目　　录

第 IV 章　正规化方案和反常性 …… 259
IV.1　Feynman 积分的一般讨论 …… 260
IV.2　关于费米子圈积分的 Pauli-Villars 正规化方案及关于介子传播子的 Feynman 正规化 …… 281
IV.3　维数正规化 …… 293
IV.4　红外奇点的正规化 …… 312
IV.5　Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常性 …… 335
参考文献 …… 374
第 V 章　微扰解的高阶修正和红外奇点的消除 …… 377
V.1　电子的自能 …… 379
V.2　真空极化 …… 397
V.3　顶角修正 …… 409
V.4　总结和重正化效应的简单例子 …… 420
V.5　红外发散性的消去——非平凡最低阶的结果 …… 440
V.6.　红外发散性的消去——所有阶的结果；指数化和 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理 …… 463
参考文献 …… 503
第 VI 章　在量子色动力学中的重正化和重正化群及红外问题 …… 505
VI.1　可重正性的判别和 BPHZ 程序 …… 506
VI.2　Becchi, Rouet, 及 Stora 变换和推广的 Ward-

Takahashi 恒等式 …… 532
VI.3 非阿贝耳规范理论重正化的扼要叙述 …… 561
VI.4 选取量子电动力学的二圈计算和极小减除方案 …… 606
VI.5 重正化群和渐近自由 …… 645
VI.6 低阶重正化群参数的计算 …… 673
VI.7 最近的发展：非阿贝耳规范理论的红外行为和截止微扰论的不确定性 …… 705
参考文献…… 731
附录 I Fresnel 积分 …… 736
附录 II 约化公式 …… 738
参考文献…… 741
附录 III $SU(N)$ 代数和场算符的电荷共轭性质… 742
参考文献…… 752
附录 IV Dirac 代数和各种公式 …… 753
参考文献…… 771
附录 V 截面公式和偏振矢量 …… 772
参考文献…… 780

第 IV 章　正规化方案和反常性

第 I 章和第 II 章建立了微扰展开式的框架. 任何 n 点 Green 函数 (n-pgf) 可以表示为耦合常数的幂级数，假定耦合常数足够小，因此幂级数展开式有意义. 除了这样的级数是否收敛的问题以外，在各个项中都会出现困难. 在第 I, II 和 III 章中所给出的 Feynman 规则，及在方程 (I.2.19), (II.2.8) 及(II.3.66)中所定义的相应的生成函数，和在 §III.2 及 §III.3 中所定义的生成函数，并不是完全的. 事实上，困难在于，在任何高阶振幅中所出现的圈积分一般是发散的. 为了补充 Feynman 规则，有必要做两件事：第一，必须给一个表观发散的积分以一定含意，例如作为某个有限函数的极限，这就是所谓"正规化". 第二，如有可能，势散度必须被吸收在理论的参数和场量中. 重新定义的参数，比如质量和耦合常数，被认为是它们相应的实验值. 这个程序导致耦合常数，质量和波函数的重正化. 这就是所谓"重正化". 上面所提到的程序称为重正化方案.

本章包括 Feynman 积分的一般讨论，及其广泛应用于正规化方案中的正规化，详细介绍关于紫外发散的 Pauli-Villars 方案，及关于紫外发散和红外发散二者的连续 n 维方案，列表给出了 Feynman 积分结果及其正规化形式. 这些现成的有用公式几乎包括一圈计算中所出现的一切 Feynman 积分. 本章从讨论 Feynman 积分的一般性质着手，包括讨论 Wick 转动在内. 包括无意义的发散常数的一圈图的许多积分结果列在表 IV.1 内. 为了说明大多数积分是无意义的，给出一个例

子来阐明下面的事实. 在所处理的积分中，甚至大多数常用的技巧，比如积分变数的改变，都不能应用，因为每个积分变数的改变潜在地可能把伪常数项引进到积分结果中. 第 IV.2 节中讨论费米子圈积分的 Pauli-Villars 正规化方案. 在表 IV.2 中给出表 IV.1 中列出的积分的正规化型式. 在这节末简短地讨论正规化的介子传播子的 Feynman 方法. 在 §IV.3 中详细介绍现在广泛使用的连续 n 维正规化方案. 研究紫外发散所提出的连续 n 维正规化也可以用来使红外发散正规化；这在 §IV.4 中给出. 目前看来似乎 n 维正规化方法是最通用的方案，并且它保持了理论的一切基本结构. 本章的最后一节讨论轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式中出现的正则反常性，并计算三角反常性. 也讨论在 n 维 ($n \neq 4$) 中未确切定义的 Dirac 矩阵 γ_5.

IV.1 Feynman 积分的一般讨论

在微扰计算中的发散可以用简单的例子来说明，考虑全费米子 2 点 Green 函数 (2-ngf)，即，在方程 (II.3.67a) 中所定义的非阿贝耳规范理论的传播子函数.

$$i\bar{S}_F(x,0)_{\sigma\tau} = \langle 0|T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\tau(0))|0\rangle$$
$$= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\sigma(x)}\frac{\delta}{\delta\eta_\tau(0)} z[\eta,\bar{\eta},J^a_\mu]\Big|_{\substack{\eta=\bar{\eta}=J^a_\mu \\ =K=\bar{K}=0}}, \tag{IV.1.1}$$

这里生成泛函 Z 在 (II.3.66) 中给出. 到耦合常数 g 的第二阶，

$$i\bar{S}_F(x,0)_{\sigma\tau} = \frac{1}{N}\left\{1 + g\int dy \frac{\delta}{\delta\eta(y)}\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\frac{\delta}{\delta J^a_\mu(y)}\right.$$

$$+\frac{1}{2!}g^2\int dy\,\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\gamma_u\frac{\lambda^a}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\frac{\delta}{\delta J^a_\mu(y)}$$
$$\times\int dz\,\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\gamma_\nu\frac{\lambda^b}{2}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(z)}\frac{\delta}{\delta J^b_\nu(z)}t\cdots\Big\}$$
$$\Big\{iS_F(x,0)_{\sigma\tau}-\int du\bar{\eta}_{\tau'}(u)S_F(u,0)_{\tau'\tau}$$
$$\Big\}dvS_F(x,v)_{\sigma\tau'}\eta_{\tau'}(v)\Big\}$$
$$\cdot\exp\Big\{-i\int dxdy[\bar{\eta}(x)S_F(x,y)\eta(y)$$
$$+\frac{1}{2}J^{a\mu}_{(x)}D^{ab}_{\mu\nu}(x,y)J^{b\nu}(y)\Big\}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=J^0_\mu=K=\bar{K}=0}$$
$$=iS_F(x,0)_{\sigma\tau}-ig^2\int dudv\Big\{\Big[S_F(x,u)\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}$$
$$\cdot S_F(u,v)\gamma^\nu\frac{\lambda^b}{2}S_F(v,0)\Big]_{\sigma\tau}D^{ab}_{\mu\nu}(u,v)$$
$$-\frac{1}{2}\Big[S_F(x,v)\gamma^\nu\frac{\lambda^b}{2}S_F(v,0)\Big]_{\sigma\tau}$$
$$\cdot D^{ab}_{\mu\nu}(v,u)\mathrm{Tr}\Big[\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu S_F(u,v)\Big]$$
$$-\frac{1}{2}\Big[S_F(x,u)\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}S_F(u,0)\Big]_{\sigma\tau}$$
$$\cdot D^{ab}_{\mu\nu}(u,v)\mathrm{Tr}\Big[\frac{\lambda^b}{2}\gamma^\nu S_F(u,v)\Big]+\cdots\Big\},$$

(IV.1.2)

这里 $S_F(x,y)$ 为自由费米子传播子方程 (II.3.67a)，并且相对于内对称编号 λ^a 及自旋指标 γ_μ 二者取求迹. 因为 $\mathrm{Tr}(\lambda^a)=0$，包含求迹的两项可以删去. 在动量空间内它可以写为

$$i\bar{S}_F(p)=i\int d^4xe^{ipx}\bar{S}_F(x,0)$$
$$=iS_F(p)+iS_F(p)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(ig\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\right)$$

$$\cdot (iS_F(p-k))\left(ig\gamma^{\nu}\frac{\lambda^b}{2}\right)(iD^{ab}_{\mu\nu}(k))(iS_F(p)).$$

(IV.1.3)

用图形表示为



图 IV.1

第二项的不可约部分为 (IV.1.3)，即，其次考虑没有外传播子 $iS_F(p)$ 的项. 这部分表示在图 IV.2 中.

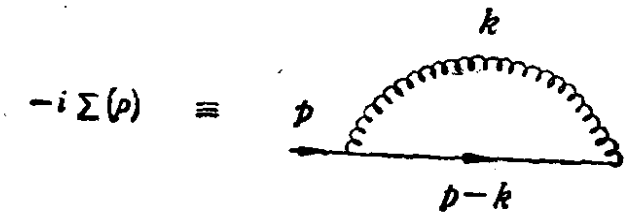


图 IV.2

由图 IV.2 所示的动量约定，可以根据 § II.3 末所列举的 Feynman 规则写出 $-i\Sigma(p)$.

$$-i\Sigma(p) = g^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}i\gamma^{\mu}\frac{\lambda^a}{2}\frac{i}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}$$
$$\cdot i\gamma^{\nu}\frac{\lambda^b}{2}\frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left(-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right) \qquad \text{(IV.1.4)}$$

遍及全部回路的积分变数 k 也叫做圈动量. 该闭合圈积分也称为 Feynman 积分，是发散的，根据下面的论据来计算圈动量的幂次，在分子和分母中，分子正比于 k^4 (积分变数的每个乘方计算为 k 的一次幂)，分母正比于 k^2，就能看出来. 粗略地说，积分对于大的 k 正比于 k，这里 k 为积分限. 因为 $|k|\to\infty$，积分线性发散. 因此实际的发散度可能是不同的，一般认为，方程 (IV.1.4) 积分是表面线性发散的.

具有 n 个独立圈的 Feynman 积分的一般形式为下面的形式

$$I_n(p_1, \cdots, p_l) \equiv \int_{k_1}\int_{k_2}\cdots\int_{k_n} f(k_1, k_2, \cdots, k_n; p_1, \cdots, p_l),$$

这里 $p_1, \cdots, p_l$ 为固定的动量，并且

$$\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{IV.1.5}$$

首先可以建立计算 Feynman 积分(表面)发散度的方案. 将论述自旋 0 和 $\frac{1}{2}$ 的场，及无质量的自旋 1 的场. 与一个守恒流相耦合的带质量的自旋 1 场和具有自发对称破缺的矢量场纳入无质量的自旋 1 场的相同范畴. 考虑一个体系具有拉氏函数为

$$\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}_0 + \sum_i \mathscr{L}_{Ii},$$

$\mathscr{L}_0$ 为自由拉氏函数之和，每一个场有一个自由拉氏函数. $\mathscr{L}_{Ii}$ 为相互作用部分；每一个 $\mathscr{L}_{Ii}$ 是场及其导数 (只考虑 Bose 场的一次导数)乘积的单项式. 假定在 $\mathscr{L}_{Ii}$ 中有

f_i 个 Fermi 场

b_i 个 Bose 场

d_i 个 Bose 场的一次导数. (IV.1.6)

在一个给定的 Feynman 图中，要计算内线(传播子)，外线及顶角的数目:

B 条外玻色子线

$\tilde{B}$ 条内玻色子线

F 条外费米子线

$\tilde{F}$ 条内费米子线

n_i 个第 i 类型的顶角，即是来自 $\mathscr{L}_{Ii}$ 的顶角. (IV.1.7)

前三章所叙述的 Feynman 规则导致下面的关系

$$B + 2\tilde{B} = \sum_i n_i b_i,$$

$$F + 2\tilde{F} = \sum_i n_i f_i. \qquad \text{(IV.1.8)}$$

费米子传播子 $S_F(p)$ [例如方程 (II.3.67b)] 性质像 $\frac{1}{p}$，玻色子传播子 $D^{a,b}_{\mu\nu}(p)$及$D^{ab}(p)$ [例如方程(II.3.68b)及(II.3.69b)] 对于大的 p 性质像 $1/p^2$. 表面发散度定义为分子和分母中圈动量的幂之差:

$$D = \sum_i n_i d_i + 2\tilde{B} + 3\tilde{F} - 4\sum_i n_i + 4. \qquad \text{(IV.1.9)}$$

在上式中出现的各项意义如下:

d_i: 由具有 d_i 个导数的 $\mathscr{L}_{I_i}$ 所引起的每个顶角在分子中应该有 d_i 个动量 [记住，在 §III.2 末的方程 (III.2.42) 以上所给出的规则 (c)].

$2\tilde{B}$: 每个内玻色子传播子在分母中有 k^2，并且在分子中有 d^4k.

$3\tilde{F}$: 每个内费米子传播子在分母中有 p，并且在分子中有 d^4p.

$-4\sum_i n_i$: 每个顶角有一个 δ 函数，它保证进入和离开顶角的 4 动量守恒.

4: 有一个总的 4 动量守恒. 这只包括外动量.

利用 (IV.1.8)，我们有

$$D = 4 + \sum_i n_i \delta_i - B - \frac{3}{2} F, \qquad \text{(IV.1.10)}$$

这里

$$\delta_i = b_i + \frac{3}{2} f_i + d_i - 4. \qquad \text{(IV.1.11)}$$

δ_i 的意义可以由下面来理解. 一个玻色子算符有质量维数 1 (用自然单位 $\hbar = c = 1$), 一个费米子算符有质量维数 3/2, 并且一个导数有质量维数 1; 因此 $b_i + \frac{3}{2} f_i + d_i$ 为出现在第 i 个相互作用拉氏函数 $\mathscr{L}_{Ii}$ 中的算符的质量维数, 它必须有质量维数 4. 所以 δ_i 为耦合常数的质量维数的负数, 此常数乘以这些算符而形成 $\mathscr{L}_{Ii}$. 在前几章中所讨论的所有理论都具有无量纲的耦合常数,并且它们的 δ_i 都为零.

公式 (IV.1.10) 表明, 在这里涉及到的场论中 (即是, $S_F(p) \sim \frac{1}{p}$, $D(p) \sim \frac{1}{p^2}$, 并且在相互作用中至多出现一阶导数),表面发散度 D 与内线数目无关, 但一般与顶角的性质有关, 即与 $\mathscr{L}_{Ii}$ 有关. 对于具有无量纲的耦合常数的理论, $\delta_i = 0$, D 只与一个 Feynman 图的外线数目有关. 至今所讨论的理论都有 $\delta_i = 0$. 在这一点, D 可以与任意带质量的矢量理论的类似公式 D' 相对照. 在那里,矢量介子传播子对于大的 k 性质像 $O(1)$,因而在 (IV.1.9)中 $2\tilde{B}$ 要用 $4\tilde{B}$ 代替,表面发散度也与 $\tilde{B}$ 有关,并且

$$D' = D + 2\tilde{B}, \qquad \text{(IV.1.12)}$$

这里 D 由 (IV.1.11) 给出.

对于只有一个积分变数 (一圈)的 Feynman 积分, 一般 D 就可表示积分是否收敛: 对于 $D \geqslant 0$, 积分是发散的, 对于 $D < 0$, 积分是收敛的. 但是对于多圈积分, 即使 $D<0$, 积分也可能是发散的 (因此 D 命名为表面发散度). 在具有 $D < 0$ 的图形中,发散可能存在的理由在于,它可能包含如图 IV.2 所示的发散子图形. 换言之, 多重积分可能包含发散的子积分,从而引起整个积分发散. 例如,电子电子弹性散射过程, $e^- + e^- \to e^- + e^-$, 根据 (IV.1.10) 有 $D = -2$. 但是它包含无限多的发散子图形,其中之一如图 IV.3 所示. 不管

这个定义的缺点，D提供一个理论的简单(一圈)发散图形的分类，因而一个复杂图形的发散可以被孤立起来，并且可以系统地加以讨论. 这是重正化方案的实质部分，重正化方案将在第V和VI章内讨论.

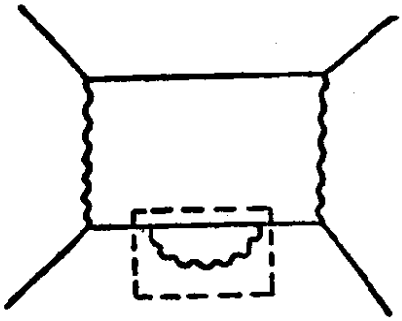


图 IV.3

回到 (IV.1.4)，并且写出

$$\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}=\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}.$$

于是

$$-i\Sigma(p)=g\int_k\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{\lambda^b}{2}\cdot\frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left[-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \tag{IV.1.13}$$

在进行该积分时有两种复杂性：分母为难于处理的形式，并且积分变数为 Minkowski 度规. 这两种复杂性可以用标准技巧来解决: 首先分母因子可以组合为二次形式的某次幂，然后作 Wick 转动，把积分变数变为欧氏度规.

(A) 分母因子的组合

利用下面的公式来组合分母的因子:

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\frac{dx}{[Ax+B(1-x)]^2}, \tag{IV.1.14a}$$

$$\frac{1}{A^mA^n}=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^1dx\,\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+n}}. \tag{IV.1.14b}$$

重复应用上面的公式，容许任意数目的分母因子组合为

$$\frac{1}{ABC}=\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\,\frac{1}{[(Ax+B(1-x))y+C(1-y)]^3},$$

$$\frac{1}{ABCD}=\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\int_0^1 3z^2dz\cdot\frac{1}{\{[(Ax+B(1-x))y+C(1-y)]z+D(1-z)\}^4},$$

$$\frac{1}{ABCDE}=\int_0^1 dx\int_0^1 2ydy\int_0^1 3z^2dz\int_0^1 4w^3dw\cdot 1/\{([(Ax+B(1-x))y+C(1-y)]z+D(1-z))w+E(1-w)\}^5,$$

等等. (IV.1.15)

有另外的方法来组合分母：

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n}=\Gamma(n)\int_0^1\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n\delta\left(\sum_{j=1}^n x_j-1\right)}{[A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n]^n}. \tag{IV.1.16}$$

在实际计算中，利用像方程 (IV.1.15) 的表示式也许是更方便的。在 (IV.1.15) 中的 x，y，及 z 和 (IV.1.16) 中的 x_1，x_2，x_3，$\cdots$称为 Feynman 参数。

注意，在方程 (IV.1.15) 和 (IV.1.16) 中所给出的公式可以利用积分变数的改变彼此变换。例如，公式

$$\frac{1}{ABCD}=\Gamma(4)\int_0^1\frac{dx_1dx_2dx_3dx_4}{[x_4A+x_3B+x_2C+x_1D]^4}\delta\left(1-\sum_{j=1}^4 x_j\right)$$

$$=\Gamma(4)\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\int_0^{1-x_1-x_2}dx_3\cdot\frac{1}{[(1-x_1-x_2-x_3)A+x_3B+x_2C+x_1D]^4}. \tag{IV.1.17}$$

考虑下面的变数改变：

$$x_1 = 1 - z,$$
$$x_2 = z(1 - y),$$
$$x_3 = zy(1 - x).$$

变换的雅可比行列式为$-yz^2$. 容易看出，方程 (IV.1.17) 正是方程 (IV.1.15)，即是

$$\frac{1}{ABCD} = \int_0^1 dx \int_0^1 2ydy \int_0^1 3z^2dz \cdot 1/\{[(xA + (1 - x)B)y + (1 - y)C]z + D(1 - z)\}^4.$$

因此，组合分母因子的两种方法是等价的. 再回到方程 (IV.1.13)，可以写出下式

$$\frac{1}{[k^2 + i\varepsilon][(k - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 dx \frac{1}{\{[(k - p)^2 - m^2]x + k^2(1 - x) + i\varepsilon\}^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - 2p_x \cdot k + \Delta_x + i\varepsilon]^2},$$

及

$$\frac{1}{[k^2 + i\varepsilon]^2[(k - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 \frac{2(1 - x)dx}{\{[(k - p)^2 - m^2]x + k^2(1 - x) + i\varepsilon\}^3} = \int_0^1 \frac{2(1 - x)dx}{[k^2 - 2p_x \cdot k - \Delta_x + i\varepsilon]^3},$$

这里

$$p_x \equiv xp,$$
$$\Delta_x \equiv x(m^2 - p^2) - i\varepsilon.$$

(B) Wick 转动

利用一个收敛积分来说明这个转动，因为还不能处理像(IV.1.13)那样的发散积分。考虑一个收敛积分

$$J = \int_l \left\{ 1/[(l-a)^2 - m^2 + i\varepsilon][(l-b)^2 - m^2 + i\varepsilon] \cdot [(l-c)^2 - m^2 + i\varepsilon] \right\}$$

$$= \int_0^1 dx 2y dy \int_l \frac{1}{(l^2 - 2l \cdot p - \Delta + i\varepsilon)^3}, \qquad \text{(IV.1.18)}$$

这里

$$p \equiv xya + (1-x)yb + (1-y)c,$$

$$\Delta \equiv m^2 - a^2xy - b^2(1-x)y - c^2(1-y).$$

写出

$$J = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^1 dx 2y dy J^{(3)}(p, \Delta),$$

$$J^{(3)}(p, \Delta) = \int d^4l \frac{1}{(l^2 - 2l \cdot p - \Delta + i\varepsilon)^3}.$$

这是一个收敛积分，具有表面发散度 $D = -2$。积分变数可以位移

$$l \to l + p,$$

得到

$$J^{(3)}(p, \Delta) = \int d^4l \frac{1}{(l^2 - p^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}, \qquad \text{(IV.1.19)}$$

$$l^2 \equiv l_0^2 - \boldsymbol{l}^2.$$

在复 l_0 平面内先找出被积函数的极点以后，用围道积分可以把 Minkowski 度规变换为欧氏度规。令

$$l_0^2 - \boldsymbol{l}^2 - p^2 - \Delta + i\varepsilon = 0,$$

就可以求出极点的位置。这些极点位置如图 IV. 4 所示。

极点往往在第二和第四象限内。因此被积函数在第一和第三象限内，并且沿实轴和虚轴是解析的，于是

$$\oint_{C_I} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-(\boldsymbol{l}^2+\Delta+p^2)+i\varepsilon]^3}=0, \quad \text{(IV.1.20a)}$$

这里 C_I 为图 IV.5 所示的围道.

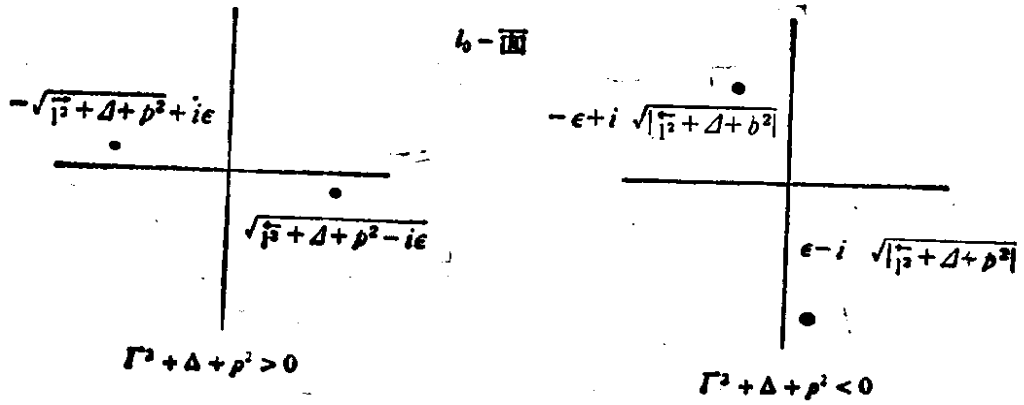


图 IV.4

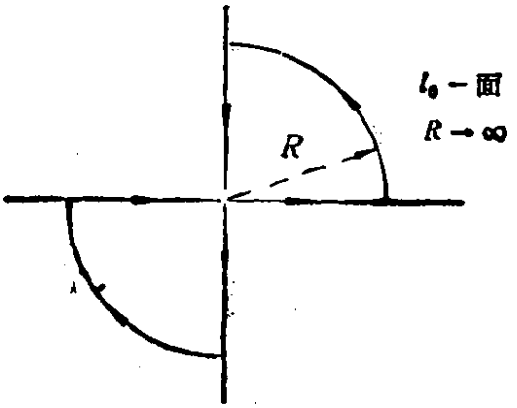


图 IV.5a

积分在两个面积上取极限 $R\to\infty$ 为零. 我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-(\boldsymbol{l}^2+\Delta+p^2)+i\varepsilon]^3} + \int_{i\infty}^{-i\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2-(\boldsymbol{l}^2+\Delta+p^2)+i\varepsilon]^3}=0. \quad \text{(IV.1.20b)}$$

在第二个积分中改变积分的变数

$$l_0 \to iL_0,$$

我们写出 (IV.1.20b) 为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2 - (\boldsymbol{l}^2 + \Delta + p^2) + i\varepsilon]^3}$$
$$= (-1)^3 i \int_{-\infty}^{\infty} dL_0 \frac{1}{(L_0^2 + \boldsymbol{l}^2 + \Delta + p^2 - i\varepsilon)^3}. \tag{IV.1.20c}$$

令

$$\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{L}$$

我们有

$$J^{(3)}(p, \Delta) = (-1)^3 i \int d^4L \frac{1}{[L^2 + \Delta + p^2 - i\varepsilon]^3}, \tag{IV.1.21}$$

这里

$$L^2 \equiv L_0^2 + \boldsymbol{L}^2. \tag{IV.1.22}$$

因此积分已成功地变换到欧氏空间了. 这样一个变换叫做 Wick 转动. 它把沿实轴的积分转动为沿虚轴的积分. 现在 (IV.1.21) 的积分是简单的. 在 4 维欧氏空间的体积元为

$$d^4L = \bar{L}^3 d\bar{L} d\phi \sin\theta d\theta \sin^2\chi d\chi, \tag{IV.1.23}$$

这里

$$\bar{L} = \sqrt{L_0^2 + \boldsymbol{L}^2},$$

并且角变数有下面的值域:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta, \ \chi \leqslant \pi. \tag{IV.1.24}$$

于是

$$J^{(3)}(p, \Delta) = (-1)^3 i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$
$$\cdot \int_0^{\pi} \sin^2\chi d\chi \int_0^{\infty} \frac{\bar{L}^3 d\bar{L}}{(\bar{L}^2 + \Delta + p^2 - i\varepsilon)^3}$$
$$= (-1)^3 i \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\Delta + p^2 - i\varepsilon}. \tag{IV.1.25}$$

由 (IV.1.25) 重复对 p 或 Δ 微分，或对 Δ 积分，就可以得到分母和分子中具有不同幂的收敛 Feynman 积分。下面给出几个例子：

为了计算

$$J_\mu^{(4)}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta+i\varepsilon)^4},\qquad\text{(IV.1.26)}$$

我们相对 p_μ 微分 $J^{(3)}(p,\Delta)$，(IV.1.25)：

$$\begin{aligned}J_\mu^{(4)}(p,\Delta)&=\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial}{\partial p_\mu}J^{(3)}(p,\Delta)\\&=\frac{i\pi^2}{3!}\frac{p_\mu}{[\Delta+p^2-i\varepsilon]^2}.\end{aligned}\qquad\text{(IV.1.27)}$$

为了计算

$$J_\mu^{(3)}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta+i\varepsilon)^3},\qquad\text{(IV.1.28)}$$

我们相对于 Δ 积分 $J_\mu^{(4)}(p,\Delta)$：

$$\begin{aligned}J_\mu^{(3)}(p,\Delta)&=3\int_{-\infty}^{\Delta}d\Delta' J_\mu^{(4)}(p,\Delta')\\&=-\frac{i\pi^2}{2}\frac{p_\mu}{\Delta+p^2-i\varepsilon}.\end{aligned}\qquad\text{(IV.1.29)}$$

由已知的结果通过积分得到发散的 Feynman 积分时需要谨慎。细节在这里不给出，然而，读者可参阅 Akhiezer 及 Berestetskii[1], pp.631—639。在表 IV.1 中 Feynman 积分的结果在分母中列举到 6 次幂，在分子中列举了几个张量指标。这些积分包括一圈积分在内的实际计算的大多数情形。在表 IV.1 中的发散积分尚未正规化，发散常数用 A_0, A_2 及 A_4 来表示。

由表 IV.1 可以看出，有几个发散积分，例如 $J_{\nu\mu\lambda}(3)$，等等。为了对发散积分给出意义，必须修改某些方案来定义发散积分，务使可以容洽地来处发散积分。这将是下两节的主题。

关于表 IV.1，在这里必须作几点说明.

(1) 常数 A_4, A_2 和 A_0 分别为四次方，平方和对数的发散常数;例如

$$A_4 = \lim_{R\to\infty} R^4,$$

$$A_2 = \lim_{R\to\infty} R^2,$$

$$A_0 = \lim_{R\to\infty} [-\ln R^2 + 1]. \qquad \text{(IV.1.30)}$$

(2) 没有奇次幂的发散(例如，$A_3 = \lim_{R\to\infty} R^3$，等等). 这是对称积分惯例的结果;即是

$$\int d^4l \frac{l_\mu}{(l^2+a)^n} = 0, \qquad \text{(IV.1.31)}$$

等等.

(3) 一般

$$\Delta = \sum_{k=1}^{j} \eta_k m_k^2 + \Delta' - i\varepsilon,$$

这里 Δ' 与费米子质量无关，并且 $m_1, \cdots, m_j$ 为出现在圈中的质量. η_i 是 Feynman 参数 x, y 等等的函数并且 $\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_j = 1$. 如果我们在圈中只有一种类型的粒子 (一个质量),则 $\Delta = m^2 + \Delta'$.

注意,发散积分不仅包含无意义的无穷大常数,而且它们的有限项中也有不确定性. 对于线性发散或更奇异的积分，当进行积分变数的改变时,将有不同的有限项. 换言之,它们在原点的位移时会产生不为零的表面项,如下面的例子所示. 在方程 (IV.1.13) 中的积分部分是这种类型. 考虑 $J_\mu^{(2)}(p, \Delta)$,它在表 IV.1 中给出:

$$J_\mu^{(2)}(p,\Delta) = \int d^4l \frac{l_\mu}{(l^2 - 2l\cdot p - \Delta)^2}$$

$$= -i\pi^2 p_\mu \left[A_0 + \frac{1}{2} + \ln(\Delta + p^2) \right] \qquad \text{(IV.1.32)}$$

它是线性发散的，有发散度 $D=1$. 位移积分的原点：

$$l \to l - q,$$

于是

$$\begin{aligned} J_\mu^{(2)}(p,\Delta) &\to \int d^4l \frac{(l-q)_\mu}{[(l-q)^2 - 2(l-q)\cdot p - \Delta]^2} \\ &= \int d^4l \frac{l_\mu - q_\mu}{[l^2 - 2l\cdot(p+q) - (\Delta - q^2 - 2p\cdot q)]^2} \\ &= J_\mu^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \\ &\quad - q_\mu J^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \\ &= -i\pi^2(p+q_\mu)\left[A_0 + \ln(\Delta - q^2 - 2p\cdot q \right. \\ &\quad \left. + (p+q)^2) + \frac{1}{2}\right] + i\pi^2 q_\mu [A_0 \\ &\quad + \ln(\Delta - q^2 - 2p\cdot q + (p+q^2)] \\ &= J_\mu^{(2)}(p,\Delta) - \frac{i\pi^2}{2} q_\mu. \end{aligned}$$

即是

$$\int d^4l \left\{ \frac{l_\mu}{[l^2 - 2p\cdot l - \Delta]^2} - \frac{(l-q)_\mu}{[(l-q)^2 - 2p\cdot(l-q) - \Delta^2]^2} \right\} = \frac{i\pi^2}{2} q_\mu. \qquad \text{(IV.1.33)}$$

确实出现一个有限的表面项. 这个例子 Jauch 及 Röhrlich[2] 已讨论了. 在 $J_{\mu\nu}^{(2)}(p,\Delta)$ 中也计算了位移项：

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^{(2)}(p,\Delta) &\to \int d^4l \frac{(l-q)_\mu (l-q)_\nu}{[(l-q)^2 - 2(l-q)\cdot p - \Delta]^2} \\ &= J_{\mu\nu}^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \\ &\quad - q_\mu J_\nu^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \\ &\quad - q_\nu J_\mu^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \\ &\quad + q_\mu q_\nu J^{(2)}(p+q, \Delta - q^2 - 2p\cdot q) \end{aligned}$$

$$= J^{(2)}_{\mu\nu}(p,\Delta) - \frac{i\pi^2}{3}\left[p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu - \frac{1}{2}q_\mu q_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(q^2 + 2p\cdot q)\right].$$

于是

$$\int d^4l \left\{\frac{l_\mu l_\nu}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^2} - \frac{(l-q)_\mu (l-q)_\nu}{[(l-q)^2 - 2(l-q)\cdot p - \Delta]^2}\right\}$$
$$= \frac{i\pi^2}{3}\left\{p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu - \frac{1}{2}q_\mu q_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(q^2 + 2p\cdot q)\right\}.$$

有兴趣的读者可以针对表 IV.1 中的其他发散积分来计算由积分变数位移所引起的表面项。

表 IV.1 Feynman 积分公式*

$$J^{(1)}_{\mu\nu}(p,\Delta) \equiv \int d^4l \frac{l_\mu l_\nu}{l^2 - 2p\cdot l - \Delta}$$
$$= (i\pi^2)\frac{g_{\mu\nu}}{4}\left\{\frac{A_3}{2} - \left(\Delta + \frac{2}{3}p^2\right)A_2 - (\Delta + p^2)^2 \cdot [A_0 + \ln(\Delta + p^2) - 1] - \frac{7}{12}(p^2)^2 - \frac{2}{3}\Delta p^2\right\}$$
$$+ (i\pi^2)p_\mu p_\nu\left\{-\frac{1}{3}A_2 - (\Delta + p^2)[A_0 + \ln(\Delta + p^2) - 1] - \frac{5}{6}\Delta - \frac{13}{12}p^2\right\}.$$

$$J^{(1)}_{\mu}(p,\Delta) \equiv \int d^4l \frac{l_\mu}{l^2 - 2l\cdot p - \Delta}$$
$$= -(i\pi^2)p_\mu\left\{\frac{1}{2}A_2 + (\Delta + p^2)[A_0 + \ln(\Delta + p^2) - 1] - \frac{1}{2}\Delta + \frac{5}{6}p^2\right\}.$$

$$J^{(1)}(p,\Delta) \equiv \int d^4l \frac{1}{l^2 - 2l\cdot p - \Delta}$$
$$= -(i\pi^2)\left\{A_2 + (l + p^2)[A_0 + \ln(\Delta + p^2)\right.$$

$$-1]+\frac{1}{2}p^2\Big\}.$$

$$J^{(2)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^2}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{2}[g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\mu\lambda}p_\nu+g_{\nu\lambda}p_\mu]$$

$$\cdot\Big\{\frac{A_2}{3}+(\Delta+p^2)[A_0+\ln(\Delta+p^2)-1]$$

$$+\frac{5}{6}\Delta+\frac{13}{12}p^2\Big\}-(i\pi^2)p_\mu p_\nu p_\lambda$$

$$\cdot\Big[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{13}{12}\Big].$$

$$J^{(2)}_{\mu\nu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^2}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Big\{\frac{1}{2}A_2+(\Delta+p^2)$$

$$\cdot\Big[A_0+\ln(\Delta+p^2)-\frac{1}{2}\Big]+\frac{1}{3}p^2\Big\}$$

$$-(i\pi^2)p_\mu p_\nu\Big\{A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{5}{6}\Big\}.$$

$$J^{(2)}_{\mu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^2}$$

$$=-(i\pi^2)p_\mu\Big\{A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{1}{2}\Big\}.$$

$$J^{(2)}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{1}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^2}$$

$$=-(i\pi^2)[A_0+\ln(\Delta+p^2)].$$

$$J^{(3)}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda l_\rho}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^3}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{8}[g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}]$$

$$\cdot\Big\{\frac{1}{3}A_2+(\Delta+p^2)[A_0+\ln(\Delta+p^2)-1]$$

$$+\frac{5}{6}\Delta+\frac{13}{12}p^2\Big\}-(i\pi^2)\frac{1}{4}[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho$$

$$+g_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho+g_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda+g_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]$$

$$\cdot\Big[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{13}{12}\Big]-(i\pi^2)\frac{1}{2}\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(3)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^3}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{4}(g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\mu\lambda}p_\nu+g_{\nu\lambda}p_\mu)\cdot\left[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{5}{6}\right]-(i\pi^2)\frac{1}{2}\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{\Delta+p^2}$$

$$J^{(2)}_{\mu\nu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^3}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\left[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{1}{2}\right]-(i\pi^2)\frac{1}{2}\frac{p_\mu p_\nu}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(2)}_{\mu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^3}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{2}\frac{p_\mu}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(2)}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{1}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^3}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(4)}_{\mu\nu\sigma\tau\lambda}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\sigma l_\tau l_\lambda}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{24}\{p_\mu(g_{\nu\sigma}g_{\tau\lambda}+g_{\nu\tau}g_{\sigma\lambda}+g_{\nu\lambda}g_{\sigma\tau})$$
$$+p_\nu(g_{\mu\tau}g_{\sigma\lambda}+g_{\mu\sigma}g_{\tau\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau})$$
$$+p_\sigma(g_{\mu\nu}g_{\tau\lambda}+g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau})$$
$$+p_\tau(g_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma})$$
$$+p_\lambda(g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}+g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma})\}$$
$$\cdot\left\{A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{13}{12}\right\}-(i\pi^2)\frac{1}{12}$$
$$\cdot\{g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\lambda+g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau p_\lambda+g_{\mu\tau}p_\nu p_\sigma p_\lambda$$
$$+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma p_\tau+g_{\nu\sigma}p_\mu p_\tau p_\lambda+g_{\nu\tau}p_\mu p_\sigma p_\lambda+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\sigma p_\tau$$
$$+g_{\sigma\tau}p_\mu p_\nu p_\lambda+g_{\sigma\lambda}p_\mu p_\nu p_\tau+g_{\tau\lambda}p_\mu p_\nu p_\sigma\}$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{\Delta+p^2}\right\}+(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\lambda}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(4)}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda l_\rho}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{24}[g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}]$$

$$\cdot\left[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{5}{6}\right]-(i\pi^2)\frac{1}{12}$$

$$\cdot[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho$$

$$+g_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda+g_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]\cdot\frac{1}{\Delta+p^2}$$

$$+(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(4)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{12}(p_\mu g_{\nu\lambda}+p_\nu g_{\mu\lambda}+p_\lambda g_{\mu\nu})\frac{1}{\Delta+p^2}$$

$$+(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(4)}_{\mu\nu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}$$

$$=-(i\pi^2)\frac{1}{12}\frac{g_{\mu\nu}}{\Delta+p^2}+(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(4)}_{\mu}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{l_\mu}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}=(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(4)}(p,\Delta)\equiv\int d^4l\,\frac{1}{(l^2-2l\cdot p-\Delta)^4}=(i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{1}{(\Delta+p^2)^2}.$$

$$J^{(5)}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda}(p,\Delta)=-(i\pi^2)\frac{1}{8\cdot 4!}[g_{\mu\lambda}(g_{\nu\sigma}g_{\tau\eta}+g_{\nu\tau}g_{\sigma\eta}+g_{\nu\eta}g_{\sigma\tau})$$

$$+g_{\nu\lambda}(g_{\mu\tau}g_{\sigma\eta}+g_{\mu\sigma}g_{\tau\eta}+g_{\mu\eta}g_{\sigma\tau})+g_{\sigma\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\tau\eta}$$

$$+g_{\mu\tau}g_{\nu\eta}+g_{\mu\eta}g_{\nu\tau})+g_{\tau\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\eta}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\eta}+g_{\mu\eta}g_{\nu\lambda})$$

$$+g_{\eta\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}+g_{\mu\tau}g_{\nu\tau})]$$

$$\cdot\left[A_0+\ln(\Delta+p^2)+\frac{13}{12}\right]-(i\pi^2)\left(\frac{1}{4\cdot 4!}\right)$$

$$\cdot[p_\mu p_\nu(g_{\sigma\tau}g_{\eta\lambda}+g_{\sigma\eta}g_{\tau\lambda}+g_{\sigma\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda\text{ 的其他一切排列}]\cdot\frac{1}{\Delta+p^2}$$

$$+(i\pi^2)\frac{1}{2\cdot 4!}[g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda + g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau p_\eta p_\lambda$$

$$+\cdots(\text{其他 13 项})]\cdot\frac{1}{(\Delta+p^2)^2}$$

$$-(i\pi^2)\left(\frac{2}{4!}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda}{(l+p^2)^3}.$$

$$J^{(5)}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta)=-(i\pi^2)\left(\frac{1}{4\cdot 4!}\right)[p_\mu(g_{\nu\lambda}g_{\tau\sigma}+g_{\tau\sigma}g_{\lambda\tau}+g_{\nu\tau}g_{\lambda\sigma})$$

$$+p_\nu(g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau}+g_{\mu\sigma}g_{\lambda\tau}+g_{\mu\tau}g_{\lambda\sigma})+\cdots(\text{总共 15 项})]$$

$$\cdot\frac{1}{\Delta+p^2}+(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 4!}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\sigma p_\tau$$

$$+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma p_\tau+\cdots]\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^2$$

$$-(i\pi^2)\left(\frac{2}{4!}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma p_\tau}{(\Delta+p^2)^3}.$$

$$J^{(5)}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta)=-(i\pi^2)\left(\frac{1}{4\cdot 4!}\right)(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})\frac{1}{\Delta+p^2}$$

$$+(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 4!}\right)(g_{\mu\nu}p_\lambda p_\sigma+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma+g_{\mu\sigma}p_\nu p_\lambda$$

$$+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\sigma+g_{\nu\sigma}p_\mu p_\lambda+g_{\lambda\sigma}p_\mu p_\nu)\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^2$$

$$-(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 3!}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma}{(\Delta+p^2)^3}.$$

$$J^{(5)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 4!}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\mu\lambda}p_\nu+g_{\nu\lambda}p_\mu]\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^2$$

$$-(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 3!}\right)p_\mu p_\nu p_\lambda\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^3.$$

$$J^{(5)}_{\mu\nu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 4!}\right)\frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+p^2)^2}$$

$$-(i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 3!}\right)\frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta+p^2)^3}.$$

$$J^{(5)}_{\mu}(p,\Delta)=-(i\pi^2)\left(\frac{+1}{2\cdot 3!}\right)\frac{p_\mu}{(\Delta+p^2)^3}.$$

$$J^{(5)}(p,\Delta)=-(i\pi^2)\left(\frac{+1}{2\cdot 3!}\right)\frac{1}{(\Delta+p^2)^3}.$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda\rho}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{8\cdot 5!}\right)[g_{\mu\nu}p_\sigma(g_{\tau\eta}g_{\lambda\rho}+g_{\tau\lambda}g_{\eta\rho}+g_{\tau\rho}g_{\eta\lambda})$$

$$+ g_{\mu\nu}p_\tau(g_{\sigma\eta}g_{\lambda\rho} + g_{\sigma\lambda}g_{\eta\rho} + g_{\sigma\rho}g_{\eta\lambda})$$

$$+ \text{所有其他的排列}] \cdot \frac{1}{\Delta + p^2} + (i\pi^2)\left(\frac{-1}{4 \cdot 5!}\right)$$

$$\cdot [p_\mu p_\nu p_\sigma(g_{\tau\eta}g_{\lambda\rho} + g_{\tau\lambda}g_{\eta\rho} + g_{\tau\rho}g_{\eta\lambda})$$

$$+ p_\mu p_\nu p_\tau(g_{\sigma\eta}g_{\lambda\rho} + g_{\sigma\lambda}g_{\eta\rho} + g_{\sigma\rho}g_{\eta\lambda})$$

$$+ \text{所有其他的排列}] \cdot \frac{1}{(\Delta + p^2)^2}$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)[g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda p_\rho + g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau p_\eta p_\lambda p_\rho$$

$$+ \cdots]\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^3 + (i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$\cdot p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda p_\rho \left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^4 .$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda}(p,\Delta) = (i\pi^2)\left(\frac{-1}{8 \cdot 5!}\right)[g_{\mu\nu}(g_{\sigma\tau}g_{\eta\lambda} + g_{\sigma\eta}g_{\tau\lambda} + g_{\sigma\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+ g_{\mu\sigma}(g_{\nu\tau}g_{\eta\lambda} + g_{\nu\eta}g_{\tau\lambda} + g_{\nu\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+ \text{所有其他的排列(总共 15 项)}]\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{+1}{4 \cdot 5!}\right)[p_\mu p_\nu(g_{\sigma\tau}g_{\eta\lambda} + g_{\sigma\eta}g_{\tau\lambda} + g_{\sigma\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+ p_\mu p_\sigma(g_{\nu\tau}g_{\eta\lambda} + g_{\sigma\eta}g_{\tau\lambda} + g_{\sigma\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+ \text{所有其他的排列(总共 15 项)}]\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^2$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)[g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda + g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau p_\eta p_\lambda$$

$$+ \cdots\text{(总共 15 项)}]\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^3$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda \left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^4 .$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta) = (i\pi^2)\left(\frac{1}{4 \cdot 5!}\right)[p_\mu(g_{\nu\lambda}g_{\sigma\tau} + g_{\nu\sigma}g_{\lambda\tau} + g_{\nu\tau}g_{\lambda\sigma})$$

$$+ p_\nu(g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau} + g_{\mu\sigma}g_{\lambda\tau} + g_{\mu\tau}g_{\lambda\sigma}) + \cdots]\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^2$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\sigma p_\tau + g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma p_\tau + \cdots]$$

续上表

$$\cdot\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^3+(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma p_\tau\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^4.$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{+1}{4\cdot 5!}\right)(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^2$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)(g_{\mu\nu}p_\lambda p_\sigma+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma+g_{\mu\sigma}p_\nu p_\lambda$$
$$+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\sigma+g_{\sigma\lambda}p_\mu p_\nu)\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^3$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^4.$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\mu\lambda}p_\nu+g_{\nu\lambda}p_\mu]\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^3$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)p_\mu p_\nu p_\lambda\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^4.$$

$$J^{(6)}_{\mu\nu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{5!}\right)\frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+p^2)^3}+(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)\frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta+p^2)^4}.$$

$$J^{(6)}_{\mu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)\frac{p_\mu}{(\Delta+p^2)^4}.$$

$$J^{(6)}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{\Delta+p^2}\right)^4.$$

IV.2 关于费米子圈积分的 Pauli-Villars 正规化方案及关于介子传播子的 Feynman 正规化

在表 IV.1 中所定义的发散积分的表示式，直到这些表示式初次被定义以前，确实没有意义. 定义发散积分的方法称为正规化方案，关于正规化方案有两个准则.

(a) 它要消去积分的发散性，即是说，要消去表 IV.1 中的常数 A_0, A_2, A_4, 等等；并且确定地给出可能与可测量效应相联系的积分的有限部分.

(b) 它要保持原来体系的一切对称性；例如，要保持规范

不变性.

Pauli-Villars 正规化方案[3] 早在 30 年前 Pauli 和 Villars 为了使量子电动力学 (QED) 中出现的发散积分正规化，首先引入了这个方案，该方案对处理包含带质量的费米子传播子的圈积分是很方便的.

查表 IV.1 的表示式，可以看出，发散常数 A_0, A_2 及 A_4 的系数为费米子质量的多项式，而费米子的传播子列入圈图线. 这在 Pauli-Villars 正规化 (P-V 方案) 的表述中是有决定性的. 下面给出 P-V 方案的规则(关于理论证明的细节，参看 Gupta[4]).

表 IV.1 的积分表示为

$$J^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}(p, \Delta', m), \tag{IV.2.1}$$

这里

$$\Delta = \eta m^2 + \Delta'.$$

显然表明了与内费米子线的质量的相关性. 正规化圈积分定义为

$$J^{(n),R}_{\mu_1\cdots\mu_j}(p, \Delta', m) = \sum_{k=0}^{N} C_k J^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(p, \Delta', m_k). \tag{IV.2.2}$$

在理论上，代替一个费米子场，假定有 $N+1$ 个不同的费米子场 $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\cdots$, $\phi_N(x)$，具有质量为 m_0, m_1, $\cdots$, m_N. 具有质量 $m_0 = m$ 的场 $\phi_0(x)$ 为原来的物理费米子场；其余的 $\phi_j(x)$, $j = 1, \cdots, N$，叫做调节子 (*Regulator*) 场，是非物理的场，它们产生不能测量的效应. 比如说，所有的 $N+1$ 个费米子场与光子场相互作用形式为

$$\bar{\psi}_k(x)\gamma^\mu\psi_k(x)A_\mu(x), \quad k = 0,1,2,\cdots,N. \tag{IV.2.3}$$

(对 k 不求和)，而在不同的费米子场之间没有相互作用. 因此在正规化过程中每个原来的费米子圈要用 $N+1$ 个各别的费米子场 $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\cdots$, $\phi_N(x)$ 所贡献的 $N+1$ 个适当带

权重圈的求和来代替. 因为在不同的费米子场之间没有相互作用，一个圈由相同费米子场的内费米子线(传播子)组成. 不同的内费米子线(传播子)除了它们的质量以外都是相同的，例如，$(\not p - m_0 + i\varepsilon)^{-1}$, $(\not p - m_1 + i\varepsilon)^{-1}$, $\cdots$, $(\not p - m_N + i\varepsilon)^{-1}$. 在 P-V 方案中正规化的振幅如图 IV.5 所示，这里乘以各个回路的 $c_0, c_1, \cdots, c_N$ 为常数.

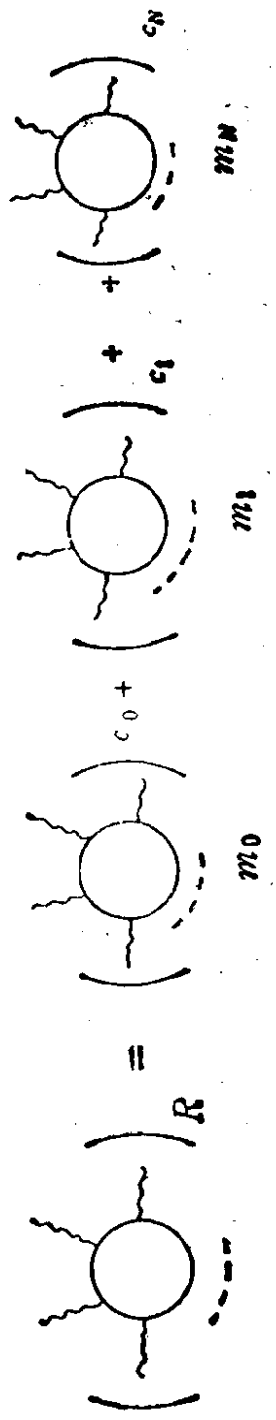


图 IV.5b

为了使 $J^{(n)R}_{\mu_1\cdots\mu_j}(p, \Delta', m)$成为有限的，对于常数 $c_0, c_1, \cdots, c_N$ 约定下面的条件:

(a) $c_0 \equiv 1$, $m_0 \equiv m$. (IV.2.3a)

(b) $$\sum_{j=0}^{N} c_j m_j^{\alpha} = 0,$$

$\alpha = 0, 1, 2, \cdots$. (IV.2.3b)

(c) $$\sum_{j=0}^{N} c_j m_j^{\beta} \ln m_j = m_0^{\beta} K_{\beta},$$

$\beta = 0, 2, 4$. (IV.2.3c)

(d) $|c_j| / m_j \to 0$, $j = 1, 2, \cdots, N$. (IV.2.3d)

(e) $m_j \to \infty$, $j = 1, 2, \cdots, N$ 在计算结束时.

条件 (a) 保证物理的费米子场的贡献不过份地被修改. 条件 (b) 使出现在发散积分中的发散常数 A_0, A_2, 及 A_4 消去成为可能. 在 (c) 中 K_β, $\beta = 0, 2$, 及 4，为未定常数，假定是有限的. 它们的作用是要用有限的常数来代替发散常数 A_0, A_2, 及 A_4, 因而在每个

积分中未定常数的数目并不改变．在正规化以前，有一个或 n 个 A_0，A_2，及 A_4．在正规化以后，就有相应的 K_0，K_2 及 K_4．

条件 (d) 保证 c_j，$j=1,2,\cdots,N$，的值不列入正规化圈积分的最后结果．条件 (e) 是要消去与 m_j，$j=1,2,\cdots,N$，的一切相关性．它也保证调节子场并不引起任何可观测的效应．例如，并不出现在通过幺正截量的末态中．因为一切实验是在有限能量进行的，决不可能产生具有无限大质量的粒子．所以影响调节子场传播子的幺正截量为零．为了看出如何利用这个方案，例如，$J^{(1)}_{\mu\nu}(p,\Delta)$ 可以正规化，令

$$\Delta=\eta m^2+\Delta'.$$

于是

$$\begin{aligned}
J^{(1)}_{\mu\nu}(p,\Delta',m) &\equiv \sum_{k=0}^{N} c_k J^{(1)}_{\mu\nu}(p,\Delta',m_k)\\
&= \frac{i\pi^2}{4} g_{\mu\nu}\sum_{k=0}^{N} c_k\left\{\frac{A_4}{2}-\left(\eta m_k^2+\Delta'+\frac{2}{3}p^2\right)A_2\right.\\
&\quad -\frac{7}{12}(p^2)^2-\frac{2}{3}(\eta m_k^2+\Delta')p^2\\
&\quad -(\eta m_k^2+\Delta'+p)^2[A_0+\ln(\eta m_k^2+\Delta'\\
&\quad \left.+p^2)-1]\right\}+i\pi^2 p_\mu p_\nu\sum_{k=0}^{N} c_k\left\{-\frac{A_2}{3}\right.\\
&\quad -\frac{5}{3}(\eta m_k^2+\Delta')+\frac{13}{12}p^2-(\eta m_k^2+\Delta'\\
&\quad \left.+p^2)[A_0+\ln(\eta m_k^2+\Delta'+p)-1]\right\}\\
&= \frac{i\pi^2}{4} g_{\mu\nu}\sum_{k=0}^{N} c_k\{-(\eta m_k^2+\Delta'+p^2)\ln(\eta m_k^2\\
&\quad +\Delta'+p^2)\}+i\pi^2 p_\mu p_\nu\sum_{k=0}^{N} c_k\{-(\eta m_k^2
\end{aligned}$$

$$+\Delta'+p)\ln(\eta m_k^2+\Delta'+p^2)\}\qquad(\text{IV.2.4})$$

这里利用了方程 (IV.2.3b) 来删去费米子质量多项式的一切项。在 (IV.2.4) 的右边考虑了第二项:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}c_k\{\eta m_k^2\ln(\eta m_k^2+\Delta'+p^2)\\&\quad+(\Delta'+p^2)\ln(\eta m_k^2+\Delta^2+p^2)\}\\&=\sum_{k=0}^{N}c_k\left\{\eta m_k^2\ln(\eta m_k^2)+\eta m_k^2\ln\left(1+\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_k^2}\right)\right.\\&\quad+(\Delta'+p^2)\ln(\eta m_k^2)+(\Delta'+p^2)\\&\quad\left.\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_k^2}\right)\right\}.\end{aligned}\qquad(\text{IV.2.5})$$

利用方程 (IV.2.3c)，它重写为

$$\begin{aligned}&\eta m_0^2K_2+\eta m_0^2\ln\left(1+\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_0^2}\right)+\sum_{i=1}^{N}c_i\eta m_i\\&\quad\cdot\left\{\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_i^2}-\frac{1}{2}\frac{(\Delta'+p^2)^2}{(\eta m_i^2)^2}+\cdots\right\}\\&\quad+(\Delta'+p^2)K_0+(\Delta'+p^2)\ln\left(1+\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_0^2}\right)\\&\quad+(\Delta'+p^2)\sum_{i=1}^{N}c_i\left\{\frac{\Delta'+p^2}{\eta m_i^2}-\frac{1}{2}\frac{(\Delta'+p^2)^2}{(\eta m_i^2)^2}+\cdots\right\}\\&=\eta m^2K_2+(\Delta'+p^2)K_0+(\eta m^2+\Delta'+p^2)\\&\quad\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta'+p^2}{\eta m^2}\right)+\sum_{k=1}^{N}c_k(\Delta'+p^2),\end{aligned}\qquad(\text{IV.2.6})$$

这里通过 (IV.2.3d)，删去了下面的项:

$$\sum_{i=1}^{N}c_i/m_i^{\alpha},\quad\alpha=2,4,\cdots.$$

利用 (IV.2.3a) 及 (IV.3.3b)，把 (IV.2.6) 的最后一项写为

$$\sum_{i=1}^{N} c_i(\Delta' + p^2) = \sum_{i=0}^{N} c_i(\Delta' + p^2) - c_0(\Delta' + p^2)$$
$$= -(\Delta' + p^2), \qquad \text{(IV.2.7)}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{N} c_i(\eta m_i^2 + \Delta' + p^2)\ln(\eta m_i^2 + \Delta' + p^2)$$
$$= \eta m^2 K_2 + (\Delta' + p^2)(K_0 - 1) + (\Delta + p^2)$$
$$\cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta' + p^2}{\eta m^2}\right)$$
$$= \eta m^2(K_2 - K_0 + 1) + (\Delta + p^2)[K_0 - 1$$
$$- \ln(\eta m^2)] + (\Delta + p^2)\ln(\Delta + p^2). \qquad \text{(IV.2.8)}$$

不考虑方程 (IV.2.4) 的第一项

$$\sum_{i=0}^{N} c_i[(\eta m_i^2)^2 + 2\eta m_i^2(\Delta' + p^2) + (\Delta' + p^2)^2]$$
$$\cdot \left[\ln(\eta m_i^2) + \ln\left(1 + \frac{\Delta' + p^2}{\eta m_i^2}\right)\right]$$
$$= (\eta m^2)^2[K_4 - 2K_2 + K_0] + 2m_\eta^2(\Delta + p^2)$$
$$\cdot (K_2 - K_0) + (\Delta + p^2)^2[K_0 - \ln(\eta m^2)]$$
$$+ (\Delta + p^2)^2 \ln(\Delta + p^2) - \frac{3}{2}(\Delta + p^2)^2$$
$$+ 2\eta m^2(\Delta + p^2) - \frac{1}{2}(\eta m^2)^2. \qquad \text{(IV.2.9)}$$

最后，我们写出

$$J_{\mu\nu}^{(1)R}(p, \Delta', m) = -\frac{i\pi^2}{i} g_{\mu\nu}\left\{\eta^2 m^4\left(K_4 - 2K_2\right.\right.$$
$$\left. + K_0 - \frac{1}{2}\right) + 2\eta m^2(\Delta + p^2)(K_2 - K_0 + 1)$$
$$+ (\Delta + p^2)\left[K_0 - \ln(\eta m^2) - \frac{3}{2}\right]$$

$$+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\Big\}$$

$$-i\pi^2 p_\mu p_\nu\{\eta m^2(K_2-K_0+1)+(\Delta+p^2)$$

$$\cdot(K_0-\ln(\eta m^2)-1)+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}.$$

(IV.2.10)

上式与未正规化的表示式 $J_{\mu\nu}^{(1)}$ 加以比较，可以看出，三个发散常数 A_4，A_2 和 A_0 用三个等价的常数 K_4，K_2 和 K_0 代替了．用正规化程序修改了有限部分． 现在可以得到表 VI.1 的其他的 J 的正规化表示式．

Pauli-Villars 正规化方案保持电磁规范不变性． 这个方案在文献[5]用来讨论包含手征 $SU(3)$ 流的 n 点函数 Ward-Takahashi 恒等式的一般反常性，并且在文献[6]用来讨论能量动量张量的求迹恒等式的反常性．

重要的要注意 Pauli-Villars 方案的一个性质：它不改变收敛积分． 这由查看表 VI.1 中所列举的收敛积分的积分公式可以看出来，因为调节子场的一切收敛积分当它们的质量变为无穷大时都为零．

在表 VI.2 中列举了 Pauli-Villars 正规化方案中已正规化的 Feynman 积分公式的结果．在得到表 IV.2 时利用了下面的结果．令

$$\Delta=\eta m^2+\Delta'.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{N} c_j(\eta m_j^2+\Delta'+p^2)^2\ln(\eta m_j^2+\Delta'+p^2)$$

$$=(\eta m^2)^2\bar{K}_4+2\eta m^2(\Delta+p^2)\bar{K}+(\Delta+p^2)^2\bar{K}_0$$

$$+(\Delta+p^2)^2\left[\ln(\Delta+p^2)-\frac{3}{2}\right]. \qquad \text{(IV.2.11a)}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j(\eta m_j^2+\Delta'+p^2)\ln(\eta m_j^2+\Delta'+p^2)$$

$$= (\eta m^2)\bar{K}_2 + (\Delta + p^2)\bar{K}_1 + (\Delta + p^2) \cdot [\ln(\Delta + p^2) - 1]. \qquad \text{(IV.2.11b)}$$

$$\sum_{j=0}^{N} c_j \ln(\eta m_j^2 + \Delta' + p^2) = \bar{K}_0 + \ln(\Delta + p^2). \qquad \text{(IV.2.11c)}$$

这里

$$\bar{K}_4 = K_4 - 2K_2 + K_0 - \frac{1}{2}. \qquad \text{(IV.2.12a)}$$

$$\bar{K}_2 = K_2 - K_0 + 1. \qquad \text{(IV.2.12b)}$$

$$\bar{K}_0 = K_0 - \ln(\eta m^2). \qquad \text{(IV.2.12c)}$$

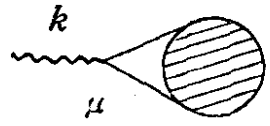
正比于

$$\frac{1}{(\Delta + p^2)^n}, \quad n \geqslant 1 \qquad \text{(IV.2.13)}$$

的项是不改变的. 费米子质量的多项式的一切项，包括无穷大常数 A_4, A_2 和 A_0 在内，都被消去了.

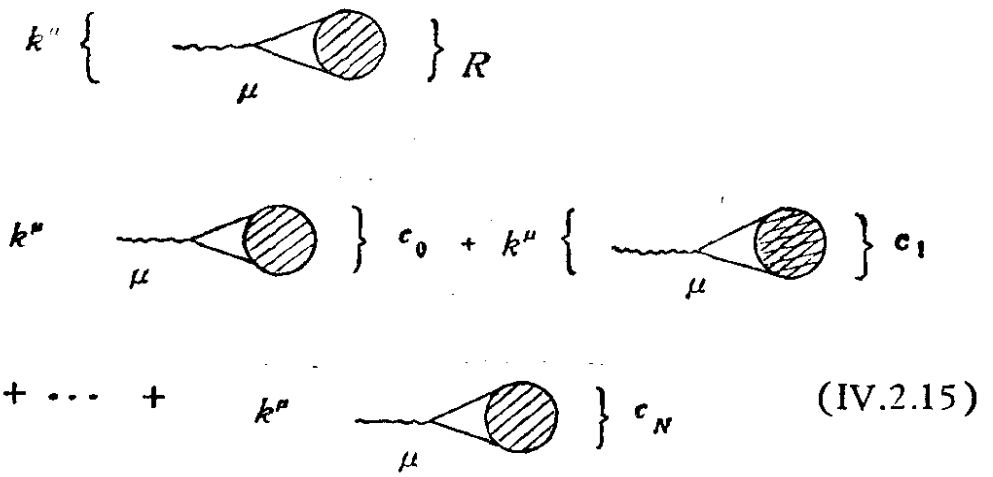
积分变数原点的位移 容易验证,对于正规化的Feynman积分,积分变数原点的位移是容许的,不会带来表面项. 这是正规化 Feynman 积分的合乎需要的性质之一.

规范不变性 Pauli-Villars 正规化的 Feynman 振幅保持电磁规范不变性. 图示证明的梗概如下. 在动量空间内规范不变性表示为下面的形式

k^μ {  } $= 0$ (IV.2.14)

这里波纹线表示带有 4 动量 k_μ 的一条光子线，并且与相同质量的两条内费米子线耦合. 在 (IV.2.14) 的曲括号内的图形表示一个给定量级的耦合常数的整个振幅，并且由一个以上的 Feynman 图形所组成. 对于量子电动力学的情形利用微

扰振幅证明方程 (IV.2.4) 的内容可以在文献 [7] 中找到. 在这里,要点在于,恒等式方程 (IV.2.14) 与费米子质量无关.因此下面的形式是正确的.



(IV.2.15)

矢量和轴矢量流的 Ward-Takahashi 恒等式 Pauli-Villars 正规化也保持方程 (IV.4.12) 中所给出的矢量流 Ward-Takahashi 恒等式不变. 然而,情况对于轴矢量流是完全不同的.如方程(I.4.16)及(I.4.17)所示,轴矢量流恒等式显然与组成流的费米子质量有关.应该猜想到,轴矢量流Ward-Takahashi恒等式一般并不保持不变,并且情形确实如此. 在 (I.4.16) 中所给出的某些形式的"恒等式"被修正了. 当然, 这些恒等式是在 §IV.5 中所要讨论的 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常性. 应该强调, 这些反常性并不是这个特别正规化方案的人工制品. 该方案事实上是推导反常性所用的几个容洽的方法之一. 由于费米子质量项的出现, 要特别阐明反常性存在的可能性. 这曾经是文献 [5] 和 [6] 中采用 Pauli-Villars 正规化方案推导反常 Ward-Takahashi 恒等式的理由.

介子传播子的 Feynman 正规化 Feynman[8]曾提出一个方法使介子传播子正规化, 以改进包含内介子线的圈积分的收敛度.代替介子传播子用它的正规化形式

$$\frac{1}{k^2-m^2}\to\lim_{\Lambda\to\infty}\left[\frac{1}{k^2-m^2}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2}\right]$$

$$=\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{-(\Lambda^2-m^2)}{(k^2-m^2)(k^2-\Lambda^2)}. \qquad \text{(IV.2.16)}$$

Λ 通常称为截止质量。 在完成积分以后取极限 $\Lambda\to\infty$。一个介子传播子的正规化形式对于 $k^2\to\infty$ 是正比于 $\frac{1}{k^4}$，因此改进了 Feynman 积分的收敛性质。 例如，费米子传播子 g^2 阶的项 (IV.1.4) 可以在 Feynman 方案中进行正规化，

$$-i\Sigma^{ab}(p)\to\lim_{\Lambda\to\infty}g^2\int_k i\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}$$
$$\cdot i\gamma^\nu\frac{\lambda^b}{2}i\delta^{ab}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2}\right]$$
$$\cdot\left[-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right], \qquad \text{(IV.2.17)}$$

它现在是收敛的。

表 IV.2 Pauli-Villars 正规化方案中已正规化的 Feynman 积分公式的结果

$$J^{(1),R}_{\mu\nu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{4}\right)g_{\mu\nu}\left\{(\eta m^2)^2\bar K_4+2\eta m^2(\Delta+p^2)\bar K_2\right.$$
$$\left.+(\Delta+p^2)^2\left[\bar K_0-\frac{3}{2}\right]+(\Delta+p^2)^2[\ln(\Delta+p^2)]\right\}$$
$$+(i\pi^2)(-1)p_\mu p_\nu\{(\eta m^2)\bar K_2+(\Delta+p^2)[K_0-1]$$
$$+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(1),R}_{\mu}(p,\Delta)=(i\pi^2)(-1)p_\mu\{(\eta m^2)\bar K_2+(\Delta+p^2)[K_0-1]$$
$$+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(1),R}(p,\Delta)=(i\pi^2)(-1)\{(\eta m^2)\bar K_2+(\Delta+p^2)[\bar K_0-1]$$
$$+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(2),R}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{2}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\nu\lambda}p_\mu+g_{\mu\lambda}p_\nu]\{(\eta m^2)\bar K_2$$

$$+(\Delta+p^2)[\bar{K}_0-1]+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}$$
$$+(i\pi^2)(-1)p_\mu p_\nu p_\lambda\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(2),R}_{\mu\nu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{2}\right)g_{\mu\nu}\{(\eta m^2)\bar{K}_2+(\Delta+p^2)[\bar{K}_0-1]$$
$$+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}+(i\pi^2)(-1)p_\mu p_\nu$$
$$\cdot\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(2),R}_{\mu}(p,\Delta)=(i\pi^2)(-1)p_\mu\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(2),R}(p,\Delta)=(i\pi^2)(-1)\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}.$$

$$J^{(3),R}_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{8}\right)[g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}]\{(\eta m^2)\bar{K}_2$$
$$+(\Delta+p^2)[\bar{K}_0-1]+(\Delta+p^2)\ln(\Delta+p^2)\}$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{4}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda$$
$$+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho+g_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda+g_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]\cdot\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(3),R}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{4}\right)(g_{\mu\nu}p_\lambda+g_{\mu\lambda}p_\nu+g_{\nu\lambda}p_\mu)\{\bar{K}_0$$
$$+\ln(\Delta+p^2)\}+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(3),R}_{\mu\nu}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{4}\right)g_{\mu\nu}\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{p_\mu p_\nu}{\Delta+p^2}.$$

$$J^{(3),R}_{\mu}(p,\Delta)=J^{(3)}_{\mu}(p,\Delta).$$

$$J^{(3),R}(p,\Delta)=J^{(3)}(p,\Delta).$$

$$J^{(4),R}_{\mu\nu\sigma\tau\lambda}(p,\Delta)=(i\pi^2)\left(\frac{-1}{4}\right)\{p_\mu(g_{\tau\sigma}g_{\nu\lambda}+g_{\nu\tau}g_{\sigma\lambda}+g_{\nu\lambda}g_{\sigma\tau})$$
$$+p_\nu(g_{\mu\tau}g_{\sigma\lambda}+g_{\mu\sigma}g_{\tau\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\sigma\tau})+p_\sigma(g_{\mu\nu}g_{\tau\lambda}+g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda}$$
$$+g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau})+p_\tau(g_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma})$$
$$+p_\lambda(g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}+g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma})\}\cdot\{\bar{K}_0+\ln(\Delta+p^2)\}$$
$$+(i\pi^2)\left(\frac{-1}{12}\right)\{g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\lambda+g_{\mu\sigma}p_\nu p_\tau p_\lambda+g_{\mu\tau}p_\nu p_\sigma p_\lambda$$

$$+ g_{\mu\lambda}p_\nu p_\sigma p_\tau + g_{\nu\sigma}p_\mu p_\tau p_\lambda + g_{\nu\tau}p_\mu p_\sigma p_\lambda + g_{\nu\lambda}p_\mu p_\sigma p_\tau$$

$$+ g_{\sigma\tau}p_\mu p_\nu p_\lambda + g_{\sigma\lambda}p_\mu p_\nu p_\tau + g_{\tau\lambda}p_\mu p_\nu p_\sigma\} \cdot \left\{\frac{1}{\Delta + p^2}\right\}$$

$$+ (i\pi^2)\frac{1}{6}\frac{p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\lambda}{(\Delta + p^2)^2}.$$

$$J^{(4),R}_{\mu\nu\sigma\tau}(p,\Delta) = i\pi^2\left[\frac{-1}{24}\right][g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}]$$

$$\cdot[\bar{K}_0 + \ln(\Delta + p^2)] + (i\pi^2)\left(\frac{-1}{12}\right)[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho$$

$$+ g_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho + g_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda + g_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho + g_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda + g_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]$$

$$\cdot\frac{1}{\Delta + p^2} + (i\pi^2)\left(\frac{1}{6}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{(\Delta + p^2)^2}.$$

$$J^{(4),R}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta) = J^{(4)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta).$$

$$J^{(4),R}_{\mu\nu}(p,\Delta) = J^{(4)}_{\mu\nu}(p,\Delta).$$

$$J^{(4),R}_{\mu}(p,\Delta) = J^{(4)}_{\mu}(p,\Delta).$$

$$J^{(4),R}(p,\Delta) = J^{(4)}(p,\Delta).$$

$$J^{(5),R}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda}(p,\Delta) = (i\pi^2)\left(\frac{-1}{8\cdot 4!}\right)\{g_{\mu\lambda}(g_{\nu\sigma}g_{\tau\eta} + g_{\nu\tau}g_{\sigma\eta} + g_{\nu\eta}g_{\sigma\tau})$$

$$+ g_{\nu\lambda}(g_{\nu\tau}g_{\sigma\eta} + g_{\mu\sigma}g_{\tau\eta} + g_{\mu\eta}g_{\sigma\tau}) + g_{\sigma\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\tau\eta}$$

$$+ g_{\mu\tau}g_{\nu\eta} + g_{\mu\eta}g_{\nu\tau}) + g_{\tau\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\eta} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\eta} + g_{\mu\eta}g_{\nu\lambda})$$

$$+ g_{\eta\lambda}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} + g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma})\}\{\bar{K}_0 + \ln(\Delta + p^2)\}$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{-1}{8\cdot 12}\right)\{p_\mu p_\nu(g_{\sigma\tau}g_{\eta\lambda} + g_{\sigma\eta}g_{\tau\lambda} + g_{\sigma\lambda}g_{\tau\eta})$$

$$+ \mu\nu\sigma\tau\eta\lambda \text{ 的所有其他排列}\} \cdot \frac{1}{\Delta + p^2}$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{1}{2\cdot 4!}\right)\{g_{\mu\nu}p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda + g_{\mu\sigma}p_\lambda p_\tau p_\eta p_\nu$$

$$+ 13\text{个另外的类似项}\}\left(\frac{1}{\Delta + p^2}\right)^2$$

$$+ (i\pi^2)\left(\frac{-1}{2\cdot 3!}\right)\frac{p_\mu p_\nu p_\sigma p_\tau p_\eta p_\lambda}{(\Delta + p^2)^3}.$$

$$J^{(5),R}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta) = J^{(5)}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta).$$

续上表

$$J^{(5),R}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta) = J^{(5)}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta).$$

$$J^{(5),R}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta) = J^{(5)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta).$$

$$J^{(5),R}_{\mu\nu}(p,\Delta) = J^{(5)}_{\mu\nu}(p,\Delta).$$

$$J^{(5),R}_{\mu}(p,\Delta) = J^{(5)}_{\mu}(p,\Delta).$$

$$J^{(5),R}(p,\Delta) = J^{(5)}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda\rho}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda\rho}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu\sigma\tau\eta\lambda}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu\lambda\sigma\tau}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu\lambda\sigma}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu\lambda}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu\nu}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu\nu}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}_{\mu}(p,\Delta) = J^{(6)}_{\mu}(p,\Delta).$$

$$J^{(6),R}(p,\Delta) = J^{(6)}(p,\Delta).$$

IV.3 维数正规化

Pauli-Villars 正规化方案对量子电动力学（QED）及对包含带质量的费米子场论进行的计算是有成效的. 然而，对于包含无质量的费米子场论，比如 Yang-Mills 规范场论，辅助场，即调节子场的引入必然把质量项引进到理论中. 这一定会破坏理论的规范性质，并且可能损坏它们的可重正性论证. 兼顾及上述的规范性质，并且不使场论微扰解的许多结构失真的正规化方案已由 't Hooft 及 Veltman[9] 和其他作者[10,11,12]建立了. 一般维数正规化的评述可以在文献 [13] 中找到. 这个强有力的方法不仅能使紫外发散正规化，也可以

成功地应用到红外发散的情形. 本节的讨论按照 t'Hooft 及 Veltman 的方法，首先从下面两方面的考察着手.

(1) 从一个 4 维 Minkowski 空间的理论推广到 n 维空间（一个时间维和 $n-1$ 个空间维）并不改变理论的基本结构. 一个理论的基本结构是指它的拉氏函数，正则等时对易关系，及 Euler-Lagrangian 运动方程. 这些量的形式与空时的维数无关，尽管，场的维数和所含的耦合常与 n 有关.

(2) 如果空时的维数变到 n，则 (IV.1.5) 圈积分变为

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n},$$

当 n 减小时，积分的紫外变化过程会得到改进，但当 n 增大时，红外变化过程会得到改进.

简单说，这个方法的概念是把 Feynman 积分的积分变数的空间维数从 4 解析延拓到任意整数，并延拓到一个复数值 n. 在计算结束时，取极限 $n \to 4$. 对于收敛积分，例如在表 IV.1 中所列举的收敛积分，这个方法给出的结果与通常方式得到的结果相同. 对于发散积分，在 $n = 4$ 处的极点出现在最后的结果中. 这个方法对于量子电动力学（QED）中交迭发散的困难问题是特别方便的.

更具体地说，这个方法是把一组 Feynman 图形所给出的 S 矩阵元解析延拓到复 n 平面，这里 n 为圈积分变数的维数. 当 $n \to 4$ 就得到物理的 S 矩阵元. 结果广义的 S 矩阵元作为 n 的解析延拓，对于 n 是解析的，在 $n = 4$ 处的极点表示原来积分的发散性. 't Hooft 及 Veltman[14] 曾强调过，因为维数正规化方案对图形是唯一定义的，分数或复数维数在任何基本理论中，比如维数正则形式，确实是不能定义的.

现在方法的要点如下:

(a) 在一个 n 维 Minkowski 空间内定义 Feynman 积

分.

(b) 通过收敛积分来定义发散积分的维数的解析延拓.

(c) 积分的末形式对于 n 是亚纯的,在 n 的正整数值,包括 $n=4$ 在内,具有可能的极点.

上述各点可以作如下的说明:

n 维 Minkowski 空间 在 n 维空间内一个矢量表示为

$$b^\mu \equiv (b^0, b^1, \cdots, b^{n-1}). \tag{IV.3.1}$$

该空间的度规张量为

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1,2,\cdots,n-1, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

$$g^\mu_\nu = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}. \tag{IV.3.2}$$

及

$$b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu. \tag{IV.3.3}$$

把一个矢量分离为头 4 个分量及最后 $n-4$ 个分量,表示为

$$b^\mu = (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{\underset{\sim}{b}}) \tag{IV.3.4}$$

是方便的,这里 $\underset{\sim}{b}$ 只有头 4 个分量,$\underset{\sim}{\underset{\sim}{b}}$ 有其余的 $n-4$ 个分量. 最后,头 4 分量,即 $\underset{\sim}{b}$ 类型矢量,将认为是一个物理矢量. 一个矢量的长度为

$$b^2 \equiv b^\mu b_\mu = \underset{\sim}{b}^2 - \underset{\sim}{\underset{\sim}{b}}^2. \tag{IV.3.5}$$

该空间的体积元表示为

$$d^n l.$$

在有 Dirac 粒子的问题中,γ 矩阵推广到 n 维是必要的,这将在往后讨论.

解析延拓 在 n 维 Minkowski 空间内考虑下面的积分:

$$J = \int d^n l \, \frac{l_0^{\lambda_0} l_1^{\lambda_1} \cdots l_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}{[l^2 - 2l \cdot p - \Delta]^a} \tag{IV.3.6}$$

这里 $l_0, l_1, \cdots, l_{n-1}$ 为 n 维矢量 l_μ 的分量. 如果

$$\lambda_0 > -1, \lambda_1 > -1, \cdots, \lambda_{n-1} > -1, \quad \text{(IV.3.7a)}$$

及

$$n + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - 2\alpha < 0. \quad \text{(IV.3.7b)}$$

则该积分是收敛的. 假定方程 (IV.3.7a) 和 (IV.3.7b) 被满足,对 (IV.3.6) 分部积分及应用恒等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial l_k}\right) l_k = 1 \quad \text{(IV.3.8)}$$

得到

$$\begin{aligned} J &= \int d^n l \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial l_k} l_k\right) \frac{l_{\lambda_0} l_{\lambda_1} \cdots l_{\lambda_{n-1}}}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^\alpha} \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int d^n l \cdot l_k \frac{\partial}{\partial l_k}\left\{\frac{l_{\lambda_0} l_{\lambda_1} \cdots l_{\lambda_{n-1}}}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^\alpha}\right\}, \end{aligned} \quad \text{(IV.3.9)}$$

这里删去了等于零的表面项. 因此

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{n}\int d^n l \frac{(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) l_0^{\lambda_0} l_1^{\lambda_1} \cdots \lambda_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^\alpha} \\ &\quad -\frac{1}{n}\int d^n l \frac{l_0^{\lambda_0} l_1^{\lambda_1} \cdots l_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^{\alpha+1}} \{-2\alpha(l^2 - l\cdot p)\} \\ &= \frac{1}{n}\{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) + 2\alpha\} J \\ &\quad + \frac{2\alpha}{n}\int d^n l \frac{l_0^{\lambda_0} l_1^{\lambda_1} \cdots l_{n-1}^{\lambda_{n-1}} (l\cdot p + \Delta)}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad \text{(IV.3.10)}$$

该表示式的项可以重排,得到

$$\begin{aligned} J = &\frac{2\alpha}{(n + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - 2\alpha)} \int d^n l \\ &\cdot \frac{l_0^{\lambda_0} l_1^{\lambda_1} \cdots l_{n-1}^{\lambda_{n-1}} (\Delta + l\cdot p)}{[l^2 - 2l\cdot p - \Delta]^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad \text{(IV.3.11)}$$

现在右边对于

$$\lambda_0 > -1, \lambda_1 > -1, \cdots, \lambda_{n-1} > -1,$$

及

$$n + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - 2\alpha < 1, \quad \text{(IV.3.12)}$$

是收敛的. 通过方程 (IV.3.11) 定义 (IV.3.6) 中的 J, 它的收敛域从方程 (IV.3.7) 扩大到 (IV.3.12). 因此方程 (IV.3.11) 是我们把 J 解析延拓到一个较大的收敛域. 't Hooft 及 Veltman 称由 (IV.3.6) 到 (IV.3.12) 的操作为偏 p (*Partial p*). 重复应用偏 p, 可以得到方程 (IV.3.6) 的解析延拓, 它对于任意值 $\lambda_0 > -1, \lambda_1 > -1, \cdots, \lambda_{n-1} > -1$ 及 α 是收敛的, 但是在

$$n + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - 2\alpha = 0, 1, 2, \cdots$$

的孤立极点除外. 显然, 用这个解析延拓的方案, 可以定义在分母和分子中有任意幂的 Feynman 积分. 已利用偏 p 的程序来说明解析延拓的方法, 然而没有用它来进行一圈积分的实际计算. 反之, 它已应用于其中出现交迭发散的多圈积分了.

在 Minkowski 空间内的积分 考虑积分

$$J^{(\alpha)}(p, \Delta) \equiv \int d^n l \frac{1}{(l^2 - 2l \cdot p - \Delta)^\alpha}. \quad \text{(IV.3.13)}$$

按偏 p 的程序. 该积分总可以成为收敛的; 因此假定它是收敛的. 于是由积分变数的改变

$$l \to l + p.$$

方程 (IV.3.13) 可以写为

$$J^{(\alpha)}(p, \Delta) = \int d^n l \frac{1}{[l^2 - (\Delta + p^2)]^\alpha}. \quad \text{(IV.3.14)}$$

作 Wick 转动(参看 §IV.1), 用 iL_0 代替 l_0, 并且积分乘以 $i(-1)^\alpha$ 可以将 Minkowski 矢量 l 变换为欧氏矢量 L:

$$J^{(\alpha)}(p, \Delta) = i(-1)^\alpha \int d^n L \frac{1}{[L^2 + (\Delta + p^2)]^\alpha}, \quad \text{(IV.3.15)}$$

这里

$$L^2 = L_0^2 + L_1^2 + \cdots + L_{n-1}^2,$$
$$L_j = l_j,\ j = 1, 2, \cdots, n-1. \qquad \text{(IV.3.16)}$$

积分可以在极坐标内进行，这里

$$d^n L = L^{n-1} dL d\Omega_n,$$
$$d\Omega_n = (\sin\theta_{n-1})^{n-2} d\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2 d\theta_2 d\theta_1. \qquad \text{(IV.3.17)}$$

积分的范围是

$$0 \leqslant L;\ 0 \leqslant \theta_j < 2\pi,\ j = 2, \cdots, n-1;$$
$$0 \leqslant \theta_1 < \pi. \qquad \text{(IV.3.18)}$$

下面两个公式是有用的：

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^m d\theta = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}[m+1]\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}[m+2]\right)}, \qquad \text{(IV.3.19)}$$

及

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^\beta}{(x^2+c)^\alpha} = \frac{B\left(\frac{1}{2}[\beta+1], \alpha - \frac{1}{2}[\beta+1]\right)}{2(c)^{\alpha - \frac{1}{2}[\beta+1]}}, \qquad \text{(IV.3.20)}$$

这里 $\Gamma(\alpha)$ 及 $B(\alpha, \beta)$ 分别为 Gamma 及 Beta 函数。利用 (IV.3.19)，可以进行角积分：

$$\int d\Omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}. \qquad \text{(IV.3.21)}$$

于是

$$J^{(\alpha)}(p, \Delta) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\, i(-1)^\alpha \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \alpha - \frac{n}{2}\right) \frac{1}{(\Delta + p^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \qquad \text{(IV.3.22)}$$

因为 Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 在复 z 平面内为亚纯的，极点在 $z=0,-1,\cdots$处，于是 $J^{\alpha}(p,\Delta)$ 对于 n 为亚纯的，但是除在 $\alpha-\frac{n}{2}=0,-1,\cdots$的极点以外，即，此时积分变数的维数为

$$n=2\alpha,\ 2\alpha+1,\ 2\alpha+2,\cdots. \tag{IV.3.23}$$

为了计算如下形式的积分

$$J_{\mu}^{(\alpha)}(p,\Delta)\equiv\int d^{n}l\,\frac{l_{\mu}}{(l^{2}-2l\cdot p-\Delta)^{\alpha}}, \tag{IV.3.24}$$

只须相对于 p 来对 $J^{(\alpha-1)}(p,\Delta)$ 进行微分：

$$\begin{aligned}J_{\mu}^{\alpha}(p,\Delta)&=\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial p}J^{(\alpha-1)}(p,\Delta)\\&=i(-1)^{\alpha}(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{p_{\mu}}{(\Delta+p^{2})^{\alpha-\frac{n}{2}}}.\end{aligned} \tag{IV.3.25}$$

由相对于 p 的重复微分，可以得到更复杂的表示式．结果总结在表 IV.3 内．由表 IV.3，显然有 $n\to4$ 的情形，极点在 Gamma 函数中展开．例如，$J^{(\alpha)}(p,\Delta)$ 对于 $\alpha=1$ 及 2 当 $n\to4$ 时有极点．

容易验证，如果积分是收敛的，则表 IV.3 的公式是与表 IV.1 中的相应积分等同的．

为使一个发散积分正规化，在 $n=4$ 的极点以下面的方式被孤立起来，取 $J^{(2)}(p,\Delta)$ 为例，提出极点项：

$$J^{(2)}(p,\Delta)=i(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(2)}\frac{1}{(\Delta+p^{2})^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$\xrightarrow{n\to 4} i\pi^2 \frac{1}{2-\frac{n}{2}} + \text{有限部分}。 \quad \text{(IV.3.26)}$$

表 IV.3 积分变数维数解析已证实的 Feynman 积分公式.

$$J^{(\alpha)}(p,\Delta) \equiv \int d^n l \frac{1}{(l^2 - 2p\cdot l - \Delta)^\alpha}$$

$$= (-1)^\alpha i(\sqrt{\pi})^n \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\Delta + p^2)^{\alpha - n/2}}.$$

$$J_\mu^{(\alpha)}(p,\Delta) \equiv \int d^n l \frac{l_\mu}{(l^2 - 2l\cdot p - \Delta)^\alpha}$$

$$= (-1)^\alpha i(\sqrt{\pi})^n \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{p_\mu}{(\Delta + p^2)^{\alpha - n/2}}.$$

$$J_{\mu\nu}^{(\alpha)}(p,\Delta) \equiv \int d^n l \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - 2l\cdot p - \Delta)^\alpha}$$

$$= (-1)^\alpha i(\sqrt{\pi})^n \left\{ -\frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta + p^2)^{\alpha - 1 - n/2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta + p^2)^{\alpha - n/2}} \right\}.$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)}(p,\Delta) \equiv \int d^n l \frac{l_\mu l_\nu l_\lambda}{(l^2 - 2l\cdot p - \Delta)^\alpha}$$

$$= (-1)^\alpha i(\sqrt{\pi})^n \left\{ -\frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)} \right.$$

$$\cdot \frac{p_\mu g_{\nu\lambda} + p_\nu g_{\mu\lambda} + p_\lambda g_{\mu\nu}}{(\Delta + p^2)^{\alpha - 1 - n/2}} + \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\left. \cdot \frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{(\Delta + p^2)^{\alpha - n/2}} \right\}.$$

$$J_{\mu\nu\lambda\rho}^{(\alpha)}(p,\Delta) \equiv \int d^n l \frac{l_\mu l_\nu l_\lambda l_\rho}{(l^2 - 2l\cdot p - \Delta)^\alpha}$$

$$= (-1)^\alpha i(\sqrt{\pi})^n \left\{ \frac{\Gamma\left(\alpha - 2 - \frac{n}{2}\right)}{4\Gamma(\alpha)} \right.$$

续上表

$$\cdot\frac{g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}+g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}}{(\Delta+p^2)^{\alpha-2-n/2}}$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)}\cdot[g_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho+g_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda$$

$$+g_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho+g_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda+g_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]\frac{1}{(\Delta+p^2)^{\alpha-1-n/2}}$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{(\Delta+p^2)^{\alpha-n/2}}\Big\}.$$

$J^{(\alpha)}_{\mu_1\cdots\mu_j}(p,\Delta)=0$，对于 $\alpha\leqslant 0$.

这里有限部分可以定义为

$$\lim_{n\to 4}\left\{i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(2)}\frac{1}{(\Delta+p^2)^{2-n/2}}-\frac{i\pi^2}{2-\frac{n}{2}}\right\}$$

$$=i\pi^2\lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[\frac{1}{(\Delta+p^2)^{2-n/2}}-1\right]\right\}$$

$$=i\pi^2\lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}[e^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(\Delta+p^2)}-1]\right\}$$

$$=-i\pi^2\ln(\Delta+p^2). \qquad \text{(IV.3.27)}$$

于是

$$J^{(2)}(p,\Delta)=i\pi^2\left[\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\ln(\Delta+p^2)\right]. \qquad \text{(IV.3.28)}$$

把上面的表示式与表 IV.2 中的 $J^{(2),R}(p,\Delta)$ 的表示式加以比较，可以看出，它们是符合一致的，除后者的任意常数 $\bar{K}_0$ 和前者在 $n=4$ 处的显然极点以外.

出现在 Pauli-Villars 方案中的任意性也出现在现在的方法中.由 $(\sqrt{\pi})^n$ 的 n 个因子的解析延拓,方程(IV.3.27)可以写为

$$i\pi^2 \lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[\exp\left(-\left(2-\frac{n}{2}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot(\ln\pi+\ln(\Delta+p^2))\right)-1\right]\right\}$$

$$=-i\pi^2[\ln(\Delta+p^2)+\ln\pi]. \qquad \text{(IV.3.29)}$$

事实上写出的(IV.3.26)有不确定性. 严格地,我们有

$$\lim_{n\to 4}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\gamma$$

$$+\frac{\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2!}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right), \qquad \text{(IV.3.30)}$$

这里

$$\gamma\equiv\Gamma'(1)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}-\ln p\right)$$

$$=0.577\cdots$$

为 Euler 常数,并且

$$\Gamma''(1)=\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}.$$

于是 Euler 常数应该添加到方程(IV.3.29)右边的方括号内.还有另外的引起不确定性的可能.譬如说,一个 Feynman 积分可以乘以 $\mu^{\rho(4-n)}$,这里 μ 为任意的质量,ρ 为一个常数.这样做的动机是保持理论的耦合常数的(质量)量纲不受空时维数的解析延拓改变. 对于具有无量纲的耦合常数的理论,在物理的维数 $n=4$ 时,例如

$$g_1\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi A^a_\mu,\quad \frac{g_2}{4!}\phi^4,$$

$$g_3 f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)A^{b\mu}A^{c\nu},\quad \text{等等},$$

在任意的 n 维内，代替 g_i 用 $g_i\mu^{\rho(4-n)}$ 就可以保持耦合常数为无量纲的，

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{对于包含费米子和包含玻色子导数的耦合},\\ 1, & \text{对于只包含玻色子的耦合}.\end{cases}\tag{IV.3.31}$$

由于把费米子场的质量维数计算为 $(n-1)/2$，把玻色子场计算为 $(n-2)/2$，就可以得到上面所列举的 ρ 值. 注意，对于 n 的正整数值，通过正则量子化规则，对于玻色子场

$$\left[\phi_\alpha(x),\frac{d}{dy_0}\phi_\beta(y)\right]_{x_0=y_0}=i\delta_{\alpha\beta}\delta^{n-1}(x-y),\tag{IV.3.32a}$$

并且对于费米子场

$$\{\psi_\alpha(x),\psi^+_\beta(y)\}_{x_0=y_0}=i\delta_{\alpha\beta}\delta^{n-1}(x-y),\tag{IV.3.32b}$$

或者通过总哈密顿量表示式

$$H=\int d^{n-1}\mathscr{H},\tag{IV.3.33}$$

它有质量的维数，就可以确定一个场的质量维数. 在(IV.3.33)中 $\mathscr{H}$ 为哈密顿量密度，并且有质量维数 n. 一旦一个场的维数对某个 n 的整数值被确定了，它就可以被解析延拓到一个任意的实数值或复数值. 这也说明，在本节中如早先所提到的，要表述一个维数正则的基本理论是困难的.

在耦合常数中这样一个质量因子的存在并不改变收敛积分，但是由于在 $n=4$ 处极点的存在，将对一个发散积分引入一个附加的常数项. 例如，我们可以写出（曾设想，表示式 $J^{(2)}(p,\Delta)$ 相应于与 g^2 成正比的图形）

$$J'^{(2)}(p,\Delta)=\mu^{2\rho(4-n)}J^{(2)}(p,\Delta).$$

从 $J'^{(2)}(p,\Delta)$ 减去极点，并且表示出一切可能的附加常数

$$\lim_{n\to 4}\left\{i(\sqrt{\pi})^n\mu^{2\rho(4-n)}\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(2)}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{(\Delta+p^2)^{2-\frac{n}{2}}}-\frac{i\pi^2}{2-\frac{n}{2}}\right\}$$

$$=i\pi^2\lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[\frac{\mu^{4\left(2-\frac{n}{2}\right)\rho}}{(\Delta+p^2)^{2-\frac{n}{2}}}-1\right]+\gamma+\ln\pi\right\}$$

$$=-i\pi^2\{\ln(\Delta+p^2)-2\rho\ln\mu^2+\gamma+\ln\pi\}. \qquad \text{(IV.3.34)}$$

如果 $-2\rho\ln\mu^2+\gamma+\ln\pi$ 被认为是 $\bar{K}_3$，则上式确实恒等于 $J^{(2),R}(p,\Delta)$. 虽然没有方法确定 μ^2 的值，但是不确定性在重正化程序中可以被消去.

积分变数原点的位移 由表 IV.3 所列举的表示式，容易验证，积分变数原点的位移并不产生任何表面项，因此是一个容许的方法. 这与通常的方法相反，通常方法所得到的结果，例如，在表 IV.1 中所列举的表示式只有在正规化以后，比如通过 Pauli-Villars 方案，才没有这种不确定性.

多圈积分 这里将不给出维数正规化方案推广到多圈积分，但也可以在文献 [9—13] 中找到.

't Hooft Veltman 猜测 表 IV.3 公式的直接应用表明，一切 Feynman 积分 ($\alpha=0,-1,-2,\cdots$) 都为零. 这个结果事实上是正确的，并且对 Pauli-Villars 方案也是真的. 关于圈动量多项式的高度发散的 Feynman 积分一般为零的事实已由 't Hooft 及 Veltman[15] 指出:

$$I_\beta\equiv\int\frac{d^nl}{(l^2)^\beta}=0. \qquad \text{(IV.3.35)}$$

这种类型的 Feynman 积分出现在图 IV.6 所给出的 Yang-Mills 理论的蝌蚪图形中.



图 IV.6

结果方程 (IV.3.3) 的直观论证可以如下给出. 令

$$I_\beta(m) \equiv \int \frac{d^n l}{[l^2 - m^2]^\beta}, \tag{IV.3.36}$$

并定义

$$I_\beta = \lim_{m\to 0} I_\beta(m). \tag{IV.3.37}$$

根据表 IV.3 的公式, 可以写出

$$\begin{aligned} I_\beta(m) &= J^{(\beta)}(0, m^2) \\ &= (-1)^\beta i(\sqrt{\pi})^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\beta - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\beta - \frac{n}{2}} \\ &\xrightarrow[m\to 0]{} 0, \end{aligned} \tag{IV.3.38}$$

对于

$$\mathrm{Re}\left(\beta - \frac{n}{2}\right) < 0. \tag{IV.3.39}$$

这个结果普遍成立的另一说明是方程 (IV.3.35) 的被积函数乘以 1, 并利用标准程序来进行积分. 写出

$$I_\beta = \int d^n l \frac{1}{(l^2)^\beta} \cdot \frac{(l-p)^2}{(l-p)^2},$$

这里 p 为一个任意矢量. 通过表 IV.3 的公式, 它可以重写为

$$I_\beta = \beta \int_0^1 dx (1-x)^{\beta-1} \int d^n l \frac{l^2 + (1-x)^2 p^2}{[l^2 + x(1-x)p^2]^{\beta+1}}$$

$$= i(-1)^{\beta+1}\beta(\sqrt{\pi})^n\int_0^1 dx(1-x)^{\beta-1}$$

$$\cdot\left\{-\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\beta+1)}\frac{n}{[-x(1-x)p^2]^{\beta-\frac{n}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\beta+1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)}\frac{(1-x)^2p^2}{[-x(1-x)p^2]^{\beta+1-\frac{n}{2}}}\right\}$$

$$= -i(-1)^{\beta}(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)}(-p^2)^{\frac{n}{2}-\beta}$$

$$\cdot\left[-\frac{n}{2}B\left(\frac{n}{2}-\beta+1,\frac{n}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n}{2}-\beta\right)B\left(\frac{n}{2}-\beta,\frac{n}{2}+1\right)\right], \qquad \text{(IV.3.40)}$$

这里

$$B(\lambda,\mu)\equiv\int_0^1 dx x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1} \qquad \text{(IV.3.41)}$$

为 Beta 函数. 对于 $\mathrm{Re}\lambda>0$ 和 $\mathrm{Re}\mu>0$,通常的定义是适合的

$$B(\lambda,\mu)=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}. \qquad \text{(IV.3.42)}$$

对于 λ 和 μ 的其他值，Beta 函数可以通过解析延拓[16]来定义:

$$B(\lambda,\mu)=\int_0^{\frac{1}{2}} dx x^{\lambda-1}\left[(1-x)^{\mu-1}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j)}x^j\right]$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 dx(1-x)^{\mu-1}\left[x^{\lambda-1}-\sum_{j=0}^{s-1}\right.$$

$$\cdot(-1)^j\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\lambda-j)}(1-x)^j\Big]$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\Gamma(\mu)}{2^{j+\lambda}\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j)(\lambda+j)}$$
$$+\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(-1)^j\Gamma(\lambda)}{2^{j+\mu}\Gamma(j+1)\Gamma(\lambda-j)(\mu+j)},\tag{IV.3.43}$$

对于

$$\mathrm{Re}\lambda>-k,\quad \mathrm{Re}\mu>-s$$

及

$$\lambda\neq 0,-1,-2,\cdots,\quad \mu\neq 0,-1,-2,\cdots.$$

在方程(IV.3.40)的方括号中的量现在显然可以写为

$$-\frac{n}{2}\int_0^{\frac12}dx x^{\frac{n}{2}-\beta}\Big[\overset{①}{(1-x)^{\frac{n}{2}-1}}$$
$$-\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}-j\right)}x^j\Big]$$
$$-\frac{n}{2}\int_{\frac12}^1 dx\overset{②}{x^{\frac{n}{2}-\beta}}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}$$
$$-\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{k-2}\overset{③}{\frac{(-1)^j\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-j\right)\Gamma(j+1)\left(\frac{n}{2}-\beta+1+j\right)}}$$
$$+\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\int_0^{\frac12}dx x^{\frac{n}{2}-\beta-1}\Big[\overset{④}{(1-x)^{\frac{n}{2}}}$$
$$-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)}x^j\Big]$$

$$+\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\int_{\frac{1}{2}}^{0}dx\overset{⑤}{x^{\frac{n}{2}-\beta-1}}(1-x)^{\frac{n}{2}}$$

$$+\left(\frac{n}{2}-\beta\right)$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\overset{⑥}{(-1)^j\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)\Gamma(j+1)\left(\frac{n}{2}-\beta+j\right)}.$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{n}{2}-\beta\right)>-k. \qquad \text{(IV.3.44)}$$

一切项都很好地定义了，项②可以分部积分

$$\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}dxx^{\frac{n}{2}-\beta}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\beta}-\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\int_{\frac{1}{2}}^{1}dxx^{\frac{n}{2}-\beta-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}.$$

右边的第二项与方程 (IV.3.44) 的项⑥相抵消。方程(IV.3.44)的项④的分部积分给出

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\beta}-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)}$$

$$+\frac{n}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}dxx^{\frac{n}{2}-\beta}\left[(1-x)^{\frac{n}{2}-1}-\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}-j\right)}x^j\right].$$

第二项与方程 (IV.3.44) 的项①相抵消，现在 (IV.3.44) 约化为

$$
-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)}
$$

$$
-\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j
$$

$$
\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta+1}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}-j\right)\left(\frac{n}{2}-\beta+1+j\right)}
$$

$$
+\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\sum_{j=0}^{k-1}
$$

$$
\cdot\frac{(-1)^j\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)\left(\frac{n}{2}-\beta+j\right)}
$$

$$
=-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j
$$

$$
\cdot\frac{j\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-j\right)\left(\frac{n}{2}-\beta+j\right)}
$$

$$
-\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j
$$

$$
\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2^{j+\frac{n}{2}-\beta+1}\,\Gamma(j+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}-j\right)\left(\frac{n}{2}-\beta+1+j\right)}
$$

$$
=0.
$$

这再给出方程 (IV.3.35)。

一个特殊情形 考虑如下形式的积分

$$\int d^n l \frac{f(l_\mu)}{(l^2 - 2l \cdot p - \Delta)^\alpha}, \tag{IV.3.45}$$

这里 $f(l_\mu)$ 为 l_μ 的多项式. 有时，位移积分变数使分母变为积分变数的二次式是更方便的. 作变数改变

$$l \to l + p.$$

(IV.3.45) 变为

$$\int d^\mu l \frac{f(l_\mu + p_\mu)}{[l^2 - (\Delta + p^2)]^\alpha}. \tag{IV.3.46}$$

在该式中，$f(l_\mu + p_\mu)$ 中 l_μ 的一切奇次项，由于对称的积分，可以删去. 对 l_μ 为偶数秩的张量可以做如下的代换：

$$l_\mu l_\nu \to \frac{1}{n} g_{\mu\nu} l^2,$$

$$l_\mu l_\nu l_\lambda l_\rho \to \frac{1}{n(n+2)} [g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}]. \tag{IV.3.47}$$

这个代换往往可以使像方程 (IV.3.45) 的积分简化.

对费米子场及求极限的应用 维数正规化方案可以应用于包含介子传播子的圈积分也可应用于包含费米子传播子的圈积分. 在费米子情形中，Dirac γ 矩阵必须推广到 n 维 Minkowski 空间. 这可以用下面的规则来实现：

(a)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}, \tag{IV.3.48a}$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2l+1}}\} = 0, \tag{VI.3.48b}$$

$$g^\mu_\lambda g^\lambda_\mu = g^\mu_\mu = n, \tag{IV.3.48c}$$

$$\mathrm{Tr}(1) = 4. \tag{IV.3.48d}$$

方程 (IV.3.4d) 只对于 $n = 4$ 才是正确的. 然而，它不是决定性的，例如，因为可以取

$$\mathrm{Tr}(1) = f(n),$$

只要当 $n \to 4$ 时 $f(n) \to 4$.

(b) 在推广的 n 维空间内既没有 γ_5，又没有 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 的地位. 与它们有关的困难在于它们固有地是 4 维量；γ_5 是通过 4 个 γ 矩阵的乘积定义的，$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，而 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是 4 维全反对称张量. 在物理的维数内，它们的关系为

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho.$$

此时维数数目作为一个参数可以解析延拓，但是指标数目则不能. 当 γ_5 出现在 Feynman 积分中时，要编制特殊的规则. 在 §IV.5 中对 γ_5 问题专门作更多的讨论.

(c) 在某些计算中，把一切外动量作为 4 矢量，即，作为只有第零、第一、第二和第三分量的矢量来论述是方便的. 在推导 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常性（参看§ IV.5）的某些情况中，使一个 4 矢量与一个 n 维矢量互相区别是重要的.

(d) 除上面 (a) 中所定义的 γ 矩阵之间的关系以外，在进行实际计算中，下面的恒等式是有用的. 令 k, p, q 为 n 维矢量，并且

$$\varepsilon \equiv 2 - \frac{n}{2}.$$

于是

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 - 2\varepsilon, \qquad \text{(IV.3.49a)}$$

$$\gamma^\mu \not{p}\gamma_\mu = -2(1-\varepsilon)\not{p}, \qquad \text{(IV.3.49b)}$$

$$\gamma^\mu \not{p}\not{q}\gamma_\mu = 4p\cdot q - 2\varepsilon \not{p}\not{q}, \qquad \text{(IV.3.49c)}$$

$$\gamma^\mu \not{p}\not{q}\not{k}\gamma_\mu = -2\not{k}\not{q}\not{p} + 2\varepsilon \not{p}\not{q}\not{k}. \qquad \text{(IV.3.49d)}$$

利用方程 (IV.3.48a) 和 (IV.3.48c) 可以直接证明这些恒等式.

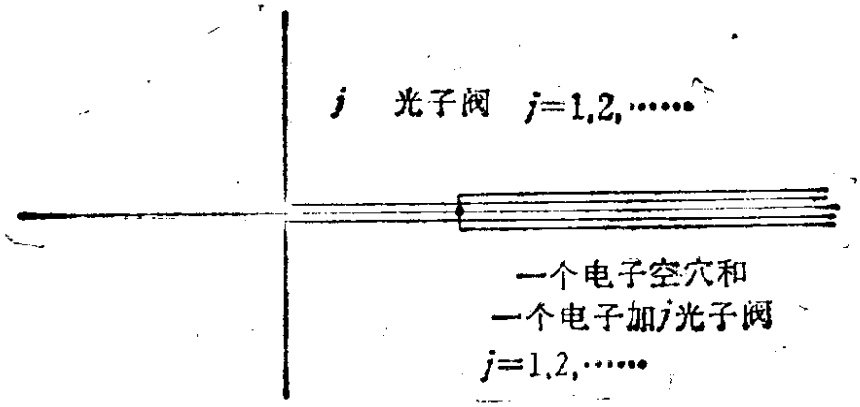
IV.4 红外奇点的正规化

在任何场论中，出现在微扰展开式中的紫外发散与理论的粒子谱无关，而是表示为出现在 Feynman 振幅中的奇点的一种类型. 这种类型的发散来源于具有任意高的频率（能量）贡献的中间态，例如记入 Feynman 圈积分的中间态. 紫外发散的正规化方案是以容洽的方式来使中间态的高频率贡献截止的一个设计. 当所考虑的理论用实验上确定其值的物理参数来重新表示时，发散最后被重正化程序消去了. 有另外类型的发散，所谓红外发散或红外灾变[17,18]，只存在于某些类型的理论中，并且有与紫外发散完全不同的起源. 这种类型的发散只出现在包含无质量的粒子理论中，并且不能用重正化程序来处理.

包含零质量粒子理论的一个特性，比如量子电动力学和量子色动力学，是一个带质量的粒子可能与无质量的量子相耦合，并且不具有一个孤立的质量极点. 比如一个电子或一个夸克的单个带质量的粒子的不变质量随着带质量粒子态的不变质量加上我们所指的软的零能量任意数目的无质量的量子而简并. 取量子电动力学为例，并考虑一个 n 粒子态的不变量的质量谱. 令 $p_1,\cdots,p_i$ 为电子的 4 动量，$k_1,\cdots,k_{n-i}$ 为光子的动量. 该体系的不变质量为

$$M_n^2=(p_1+p_2+\cdots+p_i+k_1+\cdots+k_{n-i})^2.$$

该体系的谱如图 IV.7 所示. 注意，一个电子态和一个电子加 i 个光子，$i=1,2,3,\cdots$，的态确实是简并的，因为当光子为软光子时，它们不能加以区别. 当然，一个电子态和一个 n 光子态并不是简并的，因为这些态与它们的不同费米子数目能加以区别，即使这些态偶然有相同的不变质量. 上面的



图IV.7 量子电动力学中的简并谱

例子，即一个粒子可能发射一系列的无限长波长的无质量的量子，因而形成许多态，可能用来描绘红外困难的起源[19].

在量子电动力学中，质壳上带荷轻子与软光子的耦合是红外奇点的唯一源泉. 虚光子通过一条电子圈与奇数个实光子相耦合的情形没有红外困难. 然而，在量子色动力学中，当外胶子在质壳上时，及某些外胶子为软胶子时，红外发散由胶子顶角发生. 在本节中，将解释红外发散的机制. 然后接着是它们的正规化方法，将特别强调维数正规化.

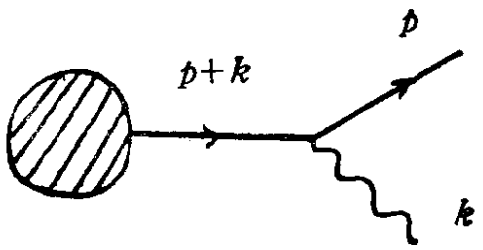


图 IV.8

红外发散的存在可以简单地说明如下. 考虑包括一个无质量的量子从一条外线辐射作为图形一部分的过程. 该过程在图 IV.8 中描绘. 实线为一个带荷的轻子或一个夸克，波纹线为一个光子或胶子. 物质场限制为一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子仅仅是为了便于说明，这个考虑可以推广到其他自旋值的场. 为确切起见，所考虑的粒子是电子和光子. 但是如果粒子为夸克和胶子，则下面所得

到的结果仍然成立. 图形的矩阵元为

$$-ie\varepsilon^{\mu}(k)\bar{u}(p)\gamma_{\mu}\frac{i}{\not p+\not k-m+i\varepsilon}A$$

$$=e\bar{u}(p)\frac{2p\cdot\varepsilon+\not\varepsilon\not k}{2k\cdot p}A, \qquad \text{(IV.4.1)}$$

这里外线是在质壳上，$p^2=m$ 及 $k^2=0$，并且 ε_μ 为光子的偏振矢量. 量 A 表示矩阵元的其余部分，它与现在的讨论无关. 显然，方程 (IV.4.1) 在软光子极限 $k_\mu\to 0$ 中有奇点. 然而，有另外的奇点，它可能由表示式的周密考查而暴露出来. 考虑高能量电子的情形：$\bar{p}\gg m$，于是电子传播子可以近似地为

$$\frac{1}{k\cdot p}\simeq\frac{1}{\omega E\left[(1-\cos\theta)+\dfrac{m^2}{2E^2}\cos\theta\right]}, \qquad \text{(IV.4.2)}$$

这里 θ 为电子运动方向和光子运动方向之间的夹角，ω 和 E 为光子及电子的能量. 在共线位形中，即是

$$\theta\ll m^2/E^2,$$

这时电子和光子基本上在同一方向上运动，方程 (IV.4.2) 约化为

$$\frac{1}{k\cdot p}\xrightarrow{\theta\ll m^2/E^2}\frac{2E}{\omega}\cdot\frac{1}{m^2}. \qquad \text{(IV.4.3)}$$

在虚设的情形中，$m\to 0$，甚至当光子为硬光子时，矩阵元方程 (IV.4.1) 也是发散的. 这个奇点本身显示为一个质量奇点，叫做共线奇点或质量奇点. 它只有当费米子质量为零时才发生.

这里需要离题来谈一谈. 人们可能不知道方程 (IV.4.1) 的分子起什么作用，因为当 $m\to 0$ 时它在共线位形中也为零. 在下面将看到，分子为零会使质量奇点减轻，但不能完全使它消去. 为简化起见，取 $\theta=0$，并且写出

$$\boldsymbol{k} = \zeta \boldsymbol{p},$$

这里 ζ 为一个正数. 对于小的 m,

$$\omega = \zeta|\boldsymbol{p}| \simeq \zeta E - \zeta \frac{m^2}{2E}.$$

于是

$$k^\mu \simeq \zeta p^\mu - \zeta \frac{m^2}{2E} g^{\mu 0} \qquad \text{(IV.4.4a)}$$

或

$$p^\mu \simeq \frac{1}{\zeta} k^\mu + \zeta^2 \frac{m^2}{2\omega} g^{\mu 0}. \qquad \text{(IV.4.4b)}$$

方程 (IV.4.1) 的分子现在可以写为

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p)\{2p \cdot \varepsilon(k) + \not{\varepsilon}\not{k}\} \\
&\quad = \bar{u}(p)\{2p \cdot \varepsilon(k) - \not{k}\not{\varepsilon}\} \\
&\quad = \bar{u}(p)\left\{\zeta^2 \frac{m^2}{2\omega} \varepsilon^0(k) - \zeta m \not{\varepsilon} + \zeta \frac{m^2}{2E} \gamma^0 \not{\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}$$

对物理的偏振, $\varepsilon^\mu(k)$ 有一个为零的时间分量 $\varepsilon^0(k) = 0$. 到 m 的首阶, 方程 (IV.4.1) 变为

$$-e\bar{u}(p)\left(\frac{E}{\omega}\right)\frac{\zeta}{m} \not{\varepsilon} A. \qquad \text{(IV.4.5)}$$

因此, 质量极点保留, 但是发散强度降低了.

有像光子和胶子一样的零质量的量子所引起的另外类型的发散. 例如, 这在带电粒子的弹性散射中由于一个虚光子的交换在向前方向出现光子极点. 在向前方向, 带电粒子之间的动量传递为零, 并且虚光子在它的质壳上, 因此引起一个极点出现. 该极点将叫做 Coulomb 奇点.

如上面所提到的, 在非阿贝耳理论中一个胶子分裂为二个或三个胶子的基本顶角的存在也会引起红外发散. 发散的机制类似于由夸克和胶子耦合所引起的发散 .下面讨论这些奇点. 一般认为, 胶子和夸克在质壳上渐近态的存在问题在

这里没有联系；只假定比如像量子色动力学这样的非阿贝耳理论的微扰处理才是合理的. 可能出现的某些图形部分的基本胶子顶角和动量分配在图 IV.9a 和 b 中给出.

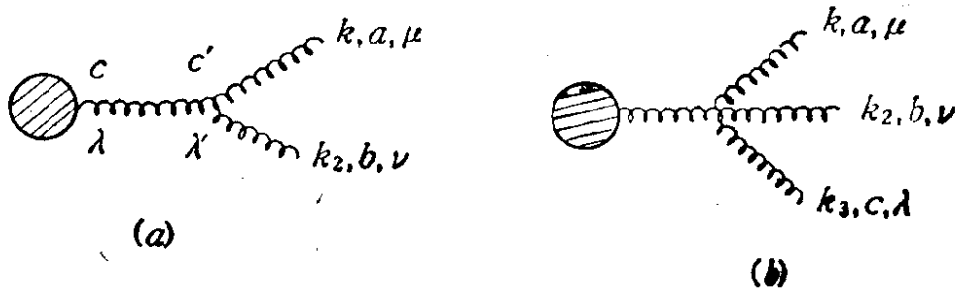


图 IV.9

根据 § II.3 末在图 II.3 中所列举的 Feynman 规则，图 IV.9a 的图形的振幅为

$$g\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)\frac{i\delta^{cc'}}{(k_1+k_2)^2}$$
$$\cdot\left[-g^{\lambda\lambda'}+(1-\xi)\frac{(k_1+k_2)^{\lambda}(k_1+k_2)^{\lambda'}}{(k_1+k_2)^2}\right]f^{abc'}$$
$$\cdot\{g_{\mu\nu}(-k_1+k_2)_{\lambda'}+g_{\nu\lambda'}(-k_2-[k_1+k_2])_{\mu}$$
$$+g_{\lambda'\mu}([k_1+k_2]+k_1)_{\nu}\}A'_{\lambda}. \qquad \text{(IV.4.6)}$$

流守恒给出

$$(k_1+k_2)^{\lambda}A'_{\lambda}=0.$$

对于质壳上的胶子 $k_1^2=k_2^2=0$，(IV.4.6) 变为

$$ig\frac{f^{abc}}{k_1\cdot k_2}\{\varepsilon(k_1)\cdot k_2\varepsilon^{\lambda}(k_2)-\varepsilon(k_2)\cdot k_1\varepsilon^{\lambda}(k_1)\}A'_{\lambda}. \qquad \text{(IV.4.7)}$$

方程 (IV.4.7) 对于 $k_1\to 0$ 或 $k_2\to 0$ 有软胶子发散. 从下面可以看出，它也有一个共线发散. 令

$$k_2^{\mu}=\zeta k_1^{\mu}+\Delta^{\mu},$$

这里 ζ 为一个正数，Δ^{μ} 没有时间分量，并且在共线位形中 $\Delta^{\mu}\to 0$. 量 k_1^{μ}，Δ^{μ} 和 ζ 满足下面的关系

$$2\zeta k_1 \cdot \Delta + \Delta^2 = 0.$$

方程 (IV.4.6)，在方程(IV.4.7) 的形式中，变为

$$-ig\frac{2\zeta}{\Delta^2} f^{abc}\left\{\varepsilon(k_1)\cdot\Delta\varepsilon^{\lambda}(k_2)+\frac{1}{\zeta}\varepsilon(k_2)\cdot\Delta\varepsilon^{\lambda}(k_1)\right\} A'_{\lambda}. \tag{IV.4.8}$$

这个表示式显然在共线位形 $\Delta^{\mu}\to 0$ 中是奇异的.

在图 IV.9b 所示的四胶子顶角中，当两个末胶子为软胶子时会出现红外发散. 例如，$k_2^{\mu}\to 0$ 及 $k_3^{\mu}\to 0$；当所有的三个胶子彼此平行时，会出现共线发散. 在第三个奇点的位形：胶子之一为软胶子时，其余的两个胶子为共线的.

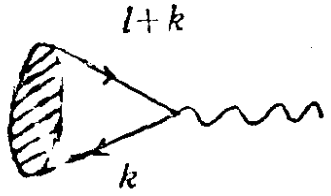


图 IV.10

在上面的阐述中，考虑了只由外粒子发射软光子或软胶子. 事实上，在质壳外的内线的软韧致辐射并不引起红外问题. 这可以十分简单地由下面的例子来说明. 考虑如图 IV.10 所描述的，由一个 Feynman 图的内线的一个光子的韧致辐射. 斑块 (blob) 包括其他的内线和外线，表示过程的其余部分：这些部分用 $A_1(\cdots, l)$ 和 $A_2(l+k,\cdots)$ 来表示. 矩阵元可以写为

$$\int d^4l\cdots A_1(\cdots,l)\frac{i}{\not l - m + i\varepsilon}(-ie)$$

$$\cdot \not\varepsilon \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon} A_2(l+k,\cdots) \tag{IV.4.9}$$

$d^4l\cdots$代表对 l 和出现在图形其余部分的可能的 Feynman 圈积分的内动量积分. 有三种不同的情形要考虑；这三种情形如图 IV.11 所示.

在图 IV.11a 中，软光子联接到一条开费米子线的内部. 在这里 (IV.4.9) 所给出的表示式显然没有 $k_{\mu}\to 0$ 的奇点，

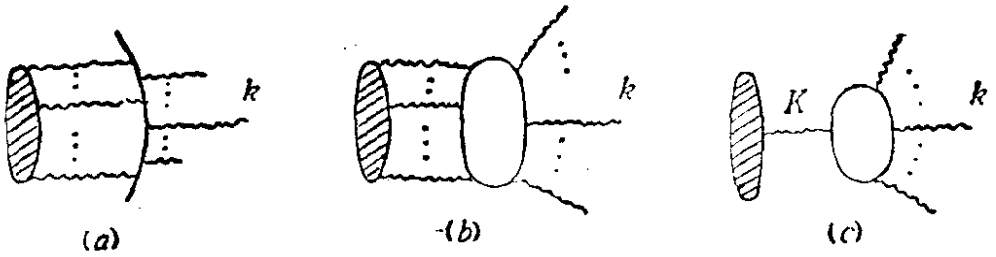


图 IV.11

因为没有联接到在质壳上软光子的线. 在图 IV.11b 中，软光子和其他可能的外光子通过多光子中间态联接到图形的其余部分；这些虚光子和实光子又通过一条费米子圈联接起来. 此外，当 $k_\mu \to 0$ 时耦合到软光子的所有部分保留在质壳以外，因此没有红外奇点可以产生. 图 IV.11c 类似图 IV.11b，除中间态只包含具有动量 k 的一个虚光子以外. 奇点似乎出现在下面的情况: 假定有 n 个外光子通过一条费米子圈与中间光子 k 相联接 (n 在光子情形为奇数，但是如果光子用胶子代替，则不需要这样的限制). 当 j 个外光子 ($1 \leqslant n-1$) 为软光子时，其余 $n-j$ 个都是共线时，则中间光子在质壳上进行，并且似乎会出现形式 $\lim\limits_{k^2 \to 0} \dfrac{1}{k^2}$ 的奇点. 然而，仔细的分析表明，规范不变性对于振幅可能的形式作了一个限制，因此，事实上使奇点不存在.

上面讨论的发散，软光子或软胶子及其共线位形，只要避免了奇点运动学的区域，则在振幅中就不会引起麻烦. 然而，如果有必要考虑单举截面，其中辐射修正贡献要对可能的角范围和能量范围积分，则会出现发散. 例如，在电子电子散射中

$$e^- + e^- \to e^- + e^-, \qquad \text{(IV.4.10)}$$

比如说，末态限制为质心参照系中具有确定动量的两个电子，

在实际情况中，这是不可能的，在方程（IV.4.10）中所给出的反应不可能与其中包括 n 个软光子的类似过程相区别：

$$e^- + e^- \to e^- + e^- + n\gamma, \qquad \text{(IV.4.11)}$$

$n = 1, 2, \cdots$. 在一个实验中，只要 n 个光子的能量之和小于实验的能量分辨率 ΔE（分辨率随探测器而异），则两种反应都会被认为是弹性的电子电子散射事例. 承认方程（IV.4.11）反应为弹性散射，正好就是上面提到的单举截面.

现在有三个任务要完成：1）要说明本身显然表现在上面所讨论的振幅中的红外发散将如何出现在像散射截面的跃迁率中；2）要设计一个方案在实际计算中使这些发散正规化；3）要看出这些奇点在散射截面那样的物理量中如何才能够被消去. 本节只讨论头两个任务；第三个任务，即消去红外发散，将在第V章论述.

在随后的讨论中，为清楚起见，对至今所讨论的红外发散将如下来概括. 同时将给出不同类型的红外奇点更仔细的定义，并给出红外奇点可能发生情况的简短讨论.

（a）软光子或软胶子发散.

这出现在（质壳上）外粒子的软（零能量）光子或软胶子韧致辐射的情形. 由（质壳外）内粒子的软韧致辐射并不引起红外困难.

（b）共线的或质量的奇点.

这种类型的奇点是由与辐射场相耦合的场的零质量极限引起的. 在许多问题中，为使计算程序简化，零质量极限是一个方便的设计. 例子是鉴别利用质量奇点的散射振幅中的高能性质、量子色动力学中计算高阶胶子辐射修正取夸克为无质量时的高能性质. 然而，对于起辐射场和物质场二重作用的胶子场，共线奇点是一个真正的奇点. 它的出现可以由质壳上的效应和简并性来理解：一个零质量的粒子可以在向前

方向内发射任意数目的辐射量子，只要辐射能量之和不大于原来粒子的能量。因此这种类型的奇点，即使辐射量子是(高能量)硬辐射时也可能出现。

(c) Coulomb 奇点。

这是由像二带电粒子弹性散射反应的两部分之间单个虚光子或胶子交换所引起的奇点。在向前方向内带电粒子之间交换的虚光子在质壳上进行，因此在它的动量平方中出现一个极点。

较早就讨论过这三种类型的红外奇点。下面所提到的两种类型是尚未讨论过的类型。

(d) 由虚辐射修正的红外奇点。虚光子和虚胶子被外粒子的辐射和再吸收也会引起红外发散。应该注意，在此情形下虚光子或虚胶子的两个末端要停止在外线上。这已在图 IV.12a, b 和 c 中说明了，例如，图 IV.12a 的振幅在 Feynman 规则中可以写为

$$\begin{aligned}
&\int d^4l\bar{u}(p')(-ie\gamma^\lambda)\frac{i}{l+p'-m+i\varepsilon}\\
&\quad\cdot A(l+p',\cdots,p-l)\frac{i}{p-l-m+i\varepsilon}\\
&\quad\cdot(-ie\gamma_\lambda)u(p)\left[-\frac{i}{l^2}\right]\\
&=-ie^2\int\frac{d^4l}{l^2}\frac{1}{(l^2+2l\cdot p')(l^2-2l\cdot p)}\\
&\quad\cdot\bar{u}(p')\gamma^\lambda(l+p'+m)\\
&\quad\cdot A(l+p',\cdots,p-l)(p-l+m)\gamma_\lambda u(p).
\end{aligned}\tag{IV.4.12}$$

可以看出，积分在积分变数 l 的空间原点处是对数发散的。一般，只有一个末端或没有末端终止在外线上的一个虚光子或虚胶子并不引起任何红外困难，只要所有其他的虚光子或虚胶子的四动量不为零。这后两种情况在图 IV.12d 和 12e 中

给出。对于这种类型的奇点的附加条件，参阅文献[21]。

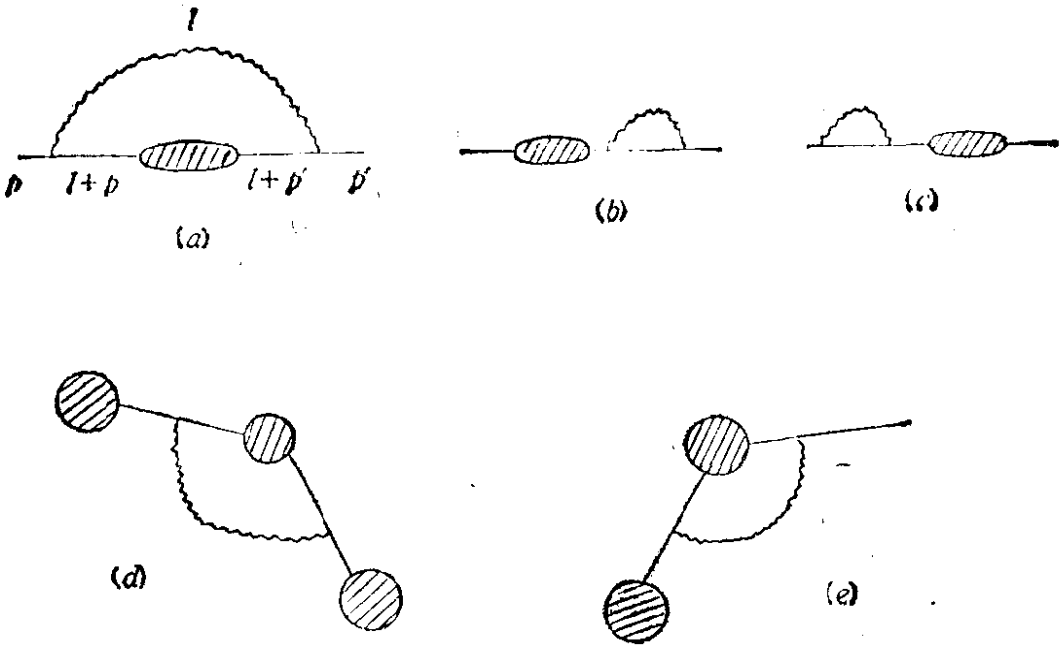


图 IV.12

(e) 由边界条件引起的奇点。

例如，对质壳上的轻子和夸克赋予重正化条件时，这些红外发散会出现在电子和夸克自能图形，带电费米子光子或胶子顶角函数中，等等。关于这方面的细节将在第V章给出。

由上面的总结，清楚知道红外发散是与质壳上的粒子相联系的。而且，如在第V章内将看到的，这些发散也是根据耦合常数量级和固定的初末态而分离反应的理论微扰处理的结果。正如在重正化方案中处理紫外发散一样，为了得到一个有意义的理论，红外发散要被消去。事实上，在量子电动力学中红外发散已了解清楚了。除 Coulomb 奇点以外，如果适当定义跃迁率，则出现在跃迁率中的一切其他类型的红外奇点彼此相抵消或者简单地可以避免。例如，在初态和末态包含确定数目的费米子过程中，由实轫致辐射和虚辐射修正对于耦合常数一个给定量级的贡献之和是没有软奇点的。这就是 Bloch-Nordsieck 定理[17]。在初末态的一切简并态的相

同过程中，包括消去软发散所需要的态集合以及末态光子的吸收，总加起来，结果是没有质量奇点的．这就是 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理[19,22]．由质壳上重正化边界条件所引起的奇点通过远离质壳点的重正化可以避免掉．

在量子色动力学中红外问题的全部理解尚不完全；在写本文时，它仍是一个活跃的研究领域．胶子顶角的存在是一个新的特点．跟这个问题有关，不仅是找出相应的 Bloch-Nordsieck 定理及 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理的问题，而且也要解决与禁闭有关的问题，禁闭假定是理论的红外性质的结果．如果理论的微扰变化过程对非微扰红外变化过程有某些影响，则量子色动力学微扰红外性质的研究可能对禁闭机制提供一些线索。

关于红外奇点及其有关各方面的文献是很广泛的．关于量子电动力学，参阅文献 [17—25]，关于量子色动力学，参阅文献 [26—33]．

尽管红外奇点至少在量子色动力学中对于一个给定阶的微扰展开式在跃迁率的整个计算中往往相互抵消，发散还是出现在各个图形的贡献中．在本节的其余部分，将考虑出现在跃迁率部分的红外发散，并且为了保证部分跃迁率计算的相容性，这些奇点的正规化要详细加以研究．

考虑图 IV.8 所给出的例子．一般，对于微扰展开式中一个给定量级的给定过程，有一个以上的 Feynman 图．在图 IV.8 中所表示的过程的总振幅可以写为

$$A_t = -i\varepsilon^{\mu}(k)\bar{u}(p)\gamma_{\mu}\frac{i}{\not p+\not k-m}A(k,p,\cdots)$$

$$+\varepsilon^{\mu}(k)\bar{u}(p)A_{\mu}^{(\gamma)}(k,p,\cdots), \qquad \text{(IV.4.13)}$$

这里上面方程右边的第二项表示图 IV.13 所示的形式附加图形的振幅，此处外光子从其余的图形删去了．

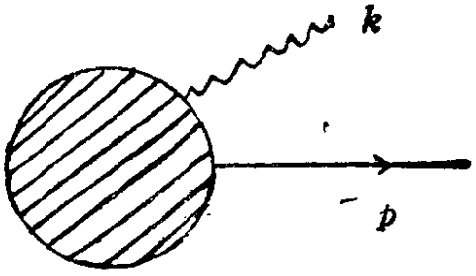


图 IV.13

过程的部分跃迁率为

$$d\sigma = \frac{1}{F}|A_t|^2 \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta_+(k^2)\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta_+(p^2-m^2)d\Phi,$$
$$\cdot(2\pi)^4\delta^4(k+p+\cdots), \qquad \text{(IV.4.14)}$$

这里 F 为初态的一个适当的通量因子，$d\Phi$，为相空间的其余部分。假定电子和光子的偏振不被测量，则

$$\overline{|A_t|^2} = e^2\Sigma\varepsilon^\mu(k)\varepsilon^\nu(k)\Sigma\left[-\bar{u}(p)\frac{2p_\mu+\gamma_\mu\not{k}}{2k\cdot p}\right.$$
$$\left.\cdot A(k,p,\cdots)+\bar{u}(p)A^{(r)}(b,p,\cdots)\right]$$
$$\cdot\left[-\bar{u}(p)\frac{2p_\nu+\gamma_\nu\not{k}}{2k\cdot p}A(k,p,\cdots)\right.$$
$$\left.+\bar{u}(p)A_\mu^{(r)}(k,p,\cdots)\right]^*$$
$$= -g^{\mu\nu}e^2\left\{\frac{1}{4(k-p)^2}\right.$$
$$\cdot\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)(2p_\mu+\gamma_\mu\not{k})A\bar{A}(2p_\nu+\not{k}\gamma_\nu)]$$
$$-\frac{1}{2(k\cdot p)}\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)(2p_\mu+\gamma_\mu\not{k})A\bar{A}_\nu^{(r)}$$
$$+(\not{p}+m)A_\mu^r A(2p_\nu+\not{k}\gamma_\nu)]$$
$$\left.+\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)A_\mu^{(r)}\bar{A}_\nu^{(r)}]\right\}, \qquad \text{(IV.4.15)}$$

这里

$$\bar{A}=A^+\gamma_0,\quad \bar{A}_\mu^{(r)}=(A_\mu^r)^+\gamma_0.$$

在软光子极限 $k_\mu \to 0$ 时，除了在分母中的因子 $\frac{1}{k\cdot p}$ 及 $-\frac{1}{(k-p)^2}$ 以外，并且在 $A_\mu^{(r)}(k, p, \cdots)$ 中，$d\sigma$ 的另外部分的 k_μ 相关性可以略去. 因而它可以对于 $k_0 \leqslant \Delta E$ 写出来，这里 ΔE 是一个小的能量，

$$d\sigma|_{k<\Delta E} = \frac{1}{F}\overline{|A_i^{(r)}|^2}\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta_+(k^2)\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta_+(p^2-m^2)d\Phi_r \cdot (2\pi)^4\delta^4(k+p+\cdots), \tag{IV.4.16}$$

这里

$$|A^{(i)}|^2 = e^2\left\{-\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}\mathrm{Tr}[(\not p+m)A\bar{A}] + \frac{1}{k\cdot p}p^\mu \mathrm{Tr}[(\not p+m)A\bar{A}_\mu^{(r)} + (\not p+m)A_\mu^{(r)}\bar{A}] - A_\mu^{(r)}\bar{A}^{(r)\mu}\right\}. \tag{IV.4.17}$$

在此还应该提到，在 $A_\mu^{(r)}$ 中未删去 k_μ 相关性的理由是 $A_\mu^{(r)}$ 可能包含形式 $\frac{1}{p'\cdot k}$ 的软光子奇点项，这里 p' 为另外的外动量，其中至少在过程中有一条外费米子线存在. 如果附加费米子是带荷的，则具有辐射光子的 Feynman 图必须包括在图 IV.9 的图形中.

现在考虑部分跃迁率，其中能量比 ΔE 小的光子被积分：

$$d\sigma(\Delta E) = \frac{1}{F}\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta_+(p^2-m^2)d\Phi_r(2\pi)^4\delta^4(p+\cdots) \cdot \int_{k\leqslant\Delta E}\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta_+(k^2)\overline{|A_i^{(i)}|^2}. \tag{IV.4.18}$$

它是单举跃迁率的一部分，在单举跃迁率中并不排除光子的发射；但也不会被探测到. 而且，如果 ΔE 小于测量跃迁率的实验设计的能量分辨率，则在方程 (IV.4.18) 中的量将包括在所测量的跃迁率内，跃迁率并不包含光子，因为实验设计对于这些低能量光子并不灵敏，因此它不可能显示光子的存在.

由方程 (IV.4.17) 可以看出，方程 (IV.4.18) 中在软光子极限时为奇点的项，有下面的形式

$$J_1(\Delta E) \equiv \frac{e^2}{(2\pi)^3}\int_{k\leqslant\Delta E} d^4k\delta_+(k^2)\frac{1}{(k\cdot p)^2}$$
$$= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_0^{\Delta E}\frac{d\bar{k}}{k^0}\int\frac{d\Omega}{(p_0-\bar{p}\cos\theta)^2}, \quad \text{(IV.4.19a)}$$

及

$$J_2(\Delta E) \equiv \frac{e^2}{(2\pi)^3}\int_{k\leqslant\Delta E} d^4k\delta_+(k^2)\frac{1}{(k\cdot p)(k\cdot p')}$$
$$= \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int_0^1 dx\int_0^{\Delta E}\frac{d\bar{k}}{k^0}\int\frac{d\Omega}{(p_{x_0}-\bar{p}_x\cos\theta)^2}, \quad \text{(IV.4.19b)}$$

这里 θ 为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 或 $\boldsymbol{p}_x$ 之间的交角，此处

$$p_x = xp + (1-x)p'.$$

上面的积分显然在 $\bar{k}=0$ 处是对数发散的；这就是软韧致辐射奇点．质量奇点，它是无质量的电子的结果，在角积分中出现；例如

$$\lim_{m\to 0} J_1(\Delta E) = \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int_0^{\Delta E}\frac{d\bar{k}}{k^0}\int\frac{d\Omega}{\bar{p}(1-\cos\theta)^2},$$

它在 $\cos\theta=1$ 处是奇点的，是一个共线位形．

红外奇点和质量奇点的正规化 一般，有三个方案来使红外发散正规化：

(a) 给光子引入一个小的质量，使原来的红外发散积分变为有限的．这可以使软发散和质量正规性(mass regularity)二者都正规化．如果虚设的光子质量假定为零，则发散将被恢复．这个方案叫做光子质量正规化方案．

(b) 对于光子能量的下限引入一个截止，使光子的能量不再为零．在这个方法中光子保持为无质量的，即是，$k^0=\bar{k}$．这个方案使软韧致辐射发散正规化，但是对于质量奇点并

不正规化，因为角积分留下与正规化之前相同的积分．并不进一步研究这个方法．

(c) 变动相空间的维数．这就是维数正规化方案．它还可以使软轫致辐射和质量奇点二者正规化．

将通过方程(IV.4.19)的积分来阐述光子质量和维数正规化方案，并比较它们的优点．

光子质量正规化 给光子一个小的质量 λ，使

$$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \lambda^2}.$$

(IV.4.19a) 和 (IV.4.19b) 的正规化形式为

$$J_1(\Delta E, \lambda) \equiv \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int_0^{\Delta E}\frac{\bar{k}^2 d\bar{k}}{\sqrt{\bar{k}^2+\lambda^2}}\int d\Omega \cdot \frac{1}{(p_0\sqrt{\bar{k}^2+\lambda^2} - \bar{k}\bar{p}\cos\theta)^2}, \quad \text{(IV.4.20)}$$

及

$$J_2(\Delta E, \lambda) \equiv \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int_0^{\Delta E}\frac{\bar{k}^2 d\bar{k}}{\sqrt{\bar{k}^2+\lambda^2}}\int d\Omega \cdot \frac{1}{(p_{x0}\sqrt{\bar{k}^2+\lambda^2} - \bar{k}\bar{p}_x\cos\theta)^2}. \quad \text{(IV.4.21)}$$

在这里作某种解释是必要的．对于一切 k_0 因子记入一个光子质量，即是，把光子作为一个真正带质量的粒子来处理，正确地得到有限部分是必要的．在角积分中，用 $\sqrt{\bar{k}^2+\lambda^2}$ 代替 k_0，可使共线质量奇点正规化．如果电子质量保持为有限的，用 $\bar{k}$ 代替 k_0 即，在那里令 $\lambda = 0$，则角积分是有限的．这在 $(\ln\lambda)^n$ 中给出正确的领头奇点，但是，正比于 $(\ln\lambda)^{n-1}$ 的次领头项，并不能正确地被给出来，这将在以后加以说明．现在可以实现方程 (IV.4.20) 的积分[34]

$$J_1(\Delta E, \lambda) = e^2\frac{(2\pi)^{-2}}{m^2}\left\{\ln\left[\frac{\Delta E + \sqrt{(\Delta E)^2+\lambda^2}}{\lambda}\right]\right.$$

$$-\frac{p_0}{2\bar{p}}\ln\left[\frac{\sqrt{(\Delta E)^2+\lambda^2}+\Delta E\bar{p}/p_0}{\sqrt{(\Delta E)^2+\lambda^2}-\Delta E\bar{p}/p_0}\right]\Bigg\}. \tag{IV.4.22}$$

对于 $m\neq 0$，它变为

$$J_1(\Delta E,\lambda)=e^2\frac{(2\pi)^{-2}}{m^2}\left\{\ln\left(\frac{2\Delta E}{\lambda}\right)-\frac{p_0}{\bar{p}}\ln\left(\frac{p_0+\bar{p}}{m}\right)\right\}, \tag{IV.4.23}$$

它有由软韧致辐射引起的一个 $\ln\lambda$ 奇点。如果在全积分完成以前在方程 (IV.4.20) 的角积分的被积函数中令 λ 为零，则结果为

$$\tilde{J}_1(\Delta E,\lambda)=e^2\frac{(2\pi)^{-2}}{m^2}\ln\left(\frac{2\Delta E}{\lambda}\right). \tag{IV.4.24}$$

它与方程 (IV.4.23) 差一个有限的函数。当然，方程(IV.4.23)是正确的结果，正如下面在维数正规化方案中所证明的一样。$m=0$ 情形可以由方程 (IV.4.22) 得到

$$J_1(\Delta E,\lambda)|_{m=0}=\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{p^2}\left\{\frac{(\Delta E)^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{2\Delta E}{\lambda}\right)\right\}. \tag{IV.4.25}$$

这有 λ 的一个幂奇点。这个结果将与往后在维数正规化方案中所得到的结果加以比较。注意，部分跃迁率方程 (IV.4.18) 并不包含这个幂奇点，因为 $J_1(\Delta E,\lambda)$ 在极限 $m\to 0$ 时没有贡献。这是由于 $J_1(\Delta E,\lambda)$ 只以乘积 $m^2J_1(\Delta E,\lambda)$ 的形式列入方程 (IV.4.18)。参看方程 (IV.4.17)。

类似的程序应用于 $J_2(\Delta E,\lambda)$，结果可以由方程(IV.4.22)读出 [$\bar{p}_x\equiv x\bar{p}+(1-x)\bar{p}'$，$p_{x0}\equiv xp_0+(1-x)p_0'$]：

$$J_2(\Delta E,\lambda)=\frac{e^2}{(2\pi)^{-2}}\int dx\,\frac{1}{p_x^2}\left\{\ln\left(\frac{2\Delta E}{\lambda}\right)-\frac{p_{x_0}}{2\bar{p}_x}\ln\left(\frac{p_{x_0}+\bar{p}_x}{p_{x_0}-p_x}\right)\right\}. \tag{IV.4.26}$$

还会出现一个软奇点 $\ln\lambda$. 当费米子变为无质量时，会出现附加奇点. 这在此并不继续进行讨论. 更多的讨论在维数正规化方案中给出.

维数正规化 维数正规化可以用来使软韧致辐射奇点正规化，它可以直接从这样的事实看出来，即光子动量分布函数被改进为

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int\frac{\bar{k}^{n-4}d\bar{k}}{2k_0}.$$

对于 $n>4$，积分在极限 $k=0$ 处是收敛的. 因此在原点附近，相空间改变的变化过程提供奇点的截止. 另一方面，质量奇点的正规化是通过角积分得到的. 可以看出，在一个无质量的电子情形中，方程 (IV.4.19a) 的角积分为

$$\int\frac{\sin\theta d\theta d\phi}{(1-\cos\theta)^2}.$$

当 $\theta\to 0$ 时，分子像 θ^2 一样趋近于零，而分母像 θ^4 一样趋近于零；因此积分像幂函数一样的发散. 通过增加相空间的维数，相空间有由 $\sin^{n-3}\theta d\theta$ 给出的关系，对于充分大的 n 值提供一个截止. 这将会在下面看出来.

