,$$

$$[10(-1)^m - 1]a_4 + 2a_1^2 a_2 = 0,$$

$$[15(-1)^m - 1]a_5 + 2[a_1a_2^2 + a_1^3a_3] - \frac{2}{15}a_1^5 = 0. \tag{II.4.59}$$

奇数和偶数 m 可以分别考虑。

对于m的奇数值 在无穷远的过去 $(t \to -\infty)$，摆位于势的平衡位置，即是位于势的谷底。方程 (II.4.59) 的解为

$$a_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

于是 $\theta(r)$ 为常数

$$\theta(r) = \frac{1}{2}(2m + 1)\pi. \tag{II.4.60}$$

由方程 (II.4.51)，可以看到，这给出一个规范场

$$\boldsymbol{A}_{(r)} = \frac{i}{g}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{r}]\frac{1}{r^2}, \tag{II.4.61}$$

它在 $r = 0$ 处为奇点的，因此，是不能接受的。

对于 m 的偶数值 这相应于摆起始位于不稳定位置的情形，即是

$$a_n = n_i\pi, \quad n = \text{整数}. \tag{II.4.62}$$

于是，由方程 (II.4.59)

$$a_2 = a_4 = \cdots = 0. \tag{II.4.63}$$

其它的系数 $a_1, a_3,$ 等由初速度等确定。从一个有限的速度出发，摆对于摩擦力将损失能量，因为摆是在位势内运动，并且最后将停止在谷底[参看图 II.4b]。所以我们有

$$\theta \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}(2n_f + 1)\pi, \tag{II.4.64}$$

这里 n_f 为另外的整数。摆在 $t \to \infty$ 时趋近于它的最终位置的速率，可以对 $t \gg 1$ 加以研究，写出

$$\theta \to \frac{1}{2}(2n_f + 1)\pi + \Theta(t), \tag{II.4.65}$$

这里

$$\Theta(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0. \tag{II.4.66}$$

由微分方程 (II.4.53)，我们对于 $t\to\infty$ 有

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{d\Theta}{dt}+2\Theta=0. \tag{II.4.67}$$

定义

$$\Theta=\exp(-t/2)\tilde{\Theta}. \tag{II.4.68}$$

方程 (II.4.67) 变为

$$\frac{d^2\tilde{\Theta}}{dt^2}+\frac{7}{4}\tilde{\Theta}=0, \tag{II.4.69}$$

我们有

$$\tilde{\Theta}=b\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t+\phi\right), \tag{II.4.70}$$

这里 b 为常数，ϕ 为任意的位相角，因而最后

$$\theta\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{2}{\Pi}(2n_f+1)+\frac{b}{\sqrt{r}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln r+\varphi\right). \tag{II.4.71}$$

所得到的规范场到处都是有限的，特别是

$$A_{(v)}(r)\to\begin{cases}-\sigma, & r\to 0,\\ -\dfrac{1}{g}\dfrac{\sigma\times r}{r}, & r\to\infty.\end{cases} \tag{II.4.72}$$

由两个论据可以排除真空的Gribov 拷贝，一个是条件，另一个是直接的物理论证：(a)由赋予 A 的一个条件排除了 Gribov 拷贝。这个结果是十分普遍的，与上面所考虑的 $SU(2)$ 无关。(b) 上面所考虑的 $SU(2)$ 例子得到一个发散的哈密顿函数，它出现在真空到真空变换矩阵 (II.4.4a) 中。将依次考虑二论证之一。

应该记住，在电动力学中单是横向性条件还不能固定 Coulomb 规范的场。此外，也需要一个“边界”使 $\Lambda(x)$ 在各

处都是很正规的. 对于目前纯规范场的情形，可以采取下面的边界条件

$$\lim_{r\to\infty} r A_{(r)}(r) \to 0. \qquad \text{(II.4.73)}$$

这消去具有方程 (II.4.72) 中所给出的渐近行为的规范场. 有各种理由排除当 $r \to \infty$ 时趋近于 r^{-1} 的场. 阐述这些理由需要 Yang-Mills 场的瞬子解及这个解的拓扑概念. 然而，这些解超出本书范围以外. 鼓励有兴趣的读者，例如，参阅文献[41]. 比所举例子更普遍的渐近条件方程 (II.4.73) 事实上要排除一切球对称的 Coulomb 真空[41,42,43] 是充分的. 可以利用更强的条件，要求

$$r^{\frac{3}{2}} A(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad \text{(II.4.74)}$$

来排除具有紧致规范群[42,43]的一切非平凡的 Coulomb 真空.

现在可以证明由上面第二个条件 (II.4.74) 所得到的论断，首先注意到，由于下面的作用量的 Euler-Lagrange 方程

$$I_u = \int d^3x \mathrm{Tr}\{\nabla U \cdot \nabla U^{-1}\} \qquad \text{(II.4.75a)}$$

遵从幺正条件

$$UU^{-1} = 1, \qquad \text{(II.4.75b)}$$

可以得到纯规范场方程 (II.4.48) 的 Coulomb 条件. 令 λ 为 Lagrange 乘子，组合方程 (II.4.75a) 及 (II.4.75b)，写出

$$I_u = \int d^3x \mathrm{Tr}\{\nabla U \cdot \nabla U^{-1} + \lambda(UU^{-1} - 1)\}.$$

运动方程为

$$\nabla^2 U = \lambda U \qquad \text{(II.4.76a)}$$

及

$$\nabla^2 U^+ = \lambda U^+. \qquad \text{(II.4.76b)}$$

消去 λ 以后，得到

$$U\nabla^2U^+ - (\nabla^2U)U^+ = \nabla\cdot(U\nabla U^+ - \nabla UU^+) = 0. \tag{II.4.77}$$

把这个表示式和方程（II.4.75a）的幺正条件，或等价地和方程（II.4.10）组合起来，就得到了方程（II.4.48）

$$\nabla\cdot(U\nabla U^+) = 0.$$

由 $\boldsymbol{A}(r)$ 的定义，方程（II.4.47），作用量积分通过规范场可以重写为

$$I_u = g^2\int d^3x\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_{(\nu)})^2. \tag{II.4.78}$$

$\boldsymbol{A}(r)$ 的渐近行为，方程（II.4.72），表明规范群元素有有限的作用量

$$I_u < \infty. \tag{II.4.79}$$

像在方程（II.4.72）中所给出的同样的解会给出一个发散的作用量 $I_u\to\infty$. 这个结果事实上是比较普遍的，但是限于上面所考虑的 $SU(2)$ 例子. 作用量 I_u 的有限性意味着一个 $SU(n)$ 群的变换矩阵 $U(r)$ 为常数，因此相应的规范场为零. 这个结论可以直接由 Derrick 定理[44]得到. 该定理的一个简单方案直接应用于现在的情况，叙述如下：给出一个 $SU(n)\times SU(n)$ 理论的手征拉氏函数

$$\mathscr{L} = \mathrm{Tr}\{\nabla U\cdot\nabla U^+\},\quad UU^+ = 1, \tag{II.4.80}$$

这里 U 是一个特殊的幺正 n 维矩阵，则该拉氏函数的作用量 I_u 为方程（II.4.75a），并且运动方程为方程（II.4.77）. 给出一个有限作用量的这样一个理论的运动方程的唯一解为

$$U(r) = \text{常数}. \tag{II.4.81}$$

此定理可以用一个标度自变数来证明. 定义

$$I_u(\eta) = \int d^3x\,\mathrm{Tr}\{\nabla U(\eta r)\cdot\nabla U^+(\eta r)\}$$
$$= I_u/\eta, \tag{II.4.82}$$

这里

$$I_u \equiv I_u(\eta)|_{\eta=1}.$$

运动方程的解使作用量积分有极值，即是 $\delta I_u = 0$。对于 η 接近于 1，写出

$$U(\eta r) = U(r) + (\eta - 1)\tilde{U}(r) \qquad \text{(II.4.83)}$$

这里

$$\tilde{U}(r) = \frac{d}{d\eta} U(\eta r)|_{\eta=1}. \qquad \text{(II.4.84)}$$

可以看出，$U(r)$ 的泛函形式的变分可能受 η 变化的影响。因此对于 U 为运动方程的一个解。我们有

$$\frac{d}{d\lambda} I_u(\lambda)|_{\lambda=1} = -I_u = 0. \qquad \text{(II.4.85)}$$

这只对于 ∇U 为零是正确的，因此 U 为一个常数。这完成了证明。

所以可以结论到，Coulomb 规范条件，连同边界条件方程 (II.4.79) 唯一确定真空，并且设有真空 $A = 0$ 的 Gribov 拷贝。这个结论可以进一步由第二个论证得到加强。下面证明，在 $SU(2)$，即在方程 (II.4.49) 中容许的球面解将得到一个 f_0^a，它给出一个发散的哈密顿函数[39]。这在经典处理中显然是不能接受的。

方程 (II.4.37) 进一步的研究包括下面形式解：

$$f_0^a(r) \equiv \frac{r^a}{r} F(r). \qquad \text{(II.4.86)}$$

假定规范场是一个 Coulomb 真空，它取方程 (II.4.52) 所给出的形式。于是

$$g f^{abc} A^c \cdot \nabla f_0^b = -\frac{4}{r^3} r^a F(r). \qquad \text{(II.4.87)}$$

现在方程 (II.4.37) 变为

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF(r)}{dr} - \frac{2(1+2\sin^2\theta)}{r^2} F(r) = 0, \qquad \text{(II.4.88a)}$$

它可以重写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF(r)}{dr}\right)-\frac{2(1+2\sin^2\theta)}{r^2}F(r)=0. \quad \text{(II.4.88b)}$$

上式乘以 $F(r)$，并对它从 0 到 R 的区域积分：

$$\int_0^R dr\left\{F(r)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF(r)}{dr}\right)-2(1+2\sin^2\theta(r))\right.$$

$$\left.\times(F(r))^2\right\}=0 \quad \text{(II.4.89)}$$

第一项分部积分，我们对于 $R>0$ 的一切值得到

$$\frac{R^2}{2}\frac{d}{dr}(F(r))^2|_{r=R}=\int_0^R dr\left\{r^2\left(\frac{dF(r)}{dr}\right)^2+2(1\right.$$

$$\left.+2\sin^2\theta)(F(r))^2\right\}\geqslant 0, \quad \text{(II.4.90)}$$

这里已假定 $F(r)$ 在 $r=0$ 处是有限的. 等式只对 $F(r)=0$ 成立. 接着检验 $F(r)$ 的渐近行为，写出

$$F(r)\to F_0+F_1r^{-1}+O(r^{-2}). \quad \text{(II.4.91)}$$

由 (II.4.90) 显然

$$F_0\neq 0.$$

否则，方程 (II.4.90) 的右边对于 $R\to\infty$ 为零，迫使 $F(r)$ 恒为零. 现在 f_0^a 的渐近行为可以写为

$$f_0^a\xrightarrow[r\to\infty]{}F_0\frac{r^a}{r}. \quad \text{(II.4.92)}$$

于是

$$\int d^3x(\nabla f_0^a)^2\to\infty.$$

这使在方程 (II.4.10) 中出现的哈密顿函数为发散的. 所以，这种类型的真空的表观 Gribov 拷贝是不能接受的.

因为通过适当的“边界”条件唯一固定 Coulomb 规范真空问题详细处理了以后，就可以考虑非真空的情形. 这将由证

明存在 f_0 的容许解来加以选择，如同对某一类的规范 $\boldsymbol{A}$ 由齐次方程（II.4.37）所定义的一样。因为齐次项的归一化并不由它的微分方程来定义，这导致方程（II.4.36）的函数 $\tilde{f}^a$ 的多重解。从而，在方程（II.4.40）中所定义的 Coulomb 哈密顿函数不是唯一的。为了说明以上所述，取

$$A^{aj} = \frac{1}{g}\,\varepsilon_{jab}\,\frac{r^b}{r^2}\,g(r), \qquad \text{(II.4.93)}$$

这里 $g(r)$ 暂且是任意的函数。这个规范场自动地满足 Coulomb 规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}^a = 0.$$

可以求出方程（II.4.86）所给出的球对称形式 f_0^a 的一个解。现在微分方程取形式

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dF(r)}{dr} - \frac{2}{r^2}\,(1 + g(r))F(r) = 0. \qquad \text{(II.4.94)}$$

由于适当选择 $g(r)$，可以使 $f_0^a(r)$ 满足一切必要的条件，特别是它对方程（II.4.40）的哈密顿函数贡献一个有限部分。因为齐次方程（II.4.94）并不确定它的解的归一化，故它在方程（II.4.36）的 $\tilde{f}^a$ 中得到无限多重的不确定性，并且在方程（II.4.40）的真空到真空变换矩阵之中得到类似的不确定性。

这个颇感兴趣的现象的冗长讨论可以简短总结为：（a）由于选择规范可以唯一作成真空场的事实，并由于在小规范场和小耦合常数情形中没有 Gribov 拷贝出现的事实，Gribov 不确定性并不影响通常的微扰论[46]。（b）引起 Gribov 拷贝的规范场，如例子所表明，是与耦合常数成反比；因此 Gribov 不确定性将出现在强耦合的理论中。（c）首先认识到，可能改进大规范场行为的不确定性，将会导致夸克禁闭的证明[36,37]。然而，这个期望并未实现[48]。

目前，Gribov 不确定性在非阿贝耳规范场论中所起的确切作用并不清楚. 然而，有广泛的文献揭示它的各个方面. 在文献[49]中，利用简单的例子来证明，如果遵循定义泛函积分测度的正确方法，则具有 Gribov 拷贝的规范都是适合的规范. 另外的文献在文献 [50] 中给出.

II.5 自发对称破缺，Higgs 机制和带质量的矢量玻色子理论

在 II.3 中所讨论的各类非阿贝耳规范场论至少在微扰论中是很好定义的，(为了避免红外困难，某些振幅离开质量壳层可能是确定的). 这些理论具有下面的要素，便可以重正化：(a) 无质量的矢量玻色子的传播子有软渐近行为. 这些传播子对于大的动量随动量平方的倒数而减小. [参看方程 (II.3.68)]. (b) 以相互作用项的维数计数为依据，相互作用是可重正化的类型. 在第 VI 章将看到可重正性判断的讨论. (c) 理论的交织群结构保证理论的幺正性. 对于由一组带质量的玻色子形成的总体对称表示的理论，上述某些性质损失了，一般，理论不是可重正化的. 然而，为建立合理的弱相互作用理论起见，矢量玻色子的可重正化场论还是很合乎需要的.

已确实表述了非平凡的，可重正化的带质量的矢量玻色子理论，并且已成功地建立了与电磁相互作用统一的弱相互作用理论[19-21]. 电弱统一理论将是第 III 章的主题. 表述可重正化带质量的矢量玻色子理论的方法是以自发对称破缺和 Higgs 机制为根据的.

自发对称破缺概念首先是由 Goldstone[11], Nambu 及 Jona-Lasinio[12] 早在 1960 年引入的. 对称破缺通常的方式

是把一个非对称项引入拉氏函数中，使动力学本身破坏对称性，而同时所建立的物理态的真空并不受影响。例子是弱相互作用中的宇称破坏，在质子中子体系中由于电磁场存在，同位旋不变性的破坏，等等。对称自发破缺的起源是不同的。拉氏函数在对称变换下是不变的，但真空态则不是不变的。换言之，在自发破缺方案中，动力学与对称性有关系，但是对称性的表现形式在真空态中损失了。

本节详细叙述自发对称破缺机制。首先利用显然的拉氏函数的经典论证来讨论 Goldstone 现象。利用量子力学的框架来讨论泛函积分方法中的现象，再利用 Källen-Lehman 表示[51,52]来讨论 S 矩阵方法。

在经典体系和它的量子力学体系之间的联系作成如下的对应：在经典力学体系中基态的场值对应于量子力学体系的这些场的真空期待值、有关自发对称破缺的经典结果事实上是一个系统的量子展开式[53]的第一项。这种对应进一步的讨论如下：

考虑两个无自旋的标量或膺标量场的体系

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \qquad \phi^+ = \phi_1 - i\phi_2.$$

场 ϕ_1 和 ϕ_2 是厄密的，体系的拉氏函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^+ - \frac{1}{2}\mu^2\phi\phi^+ - \frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2, \end{aligned} \tag{II.5.1}$$

这里 $\lambda > 0$。为使符号简化，我们表示

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix}.$$

· 拉氏函数在具有一个常数角 θ 的整体转动下

$$\Phi \to \Phi' = R(\theta)\Phi \tag{II.5.2}$$

是不变量的，这里

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

哈密顿密度写为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}[(\dot{\phi}_1)^2 + (\dot{\phi}_2)^2] + V(\phi) \tag{II.5.3}$$

这里势 $V(\phi)$ 为

$$V(\phi) = \frac{1}{2}[(\nabla\phi_1)^2 + (\nabla\phi_2)^2] + \frac{1}{2}\mu^2[\phi_1^2 + \phi_2^2]$$

$$+ \frac{\lambda}{4}[\phi_1^2 + \phi_2^2]^2. \tag{II.5.4}$$

对于 $\lambda > 0$ 的要求是使 $\mathscr{H}$ 有下限. 体系将作经典处理，并且将计算基态能量，它是量子力学方案中的真空态. 在经典情形中 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 正好是通常的函数.

因为真空态是平动不变量，场的真空期待值是常数. 即是说，当体系在它的基态时，场 ϕ_1 和 ϕ_2 为常数. 所以只研究稳定势，是必要的.

$$V_s(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \tag{II.5.5}$$

必须求出 V_s 的局部极值:

$$\frac{\partial V_s}{\partial \phi_1} = [\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)]\phi_1 \tag{II.5.6a}$$

及

$$\frac{\partial V_s}{\partial \phi_2} = [\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)]\phi_2, \tag{II.5.6b}$$

μ^2 被认为是实参数. 有两种情况要考虑: $\mu^2 > 0$ 及 $\mu^2 < 0$.

对于 $\mu^2 > 0$ 我们有平凡解

$$\phi_1 = \phi_2 = 0. \tag{II.5.7}$$

于是基态能量为

$$V_s = \phi.$$

这是一个通常的体系，并且 μ^2 为量子的裸质量平方.

对于 $\mu^2 < 0$ 这相当于一个 Goldstone 拉氏函数，它意味着"质量"项比之于通常的拉氏函数有相反的符号. 对于方程(II.5.6) 有两个解:

$$|\phi| = [\phi_1^2 + \phi_2^2]^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0, & v_s = 0 \\ v_0 = \left(-\dfrac{\mu^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, & v_s = -\dfrac{\mu^4}{4\lambda}. \end{cases} \tag{II.5.8}$$

引起局部极值 $V_s = 0$ 的解 $|\phi| = 0$ 并不相应于基态. 方程(II.5.8) 的非平凡解 $|\phi| = v_0$ 给出极小值

$$V_s = -\frac{\mu^4}{4\lambda}$$

的无限集，它们是简并的基态. 在量子力学语言中基态用真空期待值来表示:

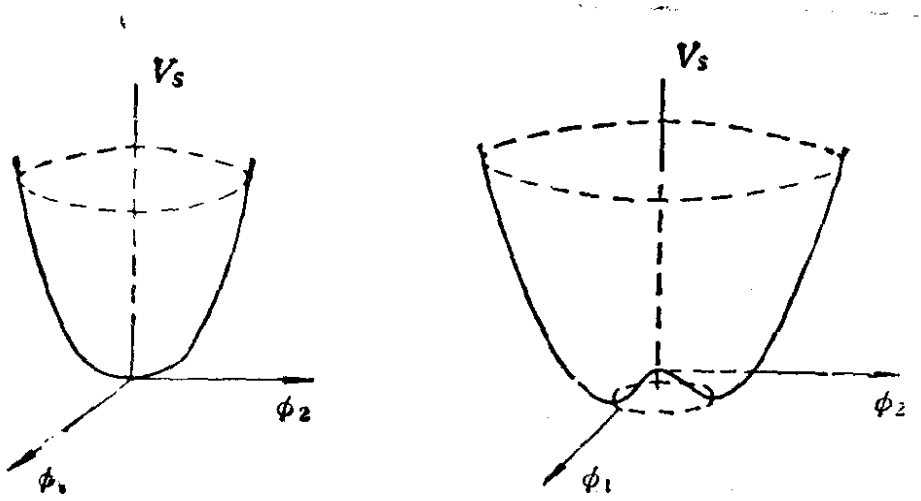
$$\langle\phi_1\rangle_0 = v_0\cos\theta, \quad \langle\phi_2\rangle = v_0\sin\theta, \tag{II.5.9}$$

这里 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 为任意角. 两种情形，$\mu^2 > 0$ 和 $\mu^2 < 0$ 的稳定势为图 II.5 的图形.

因为通常的情形 $\mu^2 > 0$ 在这里是无关重要的，讨论限于情况 $\mu^2 < 0$. 为了建立物理的 Hilbert 空间，基态必须由方程 (II.5.9) 中所给出的无限简并基态来选取.

$$\langle\phi_1\rangle_0 = v_0, \quad \langle\phi_2\rangle_0 = 0. \tag{II.5.10}$$

因为场之一发展为一个非零的真空期待值，真空态显然在(II.5.2) 中所定义的转动下不是不变的，然而拉氏函数(II.5.1) 在转动是不变量. 这就是上面所定义的自发对称破缺现象. 现在写出



(a) $\mu^2>0$　　(b) $\mu^2<0$

图 II.5

$$\phi_1(x) = \phi_1'(x) + v_0, \quad \phi_2(x) = \phi_2'(x) \tag{II.5.11}$$

使

$$\langle\phi_1'(x)\rangle_0 = 0, \quad \langle\phi_2'(x)\rangle_0 = 0. \tag{II.5.12}$$

拉氏函数通过 ϕ_1' 和 ϕ_2' 可以重写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2')^2 - \frac{1}{2}(-2\mu_1^2)\phi_1'^2$$

$$- \lambda v_0\phi_1'(\phi_1'^2 + \phi_2'^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2. \tag{II.5.13}$$

这里常数项 $-\frac{\lambda}{4}v_0^2$ 被删去了. 现在 $\mathscr{L}$ 包括两个场，它们是完全不同的，一个质量平方为 $-2\mu^2$ 的带质量的场 $\eta(x)$ 和一个无质量的场 $\xi(x)$. (II.5.13) 为通常场论的拉氏函数. 无质量的 $\xi(x)$ 场叫做 Goldstone 玻色子场[33]. 通过位移场表示的拉氏函数，如方程 (II.5.13) 所给出的，失去显然的转动对称性，这个例子是 Goldstone 定理的特殊情形.

Goldstone 定理: 在具有自发对称破缺的理论中存在着

无质量的玻色子.

在上面的例子中,场是无自旋的,这只是必要的. 没有对宇称的限制. 如果Φ为标量场,则宇称是守恒的. 如果场是赝标量的,则宇称自发破缺. 如果假定Φ在宇称变换下为赝标量的,则

$$\Phi(x) \to \tilde{\Phi}(x') = -\Phi(x^0, -\boldsymbol{r}). \qquad (\text{II}.5.14)$$

原来的拉氏函数的作用量

$$\int d^4x \mathscr{L}(x)$$

在变换 (II.5.14) 下为不变量,这里 $\mathscr{L}$ 由方程 (II.5.1) 中给出;然而位移的拉氏函数 (II.5.13) 不是不变的.

上面对于双态场的情形所给出的论证可以推广到更复杂的体系. 接着将考虑在某个内对称空间中在转动下为不变量的n个厄密场的体系. 在自发对称破缺后,求出有关 Goldstone 玻色子数目的一般规则,将证明该体系的 Goldstone 定理.

n个无自旋的厄密场用 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 来表示. 复数场可以分解为厄密的实部和虚部. 拉氏函数写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi^+)(\partial_\mu \Phi) - V_s(\Phi), \qquad (\text{II}.5.15)$$

这里 V_s 为稳定势,Φ 为由 n 个场组成的行矩阵:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}. \qquad (\text{II}.5.16)$$

假定 $\mathscr{L}$ 在秩N的群G下为不变量的,群G有生成元

$$T^a, \quad a = 1, 2, \cdots, N,$$

它们满足对易关系

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \qquad (\text{II}.5.17)$$

群的元素表示为

$$U(\theta) = \exp[-iT^a\theta^a] \tag{II.5.18}$$

这里 θ^a, $a = 1, 2, \cdots, N$, 为常数. 场 ϕ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 形成群 G 的一个表示,不必要为不可约化的. 它们在群 G 下按照

$$\Phi \to \Phi' = U(\theta)\Phi \tag{II.5.19}$$

变换. 现在生成元为 $n \times n$ 矩阵. 因为 $\mathscr{L}$ 在群 G 下为不变量的,我们有

$$V_s(U(\theta)\Phi) = V_s(\Phi).$$

对于无限小的变换,这给出

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_s(\Phi)}{\partial \phi_i} \delta\phi_i = 0, \tag{II.5.20}$$

这里

$$\delta\phi_i = -i \sum_{k=1}^{n} \theta^a T^a_{ik}\phi_k. \tag{II.5.21}$$

对于无限小的,然而是任意的 θ^a, 在群 G 下不变性条件为

$$\frac{\partial V_s}{\partial \phi_i} T^a_{ik}\phi_k = 0, \quad a = 1, 2, \cdots, N, \tag{II.5.22}$$

这里意味着对 i 和 k 从 1 到 n 求和. 上式对 ϕ_l 微分,得到

$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial \phi_i \partial \phi_l} T^a_{ik}\phi_k + \frac{\partial V_s}{\partial \phi_i} T^a_{il} = 0. \tag{II.5.23}$$

选取

$$\langle \Phi(x) \rangle_0 \equiv \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{II.5.24}$$

它使势为极小值,方程 (II.5.23) 变为

$$\left[\frac{\partial^2 V_s}{\partial\phi_j\partial\phi_l}\right]_{\phi=\mathbf{v}} T^a_{lk} v_k = 0. \qquad (11.5.25)$$

势可以重写为

$$V_s(\Phi) = V_{s0} + \frac{1}{2} M^2_{jk}(\phi_j - v_j)(\phi_k - v_k) + \cdots, \qquad (11.5.26)$$

这里

$$V_{s0} \equiv V_s(\Phi)|_{\phi=\mathbf{v}}$$

及

$$M^2_{jk} \equiv \frac{\partial^2 V_s(\Phi)}{\partial\phi_j\partial\phi_k}\bigg|_{\phi=\mathbf{v}}. \qquad (11.5.27)$$

由元素 $M^2_{jk} = M^2_{kj}$ 所形成的对称矩阵

$$\mathbf{M}^2 = (M^2_{jk})$$

叫做质量矩阵. 在方程 (11.5.25) 中所给出的条件可以用下面的本征值方程来表示:

$$\mathbf{M}^2 T^a V = 0, \quad a = 1, 2, \cdots, N \qquad (11.5.28)$$

这里利用了质量矩阵的对称性质. 生成元 T^a 相对于基态 V 可以区分为两类: $T^aV = v$ 和 $T^aV = 0$. 第一组称为 $\hat{T}^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \cdots, N'$, 使 $\hat{T}^\alpha V = 0$; 第二组称为 $\tilde{T}^\beta$, $\beta = 1, 2, \cdots, N - N'$, 使 $\tilde{T}^\beta V \neq 0$. 于是可以提出下面的关于 Goldstone 玻色子数目的定理.

在由 $\hat{T}^\alpha V = 0$, $\alpha = 1, 2, \cdots, N'$ 所形成的子空间内, 没有关于质量矩阵 M^2 的信息. 这形成群 G 的一个子空间, 并且 V_{s0} 相对于这个子群是不变量的. 在由 $\tilde{T}^\beta V \neq 0$, $\beta = 1, 2, \cdots, N - N'$ 所形成的子空间内, M^2 必须有 $N - N'$ 个零质量的本征值; 因此有 $N - N'$ 个 Goldstone 玻色子.

下面的例子说明上述的定理如何起作用. 考虑 n 个厄密场的体系, 对于 $\lambda > 0$ 和 $\mu^2 < 0$, 具有稳定势

$$V_s(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^+\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^+\Phi)^2. \qquad \text{(II.5.29)}$$

取不变群为 n 维正交群 $O(n)$. 使势为极小值的场形成 n 维空间内一个波谷，类似于图 II.5 的图形 (b) 所示的情形. 选取基态为

$$\langle\Phi\rangle_0 = V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v_0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(II.5.30)}$$

$$v_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda}.$$

显然，在自发对称破缺后有 $n-1$ 个 Goldstone 玻色子和一个带质量的玻色子. 上面的定理可以应用于这个简单的问题，但是首先必须定义生成元. 在群 $O(n)$ 内有 $\frac{n}{2}(n-1)$ 个线性无关的生成元，它们表示为

$$T^{ik};\ j = 1, 2, \cdots, n-1,\ k = 2, \cdots, n,\ k > j.$$

一个 n 维矩阵表示为

$$(T^{ik})_{lm} = -i(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}). \qquad \text{(II.5.31)}$$

现在我们有

(a) $T^{ik}V = 0$，对于 $k \leqslant n-1$，$j < k$.

有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个这种类型的 T^{ik}，它们形成一个子代数.

(b) $T^{ik}V \neq 0$，对于 $k = n$，$j = 1, 2, \cdots, n-1$.

有 $n-1$ 个这样的 T^{ik}，因此根据定理，有 $n-1$ 个 Goldstone 玻色子. 当然，结果是与明显计算的结果一致的.

总之，Goldstone 拉氏函数 ($\mu^2 < 0$) 具有简并基态，基态本身又引进对称破缺效应，即是，引进自发对称破缺. 然后

在理论的末态谱中出现带质量的以及无质量无自旋的粒子. 无质量的 Goldstone 玻色子数目是等于原来对称群的生成元数目，这些生成元并不使真空 V 湮没，即是，$T^aV \neq 0$.

作为泛函积分形式的一个练习，利用有效作用量和在方程 (II.3.8) 中所定义的 $1PI$ 的 n-pgf (一粒子不可约的 n 点 Green 函数)的生成函数 ($A[\hat{\phi}_a]$) 来证明 Goldstone 定理. 在变换 (II.5.19) 下，场的无限小改变在方程 (II.5.21) 中给出. 令 J_k 为与场 ϕ_k 相联系的外源. 于是，由与场 ϕ_k 相联系的唯象场 $\tilde{\phi}_k$ 的定义，如在方程 (I.3.27) 给出，

$$\delta\tilde{\phi}_i = -i\sum_k T^a_{ik}\theta^a\tilde{\phi}_k. \tag{II.5.32}$$

由方程 (I.3.28)，我们有

$$\delta A[\tilde{\phi}_k] = \delta W[J_k] - \int d^4x \sum_k J_k\delta\tilde{\phi}_k,$$

这里

$$\delta W[J_k] = \frac{i}{Z[J_k]} N^{-1}\int \prod_l \mathscr{D}\phi_l\cdots\left[i\sum_k J_k\delta\phi_k\right]$$

$$\times \exp\left\{iI + i\int d^4x \sum_k J_k\phi_k + \cdots\right\} \tag{II.5.33}$$

这里三个点"…"代表其它可能的场. 显然可以写出

$$\delta W[J_k] = \int d^4x \sum_k J_k\delta\tilde{\phi}_k. \tag{II.5.34}$$

因此，

$$\delta A[\tilde{\phi}_i] = 0,$$

它可以通过 $\tilde{\phi}_i$ 的无限小改变写为

$$-i\int d^4x \sum_{i,k}\theta^a T^a_{ik}\tilde{\phi}_k(x)\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}_j(x)} A[\tilde{\phi}_l] = 0. \tag{II.5.35}$$

再者，因为 θ^a 是无限小的，但是任意的，我们有

$$\sum_{i,k} T^a_{ik} \int d^4x \tilde{\phi}_k(x) \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_i(x)} A[\tilde{\phi}_l] = 0. \quad \text{(II.5.36)}$$

它对 $\tilde{\phi}_l$ 微分，得到

$$\sum_{i,k} T^a_{ik} \int d^4x \tilde{\phi}_k(x) \frac{\delta^2}{\delta \tilde{\phi}_l(y) \delta \tilde{\phi}_i(x)} A[\tilde{\phi}_i] + T^a_{il} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}_i(y)} A[\tilde{\phi}_i] = 0. \quad \text{(II.5.37)}$$

有效作用量对唯象场的二次导数是动能核［参看方程 (I.3.39)］

$$K_{li}(y, x) \equiv \frac{\delta^2 A[\tilde{\phi}_i]}{\delta \tilde{\phi}_l(y) \delta \tilde{\phi}_j(x)},$$

并且第一导数为源项［参看 (I.3.27)］

$$J_k(x) = -\frac{\delta A[\tilde{\phi}_i]}{\delta \tilde{\phi}_k(x)}.$$

由上面两个关系式，方程 (II.5.37) 可以重写为

$$\sum_{i,k} \int d^4x K_{li}(y, x) T^a_{ik} \tilde{\phi}_k(x) - \sum_k J_k(y) T^a_{kl} = 0. \quad \text{(II.5.38)}$$

已经证明，动能核是外源 J_k 存在时传播子的逆函数。当对于一切 k 值令 $J_k = 0$ 时，它正好就是传播子的逆函数。我们定义

$$\tilde{K}_{li}(y, x) \equiv K_{li}(y, x)|_{J_k=0} \text{ 对一切 } k \text{ 值.}$$

在外源不存在时，$\tilde{\phi}_k$ 变为 ϕ_k 的真空期待值。我们可以写出

$$\tilde{\phi}_k|_{J_l=0} = v_k, \text{ 对所有 } l \text{ 值}$$

这里 v_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, 为常数。我们把方程 (II.5.38) 重写为

$$\sum_{i,k} \int d^4x \tilde{K}_{li}(y, x) T^a_{ik} v_k = 0. \quad \text{(II.5.39)}$$

现在 $\tilde{K}_{li}(x, y)$ 只是它的自变数的差的函数，因此

$$\int d^2x\tilde{K}_{li}(y, x)$$

无非是它在零动量处计算出的 Fourier 分量. 最后

$$\sum_{i,k} k_{li}(0)T^a_{ik}v_k = 0, \qquad \text{(II.5.40)}$$

这里 $k_{li}(q^2)$ 为 $\tilde{K}_{li}$ 的 Fourier 分量，并且正好就是质量矩阵元. 方程 (II.5.40) 类似于方程 (II.5.27)，于是得到 Goldstone 定理及 Goldstone 玻色子数目的定理. 这里的结果包括属于传播子的逆函数 $K_{li}(0)$ 的全部量子力学效应. 所以 Goldstone 定理及 Goldstone 玻色子数目的定理在量子力学中是成立的.

考虑全部量子力学效应，还有 Goldstone 定理的证明. 利用 Källen-Lehmann 表示[51,52]，已经在 S 矩阵表述中实现了. 对此不感兴趣的读者，这个证明可以略去.

