# 量子场论导引

H·H·波戈留波夫
Д·В·希尔科夫

科学出版社

# 量子场论导引

H. H. 波戈留波夫
D. B. 希尔科夫
余 朋 译
张 朋 校

科学出版社

1100-57

Н. Н. БОГОЛЮБОВ
Д. В. ШИРКОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

ГИТТЛ, Москва, 1957

## 內 容 簡 介

本书对现代量子场论的基础和最新成就作了系统阐述．作者利用广义函数理论的数学工具，从统一观点出发，将内在的逻辑性、封闭性和所包含材料的完整性互相融会贯通，从而最明确地介绍了场论在当前发展阶段所采用的各种基本原理，并且相当完备地阐述了最近发展的最有前途的方向．最后"色散关系"一章叙述了最新的研究成果．

本书按俄文原书翻译，根据作者寄来的修正稿作了改正和补充，并增添了一个数学附录：色散关系解析性定理．最后参考英译本作了校订．

本书可供着手研究量子场论和对量子场论有兴趣的读者参考；也可供核物理学、基本粒子物理学方面的理论物理工作者和对广义函数理论、多复变函数理论的应用有兴趣的数学工作者参考．

# 量子场论导引

[苏] H. H. 波戈留波夫　Д. B. 希尔科夫 著
董 明 德 译
侯 伯 宇 校

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街 137 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

| | |
|---|---|
| 1966 年 4 月第 一 版 | 开本：787×1092　1/18 |
| 1966 年 4 月第一次印刷 | 印张：24 1/3 |
| 精装：0001—1,270 | 插页：3 |
| 平装：0001—1,180 | 字数：602,000 |

統一书号：13031・2204
本社书号：3351・13—3

定价：[科七] 精装本 4.10 元
平装本 3.40 元

# 序　　言

本书尝試对现代量子场论作一系统的阐述，从它的基础直到最新成就.

著者在撰写此书时，企图从统一的观点出发，将內在的逻輯一貫性、封闭性和所包含材料的完整性互相貫通来叙述场论. 只要有可能，著者也处处力求以最大明确性来叙述场论在当前发展阶段所采用的基本原理. 这时主要的注意力自然集中于数学论证的正确性. 与此相关，在应用理论来计算具体的物理现象时，所阐明的程度只求方法论上的完整性而已.

著者也力求相当完备地阐述最近发展的最有前途的方向. 因而著者希望，由于这一点，本书不仅对初学量子场论的读者有益，而且对在物理学这一领域中的理论工作者也不无裨益.

"色散关系"一章叙述了最新的成果，因其內容极端迫切需要，故也列入本书中.

苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所理论物理部和国立莫斯科大学物理系统计物理和统计力学教研室的工作同志和研究生，在手稿准备过程中提出了不少意见和建议，著者表示谢意. Б. В. Медведев 对本书的个别章节提出了很多宝貴意见，著者特致谢忱.

H. H. 波戈留波夫

Д. В. 希尔科夫

1957 年 2 月于莫斯科

# 目　　录


序言 …… iii

§1. 引言 …… 1

1.1. 场论发展状况的概述 …… 1

1.2. 本书的叙述计划 …… 4

1.3. 若干记号 …… 4

第一章　自由场经典理论 …… 6

§2. 拉格朗日形式和場不变量 …… 6

2.1. 场和粒子 …… 6

2.2. 哈密顿形式和拉格朗日形式 …… 6

2.3. 拉格朗日函数和作用量驻值原理 …… 7

2.4. 场函数的变换性质. 张量和旋量 …… 8

2.5. Noether 定理 …… 10

2.6. 能量-动量矢量 …… 12

2.7. 动量矩张量和自旋张量 …… 13

2.8. 电荷和流矢量 …… 14

§3. 标量場 …… 15

3.1. 实标量场的拉格朗日形式 …… 16

3.2. 动量表象和频率分量 …… 17

3.3. 分立动量表象 …… 20

3.4. 复标量场 …… 20

§4. 矢量場 …… 22

4.1. 拉格朗日函数密度. 补充条件和不变量 …… 22

4.2. 化为动量表象 …… 25

4.3. 矢量场的自旋 …… 27

4.4. Klein-Gordon 方程的一阶方程组形式 …… 27

§5. 电磁場 …… 29

5.1. 电磁场的势 …… 29

5.2. 第二类梯度变换和 Lorentz 条件 …… 30

5.3. 拉格朗日形式 …… 31

5.4. 横向分量、纵向分量和时间分量 …… 32

5.5. 自旋 …… 33

§6. 旋量場. Dirac 矩阵和旋量函数的变换定律 …… 34

6.1. Klein-Gordon 算符的分解 …… 34

6.2. Dirac 矩阵 …… 35

6.3. Dirac 方程 …… 37

6.4. 旋量场的变换性质 …… 38

§7. 旋量場. 解的性质和力学量 …… 42

7.1. 动量表象和矩阵结构 …… 42

7.2. 按自旋态的分解. 正交归一关系 …… 44

7.3. 拉格朗日形式和不变量……46
§8. 場系统的拉格朗日函数密度……49
8.1. 场系统的相互作用拉格朗日函数密度和不变量……49
8.2. 梯度变换不变量……50
第二章 自由场的量子理论……54
§9. 波动場量子化的一般原理……54
9.1. 场函数的算符性质和态振幅的变换定律……54
9.2. 波动场的量子化公理……55
9.3. 正负频率分量和共轭函数的物理意义……57
9.4. 真空态和粒子数给定态的振幅……58
§10. 对易关系的建立……60
10.1. 对易关系的类型……60
10.2. 算符的正规乘积和力学量的写法……61
10.3. 能量的正值性要求……62
10.4. Fermi-Dirac 和 Bose-Einstein 的对易关系……63
10.5. 分立动量表象中的对易关系……65
§11. 标量場和矢量場……67
11.1. 实标量场……67
11.2. 复标量场……68
11.3. 复矢量场……69
§12. 旋量場……71
12.1. Fermi-Dirac 量子化和对易函数……71
12.2. 力学量……73
12.3. 电荷共轭……74
§13. 电磁場……76
13.1. 电磁场的特点和量子化方案……76
13.2. 不定度规……78
13.3. 基本量的写法……81
§14. Green 函数……81
14.1. 定义……81
14.2. 标量场的"推迟"和"超前" Green 函数……82
14.3. 标量场的因果 Green 函数……84
14.4. 各种场的因果 Green 函数……85
14.5. 与 Stückelberg 和 Schwinger 记号的关系……87
§15. 对易函数和因果函数的奇异性……88
15.1. $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 函数的计算……88
15.2. 函数 $D(x)$ 和函数 $D^c(x)$ 的显式和奇异性……90
15.3. 奇异函数的 Pauli-Villars 正常化方法……91
§16. 算符式和奇异函数……93
16.1. 算符式的系数函数……93
16.2. 正规乘积的 Wick 定理……95
16.3. 奇异函数的反常性……99
16.4. Pauli-Villars 正常化的若干性质……103
16.5. 奇异函数的乘法……105
16.6. 奇异函数的若干性质……109

16.7. 算符函数的乘法 …… 110
16.8. 若干定义 …… 113
第三章 散射矩阵 …… 114
§17. 相互作用場理论的基本概念 …… 114
17.1. Schrödinger 方程的各种表象 …… 114
17.2. 相互作用表象 …… 115
17.3. 散射矩阵 …… 117
17.4. $S$ 矩阵的相对论协变性和么正性 …… 118
17.5. 因果性条件 …… 119
17.6. 作为泛函宗量的"经典场" …… 121
§18. 相互作用拉格朗日函数密度和 $S$ 矩阵 …… 121
18.1. $S$ 矩阵的相互作用为幂的展开式 …… 121
18.2. $S_n$的协变性、么正性和因果性条件 …… 122
18.3. $S_1(x)$ 和 $S_2(x, y)$ 显式的确定 …… 125
18.4. 定域性算符的时序乘积 …… 127
18.5. 具有任意 $n$ 的 $S_n$ 函数的确定 …… 128
18.6. 函数 $S_n$ 的不确定性的分析以及 $S(g)$ 的最一般形式 …… 130
§19. 时序乘积的展开 …… 133
19.1. 时序收缩 …… 133
19.2. 时序乘积的 Wick 定理 …… 137
§20. $S$ 矩阵化成正规式的方法 …… 138
20.1. 散射矩阵系数的结构 …… 138
20.2. Feynman 图和对应定则 …… 140
20.3. 示例 …… 143
20.4. 结语 …… 145
§21. 计算散射矩阵元的 Feynman 定则 …… 147
21.1. 化为动量表象 …… 147
21.2. 矩阵元的计算 …… 148
21.3. 对称性的考虑 …… 151
21.4. 外场所产生的散射 …… 153
21.5. 矩阵元的一般结构 …… 154
§22. 散射过程的几率和有效截面 …… 157
22.1. 态振幅的归一化 …… 157
22.2. 跃迁几率的计算 …… 158
22.3. 微分有效截面和总有效截面 …… 160
§23. 二阶过程的计算示例 …… 161
23.1. Compton 散射 …… 161
23.2. 电子-正电子对的湮没 …… 164
23.3. 轫致辐射 …… 166
第四章 $S$ 矩陣发散性的消除 …… 169
§24. 电动力学中 $S$ 矩阵的发散性(二阶) …… 169
24.1. 含有两条外部电子线的发散图形 $\Sigma$ …… 169
24.2. $\Sigma$ 中发散部分的分离 …… 172
24.3. 含有二条外部光子线的发散图形 $\Pi$ …… 174
24.4. $\Pi$ 中发散的分离和梯度不变性 …… 176

24.5. 可积函数 $S_2$ 的构成 …… 177
§25. 电动力学中 $S$ 矩阵的发散(三阶) …… 179
25.1. 三阶的顶角图形 …… 179
25.2. $\Gamma$ 中发散的分离和梯度不变性 …… 180
25.3. Ward 恒等式 …… 183
25.4. 可积函数 $S_3$ 的求得 …… 184
§26. 消除 $S$ 矩阵发散性的一般法则 …… 186
26.1. 问题的提法 …… 186
26.2. 减法手续的图形表示和运算 $\Delta(G)$ …… 187
26.3. 图形指标 $\omega(G)$ 和发散度 …… 189
26.4. 指数二次型的结构 …… 192
26.5. 运算 $\Delta(G)$ 的选择 …… 194
26.6. 当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限过渡 …… 196
26.7. $\Delta(G)$ 构成方案的推广 …… 198
§27. 动量表象中系数函数的解析性 …… 199
27.1. $S_n$ 的解析性 …… 199
27.2. $H_n$ 函数的结构 …… 199
27.3. $H_n$ 函数的解析性 …… 200
§28. 各种理论的可重正化性的分类 …… 201
28.1. 第一类和第二类相互作用 …… 201
28.2. 第一类相互作用的列举 …… 204
28.3. 第二类相互作用的非定域性 …… 205
28.4. 用有限个常数确定第一类理论 …… 206
第五章 消除发散的一般理论对具体情况的应用 …… 208
§29. 有非线性相互作用的标量场 …… 208
29.1. Hurst-Thirring 场 …… 208
29.2. 发散图形个数的有限性 …… 208
§30. 旋量电动力学. I. 抵消项的一般形式 …… 210
30.1. 发散图形的类型和 Furry 定理 …… 210
30.2. 散射矩阵的梯度不变性 …… 213
30.3. 抵消项 …… 221
§31. 旋量电动力学. II. 质量和电荷的重正化 …… 223
31.1. 收缩 $\overbrace{AA}$ 的梯度变换 …… 223
31.2. 消除无穷大过程的非唯一性 …… 224
31.3. 总 Green 函数 $G$、$D$ 和顶角部分 $\Gamma$ …… 227
31.4. 无穷大量重正化在形式上的特征 …… 231
31.5. 外线的辐射修正和有限常数的选择 …… 232
§32. 旋量电动力学. III. 二阶辐射修正 …… 235
32.1. 光子函数的修正 …… 235
32.2. 电子 Green 函数的修正 …… 237
32.3. 顶角部分的修正 …… 239
32.4. Klein-仁科公式修正的计算方案 …… 239
§33. 赝标量介子理论 …… 241
33.1. 同位旋形式 …… 241
33.2. 发散图形的类型和抵消项 …… 242

33.3. 第二电荷、相乘重正化和外部线 …… 243
§34. Green 函数的 Schwinger 方程 …… 245
34.1. 总 Green 函数和 $T$ 乘积的真空期待值的关系 …… 245
34.2. 广义 Wick 定理 …… 248
34.3. Schwinger 方程 …… 249
34.4. 抵消项的考虑 …… 253
第六章 Schrödinger 方程和力学量 …… 255
§35. 态振幅的 Schrödinger 方程 …… 255
35.1. $\Phi(g)$ 的变分导数方程 …… 255
35.2. 相互作用表象中的 Schrödinger 方程和朝永-Schwinger 方程 …… 256
35.3. 广义哈密顿函数密度的奇异性 …… 259
35.4. 广义哈密顿函数密度的基本性质 …… 261
§36. 相互作用場系统的力学量 …… 262
36.1. 能量、动量和动量矩张量 …… 262
36.2. 定域性力学量 …… 265
36.3. 流矢量 …… 267
36.4. Lorentz 条件 …… 269
36.5. 波动场算符 …… 269
§37. 真空极化和电子的反常磁矩 …… 270
37.1. 真空极化 …… 270
37.2. 电子的反常磁矩 …… 274
§38. 含有辐射修正的 Dirac 方程 …… 277
38.1. 电子的广义波函数 …… 277
38.2. 广义 Dirac 方程 …… 280
38.3. Lamb 能级移动 …… 282
38.4. 结语 …… 285
第七章 泛函平均值法 …… 286
§39. Green 函数的连续积分表示式 …… 286
39.1. 引言 …… 286
39.2. $\left\langle T\left(\exp i\int \nu\varphi\ dp\right)\right\rangle_0$ 的计算 …… 287
39.3. 连续积分 …… 289
39.4. Green 函数的闭式 …… 291
§40. 旋量电动力学中电子 Green 函数的梯度变换 …… 293
40.1. 化为横向规范和 Green 函数 $G(x, y|A)$ 的变换 …… 293
40.2. 横向规范时 $G(x, y)$ 的泛函积分 …… 295
40.3. 函数 $G(x, y)$ 的梯度变换 …… 296
§41. Bloch-Nordsieck 模型的研究 …… 298
41.1. Bloch-Nordsieck 模型和 $G(x, y|A)$ 的确定 …… 298
41.2. $G(x, y)$ 的计算 …… 300
第八章 重正化羣 …… 303
§42. 旋量电动力学中的相乘重正化羣 …… 303
42.1. 引言 …… 303
42.2. 相乘重正化的羣性质 …… 303
42.3. 重正化羣的泛函方程 …… 304

42.4. Lie 微分方程 …… 307
42.5. 顶角函数 …… 308
§43. 电动力学 Green 函数的渐近性质 …… 309
43.1. 问题的提出 …… 309
43.2. 紫外渐近行为 …… 310
43.3. 红外渐近行为 …… 313
§44. 电动力学中的重正化羣(当 $d_1^0 \neq 0$ 时) …… 315
44.1. 羣方程的推广 …… 315
44.2. "紫外"和"红外"渐近行为的确定 …… 316
44.3. 顶角部分的渐近行为 …… 317
44.4. 各种可能性 …… 323
§45. 双电荷赝标量介子理论中的重正化羣 …… 323
45.1. 介子理论的第二电荷 …… 323
45.2. 化为羣泛函方程 …… 324
45.3. 紫外渐近行为 …… 326
第九章 色散关系 …… 329
§46. 本法的一般概念 …… 329
46.1. 引言 …… 329
46.2. 色散关系的数学和物理基础 …… 329
46.3. 色散关系方面工作的概述 …… 331
46.4. 基础问题 …… 334
§47. 定域性場论中 $S$ 矩阵的基本性质 …… 335
47.1. 前言 …… 335
47.2. 一般性质 …… 337
47.3. 定域性质 …… 338
§48. $\pi$ 介子 Green 函数的谱表示 …… 341
48.1. 一阶和二阶辐射算符及其眞空平均值 …… 341
48.2. $\delta^2 S/\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)$ 的眞空期待值 …… 342
48.3. 两流相乘的眞空期待值 …… 343
48.4. $Q^r$ 和 $Q^a$ 的解析性 …… 344
48.5. $q^r$、$q^a$ 和 $q^c$ 的谱表示 …… 347
§49. Fermi 子 Green 函数的谱表示 …… 349
49.1. $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}\ \delta\psi$ 的眞空期待值的谱表示 …… 349
49.2. 接近于矛盾 …… 353
§50. 核子对介子的散射振幅 …… 354
50.1. 散射振幅与"推迟"和"超前"矩阵元的关系 …… 354
50.2. 化到固定参考系. 解析延拓的困难 …… 357
50.3. 朝前散射振幅的色散关系的求法 …… 358
§51. 散射振幅的解析延拓问题(当 $\mathbf{p} \neq 0$ 时) …… 361
51.1. 在 $\tau < -\mathbf{p}^2$ 假想域中的解析性 …… 361
51.2. 单核子项的结构 …… 363
51.3. 辅助定理 …… 365
51.4. 函数 $ST$ 的特殊表式 …… 370
51.5. 向 $\tau = \mu^2$ 的解析延拓 …… 371
§52. 核子对 $\pi$ 介子散射的色散关系 …… 375

52.1. 化为实量 …… 375
52.2. 考虑对 $E$ 的对称性 …… 377
52.3. 同位旋结构和自旋结构 …… 378
52.4. 不可观察区域和过渡到朝前散射情况 …… 380
§53. 结语 …… 381
数学附录 I 奇异函数一览表 …… 384
数学附录 II 色散关系解析性定理 …… 388
参考文献 …… 424
名词索引 …… 427
一、中文名词 …… 427
二、外国人名为首的名词 …… 428

# §1. 引　言

## 1.1. 场论发展状况的概述

自从 Bethe 的论文[1] (1947) 发表以来，到今年已满十年（按原书于 1957 年出版），这篇论文标志了现代量子场论迅速发展的开端．在这十年中，量子场论的主要分支——量子电动力学——已经成为细致地研究过的理论，并且与实验达到了极好的符合．

早在二十年代之末，当 Dirac, Heisenberg 和 Pauli 的经典论文出现的时候，量子电动力学的基本方程就已经具备了．当时也就形成了解决这些方程的微扰理论方法，由于方程中含有小参量——精细结构常数 $\alpha = 1/137$，所以采用这一方法是非常自然的．但是，应用微扰理论的方法解决量子电动力学问题，却遇到了根本性的障碍，原来只有微扰理论的主要近似项能给出在一定程度上与实验相符合的结果．计算以后的近似项，不仅沒有将前面的结果精确化，反而引起数学上毫无意义的发散式（即精细结构常数 $\alpha$ 的高次幂与积分的乘积，而积分的被积式在虚动量取大值的区域内仅作微弱的衰减）．

如果假定在大能量区域内理论并不正确，并且在形式上以某一能量极限值（例如，数量级为 $mc^2$）来限制积分的区域，那末我们发现，由于小乘子 $\alpha^n$，这种被"截断"积分的贡献是很小的．因此引进不同形式的所谓形状因子来截断大能量区域内的发散积分，使得理论更加完善的企图是完全合理的．但是，无论引进形状因子，或者引进用来"解释"形状因子的时空基本长度等等的尝试，都沒有获得实质性的结果．

同时，我们已经弄清楚，理论的基本原理是正确的．主要近似项与实验的符合程度也是令人满意的，只是需要消除辐射修正中的发散式，这些辐射修正就是微扰理论的高阶近似．

通过建立所谓减法程序，我们找到了避免这一困难的出路．减法程序的基本思想是根据下述事实，即由高阶近似所得到的辐射修正并非完全是可观察量．这是因为在应用微扰理论时，我们必须把 $\alpha = 0$ 的情况作为出发点，也就是认为电子与电磁场之间并不存在相互作用．在这一近似下，我们必须赋予电子某一质量 $m$ 及某一电荷 $e$．然后再计算二级近似，例如说，电子的本征能，我们得到本征能的表式为 $(m + \alpha m_1)c^2$，其中含有对质量的辐射修正项 $\alpha m_1$，此处 $m_1$ 是一个发散积分．由此看出，$m$ 是虚拟的无相互作用电子（或称裸电子）的质量，它并不是可观察的量，$\alpha m_1$ 也是不可观察的．只有二者之和 $m_0 = m + \alpha m_1$ 才是可观察量，它表示与电磁场相互作用的实际电子的质量．因此，在计算各种效应时，不用 $m$ 而用可观察质量 $m_0$ 来表示未知量是合理的．这一简单的设想也就成了创

---

1) 所引文献的目录附于书末．

立减法程序的推动力，用减法程序可以消除辐射修正中的所有发散，即通过适当地选择初值 $m$ 与 $e$，可以抵消这些发散式.

Bethe 以此为基础计算了氢原子中 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2P_{\frac{1}{2}}$ 能级的 Lamb 移动，这样一来，就打开了确定各种可观察效应的辐射修正时的僵局.

在 Schwinger 的论文中 (1948, 1949 a, б)，这一思想得到了更系统更彻底的发展. 他将"裸"电子的质量和电荷分别写成

$$m_0 - \alpha m_1, \qquad e_0 - \alpha e_1,$$

然后证明可以选择 $m_1$ 和 $e_1$ 的发散式，使得它们完全抵消二次辐射修正项的全部发散.

对于实现上述方案来说，由朝永(1946)和 Schwinger (1948) 所提出的场的基本方程的特殊协变式显得特别方便. 大家知道，按照场的基本方程的通常写法，动力学系统的波函数被看作是时间的函数，于是时间分量从一开始就起着特殊作用. 朝永和 Schwinger 的假定是将波函数看作为空间型曲面 $\sigma$ 上的泛函，而且代替通常的 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H(t)\Phi(t),$$

引进了变分导数的协变方程

$$i\frac{\delta\Phi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = H(x|\sigma)\Phi(\sigma),$$

其中 $H(x|\sigma)$ 是 $\sigma$ 曲面上时空点 $x$ 的哈密顿函数密度. 基本方程的这种写法和通常的写法完全等效，而且实质上也沒有给出任何新的事物. 但是，在历史上发展微扰理论的完全协变形式的过程中，这种形式曾经起过重要的作用，因为这种形式便于抵消无穷大.

与此同时，Feynman (1949 a, б) 从略为不同的角度，用非常便于实际应用的形式，建立了协变的微扰理论. Feynman 的出发点是他在 1947 年所提出的处理量子力学的特殊方法，这种方法根据的思想是：量子力学的几率振幅可以表述为 $\exp\{iA\}$ 对所有虚轨道集合的连续积分，其中 $A$ 是经典的作用量. Feynman 对这一表象给出了简单而又明显的形式，并且利用它建立了求几率振幅任意近似的方案. Feynman 所引进的符号将复杂的积分表示成图形，对所研究的过程给出了直观的形象，这在实践上是极为方便的. Feynman 图是量子场论发展中的一项重大贡献，在目前已经获得了广泛的应用.

朝永、Schwinger 以及 Feynman 的这些工作以后由 Dyson (1949 a, б) 加以推广，他一方面从朝永-Schwinger 理论得到了 Feynman 方案，另一方面，指出了计算任意高阶近似的散射矩阵元时的减法程序. 由于 Dyson 工作的进一步发展，减法程序的计算方案目前在电动力学中已经完全解决. 利用它来计算辐射修正所得到的结果，在现有精确度的范围内与实验完全相符. 例如，对于电子磁矩的辐射修正，以 Bohr 磁子为单位，计算数值为 0.001145，而由实验测定的数值为 $0.001146 \pm 0.000012$.

虽然目前对微扰理论中所应用的级数的收敛性以及级数的可求和性表示了极大怀疑，但是我们很清楚，这些级数毕竟具有一定的渐近性，而且前几项由于存在小参量而很迅速地减小.

因此，目前量子电动力学已经是一门成熟的理论，它有一个利用幂级数(以小参量 $\alpha$ 为幂）计算有意义的物理量的完善方案；级数头几项所给出的结果，在各种情况下以高度的精确性与实验相符合.

在介子理论中，情况就完全不同. 虽然减法程序曾经立即被推广到可重正化的介子理论，其中包括目前广泛采用的具有赝标量耦合的赝标量理论，但是微扰理论的相应展开式没有任何实际意义. 其原因如下：其中起着精细结构常数 $\alpha$ 作用的参量 $g^2/\hbar c$ 的值约为 15，由于这一点，以此参量为幂的展开式没有任何意义，而用头几项近似来计算各种效应的企图，甚至得不到与实验数据定性符合的结果，这样一来，终于肯定了根据展开为耦合常数的幂级数的微扰论方法，在介子理论中并不适用.

因此，自然地产生了如何克服微扰理论局限性的问题. 有关这一问题的研究，可以暂且分成两个基本方向. 其中一个是寻找精确度不和耦合常数的微小性直接有关的近似方程，和根据这方程来计算各种具体的效应，主要是核子对介子的散射过程. 这一方向的典型方法是 Фок (1932)，Тамм 和 Dancoff (1950) 的工作中所提出的 Тамм-Dancoff 方法. 应用这一方法去解核子对介子的散射问题，曾经取得了一定成就. 例如，Тамм-Dancoff 方法的一级近似正确地描写了 $p$ 波散射. 但是，这个方法的进一步发展却遇到了一系列根本性的困难. 例如，直到目前还没有解决如何消除其中无穷大的问题，甚至还不能达到微扰论所已经达到的解决程度.

第二个研究方向的基础是 Green 函数性质的定性研究这一理论问题；Green 函数在量子场论中起着重要作用. 这方面的工作获得了若干有意义的结果，其中特别是 Green 函数的谱表示，而且也出现了一些看法，认为在整个现代量子场论中可能存在着内在矛盾.

由于介子理论似乎没有什么出路，因此有些研究者早就开始认为，如果不彻底修改场论的基本原理，场论就不可能有进一步的发展.

但是，最近在极有意义并且极其深刻的新方向上出现了一系列研究工作. 这些工作并不是对介子理论提出某种特定方案，而是从散射矩阵的协变性、么正性和因果性的一般性质出发，利用它们获得了一系列可以由粒子散射实验所测定的诸量之间的关系，即所谓色散关系. 在应用相移分析来整理实验数据时，这些色散关系得到了重要应用.

根据著者的看法，色散关系的最重要意义在于它指明了原则上可以用实验来检验是否存在某种"基本长度"，其值相应于目前可以实现的能量值. 存在这种可能性的原因是：色散关系只在严格的定域性条件下才能满足，当定域性不成立时，必须作一定的修改. 但是，我们应该强调，在这一方向上的研究还只是刚刚开始发展.

总括起来，可以说，到目前为止，量子场论已经经历了它发展的一定阶段，这一阶段的特征是在微扰理论范围内建立了计算方法，在量子电动力学中此方法已获得了应用，同时，这一方法的适用范围也已显示出来了.

因此，按照我们的看法，对量子场论的基本原理和方法作批判性的阐述的时机已经成熟了；我们向读者提供此书，正是希望作到这一点.

## 1.2. 本书的叙述计划

为了用统一观点叙述所有的材料，本书从总结自由场的经典理论和量子理论的基础开始(第一章和第二章).

根据问题的实际情况，我们将主要注意力集中于系统地叙述微扰理论. 关于这一问题,我们认为按照 Heisenberg、Feynman、特别是 Stüeckelberg 的思想最为合理,而且在研究如何确定散射矩阵时,我们与通常的讲法不同,并不依靠哈密顿形式，而是将物理学上所要求的协变性、么正性和因果性作为基础. 在这一途径上,我们成功地发展了 $S$ 矩阵的幂级数系数的收敛式的求法，既避免了在中间一些步骤上出现显然无意义的发散式，也用不着为了补偿无穷大而进行纯粹形式上的讨论. 在第三章和第四章中，叙述了确定散射矩阵并获得到散射矩阵的系数函数收敛式的程序.

在第五章中,将以上所发展的正常化的微扰理论应用于各种具体情况,而且将主要注意力集中于旋量电动力学,这方面的一切重要讨论都做得非常仔细.

在第六章中,我们证明如何从已知方案出发,可以得到态振幅的方程(属于Schrödinger方程类型),并决定相互作用量子场系统的基本动力学变量. 这章也叙述了一系列目前已成为经典问题的解,即电子在已知外场中的运动问题：真空的极化、电子的反常磁矩、氢原子能级的辐射移动. 我们以此结束与微扰理论有关的问题的叙述.

本书后一部分的内容阐明目前超出微扰理论局限的几种主要可能性. 在第七章中探讨了 Feynman 的连续积分法以及基本 Green 函数利用连续积分的表示法. 在第八章中分析了所谓重正化羣，用它可以有效地改进微扰理论中电动力学 Green 函数在“紫外灾难”区域及“红外灾难”区域内的表达式,这正是 Green 函数有奇异性的区域.

在最后一章,即第九章中,讨论了色散关系.

我们力求在材料叙述上着重于理论上的方法论问题,因此,所讨论的具体问题只作为例子,这一点,例如说,就和 Heitler 的著作(1940, 1956)不同.

## 1.3. 若干记号

我们再稍微提一下所采用的记号.

四维矢量的所有分量均被选为实数. 利用 Minkowski 张量 $g^{mn}$ (但所取的符号相反):

$$g^{mn} = 0, \qquad \text{当 } m \neq n \text{ 时},$$
$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$$

来定义度规，即如果两个四维矢量 $a$ 和 $b$ 的分量分别为 $a^0, a^1, a^2, a^3$ 及 $b^0, b^1, b^2, b^3$, 则其乘积定义如下:

$$ab \equiv \sum_{0 \leqslant m,n \leqslant 3} g^{mn} a^m b^n = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \mathbf{ab}.$$

黑体字母 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是通常的三维矢量. 对于四个分量 0, 1, 2, 3 求和的指标以拉丁字母表示,对于三个空间分量 1, 2, 3 求和的指标以希腊字母表示,例如,

$$ab = \sum_{m,n} g^{mn} a^m b^n,$$

$$\mathbf{ab} = \sum_{\alpha} a^{\alpha} b^{\alpha}.$$

按照惯例，上指标是逆变指标，而下指标是协变指标（细节参阅 § 2.4）. 指标的上升和下降用度规张量相乘后再收缩指标来得到，例如，

$$a_n = \sum_m g_{mn} a^m, \quad a^m = \sum_n g^{mn} a_n;$$

此时

$$g_{mn} = g^{mn}.$$

全书中所采用的单位制是令光速等于 1 ，Planck 常数被 $2\pi$ 除后也等于 1 ，即

$$c = \hbar = 1,$$

在此单位制中，能量、动量及质量的量纲是长度的倒数，而时间 $x^0$ 的量纲是长度.

本书的文献索引根据英文文献中所采用的体系，在作者名字后面括号中的年代表明所引用的文献. 例如，“Dyson (1949)” 表示参考 Dyson 于 1949 年发表的论文. 书刊的完全名称见参考文献索引.

# 第一章　自由場經典理論

## §2. 拉格朗日形式和場不变量

### 2.1. 场和粒子

在第一章中我们讨论经典场论，也就是未作量子化的场论.

波动场的最熟悉例子是电磁场，它描述带电粒子的相互作用. 以 Maxwell 方程为基础的电磁场经典描述，造成我们对电磁现象的纯粹波动观念. 有时也发现把电磁场这一连续系统看作为不连续的具有无穷多个自由度的力学系统，更确切地说，看作为无穷多个所谓场振子，是比较方便的. 这种处理方法使得在研究场论时可以利用经典力学的工具.

利用所谓量子化方法，可以转变为粒子观点，更正确地说，转变为粒子与波动的统一观点，这时是将场和不连续的能量子相对应，这些能量子相应于场振子的各种许可能量态. 这时就说，电磁量子是描述荷电粒子相互作用的粒子. 电磁场量子的静止质量等于零.

我们发现也可以将波动场和静止质量不为零的粒子（如电子、核子、介子等等）相对应. 上述粒子就是相应场的量子，并且描述作为此波动场之源的其他粒子之间的相互作用. 这种对应的熟悉例子是 $\pi$ 介子，它是描述核子（质子和中子）间相互作用的核力场（或介子场）的量子. 这时可以说，核力通过 $\pi$ 介子来"传递". 因此，相互作用的波动场量子理论，就是基本粒子的相互作用理论.

在叙述波动场的理论时，最简单的而且也是按历史发展所形成的叙述顺序如下（虽然这并不是最令人满意的，参看 § 17），我们也就依此进行. 我们首先讨论波动场的经典理论；然后讨论自由场的量子理论；最后，讨论相互作用场的量子理论. 自然，这时自由场的经典理论和量子理论的叙述带有辅助性质，只不过是为了方法论上的完整性而已.

### 2.2. 哈密顿形式和拉格朗日形式

我们把场作为无穷多个自由度的力学系统来研究，就可以用与经典力学类似的观点来建立场论. 此时，场用具有无穷多个自由度的所谓场函数（或波函数）来描述. 场函数的方程可由该系统的拉格朗日函数利用作用量为驻值的变分原理导出，而力学量则有与经典力学中对应量相类似的表式.

因此，根据与经典力学的类比，可以用两种不同的方法来建立波动场理论.

在正则形式（或称哈密顿形式）中，广义坐标和广义动量是基本量，而利用系统的拉格朗日函数、广义坐标和广义动量来构成的哈密顿函数也是基本量. 利用哈密顿函数可以

直接得到正则方程和力学量，而且上述建立场论的途径可以与经典力学进行细致的形式类比.

但是，哈密顿形式虽然十分简单明了，却有根本性的缺点；由于时间起着特殊的作用，论述就丧失了相对论不变性，这一点在量子场论中特别感到不便.

第二种叙述场论的方法，我们将称之为拉格朗日形式，它的出发点是不必引进广义坐标和广义动量以及哈密顿函数. 从系统的拉格朗日函数密度出发，利用变分原理，就能导出运动方程，而将能量-动量、电荷以及其他力学量定义为对应于坐标系及场函数的各种变换的不变量. 在正则形式中，时间是基本的独立变量，而空间变量只起着参量的作用，但在拉格朗日形式中所有四个坐标完全对称地出现. 因此，可与质点系力学细致类比的优点这时虽然较不显著，然而理论的叙述却从一开始就成为相对论上协变的. 以上两种情况的最终结果显然是等同的. 我们的叙述将建立在拉格朗日形式的基础上.

### 2.3. 拉格朗日函数和作用量驻值原理

我们从拉格朗日函数直接推导场方程和场的不变量. 因此，我们首先来表述对拉格朗日函数的基本要求. 其中占有重要地位的是相对论不变性条件，或者说对于完全的非齐次 Lorentz 羣保持不变的条件. 因此，我们提一下 Lorentz 羣的定义. 大家知道，完全 Lorentz 羣系指所有由如下四维时空坐标的齐次线性变换构成的羣，它使表示四维间隔平方的二次型

$$s^2 = \sum_n g^{nn}(x^n)^2 \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{2.1}$$

保持不变，并且不改变时间轴的方向. 此羣包括 $x^1x^2$, $x^2x^3$, $x^3x^1$ 三平面内的空间旋转、$x^0x^1$, $x^0x^2$, $x^0x^3$ 三平面内的 Lorentz 旋转、空间轴 $x^1$, $x^2$, $x^3$ 的反射以及上述各变换的一切乘积. 此时旋转变换的行列式等于 $+1$，而轴的反射变换的行列式等于 $-1$. 因此，将行列式等于 $+1$ 的变换区分出来称为眞 Lorentz 羣，其中包括六个旋转和空间轴的偶次反射(可化为旋转).

将完全 Lorentz 羣与沿所有四个坐标轴的平移变换一起考虑，常常较为便利. 我们将上述变换的总和称为非齐次 Lorentz 羣.

我们回到拉格朗日函数. 拉格朗日函数是时间的函数，在力学上是将它写成对于系统中所有质点求和的形式. 对于波动场之类的连续系统，此和用拉格朗日函数密度的空间积分来表示：

$$\Lambda(x^0) = \int d\mathbf{x}\, \mathscr{L}(x^0, \mathbf{x}). \tag{2.2}$$

但是，出现在变分原理中的不是拉格朗日函数 $\Lambda$，而是拉格朗日函数对 $x^0$ 积分后的作用量 $A$. 因此，拉格朗日形式中的非协变式(2.2)事实上是过渡性的，讨论依赖于所有四个时空变量的拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}(x^0, \mathbf{x}) = \mathscr{L}(x)$$

已经完全足够. 以后称 $\mathscr{L}(x)$ 为拉格朗日函数密度(或简称拉氏密度——译注).

通常认为拉格朗日函数密度是场变量 $u_i(x)$ 及其一阶导数[1] $\frac{\partial u_i}{\partial x^k}$ 的实函数[2]，此函数并不明显地依赖于坐标 $x^k$，而且对属于非齐次 Lorentz 羣的坐标变换保持不变.

此时，如果拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 只依赖于场在 $x$ 点无穷小邻域中的状态，也就是依赖于 $u_i$ 及其有限个偏导数在 $x$ 点所取之值，则称它为定域性拉格朗日函数密度，而相应的理论称为定域性理论. 与此相反的情况，例如 $\mathscr{L}(x)$ 表示为

$$\int dy F\left(u(x), u(y), \frac{\partial u(x)}{\partial x^k}, \frac{\partial u(y)}{\partial y^m}\right),$$

我们则称之为非定域性理论. 我们不拟讨论非定域性理论.

因此我们可将定域性拉格朗日函数密度写成形式

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}\left(u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k}\right).$$

拉格朗日函数密度对某一时空体积的积分

$$A = \int \mathscr{L}(x)\, dx \qquad (dx = dx^0\, d\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

称之为作用量.

假定场函数变分 $\delta u_i$ 在四维体积的积分边界上为零，由作用量为驻值的变分原理

$$\delta A = 0,$$

利用分部积分法，得到拉格朗日-欧拉方程:

$$\frac{\delta A}{\delta u_i(x)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i(x)} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}\right)} = 0, \tag{2.4}$$

它是确定场函数 $u_i(x)$ 的方程，也即是场方程.

## 2.4. 场函数的变换性质. 张量和旋量

在构成场的不变量以前，我们来讨论场函数的变换性质. 换句话说，我们需要建立在非齐次 Lorentz 羣的坐标变换

$$\left.\begin{aligned} x \to x' &= Lx, \\ x'^k &= a^k + \sum_l g^{ll} Q^{kl} x^l \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

下场函数的变换定律.

场函数 $u(x)$ 应理解为在任一四维坐标为 $x^k$ 的参考系中给定的一个(单分量场函数)或几个(多分量场函数)函数. 从一参考系 $x$ 变换到与 $x$ 由 Lorentz 变换(2.5)相连系的另一参考系 $x'$ 时，场函数分量的齐次线性变换为

$$u(x) \to u'(x') = \Lambda u(x), \tag{2.6}$$

---

1) 关于拉格朗日函数密度为实函数(更确切地说是厄米性)的物理意义，参阅 § 18.

2) $\mathscr{L}$ 只依赖于 $u_i$ 及 $\frac{\partial u_i}{\partial x^k}$ 这一要求导致场方程为二阶的微分方程.

而函数的变换矩阵 $\Lambda$ 完全决定于 Lorentz 变换矩阵 $L$. 我们强调指出，所讨论的变换并不限于用 $x'$ 来代替宗量 $x$，它描述着参考系的变换，而不是从空间一点移至另一点.

因此，每一 Lorentz 变换 $L$ 和一个线性变换 $\Lambda_L$ 相对应，而且显然羣 $L$ 中的单位元对应于单位变换 $\Lambda = 1$，Lorentz 羣中两个元的乘积对应于两个变换的乘积：

$$\Lambda_{L_1L_2} = \Lambda_{L_1}\Lambda_{L_2}.$$

具有上述性质的算符系 $\Lambda$ 在羣论中称为羣的线性表示. 显然，算符 $\Lambda$ 可以用矩阵来表示，矩阵的阶决定于波函数 $u$ 的分量的个数. 当 $u$ 的分量的个数是有限时，则称变换羣 $\Lambda$ 构成 Lorentz 羣的有限维表示. 与此相反时，我们得到 Lorentz 羣的无限维表示. 由于所有的基本物理场通常都用有限个分量的函数来描述，今后我们只限于讨论 Lorentz 羣的有限维表示.

因此，我们可以将变换 $\Lambda$ 认为是作用于波函数分量的有限维空间中的算符，而且用有限阶的正方矩阵来描述它.

有时可以将羣表示 $\Lambda$ 所作用的场函数分量的空间分解成为对已知表示的一切变换为不变的子空间，也就是分解成为在 $\Lambda$ 的作用下变换为自身的子空间. 这种表示称为可约表示. 与此相反的情况，则称为不可约表示. 如果在可约表示的空间中将分解为子空间的过程进行到底，即将此空间分解成为不变的子空间，这些子空间本身不再含有不变的子空间，那么显然原来的羣表示已经分解为作用于各个不变子空间内的不可约表示. 因此，研究一切可约表示可以化为研究所给羣的不可约表示. 通过研究 Lorentz 羣的有限维表示，可以得到波函数的可能类型和它的变换定律(2.6).

这类研究是连续羣表示理论中的一个特殊章节，而且可以简单地归结如下. Lorentz 羣的有限维表示可以是单值的或双值的. 与之相应，$L \to \Lambda_L$ 之间的对应不一定是单值的，因为一般而言，场函数并非实验中的直接可观察量(但是，可观察量总是场函数的双线性组合). 与 Lorentz 变换 $L$ 对应的算符 $\Lambda_L$ 的多值性，仍然应该使得可观察量的变换在任意的 Lorentz 变换下是完全单值的. 除此以外，必需使算符 $\Lambda_L$ 是变换 $L$ 的参数的连续函数，也就是说，参考系的无穷小变换对应于场函数的无穷小变换. 上述要求加在一起，使得 Lorentz 群的表示分为两类. 第一类是以 $L \to \Lambda_L$ 的单值对应为标志，其中含有所谓张量和赝张量[1]的单值表示. 按照张量表示而变换的场函数称为张量(赝张量)，而且在有些情况下可以直接观察到场函数(电磁场). 在第二类情况下，这一对应是双值的：

$$L \to \pm\Lambda_L.$$

$N$ 阶(赝)张量 $T^{i_1,i_2,\cdots,i_N}$

在坐标连续变换时(对轴的奇次反射变换，以后将单独讨论)的变换定律具有形式：

$$T'^{i_1,i_2,\cdots,i_N}(x') = \sum_{(j)} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x^{j_N}} T^{j_1,\cdots,j_N}(x), \tag{2.7}$$

或者用(2.5)式的记号：

$$T'^{i_1,\cdots,i_N}(x') = \sum_{(j)} g^{i_1j_1}\cdots g^{i_Nj_N}Q^{i_1j_1}\cdots Q^{i_Nj_N}T^{j_1,\cdots,j_N}(x).$$

---

1) 张量和赝张量之间的区别在于对空间轴的反射变换，以后将详细讨论.

双值的羣表示称为旋量表示，而相应的量称为旋量. 旋量的变换定律具有比较复杂的结构，在§6中列有最简单的旋量的变换定律. 我们只指出，从(2.7)式所推出的张量变换定律

$$u(x) \to u'(x') = Au(x)$$

在平移变换

$$x'^k = x^k + a^k$$

下对于旋量也是正确的.

现在我们来列举最简单的张量表示和它们的对应量，零阶张量在任意连续变换下按照以下定律

$$u'(x') = u(x) \tag{2.8}$$

变换. 零阶张量是不变量，称为标量(赝标量).

一阶张量在坐标转动时按照定律

$$u'^k(x') = \sum_m g^{mm} Q^{km} u^m(x) \tag{2.9}$$

变换，称为逆变矢量(赝矢量). 与它相关的协变矢量

$$u_k(x) = \sum_m g^{km} u^m(x)$$

依照以下定律

$$u'_k(x') = g^{kk} \sum_m Q^{km} u_m(x) \tag{2.10}$$

变换.

不难写出二阶以及更高阶的协变和逆变张量的相应公式.

前面已经指明，只有在连续变换时，张量的变换定律才由(2.7)—(2.10)类型的关系式规定. 当空间轴作奇次反射时，张量的变换定律不能由这些表式来决定. 这时变换定律应该特别加以表述. 由于张量表示的单值性得到连续作两次变换的恒等性，故这些定律只能具有两种形式:

$$u'(x') = u(x), \tag{2.11}$$

或

$$u'(x') = -u(x). \tag{2.12}$$

此时把在反射下改变符号的量[即按(2.12)式而变换的量]与按(2.11)式而变换的量区别开来而称为赝量(赝标量、赝向量、赝张量等等).

初一看来，变换定律(2.11)和(2.12)的区别有些形式化. 但是，我们以后(§8)将会看到，在确定各种场的相互作用的可能形式时，由这些关系所决定的宇称性起着重要的作用.

## 2.5. Noether 定理

为了构成场的不变量，我们利用 Noether 定理. 该定理内容如下: 使作用量的变分为零的任何一个连续坐标变换(在此变换下场函数的变换定律已给定)，对应于一个确定的不变量，即场函数及其导数的一个守恒的组合.

为了证明 Noether 定理,我们来讨论无穷小的坐标变换:

$$x^k \to x'^k = x^k + \delta x^k, \quad \delta x^k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} X_j^k \delta\omega^j, \tag{2.13}$$

其中含有无穷小参量

$$\delta\omega_i \qquad (i = 1, 2 \cdots s),$$

例如,在非齐次 Lorentz 羣变换时,这些小参量包括无穷小移动 $\delta a^k$ 和无穷小转动 $\delta\omega^{ik}$. 在变换(2.13)下,场函数的变换定律可以写成如下形式:

$$u_i(x) \to u_i'(x') = u_i(x) + \delta u_i(x), \qquad \delta u_i(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \Psi_{ij}(x)\delta\omega^j. \tag{2.14}$$

在(2.13)式和(2.14)式中, $X_j^k$ 和 $\Psi_{ij}$ 是变换矩阵,而 $\delta u_i(x)$ 是场函数由于改变函数的形状和函数的宗量而有的变分. 因此,函数形状的变分 $\bar{\delta}u$ 等于

$$\bar{\delta}u_i \equiv u_i'(x) - u_i(x) = \sum_j \left(\Psi_{ij} - \sum_k \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k} X_j^k\right)\delta\omega^j. \tag{2.15}$$

现在来求作用量的变分

$$\delta A = \delta \int \mathscr{L}(x)dx.$$

作用量的变分包括拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 的变分和积分区域的变分. 正如在一维情况一样,我们可以将 $\int dt$ 的积分限 $\delta(b-a) = \delta b - \delta a$ 的变分用记号表示为

$$\int_a^b \delta(dt) = \int_a^b dt \frac{\partial\delta(t)}{\partial t},$$

在所讨论的四维情况下,可以写成

$$\delta A = \int \delta\mathscr{L}(x)dx + \int \mathscr{L}(x)\delta(dx),$$

其中记号 $\delta(dx)$ 表示积分区域的变分

$$\delta(dx) = \sum_l \frac{dx}{dx^l}\delta(dx^l) = dx \sum_l \frac{\partial\delta x^l}{\partial x^l}.$$

显然,也可以将 $\delta A$ 表式中的第二项写成沿积分区域边界的面积分形式. 将拉格朗日函数密度变分,我们有

$$\delta\mathscr{L} = \mathscr{L}'(x') - \mathscr{L}(x) = \bar{\delta}\mathscr{L} + \sum_n \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^n}\delta x^n,$$

而拉格朗日函数密度形式的变分具有形式

$$\bar{\delta}\mathscr{L} = \sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i}\bar{\delta}u_i + \sum_{i,k} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial u^k)}\bar{\delta}\left(\frac{\delta u_i}{\delta x^k}\right).$$

利用方程(2.4)以及运算 $\bar{\delta}$ 及 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的对易性,由此求得

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\mathscr{L} &= \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}\right)\bar{\delta}u_i + \sum_{i,k} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)} \frac{\partial}{\partial x^k}(\bar{\delta}u_i) \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}\right)\bar{\delta}u_i.\end{aligned}$$

将所有项归并在一起，我们得到作用量的变分

$$\left.\begin{aligned}\delta A &= \int dx\left(\delta\mathscr{L}+\mathscr{L}\sum_n\frac{\partial\delta x^n}{\partial x^n}\right)\\ &= \int dx\sum_k\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\sum_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}\bar{\delta}u_i+\mathscr{L}\delta x^k\right\}\\ &= -\int dx\sum_{k,j}\frac{\partial\theta_j^k}{\partial x^k}\delta\omega^j,\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

其中

$$\theta_i^k=\sum_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial u_j/\partial x^k)}\left(\sum_n\frac{\partial u_j}{\partial x^n}X_i^n-\Psi_{ji}\right)-\mathscr{L}X_i^k.$$

根据作用量变分为零的条件，令作用量对参量 $\delta\omega^j$ 的泛函变分等于零，我们得到

$$\frac{\delta A}{\delta\omega^j}=-\sum_k\frac{\partial\theta_j^k}{\partial x^k}=0.\tag{2.17}$$

根据 Gauss 定理，从方程(2.17)可以得到相应的面积分守恒定律. 为此，将(2.17)式对体积作积分，沿空间各方向作无限地扩张，而在时间方向上用两个空间型的三维曲面 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 来限定，假定在空间体积的边界上场实际上等于零，我们得到

$$\sum_k\int_{\sigma_1}d\sigma_k\theta_i^k-\sum_k\int_{\sigma_2}d\sigma_k\theta_i^k=0,$$

其中 $d\sigma_k$ 是曲面 $\sigma$ 的元在与 $x^k$ 轴垂直的三维平面上的投影. 所得到的方程表明面积分

$$C_i(\sigma)=\sum_k\int_\sigma d\sigma_k\theta_i^k\tag{2.18}$$

实际上与曲面 $\sigma$ 无关. 在特殊情况下，当曲面 $\sigma$ 是三维平面 $x^0=t=\text{const}$ 时，(2.18)式是对三维组态空间的积分，而且积分

$$C_i(x^0)=\int d\mathbf{x}\,\theta_i^0\tag{2.19}$$

与时间无关.

这样就证明了每一有 $s$ 个参量的连续的坐标变换(2.13)和场函数变换(2.14)与某一与时间无关的不变量(2.19) $C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 相对应.

量 $\theta_i^k$ 是非单值的. 在

$$f_i^{mk}=-f_i^{km}$$

条件下，对此量可以加上表式

$$\sum_m\frac{\partial}{\partial x^m}f_i^{mk}.$$

有时利用这一性质使 $\theta$ 对称化. 但是，上述的不确定性对守恒的积分式(2.18)和(2.19)的值并无影响.

我们来讨论量 $\theta$ 的具体例子以及与之相关的守恒定律(2.18).

## 2.6. 能量-动量矢量

在无穷小时空移动

$$x'^k=x^k+\delta x^k$$

下，选择量 $\delta x^k$ 作为变换的参量 $\delta\omega^i$，考虑到变换定律(2.8)，我们得到

$$X_l^k = \delta_l^k, \quad \Psi_{il} = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, 3),$$

而 $\theta$ 化为二阶张量

$$T_l^k = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \mathscr{L}\delta_l^k \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3).$$

这一张量的完全逆变形式为

$$T^{kl} = g^{ll} \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - \mathscr{L} g^{kl}. \tag{2.20}$$

$T^{kl}$ 的(2.18)类型的积分为对时间守恒的四维矢量

$$P^l = \int T^{0l} d\mathbf{x}. \tag{2.21}$$

这一矢量的零分量是经典力学中的哈密顿函数，即能量. 因此，考虑到协变性，我们得到结论：四维矢量(2.21)表示能量-动量，而张量(2.20)是能量-动量张量.

在此指出，以后我们想要知道的只是类似于能量-动量四维矢量 $P^l$ 的力学量. 张量 $T^{kl}$ 的结构在我们的叙述中甚至并不是单值的，只有在包括引力效应的彻底理论中，$T^{kl}$ 的结构才获得独立的意义. 但是大家知道，这种统一的理论到目前还不存在，因此我们不拟讨论这类问题.

## 2.7. 动量矩张量和自旋张量

设有无穷小的四维旋转

$$x'^n = x^n + \sum_{m \neq n} g^{mm} x^m \delta\omega^{nm},$$

由于如下的反对称性

$$\delta\omega^{nm} = -\delta\omega^{mn},$$

可以取六个线性无关的量

$$\delta\omega^{nm} \quad (n < m)$$

作为变换的参量.

$n$, $m$ 为以 $\delta\omega^{nm}$ 为参量的转动所旋转的平面的指标. 我们看到，在公式(2.13)中下标 $j$ 分解为两个指标

$$j \to (n, m),$$

而且考虑到 $\omega^{nm}$ 的反对称性，我们得到

$$\delta x^k = \sum_j X_j^k \delta\omega^j = \sum_{n>m} X_{(nm)}^k \delta\omega^{(nm)} = \sum_l g^{ll} x^l \delta\omega^{kl} = \sum_{m,l} g^{ll} x^l \delta\omega^{ml} \delta_m^k =$$

$$= \sum_{m<l} g^{ll} x^l \delta\omega^{ml} \delta_m^k + \sum_{m>l} g^{ll} x^l \delta\omega^{ml} \delta_m^k = \sum_{m<l} \delta\omega^{ml} (g^{ll} x^l \delta_m^k - g^{mm} x^m \delta_l^k),$$

由此得到

$$X_{(nm)}^k = g^{mm} x^m \delta_n^k - g^{nn} x^n \delta_m^k \qquad (n \leqslant m). \tag{2.22}$$

场函数的全变分表示成形式

$$u_i'(x') = u_i(x) + \delta u_i, \qquad \delta u_i = \sum_{j,k<l} A_{i(kl)}^j u_j(x) \delta\omega^{kl},$$

对于标量场，

$$A^i_{i(kl)} = 0, \tag{2.23}$$

对于协变矢量场，

$$A^j_{i(kl)} = g_{ik}\delta^j_l - g_{il}\delta^j_k, \qquad k \leqslant l. \tag{2.24}$$

将(2.22)式中 $X^k_{nm}$ 之值及

$$\Psi_{i(nm)} = \sum_j A^j_{i(nm)}u_j(x) = g_{in}u_m(x) - g_{im}u_n(x)$$

代入(2.16)式中，得到动量矩张量

$$M^k_{(lm)} = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x^l}g^{mm}x^m - \frac{\partial u_i}{\partial x^m}g^{ll}x^l\right\} +$$

$$+ \mathscr{L}\{g^{ll}x^l\delta^k_m - g^{mm}x^m\delta^k_l\} - \sum_{i,j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}A^j_{i(lm)}u_j(x) =$$

$$= (g^{mm}x^mT^k_l - g^{ll}x^lT^k_m) - \sum_{i,j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}A^j_{i(lm)}u_j(x). \tag{2.25}$$

由公式(2.25)显然可以看出，能量-动量张量 $T^k_l$ 的对称性与动量矩张量 $M_{(lm)}$ 结构之间的关系. 在标量场情况下，(2.25)式中第二项并不存在，而$M$与$T$之间的关系的形式和质点动力学中的形式相类似. 因此，

$$M^{k,lm}_0 = x^mT^{kl} - x^lT^{km} \tag{2.26}$$

应该等于波动场的轨道矩. 在单分量场中，这部分矩是守恆的：

$$\sum_k \frac{\partial M^{k,lm}_0}{\partial x^k} = 0.$$

将(2.26)式代到此式中，我们得到，标量场的能量-动量张量对于它的指标是对称的：

$$T^{kl} = T^{lk}.$$

在多分量场(矢量场、旋量场)情况下，$M^k_{lm}$ 的表式具有形式(2.25). 此式的第二项

$$S^k_{lm} \equiv -\sum_{i,j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^k)}u_j(x)A^j_{i,lm} \tag{2.27}$$

标志着场的极化性质，由量子理论(参阅第二章)可得出结论，它是量子场所描述的粒子的自旋矩.

我们求得轨道矩和自旋矩的空间密度如下：

$$M^{0,lm}_0 = x^mT^{0l} - x^lT^{0m},$$

$$S^0_{lm} = -\sum_{i,j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^0)}u_j(x)A^j_{i,lm},$$

将上式对组态空间积分，可得轨道矩张量和自旋矩张量为

$$M^{lm}_0 = \int M^{0,lm}_0 d\mathbf{x} = \int d\mathbf{x}(x^mT^{0l} - x^lT^{0m}), \tag{2.28}$$

$$S^{lm} = g^{ll}g^{mm}\int S^0_{lm}d\mathbf{x} = -g^{ll}g^{mm}\int d\mathbf{x}\sum_{i,j}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_i/\partial x^0)}u_j(x)A^j_{i,lm}. \tag{2.29}$$

## 2.8. 电荷和流矢量

最后，讨论复数场. 我们以下可以看到，相应的最简单情况是带电粒子，它的拉格朗

日函数密度对于所谓第一类梯度变换是不变的，这种变换只涉及场函数而与坐标无关.

问题在于：拉格朗日函数密度和力学量一样，由于其实数性(厄米性)，只通过形如 $u^*u$ 的二次型而与复数场有关，其中 $u$ 和 $u^*$ 是互为复共轭的函数或其导数. 由此直接得出，复数波动函数 $u$ 可以乘上形式为 $\exp(i\alpha)$ 的任意的么正位相乘子，而不改变二次型 $u^*u$，因而也使任何可观察效应均保持不变.