由方程 (IV.3.17)，n 维相空间 (一个时间坐标和 $n-1$ 个空间坐标)的空间部分可以写为

$$d^{n-1}k=\bar{k}^{n-2}d\bar{k}d\Omega_{(n-1)}, \qquad \text{(IV.4.27)}$$

这里

$$d\Omega_{(n-1)}=(\sin\theta)^{n-3}d\theta d\Omega_{(n-2)}$$

及

$$d\Omega_{(n-2)}=(\sin\theta_1)^{n-4}d\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}d\theta_{n-3}d\theta_{n-2}.$$

角 θ 是该 $n-1$ 维空间的极角. 角的范围为

$$0\leqslant\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{n-3}<\pi;\quad 0\leqslant\theta_{n-2}<2\pi.$$

所考虑的积分有下面的角积分形式

$$\int d\Omega_{(n-1)} f(\cos\theta) = \frac{2\pi^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n-3} d\theta f(\cos\theta), \tag{IV.4.28}$$

这里利用了方程 (IV.3.19) 的结果,即

$$\int d\Omega_{(n-2)} = \frac{2\pi^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}.$$

在许多情形下,改变积分变数

$$\eta = \frac{1+\cos\theta}{2} \tag{IV.4.29}$$

是方便的. 方程 (IV.4.28) 变为

$$\int d\Omega_{(n-1)} f(\cos\theta) = \frac{(4\pi)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 d\eta [\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon} f(2\eta-1). \tag{IV.4.30}$$

通过方程 (IV.4.28) 和 (IV.4.30),方程 (IV.4.19a) 的维数正规化 $J_1(\Delta E)$ 为

$$\begin{aligned} J_1(\Delta E, \varepsilon) &\equiv \frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{k<\Delta E} d^n k \delta(k^2) \frac{1}{(k\cdot p)^2} \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^{3-2\varepsilon}} \frac{(4\pi)^{1-\varepsilon}}{2\Gamma(1-\varepsilon)} \\ &\quad \cdot \int_0^{\Delta E} d\bar{k}\bar{k}^{-1-2\varepsilon} \int_0^1 d\eta \frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[(p_0+\bar{p})-2\bar{p}\eta]^2} \\ &= \frac{e^2}{8\bar{p}^2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{(2\Delta E)^{-2\varepsilon}}{(-\varepsilon)} \\ &\quad \cdot \int_0^1 d\eta \frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{(z-\eta)^2}, \end{aligned} \tag{IV.4.31}$$

这里

$$z \equiv \frac{p_0+\bar{p}}{2\bar{p}} \geqslant 1.$$

对于有限的电子质量 $z > 1$,上面的 η 积分可以超几何函数[35]写出来.

$$\int_0^1 d\eta \frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[z-\eta]^2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$$
$$\cdot F\left(2, 1-\varepsilon; 2-2\varepsilon; \frac{1}{z}\right).$$

或者它可以简单地由展开 ε 幂的被积函数来完成，因为积分是收敛的

$$\int_0^1 d\eta \frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[z-\eta]^2} = \int_0^1 d\eta \frac{1-\varepsilon \ln[\eta(1-\eta)]}{[z-\eta]^2} + O(\varepsilon^2)$$
$$= \frac{4\bar{p}^2}{m^2}\left[1 + \varepsilon \frac{2p^0}{\bar{p}} \ln\left(\frac{p^0+\bar{p}}{m}\right)\right]. \quad \text{(IV.4.32)}$$

于是

$$J_1(\Delta E, \varepsilon) = \frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{2m^2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \frac{(2\Delta E)^{-2\varepsilon}}{(-\varepsilon)}$$
$$\cdot \left[1 + 2\varepsilon \frac{p^0}{\bar{p}} \ln\left(\frac{p_0+\bar{p}}{m}\right)\right]$$
$$= e^2 \frac{(2\pi)^{-2}}{m^2}\left[-\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\Delta E^2}{\pi\mu^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{2} - \frac{p^0}{\bar{p}} \ln\left(\frac{p^0+\bar{p}}{m}\right)\right]. \quad \text{(IV.4.33)}$$

与方程 (IV.4.33) 比较，如果作下面的代换

$$\ln\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \to -\frac{1}{\varepsilon} - \ln(4\pi\mu^2) + \gamma, \quad \text{(IV.4.34)}$$

则维数正规化的函数 $J_1(\Delta E, \varepsilon)$ 是与 $J_1(\Delta E, \lambda)$ 等同的. 由 $m=0$，于是 $z=1$，在方程 (IV.4.31) 中的积分变为

$$\int_0^1 d\eta \frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[1-\eta]^2} = B(1-\varepsilon, -1-\varepsilon)$$
$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -2\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon\ln 2\right), \quad \text{(IV.4.35)}$$

这里利用了 Beta 函数方程 (IV.3.43) 的解析延拓定义. 于是方程 (IV.4.31) 给出

$$J_1(\Delta E, \varepsilon)|_{m=0} = \frac{1}{(4\pi)^2\bar{p}^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{\Delta E^2}{\pi\mu^2}\right) - \gamma - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right\}. \quad \text{(IV.4.36a)}$$

如果把方程 (IV.4.34) 所给出的等同应用到该表示式中，则

$$J_1(\Delta E, \lambda)|_{m=0} \to \frac{1}{8\pi^2\bar{p}^2}\left\{-\frac{1}{4}(1+\ln 2) - \ln\left(\frac{2\Delta E}{\lambda}\right)\right\}. \quad \text{(IV.4.36b)}$$

只有由软韧致辐射的对数奇点. 与方程 (IV.4.26) 比较，可以看出，出现在具有一个光子质量的正规化中的幂类奇点在维数正规化方案中消失了. 在两个方案中所得到的对数奇点是相同的，但是常数项是不同的. 这个差异将在方程跃迁率 (IV.4.18) 中出现，因为 $J_1(\Delta E)$ 在极限 $m \to 0$ 中没有贡献. 在讨论方程 (IV.4.28) 时已经提到过这点.

不存在幂类型奇点是维数正规化的一般特性. 如 (IV.3.35) 中所表明，紫外发散正规化也分享这个性质，当 $\beta < 2$ 时，它原来像一个幂函数一样发散，被正规化为零. 另一个例子是积分

$$\int_0^{\Delta E} \bar{k}^{-j-2\varepsilon} d\bar{k} \equiv \frac{1}{1-j-2\varepsilon}(\Delta E)^{1-j-2\varepsilon}, \quad \text{(IV.4.37)}$$

如果 $j \neq 1$ 及 $\Delta E \neq 0$，则上式在极限 $\varepsilon \to 0$ 中是收敛的. 发散因子 $\frac{1}{\varepsilon}$ 只对于对数发散情形 $j = 1$ 时才出现. 事实上，在维数正规化方案中对于一个幂奇点是没有地位的. 因为在方案中奇点是 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的有限幂，$1/\varepsilon$ 相应于对数奇点的幂.

维数正规化方程 (IV.4.21) 类似于方程 (IV.4.31)：

$$J_2(\Delta E,\varepsilon)=\frac{e^2}{8(2\pi)^2}\frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{(2\Delta E)^{-2\varepsilon}}{(-\varepsilon)}$$
$$\cdot\int_0^1\frac{dx}{\bar{p}_x^2}\int_0^1 d\eta\,\frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[z_x-\eta]^2}\qquad\text{(IV.4.38)}$$

这里

$$z_x=\frac{p_{x_0}+\bar{p}_x}{2\bar{p}_x},$$

$$\bar{p}_x\equiv x\bar{p}+(1-x)\bar{p}',\quad p_{x_0}\equiv xp_0+(1-x)p_0'.$$

对于 $m\neq 0$，结果类似于方程 (IV.4.33)

$$J_2(\Delta E,\varepsilon)=\frac{e^2}{(2\pi)^2}\int_0^1\frac{dx}{p_x^2}\left[-\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\Delta E^2}{\pi\mu^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma}{2}-\frac{p_{x_0}}{\bar{p}_x}\ln\left(\frac{p_{x_0}+\bar{p}_x}{\sqrt{p_x^2}}\right)\right].$$

$$p_x^2\equiv m^2-x(1-x)(p-p')^2.\qquad\text{(IV.4.39)}$$

对于 $m=0$，

$$p_x^2=2x(1-x)[\bar{p}\bar{p}'-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'].$$

因此 x 积分在 $x=0$ 和 1 处并不存在。这个困难可以由方程 (IV.4.38) 看出来，因为对于 $x=0$ 或 1，

$$z_x\to 1.$$

为了进行正规化，在 $z_x=1$ 处的奇点首先要被减除。写出

$$J_2(\Delta E,\varepsilon)|_{m=0}=\frac{e^2}{8(2\pi)^2}\frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{(2\Delta E)^{-2\varepsilon}}{(-\varepsilon)}$$
$$\cdot\int_0^1\frac{dx}{\bar{p}_x^2}\int_0^1 d\eta\left\{\frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[1-\eta]^2}+[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{1}{[z_x-\eta]^2}-\frac{1}{(1-\eta)^2}\right]\right\}.\qquad\text{(IV.4.40)}$$

第一项可以由方程 (IV.4.35) 得到。对于第二项，考虑

$$\int_0^1 d\eta[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}\left[\frac{1}{(z_x-\eta)^2}-\frac{1}{(1-\eta)^2}\right]$$

$$= (1-z_x)3!\int_0^1 dy\,y(1-y)\int_0^1 d\eta$$
$$\cdot\left\{(1+z_x)\frac{[\eta(1-\eta)]^{-\varepsilon}}{[d_y-\eta]^4}-2\frac{\eta^{1-\varepsilon}(1-\eta)^{-\varepsilon}}{[d_y-\eta]^4}\right\},$$
(IV.4.41)

这里

$$d_y = yz_x + (1-y).$$

由文献[35]，上面的积分为

$$3!(1-z_x)\int_0^1 dy\,y(1-y)\frac{1}{d_y^4}$$
$$\cdot\left\{(1+z_x)B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)_2\right.$$
$$\cdot F_1\left(4,1-\varepsilon;2-2\varepsilon;\frac{1}{z_x}\right)-2B(1-\varepsilon,2-\varepsilon)_2$$
$$\left.\cdot F_1\left(4,2-\varepsilon;3-2\varepsilon;\frac{1}{z_x}\right)\right\},$$
(IV.4.42)

于是最后

$$J_2(\Delta E,\varepsilon)|_{m=0} = \frac{e^2}{8(2\pi)^2}\frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\frac{(2\Delta E)^{-2\varepsilon}}{(1-\varepsilon)}$$
$$\cdot\int_0^1\cdot\frac{dx}{\bar{p}_x^2}\left\{-2+\varepsilon(1+\ln 2)\right.$$
$$+3!(1-z_x)\int_0^1 dy\,\frac{y(1-y)}{d_y^4}$$
$$\cdot\left[(1+z_x)B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)_2\right.$$
$$\cdot F_1\left(4,1-\varepsilon;2-\varepsilon;\frac{1}{d_y}\right)$$
$$-2B(1-\varepsilon,2-\varepsilon)_2$$
$$\left.\left.\cdot F_1\left((4,2-\varepsilon;3-\varepsilon;\frac{1}{d_y}\right)\right]\right\}.$$
(IV.4.43)

讨论维数正规化方案的优点，并对紫外发散和红外发散加以比较，来结束本节。

(a) 维数正规化方案提供一个统一的方法来使红外发散和紫外发散二者正规化。光子质量正规化设计仅仅是对红外问题起作用。

(b) 在维数正规化方案中，对于红外奇点和质量奇点存在着临界幂，超过此界限，积分变为有限的（参看方程(IV.4.37)）。类似的现象出现在紫外发散的正规化中（参看方程(IV.3.35)）。这些在光子质量正规化方案中都不发生。

(c) 在维数正规化中，无质量的理论在进行计算的过程中不用引入一个虚设的质量项就可以处理了。没有质量因子使计算大为简化。无质量的夸克在高阶效应的量子色动力学计算中已经常熟练使用了。

(d) 使用维数正规化另外的优点是它保证所有的计算阶段的规范不变性。这也许是利用这个方法最有说服力的论点。

(e) 近似到一圈，紫外发散和红外发散二者都表现为维数正规化方案中 ε 的极点。对于红外发散，已假定 $\varepsilon \to 0^-$，而对于紫外发散，$\varepsilon \to 0^+$。

(f) 紫外发散可以由列入理论的参数重新定义的重正化程序来消除，而对红外发散来说，在微扰展开式中，在虚辐射修正贡献及相同量级的实轫致辐射之间，只有在跃迁率的水平上，才能互相抵消。因此，红外发散的出现是由于虚和实辐射过程的分离，及具有固定数目的光子和胶子以及物质场的 S 矩阵的证认（在共线位形中，或者，如果光子和胶子是软光子和软胶子时，S 矩阵的这种证认就失效了）。相干态的表述是容许带电的或带色的物质场在它的周围有不定数目的软辐射场的一个方案。虽然该方案不会带来计算上的优点，但

这是论述红外问题的系统方法. 关于相干态的表述，对阿贝耳理论，参看文献[36—41]；对于非阿贝耳理论，参看文献[33, 42—44].

IV.5 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger 反常性

在§I.4中，已证明了轴矢量的 Ward-Takahashi 恒等式(I.4.17). 所用的方法等价于正则处理；即，用 Euler-Lagrange 方程和正则对易关系来作为中间步骤. 将在简单的阿贝耳理论中扼要重述 Ward-Takahashi 恒等式的正则表示式的主要推导. 然后将证明，轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式的正则形式在微扰论中不能证实，这就要求对正则结果进行系统的修正. 这个修正称为 Adler-Bell-Jackiw-Schwinger (ABJS)反常性(或者简单地称为正则反常性或反常性)[45,46,47]，是以算符的形式由修正轴矢量流的散度关系来实现的. 其次将总结非阿贝耳理论的反常性. 在本节末将给出统一电弱理论无反常性条件的详细讨论.

考虑一个阿贝耳规范理论，例如量子电动力学，其中除电磁流 $j_\mu(x)$ 以外，定义轴矢量流 $j_\mu^{(5)}(x)$ 和膺标量密度 $j^{(5)}(x)$ 为

$$j_\mu^{(5)}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x), \tag{IV.5.1}$$

$$j^{(5)}(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \tag{IV.5.2}$$

并且

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x). \tag{IV.5.3}$$

轴矢量流及膺标量密度分别与经典轴矢量流 $a_\mu(x)$ 和经典膺标量 $p(x)$ 耦合. 理论的生成泛函类似于(I.4.1)的生成泛函而略加修正：

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu, a_\mu, p] = N^{-1}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A_\mu$$

$$\cdot \exp\left\{ i \int d^4x [\mathscr{L}_{\text{eff}}(x) + a^\mu(x) J_\mu^{15}(x) + p(x) J^{(5)}(x)] + i \int d^4x \cdot [\bar{\eta}(x)\phi(x) + \phi(x)\eta(x) + J^\mu(x) A_\mu(x)] \right\} \tag{IV.5.4}$$

这里 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 在方程 (II.2.7) 中给出，即是

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m + e\gamma^\mu A_\mu)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2,$$

其中在规范参数中 $\xi \geqslant 0$. 定义归一化因子 N 使

$$Z[0, 0, 0, 0, 0] = 1.$$

用 I.4 讨论的方法，可以推导出下面的 Ward-Takahashi 恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \langle 0 | T(j_\lambda^{(5)}(x) j_\mu(y) j_\nu(z)) | 0 \rangle = 2m \langle 0 | T(j^{(5)}(x) j_\mu(y) j_\nu(z)) | 0 \rangle. \tag{IV.5.5}$$

注意，在方程 (IV.5.4) 中外场 $q_\mu(x)$ 和 $p(x)$ 的出现的同时把流 $j_\mu^{(5)}(x)$ 和 $j^{(5)}(x)$ 也引入 Green 函数中. 以这个方式，$\gamma_\mu\gamma_5$ 或 γ_5 顶角在每个 Green 函数中正好出现一次. 可以直接由方程 (I.4.7) 删去 δ 函数得到方程 (IV.5.5)，δ 函数项在类如阿贝耳理论的量子电动力学中不出现. 利用部分守恒轴矢量流(PCAC)的正则结果，也可以直接在方程(IV.5.5)的左边进行微分而得到

$$\partial^\lambda j_\lambda^{(5)}(x) = 2m j^{(5)}(x) \tag{IV.5.6}$$

及

$$[j_0^{(5)}(x), j_\mu(y)]_{x_0=y_0} = 0. \tag{IV.5.7}$$

利用例如方程 (I.2.24) 的费米子场运动方程及等时对易关系

方程(I.2.44b)来证明 (IV.5.6) 和 (IV.5.7) 是直截了当的.因此所得到的 Ward-Takahashi 恒等式将称为正则的或自然的恒等式. 在动量空间内正则 Ward-Takahashi 恒等式变为

$$k^\lambda \int d^4x d^4y e^{-ikx} e^{+iqy} \langle 0 | T\{j_\lambda^{(5)}(x) j_\mu(y) j_\nu(0)\} | 0\rangle$$

$$= 2mi \int d^4x d^4y e^{-ikx} e^{iqy} \langle 0 | T\{j^{(5)}(x) j_\mu(y) j_\nu(0)\} | 0\rangle. \tag{IV.5.8}$$

下面的讨论证明,这个关系在微扰论中并不成立;在右边需要一个附加项. 这个附加项可以由修正的 PCAC 关系方程 (IV.5.6) 来加以考虑[45,46]:

$$\partial^\lambda j_\lambda^{(5)}(x) = 2mj^{(5)}(x) + \Delta j^{(5)}(x) \tag{IV.5.9a}$$

这里

$$\Delta j^{(5)}(x) = \frac{\alpha}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} \tag{IV.5.9b}$$

并且

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

为电磁场的场张量.

(IV.5.6) 的问题在于,在相同空时点通过二个场算符的乘积所定义的轴矢量流 (IV.5.1) 由于与这样乘积相联系的短距离奇点而没有很好地定义.这使散度关系 $\partial^\mu j_\mu^{(5)}$ 变得复杂了. 正确地考虑到场算符 ψ 及 $\bar{\psi}$ 的一切正则关系的(IV.5.6)所给出的结果并不合适,因为轴矢量流或它参与的 n 点函数 $(n\text{-}pf)$ 在其应用有意义的数学运算以前,必须要进行正规化. 有许多方法证明方程 (IV.5.9) 是正确的散度关系. 直接的方法是在位形空间内分开 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的自变量重新定义轴矢量流方程 (IV.5.1),并以规范不变量形式定义轴矢量流. 这个方法在文献 [48] 中已讨论了. 这个反常散度形式另外

的证明在动量空间内给出，这个方法容许微扰计算的某些细微区别，并且在这里将详加讨论。

首先出现在方程 (IV.5.5) 两边的 Green 函数将会使二光子的膺标量密度和轴矢量流的"物理振幅"联系起来。考虑下面的矩阵元

$$\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle \qquad \text{(IV.5.10)}$$

及

$$\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|j^{(5)}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.11)}$$

这里 p, q, ε_1 及 ε_2 为光子的动量及偏振。利用约化公式 (参阅附录 II)，例如，方程 (IV.5.10) 及 (IV.5.11) 可以在 Coulomb 规范中写出

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|Q(0)|0\rangle\\&=-\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4y d^4z e^{iqy}e^{ipz}\Box_y\Box_z\\&\quad\cdot\langle 0|T(A_\mu(y)A_\nu(z)Q(0))|0\rangle,\end{aligned} \qquad \text{(IV.5.12)}$$

这里

$$Q(0)\equiv j_\lambda^{(5)}(0) \quad \text{或} \quad j^{(5)}(0)$$

及

$$\Box_y\equiv\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\nabla_y^2, \quad \text{等等.}$$

利用进一步约化的生成泛函 (IV.5.4) 可计算 Green 函数 $\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y)j_\lambda^{(5)}(0))|0\rangle$ 及 $\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y)j^{(5)}(0))|0\rangle$。令

$$j_\mu^{(5)}(x)\equiv\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)} \qquad \text{(IV.5.13a)}$$

及

$$j^{(5)}(x)\equiv\frac{\delta}{\delta\eta(x)}i\gamma_5\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}. \qquad \text{(IV.5.13b)}$$

于是方程(IV.5.4)可以写为

$$Z[\eta,\bar{\eta},J_\mu,a_\mu,p]=N^{-1}\exp\left\{i\int d^4x[a^\mu(x)j_\mu^{\gamma(5)}(x)+p(x)j^{\gamma(5)}(x)]\cdot\int\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A_\mu\cdot\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{eff}}(x)+i\int d^4x\cdot[\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)+J^\mu(x)A_\mu(x)]\right\}\right. \tag{IV.5.14}$$

利用方程(I.3.10)所给出的场变数改变,生成泛函约化为

$$Z[\eta,\bar{\eta},J_\mu,a_\mu,p]=\exp\left\{i\left[a^\mu\cdot j_\mu^{\gamma(5)}+p\cdot j^{\gamma(5)}+e\hat{j}_\mu\cdot\frac{\delta}{\delta J_\mu}\right]\right\}\cdot\exp\left\{-i\left[\bar{\eta}\cdot S_F\cdot\eta+\frac{1}{2}J^\mu\cdot D_{F\mu\nu}\cdot J^\nu\right]\right\}. \tag{IV.5.15}$$

为使书写简化,利用下面的速记法:

$$\begin{aligned}a^\mu\cdot j_\mu^{\gamma(5)}&\equiv\int d^4xa^\mu(x)j_\mu^{\gamma(5)}(x)\\ p\cdot j^{\gamma(5)}&\equiv\int d^4xp(x)j^{\gamma(5)}(x)\\ \hat{j}_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu}&\equiv\int d^4x\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\\ \bar{\eta}\cdot S_F\cdot\eta&\equiv\int d^4xd^4y\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\end{aligned} \tag{IV.5.16}$$

及

$$J^\mu\cdot D_{F\mu\nu}\cdot J^\nu\equiv\int d^4xd^4yJ^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y).$$

于是

$$\langle0|T(A_\mu(y)A_\nu(x)j_\lambda^{\gamma(5)}(0)|0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= i\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(y)}\frac{\delta}{\delta J^{\nu}(z)}\frac{\delta}{\delta a^{\lambda}(0)}Z[\eta,\bar{\eta},J_{\sigma},a_{\sigma},p]\\
&= i\frac{\delta}{\delta a^{\lambda}(0)}\exp\left\{i\left[a^{\sigma}\cdot\hat{j}_{a}^{(5)}+p\cdot\hat{j}^{(5)}+e\hat{j}^{\sigma}\frac{\delta}{\delta J^{\sigma}}\right]\right\}\\
&\quad\cdot\left\{-iD_{F\mu\nu}(y,z)-\int d^{4}WD_{F\mu\rho}(y,W)J^{\rho}(W)\right.\\
&\quad\left.\cdot\int d^{4}W'D_{F\nu\sigma}(z,W')J^{\sigma}(W')\right\}\\
&\quad\cdot\exp\left\{-i\left(\eta\cdot S_{F}\cdot\eta+\frac{1}{2}J^{\sigma}\cdot D_{F\sigma\rho}\cdot J^{\sigma}\right)\right\}\\
&= i\frac{\delta}{\delta a^{\lambda}(0)}\exp\{i[a^{\sigma}\cdot\hat{j}_{\sigma}^{(5)}+p\cdot\hat{j}^{(5)}]\}\\
&\quad\cdot\left\{-iD_{F\mu\nu}(y,z)-\left[\int d^{4}WD_{F\mu\rho}(y,W)J^{\rho}(W)\right.\right.\\
&\quad\left.+ie\int d^{4}WD_{F\mu\rho}(y,W)\hat{j}^{\rho}(W)\right]\\
&\quad\cdot\left[\int d^{4}W'D_{F\nu\sigma}(z,W')J^{\sigma}(W')\right.\\
&\quad\left.\left.+ie\int d^{4}W'D_{F\nu\sigma}(z,W')\hat{j}^{\sigma}(W')\right]\right\}\\
&\quad\cdot\exp\left\{ie\hat{j}^{\sigma}\cdot\frac{\delta}{\delta J^{\sigma}}\right\}\\
&\quad\cdot\exp\left\{-i\left[\eta\cdot S_{F}\cdot\eta+\frac{1}{2}J^{\sigma}\cdot D_{F\sigma\rho}J^{\rho}\right]\right\}\\
&= i\frac{\delta}{\delta a^{\lambda}(0)}\exp\{i[a^{\sigma}\cdot\hat{j}_{\sigma}^{(5)}+p\cdot\hat{j}^{(5)}]\}\\
&\quad\cdot\left\{-iD_{F\mu\nu}(y,z)+e^{2}\int d^{4}WD_{F\mu\rho}(y,W)\hat{j}^{\rho}(W)\right.\\
&\quad\left.\cdot\int d^{4}W'D_{F\nu\sigma}(z,W')\hat{j}^{\sigma}(W')\right\}\\
&\quad\cdot\exp\left\{i\hat{j}^{\rho}\frac{\delta}{\delta J^{\rho}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\cdot \exp\left\{-i\left[\bar{\eta}\cdot S_F\cdot\eta+\frac{1}{2}J^{\sigma}\cdot D_{F\sigma\rho}\cdot J^{\rho}\right]\right\}. \quad \text{(IV.5.17)}$$

在中间因子中正比于 J_μ 的项被删去了，因为 J_μ 最后将令为零，并且这些项在微扰展开过程中没有贡献．现在

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(A_\mu(y)A_\nu(z)j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle\\&\quad=iD_{F\mu\nu}(y,z)\langle 0|j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle\\&\qquad-e^2\int d^4Wd^4W'D_{F\mu\rho}(y,W)D_{F\nu\sigma}(z,W')\\&\qquad\cdot\langle 0|T(j^{\rho}(W)j^{\sigma}(W')j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle. \quad \text{(IV.5.18)}\end{aligned}$$

在右端的第一项代表图 IV.10 所示的不连通的图形．它对于 $p\neq q$ 为零，因此将被删去．

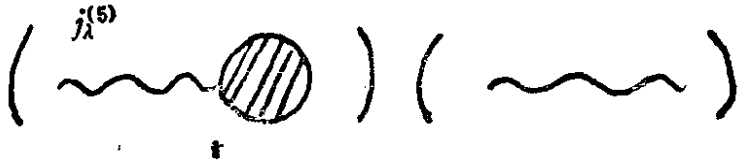


图 IV.14

把方程 (IV.5.17) 代入 $Q=j^{(5)}\lambda$ 的方程 (IV.5.12)，得到

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle\\&\quad=e^2\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4yd^4ze^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle\\&\quad=e^2\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4xd^4ye^{-ikx}e^{iqy}\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0)|0\rangle\end{aligned} \quad \text{(IV.5.19a)}$$

类似地

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|j^{(5)}(0)|0\rangle\\&\quad=e^2\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4yd^4ze^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j^{(5)}(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle\\&\quad=e^2\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4xd^4ye^{-ikx}e^{iqy}\langle 0|T(j^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle,\end{aligned} \quad \text{(IV.5.19b)}$$

这里

$$k = p + q.$$

方程 (IV.5.19a) 和 (IV.5.19b) 的最后一行是利用下述平动不变性得到的:

$$e^{ib_\mu P^\mu}\phi(x)e^{-ib_\mu P^\mu} = \phi(x + b), \qquad \text{(IV.5.20)}$$

这里 P_μ 为动量算符，$\phi(x)$ 为场算符，b_μ 为空时矢量。真空为具有本征值为零的动量算符的本征态:

$$P_\mu|0\rangle = 0.$$

把 (IV.5.20) 的两边展开为 b_μ 的幂，得到动量算符和场算符的对易子为

$$[P_\mu, \phi(x)] = -i\partial_\mu\phi(x). \qquad \text{(IV.5.21)}$$

现在反常的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (IV.5.9) 表为

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|\partial^\lambda j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle\\ &\quad = \langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|2mj^{(5)}(0)|0\rangle\\ &\qquad + \langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|\Delta j^{(5)}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.22)}\end{aligned}$$

应用平动不变性给出

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|\partial^\lambda j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle\\ &\quad = i\langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|[P^\lambda, j_\lambda^{(5)}(0)]|0\rangle\\ &\quad = ik^\lambda\langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|j_\lambda^{(5)}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.23)}\end{aligned}$$

现在方程 (IV.5.22) 可以用方程 (IV.5.19a) 和 (IV.5.19b) 重写为

$$\begin{aligned}&e^4\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu k^\lambda\int d^4y d^4z e^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle\\ &= -2im_e{}^3\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu\int d^4y d^4z e^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j^{(5)}(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle\\ &\quad - i\langle\gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2)|\Delta j^{(5)}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.24)}\end{aligned}$$

在维数正规化方案中的 ABJS 反常性 将在最低阶微扰论中证明反常的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (IV.5.24)，

将证明，容许圈积分原点的位移，左端的微扰振幅也是奇点的．这样的位移为了证明其中不含 $\Delta j^{(5)}$ 的恒等式，是必要的．

于是定义下面有关的振幅为

$$\Gamma^{(5)}_{\lambda\mu\nu}(p,q)\equiv\int d^4y d^4z e^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j^{(5)}_\lambda(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle, \tag{IV.5.25}$$

$$\Gamma^{(5)}_{\mu\nu}(p,q)\equiv\int d^4y d^4z e^{iqy}e^{ipz}\langle 0|T(j^{(5)}(0)j_\mu(y)j_\nu(z))|0\rangle. \tag{IV.5.26}$$

对于微扰展开式的最低阶，方程 (IV.5.25) 的 Feynman 振幅由图 IV.11 的两个图形组成：

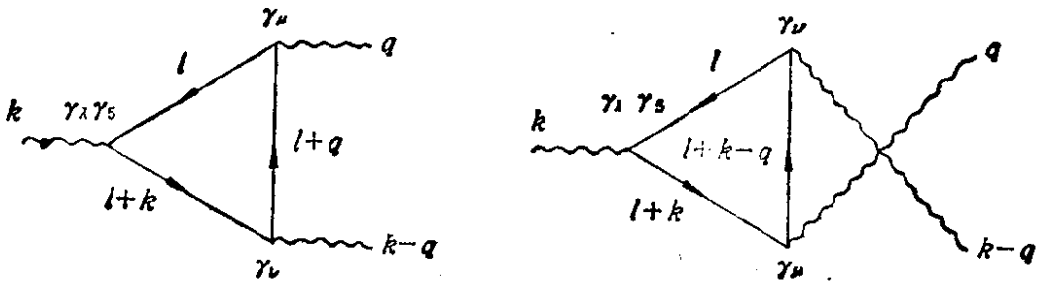


图 IV.15

这给出

$$\begin{aligned}\Gamma^{(5)}_{\lambda\mu\nu}(k,q)=-\int_l \mathrm{Tr}\Big\{&\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\\&\cdot\frac{i}{\not l+\not q-m+i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not k-m+i\varepsilon}\\&+\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}\gamma_\nu\\&\cdot\frac{i}{\not l-\not q+\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not k-m+i\varepsilon}\Big\}\end{aligned} \tag{IV.5.27}$$

这里

$$\int_l \equiv \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}.$$

在微扰论的最低阶，方程 (IV.5.26) 的振幅有图 IV.12 所给出的两个图形：

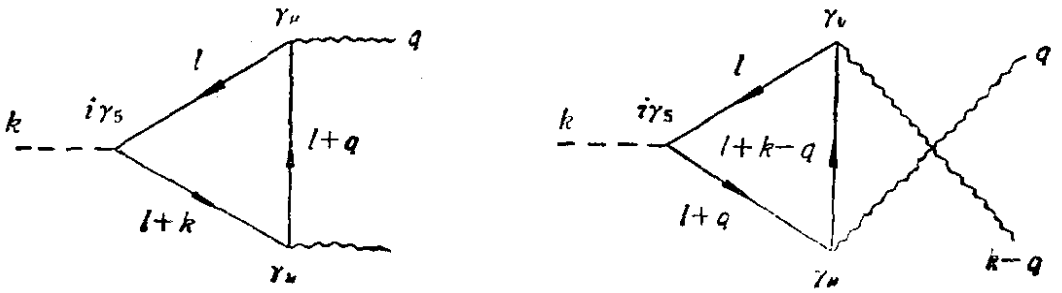


图 IV.16

于是

$$\Gamma^{(5)}_{\mu\nu}(k,q) = -\int_l \mathrm{Tr}\left\{i\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon}\gamma_\mu \cdot \frac{i}{\not l + \not q - m + i\varepsilon}\gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon} + i\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon}\gamma_\nu \frac{i}{\not l - \not q + \not k - m + i\varepsilon} \cdot \gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon}\right\}. \quad \text{(IV.5.28)}$$

证明方程 (IV.5.9) 从方程 (IV.5.27) 与 k_μ 的相乘着手，并且利用恒等式：

$$\not k\gamma_5 \equiv (\not l + \not k - m)\gamma_5 + \gamma_5(\not l - m) - 2im(i\gamma_5). \quad \text{(IV.5.29)}$$

微扰的 Ward-Takahashi 恒等式为

$$k^\lambda \Gamma^{(5)}_{\lambda\mu\nu}(k,q) = -2im\Gamma^{(5)}_{\mu\nu}(k,q) - i\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not q - m + i\varepsilon}\gamma_\nu + \gamma_5\gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not q - m + i\varepsilon}\gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon}\right.$$

$$+\gamma_5\frac{i}{l-m+i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{i}{l-q+\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu$$

$$+\gamma_5\gamma_\nu\frac{i}{l-q+\not k-m+i\varepsilon}$$

$$\cdot\gamma_\mu\frac{i}{l+\not k-m+i\varepsilon}\Big\}. \qquad \text{(IV.5.30)}$$

与正则恒等式方程(IV.5.8)相比较，第二和第三行的项是外加的．这些项可以利用矩阵乘积求迹的性质重写为

$$i\int_l \mathrm{Tr}\Big\{\gamma_\nu\gamma_5\frac{i}{l-m+i\varepsilon}\overset{①}{\gamma_\mu}\frac{i}{l+q-m+i\varepsilon}$$

$$-\gamma_\mu\gamma_5\frac{i}{l+q-m+i\varepsilon}\overset{②}{\gamma_\nu}\frac{i}{l+\not k-m+i\varepsilon}$$

$$+\gamma_\mu\gamma_5\frac{i}{l-m+i\varepsilon}\overset{③}{\gamma_\nu}\frac{i}{l-q+\not k-m+i\varepsilon}$$

$$-\gamma_\nu\gamma_5\frac{i}{l-q+\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{l+\not k-m+i\varepsilon}\Big\}$$

(IV.5.31)

现在显然有，如果在项④中作积分变数的改变：$l\to l-q+\not k$，则项①和项④相抵消；若在项②中作变数改变：$l\to l-q$，则使项②与项③相抵消．如果这些步骤是容许的，则方程(IV.5.30)约化为正则形式方程(IV.5.8)．

如在 §IV.1 所强调的，这些外表单纯的积分变数改变对于(IV.5.31)中所出现的积分形式是不容许的．因为这些项是平方发散的，积分变数原点的位移会产生不为零的表面项．事实上，问题在于，所涉及到的出发的振幅，即方程(IV.5.27)不曾适当定义；这些振幅在外表上是线性发散的．因此，首先必须要把(IV.5.27)正规化，否则会使方程(IV.5.30)没有意义．在维数方案中[9]已实现了正规化．关于在其他正规化

方案中所进行的计算，参阅文献[5，46及49]。

在这里必须应付 γ_5 的问题。如在 §IV.3 节中所提到的，这很不容易推广到 n- 维。在下面的论述中，将利用 't Hooft 和 Veltman [文献 9] 所使用的方法。在该方法中，n 维空间被分为两部分：一部分包含 4 维的物理空间，其余部分包含 $n-4$ 维的推广空间。在物理的子空间内的矢量，称为 4 矢量，在其下划一横线来表示，在推广子空间内的矢量用短波纹线来表示。并不限制在任一子空间内的矢量不加标记[参看方程 (IV.34)]。一切物理的(外)动量被认为是 4 矢量。因此动量 k，q，和 p 为 4 矢量：

$$k \equiv \underline{k}, \quad q \equiv \underline{q}, \quad p \equiv \underline{p}.$$

内圈动量 l 在这两个子空间内有分量为

$$l_\mu \equiv (\underline{l}_\mu, \underset{\sim}{l}_\mu).$$

γ 矩阵也以类似的方式被划分为

$$\gamma_\mu \equiv (\underline{\gamma}_\mu, \underset{\sim}{\gamma}_\mu),$$

这里 $\underline{\gamma}_\mu$ 称为 4γ 矩阵，是一个 $n \times n$ 矩阵，只有前面的 4×4 分量具有不为零的值，而 $\underset{\sim}{\gamma}_\mu$ 代表最后的 $(n-4) \times (n-4)$ 分量。γ 矩阵的对易关系如下：

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \tag{IV.5.32a}$$

$$\{\underline{\gamma}_\mu, \underline{\gamma}_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \tag{IV.5.32b}$$

$$\{\underset{\sim}{\gamma}_\mu, \underset{\sim}{\gamma}_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \tag{IV.5.32c}$$

$$[\underset{\sim}{\gamma}_\mu, \underline{\gamma}_\nu] = 0. \tag{IV.5.32d}$$

这里

$$g_{\mu\nu} = 1, \text{ 对于 } \mu = \nu = 0;$$

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \text{ 对于 } \mu \text{ 或 } \nu \neq 0.$$

γ_5 矩阵只定义为一个 4 维量

$$\gamma_5 \equiv i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^1\underline{\gamma}^2\underline{\gamma}^3,$$

它满足下面的对易关系：

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad [\gamma_5, \gamma_\mu] = 0. \tag{IV.5.33}$$

这里应该注意，上面的设计是形式上的，因为一个 n 维空间分离为二个子空间意味着 $n > 4$. 事实上，紫外发散积分的正规化需要 n 的实部小于 4.

回到方程 (IV.5.27) 和 (IV.5.28)，当把方程 (IV.5.27) 代入类如方程 (IV.5.24) 的 Ward-Takahashi 恒等式时，假定 γ_μ 和 γ_ν 矩阵与光子偏振矢量相联系，而 γ_λ 与 k^λ 相联系；所有这三个矩阵可以认为是 4 γ 矩阵. 特别是，方程(IV.5.29)可以重写为

$$\begin{aligned} \not{k}\gamma_5 = &-2mi(i\gamma_5) + (\not{l} + \not{l} - m)\gamma_5 \\ &+ \gamma_5(\not{l} - m) - 2\gamma\cdot l. \end{aligned} \tag{IV.5.34}$$

注意在上式中的附加项 $-2\gamma_5 \not{l}$. 现在它可以写为

$$\begin{aligned} k^\lambda \Gamma^{(5)}_{\lambda\mu\nu}(k, q) = &-2mi\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr}\left\{ i\gamma_5 \frac{i}{\not{l} - m + i\varepsilon} \not{\gamma}_\mu \right. \\ &\cdot \frac{i}{\not{l} + \not{q} - m + i\varepsilon} \not{\gamma}_\nu \frac{i}{\not{l} + \not{k} - m + i\varepsilon} \\ &+ i\gamma_5 \frac{i}{\not{l} - m + i\varepsilon} \not{\gamma}_\nu \frac{i}{\not{l} - \not{q} + \not{k} - m + i\varepsilon} \\ &\left. \cdot \not{\gamma}_\mu \frac{i}{\not{l} + \not{k} - m + i\varepsilon} \right\} + 2\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr} \\ &\cdot \left\{ \gamma_5 \not{l} \frac{i}{\not{l} - m + i\varepsilon} \not{\gamma}_\mu \frac{i}{\not{l} + \not{q} - m + i\varepsilon} \right. \\ &\cdot \not{\gamma}_\nu \frac{i}{\not{l} + \not{k} - m + i\varepsilon} + \gamma_5 \not{l} \frac{i}{\not{l} - m + i\varepsilon} \\ &\cdot \not{\gamma}_\nu \frac{i}{\not{l} - \not{q} - \not{k} - m + i\varepsilon} \\ &\left. \cdot \not{\gamma}_\mu \frac{i}{\not{l} + \not{k} - m + i\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \tag{IV.5.35}$$

在得到这个表示式时，利用了现在所容许的积分变数的位移

来消去类似于方程 (IV.5.31) 的那些项. 方程 (IV.5.35) 的第一项正好就是 $-2miT^{(5)}_{\mu\nu}(k,q)$. 第二项是附加的，并且可以写为

$$A^{\mu\nu}(k,q) \equiv -\frac{2i}{(2\pi)^n}\int d^4l \int d^{n-4}l \mathrm{Tr}$$
$$\cdot\left\{\frac{\gamma_5 \underline{l}(\underline{l}-\underline{l}+m)\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{q}+m)\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k}+m)}{[(l^2-\underline{l}^2)-m^2][(\underline{l}+\underline{q})^2-\underline{l}^2-m^2][(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_5 \underline{l}(\underline{l}+\underline{l}+m)\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}-\underline{q}-\underline{k}+m)\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k}+m)}{[l^2-\underline{l}^2-m^2][(\underline{l}-\underline{q}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2][(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}\right\}. \quad (IV.5.36)$$

应该仔细检查第一项的分子

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma_5[&\underline{l}(\underline{l}+\underline{l})\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k})\\
&+m\underline{l}(\underline{l}+\underline{l})\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu\\
&+m\underline{l}(\underline{l}+\underline{l})\gamma^\mu\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k})\\
&+m\underline{l}\underline{l}^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k})\\
&+m^2\underline{l}(\underline{l}+\underline{l})\gamma^\mu\gamma^\nu+m^2\underline{l}\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu\\
&+m^2\underline{l}\gamma^\mu\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{l}+\underline{k})+m^3\underline{l}\gamma^\mu\gamma^\nu\}. \quad (IV.5.37a)\end{aligned}$$

可以看到 l 的奇数项将无贡献；这些项由于对称的积分而为零：

$$\int d^{n-4}l\frac{l_a^{2j+1}}{[-l^2+\Delta]^a}=0,$$

这里 j 为整数，l_a 为矢量 l 的一个分量. 因此 (VI.5.37a) 可以写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma_5[&\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu\underline{l}\gamma^\nu\underline{l}+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{k})\\
&+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu\underline{l}\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{k})+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu\underline{l}\\
&+m(\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu\underline{l}\gamma^\nu\\
&+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{k})+\underline{l}\underline{l}\gamma^\mu\gamma^\nu\underline{l}\\
&+\underline{l}\gamma^\mu\underline{l}\gamma^\nu(\underline{l}+\underline{k})+\underline{l}\gamma^\mu(\underline{l}+\underline{q})\gamma^\nu\underline{l})\end{aligned}$$

$$+ m^2(\not{l}\not{l}\gamma^\mu\gamma^\nu + \not{l}\gamma^\mu\not{l}\gamma^\nu + \not{l}\gamma^\mu\gamma^\nu\not{l})]\}. \quad \text{(IV.5.37b)}$$

利用方程 (IV.5.32) 及 (IV.5.33)，和如下的事实：

$$\not{l}\not{l} = g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = -l^2, \quad \text{(IV.5.38)}$$

并删去小于 4 个 γ 矩阵的一切项，方程 (IV.5.37) 可以重写为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{\gamma_5[-l^2\gamma^\mu(\not{l}+\not{q})\gamma^\nu(\not{l}+\not{k}) \\
&\quad - l^2\not{l}\gamma^\mu\gamma^\nu(\not{l}+\not{k}) - l^2\not{l}\gamma^\mu(\not{l}+\not{q})\gamma^\nu]\} \\
&= (-l^2)(4i)\{\varepsilon^{\mu\sigma\nu\tau}(l+q)_\sigma(l+k)_\tau \\
&\quad + \varepsilon^{\sigma\mu\nu\tau}l_\sigma(l+k)_\tau + \varepsilon^{\sigma\mu\tau\nu}l_\sigma(l+q)_\tau\} \\
&= 4il^2\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}q_\sigma k_\tau. \qquad \text{(IV.5.39)}
\end{aligned}$$

由方程 (IV.5.39)，用 $k-q$ 代替 q，并交换指标 μ 和 ν，就可以得到方程 (IV.5.36) 中的第二个求迹：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\{\gamma_5(\not{l}+\not{l}+m)\gamma^\nu(\not{l}+\not{l}-\not{q}+\not{k}+m) \\
&\quad\cdot\gamma^\mu(\not{l}+\not{l}+\not{k}+m)\} \\
&= 4il^2\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}q_\sigma k_\tau. \qquad \text{(IV.5.40)}
\end{aligned}$$

现在

$$A^{\mu\nu}(k,q) \equiv -\frac{2i}{(2\pi)^n}(4i)\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}k_\sigma q_\tau I, \quad \text{(IV.5.41)}$$

这里

$$\begin{aligned}
I \equiv &\int d^4l \int d^{n-4}\not{l} \\
&\cdot\left\{\frac{\not{l}^2}{[l^2-\not{l}^2-m^2][(l+q)^2-\not{l}^2-m^2][(l+k)^2-\not{l}^2-m^2]}\right. \\
&\left.+\frac{\not{l}^2}{[l^2-\not{l}^2-m^2][(l-q+k)^2-\not{l}^2-m^2][(l+k)^2-\not{l}^2-m^2]}\right\}. \\
&\qquad \text{(IV.5.42)}
\end{aligned}$$

把分母加以组合就可以计算出这个表示式：

$$\begin{aligned}
&\{[l^2-\not{l}^2-m^2][(l+q)^2-\not{l}^2-m^2] \\
&\quad\cdot[(l+k)^2-\not{l}^2-m^2]\}^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 2ydy\{[((\underline{l}+\underline{q})^2 - \underline{l}^2 - m^2)x + ((\underline{l}+\underline{k})^2 - \underline{l}^2 - m^2)(1-x)]y + [\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - m^2](1-y)\}^{-1}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 2ydy \frac{1}{[\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - 2\underline{l}\cdot\underline{p}_y - \Delta_y]^3}, \tag{IV.5.43}$$

这里

$$\underline{p}_y = -[x\underline{q} + (1-x)\underline{k}]y = -[\underline{k} - x\underline{p}]y,$$
$$\Delta_y = m^2 - xyq^2 - (1-x)yk^2, \tag{IV.5.44}$$

并且

$$\{[\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - m^2][(\underline{l} - \underline{q} + \underline{k})^2 - \underline{l}^2 - m^2] \cdot [(\underline{l}+\underline{k})^2 - \underline{l}^2 - m^2]\}^{-1}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 2ydy \frac{1}{[\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - 2\underline{l}\cdot\underline{p}'_y - \Delta'_y]^3}, \tag{IV.5.45}$$

这里

$$\underline{p}'_y = -[x(\underline{k} - \underline{q}) + (1-x)\underline{k}]y = -[\underline{k} - x\underline{q}]y,$$
$$\Delta'_y = m^2 - xyp^2 - (1-x)yk^2. \tag{IV.5.46}$$

方程 (IV.5.42) 变为

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 2ydy \int d^{n-4}l l^2 \int d^4\underline{l} \cdot \left\{\frac{1}{[\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - 2\underline{l}\cdot\underline{p}_y - \Delta_y]^3} + \frac{1}{[\underline{l}^2 - \underline{l}^2 - 2\underline{l}\cdot\underline{p}'_y - \Delta'_y]^3}\right\}. \tag{IV.5.47}$$

利用表 IV.3 所列举的公式，并且令 $\alpha = 3$ 和 $n = 4$，得到

$$I = -i\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 2ydy \int d^{n-4}l \cdot \left\{\frac{l^2}{[l^2 + \Delta_y + \underline{p}_y^2]} + \frac{l^2}{[l^2 + \Delta'_y + \underline{p}'^2_y]}\right\}. \tag{IV.5.48}$$

注意，l^2 是在维数 $n-4$ 的欧氏空间内。为了计算上面的积分，利用方程 (IV.3.15) 及 (IV.3.21) 写出

$$\int d^{n-4}l \frac{l^2}{(l^2+\Delta)} = \int d\Omega_{(n-4)} \int_0^\infty dL\, L^{n-1} \frac{L^2}{(L^2+\Delta)}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^{n-4}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)(\Delta)^{2-n/2}}$$

$$= -\frac{(\sqrt{\pi})^{n-4}\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{(\Delta)^{2-n/2}}.$$

最后

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 2y dy \left[\frac{i\pi^2}{2}\right](\sqrt{\pi})^{n-4}\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{(\Delta_y + p_y^2)^{2-n/2}} + \frac{1}{(\Delta_y' + p_y'^2)^{2-n/2}}\right]$$

$$\xrightarrow{n\to 4} i\pi^2. \qquad \text{(IV.5.49)}$$

把 (IV.5.49) 代入 (IV.5.41)，对于 $n \to 4$，给出

$$e^2 A^{\mu\nu}(k,q) = -\frac{ie^2}{2\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}q_\lambda k_\sigma, \qquad \text{(IV.5.50)}$$

最后得

$$k^\lambda \Gamma^{(5)}_{\lambda\mu\nu}(k,q) = -2im\Gamma^{(5)}_{\mu\nu}(k,q) - \frac{ie^2}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}q^\sigma k^\rho. \qquad \text{(IV.5.51)}$$

按照反常的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (IV.5.24)，方程 (IV.5.50) 应该等于

$$-i\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|\Delta j^{(5)}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.52a)}$$

通过方程 (IV.5.9)，对电荷的最低阶，上式变为

$$-4i\frac{e^2}{(4\pi)^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\langle\gamma(q,\varepsilon_1)\gamma(p,\varepsilon_2)|\partial^\mu A^\nu(0)\partial^\lambda A^\rho(0)|0\rangle$$

$$=-i\frac{e^2}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\lambda k^\rho. \qquad \text{(IV.5.52b)}$$

现在，显然方程(IV.5.9)与微扰结果方程(IV.5.24)和(IV.5.51)符合一致.方程(IV.5.24)中的反常项也称为AVV三角反常性. 应该注意，三角反常的值当然与对它计算所用的正规化方案无关(参阅文献5, 45, 46, 及49). 它也与费米子质量无关. 如在§III.5末所提到的，后一事实的结果在构成统一理论的可重正化模型中是重要的. 细节将在本节稍后给出.

关于电磁规范不变性的检验 由于存在轴矢量反常性，人们必然会关心电磁规范不变性，并且会问，电磁规范不变性在微扰论中是否成立？规范不变性的数学陈述是关于电磁流j_μ的 Ward-Takahashi 恒等式. 对于 AVV 顶角函数，这就是

$$q^\mu\int d^4x d^4y e^{-ikx}e^{iqy}\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle=0. \qquad \text{(IV.5.53)}$$

可以证明，该恒等式在正则方法中是成立的，即是

$$q^\mu\int d^4x d^4y e^{-ikx}e^{iqy}\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle$$

$$=\int d^4x d^4y e^{-ikx}\left[-i\frac{\partial}{\partial y_\mu}e^{iqy}\right]\cdot\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle$$

$$=i\int d^4x d^4y e^{-ikx}e^{iqy}\frac{\partial}{\partial y_\mu}\cdot\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle$$

$$=i\int d^4x d^4y e^{-ikx}e^{iqy}\{\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)\partial^\mu j_\mu(y)j_\nu(0))|0\rangle$$

$$+\langle 0|T(\delta(y_0-x_0)[j_0(y),j_\lambda^{(5)}(x)]j_\nu(0))|0\rangle$$
$$+\langle 0|T(j_\lambda^{(5)}(x)\delta(y_0)[j_0(y),j_\nu(0)])|0\rangle\}$$
$$=0. \qquad \text{(IV.5.54)}$$

上面的叙述利用下面的正则关系：

$$[j_0(y),j_\lambda^{(5)}(x)]\delta(y_0-x_0)=0, \qquad \text{(IV.5.55a)}$$
$$[j_0(y),j_\nu(0)]\delta(y_0)=0, \qquad \text{(IV.5.55b)}$$

及

$$\partial^\mu j_\mu(y)=0, \qquad \text{(IV.5.56)}$$

这些正则关系是由等时对易关系和费米子场的Euler-Lagrange 方程得到的.

在最低阶中，(IV.5.54) 的左边为

$$q^\mu\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not l-\not q-m+i\varepsilon}\right.$$
$$\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not k-m+i\varepsilon}+\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}$$
$$\left.\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not q+\not k-m+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not k-m+i\varepsilon}\right\} \qquad \text{(IV.5.57)}$$

利用关系

$$\not q=(\not l+\not q-m)-(\not l-m)$$

及

$$\not q=(\not l+\not k-m)-(\not l-\not q+\not k-m),$$

方程 (IV.5.57) 可以重写为

$$\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}\right.$$
$$\cdot[(\not l+\not q-m)-(\not l-m)]\frac{i}{\not l+\not q-m+i\varepsilon}$$
$$\left.\cdot\gamma^\nu\frac{i}{\not l+\not k-m+i\varepsilon}+\gamma_\lambda\gamma_5\frac{i}{\not l-m+i\varepsilon}\right.$$

$$\cdot \gamma_\nu \frac{i}{\not l - \not k - \not q - m + i\varepsilon} [(\not l - \not k - m)$$

$$- (\not l - \not q + \not k - m)] \frac{i}{\not l - \not k - m + i\varepsilon} \Big\}$$

$$= \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr} \Big\{ i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon} \overset{\textcircled{a}}{\gamma_\nu} \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon}$$

$$- i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l + \not q - m + i\varepsilon} \overset{\textcircled{b}}{\gamma_\nu} \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon}$$

$$+ i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon} \overset{\textcircled{c}}{\gamma_\nu} \frac{i}{\not l - \not q + \not k - m + i\varepsilon}$$

$$- i\gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon} \overset{\textcircled{d}}{\gamma_\nu} \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon} \Big\}$$

$$= i \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr} \Big\{ - \gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l - \not q - m + i\varepsilon} \overset{\textcircled{b}}{\gamma_\nu}$$

$$\cdot \frac{i}{\not l + \not k - m + i\varepsilon} + \gamma_\lambda\gamma_5 \frac{i}{\not l - m + i\varepsilon}$$

$$\cdot \overset{\textcircled{c}}{\gamma_\nu} \frac{i}{\not l - q + \not k - m + i\varepsilon} \Big\} \qquad \text{(IV.5.58)}$$

在维数正规化中，积分变数的位移是容许的．在ⓑ中作变数改变 $l \to l - q$，ⓑ与ⓒ相抵消，可以看出，恒等式 (IV.5.53) 成立，因此规范不变性在微扰计算中并不被破坏．

对于量子电动力学的阿贝耳理论，唯一的反常性由方程 (IV.5.9) 给出．即使考虑到重正化效应，如果裸电荷用重正化的电荷代替，它也是适合的．在本节末将更多的叙述重正化效应．

虽然非阿贝耳理论的情况更复杂些，它已在文献中论述过了．[参阅文献 5，49，及 50]．在这里将进行总结，并作出有关的评论．考虑一个手征的 $SU(3) \times SU(3)$ 理论，其中

有八重态矢量流，八重态轴矢量流，及八重态标量及膺标量密度。在旋量理论中，这些流可以在 §I.4 方程 (I.4.2) 中找到。n 点函数 (n-$pf's$) 的正则 Ward-Takahashi 恒等式，包含这些流及密度，也在那里推导出来了，例如方程 (I.4.12), (I.4.16), (I.4.18) 及 (I.4.31)。因此这些方程要进行由于反常项的可能修正。的确，许多轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式是反常的。这些流是

$$\langle AVV\rangle,\ \langle AAA\rangle,$$
$$\langle AVVV\rangle,\ \langle AAAV\rangle,$$
$$\langle AVVVV\rangle,\ \langle AAAVV\rangle,\ \langle AAAAA\rangle. \qquad \text{(IV.5.59)}$$

这里用 § I.4 的符号，A 和 V 代表 $SU(3)$ 轴矢量流和矢量流。所有的矢量流 Ward-Takahashi 恒等式都保持它们的正则形式。应该注意，在 (IV.5.59) 中的一切量都具有反常宇称；即是，对于 n 秩张量的 n 点函数 (n-pf)，如果 n 为偶数，则宇称为奇数，反之亦然。一个 n 点函数 (n-pf) 的宇称意义是指其流和密度的内禀宇称的乘积。轴矢量流和标量密度有正的宇称，矢量流和膺标量密度有负的宇称。在方程 (IV.5.9) 中，n 点函数的轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式的反常性并不都是独立的。这些反常性在相同的 n 点函数 (n-pf) 中通过包含比一个更多流的多重 Ward-Takahashi 恒等式相联系。

在旋量模型中，令 v_μ^a 和 a_μ^a 为 $SU(3)\times SU(3)$ 流，它们与旋量场相互作用形式为

$$\mathscr{L}_I = g\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2}(v_\mu^a + \gamma_5 a_\mu^a)\psi, \qquad \text{(IV.5.60)}$$

这里 λ^a, $a = 1, 2, \cdots, 8$ 为 $SU(3)$ Gell-Mann 矩阵。令

$$j_\mu^{(5)a} \equiv \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2}\psi,$$

$$j^{(5)\mu} \equiv \bar{\psi} i\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi. \qquad \text{(IV.5.61)}$$

定义

$$\bar{v}_\mu \equiv \frac{\lambda^a}{2} v^a_\mu,$$

$$\bar{a}_\mu \equiv \frac{\lambda^a}{2} a^a_\mu,$$

$$\bar{J}^{(5)}_\mu \equiv \frac{\lambda^a}{2} j^{(5)a}_\mu,$$

$$\bar{J}^{(5)} \equiv \frac{\lambda^a}{2} j^{(5)a}, \qquad \text{(IV.5.62)}$$

及

$$\bar{v}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \bar{v}_\nu - \partial_\nu \bar{v}_\mu - ig[\bar{v}_\mu, \bar{v}_\nu] - ig[\bar{a}_\mu, \bar{a}_\nu],$$
$$\bar{a}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - ig[\bar{v}_\mu, \bar{a}_\nu] - ig[\bar{a}_\mu, \bar{v}_\nu]. \qquad \text{(IV.5.63)}$$

于是轴矢量流的散度方程可以总结为下面的表示式:

$$\partial^\mu \bar{J}^{(5)}_\mu = 2m\tilde{J}^{(5)} - \frac{g^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left\{ \frac{1}{4} \bar{v}_{\mu\nu} \bar{v}_{\lambda\rho} + \frac{1}{12} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}_{\lambda\rho} \right.$$
$$+ \frac{2}{3} ig(\bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \bar{a}_{\lambda\rho} + \bar{v}_{\mu\nu} \bar{a}_\lambda \bar{a}_\rho + \bar{a}_\mu \bar{v}_{\nu\lambda} \bar{a}_\rho)$$
$$\left. + \frac{8}{3} g^2 \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \bar{a}_\lambda \bar{a}_\rho \right\}. \qquad \text{(IV.5.64)}$$

在一个 n 点函数 $(n\text{-}pf)$ 内已包含能量-动量张量 $\theta_{\mu\nu}$ 时，反常的轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式包含方程 (IV.5.59)所列举的那些反常量和另外七个量. 这七个量全部正好就是类如 (IV.5.59) 中的量但带有一个能量动量张量:

$$\langle \theta AVV \rangle, \langle \theta AAA \rangle,$$
$$\langle \theta AVVV \rangle, \langle \theta AAAV \rangle,$$
$$\langle \theta AVVVV \rangle, \langle \theta AAAVV \rangle, \langle \theta AAAAA \rangle. \qquad \text{(IV.5.65)}$$

因此总共有 14个反常的矢量流 Ward-Takahashi 恒等式; 模

式是很正规的．所有这些恒等式反常性的值已在文献[6]中列举出来了．

求迹恒等式反常性[参阅§I.4，特别是方程(I.4.24)的讨论及其下面的叙述]是完全不同的．这些反常性出现在正常宇称 n 点函数中，并且某些反常性与理论中的旋量的质量有关．事实上，一切正常宇称的 n 点函数 $(n-pf)$，包括 $n=3,4$，和5的一个能量动量张量，都是反常的．它们有25个，细节参阅文献[6]及[51]．

在这里的一些注释是为了陈述推导各种反常性的某些诀窍．

(a) 在微扰计算中不同的 Ward-Takahashi 恒等式的直接计算证明，有比方程(IV.5.59)和(IV.5.64)中所列举的更多的反常恒等式．这里"直接计算"意思是在检验微扰计算的正则 Ward-Takahashi 恒等式中只利用正规化方法．

(b) 然而，在(a)中所提到的一切反常性并不都是真实的．许多是正规化方法的结果，因此需要使结果"重正化"．即，对拉氏函数必须添加容许的抵消项，来消去尽可能多的反常性，或者尽可能恢复一些正则 Ward-Takahashi 恒等式．只有这样做到以后，剩余的反常性将是"真的"反常性．

(c) 由于要重正化，确定怎样的 Ward-Takahashi 恒等式是反常的，意义并不明确．习惯的方法是要求一切矢量流 Ward-Takahashi 恒等式是正则的，并且只有轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式才有遭受反常的可能性．这会给出一组极小数目的反常 Ward-Takahashi 恒等式，称为极小集合[49]．方程(IV.5.59)和(IV.5.65)中所列举的反常的 n 点函数 $(n-pf)$ 是极小集合．

(d) 在轴矢量流 Ward-Takahashi 恒等式中一切反常性与理论中的质量无关．这在某些无反常的电弱理论的结构中

是重要的，并且往后将较详细地加以讨论.

讨论了 ABJS 反常性的形式以后，就可提出反常性的物理意义的问题了. 反常性是否只不过是场论微扰方法的人为制造物，或者还有深奥的物理意义呢？不容易回答这个问题，但是只要涉及到场论的微扰解，就一定会出现反常性. 在下面，将讨论两个题目来显示存在反常的影响. 这两个题目是用流代数预言 $\pi^0 \to 2\gamma$ 速率和可重正化的电弱理论的结构.

$\pi^0 \to 2\gamma$ 速率的流代数结果和三角反常性 流代数的基本假定是有部分守恒轴矢量流 (PCAC)[52]，流代数表明，轴矢量同位旋流 A^a_μ, $a = 1, 2, 3$, 的散度是正比于 π 介子场 $\phi^{(a)}_\pi$.

$$\partial^\mu A^a_\mu = \mu_\pi^2 f_\pi \phi^{(a)}_\pi, \qquad \text{(IV.5.66)}$$

这里 μ_π 为 π 介子的质量，$\sqrt{2} f_\pi$ 为带荷 π 介子的衰变常数，并且 $f_\pi = 93\text{MeV}$. 方程 (IV.5.66) 的用处在于它容许推导出低能定理，于是，如果在物理振幅的某些变数中满足光滑条件，就可使物理上感到兴趣的量近似地计算出来. 特别是，可令具有 π 介子量子数的通道的 4 动量等于零. 这些特性将在 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变宽度 $\Gamma_{\pi_0 \to 2\gamma}$ 的估算中加以阐述.

考虑一个理论，其中 π 介子场的运动方程为

$$(\Box + \mu_\pi^2)\phi^{(a)}_\pi(x) = j^{(a)}_\pi(x), \quad a = 1, 2, 3, \qquad \text{(IV.5.67)}$$

这里 $j^{(a)}_\pi(x)$ 为 π 介子场的源. $\pi^0 \to 2\gamma$ 的矩阵元为

$$\langle \gamma(q, \varepsilon_1), \gamma(p, \varepsilon_2) | j^{(a)}_\pi(0) | 0 \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda p^\rho \frac{F_\pi(k^2)}{\mu_\pi}. \qquad \text{(IV.5.68)}$$

右边是由左边矩阵元为秩 2 的膺张量，以及它线性地正比于 ε_1 和 ε_2 的事实而推导出来的. ε_1 和 ε_2 为光子的偏振矢量. 暂且假定 π 介子是在质壳外，$k^2 = (p + q)^2 \neq \mu_\pi^2$. 对于一个质壳上的 π^0，衰变宽度为

$$\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}=\frac{|F_\pi(\mu_\pi^2)|^2}{64\pi}\mu_\pi. \tag{IV.5.69}$$

PCAC 关系方程 (IV.5.66) 容许对 $F_\pi(\mu_\pi^2)$ 作出估算. 把方程 (IV.5.67) 和 (IV.5.66) 代入方程 (IV.5.68), 变为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\lambda q^\rho F_\pi(k^2)/\mu_\pi\\&=\left(\frac{-k^2+\mu_\pi^2}{f_\pi\mu_\pi^2}\right)\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|\partial^\mu A_\mu^{(3)}(0)|0\rangle\\&=i\frac{-k^2+\mu_\pi^2}{f_\pi\mu_\pi^2}k^\mu\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|A_\mu^{(3)}(0)|0\rangle.\end{aligned} \tag{IV.5.70}$$

用 PCAC 关系可由矩阵元 $\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|A_\mu^{(3)}\cdot(0)|0\rangle$ 得到 $F_\pi(k^2)$, 它是一个正比于 ε_1 和 ε_2 的轴矢量, 并且可以写为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\{A_1\varepsilon_1^\nu\varepsilon_2^\lambda q^\rho+A_2\varepsilon_1^\nu\varepsilon_2^\lambda p^\rho+A_3(\varepsilon_1\cdot p)\varepsilon_2^\nu q^\lambda p^\rho\\&\quad+A_4(\varepsilon_2\cdot q)\varepsilon_1^\nu q^\lambda p^\rho\},\end{aligned} \tag{IV.5.71a}$$

这里 A_j, $j=1,2,3$, 和 4 为 k^2 的不变量函数. 电磁规范不变性要求当 $\varepsilon_1^\mu(\varepsilon_2^\mu)$ 用 $q^\mu(p^\mu)$ 代替时 (IV.5.71a) 为零. 这意味着

$$A_1=\frac{1}{2}k^2A_4$$

及

$$A_2=\frac{1}{2}k^2A_3.$$

因此

$$\begin{aligned}&\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|A_\mu^{(3)}(0)|0\rangle\\&=\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left\{A_3\left[\frac{1}{2}k^2\varepsilon_1^\nu\varepsilon_2^\lambda p^\rho+(\varepsilon_1\cdot p)\varepsilon_2^\nu q^\lambda p^\rho\right]\right.\\&\quad\left.+A_4\left[\frac{1}{2}k^2\varepsilon_1^\nu\varepsilon_2^\lambda q^\rho+(\varepsilon_2\cdot q)\varepsilon_1^\nu q^\lambda p^\rho\right]\right\}\end{aligned} \tag{IV.5.71b}$$

并且

$$k^\mu\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|A_\mu^{(3)}(0)|0\rangle$$
$$=\frac{k^2}{2}(A_3-A_4)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\lambda p^\rho. \qquad \text{(IV.5.72)}$$

方程比较 (IV.5.70) 和 (IV.5.72) 给出

$$F_\pi(k^2)=i\frac{\mu_\pi^2-k^2}{\mu_\pi^2 f_\pi}\frac{1}{2}k^2(A_3-A_4), \qquad \text{(IV.5.73)}$$

在软 π 介子极限 $k^2\to 0$ 中，这给出

$$F_\pi(0)=0. \qquad \text{(IV.5.74)}$$

PCAC，连同软 π 介子极限，在流代数计算中有许多成就，可以预料到，在 10% 的范围内 $F_\pi(0)$ 将与 $F_\pi(\mu_\pi^2)$ 符合一致. 然而，上面的计算表明，它完全失败. 这个结果称为 Sutherland-Veltman 定理[53,54].

与 Sutherland-Veltman 定理有关，问题在于，考虑到三角反常性，就会失效，三角反常性以下面的方式修改关系 (IV.5.70) 为

$$i\frac{\mu_\pi^2-k^2}{\mu_\pi^2 f_\pi}k^\mu\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|A_\mu^{(3)}(0)|0\rangle$$
$$=\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\lambda p^\rho F_\pi(k^2)/\mu_\pi+\frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mu_\pi^2-k^2}{\mu_\pi^2 f_\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$
$$\cdot\langle\gamma(q,\varepsilon_1),\gamma(p,\varepsilon_2)|F_{(0)}^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}(0)|0\rangle. \qquad \text{(IV.5.75)}$$

右端的第二项给出

$$\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\mu_\pi^2-k^2}{\mu_\pi^2 f_\pi}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu q^\lambda p^\rho, \qquad \text{(IV.5.76)}$$

于是在软 π 介子极限 $k^2\to 0$，由方程 (IV.5.75)，(IV.5.76) 及 (IV.5.72) 得到

$$F_\pi(0)=-\zeta\frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{\mu_\pi}{f_\pi}, \qquad \text{(IV.5.77)}$$

这里 ζ 为数值因子，它与同位旋轴矢量流同基本旋量场如何

耦合有关. 为说明起见,将考虑几个的模型.

第一个模型是 Fermi-Yang[55] 模型,其中基本旋量场是核子场 ψ_p 和 ψ_n. 定义同位旋双态

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

于是

$$j_\mu^{(5)a} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi. \tag{IV.5.78}$$

因为中子是中性的,故只有质子场对三角迴路有贡献. 比较 (IV.5.78) 和 (IV.5.1) 给出

$$\zeta_{FY} = \frac{1}{2}. \tag{IV.5.79}$$

另一模型为 $SU(n)$ 的 n 味夸克模型. 考虑含上夸克 u 和下夸克 d 的同位旋 $SU(2)$ 子群,可以得到同位旋流为

$$j_\mu^{(5)a} = \bar{\psi}_q\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi_q \tag{IV.5.80}$$

及

$$\psi_q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{IV.5.81}$$

流 (IV.5.80) 连同 (IV.5.81) 是无色夸克的. 在量子色动力学中,其中夸克有三种颜色,味流是由 (IV.5.81) 所示的三个复制品,其中 u 和 d 夸克以 e 为单位的电荷分别为 $\frac{2}{3}$ 及 $-\frac{1}{3}$. (IV.5.77) 的归一化因子为

$$\zeta_{QM} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{对于无色夸克,} \\ \frac{1}{2}, & \text{对于三色夸克.} \end{cases} \tag{IV.5.82}$$

此外,有整数荷的 Han-Nambu[56]-Maki[57]-Hara[58] 模型,其

中颜色不是绝对禁闭的:

$$\zeta_{IN} = \frac{1}{2}. \tag{IV.5.83}$$

利用 π^0 质量，$\mu_{\pi^0} = 135$ Mev 及 $F_\pi = 93$ Mev，由方程 (IV.5.69) 及 (IV.5.77) 在软 π 介子极限中得到 $\pi^0 \to 2\gamma$ 宽度的理论值为

$$\Gamma^{(Th)}_{\pi^0 \to 2\gamma} = 7.64(2\xi)^2 \text{eV}, \tag{IV.5.84}$$

这里用了 π^0 寿命 $\tau_{\pi^0} = (0.828 \pm 0.057) \times 10^{-16}$ 秒及 98.9% 的分支比. 实验值为

$$\Gamma^{(exp)}_{\pi^0 \to 2\gamma} = (8.04 \pm 0.56)\text{eV}. \tag{IV.5.85}$$

理论值方程 (IV.5.84)，对 $2\xi = 1$，即 Fermi-Yang 模型，量子色动力学及 Han-Nambu-Maki-Hara 模型与实验值符合. 无色夸克模型相差 9 倍. $SU(3)$ 颜色夸克模型在描述 $\pi^0 \to 2\gamma$ 宽度中的成就是使模型得到支持的初始原因之一[59]. 这也暗示反常性在物理上是恰当的.

反常的 Ward-Takahashi 恒等式及可重正性 ABJS 反常性的存在一般会修改包含矢量和轴矢量场与旋量场相互作用的理论结构. 一个特别的结论是，如果反常性不被祓除[60,61,63]，则在例如电磁和弱相互作用统一理论这样的理论重正化程序可能不适合. 例如，考虑标准电弱理论的轻子部分. 已在 § III.2 给出了拉氏函数及 Feynman规则的 R_ξ 规范. 如果所有的正则 Ward-Takahashi 恒等式适合，则理论是可重正化的. 在下面将说明，由于反常性的存在，可重正性被破坏.

考虑 e^+e^- 湮没为二光子的过程

$$e^-(q') + e^+(p') \to \gamma(q) + \gamma(p). \tag{IV.5.86}$$

在微扰展开式中，最低阶过程的振幅由量级 α 的量子色动力学图形给出. 然而到量级 αG_F，弱相互作用开始起作用. 有贡献的图形如图 IV.13 所示，[参看图 III.3 所列举的 Feynman

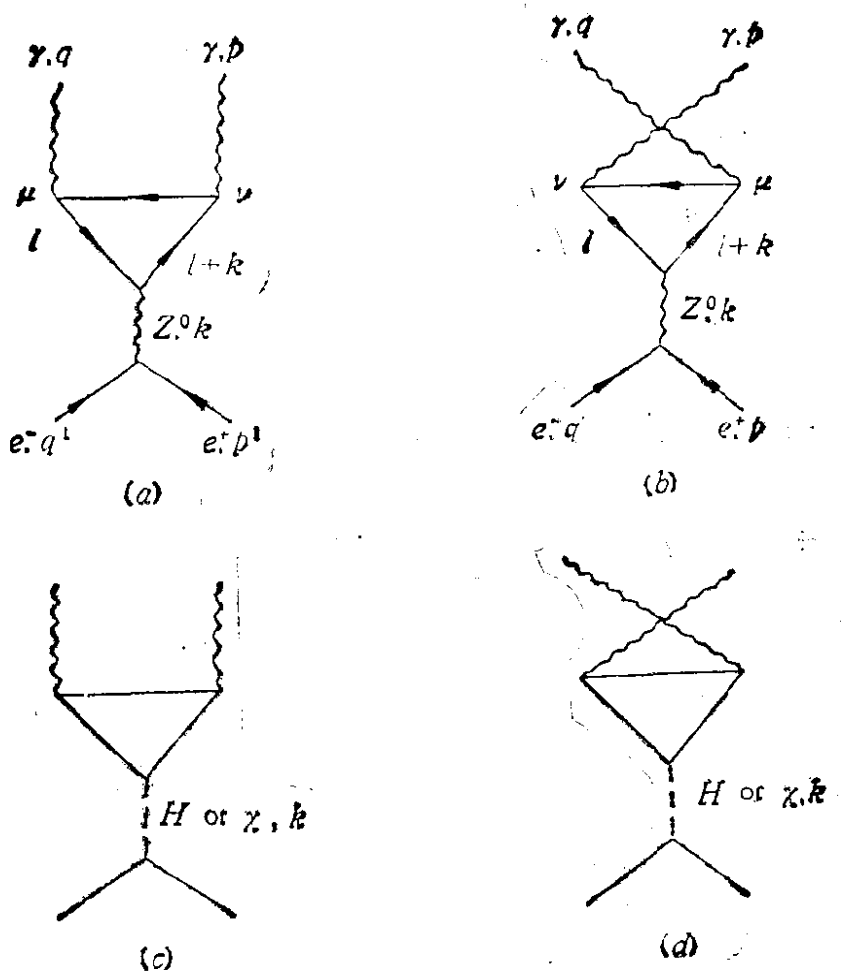


图 IV.17

规则，这里

$$k = q + p = q' + p'.$$

有贡献的中间单粒子为 Z^0，H 和 χ，这里 χ 为虚设粒子，它在 R_ξ 规范中总是伴随着 Z^0. 传播子为 $i(k^2 - m_z^2/\xi_Y)^{-1}$ 的 χ 粒子的效应是抵消 Z^0 传播了从向部分的虚极点(参看图 III.2). 如果由规范变换所得到的正则 Ward-Takahashi 恒等式在微扰论中适合，就会保证这个抵消. 因为反常性的存在使轴矢量 Ward-Takahashi 恒等式不适合，虚极点并未消去. 这个非物理的极点的再现，坏处在于，它使幺正性条件不适合，因此必须要用一个抵消项来消去它. 因为抵消项并不是可重

正化的形式，如下面讨论所阐述的，它也会破坏理论的可重正性.

图 IV.13 图形的振幅，略去光子偏振矢量，可以写为

$$M_{\mu\nu} = T^{(z)}_{\lambda\mu\nu}(q, p)\frac{i}{k^2 - M_z^2}$$
$$\cdot\left[-g^{\lambda\lambda'} + \left(1 - \frac{1}{\xi_z}\right)\frac{k^\lambda k^{\lambda'}}{k^2 - M_z^2/\xi_z}\right]\bar{v}(p')\Gamma_{\lambda'}u(q')$$
$$+ T^{(H)}_{\mu\nu}(q, p)\frac{i}{k^2 - m_H^2}\bar{v}(p')\Gamma_{(H)}u(q')$$
$$+ T^{(\chi)}_{\mu\nu}(q, p)\frac{i}{k^2 - m_z^2/\xi_z}\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q'), \quad \text{(IV.5.87)}$$

这里 $T^{(z)}_{\lambda\mu\nu}$, $T^{(H)}_{\mu\nu}$, 和 $T^{(\chi)}_{\mu\nu}$ 分别代表 Z^0, H 和 χ 中间态的图 IV.13 的三角图形，并且

$$\Gamma_\lambda = -i\frac{g}{4\cos\theta_w}\gamma_\lambda[(4\cos^2\theta_w - 1) + \gamma_5],$$
$$\Gamma_{(H)} = -i\frac{gm_e}{2m_w},$$
$$\Gamma_{(\chi)} = \frac{gm_e}{2m_w}\gamma_5. \quad \text{(IV.5.88)}$$

与讨论有关的振幅部分在 $k^2 = m_z^2/\xi_z$ 处有极点：

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 - M_z^2/\xi_z}\left\{k^\lambda T^{(z)}_{\lambda\mu\nu}(q, p)k^{\lambda'}\bar{v}(p')\Gamma_{\lambda'}u(q')\right.$$
$$\left.\cdot\frac{1 - 1/\xi_z}{k^2 - M_z^2} + T^{(\chi)}_{\mu\nu}(q, p)\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q')\right\}$$
$$= \frac{i}{k^2 - M_z^2/\xi_z}\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q')$$
$$\cdot\left\{T^{(\chi)}_{\mu\nu}(q, p) + i\frac{(1 - 1/\xi_z)}{k^2 - M_z^2}k^\lambda T^{(z)}_{\lambda\mu\nu}(q, p)\right\}, \quad \text{(IV.5.89)}$$

这里

$$T_{\mu\nu}^{(\chi)}(q,p)=-(ie)^2\frac{gm_e}{2m_w}\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\frac{i}{\not l-m_e+i\varepsilon}\right.$$
$$\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not q-m_e+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not k-m_e+i\varepsilon}$$
$$+\gamma_5\frac{i}{\not l-m_e+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not p-m_e+i\varepsilon}$$
$$\left.\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not k-m_e+i\varepsilon}\right\} \qquad \text{(IV.5.90)}$$

及

$$T_{\lambda\mu\nu}^{(z)}(q,p)=-(ie)^2\frac{(-ig)}{4\cos\theta}\int_l \mathrm{Tr}$$
$$\cdot\left\{\gamma_\lambda(4\sin\theta_w-1+\gamma_5)\frac{i}{\not l-m_e+i\varepsilon}\right.$$
$$\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not q-m_e+i\varepsilon}$$
$$\cdot\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not k-m_e+i\varepsilon}$$
$$+\gamma_\lambda(4\sin\theta_w-1+\gamma_5)\frac{i}{\not l-m_e+i\varepsilon}$$
$$\cdot\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not p-m_e+i\varepsilon}$$
$$\left.\cdot\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not k-m_e+i\varepsilon}\right\}. \qquad \text{(IV.5.91)}$$

由方程 (IV.5.30) 及 (IV.5.34)，可以写为

$$k^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{(z)}(q,p)=-iM_z T_{\mu\nu}^{(\chi)}(q,p)+(ie)^2\frac{-ig}{4\cos\theta_w}A_{\mu\nu}(q,p). \qquad \text{(IV.5.92a)}$$

于是

$$\widetilde{M}_{\mu\nu}=\frac{i}{k^2-M_z^2}T_{\mu\nu}^{(\chi)}\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q')$$

$$-\frac{M_z^2(1-1/\xi_z)}{(k^2-m_z^2)(k^2-M_z^2/\xi_z)}$$

$$\cdot\frac{ige^2}{4M_z}\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q')A_{\mu\nu}(q,p),\quad\text{(IV.5.92b)}$$

这里由方程(IV.5.52)给出的 $A_{\mu\nu}$ 为反常项. 当反常性不存在时，$(k^2-m_z^2/\xi_z)^{-1}$ 及规范参数ξ_z有关的项不出现. 但是反常性的存在再引入极点项. 在极限 $k^2\to m_z^2/\xi_z$ 中，

$$\widetilde{M}_{\mu\nu}\to\frac{1}{k^2-M_z^2/\xi_z}\frac{ige^2}{4M_z}\bar{v}(p')\Gamma_{(\chi)}u(q')A_{\mu\nu}(q,p)$$

$$+\text{有限项}.\quad\text{(IV.5.93)}$$

因为极点出现在物理区域内，这意味存在着一个不确定质量 M_z/ξ_z 的粒子. 它并不在原来理论的质量谱中，因此，如果它不被消去，它就会破坏幺正性.

如果把正比于

$$\frac{ge^2}{4m_z}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\mu A^\nu\partial^\lambda A^\rho\chi,\quad\text{(IV.5.94)}$$

的抵消项引入到拉氏函数中，就可以消去这个极点了. 然而，这个抵消项并不是一个可重正化的相互作用. 耦合常数有一个质量量纲. 于是相应于在方程(IV.1.11)中所定义的 δ 为1. 包含相互作用项(IV.5.94)的振幅的表面发散度为

$$D=4+n_\delta-B-\frac{3}{2}F,$$

这里 n_δ 为方程(IV.5.94)所给出形式的顶角数目. 因为D随 n_δ 增加，故理论变为不可重正化的.

由上面的讨论，可以结论，出现在任何过程的中间态内的反常性都是不容许的. 因此，任何可重正化理论必须以无反常的方式来建立. 这对于理论的结构，或在理论的对称性(群)结构中，或在理论的粒子谱中，要强加某些条件[60,61,62]. 在下

面研究非阿贝耳规范理论无反常性条件的细节.

考虑一个非阿贝耳理论，它在一个李群 G 的变换下是不变的，该李群没有必要是单纯的，可能是单群和阿贝耳因子的直乘积. 标准的 $SU(2)\times U(1)$ 模型是 G 的一个例子. 规范玻色子用 G_μ^a, $a=1,2,\cdots,n$ 来表示. 旋量场可以按 G 的不同表示来分类，每个旋量场表示为 ϕ_j，这里 j 代表不同的表示. 规范玻色子旋量场相互作用可以写为

$$\sum_{i,a} g^a\phi_i\gamma^\mu\Gamma_i^a\phi_j G_\mu^a, \tag{IV.5.95}$$

这里

$$\Gamma_i^a\equiv\frac{1}{2}(1-\gamma_5)T_{iL}^a+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)T_{iR}^a. \tag{IV.5.96}$$

数值厄密矩阵 T_L^a 和 T_R^a 分别为左手和右手耦合的李代数表示. 它们满足标准的对易关系

$$[T_{iL}^a, T_{iL}^b]=if_L^{abc}T_{iL}^c,$$
$$[T_{iR}^a, T_{iR}^b]=if_R^{abc}T_{iR}^c,$$

这里 f_L^{abc} 和 f_R^{abc} 为手征李代数的结构常数. 耦合常数 g^a 对属于 G 的一个简单群的 a 一切值都是等同的. 例如，在 $SU(2)\times U(1)$ 理论中，这里 $n=4$，有两个耦合常数，一个是对于 $SU(2)$ 的，另一个是对于 $U(1)$ 的.

考虑包含三个规范玻色子 G_μ^a, G_μ^b 和 G_μ^c 的顶角函数. 可能的反常性出现在包含图 IV.14 所示的形式的费米子圈的高阶图形中，其中不对群指标 a, b 和 c 求和.

图 IV.14 的振幅可写为

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{(j)}(q,p)=-(-ig^ag^bg^c)\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_\lambda\Gamma_j^c\frac{i}{l}\gamma_\mu\Gamma_j^q\frac{i}{l+q}\right.$$
$$\left.\cdot\gamma_\nu\Gamma_j^b\frac{i}{l+k}+\gamma_\lambda\Gamma_j^c\frac{i}{l}\gamma_\nu\Gamma_j^b\frac{i}{l+p}\gamma_\mu\Gamma_j^q\frac{i}{l+k}\right\} \tag{IV.5.97}$$

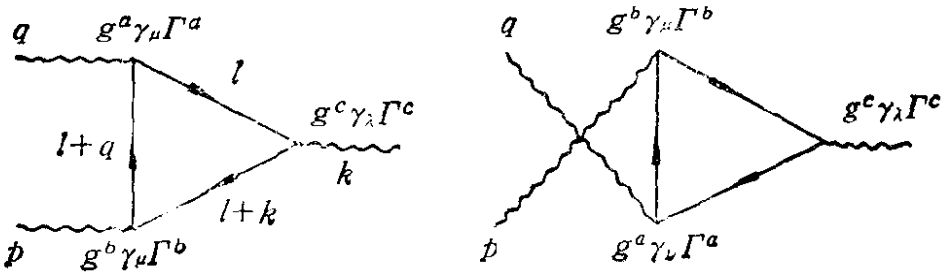


图 IV.18

这里略去了费米子的质量；其理由为下述事实，即，反常性与费米子质量无关. 下面同推导阿贝耳情形的反常性相同的步骤一样，考虑 $k_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(q,k)$. 因为反常性只出现在 AVV 和 AAA 顶角的情形中，在 3 点函数 $(3\text{-}pf)$ 内，(IV.5.97) 有关的部分为

$$\Gamma^{(j)+}_{\lambda\mu\nu}(q,p)=g^ag^bg^c\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_\lambda\gamma_5\Gamma^c_{j(-)}\frac{1}{\not l}\cdot\gamma_\mu\Gamma^a_{j(+)}\frac{1}{\not l+\not q}\gamma_\nu\Gamma^b_{j(+)}\frac{1}{\not l+\not k}+\gamma_\lambda\gamma_5\Gamma^c_{j(-)}\frac{1}{\not l}\gamma_\nu\Gamma^b_{j(+)}\frac{1}{\not l+\not p}\gamma_\mu\Gamma^a_{j(+)}\frac{1}{\not l+\not k}\right\},\tag{IV.5.98}$$

及

$$\Gamma^{(j)-}_{\lambda\mu\nu}(q,p)=g^ag^bg^c\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_\lambda\gamma_5\Gamma^c_{j(-)}\frac{1}{\not l}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma^a_{j(-)}\frac{1}{\not l+\not q}\cdot\gamma_\nu\gamma_5\Gamma^b_{j(-)}\frac{1}{\not l+\not k}+\gamma_\lambda\gamma_5\Gamma^c_{j(-)}\frac{1}{\not l}\cdot\gamma_\nu\gamma_5\Gamma^b_{j(-)}\frac{1}{\not l+\not p}\gamma_\mu\gamma_5\Gamma^a_{j(-)}\frac{1}{\not l+\not k}\right\},\tag{IV.5.99}$$

这里

$$\Gamma^a_{j(\pm)}=\frac{1}{2}(T^a_{jL}\pm T^a_{jR}),\quad \text{等等}.\tag{IV.5.100}$$

用方程 (IV.5.33)—(IV.5.40) 中所述的方法给出

$$k^{\lambda}\Gamma'^{(+)}_{\lambda\mu\nu}(q, p) = -\operatorname{Tr}(\Gamma^{c}_{i(-)}\{\Gamma^{a}_{i(+)}, \Gamma^{b}_{i(+)}\})\frac{1}{2}g^{a}g^{b}g^{c}A_{\mu\nu}(q, p) \tag{IV.5.101}$$

及

$$k^{\lambda}\Gamma^{i(-)}_{\lambda\mu\nu}(q, p) = -\operatorname{Tr}(\Gamma^{c}_{i(-)}\{\Gamma^{a}_{i(-)}, \Gamma^{b}_{i(-)}\})\frac{1}{2}g^{a}g^{b}g^{c}A_{\mu\nu}(q, p). \tag{IV.5.102}$$

由上面的结果,三角反常性不存在的条件为

$$\sum_{i}\operatorname{Tr}(\Gamma^{c}_{i(-)}\{\Gamma^{a}_{i(+)}, \Gamma^{b}_{i(+)}\}) = 0, \tag{IV.5.103}$$

及

$$\sum_{i}\operatorname{Tr}(\Gamma^{c}_{i(-)}\{\Gamma^{a}_{i(-)}, \Gamma^{b}_{i(-)}\}) = 0. \tag{IV.5.104}$$

这些条件可以写为

$$\sum_{i}\operatorname{Tr}[(T^{c}_{iL} - T^{c}_{iR})(\{T^{a}_{iL}, T^{b}_{iL}\} + \{T^{a}_{iR}, T^{b}_{iR}\})] = 0, \tag{IV.5.105}$$

及

$$\sum_{i}\operatorname{Tr}[(T^{c}_{iL} - T^{c}_{iR})(\{T^{a}_{iL}, T^{b}_{iR}\} + \{T^{a}_{iR}, T^{b}_{iL}\})] = 0. \tag{IV.5.106}$$

有三种一般的情形满足上面的条件.

(a) 类矢量相互作用.

在此情形中左手表示和右手表示的代数是等价的,方程 (IV.5.105) 和 (IV.5.106) 自动地被满足. 令 U 为一个幺正矩阵,使

$$T_{iR} = UT_{iL}U^{+}.$$

在方程 (IV.5.105) 中的个别项,即对固定 i 值的项,可以写为

$$\operatorname{Tr}[(T^{c}_{iL} - UT_{iL}U^{+})(\{T^{a}_{iL}, T^{b}_{iL}\} + U\{T^{a}_{iL}, T^{b}_{iL}\}U^{+})]$$

$$= \mathrm{Tr}[-T^c_{iR}\{T^a_{iL}, T^b_{iL}\} + U^+T^c_{iL}U\{T^a_{iL}, T^b_{iL}\}]$$
$$= 0.$$

类似地，在方程 (IV.5.106) 中的项变为

$$\mathrm{Tr}[(T^c_{iL} - T^c_{iR})(\{T^a_{iL}, T^b_{iR}\} + \{T^a_{iR}, T^b_{iL}\})]$$
$$= \mathrm{Tr}[T^b_{iR}\{T^c_{iL}, T^a_{iL}\} + T^a_{iL}\{T^b_{iR}, T^c_{iR}\} - T^a_{iL}\{T^b_{iR}, T^c_{iR}\} - T^b_{iL}\{T^c_{iR}, T^a_{iR}\}]$$
$$= \mathrm{Tr}[T^b_{iR}\{T^c_{iL}, T^a_{iL}\} + T^a_{iR}\{T^b_{iL}, T^c_{iL}\} - U^+T^a_{iL}U\{T^b_{iL}, T^c_{iL}\} - U^+T^b_{iL}U\{T^c_{iL}, T^a_{iL}\}]$$
$$= 0.$$

进一步应该注意，在现在情形下相互作用等价于一个矢量相互作用. 这可以从下面看出来.

令

$$\hat{\phi}_i \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5) + \frac{1}{2}(1+\gamma_5)U\right]\phi_i.$$

于是

$$\sum_{i,a} g^a\phi_i\gamma^\mu T^a\phi_i G^a_\mu \equiv \sum_{i,a} g^a\hat{\phi}_i\gamma^\mu T^a_i\hat{\phi}_i G^a_\mu. \quad \text{(IV.5.107)}$$

右手耦合有等价于左手耦合的代数的模型称为“类矢量的模型”[62].

(b) 安全表示.

在此情形中

$$\mathrm{Tr}(T^c_i\{T^a_i, T^b_i\}) = 0,$$

它与左手和右手的指标无关. 一个特殊的情形是 $SU(2)$ 代数

$$\mathrm{Tr}(\tau^a\{\tau^b, \tau^c\}) = 0.$$

(c) 在更一般的情形下，反常性为零是不同费米子表示反常性相抵消的结果. 于是，对表示的限制更不严格；左手和右手耦合并不出现在相同的表示中.

在下面的讨论中，详细研究 $SU(2)\times U(1)$ 模型中关于反常性不存在的条件，但没有必要限于标准理论．指标 a，b 和 c 可以是 $SU(2)$ 或 $U(1)$ 指标，或二者的混合．有许多情形要加以考虑．其一，左手或右手耦合可能从 $SU(2)$ 或 $U(1)$ 得不到．例如，标准模型中，已从 $SU(2)$ 中丢失了右手耦合．令 $\eta_L^{(a)}$ 和 $\eta_R^{(a)}$ 为 0 或 1．如果左(右)手耦合存在，则 $\eta_L^{(a)}(\eta_R^{(a)})$ 为 1；否则为 0．方程(IV.5.96)的 Γ^a 因子代换为

$$\Gamma^a\to\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\eta_L^{(a)}T_L^a+\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\eta_R^{(a)}T_R^a. \quad \text{(IV.5.108)}$$

反常性不存在的条件，即方程 (IV.5.105) 和 (IV.5.106) 变为

$$\sum_i \mathrm{Tr}[(\eta_{iL}^{(c)}T_{ic}^c-\eta_{iR}^{(c)}T_{iR}^c)(\eta_{iL}^{(a)}\eta_{iL}^{(b)}\{T_{iL}^a,T_{iL}^b\}+\eta_{iR}^{(a)}\eta_{iR}^{(b)}\{T_{iR}^a,T_{iR}^b\}]=0 \quad \text{(IV.5.109)}$$

及

$$\sum_i \mathrm{Tr}[(\eta_{iL}^{(c)}T_{iL}^c-\eta_{iR}^{(c)}T_{iR}^c)(\eta_{iL}^{(a)}\eta_{iR}^{(b)}\{T_{iL}^a,T_{iR}^b\}+\eta_{iR}^{(a)}\eta_{iL}^{(b)}\{T_{iR}^a,T_{iL}^b\})]=0. \quad \text{(IV.5.110)}$$

在 $SU(2)\times U(1)$ 理论中

$$T_{iL}^a=T_{iR}^a=\frac{\tau^a}{2} \quad \text{对于 } SU(2),$$

$$T_{iL}^a=Y_{iL}^a/2,\ T_{iR}^a=Y_{iR}^a/2 \quad \text{对于 } U(1),$$

这里 Y_{iL}^a 为表示费米子场的超荷的对角矩阵．所有的费米子场分组为具有两个元素的列矢量．若设 Q_i 为表示费米子场的电荷的对角矩阵，则

$$Q_i=\eta_{iL}\frac{\tau^3}{2}+\eta'_{iL}\frac{Y_{iL}}{2}=\eta_{iR}\frac{\tau^3}{2}+\eta'_{iR}\frac{Y_{iR}}{2}, \quad \text{(IV.5.111)}$$

这里若 a 为 $SU(2)$ 指标，则 $\eta_{iR}^{(a)}\equiv\eta_{iL}$ 及 $\eta_{iR}^{(a)}\equiv\eta_{iR}$；若 a 为 $U(1)$ 指标，则 $\eta_{iL}^{(a)}\equiv\eta'_{iL}$ $\eta_{iR}^{(a)}\equiv\eta'_{iR}$．条件 (IV.5.109) 和 (IV.5.110) 约化为

$$\sum_j (\eta_{jL} - \eta'_{jR}) \mathrm{Tr}\, Q_j = 0, \qquad \text{(IV.5.112)}$$

$$\sum_j (\eta_{jL} - \eta'_{jR}) \mathrm{Tr}\, Q_j = 0. \qquad \text{(IV.5.113)}$$

这里求和（对于 j）是对表示的求和，并且

$$\sum_j (\eta_{jL}\eta'_{jL} - \eta_{jR}\eta'_{jR}) \mathrm{Tr}\, Q_j = 0. \qquad \text{(VI.5.114)}$$

对于标准模型，$\eta_{jR} = 0$，$\eta_{jL} = \eta'_{jR} = \eta'_{jL} = 1$，上面的条件被满足，若下述条件成立：

$$\sum_j \mathrm{Tr}\,(Q_{j,\text{轻子}} + Q_{j,\text{夸克}}) = 0, \qquad \text{(IV.5.115)}$$

这里轻子和夸克的电荷矩阵为

$$Q_{j,\text{轻子}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_{j,\text{夸克}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

于是方程 (IV.5.115) 变为

$$0 = \sum_j \mathrm{Tr}\, Q_{j,\text{轻子}} + 3 \sum_{j,\text{味}} Q_{j,\text{夸克}} = N_{\text{轻子}} - N_{\text{夸克}},$$

这里与夸克电荷求和相联系的因子 3 是颜色因子．这意味着，为使方程 (IV.5.114) 成立，在轻子区段内双态的数目是等于夸克区段内双态的数目．因此，由可重正性所要求的不存在反常性意味着轻子强子对称性．所以，即使不用巨统一方案，由于可重正性，在轻子和强子之间有一定的联系存在．

结束本节之前，必须作两点注释．

(a) γ_5 问题．

如 't Hooft 和 Veltman 所给出的，并在这里讨论三角反常性所用的，在 n 维空间内规定 γ_5 的形式只是出现在文献中的一种规定．在所考虑的 n 点函数 (n-pf) 中包含 γ_5 为奇数时，这个规定是适合的．然而，对具有 γ_5 为偶数的 n 点函数的情形，这个规定并不适合，导致结果与已知的某些结果[63]

不一致. 因此,不同的规定是必要的.

对于包含 γ_5 为偶数的图形，规定要使 γ_5 与所有的 γ_μ 反对易，而不管 γ_μ 是否是在 4 维空间内或在其余的 $n-4$ 维内. 对不同的情形作相反的规定确实不是令人满意的情况. 在目前并不清楚是否存在唯一的规定. γ_5 不同方案的讨论可以在文献 [63—67] 中找到.

(b) 对反常性的高阶效应.

用例子来说,在 (IV.5.51) 中所给出的反常性是由最低阶计算的. 自然要问，高阶效应是否会修改最低阶结果. 答案是,不用修改反常性的形式方程 (IV.5.51). 受高阶效应影响的是耦合常数的值. 当包括高阶效应时，要用相应的重正化耦合常数代换出现在最低阶计算中的裸耦合常数. 由于这一点,中性 π 介子衰变为二光子的速率的预言方程 (IV.5.84) 是一个严格的低能定理. 对三角反常性的高阶效应在阿贝耳模型中已广泛地进行了讨论（参阅文献 67—69). 对于非阿贝耳情形，参阅文献 [71] 及 [72].

(c) 三角反常性推导的最近进展.

Fujikawa[72] 最近提出用泛函方法推导反常发散关系 (IV.5.9a). 该方法类似于 § 1.4 中推导自然 Ward-Takahashi 恒等式所用的方法. 然而，Fujikawa 用不同方法处理了泛函积分测度，并且求出由场变数改变 (I.4.13) 所引起的雅可比行列式方程与矢量场有关,而不唯一.粗略地说，Fujikawa 是用包含相互作用项的全部 Dirac 方程的本征函数来展开泛函积分测度，而在 § 1.4 中泛函积分测度是用自由 Dirac 方程的本征函数来展开的. 文献 [73] 及 [74] 指出，Fujikawa 的方法对于包含矢量相互作用及标量相互作用(类质量项)的理论是可以应用的. 在讨论更一般的，包含轴矢量和膺标量相互作用的理论中,例如由拉氏函数方程 (IV.5.60) 所描述的

理论，某种修正是必要的。

参 考 文 献

IV.1 A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, English translation from Russian by G. M. Volkoff (Interscience, New York; 1965).

IV.2 J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Spring-verlag, Berlin; 1976) pp. 457—460.

IV.3 W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434(1949).

IV.4 S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc. London*, **A66**, 129(1953).

IV.5 R. W. Brown, C. C. Shih, and Bing-Lin Young, *Phys. Rev.*, **186**, 1491 (1969).

IV.6 D. Zacrep and Bing-Lin Young, *Phys. Rev.*, **D12**, 513(1975).

IV.7 J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York; 1965) pp. 198—200.

IV.8 例如：参看： R. P. Feynman, *Theory of Fundamental Process*, (Benjamin, New York; 1961) p. 143.

IV.9 G'tHooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44**, 189(1972).

IV.10 C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Phys. Lett.*, **40B**, 566(1979); *Nuovo Cimento*, **12B**, 20(1972).

IV.11 J. F. Ashmore, *Nuovo Cimento Lett.*, **4**, 289(1972).

IV.12 G. M. Cicuta and E. Montaldi, *Nuovo Cimento Lett.*, **4**, 329(1972).

IV.13 G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 849(1975).

IV.14 G. 'tHooft and M. Veltman, "Diagrammar", in *particle Interactions at Very High Energies*, edited by D. Speiser, F. Halzen, and J. Weyers (Plenum Press, New York; 1974) pp. 177—322.

IV.15 G. 'tHooft and M. Veltman, quoted in Ref. IV. 13, p. 864.

IV.16 I. M. Gelfand and G. E. Shirlov, *Generalized Functions*, Vol. I: English translation by E. Saletan (Academic Press, New York; 1964) p. 68.

IV.17 F. Bloch and A. Nordisieck, *Phys. Rev.*, **52**, 53(1937).
在此文中首先发表了理解红外发散性的主要概念。

IV.18 红外发散性及其消去的早期历史评述可查阅：J. M. Jauch and F. Rohrlich, *Helv. Phys. Acta*, **27**, 613(1954) and in Ref. IV. 2, Ch. 16.

IV.19 T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.*, **133**, B1549(1964).

IV.20 T. Kinoshita and A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **113**, 1652(1959).
在此文中首先指出存在质量奇点。

IV.21 D. R. Yennie, in *Lectures on Strong and Electromagnetic Interactions*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, 1963 (Brandeis University, Waltham, Mass; 1963) Vol. I, p. 165.

IV.22 T. Kinoshita, *J. Math. Phys.*, 3, 650(1962); Lectures in Theoretical

Physics, University of Colorado (Interscience, New York; 1961) p. 121.
IV.23 D. R. Yennie, S. C. Frantschi, and H. Suura, *Ann. Phys.*, **13**, 379(1961).
IV.24 K. E. Eriksson, *Nuovo Cimento*, **19**, 1010(1961).
IV.25 G. Grammer, Jr. and D. R. Yennie, *Phys. Rev.*, **D8**, 4332(1973).
IV.26 Y. P. Yao, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 653(1976).
IV.27 T. Appelquist, J. Carazzone, H. Kluberg-Stern, and M. Roth, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 768(1975); *ibid*, **36**, 1161(E) (1975).
IV.28 L. Tyburski, *Nucl. Phys.*, **B116**, 291(1976).
IV.29 L. P. Korthals Altes and E. De Rafael, *Phys. Lett.*, **62B**, 320(1976).
IV.30 A. Sugamoto, *Phys. Rev.*, **D16**, 1065(1977).
IV.31 C. E. Carneiro, M. Day, J. Frenkel, J. C. Taylor, and M. T. Thomaz, *Nucl. Phys.*, **B183**, 445(1981). 这是这些作者讨论非阿贝耳规范理论中 Bloch-Nordsieck 定理失效问题一系列文章中的最近一篇.
IV.32 C. Di'lieto, S. Gendron, I. G. Halliday, and C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys.*, **B183**, 223(1981).
IV.33 C. A. Nelson, *Nucl. Phys.*, **B181**, 41(1981); *ibid*, **B186**, 187(1981).
IV.34 例如, 参看: I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York; 1980) p. 89 (Formula 2.284).
IV.35 Ref. IV.34, p. 299.
IV.36 V. Chung, *Phys. Rev.*, **140**, B1110(1965).
IV.37 T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, **9**, 315(1968); *Phys. Rev.*, **173**, 1527 (1968); **174**, 1882(1968); and **175**, 1624(1968).
IV.38 D. Zwanziger, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 934(1973); *Phys. Rev.*, **D7**, 1082 (1973); **D11**, 3481 and 3504(1975).
IV.39 S. S. Schweber, *Phys. Rev.*, **D7**, 3114(1973).
IV.40 N. Papanicolaou, *Ann. Phys.*, **89**, 423(1975).
IV.41 F. Rohrlich, *Phys. Rev.*, **D12**, 1832(1975).
IV.42 T. Murota, *Prog. Theor. Phys.*, **24**, 1109(1960).
IV.43 J. Dollard, *J. Math. Phys.*, **5**, 729(1964).
IV.44 P. P. Kulish and L. D. Fadeev, *Theor. Math. and Phys*, **4**, 745(1970).
IV.45 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **82**, 664(1951).
IV.46 S. Adler, *Phys. Rev.*, **177**, 2426(1969) and in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, ed. S. Deser, M. Grisaru and H. Pendelton, (MIT Press, Cambridge, Mass.; 1970).
IV.47 J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento*, **60A**. 47(1969); R. Jackiw, in *Lectures on Current Algebra and Its' Applications* (Princeton Univ., Princeton, New Jersy; 1972).
IV.48 K. Wilson, *Phys. Rev.*, **181**, 1909(1969).
IV.49 W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **184**, 1848(1969).
IV.50 J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37B**, 95(1971).

IV.51 M. S. Chanowitz and J. Ellis, *Phys. Lett.*, **40B**, 397(1972); *Phys. Rev.*, **D7**, 2490(1973).

IV.52 S. L. Adler and R. F. Dashen, *Current Algebra and Applications to Particle Physics* (Benjamin, New York; 1968).

IV.53 D. G. Sutherland, *Nucl. Phys.*, **B2**, 433(1967).

IV.54 M. Veltman, *Proc. Roy. Soc. London*, **A301**, 107(1967).

IV.55 E. Fermi and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **76**, 1739(1949).

IV.56 M. Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **139**, B1006(1965).

IV.57 Z. Maki, *Prog. Theor. Phys. (kyoto)* **31**, 331(1964).

IV.58 Y. Hara, *Phys. Rev.*, **134**, B701(1964).

IV.59 H. Fritzech and M. Gell-Mann, in *Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics*, ed. J. D. Jackson and A. D. Roberts (Fermi Nat. Acc. Lab., Batavia; 1972), Vol. 2, p. 135; H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Phys. Lett.*, **47B**, 365(1973).

IV.60 C. Bouchiat, J. Illiopoulos, and Ph. Meyer, *Phys. Lett.*, **38B**, 519(1972).

IV.61 D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D6**, 477(1972).

IV.62 H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.*, **D6**, 429(1972).

IV.63 W. A. Bardeen, R. Gastmans, and B. Lantrup, *Nucl. Phys.*, **B46**, 319 (1972).

IV.64 D. A. Akyeampong and R. Delbourgo, *Nuovo Cimento*, **17A**, 578(1973); *ibid*, **19A**, 219(1974).

IV.65 P. Beitenlohner and D. Maison, *Commun. Math. Phys.*, **52**, 11(1977).

IV.66 S. Gottlieb and J. T. Donohue, *Phys. Rev.*, **D20**, 3378(1979).

IV.67 M. Chanowitz, M. Furman, and I. Hinchliffe, *Nucl. Phys.*, **B159**, 225 (1979).

IV.68 S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **182**, 1517(1969).

IV.69 B.-L. Young, T. F. Wong, G. Gournaris, and R. W. Brown, *Phys. Rev.*, **D4**, 348(1971).

IV.70 S. L. Adler, R. W. Brown, T. F .Wong, and B.-L. Young, *Phys. Rev.*, **D4**, 1787(1971).

IV.71 W. A. Bardeen in *Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics*, ed. J. D. Jackson and A. Roberts (Fermi Nat. Acc. Lab., Batavia; 1972), vol. 2, p. 295.

IV.72 G. Costa, T. Marinucci and M. Tonin, *Nuovo Cimento*, **38A**, 373(1977).

IV.73 K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1195(1979); *Phys. Rev.*, **D21**, 2848 (1980).

IV.74 A. Andrianov, L. Bonora, and R. Gamboa-Saravi, *Phys. Rev.*, **D26**, 2821 (1982).

IV.75 D. W. McKay and Bing-Lin Young, "Comment on Derivation of Anomalous Ward-Takahashi Identities in the Functional Integration Formulation of Field Theory", Ames Laboratory, Iowa State University research report.

第 V 章　微扰解的高阶修正和红外奇点的消除

耦合常数的高阶过程是场论微扰解的积分部分．它们对物理上感兴趣的量比仅由树图所表示的量提供较好的近似．然而，如同在第 IV 章中所讨论的一样，高阶过程必然包括有闭合回路积分在内的 Feynman 图形，因此这些过程大多数都是发散的．在第 IV 章内所讨论的正规化方案可以容洽地定义发散积分，因此发散被孤立起来了，并且最后被消除了．在本章内，将把发散吸收在场量、耦合常数及质量的重新定义中来说明消除发散的方法．该方法是最低非平凡阶的重正化方法．量子电动力学作为说明例子具有足够的复杂性，本章将考虑它．在第 IV 章内已考虑了量子色动力学重正化的基本原理．

由方程 (IV.1.10) 及 (IV.1.11)，在量子电动力学中一个过程的表面发散度是由所包含的外线数目确定的，而不管微扰的量级：

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F,$$

这里 B 和 F 分别为外光子和外费米子线的数目．首先，有必要把发散积分加以编目分类．不包含闭合回路的树图都是有限的．对于包含一个闭合回路积分的 Feynman 图形，情况是简单的，因为 $D<0$ 保证相应的回路积分是收敛的．有两个以上闭合回路的 Feynman 图形比较复杂；其中 $D<0$ 并不保证 Feynman 积分收敛，因为整个发散度可能小于零，但

是图形可能包含会引起整个积分发散的发散部分。这些情况的例子已在第 IV 章与图 IV.3 一起进行了讨论。

不管上面所提到的复杂性，对于一个给定过程的一切高阶贡献都可以纳入下面四类过程之一，或一类以上：

(a) 在图 V.1 的图形中描述了电子自能图。这些图形是电子传播子的辐射修正。

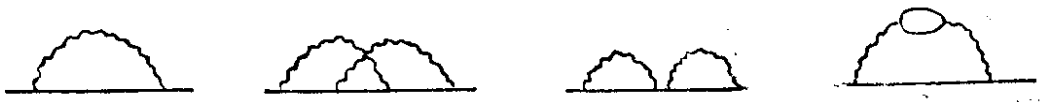


图 V.1

(b) 图 V.2 所给出的真空极化图形是光子传播子的修正。



图 V.2

(c) 顶角修正在图 V.3 中给出。

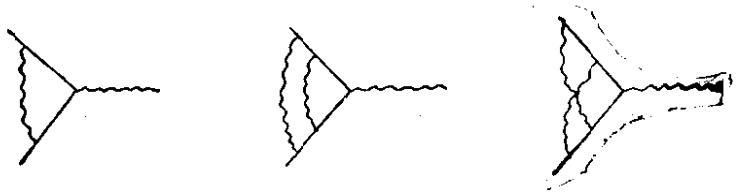


图 V.3

(d) 光子散射过程（图 V.4）。

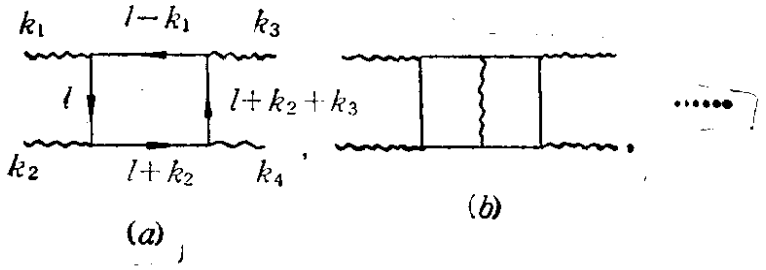


图 V.4

包含奇数数目的光子光子散射由于电荷共轭不变性而为零，如图 V.5 所示。

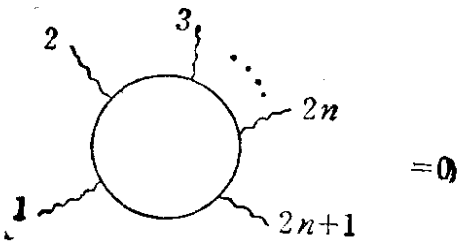


图 V.5

这称为 Furry 定理[1]。

过程 (a)，(b) 和 (c) 的图形都会引起发散积分。包含一个圈的过程 (d) 的图形在一回路中由于规范不变性的要求可能成为有限的。图形 (a)，(b) 和 (c) 的发散可以由重正化程序消去。用重正化规定的全部方法，可以使量子电动力学中的一切过程的 S 矩阵元和 Green 函数成为有限。

本章对最低非平凡阶详细讨论过程 (a)，(b) 及 (c)。一般的重正化方案和量子色动力学将在下章讨论。在本章的最后两节将讨论如何消去红外发散。在第 4 节末简短讨论包含一个圈图光子光子的散射。

V.1 电子的自能

如序中所提到的，图 V.6a 所示形式的图形，称为电子的自能图形，它出现在量子电动力学的一切过程的高阶修正中。因为在该图形中外费米子线对于现在的考虑是固定的，故只需要考虑其中外线被截断的图形部分，如图 V.6b 所示。自能图的截断型式用 $-i\Sigma(p)$ 来表示，这里 p 为外费米子动量。

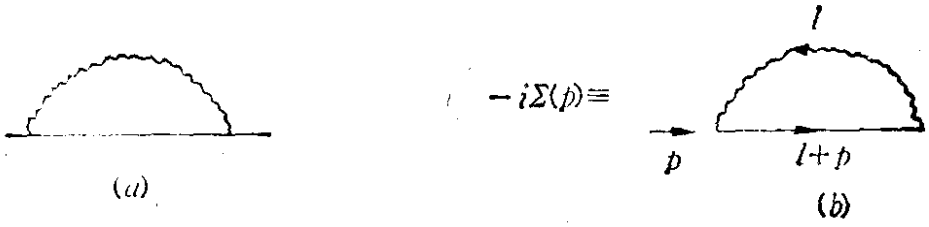


图 V.6

按照 Feynman 规则和图 V.6b 的动量编号，截断的电子自能图形为

$$-i\Sigma^{(1)}(p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{l+p-m+i\varepsilon}$$
$$\times(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{l^2+i\varepsilon}\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{l^\mu l^\nu}{l^2}\right], \tag{V.1.1}$$

这里 ξ 为规范参数，上标 (1) 表示只考虑最低阶(第二阶)辐射修正的事实.在本节的后一部分和本章的其它各节，将评述 e 的一切阶的辐射修正效应. 在那里将删去上标(1). 例如，对于 e 的一切阶的一粒子不可约电子自能图形的振幅将表示为 $\Sigma(p)$. 分子和分母的简单维数计算表明该积分是线性发散的. 因此，它必须要正规化. 可以应用的正规化方案是维数正规化和 Feynman 截止方案 (参看 IV.2). 因为量子电动力学的重正化对于包括质壳上的一切粒子都按惯例做过了，因此重正化的耦合常数和质量可以认为是它们相应的实验值，在 $\Sigma(p)$ 中除已经出现的紫外发散以外，某些个别项中引入了远红外奇点. 由于这个原因，Feynman 截止方法连同一个虚设的光子"质量"来使远红外奇点正规化是比较方便的. 然而，将利用维数正规化，以后将简短地讨论 Feynman 截止方法的应用.

$\Sigma^{(1)}(p)$通过维数正规化的计算 在方程(V.1.1)中紫外

发散的正规化可以用 IV.3 节中所讨论的直接方式来完成.在 $\Sigma^{(1)}(p)$ 中红外奇点的正规化并不是如此直接的. 理由在于，方程 (V.1.1) 原来的形式对于一般的 p 并不具有红外奇点；为了把 $\Sigma^{(1)}(p)$ 的紫外发散孤立起来，红外奇点是由于质壳上减除程序的结果，这将在下面加以解释.

在一般 n 维内，方程 (V.1.1) 变为

$$-i\Sigma^{(1)}(p)=\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}(-ie\mu^{\varepsilon}\gamma_\mu)\frac{i[\not l+\not p+m]}{(l+p)^2-(m-i\varepsilon)^2}$$
$$\times(-ie\mu^{\varepsilon}\gamma_\nu)\frac{i}{l^2-i\varepsilon}\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{l^\mu l^\nu}{l^2}\right], \tag{V.1.2}$$

这里

$$\varepsilon\equiv 2-\frac{n}{2},$$

并且根据方程 (IV.3.31)，为了保持电荷 e 为无量纲的，引入质量因子 μ^{ε}. $g_{\mu\nu}$ 项的分子按照方程 (IV.3.49) 可以重写为

$$\gamma_\mu(\not l+\not p+m)\gamma^\mu=-q(1-\varepsilon)(\not l+\not p)+(4-2\varepsilon)m.$$

按照方程 (IV.1.14) 及 (IV.1.15) 组合分母因子以后，方程 (V.1.2) 变为

$$\Sigma^{(1)}(p)=\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int_0^1dx\int d^nl$$
$$\times\left\{\frac{2(1-\varepsilon)(\not l+\not p)-(4-2\varepsilon)m}{(l^2-2l\cdot p_x-\Delta_x)^2}+(1-\xi)\right.$$
$$\times\frac{\not l-\not p+m}{(l^2-2l\cdot p_x-\Delta_x)^2}+2(1-x)(1-\xi)$$
$$\left.\times\frac{2(l\cdot p)\not l}{(l^2-2l\cdot p_x-\Delta_x)^3}\right\}, \tag{V.1.3}$$

这里

$$p_x\equiv -xp,$$
$$\Delta_x\equiv x(m^2-p^2)-i\varepsilon. \tag{V.1.4}$$

为了使方程 (V.1.3) 的积分简化，作积分变数的改变，使分母为 l 的偶数幂函数。

$$l \to l + p_x.$$

在分子中 l 为奇数幂的项被删去了。与方程 (IV.3.45) 相联系来解释这个程序。特别是方程 (V.1.3) 最后一项的分子变为

$$\begin{aligned}(l\cdot p)\not{l} &\to [(l+p_x)\cdot p](\not{l}+\not{p}_x)\\ &\to (l\cdot p)\not{l} + (p_x\cdot p)\not{p}_x\\ &\to \frac{1}{n}\not{p}l^2 + (p_x\cdot p)\not{p}_x,\end{aligned} \tag{V.1.5}$$

这里已用了方程 (IV.3.47)。现在方程 (V.1.3) 变为

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}(p) = {}& \frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int_0^1 dx\int d^n l\\ &\times\left\{\frac{2(1-\varepsilon)(\not{p}_x-\not{p})-(4-2\varepsilon)m}{[l^2-(\Delta_x+p_x^2)]^2} + (1-\xi)\right.\\ &\times\frac{\not{p}_x-\not{p}+m}{[l^2-(\Delta_x+p_x^2)]^2} + 4(1-\xi)(1-x)\\ &\left.\frac{\frac{1}{n}l^2\not{p}+(p_x\cdot p)\not{p}_x}{[l^2-(\Delta_x+p_x^2)]^3}\right\}.\end{aligned} \tag{V.1.6}$$

现在利用表 IV.3 的公式可以进行回路积分。令

$$\begin{aligned}a &\equiv p_x^2+\Delta_x\\ &= x^2m^2-(p^2-m^2)x(1-x)-i\varepsilon.\end{aligned} \tag{V.1.7}$$

于是

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)}(p) = {}& \frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}i(\sqrt{\pi})^n\int_0^1 dx\left\{\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}\frac{1}{a^\varepsilon}\right.[2(1-\varepsilon)\\ &\times(1-x)\not{p}-(4-2\varepsilon)m+(1-\xi)\\ &\left.\times(-(1+x)\not{p}+m)]-4(1-\xi)(1-x)\right.\end{aligned}$$

$$\times\left[-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{2\Gamma(3)}\frac{\not p}{a^{\varepsilon}}+\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)}\cdot\frac{x^2p^2\not p}{a^{1+\varepsilon}}\right]\Bigg\}$$

$$=-\frac{e^2}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a^{\varepsilon}}\right.$$

$$\times[2(1-\varepsilon)(1-x)\not p-(4-2\varepsilon)m$$

$$+(1+\xi)(-2x\not p+m)]-2(1-\xi)$$

$$\left.\times(1-x)\frac{x^2p^2\not p}{a^{1+\varepsilon}}\right\}. \qquad \text{(V.1.8)}$$

为了继续进行，必须解决如何使 $\Sigma^{(1)}(p)$ 的发散孤立起来. 对于带质量的费米子理论，由赋予在费米子质壳上的条件，就可以实现发散的分离. 如果所考虑的传播子是外部的，并且在质壳上，例如，它将靠着波函数 $u(p)$. 这意味着 $\Sigma^{(1)}(p)$ 可以下面的方式展开:

$$\Sigma^{(1)}(p)=A^{(1)}+(\not p-m)[B^{(1)}-C^{(1)}(p)], \qquad \text{(V.1.9)}$$

这里 $A^{(1)}$ 及 $B^{(1)}$ 为常数. 计算 $A^{(1)}$ 的程序是使 $\Sigma^{(1)}(p)$ 遵从质壳上的条件: 令 $p^2=m^2$，并且对于 $\Sigma^{(1)}(p)$ 乘以一个旋量波函数; 因此挨着波函数的一切 $\not p$ 用费米子质量 m 代替. 这个程序在运算上将表示为

$$A^{(1)}=\Sigma^{(1)}(p)\big|_{\not p=m}.$$

类似地，由 $\Sigma^{(1)}(p)$ 减去 $A^{(1)}$，并除以 $(\not p-m)$，就可以计算出常数 $B^{(1)}$. 于是所得的量遵从质壳条件.以这个公式 $C^{(1)}$ 满足下面的条件

$$C^{(1)}(p)\big|_{\not p=m}=0. \qquad \text{(V.1.10)}$$

关于孤立 $A^{(1)}$，$B^{(1)}$ 及 $C^{(1)}(p)$ 的整个程序将称为质壳上的减除程序.

上面所叙述的减除程序首先意味着使 $\Sigma^{(1)}(p)$ 中的项 $(\not p-m)$ 分离出来:

$$\Sigma^{(1)}(p)=\frac{-\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{(\not p-m)\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a^{\varepsilon}}(2(1-\varepsilon)(1-x)-2x(1-\xi))\right.$$

$$\left.-2(1-\varepsilon)(1-x)x^2\frac{b^2+m(\not{p}+m)}{a^{1+\varepsilon}}\right]$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\frac{m}{a^{\varepsilon}}\left[-2(1+x)+2\varepsilon x+(1-\xi)(1-2x)\right]$$

$$\left.-(1-\xi)(1-x)\frac{2x^2m^3}{a^{1+\varepsilon}}\right\}. \qquad \text{(V.1.11)}$$

现在可以直接进行计算常数 $A^{(1)}$：删去正比于 $\not{p}-m$ 的项，并且通过方程 (V.1.11) 令 $p^2=m^2$。于是

$$A^{(1)}=\Sigma^{(1)}(p)|_{\not{p}=m}$$

$$=-\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{m}{b^{\varepsilon}}\right.$$

$$\times[-2(1+x)+2\varepsilon x+(1-\xi)$$

$$\times(1-2x)]-(1-\xi)(1-x)$$

$$\left.\times\frac{2x^2m^3}{b^{1+\varepsilon}}\right\}, \qquad \text{(V.1.12)}$$

这里

$$b\equiv x^2m^2.$$

取极限 $\varepsilon\to 0$，得到

$$A^{(1)}=-\frac{\alpha}{4\pi}[1-\varepsilon\gamma+\varepsilon\ln(4\pi\mu^2)]m$$

$$\cdot\int_0^1 dx\left\{\frac{1}{\varepsilon}[-2(1+x)+(1-\xi)(1-2x)]\right.$$

$$+2x-[-2(1+x)+(1-\xi)(1-2x)]$$

$$\left.\times\ln(x^2m^2)-2(1-\xi)(1-x)\right\}$$

$$=\frac{3\alpha}{4\pi}m\left[\frac{1}{\varepsilon}-\gamma-\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)+\frac{4}{3}\right]. \qquad \text{(V.1.13)}$$

注意，$A^{(1)}$ 与规范参数 ξ 无关。

为了计算 $B^{(1)}$，把方程(V.1.12)中所给出 $A^{(1)}$ 的形式应用到目前的情况是比较方便的，

$$\Sigma^{(1)}(p) - A^{(1)} = -\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx$$
$$\times\left\{(\not p - m)\left[\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{a^{\varepsilon}}((1-\varepsilon)(1-x)-(1-\xi)x)\right.\right.$$
$$-2(1-\xi)(1-x)x^2\frac{p^2+m(\not p+m)}{a^{1+\varepsilon}}+\frac{m}{\varepsilon}$$
$$\times[-2(1+x)+2\varepsilon x+(1-\xi)(1-2x)]$$
$$\times\left[\frac{1}{a^{\varepsilon}}-\frac{1}{b^{\varepsilon}}\right]-(1-\xi)(1-x)2x^2m^3$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{a^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{b^{1+\varepsilon}}\right]\right\}. \qquad \text{(V.1.14)}$$

可以重写出下面的量

$$\frac{1}{a^{\varepsilon}}-\frac{1}{b^{\varepsilon}}=\varepsilon\int_0^1 dy\,\frac{b-a}{[ay+b(1-y)]^{1+\varepsilon}}$$
$$=\varepsilon(\not p - m)\int_0^1 dy\,\frac{x(1-x)(\not p+m)}{[ay+b(1-y)]^{1+\varepsilon}}, \qquad \text{(V.1.15)}$$

及

$$\frac{1}{a^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{b^{1+\varepsilon}}=(1+\varepsilon)(\not p - m)\int_0^1 dy$$
$$\times\frac{x(1-x)(\not p+m)}{[ay+b(1-y)]^{2+\varepsilon}}. \qquad \text{(V.1.16)}$$

方程可以重写（V.1.12）为

$$\Sigma^{(1)}(p) - A^{(1)} = (\not p - m)[B^{(1)} - C^{(1)}(p)]$$
$$=-\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{a^{\varepsilon}}[(1-\varepsilon)\right.$$
$$\left.\times(1-x)-(1-\xi)x]-2(1-\xi)\right.$$

$$\times (1-x)x^2\frac{p^2+m(\not{p}+m)}{a^{1+\varepsilon}}+[-2(1+x)$$

$$+2\varepsilon x+(1-\xi)(1-2x)]\cdot\int_0^1 dy$$

$$\times\frac{x(1-x)m(\not{p}+m)}{[ay+b(1-y)]^{1+\varepsilon}}-2(1-\xi)(1-x)$$

$$\times(1+\varepsilon)\int_0^1 dy\,\frac{x^3(1-x)m^3(\not{p}+m)}{[ay+b(1-y)]^{1+\varepsilon}}\Big\}. \tag{V.1.17}$$

在一般动量情形中，即，$p^2\neq m^2$，出现在 $\Sigma^{(1)}(p)$ 中的唯一奇点是紫外奇点。然而，在 $B^{(1)}$ 的计算中，看来是把质壳上的条件应用于红外奇点。这可以如下看出：对于 $p^2=m^2$

$$a\to x^2m^2,$$

$$ay+b(1-y)\to x^2m^2. \tag{V.1.18}$$

因此积分形式

$$\int_0^1\frac{dx}{x}$$

出现在 $B^{(1)}$ 及 $C^{(1)}(p)$ 中。紫外发散和红外发散二者都通过维数来正规化。对于紫外发散，

$$\varepsilon\to 0^+,$$

对于红外发散，

$$\varepsilon\to 0^-.$$

因此两个 ε 必须是有区别的。紫外正规化因子将用 ε_u 来表示，红外发散因子用 ε_l 来表示。因为两种类型的发散并不在同一项中出现，故它们肯定可以分开。现在通过分解出因子 $(\not{p}-m)$ 以后，通过对于 (V.1.14) 应用质壳上的减除程序可以得到 $B^{(1)}$：

$$B^{(1)}=-\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_u}\Gamma(1+\varepsilon_u)\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{\varepsilon_u}[1-\varepsilon_u)\right.$$

$$\times (1-x)-(1-\xi)x]\frac{1}{(x^2m^2)^{\varepsilon_u}}-6(1-\xi)$$

$$\times (1-x)\frac{x^2m^2}{(x^2m^2)^{1+\varepsilon_u}}\Big\}-\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_l}\Gamma(1+\varepsilon_l)$$

$$\times\int_0^1 dx\Big\{[-2(1+x)+2\varepsilon_l x+(1-\xi)$$

$$\times (1-2x)]\frac{2x(1-x)m^2}{(x^2m^2)^{1+\varepsilon}}-4(1-\xi)$$

$$\times (1-x)^2(1+\varepsilon_l)\frac{x^5m^4}{(x^2m^2)^{2+\varepsilon_l}}\Big\}$$

$$=-\frac{\alpha}{4\pi}\Big\{\xi\left[\frac{1}{\varepsilon_u}-\gamma-\ln\left(\frac{m^4}{4\pi\mu^2}\right)\right]-4(1-\xi)$$

$$+2\Big\}-\frac{\alpha}{4\pi}\Big\{(3-\xi)\left[\frac{1}{\varepsilon_l}-\gamma-\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]$$

$$+6(1-\xi)\Big\}. \qquad \text{(V.1.19)}$$

组合紫外和红外项[当然，两种类型的项对于有限量的分开是不确定的]，给出

$$B^{(1)}=\frac{\alpha}{4\pi}\Big\{-\frac{\xi}{\varepsilon_u}-\frac{3-\xi}{\varepsilon_l}+3\left[\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]$$

$$-2(1-\xi)-4\Big\}. \qquad \text{(V.1.20)}$$

现在可以计算出 $\Sigma^{(1)}(p)$ 的紫外有限部分为

$$C^{(1)}(p)=\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\Big\{\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\times[(1-\varepsilon)(1-x)-(1-\xi)x]\left[\frac{1}{a^\varepsilon}-\frac{1}{b^\varepsilon}\right]$$

$$-2(1-\xi)(1-x)x^2\left[\frac{p^2+m(\not p+m)}{a^{1+\varepsilon}}\right.$$

$$-\frac{3m^2}{b^{1+\varepsilon}}\Big]+[-2(1+x)+2\varepsilon x+(1-\xi)$$
$$\times(1-2x)]\Big[\int_0^1 dy\,\frac{x(1-x)m(\not p+m)}{[ay+b(1-y)]^{1+\varepsilon}}$$
$$-\frac{2m^2x(1-x)}{b^{1+\varepsilon}}\Big]-2(1-\xi)(1-x)(1+\varepsilon)$$
$$\times\Big[\int_0^1 dy\,\frac{x^3(1-x)m^3(\not p+m)}{[ax+b(1-y)]^{2+\varepsilon}}$$
$$-\frac{2x^3(1-x)m^4}{b^{2+\varepsilon}}\Big]\Big\}. \qquad \text{(V.1.21)}$$

例如利用方程 (V.1.15) 及 (V.1.16) 的恒等式，可以分解出一个项 $(\not p-m)$. 注意，在 Landau 规范中，$\xi=0$，$B^{(1)}$ 为紫外有限的，但是，对于 $\xi=3$，$B^{(1)}$ 及 $C^{(1)}(p)$ 二者都是红外有限的. $\xi=3$ 称为 Fried-Yennie 规范[2].

关于 Feynman 截止方法的短评 如上所提到的，可用 Feynman 截止方法来计算电子自能图形，Feynman 截止方法特别在 Feynman 规范中，即，$\xi=1$ 时是方便的. 在该方法中，光子传播子修正如下：

$$\frac{1}{l^2+i\varepsilon}\to\lim_{\substack{\Lambda\to\infty\\ \lambda\to 0}}\left[\frac{1}{l^2-\lambda^2+i\varepsilon}-\frac{1}{l^2-\Lambda^2+i\varepsilon}\right]. \qquad \text{(V.1.22)}$$

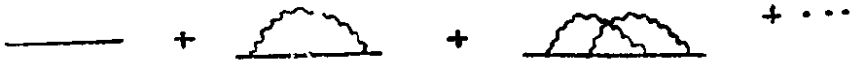
这里引入了 Λ 使紫外发散截止，对于红外发散，引入了 λ. 在积分的任何部分，凡是当它们收敛时，就可以取极限 $\lambda\to 0$，及 $\Lambda\to\infty$，但是如果产生发散，它们就仍保持有限. 维数正规化和 Feynman 截止方法之间关系如下：

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\to\frac{1}{\varepsilon_u}+\frac{2}{\varepsilon_l}$$
$$-3\left[\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]-\frac{1}{2}. \qquad \text{(V.1.23)}$$

电子传播子的重正化 全电子传播子 $\bar S_F(p)$ 可以图形表

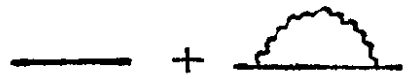
示为

$i\bar{S}_F(p) =$ 

$=$ 

(V.1.24)

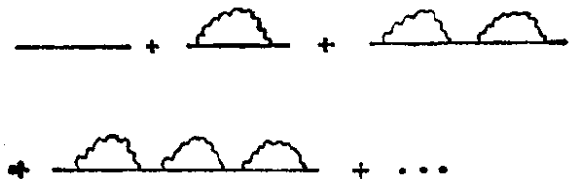
近似到辐射修正的第二阶为

$i\bar{S}_F(p) =$ 

$= iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p)]iS_F(p) + \cdots.$

(V.1.25)

为了理解该方程的意义，考虑链近似：

$i\bar{S}_F(p) =$ 

$$= iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p)]iS_F(p) + iS_F(p) \times [-i\Sigma^{(1)}(p)]iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p)]iS_F(p) + \cdots$$

$$= \frac{i}{\not p - m} + \frac{i}{\not p - m}\Sigma^{(1)}(p)\frac{i}{\not p - m} + \frac{i}{\not p - m} \times \Sigma^{(1)}(p)\frac{i}{\not p - m}\Sigma^{(1)}(p)\frac{i}{\not p - m} + \cdots$$

$$= \frac{i}{(\not p - m - \Sigma^{(1)}(p))}. \qquad \text{(V.1.26)}$$

为了得到上式最后一行，重复使用了下面的恒等式

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}b\frac{1}{a+b}, \qquad \text{(V.1.27)}$$

这里 a 和 b 为算符，矩阵或通常的 C 数。利用 (V.1.10)，我们写出

$$iS_F(p) = \frac{1}{\not p - m - A^{(1)} - (\not p - m)B^{(1)} + (\not p - m)C^{(1)}(p)}. \tag{V.1.28}$$

现在用 $\delta m^{(1)}$ 表示 $A^{(1)}$，由 (V.1.11)

$$\delta m^{(1)} \equiv A^{(1)} = \frac{3\alpha}{4\pi} m \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{4}{3}\right], \tag{V.1.29}$$

它与所用的规范无关. 因为 $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ 及 $C^{(1)}(p)$ 都是 α 量级的，对于这个量级，(V.1.28) 的分子可以重写为

$$\begin{aligned}\not p - m - A^{(1)} - (\not p - m)B^{(1)} + (\not p - m)C^{(1)}(p) \\ = (\not p - m - \delta m^{(1)})[1 - B^{(1)} - C^{(1)}(p)] \\ + O(\alpha^2).\end{aligned} \tag{V.1.30}$$

我们定义

$$B^{(1)} = 1 - Z_2^{-1} + O(\alpha^2), \tag{V.1.31}$$

这里 Z_2 称为波函数重正化常数. 以后将会明白它取这个名字的理由. 到 α 的量级

$$\begin{aligned}Z_2 &= 1 + B^{(1)} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_l} + 3\left[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left. - 2(1-\xi) - 4\right\} + O(\alpha^2).\end{aligned} \tag{V.1.32}$$

现在

$$i\bar{S}_F(p) = \frac{i}{(\not p - m - \delta m^{(1)})[1 + Z_2 C^{(1)}(p)]} + O(\alpha^2). \tag{V.1.33}$$

为了理解上面操作的物理意义，令 $\not p \to m + \delta m$

$$i\bar{S}_F(p)\Big|_{\not p \to m + \delta m^{(1)}} = \frac{iZ_2}{\not p - m - \delta m^{(1)}}. \tag{V.1.34}$$

与自由传播子 $S_F(p)$ 相比较，自由传播子在 $p^2 = m^2$ 处有一

个极点，全传播子的极点被位移到重正化质量

$$m_R \equiv m + \delta m^{(1)}, \qquad \text{(V.1.35)}$$

它被认为是**物理质量**(到 α 的量级). 出现在拉氏函数中作为一个参数的 m 称为**裸质量**，$\delta m^{(1)}$ 称为**自质量**. 把物理质量认为是全传播子的极点位置的这种程序称为**质量重正化**. 这里质量重正化是相加的. 有其他的重正化程序存在，其中质量重正化是相乘的，例如，$m = m_R Z^{-1}$[3]. 注意，全传播子 $\bar{S}_F(p)$ 在 $p^2 = m_R^2$ 处的留数为 Z_2.

现在拉氏函数 (II.2.2) 通过 m_R 重写为

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I,\\
&\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\\
&\mathscr{L}_I = -e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi + \delta m\bar{\psi}\psi. \qquad \text{(V.1.36)}
\end{aligned}$$

质量抵消项 $\delta m\bar{\psi}\psi$ 变为相互作用拉氏函数的一部分. 方程 (V.1.36) 形式的拉氏函数可以应用在微扰论中，称为具有物理质量的微扰展开式，倘若进行如下的 Feynman 规则的修改:

(a) 自由传播子现在为

$$iS_F(p) = \frac{i}{p\!\!\!/ - m_R + i\varepsilon}. \qquad \text{(V.1.37)}$$

(b) 添加了一个表示项 $\delta m\bar{\psi}\psi$ 的附加的图形 V.7.

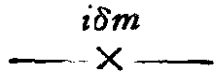


图 V.7

在最低的非平凡阶中，δm 被认为是由 (V.1.29) 所给出的量级 α. 在具有物理质量的微扰展开式中，一个自能图形往往伴随着图 V.7. 例如，到 α 的量级，现在电子传播子的辐射修

正包括图 V.8 所示的两项。

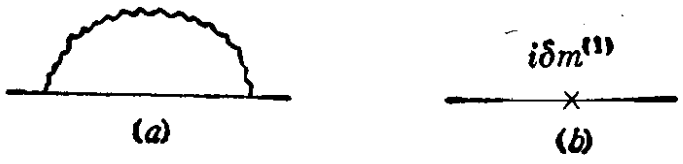


图 V.8

上面图形之和，包括外传播子在内，为

$$\frac{i}{\not p - m_R + i\varepsilon}\left[-i\Sigma^{(1)}(p) + i\delta m^{(1)}\right]\frac{i}{\not p - m_R + i\varepsilon}. \tag{V.1.38}$$

利用 (V.1.9) 及 (V.1.29)，得到

$$-i\Sigma^{(1)}(p) + i\delta m^{(1)} = -i[B^{(1)} - C^{(1)}(p)] \times (\not p - m_R). \tag{V.1.39}$$

现在裸质量用物理质量代替，并且在自能图形中，发散常数 $A^{(1)}$ 不出现。

外费米线的重正化——波函数重正化

考虑一条外电子线，它的末端之一与一个 Feynman 图的内部连接，它还将乘以一个电子波函数。如图 V.9 所示，这里影斑表示 Feynman 图的其余部分。

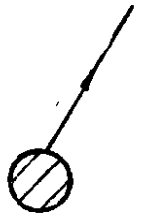


图 V.9

这条外费米子线也可能受到由于相互作用的修改。在具有物理质量的微扰展开式中，图 V.10 所给出的图形说明几个低阶的修正。

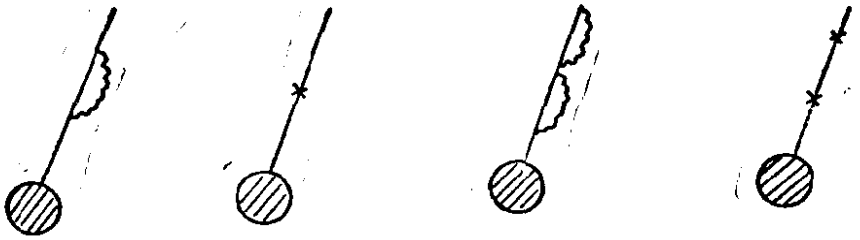


图 V.10

到第二阶，对于裸外线的修正要添加图 V.11 的图形。



图 V.11

图 V.11 过程的振幅[对于一条出射电子线]为

$$\bar{u}(p)[-i\Sigma(p)+i\delta m^{(1)}]\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}$$
$$=\bar{u}(p)[B^{(1)}(\not p-m_R)-C^{(1)}(p)(\not p-m_R)]$$
$$\times\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}=\bar{u}(p)[B^{(1)}(\not p-m_R)]$$
$$\times\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}. \qquad \text{(V.1.40)}$$

由于质壳上的条件方程 (V.1.40) [现在用物理质量表示]，正比于 $C^{(1)}(p)$ 的项无疑为零。然而，正比于 $B^{(1)}$ 的项是不确定的。由于质壳上的条件，它或为零或为有限的，取决与项 $(\not p-m_R)$ 是否首先作用在旋量波函数 $\bar{u}(p)$ 上或者被自由电子传播子消去有关。为了得到正确的答案，考虑图 V.12 所示的链近似，它给出

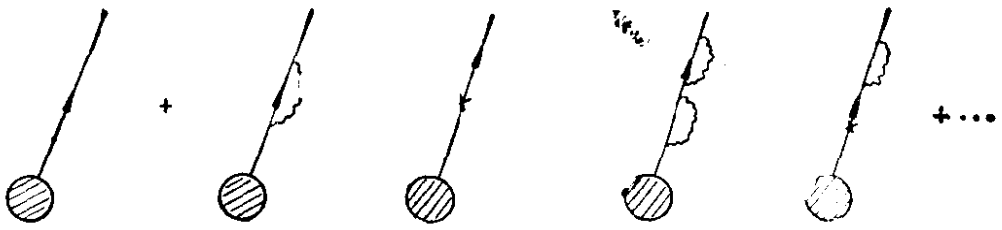


图 V.12

$$\bar{u}(p)\left\{1+[-i\Sigma^{(1)}(p)+i\delta m^{(1)}]\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}\right.$$
$$+[-i\Sigma^{(1)}(p)+i\delta m^{(1)}]\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}$$
$$\left.\times[-i\Sigma^{(1)}(p)+i\delta m^{(1)}]\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}+\cdots\right\}$$
$$=\bar{u}(p)\frac{i}{1-[-i\Sigma^{(1)}(p)+i\delta m^{(1)}]\dfrac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}} \tag{V.1.41}$$
$$=\bar{u}(p)(1+B^{(1)})=\bar{u}(p)Z_2+O(\alpha^2). \tag{V.1.42}$$

因此，看来到第二阶(事实上是到所有阶)的辐射修正要通过因子 Z_2 来修正外费米子的旋量波函数. 然而，这里必须谨慎些，不必承认它是正确的. 外线的辐射修正仅仅是

$$\bar{u}(p)\to\sqrt{Z_2}\bar{u}(p). \tag{V.1.43}$$

为使这个修正比较容易理解，引入修正到第二阶的重正化传播子 $\tilde{S}_F(p)$，(对于所有阶仍然适合)

$$\tilde{S}_F(p)\equiv Z_2\tilde{S}_F(p). \tag{V.1.44}$$

于是类似于裸(自由)传播子

$$\tilde{S}_F(p)\Big|_{b=m_R}=\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}. \tag{V.1.45}$$

因为

$$i\tilde{S}_F(x)=\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle,$$

可以定义重正化的费米子场算符：至今所用的 $\tilde{\psi}$ 和 $\tilde{\bar{\psi}}$ 与场算符 ψ 及 $\bar{\psi}$（所谓未重正化的场算符）的关系为

$$\psi(x) \equiv \sqrt{Z_2}\tilde{\psi}(x), \quad \bar{\psi}(x) \equiv \sqrt{Z_2}\tilde{\bar{\psi}}(x). \quad \text{(V.1.46)}$$

于是

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = \sqrt{Z_2}\langle 0|\tilde{\psi}(x)|p\rangle = \sqrt{Z_2}e^{-ipx}u(p),$$
$$\langle p|\bar{\psi}(x)|0\rangle = \sqrt{Z_2}e^{ipx}\bar{u}(p), \quad \text{(V.1.47)}$$

这里 $|p\rangle$ 为一费米子态。可以看出，正如下面所论述的只有一个因子 $\sqrt{Z_2}$ 与外波函数相联系。一条外费米子线必须与一条玻色子（光子）线和另外的费米子线相连接，如图 V.13 所示。

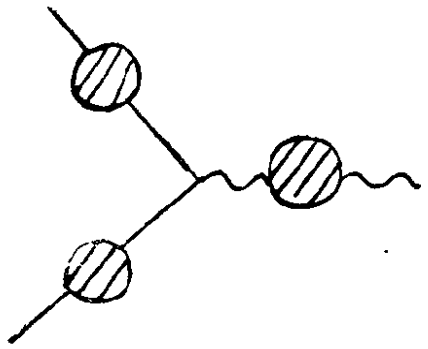


图 V.13

全因子 Z_2 可以对于外线完全没有贡献。它的一部分应该属于顶角。因此，在(V.1.42)中出现的因子 Z_2 中，一个因子 $\sqrt{Z_2}$ 对外波函数有贡献，而另外的因子 $\sqrt{Z_2}$ 对顶角有贡献。

注意，$A^{(1)}$ 及 $B^{(1)}$ 的实际值在不同的重正化方案中是不同的。然而，$C^{(1)}$ 在所有的方案中是普适的。在不同的重正化方案中，$A^{(1)}$ 和 $B^{(1)}$ 值的不同是有限的部分；发散部分的系数都是相同的。参看方程 (V.1.23)。

应该提到，至今所讨论的二阶结果的一般性质，当包括所有各阶的效应在内时，对于一般情形也成立。方程 (V.1.9) 的形式中费米子自能部分 $\Sigma(p)$ 的分解，发散常数 A 及 B 与质量和波函数重正化的关系，及外费米子线重正化，正像它们相应的二阶情形一样。

在 Landau 规范中无质量的费米子的二阶辐射修正为零 使最终结果变为简单的两种规范为 Feynman 规范 $\xi =$

1 及 Landau 规范 $\xi = 0$.

Landau 规范的结果特别简单，由方程 (V.1.6) 可以看出，特别是在零质量费米子的情形，此时 $\Sigma^{(1)}(p)$ 为零，

$$\Sigma^{(1)}(p)\Big|_{\substack{\xi=0\\m=0}} = 0. \qquad \text{(V.1.48)}$$

可以结论，在无质量的旋量电动力学中，旋量传播子到 e 的第二阶并不改变；并且

$$Z_2\Big|_{\substack{\xi=0\\m=0}} = 1 + O(e^4).$$

这个事实成立并可应用于二阶量子色动力学计算中，其中低位夸克，上夸克，下夸克和奇夸克，可以认为是无质量的. 近似到夸克胶子耦合常数的第二阶，夸克自能修正是类似于电子自能相应于同样阶的修正，除一个平凡的非阿贝耳群因子以外. 因此，在夸克的零质量极限中，夸克在 Landau 规范中并不会受到胶子的二阶辐射修正. 这会使计算简化；因此 Landau 规范是一个应用方便的规范.