考虑一个体系，它在某个内对称变换下是不变量的，并且用 N 个参数来表征. 于是有 N 个守恒流存在. 这个陈述的证明如下：令 $\mathscr{L}$ 为体系的拉氏函数，$\delta\phi_\alpha, \alpha = 1, 2, \cdots, n$ 为场在上述变换下的无限小改变. 拉氏函数的改变为

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta(\partial_\mu\phi_\alpha) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha \\ &= -[\mathscr{L}]_{\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}\delta\phi_\alpha\right].\end{aligned} \qquad \text{(II.5.41)}$$

因为体系在变换下是不变量的，利用 Euler-Lagrange 方程后，

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)}T^a_{\alpha\beta}\phi_\beta\right] = 0, \qquad \text{(II.5.42)}$$

这里利用了 (II.5.32). N 个守恒流可以定义为

$$J^a_\mu \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_\alpha)} T^a_{\alpha\beta}\phi_\beta,$$

$$\partial^\mu J^a_\mu = 0. \qquad \text{(II.5.43)}$$

因为守恒流存在的上述论证只依赖于拉氏函数的不变性，所以，即使真空态不是不变量的，结果也适合。现在存在着N个守恒荷

$$Q^a \equiv \int d^3r\, J^a_0(x)$$

$$= \int d^3r\, \Pi_\alpha(x) T^a_{\alpha\beta}\phi_\beta(x), \qquad \text{(II.5.44)}$$

这里 $\Pi_\alpha(x)$ 是与 $\phi_\alpha(x)$ 共轭的正则动量。因此求得对易关系为

$$[Q^a, \phi_\alpha(x)] = -iT^a_{\alpha\beta}\phi_\beta(x). \qquad \text{(II.5.45)}$$

考虑无自旋场 $\phi_i(x)$ 具有不为零的真空期待值 $\langle\phi_i\rangle_0$，因而对于 a 的某些值

$$T^a_{ik}\langle\phi_k\rangle_0 = 0. \qquad \text{(II.5.46)}$$

由方程 (II.5.45)，显然荷 Q^a 并不使真空消失

$$Q^a|0\rangle \neq 0. \qquad \text{(II.5 47)}$$

其次，要考虑流 $J^a_\mu(x)$ 和无自旋场 $\phi_i(y)$ 的对易子的真空期待值：

$$\begin{aligned}\langle[J^a_\mu(x), \phi_i(y)]\rangle_0 = \sum_n \{&\langle 0|J^a_\mu(x)|n; p_1, \cdots, p_n\rangle \\ &\times \langle n; p_1, \cdots, p_n|\phi_i(0)|0\rangle \\ &- \langle 0|\phi_i(y)|n; p_1, \cdots, p_n\rangle \\ &\times \langle n; p_1, \cdots, p_n|J^a_\mu(0)|0\rangle\} \\ = \sum_n \{&e^{-iP_n(x-y)}\langle 0|J^a_\mu(0)|n; p_1, \cdots, p_n\rangle \\ &\times \langle n; p_1, \cdots, p_n|\phi_i(0)|0\rangle \\ &- e^{-iP_n(x-y)}\langle 0|\phi_j|n; p_1, \cdots, p_n\rangle\end{aligned}$$

$$\times \langle n; p_1, \cdots, p_n | J_\mu^a(0) | 0 \rangle \},$$

(II.5.48)

这里

$$P_{n\mu} = p_{1\mu} + p_{2\mu} + \cdots + p_{n\mu}$$

为 n 粒子体系的总 4 动量，其中各自的动量为 p_1, p_2, $\cdots$, 和 p_n. 方程 (II.5.48) 可以由投影出具有固定的总 4 动量和总质心能量 M 的态来加以重写，然后对一切可能的 P 和 M 积分：

$$\begin{aligned}\langle [J_\mu^a(x), \phi_j(y)] \rangle_0 = \int_0^\infty dM^2 \int d^4P \delta(P^2 - M^2)\theta(P_0) \\ \times \Big\{ e^{-iP(x-y)} \sum_n \delta^4(P - P_n) \\ \cdot \langle 0 | J_\mu^a(0) | n; p_1, \cdots, p_n \rangle \\ \times \langle n; p_1, \cdots, p_n | \phi_j(0) | 0 \rangle \\ - e^{iP(x-y)} \sum_n \delta^4(P - P_n) \\ \cdot \langle 0 | \phi_j(0) | n; p_1, \cdots, p_n \rangle \\ \times \langle n; p_1, \cdots, p_n | J_\mu^a(0) | 0 \rangle \Big\}.\end{aligned}$$

(II.5.49)

定义

$$\begin{aligned}(2\pi)^3 \rho_j^{(a)}(M^2) = \sum_n \delta^{(4)}(P - P_n) \langle 0 | J_\mu^a(0) | n; p_1, \cdots, p_n \rangle \\ \times \langle n; p_1, \cdots, p_n | \phi_j(0) | 0 \rangle.\end{aligned}$$

(II.5.50)

这个表示式是由下面的论证得到的. 在方程 (II.5.50) 中，在固定的总四动量约束下对各个粒子的动量积分，并对自旋投影求和后所保持的唯一四动量为 P_μ; 并且唯一的 Lorentz 不变量变数为 $P^2 = M^2$. 量 $\rho_j^{(a)}(M^2)$ 称为谱函数，然而如所定义的，一般它是一个复数量. 令 ϕ_j 为厄密的，因此 $J_\mu^a(x)$ 为一个厄密流，于是方程 (II.5.49) 的右边的第二项为第一项的

复共轭. 因果函数定义为

$$\Delta^{+}(x;\ M^{2}) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^{3}}\int d^{4}p e^{-ipx}\delta(p^{2}-M^{2})\theta(p_{0}).$$

(II.5.51)

我们现在可以写出

$$\langle[J_{\mu}^{a}(x),\ \phi_{i}(y)]|\rangle_{0} = -i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\int_{0}^{\infty} dM^{2}\mathrm{Im}[\Delta^{(+)}(x-y;\ M^{2})\rho_{i}^{a}(M^{2})],$$

(II.5.52)

这里"Im"代表"虚部". 守恒流 $\partial^{\mu}J_{\mu}^{a}(x)=0$ 给出

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\langle[J_{\mu}^{a}(x),\phi_{i}(y)]\rangle_{0} = -i\int_{0}^{\infty} dM^{2}\cdot M^{2}\mathrm{Im}[\Delta^{(+)}(x-y;\ M^{2})\rho_{i}^{(a)}(M^{2})].$$

(II.5.53)

利用因果函数满足 Klein-Gordon 方程的事实:

$$(\Box + M^{2})\Delta^{(+)}(x, M^{2}) = 0.$$

由方程 (II.5.53), 我们得到

$$M^{2}\rho_{i}^{(a)}(M^{2}) = 0.$$

该方程的解为

$$\rho_{i}^{(a)}(M^{2}) = \tilde{\eta}_{i}^{(a)}\delta(M^{2}),$$

(II.5.54)

这里 $\tilde{\eta}_{i}^{(a)}$ 为常数. 这个表示式说明, 除非 $\tilde{\eta}_{i}^{(a)}=0$, 则存在一个零质量态. 现在将证明, 由于在方程 (II.5.46) 中所给出的公设, $\tilde{\eta}_{i}^{(a)}$ 不能为零. 把方程(II.5.54)代入方程(II.5.52)中,取 $M=0$, 并对无限大的空间体积积分,得到

$$\langle[Q^{a},\ \phi_{i}(y)]|\rangle_{0} = \int d^{3}r\langle[J_{0}^{a}(x),\ \phi_{i}(y)]\rangle_{0}|_{x_{0}=y_{0}} = -i\int d^{3}r\,\mathrm{Im}\left[\tilde{\eta}_{i}^{(a)}\frac{d}{dx_{0}}\Delta^{(+)}(x-y,\ 0)\right]\Big|_{x_{0}=y_{0}}$$

$$= \frac{i}{2} \mathrm{Im}\tilde{\eta}_i^{(a)}$$

$$= iT^a_{ik}\langle\phi_k\rangle_0, \tag{II.5.55}$$

它利用恒等式

$$\frac{d}{dx_0}\Delta^{(+)}(x, 0)|_{x_0=0} = -\frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{r}).$$

显然可以看到

$$\mathrm{Im}\tilde{\eta}_i^{(a)} \neq 0. \tag{II.5.56}$$

因此在谱中必须存在零质量的无自旋的粒子. 零质量无自旋粒子的数目等于其 $T^a_{ik}\langle\phi_k\rangle_0 \neq 0$ 的值的数目. 在该证明中，如同在方程 (II.5.47) 中所示，在变换下已显示了真空的非不变性.

Higgs 机制 注意，Goldstone 定理是在对称性为整体时推导出来的. 如果对称性是局部的，将会发生什么情况呢? 一个局部对称性表明规范矢量玻色子的存在；因此这种情况要重新加以考察.

从这一点再来考虑方程组 (II.5.1) 系统. 首先假定拉氏函数在局部 $U(1)$ 变换下:

$$\phi_j(x) = e^{-i\theta(x)}\phi_j(x), \quad j = 1, 2 \tag{II.5.57}$$

为不变量的. 如在 II.2 中所讨论的，在 (II.5.57) 下的不变性要求一个无质量的矢量场 $A_\mu(x)$ 存在，它在 $U(1)$ 下变换为

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \tag{II.5.58}$$

要使同时在变换 (II.5.57) 和 (II.5.58) 下为不变量的，拉氏函数方程 (II.5.1) 要修改为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^+ \cdot (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - V_s(\phi)$$

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{II.5.59}$$

这里稳定势由（II.5.5）给出，并且

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

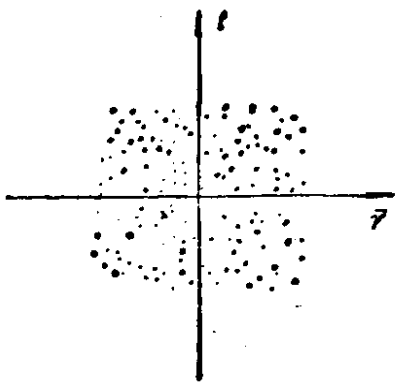
当然，这是一个阿贝耳规范理论，具有无自旋的场，例如，若 $\mu^2>0$，描述标量或赝标量电动力学．然而，现在的讨论只涉及到 $\mu^2<0$．考虑经典的拉氏函数会发现体系的基态．在经典情况下，无自旋的场在一个基态内为常数

$$\langle\phi_1\rangle_0=\langle\phi_2\rangle_0=\text{常数}, \tag{II.5.60a}$$

是必要的．为了保持 Lorentz 不变性，Lorentz 群的生成元要使真空消失，因此，矢量玻色子场的真空期待值为零．在经典描述中，这即是说，在真空态中

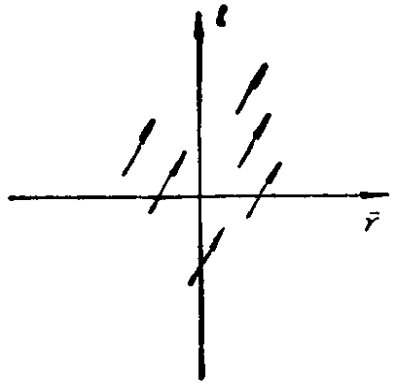
$$A_\mu(x)|_{\text{基态}}=0. \tag{II.5.60b}$$

认为一个不为零的常数矢量场在 Minkowski 空间内每一点定义一个方向，也可以得到方程（II.5.59）的结果，因此是不能接受的．这如图 II.6 所示：



(6a)

一个无自旋的场 ϕ =常数占据每个空时点．具有不为零的自旋的一切场都为零．这是一个 Lorentz 不变量的情况．



(6b)

一个矢量场 $A_\mu\neq0$．在每个空时点联系着一个供选取的方向是由 A_μ 加在无自旋的常数场上所定义的．这不是一个 Lorentz 不变量的情况．

图 II.6

由图II.6可以看出，要得到基态能量，只需要涉及到稳定势 V，例如，包括由方程（II.5.5）所给出的无自旋的粒子。以前所给出的分析在这里也可以应用。再推导出基态为

$$\langle\phi_1\rangle_0 = v_0, \quad \langle\phi_2\rangle_0 = 0, \tag{II.5.10}$$

这里

$$v_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$$

由方程（II.5.8）给出。再者，场位移为

$$\phi_1(x) = \phi_1'(x) + v_0, \quad \phi_2(x) = \phi_2'(x), \tag{II.5.11}$$

因而

$$\langle\phi_1'(x)\rangle_0 = 0, \quad \langle\phi_2'(x)\rangle_0 = 0. \tag{II.5.12}$$

通过位移场，仍然删去常数项 $\frac{\lambda}{4}v_0^4$，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = {} & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1')^2 - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\phi_1'^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2')^2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2(\phi_1' + v_0)^2 + \frac{1}{2}e^2\phi_2'^2A_\mu^2 \\ & + e(-\phi_1'\partial^\mu\phi_2' + \phi_2'\partial^\mu\phi_1')A_\mu - ev_0\partial^\mu\phi_2'A_\mu \\ & - \frac{\lambda}{2}\phi_2'^2(2v_0\phi_1' + \phi_1'^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1'^4 + \phi_2'^4 \\ & + 4v_0\phi_1'^3).\end{aligned} \tag{II.5.61}$$

这个拉氏函数似乎给出一个质量为$\sqrt{-2\mu^2}$的带质量而无自旋的场 M，和一个质量为 $\sqrt{\frac{-e^2\mu^2}{\lambda}}$ 的带质量的矢量玻色子场 A_μ。但是场 $\xi(x)$ 的解释并不清楚，事实上有一个讨厌的项，即是直接耦合项 $-e\partial^\mu\xi A_\mu$。而且，如果无自旋的场 $\xi(x)$ 和矢量场的纵向部分是独立的，则在自发对称破缺后还会获得一个自由度。在自发对称破缺前有四个自由度（即是 ϕ，

ϕ^+ 和 A_μ 的两个螺旋态)，在自发对称破缺后似乎还有一个自由度。所有这些困难只是表观的。为了看出在自发对称破缺时会发生什么情况，场要利用规范变换自由度加以重写。这通过一个径向场变数和一个角度的场变数使无自旋的场参数化，是容易做到的。在自发对称破缺后，场可以写为

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{i\xi(x)/v_0}(\eta(x)+v_0)\\ &= \eta(x)+v_0+i\xi(x)+\cdots,\end{aligned}\tag{II.5.62}$$

这里

$$\langle\eta(x)\rangle_0 = 0,\quad \langle\xi(x)\rangle_0 = 0.$$

近似到场的第一阶，表示式 (II.5.61) 等价于通常的形式。在该新形式中，自发对称破缺是由给出向径部分一个不为零的真空期待值来完成的。现在进行一个规范变换：

$$\phi(x)\to e^{-i\xi(x)/v_0}\phi(x) = \eta(x)+v_0,\tag{II.5.63a}$$

$$\phi^+(x)\to e^{i\xi(x)/v_0}\phi^+(x) = \eta(x)+v_0,\tag{II.5.63b}$$

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x) = A_\mu(x)-\frac{1}{ev_0}\partial_\mu\xi(x).\tag{II.5.63c}$$

把这些规范变换场代入方程 (II.5.58)，给出

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{2}|(\partial_\mu+ieA_\mu)(\eta+v_0)|^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\ &-\frac{1}{2}\mu^2(\eta+v_0)^2-\frac{\lambda}{4}(\eta+v_0)^4.\end{aligned}\tag{II.5.64}$$

在 (II.5.61) 到 (II.5.64) 中所描述的程序可以更精确地以下面的方式来实现：原来的拉氏函数 (II.4.59) 的无自旋场以极坐标形式写出；然后进行规范变换消去极角场的表现相关性，极角场现在隐含在方程 (II.5.63c) 所定义的变换矢量场的定义中。在这一步，自发对称破缺被触发了，对于无自旋场的径向部分给出一个不为零的真空期待值。这些步骤把原来的拉氏函数变为 (II.5.64) 所给出的形式，在删去常数项

$-\frac{\lambda}{4}v_0^4$ 以后，它可以重写为：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\lambda v_0^2)\eta^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$+ \frac{1}{2}e^2v_0^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu(\eta^2 + 2v_0\eta)$$
$$- \lambda v_0\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4. \qquad \text{(II.5.65)}$$

现在由一个质量为$\sqrt{-2\mu^2}$的无自旋的粒子和一个质量为ev_0的带质量的矢量玻色子所组成的拉氏函数中场 $\xi(x)$ 不出现了．体系的自由度保持为四，一个自由度是带质量而无自旋的场，三个自由度是带质量的矢量玻色子场． 场 $\xi(x)$ 实际上并未消失；它被矢量场吸收，并且变为矢量场的纵向部分．这就是 Higgs 现象，分别由 Higgs[15,17]，Englert 及 Brout[16]，Gurdnick，Hagen 及 Kibble[18,19]独立发现．

可以证明，所谓 Goldstone 玻色子 $\xi(x)$ 确实被吸收变为带质量的矢量玻色子的纵向部分．首先，A'_μ 的纵向和横向部分分别用 $A'^{(L)}_\mu$ 及 $A'^{(T)}_\mu$ 来表示．于是

$$\partial^\mu A'_\mu(x) = \partial^\mu A'^{(L)}_\mu(x), \qquad \text{(II.5.66a)}$$

$$A^{(T)}_\mu(x) = A'_\mu(x) - \frac{1}{\Box}\partial_\mu\partial^\nu A'_\nu(x). \qquad \text{(II.5.66b)}$$

把 (II.5.63c) 代入 (II.5.66b)，给出

$$A'^{(T)}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{\Box}\partial_\mu\partial^\nu A_\nu(x), \qquad \text{(II.5.66c)}$$

它相当于原来场 A_μ 的横向部分．因此，横向部分并不被规范变换方程 (II.5.62c) 所修正，但是纵向部分要写为

$$A'^{(L)}_\mu(x) = A'_\mu(x) - A'^{(T)}_\mu(x)$$
$$= \frac{1}{\Box}\partial_\mu\partial^\nu A_\nu(x) - \frac{1}{ev_0}\partial_\mu\xi(x). \qquad \text{(II.5.67)}$$

如果对原来的矢量场选用 Lorentz-Landau 规范，$\partial^\mu A_\mu = 0$，可以看出，$\frac{1}{ev_0}\partial_\mu \xi(x)$ 准确地为带质量的矢量场的纵向部分 $A_\mu'^{(L)}$。

在考虑非阿贝耳情形以前，应该注意下面的情况：对于通常的情形 $\mu^2 > 0$，拉氏函数方程 (II.5.59) 描述一对电荷相反的无自旋的粒子与电磁场相互作用。似乎无自旋的场可以用径向变数和角变数来表示，并作适当的规范变换来消去极角场的出现。当然，情形并非如此。因为在现在的理论中矢量粒子并不展现出一个质量项，所以它不可能把无自旋场的极角部分吸收变为它的纵向部分。由方程 (II.5.62c) 所给出的变换场 A_μ' 保持为两个单独的场的求和，因此用这些变数来描述体系变得很复杂。

在考虑非阿贝耳情形时，将取 $SU(2)$ 群，例如同位旋，作为例子。考虑同位旋 1，实标量场的三重态。

$$\phi_j,\ j = 1, 2, 3.$$

拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi^+ + ig\Phi^+ \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}_\mu)(\partial^\mu\Phi - ig\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}^\mu\Phi)$$

$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - V_s(\Phi), \qquad \text{(II.5.68)}$$

这里

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} \qquad \text{(II.5.69)}$$

及

$$\boldsymbol{A}_\mu = (A_\mu^{(1)}, A_\mu^{(2)}, A_\mu^{(3)}) \qquad \text{(II.5.70)}$$

为三个规范场，并且

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + g\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu,$$

标量场势为标准形式

$$V_s(\Phi) = \frac{\mu^2}{2}\Phi^+\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^+\Phi)^2, \quad \mu^2 < 0, \quad \lambda > 0.$$

生成元 L^l, $l = 1, 2, 3$ 用 3×3 厄密矩阵来表示. 一个特殊的形式为伴随表示或正则表示，其中矩阵元用结构常数来表示:

$$L^{(l)}_{ik} = -i\varepsilon_{lik}, \quad l, i, k = 1, 2, 3. \tag{II.5.71}$$

拉氏函数 (II.5.68) 在下面的变换下为不变量的:

$$\Phi(x) \to U(\theta)\Phi(x), \tag{II.5.72a}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} \to U(\theta)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{L}U^+(\theta) + \frac{i}{g}U(\theta)\partial_\mu U^+(\theta), \tag{II.5.72b}$$

这里

$$U(\theta) = e^{-iL\cdot\theta}. \tag{II.5.73}$$

对于能量为极小值的拉氏函数仍然要求出其经典解，如同以前在阿贝耳规范理论中所讨论的一样,对于基态 Φ 为常数,并且 $\boldsymbol{A}_\mu$ 为零,基态能量由静止势 $V(\Phi)$ 来确定. 此刻所熟知的事实是,基态能量出现在

$$|\Phi| = \sqrt{-\mu^2/\lambda}.$$

如果下面选取

$$\langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad v_0 \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda} \tag{II.5.74}$$

则无自旋场的三重态可以写为像方程 (II.5.62) 中所给出的指数形式

$$\Phi = \exp\left\{\frac{i}{v_0}(\xi_2(x)L^{(1)} - \xi_1(x)L^{(2)})\right\}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta(x) + v_0 \end{pmatrix}, \tag{II.5.75}$$

这里新变数 $\xi_1(x)$，$\xi_2(x)$ 和 $\eta(x)$ 的真空期待值为零。生成元定义在方程 (II.5.71) 中，显然：

$$L^{(1)}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad L^{(2)}\equiv\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$L^{(3)}\equiv\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{II.5.76}$$

近似到场的第一阶

$$\Phi=\langle\Phi\rangle_0+\begin{pmatrix}\xi_1(x)\\\xi_2(x)\\\eta(x)\end{pmatrix}+(\text{场的较高阶项}). \tag{II.5.77}$$

表达

$$U(x)=\exp\left[-\frac{i}{v_0}(\xi_2(x)L^{(1)}-\xi_1(x)L^{(2)})\right], \tag{II.5.78}$$

$$\Phi_0=\begin{pmatrix}0\\0\\\eta(x)+v_0\end{pmatrix}, \tag{II.5.79}$$

可以利用规范变换的自由度来得到

$$\Phi\to U(x)\Phi=\Phi_0, \tag{II.5.80}$$

$$\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L}\to U(x)\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L}U^{-1}(x)+\frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x). \tag{II.5.81}$$

把方程 (II.5.80) 和 (II.5.81) 代入拉氏函数方程 (II.5.68) 中，给出

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\Phi_0^\dagger+ig\Phi_0^\dagger\boldsymbol{A}^\mu\cdot\boldsymbol{L})(\partial_\mu\Phi_0-ig\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{L}\Phi_0)-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}-V_s(\Phi)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v_0^2)\eta^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}(g^2 v_0^2)[(A_\mu^{(1)})^2 + (A_\mu^{(2)})^2]$$

$$+ \frac{1}{2}g^2(\eta^2 + 2v_0\eta)[(A_\mu^{(1)})^2 + (A_\mu^{(2)})^2]$$

$$- \frac{\lambda}{4}(4v_0 + \eta)\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda v_0^4. \qquad \text{(II.5.82)}$$

常数项 $\frac{1}{4}\lambda v_0^4$ 仍然可以删去. 由上面的拉氏函数，在自发对称破缺后可以读出体系的谱. 它包括一个带质量而无自旋的场 $\eta(x)$，两个带质量的矢量场 $A_\mu^{(1)}$ 及 A_μ^2，和一个无质量的矢量玻色子场 $A_\mu^{(3)}$. 两个 Goldstone 玻色子合并为带质量的矢量场 $A_\mu^{(1)}$ 及 $A_\mu^{(2)}$ 的纵向分量. 在最低阶，无质量的矢量玻色子只与带质量的矢量场耦合；它与无自旋粒子的耦合是通过较高阶图形而出现的. 在拉氏函数方程的最后形式 (II.5.82) 中，损失了在 $O(3)$ 转动下不变性的表示. 然而，有一个残余的对称性：沿同位旋空间第三分量的转动仍然是一个好的对称性. 相应的转动生成元为 $L^{(3)}$，并且与之相联系的规范场 $A_\mu^{(3)}$ 保持为无质量的.

因为已研究了两个例子，一个阿贝耳的和一个非阿贝耳的，现在可以对任意的 Lie 群叙述 Higgs 机制的一般性质:

(1) 从一个拉氏函数出发，该拉氏函数在秩 N 的一个群 G 的局部变换下为不变量的. 有 N 个规范矢量玻色子场 $\boldsymbol{A}_\mu$ 和 n 个无自旋的玻色子场. 后者在一个内矢量空间中形成一个矢量 Φ，并且形成群 G 的一个 n 维表示，没有必要为不可约化的. 无自旋场的拉氏函数部分为 Goldstone 类型. 在拉氏函数中可能有另外的物质场，并且物质场以规范变换不变

量的方式与无自旋场和规范场二者或二者之一相互作用。然而，这些附加的物质场对于现在的讨论并不是本质的。拉氏函数可以写为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\Phi^{+} + ig\Phi^{+}\boldsymbol{A}^{\mu}\cdot\boldsymbol{T})(\partial_{\mu}\Phi - ig\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\boldsymbol{T})$$

$$-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - V_{s}(\Phi) + \text{由于附加场的项，} \tag{II.5.83}$$

这里

$$V_{s}(\Phi) = \frac{\mu^{2}}{2}(\Phi^{+}\Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^{+}\Phi)^{2};\ \mu^{2} < 0,\ \lambda > 0,$$

$$\boldsymbol{A}_{\mu} = (A_{\mu}^{(1)},\ A_{\mu}^{(2)},\ \cdots,\ A_{\mu}^{(N)})$$

及

$$\boldsymbol{T} = (T^{(1)},\ T^{(2)},\ \cdots,\ T^{(N)})$$

为G的 Lie 代数的$n \times n$矩阵表示，并且

$$[T^{(a)},\ T^{(b)}] = iC_{abd}T^{(d)}.$$

(2) 经典体系具有Φ为常数矢量的基态$\langle\Phi\rangle_{0} = V$，及$\langle\boldsymbol{A}_{\mu}\rangle_{0} = 0$。可能的附加场的真空期待值为零。再者

$$|V| = v_{0} = \sqrt{-\mu^{2}/\lambda}.$$

如果进行下面的代换

$$\Phi \equiv \Phi' + V,\quad \langle\Phi'\rangle_{0} = 0, \tag{II.5.84}$$

于是就完成了自发对称破缺。

(3) 假定该对称破缺留下一个N'维的残余对称性。在原来的N个生成元之间存在着N'个生成元$\hat{T}^{(1)}$，$\hat{T}^{(2)}$，$\cdots$，$\hat{T}^{(N')}$。这N'个生成元形成一个子代数。这些生成元满足条件

$$\hat{T}^{(\alpha)}V = 0,\ \alpha = 1, 2, \cdots, N'. \tag{II.5.85}$$

其余的$N - N'$个生成元，表示为$\tilde{T}^{(\beta)}$，$\beta = 1, 2, \cdots,$

$N-N'$，使

$$\tilde{T}^{(\beta)}V \neq 0,\ \beta = 1, 2, \cdots, N-N', \qquad \text{(II.5.86)}$$

展开一个 $N-N'$ 维的空间，并且在规范矢量玻色子不存在时有 $N-N'$ 个无质量的 Goldstone 玻色子。当然，这是 Goldstone 定理的结果。

(4) 在规范矢量玻色子存在时，规范矢量玻色子以规范不变量的方式与无自旋的场相耦合，有实现规范变换的自由。当无自旋场的空间分离为两部分时，一部分由所谓 Goldstone 玻色子来展开，称它为 S_g。另一部为其余的空间，称为 S_v。在 S_g 中有 $N-N'$ 个分量，并且在 S_v 中有 $n-N+N'$ 个分量，其中有矢量 $\langle\Phi\rangle_0 = V$。Φ' 位于空间 S_g 内的部分表示为

$$\xi_\beta(x),\ \beta = 1, 2, \cdots, N-N',$$

并且在空间 S_v 内的场用一个列矢量 $\tilde{\eta}(x)$（在 n 维空间内）来表示。于是写出

$$\Phi(x) = U_g^{\dagger}(\xi(x))(\tilde{\eta}(x) + V), \qquad \text{(II.5.87)}$$

这里

$$U_g(\xi(x)) = \exp\left\{-i\sum_{a=1}^{N'-N}\xi_a(x)T^{(a)}\right\}. \qquad \text{(II.5.88)}$$

现在作规范变换

$$\Phi \to U_g(\xi(x))\Phi(x) = \tilde{\eta}(x) + V, \qquad \text{(II.5.89a)}$$

$$\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{L} \to U_g(\xi(x))\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{L}U_g^{-1}(\xi(x)) + \frac{i}{g}U_g(\xi(x))$$

$$\times \partial_\mu U_g(\xi(x)). \qquad \text{(II.5.89b)}$$

在实际的计算中，规范变换过程简单地要在拉氏函数 (II.5.83) 中作下面的代换

$$\Phi \to \tilde{\eta}(x) + V,$$

并且使矢量规范场不变。

(5) 拉氏函数受影响的部分是包含无自旋场的部分。

$$\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\Phi^{+}+ig\Phi^{+}\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\boldsymbol{T})(\partial_{\mu}\Phi-ig\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\boldsymbol{T}\Phi)-V_{s}(\Phi)$$

$$\to\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\eta^{+}+ig(\tilde{\eta}^{+}+V^{+})\boldsymbol{A}^{\mu}\cdot\boldsymbol{T})$$

$$\times(\partial_{\mu}\tilde{\eta}-ig\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\boldsymbol{T}(\tilde{\eta}+V))-\frac{\mu^{2}}{2}(\tilde{\eta}+V^{+})$$

$$\times(\tilde{\eta}+V)-\frac{\lambda}{4}[(\tilde{\eta}^{+}+V^{+})(\tilde{\eta}+V)]^{2}. \qquad \text{(II.5.90)}$$

利用方程 (II.5.85)，我们有

$$\frac{1}{2}\left|\partial_{\mu}\tilde{\eta}-ig\sum_{\beta=1}^{N-N'}\tilde{T}^{(\beta)}\tilde{A}_{\mu}^{(\beta)}\tilde{\eta}\right|^{2}+\frac{1}{2}g^{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N-N'}\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}(V^{+}\tilde{T}^{(\alpha)})$$

$$\times(\tilde{T}^{(\beta)}V)\tilde{A}^{(\beta)\mu}+\frac{i}{2}g\sum_{\alpha=1}^{N-N'}(-\partial^{\mu}\tilde{\eta}^{+}\tilde{T}^{(\alpha)}\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}V$$

$$+V^{+}\tilde{T}^{(\alpha)}\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}\partial^{\mu}\tilde{\eta})+\frac{1}{2}g^{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N-N'}(\tilde{\eta}^{+}\tilde{T}^{(\alpha)}\tilde{T}^{(\beta)}V$$

$$+V^{+}\tilde{T}^{(\alpha)}\tilde{T}^{(\beta)}\tilde{\eta})\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}\tilde{A}^{(\beta)\mu}-\frac{\lambda}{4}(\tilde{\eta}^{+}V+V^{+}\tilde{\eta}^{+})^{2}$$

$$-\frac{\lambda}{2}(\tilde{\eta}^{+}V\perp V^{+}\tilde{\eta})(\tilde{\eta}^{+}\eta)-\frac{\lambda}{4}(\tilde{\eta}^{+}\tilde{\eta})^{2}$$

$$-\frac{1}{4}\lambda(V^{+}V)^{2}, \qquad \text{(II.5.91)}$$

这里 $\tilde{A}_{\mu}^{(\beta)}$ 为与生成元 $\tilde{T}^{(\beta)}$ 相联系的规范场. 无自旋场的分量往往选取为实数. 对于厄密的 $\tilde{T}^{(\beta)}$，(II.5.91) 可以约化为

$$\frac{1}{2}\left|\partial_{\mu}\tilde{\eta}-ig\sum_{\beta=1}^{N-N'}\tilde{T}^{(\beta)}\tilde{A}_{\mu}^{(\beta)}\right|^{2}+\frac{1}{2}g^{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N-N'}(V^{+}\tilde{T}^{(\alpha)})$$

$$\times(\tilde{T}^{(\beta)}V)\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}\tilde{A}^{(\beta)\mu}+\frac{1}{2}g^{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N-N'}[\tilde{\eta}^{+}\hat{T}^{(\alpha)}\tilde{T}^{(\beta)}V$$

$$+V^{+}\hat{T}^{(\alpha)}\tilde{T}^{(\beta)}\tilde{\eta}]\tilde{A}_{\mu}^{(\alpha)}\tilde{A}^{(\beta)\mu}-\lambda\tilde{\eta}^{+}VV^{+}\tilde{\eta}$$

$$-\lambda(V^+\tilde{\eta})(\tilde{\eta}^+V)-\frac{\lambda}{4}(\tilde{\eta}^+\tilde{\eta})^2, \qquad (II.5.92)$$

这里常数项$-\frac{\lambda}{4}(V^+V)^2$被删去了. 现在可以选取$\tilde{A}_\mu^{(\alpha)}$的线性组合使$(N-N')\times(N-N')$矩阵$V^+\tilde{T}^{(\alpha)}\tilde{T}^{(\beta)}V$对角化,并且选取$\tilde{\eta}$分量的线性组合使矩阵$VV^+$对角化:

$$\tilde{A}_\mu^{(\alpha)}\equiv D^{\alpha\beta}\tilde{A}_\mu'^{(\beta)}$$

及

$$\tilde{\eta}^{(\alpha)}=d^{\alpha\beta}\eta^{(\beta)}.$$

表达

$$M_\alpha^2\delta_{\alpha\beta}=g^2\sum_{\alpha',\beta'}D^{+\alpha\alpha'}V^+\tilde{T}^{(\alpha')}T^{(\beta')}VD^{\beta'\beta},$$

$$\alpha,\beta=1,2,\cdots,N-N'$$

及

$$\mu_a^2\delta_{ab}=\sum_{a',b'}d^{+aa'}(VV^+)_{a'b'}d^{b'b},$$

$$a,b=1,2,\cdots,n-N+N'. \qquad (II.5.93)$$

量M_α^2和μ_a^2分别为矢量玻色子和无自旋场的质量. 最后的谱由$n-N+N'$个带质量的无自旋的玻色子,$N-N'$个带质量的自旋为1的玻色子和N'个无质量的矢量场所组成.

(6) 在空间S_v内有规范变换的一个残余对称性,包括群G的子群G_v在内. G_v的秩为N',并且它的生成元为$\tilde{T}^{(\alpha)}$,$\alpha=1,2,\cdots,N'$. G_v的群元素可以表示为

$$U_v(\theta)\equiv\exp\left\{-i\sum_{\alpha=1}^{N'}\theta_\alpha\tilde{T}^{(\alpha)}\right\}. \qquad (II.5.94)$$

为了证明拉氏函数在这个变换下为不变量的,利用了它在(II.5.91)中所给出的形式. 由方程(II.5.85),可以注意到,$\tilde{\eta}$并不受属于G_v的变换的影响,即是

$$U_v^{-1}\tilde{\eta}=\tilde{\eta},\quad \tilde{\eta}^+U_v=\tilde{\eta}^+,\ \text{等等}.$$

而且

$$(\tilde{\eta}^+ + V^+)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T} \to (\tilde{\eta}^+ + V^+)\Big|U_v(\theta)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T}U_v^{-1}(\theta)$$

$$+ \frac{i}{g} U_v(\theta)\partial_\mu U_v^{-1}(\theta)\Big] = (\tilde{\eta}^+ + V^+)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T}U_v^{-1}(\theta)$$

$$+ \frac{i}{g} (\tilde{\eta}^+ + V)\partial_\mu U_v^{-1}(\theta) = (\tilde{\eta}^+ + V^+)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T}U_v^{-1}(\theta).$$

由 $\partial_\mu U_v^{-1}(\theta)$ 正比于 $\hat{T}^{(a)}$ 的事实，得到了最后一行，因此

$$(\tilde{\eta}^+ + V^+)\partial_\mu U_v^{-1}(\theta) = 0.$$

类似地

$$\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T}(\tilde{\eta} + V) \to U_v(\theta)\boldsymbol{A}_\mu \cdot \boldsymbol{T}(\tilde{\eta} + V).$$

显然（II.5.9）是不变量的.