将 $u$ 和 $u^*$ 作为线性独立函数，就可将第一类梯度变换写成

$$u_j \to e^{i\alpha}u_j, \quad u_j^* \to e^{-i\alpha}u_j^*. \tag{2.30}$$

设 $\alpha$ 为无穷小量，我们求得

$$u_j \to u_j + i\alpha u_j, \quad u_j^* \to u_j^* - i\alpha u_j^*;$$

由此推出

$$\Psi_j = iu_j, \qquad \text{对所有 } u_j,$$
$$\Psi_j = -iu_j^*, \quad \text{对所有 } u_j^*,$$

以及 $X_j^k = 0$. 将这些关系代到(2.16)式中，我们得到

$$J^k(x) = i\sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_j^*/\partial x^k)}u_j^*(x) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_j/\partial x^k)}u_j(x)\right), \tag{2.31}$$

此式的张量阶数与矢量相同，这一四维矢量满足连续性方程

$$\sum_k \frac{\partial J^k}{\partial x^k} = -\frac{\delta A}{\delta \alpha} = 0, \tag{2.32}$$

因此通常将它看作四维流矢量，根据(2.19)式，它的零分量的空间积分是与时间无关的：

$$Q(x) = \int J^0(x)d\mathbf{x} = i\int d\mathbf{x}\sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_j^*/\partial x^0)}u_j^*(x) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial u_j/\partial x^0)}u_j(x)\right) = \text{const}, \tag{2.33}$$

它等于场的荷[1].

我们来研究各种具体的波动场，这时可以应用上面所发展的一般理论. 在第一章中将研究下列最重要的自由波动场：

а) 标量(赝标量)场，相当于赝标量 $\pi$ 介子；

б) 矢量场；

в) 电磁场；

г) 最简单的旋量场，相当于电子-正电子、核子、$\mu$ 介子以及很可能还包含超子.

我们强调指出，如果说自由场描述相应的粒子，这是错误的，因为基本粒子的一切物理特征(例如磁矩)只有在相互作用场的理论中才能得到完整的描述. 因此更准确的是说各个自由场对应于不同的粒子，而且提供在相互作用场论的范围内描述这些粒子的基础.

## §3. 标 量 场

正如在 §2 中已经指出，通常假定拉格朗日函数密度只依赖于波函数及其不高于一阶的偏导数. 这使相应的场方程成为不高于二阶的微分方程.

---

1) 应强调指出，荷 $Q$ 不一定就是电荷. 例如，(2.33)型的表式可以表示核荷(详见 §8).

从自由场的线性和齐次性要求可得到自由场拉格朗日函数密度的如下重要性质. 容易证明,只有对波函数及其导数为二阶的拉格朗日函数密度才会导致这样的方程.

这些条件和相对论不变性以及场函数的变换性质合在一起, 实际上可以决定拉格朗日函数密度,准确到只是系数未定.

现在开始研究波动场中最简单的标量场,我们讨论两种方案:

а) 实标量场——描述中性的标量介子,以及

б) 复标量场——描述有电荷的标量介子.

### 3.1. 实标量场的拉格朗日形式

最简单的波动场由单分量的实波动函数 $\varphi(x)$ 来描述, 它在 Lorentz 变换下作为标量或赝标量而变换. 在上一节已经指出, 标量和赝标量的不同点在于坐标轴作奇次反射时的变换定律,而且这一不同只表现在和其他场的相互作用定律的可能形式上(更确切地说,只表现在相互作用的拉格朗日函数密度的形式上). 因此在自由场理论中, 我们将不区别标量与赝标量、矢量与赝矢量等等,而对它们同时进行讨论.

我们来研究描述无自旋中性粒子(自旋为零的中性(赝)标量介子)的实标量场.

这种场的拉格朗日函数密度是

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_k g^{kk}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2(x), \tag{3.1}$$

根据上述各条件, 可以确定到只是系数未定, 我们选择这些系数使得从公式(2.4)出发可得到 Klein-Gordon 方程:

$$-\sum_k g^{kk}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^k\partial x^k} - m^2\varphi(x) = (\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \tag{3.2}$$

显然,这是唯一的二阶不变方程,此处$\Box$是 d'Alembert 算符:

$$\Box \equiv -\sum_k g^{kk}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^k} = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_3)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}. \tag{3.3}$$

将拉格朗日函数密度(3.1)代到(2.20)式中,我们得到实标量场的能量-动量张量:

$$T^{kl} = g^{kk}g^{ll}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l} - g^{kl}\mathscr{L}. \tag{3.4}$$

由此求得能量密度

$$T^{00} = \frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2, \tag{3.5}$$

和动量矢量的密度

$$T^{0\alpha} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.6}$$

利用(2.25)式,得到动量矩张量的表式为

$$M^k_{lm} = g^{kk}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\left(g^{mm}x^m\frac{\partial\varphi}{\partial x^l} - g^{ll}x^l\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right) + \mathscr{L}(g^{ll}x^l\delta^k_m - g^{mm}x^m\delta^k_l). \tag{3.7}$$

令其中 $k = 0$,我们得到对时间守恒的动量矩张量的空间密度:

$$M^0_{lm}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\left(g^{mm}x^m\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}-g^{ll}x^l\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right)+\mathscr{L}(g^{ll}x^l\delta^0_m-g^{mm}x^m\delta^0_l). \tag{3.8}$$

标量场的自旋矩等于零，因为它是单分量的. 由于场的实数性，四维流矢量也等于零.

### 3.2. 动量表象和频率分量

力学量的表式在动量表象中具有更简单明了的形式. 为了这一目的，将场函数 $\varphi(x)$ 表示为四重 Fourier 积分形式:

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dke^{ikx}\tilde{\varphi}(k), \tag{3.9}$$

而

$$dk=dk^0d\mathbf{k}=dk^0dk^1dk^2dk^3,$$
$$kx=\sum_n g^{nn}k^nx^n=k^0x^0-\mathbf{kx}.$$

为了以后化为三重积分时便利起见，乘子 $2\pi$ 之幂取为 $-3/2$.

函数 $\varphi(x)$ 为实变函数的条件使 $\tilde{\varphi}(k)$ 具有复共轭性质:

$$\tilde{\varphi}^*(k)=\tilde{\varphi}(-k). \tag{3.10}$$

将展开式(3.9)代到场方程(3.2)中，我们得到函数 $\tilde{\varphi}$ 满足方程

$$(k^2-m^2)\tilde{\varphi}(x)=0,$$

因此可以表示成形式

$$\tilde{\varphi}(k)=\delta(k^2-m^2)\varphi(k). \tag{3.11}$$

乘子 $\delta(k^2-m^2)$ 建立了"能量"变量 $k^0$、"动量"变量 $\mathbf{k}$ 以及 $m^2$ 之间的关系:

$$k^2-m^2=(k^0)^2-\mathbf{k}^2-m^2=0.$$

从而可见 $m^2$ 为质量平方.

考虑到(3.11)式，展开式(3.9)化为

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\delta(k^2-m^2)e^{ikx}\varphi(k). \tag{3.12}$$

由于积分号下有 $\delta$ 函数，此处并非对整个四维 $k$ 空间积分，而只对两个三维双曲体

$$k^0=\pm\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2} \tag{3.13}$$

积分，其中的一个双曲体完全处于上部光锥中，而另一个完全处于下部光锥中. 其次，注意到上述双曲体分别具有 Lorentz 不变性，我们得到以下的 Lorentz 不变性的分解，它将积分(3.12)分成了两项:

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x), \tag{3.14}$$

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dke^{ikx}\delta(k^2-m^2)\varphi^{(+)}(k), \tag{3.15}$$

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dke^{-ikx}\delta(k^2-m^2)\varphi^{(-)}(k), \tag{3.16}$$

其中

$$\varphi^{(+)}(k)=\theta(k^0)\varphi(k),\qquad \varphi^{(-)}(k)=\theta(k^0)\varphi(-k), \tag{3.17}$$

而 $\theta$ 是熟知的间断函数

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3.18}$$

我们以后分别称函数 $\varphi^{(+)}(x)$ 和 $\varphi^{(-)}(x)$ 为函数 $\varphi(x)$ 的正频部分和负频部分. 显而易见,此时频率的符号与积分号下指数 $kx$ 的符号相一致,更确切地说是和频率项 $k^0x^0=+x^0\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ 的符号相一致. 与此相应,我们注意到,现代文献中常常采用与此相反的符号,即"频率"和下式的符号相一致:

$$k_\mu x_\mu=\mathbf{kx}+k_4x_4=-kx.$$

但是我们不采用这样的符号. 在第二章中将表明,这是由于考虑到(3.15)类型的表式在量子场论中相当于场粒子的产生,而(3.16)类型的表式则相当于场粒子的消失. 因此,在我们所采取的记号系统中,符号(+)和(−)不仅仅相当于频率的正负,而且在物理意义上象征着相应的量子算符,即(+)是指产生,而(−)是指消失[1].

以下将要表明,将力学量写成动量表象形式时,上述分解也十分方便,因为力学量是以 $\varphi^{(+)}(k)$ 和 $\varphi^{(-)}(k)$ 的二次型来表示的.

此外我们注意到,由于函数 $\varphi(x)$ 的实变性,$\varphi^{(+)}(k)$ 和 $\varphi^{(-)}(k)$ 的复共轭法则为

$$(\varphi^{(+)}(k))^*=\varphi^{(-)}(k),\qquad (\varphi^{(-)}(k))^*=\varphi^{(+)}(k). \tag{3.19}$$

将(3.15)式和(3.16)式对 $k^0$ 积分,我们得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k^0}e^{ikx}\varphi^{(+)}(k),\\ \varphi^{(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k^0}e^{-ikx}\varphi^{(-)}(k),\end{aligned}\right\}\quad k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}. \tag{3.20}$$

此处把三维 Fourier 振幅重新归一化是较方便的. 为此,我们采用记号

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(+)}(\mathbf{k})&=\frac{\varphi^{(+)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\\ \varphi^{(-)}(\mathbf{k})&=\frac{\varphi^{(-)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\end{aligned}\right\}\quad (k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}). \tag{3.21}$$

(3.22)

因此(3.20)式将具有形式:

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{ikx}\varphi^{(+)}(\mathbf{k}), \tag{3.23}$$

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{-ikx}\varphi^{(-)}(\mathbf{k}). \tag{3.24}$$

在(3.21)式和(3.22)式中归一化乘子的选择,从动力学变量的表式中就会清楚(参阅下面(3.26)).

将(3.14),(3.23)和(3.24)诸式代到能量密度的表式(3.4)中,而且对组态空间积分,我

1) Heitler 书的最近一版(1956)中也采用这样的记号系统.

们得到

$$P^0 = \int T^{00} d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int\left[\sum_k \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)^2 + m^2\varphi^2\right] d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\left\{\sum_k \left(\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^k} + 2\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x^k} + \frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x^k}\right) +\right.$$

$$\left. + m^2(\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x) + 2\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x))\right\} =$$

$$= \int d\mathbf{x}\left\{\sum_k \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x^k} + m^2\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x)\right\}. \tag{3.25}$$

因为，例如

$$\int d\mathbf{x}\left\{\sum_n \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^n} + m^2\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x)\right\} =$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'}{2\sqrt{k^0 k'^0}}\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k}')e^{i(k^0+k'^0)x^0}\left(m^2 - \sum_n k^n k'^n\right)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{x}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} =$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{2k^0}\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(-\mathbf{k})e^{2ik^0x^0}(m^2 - k^0k^0 + \mathbf{kk}).$$

而且因为

$$m^2 - k^0k^0 + \mathbf{kk} = m^2 - k^2 = 0,$$

我们得到

$$\int d\mathbf{x}\left\{\sum_n \frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x^n} + m^2\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x)\right\} = 0$$

对于 $\varphi^{(-)}$ 的二次型有相似的关系式. 利用与此完全相似的计算，现在可以得到

$$P^0 = \int d\mathbf{k}\cdot k^0\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) \qquad (k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}).$$

动量矢量的相应表式为

$$P^\alpha = \int T^{0\alpha}d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k}\cdot k^\alpha\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

把这些表式统一成如下形式，即使在整个计算过程中认为函数 $\varphi^{(+)}$ 与 $\varphi^{(-)}$ 是互不对易的，它也是正确的，

$$P^n = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}^n(\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) + \varphi^{(-)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k})). \tag{3.26}$$

这样的表示式当标量场量子化时是有用处的.

现在我们可以看清楚(3.21)式和(3.22)式中归一化的意义. 所选择的振幅 $\varphi^{(+)}(\mathbf{k})$ 和 $\varphi^{(-)}(\mathbf{k})$ 使乘积 $\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k})$ 可以解释为动量为 $\mathbf{k}$、能量为 $k^0$ 而质量为 $m = \sqrt{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}$ 和电荷及自旋为零的粒子的平均数密度. 中性赝标量 $\pi^0$ 介子是这种无电荷无自旋粒子的一个例子.

利用四维振幅 $\varphi^{(+)}(k)$ 和 $\varphi^{(-)}(k)$，能量-动量四维矢量可以表示成明显的协变形式:

$$P^n = \frac{1}{2}\int dk\cdot k^n\theta(k^0)\delta(k^2 - m^2)(\varphi^{(+)}(k)\varphi^{(-)}(k) + \varphi^{(-)}(k)\varphi^{(+)}(k)). \tag{3.27}$$

## 3.3. 分立动量表象

在好些场合下，有时采用分立动量表象是便利的. 这时认为場是限制在体积为 $V = L^3$ 的空间立方体中，其中 $L$ 是立方体的边长，从 $\varphi$ 对每一空间坐标的周期为 $L$ 这一周期性条件，我们得到 $\varphi$ 可以表示成如下的求和形式：

$$\varphi(x) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n_1,n_2,n_3} \frac{\varphi^{(+)}_{n_1,n_2,n_3}}{\sqrt{2k^0}} \exp\left[\frac{2\pi i}{L}(n_0x^0 - n_1x^1 - n_2x^2 - n_3x^3)\right] +$$

$$+ \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{n_1,n_2,n_3} \frac{\varphi^{(-)}_{n_1,n_2,n_3}}{\sqrt{2k^0}} \exp\left[-\frac{2\pi i}{L}(n_0x^0 - n_1x^1 - n_2x^2 - n_3x^3)\right], \qquad (3.28)$$

在此式中 $n_1$，$n_2$ 和 $n_3$ 取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的一切整数值，而

$$k^0 = \frac{2\pi}{L} n_0, \qquad n_0 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \frac{L^2m^2}{4\pi^2}}.$$

在(3.28)式中对动量求和时，动量各分量是 $2\pi/L$ 的整数倍. 显然，令立方体的线度 $L$ 趋于无穷大，取极限即得连续表象，在这一取极限过程中

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \to d\mathbf{k}, \qquad (3.29)$$

而且还有

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3/2} \varphi_n \to \varphi(\mathbf{k}). \qquad (3.30)$$

利用这些极限过程法则，不难证明，能量-动量四维矢量(3.26)在分立表象中具有如下形式：

$$P^m = \sum_{n_1,n_2,n_3} k^m \varphi^{(+)}_{n_1,n_2,n_3} \varphi^{(-)}_{n_1,n_2,n_3}. \qquad (3.31)$$

利用(3.31)式，限于 $L^3$ 体积内的場可以解释为具有无穷多个自由度的系统——无穷多粒子的集合；通常从哈密顿形式的观点引进正则坐标和动量，将这些粒子解释为能量等于

$$k^0 = \frac{2\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \frac{L^2m^2}{4\pi^2}},$$

而动量等于

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \qquad (\mathbf{n} = n_1, n_2, n_3)$$

的場振子.

此时振幅的二次型组合 $\varphi_n^{(+)}\varphi_n^{(-)}$ 所起的作用，相当于具有已知能量和动量的粒子的平均数.

## 3.4. 复标量场

复标量场理论的构成与实标量场相同，其差别只在于复标量场用复函数描述

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

也就是说，实质上，要用两个独立的实函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$. 但是在我们的叙述中不应用 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$，而应用它们的组合较为方便，即应用 $\varphi$ 和 $\varphi^* = \varphi_1 - i\varphi_2$.

复场的拉格朗日函数密度可写成与实场拉格朗日函数密度相似的形式：

$$\mathscr{L} = \sum_n g^{nn} \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n} - m^2\varphi^*(x)\varphi(x). \qquad (3.32)$$

如认为函数 $\varphi$ 和 $\varphi^*$ 是相互独立的，并利用 §3 中的公式，就可从以上表式得到：场方程

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (\Box - m^2)\varphi^*(x) = 0;$$

能量-动量张量

$$T^{kl} = g^{kk}g^{ll}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^l}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) - g^{kl}\mathscr{L}; \tag{3.33}$$

能量-动量四维矢量的密度

$$T^{00} = \sum_k \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + m^2\varphi^*\varphi, \quad T^{0a} = -\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right); \tag{3.34}$$

以及四维流矢量

$$J^k = ig^{kk}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^k}\varphi\right). \tag{3.35}$$

复标量场的自旋矩等于零，这与实标量场相同.

如果分解为正负频率两部分，并化成动量表象：

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\delta(k^2 - m^2)e^{\pm ikx}\varphi^{(\pm)}(k),$$

$$\varphi^{*(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk\delta(k^2 - m^2)e^{\pm ikx}\varphi^{*(\pm)}(k),$$

对变量 $k^0$ 积分后，得到

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{\pm ikx}\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}), \tag{3.36}$$

$$\varphi^{*(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{\pm ikx}\varphi^{*(\pm)}(\mathbf{k}), \tag{3.37}$$

其中所引进的三维振幅与上面所讨论的实场的情况相似：

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}) &= \frac{\varphi^{(\pm)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\\ \varphi^{*(\pm)}(\mathbf{k}) &= \frac{\varphi^{*(\pm)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\end{aligned}\right\} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}).$$

显然，在 $k$ 表象中对频率函数所采用的标记是这样的：例如 $\varphi^{*(+)}(k)$ 不表示 $\varphi^{(+)}(k)$ 的复共轭，而表示 $\varphi^*(k)$ 的正频部分. 因此在动量表象下复共轭法则的形式为

$$(\varphi^{(+)}(k))^* = \varphi^{*(-)}(k), \quad (\varphi^{(-)}(k))^* = \varphi^{*(+)}(k). \tag{3.38}$$

将展开式(3.36)和(3.37)代到能量-动量密度(3.34)及电荷(3.35)中，对组态空间积分后，我们得到

$$\left.\begin{aligned}P^l = \int d\mathbf{k}\, k^l\{&\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) + \varphi^{*(-)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\}\\ &(l = 0, 1, 2, 3, \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),\end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

$$Q = \int d\mathbf{k}\{\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) - \varphi^{*(-)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\}. \tag{3.40}$$

从能量动量四维矢量和电荷的上述表式知道，乘积 $\varphi^{*(-)}(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k})$ 可以解释为质量为

$m$、能量为 $k^0$、动量为 $\mathbf{k}$ 而电荷为 $-1$ 的粒子的平均数密度，而乘积 $\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k})$ 可以解释为能量为 $k^0$、动量为 $\mathbf{k}$ 而电荷为 $+1$ 的粒子的平均数密度.

因此在量子化后（§ 10），$\varphi^{*(+)}(k)$ 描述质量为 $m$、动量为 $\mathbf{k}$、电荷为 1 的粒子的产生，而 $\varphi^{(-)}$ 描述这种粒子的消失. 对于 $\varphi^{(+)}$ 和 $\varphi^{*(-)}$ 存在着类似的对应.

因此复标量场描述带正电荷和负电荷的无自旋粒子. 赝标量 $\pi^+$ 介子和 $\pi^-$ 介子就是这类粒子的例子.

## §4. 矢 量 場

### 4.1. 拉格朗日函数密度. 补充条件和不变量

描述矢量场的函数由四个分量 $U_0$, $U_1$, $U_2$ 和 $U_3$ 组成的，这四个分量一起构成协变的四维矢量，也就是说，在 Lorentz 转动变换

$$x'^k = x^k + \delta x^k, \quad \delta x^k = \sum_n g^{nn} x^n \omega^{kn}, \quad \omega^{kn} + \omega^{nk} = 0$$

之下，它们按照公式

$$U'_k(x') = U_k(x) + \delta U_k, \quad \delta U_k = g^{kk} \sum_n U_n(x)\omega^{nk} \tag{4.1}$$

而变换.

将上节所发展的形式推广到矢量场，最简单的可能性是选择矢量场的拉格朗日函数密度如下式（为简单起见，我们暂且只讨论实矢量场）：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\sum_{n,m} g^{nn}g^{mm}\frac{\partial U_n}{\partial x^m}\frac{\partial U_n}{\partial x^m} + \frac{m^2}{2}\sum_k g^{kk}U_kU_k, \tag{4.2}$$

即为分别对应于分量 $U_0, U_1, U_2$ 和 $U_3$ 的四个“拉格朗日函数密度”的协变和. 显然，由这一拉格朗日函数密度可以对每一分量 $U_k$ 导出 Klein-Gordon 方程和动力学变量，后者是标量场中相应表式的自然推广. 但是，显然易见，这一种理论在与分量 $U_0$ 相应的能量式中将导致负号项. 解决这一困难的出路在于给分量 $U_k$ 加上具有不变性的补充条件[1]

$$\sum_k g^{kk}\frac{\partial U_k}{\partial x^k} = 0. \tag{4.3}$$

这个条件使线性独立分量的个数由四个减少到三个，正如下面将要证明的，这就保证了矢量场能量的恆正性. 余下的三个独立分量相当于在已知轴上自旋投影的三个可能值，分别等于 1, 0, $-1$，即描述自旋为 1 的粒子. 加上补充条件(4.3)就相当于去掉自旋为零的粒子，正是这一自旋为零的粒子在这种理论中使能量取负值.

因此，在叙述矢量场理论时，通常（例如，Wentzel (1947) 94 页，Pauli (1947б) 33 页）选择拉格朗日函数密度的形式，使得除了场方程外，还自动保证补充条件(4.3)成立. 详细的计算，读者可参阅上引文献，此处只指出，这种方案能够以如下的拉格朗日函数密度为基础：

---

1) 这一条件是唯一可能的对场函数为线性的不变性条件.

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{n,m}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n}\right)^2 g^{nn}g^{mm} + \frac{m^2}{2}\sum_n g^{nn}U_nU_n, \tag{4.4}$$

此式与(4.2)式只差一项

$$\frac{1}{2}\sum_{n,m} g^{nn}g^{mm}\frac{\partial U_n}{\partial x^m}\frac{\partial U_m}{\partial x^n}. \tag{4.5}$$

可以看到，选择拉格朗日函数密度的任意性，是由于用矢量分量的一阶导数可以构成几种不同的不变式.

电磁场也可以用矢量势来描述. 在选取拉格朗日函数密度时也发生这种任意性. 但是在电磁场理论中，由于质量等于零，不可能构成自动保证补充条件(4.3)成立的形式. 因此，在经典理论中，通常用相应的梯度变换以保证满足条件(4.3)(参阅§5). 但是，在电磁场量子化时(参看第二章§13)，条件(4.3)作为量子化势分量之间的泛函关系是不可能满足的. 因为这一关系与对易关系并不相容. 那里需要对许可状态加上一些条件，相当于只要求平均值满足条件(4.3).

这样，在电磁场理论中，补充条件的采用是与拉格朗日形式无关的. 因此，在向量场中补充条件(4.3)自然也和拉格朗日形式无关. 例如，可以利用(4.2)类型的拉格朗日函数密度，并加上与它无关的条件(4.3).

此处发生了拉格朗日函数密度非单值性的具体结构问题，以及这一非单值性对动力学变量的影响问题. 关于这方面，我们注意到，与上述两个拉格朗日函数密度之差对应的作用量，经过分部积分后，并考虑到条件(4.3)，就等于零. 因此，拉格朗日函数密度(4.2)和(4.4)所相应的作用量是等效的. 拉格朗日函数密度(4.2)和(4.4)导致不同的能量-动量张量、动量矩张量等等. 但是，在能量-动量张量的下述例子中将要证明，考虑到补充条件和场方程以后，上述各量的差可以用相应的散度来表示，结果能量-动量矢量这类力学量也是互相等效的. 这一点已经足够，因为根据§2中所作的说明，单值确定能量-动量张量类型量之值，将超出本书所探讨问题的范围.

我们来讨论构成矢量场的拉格朗日形式问题，我们注意到，根据一般性质，实矢量场描述中性粒子，而复场描述荷电粒子. 为简单起见，我们将限于讨论复矢量场. 此时考虑到，实场的相应运算只有在计算流和荷时才会给出本质上不同的结果.

根据以上所述，我们将矢量场的拉格朗日函数密度选为

$$\mathscr{L} = -\sum_{k,n} g^{kk}g^{nn}\frac{\partial U_k^*}{\partial x^n}\frac{\partial U_k}{\partial x^n} + m^2\sum_n g^{nn}U_n^*U_n, \tag{4.6}$$

再加上与此式无关的 $U$ 和 $U^*$ 的补充条件

$$\sum_n g^{nn}\frac{\partial U_n}{\partial x^n} \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \sum_n g^{nn}\frac{\partial U_n^*}{\partial x^n} \equiv \left(\frac{\partial U^*}{\partial x}\right) = 0,$$

并利用§2中的公式，由拉格朗日函数密度(4.6)，得到：场方程

$$(\Box - m^2)U_n(x) = 0, \quad (\Box - m^2)U_n^*(x) = 0;$$

能量-动量张量

$$T^{kl} = -g^{kk}g^{ll}\sum_n g^{nn}\left(\frac{\partial U_n^*}{\partial x^k}\frac{\partial U_n}{\partial x^l} + \frac{\partial U_n^*}{\partial x^l}\frac{\partial U_n}{\partial x^k}\right) - g^{kl}\mathscr{L}; \tag{4.7}$$

流矢量

$$J^k = -ig^{kk}\sum_m g^{mm}\left(U_m^*\frac{\partial U_m}{\partial x^k} - \frac{\partial U_m^*}{\partial x^k}U_m\right); \tag{4.8}$$

及自旋矩张量

$$S_{lm}^k = g^{kk}\left(U_m^*\frac{\partial U_l}{\partial x^k} + \frac{\partial U_l^*}{\partial x^k}U_m - U_l^*\frac{\partial U_m}{\partial x^k} - \frac{\partial U_m^*}{\partial x^k}U_l\right). \tag{4.9}$$

根据上述注记，能量-动量张量 (4.7) 虽然对于指标 $k$ 和 $l$ 是对称的，却和通常的能量-动量的对称张量不相重合，后者与(4.4)类型的拉格朗日函数密度相应，且具有下列形式[1]：

$$\theta^{kl} = -g^{kk}g^{ll}\sum_m (H_{km}^*H_{lm} + H_{lm}^*H_{km})g^{mm} + \frac{1}{2}g^{kl}\sum_{n,m} g^{nn}g^{mm}H_{nm}^*H_{nm} +$$
$$+ m^2g^{kk}g^{ll}(U_l^*U_k + U_k^*U_l) - m^2g^{kl}\sum_n g^{nn}U_n^*U_n, \tag{4.10}$$

其中引用记号

$$H_{mn} = \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n}, \quad H_{mn}^* = \frac{\partial U_n^*}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m^*}{\partial x^n}.$$

但是不难证明，这一差别不是本质的. 事实上，张量(4.7)和(4.10)之差可以表示成

$$T^{kl} - \theta^{kl} = \sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} f_1^{kn,l} + g^{kk}g^{ll}f_{2,kl} + g^{kk}g^{ll}f_{3,kl}.$$

在上式的散度记号下出现的张量

$$f_1^{kn,l} = \frac{1}{2}\sum_m U_m^*\left(g^{kl}g^{nn}\frac{\partial U_n}{\partial x^m} - g^{nl}g^{kk}\frac{\partial U_k}{\partial x^m}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_m \left(g^{kl}g^{nn}\frac{\partial U_n^*}{\partial x^m} - g^{nl}g^{kk}\frac{\partial U_k^*}{\partial x^m}\right)U_m + g^{kk}g^{nn}g^{ll}(U_l^*H_{nk} + H_{nk}^*U_l) +$$
$$+ \frac{1}{2}g^{kk}g^{nn}g^{ll}\left\{\left(U_n^*\frac{\partial U_k}{\partial x^l} - U_k^*\frac{\partial U_n}{\partial x^l}\right) + \left(\frac{\partial U_k^*}{\partial x^l}U_n - \frac{\partial U_n^*}{\partial x^l}U_k\right)\right\}$$

对指标 $k$ 和 $n$ 是反对称的：

$$f_1^{kn,l} = -f_1^{nk,l}.$$

根据 § 2 中所作的注记，它对能量-动量四维矢量是无影响的. 其余两个张量

$$f_{2,kl} = \frac{1}{2}\left\{U_k^*\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U^*}{\partial x^l}\right)\frac{\partial U_k}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x}\right)U_k - \frac{\partial U_k^*}{\partial x^l}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right\} -$$
$$- \frac{1}{2}g^{kl}\sum_m\left\{U_m^*\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x}\right)U_m\right\} +$$
$$+ U_l^*\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x}\right)U_l,$$

和

$$f_{3,kl} = U_l^*(\Box U_k - m^2U_k) + (\Box U_k^* - m^2U_k^*)U_l,$$

---

1) 例如参看 Pauli (1947 6) 33 页或 Wentzel (1947) 104 页.

在上述表式中一般而言没有贡献，因为由于所加的补充条件和场方程，它们恆等于零．这样，考虑到补充条件，张量(4.7)化为通常形式的能量-动量四维向量．下面我们通过直接的计算，也可以证明这一点．

(4.8)和(4.9)二式和通常理论中的相应表式并不一致，但不言而明，我们可以进行类似的讨论．

在(4.7)式中令 $k=0$，可得能量-动量四维矢量的空间密度

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= -\sum_{k,n} g^{nn}\frac{\partial U_n^*}{\partial x^k}\frac{\partial U_n}{\partial x^k} - m^2\sum_n g^{nn}U_n^*U_n, \\ T^{0\alpha} &= \sum_n g^{nn}\left(\frac{\partial U_n^*}{\partial x^0}\frac{\partial U_n}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial U_n^*}{\partial x^\alpha}\frac{\partial U_n}{\partial x^0}\right),\quad \alpha=1,2,3. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

从式(4.8)和(4.9)用类似方式，可以推出荷密度

$$J^0 = -i\sum_n g^{nn}\left(U_n^*\frac{\partial U_n}{\partial x^0}-\frac{\partial U_n^*}{\partial x^0}U_n\right), \tag{4.12}$$

及自旋矢量 **S** 分量的空间密度

$$\left.\begin{aligned} &S_1=\int S_{23}^0 d\mathbf{x},\quad S_2=\int S_{31}^0 d\mathbf{x},\quad S_3=\int S_{12}^0 d\mathbf{x}, \\ &S_{\alpha\beta}^0 = U_\beta^*\frac{\partial U_\alpha}{\partial x^0}+\frac{\partial U_\alpha^*}{\partial x^0}U_\beta - U_\alpha^*\frac{\partial U_\beta}{\partial x^0}-\frac{\partial U_\beta^*}{\partial x^0}U_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

### 4.2. 化为动量表象

为了进一步计算力学量，通常化为动量表象

$$U_n(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk e^{ikx}\delta(k^2-m^2)U_n(k),$$

$$U_n^*(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk e^{ikx}\delta(k^2-m^2)U_n^*(k),$$

而且将势 $U$ 和 $U^*$ 分解为正频率和负频率两部分：

$$U_n(x)=U_n^{(+)}(x)+U_n^{(-)}(x),\quad U_n^*(x)=U_n^{*(+)}(x)+U_n^{*(-)}(x).$$

对变量 $k^0$ 作积分，得到势的三维动量表象如下：

$$\left.\begin{aligned} U_n^{(\pm)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{\pm ikx}U_n^{(\pm)}(\mathbf{k}), \\ U_n^{*(\pm)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}e^{\pm ikx}U_n^{*(\pm)}(\mathbf{k}). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

其中引用本书的通常记号：

$$\left.\begin{aligned} &U_n^{(\pm)}(\mathbf{k})=\frac{U_n^{(\pm)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\quad U_n^{*(\pm)}(\mathbf{k})=\frac{U_n^{*(\pm)}(k)}{\sqrt{2k^0}},\quad (k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}), \\ &U_n^{(\pm)}(k)=\theta(k^0)U_n(\pm k),\quad U_n^{*(\pm)}(k)=\theta(k^0)U_n^*(\pm k). \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

这时我们记住，根据动量振幅的定义，复共轭条件的形式为

$$(U_n(k))^*=U_n^*(-k),\quad \text{因此}\ (U_n^{(\pm)}(k))^*=U^{*(\mp)}(k). \tag{4.16}$$

将展开式(4.14)代到式(4.11),(4.12),(4.13)中，并对 $d\mathbf{x}$ 积分，得到：能量-动量四维矢量

$$P^n = \int T^{0n} d\mathbf{x} = -\int d\mathbf{k} \cdot k^n \left\{ \sum_m g^{mm} (U_m^{*(-)}(\mathbf{k}) U_m^{(+)}(\mathbf{k}) + U_m^{*(+)}(\mathbf{k}) U_n^{(-)}(\mathbf{k})) \right\}; \quad (4.17)$$

荷

$$Q = \int J^0 d\mathbf{x} = -\int d\mathbf{k} \sum_n g^{nn} (U_n^{*(+)}(\mathbf{k}) U_n^{(-)}(\mathbf{k}) - U_n^{*(-)}(\mathbf{k}) U_n^{(+)}(\mathbf{k})); \quad (4.18)$$

和自旋矢量

$$\mathbf{S} = i \int d\mathbf{k} \{ [U^{*(+)}(\mathbf{k}) \times U^{(-)}(\mathbf{k})] + [U^{*(-)}(\mathbf{k}) \times U^{(+)}(\mathbf{k})] \}. \quad (4.19)$$

可以看出，自旋矢量(4.19)是不变量，这是由于能量-动量张量(4.7)的对称性.

考虑到复共轭条件(4.16)，我们注意到根据(4.17)式，在能量式 $P^0$ 中，$m = 0$ 之项是负的，因此能量不是正定的. 以前已经提到，加上补充条件后，上述困难可以克服. 在三维动量表象(4.14)中，补充条件所具有的形式为

$$\sum_n k^n U_n^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 0, \quad \sum_n k^n U_n^{*(\pm)}(\mathbf{k}) = 0. \quad (4.20)$$

由于这些条件，分量 $U_n$ 不再是独立的了. 利用(4.20)式，将分量 $U_0$ 用其他分量来表示：

$$U_0^{(\pm)}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^0} \sum_\alpha k^\alpha U_\alpha^{(\pm)}(\mathbf{k}), \quad U_0^{*(\pm)}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^0} \sum_\alpha k^\alpha U_\alpha^{*(\pm)}(\mathbf{k}),$$

$$(\alpha = 1, 2, 3),$$

我们对于出现于积分号下的二次型，可以得到只与势的“空间”分量有关的如下表式：

$$-\sum_n g^{nn} U_n^{*(\pm)}(\mathbf{k}) U_n^{(\mp)}(\mathbf{k}) = \sum_\alpha U_\alpha^{*(\pm)}(\mathbf{k}) U_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k}) -$$

$$-\frac{1}{(k^0)^2} \left( \sum_\alpha k^\alpha U_\alpha^{*(\pm)}(\mathbf{k}) \right) \left( \sum_\beta k^\beta U_\beta^{(\mp)}(\mathbf{k}) \right). \quad (4.21)$$

利用线性代换

$$\mathbf{U}(k) = \mathbf{e}_1 a_1(k) + \mathbf{e}_2 a_2(k) + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \frac{k^0}{m} a_3(k), \quad (4.22)$$

可将(4.21)对角化，此处(4.22)式是势 $U_\alpha$ 沿横向和纵向分量的分解，$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是复数单位矢量，与波矢 $\mathbf{k}$ 正交，相互之间也正交：

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_r^* \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s) = (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s^*) = 0,$$

$$(r, s = 1, 2),$$

并为横向极化的单位矢量.

将(4.22)式代入(4.21)式中，经过简单计算，求得

$$-\sum_n g^{nn} U_n^{*(\pm)}(\mathbf{k}) U_n^{(\mp)}(\mathbf{k}) = \sum_\alpha a_\alpha^{*(\pm)}(\mathbf{k}) a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k}).$$

将此式代入(4.17)式和(4.18)式中，我们得到能量-动量和电荷的对角化形式，而且用新变量表示的能量显然是正定的：

$$P^l = \int d\mathbf{k}\cdot k^l \left\{\sum_\alpha a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) + \sum_\beta a_\beta^{*(-)}(\mathbf{k})a_\beta^{(+)}(\mathbf{k})\right\}, \tag{4.23}$$

$$Q = \int d\mathbf{k}\left\{\sum_\alpha a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) - \sum_\beta a_\beta^{*(-)}(\mathbf{k})a_\beta^{(+)}(\mathbf{k})\right\}. \tag{4.24}$$

### 4.3. 矢量场的自旋

为了阐明振幅 $a$ 与自旋变量之间的关系，我们讨论自旋矢量在波矢方向上的投影. 将(4.22)式代入(4.19)式中，我们得到

$$S_3 = i\int d\mathbf{k}\{a_1^{*(+)}(\mathbf{k})a_2^{(-)}(\mathbf{k}) - a_2^{*(+)}(\mathbf{k})a_1^{(-)}(\mathbf{k}) + a_2^{*(-)}(\mathbf{k})a_1^{(+)}(\mathbf{k}) - \\ - a_1^{*(-)}(\mathbf{k})a_2^{(+)}(\mathbf{k})\}. \tag{4.25}$$

利用线性替代

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(\pm)} &= \frac{b_1^{(\pm)} + b_2^{(\pm)}}{\sqrt{2}}, \quad a_2^{(\pm)} = \frac{b_1^{(\pm)} - b_2^{(\pm)}}{i\sqrt{2}}, \quad a_3^{(\pm)} = b_3^{(\pm)}, \\ a_1^{*(\pm)} &= \frac{b_1^{*(\pm)} + b_2^{*(\pm)}}{\sqrt{2}}, \quad a_2^{*(\pm)} = i\frac{b_1^{*(\pm)} - b_2^{*(\pm)}}{\sqrt{2}}, \quad a_3^{*(\pm)} = b_3^{*(\pm)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

将(4.25)式对角化，且不改变 $P$ 和 $Q$ 的对角形式：

$$P^n = \int d\mathbf{k}\cdot k^n \sum_\alpha \{b_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})b_\alpha^{(+)}(\mathbf{k}) + b_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})b_\alpha^{(-)}(\mathbf{k})\}, \tag{4.27}$$

$$Q = \int d\mathbf{k}\sum_\alpha \{b_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})b_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) - b_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})b_\alpha^{(+)}(\mathbf{k})\}, \tag{4.28}$$

$$S_3 = \int d\mathbf{k}\{b_1^{*(+)}(\mathbf{k})b_1^{(-)}(\mathbf{k}) - b_1^{*(-)}(\mathbf{k})b_1^{(+)}(\mathbf{k}) + b_2^{*(-)}(\mathbf{k})b_2^{(+)}(\mathbf{k}) - \\ - b_2^{*(+)}(\mathbf{k})b_2^{(-)}(\mathbf{k})\}. \tag{4.29}$$

从这些公式可以看出，可以将振幅 $b^{*(\pm)}$ 和 $b^{(\pm)}$ 的二次型组合看作能量、动量、电荷及在运动方向上的自旋投影具有确定值的粒子的平均数密度. 因此，例如说，量 $b_2^{*(-)}(\mathbf{k})b_2^{(+)}(\mathbf{k})$ 表示动量为 $\mathbf{k}$、能量为 $k^0$、电荷为 $-1$ 而自旋在运动方向上的投影等于 $+1$ 的粒子的密度；与此相似，$b_3^{*(-)}(\mathbf{k})b_3^{(+)}(\mathbf{k})$ 是动量为 $\mathbf{k}$、能量为 $k^0$、电荷为 $-1$ 而自旋投影为零的粒子数密度，等等. 与此相应，以下将要证明（参阅第二章），量子化后振幅 $b_2^{(+)}(\mathbf{k})$ 描述能量为 $k^0$、动量为 $\mathbf{k}$、电荷为 $-1$、自旋投影为 $+1$ 的粒子的产生，而振幅 $b_2^{*(-)}(k)$ 描述这一粒子的消失，等等.

我们发现，根据(4.24)式，振幅 $a_{1,2}$ 与圆偏振相应.

因此，复矢量场描述带正电及负电的、质量为 $m = \sqrt{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2}$、自旋矢量在运动方向上的三个投影可能值分别等于 1，0，$-1$ 的粒子. 显而易见，这一对应只有量子理论才能给予严格论证.

### 4.4. Klein-Gordon 方程的一阶方程组形式

我们注意到，在一般情况下，方程组

$$(\Box - m^2)u_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{4.30}$$

可以用下列一阶方程组来代替：

$$\left(i\sum_n \Gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - M\right)u(x) = 0, \tag{4.31}$$

其中 $\Gamma^n$ 及 $M$ 是某些正方矩阵，而函数 $u$ 的分量数 $r(r>s)$ 等于矩阵 $\Gamma$ 和 $M$ 的阶，矩阵的性质决定于函数 $u$ 的变换定律(即函数的张量性质)以及方程(4.31)的协变性条件.

特别是，如果矩阵 $\Gamma$ 决定于条件

$$\Gamma^n\Gamma^m + \Gamma^m\Gamma^n = 2g^{mn},$$

而矩阵 $M$ 是对角型时，在 § 6 中将要证明，则 $\Gamma$ 的唯一不可约羣表示的阶等于 4，而函数 $u$ 是四分量的旋量.

当 $\Gamma$ 决定于下列关系：

$$\Gamma^k\Gamma^n\Gamma^m + \Gamma^m\Gamma^n\Gamma^k = g^{kn}\Gamma^m + g^{mn}\Gamma^k, \tag{4.32}$$

而 $M$ 是对角矩阵时，Duffin (1938) 和 Kemmer (1939) 已经研究过(也可参阅 Pauli (1947b))．这时矩阵的阶等于 16．其对应的表示分解为三个不可约表示．其中第一个表示，$u$ 为单分量，且等于零；第二个表示，$u$ 是五个分量的；而第三个表示，$u$ 是十个分量的．五个分量的函数给出一个标量表象，相当于标量及其四个梯度，并描述自旋为零的粒子．十个分量的函数给出一个矢量表象，相当于 4-矢量 $U$ 和张量的六个分量

$$H_{mn} = \frac{\partial U_n}{\partial x^m} - \frac{\partial U_m}{\partial x^n},$$

并且描述自旋为 1 的粒子.

方程(4.31)的 Lorentz 协变性条件对矩阵 $\Gamma$ 加上某些关系，使矩阵 $\Gamma$ 与波函数 $u$ 的变换定律连系起来．为此，试讨论无穷小旋转变换(在平移变换下，方程(4.31)的协变性是平庸的)：

$$x^n \to x'^n = x^n + \sum_k g^{kk}x^k\omega^{nk}, \quad \omega^{nk} + \omega^{kn} = 0,$$

此时函数 $u$ 按如下定律而变换：

$$u'(x') = \Lambda u(x). \tag{4.33}$$

根据协变性要求，方程(4.31)对新变量应保持原有形式：

$$\left(i\sum_n \Gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - M\right)u'(x') = 0.$$

将此处出现的对变换后坐标 $x'$ 的导数用对原先坐标 $x$ 的导数来表示，再乘以 $\Lambda^{-1}$，且将对小参数 $\omega$ 为一阶的项相等起来，我们获得变换矩阵 $\Lambda$ 与方程的系数 $\Gamma$ 和 $M$ 之间的关系：

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda^{-1}M\Lambda = M, \\ &\Lambda^{-1}\Gamma^k\Lambda = \Gamma^k + \sum_n g^{nn}\Gamma^n\omega^{kn}, \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

以上关系保证所讨论方程的协变性.

因此在 Duffin-Kemmer 理论中，場函数的张量变换定律具有形式(4.33)，而变换矩阵 $\Lambda$ 与場方程的矩阵系数相互有关．张量变换定律似乎具有了旋量变换的"外形"(参看 § 6)．显然，这一事实与場函数化为新的"独立分量"系有关，这些分量实际上是张量分量及其一阶导数的线性组合.

应用变分法，也可以从下列拉格朗日函数密度得到方程(4.31)：

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\sum_n \left(\bar{u}\Gamma^n \frac{\partial u}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^n}\Gamma^n u\right) - \bar{u}Mu. \tag{4.35}$$

此处出现的函数 $\bar{u}$ 称为对 $u$ "共轭"的函数，它满足方程

$$i\sum_n \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^n}\Gamma^n + \bar{u}M = 0,$$

并且 $\bar{u}$ 和对 $u$ 为复共轭的函数 $u^*$ 有下列线性矩阵关系

$$\bar{u} = u^* \Gamma. \tag{4.36}$$

利用拉格朗日函数密度(4.35)为实函数的条件，上述变换矩阵 $\Gamma$ 由 $\Gamma^k$ 及 $M$ 来决定. 因此，得到

$$(\Gamma)^{-1}\Gamma^{*k}\Gamma^* = \Gamma^k, \quad (\Gamma)^{-1}M^*\Gamma^* = M.$$

而且很明显，应用通常方法，从拉格朗日函数密度(4.35)，也可以得到各力学量的表式.

## §5. 电 磁 場

### 5.1. 电磁场的势

电磁场由熟知的 Maxwell 方程描述:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0.$$

为了使电磁场方程的写法更加对称，引进电磁场势的实协变四维矢量 $A_n (n=0, 1, 2, 3)$，使

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}_0$$

势 $A$ 的“四维旋度”分量构成熟悉的电磁场反对称张量

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}, \tag{5.1}$$

它的分量和电磁场强度矢量的分量之间有关系

$$E_\alpha = H_{\alpha 0} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad H_1 = H_{23}, \quad H_2 = H_{31}, \quad H_3 = H_{12}.$$

用下面简单明了的形式来表述这一关系，较为方便:

$$H_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用张量 $H_{kl}$，Maxwell 方程可写成形式

$$\sum_k g^{kk} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x^k} = 0 \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial H_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial H_{lm}}{\partial x^k} = 0 \qquad (k, l, m) = \begin{cases} 0, 1, 2, \\ 1, 2, 3, \\ 2, 3, 0, \\ 3, 0, 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

进一步将这些方程中的 $H_{kl}$ 化为势 $A_l$，我们发现(5.3)中的四个方程是定义(5.1)的推论，它不导致 $A_l$ 的任何方程，而(5.2)中的四个方程给出

$$\sum_k g^{kk} \frac{\partial^2 A_n}{(\partial x^k)^2} - \sum_k g^{kk} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^n} = 0. \tag{5.4}$$

由此可见，电磁场方程用势 $A_n$ 来表述的确是简明对称，而且是明显协变的.

## 5.2. 第二类梯度变换和 Lorentz 条件

我们再注意到，势 $A$ 的引进在相当强的程度上并非单值的. 问题在于：Maxwell 理论中的可观察量（例如矢量 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 及张量 $H_{kl}$）以及电磁场方程对于势 $A$ 的所谓第二类梯度变换

$$A_n(x) \to A'_n(x) = A_n(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \tag{5.5}$$

是不变的.

因此，势 $A$ 不是可观察量，也并非单值的. 在(5.5)式中，$f(x)$ 是具有一阶和二阶导数的任意函数.

可以利用势 $A$ 的上述非单值性使之满足某一补充条件. 通常选择所谓 Lorentz 条件作为补充条件：

$$\sum_k g^{kk} \frac{\partial A_k}{\partial x^k} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0, \tag{5.6}$$

此条件是唯一可能的对 $A$ 线性的不变条件. 不难证明，总能选择满足条件(5.6)的 $f(x)$.

考虑到 Lorentz 条件后，场方程(5.4)化为

$$-\sum_k g^{kk} \frac{\partial^2 A_l}{(\partial x^k)^2} \equiv \Box A_l = 0. \tag{5.7}$$

但是 Lorentz 补充条件还没有完全决定势 $A$. (5.6)和(5.7)两个关系对于“特殊的第二类梯度变换”

$$A_n(x) \to A'_n(x) = A_n(x) + \frac{\partial f_0(x)}{\partial x^n} \tag{5.8}$$

仍然是不变的.

这种特殊变换的特征在于任意函数 $f_0(x)$ 必须满足 d'Alembert 方程：

$$\Box f_0 = 0.$$

在任何的特殊 Lorentz 参考系中，可以选取 $f_0$ 使得 $A$ 的一个分量，例如“标量”势 $A_0$ 等于零. 此时 Lorentz 条件具有形式：

$$\sum_{a=1,2,3} \frac{\partial A_a}{\partial x^a} \equiv \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{5.9}$$

为了明确关系式(5.9)的物理意义，化为动量表象

$$A_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \delta(k^2) e^{ikx} A_n(k) \tag{5.10}$$

较为方便. 将(5.10)式代入(5.9)式中，得到

$$\sum_a k_a A_a(k)|_{k^2=0} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(k))|_{k^2=0} = 0. \tag{5.11}$$

条件(5.11)表示电磁场的横向性条件. 这样，虽然电磁场是由四分量的势来描述，只有垂直于波矢的二个线性独立分量才有物理意义. 需要着重强调，虽然横向性条件不是协变的，利用适当的特殊梯度变换(5.8)，可以使这一条件在任何特殊 Lorentz 系中都得到

满足.

我们还指出，由于梯度不变性条件，四分量场实际上化为两分量场，这一情况和场粒子(即光子)的静止质量为零有密切联系. 也就是由于这一重要性质，势 $A$ 从场方程中消去，而产生电磁场在梯度变换下的不变性.

### 5.3. 拉格朗日形式

回到拉格朗日形式，我们注意到(以后将会清楚，参阅第二章)，电磁场量子化后不能满足 Lorentz 补充条件(5.6)，如将此条件作为量子化后势 $A_n$ 各分量之间的关系. 在电磁场的量子理论中，Lorentz 条件需要换成对二次量子化波函数的附加条件，它仅仅保证算符 $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ 在许可状态中的平均值为零.

因此，象矢量场的情况一样，与通常的叙述不同，我们不将 Lorentz 条件和拉格朗日形式连系起来. 按照矢量场的形式来取拉格朗日函数密度但令质量 $m = 0$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\sum_{m,n} g^{mm}g^{nn}\frac{\partial A_m}{\partial x^n}\frac{\partial A_m}{\partial x^n}. \tag{5.12}$$

这一拉格朗日函数密度实际上等效于 Dirac-Фок-Подольский (1932) 的拉格朗日函数密度(参看 Wentzel (1947))

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{k,l} g^{kk}g^{ll}H_{kl}H_{kl} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2,$$

两者只差一散度:

$$\sum_{k,l}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\left[A_k\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - A_l\frac{\partial A_k}{\partial x^k}\right].$$

拉格朗日函数密度(5.12)和通常应用的梯度不变式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\sum_{k,l} g^{kk}g^{ll}H_{kl}H_{kl} \tag{5.13}$$

相差之量，在考虑到 Lorentz 条件并对整个时空作积分后等于零，故对系统的作用量没有影响.

同理，由拉格朗日函数密度(5.12)所得出的能量-动量张量和通常的梯度不变形式并不相同. 但是，正和矢量场的情况一样，两者之差用散度来表示，再考虑到场方程及 Lorentz 条件，对于系统的能量-动量四维矢量等动力学特征并无影响. 至于能量-动量张量本身(以及其他与它相类似的量)的单值性，则根据 § 2 中注记，是超出本书叙述范围的问题.

利用公式(2.4)，(2.20)，(2.27)，从拉格朗日函数密度(5.12)，应用通常手续，可以得到：场方程

$$\Box A_k = 0;$$

能量-动量张量

$$T^{kl} = -g^{kk}g^{ll}\sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n}{\partial x^k}\frac{\partial A_n}{\partial x^l} - g^{kl}\mathscr{L};$$

能量-动量的空间密度

$$T^{00} = -\frac{1}{2}\sum_{k,n} g^{nn}\left(\frac{\partial A_n}{\partial x^k}\right)^2, \quad T^{0\alpha} = \sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n}{\partial x^0}\frac{\partial A_n}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3); \quad (5.14)$$

自旋矩张量

$$S^k_{lm} = g^{kk}\left(A_m\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - A_l\frac{\partial A_m}{\partial x^k}\right);$$

和自旋矢量的空间密度

$$S^0_{\alpha\beta} = A_\beta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^0} - A_\alpha\frac{\partial A_\beta}{\partial x^0}. \quad (5.15)$$

我们对拉格朗日形式再附加上 Lorentz 条件

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0.$$

这时我们注意到，上述条件只是对非量子化电磁场理论而言的，在第二章中我们将会看到，当量子化后，这些条件用加于许可状态波函数的某些条件来代替，这些条件只在平均值意义上与 Lorentz 条件等效.

可以預计，我们得到的能量-动量张量及动量矩张量表式和通常在梯度不变的电磁场理论中所采用的对应表式不相同，后者是从梯度不变的拉格朗日函数密度(5.13)得到的. 但是，与§4中对矢量场的讨论完全相似，不难证明，相应张量之间的差可以表为以下二者之和，即适当的反对称散度项以及当考虑到场方程和 Lorentz 补充条件时化为零之项，这样，系统的动力学特征的表式是相同的.

为了计算动力学特征，将势分量分解为正频率及负频率部分：

$$A_n(x) = A_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)}(x),$$

再化为动量表象. 当我们写出三维动量表象的式子时，应当考虑三维动量振幅 $A(\mathbf{k})$ 与四维振幅 $A(k)$ 之间有通常的关系式(4.15)，而且前者满足如下的复共轭条件：

$$(A_n^{(\pm)}(\mathbf{k}))^* = A_n^{(\mp)}(\mathbf{k}).$$

### 5.4. 横向分量、纵向分量和时间分量

引入与动量矢量 $\mathbf{k}$ 相连的参考系，即化到动量空间的局部参考架. 先将 $A(\mathbf{k})$ 表示成纵向分量、横向分量及时间分量之和：

$$A_n^{(\pm)}(\mathbf{k}) = e_n^1 a_1^{(\pm)}(\mathbf{k}) + e_n^2 a_2^{(\pm)}(\mathbf{k}) + e_n^3 a_3^{(\pm)}(\mathbf{k}) + e_n^0 a_0^{(\pm)}(\mathbf{k}), \quad (5.16)$$

其中 $e^1$ 和 $e^2$ 是空间的单位极化矢量，它们相互正交，并与沿动量方向的单位矢量 $e_3$ 正交：

$$(\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad e_0^\alpha = 0, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

$$[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2] = \mathbf{e}^3, \quad [\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3] = \mathbf{e}^1, \quad [\mathbf{e}^3\mathbf{e}^1] = \mathbf{e}^2,$$

而 $e^0$ 为单位时间矢量，具有性质：

$$e_n^0 = \delta_{n0}, \quad \mathbf{e}^0\mathbf{e}^0 = 1, \quad \mathbf{e}^0\mathbf{e}^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

不难验证，当作变换(5.16)时，决定能量-动量四维矢量的基本二次型(比较(5.14))不

改变它的形式:

$$\sum_n g^{nn} A_n^{(+)}(\mathbf{k}) A_n^{(-)}(\mathbf{k}) = \sum_m g^{mm} a_m^{(+)}(\mathbf{k}) a_m^{(-)}(\mathbf{k}). \tag{5.17}$$

将展开式(5.16)代入分别写成正频率和负频率分量的 Lorentz 补充条件:

$$\sum_n k^n A_n^{(+)}(\mathbf{k}) = 0, \quad \sum_n k^n A_n^{(-)}(\mathbf{k}) = 0,$$

可得到两个关系

$$|\mathbf{k}| a_3^{(\pm)}(\mathbf{k}) + k^0 a_0^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 0.$$

注意到,由于质量 $m$ 为零, $|\mathbf{k}| = k^0$, 从这里得到

$$a_3^{(+)}(\mathbf{k}) a_3^{(-)}(\mathbf{k}) - a_0^{(+)}(\mathbf{k}) a_0^{(-)}(\mathbf{k}) = 0. \tag{5.18}$$

所得关系式(5.18)的意义在于: 由于 Lorentz 条件, "纵"光子 $a_3^{(+)} a_3^{(-)}$ 和"时间"光子 $a_0^{(+)} a_0^{(-)}$ 的平均数彼此相等,而它们对四维能量-动量的贡献是反号的. 因此,可以说, "纵"光子及"时间"光子仿佛相互"补偿". 将(5.18)式代入(5.17)式中,我们得到

$$-\sum_n g^{nn} A_n^{(+)}(\mathbf{k}) A_n^{(-)}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2} a_\nu^{(+)}(\mathbf{k}) a_\nu^{(-)}(\mathbf{k}). \tag{5.19}$$

然后计算能量-动量的四维矢量

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \left\{ -\sum_m g^{mm} A_m^{(+)}(\mathbf{k}) A_m^{(-)}(\mathbf{k}) \right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1,2} \int d\mathbf{k} \cdot k^n a_\mu^{(+)}(\mathbf{k}) a_\mu^{(-)}(\mathbf{k}), \tag{5.20}$$

我们发现,现在所讨论的情形和在矢量场中一样,只有在 Lorentz 补充条件下, 能量才是正定的.