规范相关性 前面的讨论表明，质量抵消项 $\delta m^{(1)} = A^{(1)}$ 与规范无关，但是重正化常数 $Z_2 = (1 - B^{(1)})^{-1}$ 及有限项 $C^{(1)}(p)$ 与规范有关. 然而，直到第二阶，Z_2 的规范相关性确实与正规化方法有关. 如果利用维数正规化方程 (IV.3.35) 的 'tHooft-Veltman 猜测，则 $B^{(1)}$ 的规范相关项可以用如下方法来消去. 考虑方程 (V.1.2) 中 $\Sigma^{(1)}(p)$ 的规范有关项.

$$(1-\xi)\int d^n l \, \frac{1}{(l^2)^2} \not{l} \frac{1}{\not{l} + \not{p} - m + i\varepsilon} \not{l}, \qquad \text{(V.1.49)}$$

利用恒等式

$$\not{l} = (\not{l} + \not{p} - m) - (\not{p} - m).$$

方程 (V.1.49) 变为

$$(1-\xi)\int\frac{d^nl}{[l^2]^2}\left\{(\not l+\not p-m)-2(\not p-m)\right.$$

$$\left.+(\not p-m)\frac{1}{\not l+\not p-m+i\varepsilon}(\not p-m)\right\}. \quad (V.1.50)$$

利用 'tHooft-Veltman 猜测，头两项为零。于是方程 (V.1.50) 约化为

$$(1-\xi)\int\frac{d^nl}{[l^2]^2}(\not p-m)\frac{1}{\not l+\not p-m+i\varepsilon}(\not p-m). \quad (V.1.51)$$

方程 (V.1.3) 现在可以写为

$$-i\Sigma^{(1)}(p)=\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\left\{\gamma_\mu\frac{1}{\not l+\not p-m+i\varepsilon}\gamma^\mu\right.$$

$$+\frac{1}{l^2}(1-\xi)(\not p-m)\frac{1}{\not l+\not p-m+i\varepsilon}$$

$$\left.\times(\not p-m)\right\}. \quad (V.1.52)$$

在该形式中发散包括在第一个规范无关的项内。规范有关的项只对有限部分有贡献。方程 (V.1.51) 相应的 $A^{(1)}$，$B^{(1)}$ 及 $C^{(1)}(p)$ 可以由前面的表示式得到。$A^{(1)}$ 仍然由方程 (V.1.13) 给出，$B^{(1)}$ 由方程 (V.1.19) 令 $\xi=1$ 得到。有限项 $C^{(1)}(p)$ 并不改变，由方程 (V.1.21) 给出。

应该注意，上面并没有证明 $B^{(1)}$ 是规范无关的。它只说明，在维数正规化方案中，规范参数可以援引 'tHooft-Veltman 猜测由 $B^{(1)}$ 来解决。

V.2 真空极化

光子传播子也受到辐射修正，叫做真空极化。对于 e 的最低阶，真空极化图形在图 V.14 中给出，

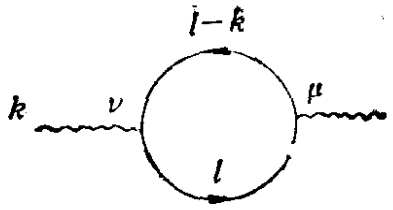


图 V.14

并且相应的 Feynman 振幅表示为 $ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(p)$. 按照 Feynman 规则

$$ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = -\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{(-ie\gamma_\mu)\frac{i}{\not l - m_R + i\varepsilon}\right.$$
$$\left.\times(-ie\gamma_\nu)\frac{i}{\not l - \not k - m_R + i\varepsilon}\right\} = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx$$
$$\times\int d^4l\,\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not l + m_R)\gamma_\nu(\not l - \not k + m_R)]}{[l^2 - 2l\cdot k_x - \Delta_x]^2}, \quad \text{(V.2.1)}$$

这里

$$k_x \equiv xk,$$
$$\Delta_x \equiv m_R^2 - xk^2. \quad \text{(V.2.2)}$$

到 e 的这个量级，应用物理电子质量 m_R 是等价于应用裸质量，差异是在 e^2 的较高阶. 取迹

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not l + m_R)\gamma_\nu(\not l - \not k + m_R)]$$
$$= 4[2l_\mu l_\nu - l_\mu k_\nu - k_\mu l_\nu - g_{\mu\nu}$$
$$\times(l^2 - l\cdot k - m_R^2). \quad \text{(V.2.3)}$$

我们有

$$ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\int d^4l$$
$$\times\frac{2l_\mu l_\nu - l_\mu k_\nu - k_\mu l_\nu - g_{\mu\nu}(l^2 - l\cdot k - m_R^2)}{(l^2 - 2l\cdot k_x - \Delta_x)^2}$$

$$\text{(V.2.4)}$$

上面的积分是平方发散的，并且将用维数方案来正规化

$$ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) \equiv -\frac{4e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int_0^1 dx\int d^nl$$

$$\times\frac{2l_\mu l_\nu - l_\mu k_\nu - k_\mu l_\nu - g_{\mu\nu}(l^2 - l\cdot k - m_R^2)}{(l^2 - 2l\cdot k_x - \Delta_x)^2}$$

$$= -\frac{4e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} i(\sqrt{\pi})^n\int_0^1 dx\left\{-\frac{\Gamma(-1+\varepsilon)}{2\Gamma(2)}\right.$$

$$\times\frac{2g_{\mu\nu}}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon-1}} + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}\frac{2k_{x\mu}k_{x\nu}}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon}} - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}$$

$$\times\frac{k_{x\mu}k_\nu + k_\mu k_{x\nu}}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon-1}} - g_{\mu\nu}\left[-\frac{\Gamma(-1+\varepsilon)}{2\Gamma(2)}\right.$$

$$\times\frac{n}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon-1}} + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}\frac{k_x^2}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon}} - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}$$

$$\left.\left.\times\frac{k\cdot k_x}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon}} - \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}\frac{m_R^2}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon}}\right]\right\}$$

$$= -\frac{i4e^2\mu^{2\varepsilon}}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^1 dx\frac{\Gamma(\varepsilon)}{(\Delta_x + k_x^2)^{\varepsilon}}\left\{-g_{\mu\nu}[m_R^2\right.$$

$$-(\Delta_x + k_x^2)] - g_{\mu\nu}(k_x^2 - k\cdot k_x) + 2k_{x\mu}k_{x\nu}$$

$$\left.-k_{x\mu}k_\nu - k_\mu k_{x\nu}\right\}, \qquad \text{(V.2.5)}$$

于是

$$e^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = \frac{2\alpha}{\pi}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1 dx x(1-x)$$

$$\times\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{\Delta_x + k_x^2}{4\pi\mu^2}\right)\right], \qquad \text{(V.2.6)}$$

它自动地满足规范不变性，即

$$k^\mu\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = k^\nu\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = 0. \qquad \text{(V.2.7)}$$

因此它可以写为

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) \equiv (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu})\Pi^{(1)}(k^2), \qquad \text{(V.2.8)}$$

这里

$$e^2\Pi^{(1)}(k^2) \equiv \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\right.$$

$$- \ln\left(\frac{m_R^2 - x(1-x)k^2}{4\pi\mu^2}\right)\Big\}. \qquad \text{(V.2.9)}$$

为使发散孤立起来，令

$$\Pi^{(1)}(k^2) = \Pi^{(1)}(0) + \Pi_c^{(1)}(k^2), \qquad \text{(V.2.10)}$$

这里 $\Pi^{(1)}(0)$ 包含发散项，并且 $\Pi_c^{(1)}(k^2)$ 为有限的，

$$e^2\Pi^{(1)}(0) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\} = \frac{\alpha}{3\Pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\}. \qquad \text{(V.2.11)}$$

恢复 $i\varepsilon$ 项为

$$e^2\Pi_c^{(1)}(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\ln\left[1 - x(1-x)\times\frac{k^2}{m_R^2} - i\varepsilon\right], \qquad \text{(V.2.12)}$$

有

$$\Pi_c^{(1)}(0) = 0. \qquad \text{(V.2.13)}$$

光子传播子的重正化 全光子传播子用 $\bar{D}_F(k)$ 来表示，它有图 V.15 所示的微扰展开式

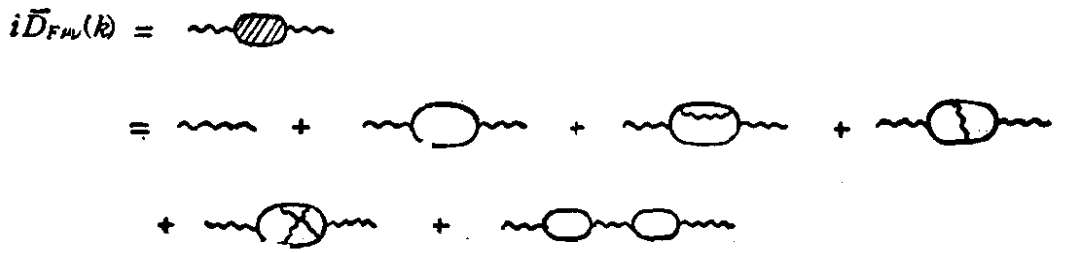
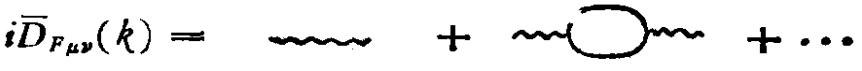


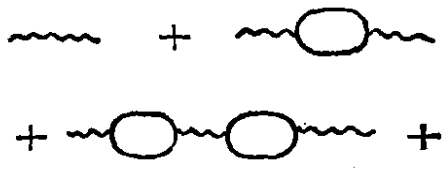
图 V.15

到第二阶，它可以写为



$$= iD_{F\mu\nu}(k) + iD_{F\mu\sigma}(k)\{ie^2\Pi^{(1)\sigma\tau}(k)\}$$
$$\times iD_{F\tau\nu}(k) + \cdots. \qquad \text{(V.2.14)}$$

全光子传播子可以在链近似中计算出来:

$i\bar{D}_{F\mu\nu}(k) =$ 

$$+ \cdots$$

$$= iD_{F\mu\nu}(k) + iD_{F\mu\sigma}(k)[ie^2\Pi^{(1)\sigma\tau}(k)]iD_{F\tau\nu}(k)$$
$$+ iD_{F\mu\sigma}(k)[ie^2\Pi^{(1)\sigma\lambda}(k)]iD_{F\lambda\rho}(k)$$
$$\times [ie^2\Pi^{(1)\rho\tau}(k)]iD_{F\tau\nu}(k) + \cdots$$
$$= iD_{F\mu\nu}(k) - e^2D_{F\mu\sigma}(k)\Pi^{(1)\sigma\tau}(k)i\bar{D}_{F\tau\nu}(k)$$
$$= iD_{F\mu\nu}(k) + \frac{e^2}{k^2}\Pi_{\mu}^{(1)\lambda}(k)i\bar{D}_{F\lambda\nu}(k), \qquad \text{(V.2.15)}$$

这里最后一行是利用自由光子传播子的显示展开式及$\Pi_{\mu\nu}(k)$的规范不变性方程 (V.2.7) 得到的. 可以利用方程 (V.2.8) 写出

$$i\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = iD_{F\mu\nu}(k) + \frac{e^2}{k^2}\Pi^{(1)}(k)$$
$$\times (k_\mu k^\lambda - g_\mu^\lambda k^2)i\bar{D}_{F\lambda\nu}(k). \qquad \text{(V.2.16)}$$

为了继续进行, 需要对 $\bar{D}_{F\mu\nu}(k)$ 附加约束. 方程 (V.2.14) 乘以 k^μ, 给出

$$ik^\mu\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = ik^\mu D_{F\mu\nu}(k)$$
$$= i\xi\frac{k_\nu}{k^2}. \qquad \text{(V.2.17)}$$

虽然这个结果是在链近似中得到的, 但事实上它是 Ward-Takahashi 恒等式的一般结果, 正如本节末阶证明的那样. 通过方程 (V.2.17), 现在 (V.2.16) 可以重写为

$$\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2[1 + e^2\Pi^{(1)}(k)]}\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$
$$- \frac{\xi e^2\Pi^{(1)}(k^2)k_\mu k_\nu}{(k^2)^2[1 + e^2\Pi^{(1)}(k^2)]}$$

$$= \frac{1}{k^2[1 + e^2\Pi^{(2)}(k^2)]}\left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] - \xi\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}. \qquad \text{(V.2.18)}$$

全光子传播子的形式与裸光子传播子的形式是不同的. 然而，由于规范不变性，正比于 $k_\mu k_\nu$ 的项对 S 矩阵元或 Green 函数并无贡献. 这可以由下面的论证得到: 考虑出现在图 V.16 所示过程中的一个内光子传播子. 在光子传播子中正

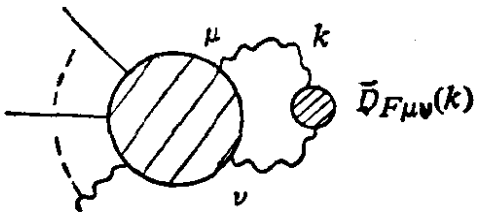


图 V.16

比于 $k_\mu k_\nu$ 的项的贡献为小于光子传播子的原来振幅乘以在分别用 μ 及 ν 编号的顶角处的 k_μ 及 k_ν. 因此这为零. 在全光子传播子方程 (V.2.16) 中，项 $k_\mu k_\nu$ 称为规范有关项，因此并无贡献. 这个结果表明，Green 函数和 S 矩阵元是与规范无关的. 应该注意，光子的全传播子及自由传播子在 Landau 规范中有相似的形式.

电荷重正化 应该记住，$\Pi^{(1)}(0)$ 是发散的. 写出

$$e^2\Pi^{(1)}(0) = Z_3^{-1} - 1,$$

这里 Z_3 称为光子波函数重正化常数，由方程 (V.2.11) 可以写出

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{3\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\}. \qquad \text{(V.2.19)}$$

现在，(V.2.18) 到 e^2 量级可以重写为

$$\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-g_{\mu\nu}Z_3}{k^2[1 + Z_3e^2\Pi_c^{(1)}(k)]} + (\text{规范有关项}), \qquad \text{(V.2.20)}$$

由方程 (V.2.13)，取极限 $k^2 \to 0$，全光子传播子约化为

$$\bar{D}_{F\nu\mu}(k) \xrightarrow[k^2\to 0]{} -\frac{g_{\mu\nu}Z_3}{k^2} + (\text{规范有关项}). \quad (V.2.21)$$

因此，已经看到，传播子的极点仍然出现在 $k^2 = 0$ 处，除重正化因子 Z_3 以外，恰如裸光子一样. 光子没有质量重正化. 因子 $1 + Z_3 e^2 \Pi_c^{(1)}(k^2)$ 在方程 (V.2.29) 下面将加以考虑. 重正化效应必须使传播子在 $k^2 = 0$ 极点处的留数改变.

为了理解发散常数 Z_3 的意义，应该考虑二个带电的 Dirac 粒子在低能量的 Coulomb 散射. 当包括由于真空极化的修正在内时，在光子传播子的链近似中，它用图 V.17 的图形来表示：

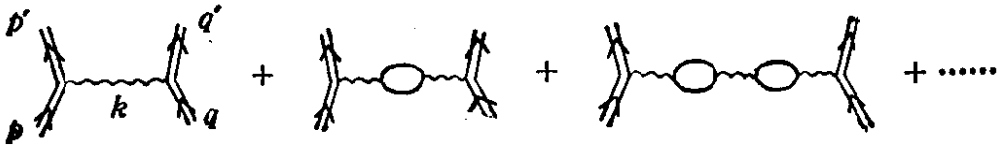


图 V.17

该过程的振幅为

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma_\mu)u(p)\,i\bar{D}_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(q')(-ie\gamma_\nu)u(q) \\ &= \bar{u}(p')(-ie\gamma_\mu)u(p)\,\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2[1 + e^2\Pi^{(1)}(k^2)]} \\ &\quad \times \bar{u}(q')(-ie\gamma_\nu)u(q), \end{aligned} \quad (V.2.22)$$

这里 $k = p' - p = q - q'$. 正比于 $k_\mu k_\nu$ 的项已删去了，它给出的贡献为零.

对于低能量散射，即是，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q} \to 0$，

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) &\simeq \bar{u}(p')\gamma_0 u(p)\delta_{\mu 0}, \\ \bar{u}(q')\gamma_\nu u(q) &\simeq \bar{u}(q')\gamma_0 u(q)\delta_{\nu 0}, \end{aligned} \quad (V.2.23)$$

及

$$k^2 = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 = -\boldsymbol{k}^2 + 0\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{M^2}\right), \quad (V.2.24)$$

这里 M^2 为外费米子的质量。于是

$$1 + e^2\Pi(k^2) = 1 + e^2\Pi^{(1)}(0) + e^2\Pi_c^{(1)}(k^2)$$
$$= Z_3^{-1} + e^2\Pi_c^{(1)}(k^2). \qquad \text{(V.2.25)}$$

对于 $k^2/m^2 \ll 1$，由 (V.2.12)

$$e^2\Pi_c^{(1)}(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\left[-\frac{k^2}{m_R^2}x(1-x)\right]$$
$$= \frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m_R^2}. \qquad \text{(V.2.26)}$$

略去正比于 k^2/m^2 的项，方程 (V.2.22) 约化为

$$T_{fi} = i(Z_3e^2)\bar{u}(p')\gamma_0 u(p)\frac{1}{k^2}\bar{u}(q')\gamma_0 u(q). \qquad \text{(V.2.27)}$$

这是具有电荷 $\sqrt{Z_3}e$ 的粒子的 Coulomb 散射。它意味着下面的认证

$$e_R = \sqrt{Z_3}e, \qquad \text{(V.2.28)}$$

e_R 称为重正化的电荷，譬如说，认为是 Rutherford 实验中所测量的物理电荷。全光子传播子可以写为

$$\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-g_{\mu\nu}Z_3}{k^2[1 + e_R^2\Pi_c(k^2)]} + (\text{规范有关项}). \qquad \text{(V.2.29)}$$

发散被分解到一个因子中，并且包含在光子波函数重正化常数里。为了推导出 $k^2 = 0$ 是 $\bar{D}_{F\mu\nu}(k)$ 的唯一极点，需要证明因子 $1 + e_R^2\Pi_c(k^2)$ 并不为零。现在

$$1 + e_R^2\Pi_c(k^2) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\ln\left[1\right.$$
$$\left. - x(1-x)\frac{k^2}{m_R^2} - i\varepsilon\right]. \qquad \text{(V.2.30)}$$

对于 $k^2 > 4m_e^2$，被积函数展开一个虚部，方程 (V.2.30) 不为零。方程 (V.2.30) 对于很大的和负的 k^2[即，大的欧氏光子动量]，

$$-k^2 \simeq m_K^2 e^{\frac{3\pi}{\alpha}},$$

似乎为零. 这个极点被认为是 Landau 鬼. 在这样大的（欧氏）动量处，最低的微扰结果不再适合. 因此，这个鬼的存在不能确定.

外光子线的重正化 讨论外光子线重正化可仿照外费米子线重正化的类似形式. 高阶贡献修改光子波函数 $\varepsilon_\mu(k)$. 对于外光子线的高阶修正如图 V.18 所示.

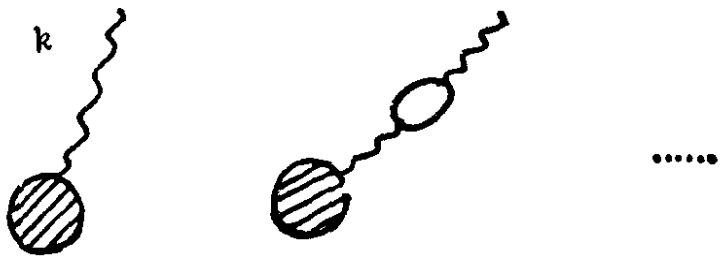


图 V.18

到第二阶，我们有

$$\varepsilon^\mu(k)\left\{g_{\mu\nu}+ie^2\Pi_{\mu\nu}(k)\left[-\frac{ig^{\lambda\nu}}{k^2}\right]+\cdots\right\}A_\nu, \quad \text{(V.2.31)}$$

这里 A_ν 为矩阵元的其余部分. 对于外光子，$k^2\to 0$；于是

$$\lim_{k^2\to 0}\varepsilon^\mu(k)\Pi_{\mu\nu}(k)\frac{1}{k^2}=-\varepsilon_\nu(k)\Pi^{(1)}(0). \quad \text{(V.2.32)}$$

在链近似中，得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^\mu(k)&\left\{g_{\mu\nu}+ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\lambda}\left[-\frac{ig^{\lambda\nu}}{k^2}\right]+ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\lambda}\left[-i\frac{g^{\lambda\rho}}{k^2}\right]\right.\\&\left.\times[ie^2\Pi^{(1)}_{\rho\sigma}]\left[-i\frac{g^{\sigma\nu}}{k^2}\right]+\cdots\right\}A_\nu=[1-e^2\Pi^{(1)}(0)\\&+(-e^2\Pi^{(1)}(0))^2+\cdots]\varepsilon^\mu(k)A_\mu\\&=Z_3\varepsilon^\mu(k)A_\mu. \quad \text{(V.2.33)}\end{aligned}$$

如对于外费米子重正化所给出的类似论证表明，实际的修正

为

$$\varepsilon^{\mu}(k) \to \sqrt{Z_3}\varepsilon^{\mu}(k). \qquad \text{(V.2.34)}$$

可以定义一个重正化的光子场算符 $\tilde{A}_{\mu}(x)$，它与未重正化的场算符 $A_{\mu}(x)$ 的关系为

$$A_{\mu}(x) = \sqrt{Z_3}\tilde{A}_{\mu}(x). \qquad \text{(V.2.35)}$$

在本节中所讨论的二阶关系对于一般情形，即包括了所有各阶修正的效应在内，是成立的，但除显然的二阶表示式方程 (V.2.9)，(V.2.11)，(V.2.12)，(V.2.19) 及 (V.2.26) 以外.

结束本节，将说明由 Ward-Takahashi 恒等式能得到的关系方程 (V.2.17)，因此一般是适合的. 方程 (V.2.17) 的左边是光子传播子散度的 Fourier 变换

$$\partial^{\mu}\langle 0|T(A_{\mu}(x)A_{\nu}(0))|0\rangle. \qquad \text{(V.2.36)}$$

因此对上面的量需要一个 Ward-Takahashi 恒等式. 由 § 1.2 知道，Ward-Takahashi 恒等式是如何得到的. 由量子电动力学的生成泛函方程 (II.2.6) 及 (II.2.7) 出发，为方便起见在这里记录这些表达式，

$$Z[\eta,\bar{\eta},J_{\mu}] = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\bar{\phi}\prod_{\mu}\mathscr{D}A_{\mu}\exp\left\{i\int \mathscr{L}_{\text{eff}}d^4x + i\int d^4x[\bar{\eta}\phi + \bar{\phi}\eta + A_{\mu}J^{M}]\right\} \qquad \text{(II.2.6)}$$

及

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{\phi}(i\not{\partial} - m - e\not{A})\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^{\mu}A_{\mu})^2. \qquad \text{(II.2.7)}$$

考虑方程 (II.2.3) 中所给出的规范变换函数

$$\phi(x) \to e^{-ieA(x)}\phi(x),$$

$$\psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\psi(x),$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x). \qquad \text{(II.2.3)}$$

在这里假定规范函数满足源项不为零的波动方程:

$$\Box\Lambda(x) = \omega(x), \qquad \text{(V.2.37)}$$

这里 $\omega(x)$ 为无限小. 令

$$\omega(x) = \int d^4p e^{ipx}\tilde{\omega}(p). \qquad \text{(V.2.38)}$$

于是

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\Box}\omega(x)$$
$$= \int d^4p e^{ipx}\frac{\tilde{\omega}(p)}{-p^2}. \qquad \text{(V.2.39)}$$

在变换方程 (II.2.3) 下,连同方程 (V.2.38) 及 (V.2.39) 有

$$\delta\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\xi}\omega(x)\partial^\mu A_\mu(x) \qquad \text{(V.2.40)}$$

及

$$\delta(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu) = -ie\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)$$
$$+ J^\mu\partial_\mu\Lambda. \qquad \text{(V.2.41)}$$

如果把方程 (II.2.3) 认为是积分变数的改变,则

$$Z[\eta,\bar{\eta},J_\mu] = N^{-1}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A_\mu\left\{1 - \frac{i}{\xi}\int d^4x\omega(x)\right.$$
$$\times\ \partial^\mu A_\mu(x) + \left.\int d^4x[e\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) + iJ^\mu\partial_\mu\Lambda]\right\}$$
$$\times \exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{eff}} + i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu]\right\}.$$
$$\qquad \text{(V.2.42)}$$

因为生成泛函不能与无限小的参数 $\omega(x)$ 有关,故对于 Ward-Takahashi 恒等式一类的生成泛函可以得到:

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu \mathscr{D}A_\mu\left\{-\frac{i}{\xi}\partial^\mu A_\mu(x) + \frac{\delta}{\delta\omega(x)}\right.$$

$$\times \int d^4x[e\Lambda(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + iJ^\mu A_\mu)]\Big\}$$

$$\times \exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{eff}} + i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu]\right\}. \tag{V.2.43}$$

由方程 (V.2.4) 相对于 $J_\mu(0)$ 微分一次，就得到包括方程 (V.2.36) 的 Ward-Takahashi 恒等式:

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\prod_\mu \mathscr{D}A_\mu\left\{\frac{1}{\xi}\partial^\mu A_\mu(x)A_\nu(0)\right.$$

$$+ i\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\partial_\nu\Lambda(0) + iA_\nu(0)\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\int d^4x[e\Lambda$$

$$\left.\times(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) + iJ^\mu\partial_\mu\Lambda]\right\}\cdot\exp\left\{i\int d^4x\mathscr{L}_{\text{eff}}\right.$$

$$\left. + i\int d^4x[\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu]\right\}. \tag{V.2.44}$$

因为源 J_μ, η, 及 $\bar{\eta}$ 最后要变成零，故上面的表示式给出 Ward-Takahashi 恒等式的算符形式为

$$\frac{1}{\xi}\partial^\mu\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(0))|0\rangle + i\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\partial_\nu\Lambda(x) = 0. \tag{V.2.45}$$

利用方程 (V.2.38) 及 (V.2.39) 可以计算出第二项. 由微分的链规则方程 (I.5.14)，可以写出

$$\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\partial_\nu\Lambda(0) = \int d^4p\,\frac{\delta\omega(p)}{\delta\omega(x)}\frac{\delta}{\delta\omega(p)}\partial_\nu\Lambda(0)$$

$$= \int d^4p\,\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,\frac{ip'_\nu}{-p'^2}e^{ip'z}\delta^4(p-p')\Big|_{z=0}$$

$$= i\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ipx}\,\frac{p_\nu}{-p^2}. \tag{V.2.46}$$

在方程 (V.2.4) 中取各项的 Fourier 变换

$$\frac{1}{\xi}\int d^4x e^{ikx}\partial^\mu\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(0))|0\rangle$$

$$=-\frac{i}{\xi}k^\mu\int d^4x\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(0))|0\rangle$$

$$=\frac{1}{\xi}k^\mu\bar{D}_{F\mu\nu}(k), \qquad (V.2.47)$$

及

$$i\int d^4x e^{ikx}\frac{\delta}{\delta\omega(x)}\partial_\nu\Lambda(0)=\frac{k_\nu}{k^2}. \qquad (V.2.48)$$

由方程(V.2.47)、(V.2.48)和方程(V.2.45)给出方程(V.2.17)的一般结果为

$$k^\mu\bar{D}_{F\mu\nu}(k)=-\xi\frac{k_\nu}{k^2}.$$

在§ VI.2 中将看到，一个类似的公式对于非阿贝耳规范理论的全规范玻色子传播子是成立的.

V.3 顶角修正

图 V.19 表示电子光子顶角的二阶辐射修正，它表示为 $\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)$，并且得到表示式 (V.3.1).

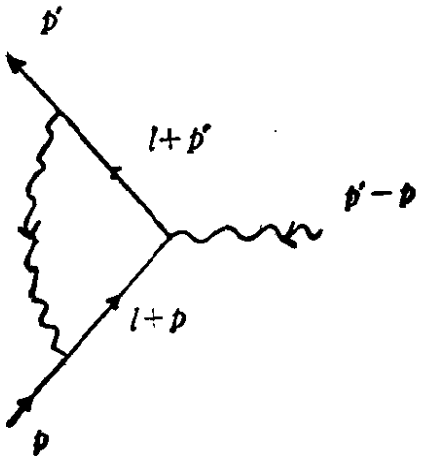


图 V.19

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)=\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{l^2+i\varepsilon}\left[-g_{\lambda\rho}+(1-\xi)\right.$$
$$\left.\times\frac{l_\lambda l_\rho}{l^2}\right](-ie\gamma^\lambda)\frac{i}{\not l+\not p'-m_R+i\varepsilon}$$
$$\times\gamma_\mu\frac{i}{\not l+\not p-m_R+i\varepsilon}(-ie\gamma^\rho). \qquad (V.3.1)$$

用重正化的质量作微扰展开式. 展开上式的各项 [删去 $i\varepsilon$ 项],

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4l$$
$$\times\left\{-\frac{\gamma^\lambda(\not l+\not p'+m_R)\gamma_\mu(\not l+\not p+m_R)\gamma_\mu}{l^2[(l+p')^2-m_R^2][(l+p)^2-m_R^2]}\right.$$
$$+(1-\xi)\frac{l^2\gamma_\mu+\gamma_\mu\not p\not l+\not l\not p'\gamma_\mu+2m_Rl_\mu}{l^2[(l+p')^2-m_R^2][(l+p)^2-m_R^2]}$$
$$\left.+(1-\xi)\frac{\not l\not p'\gamma_\mu\not p\not l+m_R[\not l\not p'\gamma_\mu\not l+\not l\gamma_\mu\not p\not l]+m_R^2\not l\gamma_\mu\not l}{[l^2]^2[(l+p')^2-m_R^2][(l+p)^2-m_R^2]}\right\}. \qquad (V.3.2)$$

该表示式显然是对数发散的. 正规化将在维数方案中进行:

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)=\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int_0^1dx\int_0^1 2ydy\int d^nl$$
$$\times\left\{-\frac{\gamma^\lambda[\not l\gamma_\mu\not l+\not l\gamma_\mu(\not p+m_R)+(\not p'+m_R)\gamma_\mu\not l]\gamma_\lambda}{(l^2-2l\cdot p_y-\Delta_y)^3}\right.$$
$$-\frac{\gamma^\lambda(\not p'+m_R)\gamma_\mu(\not p+m_R)\gamma_\lambda}{(l^2-2l\cdot p_y-\Delta_y)^3}$$
$$+(1-\xi)\frac{l^2\gamma_\mu+\gamma_\mu\not p\not l+\not l\not p'\gamma_\mu+2m_Rl_\mu}{(l^2-2l\cdot p_y-\Delta_y)^3}$$
$$+3(1-\xi)(1-y)$$
$$\left.\times\frac{\not l\not p'\gamma_\mu\not p\not l+m_R[\not l\not p'\gamma_\mu\not l+\not l\gamma_\mu\not p\not l]+m_R^2\not l\gamma_\mu\not l}{(l^2-l\cdot p_y-\Delta_y)^4}\right\} \qquad (V.3.3a)$$

这里

$$p_y \equiv -p'xy - p(1-x)y,$$

$$\Delta_y \equiv m_R^2 y - p'^2 xy - p^2(1-x)y. \qquad \text{(V.3.3b)}$$

作变数改变 $l \to l + p_y$，并利用方程 (IV.3.49)，上式的积分可以根据表 IV.3 的公式来进行，得到

$$\begin{aligned}
\Lambda'_\mu(p',p) = {} & \frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} i(\sqrt{\pi})^n \int_0^1 dx \int_0^1 2y\,dy \left\{ \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2\Gamma(3)} \right. \\
& \times \frac{1}{C^\varepsilon}[-\gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\lambda + (1-\xi)(4-2\varepsilon)\gamma_\mu] \\
& + \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \frac{1}{C^{1+\varepsilon}} \gamma^\lambda [(\not{p}_y + \not{p}')\gamma_\mu(\not{p}_y + \not{p}) \\
& + m_R(\not{p}_y\gamma_\mu + \gamma_\mu \not{p}_y) + m_R(\not{p}'\gamma_\mu + \gamma_\mu \not{p}) \\
& + m_R^2 \gamma_\mu]\gamma_\lambda - (1-\xi)\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \frac{1}{C^{1+\varepsilon}} \\
& \times [\not{p}_y^2 \gamma_\mu + \gamma_\mu \not{p} \not{p}_y + \not{p}_y \not{p}' \gamma_\mu + 2m_R p_{y\mu}] \\
& - 3(1-\xi)(1-y)\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2\Gamma(4)} \frac{1}{C^{1+\varepsilon}} \\
& \times \gamma^\rho [\not{p}'\gamma_\mu \not{p} + m_R(\not{p}'\gamma_\mu + \gamma_\mu \not{p}) + m_R^2 \gamma_\mu]\gamma_\rho \\
& + 3(1-\xi)(1-y)\frac{\Gamma(2+\varepsilon)}{\Gamma(4)} \frac{1}{C^{1+\varepsilon}} \\
& \times [\not{p}_y \not{p}' \gamma_\mu \not{p} \not{p}_y + m_R \not{p}_y \not{p}' \gamma_\mu \not{p}_y + m_R \not{p}_y \gamma_\mu \not{p} \not{p}_y \\
& \left. + m_R^2 \not{p}_y \gamma_\mu \not{p}_y] \right\}, \qquad \text{(V.3.4)}
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
C &\equiv \Delta_y + \not{p}_y^2 \\
&= y m_R^2 - xy(1-y)p'^2 - (1-x) \\
&\quad \times y(1-y)p^2 - xy^2(1-x)k^2, \\
k &\equiv p' - p.
\end{aligned}$$

对于一般的动量 p' 及 p，方程 (V.3.4) 只有紫外发散。这个奇点的减除可以在费米子质壳上实现，并且具有为零的光子

四动量，即，

$$p' = p,\quad p'^2 = p^2 = m_R^2.$$

而且，$\Lambda^{(1)}(p', p)$ 是夹在旋量波函数 $\bar{u}(p)$ 和 $u(p)$ 之间。质壳上减除的这个程序将表示为

$$L_\mu^{(1)} \equiv \Lambda_\mu^{(1)}(p', p)|_{\not p = m_R}, \tag{V.3.5}$$

可以通过定义

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p', p) \equiv L_\mu^{(1)} + \Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p) \tag{V.3.6}$$

把 $\Lambda_\mu^{(1)}(p', p)$ 的紫外发散部分的分离，这里

$$\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p, p)|_{\not p = m_R} = 0. \tag{V.3.7}$$

下面将说明，$\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p)$ 是无紫外发散的，紫外发散完全被孤立在 $L_\mu^{(1)}$ 内。§ IV.4 的讨论表明，$L_\mu^{(1)}$ 也包括红外发散.因为 $\Lambda_\mu^{(1)}(p', p)$ 对于一般动量 p' 及 p 是无红外奇点的，这个红外发散是由质壳上减除程序诱导出来的，并且也出现在 $\Lambda_\mu^{(1)}(p', p)$ 的有限部分内，即，出现在 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p)$ 中.

$L_\mu^{(1)}$ 的计算按照 § V.1 所讨论的费米子传播子的类似程序进行.紫外发散和红外发散的正规化因子分别用 ε_u 及 ε_I 表示。现在可以写出

$$\begin{aligned} L_\mu^{(1)} = -\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^1 2y\,dy \Bigg\{ & \frac{\Gamma(\varepsilon_u)}{4}\frac{1}{(y^2m_R^2)^{\varepsilon_u}}[-\gamma^\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma_\lambda \\ & + (4-2\varepsilon_u)(1-\xi)\gamma_\mu] + \frac{\Gamma(1+\varepsilon_I)}{2} \\ & \times \frac{1}{(y^2m_R^2)^{1+\varepsilon}}\gamma^\lambda[(1-y)^2\not p\gamma_\mu\not p + m_R(1-y)2p_\mu \\ & + m_R^2\gamma_\mu]\gamma_\lambda - \frac{\Gamma(1+\varepsilon_I)}{2}(1-\xi)\frac{1}{(y^2m_R^2)^{1+\varepsilon_I}} \\ & \times [-2ym_R^2\gamma_\mu - 2ym_Rp_\mu + y^2m_R^2\gamma_\mu] \\ & - 3(1-\xi)(1-y)\frac{\Gamma(1+\varepsilon_I)}{12}\frac{1}{(y^2m_R^2)^{1+\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$\times \gamma^{\rho}[\not p\gamma_{\mu}\not p + 2m_R p_{\mu} + m_R^2\gamma_{\mu}]\gamma_{\rho}$$
$$+ 3(1-\xi)(1-y)\frac{\Gamma(2+\varepsilon_I)}{3!}\frac{4ym_R^4\gamma_{\mu}}{(y^2m_R^2)^{2+\varepsilon_I}}\Big\}. \tag{V.3.8}$$

在得到上式时，已假定 $L_{\mu}^{(1)}$ 是夹在旋量波函数 $\bar{u}(p)$ 及 $u(p)$ 之间。进一步的简化可以应用方程 (IV.3.49)，并利用下面的恒等式

$$\bar{u}(p)p_{\mu}u(p) = \bar{u}(p)\frac{1}{2}(\not p\gamma_{\mu} - \gamma_{\mu}\not p)u(p)$$
$$= m_R\bar{u}(p)\gamma_{\mu}u(p) \tag{V.3.9}$$

来完成。注意，由更一般的关系，所谓 Gordon 约化[关于符号的附录 IV]

$$\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p) = \frac{1}{2m_R}\bar{u}(p')[p'_{\mu} + p_{\mu} + \sigma_{\mu\nu}$$
$$\times (p'-p)^{\nu}]u(p), \tag{V.3.10}$$

也可以得到方程 (V.3.9) 的结果。于是，在进行一些代数操作以后，得到

$$L_{\mu}^{(1)} = -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma_{\mu}\int_0^1 2ydy\left\{-\xi\left[\frac{1}{\varepsilon_u} - \gamma - \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + 2\xi\ln y + \frac{1}{2}(3+\xi)\right\} - \frac{\alpha}{4\pi}\gamma_{\mu}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon_I}$$
$$\times \Gamma(1+\varepsilon_I)\frac{1}{(m_R^2)^{\varepsilon_I}}\int_0^1 dy\left\{2\left[\frac{2}{y^{1+2\varepsilon_I}} - 2y^{-2\varepsilon_I}\right.\right.$$
$$\left. - y^{1-2\varepsilon_I}\right] + (1-\xi)\left[2y^{-2\varepsilon_I} - y^{1-2\varepsilon_I} + \frac{1}{y^{1+2\varepsilon_I}}\right.$$
$$\left.\left. + 4\varepsilon_I\frac{1}{y^{1+\varepsilon_I}}\right]\right\}. \tag{V.3.11}$$

对 y 积分后，这给出

$$L_{\mu}^{(1)} = -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma_{\mu}\left\{-\frac{\xi}{\varepsilon_u} - \frac{3-\xi}{\varepsilon_I} + 3\left[\gamma\right.\right.$$

$$+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\Big]-2(1-\xi)-4\Big\}. \qquad \text{(V.3.12)}$$

最后，令

$$L_\mu^{(1)}=\gamma_\mu L^{(1)}, \qquad \text{(V.3.13a)}$$

于是

$$L^{(1)}=\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u}+\frac{3-\xi}{\varepsilon_l}-3\left[\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right.$$
$$\left.+2(1-\xi)+4\right\}. \qquad \text{(V.3.13b)}$$

由方程 (V.3.4) 及 (V.3.8) 容易看出，它们的差，即 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p',p)$，是无紫外发散的。然而，$\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p',p)$ 仍然包括由质壳上减除程序所引起的红外发散。

比较方程 (V.3.13) 及 (V.1.20) 表明

$$L^{(1)}=-B^{(1)}. \qquad \text{(V.3.14)}$$

这个等式并不是偶然的，事实上它是一个重要普遍关系式 Ward 恒等结果[4,5]，它在微扰展开式的所有阶中都成立，并且在规范理论可重正性的证明中起决定性作用。这个普遍关系更详细的讨论将在本节末给出。

这时顶角函数重正化常数 Z_1 直到电荷的第二阶可以定义为

$$L^{(1)}\equiv Z_1^{-1}-1. \qquad \text{(V.3.15)}$$

于是对于顶角函数的辐射修正可以写为

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)=(Z_1^{-1}-1)\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p',p), \qquad \text{(V.3.16)}$$

$$Z_1=(1+L^{(1)})^{-1}+0(\alpha^2)$$
$$=1-L^{(1)}+0(\alpha^2)$$
$$=1-\frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u}-\frac{3-\xi}{\varepsilon_l}-3\left[\gamma\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]+2(1-\xi)+4\right\}. \qquad \text{(V.3.17)}$$

应该注意到，在 Landau 规范中，$\xi = 0$，到 α 的量级，Z 是紫外有限的。正如 Z_2 一样，Z_1 是规范有关的。由方程 (V.1.32)可以看出，到 α 的量级，

$$Z_1 = Z_2. \tag{V.3.18}$$

这个关系事实上对于耦合常数的所有各阶都确实成立，并且在下面推导 Ward 恒等式时将证明这点。

Ward 恒等式 结束本节之前，将给出微扰展开式中对所有各阶都成立的恒等式方程 (V.3.14) 及 (V.3.18) 的证明。首先，将给出方程 (V.3.14) 更直接的证明，只利用 $\Sigma(p)$ 及 $\Lambda_\mu(p', p)$ 的第二阶展开式。然后，接着对所有各阶证明。由方程 (V.1.1)，考虑

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^\mu}[-i\Sigma^{(1)}(p)] = i\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}(-ie\gamma_\lambda) \\ \times \frac{i}{\not l + \not p - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not p - m_R + i\varepsilon} \\ \times (-ie\gamma_\rho)\cdot \frac{i}{l^2 + i\varepsilon}\left[-g^{\lambda\rho} + (1-\xi)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2}\right].\end{aligned} \tag{V.3.19}$$

由方程 (V.3.19)，在 $p' = p$ 处计值的顶角修正为

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(1)}(p, p) = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}(-ie\gamma_\lambda)\frac{i}{\not l + \not p - m_R + i\varepsilon} \\ \times \gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not p - m_R + i\varepsilon}(-ie\gamma_\rho)\cdot \frac{i}{l^2 + i\varepsilon} \\ \times \left[-g^{\lambda\rho} + (1-\xi)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2}\right].\end{aligned} \tag{V.3.20}$$

为了正规化方程 (V.3.19) 及 (V.3.20) 二者都定义在 n 维内。显然

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^{(1)}(p). \tag{V.3.21}$$

这就是 Ward 恒等式[4]. 由方程 (V.1.9) 的定义

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^{(1)}(p)\Big|_{\not p=m_R} = B^{(1)}\gamma_\mu, \qquad \text{(V.3.22)}$$

并且由方程 (V.3.3), (V.3.21) 明显给出方程 (V.3.14), 因此得到方程 (V.3.18).

(V.3.21) 对所有各阶都适合的事实可以由方程 (II.2.21) 来证明,方程 (II.2.21) 表明

$$(p'-p)^\mu\Gamma_\mu(p',p) = \bar{S}_F(p')^{-1} - \bar{S}_F(p)^{-1}. \qquad \text{(V.3.23)}$$

电子光子顶角函数对于耦合常数的一切阶可以写为

$$\Gamma_\mu(p',p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p',p), \qquad \text{(V.3.24)}$$

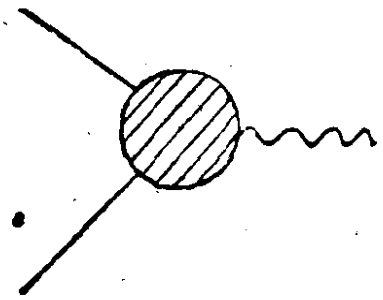


图 V.20

这里 γ_μ 为零阶顶角, $\Lambda_\mu(p',p)$ 为 e^2 阶及较高阶的顶角. 在图形上, $\Lambda_\mu(p',p)$ 用图 V.2 的图形来表示, 图 V.19 为它的二阶部分. 全传播子的逆函数 $\bar{S}_F(p)^{-1}$ 可以下面的方式得到. 令 $-i\Sigma'(p)$ 表示电子自能修正对于 e 的一切阶包括质量抵消项在内的单粒子的不可约部分. 这表示在图 V.21 中:

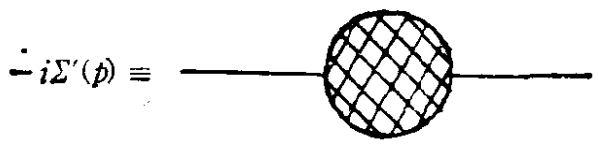


图 V.21

于是, 耦合常数的所有阶的全传播子可以利用不可约部分的

展开得到，如图 V.22 所示

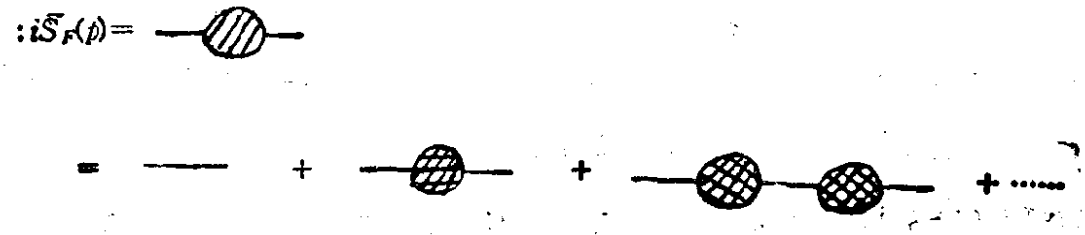


图 V.22

于是下面可以写出

$$\begin{aligned} i\bar{S}_F(p) &= iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma'(p)]iS_F(p) \\ &\quad + iS_F(p)[-i\Sigma'(p)]iS_F(p)[-i\Sigma'(p)]iS_F(p) + \cdots \\ &= \frac{i}{\not p - m_R - \Sigma'(p) - i\varepsilon}. \end{aligned} \tag{V.3.25}$$

由方程 (V.3.24) 及 (V.3.25)，方程 (V.3.23) 可以重写为

$$(p' - p)^\mu \Lambda_\mu(p', p) = -[\Sigma'(p') - \Sigma'(p)]. \tag{V.3.26}$$

令 $p \to p'$，于是

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma'(p) \tag{V.3.27}$$

或者，等价地

$$\Gamma_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu}\bar{S}_F^{-1}(p). \tag{V.3.28}$$

方程 (V.3.27) 称为 Ward 恒等式[4,5]。

还可以写出

$$\Lambda_\mu(p, p)|_{\not p = m_R} = L\gamma_\mu, \tag{V.3.29}$$

这里到第二阶，L 由 $L^{(1)}$ [方程 (V.3.13)] 给出。再者，如同方程 (V.3.15) 一样，顶角函数重正化常数 Z_1 对于一切阶可以定义为

$$L = Z_1^{-1} - 1. \tag{V.3.30}$$

类似地，$\Sigma'(p)$ 可以分解为方程 (V.1.8) 所给出的 $\Sigma^{(1)}(p)$ 而不具有 A 项，

$$\Sigma'(p) = B(\not p - m_R) - C(p)(\not p - m_R), \quad \text{(V.3.31)}$$

这里 B 为常数，$C(p)$ 在质壳上为零. 类似于方程 (V.1.31)，费米子波函数重正化定义为

$$B = 1 - Z_1^{-1}. \quad \text{(V.3.32)}$$

方程 (V.3.27) 对 $\not p = m$ 计值，利用方程 (V.3.30) 及 (V.3.32)，就得到对 e 的一切阶成立的方程 (V.3.18).

$$Z_1 = Z_2.$$

这个结果使独立重正化常数从 4 个减少到 3 个，并且使重正化程序有效性的证明简化.

规范相关性 顶角修正规范相关性的问题可以类似于 § V.1 末所讨论的电子自能修正规范相关性来加以分析. 重写出方程 (V.3.3) 的规范有关的项

$$\begin{aligned}
&(1-\xi)\int \frac{d^n l}{[l^2]^n}\, l \frac{1}{l + \not p' - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu \\
&\quad \times \frac{1}{l + \not p - m_R + i\varepsilon} l = (1-\xi)\int \frac{d^n l}{[l^2]^n} \\
&\quad \times \left\{\gamma_\mu - (\not p' - m_R)\frac{1}{l + \not p - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu - \gamma_\mu \right. \\
&\quad \times \frac{1}{l + \not p' - m_R + i\varepsilon}(\not p - m_R) + (\not p' - m_R) \\
&\quad \times \frac{1}{l + \not p' - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{1}{l + \not p - m_R + i\varepsilon} \\
&\quad \left. \times (\not p - m_R)\right\}.
\end{aligned}$$

由 'tHooft-Veltman 猜测正比于 γ_μ 的项为零. 于是方程 (V.3.3) 可以重写为

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p', p) = i\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int d^n l \left\{-\frac{1}{l^2}\gamma^\lambda \frac{1}{l + \not p' - m_R + i\varepsilon}\right.$$

$$\times \gamma_\mu \frac{1}{l+p-m_R+i\varepsilon}\gamma_\lambda + (1-\xi)\frac{1}{(l^2)^2}$$

$$\times \left[-(p'-m_R)\frac{1}{l+p'-m_R+i\varepsilon}\gamma_\mu - \gamma_\mu\right.$$

$$\times \frac{1}{l+p-m_R+i\varepsilon}(p-m_R) + (p'-m_R)$$

$$\times \frac{1}{l+p'-m_R+i\varepsilon}\gamma_\mu \frac{1}{l+p-m_R+i\varepsilon}$$

$$\left.\times (p-m_R)\right]\Big\}. \qquad \text{(V.3.33)}$$

显然规范有关项只对有限部分有贡献. 方程(V.3.33)的发散部分 $L^{(1)}$ 可以由方程(V.3.11)令 $\xi=1$ 得到. 有限部分仍然由(V.3.18)给出. 方程(V.3.33)显然表明,如果外费米子线是在质壳上,则有限部分也是规范无关的:

$$\bar{u}(p')\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p',p)u(p)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\bar{u}(p)\left\{\gamma_\mu\left[\frac{1}{R}-1\right]\left[-\frac{2}{\varepsilon_l}+2\gamma\right.\right.$$

$$\left.+2\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)+5\right]+\frac{1}{R}\left[\sigma_{\mu\nu}k^\nu+(2-x\right.$$

$$\left.\left.+x^2)\frac{k^2}{m_R^2}\right]\right\}, \qquad \text{(V.3.34)}$$

这里

$$R=1-x(1-x)\frac{k^2}{m_R^2},\quad k=p'-p$$

及

$$\sigma_{\mu\nu}\equiv\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu].$$

红外发散 发散常数 $L^{(1)}$ 方程(V.3.11)和有限部分 $\Lambda_{c\mu}(p',p)$ (V.3.18),对于 p' 和 p 的任意值是红外发散的. 原来的表示式(V.3.1)只有当外费米子线在质壳上才是红外

发散的，而对于 p' 和 p 的其它值是红外有限的. $\Lambda_\mu(p', p)$ 在 p' 和 p 的一切值处存在红外发散是质壳上重正化边界条件方程 (V.3.6) 的结果，利用该条件使发散部分孤立起来. 消去该红外发散的问题将在 § V.5 内谈论.

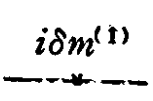
V.4 总结和重正化效应的简单例子

前几节分别引入了与顶角修正，电子自能及真空极化相联系的三个重正化常数 z_1, z_2 及 z_3，和一个相加的质量重正化. 在本节中，在总结前三节的一切结果以后，将把最低阶重正化程序应用于两个简单的例子. 将说明，由 Feynman 圈积分引起的无穷大可以吸收在重正化的电荷内，所得到的振幅是有限的. 所计算出的截面易于与实验数据相比照. 给出的证明表明振幅是规范无关的.

费米子自能修正 费米子裸传播子为

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not p - m_R + i\varepsilon}. \tag{V.4.1}$$

费米子自能修正为：

$-i\Sigma^{(1)}(p) + i\delta m^{(1)} =$  $+$ 

$$= -i\{(z_2^{-1} - 1)(\not p - m_R) + C^{(1)}(p)(\not p - m_R)\}. \tag{V.4.2}$$

在链近似中费米子全传播子

$$\begin{aligned} i\bar{S}_F(p) &= iS_F(p) + iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p) + i\delta m^{(1)}]iS_F(p) \\ &\quad + iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p) + i\delta m^{(1)}]iS_F(p)[-i\Sigma^{(1)}(p) \\ &\quad + i\delta m^{(1)}]iS_F(p) + \cdots \\ &= \frac{z_2}{(\not p - m_R + i\varepsilon)[1 + z_2 C^{(1)}(p)]} + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{z_2}{(\not{p} - m_R + i\varepsilon)[1 + C^{(1)}(p)]} + O(\alpha^2), \tag{V.4.3}$$

这里

$$z_2 = 1 - \frac{\alpha_R}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_I} - 3\left[\gamma + \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + 2(1-\xi) - 4\right\} + O(\alpha_R^2), \tag{V.4.4}$$

$$\delta m^{(1)} = \frac{3\alpha_R}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{4}{3}\right] m_R, \tag{V.4.5}$$

在 Feynman 规范中[参看方程 (V.1.21)]

$$C^{(1)}(p) = \frac{\alpha}{4\pi}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{\frac{2}{\varepsilon}(1-\varepsilon)\right.$$
$$\times (1-x)\left[\frac{1}{a^{\varepsilon}} - \frac{1}{a^{\varepsilon}}\right] + [-2(1+x) + 2\varepsilon_x]$$
$$\times \left[\int_0^1 \frac{x(1-x)m_R(\not{p} + m_R)}{[ay + b(1-y)]^{1+\varepsilon}}\, dy\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2m_R^2 x(1-x)}{b^{1+\varepsilon}}\right]\right\}. \tag{V.4.6}$$

其中

$$a \equiv x^2 m_R^2 - (p^2 - m_R^2)x(1-x) - i\varepsilon,$$
$$b \equiv x^2 m_R^2 - i\varepsilon. \tag{V.4.7}$$

对于 e 的一切阶的 $\Sigma(p)$ 及 $\bar{S}_F(p)$ 的表示式是类似于方程 (V.4.2) 及 (V.4.3) 中所给出的表示式.

到 α 的量级，全费米子传播子的发散是总集在费米子波函数重正化常数 z_2 中，并且分解为一个相乘的常数. 传播子的极点位置在重正化质量处. 极点处的留数为 z_2. 到 α 量级所证实的全费米子传播子的各种性质对于耦合常数的所有阶都成立.

外费米子线的重正化 外电子线的辐射修正的第二阶效应是用因子 z_2 乘以外线.这个因子的一部分,即 $\sqrt{z_2}$ 与外部波函数相联系,其余的部分,亦 $\sqrt{z_2}$ 与外线相联接的顶角相联. 因此,到第二阶(事实上对于所有各阶),对外费米子线的影响是用 $\sqrt{z_2}$ 乘以波函数



$$= \sqrt{z_2}u(p) \text{ 或 } \sqrt{z_2}v(p), \qquad \text{(V.4.8)}$$



$$= \sqrt{z_2}u(p) \text{ 或 } \sqrt{z_2}\bar{v}(p). \qquad \text{(V.4.9)}$$

电子场算符的重正化 裸电子场算符 ψ 及 $\bar{\psi}$ 与重正化的电子场算符 $\tilde{\psi}$ 及 $\tilde{\bar{\psi}}$ 的关系为

$$\psi(x) = \sqrt{z_2}\tilde{\psi}(x) \qquad \text{(V.4.10a)}$$

及

$$\bar{\psi}(x) = \sqrt{z_2}\tilde{\bar{\psi}}(x). \qquad \text{(V.4.10b)}$$

一个电子态 $|p, e^-\rangle$ 和一个正电子态 $|p, e^+\rangle$ 场算符的重正化是如下定义的.

$$\langle 0|\psi(x)|p, e^-\rangle = \sqrt{z_2}e^{-ipx}u(p), \qquad \text{(V.4.11a)}$$

$$\langle 0|\bar{\psi}(x)|p, e^+\rangle = \sqrt{z_2}e^{-ipx}\bar{v}(p). \qquad \text{(V.4.11b)}$$

等等.

真空极化 第二阶的真空极化定义为

$ie^2\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) =$  , (V.4.12)

这里

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\Pi^{(1)}(k^2), \qquad \text{(V.4.13)}$$

$$\Pi^{(1)}(k^2) = \Pi^{(1)}(0) + \Pi^{(1)}_c(k^2). \qquad \text{(V.4.14)}$$

显式的表示式为

$$e^2\Pi^{(1)}(0)=\frac{\alpha_R}{3\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma-\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\},\quad(\text{V.4.15})$$

$$e^2\Pi_c^{(1)}(k^2)=-\frac{2\alpha_R}{\pi}\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\times\frac{k^2}{m_R^2}-i\varepsilon\right],\quad(\text{V.4.16})$$

及

$$\begin{aligned}z_3&=[1+e^2\Pi^{(1)}(0)]^{-1}+O(\alpha_R^2)\\&=1-e^2\Pi^{(1)}(0)+O(\alpha_R^2)\\&=1-\frac{\alpha_R}{3\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma-\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\}+O(\alpha_R^2).\end{aligned}\quad(\text{V.4.17})$$

包括一切阶的效应在内的真空极化有类似于 (V.4.13) 及 (V.4.14) 的表示式。

电荷重正化 重正化的电荷与裸电荷的关系为

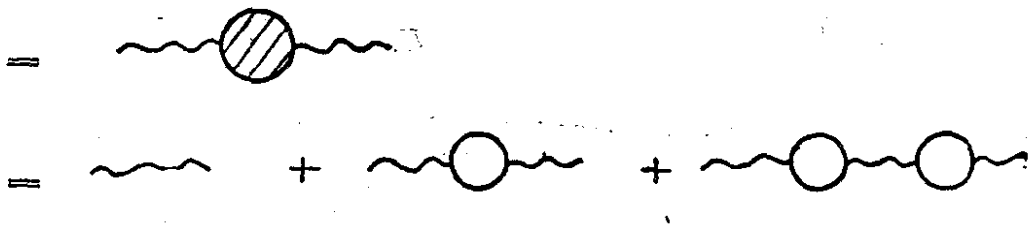
$$e_R=\sqrt{z_3}e.\quad(\text{V.4.18})$$

光子传播子 裸光子传播子为：

$$iD_{F\mu\nu}(k)=-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2}+\text{规范有关项}.\quad(\text{V.4.19})$$

在链近似中全传播子为

$i\bar{D}_{F\mu\nu}(k)$



$$=\frac{-ig_{\mu\nu}z_3}{[k^2+it][1+e_R^2\Pi_c^{(1)}(k^2)]}+\text{规范有关项}.\quad(\text{V.4.20})$$

全传播子的发散作因子分解为重正化常数 z_3。没有光子质量

重正化;光子保持为无质量. 这是规范不变性的结果.

外光子线的重正化 一条外光子线的二阶辐射修正等效于对外线乘以因子 $-e^2\Pi^{(1)}(0) = 1 - z_3^{-1}$:



$$= -e^2\Pi^{(1)}(0)\varepsilon_\mu(k). \qquad \text{(V.4.21)}$$

因此直到第二阶(事实对所有各阶)的辐射修正效应是对光子波函数乘以 $\sqrt{z_3}$,



$$= \sqrt{z_3}\varepsilon_\mu(k). \qquad \text{(V.4.22)}$$

光子场算符的重正化 裸场算符 A_μ 和重正化的场算符 $\tilde{A}_\mu$ 的关系为

$$A_\mu(x) = \sqrt{z_3}\tilde{A}_\mu(x). \qquad \text{(V.4.23)}$$

场算符的重正化为 [$|k, t\rangle$ 为一光子态]

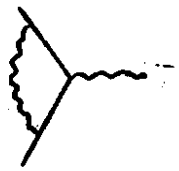
$$\langle 0|A_\mu(x)|k, t\rangle = \sqrt{z_3}\varepsilon_\mu(k)e^{-ikx}. \qquad \text{(V.4.24)}$$

顶角修正 到 e 的一切阶的电子光子顶角表示为

$\Gamma_\mu(p', p) \equiv$ 

$$= \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p), \qquad \text{(V.4.25)}$$

这里 $\Lambda_\mu(p', p)$ 只包含单粒子不可约部分. $\Lambda_\mu(p', p)$ 的最低阶(二阶)项为

$\Lambda_\mu^{(1)}(p', p) =$ 

$\Lambda_\mu^{(1)}(p', p)$ 分离为一个紫外发散部分和一个收敛部分:

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p', p) = (z_1^{-1} - 1)\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p), \qquad \text{(V.4.26)}$$

这里 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p)$ 为收敛部分. 到 e 的第二阶, 显然表示式

为

$$z_1 = z_2$$

$$= 1 - \frac{\alpha_R}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_l} - 3\left[\gamma + \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + 2(1-\xi) + 4\right\} + O(\alpha_R^2), \qquad \text{(V.4.27)}$$

$$\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p) = \Lambda_\mu^{(1)}(p', p) - L^{(1)}\gamma_\mu, \qquad \text{(V.4.28)}$$

$$L^{(1)} = z_1^{-1} - 1$$

$$= \frac{\alpha_R}{4\pi}\left\{\frac{\xi}{\varepsilon_u} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_l} - 3\left[\gamma + \ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + 2(1-\xi) + 4\right\},$$

这里 $\Lambda_\mu^{(1)}(p', p)$ 由 (V.3.4) 给出。

特殊情形 当 p' 和 p 在质壳上时，$\Lambda_{c\mu}^{(1)}$ 变为规范无关的，

$$\bar{u}(p')\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p', p)u(p) = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\bar{u}(p')\left\{\gamma_\mu\left[\frac{1}{R} - 1\right]\right.$$

$$\times\left[-\frac{2}{\varepsilon_l} + 2\gamma + 2\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right) + 5\right]$$

$$\left. + \frac{1}{R}\left[\sigma_{\mu\nu}k^\nu + (2 - x + x^2)\frac{k^2}{m_R^2}\right]\right\}, \qquad \text{(V.4.29)}$$

这里

$$R \equiv 1 - x(1-x)\frac{k^2}{m_R^2}, \quad k = p' - p. \qquad \text{(V.4.30)}$$

到 e 的一切阶，顶角有如同方程 (V.4.26) 所给出的相同形式；因此完全的顶角可以写为

$$\Gamma_\mu(p', p) = z_1^{-1}\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p', p). \qquad \text{(V.4.31)}$$

Ward 恒等式 到 e 的一切阶，下面的恒等式成立：

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma(p), \qquad \text{(V.4.32)}$$

因此

$$z_1 = z_2. \tag{V.4.33}$$

关于规范相关性的短评 重正化常数 z_1 和 z_2 是与规范有关的，但是 z_3 与规范无关. 费米子质量抵消项 δm 也与规范无关. 费米子自能有限部分 $C(p^2)$ 及顶角修正的有限部分 $\Lambda_{c\mu}(p', p)$ 是与规范有关的. 然而，S 矩阵元和 Green 函数是与规范无关的；由 S 矩阵元或 Green 函数各部分的规范有关项彼此互相抵消. 这将在下面的两个例子中加以说明.

在下面的讨论中，将考虑两个过程直到 e^4 阶. 一个过程是 Møller 散射，$e^- + e^- \to e^- + e^-$，另一个过程是 Compton 散射，$\gamma + e^- \to \gamma + e^-$. 虽然中性矢量玻色子 Z_0 对这些反应的较高阶有贡献，但是做为例子，将只考虑量子电动力学过程. 在这些例子中将说明两件事：(1) 用重正化电荷和重正化电子质量表示时，直到 e_R^4 阶 S 矩阵元都是紫外有限的. 对于 e 的所有各阶进行重正化程序时将会证实振幅对于所有各阶是紫外有限的. (2) S 矩阵元是与规范参数 ξ 无关的. 这些 α_R^2 阶的结果对于一切阶仍然成立.

在这些例子中，微扰展开是通过 (V.1.26) 所给出的拉氏函数和重正化的电子质量来完成的. 在第二阶中没有质量重正化，因为 V.8 中两个图形总是彼此相伴，并且电子自能图形只引起 B 和 $C(p^2)$ 项.

例 I 到 e^4 阶的 Møller 散射，$e^- + e^- \to e^- + e^-$ 图形在图 V.23 中给出. 符号 $(p_3 \longleftrightarrow p_4)$ 代表附加的 14 个图形，其中末态动量 p_3 和 p_4 交换.

图 V.23(a) 的图形是一光子 Born 图形；图 V.23(b) 包括二光子过程方形图，图 V.23(c) 表明对 Born 图形的辐射修正. 三组图形的振幅分别表示为 $T_M^{(a)}$，$T_M^{(b)}$ 及 $T_M^{(c)}$. 显然，图 V.23(b) 的图形是收敛的，并且它们已经是 e^4 阶的. 对于

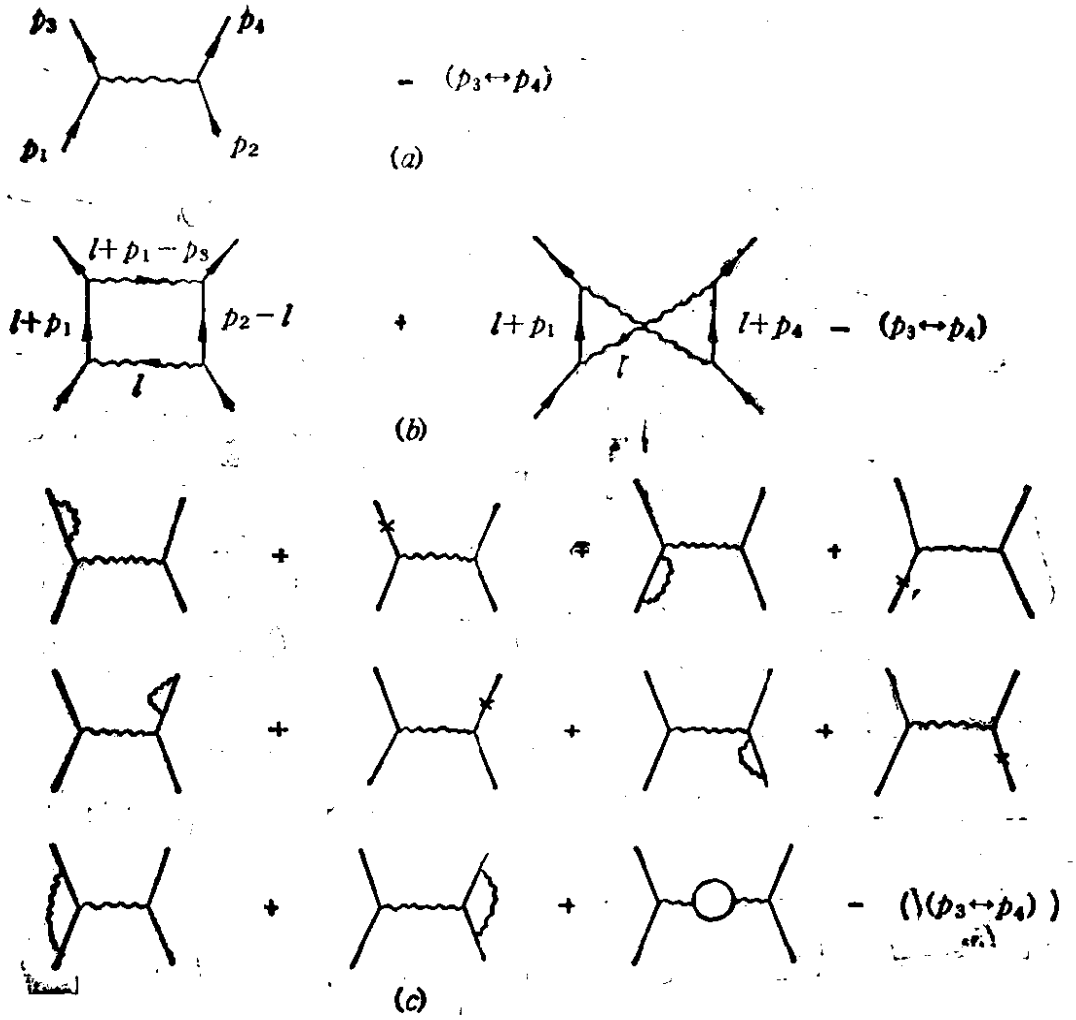


图 V.23

e^4 因子，裸耦合常数 e 可以用重正化的耦合常数 e_R 代替，因为

$$e^4 = z_3^{-2}e_R^4 = e_R^4 + O(e_R^6).$$

在写出 $T_M^{(a)}$ 和 $T_M^{(c)}$ 时需要谨慎。由于方程 (V.4.11) 的重正化，外电子线直接与重正化的场算符 $\tilde{\psi}$ 和 $\bar{\tilde{\psi}}$ 有关 [参看方程 (V.4.40) 及 (V.4.11)]. 因为微扰是通过未重正化的场算符进行的，每条外费米子线与一个因子 $z_2^{1/2}$ 相联系。记住这一点，可以写出

$$T_M^{(a)} + T_M^{(b)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{z_2}}\right)^4 \{\bar{u}(p_3)(-ie\gamma_\mu)u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\\
&\times(-ie\gamma_\nu)u(p_2) + \bar{u}(p_3)(1-z_2^{-1})(-ie\gamma_\mu)\\
&\times u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)(-ie\gamma_\nu)u(p_2) + \bar{u}(p_3)\\
&\times(-ie\gamma_\mu)(1-z_2^{-1})u(p_2)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)(-ie\gamma_\nu)\\
&\times u(p_2) + \bar{u}(p_3)(-ie\gamma_\mu)u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\\
&\times(1-z_2^{-1})(-ie\gamma_\nu)u(p_2) + \bar{u}(p_3)(-ie\gamma_\mu)\\
&\times u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)(-ie\gamma_\nu)(1-z_2^{-1})u(p_2)\\
&+ \bar{u}(p_3)(-ie)[(z_1^{-1}-1)\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_3,p_1)]\\
&\times u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)(-ie\gamma_\nu)u(p_2) + \bar{u}(p_3)\\
&\times(-ie\gamma_\mu)u(p_1)iD_F^{\mu\nu}(k)u(p_4)[(z_1^{-1}-1)\gamma_\mu\\
&+ \Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_4,p_2)](-ie)u(p_2) + \bar{u}(p_3)(-ie\gamma_\mu)\\
&\times u(p_1)iD_F^{\mu\lambda}(k)[ie^2\Pi_{\lambda\rho}^{(1)}(k)]iD_F^{\rho\nu}(k)\bar{u}(p_4)\\
&\times(-ie\gamma_\nu)u(p_2) - (p_3\leftrightarrow p_4,\ k\to k')\}, \qquad \text{(V.4.34)}
\end{aligned}
$$

这里

$$k \equiv p_3 - p_1, \quad k' \equiv p_4 - p_1.$$

为了看出如何处理发散常数，利用 (V.4.17) 把重正化常数集合起来

$$
\begin{aligned}
&T_M^{(a)} + T_M^{(c)}\\
&= i\left(\frac{1}{\sqrt{z_2}}\right)^4 (-ie)^2\{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu\\
&\times u(p_2)[1 - 4(z_2^{-1}-1) + 2(z_1^{-1}-1) - (z_3^{-1}\\
&-1)] + \bar{u}(p_3)\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_3,p_1)u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\\
&\times\gamma_\nu u(p_2) + \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_4,p_2)\\
&\times u(p_2) - \bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)\\
&\times[e^2\Pi_c^{(1)}(k^2)] - (p_3\leftrightarrow p_4,\ k\to k')\}, \qquad \text{(V.4.35)}
\end{aligned}
$$

这里 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p,p)$ 和 $\Pi_c^{(1)}(k^2)$ 分别由方程 (V.4.16) 及 (V.4.28) 给出。下一步检验方程 (V.4.35) 的第一项的重正化常数到

α 量级，

$$1-4(z_2^{-1}-1)+2(z_1^{-1}-1)+(z_3^{-1}-1)$$
$$=\frac{[1+(z_1^{-1}-1)]^2}{[1+(z_2^{-1}-1)]^4[1+(z_3^{-1}-1)]}+O(\alpha_R^2)$$
$$=z_2^2z_3+O(\alpha_R^2), \qquad \text{(V.4.36)}$$

这里利用了方程 (V.4.33)。 其次，利用方程 (V.4.35) 及 (V.4.19) 得到

$$T_M^{(a)}+T_M^{(c)}$$
$$=-ie_R^2\{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)$$
$$+\bar{u}(p_3)\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_3,p_1)u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)$$
$$+\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_4,p_2)u(p_2)$$
$$-\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)D_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)[e_R^2\Pi_c^{(1)}(k^2)]$$
$$-(p_3\leftrightarrow p_4,\ k\to k')\}. \qquad \text{(V.4.37)}$$

在该表示式的第二项到第四项中，裸电荷用重正化电荷代替了；其差为量级 α_R。因此，其差在总振幅中只贡献 $O(\alpha_R^3)$。

可以由另外的方式得到结果方程 (V.4.37)：总集 Born 图形，图 V.23a 及其辐射修正，图 V.23c，因此利用了全传播子及全顶角(当然只到第二阶)。这表示在图 V.24 中。

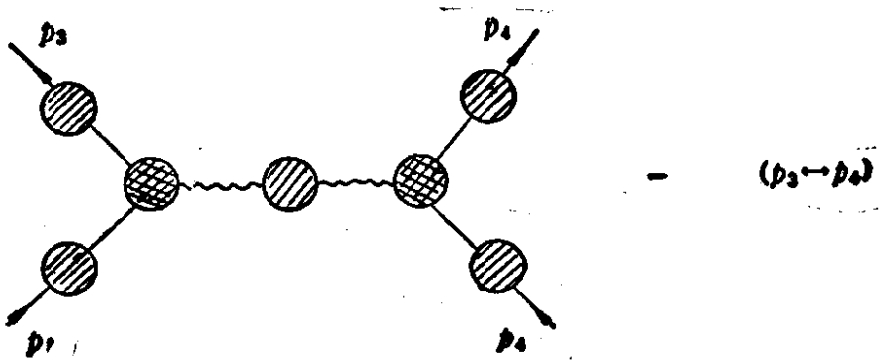


图 V.24

这里照前面的方法，振幅并不用 $(\sqrt{z_2})^4$ 除。 这些图形的振幅为

$$\sqrt{z_2}\,\bar{u}(p_3)(-ie_R)\Gamma_\mu(p_3,p_1)\sqrt{z_2}\,u(p_1)i\bar{D}_F^{\mu\nu}(k)$$
$$\times\sqrt{z_2}\,\bar{u}(p_4)(-ie_R\gamma_\nu)\Gamma_\nu(p_4,p_2)u(p_2)$$
$$-(p_3\leftrightarrow p_4,\ k\to k'). \qquad \text{(V.4.38)}$$

按照方程 (V.4.31) 展开 $\Gamma_\mu(p_3, p_1)$ 及 $\Gamma_\mu(p_4, p_2)$，按照方程 (V.4.20) 展开 $\bar{D}_F^{\mu\nu}(k)$，并保持到 α_R^2 的项，就恢复了方程 (V.4.37).

规范无关性 直接与实验可测量相联系的 S 矩阵元应该是与规范参数 ξ 无关的. 换言之，在自由传播子中的 $k_\mu k_\nu$ 应该对于 S 矩阵元给出零贡献. 对于 Møller 振幅，由于下面的理由，$T_M^{(a)}$ 和 $T_M^{(c)}$ 显然与 ξ 无关.

(a) 在 $D_{F\mu\nu}(k)$ 和 $D_{F\mu\nu}(k')$ 中，规范有关项正比于

$$\bar{u}(p_3)(\not{p}_1-\not{p}_3)u(p_1)\ \text{及}\ \bar{u}(p_4)(\not{p}_1-\not{p}_4)u(p_1),$$

由 Dirac 方程，上两式为零.

(b) 如方程 (V.3.34) 所表明的，当费米子线在质壳上时，顶角修正函数 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_3, p_1)$，$\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_4, p_2)$，等等，是与 ξ 无关的. 剩下要证明，图 V.23b 的图形的振幅 $T_M^{(b)}$ 与 ξ 无关. 按照图 V.23b 的编号，可以写出

$$T_M^{(b)}=(-ie)^4\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\left\{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\frac{1}{\not{l}+\not{p}-m_R+i\varepsilon}\right.$$
$$\times\gamma_\lambda u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu\frac{1}{-\not{l}+\not{p}_2-m_R+i\varepsilon}\gamma_\rho u(p_2)$$
$$+\bar{u}(p_3)\gamma_\mu\frac{1}{\not{l}+\not{p}_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\lambda u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\rho$$
$$\left.\times\frac{1}{\not{l}+\not{p}_4-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu u(p_2)\right\}\cdot\frac{1}{(l-k)^2+i\varepsilon}$$
$$\times\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{(l-k)^\mu(l-k)^\nu}{(l-k)^2}\right]$$
$$\times\frac{1}{l^2+i\varepsilon}\left[-g^{\lambda\rho}+(1-\xi)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2}\right]$$

$$-(p_3 \longleftrightarrow p_4,\ k \to k')。 \tag{V.4.39}$$

现在

$$\frac{\partial T_M^{(b)}}{\partial \xi} = (-ie)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\{\cdots\}$$
$$\times \frac{(-1)}{[l^2+i\varepsilon][(l-k)^2+i\varepsilon]} \cdot \Big\{(l-k)^\mu (l-k)^\nu ①$$
$$\times \Big[-g^{\lambda\rho} + (1-\xi)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2}\Big] + l^\lambda l^\rho \Big[-g^{\mu\nu} ②$$
$$+ (1-\xi)\frac{(l-k)^\mu (l-k)^\nu}{(l-k)^2}\Big]\Big\}$$
$$-(p_3 \longleftrightarrow p_4,\ k \to k')。 \tag{V.4.40}$$

其次，考虑项②。当 l^λ 和 l^ρ 同第一个曲括号中的项收缩时，它是正比于

$$\bar{u}(p_3)\gamma_\lambda \frac{4}{(\not{l}+\not{p}_1-m_R)+i\varepsilon}[(\not{l}+\not{p}_1-m_R)$$
$$-(\not{p}_1-m_R)]u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\nu \frac{1}{-\not{l}+\not{p}_2-m_R+i\varepsilon}$$
$$\times[(\not{p}_2-m_R)-(-\not{l}-\not{p}_2-m_R)]u(p_2)$$
$$+\bar{u}(p_3)\gamma_\mu \frac{1}{\not{l}+\not{p}_1-m_R+i\varepsilon}[(\not{l}-\not{p}_1-m_R)$$
$$-(\not{p}_1-m_R)]u(p_1)\bar{u}(p_4)[(\not{l}-\not{p}_4-m_R)$$
$$-(\not{p}_4-m_R)]\frac{1}{\not{l}+\not{p}_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu u(p_2)=0。 \tag{V.4.41}$$

类似地，可以证明，项①在收缩后为零。这完全证明 $T_M^{(b)}$ 与规范参数无关。因此，总振幅是与规范无关的。

例 II 到 e^4 阶的 Compton 散射，$\gamma + e^- \to \gamma + e^-$ 图形如图 V.25 所示。

图 V.25*b* 的图形是收敛的，只需要考虑图 V.25*a* 和 V.25*c*，

$$T_c^{(a)}+T_c^{(c)}=\left(\frac{1}{\sqrt{z_2}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{z_3}}\right)^2(-ie)^2\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)$$

$$\times\bar{u}(p_2)\left\{\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu\right.$$

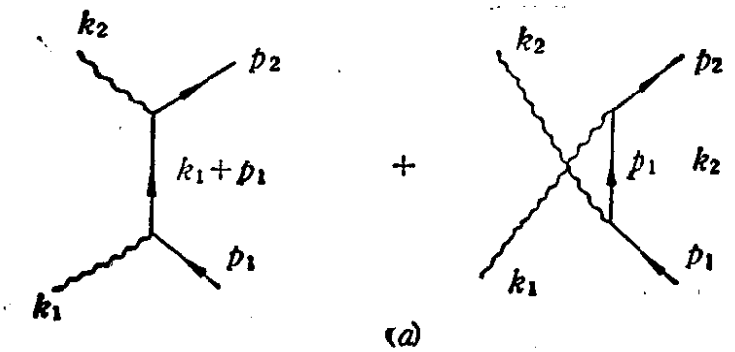
$$+[-(z_3^{-1}-1)\gamma_\mu]\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}[-(z_3^{-1}-1)\gamma_\nu]$$

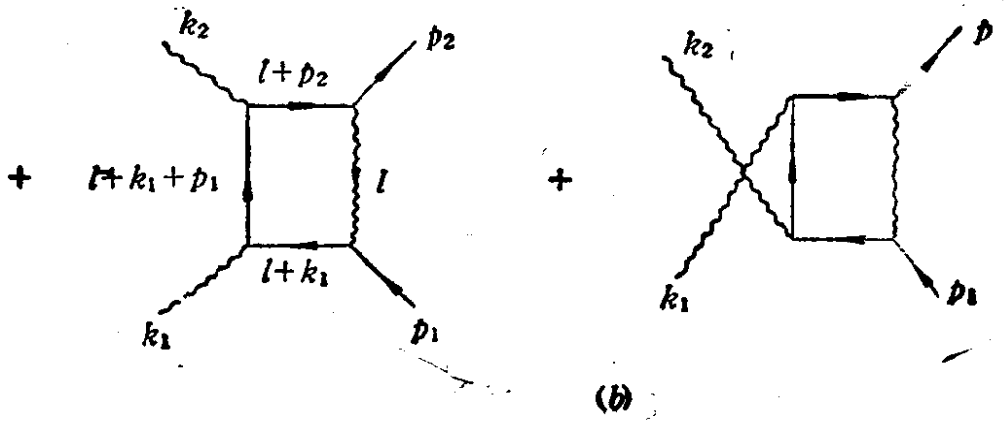
$$+[-(z_2^{-1}-1)\gamma_\nu]\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu[-(z_2^{-1}-1)]$$

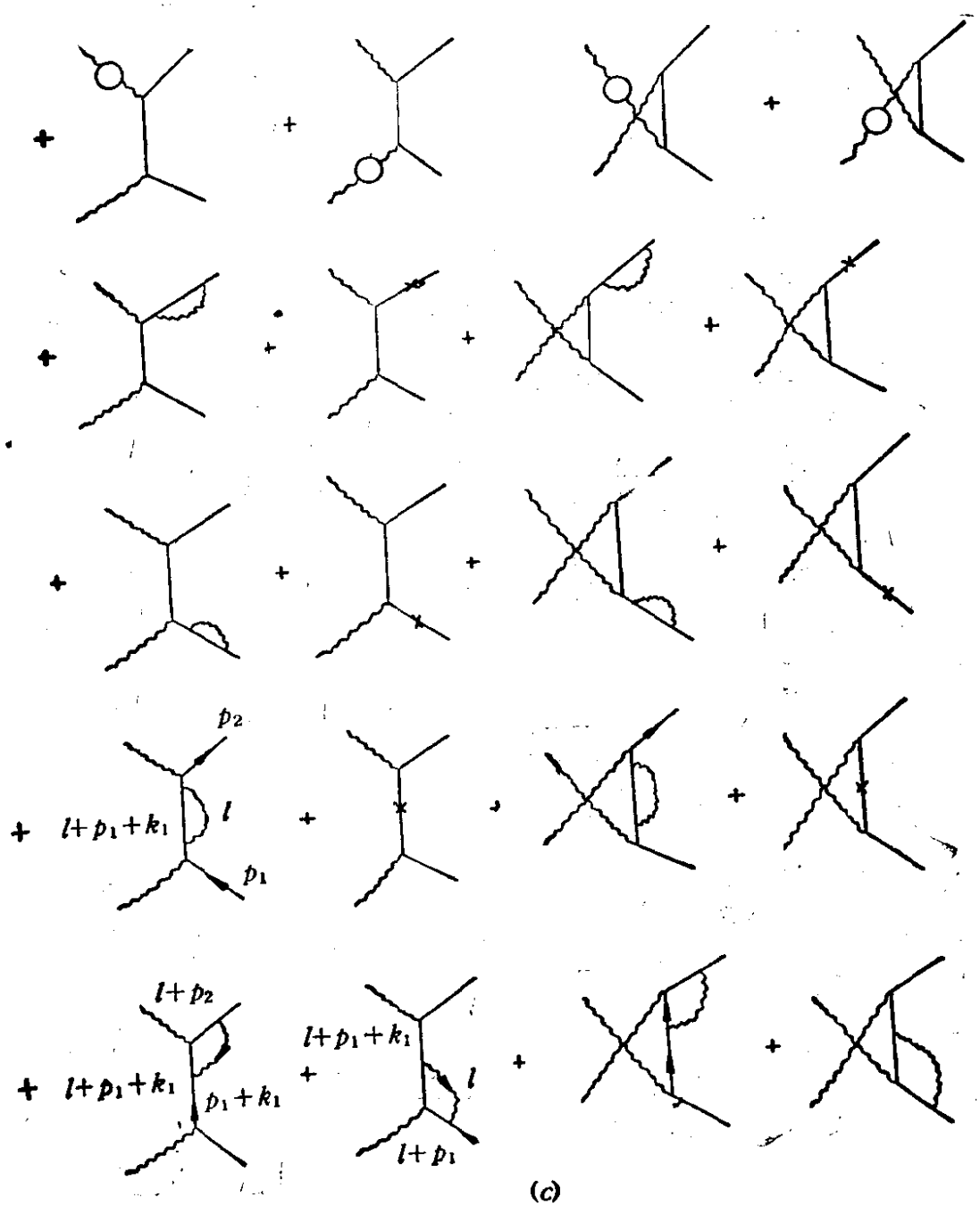
$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}[-(z_2^{-1}-1)-C^{(1)}(p_1+k)]\gamma_\nu$$



(a)



(b)



(c)

图 V.25

$$+[(z_2^{-1}-1)\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_2,\ p_2+k_1)]$$

$$\times\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}$$

$$\times[(z_2^{-1}-1)+\Lambda_{c\nu}^{(1)}(p_1+k_1,\ p_1)]$$

$$+(k_1\to -k_2)\Big\}u(p_1)=z_2^{-1}z_3^{-1}(-ie)^2\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}$$

$$\times(k_2)\bar{u}(p_2)\Big\{\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$\times[1-3(z_2^{-1}-1)-2(z_3^{-1}-1)+2(z_1^{-1}-1)]$$

$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}[-C^{(1)}(p_1+k_1)]\gamma_\nu$$

$$+\Lambda_{c\mu}^{(1)}(p_2,k_1+p_1)\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\Lambda_{c\nu}^{(1)}(p_1+k_1,p_1)$$

$$+(k_1\to -k_2)\Big\}u(p_1). \qquad \text{(V.4.42)}$$

包含重正化常数的项可以写为

$$1-3(z_2^{-1}-1)-2(z_3^{-1}-1)+2(z_1^{-1}-1)$$

$$=\frac{[1+(z_1^{-1}-1)]^2}{[1+(z_2^{-1}-1)]^3[1+(z_3^{-1}-1)]^2}+O(\alpha_R^2)$$

$$=z_2^3z_3^2z_1^{-2}+O(\alpha_R^2). \qquad \text{(V.4.43)}$$

利用 $z_1=z_2$ 及 $e_R=\sqrt{z_3}e$，可得

$$T_c^{(a)}+T_c^{(c)}=-e_R^2\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)\bar{u}(p_2)$$

$$\times\Big\{\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu+\gamma_\mu$$

$$\times\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}[-C^{(1)}(p_1+k_1)]\gamma_\nu$$

$$+\Lambda_\mu^{(1)}(p_2,p_1+k_1)\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\mu\frac{i}{\not p_1+\not k_1-m_R+i\varepsilon}\Lambda_\nu^{(1)}(p_1+k_1,p_1)$$

$$+(k_1\to -k_2)\Big\}u(p_2)+O(\alpha_R^3), \qquad \text{(V.4.44)}$$

这里 $C_R^{(1)}$ 和 $\Lambda_{c\mu}^{(1)}$ 分别由方程 (V.4.6) 及(V.4.28) 给出。代替传播子，外线和顶角，用图 V.26 所示的图形中它们的重正化对应部分也可以得到上面的结果。

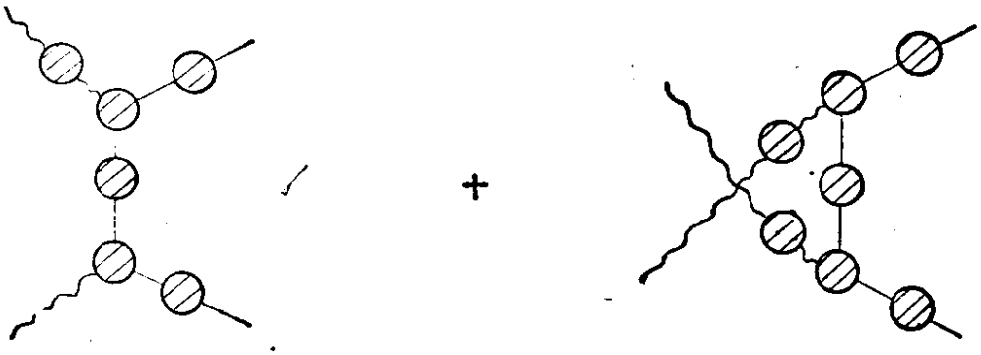


图 V.26

于是振幅可以写为

$$z_3 z_2 \varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)\{\bar{u}(p_2)\Gamma_{\mu}(p_2,\ p_1+k_1)i\bar{S}_F(p_1+k_2)\Gamma_{\nu} \times (p_1+k_1, p_1)u(p_1)+(k_1\to -k_2)\}. \quad (V.4.45)$$

展开费米子传播子和顶角函数就恢复了方程 (V.4.44) 的表示式。

现在当包括到 α_R^2 这个量级的一切辐射修正时，Compton 振幅就变为紫外有限。

规范不变性 对于 $T_c^{(c)}$ 的 Born 部分和对于图 V.26*b* 所示的方形图的辐射修正的规范不变性问题将分别考虑。不同于 Møller 散射，Born 图形的辐射修正和方形图形的辐射修正分开并不是规范不变的，然而它们之和是规范不变的。这将在下面加以说明，首先考虑关于 Born 图形的辐射修正。有关的图形如图 V.26*c* 所示，它们包括顶角修正及内费米子自能部分。于是在维数正规化方案中

$$\frac{\partial}{\partial\xi}T_c^{(c)} = (-ie)^4\frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\varepsilon^{\mu}(k_2)\varepsilon^{\nu}(k_1)\cdot\int d^n l\,\frac{-i}{[l^2]^2}$$

$$\times \bar{u}(p_2)\left\{\left[-(\not p_2 - m_R)\frac{i^2}{\not l + \not p_2 - m_R}\gamma_\mu - \gamma_\mu\right.\right.$$

$$\times \frac{i^2}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}(\not p_1 + \not k_1 - m_R) + (\not p_2 - m_R)$$

$$\times \frac{i}{\not l + \not p_2 - m_R}\gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}$$

$$\left.\times (\not p_1 + \not k_1 - m_R)\right]\frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R}\gamma_\nu + \gamma_\mu$$

$$\times \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R}\left[-(\not p_1 + \not k_1 - m_R)\right.$$

$$\times \frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}\gamma_\nu - \gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not p_1 - m_R}$$

$$\times (\not p_1 - m_R) + (\not p_1 - \not k_1 - m_R)\frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}$$

$$\left.\times \gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not p_1 - m_R}(\not p_1 - m_R)\right] + \gamma_\mu$$

$$\times \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R}(\not p_1 + \not k_1 - m_R)$$

$$\times \frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}(\not p_1 + \not k_1 - m_R)$$

$$\left.\times \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R}\gamma_\nu + (k_1 \to -k_2)\right\} u(p_1). \tag{V.4.46}$$

利用 Dirac 方程，给出

$$\frac{\partial T_c^{(c)}}{\partial \xi} = (-ie)^4 \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\varepsilon^\mu(k_2)\varepsilon^\nu(k_1)\int d^n l \frac{-i}{[l^2]^2}$$

$$\times \left\{\bar{u}(p_2)\left[-\gamma_\mu \frac{i^3}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}\gamma_\nu\right]\right.$$

$$\left.\times u(p_1) + (k_1 \to -k_2)\right\}. \tag{V.4.47}$$

对于图 V.25 的图形，按照动量编号，

$$T_c^{(b)} = (-ie)^4 \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} \varepsilon^\mu(k_2)\varepsilon^\nu(k_1)\bar{u}(p_2) \int d^n l$$
$$\times \left\{\left[\gamma_\lambda \frac{i}{\not l + \not p_2 - m_R} \gamma_\mu \cdot \frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R}\right.\right.$$
$$\left.\times \gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not p_1 - m_R} \gamma_\rho + (k_1 \to -k_2)\right]$$
$$\left.\cdot \frac{i}{l^2}\left[-g^{\lambda\rho} + (1-\xi)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2}\right]\right\} u(p_1). \quad \text{(V.4.48)}$$

于是与 ξ 有关的项正比于

$$\frac{\partial T_c^{(b)}}{\partial \xi} = (-ie)^4 \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} \varepsilon^\mu(k_2)\varepsilon^\nu(k_1) \int d^n l \frac{i^2}{l^2} \bar{u}(p)$$
$$\times \left\{\not l \frac{i}{\not l + \not p_2 - m_R} \gamma_\mu \cdot \frac{i}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R} \gamma_\nu\right.$$
$$\left.\times \frac{i}{\not l + \not p_1 - m_R} \not l + (k_1 \to -k_2)\right\} u(p_1). \quad \text{(V.4.49)}$$

第一个 $\not l$ 写为 $[(\not l + \not p_2 - m_R) - (\not p_2 - m_R)]$，而第二个 $\not l$ 写为 $[(\not l + \not p_1 - m_R) - (\not p_1 - m_R)]$，于是

$$\frac{\partial T_c^{(c)}}{\partial \xi} = (-ie)^4 \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} \varepsilon^\mu(k_2)\varepsilon^\nu(k_1) \int d^n l \frac{-i}{[l^2}$$
$$\times \left\{\bar{u}(p_2)\gamma_\mu \frac{i^3}{\not l + \not p_1 + \not k_1 - m_R} \gamma_\nu u(p_1)\right.$$
$$\left. + (k_1 \to -k_2)\right\}. \quad \text{(V.4.50)}$$

然后组合 (V.4.47) 及 (V.4.50)，得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\{T_c^{(a)} + T_c^{(b)} + T_c^{(c)}\} = 0.$$

这证明了 Compton 振幅是与规范无关的. 虽然这个证明是对于 α_R^2 阶的过程进行的，当然，规范不变性是对于所有各阶都适合的.

红外发散性 已经阐明，过程是紫外有限的，并且到 α_R^2 阶是与规范无关的。然而，这些过程仍然包含红外发散。红外发散性有如 $\frac{1}{\varepsilon_I}$，例如参看方程 (V.4.30)。而且图 V.23b 及 V.25*b* 的方形图也是红外发散的，由方程 (V.4.39) 及 (V.4.48) 对于 $n=4$ 可以看出来。这些发散为形式

$$\int \frac{d^4l}{l^2} \frac{1}{(l\cdot a)(l\cdot b)},$$

这里 a 和 b 为四动量矢量。这些发散的消去将是下两节的课题。

最低阶光子光子散射的有限性 光子光子散射过程也是微扰展开式的基本过程之一。它可以作为高阶图形的部分出现。最低阶光子光子散射如图 V.4*a* 所示。它是表面对数发散的，可以由 Feynman 振幅的分子和分母中积分变数的幂计数看出来。在该过程中有 6 个图形；其余的 5 个图形由图 V.4*a* 置换（譬如说）k_2，k_3 及 k_4 就得到了。6 个图形当中只有 3 个图形是独立的。例如，图 V.4*a* 和由它交换 k_2 和 k_4 所得到的图形有相同的 Feynman 振幅。[关于细节，参看附录 IV]。令动量 k_j 的光子与矢量指标 μ_j 相联系，$\mu=1,2,3,4$。Feynman 振幅是由 $g_{\mu\nu}$ 和 k_i 构成的秩 4 的张量，$j=1,2,3,4$，取所有的 4 动量均为入射的

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

令振幅用

$$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

来表示，这里由于玻色对称性，该振幅相对于同时交换 $\mu_i \longleftrightarrow \mu_j$ 和 $k_i \longleftrightarrow k_j$，$i,j=1,2,3,4$，是不变的。

规范不变性要求

$$k^{\mu_1}T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}=k^{\mu_2}T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}=k^{\mu_3}T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$$
$$=\mu^{\mu_4}T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}=0. \qquad \text{(V.4.51)}$$

由下面的论据可以看出在 $T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 中不存在发散性。$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 是无量纲的。如果存在，发散性由于玻色对称性，它必须有正比于 $g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3}$ 的一个常系数。这样一个张量不可能是一个规范不变量的部分；因此它必然不存在。考虑图 V.4*a* 作为例子；Feynman 振幅正比于

$$
\begin{aligned}
&-\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_1}\frac{i}{\not l-\not k_1-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu_3}\frac{i}{\not l+\not k_2+\not k_3-m_R+i\varepsilon}\right.\\
&\qquad\left.\times\gamma_{\mu_4}\frac{i}{\not l+\not k_2-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu_2}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\right\}\\
&\quad=-\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_1}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\right.\\
&\qquad\times\left[1+\not k_1\frac{1}{\not l-\not k_1-m_R+i\varepsilon}\right]\gamma_{\mu_3}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\\
&\qquad\times\left[1-(\not k_2+\not k_4)\frac{1}{\not l+\not k_2+\not k_3-m_R+i\varepsilon}\right]\\
&\qquad\times\gamma_{\mu_4}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\left[1-\not k_2\frac{1}{\not l+\not k_2-m_R+i\varepsilon}\right]\\
&\qquad\left.\times\gamma_{\mu_2}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\right\}. \qquad (V.4.52)
\end{aligned}
$$

由幂计数可以看出，令 $k_j=0$，$j=1,2,3,4$，等等，就得到了发散项，即

$$
\begin{aligned}
&-\int_l \mathrm{Tr}\left\{\gamma_{\mu_1}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu_3}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu_4}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu_2}\frac{i}{\not l-m_R+i\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}
$$

应该注意，在维数正规化方案及 Pauli-Villars 方案中规范不变性自动地满足。然而，如上面所讨论的，因为没有发散性存在，如果只施加规范性条件，也可以得到正确的振幅。这与 § 5.2 的真空极化振幅是不同的。真空极化振幅包含的发

散性是规范不变量的，因此正规化是必要的。

关于光子光子散射更多的讨论可以在文献[6]和[7]中找到。

V.5 红外发散性的消去——非平凡最低阶的结果

在本节，到非平凡最低阶，在一个给定过程的虚辐射修正和实辐射发射的贡献中，对量子电动力学或任何阿贝耳规范理论情形研究红外奇点及其消去的问题。这将用两个例子来实现。在下节将考虑由于虚和实光子贡献的红外奇点因子指数化的证明，并考虑微扰展开式中对数发散的一切阶和一切幂的红外奇点的消去。在下节中讨论著名的 Kinoshita[9] Lee-Nauenberg[10] 普遍定理。在第 VI 章内将讨论微扰量子色动力学中的红外发散性。

如在§IV.4 中所提到的，红外发散性是 S 矩阵元按照参加反应的每种粒子确定数目的初末态分类的结果。如果在理论中不包含无质量的粒子，这种分类由于能量动量守恒会给出不同 S 矩阵元的唯一分离。然而，如果有无质量的粒子，当软的(零能量动量)无质量粒子被发射或吸收时，会出现动量简并，从而也会引起不确定性。因为这些软量子不确定数目的发射和吸收并不改变反应的总能量动量关系，故这些软量子在观测中是不可能探测的。

在目前的考虑中，将利用本章前几节所建立的在质壳上的重正化。当然，这会引入由 §V.1 和 V.2 所阐述的，在质壳上的减除程序所带来的假红外发散性。如果减除是在欧氏动量处在质壳外进行的，即 $p^2 < 0$，则虚光子的唯一红外图形是光子两端连接外费米子(在质壳上)的那些图形。然而，在本节中将利用质壳上的减除，这种减除容许看出消去红外发

散性的细节.

基于首先由 Bloch 和 Nordsieck[11] 所提出的机制，在反应截面的水平来消除红外发散性. 概念在§IV.4 中已讨论过了，总结如下:

(i) 当动量 l 的虚辐射场两端各点转换到质壳上的费米子线时，在软辐射极限 $l_\mu \to 0$ 处，三传播子势必在质壳上: 软辐射传播子本身和与它相联系的二费米子传播子. 这会产生振幅中对数型的红外发散.

(ii) 软实辐射场的发射几率是正比于 $\frac{dW}{W}$，这里 W 为场的能量. 这又会引起截面的对数发散. 一个带电粒子可能发射无限数目的软辐射. 对于每个附加的软辐射场的辐射，唯一付出的代价是截面要乘以一个因子(事实上是无限大)，它是正比于耦合常数的平方. 能量动量守恒对于可能辐射的软光子数目并没有任何约束. 因此，个别地或集体地，或者甚至于在软光子完全不存在时，所观测到的软光子之间并无明显的区别. 所以，包含带电粒子的反应应该包括一切可能的软辐射数目.

(iii) 基于幺正性，如果带电场是有质量的，对耦合常数的一个给定阶，(i) 和 (ii) 所叙述的两种类型截面之和都是有限的. 这可以由下面的考虑看出来. 当光子电子散射是在 e^+e^- 产生阈之下时，则可能发生的唯一反应是

$$\gamma + e^- \to n\gamma + e^-, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

这里在末态中的某些光子是软的. 光学定理表明，γe^- 反应的总截面，它正好是 (i) 和 (ii) 的两种类型截面之和(也对末态相空间积分)，是与向前方向内的 Compton 散射的吸收部分成正比的. Compton 散射的吸收部分振幅是无红外奇点的. [参看方程 (V.5.11) 下面的讨论]. 事实上，在阈附近的

Compton 散射的总截面，即，在离开靶电子的很低能量的光子散射，为 Thomson 截面公式，$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3}\gamma_0^2$[12]，这里 $\gamma_0 = \alpha m_e^{-1}$ 为经典的电子半径。对微分截面的虚和实光子贡献求和，再对软光子组态积分仍无红外发散的更直接的和一般的证明，可以在文献[10]中找到。

(iv) 在实际的计算中，软光子定义为其能量之和小于一定值 ΔE 的光子，这里 ΔE 可能与测量仪器的能量分辨有关。

在下面，考虑量子电动力学中的两个例子，在截面中近似到 α^3 阶。将详细介绍消去红外发散性的机制。第一个例子是 Compton 散射，第二个例子是 Nøller 散射；相对于最低阶的重正化程序，说明 S 矩阵元的规范相关性来考虑这两个反应。

Compton 散射

$$\gamma + e^- \to \gamma + e^- \qquad \text{(V.5.1)}$$

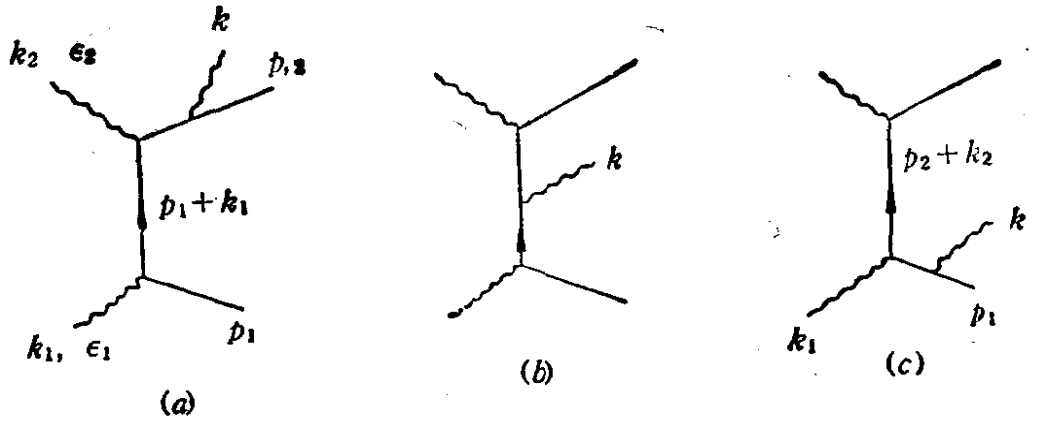
只包含一条费米子外线。红外发散性来源于相同费米子线的实或虚的辐射修正。贡献到 e^4 量级的图形在图 V.25 中给出。对截面的贡献的 α^2 量级来源于图 V.25a 的 Born 图形，图 V.25b 和 c 等所给出的 Born 图形和虚辐射图形之间的干涉项给出 α^3 量级。

除反应方程 (V.5.1) 外，必须包含附加软实光子的实辐射过程

$$\gamma + e^- \to (n+1)\gamma + e^-, \qquad \text{(V.5.2)}$$

这里 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$。如果 n 个外加光子是软的，则二反应方程 (V.5.1) 和 (V.5.2) 是简并的。在截面中近似到 α^3 的量级，仅需要发射一个外加实光子即在方程 (V.5.2) 中 $n = 0$，如图 V.27 所示，

首先进行红外发散图形的计算。图 V.25a 的 Born 图形



+(具有初k_1和末光子k_2线交叉的图形).

图 V.27

是有限的,因为当反应的总能量大于费米子场的质量时,外光子不可能是软的.由于虚光子有二末端落在外费米子线上,图V.25b方块图形是红外发散的. 包括真空极化图形和质量插入的图 V.25c 的图形是有限的. 其余的图形,即电子自能和顶角修正,是红外发散的,这是由 §V.1 和 V.3 中所讨论的在质壳上的减除程序所引起的. §V.3 的讨论表明,由顶角修正和由费米子自能修正的红外发散性至少会得到部分的消去[参看方程 (V.3.14) 和 (V.3.23)]. 现在将在下面对第二阶效应扼要重述这个消去的工作. 考虑图 V.28 所描述的部分图形,其中对一个顶角和它相邻的费米子传播子的二阶辐射修正被孤立起来. 代表过程附加部分的影区,对图 V.28 的所有图形是共同的,用 M_1 和 M_2 来表示. 在图形中显然表示的外光子或在质壳上,或在质壳外. 振幅现在可以写为:

$$(-ie)M_1\left\{\frac{i}{\not p'-m_R+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}\right.$$
$$\left.\times\left[-i\Sigma^{(1)}(p)+i\delta m^{(1)}\right]\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}\right.$$

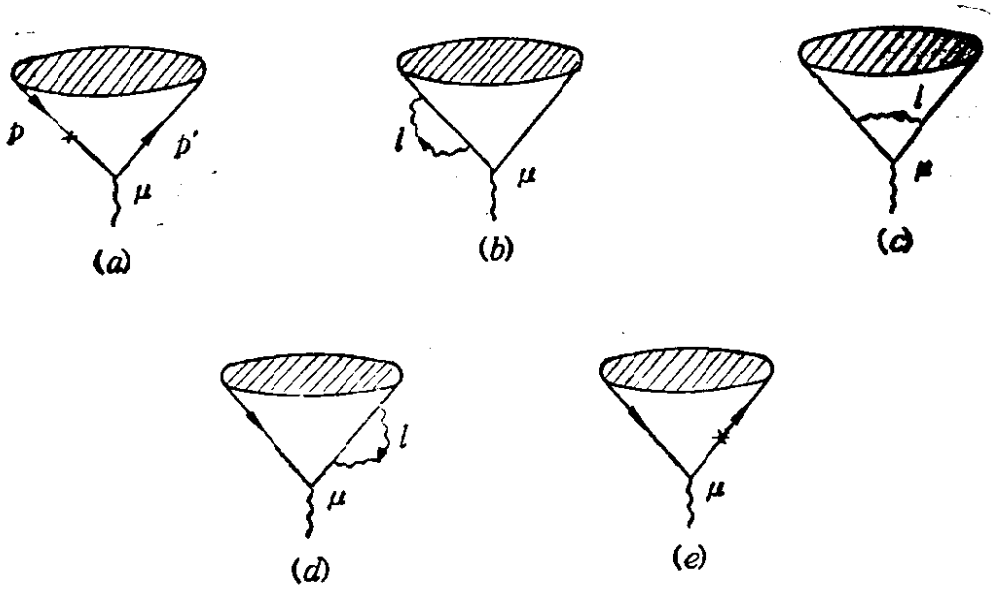


图 V.28

$$+\frac{i}{\not p'-m_R+i\varepsilon}\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}$$

$$+\frac{i}{\not p'-m_R+i\varepsilon}[-i\Sigma^{(1)}(p')+i\delta m^{(1)}]$$

$$\times\frac{i}{\not p'-m_R+i\varepsilon}\gamma_\mu\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}\Big\}M_2$$

$$=(-ie)M_1\frac{i}{\not p'-m_R+i\varepsilon}\{\gamma_\mu[B^{(1)}-C^{(1)}(p)]$$

$$+[L^{(1)}\gamma_\mu+\Lambda_{C\mu}^{(1)}(p',p)]+[B^{(1)}-C^{(1)}(p')]\gamma_\mu\}$$

$$\times\frac{i}{\not p-m_R+i\varepsilon}M_2. \qquad \text{(V.5.3)}$$

由(V.3.14)可以看出，$L^{(1)}$项消去$B^{(1)}$项的一部分. 这可以理解为$B^{(1)}$项的一半由一个传播子消去，一半由另外的，由顶角修正的$L^{(1)}$项消去. 其次，考虑紫外有限部分$C^{(1)}(p)$，$C^{(1)}(p')$和$\Lambda_{C\mu}^{(1)}(p',p)$的红外发散性，因为对于一般动量[$P$和$P'$不在质壳上]，$\Sigma^{(1)}(p)$和$\Lambda_\mu^{(1)}(p',p)$是红外有限的；因此在$-C^{(1)}(p)$和$\Lambda_{C\mu}^{(1)}(p',p)$中的红外奇点分别为$B^{(1)}$和$L^{(1)}$的

负红外奇点。所以，在方程 (V.5.3) 中，$\Lambda^{(1)}_{C\mu}(p', p)$ 的红外奇点消去 $-\gamma_\mu C^{(1)}(p)$ 中奇点的一半和 $-C^{(1)}(p')\gamma_\mu$ 中的一半。在费米子自能部分中奇点的其余一半，譬如说，具有图 V.28*b* 所示的动量 p，消去位于它左边的顶角修正中奇点的一半，等等。由于这种消去方式，所有的费米子线的内部都是无红外奇点的，直到费米子线的两开端为止。这也使一条闭合费米子迴路的辐射修正无红外困难。当然，上面的结果是§IV.4的讨论所预先料到的，在那里考虑了引起红外奇点的各种图形。现在，在虚辐射修正可能有四个红外奇点源：

(a) 一个源是费米子线一端的因子 $B^{(1)}/2$ 和另一端的因子 $B^{(1)}/2$，给出一个总因子 $B^{(1)}$。这二者是由外费米线的自能图形引起的。它们又被费米子的波函数重正化常数 Z_2 消去。

(b) 只有费米子线之一是一条外线时，红外发散性来源于顶角修正的紫外有限部分。这个发散性又是来源于在质壳上的减除程序，如在方程 (V.3.5) 中所定义的，发散性的 $L^{(1)}$ 中负的部分。因此，它是等于 $B^{(1)}$ 的红外发散性。因子 $\frac{1}{2}$ 与这种类型的顶角修正的每个贡献相联系。净效应等价于 $B^{(1)}$ 的效应。如图 V.29 所示。

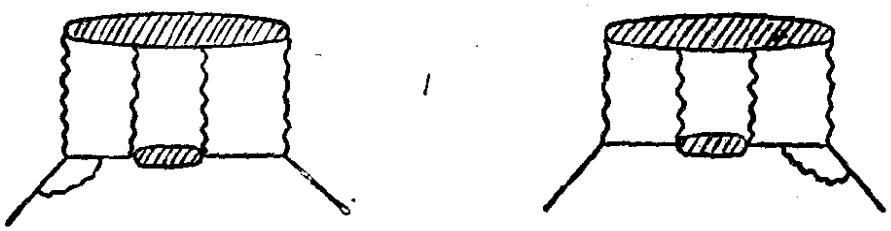


图 V.29

(c) 第三个源是顶角修正的紫外有限部分，如图 V.30 所示，此时费米子线的两端都在质壳上。现在情形的红外发散性与费米子之间的动量传递 k 有关。

(d) 另外的源包括虚光子，虚光子既不能按费米子传播子分类，又不能按顶角修正分类，但是，如§IV.4 中图IV.12 所讨论的，虚光子的两端连接(不同的)外费米子线. 图 V.25*b* 的图形属于这一类.

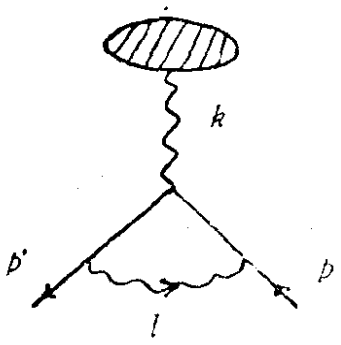


图 V.30

由上面的讨论可以结论，在反应方程 (V.5.1) 中红外发散性包含图 V.25*b* 的方块图形，并且包含对外费米子线之一(例如，图 V.31 所示的入射费米子线) 的费米子自然修正.

当然，出射费米子的自能修正也可以同样应用. 或者，如通常所做的，取入射和出射费米子线的平均，因而可利用电子自能贡献的对称表示式. 在下面的讨论中将利用对称形式.

为了计算 (V.5.1) 的反应截面的红外贡献，首先考虑辐射修正. 在图 25*b* 中方块图形的振幅为

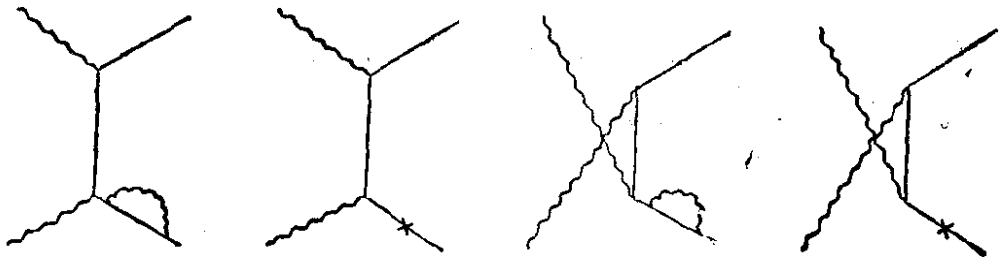


图 V.31

$$T_c^{(b)} = (-ie\mu^{\varepsilon})^2(-ie)^2\varepsilon_2^{\mu}\varepsilon_1^{\nu}\bar{u}(p_2)\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\gamma^{\lambda}$$

$$\times\left\{\frac{i}{\not l+\not p_2-m_R+i\varepsilon}\gamma_{\mu}\frac{i}{\not l+\not k_1+\not p_1-m_R+i\varepsilon}\right.$$

$$\left.\times\gamma_{\nu}\frac{i}{\not l+\not p_1-m_R+i\varepsilon}+\frac{i}{\not l+\not p_2-m_R+i\varepsilon}\right.$$

$$\times \gamma_\nu \frac{i}{\not l + \not p_1 - \not p_2 - m_R + i\varepsilon} \gamma_\mu \frac{i}{\not l + \not p - m_R + i\varepsilon} \Big\}$$

$$\times \gamma_\lambda u(p) \frac{-i}{l^2} = -(-ie\mu^\varepsilon)^2(-ie)^2 \varepsilon_2^\mu \varepsilon_1^\nu$$

$$\cdot\, u(p_2) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma^\lambda \left\{ \frac{\not l + \not p_2 + m_R}{l^2 + 2l \cdot p_2 + i\varepsilon} \gamma_\mu \right.$$

$$\times \frac{\not l + \not k + \not p_1 + m_R}{(l + k + p_1)^2 - m_k^2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{\not l + \not p_1 + m_R}{l^2 + 2l \cdot p_1 + i\varepsilon}$$

$$+ \frac{\not l + \not p_2 + m_R}{l^2 + 2l \cdot p_2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{\not l + \not p_1 - \not k_2 - m_R}{(l + p_1 - k_2)^2 - m_k^2 + i\varepsilon}$$

$$\left. \times \gamma_\mu \frac{\not l + \not p_1 + m_R}{l^2 - 2l \cdot p_1 + i\varepsilon} \right\} \gamma_\lambda u(p_1) \frac{1}{l^2}, \qquad \text{(V.5.4)}$$

这里 ε_2^μ 和 ε_1^μ 为出射和入射光子的偏振矢量，并利用Feynman规范 $\xi = 1$. 注意，对于 $n = 4$，在方程 (V.5.4) 中积分在 $l = 0$ 处有对数发散性，并且事实上显然是红外发散的. 在 $l = 0$ 附近，方程 (V.5.4) 变为

$$T_c^{(b)} \to T_c^{(b)id} = i(-ie\mu^\varepsilon)^2 T_c^{(0)} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2}$$

$$\times \frac{4p_1 \cdot p_2}{[(l + p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l + p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}, \qquad \text{(V.5.5)}$$

这里 $T_c^{(0)}$ 为图 V.25a 的 Born 图形的振幅:

$$T_c^{(0)} = (-ie)^2 \varepsilon_2^\mu \varepsilon_1^\nu \bar{u}(p_1) \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R} \gamma_\nu \right.$$

$$\left. + \gamma_\nu \frac{i}{\not p_1 - \not k_2 - m_R} \gamma_\mu \right\} u(p_1). \qquad \text{(V.5.6)}$$

注意，为了提供一个紫外截止，在方程 (V.5.5) 的分母中 l^2 项保留，它比之于 $l \cdot p_1$ 和 $l \cdot p_2$ 是小的. 在方程 (V.5.5) 中所给出的近似得到正确的红外发散项，而不是给出原来表示式的红外有限项.

对于图 V.31 中图形的振幅，将以适合于现在表达的形式重写出费米子自能图形，并且将以简单的形式扼要重述 §V.1 的论述。必要的考虑都在图 V.32 中加以描述。

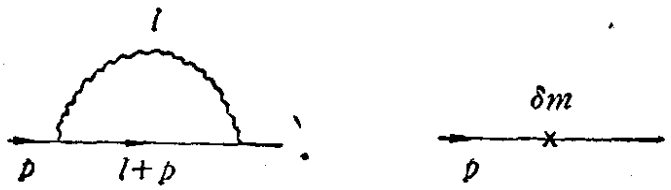


图 V.32

这些图形可以写为下面的形式

$$(-ie\mu^{\varepsilon})^2\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{-i}{l^2}\left\{\gamma^\lambda\frac{i}{\not l+\not p-m_R+i\varepsilon}\gamma_\lambda\right.$$
$$\left.-\left[\gamma^\lambda\frac{i}{\not l+\not{\tilde p}-m_R+i\varepsilon}\gamma_\lambda\right]\Big|_{\tilde p=m_R}\right\},\qquad (V.5.7)$$

这里符号

$$[\quad]|_{\tilde p=m_R}$$

意味着 $\tilde p^2=m^2$，并且整个表示式 $[\quad]|_{\tilde p=m_R}$ 要右乘以旋量波函数 $u(\tilde p)$。这个项可以认为是质量抵消项。在红外区域内，方程 (V.5.7) 现在可以写为

$$(-ie\mu^{\varepsilon})^2\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\left\{\frac{-2(1-\varepsilon)(\not l+\not p)+(4-2\varepsilon)m_R}{(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{-2(1-\varepsilon)(\not l+\not{\tilde p})+(4-2\varepsilon)m_R}{(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon}\right]\Big|_{\tilde p=m_R}\right\}$$
$$=(-ie\mu^{\varepsilon})^2\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\frac{1}{[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon]}$$

$$\times\{[-2(1-\varepsilon)(\not l+\not p)+(4-2\varepsilon)m_R]$$
$$\times[l^2+2l\cdot\tilde p]-[-2(1-\varepsilon)\not l+2m_R]$$
$$\times[(l+p)^2-m_R^2]\}\big|_{\tilde p=m_R}$$
$$\to(-ie\mu^\varepsilon)^2\frac{1}{(2\pi)^n}(\not p-m_R)(\not p+m_R)\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\left[\frac{-2m_R}{[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon]}\right]\Big|_{\tilde p=m_R},$$
(V.5.8)

这里上式的最后一行是在被积函数的分子中删去一切与 l 有关的项而得到的，最后的表示式并不引起任何红外奇点性。当方程（V.5.8）出现在一条外线时，它要从一边乘以一个旋量波函数，并从另一边乘以一个传播子。传播子被（V.5.8）中的逆传播子消去。所剩余的是

$$i(-ie\mu^\varepsilon)^2\frac{1}{(2\pi)^n}(\not p+m_R)\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\frac{-2m_R}{[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon]}\Big|_{\not p=\not{\tilde p}=m_R}$$
$$=-i(-ie\mu^\varepsilon)^2\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\frac{4m_R^2}{[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}\cdot \qquad \text{(V.5.9)}$$

取反应方程（V.5.1）的入射和出射费米子线贡献的平均，得到开费米子线的自能和顶角修正的红外发散贡献的净效应为

$$T_c^{(p)id}=-i(-ie\mu^\varepsilon)^2T_c^{(0)}\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}2$$
$$\cdot\left\{\frac{p_1^2}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}\right.$$
$$\left.+\frac{p_2^2}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}\right\}. \qquad \text{(V.5.10)}$$

这与方块贡献方程 (V.5.5) 相组合得到由于 Compton 散射到 e^4 阶的虚光子修正对红外发散性的全部贡献为

$$T_C^{(V)id} = T_C^{(b)id} + T_C^{(p)id}$$

$$= -i(-ie\mu^\varepsilon)^2 T_C^{(0)} 2 \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2}$$

$$\times \left[\frac{p_{1\mu}}{(l+p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon} - \frac{p_{2\mu}}{(l+p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon} \right]^2 . \tag{V.5.11}$$

注意，这个表示式是紫外收敛的，并且在向前方向，$p_1 = p_2$ 内，为零，因此证明向前振幅在 e^4 量级中无红外发散性. 由么正性，这点是普遍成立的.

现在，截面到 e^6 量级的红外发散部分为 [参看附录 V]

$$d\sigma_{cr}^{(id)} = \frac{1}{2\lambda(k_1, p_1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) d^4k_2 \delta$$

$$\times (k_2^2) d^4p_2 \delta(p_2^2 - m_R^2) \cdot 2\mathrm{Re}[T_C^{(0)*} T_C^{(V)id}]$$

$$= \frac{1}{2\lambda(k_1, p_1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)$$

$$\times d^4k_2 \delta_+(k_2^2) d^4p_2 \delta_+(p_2^2 - m_R^2) |T_C^{(0)}|^2 \cdot \mu^{2\varepsilon} e^2 \mathrm{Re}$$

$$\times \left\{ 4i \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \cdot \frac{1}{l^2} \left[\frac{p_{1\mu}}{(l+p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{p_{2\mu}}{(l+p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon} \right]^2 \right\}, \tag{V.5.12}$$

这里

$$2\lambda(k_1, p_1) = 4p_1 \cdot k_1$$

为通量因子.

其次，应该转而注意末态除一个硬光子以外，发射一个软光子的截面. 这些表示如图 V.27 所示. 振幅为

$$T_C^{(r)} = (-ie)^3 \varepsilon_2^\mu \varepsilon_1^\nu \varepsilon^\lambda$$

$$\times \bar{u}(p_2) \left\{ \gamma_\lambda \frac{i}{\not p_2 + \not k - m_R + i\varepsilon} \gamma_\mu \right.$$

$$\times \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\nu + \gamma_\mu$$

$$\times \frac{i}{\not p_2 + \not k_2 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\lambda \frac{i}{\not p_1 + \not k_1 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$+ \gamma_\mu \frac{i}{\not p_2 + \not k_2 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\nu \frac{i}{\not p_1 - \not k - m_R + i\varepsilon}$$

$$\times \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \frac{i}{\not p_2 + \not k - m_R + i\varepsilon}\gamma_\nu$$

$$\times \frac{i}{\not p_1 - \not k_2 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu + \gamma_\nu$$

$$\times \frac{i}{\not p_2 - \not k_1 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\lambda \frac{i}{\not p_1 - \not k_2 - m_R + i\varepsilon}$$

$$\times \gamma_\mu + \gamma_\nu \frac{i}{\not p_2 - \not k_1 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\mu$$

$$\times \frac{i}{\not p_1 - \not k - m_R + i\varepsilon}\gamma_\lambda \Big\} u(p_1). \qquad \text{(V.5.13)}$$

从这个表示式减除红外发散部分时，应该注意，k_2 或 k（但不是二者）可能变为软光子，因为二光子是不能加以区别的。往往规定出射硬光子动量为 k_2，矢量指标为 μ；软光子规定为 k 和 λ。这是等价于在方程 (V.5.13) 中只取 k 为软光子，并且所得到的截面乘以因子 2。在软 k 极限中，方程 (V.5.13) 变为

$$T_C^{(\gamma)} \to T_C^{(\gamma)id} = i(-ie)T_C^{(0)}\varepsilon^\lambda \left[\frac{p_{2\lambda}}{p_2 \cdot k} - \frac{p_{1\lambda}}{p_1 \cdot k}\right], \qquad \text{(V.5.14)}$$

它在向前方向内也为零。注意，红外振幅方程 (V.5.5)，(V.5.10)，和 (V.5.14) 的普遍形式：Born 振幅要乘以适当的红外因子。

对软光子的动量积分，并对它的偏振态求和以后，实软光子发射的红外截面为

$$d\sigma_{err}^{(id)} = \frac{1}{2\lambda(k_1, p_1)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 d^4k_2\delta_+(k_2^2)d^4p_2\delta_+(p_2^2 - m_R^2)$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2!}\right)\int_{k<\Delta E}\frac{d^3k}{2k(2\pi)^3}\delta^4(k_1 + p_1 - k_2 - p_2 - k)$$
$$\cdot\sum_{\varepsilon(k)}|T_C^{(r)id}|^2 = \frac{1}{2\lambda(k_1, p_1)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 d^4k_2\delta_+(k_2^2)$$
$$\cdot d^4p_2\delta_+(p_2^2 - m_R^2)|T_C^{(0)}|^2\cdot(-1)e^2\int_{k<\Delta E}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k}$$
$$\cdot\left[\frac{p_{1\lambda}}{k\cdot p_1} - \frac{p_{2\lambda}}{k\cdot p_2}\right]^2, \qquad \text{(V.5.15)}$$

这里 ΔE 为软光子的截止能量，并且要取得很小，使软光子的动量 k 在能量动量 δ 函数中可以略去. 在第一个等号后，积分符号前的因子 $\frac{1}{2}$ 与末态中有二光子的事实相联系；因子 2 只表明二光子之一(不是二者)可能是软光子.

红外截面方程 (V.5.12) 和 (V.5.15) 之和为

$$d\sigma_C^{(i)} = \frac{1}{2\lambda(k_1, p_1)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 d^4k_2\delta_+(k_2^2)d^4p_2\delta_+(p_2^2 - m_R^2)$$
$$\times [J_1 + J_2], \qquad \text{(V.5.16)}$$

这里

$$J_1 \equiv \mathrm{Re}\left\{4ie^2\mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{l^2}\left[\frac{p_{1\mu}}{(l + p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{p_{2\mu}}{(l + p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon}\right]\right\}^2 \qquad \text{(V.5.17)}$$

及

$$J_2 \equiv -e^2\int_{k<\Delta E}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k}\left[\frac{p_{1\mu}}{k\cdot p_1} - \frac{p_{2\mu}}{k\cdot p_2}\right]^2. \qquad \text{(V.5.18)}$$

为求方程 (V.5.17) 中的 J_1，需要下面的积分

$$4i\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int d^nl\,\frac{1}{l^2}$$

$$\times \frac{p_1 \cdot p_2}{[(p_1+l)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]}$$

$$= 4i\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} p_1 \cdot p_2 \int_0^1 dx 2y dy \int d^n l$$

$$\times \frac{1}{[l^2-2l\cdot p_y]^3}, \qquad \text{(V.5.19)}$$

这里

$$p_y = -y[xp_1-(1-x)p_2].$$

方程可以计算(V.5.19),得到

$$\frac{4ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} p_1\cdot p_2(-1)^3 i(\sqrt{\pi})^n \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \int_0^1 dx 2y dy$$

$$\times \frac{1}{(p_y^2)^{1+\varepsilon}} = \frac{4p_1\cdot p_2}{(4\pi)^2} e^2(4\pi\mu^2)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)}$$

$$\times \int_0^1 dx \frac{1}{[m_R^2+q^2x(1-x)]^{1+\varepsilon}} \int_0^1 dy \frac{2y}{(y^2)^{1+\varepsilon}}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\right)^\varepsilon \frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\times \int_0^1 \frac{dx}{[1+x(1-x)q^2/m_R^2]^{1+\varepsilon}} = \frac{e^2}{4\pi^2}\frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2}$$

$$\times \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]$$

$$\times \int_0^1 \frac{dx}{[1+x(1-x)q^2/m_R^2]^{1+\varepsilon}}. \qquad \text{(V.5.20)}$$

这给出

$$J_1 = \frac{e^2}{4\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]1-\frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2}$$

$$\times \int_0^1 \frac{dx}{[1-x(1-x)q^2/m_R^2]^{1+\varepsilon}}, \qquad \text{(V.5.21a)}$$

这里

$$q \equiv p_1 - p_2.$$

在方程（V.5.18）的 J_2 中的积分可以在方程（IV.4.33）和（IV.4.39）中找到。

$$J_2 = -\frac{e^2}{4\pi^2}\left\{\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{4\Delta E}{m_R^2}\right)^2\right]\right.$$
$$-\frac{p_1^0}{\bar{p}_1}\ln\left(\frac{p_{10}+\bar{p}_1}{m_R}\right)-\frac{p_2^0}{\bar{p}_2}\ln\left(\frac{p_{20}+\bar{p}_2}{m_R}\right)$$
$$-\frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2}\int_0^1\frac{dx}{1-x(1-x)q^2/m_R^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right.$$
$$+\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{4\Delta E}{m_R^2}\right)^2-\frac{p_{x0}}{\bar{p}_x}$$
$$\left.\left.\times\ln\left(\frac{p_{x0}+\bar{p}_x}{\sqrt{p_x^2}}\right)\right]\right\}, \qquad \text{(V.5.21b)}$$

这里

$$p_x = xp_1 + (1-x)p_2.$$

于是

$$J_1+J_2 = \frac{e^2}{4\pi^2}\left\{-\frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2}\int_0^1\frac{dx}{1-x(1-x)q^2/m_R^2}\right.$$
$$\times\left[\ln[1-x(1-x)q^2/m_R^2]-2\ln\left(\frac{2\Delta E}{m_R}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{p_{x0}}{\bar{p}_x}\ln\left(\frac{p_{x0}+\bar{p}_x}{\sqrt{p_x^2}}\right)\right]-\left[2\ln\left(\frac{2\Delta E}{m_R}\right)+\frac{p_{10}}{\bar{p}_1}\right.$$
$$\left.\left.\times\ln\left(\frac{p_{10}+\bar{p}_1}{m_R}\right)+\frac{p_{20}}{\bar{p}_2}\ln\left(\frac{p_{20}+\bar{p}_2}{m_R}\right)\right]\right\}. \qquad \text{(V.5.22)}$$

红外发散以及显然正规化有关的 γ 及 $\ln(4\pi\mu^2)$ 都被消去了。应该强调，方程（V.3.23）中有限项当然不是完全的。

考虑的第二个例子是 Møller 散射

$$e^- + e^- \to e^- + e^-, \qquad \text{(V.5.23)}$$

它包含两条开费米子线。对 e^2 量级的虚辐射修正如图 V.23 所示。首先考虑图 V.23b 的方块图形。在 Feynman 规范中

方块图形的振幅为

$$T_M^{(b)} = (-ie)^2(-ie\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left\{ \left[\bar{u}(p_3)\gamma^\lambda \right.\right.$$

$$\times \frac{i}{l + p_1 - m_R + i\varepsilon} \gamma^\rho u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\lambda$$

$$\times \frac{i}{p_2 - l - m_R + i\varepsilon} \gamma_\rho u(p_2) + \bar{u}(p_3)\gamma^\lambda$$

$$\times \frac{i}{l + p_1 - m_R + i\varepsilon} \gamma^\rho u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\rho$$

$$\left. \times \frac{i}{l + p_4 - m_R + i\varepsilon} \gamma_\lambda u(p_2) \right] \frac{i}{l^2}$$

$$\left. \cdot \frac{i}{(l + p_1 - p_3)^2} - (p_3 \longleftrightarrow p_4) \right\}. \qquad \text{(V.5.24)}$$

在减除该振幅的红外部分中，可以看出，虚光子之一可能是软光子，但一般不会二者都是软光子。发散性的一个源来自于 $l \to 0$，另一个源来自于 $l + p_1 - p_3 \to 0$。后一情形由方程(V.5.24)，作变数改变便可看出。

$$l \to l + p_2 - p_4.$$

于是方块图形的全部红外奇点项为

$$T_M^{(b)id} = \frac{-i(-ie\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n} \left\{ T_{M1}^{(0)} \int \frac{d^n l}{l^2} \right.$$

$$\times \left[\frac{4p_1 \cdot p_2}{[(l + p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]\ [(l - p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]} \right.$$

$$+ \frac{4p_3 \cdot p_4}{[(l + p_3)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l - p_4)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$+ \frac{4p_1 \cdot p_4}{[(l + p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l + p_4)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$\left. + \frac{4p_2 \cdot p_3}{[(l + p_3)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l + p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]} \right]$$

$$-T_{M2}^{(0)}\int\frac{d^nl}{l^2}\left[\frac{4p_1\cdot p_2}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l-p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]}\right.$$
$$+\frac{4p_3\cdot p_4}{[(l-p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]}$$
$$+\frac{4p_1\cdot p_3}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]}$$
$$\left.+\frac{4p_2\cdot p_4}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]}\right]\Big\}$$
(V.5.25)

这里

$$T_{M1}^{(0)}=(-ie)^2\bar{u}(p_3)\gamma^\lambda u(p_1)\frac{-i}{(p_1-p_3)^2}\bar{u}(p_4)\gamma_\lambda u(p_2),$$
(V.5.26a)

及

$$T_{M2}^{(0)}=(-ie)^2\bar{u}(p_4)\gamma^\lambda u(p_1)\frac{-i}{(p_1-p_4)^2}\bar{u}(p_3)\gamma_\lambda u(p_2).$$
(V.5.26b)

Born 振幅为

$$T_M^{(0)}=T_{M1}^{(0)}+T_{M2}^{(0)}.\qquad(V.5.27)$$

其次，考虑费米子自能和顶角修正．这里在费米子自能和顶角修正的紫外发散常数 $B^{(1)}$ 和 $L^{(1)}$ 中所包含的红外发散性彼此相消，且被费米子波函数重正化常数相抵消．必须计算顶角修正有限部分的红外项．因为顶角的两条费米子线都在质壳上，故红外发散项与二费米子线之间的动量传递有关．这是前面所讨论的红外发散源 (c)．按照图 V.31 的图形，顶角修正的紫外有限部分为

$$\Lambda_{C\mu}^{(1)}(p',p)=-(i)^3(-ie\mu^\varepsilon)^2\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{l^2}$$
$$\times\left\{\gamma^\lambda\frac{l+p'-m_R}{(l+p')^2-m_R^2+i\varepsilon}\gamma_\mu\right.$$

$$\times \frac{\not l+\not p-m_R}{(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon}\gamma_\lambda-\frac{1}{2}\Big[\gamma^\lambda$$
$$\times \frac{\not l+\not{\tilde p}'-m_R}{(l+\tilde p')^2-m_R^2+i\varepsilon}\gamma_\mu$$
$$\times \frac{\not l+\not{\tilde p}'-m_R}{(l+\tilde p')^2-m_R^2}\gamma_\lambda\Big]_{\tilde p'=m_R}$$
$$-\frac{1}{2}\Big[\gamma^\lambda\frac{\not l+\not{\tilde p}-m_R}{(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon}\gamma_\mu$$
$$\times \frac{\not l+\not{\tilde p}-m_R}{(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon}\gamma_\lambda\Big]_{\tilde p=m_R}\Big\} \qquad \text{(V.5.28)}$$

右边的第二和第三项是减除项，这两项在费米子传播子中是对称的. 事实上它们彼此相消，并且只与费米子质量有关. 为了减除红外项，可以删去分子中的 l 相关项. 于是

$$\Lambda^{(1)}_{C\mu}(p',p)\to\Lambda^{(1)id}_{C\mu}(p',p)=\frac{i(-ie\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\Big\{\frac{[2p'^\lambda-(\not p'-m_R)\gamma^\lambda]\gamma_\mu[2p_\lambda-\gamma_\lambda(\not p-m_R)]}{[(l+p')^2-m_R^2+i\varepsilon]\,[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon]}$$
$$-\frac{2m_R^2}{[(l+\tilde p')^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}\Big|_{\tilde p'=m_R^2}$$
$$-\frac{2m_R^2}{[(l+\tilde p)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}\Big|_{\tilde p^2=m_R^2}\Big\}. \qquad \text{(V.5.29)}$$

现在令 p 和 p' 在质壳上，并且在费米子波函数 $\bar u(p')$ 和 $u(p)$ 之间夹入 $\Lambda^{(1)id}_{C\mu}$，得到

$$\Lambda^{(1)id}_{C\mu}(p',p)\Big|_{\substack{\not p'=\not{\tilde p}'=m_R\\ \not p=\not{\tilde p}=m_R}}=\frac{-i(-ie\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}$$
$$\times\Big\{\frac{2m_R^2}{[(l+p')^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}$$
$$+\frac{2m_R^2}{[(l+p)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2}$$

$$-\frac{4p\cdot p'}{[(l+p')^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p')^2-m_R^2+i\varepsilon}\Big\}.$$

(V.5.30)

因此费米子自能和顶角修正的贡献给出

$$\begin{aligned}
T_M^{(s)id} = {} & \frac{-i(-ie\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n} T_M^{(0)} \int \frac{d^n l}{l^2} \\
& \times \left\{ \frac{2m_R^2}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2} \right. \\
& + \frac{2m_R^2}{[(l_1+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2} \\
& + \frac{2m_R^2}{[(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2} \\
& \left. + \frac{2m_R^2}{[(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]^2} \right\} \\
& + \frac{-i(-ie\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n} \left\{ -T_{M1}^{(0)} \int \frac{d^n l}{l^2} \right. \\
& \times \left[\frac{4p_1\cdot p_3}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \right. \\
& \left. + \frac{4p_2\cdot p_4}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \right] \\
& + T_{M2}^{(0)} \int \frac{d^n l}{l^2} \\
& \times \left[\frac{4p_1\cdot p_2}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \right. \\
& \left. \left. + \frac{4p_2\cdot p_3}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

(V.5.31)

由方程（V.5.25）及（V.5.31）之和给出 e^4 量级的虚光子总红外贡献为

$$T_M^{(v)id} = \frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} T_M^{(0)} \int \frac{d^n l}{l^2} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \frac{2m_R}{[(l+p_j)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]^2} \right.$$

$$- \frac{4p_1 \cdot p_4}{[(l+p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l-p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$- \frac{4p_3 \cdot p_4}{[(l+p_3)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l-p_4)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$- \frac{4p_1 \cdot p_3}{[(l+p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l+p_3)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

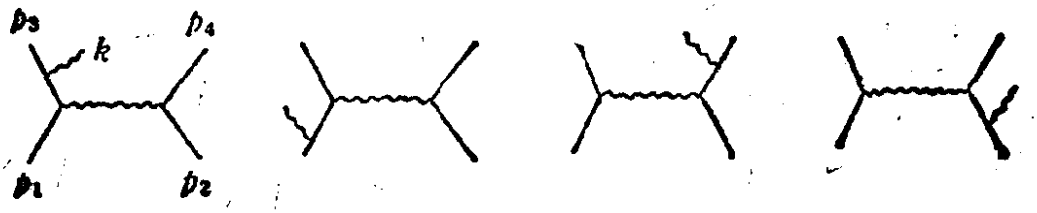
$$- \frac{4p_2 \cdot p_4}{[(l+p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l+p_4)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$- \frac{4p_1 \cdot p_4}{[(l+p_1)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l+p_4)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]}$$

$$\left. - \frac{4p_2 \cdot p_3}{[(l+p_2)^2 - m_R^2 + i\varepsilon][(l+p_3)^2 - m_R^2 + i\varepsilon]} \right\}. \tag{V.5.32}$$

在向前方向内，或说 $p_1 = p_3$ 和 $p_2 = p_4$ 时，该振幅的红外部分如幺正性所要求的，仍然为零. 与 $l \cdot p$ 项比较，删去 l^2-项，便立即看出来了，这里 $j = 1, 2, 3, 4$.

实光子发射 到 e^3 阶的实光子发射包括图 V.33 的图形:



$-(p_3 \leftrightarrow p_4)$

图 V.33

红外贡献直接由图读出，可以写为

$$T_M^{(r)id} = i(-ie)^2\varepsilon_\mu T_M^{(0)}\left[\frac{p_3^\mu}{k\cdot p_3} - \frac{p_1^\mu}{k\cdot p_1} + \frac{p_4^\mu}{k\cdot p_4} - \frac{p_2^\mu}{k\cdot p_2}\right], \tag{V.5.33}$$

它在向前方向内也恒为零。对截面的红外贡献为

$$d\sigma_M^{(id)} = \frac{1}{2\lambda(p_1, p_2)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \times |T_M^{(0)}|^2\{I_1+I_2\}, \tag{V.5.34}$$

这里

$$\lambda(p_1, p_2) = \sqrt{S(S-4m_R^2)},\ S \equiv (p_1+p_2)^2,$$

由虚光子的贡献为

$$\begin{aligned} I_1 \equiv \frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\,4\mathrm{Re}\Big\{ i\int\frac{d^nl}{l^2}\Big[\sum_{i=1}^{4}\frac{m_R^2}{[(l+p_i)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_1\cdot p_2}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l-p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_3\cdot p_4}{[(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l-p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_1\cdot p_3}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_2\cdot p_4}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_1\cdot p_4}{[(l+p_1)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_4)^2-m_R^2+i\varepsilon]} \\ - \frac{2p_2\cdot p_3}{[(l+p_2)^2-m_R^2+i\varepsilon][(l+p_3)^2-m_R^2+i\varepsilon]}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{V.5.35}$$

由实光子的贡献为

$$I_2 \equiv -\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int_{k<\Delta E} d^nk\,\delta(k^2)\left[\sum_{i=1}^{4}\frac{m_R^2}{(k\cdot p_i)^2}\right.$$

$$+\frac{2p_1\cdot p_2}{(k\cdot p_1)(k\cdot p_2)}+\frac{2p_3\cdot p_4}{(k\cdot p_3)(k\cdot p_4)}$$
$$-2\sum_{j=1,2,\ i=3,4}\frac{p_j\cdot p_i}{(k\cdot p_j)(k\cdot p_i)}\Bigg]. \qquad \text{(V.5.36)}$$

I_1 的计值类似于 J_1 的计值. 由方程 (V.5.19) 及 (V.5.20), 得到下式

$$I_1=\frac{e^2}{2\pi^2}\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\gamma+\ln\left(\frac{m_R^2}{4\pi\mu^2}\right)\right]\left\{1-\frac{p_1\cdot p_2}{m_R^2}\right.$$
$$\times\int_0^1\frac{dx}{\left[1-\frac{S}{m_R^2}x(1-x)\right]^{1+\varepsilon}}$$
$$-\frac{p_1\cdot p_3}{m_R^2}\int_0^1\frac{dx}{\left[1-\frac{t}{m_R^2}x(1-x)\right]^{1+\varepsilon}}$$
$$\left.-\frac{p_1\cdot p_4}{m_R^2}\int_0^1\frac{dx}{\left[1-\frac{u}{m_R^2}x(1-x)\right]^{1+\varepsilon}}\right\}, \qquad \text{(V.5.37)}$$

并且由方程 (IV.4.33) 及 (IV.4.39), 得到

$$I_1+I_2=\frac{e^2}{2\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4\frac{p_{i0}}{\bar{p}_i}\ln\left(\frac{p_{i0}+\bar{p}_i}{m_R}\right)\right.$$
$$+2\ln\left(\frac{2\Delta E}{m_R}\right)\left[-1+\int_0^1 dx\left(\frac{p_1\cdot p_2/m_R^2}{1-\frac{S}{m_R^2}x(1-x)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{p_1\cdot p_3/m_R^2}{1-\frac{t}{m_R^2}x(1-x)}+\frac{p_1\cdot p_4/m_R^2}{1-\frac{u}{m_R^2}x(1-x)}\right)\right]$$
$$-\int_0^1 dx\left[\frac{p_1\cdot p_2/m_R^2}{1-\frac{S}{m_R^2}x(1-x)}\left(\frac{p_{x0}}{\bar{p}_x}\right.\right.$$

$$\times \ln\left(\frac{p_{x0}+\bar{p}_x}{m_R\sqrt{1-\frac{S}{m_R^2}x(1-x)}}\right)+\frac{p'_{x0}}{\bar{p}'_x}$$

$$\times \ln\left(\frac{p'_{x0}+\bar{p}'_x}{m_R\sqrt{1-\frac{S}{m_R^2}x(1-x)}}\right)\Bigg)$$

$$+\frac{p_1\cdot p_3/m_R^2}{1-\frac{t}{m_R^2}x(1-x)}\left(\frac{q_{x0}}{\bar{q}_x}\right.$$

$$\times \ln\left(\frac{q_{x0}+\bar{q}_x}{m_R\sqrt{1-\frac{t}{m_R^2}x(1-x)}}\right)+\frac{q'_{x0}}{\bar{q}_x}$$

$$\times \ln\left(\frac{q'_{x0}+\bar{q}_x}{m_R\sqrt{1-\frac{t}{m_R^2}x(1-x)}}\right)\Bigg)$$

$$+\frac{p_1\cdot p_4/m_R^2}{1-\frac{u}{m_R^2}x(1-x)}\left(\frac{k_{x0}}{\bar{k}_x}\right.$$

$$\times \ln\left(\frac{k_{x0}+\bar{k}_x}{m_R\sqrt{1-\frac{u}{m_R^2}x(1-x)}}\right)+\frac{k'_{x0}}{\bar{k}_x}$$

$$\times \ln\left(\frac{k'_{x0}+\bar{k}'_x}{m_R\sqrt{1-\frac{u^2}{m_R^2}x(1-x)}}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg\}, \qquad \text{(V.5.38)}$$

这里

$$S\equiv(p_1+p_2)^2=(p_3+p_4)^2,$$
$$t\equiv(p_1-p_3)^2=(p_2-p_4)^2,$$
$$u\equiv(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2,$$

而

$$p_x = xp_1 - (1-x)p_2, \quad p'_x = xp_3 - (1-x)p_4,$$
$$q_x = xp_1 + (1-x)p_3, \quad q'_x = xp_2 - (1-x)p_4,$$
$$k_x = xp_1 + (1-x)p_4, \quad k'_x = xp_2 + (1-x)p_3.$$

记住，项是用小虚部，$m_R \to m_R - i\varepsilon$ 的 m_R 定义的，如 Feynman 传播子形式所表述的一样.

在上面的例子中，已说明了红外发散性的消去，但未争取得到正确的有限因子. 要得到正确的因子，就要包括并处理红外有限积分. 有大量的文献论述了在红外发散性消去后如何得到实际的有限部分的问题. 每个计算的细节都要用所涉及到的实际实验测量值加以修正. 有关实例可以在文献[13, 14, 及 15] 中找到.

V.6 红外发散性的消去——所有阶的结果，指数化和 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理

前节两个例子中已阐述了耦合常数非平凡最低阶的实和虚辐射修正的红外发散性彼此互相抵消. 本节着手证明，这些结果对一切量级都成立. 首先将证明，当考虑一切量级的效应时，实软光子发射的红外因子和虚光子修正的因子是分别进行指数化的. 因而会直接消除一切阶的对数发散性和一切阶的红外奇点. 从而讨论一个普遍的定理，称为 Kinoshita[9] Lee-Nauenberg[10] 定理，该定理保证质量奇点（参看 § 4.4）以及红外奇点的消去. 在下章中将给出微扰的非阿贝耳理论，特别是量子色动力学的红外问题现状的总结.