而且，纯规范场项 $-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ 在 $U_V(\theta)$ 下为不变量. 如果有另外的场出现在拉氏函数中，因为这些另外的场必须以规范不变量的方式与无自旋场 Φ 和规范矢量玻色子相耦合，因而它们的贡献在 G_v 的变换下是不变量的.

最后，应该注意三点.

(a) 自发对称破缺，及 Higgs 机制只出现在连续对称性中，不出现在分立对称性中.

(b) 因为对于矢量玻色子场给出质量的 Higgs 机制是通过某些无自旋的粒子来实现的，这使一个或多个这样的粒子的存在成为必要. 因而它要求理论中某些参数的准确调节. 有一些建议，对称破缺可以在动力学中实现而摆脱无自旋的粒子. 在写本书的时候，在四维 Minkowski 空间内动力学的对称破缺的准确表述并不存在. 然而，有值得研究的可能性，并且感兴趣的读者可参阅文献[54,55]. 但是有二维空时场论，即，Schwinger 模型[56]，其中会从动力学产生质量. 这是在一维空间和一维时间中描述无质量的费米子的量子电动力学一个可解的模型；不用基本的标量场，Goldstone-Higgs

现象也完全显示出来了.

(c) 最后,必须记住,本节的大多数讨论是在经典情况下实现的. 涉及到量子理论时要把静止势例如方程 (II.5.5) 等的极小值认为是量子体系的真空态或基态. 在该极小值处场的值是场的真空期待值. 已利用了两个量子力学方案来推导 Goldstone 定理. 事实上,本节的一切结果实际上可以在小耦合的量子力学表述中作为量子展开式的第一项重新加以解释[53].

参 考 文 献

II.1 例如,关于各种量子化方法的一般讨论,参看: K. Nishijima, *Fields and Particles* (Benjamin, New York; 1969).

II.2 C. N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.*, **96**, 191(1954).

II.3 R. P. Feynman, *Acta Phys. Polonica*, **24**, 697(1963).

II.4 B. S. De Witt, *Phys. Rev.*, **162**, 1195 and 1239(1967).

II.5 L. D. Fadeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.*, **25B**, 29(1967).

II.6 V. N. Popov and L. D. Fadeev, "Perturbation Theory for Gauge-Invariant Fields", unpublished (Kiev report ITP 67—86, 1967; English translation by D. Gordon and B. W. Lee, Fermi Nat. Acc. Lab. report NAL-THY-57, 1972).

II.7 G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B33**, 173(1971).

II.8 B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D5**, 3121, 3137, and 3155 (1972); *ibid*, **D7**, 1049(1973).

II.9 G. 't Hooft and M. t. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B50**, 318(1972).

II.10 B. W. Lee, *Phys. Rev.*, **D9**, 933(1974).

II.11 J. Goldstone, *Nuovo Cimento*, **19**, 154(1961).

II.12 Y. Nambu and G. Jona-Lasino, *Phys. Rev.*, **122**, 345(1961); *ibid*, **124**, 246(1961).

II.13 J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **127**, 965(1962).

II.14 S. Bludman and A. Klein, *Phys. Rev.*, **131**, 2364(1963).

II.15 P. W. Higgs, *Phys. Lett.*, **12**, 132(1964).

II.16 F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 321(1962).

II.17 P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 508(1964); *Phys. Rev.*, **145**, 1156 (1966).

II.18 G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 585(1964); T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.*, **155**, 1554(1967).

II.19 非平凡的带质量的矢量介子理论意味着矢量介子具有多重态结构，譬如说，形成某个对称群的一个表示，而不是一个单态．在单介子理论中，即是在阿贝耳理论中，如果矢量介子通过一个守恒流与自旋 1/2 费米子场耦合，如同量子电动力学中的电磁流，则理论的可重正性被保证．

II.20 S. L. Glashow, *Nucl. Phys.*, 22, 579(1961).

II.21 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1264(1967).

II.22 A. Salam in *Elementary Particle Theory*, Proceedings of the 8th Nobel Symposium, ed. N. Svartholm (Alqmquist and Wiksells, Stockholm; 1969) p. 367.

II.23 H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, 32, 438(1974).

II.24 关于大统一理论的评述和有关文献，参看：P. Langackar, *Phys. Rept.*, 72, 185(1981).

II.25 关于规范原理作为对称性的讨论，参看：C. N. Yang, *Phys Today*, June 1980. p. 42. 规范理论的历史简述可以查阅：C. N. Yang, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 294, 86(1977).

II.26 S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 515(1980).

II.27 例如，参看：H. Georgi, *Lie Algebra in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading, Mass.; 1982).

II.28 参看：M. Hamermesh, Group Theory and Its Application to Physics *Problems*, (Addison-Wesley, Reading, Mass.; 1962) and R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, (Wiley, New York; 1974).

II.29 B. W. Lee, "Gauge Theories", in *Methods in Field Theory*, 1975 Les Houches Summer School in Theoretical Physics, session XXVIII, de. R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland/World Scientific, Singapore; 1981).

II.30 B. W. Lee, "Path Integral and Gauge Theories", in *Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory*, lecture notes at the 1973 NATO Advances Study Institute (Plenum Press, New York; 1974), p. 61.

II.31 E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.*, 4, 125(1932).

II.32 R. L. Arnowitt and S. I. Fickler, *Phys. Rev.*, 127, 1821(1962) 首先引入轴规范．

II.33 例如，参看：R. P. Feynman, "Gauge Theories", in *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy*, proceedings of the 1976 Les Houches Summer School, Session XXIX, ed. R. Balian and C. H. Lewellyn Smith (North-Holland, Amsterdam; 1977).

II.34 W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rept.*, 36D, 137(1978).

II.35 V. N. Gribov, *Nucl. Phys.*, B139, 1(1978).

II.36 V. N. Gribov, "Instability of Non-abelian Gauge Theories and Impossibility of Choice of Coulomb Gauge", Lecture at the XIIth Winter

School of the Leningrad Nuclear Physics Institute, 1977 (Translated and edited by H. D. I. Abarbanel; SLAC-Trans-0176); Ref. II. 35.

II.37 例如，参看：J. D. Jackson, *Classicsl Electrodynamics* (John Wiley, New York; 1975) Ch. III. 所给出的讨论.

II.38 Y. Takahashi and M. Kobayashi, *Phys. Lett.*, **78B**, 241(1978).

II.39 V. N. Popov, "Functional Integral in Quantum Field Theory", CERN lecture notes, Dec. 1977.

II.40 为了证明场张量 F^a_{jk} 为零，应用了(II. 4.52)中所给出的 $A^a_{(\gamma)j}$ 的形式，连同下面的恒等式：

$$\delta^{la}\varepsilon^{bjk} - \delta^{lb}\varepsilon^{jka} + \delta^{lj}\varepsilon^{kab} - \delta^{lk}\varepsilon^{abj} = 0$$

这里l, a, b, j 和 k 取值 1，2，3，也要注意，因为 F^a_{jk} 是用 A^a_j 的非线性关系定义的，系数 $2/g$ 是由 F 的定义方程确定的.

II.41 例如，参看：R. Jackiw, I. Muzinich, and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D17**, 1576(1978).

II.42 参看 S. Sciuto, *Phys. Rept.*, 49**C**, 181(1979) 所给出的讨论.

II.43 M. Ademollo, E. Napolitano, and S. Sciuto, *Nucl. Phys.*, **B134**, 477 (1978).

II.44 D. A. Nicole, *Nucl. Phys.*, **B139**, 151(1978).

II.45 关于另外的论证，参看：R. D. Peccei, *Phys. Rev.*, **D17**, 1097(1978).

II.46 P. Hirschfeld, *Nucl. Phys.*, **B157**, 37(1979).

II.47 参看：Gribov, Ref. 36 and C. M. Bender, T. Eguchi, and H. Pagels, *Phys. Rev.*, **D17**, 1086(1978).

II.48 例如，参看：J. P. Greensite, *Phys. Rev.*, **D18**, 3842(1978).

II.49 M. B. Halpern and J. Koplik, *Nucl. Phys.*, **B132**, 239(1978).

II.50 S. Sciuto, *Phys. Lett.*, 71**B**, 129(1977); L. F. Abbott and T. Eguchi, *Phys. Lett.*, 72**B**, 215(1977); D. Amati and A. Rouet, *Phys. Lett.*, **73B**, 39(1978); H. J. de Vega, *Phys. Rev.*, **D19**, 3072(1979); F. S. Henyey, *Phys. Rev.*, **D20**, 1460(1979); K. Fujikawa, *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 627(1979).

II.51 G. Kallen, *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417(1952).

II.52 H. Lehmann, *Nuovo Cimento*, **11**, 342(1954).

II.53 例如，参看：S. Coleman, "Secret Symmetry: An Introduction to Spontaneous Symmetry Breakdown and Gauge Theories", lectures given at the 1973 International Summer School of Physics, Ettore Majorana.

II.54 S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**, 1888(1973).

II.55 S. Dimopoulos and L. Susskind, *Nucl. Phys.*, **B155**, 237(1979).

II.56 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**, 2425(1962); W. E. Thirring and J. E. Wess, *Ann. Phys.*, **27**, 331(1964); J. H. Lowenstein and J. A. Swieca, *Ann. Phys.*, **68**, 172(1971).

第III章　量子味动力学（QFD）电弱相互作用理论

Glashow-Weinberg-Salam 模型是 1967—68 年由 Weinberg 和 Salam 独立提出的[1,2]，他们在局部规范原理中复活了电磁相互作用和弱相互作用有共同根源的老概念[3,4,5]. 模型的物理内容类似于早几年由 Glashow[4] 所提出的模型. 然而，现在模型的形式与过去断决了关系，局部规范对称性在现代模型形式中通过 Higgs 机制自发地被破缺. 通过 't Hooft[6,7]，'t Hooft 及 Veltman[8]，Lee[9] 和 Lee 及 Zinn-Justin[10] 的工作，进一步证明，正如不破缺的理论一样，为使破缺的理论可重正化，Higgs 机制充分保持局部规范理论的精华. 理论的显著特征是

(1) 统一了弱和电磁相互作用；

(2) 存在中性的以及带荷的弱作用流；

(3) 存在重标量玻色子 (Higgs 粒子)；

(4) Weinberg 混合角，它参与弱中性流相互作用.

直到目前，一切实验数据所指明的方向是理论适合于描述的自然现象. 现在完全准确地由数据确定了 Weinberg 角的值，除 Higgs 玻色子的质量值以外，使 Glashow, Weinberg 及 Salam 标准模型剩下很小的自由度. 所预言的中性玻色子和带电荷矢量玻色子的质量值不久在实验室内是可能达到的.

本章的第一节讨论包括轻子的电弱相互作用. 在 §2 中给出该理论在 R_ξ 规范中 Feynman 规则的详细推导. 第 3

节包括强子夸克之间的电弱相互作用的讨论。第 4 节总结了支持理论的实验。第 5 节是对理论的批评及某些方面的专题。

III. 1 轻子的 Glashow-Weinberg-Salam 模型

在这里简短评述轻子理论的必要因素是适当的。

(a) 物质场，电子，μ 子，τ 轻子及其中微子。

(b) 传递相互作用的重矢量玻色子。某些玻色子要带电荷。

(c) 安排轻子和中间玻色子以使理论是可重正化的。

(d) 在低能量区域内模型的预言要与最近二十年内确定存在的唯象学[11,12]符合。

项目 (b) 和 (c) 可以通过 Higgs 机制来完成。而且应该注意到，由低能量数据所建立的轻子弱相互作用流形成一个 $SU(2)$ 代数。因此，对称群必须包含一个 $SU(2)$ 子群或一个与 $SU(2)$ 同态的子群。然而，还有另外的约束：(i) 带电荷轻子 e，μ 和 τ 必须是有质量的，同时它们的中微子 ν_e，ν_μ 和 ν_τ 必须是无质量的。(ii) 至少，主要在低能量区域内，带荷流必须是左手的，因此必须有一个左手的 $SU(2)$，将其表示为 $SU(2)_L$。在 $SU(2)_L$ 中费米子场表示为

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi. \qquad \text{(III.1.1)}$$

这表明，通过 Higgs 机制或相反即使只限于 $SU(2)_L$，带荷轻子不可能具有质量项。对于带荷轻子给以质量项最简单的方式是对 $SU(2)_L$ 添加一个 $U(1)$ 对称性。因此，在自发对称破缺以前，取对称群为

$$SU(2)_L \otimes U(1). \qquad \text{(III.1.2)}$$

具有这个群结构的理论将称为标准模型。在 $U(1)$ 中的费米子场形式为

$$\phi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi. \qquad \text{(III.1.3)}$$

在直乘积群方程 (III.1.2) 中总共有四个生成元，$SU(2)_L$ 有三个，$U(1)$ 有一个。因此，有四个规范玻色子，每个生成元有一个玻色子。矢量规范玻色子为 $A_\mu^{(i)}$，$i=1,2,3$ 属于 $SU(2)_L$，B_μ 属于 $U(1)$。在自发对称破缺以前，这些玻色子是无质量的。

现在引入量子数：

弱同位旋　I_w　与 $SU(2)_L$ 相联系，

弱超荷　　Y_w　与 $U(1)$ 相联系。

电荷由 Gell-Man-Nishijima 公式给出

$$Q = I_{w_3} + \frac{Y_w}{2}. \qquad \text{(III.1.4)}$$

轻子场将用轻子的符号来表示，如下面的例子：

$$\nu_{eL} \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\phi_{\nu e},$$

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\phi_e,$$

$$e_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi_e, \quad \text{等等}, \qquad \text{(III.1.5)}$$

在 $SU(2)_L$ 中轻子形成双态，而在 $U(1)$ 内只有带荷的轻子。左手双态写为

$$L_e \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_\mu \equiv \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad L_\tau \equiv \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.1.6)}$$

右手单态写为

$$e_R,\ \mu_R,\ \tau_R. \qquad \text{(III.1.7)}$$

e，μ，τ 及其中微子形成三个等同的家族；因为电子家族的结

果对于 μ 和 τ 的家族适用，所以目前的讨论将限于电子家族．群的轻子成员的量子数列表于下：

	I_{w3}	Y_w	Q
ν_{eL}	1/2	−1	0
e_L	−1/2	−1	−1
e_R	0	−2	−1

就相互作用而论，$SU(2)_L$ 双态，L_e，等等通过弱同位旋与 $SU(2)$ 矢量玻色子 $A_\mu^{(j)}$ 相互作用，并通过弱超荷与 $U(1)$ 矢量玻色子 B_μ 相互作用．右手单态 e_R，等等只通过弱超荷与 $U(1)$ 玻色子 B_μ 相互作用．现在给出总拉氏函数的两部分如下．一部分包括轻子以及它们与矢量玻色子的相互作用，另一部分只包括规范场．它们分别是局部规范不变量的．

$$\mathscr{L}_{\text{轻子}} = \bar{L}_e i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}_\mu\right) L_e + \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig' B_\mu) e_R \tag{III.1.8}$$

及

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(j)} F^{(j)\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{III.1.9}$$

这里 $\boldsymbol{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ 为 Pauli 矩阵，并且

$$F_{\mu\nu}^{(j)} = \partial_\mu A_\nu^{(j)} - \partial_\nu A_\mu^{(j)} + g\varepsilon^{jkl} A_\mu^{(k)} A_\nu^{(l)},$$
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \tag{III.1.10}$$

注意，在 (III.1.8) 中没有裸质量，因为可能的规范不变量形式的质量项恒为零：

$$\bar{e}_R e_R = 0,$$
$$\bar{L}_e L_e = 0 \tag{III.1.11}$$

在这一步完全存在着无质量的理论．为了诱导出 Higgs 机制，需要无自旋的场．无自旋玻色子场的最小数目需要四个，它们形成一个复数 $SU(2)$ 双态和它的厄密共轭．取双态的

元素为标量，因而宇称并不自发地破缺。双态表示为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.1.12a)}$$

厄密共轭场表示为

$$\Phi^+ = (\phi^{(-)}, \phi^{(0)*}), \qquad \text{(III.1.12b)}$$

这里 $\phi^{(+)}$ ($\phi^{(-)}$) 为带正（负）荷的场，并且 $\phi^{(0)}$ 及 $\phi^{(0)+}$ 为成对的厄密共轭中性场。这些场可以用厄密场来表示：

$$\phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

$$\phi^{(-)} = \phi^{(+)+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2),$$

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4),$$

$$\phi^{(0)+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 - i\phi_4).$$

注意，这里利用的约定是：在算符表述中，$\phi^{(+)}$ ($\phi^{(-)}$) 消灭一个带正(负)荷的标量粒子，并产生一个带负(正) 荷的标量粒子。对于场 $\phi^{(0)}$ 和 $\phi^{(0)+}$ 定义了类似的约定。这个约定也应用到其它的场，即是，往往利用一个场来消失场所代表的粒子，并产生它的反粒子。因此 e_L 消失一个左手电子，并产生一个右手正电子。标量场对总拉氏函数的贡献为

$$\mathscr{L}_{\text{标}} = \left(\partial_\mu \Phi^+ + \frac{ig'}{2}\Phi^+ B_\mu + ig\Phi^+ \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot \boldsymbol{A}_\mu\right) \times \left(\partial^\mu \Phi - \frac{ig'}{2} B^\mu \Phi - ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot \boldsymbol{A}^\mu \Phi\right) - V_s(\Phi), \qquad \text{(III.1.13)}$$

这里稳定势为

$$V_s(\Phi) = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2. \qquad \text{(III.1.14)}$$

其中 $\mu^2 < 0$，$\lambda > 0$. 在标量和轻子之间的相互作用，在自发对称破缺后它将引起轻子质量项，并且它被认为是汤川耦合：

$$\mathscr{L}_{\text{汤川}} = -G_e\{\bar{e}_R(\Phi^+ L_e) + (\bar{L}_e\Phi)e_R\}. \quad \text{(III.1.15)}$$

总拉氏函数的这部分显然在 $SU(2)_L$ 下为不变量. 在 $U(1)$ 下不变性的要求标量双态的超荷赋值为 $+1$. 给出 L_e 和 e_R 的超荷分别为 -1 和 -2. 两组轻子的超荷由它们的电荷确定，并且标量双态成员的电荷又由它们的超荷来确定.

在总集所有各部分以后，总拉氏函数为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_{\text{轻}} + \mathscr{L}_{YM} + \mathscr{L}_{\text{标}} + \mathscr{L}_{\text{汤川}} \\
&= \bar{L}_e i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu - ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}_\mu\right)L_e \\
&\quad + \bar{e}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)e_R \\
&\quad - \frac{1}{4}F^{(i)}_{\mu\nu}F^{(i)\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
&\quad + \left(\partial_\mu\Phi^+ + \frac{i}{2}g'B_\mu\Phi^+ + ig\Phi^+\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}\right) \\
&\quad \times\left(\partial^\mu\Phi - \frac{i}{2}g'B^\mu\Phi - ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}^\mu\Phi\right) \\
&\quad - V_s(\Phi) \\
&\quad - G_e\{\bar{e}_R(\Phi^+ L_e) + (\bar{L}_e\Phi)e_R\} \qquad \text{(III.1.16)}
\end{aligned}$$

在这一步，拉氏函数显然在 $SU(2)_L\otimes U(1)$ 的局部规范变换下为不变量的. 注意，只有两个独立的耦合常表征两个不变的群.

也应该注意到，现在理论的结构决不是唯一的. 群和粒子的数目二者都可以扩大. 特别是，标量粒子谱在轻子区段不用产生很多的效应就可以变得更加复杂了，并且所得到的 Higgs 谱将比现在的方案更为复杂. 在方程 (III.1.16) 中所给出的拉氏函数表示标准的 $SU(2)_L\otimes U(1)$ 模型的极小方

案，将简称之为极小模型。

Higgs 机制 如在 II.5 中所讨论，(III.1.16)的经典体系的真空结构由 $B_\mu = 0$; $A_\mu^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$; $L_e = 0$ 和 $e_R = 0$ 给出。对于这些场为零的自变数需要在这一点加以扼要重申：如果上面的场任何一个不为零，则会引起转动不变性的自发破缺，因此角动量不再守恒。当然这不是合乎需要的，因此矢量和旋量场的真空期待值为零。现在得到真空态是熟悉的事。

$$|\langle \Phi \rangle_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0, \quad v_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda} \tag{III.1.17}$$

选取

$$\langle \phi^{(+)} \rangle_0 = 0,$$

$$\langle \phi^{(0)} \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0. \tag{III.1.18}$$

因此

$$\langle \Phi \rangle_0 = V = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{III.1.19}$$

Higgs 机制通过 $SU(2)$ 区段内一个规范变换来完成，并且拉氏函数用变换后的场来表示。对于矢量和标量场，步骤已在 II.5 中讨论了。曾写出

$$\Phi(x) = U^{-1}(\xi(x))\Phi_0(x), \tag{III.1.20}$$

这里

$$\Phi_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H(x)}{\sqrt{2}} + \frac{v_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$U(\xi(x)) \equiv \exp\left\{-\frac{i}{v_0}\frac{\tau}{2}\cdot\xi(x)\right\}$$

$$\xi(x) \equiv (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x)) \tag{III.1.21}$$

中性标量场 $H(x)$ 是厄密的. 注意对于旋量的运用，是重要的. 为了产生轻子的质量，并对电磁相互作用得到适当的形式，右手单态 e_R 和 $SU(2)_L$ 双态 e_L 的较低分量在 $SU(2)$ 规范变换后必须是相同的(除手征性以外). 如果 e_R 和 e_L 在规范变换前是不同的，但它们确实是以确定的方式相联系. 因此，出现在方程 (III.1.8), (III.1.15) 和 (III.1.16) 中的左手双态 L_e 代换为

$$L'_e(x) = U^{-1}(\xi(x))L_e(x),$$

这里 L_e 由方程 (III.1.6) 给出. 现在进行一个 $SU(2)$ 变换:

$$\begin{aligned}
&\Phi(x) \to U(\xi(x))\Phi(x) = \Phi_0(x),\\
&L'_e(x) \to U(\xi(x))L'_e(x) = L_e(x),\\
&\tau\cdot A_\mu(x) \to \tau\cdot A'_\mu(x) = U(\xi(x))A_\mu(x)U^{-1}(\xi(x))\\
&\quad + \frac{i}{g}U(\xi(x))\partial_\mu U^{-1}(\xi(x)).
\end{aligned} \tag{III.1.22}$$

B_μ 和 e_R 并不改变. 为了简化符号，新矢量 A'_μ 将仍然表示为 A_μ. 由上面的限制，可以看出，$\mathscr{L}_{轻子}$ 和 $\mathscr{L}_{YM}$，方程 (III.1.8) 和 (III.1.9) 有原来的形式，但是 $\mathscr{L}'_{标}$ 和 $\mathscr{L}_{汤川}$ 被修正为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{标} = &\left(\partial_\mu\Phi_0^+ + \frac{i}{2}g'B_\mu\Phi_0^+ + ig\Phi_0^+\frac{\tau}{2}\cdot A_\mu\right)\\
&\times\left(\partial^\mu\Phi_0 - \frac{i}{2}g'B^\mu\Phi_0 - \frac{i}{2}g\tau\cdot A^\mu\Phi_0\right)
\end{aligned} \tag{III.1.23}$$

及

$$\mathscr{L}_{汤川} = -G_e\{\bar{e}_R(\Phi_0^+L_e) + (\bar{L}_e\Phi_0)e_R\}. \tag{III.1.24}$$

显然，现在任意的规范变换将改变 $\mathscr{L}_{标}$ 和 $\mathscr{L}_{汤川}$ 的形式，因为标量场并不保持它在 (III.1.21) 中所给出的形式 Φ_0. 仍然有一个残余的对称性，$SU(2)$ 和 $U(1)$ 的特殊组合:

$$U(\theta(x)) = \exp\{-iQ\theta(x)\}, \tag{III.1.25}$$

这里 Q 为方程 (III.1.4) 所给出的荷算符:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

显然 Φ_0 在 $U(1)$ 下为不变量:

$$U(\theta(x))\Phi_0=\Phi_0,$$

$$U(\theta(x))e_R=e^{i\theta}e_R,$$

$$U(\theta(x))L_e=\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e^{+i\theta}e_L\end{pmatrix},\ \text{等等}.$$

在该极小模型中要点在于,标量场是中性的,并且电子场在左手和右手表示中乘以相同的相因子. 为了保证固有的电磁相互作用和电子的质量项,这是必要的.

这里可以在 Higgs 机制是完整的规范中来研究谱及相互作用. 首先讨论拉氏函数被修正的部分. 令

$$\chi_-\equiv\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \chi_-^+\equiv(0,1),$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{标}&=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2+\frac{1}{8}(H+v_0)^2\chi_-^+\{g'B_\mu\\&\quad+g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{A}_\mu\}^2\chi_- -V_s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(H+v_0)\right)\\&=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2+\frac{1}{8}(H^2+2v_0H+v_0^2)\\&\quad\times(2g^2W_\mu^+W^{-\mu}+[g'B_\mu-gA_\mu^{(3)}]^2)\\&\quad-V_s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(H_0+v_0)\right),\end{aligned}$$

这里

$$W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{(1)}\mp iA_\mu^{(2)}),$$

$$V_s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(H+v_0)\right)=\frac{\mu^2}{2}(H+v_0)^2+\frac{\lambda}{4}(H+v_0)^4$$

$$=\frac{1}{4}\mu^2v_0^2+\frac{1}{2}(2\lambda v_0^2)H^2$$

$$+\lambda_0v_0H^3+\frac{\lambda}{4}H^4.$$

标量场 $H(x)$ 是 Higgs 场。现在

$$\mathscr{L}_{标}=\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2-\frac{1}{2}(2\lambda v_0^2)H^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{v_0g}{2}\right)^2\{(W_\mu^+)^2+(W_\mu^-)^2\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\right)^2z_\mu^2$$

$$+\frac{1}{8}(2v_0H+H^2)\{2gW_\mu^+W^{-\mu}+(g^2+g'^2)z_\mu^2\}$$

$$-\lambda v_0H^3-\frac{\lambda}{4}H^4. \qquad \text{(III.1.26)}$$

在上面的表示式中，进行了二中性矢量玻色子的对角化：

$$z_\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\{-gA_\mu^{(3)}+g'B_\mu\}, \qquad \text{(III.1.27a)}$$

$$A_\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\{g'A_\mu^{(3)}+gB_\mu\}. \qquad \text{(III.1.27b)}$$

这些新的场 A_μ 及 z_μ 意义是什么？旧的场 $A_\mu^{(3)}$ 和 B_μ 分别与同位旋流的第三分量和弱超荷流相耦合而具有耦合强度 g 和 $g'/2$. 因此，场 z_μ 与破缺的生成元 $I_{w3}-Y_w/2$ 相耦合，并且 A_μ 与守恒电荷算符 $I_{w3}+Y_w/2$ 相耦合。如以后将看到的，场 A_μ 可以认为是电磁场。方程 (III.1.26) 表明 H, $W^\pm$ 和 z_μ 现在是带质量的。它们的质量通过标量场的真空期待值及适当的耦合常数给出；

$$m_H^2 \equiv 2\lambda v_0^2,$$

$$M_w \equiv \frac{v_0 g}{2},$$

$$M_z \equiv \frac{v_0}{2}\sqrt{g^2+g'^2}. \qquad \text{(III.1.28)}$$

引入 Weinberg 角 θ_w 为

$$g'/g = \tan\theta_w \qquad \text{(III.1.29a)}$$

及

$$G \equiv \sqrt{g^2+g'^2}. \qquad \text{(III.1.29b)}$$

物理的中性矢量场可以通过 Weinberg 角写出:

$$z_\mu = -\cos\theta_w A_\mu^{(3)} + \sin\theta_w B_\mu,$$
$$A_\mu = \sin\theta_w A_\mu^{(3)} + \cos\theta_w B_\mu. \qquad \text{(III.1.30)}$$

拉氏函数 $\mathscr{L}_{YM}$ 和 $\mathscr{L}_{标}$ 现在可以写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{YM} = &-\frac{1}{4}(W^+_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4}(W^-_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4}z_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}A_{\mu\nu}^2\\
&+ iG\cos\theta_w(-\cos\theta_w z^{\mu\nu} + \sin\theta_w A^{\mu\nu})W^+_\mu W^-_\nu\\
&+ iG\cos\theta_w(W^-_{\mu\nu}W^{+\nu} - W^+_{\mu\nu}W^{-\nu})\\
&\times(-\cos\theta_w z^\mu + \sin\theta_w A^\mu)\\
&+ \frac{G^2}{2}\cos^2\theta_w[(W^+_\mu)^2(W^-_\nu)^2 - (W^+_\mu W^{-\mu})^2]\\
&+ G^2\cos^2\theta_w[\{W^+_\mu(-\cos\theta_w z^\mu + \sin\theta_w A^\mu)\}\\
&\times\{W^-_\nu(-\cos\theta_w z^\nu + \sin\theta_w A^\nu)\\
&- W^+_\mu W^{-\mu}(-\cos\theta_w z_\nu + \sin\theta_w A_\nu)^2],\end{aligned} \qquad \text{(III.1.31)}$$

这里

$$W^\pm_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^\pm_\nu - \partial_\nu W^\pm_\mu,$$
$$A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$
$$z_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu z_\nu - \partial_\nu z_\mu. \qquad \text{(III.1.32)}$$

拉氏函数的轻子部分现在可以写为

$$\mathscr{L}_{轻子} = \bar{\nu}_L i\partial\!\!\!/ \nu_L + \bar{e} i\partial\!\!\!/ e$$
$$+ \frac{g}{2\sqrt{2}}\{\nu\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+$$
$$+ \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-\}$$
$$- \frac{gg'}{G}\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu$$
$$- \frac{1}{2G}z_\mu\{(g'^2-g^2)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + 2g'^2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R$$
$$+ (g^2+g'^2)\nu_L\gamma^\mu\nu_L\}, \qquad \text{(III.1.33)}$$

这里显然可以把场 A_μ 认为是电磁场，而 $W_\mu^\pm$ 可以认为是传递弱相互作用的中间矢量玻色子. 耦合常数 g 和 g' 现在可以认为是已知的耦合常数:

$$\frac{gg'}{G} = e,$$
$$g\sin\theta_w = g'\cos\theta_w = G\sin\theta_w\cos\theta_w = e,$$
$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}M_w^{-1}\right)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}},\quad G = 2(\sqrt{2}\,G_F m_z^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$g = 2(\sqrt{2}\,G_F m_w^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III.1.34a)}$$

这里 G_F 为旧的弱相互作用的四费米子耦合的耦合常数，并且数值为[10,11]

$$G_F = \frac{1.024\times10^{-5}}{m_p^2},$$

这里 m_p 为质子的质量. 由上面的结果，理论的许多参数可以用一个参数，即 Weinberg 角来确定或表示:

$$M_w = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}\,G_F}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{coc}\theta_w = \frac{37.34}{\sin\theta_w}\ \mathrm{Gev},$$
$$M_z = M_w\sec\theta_w = \frac{74.68}{\sin 2\theta_w}\ \mathrm{Gev}. \qquad \text{(III.1.34b)}$$

标量的真空期待值为

$$v_0 = \frac{10^3}{2\sqrt{3\sqrt{2}}} m_p \text{ 或 } v_0^2 = 1/(\sqrt{2}G_F)$$

在方程(III.1.33)中,除通常已知的项以外,还有与中性矢量玻色子 z^0 相互作用的中性流项. 对于中微子,耦合为 $V-A$ 类型,这里 V 代表矢量型的流,而 A 代表轴矢量型的流,但是,对于电子,$V-A$ 型和 $V+A$ 型二者都出现. 更显然地,中性流相互作用项可以写为

$$\begin{aligned}
&-G\left\{\bar{L}_e\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}L_e - \sin^2\theta_w j_\mu^{(em)}\right\}z^\mu \\
&= \frac{-1}{2}\sqrt{\sqrt{2}\,G_F M_z^2}\,\{\bar{e}\gamma^\mu(a_v+\gamma_5)e \\
&\quad + \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu\}z_\mu, \\
&= -\frac{e}{\sin(2\theta_w)}\{\bar{e}\gamma^\mu(a_v+\gamma_5)e + \bar{\nu}(1-\gamma_5)\nu\}z_\mu.
\end{aligned} \tag{III.1.35a}$$

这里

$$j_\mu^{(em)} = \bar{e}\gamma_\mu e$$

并且

$$a_v = 4\sin^2\theta_w - 1.$$

写出方程(III.1.35a)更有启发性的方法是通过弱同位旋的第三分量和左手及右手表示的电荷:

$$\begin{aligned}
&-\frac{e}{\sin\theta_w\cos\theta_w}\{\bar{L}_e\gamma_\mu(T_{3L} - Q_L\sin^2\theta_w)L_e \\
&\quad + \bar{e}_R\gamma_\mu(T_{3R} - Q_R\sin^2\theta_w)\}z^\mu,
\end{aligned} \tag{III.1.35b}$$

这里 T_{3L} 和 T_{3R} 分别为左手和右手双态的第三分量,并且 Q_L 和 Q_R 为电荷算符. 在现在的情形:

$$T_{3L} = \tau_3/2,$$
$$T_{3R} = 0,$$

$$Q_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_R = -1.$$

电子中性流耦合强度的矢量部分 a_v 作为 $\sin^2\theta_w$ 的函数作图，如图 III.1 所示：

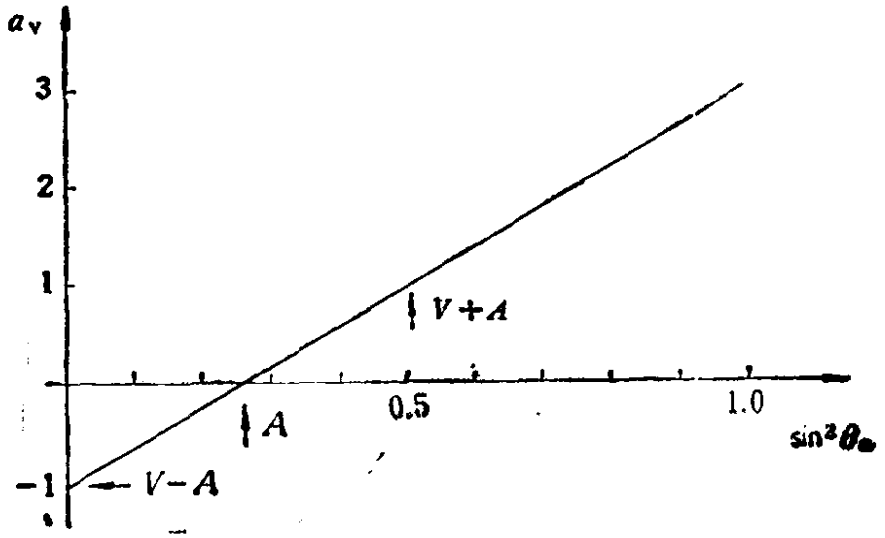


图 III.1

弱相互作用实验目前给出值

$$\sin^2\theta_w = 0.22,$$

在高阶微扰效应不存在时，它给出

$$M_w = 79.6\text{Gev},$$

$$M_z = 90.1\text{Gev}. \qquad \text{(III.1.36)}$$

及

$$a_v = -0.12.$$

带荷轻子的中性流耦合近似地为纯轴矢量型。这里包括了中性流的简短讨论。由方程 (III.1.30) 可以看出，z^0 与弱超荷耦合具有强度为 $\sin\theta_w$，与弱同位旋流的第三分量耦合具有强度为 $-\cos\theta_w$。考虑到适当的耦合常数，拉氏函数的这部分可以写为

$$z^{\mu}\left\{\left[\frac{1}{2}g\cos\theta_w-\frac{1}{2}g\sin\theta_w\right]\bar{e}_L\gamma_\mu e_L-g'\sin\theta_w\bar{e}_R\gamma_\mu e_R\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}g\cos\theta_w-\frac{1}{2}g'\sin\theta_w\right)\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L\right\}.$$

这正好就是方程(III. 1.35). 出现在方程(III. 1.33)中的电磁相互作用可以类似的方式写出来.