## 5.5. 自旋

然后决定自旋矢量

$$\left.\begin{aligned} S_\alpha &= \int S^0_{\beta\gamma}\, dx \qquad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3), \\ \mathbf{S} &= i \int d\mathbf{k} [\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{k}) \times \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{k})] = i \int d\mathbf{k} [\mathbf{a}^{(+)}(\mathbf{k}) \times \mathbf{a}^{(-)}(\mathbf{k})], \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

由于张量 $T^{kl}$ 的对称性,它对时间是守恒的. 我们求得它在波矢方向 $\mathbf{k}$ 的投影为

$$S_3 \sim i(a_1^{(+)}(\mathbf{k}) a_2^{(-)}(\mathbf{k}) - a_2^{(+)}(\mathbf{k}) a_1^{(-)}(\mathbf{k})). \tag{5.22}$$

正如在 § 4,引入新振幅 $b_1^{(\pm)}$ 及 $b_2^{(\pm)}$,得到 $P^n$ 及 $S_3$ 的"对角"式

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n (b_1^{(+)}(\mathbf{k}) b_1^{(-)}(\mathbf{k}) + b_2^{(+)}(\mathbf{k}) b_2^{(-)}(\mathbf{k})), \tag{5.23}$$

$$S_3 = \int d\mathbf{k} (b_1^{(+)}(\mathbf{k}) b_1^{(-)}(\mathbf{k}) - b_2^{(+)}(\mathbf{k}) b_2^{(-)}(\mathbf{k})), \tag{5.24}$$

从这些表式可以直接推出,乘积

$$b_i^{(+)}(\mathbf{k}) b_i^{(-)}(\mathbf{k}) \qquad (i = 1, 2)$$

可以认为是质量为零、动量为 $\mathbf{k}$、能量为 $k^0 = |\mathbf{k}|$、自旋矩在波矢 $\mathbf{k}$ 方向的投影为 $+1(i = 1)$ 及 $-1(i = 2)$ 的粒子数的平均值,事实上,我们讨论的是光子.

因此化成动量表象后，可以清楚地证明电磁场是描述在运动方向上自旋投影有两个可能值的横光子．显然只有二次量子化才能对理论上的这一对应提供严格的论证．

## §6. 旋量場． Dirac 矩陣和旋量函数的变换定律

### 6.1. Klein-Gordon 算符的分解

我们来讨论最简单的旋量场，以下将要证明，这种场描述自旋为 1/2 的荷电粒子，例如，电子和正电子．根据 Dirac，相应的方程是通过 Klein-Gordon 算符

$$\Box - m^2 = \sum_n g^{nn} P^n P^n - m^2 \tag{6.1}$$

的线性化而得到的．此处为了书写方便，利用通常量子力学的记号

$$P^n = ig^{nn} \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

算符 (6.1) 对导数 $\frac{\partial}{\partial x^n}$ 是二次的，而且容易证明，它不能分解为两个对 $P^n$ 为线性的、含有数字系数的乘子的乘积．事实上，如果依照二项平方差的因式分解公式，试将(6.1)式表为形式：

$$\Box - m^2 = (P - m)(P + m),$$

其中 $P$ 是算符 $P^k$ 以 $\gamma^k$ 为系数的某一线性组合，

$$P = \sum_k g^{kk} P^k \gamma^k,$$

为此，必须要求满足下面的关系式：

$$\sum_n g^{nn} P^n P^n = \left( \sum_k g^{kk} P^k \gamma^k \right)^2,$$

展开上式的右方，就获得决定系数 $\gamma$ 的条件

$$\gamma^n \gamma^m + \gamma^m \gamma^n = 2g^{mn}. \tag{6.2}$$

从这一条件看出，由于具有不同指标的量 $\gamma^k$ 是反对易的，它们并不是数，而可以选择为矩陣．

利用这些量，可以将 Klein-Gordon 算符表成为二个对易的矩陣算符相乘的形式：

$$\Box - m^2 = \left( i \sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \left( i \sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m \right), \tag{6.3}$$

为了使场函数满足 Klein-Gordon 方程

$$(\Box - m^2)\psi = 0, \tag{6.4}$$

我们可以要求场函数也满足下列一阶方程之一：

$$\left( i \sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \psi(x) = 0, \quad \left( i \sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) = 0. \tag{6.5}$$

显然，方程(6.5)不及方程(6.4)广泛，虽然(6.5)中每一方程的一切解满足方程(6.4)，但是，反之并不成立．

重要的在于指出，方程(6.5)实际上是完全新的方程，因为满足这一方程的函数体现

了 Lorentz 羣的旋量表示.

因此，可以預料，方程(6.5)比(6.4)具备更详尽的知识. 如所周知，实际情况正是这样，因为正是利用方程(6.5)，Dirac 第一次成功地描述了电子的自旋等于 1/2. 方程(6.5)称为 Dirac 方程，而被关系式(6.2)所定义的矩陣 $\gamma$ 称为 Dirac 矩陣.

以前所研究的 Klein-Gordon 方程的一切解均相当于 Lorentz 羣的单值表示，其共同性质如下：相应于此解的粒子具有整数自旋（在所讨论的情况等于 0 和 1）. 为了描述半整数自旋，要求助于旋量表示，其中最简单的表示相当于方程(6.5)和(6.2).

由于方程(6.5)中算符的矩陣性质，满足这些方程的波函数 $\psi$ 是多分量的，而分量的数目决定于矩陣 $\gamma$ 的阶.

## 6.2. Dirac 矩陣

现在来研究由关系式(6.2)所定义的四个超复数 $\gamma^n$ 的性质. 这些量的不可约表示的阶可以根据以下的考虑来确定.

如果对上述四数加上它们的一切可能的相互乘积（包括多重乘积），以及这样得到的超复数的一切可能的复系数线性组合，那么显然我们得到了若干元素的集合，在此集合中，规定有元的加法运算，元与元之间以及元与复数之间的乘法运算，通常说，我们此时获得复数域上的某一代数 $A$. 除此之外，我们应该假定，这里讨论的是有限维数的矩陣表示.

利用一系列的代数定理[1]，可以证明，超复数系统的不可约矩陣表示的阶 $n$ 和代数 $A$ 的线性独立元的个数 $h$ 有如下关系：

$$h = n^2. \tag{6.6}$$

当数 $\gamma$ 写为矩陣表示时，不难证明，这一关系式表明一个简单事实：阶为 $n$ 的线性独立正方矩陣的数目 $h$ 等于这些矩陣中元的个数 $n^2$.

我们来决定数 $h$. 由四个矩陣 $\gamma^k$ 通过互相相乘可以构成 16 个线性独立的矩陣：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{单位矩陣} & \mathbf{1} = g^{kk}\gamma^k\gamma^k, \\ \text{四个矩陣} & \gamma^k \quad (k = 0, 1, 2, 3), \\ \text{六个矩陣} & \Gamma^{kl} = \gamma^k\gamma^l \quad (k < l), \\ \text{四个矩陣} & D^{kln} = \gamma^k\gamma^l\gamma^n \quad (k < l < n), \\ \text{一个矩陣}^{2)} & \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \end{array}\right\} \tag{6.7}$$

不难看出，矩陣(6.2)的其他一切乘积以及其线性组合，即整个代数 $A$，可以用矩陣(6.7)的线性组合来表示. 例如，施行对易后，有

$$\gamma^2\gamma^1 = -\Gamma^{12}, \quad \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^0 = D^{013}, \text{ 等等.}$$

可以证明，矩陣(6.7)是线性独立的，为了证明这一性质，我们需要考察矩陣(6.7)的迹. 因为所谓矩陣迹是矩陣对角元之和，所以在迹的记号下可以将矩陣乘子循环对易.

---

1) 参考例如 Van der Waerden (1938) 第二章.

2) 记号 $\gamma^4$ 通常留作表示与 $\gamma^0$ 相差乘子 $i$ 的矩阵，也就是，$\gamma^4 = i\gamma^0$.

例如，

$$\mathrm{Sp}\ ABC \equiv \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}C_{\gamma\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_{\gamma\alpha}A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} = \mathrm{Sp}\ CAB. \tag{6.8}$$

利用这一性质及定义(6.2)，可以证明，除单位矩阵以外，所有矩阵(6.7)的迹等于零.

例如，考察矩阵 $\gamma^k(k=0,1,2,3)$ 之一的迹，将 $\gamma^k$ 左方乘以 $g^{nn}\gamma^n\gamma^n = 1(n \neq k)$，而且利用循环性质. 于是获得

$$\mathrm{Sp}\ \gamma^k = g^{kk}\,\mathrm{Sp}\ \gamma^n\gamma^n\gamma^k = g^{nn}\,\mathrm{Sp}\ \gamma^n\gamma^k\gamma^n,$$

利用(6.2)式由此获得

$$\mathrm{Sp}\ \gamma^k = \frac{1}{2}g^{nn}\,\mathrm{Sp}\ \gamma^n(\gamma^k\gamma^n + \gamma^n\gamma^k)|_{n\neq k} = 0. \tag{6.9}$$

用同样的方法容易证明，其他一切矩阵的迹也等于零. 作为例子，再计算矩阵 $\gamma^5$ 的迹. 将含于 $\gamma^5$ 中的矩阵乘子 $\gamma^0$ 进行循环对易，得到

$$\mathrm{Sp}\ \gamma^5 = \mathrm{Sp}\ \gamma^0 D^{123} = \mathrm{Sp}\ D^{123}\gamma^0. \tag{6.10}$$

但是，$\gamma^0$ 与 $D^{123}$ 的直接对易结果是：

$$\gamma^0 D^{123} = -D^{123}\gamma^0,$$

由此，直接得出矩阵 $\gamma^5$ 之迹等于零.

现在来证明，从所有矩阵(6.7)(除去单位矩阵)之迹为零这一条件可以得出它们的线性独立性. 为了证明这一点，假定结果为相反. 令

$$F = a\mathbf{I} + \sum_n b^n\gamma^n + \sum_{m,k} c^{mk}\gamma^{mk} + \sum_{l,m,n} d^{lmn}D^{lmn} + e\gamma^5 = 0,$$

其中 $a$, $b$, $c$, $d$ 和 $e$ 是某些复系数. 对 $F$ 取迹，我们得到

$$a = 0.$$

然后对乘积 $\gamma^k F$ 取迹，得到 $b^k = 0$. 用同样的方式对 $F$ 和(6.7)式中每一矩阵的乘积陆续取迹，可以证明，$F$ 中所有的系数都等于零. 因此，在上述代数中，线性独立矩阵的个数等于16，而根据(6.6)式，矩阵 $\gamma^k$ 的不可约表示的阶等于4.

可见，超复数 $\gamma^k$ 可以表示为四行四列正方矩阵. 从定义(6.2)式得出结论，四个矩阵 $\gamma^k$ 可以被选为么正的，如果所加的厄米共轭条件的形式为

$$\gamma^{\dagger k} = g^{kk}\gamma^k. \tag{6.11}$$

(其中 $a^\dagger$ 是 $a$ 的厄米共轭矩阵，即对 $a$ 的元作复共轭运算，然后将行和列交换而得到的矩阵，也就是 $a^\dagger_{\alpha\beta} = a^*_{\beta\alpha}$).

不难验证，矩阵 $\gamma^5$ 和 $\gamma^0$, $\gamma^1$, $\gamma^2$, $\gamma^3$ 是反对易的，而它的平方等于 $-1$，即

$$\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = 2g^{kl} \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3, 5), \tag{6.12}$$

其中根据定义

$$g^{55} = -1. \tag{6.13}$$

此时有

$$\gamma^{\dagger k} = g^{kk}\gamma^k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 5). \tag{6.14}$$

从矩阵 $\gamma$ 的四行四列性质，还可以推出单位矩阵之迹等于4，即

$$\mathrm{Sp}\ \mathbf{I} = g^{kk}\,\mathrm{Sp}\ \gamma^k\gamma^k = 4. \tag{6.15}$$

现在考虑到上面所证明的，矩阵 $\gamma^k$ 及其乘积 $\gamma^{kl}$ 和 $D^{kln}$ 之迹为零，并利用基本公式(6.2)，经过不长的补充计算后，可以得到一组公式如下：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\,\gamma^k = 0,\\&\mathrm{Sp}\,\gamma^k\gamma^l = 4g^{kl},\\&\mathrm{Sp}\,\gamma^k\gamma^l\gamma^m\gamma^n = 4g^{kl}g^{mn} + 4g^{lm}g^{kn} - 4g^{km}g^{ln},\end{aligned}\right\}\quad (k, l, m, n = 0, 1, 2, 3, 5), \tag{6.16}$$

以及其他等等.

我们得到一般的法则：奇数个矩阵 $\gamma$ 相乘之迹等于零，偶数个矩阵相乘之迹用同样个数的乘子 $g^{kl}$ 的乘积的反对称和来表示，并需加上乘子 4，而这些和式中每一项的正负号决定于指标对易次数的奇偶性.

在结束对 Dirac 矩阵的讨论以前，我们指出，基本关系(6.2)以及上面所得到的有关矩阵 $\gamma$ 的一切性质对如下的么正变换均保持不变：

$$\gamma^k \to O\gamma^k O^{-1}, \tag{6.17}$$

其中 $O$ 是任意的非奇异矩阵(也就是具有逆矩阵的矩阵)，并可以取为么正的.

由此可以得出结论，一般说，矩阵 $\gamma$ 仅仅确定到么正变换，而这些矩阵的具体表示可以用不同方式来选定. 在 Dirac 矩阵的常用表象中，$\gamma^0$ 是对角型的：

$$\left.\begin{aligned}&\gamma^0 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix},\\&\gamma^1 = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\\&\gamma^5 = \begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

矩阵 $\gamma$ 的这一表示法与通常所采用的矩阵 $\alpha$, $\beta$[1] 和 $\sigma$, $\rho$[2] 有下列关系相连系：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_n = \gamma^0\gamma^n \ (n = 1, 2, 3), \qquad \beta = \gamma^0,\\&\sigma_\nu = i\gamma^5\gamma^0\gamma^\nu \ (\nu = 1, 2, 3), \qquad \sigma_1 = i\gamma^2\gamma^3,\ \sigma_2 = i\gamma^3\gamma^1,\ \sigma_3 = i\gamma^1\gamma^2,\\&\rho_1 = i\gamma^5,\ \rho_2 = -\gamma^5\gamma^0,\ \rho_3 = \gamma^0.\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

从(6.18)式利用变换(6.17)可以得到其他一切表示.

## 6.3. Dirac 方程

我们回到研究 Dirac 方程(6.4). 注意，Dirac 矩阵对 $\gamma$ 前符号的改变保持不变(对

1) 例如参阅 Pauli (1947 a), 241 页.
2) 例如参阅 Dirac (1937), 272 页.

$O = \gamma^5$ 时的变换(6.17))，我们得到结论，Dirac 算符中质量的符号并不重要. 通常将 Dirac 基本方程写成如下形式:

$$\left(i\sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m\right)\psi(x) = 0. \tag{6.20}$$

第二个(共轭的) Dirac 方程可以从方程(6.20)以如下方式获得. 对方程(6.20)取厄米共轭式,考虑到(6.14)式,有

$$i\sum_n \frac{\partial \psi^*}{\partial x^n}\gamma^{*n} + m\psi^* = i\sum_n g^{nn}\frac{\partial \psi^*}{\partial x^n}\gamma^n + m\psi^* = 0.$$

但是对 $\psi^*$ 所得的方程并不具备正确的形式，和第一个方程的不同，在于求和号下有乘子 $g^{nn}$. 为了消除这一缺陷，譬如说，可以在右边乘上矩阵 $\gamma^0$. 在求和号下对 Dirac 矩阵作对易,我们得到具有正确形式的方程

$$i\sum_n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n + m\bar{\psi} = 0, \tag{6.21}$$

其中所含的函数 $\bar{\psi}$ 定义为

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma^0, \tag{6.22}$$

称为对 $\psi$ 是"共轭"的(更确切地说,是 Dirac 共轭的). 以下将要证明(参看§7),与(4.36)式相似,用函数 $\bar{\psi}$ 就有可能引入拉格朗日函数密度,并构成动力学变量.

由于 Dirac 矩阵 $\gamma$ 的阶等于 4，波函数 $\psi$ 及 $\bar{\psi}$ 是四个分量的，有时分别用四分量的列和四分量的行的形式来表示. 但是,将 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 表示成列和行的形式，虽然十分明了,却会引起某些混乱(例如,在引入电荷共轭算符时,参看第二章§12)，因此我们将不采用这一形式. 只要考虑下一点已经足够,展开 Dirac 方程(6.20)为矩阵形式时，我们得到四个分量 $\psi_\alpha(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ 的四个方程

$$\sum_\beta \left(i\sum_n \gamma^n_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^n} - m\mathbf{I}_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x) = 0.$$

显然,共轭方程(6.21)也可以写成分量形式.

### 6.4. 旋量场的变换性质

我们来讨论参考系作 Lorentz 变换时旋量波函数的变换. 此时注意到，和上面所讨论的张量表示不同，那时由于 Klein-Gordon 算符的协变性，场方程自动是协变的. 而如今 Dirac 方程(6.20)、(6.21)的协变性条件则需要特别予以讨论.

如所周知,所谓方程是协变的，是指经过变换后,也就是用变换后的坐标和函数写成的方程和变换前的方程的形式相同.

作空间-时间平移

$$x \to x' = x^k + a^k,$$

Dirac 算符并不改变:

$$i\sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m = i\sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - m.$$

因此,根据§2 中所作的注记,应令

$$\psi'(x') = \psi(x),$$

因为此时在新变量下，方程具有原来的形式：

$$\left(i\sum_n \gamma^n \frac{\partial}{\partial x'^n} - m\right)\psi'(x') = 0, \tag{6.23}$$

也就是说，方程保持协变.

设作无穷小旋转

$$x \to x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = \sum_n g^{nn} x^n \omega^{kn}, \quad \omega^{kn} + \omega^{nk} = 0, \tag{6.24}$$

Dirac 算符已经不再是协变的了：

$$\left(i\sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - m\right) = i\sum_n \gamma^n \left(\frac{\partial}{\partial x^n} - g^{nn}\sum_k \omega^{kn}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - m,$$

因此，旋量波函数的变换定律具有比较复杂的矩阵结构：

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x). \tag{6.25}$$

为了建立变换矩阵 $\Lambda$ 与 Dirac 矩阵及变换参数之间的关系，我们从 Dirac 方程的协变性条件出发，假定此方程对变换后的变量具有形式(6.23)，将(6.23)式右方乘以 $\Lambda^{-1}$ 后，如果满足以下关系：

$$\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda = \gamma^n + \sum_k g^{kk}\gamma^k\omega^{nk} \qquad (n, k = 0, 1, 2, 3). \tag{6.26}$$

我们将得到原来的方程(6.20)，这时 $\omega$ 的一阶微量项相互消去，略去二阶项后，我们得到

$$\Lambda^{-1}\left(i\sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - m\right)\psi'(x') = \left(i\sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m\right)\psi(x) = 0.$$

将矩阵 $\Lambda$ 表示为如下形式：

$$\Lambda = 1 + \sum_{i,k} \lambda_{ik}\omega^{ik}, \tag{6.27}$$

其中展开系数 $\lambda_{ik}$ 具有反对称性：

$$\lambda_{ik} = -\lambda_{ki},$$

根据(6.26)式，我们获得展开系数遵守以下关系：

$$\gamma^k\lambda_{kl} - \lambda_{kl}\gamma^k = g^{ll}\gamma^l;$$

上式与反对称条件一起给出

$$\lambda_{kl} = \frac{1}{2} g^{kk}g^{ll}\gamma^k\gamma^l. \tag{6.28}$$

公式(6.27)、(6.28)以明显形式表出无穷小旋转变换时的变换矩阵 $\Lambda$. 但是，利用这些公式，也可以得到有限变换时矩阵 $\Lambda$ 的明显形式. 为此利用算符 $\Lambda(\varphi)$ 的羣性质，此处 $\varphi$ 是平面 $x^k x^l$ 中的一个旋转角度. 由转动的可加性得出

$$\Lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\psi = \Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2)\psi,$$

即

$$\Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2).$$

此处令 $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = d\varphi$，经过不长的计算

$$\Lambda(\varphi + d\varphi) = \Lambda(\varphi)\Lambda(d\varphi), \quad \frac{\Lambda(\varphi + d\varphi) - \Lambda(\varphi)}{d\varphi} = \Lambda(\varphi)\frac{\Lambda(d\varphi) - 1}{d\varphi},$$

得到转动羣的微分方程为

$$\frac{d\Lambda(\varphi)}{d\varphi}=\Lambda(\varphi)\lambda_{ik}.$$

考虑到(6.28)式以及从(6.27)式所推出的初始条件 $\Lambda(0)=1$,将此方程积分,我们得到

$$\Lambda_{ik}(\varphi)=\exp\frac{1}{2}[g^{ii}g^{kk}\gamma^i\gamma^k\varphi]. \tag{6.29}$$

此处在推导(6.29)式过程中所用的计算是羣论中熟知的推论的特例,亦即从连续羣的无穷小变换算符求出整个羣所用的方法.

讨论公式(6.29)的特例. 对于平面 $x^\alpha x^\beta$ ($\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta=1,2,3$) 上的空间旋转,

$$x'^\alpha=x^\alpha\cos\varphi-x^\beta\sin\varphi,\quad x'^\beta=x^\beta\cos\varphi+x^\alpha\sin\varphi, \tag{6.30}$$

由此获得

$$\left.\begin{aligned}&\psi'(x')=\Lambda_{\alpha\beta}\psi(x),\\&\Lambda_{\alpha\beta}=e^{\frac{\varphi}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta}=\cos\frac{\varphi}{2}+\gamma^\alpha\gamma^\beta\sin\frac{\varphi}{2},\\&\Lambda_{\alpha\beta}^{-1}=e^{-\frac{\varphi}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta}=\cos\frac{\varphi}{2}-\gamma^\alpha\gamma^\beta\sin\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

对于平面 $x^0x^\alpha(\alpha=1,2,3)$ 上的 Lorentz 旋转,

$$\left.\begin{aligned}x'^0&=x^0\operatorname{ch}\varphi-x^\alpha\operatorname{sh}\varphi,\\x'^\alpha&=x^\alpha\operatorname{ch}\varphi-x^0\operatorname{sh}\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(\operatorname{tg}\varphi=v) \tag{6.32}$$

获得

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda_{0\alpha}=e^{-\frac{1}{2}\varphi\gamma^0\gamma^\alpha}=\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}-\gamma^0\gamma^\alpha\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2},\\&\Lambda_{0\alpha}^{-1}=e^{\frac{1}{2}\varphi\gamma^0\gamma^\alpha}=\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}+\gamma^0\gamma^\alpha\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

从(6.26)式可以注意到,在无穷小变换(6.24)之下, $\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda$ 用 $\gamma^n$ 矩阵表达的线性式正和变换后坐标 $x'$ 用 $x$ 表达的线性式一样. 利用(6.31)式及(6.33)式构成 $\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda$,并与(6.30)式及(6.32)式相比较,我们得到,在有限旋转变换时上述情况仍然成立.

从空间转动公式(6.31)直接得出旋量函数的非单值性. 令 $\varphi=2\pi$,坐标系就对整个空间迴转了一周,这对应于变换矩阵 $\Lambda(2\pi)=-1$,也就是说,在此变换下场函数改变符号. 但是,由于旋转变换为 $2\pi$,使坐标系转到原来位置,即为恆等变换. 由此得出结论:旋量波函数永远只能确定至差一符号.

再列出坐标轴作不同次数的反射变换时矩阵 $\Lambda$ 之形式. 注意,当对不同空间轴作偶次反射时,即为可从(6.31)式得出的旋转的变换式,故我们限于讨论所有三个空间轴同时作反射变换:

$$\left.\begin{aligned}&x'^\alpha=-x^\alpha\qquad(\alpha=1,2,3),\quad x'^0=x^0,\\&\psi'(x')=\Lambda_{123}\psi(x),\quad\Lambda_{123}=\gamma^0,\end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

及对时间轴的反演变换:

$$\left.\begin{aligned}&x'^0=-x^0,\quad x'^\alpha=x^\alpha\qquad(\alpha=1,2,3),\\&\psi'(x')=\Lambda_0\psi(x),\quad\Lambda_0=\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\gamma^0\gamma^5.\end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

共轭旋量 $\bar{\psi}$ 的变换性质可从它的定义(6.22)得出. 对(6.25)式取厄米共轭，而且右方乘以 $\gamma^0$，我们获得

$$\psi^{*\prime}(x')\gamma^0 = \bar{\psi}'(x') = \psi^* \Lambda^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x)\gamma^0 \Lambda^\dagger \gamma^0,$$

即共轭旋量依矩阵 $\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0$ 而变换. 再者，不难证明，对 Lorentz 羣的变换永远满足关系式

$$\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0 = \Lambda^{-1}, \tag{6.36}$$

由此得出，此羣中共轭旋量的变换定律是

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{6.37}$$

为了证明(6.36)式，我们注意到，当空间轴作反射变换(6.34)时，显然它是满足的，而当转动时，它的正确性可以利用由(6.2)式和(6.14)式所推出的关系

$$\gamma^0\gamma^{\dagger k}\gamma^0 = \gamma^k \tag{6.38}$$

来证明. 因为根据(6.31)式和(6.33)式，转动变换矩阵是 Dirac 矩阵二次型组合的线性函数，利用(6.38)式，获得

$$\gamma^0\Lambda^\dagger(\gamma^k\gamma^l)\gamma^0 = \gamma^0\Lambda(\gamma^{\dagger l}\gamma^{\dagger k})\gamma^0 = \Lambda(\gamma^0\gamma^{\dagger l}\gamma^0 \cdot \gamma^0\gamma^{\dagger k}\gamma^0) =$$
$$= \Lambda(\gamma^l\gamma^k) = \Lambda(-\gamma^k\gamma^l),$$

根据(6.31)式与(6.33)式中第二个公式，上式与(6.36)式等效[1].

根据上述，可以说，当坐标系作任意齐次的 Lorentz 变换

$$x' = Lx, \quad x'^n = \sum_m L^{nm}x^m, \tag{6.40}$$

旋量波函数 $\psi(x)$ 及它的共轭函数 $\bar{\psi}(x)$ 可利用具有以下性质的互逆的矩阵算符 $\Lambda$ 与 $\Lambda^{-1}$ 来变换：

$$\Lambda^{-1}\gamma^n\Lambda = \sum_m L^{nm}\gamma^m. \tag{6.41}$$

现在来证明，从变换定律(6.25)、(6.37)以及关系式(6.41)，可以得出结论，旋量 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 的二次型是按 Lorentz 羣的张量表示而变换的.

为此，讨论二次型：

$$\bar{\psi}(x)O\psi(x), \tag{6.42}$$

其中 $O$ 是某一由矩阵 $\gamma$ 乘积组成的暂时任意的矩阵. 当进行 Lorentz 变换 (6.40) 时，根据(6.25)式和(6.37)式，我们得到

$$\bar{\psi}'(x')O\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}O\Lambda\psi(x).$$

讨论最简单的特殊情况：

a) $O = 1$; $\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)$，由此很明显，$\bar{\psi}\psi$ 式是标量.

б) $O = \gamma^n (n = 0, 1, 2, 3)$；利用(6.41)式得到

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^n\psi'(x') = \sum_m L^{nm}\bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x).$$

由此得出，四个量 $\bar{\psi}\gamma^n\psi$ 组成协变四维矢量.

---

1) 对于包括时间轴反演的变换进行类似的计算，代替(6.37)式，我们获得关系

$$\bar{\psi}'(x') = -\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{6.39}$$

同样方式可以证明，量

$$\bar{\psi}(x)\frac{\gamma^n\gamma^m-\gamma^m\gamma^n}{2}\psi(x)$$

是反对称的二阶协变张量的分量，以及其他等等.

$O$ 含有矩阵乘子 $\gamma^5$ 的情况有特别的意义. 问题在于，而且不难验算，当眞 Lorentz 变换时 $\gamma^5$ 与 $\Lambda$ 可对易：

$$\Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda=\gamma^5,$$

而在非眞变换时，则为反对易：

$$\Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda=-\gamma^5.$$

因此，式 $\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)$ 在第一种情况是标量，而在第二种情况却改变符号. 显然，它是赝标量. 同样，当旋转时，以下四量

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^n\psi(x)$$

的变换与四维矢量相同，当反射时，却还改变符号. 故此四维矢量组成赝矢量.

用类似论证，可以毫无困难地阐明形式更加复杂的张量的性质. 但是，我们就此结束对矩阵 $\gamma$ 的性质以及对旋量函数变换定律的探讨，因为上述材料对于今后的叙述已经完全足够[1].

## §7. 旋量場. 解的性质和力学量

### 7.1. 动量表象和矩阵结构

我们来讨论 Dirac 矩阵方程(6.20)

$$\left(i\sum_n\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)\psi(x)=0$$

的解的性质.

由于矩阵 $\gamma$ 的阶等于4，场函数 $\psi$ 具有四个分量，其中每一分量满足 Klein-Gordon 方程. 事实上，将(6.20)式右方乘上算符 $(i\hat{\partial}+m)$，考虑到(6.3)式，获得

$$\left(i\sum_n\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)\left(i\sum_n\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)\psi(x)\equiv$$
$$\equiv(i\hat{\partial}+m)(i\hat{\partial}-m)\psi(x)=(\Box-m^2)\psi(x)=0.$$

因此 $\psi(x)$ 可以表示成形式：

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\psi(k), \tag{7.1}$$

而根据定义，动量振幅 $\psi(k)$ 满足方程

$$(\hat{k}+m)\psi(k)|_{k^2=m^2}=0. \tag{7.2}$$

其中引进记号

$$\hat{a}=\sum_n g^{nn}a^n\gamma^n=(a\gamma)=a^0\gamma^0-\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma},$$

1) 读者如对旋量函数变换定律的更详细更完整的叙述感到兴趣，请参阅 Шапиро 的总结(1954).

在以后叙述中，我们将经常利用此种记号.

按照常例，将函数 $\psi(x)$ 分解成正频率和负频率部分：

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \tag{7.3}$$

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 - m^2)\theta(\pm k^0)\psi(k), \tag{7.4}$$

对 $k^0$ 作积分后，我们得到三维动量表象的公式如下：

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} e^{\pm ikx} \psi^{\pm}(\mathbf{k}). \tag{7.5}$$

其中采用符号

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(+)}(\mathbf{k}) &= \frac{\theta(k^0)\psi(k)}{2k^0}, \\ \psi^{(-)}(\mathbf{k}) &= \frac{\theta(k^0)\psi(-k)}{2k^0}, \end{aligned}\right\} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}). \tag{7.6}$$

三维幅 $\psi^{(+)}(\mathbf{k})$ 和 $\psi^{(-)}(\mathbf{k})$ 满足矩阵方程

$$(m + \hat{k})\psi^{(+)}(\mathbf{k}) = 0, \quad (m - \hat{k})\psi^{(-)}(\mathbf{k}) = 0. \tag{7.7}$$

上列方程中 $\hat{k}$ 的符号不相同，是由于公式(7.5)中积分号内指数的符号不相同.

$\psi^{(+)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 的矩阵结构依赖于 Dirac 矩阵的表示，而且可用以下方式来决定. 由于以上所建立的方程(7.2)的协变性，可将此方程看作在某一固定参考系中，我们考虑到总可以利用上节所述的变换来实现向另一任意参考系的变换. 选定其中 $\mathbf{k} = 0$ 的参考系，由(7.2)式及(7.7)式，获得

$$\begin{aligned} &(\gamma^0 k^0 + m)\psi(k^0)|_{k^0=m} = 0, \\ &(\gamma^0 + \mathbf{1})\psi^{(+)}(0) = 0, \\ &(\gamma^0 - \mathbf{1})\psi^{(-)}(0) = 0. \end{aligned}$$

由此在(6.18)式的表象中可得到

$$\left.\begin{aligned} \psi_\alpha^{(+)}(0) &= c_3\delta_\alpha^3 + c_4\delta_\alpha^4, \\ \psi_\beta^{(-)}(0) &= c_1\delta_\beta^1 + c_2\delta_\beta^2, \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

其中 $\alpha$, $\beta$ 是矩阵的指标，而 $\delta_i^k$ 是 Kronecker 记号.

与任意的不等于零的 $\mathbf{k}$ 对应的解可以从(7.8)式通过相应的 Lorentz 变换求得.

$\psi^{(+)}$ 与 $\psi^{(-)}$ 所满足的方程也可以表示成形式：

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma^0 k^0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + m)\psi^{(+)}(\mathbf{k}) = 0, \\ &(-\gamma^0 k^0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + m)\psi^{(-)}(-\mathbf{k}) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),$$

此处二式的差别仅仅是 $k^0$ 以前的符号. 正如刚才已经证明过，各式均具有二个线性解. 由此得出，对四维 $k$ 的每一已知值（分量 $k^0$ 的符号已经确定！），Dirac 方程仅仅具有两个线性独立解.

现在不难阐明函数 $\psi^{(+)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 的变换性质. 为此，我们讨论由三维空间的纯粹转动和空间轴反映所组成的羣的总和. 它们所组成的羣 $G$ 是 Lorentz 羣的子羣. 由于羣 $G$ 中的变换不牵涉到时间坐标 $x^0$，它们使場函数分解为正负频率部分的矩阵结构(7.3)保持不变. 换句话说，当三维转动和空间反射

时，双分量的 $\psi^{(+)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 互相独立变换．因此其中每一个均实现三维空间中转动和反射羣的一个二维表示．这种表示称为旋量表示，依此变换的量称为三维空间的旋量．

因此，四分量的場函数 $\psi$ 依 Lorentz 羣的旋量表示而变换，因而它是四维赝 Euclid 空间中的旋量，在此空间中定义了 Lorentz 羣，对于三维旋转羣和反射羣，波函数分解为二个不可约部分，它们是三维空间的旋量[1]．

在三维旋转和反射时，場函数的频率分量 $\psi^{(+)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 的变换具有独立性，这一事实在我们所采用的表象(6.18)中，可以迅速验证如下．

根据(7.8)式，場函数 $\psi$ 可以表示成形式：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(-)} \\ \psi^{(+)} \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

其中 $\psi^{(-)}$ 和 $\psi^{(+)}$ 是双分量的．

另一方面，可以利用 Pauli 的二行二列矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \cdots$$

将 Dirac 矩阵(6.18)写成“分块形式”[2]：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{7.11}$$

我们发现，根据(6.31)式和(6.34)式，三维旋转和反射的变换矩阵，在“分块”表示(7.9)下是对角型的：

$$\gamma^1\gamma^2 = -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2\gamma^3 = -i\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3\gamma^1 = -i\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

由此得出结论，$\psi^{(+)}$ 和 $\psi^{(-)}$ 的变换互相独立．

与此相应，共轭旋量 $\bar{\psi}$ 对于有确定符号的 $k^0$ 也具有二个线性独立解．由于 Dirac 方程所讨论的解为复数的，可以说，它们描写带正电荷和负电荷的粒子．从存在两个线性独立解可以得出结论，这种粒子可处于两种不同的态，以下将要证明，其差别在于在运动方向上自旋投影的符号．

## 7.2. 按自旋态的分解．正交归一关系

用 $v^{\nu,+}(\mathbf{k})(\nu = 1, 2)$ 来表示当 $k^0 > 0$ 时归一的线性独立解，即(7.7)中第一个方程的解，而用 $v^{\nu,-}(\mathbf{k})$ 来表示 $k^0 < 0$ 时即(7.7)中第二个方程的解，将函数 $\psi^{(+)}(\mathbf{k})$ 及 $\psi^{(-)}(\mathbf{k})$ 按自旋态展开，可以写成以下形式：

$$\psi_a^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2} a_\nu^{\pm}(\mathbf{k}) v_a^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \tag{7.13}$$

对于共轭旋量，相应地有

---

1) 我们指出，此处所应用的术语采自 Cartan 的书(1947)．有些作者用“旋量”这个名词，指三维空间中的二分量旋量而将 Lorentz 羣的四分量旋量称为“双旋量”．

2) 此处对二行二列的单位矩阵和零矩阵采用简写：

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \sum_{\nu=1,2} a_\nu^{*\pm}(\mathbf{k})\bar{v}_\alpha^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \tag{7.14}$$

因为 $\bar{\psi}^{(+)}$ 和 $\bar{\psi}^{(-)}$ 表示函数 $\bar{\psi}$ 的正负频率部分，归一化旋量的厄米共轭条件具有形式

$$(v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}))^* = v^{*\nu,\mp}(\mathbf{k}). \tag{7.15}$$

因此旋量 $v$ 的正交归一条件可以写成形式：

$$v^{*\nu,\pm}(\mathbf{k})v^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\alpha=1,2,3,4} v_\alpha^{*\nu,\pm}(\mathbf{k})v_\alpha^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) = \delta^{\mu\nu}. \tag{7.16}$$

通过纯粹的代数运算，从 (7.16) 式和 (7.15) 式以及 Dirac 方程，可以得到旋量 $v$ 和 $\bar{v} = v^*\gamma^0$ 的二次型的一系列关系，其中最重要的关系如下：

Dirac 共轭旋量的正交归一化条件：

$$\bar{v}^{\nu,\pm}(\mathbf{k})v^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) = v^{*\nu,\pm}(\mathbf{k})\gamma^0 v^{\mu,\mp}(\mathbf{k}) = \pm\frac{m}{k^0}\delta^{\mu\nu}; \tag{7.17}$$

宗量符号不相同的旋量 $v$ 的相互正交条件：

$$v^{*\nu,\pm}(\mathbf{k})v^{\mu,\pm}(-\mathbf{k}) = 0; \tag{7.18}$$

关系式：

$$\left.\begin{aligned} &v^{*\pm}(\mathbf{k})[(k^\alpha\gamma^\beta - k^\beta\gamma^\alpha) - m\gamma^\alpha\gamma^\beta]v^{\pm}(-\mathbf{k}) = 0, && (7.19a)\\ &\sum_{\alpha=1,2,3} k^\alpha[v^{*\nu,\pm}(\mathbf{k})(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)v^{\mu,\mp}(\mathbf{k})] = 0, && (7.19b)\end{aligned}\right\} \quad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

以及最后对自旋指标求和的公式：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1,2} v_\alpha^{\nu,+}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\nu,-}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} - m)_{\alpha\beta}}{2k^0}, && (7.20)\\ &\sum_{\nu=1,2} v_\alpha^{\nu,-}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\nu,+}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{k} + m)_{\alpha\beta}}{2k^0} && (7.21)\end{aligned}\right\} \quad (k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}).$$

为了证明关系式(7.17)，从 Dirac 方程出发：

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + m)v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = 0,\\ &(\gamma^0 k^0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} - m)v^{\mu,-}(-\mathbf{k}) = 0,\end{aligned}\right\} \quad (k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}). \tag{7.22}$$

将上式中的前一个的左边乘上 $v^{*\mu,-}(\mathbf{k})$，获得

$$k^0\bar{v}^{\mu,-}(\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v^{*\mu,-}(\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma}v^{\nu,+}(\mathbf{k}) + mv^{*\mu,-}(\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = 0.$$

然后作厄米共轭运算，并考虑到 Dirac 矩阵的厄米性(7.15)，得到表式

$$k^0\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})v^{\mu,+}(\mathbf{k}) + \mathbf{k}v^{*\nu,-}(\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma}v^{\mu,+}(\mathbf{k}) + mv^{*\nu,-}(\mathbf{k})v^{\mu,+}(\mathbf{k}) = 0.$$

将此式与原式比较，直接得出

$$v^{*\nu,-}(\mathbf{k})\gamma^0 v^{\mu,+}(\mathbf{k}) = -\frac{m}{k^0}\delta^{\mu\nu}.$$

(7.17)的第二个关系式可以用同样方式证明。

为了证明正交性(7.18)，将(7.22)式中第一方程左边乘上 $\bar{v}^{\mu,+}(-\mathbf{k})$：

$$k^0 v^{*\mu,+}(-\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}) - v^{*\mu,+}(-\mathbf{k})(\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} - m\gamma^0)v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = 0,$$

然后将(7.22)中第二个方程用 $\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})$ 左乘，作厄米共轭运算，得到关系

$$k^0 v^{*\mu,+}(-\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}) + v^{*\mu,+}(-\mathbf{k})(\gamma^0\boldsymbol{\gamma}k - m\gamma^0)v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = 0$$

将此式与上式比较，直接得出(7.18)式中一个关系

$$v^{*\mu,+}(-\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = 0.$$

利用同样的方法可推出关系式(7.19a)和(7.19b)，即将 Dirac 方程乘上 $\gamma^n$ 矩阵的乘积，再乘以共轭旋量，并将这样得到的表式作厄米共轭。由于计算相当复杂，此处略去关系式(7.19)的推导。

为了获得旋量的求和公式(7.20)、(7.21)，我们讨论 Dirac 方程(7.2)的通常 Green 函数，此函数满足非齐次方程

$$G(k)(\hat{k} + m) = (\hat{k} + m)G(k) = 1. \tag{7.23}$$

因此具有形式

$$G(k) = (\hat{k} + m)^{-1} = \frac{\hat{k} - m}{k^2 - m^2}. \tag{7.24}$$

在最后的等式中 $k^0$ 不等于根 $\pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$，我们用 $\lambda$ 来表示该根

$$\lambda(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

与此相反，数 $\pm\lambda$ 为相应齐次方程中 $k^0$ 的特征值。因此，当 $k^0 = \pm\lambda$ 时，$G(k)$ 甚至是不确定的 但是当 $k^0 \neq \pm\lambda$ 时，函数 $G(k)$ 可以对齐次方程

$$(\hat{k} + m)v = 0$$

的解的完备系展开，根据(7.22)式，这一完备系由四个解 $v^{\nu,+}(\mathbf{k})$，$v^{\nu,-}(\mathbf{k})$ $(\nu = 1, 2)$ 组成。于是，获得展开式

$$G_{\alpha\beta}(k) = \sum_{\nu=1,2} [v_\alpha^\nu{}^{,+}(\mathbf{k})w_\beta^\nu{}^{,+}(k) + v_\alpha^\nu{}^{,-}(\mathbf{k})w_\beta^\nu{}^{,-}(k)].$$

如果将上式代入(7.23)式中，

$$(\gamma^0 k^0 - \gamma\mathbf{k} + m)\left[\sum_{\nu=1,2}\left(v_\alpha^\nu{}^{,+}(\mathbf{k})w_\beta^\nu{}^{,+}(k) + v_\alpha^\nu{}^{,-}(\mathbf{k})w_\beta^\nu{}^{,-}(k)\right)\right] = 1,$$

而且利用場方程

$$(\gamma\mathbf{k} - m)v^{\nu,+}(\mathbf{k}) = \gamma^0\lambda v^{\nu,+}(\mathbf{k}), \quad (\gamma\mathbf{k} - m)v^{\nu,-}(-\mathbf{k}) = -\gamma^0\lambda v^{\nu,-}(-\mathbf{k}),$$

则获得

$$(k^0 - \lambda)\gamma^0\sum_\nu v^{\nu,+}(\mathbf{k})w^{\nu,+}(k) + (k^0 + \lambda)\gamma^0\sum_\nu v^{\nu,-}(-\mathbf{k})w^{\nu,-}(k) = 1. \tag{7.25}$$

将(7.25)式左边乘上 $\bar{v}^{\mu,+}(-\mathbf{k})$，考虑到归一化条件(7.16)和正交性(7.18)，得到系数 $w^{\nu,-}$ 的表式：

$$w^{\nu,-}(k) = \frac{\bar{v}^{\nu,+}(-\mathbf{k})}{k^0 + \lambda(\mathbf{k})}.$$

用同样的方式决定第二个系数 $w^{\nu,+}$，获得 $G$ 如下：

$$G(k) = \sum_\nu \frac{(k^0 + \lambda)v^{\nu,+}(\mathbf{k})\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}) + (k^0 - \lambda)v^{\nu,-}(-\mathbf{k})\bar{v}^{\nu,+}(-\mathbf{k})}{(k^0)^2 - \lambda^2}. \tag{7.26}$$

然后记住 $\lambda^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$，比较(7.26)式和(7.24)式，当 $k^0 \to +\lambda$ 和 $k^0 \to -\lambda$ 时，分别得到公式(7.20)和(7.21)。

在计算旋量场的动力学变量时(在本节中)，我们需要用到关系式(7.17)—(7.19)，而公式(7.20)和(7.21)在旋量场量子化(第二章)以及在相互作用场理论中计算矩阵元的平方时(第三章)会有用处。

## 7.3. 拉格朗日形式和不变量

现在来讨论拉格朗日形式。Dirac 方程(6.20)和(6.21)可以从下列拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\sum_n\left(\bar{\psi}(x)\gamma^n\frac{\partial\psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{7.27}$$

利用变分原理而得到：

和以前所讨论的场的拉格朗日函数密度不同，旋量场的拉格朗日函数密度(7.27)将等于零，如果其中函数 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 满足场方程[1].

应用通常的方法，从(7.27)式可得：能量-动量张量

$$T^{kl}=\frac{i}{2}g^{ll}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^l}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^l}\gamma^k\psi(x)\right), \tag{7.28}$$

及四维流矢量

$$J^k(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x). \tag{7.29}$$

为了计算自旋张量，我们注意到，在旋量场的情况下，公式(2.27)在对自旋指标取和以后可以写如下式：

$$S^{k,lm}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right)}A^{\psi,lm}\psi(x)-\bar{\psi}(x)A^{\bar{\psi},lm}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\right)}.$$

利用公式(6.27)、(6.28)及化为共轭旋量的法则，可以决定此处所出现的系数 $A^{\psi}$ 和 $A^{\bar{\psi}}$ 的形式：

$$A^{\psi,lm}=\frac{i}{2}\sigma^{lm},\quad A^{\bar{\psi},lm}=-\frac{i}{2}\sigma^{lm},$$

其中 $\sigma$ 是所谓"自旋矩阵张量"：

$$\sigma^{lm}=\frac{\gamma^l\gamma^m-\gamma^m\gamma^l}{2i}. \tag{7.30}$$

利用上式从拉格朗日函数密度(7.27)，可以求得旋量场的自旋矩张量

$$S^{k,lm}=\frac{1}{4}\bar{\psi}(x)\{\gamma^k\sigma^{lm}+\sigma^{lm}\gamma^k\}\psi(x). \tag{7.31}$$

为了对三维空间作积分以及为了求得力学量，通常化为三维动量表象比较方便：

$$\psi^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}e^{\pm ikx}\sum_{\nu=1,2}a_\nu^{\pm}(\mathbf{k})v^{\nu,\pm}(\mathbf{k}), \tag{7.32}$$

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}e^{\pm ikx}\sum_{\nu=1,2}a_\nu^{*(\pm)}(\mathbf{k})\bar{v}^{\nu,\pm}(\mathbf{k}). \tag{7.33}$$

将(7.32)式及(7.33)式代入(7.28)式中，令该式中指标 $k=0$，考虑到正交归一条件(7.16)，对三维空间作积分，我们获得能量-动量四维矢量

$$P^l=\int d\mathbf{x}\cdot T^{0l}=\int d\mathbf{k}\cdot k^l\sum_{\nu=1,2}(a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k})-a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\nu^+(\mathbf{k})), \tag{7.34}$$

其中 $k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ 与别处相同.

注意到，根据(7.32)式和(7.33)式，振幅 $a^{\pm}$ 和 $a^{*\pm}$ 的厄米共轭定律具有形式

$$(a^+)^*=a^{*-},\quad \text{而}\quad (a^-)^*=a^{*+}. \tag{7.35}$$

我们发现，在经典理论中旋量场的能量

$$P^0=\int d\mathbf{k}\cdot k^0\sum_{\nu}(a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k})-a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\nu^+(\mathbf{k})) \tag{7.36}$$

---

1) 其他一切场当拉格朗日函数密度的形式写如(4.35)时均具有这种性质(参看 § 4.4).

不是正定的. 只有在按 Fermi-Dirac 量子化的量子理论中，旋量场的能量才是正定的[1].

我们来讨论自旋矢量的计算，我们注意到，根据(6.19)式，自旋张量的分量 $\sigma^{lm}$ 可以用矩阵 $\alpha_i$ 和 $\sigma_i$ 表示成如下形式:

$$\sigma^{lm}=\begin{pmatrix}0 & -i\alpha_1 & -i\alpha_2 & -i\alpha_3\\ i\alpha_1 & 0 & -\sigma_3 & \sigma_2\\ i\alpha_2 & \sigma_3 & 0 & -\sigma_1\\ i\alpha_3 & -\sigma_2 & \sigma_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

因此假定(7.31)式中 $k=0$ 和 $l, m=1, 2, 3$，可以证明，自旋矢量的空间密度可用矩阵"矢量" $\boldsymbol{\sigma}$ 来表示:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\int \psi^*(x)\boldsymbol{\sigma}\psi(x)d\mathbf{x}. \tag{7.38}$$

旋量场的自旋矢量(7.38)与矢量场及电磁场的自旋不同，对时间并不守恒(这是由于能量-动量张量不存在对称性). 但是当场函数 $\psi$, $\bar{\psi}$ 不依赖于 $x^0$, $x'$, $\cdots$ 中某些坐标时，可使张量 $S$ 的个别分量满足"连续性方程"，因此它所对应的积分对时间是守恒的. 例如，令 $\frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^2}=0$，得到

$$\sum_k \frac{\partial S^{k,12}}{\partial x^k}=0.$$

由此得到，自旋矢量在 $x^3$ 轴上的投影

$$S_3=\int dx\cdot S^{0,12}$$

对时间是守恒的. 在动量表象中，此情况相当于"自旋矢量在运动方向上的投影守恒".

将(7.38)式化成三维动量表象，而且对三维组态空间积分，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{S}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\{&\psi^{*(+)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\psi^{(-)}(\mathbf{k})+\psi^{*(-)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\psi^{(+)}(\mathbf{k})+\\&+e^{2ik^0x^0}\psi^{*(+)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\psi^{(+)}(-\mathbf{k})+e^{-2ik^0x^0}\psi^{*(-)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}\psi^{(-)}(\mathbf{k})\}.\end{aligned} \tag{7.39}$$

我们只限于讨论分量 $S_3$，利用改写如下式的(7.19a)式:

$$v^{*(\pm)}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma}v^{(\pm)}(-\mathbf{k})=\frac{i}{m}v^{*(\pm)}(\mathbf{k})[\mathbf{k}\times\boldsymbol{\gamma}]v^{(\pm)}(-\mathbf{k}).$$

在 $k_1=k_2=0$ 的参考系中消去 $S_3$ 中依赖于时间的项，我们得到表式

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu}\{a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\mu^-(\mathbf{k})v^{*\nu,+}(\mathbf{k})\sigma_3v^{\mu,-}(\mathbf{k})+a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\mu^+(\mathbf{k})v^{*\nu,-}(\mathbf{k})\sigma_3v^{\mu,+}(\mathbf{k})\}. \tag{7.40}$$

为了将此式进一步具体化，采用 Dirac 矩阵的某一具体表示较为方便. 在我们所利用的表象(6.18)中，矩阵 $\sigma_3$ 具有形式

---

1) 关于这一情况的比较详细的讨论请参阅 § 12.

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

此时在 $k_1 = k_2 = 0$ 的参考系中，选定归一化的旋量

$$\left.\begin{aligned} v^{1,+} &= N^{-1}\left(\frac{k^3}{k^0+m}, \quad 0, \quad 1, \quad 0\right), \\ v^{2,+} &= N^{-1}\left(0, \quad -\frac{k^3}{k^0+m}, \quad 0, \quad 1\right), \\ v^{1,-} &= N^{-1}\left(1, \quad 0, \quad \frac{k^3}{k^0+m}, \quad 0\right), \\ v^{2,-} &= N^{-1}\left(0, \quad 1, \quad 0, \quad -\frac{k^3}{k^0+m}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

其中归一化乘子 $N$ 等于

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{k^3}{k^0+m}\right)^2} = \sqrt{\frac{2k^0}{k^0+m}},$$

我们发现(7.40)式化为

$$\frac{1}{2}(a_1^{*+}a_1^- - a_2^{*+}a_2^- + a_1^{*-}a_1^+ - a_2^{*-}a_2^+). \tag{7.42}$$

比较能量-动量(7.34)式和自旋矢量的投影(7.42)及从(7.29)式直接得到的电荷的表式：

$$Q = \int \psi^*(x)\psi(x)d\mathbf{x} = \int d\mathbf{k} \sum_\nu (a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k}) + a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\nu^+(\mathbf{k})), \tag{7.43}$$

我们得到结论[1]，旋量场相当于自旋在已知轴上投影的可能值等于 $\pm\frac{1}{2}$ 的荷电粒子. 能量-动量、电荷和自旋投影许可值的比较详细的分类，将在讨论量子化(§ 12)后予以列举，在那里这种分类得到单值的完整的基础.

## § 8. 場系統的拉格朗日函数密度

在本节中并不牵涉到各种场的相互作用的本质问题，我们简单地讨论场系统的拉格朗日函数密度的一般构成原则，并且求出这些系统的若干力学量.

### 8.1. 场系統的相互作用拉格朗日函数密度和不变量

讨论各种场的相互作用过程的出发点是拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = \mathscr{L}_{\text{free}} + \mathscr{L}_{\text{int}}, \tag{8.1}$$

它是自由场的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{free}}$ 及称为相互作用拉格朗日函数密度的 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 两项

1) 注意：旋量场的量子化(参阅 § 12)保存(7.34)、(7.42)和(7.43)式的结构，只改变某些项的符号.

之和.

相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 应当满足基本的物理要求——即具有相对论不变性,因此它可以是用相互作用场函数所构成的、代数的或积分的任意不变组合. 积分的拉格朗日函数密度将导致我们不拟讨论的非定域性理论,故不考虑此种组合. 于是相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 可由两种场函数构成的量编缩而得到,这时两量必须具有相同的张量维数,例如,是两个标量、两个赝标量、两个矢量以及其他等等.

例如标量场 $\varphi(x)$ 和旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用可以构成如下:标量-标量型

$$\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x), \tag{8.2}$$

或矢量-矢量型

$$\sum_n \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^n}, \tag{8.3}$$

以及其他等等. 与此相似,赝标量场 $\varphi(x)$ 及旋量场 $\psi(x)$ 的相互作用的最简单形式为

$$\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\varphi(x), \tag{8.4}$$

$$\sum_n \bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^n\psi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^n}. \tag{8.5}$$

我们来讨论场系统的不变量. 由于相互作用拉格朗日函数密度的相对论不变性,系统的总拉格朗日函数密度对坐标系统的四个平移和六个转动是不变的. 和这些变换相对应的不变量——能量-动量和动量矩——利用从 Noether 定理推出的公式来决定.

$\mathscr{L}_{\text{int}}$ 与场函数的导数无关的情况有特别的意义. 此时,根据公式(2.20)和(2.29),场系统的动量和自旋等于各场的动量和自旋之和,而场系统的能量密度等于各个场的能量密度之和减去 $\mathscr{L}_{\text{int}}$,也就是

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i, \quad P^0 = \sum_i P_i^0 - \int \mathscr{L}_{\text{int}}(x)dx,$$

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i. \tag{8.6}$$

## 8.2. 梯度变换不变量

第一类梯度变换(规范变换)应该单独予以讨论. 问题在于 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 对于(2.30)类型的变换的不变性先验地并不是必要的. 事实上,只当要求场系统中某些类似电荷的物理量守恒时,才对 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 加上这一条件.

例如,电磁场(5.12)与电子-正电子场(7.27)的相互作用拉格朗日函数密度具有形式:

$$\mathscr{L}_{\text{int}}(x) = e\sum_n \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)A_n(x) = e\sum_n J^n(x)A_n(x). \tag{8.7}$$

系统的总拉格朗日函数密度等于(5.12)、(7.37)及(8.7)三式之和:

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_{\text{int}}(x)$$

($\mathscr{L}_0$ 是自由场拉格朗日函数密度之和),它对于以下变换是不变的:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x),$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha}.$$

由于 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 不依赖于 $\frac{\partial\psi}{\partial x}$，相应的不变量 (2.33) 等于电子-正电子自由场的电荷 (7.43).

试另举一例. 我们讨论四个场所组成的系统，即有质子场、中子场、电子-正电子场及中微子场. 此时，质子、中子及中微子由(7.27)类型的旋量场描述. 故有

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}},$$

$$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_P + \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_\nu,$$

$$\mathscr{L}_P = \frac{i}{2}\sum_n \left(\bar{\Psi}_P(x)\gamma^n \frac{\partial\Psi_P}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\Psi}_P}{\partial x^n}\gamma^n\Psi_P(x)\right) - M\bar{\Psi}_P(x)\Psi_P(x),$$

$$\mathscr{L}_N = \frac{i}{2}\sum_m \left(\bar{\Psi}_N(x)\gamma^m \frac{\partial\Psi_N}{\partial x^m} - \frac{\partial\bar{\Psi}_N}{\partial x^m}\gamma^m\Psi_N(x)\right) - M\bar{\Psi}_N(x)\Psi_N(x),$$

$$\mathscr{L}_e = \frac{i}{2}\sum_k \left(\bar{\psi}(x)\gamma^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k\psi(x)\right) - m\bar{\psi}(x)\psi(x),$$

$$\mathscr{L}_\nu = \frac{i}{2}\sum_l \left(\bar{u}_\nu(x)\gamma^l \frac{\partial u_\nu}{\partial x^l} - \frac{\partial u_\nu}{\partial x^l}\gamma^l u_\nu(x)\right),$$

此处$M$是核子的质量，$m$是电子的质量，$\Psi_P$是质子波函数，$\Psi_N$是中子波函数，$\psi$是电子-正电子函数，$u_\nu$是中微子函数.