在文献 [16] 中已给出红外发散性指数化及其消去的完整论述. 然而，这里所用的方法是按照文献 [17] 的方法，该方法利用光子传播子和偏振求和的修正来减除振幅的红外发散部分. 给出振幅怎样才能分离为两个因子（一个红外发散

和一个无红外发散的因子）的清楚图象．该方法的出发点是把光子偏振求和分开为两部分：G型和K型．K型产生红外发散表示式，G型产生无红外发散的表示式．在这个分离中，使红外发散性是对数型的至关重要，因此在发散性出现的表示中要乘以动量来进行正规化．当对耦合常数的一切阶的这些贡献求和时，实和虚光子的K型贡献分别是指数化的，并且因此消去了发散性．应该注明，文献［17］的方法显示振幅红外发散因子化的机制比该课题的标准文献［16］更加透彻．

所考虑的显然的问题是一个电子被局域外势的散射问题．这个问题的一个例子是低能电子被一个重核的散射，曾对e的一切阶考虑过入射和出射电子的虚和实光子发射的辐射修正，但是对于电子和局域势之间的相互作用只处理到最低阶．在电子和重核散射的情形中，只有一个低能光子在所考虑的电子和靶之间交换．在下面的讨论中将会更清楚，势的细节是无关重要的．在图 V.34 中说明刚才所提到的过程，叉表示外势相互作用发生的地方．对于费米子线，有顶角和自能修正及不定数目的软光子发射．不同于前节所给出的例子，在本方法中不是非进行顶角和自能的重正化不可的．

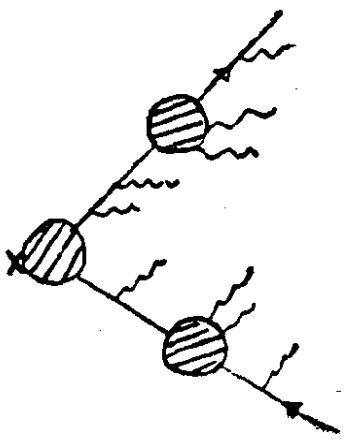


图 V.34

应该记住，每条（在质壳上）费米子线是与产生因子z_2的一个自能插入相联系的（参看方程(V.1.43)）．另一方面，波函数重正化把因子$z^{-\frac{1}{2}}$与每条外线相联系．净效应是，对于任何开费米子线，它包含两条外线，会产生一个因子z_2．这等价于

略去波函数重正化效应及外线之一的自能插入.为确切起见，在下面的计算中将只考虑入射费米线的自能插入. 在出射费米子线中不包含自能插入的图形叫做容许的图形，否则是不容许的图形. 为了计算方便,利用下面的一些技术上的设计:

(a) 所有的光子都独立地进行处理. 在一个给定的图形中,分别对虚光子和实光子,使所有光子进行对称化.事实上，实光子对称化是作为包含全同粒子的通常 Feynman 规则的一部分来实现的.由于对称化,虚光子的 Feynman 振幅要除以一个因子 $n_v!$，这里 n_v 为参与的虚光子数目，截面要除以 n_r，这里 n_r 为实光子的数目,这些光子是观测不到的,因此它们的动量要对所容许的范围进行积分. 例如，对包含三个虚光子的图形进行对称化,要包括图 V.35 所示的 6 个图形. 暂

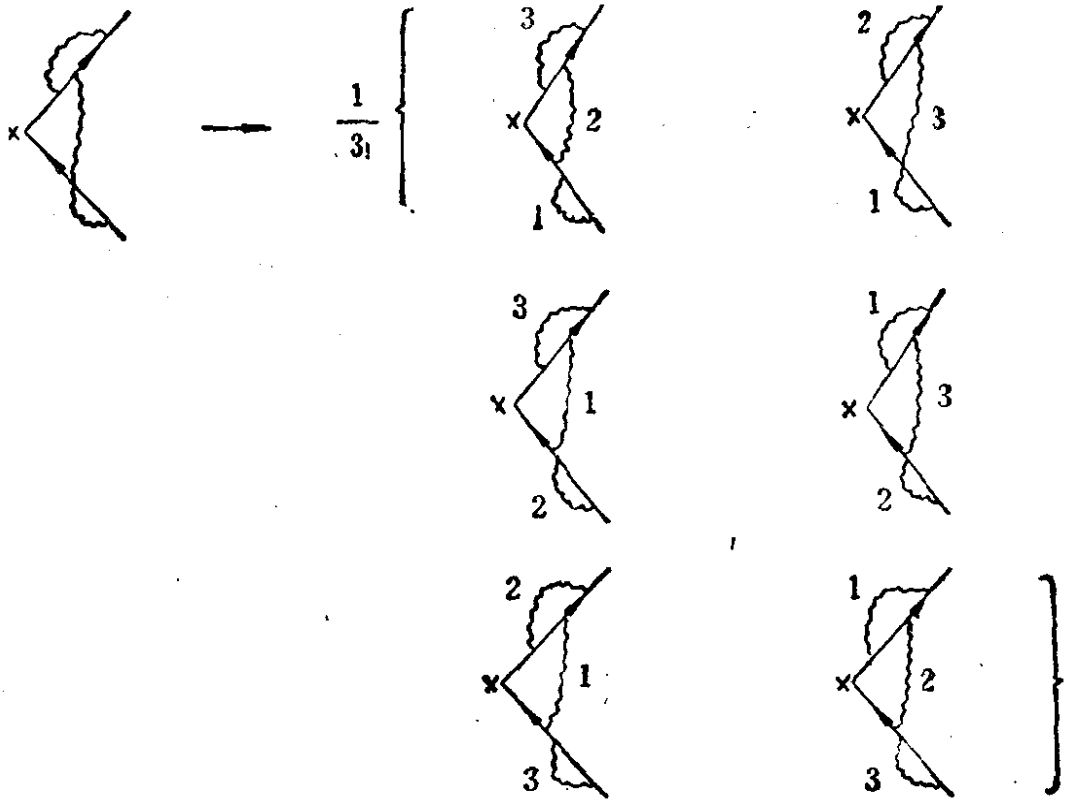


图 V.35

且，把三个光子认为是可区别的，并且用 1，2，和 3 来编号．注意，这些图形都是容许的图形．

(b) 为了从 n 光子图形得到 $(n+1)$ 光子图形，下面

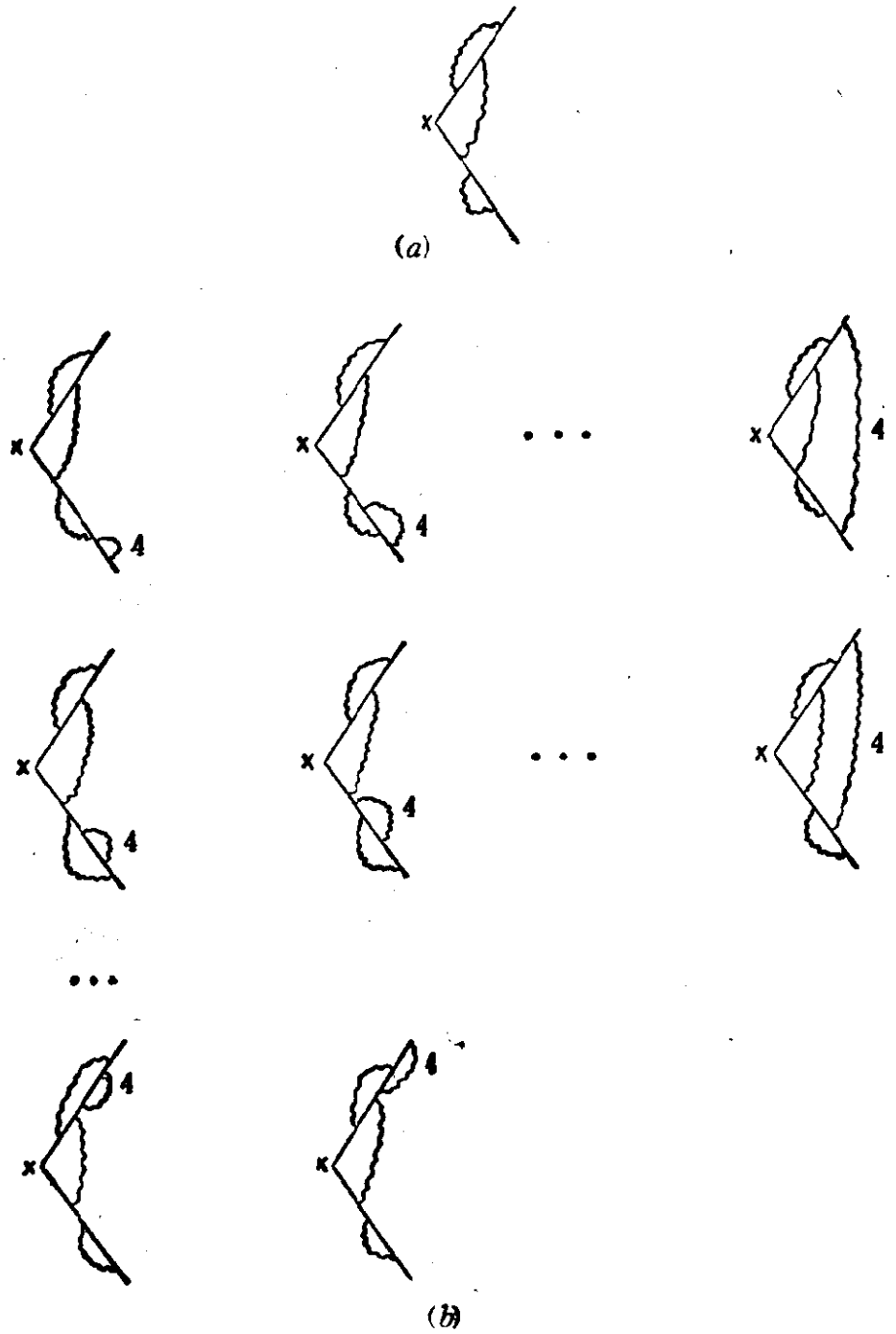


图 V.36

利用适当的方法：对于实光子情形，十分明显，要把第$(n+1)$个光子插入一切可能的位置.对于虚光子，为了保证第$(n+1)$个光子连同以前的n个光子的对称化，也要进行类似地插入到一切可能的位置. 这可以用下面的方法系统地进行. 现在被插入的所谓虚光子起点的一端被固定在一个位置，然后，另一端(称为终点)在费米子线方向内插入在一切可能的位置并沿费米子动量方向相继移动. 对于 $n=3$，在图 V.36 中给出一个例子. 图 V.36*a* 是一个容许的三虚光子图形，对于该图形要插入一个附加的光子. 在图 V.36*b* 中的图形描述插入第四个虚光子，形成四虚光子容许的图形.

(c) 以一切可能的方式把一个虚光或实光子插入到一个容许的n光子图形中并不产生所有容许的$(n+1)$光子图形. 图 V.37*a* 说明容许的一个$(n+1)$光子图形，由一个容许的n光子图形通过第$(n+1)$个光子的插入就得到了这个图形.

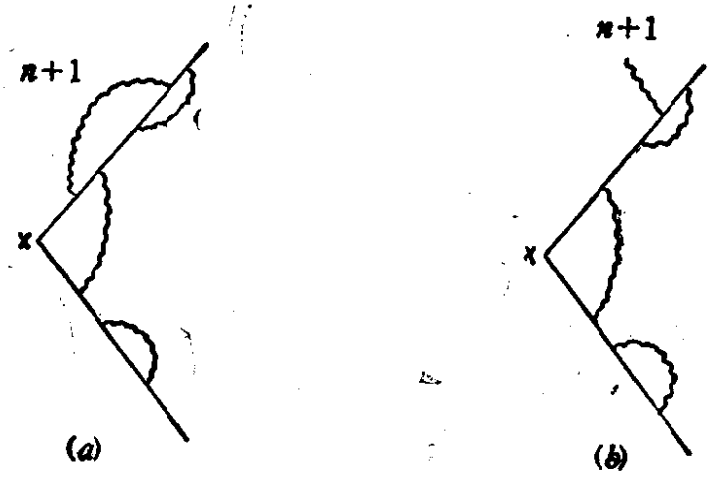


图 V.37

图 V.37b 是插入一个实光子的类似情况. 在这两种情形中插入的光子都编号为 $n+1$. 往后将证明，这组特别的图形并不会对目前的方法引起任何怀疑；由容许的n光子图形的集合通过对称的插入就可以产生容许的$(n+1)$光子图形的

集合.

虚光子贡献 下面的程序容许在一个容许的图形中把一个虚光子从插入所有项之和的贡献分离出来，求和的每一项是红外发散因子和无红外因子的乘积. 注意，现在的方法只是实现这种分离的方法之一；因为红外发散因子的定义不是唯一的，它可能随一个附加有限表示式而改变. 但是，末截面表示式无论如何是唯一的. 程序从 Coulomb 规范出发. 把光子偏振求和 $-g_{\mu\nu}$ 重写为两项之和，一项是无红外发散的表示式，另一项是引起红外发散的表示式. 光子传播子重写为下面的形式

$$\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \equiv -\frac{G_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{K_{\mu\nu}}{k^2}, \tag{V.6.1}$$

这里 k 为光子动量，并且

$$G_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - bk_\mu k_\nu, \tag{V.6.2a}$$

$$K_{\mu\nu} \equiv bk_\mu k_\nu. \tag{V.6.2b}$$

正比于 $G_{\mu\nu}$ 和 $K_{\mu\nu}$ 的传播子分别称为 G 光子和 K 光子. 往后将证明，G 光子给出无红外发散的结果，而 K 光子贡献为红外发散性. 出现在方程 (V.6.2) 中的 b 值与光子插入之处有关. 为了定义术语，定义一条 P 支路和一条 P' 支路. 在局域势入射方面的一切电子传播子和外电子线的集合称为 P 支路，在出射方面的一切电子传播子和外电子线的集合称为 P' 支路，这里入射和出射电子线分别有动量 p 和 p'. 对动量 k_j 的虚光子的 b 值定义如下：

$$b^{(j)} \equiv b^{(j)}(p_f, p_i)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2p_f - k_j)(2p_i - k_j)}{(k_j^2 - 2k_j \cdot p_f)\cdot(k_j^2 - 2k_j \cdot p_i)}, & \text{设 } p_i \neq p_f; \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(2p_f - k_j)^2}{(k_j^2 - 2k_j p_f)^2} + (k_j \to -k_j)\right], & \text{设 } p_i = p_f \end{cases} \tag{V.6.3}$$

这里如果初(末)端是在 P 支路上，$p_i(p_f)$ 等于 P；如果在 P' 支路上，就等于 P'. 注意，方程 (V.6.1) 并不是一个规范变换的光子传播子，因为 b 值与光子插入之处有关.

由分解方程 (V.6.1)，一切虚光子可以表示为 G 光子和 K 光子两部分之和. 于是，一个给定图形展开为其中每个虚子或为一个 G 光子，或为一个 K 光子的项之和. 首先将证明，当一个 K 光子插入到一个容许的 n 光子图形时，得到一个红外发散因子；当对一切可能的插入求和时，该因子乘以原来图形的振幅. 这个程序推广到一切 K 光子，使由 n 个虚光子组成的振幅分解为许多项之和；每一个为红外因子的乘积，一个因子是对应于每个 K 光子，一个因子完全由数目等于或小于 n 的 G 光子组成. 下面是上述主张的说明.

考虑以图 V.36 所描述的对称方式在一切可能的位置插入一个 n 光子图形. 被插入的 K 光子用虚线来表示. 当动量 l 的一个 K 光子插入一个费米子传播子时，它有下面的效应：除引入对 l 的圈动量积分以外，虚光子一末端插入的费米子传播子要被修改，如图 V.38 所示：

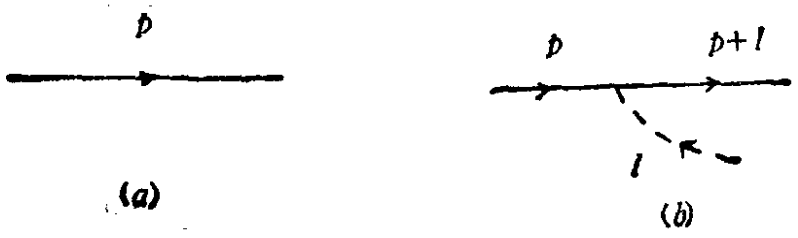


图 V.38

$$\frac{1}{\not p - m_R + i\varepsilon} \to \frac{1}{\not p + \not l - m_R + i\varepsilon}\, \not l\, \frac{1}{\not p - m_R + i\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\not p - m_R + i\varepsilon} - \frac{1}{\not p + \not l - m_R + i\varepsilon}, \qquad \text{(V.6.4)}$$

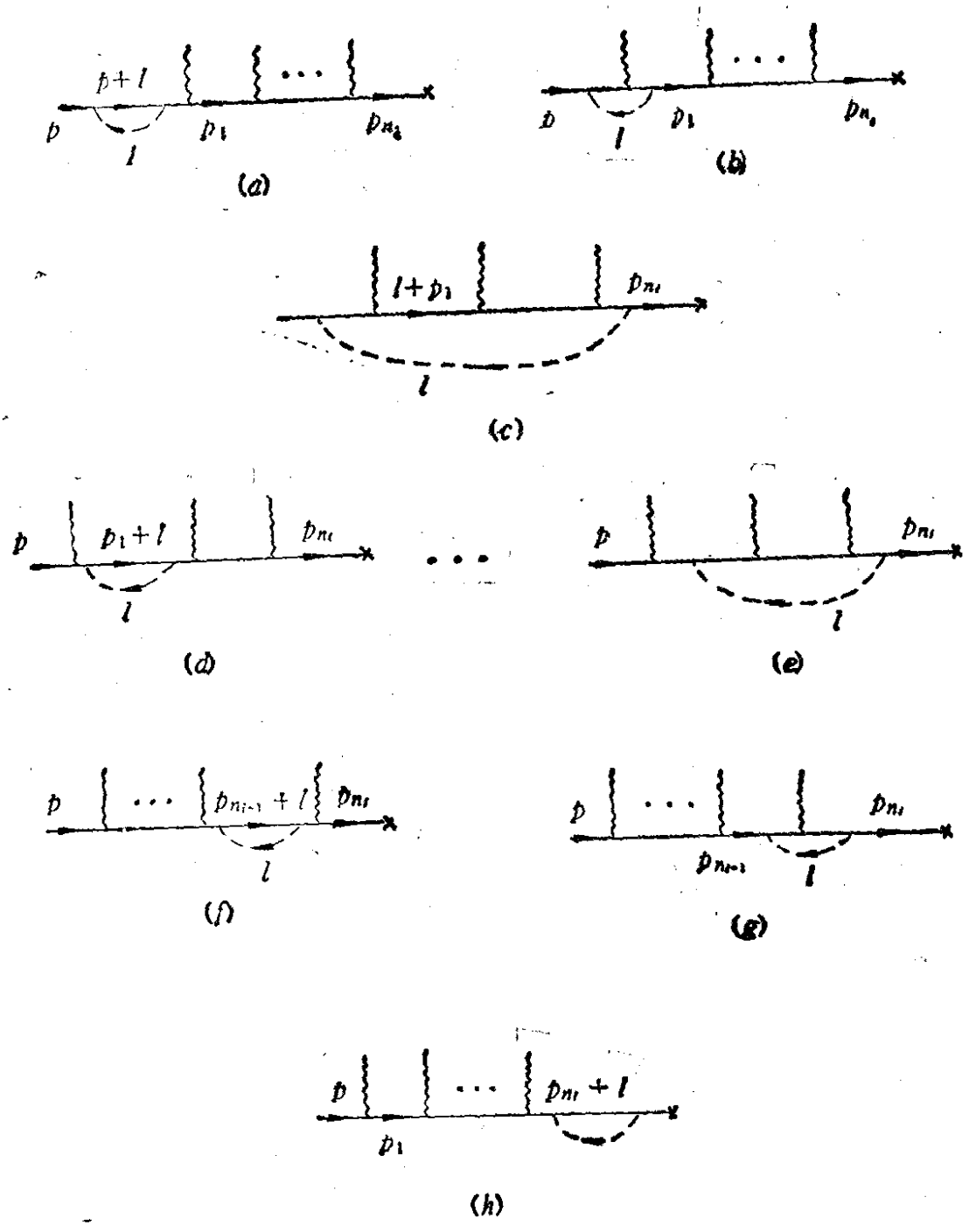


图 V.39

在现在的讨论中经常应用上式。利用恒等式 (V.6.4) 可以分别将在 P 支路和 P' 支路中插入成对消去，而只有第一和最末的插入不能消去。有三种情形要考虑：

（1）插入 K 光子的起点和终点二者都在 P 支路上。假定原来的图形有 n_i 个光子顶角在 P 支路上。无论这些原来的光子是实的或虚的，对于现在的讨论都是无关紧要的。图 V.39 说明一个虚光在 P 支路上一切可能位置的全部插入。入射电子有动量 p；从左到右相继的费米子传播子有动量 $p_1, p_2, \cdots, p_{n_i}$。原来光子的动量并不出现在目前的讨论中。截面代表外势相互作用点。

考虑图 V.39 的第一组图形，即由图 V.39a 到 V.39c。这组图形包括其中起点总是在入射费米子线的一切插入。利用方程（V.6.4）通过成对的消去，这组图形的 Feynman 振幅正比于

$$
\begin{aligned}
&\frac{-i^3(-ie\mu^a)^2}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,p)\Gamma_\nu\left\{\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}\Gamma_{n_i}\right.\\
&\times\frac{1}{\not p_{n_i-1}-m_R}\cdots\frac{1}{\not p_1-m_R}\Gamma_1\\
&\times\underbrace{\left(\frac{1}{\not p-m_R}\not l\frac{1}{\not p+\not l+m_R}\right)\not l}_{\frac{1}{\not p-m_R}-\frac{1}{\not p+\not l-m_R}}\\
&\qquad\qquad①\\
&+\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}\not l_{n_i}\frac{1}{\not p_{n_i-1}-m_R}\cdots\Gamma_2\\
&\times\underbrace{\left(\frac{1}{\not p_2-m_R}\not l\frac{1}{\not p_2+\not l-m_R}\right)}_{\frac{1}{\not p_2-m_R}-\frac{1}{\not p_2+\not l-m_R}}\\
&\qquad①\qquad\qquad②\\
&\left.\times\Gamma_1\frac{1}{\not p+\not l-m_R}\not l+\cdots\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}\Gamma_{n_i}\Big(\underbrace{\frac{1}{\not p_{n_i-1}-m_R}\not l\frac{1}{\not p_{n_i-1}+\not l-m_R}}\Big)$$

$$\frac{1}{\not p_{n_i-1}-m_R}-\frac{1}{\not p_{n_i-1}+\not l-m_R}$$

$$(n_i-1)\qquad\qquad(n_i)$$

$$\times\Gamma_{n_{i-1}}\cdots\frac{1}{\not p_1+\not l-m_R}\Gamma_1\frac{1}{\not p+\not l-m_R}\not l$$

$$+\Big(\underbrace{\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}\not l\frac{1}{\not p_{n_i}+\not l-m_R}}\Big)\Gamma_{n_i}$$

$$\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}-\frac{1}{\not p_{n_i}+\not l-m_R}$$

$$(n_i)$$

$$\times\frac{1}{\not p_{n_{i-1}}+\not l-m_R}\cdots\frac{1}{\not p_1+\not l-m_R}$$

$$\times\Gamma_1\frac{1}{\not p+\not l-m_R}\not l\Big\}u(p),\qquad\text{(V.6.5)}$$

这里 Γ_v 包含振幅的剩余部分，与 l 无关，并且

$$\Gamma_j\equiv i(-ie)\gamma_{\mu j},\quad j=1,2,\cdots,n_i.\qquad\text{(V.6.6)}$$

应理解费米子质量 m_R 有一个虚部，$m_R\to m_R-i\varepsilon$. 可以看到，成对消去出现在编号为①，②，等等的项之间. 结果是

$$\frac{-ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}b(p,p)\Gamma_v\Big\{\Big[\prod_{j=1}^{n_i}\Big(\frac{1}{\not p_j-m_R}\Gamma_j\Big)\Big]$$

$$\times\Big(\frac{1}{\not p-m_R}\not l\Big)-\Big[\prod_{j=1}^{n_i}\Big(\frac{1}{\not p_j+\not l-m_R}\Gamma_j\Big)\Big]$$

$$\times\Big(\underbrace{\frac{1}{\not p+\not l-m_R}\not l}\Big)\Big\}u(p).\qquad\text{(V.6.7)}$$

$$1-\frac{1}{\not p+\not l-m_R}(\not p-m_R)$$

因为被积函数对 l 为奇数，左边的第一项由于对称的积分而为零. 考虑到 Dirac 方程，方程 (V.6.7) 约化为

$$\frac{-ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\,b)\Gamma_\nu\left\{-\prod_{i=1}^{n_i}\left(\frac{1}{\not p_i+\not l-m_R}\Gamma_i\right)\right\}$$

$$\times u(p). \qquad \text{ⓐ} \qquad \text{(V.6.8)}$$

第二组图形，由图 V.38(d) 到 (e)，其中一切插入的起点是在次一入射费米子线的费米子传播子处，正比于

$$\frac{-ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\,p)\Gamma_\nu\left\{\left[-\prod_{i=2}^{n_i}\left(\frac{1}{(\not p_i+\not l-m_R}\Gamma_i\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\not p_1-m_R}-\frac{1}{\not p_1+\not l-m_R}\right)\Gamma_1\right\}u(p), \qquad \text{(V.6.9)}$$

$$\text{ⓑ} \qquad\qquad \text{ⓐ}$$

上式是用类似于方程 (V.5.6)—(V.6.8) 的相似方式得到的. 依次的下一组图形，图 V.38 f 和 g，为

$$\frac{-ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\,p)\Gamma_\nu\left\{-\frac{1}{\not p_{n_i}+\not l-m_R}\Gamma_{n_i}\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{\not p_{n_{i-1}}-m_R}-\frac{1}{\not p_{n_i}+\not l-m_R}\right)$$

$$\text{ⓔ} \qquad\qquad \text{ⓓ}$$

$$\left.\times\Gamma_{n_{i-1}}\prod_{i=1}^{n_i-1}\left(\frac{1}{\not p_1-m_R}\Gamma_i\right)\right\}u(p). \qquad \text{(V.6.10)}$$

最后一组图形，图 V.38h，为

$$-\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\,p)\Gamma_\nu\left\{-\left(\frac{1}{\not p_{n_i}-m_R}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\not p_i+\not l-m_R}\right)\Gamma_{n_i}\prod_{i=1}^{n_i-1}\left(\frac{1}{\not p_j-m_R}\Gamma_i\right)\right\}u(p).$$

$$\text{ⓒ} \qquad\qquad \text{(V.6.11)}$$

方程 (V.6.8)—(V.6.11) 之和给出

$$\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\ p)\Gamma_\nu\left\{\prod_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\not p_j-m_R}\Gamma_j\right\}u(p),$$

(V.6.12)

这里仍然出现成对的消去，例如在 (V.6.8) 和 (V.6.a) 中用ⓐ编号的项，…，与方程 (V.6.10) 和 (V.6.11) 中用ⓔ编号的项. 由方程 (V.6.12) 清楚看到，在 P 支路中一切可能位置的一个 K 光子的结果是方括号中所包含的原来振幅乘以一个红外发散因子

$$\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p,\ p),\qquad\text{(V.6.13)}$$

这里 $b(p,\ p)$ 由方程 (V.6.3) 给出. 注意，自变量与外势无关.

(2) 当插入虚光子的两端在 P' 支路上时，可以进行类似的考虑. 结果是通过下面的考虑得到一个零贡献. 除两端在出射费米子线上的一个 K 光子的插入丢失以外，现在的情形可以用类似于 P 支路的方式来处理. 当然，丢失图形是一个自能的插入，并且这正好就是引起红外发散性图形的项. 因此这个结果为零.

上面非对称的结果，(1) 和 (2)，是不容许图形的定义的结果. 在该定义中，P 支路和 P' 支路的地位应该交换. 插入 P 到支路的没有贡献，插入到 P' 支路的给出原来的振幅乘以因子

$$\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p',\ p).\qquad\text{(V.6.14)}$$

显然，适当的红外因子是由取方程 (V.6.13) 和 (V.6.14) 平均所得到的对称表示式：

$$\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{2(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,[b(p,\ p)+b(p',\ p')].\qquad\text{(V.6.15)}$$

(3) 光子的起点在 P 支路上，而终点在 P' 支路上。图 V.40 所示的这类图形可以类似地来处理。再者，成对的消去又以类似的方式出现。结果是原来的振幅乘以红外因子

$$-\frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\,b(p',p). \qquad \text{(V.6.16)}$$

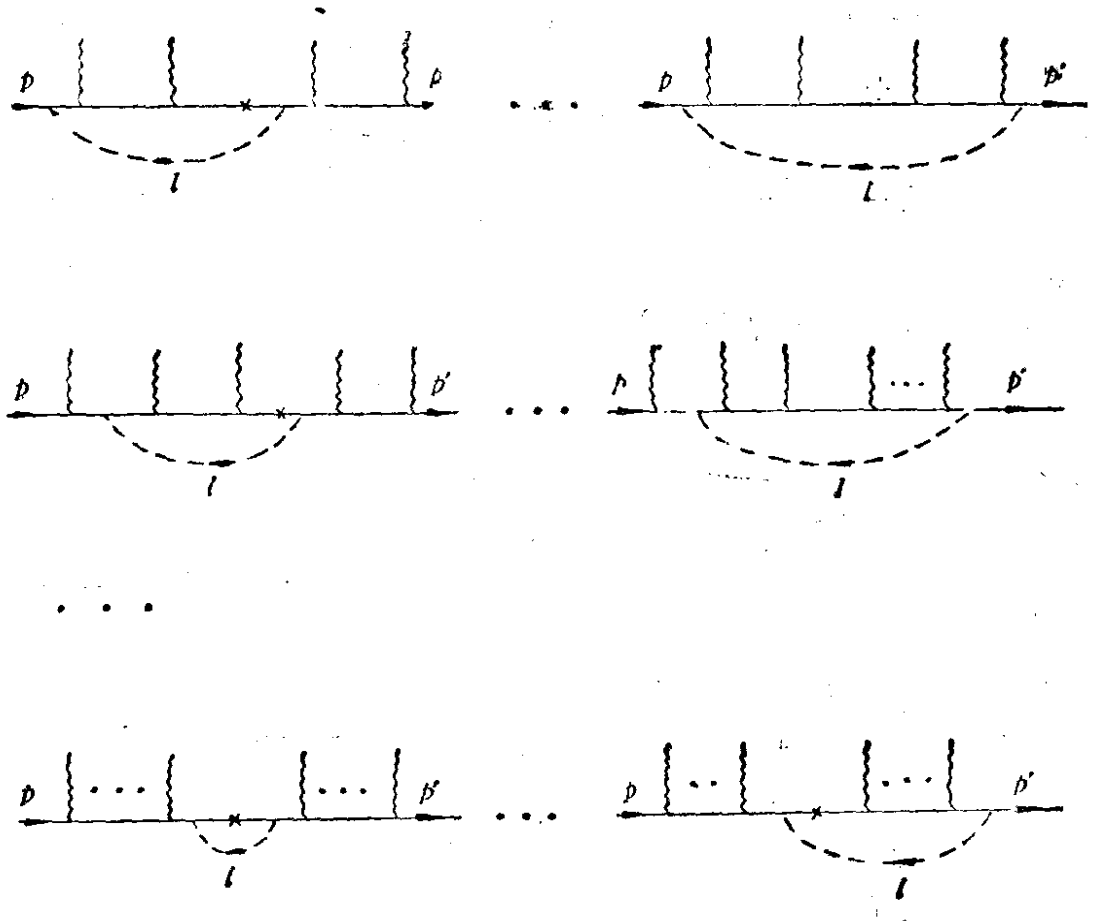


图 V.40

现在可以结论，一个虚 K 光子对称插入到一个容许的 n 光子图形中的影响是把它的振幅乘以一个因子 αB，这里

$$\alpha B \equiv \frac{ie^2\mu^{2\varepsilon}}{2(2\pi)^n}\int\frac{d^nl}{l^2}\left[\frac{(2p'-l)_\mu}{(l^2-2p'\cdot l)}-\frac{(2p-l)_\mu}{(l^2-2p\cdot l)}\right]^2. \qquad \text{(V.6.17)}$$

为了得到这个表示式，要在 $b(p, p)$ 和 $b(p', p')$ 部分内进行积分变数的改变.

红外因子 B 的计算 在方程 (V.6.17) 中所定义的 B 的计算是直接了当的.

$$B = \frac{i\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^1 dx 2y dy \int d^n l \left\{ 2x \frac{4m_R^2 - 4l \cdot p' + l^2}{[l^2 - 2l \cdot p'_x]^3} + 2x \frac{4m_R^2 - 4l \cdot p + l^2}{[l^2 - 2l \cdot p_x]^3} - \frac{2(p \cdot p' - 2p' \cdot l - 2p \cdot l + l^2)}{(l^2 - 2l \cdot p_y)^3} \right\}, \quad \text{(V.6.18)}$$

这里

$$p'_x = xp', \quad p_x = xp,$$

及

$$p_y = [xp' + (1 - x)p]y.$$

可以进行积分变数的改变，使分母成为 l 的平方.

$$B = \frac{i\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n} i(\sqrt{\pi})^n \int_0^1 dx 2y dy \left\{ 2x \left[-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{n}{(p'_x)^2} + \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \cdot \frac{4m_R^2 - 4p' \cdot p'_x + p'^2_x}{(p'^2_x)^{1+\varepsilon}} + \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \cdot \frac{4m_R^2 - 4p \cdot p_x + p_x^2}{(p_x^2)^{1+\varepsilon}} \right] - 2 \left[-\frac{\Gamma(\varepsilon)}{2\Gamma(3)} \cdot \frac{n}{(p_y^2)^\varepsilon} + \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(3)} \cdot \frac{4p \cdot p' - 2p' \cdot p_y - 2p \cdot p_y + p_y^2}{(p_y^2)^{1+\varepsilon}} \right] \right\}, \quad \text{(V.6.19a)}$$

现在

$$p_y^2 = y^2[m_R^2 - x(1-x)r^2],$$
$$r^2 = (p - p')^2. \quad \text{(V.6.19b)}$$

于是

$$B = \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{8\pi} \int_0^1 dx 2y dy \left\{ -2n \frac{\Gamma(\varepsilon)}{2\Gamma(3)} (1 - 2x) + n \right.$$

$$\times \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(3)}\left[2x\ln(x^2p'^2)-\ln(p_y^2)\right]$$

$$-\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{y^{2+2\varepsilon}}\frac{1}{(m^2)^{\varepsilon}}$$

$$\cdot\frac{(2-y)^2+\Delta^2/m_R^2[-2+y+y^2x(1-x)]}{[g(x)]^{1+\varepsilon}}$$

$$+(2-x)^2\frac{2\Gamma(1+\varepsilon)}{x^{1+2\varepsilon}}\frac{1}{(m^2)^{\varepsilon}}\Big\}$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_0^1 dx\left\{-2\ln f(x)-2-\frac{7}{6}\frac{\Delta^2}{m_R^2}\right.$$

$$-\frac{4-2r^2/m_R^2}{f(x)}\ln g(x)+\left[\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right.$$

$$\left.\left.+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\right)\right]\left[-4+\frac{4-2r^2/m_R^2}{g(x)}\right]\right\},\qquad (V.6.20)$$

这里

$$f(x)=1-x(1-x)r^2/m_R^2.$$

在不容许图形中虚光子的插入 事实上，上述虚光子插入的处理是不完全的. 由于对称性，有的容许 $(n+1)$ 光子图形是由 n 个虚光子的不容许图形通过一个 K 光子插入而得到的. 这些图形都要加以解释. 这类图形如图 V.41 所示，

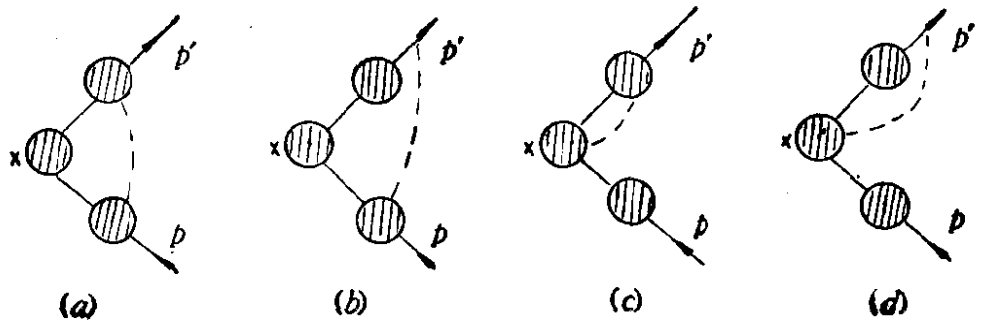


图 V.41

这里小团块插入在费米子线内，表示费米子的自能修正，并且也包含质量的插入．在下面，将证明图 V.41 的 Feynman 振幅为零．为了证明这一点，只需要检验图 V.42 所示的图形．

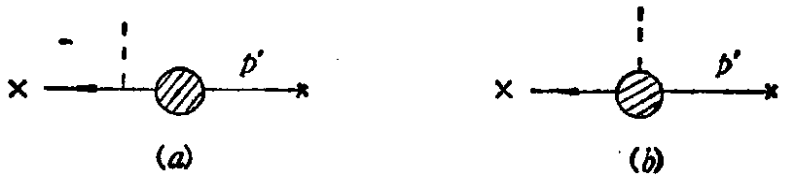


图 V.42

进一步，图 V.42*a* 的图形可以分为两类，它们如图 V.43 所示．

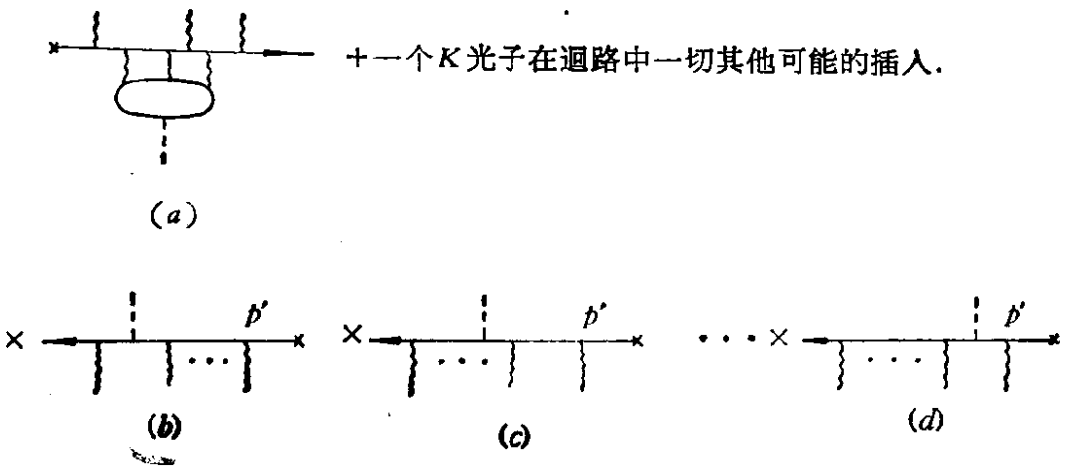


图 V.43

第一类是由图 V.43a 所给出形式的图形组成，其中 K 光子插入到闭合迴路中，这些闭合迴路在 K 光子插入之前是 P' 支路的自能图形部分．往后将说明，这类图形由于规范不变性而为零．第二类是由 K 光子插入与出射费米子线相联系的费米子传播子组成．它们如图 V.43(b)，(c)，和 (d) 所表示．利用方程 (V.6.5)—(V.6.8) 所描述的相同程序，可以证明，它

们与图 V.42 和的振幅的 Feynman 振幅正比于

$$\int \frac{d^n l}{l^2}\,\bar{u}(p')[-i\Sigma(p')+i\delta m]\,\frac{1}{l+\not{p}'-m_R}\times A(l,\cdots), \tag{V.6.21}$$

这里 $A(l,\cdots)$ 为其余的振幅. 因为因子 $-i\Sigma(p')+i\delta m$ 正比于 $(\not{p}'-m)$, 所以式 (V.6.21) 为零. 注意,方程(V.6.21)与通常自能插入到一条外费米子线不同. 在那里因子

$$-i\Sigma(p')+i\delta m$$

要右乘以一个费米子传播子 $(\not{p}'-m)^{-1}$, 它消去 $-i\Sigma(p')+i\delta m$ 中的因子 $(\not{p}'-m)$, 结果是有限的. 目前,传播子取形式 $(\not{p}'+\not{l}-m)^{-1}$, 因此无法消去. 这样完成了在一个虚 K 光子对称插入情形中的约化讨论: 一个虚 K 光子插入到容许的 n 光子图形中产生一切容许的 $(n+1)$ 光子图形.

如果在图形中只有一个 K 光子, 则约化是完全的. 如果多于一个 K 光子,类似的约化可以应用于一切 K 光子,每个贡献为形式 (V.6.17) 的一个红外因子,连同完全由 G 光子组成的其余的振幅. 例如, 设有 n_K 个 K 光子和 n_G 个 G 光子, 这里 $n_G+n_K=n$, 则 Feynman 振幅为 $(\alpha B)^{n_K}$ 乘以由 n_G 个 G 光子组成的振幅.

红外发散因子的指数化 接着将证明, 红外因子 αB 是指数化的. 令 A_n 为包含 n 个虚光子和某个确定数目的实光子的振幅,实光子与目前的讨论无关. 其次,考虑振幅按照固定数目的 K 光子和 G 光子的分类, 令 $n=n_K+n_G$, 这里 n_K 和 n_G 为 K 光子及 G 光子的数目. 具有固定 n_G 和 n_K 的振幅用 $A_{n_G n_K}$ 来表示. 对于给定的 n_K 和 n_G, $A_{n_G n_K}$ 在 A_n 中出现 $n!/n_G!n_K!$ 次. 可以写出

$$A_n=\sum_{n_K=0}^{n}\frac{n!}{(n_G!)(n_K!)}A_{n_G n_K}, \tag{V.6.22}$$

并且由前面的讨论

$$A_{n_G n_K} = (\alpha B)^{n_K} A_{N_G 0}. \qquad \text{(V.6.23)}$$

一切虚光子的贡献之和(具有确定数目的实光子)为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n_K=0}^{n} \frac{n!}{(n_G!)(n_K!)} A_{n_G n_K}$$

$$= \sum_{n_K=0}^{\infty} \frac{1}{n_k} (\alpha B)^{n_K} \sum_{n_G=0}^{\infty} \frac{1}{n_G!} A_{n_G 0}$$

$$= e^{\alpha B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_{n0}. \qquad \text{(V.6.24)}$$

这就是在早所许诺的红外指数化.

进一步，必须证明，一个 K 光子插入到一条闭合费米子圈会给出一个零结果. 插入如图 V.44 所示. 光子的动量用 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 来表示，插入光子的动量用 k 表示，取一切动

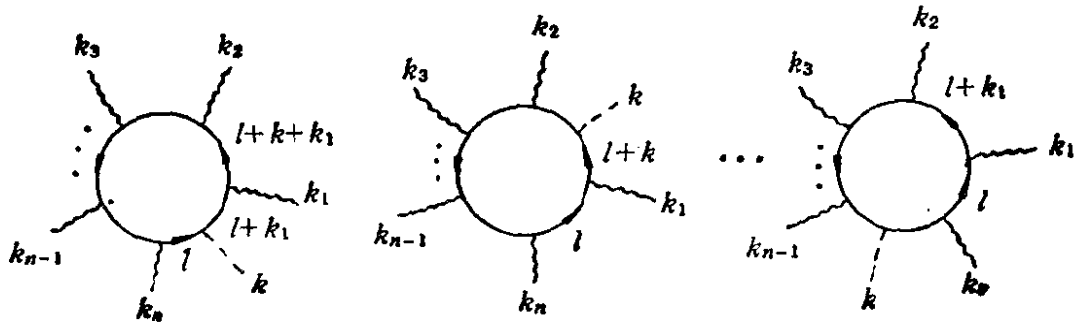


图 V.44

量都要进入圈中

$$k + k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0.$$

图 V.44 的振幅正比于

$$\int d^n l \mathrm{Tr} \left\{ \Gamma_n \frac{1}{l + \not{k}_{n-1} + \cdots + \not{k}_1 + \not{k} - m_R} \right.$$

$$\left. \times \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_2 \frac{1}{l + \not{k}_1 + \not{k} - m_R} \Gamma_1 \right.$$

$$\times\left(\underbrace{\frac{1}{\not{t}+\not{k}-m_R}\not{k}\frac{1}{\not{t}-m_R}}\right)\frac{\dfrac{1}{\not{t}-m_R}-\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}-m_R}}{\text{ⓐ}}$$

$$+\Gamma_n\frac{1}{\not{t}+\not{k}_n+\cdots+\not{k}_1+\not{k}-m_R}\Gamma_{n-1}\cdots\Gamma_2$$

$$\times\left(\underbrace{\frac{1}{\not{t}+\not{k}_1+\not{k}-m_R}\not{k}\frac{1}{\not{t}+\not{k}_1-m_R}}\right)\frac{\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_1-m_R}-\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_1+\not{k}-m_R}}{\text{ⓑ}\qquad\qquad\text{ⓐ}}$$

$$\times\Gamma_1\frac{1}{\not{t}-m_R}+\cdots$$

$$+\Gamma_n\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}_1+\not{k}-m_R}\Gamma_{n-1}$$

$$\times\left(\underbrace{\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-2}+\cdots+\not{k}_1+\not{k}-m_R}\not{k}\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-2}+\cdots+\not{k}_1-m_R}}\right)\cdots\frac{\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-2}+\cdots+\not{k}_1+\not{k}-m_R}-\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-2}+\cdots+\not{k}_1-m_R}}{\text{ⓔ}\qquad\qquad\text{ⓓ}}$$

$$\times\Gamma_1\frac{1}{\not{t}-m_R}+\Gamma_n$$

$$\times\left(\underbrace{\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}+\not{k}_1-m_R}\Gamma_{n-2}\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}_1-m_R}}\right)\frac{\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}_1-m_R}-\dfrac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}_1+\not{k}-m_R}}{\text{ⓔ}}$$

$$\times\Gamma_{n-1}\frac{1}{\not{t}+\not{k}_{n-1}+\cdots+\not{k}_1-m_R}\cdots$$

$$\times \Gamma \frac{1}{\not l - m_R}\Big\}. \qquad \text{(V.6.25)}$$

成对的消除出现在ⓐ项，ⓑ项，等等之间，这给出结果为

$$\int d^n l \mathrm{Tr}\Big\{-\Gamma_n \frac{1}{\not l + \not k_{n-1} + \cdots + \not k_1 + \not k - m_R}$$
$$\times \Gamma_{n-1}\cdots\Gamma_2 \frac{1}{\not l + \not k_1 + \not k - m_R}\Gamma_1$$
$$\times \frac{1}{\not l + \not k - m_R} + \Gamma_n \frac{1}{\not l + \not k_{n-1} + \cdots + \not k_1 - m_R}$$
$$\times \Gamma_{n-1}\cdots\Gamma_2 \frac{1}{\not l + \not k - m_R}\Gamma_1 \frac{1}{\not l - m_R}\Big\}, \qquad \text{(V.6.26)}$$

可以看出，在第一项中进行积分变数改变 $l \to l - k_1$ 后，上式为零.

虚 G 光子贡献的红外有限性 为了完成虚光子贡献的考虑，有必要说明G光子并不引起红外发散.首先考虑图V.45的简单图形. [记住，与方程 (V.6.3) 相联系的虚光子动量流约定已在方程 (V.6.4) 式下面讨论过了]. 如在 § 4.4 中所

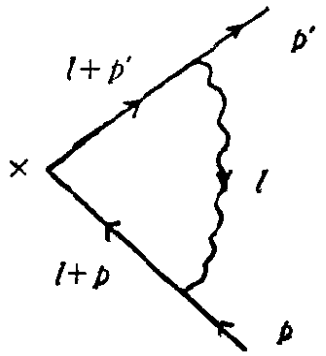


图 V.45

解释的，该图形产生一个红外发散的振幅. 当光子用G光子代换时，振幅变为

$$A^{(45)} = \bar{u}(p')\int \frac{d^n l}{l^2}\Big\{\gamma^\lambda \frac{1}{\not l + \not p' - m_R}\Gamma,$$

$$\times \frac{1}{\not l + \not p - m_R}\gamma_\lambda - b(p', p)\not l$$
$$\times \frac{1}{\not l + \not p' - m_R}\Gamma_\nu \frac{1}{\not l + \not p - m_R}\not l \Big\} u(p), \tag{V.6.27}$$

这里 $b(p', p)$ 由方程 (V.6.3) 给出. 利用 Dirac 方程将这个表示式重排,得到

$$\Lambda^{(45)} = \bar{u}(p')\int \frac{d^n l}{l^2}\frac{1}{a_l a_l'}\Big\{[\not p, \not l]\Gamma_\nu + \Gamma_\nu[\not l, \not p'] + \frac{1}{4}[\gamma^\lambda, \not l]\Gamma_\nu[\gamma_\lambda, \not l]\Big\} \tag{V.6.28}$$

这里

$$a_l \equiv l^2 + 2l\cdot p, \quad a_l' \equiv l^2 + 2l\cdot p'.$$

因为当 $l_\mu = 0$ 时分子为零, 该表示式无红外发散. 值得注意的是,方程 (V.6.28) 对于

$$\Gamma_\nu = \gamma_\mu \text{ 或 } \gamma_\mu\gamma_5$$

也是有限的,因为它们对于分子的 l^2 项给出零系数. 注意,当光子用 G 光子代换时, 图 V.45 红外有限性的上述结论与 Γ_ν 的详细形式无关. 往后在更复杂的顶角考虑中, 这是一个重要的看法.

其次, 考虑 e^4 阶梯形和交叉梯形图形, 它们分别在图 V.46*a* 和 V.46*b* 中描述. 在 Feynman 规范中, 图 V.46*a* 的振幅为

$$\bar{u}(p')\int \frac{d^n l_1}{l_1^2}\frac{d^n l_2}{l_2^2}\Big\{\gamma^\lambda \frac{\not p' + \not l_1 + m_R}{a_1'} \times \gamma^\rho \frac{\not p' + \not l_1 + \not l_2 + m_R}{a_{12}'}\Gamma_\nu \cdot \frac{\not p + \not l_1 + \not l_2 + m_R}{a_{12}} \times \gamma_\rho \frac{\not p + \not l_1 + m_R}{a_1}\gamma_\lambda\Big\} u(p), \tag{V.6.29}$$

这里

$$a_1 = l_1^2 + 2l_1 \cdot p, \quad a_1' = l_1^2 + 2l_1 \cdot p',$$
$$a_{12} = (l_1 + l_2)^2 + 2(l_1 + l_2) \cdot p,$$
$$a_{12}' = (l_1 + l_2)^2 + 2(l_1 + l_2) \cdot p'. \qquad \text{(V.6.30)}$$

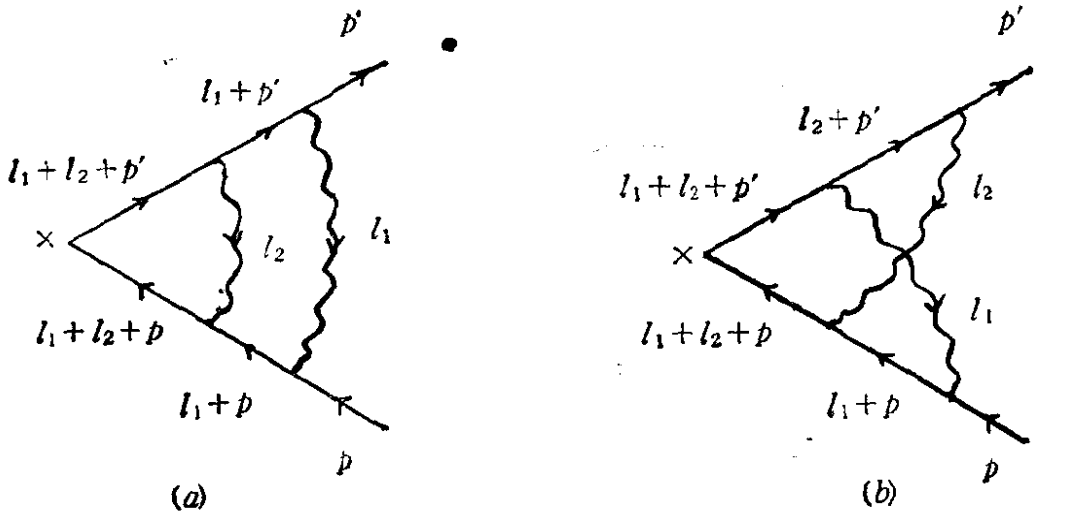


图 V.46

当 $l_{1\mu} \to 0$ 时，分母 a_1，a_1' 和 l^2 同时为零，这产生红外发散. 然而，对于 $l_{2\mu} \to 0$，$l_{1\mu}$ 为有限，无红外发散结果. 换言之，当两端都要联接到质壳上的费米子线上的外部光子线的动量（用动量 l_1 编号）趋近于零时，势必使二费米子和一个光子传播子跑到质壳上，因此引起红外发散. 当 $l_{2\mu} \to 0$ 而 l_1 是有限时，它并不使任何费米子传播子跑到质壳上，除非同时 $l_1 \to 0$. 在后一情形中，（V.6.29）的一切分母都为零.

在图 V.46*a* 的振幅中当光子用 G 光子代换时，可以从下面看出红外发散性不存在：顶角 Γ_V，二内费米子（具有动量 $l_1 + l_2 + p$ 和 $l_1 + l_2 + p'$）传播子及内光子（具有动量 l_2）线共同混合成为有效的顶角 Γ_V'. 于是图 V.46*a* 正好象图 V.45. 一般，Γ_V' 并无红外发散性. 图 V.45 的讨论表明，当通过代换

$$-\frac{g^{\lambda\lambda'}}{l^2}\to-\frac{i}{l^2}\left[g^{\lambda\lambda'}-b(p',p)l^\lambda l^{\lambda'}\right],\qquad(\text{V.6.31})$$

实现外光子 l_i 用一个 G 光子代换时振幅对任意的 l_2 在 l_1 中变为红外有限的. $l_2\to 0$ 的表观发散性要伴随着 $l_1\to 0$. 但是，被积函数在此为零，因为它正比于 l_1. 因此，在 l_2 中也没有红外发散性. 这表明，振幅的红外行为完全受外光子 l_1 的调节.

这个论据可以推广到由 n 个非交叉的梯形（没有二虚光子交叉）所组成的图形. 令 n 个虚光子的动量为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，此时 l_1 为最外部的光子，l_2 为次一光子，等等. 于是，对于 $l_j\to 0$，$j\leqslant n$，除非同时 $l_1, l_2, \cdots, l_{j-1}\to 0$，才没有红外发散性出现. 由这个结果，可以结论，动量 l_1 的最外部的光子控制着红外发散性. 因此，l_1 代换为一个 G 光子使 n 光子非交叉梯形变为无红外发散的. 在 § 4.4 中已讨论了最外部的光子控制红外奇点的事实，在那里曾说明，为使虚光子产生红外发散性，其两端必须要联接质壳上的外光子线. 最外部的光子，例如图·V.46a 的 l_1，就具有这种性质.

现在转而注意图 V.46b 的 e^4 阶交叉梯形图形. 振幅正比于

$$\begin{aligned}\Lambda^{(46b)}\equiv\bar u(p')\int d^nl_1d^nl_2\left(-\frac{g^{\lambda\lambda'}}{l_1^2}\right)\left(-\frac{g^{\rho\rho'}}{l_2^2}\right)\\ \cdot\left\{\gamma^\rho\frac{\not p'+\not l_2+m_R}{a_2'}\gamma^\lambda\frac{\not p'+\not l_2+\not l_1+m_R}{a_{12}'}\right.\\ \cdot\Gamma_\rho\frac{\not p+\not l_1+\not l_2+m_R}{a_{12}}\gamma_\rho\\ \left.\cdot\frac{\not p+\not l_1+m_R}{a_1}\gamma_\lambda\right\}u(p).\end{aligned}\qquad(\text{V.6.32})$$

这里 a_1，a_{12}，和 a_{12}' 由方程 (V.6.30) 给出，并且

$$a_2'\equiv l_2^2+2l_2\cdot p'.$$

幂计数表明，只有当 l_1 和 l_2 同时趋近于零时方程式(V.6.32)才是红外发散的。换言之，控制红外发散性的动量是动量 l_1 和 l_2 的集合。在分子中的因子 l_1 或 l_2 使积分成为红外有限的。因此，在方程(V.6.32)中光子代换为G光子足以使该振幅的红外行为正规化。考虑方程(V.6.32)的被积函数部分。其中光子代换为G光子。

$$
\begin{aligned}
&(-g^{\lambda\lambda'})(-g^{\rho\rho'})\bar{u}(p')\gamma_\rho \frac{\not p' + \not l_2 + m_R}{a_2'}\gamma_\lambda \\
&\quad\cdot \frac{\not p' + \not l_1 + \not l_4 + m_R}{a_{14}'}\Gamma_\nu \frac{\not p + \not l_1 + \not l_2 + m_R}{a_{12}} \\
&\quad\cdot \gamma_{\rho'} \frac{\not p + \not l_1 + m_R}{a_1}\gamma_{\lambda'}u(p) \\
&\to [-g^{\lambda\lambda'} + b^{(1)}(p', p)l'l^{\lambda'}][-g^{\rho\rho'} + b^{(2)}(p', p)l^\rho l^{\rho'}] \\
&\quad\cdot \bar{u}(p')\gamma_\rho \frac{\not p' + \not l_2 + m_R}{a_2'}\gamma_\lambda \frac{\not p' + \not l_1 + \not l_2 + m_R}{a_{12}'} \\
&\quad\cdot \Gamma_\nu \frac{\not p + \not l_1 + \not l_2 + m_R}{a_{12}}\gamma_{\rho'} \frac{\not p + \not l_1 + m_R}{a_1}\gamma_{\lambda'}u(p) \\
&\underset{\substack{l_1\to 0\\ l_2\to 0}}{\sim} [-g^{\lambda\lambda'} + \tilde{b}^{(1)}(p', p)l^\lambda l^{\lambda'}][-g^{\rho\rho'} \\
&\quad + \tilde{b}^{(2)}(p', p)l^\rho l^{\rho'}] \\
&\quad\cdot \bar{u}(p')\frac{2p_\rho'}{\tilde{a}_2'}\cdot\frac{2p_\lambda'}{\tilde{a}_{12}'}\Gamma_\nu \frac{2p_{\rho'}}{\tilde{a}_{12}}\cdot\frac{2p_{\lambda'}}{\tilde{a}_1}u(p_1),
\end{aligned}
\tag{V.6.33}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
&\tilde{a}_1 \equiv 2l_1\cdot p, \quad \tilde{a}_2' = 2l\cdot p', \\
&\tilde{a}_{12} \equiv 2(l_1 + l_2)\cdot p, \quad \tilde{a}_{12}' = 2(l_1 + l_2)\cdot p', \\
&b^{(j)}(p', p) = \frac{(2p' - p_j)(2p - l_j)}{(l_j^2 - 2l_j\cdot p')(l_j^2 - 2l_j\cdot p)}, \\
&\tilde{b}^{(j)}(p', p) = \frac{4p\cdot p'}{(2l_j\cdot p)(2l_j\cdot p')}, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{V.6.34}
$$

与 $l_j \cdot P$ 和 $l_j \cdot P'$，$j = 1, 2$，等等相比较，删去 l_j^2 项，就得到方程 (V.6.33) 和 (V.6.34) 的结果. 清楚看到，假使 G 光子使方程 (V.6.32) 的红外奇点正规化，则方程 (V.6.33) 约化为零.

在一般情形下，如果最外部的光子由 i 个彼此相交叉的，形成控制集合的光子组成，当控制集合的动量 $l_1, l_2, \cdots, l_j$ 同时都为零时，就会出现红外发散性. 因此，在控制集合 l_k 中，一个动量因子乘以振幅的分子会使积分变为红外有限的，这里 $1 \leqslant k \leqslant j$. G 光子对此仍然是充分的.

需要考虑的另一情况是由类如图 V.47 的图形的顶角修正所修改的梯形图形. 动量控制集合与没有顶角修正的图形相同.

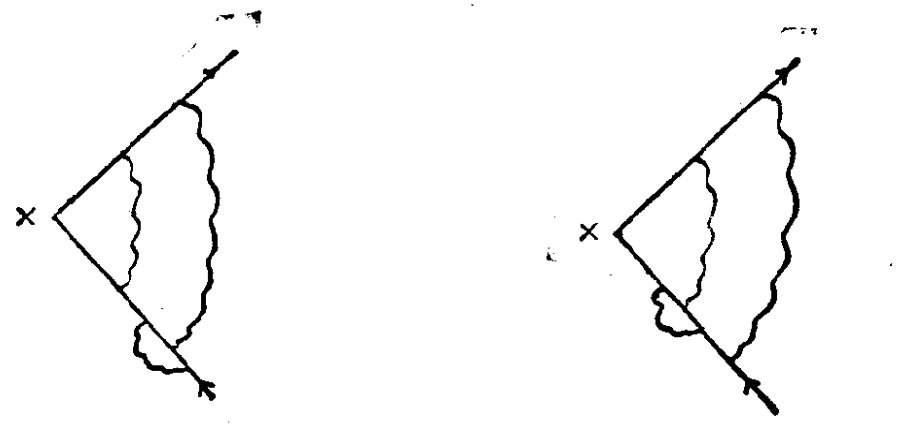


图 V.47

还有另外的情况，是其中虚光子沿 P 支路或 P' 支路跨过二个或多个光子. 这种情况的简单例子在图 V.48 中给出. 在这些例子中，三个光子 l_1, l_2, 和 l_3 形成控制集合. 要产生红外奇点，在该集合中的一切动量 l_1, l_2, 和 l_3 要同时为零，如果被积函数乘以这三个动量中的任一动量，则该红外奇点就可以正规化了.

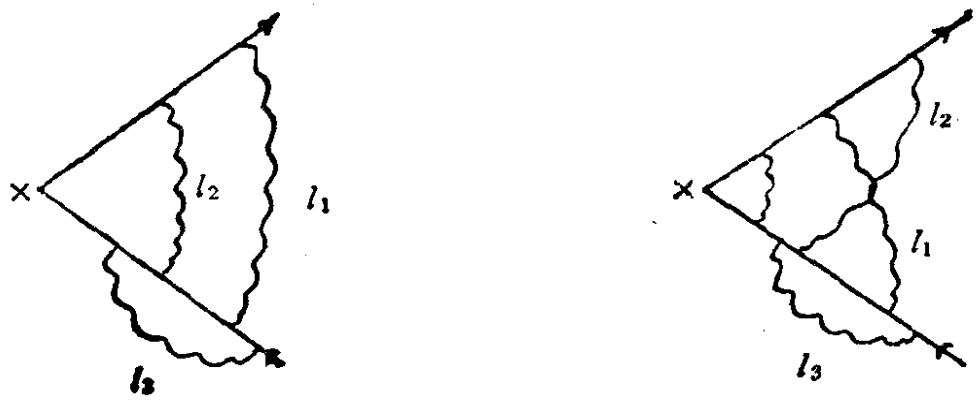


图 V.48

定义控制集合的一般规则是包括图形的**骨架**部分的光子群. 图形的**骨架**意思是由原来的图形中删去例如 §§ 5.1—5.3 所讨论的基本电子自能插入，顶角插入和光子真空极化所得到的图形，例如，图 V.49*b* 是一个骨架图形，而图 V.47*a*，图 V.47*b* 和图 V.49*a* 则不是. 图 V.49 表示了一个图形和它的骨架图 V.49*b* 的图形. 控制集合是图 V.49*b* 的光子.

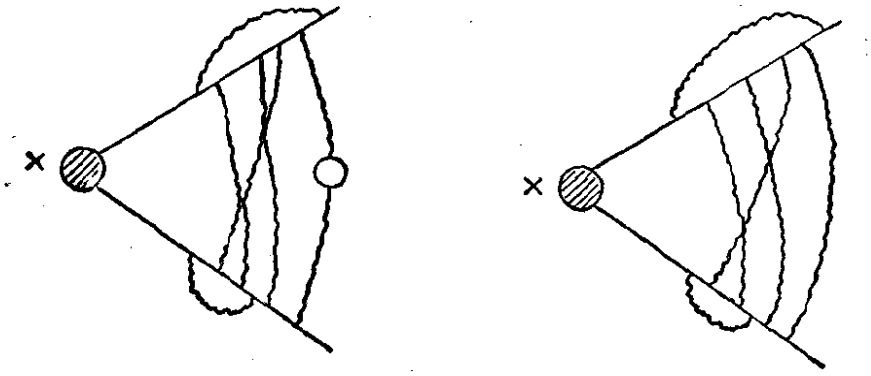


图 V.49

振幅是用控制集合中任一动量来正规化的. 下面是这个一般结果的证明. 考虑包含任意数目虚光子的振幅. 控制动量的零极限中，与控制集合有关的振幅部分为

$$\bar{u}(p')\cdots(\not{p}'+m_R)\gamma^{\mu}(\not{p}'+m_R)\gamma^{\lambda}\cdots\gamma^{\epsilon}(\not{p}+m_R)$$
$$\times\gamma^{\nu}(\not{p}+m_R)\cdots u(p)G_{\mu\nu}(p',p), \qquad \text{(V.6.35)}$$

这里只明显地标出一个 G 光子，并且

$$G_{\mu\nu}(p', p) = -g_{\mu\nu} + b(p', p)l_\mu l_\nu.$$

写出

$$\gamma^\mu(\not{p} + m_R) = (-\not{p} + m_R)\gamma^\mu + 2p^\mu,$$

并利用质壳上的条件，重写出方程 (V.6.35) 为

$$4\bar{u}(p')\cdots(\not{p}' + m_R)\gamma^\lambda\cdots\gamma^\rho(\not{p} + m_R)\cdots u(p)p'^\mu p^\nu \times G_{\mu\nu}(p', p).$$

现在

$$p'^\mu p^\nu G_{\mu\nu}(p', p) = -p'\cdot p + b(p', p)(p'\cdot l)(p\cdot l)$$

$$= \frac{1}{(l^2 - 2l\cdot p')(l^2 - 2l\cdot p)}\{2(l\cdot p) \times (l\cdot p')(l\cdot p' + l\cdot p) + l^2[-l^2 p\cdot p' + (l\cdot p + l\cdot p')p\cdot p' - (l\cdot p)(l\cdot p')]\}, \quad (V.6.36)$$

当 $l_\mu \to 0$ 时，由幂计数可得，上式为零. 该表示式乘以一个正比于下式的表示式

$$\int \frac{d^n l}{l^2}\frac{1}{(l^2 - 2l\cdot p')(l^2 - 2l\cdot p)} 4\bar{u}(p')\cdots(\not{p}' + m_R) \times \gamma^\lambda\cdots\gamma^\rho(\not{p} + m_R)\cdots u(p). \quad (V.6.37)$$

因此在 $l = 0$ 处的红外奇点不出现.

上面所述完成了 G 光子的插入怎样给出红外有限贡献的说明.

实软光子发射 软光子发射可以用类似的方法来处理. 假定所考虑的过程有 n_0 个已观测到的硬光子，这些硬光子有动量 $q_1, q_2, \cdots, q_{n_0}$，并且除已经处理过的虚光子以外，有 n 个未观测到的软光子具有动量 $k_1, k_2, \cdots, k_n$. 矩阵元为

$$\tilde{A}_{(n)} = \varepsilon^{\mu_1}(k_1)\varepsilon^{\mu_2}(k_2)\cdots\varepsilon^{\mu_n}(k_n)A^{(n)}_{\alpha,\mu_2\cdots\mu_n}(k_1, k_2, \cdots, k_n)e^{\alpha\beta}, \quad (V.6.38)$$

这里 $A_{\mu_1}, A_{\mu_2}, \cdots, A_{\mu_n}(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 包括硬光子和软虚 G 光子的贡献，它们的符号被删去了. 虚光子发射因子已分

解为指数因子 $e^{\alpha B}$，B 由方程 (V.6.20) 给出.

令 $d\sigma_n$ 为振幅方程 (V.6.38) 的微分截面. 因为软光子是在动力学容许的区域内积分的，于是

$$\mathscr{J}\frac{d\sigma_n}{d^3p'\prod_{j=1}^{n_0}d^3q_j}=\frac{1}{n!}e^{2\alpha B}\int\prod_{j=1}^{n}\left(-g^{\mu_j\nu_j}\frac{d^3k_j}{(2\pi)^3 2k_{j0}}\right)$$

$$\cdot 2\pi\delta\left(p_0-p_0'-\sum_{j=1}^{n_0}q_{j0}-\sum_{j=1}^{n}k_{j0}\right)$$

$$\cdot A^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n})^+, \qquad (V.6.39)$$

这里因子 $-g^{\mu_i\nu_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，来自于未观测到的光子偏振求和，右边的因子 $(n!)^{-1}$ 来自于 n 个软光子为全同粒子的事实，而因子 $\mathscr{J}$ 包括末费米子的一切相空间因子 $((2\pi)^3 2P_0')$，n_0 个已观测到的相空间因子 $\left(\prod_{j=1}^{n_0}(2\pi)^3 2q_{j0}\right)$ 和适当的入射流因子 $(\sim 2\bar{P})$. 因为外势可以吸收三动量，故只有能量守恒 δ 函数出现在微分截面公式内. 在下面的论证中容易看出这些事实. 外势问题可以看作为轻子相对于很重的靶的散射极限，从轻粒子到重粒子的动量传递比之重靶粒子的质量小的多. 令 M 为重粒子的质量，K_μ 和 K'_μ 为发生散射前后的重粒子四动量. 假定重粒子没有辐射，于是

$$K_\mu+p_\mu-K'_\mu-p'_\mu-\sum_{j=1}^{n}k_{j\mu}-\sum_{j=1}^{n_0}q_{j\mu}=0. \qquad (V.6.40)$$

现在

$$K_0-K'_0\simeq\frac{1}{2M}(\bar{K}^2-\bar{K}'^2)=0(\bar{K}^2/M),$$

它可以略去. 能量动量守恒方程变为

$$p_0-p'_0-\sum_{j=1}^{n}k_{j0}-\sum_{j=1}^{n_0}q_{j0}=0,$$

及

$$K + p - K' - p' - \sum_{j=1}^{n} k_j - \sum_{j=1}^{n_1} q_j = 0.$$

因为K和K'不出现在能量守恒方程中，与重粒子有关的变数在d^3K'积分后不出现. 这样得到象方程 (V.6.39) 形式的微分截面公式.

在 § 4.4 中已解释了软实光子发散性存在的理由. 可以由重写出光子偏振的求和来分离红外发散性实现.

$$\sum_{\text{极化}} \varepsilon^{\mu}(k)\varepsilon^{\nu}(k) \to g^{\mu\nu} = -\tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{K}^{\mu\nu}, \quad \text{(V.6.41)}$$

这里k为光子动量，

$$\tilde{G}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \tilde{b}(p_a, p_b)k^{\mu}k^{\nu}, \quad \text{(V.6.42)}$$

$$\tilde{K}^{\mu\nu} \equiv \tilde{b}(p_a, p_b)k^{\mu}k^{\nu}, \quad \text{(V.6.43)}$$

及

$$\tilde{b}(p_a, p_b) \equiv \frac{p_a \cdot p_b}{(p_a \cdot k)(p_b \cdot k)}. \quad \text{(V.6.44)}$$

动量 $P_a(P_b)$ 按照光子是否由 P 支路或 P' 支路发射 $\tilde{A}_n(\tilde{A}_n^{+})$ 而为 p 或 p'. 因此，由一闭合迴路发射的光子并不直接与 P-支路或 P'-支路(通过费米子线)相联系，它并不加以修正. 这是因为如方程 (V.6.25) 和 (V.6.26) 的讨论中所阐述的，由于规范不变性，方程 (V.6.42) 和 (V.6.43) 中正比于 $k^{\mu}k^{\nu}$ 的项得不到任何有限的贡献. 事实上，由一闭合费米子迴路发射的软光子并不引起红外发散.

类似于虚光子的情形，在偏振求和以后，它会出现在截面计算中的每个实光子分为 $\tilde{G}$ 光子部分和 $\tilde{K}$ 光子部分. 于是截面展开为由若干 $\tilde{G}$ 光子和 $\tilde{K}$ 光子组成的各项之和. 仅在 $\tilde{K}$ 光子中发生红外发散. 当一个软和实的光子从一条质壳上的费米子线发射时，虽然会出现红外发散性，但对于系统地减

除红外因子，把一切软光子展开为 $\tilde{G}$ 和 $\tilde{K}$ 矢量，仍然是一个很方便的设计.

给出振幅 $A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}$，它有 n 个未探测到的(不必为软的)光子以及观测到的光子和虚光子，再插入动量 k 的附加未探测到的光子，令其振幅表示为 $A^{(n+1)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_n}$. 按照方程 (V.6.41)—(V.6.44) 中所给出的规则，有必要考虑插入到 P 支路和 P' 支路的 $k^\mu(A^{(n+1)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_n})_p$ 和 $k^\mu(A^{(n+1)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_n})_{p'}$. 一切可能插入 P 和 P' 支路的求和，由于规范不变性，会给出一个零结果，只要对于二支路它没有不同的因子 $b(P_a, P_b)$[参看 (V.6.44)]. 设 $A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 包括 j 个 P 支路光子顶角和 j' 个 P' 支路光子顶角.这些顶角的每个都是与一个实光子或虚光子相联系的. 在现在的考虑中不必区别它们. 不同顶角的动量赋值如图 V.50 所示. 令 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 及 $k'_1, k'_2, \cdots, k'_{j'}$ 分别为原来振幅光子的动量和

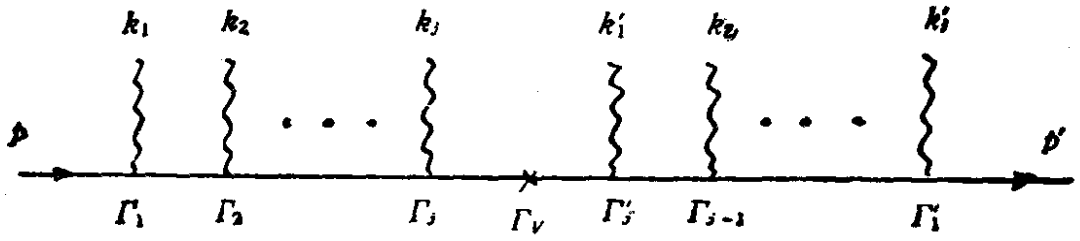


图 V.50

所有其余顶角光子的动量，q 为对外势的动量传递. 当其中两个动量与相同的(虚)光子线相联系时，它们的动量之和当然为零. 为书写简单起见，引入下面的符号

$$k_{jl} \equiv k_j + k_{j+1} + \cdots + k_l, \qquad \text{(V.6.45)}$$

$$k'_{jl} \equiv k'_j + k'_{j+1} + \cdots + k'_l. \qquad \text{(V.6.46)}$$

正比于 $A^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 的图 V.50 的振幅为

$$\bar{u}(p')\left\{\Gamma'_{j'}\frac{1}{\not p - \not k_{1j} - \not k'_{1(j'-1)} - \not q - m_R}\right.$$

$$\times \Gamma'_{j'-1}\frac{1}{p-k_{1j}-k'_{1(j-1)}-q-m_R}\cdots$$
$$\times \Gamma'_1\frac{1}{p-k_{1j}-q-m_R}\Gamma_\nu\frac{1}{p-k_{1j}-m_R}$$
$$\times \Gamma_j\cdots\Gamma_2\frac{1}{p-k_1-m_R}\Gamma_1\Big\}u(p). \qquad (V.6.47)$$

一个 K 光子插入 P 支路中一切可能的位置给出

$$-\bar{u}(p')\Big\{\Gamma'_{j'}\frac{1}{p-k_{1j}-k'_{1(j'-1)}-q-k-m_R}$$
$$\times \Gamma'_{j'-1}\frac{1}{p-k_{1j}-k'_{1(j-2)}-q-k-m_R}\cdots$$
$$\times \Gamma'_1\frac{1}{p-k_{1j}-q-k-m_R}\Gamma_\nu\frac{1}{k-k_{1j}-m_R}$$
$$\times \Gamma_j\cdots\Gamma_2\frac{1}{p-k_1-m_R}\Gamma_1\Big\}u(p), \qquad (V.6.48)$$

它要乘以一个适当的 $\tilde{b}$ 因子. 这与原来的振幅乘以一个符号并用 $q+k$ 代换 q 相同. 一个 K 光子插入到 P' 支路的一切可能位置给出方程 (V.6.48) 乘以 -1. 这是由于规范不变性，因为插入到 P 和 P' 支路的求和，如果它们的系数 $\tilde{b}$ 相同，会给出一个零结果.

正如虚光子的情形一样，一个实光子插入到完全由（在前面图 V.35 所定义的）容许图形组成的 n 光子顶角并不产生所有容许的 $n+1$ 实光子图形. 有由插入到不容许的 n 个实光子图形所得到的容许的 $n+1$ 实光子图形. [例如，在 $n+1$ 实光子图形中，第 $n+1$ 个实光子是由出射 p' 线发射的，而且顶角修正是在该实光子的顶角处插入的. 如果第 $n+1$ 个实光子被拿走，则图形变为 n 实光子的不容许的图形，因为顶角修正现在变为出射费米子线的自能修正]. 相联系的讨论和推导方程 (V.6.21) 的方法表明，这个特别的插入

贡献一个零结果. 因此，动量 k 的一个观测到的实 $\tilde{K}$ 光子插入到 n 实光子振幅有两个效应：(a) 对外势的动量传递从 q 变到 $q+k$；(b) 原来的截面公式要乘以下面形式的红外因子：

$$-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2k}\left(\frac{p'_\mu}{k\cdot p'}-\frac{p_\mu}{k\cdot p}\right)^2$$

$$\to\frac{2\alpha\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{n-2}}\int\frac{d^{n-1}k}{2k}\left(\frac{p'_\mu}{k\cdot p'}-\frac{p_\mu}{k\cdot p}\right)^2. \qquad \text{(V.6.49)}$$

在观测不到的实光子 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 集合的传播子展开式中，每一项由 n_G 个 $\tilde{G}$ 光子和 n_K 个 $\tilde{K}$ 光子组成，这里 $n_G+n_K=n$. 把一切 $\tilde{K}$ 光子的集合表示为 S_K，把一切 $\tilde{G}$ 光子的集合表示为 S_G. 于是

$$\prod_{j=1}^{n}(-g^{\mu_j\nu_j})\cdot A^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n})^+$$

$$-\prod_{i=1}^{n}(-\tilde{G}^{\mu_i\lambda_i}-\tilde{K}^{\mu_i\nu_i})\cdot A^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n})^+$$

$$-\sum_{n_K=0}^{n}\left\{\prod_{j\in s_k}(2\pi)^3\left[-\frac{\alpha}{2\pi^2}\left(\frac{p'_\mu}{k_j\cdot p'}-\frac{p_\mu}{k\cdot p}\right)^2\right]\right.$$

$$\times\prod_{l\in s_G}(-\tilde{G}^{\nu_l\nu_l})\cdot\tilde{A}^{(n)}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n_G}}(\cdots, q+k_1$$

$$+\cdots+k_{n_K})[\tilde{A}^{(n)}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n_G}}(\cdots, q+k_1$$

$$\left.+\cdots+k_{n_K})]^+\right\}, \qquad \text{(V.6.50)}$$

这里矩阵元 $\tilde{A}^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}(\cdots, q+k_1+\cdots+k_{n_K})$ 只与 $\tilde{G}$ 光子有关. 自变量 $q+k_1+\cdots+k_{n_K}$ 表明，与 $\tilde{K}$ 光子动量 $k_1, \cdots, k_{n_G}$ 的关系只是通过上面所提到的动量的特别组合实现的，并且

$$q + k_1 + \cdots + k_{n_K} = p - p' - \sum_{l=1}^{n_0} q_l$$

$$- \sum_{j=1}^{n_G} \tilde{k}_j. \qquad \text{(V.6.51)}$$

$\tilde{G}$ 光子的动量表示为 $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \cdots, \tilde{k}_{N_G}$.

对于一个给定的分解，$n = n_G + n_K$，有 $\frac{n!}{(n_G!)(n_K!)}$ 个全同的项. 现在，微分截面公式方程 (V.6.39) 可以重写为

$$\mathcal{J} \frac{d\sigma_n}{d^3p' d^3q_1 \cdots d^3q_{n_0}} = e^{2\alpha B} \sum_{n_K=0}^{n} \int \delta \left(p_0 - p'_0 \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n_0} q_{j0} - \sum_{j=1}^{n_K} k_{j0} - \sum_{j=1}^{n_G} \tilde{k}_{j0} \right)$$

$$\times \frac{1}{n_K!} \prod_{j=1}^{n_K} \frac{d^3k_j}{2k_{j0}} \left[- \frac{2\alpha}{(2\pi)^3} \left(\frac{p'_\mu}{k_j \cdot p'} - \frac{p_\mu}{k_j \cdot p} \right)^2 \right]$$

$$\times \frac{1}{n_G!} \prod_{j=1}^{n_G} \frac{d^3\tilde{k}_j}{(2\pi)^3 2\tilde{k}_{j0}} (-G^{\mu_j \nu_j}) \tilde{A}^{(N_G)}_{\mu_1 \cdots \mu_G} (\tilde{A}^{(N_G)}_{\nu_1 \cdots \nu_{n_G}})^+.$$

$$\text{(V.6.52)}$$

现在把下面单位因子插入到方程 (V.6.51) 内

$$1 = \int d^3q \delta \left(q - p + p' + \sum_{l=1}^{n_0} q_l \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n_G} k_i + \sum_{j=1}^{n_K} k_j \right), \qquad \text{(V.6.52a)}$$

于是在方程(V.6.51)矩阵元中通过组合 $q + k_1 + \cdots + k_{n_K}$ 与 $\tilde{K}$ 光子动量的关系可以用方程 (V.6.52) 代替.

进一步，它可写为

$$\delta^4\left(f-q-\sum_{j=1}^{n_G}\tilde{k}_j-\sum_{l=1}^{n_K}k_l\right)$$

$$=\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}\exp\left\{i\left[f-q-\sum_{j=1}^{n_G}\tilde{k}_j\right]x\right\}$$

$$\times\prod_{l=1}^{n_K}e^{-ik_l\cdot x},\qquad\text{(V.6.53)}$$

这里

$$q_0\equiv 0,$$

及

$$f\equiv p-p'-\sum_{j=1}^{n_0}q_j.$$

上面的计算容许把方程 (V.6.52) 重写为

$$\mathscr{J}\frac{d\sigma_n}{d^3p'd^3q_1\cdots d^3q_{n_0}}=e^{2\alpha B}\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}d^3qe^{i(f-q)x}$$

$$\cdot\frac{1}{n!}\sum_{n_K=0}^{\infty}\frac{1}{n_K!}\prod_{j=1}^{n_K}\int\frac{d^3k_j}{2k_{j0}}\left\{\left[-\frac{2\alpha}{(2\pi)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{p'_\mu}{k_j\cdot p'}-\frac{p_\mu}{k_j\cdot p}\right)^2\right]e^{-ik_jx}\right\}$$

$$\cdot\frac{1}{n_G!}\prod_{l=1}^{n_G}\frac{d^3\tilde{k}_l}{(2\pi)^3 2\tilde{k}_{l0}}(-\tilde{G}^{\mu_l\nu_l})\tilde{A}^{(n_G)}_{\mu_1\cdots\mu_{n_G}}(\tilde{A}^{(n_G)}_{\nu_1\cdots\nu_{n_G}})^+.$$

(V.6.54)

表示

$$\tilde{S}(k)\equiv-\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{p'_\mu}{k\cdot p'}-\frac{p_\mu}{k\cdot p}\right)^2.\qquad\text{(V.6.55)}$$

现在观测不到的实光子可以总结为

$$\mathscr{J}\frac{d\sigma_n}{d^3p'd^3q_1\cdots d^3q_{n0}}=e^{2\alpha B}\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}d^3qe^{i(f-q)x}$$

$$\cdot \sum_{n_K=0}^{\infty} \frac{1}{n_K!} \left[2\alpha \int \frac{d^3k}{2k} \tilde{S}(k) e^{-ikx} \right]^{n_K}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\tilde{k}_i}{(2\pi)^3 2\tilde{k}_i} e^{-i\tilde{k}_i x} (-\tilde{G}^{\mu_i\nu_i}) \tilde{A}^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}$$

$$\cdot (\tilde{A}^{(n)}_{\nu_1\cdots\nu_n})^+ = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} d^3q e^{i(f-q)x} e^{2\alpha(B+\tilde{B}(x))}$$

$$\cdot \left\{ |A^{(0)}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\tilde{k}_i}{(2\pi)^3 2\tilde{k}_i} \right.$$

$$\left. \cdot e^{-i\tilde{k}_i x} (-G^{\mu_i\nu_i}) A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n} (A^{(n)}_{\nu_1\cdots\nu_n})^+ \right\}, \qquad \text{(V.6.56)}$$

这里

$$\tilde{B}(x) \equiv \int \frac{d^3k}{2k} \tilde{S}(k) e^{-ikx}, \qquad \text{(V.6.57)}$$

并且 $A^{(0)}$ 表示只包括观测到的光子的振幅. 注意，在方程 (V.6.57) 中没有积分限. 在方程 (V.6.53) 中重写 δ 函数就可以消去积分限. 维数计数表明，$\tilde{B}(x)$ 包含红外发散性，可用下面的方法进行减除. 同时，这可以使 x 积分分离出来. 令

$$\tilde{B}(x) \equiv \tilde{B}(\Delta E) + \tilde{D}(x, \Delta E), \qquad \text{(V.6.58)}$$

这里

$$\tilde{B}(\Delta E) \equiv \int \frac{d^3k}{2k} \tilde{S}(k) \theta(\Delta E - k), \qquad \text{(V.6.59)}$$

及

$$\tilde{D}(x, \Delta E) \equiv \int \frac{d^3k}{2k} \tilde{S}(k) [e^{-ikx} - \theta(\Delta E - k)]. \qquad \text{(V.6.60)}$$

显然，方程 (V.6.60) 在项 $\tilde{B}(\Delta E)$ 中没有红外奇点. ΔE 的值对不同的问题以方便为准则可以作不同的选取.

$\tilde{G}$ 光子贡献的有限性 在计算 $B(\Delta E)$ 的值及说明 B +

$B(\Delta E)$ 无红外奇点以前，需要讨论在方程 (V.6.56) 的括号中的项无红外奇点的事实. 下面给出若干重点:

(a) $\tilde{G}^{\mu\nu}p_{a\mu}p_{b\nu}=0$. (V.6.61)

(b) 乘积 $A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\nu_1\cdots\nu_n})^+\prod_{i=1}^{n}(-\tilde{G}^{\mu_i\nu_i})$ 的一般结构可以下面的方法来进行分析，考虑第 i 个 $\tilde{G}$ 光子的贡献

$$\cdots\frac{\not p_b+\not Q'+m_R}{D'}\gamma^{\mu_i}\frac{\not p_b+\not Q'-\not k_i+m_R}{D_b}\cdots$$
$$\times\frac{\not p_a+\not Q-\not k_i+m_R}{D_a}\gamma^{\nu_i}\frac{\not p_a+\not Q+m_R}{D'_a}\cdots\tilde{G}_{\mu_i\nu_i}, \tag{V.6.62}$$

这里

$$\begin{aligned}
&D_a\equiv Q^2-2Q\cdot k_i+2p_a\cdot(Q-k_i),\\
&D'_a=Q^2+2p_a\cdot Q,\\
&D_b\equiv Q'^2-2Q'\cdot k_i+2p_b\cdot(Q-k_i),\\
&D'_b=Q'^2+2p_b\cdot Q',
\end{aligned}\tag{V.6.63}$$

等等，Q 和 Q' 为虚光子动量和其它实光子动量的线性组合. 在极限 $k_i\to 0$ 中，方程 (V.6.62) 约化为

$$\begin{aligned}
&\cdots\frac{1}{D_bD'_bD_aD'_a}[2p_b^{\mu}i(\not p_b+m_R)+(\not p_b+m_R)\gamma^{\mu}i\not Q'\\
&\quad+\not Q'\gamma^{\mu}i(\not p_b+m_R)+\not Q'\gamma^{\mu}i\not Q]\\
&\cdots[2p_a^{\nu}i(\not p_a+m_R)+(\not p_a+m_R)\gamma^{\nu}i\not Q\\
&\quad+\not Q\gamma^{\nu}i(\not p_a+m_R)+\not Q\gamma^{\nu}i\not Q]\cdots\tilde{G}_{\mu_i\nu_i},
\end{aligned}\tag{V.6.64}$$

如果 Q 和 Q' 可以略去，则外表红外发散的上面表示式，由于在(a) 中给出的恒等式而为零. 正比于 k_i 的分子中的项都必须保留，使发散性正规化.

(c) 分别随 K' 和 K 趋于零的分母 D'_a 和 D'_b 并不与变数 k_i 相联系. 分母可以用动量 k 的光子之前发射的光子动量 (顺序

是从入射费米子到出射费米子）来进行正规化．由上面的讨论，可以下结论，在方程 (V.6.56) 括号中的项是无红外发散的，因此截面是有限的．

$\tilde{B}(\Delta E)$ 的计算 由方程 (V.6.59)，通过维数正规化，可以写出

$$\tilde{B}(\Delta E) \to -\frac{\mu^{2\varepsilon}}{2(2\pi)^{n-2}} \int_{k<\Delta E} \frac{d^{n-1}k}{k} \times \left(\frac{p'_\mu}{p'\cdot k} - \frac{p_\mu}{p\cdot k}\right)^2, \tag{V.6.65}$$

它是方程 (V.4.19a) 和 (V.4.19b) 的形式；在方程 (IV.4.33) 和 (IV.4.3a) 中已计算出来了．于是

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\Delta E) = \frac{1}{8\pi}\int_0^1 dz \Bigg\{ &-\left[-\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\right)\right] \\ &\times \left[-4 + \frac{4 - r^2/m_R^2}{g(z)}\right] + 4\frac{p'_0}{\bar{p}'}\ln\left(\frac{p'_0+\bar{p}'}{m_R}\right) \\ &+ 4\frac{p_0}{\bar{p}}\ln\left(\frac{p_0+\bar{p}}{m_R}\right) + \frac{4-2r^2/m_R^2}{g(z)} \\ &\times \left[\ln\left(\frac{4\Delta E^2}{m_R^2}\right) - \frac{p_{z0}}{\bar{p}_z}\ln\left(\frac{p_{z0}+\bar{p}_z}{\sqrt{g(z)}}\right)\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{V.6.66}$$

这里

$$\begin{aligned} p_{z0} &= zp + (1-z)p'_0, \\ \bar{p}_z &= z\bar{p} + (1-z)\bar{p}', \\ r^2 &= (p-p')^2, \end{aligned}$$

及

$$g(z) = 1 - z(1-z)\frac{r^2}{m_R^2}.$$

由 (V.6.20) 和 (V.6.66)

$$B + \tilde{B}(\Delta E) = \frac{1}{8\pi}\int_0^1 dz \left\{-2g(x) - 2 - \frac{7}{6}\frac{r^2}{m_R^2}\right.$$

$$+4\frac{p_0'}{\bar{p}'}\ln\left(\frac{p_0'+\bar{p}'}{m_R}\right)+4\frac{p_0}{\bar{p}}\ln\left(\frac{p_0+\bar{p}}{m_R}\right)$$
$$+\frac{4-2r^2/m_R^2}{g(z)}\left[2\ln\left(\frac{2\Delta E}{m_R}\right)-\ln g(x)-\frac{p_z^0}{\bar{p}_z}\right.$$
$$\left.\times\ln\left(\frac{p_{z0}+\bar{p}_z}{\sqrt{g(x)}}\right)\right]\Bigg\}. \qquad \text{(V.6.67)}$$

最后微分截面可以写为

$$\mathscr{J}\frac{d\sigma_n}{d^3p'd^3q_1\cdots d^3q_{n_0}}=e^{2\alpha(B+\tilde{B}(\Delta E))}\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}d^3qe^{i(f-q)x}$$
$$\cdot e^{2\alpha\tilde{D}(x,\Delta E)}\cdot\left\{|A^0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\right.$$
$$\left.\cdot\int\frac{d^3\tilde{k}_j}{(2\pi)^3 2\tilde{k}_j}e^{-ik_jx}(-\tilde{G}^{\mu_j\nu_j})\cdot A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\nu_1\cdots\nu_n})^+\right\}. \qquad \text{(V.6.68)}$$

为了得到近似结果，对 $|A_0|^2$ 项作不同的处理，是方便的[14,17]. 这可用下面的方法来进行. 对于 $n_G=0$，由能量动量守恒方程，G 光子动量为零；能量守恒方程给出（记住 $q_0=0$）

$$\sum_{j=1}^{n_K}(k_{j0}/f_0)=1. \qquad \text{(V.6.69)}$$

由重写出方程 (V.6.56) 的 $e^{2\alpha\tilde{B}(x)}$ 项［在方程 (V.6.53) 以前］，可以不同的方式计算出 $|A^{(0)}|^2$. 利用 (V.6.69) 可以写出

$$e^{2\alpha\tilde{B}(x)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left\{2\alpha\int\frac{d^3k}{2k_j}\tilde{S}(k_j)e^{-ik_jx}\right\}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left[2\alpha\int\frac{d^3k}{2k_j}\tilde{S}(k)e^{-ik_jx}\right]^{n-1}$$

$$\times\left[\alpha\int\frac{d^3k}{f_0}\tilde{S}(k)e^{-ikx}\right]$$

$$=1+\alpha\int\frac{d^3k}{f_0}\tilde{S}(k)e^{-ikx}\cdot e^{2\tilde{B}(x)}. \qquad \text{(V.6.70)}$$

当把该项代入方程 (V.6.56) 时，注意，在方程 (V.6.70) 中项“1”被乘以因子 $e^{2\alpha B}$. 在极限 $\varepsilon\to 0^-$, $B\to-\infty$ 中，它可以由方程 (V.6.20) 看出来，因为 $\frac{1}{\varepsilon}$ 项的系数是正的，即

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^1 dz\left[-4+\frac{4-2r^2/m_R^2}{1-z(1-z)r^2/m_R^2}\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left|\frac{r^2}{m_R^2}\right|\int_0^1 dz\,\frac{2-4z(1-z)}{1+z(1-z)\left|r^2/m_R^2\right|}\geqslant 0,$$

这里 r^2 由方程 (V.6.19b) 给出，是负的. 因此在 (V.6.70) 中项“1”可以删去. 于是方程 (V.6.63) 代换为

$$\mathscr{J}\frac{d\sigma_n}{d^3p'd^3q_1\cdots d^3q_{n_0}}=e^{2\alpha(B+\tilde{B}(\Delta E))}\int\frac{d^4x}{(2\pi)^4}d^3q\,e^{i(l-q)x}$$

$$\cdot e^{2\alpha\tilde{D}(x,\Delta E)}\cdot\left[\alpha\frac{|A^{(0)}|^2}{f_0}\int d^3k\tilde{S}(k)e^{-ikx}\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int\frac{d^3\tilde{k}_i}{(2\pi)^3 2k_i}e^{-ikx}$$

$$\left.\times(-\tilde{G}^{\mu_i\nu_i})A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}(A^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_n})^+\right]. \qquad \text{(V.6.71)}$$

现在的技巧推广到其他过程的细节及其限制，可以在文献[17]中找到. 关于应用电子正电子散射所有阶公式与实验数据的对比，可参阅文献[16].

应该注意，红外指数因子只是非平凡最低阶结果的因子. 因此，用最低阶情形的结果来显示：消除虚光子和实光子贡献的红外发散性的证明是充分的. 这与非阿贝耳规范理论显然不同，在非阿贝耳规范理论中 Bloch-Nordsieck 机制失效.

这些将在下章讨论.

Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理 在 § IV.4 中讨论过红外发散出现的一般原因. 发散性与软辐射相联系，软辐射引起包含带电粒子态的简并. 例如，在电子质量处，电子传播子并不是一个孤立的极点，而是一个分支点. 当总计了包括一切软光子贡献的末态完整集合时，消去红外发散性的 Bloch-Nordsieck 机制是由幺正性条件保证的. 在这个考虑中带电场是带有质量的，因而仅有的简并态是有质量的带电粒子加不定数目的软辐射.

当带电粒子(比如电子)的质量为零时，所谓质量奇点的新发散性或共线发散性出现在共线组态中，其中带电场及其伴随的辐射场平行运动，这种共线组态引起新的简并，如在 § IV.4 中所讨论的，其中辐射场不必是软辐射. 质量奇点不能仅由末态的，包括软光子和硬光子在内的一切简并态的求和来消去. 这些奇点通过 Kinoshita[9]-Lee-Nauenberg[10] 定理所规定的更一般的条件可以消去，该定理表明，在初态以及末态中的简并态必须要进行求和. 该定理仍然是幺正性的结果. 包含了入射辐射场（除原来反应已规定的态以外，如有的话）并包括不连通图形在内的简并态代表包括无相互作用光子在内的过程，都必须包括在求和之中.

令 $A_{b,a}$ 表示反应 $a \to b$ 的矩阵元. 末态和(或)初态包含带电粒子. 令 n 和 n' 为这些态中软光子或硬光子的光子数目，并且 $n, n' = 0, 1, 2, \cdots$，它们分别与初态和末态相联系. 态 na 和 a 是简并的，并且 $n'b$ 和 b 是简并的. Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理表明，当取某些质量参数或所有的质量参数为零时，跃迁几率

$$P_{ba} \equiv \sum_{n,n'} |A_{n'b,\,na}|^2 d\Phi_{n'} d\Phi_n \qquad (V.6.72)$$

是无红外奇点的和无质量奇点的，这里 $d\Phi_{n'}$ 和 $d\Phi_n$ 为初态和末态光子相空间. 末态相空间正好是通常的相空间因子. 初态相空间严格地象末态相空间一样来处理，不过光子的自旋要进行求和，而不是平均. Bloch-Nordsieck 机制简单地就是 $n=0$ 的情形，即，在初态中没有简并的光子.

方程 (V.6.72) 的物理含义并不清楚，因为初态光子是附加的入射光子，这些附加的入射光子在态 a 或 b 内被带电粒子吸收，或者除用来作为消去质量奇点的必要部分以外，仅在相互作用时作为旁观者不起作用. 在散射理论的术语中，Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理确认，带电粒子在零质量极限中初始 ($t\to-\infty$ 作为初态) 不能预备作为孤立的传播子. 它们必须伴随着辐射场，在承担散射的相互作用之前，就与辐射场有相互作用(这描述光子的吸收)，这种现象可靠的理论描述是按照相干态表述为带电粒子而准备的. 关于相干态表述的讨论，对于阿贝耳理论参看文献 [18 和 19]，关于非阿贝耳理论参看文献 [20 和 21].

参 考 文 献

V.1 W. H. Furry, *Phys. Rev.* **51**, 125(1937).

V.2 H. M. Fred and D. R. Yennie, *Phys. Rev.*, **112**, 1391(1958).

V.3 例如，参看：S. Weinberg, *Phys. Rev.*, D8, 3497(1973).

V.4 J. C. Ward, *Phys. Rev.*, **78**, 182L(1950).

V.5 Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, **6**, 370(1957).

V.6 R. Karplus and M. Neuman, *Phys. Rev.*, **80**, 380(1950); *ibid*, **83**, 776 (1951).

V.7 J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Spring-Verlag, Berlin; 1976), Ch. 13.

V.8 关于高能光子光子散射最近的讨论，参看：H. Cheng and T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, 22, 660(1969); *Phys. Rev.*, 1852(1969); H. Cheng, Er-Chang Tsai, and Xiquan Zhu, *Phys. Rev.*, *D*26, 922(1982).

V.9 T. Kinoshita, *J. Math. Phys.*, **3**, 650(1962).

V.10 T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.*, **133**, 1549(1964).

V.11 F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.*, **52**, 54(1937).

V.12 例如，参看：J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York; 1964), p. 132.

V.13 N. Papanicolaou, *Phys. Rept.*, **24C**, 229(1976),
本文包括μ子，等等，辐射修正讨论早期的文献.

V.14 A. Hearn, P. K. Kuo, and D. R. Yennie, *Phys. Rev.*, **187**, 1950(1969).
在本文中讨论了电子正电子散射的高阶多重光子修正.

V.15 F. A. Berends, K. J. F. Gamers, and R. Gastmans, *Nucl. Phys.*, **B57**, 381(1973); *ibid.*, **B63**, 541(1973); F. A. Berends, R. Kleiss, and S. Jadach, *Nucl. Phys.*, **B202**, 63(1982).

V.16 D. R. Yennie, S. C. Frantschi, and H. Suura, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **13**, 379(1961).

V.17 G. Grammer and D. R. Yennie, *Phys. Rev.*, **D8**, 4332(1973).

V.18 V. Chung, *Phys. Rev.*, **140**. B1110(1965).

V.19 T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, **9**, 315(1968); *Phys. Rev.*, **173**, 1527 (1968); *ibid*, **174**, 1882(1968); *ibid*, **175**, 1624(1968).

V.20 D. R. Butler and C. A. Nelson, *Phys. Rev.*, **D18**, 1196(1978).

V.21 O. A. Nelson, *Nucl. Phys.*, **B181**, 141(1981); *ibid*, **186**, 187(1981).

第 VI 章　在量子色动力学中的重正化和重正化群及红外问题

粗略地说，重正化意味着在具有多项式相互作用的拉氏函数所得到的 Feynman 振幅中消去紫外无穷大. 如第 IV 章序中所提到的，重正化程序的第一步是使发散的振幅正规化. 在那里已讨论了某些常用的正规化方案. 正规化振幅有截止相关性 (Feynman 截止方法，§ IV.2)，正规函数的质量相关性 (Pauli-Villars 正规化，§ IV.2) 或有 $\varepsilon = 2 - n/2$ 的极点 (维数正规化，§ IV.3). 第二步是重新定义理论中的参数，并对拉氏函数添加抵消项，用以消去截止相关性，正规函数的质量项，或消去 $\varepsilon = 2 - n/2$ 极点. 一个重正化的理论是只需要一定数目的抵消项的理论，因而引入重正化常数对物理的预言仍留有余地.

本章首先简短地讨论重正化程序，利用量子电动力学作为例子. 其次，将推导 Becchi-Rouet-Stora 变换，该变换使推广的 Ward-Takahashi 恒等式的讨论大为简化，因此导出非阿贝耳规范理论重正化的证明. 接着讨论非阿贝耳理论的重正化和减除方案. 在极小减除方案中对光子真空极化给出二圈的计算. 然后给出重正化群方程的推导，并给出某些重正化群参数的显式计算. 本章结尾讨论非阿贝耳规范理论的微扰红外问题.

Dyson[1] 已给出重正化的第一个完整的论述. 然而，因为后来有了许多发展，因而重正化的麻烦问题现在已变得更加清楚了. Ward[2] 曾提出传播子和顶角之间的泛函关系，

并由 Takahashi[3] 加以推广. 这些关系通称为 Ward-Takahashi 恒等式，这些恒等式使一般阶的量子电动力学的重正化程序大为简化. 特别是有助于部分消去交叠发散性的困难问题. 拉氏函数中各项重排的 Bogoliubov-Parasiuk 抵消项减除法[4]使微扰级数重排，因此逐阶(耦合常数)消去的紫外发散性. Hepp[5] 和 Weinberg[6] 曾研究 Feynman 积分的收敛性问题，最近 Zimmerman[7] 引进 Feynman 积分的发散性减除方法，并对交叠发散性加以分类.

't Hooft 和 Veltman[8,9] 及 Lee 和 Zinn-Justin[10] 给出了非阿贝耳规范理论可重正性的证明. Ward-Takahashi 恒等式在非阿贝耳规范理论中更加复杂了. Slanov[11] 和 Taylor[12] 首先推导出这些恒等式. 然而，他们的推导大都是 RBS 变换[13]所预料到的. 在文献 [14—18] 中给出非阿贝耳规范理论重正化课题的广泛评述.

VI.1 可重正性的判别和 BPHZ 程序

重正化程序从微扰项的发散性编目和 Feynman 积分的发散分类着手. 如同在第 IV 和 V 章中所讨论一样，除树图以外，微扰展开式中的 Feynman 振幅大多数是发散的. 在 §IV.1 中介绍了发散性的计数规则，该规则表明，如方程 (IV.1.10) 和 (IV.1.11) 所给出的，一个图形的表面发散度为

$$D = 4 + \Sigma n_i \delta_i - B - \frac{3}{2} F, \qquad \text{(VI.1.1)}$$

这里 B 和 F 分别为外玻色子线和外费米子线的数目，n_i 为由相互作用拉氏函数 $\mathscr{L}_i$ 所定义的第 i 种类型的顶角数目，在方程 (IV.1.11) 中所定义的 δ_i 在 $\mathscr{L}_i$ 中为耦合常数的质量维数的负数. 应该提到，方程 (IV.1.1) 对于与非守恒流相耦

合的带质量的矢量场并不适合；相应的公式由方程 (IV.1.12) 给出。在 ϕ^4 理论、汤川理论、量子电动力学及量子色动力学中，$\delta_i = 0$，因此耦合常数是无量纲的；在 ϕ^3 理论中[其相互作用拉氏函数取形式 $\lambda\phi^3$ 的标量理论]，耦合常数为质量量纲，于是 $\delta_i = -1$。

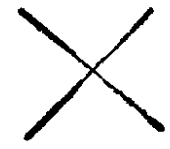
另外感兴趣的是一个图形的独立积分的数目；这个数目与内玻色子线 $\tilde{B}$ 和内费米子线 $\tilde{F}$ 的数目的关系如下：

$$I_L = \tilde{B} + \tilde{F} - \Sigma n_i + 1, \qquad \text{(VI.1.2)}$$

这里 n_i 与方程 (VI.1.1) 中的 n_i 有相同的意义。

方程 (VI.1.1) 连同方程 (VI.1.2) 给出微扰发散性的编目。对于 $I_L = 1$，即一圈图，表面发散度确定一个 Feynman 积分是否是收敛的：对于收敛积分，$D < 0$；对于发散积分，$D \geqslant 0$，除其中发散项的系数为零的特殊情况以外，参看方程 (IV.5.28)。对于 $I_L \geqslant 2$，关于 Feynman 积分是否是收敛的问题，D 的值没有直接的意义。在前几章中已给出某些例子。下面是 ϕ^4 理论中的几个例子。拉氏函数在方程 (I.2.2a) 中给出，Feynman 规则包括图 VI.1 所示的两个基本图形，可以利用 § I.3 和 § II.3 所述的方法推导出来。现在表面发散度为

$$D = 4 - B,$$



$$\frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

$$-i\lambda$$

图 VI.1

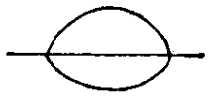
并且在一个图形中所包含的独立圈积分的数目为

$$I_L = \tilde{B} - n_V + 1,$$

这里 n_V 为图形的顶角数目。因为拉氏函数方程 (I.2.2a) 在下面的宇称变换下不变:

$$\phi \to -\phi,$$

故包含奇数外线的过程不存在。具有正表面发散度的唯一过程对于 2 点函数为 $D=2$,对于 4 点函数为 $D=0$。图 VI.2 表示某些低阶图形连同表面发散度及独立圈积分的数目。



	D	l_L
(a)	2	2
	2	1
(b)	0	1
(c)	−2	1
(d)	−2	2
(e)	−4	5

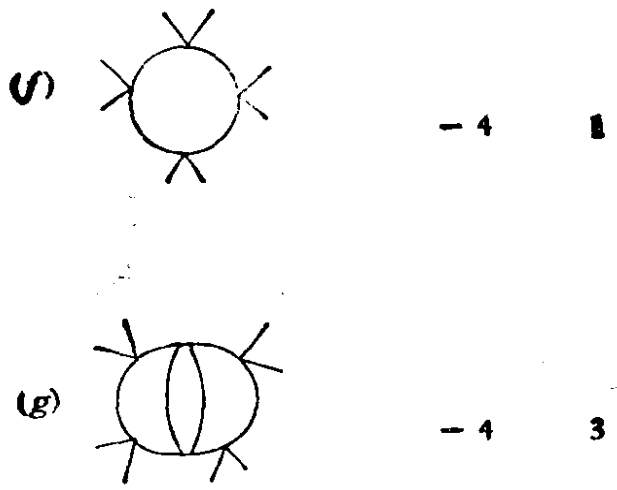


图 VI.2

第四和第七个图形为表面收敛的；但事实上这些图形是发散的，因为它们二者包含第二个图形（图 VI.2b）作为一个子图形，该子图形是发散的. 第五个图形（图 VI.2e）有 $D=-4$，的确是收敛的.

不管上述的复杂性，存在着一般的定理，能给出一个 Feynman 图形是收敛的充分条件. 这就是 Weinberg 定理[19]，该定理以简单的措词陈述如下：

如果某图形及它的所有子图形的表面发散度为负的，则该图形是收敛的.

满足 Weinberg 定理的一个例子在图 VI.2e 中给出.

可重正化的理论只可能有有限数目的发散性类型；即，D 小于某个固定数目，譬如说，小于 D_0. 这要求

$$\delta_i \leqslant 0, \text{ 对于一切 } i.$$

对于任何 $\delta_i > 0$，D 将随图形的阶的增加而增大，并且相应的理论并不是可重正化的. 换言之，可重正化相互作用的耦合常数必须是无量纲的，或具有一个正的质量维数. 例如

$$\mathscr{L}_I = \frac{\lambda}{3!}\phi^3, \ \delta = -1, \text{ 超可重正化的，}$$

$$\mathscr{L}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi^4,\ \delta = 0,\ \text{可重正化的。}$$

$$\mathscr{L}_I = \frac{\lambda}{5!}\phi^5,\ \delta = 1,\ \text{不可重正化的。}$$

量子电动力学、量子色动力学、和汤川相互作用都有 $\delta = 0$，并且是可重正化的。另外表示为 $\phi^3_{[6]}$ 的最简单的理论，即 6 维的 ϕ^3 理论（1 个时间维和 5 个空间维）也是可重正化的，具有 $D = 6 - 2B$。它类似于 ϕ^4 理论（当然在 4 维内）。ϕ^3 理论称为超可重正化的，是因为它只有一个可重正化的常数，该常数是波函数重正化常数，而不是预期的两个重正化常数。唯一的表面发散图形为 2 点函数，由下面的表面发散度公式可以看出

$$D = 4 - n_V - B.$$

对于以任意方式与其他物质场相互作用的带质量的矢量玻色子理论，表面发散度变为 $\tilde{D} = 4 - B - \frac{3}{2}F + 2\tilde{B}$，随内矢量玻色子线数目而增加。记住，$\tilde{B}$ 的相关性来自于矢量介子传播子的 $k_\mu k_\nu / m^2$ 部分。在通过守恒流与其他场相耦合的单个带质量的矢量介子情形中，$k_\mu k_\nu / m^2$ 项并无贡献。理论仍然变为可重正化的，并且 $D' = D$.

对于 $D \leqslant D_0$ 的理论，没有大于 D_0 的不同类型的表面发散图形。无论 Feynman 图形怎样复杂，它总是由基本类型和所谓骨架图形的相对简单的图形组成。两个术语将在下面加以解释。

基本图形是表面发散的图形，$D \geqslant 0$；基本图形是传播子函数和顶角函数，这些函数出现在一个给定理论的相互作用拉氏函数中。对于量子电动力学，有四个基本类型的图形：$F = 0$ 及 $B = 2$；$F = 2$ 及 $B = 0$；$F = 2$ 及 $B = 1$；$F = 0$

及 $B=4$，如在第V章内所讨论的一样。在非平凡的最低阶，$F=0$ 及 $B=4$ 情形中，光子光子散射图形由于规范不变性是收敛的。在 ϕ^4 理论中，只有两个基本类型的图形，$B=2$ 及 $B=4$。在最低阶中，它们在图 IV.1a 和 b 中给出。由微扰展开式可能构成的一切图形是由两个最简单的发散部分连同类如图 VI.2f 的收敛圈组成的。在图 VI.2 中给出若干例子。

在 ϕ^3 理论中，唯一的最低阶发散图形是图 VI.3a 所示的传播子。图 VI.3b 所示的顶角部分用一个收敛积分来表示；因此顶角重正化是不必要的。

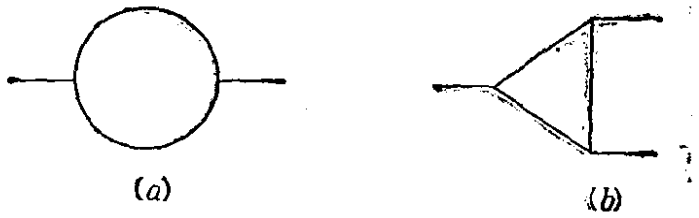


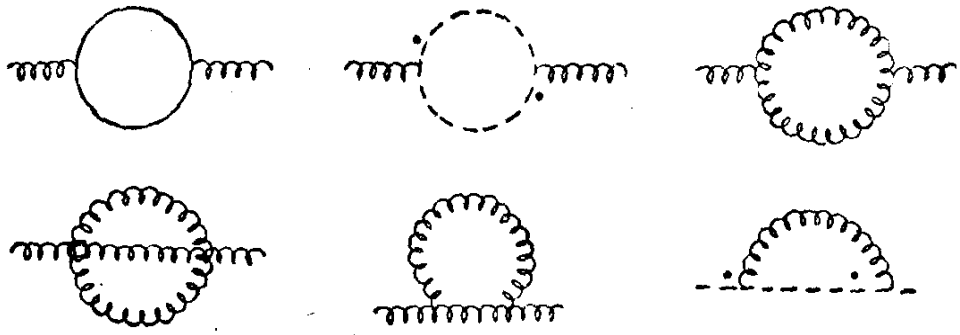
图 VI.3

在图 II.2 中列举了量子色动力学的 Feynman 规则。在方程 (II.3.58) 中所给出的相互作用拉氏函数是比较复杂的，尽管只有一个唯一的耦合常数。因为耦合常数是无量纲的，表面发散度仍然由与量子电动力学相等同的公式给出。

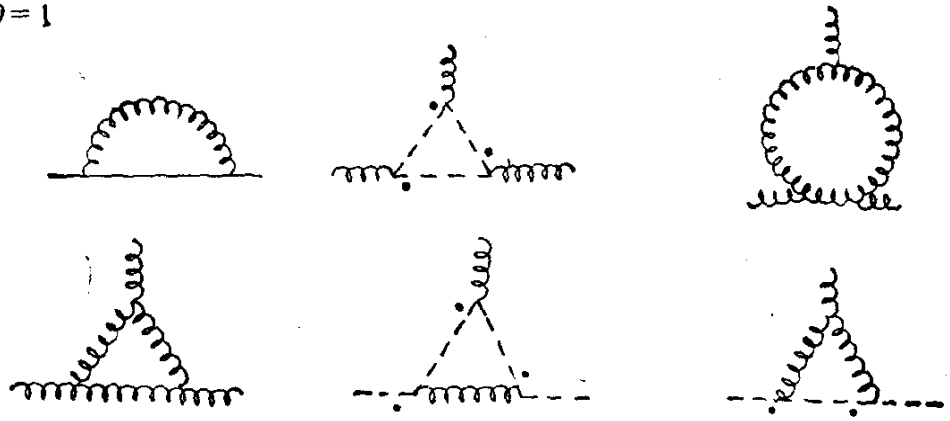
$$D=4-B-\frac{3}{2}F. \qquad \text{(VI.1.3)}$$

基本发散图形在图 VI.4 中给出。应该注意，因为鬼场满足反对易关系，故总有偶数数目的“外”鬼线。(这些外鬼线实际上是一个更复杂的图形的内线。)换言之，正如费米子线情形一样，鬼线是连续的。由于鬼场与规范场的非厄密耦合 [参看方程(II.3.35)]，对于每一对“外”鬼线，表面发散度减少 1，因此，对于 $D=2$ 情形，包含二“外”鬼场的最后的图形是表面线

$D=2$



$D=1$



$D=0$

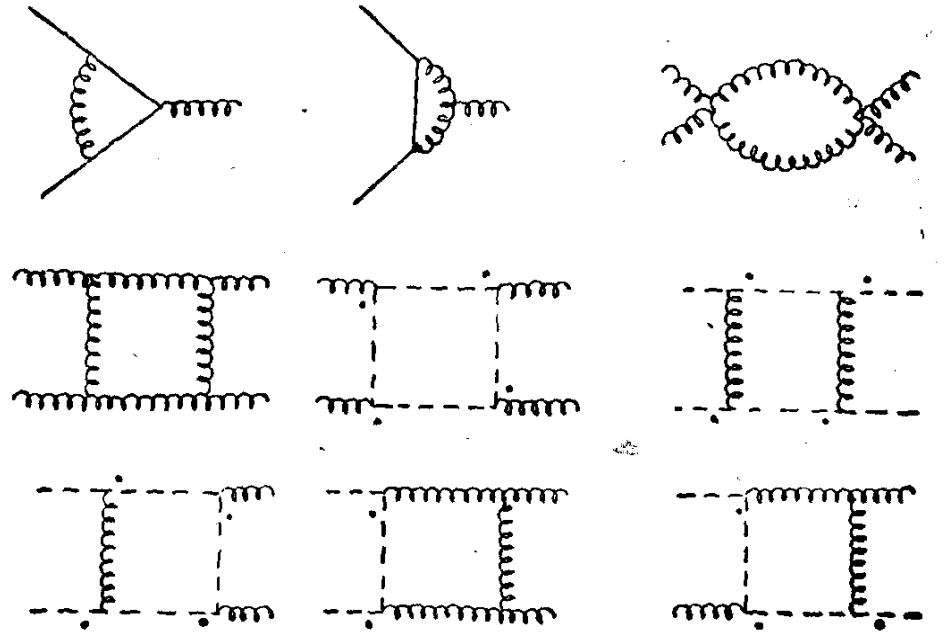


图 VI.4

性发散的. 在$D=1$情形中，最后的二图形是对数发散的. 对于$D=0$的情形，包含二条或四条"外"鬼线的图形实际上是收敛的. 正如本节末将要讨论的，这个事实在建立非阿贝耳规范理论的可重正性中是重要的.

仍然要定义骨架图形. 一个骨架图形是既不包含自能插入，又不包含顶角插入的图形. 每个n点函数有一组或无限多的骨架图形. 量子电动力学中，在§ V.1 和 V.2 所讨论的二阶自能图形是两个 2 点函数的唯一骨架图形. 对于$n\geqslant 3$，每个n点函数有无限多数目的骨架图形. 由此清楚看到，每个图形有唯一的骨架图形，并且每个图形是由它的骨架通过顶角和自能的插入及其他骨架图形的插入得到的. 在量子电动力学中，具有四条或更多条外线的骨架图形用收敛积分来表示. 图 VI.4 的图形是所有的骨架图形. 如果一个图形恒等于它的骨架图形，则它称为一个不可约化的图形，否则它是一个可约化的图形. 图 VI.5 给出量子电动力学中几个不可约化的图形或骨架图形的示例. 在其他理论中的不可约化图形很容易画出来.

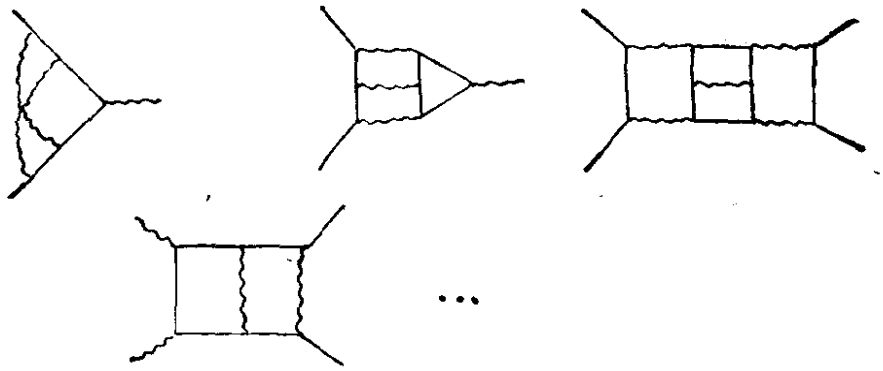


图 VI.5

微扰展开式的系统的特征在于，在一切高阶图形中，紫外发散性或者是它的骨架图形（对于$D\geqslant 0$），或者是由较低阶

发散图形的插入而引起的. 这意味着消去发散性方法是从非平凡的最低阶着手,逐阶进行,直到展开式的任何阶为止. 为此,应该做到两件事,这两件事是重正化程序的精华: (a) 一切发散性要利用重正化条件孤立开来. (b) 通过定义重正化的量,引入有限数目的抵消项来消去发散性.

上面的陈述仅仅是一个表面讲得通的论据. 可重正性的证明和重正化程序的实现包含复杂的步骤,这些步骤粗略地可以分为下面的几步: (a) 从一个裸拉氏函数出发,例如在量子电动力学情形中从方程 (II.2.7) 出发,或者在量子色动力学中从方程 (II.3.33) 出发. 在该拉氏函数中的一切量都是未重正化的,裸的量. 未重正化的场算符满足正则对易关系. 在该拉氏函数中的这些耦合常数和质量称为裸耦合常数和裸质量;它们隐含发散的量. 该拉氏函数提供微扰展开式的第一个依据.

(b) 在非平凡的最低阶中(一圈阶或第二阶),计算具有表面发散度$D \geqslant 0$的各种过程. 当然,这些过程是发散的.

(c) 选取重正化点使紫外发散性从有限部分分离出来. 在量子电动力学中,如在 § V.1, V.2 和 V.3 中所讨论的,重正化点是在质壳上的点. 注意,如果重正化点又包含有限的量,则无穷大部分的分离不是唯一的,而与正规化方案和重正化点有关.

(d) 定义重正化质量,重正化耦合常数,和重正化场算符务使对于这个(最低)阶的一切发散性都可以并入在重正化的常数中.

(e) 用重正化的量重写拉氏函数. 拉氏函数的新形式,除一切量是重正化的量以外,它的项有一部分等同于裸拉氏函数的形式,其余的项都是抵消项. 幺正性条件要求抵消项为实的. 因此,在动量空间内抵消项必须是外动量的有限多项

式. 关于这个要求更多的讨论将在往后给出.

(f) 按照拉氏函数的新形式进行微扰展开,最低阶(第二阶)自能修正和顶角函数现在都是有限的. 然而,在次一较高阶(第四阶)中,它们都是发散的. 现在对次一较高阶的贡献重复进行 (c), (d) 和 (e) 的步骤. 对于一个可重正化的理论,这个过程对于更高阶的图形可以再三重复进行. 同时它对物理上的预言留有余地.

上面的步骤 (a)—(f) 就便称为 Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman (BPHZ) 重正化程序. 在说明上述步骤如何进行以前,首先讨论抵消项要为实数的理由,和发散项的系数只可能是外动量的多项式的理由: (i) 包含一个虚部的抵消项将对一个物理振幅的虚部有贡献. (ii) 由幺正性,振幅的虚部由(耦合常数的)较低阶过程确定. (iii) 一个给定阶的抵消项只可能对相同阶或较高阶的过程有贡献. 如果抵消项有虚部,则与幺正性相抵触. (iv) 具有非多项式的抵消项,例如 $\ln k^2$, 这里 k 为外动量,相应于非局域的减除. 这是因为 k_μ 相应于位形空间内的导数 ∂_μ. 这样的项将会引起无限多的多项式减除. 而且它可能对减除项产生一个虚部.

在本章的其余部分,利用量子电动力学作为例子,将给出 BPHZ 程序的示例. 从方程 (II.2.7) 的裸拉氏函数出发,由它对非平凡的最低阶一圈计算推导出 Feynman 规则. 这些规则已在 § II.2 中给出了,非平凡的最低阶计算在 §§ V.1, V.2 和 V.3 中给出. 在那里定义了由质壳上的条件所确定的重正化的量,并标记为"R". 重正化的费米子质量 m_R 和电荷 e_R 在低能实验中是直接可测量的. 就重正化程序而论,质壳上的条件不是必要的,并且事实上,由于红外困难,要使用它并不是很方便的,在量子色动力学中红外困难是特别严重的;在质壳外的条件是必要的. 细节将在往后几节中给出.

重正化的量和裸的量之间的关系已在 §§ V.1—3 中给出的. 再总结如下:

$$m = m_R - \delta m \qquad [(V.1.35)]$$

$$e = e_R/\sqrt{z_3} \qquad [(V.2.28)]$$

$$\psi = \sqrt{z_2}\ \tilde{\psi} = \sqrt{z_2}\ \psi_R \qquad [(V.1.46)]$$

$$\bar{\psi} = \sqrt{z_2}\ \tilde{\bar{\psi}} = \sqrt{z_2}\ \bar{\psi}_R \qquad [(V.1.46)]$$

$$A_\mu = \sqrt{z_3}\ \tilde{A}_\mu = \sqrt{z_3}\ A_\mu^R \qquad [(V.1.35)]$$

$$\xi = z_3 \xi_R .$$

按重正化的量把拉氏函数方程 (II.2.7) 重写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= z_2 \bar{\psi}_R (i\not{\partial} - m_R)\psi_R - \frac{1}{4} z_3 (\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 \\ &\quad + z_1 e_R \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R + z_2 \delta m \bar{\psi}_R \psi_R - \frac{1}{2\xi_R} (\partial^\mu A_\mu^R)^2 \\ &= \bar{\psi}_R (i\not{\partial} - m_R)\psi_R - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 \\ &\quad + e_R \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R - \frac{1}{2\xi_R} (\partial^\mu A_\mu^R)^2 \\ &\quad + (z_2 - 1)\bar{\tilde{\psi}}_R (i\not{\partial} - m_R)\psi_R + (z_1 - 1) e_R \bar{\tilde{\psi}}_R \not{A}_R \psi_R \\ &\quad - \frac{1}{4} (z_3 - 1)(\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 + z_2 \delta m \bar{\psi}_R \psi_R .\end{aligned} \qquad (VI.1.4)$$

第一项

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 &= \bar{\psi}_R (i\not{\partial} - m_R)\psi_R - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2 \\ &\quad + e_R \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R - \frac{1}{2\xi_R} (\partial_\mu A_R^\mu)^2\end{aligned} \qquad (VI.1.5)$$

有类似于原来拉氏函数方程 (II.2.7) 的形式，除一切量都是重正化的量以外. 方程 (VI.1.4) 的第二行和第三行中的项都

是抵消项. 现在利用重正化场(到 e_R^2 阶)进行微扰展开，并且一切抵消项将看作为相互作用拉氏函数部分.

应该注意，方程 (VI.1.4) 的抵消项有常系数. 可以由方程 (V.1.32) 和 (V.2.19) 中所给出的动量空间的展开式看出常系数为实数. 如上所述，这是由幺正性所要求的.

第二阶结果的扼要重述 这里将扼要重述 § V.1—V.3 所讨论的第二阶的结果:

$$\delta_m = A^{(1)} \qquad [(V.1.23)]$$

$$z_2^{-1} = 1 - B^{(1)} \qquad [(V.1.25)]$$

$$z_3 = 1 + e_R^2 \Pi^{(1)}(0) \qquad [(V.2.19)]$$

$$z_1 = z_2. \qquad [(V.3.29)] \quad (VI.1.6)$$

$A^{(1)}$, $B^{(1)}$ 和 $\Pi^{(1)}(0)$ 都是发散的量；现在这些量是重正化参数的函数. 在正规化程序的截止方案中，$A^{(1)}$, $B^{(1)}$, 和 $\Pi^{(1)}(0)$ 都是与截止有关的. 类似地，当重正化的量被认为固定时，一切未重正化的和裸的量正比于它们的重正化抵消项部分，都是截止有关的. 在本章中往后当推导重正化群方程时，这个观点是很有用的.

其次，根据方程 (VI.1.4) 将证明，三个基本顶角函数 (§§V.1—V.3) 到 e_R 的第二阶都是有限的. 抵消项的贡献在图形上将用⊗来表示，除质量抵消项以外，质量抵消项用×来表示. 与抵消项相联系的基本图形使用符号要确切，这些基本图形在图 VI.6 中给出. 树图是分别由 (VI.1.4) 的下面的项得到的:

$$(z_2 - 1)\psi_R(i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi_R, \quad -\frac{1}{4}(z_3 - 1)(\partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R)^2,$$

$$(z_2 - 1)e_R\psi_R A\!\!\!/_R\psi_R.$$

现在按方程 (VI.1.3) 的微扰展开式将展开到 e_R 的第二阶.

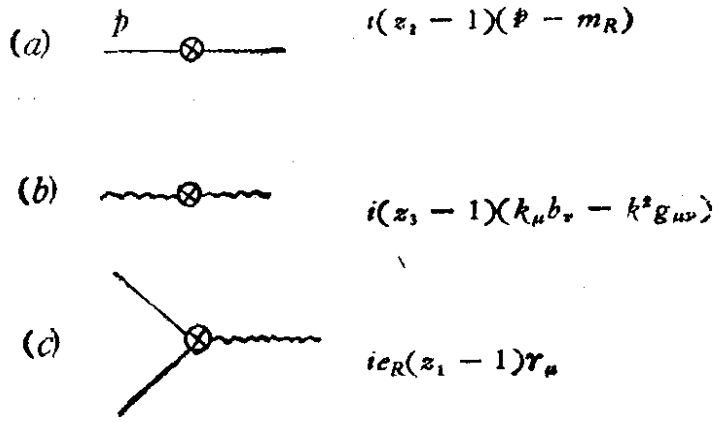


图 VI.6

费米子传播子:

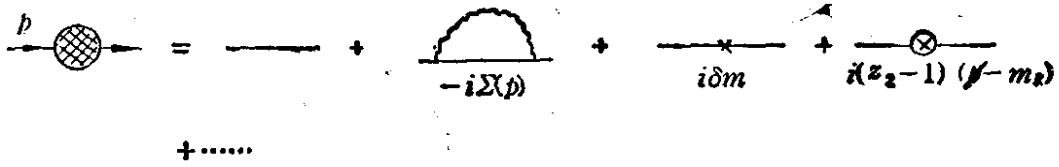


图 VI.7

由方程 (V.1.9), (V.1.29), 和 (V.1.32), $\delta m^{(1)} = A^{(1)}$ 和 $z_2 = 1 + B^{(1)}$ 到 e_R 的第二阶,可以看出,图 VI.7. b, c 及 d 的图形的求和是有限的, 并且正比于 $iC^{(1)}(p)(\not p - m_R)$. 这个求和将用图 VI.8 所示的一个重圆点来表示.

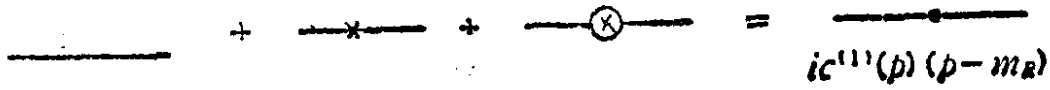


图 VI.8

光子传播子:

由光子自能图形和抵消项图形所得到的图 VI.9 所示的光子传播子上的重圆点表示有限项 $ie_R^2\pi_c^{(1)}(k)\cdot(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})$,这由方程 (VI.2.7) 和 (VI.2.11) 可以看出来.

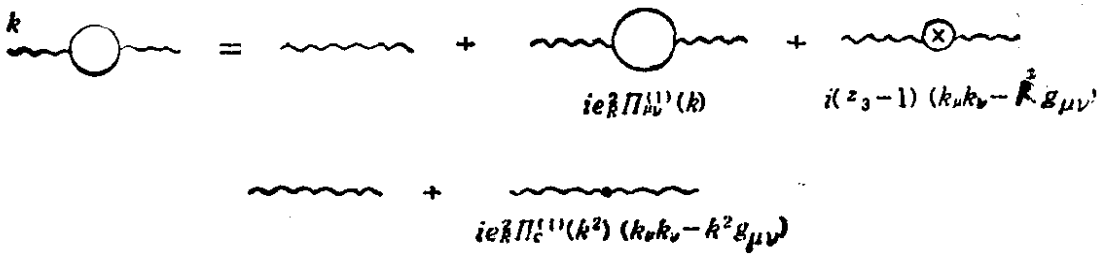


图 VI.9

顶角函数:

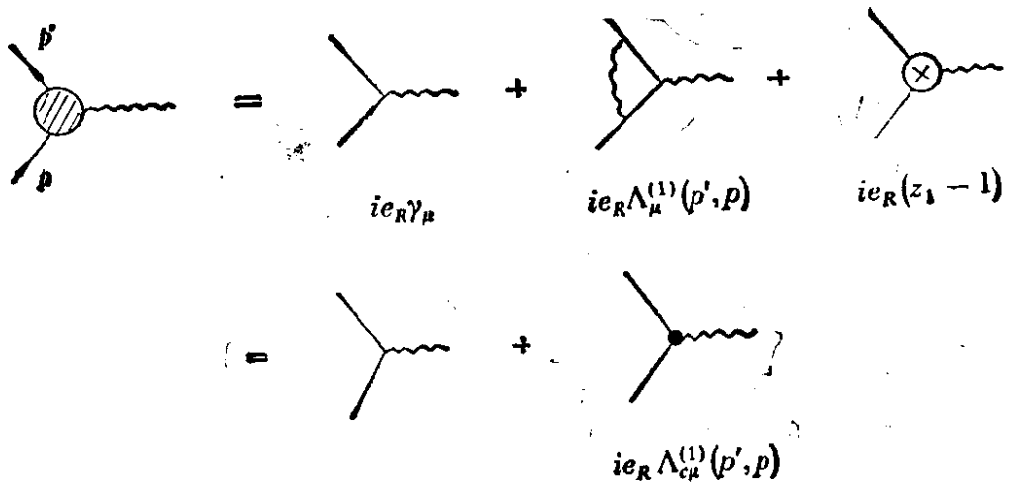


图 VI.10

在图 VI.10 中表示一个有限因子 $ie_R\Lambda_{c\mu}^{(1)}$ 的重圆点是顶角修正与对于费米子光子耦合项的抵消项的求和.

第二阶的重正化已经导出某些明确的，非平凡的预言. 在 § V.4 中已讨论了一些例子，在那里计算 Møller 散射截面和 Compton 散射截面到 α^2-量级，包括一圈辐射修正在内. 应该指出，量子电动力学预言的能力依赖于这样的事实，即 e^4 阶过程的发散性已经出现在 e^2 阶，而这些过程在 e^4 阶没有新的发散性. 这种情况不会发生在任意的理论中. 这在下面的例子中可以看出来. 假定除光子以外存在着一个带质量的中性矢量玻色子，通过轴矢量流与费米子耦合，轴矢量流

$$j_\mu^{(5)} = g\phi\gamma_\mu\gamma_5\phi \qquad \text{(VI.1.7)}$$

是不守恒的，这里 g 为耦合常数。带质量的矢量玻色子的传播子的形式

$$\frac{i}{k^2-M^2+i\varepsilon}\left[-g_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right],$$

这里M为矢量玻色子的质量。现在即使矢量玻色子自能修正和矢量玻色子费米子顶角修正已重正化了，Compton 和 Møller 散射的 e^2g^2 阶，及 Compton 散射的 g^4 阶都包含图 VI.11. 所示的发散图形，这里重矢量玻色子传播子用一条虚线来表示。这些附加图形的出现需要新的减除，因此预言已不可能了。

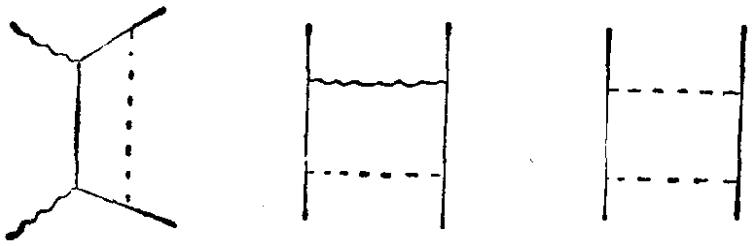
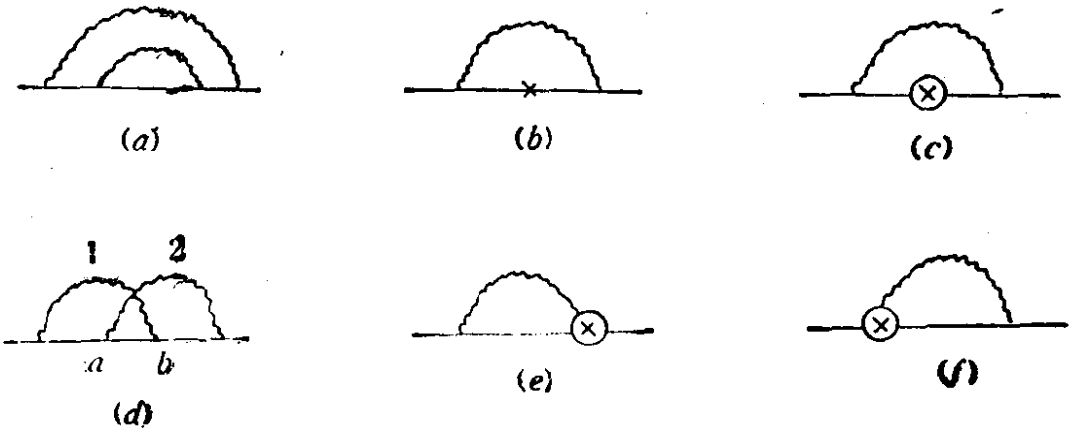


图 VI.11

为了实现 e^4 阶的重正化程序，可以利用拉氏函数方程 (VI.1.4) 作为出发点。计算电子和光子自能图形及顶角修正的二圈贡献，使重正化常数和质量抵消项可以减除到 e^4 阶。

电子自能包括图 VI.12 所示的图形。



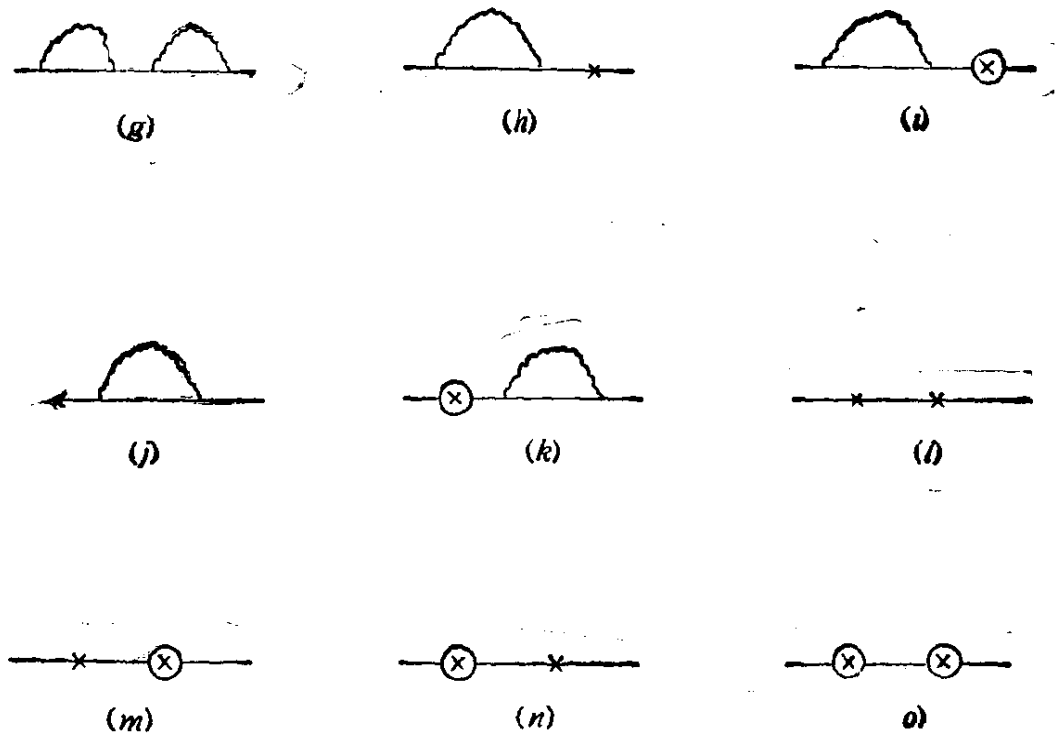
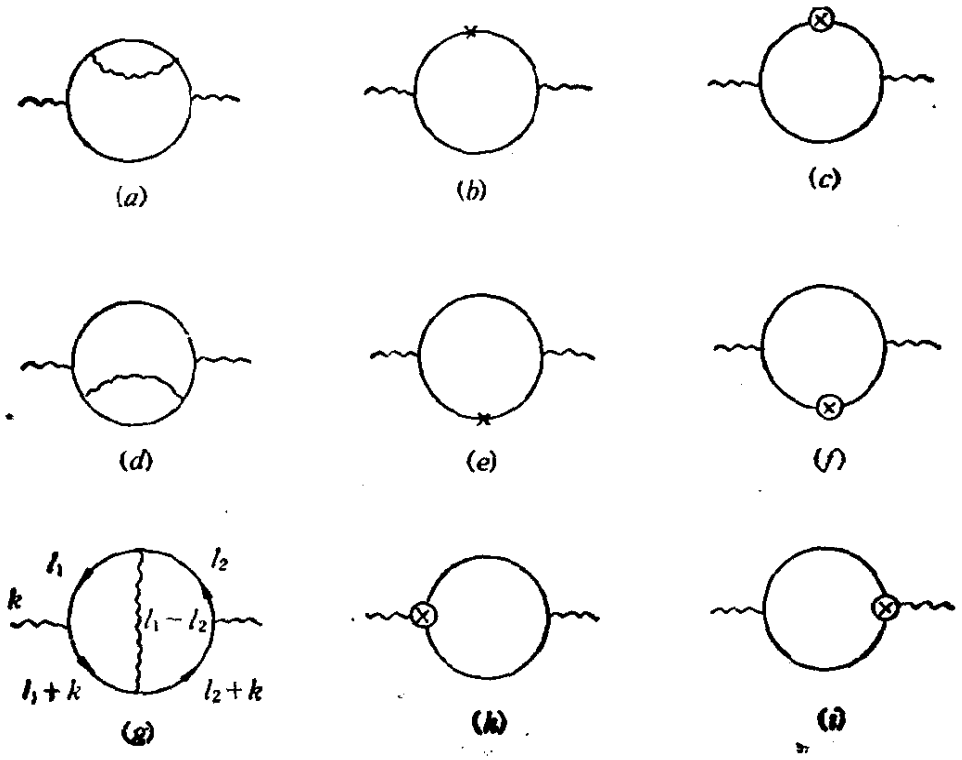


图 VI.12

光子自能图形如图 VI.13 所示。



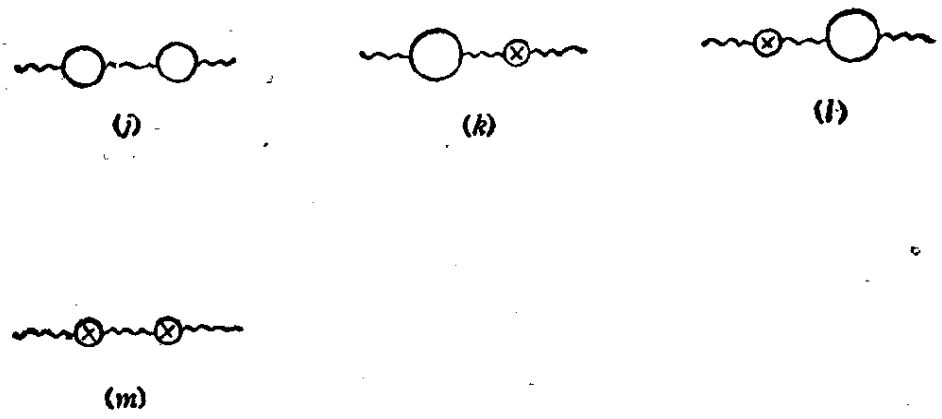


图 VI.13

顶角修正在图 VI.14 中给出.