现在拉氏函数的其余部分 $\mathscr{L}_{\text{场川}}$ 可以如下写出:

$$\mathscr{L}_{\text{场川}}=-\frac{G_e}{\sqrt{2}}(H+v_0)\{\bar{e}_Re_L+\bar{e}_Le_R\}$$
$$=-\frac{G_ev_0}{\sqrt{2}}\bar{e}e-\frac{G_e}{\sqrt{2}}\bar{e}eH. \qquad \text{(III.1.37)}$$

这使带荷轻子得到一个质量为

$$m_e=\frac{G_ev_0}{\sqrt{2}},$$

它给出带荷轻子与 Higgs 粒子的耦合为

$$\frac{G_e}{\sqrt{2}}=\frac{m_e}{v_0}=\frac{m_e}{m_p}(\sqrt{2}G_Fm_p^2)^{\frac{1}{2}}=3.81\times10^{-3}(m_e/m_p).$$

这表明, Higgs 粒子与一个给定轻子的耦合正比于该轻子的质量. 一般,对于轻子 l:

$$\frac{G_l}{\sqrt{2}}=3.81\times10^{-3}(m_e/m_p).$$

因此

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{G_l}{\sqrt{2}}\right)^2=\begin{cases}4.69\times10^{-11}\alpha, & \text{对于 } e,\\ 2.01\times10^{-6}\alpha, & \text{对于 } \mu,\\ 5.72\times10^{-4}\alpha, & \text{对于 } \tau,\end{cases} \qquad \text{(III.1.38)}$$

这里 α 为电磁精细结构常数. 对于轻子的 Higgs 耦合是相当弱的.

到此所讨论的对电子双态的处理可以推广到 μ 和 τ 双

态．唯一的差别是方程(III.1.58)中所列举的 Higgs 耦合．

III.2 在 R_ξ 规范中 Glashow-Weinberg-Salam 模型对于轻子的 Feynman 图形规则的推导

在前节中讨论了极小 Glashow-Weinberg-Salam 模型合成的谱及自发对称破缺．模型的预言经过一切实验检验之后至今留传．模型已发展到这样的程度，把模型一切可能的预言与实验数据，特别是用微扰计算的高阶效应来作详细的比较，是有价值的．近几十年内，量子电动力学所经受的各种类型的检验经验值得重视．为了对极小标准模型进行更严格的检验，在文献中研究了高阶图形中由于虚 $W^\pm$ 及 Z^0 贡献的辐射修正．由于事实上在一个给定阶的一个给定过程中存在着许多图形，在现在的情形下计算任务比之于在量子电动力学中有更多的要求，例如，考虑的过程有 μ 子反常矩[13]，$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$[14]，$e^+ + e^- \to e^+ + e^-$[15]对 W 及 Z^0 玻色子的质量[16,17]的辐射修正等等．

在本节中，详细推导可供计算高阶过程使用的 Feynman 规则．在§ I.3 中已讨论了所遵循的方法[13]．首先写出理论的生成泛函，然后说明重要的中间步骤(不感兴趣的读者可以跳过这种详细的讨论．)在本节末给出 R_ξ 规范中的总有效拉氏函数和 Feynman 图形规则．

在前节的拉氏函数的各部分中出现的场代表物理粒子，不曾保留有非物理的粒子．称这种形式的拉氏函数为幺正规范(U 规范)．结果表明，量子化可以在不同的规范中方便地实现，首先 't Hooft[17] 研究了这个问题，其中保留有非物理的粒子．有由规范固定项的泛函行列式所引起的鬼项．最后的拉氏函数的谱包括了§ III.1 中出现的一切物理粒子，及由

原来复标量双态的三个非物理的标量场和四组Faddeev-Popov鬼（每组二个）。这被称为 R_ξ 规范[7,8,10,18]。像 S 矩阵这样的物理量当然与规范的选择无关[6,7,8,9]。

利用拉氏函数(III.1.16)，写出生成泛函，按照第 I 章所讨论的规则来进行量子化。写出

$$\begin{aligned}&\tilde{Z}(\eta_{eL},\bar{\eta}_{eL};\eta_\nu,\bar{\eta}_\nu;\eta_{eR},\bar{\eta}_{eR};J^a_\mu;J_\mu;J,J^+)\\&=N^{-1}\int\prod\mathscr{D}A^a_\mu\cdots\mathscr{D}\Phi^+\Delta_F[A^a_\mu,B_\mu,\Phi]\prod_{d=1}^{4}\delta(F^d-f^d)\\&\quad\times\exp\{i\int d^4x[\mathscr{L}(x)+J^a_\mu A^{a\mu}+J_\mu B^\mu+J^+\Phi+\Phi^+J\\&\quad+\bar{e}_L\eta_{eL}+\bar{\eta}_{eL}e_L+\bar{e}_R\eta_{eR}+\bar{\eta}_{eR}e_R+\bar{\eta}_\nu\nu_L+\bar{\nu}_L\eta_\nu]\},\end{aligned}\tag{III.2.1}$$

这里

$$\begin{aligned}\prod\mathscr{D}A^a_\mu\cdots\mathscr{D}\Phi^+\equiv\prod&\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}B_\mu\mathscr{D}e_L\mathscr{D}\bar{e}_L\mathscr{D}e_R\\&\cdot\mathscr{D}\bar{e}_R\mathscr{D}\nu_L\mathscr{D}\bar{\nu}_L\mathscr{D}\Phi\mathscr{D}\Phi^+.\end{aligned}\tag{III.2.2}$$

外源 J^a_μ, J_μ,及 J 是与 A^a_μ, B_μ 及 Φ 有关的；η_{eL}, η_ν, 和 η_{eR} 是与 e_L, ν_L 和 e_R 有关的。 μ 和 τ 双态可以直接的方式添加它们的外源，并对它们的场变数积分而纳入表述中。取规范条件为

$$F^a[A^a_\mu,B_\mu,\Phi]=f^a,\quad\alpha=1,2,3,4,$$

对于四个规范场 A^a_μ, $\alpha=1,2,3$, 及 B_μ, $\alpha=4$. 规范条件 $F^a[A^a_\mu,B_\mu,\Phi]$ 的形式连同 Faddeev-Popov 行列式将在以后选取。

对 f^a 求平均，得到生成泛函为

$$\begin{aligned}&Z[\eta_{eL},\bar{\eta}_{eL},\cdots,J,J^+]\\&=\int\prod_{a=1}^{4}df^a\tilde{Z}[\eta_{eL},\bar{\eta}_{eL};\cdots;J,J^+]\\&\quad\times\exp\left\{-\frac{i}{2}\prod_{a=1}^{4}\xi^a(f^a)^2\right\}\end{aligned}$$

$$= \int \Pi \mathscr{D} A_\mu^a \cdots \mathscr{D} \Phi^+ \Delta_F[A_\mu^a, B_\mu, \Phi]$$

$$\times \exp\left\{ i \int d^4x [\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}_{gf}(x) \right.$$

$$\left. + J_\mu^a A_\mu^a + \cdots + \bar{\nu}_L \eta_\nu] \right\}, \tag{III.2.3}$$

这里规范固定的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{4} \xi^a (F^a[A_\mu^a, B_\mu, \Phi])^2. \tag{III.2.4}$$

如前节所做的一样，标量场的非物理自由度并没有被变换去掉。反之，只有标量场的真空期待值分解为因子。令

$$\Phi = \Phi' + V, \tag{III.2.5}$$

这里

$$\Phi' = \begin{pmatrix} S^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H + v_0) \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v_0 = \sqrt{-\mu^2/\lambda}, \tag{III.2.6}$$

此处H为 Higgs 场，$S^\pm$ 及 χ 为非物理的标量场，在前节的处理中，这些标量场在U规范中被吸收在 $W^\pm$ 及 Z^0 的纵向部分中。拉氏函数的一些部分，即 $\mathscr{L}_{标}$ 和 $\mathscr{L}_{汤川}$ 包含标量场，通过方程 (III.2.9) 中所给出的量，写为

$$\mathscr{L}_{标} = \left(\partial_\mu \Phi' + \frac{ig'}{2} \Phi^{+\prime} B_\mu + ig \Phi^+ \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \right)$$

$$\times \left(\partial^\mu \Phi' - \frac{ig'}{2} B^\mu \Phi' - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}^\mu \Phi' \right)$$

$$- i \left(\partial_\mu \Phi' + \frac{ig'}{2} \Phi' B_\mu + ig \Phi' \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \right)$$

$$\times \left(\frac{g'}{2} B^\mu V + g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}^\mu V \right)$$

$$+ i\left(\frac{g'}{2} V^+ B_\mu + g V^+ \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}_\mu\right)$$
$$\times\left(\partial^\mu \Phi' - \frac{i}{2} g' B_\mu \Phi' - i g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{A}^\mu \Phi'\right)$$
$$+ \frac{1}{4}(g' V^+ B_\mu + g V^+ \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu)$$
$$\times(g' B^\mu V + g \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}^\mu V)$$
$$- V_s(\Phi' + V), \qquad \text{(III.2.7a)}$$

$$V_s(\Phi' + V) = \mu^2(\Phi'^+\Phi' + \Phi'^+ V + V^+\Phi' + V^+ V)$$
$$+ \lambda\{(\Phi'^+\Phi')^2 + 2(\Phi'^+ V + V^+\Phi')$$
$$\cdot (\Phi'^+\Phi' + V^+ V) + 2(\Phi'^+\Phi)(V^+ V)$$
$$+ (\Phi'^+ V + V^+\Phi')^2 + (V^+ V)^2\} \qquad \text{(III.2.7b)}$$

及

$$\mathscr{L}_{\text{汤川}} = - G_e\{\bar{e}_R(\Phi'^+ L_e) + (\bar{L}_e \Phi') e_R$$
$$+ \bar{e}_R(V^+ L_e) + (\bar{L}_e V) e_R\}. \qquad \text{(III.2.8)}$$

可以利用正交变换方程 (III.1.30) 和表示式

$$g' B_\mu + g\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu = \begin{bmatrix} G(-\cos 2\theta_W Z_\mu + \sin 2\theta_W A_\mu) & \sqrt{2}\, g W_\mu^+ \\ \sqrt{2}\, g W_\mu^- & G Z_\mu \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2.9)}$$

把 (III.2.7) 写出来. 现在方程 (III.2.7a) 可以详细写为

$$\mathscr{L}_{\text{标}} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu H)^2 - M_H^2 H^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \partial^\mu S^+ \partial_\mu S^-$$
$$+ \frac{1}{2} M_W^2 [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] + \frac{1}{2} M_Z^2 (Z_\mu)^2$$
$$+ i M_W (W_\mu^- \partial^\mu S^+ - W_\mu^+ \partial^\mu S^-) - M_Z \partial^\mu \chi Z_\mu$$
$$+ \frac{i}{2} G(-\cos 2\theta_W Z_\mu + \sin 2\theta_W A_\mu) S^- \overleftrightarrow{\partial}^\mu S^+$$
$$+ \frac{i}{2} G \cos\theta_W [W_\mu^+ (S^- \overleftrightarrow{\partial}^\mu (H + i\chi))$$

$$+ W_\mu^-((H - i\chi)\overleftrightarrow{\partial}^\mu S^+)] + \frac{1}{2} GZ_\mu\chi\overleftrightarrow{\partial}^\mu H$$

$$+ \frac{1}{4} S^+S^-[G^2(-\cos 2\theta_W Z_\mu$$

$$+ \sin 2\theta_W A_\mu)^2 + 2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu}]$$

$$+ \frac{gG}{4}([1 - \cos 2\theta_W]Z^\mu + \sin 2\theta_W A^\mu)$$

$$\times\{[W_\mu^+ S^- + W_\mu^- S^+]H + i\chi[W_\mu^+ S^- - W_\mu^- S^+]\}$$

$$+ \frac{1}{8}(2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + G^2 Z_\mu^2)(H^2 + \chi^2)$$

$$+ \frac{1}{2} GM_W[(1 - \cos 2\theta_W)Z^\mu + \sin 2\theta_W A^\mu]$$

$$\times[S^- W_\mu^+ + S^+ W_\mu^-]$$

$$+ \frac{1}{2} H\{2g\mathrm{M}_W W_\mu^+ W^{-\mu} + GM_Z(Z_\mu)^2\}$$

$$- 2\lambda v_0 H\left(S^+S^- + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\chi^2\right)$$

$$- \lambda\left\{(S^+S^-)^2 + \frac{1}{4}H^4 + \frac{1}{4}\chi^4\right.$$

$$\left. + S^+S^-(H^2 + \chi^2) + \frac{1}{2}\chi^2 H^2\right\} \qquad \text{(III.2.10a)}$$

这里删去了一个常数项. Higgs 玻色子质量为

$$m_H = 2\lambda v_0^2.$$

在 $\mathscr{L}_{\text{标}}$ 中有两点要注意：第一，非物理的标量并不显示质量项；第二，在带质量的矢量玻色子和相同荷的非物理标量之间存在着直接的耦合项. 往后将看到，规范固定项的适当选取可使直接的耦合项消去，并且同时对非物理的标量给出质量.

现在 $\mathscr{L}_{\text{场}}$ 为

$$\mathscr{L}_{\text{场}} = -m_e\bar{e}e - \frac{\sqrt{2}\,m_e}{v_0}\left\{\bar{e}_R\nu_L S^- + \bar{\nu}_L e_R S^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}eH + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}i\gamma_5 e\chi\right\}. \quad \text{(III.2.10b)}$$

这里

$$m_e = \frac{G_e v_0}{\sqrt{2}}, \quad v_0 = 1/\sqrt{\sqrt{2}\,G_F}.$$

拉氏函数的其余部分 $\mathscr{L}_{\text{轻子}}$ 和 $\mathscr{L}_{YM}$ 分别在方程 (III.1.33) 及 (III.1.31) 中给出. 在这里通过方程 (III.1.35) 将它们重写为

$$\mathscr{L}_{\text{轻子}} = \bar{\nu}_L i\partial\!\!\!/\nu_L + \bar{e}i\partial\!\!\!/e + \frac{g}{2\sqrt{2}}\{\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-\} - \frac{gg'}{G}\bar{e}\gamma^\mu eA_\mu - \frac{e}{2\sin 2\theta_W} \quad \text{(III.1.10c)}$$
$$\times\{\bar{e}\gamma^\mu(4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma_5)e + \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu\}Z_\mu$$

及

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{YM} = &-\frac{1}{4}\{(W^+_{\mu\nu})^2 + (W^-_{\mu\nu})^2 + (Z_{\mu\nu})^2 + (A_{\mu\nu})^2\}\\ &+ iG\cos\theta_W(-\cos\theta_W Z^{\mu\nu} + \sin\theta_W A^{\mu\nu})W^+_\mu W^-_\nu\\ &+ iG\cos\theta_W(-\cos\theta_W Z^\mu + \sin\theta_W A^\mu)\\ &\times(W^-_{\mu\nu}W^{\nu+} - W^+_{\mu\nu}W^{-\nu})\\ &+ \frac{G^2}{2}\cos^2\theta_W\{(W^+_\mu)^2(W^-_\nu)^2 - (W^+_\mu W^{-\mu})^2\}\\ &+ G^2\cos^2\theta_W\{W^+_\mu W^-_\nu(\cos^2\theta_W Z^\mu Z^\nu + \sin^2\theta_W A^\mu A^\nu\\ &- \sin\theta_W\cos\theta_W[Z^\mu A^\nu + A^\mu Z^\nu])\\ &- (W^+_\mu W^{-\mu})(\cos^2\theta_W Z^2_\nu + \sin^2\theta_W A^2_\nu\\ &- 2\sin\theta_W\cos\theta_W A_\nu Z^\nu)\}. \end{aligned} \quad \text{(III.2.10d)}$$

其次,有必要选取规范固定函数,它又确定鬼拉氏函数.记住,规范固定项的作用之一是抵消带质量的矢量玻色子和方程 (III.2.10a) 中出现的非物理标量之间的直接耦合项. 取

$$F^a = \partial^\mu A^a_\mu - \frac{ig}{\xi^a}\left(V^+\frac{\tau^a}{2}\Phi - \Phi^+\frac{\tau^a}{2}V\right), \quad a = 1, 2, 3, \tag{III.2.11a}$$

$$F^4 = \partial^\mu B_\mu - \frac{ig'}{\xi^4}\left(V^+\frac{1}{2}\Phi - \Phi\frac{1}{2}V\right), \tag{III.2.11b}$$

这里 ξ^a, $a = 1, 2, 3$ 和 4，为正的常数；它们与规范参数相联系。让我们取

$$\xi^1 = \xi^2 \equiv \xi_+, \quad \xi^3 = \xi^4 = \xi_0.$$

比较方便地是定义下面的矩阵：

$$\mathscr{F} \equiv \sum_{a=1}^{3}\sqrt{\xi^a}F^a\frac{\tau^a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^4}F^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$$

其中

$$f_1 = \sqrt{\xi_0}\,(\partial^\mu A^{(3)}_\mu + \partial^\mu B_\mu + \frac{v_0}{2\sqrt{\xi_0}}(-g + g')\chi$$

$$f_2 = \sqrt{2\xi_+}\partial^\mu W^+_\mu + \frac{igv_0}{\sqrt{2\xi_+}}S^-$$

$$f_3 = \sqrt{2\xi_+}\partial^\mu W^-_\mu - \frac{igv_0}{\sqrt{2\xi_+}}S^+$$

$$f_4 = \sqrt{\xi_0}\,(-\partial^\mu A^3_\mu + \partial^\mu B_\mu) + \frac{v_0}{\sqrt{2\xi_0}}(g + g')\chi$$

于是 (III.2.12)

$$\begin{aligned} -\mathscr{L}_{gf} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\xi^a(F^{(a)})^2 = \mathrm{Tr}(\mathscr{F}^2) \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\xi_0\left[\partial^\mu A^3_\mu + \partial^\mu B_\mu + \frac{i}{2\xi_0}(-g + g')v_0\chi\right]^2\right. \\ &\quad + \xi_0\left[-\partial^\mu A^3_\mu + \partial^\mu B_\mu + \frac{1}{2\xi_0}(g + g')v_0\chi\right]^2 \\ &\quad \left. + 2(2\xi_+)\left[\partial^\mu W^+_\mu - \frac{ig}{2\xi_+}S^+\right]\left[\partial^\nu W^-_\nu + \frac{ig}{2\xi_+}S^-\right]\right\} \\ &= \frac{\xi_0}{2}(\partial^\mu A^3_\mu)^2 + \frac{\xi_0}{2}(\partial^\mu B_\mu)^2 + \frac{1}{8\xi_0}(g^2 + g'^2)(v_0\chi)^2 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}v_0\chi(-g\partial^\mu A_\mu^3+g'\partial^\mu B_\mu)$$
$$+\xi_+(\partial^\mu W_\mu^+)(\partial^\nu W_\nu^-)$$
$$+\frac{igv_0}{2}(\partial^\mu W_\mu^+S^- - \partial^\mu W_\mu^-S^+)+\frac{g^2v_0^2}{4\xi_+}S^+S^-$$
$$=\frac{\xi_0}{2}[(\partial^\mu A_\mu)^2+(\partial^\mu Z_\mu)^2]+\frac{M_Z^2}{2\xi_0}\chi^2+M_Z\chi\partial_\mu Z^\mu$$
$$+\xi_+(\partial^\mu W_\mu^+)(\partial^\nu W_\nu^-)-iM_W(\partial^\mu W_\mu^-S^+$$
$$-\partial^\mu W_\mu^+S^-)+\frac{1}{\xi_+}M_W^2S^+S^-. \qquad \text{(III.1.13)}$$

由方程 (III.2.10a) 及 (III.2.13)，标量部分和规范固定部分之和为

$$\mathscr{L}_{标}+\mathscr{L}_{gf}$$
$$=\frac{1}{2}[(\partial_\mu H)^2+m_H^2H^2]+\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\chi)^2-\frac{M_Z^2}{\xi_0}\chi^2\right]$$
$$+\partial^\mu S^+\partial_\mu S^- - \frac{M_W^2}{\xi_+}S^+S^- - \frac{\xi_0}{2}[(\partial^\mu A_\mu)^2+(\partial^\mu Z_\mu)^2]$$
$$-\xi_+(\partial^\mu W^+)(\partial_\mu W^-)$$
$$+\frac{1}{2}M_W^2[(W_\mu^+)^2+(W_\mu^-)^2]+\frac{1}{2}M_Z^2Z_\mu^2$$
$$+\frac{i}{2}G(-\cos 2\theta_W Z_\mu+\sin 2\theta_W A_\mu)S^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu S^+$$
$$+\frac{i}{2}G\cos\theta_W[W_\mu^+\{S^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu(H+i\chi)\}$$
$$-W_\mu^-\{S^+\overleftrightarrow{\partial}^\mu(H-i\chi)]+\frac{1}{2}GZ_\mu\chi\overleftrightarrow{\partial}^\mu H$$
$$+\frac{1}{4}S^+S^-\{G^2(-\cos 2\theta_W Z_\mu+\sin 2\theta_W A_\mu)^2$$
$$+2g^2W_\mu^+W^{-\mu}\}+\frac{1}{4}gG\{(1-\cos 2\theta_W)Z^\mu$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sin 2\theta_W A^\mu\}\{[W^+_\mu S^- + W^-_\mu S^+]H \\
&+ i\chi(W^+_\mu S^- - W^-_\mu S^+)\} \\
&+ \frac{1}{8}(2g^2 W^+_\mu W^{-\mu} + G^2 Z^2_\mu)(H^2 + \chi^2) \\
&+ \frac{1}{2} GM_W[(1 - \cos 2\theta_W)Z^\mu \\
&+ \sin 2\theta_W A^\mu]\{W^+_\mu S^- + W^-_\mu S^+\} \\
&+ \frac{1}{2} H\{2gM_W W^+_\mu W^{-\mu} + GM_Z Z^2_\mu\} \\
&- 2\lambda v_0 \left\{S^+S^- + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}H^2\right\} H \\
&- \lambda\left\{(S^+S^-)^2 + S^+S^-(H^2 + \chi^2) + \frac{1}{4}\chi^4\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\chi^2 H^2 + \frac{1}{4}H^4\right\},
\end{aligned}
\tag{III.2.14}
$$

这里利用了下面的符号

$$
\phi_1 \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi_2 \equiv \phi_1 \partial^\mu \phi_2 - \partial^\mu \phi_1 \phi_2 .
$$

在上面的表示中，矢量玻色子与标量直接耦合项，即是

$$
- iM_W \partial^\mu (W^+_\mu S^- - W^-_\mu S^+) - M_Z \partial^\mu (Z_\mu \chi) \tag{III.2.15}
$$

由于它们是全导数而在基态未加考虑。

现在可以推导鬼拉氏函数了。这里需要更紧凑的符号，(III.2.11a) 及 (III.2.11b) 可以写为

$$
F^\alpha = \partial^\mu V^\alpha_\mu - \frac{ig^\alpha}{\xi^\alpha}[V^+ T^\alpha \Phi - \Phi T^\alpha V] \tag{III.2.16}
$$

这里 α 从 1 到 4，并且

$$
\left.
\begin{aligned}
g^\alpha &= g'^\alpha \\
V^\alpha_\mu &= A^\alpha_\mu \\
T^\alpha &= \frac{\tau^\alpha}{2}
\end{aligned}
\right\} \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{III.2.17a}
$$

$$g^4 = g'$$
$$V_\mu^4 = B_\mu \qquad \text{(III.2.17b)}$$
$$T^4 = \frac{1}{2}$$

在方程 (III.2.16) 中下面划线的指标表示重复指标不求和。在无限小的 $SU(2)\otimes U(1)$ 变换下矢量玻色子场按照下式变化

$$V_\mu^a \to V_\mu^a + E^{abc}(g^b\theta^b)V_\mu^c - \partial_\mu\theta^a, \qquad \text{(III.2.18a)}$$
$$\Phi \to (1 - iT^a g^a\theta^a)\Phi. \qquad \text{(III.2.18b)}$$

这里

$$E^{abc} = \in^{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3,$$
$$E^{4bc} = 0.$$

由方程 (III.2.18a) 和 (III.2.18b) 的变分所引起的改变为

$$\begin{aligned}\delta F^a &= (g^b E^{abc}\partial^\mu(\theta^b V_\mu^c) - \partial_\mu\partial^\mu\theta^a) \\ &\quad - \frac{g^a}{\xi^a} g^\beta\theta^\beta[V^+T^aT^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^aV] \\ &= -\partial^\mu[\underline{\underline{\tilde{D}}}_\mu^{a\beta}\theta^\beta(x)] \\ &\quad - \frac{g^a}{\xi^a} g^\beta\theta^\beta[V^+T^aT^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^aV] \qquad \text{(III.2.19)}\end{aligned}$$

这里

$$\tilde{D}_\mu^{a\beta} = \delta^{a\beta}\partial_\mu - g^{\underline{\underline{\beta}}}E^{a\underline{\underline{\beta}}c}V_\mu^c.$$

所遵循的步骤在 §II.3 中已讨论了。计算由于规范变换在规范固定函数中的位移，是必要的：

$$\begin{aligned}&F^a[V_\mu^a, \Phi] \to F^a[V_\mu^a + \delta V_\mu^a, \Phi + \delta\Phi] \\ &= F^a[V_\mu^a, \Phi] - \int d^4y \left\{\frac{\delta F^a[V_\mu^a, \Phi]}{\delta V_\nu^\beta(y)} D_\nu^{\beta\gamma}(y)\theta^\gamma(y)\right. \\ &\quad \left. + \frac{g^a}{\xi^a} g^\beta[V^+T^aT^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^aV]\theta^\beta\delta(x - y)\right\}. \qquad \text{(III.2.20)}\end{aligned}$$

于是

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu^a, B_\nu, \Phi] = \int \pi d\theta^\alpha \pi\delta\left(-\int d^4y \frac{\delta F^\alpha}{\delta A_\nu^\beta(y)} \tilde{D}_\nu^{\beta\sigma}(y)\theta^\sigma(y) - \frac{g^\alpha}{\xi^\alpha} g^\beta[V^+T^\alpha T^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^\alpha V]\theta^\beta\right)$$

$$= [\det(M_F)^{-1}], \qquad \text{(III.2.21)}$$

这里

$$M_F^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\delta F^\alpha[x]}{\delta V_\mu^\sigma(y)} \tilde{D}_\mu^{\sigma\beta}(y) + \frac{g^\alpha}{\xi^\alpha} g^\beta[V^+T^\alpha T^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^\alpha V]\delta^4(x-y)$$

$$= \partial_x^\mu\delta^4(x-y)\tilde{D}_\mu^{\alpha\beta}(y) + \frac{g^\alpha}{\xi^\alpha} g^\beta[V^+T^\alpha T^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^\alpha V]\delta^4(x-y). \qquad \text{(III.2.22)}$$

常数相乘的因子 $\sqrt{\xi^\alpha}$ 被删去了，写出

$$[\det(M_F)^{-1}] = \int \prod_{\alpha=1}^{4} \mathscr{D}\bar{C}^\alpha \mathscr{D}C^\alpha \cdot \exp\left\{i\int d^4x \left[-\partial^\mu\bar{C}^\alpha\tilde{D}_\mu^{\alpha\beta}C^\beta + \frac{g^\alpha}{\xi^\alpha}\bar{C}^\alpha(V^+T^\alpha T^\beta\Phi + \Phi T^\beta T^\alpha V)C^\beta\right]\right\}, \qquad \text{(III.2.23)}$$

这里 C^α 和 $\bar{C}^\alpha$，$\alpha = 1, 2, 3, 4$ 为鬼场，它们是满足 Fermi 统计的自旋为零的场。在方程 (III.2.23) 中出现的有效拉氏函数为鬼拉氏函数。

$$\mathscr{L}_{鬼} = -\partial^\mu\bar{C}^\alpha\tilde{D}^{\alpha\beta}C^\beta + \frac{g^\alpha g^\beta}{\xi^\alpha}\bar{C}^\alpha[V^+T^\alpha T^\beta\Phi + \Phi^+T^\beta T^\alpha V\}. \qquad \text{(III.2.24)}$$

该拉氏函数可以通过确定电荷的鬼场重写为

$$C^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(C^{1}\mp iC^{2}),\quad \bar{C}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{C}^{1}\pm i\bar{C}^{2}),$$

(III.2.25a)

$$C_Z=-\cos\theta_W C^3+\sin\theta_W C^4, \qquad \text{(III.2.25b)}$$

$$C_A=\sin\theta_W C^3+\sin\theta_W C^4. \qquad \text{(III.2.25c)}$$

更方便地是利用矩阵符号. 令

$$C\equiv\begin{pmatrix}C^1\\C^2\\C^3\\C^4\end{pmatrix},\quad \bar{C}=(\bar{C}^1,\bar{C}^2,\bar{C}^3,\bar{C}^4), \qquad \text{(III.2.26a)}$$

$$\tilde{D}_\mu=(\tilde{D}_\mu^{\alpha\beta}), \qquad \text{(III.2.26b)}$$

$$\Lambda=\left(\frac{g^\alpha}{\xi^\alpha}\{V^+T^\alpha T^\beta\Phi+\Phi^+T^\beta T^\alpha V\}\right), \qquad \text{(III.2.26c)}$$

这里 $\tilde{D}_\mu$ 和 Λ 为 4×4 矩阵，分别具有它们有关定义表示式的括号中所给出的元素. 显然，它们为

$$\tilde{D}_\mu=\begin{pmatrix}\partial_\mu & -gV_\mu^3 & gV_\mu^2 & 0\\ -gV_\mu^3 & \partial_\mu & -gV_\mu^1 & 0\\ -gV_\mu^2 & gV_\mu^1 & \partial_\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \partial_\mu\end{pmatrix}$$

及

$$\Lambda=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\frac{g^2v_0}{\xi_+}H & \frac{g^2v_0}{\xi_+}\chi & \frac{g^2v_0}{\sqrt{2}\,\xi_+}(S^++S^-) & \frac{gg'v_0}{\sqrt{2}\,\xi_+}(S^++S^-)\\ \frac{-g^2v_0}{\xi_+}\chi & \frac{g^2v_0}{\xi_+}H & \frac{ig^2v_0}{\sqrt{2}\,\xi_+}(S^+-S^-) & \frac{igg'v_0}{\sqrt{2}\,\xi_+}(S^+-S^-)\\ \frac{-g^2v_0}{\sqrt{2}\,\xi_0}(S^++S^-) & \frac{-ig^2v_0}{\sqrt{2}\,\xi_0}(S^+-S^-) & \frac{g^2v_0}{\xi_0}H & \frac{-gg'}{\xi_0}H\\ \frac{gg'}{\sqrt{2}\,\xi_0}(S^++S^-) & \frac{igg'}{\sqrt{2}\,\xi_0}(S^+-S^-) & \frac{-gg'}{\xi_0}H & \frac{g'^2v_0}{\xi_0}H\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{g^2}{\xi_+}v_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2}{\xi_+}v_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g^2v_0^2}{\xi_0} & \frac{-gg'}{\xi_0}v_0^2 \\ 0 & 0 & \frac{-gg'}{\xi_0}v_0^2 & \frac{g'^2}{\xi_0}v_0^2 \end{bmatrix}.$$

鬼拉氏函数现在可以重写为

$$\mathscr{L}_{鬼} = -[\partial^\mu \bar{C}\tilde{D}_\mu C - C\Lambda C]. \qquad \text{(III.2.27)}$$

下面的变换把具有确定电荷的鬼场重新表示为:

$$\tilde{C} = \Gamma C = \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \\ C_Z \\ C_A \end{pmatrix}, \qquad \text{(III.2.28a)}$$

$$\bar{\tilde{C}} = \bar{C}\Gamma^+ = (\overline{C^+}, \overline{C^-}, \bar{C}_Z, \bar{C}_A). \qquad \text{(III.2.28b)}$$

这里

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta_W & \sin\theta_W \\ 0 & 0 & \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.2.29)}$$

直接证明

$$\Gamma\tilde{D}_\mu\Gamma^+ = \begin{pmatrix} \partial_\mu - igV_\mu^3 & 0 & -ig\cos\theta_W W_\mu^+ & igW_\mu^+\sin\theta_W \\ 0 & \partial_\mu + igV_\mu^3 & ig\cos\theta_W W_\mu^- & -igW_\mu^- \sin\theta_W \\ -ig\cos\theta_W W_\mu^- & ig\cos\theta_W W_\mu^+ & \partial_\mu & 0 \\ ig\sin\theta_W W_\mu^- & -ig\sin\theta_W W_\mu^+ & 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} \qquad \text{(III.2.30)}$$