上述四种场的相互作用拉格朗日函数密度描述$\beta$过程，通常写成下式:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g_\beta[(\bar{\Psi}_P O\Psi_N)(\bar{\psi}Ou_\nu) + (\bar{\Psi}_N O\Psi_P)(\bar{u}_\nu O\psi)]. \tag{8.8}$$

其中$O$是决定相互作用形式的 Dirac 矩阵，例如，当矢量耦合时，$O = \gamma^n$，而 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 具有形式

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g_\beta \sum_n g^{nn}[(\bar{\Psi}_P\gamma^n\Psi_N)(\bar{\psi}\gamma^n u_\nu) + (\bar{\Psi}_N\gamma^n\psi_P)(\bar{u}_\nu\gamma^n\psi)].$$

对于某些独立的第一类梯度变换，总拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}$ 是不变的，例如

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \psi(x) \to e^{-i\alpha}\psi(x), && \bar{\psi}(x) \to e^{i\alpha}\bar{\psi}(x),\\
&\Psi_P(x) \to e^{i\alpha}\Psi_P(x), && \bar{\Psi}_P(x) \to e^{-i\alpha}\bar{\Psi}_P(x),\\
&\Psi_N(x) \to \Psi_N(x), && \bar{\Psi}_N(x) \to \bar{\Psi}_N(x),\\
&u_\nu(x) \to u_\nu(x), && \bar{u}_\nu(x) \to \bar{u}_\nu(x).
\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

与此变换相对应的不变量等于场 $\Psi_P$ 和 $\psi$ 的荷之差，亦即电荷.

$$\left.\begin{aligned}
&2)\ \Psi_P \to e^{i\beta}\Psi_P, && \bar{\Psi}_P \to e^{-i\beta}\bar{\Psi}_P,\\
&\Psi_N \to e^{i\beta}\Psi_N, && \bar{\Psi}_N \to e^{-i\beta}\bar{\Psi}_N,\\
&\psi \to \psi, && \bar{\psi} \to \bar{\psi},\\
&u_\nu \to u_\nu, && \bar{u}_\nu \to \bar{u}_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

相应的不变量等于场 $\Psi_P$ 和 $\Psi_N$ 之荷的总和，并且称为核子荷(或核荷).

应该强调指出，拉格朗日函数密度对于各种规范变换的不变性和对于 Lorentz 转动及移动的不变性略有差别. 任意拉格朗日函数密度对旋转和平移的不变性是普通的物理要求. 而任意拉格朗日函数密度对某一规范变换的不变性却决定于是否存在某一确定的物理守恒定律. 例如，从电荷守恒定律得出结论，所有场可以分成三类:

$u_{+z}$ 场描述 $z$ 倍(以 $e$ 为单位)的荷正电粒子;

$u_{-z'}$ 场描述 $z'$ 倍(以 $e$ 为单位)的荷负电粒子;

$u_0$ 场描述中性粒子.

而且所有可能的拉格朗日函数密度[1]对下列规范变换是不变的[2]:

$$\left.\begin{aligned} &u_{+z} \to e^{i\alpha z}u_{+z}, && u^{\dagger}_{+z} \to e^{-i\alpha z}u^{\dagger}_{+z},\\ &u_{-z'} \to e^{-i\alpha z'}u_{-z'}, && u^{\dagger}_{-z'} \to e^{i\alpha z'}u^{\dagger}_{-z'},\\ &u_0 \to u_0, && u^{\dagger}_0 \to u^{\dagger}_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

变换(8.9)是变换(8.11)的特例.

同理,根据实验数据,核子数在基本过程中或者保持不变,或者,当产生或湮没核子-反核子对时,它是改变的. 因此,令质子和中子的"核"荷等于 1,令反质子和反中子的核荷等于 $-1$,就可以说核荷是守恒的.

如果认为对于所有过程核荷都是守恒的,没有例外的情况,也就是假定"总拉格朗日函数密度"对某一规范变换

$$u_A \to u_A e^{iy_A\beta}, \qquad u^{\dagger}_A \to e^{-iy_A\beta}u^{\dagger}_A \tag{8.12}$$

是不变的,其中指标 $y_A$ 表明给定场 $u_A$ 粒子的核荷之值和符号. 变换(8.10)是变换(8.12)的特例,而

$$y(\Psi_P) = 1, \qquad y(\Psi_N) = 1,$$
$$y(\psi) = 0, \qquad y(u_\nu) = 0.$$

因此我们看出,上述电荷守恒定律有两个方面. 一方面电荷守恒定律直接被试验所证实. 另一方面,电荷守恒定律又可作为"总拉格朗日函数密度"的某些数学性质,更确切地说,作为判断可能有那些类型基本过程的选择法则.

在相互作用拉格朗日函数密度的形式以及被这些拉格朗日函数密度所描述的基本过程的类型之间存在着简单的对应,在二次量子化理论中(第三章),这一对应将建立在严格论证的基础上.

在 §9 中将要证明,场函数 $u$, $u^{\dagger}$ 可分解为产生算符和消失算符. 函数 $u(x)$ 分解为正粒子的消失算符和反粒子的产生算符, $u^{\dagger}(x)$ 分解为反粒子的消失算符和正粒子的产生算符,因此,函数组合

$$u_1(x)\, u^{\dagger}_2(x)\cdots u_k(x)$$

描述 $u_1$ 场的反粒子的产生(或者 $u_1$ 场的粒子的消失), $u_2$ 场的粒子的产生(或者 $u_2$ 场的反粒子的消失)等等过程.

例如,电子-正电子场与电磁场相互作用的拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}_{\text{int}}(x) = e\sum_k \bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)A_k(x)$$

---

1) 简言之,"总拉格朗日函数密度"等于一切(已被发现存在的以及至今未知的)自由场的拉格朗日函数密度以及一切相互作用拉格朗日函数密度之和.

2) 今后符号 $^{\dagger}$ 表示"广义"共轭运算,例如,旋量场中从 $\psi$ 化成 $\bar{\psi}$ 的变换.

所描述的基本过程的一部分示于图 1.

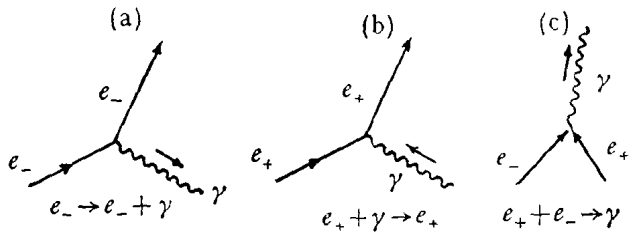



图 1 (a) 电子 $e_-$ 发射光子 $\gamma$;
(b) 正电子 $e_+$ 吸收光子 $\gamma$;
(c) 电子-正电子湮没,并放出光子.

利用这些对应法则,容易证明,这一相互作用拉格朗日函数密度对变换(8.10)的不变性保证在相应过程中的电荷守恒.

# 第二章　自由場的量子理論

## §9. 波动場量子化的一般原理

### 9.1. 场函数的算符性质和态振幅的变换定律

到目前为止，我们只讨论了经典场．场的经典描述的特征在于理论上沒有明显地考虑到这些场的相应粒子的产生和消失过程(更确切地说，是粒子的相互转化过程)．在量子力学中，波函数的平方给出场粒子处于给定状态的几率．在波动场的量子理论中，场的波函数描述粒子的集合，而这些粒子的相互转化过程以明显的方式包含于理论中．与之相应，量子场的波函数具有算符性质，并且分解为粒子的产生算符和消失算符，在算符之间还确定了对易关系．场方程和对易关系可确定波函数算符，精确到只差一么正变换．

因此，场函数已经不是经典意义的函数，而成为作用于所有场的共同波函数上的算符，这一公有波函数，我们称之为态振幅[1]．在量子场论中，态振幅的二次型给出状态的平均值和几率．

我们来讨论在非齐次 Lorentz 羣中的某一坐标系变换 $L$ 下态振幅 $\Phi$ 的变换，$L$ 由 Lorentz 羣本身和四个平移所组成：

$$x \to x' = Lx = x + \delta x; \quad \delta x^k = a^k + \sum_n g^{nn} x^n \omega^{kn}. \tag{9.1}$$

显然，此时应该认为我们感到有意义的态振幅的变换

$$\Phi \to \Phi' = U_L \Phi \tag{9.2}$$

是利用么正变换

$$U_L U_L^* = 1 \tag{9.3}$$

来完成的，这就保证态振幅的模 $\Phi\Phi^*$ 为不变量．特别是，当无穷小变换的形式如(9.1)时，我们有

$$\Phi' = (1 + \delta U_L)\Phi, \tag{9.4}$$

而由于(9.3)式，量 $\delta U_L$ 应该是反厄米的．另一方面，此量显然应该是无穷小参量 $a^k$ 和 $\omega^{kl}$ 的线性组合．因此，我们写成

$$\delta U_L = i \sum_k g^{kk} P^k a^k + \frac{i}{2} \sum_{k,n} g^{kk} g^{nn} M^{kn} \omega^{kn}. \tag{9.5}$$

此处系数中引进了度规张量 $g$，这是为了使算符 $P$ 和 $M$ 分别具有正确的矢量和张量变换性质．由于 $\delta U_L$ 的反厄米性，这样引进的 $P$ 和 $M$ 将是厄米的．

---

1) 态振幅可以用某一 Hilbert 空间中的矢量来表示，因此，在美国文献中，通常将它称为态矢量 (state vector).

为了阐明这些量的物理意义，我们讨论通常量子力学中依赖于坐标 $\mathbf{x}$ 和时间 $x^0$ 的波函数 $\varphi$. 根据(2.8)式，这一标量函数的变换定律为

$$\varphi'(x') = \varphi(x).$$

考虑到变换参量为微小量，以及 $\omega^{kn}$ 是反对称的，对于宗量进行替代 $x \to L^{-1}x$ 后，我们获得

$$\varphi'(x) = \varphi(L^{-1}x) = \varphi(x) - \sum_n a^n \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} - \sum_{k,n} g^{nn}x^n\omega^{kn}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} =$$

$$= \left[1 - \sum_n a^n\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{1}{2}\sum_{k,n}\left(g^{nn}x^n\frac{\partial}{\partial x^k} - g^{kk}x^k\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\omega^{kn}\right]\varphi(x), \quad (9.6)$$

由此可见，$\varphi(x)$ 的变换也可以表如(9.4)、(9.5)，于是得到 $P$ 及 $M$ 的表达式如下：

$$P^n = ig^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}, \quad (9.7)$$

$$M^{kn} = i\left(x^n g^{kk}\frac{\partial}{\partial x^k} - x^k g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}\right). \quad (9.8)$$

于是，根据通常量子力学中的对应原理，在所讨论的情况(9.6)中，$P$ 和 $M$ 二量应该分别等于能量-动量四维矢量和动量矩张量.

因此，在(9.5)式中，自然将 $P$ 解释为能量-动量四维矢量，而将 $M$ 解释为动量矩张量. 显然，在量子场论中，态振幅并非明显地依赖于坐标，我们不能利用公式(9.7)，(9.8)，而应该选择作用于态振幅上的某些算符作为 $P$ 和 $M$.

## 9.2. 波动场的量子化公理

作为波动场量子化的基本公理，我们认为，能量-动量四维矢量 $P$ 和动量矩张量 $M$ 用场算符函数表达的式子与波动场经典理论中的关系式(2.21)及(2.25)相同，自然，此时还要给出场算符乘积的适当顺序. 这一公理是对应原理的进一步应用，而且它决定了二次量子化态振幅的变换定律.

我们来讨论在 § 2 中所确定的算符型波函数的变换性质和态振幅在 Lorentz 变换(9.1)下的变换性质之间的关系问题. 为此，将变换后的算符性场函数 $u'(x)$ 对振幅 $\Phi$ 所描述的态取平均值. 将此值写成形式

$$\Phi^* u'(x)\Phi.$$

根据变换(9.2)的涵义，此值可以由未经变换的函数 $u(x)$ 算出来，但要利用变换后的态振幅 $\Phi'$，因此，我们有

$$\Phi^* u'(x)\Phi = \Phi^{*\prime}u(x)\Phi'.$$

利用(9.2)式，通过 $\Phi$ 和 $\Phi^*$ 来表示振幅 $\Phi'$ 和 $\Phi^{*\prime}$，得到

$$u'(x) = U_L^* u(x) U_L. \quad (9.9)$$

这一关系式为场算符的变换性质和态振幅的变换性质的相容条件. 它对场算符加上一系列的条件，任何波动场不论其对易关系的具体形式如何，都必须满足. 我们就来表述这些算符条件.

我们记住,对于无穷小变换

$$x' = x + \delta x, \quad \delta x^k = \sum_i X_i^k \delta\omega^i,$$

根据(9.4)式,算符 $U_L$ 具有形式:

$$U_L = 1 + \delta U_L; \quad \delta U_L = i \sum_j U_j \delta\omega^j,$$

其中 $\delta U_L$ 是反厄米的,从(9.9)式,我们得到

$$u'(x) = u(x) - \delta U_L u(x) + u(x)\delta U_L = u(x) + [u(x), \delta U_L].$$

这一关系也可以表示成形式

$$\bar{\delta} u(x) = [u(x), \delta U_L], \tag{9.10}$$

与 § 2 中相同,其中 $\bar{\delta} u$ 表示函数 $u$ 的形式的变分:

$$\bar{\delta} u(x) \equiv u'(x) - u(x).$$

对 $\bar{\delta} u$ 利用(2.15)式,我们求得

$$i\left(\Psi_{ij} - \sum_n \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^n} X_j^n\right) = [U_j, u_i]. \tag{9.11}$$

关系式(9.11)即所求的算符条件. 我们来讨论在各种变换下公式(9.11)的具体形式.

在坐标系的平移变换下,

$$X_j^n = \delta_j^n, \quad \Psi_{ij} = 0, \quad U_k = P^k g^{kk},$$

我们求得[1)]

$$i g^{nn} \frac{\partial u_i}{\partial x^n} = [u_i(x), P^n]. \tag{9.12}$$

在坐标系的旋转变换(空间旋转和 Lorentz 旋转)下,

$$\left.\begin{aligned} X_{(mn)}^k &= g^{nn} x^n \delta_m^k - g^{mm} x^m \delta_n^k, \\ \Psi_{i(mn)} &= \sum_j A_{i(mn)}^j u_j, \quad U_{(mn)} = g^{mm} g^{nn} M^{mn}, \end{aligned}\right\} \quad (m \leqslant n),$$

我们相应地得到

$$i\left\{\sum_j A_{i(mn)}^j u_j - \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\left(g^{nn} x^n \delta_m^k - g^{mn} x^m \delta_n^k\right)\right\} = [M^{mn}, u_i]. \tag{9.14}$$

---

1) 根据正则形式 (Wentzel (1947), Pauli (19476)) 叙述理论时,通常将这一方程的零分量公理化

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = [u, H],$$

其中 $t = x^0$, 而 $H = P^0$ 是哈密顿算符. 这一公理也是以对应原理为基础的. 事实上,从保守系统的经典力学得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{H, u\}, \tag{9.13}$$

其中

$$\{a, b\} = \sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i}\right)$$

是经典 Poisson 括号. 量子化公理在于用量子 Poisson 括号代替经典 Poisson 括号

$$\{a, b\} \to i[a, b],$$

这就给出(9.13)式.

所得方程的右边是动量矩算符，它在经典理论中表示为轨道矩及自旋矩之和的形式：

$$M = M_0 + S. \tag{9.15}$$

我们假定，这一关系在量子化过程中并不改变，而且自旋算符 $S_{mn}$ 是由场算符用(2.27)类型的关系式以适当的方式来表示的.

在复场情况下，还应该讨论第一类梯度变换. 在§8中已经阐明了，此时带有电荷 $z$ 的粒子的波函数按以下定律变换：

$$\left.\begin{aligned} u(x) &\to u'(x) = e^{i\alpha z}u(x), \\ u^\dagger(x) &\to u^{\dagger\prime}(x) = e^{-i\alpha z}u^\dagger(x). \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

态振幅的相应变换

$$\Phi' = U_\alpha \Phi \tag{9.17}$$

利用么正算符 $U_\alpha$ 来实现，当变换参数 $\alpha$ 为无穷小时，$U_\alpha$ 具有形式

$$U_\alpha = 1 + \delta U_\alpha, \quad \delta U_\alpha = iQ\alpha,$$

其中 $Q$ 是某一厄米算符，它的物理意义将利用对应原理来阐明. 当 $\alpha$ 无穷小时，方程(9.16)

$$u'(x) = (1 + i\alpha z)u(x),$$
$$u^{\dagger\prime}(x) = (1 - i\alpha z)u^\dagger(x)$$

在形式上和(9.17)相一致，其中算符 $Q$ 起着电荷 $z$ 的作用. 因此，根据对应原理，量 $Q$ 应该等于电荷. 显然，在所讨论的情况中，不应该将 $Q$ 的表式理解为电荷本身 $z$，而应该理解为通过场的算符型波函数用(2.33)关系式来表示的电荷算符.

因此对于第一类梯度变换有

$$X_i^k = 0, \qquad U_i = Q,$$
$$\Psi_{ij} = \begin{cases} iu_i z, & \text{对所有的 } u, \\ -iu_i^\dagger z, & \text{对所有的 } u^\dagger. \end{cases}$$

以之代入(9.11)式，我们得到方程

$$\left.\begin{aligned} zu(x) &= [u(x), Q], \\ -zu^\dagger(x) &= [u^\dagger(x), Q]. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

我们求得了三类方程——(9.12)，(9.14)和(9.18)，它们是波动场量子化函数的普适算符条件，与对易关系的具体形式无关. 现在我们研究这些方程来阐明场算符更详尽的性质.

### 9.3. 正负频率分量和共轭函数的物理意义

由方程(9.12)直接得出场算符函数的正负频率部分的物理意义 (Schwinger (1949a)). 我们讨论用函数 $u(x)$ 来描述的、质量为 $m$ 的粒子的场：

$$u(x) = u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x),$$
$$u^{(+)}(x) = \int_{k^0>0} e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)u(k)dk,$$
$$u^{(-)}(x) = \int_{k^0>0} e^{-ikx}\delta(k^2 - m^2)u(-k)dk.$$

将 $u^{(+)}$ 与 $u^{(-)}$ 分别代到条件(9.12)中，我们得到

$$\left.\begin{aligned}[u^{(+)}(x),\ P^n] &= -\int_{k^0>0} e^{ikx}k^n\delta(k^2-m^2)u(k)dk,\\ [u^{(-)}(x),\ P^n] &= \int_{k^0>0} e^{-ikx}k^n\delta(k^2-m^2)u(-k)dk,\end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

从上式得出

$$[u^{(+)}(k),\ P^n] = -k^n u^{(+)}(k), \tag{9.20}$$

$$[u^{(-)}(k),\ P^n] = k^n u^{(-)}(k). \tag{9.21}$$

其中采用记号

$$u^{(+)}(k) = u(k)|_{k^0>0},\quad u^{(-)}(k) = u(-k)|_{k^0>0}.$$

现在我们引进具有确定的能量-动量四维矢量 $p^n$ 的态，并用幅 $\Phi_p$ 描述之：

$$P^n\Phi_p = p^n\Phi_p. \tag{9.22}$$

对(9.20)式右方乘上 $\Phi_p$，考虑(9.22)式，得到

$$P^n u^{(+)}(k)\Phi_p = (p^n + k^n)u^{(+)}(k)\Phi_p. \tag{9.23}$$

同法，由(9.21)式求得

$$P^n u^{(-)}(k)\Phi_p = (p^n - k^n)u^{(-)}(k)\Phi_p, \tag{9.24}$$

在上两式中，$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$.

从所得到的方程可知，$u^{(+)}(k)\Phi_p$ 表示能量-动量为 $k + p$ 的态振幅，而 $u^{(-)}(k)\Phi_p$ 相当于能量-动量为 $p - k$ 的态. 因为此时满足关系 $k^2 = m^2$，所以可认为，算符 $u^{(+)}(k)$ 描述质量为 $m$、四维动量为 $k$ 的粒子的产生，而算符 $u^{(-)}(k)$ 相当于该粒子的消失.

我们强调指出，场算符正、负频率部分的这一性质完全是普遍性的，适用于任何张量维数的场，不论实场或复场，而且不依赖于对易关系的具体形式.

现在来研究(9.14)式，我们注意到，此式显含场函数分量的变换矩阵 $A$，而该矩阵则决定于场的张量维数，且是 Lorentz 羣的一个有限维表示. 由对方程(9.14)的细致分析，得到场算符沿总动量矩为确定值的状态的展开，这相当于对球谐和函数的展开.

再来讨论方程(9.18). 引进电荷 $q$ 有确定值的态振幅 $\Phi_q$

$$Q\Phi_q = q\Phi_q,$$

利用(9.18)式，我们得到两个方程：

$$\left.\begin{aligned}Qu\Phi_q &= (q-z)u\Phi_q,\\ Qu^{\dagger}\Phi_q &= (q+z)u^{\dagger}\Phi_q.\end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

从上式得出，算符 $u^{\dagger}$ 使场的电荷增加 $z$，而算符 $u$ 使场的电荷减少 $z$. 显然，算符 $u^{\dagger}$ 和 $u$ 在分为正负频率部分后仍分别具有这样的性质.

### 9.4. 真空态和粒子数给定态的振幅

在方才进行的讨论的基础上，自然可以定义真空态，并且对各种粒子数目给定的态给出振幅的构成法则.

我们讨论由几个互不作用的量子场所组成的动力学系统，这些场分别用算符函数

$$u_1(x),\cdots,u_n(x)$$

来表征. 为了书写的方便,在上一序列中也包括相应的共轭函数, 如果它们与 $u_i$ 不相同.

对于这个给定的动力学系统,我们来定义真空态$\Phi_0$. 因为在真空中不存在粒子,所以真空的能量和动量为零. 由于负频算符 $u^{(-)}$ 减低能量和动量,而能量又不可能是负的,因此对于一切 $x$,应该存在如下关系:

$$u_1^{(-)}(x)\Phi_0 = \cdots = u_n^{(-)}(x)\Phi_0 = 0. \tag{9.26}$$

化为动量表象后,对于所有的满足 $k_i^2 = m_i^2$ 的 $k_i$ (其中 $m_i$ 是 $i$ 类粒子的质量),相应地得到

$$u_1^{(-)}(k_1)\Phi_0 = \cdots = u_n^{(-)}(k_n)\Phi_0 = 0. \tag{9.27}$$

可以将关系式(9.27)和它的共轭式

$$\Phi_0^* u_1^{\dagger(+)}(k_1) = \cdots = \Phi_0^* u_n^{\dagger(+)}(k^n) = 0, \tag{9.28}$$

以及归一化条件

$$\Phi_0^*\Phi_0 = 1 \tag{9.29}$$

作为自由场真空的定义.

现在可以利用上面引入的真空振幅和相应粒子的产生算符来表示所讨论的动力学系统的任何状态的振幅, 因此可以将所含粒子分别属于 $j_1,\cdots,j_s$ 类 ($j$ 中某些指标可能重合)的共有 $s$ 个粒子的态振幅表如下式:

$$\Phi = \int F_s(k_1,\cdots,k_s)\delta(k_1^2 - m_{j_1}^2)\cdots\delta(k_s^2 - m_{j_s}^2)u_{j_1}^{(+)}(k)\cdots u_{j_s}^{(+)}(k)dk_1\cdots dk_s\Phi_0, \tag{9.30}$$

其中 $F_s$ 是描述粒子沿着状态的连续参数——能量和动量——分布的权函数, 而指标 $j_1,\cdots,j_s$ 指状态的分立特征(例如,粒子的电荷,自旋在已知方向的投影).

任意状态的一般振幅表如下式的迭加:

$$\Phi = \sum_{(j_1,\cdots,j_s\geqslant 0)} \int F_s(k_1,\cdots,k_s)\delta(k_1^2 - m_{j_1}^2)\cdots\delta(k_s^2 - m_{j_s}^2)u_{j_1}^{(+)}(k)\cdots$$
$$\cdots u_{j_s}^{(+)}(k_s)dk_1\cdots dk_s\Phi_0. \tag{9.31}$$

表式(9.31)也可以写成组态表象. 为此先对所有的 $k_i^0$ 作积分:

$$\Phi = \sum_{(j_1,\cdots,j_s\geqslant 0)} \int F_s(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_s)u_{j_1}^{(+)}(\mathbf{k}_1)\cdots u_{j_s}^{(+)}(\mathbf{k}_s)d\mathbf{k}_1\cdots d\mathbf{k}_s\Phi_0, \tag{9.32}$$

按常例,其中

$$u^{(+)}(\mathbf{k}) = \frac{\theta(k^0)u(k)}{\sqrt{2k^0}} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),$$

以及

$$F_s(\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_s) = \frac{F_s(k_1,\cdots,k_s)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\sqrt{2k_i^0}} \quad (k_i^0 = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2}).$$

利用关系式

$$F_s(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\sum\limits_j \mathbf{k}_j\mathbf{x}_j}\varphi_s(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_s)d\mathbf{x}_1\cdots d\mathbf{x}_s,$$

$$u^+(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}u^{(+)}(0,\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$u^+(0,\mathbf{x}) = u^{(+)}(x)\big|_{x^0=0}$$

化为组态表象，代替(9.31)式，我们求得态振幅的表式如下：

$$\Phi = \sum_{(j_1,\cdots,j_s>0)} \int \varphi_s(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_s) u_{j_1}^{(+)}(0, \mathbf{x}_1) \cdots u_{j_s}^{(+)}(0, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_s \Phi_0. \tag{9.33}$$

这里出现的函数 $\varphi_s(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_s)$ 理解为在组态空间中 $s$ 个粒子所组成系统的通常波函数。如果我们的状态恰有 $s$ 个粒子，则态振幅完全可用这样一个函数来标征。在一般情况下，当粒子数并不固定时，态振幅用一序列函数 $\varphi_s$ 来标征。此时，我们实际上得到态振幅的 Фок 表象。

应该强调，$\Phi$ 对时间没有依赖关系，这是完全自然的，因为当相互作用不存在时，在我们所选定的表象中，态振幅是常数。

## §10. 对易关系的建立

### 10.1. 对易关系的类型

我们来建立算符型波函数之间的对易关系。

在含有二次型拉格朗日函数密度的自由场经典理论中，当引用正则形式时，波函数用相互共轭的广义坐标和广义动量线性表出。这时场函数的经典 Poisson 括号

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}$$

是 $x$ 和 $y$ 的某一函数，它并不依赖于 $u$。因此，从对应原理出发，在自由场的量子理论中，我们认为场算符的对易法则具有下二形式之一，或者是

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_- = u_\alpha(x)u_\beta(y) - u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta},$$

或者是

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_+ = u_\alpha(x)u_\beta(y) + u_\beta(y)u_\alpha(x) = \Delta_{\alpha\beta},$$

即可认为，两个场算符的对易子或反对易子是 $c$ 数 $\Delta_{\alpha\beta}$。

第一类关系式称为 Bose-Einstein 对易关系，第二类关系式是 Fermi-Dirac 对易关系。

考虑平移不变性得出结论，$\Delta_{\alpha\beta}$ 只可能依赖于差 $x - y$。因此，我们写成

$$\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\}_\pm = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}(x - y), \tag{10.1}$$

这里为了方便起见，引进了乘子 $i^{-1}$。

从方程(10.1)直接推出，场算符的正负频率部分当具有同一频率时，必定严格地对易或反对易，即

$$\{u^{(+)}(x), u^{\dagger(+)}(y)\} = \{u^{(+)}(x), u^{(+)}(y)\} = \{u^{\dagger(+)}(x), u^{\dagger(+)}(y)\} =$$
$$= \{u^{(-)}(x), u^{\dagger(-)}(y)\} = \{u^{(-)}(x), u^{(-)}(y)\} = \{u^{\dagger(-)}(x), u^{\dagger(-)}(y)\} = 0. \tag{10.2}$$

事实上，例如二个正频率函数的对易子(反对易子)

$$\{u_\alpha^{(+)}(x), u_\beta^{(+)}(y)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i(kx+ly)}\theta(k^0)\theta(l^0)\delta(k^2 - m^2)\delta(l^2 - m^2) \times$$
$$\times \{u_\alpha^{(+)}(k), u_\beta^{(+)}(l)\} dk dl$$

若是依赖于差 $x - y$，必须使

$$k = -l,$$

由于存在乘子 $\theta(k^0)\theta(l^0)$，这是不可能的.

关系式 (10.2) 具有简单的物理意义：任一场的粒子的产生行为相互之间没有干扰，而且任一场的粒子的消失行为相互之间也没有干扰.

在任何场中，对易关系 $\Delta_{\alpha\beta}(x-y)$ 的正确形式决定于方程 (9.12),(9.13),(9.20),(9.21)及此场中能量-动量四维向量算符的构造. 从自由场的经典理论，我们知道，四维动量 $P^n$ 常可用以下形式的积分和来表示(参阅 (3.26), (3.39), (4.23), (5.20) 及 (7.34) 式):

$$P^n = \sum_a \int d\mathbf{k} \cdot k^n (a_a^{*(+)}(\mathbf{k}) a_a^{(-)}(\mathbf{k}) \pm a_a^{*(-)}(\mathbf{k}) a_a^{(+)}(\mathbf{k})), \tag{10.3}$$

被积式为独立振幅 $a^{(\pm)}$ 的二次型，而 $a^{(\pm)}$ 与 $u^{(\pm)}(\mathbf{k})$ 之间有线性关系:

$$u^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \sum_a v_a^{(\pm)}(\mathbf{k}) a_a^{(\pm)}(\mathbf{k}). \tag{10.4}$$

在量子场论中，函数 $a^{(+)}$ 与 $a^{(-)}$ 是互不对易的算符，因此，(10.3)式中乘子的顺序有实质意义.

## 10.2. 算符的正规乘积和力学量的写法

本节中引进写成正规形式的算符这一概念以及算符的正规乘积.

所谓算符的正规形式是这样的形式，在动量表象中，每一项内所有的产生算符 $u^{(+)}$ (相对应地 $a^{(+)}$) 位于所有消失算符 $u^{(-)}$ (相对应地 $a^{(-)}$) 的左边.

不难看出，从计算观点而言，算符的正规形式最为方便. 事实上，当计算任一正规形式的算符 $A$ 的矩阵元 $\Phi^* A \Phi$ 时，只要将 $A$ 中的算符 $u^{(-)}$ 和态振幅 $\Phi$ 中所有的 $u^{(+)}$ 相对易，$A$ 中的 $u^{(+)}$ 与 $\Phi^*$ 中所有的 $u^{(-)}$ 相对易，直到没有一个 $u^{(-)}$ 作用于 $\Phi_0$ 上，或者没有一个 $u^{(+)}$ 作用在 $\Phi_0^*$ 上为止，不然就等于零.

我们来讨论下面的例子：将二个 Bose 算符 $u^*(x)$ 及 $u(y)$ 的乘积写成正规形式. 可逐步求得

$$\begin{aligned} u^*(x)u(y) &= u^{*(+)}(x)u^{(+)}(y) + u^{*(+)}(x)u^{(-)}(y) + \\ &\quad + u^{*(-)}(x)u^{(+)}(y) + u^{*(-)}(x)u^{(-)}(y) = \\ &= u^{*(+)}(x)u^{(+)}(y) + u^{*(+)}(x)u^{(-)}(y) + \\ &\quad + u^{(+)}(y)u^{*(-)}(x) + u^{*(-)}(x)u^{(-)}(y) - i\Delta^{(-)}(x-y). \end{aligned}$$

显然，在更加普遍的情况下，将几个算符型波函数 $u$ 的乘积化成正规式时，我们获得分量 $u^{(+)}$ 及 $u^{(-)}$ 以及对易函数 $\Delta^{(-)}$ 的乘积之和. 我们以后 (§ 16) 将要讨论计算这类乘积的一般方案，它是重要的 Wick 定理的内容. 可以暂且认为所有表式从整体来看是依 $\Delta^{(-)}$ 函数为幂的多项式. 此多项式的零阶项也就是根本不含有 $\Delta^{(-)}$ 函数的各项之和，被称为原有算符型波函数的正规乘积. 也可以将正规乘积定义为化成正规形式的乘积，而在转化过程中认为一切对易函数等于零.

算符 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的正规乘积可用记号表示如下:

$$:u_1 u_2 \cdots u_n:.$$

作为另一个例子，试将两个依 Fermi-Dirac 量子化的算符 $u^+(x)$ 和 $u(y)$ 写成正规

乘积. 显然有

$$:u^{\dagger}(x)u(y): = u^{\dagger(+)}(x)u^{(+)}(y) + u^{\dagger(+)}(x)u^{(-)}(y) - \\ - u^{(+)}(y)u^{\dagger(-)}(x) + u^{\dagger(-)}(x)u^{(-)}(y).$$

现在我们规定：用同宗量的算符的二次型表示的一切力学量（例如拉格朗日函数密度，能量-动量，电流等等），根据定义，就是正规乘积形式的. 例如，标量场的拉格朗日函数密度将写成

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{n} :\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}: g^{nn} - \frac{m^2}{2}:\varphi^*\varphi:.$$

不难看出，根据真空振幅的定义

$$\varphi^{(-)}(x)\Phi_0 = 0, \quad \varphi^{*(-)}(x)\Phi_0 = 0,$$

及其共轭关系

$$\Phi_0^*\varphi^{(+)}(x) = 0, \quad \Phi_0^*\varphi^{*(+)}(x) = 0,$$

得出结论，所有力学量对真空振幅的平均值为零，即

$$\Phi_0^* P^n \Phi_0 = 0,$$

$$\Phi_0^* Q \Phi_0 = 0, \text{ 等等.}$$

因此也就从理论中一下子就消去了虚拟的物理量，类如零能量，零电荷等等，这些量通常在量子化后出现. 同时，十分明显，在经典理论中对所引入的物理量建立起的一切守恒定律，此处仍归保持，因为在证明时所应用的代数恒等式，对于正规乘积也是正确的.

### 10.3. 能量的正值性要求

将四维能量-动量表式写成正规式，可得

$$P^n = \sum_{\alpha}\int d\mathbf{k}\cdot k^n\{a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) \pm a_\alpha^{(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})\}, \tag{10.5}$$

其中第二项前面的符号，在 Bose-Einstein 量子化情况下，和(10.3)式中的符号相同，而在 Fermi-Dirac 量子化情况下，与(10.3)式中的符号相反. 能量平均值的正值性要求唯一地决定(10.5)式中第二项的符号，因而也就决定了量子化的方式，注意，根据我们的记号，必有

$$(a^{(+)})^* = a^{*(-)},$$

我们看到，(10.5)式中第二项是 $AA^*$ 型的. 将此式写成矩阵形式：

$$\sum_k A_{mk}A_{kn}^*,$$

可以证明它的矩阵元

$$\sum_{k,m,n} u_m^* A_{mk}A_{kn}u_n = \sum_k \left|\sum_n u_n^* A_{nk}\right|^2$$

必为正值.

因此，唯有加号才保证能量平均值的正值性，我们获得任何场的四维动量表式为

$$P^n = \sum_{\alpha}\int d\mathbf{k}\cdot k^n\{a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) + a_\alpha^{(+)}(\mathbf{k})a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})\}, \tag{10.6}$$

上式显然对于电荷符号相反的粒子是对称的. 将 (10.6) 式与 (3.26), (3.39), (4.23), (5.20)及(7.36)等式子比较,我们发现,标量场、向量场及电磁场应遵守 Bose-Einstein 量子化,而旋量场遵守 Fermi-Dirac 量子化[1]. 于此, 应该注意,按 Bose-Einstein 量子化的场的相应粒子称为 Bose 子,按 Fermi-Dirac 量子化的场的相应粒子称为 Fermi 子.

在建立对易关系的具体形式以前,我们来证明,在复数场情况中,除了(10.2)式外, 带有不同电荷的粒子所对应的算符的对易子(或反对易子)必等于零,

$$\{u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)\} = \{u^{\dagger(+)}(x),\ u^{\dagger(-)}(y)\} = 0. \tag{10.7}$$

为此我们讨论电荷 $q$ 为确定值时的态:

$$Q\Phi_q = q\Phi_q. \tag{10.8}$$

然后,将算符 $Q$ 作用于下列各振幅:

$$u_\alpha^{(+)}(x)u_\beta^{(-)}(y)\Phi_q \quad 和 \quad u_\beta^{(-)}(y)u_\alpha^{(+)}(x)\Phi_q,$$

利用方程

$$zu^{(\pm)}(x) = [u^{(\pm)}(x),\ Q],$$

显然可得

$$Qu_\alpha^{(+)}(x)u_\beta^{(-)}(y)\Phi_q = (q - 2z)u_\alpha^{(+)}(x)u_\beta^{(-)}(y)\Phi_q,$$

及

$$Qu_\beta^{(-)}(y)u_\alpha^{(+)}(x)\Phi_q = (q - 2z)u_\beta^{(-)}(y)u_\alpha^{(+)}(x)\Phi_q.$$

将这些关系相加和相减,得到

$$Q\{u_\alpha^{(+)}(x), u_\beta^{(-)}(y)\}\Phi_q = (q - 2z)\{u_\alpha^{(+)}(x), u_\beta^{(-)}(y)\}\Phi_q.$$

我们注意到, $c$ 数

$$\{u_\alpha^{(+)}(x),\ u_\beta^{(-)}(y)\}$$

不能异于零,因为否则将它消去后,我们得到

$$Q\Phi_q = (q - 2z)\Phi_q,$$

则与方程(10.8)相矛盾. 同理,可以证明(10.7)式中第二个等式.

关系式(10.7)的物理意义在于电荷不同的粒子之间的产生及消失行为互相无关.

因此,我们证明了,对于任何场(复量的),只有以下的 $c$ 数不等于零:

$$\{u^{\dagger(-)}(x),\ u^{(+)}(y)\} \quad 及 \quad \{u^{(-)}(x),\ u^{\dagger(+)}(y)\}.$$

## 10.4. Fermi-Dirac 和 Bose-Einstein 的对易关系

方程(9.12)以及四维能量-动量的表式(10.6)唯一地确定上述的 $c$ 数[2]. 把 (10.6) 式代入方程(9.12)中. 将场算符写成动量表象 $a^{(\pm)}$,我们得到

$$\left.\begin{aligned} -k^n a_i^{(+)}(k) &= \int d\mathbf{k}' \cdot k'^n \left[a_i^{(+)}(\mathbf{k}),\ \sum_j a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')a_j^{(-)}(\mathbf{k}') + a_j^{(+)}(\mathbf{k}')a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')\right], \\ k^n a_i^{(-)}(k) &= \int d\mathbf{k}' \cdot k'^n \left[a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ \sum_j a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')a_j^{(-)}(\mathbf{k}') + a_i^{(+)}(\mathbf{k}')a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

---

1) 我们的论证是基于能量的"经典"表式中第二项前符号的差别. 应该强调,正如 Pauli (1947b) 所证明的,这一事实本身是由于场分量的不同变换性质 (整数的或半整数的自旋) 而引起的. 而且 Schwinger (1951) 证明了: 不同量子化方式的更深刻原因是和对于时间轴反演的不变性要求有关. 关于这一点还可参阅 Pauli 的论文(1955).

2) 此处我们引用 Соколов 的论点,参阅 Соколов А. А., 和 Иваненко Д. Д. (1952) 第一部, § 8.

从(10.2)式和(10.7)式,得到

$$[a_i^{(+)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')a_j^{(-)}(\mathbf{k}')] = 0,$$
$$[a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_j^{(+)}(\mathbf{k}')a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')] = 0.$$

因此方程(10.9)化成下列关系式:

$$\left.\begin{aligned}\sum_j [a_i^{(+)}(\mathbf{k}),\ a_j^{(+)}(\mathbf{k}')a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')] &= -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(+)}(\mathbf{k}),\\ \sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')a_j^{(-)}(\mathbf{k}')] &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(-)}(\mathbf{k}).\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

假定单频率算符(频率的符号相同)是反对易的(旋量场),由(10.10)式得到

$$-\sum_j a_j^{(+)}(\mathbf{k}')[a_i^{(+)}(\mathbf{k}), a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')]_+ = -\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(+)}(\mathbf{k}),$$

$$\sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{k}), a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')]_+ a_j^{(-)}(\mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(-)}(\mathbf{k}),$$

从上式,得到旋量场的 Fermi-Dirac 对易关系:

$$\left.\begin{aligned}[a_i^{(+)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(-)}(\mathbf{k}')]_+ &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ij},\\ [a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')]_+ &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ij}.\end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

如认为单频率算符是对易的,从(10.10)式可得

$$\sum_j a_j^{(+)}(\mathbf{k}')[a_j^{*(-)}(\mathbf{k}), a_i^{(+)}(\mathbf{k})]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(+)}(\mathbf{k}),$$

$$\sum_j [a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- a_j^{(-)}(\mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')a_i^{(-)}(\mathbf{k}).$$

由此得到我们所讨论的其他各种场的 Bose-Einstein 对易关系:

$$\left.\begin{aligned}[a_j^{*(-)}(\mathbf{k}'),\ a_i^{(+)}(\mathbf{k})]_- &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ij},\\ [a_i^{(-)}(\mathbf{k}),\ a_j^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ij}.\end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

考虑到展开式(10.4)中系数 $v(\mathbf{k})$ 的具体性质,从(10.11)式及(10.12)式,可以获得 $x$ 表象中的对易函数 $\Delta_{\alpha\beta}$.

为了将对易关系写成相对论不变性形式,我们引进由以下关系所定义的四维算符:

$$a^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \frac{\theta(k^0)a(\pm k)}{\sqrt{2k^0}} \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}),$$

由此也得出

$$a^{(\pm)}(\mathbf{k}) = \int \sqrt{2k^0}\,\theta(k^0)\delta(k^2 - m^2)a(\pm k)dk^0,$$

因此将(10.11)式及(10.12)式的右端表示为形式:

$$\delta_{ij}\int dk^0 \int dk'^0 2k^0\theta(k^0)\delta(k-k')\delta(k^2-m^2),$$

使积分号下表式相等,得到

$$\begin{aligned}&\theta(k^0)\theta(k'^0)\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)\{a_i^*(-k),\ a_j(k')\} =\\ &= \theta(k^0)\theta(k'^0)\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)\{a_i(-k),\ a_j^*(k')\} =\\ &= \delta_{ij}\delta(k-k')\delta(k^2-m^2)\theta(k^0),\end{aligned}$$

由此，对于 Fermi 算符，得到

$$\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)\{a_i(k),a_j^*(k')\}_+=\delta_{ij}\delta(k+k')\delta(k^2-m^2), \tag{10.13}$$

而对于 Bose 算符，则有

$$\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)\{a_i(k),a_j^*(k')\}_-= \\ =-(\theta(k^0)-\theta(-k'^0))\delta_{ij}\delta(k+k')\delta(k^2-m^2). \tag{10.14}$$

## 10.5. 分立动量表象中的对易关系

再用§3所述的分立动量表象写出对易关系. 利用場函数的分立展开式(3.28):

$$u(x)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{(n_1,n_2,n_3)}\left(\frac{u^{(+)}(\mathbf{n})}{\sqrt{2k^0}}e^{\frac{2\pi i}{L}(\mathbf{nx})}+\frac{u^{(-)}(\mathbf{n})}{\sqrt{2k^0}}e^{-\frac{2\pi i}{L}(\mathbf{nx})}\right),$$

以及四维能量-动量的类如(3.31)式的分立表示式:

$$P^m=\sum_{(\alpha,n)}(a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{n})a_\alpha^{(-)}(\mathbf{n})+a_\alpha^{(+)}(\mathbf{n})a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{n}))k^m,$$

其中

$$u(\mathbf{n})=u(n_1,n_2,n_3),\quad a(\mathbf{n})=a(n_1,n_2,n_3),$$

$$k^\alpha=\frac{2\pi}{L}n^\alpha(\alpha=1,2,3)\ \text{及}\ k^0=\frac{2\pi}{L}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2+\frac{L^2}{4\pi^2}m^2},$$

通过类似上述的计算，得到分立的对易关系如下：在旋量場情况中，

$$\{a_\alpha^{(+)}(\mathbf{n}),a_\beta^{*(-)}(\mathbf{n}')\}_+=\{a_\alpha^{(-)}(\mathbf{n}),a_\beta^{*(+)}(\mathbf{n}')\}_+=\delta_{\alpha\beta}\delta_{nn'}, \tag{10.15}$$

在其他一切場情况中，

$$\{a_\alpha^{(-)}(\mathbf{n}),a_\beta^{*(+)}(\mathbf{n}')\}_-=\{a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{n}),a_\beta^{(+)}(\mathbf{n}')\}_-=\delta_{\alpha\beta}\delta_{nn'}, \tag{10.16}$$

其中 $\delta_{nn'}$ 是 Kronecker 记号的乘积:

$$\delta_{nn'}=\delta_{n_1n_1'}\delta_{n_2n_2'}\delta_{n_3n_3'}.$$

当大 $L$ 极限时，分立算符 $a(\mathbf{n})$ 与连续算符 $a(\mathbf{k})$ 之间有以下关系:

$$\lim_{L\to\infty}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^{3/2}a(\mathbf{n})=a(\mathbf{k}).$$

在二次量子化理论中，分立的产生算符和消失算符的二次型组合:

$$a^{(-)}a^{*(+)},\quad a^{*(-)}a^{(+)}$$

起着粒子数算符的作用. 事实上我们来讨论 Bose-Einstein 量子化情况. 此时，从(10.16)式得到

$$a^{(-)}a^{*(+)}-a^{*(+)}a^{(-)}=1, \tag{10.17}$$

用 $n$ 表示算符 $a^{*(+)}a^{(-)}$:

$$n=a^{*(+)}a^{(-)}, \tag{10.18}$$

今证明算符 $n$ 的特征值 $N$

$$n\Phi=N\Phi \tag{10.19}$$

为整数. 为此，我们考虑表式

$$(\Phi^\dagger(a^{*(+)})^k(a^{(-)})^k\Phi). \tag{10.20}$$

对算符 $a^{*(+)}$ 及 $a^{(-)}$ 逐步对易，并考虑由(10.17)式及(10.18)式所得之如下关系:

$$a^{*(+)}n=(n-1)a^{*(+)},$$

逐步获得

$$a^{*(+)}a^{*(+)}a^{(-)}a^{(-)} = a^{*(+)}na^{(-)} = (n-1)a^{*(+)}a^{(-)} = n(n-1),$$

$$a^{*(+)}a^{*(+)}a^{*(+)}a^{(-)}a^{(-)}a^{(-)} = a^{*(+)}n(n-1)a^{(-)} = (n-1)a^{*(+)}(n-1)a^{(-)} = n(n-1)(n-2),$$

.....

.....

.....

由此得到

$$(\Phi^*(a^{*(+)})^k(a^{(-)})^k\Phi) = (\Phi^*n(n-1)\cdots(n-k+1)\Phi) =$$

$$= N(N-1)\cdots(N-k+1)(\Phi^*\Phi), \tag{10.21}$$

由于算符

$$(a^{*(+)})^k(a^{(-)})^k$$

是某一算符与其共轭矩阵元的乘积，(10.20)式不可能取负值. 另一方面，当 $N$ 为非整数时，可求得

$$k > N+1,$$

使(10.21)式小于零，这是不可能的. 因此 $N$ 为整数.

显然，在分立表象中，四维动量及电荷用以下的和式来表示：

$$\sum_\nu \omega_\nu n_\nu,$$

其中 $\omega_\nu$ 是一个粒子在状态 $\nu$ 时的四维动量或电荷. 因此，自然可以将 $n_\nu$ 认为表示在已知状态的粒子数的算符.

我们来讨论 Fermi-Dirac 量子化

$$a^{(-)}a^{*(+)} + a^{*(+)}a^{(-)} = 1. \tag{10.22}$$

用记号表示

$$a^{*(+)}a^{(-)} = n,$$

我们研究算符 $n$ 的特征值 $N$. 为此，讨论表式

$$\Phi^*n^2\Phi = N^2\Phi^*\Phi.$$

将算符 $a^{(-)}$ 及 $a^{*(+)}$ 对易，并考虑到关系

$$a^{(-)}n = (1-n)a^{(-)}, \quad a^{(-)}a^{(-)} + a^{(-)}a^{(-)} = 0,$$

我们得到

$$n^2 = a^{*(+)}a^{(-)}a^{*(+)}a^{(-)} = a^{*(+)}a^{(-)}n = a^{*(+)}(1-n)a^{(-)} = n - a^{*(+)}a^{*(+)}a^{(-)}a^{(-)} = n,$$

即

$$\Phi^*n^2\Phi = \Phi^*n\Phi,$$

由此得

$$N^2 = N,$$

因此

$$N = 0, 1. \tag{10.23}$$

利用能量-动量及电荷算符的表式，不难再求得相应于算符

$$n_\nu = a_\nu^{*(+)}a_\nu^{(-)}, \quad n_\nu^* = a_\nu^{(+)}a_\nu^{*(-)}$$

的数 $N_\nu$，实际上等于具有相应的动量和电荷的粒子数，因而算符 $n_\nu$ 及 $n_\nu^*$ 就是粒子数算符.

这样，我们看到 Bose-Einstein 量子化和 Fermi-Dirac 量子化导致完全不同的物理图景. 按(10.17)式量子化时，填充数 $N$ 可取任意大的整数值. 在 Bose-Einstein 统计情况中，在同一状态中(以四维动量、电荷及自旋来表征)可以有任意个数的粒子. 与此相反，按(10.22)式量子化时，根据(10.23)式，填充数只有两个值，即 0 及 1. 关系式(10.23)是 Pauli 原理的表述式：遵守 Fermi-Dirac 统计的粒子系统中处在同一状态中的粒子不可能多于一个.

此处，我们简单地讨论了場函数的通常的分立表示，它主要用于早先的量子場论著作. 其优点在于填充数的引入是简单明了的，而且，可将态振幅表示为这些数的函数.

但是，由于它的非协变性，在本书的叙述中我们不拟采用，我们将采用连续表象.

不难看出，在这一情况时，算符式

$$a^{*(+)}(\mathbf{k})a^{(-)}(\mathbf{k}), \quad a^{(+)}(\mathbf{k})a^{*(-)}(\mathbf{k})$$

在三维动量空间中起着粒子数密度的作用.

## §11. 标量场和矢量场

在本节中我们研究 Bose-Einstein 量子化的最简单的场，即复标量场、实标量场以及复矢量场.

### 11.1. 实标量场

实标量场是由一个实函数 $\varphi$ 来描述的. 这一函数可以表示为它的正负频率部分 $\varphi^{(+)}$ 及 $\varphi^{(-)}$ 之和的形式，根据 §9 中所作的分析，正负频率部分描述该场的中性粒子的产生和消失.

在 §10 中还证明了，标量场是按 Bose-Einstein 量子化的. 因此，我们应令

$$[\varphi^{(-)}(\mathbf{k}), \varphi^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{11.1}$$

而且，除此之外(参阅公式(10.2))，

$$[\varphi^{(-)}(\mathbf{k}), \varphi^{(-)}(\mathbf{k}')]_- = [\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}')]_- = 0. \tag{11.2}$$

从动量表象中的对易关系的公式(11.1)、(11.2)出发，求出在 $x$ 表象中对易关系的形式，为此，利用展开式(3.20)，求得

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{l}\,\frac{e^{i(ly-kx)}}{\sqrt{2k^0}\sqrt{2l^0}}[\varphi^{(-)}(\mathbf{k}), \varphi^{(+)}(\mathbf{l})]_- =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{ik(y-x)}}{2k^0}d\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ik(x-y)}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)dk =$$

$$= \frac{1}{i}D^{(-)}(x-y), \tag{11.3}$$

此处引入记号

$$D^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\theta(-k^0)dk. \tag{11.4}$$

从(11.3)式还可得到

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)]_- = \frac{1}{i}D^{(+)}(x-y), \tag{11.5}$$

其中

$$D^{(+)}(x) = -D^{(-)}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)dk. \tag{11.6}$$

将(11.3)式和(11.5)式相加，并考虑到单频分量的对易性，得到整个场函数的对易子表式

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = \frac{1}{i}D(x-y). \tag{11.7}$$

此处右端是熟知的 Pauli-Jordan 对易函数.

$$D(x) = D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)dk, \tag{11.8}$$

而

$$\varepsilon(k^0)=\theta(k^0)-\theta(-k^0)=\begin{cases}+1, & \text{当 } k^0>0,\\ -1, & \text{当 } k^0<0.\end{cases}$$

现在公式(11.4)和(11.6)的左端中指标(+)和(−)的意义也已清楚，函数 $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 分别表示"全对易函数" $D$ 的正负频率部分.

在量子化的实标量场中，根据 §10 中的一般方案，可以得到基本力学量，即将非量子化场中相应的表式利用正规乘积写成

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{1}{2}\sum_n g^{nn}:\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}:-\frac{m^2}{2}:\varphi^2:,\\ T^{mn}&=g^{mn}g^{nn}:\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}:-g^{mn}\mathscr{L}.\end{aligned}\right\}\tag{11.9}$$

$$P^n=\int d\mathbf{k}k^n\varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}).$$

我们注意到，§9 中关于场函数频率部分的意义的讨论，并不决定这些函数的归一化. 现在可以利用四维能量-动量的表式 (11.9) 来建立这归一化. 考虑含有一个标量粒子的态振幅(设其动量分布函数 $c(\mathbf{k})$ 为未归一化的):

$$\Phi_1=\int c(\mathbf{k})\varphi^{(+)}(\mathbf{k})d\mathbf{k}\Phi_0,\tag{11.10}$$

计算算符 $P^n$ (11.9)对于此态的平均值. 对易算符后，我们得到

$$\langle P^n\rangle_1=\frac{\Phi_1^*P^n\Phi_1}{\Phi_1^*\Phi_1}=\frac{\int c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k})k^nd\mathbf{k}}{\int c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k})d\mathbf{k}}.\tag{11.11}$$

利用函数 $c(\mathbf{k})$ 在 $\mathbf{k}=\mathbf{K}$ 值的无穷小邻域内的定域化(例如，类似 $c(\mathbf{k})\to\sim\delta(\mathbf{k}-\mathbf{K})$ 的极限过程)，可以使(11.10)式和(11.11)式向四维动量 $K^n$ 具有确定值的态过渡. 此时，$k^n\to K^n$，我们得到

$$\langle P^n\rangle_1\to K^n.$$

因此，对于四维动量 $K^n$ 为定值的态，算符 $P^n$ 的平均值恰好等于 $K^n$ (这一点和上节所得的结果相符合，参阅小体字)，因此表式(11.9)中算符 $\varphi^{(+)}$ 和 $\varphi^{(-)}$ 的归一化是正确的.

## 11.2. 复标量场

与实标量场不同，描述具有两种符号的荷电粒子的复标量场用两个互为复共轭的函数 $\varphi$ 和 $\varphi^*$ 表征.

我们来讨论函数 $\varphi$ 和 $\varphi^*$ 的频率部分，根据 §10 中所阐明的性质，场电荷随 $\varphi$ 而减少，随 $\varphi^*$ 而增加，我们得到算符 $\varphi^{(+)}$ 描述负电荷粒子的产生，而算符 $\varphi^{(-)}$ 描述正电荷粒子的消失，算符 $\varphi^{*(+)}$ 描述正电荷粒子的产生，而 $\varphi^{*(-)}$ 描述负电荷粒子的消失.

在 §10 中还确定了标量场按 Bose-Einstein 量子化，而且荷电不同粒子的算符相互之

间总是对易的. 由此得出结论,复标量场算符的对易法则具有以下形式:

$$\left.\begin{aligned}[\varphi^{*(-)}(\mathbf{k}),\ \varphi^{(+)}(\mathbf{k}')]_- &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\ [\varphi^{(-)}(\mathbf{k}),\ \varphi^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- &= \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

而其他一切的对易子都等于零.

根据 § 3 中公式,化成 $x$ 表象,由此得到

$$[\varphi^{*(-)}(x),\ \varphi^{(+)}(y)]_- = \frac{1}{i} D^{(-)}(x-y), \tag{11.13}$$

和

$$[\varphi^{*(+)}(x),\ \varphi^{(-)}(y)]_- = \frac{1}{i} D^{(+)}(x-y). \tag{11.14}$$

将(11.13)式和(11.14)式相加,考虑到 $\varphi$ 和 $\varphi^*$ 单频分量的对易性,以及由(11.8)式所得到的 Pauli-Jordan 函数的奇函数性质:

$$D(x) = -D(-x), \tag{11.15}$$

我们有

$$[\varphi(x),\ \varphi^*(y)]_- = [\varphi^*(x),\ \varphi(y)]_- = \frac{1}{i} D(x-y). \tag{11.16}$$

将 § 3 中非量子化场的相应表式写如正规乘积,我们得到复标量场的基本力学量:

$$\mathscr{L} = \sum_n g^{nn} : \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n} : - m^2 : \varphi^*\varphi :, \tag{11.17}$$

$$T^{mn} = g^{mm}g^{nn} : \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^m}\frac{\partial\varphi}{\partial x^n} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right) : - g^{mn}\mathscr{L}, \tag{11.18}$$

$$P^n = \int d\mathbf{k}\cdot k^n(\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) + \varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{*(-)}(\mathbf{k})), \tag{11.19}$$

$$Q = \int d\mathbf{k}(\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})\varphi^{(-)}(\mathbf{k}) - \varphi^{(+)}(\mathbf{k})\varphi^{*(-)}(\mathbf{k})). \tag{11.20}$$

从算符 $P^n$ 和 $Q$ 的结构得到结论, $\varphi^{*(+)}(\mathbf{k})$ 是能量-动量为 $k$ 而电荷为 $+1$ 的粒子的产生算符,而 $\varphi^{(-)}(k)$ 是此粒子的消失算符; $\varphi^{(+)}(k)$ 是能量-动量为 $k$ 而电荷为 $-1$ 的粒子的产生算符,而 $\varphi^{*(-)}(k)$ 是此粒子的消失算符.