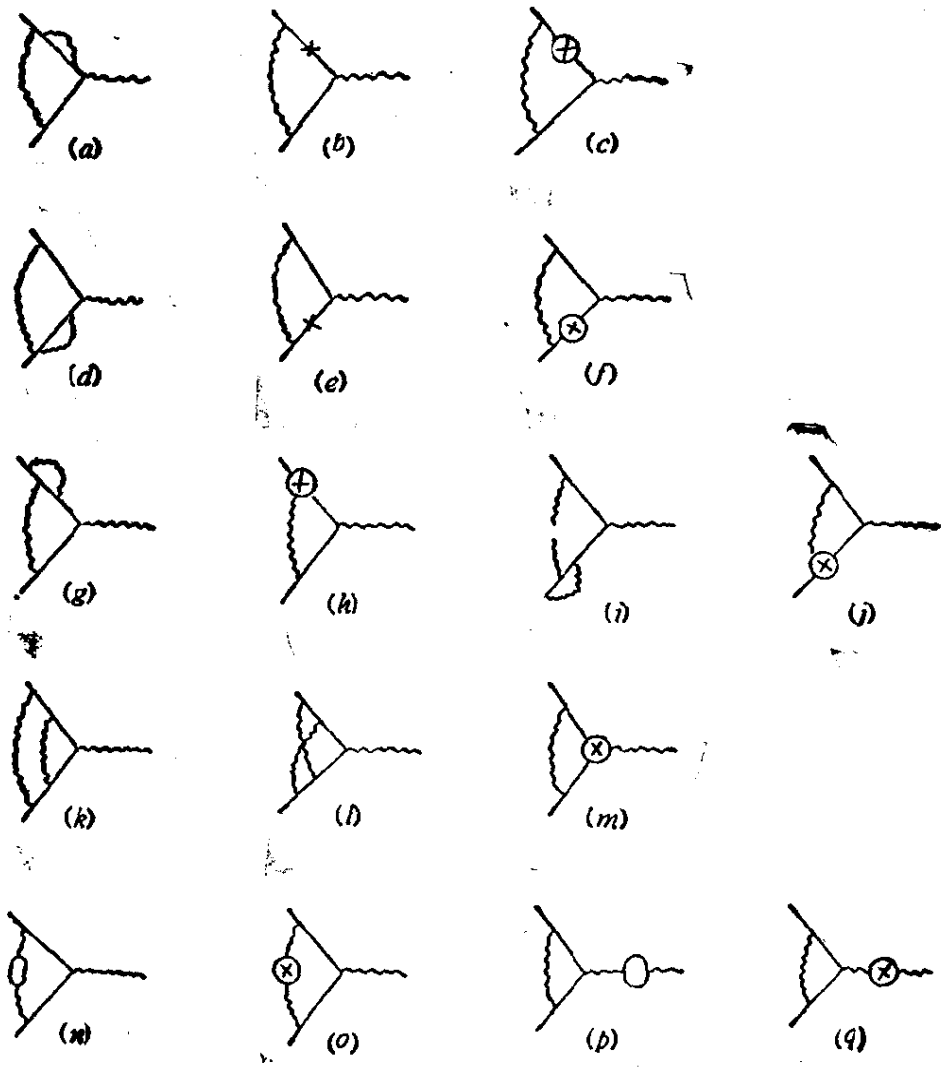


图 VI.14

将不进行这些图形的详细计算[但可参看 § VI.4]；只给出一个表面讲得通的论据，来说明重正化如何实现，并且指出，在高阶计算中出现的复杂性、在高阶计算中孤立紫外发散性的一般程序类似于第二阶情形的程序。在动量空间内，减除项必须是外动量的多项式。

三组图形，图 VI.12—14 分别给出 $\Sigma^{(2)}(p)$，$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k)$，和 $\Lambda^{(2)}_{\mu}(p', p)$ 的第四阶或二圈项。这些项可以分解为类似于它们二阶前辈的形式：

$$\Sigma^{(2)}(p) = A^{(2)} + (\not{p} - m_k)[B^{(2)} - C^{(2)}(p)], \quad \text{(VI.1.8)}$$

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(k) = (\Pi^{(2)}(0) + \Pi^{(2)}_c(k^2))[k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}], \quad \text{(VI.1.9)}$$

及

$$\Lambda^{(2)}_{\mu}(p', p) = L^{(2)}\gamma_\mu + \Lambda^{(2)}_{c\mu}(p', p). \quad \text{(VI.1.10)}$$

一粒子可约化的图形，即图 VI.12(*g*)—(*o*)，图 VI.13(*j*)—(*m*)，和图 VI.14 (*p*) 及 (*q*) 的贡献简单地是第二阶结果的乘积。事实上，这些贡献对于第二阶表现为链近似，并且不需要新的减除出现在抵消项中，其余的图形是一粒子不可约化的，可能很复杂。有必要证明，它们对重正化常数的贡献都是外动量的实多项式，并不包含类如 $\ln(k^2)$ 的项，这里 k 为外

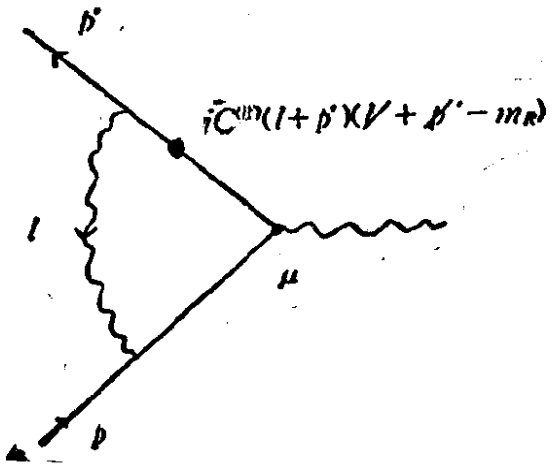


图 VI.15

动量，如上面所提到的一样。为此，只需要考虑这些图形的发散部分，具有实多项式系数的紫外发散性称为容许的发散性；否则就是不容许的发散性。

由于 Ward 恒等式 (V.3.18)，对难于分析的费米子自能图形，可以避免 Z_2 的计算。唯一要考虑的，是顶角修正图 VI.14。图 VI.14(a)—(c) 的图形之和在图 VI.15 中给出。该图形只包含容许的发散性，可由下面的考虑看出来。例如，在 Feynman 规范中，振幅取形式

$$\frac{(-ie_R\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n}\int d^n l\gamma^\lambda \frac{i}{l+p-m_R+i\varepsilon} \cdot C^{(1)}(l+p')\gamma_\mu \frac{i}{l+p-m_R+i\varepsilon}\gamma_\lambda \frac{-i}{l^2+i\varepsilon}, \tag{VI.1.11}$$

这里 $C^{(1)}(l+p')$ 在方程 (V.4.6) 中给出。方程 (VI.1.11) 相对于 p_μ 或 p'_μ 微分，会使它成为一个紫外收敛的积分。这表明，发散项的系数与 p 或 p' 无关。图 VI.14(d)—(f) 的图形类似于图 VI.14 (a)—(c) 的图形。图 VI.14 的其他图形可以类似的方法处理，用以证明只有容许的发散性存在。可以结论，Z_1 (因而 Z_2) 到 e_R^4 阶只包含容许的发散性。

对 e^4 阶真空极化图形的证明并不如此直接。由于规范不变性，最后的结果必须正比于 $k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2$；因此，与 Feynman 振幅的幂计数所表明发散性相对比，表观的平方发散性并不存在。图 VI.13(a)，(d) 和 (g) 的图形一起是规范不变的；同时其余的图形每个个别地是规范不变的。然而，规范不变量的分离对目前来说并不是最方便的分离。为了证明只有容许的发散出现，比较方便的是把一粒子不可约化的图形分为三组：(a)，(b) 及 (c)；(d)，(e) 及 (f)；(g)，(h) 及 (i)。两组 (a)，(b)，和 (c) 及 (d)，(e) 和 (f) 是等同的，每组的三个

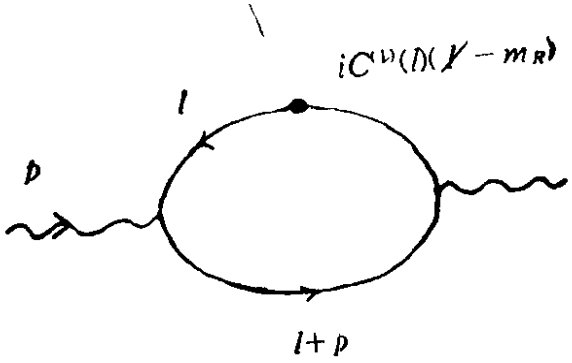


图 VI.16

图形之和表示为图 VI.16. 该图形只有容许的紫外发散性，可以证明如下. 按照 Lorentz 不变性，该图形的 Feynman 振幅一般形式可以为

$$(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) f_1(k^2) + g_{\mu\nu} f_2(k^2) + g_{\mu\nu} m_R^2 f_3(k^2)$$
$$= \frac{(-ie_R\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n} \int d^n l \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{\not{l} - m_R + i\varepsilon} \right.$$
$$\left. \cdot C^{(1)}(l) \gamma_\nu \frac{i}{\not{l} + \not{k} - m_R + i\varepsilon} \right\}. \qquad \text{(VI.1.12)}$$

在极限 $n \to 4$ 中，由维数计数，f_1，f_2 和 f_3 为 k^2 的无量纲的函数. 该方程相对于外动量 k 微分三次，右边的积分变为收敛的. 因此出现在三个不变量函数中的任何发散性必须有常系数. 然而，方程 (VI.1.12) 无论如何总是发散的. 在维数正规化中，发散性表现为 $\varepsilon = 2 - \frac{n}{2}$ 的双极点和单极点，即 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 和 $\frac{1}{\varepsilon}$，它们有常系数. 双极点的出现是由于 $C^{(1)}(l)$ (对于大的 l^2) 正比于 $\ln l^2$ 的事实. 如果这些容许的发散性不能由其他图形可能的贡献而消去，则它们可以通过减除消去，减除表现为附加项，在重正化常数 Z_3 中，正比于 e_R^4. 在 § VI.4 中讨论极小减除方案时，将给出详细的计算，在那里将明显说明，上面所要求的东西，确实会得到证实.

微分方法不能对图 VI.13(g), (h) 和 (i) 的图形进行. 这可以清楚地由图 VI.13(h) 和 (i) 看出，这些图形在因子 $Z_3 - 1$ 中包含发散性，甚至在进行圈积分以前，它们已经是发散的. 相对于外动量的微分并不会改变这种情况. 按照所示动量程序，图 VI.13(g) 有下面的 Feynman 振幅

$$\frac{(-ie_{R\mu}{}^{\varepsilon})^4}{(2\pi)^{2n}}\int d^n l_1 d^n l_2 \mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu \frac{i}{l_1 - m_R + i\varepsilon}\right.$$

$$\cdot \gamma^\lambda \frac{i}{l_2 - m_R + i\varepsilon}\gamma_\nu \frac{i}{l_2 + \not{k} - m_R + i\varepsilon}$$

$$\left.\cdot \gamma_\lambda \frac{i}{l_1 + \not{k} - m_R + i\varepsilon}\right\}\frac{(-i)}{(l_1 - l_2)^2 + i\varepsilon}. \tag{VI.1.13}$$

这个表示式通过相对于 k 的三次微分不能成为有限的. l_1 或 l_2 积分即使在微分之后仍然是发散的.

图 VI.13(g) 的复杂性在于它有交叠发散性. 图形中的虚光子可以看作为对 e^2 阶图形的顶角修正，但是虚光子应该与怎样的顶角相联系，是不明确的. 事实上，虚光子是与两个顶角相联系的，并且两个顶角彼此互相交叠. 这种类型的图形与类如图 VI.13(e) 的图形不同，在图 VI.13(e) 中虚光子看作为与图形的确定部分相联系，即与费米子传播子相联系. 因此在这后一情形中，虚光子挨靠在图形的另一部分中. 图 VI.17 的图形表示二交叠图形 (a) 及 (b) 和一个挨靠的图形 (c). 图 VI.12(d) 的图形又表示在图 VI.17(b) 中，也是一个交叠的图形，这里出现一个交叠发散性.

为了看出其意义，应该详细考虑方程 (VI.1.2) 中所给出的，图 VI.13(g) 的 Feynman 振幅的发散区域. 显然，两个圈积分 l_1 和 l_2 都是对数发散的，并且整个积分是平方发散的. 变数改变

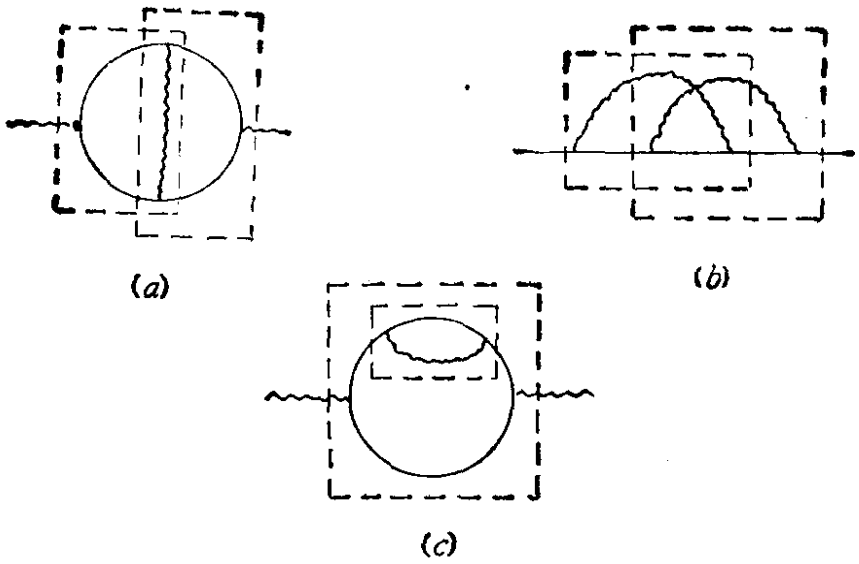


图 VI.17

$$l_2 = l_1 - l_2'$$

表明通过一切费米子传播子的圈也是发散的. 三个发散圈如图 VI.18 所示. 它们给出如何减除发散性的暗示,因此要进行减除. 三个图形,图 VI.13(g), (h) 和 (i) 求和的结果是三个

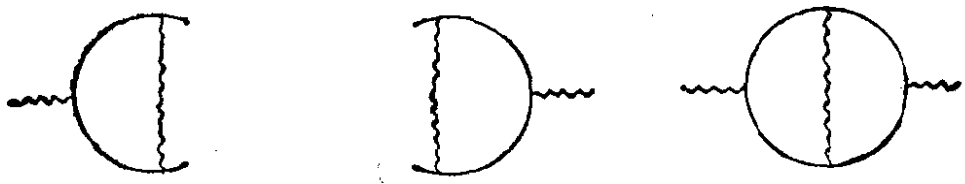


图 VI.18

图形中具有不容许的系数的发散项彼此互相抵消, 得到容许的发散性,比如说,在维数正规化方案中,是正比于 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 和 $\frac{1}{\varepsilon}$.

在下节中,为了使上述的结果得到证实,将给出这些极点项的显式计算. 反之, 考虑图 VI.14(k) 和 (l) 的顶角修正图形, 这些图形不包含交叠发散性. 也有两个圈积分. 如果一圈积分的变数被固定,则另一圈积分是收敛的. 在这些图形中只有

全部圈积分才是发散的. 另外的交叠发散性的例子是图 VI.12(a)的振幅. 在那里一个圈完全包括另外的圈[参看图 VI.17]. 包含用 2 表示的虚光子圈可以看作是对顶角 b 的辐射修正. 另一方面、圈 1 可以看作是对顶角 a 的辐射修正. 这个交叠发散性的减除是通过包括一圈图的二顶角 (即图 VI.12(e) 和 (f)) 的抵消项来完成的.

在文献 [1] 和 [20] 中已讨论了交叠发散性和减除交叠发散性的规则. 在最近的文献中,例如,文献 [21—23],利用不同的正规化方法,也讨论了交叠发散性. 在文献 [20] 中还讨论了费米子传播子中 e^4 阶的交叠发散性.

在 e^2 阶中孤立和减除发散性的方法现在可以应用到 e^4 阶,并且所有的发散性可以吸收到重正化常数 $Z_1 = Z_2, Z_3$ 和质量抵消项 δm 中. 它们都定义到 e_R^4. 减除形式的拉氏函数,即 (VI.1.4),保持相同的形式. 用这个拉氏函数,Compton 和 Møller 散射振幅,等等,散射过程没有任何自由参数存在,就可以计算到 e^6 阶. 重正化到 e^4 阶的模式可以推广到 e 的任意阶. Hepp 定理[24]断言,这个程序可以消去重正化场论中微扰展开式所遇到的一切发散性. 正规化有关的一切项,比如截止有关的项或 ε 极点,在所讨论的微扰展开式中都不会出现.

在上面量子电动力学的讨论中,各种参量都是在质壳上重正化的;然而,这是不必要的. 事实上,在质壳上重正化会引入由于可能的奇点(譬如引起截割的虚部,等等)带来的复杂性. 另外的复杂性是红外奇点. 通过欧氏动量,如 $p^2 = -M^2$,这里 M 为某个质量,取重正化点,就可以避免质壳上的重正化. 在此情形下,重正化质量和重正化耦合常数仍然不是低能实验中所测量的传统的物理质量和物理的耦合常数. 但是物理质量和物理的耦合常数可以由重正化常数计算出

来. 因此，重正化常数的准确表示式和抵消项的系数与正规化方案和重正化(减除)点有关. 重正化点的改变会改变重正化常数的表示式.

结束本节，下面的注释是必要的. 在量子电动力学的例子中，抵消项有类似于原来拉氏函数方程 (II.2.7) 已经出现的那些项的形式. 大多数可重正化的理论都具有这个性质. 但是有例外，例如，汤川理论的拉氏函数为

$$\mathscr{L}_y = \psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_p\partial_\mu\phi_p - \mu^2\phi_p^2) + g\psi i\gamma_5\psi\phi_p, \qquad \text{(VI.1.14)}$$

这里 ϕ_p 为质量 μ 的膺标量场. 在图 VI.19 中所描述的膺标量膺标量散射图形是对数发散的，这里虚线表示膺标量. 因

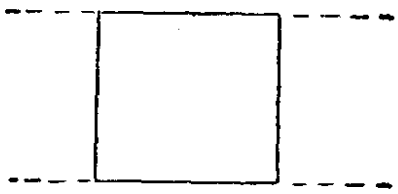


图 VI.19

此，它需要如下形式的抵消项

$$\lambda\phi_p^4. \qquad \text{(VI.1.15)}$$

所以按照重正化通常的抵消项规定不认为拉氏函数方程 (VI.1.14) 是可重正化的，因为减除项的形式并不包含在原来的拉氏函数中. 当然，补救的方法是完全直截了当的. 简单地通过对原来的拉氏函数方程 (VI.1.14) 添加方程 (VI.1.15) 的 ϕ_p^4 相互作用项，理论就变为可重正化的.

如在 § V.4 所证明的，由于规范不变性，光子光子散射图形的最低阶表面 (对数) 发散图形实际上是收敛的. 事实上，在所有的高阶图形中，该过程的发散性是由于自能和顶角插入引起的. 因此，对于光子光子散射不分开抵消项是必要的，

抵消项将是四光子场乘积的形式。这样的抵消项，如果它是必要的，并不是原来拉氏函数中的形式，并且由于规范不变性是禁戒的。相对于量子色动力学的图 VI.4 的某些 $D=0$ 图形可以作类似的说明。包含二条和四条"外"鬼线的图形都是收敛的。如果这些图形是发散的，则包含四个鬼场乘积或两个鬼场和两个规范场乘积的抵消项要出现。它们是原来拉氏函数以外的形式，并且由于下节要讨论的 BRS 变换的不变性，它们作为减除项是不能存在的。

在许多物理上感兴趣的量，并且应该得到它们在重正化中的性质。这些量是 Green 函数，顶角函数，和 S 矩阵元，这些量都是相互联系的。在 § I.3 中已讨论了 Green 函数。由 Green 函数通过舍去外全传播子，换言之，通过乘以相应于 Green 函数的外全传播子的倒数，就得到顶角函数。在 §§5.1 和 § 2 中所讨论的电子和光子的自能修正，$\Sigma(p)$ 和 $\pi_{\mu\nu}(k)$，是两点顶角函数。在 § 5.3 所讨论的电子光子顶角修正 $\Lambda_\mu(p', p)$ 是三点顶角函数。一个顶角函数的外动量一般是在质壳外。由顶角函数令一切外动量在质壳上并乘以适当的波函数连同重正化常数，例如，在量子电动力学中的 $\sqrt{Z_2}\,\bar{u}(p')$，$\sqrt{Z_2}\,u(p)$，和 $\sqrt{Z_3}\,\varepsilon_\mu$，就得到 S 矩阵元，这里 ε_μ 为光子偏振矢量。在重正化中，Green 函数是分解为所谓重正化的 Green 函数的有限部分和一个发散部分的乘积因子，发散部分是波函数重正化常数的乘积。如在方程 (I.2.23) 所定义的一样，未重正化的 Green 函数可以写为

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots\phi_n(x_n)\} | 0\rangle. \tag{VI.1.16}$$

紫外有限的重正化的 Green 函数定义为

$$G_R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \langle 0 | T\{\phi_{1R}(x_1)\phi_{2R}(x_2)\cdots\phi_{nR}(x_n)\} | 0\rangle, \tag{VI.1.17}$$

这里未重正化的和重正化的场算符，ϕ_j 和 ϕ_{jR}，通过波函数重正化常数 Z_j 来联系：

$$\phi_j(x_j) \equiv \sqrt{Z_j}\,\phi_{jR}(x_j), \qquad \text{(VI.1.18)}$$

$j = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{Z_j}\right) G_R(x_1, x_2, \cdots, x_n). \qquad \text{(VI.1.19)}$$

如上所述，未重正化的顶角函数定义为

$$\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \int \left[\prod_{j=1}^{n} \delta^4 y_j \bar{D}^{-1}(x_j - y_j)\right] \cdot G(y_1, y_2, \cdots, y_n), \qquad \text{(VI.1.20)}$$

而紫外有限重正化的，顶角函数定义为

$$\Gamma_R(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int \left[\prod_{j=1}^{n} d^4 y_j \bar{D}_R^{-1}(x_j - y_j)\right] \cdot G_R(y_1, y_2, \cdots, y_n). \qquad \text{(VI.1.21)}$$

函数 $\bar{D}$ 和 $\bar{D}_R$ 分别为未重正化的和重正化的全传播子函数，它们的定义是方程 (VI.1.16) 和 (VI.1.17)，并且对于 $n = 2$ 和 $\phi_1 = \phi_2$ 的特殊情形通过方程 (VI.1.19) 相联系. 由它们的定义，可以看出二顶角函数的关系为

$$\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{Z_j}\right)\right] \Gamma_R(x_1, x_2, \cdots, x_n). \qquad \text{(VI.1.22)}$$

因为 S 矩阵元是由这个表示式乘以外波函数和重正化常数

$$\prod_{j=1}^{n} \sqrt{Z_j} f_j(x_j) \qquad \text{(VI.1.23)}$$

的乘积而得到的. 因而显然 S 矩阵元是有限的. 外波函数 $f_j(x_j)$，$j = 1, 2, \cdots, n$，是有限的函数. 并且对于一个入射费米子(反费米子)，一个出射费米子(反费米子)，一个矢量粒

子，和一个自旋零场在动量空间表示中 [$f_i(x)$ 的 Fourier 变换]分别为 $\bar{u}(p)$ ($\bar{v}(p)$)，$\bar{u}(p)$($v(p)$)，$\varepsilon_\mu(k)$，和 1 。

VI.2 Becchi, Rouet, 及 Stora 变换和推广的 Ward-Takahashi 恒等式

在整体变换下的不变性引起守恒定律．熟知的例子是角动量守恒，电荷守恒，在强相互作用下的同位旋守恒，等等．然而，在局部规范变换下的不变性将会把不同的 Green 函数联系起来，引起例如 § 1.3 所讨论的通称为 Ward-Takahashi 恒等式的关系．除场论的计算以外，Ward-Takahashi 恒等式还可以应到其他的领域，如流代数的推导[25]．由严格对称性推导出的 Ward-Takahashi 恒等式是严格的关系，对微扰展开式的所有阶都成立．然而，在 § IV.5 中所讨论的非正则 Ward-Takahashi 恒等式，是不严格的，具有明确的反常项．

在场论的计算中 Ward-Takahashi 恒等式的重要性怎么强调也不过分．在像量子电动力学的阿贝耳规范理论中，由 Ward-Takahashi 恒等式所得的 $Z_1 = Z_2$，可以用来对紫外发散性进行分类，使它的可重正性的证明简化．在非阿贝耳规范理论中，类似的关系通常称为推广的 Ward-Takahashi 恒等式或 Slanov[11]-Taylor[12] 恒等式，通过适当的表面发散顶角函数关系把不同的重正化常数联系起来，在幺正性[8]和可重正性的证明中是决定性的．而且，因为恒等式是严格的，对微扰展开式的一切阶均成立，故恒等式可以用来使较高阶的计算简化，并且形成例如像量子色动力学理论的解的约束．

在非阿贝耳规范理论中，由于下面的原因，Ward-Takahashi 恒等式的推导和应用是很复杂的：(a) 在拉氏函数中规范固定项和鬼项的存在使规范不变性破坏．(b) 通常的

Ward-Takahashi 恒等式是对全 Green 函数的连通部分定义的，但是重正化是对一粒子不可约化的(1PI)部分进行的. 要由前者得到后者的关系是十分艰巨的. Becchi, Rouet 和 Stora(BRS)[13] 变换可以使 Ward-Takahashi 恒等式的复杂推导简化，这将在下面进行讨论.

Becchi-Rouet-Stora(BRS)变换 BRS 变换是场算符的改变，这样的场算符改变使有效拉氏函数和泛函积分的积分测度为不变量. 因此，BRS 变换是有效作用量的对称性变换.

$$\delta_{\mathrm{BRS}}\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = 0.$$

在这个方法中，鬼场如同规范场和物质场一样来处理. 事实上，往后在细节上会看到，规范固定项和鬼项在 BRS 变换下是彼此互补的，因而使拉氏函数为不变量.

非阿贝耳规范理论的有效拉氏函数方程 (II.3.33) 写为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L} + \mathscr{L}_{\mathrm{gauge}} + \mathscr{L}_{\mathrm{ghost}}, \qquad \text{(VI.2.1)}$$

这里

$$\mathscr{L} = \psi(i\not{\partial} + gA^aT^a - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \qquad \text{(VI.2.2a)}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2, \qquad \text{(VI.2.2b)}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{ghost}} = -\partial^\mu\bar{C}^aD^{ab}_\mu C^b \to \bar{C}^a\partial^\mu\{D^{ab}_\mu C^b\}, \qquad \text{(VI.2.2c)}$$

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \qquad \text{(VI.2.3a)}$$

$$D^{ab}_\mu \equiv \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A^c_\mu. \qquad \text{(VI.2.3b)}$$

在 (II.3.8) 中定义了传统规范变换，即

$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g}D^{ab}_\mu\varepsilon^b(x),$$

$$\psi \to \psi' = (1 - iT^a\varepsilon^a(x))\psi,$$

$$\psi \to \psi' = \psi(1 + iT^a\varepsilon^a(x)), \qquad \text{(VI.2.4)}$$

这里 $\varepsilon^a(x)$ 为无限小的 C 数函数，$T^a, a=1,2,\cdots,n^2-1$ 为 $SU(n)$ 群的生成元，方程 (VI.2.2a) 是变换 (VI.2.4) 的不变量. 但是，$\mathscr{L}_{\text{ghost}}$，$\mathscr{L}_{\text{gauge}}$ 和它们之和在方程 (VI.2.4) 下不是不变量. 然而，如果这类无限小的函数 $\varepsilon^a(x)$ 可以扩充，则可使 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 在 (VI.2.4) 下为不变量. 注意，$\mathscr{L}_{\text{鬼}}$ 和 $\mathscr{L}_{\text{规范}}$ 只包含规范场和鬼场.

考虑例如方程 (VI.2.4) 的场变分，包括相应的鬼场变分在内. 因为方程 (VI.2.2a) 的 $\mathscr{L}$ 是不变量，故

$$\delta\mathscr{L}_{\text{eff}}=\delta\mathscr{L}_{\text{规范}}+\delta\mathscr{L}_{\text{鬼}}=-\frac{1}{\xi}\partial^\mu A^a_\mu\partial^\lambda(\delta A^a_\lambda)$$
$$+\delta\bar{C}^a\partial^\mu(D^{ab}_\mu C^b)+\bar{C}^a\partial^\mu\{\delta(D^{ab}_\mu C^b)\}. \qquad \text{(VI.2.5)}$$

显然，为使 $\delta\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 为零，规范场的变分必须包括鬼场在内. 考虑无限小的函数

$$\varepsilon^a(x)\equiv\xi C^a(x), \qquad \text{(VI.2.6)}$$

这里 ξ 为无限小的反对易 C 数，即是 Grassmann 代数的一个元素，与鬼场和费米子场反对易.

$$\xi^2=0, \qquad \text{(VI.2.7)}$$

$$\{\xi,C^a(x)\}=\{\xi,\bar{C}^a(x)\}=0, \qquad \text{(VI.2.8)}$$

及

$$\{\xi,\psi(x)\}=\{\xi,\bar{\psi}(x)\}=0. \qquad \text{(VI.2.9)}$$

按照方程 (VI.2.4) 和 (VI.2.6)，令

$$\delta A^a_\mu=-\frac{1}{g}\xi D^{ab}_\mu C^b. \qquad \text{(VI.2.10)}$$

规范固定项的变分变为

$$\delta\mathscr{L}_{\text{规范}}=\frac{\xi}{\xi g}(\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\nu(D^{ab}_\nu C^b). \qquad \text{(VI.2.11)}$$

现在选取

$$\delta\bar{C}^a=-\frac{\xi}{\xi g}\partial^\mu A^a_\mu. \qquad \text{(VI.2.12)}$$

于是

$$\delta\mathscr{L}_{\text{eff}} = \bar{C}^a\partial^\mu[\delta(D_\mu^{ab}C^b)]. \qquad \text{(VI.2.13)}$$

选取 $C^a(x)$ 的变分，使 $\delta\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 为零.

首先考虑

$$[\delta D_\mu^{ab}]C^b = -gf^{abc}\delta A_\mu^c C^b = \xi f^{abc}[D_\mu^{cd}C^d]C^b$$

$$= \frac{1}{2}\xi f^{abc}\partial_\mu(C^cC^b) - g\xi f^{abc}f^{dce}A_\mu^c C^d C^b, \qquad \text{(VI.2.14)}$$

这里在上式中利用了鬼场的反对易性质和结构常数 f^{abc} 相对于任何二指标交换是反称的事实. 再利用 Jacobi 恒等式

$$f^{abc}f^{cde} + f^{adc}f^{ceb} + f^{acc}f^{cbd} = 0 \qquad \text{(VI.2.15)}$$

把方程 (VI.2.14) 的最后一行的第二项重写为

$$f^{abc}f^{cde}A_\mu^c C^d C^b = \frac{1}{2}[f^{abc}f^{cde} - f^{adc}f^{ceb}]A_\mu^c C^d C^b$$

$$= \frac{1}{2}f^{ace}f^{cbd}A_\mu^c C^d C^b,$$

这里又利用了鬼场的反对易性质，于是

$$(\delta D_\mu^{ab})C^b = -\frac{\xi}{2}f^{abc}\partial_\mu(C^bC^c)$$

$$+ \frac{\xi}{2}f^{ace}A_\mu^c(f^{cbd}C^bC^d)$$

$$= -D_\mu^{ac}\left[\frac{\xi}{2}f^{cbd}C^bC^d\right]. \qquad \text{(VI.2.16)}$$

为使 $\delta\mathscr{L}_{\text{eff}} = 0$，唯一必要选取

$$\delta C^a = \frac{\xi}{2}f^{abd}C^bC^d. \qquad \text{(VI.2.17)}$$

使非阿贝耳规范场论的有效拉氏函数为不变量的变换集合称为 BRS 变换[13]，BRS 变换总结如下：

$$\delta\psi = -i\xi T^aC^a\psi, \qquad \text{(VI.2.18a)}$$

$$\delta\Psi = i\Psi\xi T^aC^a, \qquad \text{(VI.2.18b)}$$

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}\hat{\zeta} D^{ab}_\mu C^b, \qquad \text{(VI.2.18c)}$$

$$\delta C^a = \frac{\hat{\zeta}}{2} f^{abd} C^b C^d, \qquad \text{(VI.2.18d)}$$

$$\delta \bar{C}^a = -\frac{\hat{\zeta}}{\xi g}\partial^\mu A^a_\mu. \qquad \text{(VI.2.18e)}$$

注意，δC^a 和 $\delta \bar{C}^a$ 并不通过厄密共轭彼此互相联系. 这是容许的，因为拉氏函数的鬼场部分不是厄密的. 上面的变换集合有下面的显著性质:

$$\begin{aligned}\delta(T^a C^a \phi) &= T^a \delta C^a \phi + T^a C^a \delta\phi \\ &= \frac{1}{2}\hat{\zeta} f^{abd} T^a C^b C^d \phi + T^a C^a[-i\hat{\zeta} T^b C^b \phi] \\ &= \frac{1}{2}\hat{\zeta} f^{abd} T^a C^b C^d \phi + \frac{i}{2}\hat{\zeta}[T^a, T^b] C^a C^b \phi \\ &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(VI.2.19)}$$

$$\begin{aligned}\delta(\phi T^a C^a) &= \delta\phi T^a C^a + \phi T^a \delta C^a \\ &= i\phi\hat{\zeta} T^a C^a T^b C^b + \frac{1}{2}\phi T^a f^{abd}\hat{\zeta} C^b C^d \\ &= \frac{i}{2}\phi\hat{\zeta}[T^a, T^b] C^a C^b + \frac{1}{2}\phi\hat{\zeta} f^{abd} T^a C^b C^d \\ &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(VI.2.20)}$$

$$\delta(D^{ab}_\mu C^b) = 0, \qquad \text{(VI.2.21)}$$

及

$$\begin{aligned}\delta(f^{abd} C^b C^d) &= f^{abd}(\delta C^b \cdot C^d - C^b \delta C^d) \\ &= f^{abd}\left(\frac{\hat{\zeta}}{2} f^{bch} C^c C^h C^d + C^b \frac{\hat{\zeta}}{2} f^{dch} C^c C^h\right) \\ &= -\frac{\hat{\zeta}}{2}[f^{abc} f^{cde} + f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd}] C^b C^d C^e \\ &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(VI.2.22)}$$

于是一切场的二次变分为零

$$\delta(\delta\psi) = \delta(\delta\phi) = \delta(\delta A^a_\mu) = \delta(\delta C^a) = 0, \quad \text{(VI.2.23)}$$

与事实 $\hat{\zeta}^2 = 0$ 无关；$\delta(\delta\bar{C}^a) = 0$ 是由于 $\hat{\zeta}^2 = 0$.

BRS 变换提供非阿贝耳规范场论主要性质的扼要总结：方程 (VI.2.18a)—(VI.2.18c) 给出场的变换定律；方程 (VI.2.18d) 由固定结构常数确定规范群；方程 (VI.2.18e) 确定规范固定项；方程 (VI.2.19) 和 (VI.2.20) 包含群的代数学；最后方程 (VI.2.22) 包括 Jacobi 恒等式.

另外显著的事实是，A^a_μ 的变换是通过满足费米统计的场来实现的，像超对称性[26,27]中的超场类型的变换. 在超对称理论中，费米子和玻色子位于分次李代数[28]的相同表示内. 因此，在超对称变换下，不同统计的场彼此互相混合. 事实上，在超对称理论中，重正化常数比通常的理论少，因此使理论的紫外行为得到改进，这表明与非阿贝耳规范理论的一定类似性. 在非阿贝耳规范理论中，由非阿贝耳规范变换的不变性引起的高度对称性使它的紫外行为成为可控制的.

推广的 Ward-Takahashi 恒等式 检验一粒子不可约化的 (1PI) Green 函数的生成泛函 BRS 变换的结果，算符 $-T^aC^a\phi$, ϕT^aC^a, $-D^{ab}_\mu C^b$ 及 $\frac{1}{2} f^{abd}C^bC^d$ 必须分别包括外源 $\hat{x}$, $\hat{y}$, u^a_μ 及 v^a. 因此

$$\begin{aligned} Z[\eta, \eta, J^a_\mu, K^a, \bar{K}^a; u^a_\mu, v^a, \hat{x}, \hat{y}] \\ = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi \prod \mathscr{D}A^a_\mu \mathscr{D}C^b \mathscr{D}\bar{C}^d \exp\{i\int d^4x \mathscr{L}_{\text{eff}} \\ + i\int d^4x[\eta\phi + \phi\eta + J^{a\mu}A^a_\mu + \bar{C}^aK^a + \bar{K}^aC^a] \\ + i\int d^4x[-\hat{x}T^aC^a\phi + \phi T^aC^a\hat{y} \\ + u^{a\mu}\frac{1}{g}D^{ac}_\mu C^b + v^a\frac{1}{2}f^{abd}C^bC^a]\}. \quad \text{(VI.2.24)} \end{aligned}$$

变换

$$\phi_\beta \to \phi_\beta + \delta\phi_\beta,\ \phi_\beta \equiv \psi, \bar{\psi}, A^a_\mu, C^a, \bar{C}^a,$$
$$\delta\phi_\beta \equiv \delta\psi, \delta\bar{\psi}, \delta A^a_\mu, \delta C^a, \delta\bar{C}^a,$$

这里无限小的场 $\delta\psi$，等等，在方程 (VI.2.18) 中给出，得到 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 为不变量，并且源项正比于 ξ, $\bar{\eta}$, v^a_μ 和 v^a. 变换的雅可比行列式为 1. (记住 $\xi^2 = 0$.) 这可由雅可比行列式的一切对角元素正比于 ξ 的事实，和由下面的对角元素的形式看出来:

$$\frac{\delta}{\delta A^b_\lambda(y)}[A^a_\lambda(x) + \delta A^a_\lambda(x)] = \delta^4(x-y)[\delta^{ab} - \xi f^{abd}C^d],$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi(y)}[\psi(x) + \delta\psi(x)] = \delta^4(x-y)[1 - i\xi T^a C^a],$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(y)}[\psi(x) + \delta\psi(x)] = \delta^4(x-y)[1 + i\xi T^a C^a],$$

$$\frac{\delta}{\delta C^b(y)}[C^a(x) + \delta C^a(x)] = \delta^4(x-y)[1 - \xi f^{abd}C^d],$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{C}^b(y)}[\bar{C}^a(x) + \delta\bar{C}^a(x)] = \delta^{ab}\delta^4(x-y), \quad \text{(VI.2.25)}$$

并且一切非对角项正比于 ξ.

BRS 变换得到下面的表示式

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\psi\Pi\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}C^b\mathscr{D}\bar{C}^d \cdot \int d^4x\{J^{a\mu}\delta A^a_\mu + \eta\delta\psi + \delta\bar{\psi}\cdot\eta + \bar{K}^a\delta C^a + \delta\bar{C}^a\cdot K^a\}\cdot\exp\{iI_{\text{eff}} + \text{源项}\}, \quad \text{(VI.2.26)}$$

它可以重写为

$$0 = \int d^4x\left\{J^a_\mu\frac{\delta}{\delta u^a_\mu} - i\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}} - i\eta\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} - \bar{K}^a\frac{\delta}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi g}K^a\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J^a_\mu}\right)\right\}Z[\cdots]. \quad \text{(VI.2.27)}$$

这是全 Green 函数的推广 Ward-Takahashi 恒等式的内容.

因为这是一个线性关系，故类似的表示式对连通的 Green 函数的生成泛函 $W[\cdots]$ 成立：

$$0=\int d^4x\left\{J_\mu^a\frac{\delta}{\delta u_\mu^a}-i\eta\frac{\delta}{\delta\xi}-i\eta\frac{\delta}{\delta\vartheta}\right.$$
$$\left.-\bar{K}^a\frac{\delta}{\delta v^a}-\frac{1}{\xi g}K^a\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}\right)\right\}W[\cdots],$$

(VI.2.28)

这里

$$W[\cdots]=\frac{4}{i}\ln Z[\cdots].$$

为了推导出顶角函数的恒等式，记住(一粒子不可约化的)顶角函数的生成泛函 $A[\tilde{\phi}]$ 由 (I.3.28) 所给出的定义：

$$A[\tilde{\phi}_\beta]=W[J_\beta]-\int d^4x\tilde{\phi}_\beta J_\beta,$$

这里

$$\tilde{\phi}_\beta=\frac{\delta W}{\delta J_\beta}=Z^{-1}\int\prod_\alpha d\phi_\alpha\phi_\beta\exp\left\{iI+i\int d^4x\phi_\alpha J_\alpha\right\},$$

(VI.2.29)

它是在外源 J_β 存在时 $\phi_\beta(x)$ 的真空期待值，并且

$$J_\alpha=-\frac{\delta A[\tilde{\phi}_\beta]}{\delta\tilde{\phi}_\alpha}.\qquad\text{(VI.2.30)}$$

W 和 A 的自变量如下

$$W=W[\eta,\bar{\eta},J_\mu^a,K^a,\bar{K}^a;u_\mu^a,v^a,\xi,\vartheta],$$
$$A=A[\tilde{\phi},\tilde{\bar{\phi}},\tilde{A}_\mu^a,\tilde{C},\tilde{\bar{C}};u_\mu^a,v^a,\xi,\vartheta].\qquad\text{(VI.2.31)}$$

写出

$$A[\tilde{\phi},\tilde{\bar{\phi}},\tilde{A}_\mu^a,\tilde{C}^a,\tilde{\bar{C}}^a;u_\mu^a,v^a,\xi,\vartheta]$$
$$=W[\eta,\bar{\eta},J_\mu^a,K^a,\bar{K}^a;u_\mu^a,v^a,\xi,\vartheta]$$
$$-\int d^4x\{\tilde{\bar{\phi}}\eta+\bar{\eta}\tilde{\phi}+\bar{K}^a\tilde{C}^a+\tilde{\bar{C}}^aK^a+J^{a\mu}\tilde{A}_\mu^a\},$$

(VI.2.32)

我们有

$$J^{a\mu} = -\frac{\delta A[\cdots]}{\delta \tilde{A}^a_\mu},$$

$$\eta = \frac{\delta A[\cdots]}{\delta \tilde{\psi}},$$

$$\bar{\eta} = -\frac{\delta A[\cdots]}{\delta \bar{\tilde{\psi}}},$$

$$\bar{K}^a = \frac{\delta A[\cdots]}{\delta \tilde{C}^a},$$

$$K^a = -\frac{\delta A[\cdots]}{\delta \bar{\tilde{C}}^a}. \qquad \text{(VI.2.33)}$$

(VI.2.28) 可以重写为

$$\int d^4x \left\{ \frac{\delta A}{\delta \tilde{A}^a_\mu}\frac{\delta A}{\delta u^{a\mu}} + i\frac{\delta A}{\delta \tilde{\psi}}\frac{\delta A}{\delta \xi} + \frac{\delta A}{\delta \eta}\frac{\delta A}{\delta \bar{\tilde{\psi}}} + \frac{\delta A}{\delta \tilde{C}^a}\frac{\delta A}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi g}\frac{\delta A}{\delta \bar{\tilde{C}}^a}(\partial^\mu \tilde{A}^a_\mu) \right\} = 0. \qquad \text{(VI.2.34)}$$

上式的简化需要鬼场 $\bar{C}$ 的运动方程，在方程 (VI.2.17) 中作变数改变

$$\bar{C}^a(x) \to \bar{C}^a(x) + \lambda(x),\ \lambda(x) \text{ 为无限小的},$$

并且在令 $\lambda(x) = 0$ 以前相对于 $\lambda(x)$ 进行微分，就可得到运动方程。这给出

$$\left[K^a + ig\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta u^a_\mu}\right)\right] Z[\cdots] = 0, \qquad \text{(VI.2.35)}$$

用 W 来表示，上式为

$$\left[K^a - g\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta u^a_\mu}\right)\right] W[\cdots] = 0, \qquad \text{(VI.2.36)}$$

或者用一粒子不可约化的 ($1PI$) Green 函数的生成泛函来表示，为

$$\left[\frac{\delta}{\delta \tilde{C}^a} + g\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta u^a_\mu}\right)\right] A[\cdots] = 0, \qquad \text{(VI.2.37)}$$

现在方程 (VI.2.34) 变为

$$\int d^4x \left\{ \frac{\delta A}{\delta \tilde{A}^a_\mu} \frac{\delta A}{\delta u^{a\mu}} + i \frac{\delta A}{\delta \tilde{\phi}} \frac{\delta A}{\delta \xi} + i \frac{\delta A}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta A}{\delta \phi} + \frac{\delta A}{\delta \tilde{C}^a} \frac{\delta A}{\delta v^a} - \frac{1}{\xi} (\partial_\mu \partial^\nu \tilde{A}^a_\nu) \frac{\delta A}{\delta u^a_\mu} \right\} = 0, \quad \text{(VI.2.38)}$$

在利用方程 (VI.2.37) 以后，由方程 (VI.2.34) 的最后一项应用分部积分(略去表面项)就得到上式. 令

$$A[\cdots] = A'[\cdots] - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial^\nu \tilde{A}^a_\nu)^2. \quad \text{(VI.2.39)}$$

因此

$$\int d^4x \left\{ \frac{\delta A'}{\delta \tilde{A}^a_\mu} \frac{\delta A'}{\delta u^{a\mu}} + \frac{\delta A'}{\delta \tilde{C}^a} \frac{\delta A'}{\delta v^a} + i \frac{\delta A'}{\delta \tilde{\phi}} \frac{\delta A'}{\delta \xi} + i \frac{\delta A'}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta A'}{\delta \tilde{\phi}} \right\} = 0, \quad \text{(VI.2.40)}$$

这就是推广的 Ward-takahashi 恒等式. 鬼运动方程 (VI.2.38) 变为

$$\left[\frac{\delta}{\delta \bar{C}^{2a}} + g \partial_\mu \left(\frac{\delta}{\delta u^a_\mu} \right) \right] A'[\cdots] = 0. \quad \text{(VI.2.41)}$$

简单的恒等式方程 (VI.2.40) 和 (VI.2.41) 简明地表达由 BRS 变换所得到的 Ward-Takahashi 恒等式的全部内容. 这些恒等式是非阿贝耳规范理论可重正性证明的关键因素.

下面给出非阿贝耳规范理论中表面发散 Green 函数的 Ward-Takahashi 恒等式的推导，这些函数在前节中已经叙述了. 这些 Ward-Takahashi 恒等式通常又称为推广的 Ward-Takahashi 恒等或 Slanov-Taylor 恒等式[11,12].

二点函数

(a) 规范场传播子

将证明，规范场传播子满足下面的恒等式

$$k^\mu\int d^4x e^{-ikx}\langle 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(0)|0\rangle = -i\delta^{ab}\xi k_\nu/k^2,$$

(VI.2.42a)

即

$$ik^\mu\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k) = -i\delta^{ab}\xi\frac{k_\nu}{k^2}. \qquad \text{(VI.2.42b)}$$

从开始就利用了全 Green 函数方程 (VI.2.26) 的生成函数. 当相对于 $J^a_\mu(x)$ 和 $K^b(y)$ 微分时，得到下面的恒等式:

$$0 = \frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi\Pi\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}C^b\mathscr{D}\bar{C}^d\exp\{iI_{\text{eff}} + \text{源项}\}.$$

$$\cdot\int dW\{-i\delta(W-x)\delta A^a_\mu(W)\bar{C}^b(y)$$

$$-i\delta\bar{C}^b(W)A^a_\mu(x)\delta(W-y)\}, \qquad \text{(VI.2.43)}$$

最后要令这里一切外源为零. 用算符符号，为

$$\langle 0|T^*(\partial^\mu A^a_\mu(x)A^b_\nu(y))|0\rangle$$

$$+\xi\langle 0|T^*(D^{bd}_\nu(y)c^d(y)\cdot\bar{C}^a(x))|0\rangle = 0. \qquad \text{(VI.2.44)}$$

为了研究该恒等式的第二项，鬼方程 (VI.2.35) 相对于 K^b 微分

$$\left[\delta^{ab}\delta^4(x-y) - K^a(x)\frac{\delta}{\delta K^b(y)}\right.$$

$$\left.+ig\frac{\delta}{\delta K^b(y)}\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta u^a_\mu(x)}\right)\right]Z[\cdots] = 0.$$

(VI.2.45)

当令一切源项为零时，这给出

$$\delta^{ab}\delta^4(x-y) + i\frac{\partial}{\partial y_\mu}\langle 0|T^*(D^{ad}_\mu(y)C^d(y)$$

$$\cdot\bar{C}^b(x))|0\rangle = 0. \qquad \text{(VI.2.46)}$$

注意，鬼场运动方程的算符形式为

$$\partial^\mu[D^{ab}_\mu(x)C^b(x)] = 0.$$

因此方程 (VI.2.46) 简单地是由 $\partial^\mu D^{ab}_\mu$ 为逆鬼传播子的事实

而得到的. 其次,取方程 (VI.2.46) 的 Fourier 变换

$$i\int d^4x e^{iqx}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T^*(D_\mu^{ad}(x)C^d(x)\bar{C}^b(0))|0\rangle + \delta^{ab}=0, \tag{VI.2.47}$$

由于平移不变性,这给出

$$q^\mu\int d^4x e^{-iqx}\langle 0|T^*(D_\mu^{ad}(0)C^d(0)\bar{C}^b(x))|0\rangle=-\delta^{ab}. \tag{VI.2.48}$$

左边是协变的,并且只是 q 的函数;所以

$$\int d^4x e^{-iqx}\langle 0|T^*(D_\nu^{ad}(0)C^d(0)\bar{C}^b(x))|0\rangle=-\frac{q_\mu}{q^2}\delta^{ab}. \tag{VI.2.49}$$

于是方程 (VI.2.44) 的 Fourier 变换中利用这个表示式给出方程 (VI.2.42a). 自由胶子传播子也满足方程 (VI.2.42a),因此,这关系说明,纵向部分不是重正化的. 基于 Lorenfz 不变性,下面可以写出

$$i\bar{D}_{F\mu\nu}^{ab}(k)=\frac{-i\delta^{ab}}{k^2}\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\cdot\frac{1}{1+\Pi(k^2)}+\xi k_\mu k_\nu/k^2\right]. \tag{VI.2.50}$$

这类似于 § V.2 中所讨论的光子传播子,函数 $\Pi(k^2)$ 在这里起光子传播子中 $e^2\Pi(k^2)$ 一样的作用.

(b) 鬼传播子

可以证明,全鬼传播子取形式

$$i\bar{D}_F^{ab}(q)=\frac{-i\delta^{ab}}{q^2[1+\Sigma_g(q^2)]}, \tag{VI.2.51}$$

这里 $q^2\Sigma_g(q^2)$ 是由传播子的一粒子不可约化部分的辐射修正引起的. 因为鬼谱函数正比于 q^2,它保证鬼场在重正化效应下保持为无质量的.

证明 (VI.2.51) 从方程 (VI.2.49) 出发，通过协变导数 (VI.2.3b) 展开，并记住，在方程 (I.2.24) 中 T^* 乘积的定义，可得

$$\int d^4x d^4y e^{ipx} e^{-iqy} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | T(C^a(x)\bar{C}^b(y)) | 0 \rangle$$

$$- gf^{adc} \int d^4x d^4y e^{ipx} e^{-iqy} \langle 0 | T(A^c_\mu(x) C^d(x) \bar{C}^b(y)) | 0 \rangle$$

$$= - \frac{q_\mu}{q^2} \delta^{ab} (2\pi)^4 \delta^4(p - q). \qquad \text{(VI.2.52)}$$

全鬼传播子定义为

$$i\bar{D}^{ab}_F(q) = \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T(C^a(x)\bar{C}^b(0)) | 0 \rangle. \qquad \text{(VI.2.53)}$$

方程 (VI.2.52) 左边的第二项可以用 (一粒子不可约化的) 顶角 $\gamma^{ab}_\mu(x,y)$ 重写为

$$gf^{adc} \langle 0 | T(A^c_\mu(x) C^d(x) \bar{C}^b(y) | 0 \rangle$$

$$= i \int d^4z [i\bar{D}^{bd}_F(y,z)] \gamma^{ad}_\mu(x,z). \qquad \text{(VI.2.54)}$$

注意，没有传播子与复合算符 $A^c_\mu(x) C^d(x)$ 相联系. 利用方程 (VI.2.54)，现在方程 (VI.2.52) 变为

$$q_\mu \bar{D}^{ab}_F(q) + \bar{D}^{bd}_F(q) \gamma^{ad}_\mu(q) = - \frac{q_\mu}{q^2} \delta^{ab}, \qquad \text{(VI.2.55)}$$

这里 $\gamma^{ab}_\mu(p)$ 为 $\gamma^{ab}_\mu(x, y)$ 的 Fourier 变换

$$\gamma^{ab}_\mu(q) = \int d^4x e^{iq(x-y)} \gamma^{ab}_\mu(x, y). \qquad \text{(VI.2.56)}$$

方程 (VI.2.55) 可以重写为逆鬼传播子：

$$\bar{D}^{ab}_F(q)^{-1} = -q^2 \delta^{ab} - q^\mu \gamma^{ab}_\mu(q). \qquad \text{(VI.2.57)}$$

现在可以写出

$$\gamma^{ab}_\mu(q) = \delta^{ab} q_\mu \Sigma_g(q^2), \qquad \text{(VI.2.58)}$$

当代入方程 (VI.2.57) 时，给出方程 (VI.2.51).

三点函数

(c) 三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角.

三点函数的 Ward-Takahashi 恒等式是比较复杂的，然而利用连通的 Green 函数的生成泛函，推导是直截了当的. 下面将看得清楚，理由是三胶子顶角的 Ward-Takahashi 恒等式包括含有复合算符 $A^b_\mu(x)C^d(x)$ 的函数在内，并且这些函数必然要分解为一粒子不可约化部分的求和.

这可以由全 Green 函数方程 (VI.2.27) 或由连通部分的方程 (VI.2.28) 着手. 因为在不为零的外源不存在或自发对称破缺时，全三点 Green 函数不包含连通的部分，故要利用全 Green 函数的生成泛函. 相对于 $J^a_\mu(x)$, $J^b_\nu(y)$ 和 $K^a(z)$ 对方程 (VI.2.27) 进行微分，并取一切外源极限为零，得到

$$0=\frac{1}{N}\int\mathscr{D}\phi\mathscr{D}\phi\Pi\mathscr{D}A^a_\mu\mathscr{D}C^b\mathscr{D}\bar{C}^d\{D^{aa'}_\mu(x)C^{a'}(x)A^b_\nu(y)\bar{C}^d(z)$$

$$+D^{bb'}_\nu(y)C^{b'}(y)A^a_\mu(x)\bar{C}^d(z)+\frac{1}{\xi}A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)\partial^\lambda$$

$$\cdot A^d_\lambda(z)\}\exp\{iI_{\text{eff}}+\text{外源项}\},\qquad\text{(VI.2.59)}$$

上式给出下面的 Ward-Takahashi 恒等式

$$0=\frac{\partial}{\partial z_\lambda}\langle 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^d_\lambda(z))|0\rangle$$

$$+\xi\langle 0|T^*(D^{aa'}_\mu(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)A^b_\nu(y))|0\rangle_c$$

$$+\xi\langle 0|T^*(D^{bb'}_\mu(y)C^{b'}(y)\bar{C}^d(z)A^a_\mu(x))|0\rangle_c,\qquad\text{(VI.2.60)}$$

这里下指标 c 意指连通部分.

第二和第三项包括由方程 (VI.2.3b) 的协变导数 $D^{aa'}_\mu(x)$ 所引起的四个算符. 在下面清楚看到，这些有效的四点函数并不包括不连通部分，但是包含一粒子不可约部分. 为了约化方程 (VI.2.20)，要增补由鬼运动方程所得到的约束条件. 用 $J^b_\nu(y)$ 对方程 (VI.2.45) 进行微分，得到

$$0=\frac{1}{N}\int \mathscr{D}\phi\cdots\mathscr{D}\bar{C}^a\{\delta^{ad}\delta^4(x-z)A_\nu^b(y)$$
$$+i\partial^\mu[D_\mu^{aa'}(x)C^{a'}(x)]\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y)\}$$
$$\cdot\exp\{iI_{\text{eff}}+\text{源项}\},\qquad\text{(VI.2.61)}$$

这里正比于外源 $K^a(x)$ 的项被删去了. 这个表示式导致下面的恒等式:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T^*(D_\mu^{aa'}(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle_c=0,\qquad\text{(VI.2.62)}$$

它容许 Ward-Takahashi 恒等式方程 (VI.2.60) 简化,

$$0=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial z_\lambda}\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)A_\lambda^c(z))|0\rangle$$
$$+\xi\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T^*(D_\nu^{bb'}(y)C^{b'}(y)\bar{C}^d(z)A_\mu^a(x))|0\rangle_c.\qquad\text{(VI.2.63)}$$

方程 (VI.2.62) 也容许在动量空间内得到关于鬼鬼胶子顶角的信息,其中,连同方程 (VI.2.60), 得到三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角之间的确定关系:

首先按方程 (VI.2.62) 的协变导数展开, 并取 Fourier 变换

$$p^2\int d^4xd^4yd^4z\,e^{-i(px+qy+kz)}\langle 0|T(C^a(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle$$
$$=-ip^\mu\int d^4xd^4yd^4z\,e^{-i(px+qy+kz)}gf^{aa'e}$$
$$\cdot\langle 0|T(A_\mu^e(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle_c.\qquad\text{(VI.2.64)}$$

出现在右边的真空期待值称为复合鬼胶子 Green 函数. 两端必须用它们的一粒子不可约化部分来表示. 由方程 (I.3.36), 可以写出

$$\langle 0|T(C^a(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle$$
$$=\int d^4x'd^4y'd^4z'\,i\bar{D}_F^{aa'}(x-x')i\bar{D}_F^{dd'}(z-z')$$

$$\cdot i\bar{D}_{Fv}^{bb'v'}(y-y')g\Gamma_{gv'}^{adb}(x',z',y'), \qquad \text{(VI.2.65)}$$

这里 $\Gamma_v^{adb}(x,z;y)$ 为(一粒子不可约的)鬼鬼胶子三点顶角函数。在右边的耦合常数的一个幂，析出因数，使鬼鬼胶子顶角与树图的耦合常数无关(参看方程 (VI.2.72) 下面)。出现在方程 (VI.2.64) 中的复合鬼胶子 Green 函数按一粒子不可约部分的分解如图 VI.20 所示。

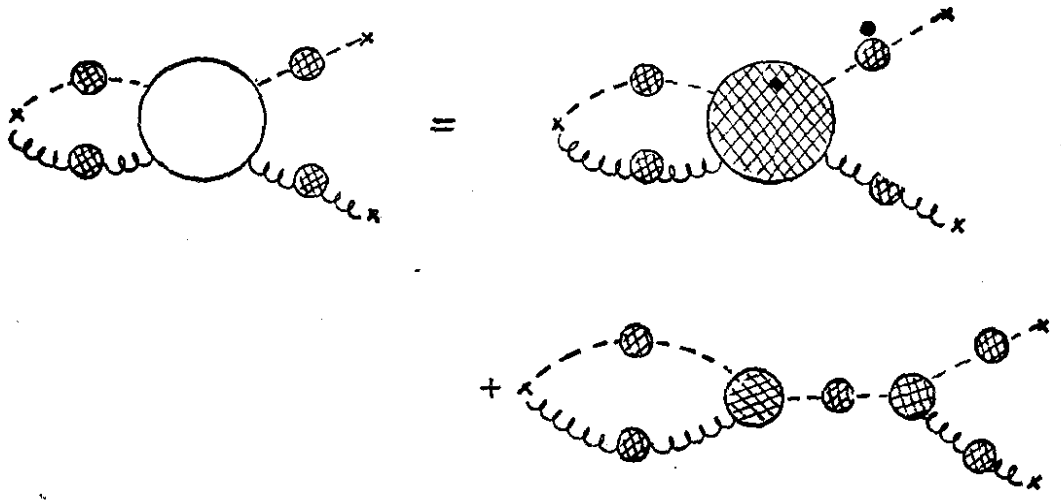


图 VI.20

左边大团块代表连通部分，而交叉的阴影团块代表一粒子不可约部分。按照 (I.3.37)

$$\begin{aligned} gf^{aa'c}\langle 0|T(A_\mu^c(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle_c \\ = \int d^4y'd^4z'i\bar{D}_{Fv}^{bb'}(y-y')i\bar{D}_F^{dd'}(z-z') \\ \cdot g\gamma_{\mu\nu}^{cd'b'}(x,z';y') + \int d^4z'd^4y'd^4wd^4w'i\bar{D}_P^{dd'} \\ \cdot (z-z')i\bar{D}_{Fv}^{bb'v'}(y-y')i\gamma_\mu^{ah}(x,w)g\Gamma_{gv}^{h'd'b'} \\ \cdot (w',z';y')i\bar{D}_F^{hh'}(w-w'), \qquad \text{(VI.2.66)} \end{aligned}$$

这里利用了方程 (VI.2.54)。函数 $\gamma_{\mu\nu}^{ad'b'}(x,z';y')$ 为复合鬼胶子顶角函数的一粒子不可约 (1PI) 部分；下面划线的自变数 x 表示复合算符 $A_\mu^c(x)\,C^{a'}(x)$ 的自变数。把方程 (VI.2.65)

和 (VI.2.66) 代入方程 (VI.2.64)，得到下面的恒等式

$$\begin{aligned} & i\bar{D}_F^{aa'}(p)i\bar{D}_F^{dd'}(k)i\bar{D}_{Fv}^{bb'}(q)p^2\Gamma_{gv'}^{a'd'b'}(p,k;q) \\ &= -ip^\mu\{i\bar{D}_F^{dd'}(k)i\bar{D}_{Fv}^{bb'}(q)\gamma_{\mu v'}^{ad'b'}(p,k;q) \\ &\quad + i\bar{D}_F^{dd'}(k)iD_{Fv}^{bb'v'}(q)i\gamma_\mu^{ah}(-p)\Gamma_{gv}^{h'd'b'} \\ &\quad \cdot(p,k;q)i\bar{D}_F^{vh'}(p)\}, \end{aligned} \tag{VI.2.67}$$

这里

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4\delta^4(p+k+q)\gamma_{v\mu}^{ad'b'}(p,k;q) \\ &= \int d^4xd^4yd^4ze^{-i(px+qy+kz)}\gamma_{\mu v}^{ad'b'}(x,z,y), \end{aligned} \tag{VI.2.68}$$

及

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\Gamma_{gv}^{adb}(p,k;q) \\ &= \int d^4xd^4yd^4ze^{-i(px+qy+kz)}\Gamma_{gv}^{adb}(x,z;y). \end{aligned} \tag{VI.2.69}$$

由方程 (VI.2.53) 和 (VI.2.58)，方程 (VI.2.67) 给出鬼鬼胶子顶角函数和复合鬼胶子顶角函数之间的关系为

$$\Gamma_{gv}^{adb}(p,k;q)=p^\mu\gamma_{\mu v}^{adb}(p,k;q). \tag{VI.2.70}$$

为了检验这个表示式的容洽性，用方程 (II.3.65) 可以如下计算出 $\gamma_{\mu v}^{adb}(p,k;q)$ 的最低阶表示式

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(A_\mu^c(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)A_v^b(y))|0\rangle_B \\ &= -\frac{\delta}{\delta J^{cu}(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{K}^{a'}(x)}\frac{\delta}{\delta K^d(z)}\frac{\delta}{\delta J^{bv}(y)} \\ &\quad \cdot Z[\cdots]_B=-D_{F\mu v}^{cb}(x-y)D_F^{a'd}(x-z), \end{aligned} \tag{VI.2.71}$$

这里“B”代表“最低阶”或“裸的”。由方程 (VI.2.66) 可得

$$\gamma_{\mu v}^{adb}(x,z;y)_B=f^{adb}g_{\mu v}\delta^4(x-z)\delta^4(x-y). \tag{VI.2.72}$$

于是在动量空间内复合鬼胶子顶角为

$$\gamma_{\mu v}^{adb}(p,k;q)_B=f^{adb}g_{\mu v}, \tag{VI.2.73}$$

由方程 (VI.2.70)，上式给出裸鬼鬼胶子顶角为

$$\Gamma_v^{adb}(p,k;q)_g=f^{adb}p_v.$$

这就是方程 (II.3.81)，除耦合常数和四动量守恒 δ 函数被消去以外。

在图 VI.21 中给出复合鬼胶子顶角 $\gamma_{\mu\nu}^{adb}(p,k;q)$ 的 Feynman 规则，并且在图 VI.22 中包括该顶角的微扰展开式。注意，在微扰展开式中，图 VI.21 的基本顶角只出现一次。

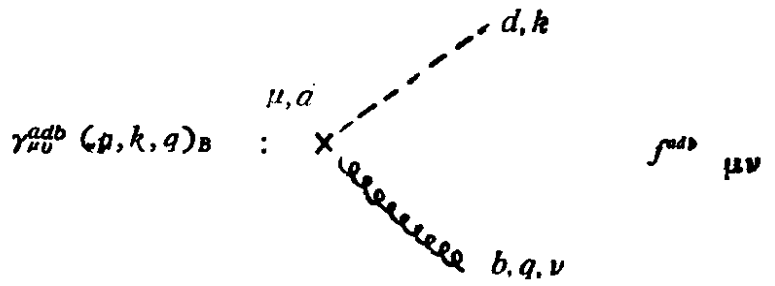


图 VI.21

现在回到方程 (VI.2.60)，首先考虑包含鬼场的项

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{-i(px+qy+kz)}\langle 0|T^*(D_\mu^{aa'}(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)$$

$$\cdot A_\nu^b(y))|0\rangle = ip_\mu \int d^4x d^4y d^4z e^{-i(px+qy+kz)}$$

$$\cdot \langle 0|T(C^a(x)\bar{C}^d(z)A_\nu^b(y))|0\rangle - \int d^4x d^4y d^4z$$

$$e^{-i(px+qy+kz)} g f^{aa'e}\langle 0|T(A_\mu^e(x)C^{a'}(x)\bar{C}^d(z)$$

$$\cdot A_\nu^b(y))|0\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p+q+k)i\bar{D}_F^{aa'}$$

$$\cdot (p)i\bar{D}_{F\nu}^{bb'}(q)\{igp_\mu\Gamma_{\nu'}^{a'd'b'}(p,k;q)$$

$$- g\gamma_{\mu\nu'}^{aa,b'}(p,k;q) - ig\gamma_\mu^{ah}(-p)i\bar{D}_p^{hh'}(p)\Gamma_{\nu'}^{h'd'b'}$$

$$\cdot (p,k;q)\} = (2\pi)^4\delta^4(p+q+k)\bar{D}_F^{dd'}(k)$$

$$\cdot \bar{D}_F^{h'}(q)\left[-\frac{1}{p^2}\right][p_\mu p^\lambda - g_\mu^\lambda p^2]g\gamma_{\lambda\nu'}^{ad'b'}(p,k;q),$$

(VI.2.74)

这里利用了方程 (VI.2.51)，(VI.2.58)，(VI.2.66) 及 (VI.2.70)。于是方程 (VI.2.60) 的 Fourier 变换变为

$$
\begin{aligned}
&ik^{\lambda} i\widetilde{D}^{aa'\mu'}_{F\mu}(p) i\widetilde{D}^{bb'\nu}_{F\nu}(q) i\widetilde{D}^{dd'\lambda'}_{F\lambda}(k) g\Gamma^{a'b'd'}_{\mu'\nu'\lambda'}(p,q;k) \\
&\quad = -\xi \overline{D}^{dd'}_{F}(k)\left\{\overline{D}^{bb'}_{F\nu}(q)\left[-\frac{1}{p^2}\right][p_\mu p^{\lambda} - p^2 g^{\lambda}_{\mu}]\right. \\
&\quad\quad \cdot g\gamma^{aa'b'}_{\lambda\nu'}(p,k;q) + \overline{D}^{aa'\mu'}_{F\mu}(p)\left[-\frac{1}{q^2}\right] \\
&\quad\quad \left.\cdot [q_\nu q^{\lambda} - q^2 g^{\lambda}_{\nu}] g\gamma^{ba'a'}_{\lambda\mu'}(q,k;p)\right\}, \qquad \text{(VI.2.75)}
\end{aligned}
$$

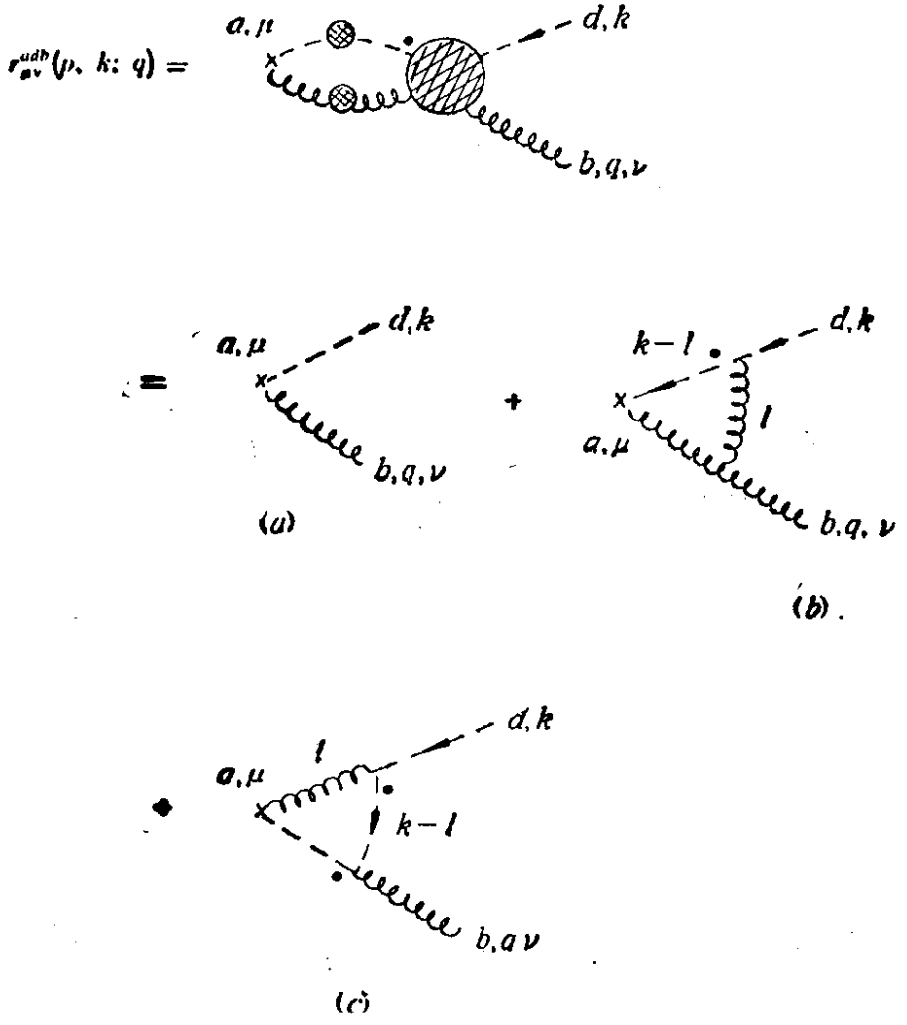


图 VI.22

这里

$$
\int d^4x d^4y d^4z\, e^{-i(px+qy+kz)}\langle 0|T(A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)A^d_\lambda(z))|0\rangle
$$

$$\cdot = i\bar{D}_{\mu}^{aa'\mu'}(p)i\bar{D}_{\nu}^{bb'\nu'}(q)i\bar{D}_{\lambda}^{dd'\lambda'}(k)g\Gamma_{\mu'\nu'\lambda'}^{a'b'd'}(p,q;k)$$

$$\cdot (2\pi)^4\delta^4(p+q+k).$$

利用方程 (VI.2.50)，方程 (VI.2.51) 及逆胶子传播子

$$\bar{D}_{F\mu\nu}^{ab}(k)^{-1} \equiv \delta^{ab}\left\{\left[-\frac{1}{\xi}+1+\underline{\Pi}(k^2)\right]k_\mu k_\nu - k^2\right.$$

$$\left.\cdot[1+\underline{\Pi}(k^2)]g_{\mu\nu}\right\}, \qquad \text{(VI.2.76)}$$

把方程 (VI.2.75) 重写为

$$[1+\Sigma_g(k^2)]k^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abd}(p,q;k)$$
$$= [1+\underline{\Pi}(p^2)](g_\mu^\lambda p^2 - p_\mu p^\lambda)\gamma_{\lambda\nu}^{adb}(p,k;q)$$
$$+ [1+\underline{\Pi}(q^2)](g_\nu^\lambda q^2 - q_\nu q^\lambda)\gamma_{\lambda\mu}^{da}(q,k;p). \qquad \text{(VI.2.77)}$$

这是把三胶子顶角与鬼鬼胶子顶角联系起来的所要求的 Ward-Takahashi 恒等式。恒等式的简化形式为

$$q^\nu k^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abd}(p,q;k) = \frac{1+\underline{\Pi}(p^2)}{1+\Sigma_g(k^2)}$$

$$\cdot(g_\mu^\lambda p^2 - p_\mu p^\lambda)q^\nu\gamma_{\lambda\nu}^{adb}(p,k;q) \qquad \text{(VI.2.78a)}$$

及

$$p^\mu q^\nu\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abd}(p,q;k) = 0, \qquad \text{(VI.2.78b)}$$

利用方程 (VI.2.73)，可得方程 (VI.2.77) 的最低阶表示式为

$$k^\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abd}(p,q;k)_B = (g_\mu^\lambda p^2 - p_\mu p^\lambda)f^{adb}g_{\lambda\nu}$$
$$+ (g_\nu^\lambda q^2 - q_\nu q^\lambda)f^{bda}g_{\lambda\mu} = f^{abd}[g_{\mu\nu}q^2$$
$$- q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}p^2 + p_\mu p_\nu]. \qquad \text{(VI.2.79)}$$

这与图 II.2 所给出的三胶子顶角的 Feynman 规则是相容洽的。

在原来的拉氏函数中不出现的复合鬼胶子顶角无论如何不是一个新的顶角；它只通过鬼鬼胶子顶角借助于方程 (VI.2.70) 才成为一个 Green 函数。由维数计数可以证明，这个复合顶角一般是对数发散的。然而，特殊的情况是 Lan-

dau 规范，其中它到一回路量级是紫外有限的. 这意味着，如果自能修正和传统的顶角修正被略去，它对所有的阶都是有限的. 这个事实对重正化常数的含义将在下节中加以讨论.

在 Landau 规范中到一回路量级复合鬼胶子顶角函数紫外有限的证明是直截了当的. 首先，可以看到，胶子传播子在 Landau 规范中是横向的. 图 VI.22(b) 和 (c) 中出现在鬼鬼胶子顶角处的胶子传播子可以重写为

$$(k-l)^{\mu}D^{ab}_{F\mu\nu}(l)=k^{\mu}D^{ab}_{F\mu\nu}(l),$$

于是图 VI.22 中的二个一圈图形可以用相应的图 VI.23 代替，图 VI.23 用收敛积分来表示.

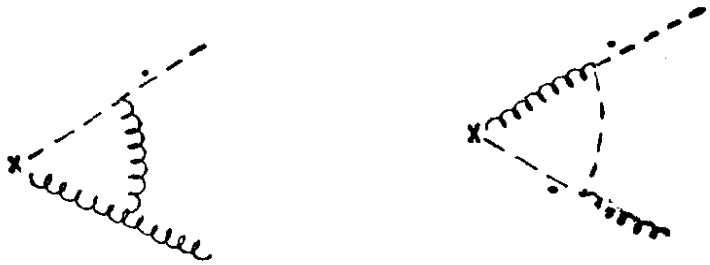


图 VI.23

(d) 费米子费米子胶子顶角.

由方程 (VI.2.28) 相对于 $\eta(x)$，$\eta(y)$ 和 $K^a(z)$ 进行微分，并令一切外源为零，就可以推导出费米子费米子胶子顶角的 Ward-Takahashi 恒等式. 结果为[下指标 c 意指连通部分]

$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial}{\partial z_{\mu}}\langle 0|T(\phi(x)\phi(y)A^a_{\mu}(z))|0\rangle\\&+ig\xi T^b\langle 0|T(\phi(x)\phi(y)C^b(x)\bar{C}^a(z)|0\rangle_c\\&+ig\xi\langle 0|T(\phi(x)\phi(y)C^b(y)\bar{C}^a(x)|0\rangle_c T^b.\end{aligned}\tag{VI.2.80}$$

复合费米子鬼 Green 函数 $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y)C^b(x)\bar{C}^a(z))|0\rangle$ 及 $\langle 0|T(\phi(x)\phi(y)C^b(y)\bar{C}^a(x))|0\rangle$ 不能用鬼场的运动方程

来简化. 不同于复合鬼胶子顶角,这些 Green 函数不包含一粒子中间态. 这个事实如图 VI.24 所示.

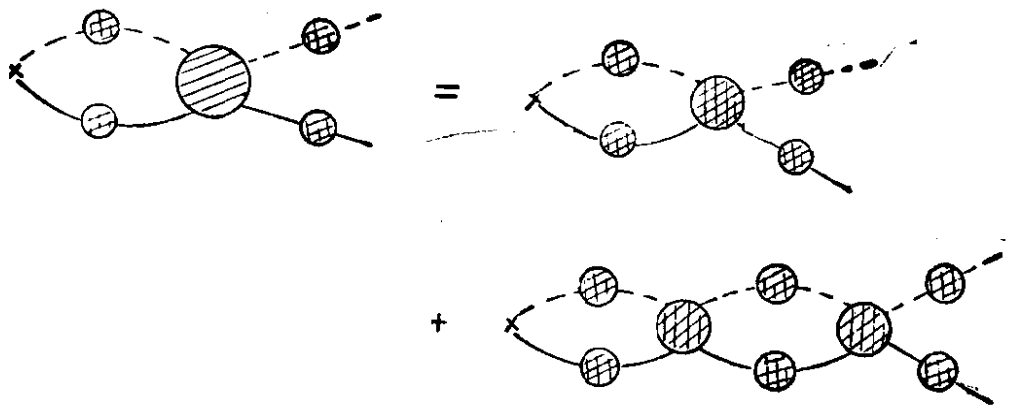


图 VI.24

把出现在方程 (VI.2.80) 中的 Green 函数分解为一粒子不可约化的部分

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial}{\partial z_\mu}\int & d^4w_1 d^4w_2 d^4w_3 (i)^3 \bar{D}_{F\mu}^{aa'\lambda}(z-w_3)\bar{S}_F \\
& \cdot (x-w_1) g\Gamma^{a'}_{\lambda}(w_1,w_2;w_3)\bar{S}_F(w_2-y) \\
& + (i)^3 g\xi \int d^4w_1 d^4w_2 [\gamma_1^{a'}(x,w_1;w_2)\bar{S}_F \\
& \cdot (w_1-y) - \bar{S}_F(x-w_1)\gamma_1^{a'}(w_1,y;w_2)] \\
& \bar{D}_F^{a'a}(w_2-z), \qquad \text{(VI.2.81)}
\end{aligned}
$$

这里 $\Gamma^a_\mu(w_1, w_2; w_3)$ 为 (一粒子不可约的) 费米子费米子胶子顶角, $\gamma_1^a(x, w_1; w_2)$ 为 Green 函数 $T^b\langle 0|T(\phi(x)\phi(w_1)\cdot C^b(x)\bar{C}^a(w_2))|0\rangle$ 的顶角部分,并且 $\gamma_1^a(w_1,y_1;w_2)$ 为 $\langle 0|T\cdot(\phi(w_1)\phi(y)C^b(y)\bar{C}^a(w_2))|0\rangle T^b$ 的顶角部分.注意,在用上述方程对一粒子不可约顶角函数的定义中, 因子 g 析出费米子费米子胶子顶角和复合费米子胶子顶角之外. 在下面划线的变数, 这里分别为 x 和 y, 是复合算符 $\phi(x)C^b(x)$ 及 $\phi(y)C^b(y)$ 的自变量. 取方程 (VI.2.81) 的 Fourier 变换, 把它

放在积分符号

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{i(px-qy-kz)}$$

内，得到

$$k^\mu \bar{D}_{F\mu}^{aa'\lambda}(k)\bar{S}_F(p)\Gamma_{\underline{l}}^{a'}(p,q;k)\bar{S}_F(q)$$
$$+\xi[\gamma_{\underline{l}}^{a'}(p,q;k)\bar{S}_F(q)$$
$$-\bar{S}_F(p)\gamma_{\underline{l}}^{a'}(p,q;k)]\bar{D}_F^{a'a}(k)=0. \quad \text{(VI.2.82)}$$

这里 $p=q+k$，并且下面划线的动量是与复合顶角相联系的动量。

费米子费米子胶子顶角的 Ward-Takahashi 恒等式变为

$$k^\lambda \Gamma_{\underline{l}\lambda}^{a}(p,q;k)[1+\Sigma_g(k^2)]$$
$$=\bar{S}_F^{-1}(p)\gamma_{\underline{l}}^{a}(p,q;k)-\gamma_{\underline{l}}^{a}(p,q;k)\bar{S}_F^{-1}(q). \quad \text{(VI.2.83)}$$

这个恒等式的正确性可以用最低阶表示式加以验证。现在

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y)C^b(x)\bar{C}^a(z))|0\rangle_B$$
$$=\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar{K}^b(x)}\frac{\delta}{\delta K^a(z)}z[\cdots]|_B$$
$$=iS_F(x-y)iD_F^{ba}(x-z), \quad \text{(VI.2.84)}$$

及

$$\langle 0|T(\psi(x)\psi(y)C^b(y)\bar{C}^a(z))|0\rangle$$
$$=\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar{K}^b(y)}\frac{\delta}{\delta K^a(z)}Z[\cdots]|_B$$
$$=iS_F(x-y)iD_F^{ba}(y-z), \quad \text{(VI.2.85)}$$

这里利用了生成泛函方程 (II.3.66)。方程 (VI.2.84) 和 (VI.2.85) 与方程 (VI.2.81) 的相应项的比较给出动量空间内的裸最低阶复合费米子鬼顶角。

$$\gamma_{\underline{l}}^{a}(x,w_1;w_2)_B=T^a\delta^4(x-w_1)\delta^4(x-w_2), \quad \text{(VI.2.86)}$$

$$\gamma_{\underline{l}}^{a}(w_1,y;w_2)_B=T^a\delta^4(y-w_1)\delta^4(y-w_2). \quad \text{(VI.2.87)}$$

因此

$$\gamma_1^a(\underline{p},q;\,k)_B = T^a, \qquad \text{(VI.2.88)}$$

$$\gamma_1^a(p,\,\underline{q};\,k)_B = T^a. \qquad \text{(VI.2.89)}$$

由方程 (VI.2.88) 及 (VI.2.8a) 和

$$\Sigma_g(k^2)_B = 0,$$

可得

$$k^\lambda \Gamma^a_{1\lambda}(p,q;k)_B = T^a(p-q), \qquad \text{(VI.2.90)}$$

上式已由 § II.3 [参看方程 (II.3.72)] 中所推导的费米子费米子胶子的最低阶表示式所预料到.

方程 (VI.2.88) 及 (VI.2.8a) 给出图 VI.25 所描述的复合费米子鬼顶角的 Feynman 规则.

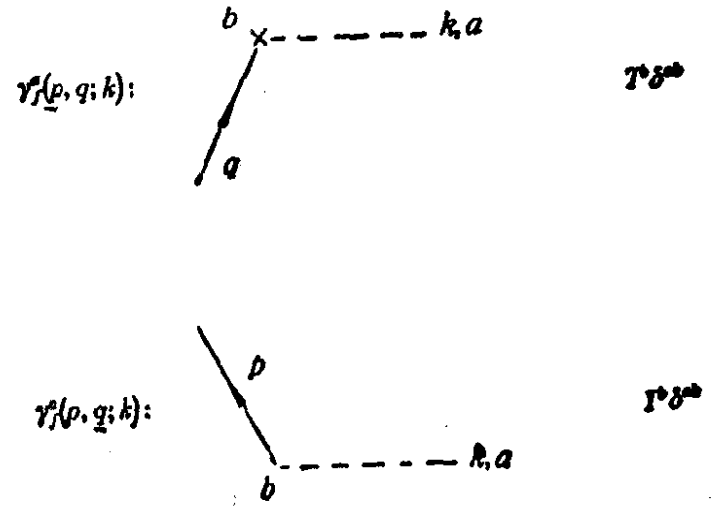
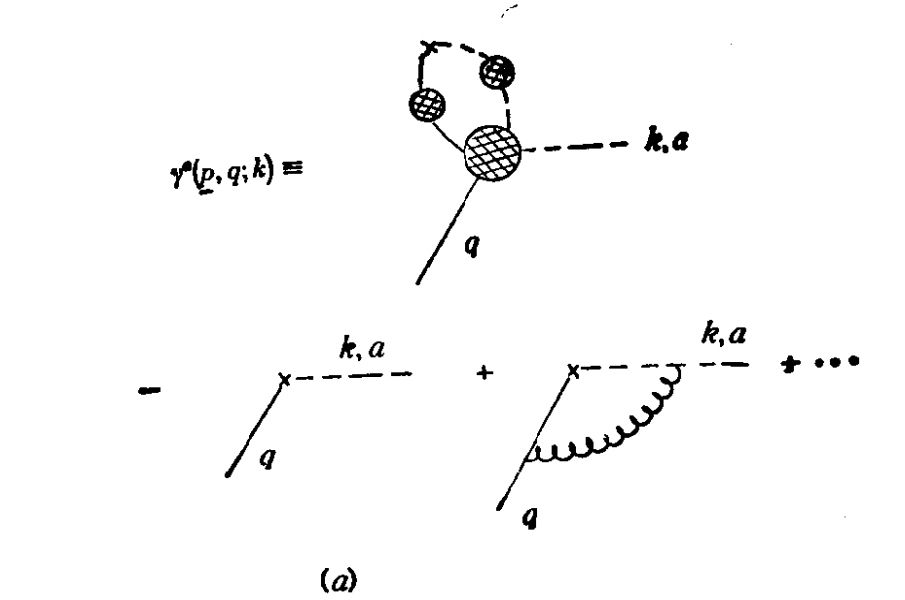


图 VI.25

这两个复合顶角到一圈的微扰展开式如图VI.26 所示.

复合费米子鬼顶角函数是新顶角，而不是出现在有效拉氏函数方程 (VI.2.1) 中的. 因为这些函数只出现在 Ward-Takahashi 恒等式中，故不需要相应的减除. 类似于复合鬼胶子顶角函数，它们一般为对数发散的，但是在 Landau 规范中是有限的. 后一事实的证明也是类似的，要利用胶子传播

子在 Landau 规范中是横向的事实。



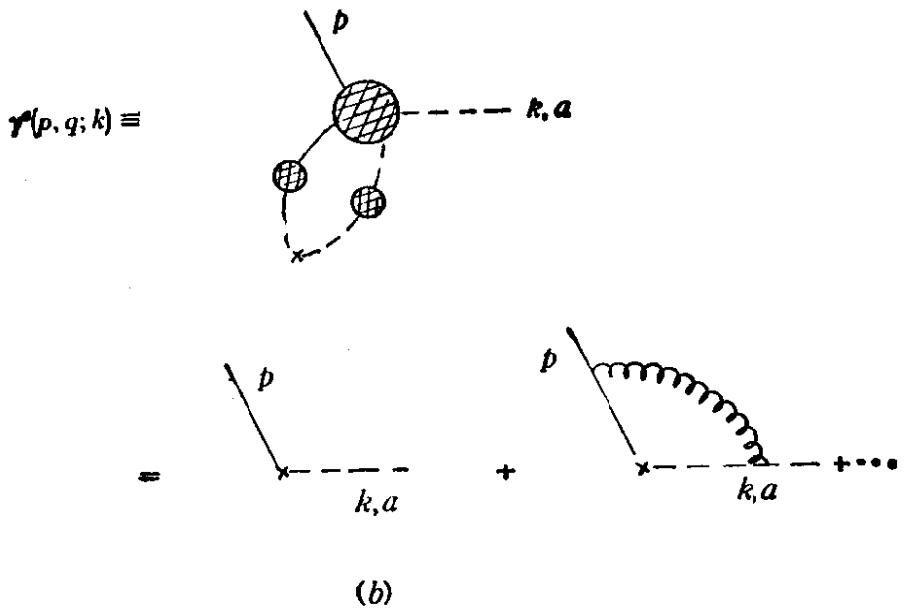


图 VI.26

在 $\gamma_\mu^a(p,q;k)$ 和 $\gamma_\mu^a(p,q;k)$ 之间的关系 这两个复合顶角不是独立的；它们可以通过电荷共轭相联系。下面针对 $SU(n_c)$ 群的基本表示内的费米子场来讨论。费米子带

有方程 (II.3.1) 所解释的三个指标。这里唯一必要的，是表示旋量指标和色指标

$$\varphi_a^i(x),\ \alpha = 1, 2, \cdots, n_c,$$
$$i = 1, 2, 3, 4,$$

此处 α 为色指标，i 为旋量指标。群生成元 T^a，$a = 1, 2, \cdots, n_c^2 - 1$ 的表示为对称矩阵或反对称矩阵：$(n-1)\cdot(n+2)/2$ 是对称的，而 $n(n-1)/2$ 是反对称的。如果一个矩阵是对称的，则称该矩阵有一个对称的指标，否则称它有一个反对称的指标。于是生成元矩阵的转置可以写为 [对 a 并不表示求和]

$$(T^a)^T = \delta(a)T^a, \qquad \text{(VI.2.91)}$$

这里如果 a 是一个对称指标，则 $\delta(a)$ 为+1；而如果 a 是一个反对称指标，则 $\delta(a)$ 为−1，上指标 T 代表转置。

令 C 为电荷共轭算符，玻色子场的变换如下：

$$\mathbf{C}A_\mu^a(x)\mathbf{C}^{-1} = -\delta(a)A_\mu^a(x), \qquad \text{(VI.2.92)}$$
$$\mathbf{C}C^a(x)\mathbf{C}^{-1} = -\delta(a)C^a(x), \qquad \text{(VI.2.93a)}$$
$$\mathbf{C}\bar{C}^a(x)\mathbf{C}^{-1} = -\delta(a)\bar{C}^a(x), \qquad \text{(VI.2.93b)}$$

并且费米子场以传统的方式变换：

$$\mathbf{C}\psi_a^i(x)\mathbf{C}^{-1} = C_{ji}\bar{\psi}_a^i(x), \qquad \text{(VI.2.94a)}$$
$$\mathbf{C}\bar{\psi}_a^i(x)\mathbf{C}^{-1} = -\psi_a^i(x)C_{ij}^{-1}, \qquad \text{(VI.2.94b)}$$

这里 C 为附录 III 中所定义的电荷共轭矩阵。对现在讨论有用的重要性质是

$$C^{-1} = C^T = C^+ = -C, \qquad \text{(VI.2.95)}$$
$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T. \qquad \text{(VI.2.96)}$$

应该注意的另一点是对于不为零的 f^{abc}，它的两个指标是对称的，一个指标是反对称的。这个事实与方程 (VI.2.91)—(VI.2.96) 合起来便能证明量子色动力学的拉氏函数 (VI.2.1) 在电荷共轭下是不变量的。

考虑方程（VI.2.80）的复合顶角，现在两个复合费米子鬼顶角可以联系起来了。第二个可以重写如下：

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y)C^b(y)\bar{C}^a(z))|0\rangle T^b$$
$$=\langle 0|T(\mathbf{C}\psi(x)\bar{\psi}(y)C^b(y)\bar{C}^a(z)\mathbf{C}^{-1})|0\rangle T^b. \tag{VI.2.97}$$

在右边，在算符之间插入一个单位算符 $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$，利用方程（VI.2.93）和（VI.2.94），方程（VI.3.97）变为

$$\delta(a)T^bC\{\langle 0|T(\psi(y)\bar{\psi}(x)C^b(y)\bar{C}^a(z))|0\rangle\}^TC^{-1}, \tag{VI.2.98}$$

这里转置是相对于旋量指标和色指标二者的。对于一粒子不可约化的顶角相应的关系为

$$\gamma_f^a(x,\underline{y};z)=\delta(a)C\{\gamma_f^a(\underline{y},x;z)\}^TC^{-1}. \quad \text{(VI.2.99a)}$$

在动量空间内，这为

$$\gamma_f^a(p,\underline{q};k)=\delta(a)C\{\gamma_f^a(-\underline{q},-p;k)\}^TC^{-1}. \quad \text{(VI.2.99b)}$$

这个表示显然满足方程（VI.3.88）和（VI.3.89）所给出的二顶角的最低阶形式。显然，检验一胶子和二胶子的贡献也满足方程（VI.2.99b），是一目了然的。在下节将利用这个关系来联系二顶角的不变量函数。

四点顶角

（e）胶子四次顶角。

四胶子顶角的 Ward-Takahashi 恒等式的推导是按照生成泛函方程（VI.2.28）相对于 $K^a(x)$，$J_\nu^b(y)$，$J_\lambda^b(x)$ 和 $J_\sigma^d(w)$ 微分的一般方法进行的。这给出

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)A_\lambda^d(z)A_\sigma^c(w)|0\rangle$$
$$=-\xi\langle 0|T(D_\nu^{bb'}(y)C^{b'}(y)\bar{C}^a(x)A_\lambda^d(z)$$
$$\cdot A_\sigma^c(w))|0\rangle-\xi\langle 0|T(D_\lambda^{dd'}(z)C^{d'}(z)$$
$$\cdot\bar{C}^a(x)A_\nu^b(y)A_\sigma^c(w))|0\rangle-\xi\langle 0|T(D_\sigma^{cc}$$

$$\cdot (w)C^{c'}(w)\bar{C}^{a}(x)A_{\nu}^{b}(y)A_{\lambda}^{d}(z))|0\rangle.$$

(VI.2.100)

右边包含鬼场的项可以利用鬼场的运动方程来计算. 方程 (VI.2.36) 相对于 $K^b(y)$, $J_\lambda^c(z)$ 及 $J_\sigma^d(w)$ 微分,于是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|T(D_\mu^{aa'}(x)C^{a'}(x)\bar{C}^{b}(y)A_\lambda^c(z)A_\sigma^d(w))|0\rangle_c = 0.$$

(VI.2.101)

现在方程 (VI.2.100) 对 y_ν, z_λ 和 w_σ 微分, 得到 Ward-Takahashi 恒等式的最后形式为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\frac{\partial}{\partial z_\lambda}\frac{\partial}{\partial w_\sigma}\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)A_\lambda^c(z)$$
$$\cdot A_\sigma^d(w))|0\rangle = 0. \qquad \text{(VI.2.102)}$$

它可以按照方程 (I.3.37) 分解为一粒子不可约顶角函数:

$$\langle 0|T(A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)A_\lambda^c(z)A_\sigma^d(w))|0\rangle$$
$$= (i)^4 g^2 \int d^4w_1 d^4w_2 d^4w_3 d^4w_4 \bar{D}_{F\mu}^{aa'}(x-w_1)$$
$$\cdot \bar{D}_{F\nu}^{bb'\nu'}(y-w_2)\bar{D}_{F\lambda}^{cc'\lambda'}(z-w_3)\bar{D}_{F\sigma}^{dd'\sigma'}$$
$$\cdot (w-w_4)\cdot \Gamma_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'}^{a'b'c'd'}(w_1,w_2,w_3,w_4)$$
$$+ (i)^5 g^2 \int d^4w_1 d^4w_2 d^4w_3 d^4w_4 d^2v_1 d^2v_2$$
$$\cdot \bar{D}_{F\mu}^{aa'\mu'}(x-w_1)\bar{D}_{F\nu}^{bb'\nu'}(y-w_2)\bar{D}_{F\lambda}^{cc'\lambda'}$$
$$\cdot (z-w_3)\bar{D}_{F\sigma}^{dd'\sigma'}(w-w_4)\bar{D}_{F}^{cc'\rho\rho'}(v_1-v_2)$$
$$\cdot \{\Gamma_{\mu'\nu'\rho}^{a'b'c}(w_1,w_2,v_1)\Gamma_{\rho'\lambda'\sigma'}^{c'c'd'}(v_2,w_3,w_4)$$
$$+ \Gamma_{\mu'\lambda'\rho}^{a'c'c}(w_1,w_3,v_1)\Gamma_{\rho'\nu'\sigma'}^{c'b'd'}(v_2,w_2,w_4)$$
$$+ \Gamma_{\mu'\sigma'\rho}^{a'd'c}(w_1,w_4,v_1)\Gamma_{\rho'\nu'\lambda'}^{c'b'c'}(v_2,w_2,w_3)\}.$$

(VI.2.103)

取 Fourier 变换,并把一切动量引进到顶角,于是

$$k_1^\mu k_2^\nu k_3^\lambda k_4^\sigma \Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$
$$= -ik_1^\mu k_2^\nu k_3^\lambda k_4^\sigma\{\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k_1,k_2,k_3+k_4)$$

$$\cdot \bar{D}_F^{ee'\rho\rho'}(k_2+k_4)\Gamma^{e'cd}_{\rho\lambda\sigma}(k_3+k_4,k_3,k_4)$$
$$+\Gamma^{ace}_{\mu\lambda\rho}(k_1,k_3,k_2+k_4)\bar{D}_F^{ee'\rho\rho'}(k_2+k_4)$$
$$\cdot \Gamma^{e'bd}_{\rho'\nu\sigma}(k_2+k_4,k_2,k_4)+\Gamma^{ade}_{\mu\sigma\rho}(k_1,k_4,k_2+k_3)$$
$$\cdot \bar{D}_F^{ee'\rho\rho'}(k_2+k_3)\Gamma^{e'bc}_{\rho'\nu\lambda}(k_2+k_3,k_2,k_3) \tag{VI.2.104}$$

这里

$$k_1+k_2+k_3+k_4=0.$$

利用胶子传播子的显然表示式方程 (VI.2.50) 和恒等式方程 (VI.2.78b),方程 (VI.2.104) 可以写为

$$k_1^\mu k_2^\nu k_3^\lambda k_4^\sigma \Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)=ik_1^\mu k_2^\nu k_3^\lambda k_4^\sigma g^{\rho\rho'}$$
$$\cdot\{\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3+k_4)\Gamma^{ecd}_{\rho'\lambda\sigma}(k_3+k_4,k_3,k_4)/D\cdot(k_3+k_4)$$
$$+\Gamma^{ace}_{\mu\lambda\rho}(k_1,k_3,k_2+k_4)\cdot\Gamma^{ebd}_{\rho'\nu\sigma}(k_2+k_4,k_2,k_4)/D(k_2+k_4)$$
$$+\Gamma^{ade}_{\mu\sigma\rho}(k_1,k_4,k_2+k_3)\Gamma^{ebc}_{\rho'\nu\lambda}(k_2+k_3,k_2,k_3)/D\cdot(k_2+k_3)\} \tag{VI.2.105}$$

这里

$$D(k)\equiv k^2[1+\Pi(k^2)].$$

在最低阶中该恒等式的正确性可以直截了当地利用下面的恒等式来验证:

$$k_1^\mu k_2^\nu \Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)_B=f^{abc}[k_2\cdot k_3 k_{1\mu_3}-k_1\cdot k_3 k_{2\mu_3}],$$

上式是由图 II.2 所给出的 Feynman 规则得到的. 现在方程 (VI.2.105) 的右边为

$$if^{abe}f^{ecd}(k_3+k_4)^{-2}[k_2\cdot(k_3+k_4)k_{1\rho}-k_1$$
$$\cdot(k_3+k_4)k_{2\rho}][k_4\cdot(k_1+k_2)k_3^\sigma-k_3$$
$$\cdot(k_1+k_2)k_4^\sigma]+if^{ace}f^{ebc}(k_1+k_3)^{-2}[k_3$$
$$\cdot(k_2+k_4)k_{1\rho}-k_1\cdot(k_2+k_4)k_{3\rho}][k_4$$
$$\cdot(k_1+k_3)k_2^\sigma-k_2\cdot(k_1+k_3)k_4^\sigma]$$
$$+if^{ade}f^{ebc}(k_1+k_4)^{-2}[k_4\cdot(k_2+k_3)k_{1\rho}$$
$$-k_1(k_2+k_3)k_4^\sigma][k_3\cdot(k_1+k_4)k_2^\sigma-k_2$$

$$\cdot(k_1+k_4)k_3^{\alpha}]=-i\{f^{abe}f^{ecd}[(k_1\cdot k_4)(k_2\cdot k_4)$$
$$-(k_1\cdot k_4)(k_2\cdot k_3)]+f^{ace}f^{ebc}[(k_1\cdot k_2)$$
$$\cdot(k_3\cdot k_4)-(k_1\cdot k_4)(k_2\cdot k_3)]+f^{ade}f^{ebc}$$
$$\cdot[(k_1\cdot k_2)(k_3\cdot k_4)-(k_1\cdot k_3)(k_2\cdot k_4)]\}. \tag{VI.2.106}$$

利用图 II.2 所给出的裸顶角时，这个表示式与方程(VI.2.105)的左端符合一致。这就完成了推广 Ward-Takahashi 恒等式的推导。

VI.3 非阿贝耳规范理论重正化的扼要叙述

在 § VI.1 中所阐述量子电动力学情形重正化程序的一般步骤当然可以应用到非阿贝耳规范场论。然而，由于下面一些原因，论述要比分析量子电动力学复杂得多。

(a) 包含更多的场，因此在一个过程的给定量级中会出现更多的图形。计算的任务变为更加需要。

(b) 然而，在协变规范中对于不同的相互作用形式：费米子费米子胶子，三胶子，鬼鬼胶子和四次胶子耦合，都只有一个耦合常数。任何这些顶角都可以用来定义重正化的耦合常数，并且一个唯一的重正化耦合常数应该导致保证幺正性[8]。这意味着在顶角和波函数重正化常数之间需要有确定的约束。相对比，因为量子电动力学只有一个耦合常数和一个相互作用顶角，并不会引起唯一性的问题。

(c) 在量子电动力学中存在着一个明显的，产生在质壳上的重正化程序，因而使低能 Thomson 散射可以用来作为精细结构常数的测量，与此不同，在非阿贝耳规范理论中，没有明显的重正化点存在。在 § VI.7 将要讨论严重的红外困难，使质壳上的重正化成为靠不住的了。在低能处定义的耦合常

数(如果这样做是可能的)将是如此之大，以致于使整个展开式不再有意义.而且因为非阿贝耳规范理论是渐近自由的[参看 §§ VI.5 和 6]，故有效耦合常数在很大的动量传递处趋近于零;因此无穷大的动量也不能用来作为重正化的减除点.

(d) 在量子电动力学中,精细结构常数是如此之小,以致于使微扰展开式系数的大小通常是无足轻重的. 在量子色动力学中,描述强相互作用的精细结构常数 $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ 在几十个 GeV 能量范围内为量级 0.1 到 0.2. 因此，为使展开式级数"迅速"收敛，从而可以利用低阶的计算使理论的预言与数据[29,30]相比较,减除程序的合理选取是重要的.

为了透澈了解上述的复杂性，在线性协变规范中量子色动力学的有效拉氏函数重写如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff}} &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 \\ &\quad - \partial^\mu \bar{C}^a \partial_\mu C^a - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + g\bar{\psi} A\!\!\!/^a T^a \psi \\ &\quad - \frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{b\mu} A^{c\nu} \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ab'c'} A^b_\mu A^c_\nu A^{b'\mu} A^{c'\nu} + g f^{abc} \partial^\mu \bar{C}^a C^b A^c_\mu .\end{aligned} \tag{VI.3.1}$$

第一行包含自由部分和规范固定项; 其余为四相互作用项. 类似于 § VI.1 所讨论的量子电动力学情形 [特别是方程 (VI.1.3)]，重正化的场,质量,和耦合常数定义为

$$\psi = \sqrt{Z_2}\,\psi_R,\ \bar{\psi} = \sqrt{Z_2}\,\bar{\psi}_R,$$

$$A^a_\mu = \sqrt{Z_3}\,A^a_{\mu R},$$

$$C^a = \sqrt{\hat{Z}_3}\,C^a_R,\ \ \bar{C}^a = \sqrt{\hat{Z}_3}\,\bar{C}^a_R,$$

$$\xi = \sqrt{Z_3}\,\xi_R,$$

$$m = Z_m m_R, \qquad \text{(VI.3.2)}$$

这里下指标 R 代表重正化的量. 注意，这里的费米子质量是相乘重正化的. 分别对费米子费米子胶子，三胶子，鬼鬼胶子，和四次顶角也可以定义四个重正化常数: Z_1^f, Z_1^G, $\hat{Z}_1$ 和 Z_4. 类似于量子电动力学情形的式 (VI.1.4)，有效拉氏函数 (VI.3.1) 可以重写为两种形式:

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = Z_2\psi_R(i\partial\!\!\!/ - Z_m m_R)\psi_R - \frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A^a_{R\nu}$$

$$- \partial_\nu A^a_{R\mu})^2 - \hat{Z}_3\partial^\mu\bar{a}^a\partial_\mu C^a - \frac{1}{2\xi_R}(\partial^\mu A^a_{R\mu})^2$$

$$+ gE_2\sqrt{Z_3}\,\bar{\psi}_R A^a_R T^a \psi_R - \frac{1}{2}g(Z_3)^{3/2}f^{abc}(\partial_\mu A^a_{R\nu}$$

$$- \partial_\nu A^a_{R\mu})A^{b\mu}_R A^{c\nu}_R - \frac{1}{4}g^2(Z_3)^2 f^{abc}f^{ab'c'}A^b_{R\mu}A^c_{R\nu}$$

$$\cdot A^{b'\mu}_R A^{c'\nu}_R + g\hat{Z}_3\sqrt{Z_3}\,f^{abc}\partial^\mu\bar{C}^a_R C^b_R A^c_{R\mu}, \qquad \text{(VI.3.3)}$$

及

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = Z_2\bar{\psi}_R(i\partial\!\!\!/ - Z_m m_R)\psi_R$$

$$- \frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})^2 - \hat{Z}_3\partial^\mu\bar{C}^a\partial_\mu C^a$$

$$- \frac{1}{2\xi_R}(\partial^\mu A^a_{R\mu})^2 + g_R Z_1^f\bar{\psi}_R A^a_R T^a\psi_R$$

$$- \frac{1}{2}g_R Z_1^G f^{abc}(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})A^{b\mu}_R A^{c\nu}_R$$

$$- \frac{1}{4}g_R^2 Z_4 f^{abc}f^{ab'c'}A^b_{R\mu}A^c_{R\nu}A^{b'\mu}_R A^{c'\nu}_R$$

$$+ g_R\hat{Z}_1 f^{abc}\partial^\mu\bar{C}^a_R C^b_R A^c_{R\mu}. \qquad \text{(VI.3.4)}$$

比较两种形式(方程 (VI.3.3) 和方程 (VI.3.4) 的相互作用给出

$$g_R = (Z_1^f)^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\,g = (Z_1^G)^{-1}(Z_3)^{\frac{3}{2}}g$$

$$= \hat{Z}_1^{-1}\hat{Z}_3\sqrt{Z_3}\,g, \qquad \text{(VI.3.5a)}$$

及

$$g_R^2 = Z_4^{-1}(Z_3)^2 g^2. \qquad \text{(VI.3.5b)}$$

于是，在重正化常数之间，下面的关系成立：

$$Z_1/Z_2 = Z_1^G/Z_3 = \hat{Z}_1/\hat{Z}_3, \qquad \text{(VI.3.6a)}$$

$$Z_4 = (Z_1^G)^2/Z_3. \qquad \text{(VI.3.6b)}$$

应该注意，所得到的方程（VI.3.5a）及（VI.3.5b），方程（VI.3.6a）及（VI.3.6b）就是按照方程（VI.3.3）和（VI.3.4）定义的．这些方程显然在树图水平是真实的．但是要求这些方程在微扰展开式中对于所有阶也是真实的．如本节将要说明的，这后一要求得通过推广的 Ward-Takahashi 恒等式来实现．在本节往后将会看到，重正化常数的实际表示与如何进行重正化有关；因此它们是任意的．然而任意性只表现在有限部分．重正化的发散部分，例如，在维数正规化方案中定义 ε 极点项，完全由理论的结构来确定．

由于缺乏明显的重正化点，为了减除紫外发散性，文献提供不同的程序，这些程序主要分为三个范畴：

（1）欧氏动量空间减除[29,30]　这个程序简称为动量空间减除，选取重正化点，使一切外动量取欧氏值；即，外动量的平方为负的：$p^2 = -M^2$，这里 p 为外动量，M 为质量的值．对于最一般的情况，对于不同的外动量 M 的值是不同的．但是，对其中所涉及到的外动量，相应质量值相等的特殊情况是最方便的．这个减除程序有下面的优点：（a）在重正化过程中避免了红外困难．（b）在减除后，顶角函数和重正化常数的有限部分明确地被确定．这个方案通常称为“物理的”减除方案．然而，在此情形下甚至于在一圈情形中计算的任务是很需要的[30]．而且，为使等式方程（VI.3.6a）及（VI.3.6b）与前节讨论的推广 Ward-Takahashi 恒等式符合一致，必须要以

特殊的方式来定义重正化常数．否则在推广的 Ward-Takahashi 恒等式和要求存在一个唯一的重正化常数之间有矛盾．在本节以后这是会弄清楚的：

(2) "在质壳上"的减除[12,18] 减除取在胶子和鬼有零动量，费米子在它们的"质壳上"的点处．当然，由于红外奇点堆集在阈值处，这实际上不是一个能存活的方案．然而，这个方案有某种合乎要求的性质，其中由推广 Ward-Takahashi 恒等式相联系的重正化常数自动满足方程 (VI.3.6a) 及 (VI.3.6b)，并且可以用来作为一个说明怎样实现减除的模型．

(3) 极小减除[31] 在这个程序中重正化常数只包含发散部分，即维数正规化方法的 ε 极点项．因此，设计这些项是用于只消去未重正化顶角函数的发散部分．这得到重正化顶角中的不确定性与空时维数如何解析延拓有关，要从物理的 4，取到一般的值 n，并再回到物理的值．在 § IV.3 中已讨论了这种类型的不确定性．例如，项 $\gamma-\ln(4\pi)$，它出现在第 V 章所讨论的量子电动力学的未重正化量中，来源于所进行的特殊解析延拓的方式．在那里所用的减除方法，即，质壳上的减除，使这些项只出现在重正化常数中，而不出现在重正化的 Green 函数中．但是这样的不确定性将出现在极小减除方案的重正化的量中．因此，这个方法通常称为"非物理的"．现在有不同的方法，称为改进的，或修正的极小减除程序，其中类如 $\gamma-\ln(4\pi)$ 乱真的项被删去了．

在下面将认证顶角和传播子的一圈图，并利用它们的 Lorentz 结构和群结构，把顶角函数分解为不变量函数的求和．接着讨论减除方案 (1) 和 (2)，然而讨论极小减除方案将延到下节．不作 Feynman 图形的显式计算，但将利用文献中所存在的一圈结果作为示例．

为了实现微扰展开式，方程 (VI.3.4) 以下面的方式重写

为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \tilde{\mathscr{L}}_0 + \tilde{\mathscr{L}}_I + \tilde{\mathscr{L}}_C \qquad \text{(VI.3.7)}$$

这里 $\tilde{\mathscr{L}}_0$, $\tilde{\mathscr{L}}_I$ 和 $\tilde{\mathscr{L}}_C$ 分别为自由部分，相互作用部分，和抵消项；它们定义如下：

$$\tilde{\mathscr{L}}_0 = \bar{\psi}_R(i\partial\!\!\!/ - m_R) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})^2$$

$$- \partial^\mu \bar{C}^a_R \partial_\mu C^a_R - \frac{1}{2\xi_R}(\partial^\mu A^a_{R\mu})^2, \qquad \text{(VI.3.8a)}$$

$$\tilde{\mathscr{L}}_I = g_R \bar{\psi}_R A^a_R T^a \psi_R - \frac{1}{2} g_R f^{abc}(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu}) A^b_{R\mu} A^c_{R\nu}$$

$$- \frac{1}{4} g_R^2 f^{abc} f^{ab'c'} A^b_{R\mu} A^c_{R\nu} A^{b'\mu}_R A^{c'\nu}_R$$

$$+ g_R f^{abc} \partial^\mu \bar{C}^a_R C^b_R A^a_{R\mu}, \qquad \text{(VI.3.8b)}$$

$$\tilde{\mathscr{L}}_C = (Z_2 - 1)\bar{\psi}_R(i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi_R - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)$$

$$\cdot (\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})^2 - (\hat{Z}_3 - 1)\partial^\mu \bar{C}^a_R \partial_\mu C^a_R$$

$$- g_R(Z_1' - 1)\bar{\psi}_R A^a_R T^a \psi_R - \frac{1}{2} g_R(Z_1^G - 1)$$

$$\cdot f^{abc}(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\nu}) A^{b\mu}_R A^{c\nu}_R$$

$$- \frac{1}{4}(Z_4 - 1) f^{abc} f^{ab'c'} A^b_{R\mu} A^c_{R\nu} A^{b'\mu}_R A^{c'\nu}_R$$

$$+ g_R(\hat{Z}_1 - 1) f^{abc} \partial^\mu \bar{C}^a_R C^b_R A^c_{R\mu} + Z_2 \delta_m \bar{\psi}_R \psi_R, \qquad \text{(VI.3.8c)}$$

及

$$\delta_m = m_R - m = (1 - Z_m) m_R. \qquad \text{(VI.3.8d)}$$

注意，在上面，空时维数解析延拓到任意的数目 n、量 μ 为质量标度，并且 $\varepsilon = (4-n)/2$ 使重正化耦合常数 g_R 保持为无量纲的.

在一般 n 维中，在裸常数与重正化常数之间的关系方程

(VI.3.5a) 和 (VI.3.5b)，要考虑到裸耦合常数在一般 n 维中不是无量纲的事实，来加以修正：

$$g_R\mu^\varepsilon = (Z_1^f)^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\,g = (Z_1^G)^{-1}(Z_3)^{3/2}g$$
$$= (\hat{Z}_1)^{-1}\hat{Z}_3\sqrt{Z_3}\,g, \qquad \text{(VI.3.9a)}$$

及

$$g_R^2\mu^{2\varepsilon} = (Z_4)^{-1}(Z_3)^3g^2. \qquad \text{(VI.3.9b)}$$

该拉氏函数的 Feynman 规则类似于图 II.2 所给出的规则，不过要用重正化耦合常数乘以适当的维数因子，即 $g_R\mu^\varepsilon$，来代替裸耦合常数，并且用重正化的费米子质量代替裸费米子质量。与减除程序有关，重正化费米子质量不一定有物理上测量的费米子质量的直接意义。除这些规则以外，来源于方程 (VI.3.8c) 的抵消项的规则列举在图 VI.27 中，这里 $\gamma^{abc}(\cdots)_B$ 和 $\gamma^{abcd}(\cdots)_B$ 分别为图 II.2 所给出的三胶子顶角和胶子四次顶角。关于这些规则的简要注释为

(a) $(Z_2-1)\bar{\psi}_R(i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi_R$ — $i(Z_2-1)(p\!\!\!/ - m_R)$

(b) $Z_2\delta m\bar{\psi}_R\psi_R$ — $iZ_2\delta m$

(c) $-\frac{1}{4}(Z_3-1)(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})^2$ — $i\delta^{ab}(Z_3-1)(k_\mu k_\nu - k^2g_{\mu\nu})$

(d) $-(\hat{Z}_3-1)\partial^\mu\bar{C}^a_R\partial_\mu C^a_R$ — $-i(\hat{Z}_3-1)q^2\delta^{ab}$

(e) $g(Z_2^f-1)\bar{\psi}_R A^a_R T^a\psi_R$ — $ig_R(Z_1^f-1)\partial_\mu T^a$

(f) $-\frac{1}{2}g_R(Z_1^G-1)f^{abc}(\partial_\mu A^a_{R\nu} - \partial_\nu A^a_{R\mu})A^{b\mu}_R A^{c\nu}_C$ — $(Z_1^G-1)\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(\cdots)_B$

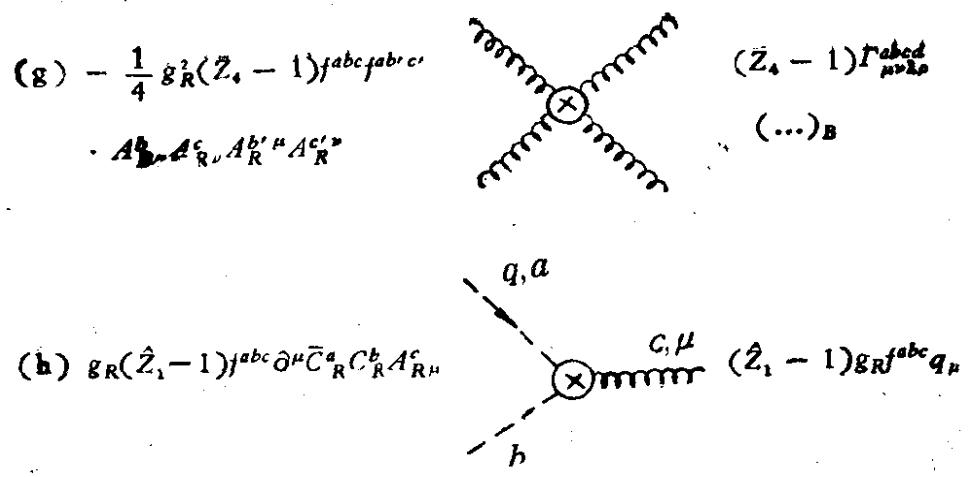


图 VI.27

所得到图 VI.27 是有用的. 利用 § II.3 所用的方法可以推导出这些规则. 然而,简单的记忆术是更有用的.

(a) 每个项与一个因子 i 相联系.

(b) 对于入射的 A^a, ϕ, C^a 或 $\bar{C}^a$ 的导数有一个因子 $-ip$ 相联系,这里 p 为入射动量.

(c) 因子 δ_{ab} 与 $\bar{C}^aC^b$ 或 A^aA^b 相联系. 成对的 $\bar{C}^aC^b$ 或 A^aA^b 也引起一个因子 $2g_{\mu\nu}$,这里因子 2 是由于全同粒子.

(d) 包含多于一次导数的项可以利用分部积分重写, 例如 $-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{R\nu}-\partial_\nu A^a_{R\mu})^2 \to \frac{1}{2}A^a_{R\mu}(g^{\mu\nu}\partial^\lambda\partial_\lambda-\partial^\mu\partial^\nu)A^a_{R\nu}$, 并且把规则 (a)—(c) 应用于重写的表示式.

以逐阶形式实现的紫外发散性的减除已在 § VI.1 中讨论了. 在下面扼要重述程序的要点, 特别强调与现在讨论有关的部分: 从裸拉氏函数 (VI.3.1) 出发, 利用图 II.2 所给出的 Feynman 规则来计算传播子,三点和四点顶角函数的一圈贡献. 把正比于 g^2 的紫外发散性孤立起来, 并在适当的重正化点概括为不同的重正化常数. 耦合常数, 费米子质量, 和不同的场在第二阶中根据方程 (VI.3.2) 和 (VI.3.5) 进行重正

化．然后把重正化的量代入方程（VI.3.4）中，该方程形成二圈计算的基础．注意，当并入适当的抵消项时，传播子和顶角函数的所有一圈量级的结果都是有限的．非平凡的最低阶计算可以对二圈情形重复进行，现在正比于 g^4 的紫外发散性仍被吸收到重正化常数中，并且被减除项消去了．这个程序要对任何阶重复进行．

这种逐阶重正化的程序给出紫外发散性的运动学结构的清楚表示．因为在方程（VI.3.8c）中所给出的减除项是类似于它们的张量结构中相应的裸项，g^4 阶发散性如同它们的 g^2 阶前辈一样成立，必须有最低阶的，即裸顶角函数的相同的运动学结构．这对微扰展开式的任意阶都是真实的．由这个考虑，可以得到维数正规化方案中的 ε 极点项，等同于一个裸顶角，至多差到一个相乘的常数．

下面详细讨论表面发散的顶角．在进行顶角函数的不变量函数分解以后，将引入抵消项来说明重正化常数怎样消去紫外发散性．

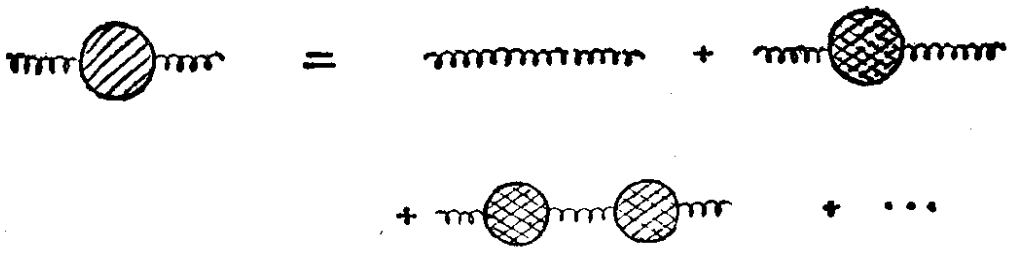
（A）胶子传播子 $\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k)$．

全胶子传播子在图形上可以表示为图 VI.28(a)，这里交叉的阴影区表示一粒子不可约化的部分，第二阶贡献明显地在图 VI.28(b) 中给出，该图形代表胶子二点函数唯一的骨架图形．裸传播子和全传播子为

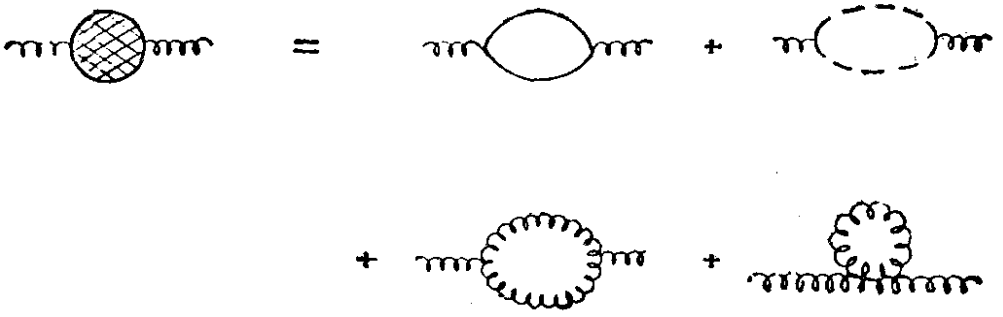
$$i\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k) = -\frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{1+\underline{\Pi}(k^2)} + \xi_R\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right], \tag{VI.3.10a}$$

及

$$iD^{ab}_{F\mu\nu}(k) = -\frac{i\delta^{ab}}{k^2}\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\xi_R\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right], \tag{VI.3.10b}$$



(a)



(b)

图 VI.28

这里方程 (VI.3.10a) 在前节中已推导出来了；参看方程 (VI.2.50)。注意，胶子传播子的纵向部分并不是重正化的，因而

$$k^\mu\{\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k) - D^{ab}_{F\mu\nu}(k)\} = 0, \qquad \text{(VI.3.11)}$$

这里 $D^{ab}_{F\mu\nu}(k)$ 代表胶子的自由传播子。胶子谱函数 $\underline{\Pi}(k^2)$ 是由一粒子不可约化部分得到的，因而图 VI.28(b) 的振幅为

$$i\delta^{ab}(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})\underline{\Pi}(k^2). \qquad \text{(VI.3.12)}$$

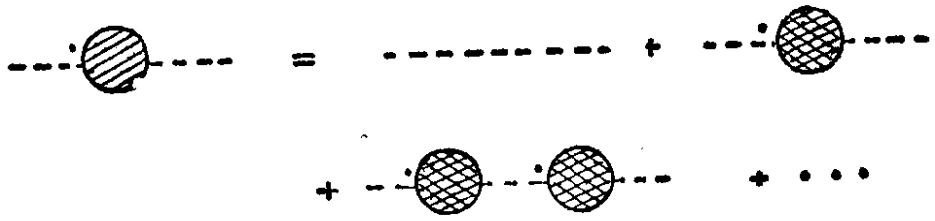
为使胶子传播子重正化，在图 VI.27(c) 中所给出的抵消项要添加到方程 (VI.3.12) 中。在第二阶中写为

$$i\delta^{ab}(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\{\underline{\Pi}^{(1)}(k^2) + (Z_3 - 1)\}, \text{(VI.3.13)}$$

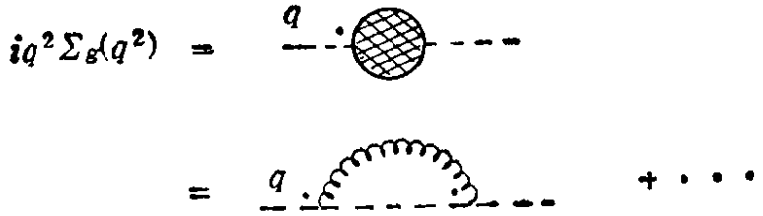
它必须是有限的.因而 Z_3 至少必然要消去$\Pi(k^2)$的紫外部分.

(B) 鬼传播子.

全鬼传播子在图 VI.29(a) 中描述. 一圈的贡献在图 VI.29(b) 中给出.



(a)



(b)

图 VI.29

如式 (VI.2.51) 所示,全传播子可以写为

$$i\bar{D}_F^{ab}(q) = \frac{-i\delta^{ab}}{q^2[1+\Sigma_g(q^2)]} \qquad \text{(VI.3.14a)}$$

而裸传播子为

$$iD_F^{ab}(q) = \frac{-i\delta^{ab}}{q^2}. \qquad \text{(VI.3.14b)}$$

鬼谱函数 $\Sigma_g(q^2)$ 用图 VI.29 的交叉阴影区来表示. 全鬼传播子的形式保证鬼在重正化以后仍然保持为无质量的.

由于包含图 VI.27(d) 所给出的抵消项,第二阶的贡献变为

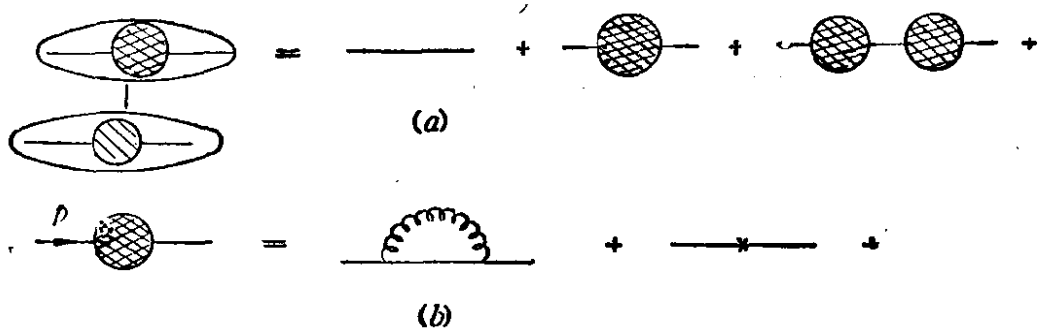
$$i\delta^{ab}q^2[\Sigma^{(1)}_g(q^2)+(\hat{Z}_3-1)], \qquad \text{(VI.3.15)}$$

它是紫外有限的.

(C) 费米子传播子.

全费米子传播子在图 VI.30(a) 中描述，并且不可约化部分的最低阶贡献如图 VI.30(b) 所示，该贡献用两个不变量函数来表示：

$$i[\not{p}\Sigma_f(p^2) - m_R A(p^2) + Z_2\delta m], \qquad \text{(VI.3.16)}$$



(a)

(b)

图 VI.30

由维数计数和 Lorentz 不变性得到，这里 $\Sigma_f(p^2)$ 及 $A(p^2)$ 是无量纲的. 利用一粒子不可约化部分 [图 VI.30(b)] 的表示式方程 (VI.3.16)，全费米子传播子可以写为

$$i\bar{S}_F(p) = \{\ i\ \}/\{\not{p}[1 + \Sigma_f(p^2)] - m_R[1 + A(p^2)] + Z_2\delta m\}, \qquad \text{(VI.3.17a)}$$

这里自由传播子形式在图 II.2 中给出：

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m_R}. \qquad \text{(VI.3.17b)}$$

应该提到，在写出方程 (VI.3.17) 或等价的方程 (VI.3.16) 中，曾假定费米子传播子在色和味空间内是对角的. 这是由真空在色和味群变换下为不变量的事实得到的. 下面利用色变换作为例子来说明. 令 $U(\Omega)$ 为方程 (II.3.9) 所给出的 $SU(n_c)$ 色空间的无限小转动. 因为真空在该变换下为不变量

$$U(\Omega)|0\rangle = |0\rangle, \qquad \text{(VI.3.18)}$$

费米子二点函数可以写为

$$\begin{aligned}&\langle 0|u(\Omega)^{-1}U(\Omega)T(\phi(x)\bar{\phi}(y))U(\Omega)^{-1}U(\Omega)|0\rangle\\&\quad=\langle 0|T([U(\Omega)\phi(x)U(\Omega)^{-1}]\\&\qquad\cdot[U(\Omega)\bar{\phi}(y)U(\Omega)^{-1}])|0\rangle\\&\quad=\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y))|0\rangle.\end{aligned}\tag{VI.3.19}$$

按照方程 (II.3.9),为

$$\begin{aligned}0&=\langle 0|T(\delta\phi(x)\bar{\phi}(y)|0\rangle\\&\quad+\langle 0|T(\phi(x)\delta\bar{\phi}(y))|0\rangle\\&=i\varepsilon^a[\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y))|0\rangle,T^a].\end{aligned}\tag{VI.3.20}$$

费米子二点函数在 $SU(n_c)$ 色空间内为 $n\times n$ 矩阵,一般可以写为

$$\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(0))|0\rangle=F_1(x)+F_2^b(x)T^b,\tag{VI.3.21}$$

这里 $F_1(x)$ 和 $F_2^b(x)$, $b=1,2,\cdots,n_c^2-1$, 为旋量函数. 把方程 (VI.3.21) 代入方程 (VI.3.20), 对 ε^a 的无限小的但是任意的值,得到

$$0=-i\varepsilon^a[T^a,T^b]F_2^b(x)=f^{abc}T^c\varepsilon^aF_2^b(x).\tag{VI.3.22}$$

因为 T^a, $a=1,2,\cdots,n_c^2-1$, 为线性无关的,只有当

$$F_2^b(x)=0$$

时,方程 (VI.3.22)才满足. 这就完成了所需要的证明.

费米子传播子的重正化可以由检验第二阶的贡献, 包括图 VI.27 (a) 及 (b),所示的抵消项及方程 (VI.3.16), 得到

$$\begin{aligned}&i[\not{p}\Sigma^{(1)}_f(p^2)-m_RA^{(1)}(p^2)]+i(Z_2-1)(\not{p}-m)\\&\quad+i\delta m=i(\not{p}-m)[\Sigma^{(1)}_f(p^2)+(Z_2-1)]\\&\quad+i\{[\Sigma^{(1)}_f(p^2)-A^{(1)}(p^2)]m_R+Z_2\delta m\}.\end{aligned}\tag{VI.3.23}$$

进行重正化是要消去紫外发散性. 这容许定义 Z_2 和 Z_m.

(D) 三胶子顶角 $\bar{\Gamma}^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)$.

三胶子顶角到 g_R^3 阶的贡献在图 VI.31 中给出. 在定义顶角函数中[参看方程 (VI.3.25) 下面],析出耦合常数的幂关

一个因子，使顶角函数为耦合常数的偶函数. 由 Lorentz 协变性和推广的玻色对称性可以构成该顶角函数的一般形式，该对称性包含群指标 a_1，a_2 和 a_3，Lorentz 指标 μ_1，μ_2 和 μ_3 及两个线性无关的动量，比如，k_1 和 k_2. 不变量乘积包含 k_1^2，k_2^2 及 k_3^2.

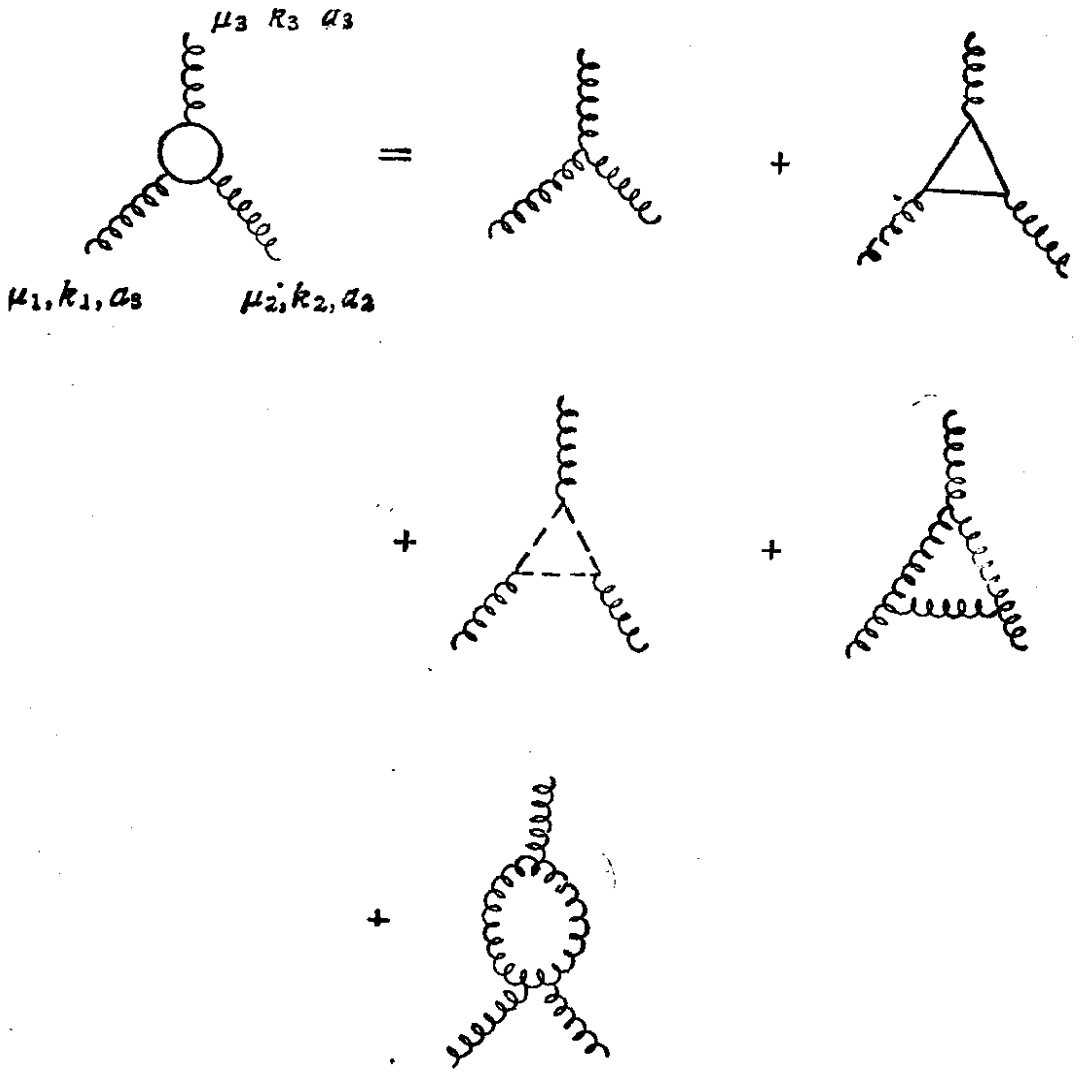


图 VI.31

群指标，顶角函数必须要正比于结构常数 $f^{a_1a_2a_3}$ 和 d 系数 $d^{a_1a_2a_3}$ 之和，每个要乘以动量的函数. d 系数相对于任何二群指标的交换是对称的，并且用群生成元 T^a 的反对易关系来定义：

$$\{T^a, T^b\} = T^aT^b + T^bT^a$$
$$= \beta\delta^{ab}1 + d^{abc}T^c, \qquad \text{(VI.3.24)}$$

这里 β 为常数，1 为单位矩阵. β 和 d^{abc} 都与表示有关. 关于 d 系数更多的讨论和包含 d 系数及 f 系数的恒等式，参看附录 III[32].

由于推广的玻色对称性，$f^{a_1a_2a_3}$ 的系数函数相对于动量和 Lorentz 指标任何两对的交换必须是反对称的:

$$(k_i, \mu_i) \longleftrightarrow (k_j, \mu_j), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$d^{a_1a_2a_3}$ 的系数函数在这个变换下必须是对称的. Yang 定理[33] 表明一个自旋 1 粒子并不与二光子相耦合，在这里可以应用，并且导致的结论是，当任何二胶子在“质壳上”时，即，$k_i^2 = k_j^2 = 0$，$i, j = 1, 2, 3$，对称不变量函数在这里是不容许的. 因此 d 类型项无根据；三胶子顶角正比于 $f^{a_1a_2a_3}$.

现在的任务是要构成有三个 Lorentz 指标的反对称函数. 有由 $g_{\mu\nu}$，$k_{1\mu}$ 和 $k_{2\mu}$ 可能构成的秩 3 的 14 个独立张量. 为了更好地显示出对称性质，将利用所有的三个动量. 结果为

$$\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)$$
$$= f^{a_1a_2a_3}\{g_{\mu_1\mu_2}[A_{121}k_{1\mu_3} + A_{122}k_{2\mu_3}]$$
$$+ g_{\mu_2\mu_3}[A_{232}k_{2\mu_1} + A_{233}k_{3\mu_1}]$$
$$+ g_{\mu_3\mu_1}[A_{313}k_{3\mu_2} + A_{311}k_{1\mu_2}]$$
$$+ k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}[B_{211}k_{1\mu_3} + B_{212}k_{2\mu_3}]$$
$$+ k_{3\mu_2}k_{2\mu_3}[B_{322}k_{2\mu_1} + B_{323}k_{3\mu_1}]$$
$$+ k_{1\mu_3}k_{3\mu_1}[B_{133}k_{3\mu_2} + B_{131}k_{1\mu_2}]$$
$$+ C_{231}k_{2\mu_1}k_{3\mu_2}k_{1\mu_3} - C_{312}k_{3\mu_1}k_{1\mu_2}k_{2\mu_3}\}, \qquad \text{(VI.3.25)}$$

这里 A_{121}，B_{211}，C_{231}，等等，在该量级中为 k_1^2，k_2^2 和 k_3^2 的不变量函数. 所有的 A 函数有量级 $1 + O(g_R^2)$，这里 $O(g_R^2)$ 项来自于裸顶角的贡献；B 和 C 函数量级为 $O(g_R^2)$，

$$A_{121} \equiv A_{121}(k_1^2, k_2^2, k_3^2), \text{等等}$$

及

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

当利用玻色对称性时，使方程（VI.3.25）在二胶子同时交换时，即

$$(k_i, \mu_i, a_i) \longleftrightarrow (k_j, \mu_j, a_j), i, j = 1, 2, 3.$$

为不变的，这样 14 个不变量函数减到三个函数. 于是方程（VI.3.25）约化为下面的形式：

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{a_1 a_2 a_3}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(k_1, k_2, k_3) \\
&= f^{a_1 a_2 a_3}\{ g_{\mu_1\mu_2}[A_1(123)k_{1\mu_3} - A(213)k_{2\mu_3}] \\
&\quad + g_{\mu_2\mu_3}[A_1(231)k_{2\mu_1} - A_1(321)k_{3\mu_1}] \\
&\quad + g_{\mu_3\mu_1}[A_1(312)k_{3\mu_2} - A_1(132)k_{1\mu_2}] \\
&\quad + k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}[A_2(123)k_{1\mu_3} - A_2(213)k_{2\mu_3}] \\
&\quad + k_{1\mu_3}k_{3\mu_1}[A_2(312)k_{3\mu_2} - A_2(132)k_{1\mu_2}] \\
&\quad + k_{3\mu_2}k_{2\mu_3}[A_2(231)k_{2\mu_1} - A_2(321)k_{3\mu_1}] \\
&\quad + A_3(123)k_{2\mu_1}k_{3\mu_2}k_{1\mu_3} - A_3(213)k_{3\mu_1}k_{1\mu_2}k_{2\mu_3}\},
\end{aligned} \tag{VI.3.26}$$

这里

$$A_j(123) \equiv A_j(k_1, k_2, k_3), j = 1, 2, 3,$$

并且 A_3 在它的自变量循环排列时不变：

$$\begin{aligned}
&A_3(123) = A_3(231) = A_3(312), \\
&A_3(213) = A_3(132) = A_3(321).
\end{aligned} \tag{VI.3.27}$$

清楚地看到，对图 VI.31 所示的三胶子顶角的最低阶修正，只有 A_1 函数是紫外发散的. 三胶子顶角函数的质量维数为 1. 因为 A_1 是无量纲的，所以它可能包含对数发散性. 函数 A_2 和 A_3 有质量平方倒数的量纲；因此函数 A_2 和 A_3 用收敛的 Feynman 积分来表示. 事实上，这些一迴路量级的结果对所有的量级都成立.

把图 VI.27(f) 的抵消项加到方程(VI.3.25)中，得到了有限的结果，便实现了重正化；对于第二阶的贡献为

$$\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)+(Z_1^G-1)\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)_B,\quad\text{(VI.3.28)}$$

这里裸顶角的表示式在图 II.2 中给出，并且重写为下面的形式：

$$\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)_B=f^{a_1a_2a_3}\{g_{\mu_1\mu_2}(k_1-k_2)_{\mu_3}+g_{\mu_2\mu_3}(k_2-k_3)_{\mu_1}+g_{\mu_3\mu_1}(k_3-k_1)_{\mu_2}\}.\quad\text{(VI.3.29)}$$

方程 (VI.3.28) 又一次表明，只有 A_1 函数是对数发散的，与上面的一般考虑一致。

(E) 鬼鬼胶子顶角 $\Gamma^{abc}_{\mu}(p,q;k)$.

鬼鬼胶子顶角的微扰展开式表示在图 VI.32 中，这里与一个鬼传播子相联系的一圆点表示的事实是，一个动量因子呈现在相应的顶角处[参看图 II.2] 这个动量在下面划线，如下所示。

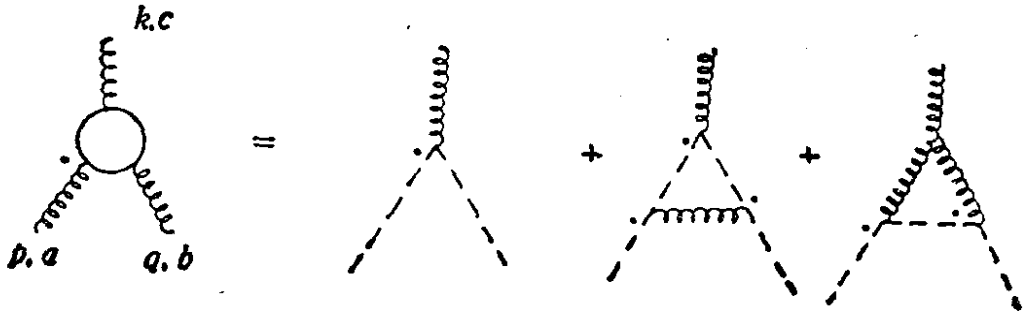


图 VI.32

按照方程 (VI.2.70)，可以写出

$$\Gamma^{abc}_{\mu}(p,q;k)=p^{\lambda}\gamma^{abc}_{\lambda\mu}(\underline{p},q;k).\quad\text{(VI.3.30)}$$

复合顶角函数 $\gamma^{abc}_{\lambda\mu}(\underline{p},q;k)$ 有下面的分解：

$$\gamma^{abc}_{\lambda\mu}(\underline{p},q;k)=f^{abc}\{g_{\lambda\mu}B_1+B_{11}p_{\lambda}p_{\mu}+B_{12}p_{\lambda}q_{\mu}+B_{21}q_{\lambda}p_{\mu}+B_{22}q_{\lambda}q_{\mu}\},\quad\text{(VI.3.31)}$$

这里 $B_1, B_{11}, \cdots, B_{22}$ 为所含动量的不变函数，即

$$B_1 \equiv B_1(p^2, q^2, k^2),$$
$$B_{11} \equiv B_{11}(p^2, q^2, k^2), \qquad \text{(VI.3.32)}$$

及

$$p + q + k = 0.$$

鬼鬼胶子顶角现在可以写为

$$\Gamma^{abc}_{\mu}(p, q; k) = f^{abc}\{p_\mu[B_1 + B_{11}p^2 + B_{21}p\cdot q + q_\mu[B_{12}p^2 + B_{22}p\cdot q]\}. \qquad \text{(VI.3.33)}$$

紫外发散性限于 B_1 函数; B_{11}, B_{12}, B_{21} 和 B_{22} 都是紫外有限的. 裸顶角重写为下面的形式:

$$\gamma^{abc}_{\lambda\mu}(p, q; k)_B = f^{abc}g_{\lambda\mu}, \qquad \text{(VI.3.34)}$$

及

$$\Gamma^{abc}_{\lambda}(p, q; k)_B = f^{abc}p_\mu. \qquad \text{(VI.3.35)}$$

当图 VI.27(h) 的抵消项包括在鬼鬼胶子顶角函数中时, 就得到一个有限的结果:

$$\Gamma^{abc}_{\mu}(p, q; k) + (\hat{Z}_1 - 1)\Gamma^{abc}_{\mu}(p, q; k) = f^{abc}\{p_\mu[B_1^{(1)} + (\hat{Z}_1 - 1)] + p_\mu[B_{11}^{(1)}p^2 + B_{21}^{(1)}p\cdot q] + q_\mu[B_{12}^{(1)}p^2 + B_{22}^{(1)}p\cdot q]\}, \qquad \text{(VI.3.36)}$$

它再次表明紫外发散性完全包含在 B_1 中.

与三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角相联系的推广 Ward-Takahashi 恒等式 出现在三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角的不变量函数可以通过推广的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (VI.2.77) 相联系. 恒等式的左边为

$$[1 + \Sigma_g(k_3^2)]f^{a_1a_2a_3}\{g_{\mu_1\mu_2}[A_1(123)k_1\cdot k_2 - A_1(213)k_2\cdot k_3] + k_{1\mu_1}k_{1\mu_2}[A_1(132) + A_1(312) - A_1(321) + k_1\cdot k_2(A_2(312) + A_2(132)) - k_2\cdot k_3A_2(321) + k_2\cdot k_3A_3(213)] + k_{2\mu_1}k_{2\mu_2}[-A_1(231) - A_1(321) + A_1(312) - k_2\cdot k_3(A_2(321) + A_2(231)) - k_1\cdot k_3A_2(312) - k_1\cdot k_3A_3(123)] + k_{1\mu_1}k_{2\mu_2}[A_1(312)$$

$$
\begin{aligned}
&- A_1(321) + k_1\cdot k_3 A_2(312) - k_2\cdot k_3 A_2(321)]\\
&+ k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}[A_1(132) - A_1(231) + A_1(312)\\
&- A_1(321) + k_1\cdot k_3(A_2(123) + A_2(312)\\
&+ A_2(132)) - k_2\cdot k_3(A_2(213) + A_2(321)\\
&+ A_2(231)) - k_1\cdot k_3 A_3(123) + k_2\cdot k_3 A_3(213)]\}.
\end{aligned}
\tag{VI.3.37}
$$

恒等式的右边为

$$
\begin{aligned}
&f^{a_1a_2a_3}\{g_{\mu_1\mu_2}[-(1 + \underline{\Pi}(k_1^2))k_1^2 B_1(132)\\
&+ (1 + \underline{\Pi}(k_2^2))k_2^2 B_1(231)]\\
&+ k_{1\mu_1}k_{1\mu_2}[(1 + \underline{\Pi}(k_1^2))(B_1(132)\\
&+ k_1\cdot k_2 B_{21}(132)) + (1 + \underline{\Pi}(k_2^2))k_2^2 B_{22}(231)]\\
&+ k_{2\mu_1}k_{2\mu_2}[-(1 + \underline{\Pi}(k_2^2))(B_1(231)\\
&+ k_1\cdot k_2 B_2(231)) - (1 + \underline{\Pi}(k_1^2))k_1^2 B_{22}(132)]\\
&+ k_{1\mu_1}k_{2\mu_2}[k_1\cdot k_1(1 + \underline{\Pi}(k_1^2))B_{22}(132)\\
&- k_1\cdot k_2(1 + \underline{\Pi}(k_2^2))B_{22}(231)]\\
&+ k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}[-(1 + \underline{\Pi}(k_1^2))k_1^2 B_{21}(132)\\
&+ (1 + \underline{\Pi}(k_2^2))k_2^2 B_{21}(231)]\}.
\end{aligned}
\tag{VI.3.38}
$$

由两边的比较，得到下面的关系：

$$
\begin{aligned}
&[1 + \Sigma_g(k_3^2)][A_1(123)k_1\cdot k_2 - A_1(213)k_2\cdot k_3]\\
&= -[1 + \underline{\Pi}(k_1^2)]k_1^2 B_1(132)\\
&+ [1 + \underline{\Pi}(k_2^2)]k_2^2 B_1(231),
\end{aligned}
\tag{VI.3.39a}
$$

$$
\begin{aligned}
&[1 + \Sigma_g(k_3^2)][A_1(132) + A_1(312) - A_1(321)\\
&+ k_1\cdot k_3(A_2(132) + A_2(312)) - k_2\cdot k_3 A_2(321)\\
&+ k_2\cdot k_3 A_3(213)] = [1 + \underline{\Pi}(k_1^2)][B_1(132)\\
&- k_1\cdot k_2 B_{21}(132) + (1 + \underline{\Pi}(k_2^2))B_{22}(231),
\end{aligned}
\tag{VI.3.39b}
$$

$$
\begin{aligned}
&[1 + \Sigma_g(k_3^2)][-A_1(231) - A_1(321) + A_1(312)\\
&- k_2\cdot k_3(A_2(231) + A_2(321)) + k_1\cdot k_3 A_2(312)
\end{aligned}
$$

$$-k_1\cdot k_3A_3(123)]=-[1+\underline{\Pi}(k_1^2)]k_1^2B_{22}(132)$$
$$-[1+\underline{\Pi}(k_2^2)][B_1(231)+k_1\cdot k_2B_{21}(231)],$$
(VI.3.39c)
$$[1+\Sigma_g(k_3^2)][A_1(312)-A_1(321)+k_1\cdot k_3A_2(312)$$
$$-k_2\cdot k_3A_2(321)]=k_1\cdot k_2[(1+\underline{\Pi}(k_1^2))]B_{21}(132)$$
$$-(1+\underline{\Pi}(k_2^2))B_{22}(231)],$$ (VI.3.39d)
$$[1+\Sigma_g(k_3^2)][A_1(132)-A_1(231)+A_1(312)$$
$$-A_1(321)+k_1\cdot k_3(A_3(123)+A_2(312)$$
$$+A_2(132)-A_3(123))-k_2\cdot k_3(A_2(231)$$
$$+A_2(321)+A_2(231)-A_3(213))]$$
$$=-(1+\underline{\Pi}(k_1^2))k_1^2B_{21}(132)$$
$$+(1+\underline{\Pi}(k_2^2))k_2^2B_{21}(231).$$ (VI.3.39e)

上面的关系对任意的动量 k_1，k_2 及 $k_3=-(k_1+k_2)$ 都满足，因此可以用来约束所含的不变量.