及

$$\Gamma\Lambda\Gamma=\begin{pmatrix}\frac{g^2v_0}{\xi_+}(H+i\chi) & 0 & \frac{-v_0gG}{\xi_+}\cos 2\theta S^+ & \frac{v_0gG}{\xi_+}\sin 2\theta S^+\\ 0 & \frac{g^2v_0}{\xi_+}(H-i\chi) & \frac{-v_0gG}{\xi_+}\cos 2\theta S^- & \frac{v_0gG}{\xi_+}\sin 2\theta S^-\\ \frac{v_0Gg}{\xi_0}S^- & \frac{v_0Gg}{\xi_0}S^+ & \frac{G^2v_0}{\xi_0}H & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{g^2v_0}{\xi_+} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{g^2v_0}{\xi_+} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{G^2v_0^2}{\xi_0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}\end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\frac{gM_W}{2\xi_+}(H+i\chi)+\frac{M_W^2}{\xi_+}$$

$$A_{13}=\frac{-GM_W}{2\xi_+}\cos 2\theta_W S^+ \qquad A_{14}=\frac{GM_W}{2\xi_+}\sin\theta_W S^+$$

$$A_{22}=\frac{gM_W}{2\xi_+}(H-i\chi)+\frac{M_W^2}{\xi_+}$$

$$A_{23}=\frac{-GM_Z}{2\xi_+}\cos 2\theta_W S^- \qquad A_{24}=\frac{GM_W}{2\xi^+}\sin 2\theta_W S^-$$

$$A_{31}=\frac{gM_Z}{2\xi_0}S^- \qquad A_{32}=\frac{gM_Z}{2\xi_0}S^+$$

$$A_{33}=\frac{GM_Z}{2\xi_0}H+\frac{M_Z^2}{\xi_0}$$

$$A_{12}=A_{21}=A_{34}=A_{41}=A_{42}=A_{43}=A_{44}=0 \qquad \text{(III.2.31)}$$

把方程 (III.2.30) 和 (III.2.31) 代入方程 (III.2.27)，就得到了鬼拉氏函数的显然形式。

虽然上面的步骤是十分冗长的，但有另外的方法，首先把规范固定函数变换为具有确定电荷编号的函数，会得到相同的结果。由方程 (III.2.11a) 及 (III.2.11b)，下面可以写出

$$F^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F^1 + iF^2)$$

$$= \sqrt{\xi_+}\partial^\mu W_\mu^+ - \frac{ig}{\sqrt{\xi_+}}\{V^+\tau_-\Phi - \Phi^+\tau_-V\}$$

$$= \sqrt{\xi_+}\partial^\mu W_\mu^+ - \frac{ig}{\sqrt{\xi_+}} M_W S^+, \qquad \text{(III.2.32a)}$$

$$F^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F^1 - iF^2)$$

$$= \sqrt{\xi_+}\partial^\mu W_\mu^- + \frac{ig}{\sqrt{\xi_+}} M_W S^-, \qquad \text{(III.2.32b)}$$

$$F_Z = -\cos\theta_W F^3 + \sin\theta_W F^4$$

$$= \sqrt{\xi_0}\,\partial^\mu Z_\mu - \frac{i}{2\sqrt{\xi_0}}\{V^+(-g\cos\theta_W\tau^3 + g'\sin\theta_W)\Phi + \text{h.c.}\}$$

$$= \sqrt{\xi_0}\,\partial^\mu Z_\mu + \frac{M_Z}{\sqrt{\xi_0}}\chi, \qquad \text{(III.2.32c)}$$

$$F_A = \sin\theta_W F^3 + \cos\theta_W F^4$$

$$= \sqrt{\xi_0}\,\partial^\mu A_\mu. \qquad \text{(III.2.32d)}$$

其次考虑在规范变换方程 (III.2.18a) 和 (III.2.18b) 下这些规范固定函数的变分是:

$$\delta W_\mu^+ = -\partial_\mu\theta^+ + ig\{(\theta_Z\cos\theta - \theta_A\sin\theta)W_\mu^+ + [-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu]\theta^+\},$$

$$\delta W_\mu^- = -\partial_\mu\theta^- - ig\{(\theta_Z\cos\theta - \theta_A\sin\theta)W_\mu^- + [-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu]\theta^-\},$$

$$\delta Z_\mu = -\partial_\mu\theta_Z - ig\cos\theta(\theta^- W_\mu^+ - \theta^+ W_\mu^-),$$

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu\theta_A + ig\sin\theta(\theta^- W_\mu^+ - \theta^+ W_\mu^-), \qquad \text{(III.2.33)}$$

及

$$\delta S^+ = -\frac{iG}{2}[-\cos 2\theta_W\theta_Z + \sin 2\theta_W\theta_A]S^+$$
$$-\frac{i}{2}g\theta^+(H + i\chi + v_0),$$
$$\delta S^- = \frac{iG}{2}[-\cos 2\theta_W\theta_Z + \sin 2\theta_W\theta_A]S^-$$
$$-\frac{ig\theta^-}{2}(H - i\chi + v_0),$$
$$\delta H = -\frac{ig}{2}(\theta^-S^+ - \theta^+S^-) + \frac{G}{2}\theta_Z\chi,$$
$$\delta\chi = -\frac{g}{2}(\theta^-S^+ + \theta^+S^-) - \frac{G}{2}\theta_Z(H + v_0).$$
(III.2.34)

可以计算出规范固定函数相对于确定电荷的变分为

$$\delta F^{(+)} = \partial^\mu\{-\partial_\mu\theta^+ + ig(\theta_Z\cos\theta_W - \theta_A\sin\theta_W)W_\mu^+$$
$$+(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W)\theta^+\}$$
$$+\frac{i}{\xi_+}M_W\left\{-\frac{iG}{2}[-\cos 2\theta_W\theta_Z + \sin 2\theta_W\theta_A]S^+\right.$$
$$\left.-\frac{i}{2}g\theta^+(H + i\chi + v_0)\right\}$$
$$= -\partial^\mu[(\partial_\mu - ig(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu))\theta^+]$$
$$-\frac{g}{2\xi^+}M_W(H + i\chi)\theta^+ - \frac{M_W^2}{\xi_+}\theta^+$$
$$-\partial^\mu[(-ig\cos\theta_W W_\mu^+)\theta_Z]$$
$$+\frac{GM_W}{2\xi_+}\cos 2\theta_W S^+\theta_Z - \partial^\mu[(ig\sin\theta_W W_\mu^+)\theta_Z]$$
$$-\frac{GM_Z}{2\xi_+}\sin 2\theta_W S^+\theta_A,$$ (III.2.35a)

$$\delta F^{(-)} = -\partial^\mu[(\partial_\mu + ig(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu)\theta^-]$$

$$+\frac{g}{2\xi_+}M_W(H-i\chi)\theta^- - \frac{M_W^2}{\xi_+}\theta^-$$

$$-\partial^\mu[(ig\cos\theta_W W_\mu^-)\theta_Z] + \frac{GM_W}{2\xi_+}\cos 2\theta_W S^-\theta_Z$$

$$-\partial^\mu[(-ig\sin\theta_W W_\mu^-)\theta_Z] - \frac{GM_W}{2\xi_+}\sin 2\theta_W S^-\theta_A, \tag{III.2.35b}$$

$$\delta F_Z = \partial^\mu\{-\partial_\mu\theta_Z - ig\cos\theta(\theta^- W_\mu^+ - \theta^+ W_\mu^-)\}$$

$$+\frac{M_Z}{\xi_0}\left[-\frac{g}{2}(\theta^- S^+ + \theta^+ S^-) - \frac{G}{2}\theta_Z(H+v_0)\right]$$

$$= -\partial^\mu(\partial_\mu\theta_Z) - \frac{M_Z G}{\xi_0}H\theta_Z - \frac{M_Z^2}{\xi_0}\theta_Z$$

$$-\partial^\mu([-ig\cos\theta W_\mu^-]\theta^+) - \frac{gM_+}{2\xi_0}S^-\theta^+$$

$$-\partial^\mu([ig\cos\theta W_\mu^+]\theta^-) - \frac{gM_Z}{2\xi_0}S^+\theta^-, \tag{III.2.35c}$$

$$\delta F_A = \partial^\mu\{-\partial_\mu\theta_A + ig\sin\theta(\theta^- W_\mu^+ - \theta^+ W_\mu^-)\}$$

$$= -\partial^\mu(\partial_\mu\theta_A) - \partial^\mu([ig\sin\theta W_\mu^-]\theta^+)$$

$$-\partial^\mu([-ig\sin\theta W_\mu^+)\theta^-). \tag{III.2.35d}$$

为了得到鬼拉氏函数，对 δF^+, δF^-, δF^Z 及 δF_A 分别左乘以 $\bar{C}^+$, $\bar{C}^-$, $\bar{C}_Z$ 及 $\bar{C}_A$，于是，代替参数函数 θ^+, θ^-, θ_Z 及 θ_A，而用相应的鬼场 C^+, C^-, C_Z 及 C_A. 而且，由方程(III.2.35a)到(III.2.35d) 相对于 θ 微分，可以得到 $\Gamma\tilde{D}_\mu\Gamma$ 及 $\Gamma\Lambda\Gamma^+$ 的矩阵元.

全部鬼拉氏函数可以写为

$$\mathscr{L}_{\text{鬼}} = -\partial^\mu\bar{C}^+\{\partial_\mu - ig(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu)\}C^+$$

$$+\bar{C}^+\left\{\frac{gM_W}{2\xi_+}(H+i\chi) + \frac{M_W^2}{\xi_+}\right\}C^-$$

$$-\partial^\mu\bar{C}^-\{\partial_\mu + ig(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu)\}C^-$$

$$+\bar{C}^{-}\left\{\frac{gM_W}{2\xi_+}(H-i\chi)+\frac{M_W^2}{\xi_+}\right\}C^{-}-\partial^{\mu}\bar{C}_Z\partial C_Z$$

$$+\bar{C}_Z\left\{\frac{GM_Z}{2\xi_0}H+\frac{M_Z^2}{\xi_0}\right\}C_Z-\partial^{\mu}\bar{C}_A\partial_{\mu}C_A$$

$$+ig\cos\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}_ZC^{+}W^{-}-ig\sin\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}_AC^{+}W_{\mu}^{-}$$

$$+\frac{gM_Z}{2\xi_0}\bar{C}_ZC^{+}S^{-}+ig\cos\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}^{+}C_ZW^{+}$$

$$-ig\sin\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}^{+}C_AW_{\mu}^{+}$$

$$-\frac{GM_W}{2\xi_+}\cos 2\theta_W\bar{C}^{+}C_ZS^{+}+\frac{GM_W}{2\xi_+}\sin 2\theta_W\bar{C}^{+}C_AS^{+}$$

$$-ig\cos\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}_ZC^{-}W_{\mu}^{+}+ig\sin\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}_AC^{-}W_{\mu}^{+}$$

$$+\frac{gM_Z}{2\xi_0}\bar{C}_ZC^{-}S^{+}-ig\cos\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}^{-}C_ZW_{\mu}^{-}$$

$$+ig\sin\theta_W\partial^{\mu}\bar{C}^{-}C_AW_{\mu}^{-}-\frac{GM_Z}{2\xi_+}\cos 2\theta_W\bar{C}^{-}C_ZS^{-}$$

$$+\frac{GM_Z}{2\xi_+}\sin 2\theta_W\bar{C}^{-}C_AS^{-} \qquad \text{(III.2.36)}$$

因此在 R_ξ 规范中完成的有效拉氏函数为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_{YM}+\mathscr{L}_{\text{标}}+\mathscr{L}_{\text{轻子}}+\mathscr{L}_{\text{汤川}}+\mathscr{L}_{gf}+\mathscr{L}_{\text{鬼}}.$$

各部分的显式表示式可以在如下式中找到：$\mathscr{L}_{YM}$:(III.2.10d)；$\mathscr{L}_{\text{轻子}}$:(III.2.10c)；$\mathscr{L}_{\text{标量}}+\mathscr{L}_{gh}$:(III.2.14)；$\mathscr{L}_{\text{汤川}}$:(III.2.10b)；及 $\mathscr{L}_{\text{鬼}}$:(III.2.36)．由这些表示式可以读出 Feynman 规则．为方便起见，有效拉氏函数可以如下写出：

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{\text{Int,I}}+\mathscr{L}_{\text{Int,II}}+\mathscr{L}_{\text{Int,III}}. \qquad \text{(III.2.37)}$$

这里 $\mathscr{L}_0$ 包括动能项，即自由拉氏函数，$\mathscr{L}_{\text{Int,II}}$ 和 $\mathscr{L}_{\text{Int,III}}$ 分别包括非物理的标量场和鬼场。

$$\mathscr{L}_0=\bar{\nu}_Li\partial\!\!\!/\nu_L+\bar{e}(i\partial\!\!\!/-m_e)e$$

$$+\frac{1}{2}W_{\mu}^{+}\{g^{\mu\nu}(\Box+m_W^2)-(1-\xi_+)\partial^{\mu}\partial^{\nu}\}W_{\nu}^{+}$$

$$+\frac{1}{2}W_\mu^-\{g^{\mu\nu}(\Box+m_W^2)-(1-\xi_+)\partial^\mu\partial^\nu\}W_\nu^-$$

$$+\frac{1}{2}Z_\mu\{g^{\mu\nu}(\Box+m_Z^2)-(1-\xi_+)\partial^\mu\partial^\nu\}Z_\nu$$

$$+\frac{1}{2}A_\mu\{g^{\mu\nu}\Box-(1-\xi_0)\partial^\mu\partial^\nu\}A_\nu$$

$$-\frac{1}{2}H(\Box+m_H^2)H-\frac{1}{2}\chi\left(\Box+\frac{m_Z^2}{\xi_0}\right)\chi$$

$$-\frac{1}{2}S^+\left(\Box+\frac{m_W^2}{\xi_+}\right)S^+-\frac{1}{2}S^-\left(\Box+\frac{m_W^2}{\xi_+}\right)S^-$$

$$+\bar{C}^+\left(\Box+\frac{m_W^2}{\xi_+}\right)C^++\bar{C}^-\left(\Box+\frac{m_W^2}{\xi_+}\right)C^-$$

$$+\bar{C}_Z\left(\Box+\frac{M_Z^2}{\xi_0}\right)C_Z+\bar{C}_A\Box C_A, \qquad \text{(III.2.38)}$$

为使 $\mathscr{L}_0$ 成为上面的形式，自由地使用了分部积分。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{Int,I}}=&\frac{g}{2\sqrt{2}}\{\nu\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+\\&+\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-\}-e\{\bar{e}\gamma_\mu eA^\mu\}\\&-\frac{e}{2\sin 2\theta_W}\{\bar{e}\gamma^\mu(4\sin^2\theta_W-1+\gamma_5)e\\&+\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu\}Z^\mu-\frac{m_e}{v_0}\bar{e}eH\\&+iG\cos\theta_W\{-\cos\theta_WZ^{\mu\nu}+\sin\theta_WA^{\mu\nu}\}\\&\times(W_\mu^+W_\nu^--W_\mu^-W_\nu^+)\\&+iG\cos\theta_W\{W_{\mu\nu}^-W^{+\nu}-W_{\mu\nu}^+W^{-\nu}\}\\&\times\{-\cos\theta_WZ^\mu+\sin\theta_WA^\mu\}\\&+\frac{G^2}{2}\cos^2\theta_W[(W_\mu^+)^2(W_\nu^-)^2-(W_\mu^+W^{-\mu})^2]\\&+G^2\cos^2\theta_W\{W_\mu^+W_\nu^-[\cos^2\theta_WZ^\mu Z^\nu\end{aligned}$$

$$+\sin^2\theta_W A^\mu A^\nu - \sin\theta_W\cos\theta_W(Z^\mu A^\nu + Z^\nu A^\mu)]$$
$$-(W_\mu^+ W^{-\mu})[\cos^2\theta_W(Z^\nu)^2$$
$$+\sin^2\theta_W(A^\nu)^2 - \sin 2\theta_W A^\nu Z_\nu]\}$$
$$+\frac{1}{8}(2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + G^2 Z_\mu^2)H^2$$
$$+\frac{1}{2}H\{2gM_W W_\mu^+ W^{-\mu} + GM_Z(Z_\mu)^2\}$$
$$-\lambda v_0 H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4, \qquad \text{(III.2.39)}$$

$$\mathscr{L}_{\text{Int,II}} = -\frac{m_e}{\sqrt{2}\,v_0}\{\bar{e}(1-\gamma_5)\nu S^-$$
$$+\bar{\nu}(1+\gamma_5)eS^+ + \sqrt{2}\,\bar{e}i\gamma_5 e\chi\}$$
$$+\frac{i}{2}G(-\cos 2\theta_W Z_\mu + \sin 2\theta_W A_\mu)S^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu S^+$$
$$+\frac{i}{2}g\{W_\mu^+[S^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu(H+i\chi)]$$
$$+W_\mu^-[(H-i\chi)\overleftrightarrow{\partial}^\mu S^+]\}$$
$$+\frac{1}{2}GZ_\mu\chi\overleftrightarrow{\partial}^\mu H$$
$$+\frac{1}{4}S^+S^-\{G^2(-\cos 2\theta_W Z_\mu + \sin 2\theta_W A_\mu)^2$$
$$+2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\} + \frac{1}{2}gg'(\sin\theta_W Z^\mu + \cos\theta_W A^\mu)$$
$$\times\{H(W_\mu^+ S^- + W_\mu^- S^+) + i\chi(W_\mu^+ S^- - W_\mu^- S^+)\}$$
$$+\frac{1}{8}\chi^2(2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + G^2 Z_\mu^2)$$
$$+g'M_W[\sin\theta_W Z^\mu + \cos\theta_W A^\mu][W_\mu^+ S^- + W_\mu^- S^+]$$
$$-2\lambda v_0 H\left\{S^+S^- + \frac{1}{2}\chi^2\right\}$$

$$- \lambda\Big\{(S^+S^-)^2 + S^+S^-(H^2+\chi^2) + \frac{1}{4}\chi^4 + \frac{1}{2}\chi^2H^2\Big\} \tag{III.2.40}$$

及

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{Int,III}} = {} & ig\cos\theta_W\partial^\mu\bar{C}_Z C^+W_\mu^- - ig\sin\theta_W\partial^\mu\bar{C}_A C^+W_\mu^- \\ & + \frac{gM_Z}{2\xi_0}\bar{C}_Z C^+S^- + ig\cos\theta_W\partial^\mu\bar{C}^+C_Z W_\mu^+ \\ & - ig\sin\theta_W\partial^\mu\bar{C}^+C_A W_\mu^+ - \frac{GM_W}{2\xi_-}\cos 2\theta_W\bar{C}^+C_Z S^+ \\ & + \frac{GM_W}{2\xi_+}\sin 2\theta_W\bar{C}^+C_A S^+ - ig\cos_W\partial^\mu\bar{C}_Z C^-W_\mu^+ \\ & + ig\sin\theta_W\partial^\mu\bar{C}_A C^-W_\mu^- + \frac{gM_Z}{2\xi_0}\bar{C}_Z C^-S^+ \\ & - ig\cos\theta_W\partial^\mu\bar{C}^-C_Z W_\mu^- + ig\sin\theta_W\partial^\mu\bar{C}^-C_A W_\mu^- \\ & - \frac{GM_Z}{2\xi_+}\cos 2\theta_W\bar{C}^-C_Z S^- + \frac{GM_Z}{2\xi_+}\sin 2\theta_W\bar{C}^-C_A S^- \\ & + ig\partial^\mu\bar{C}^+C^+(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) \\ & + \frac{gm_W}{2\xi_+}\bar{C}^+C^+(H+i\chi) \\ & - ig\partial^\mu\bar{C}^-C^-(-\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) \\ & + \frac{gm_W}{2\xi_+}\bar{C}^-C^-(H-i\chi) \\ & + \frac{GM_Z}{2\xi_0}\bar{C}_Z C_Z H.\end{aligned} \tag{III.2.41}$$

当补充下面的规则时，可以用 Feynman 规则直接写出相互作用拉氏函数的形式：

（a）每个顶角乘以一个因子 i，它来自 $e^{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{Int}}}$ 的位相。

（b）因为一个场使表示该场的粒子消失，并产生一个反粒子，于是 ϕ_α 表示 α 类型的入射粒子或表示它的出射反粒

子.

(c) 设 ϕ 表示一个入射粒子，则因子 $-ip_\mu$ 与项 $\partial_\mu\phi$ 相联系，设 ϕ 为出射粒子，则 ip_μ 与 $\partial_\mu\phi$ 相联系. 这里 p_μ 为由 ϕ 所表示的粒子的四动量.

(d) 因子 $g_{\mu\nu}$ 与类如 $\phi_\lambda\phi'^\lambda$，$\phi_\lambda\partial^\lambda\phi'$，及 $\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi'$ 成对指标的收缩相联系.

(e) 如果某项包括同一个场多于一次，则应该包括 Lorentz 对称性及内对称性的一切排列.

(f) 一个负号与一条费米子闭合圈和一条鬼圈相联系.

在图 III.2—III.11 中给出了 Feynman 图形规则. 下面列举前节中所给出的耦合常数及质量关系.

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = G\sin\theta_W\cos\theta_W,$$

$$g^2/8M_W^2 = G_F/\sqrt{2},$$

$$v_0 = \frac{10^3}{2\sqrt{3\sqrt{2}}}m_p = 1\Big/\sqrt{\sqrt{2}\,G_F},$$

$$M_W = \frac{37.34}{\sin\theta_W}Gev,$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W},$$

$$M_H^2 = 2\lambda v_0^2 = \sqrt{2}\lambda/G_F,$$

$$\frac{G_l}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\,G_F m_p)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m_l}{m_p}\right). \qquad \text{(III.2.42)}$$

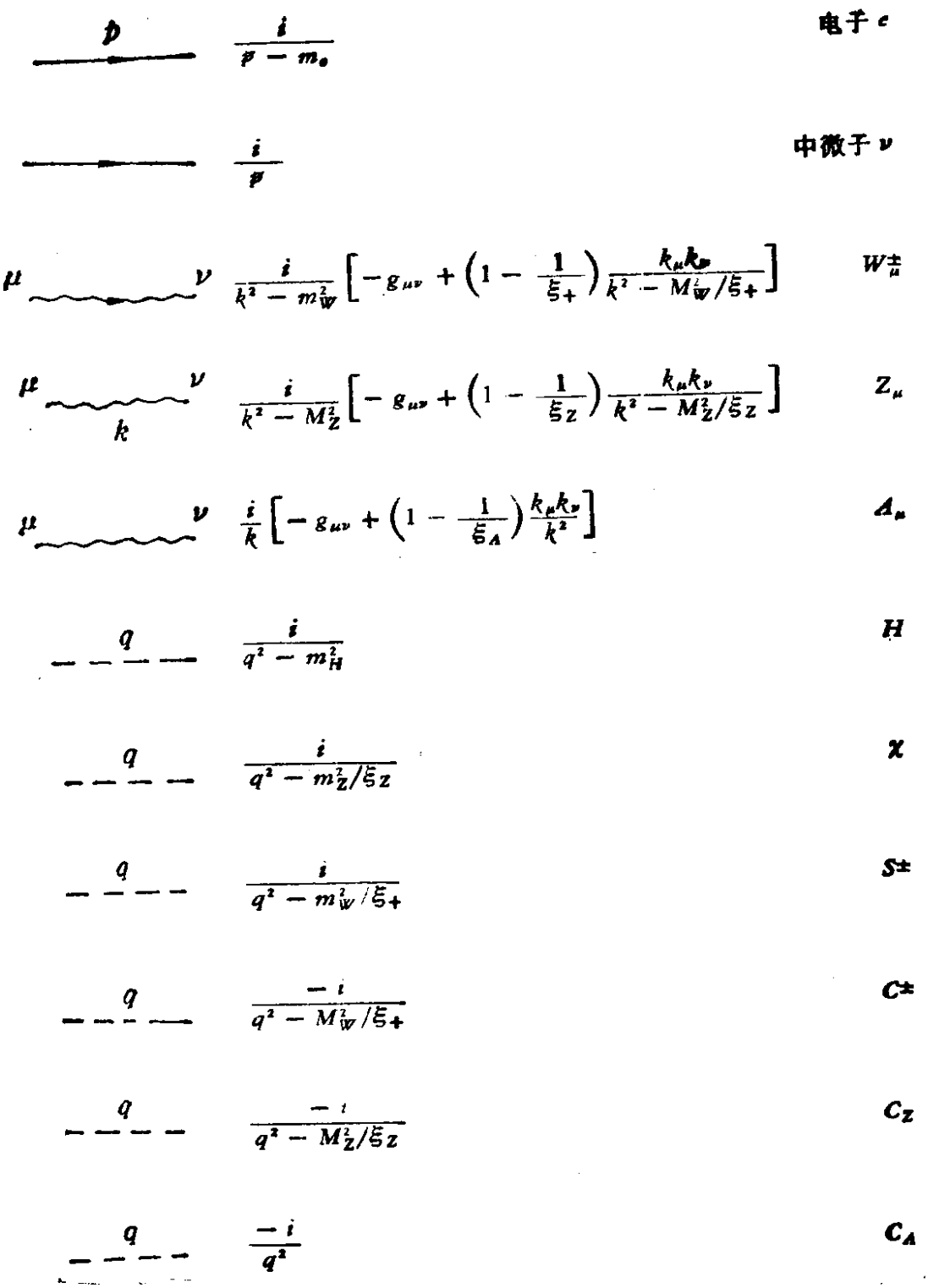

p
$\frac{i}{\not p - m_e}$
电子 e
$\frac{i}{\not p}$
中微子 ν
μ
ν
$\frac{i}{k^2 - m_W^2}\left[-g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_+}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M_W^2/\xi_+}\right]$
$W_\mu^\pm$
μ
ν
k
$\frac{i}{k^2 - M_Z^2}\left[-g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_Z}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M_Z^2/\xi_Z}\right]$
Z_μ
μ
ν
$\frac{i}{k}\left[-g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_A}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$
A_μ
q
$\frac{i}{q^2 - m_H^2}$
H
q
$\frac{i}{q^2 - m_Z^2/\xi_Z}$
χ
q
$\frac{i}{q^2 - m_W^2/\xi_+}$
$S^\pm$
q
$\frac{-i}{q^2 - M_W^2/\xi_+}$
$C^\pm$
q
$\frac{-i}{q^2 - M_Z^2/\xi_Z}$
C_Z
q
$\frac{-i}{q^2}$
C_A

图 III.2　传播子

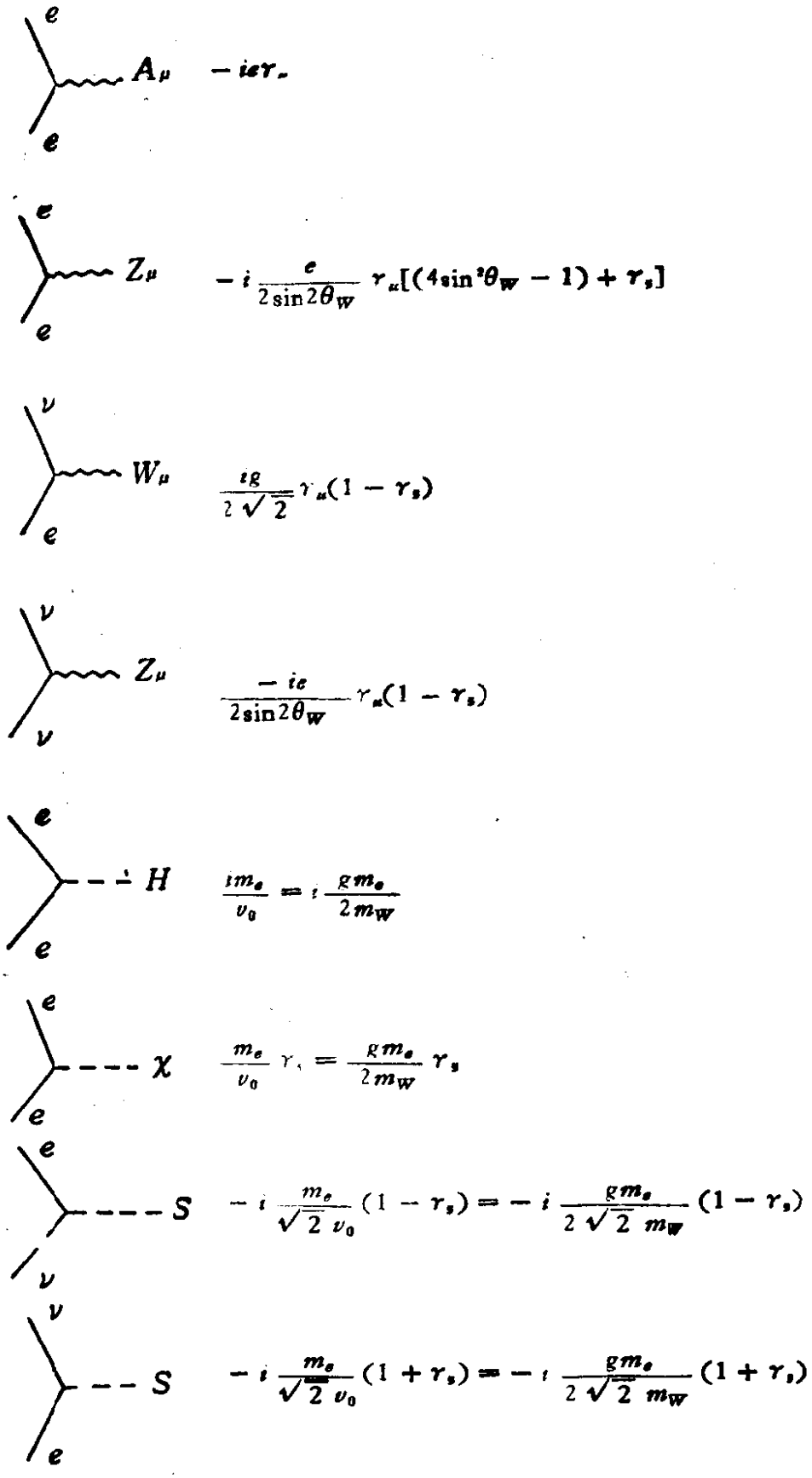


图 III.3　包含轻子的顶角．只给出 e 和 ν_e 耦合．
μ, ν_μ 和 τ, ν_τ 的耦合是相似的

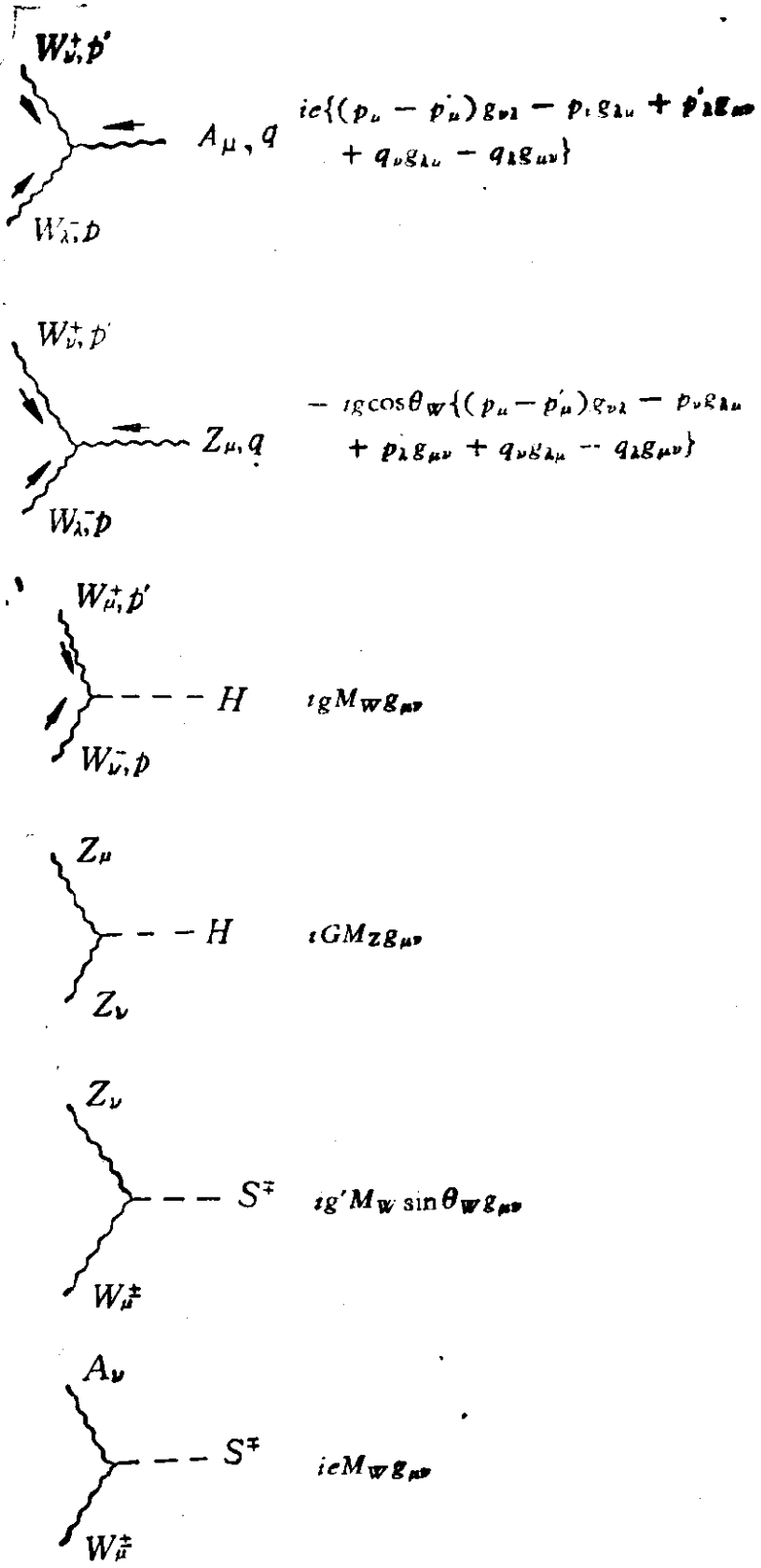


图 III.4　包含二个或多于二个矢量粒子的三线耦合

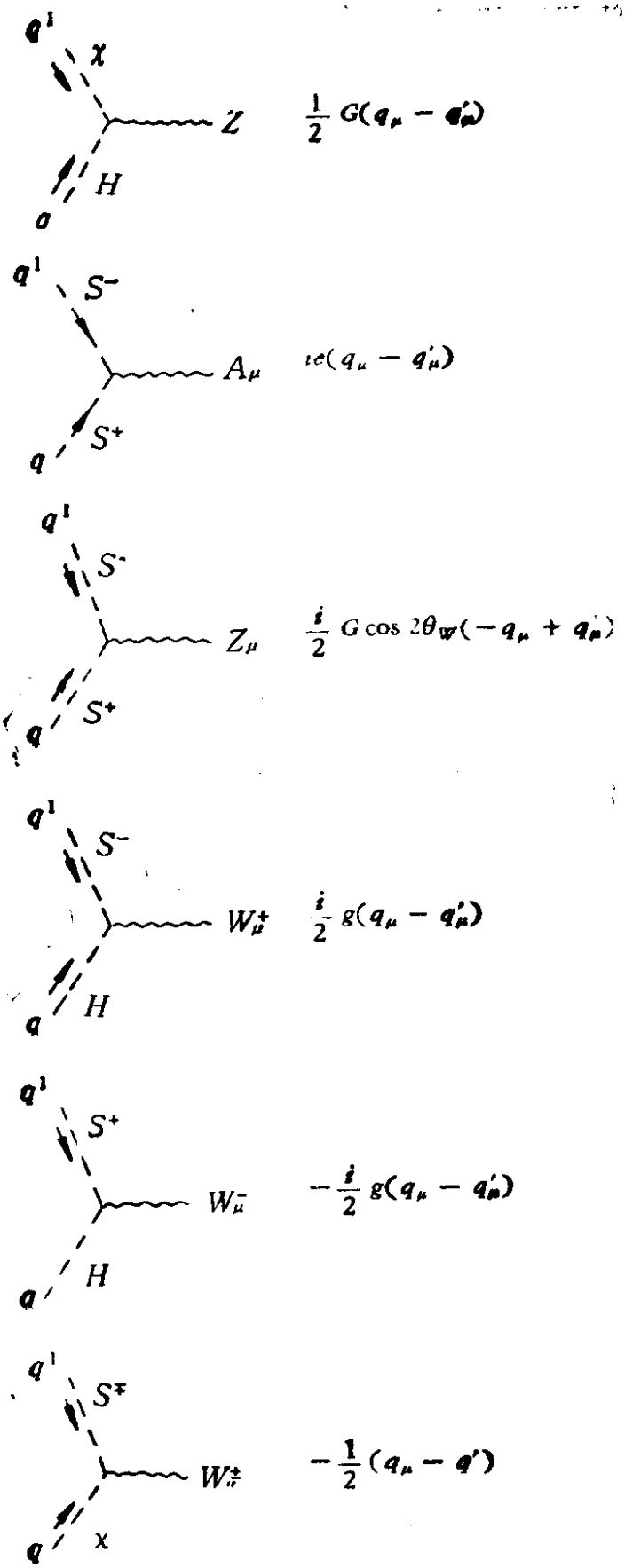


图 III.5　包含一个矢量粒子的三线耦合

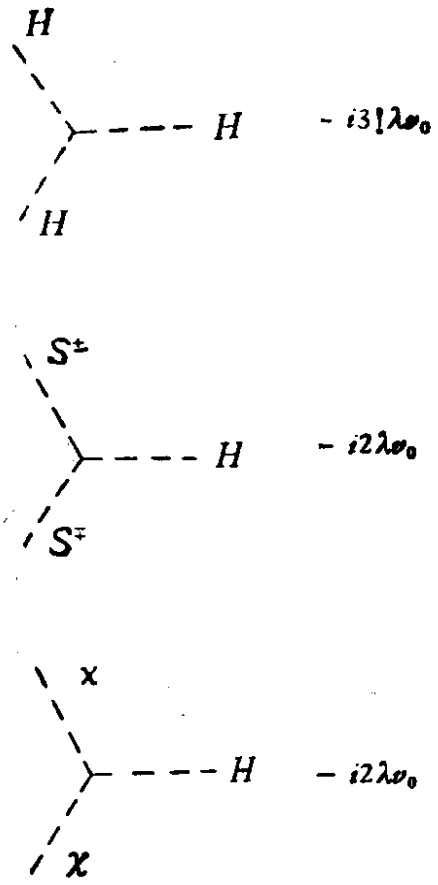
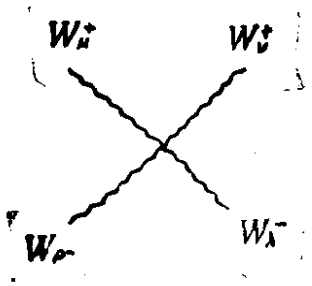
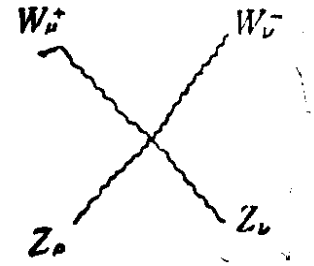