### 11.3. 复矢量场

当矢量场量子化时,和以前 § 4 中相同,我们限于讨论复矢量场. 此时应注意,在下列公式中可以转化为实矢量场, 只要再考虑到对易关系形式的变化 (试比较 (11.12) 式与 (11.1)式).

为了建立矢量场中四维势的量子化法则,我们注意到,将标量场量子化法则对这一情况作机械的推广,即按照标量场模样,将势的每一分量 $U_n$ 作独立的量子化,是不可能的,因为这种手续①不能保证能量的平均值为正,②而且与补充条件(4.3)是不相容的.

因此量子化方案应该和补充条件有关,我们在 § 4 中已经证明, 补充条件自动地保证 $P^0$ 的正值性. 特别是,那里已经证明,根据公式(4.22)将 $U_n$ 化成纵分量和横分量后,能量-动量四维向量可以用三个线性独立的振幅 $a_\alpha(\mathbf{k})$ 来表示:

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_{\alpha=1,2,3} (a_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k}) a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) + a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k}) a_\alpha^{(+)}(\mathbf{k})). \tag{4.23}$$

经典的四维动量的这种写法，考虑到了补充条件(4.3)，又保证了非量子化 $P^0$ 的正值性. 而且显而易见，直接依 Bose-Einstein 量子化的三个独立振幅 $a_\alpha$，保证了能量算符的平均值为正定.

因此算符 $a_\alpha$ 应该遵守下列对易关系:

$$\left.\begin{aligned} [a_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}), a_\beta^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \\ [a_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k}), a_\beta^{(+)}(\mathbf{k}')]_- &= \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

(其他一切对易子都等于零).

将能量-动量四维矢量(4.27)，电荷 (4.28) 以及在运动方向上的自旋矢量投影(4.29)的表式写成正规形式，写时利用振幅 $b_\alpha$ 与 $a_\alpha$ 的关系为(4.26)式，我们得到

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \sum_\alpha (b_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k}) b_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) + b_\alpha^{(+)}(\mathbf{k}) b_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})), \tag{11.22}$$

$$Q = \int d\mathbf{k} \sum_\alpha (b_\alpha^{*(+)}(\mathbf{k}) b_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}) - b_\alpha^{(+)}(\mathbf{k}) b_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k})), \tag{11.23}$$

$$\begin{aligned} S_3 = \int d\mathbf{k} \{ & b_1^{*(+)}(\mathbf{k}) b_1^{-}(\mathbf{k}) - b_1^{(+)}(\mathbf{k}) b_1^{*(-)}(\mathbf{k}) + b_2^{(+)}(\mathbf{k}) b_2^{*(-)}(\mathbf{k}) - \\ & - b_2^{*(+)}(\mathbf{k}) b_2^{(-)}(\mathbf{k}) \}. \end{aligned} \tag{11.24}$$

然后计算相应的平均值，我们证实，$b_1^{*(+)}(\mathbf{k})$ 和 $b_1^{(-)}(\mathbf{k})$ 分别是动量为 $\mathbf{k}$、电荷为 $+1$ 而在运动方向上自旋的投影为 $+1$ 的粒子的产生和消失算符，$b_2^{*(+)}(\mathbf{k})$，$b_2^{(-)}(\mathbf{k})$ 是动量为 $\mathbf{k}$、电荷为 $+1$、自旋投影为 $-1$ 的粒子的产生和消失算符，$b_3^{*(+)}(k)$ 和 $b_3^{(-)}(k)$ 是动量为 $\mathbf{k}$、电荷为 $+1$ 而自旋投影为零的粒子的产生和消失算符. 应用以下法则，从这里可以得到算符 $b_\alpha^{(+)}$ 和 $b_\alpha^{*(-)}$ 的意义:

"从 $b_\alpha^{(\pm)}$ 向 $b_\alpha^{*(\pm)}$ 过渡相当于改变电荷和自旋投影的记号."

例如，设单粒子态的振幅如(11.10):

$$\Phi_1 = \int c(\mathbf{k}) b_1^{(+)}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \Phi_0,$$

今求算符 (11.22)，(11.23)，(11.24) 对此态的平均值. 考虑到厄米共轭法则 $b_1^{(+)*} = b_1^{*(-)}$，过渡到在 $\mathbf{k} = \mathbf{K}$ 邻域内定域化的 $c(\mathbf{k})$，我们得到

$$\langle P^n \rangle_1 = K^n, \quad \langle Q \rangle_1 = -1, \quad \langle S_3 \rangle_1 = -1, \text{ 等等.}$$

我们由此看到，矢量场(4.3)、(4.6)描述质量为 $m$，在已知轴上自旋投影的三个可能值为 (1, 0, −1) 的荷电粒子. 简而言之，此场描写自旋为 1 的矢量介子.

振幅 $a_\alpha$ 也有简单的意义. 例如，振幅 $a_3$ 相当于自旋投影为零的粒子，而 $a_1$ 和 $a_2$ 描述自旋投影为 1 和 $-1$ 状态的混合态，即圆极化态.

再来写出四个非独立振幅 $U_n$ 的对易关系. 利用(4.22)式，不难求出三个振幅 $U_\alpha(\mathbf{k})$ ($\alpha = 1, 2, 3$) 的对易关系:

$$[U_\alpha^{*(-)}(\mathbf{k}), U_\beta^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = [U_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}), U_\beta^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m^2}\right).$$

利用 $U_0$ 和 $U_a$ 的关系:

$$U_0(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^0}\sum_a k^a U_a(\mathbf{k}),$$

然后得到含有 $U_0$ 的对易子:

$$[U_0^{*(-)}(\mathbf{k}), U_a^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = [U_0^{(-)}(\mathbf{k}), U_a^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- = -\frac{k^0 k^a}{m^2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

$$[U_0^{*(-)}(\mathbf{k}), U_0^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = [U_0^{(-)}(\mathbf{k}), U_0^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- = \left(\frac{k^0 k^0}{m^2}-1\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

把所得的表式统一起来,得到公式

$$[U_m^{*(-)}(\mathbf{k}), U_l^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = [U_n^{(-)}(\mathbf{k}), U_l^{*(+)}(\mathbf{k}')]_- = \\ = \left(-g^{nl} + g^{nn}g^{ll}\frac{k^n k^l}{m^2}\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \tag{11.25}$$

上式是相对论对称的,而且和补充条件(4.3)是相容的,化成坐标表象后,由此得到

$$[U_l^{*(-)}(x), U_n^{(+)}(y)]_- = [U_l^{(-)}(x), U_n^{*(+)}(y)]_- = \left(g^{ln} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n}\right) iD^{(-)}(x-y), \tag{11.26}$$

$$[U_l^*(x), U_n(y)]_- = \left(g^{ln} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n}\right) iD(x-y), \tag{11.27}$$

其中照例 $D(x-y)$ 是 Pauli-Jordan 对易函数,而 $D^{(-)}$ 是该函数的负频部分.

不难验证,对易关系(11.27)不但与场方程相容,而且与补充条件也是相容的. 如将 Klein-Gordon 算符 $\Box_x - m^2$ 作用在(11.27)式的两边,就得到平庸的等式 $0=0$,因为根据(11.8)式,

$$(\Box_x - m^2)D(x-y) = 0.$$

对(11.27)式进行运算 $\sum_l g^{ll}\frac{\partial}{\partial x^l}$,我们得到类似的结果,因为

$$\sum_l g^{ll}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ln} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n}\right)D(x-y) = \left(\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\Box}{m^2}\frac{\partial}{\partial x^n}\right)D(x-y) = 0.$$

## §12. 旋 量 场

### 12.1. Fermi-Dirac 量子化和对易函数

从旋量场的能量-动量四维矢量的结构

$$P^n = \int d\mathbf{k}\cdot k^n \sum_{\nu=1,2}(a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k}) - a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\nu^+(\mathbf{k})) \tag{7.34}$$

可以看出,能够将独立振幅 $a_\nu$ 量子化.

如已经证明的,能量算符 $P^0$ 的平均值为正这一要求导致旋量场应该按 Fermi-Dirac 量子化. 因此应该认为旋量场的 Fourier 振幅 $a_\nu(k)$ 是适合 Fermi-Dirac 对易关系的算符:

$$\left.\begin{aligned}[a_\nu^{*(-)}(\mathbf{k}), a_\mu^{(+)}(\mathbf{k}')]_+ &= \delta_{\nu\mu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\ [a_\nu^{(-)}(\mathbf{k}), a_\mu^{*(+)}(\mathbf{k}')]_+ &= \delta_{\nu\mu}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

其他一切反对易子都等于零.

再利用公式 (7.5)、(7.13)、(7.14)、(7.20)、(7.21), 就可得到算符 $\psi(x)$ 的对易关系 ($\alpha, \beta$ 是旋量指标):

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)]_+ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{l} e^{i(ly-kx)}[\psi_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(\mathbf{l})]_+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{l} e^{i(ly-kx)}\sum_{\nu,\mu} v_\alpha^{\nu,-}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\mu,+}(\mathbf{l})[a_\nu^-(\mathbf{k}), a_\mu^{*+}(\mathbf{k})]_+ =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k} e^{ik(y-x)}\sum_\nu v_\alpha^{\nu,-}(\mathbf{k})\bar{v}_\beta^{\nu,+}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k} e^{ik(y-x)}\frac{(\hat{k}+m)_{\alpha\beta}}{2k^0} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int dk(\hat{k}+m)_{\alpha\beta}\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)e^{ik(y-x)} =$$

$$= \left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)_{\alpha\beta} iD^{(+)}(y-x).$$

或者根据 $D$ 函数的对称性(11.6),得到

$$[\psi^{(-)}(x), \bar{\psi}^{(+)}(y)]_+ = \left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)\frac{1}{i}D^{(-)}(x-y). \tag{12.2}$$

与此类似,可以证明

$$[\psi^{(+)}(x), \bar{\psi}^{(-)}(y)]_+ = \left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)\frac{1}{i}D^{(+)}(x-y). \tag{12.3}$$

引进记号

$$S_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x) = \left(i\sum\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)_{\alpha\beta}D^{(\pm)}(x),$$

从(12.2)式和(12.3)式,得到

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = \frac{1}{i}S(x-y), \tag{12.4}$$

其中

$$S(x) = \left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)D(x) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)(\hat{k}-m)dk. \tag{12.5}$$

对易关系(12.2)—(12.4)与场方程是相容的,因为

$$\left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)S(x-y) =$$

$$= \left(i\sum_n \gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)\left(i\sum_k \gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k}+m\right)D(x-y) =$$

$$= (\Box - m^2)D(x-y) = 0.$$

为了将对易关系(12.1)写成明显的不变式, 我们把形如以下的展开式(参阅(7.13)式和(7.14)式)

$$\psi_\alpha^{(\pm)}(k) = \sum_{\nu=1,2} a_\nu^\pm(\mathbf{k})v_\alpha^{\nu,\pm}(\mathbf{k}),$$

表示成形式为

$$\psi_\alpha(\pm k)=\sum_\nu a_\nu(\pm k)v_\alpha^\nu(\pm k)\quad(k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}),$$

此处利用了以下关系：

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(\pm)}(\mathbf{k})&=\frac{\psi^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}=\frac{\theta(k^0)\psi(\pm k)}{\sqrt{2k^0}},\\ a_\nu^\pm(\mathbf{k})&=\frac{a_\nu^\pm(k)}{\sqrt{2k^0}}=\frac{\theta(k^0)a_\nu(\pm k)}{\sqrt{2k^0}},\\ v_\alpha^{\nu\pm}(\mathbf{k})&=v_\alpha^{\nu\pm}(k)=\theta(k^0)v_\alpha^\nu(\pm k).\end{aligned}\right\}\quad k^0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}.$$

算符 $a_\nu(k)$ 是相对论协变的，而且遵守与标量场的关系(10.13)相类似的对易关系：

$$\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)[a_\nu^{*(-)}(k),a_\mu^{(+)}(k')]=\delta_{\mu\nu}\delta(k-k')\delta(k^2-m^2),$$

$$\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)[a_\nu^{(-)}(k),a_\mu^{*(+)}(k')]=\delta_{\mu\nu}\delta(k-k')\delta(k^2-m^2).$$

在这些表式中化成 $a_\nu(\pm k)$，得到

$$\delta(k^2-m^2)\delta(k'^2-m^2)[a_\nu^*(k),a_\mu(k')]=\delta_{\mu\nu}\delta(k+k')\delta(k^2-m^2).\qquad(12.6)$$

## 12.2. 力学量

利用正规乘积，定义旋量场的拉格朗日函数密度为

$$\mathscr{L}=\frac{i}{2}:\sum_n\left(\bar\psi(x)\gamma^n\frac{\partial\psi}{\partial x^n}-\frac{\partial\bar\psi}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right):-m:\bar\psi(x)\psi(x):,\qquad(12.7)$$

我们得到力学量的表式如下：

能量-动量密度张量

$$T^{kl}=\frac{i}{2}g^{ll}:\left(\bar\psi\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^l}-\frac{\partial\psi}{\partial x^l}\gamma^k\psi\right):;$$

自旋张量

$$S^{k(ml)}=\frac{1}{4}:\bar\psi(x)\gamma^k\sigma^{ml}\psi(x):+\frac{1}{4}:\bar\psi(x)\sigma^{ml}\gamma^k\psi(x):;\qquad(12.8)$$

流向量

$$J^k(x)=:\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x):\qquad(12.9)$$

根据(7.34)，(7.42)和(7.43)等式子，在动量表象中相应的积分表式具有形式：

能量-动量四维矢量

$$P^n=\int d\mathbf{k}\cdot k^n\sum_\nu(a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k})+a_\nu^+(\mathbf{k})a_\nu^{*-}(\mathbf{k}));\qquad(12.10)$$

电荷

$$Q=\int d\mathbf{k}\sum_\nu(a_\nu^{*+}(\mathbf{k})a_\nu^-(\mathbf{k})-a_\nu^+(\mathbf{k})a_\nu^{*-}(\mathbf{k}));\qquad(12.11)$$

在运动方向的自旋投影

$$S_3\sim\frac{1}{2}(a_1^{*+}(\mathbf{k})a_1^-(\mathbf{k})-a_2^{*+}(\mathbf{k})a_2^-(\mathbf{k})-a_1^+(\mathbf{k})a_1^{*-}(\mathbf{k})+a_2^+(\mathbf{k})a_2^{*-}(\mathbf{k})).\qquad(12.12)$$

从(12.10)—(12.12)诸式得出结论，算符 $a_\nu^{*+}(\mathbf{k})$ 和 $a_\nu^{-}(\mathbf{k})$ 分别是动量为 $k$、质量为 $m(k^2=m^2)$、电荷为 $+1$ 而在 $z$ 轴方向自旋投影等于 $1/2(\nu=1)$ 或 $-1/2(\nu=2)$ 的粒子的产生和消失算符.

算符 $a_\nu^{+}(\mathbf{k})$ 和 $a_\nu^{*-}(\mathbf{k})$ 所对应的粒子与上述粒子只差电荷的符号 $(-1)$ 和自旋的符号(即: $1/2(\nu=2)$ 和 $-1/2(\nu=1)$). 简言之，旋量场描述自旋为半整数的带电粒子. 电子、质子、中子、$\mu$ 介子，可能还有中微子、超子，是这一类的粒子.

刚才证明任一旋量场同时描写两种不同电荷符号的粒子(电子与正电子、$\mu^+$ 与 $\mu^-$ 介子等等)按照规定的术语，将这些粒子中之一作为正粒子(电子、质子、$\mu^-$ 介子)，而另一个为反粒子(正电子、反质子，$\mu^+$ 介子). 物理上反粒子与正粒子的差别是电荷符号及自旋方向不同.

此外，有时也将反粒子解释为负能级所填布的背景中的“空穴”. 但是这一表象并不完全令人满意[1]，而是历史发展上用来消除非量子化自由場不彻底性所作的尝试. 事实上，如果给(7.34)式直接的物理意义，则反粒子密度

$$\rho_{\text{反}}(\mathbf{k})=a_\nu^{*-}(\mathbf{k})a_\nu^{+}(\mathbf{k})$$

在能量-动量四维矢量表式中出现时带有负号，这就导致“负”能量.

我们已经确信，“负”能量这一困难只在经典理论中存在，在旋量場的量子理论中并不存在.

而且我们认为负能级方案直观地描述了粒子-反粒子对的产生和消失过程，但是，这些过程(考虑到粒子对消失时发射光子，而当粒子对产生时光子消失)是基本粒子相互转化过程的一种特殊情况，只要求它遵从守恒定律，并不需要特别的方案予以说明.

因此我们看到，负能级背景这一概念是由于经典旋量場缺乏明确的物理涵义而引起的. 与此相反，量子旋量場的物理意义是完全明确的，而且在此場中可以不采用类如“负”能级填布的背景、“空穴”等等辅助机构.

## 12.3. 电荷共轭

我们引进旋量场的电荷共轭运算. 如果讨论上述的描述荷电粒子的场，即复标量场和复矢量场，则由力学量和对易关系的结构可以得出结论：变换为新的波函数

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\varphi^*(x),\quad \varphi^*(x)\to\varphi^{*\prime}(x)=\varphi(x), \tag{12.13}$$

以后所有力学量的表式保持不变，只有四维流矢量的符号有改变. 因此，变换(12.13)相当于变成与原来粒子电荷符号相反的粒子.

因此将(12.13)类型的变换称为电荷共轭变换. 由于旋量波函数的矩阵性质(多分量的)，旋量场的电荷共轭比较复杂；它是如下形式的矩阵变换[2]：

$$\psi(x)=C\bar{\psi}'(x),\quad \bar{\psi}(x)=C^{-1}\psi'(x)=\psi'(x)\overset{\mathrm{T}}{C^{-1}}, \tag{12.14}$$

这一简写相当于以下的分量写法：

$$\psi_\alpha=\sum_\beta C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta,\quad \bar{\psi}_\alpha=\sum_\beta C^{-1}_{\alpha\beta}\psi'_\beta=\sum_\beta \psi'_\beta(\overset{\mathrm{T}}{C^{-1}})_{\beta\alpha},$$

---

1) 例如参阅 Heitler 的著作(1940)第 203 页及以后.

2) 为了(12.14)式相容，必须要求

$$CC^{\dagger}=1. \tag{12.14a}$$

因为根据转置矩阵的定义，必有

$$(C)_{\alpha\beta} = (\overset{\mathrm{T}}{C})_{\beta\alpha}.$$

(12.14)式的逆变换分别为

$$\psi'(x) = C\bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}'(x) = C^{-1}\psi(x) = \psi(x)\overset{\mathrm{T}}{C^{-1}}. \tag{12.15}$$

因此我们看到，除去双重变换的明显恆等性外，按(12.14)式所定义的电荷共轭还有“鏡象”对称性，即和它的逆变换的形式相一致.

为了决定矩陣 $C$ 的具体形式，我们要求自由场的拉格朗日函数密度形式不变，因而还要求能量-动量四维矢量的形式不变，而四维流矢量改变符号，也就是存在下列关系：

$$\mathscr{L}(\psi) = \mathscr{L}(\psi'), \quad T(\psi) = T(\psi') \text{ 和 } J^k(\psi) = -J^k(\psi').$$

为此只要满足以下两个关系就已经足够：

$$:\bar{\psi}_1(x)\gamma^k\psi_2(x): = -:\bar{\psi}_2'(x)\gamma^k\psi_1'(x):, \tag{12.16}$$

$$:\bar{\psi}(x)\psi(x): = :\bar{\psi}'(x)\psi'(x):, \tag{12.17}$$

而 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 或者等于 $\psi$ 本身，或者等于它的导数 $\partial\psi/\partial x^k$. 在任何情况下，

$$\psi_i = C\bar{\psi}_i'(x), \quad \bar{\psi}_i = \psi_i'\overset{\mathrm{T}}{C^{-1}} \quad (i = 1, 2). \tag{12.18}$$

实际上，首先令 $\psi_1(x) = \psi(x), \quad \psi_2(x) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x},$

然后令 $\psi_1(x) = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi_2 = \psi,$

从(12.16)式可得

$$:\bar{\psi}(x)\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}: = -:\frac{\partial\bar{\psi}'(x)}{\partial x^k}\gamma^k\psi'(x):,$$

$$:\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k\psi(x): = -:\bar{\psi}'(x)\gamma^k\frac{\partial\psi'}{\partial x^k}:,$$

上式与(12.17)式一起给出

$$\mathscr{L}(\psi) = \mathscr{L}(\psi') \quad \text{和} \quad T(\psi) = T(\psi').$$

在(12.16)式中令

$$\psi_1 = \psi \quad \text{和} \quad \psi_2 = \psi,$$

又获得

$$J(\psi) = -J(\psi').$$

因此，我们只讨论条件(12.16)和(12.17)对矩陣 $C$ 的限制.

将(12.18)式代入(12.16)式中，有

$$:\bar{\psi}_1(x)\gamma^k\psi_2(x): = :\psi_1'(x)\overset{\mathrm{T}}{C^{-1}}\gamma^k\bar{\psi}_2'(x):.$$

考虑到量子化旋量 $\psi'$ 和 $\bar{\psi}'$ 的反对易性，由此可得下式：

$$:\bar{\psi}_1(x)\gamma^k\psi_2(x): = -:\bar{\psi}_2'(x)\overset{\mathrm{T}}{C}\overset{\mathrm{T}}{\gamma^k}C^{-1}\psi_1'(x):,$$

将它与(12.16)比较，我们得到矩阵 $C$ 的第一个条件：

$$\overset{\mathrm{T}}{C}\overset{\mathrm{T}}{\gamma^k}C^{-1} = \gamma^k,$$

或者写成转置后的形式：

$$\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}\gamma^k C = \overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^k. \tag{12.19}$$

同理，将(12.18)式代入(12.17)式中，有

$$:\bar{\psi}(x)\psi(x): = :\psi'(x)\overset{\mathrm{T}}{C}{}^{-1}C\bar{\psi}'(x) = -:\bar{\psi}'(x)\overset{\mathrm{T}}{C}C^{-1}\psi'(x):,$$

由此获得矩阵 $C$ 的第二个条件

$$\overset{\mathrm{T}}{C}C^{-1} = -1, \tag{12.20}$$

或者

$$\overset{\mathrm{T}}{C} = -C. \tag{12.21}$$

利用(12.21)式，可将(12.19)式写成如下形式：

$$C^{-1}\gamma^k C = -\overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^k. \tag{12.22}$$

从方程(12.22)可以决定矩阵 $C$ 在我们所采用的 Dirac 矩阵 $\gamma^k$ 的表象(6.18)中的形式. 在这一表象中

$$\overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^0 = \gamma^0, \quad \overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^1 = -\gamma^1, \quad \overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^2 = \gamma^2, \quad \overset{\mathrm{T}}{\gamma}{}^3 = -\gamma^3.$$

现在注意到，方程(12.22)写成形式

$$C^{-1}\gamma^k C = \pm\gamma^k \quad (+\text{当 } k = 1, 3;\ -\text{当 } k = 0, 2),$$

它与 $x^0$ 和 $x^2$ 轴反射变换时矩阵 $\Lambda$ 的形式(6.41)重合. 因此矩阵 $C$ 在(6.18)表象中与上述变换的矩阵 $\Lambda$ 相一致(参阅(6.33)式)：

$$C = \Lambda_{02}(-i\pi) = e^{i\frac{\pi}{2}\gamma^0\gamma^2} = \gamma^0\gamma^2 = \alpha_2, \tag{12.23}$$

在(6.18)表象中 $\alpha_2$ 具有形式：

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此性质(12.14a)和(12.21)也得到满足.

已经指明，矩阵 $C$ 的具体形式与 Dirac 矩阵表示有关. 当从(6.18)表象过渡到任一其他 $\gamma'^k$ 时，例如

$$\gamma'^k = O\gamma^k O^{-1}, \tag{12.24}$$

则从关系

$$C' = OC\overset{\mathrm{T}}{O} \tag{12.25}$$

得到新电荷共轭矩阵 $C'$，将(12.24)式和(12.25)式代到(12.19)式和(12.21)式中，就容易验证上式的正确性.

## §13. 电 磁 場

### 13.1. 电磁场的特点和量子化方案

当电磁场量子化时，必需同时满足能量密度正值性的要求，Lorentz 补充条件以及横

向性条件. 同时,所有的表述应该具有相对论协变性.

当矢量介子场量子化时，我们得到相似的情况. 它的差别在于矢量介子可以处于三种自旋态,而光子由于它的横向性只能处于两种态; 而且与介子相反,光子的静止质量等于零.第一个情况使得电磁场的势分量比起矢量场来含有"多余"变量的程度更大，因为势有四个分量,而实际光子只能够处于两个态.

第二个区别（即 $m = 0$）使得矢量场量子化所采用的程序不能应用到电磁场. 实际上,质量微小趋于零的假想的矢量场,也即是与电磁场的区别在于没有梯度变换因而是三分量的场，在量子化时会引起极大的困难. 这类量子化使我们首先通过替代(4.22)使得能量-动量对角化时以及其次对势 $A_n$ 的分量建立对易关系(11.25)—(11.27)时,得到没有意义的表式,因为这些式子的分母中存在着微小趋于零的质量.

因此,我们将电磁场的量子化作如下的修改. 我们认为矢量势的分量是独立量,因而摒弃算符形式的 Lorentz 条件. 同时,根据量子化的一般方案（§ 9),利用由纵向分量、横向分量和时间分量 $a_n(\mathbf{k})$ 表示的能量-动量四维矢量:

$$P^n = \int d\mathbf{k} \cdot k^n \left( -\sum_m g^{mm} a_m^{(+)}(\mathbf{k}) a_m^{(-)}(\mathbf{k}) \right), \tag{13.1}$$

我们得到对易关系

$$[a_m^{(-)}(\mathbf{k}), a_n^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -g^{mn}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{13.2}$$

利用(5.10)式和(5.16)式,由上式可以求得

$$[A_m^{(-)}(x), A_n^{(+)}(y)]_- = ig^{mn} D_0^{(-)}(x - y),$$

其中 $D_0^{(-)}$ 是通常的零质量对易函数的负频部分:

$$D_0^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk \delta(k^2)\theta(-k^0) e^{ikx},$$

分量 $A_n$ 的完全对易子具有以下形式:

$$[A_n(x), A_m(y)]_- = ig^{mn} D_0(x - y), \tag{13.3}$$

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{ikx} \delta(k^2)\varepsilon(k^0) dk.$$

显然量子化(13.2)并不能保证能量的平均值为正. 我们暂时将这一问题作为悬案，以后将与 Lorentz 补充条件的表述一起来讨论.

量子化条件 (13.2) 允许将算符 $a_n^{(\pm)}$ 作为四种独立光子的产生和消失算符，即二个横光子,一个"纵"光子和一个"时间"光子. 但是,这种方式的量子化引起以下的困难. 分量 $a_0$ 满足关系

$$[a_0^{(-)}(\mathbf{k}), a_0^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = -\delta(k - k'),$$

将此式与(10.12)式相比较,我们看到,由于表式(13.1)中 $a_0^{(+)} a_0^{(-)}$ 项的符号为负,"时间"光子的产生及消失算符似乎掉换了位置.

但是,这情况与场的实数性假定并不相容. 事实上,从(13.3)式得出结论:

$$[A_0^{(-)}(x), A_0^{(+)}(y)]_- = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x-y)} \theta(k^0)\delta(k^2) dk. \tag{13.4}$$

这一关系式的左端可以表示为对真空态的矩阵元

$$\Phi_0^*[A_0^{(-)}(x), A_0^{(+)}(y)]_-\Phi_0 = \Phi_0^* A_0^{(-)}(x) A_0^{(+)}(y)\Phi_0 = \Phi_0^* A_0(x) A_0(y)\Phi_0.$$

将这一矩阵元乘上 $h(x)h(y)$，其中 $h$ 为实函数，对 $x$ 和 $y$ 积分，得到显然为正的量：

$$\Phi_0^* \int A(x)h(x)dx \int A_0(y)h(y)dy\Phi_0 = \Phi_0^* \left| \int A_0(x)h(x)dx \right|^2 \Phi_0 > 0.$$

另一方面，在右端进行同样的运算，我们得到显然为负的表式：

$$-\int dk \int dx h(x) \int dy h(y) e^{-ik(x-y)}\theta(k^0)\delta(k^2) =$$

$$= -\int dk\theta(k^0)\delta(k^0) \left| \int e^{ikx}h(x)dx \right|^2 < 0,$$

这也就是导致矛盾.

## 13.2. 不定度规

为了消除上述困难，我们利用实质上基于下述情况的形式方法（K. Bleuler (1950)、S. Gupta (1950)），即势的零分量对应的“时间光子”实际上并不存在，在讨论中间，时间光子的出现是由于要使理论具有相对论对称性和协变性，而由可观察量（矢量 **E** 和 **H**）过渡到不可观察的四维矢量 $A$ 所引起的.

我们现在认为，与其余分量不同，分量 $a_0$ 是反厄米的，即

$$a_n^* = -g^{nn}a_n$$

（这一假定等于化为厄米的 $a_4$：

$$a_0 = ia_4).$$

此时得到正常的对易关系：

$$[a_m^{*(-)}(\mathbf{k}), a_n^{(+)}(\mathbf{k}')]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{mn},$$

$$[A_m^*(x), A_n(x)]_- = \delta_{mn}\frac{1}{i}D_0(x-y).$$

为了保持算符 $a_n$ 的自轭性，我们需要在态振幅的空间中引进不定度规. 为此，引入具有以下性质的厄米算符 $\eta$：

$$\eta a_n = -g^{nn}a_n\eta, \quad \eta^2 = 1, \quad \eta\Phi_0 = \Phi_0, \tag{13.5}$$

也就是它和 $a_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ 可以对易，而和 $a_0$ 是反对易的. 我们重新定义态振幅：

$$\Phi^\dagger = \Phi^*\eta, \tag{13.6}$$

即定义平均值如下：

$$\langle f\rangle = \Phi^*\eta f\Phi = \Phi^\dagger f\Phi, \tag{13.7}$$

获得算符 $a_n$ 的自轭性：

$$(\Phi^\dagger a_n\Phi)^* = (\Phi^*\eta a_n\Phi)^* = \Phi^* a_n^*\eta\Phi = \Phi^*\eta a_n\Phi = \Phi^\dagger a_n\Phi.$$

我们来考虑补充条件问题，我们认为，在量子化时 $A_n$ 是独立的，因此，我们不能对算符 $A_n$ 加上 Lorentz 条件. 容易看出，对许可的态振幅加上 Lorentz 条件，即要求

$$\sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^n}\Phi = 0$$

也不可能，因为这一条件，譬如说，就和真空的定义相矛盾．实际上令 $\Phi = \Phi_0$，有

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\Phi_0 = \left(\frac{\partial A^{(+)}}{\partial x}\right)\Phi_0 = 0,$$

左方乘上 $A_k^{*(-)}(y)$ 后，我们得到

$$A_k^{*(-)}(y)\sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n^{(+)}(x)}{\partial x^n}\Phi_0 = \sum_n g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}(A_k^{*(-)}(y)A_n^{(+)}(x))\Phi_0 =$$

$$= \sum_n g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}(A_n^{(+)}(x)A_k^{*(-)}(y))\Phi_0 - \frac{1}{i}\sum_n g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}D_0^{(+)}(x-y)g^{nk}\Phi_0 =$$

$$= -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^k}D_0^{(+)}(x-y)\Phi_0 \neq 0,$$

即得矛盾．

因此，我们将 Lorentz 条件表述为许可态的条件，但是表述为较弱的形式：

$$\sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n^{(-)}(x)}{\partial x^n}\Phi \equiv \left(\frac{\partial A^{(-)}}{\partial x}\right)\Phi = 0, \tag{13.8}$$

而它的共轭式为

$$\Phi^\dagger\left(\frac{\partial A^{(+)}}{\partial x}\right) = 0. \tag{13.9}$$

这些条件保证 Lorentz 条件在平均意义上得到满足：

$$\left\langle\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\right\rangle = \Phi^\dagger\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\Phi = 0,$$

为了与经典场相对应，这已经完全足够了．

现在回到能量密度的可观察值为正值这一问题．为此将补充条件写成动量表象．显然，有

$$(k^0 a_0^{(-)}(\mathbf{k}) + |\mathbf{k}|a_3^{(-)}(\mathbf{k}))\Phi = 0,$$
$$\Phi^\dagger(k^0 a_0^{(+)}(\mathbf{k}) + |\mathbf{k}|a_3^{(+)}(\mathbf{k})) = 0.$$

或者考虑到 $k^0 = |\mathbf{k}|$，

$$(a_0^{(-)}(\mathbf{k}) + a_3^{(-)}(\mathbf{k}))\Phi = 0, \tag{13.10}$$
$$\Phi^\dagger(a_0^{(+)}(\mathbf{k}) + a_3^{(+)}(\mathbf{k})) = 0. \tag{13.11}$$

由此得出结论，在许可态中纵向和时间赝光子的总能量和动量等于零，因为

$$\langle a_3^{(+)}a_3^{(-)} - a_0^{(+)}a_0^{(-)}\rangle = \Phi^\dagger(a_3^{(+)}a_3^{(-)} - a_0^{(+)}a_0^{(-)})\Phi = \Phi^\dagger(a_3^{(+)} + a_0^{(+)})a_3^{(-)}\Phi = 0.$$

因此得到能量-动量矢量

$$\langle P^n\rangle = \int d\mathbf{k}k^n\left\langle -\sum_m g^{mm}a_m^{(+)}(\mathbf{k})a_m^{(-)}(\mathbf{k})\right\rangle =$$

$$= \int d\mathbf{k}k^n\langle a_1^{(+)}(\mathbf{k})a_1^{(-)}(\mathbf{k}) + a_2^{(+)}(\mathbf{k})a_2^{(-)}(\mathbf{k})\rangle. \tag{13.12}$$

能量平均值的正值性获得保证．现在证明，重新定义的模数 (13.7) 对于平均可观察量给出与原模数同一的结果．为此利用(13.10)式将矢量势表为

$$g^{nn}A_n^{(-)}(k) = \left\{\sum_{\sigma=1,2}e_\sigma^n a_\sigma^{(-)}(\mathbf{k}) + \left(\frac{k^n}{|\mathbf{k}|} - e_0^n\right)a_3^{(-)}(\mathbf{k}) + e_0^n(a_0^{(-)} + a_3^{(-)})\right\};$$

我们得到

$$A_n^{(-)}(x)\Phi = \left\{A_n^{\mathrm{tr}(-)}(x) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^n} + g^{n0}F^{(-)}(x)\right\}\Phi. \tag{13.13}$$

此时 $F^{(-)}(x)\Phi = 0$,而 $\partial\Lambda/\partial x^n$ 是可以用梯度变换消去的量. 因此

$$A_n^{(-)}(x)\Phi = A_n^{\mathrm{tr}(-)}(x)\Phi,$$

同理,

$$\Phi^{\dagger}A_n^{(+)}(x) = \Phi^{\dagger}A_n^{\mathrm{tr}(+)}(x).$$

因此总有

$$\Phi^{\dagger}A_n\Phi = \Phi^{\dagger}A_n^{\mathrm{tr}}(x)\Phi.$$

不难证实,更一般的推断也是正确的:

$$\Phi^{\dagger}K\Phi = \Phi^{\dagger}K^{\mathrm{tr}}\Phi, \tag{13.14}$$

其中 $K$ 是算符,形式为

$$K = \sum_a Z\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)A_{a_1}(x_1)\cdots A_{a_s}(x_s),$$

$Z$ 是多项式函数,而

$$K^{\mathrm{tr}} = \sum_a Z\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)A_{a_1}^{\mathrm{tr}}(x)\cdots A_{a_s}^{\mathrm{tr}}(x_s).$$

事实上将 $A_n$ 表示为(13.13)形式,去掉梯度项,我们看到,只需要对易 $A^{\mathrm{tr}}$ 和 $F = a_0 + a_3$ 形式的各项. 但是 $F$ 及 $A^{\mathrm{tr}}$, $F^{(+)}$ 及 $F^{(-)}$ 相互之间可以对易,而 $\Phi^{\dagger}F^{(+)} = F^{(-)}\Phi = 0$. 因此只剩下 $A^{\mathrm{tr}(-)}$ 和 $A^{\mathrm{tr}(+)}$ 组成的对易子. 于是,(13.14)式得证. 现在来证明

$$\Phi^{\dagger}K^{\mathrm{tr}}\Phi = \Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}K^{\mathrm{tr}}\Phi_{\mathrm{tr}}, \tag{13.15}$$

其中 $\Phi_{\mathrm{tr}}$ 是纯光子的态振幅,即不含有纵向及时间膺光子的态振幅. 实际上,任意态振幅可以表示为纯光子态和含有不同数目膺光子的项的线性组合. 由于补充条件,后者所含算符 $a_0$ 及 $a_3$ 只能组合成

$$a_3 - a_0,$$

即

$$\Phi = \left\{1 + \sum_n c_n \prod_{1\leqslant j\leqslant n}(a_3^{(+)}(\mathbf{k}_j) - a_0^{+}(\mathbf{k}_j))\right\}\Phi_{\mathrm{tr}},$$

$$\Phi^{\dagger} = \Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}\left\{1 + \sum_n c_n \prod_{1\leqslant j\leqslant n}(a_3^{(-)}(\mathbf{k}_j) - a_0^{(-)}(\mathbf{k}_j))\right\}.$$

态 $\Phi_{\mathrm{tr}}$ 称为膺光子真空. 但是由于组合

$$\tilde{F}^{(+)} = a_0^{(+)} - a_3^{(+)} \quad 和 \quad \tilde{F}^{(-)} = a_0^{(-)} - a_3^{(-)}$$

与 $K^{\mathrm{tr}}$ 可以对易,而且相互间也可对易,则

$$\Phi^{\dagger}K^{\mathrm{tr}}\Phi = \Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}\left\{1 + \sum_n c_n \prod_j \tilde{F}^{(-)}(\mathbf{k}_j)\right\}K^{\mathrm{tr}}\left\{1 + \sum_m c_m \prod_i \tilde{F}^{(+)}(\mathbf{k})\right\}\Phi_{\mathrm{tr}} =$$

$$= \Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}\left\{1 + \sum_m c_m \prod_i \tilde{F}^{(+)}(\mathbf{k}_i)\right\}K^{\mathrm{tr}}\left\{1 + \sum_n c_n \prod_j \tilde{F}^{(-)}(\mathbf{k}_j)\right\}\Phi_{\mathrm{tr}} =$$

$$= \Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}K^{\mathrm{tr}}\Phi_{\mathrm{tr}} = \Phi_{\mathrm{tr}}^{*}\eta K^{\mathrm{tr}}\Phi_{\mathrm{tr}} = \Phi_{\mathrm{tr}}^{*}K^{\mathrm{tr}}\eta\Phi_{\mathrm{tr}} = \Phi_{\mathrm{tr}}^{*}K^{\mathrm{tr}}\Phi_{\mathrm{tr}},$$

因为

$$\Phi_{\mathrm{tr}}^{\dagger}a_{3,0}^{(+)} = 0, \quad a_{3,0}^{(-)}\Phi_{\mathrm{tr}} = 0$$

和

$$K^{tr}\eta = \eta K^{tr}, \quad \eta\Phi_{tr} = \Phi_{tr}.$$

因此，已经证明，$K$ 对不定度规的平均值等于 $K^{tr}$ 的通常平均值.

总之，利用不定度规计算实际可观察量不会导致任何类似“负几率”的佯谬.

今后，为方便起见，我们总采用通常的记号 $\Phi^*$ 来代替 $\Phi^\dagger$.

### 13.3. 基本量的写法

最后我们将量子电磁场的基本量列举如下：

拉格朗日函数密度：

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\sum g^{mm}g^{nn} : \frac{\partial A_m}{\partial x^n}\frac{\partial A_m}{\partial x^n} : ; \tag{13.16}$$

场方程：

$$\Box A_n = 0; \tag{13.17}$$

Lorentz 补充条件：

$$\left(\frac{\partial A^{(-)}}{\partial x}\right)\Phi \equiv \sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n^{(-)}}{\partial x^n}\Phi = 0, \tag{13.8}$$

能量-动量四维矢量算符的一般表式：

$$P^n = \int d\mathbf{k}\cdot k^n\left(-\sum_n g^{nn}a_n^{(+)}(\mathbf{k})a_n^{(-)}(\mathbf{k})\right); \tag{13.18}$$

及其对许可态的平均值：

$$\langle P^n\rangle = \Phi\int d\mathbf{k}\cdot k^n\sum_{\nu=1,2}a_\nu^{(+)}(\mathbf{k})a_\nu^{(-)}(\mathbf{k})\Phi; \tag{13.12}$$

场函数对易子：

$$[A_m(x), A_n(y)]_- = ig^{mn}D_0(x-y); \tag{13.3}$$

自旋矩矢量：

$$\mathbf{S} = i\int d\mathbf{k}[\mathbf{a}^{(+)}(\mathbf{k})\times\mathbf{a}^{(-)}(\mathbf{k})]. \tag{13.19}$$

## §14. Green 函数[1)]

### 14.1. 定义

当波动场量子化时，我们得到标量场的对易函数(即 Pauli-Jordan 函数)：

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{ikx}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2), \tag{14.1}$$

以及用 $D(x)$ 和它的偏导数来表示的电磁场、旋量场和矢量场的对易函数：

$$D_0(x) = D(x)|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{ikx}\varepsilon(k^0)\delta(k^2), \tag{14.2}$$

$$S_{\alpha\beta}(x) = (i\hat{\partial}+m)_{\alpha\beta}D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{-ikx}(\hat{k}+m)_{\alpha\beta}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2), \tag{14.3}$$

1) 附录 I 中列举有各种奇异函数.

$$D_{ln}(x) = \left(g^{ln} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^n}\right) D(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{ikx}\left(g^{ln} - \frac{k_l k_n}{m^2}\right)\varepsilon(k^0)\delta(k^2 - m^2). \tag{14.4}$$

对易函数是相应场的齐次方程的解，而且以相对论不变的方式分成正负频率两部分之和，其中每一部分均满足该齐次方程.

现在来建立这些对易函数和含有点源的相应非齐次场方程的解，即 Green 函数之间的关系. 由于所有场的对易关系均导致 $D(x)$ 及其偏导数，我们首先以标量场为例来讨论上述关系.

标量场的 Green 函数通常按以下方式定义[1)]

$$(\Box_x - m^2)G(x-y) = -\delta(x-y). \tag{14.5}$$

化为动量表象

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}G(k)dk, \tag{14.6}$$

我们得到 $G$ 的形式表式:

$$G(k) = \frac{1}{m^2 - k^2}, \tag{14.7}$$

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2}dk. \tag{14.8}$$

当迴绕极点 $k^2 = m^2$ 的规则并未给定时，表式(14.8)实质上还未确定. 这一不定性的原因在于方程 (14.5) 的完全解为非齐次方程的特解及齐次方程的解 $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 的任意线性组合之和，对 $G$ 加上边界条件之后，可以单值地确定此线性组合.

## 14.2. 标量场的"推迟"和"超前" Green 函数

在场论中起重要作用的是所谓推迟 Green 函数，它决定于条件

$$D^{\mathrm{ret}}(x-y) = 0, \quad 当 \quad x^0 - y^0 < 0. \tag{14.9}$$

为了将 $D^{\mathrm{ret}}(x-y)$ 表示成与(14.7)式相似的形式，我们注意到，当此函数乘上 $e^{-\varepsilon(x^0-y^0)}$，其中 $\varepsilon > 0$，根据(14.9)式，它并不获得任何补加的奇点

$$D^{\mathrm{ret}}e^{-\varepsilon(x^0-y^0)} = G_\varepsilon, \tag{14.10}$$

因此它可以表示如下:

$$D^{\mathrm{ret}}(x-y) = \lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon. \tag{14.11}$$

根据定义(14.10)式，$G_\varepsilon$ 满足方程

$$\left\{\Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\right)^2 - m^2\right\} G_\varepsilon = -\delta(x-y), \tag{14.12}$$

而且在动量表象中，当 $\varepsilon \to 0$ 极限时，它具有形式

$$\frac{1}{m^2 - (k^0 - i\varepsilon)^2 + k^2} \to \frac{1}{m^2 - k^2 + 2i\varepsilon k^0}.$$

1) 为确定起见，在 Green 函数方程中约定选择右边 $\delta$ 函数前面的符号是左边算符中质量 $m$(或 $m^2$) 前的符号.

因此根据(14.11)式,推迟 Green 函数可以表示成[1)]

$$D^{\mathrm{ret}}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ik(x-y)}}{m^2-k^2+2i\varepsilon k^0}\,dk. \tag{14.13}$$

容易验证,表式(14.13)实际上满足条件(14.9). 事实上,分母中 $2i\varepsilon k^0$ 这一项表明迴绕极点的规则:

$$(k^0)_1=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+i\varepsilon,$$
$$(k^0)_2=-\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+i\varepsilon.$$

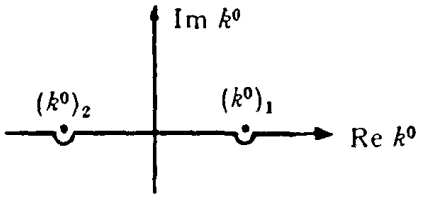


图2 复平面 $k^0$ 上函数 $D^{\mathrm{ret}}$ 的积分路线.

因此,这两极点位于积分线路的上方(图2). 易见,当 $x^0-y^0<0$ 时,积分线路应该在下半平面闭合 ($k^0=\mathrm{Re}\,k^0-i\,\mathrm{Im}\,k^0$, $x^0-y^0=-|x^0-y^0|$, $ik^0(x^0-y^0)\to-i\,\mathrm{Im}\,k^0|x^0-y^0|$),在此闭合迴线中并无极点,我们得到(14.9)式. 当 $x^0-y^0>0$ 时,积分线路在上半平面闭合,而对 $k^0$ 的积分就等于在极点 $(k^0)_1$ 和 $(k^0)_2$ 的留数之和:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk^0e^{ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-(k^0)_1)(k^0-(k^0)_2)}=2\pi i\frac{e^{i(k^0)_1(x^0-y^0)}}{(k^0)_1-(k^0)_2}+2\pi i\frac{e^{i(k^0)_2(x^0-y^0)}}{(k^0)_1-(k^0)_2}=$$
$$=\frac{\pi i}{k^0}\left(e^{ik^0(x^0-y^0)}-e^{-ik^0(x^0-y^0)}\right)\Big|_{k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}.$$

因此当 $x^0-y^0>0$ 时,我们得到

$$D^{\mathrm{ret}}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3i}\int\frac{e^{ik^0(x^0-y^0)}-e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{2k^0}e^{-ik(x-y)}dk=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3i}\int dke^{ik(x-y)}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2)=D(x-y),$$

故可写成

$$D^{\mathrm{ret}}(x)=\theta(x^0)D(x). \tag{14.14}$$

同理,可以证明"超前" Green 函数决定于条件

$$D^{\mathrm{adv}}(x-y)=0,\quad \text{当 } x^0-y^0>0, \tag{14.15}$$

并满足方程(14.5),它具有形式

$$D^{\mathrm{adv}}(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ik(x-y)}}{m^2-k^2-2i\varepsilon k^0}\,dk=-\theta(y^0-x^0)D(x-y). \tag{14.16}$$

再举出积分(14.8)按主值意义的表式. 为此,取(14.14)及(14.16)两式之和的一半,并考虑到熟知的恆等式

$$\frac{1}{x+i\varepsilon k^0}=\frac{\mathscr{P}}{x}-i\pi\delta(x)\varepsilon(k^0), \tag{14.17}$$

其中 $\mathscr{P}$ 是主值记号,我们得到公式

$$\frac{\mathscr{P}}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{m^2-k^2}\,dk=\frac{1}{2}\varepsilon(k^0)D(x). \tag{14.18}$$

1) 此处及以下的类似表式中省去极限记号 $\lim\varepsilon\to0$,因为与 $\varepsilon$ 有关项的意义只是指明迴绕极点的方向而已.

## 14.3. 标量场的因果 Green 函数

在量子场论中，因果 Green 函数(或称原因函数)[1] $D^c(x-y)$ 起着极其重要的作用，通常说，它描述在不同时空点 $x$ 和 $y$ 上粒子的产生和消失过程的因果关系. 我们来建立函数 $D^c$ 的具体形式，我们在开始时限定讨论标量场情况.

标量粒子在点 $x$ 的产生过程以及后来它在点 $y$ 的消失过程用矩阵元

$$\Phi_1^*(y)\Phi_1(x) = \Phi_0^*\varphi^{(-)}(y)\varphi^{(+)}(x)\Phi_0 = \frac{1}{i}D^{(-)}(y-x) = iD^{(+)}(x-y) \quad (14.19)$$

来描述. 显然，此时应该认为 $y^0 > x^0$. 相反地，当 $x^0 > y^0$ 时粒子在 $y$ 点产生而在 $x$ 点消失. 这种过程相当于下式

$$\Phi_1^*(x)\Phi_1(y) = \frac{1}{i}D^{(-)}(x-y). \quad (14.20)$$

因此，当 $x^0 > y^0$ 时因果函数 $D^c(x-y)$ 应该与函数 $D^{(-)}(x-y)$ 成比例，而当 $x^0 < y^0$ 时，它与函数 $D^{(+)}(x-y)$ 成比例. 为了确定这一函数的形式，利用上面所指出的情况，方程(14.5)的任意解可以表成它的特解与齐次方程解的线性组合之和. 例如，取推迟 Green 函数作为特解，获得方程(14.5)任意解的公式如下：

$$G(x) = D^{\mathrm{ret}}(x) + a_1D^{(+)}(x) + a_2D^{(-)}(x), \quad (14.21)$$

其中 $a_1$ 和 $a_2$ 是任意数字系数. 此处，设 $a_1 = -1$, $a_2 = 0$，得到表式

$$D^{\mathrm{ret}}(x-y) - D^{(+)}(x-y) = \theta(x^0-y^0)D^{(-)}(x-y) - \theta(y^0-x^0)D^{(+)}(x-y),$$

它满足对 $D^c$ 所有的条件.

为了得到因果函数

$$D^c(x) = \theta(x^0)D^{(-)}(x) - \theta(-x^0)D^{(+)}(x) \quad (14.22)$$

的动量表象表式，我们注意到，根据(14.17)式，可将 $D^{\mathrm{ret}} - D^{(+)}$ 差式表示成形式

$$\frac{1}{m^2 - k^2 + 2i\varepsilon k^0} + 2\pi i\theta(k^0)\delta(k^2-m^2) =$$

$$= \frac{\mathscr{P}}{m^2-k^2} + (2\theta(k^0) - \varepsilon(k^0))\pi i\delta(k^2-m^2) =$$

$$= \frac{\mathscr{P}}{m^2-k^2} + i\pi\delta(k^2-m^2) = \frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon},$$

这就给出

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}dk}{m^2-k^2-i\varepsilon}. \quad (14.23)$$

因果函数 $D^c$ 可以直接用(14.19)、(14.20)类型的矩阵元来表示. 为此，引进场的两个算符的时序乘积(或称 $T$ 乘积) $T(u(x)u(y))$，它等于此二算符按照时间宗量的递增由右至左的乘积，如果算符遵循 Fermi-Dirac 量子化时，还有符号的改变，即[2]

---

1) 似乎是 Stückelberg 和 Rivier (1949) 首先引入此函数.

2) 关于 $T$ 乘积及其性质的比较详细的讨论，参阅散射矩阵理论(第三章).

$$T(u(x)\,u(y)) = \begin{cases} u(x)u(y), & \text{当 } x^0 > y^0, \\ \pm u(y)u(x), & \text{当 } x^0 < y^0. \end{cases} \tag{14.24}$$

(+ 是指 Bose 算符, − 是指 Fermi 算符).

我们对所讨论的标量场按真空态计算矩阵元(14.24), 利用(14.19)式和(14.20)式,我们得到

$$\Phi_0^* T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0 = \begin{cases} \Phi_0^*\varphi(x)\varphi(y)\Phi_0 = \dfrac{1}{i}D^{(-)}(x-y), & \text{当 } x^0 > y^0, \\ \Phi_0^*\varphi(y)\varphi(x)\Phi_0 = iD^{(+)}(x-y), & \text{当 } x^0 < y^0. \end{cases}$$

因此有

$$D^c(x-y) = i\Phi_0^* T(\varphi(x)\varphi(y))\Phi_0 = i\langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0. \tag{14.25}$$

## 14.4. 各种场的因果 Green 函数

由(14.23)式得到结论,为了使(14.7)型的 Green 函数具有"因果"性,只要认为在其动量表象分母中,质量平方含有无穷小的负虚数的附加项就行了.

现在提醒,根据(14.2)—(14.4)式,电磁场、旋量场、矢量场的对易函数和 Pauli-Jordan 函数之差别在于微分算符,我们假定,根据定义,上述场的因果函数和 $D^c$ 的差别也在于这些算符,即

$$D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{k^2 + i\varepsilon}dk, \tag{14.26}$$

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta}D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{(m - \hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}e^{ipx}dp, \tag{14.27}$$

$$D^c_{nl}(x) = \left(g^{nl} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\right)D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{g^{nl} - \dfrac{k_n k_l}{m^2}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}e^{ikx}dk. \tag{14.28}$$

这样定义的与函数 $D^c$ 类似的因果函数,可以用相应场算符的时序乘积的真空平均值来表示:

$$D^c_{mn}(x-y) = i\Phi_0^* T(U_m(x)U_n(y))\Phi_0, \tag{14.29}$$

$$-g^{mn}D_0^c(x-y) = i\Phi_0^* T(A_m(x)A_n(y))\Phi_0, \tag{14.30}$$

$$S^c_{\alpha\beta}(x-y) = i\Phi_0^* T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\Phi_0. \tag{14.31}$$

公式(14.29),(14.30)显然是关系式(14.2)和(14.4)的推论,为了证明(14.31)式, 利用旋量场的对易子(12.2)、(12.3). 这样可得

$$i(\Phi_0^* T(\psi(x)\bar{\psi}(y))\Phi_0) =$$

$$= \begin{cases} i(\Phi_0^*\psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y)\Phi_0) = (i\hat{\partial} + m)\dfrac{1}{i}D^{(-)}(x-y), & \text{当 } x^0 > y^0, \\ i(\Phi_0^*\bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x)\Phi_0) = (i\hat{\partial} + m)D^{(+)}(x-y), & \text{当 } x^0 < y^0, \end{cases}$$

由于(14.27)式,上式等效于(14.31)式.

并且也清楚,在(14.26)—(14.28)式的分母中将 $-i\varepsilon$ 用 $2i\varepsilon k^0$ 替代, 我们得到的表式当 $x^0 < y^0$ 时等于零. 因此是相应场的"推迟" Green 函数.

注意,利用(14.14)、(14.16)、(14.18)、(14.22)类型的关系式,将各种场的 Green 函数用对易函数

来表示，应该保持一定的慎重．例如，与(14.22)式相似，矢量場的 Green 函数可以写成形式：

$$\theta(x^0)D^{(-)}_{mn}(x) - \theta(-x^0)D^{(+)}_{mn}(x), \tag{14.32}$$

其中

$$D^{(\pm)}_{ln}(x) = \frac{\pm 1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\theta(\pm k^0)\delta(k^2 - m^2)\left(g^{ln} - \frac{k_l k_n}{m^2}\right)dk.$$

但是只要利用 $\theta$ 函数的积分表示

$$\theta(\pm x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_0\tau}}{\varepsilon \pm i\tau}\,d\tau, \tag{14.33}$$

直接计算(14.32)表式，我们得到

$$D^c_{ln}(x) - \frac{\delta_{l0}\delta_{n0}}{m^2}\,\delta(x),$$

此函数在 $x = 0$ 点的邻域与 $D^c_{ln}(x)$ 不同．这一结果是在 $x = 0$ 点的无穷小邻域上表式(14.32)的实际不定性的推论．

在因果函数中，这一不定性特别容易注意到，将它表示成形式：

$$i\Phi_0^*(TU_l(x)U_n(y))\Phi_0. \tag{14.34}$$

事实上，根据(14.24)式，当 $x^0 < y^0$ 时和当 $x^0 > y^0$ 时，(14.34)式是单值确定的．当 $(x-y)^2 = -(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 \neq 0$ 时，此式的意义也很清楚，因为此时(14.34)式可写成形式：

$$i\Phi_0^* U_l(x)U_n(y)\Phi_0,$$

或

$$i\Phi_0^* U_n(x)U_l(y)\Phi_0,$$

因为当 $(x-y)^2 < 0$ 时(参阅 § 15 中 $D$ 函数和 $D^c$ 函数的分析)，算符 $U(x)$ 和 $U(y)$ 是对易的：

$$[U_l(x), U_n(y)]_- = \frac{1}{i}D_{ln}(x-y)\big|_{(x-y)^2<0} = 0,$$

则上两种形式彼此相等．但是，当宗量相重合时 $(x = y)$，表式(14.34)的意义完全不清楚．从这里得出结论，在 $x = y$ 点 $T$ 乘积不确定，而且利用不同方法构成 $T$ 乘积，所得到的表式相互之间可以相差与 $\delta(x-y)$ 及其导数成比例的项．

在相互作用場理论中，我们还将遇到这种情况，在第三章将作更详细的讨论．目前为了消除不定性，我们假定不用(14.32)类型的表式，而是利用(14.26)—(14.28)类型的公式将場函数算符的乘积定义为相应場的非齐次方程的 Green 函数形式：

$$\Box D^c_0(x) = -\delta(x),$$

$$(i\hat{\partial} - m)S^c(x) = -\delta(x),$$

$$(\Box - m^2)D^c_{nl}(x) = -\left(g^{nl} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\right)\delta(x).$$

最后一式的右边的形式决定于矢量場因果函数与补充条件

$$\sum_n g^{nn}\frac{\partial U_n}{\partial x^n} = 0$$

的相容性要求．

任意场的对易函数和因果函数之间的类似关系也可以建立起来．为了推导这些关系，从场方程出发就比较方便，将它写成 Kemmer 形式(参阅 § 24)：

$$\left(i\sum_n \Gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n} - m\right)u(x) = 0.$$

按通常方式作拉格朗日函数密度，然后，利用它来构成能量-动量四维矢量，根据 § 10

中所表述的方法，可以得到场的对易函数 $\Delta_{\alpha\beta}$. 我们得到 $\Delta_{\alpha\beta}$ 的形式为

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int P_{\alpha\beta}(k)e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)\varepsilon(k^0)dk = P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)D(x), \quad (14.35)$$

其中 $P_{\alpha\beta}(k)$ 是分量 $k$ 的多项式.