(F) 费米子费米子胶子顶角 $\Gamma^a_{i\mu}(p',p;k)$.

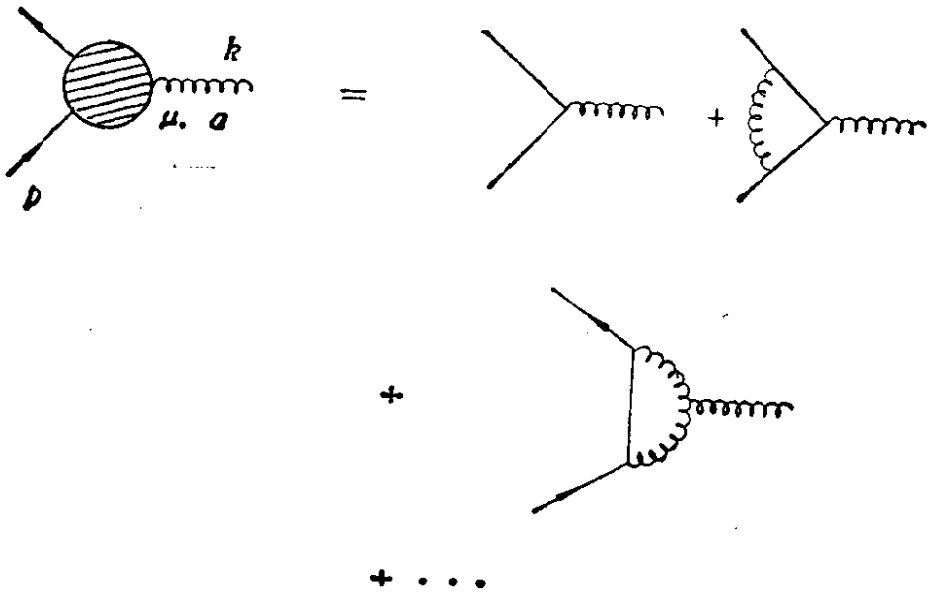


图 VI.33

在图 VI.33 中描述一粒子不可约化的费米子费米子胶子

顶角到 g^3 阶有贡献的图形.

在群空间内,顶角函数是定义费米子所属的表示矩阵;因此顶角函数必须正比于 T^a. 不变量函数的分解可以写为下面的形式.

$$\Gamma^a_{f\mu}(p', p; k) = T^a \Big\{ E_1 \gamma_\mu + k_\mu [E_{11} + E_{12} \not{k} + E_{13} \not{K} + \frac{1}{2} [\not{k}, \not{K}] E_{14}] + K_\mu \Big[E_{21} + E_{22} \not{k} + E_{23} \not{K} + \frac{1}{2} [\not{k}, \not{K}] E_{24} \Big] + \frac{1}{2} E_{31} [\gamma_\mu, \not{k}] + \frac{1}{2} E_{32} [\gamma_\mu, \not{K}] + i E_{33} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} k^\nu K^\lambda \gamma^\rho \gamma_5 \Big\}, \tag{VI.3.40}$$

这里 $E_1, E_{11}, \cdots, E_{33}$ 为不变量函数,即

$$E_1 \equiv E_1(p'^2, p^2, k^2), \text{ 等等},$$

而

$$K \equiv p' + p, \quad k \equiv p' - p.$$

裸顶角为

$$\Gamma^a_{f\mu}(p', p; k)_B = T^a \gamma_\mu. \tag{VI.3.41}$$

关于不变量函数 $E_1, E_{11}, \cdots, E_{33}$ 进一步的信息可以由电荷共轭不变性得到;按照前节所给出的要点,方程(VI.2.91)—(VI.2.98):

$$\Gamma^a_{f\mu}(p', p; k) = -\delta(a) C \{\Gamma^a_{f\mu}(p', p; k)\}^T C^{-1}. \tag{VI.3.42}$$

这证实下述事实,出现在方程 (VI.3.40) 中的不变量函数在 $p' \longleftrightarrow p$ 交换时或者为偶函数或者为奇函数:

$$E_1(p'^2, p^2; k^2) = E_1(p^2, p'^2; k^2),$$
$$E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{24} \text{ 及 } E_{31} \tag{VI.3.43}$$

为偶函数,而

$$E_{11}(p'^2, p^2; k^2) = -E_{11}(p^2, p'^2; k^2),$$

$$E_{13},\ E_{14},\ E_{22},\ E_{32}\text{ 及 }E_{33} \tag{VI.3.44}$$

为奇函数. 细节参看附录 III.

理论的可重正性意味着紫外发散性包含在 E_1 函数内. 这显然在一圈阶是真实的，如由量子电动力学结果所看到的一样. 函数 $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{33}$ 在逐阶减除程序中都是有限的. 当图 VI.27(e) 的抵消项包含在顶角函数内时，比如说，包含在一圈计算中，结果是有限的.

$$\begin{aligned}
&\Gamma^a_{1\mu}(p', p; k) + (Z_1' - 1)\Gamma^a_{1\mu}(p', p; k)_B \\
&= T^a\left\{\left[E_1^{(1)} + (Z_1' - 1)\gamma_\mu + k_\mu\left[E_{11}^{(1)} + E_{12}^{(1)}\not{k}\right.\right.\right. \\
&\quad \left. + E_{13}^{(1)}\not{K} + \frac{1}{2}E_{14}^{(1)}[\not{k}, \not{K}]\right] \\
&\quad + K_\mu\left[E_{21}^{(1)} + E_{22}^{(1)}\not{k} + E_{23}^{(1)}\not{K} + \frac{1}{2}E_{24}^{(1)}[\not{k}, \not{K}]\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}E_{31}^{(1)}[\gamma_\mu, \not{k}] + \frac{1}{2}E_{32}^{(1)}[\gamma_\mu, \not{K}] \\
&\quad \left.\left. + iE_{33}^{(1)}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k^\nu K^\lambda\gamma^\rho\gamma_5\right\}.\right.
\end{aligned} \tag{VI.3.45}$$

$E_1^{(1)}$ 的发散性必然被 Z_1' 消去.

(G) 复合费米子鬼顶角 $\gamma^a(p', p; k)$ 及 $\gamma^a(p', p; k)$.

这些顶角出现在推广的 Ward-Takahashi 恒等式中包括费米子费米子胶子顶角在内都不在有效拉氏函数中出现. 它们的不变量函数展开式可以用费米子费米子胶子顶角相同的基础来建立:

$$\gamma^a(p', p; k) = T^a\left\{F_1 + \not{k}F_2 + \not{K}F_3 + \frac{1}{2}[\not{k}, \not{K}]F_4\right\}, \tag{VI.3.46}$$

$$\gamma^a(p', p; k) = T^a\left\{\hat{F}_1 + \not{k}\hat{F}_2 + \not{K}\hat{F}_3 + \frac{1}{2}[\not{k}, \not{k}]\hat{F}_4\right\}, \tag{VI.3.47}$$

这里

$$F_1 \equiv F_1(\not{p}'^2, p^2; \not{k}^2),\quad F_2 \equiv F_2(\not{p}'^2, p^2; \not{k}^2),\ \text{等等},$$

$$\hat{F}_1 \equiv \hat{F}_1(p'^2, \not{p}^2; \not{k}^2),\ \text{等等}.$$

紫外发散性只出现 F_1 和 $\hat{F}_1$ 中. 对于一圈阶，这种情形可以由图 VI.26 看出来. 应该注意，没有与该顶角相联系的重正化常数.

两组不变量函数 F_j 和 $\hat{F}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, 不是独立的. 根据方程 (VI.2.99b). 它们以下面的方式相联系:

$$\hat{F}_j(p'^2, \not{p}^2; \not{k}^2) = F_j(\not{p}^2, p'^2; \not{k}^2),\ j = 1, 3, 4, \tag{VI.3.48a}$$

$$\hat{F}_2(p'^2, \not{p}^2; \not{k}^2) = -F_2(\not{p}^2, p'^2; \not{k}^2). \tag{VI.3.48b}$$

包含费米子费米子胶子顶角的推广 Ward-Takahashi 恒等式 推广的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (VI.2.83) 现在可以用来把方程 (VI.3.40), (VI.3.46) 和 (VI.3.47) 的不变量函数联系起来. 方程 (VI.2.83) 的左边导致:

$$\begin{aligned} T^a[1 + \Sigma_g(\not{k}^2)] \{ & \not{k}^2 E_{11} + \not{k} \cdot K E_{21} + \not{k}[E_1 + \not{k}^2 E_{12} \\ & + \not{k} \cdot K E_{22}] + K[\not{k}^2 E_{13} + \not{k} \cdot K E_{23}] \\ & + \frac{1}{2}[\not{k}, K][\not{k}^2 E_{14} + \not{k} \cdot K E_{24} + E_{32}] \}, \end{aligned} \tag{VI.3.49}$$

由方程 (VI.3.46) 和 (VI.3.47), 方程 (VI.2.83) 的右边变为

$$\begin{aligned} T^a \{ & \frac{1}{2}[1 + \Sigma_f(p'^2)][(\not{k}^2 + \not{k} \cdot K)F_2 \\ & + (K^2 + \not{k} \cdot K)F_3 + \not{k}(F_1 - (K^2 - \not{k} \cdot K)F_4) \\ & + K(F_1 + (\not{k} \cdot K + \not{k}^2)F_4) + \frac{1}{2}[\not{k}, K](-F_2 \\ & + F_3)] - \frac{1}{2}[1 + \Sigma_f(\not{p}^2)][(\not{k} \cdot K - \not{k}^2)\hat{F}_2 \\ & + (K^2 - \not{k} \cdot K)\hat{F}_3 + \not{k}(-\hat{F}_1 \end{aligned}$$

$$+(K^2-\not k\cdot K)\hat F_4)+\not K(\hat F_1+(k^2-K\cdot\not k)\hat F_4)$$
$$+\frac{1}{2}[\not k,\not K](\hat F_2+\hat F_3)]-[m_R(1+A(p'^2))$$
$$-Z_2^{-1}\delta m][F_1+\not kF_2+\not KF_3+\frac{1}{2}[\not k,\not k]F_4]$$
$$+[m_R(1+A(p^2))-Z_2^{-1}\delta m]\Big[\hat F_1$$
$$+\not k\hat F_2+\not K\hat F_3+\frac{1}{2}[\not k,\not K]\hat F_4\Big]. \qquad \text{(VI.3.50)}$$

比较方程(VI.3.49)与(VI.3.50)，利用方程(VI.3.48a)及(VI.3.48b)，给出下面的恒等式：

$$[1+\Sigma_g(k^2)][k^2E_{11}(p'^2,p^2;k^2)+k\cdot KE_{21}(p'^2,p^2;k^2)]$$
$$-\frac{1}{2}[1+\Sigma_f(p'^2)][(k^2+k\cdot K)F_2(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+(k^2+k\cdot K)F_3(p'^2,p^2;k^2)]+\frac{1}{2}[1$$
$$+\Sigma_f(p^2)][(k\cdot K-k^2)F_2(p^2,p'^2;k^2)$$
$$-(k^2-k\cdot K)F_3(p^2,p'^2;k^2)]$$
$$-\{m_R(1+A(p'^2))-Z_2^{-1}\delta m\}F_1(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+\{m_R(1+A(p^2))-Z^{-1}\delta m\}F_1(p^2,p'^2;k^2)$$
$$\text{(VI.3.51a)}$$

$$[1+\Sigma_g(k^2)][E_1(p'^2,p^2;k^2)+k^2E_{12}(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+k\cdot KE_{22}(p'^2,p^2;k^2)]=\frac{1}{2}(1+\Sigma_f(p'^2))$$
$$\cdot[F_1(p'^2,p^2;k^2)-(k^2-k\cdot K)F_4(p'^2,p^2;k^2)]$$
$$+\frac{1}{2}(1+\Sigma_f(p^2))[F_1(p^2,p'^2;k^2)$$
$$-(k^2-k\cdot K)F_4(p^2,p'^2;k^2)]-\{m_R(1$$
$$+A(p'^2))-Z_2^{-1}\delta m\}F_2(p'^2,p^2;k^2)$$
$$-\{m_R(1+A(p^2))-Z_2^{-1}\delta m\}F_2(p^2,p'^2,k^2),$$
$$\text{(VI.3.51b)}$$

$$[1+\Sigma_g(k^2)][k^2E_{13}(p'^2,p^2;k^2)+k\cdot KE_{23}(p'^2,p^2;k^2)]$$
$$=\frac{1}{2}(1+\Sigma_f(p'^2))[F_1(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+(k\cdot K+k^2)F_4(p'^2,p^2;k^2)]+\frac{1}{2}$$
$$\cdot(1+\Sigma_f(p^2))[-F_1(p^2,p'^2;k^2)$$
$$+(k\cdot K-k^2)F_4(p^2,p'^2;k^2)]-\{m_R(1$$
$$+A(p'^2))-Z_2^{-1}\delta m\}F_3(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+\{m_R(1+A(p^2))-Z_2^{-1}\delta m\}F(p^2,p'^2;k^2),$$
(VI.3.51c)

$$[1+\Sigma_g(k^2)][k^2E_{14}(p'^2,p^2;k^2)+k\cdot KE_{24}(p'^2,p^2;k^2)$$
$$+E_{32}(p'^2,p^2;k^2)]=\frac{1}{2}(1+\Sigma_f(p'^2))$$
$$\cdot[-F_2(p'^2,p^2;k^2)+F_3(p'^2,p^2;k^2)]$$
$$+\frac{1}{2}(1+\Sigma_f(p^2))[F_2(p^2,p'^2;k^2)$$
$$-F_3(p^2,p'^2;k^2)]-\{m_R(1+A(p'^2))$$
$$-Z_2^{-1}\delta m\}F_4(p'^2,p^2;k^2)+\{m_R(1+A(p^2))$$
$$-Z_2^{-1}\delta m\}F_4(p^2,p'^2;k^2).$$
(VI.3.51d)

这些恒等式对微扰展开式中一切动量 p, p' 及 $k=p'-p$，并且对一切量级都适合.

(H) 四次胶子顶角 $\Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1,k_2,k_3,k_4)$.

该顶角函数按 Lorentz 不变量函数的分解是颇为复杂的，尽管论述并不包含新的原理. 在这时只要注意，发散性限于这些不变量函数，它们要乘以适合于图 II.2 所列举的裸顶角张量结构的张量.

在本节的其余部分讨论两种减除程序，“质壳上”的减除程序及动量空间的减除程序，集中在如何定义各种重正化常数及唯一的重正化耦合常数要求和推广 Ward-Takahashi 恒

等式之间的容洽性. 在动量空间减除方法的讨论中将引用一圈计算许多显然的结果.

在质壳上的减除 在该方案中发散性被孤立起来，并在所包含的一切外胶子线和鬼线动量平方为零和外费米在质壳上的动量空间各点进行减除. 如上面所提到的，由于严重的红外奇点堆集在阈值处，对于实现重正化程序实际上这不是一个能存活的方案，然而这个方案可以用来作为示例. 而且它有合乎需要的性质，唯一重正化耦合常数的要求和推广的 Ward-Takahashi 恒等式自动地彼此容洽. 最简单地是在 Landan 规范中进行简述.

(A) 胶子传播子

方程 (VI.3.13) 表明，胶子波函数重正化常数到第二阶修正定义为:

$$Z_3 = 1 - \Pi^{(1)}(0). \tag{VI.3.52}$$

这与一切阶的结果是相容的:

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi^{(1)}(0). \tag{VI.3.53}$$

方程 (VI.3.52) 和 (VI.3.53) 的这种容洽性是在幂级数展开式的含义中，对 $\Pi^{(1)}(0) \sim O(g_R^2)$ 到 g_R^2 量级. 用如此定义的重正化常数，全胶子传播子的横向部分是正比于自由传播子减除点的横向部分:

$$\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k)^t \xrightarrow[k^2\to 0]{} Z_3 D^{ab}_{F\mu\nu}(k)^t = \frac{Z_3}{k^2}\,\delta^{ab}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \tag{VI.3.54}$$

并且纵向部分并不经受重正化效应:

$$\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k)^l = D^{ab}_{F\mu\nu}(k)^l = -i\delta^{ab}\xi_R\,\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}, \tag{VI.3.55}$$

这里上指标 t 和 l 代表横向部分和纵向部分.

(B) 鬼传播子

由方程(VI.3.15)，鬼波函数重正化常数到第二阶定义为

$$\hat{Z}_3 = 1 - \Sigma_g^{(1)}(0). \tag{VI.3.56}$$

对于一切量级，它定义为：

$$\hat{Z}_3^{-1} = 1 + \Sigma_g^{(1)}(0), \tag{VI.3.57}$$

因而对于全胶子传播子在减除点满足简单的"边界条件"：

$$\bar{D}_F^{ab}(q) \xrightarrow[q^2\to 0]{} Z_3 D_F^{ab}(q). \tag{VI.3.58}$$

(C) 费米子传播子

要求出包含质壳点的费米子重正化常数，进行计算必须要慎重. 首先考虑方程(VI.3.23)的第二阶情形，将该方程展开为$(\not p - m_R)$的幂：

$$\begin{aligned} & i(\not p - m_R)[\Sigma_f^{(1)}(m_R^2) + Z_2 - 1] + i\{[\Sigma_f^{(1)}(m_R^2) \\ & - A^{(1)}(m_R^2)]m_R + \delta m\} + i(p^2 - m_R^2) \\ & \cdot \left[\frac{\partial}{\partial m_R^2}\Sigma_f^{(1)}(m_R^2) - \frac{\partial}{\partial m_R^2}A^{(1)}(m_R^2)\right] \\ & + O((\not p - m_R)^2) = i\{[\Sigma_f^{(1)}(m_R^2) - A^{(1)}(m_R^2)]m_R \\ & + Z_2\delta m + i(\not p - m_R)\left\{Z_2 - 1 + \Sigma_f^{(1)}(m_R^2)\right. \\ & \left. + 2m_R^2\left[\frac{\partial\Sigma_f^{(1)}(m_R^2)}{\partial m_R^2} - \frac{\partial A^{(1)}(m_R^2)}{\partial m_R^2}\right]\right\} \\ & + O((\not p - m_R)^2). \end{aligned} \tag{VI.3.59}$$

在目前的情形中有两个重正化常数；这两个重正化常数到第二阶定义为：

$$\begin{aligned} Z_2 = 1 - \Sigma_f^{(1)}(m_R^2) - 2m_R^2 & \left[\frac{\partial}{\partial m_R^2}\Sigma_f^{(1)}(m_R^2)\right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial m_R^2}A^{(1)}(m_R^2)\right], \end{aligned} \tag{VI.3.60}$$

及

$$[\Sigma_f^{(1)}(m_R^2) - A^{(1)}(m_R^2)]m_R - Z_2\delta m = 0. \tag{VI.3.61}$$

由(VI.3.8d)及(VI.3.61)，质量重正化到一圈阶变为

$$Z_m = 1 + \Sigma_f^{(1)}(m_R^2) - A^{(1)}(m_R^2).$$

对一切量级，费米子波函数重正化常数为：

$$Z_2^{-1} = 1 + \Sigma_f(m_R^2) + 2m_R^2 \left[\frac{\partial}{\partial m_R^2}\Sigma_f(m_R^2) - \frac{\partial}{\partial m_R^2}A(m_R^2)\right], \tag{VI.3.62}$$

并且质量重正化常数为：

$$Z_m = 1 + Z_2^{-1}[\Sigma_f(m_R^2) - A(m_R^2)]. \tag{VI.3.63}$$

由方程 (VI.3.59)，(VI.3.60) 及 (VI.3.61)，容易看出，全费米子传播子是正比于在重正化点附近的自由传播子：

$$\bar{S}_F(p) \xrightarrow[p^2 \to m_R^2]{} Z_2 S_F(p) = \frac{Z_2}{\not{p} - m_R}. \tag{VI.3.64}$$

(D) 三胶子顶角.

对于 $k_1^2, k_2^2, k_3^2 \to 0$，

$$\begin{aligned}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3) \to f^{a_1a_2a_3}\{&\bar{A}_1[g_{\mu_1\mu_2}(k_1 - k_2)_{\mu_3} \\ &+ g_{\mu_2\mu_3}(k_2 - k_3)_{\mu_1} + g_{\mu_3\mu_1}(k_3 - k_1)_{\mu_2}] \\ &+ \bar{A}_2[k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}(k_1 - k_2)_{\mu_3} + k_{3\mu_2}k_{2\mu_3}(k_2 - k_3)_{\mu_1} \\ &+ k_{1\mu_3}k_{3\mu_1}(k_3 - k_1)_{\mu_2}] + \bar{A}_3[k_{2\mu_1}k_{3\mu_2}k_{1\mu_3} \\ &- k_{3\mu_1}k_{1\mu_2}k_{2\mu_3}]\} + O(k_1^2, k_2^2, k_3^2) \\ = \bar{A}_1&\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)_B + \text{有限项};\end{aligned} \tag{VI.3.65}$$

这里

$$\bar{A}_j \equiv A_j(0, 0, 0), \quad j = 1, 2, 3.$$

顶角函数由定义

$$Z_1^{G^{-1}} = \bar{A}_1 \tag{VI.3.66}$$

来重正化，因而

$$\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3) \xrightarrow[k_j^2 \to 0]{} Z_1^{G^{-1}}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)_B + \text{有限项}. \tag{VI.3.67}$$

可以看出，第二阶表示式方程 (VI.3.28) 的确是有限的.

为了看出重正化在 § VI.1 讨论的逐阶方法中是怎样进行的，利用裸耦合常数作为展开式参数，详细考虑一圈的结果，是有启发的. 从方程 (VI.3.3) 出发，它在零阶等同于方程 (VI.3.4)，计算三胶子顶角到一圈阶得到:

$$g\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3).$$

由 § VI.1 末给出的讨论，看出相应的 S 矩阵元正比于

$$\begin{aligned}(Z_3)^{\frac{3}{2}}g\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3) &= (Z_3)^{\frac{3}{2}}g\{\bar{A}_1^{(1)}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)_B \\ &+ \bar{A}_1^{(1)}[k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}(k_1-k_2)_{\mu_3} + k_{3\mu_2}k_{2\mu_3}(k_2-k_3)_{\mu_1} \\ &+ k_{1\mu_3}k_{3\mu_1}(k_3-k_1)_{\mu_2}] + \bar{A}_3^{(1)}[k_{2\mu_1}k_{3\mu_1}k_{1\mu_3} - k_{3\mu_1}k_{1\mu_2}k_{2\mu_3}]\} \\ &= Z_3^{3/2}g\{\bar{A}_1^{(1)}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)_{13} - \bar{A}_2^{(1)}(k_1-k_2)_{\mu_3} \\ &\quad (k_2-k_3)_{\mu_1}(k_3-k_1)_{\mu_2} + [-\bar{A}_2^{(1)} + \bar{A}_3^{(1)}] \\ &\quad [k_{2\mu_1}k_{3\mu_2}k_{1\mu_3} - k_{3\mu_1}k_{1\mu_2}k_{2\mu_3}]\}. \qquad \text{(VI.3.68)}\end{aligned}$$

这个展开式到 g_R^3 量级必须是有限的，利用方程 (VI.3.5)，写出

$$Z_3^{3/2}g\bar{A}_1^{(1)} = g_RZ_1^G\bar{A}_1^{(1)}. \qquad \text{(VI.3.69)}$$

由于方程 (VI.3.66)，这简单地为 g_R. 因为 $\bar{A}_2$ 和 $\bar{A}_3$ 已经是 g^2 量级，于是到这个量级，

$$(Z_3)^{3/2}g\bar{A}_2 = g_RZ_1^G\bar{A}_2, \qquad \text{(VI.3.70a)}$$

及

$$(Z_3)^{3/2}g\bar{A}_3 = g_RZ_1^G\bar{A}_3 \qquad \text{(VI.3.70b)}$$

到 g_R^3 量级都是有限的. 因此方程 (VI.3.68) 到这个量级是有限的.

考虑三胶子顶角与在重正化点计值的外动量的收缩. 利用事实

$$k_i \cdot k_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

得到

$$\begin{aligned}&k_3^{\mu_3}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)\big|_{k_j^2=0} \\ &= Z_1^{G-1}k_3^{\mu_3}\Gamma^{a_1a_2a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)_B. \qquad \text{(VI.3.71)}\end{aligned}$$

往后将利用这个表示式与推广的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (VI.2.77) 相联系.

(E) 鬼鬼胶子顶角.

在点 $p^2 = q^2 = k^2 = 0$ 处,

$$\Gamma^{abc}_{\lambda\mu}(p, q; k) = f^{abc}[g_{\lambda\mu}\bar{B}_1 + \bar{B}_{11}p_\lambda p_\mu + B_{12}p_\lambda q_\mu + \bar{B}_{21}q_\lambda p_\mu + \bar{B}_{22}q_\lambda q_\mu], \tag{VI.3.72}$$

并且方程 (VI.3.36) 约化为

$$\Gamma^{abc}_{\mu}(p, q; k) = [\bar{B}^{(1)}_1 + (\hat{Z}_1 - 1)]\Gamma^{abc}_{\mu}(p, q; k)_B, \tag{VI.3.73}$$

这里

$$\bar{B}_1 \equiv B_1(0, 0, 0),\ \bar{B}_{11} \equiv B_{11}(0, 0, 0),\ \text{等等}.$$

鬼波函数重正化常数对一切阶定义为

$$\hat{Z}_1^{-1} = \bar{B}_1. \tag{VI.3.74}$$

现在由于三胶子顶角的推广 Ward-Takahashi 恒等式的约束可以应用. 显然, 方程 (VI.3.39a), (VI.3.39b) 及 (VI.3.39e) 自动满足, 因为这些表示式两边在目前的减除点处都为零. 由方程 (VI.3.53), (VI.3.66), (VI.3.57) 及 (VI.3.74), 方程 (VI.3.39b) 及 (VI.3.39c) 二者给出相同的结果:

$$Z_1^G/Z_3 = \hat{Z}_1/\hat{Z}_3. \tag{VI.3.75}$$

这是方程 (VI.3.6) 所提及的关系之一.

一个特别简单的情况发生在 Landau 规范中. 在前节中已证明, 在此规范中在一圈水平, 复合鬼胶子顶角是有限的. 在高阶处所有发散性都来自于传播子和顶角的插入. 因此, 在 BPHZ 逐阶减除程序中, 该复合顶角在 Landau 规范中是有限的. 所以任何重正化效应只有在 Landau 规范中才给出有限的重正化常数. 事实上, 在"质壳上"的减除方案中[12,18]

$$\tilde{Z}_1 = 1. \qquad \text{(VI.3.76)}$$

这可以简单说明如下. 考虑对复合鬼胶子顶角的高阶贡献. 首先仅需考虑与图 VI.34 所示的外鬼线相互作用的内胶子.

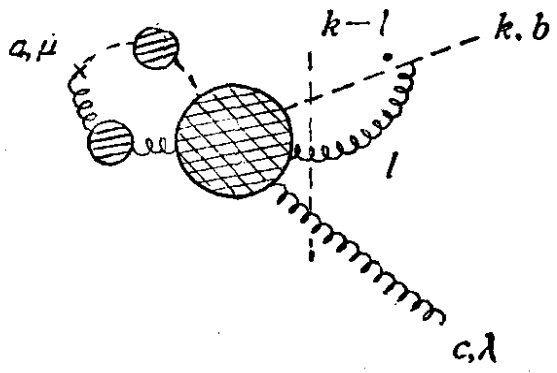


图 VI.34

谈论的内胶子有一动量,记为 l. 于是它可以写为

$$\Gamma^{abc}_{\lambda\mu}(p, q; k) = f^{abc}g_{\lambda\mu} + \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}\frac{-i}{(k-l)^2}$$
$$\cdot (k-l)^\nu D^{cc'}_{F\nu\rho}(l) f^{b'be}\Gamma^{ab'c'c}_{\lambda\mu\rho}(l, \cdots) g^{\rho\rho'}, \quad \text{(VI.3.77)}$$

这里 $\Gamma^{abcd}_{\lambda\mu}(l, \cdots)$ 代表图 VI.34 所包含一点一划相间线左边部分的顶角. 右边的第一项为裸项. 因为胶子传播子在 Landau 规范中为横向的,因而

$$(k-l)^\nu D^{cc'}_{F\nu\rho}(l)|_{\text{Landau}} = k^\nu D^{cc'}_{F\nu\rho}(l)|_{\text{Landau}}, \quad \text{(VI.3.78)}$$

于是

$$\Gamma^{abc}_{\lambda\mu}(p, q; k) = f^{abc}g_{\lambda\mu} + k^\nu \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}\frac{-i}{(k-l)^2}$$
$$\cdot D^{cc'}_{F\nu\rho}(l) f^{b'be} g^{\rho\rho'}\Gamma^{ab'c'c}_{\lambda\mu\rho}(l, \cdots). \qquad \text{(VI.3.79)}$$

右边第二项在积分符号内为秩 3 的张量. 它对式 (VI.3.72) 中的 B_1 项的贡献是正比于 k^2, 或 $k\cdot p$, 因此在减除点为零, 即是

$$B_1(0, 0, 0)|_{\text{Landau}} = 1. \qquad \text{(VI.3.80)}$$

所以证明了方程 (VI.3.76)

费米子费米子胶子顶角 在减除点 $p'^2 = p^2 = m_R^2$ 及 $k^2 = 0$，

$$\bar{u}(p)\Gamma^a_\mu(p, p; 0)u(p) = [\bar{E}_1 + 2m_R\bar{E}_{21} + 4m_R\bar{E}_{23}]\bar{u}(p)T^a\gamma_\mu u(p), \tag{VI.3.81}$$

这里

$$\bar{E}_1 = E_1(m_R^2, m_R^2, 0),$$

并且类似地定义 $\bar{E}_{21}$ 及 $\bar{E}_{23}$. 顶角函数重正化常数定义为

$$Z_1^{-1} = \bar{E}_1 + 2m_R\bar{E}_{21} + 4m_R^2\bar{E}_{23}, \tag{VI.3.82}$$

它确实使方程 (VI.3.45) 在一圈阶中为有限的.

推广的 Ward-Takahashi 恒等式方程 (VI.2.83) 把费米子费米子胶子顶角与复合费米子鬼顶角通过方程 (VI.3.51) 联系起来. 在减除点，方程 (VI.3.51a) 完全被满足. 但是，当 p 保持固定时，由方程 (VI.3.51a) 两端的微分可以得到非平凡的关系. 于是令 p' 趋近于 p，并取 $p^2 = m_R^2$，结果为

$$\begin{aligned}\hat{Z}_3^{-1}\bar{E}_{21} = {} & 2m_R^2\left(\frac{\partial}{\partial m_R^2}\Sigma_f(m_R^2)\right)\bar{F}_3 \\ & + [1 + \Sigma_f(m_R^2)]\left[\bar{F}_2 + \bar{F}_3 + 2m_R^2\left\{\frac{\partial\bar{F}_3}{\partial m_R^2} - \frac{\partial\hat{\bar{F}}_3}{\partial m_R^2}\right\}\right] \\ & - \bar{F}_1 m_R\frac{\partial A(m_R^2)}{\partial m_R^2} + [m_R(1 + A(m_R^2)) - Z_2^{-1}\delta m] \\ & \cdot\left\{-\frac{\partial\bar{F}_1}{\partial m_R^2} - \frac{\partial\hat{\bar{F}}_1}{\partial m_R^2}\right\},\end{aligned} \tag{VI.3.83}$$

这里对于 $j = 1, 2, 3$，

$$\begin{aligned}\bar{F}_j &\equiv F_j(m_R^2, m_R^2, 0), \\ \frac{\partial\bar{F}_j}{\partial m_R^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial p^2}F_j(p^2, q^2; 0)\Big|_{p^2=q^2=m_R^2}, \\ \frac{\partial\hat{\bar{F}}_j}{\partial m_R^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial q^2}F_j(p^2, q^2, 0)\Big|_{p^2=q^2=m_R^2}.\end{aligned} \tag{VI.3.84}$$

方程 (VI.3.51b) 给出

$$Z_3^{-1}\bar{E}_1 = [1 + \Sigma_f(m_R^2)][\bar{F}_1 - 4m_R^2\bar{F}_4]$$
$$- 2[m_R(1 + A(m_R^2)) - Z_2^{-1}\delta m]\bar{F}_2$$
$$= [1 + \Sigma_f(m_R^2)][\bar{F}_1 - 2m_R\bar{F}_2 - 4m_R^2\bar{F}_4], \tag{VI.3.85}$$

这里利用了方程 (VI.3.54).

对于方程 (VI.3.75) 方程 (VI.3.51c) 类似地给出

$$\hat{Z}_3^{-1}\bar{E}_{23} = \frac{1}{2}\bar{F}_1\frac{\partial\Sigma_f(m_R^2)}{\partial m_R^2} + \frac{1}{2}[1+\Sigma_f(m_R^2)]$$
$$\cdot\left[\frac{\partial\bar{F}_1}{\partial m_R^2} - \frac{\partial\hat{\bar{F}}_1}{\partial m_R^2} + 2\bar{F}_4\right] - m_R\bar{F}_3\frac{\partial A(m_R^2)}{\partial m_R^2}$$
$$+ \{m_R(1 + A(m_R^2)) - Z_2\delta m\}\left\{-\frac{\partial\bar{F}_3}{\partial m_R^2} + \frac{\partial\hat{\bar{F}}_3}{\partial m_R^2}\right\}. \tag{VI.3.86}$$

由方程 (VI.3.83), (VI.3.85) 及 (VI.3.86), 得到下面的关系:

$$\hat{Z}_3^{-1}[E_1 + 2m_R\bar{E}_{21} + 4m_R^2\bar{E}_{23}]$$
$$= \left\{1 + \Sigma_f(m_R^2) + 2m_R^2\frac{\partial\Sigma_f(m_R^2)}{\partial m_R^2}\right.$$
$$\left. - 2m_R^2\frac{\partial A(m_R^2)}{\partial m_R^2}\right\}\{\bar{F}_1 + 2m_R\bar{F}_3\}. \tag{VI.3.87}$$

按照方程 (VI.3.60) 及 (VI.3.81), 上式变为

$$(\hat{Z}_3Z_1^f)^{-1} = Z_2^{-1}\{\bar{F}_1 + 2m_R\bar{F}_3\}. \tag{VI.3.88}$$

这个表示式与方程 (VI.3.6a) 比较,要求

$$\bar{F}_1 + 2m_R\bar{F}_3 = B_1(0, 0, 0) = \hat{Z}_1^{-1}. \tag{VI.3.89}$$

在一般协变规范中这个等式的证明是没有的,但是在 Landau 规范中,等式两边都等于 1. 在 Landau 规范中 $\hat{Z}_1 = 1$ 已经证明了[参看方程 (VI.3.76)]; 证明方程 (VI.3.89) 的左边也为 1, 可以类似的方式得到. 复合费米子鬼复合顶角的一切高阶图形有图 VI.35 所描述的形式.

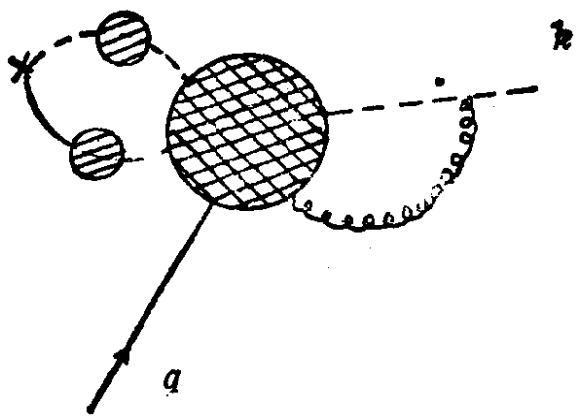


图 VI.35

可以写出类似于式 (VI.3.77) 和(VI.3.79)的表示式. 于是结果可由 $k_\mu = 0$, 即 $\bar{F}_1 = 1$ 及 $\bar{F}_j = 0$, $j = 2, 3, 4$, 得到, 因为除树图以外的一切图形有为零的振幅. 于是

$$[\bar{F}_1 + 2m_R\bar{F}_3]|_{\text{Landau}} = 1. \qquad \text{(VI.3.90)}$$

这完成了方程 (VI.3.6a) 的证明. 注意, 在费米子波函数重正化常数及费米子费米子胶子顶角重正化常数的认证中, 要认证重正化常数, 首先要应用质壳上的条件. 例如, 在费米子费米子胶子顶角函数中定义 Z_1 为 γ_μ 项的系数是吸引人的. 当然, 这个定义会与推广的 Ward-Takahashi 恒等式相抵触.

在其他规范中恒等式方程 (VI.3.89) 会怎样呢? 在目前没有恒等式存在的一般证明. 然而可以猜想, 该恒等式一般并不是真实的, 如同在 Landau 规范情形一样, 除非它是一个平凡的恒等式.

动量空间减除 为了避免红外奇点, 并建立与量子色动力学应用的直接联系, 另外的减除程序是需要的. 在动量空间减除中, 重正化减除点取欧氏值, 即取在 $p^2 = -M^2$, 这里 p 为所考虑的传播子或顶角函数的一个外动量, M 为一个固定的质量值. 而且, 通常用到的一切外动量有相同的负平方

值的特殊欧氏点，称为一个对称点。在该方案中所定义的重正化耦合常数可以直接与可测量的量子色动力学的跑动耦合常数相联系。但是关于重正化的费米子质量并没有可测量的直接联系。在文献[30]中提倡这个减除程序，因为事实上它在微扰论中有比较好的收敛性质，因而最低阶的结果比之于较高阶的效应是更为稳定的。然而在该方案中也有缺点：推广的 Ward-Takahashi 恒等式可能与方程（VI.3.5）所定义的唯一重正化耦合常数相抵触，并且计算有点冗长。这些方面将在下面详细讨论。

虽然在现在方案中所定义的重正化耦合常数和重正化质量是与质壳上方案中的重正化常数不同的，但是用相同的符号。因为两个方案并不混合使用，故这两个方案不应混淆。

在着手量子色动力学的复杂情形以前，将讨论量子电动力学比较简单的情形作为该减除方案的示例。将证明，著名的关系 $Z_1^{\mathrm{em}} = Z_2^{\mathrm{em}}$ 不能认为是理所当然的，在 § V.3 的讨论中，这个关系似乎是自动的，但是，这对于质壳上的减除方案[并且也对于下节中要讨论的极小减除方案]是偶然的。在动量减除中这个关系要通过应用 Ward-Takahashi 恒等式来推导。

动量空间减除的量子电动力学 全费米子传播子是类似于方程（VI.3.17a）所给出的形式：

$$\bar{S}_F^{-1}(p) = \not{p} - m_R + \not{p}\sigma_f(p^2) - m_R a(p^2) + Z_2^{\mathrm{em}}\delta m, \tag{VI.3.91}$$

这里 $\sigma_f(p^2)$ 和 $a(p^2)$ 为出现在电子自能修正中的两个不变量函数。为了与量子色动力学相区别，重正化常数用“em”来编号。在减除点 $p^2 = -M^2$ 附近，可以写出

$$\begin{aligned}\bar{S}_F^{-1}(p) = {} & (\not{p} - m_R)[1 + \sigma_f(-M^2)] \\ & + m_R[\sigma_f(-M^2) - a(-M^2)]\end{aligned}$$

$$+ Z_2^{em}\delta m + O(p^2 + M^2). \qquad \text{(VI.3.92)}$$

这表明，电子波函数重正化常数和相乘的电子质量重正化常数可以用如下方式来认证：

$$(Z_2^{em})^{-1} = 1 + \sigma_f(-M^2), \qquad \text{(VI.3.93)}$$

及

$$Z_m^{em} = 1 + (Z_2^{em})^{-1}[\sigma_f(-M^2) + a(-M^2)]. \qquad \text{(VI.3.94)}$$

电子电子光子顶角有类似于方程 (VI.3.40) 的不变量函数展开式：

$$\Gamma_\mu^{em}(p', p; k) = e_1\gamma_\mu + k_\mu\left[e_{11} + e_{12}\not{k} + e_{13}\not{k} + \frac{1}{2}e_{14}[\not{k}, \not{k}]\right] + K_\mu\left[e_{21} + e_{22}\not{k} + e_{23}\not{k} + \frac{1}{2} \cdot e_{24}[\not{k}, \not{k}]\right] + \frac{1}{2}e_{31}[\gamma_\mu, \not{k}] + \frac{1}{2}e_{32}[\gamma_\mu, \not{k}] + ie_{33}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k^\nu K^\lambda\gamma^\rho\gamma_5, \qquad \text{(VI.9.95)}$$

这里 e_1, e_{11}, $\cdots$, e_{33} 为 p'^2, p^2 和 k^2 的不变量函数，即

$$e_1 \equiv e_1(p'^2, p^2; k^2), \text{ 等等，}$$

而

$$K = p' + p, \quad k = p' - p.$$

在 p' 和 p 的交换下，e_1, e_{12}, $\cdots$, e_{33} 有类似于方程 (VI.3.43) 和 (VI.3.44) 中所规定的对称性质.

记住，在第 V 章讨论的质壳上减除程序中，顶角函数重正化常数的倒数等同于函数 e_1. 在这里吸引人的是作同样的认证. 在现在的减除方案中这样做，关系 $Z_1^{em} = Z_2^{em}$ 就不再是真实的了；虽然这并不是不能接受的，但重正化的讨论将更为复杂，为了适当定义 Z_2^{em}，有必要考虑在方程 (VI.2.83) 所给出的 Ward-Takahashi 恒等式；它得到不变量函数之间下面的关系：

$$k^2 e_{11} + k \cdot K e_{21} = m_R[-a(p') + a(p)], \quad \text{(VI.3.96a)}$$

$$e_1 + k^2 e_{12} + k \cdot K e_{22} = 1 + \frac{1}{2}[\sigma_f(p'^2) + \sigma_f(p^2)], \quad \text{(VI.3.96b)}$$

$$k^2 e_{13} + k \cdot K e_{23} = \frac{1}{2}[\sigma_f(p'^2) - \sigma_f(p^2)], \quad \text{(VI.3.96c)}$$

$$k^2 e_{14} + k \cdot K \sigma_{24} + e_{32} = 0. \quad \text{(VI.3.96d)}$$

在减除点

$$p'^2 = p^2 = k^2 = -M^2,$$

由于类似于方程 (VI.3.44) 和 (VI.3.45) 的对称关系，方程 (VI.3.96a)，(VI.3.96c) 和 (VI.3.96d) 恒等地被满足，同时方程 (VI.3.96b) 给出:

$$e_1(-M^2,-M^2,-M^2) - M^2\sigma_{12}(-M^2,-M^2,-M^2) = 1 + \sigma_f(-M^2). \quad \text{(VI.3.97)}$$

由方程 (VI.3.93) 可以看出，顶角函数重正化常数的恰当定义为

$$(Z_1^{cm})^{-1} = e_1(-M^2,-M^2,-M^2) - M^2\sigma_{12}(-M^2,-M^2,-M^2). \quad \text{(VI.3.98)}$$

相对比，在第 V 章所讨论的质壳上的减除中，方程 (VI.3.96) 给出

$$\sigma_1(m_R^2, m_R^2, 0) = 1 + \sigma_f(m_R^2). \quad \text{(VI.3.99)}$$

的确，在此情形中 γ_μ 项的系数被认为是顶角重正化常数.

方程 (VI.3.97) 和 (VI.3.99) 清楚地说明，为了维持 Z_1^{cm} 和 Z_2^{cm} 之间的恰当关系，利用 Ward-Takahashi 恒等式是必要的. 现在转到讨论量子色动力学.

动量空间减除的量子色动力学

(A) 胶子传播子

类似于方程 (VI.3.54)，按照关于传播子的横向部分的

"边界条件"来定义胶子波函数的重正化

$$\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k)^t \to Z_3 D^{ab}_{F\mu\nu}(k)^t, \qquad \text{(VI.3.100)}$$

上式可由方程 (VI.2.50) 推断出

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi(-M^2). \qquad \text{(VI.3.101)}$$

胶子波函数重正化常数的这个定义使方程 (VI.3.31) 到一圈阶有限.

胶子谱函数 $\Pi(k^2)$ 的显式计算是冗长的. 它到 g_R 第二阶的形式可以在文献 [29] 中得到:

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(k^2) = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\Big\{&\Big[\frac{13}{6} - \frac{\xi_R}{2} C_2(G) \\ &- \frac{4}{3} n_f T(R)\Big]\Big[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\Big(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\Big)\Big] \\ &- \frac{97}{36} C_2(G) - \frac{\xi_R}{2} C_2(G) - \frac{\xi_R^2}{4} C_2(G) \\ &+ \frac{20}{9} T(R) n_f\Big\}, \qquad \text{(VI.3.102)}\end{aligned}$$

这里 n_f 为味的数目, $C_2(G)$ 为 Casimir 算符的伴随表示

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}, \qquad \text{(VI.3.103a)}$$

并且 $T(R)$ 为表示的平方求迹

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = T(R)\delta^{ab}. \qquad \text{(VI.3.103b)}$$

往后要用另外的群量为基本表示中的 Casimir 算符 $C_2(R)$

$$T^a T^b \delta^{ab} = C_2(R) \cdot 1. \qquad \text{(VI.3.104)}$$

如果 $SU(n_c)$ 的基本表示矩阵定义为

$$T(R) = 1/2. \qquad \text{(VI.3.105a)}$$

于是

$$C_2(G) = n_c, \qquad \text{(VI.3.105b)}$$

$$C_2(R) = \frac{n_c^2 - 1}{2n_c}. \qquad \text{(VI.3.105c)}$$

这些关系的证明可以在附录 III 中找到. 由方程 (VI.3.101)

及 (VI.3.102),胶子波函数的重正化常数为

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left[-\frac{13}{6}C_2(G) - \frac{1}{2}\xi_R C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right]\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\right] - \frac{97}{36}C_2(G) - \frac{1}{2}\xi_R C_2(G) - \frac{1}{4}\xi_R^2 C_2(G) + \frac{20}{9}T(R)n_f\right\}. \tag{VI.3.106}$$

减除点的可能选择为 $M^2 = \mu^2$，它可使 Z_3 的表示式稍为简化.

(B) 鬼传播子

在重正化点 $q^2 = -M^2$ 处，全鬼传播子为正比于类似方程 (VI.3.58) 的自由形式

$$\bar{D}_F^{ab}(q) \xrightarrow[q^2\to -M^2]{} \hat{Z}_3 \bar{D}_F^{ab}(q), \tag{VI.3.107}$$

是必要的. 方程 (VI.3.15) 给出

$$\hat{Z}_3^{-1} = 1 + \Sigma_g(-M^2), \tag{VI.3.108}$$

上式保证到一圈阶方程 (VI.3.15) 的有限性. $\Sigma_g(k)$ 的显式表示式到 g_R 的第二阶可以在文献 [29] 的第一篇文章中找到，援引如下:

$$\Sigma_g(q^2) = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{C_2(G)\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\xi_R\right)\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)\right] - 1\right\}. \tag{VI.3.109}$$

于是

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{C_2(G)\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\xi_R\right)\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\right] - 1\right\}. \tag{VI.3.110}$$

(C) 费米子传播子

费米子传播子在重正化点 $p^2 = -M^2$ 处取类似于方程 (VI.3.64) 的极限形式:

$$\bar{S}_F(p) \to Z_2 S_F(p) = \frac{Z_2}{\not{p} - m_R}. \qquad \text{(VI.3.111)}$$

费米子波函数及质量的重正化常数类似于量子电动力学的方程 (VI.3.91) 可以利用全费米子传播子方程 (VI.3.111) 得到:

$$\begin{aligned}\bar{S}_F^{-1}(p) &= \not{p}[1 + \Sigma_f(p^2)] - m_R[1 + A(p^2)] \\ &+ Z_2\delta m \to m_R[\Sigma_f(-M^2) - A(-M^2)] \\ &+ Z_2\delta m + (\not{p} - m_R)[1 + \Sigma_f(-M^2)] \\ &+ O(p^2 + M^2). \qquad \text{(VI.3.112)}\end{aligned}$$

上式意味着

$$Z_2^{-1} = 1 + \Sigma_f(-M^2), \qquad \text{(VI.3.113)}$$

及

$$m_R[\Sigma_f(-M^2) - A(-M^2)] + Z_2\delta m = 0. \qquad \text{(VI.3.114)}$$

最后的表示式,连同方程 (VI.3.9d),给出

$$Z_m = 1 + Z_2^{-1}[\Sigma_f(-M^2) - A(-M^2)]. \qquad \text{(VI.3.115)}$$

可以通过包括必要的群因子在内,由相应的量子电动力学结果,方程 (VI.1.8) 得到 Σ_f 和 A 的第二阶贡献的显式表示式

$$\begin{aligned}&\not{p}\Sigma_f^{(1)}(p^2) - m_R A^{(1)}(p^2) \\ &= \frac{g_R^2}{16\pi^2}(4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) C_2(R) \int_0^1 dx \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a^\varepsilon}[2(1-\varepsilon)(1-x) \right. \\ &- 2(1-\xi_R)x]\not{p} - 2(1-\xi_R)(1-x) \\ &\left. \cdot \frac{x^2 p^2}{a^{1+\varepsilon}}\not{p} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a^\varepsilon}[-3 + 2\varepsilon - \xi_R]m_R \right\},\end{aligned}$$

(VI.3.116)

这里

$$a \equiv m_R^2 x^2 - (p^2 - m_R^2)x(1-x) - i\varepsilon,$$

$$C(R) \equiv T^a T^b \delta_{ab} = \frac{n_c^2 - 1}{2n_c},$$

而 $C_2(R)$ 由方程 (VI.3.105c) 给出，对于 $SU(3)$，$C_2(R)=4/3$. 注意方程 (VI.3.16) 和 (V.1.2) 之间的符号差别. 于是

$$\Sigma_f^{(1)}(p^2) = \frac{g_R^2}{16\pi^2}(4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) C_2(R) \int_0^1 dx$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{a^\varepsilon} [2(1-2x) + 2\xi_R x] - \frac{2(1-x)}{a^\varepsilon} \right.$$

$$\left. - 2(1-\xi_R)(1-x)\frac{x^2 p^2}{a^{1+\varepsilon}} \right\}, \qquad \text{(VI.3.117)}$$

$$A^{(1)}(p^2) = \frac{g_R^2}{16\pi^2}(4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) C_2(R)$$

$$\cdot \int_0^1 dx \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{a^\varepsilon} [-3 + 2\varepsilon - \xi_R], \qquad \text{(VI.3.118)}$$

它对于 $p^2 < m_R^2$ 可以用超几何函数来表示[34]. 到一圈阶重正化常数可以由这些表示式计算出来:

$$Z_2^{-1} = 1 + \Sigma_f^{(1)}(-M^2), \qquad \text{(VI.3.119)}$$

$$Z_M = 1 + [\Sigma_f^{(1)}(-M^2) - A^{(1)}(-M^2)]. \qquad \text{(VI.3.120)}$$

注意，在 $\Sigma_f^{(1)}(-M^2)$ 和 $A^{(1)}(-M^2)$ 中没有红外发散性.

(D) 三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角

为了得到顶角函数的重正化常数，有必要考虑适当的 Ward-Takahashi 恒等式. 在重正化减除点 $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = -M^2$ 处，推广的 Ward-Takahashi 恒等式由方程 (VI.3.39b) 或 (VI.3.39e) 给出下面的关系:

$$\hat{Z}_3^{-1}\left[\tilde{A}_1 + \frac{M^2}{2}\tilde{A}_2 + \frac{M^2}{2}\tilde{A}_3\right]$$

$$= Z_3^{-1}\left[\tilde{B}_1 + \frac{M^2}{2}\tilde{B}_{21} - M^2\tilde{B}_{22}\right], \qquad \text{(VI.3.121)}$$

这里利用了方程 (VI.3.101) 及 (VI.3.108)，并且

$$\tilde{A}_1 \equiv A_1(-M^2, -M^2, -M^2), \text{ 等等},$$
$$\tilde{B}_1 \equiv B_1(-M^2, -M^2, -M^2), \text{ 等等},$$

注意，在减除点

$$k_i \cdot k_l = M^2/2, \quad i \neq l.$$

由方程 (VI.3.39a)，(VI.3.39d) 和 (VI.3.39e) 给出的关系平凡地被满足，因而这些表示式的两端为零. 方程 (VI.3.29) 意味着，二顶角函数重正化常数可以定义如下：

$$Z_1^{G-1} = \tilde{A}_1 + \frac{M^2}{2}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3), \qquad \text{(VI.3.122)}$$

及

$$\hat{Z}_1^{-1} = \tilde{B}_1 + \frac{M^2}{2}(\tilde{B}_{21} - \tilde{B}_{22}). \qquad \text{(VI.3.123)}$$

如文献 [35] 所指出，在目前的重正化点计值时，自然地认证 A_1，它是全顶角函数方程 (VI.3.25) 中乘以裸三胶子顶角的系数，因为 Z_1^{G-1} 在比 g_R^2 更高的阶中在唯一重正化耦合常数的要求和推广的 Ward-Takahashi 恒等式之间将会引起矛盾.

应该注意，在现在的减除方案中，与裸顶角部分相乘的系数的重正化是与“质壳上”的重正化不同的. 在“质壳上”的方案中系数分别为 Z_1^{G-1} 和 $\hat{Z}_1^{-1}$，而在现在的减除方案中系数为重正化常数加附加的有限常数.

零质量费米子的 $\tilde{A}_1$，$\tilde{A}_2$ 和 $\tilde{A}_3$ 的显式表示式可以在文献 [30] 中找到，现陈述如下：

$$\tilde{A}_1 = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\right)\right.$$
$$\cdot\left(-\frac{17}{12}C_2(G) + \frac{3}{4}\xi_R C_2(G)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8}{6}T(R)n_f\right) + C_2(G)\left[-\frac{3}{8} + \frac{23}{72}I\right.\right.$$

$$+\frac{3}{8}\xi_R(1+I)+\xi_R^2\left(-\frac{5}{8}+\frac{1}{12}I\right)$$
$$+\frac{1}{24}\xi_R^3\Big]+T(R)n_f\left[2-\frac{8}{9}I\right]\Big\},\quad\text{(VI.3.124a)}$$

$$M^2\tilde{A}_2=\frac{g_R^2}{16\pi^2}\Big\{C_2(G)\Big[-\frac{97}{216}-\frac{67}{216}I$$
$$+\xi_R\left(\frac{3}{4}-\frac{I}{12}\right)+\xi_R^2\left(-\frac{5}{24}+\frac{1}{8}I\right)$$
$$+\xi_R^3\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{36}I\right)\Big]+T(R)n_f$$
$$\cdot\left(-\frac{8}{27}+\frac{16}{17}I\right)\Big\},\quad\text{(VI.3.124b)}$$

$$M^2\tilde{A}_3=\frac{g_R^2}{16\pi^2}\Big\{C_2(G)\Big[-\frac{435}{216}-\frac{179}{216}I$$
$$+\xi_R\left(\frac{1}{2}+\frac{I}{2}\right)+\xi_R^2\left(\frac{23}{24}-\frac{7}{24}I\right)$$
$$-\xi_R^3\left(\frac{5}{36}+\frac{I}{36}\right)\Big]+T(R)n_f\left(\frac{20}{27}+\frac{32}{27}I\right)\Big\},$$
$$\text{(VI.3.124c)}$$

这里 $T(R)$ 和 $C_2(G)$ 在方程 (VI.3.105a) 和 (VI.3.105b) 中给出.

$$I\equiv-2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-x+1}dx=2.34390724\cdots.$$

不同于质壳上的情况，复合胶子鬼顶角的函数 $\bar{B}_1$, $\bar{B}_{11}$, 等等，不能在任何特殊的规范中简单地计算出来.

(E) 费米子费米子鬼顶角和复合费米子鬼顶角.

在减除点

$$p'^2=p^2=k^2=-M^2.$$

由于方程 (VI.3.44) 和 (VI.3.48b) 中所列举的对称关系，方程 (VI.3.51a), (VI.3.51c) 和 (VI.3.51d) 恒为零. 然而，如

在往后将要注释的，如果这些表示式取导数，就可以得到非平凡的关系. 方程 (VI.3.51b) 给出

$$\hat{Z}_3^{-1}\{\tilde{E}_1 - M^2\tilde{E}_{12}\} = Z_2^{-1}\{\tilde{F}_1 + 3M^2F_4\} - 2\{m_R[1 + A(-M^2)] - Z_2\delta m\}\tilde{F}_2, \quad \text{(VI.3.125)}$$

这里利用了式 (VI.3.108) 及 (VI.3.113)，并且

$$\tilde{E}_1 \equiv E_1(-M^2,-M^2,-M^2), \text{ 等等},$$

及

$$\tilde{F}_1 \equiv F_1(-M^2,-M^2,-M^2), \text{ 等等}.$$

方程 (VI.3.114) 容许把方程 (VI.3.125) 重写为

$$\hat{Z}_3^{-1}[\tilde{E}_1 - M^2\tilde{E}_{12}] = Z_2^{-1}[\tilde{F}_1 + 3M^2\tilde{F}_4 - 2m_R\tilde{F}_2]. \quad \text{(VI.3.126)}$$

该方程表明，费米子费米子胶子顶角重正常数 Z_1^f 的定义为：

$$Z_1^{f-1} = \tilde{E}_1 - M^2\tilde{E}_{12}. \quad \text{(VI.3.127)}$$

也定义

$$Z_1^{f-1} = \tilde{F}_1 + 3M^2\tilde{F}_4 - 2m_R\tilde{F}_2, \quad \text{(VI.3.128)}$$

上式除通过 Ward-Takahashi 恒等式以外不直接起作用. 现在方程 (VI.3.12) 与方程 (VI.3.6a) 相比较，给出

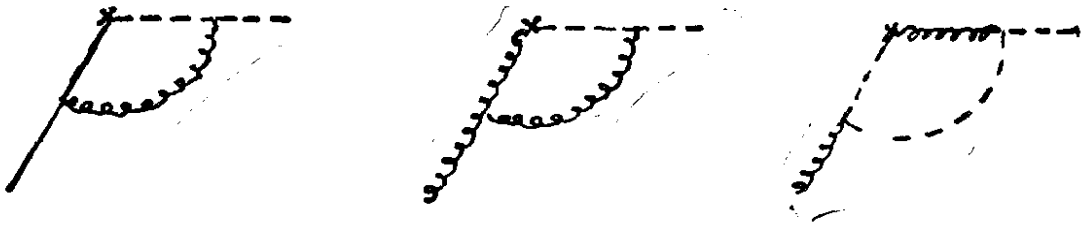
$$Z_1^f/Z_2 = Z_1^f/\hat{Z}_3, \quad \text{(VI.3.129)}$$

有必要

$$Z_1^f = \hat{Z}_1. \quad \text{(VI.3.130)}$$

方程 (VI.3.130) 是否普遍满足呢？在 $\hat{Z}_1$ 和 Z_1^f 中这个 ε 极点项是等同的，但是它们的有限部分并不相等，有限部分为 g_R^2 量级，或者更高的阶. 通过考虑图 VI.36 所示的第二阶贡献，可以验证这个论点. 在 Z_1^f 中的常数项是由图 VI.36 (a) 推出的，它与费米子质量 m_R 有关，但是，由图 VI.36(b) 和 (c) 推出的 $\hat{Z}_1$ 与 M_R 无关. 由方程 (VI.3.51a), (VI.3.5c) 和 (VI.3.51d)，通过相对于费米子之一的动量微分，而其他的动量保持固定时，它可以得到附加的关系. 结果是复杂的，并

且不同于质壳上的情形[参看方程 (VI.3.59)],对于目前的议题不是有用的.



(a) (b) (c)

图 VI.36

到一圈阶，可以用两个方式来满足方程 (VI.3.51a): (a) 保持方程 (VI.3.127) 和 (VI.3.128)，但选取一个特殊的 M 值,使满足方程 (VI.3.130). (b) 修正方程 (VI.3.127)，使满足要求. 然而，在较高阶做这件事，两都种方式不是所要求的.

结束本节,当考虑微扰展开式的一般量级时,为什么约束由于推广的 Ward-Takahashi 恒等式不能忽略，应该作出附加的注释. 推广的 Ward-Takahashi 恒等式是由于不变性原理推导出来的，因此，微扰计算的一切阶都得遵从推广的 Ward-Takahashi 恒等式. 如果简单地认为 $\tilde{A}_1$ 是三胶子顶角的重正化常数，

$$\tilde{A}_1 \to Z_1^{G^{-1}}.$$

下面得到

$$\hat{Z}_1^{-1} = \tilde{B}_1 + \frac{M^2}{2}\left\{-\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{22} + \frac{Z_2}{\hat{Z}_3}(\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3)\right\}. \tag{VI.3.131}$$

到一圈阶,这对于 $\tilde{A}_2$ 是一个可接受的定义，并且 $\tilde{A}_3$ 为 g_R^2 量级;因此实际上 $Z_2/\hat{Z}_3$ 要用 1 代替. 于是 $\hat{Z}_1^{-1}$ 的发散项,如所要求的,是等同于 B_1 的发散项. 对于 g_R^4 阶，$Z_2/\hat{Z}_3$ 的 g_R^2 阶

发散项连同 $\tilde{A}_2 + \tilde{A}_3$ 的 g_R^2 阶项对方程 (VI.3.131) 有贡献，因而在 $\hat{Z}_1^{-1}$ 和 B_1 中的紫外发散项是不同的. 这对于重正化是不能接受的. 对于较高的阶，可以得到类似的结论. 这个例子说明，在 Ward-Takahashi 恒等式和重正化常数之间保持适当的关系的必要性.

VI. 4 选取量子电动力学的二圈计算和极小减除方案

在前节中讨论的两个减除方案有某些缺点. 就是由于红外奇点集聚在阈能处对于非阿贝耳规范理论质壳上的减除是不能存活的. 动量空间减除可能导致补充 Ward-Takahashi 恒等式的复杂性，而且计算任务是颇为繁重的. 对比之，第三个方案，极小减除方案有某些优点. 一个优点是，在各种重正化常数之间所要求的关系自动地可以由推广的 Ward-Takahashi 恒等式得到. 另一个优点是，低阶重正化常数的计算易于用手算处理. 为了说明这一点，在本节的第二部分将对于光子波函数重正化常数计算二圈的贡献. 此外，在 § 6.6 中将在极小减除方案中介绍量子色动力学的一圈计算. 另一方面，即使在一迴路量级中，例如，由于所包含的许多不同独立张量的簿记问题，计算三胶子顶角的 A_1，A_2 和 A_3 函数也是很冗长的. 方程 (VI. 3.100a)—(VI.3.100c) 所引用的表示式是文献 [30] 通过所谓 Schoonship[36] 的代数运算计算机密码得到的. 文献 [30] 的第一篇文章的作者曾指出，所需要的计算任务怎样通过“典型地包含几千项的中间步骤”表示出来.

't Hooft[31] 在讨论维数正规化方案的重正化群时提出了极小减除方案. 在本节中将给出 't Hooft 论据的简短叙述.

接着叙述它的修正方案(修正的极小减除方案)。往后将讨论这些方案的缺点。

在前节中已经提到，重正化常数一般包含发散部分和有限部分。在维数重正化方案中认为发散部分是 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的幂极点项，这里 $\varepsilon \equiv 2-n/2$，而 n 为空时的解析延拓维数。极点项的系数是唯一的，并且由所考虑的场论结构来确定。另一方面，有限部分与定义发散性所取的减除点有关。而且，发散部分自动地满足适当的推广的 Ward-Takahashi 恒等式，但是有限部分必须要以确定的方式来安排，以使满足 Ward-Takahashi 恒等式。't Hooft 曾提出，简单地认为重正化常数是维数正规化的适当的 ε 极点项。这使微扰计算的某些方面大为简化。

下面的讨论基本按照 't Hooft 的论述。给出一个可重正化的场论，拉氏函数定义为

$$\mathscr{L}(\phi_{Bj}, \partial_\mu \phi_{Bj}, g_{Bj}, m_{Bj}),$$

这里 $\phi_{Bj}, j = 1, 2, \cdots, n$，为裸场变数，$m_{Bj}$ 为裸质量，g_{Bj} 为裸耦合常数，这些常数是理论的展开参数。当然，在该理论中所计算的高阶过程包含紫外发散性。已假定，Feynman 振幅是用维数正规化方案来正规化的。拉氏函数用重正化场，质量及耦合常数，可以重写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} \to & \mathscr{L}(\phi_{Rj}, \partial_\mu \phi_{Rj}, g_{Rj}, m_{Rj}) \\ & + \Delta\mathscr{L}(\phi_{Rj}, \partial_\mu \phi_{Rj}, g_{Rj}, m_{Rj}).\end{aligned} \tag{VI.4.1}$$

下指标 R 代表这些量是重正化的。$\Delta\mathscr{L}$ 包括一切抵消项。构成方程 (VI.4.1) 务使一切 Green 函数在 g_{Rj} 的各阶中当取极限 $\varepsilon \to 0$ 时是有限的。重正化的量和未重正化的量与相乘的重正化常数关系如下：

$$\phi_{Bj} = \sqrt{Z_{\phi i}}\, \phi_{Rj},$$

$$g_{Bj} = Z_{gj} g_{Rj},$$

$$m_{Bj} = Z_{m_j} m_{Rj}. \qquad \text{(VI.4.2)}$$

重正化常数 $Z_{\phi j}$, Z_{gj} 及 Z_{mj}, 以及裸量都是紫外发散的. 抵消项拉氏函数如同通常一样由重正化常数和重正化的量组成.

为使讨论简化, 在相继的讨论中将假定理论中只有一个玻色子场, 没有类如方程 (I.2.2a) 所给出的 ϕ^4 理论的导数耦合. 于是裸耦合 g_B 有质量维数 2ε [参看方程 (IV.3.31)]. 重正化耦合 g_R 将取为无量纲的. 为了做到这一点, 需要一个质量单位, 并用 μ 来表示. 为讨论方便起见, 重正化质量 m_R 也假定为无量纲的. 裸质量 m_B 将用质量单位来表示. 为了使它与通常的质量相区别, 将用 $\tilde{m}_R$ 来表示. 在这个方式中, 理论包含两个无量纲的参数 g_R 及 m_R, 和一个固定的质量单位 μ. 质量单位 μ 是由于特殊的正规化需要, 而由理论外部引入的. 注意, 如果采取通常的方法, 使重正化质量有固有的量纲, 则仍然有两个无量纲的参数和一个质量标度: g_R 和重正化质量与 μ 之比为无量纲的参数; μ 为质量标度. 并不限于所讨论像 ϕ^4 理论的简单理论, 结果是普遍适合的.

起始, 把 ϕ^4 理论的拉氏函数方程 (I.2.2a) 用裸量和重正化的量二者重写为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\phi_B, \partial_\mu\phi_B, g_B, m_B) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_B)^2 \\
&- \frac{1}{2} m_B^2\phi_B^2 - \frac{g_B}{4}\phi_B^4 = \frac{1}{2} Z_3(\partial_\mu\phi_R)^2 \\
&- \frac{1}{2} Z_3 m_B^2\phi_R^2 - \frac{g_B}{4} Z_3\phi_R^4 \\
&= \frac{1}{2} Z_3(\partial_\mu\phi_R)^2 - \frac{1}{2} Z_3 Z_m\tilde{m}_R^2\phi_R^2 \\
&- \frac{g_R}{4}\mu^{\rho\varepsilon} Z_1\phi_R^4 = \mathscr{L}(\phi_R, \partial_\mu\phi_R, g_R, m_R) \\
&+ \Delta\mathscr{L}, \qquad \text{(VI.4.3)}
\end{aligned}$$

这里 $\rho = 2$，并且

$$\mathscr{L}(\phi_R, \partial_\mu\phi_R, g_R, m_R) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_R)^2$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2\tilde{m}_R^2\phi_R^2 - \frac{g_R}{4}\mu^{\rho\varepsilon}\phi_R^4 \qquad \text{(VI.4.4a)}$$

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial_\mu\phi_R)^2 - \frac{1}{2}(Z_3Z_m - 1)\mu^2\tilde{m}_R^2\phi_R$$

$$-\frac{g_R}{4}\mu^{\rho\varepsilon}(Z_1 - 1)\phi_R^4. \qquad \text{(VI.4.4b)}$$

注意，在维数正规化中，当 μ 保持为质量标度时，场的质量用 m_B 或 m_R 来表示。量 Z_1 和 Z_3 分别为顶角和波函数的重正化常数。现在裸参数可以等于重正化参数，并且重正化常数为

$$\phi_B = \sqrt{Z_3}\,\phi_R, \qquad \text{(VI.4.5)}$$

$$g_B = \mu^{\rho\varepsilon}(Z_1/Z_3^2)g_R,$$

$$m_B^2 = \mu Z_m\tilde{m}_R^2. \qquad \text{(VI.4.6)}$$

在充分小的 g_R 的微扰展开式中，Z_m 和 Z_1，Z_3^{-2} 为 g_R 的幂级数。幂级数的系数为理论的无量纲量的和定义理论的重正化参数的函数。在维数正规化中，重正化参数为 λ_R，$\tilde{m}_R$，及 $\varepsilon = 2 - n/2$。't Hooft 建议，一切重正化常数可以用下面的方式表示为 $1/\varepsilon$ 的幂级数：零阶项完全由树图确定；圈修正只对包含 $1/\varepsilon$ 的不为零的幂有贡献。这就是说，包含 $1/\varepsilon$ 不为零的幂的重正化常数项被认为是发散的，即是高阶贡献的 ε 极点项。从而，它一般可以写为

$$g_B = \mu^{\rho\varepsilon}\left\{g_R + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=2}^{\infty}a_{1k}(\tilde{m}_R)g_R^k + \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=3}^{\infty}a_{3k}(\tilde{m}_R)g_R^k + \cdots\right\}$$

$$= \mu^{\rho\varepsilon}\left\{g_R + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(g_R, \tilde{m}_R)}{\varepsilon^k}\right\}, \qquad \text{(VI.4.7)}$$

这里

$$a_k(g_R,\tilde{m}_R)\equiv\sum_{j=k+1}^{\infty}a_{kj}(\tilde{m}_R)g_R^j,\ k=1,2,\cdots,\tag{VI.4.8}$$

并且

$$\begin{aligned}m_B^2&=\mu^2\left\{\tilde{m}_R^2+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}b_{1k}(\tilde{m}_R)g_R^k\right.\\&\left.+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{\infty}b_{2k}(\tilde{m}_R)g_R^k+\cdots\right\}\\&=\mu^2\left\{\tilde{m}_R^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(\tilde{m}_R)}{\varepsilon^k}\right\},\end{aligned}\tag{VI.4.9}$$

这里

$$b_k(g_R,\tilde{m}_R)\equiv\sum_{j=k}^{\infty}b_{jk}(\tilde{m}_R)g_R^j,\ k=1,2,\cdots.\tag{VI.4.10}$$

展开系数 $a_{kj}(\tilde{m}_R)$ 和 $b_{kj}(\tilde{m}_R)$ 的重要性质是这些系数对于 $\tilde{m}_R\to 0$ 都是非奇异的. 由 § IV.4 回想到，质量奇异性与质壳上的振幅相联系，并且对于一个可重正化的理论，只有容许的紫外发散性；因此没有系数正比于 $\ln(m)$ 的发散性. 而且，如 § V.1 所指出，红外奇点和紫外奇点是可以分开的；在给定的正规化方案中，分开是唯一的. 因此，在认证 Feynman 振幅的紫外发部分的过程中，为了避免质量奇点的出现，一切外动量都保持为欧氏值. 这个信息使以后确定 $a_{kj}(\tilde{m}_R)$ 与 $\tilde{m}_R$ 无关而 $b_{kj}(\tilde{m}_R)$ 正比于 $\tilde{m}_R^2$ 成为可能.

在方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9) 中，不同项的起源应该加以注释，首先考虑方程 (VI.4.9). 正比于 $\tilde{m}_R^2$ 的项来自于图 VI.1(a) 所示的自由传播子. g_R/ε 项是图 VI.2(a) 所示的一圈自能修正的结果. 高阶项 g_R^k/ε，$k\geq 2$，来自于类如图 VI.2(a)，等等，二圈图和多圈图. 可以类似地说明 $\frac{1}{\varepsilon^2}$，$\frac{1}{\varepsilon^4}$ 项

等.

由方程 (VI.4.7)，与 ε 无关的项来自于图 VI.1(b) 所示的树图. g_R^2/ε 项来自于对图 VI.2(b) 所给出的顶角的一圈修正. 较高阶项 g_R^k/ε, $k \geqslant 3$, 来自于较高阶图形的贡献. 类似地，可以追溯正比于 $1/\varepsilon^2$、$1/\varepsilon^3$ 等项的起源.

关于展开系数 a_{kj} 和 b_{kj} 的约束 类似于其他可重正化的程序，这些程序具有不确定性，展开式 (VI.4.7) 和(VI.4.9) 对于给定一组未重正比参数不是唯一的. 在极限 $\varepsilon \to 0$ 中，有无限多的重正化参数集合描述相同的物理学，这些参数可以对未重正化的参数给出展开式. 对于任意的空时维数，两个等价的重正化集合关系如下:

$$g_R \to g_R + e_1\varepsilon + e_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad \text{(VI.4.11a)}$$

$$\tilde{m}_R^2 \to \tilde{m}_R^2 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + \cdots, \qquad \text{(VI.4.11b)}$$

这里 $e_1, e_2, \cdots$, 和 $f_1, f_2, \cdots$, 在极限 $\varepsilon \to 0$ 中是正则的. 在该极限中两个集合当然符合一致. 代换方程 (VI.4.11) 和 (VI.4.9) 就得到裸参数的不同表示式为:

$$g_B = \mu^{p\varepsilon}\left\{\sum_{l=1}^{\infty} C_l(g'_R, \tilde{m}'^2_R)\varepsilon^l + g'_R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k(g'_R, \tilde{m}'^2_R)}{\varepsilon^k}\right\}, \qquad \text{(VI.4.12)}$$

及

$$m_B^2 = \mu^2\left\{\sum_{l=1}^{\infty} D_l(g'_R, \tilde{m}'^2_R)\varepsilon^l + \tilde{m}_R^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b'_k(g'_k, \tilde{m}'^2_R)}{\varepsilon^k}\right\}, \qquad \text{(VI.4.13)}$$

这里 g'_R 和 $\tilde{m}'_R$ 为新的重正化耦合常数和质量. 不管不确定性，存在着一个唯一的 S 矩阵. 为了两组展开式方程 (VI.4.7) 及 (VI.4.9) 和方程 (VI.1.12) 及 (VI.4.13) 在微扰展开

式中逐阶得到相同的有限 S 矩阵，ε 的正幂系数必须为零，即

$$C_k(g'_R, \tilde{m}'^2_R) = 0, \qquad \text{(VI.4.14a)}$$

$$D_k(g'_R, \tilde{m}'^2_R) = 0, k = 1, 2, \cdots \qquad \text{(VI.4.14b)}$$

因而唯一容许的展开式为方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9). 在下面将看到，这个要求会导致展开系数 $a_{kj}(\tilde{m}_R)$ 和 $b_{kj}(\tilde{m}_R)$ 的约束.

g_R, $\tilde{m}_R$ 的标度性质 现在考虑质量标度的变分效应. 对于一组给定的未重正化的参数，不同的质量标度 μ 将导致不同的正重化参数集合. 这类似于通常的情况，在通常方法中，重正化参数随固定的未重正化参数的减除点而改变. 下面讨论质量标度 μ 改变的结果. 令

$$\mu = \mu'(1 + \delta/2), \qquad \text{(VI.4.15)}$$

这里 δ 为无限小的常数. 考虑近似到 δ 的第一阶的裸参数的改变. 方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9) 对于 $\rho = 2$ 改变为

$$\begin{aligned} g_B &= \mu'^{\rho\varepsilon}(1 + \delta\varepsilon)\left\{g_R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(g_R, \tilde{m}_R)}{\varepsilon^k}\right\} \\ &= \mu'^{\rho\varepsilon}\left\{\delta g_R \varepsilon + g_R + \delta a_1(g_R, \tilde{m}_R)\right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + \delta a_{k+1}}{\varepsilon^k}\right\} \end{aligned} \qquad \text{(VI.4.16)}$$

及

$$\begin{aligned} m_R^2 &= \mu'^2(1 + \delta)\left\{\tilde{m}_R^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(g_R, \tilde{m}_R)}{\varepsilon^k}\right\} \\ &= \mu'^2\left\{\tilde{m}_R^2 + \delta\tilde{m}_R^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k + \delta b_k}{\varepsilon^k}\right\} \end{aligned} \qquad \text{(VI.4.17)}$$

这些表示式并不是方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9) 的标准形式. 改变重正化耦合常数，使这些表示式恢复到标准形式. 结果正好是所预期的：质量标度的改变导致重正化参数的不同集

合．定义另外的重正化耦合常数 g_R，它与先前参数的关系为

$$g_R = \tilde{g}_R(1 - \varepsilon\delta). \tag{VI.4.18}$$

于是

$$g_B = \mu'^{\rho\varepsilon}\left\{\tilde{g}_R + \delta(a_1 - \tilde{g}_R a_{1,g}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + \delta(a_{k+1} - \tilde{g}_k a_{k+1,g})}{\varepsilon^k}\right\}, \tag{VI.4.19}$$

$$m_B^2 = \mu'^2\left\{\tilde{m}_R^2 + \delta(\tilde{m}_R^2 - \tilde{g}_R b_{1,g}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k + \delta(b_k - \tilde{g}_R b_{k+1,g})}{\varepsilon^k}\right\}, \tag{VI.4.20}$$

这里

$$a_{k,g} \equiv \frac{\partial}{\partial g_R} a_k(g_R, \tilde{m}_R^2), \tag{VI.4.21a}$$

$$b_{k,g} \equiv \frac{\partial}{\partial g_R} b_k(g_R, \tilde{m}_R^2). \tag{VI.4.21b}$$

为了把表示式方程 (VI.4.19) 和 (VI.4.20) 重写为方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9) 的标准形式，重新定义重正化的耦合常数及质量，是唯一必要的．令

$$g'_R = \tilde{g}_R + \delta(a_1 - \tilde{g}_R a_{1,g}), \tag{VI.4.22}$$

$$\tilde{m}_R^2 = \tilde{m}_R^2 + \delta(\tilde{m}_R^2 - \tilde{g}_R b_{1,g}). \tag{VI.4.23}$$

这些表示式将用在下节将要讨论的重正化群方程中．现在把裸参数用新的重正化参数来表示：

$$g_B = \mu'^{\rho\varepsilon}\left\{g'_R + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^k}[a_k + \delta a_{k+1} - \delta g'_R a_{k+1,g} - \delta a_{k,g}(a_1 - g'_R a_{1,g}) - \delta a_{k,m}(\tilde{m}_R^2 - g'_R b_{1,g})]\right\}, \tag{VI.4.24}$$

$$m_B = \mu'^2 \left\{ \tilde{m}_R'^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} [b_k + \delta b_k - \delta g_R' b_{k+1,g} \right.$$

$$\left. - \delta b_{k,g}(b_1 - g_R' b_{1,g}) - \delta b_{k,m}(\tilde{m}_R'^2 - g_R' b_{1,g})] \right\},$$

(VI.4.25)

这里

$$a_{k,m} \equiv \frac{\partial a_k}{\partial \tilde{m}_R'^2}, \quad b_{k,m} \equiv \frac{\partial b_k}{\partial \tilde{m}_R'^2}. \tag{VI.4.26}$$

注意，现在 a_k 和 b_k 为 g_R' 和 $\tilde{m}_R'^2$ 的函数.

因为质量标度的改变 $\mu \to \mu'$ 只要求重正化参数相应的改变，$g_R \to g_R'$ 及 $\tilde{m}_R \to \tilde{m}_R'$，同时裸参数的级数展开式保持它们的标准形式，故式 (VI.4.24) 和 (VI.4.25) 的展开式系数必须与 δ 无关. 这导致下面的约束：对于 $k = 1, 2, 3, \cdots$

$$a_{k,g}\left(1 - g_R \frac{\partial}{\partial g_R}\right) a_1 + a_{k,m}\left(\tilde{m}_R^2 - g_R \frac{\partial}{\partial g_R} b_1\right)$$

$$= a_{k+1} - g_R \frac{\partial}{\partial g_R} a_{k+1}, \tag{VI.4.27}$$

及

$$b_{k,g}\left(1 - g_R \frac{\partial}{\partial g_R}\right) a_1 + b_{k,m}\left(\tilde{m}_R^2 - g_R \frac{\partial}{\partial g_R} b_1\right)$$

$$= b_k - g_R \frac{\partial}{\partial g_R} b_{k+1}, \tag{VI.4.28}$$

这里为使符号简化，删去了重正化的耦合常数和质量的撇号.

为了看出这些约束将导致什么结果，要记住方程 (VI.4.8) 和 (VI.4.10). 其中 a_k 和 b_k 都是用 g_R 的幂级数来表示的. 方程 (VI.4.27) 和 (VI.4.28) 分别给出下面关于 $a_{kj}(\tilde{m}_R)$ 和 $b_{kj}(\tilde{m}_R)$ 的条件. 对于固定的 $k = 1, 2, \cdots$,

$$g_R^{k+1} \tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} a_{k(k+1)} + \sum_{l=k+2}^{\infty} \left\{ - \sum_{j=k+1}^{l-1} j(l-j) a_{kj} a_{1(l+1-j)} \right.$$

$$+\tilde{m}_R^2\frac{da_{kl}}{d\tilde{m}_R^2}+(l-1)a_{(k+1)l}\Big\}g_R^l$$

$$-\sum_{l=2k+1}^{\infty}\Big\{\sum_{j=k+1}^{l-k}(l-j)b_{1j}\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{kj}\Big\}g_R^l=0, \tag{VI.4.29}$$

及

$$\sum_{l=2k}^{\infty}\sum_{j=k}^{l-1}j(l-k)b_{jk}a_{1(l+1-j)}g_R^l$$

$$-\sum_{l=k}^{\infty}\tilde{m}_R^2\frac{db_{kl}}{d\tilde{m}_R^2}g_R^l$$

$$+\sum_{l=k+1}^{\infty}\sum_{j=k}^{l-1}\cdot(l-j)b_{1(l-j)}\frac{db_{kj}}{d\tilde{m}_R^2}g_R^l$$

$$+\sum_{l=k}^{\infty}b_{kl}g_R^l-\sum_{l=k+1}^{\infty}lb_{(k+1)l}g_R^l=0. \tag{VI.4.30}$$

这些方程在 g_R 的逐阶近似中必须被满足。另外，如所陈述的，并在下面将直接阐述的，这些方程意味着 a_{kj} 与 $\tilde{m}_R$ 无关，而 b_{kj} 正比于 $\tilde{m}_R$.

首先考虑方程 (VI.4.29)，对于固定的 k 和 $l=k+\beta$，$\beta\geqslant 1$:

$$\delta_{\beta 1}\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+1)}-\theta(\beta-k-1)$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{\beta-k}(\beta-j)b_{1(k+j)}\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+j)}+\theta(\beta-2)$$

$$\cdot\Big\{-\sum_{j=1}^{\beta-1}(k+j)(\beta-j)a_{k(k+j)}a_{1(\beta+1-j)}$$

$$+\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+\beta)}+(\beta+k-1)a_{(k+1)(k+\beta)}\Big\}$$

$$=0, \tag{VI.4.31}$$

这里

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

考虑情形 $\beta=1$:

$$\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+1)}=0, \qquad \text{(VI.4.32)}$$

该方程表明，$a_{k(k+1)}$ 与 $\tilde{m}_R$ 无关. 情形 $\beta=2$ 给出

$$-(1+k)a_{k(k+1)}a_{12}+\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+2)}$$

$$+(1+k)a_{(k+1)(k+2)}=0. \qquad \text{(VI.4.33)}$$

可以相对于 $\tilde{m}_R^2$ 进行微分，利用方程 (VI.4.32)，得到

$$\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}\left[\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+2)}\right]=0,$$

它正好就是

$$\tilde{m}_R^2\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+2)}=\text{常数}$$

因为 a_{kj} 对于 $m_k\to 0$ 是非奇点的，右边的积分常数必须为零:

$$\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{k(k+2)}=0. \qquad \text{(VI.4.34)}$$

上面的程序可以推广到任意的 β 值，并且对于一切容许的 k 和 j 值，可以结论

$$\frac{d}{d\tilde{m}_R^2}a_{kj}=0. \qquad \text{(VI.4.35)}$$

这完成上述一切 a_{kj} 与 $\tilde{m}_R$ 无关的证明. 为了说明这个事实，将写出

$$a_{kj}(\tilde{m}_R)\equiv a_{kj}^{(0)}. \qquad \text{(VI.4.36)}$$

其次，考虑方程 (VI.4.30)，该方程对于 $\beta=0,1,2,\cdots$ 及 $k=1,2,3,\cdots$，可以重写为:

$$-\tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+\beta)} + b_{k(k+\beta)}$$

$$+ \theta(\beta - k) \sum_{j=1}^{\beta-1} (k + j)\beta b_{k(\beta+j)} a_{1(\beta+1)}$$

$$+ \theta(\beta - 1) \left[\sum_{j=0}^{\beta-1} \beta b_{1\beta} \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+j)} \right.$$

$$\left. - (\beta + k) b_{(k+1)(k+\beta)} \right] = 0. \qquad \text{(VI.4.37)}$$

考虑 $\beta = 0$,

$$-\tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{kk} + b_{kk} = 0. \qquad \text{(VI.4.38)}$$

于是 $b_{kk}(\tilde{m}_R)$ 对于 $\tilde{m}_R^2$ 必须是线性的:

$$b_{kk}(\tilde{m}_R) = b_{kk}^{(0)} \tilde{m}_R^2. \qquad \text{(VI.4.39)}$$

对于 $\beta = 1$, 方程 (VI.4.37) 约化为

$$-\tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+1)} + b_{k(k+1)} + \delta_{k1} b_{11} a_{12}$$

$$+ b_{11} \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{kk} - b_{(k+1)(k+1)} = 0. \qquad \text{(VI.4.40)}$$

由方程 (VI.4.39),方程 (VI.4.40) 给出

$$-\tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+1)} + b_{k(k+1)} \sim \tilde{m}_R^2.$$

因为 b_{kj} 对于 $\tilde{m}_R \to 0$ 是非奇异的, 这个表示式意味着 $b_{k(k+1)}$ 对于 $\tilde{m}_R^2$ 也是线性的,即,

$$b_{k(k+1)}(\tilde{m}_R) = b_{k(k+1)}^{(0)} \tilde{m}_R^2. \qquad \text{(VI.4.41)}$$

进而,对于 $\beta = 2$, 得到

$$-\tilde{m}_R^2 \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+1)} + b_{k(k+2)}$$

$$+ \theta(2 - k) 2[k b_{k2} + (k + 1) b_{k3}] a_{13}$$

$$+ 2 b_{12} \left[\frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{kk} + \frac{d}{d\tilde{m}_R^2} b_{k(k+1)} \right]$$

$$\cdots (2+k)b_{(k+1)(k+2)} = 0. \qquad \text{(VI.4.42)}$$

类似的论据证明，$b_{k(k+2)}$ 正比于 $\tilde{m}_R^2$. 论据可以推广到一切容许的 b_{kj}，得到

$$b_{kj}(\tilde{m}_R) = b_{kj}^{(0)}\tilde{m}_R^2. \qquad \text{(VI.4.43)}$$

这完成展开系数的泛函相关性的研究.

用常系数，约束条件方程 (VI.4.31) 和 (VI.4.37) 对于 $\beta \geqslant 2$ 及 $k \geqslant 1$，可以写为

$$-\sum_{i=1}^{\beta-1}(k+i)(\beta-i)a_{k(k+i)}^{(0)}a_{1(\beta+1-i)}^{(0)} + (\beta+k-1)a_{(k+i)(k+\beta)}^{(0)} = 0, \qquad \text{(VI.4.44)}$$

而对于 $k \geqslant 1$，可以写为

$$\theta(\beta-k)\sum_{j=1}^{\beta-1}(k+j)\beta b_{k(\beta+1)}^{(0)}a_{1(\beta+1)}^{(0)} + \theta(\beta-1) \cdot \left[\sum_{j=0}^{\beta-1}\beta b_{1\beta}^{(0)}b_{k(k+j)}^{(0)} - (\beta+k)b_{(k+1)(k+\beta)}^{(0)}\right] = 0. \qquad \text{(VI.4.45)}$$

方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9) 现在可以写为

$$g_B = \mu^{\rho\beta}\left[g_R + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{(0)}(g_R)}{\varepsilon^k}\right], \qquad \text{(VI.4.46)}$$

及

$$m_9^2 = \mu^2\tilde{m}_R^2\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^{(0)}(g_R)}{\varepsilon^k}\right], \qquad \text{(VI.4.47)}$$

这里

$$a_k^{(0)}(g_R) = \sum_{i=k+1}^{\infty}a_{ki}^{(0)}g_R^i, \qquad \text{(VI.4.48a)}$$

$$b_k^{(0)}(g_R) = \sum_{i=k}^{\infty}b_{ki}^{(0)}g_R^i. \qquad \text{(VI.4.48b)}$$

方程 (VI.4.44) 和 (VI.4.45) 把不同的展开系数联系起来；为

了确定 g_B 和 m_B，知道 $a_j^{(0)}$，$j=2,3,4,\cdots$ 及 $b_k^{(0)}$，$k=1,2,3,\cdots$，是充分的。换言之，单极项，即正比于 $1/\varepsilon$ 的项，确定较高阶的极点。而且在下节将进行有关这个事实的评述。

回到方程 (VI.4.27)，表示式的两边乘以 $\mu^{\rho\varepsilon}/\varepsilon^k$，对于 $k=1,2,\cdots$ 求和，得到 g_B 的微分方程为：

$$(a_1^{(0)}-g_R a_{1,g}^{(0)})\frac{dg_B}{dg_R}+\varepsilon\left(g_R\frac{dg_B}{dg_R}-g_B\right)=0. \tag{VI.4.49}$$

该微分方程的通解为

$$g_B=g_0\exp\left(\int_{C_0}^{g_R}dg\left\{g+\frac{1}{\varepsilon}[a_1^{(0)}(g)-ga_{1,g}^{(0)}(g)]\right\}^{-1}\right), \tag{VI.4.50}$$

这里 g_0 和 C_0 为由边界条件确定的常数。记住方程 (VI.4.48 a)，并定义

$$a_1^{(0)}(g)-g\frac{da_1^{(0)}(g)}{dg}=\sum_{k=2}^{\infty}(1-k)a_{1k}^{(0)}g^k\equiv g^2A(g), \tag{VI.4.51}$$

这里

$$A(g)=-\sum_{j=1}^{\infty}(j-1)a_{1(j+2)}^{(0)}g^j. \tag{VI.4.52}$$

于是

$$\frac{1}{g+\frac{1}{\varepsilon}[a_1(g)-ga_{1,g}(g)]}=\frac{1}{g}-\frac{A(g)}{\varepsilon+gA(g)}.$$

因为对于 $g_R\to 0$，$g_B\to g_R\mu^{\rho\varepsilon}$。方程 (VI.4.50) 可以重写为

$$g_B=\mu^{\rho\varepsilon}g_R\exp\left\{-\int_0^{g_R}\frac{dgA(g)}{\varepsilon+gA(g)}\right\}. \tag{VI.4.53}$$

可以验证，幂级数展开式 (VI.4.46) 的 $1/\varepsilon$ 项还原为 (VI.4.53)。

对于 m_B 可以得到类似的结果.出发点为方程(VI.4.28)，该方程给出下面的微分方程:

$$\left(a_1^{(0)} - g_R \frac{da_1^{(0)}}{dg_R}\right)\frac{dm_B^2}{dg_R} + \varepsilon g_R \frac{dm_B^2}{dg_R} - m_B^2 g_R \frac{db_1^{(0)}}{dg_R} = 0, \tag{VI.5.54}$$

上式连同边界条件 $m_B^2 \to \mu^2 \tilde{m}_R^2$，当 $g_R \to 0$ 时，给出下面的解:

$$m_B^2 = \mu^2 \tilde{m}_R^2 \exp\left\{\int_0^{g_R} \frac{dg b_{1,g}^{(0)}}{\varepsilon + gA(g)}\right\}, \tag{VI.4.55}$$

这里 $A(g)$ 在方程 (VI.4.52) 中给出,关于 g_B 及 m_B 的解，和包含多重耦合和质量参数理论更详细的讨论，参阅文献[31].

极小减除 't Hooft 的重正化程序定义极小减除，其中重正化常数被认是 Feynman 振幅的发散项或 ε 极点项.边界条件，即通常方法所假定的在减除点处顶角函数和传播子的形式，在这里并不起任何作用. 这将在量子色动力学一圈结果的下面例子中加以解释.

首先,根据 't Hooft 的规定，必须要对未重正化的和重正化的参数赋予固有的维数. 在方程 (VI.3.1) 中 g 和 m 是裸参数，并且在 n 维空时内有它们的质量维数. 在方程 (VI.3.3) 和 (VI.3.4) 中,重正化参数的代换如下:

$g_R \to g_R \mu^\varepsilon$ [参看方程 (IV.3.31)],

$$m_R \to \mu \tilde{m}_R, \tag{VI.4.56}$$

因此 g_R 和 $\tilde{m}_R$ 保持为无量纲的. 于是方程 (VI.3.5) 和方程 (VI.3.2) 的最后一行被修改为

$$g_R \mu^\varepsilon = (Z_1^f)^{-1} Z_2 \sqrt{Z_3}\, g_B = (Z_1^G)^{-1} (Z_3)^{3/2} g_B = \hat{Z}_1^{-1} \hat{Z}_3 \sqrt{Z_3}\, g_B, \tag{VI.4.57}$$

及

$$m_B = Z_m \mu \tilde{m}_R. \tag{VI.4.58}$$

(A) 胶子传播子

由方程 (VI.3.88), $\Pi^{(1)}(k^2)$ 的 $1/\varepsilon$ 项可以认证为

$$\Pi^{(1)}(k^2)|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left[-\left(\frac{13}{6}-\frac{\xi}{2}\right)C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right]\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.59}$$

到一圈阶，胶子波函数重正化常数为

$$Z_3^{G^{-1}} = 1 + \Pi^{(1)}(k^2)|_\varepsilon = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left[-\left(\frac{13}{6}-\frac{\xi}{2}\right)C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right]\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.60}$$

胶子谱函数的有限部分为

$$\Pi_c^{(1)}(k^2) \equiv \Pi^{(1)}(k^2) - \Pi^{(1)}(k^2)|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left[\left(\frac{13}{6}-\frac{\xi}{2}\right)C_2(G) - \frac{4}{3}T(R)n_f\right]\cdot\left[\gamma - \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2+i\varepsilon}\right)\right] - \left(\frac{97}{36}+\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{4}\right)C_2(G) + \frac{20}{9}T(R)n_f\right\}. \tag{VI.4.61}$$

全胶子传播子现在为

$$\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2}\left[-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{Z_3^{-1} + \Pi_c(k^2)} - \xi\delta^{ab}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}. \tag{VI.4.62}$$

确实存在一个动量 $\tilde{k}$，使

$$\Pi_c(\tilde{k}^2) = 0, \tag{VI.4.63}$$

并且胶子传播子的横向部分取自由传播子的形式，即

$$\bar{D}^{ab}_{F\mu\nu}(\tilde{k})^t = \frac{Z_3}{\tilde{k}^2}\delta^{ab}\left[-g_{\mu\nu}+\frac{\tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu}{\tilde{k}^2}\right].$$

但是这个特殊的动量似乎没有意义。特别是，在方程(VI.4.61)中所定义的有限部分 $\Pi_c(k^2)$ 包含常数项 $\gamma - \ln(k^2)$，它是维数正规化的人工制品，因此不能对应于任何物理的关系。

(B) 鬼传播子

鬼谱函数的 ε 极点可以由方程 (VI.3.92) 得到

$$\Sigma_g^{(1)}(q^2)|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(G)\left\{-\frac{3}{4}+\frac{\xi}{4}\right\}\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{(VI.4.64)}$$

于是

$$\hat{Z}_3^{-1} = 1 + \Sigma_g^{(1)}(q^2)|_\varepsilon$$
$$= 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(G)\left\{-\frac{3}{4}+\frac{\xi}{2}\right\}\frac{1}{\varepsilon}. \quad \text{(VI.4.65)}$$

全鬼传播子为

$$\bar{D}_F^{ab}(q) = \frac{-\delta^{ab}}{q^2[\hat{Z}_3^{-1} - \Sigma_g(q^2)_c]}, \quad \text{(VI.4.66)}$$

这里

$$\Sigma_g^{(1)}(q^2)_c \equiv \Sigma_g^{(1)}(q^2) - \Sigma_g^{(1)}(q^2)|_\varepsilon$$
$$= \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left(\frac{3}{4}-\frac{\xi}{4}\right)\left[\gamma - \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right)\right] - 1\right\}C_2(G). \quad \text{(VI.4.67)}$$

全传播子取简单的形式

$$\bar{D}_F^{ab}(q) \to -\delta^{ab}\frac{\hat{Z}_3}{\tilde{q}^2},$$

在动量 $\tilde{q}$ 处

$$\Sigma_g(\tilde{q}^2)_c = 0. \quad \text{(VI.4.68)}$$

但是 $\tilde{q}$ 与方程 (VI.4.63) 的 $\tilde{k}$ 不同。关于胶子传播子前面讨论的最后评注也可以在这里应用。

(C) 费米子传播子

费米子波函数重正化常数现在定义为

$$Z_2^{-1} = 1 + \Sigma_f(p^2)|_\varepsilon, \tag{VI.4.69}$$

这里 $\Sigma_f(p^2)|_\varepsilon$ 可由方程 (VI.3.117) 得到

$$\Sigma_f(p^2)|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\,\xi C_2(R)\,\frac{1}{\varepsilon}, \tag{VI.4.70}$$

$$Z_2^{-1} = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\,C_2(R)\,\frac{\xi}{\varepsilon}. \tag{VI.4.71}$$

质量重正化常数由类似于方程 (VI.3.120) 的表示式给出:

$$Z_m = 1 + [\Sigma_f(p^2)|_\varepsilon - A(p^2)|_\varepsilon]. \tag{VI.4.72}$$

由方程 (VI.3.118), 得到

$$A^{(1)}(p^2)|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\,C_2(R)(-3-\xi)\,\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.73}$$

于是一圈的结果为

$$Z_m = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}(3+2\xi)C_2(R)\,\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.74}$$

现在考虑全费米子传播子

$$\begin{aligned}\bar{S}_F^{-1}(p) &= \not{p}[1 + \Sigma_f(p^2)] - \mu\tilde{m}_R[1 + A(p^2)] + Z_2\delta m \\ &= [1 + \Sigma_f(p^2)|_\varepsilon](\not{p} - \mu\tilde{m}_R) + \not{p}\Sigma_f(p^2)_c \\ &\quad - \mu\tilde{m}_R A(p^2)_c + \mu\tilde{m}_R[\Sigma_f(p^2)|_\varepsilon \\ &\quad - A(p^2)|_\varepsilon] + Z_2\delta m,\end{aligned} \tag{VI.4.75}$$

这里

$$\Sigma_f(p^2)_c \equiv \Sigma_f(p^2) - \Sigma_f(p^2)|_\varepsilon, \tag{VI.4.76a}$$

及

$$A(p^2)_c \equiv A(p^2) - A(p^2)|_\varepsilon. \tag{VI.4.76b}$$

逆费米子传播子由方程 (VI.4.69), (VI.4.72) 和定义 $\delta m = \mu\tilde{m}_R - m = (1 - Z_m)\mu\tilde{m}_R$ 可以重写为

$$\bar{S}_F^{-1}(p) = Z_2^{-1}(\not{p} - \mu\tilde{m}_R) + \not{p}\Sigma_f(p^2)_c - \mu\tilde{m}_R A(p^2)_c. \tag{VI.4.77}$$

(D) 三胶子顶角和鬼鬼胶子顶角

三胶子顶角重正化常数定义为

$$Z_1^{G^{-1}} = 1 + \tilde{A}_1|_\varepsilon, \tag{VI.4.78}$$

这里，由方程 (VI.3.124a)，

$$\tilde{A}_1|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left(-\frac{17}{12}+\frac{3}{4}\xi\right)C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{VI.4.79}$$

于是

$$Z_1^{G^{-1}} = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left(-\frac{17}{12}+\frac{3}{4}\xi\right)C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.80}$$

由文献 [30] 的第一篇文章(该文章的方程 (30a))，鬼胶子复合顶角的发散项可以写为

$$B_1|_\varepsilon = \frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(G)\frac{\xi}{2}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{VI.4.81}$$

于是

$$\hat{Z}_1^{-1} = 1 + B_1|_\varepsilon = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(G)\frac{\xi}{2}\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.82}$$

现在可以验证下面的恒等式成立，由于推广的 Ward-Takahashi 恒等式

$$\frac{Z_1^G}{Z_3} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3} = 1 - \frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(G)\left(\frac{3}{4}+\frac{\xi}{4}\right)\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.83}$$

(E) 费米子费米子胶子顶角

如在 § VI.6 中将要证明的，该顶角重正化常数为

$$Z_1^{f^{-1}} = 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2}\left\{\left(\frac{3}{4}+\frac{\xi}{4}\right)C_2(G) + \xi C_2(R)\right\}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{VI.4.84}$$

于是由方程 (VI.4.71)，

$$Z_1'/Z_2 = 1 - \frac{g_R^2}{16\pi^2} C_2(G)\left(\frac{3}{4} + \frac{\xi}{4}\right)\frac{1}{\varepsilon}, \quad (VI.4.85)$$

与方程 (VI.4.71) 相比较，可以看到，在方程 (VI.3.7a) 中所列举的恒等式到一圈是近似满足的.

修正的极小减除程序 在极小减除方案中，如在方程 (VI.4.67) 中所看到的一样，减除后的有限部分包含非物理的量 $\gamma - \ln(4\pi)$. 如上面所解释的，这个非物理的量是维数正规化方案的人工制品. 是由实现空时维数解析延拓的方法所引起的. 为了补救这个事实，已提出一个修正程序，称为修正的极小减除. 在这个修正程序中，外加有限常数 $\gamma - \ln(4\pi)$ 也包含在重正化常数中，并从有限部分消去. 在重正化常数和减除项的一切表示式方程 (VI.4.60), (VI.4.64), (VI.4.65), (VI.4.70), (VI.4.73), (VI.4.74) 和 (VI.4.79—85) 中，应该作如下的代换:

$$\frac{1}{\varepsilon} \to \frac{1}{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi). \quad (VI.4.86)$$

在方程 (VI.4.61), (VI.4.67), 等等中，项 $\gamma - \ln(4\pi)$ 被删去了. 往后将讨论量子色动力学中这个修正的意义.

极小减除程序的短评 下面是关于极小减除程序和修正极小减除程序的短评. 如上所述，在这些减除程序中，计算的任务并不是如同在动量减除程序中所要求的任务. 然而，除它们在低阶计算中相对于高阶修正给出稳定的答案的能力问题以外，它们的缺点是由物理的空时维数到任意维数，再回到物理维数的解析延拓的不确定性. 这些不确定性并不出现在动量减除方案的有限项中，这是因为把它们都归入重正化常数中了. 修正极小减除是部分补救不确定性的方法. 但是，较高阶的效应是什么呢？ 记得，一切不确定性是与 ε 极点的存在相联系的. γ 和 $\ln(4\pi)$ 因子是下面展开式的结果:

$$\Gamma(1+a\varepsilon)=1-a\gamma\varepsilon+\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\right)\varepsilon^2+\cdots,$$

这里 a 为常数，并且

$$\frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n}=\frac{(4\pi)^{\varepsilon}}{16\pi^2}=\frac{1}{16\pi^2}\left\{1+\varepsilon\ln(4\pi)+\frac{1}{2}\varepsilon^2[\ln(4\pi)]^2+\cdots\right\}.$$

当所考虑的 Feynman 积分是收敛时，$\varepsilon\to 0$ 的解析延拓没有差别. 如果 Feynman 积分是发散的，则简单的 ε 极点得到因子 γ 和 $\ln(4\pi)$，并且双 ε 极点得到简单极点 γ/ε 和 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\ln(4\pi)$ 及有限因子 $\left(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\right)\Big/2$ 和 $(\ln(4\pi))^2/2$. 因此，在包含二或多圈的 Feynman 振幅计算中，较高阶的 ε 极点出现，附加的规则必须要包括在修正减除程序中. 在极小减除程序中，Feynman 振幅的有限部分由于 ε 幂的 $\Gamma(1+\varepsilon)$ 和 $(4\pi)^{\varepsilon}$ 的展开式将包含更多的外加乱真项.

注意，在一迴路量级中，修正极小减除方案等价于直接代换

$$(4\pi)^{\varepsilon}\to 1 \text{ 及 } \Gamma(1+a\varepsilon)\to 1. \qquad \text{(VI.4.87)}$$

这表明，修正极小减除的推广要在一切高阶计算中利用方程 (VI.4.87)，使上面提到的像 $\left(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\right)$ 和 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(\ln(4\pi))^2$ 的项也包含在减除内，并且由有限部分消去.

在 § VI.7 中将给出量子色动力学中各种减除程序相对优点的判断.

在极小减除程序中量子电动力学的二圈结果 在本节的其余部分，将计算对于光子波函数重正化的二圈贡献. 将证明，只有容许的发散性出现. 在这里，如在 § VI.1 中所提到的，只遇到交叠的发散性. 在从事这个乏味的任务之前，将在

极小减除方案中扼要重述一圈的结果.

一圈结果的评述 重正化常数由方程(V.4.4)和(V.4.17)可以得到

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{\alpha_R}{4\pi}\frac{\xi}{\varepsilon}, \tag{VI.4.88}$$

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha_R}{3\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon}. \tag{VI.4.89}$$

由方程(VI.4.70),令 $C_2(R)=1$, 也可以得到相乘的重正化常数为

$$Z_m = 1 - \frac{\alpha_R}{4\pi}(3+2\xi)\frac{1}{\varepsilon}.$$

注意,该表示式不能由方程(V.1.29)通过关系 $\delta_m = (1-Z_m)m_R$ 得到,因为在质壳上的减除类如方程(V.1.29)所定义的质量抵消项与其他减除方程中的抵消项是不同的.

顶角修正和传播子的有限部分可以由第V章所给出的讨论得到. 特别是,真空极化的有限部分为

$$e_R^2\Pi_c(k^2) = \frac{\alpha_R}{3\pi}\int_0^1 dx\left\{-\gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_R^2}\right) - 6x(1-x)\ln\left[1 - x(1-x)\frac{k^2}{m_R^2} - i\varepsilon\right]\right\}.$$

对真空极化的二圈贡献 对量子电动力学初基发散图形的二圈贡献已在图 VI.12—14 中表示出来了. 只需要考虑这些图形的一粒子不可约化部分.而且, Ward-Takahashi 恒等式保证恒等式 $Z_1 = Z_2$, 并且在顶角函数和费米子传播子[参看方程(V.3.26)]之间的关系对微扰展开式的一切阶都可以保持,因此,只考虑顶角修正和真空极化,是必要的.在§ VI.1 中已证明, 对于顶角的二圈贡献只有容许的奇异性. 下面证明, 这对于真空极化也是真实的.

需要考虑的图形为图 VI.13(a)—(i), 其中图 VI.13(a)—

(c) 等同于图 VI.13(d)—(f) 的图形；图 VI.13(h) 和 (i) 也是等同的.

因为减除项与质量无关，比较方便的是令 $m_B = 0$ 进行重正化常数的计算；在此情形下，质量抵消项为零. 现在只有画在图 VI.37 中的四个不同的图形，其中表明了动量流. 在表 IV.3 中列举了 Feynman 积分的公式，并且将自由地利用方程 (IV.3.49) 所列举的恒等式，而显然不用论及这些恒等式 [37].

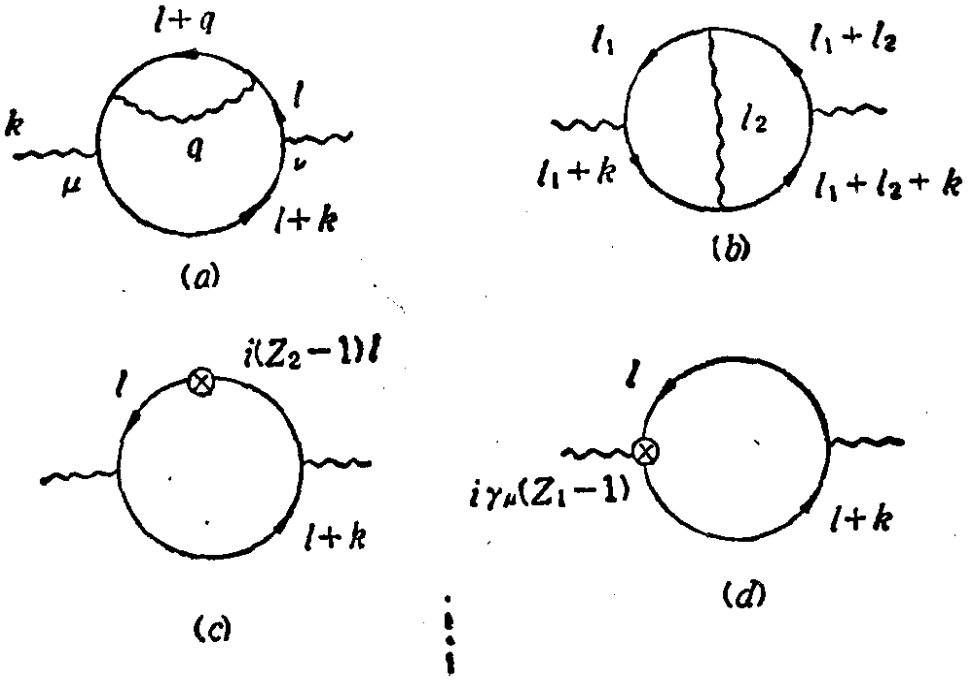


图 VI.37

依次谈一谈规范相关性. 真空极化是与规范无关的. 到一圈阶，并不引起规范问题，因为没有光子传播子出现. 对于二圈阶，规范参数通过光子传播子和重正化常数 Z_1 和 Z_2 [参看方程 (VI.4.27)] 出现在图 VI.37 的所有四个图形中. 在本节末将证明，图 VI.37 各个图形的规范相关项彼此互相抵消. 这是普遍的结果，并且对微扰展开式的一切阶都是真实的. 在量子色动力学中情况是不同的. 胶子自能贡献如 (VI.3.88)

所示，是规范有关的。在§ VI.6 中将证明，规范相关性来自于胶子中间态。

首先考虑图 VI.38(a) 所示的图形，它有下面的 Feynman 振幅

$$ie_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}(k)=\frac{i2(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^{2n}}\iint d^nl\,d^nq \cdot\frac{1}{q^2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\not l}\gamma^\lambda\frac{1}{\not l+\not q}\gamma_\lambda\frac{1}{\not l}\gamma_\nu\frac{1}{\not l+\not k}\right]. \tag{VI.4.90}$$

因为真空极化与规范无关，故利用 Feynman 规范。首先进行 q 积分：

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}(k)=\frac{2(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^{2n}}\int\frac{d^nl}{l^2(l+k)^2}\int_0^1 dx \cdot\int d^nq\,\frac{2(\varepsilon-1)\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not l(\not l+\not q)\not l\gamma_\nu(\not l+\not k)]}{(q^2-2l_x\cdot q-\Delta_x)^2}, \tag{VI.4.91}$$

这里

$$l_x\equiv -xl,\quad \Delta_x\equiv -xl^2.$$

在方程 (VI.4.91) 中，q 积分可以由位移积分变数的原点来实现

$$q\to q+l_x.$$

结果为

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}(k)=\frac{4(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^{2n}}[i\pi^{n/2}]\Gamma(\varepsilon)(1-\varepsilon) \cdot\int_0^1\frac{dx(1-x)}{[-x(1-x)]^\varepsilon}\int d^nl\,\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\not l\gamma_\nu(\not l+\not k)]}{(l+k)^2(l^2)^{1+\varepsilon}}. \tag{VI.4.92}$$

为了进 l 积分，方程 (IV.1.14b) 的公式要解析延拓到任意的 a 和 b 值

$$\frac{1}{A^aB^b}=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 dy\frac{y^{a-1}(1-y)^{b-1}}{[Ay+B(1-y)]^{a+b}}.$$

(VI.4.93)

于是

$$\int d^nl\,\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu l\gamma_\nu(l+k)]}{(l^2)^{1+\varepsilon}(l+k)^2}$$
$$=\frac{\Gamma(2+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\int_0^1 dy y^\varepsilon\int d^nl$$
$$\cdot\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(l+k_y)\gamma_\nu(l+k_y+k)]}{[l^2-(k_y^2+\Delta y)]^{2+\varepsilon}},\quad\text{(VI.4.94)}$$

这里

$$k_y=-yk,\ \Delta_y=-yk^2.$$

可以积分 (VI.4.94)，得到

$$\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}(-1)^{2+\varepsilon}4i\pi^{n/2}\left\{\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}B(2-\varepsilon,2-2\varepsilon)k^2g_{\mu\nu}\right.$$
$$\left.-B(2-\varepsilon,2-2\varepsilon)(2k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\right\}\frac{1}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}},$$

(VI.4.95)

这里 $B(a,b)$ 为 Beta 函数。然后汇集所有部分，得到

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}=\frac{\alpha_R^2}{\pi^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(1+2\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$
$$\cdot\frac{1-\varepsilon}{1-2^\varepsilon}B(2-\varepsilon,2-2\varepsilon)\cdot B(2-\varepsilon,1-\varepsilon)$$
$$\cdot\left[-(1-2\varepsilon)k_\mu k_\nu+\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon\right)k^2g_{\mu\nu}\right]$$
$$=\frac{\alpha_R}{12\pi^2}\left\{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(2\gamma\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot-2\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)-\frac{7}{2}\right)\right]-\frac{1}{2\varepsilon}k^2g_{\mu\nu}+O(\varepsilon^0)\right\}.$$

(VI.4.96)

其次考虑图 [VI.38(c)],

$$ie_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(c)} = -2\frac{(-ie_R\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n}\int d^nl\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{i}{\not l}\right.$$

$$\left.\cdot\{i(Z_2-1)\not l\}\frac{i}{\not l}\gamma_\nu\frac{i}{\not l+\not k}\right]$$

$$= 2i\pi^{n/2}\frac{e_R^2\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^n}(Z_2-1)\int_0^1 dx$$

$$\cdot\left\{-\frac{\Gamma(1-n/2)}{2\Gamma(2)}\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_\lambda]}{(\bar\Delta_x+p_x^2)^{1-n/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(1-n/2)}{\Gamma(2)}\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_\mu p_x\gamma_\nu(\not p_x+\not k)]}{(\bar\Delta_x+p_x^2)^{2-n/2}}\right\},$$

(VI.4.97)

这里

$$p_x = -xk,\quad \Delta_x = -xk^2.$$

于是

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(c)} = \frac{4\alpha_R}{\pi}(Z_2-1)\frac{1}{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)B(2-\varepsilon,2\varepsilon)$$

$$\cdot\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)^\varepsilon(-k_\mu k_\nu+k^2g_{\mu\nu}).\qquad\text{(VI.4.98)}$$

顶角抵消项,图 VI.38(d),给出

$$ie_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(d)} = -\frac{2(e_R\mu^\varepsilon)^2}{(2\pi)^n}(Z_1-1)$$

$$\cdot\int d^nl\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\not l}\gamma_\nu\frac{1}{\not l+\not k}\right].\qquad\text{(VI.4.99)}$$

因为 $Z_1 = Z_2$, 这就是负的 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(c)}$; 因此

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)(c)} + \Pi_{\mu\nu}^{(2)(d)} = 0.\qquad\text{(VI.4.100)}$$

即使费米子质量是有限的,由 Ward-Takahashi 恒等式,这个结果也成立.

计算图 VI.38(b) 所给出的振幅,是很冗长的过程. 复杂性一部分是由于交叠发散性的存在, 一部分是由于中间计算

步骤中出现很多的项。图 VI.38(b) 的 Feynman 振幅为

$$ie_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}=\frac{i(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n}\int\!\!\int d^nl_1d^nl_2$$
$$\cdot\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{l_1}\gamma^\lambda\frac{1}{l_1+l_2}\gamma_\nu\frac{1}{l_1+l_2+k}\gamma_\lambda\frac{1}{l_1+k}\right]. \tag{VI.4.101}$$

首先将证明，图 VI.38(a) 和 (b) 之和是规范不变量的。这个事实使 (VI.4.101) 的计算简化，因为唯一必要计算的是正比于 $k_\mu k_\nu$ 的项；并且正比于 $g_{\mu\nu}$ 的项可以由方程 (VI.4.96) 给出的 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}$ 来确定。

现在方程 (VI.4.90) 乘以 k^ν：

$$e_R^2k^\nu\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}=\frac{2(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n}\int\!\!\int d^nl\,d^nq\,\frac{1}{q^2}$$
$$\cdot\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\frac{1}{l}\gamma^\lambda\frac{1}{l+q}\gamma_\lambda\left[\frac{1}{l}-\frac{1}{l+k}\right]\right\}$$
$$=-\frac{2(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n}\int\!\!\int d^nl\,d^nq\,\frac{1}{q^2}\,\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu\frac{1}{l}\right.$$
$$\left.\cdot\,\gamma^\lambda\frac{1}{l+q}\gamma_\lambda\frac{1}{l+k}\right\}. \tag{VI.4.102}$$

用①编号的项被删去，因为由 § IV.3 所讨论的 't Hooft-Veltman 猜测[参看方程 (IV.3.35) 和相继的讨论]，它给出零贡献。类似地，对于方程 (VI.4.101)，

$$e_R^2k^\nu\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}=\frac{(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n}\int\!\!\int d^nl_1d^nl_2\,\frac{1}{l_2^2}$$
$$\cdot\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{l_1}\gamma^\lambda\left(\underset{\text{②}}{\frac{1}{l_1+l_2}}-\underset{\text{③}}{\frac{1}{l_1+l_2+k}}\right)\right.\cdot$$
$$\left.\cdot\,\gamma_\lambda\frac{1}{l+k}\right]. \tag{VI.4.103}$$

用⑪和⑫编号的号的项是恒等的. 考虑用⑫编号的项. 改变积分变数

$$l_1 \to -l_1 - k \text{ 及 } l_2 \to -l_2.$$

项⑫的被积函数变为

$$-\frac{1}{l_2^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{1}{l_1+k}\gamma^\lambda \frac{1}{l_1+l_2}\gamma_\lambda \frac{1}{l_1}\right]$$

$$\to \frac{1}{l_2^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{1}{l_1}\gamma_\lambda \frac{1}{l_1+l_2}\gamma^\lambda \frac{1}{l_1+k}\right]. \quad \text{(VI.4.104)}$$

上式右边是由左边表示式的所有 γ 矩阵之间插入因子 $1 = C^{-1}C$ 得到的，这里 $C = i\gamma^2\gamma^0$ 为 Dirac 场的电荷共轭矩阵(细节参看附录 IV). 于是

$$e_R^2 k^\nu \Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)} = \frac{2(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n}\iint d^n l_1 d^n l_2 \frac{1}{l_2^2}$$

$$\cdot \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{1}{l_1}\gamma^\lambda \frac{1}{l_1+l_2}\gamma_\lambda \frac{1}{l_1+k}\right]. \quad \text{(VI.4.105)}$$

显然，由 (VI.4.102) 和 (VI.4.105)，

$$k^\nu(\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)} + \Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}) = 0. \quad \text{(VI.4.106)}$$

应该注意，当费米子质量被复原时，在方程 (VI.4.102) 中用①编号的项就不再为零了. 然而，不为零的项将被质量抵消项消去，质量抵消项在目前的零质量费米子情形中并不存在. 因此，如果不令费米子质量为零，图 VI.38 (a)，(b) 和费米子质量抵消项图形将形成一个规范不变量的集合. 因而计算将变得更加复杂了.

现在把方程 (VI.4.101) 重写为

$$e_R^2 \Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)} = \frac{(e_R\mu^\varepsilon)^4}{(2\pi)^n} t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} I^{\rho\sigma\tau\eta}, \quad \text{(VI.4.107)}$$

这里

$$t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} \equiv \mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\lambda\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\tau\gamma_\lambda\gamma_\eta], \quad \text{(VI.4.108)}$$

$$I_{\rho\sigma\tau\eta} \equiv \int \frac{d^n l}{l_2^2} J_{\rho\sigma\tau\eta}, \qquad \text{(VI.4.109)}$$

$$J_{\rho\sigma\tau\eta} \equiv \int d^n l_1 \frac{l_{1\rho}(l_1+l_2)_\sigma (l_1+l_2+k)_\tau (l_1+k)_\eta}{l_1^2 (l_1+l_2)^2 (l_1+l_2+k)^2 (l_1+k)^2}. \qquad \text{(VI.4.110)}$$

为了组合分母，比较方便的是利用便于记的 Feynman 参数化公式方程 (IV.1.17).

$$J_{\rho\sigma\tau\eta} = \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{j=1}^{4} d\alpha_j \delta(1-\Sigma\alpha_j) \int d^n l_1 \cdot \frac{l_{1\rho}(l_1+l_2)_\sigma (l_1+l_2+k)_\tau (l_1+k)_\eta}{D^4}, \qquad \text{(VI.4.111)}$$

这里

$$D \equiv \alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 (l_1+l_2)^2 + \alpha_3 (l_1+l_2+k)^2 + \alpha_4 (l+k)^2 = l_1^2 - 2l_1 \cdot p_\alpha - \Delta_\alpha,$$

$$p_\alpha \equiv -(\alpha_{23} l_2 + \alpha_{34} k),$$

$$\Delta_\alpha \equiv -(\alpha_{23} l_2^2 + \alpha_{34} k^2 + 2\alpha_3 k \cdot l_2),$$

及

$$\alpha_{ji} = \alpha_j + \alpha_i.$$

在上面 D 的表示式中利用了关系 $\Sigma\alpha_j = 1$.

把分母表示式重写为

$$D = (l_1 - p_\alpha)^2 - (p_\alpha^2 + \Delta_\alpha).$$

在方程 (VI.4.110) 中作变数改变:

$$l_1 \to l_1 + p_\alpha,$$

进行 l_1 积分:

$$J_{\rho\sigma\tau\eta} = \Gamma(4) i\Pi^{n/2} \int \prod_{j=1}^{4} d\alpha_j \delta(1-\Sigma\alpha_j) \cdot \left\{ \frac{\Gamma(2-n/2)}{4\Gamma(4)} \left[\frac{g_{\rho\sigma} g_{\tau\eta} + g_{\rho\tau} g_{\sigma\eta} + g_{\rho\eta} g_{\sigma\tau}}{(p_\alpha^2 + \Delta_\alpha)^{2-n/2}} \right] ⑨ \right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Gamma(3-n/2)}{2\Gamma(4)}\Big[\overset{①}{g_{\rho\sigma}(p_a+l_2+k)_\tau(p_a+k)_\eta}\\
&+\overset{②}{g_{\rho\tau}(p_a+l_2)_\sigma(p_a+k)_\eta}+\overset{③}{g_{\rho\eta}(p_a+l_2)_\sigma}\\
&\times(p_a+l_2+k)_\tau+\overset{④}{g_{\sigma\tau}p_{a\rho}(p_a+k)_\eta}\\
&+\overset{⑤}{g_{\sigma\eta}p_{a\rho}(p_a+l_2+k)_\tau}+\overset{⑥}{g_{\tau\eta}p_{a\rho}(p_a+l_2)_\sigma}\Big]^{ⓑ}\\
&\cdot\frac{1}{(p_a^2+\Delta_a)^{3-n/2}}+\frac{\Gamma(4-n/2)}{\Gamma(4)}\\
&\cdot\left[\frac{p_{a\rho}(p_a+l_2)_\sigma(p_a+l_2+k)_\tau(p_a+k)_\eta}{(p_a^2+\Delta_a)^{4-n/2}}\right]^{©}\Big\}\\
&=J^{(a)}_{\rho\sigma\tau\eta}+J^{(b)}_{\rho\sigma\tau\eta}+J^{(c)}_{\rho\sigma\tau\eta},
\end{aligned}
\tag{VI.4.112}
$$

这里三项 $J^{(a)}_{\rho\sigma\tau\eta}$，等等，分别表示对三组用ⓐ，ⓑ 和©编号的项的积分。在分子中不同的因子显然可以写出如下：

$$
\begin{aligned}
p_a&=-\alpha_{23}l_1-\alpha_{34}k,\\
P_a+l_2&=\alpha_{14}l-\alpha_{34}k,\\
P_a+k&=-\alpha_{23}l+\alpha_{12}k,\\
P_a+l_2+k&=\alpha_{14}l+\alpha_{12}k.
\end{aligned}
\tag{VI.4.113}
$$

分母为

$$
\begin{aligned}
P_a^2+\Delta_a&=-\alpha_{14}\alpha_{23}\left\{l_2^2+\frac{2(\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4)}{\alpha_{14}\alpha_{23}}\,l_2\cdot k\right.\\
&\left.+\frac{\alpha_{12}\alpha_{34}}{\alpha_{14}\alpha_{23}}k^2\right\}=-\alpha_{14}\alpha_{23}D_1,
\end{aligned}
\tag{VI.4.114a}
$$

及

$$
D_1=l_1^2+\frac{2(\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4)}{\alpha_{14}\alpha_{23}}\,l_2\cdot k+\frac{\alpha_{12}\alpha_{34}}{\alpha_{14}\alpha_{23}}k^2.
\tag{VI.4.114b}
$$

注意，$P_a^2+\Delta_a$ 在下面的 Feynman 参数交换下为不变量的：

$$\alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_3 \text{ 及 } \alpha_2 \longleftrightarrow \alpha_4. \qquad \text{(VI.4.115)}$$

往后将利用这个变数改变。

积分 $J^{(a)}_{\rho\sigma\tau\eta}$ 被积函数的分母不包含积分变数；因此只有当该积分用方程 (VI.4.108) 来收缩时，该积分只能对 $g_{\mu\nu}$ 项有贡献，因此它将被略去。

积分 $J^{(b)}_{\rho\sigma\tau\eta}$ 首先，被积函数用方程 (VI.4.108) $t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}$ 来收缩，因而可以提取出 $g_{\mu\nu}$ 项，然后被删去了。计算是直截了当的。下面给出计算的要点，因而积极的读者可以填补缺少的步骤而不用感到抓不住代数的混乱(或者可以验证作者是否会有错误)。方程 (VI.4.112) 编号 ①，②，…，⑥ 的项用 $t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}$ 来收缩：

$$g^{\rho\sigma}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)\{\varepsilon g_{\mu\nu}g_{\tau\eta} - (2-\varepsilon)g_{\mu\eta}g_{\nu\tau} - \varepsilon g_{\mu\tau}g_{\nu\eta}\} \qquad \text{(VI.4.116a)}$$

$$g^{\rho\tau}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)\{-(2+\varepsilon)g_{\mu\nu}g_{\sigma\eta} - (2-\varepsilon)g_{\mu\eta}g_{\nu\sigma} + (2+\varepsilon)g_{\mu\sigma}g_{\nu\eta}\}, \qquad \text{(VI.4.116b)}$$

$$g^{\rho\eta}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)^2\{-g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} + g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma}\}, \qquad \text{(VI.4.116c)}$$

$$g^{\sigma\tau}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)^2\{-g_{\mu\nu}g_{\rho\eta} + g_{\mu\rho}g_{\nu\eta} + g_{\mu\eta}g_{\nu\sigma}\}, \qquad \text{(VI.4.116d)}$$

$$g^{\sigma\eta}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)\{-(2+\varepsilon)g_{\mu\nu}g_{\rho\tau} - (2-\varepsilon)g_{\mu\rho}g_{\nu\tau} + (2+\varepsilon)g_{\mu\tau}g_{\nu\rho}\}, \qquad \text{(VI.4.116e)}$$

$$g^{\tau\eta}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} = 16(1-\varepsilon)\{\varepsilon g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - (2-\varepsilon)g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - \varepsilon g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\}. \qquad \text{(VI.4.116f)}$$

利用这些恒等式得到

$$t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}J^{(b)\rho\sigma\tau\eta} = -i\pi^{n/2}\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{2}\int_0^1\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\delta(1-\Sigma\alpha_j) \cdot \frac{16}{(p_a^2+\Delta_a)^{1+\varepsilon}} \cdot \{2(1-\varepsilon)^2 l_{2\mu}l_{2\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&-2(1-\varepsilon)k_\mu k_\nu+(1-\varepsilon)(3-\varepsilon)\\
&\cdot(\alpha_{12}-\alpha_{34})(l_{2\mu}k_\nu-k_\mu l_{2\nu})\\
&+g_{\mu\nu}([-(1-\varepsilon)^2+2(3-\varepsilon)(1-\varepsilon)\alpha_{14}\alpha_{23}]k^2\\
&+[\varepsilon(1-\varepsilon)+2(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)\alpha_{14}\alpha_{23}]p^2\\
&-(3-\varepsilon)(1-\varepsilon)(\alpha_{12}-\alpha_{34})(\alpha_{14}-\alpha_{23})p\cdot k)\}.
\end{aligned}
\tag{VI.4.117}
$$

直到目前没有对 $J^{(b)}_{\rho\sigma\tau\eta}$ 进行简化。正比于 $g_{\mu\nu}$ 项可以删去。进而，正比于 $l_{2\mu}k_\nu-k_\mu l_{2\nu}$ 的项没有贡献，因为它的系数在方程 (VI.4.115) 中所给出的变数改变下是奇数的。于是

$$
\begin{aligned}
t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}J^{(b)\rho\sigma\tau\eta}\doteqdot&-i16\pi^{n/2}\Gamma(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)(-1)^{-(1+\varepsilon)}\\
&\cdot\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\,\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}\,\frac{(1-\varepsilon)l_{2\mu}k_{2\nu}-k_\mu k_\nu}{D_1^{1+\varepsilon}},
\end{aligned}
\tag{VI.4.118}
$$

这里符号$\doteqdot$表示 $g_{\mu\nu}$ 项被删去了。

积分 $J^{(c)}_{\rho\sigma\tau\eta}$ 由方程 (VI.4.112) 和 (VI.4.113)，可以写出

$$
\begin{aligned}
J^{(c)}_{\rho\sigma\tau\eta}=&\,i\pi^{n/2}\Gamma(2+\varepsilon)(-1)^{-(2+\varepsilon)}\\
&\cdot\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\,\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{2+\varepsilon}}\,\frac{1}{D_1^{2+\varepsilon}}\\
&\cdot(\alpha_{23}l_2+\alpha_{34}k)_\rho(\alpha_{14}l_2-\alpha_{34}k)_\sigma(\alpha_{14}l_2+\alpha_{12}k)_\tau\\
&\cdot(\alpha_{23}l_2-\alpha_{12}k)_\eta.
\end{aligned}
\tag{VI.4.119}
$$

现在令

$$
I_{\rho\sigma\tau\eta}\doteqdot I^{(b)}_{\rho\sigma\tau\eta}+I^{(c)}_{\rho\sigma\tau\eta},
\tag{VI.4.120a}
$$

这里 $I_{\rho\sigma\tau\eta}$ 在方程 (VI.4.109) 中定义了，并且

$$
I^{(j)}_{\rho\sigma\tau\eta}\equiv\int\frac{d^nl}{l_2^2}\,J^{(j)}_{\rho\sigma\tau\eta},\quad j=b,c.
\tag{VI.4.120b}
$$

积分 $I^{(b)}_{\rho\sigma\tau\eta}$

写出

$$
t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}I^{(b)\rho\sigma\tau\eta}=i16\pi^{n/2}\Gamma(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)(-1)^{-\varepsilon}
$$

$$\cdot\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}\tilde{I}^{(b)}_{\mu\nu},\qquad\text{(VI.4.121a)}$$

$$\tilde{I}^{(b)}_{\mu\nu}=\int d^nl_2\,\frac{(1-\varepsilon)l_{2\mu}l_{2\nu}-k_\mu k_\nu}{l_2^2D_1^{1+\varepsilon}}$$

$$=\frac{\Gamma(2+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\int_0^1dxx^\varepsilon\int d^nl_2$$

$$\cdot\frac{(1-\varepsilon)l_{2\mu}l_{2\nu}-k_\mu k_\nu}{l_2^2+2r_1xl_2\cdot k+r_2xk^2},\qquad\text{(VI.4.121b)}$$

这里

$$r_1=\frac{\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4}{\alpha_{14}\alpha_{23}},\quad r_2=\frac{\alpha_{12}\alpha_{34}}{\alpha_{14}\alpha_{23}}.\qquad\text{(VI.4.122)}$$

方程 (VI.4.121b) 的 D_i 在方程 (VI.4.114b) 中给出，并且利用方程 (IV.1.14b) 来组合分母因子. 可以进行对 l_2 积分:

$$\tilde{I}^{(b)}_{\mu\nu}=i\pi^{n/2}(-1)^{2+\varepsilon}(1+\varepsilon)\int_0^1dxx^\varepsilon$$

$$\cdot\left\{-\frac{\Gamma\left(1+\varepsilon-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(2+\varepsilon)}\frac{(1-\varepsilon)g_{\mu\nu}}{[(-r_2x+r_1^2x^2)]^{1+\varepsilon-n/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(1+\varepsilon-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2+\varepsilon)}\frac{[(1-\varepsilon)r_1^2x^2-1]k_\mu k_\nu}{[(-r_2x+r_1^2x^2)k^2]^{2+\varepsilon-n/2}}\right\}$$

$$\doteq i(-1)^\varepsilon\pi^{n/2}\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}$$

$$\cdot\int_0^1dxx^{-\varepsilon}\frac{(1-\varepsilon)r_1^2x^2-1}{(r_2^2-xr_1^2)^{2\varepsilon}}.\qquad\text{(VI.4.123)}$$

于是

$$t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}I^{(b)\rho\sigma\tau\eta}\doteq-16\pi^n(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}$$

$$\cdot\int_0^1dxx^{-\varepsilon}\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}\frac{(1-\varepsilon)r_1^2x^2-1}{(r_2-xr_1^2)^{2\varepsilon}},$$

$$\text{(VI.4.124)}$$

这里现在恢复小的虚部，它与 Feynman 传播子有联系。

积分 $I^{(c)}_{\rho\sigma\tau\eta}$

$$t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta} I^{(c)\rho\sigma\tau\eta} = i\pi^{n/2}(-1)^{-\varepsilon}\Gamma(2+\varepsilon) \cdot \int \prod_{j=1}^{4} d\alpha_j \frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{2+\varepsilon}} \tilde{I}^{(c)}_{\mu\nu}, \qquad \text{(VI.4.125)}$$

这里

$$\tilde{I}^{(c)}_{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^n l_2}{l_2^2} \frac{t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\rho}(\alpha_{23}l_2 + \alpha_{34}k)^\rho(\alpha_{14}l_2 - \alpha_{34}k)^\sigma}{D_1^{2+\varepsilon}} \cdot (\alpha_{14}l_2 + \alpha_{12}k)^\tau(\alpha_{23}l_2 - \alpha_{12}k)^\eta = \frac{\Gamma(3+\varepsilon)}{\Gamma(2+\varepsilon)}$$

$$\cdot \int_0^1 dx x^{1+\varepsilon} \frac{t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}}{(l_2^2 + 2r_1 x k\cdot l_2 + r_2 x k^2)^{3+\varepsilon}} \cdot (\alpha_{23}l_2 + \alpha_{34}k)^\rho(\alpha_{14}l_2 - \alpha_{34}k)^\sigma(\alpha_{14}l_2 + \alpha_{12}k)^\tau$$

$$\cdot (\alpha_{23}l_2 - \alpha_{12}k)^\eta = i\pi^{n/2}(-1)^{3+\varepsilon}(2+\varepsilon)\int_0^1 dx x^{1+\varepsilon} t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{4\Gamma(3+\varepsilon)}\right] \cdot \Big\{\Gamma(2\varepsilon-1)[g^{\rho\sigma}g^{\tau\eta} + g^{\rho\tau}g^{\sigma\eta} + g^{\rho\eta}g^{\sigma\tau}] \overline{\text{ⓐ}} \frac{(\alpha_{23}\alpha_{14})^2}{[(-r_2 x + r_1^2 x^2)k^2]^{2\varepsilon-1}}$$

$$-2\Gamma(2\varepsilon)[\alpha_{23}\alpha_{14}(-\alpha_{14}r_1 x + \alpha_{12})(-\alpha_{23}r_1 x - \alpha_{12})g^{\rho\sigma}k^\tau k^\eta$$

$$+ \alpha_{23}\alpha_{14}(-\alpha_{14}r_1 x - \alpha_{34})(-\alpha_{23}r_1 x - \alpha_{12})g^{\rho\sigma}k^\sigma k^\eta$$

$$+ \alpha_{23}^2(-\alpha_{14}r_1 x - \alpha_{34})(-\alpha_{14}r_1 x + \alpha_{12})g^{\rho\eta}k^\sigma k^\tau$$

$$+ \alpha_{14}^2(-\alpha_{23}r_1 x + \alpha_{34})(-\alpha_{23}r_1 x - \alpha_{12})g^{\sigma\tau}k^\rho k^\eta$$

$$+ \alpha_{14}\alpha_{23}(-\alpha_{23}r_1 x + \alpha_{34})(-\alpha_{14}r_1 x + \alpha_{12})g^{\sigma\eta}k^\rho k^\tau$$

$$+ \alpha_{14}\alpha_{23}(-\alpha_{23}r_1 x + \alpha_{34})(-\alpha_{14}r_1 x - \alpha_{34})g^{\tau\eta}k^\rho k^\sigma] \overline{\text{ⓑ}}$$

$$\cdot \frac{1}{[(-r_1 x + r_1^2 x^2)k^2]^{2\varepsilon}} + 4\Gamma(1+2\varepsilon)$$

$$\cdot (-\alpha_{23}r_1 x + \alpha_{34})(-\alpha_{14}r_1 x - \alpha_{34})(-\alpha_{14}r_1 x + \alpha_{12})$$

$$(-\alpha_{23}r_1x-\overline{\alpha_{12}})\cdot\frac{k^\rho k^\sigma k^\tau k^\eta}{[(-r_2x+r_1^2x^2)k^2]^{1+2\varepsilon}}\Big\}.$$

(VI.4.126)

认为是ⓐ的项只对 $g_{\mu\nu}$ 有贡献。因此这些项将被删去。

包含一个 $g_{\mu\nu}$ 因子，等等的项，当与 $t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}$ 收缩时，用ⓑ表示，给出

$$\begin{aligned}[\cdots]\ t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}=16(1-\varepsilon)\{&2(\alpha_{14}\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{34}\\&+\varepsilon\alpha_{12}\alpha_{34})k_\mu k_\nu+[-6\alpha_{14}^2\alpha_{23}^2r_1^2x^2-3\alpha_{14}\alpha_{23}(\alpha_{14}\alpha_{12}\\&+\alpha_{23}\alpha_{34}-\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{14}\alpha_{34})r_1x-1-2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41}\\&+\varepsilon(2\alpha_{14}^2\alpha_{23}^2r_1^2x^2+\alpha_{14}\alpha_{23}(\alpha_{23}\alpha_{34}+\alpha_{12}\alpha_{14}-\alpha_{12}\alpha_{23}\\&-\alpha_{14}\alpha_{34})r_1x-\alpha_{12}\alpha_{34})]k^2g_{\mu\nu}\}\doteqdot 32(1-\varepsilon)\alpha_{14}\alpha_{23}\\&\cdot[1-(1-\varepsilon)r_2]k_\mu k_\nu.\end{aligned}\tag{VI.4.127}$$

在方程 (VI.4.126) 中的项 ⓒ，它正比于 $g_{\mu\nu}$，也被略去了。于是

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\mu\nu}^{(c)}&\doteqdot i\pi^{n/2}(-1)^\varepsilon(2+\varepsilon)\cdot 32(1-\varepsilon)\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{2\Gamma(3+\varepsilon)}\\&\cdot\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}\cdot\int dx x^{1-\varepsilon}\frac{1}{(r_2^2-r_1^2x)^{2\varepsilon}}\alpha_{14}\alpha_{23}\\&\cdot[1-(1-\varepsilon)r_2]=(-1)^\varepsilon i\pi^{n/2}16\frac{(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(2+\varepsilon)}\\&\cdot\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}\alpha_{14}\alpha_{23}\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}\frac{1-(1-\varepsilon)r_2}{(r_1^2-r_1^2x)^{2\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{VI.4.128}$$

因而

$$\begin{aligned}t_{\mu\rho\sigma\nu\tau\eta}I^{(c)\rho\sigma\tau\eta}&\doteqdot -16\pi^n(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)\\&\cdot\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\\&\cdot\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}\frac{1-(1-\varepsilon)r_2}{(r_2-r_1^2x)^{2\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{VI.4.129}$$

把方程 (VI.4.124) 和 (VI.4.129) 代入方程 (VI.4.107)，给出

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)} \doteqdot \frac{\alpha_R^2}{\pi^2}(4\pi\mu^2)^{2\varepsilon}(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)$$
$$\cdot \frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^{2\varepsilon}}\left\{\int_0^1 dx\cdot x^{-\varepsilon}\right.$$
$$\cdot\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\,\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}$$
$$\left.\cdot\left[\frac{\overset{\text{Ⓐ}}{1-x}}{(r_2-r_1^2x)^{2\varepsilon}}+\frac{\overset{\text{Ⓑ}}{(1-\varepsilon)x}}{(r_2-r_1^2x)^{2\varepsilon-1}}\right]\right\},\quad\text{(VI.4.130)}$$

这里Ⓐ和Ⓑ代表方括号内所包含的多重积分。积分可以利用下面的变数改变来进行：

$$\alpha_1=yz,\ \alpha_2=(1-y)w,$$
$$\alpha_3=(1-y)(1-w),\ \alpha_4=y(1-z),\quad\text{(VI.4.131)}$$

这里由于条件 $\Sigma\alpha_j=1$，并不认为 α_4 是一个独立的变数；即

$$\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\delta(1-\Sigma\alpha_j)=dydzdwy(1-y)$$
$$\cdot\delta(y(1-z)-\alpha_4)d\alpha_4.\quad\text{(VI.4.132)}$$

出现在积分中不同的量可以通过新的变数重新表示为

$$\alpha_{14}\alpha_{23}=y(1-y),$$
$$r_1=z-w,$$
$$r_2=\frac{1}{y(1-y)}\{(1-y)w(1-z)+yz(1-w)$$
$$+y(1-y)(w-z)^2\},$$
$$r_2-r_1^2x=\frac{1}{y(1-y)}\{(1-y)w(1-w)+yz(1-z)$$
$$+(1-x)y(1-y)(w-z)^2\}\equiv\frac{R}{y(1-y)},$$
$$R\equiv(1-y)w(1-w)+yz(1-z)$$

$$+(1-x)y(1-y)(w-z)^2. \qquad \text{(VI.4.133)}$$

考虑方程 (VI.4.130) 中对被积函数第一部分的积分:

$$\text{Ⓐ}=\int_0^1 dx x^{-\varepsilon}\int\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\,\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}\cdot\frac{1-x}{(r_2-r_1^2x)^{2\varepsilon}}=\int_0^1 dx x^{-\varepsilon}(1-x)\int_0^1 dzdw$$

$$\underbrace{\int_0^1 dy[y(1-\varepsilon)]^{\varepsilon}/R^{2\varepsilon}}$$

$$1+\varepsilon\int_0^1 dy\{\ln[y(1-y)-2\ln R\}]+O(\varepsilon^2)$$

$$=B(1-\varepsilon,2)+O(\varepsilon)=\frac{1}{2}+O(\varepsilon). \qquad \text{(VI.4.134)}$$

ε 的量级可以进行数字计算;它对 $\Pi_{\mu\nu}^{(1)(b)}$ 的有限部分有贡献. 被积函数的第二部分为

$$\text{Ⓑ}=(1-\varepsilon)\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}\int_0^1\prod_{j=1}^{4}d\alpha_j\cdot\frac{\delta(1-\Sigma\alpha_j)}{(\alpha_{14}\alpha_{23})^{1+\varepsilon}}R^{1-2\varepsilon}=(1-\varepsilon)\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}$$

$$\cdot\int_0^1 dzdw\int_0^1 dy[y(1-y)]^{-1+\varepsilon}R^{1-2\varepsilon}. \qquad \text{(VI.4.135)}$$

为了进行这个积分,下面的看法是有用的,

$$[y(1-y)]^{-1+\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}y^{-1+\varepsilon}+(1-y)^{-1+\varepsilon}.$$

类如方程 (VI.4.135) 中 R 的情形,对于任何 $f(y)$,它对于 $0\leqslant y\leqslant 1$ 是非奇异的,于是

$$\int_0^1 dy\,\frac{f(y)}{[y(1-y)]^{1-\varepsilon}}=\int_0^1 dy\cdot\left[\frac{1}{y^{1-\varepsilon}}+\frac{1}{(1-y)^{1-\varepsilon}}\right]f(y)+O(\varepsilon). \qquad \text{(VI.4.136)}$$

因此,可以写出

$$
\begin{aligned}
\text{Ⓑ} &= (1-\varepsilon)\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}\int_0^1 dz dw \int_0^1 dy \\
&\cdot\left[\frac{1}{y^{1-\varepsilon}}+\frac{1}{(1-y)^{1-\varepsilon}}\right] R^{1-2\varepsilon}+O(\varepsilon) \\
&= 2(1-\varepsilon)\int_0^1 dx x^{1-\varepsilon}\int_0^1 dz dw \\
&\cdot\int_0^1 dy\,\frac{R^{1-2\varepsilon}}{y^{1-\varepsilon}}+O(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{VI.4.137}
$$

对于 $\varepsilon>0$，可以对 y 的积分进行分部积分：

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dy\,\frac{R^{1-2\varepsilon}}{y^{1-\varepsilon}} &= \frac{1}{\varepsilon}\,y^{\varepsilon}R^{1-2\varepsilon}\Big|_0^1 \\
&-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 dy y^{\varepsilon}(1-2\varepsilon)R^{-2\varepsilon}\frac{dR}{dy} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\,[z(1-z)]^{1-2\varepsilon}-\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon} \\
&\cdot\int_0^1 dy\,\frac{dR}{dy}[1+\varepsilon\ln y-2\varepsilon\ln R] \\
&+O(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\,[z(1-\varepsilon)]^{1-2\varepsilon} \\
&-\frac{1}{\varepsilon}(1-2\varepsilon)[z(1-z)-w(1-w)] \\
&+2(1-2\varepsilon)\{z(1-z)\ln[z(1-z)] \\
&-w(1-w)\ln[w(1-w)]-z(1-z) \\
&+w(1-w)\}-(1-2\varepsilon) \\
&\cdot\left\{w(1-w)-z(1-z)-\frac{1}{2}\right. \\
&\left.\cdot(1-x)(z-w)^2\right\}.
\end{aligned}
\tag{VI.4.138}
$$

于是

$$
\text{Ⓑ} = 2(1-\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2-\varepsilon}B(2-2\varepsilon,2-2\varepsilon)\right.
$$

$$+\frac{1}{12}B(2-\varepsilon,2)\Big\}+O(\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon}+3\right)+O(\varepsilon). \qquad \text{(VI.4.139)}$$

把方程(VI.4.134)和(VI.4.139)代入方程(VI.4.130)中,得到

$$\begin{aligned}e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)} &\doteq \frac{\alpha_R^2}{\pi^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)^{2\varepsilon}(1-\varepsilon)\\ &\quad\cdot\frac{\Gamma(1+2\varepsilon)}{2\varepsilon}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon}+6\right)k_\mu k_\nu+O(\varepsilon)\\ &\doteq \frac{\alpha_R^2}{12\pi^2}k_\mu k_\nu\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left[5-2\gamma\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+2\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)\right]+O(\varepsilon)\right\}\\ &=\frac{\alpha_K^2}{12\pi^2}\left\{(k_\mu k_\nu-k^2g_{\mu\nu})\left[\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(5-2\gamma\right.\right.\right.\\ &\quad\left.\left.\left.+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2-i\varepsilon}\right)\right)\right]+\frac{1}{2\varepsilon}g_{\mu\nu}k^2+O(\varepsilon^0)\right\}.\end{aligned}$$

(VI.4.140)

$g_{\mu\nu}$ 项是由 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}+\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}$ 为规范不变量的事实得到的.