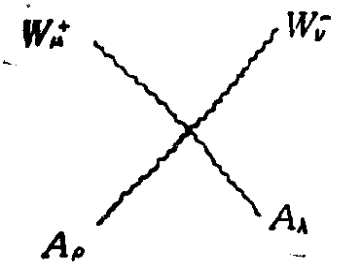
图 III.6　只包含标量粒子的三线耦合



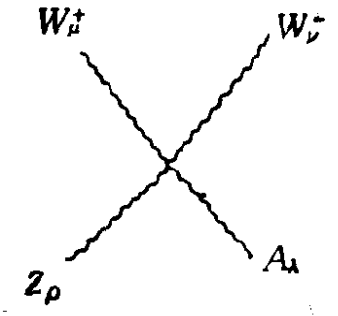
$$iG^2\cos^2\theta\{2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\}$$



$$iG^2\cos^2\theta\{g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\}$$

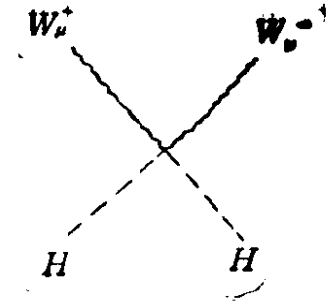


$$ie^2\{g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\mu\lambda}-2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\}$$

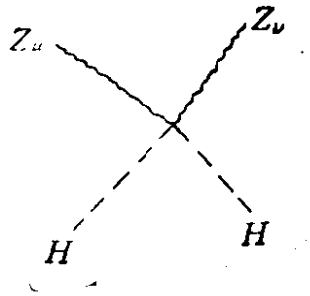


$$ie\,G\cos^2\theta\{-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}+2g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\}$$

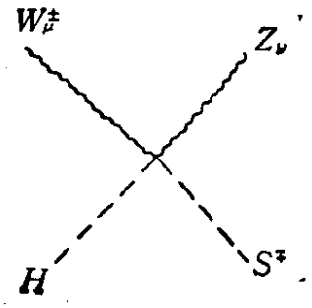
图 III.7　包含四个矢量粒子的四次耦合



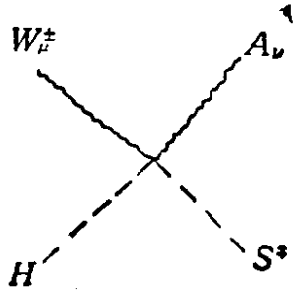
$$\frac{i}{2} g^2 g_{\mu\nu}$$



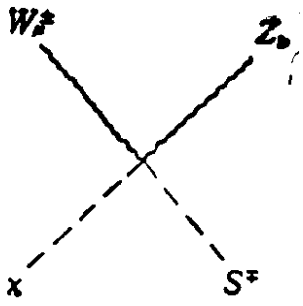
$$\frac{i}{2} G^2 g_{\mu\nu}$$



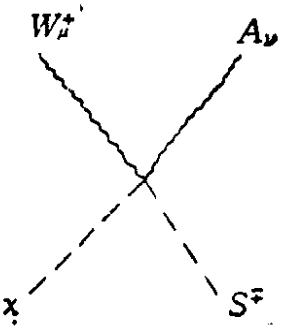
$$\frac{e}{2} g' g_{\mu\nu}$$



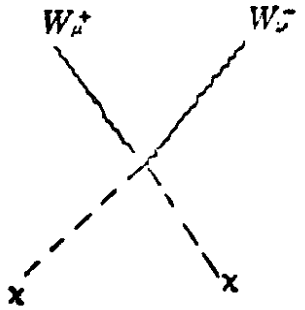
$$\frac{e}{2} g g_{\mu\nu}$$



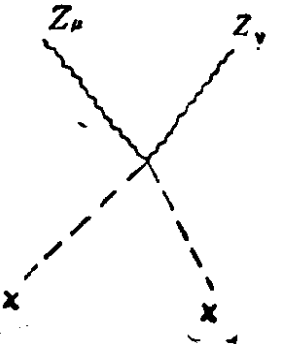
$$\mp \frac{e}{2} g' g_{\mu\nu}$$



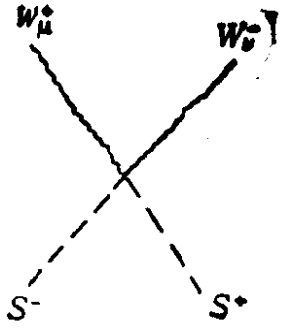
$$\mp \frac{e}{2} g g_{\mu\nu}$$



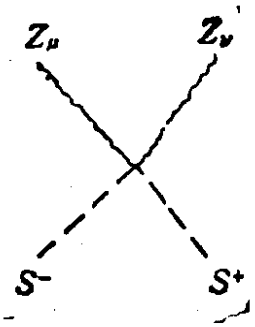
$$\frac{i}{2} g^2 g_{\mu\nu}$$



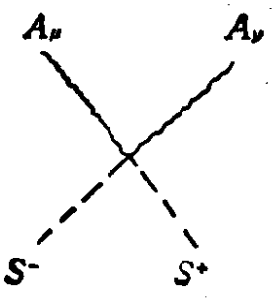
$$\frac{i}{2} G^2 g_{\mu\nu}$$



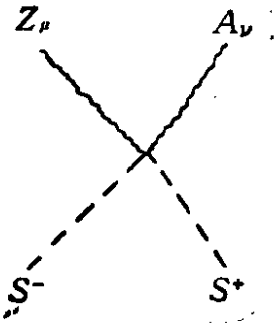
$$\frac{i}{2} g^2 g_{\mu\nu}$$



$$\frac{i}{2} G^2 \cos^2(2\theta_w)$$



$$\frac{i}{2} G^2 g_{\mu\nu} \sin^2(2\theta_w) = 2ie^2 g_{\mu\nu}$$



$$-\frac{i}{2} G^2 \sin 2\theta_w \cos 2\theta_w g_{\mu\nu} = -iGe \cos 2\theta_w g_{\mu\nu}$$

图 III.8　包含两个矢量粒子的四次耦合

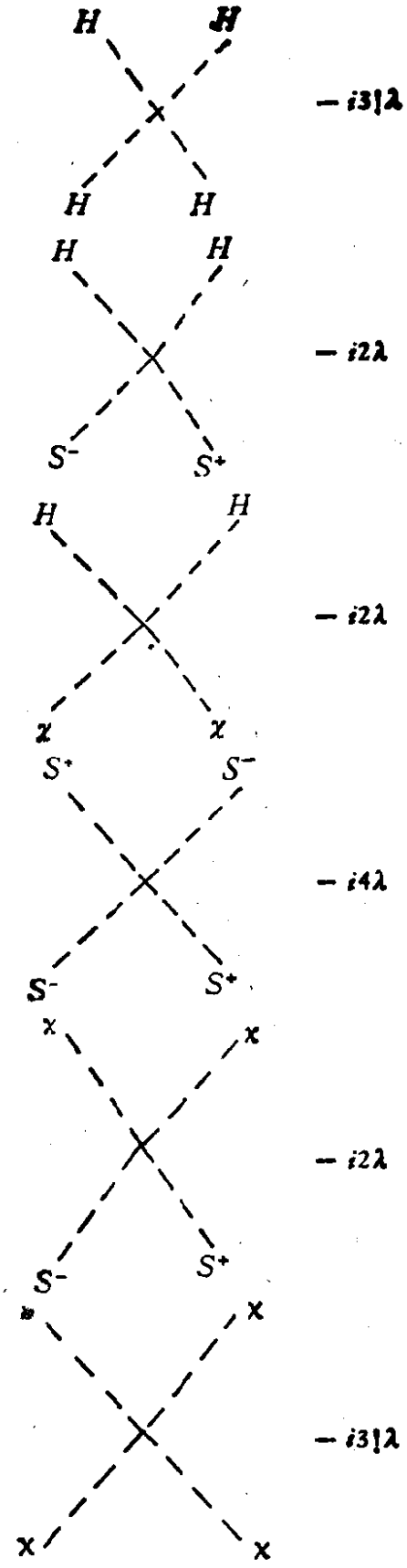
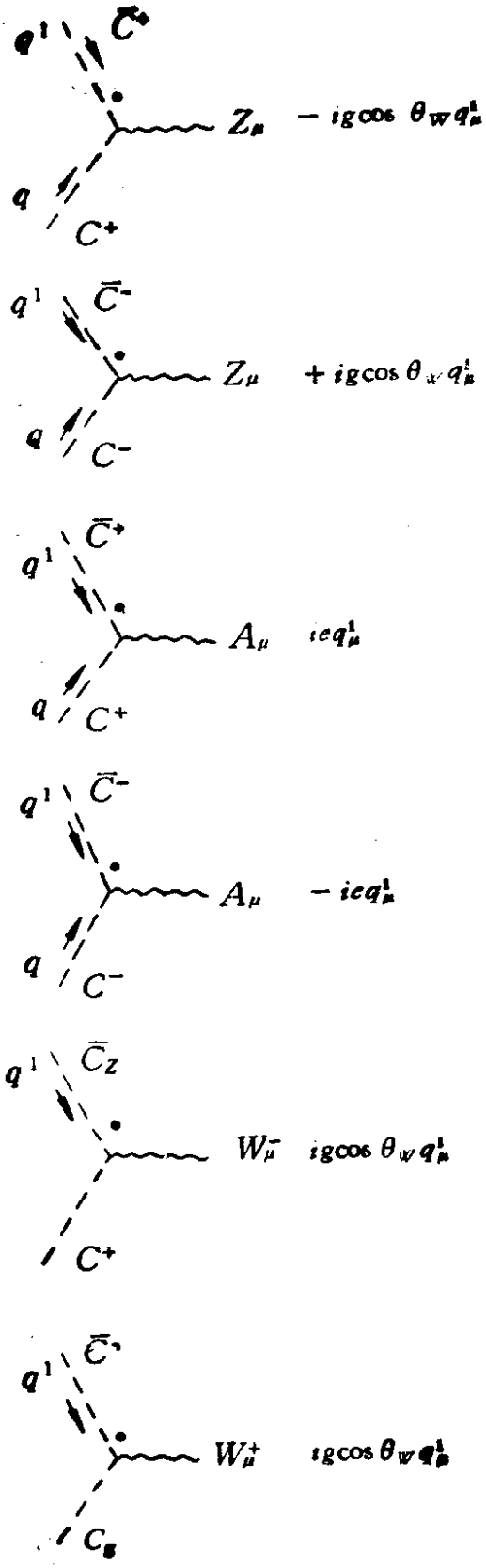


图 III.9　只包含标量场的四次耦合


q^1 $\bar{C}^+$ Z_μ $-igq^1_\mu$ q C^+
q^1 $\bar{C}^-$ Z_μ $+igq^1_\mu$ q C^-
q^1 $\bar{C}^+$ A_μ ieq^1_μ q C^+
q^1 $\bar{C}^-$ A_μ $-ieq^1_\mu$ q C^-
q^1 $\bar{C}_Z$ W^-_μ igq^1_μ C^+
q^1 $\bar{C}^-$ W^+_μ igq^1_μ C_γ

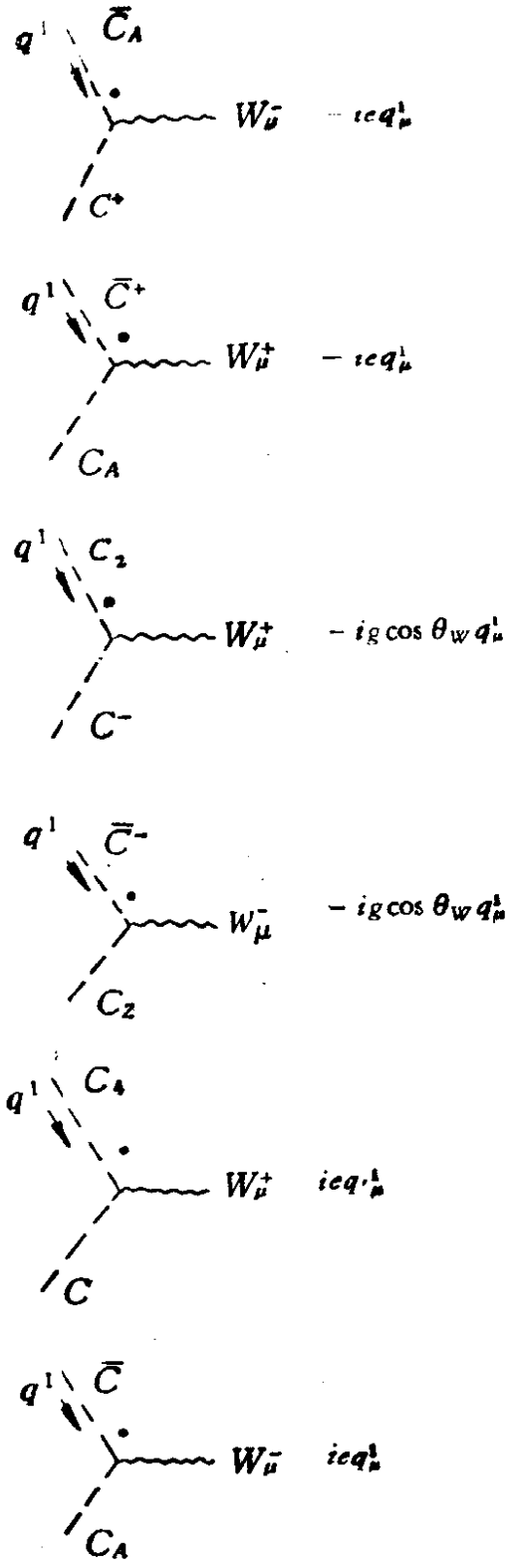


图 III.10　只包含鬼场和矢量粒子的耦合

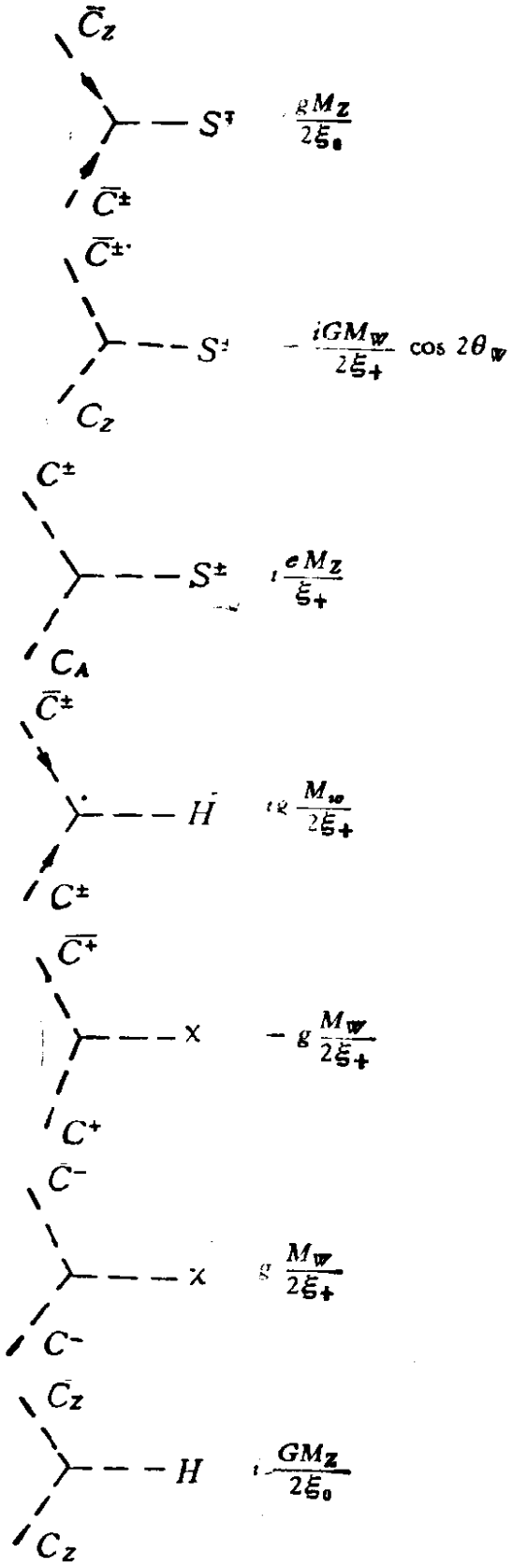


图 III.11　包含鬼场和标量场的耦合

III.3 强子的弱相互作用——六夸克模型

对于强子现象的系统论述是夸克模型。夸克是强子物质的基本组分。强子的谱和相互作用是这些组分的束缚态和相互作用的表现形式。夸克由两组量子数(味和色)来表征。强子相互作用的基础动力学是色荷之间的相互作用，叫做量子色动力学，形成一个特殊的幺正群 $SU(3)_c$。一切强子属于这个群的单态。因而在自然中没有明显的颜色被观察到。量子色动力学比较详细的讨论在第 VI 章内可以看到。

在强和电磁相互作用下守恒的味量子数导致强子的分类方案。使味量子数不守恒的弱相互作用形成味动力学，或者，更普遍地，形成包括轻子的弱动力学。

前节的表述可以直接推广，通过夸克场来描述强子的统一的弱及电磁相互作用。其明显的优点是，夸克是类点的，并且享有如轻子同样的简单性。强子形状因子的复杂性现在归之于由夸克的结合所引起的强子波函数。如强子对轻子的内含深度非弹性散射的情况，此时发生了大动量交换，组成的夸克几乎有象自由场的行为[19]。因此，在包括大动量转移或大质量标度的情况，例如包括重夸克的强子衰变，夸克表述是极其有用的。强子的 Glashow-Weinberg-Salam 模型类似于轻子的 Glashow-Weinberg-Salam 模型。在低能量弱相互作用唯象学中所建立的下面的事实要保留在新表述中：

(a) 带荷流为 $V-A$ 形式。

(b) 在拉氏函数中没有味改变的中性流。味改变的中性流是(从初夸克到末夸克)改变味量子数而不改变强子电荷的相互作用 ($\Delta Q=0$ 但 $\Delta S\neq 0$ 或 $\Delta C\neq 0$，等等)。

(c) 一切其他已知的低能量现象，类如强子衰变现象是

要保存的。

再考虑 $SU(2)_L \otimes U(1)$ 群。夸克场类似于轻子分类为左手 $SU(2)_L$ 双态和右手 $U(1)$ 单态。然而，有一个复杂性，即夸克之间的混合效应。因为弱相互作用使味量子数不守恒，根据强相互作用分类的强子质量本征态在弱相互作用下可能混合，并且事实如此。

强子弱相互作用的标准模型由 6 个带质量的夸克组成，6 个夸克用 u, d, c, s, t 及 b 来表示，分别叫做上，下，粲，奇，顶及底夸克。夸克 u 和 d 形成通常的同位旋双态，c，s，t 和 b 具有它们相当的量子数，粲，奇，顶和底。夸克 u，c 和 t 有电荷 2/3，d，s 和 b 有电荷 $-1/3$，以电子电荷 e 为单位。它们都有重子数 1/3。它们的弱同位旋 I_W 和弱超荷 Y_W 分别为 $SU(2)_L$ 及 $U(1)$ 的量子数，标志如下：

双态　$I_W = 1/2$　$Y_W = 1/3$

$I_{W_z} = 1/2$　对于 u, c, t。

$I_{W_z} = -1/2$　对于 d, s, b。

单态　$I_W = 0$　$Y_W = 4/3$　对于 u, c, t。

$Y_W = -2/3$　对于 d, s, b。

因为夸克都是带质量的，它们都出现在 $SU(2)_L$ 和 $U(1)$ 的表示中。选取夸克的混合效应只影响电荷 $-1/3$ 的夸克。(也可以选取只影响具有 2/3 电荷的夸克。)夸克的混合效应可以通过一个混合矩阵来表示，该矩阵叫做 Kabayashi-Maskawa 混合矩阵 K[20]：

$$\begin{pmatrix} d_\theta \\ s_\theta \\ b_\theta \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{(III.3.1)}$$

这里 K 是由三个纯转动和一个位相乘法而得到的。转动可以类似于通常三维转动矩阵的 Euler 角表示来实现。令 $R_d(\theta)$

和 $R_b(\theta)$ 分别为不影响态 d 和 b 的转动，$P(\delta)$ 为一个位相变换：

$$R_d(\theta_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_2&s_2\\0&-s_2&c_2\end{pmatrix}, \tag{III.3.2a}$$

$$R_b(\theta_1)=\begin{pmatrix}c_1&s_1&0\\-s_1&c_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{III.3.2b}$$

及

$$P(\delta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{i\delta}\end{pmatrix}, \tag{III.3.2c}$$

这里 $c_1\equiv\cos\theta_1$，$s_1\equiv\sin\theta_1$，等等。选取位相变换的形式只影响 s 和 b。于是

$$K\equiv R_d(\theta_2)P(\delta)R_b(\theta_1)R_d(\theta_3)$$

$$=\begin{pmatrix}c_1&s_1c_3&s_1s_3\\-s_1c_2&c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta}&c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\s_1s_2&-c_1s_2c_3-c_2s_3e^{i\delta}&-c_1s_2s_3+c_2s_3e^{i\delta}\end{pmatrix} \tag{III.3.3}$$

角 θ_j，$j=1,2,3$，称为广义 Cabibbo 角。

标准模型的夸克表示为左手 $SU(2)_L$ 双态

$$q_L^{(1)}=\begin{pmatrix}u_L\\d_{\theta L}\end{pmatrix},\quad q_L^{(2)}=\begin{pmatrix}c_L\\s_{\theta L}\end{pmatrix},\quad q_L^{(3)}=\begin{pmatrix}t_L\\b_{\theta L}\end{pmatrix} \tag{III.3.4}$$

和 $U(1)$ 右手单态

$U_R^{(j)}=u_R$，c_R，及 t_R，对于 $j=1,2$，及 3。

$D_{\theta R}^{(j)}=d_{\theta R}$，$s_{\theta R}$ 及 $b_{\theta R}$，对于 $j=1,2$，及 3。 (III.3.5)

左手和右手夸克定义为

$$U_L\equiv\frac{1}{2}(1-\gamma_5)U,\quad \text{等等。} \tag{III.3.6a}$$

及

$$U_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)U, \quad \text{等等.} \qquad \text{(III.3.6b)}$$

为方便起见，也利用下面的符号：

$$U^{(j)} = u, c \text{ 及 } t, \text{ 对于 } j = 1, 2 \text{ 及 } 3,$$

$$D^{(j)} = d, s \text{ 及 } b, \text{ 对于 } j = 1, 2 \text{ 及 } 3,$$

并且 U 和 D 分别表示由 $U^{(j)}$ 和 $D^{(j)}$ 所形成的列矩阵. 于是 (III.3.1) 简单地为 $D_\theta = KD$. 因为 K 是幺正的，有 $\bar{D}_\theta D_\theta = \bar{D}D$.

(III.3.3) 表明，需要四个参数来定义三个夸克 d, s 和 b 的混合，三个参数是 Cabibbo 角类型的，一个参数是位相因子. 这是由于 Kabayashi 和 Maskawa 一般定理的结果："把 n 个荷 2/3 夸克和 n 个荷 $-1/3$ 夸克安排在 n 个 $SU(2)$ 双态，譬如说，使 n 个荷 $-1/3$ 夸克混合的 $n \times n$ 矩阵包含 $(n-1)^2$ 个参数. 其中 $n(n-1)/2$ 个参数为推广的 Cabibbo 角，并且 $(n-1)(n-2)/2$ 个参数为可能引入 CP 破坏的位相".

为了证明这个定理，首先令 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为荷 2/3 夸克，$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 为荷 $-1/3$ 夸克. 通过混合，定义

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \vdots \\ \tilde{d}_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \qquad \text{(III.3.7)}$$

因而出现在拉氏函数中的同位旋双态为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \tilde{d}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ \tilde{d}_2 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ \tilde{d}_n \end{pmatrix}.$$

混合矩阵 M 是一个 $n \times n$ 幺正矩阵，因此它是由 $2n^2$ 个实参数定义的. 但是并不是所有这些参数都是独立的，因为有使参数数目减少的条件. 幺正条件

$$MM^{+}=1$$

得到 n^2 个条件. 因此剩下 n^2 个自由参数. 因为任何一对荷 1/3 夸克可以混合，所以独立广义 Cabibbo 混合角的数目为

$$C_2^n=\frac{1}{2}n(n-1). \tag{III.3.8}$$

其余的为位相角，

$$n^2-c_2^n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

但是其中的 $2n-1$ 个位相角可以吸收到 $2n-1$ 个夸克波函数中，就可以去掉. 因此独立的位相总数为

$$\frac{1}{2}n(n+1)-(2n-1)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2). \tag{III.3.9}$$

这表明，为了有不为零的位相，$n\geqslant 3$ 是必要的. 往后将证明，这些位相的存在，某些夸克以复数系数混合，导致 CP 破坏. 这是通过与 W 玻色子耦合的一个动力学的 CP 破坏，并且至少需要 6 个夸克. 由于 CP 破坏的可能性，标准模型的 Kabayashi-Maskawa 方案是很吸引人的.

包括轻子的拉氏函数现在写为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{夸克}+\mathscr{L}_{轻子}+\mathscr{L}_{YM}+\mathscr{L}_{标}+\mathscr{L}_{汤川}+\mathscr{L}_{q,汤川} \tag{III.3.10}$$

这里 $\mathscr{L}_{轻子}$，$\mathscr{L}_{YM}$，$\mathscr{L}_{标}$ 和 $\mathscr{L}_{汤川}$ 分别由 (III.1.8)，(III.1.9)，(III.1.13) 和 (III.1.15) 给出. 包括夸克的部分是一个新的因素：

$$\mathscr{L}_{夸克}=\sum_{j=1}^{3}\bar{q}_L^{(j)}i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{A}_{\mu}-\frac{i}{6}g'B_{\mu}\right)q_L^{(j)}$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\bar{U}_R^{(j)}i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-i\frac{2}{3}g'B_{\mu}\right)U_R^{(j)}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\bar{D}_{\theta R}^{(j)} i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+i\frac{1}{3}g'B_{\mu}\right)D_{\theta R}^{(j)}, \quad \text{(III.3.11)}$$

及

$$\mathscr{L}_{q,\text{汤川}}=-\sum_{j=1}^{3}(\tilde{G}_{H}^{(j)}\bar{q}_{L}^{(j)}\tilde{\Phi}U_{R}^{(j)}+\tilde{G}_{H}^{*}\bar{U}_{R}^{(j)}\tilde{\Phi}^{+}q_{L}^{(j)})$$

$$-\sum_{j,k=1}^{3}(G_{H}^{(jk)}\bar{q}_{L}^{(j)}\Phi D_{\theta R}^{(k)}+G_{H}^{(jk)*}\bar{D}_{\theta R}^{(k)}\Phi^{+}q_{L}^{(j)}), \quad \text{(III.3.12)}$$

这里

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi^{(+)}\\ \phi^{(0)}\end{pmatrix},$$

如同在(III.1.29)中所定义的轻子情形一样，并且

$$\Phi=i\sigma_{2}\Phi^{*}=\begin{pmatrix}\phi^{(0)}\\ -\phi^{(+)+}\end{pmatrix}, \quad \text{(III.3.13)}$$

它形成等价于Φ的一个表示。自发对称破缺在幺正规范中用代换

$$\Phi\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ H+v_{0}\end{pmatrix}, \quad \text{(III.3.14a)}$$

$$\tilde{\Phi}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}H+v_{0}\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{(III.3.14b)}$$

就得到了.一切夸克变为带质量的，并且出现在方程(III.3.12)中的质量项可以安排在夸克味中，为对角的。为了对一切夸克给出质量，确实，得到(III.3.12)中所给出的汤川耦合形式，是必要的。由于事实上一个$SU(2)$表示Φ和它的复共轭$\tilde{\Phi}$是等价的，如同在(III.2.13)下面所提到的，汤川耦合就可以通过单个$SU(2)$双态标量场来实现。给出一个$SU(2)$变换$\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)$，$\boldsymbol{\theta}=(\theta^{1},\theta^{2},\theta^{3})$，于是

$$i\sigma_2\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\tau\cdot\theta\right)\right)^*(i\sigma_2)^{-1}=\exp\left(-\frac{i}{2}\tau\cdot\theta\right).$$

这里表示 $\exp\left(-\frac{i}{2}\tau\cdot\theta\right)$ 和 $\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\tau\cdot\theta\right)\right)^*$ 是等价的。(III.3.11) 可以分解为三部分：

$$\mathscr{L}_{\text{夸克}}=\mathscr{L}_{q,\text{动力学}}+\mathscr{L}_{q,\text{带电}}+\mathscr{L}_{q,\text{中性}}. \qquad \text{(III.3.15)}$$

这里

$$\mathscr{L}_{q,\text{动力学}}=\bar{u}i\partial\!\!\!/u+\bar{c}i\partial\!\!\!/c+\bar{t}i\partial\!\!\!/t+\bar{d}i\partial\!\!\!/d+\bar{s}_1i\partial\!\!\!/s+\bar{b}_1i\partial\!\!\!/b. \qquad \text{(III.3.16)}$$

$$\mathscr{L}_{q,\text{带电}}=\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_W^2\right)^{\frac{1}{2}}\{\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\theta+\bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_\theta+\bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b_\theta\}W_\mu^+ + h.c.. \qquad \text{(III.3.17)}$$

$$\mathscr{L}_{q,\text{中性}}=g\sum_{j=1}^{3}\bar{q}_L^{(j)}\gamma^\mu\frac{\tau^3}{2}q_L^{(j)}[\sin\theta_W A_\mu-\cos\theta_W z_\mu]+g'\sum_{j=1}^{3}\frac{Y_L}{2}\bar{q}_L^{(j)}\gamma^\mu q_L^{(j)}[\cos\theta_W A_\mu+\sin\theta_W z_\mu]+g'\sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{Y_R^{(u)}}{2}\bar{U}_R^{(j)}\gamma^\mu U_R^{(j)}+\frac{Y_R^{(d)}}{2}\bar{D}_R^{(j)}\gamma^\mu D_R^{(j)}\right\}\times[\cos\theta_W A_\mu+\sin\theta_W z_\mu], \qquad \text{(III.3.18)}$$

这里 $Y_L=\frac{1}{3}$，$Y_R^{(u)}=4/3$，及 $Y_R^{(d)}=-2/3$。可以看出，夸克的动能项是对角的，应该如此。带荷流项，即 $\mathscr{L}_{q,\text{带电}}$ 也包含在广义 Cabibbo 流的标准形式中。写出带流的耦合常数为 $\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_W^2\right)^{1/2}$，利用 § III.1 的结果。再者

$$\mathscr{L}_{q,\text{中性}}=\mathscr{L}_{q,\gamma}+\mathscr{L}_{q,z}. \qquad \text{(III.3.19)}$$

利用 (III.3.14)，可以写出夸克与电磁场的相互作用为

$$\mathscr{L}_{q,\gamma}=e\left\{\sum_{j=1}^{3}\bar{q}_L^{(j)}\gamma^\mu\left(\frac{\tau^3}{2}+\frac{Y_L^{(j)}}{2}\right)q_L^{(j)}\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\bar{U}^{(j)}\gamma^{\mu}\left(\frac{Y_R^{(u)}}{2}\right)U^{(j)}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\bar{D}^{(j)}\gamma^{\mu}\left(\frac{Y_R^{(j)}}{2}\right)D^{(j)}\Big\}A_{\mu}$$

$$=\frac{2}{3}e\{\bar{u}\gamma^{\mu}u+\bar{c}\gamma^{\mu}c+\bar{t}\gamma^{\mu}t\}A^{\mu}$$

$$-\frac{1}{3}e\{\bar{d}\gamma^{\mu}d+\bar{s}\gamma^{\mu}s+\bar{b}\gamma^{\mu}b\}A^{\mu}, \quad \text{(III.3.20)}$$

它是所期待的标准形式

$$ej_{\mu}^{(H)em}A^{\mu},$$

这里

$$j_{\mu}^{(H)em}\equiv\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{U}^{(j)}\gamma_{\mu}U^{(j)}-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{D}^{(j)}\gamma_{\mu}D^{(j)}.$$

与中性矢量玻色子 z^0 的相互作用为

$$\mathscr{L}_{q,z}=-2\sqrt{2}\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_z^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{3}\bar{q}_L^{(j)}\gamma_{\mu}\frac{\tau^3}{2}q_L^{(j)}-\sin^2\theta_W j_{\mu}^{(H)em}\right\}Z^{\mu}$$

$$=-\sqrt{2}\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_z^2\right)^{1/2}$$

$$\times\sum_{j=1}^{3}\left\{\bar{U}^{(j)}\left[\frac{1}{2}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\gamma_{\mu}\right]U^{(j)}\right.$$

$$+\bar{D}^{(j)}\left[-\frac{1}{2}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\gamma_{\mu}\right]D^{(j)}\right\}Z^{\mu}. \quad \text{(III.3.21)}$$