重复本节中的讨论，得到因果函数的形式

$$\Delta^c_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{P_{\alpha\beta}(k)e^{ikx}dk}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)D^c(x), \quad (14.36)$$

它含有同样的多项式 $P_{\alpha\beta}$.

## 14.5. 与 Stückelberg 和 Schwinger 记号的关系

最后为了查考起见，我们将本书中所采用的对易函数和 Green 函数以及 Stückelberg (1949)、Rivier (1949) 和 Schwinger (1948, 1949a) 所采用的这些函数的记号列出来对比.

在我们的记号系统中是取 Pauli-Jordan 对易函数作为基础:

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)\varepsilon(k^0)dk.$$

记号 $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 表示它的(+)和(−)频率部分，即 $k^0 > 0$ 和 $k^0 < 0$ 部分

$$D^{(\pm)}(x) = \pm\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_{k^0\gtrless 0} e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)dk.$$

在 Stückelberg 的记号中，基本函数取为 Pauli-Jordan 函数，以 $D^0(x)$ 表示之.

Stückelberg-Rivier 用记号 $D^+$ 和 $D^-$ 表示 $D^0$ 的土频率部分乘上 $\pm 2i$，而频率的符号是如下的指数式的符号:

$$k^\mu x^\mu = k^1x^1 + k^2x^2 + k^3x^3 + k^4x^4 = \mathbf{kx} - k_0x_0,$$

也就是和频率本身 $k^0$ 的符号相反. 因此，

$$\left.\begin{aligned} D^+(x) &= -2iD^{(-)}(x), \\ D^-(x) &= 2iD^{(+)}(x). \end{aligned}\right\} \quad (14.37)$$

Schwinger 的基本函数是 $\Delta$，其定义如下:

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ik^\mu x^\mu}\delta(k^2 - m^2)\varepsilon(k^0)dk = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)\varepsilon(k^0)dk,$$

它和 Pauli-Jordan 函数有符号的不同:

$$\Delta(x) = -D(x). \quad (14.38)$$

Schwinger 的记号 $\Delta^{(+)}$ 与 $\Delta^{(-)}$ 表示 $\Delta$ 的(土)"频率"部分("频率"的符号决定于 $k^\mu x^\mu$ 的符号)，它和(14.38)式一起给出表式:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^+(x) &= -D^{(-)}(x), \\ \Delta^-(x) &= -D^{(+)}(x). \end{aligned}\right\} \quad (14.39)$$

Stückelberg-Rivier 和 Schwinger 所采用的辅助函数

$$\Delta^{(1)}(x) = D^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)dk,$$

用我们的记号具有形式

$$D^1(x) = \Delta^{(1)}(x) = i(D^{(+)}(x) - D^{(-)}(x)). \quad (14.40)$$

Stückelberg-Rivier 和 Schwinger 的推迟函数和超前函数和我们的相同:

$$D^{\mathrm{ret}}(x) = \Delta_R(x) = D_{\mathrm{ret}}(x),$$

$$D^{adv}(x) = \Delta_A(x) = D_{adv}(x).$$

最后,我们的因果 Green 函数的记号和 Stückelberg 的记号相同,而在 Schwinger 的系统中具有形式:

$$D^c(x) = \Delta_+(x) \tag{14.41}$$

并且和 Dyson-Feynman 的"传播函数"有以下关系.

$$D^c(x) = \frac{i}{2}\Delta_F(x). \tag{14.42}$$

## §15. 对易函数和因果函数的奇异性[1)]

### 15.1. $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 函数的计算

现在来研究对易函数和 Green 函数的奇异性. 在上节中已经阐明,所有这些函数可用 Pauli-Jordan 函数的频率部分来表示. 因此我们从计算下列积分开始:

$$D^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)dk, \tag{15.1}$$

$$D^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)dk. \tag{15.2}$$

在(15.1),(15.2)式中对 $k^0$ 积分,并对 $\mathbf{k}$ 空间的角变量作积分,将这些结果表示成形式:

$$D^{(+)}(x) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}f(x), \quad D^{(-)}(x) = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}f^*(x), \tag{15.3}$$

其中

$$f(x) \equiv f(x^0, r) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(k^0x^0+kr)}}{k^0}dk \quad (k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}) \tag{15.4}$$

$$k = \sqrt{\mathbf{k}^2}, \quad r = \sqrt{\mathbf{x}^2},$$

而 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 的复共轭函数. 因此决定 $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 这一问题化为计算一个积分(15.4),在此式中作变量替代

$$k = m\,\mathrm{sh}\,\varphi, \quad k^0 = m\,\mathrm{ch}\,\varphi, \tag{15.5}$$

我们得到

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\varphi\, e^{im(x^0\,\mathrm{ch}\,\varphi + r\,\mathrm{sh}\,\varphi)}, \tag{15.6}$$

此处应该分别四种情况:

1) $x^0 > 0$, $x^0 > r$; 2) $x^0 > 0$, $x^0 < r$;

3) $x^0 < 0$, $|x^0| > r$; 4) $x^0 < 0$, $|x^0| < r$,

分别用替代

1) $x^0 = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\varphi_0$, $r = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\varphi_0$; 2) $x^0 = \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,\varphi_0$, $r = \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{ch}\,\varphi_0$;

3) $x^0 = -\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\varphi_0$, $r = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\varphi_0$; 4) $x^0 = -\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,\varphi_0$, $r = \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{ch}\,\varphi_0$

(其中引用记号 $\lambda = x^2 = (x^0)^2 - r^2$),并利用圆柱函数的熟悉的积分表示[2)],获得

1) 附录中列举了本节中的主要结果.

2) 例如,参阅 Рыжик-Градштейн 的书(1951)中公式(6.431)及(6.446.1).

$$1)\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{im\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}(\varphi+\varphi_0)} = \frac{1}{2}H_0^{(1)}(m\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}J_0(m\sqrt{\lambda}) + \frac{i}{2}N_0(m\sqrt{\lambda}),$$

$$2)\ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{im\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\varphi+\varphi_0)} = \frac{i}{\pi}K_0(m\sqrt{-\lambda}),$$

$$3)\ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}(\varphi-\varphi_0)} = \frac{1}{2}H_0^{(2)}(m\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}J_0(m\sqrt{\lambda}) - \frac{i}{2}N_0(m\sqrt{\lambda}),$$

$$4)\ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{-im\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}(\varphi-\varphi_0)} = \frac{i}{\pi}K_0(m\sqrt{-\lambda}),$$

由此得到

$$f(x) = \varphi(x^0, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i}N_0(m\sqrt{\lambda}) - \dfrac{1}{2}\varepsilon(x^0)J_0(m\sqrt{\lambda}), & \text{当 } \lambda > 0, \\ \dfrac{i}{\pi}K_0(m\sqrt{-\lambda}), & \text{当 } \lambda < 0. \end{cases} \tag{15.7}$$

此处 $J_0(z)$ 是零阶 Bessel 函数，$N_0(z)$ 是零阶 Neumann 函数，$K_0(z)$ 是虚宗量的零阶 Hankel 函数，通常定义如下：

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2},$$

$$\pi N_0(z) = 2J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} + \mathbf{C}\right) - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\left[\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right],$$

$$K_0(z) = \frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz) = \frac{\pi i}{2}[J_0(iz) + iN_0(iz)]$$

（$\mathbf{C}$ 是 Euler 常数，等于 0.577215…）. 我们注意，在 $z = 0$ 点的邻域，这些函数可以表示成以下形式：

$$\left.\begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^4), \\ N_0(z) &= \frac{2}{\pi}\left[1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2\right]\ln\frac{z}{2} + \frac{2}{\pi}\mathbf{C} + O(z^2), \\ K_0(z) &= -\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2\right]\ln\frac{z}{2} - \mathbf{C} + O(z^2). \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

而在大 $z$ 区域中，则有以下渐近式：

$$\left.\begin{aligned} J_0(z) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi z}}\sin z, \\ N_0(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi z}}\sin z, \\ K_0(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-z}, \end{aligned}\right\} \quad (z \gg 1). \tag{15.9}$$

将(15.3)式中对 $r$ 的微分变成对 $\lambda$ 的微分，考虑到函数 $f$ 在 $\lambda = 0$ 点的间断性(参阅(15.8)式)，从(15.7)式，我们得到 $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 的表式：

$$D^{(+)}(x)=\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\frac{mi}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\Big[N_1(m\sqrt{\lambda})-i\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})+$$

$$+\theta(-\lambda)\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}K_1(m\sqrt{-\lambda})\Big],\qquad(15.10)$$

$$D^{(-)}(x)=\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\theta(\lambda)\varepsilon(x^0)\frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}}J_1(m\sqrt{\lambda})+$$

$$+\frac{mi}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)N_1(m\sqrt{\lambda})-\theta(-\lambda)\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}K_1(m\sqrt{\lambda}).\qquad(15.11)$$

在以后研究我们感兴趣的所有函数的奇点时，将以公式(15.10)和(15.11)为出发点[1].

## 15.2. 函数 $D(x)$ 和函数 $D^c(x)$ 的显式和奇异性

将(15.10)式和(15.11)式相加，我们得到 Pauli-Jordan 函数形式如下：

$$D(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(x)-\frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda}).\qquad(15.13)$$

从这里得出结论，Pauli-Jordan 函数具有非常重要的性质：它在光锥以外等于零(即当 $\lambda<0$ 时)．因此所有场算符的(反)对易子为零，如果它们的宗量是以空间型间隔来分开的．这在物理上相当于空间型间隔分开的事件是互相独立的，因为讯号传播的速度不能大于光速．

为了得到因果函数，从公式(15.10)及(15.11)构成以下的组合：

$$\theta(x^0)D^{(-)}(x)-\theta(-x^0)D^{(+)}(x),$$

这就给出

$$D^c(x)=\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda)-\frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\{J_1(m\sqrt{\lambda})-iN_1(m\sqrt{\lambda})\}+$$

$$+\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)K_1(m\sqrt{-\lambda}).\qquad(15.14)$$

最后利用(14.14)式和(15.13)式，求出推迟函数：

$$D^{\mathrm{ret}}(x)=\frac{\theta(x^0)}{2\pi}\left\{\delta(\lambda)-\frac{m}{2\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)J_1(m\sqrt{\lambda})\right\}.\qquad(15.15)$$

现在已经清楚，除了未来光锥以外，$D^{\mathrm{ret}}$ 到处等于零．

我们来研究对易函数和 Green 函数的奇异性．从(15.10)、(15.11)和(15.13)—(15.15)诸式得出结论，上列函数的全部奇异性只出现在光锥上(当 $\lambda=0$)，因为当空间和时间趋向无穷大时，根据(15.9)式和(15.12)式，这些函数分别递减如 $|\lambda|^{-\frac{3}{4}}\exp(-m\sqrt{|\lambda|})$ 或 $\lambda^{-\frac{3}{4}}$.

---

1) 我们记住，一阶圆柱函数和零阶圆柱函数之间有下列关系：

$$Z_1(x)=-\frac{\partial}{\partial x}Z_0(x),\qquad(15.12)$$

其中 $Z$ 是 $J$, $N$ 和 $K$ 中的任一函数．

为了阐明正规性，我们就来研究上述函数在光锥邻域的性质. 为了这一点，利用(15.8)式和(15.12)式，我们得到[1]

$$D^{(\pm)}(x) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda) \pm \frac{i}{4\pi^2\lambda} \mp \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} - \\ - \frac{m^2}{16\pi}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda) + O(\sqrt{|\lambda|}\ln|\lambda|), \tag{15.16}$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda) + O(\lambda), \tag{15.17}$$

$$D^c(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{1}{\lambda} - \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda) + \\ + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} + O(\sqrt{|\lambda|}\ln|\lambda|), \tag{15.18}$$

$$D^{ret}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta(\lambda) - \frac{m^2}{8\pi}\theta(x^0)\theta(\lambda) + \theta(x^0)\theta(\lambda)O(\lambda). \tag{15.19}$$

(15.16)—(15.19)诸式在光锥上有四种类型的奇点，即极点 $\frac{1}{\lambda}$，$\ln|\lambda|$，$\delta$ 函数 $\delta(\lambda)$ 和间断函数 $\theta(\lambda)$. 在(15.16)、(15.17)、(15.19)式中，个别项前的乘子 $\varepsilon(x^0)$ 和 $\theta(x^0)$ 在光锥外并不产生附加的奇点，因为由于这些函数前还有因子 $\delta(\lambda)$ 和 $\theta(\lambda)$，$\varepsilon(x^0)$ 和 $\theta(x^0)$ 的间断只出现在坐标原点，也就是仍旧落在光锥上.

因此，量子波动场的上述对易函数和 Green 函数是光锥上奇异性相当强的奇异函数.

### 15.3. 奇异函数的 Pauli-Villars 正常化方法

以后将要证明(第三章)在相互作用场理论中，我们亦将讨论不同个数的上述奇异函数的乘积. 在个别情况下(并请参看 § 16)，这些乘积中不同函数的奇异性互相迭加，因此就得到没有意义的不能积分的表式. 以下(第四章及第五章)将指明从这些表式中分出各个奇异性的方法. 同时，为了使讨论的中间过程不牵涉到实际的无穷大，不用奇异函数本身而用它的某一正常化的近似式来代替，比较方便. 只在最后的表式中施行消除正常化的极限过程.

根据关于对易函数和 Green 函数的奇点的上述分析，我们现在来表述求这些函数的逼近方法，所用逼近函数及其任意给定阶的导数在光锥上没有奇点. 作为这类程序的示例，可以指出光子因果 Green 函数的所谓 Feynman 正常化(1948)，此法在于将

$$D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2}$$

用表式

$$\mathrm{reg}_F\, D_0^c(k) = D_0^c(k) - D_M^c(k) = -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{M^2 - k^2} = -\frac{M^2}{k^2(M^2 - k^2)}$$

---

1) 在(15.18)式中令 $m = 0$，我们得到电磁场的因果函数的熟悉公式:

$$D_0^c(x) = \frac{1}{4\pi}\left(\delta(\lambda) - \frac{i}{\pi\lambda}\right) = \frac{1}{2\pi}\delta_+(-\lambda) \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty e^{ix(-\lambda)}dx. \tag{15.18a}$$

来代替，其中 $M^2$ 是某一"辅助质量"的平方．显然上式等于引进乘子

$$\frac{M^2}{M^2 - k^2}.$$

利用(15.18)式不难证明，函数 $\mathrm{reg}_F\, D_0^c$ 与 $D_0^c$ 不同，它在光锥上没有最强的奇点 $\delta(\lambda)$ 与 $\lambda^{-1}$．另一方面，

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{reg}_F\, D_0^c(k) = D_0^c(k).$$

现在注意到，根据公式(15.3)或(15.7)，上述奇异函数可以表示成形式：

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f_1(m^2\lambda) = m^2 f_2(m^2\lambda). \tag{15.20}$$

上述论断精确到乘子 $\varepsilon(x^0)$ 和 $\theta(x^0)$，在上列函数的个别项中含有这些乘子．但是，应该强调的是，我们的目的在于构成这一类对易函数和 Green 函数的组合，使它们在光锥上对 $\lambda$（或者与此相同，对分量 $x^k$）的适当阶数的导数是非奇异的．前面已经指明，由于乘子 $\delta(\lambda)$ 和 $\theta(\lambda)$ 的存在，$\varepsilon(x^0)$ 与 $\theta(x^0)$ 对应的奇点只出现在光锥上，所以这些奇点将与变量 $\lambda$ 的奇点同时被相当高阶的对 $\lambda$ 的零点补偿．因此，在分析上述奇异函数的奇点时，我们可以从公式(15.20)出发．

从这一公式直接得出结论，$\frac{1}{\lambda}$ 和 $\delta(\lambda)$ 总是随着与质量无关的系数一起出现，而 $\ln|\lambda|$ 和 $\theta(\lambda)$ 总是随着与 $m^2$ 成正比的系数一起出现．因此取某些函数 $\Delta$ 的线性组合（此处记号 $\Delta$ 表示 $D^{(+)}$, $D^{(-)}$, $D$, $D^c$, $D^{\mathrm{ret}}$ $\cdots$ 中任何一个被讨论的函数）：

$$c_1\Delta_{M_1}(x) + c_2\Delta_{M_2}(x) + \cdots + c_k\Delta_{M_k}(x).$$

此处函数 $\Delta_{M_i}$ 对应于不同质量 $M_i$ 的场，它们的系数满足条件

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0,$$
$$c_1M_1^2 + c_2M_2^2 + \cdots + c_kM_k^2 = 0.$$

我们得到在光锥上没有奇点的表式．

为了获得包括 $(n-1)$ 阶导数在内是连续的表式，只需使所构成的线性型在 $\lambda = 0$ 点邻域有不低于 $n$ 阶的零点．为此，只要对系数 $c_i$ 加上 $(n+1)$ 个条件：

$$\sum_i c_i = 0, \quad \sum_i c_iM_i^2 = 0, \cdots, \sum_i c_iM_i^{2n} = 0.$$

显然，此时必需的质量的最低个数不超过 $n + 2$[1]．

在以上描述的方案中，选择辅助质量 $M$，使其中之一等于场的基本质量 $m$，而令相应的系数 $c$ 等于 1．于是质量为 $m$ 的场的已知奇异函数 $\Delta$ 与一个包括 $n-2$ 阶导数在内均为连续的函数相对应：

$$\mathrm{reg}\,\{\Delta_m(x)\} = \Delta_m(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\Delta_{M_i}(x). \tag{15.21}$$

---

1) 注意，在实际计算中(参阅第四章)，并不需要完全消除奇点，只要将这些函数化成可积类型即可，于是必要的辅助质量个数要减少一些．

这一函数含有 $n$ 个辅助质量 $M_1\cdots M_n$，而它的 $n$ 个系数满足 $n$ 个条件：

$$1+\sum_{i=1}^{n}c_i=0,\quad m^2+\sum_i c_iM_i^2=0,\cdots,m^{2n-2}+\sum_i c_iM_i^{2n-2}=0. \tag{15.22}$$

在 § 16 中将证明，可以选择"补偿"质量 $M_i$，使得当它们的值按某一特定方式同时趋近于无穷时，系数 $c_i$ 仍为有限．此时，当质量 $M$ 为大值而仍有限时，我们得到：由于圆柱函数有上述的渐近性(15.9)，除光锥的邻域外，辅助函数 $\Delta_{M_i}$ 到处小到可以不计．

此时，由于系数 $c_i$ 为有限，正常化函数 reg $\{\Delta\}$ 与函数 $\Delta$ 实际上只在光锥的小邻域内才不相等，在此域内，reg $\{\Delta\}$ 和 $\Delta(x)$ 不相同，函数 reg $\{\Delta(x)\}$ 和它的若干导数是连续的．当辅助质量 $M_i$ 之值增大时，reg $\{\Delta(x)\}-\Delta(x)$ 之差不等于零的光锥邻域将缩小，而 reg $\{\Delta(x)\}$ 及其导数的有限数值将增大．当 $M_i\to\infty$ 为极限时，函数 reg $\{\Delta\}$ 与 $\Delta$ 没有差别．

上述形式方案引进辅助质量来消除场的奇异函数的奇点是熟知的 Pauli-Villars 正常化(1949)方法中的一个方案．这一方案等于引进有质量的辅助场，来抵消基本场的奇异函数中奇点．

但是应该强调，"抵消场"这一概念在物理上是毫无基础的，因为在 (15.21) 式中必然有一部分 $\Delta_{M_i}$ 函数带有负系数（正如 § 13 中已经表明，对易函数的负号必然与理论中基本原理相冲突，因而是不许可的）．因此，场的奇异函数正常化的 Pauli-Villars 方法，只能够认为是形式上的步骤．

当然，上述近似方法不是唯一的．例如，限制动量空间中的积分区域，或者引进截断因子(形式因子)，也可以得到 $D$ 函数的正常化近似．

但是，我们选择上述的正常化近似方法，是考虑到它的下列优点：明显的相对论协变性，奇异函数的正负频率部分不相混淆，以及从奇异函数 $D^{(+)}$，$D^{(-)}$ 与 $D^c$ 同时正常化这一意义上来看，本法是普适的．

## § 16. 算符式和奇异函数

### 16.1. 算符式的系数函数

在叙述相互作用场理论之先，必须事前熟悉自由场的量子化波函数构成的算符式的一系列特性，主要是其代数性质．

我们取典型的算符式，它依赖于这些函数在时空点序列 $x_1\cdots x_n$ 上正负频率部分的值，并且表示为规范式

$$A(x_1,\cdots,x_n)=\sum K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n)\cdots u_\alpha^{(+)}(x_1)\cdots u_\beta^{(-)}(x_s)\cdots, \tag{16.1}$$

其中 $\cdots u_\alpha(x)\cdots$ 是波函数的分量或其偏导数，$K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n)$ 是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的某一 $c$ 函数，由于时空的齐次性，它具有平移不变性：

$$K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1+a,\cdots,x_n+a)=K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n). \tag{16.2}$$

我们规定，将这些函数称为已知算符式(16.1)的系数函数，一般说来，由于对易关系的奇异性，系数函数是奇异的，以下将特别探讨这些函数的数学性质问题．目前，我们注

意，通过系数函数，不难直接表出算符 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 在所有可能状态

$$\Phi_{\cdots\gamma\cdots p\cdots} = \cdots u_\gamma^{(+)}(p)\cdots\Phi_0 \tag{16.3}$$

的矩阵元，这些状态相当于存在着具有确定动量 $p_1\cdots p_j$ 的给定种类的粒子．为了这一点，需要构成如下类型的矩阵元：

$$\begin{aligned}&\Phi^*_{\cdots\gamma\cdots p\cdots}\cdots u_\alpha^+(x_r)\cdots u_\beta^{(-)}(x_s)\cdots\Phi_{\cdots\gamma'\cdots p'\cdots} = \\ &= \int e^{i(\Sigma x_r k_r - \Sigma x_s k_s)}\Phi_0^*\cdots u_\gamma^{(-)}(p)\cdots u_\alpha^{(+)}(k_r)\cdots u_\beta^{(-)}(k_s)\cdots u_{\gamma'}^{(+)}(p')\cdots\Phi_0\times \\ &\quad\times(\Pi\delta(k_r^2 - m_\alpha^2)dk_r)(\Pi\delta(k_s^2 - m_\beta^2)dk_s).\end{aligned} \tag{16.4}$$

此式不难构成，只要利用如下的对易关系：

$$\delta(k^2 - m^2)\{u_\alpha^{(+)}(k),\ u_\beta^{(-)}(p)\} = \delta(k - p)P_{\alpha\beta}(k)\quad (p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \tag{16.5}$$

其中 $P_{\alpha\beta}(k)$ 是分量 $k$ 的多项式．

实际上，我们将产生算符 $u_\alpha^{(+)}(k_r)$ 向左对易，将消失算符 $u_\beta^{(-)}(k_s)$ 向右对易，直到它们分别与$\cdots u_\gamma^{(-)}(p)\cdots$，$\cdots u_{\gamma'}^{(+)}(p')\cdots$相湮没，或者作用在真空的态振幅以后给出零值．可以看到，只有当所有 $u_\alpha^{(+)}(k_r)$ 被 $u_\gamma^{(-)}(p)$ 消去，而所有 $u_\beta^{(-)}(k_s)$ 被 $u_{\gamma'}^{(+)}(p')$ 消去时，才能获得不为零的结果．

“消去”时所产生的 $\delta$ 函数可以使我们消去对变量 $k_r$ 的积分，而使这些变量等于$\cdots p'\cdots$．剩下自由的$\cdots u_\gamma^{(-)}(p_\alpha)\cdots u_{\gamma'}^{(+)}(p'_\alpha)\cdots$也应该互相湮没，因此，将会出现乘子

$$\theta(p_\omega^0)\delta(p_\omega^2 - m_\gamma^2)\delta(p_\omega - p'_\omega). \tag{16.6}$$

由于这些基本运算的结果，我们得到矩阵元(16.4)的表式为

$$\sum P^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)e^{i(\Sigma p_\nu x_\nu - \Sigma p'_\lambda x_\lambda)}, \tag{16.7}$$

或者

$$\sum Z^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p'\cdots p\cdots)e^{i(\Sigma p_\nu x_\nu - \Sigma p'_\lambda x_\lambda)}\Pi\{\theta(p_\omega^0)\delta(p_\omega^2 - m_\gamma^2)\delta(p_\omega - p'_\omega)\}, \tag{16.8}$$

其中 $P^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}$，$Z^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}$ 是分量$\cdots p\cdots p'\cdots$的多项式．当所有的 $u_\gamma^{(-)}$，$u_{\gamma'}^{(+)}$ 被 $u_\alpha^{(+)}$，$u_\beta^{(-)}$ 消去时，我们得到(16.7)式；与此相反时，我们得到(16.8)式．

因此，根据(16.1)式，最后获得

$$\begin{aligned}&\Phi^*_{\cdots\gamma\cdots p\cdots}A(x_1, \cdots, x_n)\Phi_{\cdots\gamma'\cdots p'\cdots} = \\ &= \sum P^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)e^{i(\Sigma p_\nu x_\nu - \Sigma p'_\lambda x_\lambda)} + \\ &\quad + \sum Z^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)K'_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)e^{i(\Sigma p_\nu x_\nu - \Sigma p'_\lambda x_\lambda)}\times \\ &\quad\times\Pi\{\theta(p_\omega^0)\delta(p_\omega^2 - m_\gamma^2)\delta(p_\omega - p'_\omega)\}.\end{aligned} \tag{16.9}$$

鉴于算符式的正规形式表示法显然比较方便，例如即使为了求得它们的矩阵元，所以正规积的约化步骤是值得注意的问题．显然，为了将算符型波函数构成的多项式化为正规式，只要掌握 $A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$ 类型乘积的化法就已经足够，其中 $A_j(x)$ 是“线性算符”，即为相应 $u_j^{(+)}(x)$，$u_j^{(-)}(x)$ 的线性组合．

对于每一给定情况直接变换这些乘积，并无原则性的困难．为此只要将 $u^{(+)}$ 逐次向左移动，而 $u^{(-)}$ 向右移动，并且在每一次“移动”时，利用对易关系就完全足够了．但是，由于此时所获得之项当 $n$ 较小时为数已甚多，最好有一个方案能够尽可能自动地化成正规形式．

从 G. Wick (1950) 所证明的一个重要定理可以推导出这样的方案，现在我们就来表述 Wick 定理.

## 16.2. 正规乘积的 Wick 定理

我们首先讨论 $n = 2$ 的情况，此时我们有两个线性算符乘积 $A_1(x_1)A_2(x_2)$. 在这种情况下，为了化成正规式，显然只要移动一下算符 $u^{(-)}(x_1)$, $u^{(+)}(x_2)$, 结果得到波函数正负频率部分按"正确循序"排列构成的项及其中不包含算符式的对易函数项.

因此，上述乘积与正规乘积

$$:A_1(x_1)A_2(x_2):$$

只相差 $c$ 表式，将此差称为收缩，而且利用下方的括号来表示:

$$A_1(x_1)A_2(x_2) = :A_1(x_1)A_2(x_2): + \underbrace{A_1(x_1)A_2(x_2)}. \tag{16.10}$$

因为正规乘积的真空平均值总等于零，我们也可以将收缩定义为通常乘积的真空平均值:

$$\underbrace{A_1(x_1)A_2(x_2)} = \Phi_0^* A_1(x_1)A_2(x_2)\Phi_0 \equiv \langle A_1(x_1)A_2(x_2)\rangle_0, \tag{16.11}$$

作为示例，试讨论实标量场. 由对易关系

$$\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) = -iD(x-y),$$

可得

$$\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y) = \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x) - iD^{(-)}(x-y),$$

因此，获得

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y) &= (\varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x))(\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(-)}(y)) = \\ &= \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(y) + \varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y) + \\ &\quad + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(y) - iD^{(-)}(x-y).\end{aligned}$$

或者根据正规乘积的定义，

$$\varphi(x)\varphi(y) = :\varphi(x)\varphi(y): - iD^{(-)}(x-y).$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}&\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle_0 = -iD^{(-)}(x-y), \\ &\underbrace{\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)} = 0, \quad \underbrace{\varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(y)} = -iD^{(-)}(x-y).\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

对于电磁场，同理可得

$$\underbrace{A_n(x)A_m(y)} = \langle A_n(x)A_m(y)\rangle_0 = ig^{nm}D_0^{(-)}(x-y). \tag{16.13}$$

再来研究 Fermi 子的场，为此有

$$\begin{aligned}&\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) + \bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) = -iS_{\alpha\beta}(x-y), \\ &\psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y) = -\bar{\psi}_\beta^{(+)}(y)\psi_\alpha^{(-)}(x) - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\psi(x)\bar{\psi}(y) &= \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) - \bar{\psi}^{(+)}(y)\psi^{(-)}(x) + \\ &\quad + \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y) - iS^{(-)}(x-y),\end{aligned}$$

或

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = :\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y): - iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y).$$

因此，

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = -iS^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y). \tag{16.14}$$

同样，可以证明

$$\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -iS^{(+)}_{\beta\alpha}(y-x). \tag{16.15}$$

由于 $\psi(x)$ 与 $\psi(y)$ 总是反对易的，而 $\bar{\psi}(x)$ 与 $\bar{\psi}(y)$ 总是反对易的，除此之外，可得

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = 0, \quad \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = 0. \tag{16.16}$$

为了表述 Wick 定理，还需要引进关于含收缩的正规乘积这一概念：

正如在 § 9 中已经讲过，正规乘积：$A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$：可以定义为通常乘积 $A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$ 化为正规形式后的结果，只要在正规化的过程中，将量子化波函数看作恰为对易的或反对易的，而令所出现的一切对易函数等于零. 由此直接得出结论，在正规乘积记号下，改变乘子的位置只能改变它的符号：

$$:A_{i_1}(x_{i_1})\cdots A_{i_n}(x_{i_n}) = \eta:A_1(x_1)\cdots A_n(x_n): \quad (\eta = (-1)^p),$$

其中 $p$ 是从乘子的原始顺序 $1, \cdots, n$ 化为顺序 $i_1, \cdots, i_n$ 时 Fermi 算符相互之间对易的次数.

显然，对于每一乘子而言，正规乘积是线性的：

$$:A_1(x_1)\cdots(aA'_j(x_j) + bA''_j(x_j))\cdots A_n(x_n): =$$
$$= a:A_1(x_1)\cdots A'_j(x_j)\cdots A_n(x_n): + b:A_1(x_1)\cdots A''_j(x_j)\cdots A_n(x_n):,$$

其中 $a$ 和 $b$ 是任意的复 $c$ 数.

现在引进含收缩的正规乘积，其定义为

$$:A_1(x_1)\cdots\underbrace{A_j(x_j)\cdots A_k}(x_k)\cdots A_n(x_n): =$$
$$= \eta\underbrace{A_j(x_j)A_k}(x_k):A_1(x_1)\cdots A_{j-1}(x_{j-1})A_{j+1}(x_{j+1})\cdots$$
$$\cdots A_{k-1}(x_{k-1})A_{k+1}(x_{k+1})\cdots A_n(x_n): \quad (\eta = (-1)^p),$$

其中 $p$ 是当顺序

$$1, \cdots, j-1, j, j+1, \cdots, k-1, k, k+1, \cdots, n$$

变成顺序

$$j, k, 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$$

时 Fermi 算符对易的次数.

仿此，我们也可以定义含有任意个收缩的正规乘积，例如，

$$:\underbrace{A_1(x_1)\underbrace{A_2(x_2)A_3(x_3)A_4(x_4)\cdots A_{n-1}(x_{n-1})}A_n(x_n)}:$$

可认为是等于所有收缩的乘积，并乘上余下未收缩算符的正规乘积以及数 $\eta = (-1)^p$：

$$\eta\underbrace{A_1A_3}\underbrace{A_2A_{n-1}}\cdots:A_4\cdots A_n:,$$

其中 $p$ 是当收缩提到正规乘积记号外的过程中 Fermi 算符对易的次数.

这样，例如

$$:\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma}(x_3)\psi_\delta}(x_4): =$$
$$= -\underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\gamma}(x_3)\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\delta}(x_4) = S^{(+)}_{\gamma\alpha}(x_3-x_1)S^{(+)}_{\delta\beta}(x_4-x_2).$$

从这一定义可以立刻得到以下结论：含有收缩的正规乘积对其乘子是线性的，而且，在不改变收缩和不改变此收缩中算符的先后次序的条件下在这些乘积记号下进行对易时，只需再乘上 $\eta=(-1)^p$。

现在我们可以将 Wick 定理简单表述如下。根据 Wick 定理：线性算符的通常乘积等于所有相应的正规乘积之和(其中含有一切可能的收缩)，也包括不含收缩的正规乘积：

$$A_1\cdots A_n=:A_1\cdots A_n:+:\underbrace{A_1A_2}\cdots A_n:+,\cdots,+$$
$$+:\underbrace{A_1\cdots A_{n-1}}A_n:+:\underbrace{A_1\cdots A_n}:+:\underbrace{A_1A_2}\underbrace{A_3A_4}\cdots A_n:+\cdots. \tag{16.17}$$

为了证明上述定理，我们需要以下引理：如果 $A_1\cdots A_n$，$B$ 是线性算符，则

$$:A_1\cdots A_n:B=:A_1\cdots A_nB:+\sum_{(1\leqslant k\leqslant n)}:A_1\cdots\underbrace{A_k\cdots A_nB}:. \tag{16.18}$$

注意，只要我们证明引理的特殊情况，即当每一算符 $A_j$，$B$ 或是产生算符，或是消失算符，则上述引理的正确性就可以完全得证。事实上，在一般情况下，这些算符中的每一个算符可以表示为产生算符及消失算符之和。由于所研究的算符积对其乘子是线性的，我们可以将它表示为产生算符和消失算符之积的和，也就是相当于上述特殊情况的和。因此，从引理的正确性得到它在一般情况下的正确性。

还应注意，$B$ 为消失算符的情况是平庸的。事实上，在表式

$$:A_1\cdots A_n:B$$

中算符 $B$ 已经位于"正确"位置，因而上式就等于

$$:A_1\cdots A_nB:,$$

除此以外，因为 $B$ 是消失算符，则 $\underbrace{A_kB}=0$。

因此，只待考虑 $B$ 是产生算符的情况。但此时，如果算符 $A_j$ 中有几个是产生算符，这些算符与 $B$ 之收缩为零，故可将它们从正规乘积记号的左方提出来，以致在正规乘积记号内的 $A_j$ 中间只剩下消失算符。因此，为了证明上面所述的引理，只需证明当所有 $A_j$ 为消失算符而 $B$ 为产生算符时情况。

因为当 $n=1$ 时，从收缩的定义直接得出上述引理的正确性：

$$A_1B=:A_1B:+\underbrace{A_1B},$$

我们可以利用此式通过归纳法来证明引理。

假定算符 $A_j$ 的数目为 $n$ 时，引理是正确的，则当等式(16.18)左方乘以某一消失算符 $A_0$ 时，可得

$$A_0:A_1\cdots A_n:B=A_0:A_1\cdots A_nB:+\sum_{(1\leqslant k\leqslant n)}A_0:A_1\cdots\underbrace{A_k\cdots A_nB}:. \tag{16.19}$$

但是表式 $:A_1\cdots\underbrace{A_k\cdots A_nB}:$ 中唯一的产生算符已被收缩，因此它等于 $c$ 数，乘上纯由消失算符所组成的正规乘积。另一方面，全由消失算符所组成的正规乘积，等于它们的通常乘积。因此

$$A_0:A_1\cdots\underbrace{A_k\cdots A_nB}:=:A_0A_1\cdots\underbrace{A_k\cdots A_nB}:. \tag{16.20}$$

现在来分析等式(16.19)右端第一项，我们有

$$:A_1\cdots A_nB:=(-1)^p:BA_1\cdots A_n:=(-1)^pB:A_1\cdots A_n:,$$

其中 $p$ 是当 $B$ 由最右边移到最左边时 Fermi 对易的次数。由上式，我们得到

$$\begin{aligned}A_0:A_1\cdots A_nB:&=(-1)^pA_0B:A_1\cdots A_n:=\\&=(-1)^p:A_0B::A_1\cdots A_n:+(-1)^p\underbrace{A_0B}:A_1\cdots A_n:=\\&=(-1)^p:A_0B::A_1\cdots A_n:+(-1)^p:\underbrace{A_0B}A_1\cdots A_n:=\\&=(-1)^{p+p'}:BA_0::A_1\cdots A_n:+:\underbrace{A_0A_1\cdots A_nB}:,\end{aligned}$$

其中 $p'$ 是当 $A_0$，$B$ 互换位置时 Fermi 对易的次数。

另一方面，因为 $B$ 是产生算符，而其他算符是消失算符，故有

$$(-1)^{p+p'}:BA_0::A_1\cdots A_n: = (-1)^{p+p'}:BA_0A_1\cdots A_n: =$$
$$= (-1)^{p}:A_0BA_1\cdots A_n: = :A_0A_1\cdots A_nB:,$$

结果有

$$A_0:A_1\cdots A_nB: = :A_0A_1\cdots A_nB: + :\underline{A_0A_1\cdots A_nB}:,$$

由此及用(16.20)式，由(16.19)式获得

$$:A_0A_1\cdots A_n:B = :A_0A_1\cdots A_nB: + \sum_{(1\leqslant k\leqslant n)} :A_0A_1\cdots \underline{A_k\cdots A_nB}:.$$

这样，假定算符 $A$ 之数目为 $n$ 时，等式(16.18)是正确的，我们可证明当算符数为 $n+1$ 时，此式也是正确的，因此引理获证.

我们还注意到，这一引理可以直接推广到含任意个收缩的正规乘积. 事实上，因为含有收缩的正规乘积总等于收缩乘积乘上 $(-1)^p$ 再乘以余留的未收缩算符的正规乘积，我们看到，在等式(16.18)中可以取含有任意个数收缩的正规乘积来代替算符 $A$ 的"纯粹"正规乘积.

现在开始证明 Wick 定理本身. 显然当 $n=2$ 时，这一定理是平庸的. 因此利用归纳法，假设等式(16.17)对 $n$ 个算符 $A$ 的乘积是正确的，我们来证明，对 $n+1$ 个线性算符，它也是正确的. 为此，在等式(16.17)右方乘上某一线性算符 $A_{n+1}$. 此时我们将算符 $A_1,\cdots,A_n$ 的通常乘积表示为算符 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 含有相互间一切可能的收缩的一切正规乘积之和，而其右方按通常意义乘以 $A_{n+1}$（应该强调，一切可能收缩项中包括无收缩之项）.

但是，根据已证明的推广引理，算符 $A_1,\cdots,A_n$ 的含有任意个收缩的正规乘积，在右边按通常意义乘上 $A_{n+1}$ 后，等于算符 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 如下的正规乘积之和，其中除去已有的 $A_1,\cdots,A_n$ 之间的收缩，还要考虑自由算符 $A_1,\cdots,A_n$ 与算符 $A_{n+1}$ 的一切可能收缩(还包括零次收缩)[1]. 因此，我们证明了 $n+1$ 个线性算符 $A_1\cdots A_{n+1}$ 的通常乘积是含有一切可能收缩的正规乘积之和. 故 Wick 定理得证.

不难看出，上述定理也适用于以下情况，即其中某些乘子带有正规乘积的记号，如

$$:A_1\cdots A_{k_1}::A_{k_1+1}\cdots A_{k_2}:\cdots:A_{k_s}\cdots A_n:. \tag{16.21}$$

在这种情况下，Wick 定理的证明和"纯粹"乘积 $A_1,\cdots,A_n$ 时完全相同，其显著区别只在于现在不必考虑到(16.21)式中属于同一正规乘积的各乘子之间的收缩. 例如不必考虑到 $A_1,\cdots,A_{k_1}$ 之间的收缩，$A_{k_1+1},\cdots,A_{k_2}$ 之间的收缩，等等.

为了举例表明推广的 Wick 定理如何应用，我们研究乘积：

$$:\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x)::\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y): =$$
$$= \sum_{(\sigma,\sigma',\tau,\tau')} :\bar\psi_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)::\bar\psi_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y):, \tag{16.22}$$

我们有

$$:\bar\psi_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)::\bar\psi_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y): =$$
$$= :\bar\psi_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)\bar\psi_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y): + \underline{\bar\psi_\sigma(x)}\psi_{\tau'}(y)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\gamma^l_{\tau\tau'}:\psi_{\sigma'}(x)\bar\psi_\tau(y): +$$
$$+ \underline{\psi_{\sigma'}(x)}\bar\psi_\tau(y)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\gamma^l_{\tau\tau'}:\bar\psi_\sigma(x)\psi_{\tau'}(y): + \underline{\psi_{\sigma'}(x)}\underline{\bar\psi_\tau(y)}\,\underline{\bar\psi_\sigma(x)}\psi_{\tau'}(y)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\gamma^l_{\tau\tau'},$$

根据收缩的基本公式(16.14)、(16.15)，由此可得

---

1) 也就是 $A_1\cdots A_n$ 与 $A_{n+1}$ 不成收缩之项.

$$:\bar{\psi}_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)::\bar{\psi}_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y):=$$
$$=:\bar{\psi}_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)\bar{\psi}_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y):+i:\bar{\psi}_\tau(y)\gamma^l_{\tau\tau'}S^{(+)}_{\tau'\sigma}(y-x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x):-$$
$$-i:\bar{\psi}_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}S^{(-)}_{\sigma'\tau}(x-y)\gamma^l_{\tau\tau'}\psi_{\tau'}(y):+\gamma^k_{\sigma\sigma'}S^{(-)}_{\sigma'\tau}(x-y)\gamma^l_{\tau\tau'}S^{(+)}_{\tau'\sigma}(y-x).$$

将此式代到(16.22)式中，并且对旋量指标求和，最后获得

$$:\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)::\bar{\psi}(y)\gamma^l\psi(y):=$$
$$=:\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^l\psi(y):-i:\bar{\psi}(y)\gamma^lS^{(+)}(y-x)\gamma^k\psi(x):-$$
$$-i\bar{\psi}(x)\gamma^kS^{(-)}(x-y)\gamma^l\psi(y):+\mathrm{Sp}\{\gamma^kS^{(-)}(x-y)\gamma^lS^{(+)}(y-x)\}. \qquad (16.23)$$

利用 Wick 定理，我们可以将算符的通常乘积几乎自动地化为正规乘积乘上 $c$ 数之和. 化成正规乘积到这一步，应认为已经结束，因为，一般说来，将正规乘积本身写成展开的正规形式并不适宜. 换句话说，利用正规乘积的线性组合来表示算符，可以认为是它的正规形式的最方便写法. 例如写成

$$:\bar{\psi}(x)\psi(x):,$$

比之写成展开式

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(+)}(x)+\bar{\psi}^{(+)}(x)\psi^{(-)}(x)-\psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(x)+\bar{\psi}^{(-)}(x)\psi^{(-)}(x),$$

较为简明，更不必说大量乘子相乘的情况.

我们已经看到，正规乘积的计算是十分简单的. 例如，求以下形式的矩阵元：

$$\Phi^*_{\cdots\gamma\cdots\rho\cdots}:A_1(x_1)\cdots A_n(x_n):\Phi_{\cdots\gamma'\cdots\rho'\cdots}=$$
$$=\Phi^*_0\cdots u^{(-)}_\gamma(p)\cdots:A_1(x_1)\cdots A_n(x_n):\cdots u^{(+)}_{\gamma'}(p')\cdots\Phi_0. \qquad (16.24)$$

注意根据 Wick 定理，乘积

$$\cdots u^{(-)}_\gamma(p):\cdots A_1(x_1)\cdots A_n(x_n):\cdots u^{(+)}_{\gamma'}(p')\cdots=$$
$$=:\cdots u^{(-)}_\gamma(p)\cdots::A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)::\cdots u^{(+)}_{\gamma'}(p')\cdots:$$

等于下列算符间含有一切可能收缩的相应正规乘积之和：$u^{(-)}_\gamma(p)$ 对 $A_j(x_j)$，$A_j(x_j)$ 对 $u^{(+)}_{j'}(p')$ 及 $u^{(-)}_\gamma(p)$ 对 $u^{(+)}_{\gamma'}(p')$ 的收缩. 另一方面，这种正规乘积的真空平均值(其中即使含有一个未收缩的算符)等于零. 因此我们看到，矩阵元(16.24)只由那些全部算符已经收缩的正规乘积之和组成. 结果，矩阵元可以表示成

$$(-1)^p\Pi\{u^{(-)}_{\gamma_\alpha}(p_\alpha)A_j(x_j)\}\Pi\{A_j(x_j)u^{(+)}_{\gamma'_\beta}(p'_\beta)\}\Pi\{u^{(-)}_{\gamma_\sigma}(p_\sigma)u^{(+)}_{\gamma'_\tau}(p'_\tau)\}$$

类型各项之和.

## 16.3. 奇异函数的反常性

现在我们研究由算符式的乘法运算而产生的系数函数的结构问题. 注意，根据 Wick 定理，展开线性算符 $A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)$ 乘积所得的系数函数具有形式：

$$\prod_{(r<s)}D^{(-)}_{\alpha\beta}(x_r-x_s), \qquad (16.25)$$

其中 $D_{\alpha\beta}$ 是对易函数.

任意二个上述类型(16.1)的算符

$$A_1(x_1,\cdots,x_n)=\sum K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n)\cdots u^{(+)}_\alpha(x_r)\cdots u^{(-)}_\beta(x_s)\cdots, \qquad (16.26)$$
$$A_2(y_1,\cdots,y_m)=\sum Q_{\cdots\sigma\cdots\tau\cdots}(y_1,\cdots,y_m)\cdots u^{(+)}_\sigma(y_i)\cdots u^{(-)}_\tau(y_j)\cdots$$

所成的乘积

$$A_1(x_1, \cdots, x_n)A_2(y_1, \cdots, y_m)$$

也属于同一类型，它的系数函数可以用下式来表示：

$$K(x_1, \cdots, x_n)Q(y_1, \cdots, y_m)\prod D_{\beta\sigma}^{(-)}(x_s - y_i), \tag{16.27}$$

但是应该注意，函数 $D^{(-)}(x)$ 尤其函数

$$D_{\beta\sigma}^{(-)}(x) = P_{\beta\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}(x)$$

在光锥上具有高阶的奇点，因此，既然形如(16.25)，(16.27)的各式中含有大量的这些函数的乘积，其实际意义可以引起严重的怀疑.

因此，现在来讨论更一般的问题是适当的，即对于 (16.1) 类型的算符式中的系数函数，为了使之具有确定的意义，或者如通常所说的，使其中不含“发散”，应该加上那些条件.

首先清楚的是，我们不能要求系数函数是数学中通常涵义的函数，因为这样，我们就要一般地不去考虑 $\delta(x)$，$D(x)$，等等“奇异”函数或“广义”函数，而这些函数在相对论量子力学中我们经常要讨论到. 因此，自然可以认为，$K(x_1, \cdots, x_n)$ 为广义函数[1].

通常在量子力学著作中这一概念常被赋与一定的含义；但是，常常没有明确地表述出来，今试加以叙述. 与通常的函数不相同，奇异(或广义)函数不是对宗量的一切值均有定义，对于某些宗量值集合，这些函数可能是无限的，或者根本是不确定的；而是用这些函数与相当正常的函数所构成的乘积的积分法则来给定的. 例如 $\delta$ 函数用它与连续函数的积的积分法则来表述；$\delta$ 函数的导数用它和适当可微函数的积的积分法则来表述，以及其他等等.

换句话说，广义函数是用在足够正常的函数的适当“线性空间”中给定相应的线性泛函来定义的. 最近 Соболев (1936) 和 L. Schwartz (1950) 在他们创立的新数学理论，即所谓“分布论”中采用了这种泛函观点.

自然，我们此处对于广义函数的一般理论不拟作任何完整的叙述，因此只限于将我们今后直接需要的特殊系数函数的性质作一基本表述.

我们来表述系数函数 $K(x_1, \cdots, x_n)$ 的定义. 根据我们所采取的观点，在下列条件下可以认为 $K(x_1, \cdots, x_n)$ 是已知而且可积的，即如果给定足够光滑且在无穷远处减弱得足够快的函数族 $F(x_1, \cdots, x_n)$，且在 $F$ 的线性空间 $L$ 内定义有一线性泛函. 我们将此泛函暂用符号表示为

$$\int K(x_1, \cdots, x_n)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n. \tag{16.28}$$

我们再将此定义更加精确化. 引入 $C(q, r, n)$ 类的函数 $F(x_1 \cdots x_n)$，$F$ 包括它的 $q$ 阶偏导数在内是连续的，而所有乘积

---

1) 目前在苏联的数学文献中这些函数所采用的名称是广义函数 (обобщенные функции). 在西方文献中则将它们称为分布 (distributions).

$$x_{i_1}^{\alpha_1}\cdots x_{i_s}^{\alpha_s}\frac{\partial^p F(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1}\cdots\partial x_{j_p}^{\beta_p}}\Bigg\}\quad\begin{matrix}(s=0,1,\cdots,r),\\(p=0,1,\cdots,q),\\(\alpha,\beta=0,1,2,3)\end{matrix}\tag{16.29}$$

是有限的. 由具有某一给定的 $q$, $r$ 的此类函数所组成的线性空间作为空间 $L$.

因此,对于系数函数总有如下的基本要求: 积分(16.28)在线性空间 $C(q, r, n)$ 中定义为线性泛函,即使要求相当大的 $q$, $r$ 也可以. 以后我们称此要求为可积性条件.

通常构成系数函数时,利用广义极限比较方便. 此处,我们将序列

$$K_M(x_1,\cdots,x_n)\quad(M\to\infty)\tag{16.30}$$

称为广义收敛,如果此序列的相应积分序列

$$\int K_M(x_1,\cdots,x_n)F(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\tag{16.31}$$

对于某一确定的函数类 $C(q, r, n)$ 中的每一函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 按通常意义而收敛. 自然,同时假定对于确定的函数类 $C(q, r, n)$, 所有函数(16.30)均为可积. 为了表示广义收敛,我们将采用通常的记号 $\longrightarrow$, lim.

因为

$$\lim_{M\to\infty}\int K_M(x_1,\cdots,x_n)F(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

也是 $C(q, r, n)$ 中的线性泛函,所以规定将它表示为记号形式:

$$\int\lim_{M\to\infty}K_M(x_1,\cdots,x_n)F(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

我们也就将广义极限

$$\lim_{M\to\infty}K_M(x_1,\cdots,x_n)$$

定义为可积的广义函数. 由于这一定义,

$$\int\lim_{M\to\infty}K_M(x_1,\cdots,x_n)F(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int K_M(x_1,\cdots,x_n)F(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

对于指标值 $q$, $r$ 相当高的函数类 $C(q, r, n)$ 中的一切函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 成立.

我们应该强调,在研究量子力学的奇异函数时,实质上经常应用广义极限过程,虽然习惯上并不注意它与通常意义的极限过程的区别. 例如,当我们说 $\delta(t)$ 是以下函数当 $\varepsilon\to+0$ 时的极限:

$$\delta_\varepsilon(t)\begin{cases}0, & \text{当 } |t|>\varepsilon,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{当 } |t|\leqslant\varepsilon,\end{cases}$$

则显然此处极限概念就是按广义极限来理解的. 下式当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限过程也正是广义的:

$$\frac{P_{\alpha\beta}(p)}{m^2-p^2-i\varepsilon},$$

此式是函数 $D^c_{\alpha\beta}$ 的 Fourier 映象.

现在从这一观点来分析如何利用正常化表式作基本奇异函数 $D^{(\pm)}_{\alpha\beta}$, $D^{c}_{\alpha\beta}$ 的逼近问题. 例如,取函数 $D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)$,它由下列关系式定义:

$$D^{(-)}_{\alpha\beta}(x) = P_{\alpha\beta}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}P_{\alpha\beta}(k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk. \quad (16.32)$$

首先我们来阐明,此处积分的无穷限应该如何理解. 大家知道,在无限区域内所取的通常积分定义为有限区域上积分的极限,这时积分区域无限扩大,其极限包括整个已知的无限区域. 因此,自然地含有多项式 $P(k)$ 的积分

$$K(x) = \int e^{-ikx}P(k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk \quad (16.33)$$

可定义为积分

$$K_G(x) = \int_G e^{-ikx}P(k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk$$

当积分区域 $G$ 无限扩大时的反常极限.

可以证明,实际上存在这一极限. 取区域序列 $G_n$ 使得四维正方体的线度

$$-L_n \leqslant k^\alpha \leqslant L_n \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

完全包含在 $G_n$ 之内,随着 $n$ 而趋于 $\infty$. 并且考虑某一函数类 $C(q, r, 1)$ 中的 $F(x)$ 的积分

$$\int K_G(x)F(x)dx.$$

我们得到

$$\int K_G(x)F(x)dx = \int_G \tilde{F}(k)P(k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk =$$

$$= \int \theta(k; G)\tilde{F}(k)P(k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk,$$

其中

$$\tilde{F}(k) = \int F(x)e^{-ikx}dx,$$

$$\theta(k; G) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k\in G, \\ 0, & \text{当 } k\bar{\in} G. \end{cases}$$

化为三维积分后,求得

$$\int K_G(x)F(x)dx = \int \theta(k^0, \mathbf{k}, G)F(k^0, \mathbf{k})P(k^0, \mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{2k^0} \quad (16.34)$$

$$(k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}).$$

现在估计在无穷远处 $\tilde{F}$ 减小的数量级. 设 $F(x)$ 属于类 $C(q, 5, 1)$. 这时下列诸式

$$|F(x)|, \quad \left|\frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\alpha)^p}\right|$$

$$\left(\sum_\alpha |x^\alpha|\right)^5 |F(x)|, \quad \left(\sum_\alpha x^\alpha\right)^5 \left|\frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\beta)^p}\right| \quad (p = 1, \cdots, q)$$

是有限的,因而

$$\int |F(x)|dx < \infty, \quad \int \left|\frac{\partial^p F(x)}{(\partial x^\beta)^p}\right| dx < \infty.$$

现在清楚, $\tilde{F}(k)$ 是连续而且有界的:

$$|\tilde{F}(k)| \leqslant \int |F(x)|dx,$$

其次，分部积分后，有

$$\tilde{F}(k)=\left(\frac{-ig^{\alpha\alpha}}{k^{\alpha}}\right)^{q}\int\frac{\partial^{q}F(x)}{(\partial x^{\alpha})^{q}}e^{-ikx}dx,$$

由此

$$|k^{\alpha}|^{q}|\tilde{F}(k)|\leqslant\int\left|\frac{\partial^{q}F(x)}{(\partial x^{\alpha})^{q}}\right|dx\leqslant\sum_{\alpha}\int\left|\frac{\partial^{q}F(x)}{(\partial x^{\alpha})^{q}}\right|dx=\text{const}=C,$$

而且

$$\left(\sum_{\alpha}|k^{\alpha}|\right)^{q}|\tilde{F}(k)|\leqslant 4^{q-1}\sum|k^{\alpha}|^{q}|\tilde{F}(k)|\leqslant 4^{q}C, \tag{16.35}$$

以 $\nu$ 表示多项式 $P(k)$ 之幂. 我们看到，表式 $\tilde{F}(k)P(k)$ 是 $k$ 的连续函数，当 $|k|\to\infty$ 时，它的减小不慢于

$$\frac{\text{const}}{|k|^{q-\nu}}.$$

因此

$$\int|\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})|\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}}<\infty,$$

当 $q=\nu+3$ 时对于函数类 $C(q,5,1)$ 中的任意函数 $F(x)$ 都适用. 结果有

$$\left|\int\theta(k^{0},\mathbf{k};G_{n})\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}}-\int\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}}\right|=$$

$$=\left|\int\{\theta(k^{0},\mathbf{k};G)-1\}\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}}\right|\leqslant\int\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}}\Big|_{n\to\infty}\to 0$$

$$(\cdots|k^{\alpha}|\geqslant L_{n}\cdots).$$

现在，在(16.34)式基础上我们可以断言，对于函数类 $C(\nu+3,5,1)$ 中所有函数 $F(x)$，

$$\int K_{G_{n}}(x)F(x)dx\to\int\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{k^{0}},$$

由此证明了广义极限的存在.

$$\lim_{n\to\infty}K_{G_{n}}(x)=K(x),$$

对于此式

$$\int K(x)F(x)dx=\int\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P(k^{0},\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{2k^{0}}.$$

显然，这一广义极限与扩大区域的序列 $G_{n}$ 的特殊选择无关. 我们将它作为积分(16.33)的定义.