应该注意,在 $\Pi_{\mu\nu}^{(a)(b)}$ 中,$\frac{1}{\varepsilon}$ 的一个幂来自于 Feynman 参数积分,而 $\frac{1}{\varepsilon}$ 另外的幂来自于动量积分. 当然,二者都有它们来自于动量积分的根源. 交叠发散性的出现使 $\frac{1}{\varepsilon}$ 发散性的一个幂位移到参数积分. 这要与 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}$ 相对比,其中 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的两种幂可以清楚地由动量积分看出来.

现在可以得到对于真空极化的二圈贡献的发散部分为

$$e_R^2\Pi_{\mu\nu}^{(2)} = e_R^2\{\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)} + \cdots + \Pi_{\mu\nu}^{(2)(d)}\}$$
$$= \frac{\alpha_R^2}{12\pi^2}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^0)\right\}. \qquad \text{(VI.4.141)}$$

方程(VI.4.141)的这个结果包含两个有兴趣的特点。第一个特点是，出现在 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(a)}$ 和 $\Pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}$ 中不容许的发散性

$$\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{\mu^2}{-k^2 - i\varepsilon}\right)$$

消去了，在重正化常数中只剩下容许的发散性。第二个特点是，正比于 $1/\varepsilon^2$ 的双极点项也消去了。到 α_R^2 量级，在极小减除方法中光子波函数重正化常数为

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\alpha_R}{3\pi} + \frac{\alpha_R^2}{8\pi^2}\right] + O(\alpha_R^3). \qquad \text{(VI.4.142)}$$

下面结束本节以前，将给出二圈真空极化与规范参数 ξ 无关的事实的证明。由二抵消项贡献图 VI.38(b) 和 (c) 的规范相关性，由于(VI.4.100)彼此互相抵消。剩下要证明，图 VI.37(a) 和 (b) 之和是与规范参数无关的，即

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{\pi_{\mu\nu}^{(2)(a)} + \pi_{\mu\nu}^{(2)(b)}\} = 0.$$

其证明类似于 § V.4 所概述的证明，并且在这里不重复。

VI.5 重正化群和渐近自由

应该记住，量子场论的重正化程序是用再标度传播子、顶角函数和类如质量和耦合常数的裸参数，促使 Green 函数成为紫外有限的。这样做时，在动量空间减除方法中，例如，必须选取动量空间的一点，即，重正化点，来定义重正化的耦合常数，重正化质量，以及顶角的有限部分，等等。重正化点的不同选择会得到不同的重正化量，这些量都同等地适合，并且由有限的再标度彼此联系。而且，这些量都导致相同的 S 矩阵

元.在极小减除方案中这同样是真实的.在极小减除方案中质量标度 μ 起重正化点相同的作用。 μ 的改变引起重正化耦合常数和质量的再标度. 因此所得到的耦合常数和质量的有限再标度的集合形成一个群,称为重正化群.通过重正化点的改变或再标度，或通过质量标度的改变来描述理论不变性的方程称为重正化群方程.有三组重正化群方程:(1) Gell-Mann-Low[38]-Peterman-Stuckelberg[39](GLPS) 方程;(2) Callan[40]-Osviannikov[41]-Symanzik[42] (COS) 方程;及(3) 't Hooft[31]-Weinberg[43] 方程. GLPS 方程的范围，已由 Bogoliubov 及 Shirkov[44] 加以推广,局限于量子电动力学. 在 Wilson[45] 的文章中可以找到 GLPS 方程性质有启发性的讨论. COS 方程和 't Hooft-Weinberg 方程是更一般的方程组; 这些方程组包括 GLIS 方程作为特殊的情形.

在本节中所提出的重正化群方程的推导是按照 Collins 及 McFarlane[46] 利用维数正规化修正的 Weinberg 方法[43]. 因此,将利用维数标度参数作为质量标度，来代替减除动量. 在这个方式中，推导在精神上是与 'tHooft 方法[31]密切相关的. 在得到重正化群方程的形式解以后，要表示出它的显然的标度变化过程，进行三组方程的比较. 接着由简单的示例以及更实际的情况，说明有效耦合常数的一般性质. 结束本节以前，将讨论包含若干个耦合参数和质量的理论的重正化群方程和渐近自由的概念.

记住,在维数正规化方案中,原来无量纲的裸耦合常数在 n 维空间内会获得一个质量维数 $2\rho\varepsilon$,这里 $\varepsilon = 2 - n/2$,而 ρ 在方程 (VI.3.31) 中给出. 因此，引入质量参数 μ 是要在理论中保持参数的固有质量维数. 特别是重正化的耦合常数 g_R 被代换为

$$g_R \to g_R \mu^{2\rho\mu}, \qquad \text{(VI.5.1)}$$

使它在空时维数的解析延拓时可以保持为无量纲的.

为了消除可能的混淆,并与前节的实际相容洽,未重正化的量和重正化的量将明显地加以编号. 如上所述,未重正化的裸耦合常数和质量用 g_b 和 m_b 来表示; 相应的重正化耦合常数和质量用 g_R 和 m_R 来表示. 下指标 u 和 R 用来表示未重正化的和重正化的顶角函数(一粒子不可约化的 Green 函数),Γ_u 和 Γ_R,重正化群方程是为这些顶角函数推导的. n 点顶角函数的两种方案的泛函相关性明显地表示如下:

$$\Gamma_u \equiv \Gamma_u(p_j, g_b, m_b, \varepsilon, \xi_b), \qquad \text{(VI.5.2)}$$

及

$$\Gamma_R \equiv \Gamma_R(p_j, g_R, m_R, \mu, \xi_R), \qquad \text{(VI.5.3)}$$

这里 p_j 代表外动量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的集合;ξ_b 和 ξ_R 为未重正化的和重正化的规范参数. 如在 § VI.1 中方程 (VI.1.22) 所没有解释的,两个顶角函数由适当的波函数重正化常数来联系,写为

$$\Gamma_R = Z_\Gamma \Gamma_u, \qquad \text{(VI.5.4)}$$

这里 Z_Γ 为所包含外线的一切波函数重正化常数的乘积. 为简化起见,如同在量子色动力学情形中一样,假定理论包含一个质量和一个耦合常数. 多于一个耦合常数和质量的推广是直接了当的,并且将在本节末加以讨论.

如在 (VI.5.2) 所给出的泛函相关性所表明的,未重正化的顶角函数与质量标度 μ 无关. 另一方面,重正化的顶角函数方程 (VI.5.4) 以几种方式依赖于 μ: 首先,有明显的 μ 相关性. 第二,对于固定的 g_b, m_b 和 ξ_b, 通过 g_R, m_R 和 ξ_R, 有隐含的 μ 相关性. 当质量标度改变时,一切重正化的量和重正化常数都改变,以使 Γ_u 保持固定. 当然,由于两个理由,耦合常数和质量的变分并不是任意的: S 矩阵元在重正化参数的同时改变下为不变量,并且重正化质量和重正化耦合常

数通过适当的重正化常数也与它们固定的未重正化的抵消部分相联系。

在 μ 的无限小改变下

$$\mu \to \mu + \delta_\mu, \tag{VI.5.5}$$

Γ_R 的改变可以用一个微分方程来表示：

$$\frac{d}{d\mu}\Gamma_R = \left(\frac{d}{d\mu} Z_\Gamma\right)\Gamma_u,$$

该方程详细写为

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R} + \mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R} + \mu\frac{\partial\xi_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\xi_R}\right)\Gamma_R = \mu\frac{\partial \ln Z_\Gamma}{\partial\mu}\Gamma_R, \tag{VI.5.6}$$

这里变分用 μ 的对数的导数来表示。要是没有右边项的话，重正化顶角函数在标度改变方程 (VI.5.5) 时是不变量的。

定义

$$\beta(g_R) \equiv \mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}, \tag{VI.5.7}$$

及

$$\gamma_\Gamma(g_R) \equiv \mu\frac{\partial \ln Z_\Gamma}{\partial\mu}. \tag{VI.5.8a}$$

在量子色动力学中，对于一个 n 点顶角函数，

$$\gamma_\Gamma(g_R) = \frac{1}{2}(N_f\gamma_f + N_G\gamma_G + N_g\hat{\gamma}_g), \tag{VI.5.8b}$$

这里 N_f, N_a 和 N_g 为在 Γ_R 的外线中所包含的费米子场、规范玻色子场和鬼场的数目 ($N = N_f + N_G + N_g$)，并且

$$\gamma_f(g_R) \equiv \mu\frac{\partial \ln Z_2}{\partial\mu}, \tag{VI.5.9a}$$

$$\gamma_G(g_R) \equiv \mu\frac{\partial \ln Z_3}{\partial\mu}, \tag{VI.5.9b}$$

$$\gamma_g(g_R) \equiv \mu\frac{\partial \ln \hat{Z}_3}{\partial\mu}. \tag{VI.5.9c}$$

注意，由于标度改变，重正化参数的变分不是独立的。因为

$$\xi_R = Z_3^{-1}\xi_b,$$

于是

$$\mu\frac{\partial\xi_R}{\partial\mu} = -\gamma_G\xi_R. \qquad \text{(VI.5.10)}$$

由相乘的质量重正化定义，方程 (VI.3.2)，上式也可以写为

$$\mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu} = -\gamma_m(g_R)m_R, \qquad \text{(VI.5.11)}$$

这里

$$\gamma_m(g_R) \equiv \mu\frac{\partial\ln Z_m}{\partial\mu}. \qquad \text{(VI.5.12)}$$

量 $\beta(g)$ 称为 β 函数，并且 γ_f，γ_G，$\hat{\gamma}_g$ 及 γ_m 称为费米场、规范场等的反常维数。把上面的定义代入 (VI.5.6)，得到重正化群方程的 't Hooft-Weinberg 形式为：

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} - \gamma_m(g_R)m_R\frac{\partial}{\partial m_R} - \gamma_f(g_R) - \xi_R\gamma_G(g_R)\frac{\partial}{\partial\xi_R}\right]\Gamma_R = 0. \qquad \text{(VI.5.13)}$$

在上面的形式中，由于显然与质量标度有关，该方程实际上是没有用处的。为了使它有用，要消去这个明显的质量相关性。幸好，正如下面所讨论的，关于 Γ_R 的附加信息对此是可用的。

考虑 Γ_R 在外动量标度下的变化过程。首先，注意到 Γ_R 是具有确定质量维数的齐次函数。令 D_Γ 有 Γ_R 的质量维数；对于具有一个无量纲的耦合常数的重正化理论(在四维内)

$$D_\Gamma = 4 - B - \frac{3F}{2}, \qquad \text{(VI.5.14)}$$

它是 (VI.1.3) 所给出的 Feynman 振幅的表面发散度。其次，标度一切外动量：

$$p_i = \lambda p_i^{(0)},\ j = 1, 2, 3, \cdots, n, \qquad \text{(VI.5.15)}$$

这里 $p_i^{(0)}$，$j = 1, 2, \cdots, n$，为一组固定的动量。于是

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu, \xi_R)$$
$$= \lambda^{D_\Gamma}\Gamma_R(p_i^{(0)}, g_R, m_R/\lambda, \mu/\lambda, \xi_R). \quad \text{(VI.5.16)}$$

因此可以看到，Γ_R 对于表面发散度 D_R 的齐次函数满足一个微分方程：

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + m_R\frac{\partial}{\partial m_R} - D_\Gamma\right)$$
$$\cdot\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu, \xi_R) = 0 \quad \text{(VI.5.17)}$$

方程 (VI.5.13) 和 (VI.5.17) 的组合消去明显与 μ 有关的项，并且得到重正化群方程所要求的形式

$$\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} + (1+\gamma_m(g_R))m_R\frac{\partial}{\partial m_R}\right.$$
$$\left. + \gamma_G(g_R)\xi_R\frac{\partial}{\partial\xi_R} + \gamma_\Gamma - D_\Gamma\right]\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, \cdots) = 0.$$
$$\text{(VI.5.18)}$$

该方程的解可在 H. T. H. Piaggio 的书中找到。应该注意，在标度变换方程 (VI.5.15) 下，动量必须在质壳外，因为 $p_i^2 = \lambda^2(p_i^{(0)})^2$ 对于固定的 $p_i^{(0)}$ 与 λ^2 有关。

方程 (VI.5.18) 的解 定义函数 $\bar{g}(\lambda)$ 和 $\bar{m}(\lambda)$，分别称为有效耦合"常数"及有效质量，使

$$\beta(\bar{g}(\lambda)) = \lambda\frac{d}{d\lambda}\bar{g}(\lambda), \quad \text{(VI.5.19)}$$

及

$$-[1+\gamma_m(\bar{g}(\lambda))]\bar{m}(\lambda) = \lambda\frac{d}{d\lambda}\bar{m}(\lambda), \quad \text{(VI.5.20)}$$

具有边界条件为

$$\bar{g}(1) = g_R \text{ 及 } \bar{m}(1) = m_R. \quad \text{(VI.5.21)}$$

求出方程 (VI.4.19) 和 (VI.4.20) 的解为

$$\ln\lambda = \int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg'}{\beta(g')}, \quad \text{(VI.5.22)}$$

及

$$\ln(\bar{m}(\lambda)/m_R) = -\ln\lambda - \int_1^\lambda \gamma_m(\bar{g}(\lambda'))\frac{d\lambda'}{\lambda'}$$

$$= -\ln\lambda - \int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg', \qquad \text{(VI.5.23)}$$

即，

$$\bar{m}(\lambda) = m_R \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg'\right\}, \qquad \text{(VI.5.24)}$$

这里利用了下面的恒等式

$$\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'}\gamma_m(\bar{g}(\lambda')) = \int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg'. \qquad \text{(VI.5.25)}$$

方程 (VI.5.22) 是由重正化群分析得到的重要结果. 与 $\beta(g)$ 的形式有关，如在下面要详细讨论的，上式确定了有效耦合“常数”的渐近行为.

类似地可以定义一个有效规范参数为

$$\lambda\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} = -\gamma_G\xi(\lambda), \qquad \text{(VI.5.26)}$$

具有边界条件为

$$\xi(1) = \xi_R.$$

方程 (VI.5.26) 的解为

$$\xi(\lambda) = \xi_R\exp\left\{-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}dg'\right\}$$

$$= \xi_R\exp\left\{-\int_1^\lambda \gamma_G(\bar{g}(\lambda'))\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right\}. \qquad \text{(VI.5.27)}$$

方程 (VI.4.13) 的试探解可以写为

$$\Gamma_R(p_i, g_R, m_R, \mu, \xi_R) = \exp\left\{\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')}dg'\right\}$$

$$\cdot f\left(\frac{p_i}{\mu}, \ln\mu - \int_{g_0}^{g_R}\frac{dg'}{\beta(g')}; \ln m_R\right.$$

$$\left. + \int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg'; \ln\xi_R + \int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}dg'\right), \qquad \text{(VI.5.28)}$$

这里 f 为四个自变量的任意函数，g_0 为常数。方程 (VI.5.28) 满足方程 (VI.5.13) 所列举的微分方程的事实，是容易证明的。由维数分析，方程 (VI.5.16)，也可以写出

$$\begin{aligned}
&\Gamma_R(p_i, g_R, m_R, \mu, \xi_R) \\
&= \lambda^{D_\Gamma}\Gamma_R(p_i^{(0)}, g_R, m_R/\lambda, \mu/\lambda, \xi_R) \\
&= \lambda^{D_\Gamma}\exp\left\{\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')}dg'\right\} \\
&\quad\times f\left(p_i^{(0)};\ \ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)-\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg'}{\beta(g')};\right. \\
&\quad\ln\left(\frac{m_R}{\lambda}\right)+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg'; \\
&\quad\left.\ln\xi_R+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}dg'\right), \qquad \text{(VI.5.29)}
\end{aligned}$$

可以证明上式满足微分方程 (VI.5.18)。由方程 (VI.5.22)，(VI.5.23) 及 (VI.5.27)，可以写出下面的方程：

$$\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)-\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg'}{\beta(g')}=\ln\mu-\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg'}{\beta(g')}, \qquad \text{(VI.5.30)}$$

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{m_R}{\lambda}\right)+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg' \\
&\quad=\ln(\bar{m}(\lambda))+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}dg', \qquad \text{(VI.5.31)}
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
&\ln\xi_R+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}dg' \\
&\quad=\ln\xi(\lambda)+\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}dg'. \qquad \text{(VI.5.32)}
\end{aligned}$$

把方程 (VI.5.30)—(VI.5.32) 代入方程 (VI.5.29)，给出

$$\begin{aligned}
&\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu, \xi_R) \\
&= \lambda^{D_\Gamma}\exp\left\{\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')}dg'\right\}
\end{aligned}$$

$$\times f\Big(\ p_i^{(0)};\ \ln\mu-\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg'}{\beta(g')};$$

$$\ln\ (\bar{m}(\lambda))+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}\,dg';$$

$$\ln\,(\xi(\lambda))+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}\,dg'\Big).\qquad\text{(VI.5.33)}$$

其次，由方程 (VI.4.29)，

$$f\Big(p_i^{(0)};\ \ln\mu-\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg'}{\beta(g')};$$

$$\ln\,(\bar{m}(\lambda))+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}\,dg';$$

$$\ln\,(\xi(\lambda))+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\gamma_G(g')}{\beta(g')}\,dg'\Big)$$

$$=\exp\left\{-\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')}\,dg'\right\}$$

$$\cdot\,\Gamma_R(p_i^{(0)},\bar{g}(\lambda),\bar{m}(\lambda),\mu,\xi(\lambda)).\qquad\text{(VI.5.34)}$$

如果把方程 (VI.5.33) 及 (VI.5.34) 组合来消去未知函数，则

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)},\ g_R,\ m_R,\ \mu,\ \xi_R)$$

$$=\lambda^{D_\Gamma}\exp\left\{-\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g')}{\beta(g')}\,dg'\right\}$$

$$\cdot\,\Gamma_R(p_i^{(0)},\bar{g}(\lambda),\bar{m}(\lambda),\mu,\xi_R(\lambda))$$

$$=\lambda^{D_\Gamma}\exp\left\{-\int_1^{\lambda}\gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda'))\,\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right\}$$

$$\cdot\,\Gamma_R(p_i^{(0)},\bar{g}(\lambda),\bar{m}(\lambda),\mu,\xi(\lambda)),\qquad\text{(VI.5.35)}$$

上式是在质壳外明显表示顶角函数动量标度变化过程的解之后求得的. 对于 $\lambda\gg1$，大动量定义为 $\lambda p_i^{(0)}$. 于是，如方程 (VI.5.35) 所示，质壳外顶角函数的大动量变化过程可以表示为 λ 的已知幂，顶角函数反常维数的已知函数，及在一组固定动量 $p_i^{(0)}$，$i=1,2,\cdots,n$，计值的相同顶角函数的乘积，固定动量 $p_i^{(0)}$ 的平方一般有小的值. 如果有效耦合 $\bar{g}(\lambda)$ 和有

效质量 $\bar{m}(\lambda)$ 是小的，则后一顶角函数通过直接的测量是容易得到的，或者利用低阶微扰论计算出来。在本节以后对这一点连同渐近自由会进行更多的讨论。

三组方程的比较 把 (VI.5.18) 所给出的 't Hooft-Weinberg 方程与 Callan-Osvannikov-Symanzik 方程及 Gell-Mann-Low-Peterman-Stueckelberg 方程进行比较，是有兴趣的。't Hooft-Weinberg 方程是一个齐次方程，通过取大动量极限 $\lambda \to \infty$ 可以求解。因此解方程 (VI.5.35) 对于非渐近动量是适合的。对比之，Callan-Osvannikov-Symanzik 方程是一个非齐次方程。非齐次项是由质量插入项引起的。该方程的一个解，有类似于 (VI.5.35) 的形式，只有当质量插入项在渐近动量处可以略去时才能得到，因此只对于动量的主项才适合。另一方面，在 't Hooft-Weinberg 方法中，质量插入用有效质量 $\bar{m}(\lambda)$ 代换。当有效质量的渐近行为已知时，就得到顶角函数的主渐近行为。Gell-Mamn-Low-Peterman-Stueckelberg 方程应用受限制，只在量子电动力学中才适合。

有效规范参数的消去 在规范理论中有由规范参数相关性引起的附加复杂性。一般，反常维数 γ_f，γ_G 和 $\hat{\gamma}_g$ 是规范有关的。由于相乘的重正化，可以简化规范相关性：如果 $\xi_b = 0$，则 $\xi_R = 0$ 及 $\xi(\lambda) = 0$。这种情况只在 Landau 规范中出现，其中，一切规范相关性都删去了。在下面的讨论中假定为 Landau 规范；规范参数相关性将从 Γ_R 的记号删去。

顶角函数的渐近展开式 虽然 (VI.5.35) 对任意动量是适合的，但它在一般情形中并无实际的应用。然而，可以对渐近动量 ($\lambda \to \infty$) 检验。它的变化过程 Green 函数的渐近行为是与有效耦合"常数" $\bar{g}(\lambda)$ 及有效质量 $\bar{m}(\lambda)$ 的变化过程有关的。

首先，在方程 (VI.5.24) 中所给出的有效质量要加以检验。如果对于 $\lambda \geqslant 1$，$\gamma_m(\bar{g}(\lambda)) > -1$，则当 $\lambda \to \infty$ 时，$\bar{m}(\lambda) \to 0$. 假定情况如此。如果 Γ_R 和它相对于 $\bar{m}$ 的头 $n+1$ 次导数对于 $\bar{m}(\lambda) = 0$ 是有限的，则存在着 Γ_R 的渐近展开式为：

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu) = \lambda^{D_\Gamma} \exp\left\{-\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda'))\right\} \cdot \left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{(\bar{m}(\lambda))^l}{l!} \Gamma_R^{(l)}(p_i^{(0)}, \bar{g}(\lambda), 0, \mu) + R_n\right\}, \tag{VI.5.36}$$

这里 $\Gamma_R^l(p_i^{(0)}, g(\lambda), 0, \mu)$ 为 Γ_R 相对于 $\bar{m}(\lambda)$ 的第 l 次导数，并且在 $\bar{m}(\lambda) = 0$ 处计值，R_m 为剩余部分：

$$R_n \equiv \int_0^{\bar{m}(\lambda)} dm' \int_0^{m'} dm'' \cdots \int_0^{m^{(n-1)}} dm^{(n)} \cdot \Gamma_R^{(n+1)}(p_i^{(0)}, \bar{g}(\lambda), 0, \mu), \tag{VI.5.37}$$

方程 (VI.5.36) 的展开式的主项给出的解等价于当质量插入可以略去时 Callan-Osvannikov-Symanzik 方程的解，

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu) \approx \lambda^{D_\Gamma} \exp\left\{-\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda'))\right\} \cdot \Gamma_R(p_i^{(0)}, \bar{g}(\lambda), 0, \mu). \tag{VI.5.38}$$

然而，如果有效质量和 Γ_R 相对于质量的导数是已知的，则 't Hooft-Weinberg 解容许对该主项的表示式的修正。

计算 β 函数和反常维数的方法 在 (VI.5.19) 所定义的 β 函数的计算方法与正规化方案有关。这里将叙述两个方法：一是 't Hooft 方法，另一是文献 [46] 所叙述的方法。

由 Collins 和 Macfarlane[46] 所提出的方法，在一迴路量级中是方便的，所用的论点是，重正化常数可以展开为重正化

的或未重正化的耦合常数的幂级数. 假定利用按未重正化耦合常数的展开式. 因为重正化常数是无量纲的，故适当的展开参数是无量纲的组合 $g_B e^{-2\varepsilon\rho}$，这里 ρ 在方程 (IV.3.31) 中给出. 在此，重正化耦合常数将有裸耦合常数相同的维数. 因此

$$g_R = z_c(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})g_B, \qquad \text{(VI.5.39)}$$

这里 z_c 在量子电动力学中等于 $\sqrt{z_3}$，或者说，在量子色动力学中，等于 $z_2 \cdot z_3/z_1'$. 根据 § VI.4 对一个给定理论的讨论，虽然得到唯一的 S 矩阵，但裸耦合常数是固定的，而重正化的耦合常数是根据减除方案定义的. 因此，g_b 与 μ 无关，但 g_R 随 μ 而变化. 于是 (VI.5.39) 在极限 $\varepsilon \to 0$ 中给出

$$\beta(g_R) = \mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu} = g_R\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln z_c(g_B\mu^{-2\rho\varepsilon}). \qquad \text{(VI.5.40)}$$

反常维数可以类似地计算出来.

在 't Hooft 重正化方案中，β 函数和质量的反常维数可以由重正化耦合常数的改变和在质量标度变分下的重正化质量得到，利用重正化常数可以展开为 ε 极点的幂级数的事实，并利用重正化群方程的系数在极限 $\varepsilon \to 0$ 中是有限的事实，就可以应用一个更直接的方法了. 由方程 (VI.4.7) 和 (VI.4.9)，对于费米子，

$$g_B = \mu^{2\rho\varepsilon}\left[g_R + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(g_R)}{\varepsilon^k}\right], \qquad \text{(VI.5.41)}$$

及

$$m_b = m_R\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(g_R)}{\varepsilon^k}\right]. \qquad \text{(VI.5.42)}$$

对于玻色子场，m_B 和 m_R 当然要用 m_B^2 和 m_R^2 来代替. 在上面的两个表示式中，在 a_k 和 b_k 中引入了与重正化质量的已知相关性. 方程 (VI.5.42) 与方程 (VI.4.9) 不同，其中除考虑

所表示的场的不同统计以外，质量维数吸收在 m_R 中。重正化常数可以写为一般形式：

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(g_R)}{\varepsilon^k}. \qquad \text{(VI.5.43)}$$

在下面，β 函数和 γ_m 将首先由 § VI.4 的已知结果得到。然后它们将连同反常维数的表示式直接推导出来。

出发点是方程 (VI.5.15)。质量标度的无限小改变可重写为

$$\mu \to \mu' = \mu(1 - \delta/2\rho), \qquad \text{(VI.5.44)}$$

这里 δ 为无限小。由方程 (VI.4.15) 到 (VI.4.23) 的讨论，重正化耦合常数和质量的相应改变为

$$g_R \to g'_R = g_R(1 + \varepsilon\delta) + \delta\left[a_1(g_R) - g_R \frac{d}{dg_R} a_1(g_R)\right], \qquad \text{(VI.5.45)}$$

及

$$m_R/\mu \to m_R/\mu \left\{1 + \delta\left(1 - g_R \frac{db_1}{dg_R}\right)\right\}. \qquad \text{(VI.5.46)}$$

这些改变导出下面的表示式

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = -2\rho\varepsilon g_R - 2\rho\left[a_1(g_R) - g_R \frac{da_1(g_R)}{dg_R}\right], \qquad \text{(VI.5.47)}$$

及

$$\mu \frac{d}{d\mu}(m_R/\mu) = -2\rho\left[1 - g_R \frac{db_1}{dg_R}\right] m_R. \qquad \text{(VI.5.48)}$$

于是

$$\beta(g_R) = -2\rho\left[a_1(g_R) - g_R \frac{da_1(g_R)}{dg_R}\right], \qquad \text{(VI.5.49)}$$

及

$$\gamma_m(g_R) = 2\rho g_R \frac{db_1}{dg_R}. \qquad \text{(VI.5.50)}$$

在得到方程 (VI.5.48) 过程中，对于费米子情形利用了 $\rho=1/2$. 如由方程 (VI.5.46) 的适当修正所证明的，令 $\rho=1$，该公式对于玻色子也适合.

方程 (VI.5.49) 和 (VI.5.50) 的直接推导可以对方程 (VI.5.41), (VI.5.42) 及 (VI.5.43) 进行微分而得到. 考虑方程 (VI.5.41). 因为 g_B 是固定的，于是

$$0=\left[2\rho\varepsilon g_R+2\rho a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(g_R)+2\rho a_{k+1}(g_R)}{\varepsilon^k}\right]+\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{d}{dg_R}a_k(g_R)\right]\mu\frac{dg_R}{d\mu}. \tag{VI.5.51}$$

在极限 $\varepsilon\to 0$ 中，$\mu dg_R/d\mu$ 是有限的，得到下面的表示式:

$$\mu\frac{dg_R}{d\mu}=D_0(g_R)+\varepsilon D_1(g_R)+\varepsilon^2 D_2(g_R)+\cdots. \tag{VI.5.52}$$

在方程 (VI.5.51) 中当利用方程 (VI.5.52) 时得到下面的条件

$$D_0(g_R)=-2\rho\left[a_1(g_R)-g_R\frac{d}{dg_R}a_1(g_R)\right], \tag{VI.5.53a}$$

$$D_1(g_R)=-2\rho g_R, \tag{VI.5.53b}$$

$$D_k(g_R)=0,\quad k\geqslant 2. \tag{VI.5.53c}$$

得到在方程 (VI.5.53c) 中阶给出的结果与方程 (VI.5.45) 的形式一致，(VI.5.53a) 及 (VI.5.53b) 只给出方程 (VI.5.47). 在现在的方法中，可以类似地推导出方程 (VI.5.48) 来.

为了得到反常维数，要对方程 (VI.5.43) 进行微分:

$$z\mu\frac{d}{d\mu}\ln z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{dC_R}{dg_R}\mu\frac{dg_R}{d\mu}. \tag{VI.5.54}$$

$\mu\dfrac{d}{d\mu}\ln z$ 的有限性再一次表明如下形式的展开式:

$$\mu\frac{d}{d\mu}\ln z=E_0(g_R)+\varepsilon E_1(g_R). \tag{VI.5.55}$$

组合方程 (VI.5.43), (VI.5.54) 及 (VI.5.55), 得到

$$E_0(g_R) = D_1(g_R)\frac{dC_1(g_R)}{dg_R}, \qquad \text{(VI.5.56a)}$$

$$E_1(g_R) = 0. \qquad \text{(VI.5.56b)}$$

于是

$$\gamma(g_R) = -2\rho g_R \frac{dC_1(g_R)}{dg_R}, \qquad \text{(VI.5.57)}$$

上式类似于方程 (VI.5.50) 的 $\gamma_m(g_R)$.

在 g_R^2 量级的情形中, 由于看到 g_R^2 和 g_B^2 对这个量级是相同的, 就可以直接证明两个方法的等价性.

由方程 (VI.5.49) 清楚地看到, β 函数由重正化耦合常数的 $\frac{1}{\varepsilon}$ 表示式的单极点项系数来确定, 由方程 (VI.5.50) 和 (VI.5.57) 可以看出, 正如反常维数是由它们各自的重正化常数得到的一样.

对于像 φ^4 理论的一些理论, β 函数有从 g_R^2 开始的 g_R 的偶数幂的展开式, 同时对于像量子色动力学, 量子电动力学, 等等的理论, β 函数有从 g_R^3 开始和 g_R 的奇数幂的级数. 这后一事实将在下节中由明显的计算来证明.

有效耦合"常数"的渐近结构 为确切起见, 将假定 $g_R > 0$. $\bar{g}(\lambda)$ 的渐近行为可以简单地由下式

$$\ln\lambda = \int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')}$$

来研究. 渐近区域包括 $\lambda \to \infty$ 及 $\lambda = 0$. 当趋近于这些极限时, 方程 (VI.5.22) 的积分是发散的, 由于明显的理由,

$$|p_i^2| = \lambda^2|(p_i^{(0)})^2| \to \infty \text{ 或 } 0, \text{ 当 } \lambda \to \infty \text{ 或 } 0.$$

称它们为紫外 ($\lambda \to \infty$) 极限和红外 ($\lambda \to 0$) 极限.

在渐近区域内 $\bar{g}(\lambda)$ 必须趋近于某个固定值: 无限大, 零或有限的常数. 当 $\bar{g}(\lambda)$ 趋近于零或有限值时, 称为一个固定

点，表示为

$$\lim_{\lambda \to \infty \text{或} 0} \bar{g}(\lambda) = g_f. \qquad \text{(VI.5.58)}$$

于是，使 $\beta(g)$ 为零，即，

$$\beta(g_f) = 0 \qquad \text{(VI.5.59)}$$

是必要的。由下面的证据可以看出，方程 (VI.5.59) 是成立的：如同情形 $g_f < \infty$ 一样，对于一个有限范围的积分要发散，被积函数在终点处必须为奇点的，这就导致方程 (VI.5.59)。

特别有兴趣的情形是 $g_f = 0$。具有这样一个固定点的量子场论，如果对于 $\lambda \to \infty$ 出现 $g_f = 0$，就称为紫外稳定的。而当 $\lambda \to 0$ 时有 $g_f = 0$ 则称为红外稳定的。只有在稳定点附近，使有效耦合“常数”小，微扰展开式才是适合的。

如果 $\beta(g)$ 总是有限的，或者在 g_R 和 g_f 之间具有可积分的奇点性，g_f 必须是发散的，因而积分方程 (VI.5.22) 的发散性是由积分的无限大的范围所引起的。在此情形中，β 函数的微扰展开式不再存在。

下面的简单例子(即使是非线性实现的形式)给出 β 函数渐近行为的示例。考虑第一个例子，有下面的 β 函数

$$\beta(g) = a_1 g^3 + a_2 g^5. \qquad \text{(VI.5.60)}$$

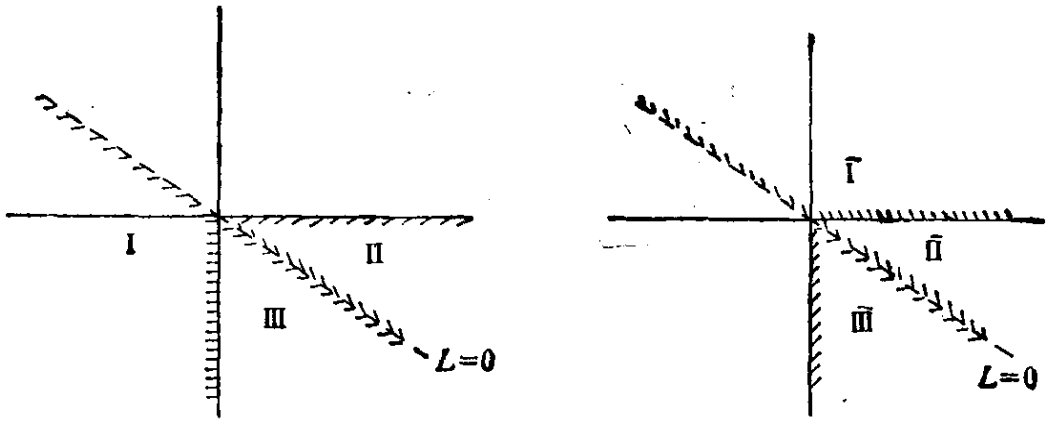
于是 (VI.5.22) 给出

$$\ln \lambda = -\frac{1}{2a_1}\left[\frac{1}{\bar{g}^2(x)} - \frac{1}{g_R^2}\right] + \frac{a_2}{2a_1^2} \ln \left| \frac{a_1 + a_2 \bar{g}^2(\lambda)}{a_1 + a_2 g_R^2} \cdot \frac{g_R^2}{\bar{g}^2(\lambda)} \right|. \qquad \text{(VI.5.61)}$$

首先考虑紫外行为。在区域 $\lambda \geqslant 1$ 内，上式右边必须大于或等于零，单调地增加，随 λ 而发散。图 VI.38 编号 I，II 和 III 的阴影面积是其中对 $\bar{g}^2(\lambda) > 0$ 的解所容许的区域。令

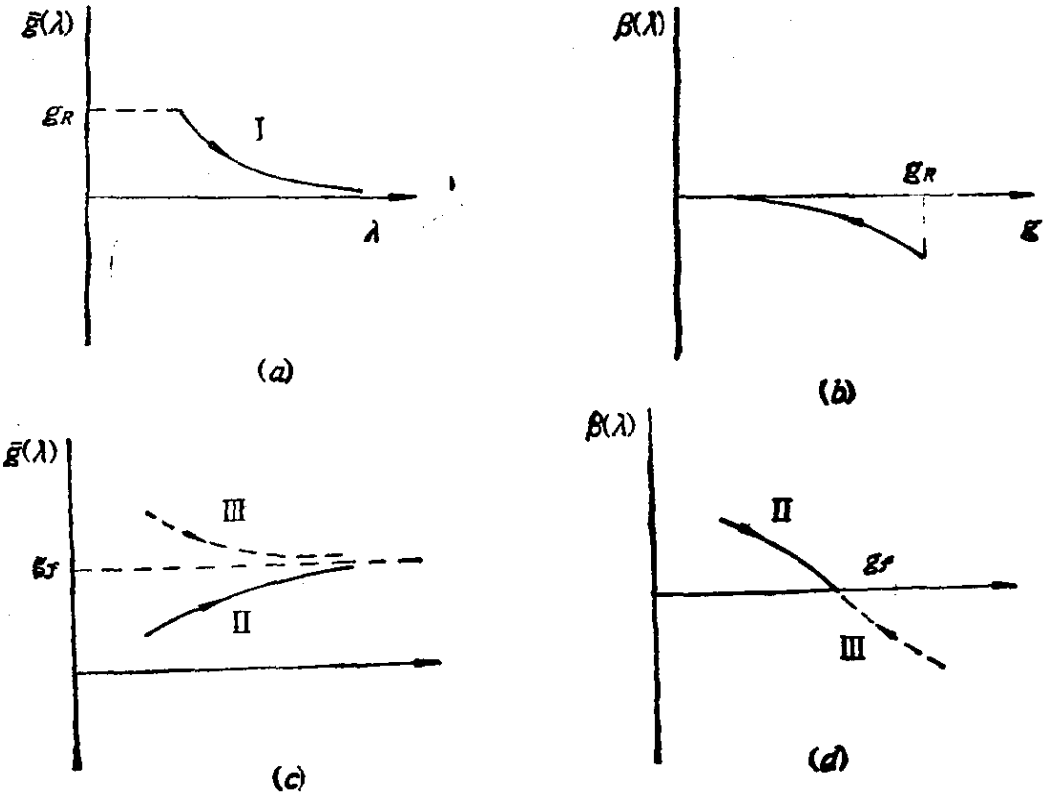
$$L = a_1 + a_2 g_R^2.$$

$a_1 - a_2$ 平面可以通过直线 $L = 0$ 划分为两部分. 对于 $L > 0$, $\bar{g}(\lambda)$ 要随 λ 而增加,同时在区域 $L < 0$ 内, 为了对于 $\lambda > 0$ 满足方程 (VI.5.51), $\bar{g}(\lambda)$ 要减小. 在三个区域内,$\bar{g}(\lambda)$ 变化过程的细节如下给出.



(a) $\lambda > 1$ (b) $\lambda < 1$

图 VI.38



(a) (b) (c) (d)

图 VI.39

区域 I 容许一个紫外稳定点，即

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) \to 0, \qquad \text{(VI.5.62)}$$

在区域 II 和 III 内，有一个有限的固定点

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) \to g_f \neq 0. \qquad \text{(VI.5.63)}$$

区域 I 中 $\beta(g)$ 和 $g(\lambda)$ 的变化过程在图 VI.39(a) 和 (b) 中描述，区域 II 和 III 中的在图 VI.39(c) 和 (d) 中描述。注意，在三个区域内曲线已编号了。

红外行为可以类似地加以研究。现在方程 (VI.5.61) 的右边必须是负的。$a_1 - a_2$ 空间如同前面的情形一样，仍然可以划分两部分。在区域 $L \succ 0$ 内，$g(\lambda)$ 必须随 λ 而减小；在

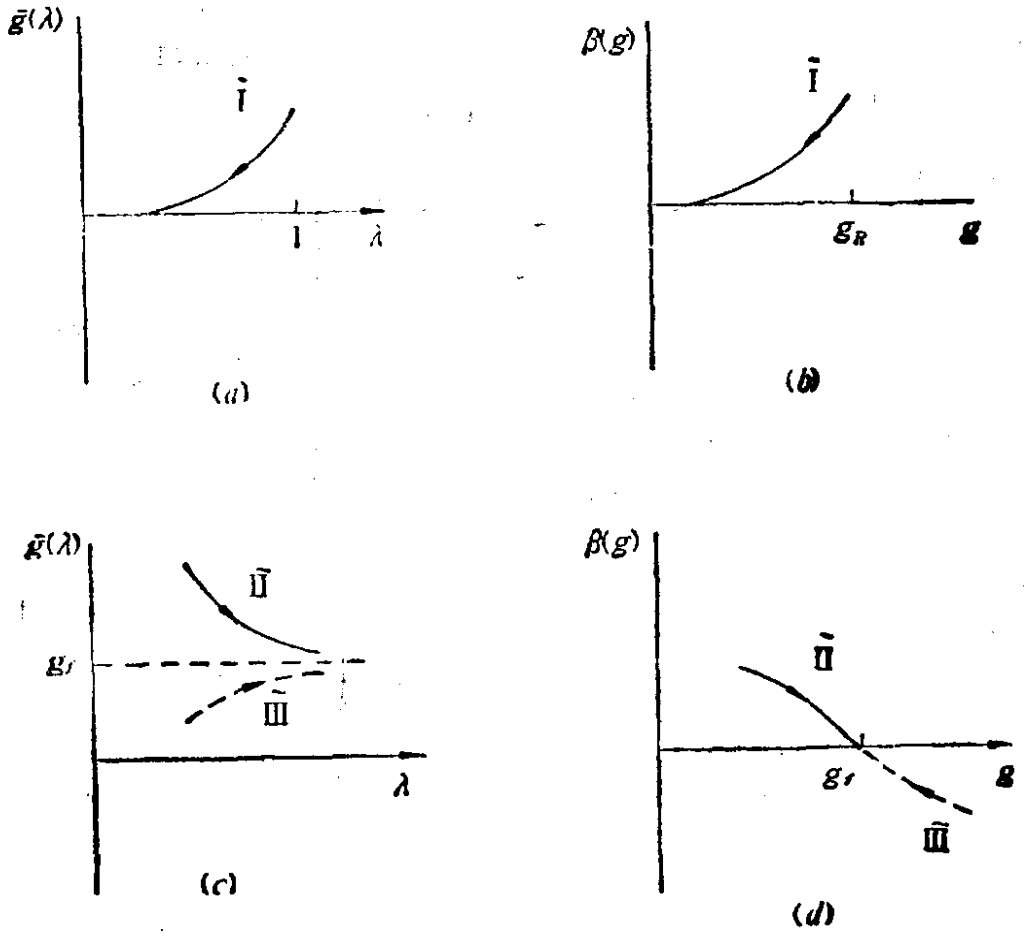


图 VI.40

区域 $L < 0$ 内，当 λ 减小时，$\bar{g}(\lambda)$ 增大. 容许的区域如图 VI.38(b) 所示，并且 $\bar{g}(\lambda)$ 和 $\beta(g)$ 的变化过程如图 VI.40 所示；在区域 $\tilde{I}$ 内，有一个红外稳定点；在区域 $\widetilde{II}$ 和 $\widetilde{III}$ 内，有有限个固定点.

注意，在上面的例子中，有效耦合"常数"不可能发散. 发散的有效耦合"常数"例子在下面的 β 函数中给出：

$$\beta(g) = (1 + a^2g^2)^{1/2} - 1; \quad a > 0. \tag{VI.5.64}$$

方程 (VI.5.22) 的解为

$$\ln\lambda = \frac{1}{a^2}\left\{-\frac{1}{\bar{g}(\lambda)} + \frac{1}{g_R^2} + a\ln\left[\frac{\sqrt{1 + a^2\bar{g}^2(\lambda)} + a\bar{g}(\lambda)}{\sqrt{1 + a^2g_R^2} + ag_R}\right]\right\}, \tag{VI.5.65}$$

它是红外稳定的，即，

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{g}(\lambda) \to -\frac{1}{\ln\lambda}. \tag{VI.5.66}$$

但是有效耦合常数是紫外发散的，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\bar{g}(\lambda) \to \frac{2}{a}\lambda^a. \tag{VI.5.67}$$

然而，如果利用 β 函数的截止微扰展开式，例如

$$\beta(g) = \frac{a^2}{2}g^2 - \frac{a^4}{8}g^4 + O(g^6), \tag{VI.5.68}$$

则对于紫外行为会得到一个有限的固定点，例如

$$\lim_{\lambda\to\infty}\bar{g}(\lambda) = 2/a, \tag{VI.5.69}$$

表明微扰展开式并不适合. 另一方面，有关红外稳点存在的事实，即方程 (VI.5.66)，仍然是真实的.

对于大的 a 值，注意到方程 (VI.5.69) 的 $\bar{g}(\lambda)$ 是小的，使人感到兴趣. 但是，结论认为，方程 (VI.5.69) 是一个正确的结果，是吸引人的. 当然，如由下面的论据可以看出，并不如此. (VI.5.69) 的结果由 (VI.5.67) 以有效耦合常数的形式展

开式得到:

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{2}{a}\exp\{a\ln\lambda\}$$

$$= \frac{2}{a}\{1 + a\ln\lambda + \cdots\},$$

并删去正比于 $(\ln(\lambda))^n$ 的项. 不用说，这是一个合理的程序.

在下面，例如对量子色动力学和量子电动力学的理论，对于小的 g_R 来考虑一般情况的渐近结构. β 函数取下面的形式

$$\beta(g) = d_1 g^3 + d_2 g^5 + \cdots. \qquad \text{(VI.5.70)}$$

有四种情形要考虑，与 d_1 的符号有关，并且除 $g = 0$ 以外，与 $\beta(g)$ 是否有限有关. 由前面所给出的两个例子，应该清楚看到，只有涉及到稳定点的结论才是正确的.

(1) 对于 $g \neq 0$, $\beta(g_R)/g_R < 0$ 和 $\beta(g) \neq 0$.

对于足够小的 g_R，这意味着在方程 (VI.5.70) 中 $d_1 < 0$. 因为 $\beta(g)$ 在 O 和 g 之间是有限的，方程 (VI.5.22) 意味着，当 λ 从 1 到∞时，$\bar{g}(\lambda)$ 必须从 g_R 减小到 O. 当有效耦合常数 $\bar{g}(\lambda) \to 0$ 时，这类理论称为渐近自由的，并且具有紫外方式的合理的微扰展开式；量子色动力学是渐近自由理论的一个例子. 因此

$$\ln\lambda = \int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)} \frac{dg}{-|d_1|g^3 + \cdots}$$

$$= \frac{1}{2|d_1|}\left[\frac{1}{(\bar{g}(\lambda))^2} - \frac{1}{g_R^2}\right] + \cdots. \qquad \text{(VI.5.71)}$$

于是

$$\bar{g}^2(\lambda) = \frac{g_R^2}{1 + 2g_R^2|d_1|\ln\lambda} + \cdots$$

$$\to \frac{1}{2|d_1|}(\ln\lambda)^{-1}. \qquad \text{(VI.5.72)}$$

$\beta(g)$ 和 $\bar{g}(\lambda)$ 有类似于图 VI.39(a) 和 (b) 所示的图形. 反常维数 $\gamma_\Gamma(g)$ 是 g^2 的幂级数,它取下面的形式

$$\gamma_\Gamma(g) = g^2(b_1 + b_2 g^2 + \cdots), \qquad \text{(VI.5.73)}$$

上式给出像方程 (VI.5.72) 形式的公式

$$\gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda)) = \frac{b_1 g_R^2}{1+2|d_1|g_R^2 \ln\lambda} + \cdots \to L_\Gamma(\ln\lambda)^{-1}, \qquad \text{(VI.5.74)}$$

这里

$$L_\Gamma \equiv \frac{b_1}{2|d_1|} = -\frac{3}{4}\frac{\gamma_\Gamma''(0)}{\beta'''(0)}. \qquad \text{(VI.5.75)}$$

类似地,给出方程 (VI.5.12) 形式的公式

$$\gamma_m(g) = c_1 g^2 + c_2 g^4 + \cdots \to L_m(\ln\lambda)^{-1}, \quad \text{(IV.5.76a)}$$

这里

$$L_m \equiv c_1/2|d_1| = -\frac{3}{4}\frac{\gamma_m''(0)}{\beta'''(0)}. \qquad \text{(VI.5.76b)}$$

于是

$$\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'}\gamma_m(\bar{g}(\lambda')) = L_m \mathrm{Ln}(\ln\lambda) + \cdots. \qquad \text{(VI.5.77)}$$

式(VI.5.31) 现在给出

$$\bar{m}(\lambda) \approx m_R \exp\{-\ln\lambda - L_m \mathrm{Ln}(\ln\lambda)\}$$

$$= \frac{m_R}{\lambda}(\ln\lambda)^{-L_m}, \qquad \text{(VI.5.78)}$$

因而当 $\lambda \to \infty$ 时, $\bar{m}(\lambda) \to 0$. 如果顶角函数相对于质量有导数, 并在零质量处计值, 则展开式方程 (VI.5.36) 证明合理.

对于红外行为,要得到准确的信息, 是不可能的, 因为微扰分析并不适合.

(2) 对于 $g \neq 0$, $\beta(g)/g > 0$ 及 $\beta(g) \neq 0$.

现在情形的紫外行为确实在微扰中不能进行研究. 由图

VI.38 的形式可以看出，取 $g > 0$，$\bar{g}(\lambda)$ 可以给出一个有限的固定点，而当 $\lambda \to \infty$ 时，$\bar{g}(\lambda)$ 可能发散.

另一方面，$\bar{g}(\lambda)$ 具有一个红外稳定点（参看图 VI.38），并且理论在红外区域有一个合理的微扰展开式；但是在紫外区域内微扰展开式的正确性是可疑的. 量子电动力学和大多数另外的可重正化的理论都是属于这一类的. 在本节末和在下节中包括更多的讨论.

(3) $\beta(g)$ 具有一个不为零的单根 g_f，并且 $\left.\frac{d\beta(g)}{dg}\right|_{g_f} < 0$.

取 g_R 足够接近 g_β，使 $\beta(g)$ 在 g_R 和 g_f 之间没有附加的根. 于是，如果 g_R 大于或小于 g_f，当 $\lambda \to \infty$ 时，$\bar{g}(\lambda) \to g$ 不

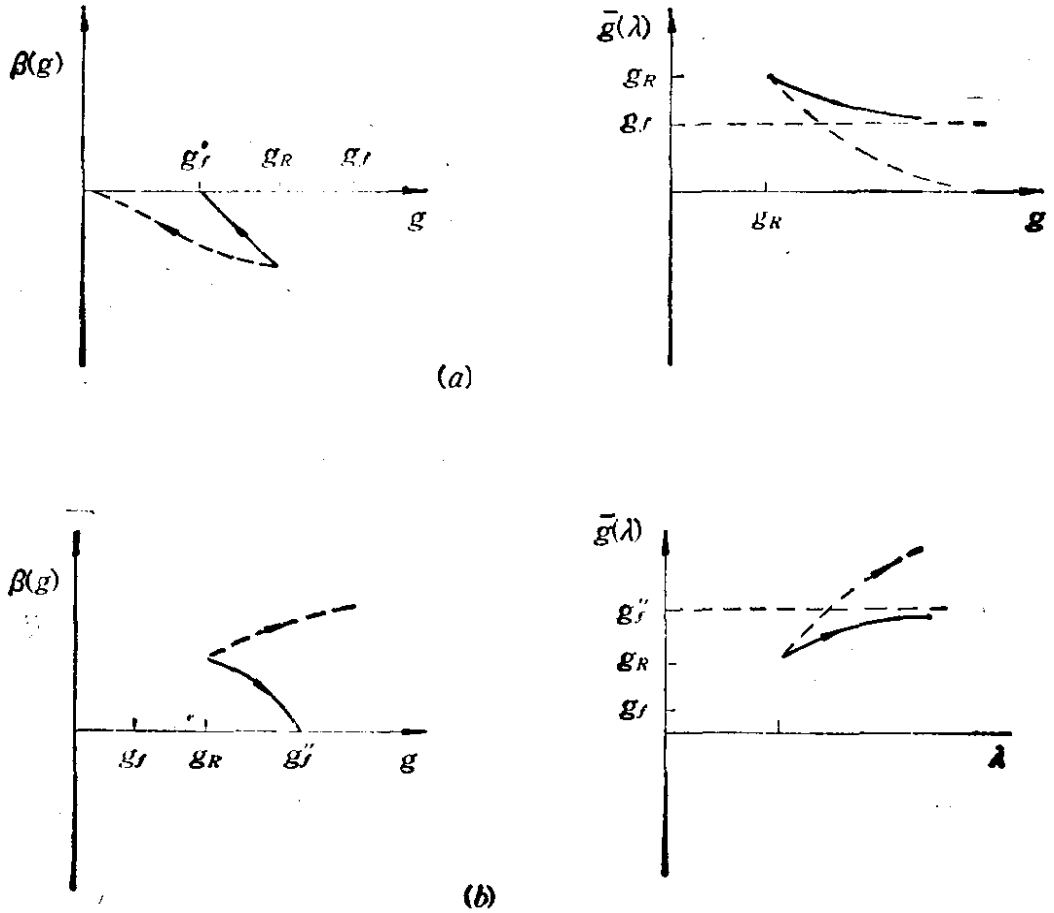


图 VI.41

必考虑；有效耦合“常数”总是收敛在紫外区域的固定点 g_f. 这个点称为相吸引的固定点. 变化过程如图 VI.39(c) 和 (d) 所示.

当 g_f 变为一个相排斥的点时，现在情形的红外行为是完全不同的. 当 $\lambda \to 0$ 时，无论 g_R 是否大于或小于 g_f，$\bar{g}(\lambda)$ 趋向离开 g_f 而运动. 对于 $g_R < g_f$，$\bar{g}(\lambda)$ 到达另外的固定点 $g_f' < g_f$，或者到达红外稳定点 $g = 0$. 这些变化过程如图 VI.41(a) 所示. 对于 $g_R > g_f$，$\bar{g}(\lambda)$ 趋近于固定点 $g_f'' < g_f$，或者它是发散的，如图 VI.41(b) 所示.

(4) $\beta(g)$ 具有一个不为零的单根 g_f，并且 $\left.\frac{d\beta(g)}{dg}\right|_{g_f} > 0$.

这类似于前一种情形 (3)，但是红外行为和紫外行为交换.

顶角函数的渐近行为和渐近自由 对于大的外动量，即 $\lambda \gg 1$，渐近行为的明确结论只能对上面的情形 (1) 所叙述的情况进行描述. 由方程 (VI.5.78) 清楚看到，在动量的主量级中，质量有关的项可以删去，给出方程 (VI.5.38). 指数的渐近行为可以由方程 (VI.5.74) 得到:

$$\int_1^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma_\Gamma(\bar{g}(\lambda')) = L_\Gamma \ln(\ln\lambda) + \cdots. \quad \text{(VI.5.79)}$$

于是

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, g_R, m_R, \mu) \xrightarrow{\lambda \gg 1} \lambda^{D_\Gamma} (\ln\lambda)^{-L_\Gamma} \cdot \Gamma_R(p_i^{(0)}, \bar{g}(\lambda), 0, \mu). \quad \text{(VI.5.80)}$$

占优势的变化过程，即因子 λ^{D_Γ}，由自然的维数计数已预料到了. 然而，只用一个适度的对数因子对重正化效应加以修正. 自然的维数计数修正称为反常维数，是使用该术语的理由.

方程 (VI.5.80) 所示的顶角函数的渐近表示式值得精确检验. 另一方面，顶角函数已经用零耦合常数和零质量计算

了；换言之，顶角函数已在初创理论的方案中计算了，初创理论是无质量的和无相互作用的．有这样简单渐近行为的理论称为渐近自由的，或者说它具有渐近自由[48,49,50]．

在前面的讨论中，已经证明，对于最小的 g_R，

$$\beta(g_R)_{g_R} \simeq d_1 g_R^2 + O(g_R^4). \qquad \text{(VI.5.81)}$$

因此，理论是否是渐近自由的，要由 β 函数的主项符号确定，如果它是负的，则理论是渐近自由的．否则理论不是渐近自由的．可重正化的量子场论根据渐近自由与否有一个完整的分类[47,51]．渐近自由的理论只有 ϕ^3 [6]（在 § VI.1 中所提到的六维 ϕ^3 理论）和非阿贝规范场论有限的一类，包括含 16 个味量子数或更少的味量子数的量子色动学在内．量子色动力学与强相互作用的近代理论相联系，首先由于它是渐近自由的，渐近自由提供电子质子深度非弹性散射现象的理论解释．在文献 [47, 52, 53] 中可以找到量子色动力学应用的专题评述．

具有多重耦合常数的理论 一般场论可能包含一个以上的耦合常数和质量．在第 III 章所叙述的电弱相互作用 $SU(2) \times U(1)$ 理论是一个例子．在该理论中有两个耦合常数，一个是 $SU(2)$ 的，另一个是 $U(1)$ 的．在此情形下重正化群方程是方程 (VI.5.18) 的推广：

$$\Big\{\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} - \sum_i \beta_i(\{g_{Rk}\})\frac{\partial}{\partial g_i} - \sum_l [1+\gamma_{ml}(\{g_{Rk}\})]m_{Rl}\frac{\partial}{\partial m_{Rl}} + \sum_i \xi_{Ri}\gamma_{Ai}(\{g_{Rk}\})\frac{\partial}{\partial\xi_{Ri}} + \gamma_\Gamma(\{g_{Rk}\}) - D_\Gamma\Big\} \cdot \Gamma_R(\lambda p_j^{(0)}, \{g_{Rk}\}, \{m_{Rl}\}, \{\xi_{Ri}\}, \mu) = 0, \qquad \text{(VI.5.82)}$$

这里也假定，有若干个规范场具有相应的规范参数 ξ_{Ri}．符号

$\{g_{Rk}\}$, $\{m_{Rl}\}$ 或 $\{\xi_{Ri}\}$ 用来表示函数在原则上依赖于所有的重正化耦合常数、重正化质量和重正化规范参数. β 函数和反常维数定义类似于单个耦合常数，质量，等等，相应的表示式为:

$$\beta_i(\{g_{Rk}\}) \equiv \mu \frac{\partial g_{Ri}}{\partial \mu},$$

$$\gamma_{ml}(\{g_{Rk}\}) \equiv -\mu \frac{\partial m_{Rl}}{\partial \mu},$$

及

$$\xi_{Ri}\gamma_{Ai} \equiv -\mu \frac{\partial \xi_{Ri}}{\partial \mu},$$

这里不假定对 l 或 i 求和. 量 γ_{Ai} 为规范场的反常维数. 在一般情形中，所有的函数 β_i, γ_{ml} 和 γ_{Ai} 都与出现在理论中的一切重正化常数有关.

方程 (VI.5.8) 的形式解由方程 (VI.5.35) 作为直接的推广可以得到

$$\Gamma_R(\lambda p_i^{(0)}, \{g_{R,k}\}, \{m_{Rl}\}, \{\xi_{Ri}\}, \mu)$$
$$= \lambda^{D_\Gamma} \exp\left\{-\int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma_\Gamma(\{\bar{g}_k(\lambda)\})\right\}$$
$$\cdot \Gamma_R\left\{p_i^{(0)}, \{\bar{g}_k(\lambda)\}, \{\bar{m}_l(\lambda)\}, \{\xi_i(\lambda)\}, \mu\right\}, \quad \text{(VI.5.83)}$$

这里

$$\bar{\beta}_i(\{\bar{g}_k(\lambda)\}) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{g}_i(\lambda), \quad \text{(VI.5.84a)}$$

$$-[1 + \gamma_{ml}(\bar{g}_k(\lambda))]\bar{m}_l(\lambda) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{m}_l(\lambda), \quad \text{(VI.5.84b)}$$

$$-\gamma_{Ai}(\{\bar{g}_k(\lambda)\})\xi_i(\lambda) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \xi_i(\lambda). \quad \text{(VI.5.84c)}$$

有效耦合常数 $\{\bar{g}_k(\lambda)\}$ 的渐近行为是比较复杂的，并且包含具有一个耦合常数理论所显示不出的性质. 下面的简短讨论

是按照文献[47]的论述.

所采取的有用的观点是把$\{\bar{g}_k(\lambda)\}$看成是一个粒子在K维空间内运动的坐标，这里k在K以内取值，$k=1,2,\cdots,K$，并且把

$$t \equiv \ln\lambda$$

看作为时间变数. 于是，方程(VI.5.84a)变为

$$\frac{d}{dt}\bar{g}_i(\lambda) = \bar{\beta}_i(\{\bar{g}_k(t)\}),\ i=1,2,\cdots,K. \quad \text{(VI.5.85)}$$

现在$\bar{\beta}_i$可以取作为粒子速度的分量. 耦合常数的渐近行为简单地是粒子在力的影响下的渐近位置，而力是位置的函数. 一般，当$t\to\pm\infty$时，轨迹的渐近行为可能是很复杂的，可以分类为三种情形：

(a) 固定点的变化过程

在此情形下，当$t=\ln\lambda\to\pm\infty$时，有效耦合函数趋近于固定值. 考虑下面的例子，包含两个耦合常数，用t变数来表示，

$$\frac{d\bar{g}_1}{dt} = \beta_1(\bar{g}_1,\bar{g}_2) = -\bar{g}_1 + 2a\bar{g}_1\bar{g}_2, \quad \text{(VI.5.86a)}$$

$$\frac{d\bar{g}_2}{dt} = \beta_2(\bar{g}_1,\bar{g}_2) = -\bar{g}_2 + 2a\bar{g}_1\bar{g}_2, \quad \text{(VI.5.86b)}$$

这里$a>0$为常数. 初始条件为

$$\bar{g}_1(0) = g_{R1},\ \bar{g}_2(0) = g_{R2}. \quad \text{(VI.5.87)}$$

改变变数

$$\bar{g}_\pm \equiv \bar{g}_1 \pm \bar{g}_2, \quad \text{(VI.5.88)}$$

于是

$$\frac{d\bar{g}_-}{dt} = -\bar{g}_-, \quad \text{(VI.5.89a)}$$

$$\frac{d\bar{g}_+}{dt} = -\bar{g}_+ + a(\bar{g}_+^2 - \bar{g}_-^2). \quad \text{(VI.5.89b)}$$

立即清楚，方程 (VI.5.89a) 的解为：

$$\bar{g}_- = K_0 e^{-t}, \quad K_0 \equiv \bar{g}_{R1} - \bar{g}_{R2}. \tag{VI.5.90}$$

紫外变化过程 $t \to +\infty$ 方程 (VI.5.90) 意味着

$$\text{当 } t \to \infty \text{ 时，} \bar{g}_+ - \bar{g}_- \to 0.$$

当 $\bar{g}_-$ 可以略去时，$\bar{g}_+$ 的变化过程可以对于大的 t 进行研究：

$$\frac{d\bar{g}_+}{dt} \simeq -\bar{g}_+ + a\bar{g}_+^2, \quad t \gg 1.$$

于是对于 $t \to \infty$，

$$\bar{g}_+(t) \to \begin{cases} 0, & \text{对于 } g_{R1} + g_{R2} < \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{a}, & \text{对于 } g_{R1} + g_{R2} > \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

因此，有两个固定点，与初条件有关；一个是

$$\bar{g}_1 \text{ 及 } \bar{g}_2 \to 0, \text{ 对于 } g_{R1} + g_{R2} < \frac{1}{a}.$$

另一个是

$$\bar{g}_1 \text{ 及 } \bar{g}_2 \to \frac{1}{2a}, \text{ 对于 } g_{R1} + g_{R2} > \frac{1}{a}.$$

这些结果用图 VI.42 来描述。

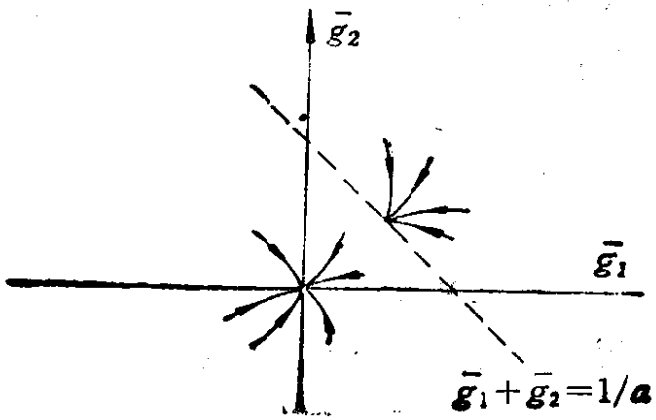


图 VI.42

红外变化过程 $t \to -\infty$　至少耦合常数之一或二 $\bar{g}_1(t)$ 及 $\bar{g}_2(t)$ 趋于无穷大.

(b) 有限的循环

这是当 $|t| \to \infty$ 时,耦合常数在一条闭合曲线上运动的情况,并且个别的耦合变为周期函数. 下面的例子具有这种性质:

$$\frac{d\bar{g}_1}{dt} = c^2\bar{g}_1 + \alpha\bar{g}_2 - \bar{g}_1(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2), \qquad \text{(VI.5.91a)}$$

$$\frac{d\bar{g}_2}{dt} = c^2\bar{g}_2 + \alpha\bar{g}_1 - \bar{g}_2(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2), \qquad \text{(VI.5.91b)}$$

这里 c 和 α 为实常数. 改变变数,令

$$\bar{g}_1(t) = R(t)\sin\theta(t),$$
$$\bar{g}_2(t) = R(t)\cos\theta(t).$$

方程 (VI.5.91) 的微分方程变为

$$\frac{dR}{dt} = R(c^2 - R^2), \qquad \text{(VI.5.92a)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha. \qquad \text{(VI.5.92b)}$$

方程 (VI.5.92b) 的解直接为

$$\theta(t) = \alpha t + \theta_0,$$

这里 θ_0 为由初条件确定的常数. $R(t)$ 的变化过程可以由下面的表示式得到:

$$\int_{R_0}^{R(t)} \frac{dR'}{R'^2(c^2 - R'^2)} = t, \qquad \text{(VI.5.93)}$$

这里

$$R(0) = R_0.$$

紫外变化过程　对于 $t \to \infty$,不管 R_0 的值,

$$R^2(t) \to c^2.$$

于是耦合的轨迹趋近于半径为 c 的具有角速度 α 的圆.

在此情形中，有效耦合为振动函数，因而为大动量处的Green 函数.

红外变化过程 对于 $t \to -\infty$，$R(t)$ 的解只对 $R_0 < c$ 存在:

当 $t \to -\infty$ 时，$R(t) \to 0$.

实 $R(t)$ 对于 $R_0 > c$ 没有解存在.

(c) 各态经历的变化过程

在如(VI.5.85)的偏微分方程组中，可能出现的另外情况是各态经历的变化过程. 在此情形下，有效耦合的轨迹可以任意通过而接近于某个区域的任何点. 这类似于粒子在有心势的影响下但具有开轨道的力学体系. 各态经历的变化过程可能是一般量子场论的有效耦合的共同变化过程.

VI. 6 低阶重正化群参数的计算

在本节中将进行重正化群方程中系数的显式计算，即是计算(VI.5.7)，(VI.5.9)及(VI.5.12)所定义的 β 函数和反常维度. 将考虑两类理论: 阿贝耳规范理论和不具有标量或膺标量的非阿贝耳规范理论. 阿贝耳规范理论，例如量子电动力学，是红外稳定的. 具有 $SU(N)$ 对称性的非阿贝耳理论，例如量子色动力学，在对它的费米子谱的一定限制下是紫外稳定的. 红外或紫外稳定的意义是理论在低或高能量区域内有适当的展开式. 在本节末将给出两类理论渐近行为的差异原因的简短讨论.

对于量子电动力学，对确定到二圈阶的 β 函数及光子的反常维数，并对确定到一圈阶的费米子的反常维数，已经存在着足够的信息. 本节的主要部分是在量子色动力学中近似到一圈阶计算 β 函数和反常维数. 将利用前节所叙述的极小减

除方法[31]和 Collins-Macfarlane 方法[46]作为示例.

扼要重述这两种方法的重要之点是有益的：(a) 在 Collins-Macfarlane 方法中[46]，利用裸耦合常数以组合形式 $g_b\mu^{-2\rho\varepsilon}$ 作为展开参数，这里对于本节所讨论的理论，$\rho=\frac{1}{2}$. 重正化常数为裸参数的函数. 对于一迴路量级，当 $g_b=g_R$ 时，这个方法是很方便的. 在运算上，β 函数，等等，简单地是适当重正化常数的简单 ε 极点的留数乘以 -2ρ，并用 g_R 代替 $g_b\mu^{-2\rho\varepsilon}$.

(b) 在前节中已阐述了 't Hooft 的极小减除方法[31]，有关的公式为方程 (VI.5.49)，(VI.5.50) 及 (VI.5.57).

在量子色动力学中一圈的结果 如在 § VI.3 所讨论的，任一四顶角都可以用协变规范来计算重正化的耦合常数. 重正化耦合常数的定义和不同重正化常数之间的关系已在方程 (VI.3.5) 和 (VI.3.6) 中给出了. 将利用费米子费米子胶子顶角作为示例. 这需要计算费米子和胶子波函数重正化常数，z_2 及 z_3，并计算费米子费米子胶子顶角函数重正化常数 z_1. 这些重正化常数的表示式已经在 § VI.4 中出现了.

首先记住下面的 $SU(N)$ 群因子公式(参看附录 III)：

$$f_{acd}f_{bcd}=C_2(G)\delta_{ab},$$

$$\mathrm{Tr}(T^aT^b)=T(R)\delta_{ab}=\frac{1}{2}\delta_{ab},$$

$$\delta^{ab}T^aT^b=C_2(R)=\frac{N^2-1}{2N}. \qquad \text{(VI.6.1)}$$

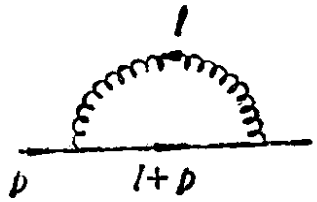
特别对于 $SU(3)$

$$C_2(G)=3,\quad C_2(R)=4/3,\quad T(R)=1/2.$$

(A) 费米子二点函数和费米子波函数重正化.

费米子传播子的一圈贡献为

$$-i\Sigma^{(1)}(p) \quad = \quad$$



$$= i^2(ig_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2(T^aT^b\delta_{ab})\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\gamma_\mu$$

$$\cdot\frac{\not l+\not p+m_R}{(l+p)^2-m_R^2}\gamma_\nu\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi_R)\frac{l^\mu l^\nu}{l^2}\right]\cdot\frac{1}{l^2}$$

$$\doteq(g_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2C_2(R)\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\frac{\gamma_\mu(\not l+\not p)\gamma_\nu+m\gamma_\mu\gamma_\nu}{(l+p)^2}\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi_R)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{l^\mu l^\nu}{l^2}\right]\frac{1}{l^2}=(g_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2C_2(R)\int_0^1dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\{[-(2-n)(\not l+\not p)+(1-\xi_R)(\not l+\not p)$$
$$-(n-1+\xi_R)]/[l^2-2l\cdot p_x-\Delta]^2\}$$
$$+4(1-x)(1-\xi_R)\frac{\not l(p\cdot l)}{[l^2-2l\cdot p_x-4]^3}\Big\},$$

(VI.6.2a)

这里"$\doteq$"意味着只保留发散部分，

$$p_x\equiv-xp,\quad\Delta=-xp^2,$$

$$-i\Sigma^{(1)}(p)\doteq(g_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2C_2(R)\int_0^1dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\{\{[-(2-n)(\not l-x\not p+\not p)+(1-\xi_R)$$
$$\cdot(\not l-x\not p-\not p)-(n-1-\xi_R)m_R]/[l^2$$
$$-(\Delta+p_x^2)]^2\}+4(1-x)(1-\xi_R)$$
$$\cdot(\not l-x\not p)(l\cdot p-xp^2)/[l^2-(\Delta+p_x^2)]^3\}$$

$$=(g_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2C_2(R)\int_0^1dx\left\{\not p\left[-(2-n)(1-x)\right.\right.$$

$$-(1+x)(1-\xi_R)+\frac{4}{n}(1-x)(1-\xi_R)\Big]$$

$$-(n-1+\xi_R)m_R\Big\}\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{[l^2-(\Delta+p_x^2)]^2}$$

$$\doteq(g_R\mu^{2\rho\varepsilon})^2C_2(R)\frac{1}{(4\pi)^2}[\xi_R\not{p}-(3+\xi_R)m_R]\frac{1}{\varepsilon},$$

(VI.6.2b)

即是

$$\Sigma^{(1)}(p)\doteq-\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}C_2(R)\cdot[\xi_R\not{p}-(3+\xi_R)m_R]\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.3)}$$

用 (VI.3.16) 的符号，

$$\Sigma_f^{(1)}(p^2)\doteq\Sigma_f^{(1)}(p^2)|_\varepsilon=\frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(R)\frac{\xi_R}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.4a)}$$

及

$$A(p^2)\doteq A(p^2)|_\varepsilon=-\frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(R)\frac{3+\xi_R}{\varepsilon},$$

(VI.6.4b)

上式就是方程 (VI.3.117) 和 (VI.3.118) 的发散部分. 于是

$$z_2=1-\Sigma_f^{(1)}(p^2)|_\varepsilon=1-\frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(R)\frac{\xi_R}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.5a)}$$

$$z_m=1+\Sigma_f^{(1)}(p^2)|_\varepsilon-A^{(1)}(p^2)|_\varepsilon=1+\frac{g_R^2}{16\pi^2}C_2(R)\frac{3}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.5b)}$$

上式准确地是方程 (VI.4.71) 和 (VI.4.74) 中所给出的表示式.

(B) 胶子二点函数和胶子波函数重正化.

对于耦合常数的第二阶，在图 VI.43 中给出有贡献的图形. 第二阶图形用 $i\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)ab}$ 来表示图 VI.43 的每个图形可以分

别进行计算。

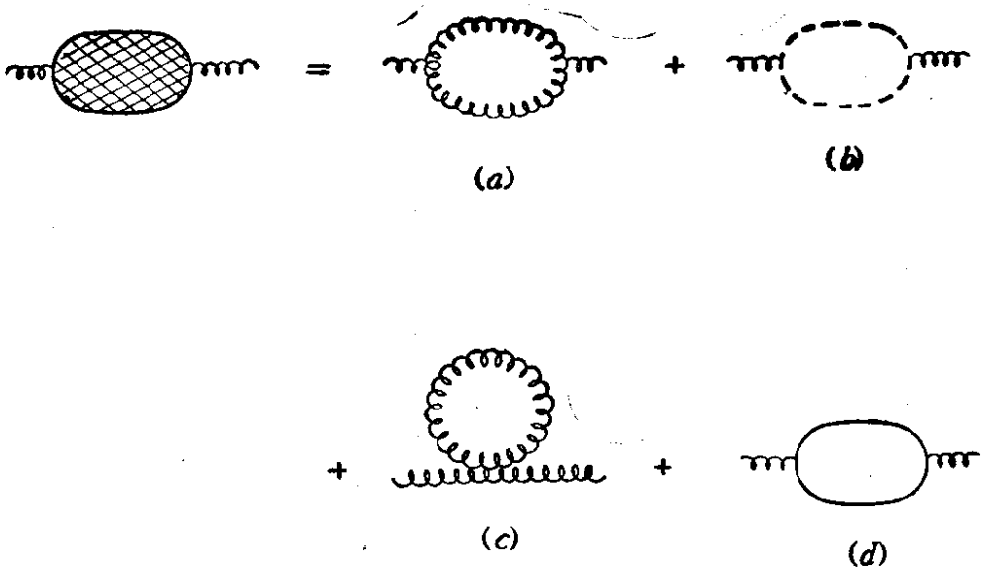


图 VI.43

注意，$\underline{\Pi}^{(1)ab}_{\mu\nu}$ 只包含一粒子不可约化的部分，其中并不包含外传播子。全胶子传播子可以通过上面的一粒子不可约化部分和自由胶子传播子表示为一个无穷级数：

$$i\bar{D}_{\mu\nu}(k) = iD_{\mu\nu}(k) + iD_{\mu\lambda}[i\underline{\Pi}^{\lambda\rho}]iD_{\rho\nu} + iD_{\mu\lambda}[i\underline{\Pi}^{\lambda\rho}]iD_{\rho\lambda'}[i\underline{\Pi}^{\lambda'\rho'}]iD_{\rho'\nu} + \cdots, \quad \text{(VI.6.6a)}$$

这里删去了内对称的指标。由 Slanov-Taylor 恒等式 (VI.2.42b)，即

$$k^{\mu}\bar{D}_{\mu\nu}(k) = k^{\mu}D_{\mu\nu}(k) = -\xi_R k_{\nu}/k^2,$$

并右乘以逆传播子 $(D^{\nu\sigma})^{-1}$，方程 (VI.6.62a) 变为

$$k_{\lambda}\underline{\Pi}^{\lambda\sigma}(k) + k_{\lambda}\underline{\Pi}^{\lambda\rho}[iD_{\rho\lambda'}]i\underline{\Pi}^{\lambda'\sigma} + \cdots = 0.$$

因为 $\underline{\Pi}_{\lambda\rho}$ 是从 g_R^2 出发的，只有当

$$k_{\lambda}\underline{\Pi}^{\lambda\rho}(k) = 0, \quad \text{(VI.6.6b)}$$

上面耦合常数 g_R^2 的幂级数的方程才可能成立因此

$$\underline{\Pi}_{\mu\nu}(k) = (k_{\mu}k_{\nu} - k^2 g_{\mu\nu})\underline{\Pi}(k^2). \quad \text{(VI.6.6c)}$$

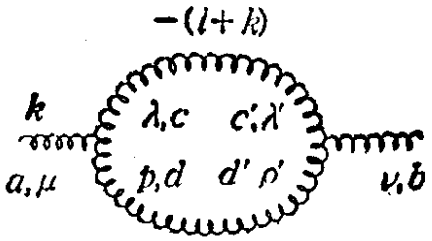
这个规范不变性形式使 $\underline{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ 的计算大为简化。由于具有

费米子中间态的图形，图 VI.43(d) 的贡献在处理维数正规化时，已经是规范不变的形式. 因此，玻色子中间态图 43 (a)，43 (b) 及 43 (c) 的贡献的和也必须是规范不变量的. 后三个图形的振幅分别用 $J^{(a)}_{\mu\nu}$，$J^{(b)}_{\mu\nu}$ 及 $J^{(c)}_{\mu\nu}$ 来表示；于是

$$\begin{aligned}\Pi^{(B)}_{\mu\nu}(k) &\equiv J^{(a)}_{\mu\nu}(k) + J^{(b)}_{\mu\nu}(k) + J^{(c)}_{\mu\nu}(k)\\ &= (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})\Pi^{(B)}(k^2).\end{aligned} \tag{VI.6.7}$$

三个振幅 $J^{(a)}_{\mu\nu}$，$J^{(b)}_{\mu\nu}$ 及 $J^{(c)}_{\mu\nu}$ 分别在下面进行计算.

$J^{(a)}_{\mu\nu}$ 为 $J^{(a)}_{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{2}\right)$



由 § II.3 所给出的 Feynman 规则，

$$\begin{aligned}J^{(a)}_{\mu\nu} = &\frac{1}{2}(i)^2(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2 f^{acd}f^{bd'c'}\delta_{cc'}\delta_{dd'}\\ &\cdot\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{l^2(l+k)^2}\left\{\left[-g^{\lambda\lambda'} + (1-\xi_R)\right.\right.\\ &\left.\cdot\frac{(l+k)^\lambda(l+k)^{\lambda'}}{(l+k)^2}\right]\left[-g^{\rho\rho'} + (1-\xi_R)\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}\right]\\ &\cdot[g_{\mu\lambda}(l+2k)_\rho + g_{\lambda\rho}(-2l-k)_\mu\\ &+ g_{\rho\mu}(l-k)_\lambda]\cdot[g_{\nu\lambda'}(l+2k)_{\rho'} + g_{\lambda'\rho'}\\ &\left.\cdot(-2l-k)_\nu + g_{\rho'\nu}(l-k)_{\lambda'}]\right\}.\end{aligned} \tag{VI.6.8}$$

这个表示式在具有任意 ξ_R 的一般线性协变规范中进行计算是冗长的. 然而，注意到正比于 $(1-\xi_R)^2$ 的项是收敛的. 这容易验证，显然写出如下的项：

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\xi_R)^2}{[l^2(l+k)^2]^2}(l+k)^\lambda(l+k)^{\lambda'}l^\rho l^{\rho'}\\ &\cdot[g_{\mu\lambda}(l+2k)_\rho + g_{\lambda\rho}(-2l-k)_\mu\end{aligned}$$

$$+ g_{\rho\mu}(l - k)_\lambda] \cdot [g_{\nu\lambda'}(l + 2k)_{\rho'}$$
$$+ g_{\lambda'\rho'}(-2l - k)_\nu + g_{\rho'\nu}(l - k)_{\lambda'}]$$
$$= \frac{(1 - \xi_R)^2}{[l^2(l + k)^2]^2}[k^4 l_\mu l_\nu - (l \cdot k)(l_\mu k_\nu + k_\mu l_\nu)$$
$$+ (l \cdot k)^2 k_\mu k_\nu], \qquad \text{(VI.6.9)}$$

它对 $J^{(a)}_{\mu\nu}$ 得到有限的贡献，因此在计算重正化常数中可以略去. 方程 (VI.6.8) 的积分实际上可以写为

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2(l + k)^2} \left[g^{\lambda\lambda'} g^{\rho\rho'} - (1 - \xi_R)\right.$$
$$\left. \cdot g^{\lambda\lambda'} \frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2} - (1 - \xi_R) g^{\rho\rho'} \frac{(l + k)^\lambda (l + k)^{\lambda'}}{(l + k)^2}\right]$$
$$\cdot [g_{\mu\lambda}(l + 2k)_\rho + g_{\lambda\rho}(-2l - k)_\mu$$
$$+ g_{\rho\mu}(l - k)_\lambda]_* \cdot [g_{\nu\lambda'}(l + 2k)_{\rho'}$$
$$+ g_{\lambda'\rho'}(-2l - k)_\nu + g_{\rho'\nu}(l - k)_{\lambda'}]_\star.$$
$$\text{(VI.6.10)}$$

现在我们限于 Feynman 规范 $\xi_R = 1$；往后将进行计算一般的规范相关性. 上面的积分现在变为

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 + 2xkl + xk^2]^2} g^{\lambda\lambda'} g^{\rho\rho'} [\quad]_* [\quad]_\star, \qquad \text{(VI.6.11a)}$$

这里[ ]$_*$和[ ]$_\star$在方程 (VI.6.10) 中定义了. 当积分变数位移时令

$$l \to l - xk,$$

方程 (VI.6.11a) 变为

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2} [g_{\mu\lambda}(l + [2 - x]k)_\rho$$
$$+ g_{\lambda\rho}(-2l - [1 - 2x]k)_\mu$$
$$+ g_{\rho\mu}(l - [1 + x]k)_\lambda] \cdot [g^\lambda_\nu(l + [2 - x]k)^\rho$$
$$+ g^{\lambda\rho}(-2l - [1 - x]k)_\nu$$

$$+ g_\nu^\rho (l - [1 + x]k)^\lambda]. \qquad \text{(VI.6.11b)}$$

这里

$$\Delta \equiv -x(1-x)k^2.$$

在式 (VI.6.11b) 中包含 l 的奇数幂的一切项可以删去，并且表示式可以写为

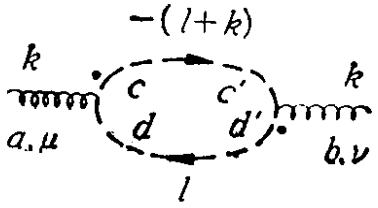
$$\int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-\Delta)^2} \{g_{\mu\nu}[2l^2 + ((2-x)^2 + (1-x)^2)k^2] + l_\mu l_\nu[-4+4n] + k_\mu k_\nu[-2(2-x)(1-2x) - 2(1+x) + n(1-2x)^2]\}. \qquad \text{(VI.6.12)}$$

在 Feynman 规范中，$J_{\mu\nu}^{(a)}$ 的发散部分为

$$J_{\mu\nu}^{(a)} \doteq \frac{1}{2} (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G) \delta^{ab} \cdot \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2-\Delta)^2} \{g_{\mu\nu}[2l^2 + (5 - 2x + 2x^2)k^2] + 2(2n-3) l_\mu l_\nu + [n(1-2x)^2 - 6(1-x+x^2)]k_\mu k_\nu\}. \qquad \text{(VI.6.13)}$$

$J_{\mu\nu}^{(b)}$ 项为

$J_{\mu\nu}^{(b)} \equiv$



$$= -(-i)^2 (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 f^{acd} f^{bd'c'} \delta_{cc'} \delta_{dd'} \cdot \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2 (l+k)^2} [-(l+k)_\mu] l_\nu$$

$$= -\frac{1}{2} (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \cdot \frac{1}{(l^2-\Delta)^2} [2 l_\mu l_\nu - 2x(1-x) k_\mu k_\nu], \qquad \text{(VI.6.14)}$$

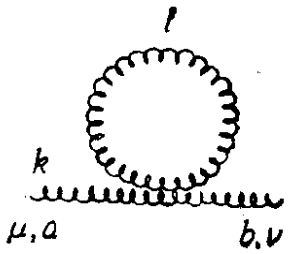
这里

$$\Delta = -x(1-x)k^2.$$

注意，在上面的表示中，鬼圈与一个负号相联系，因为鬼遵从费米统计。

$J^{(c)}_{\mu\nu}$ 为

$$J^{(c)}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot$$



这正比于

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2 + it}.$$

在维数正规化方案中，由 't Hooft-Veltman 猜测，方程(IV.3.35)，它为零。

$$J^{(c)}_{\mu\nu} = 0. \qquad \text{(VI.6.15)}$$

由胶子和鬼中间态的总贡献为

$$\begin{aligned} J^{(B)}_{\mu\nu} &= J^{(a)}_{\mu\nu} + J^{(b)}_{\mu\nu} + J^{(c)}_{\mu\nu} \\ &\doteq \frac{1}{2}(g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G)\delta_{ab} \int_0^1 dx \\ &\cdot \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2} \cdot \{g_{\mu\nu}[2l^2 \\ &+ (5 - 2x + 2x^2)k^2] + 2(2n-3) \\ &\cdot \frac{1}{n} l^2 g_{\mu\nu} - \frac{2}{n} l^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu [n(1-2x)^2 \\ &- 6(1 - x + x^2) + 2x(1-x)]\}, \qquad \text{(VI.6.16)} \end{aligned}$$

这里利用了下面的关系

$$l_\mu l_\nu \to \frac{1}{n} l^2 g_{\mu\nu}.$$

因为它只包含横向部分，$g_{\mu\nu}$ 项的系数可以按 $k_\mu k_\nu$ 项的系数来表示;因此

$$k^\mu J^{(B)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G) \delta_{ab} k_\nu \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}$$
$$\cdot \left\{ l^2 \left[2 + \frac{2}{n} (2n-3) - \frac{2}{n} \right] \right.$$
$$+ k^2(5 - 2x + 2x^2) + k^2[n(1-2x)^2$$
$$\left. - 6(1 - x + x^2) + 2x(1-x)] \right\} = 0.$$

这赋予平方发散积分和对数发散积分之间一个条件. 于是我们得到 $J^{(B)}_{\mu\nu}$ 的横向部分为:

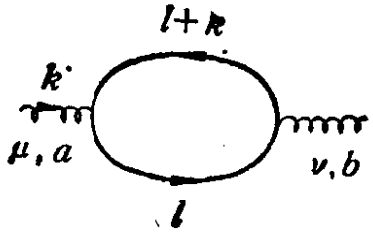
$$J^{(B)T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G) \delta_{ab} (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})$$
$$\cdot \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}$$
$$\cdot \{n(1-2x)^2 - 6(1 - x + x^2) + 2x(1-x)\}.$$
$$\text{(VI.6.17)}$$

$J^{(B)T}_{\mu\nu}$ 的发散部分为

$$J^{(B)T}_{\mu\nu} \doteq \frac{1}{2} (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 C_2(G) \delta_{ab} (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2)$$
$$\cdot i \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \, [4(n-2)x^2 - 4(n-2)x$$
$$+ n - 6] \doteq -i \frac{(g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2} C_2(G) \delta_{ab} \frac{5}{3}$$
$$\cdot \frac{1}{\varepsilon} (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}). \qquad \text{(VI.6.18)}$$

现在可以进行计算由于夸克中间态的贡献:

$J_{\mu\nu}^{(F)} =$



$$= -i^4(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2\mathrm{Tr}(T^aT^b)\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{l+k+m_b}{(l+k)^2-m_b^2}\gamma_\nu\frac{l+m_b}{l^2-m_b^2}\right]. \quad \text{(VI.6.19)}$$

首先计算求迹:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu(l+k+m_b)\gamma_\nu(l+m_b)\}$$
$$= 4\{2l_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu + k_\mu l_\nu$$
$$- g_{\mu\nu}[l\cdot(l+k) - m_b^2]\}.$$

令

$$k_x \equiv -xk,$$
$$\tilde{\Delta} = m_b^2 - xk^2.$$

式(VI.6.19)的积分可以用 Feynman 参数的积分来表示:

$$4\int_0^1 dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-2l\cdot k_x-\tilde{\Delta})^2}$$
$$\cdot\{2l_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu + k_\mu l_\nu - g_{\mu\nu}[l\cdot(l+k) - m_b^2]\}$$
$$= 4\int_0^1 dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{[l^2-(k_x^2+\tilde{\Delta})]^2}$$
$$\cdot\{2l_\mu l_\nu - 2x(1-x)k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}$$
$$\cdot[l^2 - x(1-x)k^2 - m_b^2]\}$$
$$= \frac{4i}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^1 dx\left\{x(1-x)[-2k_\mu k_\nu + g_{\mu\nu}k^2]\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\Gamma(2-n/2)}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{2-n/2}} + g_{\mu\nu}\left(\frac{2}{n}-1\right)\right.$$

$$\cdot\left[-\frac{n\Gamma(1-n/2)}{2}\frac{\tilde{\Delta}+k_x^2}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{2-n/2}}\right]$$

$$+g_{\mu\nu}m_b^2\Gamma\left(n-\frac{n}{2}\right)\frac{1}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{2-n/2}}\Big\}. \quad \text{(VI.6.20)}$$

最后两项可以重写为

$$\left[-\left(\frac{2}{n}-1\right)^{n}_{2\left(1-\frac{n}{2}\right)}(\tilde{\Delta}+k_x^2)+m_b^2\right]$$

$$\cdot\frac{g_{\mu\nu}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{2-n/2}}=\Gamma(\varepsilon)\frac{g_{\mu\nu}}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{\varepsilon}}$$

$$\cdot[x(1-x)k^2]. \quad \text{(VI.6.21)}$$

积分变为

$$\frac{4i}{(4\pi)^{n/2}}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\,[-2x(1-x)]$$

$$\cdot\frac{1}{(\tilde{\Delta}+k_x^2)^{\varepsilon}}\doteq\frac{i}{(4\pi)^2}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\cdot(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{\varepsilon}. \quad \text{(VI.6.22)}$$

于是

$$J_{\mu\nu}^{(F)}=\frac{i}{(4\pi)^2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2T(R)\delta_{ab}$$

$$\cdot\left(\frac{4}{3}\right)(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{\varepsilon}. \quad \text{(VI.6.23)}$$

如果有 n_f 个味道，则费米子中间态的贡献变为

$$J_{\mu\nu}^{(F)}=\frac{i}{(4\pi)^2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})T(R)\delta_{ab}$$

$$\cdot\left(\frac{4}{3}n_f\right)(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{\varepsilon}. \quad \text{(VI.6.24)}$$

注意，对于耦合常数的第二阶，$J_{\mu\nu}^{(F)}$ 为规范无关的. 由玻色子

中间态和费米子中态的贡献，总结如下：

$$J_{\mu\nu}^{(B)} = \frac{i}{16\pi^2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2\delta_{ab}\left[-\frac{5}{3}C_2(G)\right]$$
$$\cdot(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.25)}$$

$$J_{\mu\nu}^{(F)} = \frac{i}{16\pi^2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2\delta_{ab}\left[\frac{4}{3}n_f T(R)\right]$$
$$\cdot(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.26)}$$

现在得到胶子传播子的第二阶贡献的横向部分为

$$i\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{ab}(k) = J_{\mu\nu}^{(B)} + J_{\mu\nu}^{(F)}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2}\delta^{ab}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})\left(-\frac{5}{3}C_2(G)\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}n_f T(R)\right)[k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2]\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.27)}$$

这里恢复了内对称指标．表示

$$\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab}[k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2]\underline{\Pi}(k^2). \qquad \text{(VI.6.28a)}$$

于是

$$\underline{\Pi}(k^2) \doteq -\frac{1}{16\pi^2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2$$
$$\cdot\left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f T(R)\right)\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.28b)}$$

用 g_R 代替 $g_b\mu^{-2\rho\varepsilon}$，胶子波函数重正化常数为

$$z_3 = 1 + \underline{\Pi}(k^2)|_\varepsilon = 1 - \frac{g_R^2}{16\pi^2}$$
$$\cdot\left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f T(R)\right)\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.29)}$$

注意，由方程 (VI.6.25) 和 (VI.6.26)，由玻色子中间态的贡献与费米子中间态的贡献符号相反．这对量子色动力学的渐近自由性质是决定性的．

胶子波函数重正化常数的规范相关性 试图在一般线性协变规范中计算 z_3. 计算方程 (VI.6.8) 的其余项是必要的，这些项正比于 $1-\xi_R$，但是首先离题简短地谈一谈是有益的. 导致方程 (VI.6.7) 的论据表明，$1-\xi_R$ 项必须正比于 $k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}$. 这些贡献表示为

$$\tilde{\Pi}^{ab}_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\tilde{\Pi}^{ab}(k^2).$$

于是

$$g^{\mu\nu}\tilde{\Pi}^{ab}_{\mu\nu} = -3k^2\tilde{\Pi}^{ab}(k^2).$$

回到方程 (VI.6.10)，可以证明，由正比于

$$g^{\rho\rho'}\frac{(l+k)^\lambda(l+k)^{\lambda'}}{(l+k)^2}$$

的项的贡献是等于项

$$g^{\lambda\lambda'}\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}$$

的贡献，由交换 Lorentz 指标，并逐步改变变数：

$$\lambda\longleftrightarrow\rho',\quad \rho\longleftrightarrow\lambda',\quad \mu\longleftrightarrow\nu$$

及

$$l\to l-k,\ \text{于是}\ l\to -l,$$

它们相当于 $l\to -(l+k)$ 及 $l+k\to -l$. 因此在方程 (VI.6.10) 中下面的项可以被简化：

$$\begin{aligned}
&g^{\mu\nu}g^{\rho\rho}\frac{(l+k)^\rho(l+k)^{\rho'}}{(l+k)^2}[\quad]_*[\quad]_\star\\
&\to g^{\nu\mu}g^{\lambda\lambda'}\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}[g_{\nu\rho'}(-l+k)_{\lambda'}\\
&+g_{\rho'\lambda'}(2l+k)+g_{\lambda'\nu}(-l+2k)_{\rho'}]\\
&\cdot[g_{\rho\mu}(-l+k)_\lambda+g_{\lambda\rho}(2l+k)\\
&+g_{\mu\lambda}(-l+2k)_\rho]\\
&=g^{\nu\mu}g^{\lambda\lambda'}\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}[\quad]_\star[\quad]_*
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{l^2}\{(n-1)(l^2)^2 + 4(n-1)(l\cdot k)l^2$$

$$+ 2k^2l^2 + (l\cdot k)^2(4n-6)\}. \qquad \text{(VI.6.30)}$$

因此对 $J^{(a)}_{\mu\nu}$ 的外加贡献为

$$\frac{1}{2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2C_2(G)[-2(1-\xi_R)]$$

$$\cdot\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\left[(n-1)l^2 + 4(n-1)l\cdot k\right.$$

$$\left. + 2k^2 + (4n-6)\frac{(l\cdot k)^2}{l^2}\right]\frac{1}{l^2(l+k)^2}$$

$$\text{(VI.6.31)}$$

对于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 项的贡献，方括号的最后一项可以简化为

$$(4n-6)\frac{(l\cdot k)^2}{l^2} \to \frac{4n-6}{n}k^2.$$

现在方程 (VI.6.31) 等价于

$$\frac{1}{2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2C_2(G)\delta_{ab}[-2(1-\xi_R)](n-1)$$

$$\cdot\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\left[l^2 + 4l\cdot k + \frac{6}{n}k^2\right]\frac{1}{l^2(l+k)^2}$$

$$\int dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2-\Delta)^2}\left[l^2 + x^2k^2\right.$$

$$\left. - 4xk^2 + \frac{6}{n}k^2\right] \qquad \text{(VI.6.32)}$$

这里

$$\Delta = -x(1-x)k^2.$$

因为到这一阶，$J^{(b)}_{\mu\nu}$ 与 ξ_R 无关，并且 $J^{(c)}_{\mu\nu}$ 正规化为零。$1-\xi_R$ 项的唯一贡献来自 $J^{(a)}_{\mu\nu}$，并且由方程 (VI.6.32) 给出。利用表 IV.3 所给出的公式进行积分，得到

$$\frac{1}{2}(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2C_2(G)\delta_{ab}[-2(1-\xi_R)](n-1)$$
$$\cdot i\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{n/2}\int_0^1 dx\left\{-\frac{n}{2(1-n/2)}[-x(1-x)]\right.$$
$$\left.+x^2-4x+\frac{6}{n}\right\}k^2 \doteq i\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2C_2(G)$$
$$\cdot\delta_{ab}\frac{3k^2}{2}(1-\xi_R)\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.33)}$$

因此

$$\underline{\Pi}^{ab}(k^2)=\frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}C_2(G)\delta_{ab}$$
$$\cdot\left[-\frac{1}{2}(1-\xi_R)\right]\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.34)}$$

与方程 (VI.6.28) 相组合，该方程是由 $\xi_R=1$ 得到的，在一般线性协变规范中得到结果为

$$\underline{\Pi}(k^2)\doteq\frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}\left[\left(-\frac{13}{6}+\frac{\xi_R}{2}\right)C_2(G)\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}n_fT(R)\right]\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.35)}$$

于是

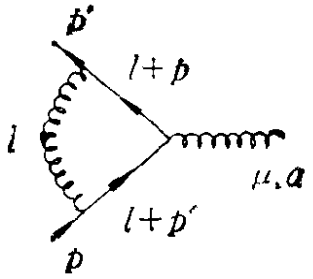
$$z_3^{-1}=1+\underline{\Pi}(k^2)=1+\frac{g_R^2}{16\pi^2}$$
$$\cdot\left[\left(-\frac{13}{6}+\frac{\xi_R}{2}\right)C_2(G)+\frac{4}{3}n_fT(R)\right]$$
$$\cdot\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^4), \qquad \text{(VI.6.36)}$$

与量子电动力学的光子波函数重正化常数不同，这里的 Z_3 是规范相关的. 规范相关性对所考虑的这个阶还可以描述玻色子中间态的贡献.

(C) 费米子费米子胶子顶角函数

有两个图形对于如图 VI.33 所示的一迴路量级有贡献. 这两个图形将分别进行计算，分别用 $K_\mu^{(1)}$ 和 $K_\mu^{(2)}$ 来表示. 第一个图形为

$K_\mu^{(1)a} \equiv$



$$= (g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2 i^b (T^a T^b T^c)\delta_{bc}$$
$$\cdot \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\lambda \frac{\not l + \not p' + m_b}{(l+p')^2 - m_b^2} \gamma_\mu$$
$$\cdot \frac{\not l + \not p + m_b}{(l+p)^2 - m_b^2} \gamma_\rho \left[-g^{\lambda\rho} + (1-\xi_R)\frac{l^\lambda l^\rho}{l^2} \right] \frac{1}{l^2}. \quad \text{(VI.6.37)}$$

因为只需要发散部分，故正比于 $\not p$, $\not p'$ 和 m_b 的项可以删去. 首先检验分子

$$\gamma_\lambda \not l \gamma_\mu \not l \gamma_\rho \left[-g^{\lambda\rho} + \frac{1}{l^2}(1-\xi_R) l^\lambda l^\rho \right]$$
$$= -\gamma_\lambda [2 l_\mu \not l - l^2 \gamma_\mu] \gamma^\lambda + \frac{1}{l^2}(1-\xi_R)(l^2)^2 \gamma_\mu$$
$$= -2(2-n)\not l l_\mu + (2-n) l^2 \gamma_\mu + (1-\xi_R) l^2 \gamma_\mu$$
$$\to \left[-\frac{1}{n}(2-n)^2 + (1-\alpha) \right] l^2 \gamma_\mu, \quad \text{(VI.6.38)}$$

这里利用了下面的代换:

$$\not l l_\mu \to \frac{1}{n} \gamma_\mu l^2.$$

在方程 (VI.6.37) 的积分中 $\frac{1}{\varepsilon}$ 项变为

$$\gamma_\mu \left[-\frac{1}{n}(2-n)^2 + (1-\xi_R) \right] \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot \frac{1}{[(l+p')^2 - m_k^2][(l+p)^2 - m_R^2]}$$

$$= \gamma_\mu \left[-\frac{1}{n}(2-n)^2 + (1-\xi_R) \right]$$

$$\cdot \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - 2l \cdot p_x - \Delta_x)^2}$$

$$\doteq -\frac{i}{(4\pi)^2} \xi_R \gamma_\mu \frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.39)}$$

检验方程 (VI.6.37) 的群因子，

$$\delta_{bc} T^b T^a T^c = \delta_{ab}\{[T^b, T^a]T^c + T^a T^b T^c\}$$

$$= i f^{bad} T^d T^b + T^a (\delta_{bc} T^b T^c)$$

$$= \frac{i}{2} f^{bad} [T^d, T^b] + C_2(R) T^a$$

$$= -\frac{1}{2} f^{bad} f^{dbc} T^c + C_2(R) T^a$$

$$= \left[-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(R) \right] T^a. \qquad \text{(VI.6.40)}$$

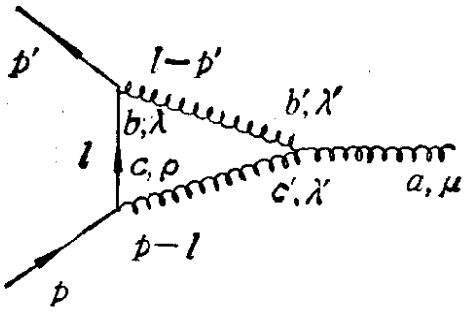
于是

$$K_\mu^{(1)a} = i\gamma_\mu T^a \frac{(g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2} \left[C_2(R) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] \frac{\xi_R}{\varepsilon}, \qquad \text{(VI.6.41)}$$

它正比于规范参数。

第二个图形给出

$K_\mu^{(2)a} \equiv$



$$= i^3 (g_b \mu^{-2\rho\varepsilon})^2 T^b T^c \delta_{bb'} \delta_{cc'} f^{ab'a'}$$

$$\cdot\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\gamma_\lambda\frac{t+m_b}{l^2-m_b^2}\gamma_\rho\left[-g^{\lambda\lambda'}+(1-\xi_R)\right.$$
$$\left.\cdot\frac{(l-p')^\lambda(l-p')^{\lambda'}}{(l-p')^2}\right]\frac{1}{(l-p')^2}$$
$$\cdot\left[-g^{\rho\rho'}+(1-\xi_R)\frac{(p-l)^\rho(p-l)^{\rho'}}{(p-l)^2}\right]$$
$$\cdot\frac{1}{(p-l)^2}[g_{\lambda'\rho'}(2l-p-p')_\mu$$
$$+g_{\rho'\mu}(2p-l-p')_{\lambda'}+g_{\mu\lambda'}(2p'-p-l)_{\rho'}]$$
$$\doteq i(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2T^bT^cf^{abc}\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\gamma_\lambda\frac{t}{l^2-m_b^2}$$
$$\cdot\gamma_\rho\left(\frac{1}{l^2}\right)^2\left[-g^{\lambda\lambda'}+(1-\xi_R)\frac{l^\lambda l^{\lambda'}}{l^2}\right]$$
$$\cdot\left[-g^{\rho\rho'}+(1-\xi_R)\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}\right]$$
$$\cdot[2g_{\lambda'\rho'}l_\mu-g_{\rho'\mu'}l_{\lambda'}-g_{\mu\lambda'}l_{\rho'}]. \qquad \text{(VI.6.42)}$$

对 $\frac{1}{\varepsilon}$ 项没有贡献的一切项在方程 (VI.6.42) 的最后结果中已被删去了. 现在研究方程 (VI.6.42) 的积分:

$$\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\gamma_\lambda\frac{t}{l^2-m_b^2}\gamma_\rho\frac{1}{(l^2)^2}$$
$$\cdot\left[g^{\lambda\lambda'}g^{\rho\rho'}-(1-\xi_R)g^{\lambda\lambda'}\frac{l^\rho l^{\rho'}}{l^2}\right.$$
$$-(1-\xi_R)g^{\rho\rho'}\frac{l^\lambda l^{\lambda'}}{l^2}+(1-\xi_R)^2$$
$$\left.\cdot\frac{l^\lambda l^{\lambda'}l^\rho l^{\rho'}}{(l^2)^2}\right]\cdot[2g_{\lambda'\rho'}l_\mu-g_{\rho'\mu}l_{\lambda'}-g_{\mu\lambda'}l_{\rho'}]$$
$$\doteq\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{1}{(l^2)^2(l^2-m_b^2)}\{2(2-n)tl_\mu$$
$$-2l^2\gamma_\mu-2(1-\xi_R)(tl_\mu-l^2\gamma_\mu)\}$$

$$= 2\left\{\frac{2-n}{n} - 1 - (1-\xi_R)\left[\frac{1}{n} - 1\right]\right\}$$

$$\cdot \gamma_\mu \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2(l^2 - m_b^2)}$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2}\left[-\frac{3}{2}(1+\xi_R)\right]\gamma_\mu \frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.43)}$$

群因子可以写为

$$f^{abc}T^bT^c = \frac{1}{2}[T^b, T^c]f^{abc}$$

$$= \frac{i}{2} f^{abc}f^{bcd}T^d = \frac{i}{2} C_2(G)T^a. \qquad \text{(VI.6.44)}$$

于是

$$K_\mu^{(2)a} = \frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}(i\gamma^\mu T^a)\frac{3}{4}$$

$$\cdot (1+\xi_R)C_2(G)\frac{1}{\varepsilon}. \qquad \text{(VI.6.45)}$$

到辐射修正的第二阶，它可以写为

$$\Gamma_\mu^a = i\gamma_\mu T^a\left\{1 + \frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}[\xi_R(C_2(R)\right.$$

$$\left. - C_2(G)/2)] + \frac{3}{4}(1+\xi_R)C_2(G)\right\}. \qquad \text{(VI.6.46)}$$

现在顶角重正化常数为

$$z^{t-1} = 1 + \frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}\left[\xi_R(C_2(R)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}C_2(G)) + \frac{3}{4}C_2(G)\right]\frac{1}{\varepsilon}.$$

结果可以总结为

$$z_2^{-1} = 1 + \frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2} C_2(G)\frac{\xi_R}{\varepsilon} + O(g_b^4), \qquad \text{(VI.6.47a)}$$

$$z_3^{-1} = 1 + \frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}\left[\left(-\frac{13}{6} + \frac{\xi_R}{2}\right)C_2(G)\right.$$

$$+\frac{4}{3}n_fT(R)\Big]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_b^4), \tag{VI.6.47b}$$

$$z_1^f=1+\frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{\xi_R}{4}\right)C_2(G)+C_2(R)\xi_R\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_b^4), \tag{VI.6.47c}$$

$$z_m=1+\frac{(g_b\mu^{-2\rho\varepsilon})^2}{16\pi^2}[3+2\xi_R]C_2(R)\frac{1}{\varepsilon}+O(g_b^4). \tag{VI.6.47d}$$

这些表示式已经在§VI.4，方程 (VI.4.69)，(VI.4.60)，(VI.4.84)，和 (VI.4.74) 中出现过. 重正化群参数容易计算出来.

β 函数 首先利用 Collins-Macfarlane[46] 方法

$$g_R=(z_2\sqrt{z_3}/z_1^f)g_b=\left\{1+\frac{g_b^2\mu^{-2\rho\varepsilon}}{16\pi^2}\cdot\left[\frac{11}{6}C_2(G)-\frac{2}{3}n_fT(R)\right]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_b^4)\right\}. \tag{VI.6.48}$$

对于 $\rho=\frac{1}{2}$，这个量级的 β 函数为

$$\beta(g_R)=\frac{g_b^3}{16\pi^2}\left[-\frac{11}{3}C_2(G)+\frac{4}{3}n_fT(R)\right]+O(g_b^5)=\frac{g_R^3}{16\pi^2}\left[-\frac{11}{3}C_2(G)+\frac{4}{3}n_fT(R)\right]+O(g_R^5). \tag{VI.6.49}$$

在极小减除方案中，在式(VI.6.47) 中，用 g_R，代替 $g_b\mu^{-2\rho\varepsilon}$，对一圈阶是适合的，

$$g_b=\mu^{2\rho\varepsilon}(z_2\sqrt{z_3}/z_1^f)^{-1}g_R=\mu^{2\rho\varepsilon}\left\{g_R+\frac{g_R^3}{16\pi^2}\left[-\frac{11}{6}C_2(G)\right.\right.$$

$$+\frac{2}{3}n_f T(R)\Big]\frac{1}{\varepsilon}+O(g_R^5)\Big\}. \qquad \text{(VI.6.50)}$$

然后用方程 (VI.5.41) 的符号，

$$a_1(g_R)=\frac{g_R^3}{16\pi^3}\left[-\frac{11}{6}C_2(G)+\frac{2}{3}n_f T(R)\right]+O(g_R^5), \qquad \text{(VI.6.51)}$$

并且由方程 (VI.5.49)，

$$\begin{aligned}\beta(g_R)&=-\left\{1-g_R\frac{d}{dg_R}\right\}a_1(g_R)\\&=\frac{g_R^3}{16\pi^3}\left[-\frac{11}{3}C_2(G)+\frac{4}{3}n_f T(R)\right]+O(g_R^5),\end{aligned} \qquad \text{(VI.6.52)}$$

当然，它是与方程 (VI.6.49) 相同的.

反常维数 各个场的反常维数都是规范有关的. 这些反常维数容易由方程 (VI.6.47) 所列举的表示式推导出来: 对于费米子场为

$$\gamma_f=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln z_2=\frac{g_R^2}{8\pi^2}C_2(R)\xi_R+O(g_R^4), \qquad \text{(VI.6.53a)}$$

对于胶子场为

$$\gamma_G=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln z_3=\frac{g_R^2}{8\pi^2}\left[\left(-\frac{13}{6}+\frac{\xi_R}{2}\right)C_2(G)+\frac{4}{3}n_f T(R)\right]+O(g_R^4), \qquad \text{(VI.6.53b)}$$

并且对于费米子质量为

$$\begin{aligned}\gamma_m&=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln z_m\\&=-\frac{g_R^2}{8\pi^2}[3+2\xi_R]C_2(R)+O(g_R^4).\end{aligned} \qquad \text{(VI.6.53c)}$$

包含外费米子和胶子的顶角函数的反常维数可以按照方程 (VI.5.8b) 所给出的公式由方程 (VI.6.53) 得到.

在量子色动力学中的有效耦合"常数" 由方程 (VI.5.72) 和 (VI.6.52)，在 $SU(N)$ 非阿贝耳规范理论中有效耦合"常数"对于小的 g_R 为

$$\bar{g}^2(\lambda) = \frac{g_R^2}{1 + \frac{g_R^2}{8\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f T(R)\right]\ln(\lambda)}. \tag{VI.6.54}$$

按惯例通过推广的精细结构常数重写出有效耦合常数，推广的精细结构常数定义为

$$\alpha_s \equiv g_R^2/4\pi,$$

及

$$\alpha_s(\lambda) \equiv \bar{g}^2(\lambda)/4\pi = \frac{\alpha_s}{1 + \frac{\alpha_s}{12\pi}[11C_2(G) - 4n_f T(R)]\ln(\lambda^2)}. \tag{VI.6.55}$$

一个比较方便的表示式是要写出

$$\frac{1}{\alpha_s(\lambda)} - \frac{1}{\alpha_s} = \frac{1}{12\pi}[11C_2(G) - 4n_f T(R)]\ln(\lambda^2). \tag{VI.6.56}$$

记住，λ 是动量 q 相对于标准动量 $q_{(0)}$ 之比：

$$\lambda^2 \equiv q^2/q_{(0)}^2.$$

更方便是把有效的精细结构"常数"直接写为所含动量平方的函数：$\alpha(\lambda) \to \alpha_s(q^2)$. 显然，

$$\alpha_s = \alpha_s(q_{(0)}^2).$$

给出二个动量 q_1 和 q_2，方程 (VI.6.25) 可以重写为

$$\frac{1}{\alpha_s(q_2^2)} - \frac{1}{\alpha_s(q_1^2)} = \frac{1}{12\pi}[11C_2(G) - 4n_f T(R)]\ln(q_2^2/q_1^2). \tag{VI.6.57}$$

这显示有效耦合“常数”作为动量函数的群性质. 它也表明，应该没有特殊的动量存在，在此动量测量耦合常数.

为使一个非阿贝耳规范理论保持渐近自由，费米子谱必须要满足一定的条件；即，

$$n_f < 11C_2(G)/4T(R). \qquad \text{(VI.6.58)}$$

对于 $SU(3)$，这就是 $n_f < 33/2$；因此不可多于 16 个味道，否则，理论将不是渐近自由的.

对于量子色动力学，比较方便的，是把有效耦合“常数”写为下面的形式：

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right)\ln(q^2/\lambda^2)}, \qquad \text{(VI.6.59a)}$$

这里标度参数 Λ 在 β 函数的最低阶表示式中定义为

$$\Lambda^2 = q_{(0)}^2 \exp\left\{-\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right)\right\}^{-1}. \qquad \text{(VI.6.59b)}$$

显然，精细结构常数随动量而变化，因此有效耦合“常数”通常称为跑动耦合常数.

应该记住，选取 $q_{(0)}$ 使 $\alpha_s(q_{(0)}^2)$ 足够小，因而微扰展开式变为适合的. 方程 (VI.6.59) 表明，对于 $n_f < 16$，$\Lambda^2/q < 1$. 也注意到，Λ^2 和 $q_{(0)}^2$ 有相同的符号. 一般，q^2 和 Λ^2 的符号不可能是相同的. 例如，如果跑动耦合常数是由深度非弹性电子质子散射过程进行测量的，$q_{(0)}^2$ 要取为从轻子到强子体系的动量传递，则 $q_{(0)}$ 和 Λ 为类空的. 如果该跑动耦合常数应用到不同的过程中，例如，电子正电子湮没为强子，$q^2 > 0$ 是电子正电子体系的能量平方，于是对数函数 (VI.6.59a) 的解析延拓是必要的. 这方面更多的讨论将在下节的部分 (B) 中给出.

在文献中可以找到对 β 函数的二圈和三圈贡献. 写出

$$\beta(g_R) \equiv -g_R^3\{\beta_0 + \beta_1 g_R^2 + \beta_2 g_R^4 + \cdots\}. \quad \text{(VI.6.60a)}$$

由 (VI.6.52),

$$\beta_0 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f T(R)\right], \quad \text{(VI.6.60b)}$$

在文献 [56] 及 [57] 中给出二圈贡献为

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\left\{\frac{34}{3}C_2(G) - \left[\frac{20}{3}C_2(G) + 4C_2(R)\right]n_f T(R)\right\}, \quad \text{(VI.6.60c)}$$

并且三圈结果(文献 [58]) 为

$$\begin{aligned}\beta_2 = \frac{1}{(16\pi^2)^3}\Big\{&\frac{2857}{54}(C_2(G))^3 \\ &- \frac{1415}{27}[C_2(G)]^2 T(R)n_f \\ &+ \frac{158}{27}C_2(G)(T(R)n_f)^2 \\ &- \frac{205}{9}C_2(G)C_2(R)T(R)n_f \\ &+ \frac{44}{9}C_2(G)(T(R)n_f)^2 \\ &+ 2(C_2(R))^2 T(R)n_f\Big\}. \quad \text{(VI.6.60d)}\end{aligned}$$

应该注意，β_0 和 β_1 不依赖于它们进行计算的减除方案；β_2 只是在极小减除方案中进行计算. 对于 $SU(3)$，β_0，β_1 和 β_2 为

$$\beta_0 = \frac{1}{16\pi^2}\left[11 - \frac{2}{3}n_f\right], \quad \text{(VI.6.61a)}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2}\left[102 - \frac{38}{3}n_f\right], \quad \text{(VI.6.61b)}$$

及

$$\beta_2 = \frac{1}{(16\pi^2)^3}\left[\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2\right]. \quad \text{(VI.6.61c)}$$

在下面，通过略去 g_R^5 项和更高阶的项，在 β 函数的截止形式中讨论 $\beta(g_R)$ 的变化过程，因而讨论有效耦合“常数”的变化过程. 由这种考虑所得到的结论只是大概的，不能看得太认真. 对于 $n_f \leqslant 5$，一切系数，β_0，β_1 和 β_2 都是正的，并且对于 β，与 $g_R = 0$ 不同，没有正根. 对于 $n_f \geqslant 6$，β_2 变为负的，β 开始要有正的根，将用 g_f 来表示. 对于 $n = 6$，$\beta = 0$ 的根出现在

$$\alpha_f = g_f^2/4\pi = 12.726.$$

这个根事实上对于紫外动量是一个相排斥的固定点. 因此，如果 $g_R < g_f$，则当 $\lambda \to +\infty$ 时，$\bar{g}(\lambda) \to 0$. 但是在红外区域，它是一个相吸引的固定点，即，当 $\lambda \to 0$ 时，$\bar{g}(\lambda) \to g_f$. 当味道数目增加时，g_f 减小，并且对于 $n_f \geqslant 9$，β_1 变为负的. 在表 VI.1 中对于 6 个或更多的味道，表列 n，并给出它们对于大 n_f 值的相应的有限零点：

表 VI.1

n	α_s
6	12.726
8	1.4640
10	0.7643
12	0.4349
14	0.2145
16	0.0397

目前由电子正电子湮没为强子的实验，在大约 30 GeV 处测定 α_s 的值近似地为 $\alpha_s \simeq 0.17$. 在下节的部分 (B) 中将讨论由实验数据求得 α_s 值的复杂性. 如果取这个值为 $\alpha_s = g_R^2/4\pi$ 的值，则在表 VI.1 中所列举的固定点对于 $n_f < 16$ 为紫外相排斥的. 对于 $n_f = 16$，$\alpha_f < \alpha_s$，g_f 变为紫外相吸收的，因此理论再不是渐近自由的. 应该再提到，这个看来很明确的结

论仅暗示可能会发生什么;较高阶贡献肯定要修改这个图象. 对于 $n_f > 16$, 方程 (VI.6.60a) 的 β 函数展开式的三个系数, 和由这些系数计算出的固定点 g_f 都变为负的, 并且截止展开式方程 (VI.6.60a) 不再有意义了.

通过下面的变数

$$t \equiv \ln(q^2/\Lambda^2) \equiv \ln\lambda + \ln(q_{(0)}^2/\Lambda^2), \quad \text{(VI.6.62)}$$

(VI.5.19) 可以重写,并且对于固定的 $q_{(0)}$ 和 Λ,有效耦合"常数"可以表示为 t 的函数:

$$\frac{d\bar{g}^2(t)}{dt} = -\bar{g}^4(t)[\beta_0 + \beta_1\bar{g}^2(t) + \beta_2\bar{g}^4(t) + \cdots]. \quad \text{(VI.6.63)}$$

具有截止表示式到 $(\bar{g}^2)^4$ 的方程 (VI.6.63) 的解 ($t > 1$) 可以成为下面的形式

$$\bar{g}^2(t) = \frac{1}{t}\left\{a + b_1\frac{\ln(t)}{t} + b_2\frac{1}{t} + c_1\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^2 + c_2\frac{\ln(t)}{t^2} + \cdots\right\}, \quad \text{(VI.6.64)}$$

这里系数 $a_1, \cdots, c_2$ 可以由 (VI.6.63) 得到:

$$\begin{aligned} a &= 1/\beta_0, \\ b_1 &= -\beta_1/\beta_0^3, \\ b_2 &= \frac{\beta_1}{2\beta_0^3}\{-3 \pm \sqrt{13 - 4\beta_0\beta_2/\beta_1^2}\}, \\ c_1 &= \beta_1^2/\beta_0^5, \\ c_2 &= -\beta_1^2/\beta_0^5. \end{aligned} \quad \text{(VI.6.65)}$$

注意,要求 b_2 为实数,并不会导致对 n_f 的任何限制,因为对于 $n_f > 0$ 的一切值, $13\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2$ 是大于零的. 也要注意到, $(\ln(t))/t$ 的幂中 $\bar{g}^2(q^2)$ 的主展开式,即,

$$\frac{1}{t}\left\{a + b_1\frac{\ln(t)}{t} + c_1\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^2 + \cdots\right\}$$

与方程 (VI.6.62) 并不容洽，但是在方程 (VI.6.64) 中所给出的展开式是容洽的.

至少有两个质量参数出现在重正化方案中. 一个是 μ^2，它在维数正规化方案中提供一个质量量纲，另外一个是 M^2，它是动量空间减除方案中的减除点. 这些质量参数到现在都是任意的，并不直接出现在 β 函数中，但是这些参数在完成重正化以后表现为一个物理量的有限部分，接着由有限部求出耦合常数. 一般 μ^2 和 M^2 取为 Q^2 的量级，它是所考虑过程的能量标度.

在下节的部分 (B) 中可以找到更多的有关跑动耦合常数的讨论.

量子电动力学 结束讨论并作出比较，在下面给出量子电动力学的重正化群方程系数；可以由量子色动力学相应的量得到这些系数，令群因子

$$\begin{aligned} C_2(G) &\to 0, \\ T(R) &\to 1, \\ C_2(R) &\to 1, \\ n_f &= 1, \end{aligned} \tag{VI.6.66}$$

并且代换耦合常数:

$$g_R \to e_R.$$

由方程 (VI.6.47),

$$\begin{aligned} z_1^{-1} &= 1 + \frac{e_R^2}{16\pi^2}\,\xi_R\,\frac{1}{\varepsilon}, \\ z_2^{-1} &= 1 + \frac{e_R^2}{16\pi^2}\,\xi_R\,\frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{VI.6.67}$$

$$z_3^{-1} = 1 + \left\{\frac{e_R^2}{16\pi^2}\,\frac{4}{3} + \left(\frac{e_R^2}{16\pi^2}\right)^2 2\right\}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$e_R = (z_2\sqrt{z_3}/z_1)e_b = \sqrt{z_3}\,e_b. \tag{VI.6.68}$$

对于光子波函数重正化，要利用方程 (VI.4.142) 中所给出的二圈阶的结果. 为了计算 β 函数，利用 't Hooft 方法是比较方便的. $a_1(g_R)$ 为

$$a_1(e_R) = \frac{e_R^3}{16\pi^2}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{e_R^5}{(16\pi^2)^2} + O(e_R^7). \quad \text{(VI.6.69)}$$

根据方程 (VI.5.49) 得到 β 函数为

$$\beta(e_R) = -\left\{1 - e_R\frac{d}{de_R}\right\} a_1(e_R)$$

$$= \frac{e_R^3}{12\pi^2} + \frac{e_R^5}{64\pi^4} + O(e_R^7). \quad \text{(VI.6.70)}$$

按照方程 (VI.5.57) 及 (VI.5.43)，由方程 (VI.6.67)，可以计算出反常维数为

$$\gamma_\psi = -e_R\frac{d}{de_R}\left[-\frac{e_R^2}{16\pi^2}\xi_R + \cdots\right]$$

$$= \frac{e_R^2}{8\pi^2}\xi_R + O(e_R^4), \quad \text{(VI.6.71)}$$

$$\gamma_A = -e_R\frac{d}{de_R}\left[-\frac{e_R^2}{16\pi^2}\frac{4}{3} - 2\left(\frac{e_R^2}{16\pi^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{e_R^2}{6\pi^2} + \frac{e_R^4}{32\pi^4} + O(e_R^6). \quad \text{(VI.6.72)}$$

(VI.6.69) 证明，量子电动力学不是渐近自由的，一切阿贝耳规范理论都不是渐近自由的. 只考虑一圈阶的贡献是有教益的，对此可以求解出有效耦合常数为

$$\bar{e}^2(k^2) = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2}\ln(k^2/m_R^2)}. \quad \text{(VI.6.73)}$$

显然，有效耦合随 k^2 而增加，这里 $\alpha_R = e_R^2/4\pi = 1/137$. 为了看出 $\bar{e}^2(k^2)$ 确实是有效耦合常数，如图 VI.44 所示，在 t 道链近似中考虑一切量级的电子 μ 子弹性散射. 在该近似中振幅正比于全光子传播子(参看方程 (V.4.38))，

$$\text{Amp} \sim e_b^2 \bar{D}_{F\mu\nu}(k).$$

由 § V.2 的讨论，通过方程 (V.2.20)，可以写出

$$\bar{D}_{F\mu\nu}(k) = \frac{-g_{\mu\nu}Z_3}{k^2[1 + z_3 e_b^2 \Pi_c(k^2)} + (\text{规范有关项}). \tag{VI.6.74}$$

于是

$$\text{Amp} \sim \frac{e_b^2 Z_3}{k^2[1 + Z_3 e_b^2 \Pi_c(k^2)]}$$

$$= \frac{e_R^2}{1 + e_R^2 \Pi_c(k^2)} \frac{1}{k^2}. \tag{VI.6.75}$$

由 (V.2.12)，对于大的欧氏动量 k^2，但是 $\alpha_R \ln(-k^2/m_R^2) \ll 1$，

$$1 + e_R^2 \Pi_c(k^2) \simeq 1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln(-k^2/m_R^2),$$

及

$$\frac{e_R^2}{1 + e_R^2 \Pi_c(k^2)} \simeq \frac{e_R^2}{1 - \frac{\alpha_R}{3\pi} \ln(-k^2/m_R^2)}. \tag{VI.6.76}$$

这不过是方程 (VI.6.73) 所定义的有效耦合常数 $\bar{e}^2(k^2)$. 现在

$$\text{Amp} \sim \bar{e}^2(k^2)/k^2. \tag{VI.6.77}$$

(VI.6.77) 的意义是，由于辐射修正，动量传递相关性可以被吸收在耦合常数的定义中，使振幅保持它的 Born 近似.

在方程 (VI.6.77) 的右边，在大的 $-k^2/m_R^2$ 处似乎是一个极点，即，在

$$\lambda_{LG}^2 = -\frac{k_{LG}^2}{m_R^2} = \exp(3\pi/\alpha_R), \tag{VI.6.78}$$

它也把一个极点引入全光子传播子方程 (VI.6.74) 中. 这通常称为 "Landau 鬼". 然而，在如方程 (VI.6.78) 所给出的值同样大的动量处，最低阶的微扰计算失效. Landau 鬼的定

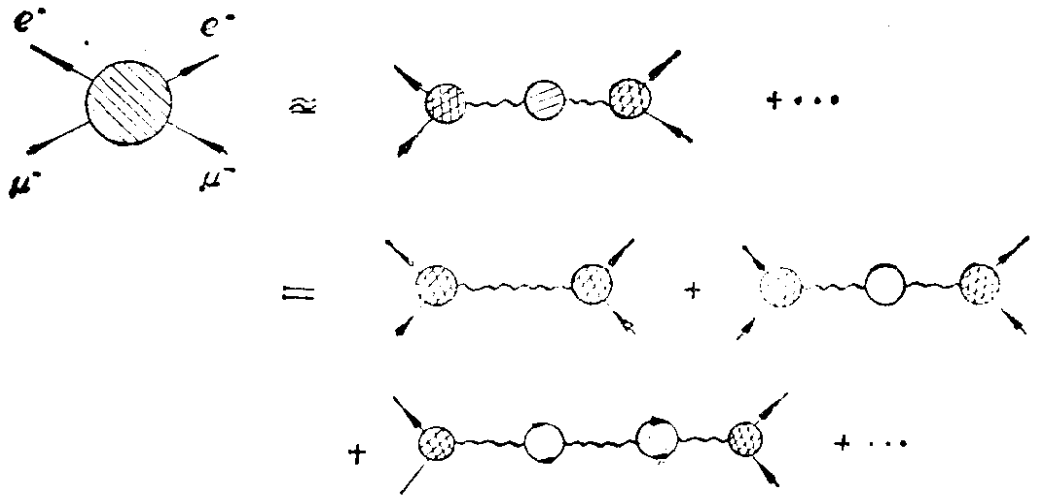


图 VI.44

性性质将被较高阶贡献修正. 例如，Z_3 的二圈结果(方程(VI.6.67))给出

$$\bar{e}^2(k^2) = \frac{e_R^2}{1 - \left(\frac{\alpha_R}{3\pi} + \frac{\alpha_R^2}{4\pi^2}\right) \ln\left(-k^2/m_R^2\right)}, \quad \text{(VI.6.79)}$$

可以看出，上式满足方程 (VI.5.19) 及 (VI.6.70)，此时

$$\frac{\alpha_R}{3\pi} \ln\left(-k^2/m_R^2\right) < 1. \quad \text{(VI.6.80)}$$

方程 (VI.6.79) 是正比于包括具有二圈贡献的全光子传播子；参阅文献 [59] 及 [60]. 假定对 $-k^2/m_R^2$ 大的值的解析延拓是适合的，则 Landau 鬼位移到

$$\lambda_{LG}'^2 = -k_{LG}'^2/m_R^2 = \exp\left\{\left(\frac{\alpha_R}{3\pi}\left[1 + \frac{3\alpha_R}{4\pi}\right]\right)^{-1}\right\}, \quad \text{(VI.6.81)}$$

它比方程 (VI.6.78) 的 λ_{LG}^2 略小一些.

另一方面，如果论证了方程 (VI.6.80) 并不适合，但无论如何采取方程 (VI.6.70) 是严格的，则方程 (VI.5.22) 的解为

$$\ln \lambda^2 = \frac{d_2}{d_1} \ln\left[\left(\frac{d_1 + d_2\bar{e}^2(\lambda)}{d_1 + d_2 e_R^2}\right)\frac{e_R^2}{\bar{e}^2(\lambda)}\right] - \frac{1}{d_1}\left[\frac{1}{\bar{e}^2(\lambda)} - \frac{1}{e_R^2}\right], \quad \text{(VI.6.82)}$$

这里

$$d_1 = \frac{1}{12\pi^2}, \quad d_2 = \frac{1}{64\pi^4}.$$

对于 $\bar{e}^2(k^2) \to \infty$，得到

$$\lambda_0^2 = \left(\frac{3\alpha_R}{4\pi + 3\alpha_R}\right)^{9/4} \cdot e^{3\pi/\alpha}.$$

现在无穷大的有效耦合“常数”出现在比 Landau 鬼方程 (VI.6.78) 小得多的动量值处.

结束本节之前，给出非阿贝耳理论和阿贝耳理论的 β 函数差异起源的简短讨论；非阿贝耳理论是渐近自由的，阿贝尔理论不是渐近自由的，正如由 β 函数主阶项系数的符号所确定一样. 这要求对耦合常数重正化的不同贡献进行详细检验，并且最好在 Landau 规范中去做. 在 Landau 规范中，耦合常数重正化的贡献来自于顶角函数修正的二胶子中间态，而一切胶子，夸克，和鬼中间态对胶子波函数重正化都有贡献. 胶子中间态贡献一个符号，夸克和鬼贡献相反的符号；如果方程 (VI.6.58) 满足，则胶子中间态贡献占优势. 因此导致渐近自由. 另一方面，在阿贝尔理论中没有类似的胶子中间态，因此相反的符号出现在 β 函数的主系数中. 所以阿贝尔规范理论不是渐近自由的.

在 Coulomb 规范中可以构成比较多的物理论据，在 Coulomb 规范中，规范场满足条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0.$$

这里，仍将只考虑胶子传播子的链近似. 出现在胶子传播子的辐射修正中的胶子中间态可以分为两部分：横向胶子 (g^T) 和 Coulomb 胶子，如图 VI.45 所示. 有效耦合常数的横向胶子和夸克贡献如同在量子电动力学情形中一样，相应于电荷屏蔽效应，有相同的符号. 事实上，这个符号是由幺正性确定的，因为它们在图 VI.46 所示的幺正性截断下相应于“物理

的态”. 另一方面，对于 Coulomb 胶子的贡献，没有幺正性截断，因为 Coulomb 胶子都不是“物理的”，并且，其符号不是由幺正性决定的. 它的贡献结果有相反的符号，相应于一个(色)荷的反屏蔽效应，假设夸克味道种类的数目 u_f 不大于 $11C_2(G)/4T(R)$，则(色)荷的反屏蔽效应占优势. (细节可以在文献 [61] 中找到)

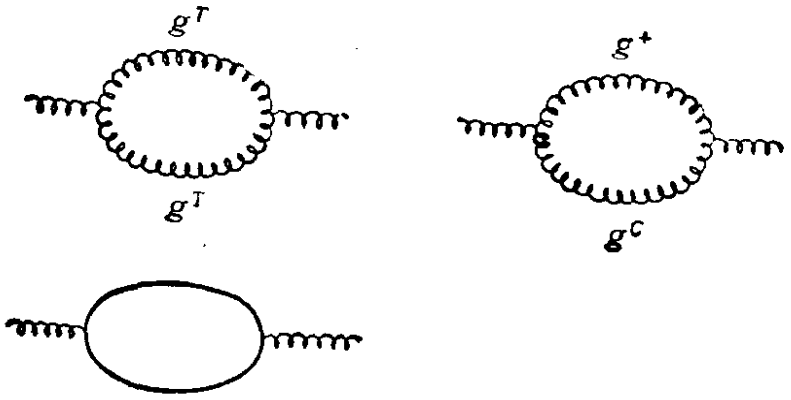


图 VI.45

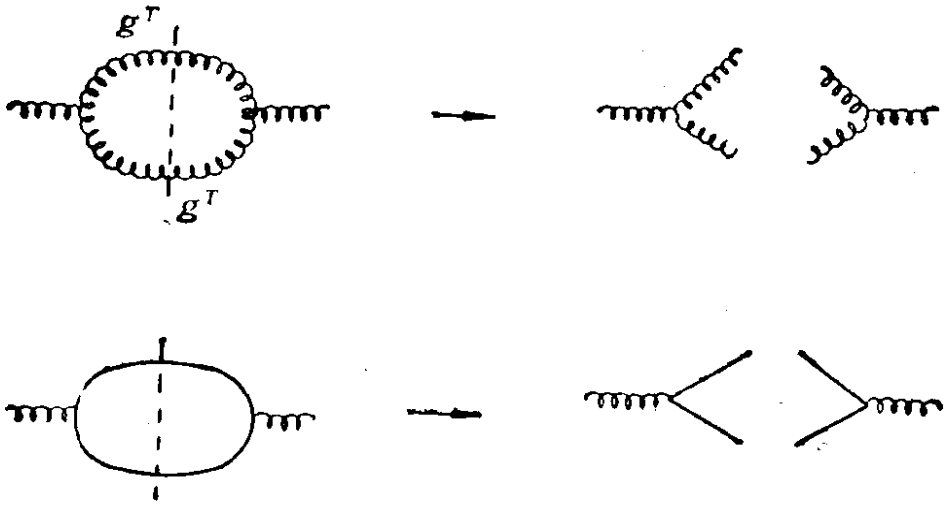


图 VI.46

VI.7 最近的进展：非阿贝耳规范理论的红外行为和截止微扰论的不确定性

在最后一节简短地讨论两个专题：(A) 非阿贝耳规范理

论的红外行为，(B) 量子色动力学的重正化减除方案的不确定性. 在这里将对所提出的这些专题进行叙述. 这些专题的难点清楚地说明非阿贝耳规范理论和阿贝耳规范理论之间的基本差别：非阿贝耳对称性的真正性质和缺乏质壳的固有定义. 将引用文献而没有任何评述. 打算列举关于这些专题所有已知有关的已发表的工作. 无疑，有些有价值的工作已为作者的能力所不及. 不用说，这些专题的大部分要留在将来编写.

(A) 非阿贝耳规范理论的红外变化过程.

红外区域的变化过程是研究非阿贝耳规范理论的一个突出问题，这个问题有两方面：(a) 具有软规范玻色子发射的 S 矩阵元的存在问题. 这实质上是微扰的，并且可以用理论的非禁闭相来加以研究，(b) 非阿贝耳力的长程性质，不可能用微扰论进行研究，并且是禁闭的中心. 在下面所提出的讨论主要涉及到第一方面. 然而，希望利用微扰计算来建立一般的结果，倘若有，这些结果由于红外奇点的一切量级贡献求和对整个微扰级数是适合的，因此要阐述禁闭问题.

讨论组织如下：首先总结以量子电动力学研究为基础的阿贝耳规范场论的熟知事实来提供远景和对比. 然后，将讨论最近文献中所论述的非阿贝耳规范场论的各种专题.

在 § IV.4 和第 V 章中已经看到，红外发散性可以两种不同的方式产生. 第一种方式与 §§ V.1—3 中所讨论的质壳上的重正化程序相联系，而当外动量趋近于它们在质壳上的值时就会出现第二种方式. 与特殊的重正化程序相联系的第一类红外发散性是虚的，并且由下面的论据可以看出，不会得到一个红外发散的 S 矩阵元. 假定重正化是用一个质量 μ 表征的在某个欧氏动量处实现的，当 $\mu \to 0$ 时，趋近于质壳. 用 $g_R(\mu)$ 来表示的重正化耦合常数随 μ 而变化. 对于 $\mu \neq 0$，

这种类型的红外发散性并不出现. 因为 S 矩阵元与 μ 无关，当 $\mu \to 0$ 时，它保持无发散性.

第二类红外发散性有不同的性质，起源于理论包含无质量粒子的事实，并且与重正化程序无关. 在 § IV.4 中已有详细的讨论. 这些发散性是真实的发散性，仍然可以分为两种型式: 外零质量粒子的动量四分量趋于零的软发散性，及出现在二相互作用零质量粒子的共线动量组态中的质量奇点性，例如当令电子质量为零时与光子场的耦合. 在共线组态的情形中，甚至当辐射场是硬辐射时，也会出现红外发散性. 在量子电动力学中，质量奇点性是研究电子质量微小效应的一个方式，但是在量子色动力学中，由于三胶子和四胶子耦合的存在，它是一个基本性质.

量子电动力学的红外行为在经典力学和量子力学两方面已有很好的理解. 软奇点性通过 Bloch-Nordsieck 机制[62]消去. 而且，由于虚辐射修正的红外奇点性，和由实软发射的红外奇点性分别可以理解为因子分解和指数化; 这些红外奇点性在微扰展开级数中逐阶彼此相消. 质量奇点性的不存在是由 Kinoshita-Lee-Nauenberg[63,64] 定理保证的，它的细节可以在 § V.6 中找到.

关于非阿贝耳规范理论红外行为，已发表的工作可以分为四个范畴:

(a) 从阿贝耳场论到非阿贝耳理论一般定理的推广.

(b) 在低阶微扰计算中红外发散的消去，或不能消去. 这里涉及到 Bloch-Nordsieck 消去机制[62]的适合性.

(c) 在红外区域内 S 矩阵元的一般变化过程. 这里问题是红外奇点因子的指数化和适合于红外区域的重正化群方程的推导.

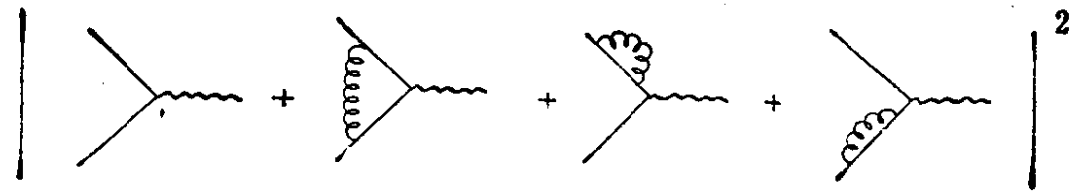
(d) 对于零质量夸克的质量奇点性的因子分解和普适

性. 这对于量子色动力学的许多应用提供一个基础.

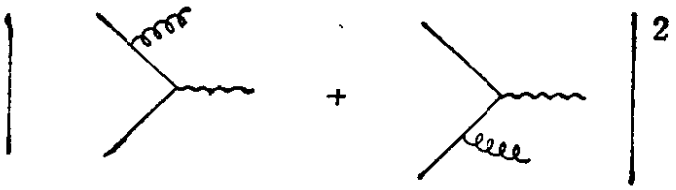
首先指出，非阿贝耳规范场论的红外行为的某些复杂性是从规范玻色子带有色荷的简单事实得出来的. 结果之一是三胶子和四胶子耦合存在. 因此，即使一切夸克都带质量，理论也是有质点奇点性的. 这个事实已在 § IV.4 中指出了（参阅图 IV.9 和方程 (IV.4.7) 下面的讨论）. 另外的复杂性可以由夸克反夸克湮没为一对 μ 子加强子的基本例子看出来：

$$q + \bar{q} \to \mu^+ + \mu^- + X,$$

这里 X 代表某个强子态. 考虑截面到一圈阶. 取夸克为带质量的. 截面是图 VI.47 描述的 Feynman 图形之和，这里末态 $\mu^+\mu^- X$ 没有表示出来. 如果对初态夸克的颜色求平均，则红外发散性的情况准至一个完全的色因子，类似于出现在量子电动力学中的情况. 图 VI.47a 的图形的发散性如 Bloch-Nordsieck 机制所要求的，与图 VI.47b 的发散性相抵消. 然而，如果选取初态为色单态，则只有图 VI.47a 的图形有贡献，



(a)



(b)

图 VI.47

并且某些红外发散性保留而不能消去. 在一个色单态中夸克

反夸克体系的选择当然是非物理的.这是因为,如果夸克和反夸克体系同时在一个确定的颜色态,单态或八重态中,只要改变成对的组合颜色,则夸克和反夸克体系在往后的时间总会发射或吸收软光子. 分别对夸克和反夸克的颜色求平均,只要表示出它们与软胶子的相互作用,就是物理上有关的情况.

在 1980 年以前进行的计算大多数是最低(一圈)阶计算,主要的发现是,当反应速率按裸耦合常数进行计算,并且对初态的颜色适当求平均时, Bloch-Nordsieck 机制对这个量级是适合的. 但是,当所进行的重正化是在质壳上时,残存的红外发散性就不能消去. 这种类型的红外发散性是乱真的; 如以前所述,当利用质壳外的重正化方案时,这种类型的红外发散性就不出现了.

下面是此文连同参考文献中所讨论的各种专题的总结.

(1) 在非阿贝耳规范理论中论述红外发散性的定理.

在文献 [65] 中考虑了非阿贝耳规范理论任意阶图形的精确测定红外对数幂的一般图示法. Kinoshita 定理[63]表明,任何一粒子不可约化的二点函数对于外动量的一切值除 $q^2=0$ 以外都是无质量奇点性的,该定理在文献 [65] 中推广到非阿贝耳规范理论.

(2) 夸克和胶子由色单态外流的产生.