为了检验汤川相互作用项，作 (III.3.14) 代换，使拉氏函数的这部分变为

$$\mathscr{L}_{q,\text{汤川}} = -\frac{H+v_0}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{3}\bar{U}^{(i)}\{(\tilde{G}_H^{(i)}+G_H^{(i)*}) + \gamma_5(\tilde{G}_H^{(i)}-G_H^{(i)*})\}U^{(i)}$$

$$-\frac{H+v_0}{2\sqrt{2}}\sum_{i,k=1}^{3}\bar{D}_\theta^{(i)}\{(G_H^{(ik)}+G_H^{(ki)*}) + \gamma_5(G_H^{(ik)}-G_H^{(ki)*})\}D_\theta^{(k)} \qquad \text{(III.3.22)}$$

包含荷 2/3 夸克的项已经对角化了. 有必要对这些夸克选取实汤川耦合:

$$\tilde{G}_H^{(i)*} = \tilde{G}_H^{(i)}$$

来消去 γ_5 项. 包含荷 $-1/3$ 夸克的项可以如下写为

$$-\frac{H+v_0}{2\sqrt{2}}\bar{D}_\theta\{(G_H+G_H^+)+\gamma_5(G_H-G_H^+)\}D_\theta, \qquad \text{(III.3.23)}$$

这里 D_θ 为由 $D_\theta^{(j)}$, $j=1,2,3$, 所成形的一个列矩阵, 并且 G_H 为由 $G_H^{(ik)}$ 所形成的一个 3×3 矩阵. 上面的表示式也可以写为

$$-\frac{H+v_0}{2\sqrt{2}}\bar{D}K^+\{(G_H+G_H^+)+\gamma_5(G_H-G_H^+)\}KD, \qquad \text{(III.3.24)}$$

这里 K 为 Kabayashi-Maskawa 矩阵. 选取汤川耦合为厄密的, 使 γ_5 项为零. 在下面, 将证明矩阵

$$K^+G_HK = K^+G_H^+K$$

可以由适当选取 G_H 来对角化. 事实上, 可以取

$$G_H = \frac{\sqrt{2}}{v_0}KM_DK^+, \qquad \text{(III.3.25)}$$

这里 M_D 为一个对角矩阵

$$M_D = \begin{pmatrix} m_d & & 0 \\ & m_s & \\ 0 & & m_b \end{pmatrix} \qquad \text{(III.3.26)}$$

显然，由方程 (III.3.25)，G_H 是厄密的. 因为 K 是幺正的，由此可得

$$K^+ G_H K = K^+ G_H^+ K = \frac{\sqrt{2}}{v_0} \begin{pmatrix} m_d & & 0 \\ & m_s & \\ 0 & & m_b \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.3.27)}$$

方程 (III.3.23) 约化为

$$-(m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s + m_b\bar{b}b) - \frac{H}{v_0}(m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s + m_b\bar{b}b). \qquad \text{(III.3.28)}$$

最后，在幺正规范中夸克的汤川耦合为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{q,\text{汤川}} = & -m_u\bar{u}u - m_c\bar{c}c - m_t\bar{t}t \\ & - m_d\bar{d}d - m_s\bar{s}s - m_b\bar{b}b \\ & - \frac{g}{2M_W}(m_u\bar{u}u + m_c\bar{c}c + m_t\bar{t}t \\ & + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s + m_b\bar{b}b)H. \end{aligned} \qquad \text{(III.3.29)}$$

由这个表示式清楚地看到，Higgs 粒子优先与重夸克耦合. 上夸克和下夸克的有效质量为 0.1GeV 的量级，奇夸克质量为 0.5GeV，粲夸克质量为 1.5GeV，底夸克质量为 5GeV. 在质量小于 19 GeV 的范围内没有证实顶夸克存在. 若顶夸克存在，它的质量将大于 19GeV. 因此，顶夸克与 Higgs 粒子的耦合是十分可观的

$$\frac{gm_t}{2M_W} = \frac{e}{2\cos\theta_W}\frac{m_t}{M_W} \geqslant 0.15e.$$

结束本节，将在下面给出 Kabayashi-Maskawa 模型（当

$\delta \neq 0$)容许 CP 破坏的证明。令 U_c 和 U_p 为荷电共轭算符和宇称算符。对于一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的费米子场 ϕ，荷共轭的作用为[21]

$$U_c\phi_\alpha U_c^{-1} = \phi_\beta C_{\beta\alpha},$$
$$U_c\bar{\phi}_\alpha U_c^{-1} = -C^{-1}_{\alpha\beta}\bar{\phi}_\beta, \qquad \text{(III.3.30)}$$

这里 C 为一个 4×4 矩阵，满足下面的条件：

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \quad C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T, \qquad \text{(III.3.31)}$$

这里 γ_μ^T 和 γ_5^T 为 γ_μ 和 γ_5 的转置矩阵。C 的显式表示式为

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 σ_2 为第二个 Pauli 矩阵。宇称算符给出

$$U_p\phi(t, \boldsymbol{\gamma})U_p^{-1} = \eta_p\gamma_0\phi(t, -\boldsymbol{\gamma}),$$
$$U_p\bar{\phi}(t, \boldsymbol{\gamma})U_p^{-1} = \eta_p^*\bar{\phi}(t, -\boldsymbol{\gamma})\gamma_0, \qquad \text{(III.3.32)}$$

这里 η_p 为一个位相因子，表示场的内禀宇称。

现在考虑强子弱相互作用的带荷流

$$j_\mu^{(H)-} = \sum_{j=1}^{3} \bar{U}^{(j)}\gamma_\mu(1-\gamma_5)D_\theta^{(j)}. \qquad \text{(III.3.33)}$$

在C和P的作用下

$$U_c j_\mu^{(H)-} U_c^{-1} = \sum_{j=1}^{3} (U_c\bar{U}^{(j)}U_c^{-1})\gamma_\mu(1-\gamma_5)(U_c D_\theta^{(j)}U_c^{-1}), \qquad \text{(III.3.34)}$$

现在

$$U_c\bar{U}_\alpha^{(j)}U_c^{-1} = -C^{-1}_{\alpha\beta}U_\beta^{(j)}. \qquad \text{(III.3.35)}$$

注意处理方程(III.3.34)的第三个因子，是重要的。算符 U_c 只影响费米子场而不影响混合矩阵元，即是，

$$U_c D_\alpha^{(j)}U_c^{-1} = \sum_l K_{jl}U_c D_\alpha^{(l)}U_c^{-1} = \sum_l K_{jl}\bar{D}_\beta^{(l)}C_{\beta\alpha}. \qquad \text{(III.3.36)}$$

把方程 (III.3.35) 和 (III.3.36) 代入方程 (III.3.34)，并利用方程 (III.3.31)，得到

$$U_c j_\mu^{(H)-} U_c^{-1} = \sum_{j,l=1}^{3} K_{jl} \bar{D}_\theta^{(j)} C[(1-\gamma_5)^T \gamma_\mu^T] C^{-1} U^{(j)}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{3} K_{jl} \bar{D}_\theta^{(j)} \gamma_\mu (1+\gamma_5) U^{(j)}. \qquad \text{(III.3.37)}$$

为了得到上式右边的第一行，$U^{(j)}$ 和 $\bar{D}^{(l)}$ 彼此被交换。这引进一个负号，它与方程 (III.3.35) 中所出现的负号相抵消。现在把宇称算符应用到方程 (III.3.37)：

$$U_p U_c j_\mu^{(H)-}(t, \boldsymbol{r}) U_c^{-1} U_p^{-1}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{3} K_{jl} \bar{D}^{(l)}(t, -\boldsymbol{r}) \gamma_0^+ \gamma_\mu (1+\gamma_5) \gamma_0 U^{(j)}(t, -\boldsymbol{r})$$

$$= -\sum_{j,l=1}^{3} (-1)^{\delta_{\mu 0}} K_{jl} \bar{D}^{(l)}(t, -\boldsymbol{r}) \gamma_\mu (1-\gamma_5) U^{(j)}(t, -\boldsymbol{\gamma}).$$

(III.3.38a)

类似地

$$U_p U_c j_\mu^{(H)+}(t, \boldsymbol{r}) U_c^{-1} U_p^{-1}$$

$$= -\sum_{j,l=1}^{3} (-1)^{\delta_{\mu 0}} K_{jl}^* \bar{U}^{(l)}(t, -\boldsymbol{r}) \gamma_\mu (1-\gamma_5) D^{(j)}(t, -\boldsymbol{r}).$$

(III.3.38b)

原来的流为

$$j_\mu^{(H)-} = \sum_{j,l=1}^{3} K_{jl} \bar{U}^{(l)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) D^{(j)}, \qquad \text{(III.3.39a)}$$

$$j_\mu^{(H)+} = \sum_{j,l=1}^{3} K_{jl}^* \bar{D}^{(l)} \gamma_\mu (1-\gamma_5) U^{(j)}. \qquad \text{(III.3.39b)}$$

被变换的流方程 (III.3.38a) 和 (III.3.38b) 不可能与原来的流方程 (III.3.39a) 和 (III.3.39b) 相联系，除非 Kabayashi-Maskawa 矩阵为实数。否则 CP 是不守恒的。这完成了证

明。

在本节中和在§ III.1 中所描述的轻子和夸克的模型通过粒子谱和群结构，有极小的结构。因此称为极小标准模型，或者简称为极小模型。

Feynman 规则 利用 (III.3.17)、(III.3.20)和(III.3.21)可以写出夸克与矢量玻色子耦合的 Feynman 规则，而用 (III.3.29) 便可写出与 Higgs 粒子耦合的规则，当然，都要用前节末所给出的一般规则 (a)—(f) 加以补充。在矢量玻色子、Higgs 粒子、非物理的标量和鬼之间的耦合准确地就是轻子的这些耦合。包括夸克的拉氏函数汇集如下：

$$\mathscr{L}_{\text{夸克}} = \mathscr{L}_{q,f} + \mathscr{L}_{q,\text{Int.I}} + \mathscr{L}_{q,\text{Int.II}}. \qquad \text{(III.3.40)}$$

自由拉氏函数为

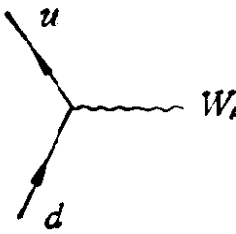
$$\mathscr{L}_{q,f} = \sum_{j=1}^{3} \{\bar{U}^{(j)}(i\partial\!\!\!/ - m_{u_j})U^{(j)} + \bar{D}^{(j)}(i\partial\!\!\!/ - m_{D_j})D^{(j)}\} \qquad \text{(III.3.41)}$$

相互作用拉氏函数为

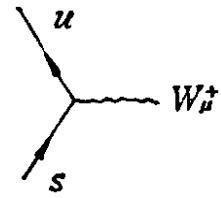
$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{q,\text{Int.I}} = &\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} M_W^4\right)^{\frac{1}{2}} \{\bar{U}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\theta \\ &+ \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_\theta + \bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b_\theta\}W_\mu^+ + \text{h.c.} \\ &+ \frac{e}{3}\sum_{j=1}^{3}\{2\bar{U}^{(j)}\gamma^\mu U^{(j)} - \bar{D}^{(j)}\gamma^\mu D^{(j)}\}A_\mu \\ &- (\sqrt{2}\,G_F M_z^2)^{1/2} \\ &\times \sum_{j=1}^{3}\left\{\bar{U}^{(j)}\left(\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma_5) - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W\gamma^\mu\right)U^{(j)}\right. \\ &\left.+ \bar{D}^{(j)}\left(-\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma_5) + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\gamma^\mu\right)D^{(j)}\right\}z_\mu\end{aligned} \qquad \text{(III.3.42)}$$

及

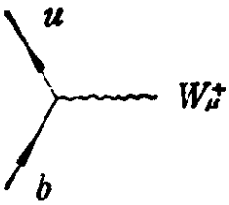
$$\mathscr{L}_{q,\mathrm{Int,H}} = -\frac{g}{2M_W} H\{m_u\bar{u}u + m_c\bar{c}c + m_t\bar{t}t + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s + m_b\bar{b}b\}. \quad (\mathrm{III}.3.43)$$



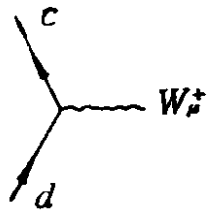
$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu(1-\gamma_5)\cos\theta_1$$



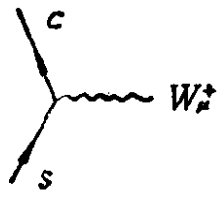
$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_1\cos\theta_3$$



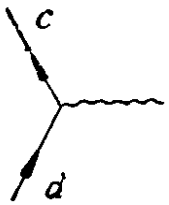
$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_1\sin\theta_3$$



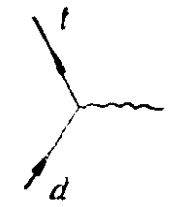
$$-i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_1\cos\theta_2$$



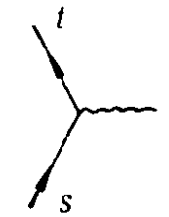
$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu(1-\gamma_5)$$
$$\times(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta})$$



$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_W^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\times(\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3+\sin\theta_2\cos\theta_3 e^{i\delta})$$



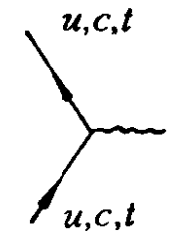
$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_W^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\sin\theta_1\sin\theta_2$$



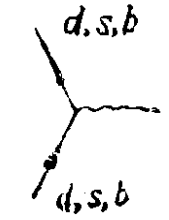
$$-i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_W^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\times(\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3+\cos\theta_2\sin\theta_3 e^{i\delta})$$



$$i\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_W^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\times(-\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3+\cos\theta_2\cos\theta e^{i\delta})$$



$$-i(\sqrt{2}G_F m_z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma_5)-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\gamma_\mu\right]$$



$$-i(\sqrt{2}G_F m_z^2)^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma_5)+\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\gamma_\mu\right]$$

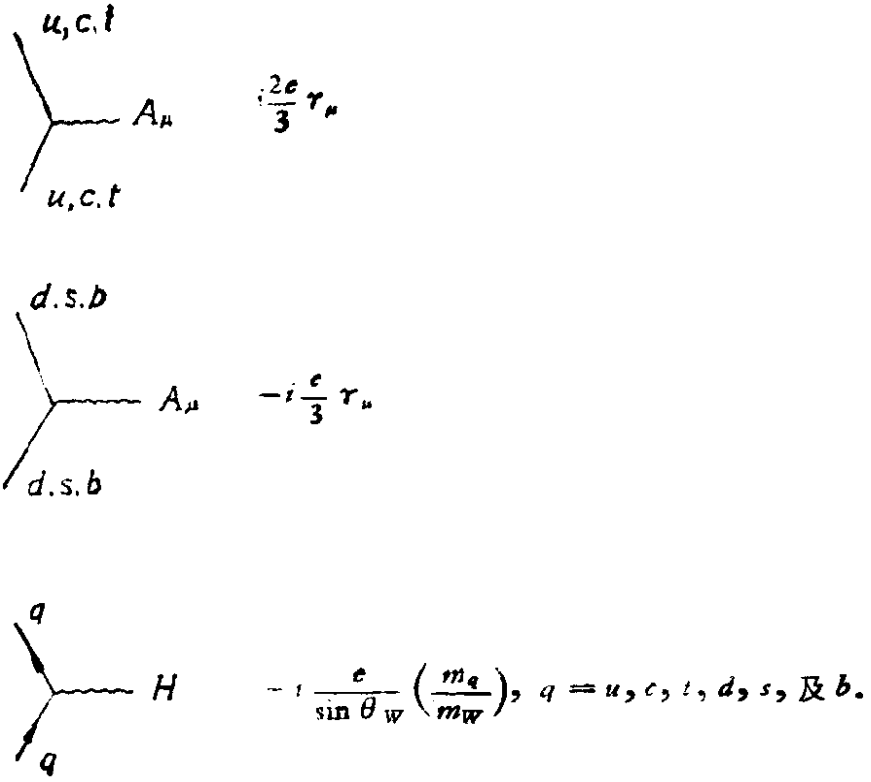


图 III.1? 夸克耦合

III.4 电弱理论标准模型的实验状况

本节对照有用的实验数据的检验[21,22,23]，提出极小的 Glashow-Weinberg-Salam 理论现状的简短总结. 这里并不关心理论结构，理论结构具有一套很好定义的规则来得到有限的结果，并且都知道理论是可重正化的；模型作为一个有成效的理论，有如何使人满意的问题. 近几年实验努力的主要结果表明，在第一轮与有用的实验检验的对照中，极小模型已经取得了惊人的成就. 所有这些检验涉及到理论的最低阶的预言.

下面是有关标准模型的某些本质问题.

(1) 模型的结构，带荷流和中性流.

已检验了标准模型的什么结构呢？这些检验如何定量呢？

（2）标准模型的非阿贝耳性质.

什么检验对于理论的非阿贝耳性质是灵敏的？

（3）自发对称破缺.

如何检验规范对称性的自发对称破缺呢？

（4）高阶效应.

为了把理论与量子电动力学相提并论，例如，作为一个微扰论，有必要考虑包括高阶效应的过程. 在最近的将来，那一类实验是现实的？

（5）标准模型的唯一性.

对于标准模型是否有任何选择呢？任何选择与有关实验数据的比较，要有如同标准模型相同的成就.

目前对上面的问题，只有部分答案. 这些答案将分别在下面加以讨论.

（A）荷流 在低能量处荷流——定义为低于中间矢量玻色子质量 m_z 和 m_w 的能量阱——等价于规范理论以前的四费米子相互作用[11,12]. 相互作用为 $V-A$ 型，并且有量子数

$$\Delta Q = \Delta N,$$

这里 ΔQ 为从初态到末态电荷的改变，ΔN 为通常的同位旋，奇，粲，底或顶量子数第三分量的改变，具体取决于有关的情况. 这个结构显然是来源于方程 (III.3.20).

包括带荷流的低能量反应并不对标准模型提供灵敏的检验，因为荷流唯象学是模型建筑中的输入部分，除非在数据中存在着 $V-A$ 结构的某种严重的破坏. 然而，这种破坏不太可能出现在目前的能量范围. 另一方面，荷流反应可以用来研究夸克部分子模型的动力学，例如量子色动力学和强子内

部的夸克分布。

由双态

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_{\theta L} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad 及 \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$$

所组成的荷流部分直到 1980 年，曾用来描述弱相互作用的现象，但 CP 破坏现象和强子的非轻子衰变的 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 规则除外[10,11]。在 1970 年新的发展还添加了三个双态：

$$\begin{pmatrix} c_L \\ s_{\theta L} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_{\theta L} \end{pmatrix} \quad 及 \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}.$$

现在强子有三个双态(如果最终发现顶夸克)，轻子有三个双态。这个强子轻子对称性在 Glashow-Weinberg-Salam 模型中为了重正化是必要的，这将在下节讨论。关于实验方面，涉及到 $V+A$ 的极限，即右手荷流，第二类流和广义 Cabibbo 唯象学，新轻子和 CP 破坏，已得到了较多的信息。下面是这方面进展的简短总结。

(i) 关于 $V+A$ 流的极限。

设 g_R 及 m_{W_R} 为右手带荷流的耦合强度及相应的中间矢量玻色子质量，于是[24]

$$g/m_W \geqslant 3g_R/m_{W_R}.$$

(ii) 第二类流的情况。

在标准模型中带荷流有下面的 G 宇称：矢量流有偶 G 宇称，轴矢量流有奇 G 宇称。第二类流是有相反 G 宇称的流[25]。尚未探测到第二类流的效应[26,27]。

(iii) Cabibbo 唯象学。

方程 (III.3.17) 给出了带荷流的形式，即

$$\mathscr{L}_{q,\text{带电}} = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} m_W^2\right)^{\frac{1}{2}} \{\bar{U}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_\theta + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_\theta$$

$$+ \bar{t}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)b_{\theta}\}W_{\mu}^{+} + h.c. \qquad \text{(III.4.1)}$$

它可以对不同味量子数的夸克之间的跃迁作出确定的预言. 表 III.1 列举了一切跃迁，连同 Cabibbo-Kabayashi-Maskawa (CKM) 混合因子，以及有关的唯象学. 在表中 $C_1 \equiv \cos\theta_1$，及 $S_1 = \sin\theta_1$，等等. 底(顶)夸克 $b(t)$ 有底(顶)量子数 $b = -1$ $(t = 1)$. 一切跃迁都是由 W 玻色子的发射引起的. 例如，图 III.13 所示的跃迁 $u \longleftrightarrow d$.

表 III.1

跃迁	量子数的改变	CKM 因子	唯象学
$u \longleftrightarrow d$	$\Delta I_z = 1$	C_1	核衰变和 ν 及 $\bar{\nu}$ 反应的主要部分
$u \longleftrightarrow s$	$\Delta Q = \Delta S$	S_1C_3	奇异粒子衰变及它们在 ν 及 $\bar{\nu}$ 反应中的产生
$u \longleftrightarrow b$	$\Delta Q = \Delta b$	S_2S_3	(被抑止的)底粒子衰变及在 ν 及 $\bar{\nu}$ 反应中的产生
$c \longleftrightarrow d$	$\Delta Q = \Delta c$	$-S_1C_2$	(被抑止的)粲粒子衰变及在 ν 及 $\bar{\nu}$ 反应中由价夸克的产生
$c \longleftrightarrow s$	$\Delta Q = \Delta c = \Delta S$	$C_1C_2S_3 - S_2S_3e^{i\delta}$	(占优势的)粲粒子衰变及在 ν 及 $\bar{\nu}$ 反应中由海夸克的产生，在 K 体系中的 CP 破坏
$c \longleftrightarrow b$	$\Delta Q = \Delta b = \Delta c$	$C_1C_2S_3 + S_2C_3e^{i\delta}$	(占优势的?)底粒子衰变，CP 破坏(?)
$t \longleftrightarrow d$	$\Delta Q = \Delta t$	S_1S_2	(被抑止的)顶介子衰变.
$t \longleftrightarrow s$	$\Delta Q = \Delta t = \Delta S$	$-C_1S_1C_3 - C_2S_3e^{i\delta}$	(被抑止的?)顶介子衰变，CP 破坏
$t \longleftrightarrow b$	$\Delta Q = \Delta t = \Delta b$	$-C_1S_2S_3 + C_2C_3e^{i\delta}$	(占优势的?)顶介子衰变，CP 破坏

关于 CKM 角的极限可以由已知的强子衰变[28,29,30,31]得到. θ_1 的值可以精确地由核 β 衰变率或 π 轻子衰变率与 K 轻

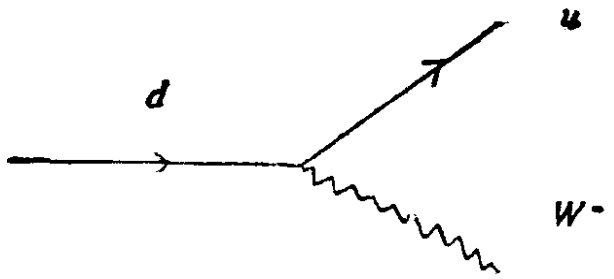


图 III.13

子衰变率的比较来确定. 结果为

$$C_1 = 0.974 \pm 0.003, \quad \theta_1 = 13.05° \pm 0.75°.$$

其他的角度值并没有准确地知道;现在只能得到粗略的极限:

$$|S_3| = 0.28^{+0.21}_{-0.28}$$

及

$\tan^2\theta_2 \simeq \dfrac{m_c}{m_t} \leqslant 0.075$, 对于 $m_c = 1.5$ GeV 及 $m_t \geqslant$ 20GeV. 一般认为, S_1, S_2 及 S_3 都是小的, 并且重夸克跃迁跟随着一连串的级联反应

$$\begin{array}{l} t \to b + \cdots \\ \quad\ \ \llcorner\!\!\to c + \cdots \\ \qquad\quad \llcorner\!\!\to s + \cdots \\ \qquad\qquad\ \ \llcorner\!\!\to u + \cdots \\ \\ d \to u + \cdots \end{array} \qquad \text{(III.4.2)}$$

(iv) CP 破坏.

KM 方案通过夸克与中间矢量玻色子的耦合对 CP 破坏提供一个特别的机制. 由表 III.1 可以看出,除奇异介子以外, CP 破坏可以在包括重夸克 c, b, 及 t 的粒子体系内出现. 在原则上, 这可能引起重夸克和它们的反夸克之间的混合, 例如, $c \longleftrightarrow \bar{c}$, $b \longleftrightarrow \bar{b}$, 及 $t \longleftrightarrow \bar{t}$. 然而, 由于这些重

粒子的寿命极短,(10^{-13} 秒,与之相对照的是 $K^{\pm}$ 和 K_L 的 10^{-8} 秒,K_s 的 10^{-10} 秒) 这些附加的 CP 破坏效应要观测到,是极其困难的. 另一方面, CP 破坏在包含一个重夸克和一个轻夸克的重介子衰变中是可能观测到的. B 介子 (包含一个 b 夸克和一个普通的夸克) 和它的反粒子 $\bar{B}$ 的某些部分衰变率可能显示出差异.

上面提到的 CP 破坏出现在 W 介子与夸克的耦合中. 在拉氏函数中破坏是正当的,并且唯一的 CP 破坏效应可能出现在具有一个标量双态和 6 个或更多的味夸克的极小模型中. 如果放松极小要求,或者推广 Glashow-Weinberg-Salam 模型,就可以引入另外的 CP 破坏机制. 下面是其他 CP 破坏源的梗概.

一个源是自发的 CP 破坏[32,33,34]. 在这种类型的理论中,拉氏函数保持 CP 不变性,但真空并不保持 CP 不变性,因而某些 Higgs 场显示复数真空到真空的期待值. 为使这能发生,二个或更多的 Higgs 双态是必要的. 另外的可能性是推广 Glashow-Weinberg-Salam 模型到包括右手同位旋流,即 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)$ 理论. 在这类模型中, CP 破坏可能出现在右手相互作用的带荷玻色子的耦合中[35]. 还有另外可能的源是与量子色动力学强相互作用效应相联系的 CP 破坏[36]. 它是由于瞬子存在的非微扰的结果[37].

(v) τ 衰变唯象学.

τ 通过带荷流衰变. τ 衰变模型的一切数据是与标准模型一致的,并且表明 τ 和 ν_L 形成一个序列的轻子双态.

(B) 中性流 标准模型的主要支持来自于中性流相互作用,轻子的中性流相互作用的拉氏函数在 (III.1.35) 中给出,强子的在方程 (III.3.21) 中给出. 组合的拉氏函数如下:

$$L_{NC} = -2(\sqrt{2}\,G_F M_z^2)^{1/2} z^{\mu}\{j_{\mu}^{(3)} - \sin^2\theta_W j_{\mu}^{(em)}\}, \quad \text{(III.4.3)}$$

这里

$$j_\mu^{(3)} = \sum_{k=1}^{3} \bar{q}_L^{(k)} \gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} q_L^{(k)} + \sum_{k=1}^{3} \bar{L}_k \gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} L_k, \quad \text{(III.4.4a)}$$

$$j_\mu^{(em)} = \sum_k Q_k \phi_k \gamma_\mu \phi_k. \quad \text{(III.4.4b)}$$

并且注意到，中性流的耦合也可以写为：

$$2(\sqrt{2}\, G_F M_z^2)^{1/2} = e/(\sin\theta_W \cos\theta_W).$$

在 (III.4.4a) 中求和对三个夸克和三个轻子双态进行，在方程 (III.4.4b) 中求和对各个带荷的夸克和轻子进行，Q_k 为它们的电荷，以电荷 e 为单位：对于 e, c, t 为 2/3；对于 d, s, b 为 $-1/3$；对于 e, μ, τ 为 -1。

在能量比 Z^0 质量小得多的低能范围内，中性流相互作用约化为四费米子形式：

$$-\left(\frac{1}{2}\right) i 4 \sqrt{2}\, G_F \{j_\mu^{(3)} - \sin^2\theta_W j_\mu^{(em)}\} \{j^{(3)\mu} - \sin^2\theta_W j^{(em)\mu}\}. \quad \text{(III.4.5)}$$

这里因子 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 是由于方程 (III.4.5) 是一个算符表示式，并且包含算符的平方。考虑 Born 图形，并删去 Z_0 传播子中的动量相关性，就得到了方程 (III.4.5)。这已由过程

$$e^- + \nu_\mu \to e^- + \nu_\mu \quad \text{(III.4.6)}$$

来说明了。利用图 III.2 和图 III.3 中所列举的 Feynman 图形规则，可以写出方程 (III.4.5) 的振幅为

$$\begin{aligned} A = & \left(\frac{-ig}{4\cos\theta_W}\right)^2 \bar{u}_e(p_2)\gamma_\mu[(4\sin^2\theta_W - 1) + \gamma_5] \\ & \times u_e(p_1)\bar{u}_\nu(q_2)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u_\nu(q_1) \\ & \times \left\{\frac{-i}{k^2 - M_z^2}\left[-g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi_z}\right)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]\right\}, \end{aligned} \quad \text{(III.4.7)}$$

这里 $p_1(q_1)$ 和 $p_2(q_2)$ 分别为入射和出射电子(中微子)的四

动量

$$k \equiv p_1 - p_2 = q_2 - q_1,$$

$u_e(p)$ 和 $u_\nu(q)$ 为电子和中微子的旋量波函数. 当无质量的中微子利用自由中微子方程时可以删去 $k_\mu k_\nu$ 项. 在低能量处，$m_z \gg |k^2|$，在 Z_0 传播子中可以略去 k^2 项. 可以利用方程 (III.2.42) 中所给出的 g 和 G_F 之间的关系重写方程 (III.4.7) 为

$$\begin{aligned} A &= -i\frac{G_F}{2\sqrt{2}}\bar{u}_e(p_2)\gamma_\mu[(4\sin^2\theta_W - 1) + \gamma_5] \\ &\quad \times u_e(p_1)\bar{u}_\nu(q_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_\nu(q_1) \\ &= -i\,4\sqrt{2}\,G_F\bar{u}_e(p_2)\gamma_\mu\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) + \sin^2\theta_W\right]u_e(p_1) \\ &\quad \times \bar{u}_\nu(q_2)\gamma^\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]u_\nu(q_2). \end{aligned} \tag{III.4.8}$$

这个表示式正好就是由方程 (III.2.39) 和 (III.2.42) 读出准确到一个位相因子可能得到的表示式. 上面的代数程序在图形上可以用如图 III.14 所给出的图形来说明.

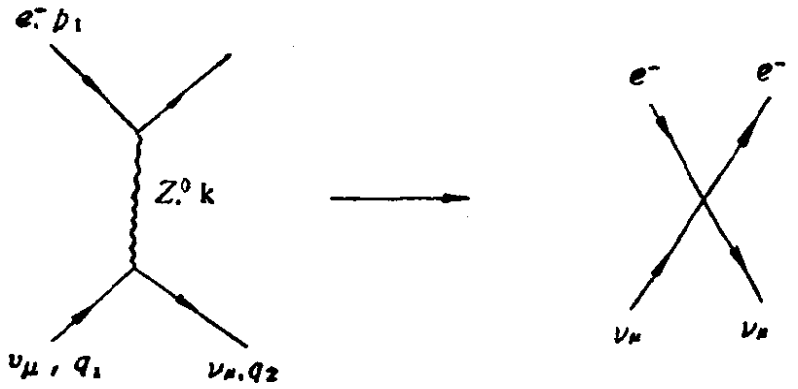


图 III. 14

在标准模型中，中性流的结构使一切味量子数守恒. 这由理论的群结构和群表示的内容会自然得到，并且与理论的

参数取值无关. 事实上，标准模型满足所谓"自然味守恒"定理的准则[38,39]，它可以叙述如下：

对于一般 $SU(2)\otimes U(1)$ 理论的自然味守恒的充要条件可以这样来叙述：给定荷和螺旋性的一切夸克必须 (1) 按照弱 $SU(2)$的相同不可约表示而变换，(2)对应于弱同位旋第三分量的相同本征值，(3)然后由单个源(或由单个中性 Higgs 介子的真空期待值或由唯一的规范不变量的裸质量项) 得到对夸克质量矩阵的贡献. 在只包括荷 2/3 的夸克并不包括荷 $-1/3$ 夸克的规范模型的情况，如果一切左手夸克位于弱双态，及一切右手夸克位于单态，则自然味守恒保持到 αG_F 量级.

已实现了与规范模型无关的中性流不依赖于模型的数据分析. 在原则上，低能量中性流物理学对于许多参数是灵敏的. 从 1977 年以来已取得了迅速的进展. 大多数的不确定性被消去了，并且分析几乎是完整的[21]，数据主要来自中微子所引起的过程.

(i) 轻子区段

轻子区段形成检验中性流结构而不被强相互作用效应掩蔽的干净的情况. 在 Born 图形中只包含中性流的过程是类似于 (III.4.6) 的反应. 标准模型的检验要假定中微子 Z_0 顶角有 $V-A$ 形式，但是电子 Z_0 顶角为一般的矢量和轴矢量耦合. 矢量和轴矢量耦合的强度由实验数据来确定，然后与标准模型得到的相应值加以比较. [数据对于电子 Z_0 矢量和轴矢量耦合并不给出唯一的解. 这包括符号的不确定性和交换矢量和轴矢量耦合强度的不确定性. 关于这些不确定性及其解的讨论，参阅文献 [21] 及 [40]].

$$i\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left\{\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\nu_\mu\right\}\left\{\bar{e}\gamma_\lambda(g_e^V+g_e^A\gamma_5)e\right\} \qquad \text{(III.4.9)}$$

在标准模型中[方程 (III.4.8) 式]

$$g_e^V = \frac{1}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W),$$

$$g_e^A = -\frac{1}{2}. \qquad \text{(III.4.10)}$$

(ii) 中微子强子区段

考虑的反应为

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + \text{任何粒子}. \qquad \text{(III.4.11)}$$

假定中性流耦合是矢量和轴矢量类型的混合，并且包含弱同位旋矢量和弱同位旋标量,于是可以写出该反应方程(III.4.11)的有效振幅,略去 Z^0 传播子的动量相关性,为

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu\{\bar{u}\gamma_\mu(\alpha+\beta\gamma_5)u - \bar{d}\gamma_\mu(\alpha+\beta\gamma_5)d$$

$$+\bar{u}\gamma_\mu(\lambda+\delta\gamma_5)u + \bar{d}\gamma_\mu(\lambda+\delta\gamma_5)d\}, \qquad \text{(III.4.12)}$$

这里 α 和 β 是对于同位旋矢量耦合的，而 λ 和 δ 是对于同位旋标量耦合的. 由方程 (III.3.21)，标准模型给出

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W,$$

$$\beta = \frac{1}{2},$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\sin^2\theta_W,$$

$$\delta = 0. \qquad \text{(III.4.13)}$$

表 III.2 给出 α, β, λ 和 δ 解之一的实验值. 也给出与标准模型的比较.