因此关系式(16.32)实际上定义了一个可积的广义函数 $D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$，同时，

$$\int D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)F(x)dx=\frac{i}{(2\pi)^{3}}\int\tilde{F}(k^{0},\mathbf{k})P_{\alpha\beta}(-k^{0},-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{2k^{0}}, \tag{16.36}$$

如同刚才已经阐明的，$D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$ 是函数序列

$$\frac{i}{(2\pi)^{3}}\int_{G_{n}}e^{-ikx}P_{\alpha\beta}(-k)\theta(k^{0})\delta(k^{2}-m^{2})dk \tag{16.37}$$

的广义极限，容易看出，它是正常而又解析的.

但是，这样的近似在许多场合并不十分方便. 问题在于表式 (16.37) 并非协变的，因为积分区域在 Lorentz 变换下是变化的.

## 16.4. Pauli-Villars 正常化的若干性质

显然，为了利用连续而又协变的函数来广义地逼近 $D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$，我们应用 § 15 中已经提

及的 Pauli-Villars 正常化. 令

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{reg}\left(D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)\right) &= P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\operatorname{reg}\left(D^{(-)}(x)\right), \\ \operatorname{reg} D^{(-)}(x) &= D^{(-)}(x) + \sum_{(1\leqslant j\leqslant l)} c_j D_{M_j}^{(-)}(x), \end{aligned}\right\} \tag{16.38}$$

其中 $D_M^{(-)}(x)$ 是质量为$M$的 Pauli 函数的负频率部分,而数 $c_j$ 决定于方程

$$\left.\begin{aligned} &1 + \sum_{(1\leqslant j\leqslant l)} c_j = 0, \\ &m^2 + \sum_j M_j^2 c_j = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &m^{2(l-1)} + \sum_j M^{2(l-1)} c_j = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.39}$$

因为 $\operatorname{reg}\left(D^{(-)}(x)\right)$ 是连续的,而且具有包括 $l-2$ 阶在内的连续偏导数,我们看到,当 $l > \nu + 2$ 时 ($\nu$ 为多项式 $P_{\alpha\beta}$ 之幂),函数 $\operatorname{reg} D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$ 是连续的.

现在来证明,总可以选择质量 $M$,使得当 $M \to \infty$ 时系数 $c_j$ 仍为有限的. 我们强调,当我们考虑极限过程 $M \to \infty$ 时,总可认为数 $l$ 是确定的. 取任意确定的但不相同的质量 $m_j$. 此时行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ m_1^2 & \cdots & m_l^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1^{2(l-1)} & \cdots & m_l^{2(l-1)} \end{vmatrix}$$

不为零,因此方程组

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{(1\leqslant j\leqslant l)} a_j^{(\nu)} = \delta_{0\nu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{(1\leqslant j\leqslant l)} a_j^{(\nu)} m_j^{2(l-1)} = \delta_{l-1,\nu} \qquad (\nu = 0, \cdots, l-1), \end{aligned}\right.$$

将有有限解 $a_j^{(\nu)}$,其中 $\delta_{ij}$ 表示单位矩阵元. 我们令

$$M_j = M m_j. \tag{16.40}$$

从方程(16.39),对于这一组质量可得

$$c_j = -\sum_{(0\leqslant\nu\leqslant l-1)} a_j^{(\nu)} \left(\frac{m}{M}\right)^{2\nu}.$$

显然,当 $M \to \infty$ 时,这些 $c_j$ 是一致有界的. 上述质量 $M_j$ 的特殊选定(16.40)并非必要,以后我们只须使

$$|c_j|_{M\to\infty} \leqslant \text{const}.$$

现在,我们可以证明以下关系的正确性:

$$\operatorname{reg}\left(D_{\alpha\beta}^{(-)}(x)\right) \xrightarrow[M\to\infty]{} D_{\alpha\beta}^{(-)}(x); \tag{16.41}$$

为此，只要证明，对函数类 $C(\nu+3,5,1)$ 中的任意函数有极限关系：

$$\int F(x)\,\mathrm{reg}\,(D^{(-)}_{\alpha\beta}(x))dx \to \int F(x)D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)dx \tag{16.42}$$

成立.

我们有

$$\int F(x)\,\mathrm{reg}\,(D^{(-)}_{\alpha\beta}(x))dx - \int F(x)D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)dx =$$

$$= \sum_{(1\leqslant j\leqslant l)} c_j \int F(x)P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}_{M_j}(x)dx,$$

而且由于 $c_j$ 为有界，只要我们证明

$$\int F(x)\left\{P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}_{M_j}(x)\right\}dx \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

就能证明情况(16.41). 但是，基于(16.36)式，这一积分等于

$$\frac{i}{(2\pi)^3}\int \tilde{F}(\sqrt{\mathbf{k}^2+M_j^2},\mathbf{k})P_{\alpha\beta}(-\sqrt{\mathbf{k}^2+M_j^2},-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+M_j^2}}. \tag{16.43}$$

另一方面，由于不等式(16.35)，当 $q=\nu+3$ 时，有

$$|\tilde{F}(k)P_{\alpha\beta}(-k)|\leqslant\frac{Q}{\left(\sum_\alpha|k^\alpha|\right)^3}\leqslant\frac{Q}{(k^0)^3}\qquad(Q=\mathrm{const}).$$

因此积分(16.43)的绝对值比

$$\frac{Q}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{(\mathbf{k}^2+M_j^2)^2}=\frac{Q}{(2\pi)^3M_j}\int\frac{dp}{(p^2+1)^2}\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}0$$

为小.

这样，实际上函数 $D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)$ 广义地趋近连续函数

$$\mathrm{reg}\,\{D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)\},\quad M\to\infty,$$

上式显然具有所要求的协变性.

我们只讨论了函数 $D^{(-)}_{\alpha\beta}(x)$. 但是，不难注意到，上述全部讨论可以直接推到函数 $D^{(+)}_{\alpha\beta}(x)D^{c}_{\alpha\beta}(x)$.

## 16.5. 奇异函数的乘法

现在讨论如何利用 Wick 定理来确定收缩乘积(16.25)这一基本问题. 我们强调，广义函数的乘积需要特殊定义这一必要性是广义函数的典型问题. 问题在于广义函数的给定是通过它和足够正常的函数乘积的积分法则来建立的，但从这一法则，不能直接得出几个奇异函数乘积的积分方案. 但是，我们这里可以利用广义极限法，而且利用正常函数收敛序列来定义所研究的表式(16.25). 为了构成这种序列，最自然的方式，首先是注意到纯粹是形式上的典型场论方法. 我们将从表式(16.32)出发，而且假定

$$\prod_{(r<s)}D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)=\prod_{(r<s)}\left\{\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ik(x_r-x_s)}P_{\alpha\beta}(-k)\theta(k^0)\delta(k^2-m^2_{\alpha\beta})dk\right\}.$$

将各积分形式上相乘，得到

$$\prod_{(r<s)}D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)=\left(\frac{i}{(2\pi)^3}\right)^N\int\exp i\sum_{(r<s)}\lambda_{\alpha_r\beta_s}(x_s-x_r)\times$$

$$\times\prod_{(r<s)}\{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\delta(\lambda^2_{\alpha\beta}-m^2_{\alpha\beta})d\lambda_{\alpha\beta}\}=$$

$$=\int\exp i\sum k_rx_r\Delta(k_1,\cdots,k_n)dk_1\cdots dk_n, \tag{16.44}$$

其中$N$是上述乘积中乘子数目，而

$$\Delta(k_1,\cdots,k_n)=\left(\frac{i}{(2\pi)^3}\right)^N\int\prod_r\delta\left(k_r+\sum_{(s<r)}\lambda_{\alpha_s\beta_r}-\sum_{(r<s)}\lambda_{\alpha_r\beta_s}\right)\times$$

$$\times\prod_{(r<s)}\{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\delta(\lambda^2_{\alpha\beta}-m^2_{\alpha\beta})d\lambda_{\alpha\beta}\}. \tag{16.45}$$

可以证明，在(16.45)式中，积分区限为有限。因此，有可能将上述乘积(16.25)严格地定义为相应的正常解析函数序列的广义极限。选取乘积 $\mathrm{reg}\{D^{(-)}(x)\}$ 作为这类解析函数，获得

$$\Pi\{\mathrm{reg}\,(D^{(-)}(x_r-x_s)\}\to\Pi D^{(-)}(x_r-x_s). \tag{16.46}$$

事实上，积分(16.45)只在以下区域内进行

$$\left.\begin{aligned}k_r&=\sum_{(r<s)}\lambda_{\alpha_r\beta_s}-\sum_{(r>s)}\lambda_{\alpha_r\beta_s},\\ \lambda^0_{\alpha\beta}&>0,\quad(\lambda_{\alpha\beta})^2<(\lambda^0_{\alpha\beta})^2.\end{aligned}\right\} \tag{16.47}$$

因此，特别是

$$\begin{aligned}k^0_1&=\sum_{(s>1)}\lambda^0_{\alpha_1\beta_s},\\ k^0_2&=\sum_{(s>2)}\lambda^0_{\alpha_2\beta_s}-\sum_{(s<2)}\lambda_{\alpha_s\beta_2},\\ k^0_3&=\sum_{(s>3)}\lambda^0_{\alpha_3\beta_s}-\sum_{(s<3)}\lambda^0_{\alpha_s\beta_3},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

由于 $\lambda^0_{\alpha\beta}$ 的正值性，由此依次地获得

$$\begin{aligned}&\sum_s\lambda^0_{\alpha_1\beta_s}\leqslant k^0_1,\\ &\sum_{(s>2)}\lambda^0_{\alpha_2\beta_s}=k^0_2+\lambda^0_{\alpha_1\beta_2}\leqslant k^0_2+k^0_1,\\ &\sum_{(s>3)}\lambda^0_{\alpha_3\beta_s}=k^0_3+\lambda^0_{\alpha_1\beta_3}+\lambda^0_{\alpha_2\beta_3}\leqslant k^0_3+k^0_1+(k^0_2+k^0_1),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sum_{(s>r)}\lambda^0_{\alpha_r\beta_s}\leqslant k^0_r+k^0_{r-1}+2k^0_{r-2}+2^2k^0_{r-3}+\cdots+2^{r-2}k^0_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

因此，在一切情况下，

$$0\leqslant\lambda^0_{\alpha\beta}\leqslant 2^{n-2}(|k^0_1|+\cdots+|k^0_n|), \tag{16.48}$$

而且，结果有

$$|\lambda_{\alpha\beta}|^2\leqslant 2^{2(n-2)}(|k^0_1|+\cdots+|k^0_n|)^2.$$

在(16.45)式中积分区域为有限保证了发散不存在，而且有可能将上述表式(16.25)严格定义为正常解析函数序列

$$K(x_1\cdots x_n|\Gamma_\omega)=\int_{\Gamma_\omega}e^{i\Sigma k_rx_r}\,\Delta(k_1,\cdots,k_n)dk_1\cdots dk_n \tag{16.49}$$

当 $4n$ 维空间中点 $k_1,\cdots,k_n$ 的区域 $\Gamma_\omega$ 无限地扩大以至包括整个空间时的极限。

为使上述论断确有根据，我们证明这一极限的存在性，而且证明它与区域序列 $\Gamma_\omega$ 的特殊选定无关。为了这一点，通常总必须讨论在线性空间 $C(q,r,n)$ 中 ($q,r$ 是确定的，而且其值相当大)相应的泛函序

列:

$$\int K(x_1, \cdots, x_n|\Gamma_\omega)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n. \tag{16.50}$$

现在须要估计函数 $F$ 的 Fourier 映象

$$\tilde{F}(k_1, \cdots, k_n) = \int e^{i\Sigma k_r x_r}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n$$

在无穷远处减小的数量级. 逐字重复在上述 $n>1$ 情况时所进行的讨论,不难证明,如果 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 属于函数类 $C(q, 4n+1, n)$,则 $\tilde{F}(k_1, \cdots, k_n)$ 是连续函数,并满足不等式:

$$|\tilde{F}(k_1, \cdots, k_n)| \leqslant \frac{A}{(\sum|k_j^a|)^q} \quad (A = \text{const}). \tag{16.51}$$

现在将(16.49)式代入(16.50)式中,并引进函数

$$\theta(k_1, \cdots, k_n|\Gamma_\omega) = \begin{cases} 1, & \text{在 } \Gamma_\omega \text{ 域中,} \\ 0, & \text{在 } \Gamma_\omega \text{ 域外,} \end{cases}$$

我们得到

$$\int K(x_1, \cdots, x_n|\Gamma_\omega)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \int_{\Gamma_\omega} \tilde{F}(k_1, \cdots, k_n)\Delta(k_1, \cdots, k_n)dk_1\cdots dk_n =$$

$$= \int \theta(k_1, \cdots, k_n|\Gamma_\omega)\tilde{F}(k_1, \cdots, k_n)\Delta(k_1, \cdots, k_n)dk_1\cdots dk_n =$$

$$= \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}}\int \theta(k_1(\lambda), \cdots, k_n(\lambda)|\Gamma_\omega)\tilde{F}(k_1(\lambda), \cdots, k_n(\lambda)) \times$$

$$\times \prod_{(r<s)} \{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\delta(\lambda^2_{\alpha\beta} - m^2_{\alpha\beta})d\lambda_{\alpha\beta}\},$$

其中

$$k_r(\lambda) = \sum_{(r<s)} \lambda_{\alpha_r\beta_s} - \sum_{(s<r)} \lambda_{\alpha_s\beta_r}. \tag{16.52}$$

因为区域 $\Gamma_\omega$ 无限扩大以至包括整个 $4n$ 维空间作为极限,我们可以断言,对于 $\Gamma_\omega$ 域外之点

$$\sum_{(\alpha,r)} |k_r^\alpha| \geqslant L_\omega \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

因此当 $\lambda$ 之值使

$$1 - \theta(k_1(\lambda), \cdots, k_n(\lambda)|\Gamma_\omega) \neq 0,$$

将有

$$2\sum|\lambda^\gamma_{\alpha_r\beta_s}| \geqslant \sum|k_r^\gamma| \geqslant L_\omega.$$

注意这点后,得到

$$\Big|\int K(x_1, \cdots, x_n|\Gamma_\omega)F(x_1, \cdots, x_n)dx -$$

$$- \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}}\int \tilde{F}(k_1(\lambda), \cdots, k_n(\lambda))\prod_{(r<s)} \{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\delta(\lambda^2_{\alpha\beta} - m^2_{\alpha\beta})d\lambda_{\alpha\beta}\}\Big| \leqslant \varepsilon_\omega, \tag{16.53}$$

其中

$$\varepsilon_\omega = (2\pi)^{-3N}\Big|\int_{G_\omega} \tilde{F}(\cdots k_j(\lambda)\cdots)\prod_{(r<s)}|P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})|\theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\delta(\lambda^2_{\alpha\beta} - m^2_{\alpha\beta})d\lambda_{\alpha\beta}\Big| \tag{16.54}$$

(此处 $G_\omega$ 表示条件 $\sum|\lambda^\gamma_{\alpha\beta}| \geqslant \frac{1}{2}L_\omega$ 所限的区域).

利用从(16.47)式所导出的不等式(16.48),我们得到,在(16.54)的积分记号之下

$$(\lambda^0_{\alpha\beta})^2 \leqslant 2^{2(n-2)}(\sum|k_j^0(\lambda)|)^2,$$

$$\sum(\lambda^0_{\alpha\beta})^2 \leqslant 2^{2(n-2)}N(\sum|k_j^0(\lambda)|)^2,$$

因此有

$$\sum |k_j^0(\lambda)| \geqslant 2^{-(n-2)} N^{1/2} \sqrt{\sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2}.$$

根据(16.51)式由此得到

$$|\tilde{F}(\cdots k_j(\lambda)\cdots)| \leqslant \frac{A \cdot 2^{n-2}\sqrt{N}}{(\sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2)^{q/2}},$$

因此,在所研究的(16.54)式的积分号下有

$$|\tilde{F}(\cdots k_j(\lambda)\cdots)\prod P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})| \leqslant \frac{B}{(\sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2)^{\frac{q-\nu}{2}}}, \tag{16.55}$$

式中 $\nu$ 为所有多项式 $P_{\alpha\beta}$ 的幂次的和,而 $B$ 为常数. 现在,显而易见,

$$\varepsilon_\omega \leqslant (2\pi)^{-3N} B \int_{G_\omega} \frac{\prod\{\theta(\lambda_{\alpha\beta}^0)\delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2)d\lambda_{\alpha\beta}\}}{(\sum |\lambda_{\alpha\beta}^0|^2)^{\frac{q-\nu}{2}}} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-3N}B}{2^N} \int_{G_\omega} \frac{\cdots d\lambda_{\alpha\beta}\cdots}{\{\prod\sqrt{m_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{\alpha\beta}^2}\}\{\sum(m_{\alpha\beta}^2 + \lambda_{\alpha\beta}^2)\}^{\frac{q-\nu}{2}}}.$$

现在如果取

$$q = \nu + 2N + 1,$$

那么在这一不等式右端的积分将绝对收敛,而且当 $\omega\to\infty$ 时, $\varepsilon_\omega\to 0$. 因此,对一函数类 $C(\nu + 2N + 1, 4n + 1, n)$ 中的任意函数,不等式(16.53)中左端的表式将趋于零.

结果我们可以断言,正常解析函数序列(16.49)是广义收敛的,而

$$\int\left\{\lim_{\omega\to\infty}\int_{\Gamma_\omega} e^{i\sum k_r x_r}\Delta(k_1, \cdots, k_n)dk_1\cdots dk_n\right\}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3N}}\int\tilde{F}(\cdots k_j(\lambda)\cdots)\prod_{(r<s)}\{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda_{\alpha\beta}^0)\delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2)d\lambda_{\alpha\beta}\}. \tag{16.56}$$

因为这一不等式右端与区域序列 $\Gamma_\omega$ 的特殊选定无关,我们也就看出,下式也与 $\Gamma_\omega$ 的特殊选定无关:

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\Gamma_\omega} e^{i\sum k_r x_r}\Delta(k_1, \cdots, k_n)dk_1\cdots dk_n.$$

因此,关系式(16.44)实际上把表式

$$\prod_{(r<s)} D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s)$$

定义为可积的广义积分,由于(16.56)式,此函数为

$$\int\left\{\prod_{(r<s)} D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s)\right\}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \frac{i^N}{(2\pi)^{3N}}\int\tilde{F}(\cdots k_j(\lambda)\cdots)\prod_{(r<s)}\{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\theta(\lambda_{\alpha\beta}^0)\delta(\lambda_{\alpha\beta}^2 - m_{\alpha\beta}^2)d\lambda_{\alpha\beta}\}. \tag{16.57}$$

上述奇异函数 $D^{(-)}_{\alpha\beta}$ 的乘积也可以利用正常化函数 $\mathrm{reg}\{D^{(-)}_{\alpha\beta}\}$ 的相应乘积来逼近:

$$\prod_{(r<s)}\mathrm{reg}\,(D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s)) \to \prod_{(r<s)} D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s). \tag{16.46}$$

为了这点,我们证明对于函数类 $C(\nu + 2N + 1, 4n + 1, n)$ 中的所有函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$,当 $M\to\infty$ 时,极限关系

$$\int F(x_1, \cdots, x_n)\left\{\prod_{(r<s)}\mathrm{reg}\,D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s)\right\}dx_1\cdots dx_n -$$

$$-\int F(x_1, \cdots, x_n)\Big\{\prod_{(r<s)} D^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s)\Big\}\, dx_1 \cdots dx_n \to 0 \tag{16.58}$$

成立.

根据正常化函数的定义(16.38),差式(16.58)等于如下各项之和,其中各项即(16.57)式右端积分中用质量$m$代替质量$M$后所得之积分与系数$c_j$之乘积. 因为当$M \to \infty$时所有$c_j$有限. 只要我们证明这种积分趋于零,关系(16.58)即得证. 为了这一点,利用估值(16.55)式,得到它们的绝对值不小于

$$(2\pi)^{-3N_2-N_\beta}\int(\cdots + m^2_{\alpha\beta} + \cdots + M_j^2 + \cdots + \Sigma\lambda^2_{\alpha\beta})^{-\frac{2N+1}{2}}\prod\Big(\frac{d\lambda_{\alpha\beta}}{|\lambda_{\alpha\beta}|}\Big). \tag{16.59}$$

但是由于在被积式分母中存在质量$M_j$,当$M \to \infty$时,这一积分趋于零,关系式(16.46)因而得证.

上述讨论可推广到系数函数的一般情况,即有不同宗量的形如(16.1)的两个算符函数的乘积,而相应的表式

$$K(x_1, \cdots, x_n)Q(y_1, \cdots, y_m)\Pi D^{(-)}_{\beta\sigma}(x_s - y_j) \tag{16.60}$$

可以定义为可积的广义函数(其中$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$是独立宗量,而$K$和$Q$是可积的平移不变的系数函数).

对于这种形式的表式,可以证明一般定理如下.

如果$K_M(x_1, \cdots, x_n)$, $Q_M(y_1, \cdots, y_m)$是平移不变的系数函数,而且就广义而言,

$$\left.\begin{aligned} K_M(x_1, \cdots, x_n) &\xrightarrow[M\to\infty]{} K(x_1, \cdots, x_n);\\ Q_M(y_1, \cdots, y_m) &\xrightarrow[M\to\infty]{} Q(y_1, \cdots, y_m), \end{aligned}\right\} \tag{16.61}$$

而宗量$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$相互独立,则有

$$\begin{aligned} &K_M(x_1, \cdots, x_n)Q_M(y_1, \cdots, y_m)\,\Pi\,\mathrm{reg}\,D^{(-)}_{\beta\sigma}(x_s - y_j) \xrightarrow[M\to\infty]{}\\ &\xrightarrow[M\to\infty]{} K(x_1, \cdots, x_n)Q(y_1, \cdots, y_m)\,\Pi\,D^{(-)}_{\beta\sigma}(x_s - y_j). \end{aligned} \tag{16.62}$$

这一定理的证明与极限关系(16.58)基于同一原理.

实质上两者的证明均基于下述简单情况:由负频率之和的有限性可得出每一单独频率的有限性,我们首先讨论$D$函数中仅由负频率部分所构成之乘积,因此当将全部$D^{(-)}$换成只有$D^{(+)}$后,整个上述的分析可轻易地转移到这一情况.

我们将得到另一完全不同的情况,如果代替(16.25)式,我们考察下列类型的乘积:

$$\prod_{(r<s)} D^c_{\alpha_r\beta_s}(x_r - x_s), \tag{16.63}$$

因为在$D^c(x)$中存在正频率和负频率分量. 可以证明,虽然可积性条件(§16.3)很弱,其中只要求所讨论的奇异函数仅当和指标$q$, $r$任意高的$C(q, r, n)$类函数相乘后的积分是存在的,但乘积(16.63)仍然不是确定的可积函数,而且此处,(16.58)类型的广义极限关系并不成立.

## 16.6. 奇异函数的若干性质

现在来简短地讨论奇异函数在其宗量值某些区域中的连续性、可微性等等. 因为我们仅仅将奇异函数定义为已知线性泛函中符号性的"核",一般说来,此函数可能在无论何处均没有确定值. 但是奇异函数在许多重要情况中具有确定的有限值,而且在其宗量值的相应区域中具有各种的正常性. 例如,当$x \neq 0$时$\delta(x) = 0$,函数$D^{(\pm)}(x)$, $D^c(x)$在

光锥外连续，诸如此类.

因此，作如下的数学定义是适宜的.

设 $K(x_1, \cdots, x_n)$ 为广义函数，在某一函数类 $C(q, r, n)$ 中为可积，而 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为通常函数，于空间 $x_1, \cdots, x_n$ 中的某一区域 $O$ 上连续，此时，我们就说，在区域 $O$ 中

$$K(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n),$$

而且在此区域中 $K$ 为连续，如果

$$\int \{K(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)\} F(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

对于包括其 $q$ 阶偏导数在内在 $O$ 域外为零的函数类 $C(q, r, n)$ 中所有函数 $F$ 成立.

我们规定，在已知区域中，广义函数的其他正常性质就按这一意义来理解. 同理可以引进在宗量值确定区域中广义收敛的概念. 在某一确定的函数类 $C(q, r, n)$ 中，可积的广义函数序列 $K_M(x_1 \cdots x_n)$ 称为在区域 $O$ 中广义收敛，如果积分序列

$$\int K_M(x_1, \cdots, x_n) F(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

对于包括其 $q$ 阶偏导数在内在域 $O$ 外等于零的任何 $C(q, r, n)$ 类函数 $F$ 是收敛的.

利用上面引进的定义，可以将通常函数的运算方法在很大程度上推广到广义函数. 当广义函数的纯粹形式上的运算导致没有确定意义表式的时候，例如包含有“发散”的时候，这些方法可以用来研究量子场论中所常常遇到的情况.

### 16.7. 算符函数的乘法

现在来讨论以有限和形式(16.1)表示的算符式. 首先我们注意，极限关系(16.46)可以使我们排除对上述 Wick 定理的一个可能的反驳，这一反驳的依据是在证明过程中曾经将奇异函数相乘. 按照以下方案，可以非常简单地得到完全不含上述缺点的 Wick 定理的证明. 首先考虑假想情况，这时场函数满足其中的 $D_{\alpha\beta}$ 被 $\operatorname{reg} D_{\alpha\beta}$ 代替的对易关系，因而可以完全按照上述形式来证明 Wick 定理. 由于正常化函数的连续性，这一证明是完全严格的，为了化到实际情况，只要满足消除正常化时的极限过程 $M \to \infty$.

完全同理，利用更一般的极限关系 (16.62)，不难证明两个含有独立宗量的可积算符函数的乘积

$$A_1(x_1, \cdots, x_n) A_2(y_1, \cdots, y_m) \tag{16.64}$$

的合理性.

当算符式可以表示为有限和形式(16.1)，而且其中所有系数函数满足可积性条件时，我们称之为可积的.

为了阐明乘积(16.64)是宗量为 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ 的可积的算符函数，我们又要考察假想情况，即对易关系被正常化的情况. 除此以外，用某些连续函数 $K_M$, $Q_M$ 来代替算符 $A_1$, $A_2$ 的所有系数函数 $K$, $Q$，且保证有广义极限关系：

$$K_M \to K, \quad Q_M \to Q, \quad \text{当 } M \to \infty.$$

于是，将这样正常化了的系数函数乘积化成正规式，获得系数函数形式为

$$\sum K_M(x_1, \cdots, x_n) Q_M(y_1, \cdots, y_m) \prod \operatorname{reg} \{D_{\alpha\beta}^{(\tau)}(x_s - y_j)\},$$

根据(16.62)式，上式组成广义收敛序列（当 $M \to \infty$ 时）. 因此，此处我们可以过渡到极限以消除正常化，并且可以定义系数函数乘积(16.64)为可积的奇异函数. 两个(因而也可以是任意多个)包含独立宗量的可积算符函数的乘积，也是可积算符函数，这一得到证明的定理十分有用.

现在来讨论某一可积算符函数 $A(x_1, \cdots, x_k)$，并且取积分

$$\int A(x_1, \cdots, x_n)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n, \tag{16.65}$$

其中 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 为函数类 $C(\infty, \infty, n)$ 中的任意函数. 为了表征这一算符积分，我们作出它对一切可能态

$$\Phi_{\cdots\gamma\cdots p\cdots} = \cdots u_\gamma^{(+)}(p)\cdots\Phi_0$$

的矩阵元

$$\Phi^*_{\cdots\gamma\cdots p\cdots}\int A(x_1, \cdots, x_n)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n\Phi_{\cdots\gamma'\cdots p'\cdots}, \tag{16.66}$$

以上状态相当于存在有确定动量的给定种类的粒子. 根据(16.9)式，求得它们的表式如下：

$$\begin{aligned}
&\sum P^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)\int K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)\times\\
&\times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n +\\
&+\sum Z^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)\prod\{\theta(p^0_\omega)\delta(p^2_\omega - m^2_\gamma)\delta(p_\omega - p'_\omega)\}\times\\
&\times\int K'_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,
\end{aligned} \tag{16.67}$$

其中 $P$ 与 $Z$ 是分量 $p$ 的多项式，已如上述. 还须指明，在第二项中的 $\delta$ 函数已计及同一类型粒子的动量 $p$, $p'$ 相互重合的可能性. 因此，第二项和将不存在，如果矩阵元是对同类粒子不同动量的状态而取的；在这种情况下

$$\begin{aligned}
&\Phi^*_{\cdots\gamma\cdots p\cdots}\int A(x_1, \cdots, x_n)F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n\Phi_{\cdots\gamma'\cdots p'\cdots} =\\
&= \sum P^{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\gamma\cdots\gamma'\cdots}(\cdots p\cdots p'\cdots)\int K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)\times\\
&\times e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n.
\end{aligned} \tag{16.68}$$

因为函数 $F$ 属于类 $C(\infty, \infty, n)$，则函数

$$e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)}F(x_1, \cdots, x_n)$$

也属于此类中. 因此，根据系数函数 $K$ 的可积性，积分

$$\int K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1, \cdots, x_n)e^{i(\sum p_\nu x_\nu - \sum p'_\lambda x_\lambda)}F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{16.69}$$

是有限的. 不仅如此，因为它们对 $p$ 的微分相当于 $F$ 乘上分量 $x$，而 $F$ 乘上这些分量的任意多项式并不使 $F$ 不属于函数类 $C(\infty, \infty, n)$，故积分(16.69)为动量$\cdots p\cdots p'\cdots$的连续函数，并具有任意阶的连续偏导数.

这样，我们看到，上述矩阵元(16.66)是

$$f(\cdots p\cdots p'\cdots), f(\cdots p\cdots p'\cdots)\prod\{\theta(p^0_\omega)\delta(p^2_\omega - m^2_\gamma)\delta(p_\omega - p'_\omega)\}$$

类型的各项的线性组合. 其中 $f(\cdots p\cdots p'\cdots)$ 及其对$\cdots p\cdots p'\cdots$所有各阶的偏导数

为连续. 特别是，同类粒子在不同动量区域$\cdots p\cdots p'\cdots$时，矩阵元本身也具有这些“光滑性”. 因此可认为算符积分(16.65)是收敛的.

有一元素未曾积分的

$$\int A(x_1, \cdots, x_n)F(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n \tag{16.70}$$

类型的积分，也将依上述意义而收敛.

事实上，在这一情况中，唯一的差别在于代替积分(16.69)，在矩阵元中出现了积分

$$\int K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x, x_2, \cdots, x_n)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n,$$

$$\varphi(x_2, \cdots, x_n) = e^{i(\Sigma p_\nu x_\nu - \Sigma p'_\lambda x_\lambda)}F(x_2, \cdots, x_n), \tag{16.71}$$

由于系数函数的平移不变性，上式可简单地化成(16.69)的形式.

事实上，由于平移不变性，我们有

$$\int K(x, x_2, \cdots, x_n)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n =$$

$$= \int K(x + \xi, x_2 + \xi, \cdots, x_n + \xi)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n.$$

将所得等式之两端乘上函数类$C(\infty, \infty, 1)$中某一满足

$$\int \varphi(\xi)d\xi = 1$$

的函数$\varphi(\xi)$，并对$\xi$积分. 我们得到

$$\int K(x, x_2, \cdots, x_n)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n =$$

$$= \int K(x + \xi, x_2 + \xi, \cdots, x_n + \xi)\varphi(\xi)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n d\xi.$$

作变量变换

$$x + \xi \to x_1, x_2 + \xi \to x_2, \cdots, x_n + \xi \to x_n.$$

于是

$$\xi \to x_1 - x, x_2 \to x_2 - x_1 + x, \cdots, x_n \to x_n - x_1 + x,$$

并且得到

$$\int K(x, x_2, \cdots, x_n)\varphi(x_2, \cdots, x_n)dx_2\cdots dx_n =$$

$$= \int K(x_1, x_2, \cdots, x_n)\varphi'(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

其中

$$\varphi'(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(x_1 - x)\varphi(x_2 - x_1 + x, \cdots, x_n - x_1 + x).$$

这就使积分(16.71)化成(16.69)的类型.

证明了算符积分(16.65)及(16.70)的收敛性之后，还须指出，由于我们的可积性条件，合乎收敛性条件的算符函数类是比较狭窄的. 例如，这一函数类中就不包括积分

$$\int A(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

此处对整个无限的点空间$x_1, \cdots, x_n$取积分，因为上式相当于函数$F = 1$，而此函数在无穷远处并不减小.

这一形式的算符积分的矩阵元，需要利用极限过程作特殊定义，这时利用$C(\infty, \infty, n)$类的一个函数的序列，它当区域扩大以致包括整个积分空间为极限时趋近于1.

## 16.8. 若干定义

直到目前，我们讨论了用量子场函数的正负频率来表示 $x_1, \cdots, x_n$ 点的算符函数. 具有重要意义的是更特殊类型的算符函数，可以说，其中量子场函数作为"整体"出现在正规乘积记号下：

$$A(x_1, \cdots, x_n) = \sum K_{\cdots\alpha\cdots}(x_1, \cdots, x_n) : \cdots u_\alpha(x_j) \cdots : . \tag{16.72}$$

如果其中 Fermi 场函数仅以偶次组合出现，则称此和为多重定域性算符. 从上述定义及 Wick 定理，立刻可以得出结论，几个多重定域性算符相乘后，仍为多重定域性算符.

多重定域性算符有重要的性质：

$$[A_1(x_1, \cdots, x_n), A_2(y_1, \cdots, y_m)] = 0, \tag{16.73}$$

如果每一 $x_j$ 对任一 $y_i$ 为空间型的.

实际上，因为 Pauli-Jordan 函数在光锥之外为零：

$$\{u_\alpha(x_j), u_\beta(y_i)\}_\pm = 0 \quad (x_j \sim y_i),$$

根据 Wick 定理，有

$$: \cdots u_\alpha(x_j) \cdots : : \cdots u_\beta(y_i) \cdots : = : \cdots u_\alpha(x_j) \cdots u_\beta(y_i) \cdots : \tag{16.74}$$

但是，根据上述 Fermi 场函数的组合为偶次的，我们可以在(16.74)式中的左端将 $\cdots u_\beta(y_i) \cdots$ 放在 $\cdots u_\alpha(x_j) \cdots$ 的左边，并不引起符号改变. 因此，得到

$$[: \cdots u_\alpha(x_j) \cdots :, : \cdots u_\beta(y_i) \cdots :] = 0,$$

当

$$(x_1, \cdots, x_n) \sim (y_1, \cdots, y_m)$$

时，由此推出(16.73)式的正确性.

我们来讨论 $n = 1$ 时的情况. 此时，多重定域性算符只与一点 $x$ 上场函数的性质有关(在此情况下，所谓场函数还包括它们的导数)，因此我们将它称为定域性算符.

由于(16.73)式，对于两个定域性算符，有

$$[\mathscr{L}(x), \mathscr{L}(y)] = 0 \quad (x \sim y). \tag{16.75}$$

注意，即使当 $n > 1$ 时，也可能存在以下情况，即多重定域性算符实际只与场函数在一点的性质有关. 事实上，假设和式(16.72)中所有的系数函数在所有 $x_1, \cdots, x_n$ 上为零，除去满足等式

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

显然，在这一情况下，$K$ 只能由下式及其偏导数来构成

$$\delta(x_1 - x_2) \cdots \delta(x_1 - x_n),$$

因为根据定义，系数函数应该具有平移不变性，则其一般形式在所讨论的情况下将为

$$z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x}\cdots\right)\delta(x_1 - x_2)\cdots\delta(x_1 - x_n),$$

其中 $z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x}\cdots\right)$ 是某一常系数的 $\frac{\partial}{\partial x_j^a}$ 的多项式. 我们将带有这种系数函数的多重定域性算符称为准定域性算符. 显而易见，准定域性算符除去一点以外，对于其他一切点 $x_1, \cdots, x_n$ 都化成通常的定域性算符.

# 第三章　散射矩陣

## §17. 相互作用場理論的基本概念

### 17.1. Schrödinger 方程的各种表象

在通常的量子力学中，用来研究动力学系统性质的最普遍方法之一是熟知的 Schrödinger 表象. 在这一表象中，动力学系统的性质利用与时间有关的、由下列 Schrödinger 方程所决定的波函数 $\Psi(t)$:

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t}=H\Psi(t)\quad(t=x^0) \tag{17.1}$$

来描述，其中 $H$ 是相当于整个系统的总能量的哈密顿算符，封闭系统的 $H$ 与时间无关. 一般而言，封闭系统的力学量在此表象中用不显含时间的算符来表征. 但是这些量的平均值

$$\bar{B}_t=\Psi^*(t)B\Psi(t) \tag{17.2}$$

可以通过波函数 $\Psi(t)$ 而与时间有关. 如认为算符 $H$ 对时间不变，我们可以将方程(17.1)在形式上进行积分，而且写成

$$\Psi(t)=e^{\frac{Ht}{i}}\Psi,$$

其中

$$\Psi=\text{const}$$

与时间无关.

将此式代入(17.2)式中，得到

$$\bar{B}_t=\Psi^*e^{-\frac{Ht}{i}}Be^{\frac{Ht}{i}}\Psi. \tag{17.3}$$

可以将公式(17.3)解释为与时间有关的算符

$$B(t)=e^{-\frac{Ht}{i}}Be^{\frac{Ht}{i}}, \tag{17.4}$$

对于与时间无关的函数 $\Psi$ 所取的平均值. 这样我们得到 Heisenberg 表象，其中显含时间的不是波函数，而是力学量. 显而易见，就计算力学量的可观察值而言，两种表象是完全等效的. 将(17.4)式对时间微分，我们看出，在 Heisenberg 表象中，力学量的演变规律决定于方程

$$\frac{\partial B}{\partial t}=i[H,B(t)], \tag{17.5}$$

其中

$$i[a,b]=i(ab-ba) \tag{17.6}$$

是量子 Poisson 括号.

指出下一点是有意义的：在经典力学中，力学量对时间的依赖过程决定于与(17.5)式相同的但带有经典 Poisson 括号的方程.

将 Schrödinger 方程应用到我们感兴趣的相互作用量子场时，必须将哈密顿函数分成两部分：

$$H = H_0 + H_1, \tag{17.7}$$

其中 $H_0$ 是自由场的哈密顿函数，$H_1$ 是相互作用的哈密顿函数，即

$$H_0 = \int H_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad H_1 = \int H_1(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

其中能量密度 $H_0(\mathbf{x})$ 和 $H_1(\mathbf{x})$ 是在某一固定时刻的基本场函数(如 $u(0,\mathbf{x}) = u(x)|_{x^0=0}$)的组合. 因此讨论场的相互作用过程时，通常从形式为

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_1)\Psi(t) \tag{17.8}$$

的 Schrödinger 方程出发.

在实际相互作用粒子的现代场论中，原则性的缺陷之一是必须引进假想的互不作用粒子场，并将相互作用解释为改变力学系统的性质的某些附加因素，这一因素可以“加入”，也可以“撤除”. 初看起来，其中似乎没有什么值得特别批判之处. 因为事实上粒子之间只在相当接近时才发生剧烈的相互作用. 因此可以证明，当粒子间的距离很大时，场与场之间的相互作用并不重要，在一定近似下可以忽略相互作用，并认为实际粒子是自由粒子.

但是用这种方式来论断时，我们忽视了一点：粒子与真空经常发生相互作用，似乎粒子在一种物理的“介质”中运动，并和它发生作用.

因此在建立场论时，最好一开始就讨论实际相互作用的粒子，而不引进假想自由场这一人为的表象. 但是这类方案到目前还没有实现，因此我们只能采取上述的理论结构.

## 17.2. 相互作用表象

当相互作用不存在时，基本方程(17.8)具有形式：

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H_0\Psi(t),$$

形式上积分后，我们得到

$$\Psi(t) = e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi. \tag{17.9}$$

在研究自由场时，我们曾将与时间无关的 $\Phi$ 称为态振幅. 在相互作用场情况下，与时间无关的 $\Phi$ 的表式(17.9)不会满足基本方程. 但是，可以将此表式推广，令

$$\Psi(t) = e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi(t), \tag{17.10}$$

并且认为 $\Phi(t)$ 是新的态振幅. 从数学观点看来，此处我们代替未知函数的方法，与微分方程理论中应用的任意常数变化法相似. 将(17.10)式代入(17.8)式，我们得到

$$H_0 e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi(t) + ie^{\frac{H_0 t}{i}}\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_1)e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi(t),$$

由此求得

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = e^{-\frac{H_0 t}{i}} H_1 e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi(t).$$

现在我们来讨论所求得方程的意义. 在方程(17.7)中相互作用的能量密度 $H_1(x)$(参看 § 8)是如下类型各项的线性组合:

$$H_i(x) = u_\alpha(0, \mathbf{x}) \cdots u_\omega(0, \mathbf{x}).$$

但是

$$e^{-\frac{H_0 t}{i}} H_i e^{\frac{H_0 t}{i}} = e^{-\frac{H_0 t}{i}} u_\alpha(0, \mathbf{x}) e^{\frac{H_0 t}{i}} \cdots e^{-\frac{H_0 t}{i}} u_\omega(0, \mathbf{x}) e^{\frac{H_0 t}{i}}.$$

因此算符

$$e^{-\frac{H_0 t}{i}} \cdots e^{\frac{H_0 t}{i}}$$

对 $H_1$ 的作用等于将与时间无关的场算符 $u(0, \mathbf{x})$ 用与时间有关的算符函数

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{H_0 t}{i}} u(0, \mathbf{x}) e^{\frac{H_0 t}{i}}$$

来代替.

因此,我们得到 § 9 中已经讨论过的自由场算符函数的 Heisenberg 表象.

为了决定 $\Phi(t)$,现在有方程

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_1(t)\Phi(t), \quad H_1(t) = \int H_1(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{17.11}$$

此时算符 $H_1(t, \mathbf{x})$ 是从 $H_1(x)$ 用 $u(t, \mathbf{x}) = u(x)$ 来代替 $u(0, \mathbf{x})$ 而求得的. Schrödinger 方程的这种表象称为相互作用表象.

我们来讨论在此表象中力学量的表式问题. 将(17.10)式代入(17.2)式中,得到

$$\Psi^*(t)B\Psi(t) = \Phi^*(t)e^{-\frac{H_0 t}{i}} B e^{\frac{H_0 t}{i}}\Phi(t),$$

即

$$\bar{B}_t = \Phi^*(t)B_{\text{int}}(t)\Phi(t),$$

其中

$$B_{\text{int}}(t) = e^{-\frac{H_0 t}{i}} B e^{\frac{H_0 t}{i}}.$$

因此,我们看到,应该认为相互作用表象中的力学量算符表示式是 Heisenberg 表象中自由场场算符的函数. 换句话说,力学量的算符用与场函数

$$u(t, \mathbf{x}) = u(x)$$

有关的形式来表示,这些场函数满足自由场的齐次方程.

Schrödinger 方程的上述一切表象(包括相互作用表象在内)的一个基本缺点是将时间单独提出,因而理论的表述显然是非协变的. 朝永(1946)和 Schwinger (1948) 提出相互作用表象的特殊修正,消除了这一形式上的理论缺陷. 在此修正中,不用四维时空中的 $t = \text{const}$ 曲面,而引进更广泛的空间型曲面 $\sigma$ 来讨论. 我们将在第六章中详细论述.

## 17.3. 散射矩阵

我们注意到，利用方程(17.11)可以引进系统的非常重要的特征，即引进所谓散射矩阵或 $S$ 矩阵来进行研究. 设所研究的过程在初始和终结时刻只有相互间距离极远的粒子，这些粒子可以认为是自由的.

为了计算这一过程中发生的粒子散射和相互转化的几率振幅，我们讨论以下情况：相互作用 $H_1(t)$ 在无穷远过去时绝热地加入，而在无穷远将来时又绝热地撤除. 设初态的振幅以 $\Phi(-\infty)$ 来表示，而终态的振幅以 $\Phi(\infty)$ 来表示，二者之间有关系式：

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty), \tag{17.12}$$

其中算符 $S$ 称为散射算符或散射矩阵. 相应的 $S$ 矩阵元的平方决定粒子在可能的散射和转化过程中的跃迁几率和有效截面.

为了得到计算公式，可以从方程(17.11)出发，用逐次逼近法求出方程的解，以相互作用微量为幂而展成级数形式. 此时我们得到 $\Phi(-\infty)$ 与 $\Phi(\infty)$ 之间的关系式如(17.12)，而算符 $S$ 写成展开式为

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t)dt + (-i)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t)dt \int_{-\infty}^{t} H_1(t')dt' + \cdots.$$

量子场论的大多数研究工作就是用这种方式来研究 $S$ 矩阵 [朝永 (1946); Schwinger (1948); Pauli, Villars (1949); Dyson (1949a,б); Ахиезер 与 Берестецкий (1953); Heitler (1956)].

但是，照我们的看法，从 Stückelberg 所提出的方案出发比较合理 [Stückelberg, Rivier (1949); Stückelberg, Green (1951)]，其中直接引进广义散射矩阵，并不依靠哈密顿函数形式及 Schrödinger 方程. 我们也不用它们，只利用明显表述的物理条件，来使 $S$ 矩阵的形式具体化. 这时因果性条件起着重要的作用. Stückelberg 本人并没有将因果性条件表述成足够清楚和一般的形式，因此他的思想没有得到广泛的传播.

为了发展这些思想，下面我们叙述因果性条件的新表述 [Боголюбов (1955); Боголюбов, Ширков (1955a)] 以及相互作用量子场论中以此为基础的构成散射矩阵的方法[1].

与通常叙述相同，我们在建立理论时必须应用加入和撤除相互作用的运算. 为了用数学方式描述这些运算，我们引进表征相互作用施加强度的函数 $g(x)$，其值在(0, 1)间隔内. 在 $g(x) = 0$ 的区域中，相互作用并不存在；在 $g(x) = 1$ 的区域中，相互作用完全加入；而当 $0 < g(x) < 1$ 时，相互作用只是部分地加入. 将实际相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 用乘积 $\mathscr{L}(x)g(x)$ 来代替，我们得到"施加强度为 $g(x)$ 的相互作用".

现在假设 $g(x)$ 只在有限的时空区域中不等于零. 在这种情况下，在相当远的过去和相当远的未来场是自由的，因此动力学系统的初态和终态可以用第二章中引入的普通的不变振幅来表征. 这两个量 $\Phi(-\infty)$ 和 $\Phi(\infty)$ 用某一算符 $S(g)$ 来联系，$S(g)$ 将 $\Phi(-\infty)$ 变换成 $\Phi(\infty)$，而且与函数 $g(x)$ 的性质有关. 固定初态的振幅 $\Phi(-\infty) = \Phi$ 后，我们可

---

1) 关于这方面也可参阅 Боголюбов (1951a,б, 1952).

以认为终态的振幅是 $g$ 的泛函:

$$\Phi(\infty) = \Phi(g) = S(g)\Phi. \tag{17.13}$$

根据这一定义,自然可以将 $S(g)$ 解释为相互作用施加强度为 $g$ 时的散射矩阵. 相互作用在整个时空中均已加入这种实际情况,在此方案中应该利用极限过程来讨论,此时 $g = 1$ 的区域无限地扩展以致包括整个时空为极限. 在这种情况下,通常的散射矩阵 $S$ 可以定义为如下形式:

$$S = S(1). \tag{17.14}$$

### 17.4. $S$ 矩阵的相对论协变性和么正性

现在来表述 $S$ 矩阵应该满足的一系列的基本物理条件. 相对论协变性条件经常是重要的物理要求. 为了明显表述这一条件,我们来讨论非齐次 Lorentz 羣中的变换 $L$:

$$x \to x' = Lx. \tag{17.15}$$

在自由场理论中,当相互作用不存在时,根据(9.2)式,对应于变换(17.15),态振幅的变换定律具有形式

$$\Phi' = U_L\Phi. \tag{17.16}$$

现在,当 $\Phi = \Phi(g)$ 时,还必须考虑到函数 $g(x)$ 本身也受到变换(17.15),可以认为 $g(x)$ 是某一"经典场";因为函数 $g$ 所描述的相互作用区域在变换(17.15)之下保持不变,则当 $g$ 的宗量变为新坐标时,给出

$$g(x) \to Lg(x) = g(L^{-1}x). \tag{17.17}$$

因此,振幅 $\Phi(g)$ 的变换定律具有形式

$$\Phi(g) \to \Phi'(Lg) = U_L\Phi(g). \tag{17.18}$$

从相对论不变性考虑,必须要求从初态振幅到终态振幅的变换定律 (17.13) 与参考系无关,也就是要求

$$\Phi'(g) = S(g)\Phi'. \tag{17.19}$$

将(9.2)式与宗量变为 $(Lg \to g)$ 的(17.18)式代入此式,考虑到(17.13)式,我们得到

$$U_LS(L^{-1}g)\Phi = S(g)U_L\Phi. \tag{17.20}$$

由于初态振幅 $\Phi$ 是任意的,上式可以写成算符形式:

$$U_LS(L^{-1}g) = S(g)U_L,$$

或者将宗量移动 $L$,右方乘以 $U_L^{-1}$,并考虑 $U_L$ 的么正性,得到

$$S(Lg) = U_LS(g)U_L^{-1} = U_LS(g)U_L^{\dagger}. \tag{17.21}$$

公式(17.21) 表述算符 $S(g)$ 的协变性条件.

现在来构成另一个普遍的必需条件,即要求波函数的模守恆. 在目前情况下,我们应该要求

$$\Phi^*(g)\Phi(g) = \Phi^*\Phi,$$

由此得到

$$S^{\dagger}(g)S(g) = 1, \tag{17.22}$$

即算符 $S(g)$ 应该是么正的.

## 17.5. 因果性条件

我们必须保证满足因果性条件，根据这一条件，系统中所发生的任何事件只能够对将来的发展进程产生影响，而对系统的过去(指在此事件之前)不产生任何影响. 因此我们应该要求，在任一时空区域内，相互作用定律的变化只能对事件发展进程的以后时刻产生影响.

为了将因果条件表成明显的形式，我们先来讨论将函数 $g(x)$ 不为零的时空区域 $G$ 分为两个分离的子域 $G_1$ 和 $G_2$，使所有 $G_1$ 中的点对于某一时刻 $t$ 是在过去状态，而所有 $G_2$ 中的点对于 $t$ 是处于将来状态，这时函数 $g(x)$ 可以表示成两个函数之和：

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \tag{17.23}$$

其中函数 $g_1(x)$ 只在 $G_1$ 中不为零，而第二个函数 $g_2(x)$ 只在 $G_2$ 中不为零.

在时刻 $t$ 的状态可以用振幅 $\Phi_t$ 来表征，根据因果性考虑，$\Phi_t$ 与区域 $G_2$ 中的相互作用无关，因此可以表示成形式

$$\Phi_t = S(g_1)\Phi, \tag{17.24}$$

其中 $S(g_1)$ 是当相互作用的施加强度为 $g_1(x)$ 时的散射矩阵. 利用描述 $G_2$ 域中相互作用的矩阵 $S(g_2)$，可以从 $\Phi_t$ 获得终态 $\Phi(g)$：

$$\Phi(g) = S(g_2)\Phi_t. \tag{17.25}$$

将(17.23)—(17.25)诸式与(17.13)式比较，我们得到

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1), \quad \text{当 } G_2 > G_1 \tag{17.26}$$

(记号 $G_2 > G_1$ 表示区域 $G_2$ 中各点在时间上迟于区域 $G_1$ 中各点). 关系式(17.26)是当 $G_2 > G_1$ 时因果性条件的形式.

我们再来讨论两种情况，它们在 $G_2$ 区域中的相互作用各不相同，而在 $G_1$ 中用同一函数来描述，即

$$g'(x) = g_2'(x) + g_1(x), \quad g''(x) = g_2''(x) + g_1(x).$$

我们构成表式 $S(g'')S^\dagger(g')$ 后，可以证明此式与区域 $G_1$ 中函数 $g''$ 与 $g'$ 的性质无关，因为根据(17.26)式，

$$S^\dagger(g_1 + g_2) = S^\dagger(g_1)S^\dagger(g_2),$$

而考虑到矩阵 $S$ 的么正性，我们得到

$$S(g'')S^\dagger(g') = S(g_2'')S(g_1)S^\dagger(g_1)S^\dagger(g_2') = S(g_2'')S^\dagger(g_2').$$

因此乘积 $S(g'')S^\dagger(g')$ 确实与函数 $g$ 在区域 $G_1$ 中的性质无关. 原因是由于 $S(g'')$ 中所含的对于系统在时刻 $t$ 以前的状态的依赖关系，恰被算符 $S^\dagger(g')$ 中的相应部分所抵消.

因此我们得到了在更普遍的情况下的因果性条件的表述：

"设有两函数 $g''(y)$ 和 $g'(y)$，当 $y_0$ 小于某一 $t$ 时互相重合，则乘积 $S(g'')S^\dagger(g')$ 与系统在 $y^0 < t$ 时的状态无关".

为了今后的讨论，将因果性条件表成为微分形式是适宜的.

我们常常需要利用泛函导数，这一概念是偏导数概念的自然推广. 大家知道，设 $f$ 为 $n$ 个自变量 $z_1, \cdots, z_n$ 的某一函数. 它的偏导数 $\partial f/\partial z_i$ 可以由表示该函数的微分求和式

$$df = \sum_{(1 \leqslant i \leqslant n)} A_i dz_i \tag{17.27}$$

中 $dz_i$ 的系数来定义.

现在我们设有某一泛函 $I(u)$，它的变分 $\delta I(u)$ 由增量 $I(u+\delta u)-I(u)$ 的主要部分来定义，可以表示为积分形式

$$\delta I(u) = \int_G A(x, u)\delta u dx,$$

其中 $A = A(x, u)$ 是 $u$ 的泛函，它依赖于区域 $G$ 中 $x$ 点的位置；就象(17.27)式中 $A_i$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的函数，并依赖于指标 $i$. 那末仿照上述偏导数定义，可引入泛函 $I(u)$ 在 $x$ 点对 $u$ 的泛函导数 $\delta I(u)/\delta u(x)$ 的定义如下：

$$\delta I(u)/\delta u(x) = A(x, u).$$

这样还可以引进高阶的泛函导数，而且不难看出泛函导数具有通常导数的基本性质.

如令

$$g'(y) = g(y), \quad \text{而} \quad g''(y) = g(y) + \delta g(y),$$

其中 $\delta g(y)$ 是函数 $g(y)$ 的无穷小变分，仅当 $y^0 > t$ 时它不等于零，则矩阵 $S(g'')$ 可以表示为形式

$$S(g'') = S(g) + \delta S(g), \tag{17.28}$$

而

$$\delta S(g) = \int_{y^0>t} \frac{\delta S}{\delta g(y)} \delta g(y) dy.$$

现在可以看出，表式

$$S(g'')S^{\dagger}(g') = S(g)S^{\dagger}(g) + \delta S(g)S^{\dagger}(g) = 1 + \delta S(g)S^{\dagger}(g)$$

与函数 $g(x)$ 的性质无关，如果 $x^0 < t < y^0$.

化为变分导数，因此我们可以将因果性条件表述为表式

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^{\dagger}(g), \tag{17.29}$$

它不依赖于函数 $g(x)$ 在 $x$ 点的性质，如果 $x < y$. 根据协变性考虑，从此可以得出结论：算符 (17.29) 当 $x \sim y$ 时也不应该依赖于函数 $g(x)$ 的性质 (写法 $x \sim y$ 表示 $x$ 和 $y$ 两点被空间型间隔所分开).

显然因果性条件可以写成形式

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left( \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^{\dagger}(g) \right) = 0, \quad \text{当 } x \lesssim y. \tag{17.30}$$

关系式(17.30)是对今后最方便的因果性条件的微分表述式.

因此我们得到相对论协变性(17.21)、么正性(17.22)和因果性(17.30)的条件，这三条件合在一起是构成 $S$ 矩阵的充分基础. 在 § 18 中我们将利用这些条件以及对应原理，来叙述明显地确定 $S(g)$ 对 $g(x)$ 的泛函级数展开系数的方法. 还应当指出，除了这些条件外，还要加上稳定态能量的正值性要求. 在自由场理论中，需要特别讨论是否满足这一条件. 但是在目前的叙述阶段，我们还不能够在相互作用场理论中表述这个条件，因为在微扰理论所局限的范围内，不能够研究束缚态.

### 17.6. 作为泛函宗量的"經典场"

最后，应该指出，在我们所采用的理论的构成方案中，表征着相互作用施加程度的函数 $g$ 起着某些"经典场"的作用，可以用它来讨论时空中不同的区域.

通常的散射矩阵(17.14)对应于整个时空域中量子波动场有相互作用，它不依赖于任何通常的函数；因此，它的矩阵元并不含有任何的泛函关系. 在相互作用拉格朗日函数密度中引进任意的非量子化函数后，将 $S$ 矩阵和它的矩阵元转变为泛函. 计算这些泛函的泛函导数，就可以讨论理论中遇到的各种量的时空性质(正如刚才构成因果性条件时所表明了的). 此时"经典场"($g$ 类型)在讨论中起着辅助变量的作用，而且通常它在极限过程(例如 $g \to 1$)的最后表式中被消去.

经典场 $g(x)$ 是以相互作用拉格朗日函数密度 (17.17) 的乘子形式引进的，它是将散射矩阵以相互作用为幂而作形式上展开时的方便数学工具，在 § 18 中将完成这一级数的展开.