在文献 [67] 中已经证明,直到二圈阶, 夸克和胶子由一个色单态外流的产生截面是无红外发散的. 已经预料到,结果对微扰展开式的所有阶都是适合的. 这个考虑与电子正电子湮没为强子的过程有关, 在 70 年代和 80 年代由此过程得到了高能物理的许多信息.

(3) 没有色单态外源和夸克形式因子的带质量的夸克的散射.

在文献 [68] 中用协变 Feynman 规范研究了由二圈阶

的贡献，在这里也发现了虚光子发散性和软光子发散性彼此互相抵消，并且修正项满足一个简单的微分方程. 在文献[69]中用轴规范研究了虚辐射修正，由虚胶子修正来认证得到主红外奇点性指数化的图形. 在文献[65]和[70]中研究所有阶的结果，其中已得到结论，由虚贡献和实贡献出现的红外奇点性完全消去，正如量子电动力学相应的情形一样. 这与轻子相对于强子靶的深度非弹性散射总截面有关.

在文献[71]中用 Landau 规范到二圈阶研究了遍举色单态道的夸克形式因子在质壳附近的变化过程. 证明红外奇点性总加起来为单个指数形式.

(4) 在末态中具有软胶子的夸克夸克和夸克反夸克散射.

在文献[72, 73 和 74]中用 Feynman-'tHooft 规范给出了最低非平凡阶(一圈)计算. 在文献[72]和[73]中利用了红外发散性和紫外发散性二者的维数正规化. 在文献[74]中，红外奇点性是用小的虚设的胶子质量来正规化的. 已经结论，当用裸耦合常数作为展开参数时，截面到这个量级是有限的. 然而，当振幅在质壳上重正化时，会出现红外奇点性. 用轴规范对夸克夸克散射直到一圈阶得到类似的结论，参看文献[75].

(5) 在末态中夸克胶子散射加软胶子发射.

所包含的夸克是带质量的，但是由于三胶子耦合的存在才出现质量奇点性. 软奇点性(软奇点性的乘积)和共线奇点性在截面中被消去了. 然而，由于质壳上的重正化，完全没有研究共线发散的变化过程. 参看文献[72]和[73].

(6) 夸克反常磁矩.

夸克的磁矩受到来自光子以及胶子的辐射修正. 胶子辐射修正的贡献预料会占优势，因为强相互作用耦合常数在低

能区域比电磁相互作耦合常数大得多. 在文献[76]及[77]中，已计算夸克的反常磁矩到二圈阶. 一圈结果除全部颜色因子以外，类似于带电轻子的量子电动力学的相应情形. 然而，差别出现在二圈结果中. 红外发散性是由费米子及胶子传播子以及费米子费米子胶子顶角在质壳上的重正化诱导出来的. 已经论证，红外发散性的出现只与质壳上的重正化程序相联系，并且仅仅反映在重正化群变换下胶子对夸克反常磁矩贡献的不变性. 已经证明，反常磁矩的红外奇点部分满足相对于红外截止参数的简单微分方程. 如果接受了上面的论据，就可以结论，夸克的反常磁矩应该是有限的，并且如果跑动耦合常数在某个欧氏动量处是已知的，就可以逐阶计算出夸克的反常磁矩(参看文献[78]).

(7) Green 函数的红外行为.

在文献[79]中，对于包含零质量粒子的任何可重正化的，但不是超重正化的场论，已经证明，非例外欧氏动量的 Green 函数是红外自由的. 记住，超重正化场论是包含三线性相互作用的标量理论. (非例外欧氏动量意味着一组动量，其中没有两个或多个动量的和位于光锥上. 欧氏动量是由通常的动量用 $-ik_0$ 代替时间分量 k_0 所得到的动量. 欧氏矢量的平方简单地就是其四个分量平方之和). 当一个或两个胶子带有零动量，并且其他胶子是在质壳外时，在轴规范中已证明，一粒子不可约化的 n 胶子顶角(这里 $n=2,3$ 及 4)是无红外发散性的. 参看文献[80].

(8) 在红外区域内类重正化群方程的推导.

这类工作试图概括主要的红外奇点性，以便建立超出逐阶展开式以外可以成立的红外变化过程. 这里的策略主要是在类似于重正化方程的考虑下推导物理量的简单微分方程. (文献[78]，[69]，[81]及[82]). 以明显的二圈计算为基

础，对于一定的 S 矩阵元，并对于由胶子修正的夸克反常磁矩，来推导简单的微分方程(参看上面的 (5))。

基于至今所总结的低阶计算的早期结果似乎表明，虽然在质壳上的重正化要引入残存的虚设红外奇点性，类似于量子电动力学，Bloch-Nordsieck 消去机制对非阿贝耳规范理论也有效。不幸，非阿贝耳理论并不如此简单！最近在文献 [83] 中首先发现了 Bloch-Norsieck 消去机制的相反例子，后来在文献 [84] 和 [85] 中被证实了。所考虑的过程如下：

$$q + \bar{q} \to \gamma^* + (\text{软胶子}), \qquad \text{(VI.7.1a)}$$

$$q + Q \to (\text{包含软胶子的末态}), \qquad \text{(VI.7.1b)}$$

这里 q 和 Q 为带色的客体，γ^* 为质壳外的光子或任何色单态流；带质量的夸克 q 和 Q 容许属于颜色群的不同表示。在 Bloch-Nordsieck 方法中，在实胶子和虚胶子消去以后，一个残存的红外发散性保留在截面内。这个发散性由下面的表示式给出：

$$\frac{\alpha_s^2}{\varepsilon}\frac{1-\beta}{\beta^2}\left\{\ln\left[\frac{1+\beta}{1-\beta}\right]-2\beta\right\}, \qquad \text{(VI.7.2)}$$

这里 β 为夸克之一在其他夸克都静止的参照系中的速度，$\varepsilon \equiv 2 - n/2$ 为维数正规化方案中用来使红外发散性正规化的空时因子。在式 (VI.7.2) 中有关奇点的性质可以作一些注释：

(a) 可利用 Coulomb 规范来促成计算。要对每一个初态夸克的自旋和颜色求平均。

(b) 红外发散性出现在初态至少含有两个带色客体的过程中。发散性不是重正化程序的结果；它似乎只是初态的一种性质。

(c) (VI.7.2) 表明，在静止，即 $\beta = 0$，或在极相对论情况，即 $\beta = 1$，夸克湮没时，发散性消失。在 $|\boldsymbol{p}| \gg m$ 的相对论情形中，这里 $\boldsymbol{p}$ 和 m 为投射夸克的动量和质量，方程 (VI.7.2)

约化为

$$\frac{\alpha_s^2}{\varepsilon}\frac{m^2}{p^2}\left[\ln\left(\frac{2\vec{p}}{m}\right)-1\right]. \qquad \text{(VI.7.3)}$$

(d) 发散性对任何数目的夸克味道都出现，因此红外发散性不能消去，与渐近自由无关，但是与理论的非阿贝耳性质有关.

(e) Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理（参看 § V.6）仍然满足[86]. 这意味着，如果在初态中本来就包括非相互作用的胶子，则发散项被消去. 这个结果在文献 [87] 的计算中被证实了，其中利用了相干态的表述. Bloch-Nordsieck 机制是 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理的特殊情形，其中起始的非相互作用辐射量子的数目为零.

上面讨论的 Bloch-Nordsieck 消去机制失效的结果是什么呢？ 这个失效有两方面，涉及到非阿贝耳场论的红外结构和量子色动力学的应用. 第一方面，与 Bloch-Nordsieck 机制相反的例子是指非阿贝耳场的某些性质，是长期受到怀疑的论题，但在其间一段时间变得稍微突出一点，其红外行为基本上比非禁相的阿贝耳理论的红外行为要复杂得多.

当然，相反的例子没有涉及量子色动力学非微扰方面的红外行为. 然而，Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理仍然适合的事实似乎对禁闭问题有间接含义. 论据如下. 如果微扰量子色动力学现在的方法有意义，则在强子强子碰撞中具有大的不变量质量的轻子成对产生的理论截面必须是有限的. 这样的过程称为 Drell-Yan 过程[88]，例如，在 π 介子质子碰撞中是受方程 (VI.7.1a) 反应支配的. 为使截面是有限的，根据 Kinoshita-Lee-Nauenberg 定理，必须包括初态中的胶子. 这些胶子必须很接近于夸克反夸克体系，它应该来自于相碰撞的强子，并且由强子的波函数来确定，然而在量子色动力学目

前的表述中严格地看到所要求的入射胶子通量如何才能出现，是困难的[85]。

(VI.7.2) 的残存发散的特殊性质(并不是质量奇点性)不会影响微扰量子色动力学的一般框架，而依赖于这些奇点的普适性[89,90,91]。因为只有当初态至少有两个带色客体时，发散性才出现，故关于电子正电子湮没和深度非弹性轻子强子散射的理论结果并不受影响。

然而，如上面所提到的 Drell-Yan 过程的计算，它大概会影响到强子强子碰撞中大角度强子的产生。后者在量子色动力学框架内是由夸克夸克和夸克胶子散射确定的。在高能处，效应仅为 α_s^2 的量级，并且如 (VI.7.3) 所表明，是正比于 m^2/Q^2，这里 Q 为出现在问题中的典型大动量标度。因此，奇点性的效应在大 Q 处被强烈抑制，在这里关系到微扰的计算。通常的抑制因子，由于高阶跑动耦合常数的存在，为形式 $(\ln(Q^2))^{-1}$。如在目前的情形一样，抑制的幂类型一般被称为较高的或非主要的扭度效应[92,93,94]。因此，可以结论，类如方程 (VI.7.2) 的红外奇点性存在的效应并不是引人注目的。

在文献 [91] 中，在特殊情形下进行了消去非主要量级的红外发散性的研究。已经证明，在反应方程 (VI.2.1a) 的阈值附近，残存的红外奇点性在截面内分解为因子。

(B) 在截止微扰展开式中的不确定性。

在这一小节中，首先对强相互作用耦合参数的数值进行短评，这些数值可以由适当的实验数据求出。特别着重指出，内含高阶贡献对重正化群方程的重要性。然后将讨论与截止微扰展开式相联系的问题。将给出一个例子来说明选择容许截止微扰级数收敛快的减除方案的重要性。

如在 §§6.5 及 6.6 中所讨论的，类如量子色动力学的渐近自由场论具有所谓重正化群改进的微扰展开式。出现在改进

的微扰级数中的耦合强度是跑动耦合常数，它本身是如方程(VI.6.54)所给出的，与动量有关的函数，

$$\bar{g}(q^2) = a[\ln(q^2/\Lambda^2)]^{-1} + b_1[\ln(\ln(q^2/\Lambda^2))][\ln(q^2/\Lambda^2)]^2 + \cdots \quad \text{(VI.7.4)}$$

这里 a 和 b_1 在方程 (VI.6.65) 和 (VI.6.61) 中给出. 令

$$\alpha_s(q^2) \equiv \bar{g}^2(q^2)/4\pi.$$

于是 (VI.7.4) 可以重写为

$$\alpha_s(q^2) = \alpha_s^{(0)}(q^2) - \delta_1(\alpha_s^{(0)}(q^2))^2[\ln(\ln(q^2/\Lambda^2))] + \cdots \quad \text{(VI.7.5)}$$

这里

$$\alpha_s^{(0)}(q^2) = \frac{a}{4\pi}[\ln(q^2/\Lambda^2)]^{-1} = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(q^2/\Lambda^2)}, \quad \text{(VI.7.6)}$$

它是重正化群 β 函数的一圈贡献的 $\alpha_s(q^2)$ 动量展开式的主项，并且

$$\delta_1 \equiv -4\pi\frac{b_1}{a^2} = \frac{306-38n_f}{(33-2n_f)^2}\frac{1}{4\pi}. \quad \text{(VI.7.7)}$$

$\alpha_s(q^2)$ 在某个固定 q^2 处的测量事实上是质量标度 Λ 的确定. 利用不同的质量标度 Λ'，给出一个相应的 $\alpha_s'(q^2)$，于是

$$\alpha_s'(q^2) = \alpha_s(q^2) + \frac{33-n_f}{12\pi}\alpha_s^2(q^2). \quad \text{(VI.7.8)}$$

这表明，为了确定标度参数，必须包括方程 (VI.7.5) 的第二阶在内. 如果只保持方程 (VI.7.5) 右边的第一阶项使 $\alpha_s(q^2) = \alpha_s^{(0)}(q^2)$，则 $\alpha_s'(q^2) = \alpha_s(q^2)$，标度参数就不能确定了(更多的讨论参阅文献 [94]).

应该注意，上面提到的复杂性，在不太高的能量处，由于两个原因不会出现在量子电动学中：能量不足够高要求利用跑动耦合常数，并如 § 6.6 所讨论的，量子电动力学是红外稳

定的，因而在质壳上的低能振幅是存在的. 经典的 Thomas 截面，它是严格的，提供电荷在低能量时的测量方法. 为了进一步说明第一点，注意，如方程 (VI.6.73) 所给出的，跑动耦合常数可以对量子电动力学定义：

$$\alpha(k^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln(-k^2/m_e^2)}, \qquad \text{(VI.7.9)}$$

这里 $\alpha = \frac{1}{137}$，m_e 为物理的电子质量，对于 $k^2 = -1(\text{Tev})$，于是 $\alpha(k^2) = 1.035$，由 Thomas 值增加 3.5%. 微扰展开式的几项通常就足以计算出耦合强度的改变.

下面当论述截止微扰级数时，讨论与重正化减除方案相联系的不确定性. 这是在微扰量子色动力学所有应用中经常遇到的情形. 然后讨论方案的另外选择及其相对价值. 与基于各个物理量微扰级数项的第一耦合显式计算的结果，动量减除方案(参看 § VI.3) 给出一个相对快的收敛性，似乎是一致的. 然而，既不知道，这点一般是否是真实的，又不清楚，较高阶效应是否会使情况改变. 在 §§ VI.5 及 VI.6 中讨论了常用的三个重正化方案：极小减除方案，修正的极小减除方案，及动量减除方案. 就非阿贝耳规范场理论的论述而论，重正化程序的证明对三个方案是等价的. 确实，一个给定的物理量通过三个方案各自的重正化耦合常数有不同的展开系数. 因为一个物理量与如何进行重正化减除无关，故这些不同的展开式彼此通过它们的重正化耦合常数的关系相联系. 因此，在一个方案中所定义的重正化耦合常数可以表示为另外方案的重正化耦合常数的幂级数，一般为无穷级数. 所以，对于理论的讨论，不同方案的相对价值并不是重要的.

然而在量子色动力学的应用中，任务往往涉及到实验数

据与理论预言的详细比较，耦合常数的数值和物理振幅的展开系数都是重要的量．这是因为物理量的理论预言总是耦合常数的截止级数的形式；通常在实际上只有两项或三项，而不是整个级数可以计算．因此，利用怎样的展开式，不使被计算的较高阶贡献为极小，是一个重要的问题．在展开系数（耦合常数）小的情形中，例如量子电动力学，除非在很高的能量时，或者需要大的准确度时，高阶贡献并不如此重要．所以，适当的展开级数保证收敛快的问题不是决定性的．与量子电动力学相比较，量子色动力学具有两个不同的特性．第一，在目前可以达到的 100 GeV 的能量范围内，或者小些，强耦合精细结构常数 α_s 并不小，为 0.1～0.2 量级．因此，使较高阶修正极小的重正化减除方案的合理选取是必要的．因为理论是渐近自由的和红外发散的，并不存在一个"自然的"重正化减除点，使耦合常数可以被测量，并且在适当的减除方案中可以使耦合常数在这一点固定．

为了作出具体的说明，假定一个物理振幅 A 在适当的减除方案中表示为重正化耦合常数 g_R 的无穷级数：

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g_R^{2j+n}, \qquad \text{(VI.7.10a)}$$

这里 a_j 与 g_R 无关，但依赖于其他的量，例如，运动学变数，等等．（这里略去方程 (VI.7.10a) 的级数收敛性问题）．现在，在另外的减除方案中可以计算出相同的振幅，例如，给出

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} a'_j g'^{2j+n}_R. \qquad \text{(VI.7.10b)}$$

在两个方案中定义的重正化耦合常数通过一个幂级数相联系，一般包括无穷多的项，例如

$$g_R = g'_R \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j g'^{2j}_R \right], \qquad \text{(VI.7.11)}$$

这里 b_j, $j=1,2,\cdots$,为常数. 方程 (VI.7.10a) 和 (VI.7.10b) 的展开系数关系为

$$
\begin{aligned}
a_0' &= a_0, \\
a_1' &= a_1 + n a_0 b_1, \\
a_2' &= a_2 + (n+2) a_1 b_1 + n a_0 b_2 + \frac{n(n-1)}{2!} b_1^2, \\
a_3' &= a_3 + (n+4) a_2 b_1 + (n+2) a_1 b_2 \\
&\quad + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} a_1 b_1^2, + n a_0 b_3 \\
&\quad + n(n-1)\, a_1 b_1 b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a_0 b_1^2, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{VI.7.12}
$$

已经看到,除主项外,A的所有高阶项的系数是不同的. 在方程 (VI.7.10a) 和 (VI.7.10b) 的截止方案中,如果只有头K项是已知的,则两个展开式在第 $(K+1)$ 项中将是不同的. 如果第 $(K+1)$ 项并不小,则两个展开式的差异可以使相同的物理量得到相当不同的预言. 或者,当用 A 来求耦合常数时,两个展开式可能对重正化耦合常数给出不同的值.

在原则上选择一个重正化耦合参数使两个展开式严格地表示 A(当然在一个能量处),是可能的. 为了确定这个高度合乎要求的耦合参数,先验地,知道 A 的严格表示式,是必要的. 这后一信息当然是不可能得到的. 因此,问题在于,是否有可能选择一个减除方案,它通过微扰展开式的头几项就给出物理振幅合理的好的表示. 答案的线索,如有的话,检验三个方案对物理量的预言,就可以得到了.

在三个方案中定义的量子色动力学的耦合常数 g_R 可以通过 § 6.3 和 § 6.4 已知的结果相联系. 由方程 (VI.3.9), 可以写出

$$g = \frac{Z_1^{G,i}(\mu_i)}{(Z_3^i(\mu_i))^{3/2}}\mu_i^{\varepsilon} g_R, \qquad \text{(VI.7.13)}$$

这里 $i = MO, MI$，或 $\overline{MI}$，它们分别代表动量空间减除方案，极小减除方案，和修正的极小减除方案. μ_i 是维数正规化方法中相应的质量标度，并且 $\varepsilon = 2 - n/2$（一般对不同的减除方案，取 μ 为不同的质量标度）.

由方程 (VI.3.103)，(VI.3.118)，及 (VI.3.120a)，在动量空间减除方案中有关的重正化常数为

$$Z_3^{MO}(\mu') = 1 - \frac{(g_R^{MO})^2}{16\pi^2}\left\{\left[\left(-\frac{13}{6} + \frac{\xi_R}{2}\right)C_2(G) + \frac{4}{3}T(R)n_f\right]\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\right] + \left(-\frac{97}{36} - \frac{\xi_R}{2} - \frac{\xi_R^4}{4}\right)C_2(G) + \frac{20}{9}T(R)n_f\right\} + O((g_R^{MO})^4), \qquad \text{(VI.7.14a)}$$

$$Z_1^{G,MO}(\mu') = 1 - \frac{(g_R^{MO})^2}{16\pi^2}\left\{\left[\left(-\frac{17}{12} + \frac{3}{4}\xi_R\right)C_2(G) + \frac{8}{6}T(R)n_f\right]\left[\frac{1}{\varepsilon} - 8 + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\right] + \left[-\frac{3}{8} + \frac{23}{72}I - \frac{3}{8}(1+I)\xi_R + \left(-\frac{5}{8} + \frac{I}{12}\right)\xi_R^2 + \frac{\xi_R^2}{24}\right]C_2(G) + \left(2 - \frac{8}{9}I\right)T(R)n_f\right\} + O((g_R^{MO})^4), \qquad \text{(VI.7.14b)}$$

这里

$$I \equiv -2\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x + x^2}\,dx = 2.34390724\cdots.$$

注意，在上面定义的 $Z_1^{G,MO}$ 是与方程 (VI.3.122) 所给出的不同. 这里按文献 [29]，利用了定义 $Z_1^{G,MO} = \tilde{A}_1$. $Z_1^{G,MO}$ 的两

个表示式相差一个常数项.

在极小减除方案中,两个表示式为

$$Z_3^{MI}(\mu)=1-\frac{g_R^{MI}(\mu)}{16\pi^2}\left\{\left(-\frac{13}{6}+\frac{\xi_R}{2}\right]C_2(G)+\frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\frac{1}{\varepsilon},\tag{VI.7.15a}$$

$$Z_1^{G,MI}(\mu)=1-\frac{(g_R^{MI}(\mu))}{16\pi^2}\left\{\left[-\frac{17}{12}+\frac{3}{4}\xi_R\right]C_2(G)+\frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\frac{1}{\varepsilon}+\cdots,\tag{VI.7.15b}$$

在修正的极小减除方案中

$$Z_3^{\overline{MI}}(\mu')=1-\frac{(g_R^{\overline{MI}}(\mu'))^2}{16\pi^2}\left\{\left[-\frac{13}{6}+\frac{\xi_R}{2}\right]C_2(G)+\frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln(4\pi)\right\}+\cdots,\tag{VI.7.16a}$$

$$Z_1^{G,\overline{MI}}(\mu')=1-\frac{(g_R^{\overline{MI}}(\mu'))^2)}{16\pi^2}\left\{\left[-\frac{17}{12}+\frac{3}{4}\xi_R\right]C_2(R)+\frac{4}{3}T(R)n_f\right\}\left\{\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln(4\pi)\right\}+\cdots\tag{VI.7.16b}$$

现在由类似于方程 (VI.4.5) 的关系,

$$g_b=\mu'^{\varepsilon}g_R^{MO}(\mu')\left\{1-\frac{(g_R^{MO}(\mu'))^2}{16\pi^2}\cdot\left[\left(\frac{11}{6}C_2(G)-\frac{2}{3}T(R)n_f\right)\frac{1}{\hat{\varepsilon}}+\left(\frac{11}{3}+\frac{3(1-I)}{8}\xi_R+\left(-\frac{1}{4}+\frac{I}{12}\right)\xi_R^2+\frac{\xi_R^3}{24}\right)C_2(G)+\left(-\frac{4}{3}-\frac{8}{9}I\right)T(R)n_f\right]\right.$$

$$+ O((g_R^{MO}(\mu'))^4)\Big\}, \tag{VI.7.17a}$$

$$= \mu''^{\varepsilon} g_R^{\overline{MI}}(\mu'') \left\{1 - \frac{(g_R^{\overline{MI}}(\mu''))^2}{16\pi^2}\left[\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}T(R)n_f\right]\frac{1}{\hat{\varepsilon}} + O((g_R^{\overline{MI}}(\mu''))^4)\right\}, \tag{VI.7.17b}$$

$$= \mu^{\varepsilon} g_R^{MI}(\mu) \left\{1 - \frac{(g_R^{MI}(\mu))^2}{16\pi^2}\left[\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}T(R)n_f\right]\frac{1}{\varepsilon} + O((g_R^{MI}(\mu))^4)\right\}, \tag{VI.7.17c}$$

这里令 μ' 等于 M，并且

$$\frac{1}{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi).$$

于是在三个方案中定义的重正化耦合常数关系如下：

$$(g_R^{MO}(\mu'))^2 = (g_R^{MI}(\mu))^2 \left\{1 + \frac{\alpha_s^{MI}(\mu)}{\pi}K_1 + O((g_R^{MI}(\mu))^4)\right\}, \tag{VI.7.18a}$$

$$(g_R^{\overline{MI}}(\mu''))^2 = (g_R^{MI}(\mu))^2 \left\{1 + \frac{\alpha_s^{MI}(\mu)}{\pi}K_2 + O(g_R^{MI}(\mu))^4\right\}, \tag{VI.7.18b}$$

及

$$(g_R^{MO}(\mu'))^2 = (g_R^{\overline{MI}}(\mu''))^2 \left\{1 + \frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(\mu'')}{\pi}K_3 + O((g_R^{\overline{MI}}(\mu))^4)\right\}, \tag{VI.7.18c}$$

这里

$$K_1 \equiv \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}\right)[-\gamma + \ln(4\pi\mu'/\mu)]\right.$$

$$+\left[\frac{11}{3}+\frac{3}{8}(1-I)\xi_R+\left(-\frac{1}{4}+\frac{I}{12}\right)\xi_R^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}\xi_R^2\right]-\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{9}I\right)T(R)n_f\Big\}, \qquad \text{(VI.7.19a)}$$

$$K_2\equiv\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{11}{6}C_2(G)-\frac{2}{3}\right][-\gamma+\ln(4\pi\mu''/\mu)]\right\}, \qquad \text{(VI.7.19b)}$$

及

$$K_3\equiv\frac{1}{2}\left\{\ln(\mu'/\mu'')+\left[\frac{11}{3}+\frac{3}{8}(1-I)\xi_R\right.\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{4}+\frac{I}{12}\right)\xi_R^2+\frac{1}{24}\xi_R^3\right]C_2(G)$$

$$\left.-\left(\frac{4}{3}+\frac{8}{9}I\right)T(R)n_f\right\}. \qquad \text{(VI.7.19c)}$$

注意，在 $g_R^{MO}(\mu')$ 及 $g_R^{MI}(\mu)$ 和 $g_R^{\overline{MI}}(\mu'')$ 之间的关系依赖于规范参数 ξ_R. 如果利用方程 (VI.3.122) 所给出 Z_1^G 的表示式，方程 (VI.7.19a) 要修正为下面的形式

$$K_1'=K_1+\frac{\pi}{\alpha_s^{MI}(\mu)}M^2(\tilde{A}_2+\tilde{A}_3), \qquad \text{(VI.7.19d)}$$

这里 K_1 在 (VI.7.19a) 中给出；$\tilde{A}_2$ 和 $\tilde{A}_3$ 在方程 (VI.3.124b) 和 (VI.3.124c) 中给出，其中耦合常数 g_R 用 $g_R^{MI}(\mu)$ 代替. 注意，K_1' 仍然是规范有关的，尽管方程 (VI.3.122) 满足推广 Ward-Takahashi 恒等式.

正比于 $\ln(\mu'/\mu)$ 的项表明了在重正化质量标度改变下跑动耦合常数的改变. 例如，在动量减除方案中，两种不同质量标度的耦合参数关系为

$$(g_R^{MO}(\mu_2'))^2=(g_R^{MO}(\mu_1'))^2\left\{1-\frac{\alpha_s^{MO}(\mu_1')}{\pi}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{33-2n_f}{6}\ln(\mu_2'/\mu_1')+O((\alpha_s^{MO}(\mu_1'))^2)\right\}$$

$$= \frac{(g_R^{MO}(\mu_1'))^2}{1 + \frac{33 - 2n_f}{6\pi}\alpha_s^{MO}(\mu_1')\ln(\mu_2'/\mu_1')}$$

$$+ O((\alpha_s^{MO}(\mu_1'))^3), \qquad \text{(VI.7.20)}$$

它就是方程 (VI.6.54).

对于颜色 $SU(3)$ 的情形，方程 (VI.7.79) 的 K_1，K_2，及 K_3 的数值(当 $\xi_R = 0$) 为

$$K_1 = 11.9661 - 1.1798n_f + \frac{1}{6}(33 - 2n_f)\ln(\mu'/\mu),$$

$$K_2 = 5.3730 - 0.3256n_f + \frac{1}{6}(33 - 2n_f)\ln(\mu'/\mu),$$

$$K_3 = 6.6231 - 0.8542n_f + (5.5 - 0.1667n_f)\ln(\mu'/\mu''). \qquad \text{(VI.7.21)}$$

为了看出不同减除方案中相同物理量微扰表示式的差异，将讨论下面两个过程：其一是，电子正电子湮没为强子与湮没为 μ 子对的截面比：

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{强子})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}.$$

仲夸克素 η_Q 为重夸克反夸克偶 $(Q\bar{Q})$ 的一个束缚态 ($J^{PC} = 0^{-+}$)，这里 J，P，和 C 分别为 η_Q 的自旋，宇称，和电荷共轭宇称，其二就是仲夸克素的衰变宽度：

$$\gamma_Q = \frac{\Gamma(\eta_Q \to gg)}{\Gamma(\eta_Q \to \gamma\gamma)},$$

这里分子和分母是分别衰变为二胶子和二光子的宽度.

量 $R(s)$ 已计算到二圈阶[96,97,98]：

$$R(s) = 3\sum_{j=1}^{n_f} q_j^4 \left\{1 + \frac{\alpha_s^{MI}(s)}{\pi} + (7.35 - 0.442n_f)\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha_s^{MI}(s)}{\pi}\right)^2+O((\alpha_s^{MI}(s))^3)\Big\},\qquad\text{(VI.7.22)}$$

这里 s 为电子正电子体系的总能量平方，q_i 为第 i 个味道的夸克的电荷，以电子电荷 e 为单位，第 i 个味道的夸克在能量 s 处被激发. 仲夸克素的宽度已计算到一圈阶. 比值为[99]

$$\gamma_Q=\frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{MI}(2m_Q)}{q_Q^2\alpha}\right]^2\cdot\left\{1+22.14\,\frac{\alpha_s^{MI}(2m_Q)}{\pi}+O((\alpha_s^{MI}(2m_Q))^2)\right\},\qquad\text{(VI.7.23)}$$

这里 q_i 为重夸克的电荷，以 e 为单位，m_Q 为重夸克的有效质量，$\alpha=1/137$ 为通常的精细结构常数. 如上面的表示式所表明，取衰变振幅的质量标度为仲夸克素的质量，它近似地为 $2m_Q$.

对于 5 个味道及 $\alpha_s^{MI}=0.15$ 的情形，$R(s)$ 的一圈贡献大约为 5%，二圈贡献大约为 1%. 因此方程 (VI.7.22) 不是一个收敛快的级数. 仲夸克素宽度收敛甚至是坏的. 一圈贡献是与主项同样大的，因而到一圈阶的结果是没有理由相信的. 这表明微扰展开式失效，或者表明展开参数的选择不适当. 因为所有的一切实验数据相当好地与一圈计算的结果符合[93,100,101]，难于想像，在量子色动力学和实验之间所有这些近似的符合是偶然的. 为了找出差异的线索，要把 $R(s)$ 和 γ_Q 再用另外的减除方案来表示.

量 $R(s)$ 可以在动量减除方案和修正的极小减除方案中，分别用 α_s^{MO} 及 $\alpha_s^{\overline{MI}}$ 代替 α_s^{MI}，来加以重写. 有关的公式为方程 (VI.7.18) 和 (VI.7.21)：

$$R(s)=3\sum_{j=1}^{n_f}q_j^4\left\{1+\frac{\alpha_s^{MO}(s)}{\pi}+[0.7389n_f-4.6374]\right.$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha_s^{MO}(s)}{\pi}\right)^2+O((\alpha_s^{MO}(s))^3)\Big\}, \qquad \text{(VI.7.24a)}$$

及

$$R(s)=3\sum_{i=1}^{n_f}q_i^2\Big\{1+\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(s)}{\pi}+[1.98-0.115n_f]\cdot\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(s)}{\pi}\Big)^2+O((\alpha_s^{\overline{MI}}(s))^3)\Big\}. \qquad \text{(VI.7.24b)}$$

(VI.7.21), (VI.7.23a) 及 (VI.7.23 b) 的表示式，用量级 α_s^3 或较高的量级来表示，是不同的. 在所有三个方案中，取质量标度 μ, μ', 和 μ'' 等于 s. 应该注意，如同在深度非弹性强子强子散射的情形中一样，利用 $\alpha_s(q^2)$, $q^2<0$, 在 $R(s)$ 的计算中，q^2 解析延拓到类时区域是需要的. 关于这方面的讨论，参看文献 [102].

类似地 γ_Q 可以在动量减除方案和修正的极小减除方案中用方程 (VI.7.20) 重写出来，应用到粲夸克的情形，$n=4$，于是 ($q_c=2/3$)

$$\gamma_Q=\frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{MO}(2m_Q)}{q_c\alpha}\right]^2\cdot\left\{1+7.65\frac{\alpha_s^{MO}(2m_Q)}{\pi}+O((\alpha_s^{MO}(2m_Q))^2)\right\}, \qquad \text{(VI.7.25a)}$$

及

$$\gamma_Q=\frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(2m_Q)}{q_c\alpha}\right]^2\cdot\left\{1+14\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(2m_Q)}{\pi}+O((\alpha_s^{\overline{MI}}(2m_Q))^2)\right\}. \qquad \text{(VI.7.25b)}$$

就辐射修正系数而论，二者表示对于极小减除方案的改进.

量 γ_Q 进一步可以通过改变重正化质量标度来加以改

进. 可以论证，出现在重正化耦合常数中的质量标度，它是高阶图形内线的典型动量流，为 m_Q 而不是 $2m_Q$[103]. 因此，γ_Q 在三个方案中可以重写为

$$\gamma_Q = \frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{MI}(m_Q)}{q_Q\alpha}\right]^2 \cdot\left\{1 + 16.36\frac{\alpha_s^{MI}(m_Q)}{\pi} + O((\alpha_s^{MI}(m_Q))^2)\right\}, \tag{VI.7.26a}$$

$$\gamma_Q = \frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{MO}(m_Q)}{q_Q\alpha}\right]^2 \cdot\left\{1 + 1.87\frac{\alpha_s^{MO}(m_Q)}{\pi} + O((\alpha_s^{MO}(m_Q))^2)\right\}, \tag{VI.7.26b}$$

及

$$\gamma_Q = \frac{2}{9}\left[\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(m_Q)}{q_Q\alpha}\right]^2 \cdot\left\{1 + 8.22\frac{\alpha_s^{\overline{MI}}(m_Q)}{\pi} + O((\alpha_s^{\overline{MI}}(m_Q))^2)\right\}, \tag{VI.7.26c}$$

在上面讨论的三种情形中，即，$R(s)$，γ_Q 具有质量标度 $2m_Q$ 及 m_Q，动量减除方案对主阶辐射修正往往给出最小的系数. 这相当于说，动量减除方案提供最快的收敛性[30]. 然而，除非尚未计算的次一量级是已知的，要得出一个可靠的结论，是不可能的.

按照上面的讨论，关于研究量子色动力学应用的实际方案，有许多建议. 这些建议连同有关的文献将在下面讨论. (1) 在文献 [101] 及 [102] 中已经论证选取减除方案的判据，粗略地称为最快表观收敛性判据[102]，即由这样的方案所得到的微扰级数的系数是小的；展开参数的大小并不是特别重

要的(当然只要它不太大)，在现在的情形中展开参数为重正化的耦合常数. 下面的简单例子是这方面的示例[103].

假定在一个虚设的理论中，所谓"反常磁矩"，严格地为

$$a_l = \frac{x}{1-2x}, \qquad \text{(VI.7.27a)}$$

这里 x 为理论中的参数，并且测量它的值 $x = 0.2$ 达到好的准确度. a_l 的严格值当然为

$$a_l = 1/3. \qquad \text{(VI.7.27b)}$$

假定 a_l 的严格表示式，即方程 (VI.7.27a) 不合用，与真实世界相类似，只有它的微扰级数的几项是已知的:

$$a_l = x + 2x^2 + 4x^3 + O(x^4). \qquad \text{(VI.7.28)}$$

也假定 a_l 可以很准确地被测量，并且测量的值准确至若干位数字与方程 (VI.7.27b) 符合. 三项近似，即方程 (VI.7.28)，对于 $x = 0.2$ 给出 $a_l = 0.312$，它与严格的值相比较在7% 内是准确的. 另一方面，利用另一个不同的"重正化减除方案"，导致一个不同的展开式. 这后一方案的展开参数用 y 来表示，它与原来参数的关系为

$$x = y(1 + 10y),$$

并且"反常磁矩"的表示式变为

$$a_l = y + 12y^2 + 44y^3 + O(y^4). \qquad \text{(VI.7.29)}$$

给出 $x = 0.2$，y 的值为 $y = 0.1$，它显然是比较小的. (注意，展开参数 x 和 y 值的选择是由强相互作用参数值 $\alpha_s = 0.1 \sim 0.2$ 诱导出来的). 通过这些新的，比较小的参数，方程 (VI.7.29) 给出

$$a_l = 0.264.$$

它只在 20% 以内是好的，它比前面的展开式方程 (VI.7.28) 更坏些.

方程 (VI.7.29) 的错误在于，在展开式中，项的系数是大

的，并且这些系数随级数的阶而增加. $O(y^4)$ 项事实上为 $328y^4$；比较起来，在方程 (VI.7.28) 中，$O(x^4)$ 项为 $8x^4$. 甚至包括 $O(y^4)$ 项在内，它给出 $a_1 = 0.297$，结果仍然比方程 (VI.7.28) 原来的第三阶展开式更坏一些. 这个简单的例子暗示，在微扰级数中，为了得到最快的表观收敛性，要求小的展开系数. 仅仅动量空间减除方案满足这个判据. 而且在文献 [99] 中已经论证，动量空间减除方案由于 Green 函数在减除点处零点的存在会抑制高阶的贡献. 为了避免一般与该减除方案相联系的计算的复杂性，物理振幅在极小减除方案中进行计算，然后，通过 α_i^{MI} 代换为 α_i^{MO}，利用 (VI.7.18a)，物理振幅被变换到动量减除方案.

下面简短地讨论动量空间减除方案的建议. (2) 在文献 [105] 中提出一个改进方案. 必须记住，如 § VI.3 所讨论的，动量空间减除是在一个对称的动量点处完成的，即，一切外动量假定在减除点有相同的欧氏值. 修正的动量空间减除方案利用一个非对称点的动量减除. 已经论证，在 Feynman 图形和电路之间的类似性表明，图形的内线并不带有相同的动量；因此，对称点不可能是理想的选择. 另外的选择可能是比较方便的. 文献 [104] 表明，在顶角函数中减除可以比较方便地用带有相同类空动量的两条外线来实现. 第三条线往往为一条胶子线，有零 4 动量. 在该方案中所定义的耦合常数实际上是与动量空间减除方案所定义的耦合常数相同. 然而，要进行计算是比较简单些. 不同于 § VI.3 所讨论的在质壳上的减除方案，这个方法不会遇到红外发散性.

(3) 在文献 [105] 中已建议另外的方法，把实际计算中极小减除方案的简单性和动量空间减除方案一圈修正的微小性结合起来. 在该方法中，高阶贡献在极小减除方案中进行计算，但是耦合常数是在相应于动量空间减除方案的一个质量标度

处计值的，

$$\alpha_s^{MO}(\mu) = \alpha_s^{MI}(\mu') + O((\alpha_s^{MI}(\mu))^3), \quad \text{(VI.7.30)}$$

这里

$$\mu' = \mu e^{-t_{MO}}, \quad \text{(VI.7.31)}$$

及

$$t_{MO} = t_{\overline{MS}} + \frac{69 - 32n_f}{32 - 2n_f} \cdot \frac{I}{24},$$

$$t_{\overline{MS}} = \frac{1}{2}(-\gamma + \ln(4\pi)),$$

并且 I 在方程 (VI.3.124c) 下面给出。应该注意，极小减除方案和修正的极小减除方案的耦合常数是通过方程 (VI.7.31) 相联系的，即是，

$$\alpha_s^{\overline{MI}} = \alpha_s^{MI}(\mu e^{-t_{\overline{MS}}}). \quad \text{(VI.7.32)}$$

注意，这个方案仅仅是三个方案之间以系统的方式所进行的变换。

(4) 上述的建议都是基于这样的看法：在动量空间减除方案中，一圈阶只给 Born 图形一个小的修正，然而，这对一切过程是否真实，并不清楚；它对高阶多圈贡献会导致小的系数，也不是显然的。在文献 [10] 中所提出的一个方案，称为最佳微扰理论，谈到怎样的重正化减除方案才会得到一个最佳截止微扰级数的问题。通过适当的考察以后，下面是对这个提议的短评：

(i) 在给定一组实验条件下，有唯一值的物理量应该与用来定义物理量的非物理变量无关。所谓非物理“变量”为重正化减除方案，简记为 RS，重正化减除方案容许的结论是，物理量与用来使理论重正化的方法无关。

(ii) 在微扰论中，在级数展开式中只有有限数目的项是已知的。因此，仅仅近似地遵从 RS (重正化减除方案)的无关性。如

以前所述，在二个不同的重正化方案中计算到第 n 阶的物理量，在第 $(n+1)$ 阶中将是不同的，这在应用中可能引起严重的不确定性。

(iii) 因为被删去的非主要修正项的相对大小肯定依赖于 RS 的选择，要合理判断微扰级数的变化过程，是不可能的，除非可以建立 (ii) 中所提到的解决不确定性的方法。

在文献 [106] 中所提出的最佳微扰理论目的在于，把由重正化方案的不同选择所引起的不确定性变为最小。为了实现这个目的，已经论证，用来定义一个特殊重正化方案的非物理参数值应该如此选择，务使物理量比之于非物理参数微小变化的灵敏度变为最小。最佳微扰论的运算定义是要选择 RS 使

$$\left.\frac{\partial A}{\partial(RS)}\right|_{RS=\text{最佳}RS}=0, \qquad \text{(VI.7.33)}$$

这里 A 表示物理量的微扰展开式，RS 表示用来定义重正化方案的一个或多个非物理的参数。方程 (VI.7.33) 称为最小灵敏度原理 (PMS)。如果 A 对一切量级是已知的，不顾及该级数的收敛性问题，方程(VI.7.33)自动地被满足，在一个给定的情况中，并且在一个给定的理论中进行计算，事实表明物理量有固定的值。然而，当 A 只由级数展开式的头几项给出时，方程 (VI.7.33) 有重要的内容。应用到量子色动力学中，例如，相对 RS 的微分可能意味着相对于重正化点 M 的微分。

其他的提议目的在于找到一个好的重正化方案用在所有的实际计算中，与此相反，文献[106]所主张的方法是不同的。在这里，一般原理是要找到为一个给定物理量裁制的最佳重正化方案。这如何才能实现的实例，是要选择不同的重正化点适合于如方程 (VI.7.33) 所确定的不同过程。例如，在深度非弹性轻子强子散射中，能量标度是由轻子到强子传递的动

量 Q 提供的。可以论证，$M^2 \simeq Q^2$，但 $M^2 = q^2$ 是不必要的。可以令 $M^2 = \eta Q^2$，这里 η 为正数，它的精确值通过方程 (VI.7.33) 来确定。

有两方面涉及到文献 [106] 所作的提议。第一方面是关于它的物理含义，另一方面是关于实际的性质。在文献[107]中已经指出，方程 (VI.7.33) 可以认为是全重正化群的显然实现，而不是 § 7.5 所讨论的减除点标度变换的子群。在文献[107]中给出这个全重正化群的一般表述。在实际方面，文献 [102] 已经指出，当重正化群 β 函数的微扰展开式适合时(参看 § 7.5)，它是与 *PMS* 有关的情况，用 *PMS* 所得的结果和用其他作者所提出的和早先所讨论过的判据所得到的结果，其差异可以略去。

参 考 文 献

VI.1 F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **75**, 1736(1949).

VI.2 J. C. Ward, *Phys. Rev.*, **78**, 182L(1950).

VI.3 Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, **6**, 370(1957).

VI.4 N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiud, *Acta Math.*, **97**, 227(1957).

VI.5 K. Hepp, *Commun. Math. Phys.*, **2**, 301(1966).

VI.6 S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **118**, 838(1960).

VI.7 W. Zimmerman, in *Lecture Notes on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis Summer Institute 1970, ed. S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendelton (MIT Press, Cambridge, Mass.; 1970).

VI.8 G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B33**, 173(1971).

VI.9 G. 'tHooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B50**, 318(1972).

VI.10 B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D5**, 3121, 3137, and 3155 (1972); *ibid*, **D7**, 1049(1972).

VI.11 A. A. Slanov, *Theor. and Math. Phys.*, **10**, 99(1972).

VI.12 J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B33**, 436(1971).

VI.13 C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, *Commun. Math. Phys.*, **42**, 127 (1975).

VI.14 E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rept.*, **9C**, 1(1973).

VI.15 J. Zinn-Justin, in *Trends in Elementary Particle Theory*, ed. H. Rollink and K. Dietz (Spring-Verlag, Berlin: 1975).

VI.16 B. W. Lee, in *Method in Field Theory*, lecture notes of the XXVIII

(1975) Les Houches Summer School of Theoretical Physics, ed. R. Balian and J. Zinn-Justein (North-Holland/World Scientific, Singapore; 1976).

VI.17 J. C. Taylor *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambidge Univ., Cambridge, England; 1976).

VI.18 W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rept.*, **36C**, 137(1978).

VI.19 The application of Weinberg's theorem and a description of the proof can be found in J. D. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York; 1965), Ch. 19.

VI.20 A. Salam, *Phys. Rev.*, **82**, 217(1951); *ibid*, **84**, 426(1951).

VI.21 See Ref. 19, pp. 344—357.

VI.22 G 'tHooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44**, 189(1972).

VI.23 C. Nash, *Relativistic Quantum Fields* (Academic Press, New York; 1978) pp. 78—85.

VI.24 K. Hepp, *Commun. Math. Phys.*, **1**, 95(1965).

VI.25 S. L. Adler and R. F. Dashen, *Current Algebras and Applications to Particle Physics* (Benjamin, New York; 1968).

VI.26 J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **49B**, 52(1974).

VI.27 For a review of the later development of supersymmetry, see P. Fayet and S. Ferara, *Phys. Rept.*, **32C**, 249(1977).

VI.28 L. Corwin, Y. Ne'eman, and S. Sternberg, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 573 (1975).

VI.29 W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta, *Phys. Rev.*, **D18**, 3998(1978); W. A. Bardeen and A. J. Buras, *Phys. Rev.*, **D20**, 166(1979).

VI.30 W. Celmaster and R. J. Gonsalves, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 1435(1979); *Phys. Rev.*, **D20**, 1420(1979).

VI.31 G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **61B**, 455(1973).

VI.32 D. Pursey 未发表.

VI.33 C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. 76, 191(1954), C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 33, 445(1974).

VI.34 E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 4th eddition 1927.

VI.35 P. Cvitanovic, Phys. Rev. D14, 1536(1976), A. J. Buras, Rev. Mod. Phys. 52, 199(1980).

VI.36 A. H. Mueller, Phys. Reports, 73, 237(1981).

VI.37 R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, 769(1949), B. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael, Phys. rep. 3c. 193(1972).

VI.38 M. Gell-Mann and F. Low, *Phys. Rev.*, **95**, 1300(1954).

VI.39 E. O. G. Stuekelberg and A. Petermann, *Helv. Phys. Acta*, **26**, **499** (1953).

VI.40 C. G. Callen, Jr., *Phys. Rev.*, **D2**, 1541(1970).

VI.41 L. V. Osviannikov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **109**, 1112(1956) (in Russian).
VI.42 K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.*, **18**, 227(1970).
VI.43 S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D8**, 3497(1973).
VI.44 N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **103**, 203(1955) (in Russian); *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Wiley, New York; 1980).
VI.45 K. Wilson, *Phys. Rev.*, **D3**, 1818(1971).
VI.46 J. C. Collins and A. J. Macfarlane, *Phys. Rev.*, **D10**, 1201(1974).
VI.47 关于量子场论的固定点结构的评述，查阅：D. J. Gross, in *Method of Field Theory*, 1975 Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Session XXVIII, ed. R. Balian and J. Zinn-Justin (North Holland/World Scientific; 1976).
VI.48 D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343(1973).
VI.49 H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346(1973).
VI.50 渐近自由也独立地由 K. Symanzik 提出.
VI.51 A. Zee, *Phys. Rev.*, **D7**, 3630(1973).
VI.52 F. E. Close, *An Introduction to Quarks and Partons* (Academic Press, New York; 1979).
VI.53 Bing-lin Young, "Application of Perturbative Quantum Chromodynamics and Renormalization Group," Lecture Notes of Zhengzhou Summer School in Particle Physics (Zhengzhou University, Zhengzhou, China; 1980).
VI.54 在偏微分方程理论，统计力学和经典力学中，各态经历体系是都知道的. 关于该课题，有大量的文献，例如，查阅：R. Kubo, *Statistical Mechanics* (North-Holland, Amsterdam; 1965); V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, Reading, New York; 1968).
VI.55 例如，查看：E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* (Wiley, New York; 1971).
VI.56 D. R. T. Jones, *Nucl. Phys.*, **B75**, 531(1974).
VI.57 W. E. Caswell, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 244(1974).
VI.58 O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov, and A. Yu Zharkov, *Phys. Lett.*, **93B**, 429(1980).
VI.59 R. Jost and J. M. Luttinger, *Helv. Phys. Acta*, **23**, 201(1950).
VI.60 Ref. 19, p. 357.
VI.61 V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, and V. I. Zakharov, *Phys. Rept.*, **41C**, 1(1978).
VI.62 F. Bloch and H. Nordsieck, *Phys. Rev.*, **52**, 54(1937).
VI.63 T. Kinoshita, *J. Math. Phys.*, **3**, 650(1962).
VI.64 T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.*, **133**, 1549(1964).
VI.65 T. Kinoshita and A. Ukawa, *Phys. Rev.*, **D15**, 1596(1977).

VI.66 G. Sterman, *Phys. Rev.*, **D14**, 2123(1976).
VI.67 T. Appelquest, J. Carazzone, H. Kluberg-Stern, and M. Roth, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 768(1976); *ibid*, **36**, 1161(E) (9751).
VI.68 J. Frenkel, R. Meuldermans, I. Mohammad, and J. C. Taylor, *Phys. Lett.*, **64B**, 211(1976) and *Nucl. Phys.*, **B121**, 58(1977).
VI.69 J. Frenkel, *Phys. Lett.*, **65B**, 383(1976).
VI.70 S. B. Libby and G. Sterman, *Phys. Rev.*, **D19**, 2468(1979).
VI.71 E. C. Poggio, *Phys. Lett.*, **68B**, 347(1977); *Phys. Rev.*, **D16**, 2586 and 2605(1977).
VI.72 York-Peng Yao, *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 653(1976).
VI.73 A. Sugamoto, *Phys. Rev.*, **D16**, 1065(1977).
VI.74 L. Tyburski, *Nucl Phys.*, **B116**, 291(1976).
VI.75 W. Konetschny, *Phys. Lett.*, **74B**, 365(1978).
VI.76 C. P. Korthals Altes and E. De Rafael, *Phys. Lett.*, **62B**, 320(1976).
VI.77 P. Cvitanovic, *Phys. Lett.*, **65B**, 272(1976).
VI.78 T. Kinoshita and A. Ukawa, *Phys. Rev.*, **D16**, 332(1977).
VI.79 E. C. Poggio and H. Quinn, *Phys. Rev.*, **D14**, 548(1976).
VI.80 See Ref. 66.
VI.81 J. M. Corwill and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 338(1975).
VI.82 E. C. Poggio. H. R. Quinn, and J. B. Zuber, *Phys. Rev.*, **D15**, 1630 (1977).
VI.83 R. Doria, J. Frenkel, and J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B168**, 93(1980).
VI.84 A. Andrasi, M. Day, R. Doria, J. Frenkel, and J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B182**, 104(1981).
VI.85 C. Di'lieto, S. Gendron, I. G. Holliday, and C. T. Sachrajda, *Nucl. Phys.*, **B183**, 223(1981).
VI.86 C. E. Carneiro, M. Day, J. Frenkel, J. C. Taylor, and M. T. Thomaz, *Nucl. Phys.*, **B183**, 445(1981).
VI.87 C. A. Nelson, *Nucl. Phys.*, **B186**, 187(1981).
VI.88 S. D. Drell and T. M. Yan, *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 316(1970); *Ann. Phys.*, **66**, 578(1971).
VI.89 C. T. Sachrajda, *Phys. Lett.*, **76B**, 100(1978).
VI.90 D. Amati, R. Petronzio, and G. Veneziano, *Nucl. Phys.*, **B146**, 29(1978).
VI.91 R. K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H. D. Politzer, and G. G. Ross, *Nucl. Phys.*, **B152**, 285(1979).
VI.92 K. Wilson, *Phys. Rev.*, **179**, 1499(1969).
VI.93 关于最近发展的讨论，查阅：A. J. Buras, "A Tour of Perturbative QCD", in *Proceedings of the* 1981 *International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies* (University of Bonn, Bonn; 1981) p. 636.
VI.94 C. G. Callan, Jr., in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course 54, ed. R. Gatto (Academic Press, New York; 1972).

VI.95 M. Bace, *Phys. Lett.*, **78B**, 132(1978).
VI.96 M. Dine and J. Sapirstein, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 668(1979).
VI.97 K. G. Chelyrkin, A. L. Kataev, and F. V. Tkachov, *Phys. Lett.*, **85B**, 277(1979).
VI.98 W. Celmaster and R. J. Gonsalves, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 560(1980); *Phys. Rev.*, **D21**, 3112(1980).
VI.99 R. Barbieri, G. Curci, E. d'Emilio, and E. Remiddi, *Nucl. Phys.*, **B154**, 535(1979).
VI.100 A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 199(1980).
VI.101 J. Ellis, "Status of Perturbative QCD," in *Proceedings of the* **1979** *International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies* (Fermi Nat. Acc. Lab.: 1980) p. 412.
VI.102 M. P. Pennington, *Phys. Rev.*, **D26**, 2048(1981).
VI.103 W. Celmaster and D. Sivers, *Phys. Rev.*, **D23**, 227(1981).
VI.104 S. N. Gupta and S. F. Radford, *Phys. Rev.*, **D25**, 2690(1982).
VI.105 E. Braaton and J. P. Leveille, *Phys. Rev.*, **D24**, 1369(1981).
VI.106 P. M. Stevenson, *Phys. Lett.*, **100B**, 61(1980); *Phys. Rev.*, **D23**, 2916 (1981).
VI.107 A. Petermann, *Phys. Lett.*, **114B**, 333(1982).

附录 I　Fresnel 积分

在进行方程(I.1.27)的动量积分中所用的 Fresnel 积分定义在方程 (I.1.27) 下面,即

$$I_F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia x^2} dx = \sqrt{i\pi/a}\,, \qquad \text{(AI.1)}$$

这里 a 与 x 无关,并且有一个不为负的虚部

$$\mathrm{Im}a \geqslant 0.$$

例如，方程 (AI.1) 与经典光学的衍射理论的正弦和余弦 Fresnel 积分

$$\int_0^t \sin x^2 dx \quad 及 \quad \int_0^t \cos x^2 dx$$

有关，这两个积分是对于 t 的一切实数值定义的. 对于 t 的有限值,这两个积分可以用 t 的无穷级数来表示,但不能用任何初等函数来表示.

方程 (AI.1) 的 Fresnel 积分结果可以简单地通过围道积分来证明. 写出

$$I_F = 2\int_0^{\infty} e^{ia x^2} dx,$$

$$a \equiv \alpha + i\beta,\ \beta \geqslant 0,$$

及

$$ia = -|a| e^{-i\Theta},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \equiv \tan^{-1}(\alpha/\beta) \leqslant \pi/2.$$

在复平面 z 平面内考虑下面的闭合围道 C:正实轴 l_1，向径直线 l_2,它相对于 l_1 成交角 $\Theta/2$，及弧 l_3，它在无穷远处联接 l_1

和 l_2. 围道对于情形 $\Theta > 0$ 如图 AI.1 所示。对于 $0 \leqslant \Theta - 2\theta \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，被积函数在 l_3 上指数地变为零：

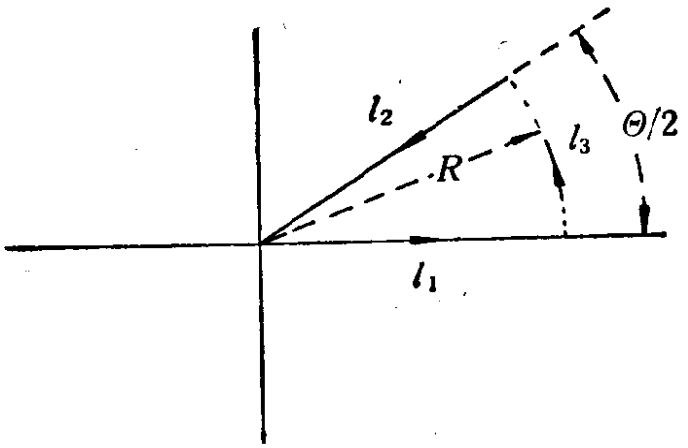


图 AI.1

$$e^{ia z^2} = \exp\{-|a|R^2[\cos(\Theta - 2\theta) - i\sin(\Theta - 2\theta)]\} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

由 Chauchy 定理

$$\oint e^{iaz^2} = 0,$$

由此可得

$$I_F = \int_{l_2} e^{iaz^2} dz = 2e^{i\Theta/2} \int_0^\infty e^{-|a|t^2} dt$$

$$= e^{i\Theta/2} \sqrt{\pi/|a|} = \sqrt{i\pi/a},$$

它是所求的结果 (AI.1)。

附录II 约化公式

约化公式把一个 S 矩阵元和一个相当的 Green 函数联系起来。以 Low[1], Lehman, Symanzik 及 Zimmerman[2] 所引入的程序为基础，依靠场算符的某些渐近条件，来推导约化公式，并不依赖微扰展开式的弱耦合假定。关于这些公式的推导，有很好的评述，例如，文献 [3] 和 [4]，其中可以窥见推导技术的全貌。在本附录中，只讨论推导 (I.2.36)，(I.2.39)，等等，所采用的步骤。

为简化起见，考虑用一个标量场 $\phi(x)$ 来表示的中性标量玻色子的情形。用局域拉氏函数场论的术语，$\phi(x)$ 为出现在全裸拉氏函数中的裸场。两个渐近场，$\phi_{in}(x)$ 和 $\phi_{out}(x)$，可以通过下面的渐近条件来定义：

$$\langle\alpha|\phi(x)|\beta\rangle \xrightarrow[x_0\to-\infty]{} \sqrt{Z}\,\langle\alpha|\phi_{in}(x)|\beta\rangle, \quad \text{(AII.1)}$$

及

$$\langle\alpha|\phi(x)|\beta\rangle \xrightarrow[x_0\to+\infty]{} \sqrt{Z}\,\langle\alpha|\phi_{out}(x)|\beta\rangle, \quad \text{(AII.2)}$$

这里 $|\alpha\rangle$ 及 $|\beta\rangle$ 为两个任意的态，Z 为场 $\phi(x)$ 的波函数重正化常数。显然，ϕ_{in} 和 ϕ_{out} 是重正化场算符 $\phi_R(x)$ 的渐近形式。入 (in) 或出 (out) 场算符满足自由运动方程，即是，

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_R^2)\phi_\eta(x) = 0, \quad \eta \equiv \text{in (入) 或 out (出)}. \quad \text{(AII.3)}$$

这里 m_R 为标量玻色子的物理质量。

令 $f(x)$ 为方程 (AII.3) 的 C 数解，即，

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_R^2)f(x) = 0. \quad \text{(AII.4)}$$

一个特殊情形是平面波解

$$f_p(x) \equiv e^{-ip_\mu x^\mu}, \quad p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_K^2}. \tag{AII.5}$$

可以直接证明下面的恒等式

$$i\int d^3x f^*_{p'}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p(x) = (2\pi)^3 2p_0\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \tag{AII.6}$$

及

$$\int d^3x f^*_{p'}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p(x) = \int d^3x f_{p'}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p(x) = 0, \tag{AII.7}$$

这里

$$A(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 B(x) \equiv A(x)\frac{\partial B(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial A(x)}{\partial x_0}\cdot B(x).$$

由场 ϕ 所表示的粒子的消失算符和产生算符可以定义如下：

$$a_\eta(\boldsymbol{p}) \equiv i\int d^3x f^*_p(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi_\eta(x), \tag{AII.8}$$

及

$$a^+_\eta(\boldsymbol{p}) \equiv i\int d^3x \phi^+_\eta(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_p(x), \tag{AII.9}$$

这里 η 代表入 (in) 或出 (out). 注意，对于中性标量场

$$\phi^+(x) = \phi(x).$$

$a^+_\eta(\boldsymbol{p})$ 和 $a_\eta(\boldsymbol{p})$ 与时间无关的事实可以通过运动方程来验证，如果假定 $\phi(x)$ 在无穷远的空间表面处为零，即：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_0}a_\eta(\boldsymbol{p}) &= i\int d^3x\left[f^*_p(x)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\phi_\eta(x)\right.\\
&\quad\left.-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}f^*_p(x)\cdot\phi_\eta(x)\right]\\
&= i\int d^3x[f^*_p(x)\nabla^2\phi_\eta(x) - \nabla^2 f^*_p(x)\cdot\phi_\eta(x)]\\
&= i\int d^3x\nabla[f^*_\eta(x)\overleftrightarrow{\nabla}\phi_\eta(x)]\\
&= i\int dS\hat{n}\cdot f^*_p(x)\overleftrightarrow{\nabla}\phi_\eta(x) = 0,
\end{aligned}$$

这里 $\hat{n}$ 为三维面元 dS 的法向单位矢量。

考虑

$$[a_\eta(\boldsymbol{p}),\ a_\eta^+(\boldsymbol{p}')] = \int d^3x d^3y [\phi_\eta(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\boldsymbol{p}'}(x),$$

$$f_{\boldsymbol{p}}^*(y)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi_\eta(y)]. \qquad \text{(AII.10)}$$

因为左边与时间无关，故右边可以在等时 $x_0 = y_0$ 处计值。注意，量子化条件

$$\left[\phi(x),\ \frac{\partial}{\partial y_0}\phi(y)\right]\Big|_{x_0=y_0} = i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$[\phi(x),\phi(y)]\,|_{x_0=y_0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_0}\phi(x),\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_0}\phi(y)\right]\Big|_{x_0=y_0} = 0.$$

(AII.10) 的右边可以计算出来，得到

$$[a_\eta(\boldsymbol{p}),a_\eta^+(\boldsymbol{p}')] = 2p_0(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \qquad \text{(AII.11)}$$

渐近场算符可以用产生算符和消失算符来展开：

$$\phi_\eta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta_+(p^2-m_R^2)[a_\eta(\boldsymbol{p})f_{\boldsymbol{p}}(x) + a_\eta^+(\boldsymbol{p})f_{\boldsymbol{p}}^*(x)], \qquad \text{(AII.12)}$$

这里

$$\delta_+(p^2-m_R^2) = (2p_0)^{-1}\delta(p_0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2-m_R^2}).$$

利用 $a_\eta(\boldsymbol{p})$ 和 $a_\eta^+(\boldsymbol{p})$ 可以构成两组态：入射态：

$$|\alpha(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_j),\text{in}\rangle = \prod_{l=1}^{j} a_{\text{in}}^+(\boldsymbol{p}_l)|0\rangle, \qquad \text{(AII.13)}$$

及出射态：

$$|\beta(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_k),\text{out}\rangle = \prod_{l=1}^{k} a_{\text{out}}^+(\boldsymbol{q}_l)|0\rangle. \qquad \text{(AII.14)}$$

现在考虑

$$G_{\beta\alpha}(x_1,\cdots,x_n;y) = \langle\beta;\text{out}|T(Q(x_1,\cdots,x_n)\phi(y))|\alpha;\text{in}\rangle \xrightarrow{y_0\to-\infty} \langle\beta;\text{out}|Q(x_1,\cdots,x_n)\phi_{\text{in}}(y)|\alpha;\text{in}\rangle, \qquad \text{(AII.15)}$$

例如，这里 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 表示场算的乘积。考虑下面的量，对于有限的 $x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}$，

$$\lim_{y_0 \to -\infty} -i \int d^3y f_{\boldsymbol{p}}(y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} G_{\beta\alpha}(x_1, \cdots, x_n; y)$$
$$= \langle \beta; \text{out} | Q(x_1, \cdots, x_n) a^{+}_{\text{in}}(\boldsymbol{p}) | \alpha; \text{in} \rangle$$
$$= \langle \beta; \text{out} | Q(x_1, \cdots, x_n) | \alpha, \boldsymbol{p}; \text{in} \rangle, \qquad \text{(AII.16)}$$

这里 $|\alpha, \boldsymbol{p}; \text{in}\rangle$ 为包含原来态 $|\alpha, \text{in}\rangle$ 加用场算符 $\phi(x)$ 所表示动量为 $\boldsymbol{p}$ 的一个标量粒子的入射态。类似地

$$\lim_{y_0 \to +\infty} i \int d^3y f^{*}_{\boldsymbol{q}}(y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} G_{\beta\alpha}(x_1, \cdots, x_n; y)$$
$$= \langle \beta; \text{out} | a_{\text{out}}(\boldsymbol{q}) Q(x_1, \cdots, x_n) | \alpha; \text{in} \rangle$$
$$= \langle \beta, \boldsymbol{q}; \text{out} | Q(x_1, \cdots, x_n) | \alpha; \text{in} \rangle. \qquad \text{(AII.17)}$$

特别是，关系

$$\langle 0 | T(Q(x_1, \cdots, x_n)\phi(y)) | 0 \rangle = 0$$

意味着

$$\langle 0 | Q(x_1, \cdots, x_n) | \boldsymbol{p} \rangle = 0.$$

因此可得方程 (I.2.36) 及 (I.2.39)。

参 考 文 献

A.II.1 F. Low, *Phys. Rev.*, **97**, 1392(1955).

A.II.2 H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **2**, 425(1955).

A.II.3 J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York; 1965), Ch. 16.

A.II.4 S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics* (John Wiley, New York; 1966), Ch. 7.

附录 III　$SU(N)$ 代数和场算符的电荷共轭性质

在粒子物理学中，$SU(N)$ 代数是有用的工具。$SU(2)$ 是论述角动量，同位旋和弱电统一理论的基础；$SU(3)$ 是讨论量子色动力学和轻夸克味群的基础；$SU(4)$ 是 Dirac 代数的基础；$SU(5)$ 是统一弱电及强相互作用的最小群，等等。在本附录中，将推导包括 $SU(N)$ 代数的有用的关系，并且列举 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 矩阵和它们的结构常数。附录的最后部分包括场算符电荷共轭性质的讨论。最后部分与方程 (VI.2.91)—(VI.2.93) 及 (VI.3.42)—(VI.3.44) 有关。推导 $SU(N)$ 代数所用的方法是按照 D. Fursey 未发表的工作。

A. $SU(N)$ 代数　考虑一个 N 维空间，其中定义一组 N^2-1 个求迹为零的，线性无关的，厄密的矩阵：

$$\lambda_a,\ \lambda_a^+ = \lambda_a,$$
$$\mathrm{Tr}(\lambda_a) = 0,\ a = 1, 2, \cdots, N^2-1. \qquad \text{(AIII.1)}$$

在上面所用的下指标和本书中所用的上指标之间没有区别。矩阵 $\lambda_a(a = 1, 2, \cdots, N^2-1)$ 连同单位矩阵 $\mathbf{1}$ 形成该 N 维空间内所有矩阵代数的基。在该空间内任意的 $N\times N$ 矩阵可以写为

$$\mathbf{M} = \alpha\mathbf{1} + \beta_a\lambda_a, \qquad \text{(AIII.2)}$$

这里重复的指标假定对 $a = 1, 2, \cdots, N^2-1$ 的一切容许值求和。N^2 个量 α 及 $\beta_a(a = 1, 2, \cdots, N^2-1)$ 为常数。特别可以写出

$$\lambda_a\lambda_b = \alpha_{ab}\mathbf{1} + \beta_{abc}\lambda_c. \qquad \text{(AIII.3)}$$

因为 λ_a 是厄密的，于是

$$\alpha_{ab}^* = \alpha_{ba}, \tag{AIII.4a}$$

$$\beta_{abc}^* = \beta_{bac}. \tag{AIII.4b}$$

由 α_{ab} 可以形成一个 $(N^2-1)\times(N^2-1)$ 厄密矩阵：

$$\mathbf{A} \equiv (\alpha_{ab}),\ \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}.$$

矩阵 A 可以对角化：选取 λ_a，使得到

$$\alpha_{ab} = \alpha_a \delta_{ab}. \tag{AIII.5a}$$

对表示式 (AIII.3) 的求迹给出

$$\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = N\alpha_a\delta_{ab},$$

它表明，α_a，$a = 1, 2, \cdots, N^2-1$，为实数。进一步可以选取 λ_a 的归一化，使 λ_a 与 a 无关。因此

$$\alpha_{ab} = \alpha\delta_{ab}. \tag{AIII.5b}$$

把 β_{abc} 分解为实部和虚部：

$$\beta_{abc} = d_{abc} + if_{abc},$$

这里 d_{abc} 和 f_{abc} 通常分别称为 d 系数和 f 系数。由方程 (AIII.4b) 可得下面的关系：

$$d_{abc} = d_{bac}, \tag{AIII.6a}$$

$$f_{abc} = -f_{bac}. \tag{AIII.6b}$$

现在写出

$$\lambda_a\lambda_b = \alpha\delta_{ab}\mathbf{1} + (d_{abc} + if_{abc})\lambda_c, \tag{AIII.7}$$

$$[\lambda_a, \lambda_b] \equiv \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_a = 2if_{abc}\lambda_c, \tag{AIII.8}$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} \equiv \lambda_a\lambda_b + \lambda_b\lambda_a = 2\alpha\delta_{ab}\mathbf{1} + 2d_{abc}\lambda_c. \tag{AIII.9}$$

当然，f 系数为结构常数，它与 λ 矩阵的表示无关。相对比，d 系数是随表示不同而改变的。考虑

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b\lambda_c) &= \mathrm{Tr}\{[\alpha\delta_{ab} + \beta_{abc}\lambda_c]\lambda_c\} \\ &= N\alpha\beta_{abc}.\end{aligned} \tag{AIII.10}$$

因为 $\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b\lambda_c)$ 是循环对称的，因而 β_{abc} 也是循环对称的。这连同方程 (AIII.6a) 及 (AIII.6b) 表明两组系数有下面的对称

性质：

$$d_{abc}, \text{ 全对称的,}$$
$$f_{abc}, \text{ 全反对称的.} \tag{AIII.11}$$

在基本表示中，即在定义的表示中，用 T_a 表示的 $SU(N)$ 群的生成元与 λ_a 矩阵的关系为

$$T_a = \lambda_a/2.$$

于是

$$T_aT_b = \frac{1}{4}\alpha\delta_{ab} + \frac{1}{2}(d_{abc} + if_{abc})T_c, \tag{AIII.12}$$

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \tag{AIII.13}$$

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{2}\alpha\delta_{ab}1 + d_{abc}T_c. \tag{AIII.14}$$

下面给出方程 (VI.3.103)—(VI.3.105) 所列举的关系的推导：

$$\mathrm{Tr}(T_aT_b) = T(R)\delta_{ab} = \frac{N}{4}\alpha\delta_{ab}. \tag{AIII.15}$$

考虑

$$T_aT_a \equiv \Sigma(T_a)^2.$$

于是

$$[T_aT_a, T_b] = T_a[T_a, T_b] + [T_a, T_b]T_a$$
$$= if_{abc}\{T_a, T_c\} = 0. \tag{AIII.16}$$

根据 Schur 引理，T_aT_a 必须与单位矩阵成正比，并且是基本表示的 Casimir 算符：

$$T_aT_a = C_2(R)1. \tag{AIII.17a}$$

两边取求迹，并利用方程 (AIII.15)，得到

$$C_2(R) = \frac{\alpha}{4}(N^2 - 1). \tag{AIII.17b}$$

令 $a = b$，并对方程 (AIII.14) 的 a 求和：

$$T_aT_a = \frac{\alpha}{4}(N^2-1) + d_{abc}\lambda_c.$$

由方程 (AIII.17) 及 λ_c 的线性无关性，可得

$$\sum_a d_{aac} = 0, \text{ 对于一切 } c. \qquad \text{(AIII.18)}$$

为了证明方程 (VI.3.103a)，已经看到，$(N^2-1)\times(N^2-1)$ 矩阵是由结构常数构成的，即，由代数的伴随表示构成。

$$(F_a)_{bc} \equiv if_{abc}. \qquad \text{(AIII.19a)}$$

这可以由 Jacobi 恒等式：

$$f_{abc}f_{cde} + f_{bdc}f_{cae} + f_{dac}f_{cbe} = 0$$

来证明，该恒等式可以重写为

$$[F_a, F_b] = if_{abc}F_c. \qquad \text{(AIII.19b)}$$

现在 F_aF_a 是伴随表示中的 Casimir 算符，因为

$$[F_aF_a, F_b] = 0, \text{ 对于一切 } b.$$

按照 Schur 引理，它可以写为

$$F_aF_a = C_2(G)1, \qquad \text{(AIII.20a)}$$

或

$$f_{abc}f_{abd} = C_2(G)\delta_{cd}, \qquad \text{(AIII.20b)}$$

及

$$f_{abc}f_{abc} = C_2(G)(N^2-1). \qquad \text{(AIII.20c)}$$

$C_2(G)$ 的计算是冗长的；可以用所谓 Fierz 变换的步骤。这在下面进行讨论。考虑 N 维空间内一组列矢量：$\xi_1, \xi_2, \cdots$；和一组行矢量：$\eta_1, \eta_2, \cdots$。$N\times N$ 矩阵 $\xi_1\eta_1$ 可以写为

$$\xi_1\eta_1 = \Lambda_0 1 + \Lambda_a\lambda_a, \qquad \text{(AIII.21a)}$$

这里 Λ_0 和 Λ_a 为常数，

$$\Lambda_0 = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(\xi_1\eta_1) = \frac{1}{N}(\eta_1\xi_1), \qquad \text{(AIII.21b)}$$

及

$$\Lambda_a = \frac{1}{N\alpha}\mathrm{Tr}(\xi_1\eta_1\lambda_a) = \frac{1}{N\alpha}(\eta_1\lambda_a\xi_1). \qquad \text{(AIII.21c)}$$

(AIII.21a) 可以重写为

$$\xi_1\eta_1 = \frac{1}{N}(\eta_1\xi_1) + \frac{1}{N\alpha}(\eta_1\lambda_a\xi_1)\lambda_a. \qquad \text{(AIII.22)}$$

进一步考虑下面的量

$$(\eta_2\xi_1)(\eta_1\xi_2) = \frac{1}{N}(\eta_1\xi_1)(\eta_2\xi_2) + \frac{1}{N\alpha}(\eta_1\lambda_a\xi_1)(\eta_2\lambda_a\xi_2). \qquad \text{(AIII.23)}$$

选取 η_j 在第 a_j 个位置有一个单位值，并且在其他处为零；选取 ξ_j 在第 b_j 个位置有一个单位值，并且在其他处为零；这里 a_j 和 b_j 取 1，2，…，N 的值之一。于是方程 (AIII.23) 给出

$$(\lambda_a)_{a_1b_1}(\lambda_a)_{a_2b_2} = \alpha\{N\delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1} - \delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\}. \qquad \text{(AIII.24a)}$$

在 $N=2$ 时，$\lambda_a(a=1,2,3)$ 是 Pauli 矩阵，并且 $\alpha=1$，于是

$$\tau_{a_1b_1}\tau_{a_2b_2} = 2\delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1} - \delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}. \qquad \text{(AIII.24b)}$$

通过类似的步骤，应用到乘积

$$(\eta_3\xi_1)(\eta_1\xi_2)(\eta_2\xi_3),$$

可以推导出下面的恒等式

$$\beta_{abc}(\lambda_a)_{a_1b_1}(\lambda_b)_{a_2b_2}(\lambda_c)_{a_3b_3} = \alpha^2\{N^2\delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_3}\delta_{a_3b_1} - N(\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} + \delta_{a_1b_3}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_1} + \delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1}\delta_{a_3b_3}) + 2\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3}\}. \qquad \text{(AIII.25)}$$

从上式减去 b 和 c 交换的表示式，得到

$$f_{abc}(\lambda_a)_{a_1b_1}(\lambda_b)_{a_2b_2}(\lambda_c)_{a_3b_3} = -\frac{i}{2}\alpha^2N^2(\delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_3}\delta_{a_3b_1} - \delta_{a_1b_3}\delta_{a_3b_2}\delta_{a_2b_1}). \qquad \text{(AIII.26)}$$

令 $a_2 = b_1$，并且对 b_1 求和：

$$f_{abc}(\lambda_a\lambda_b)_{a_1b_2}(\lambda_c)_{a_3b_3} = \frac{i}{2}\alpha^2N^2(N\delta_{a_1b_3}\delta_{a_3b_2} - \delta_{a_1b_2}\delta_{b_3a_3}), \qquad \text{(AIII.27)}$$

按照 (AIII.7)，上式给出

$$f_{abc}f_{abe}(\lambda_c)_{a_1b_2}(\lambda_c)_{a_3b_3}$$
$$= \frac{1}{2}\alpha^2N^2(N\delta_{a_1b_3}\delta_{a_3b_2} - \delta_{a_1b_2}\delta_{a_3b_3}). \qquad \text{(AIII.28)}$$

对 $b_2 = b_3$ 和 $b_1 = a_3$ 求和，得到

$$f_{abc}f_{abc} = \frac{1}{2}\alpha N(N^2 - 1). \qquad \text{(AIII.29)}$$

(AIII.20c) 和 (AIII.29) 的比较，得到

$$C_2(G) = \frac{1}{2}\alpha N^2. \qquad \text{(AIII.30)}$$

可以选取 λ 矩阵的归一化，使

$$\alpha = 2/N. \qquad \text{(AIII.31)}$$

于是由方程 (AIII.15)，(AIII.29) 和 (AIII.30) 得到众所周知的结果：

$$\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = T(R)\delta_{ab}, \quad T(R) = \frac{1}{2}, \qquad \text{(AIII.32a)}$$

$$\Sigma(T_a)^2 = C_2(R)\mathbf{1}, \quad C_2(R) = \frac{1}{2N}(N^2 - 1), \qquad \text{(AIII.32b)}$$

$$f_{abc}f_{abe} = C_2(G)\delta_{ce}, \quad C_2(G) = N. \qquad \text{(AIII.32c)}$$

λ 矩阵的显式表示和 d 系数及 f 系数列举如下。

***SU*(2)** 在基表示中，λ 矩阵为 Pauli 矩阵：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(AIII.33)}$$

d 系数在基本表示中恒为零：

$$d_{abc} = 0. \qquad \text{(AIII.34)}$$

f 系数就是三维空间的反对称符号 ε_{abc}：

$$f_{abc} = \varepsilon_{abc}. \qquad \text{(AIII.35)}$$

表 **AIII.1**

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

表 **AIII.2**

abc	f_{abc}	abc	d_{abc}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	$-1/2$	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	$-1/2$
345	1/2	256	1/2
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2
		366	$-1/2$
		377	$-1/2$
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$
		668	$-1/(2\sqrt{3})$
		778	$-1/(2\sqrt{3})$
		888	$-1/\sqrt{3}$

$SU(3)$ 在基本表示中，λ 矩阵为 Gell-Mann 矩阵 λ_1, $\cdots$, λ_8，这些矩阵列举在表 AIII.1 中。在表 AIII.2 中可以查到不为零的 d 系数和 f 系数。

B. 电荷共轭 在方程 (VI.2.92)—(VI.2.94) 中所列举的规范场和鬼场的电荷共轭性质来自于旋量场的变换性质，并要求拉氏函数在电荷共轭下为不变量的。假定旋量场算符以阿贝耳情形相类似的方式[2]在电荷共轭下进行变换，即，

$$\mathbf{C}\psi(x)\mathbf{C}^{-1} = C\bar{\psi}^T(x), \tag{AIII.36a}$$

$$\mathbf{C}\bar{\psi}(x)\mathbf{C}^{-1} = -\psi^T(x)C^{-1}, \tag{AIII.36b}$$

这里 $\mathbf{C}$ 表示只作用在场算符上的电荷共轭算符，并且 C 为一个 4×4 矩阵，它有下面的性质：

$$C^{-1} = C^+ = C^T = -C. \tag{AIII.37}$$

C 的显式表示式为

$$C \equiv i\gamma^2\gamma^0. \tag{AIII.38}$$

Dirac 矩阵变换如下：

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \tag{AIII.39a}$$

$$C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5. \tag{AIII.39b}$$

对于胶子场，考虑它与旋量场的相互作用；假定相互作用项在电荷共轭下为不变量：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^a T_a\psi &= \mathbf{C}\bar{\psi}\mathbf{C}^{-1}\gamma^\mu\mathbf{C}A_\mu^a\mathbf{C}^{-1}T_a\mathbf{C}\psi\mathbf{C}^{-1}\\ &= -\psi^T C^{-1}\gamma_\mu\mathbf{C}A_\mu^a\mathbf{C}^{-1}T^a C\bar{\psi}^T\\ &= \bar{\psi}^a C^T\gamma^{\mu T}C^{-1T}\mathbf{C}A_\mu^a(T^a)^T\psi.\end{aligned} \tag{AIII.40}$$

在上面的运算中，当 ψ 和 $\bar{\psi}$ 交换时，引入了一个负号。在方程 (AIII.40) 中，对于旋量场和规范场的电荷共轭算符利用相同的符号 C。往后对于鬼场的电荷共轭算符也用 $\mathbf{C}$ 来表示。可以选取 T 矩阵的显然表示式满足

$$(T^a)^T = \delta(a)T^a, \tag{AIII.41}$$

这里 $\delta(a)$ 为一个符号“+”或“−”。于是，与相当规范荷相联

系的规范场可以定义确定的电荷共轭宇称，由 (AIII.40) 及 (AIII.41)，可得

$$\mathrm{C}A^a_\mu\mathrm{C}^{-1} = -\delta(a)A^a_\mu, \tag{AIII.42}$$

如 (VI.2.92) 所给出.

注意，$SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的 T 矩阵，即 $\sigma^a/2$，$a=1,2,3$，和 $\lambda^b/2$，$b=1,\cdots,8$，如由方程 (AIII.32) 及 (AIII.35) 可以看出，要满足方程 (AIII.41). 对 $SU(2)$，

$$\delta(a) = \begin{cases} 1, & a = 1, 3, \\ -1, & a = 2. \end{cases} \tag{AIII.43}$$

而对 $SU(3)$，

$$\delta(a) = \begin{cases} 1, & a = 1, 3, 4, 6, 8, \\ -1, & a = 2, 5, 7. \end{cases} \tag{AIII.44}$$

可以类似地来论述鬼场. 拉氏函数的不变性，特别是包含鬼场的部分，在电荷共轭下表明

$$\begin{aligned} &-\partial^\mu\bar{C}^a(x)[\delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}A^c_\mu(x)]C^b(x) \\ &= -\partial^\mu(\mathrm{C}\bar{C}^a(x)\mathrm{C}^{-1})[\delta^{ab}\partial_\mu + gf^{abc}\delta(a)A^c_\mu(x)] \\ &\quad\cdot(\mathrm{C}C^b(x)\mathrm{C}^{-1}), \end{aligned} \tag{AIII.45}$$

这里拉氏函数包含鬼场的部分在方程 (II.3.35) 中给出. 取对易关系方程 (AIII.13) 的转置:

$$[T^a, T^b] = -i\delta(a)\delta(b)\delta(c)f^{abc}T^c. \tag{AIII.46}$$

上式表明，不为零的结构常数要满足条件

$$\delta(a)\delta(b)\delta(c)f^{abc} = -f^{abc}, \tag{AIII.47}$$

在这里左边的重复指标不意味着求和. 已经看到，如果对于鬼场算符作下面的选择:

$$\mathrm{C}C^a(x)\mathrm{C}^{-1} = -\delta(a)C^a(x), \tag{AIII.48a}$$

$$\mathrm{C}\bar{C}^a(x)\mathrm{C}^{-1} = -\delta(a)\bar{C}^a(x), \tag{AIII.48b}$$

上式正好就是方程 (VI.2.93a) 和 (VI.2.93b)，则该方程 (AIII.45) 被满足. 因为鬼场以二次形式出现在拉氏函数中，

故方程 (AIII.48a) 和 (AIII.48b) 右边的因子 $\delta(a)$ 可以用 $-\delta(a)$ 代换.

方程 (VI.3.42),因而方程 (VI.3.43) 及 (VI.3.44) 可以如下来证明. 由方程 (II.3.72),

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)\Gamma^a_\mu(p',p;k)\\
&=i\int d^4xd^4yd^4z\,e^{i(p'x-py-kz)}\\
&\cdot\int d^4x'd^4y'd^4z'\bar{S}_F^{-1}(x,x')\langle 0|T(\phi(x')\bar{\phi}(y')\\
&\cdot A^{b\lambda}(z'))|0\rangle\bar{S}_F(y',y)\bar{D}^{ba}_{\lambda\mu}(z',z).
\end{aligned}
\tag{AIII.49}
$$

在右边的 Green 函数可以写为

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y)A^a_\mu(z))|0\rangle\\
&=\langle 0|T(\mathbf{C}\phi(x)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\bar{\phi}(y)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}A^a_\mu(z)\mathbf{C}^{-1})|0\rangle\\
&=\delta(a)\langle 0|T(C\bar{\phi}^T(x)\phi^T(y)C^{-1}A^a_\mu(z))|0\rangle\\
&=-\delta(a)C\langle 0|(\phi(y)\bar{\phi}(x)A^a_\mu(z)|0\rangle^TC^{-1}.
\end{aligned}
\tag{AIII.50}
$$

旋量二点函数有下面的性质:

$$
\begin{aligned}
i\bar{S}_F(x,y)&\equiv\langle 0|T(\phi(x)\bar{\phi}(y))|0\rangle\\
&=\langle 0|T(\mathbf{C}\phi(x)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\bar{\phi}(y)\mathbf{C}^{-1})|0\rangle\\
&=-\langle 0|C\bar{\phi}^T(x)\phi^T(y)C^{-1})|0\rangle\\
&=C\langle 0|T(\phi(y)\bar{\phi}(x))|0\rangle C^{-1}\\
&=iC(\bar{S}_F(y,x))^TC^{-1}.
\end{aligned}
\tag{AIII.51}
$$

把方程 (AIII.50) 和 (AIII.51) 代入方程 (AIII.49),得到

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta^4(p'-p-k)\Gamma^a_\mu(p',p;k)\\
&=-i\delta(a)\int d^4xd^4yd^4z\,e^{i(p'x-py-kz)}\\
&\cdot\int d^4x'd^4y'd^4z'C\bar{S}_F^T(x',x)\langle 0|T(\phi(y')\\
&\cdot\phi(x')A^{b\lambda'}(z'))|0\rangle^T\bar{S}_F(y,y')C^{-1}\bar{D}^{ba}_{\lambda\mu}(z',z)
\end{aligned}
$$

$$= -i\delta(a)\int d^4x d^4y d^4z\, e^{i(p'x-py-kz)}$$

$$\cdot \int d^4x' d^4y' d^4z' C\{\bar{S}_F(y,y')\langle 0|T(\phi(y')$$

$$\cdot \phi(x')A^{b\lambda}(z'))|0\rangle \bar{S}_F(x',x)\}^T C^{-1}. \quad \text{(AIII.52)}$$

因此得到方程 (VI.3.42):

$$\Gamma^a_\mu(p',p;k) = -\delta(a)C\{\Gamma^a_\mu(p',p;k)\}^T C^{-1}. \quad \text{(AIII.53)}$$

方程 (VI.3.43) 和 (VI.3.44) 直接由方程 (AIII.53), (AIII.41),和 (AIII.39a) 得到.

参 考 文 献

A.III.1. D. Pursey, 未发表.

A.III.2. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York; 1965), pp. 113—118.

附录 IV　Dirac 代数和各种公式

在本附录中将给出 Dirac 矩阵及有关的量的公式. 这些公式在计算包含自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的 Feynman 振幅中是有用的. 在部分 A 中将讨论 Dirac 代数. Dirac 代数包括各种恒等式,这些恒等式在约化 γ 矩阵的乘积中是需要的,会使微分截面和 Feynman 振幅的计算简化. 它也包括含有全反对称符号 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 的有用关系. 在部分 B 中可以看到旋量波函数的显式表示式和某些适当的关系. 在一定过程中,包含费米子圈的不同 Feynman 振幅往往用电荷共轭矩阵来联系. 这将在部分 C 讨论. 它与 (V.4.51) 上面的讨论有关

A. Dirac 代数　在本节中所用 γ 矩阵的规定是按照 Bjorken 和 Drell[1] 的规定. 除非另有说明,一切公式都是对于四维的. 在 γ 矩阵的显式表示中将利用 2×2 方块符号.

$$\gamma_0=\gamma^0\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{AIV.1a}$$

$$\gamma^j=-\gamma_j\equiv\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ -\sigma_j & 0\end{pmatrix},\quad j=1,2,3, \tag{AIV.1b}$$

这里 1 为 2 维的单位矩阵,σ^j 为 Pauli 矩阵:

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{AIV.2}$$

矩阵 γ_5 定义为

$$\gamma_5=\gamma^5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{AIV.3}$$

γ^μ 和 γ^5 的对易关系和厄密性在下面给出:

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu},\quad \{\gamma_\mu,\gamma_5\}=0, \tag{AIV.4}$$

这里

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{cases}1, & \mu=\nu=0\\ -1, & \mu=\nu=1,2,3,\\ 0, & \mu\neq\nu,\end{cases}$$

及

$$(\gamma^0)^+=\gamma^0, \tag{AIV.5a}$$

$$(\gamma^j)^+=-\gamma^j,\quad j=1,2,3, \tag{AIV.5b}$$

$$\gamma_5^+=\gamma_5, \tag{AIV.5c}$$

$$(\gamma^0)^2=1, \tag{AIV.6a}$$

$$(\gamma^j)^2=-1, \tag{AIV.6b}$$

$$(\gamma_5)^2=1, \tag{AIV.6c}$$

$$[C,\gamma_\mu]=\begin{cases}\gamma_\mu, & \mu=1,3,\\ -\gamma_\mu, & \mu=2,4,\end{cases} \tag{AIV.7}$$

这里 C 为方程 (AIII.38) 和 (AIII.39) 中定义的电荷共轭矩阵。

反对称张量可以由两个 γ 矩阵组成:

$$\sigma_{\mu\nu}\equiv\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu], \tag{AIV.8}$$

这里用矩阵形式

$$\sigma^{ij}=\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}, \tag{AIV.9a}$$

$$\sigma^{0j}=i\begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ \sigma^j & 0\end{pmatrix}. \tag{AIV.9b}$$

16 个矩阵

$$1,\ i\gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_\mu\gamma_5,\ \sigma_{\mu\nu},\ \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{AIV.10}$$

组成线性无关的矩阵集合，一切 4 × 4 矩阵可以在该集合上

展开. 特别是，三个或多个 γ 矩阵的乘积可以用上面的集合来表示. 集合有下面的厄密性质:

$$\gamma^0(i\gamma_5)^+\gamma^0 = i\gamma_5, \tag{AIV.11a}$$

$$\gamma^0\gamma_\mu^+\gamma^0 = \gamma_\mu, \tag{AIV.11b}$$

$$\gamma^0(\gamma_\mu\gamma_5)^+\gamma^0 = \gamma_\mu\gamma_5, \tag{AIV.11c}$$

$$\gamma^0(\sigma_{\mu\nu})^+\gamma^0 = \sigma_{\mu\nu}, \tag{AIV.11d}$$

并且它们在电荷共轭矩阵下变换如下:

$$C_i^{-1}\gamma_5 C = i\gamma_5, \tag{AIV.12a}$$

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \tag{AIV.12b}$$

$$C^{-1}\gamma_\mu\gamma_5 C = (\gamma_\mu\gamma_5)^T, \tag{AIV.12c}$$

$$C^{-1}\sigma_{\mu\nu}C = \sigma_{\mu\nu}^T. \tag{AIV.12d}$$

下面是有用的例子，其中 γ 矩阵的乘积用方程组 (AIV.10) 来表示:

(a) $$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = g_{\mu\nu}\gamma_\lambda - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu + g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\rho\gamma_5, \tag{AIV.13a}$$

(b) $$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho = -6i\gamma_\mu\gamma_5, \tag{AIV.13b}$$

(c) $$\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\sigma^{\lambda\tau}, \tag{AIV.13c}$$

(d) $$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho = {} & g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + i\gamma_5\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \\ & - ig_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho} + ig_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\rho} - ig_{\mu\rho}\sigma_{\nu\lambda} \\ & - ig_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\rho} + ig_{\nu\rho}\sigma_{\mu\lambda} - ig_{\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{AIV.13d}$$

(e) $$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho} = {} & g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - i\gamma_5\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - ig_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\rho} \\ & + ig_{\mu\rho}\sigma_{\nu\lambda} + ig_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\rho} - ig_{\nu\rho}\sigma_{\mu\lambda}.\end{aligned} \tag{AIV.13e}$$

这里 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 为 4 维的全反对称张量，具有归一化

$$\varepsilon_{0123} = 1.$$

四个或更多的 γ 矩阵的乘积可以通过 (AIV.13a)—(AIV.13c) 来约化.

求迹关系

(i) 奇数个 γ 矩阵乘积的求迹为零:

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n+1}})=0. \qquad \text{(AIV.14a)}$$

(ii) γ_5 与三个或小于 3 个 γ 矩阵的乘积的求迹为零，

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_j})=0, j\leqslant 3. \qquad \text{(AIV.14b)}$$

(iii) γ_5 与奇数个 γ 矩阵的乘积的求迹为零，例如

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n+1}})=0. \qquad \text{(AIV.14c)}$$

(iv) $$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4g_{\mu\nu}. \qquad \text{(AIV.14d)}$$

(v) $$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=4(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}). \qquad \text{(AIV.14e)}$$

(vi) $$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=4i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}. \qquad \text{(AIV.14d)}$$

多于 4 个 γ 矩阵乘积的求迹可以由 (AIV.13) 和 (AIV.14) 得到。下面是某些例子。为了书写便利，利用下面的符号：

$$(12)\equiv g_{\mu_1\mu_2}, \qquad \text{(AIV.15a)}$$

$$\langle 1234\rangle\equiv\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4},\ \langle 12pq\rangle=\varepsilon_{\mu_1\mu_2\lambda\rho}p^\lambda q^\rho,$$

等等。 (AIV.15b)

(vii) $$\mathrm{Tr}\left(\prod_{j=1}^{6}\gamma_{\mu_j}\right)$$

$$\begin{aligned}&=4(12)\{(34)(56)+(36)(45)-(35)(46)\}\\&\quad-4(13)\{(24)(56)+(26)(45)-(25)(46)\}\\&\quad+4(14)\{(23)(56)+(26)(35)-(25)(36)\}\\&\quad-4(15)\{(23)(46)+(26)(34)-(24)(36)\}\\&\quad-4(16)\{(23)(45)+(25)(34)-(24)(35)\}.\end{aligned} \qquad \text{(AIV.16a)}$$

(viii) $$\mathrm{Tr}\left(\gamma_5\prod_{j=1}^{6}\gamma_{\mu_j}\right)$$

$$\begin{aligned}&=4i\{(12)\langle 3456\rangle-(13)\langle 2456\rangle+(23)\langle 1456\rangle\\&\quad+(45)\langle 1236\rangle-(46)\langle 1235\rangle+(56)\langle 1234\rangle\}.\end{aligned} \qquad \text{(AIV.16b)}$$

方程 (AIV.16b) 所给出的表示式是对乘积 $\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}$ 或 $\gamma_{\mu_4}\gamma_{\mu_5}$

γ_{μ_i} 应用方程 (AIV.13a) 得到的. 如果把方程 (AIV.13a) 用在三个 γ 矩阵的不同集合上，例如 $\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}$，则得到与方程 (AIV.16b) 不同的表示式. 这会推导出一定的恒等式，例如，下面列举的方程 (AIV.17d)，它把不同指标的 ε 符号联系起来.

下面列举包括一个或多个 ε 符号的有用关系.

(1) $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -(1\bar{1})\{(2\bar{2})[(3\bar{3})(4\bar{4}) - (3\bar{4})(4\bar{3})]$
$+ (2\bar{3})[(3\bar{4})(4\bar{2}) - (3\bar{2})(4\bar{4})] + (2\bar{4})[(3\bar{2})(4\bar{3})$
$- (3\bar{3})(4\bar{2})]\} + (1\bar{2})\{(2\bar{3})[(3\bar{4})(4\bar{1})$
$- (3\bar{1})(4\bar{4})] + (2\bar{4})[(3\bar{1})(4\bar{3})$
$- (3\bar{3})(4\bar{1})] + (2\bar{1})[(3\bar{3})(4\bar{4}) - (3\bar{4})(4\bar{3})]\}$
$- (1\bar{3})\{(2\bar{4})[(3\bar{1})(4\bar{2}) - (3\bar{2})(4\bar{1})]$
$+ (2\bar{1})[(3\bar{2})(4\bar{4}) - (3\bar{4})(4\bar{2})] + (2\bar{2})[(3\bar{4})(4\bar{1})$
$- (3\bar{1})(4\bar{4})]\} + (1\bar{4})\{(2\bar{1})[(3\bar{2})(4\bar{3}) - (3\bar{3})(4\bar{2})]$
$+ (2\bar{2})[(3\bar{3})(4\bar{1}) - (3\bar{1})(4\bar{3})] + (2\bar{3})[(3\bar{1})(4\bar{2})$
$- (3\bar{2})(4\bar{1})]\}.$ (AIV.17a)

(2) $g^{\mu_1\nu_1}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -(2\bar{2})[(3\bar{3})(4\bar{4}) - (3\bar{4})(4\bar{3})]$
$- (2\bar{3})[(3\bar{4})(4\bar{2}) - (3\bar{2})(4\bar{4})]$
$- (2\bar{4})[(3\bar{2})(4\bar{3}) - (3\bar{3})(4\bar{2})].$ (AIV.17b)

(3) $g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\rho'}$
$= -2(g_{\lambda\lambda'}g_{\rho\rho'} - g_{\lambda\rho'}g_{\rho\lambda'}).$ (AIV.17c)

(4) $(12)\langle 3456\rangle + (13)\langle 4562\rangle + (14)\langle 5623\rangle$
$+ (15)\langle 6234\rangle + (16)\langle 2345\rangle = 0.$ (AIV.17d)

它可以由 (AIV.16b) 下面提到的，例如 (AIV.16b) 所提出的表示式的不同形式得到.

(5) $\langle p_1p_2p_3p_4\rangle \equiv \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_1^\mu p_2^\nu p_3^\lambda p_4^\rho$
$= p_1^0\boldsymbol{p}_2\cdot(\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_4) - p_2^0\boldsymbol{p}_3\cdot(\boldsymbol{p}_4\times\boldsymbol{p}_1)$

$$+ p_3^0 \boldsymbol{p}_4 \cdot (\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2) - p_4^0 \boldsymbol{p}_1 \cdot (\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{p}_3),$$

(AIV.17e)

它可以由方程 (AIV.17d) 乘以 $p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} p_4^{\mu_4} q^{\mu_5} q^{\mu_6}$ 得到，而

$$a^\circ = 1, \quad \boldsymbol{a} = 0.$$

在计算中常用的，在方程 (IV.3.4a) 中所给出的关系在一般 n 维空间内再在下面列举出来：

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 - 2\varepsilon, \tag{AIV.18a}$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2(1-\varepsilon)\not{p}, \tag{AIV.18b}$$

$$\gamma^\mu \not{p} \not{q} \gamma_\mu = 4p \cdot q - 2\varepsilon \not{p} \not{q}, \tag{AIV.18c}$$

$$\gamma^\mu \not{p} \not{q} \not{k} \gamma_\mu = -2\not{k} \not{q} \not{p} + 2\varepsilon \not{p} \not{q} \not{k}. \tag{AIV.18d}$$

包含 γ 矩阵的关联直乘积的关系 这些关系可以用来使 Feymman 振幅，微分截面的计算，及问题中包含具有矢量指标和轴矢量指标的二旋量线的自旋求和的计算简化. 关于细节，参阅文献 [2]. 令

$$\Gamma_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5). \tag{AIV.19}$$

考虑一个矩阵 Q. 当 Q 出现在一定过程的振幅时，Q 夹在一个行矢量和一个列矢量之间. 为了说明这个事实，将 Q 写为 $[Q]_j$. $[Q]_j$ 的矩阵元将表示为

$$Q_{a_j b_j}.$$

下面的恒等式成立.

(a) $[\gamma^\mu \gamma_\lambda \gamma^\nu]_1 [\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu]_2$

$$= 2g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau]_1[\gamma_\tau]_2 + 2[\gamma_\rho]_1[\gamma_\lambda]_2 + 2g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau\gamma_5]_1[\gamma_\tau\gamma_5]_2 - 2[\gamma_\rho\gamma_5]_1[\gamma_\lambda\gamma_5]_2.$$

(AIV.20a)

这个恒等式，例如，详细的形式，意义如下：

$$\bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu u(p_2) = 2g_{\lambda\rho}\bar{u}(p_3)\gamma^\tau u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\tau u(p_2)$$

$$+ 2\bar{u}(p_3)\gamma_\rho u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\lambda u(p_2)$$
$$+ 2g_{\lambda\rho}\bar{u}(p_3)\gamma^\tau\gamma_5 u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\tau\gamma_5 u(p_2)$$
$$- 2\bar{u}(p_3)\gamma_\rho\gamma_5 u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\lambda\gamma_5 u(p_2).$$

这里旋量波函数（u 旋量）可以用反旋量波函数（v 旋量）代替。下面的恒等式(方程 (AIV.20b)—(AIV.20k)) 是类似地定义的。在本附录的部分 B 中给出 u 旋量和 v 旋量的显然表示式。

(b) $$[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu]_1[\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu]_2$$
$$= 2g_{\lambda\rho}[\gamma_\tau]_1[\gamma^\tau]_2 + 2[\gamma_\rho]_1[\gamma_\lambda]_2$$
$$- 2g_{\lambda\rho}[\gamma_\tau\gamma_5]_1[\gamma^\tau\gamma_5]_2 + 2[\gamma_\rho\gamma_5]_1[\gamma_\lambda\gamma_5]_2. \quad \text{(AIV.20b)}$$

(c) $$\left[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu\left(\frac{1+a_1\gamma_5}{2}\right)\right]_1\left[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\nu\left(\frac{1+a_2\gamma_5}{2}\right)\right]_2$$
$$= (1+a_1)(1+a_2)g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau\Gamma_+]_1[\gamma^\tau\Gamma_+]_2$$
$$+ (1-a_1)(1-a_2)g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau\Gamma_-]_1[\gamma_\tau\Gamma_-]_2$$
$$+ (1+a_1)(1-a_2)[\gamma_\rho\Gamma_+]_1[\gamma_\lambda\Gamma_-]_2$$
$$+ (1-a_1)(1+a_2)[\gamma_\rho\Gamma_-]_1[\gamma_\lambda\Gamma_+]_2, \quad \text{(AIV.20c)}$$

这里

$$a_1, a_2 = \pm 1.$$

(d) $$\left[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu\left(\frac{1+a_1\gamma_5}{2}\right)\right]_1\left[\gamma^\nu\gamma_\lambda\gamma^\mu\left(\frac{1+a_2\gamma_5}{2}\right)\right]_2$$
$$= (1+a_1)(1+a_2)[\gamma_\rho\Gamma_+]_1[\gamma_\lambda\Gamma_+]_2$$
$$+ (1-a_1)(1-a_2)[\gamma_\rho\Gamma_-]_1[\gamma_\lambda\Gamma_-]_2$$
$$+ (1+a_1)(1-a_2)g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau\Gamma_+]_1[\gamma_\tau\Gamma_-]_2$$
$$+ (1-a_1)(1+a_2)g_{\lambda\rho}[\gamma^\tau\Gamma_-]_1[\gamma_\tau\Gamma_+]_2. \quad \text{(AIV.20d)}$$

(e) $$[\gamma^\mu\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\nu\Gamma_\pm]_2 = 4[\Gamma_\pm]_1[\Gamma_\pm]_2, \quad \text{(AIV.20e)}$$

这里在两个 Γ 中，上标联在一起，并且下标联在一起。

(f) $$[\gamma^\mu\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\nu\Gamma_\mp]_2 = 4[\Gamma_\pm]_1[\Gamma_\mp]_2. \quad \text{(AIV.20f)}$$

(g) $[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\Gamma_\pm]_2$

$$= 4[\gamma^\alpha\Gamma_\pm]_1[\gamma_\alpha\Gamma_\pm]_2(g_{\lambda\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\lambda\sigma}g_{\rho\tau} + g_{\lambda\tau}g_{\rho\sigma} \pm i\varepsilon_{\lambda\rho\rho\tau}). \tag{AIV.20g}$$

(h) $[\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\tau\gamma_\nu\Gamma_\pm]_2$

$$= -8g_{\rho\tau}[\gamma^\alpha\Gamma_\pm]_1[\gamma_\alpha\Gamma_\pm]_2. \tag{AIV.20h}$$

(i) $[\gamma^\mu\gamma_\lambda\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\Gamma_\mp]_2$

$$= 4[(g_{\rho\sigma}\gamma_\tau - g_{\rho\tau}\gamma_\sigma + g_{\sigma\tau}\gamma_\rho \mp i\varepsilon_{\rho\sigma\tau\alpha}\gamma^\alpha)\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\Gamma_\mp]_2. \tag{AIV.20i}$$

(j) $[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\rho\gamma_\tau\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\nu\Gamma_\pm]_2$

$$= 16g_{\tau\beta}g_{\lambda\rho}[\gamma^\delta\Gamma_\pm]_1[\gamma_\delta\Gamma_\pm]_2. \tag{AIV.20j}$$

(k) $[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\rho\gamma_\tau\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\nu\Gamma_\mp]_2$

$$= 4[\gamma_\alpha\gamma_\tau\gamma^\nu\Gamma_\pm]_1[\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\nu\Gamma_\mp]_2$$

$$= 4[\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma_\beta\Gamma_\pm]_1[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\tau\Gamma_\mp]_2. \tag{AIV.20k}$$

为了看出这些关系的用处，下面是方程 (AIV.20c) 应用的示例：

$$\bar{u}(p_3)\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma^\nu\Gamma_+u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\nu\Gamma_+u(p_2) = 4g_{\lambda\rho}\bar{u}(p_3)\Gamma_+u(p_1)\bar{u}(p_4)\Gamma_+u(p_2). \tag{AIV.21}$$

左边振幅原来的表示式大为简化。

B. 旋量波函数 旋量和反旋量波函数用 $u(\boldsymbol{p},s)$ 和 $v(\boldsymbol{p},s)$ 来表示，它们分别称为 u 旋量和 v 旋量，是 1×4 行矩阵。共轭旋量的波函数用 $\bar{u}(\boldsymbol{p},s)$ 和 $\bar{v}(\boldsymbol{p},s)$ 来表示，它们是 4×1 行矩阵。矢量 $\boldsymbol{p}$ 为粒子的三动量，具有质壳上的条件 $p_0^2 = \boldsymbol{p}^2 + m_0^2$ 量 s 代表自旋极化，它取两个值：$s = 1, 2$ 或 $+1, -1$。如果考虑沿一定方向的自旋投影，则 s 利用后面的值 ($s = \pm1$)。u 旋量和 v 旋量满足 Dirac 方程：

$$(\not{p} - m)u(\boldsymbol{p},s) = 0,\quad \bar{u}(\boldsymbol{p},s)(\not{p} - m) = 0, \tag{AIV.22a}$$

$$(\not{p}-m)v(\boldsymbol{p},s)=0,\quad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)(\not{p}-m)=0. \tag{AIV.22b}$$

取归一化条件为

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s')=2m\delta_{ss'}, \tag{AIV.23a}$$

$$\bar{v}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s')=2m\delta_{ss'}, \tag{AIV.23b}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}',s)v(\boldsymbol{p},s')=\bar{v}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s')=0. \tag{AIV.23c}$$

给出旋量的显然表示式如下:

$$u(\boldsymbol{p},s)=\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}(\not{p}+m)\begin{pmatrix}\chi(s)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix}1\\\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{p_0+m}\end{pmatrix}\chi(s) \tag{AIV.24a}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)=u^+(\boldsymbol{p},s)\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{p_0+m}}(\chi^+(s),0)(\not{p}+m)$$

$$=\sqrt{p^0+m}\,\chi^+(s)\left(1,-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{p^0+m}\right), \tag{AIV.24b}$$

$$v(\boldsymbol{p},s)=\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}(-\not{p}+m)\begin{pmatrix}0\\\eta(s)\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{p^0+m}\\1\end{pmatrix}\eta(s), \tag{AIV.25a}$$

$$\bar{v}(\boldsymbol{p},s)=v^+(\boldsymbol{p},s)\gamma^0=\frac{1}{\sqrt{p^0+m}}(0,-\eta^+(s))(-\not{p}+m)$$

$$=\sqrt{p^0+m}\,\eta^+(s)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{p^0+m},-1\right), \tag{AIV.25b}$$

$$\not{p}\equiv\gamma_\mu p^\mu,$$

这里 $\chi(s)$ 和 $\eta(s)$ 为 1×2 列矩阵. 往后将表明，电荷共轭不变性把这两个矩阵联系起来:

$$\eta(s)=-i\sigma^2\chi^*(s). \tag{AIV.26}$$

如果选取 $\chi(s)$ 为 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}$ 的一个本征旋量，这里 $\boldsymbol{a}$ 为一个单位

矢量，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\chi(s)=\pm\frac{1}{2}\chi(s). \qquad \text{(AIV.27a)}$$

于是由方程 (AIV.26)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\eta(s)&=-i\sigma^2\left[\sigma^2\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}{2}\sigma^2\chi^*(s)\right]\\&=-i\sigma^2\left[\sigma^2\frac{\boldsymbol{\sigma}^*\hat{\boldsymbol{a}}}{2}\sigma^2\chi(s)\right]^*\\&=i\sigma^2\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}{2}\chi(s)\right]^*=\pm i\sigma^2\chi^*(s)\\&=\mp\frac{1}{2}\eta(s). \qquad \text{(AIV.27b)}\end{aligned}$$

能量投影算符 能量投影算符为

$$\sum_{s=1}^{2}u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s)=\not{p}+m, \qquad \text{(AIV.28a)}$$

$$\sum_{s=1}^{2}v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s)=\not{p}-m. \qquad \text{(AIV.28b)}$$

注意，选取旋量波函数的归一化，使它们在上面的有关表示式中令 $m=0$ 可以直接应用于中微子.

螺旋性投影算符 构成二旋量 $\chi(\pm)$，它们为螺旋性态

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\chi(\pm)=\pm\chi(\pm), \qquad \text{(AIV.29)}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 为沿 $\boldsymbol{p}$ 方向的单位矢量，给出 $\chi(\pm)$ 的投影表示式如下：

$$\chi(+)\equiv\begin{pmatrix}e^{-i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2}\\[2ex] e^{i\varphi/2}\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

$$\chi(-) \equiv \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \text{(AIV.30)}$$

这里 θ 和 φ 为 $\boldsymbol{p}$ 的极角和方位角. 容易证明

$$\chi(+)\chi^{+}(+) = \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}), \qquad \text{(AIV.31a)}$$

$$\chi(-)\chi^{-}(-) = \frac{1}{2}(1-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}). \qquad \text{(AIV.31b)}$$

令 $\tilde{s}$ 为与粒子相联系的类空单位矢量. 在粒子有三动量 $\boldsymbol{p}$ 的参照系中,$\tilde{s}$ 取下面的形式

$$\tilde{s} = \frac{1}{m}(\bar{p}, p^0\hat{p}), \quad |\boldsymbol{p}| = \bar{p}, \qquad \text{(AIV.32)}$$

$$\tilde{s}^2 = -1,$$

及

$$\tilde{s}\cdot p = 0.$$

在粒子静止参照系中,$\tilde{s}$ 变为

$$\tilde{s} \longrightarrow \tilde{s}^{(0)} = (0,\hat{p}).$$

螺旋性投影算符用 $\tilde{s}$ 来定义:

$$\Sigma_{\pm}(\tilde{s}) = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5\tilde{s}). \qquad \text{(AIV.33)}$$

令 $u(\boldsymbol{p},\pm)$ 为 $\chi(s)$ 用 $\chi(\boldsymbol{p},\pm)$ 代换的 u 旋量,于是

$$\Sigma_{\pm}(\tilde{s})u(\boldsymbol{p},\pm) = u(\boldsymbol{p},\pm), \qquad \text{(AIV.34a)}$$

$$\Sigma_{\pm}(\tilde{s})u(\boldsymbol{p},\mp) = 0. \qquad \text{(AIV.34b)}$$

由方程 (AIV.26) 和 (AIV.30),得到下式:

$$\eta(\pm) = \pm\chi(\mp). \qquad \text{(AIV.35)}$$

类似地可以构成 $v(\boldsymbol{p},\pm)$:

$$\Sigma_{\pm}(\tilde{s})v(\boldsymbol{p},\pm) = v(\boldsymbol{p},\pm) \qquad \text{(AIV.36a)}$$

$$\Sigma_{\pm}(\tilde{s})v(\boldsymbol{p},\mp) = 0. \qquad \text{(AIV.36b)}$$

对于任意的 u 和 v 旋量，$\Sigma_{\pm}(\tilde{s})$ 投影出相当的螺旋性分量. 由方程(AIV.28)，(AIV.34) 和 (AIV.36)，可以得到下面的关系：

$$u(\boldsymbol{p},\pm)\bar{u}(\boldsymbol{p},\pm)=(\not{p}+m)\Sigma_{\pm}(\tilde{s}), \quad \text{(AIV.37a)}$$

$$v(\boldsymbol{p},\pm)\bar{v}(\boldsymbol{p},\pm)=(\not{p}-m)\Sigma_{\pm}(\tilde{s}), \quad \text{(AIV.37b)}$$

这里并不意味着对自旋投影的求和.

旋量波函数的电荷共轭性质 u 旋量和 v 旋量通过电荷共轭矩阵相联系. 它们的关系如下[1].

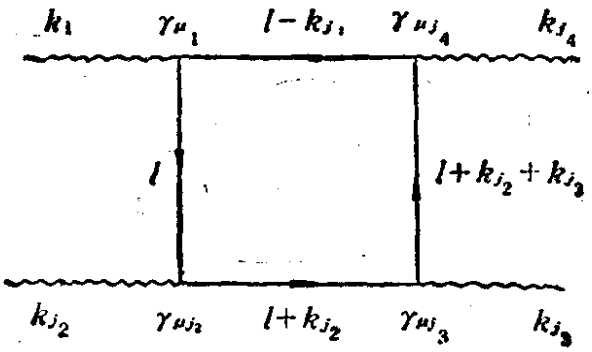
$$C\bar{u}^T(\boldsymbol{p},s)=v(\boldsymbol{p},s),\ C\bar{v}^T(\boldsymbol{p},s)=u(\boldsymbol{p},s), \quad \text{(AIV.38a)}$$

$$u^T(\boldsymbol{p},s)C=\bar{v}(\boldsymbol{p},s),\ v^T(\boldsymbol{p},s)C=\bar{u}(\boldsymbol{p},s), \quad \text{(AIV.38b)}$$

这里 C 为 (AIII.37)——(AIII.39) 中所给出的电荷共轭矩阵.

C. 电荷共轭对 Feynman 振幅的约束 可以利用电荷共轭运算把一个给定过程的不同图形联系起来. 利用弹性光子光子散射作为例子，在下面阐述.

最低阶弹性光子光子散射振幅包含 6 个方块图形：其中之一如图 V.4a 所示. 例如，由该图形保持 k_1 固定，以一切可能容许的位置来重排 k_2，k_3 和 k_4，就可以得到其余的 5 个图形. 由 6 个图形可以得到三个独立的振幅，因为这 6 个图形是成对地等同的. 由直接应用下图所示的电荷共轭矩阵就可以证明这个结果. 令 $T(k_1,k_{j_2},k_{j_3},k_{j_4})$ 为图 AIV.1 所给出



$(k_1+k_2+k_3+k_4=0)$

图 AIV.1

的图形的振幅，这里 j_2, j_3 和 j_4 为 2, 3 和 4——这个顺序并不是必要的. 在现在的符号中，图 V.4a 的振幅表示为 $T(k_1, k_2, k_3, k_4)$. 在这两个图形中，内费米子圈的动量流取为逆时钟的. 现在

$$\tilde{T}(k_1, k_{j_2}, k_{j_3}, k_{j_4}) = -\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \cdot \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_1 \frac{i}{l - \not{k}_1 - m} \Gamma_{j_4} \frac{i}{l + \not{k}_{j_2} + \not{k}_{j_3} - m} \cdot \Gamma_{j_3} \frac{i}{l + \not{k}_{j_2} - m} \Gamma_{j_2} \frac{i}{l - m}\right\}, \tag{AIV.39}$$

这里费米子质量带有一个小的负虚部，即 m 应该读为 $m - i\varepsilon$. 为使论证更普遍些，在下面的论证中，矢量顶角用更一般的耦合 Γ_j 来代替，Γ_j 代表标量 (1)，膺标量 $(i\gamma_5)$，矢量 (γ_μ)，轴矢量 $(\gamma_\mu\gamma_5)$ 或张量 $(\sigma_{\mu\nu})$ 耦合，在电荷共轭下，Γ_j 取形式

$$C\Gamma_j C^{-1} = \delta(j)\Gamma_j,$$

这里 $\delta(j)$ 为一个符号，称为顶角的电荷共轭宇称，并且(参看 (AIV.12))

$$\delta(j) = \begin{cases} +, & \text{对于 } 1, i\gamma_5, \gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, \\ -, & \text{对于 } \gamma_\mu. \end{cases} \tag{AIV.40}$$

方程 (AIV.39) 可以重写为

$$T(k_1, k_{j_2}, k_{j_3}, k_{j_4}) = -\mathrm{Tr}\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr} \cdot \left\{(C\Gamma_1 C^{-1}) C \frac{l - \not{k}_1 + m}{(l - k_1)^2 - m^2} C^{-1}(C\Gamma_{j_4}C^{-1}) \cdot C \frac{l + \not{k}_{j_2} + \not{k}_{j_3} + m}{(l + k_{j_2} + k_{j_3})^2 - m^2} C^{-1}(C\Gamma_{j_3}C^{-1})C \cdot \frac{l + \not{k}_{j_2} + m}{(l + k_{j_2})^2 - m^2} C^{-1} \cdot (C\Gamma_{j_2}C^{-1}) C \frac{l + m}{l^2 - m^2} C^{-1}\right\}$$

$$= -\prod_{r=1}^{4} \delta(r) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_1^T \frac{-(l - \not{k}_1)^T + m}{(l - k_1)^2 - m^2}\right.$$

$$\cdot \Gamma_{i_4}^T \frac{-(l+k_{j_2}+k_{j_3})^T+m}{(l+k_{j_2}+k_{j_3})^2-m^2}$$

$$\cdot \Gamma_{i_3}^T \frac{-(l+k_{j_2})^T+m}{(l+k_{j_2})^2-m^2} \Gamma_{i_2}^T \frac{-l^T+m}{l^2-m^2}\Big\}$$

$$= -\prod_{r=1}^{4}\delta(r)\int \frac{d^n l}{2\pi)^n} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_1 \frac{-l+m}{l^2-m^2}\right.$$

$$\cdot \Gamma_{i_2} \frac{-(l+k_{j_2})+m}{(l+k_{j_2})^2-m^2} \Gamma_{i_3} \frac{-(l+k_{j_2}+k_{j_3})+m}{(l+k_{j_2}+k_{j_3})^2-m^2}$$

$$\left.\cdot \Gamma_{i_4} \frac{-(l-k_1)+m}{(l-k_1)^2-m^2}\right\}. \qquad \text{(AIV.41)}$$

假定上面的积分被正规化，因而容许积分变数的改变为

$$l \to -(l-k_1).$$

于是

$$T(k_1, k_{j2}, k_{j3}, k_{j4}) = -\prod_{r=1}^{4}\delta(r)\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr}$$

$$\cdot \left\{\Gamma_1 \frac{1}{l-k_1-m} \Gamma_{i_2} \frac{1}{l+k_{j3}+k_{j4}-m} \Gamma_{j3}\right.$$

$$\left.\cdot \frac{1}{l+k_{j4}-m} \Gamma_{i_4} \frac{1}{l-m}\right\},$$

上式就是

$$T(k_1, k_{j2}, k_{j3}, k_{j4})) = \delta(1)\delta(2)\delta(3)\delta(4)T(k_1, k_{j4}, k_{j3}, k_{j2}). \qquad \text{(AIV.42)}$$

注意，振幅 $T(k_1, k_{j4}, k_{j3}, k_{j2})$ 可以由图 AIV.1 使费米子圈沿顺时针流动而写出. 由方程 (AIV.42) 得到两个结果:

(a) 在现在的矢量耦合情形中，一切 $\delta(j)$ 都是负的，但只有四个，因此

$$T(k_1, k_2, k_3, k_4) = T(k_1, k_4, k_3, k_2),$$

$$T(k_1, k_2, k_4, k_3) = T(k_1, k_3, k_4, k_2),$$

$$T(k_1, k_3, k_2, k_4) = T(k_1, k_4, k_2, k_3),$$

是所指望的结果.

(b) Furry 定理.

如果通过一条费米子圈有奇数个光子耦合，则所包含的图形成对地相互抵消，并且振幅恒为零.

应该注意，虽然方程 (AIV.42) 是对最低阶证明的，如果在方程 (AIV.42) 的两边以类似的方式包括任意阶的辐射修正，则它也是适合的.

D. Fierz 重排定理 在下面将讨论一组有用的恒等式，这些恒等允许把四费米子乘积重新安排. 这些恒等式一般称为 Fierz 变换[3]；这些变换在计算低能弱相互作用过程中，及在讨论超对称的变换中是用的[4].

考虑包含四费米子场的下面的标量:

$$\bar{\psi}_1\Gamma_a\psi_2\bar{\psi}_3\Gamma^a\psi_4,$$

$$\Gamma_a = 1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}. \qquad \text{(AIV.43)}$$

注意，由方程 (AIV.13c) 及 (AIV.17c)，下面的恒等式成立:

$$\bar{\psi}_1(i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5)\psi_2\bar{\psi}_3(i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5)\psi_4 = -\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_4.$$

因此出现在左手边的量不是独立的.

除方程组 (AIV.43) 以外，有下面的膺标量乘积:

$$\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_4, \quad \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4, \quad \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\gamma_5\psi,$$

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_4, \quad \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3 i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi_4. \qquad \text{(AIV.44)}$$

当考虑到方程 (AIV.13c) 时，下面的膺标量不是独立的:

$$\bar{\psi}_1 i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_4 = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\eta\tau}\bar{\psi}_1\sigma^{\eta\tau}\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_4$$

$$= \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3 i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi_4.$$

出现在方程 (AIV.45) 和 (AIV.46) 中的项将分别称为标量，矢量，等形式. Fierz 重排定理表明，方程组 (AIV.43) 的一项，交换 ψ_2 和 ψ_4，可以表示为原各项的线性组合. 这对于方

程组 (AIV.44) 也是真的. 在下面，将叙述该定理，接着是证明的简短说明. 然后将讨论重排定理的某些结果.

对于方程组 (AIV.43)，定义下面的量:

$$S \equiv \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4, \quad S' \equiv \bar{\psi}_1\psi_4\bar{\psi}_3\psi_2,$$

$$V \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_4, \quad V' \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_4\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2,$$

$$T \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_4, \quad T' \equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_4\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_2,$$

$$A \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\gamma_5\psi_4, \quad A' \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_4\bar{\psi}_3\gamma^\mu\gamma_5\psi_2,$$

$$P \equiv \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_4, \quad P' \equiv \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_4\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_2. \quad \text{(AIV.45)}$$

对于方程组 (AIV.44)，定义

$$S_p \equiv \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_4,$$

$$V_a \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\gamma_5\psi_4,$$

$$T_a \equiv \frac{i}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi_4,$$

$$A_V \equiv \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_4,$$

$$P_s \equiv \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4. \quad \text{(AIV.46)}$$

并且类似地可定义 S'_p, P'_s, V'_a, A'_V 及 T'_a，交换 ψ_2 和 ψ_4. Fierz 重排定理表明，下面的恒等式成立:

$$\begin{pmatrix} S \\ V \\ T \\ A \\ P \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} S' \\ V' \\ T' \\ A' \\ P' \end{pmatrix}, \quad \text{(AIV.47)}$$

及

$$\begin{pmatrix} S_p \\ V_a \\ T_a \\ A_V \\ P_S \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} S'_p \\ V'_a \\ T'_a \\ A'_V \\ P'_s \end{pmatrix}, \quad \text{(AIV.48)}$$

这里

$$M = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(AIV.49)}$$

及

$$\tilde{M} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & i & 1 \\ 4i & -2 & 0 & -2 & -4i \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4i & -2 & 0 & -2 & 4i \\ 1 & i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{(AIV.50)}$$

上面矩阵的逆矩阵等于矩阵本身:

$$M^{-1} = M \text{ 及 } \tilde{M}^{-1} = \tilde{M}. \quad \text{(AIV.51)}$$

这可以由这些矩阵的平方为单位矩阵

$$M^2 = \tilde{M}^2 = I$$

的事实来证明.

方程 (AIV.47) 和 (AIV.48) 关系的证明是冗长的. 例如,可以从写出

$$I_{\alpha\beta}I_{\lambda\rho} = aI_{\alpha\rho}I_{\lambda\beta} + b(i\gamma_5)_{\alpha\rho}(i\gamma_5)_{\lambda\beta} + c(\gamma_\mu)_{\alpha\rho}(\gamma^\mu)_{\lambda\beta} + d(i\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\rho}(i\gamma^\mu\gamma_5)_{\lambda\beta} + e(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\rho}(\sigma^{\mu\nu})_{\lambda\beta} \quad \text{(AIV.52)}$$

出发, 这里 I 为 4×4 单位矩阵. 可以对于 $(i\gamma_5)_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho}$, $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu)_{\lambda\rho}$, $(\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma_5)_{\lambda\rho}$, 及 $(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\lambda\rho}$ 写出类似的组合. 在方程 (AIV.52) 中系数 a 可以由令 $\lambda = \beta$ 得到,并且对 Dirac 旋量指标 $\lambda = 1, 2, 3, 4$ 求和. 得到

$$a = \frac{1}{4}.$$

$I_{\alpha\beta}I_{\lambda\rho}$, $(i\gamma_5)_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho}$, 等等的展开式系数按下面的程序彼此

互相联系. 例如，对于 $(i\gamma_5)_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho}$ 的展开式可以由方程 (AIV.52) 通过后者两端乘以 $(i\gamma_5)_{\beta\beta'}$ 及 $(i\gamma_5)_{\rho\rho'}$，并且对 ρ，$\beta=1,2,3,4$ 求和而得到. 结果为

$$\begin{aligned}(i\gamma_5)_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho} = {} & bI_{\alpha\rho}I_{\lambda\beta} + a(i\gamma_5)_{\alpha\rho}(i\gamma_5)_{\lambda\beta} \\ & - d(\gamma_\mu)_{\alpha\rho}(\gamma^\mu)_{\lambda\beta} - c(\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha\rho}(\gamma^\mu\gamma_5)_{\lambda\beta} \\ & - e(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\rho}(\sigma^{\mu\nu})_{\lambda\beta} \qquad \text{(AIV.53)}\end{aligned}$$

为把不同的展开式系数联系起来，在方程 (AIV.13a)—(AIV.13e) 中所列举的恒等式是有用的. 类似的方法可应用于方程组 (AIV.46). 而且，方程组 (AIV.46) 与方程组 (AIV.45) 可以通过用 γ_5 的方程组 (AIV.45) 的收缩而联系起来.

把一组 $I_{\alpha\beta}I_{\lambda\rho}$ 等等与 $I_{\alpha\rho}I_{\lambda\beta}$ 等等联系起来的变换矩阵为 $-M$，而把 $I_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho}$ 等等与 $I_{\alpha\beta}(i\gamma_5)_{\lambda\rho}$ 等等联系起来的变换矩阵为 $-\widetilde{M}$. M 和 $\widetilde{M}$ 前面的负号来源于：二费米子场交换是由负号来完成的.

在下面将给出 Fierz 重排定理的某些应用.

(1) 矢量和轴矢量形式的求和在 Fierz 重排下是“不变量”：

$$V + A = V' + A' \qquad \text{(AIV.54)}$$

及

$$V_a + A_V = V'_a + A'_V, \qquad \text{(AIV.55)}$$

这些可以由方程 (AIV.47) 及 (AIV.48) 得到. 由方程 (AIV.54) 及 (AIV.55) 可以推导出 V — A 及 $V + A$ 相互作用的“不变性”：

$$\begin{aligned}&\phi_1\gamma_\mu(1+a\gamma_5)\phi_2\phi_3\gamma^\mu(1+a\gamma_5)\phi_4 \\ &\quad = \phi_1\gamma_\mu(1+a\gamma_5)\phi_4\phi_3\gamma^\mu(1+a\gamma_5)\phi_2, \qquad \text{(AIV.56)}\end{aligned}$$

这里

$$a = \pm 1.$$

(2) 标量，膺标量及张量形式的适当组合是“不变量”

$$S - P - T = S' - P' - T',$$

它为

$$\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4 - \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_4 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_4$$

$$= \psi_1\bar{\psi}_4\psi_3\bar{\psi}_4 - \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_4\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_4\bar{\psi}_3\sigma^{\mu\nu}\psi_2,$$

(AIV.57)

并且

$$S_p + P_s - T_a = S'_p + P'_s - T'_a,$$

它为

$$\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3 i\gamma_5\psi_4 + \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2\bar{\psi}_3 i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_4$$

$$= \psi\bar{\psi}_4\psi_3 i\gamma_5\psi_2 + \bar{\psi}_1 i\gamma_5\psi_4\bar{\psi}_3\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1\sigma_{\mu\nu}\psi_4\bar{\psi}_3 i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_2.$$

(AIV.58)

参 考 文 献

A.IV.1. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York; 1965).

A.IV.2. A. Sirlin, *Nucl. Physc*, **B192**, 93(1981).

A.IV.3. F. Fierz, *Z. Phys.* **104**, 533(1937).

A.IV.4. 关于超对称一般论述参看下面的评述性文章:

A. Salam and J. Strathdee, *Fort. der Phys.* **26**, 57(1978); P. Fayet and S. Ferrara, Phys. *Rept.*, **320**, 249(1977).

附录 V　截面公式和偏振矢量

A. 截面公式　首先，定义态的归一化．一粒子态定义为

$$|\boldsymbol{p}, \alpha\rangle,$$

这里 $\boldsymbol{p}$ 为粒子的三动量，α 为表征粒子的一组量子数．一粒子态的归一化定义为

$$\langle \boldsymbol{p}', \alpha' | \boldsymbol{p}, \alpha\rangle \Delta^{(+)}(p) = (2\pi)^4 \delta^4(p - p'), \tag{AV.1a}$$

这里 $\delta_{\alpha\alpha'}$ 表明两组量子数 α 和 α' 必须是等同的，m 为粒子的质量，并且

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(p) &= 2\pi\delta_+(p^2 - m^2) \\ &= 2\pi \frac{1}{2p^0} \delta(p_0 - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}).\end{aligned} \tag{AV.1b}$$

对于一粒子态，在入射态和出射态之间没有区别．对于二粒子态或多粒子态，它们可以类似于一粒子态来定义．入射态和出射态属于不同的，但是等价的 Hilbert 空间．入射态和出射态是自由粒子态．二粒子态的归一化如下：

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{p}_1', \alpha_1'; \boldsymbol{p}_2', \alpha'(\eta) | \boldsymbol{p}_1, \alpha_1; \boldsymbol{p}_2, \alpha_2(\eta)\rangle \Delta^{(+)}(p_1)\Delta^{(+)}(p_2) \\ &\quad = (2\pi)^8 \{\delta_{\alpha_1\alpha_1'}\delta_{\alpha_2\alpha_2'}\delta^4(p_1 - p_1')\delta^4(p_2 - p_2') \\ &\qquad + \delta_{\alpha_1\alpha_2'}\delta_{\alpha_2\alpha_1'}\delta^4(p_1 - p_2')\delta^4(p_2 - p_1')\},\end{aligned} \tag{AV.2}$$

这里 η 为“入”(in) 或“出” (out)．如果粒子是全同的，则右边的两项相等．反映在这里采用了多粒子态的归一化．往后在截面公式中(参看 (AV.7)，等等)将分出全同粒子因子．包含三个或多个粒子的态的归一化可以类似地定义．闭合性质定义为

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\alpha}\int |\boldsymbol{p},\alpha\rangle \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\Delta^{(+)}(p)\langle \boldsymbol{p},\alpha|$$
$$+ \sum_{\alpha,\beta}\int |\boldsymbol{p},\alpha;\boldsymbol{q},\beta(\eta)\rangle \frac{d^3p}{(2\pi)^4}\Delta^{(+)}(p)$$
$$\cdot \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Delta^{+}(q)\langle \boldsymbol{p},\alpha;\boldsymbol{q},\beta(\eta)| + \cdots. \qquad \text{(AV.3)}$$

考虑一个反应

$$i(P_i) \to f(P_f), \qquad \text{(AV.4)}$$

这里初态“i”及末态“f”二者都包含任意数目的粒子. 两个态各个粒子的动量之和分别用 P_i 和 P_f 来表示. 定义该反应的 S 矩阵元为

$$S_{fi} \equiv \langle f, \text{out}|i, \text{in}\rangle = \delta_{fi} + (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)T_{fi}. \qquad \text{(AV.5)}$$

项 δ_{fi} 表示没有相互作用部分，其中初态和末态是相同的，并且 T_{fi} 为相应的 T 矩阵元，它包含散射过程的非平凡部分.

一个特别有关的例子是二体态变为 n 粒态的反应:

$$a + b \to c_1 + c_2 + \cdots + c_n. \qquad \text{(AV.6)}$$

令粒子在初态中的动量为 P_a 及 P_b，它们的自旋极化为 $\bar{s}_a$ 及 $\bar{s}_b$. 粒子在末态中的动量用 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 来表示，它们的自旋极化为 $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots, \bar{s}_n$. 写出T矩阵元为

$$T_{fi} \equiv T_{fi}(p_a, \bar{s}_a; p_b, \bar{s}_b: q_1, \bar{s}_1; \cdots, q_n, \bar{s}_n).$$

反应方程 (AV.6) 的总截面公式为

$$\sigma_{fi}(p_a, \bar{s}_a; p_b\bar{s}_b; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \cdots, \bar{s}_n)$$
$$= \frac{1}{N_1!N_2!\cdots N_j!}\cdot\frac{1}{2\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}$$
$$\cdot (2\pi)^4\int\cdots\int\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{d^4q_l}{(2\pi)^4}\Delta^{+}(q_l)\right)$$
$$\cdot \delta(p_f - p_i)|T_{fi}|^2, \qquad \text{(AV.7)}$$

这里

$$s = (p_a + p_b)^2,$$

$$m_a^2 = p_a^2,\ m_b^2 = p_b^2,$$

$$\lambda(a, b, c) \equiv (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)^{1/2}.$$

$N_1, N_2 \cdots, N_j$, $j \leqslant n$, 为末态中所含的粒子种类 1, 2, …, 和 j 的数目. 因此, $(N_1)!, (N_2)!, \cdots, (N_j)!$ 为全同粒子因子. 如果初态粒子不是极化的, 并且末态自旋不被测量, 则

$$\sigma_{fi}(p_a, p_b) = \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)}$$

$$\cdot \sum_{\bar{s}_1, \cdots \bar{s}_n, \bar{s}_a, \bar{s}_b} \sigma_{fi}(p_a, \bar{s}_a; p_b, \bar{s}_b; p_1, \bar{s}_1, \cdots p_n, \bar{s}_n)$$

$$= \frac{1}{N_1! N_2! \cdots N_j!} \cdot \frac{1}{2\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}$$

$$\cdot \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \cdot (2\pi)^4 \int \cdots \int$$

$$\cdot \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_l) \right) \delta^4(p_l - p_i)$$

$$\cdot \sum_{\bar{s}_1, \cdots \bar{s}_n, \bar{s}_a, \bar{s}_b} |T_{fi}|^2. \qquad \text{(AV.8)}$$

在方程 (AV.7) 或 (AV.8) 的右边, 通过插入适当的 δ 函数, 就可以得到微分截面的表示式. 例如, 其中末态粒子 1 和 2 要有一个固定的不变量质量

$$M_{12}^2 \equiv (q_1 + q_2)^2,$$

则由方程 (AV.8) 截面为

$$\frac{\partial \sigma_{fi}(p_a, p_b; M_{12}^2)}{\partial M_{12}^2} = \frac{1}{N_1! N_2! \cdots N_j!}$$

$$\cdot \frac{1}{2\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)}$$

$$\cdot (2\pi)^4 \int \cdots \int \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^4 q_l}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_l) \right)$$

$$\cdot \delta^4(p_f - p_i)\delta((q_1 + q_2)^2 - M_{12}^2) \sum_{\substack{\lambda_a,\lambda_b \\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n}} |T_{fi}|^2. \tag{AV.9}$$

二体反应 对于二体反应

$$a + b \to c + d,$$

假定 c 和 d 是不同的，定义 Mandelstam 变数为

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2,$$
$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2.$$
$$u = (P_a - P_d)^2 = (P_b - P_c)^2.$$

未极化的截面为

$$\sigma(P_a, P_b) = \frac{1}{2\lambda(S, m_a^2, m_b^2)} \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} (2\pi)^4$$
$$\cdot \int \frac{d^4q_c}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_c) \frac{d^4q_d}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_d)$$
$$\cdot \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \sum_{\substack{\lambda_a,\lambda_b \\ \lambda_c,\lambda_d}} |T_{fi}|^2. \tag{AV.10}$$

微分截面为

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \frac{1}{16\pi}$$
$$\cdot \frac{1}{\lambda^2(s_1', m_a^2, m_b^2)} \sum_{\substack{\lambda_a,\lambda_b, \\ \lambda_c,\lambda_d}} |T_{fi}|^2 \tag{AV.11}$$

及

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \frac{1}{16\pi^2 s}$$
$$\cdot \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \sum_{\substack{s_a,s_b \\ s_c,s_d}} |T_{fi}|^2, \tag{AV.12}$$

这里 $\bar{p}$ 及 $\bar{q}$ 为质心系中初态和末态的三动量的数值。

衰变公式

令

$$T_{if} = T_{if}(p_a, \bar{s}_a; q_1, \bar{s}_1; \cdots, q_n, \bar{s}_n)$$

为下面衰变过程的振幅，

$$a \to c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

衰变速率为

$$\Gamma(\bar{s}_a, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_n) = \frac{1}{2m_a}(2\pi)^4 \frac{1}{N_1!N_2!\cdots N_i!}$$

$$\cdot \int \cdots \int \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^4q_l}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_l) \right) \delta(p_f - p_0) |T_{if}|^2,$$

(AV.13)

其中一切粒子的自旋投影是固定的. 如果衰变粒子不是极化的，并且在衰变产物中，粒子的自旋态不被测量，则

$$\Gamma = \frac{1}{2m_a} \frac{1}{N_1!N_2!\cdots N_i!}(2\pi)^4$$

$$\cdot \int \cdots \int \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^4q_l}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_l) \right)$$

$$\cdot \delta^4(p_f - p_a) \sum_{\bar{s}_a, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_n} |T_{if}|^2. \qquad \text{(AV.14)}$$

用从总截面得到微分截面的方式，由总衰变速率可以得到微分衰变速率的表示式. 例如，如果粒子 C_1 和 C_2 有固定的不变量的质量 M_{12}，则

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M_{12}^2} = \frac{1}{2m_a} \frac{1}{(2s_a+1)N_1!N_2!\cdots N_i!}(2\pi)^4$$

$$\cdot \int \cdots \int \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^4q_l}{(2\pi)^4} \Delta^{(+)}(q_l) \right) \delta^4(p_f - p_a)$$

$$\cdot \delta((q_1+q_2)^2 - M_{12}^2) \cdot \sum_{\bar{s}_a, \bar{s}_1, \cdots, \bar{s}_n} |T_{if}|^2. \qquad \text{(AV.15)}$$

B. 矢量场的偏振矢量[1] 包含一个矢量粒子的振幅对于粒子的偏振矢量必须是线性的. 令矢量粒子的动量为 k，偏振矢量为 $\varepsilon_\mu(k, \lambda)$，这里 λ 代表偏振态. 对于带质量的矢量

场，λ 取三个值，二个是横向偏振，一个是沿纵向方向的偏振。一切方向都参照动量方向。对于零质量的矢量玻色子，λ 只取二横向偏振的一个值。

令谈论的振幅用 $T(k, \lambda, \cdots)$ 来表示，则

$$T(k, \lambda, \cdots) = \varepsilon_\mu(k, \lambda) T^\mu(k; \cdots)。 \quad \text{(AV.16a)}$$

这里 $T^\mu(k; \cdots)$ 与偏振矢量无关，并且

$$k_\mu T^\mu(k; \cdots) = 0. \quad \text{(AV.16b)}$$

带质量的矢量场 对于带质量的矢量场

$$\Sigma_\lambda \varepsilon_\mu(k, \lambda)\varepsilon_\nu(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}, \quad \text{(AV.17)}$$

这里 M 为粒子的质量。于是

$$\sum_\lambda |T(k, \lambda, \cdots)|^2 = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) \cdot T^\mu(k; \cdots) T^{*}_{\mu}(k; \cdots) \quad \text{(AV.18)}$$

令

$$k^\mu = (k^\circ, \bar{k}\hat{k}), \quad \bar{k} = |\boldsymbol{k}|,$$

$$\hat{k} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

可以给出偏振矢量的显式表示式如下：

$$\varepsilon^\circ(k, \lambda) = \frac{k^\lambda}{M}, \quad \text{(AV.19a)}$$

$$\varepsilon^j(k, \lambda) = \delta_{j\lambda} + \frac{k^j k^\lambda}{M(M + k^\circ)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{(AV.19b)}$$

及

$$\varepsilon_\mu(k, \lambda)\varepsilon^\mu(k, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad \text{(AV.20)}$$

注意，(AV.19a) 及 (AV.19b) 中所给出的表示式不是有固定纵向或横向的偏振矢量。有固定横向和纵向偏振的矢量为下面的表示式：

$$\varepsilon^\mu(k, 1) = (0, \cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta), \quad \text{(AV.21a)}$$

$$\varepsilon^{\mu}(k,2)=(0,-\sin\varphi,\cos\varphi,0),\qquad (AV.21b)$$

$$\varepsilon^{\mu}(k,3)=(\vec{k}/M,k^{0}\hat{k}/M),\qquad (AV.21c)$$

这里 θ 和 φ 为粒子动量的极角和方位角. 头两个表示式表示二横向偏振,第三个表示式表示纵向偏振.

无质量的矢量粒子 一个无质量的矢量粒子只有两个横向偏振:

$$\varepsilon^{\mu}(k,1)\ 及\ \varepsilon^{\mu}(k,2),$$

可以取它为 (AV.21a) 和 (AV.21b) 所给出的表示式,即

$$\varepsilon^{\mu}(k,1)\equiv(0,\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta),\qquad (AV.22a)$$

$$\varepsilon^{\mu}(k,2)\equiv(0,-\sin\varphi,\cos\varphi,0).\qquad (AV.22b)$$

现在振幅满足规范不变性条件:

$$k_{\mu}T^{\mu}(k;\cdots)=0.\qquad (AV.23a)$$

更明显地,这就是

$$T^{0}(k;\cdots)-\hat{k}\cdot\mathbf{T}(k;\cdots)=0.\qquad (AV.23b)$$

由 (AV.22a) 及 (AV.22b) 可以证明

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^{i}(k,\lambda)\varepsilon^{l}(k,\lambda)=\delta^{il}-\frac{k^{i}k^{l}}{\vec{k}^{2}},\qquad (AV.24a)$$

$$\varepsilon^{0}(k,\lambda)\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)=0.\qquad (AV.24b)$$

与带质量矢量玻色子的情形不同(参看方程 (AV.17)),二偏振态求和的偏振矢量的乘积并不是协变形式. 然而,这在截面公式中,在进行偏振求和时并不引入任何复杂性. 偏振求和得到简单的表示式:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{2}|T(k,\lambda;\cdots)|^{2}&=\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_{\mu}(k,\lambda)\varepsilon_{\nu}(k,\lambda)\\&\quad\cdot T^{\mu}(k,\cdots)T^{\nu}(k,\cdots)^{*}\\&=|\mathbf{T}(k;\cdots)|^{2}-|T^{0}(k;\cdots)|^{2}\\&=-g_{\mu\nu}T^{\mu}(k;\cdots)T^{\nu}(k;\cdots),\end{aligned}\qquad (AV.25)$$

这里利用了方程(AV.23b). 因此，在实际计算中，方程(AV.24a)及(AV.24b)被代换为

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_{\mu}(k,\lambda)\varepsilon_{\nu}(k,\lambda)\rightarrow -g_{\mu\nu}. \tag{AV.26}$$

使(AV.24a)成为一个协变形式另外的论述在下面给出[2]. 定义四矢量

$$\eta^{\mu}=(i,\mathbf{0}). \tag{AV.27}$$

引入两个虚设的偏振矢量

$$\varepsilon^{\mu}(k,3)=-\frac{k^{\mu}+\eta^{\mu}(k,\eta)}{(k\cdot\eta)}, \tag{AV.28a}$$

及

$$\varepsilon^{\mu}(k,4)=\eta^{\mu}. \tag{AV.28b}$$

于是

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)\varepsilon^{\nu}(k,\lambda)=-g^{\mu\nu}, \tag{AV.29}$$

及

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)\varepsilon^{\nu}(k,\lambda)=-g^{\mu\nu}+\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(\eta\cdot k)^{2}}+\frac{\eta^{\mu}k^{\nu}+k^{\mu}\eta^{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}}. \tag{AV.30}$$

现在自旋求和的结果得到下面的形式:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{2}|T(k,\lambda;\cdots)|^{2}&=\left\{-g^{\mu\nu}+\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(\eta\cdot k)^{2}}\right.\\&\left.+\frac{\eta^{\mu}k^{\nu}+k^{\mu}\eta^{\nu}}{(k\cdot\eta)^{2}}\right\}T_{\mu}(k;\cdots)T_{\nu}^{*}(k;\cdots)\\&=-g^{\mu\nu}T_{\mu}(k;\cdots)T_{\nu}(k;\cdots),\end{aligned} \tag{AV.31}$$

它是恒等于前面论述中所得到的方程(AV.25). 在得到方程(AV.31)的形式中，利用了方程(AV.23a).

参 考 文 献

A.V.1. S. Qasiorowicz, *Elementary Particle Physics* (John Wiley, New York; 1966), Ch. 3.

A.V.2. D. Lurie, *Particles and Fields* (Interscience, New York; 1968), 1.6.