(iii) 电子夸克区段

在电子夸克区段内检验中性流效应有两类实验：原子跃迁实验和包括极化电子在氘内的深度非弹性散射实验. 在这两类实验中，矢量和轴矢量流干涉引起宇称破坏. 因为矢量

表 III.2

	数据	标准模型 ($\sin^2\theta_W = 0.22$)
2α	-0.597 ± 0.055	-0.56
2β	-0.935 ± 0.05	-1.0
2λ	0.254 ± 0.082	0.147
2δ	-0.127 ± 0.083	0

部分受电磁相互作用的支配，宇称破坏效应可以用来检验耦合的轴矢量部分.

因为大多数原子跃迁实验有原子物理学输入测不准的苦恼，又因为小的宇称破坏效应可以完全被隐蔽了，因此只能得到很少的有用信息. 评论参阅文献[22].

用极化 e^- 的 e^-D 深度非弹性散射给出的结果与标准模型的预言一致[41]，并且与用其它方法所得到的 Weinberg 角是相容的.

$$\sin^2\theta_W = 0.224\pm0.020.$$

在上面的讨论中，由于不同耦合符号和其它的可能性引起的不确定性，并未加以考虑. 如较早所提到的，数据分析的进展现在消除了大多数的不确定性。由所有这三个区段的一切数据支持的 Weinberg 角的值为

$$\sin^2\theta_W = 0.22. \qquad \text{(III.4.14)}$$

(C) 中间矢量玻色子和非阿贝耳规范相互作用 目前已证实了 (III.4.2)—(III.4.4) 所给出的中性流结构. 由于可能达到的加速器能量和束的发光度的限制，目前不可能直接证实理论的规范性质（带荷的和中性的中间矢量玻色子的存在)*，在极小标准模型中所预言的这些玻色子的质量是在下一代加速器的能量范围内，并且应该在实验中产生. 例如，Z^0 可以在 e^+e^- 碰撞中作为一个直接道共振而产生，$W^\pm$ 可以

* 这点在 1983 年已由 CERN 的物理学家完成.——译注

在 $p\bar{p}$ 碰撞中产生。重要的关系

$$\frac{M_W}{M_z} = \cos\theta_W \qquad \text{(III.4.15)}$$

在这些玻色子被观测到时就得到了检验。

理论的非阿贝耳性质的决定性检验是如图 III.15(再参看图 III.7) 所示的矢量玻色子之间的三线性耦合和四次耦合的存在。

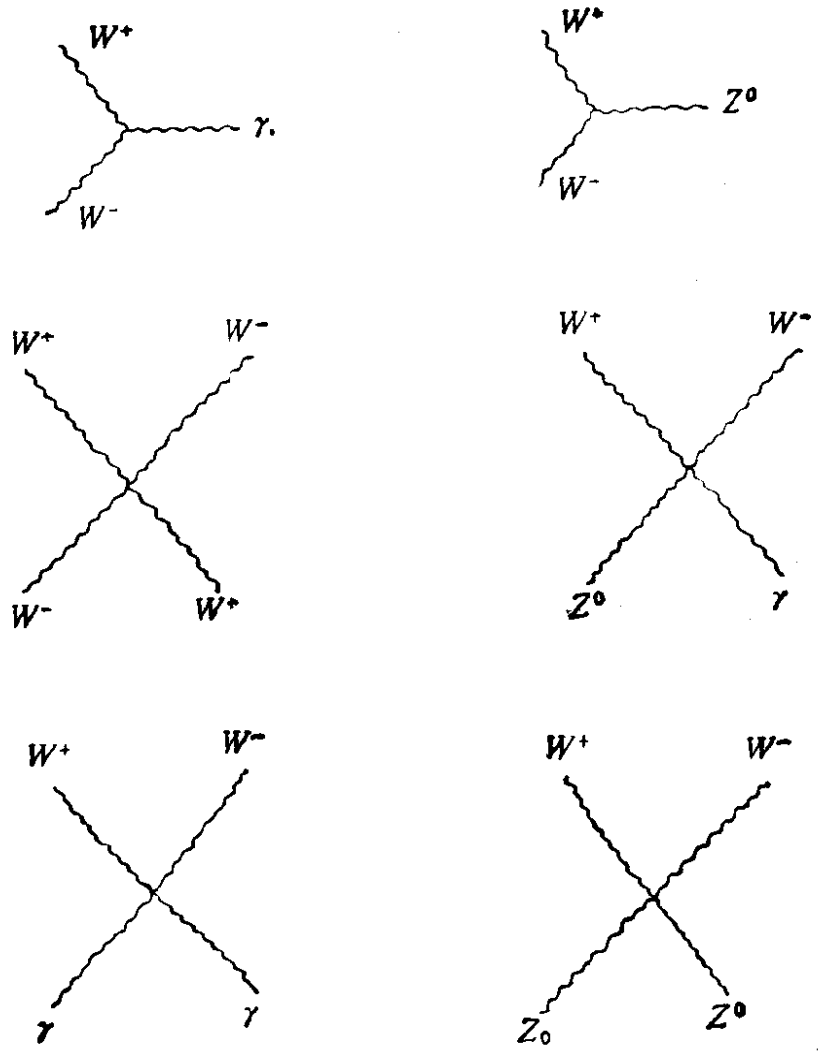


图 III.15

例如，这些耦合出现在如图 III.16 所给出的 e^+e^- 湮没过程

中. 这些过程要求更高的能量. 然而，这些过程有太高的阈能，对于图 III.16 的头两个图形大于 $2m_W$，对于第三个图形大于 $2m_W + m_z$，甚至在下一代加速器中也不可能达到.

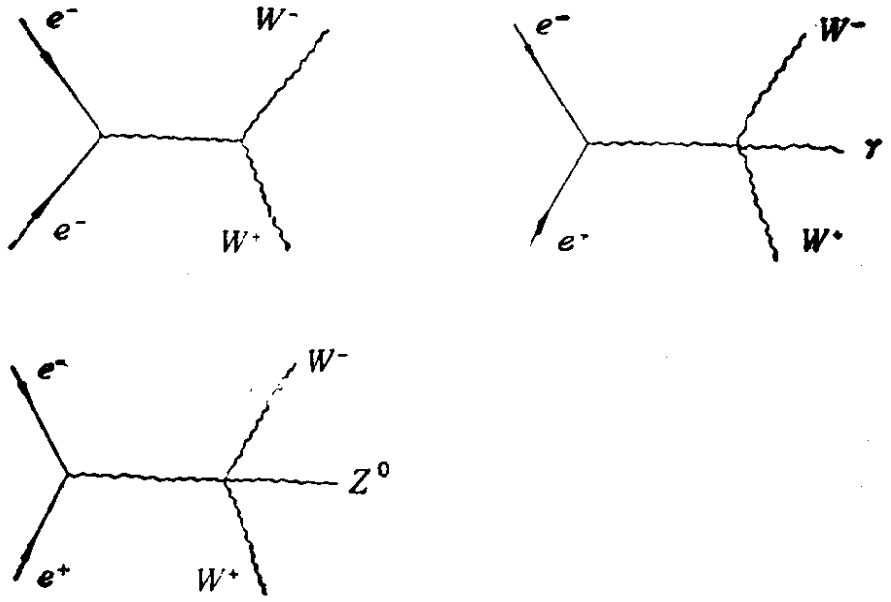


图 III.16

(D) 高阶效应 散射实验存在的数据容许在 10% 的水平证实 Glashow-Weinberg-Salam 模型. 为使模型像量子电动力学一样作为一个现实的可重正化的微扰论，如在 §III.? 开始所强调的，有必要对模型的高阶效应作详细的研究. 高阶效应是由虚 $W^{\pm}$ 和 Z^0 玻色子等等的辐射修正所引起的效应. 这个题目的一般评论可以在文献 [42] 和 [43] 中找到. (也可以看文献[13, 14, 15 和 16]). 辐射修正的结果是要对由方程 (III.1.36) 中所给出的 W 和 Z^0 玻色子质量的零阶值有所修正.

让我们回忆矢量玻色子质量的零阶值是如何得到的. W 玻色子的质量是通过电磁精细结构常数，Fermi 耦合常数，及 Weinberg 角由 (III.1.14) 定义的:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\alpha}{2M_W^2 \sin^2\theta_W}. \qquad \text{(III.4.15a)}$$

m_W 的零阶值是利用这些量的实验值得到的：$\alpha = 1/137$，G_F 在方程 (III.1.34a) 的下面给出，并且 $\sin^2\theta_W$ 由方程 (III.4.14) 给出. 但是，所用的这些值并不是自洽的. 因为精细结构常数的值是在零动量转移处确定的，而 G_F 和 $\sin\theta_W$ 是在接近W玻色子质量处确定的，α 值的修正是需要的. 在W玻色子质量处精细结构常数的值要利用

$$\alpha(M_W^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_f Q_f^2 \ln\left(\frac{M_W^2}{m_f^2}\right)}, \qquad \text{(III.4.16)}$$

这里求和对质量为 m_f 和电荷为 Q_f (以 e 为单位) 的一切费米子来进行. 方程 (III.4.16) 将在第 VI 章推导. 数值如下[16,44,45]:

$$M_W = \begin{cases} \dfrac{37.34}{\sin\theta_W}\,\text{GeV} & \text{(未修正的)，[式(III.1.34b)]} \\ \dfrac{38.53}{\sin\theta_W}\,\text{GeV} & \text{(修正的).} \end{cases}$$

$$M_z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} = \frac{77.06}{\sin 2\theta_W} \qquad \text{(III.4.17)}$$

对于 $\sin^2\theta_W = 0.23$，修正值为 $M_W = 82.1$ GeV 而不是 77.6GeV，量级增加 3%.

(E) Higgs 玻色子 还有一个很重要的难题是 Higgs 玻色子. 它的存在本质上是给自发对称破缺提供方法. 另一方面，Higgs 玻色子是相当难以捉模的，不仅在于它的质量不受约束，Higgs 粒子的实际数目是未知的，而且，Higgs 基本标量粒子的存在会危及[40]渐近自由，而渐近自由是量子色

动力学的基本性质.(渐近自由将在第 VI 章详细讨论). 这些不合乎需要的性质成为促使许多理论家认为产生质量的 Higgs 机制是不令人满意的理由.

在 § III.1 和 §III.3 中所讨论的方案是最简单的而又可能的,其中只有一个标量双态,因而只有一个 Higgs 粒子出现在 Glashow-Weinberg-Salam 理论的末质量谱中. 有许多可供选择的方案都是颇为复杂的. 一个标量双态的极小方案具有某些吸引人的性质:

(a) 味量子数改变的中性流自然地被抑止了,即是,近似到 Fermi 耦合常数 G_F 的第一阶,没有味量子数改变的中性流,然而,味量子数改变的中性流会出现在高阶图形中,高阶图形是正比于 αG_F 或者甚至正比于 α 或 G_F 较高的幂. 图 III.17 给出一个过程,其中味量子数改变为 αG_F 阶. 注意,附加的抑止是由于 Cabibbo 角.

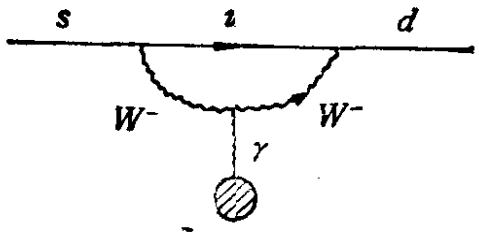


图 III.17

(b) 电荷守恒要求标量场的真空期待值并列在弱同位旋空间内[方程 (III.1.14)],例如,

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

这里 v_0 为常数,因此 Higgs 粒子是中性的.

可以选取一个多重的 Higgs 体系,其中有带荷的 Higgs 粒子存在,并且在 Higgs 耦合中可以引入 CP 破坏.

放松对 Higgs 粒子质量的可能值的约束. 在极小方案中, Higgs 质量的最低阶(树图)结果在 (III.1.28) 中给出,它与 (III.1.34a) 结合,给出

$$m_H^2 = 2\lambda v_0^2 = 2\lambda\left(\frac{2m_W}{g}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{G_F}\lambda. \qquad \text{(III.4.18)}$$

它正比于标量场的自耦合强度. 对于 m_H 的值，有许多可能性，当考虑了高阶辐射修正时，与 λ 的强度和静止势方程 (III.1.14) 的准确性质有关. 下面是各种态和 m_H 值的范围的总结. 细节参考原来的文章.

(a) 如果 λ 足够小，因而对静止势的辐射修正是受 ϕ^4 项控制的，于是真空的稳定性 $[V_s(\phi=0) > V_s(\langle\phi\rangle_0)]$ 意味着[46,47]

$$m_H > 7\,\text{GeV}.$$

(b) 如果已观测到的真空只是一个局部的极小值，因而真空隧道达到一个较低的极小值是可能的，则 m_H 更小的值是可能的[48,49]. 在现在的情形下静止势作图在图 III.18 中. 量子力学的真空隧道也表示在该图中.

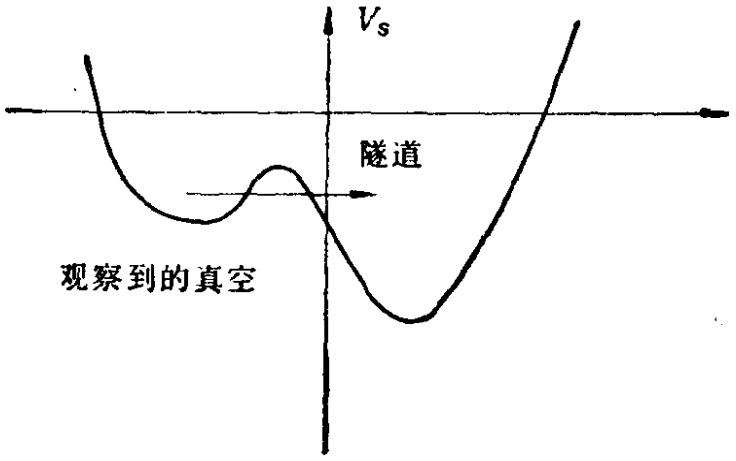


图 III.18

(c) 如果 λ 很大，因而微扰计算不适合，则[46,47,48]

$$m_H \leqslant 1\ \text{TeV}.$$

(d) 如果 $\lambda = O(g^2)$，这里 g 为标准模型的 $SU(2)_L$ 耦合，则

$$m_H \sim m_W.$$

这也许是许多理论家所赞成的吸引人的情形。

III.5 标准模型的短评，模型建筑的某些一般规则，重正化，反常性和普适性

结束弱和电磁相互作用统一理论的讨论，本节从事标准模型的短评，并讨论模型建筑的一般规则。此外，简短地提到有关标准模型理论结构有关的各点，各点的细节将在往后各章内提出。

虽然在 § III.1 和 § III.3 中所讨论的 Glashow-Weinberg-Salam 模型的方案是一个极小模型，是由群结构 $SU(2)_L \otimes U(1)$ 所容许的最简单的模型，但它有一系列的任意的特征和不能答复的问题。这些问题讨论如下：

(a) 模型包含大量的自由参数：耦合常数，混合角和许多质量。这些独立的参数在规范和 Higgs 区段为 g，g'，M_W，M_Z，M_H，在轻子区段为 m_e，m_μ，和 m_τ，在强子区段为 θ_1，θ_2，θ_3，δ (Cabibbo 角及 Kabayashi-Maskawa 混合角及 CP 破坏角)和 m_u，m_d，m_c，m_s，m_t，及 m_b (夸克质量)。有 18 个参数；如果全部质量标度分解为因子，仍然有 17 个自由参数。

(b) 关于世代的问题。

标准模型的 $SU(2)$ 结构只要费米子都归入 $SU(2)$ 双态。一对双态，一对是轻子的，一对是夸克的，按费米子质量增加的顺序安排，这叫做一个世代。标准模型对可能的世代数目没有限制。Kabayashi-Maskawa 模型的方案包括三个世代。第一代包括 u 和 d 夸克，及 ν_e 和 e^- 轻子；第二代包括 c，s 及 ν_μ，μ；第三代包括 t，b 及 ν_τ，τ：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}\quad \text{第一代，}$$

$$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}\quad \text{第二代,}$$

$$\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}\quad \text{第三代.}$$

量子色动力学的渐近自由要求给味量数一个上限. 这个上限为 16 个味量子数; 因此,如果在量子色动力学中保持渐近自由, 不多于 8 代是容许的. 渐近自由概念的详细讨论将在第 VI 章内给出. 然而,关于轻中微子的种类数目的宇宙学约束认为,目前存在的三类中微子已经达到所容许的极大数目[53]. 比较保守的估计给出中微子种类的极大数目为四. 如果该宇宙学的论证是正确的, 则目前已知的家族是所容许的一切家族,或者, 至多将容许再增加唯一的一个家族.

(c) Glashow-Weinberg-Salam 模型利用一个半单群 $SU(2)_L\otimes U(1)$. 因此两个耦合常数是必要的,一个是 $SU(2)_L$ 的, 一个是 $U(1)$ 的. 两个耦合常数用它们各自的精细结构常数来表征:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 7.30\times 10^{-3},$$

$$\alpha_W = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{\alpha}{\sin^2\theta_W} = 3.17\times 10^{-2} \qquad \text{(III.5.1)}$$

$\left[U(1)\text{ 耦合常数 }g'\text{ 与 }e\text{ 和 }g\text{ 的关系为 }\ g' = \dfrac{ge}{(g^2-e^2)^{1/2}}\right]$. 因此,这并不是一个真的统一.

(d) 电荷量子化并不是理论的结果. 在 Gell-Mann-Nishijima 公式 $Q = I_{W_3} + Y_W/2$ 中,弱超荷的赋值是任意的, 因此, 每个表示可能有它自己的值. 轻子和夸克的电荷一般是没有关系的. 但是,使理论无反常性,是为了保证理论的可重正性, 下面的关系必须成立: 左手夸克的弱超荷 Y_{qL} 和轻

子的弱超荷 Y_{lL} 对于一个给定的世代的关系为

$$3Y_{qL} + Y_{lL} = 0. \qquad \text{(III.5.2)}$$

在 Y_{qL} 前面的因子 3 为颜色因子(有三种颜色)。反常性或更准确地为 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常性，也叫做正则反常性，将在第 VI 章内讨论。在统一电弱理论中反常性不存在的条件将在本节稍后讨论。

为了回答上面的问题，既使是部分地回答，比极小模型更大的方案是必要的。所提出的方案之一是对标准模型添加另外的群，称为水平群。这是把 $SU(2)_L\otimes U(1)$ 推广到 $SU(2)_L\otimes U(1)\otimes G_H$，这里 G_H 为水平群，这个变换的附加群整个作用在每个家族上，因此叫做水平群。标准模型的群，即 $SU(2)_L\otimes U(1)$ 称为垂直群。如果水平群是一个分立的置换群，则水平群可以对不同的家族编号，或者，如果水平群是一个连续群，则水平群可以把一个家族变换为另外的家族。考虑水平群的动机在于探索费米子质量和混合角之间可能存在的关系，而且把不同的费米子世代联系起来。关于水平对称性的附加讨论和文献，参看文献 [54]。

另外的方法是大统一理论[55]，它是雄心勃勃的，并且它有影响深远的结果。大统一理论把强（颜色 $SU(3)$，$SU(3)_C$）和电弱理论（$SU(2)_L\otimes U(1)$）统一为一个群，包括这些因子群作为子群。因子群的三个耦合常数统一为单个耦合常数。用来作为大统一理论的基础群结构的最小群为 $SU(5)$[55]。这样雄心勃勃的努力也不可能对上面所提出的一切问题给出答案。然而，这种类型的理论开辟了粒子物理学新的可能性，并且得到很有挑衅性的结果，例如，质子可以衰变。关于综合的评述，参看文献 [57]。关于统一模型中所用的各种群的评述也可以在文献 [57] 中找到。

下面的讨论简短地谈到电弱理论的唯一性问题，并不像

大统一理论考虑内含强相互作用. 基于理论的考虑，弱和电磁相互作用为什么是唯一的，是没有理由的. 存在着极小模型的推广. 而且，十多年以前就提出了具有各种结构的模型，但是后来被排除了. 为了历史的原因将提到这些现代类型的模型.

(a) 极小模型的推广

这种推广包括具有更复杂的 Higgs 结构，或者添加前面所提到的水平对称性. 但是 $SU(2)_L\otimes U(1)$ 群仍然是基础结构，并且弱带荷流相互作用仍然是左手的.

(b) 标准模型的推广

这个推广要包括右手带荷流. 因此，有两组带荷的矢量玻色子存在；一组与左手费米子耦合，另一组与右手费米子耦合. 这种类型理论的谱是比较复杂的，并且在目前能达到的能量处，安排使带荷流的弱相互作用表示基本上是左手的. 这种类型的模型的群为 $SU(2)_L\otimes SU(2)_R\otimes U(1)$. 关于总结，参看文献[56].

(c) 还存在着与标准模型或上面 (a) 和 (b) 所提到的推广完全不同的另一类模型. 这些模型被实验排除了. 模型之一为 Georgi 及 Glashow[58] 提出. 群为 $O(3)$，它没有像标准模型中 Z^0 的中性矢量玻色子. 然而，它预言重轻子存在，这些重轻子并不是 τ 那样的序列类型.

另外的模型是由 Lee[59]，及 Prentki 和 Zumino[60] 提出的. 群为 $O(3)\otimes O(2)$，它预言一个中性矢量玻色子和一个带正荷的重轻子存在. 后者仍然不是序列类型的. 在该模型中，通常的轻子、电子或 μ 子及其中微子，和带正荷的重轻子形成 $O(3)$ 群的一个基本表示. 除了质量效应之外，重轻子可能在带荷流中微子反应中如同电子或 μ 子同样多的产生. 但是这种类型的重轻子在实验上并未观测到.

关于模型建筑的某些一般规则 建立包括弱及电磁相互作用统一模型的某些一般规则总结如下：

(a) 选取一个规范群 G，不必要是单群.

(b) 以下述方式对自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子，夸克和轻子赋予左手和右手表示，务使其符合低能量的弱衰变及高能量的中微子散射数据已知的唯象学.

(c) 引入标量场 ϕ，它形成 G 的适当表示.

(d) 引入规范场 $\boldsymbol{A}_\mu^{(l)}$，这里 l 代表规范场的种类. 如果 G 是几个单群的直乘积，例如 $SU(2)_L\otimes U(1)$，$SU(2)\otimes U(1)\otimes G$，等等，则对于每个因子群有一组规范场. $\boldsymbol{A}_\mu^{(l)}$ 通过协变导数：

$$\partial_\mu - i\sum_l g_l \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}_\mu^{(l)} \qquad \text{(III.5.3)}$$

与费米子和标量玻色子耦合.

(e) 以规范不变的方式使标量场 ϕ 与它们自己耦合. 标量场拉氏函数应该是自发对称破缺类型的.

(f) 引入标量玻色子与费米子的规范不变耦合，称为汤川耦合.

(g) Higgs 机制由给出某些标量场不为零的真空期待值来决定.

$$\phi_i(x) = \langle\phi_i\rangle_0 + H_i(x), \quad \langle H_i\rangle_0 = 0. \qquad \text{(III.5.4)}$$

令所有的 Goldstone 场为零. 由上述的论述会出现如下的结果：

(1) 群 G 由于自发对称破缺显然被破坏.

(2) 某些规范玻色子获得质量.

(3) 某些或者所有的费米子获得质量，取决于物理要求.

(4) 存在着带质量的标量玻色子 H_i，称为 Higgs 玻色

子.

(5) H_i 与费米子的汤川耦合是正比于各个费米子的质量. 耦合一般是小的. 某些特征是必要的:

(α) $G \supset SU(2)$, 至少在标准模型中.

(β) 为了在微扰展开式的最低阶(树图)中消去可能的味量子数改变的中性流,模型要包括粲,底或附加的量子数. 这就是所谓 GIM 机制.

(γ) 存在一个中性流, 即存在一个中性矢量玻色子. 包括已知唯象学的这些要求用来规定模型, 当然, 并不是充分的.

可重正性和反常性 利用非阿贝耳规范理论和 Higgs 机制的主要原因是为了可重正性; 任意虚构的模型将是不可重正化的. 拉氏函数在自发对称破缺以前包含无质量的矢量玻色子, 因此它们的传播子有形式 $-(g_{\mu\nu} - \xi k_\mu k_\nu/k^2)/(k^2 + i\varepsilon)$, 它对于大的 $|k^2|$ 类似于 $1/k^2$ 变化. 预期理论是可重正化的. 这种形式的理论称为重正化规范的或 R 规范的. 因为理论包含无质量的粒子和像 Goldstone 粒子这样的虚设粒子,理论的幺正性并不明显. 理由如下: Goldstone 粒子将以带传播子 $1/k^2$ 的虚中间态的方式对高阶过程有贡献. 因为 Goldstone 粒子将在过程的末态中作为一个实粒子出现,幺正性条件会被破坏, 除非在 $k^2 = 0$ 处 (在"质量壳层"上的 Goldstone 粒子)它的贡献被另外的中间态贡献相抵消.

在自发对称破缺后, Goldstone 粒子从拉氏函数中消失, 一切粒子为物理的, 因此拉氏函数显然是幺正的. 于是称该理论为幺正规范的或 U 规范的. 但是理论的可重正性的证明在 U 规范中是困难的. 因为在 R 规范中和在 U 规范中拉氏函数用其中任一形式的规范变换联系的 (因此命名为 U 规范或 R 规范, § III.1), 故理论是可重正化的和幺正的.

在有轴矢量相互作用存在的统一模型的可重正性的证明中，有需要注意的技术问题，即，在一切模型中要消除 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger (ABJS) 反常性. 存在这样的反常性将使某些轴矢量流的 Ward-Takahashi 恒等式失效，从而损坏理论的可重正性的证明. 因此，所建立的理论必须是无反常的. 在标准模型中，这点是靠由给定轴矢量流的各部分的反常性之间相互抵消来完成的. 对于包含 $SU(2)$ 双态和单态，右手的和左手的模型，使一切反常性彼此相抵消的条件为

$$\sum_i Q_i \text{（由左手双态或单态的电荷）}$$

$$-\sum_i Q_i \text{（由右手双态或单态的电荷）}=0. \qquad \text{(III.5.5)}$$

例如，在极小模型中，在左手和右手的表示中电荷之和分别为零；写出

$$-1 \quad -1 \quad -1 \quad +3\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\right\}=0$$

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L \quad \text{颜色} \quad \begin{pmatrix}u\\ d_\theta\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}c\\ s_\theta\end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix}t\\ b_\theta\end{pmatrix}_L$$

$$e_R \quad \mu_R \quad \tau_R \qquad u_R \quad d_{\theta R} \quad c_R \quad s_{\theta R} \quad t_R \quad b_{\theta R}.$$

因此，在左手和右手表示中，轻子的反常性和夸克的反常性分别互相抵消. 这在轻和强子之间赋予一定的对称性，因此在这种统一的水平上使两种不同类型的粒子之间造成一个松散的联系. 另外类型的相消是要使出现在左手表示中的反常性与右手表示中的反常性相抵消，例如，出现在所谓类矢量模型中的相消便是如此.

ABJS 反常性的详细讨论可以在第 VI 章内看到. 像方程 (III.5.5) 反常性相消的条件将在第 IV 章内推导.

弱相互作用的普适性 在阿贝耳理论和非阿贝耳理论之间重要的差异在于，后者在不同的表示中对可能的耦合常数

给以较强的约束.

在阿贝耳理论中，例如，在量子电动力学中，电磁场 A_μ 与一个场 ϕ_i 的极小耦合为

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iQ_i e A_\mu, \qquad \text{(III.5.6)}$$

这里 Q_i 为 ϕ_i 的电荷，以 e 为单位. 理论在下面的规范变换下为不变量:

$$\phi_i(x) \to e^{-iQ_i\chi(x)}\phi_i(x),$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi(x). \qquad \text{(III.5.7)}$$

可以看出，Q_i 为实数，但在其他方面是任意的，因此，阿贝耳规范原理关于各种粒子的电荷什么也没有谈到.

对于非阿贝耳理论，有更强的约束: 属于一个非阿贝耳群 G 的相同不可约表示的一切物质场(不必在相同的多重态)以相同的强度与规范场相耦合. 这对于弱相互作用的普适性提供一个解释: e, μ, τ 和夸克都有相同的带荷流的弱相互作用强度，只要承认它们都处在双态表示中. 然而，电荷量子化，例如，u, c 和 t 有电荷 2/3，因而 d, s 和 b 有电荷 $-1/3$ 的原因不能在目前这类电弱模型中加以解释. 如果承认对于夸克的电荷赋值，则一个轻子表示的荷之和确定为 -1，这是由于要使 ABJS 反常性不出现所要求的.

参 考 文 献

III.1 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264(1967).

III.2 A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, Proceedings of the 8th Nobel Symposium, ed. N. Svartholm (Almquist Wiksells, Stockholm; 1968) p. 367.

III.3 J. Schwinger, *Ann. Phys.* **2**, 407(1957).

III.4 S. L. Glashow, *Nucl. Phys.*, **22**, 579(1961).

III.5 A. Salam and J. C. Ward, *Phys. Lett.*, **13**, 168(1964).

III.6 G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B33**, 173(1971).

III.7 G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B35**, 167(1971).

III.8 G. 'tHooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B50**, 318(1972).

III.9 B. W. Lee, *Phys. Rev.*, **D5**, 823(1972).

III.10 B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D5**, 3121, 3137, and 3155 (1972).

III.11 规范弱相互作用以前的一般评述可以查阅: T. D. Lee and C. S. Wu, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **15**, 381(1965) and **16**, 471(1966).

III.12 查阅: R. E. Marshak, Riazuddin, and C. P. Ryan, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics* (Wiley-Interscience New York; 1969).

III.13 K. Fujikawa, B. W. Lee, and A. I. Sands, *Phys. Rev.*, **D6**, 2923(1972).

III.14 G. Passarino and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B160**, 151(1979).

III.15 M. Consoli, *Nucl. Phys.*, **B160**, 208(1979).

III.16 W. J. Marciano, *Phys. Rev.*, **D20**, 274(1979).

III.17 M. Veltman, *Phys. Lett.*, **91B**, 95(1980).

III.18 E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rept.*, **90**, 1(1973).

III.19 例如，关于夸克模型及其预言的评述可查阅: F. E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons*, (Academic Press, New York: 1979) and D. Flamm and F. Schoberl, *Introduction to Quark Model of Elementary Particles* (Gordon and Breach, New York; 1982).

III.20 M. Kobayashi and M. Maskawa, *Proq. Theor. Phys.*, **49**, 652(1973).

III.21 例如，关于场论中电荷共轭和宇称的讨论可查阅: J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York; 1965) pp. 108—118.

III.22 J. J. Sakurai, in *Proceedings of the Eighth Hawaii Topical Conference in Particle Physics*, ed. V. Z. Peterson and S. Pakvasa, (University of Hawaii, Hawaii; 1980).

III.23 M. Gaillard, in *Proceedings of the* **1979** *International Symposium on Lepton and Photon Interactions At High Energies* (Fermi Nat. Acc. Lab.; 1979) p. 397.

III.24 M. A. B. Beg, R. V. Budny, R. Mohapatra, and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1252(1977); *ibid*, **39**, 54(E) (1977).

III.25 S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **112**, 1375(1958).

III.26 J. Osaka and S. Pakvasa, *Nucl. Phys.*, **B112**, 400(1976).

III.27 M. Morita, et al., *Phys. Soc. Japan*, **44**, Supp. 470(1978).

III.28 R. E. Shrock and L.-L. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 1692(1978).

III.29 J. Ellis, M. K. Gaillark, and D. V. Nanopoulos, *Nucl. Phys.*, **B109**, 213(1976).

III.30 V. Barger, W. F. Long, S. Pakvasa, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1585(1979).

III.31 R. E. Shrock, S. B. Treiman, and L.-L. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1589(1979).

III.32 T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D8**, 1226(1973) and *Phys. Rept.*, **90**, 143(1974).

III.33 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 657(1976).

III.34 査阅 : A. A. Anselm and D. I. D'Yakonov, *Nucl. Phys.*, **B145**, 271 (1978); H. Georgi, *Hadronic J.* **1**, 155(1978); R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Phys. Lett.*, **79B**, 283(1978); F. J. Gilman and M. B. Wise, *Phys. Lett.*, **83B**, 83(1979); M. A. B. Beg, D. J. Maloof, and H.-S. Tsao, *Phys. Rev.*, **D19**, 2221(1979); G. Segre and H. A. Weldon, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1191(1979).

III.35 R. N. Mobapatra and J. C. Pati. *Phys. Rev.*, **D11**, 566(1975); R. N. Mohapatra and D. P. Sikhu, *Phys. Rev.*, **D17**, 1876(1978).

III.36 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 223(1978); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 279(1978); R. D. Peceei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1440(1977) and *Phys. Rev.*, **D13**, 1791(1977).

III.37 R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 172(1976); C. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, *Phys. Lett.*, **63B**, 334(1976).

III.38 S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D15**, 1958(1977).

III.39 E. A. Paschos, *Phys. Rev.*, **D15**, 1966(1977).

III.40 G. Altarelli, "Phenomenology of Flavordynamics" in *Quantum Flavordynamics, Quantum chromodynamics,* and *Unified Theories*, ed. K. T. Mahanthappa and J. Randa (Plenum Press, New York; 1980).

III.41 C. Y. Prescott, et. al., *Phys. Lett.*, **77B**, 347(1978); *ibid*, **84B**, 524 (1979).

III.42 M. Veltman "Radiative Corrections to Weak and Electromagnetic Process" in *Quarks and Lepions,* Cargese lecture notes, 1979, ed. M. Levy, et. al. (Plenum Press, New York; 1980).

III.43 E. Ma, "Radiative Corrections in the Standard Model", in *Proceedings of the XXth International Conference on High Energy Physics* (American Institute of Physics, New York; 1981), p. 422.

III.44 F. Antonelli, M. Consoli, and G. Corbo, *Phys. Lett.*, **91B**, 90(1980).

III.45 H. Terazawa, Y. Chikashige, and K. Akama, *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 1515(1979).

III.46 A. D. Linde, *JETP Lett.*, **23**, 64(1976).

III.47 S. Weinberg *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 294(1976).

III.48 P. H. Frampton, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 1378(1976).

III.49 A. D. Linde, *Phys. Lett.*, **70B**, 306(1977).

III.50 D. A. Dicus and V. S. Mathur, *Phys. Rev.*, **D7**, 3111(1973).

III.51 M. Veltman, *Phys. Lett.*, **70B**, 253(1977) and *Acta Phys. Pol.*, **138**, 475(1977).

III.52 B. W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 883 (1977), and *Phys. Rev.*, **D16**, 1519(1977).

III.53 G. Steigman, D. N. Schramm, and J. E. Gunn, *Phys. Lett.*, **66B**, 202 (1977).

III.54 R. J. Chakrabarti, M. Popovic, and R. N. Mohapatra, *Phys. Rev.*, **D21**,

3212(1980); R. N. Cahn and H. Harari, *Nucl. Phys.*, **B176**, 135(1980).
III.55 H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 438(1974).
III.56 P. Langacker, *Phys. Rept.*, **72**, 185(1981).
III.57 R. Slansky, *Phys. Rept.*, **79**, 1(1981).
III.58 H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1494(1972).
III.59 B. W. Lee, *Phys. Rev.*, **D6**, 1188(1972).
III.60 J. Prentki and B. Zumino, *Nucl. Phys.*, **B47**, 99(1972).
III.61 S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev.*, **D2**, 1285 (1970).