显而易见，这样引进辅助场的方法并不是唯一的. 在某些情况下，用更合乎"物理"的方式来引进类似的场是比较方便的，例如，引进已知外场 $u^{\mathrm{ext}}(x)$，或者是任意粒子的已知外界流 $J^{\mathrm{ext}}(x)$. 譬如说，在第七章中，当求旋量电动力学 Green 函数的 Schwinger 方程时，在相互作用拉格朗日函数密度[1] $\mathscr{L}(x)$ 中引进非量子化外界电磁势 $A_n^{\mathrm{ext}}(x)$ 后，结果得到 $\mathscr{L}(x)$ 的形式为

$$\mathscr{L}(x) = e \sum_n : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)[A_n(x) + A_n^{\mathrm{ext}}(x)] : .$$

此处经典场 $A^{\mathrm{ext}}$ 起着辅助泛函宗量的作用，以便于分析时空的理论性质，而且它与 $g(x)$ 不同，场 $A^{\mathrm{ext}}$ (更确切地说，它的最后极限值)可以有直接的物理意义. 此时散射矩阵是 $A^{\mathrm{ext}}$ 的泛函，不必作特殊的修改，重复上述对(17.30)式的讨论，对于这种情况可以得到

$$\frac{\delta}{\delta A_n^{\mathrm{ext}}(x)}\left[\frac{\delta S(A^{\mathrm{ext}})}{\delta A_n^{\mathrm{ext}}(y)} S^{\dagger}(A^{\mathrm{ext}})\right] = 0, \quad \text{当 } x \lesssim y \text{ 时.} \tag{17.31}$$

同理，用任何其他方式来引进经典场时，重新表述因果性条件并没有多大困难.

## § 18. 相互作用拉格朗日函数密度和 $S$ 矩阵

### 18.1. $S$ 矩阵的相互作用为幂的展开式

利用相互作用的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$，我们来着手构成 $S(g)$ 矩阵. 我们将求出 $S(g)$ 的以 $g(x)$ 为幂的形式上的泛函展开式：

$$S(g) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \tag{18.1}$$

其中算符式 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 依赖于整个场函数及其在 $x_1, \cdots, x_n$ 点的偏导数. 为了保证

1) 以前用 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ 表示的相互作用的拉格朗日函数密度，今后到处用 $\mathscr{L}$ 来表示.

$S_n$ 的标量性质，我们还将假定场的 Fermi 算符在 $S_n$ 中仅以偶数组合出现. 换句话说，要求 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 是 § 16 中所指的多重定域性算符. 我们需要强调，要求 $S_n$ 与场函数整体有关，而不是和正频率及负频率部分分别有关，是一个特殊的物理条件. 当满足这一要求，而且所有 $x_i$ 对所有 $y_i$ 是空间型时，下列关系式成立：

$$[S_n(x_1, \cdots, x_n), S_m(y_1, \cdots, y_m)] = 0. \tag{18.2}$$

因此，如果两个函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 定域化的区域是互为空间性的，即一个区域中任一点对另一区域中所有点是空间型的，则 $S(g_1)$ 与 $S(g_2)$ 可以对易. 实质上，这一点说明以下事实(这也是因果性原则的体现)：讯号的传播速度不能大于光速，而且在互为空间型的区域 $g_1$ 和 $g_2$ 内，相互作用的施加过程互不干扰. 我们假定 $S_n$ 是多重定域性算符，就是为了满足这一重要的物理条件.

为了保证展开式(18.1)中至少若干项的收敛性，我们假定 $S_n$ 是可积的算符函数. 实际上，当函数 $g(x)$ 相当光滑，而且在无穷远处相当迅速地减小时，(18.1)式中个别积分项将是收敛的. 显而易见，这种收敛和级数整体的收敛性毫无关系. 根据最近的研究[Dyson (1953), Thirring (1953), Edwards (1953), Иоффе (1954)]，有相当充分的根据可以预计这一级数甚至是发散的. 在相互作用为微小值这一最好情况下，如果展开式中所取的项数不多，我们可以希望得到近似值，相互作用愈弱，就愈益精确. 换句话说，在有些情况下，可以将级数(18.1)认为是渐近近似的出发点. 其中在实际上颇为重要的情况之一就是电动力学.

但是，即使在显然并不微弱的相互作用下(例如，介子-核子相互作用)，研究形式上的展开式 (18.1) 也有很大的意义. 因为这时候可以非常简单地阐明 $S(g)$ 矩阵的某些定性的和定量的特点，以便进一步尝试在更严格的基础上来证明这些特性. 因此，研究这一形式上的级数具有一定的启发式的价值，直到如今，超出微扰理论的局限所进行的各种尝试只得到少数的结果，这一级数就具有更大价值. 以后(参看第七章第八章)我们将指出一些想法，利用这些想法，也许不需要这种形式上的展开式，就能够建立相互作用场的理论.

现在回到表式(18.1)，我们看出，并不影响普遍性，可以认为 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 是其宗量 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称函数，因为权重函数 $g(x_1), \cdots, g(x_n)$ 是以对称方式出现的.

## 18.2. $S_n$ 的协变性、么正性和因果性条件

为了决定函数 $S_n$ 的具体形式，我们来求出矩阵 $S_n$ 应该满足的条件.

从 $S(g)$ 的相对论协变性条件(17.21)，有

$$\int U_L S_n(x_1, \cdots, x_n) U_L^{\dagger} g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int S_n(x_1, \cdots, x_n) g(L^{-1}x_1) \cdots g(L^{-1}x_n) dx_1 \cdots dx_n. \tag{18.3}$$

右边进行变量变换 $x \to L_x$ 后，我们得到

$$\int U_L S_n(x_1, \cdots, x_n) U_L^{\dagger} g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int S_n(Lx_1, \cdots, Lx_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

从这里得到 $S_n$ 的 Lorentz 协变性条件：

$$\left.\begin{aligned} U_L S_n(x_1, \cdots, x_n) U_L^\dagger &= S_n(Lx_1, \cdots, Lx_n), \\ S_n(x_1, \cdots, x_n) &= U_L^\dagger S_n(Lx_1, \cdots, Lx_n) U_L. \end{aligned}\right\} \quad (18.4)$$

或者

为了考虑到 $S$ 矩阵的么正性(17.22)，将展开式(18.1)乘上 $S$ 矩阵的共轭式

$$S^\dagger(g) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \int S_n^\dagger(x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (18.5)$$

为了书写形式的对称性起见，用记号

$$S_0 = 1,$$

我们得到

$$\begin{aligned} 1 = &\sum_{(k,m\geqslant 0)} \frac{1}{k!m!} \int S_k(x_1, \cdots, x_k) g(x_1) \cdots g(x_k) dx_1 \cdots dx_k \times \\ &\times \int S_m^\dagger(x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}) g(x_{k+1}) \cdots g(x_{k+m}) dx_{k+1} \cdots dx_{k+m} = \\ = &\sum_{k,n} \frac{1}{k!(n-k)!} \int S_k(x_1, \cdots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned} \quad (18.6)$$

将(18.6)式中对 $g(x)$ 的同"幂"项归并起来，当 $n = 0$ 时，我们得到恒等式 $(1 = 1)$，而当 $n > 0$ 时，得到

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k!(n-k)!} \int S_k(x_1, \cdots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0. \quad (18.7)$$

对于任意的 $g(x)$，还不能从这里作出表式

$$\sum_k \frac{1}{k!(n-k)!} S_k(x_1, \cdots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \cdots, x_n) \quad (18.8)$$

等于零的结论.

如果表式(18.8)对所有的宗量 $x_1, \cdots, x_n$ 是对称的，就可以作出这个结论. 然而事实上，在(18.8)式的每一项中，仅分别在二组宗量 $x_1, \cdots, x_k$ 和 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ 之内才存在着对称性. 为了将(18.8)式完全对称化，我们引进记号

$$P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right)$$

表示集合 $x_1, \cdots, x_n$ 分成 $k$ 与 $n-k$ 两个子集共 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 种分法的总和，此时不考虑各子集内的置换，因为函数 $S_k$ 对它的宗量是对称的. 例如，

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right) S_1(x_1) S_1(x_2) = S_1(x_1) S_1(x_2) + S_1(x_2) S_1(x_1),$$

$$P\left(\frac{x_1, x_2}{x_3}\right) S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) = S_2(x_1, x_2) S_1(x_3) + S_2(x_1, x_3) S_1(x_2) + S_2(x_2, x_3) S_1(x_1).$$

为了使(18.7)式对称化，将它写 $n!$ 次，并改变宗量的记号，使得函数 $S_k$ 和 $S_{n-k}^\dagger$ 中的宗量每一次均以不同的次序取遍 $x_1, \cdots, x_n$. 将所得的关系式相加，由于权重乘子 $g(x_1)$

$\cdots g(x_n)$ 的不变性，我们得到

$$\sum_k \int P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) S_k(x_1, \cdots, x_k) S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n) \times$$
$$\times g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

由此得出下式等于零：

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) S_k(x_1, \cdots, x_k) S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n),$$

因为它对所有 $n$ 个宗量是对称的。注意到 $S_0 = 1$，由此可得

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) + S^\dagger_n(x_1, \cdots, x_n) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) S_k(x_1, \cdots, x_k) S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n) = 0. \quad (18.9)$$

现在来研究因果性条件(17.30)。首先注意到，为方便起见，我们不讨论下量

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^\dagger(g),$$

因为根据么正性条件

$$\frac{\delta}{\delta g(y)}(SS^\dagger) = \frac{\delta S}{\delta g(y)} S^\dagger + S \frac{\delta S^\dagger}{\delta g(y)} = 0,$$

此量是反厄米的，而讨论显然是厄米性的量：

$$H(y; g) = i \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^\dagger(g). \quad (18.10)$$

利用(18.1)式，我们求得

$$H(y; g) = i \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \int S_{n+1}(y, x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n \times$$
$$\times \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} \int S^\dagger_m(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) g(x_{n+1}) \cdots g(x_{n+m}) dx_{n+1} \cdots dx_{n+m} =$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \int H_n(y, x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (18.11)$$

此处引进了记号

$$H_n(y, x_1, \cdots, x_n) =$$
$$= i \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) S_{k+1}(y, x_1, \cdots, x_k) S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n) =$$
$$= i S_{n+1}(y, x_1, \cdots, x_n) + i \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) \times$$
$$\times S_{k+1}(y, x_1, \cdots, x_k) S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n), \quad (18.12)$$

除去第一个宗量外，上式对所有宗量是对称的。现在计算表式(18.9)的泛函导数 $\delta/\delta g(x)$，我们得到

$$i \frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^\dagger(g)\right) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \int H(y, x, x_1, \cdots, x_{n-1}) \times$$
$$\times g(x_1) \cdots g(x_{n-1}) dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

由于因果性条件(17.30),而且根据函数 $H_n$ 对所有宗量的对称性(除去第一个宗量外),由此得出结论:

$$H_n(y, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \tag{18.13}$$

只要对某一 $x_j(j = 1, \cdots, n)$,存在 $y \gtrsim x_j$.

### 18.3. $S_1(x)$ 和 $S_2(x, y)$ 显式的确定

从矩阵 $S(g)$ 整体的协变性、么正性和因果性条件,我们得到函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的协变性、么正性和因果性条件. 现在我们来证明这些条件(18.4)、(18.9)、(18.13)的综合,加上辅助性的考虑,即对应性原理,足以决定函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的显式.

此时我们发现,用公式(18.9)和(18.13)作为递推关系式,可以将任意函数 $S_n$ 用它"以前"的 $S_k(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 来决定,而么正性条件(18.9)式可以用来决定函数 $S_n$ 的厄米部分,因果性条件(18.13)式可以用来决定 $S_n$ 的反厄米部分. 因此可以用归纳法构成函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$. 但是为此必须具有 $S_1(x)$ 的显式. 这一函数可以由对应原理决定.

因此我们来研究函数 $S_1(x)$. 对于仅仅一个函数还不能写出因果性条件,但是,我们在以后会清楚,从 $n = 1$ 时的因果性条件可以推出 $S_1(x)$ 和 $S_1(y)$ 应该在空间型各点对易:

$$[S_1(x), S_1(y)] = 0 \quad \text{当 } x \sim y, \tag{18.14}$$

显然,为了这一点,只须要 $S_1(x)$ 适合定域性条件(按 § 16 中所给定义的意义).

写出当 $n = 1$ 时的么正性条件,有

$$S_1(x) + S_1^\dagger(x) = 0, \tag{18.15}$$

由此得出, $S_1(x)$ 可以用下式来表示:

$$S_1(x) = i\Lambda_1(x), \tag{18.16}$$

其中 $\Lambda_1(x)$ 是厄米算符. 最后,相对论协变性条件(18.4)式给出

$$S_1(x) = U_L^\dagger S_1(Lx) U_L. \tag{18.17}$$

这样 $\Lambda_1(x)$ 应该是满足定域性条件的相对论协变的厄米算符.

现在将 $\Lambda_1(x)$ 和相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 联系起来. 大家知道,在经典理论中,利用自由场的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_0(x)$ 再加上相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 来考虑相互作用,而"运动方程"可以利用作用量的驻值原理来推出. 我们来讨论当加上了强度为 $g(x)$ 的相互作用时经典场系统的作用量 $A$. 此时我们有

$$A = \int \mathscr{L}_0(x) dx + \int \mathscr{L}(x) g(x) dx, \tag{18.18}$$

其中在 $\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}$ 中含有满足相应场方程的场函数.特别是,如果认为 $g(x)$ 是一阶无穷小,我们看到这些场函数和自由场函数的差也是一阶无穷小. 另一方面,因为自由场方程是从条件

$$\delta \int \mathscr{L}_0(x) dx = 0$$

得到的,如果在(18.18)式的一次积分号下场函数写成精确到一阶无穷小,那么这时引起

积分值 $\int \mathscr{L}_0\,dx$ 的误差是二阶无穷小.

因此,当施加强度$g(x)$为无穷小的相互作用时,系统的作用量的变化是$\int \mathscr{L}(x)g(x)dx$,其中 $\mathscr{L}(x)$ 取决于自由场的波函数. 大家知道[1],在准经典情况下通常波函数$\psi$的 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$$

的解的形式是 $\psi=\exp(iA)$,其中$A$是系统的作用量. 从未扰动形式

$$A_0=\int \mathscr{L}_0(x)dx \tag{18.19}$$

过渡到作用量(18.18)式,显然相当于波函数的变换

$$\psi_0=e^{iA_0}\to\psi=e^{iA}=e^{i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx}\psi_0,$$

因此考虑到 $g$ 是微小量,这一过渡相当于波函数的下列变换:

$$\psi\to\psi'=\psi+\delta\psi,\quad \delta\psi=i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx\psi.$$

从对应性考虑,我们要求状态振幅的二次量子化的变换定律也有同一的形式,即

$$\Phi\to\Phi'=\Phi+\delta\Phi,\quad \delta\Phi=i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx\Phi.$$

换句话说,我们假定当 $g$ 是无穷小时,矩阵 $S(g)$ 将具有形式:

$$S(g)=1+i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx.$$

将此式与(18.1)式相比较,我们看到 $S_1(x)$的确具有形式(18.16),其中 $\Lambda_1(x)$ 等于相互作用的拉格朗日函数密度

$$S_1(x)=i\mathscr{L}(x). \tag{18.20}$$

现在从关系式(18.14)、(18.15)、(18.17),可以得出结论,相互作用拉格朗日函数密度应该是场算符函数的定域的、厄米的和相对论协变的组合. 此处应注意到,也不难证明,满足条件 (9.9) 式的场函数的标量组合,将自动地满足相对论协变性条件,至于厄米性条件

$$\mathscr{L}^\dagger(x)=\mathscr{L}(x), \tag{18.21}$$

和定域性条件

$$[\mathscr{L}(x),\ \mathscr{L}(y)]=0,\quad \text{当 } x\sim y, \tag{18.22}$$

则是进一步限制如何选择相互作用拉格朗日函数密度的辅助条件.

现在来决定 $S_2(x,y)$,从 $n=1$ 时的因果性条件,我们得到当 $x\gtrless y$ 时

$$H_1(x,y)=iS_2(x,y)+iS_1(x)S_1^\dagger(y)=0,$$

由此考虑到(18.15)式,求得

$$S_2(x,y)=-\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y),\quad \text{当 } x\gtrless y. \tag{18.23}$$

---

1) 例如,参阅 Блохинцев (1949), Pauli (1947a).

由于 $S_2$ 的对称性，还可以得到

$$S_2(x, y) = S_2(y, x) = -\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(x), \quad \text{当 } y \gtrsim x. \tag{18.24}$$

当 $x \sim y$ 时，(18.24)式和(18.23)式的定义区域是相互重迭的，这就导致了形式为(18.14)或(18.22)的相容条件，它代表 $S_1$ 或 $\mathscr{L}$ 的定域性条件.

这样，函数 $S_2(x, y)$ 确定为如下的形式：

$$S_2(x, y) = \begin{cases} -\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y) & (x \gtrsim y), \\ -\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(x) & (y \gtrsim x). \end{cases} \tag{18.25}$$

利用厄米共轭性，考虑到(18.21)式，我们得到

$$S_2^\dagger(x, y) = \begin{cases} -\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(x) & (x \gtrsim y), \\ -\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y) & (y \gtrsim x). \end{cases} \tag{18.26}$$

由 $S_2(x, y)$ 的写法，可以得出对称性和多重定域性. 显然，(18.25)式满足协变性条件. 而且，不难证明，它满足么正性条件. 根据(18.9)式，需要验算关系式

$$S_2(x, y) + S_2^\dagger(x, y) + S_1(x)S_1^\dagger(y) + S_1(y)S_1^\dagger(x) = 0.$$

上式的正确性直接可以从(18.20)、(18.21)、(18.25)、(18.26)等式推导出来. 事实上，例如当 $x \gtrsim y$ 时，有

$$S_2(x, y) + S_2^\dagger(x, y) + S_1(x)S_1^\dagger(y) + S_1(y)S_1^\dagger(x) =$$
$$= -\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y) - \mathscr{L}(y)\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y) + \mathscr{L}(y)\mathscr{L}(x) = 0.$$

当 $y \gtrsim x$ 时，上述关系式的正确性可以同样验证. 这样就阐明了表式(18.25)满足对 $S_2$ 所加的一切要求.

### 18.4. 定域性算符的时序乘积

在着手进一步构成函数 $S_k(k = 3, 4, \cdots)$ 以前，应该引入算符的循序乘积或时序乘积的概念. 现在我们暂时只对定域性算符引进这一概念. 一组定域性算符 $A_1(x_1), \cdots, A_n(x_n)$ 的时序乘积是用符号 $T(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n))$ 来表示，而根据定义[1]，它是这些算符按确定次序而取的通常乘积，即按乘子中宗量的时间分量自左至右而递减的顺序，也就是

$$T(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)) = A_{j_1}(x_{j_1})A_{j_2}(x_{j_2}) \cdots A_{j_n}(x_{j_n}), \tag{18.27}$$
$$x_{j_1}^0 \geqslant x_{j_2}^0 \geqslant \cdots \geqslant x_{j_n}^0.$$

为简便起见，我们将时序乘积称为 $T$ 乘积.

我们还须要反时序乘积这个概念，它相当于宗量的时间分量从左至右而增加. 例如，取(18.27)式右边的厄米共轭，可将得到的表式

$$A_{j_n}^\dagger(x_{j_n}) \cdots A_{j_1}^\dagger(x_{j_1}) \quad (x_{j_n}^0 \leqslant x_{j_{n-1}}^0 \leqslant \cdots \leqslant x_{j_1}^0)$$

称为算符 $A_1^\dagger(x_1), \cdots, A_n^\dagger(x_n)$ 的反时序乘积(或 $T^\dagger$ 乘积). 因此，令

$$T^\dagger(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)) = A_{j_1}(x_{j_1})A_{j_2}(x_{j_2}) \cdots A_{j_n}(x_{j_n})$$
$$(x_{j_1}^0 \leqslant x_{j_2}^0 \leqslant \cdots \leqslant x_{j_n}^0). \tag{18.28}$$

我们要证明，虽然时间分量起特殊的作用，$T$ 乘积的定义却是协变的. 点 $x_1, \cdots, x_n$

---

1) 试与 § 14 中两个场算符的时序乘积的定义相比较.

的时序对于 $T$ 乘积之值是很重要的，从一个 Lorentz 参考系经过 Lorentz 转动变到另一个参考系时，时序可能会起变化. 乍一看来，这种变换会改变 $T$ 乘积之值，但是不难证明，这种变化不会发生. 事实上，设想上述变换是通过大量微小的变换而成，由于 Lorentz 转动的连续性，这总是可能的. 因此，$x_1, \cdots, x_n$ 点的时序改变的过程可以分成几个步骤，在其中每一步骤中，某一点集 $x_j, \cdots, x_k$（两点或更多点）中的时间顺序将同时改变. 但是只有当点 $x_j, \cdots, x_k$ 互为空间型时，它们的时序才会在 Lorentz 转动下发生改变. 由于定域性条件，这时候对应的算符相互之间可以对易，因此时序并不重要. 这样在每一步变换中，$T$ 乘积的值不变，因此也就根本不会改变.

而且不难注意到，根据定义(18.27)，定域性算符可以在 $T$ 乘积记号下对易，而其值不变. 由此得出结论，特别是当所有算符 $A$ 相同时，则 $T$ 乘积是它所有宗量的对称函数.

回到(18.25)式，我们看到，利用 $T$ 乘积可以将 $S_2$ 写成下列形式：

$$S_2(x, y) = -T(\mathscr{L}(x), \mathscr{L}(y)), \tag{18.29}$$

与此相应，(18.26)式具有形式：

$$S_2^{\dagger}(x, y) = -T^{\dagger}(\mathscr{L}(x), \mathscr{L}(y)). \tag{18.30}$$

## 18.5. 具有任意 $n$ 的 $S_n$ 函数的确定

现在来证明表式

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = i^n T(\mathscr{L}(x_1) \cdots \mathscr{L}(x_n)) \tag{18.31}$$

是公式(18.20)和(18.29)的自然推广，它满足对 $S_n$ 一切形式上的要求. 现在已经清楚，它满足对称性、协变性及多重定域性条件，只要来验证么正性及因果性两个条件.

为便于验证，我们不用(18.31)式，而利用算符 $S(g)$ 的整体表式. 将(18.31)式代入(18.1)式中，我们得到

$$S(g) = 1 + \sum_n \frac{i^n}{n!} \int T(\mathscr{L}(x_1) \cdots \mathscr{L}(x_n)) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n. \tag{18.32}$$

现在我们要研究展开系数(18.32)的某些性质. 但是与特殊函数理论中的情况相同，常常不从它们的具体结构出发，而从某些一般的母函数来导出函数的相应性质更为方便，在当前的情况下，对于整个级数(18.32)来验证么正性及因果性条件较为简单. 为了这一目的，将(18.32)式写成略为改变的形式，级数的第 $n$ 项表为形式

$$\frac{i^n}{n!} T\left(\int \mathscr{L}(x_1) g(x_1) dx_1 \cdots \int \mathscr{L}(x_n) g(x_n) dx_n\right) =$$

$$= \frac{i^n}{n!} T\left(\left\{\int \mathscr{L}(x) g(x) dx\right\}^n\right). \tag{18.33}$$

现在我们引进 $T$ 指数(Feynman (1951))，级数(18.32)可以形式上求和

$$S(g) = T\left\{1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{i^n}{n!} \left[\int \mathscr{L}(x) g(x) dx\right]^n\right\} = T\left(\exp i \int \mathscr{L}(x) g(x) dx\right), \tag{18.34}$$

这样我们就得到了散射矩阵 $S(g)$ 的一个新表达式.

也可以从另一方面来叙述 $T$ 指数这一重要的概念. 将函数 $g(x)$ 所描述的相互作用

的施加区域，用空间型曲面 $t = \text{const}$，把它分成为无限多个厚度为无限小的薄层 $\Delta_j$. 这时我们有

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx\right) =$$

$$= T\left(\exp i\sum_j \int_{\Delta_j} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right) = T\left(\prod_j \exp i\int_{\Delta_j} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right).$$

因此自然可将 $T$ 指数(18.34)定义为 $T$ 乘积的极限：

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx\right) = \lim_{\Delta\to 0} T\left\{\prod_j \left(1 + i\int_{\Delta_j} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right)\right\}. \quad (18.35)$$

利用(18.35)表式，显然可以证明矩阵 $S(g)$ 的么正性. 事实上，(18.35)式的右端是通常乘积

$$\prod_j \left(1 + i\int_{\Delta_j} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right),$$

按薄层 $\Delta_j$ 的适当顺序而取的. 但是这个乘积中每一乘子当 $\Delta_j$ 相当小时，在正确到更高阶无穷小的程度上是么正的，因此整个乘积是么正的. 这样就证明了 $S(g)$ 的么正性.

现在来验证因果性条件. 计算 $y$ 点上 $S(g)$ 的变分导数，我们求得

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} = T\left(\mathscr{L}(y)\exp i\int \mathscr{L}(x)g(x)dx\right).$$

将四维空间用空间型曲面 $x^0 = \text{const} = y^0$ 分成 $G_+$ 和 $G_-$ 两部分，相对于此曲面，$G_+$ 处于“将来时”，而 $G_-$ 处于“过去时”. 此时有

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} = T\left(\mathscr{L}(y)\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(x)g(x)dx\exp i\int_{G_-} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right) =$$

$$= T\left(\mathscr{L}(y)\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(x)g(x)\,dx\right)T\left(\exp i\int_{G_-} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right). \quad (18.36)$$

另一方面，完全同理可得

$$S(g) = T\left(\exp\left[i\int_{G_+} \mathscr{L}(x)g(x)dx + i\int_{G_-} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right]\right) =$$

$$= T\left(\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right)T\left(\exp i\int_{G_-} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right),$$

而且

$$S^\dagger(g) = \left\{T\left(\exp i\int_{G_-} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right)\right\}^\dagger\left\{T\left(\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right)\right\}^\dagger.$$

考虑到 $T\left(\exp i\int_{G_-} \mathscr{L}(x)g(x)dx\right)$ 的么正性，根据(18.36)式，由此可得

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}S^\dagger(g) = T\left(\mathscr{L}(y)\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right)\left\{T\left(\exp i\int_{G_+} \mathscr{L}(z)g(z)dz\right)\right\}^\dagger.$$

这样，乘积

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}S^\dagger(g)$$

与函数 $g(x)$ 在 $G_-$ 区域中(即当 $x^0 < y^0$) 的性质无关. 根据协变性, 当 $x \sim y$ 时也将如此. 因此因果性条件成立.

上述算符 $S(g)$ 的因果性和么正性的证明十分简单明了. 但是应该指出,从纯粹数学的观点看来,证明并不是完全彻底的. 事实上,在讨论过程中, 乘积(18.31)满足基本关系式(18.9)和(18.12)这一问题是和完全不清楚的问题(如整个级数(18.1)的可加性, 极限过程等等)混在一起.

严格而言,为了进行证明, 所有这些因素完全不必要. 我们可以在研究中引进"精确到 $g$ 的给定幂次的 $T$ 指数"来代替对 $T$ 指数的运算,此时一切问题将自动消失.

## 18.6. 函数 $S_n$ 的不确定性的分析以及 $S(g)$ 的最一般形式

我们已经证明表式

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) \equiv i^n T(\mathscr{L}(x_1) \cdots \mathscr{L}(x_n))$$

就满足对 $S_n$ 所加的一切条件这一意义来说是许可的. 但是这一表式并不是满足上述条件的最一般的表式. 因此我们来讨论构成满足对称性、协变性、因果性和么正性条件的 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的最普遍形式,因而也就完全解决了算符 $S(g)$ 的构成问题.

为此, 我们先研究根据函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$前面的已知函数 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ 来决定 $S_n$ 的程序. 利用么正性条件, 可用 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ 决定 $S_n$, 但还可以差某一厄米算符, 我们用 $i\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 来表示它. 此处量 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 应该是它的宗量的对称函数. 利用因果性条件(18.13),函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 在它的宗量的如下域内,其中 $x_1 \gtrless x_j$,即使 $j = 2, 3, \cdots, n$ 中有一个是这样的,可以完全由在它以前的函数决定.

因此在上述区域中,反厄米算符 $i\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 应该等于零. 从算符对于所有宗量的对称性可以得出结论,如果有一对宗量 $x_i$ 和 $x_j$ 满足

$$x_i \neq x_j,$$

这一算符也等于零, 因此只有当所有宗量相重合即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时, 它才能不等于零.

因此,从因果性、么正性和对称性条件得出结论: 厄米算符 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$是 § 16 中所定义的准定域性算符,而且它的系数具有形式

$$Z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_i}\cdots\right)\delta(x_1 - x_2)\cdots\delta(x_1 - x_n),$$

此处根据平移不变性, $Z$ 不可能与 $x_i$ 有关.

这样,我们已经证明,根据已知的 $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ 以及不变性、对称性、么正性和因果性条件, 可以决定 $S_n$, 准确到只差一个 $i\Lambda_n$,其中 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 是按标量而变换的厄米的、对称的准定域性算符,因此为了获得 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的表式,除了定域性算符 $\mathscr{L}(x)$ 外,必需给出准定域性算符的序列

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \cdots, \Lambda_n(x_1, \cdots, x_n).$$

我们得到了初看来有些奇怪的结论. 为了完全决定矩阵 $S(g)$, 只给定相互作用拉格朗日函数密度并不充分, 还必须给出准定域性算符的无穷序列:

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \Lambda_3(x_1, x_2, x_3), \cdots, \Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)\cdots. \tag{18.37}$$

为了说明这一点，我们从另一方面来讨论所研究的问题. 我们来研究表式

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right), \tag{18.38}$$

其中"拉格朗日函数密度" $\mathscr{L}(x; g)$ 由以下关系来决定：

$$\mathscr{L}(x;g) = \mathscr{L}(x)g(x) + \sum_{\nu\geqslant 2}\frac{1}{\nu!}\int \Lambda_\nu(x, x_1, \cdots, x_{\nu-1}) \times$$
$$\times g(x)g(x_1)\cdots g(x_{\nu-1})dx_1\cdots dx_{\nu-1}. \tag{18.39}$$

由于函数 $\Lambda_\nu$ 的准定域性，(18.39)式中的所有积分可以积出，而 $\mathscr{L}(x; g)$ 实际上依赖于 $x$ 点的场函数，因此是定域性算符. 除了场算符 $u(x)$，表式 $\mathscr{L}(x; g)$ 还和可以看作"经典场"的函数 $g(x)$ 有关. 因此(18.38)式满足加在 $S(g)$ 上的一切条件，包括对应性条件(18.16)，并且可将它看作散射矩阵 $S(g)$ 的表式. 将(18.38)式展开为 $g$ 的幂级数，我们得到满足一切条件的表式 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$. 我们有

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right) = 1 + \sum_{m\geqslant 1}\frac{i^m}{m!}\int T(\mathscr{L}(x_1; g)\cdots \mathscr{L}(x_m; g)dx_1\cdots dx_m.$$

将展开式(18.39)代到此式中，得到

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right) = 1 + \sum_{\substack{m\geqslant 1\\(\nu_1\geqslant 0,\cdots,\nu_m\geqslant 0)}} \frac{i^m}{m!}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_m!}\int T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1})\cdots$$
$$\cdots \Lambda_{\nu_m}(x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}, \cdots, x_{\nu_1+\cdots+\nu_m}))g(x_1)\cdots g(x_{\nu_1+\cdots+\nu_m}) \times$$
$$\times dx_1\cdots dx_{\nu_1+\cdots+\nu_m},$$

根据(18.16)式及(18.20)式，此处我们令 $\mathscr{L}(x) = \Lambda_1(x)$. 记号

$$T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1})\cdots\Lambda_{\nu_s}(x_{\lambda+1}, \cdots, x_{\lambda+\lambda_s}))$$

表示算符 $\Lambda_{\nu_1}, \cdots, \Lambda_{\nu_s}$ 按时间分量的顺序所取的乘积. 每一 $\Lambda_\nu$ 中有好几个宗量不应该使我们引起混淆，因为根据定义，只有当所有宗量重合时 $\Lambda_\nu$ 才不等于零.

现在来构成这一以 $g(x)$ 为幂的级数，将其中出现 $g(x)$ $n$ 阶的并含有 $n$ 重积分的项分离出来：

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right) = 1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ \sum\nu_i=n}\right)} \frac{i^m}{m!}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_m!}\int T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1})\cdots$$
$$\cdots \Lambda_{\nu_m}(x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}, \cdots, x_n))g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

上述展开式与展开式(18.1)的差别还在于函数 $g(x)$ 的"幂"之前的系数是不对称的. 为了使它对称化，利用对每一给定 $n$ 时权重乘子 $g(x_1)\cdots g(x_n)$ 的对称性和函数 $\Lambda_\nu$ 的对称性，将变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的顺序改变 $n!/(\nu_1!\cdots\nu_m!)$ 次，使得考虑到 $\Lambda_\nu$ 对称时，所求得的一切表式之和是所有宗量 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称函数. 将结果除以 $n!/(\nu_1!\cdots\nu_m!)$，我们得到表式

$$T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right) = 1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ \sum\nu_i=n}\right)} \frac{i^m}{m!n!}\int P(x_1, \cdots, x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}, \cdots|\cdots, x_n) \times$$
$$\times T(\Lambda_{\nu_1}(x, \cdots, x_{\nu_1})\cdots\Lambda_{\nu_m}(\cdots, x_n))g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

其中算符 $P(x_1, \cdots, x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}, \cdots|\cdots, x_n)$ 是将 $n$ 点集按 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ 点 $(\Sigma\nu_i = n)$ 任意分成 $n!/(\nu_1! \cdots \nu_m!)$ 个一切可能分法的对称化算符. 这一算符是上述算符

$$P\left(\frac{x_1, \cdots, x_\nu}{x_{\nu_1+1}, \cdots, x_n}\right) = P(x_1, \cdots, x_\nu|x_{\nu+1}, \cdots, x_n)$$

的自然推广. 这样矩阵(18.38)表示成(18.1)形式,其中系数 $S_n$ 为

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n \\ \Sigma\nu_i=n}\right)} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \cdots, x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}, \cdots|\cdots, x_n) \times$$
$$\times T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1}) \cdots \Lambda_{\nu_m}(\cdots, x_n)).$$

记住 $\Lambda_1(x) = \mathscr{L}(x)$,我们可以将 $S_n$ 重新写成形式:

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = i^n T(\mathscr{L}(x_1) \cdots \mathscr{L}(x_n)) +$$
$$+ \sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1 \\ \Sigma\nu_i=n}\right)} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \cdots, x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}, \cdots|\cdots, x_n) \times$$
$$\times T[\Lambda_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1}) \cdots \Lambda_{\nu_m}(\cdots, \nu_n)] + i\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n). \quad (18.40)$$

我们考虑所得到公式的若干简化情况. 当 $n = 2$ 时,得到

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) + i\Lambda_2(x_1, x_2).$$

当 $n = 3$ 时,相应地有[1)]

$$S_3(x_1, x_2, x_3) = i^3 T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}(x_3)) +$$
$$+ \sum_{\left(\substack{\nu_1+\nu_2=3 \\ m=2}\right)} \frac{i^2}{2!} P(x_1, x_{\nu_1}|\cdots, x_3) T(\Lambda_{\nu_1}(x_1, x_{\nu_1})\Lambda_{\nu_2}(\cdots, x_3)) + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= -iT(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}(x_3)) - T(\mathscr{L}(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)) -$$
$$- T(\mathscr{L}(x_2)\Lambda_2(x_1, x_3)) - T(\mathscr{L}(x_3)\Lambda_2(x_1, x_2)) + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3).$$

由此可见,以后每一函数 $S_n$ 用它以前的函数 $S_1, \cdots, S_{n-1}$ 来表示,精确到只差一个对称的反厄米准定域性算符 $i\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$. 表式(18.40)是 $S_n$ 的最普遍表式,而散射矩阵的最普遍展开式为

$$S(g) = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x; g)dx\right),$$

其中 $\mathscr{L}(x; g)$ 取决于(18.39). 因此,为了完全确定散射矩阵 $S(g)$ 而需要另外给定的一系列准定域性算符(18.37),可以归结到相互作用"拉格朗日函数密度"之内.

$\mathscr{L}(x)\,g(x)$ 和准定域算符积分的线性组合 (18.39) 起着拉格朗日函数密度最完整的可能形式的作用,故产生关于此线性组合的物理意义问题. 含有任意准定域算符 $\Lambda_n$ 的表式(18.39) 及 (18.40)的结构及其相互关系决定于整个式子作微扰理论展开时的纯粹数学性质,这一点 Poincaré 已经指出.

为了举例说明上述性质,我们考虑微分方程

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varepsilon y(x), \quad (18.41)$$

1) 这一公式中第二行的写法(在和号下)是有些约定的,不过从(18.40)式及以下的式子,我们会明白这一写法的意义.

它的解 $y(x)$ 含有一个任意常数 $C$:

$$y(x) = Ce^{\varepsilon x}.$$

将 $\varepsilon$ 当作小参数,用逐次逼近法来解方程(18.41). 每一次近似经过积分后,可得与微量 $\varepsilon$ 之阶相应的任意常数,因此用微扰理论来解决(18.41)时,我们得到的不是一个任意常数 $C$,而是具有各阶微量 $\varepsilon$ 的任意常数的无穷集合:

$$C_0,\ \varepsilon C_1,\ \cdots,\ \varepsilon^n C_n,\ \cdots.$$

实质上这等于常数 $C$ 以 $\varepsilon$ 为幂的展开式,即

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \cdots + \varepsilon^n C_n + \cdots.$$

完全同理,在我们的讨论中采用了"加入"相互作用这一非物理的手续. 因而得到以下情况: 一部分拉格朗日函数密度"加入"一级近似中,一部分加入二级近似中,…,一部分加入 $n$ 级近似中,相互作用的拉格朗日函数密度仿佛分裂成一系列分离的部分. 但是只有当相互作用完全加入时才具有物理意义. 此时函数 $g(x) = 1$,而表式(18.39)的形式为

$$\mathscr{L}(x;\ 1) = \mathscr{L}(x) + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{1}{\nu!} \int \Lambda_\nu(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_{\nu-1}) dx_1 \cdots dx_{\nu-1}, \tag{18.42}$$

$$S(1) = S = T\left(\exp i \int \mathscr{L}(x;\ 1) dx\right). \tag{18.43}$$

因此实际的散射矩阵 $S(1)$完全用系统的相互作用的实际拉格朗日函数密度$\mathscr{L}(x;\ 1)$来表征,在微扰理论中此函数有时表示为级数形式.

通常以 Schrödinger 方程为基础而叙述场论时,得到散射矩阵的表式为

$$T\left(\exp\left[-i \int H(x) dx\right]\right), \tag{18.44}$$

其中 $H(x)$ 是相互作用哈密顿函数密度. 但是只有在特别简单情况下,即当 $\mathscr{L}$ 不依赖于场函数的导数时(与(8.6)式比较), $H(x)$ 才与 $-\mathscr{L}$ 相等. 在一般情况下,除了 $-\mathscr{L}$ 项之外, $H$ 中还含有某些非协变项. 利用相当复杂的手续(Matthews (1949)),这些项可以完全消去,此时表式(18.44)化成(18.43)的形式.

## §19. 时序乘积的展开

### 19.1. 时序收缩

我们有了散射矩阵的显式后,可以着手计算它对各种状态的矩阵元. 我们需要在这一计算过程中将矩阵中各项化成正规形式,使得在这形式中每一项内所有消失算符在右边,而产生算符在左边.

因此我们要用相应场算符的正规乘积来表示定域性算符 $\mathscr{L}(x)$ 的 $T$ 乘积. 为此,将§16 中所定义的 $T$ 乘积概念推广到线性算符的一般系统是方便的.

我们将线性算符 $A_1(x_1)$, $\cdots$, $A_n(x_n)$ 的时序乘积或循序乘积

$$T(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n))$$

定义[1]为循着时间次序的普通乘积，再乘上 $\eta=(-)^p$，此处 $p$ 是从次序 $1, 2, \cdots, n$ 化成循时次序时 Fermi 对易的次数，即

$$T(A_1(x_1)\cdots A_n(x_n))=\eta\, A_{j_1}(x_{j_1})\cdots A_{j_n}(x_{j_n}),$$
$$(x^0_{j_1}\geqslant x^0_{j_2}\geqslant\cdots\geqslant x^0_{j_n}), \tag{19.1}$$

此处 $p$ 是从次序 $(1, 2, \cdots, n)$ 化为次序 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 时 Fermi 算符对易的次数.

$T$ 乘积的 Wick 定理给出展开这些乘积的方案，它是通常乘积的 Wick 定理的类推. 在证明这一定理以前，我们引入算符时序收缩这一重要的概念.

为此目的，讨论(19.1)式为两个场算符的情况：

$$T(u_1(x_1)u_2(x_2))=\begin{cases}u_1(x_1)u_2(x_2) & (x^0_1>x^0_2),\\ \eta u_2(x_2)u_1(x_1) & (x^0_2>x^0_1).\end{cases}$$

根据通常收缩的定义：

$$u_1(x_1)u_2(x_2)=:u_1(x_1)u_2(x_2):+\underline{u_1(x_1)u_2(x_2)},$$

此式可以变换成形式：

$$T(u_1(x_1)u_2(x_2))=\begin{cases}:u_1(x_1)u_2(x_2):+\underline{u_1(x_1)u_2(x_2)} & (x^0_1>x^0_2),\\ \eta:u_2(x_2)u_1(x_1):+\eta\underline{u_2(x_2)u_1(x_1)}= & \\ \quad =:u_1(x_1)u_2(x_2):+\eta\underline{u_2(x_2)u_1(x_1)} & (x^0_2>x^0_1).\end{cases} \tag{19.2}$$

由此可见，在任何情况下，$T(u_1(x_1)u_2(x_2))$ 和 $:u_1(x_1)u_2(x_2):$ 相差一个 $c$ 数，我们将此差称为时序收缩 $\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}$，即根据定义：

$$T(u_1(x_1)u_2(x_2))=:u_1(x_1)u_2(x_2):+\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}, \tag{19.3}$$

而且

$$\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}=\begin{cases}\underline{u_1(x_1)u_2(x_2)}, & \text{当 } x^0_1>x^0_2,\\ \eta\underline{u_2(x_2)u_1(x_1)}, & \text{当 } x^0_2>x^0_1.\end{cases} \tag{19.4}$$

首先应该注意时序收缩的重要特点. 正和在正规乘积记号下一样，在时序收缩的记号下也可以改变乘子的次序

$$\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}=\eta\overbrace{u_2(x_2)u_1(x_1)},$$

上式直接可由(19.4)式得出.

我们来定义基本波动场算符的时序收缩. 为此我们注意，考虑到正规乘积的基本性质和真空振幅的归一化，在计算(19.3)式的真空平均值 $\Phi^*_0\cdots\Phi_0=\langle\cdots\rangle_0$ 时，我们得到

$$\langle T(u_1(x_1)u_2(x_2))\rangle_0=\overbrace{u_1(x_1)u_2(x_2)}, \tag{19.5}$$

即两个场算符的时序收缩等于此两算符时序乘积的真空平均值. 另一方面，在 § 14 中已经证明，这些真空预期值等于该场的因果 Green 函数，精确到乘子 $i$. 利用本节中所得到的公式，我们得到：标量场

---

1) 此定义是 § 14 中两个场算符的 $T$ 乘积定义的自然推广.

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0 = \frac{1}{i}D^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{e^{ik(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}dk, \quad (19.6)$$

电磁场

$$\overbrace{A_l(x)A_n(y)} = \langle T(A_l(x)A_n(y))\rangle_0 = ig^{ln}D_0^c(x-y) = \frac{g^{ln}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}dk, \quad (19.7)$$

矢量场

$$\overbrace{U_n(x)U_l(y)} = \langle T(U_n(x)\,U_l(y))\rangle_0 = \frac{1}{i}D^c_{nl}(x-y) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{\left(g^{nl}-\dfrac{k_n k_l}{m^2}\right)}{m^2-k^2-i\varepsilon}e^{ik(x-y)}dk, \quad (19.8)$$

旋量场

$$\overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = \langle T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle_0 = \frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x-y) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{(m-\hat{p})_{\alpha\beta}}{m^2-p^2-i\varepsilon}e^{ip(x-y)}dp. \quad (19.9)$$

但是应该注意，化成(19.6)—(19.9)式所用到的关系式只有在 $x^0 > y^0$ 和 $x^0 < y^0$ 的情况是§14中已经证明了的. 从§18中所证明的关于$T$乘积的协变性还能得出结论，当 $x \sim y$ 时，这些关系式也成立. 因此，可以认为当 $x \neq y$ 时(19.6)—(19.9)式到处成立.

至于在 $x = y$ 点的无穷小邻域中，这些表式的积分规则可以任意确定. 例如，可以在其中每一式的右边加上准定域性算符的任意系数函数

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x-y),$$

其中 $P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ 是 $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ 的任意多项式. 在 $x = y$ 点的无穷小邻域中补充定义收缩的必要性是$T$乘积中所含的任意性的特殊推论. 事实上，只有当宗量的值不重合时，$T$乘积才有形式上的"定义"(18.27)式和(19.2)式. 因此，在宗量重合的相应点的无穷小邻域内，必须补充定义$T$乘积，即给定其系数函数的积分法则，换言之，应该将$T$乘积的系数函数定义为可积的广义函数.

因此我们得到结论，不但需要选择相互作用拉格朗日函数密度，而且需要同时补充定义$T$乘积.

但是应该指出，$T$乘积的改变对 $S(g)$ 的影响可以由拉格朗日函数密度的变化来考虑进去. 实际上，当场函数的$T$乘积变化时，我们也就在相互作用拉格朗日函数密度的$T$乘积中引进了不同的准定域性算符，在上节中已经证明，这就使相互作用拉格朗日函数密度添加了某些表式.

因此，为了得到决定物理过程结构的散射矩阵 $S(g)$ 的矩阵元，必须同时给定相互作用拉格朗日函数密度和$T$乘积的积分法则. 如果$T$乘积的积分法则已经确定，那末必须选定适应这些法则的相互作用拉格朗日函数密度.

拉格朗日函数密度的形式与某些补充情况有依赖关系，这决不是量子场论所独有的特点. 譬如说，在经典物理学中，为了确定拉格朗日函数密度的形式，必须选择独立的力学量(试比较标量场的通常解释(§ 3)及其 Kemmer 形式(§ 4.4)).

因此首先必须将所有收缩及其乘积补充定义，以便使乘积成为可积函数. 由于这一要求，$T$ 乘积完全被给定，而且有可能来确定拉格朗日函数密度.

在下一章中将详细阐明这些与 $S$ 矩阵的正常化有关的问题. 这里我们只限于对场函数的收缩作补充定义. 假定认为，如当 $x \neq y$ 时，收缩等于某一 Green 函数:

$$\Delta^c_{\alpha\beta}(x-y) = P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D^c(x-y),$$

则此收缩与 Green 函数在 $x = y$ 点的无穷小邻域中也相等. 特别是我们认为在 $x = y$ 点的无穷小邻域中，(19.6)—(19.9)表式也是正确的.

我们再讨论当场用一阶方程组来描述的一般情况. 我们在 § 14 中已经见到，此时场函数满足对易关系

$$[u_\alpha(x),\ u^\dagger_\beta(y)] = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{i}P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D(x-y),$$

$$[u^{(\pm)}_\alpha(x),\ u^{\dagger(\mp)}_\beta(y)] = \frac{1}{i}\Delta^{(\pm)}_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{i}P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D^{(\pm)}(x-y).$$

因此，计算通常收缩，我们得到

$$\underline{u_\alpha(x)u^\dagger_\beta(y)} = \frac{1}{i}\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y).$$

由此通过标准途径，我们求得时序收缩为

$$\overline{u_\alpha(x)u^\dagger_\beta(y)} = \begin{cases} -i\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y), & (x^0 > y^0), \\ i\Delta^{(+)}_{\alpha\beta}(x-y), & (y^0 > x^0), \end{cases}$$

当 $x \neq y$ 时，它与

$$\frac{1}{i}\Delta^c_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{i}P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D^c(x-y)$$

相等.

因此当 $x$, $y$ 为任意时，我们令

$$\overline{u_\alpha(x)\ u^\dagger_\beta(y)} = \frac{1}{i}\Delta^c_{\alpha\beta}(x-y). \tag{19.10}$$

在许多情况中，相互作用拉格朗日函数密度含有场函数的导数. 因此，此处需要引入场函数导数的收缩的完全定义. 注意，当 $x^0 \gtrless y^0$ 时，

$$\frac{\partial^k \overline{u_\alpha(x)}}{(\partial x^0)^{k_0}\cdots(\partial x^3)^{k_3}}\ \frac{\partial^q \overline{u^\dagger_\beta(y)}}{(\partial y^0)^{q_0}\cdots(\partial y^3)^{q_3}} =$$

$$= \frac{\partial^k}{(\partial x^0)^{k_0}\cdots(\partial x^3)^{k_3}}\ \frac{\partial^q}{(\partial y^0)^{q_0}\cdots(\partial y^3)^{q_3}}\ \overline{u_\alpha(x)u^\dagger_\beta(y)}, \tag{19.11}$$

根据定义，我们认为对任意 $x$ 及 $y$, (19.11)式是正确的.

再注意时序收缩和 $T$ 乘积的几个特点.

不难证明,正规乘积和通常乘积中所含的自由場算符在下述意义下仍为"自由的",即在自由場方程微分算符的作用下,上述表式等于零. 这样,对于标量場

$$(\Box_x - m^2) : \varphi(x)\varphi(y) : = 0, \tag{19.12}$$

$$(\Box_x - m^2)\underbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = 0. \tag{19.13}$$

时序收缩在(19.4)式中是用通常收缩来定义的,似乎也应保持这一性质,因此,$T$ 乘积也有此性质. 但是,实际上(由于在 $x = y$ 点不满足定义(19.4)),这一情况并不存在. 事实上,刚才已经证明,时序收缩用满足非齐次場方程的 Green 函数来表示,因此根据(19.5)式,对于标量場,有

$$(\Box_x - m^2)\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = i\delta(x - y). \tag{19.14}$$

因此,$T$ 乘积也是如此. 特别是,利用(19.3)、(19.12)和(19.14)式,对于标量場,我们求得

$$(\Box_x - m^2)T(\varphi(x)\varphi(y)) = i\delta(x - y). \tag{19.15}$$

因此,应该认为在 $T$ 乘积记号下的相互作用表象場算符,并不满足齐次場方程.

## 19.2. 时序乘积的 Wick 定理

时序乘积的 Wick 定理的内容如下: $n$ 个线性算符的 $T$ 乘积等于含有一切可能时序收缩的正规乘积的总和(包括不含收缩的项).

此定理的证明实际上可以化为通常乘积的 Wick 定理的证明. 事实上,根据定义(19.1),$T$ 乘积等于某一通常乘积

$$T(A_1(x_1)\cdots A_n(x_n)) = \eta A_{j_1}(x_{j_1})\cdots A_{j_n}(x_{j_n}).$$

对此乘积应用 Wick 定理,我们看到,它等于算符 $A_{j_1}(x_{j_1})\cdots A_{j_n}(x_{j_n})$ 含有一切可能的通常收缩的正规乘积. 但是由于 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_n}$ 的次序正好是时序的,通常乘积与时序乘积一致,即 $T(A_1(x_1)\cdots A_n(x_n))$ 等于算符 $A_{j_1}(x_{j_1})\cdots A_{j_n}(x_{j_n})$ 含有一切可能时序收缩的正规乘积之和,并乘上 $\eta$.

已经指出,在时序收缩记号下如同在正规乘积下一样,线性算符可以改变其次序(考虑到符号的变化). 因此,在含有一切可能的时序收缩的正规乘积的记号下,也可以恢复乘子 1, 2, $\cdots$, $n$ 的自然次序,同时省去乘子 $\eta$. 故定理得证.

现在讨论线性场算符 $A_i(x)\cdots D_j(z)$ 的几个正规乘积的 $T$ 乘积:

$$T(: A_1(x)A_2(x)\cdots A_n(x) : \cdots : D_1(z)\cdots D_m(z) :). \tag{19.16}$$

为了展开定域性算符的 $T$ 乘积,就需要这些 $T$ 乘积,因为根据定义,定域性算符 $\mathscr{L}(x)$ 是

$$: A_1(x)A_2(x)\cdots A_n(x) :$$

类型各项的线性组合.

对于(19.16)类型的 $T$ 乘积,Wick 定理的表述只具有这样的特点,即它不应该考虑同一正规乘积中各算符之间的时序收缩.

作为示例,我们举出旋量场的二个流算符:

$$J^m(x) = : \bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x) : \quad 和 \quad J^n(y) = : \bar{\psi}(y)\gamma^n\psi(y) :.$$

将其 $T$ 乘积化为正规形式,应用 Wick 定理,考虑到 $\overbrace{\psi(x)\psi(y)}$ 和 $\overbrace{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)}$ 两收缩等于零,不考虑 $\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(x)}$ 和 $\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(y)}$ 两收缩,我们得到

$$T(J^m(x), J^n(y)) = T(:\bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x):, :\bar{\psi}(y)\gamma^n\psi(y):) =$$

$$= :\bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^n\psi(y): + :\overbrace{\bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^n\psi(y)}: +$$

$$+ :\bar{\psi}(x)\gamma^m\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^n\psi(y): + :\overbrace{\bar{\psi}(x)\gamma^m\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^n\psi(y)}:.$$

注意到根据(19.9)式,

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \frac{1}{i}S^c(x-y),$$

和

$$\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi(y)} = -\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(x)} = iS^c(y-x),$$

考虑到对旋量指标求和,最后得到

$$T(J^m(x), J^n(y)) = :J^m(x)J^n(y): - i:\bar{\psi}(y)\gamma^nS^c(y-x)\gamma^m\psi(x):$$

$$-i:\bar{\psi}(x)\gamma^mS^c(x-y)\gamma^n\psi(y): + \mathrm{Sp}(S^c(x-y)\gamma^nS^c(y-x)\gamma^m). \qquad (19.17)$$

最后注意到,从(19.16)式出发也可以定义形式上更普遍的正规乘积的$T$乘积:

$$T(:A_1(x_1)\cdots A_n(x_n):\cdots:D_1(z_1)\cdots D_m(z_m):) \qquad (19.18)$$

作为算符

$$A_1(x_1)\cdots D_m(z_m)$$

的含有一切可能收缩的正规乘积之和,但此处要除去同一正规乘积中各算符的相互收缩.

根据$T$乘积的这个定义,可以引入多重定域性算符的$T$乘积:

$$T(A(x_1,\cdots,x_n)\cdots D(z_1,\cdots,z_m)), \qquad (19.19)$$

将它用(19.18)类型的线性组合来表示. 由于算符$A,\cdots,D$中含有大量宗量,在此情况下,根据时序来作$T$乘积(19.19)的直接定义,并不方便.

由此可见,实质上$T$乘积是新的代数运算,它的引进可以和通常乘积无关.

从数学观点来看,$T$乘积特别引人注意的原因在于它和通常乘积不同,在$T$乘积记号下算符可以对易,就象这些算符正是对易的或反对易的一样.

## §20. $S$矩阵化成正规式的方法

### 20.1. 散射矩阵系数的结构

现在来探讨将拉格朗日函数密度的$T$乘积化成正规形式的便利方案,由之决定散射矩阵中所出现的算符式$S_n(x_1,\cdots,x_n)$. 为了使叙述十分明了,从某一实际情况开始较为方便. 因此,我们来讨论电磁场和电子-正电子旋量场之间的相互作用. 根据习惯上的规定,我们认为电子是旋量场的正粒子,而正电子是反粒子. 因此旋量场的算符$a^{*\nu,+}$和$a^{\nu,-}$(参阅§12)分别描述电子的产生和消失,而算符$a^{\nu,+}$和$a^{*\nu,-}$分别描述正电子的产生和消失. 显然,由于我们的叙述是完全对称的,也可以认为正电子是正粒子,而电子是反粒子. 此时算符$a^{*\nu,+}$, $a^{\nu,-}$和$a^{\nu,+}$, $a^{*\nu,-}$的作用互相对换,而且只要改变我们所采用的通常的电流形式的符号

$$j^m(x) = -eJ^m(x) = -e:\bar{\psi}(x)\gamma^m\psi(x):. \qquad (20.1)$$

此处 $e$ 是电子的电荷值乘上 $\sqrt{4\pi}$，在我们所采用的自然单位制(§ 1)中[1]，它等于

$$e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}. \tag{20.2}$$

根据(8.7)式，电磁场和电子-正电子场的相互作用的拉格朗日函数密度具有形式：

$$\mathscr{L}(x) = -\sum_n : j^n(x)A_n(x) : = e\sum_n : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)A_n(x) :. \tag{20.3}$$

考虑到基本的时序收缩式(19.7)和(19.9)：

$$\overbrace{A_m(x)A_n(y)} = ig^{mn}D_0^c(x-y), \quad \overbrace{\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)} = -\overbrace{\bar{\psi}_\rho(y)\psi_\sigma(x)} = \frac{1}{i}S^c_{\sigma\rho}(x-y),$$

我们讨论 $S$ 矩阵

$$S(1) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int S_n(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = i^nT(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)) \tag{18.31}$$

中与拉格朗日函数密度(20.3)有关的个别项化成正规形式的程序. 一阶项已经写成正规形式：

$$S_1(x) = i\mathscr{L}(x) = ie : \bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) :. \tag{20.4}$$

我们得到二阶项为

$$S_2(x, y) = i^2T(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y)) = -e^2\sum_{m,n}T(: J^m(x)A_m(x) :: J^n(y)A_n(y) :).$$

由于电磁场和电子-正电子场的相互对易性，此处出现的 $T$ 乘积可以表示为两个 $T$ 乘积相乘的形式：

$$T(J^m(x)J^n(y))T(A^m(x)A^n(y)).$$

在上一节(19.17)式中，我们已经展开了第一个乘子 $T(J^m(x)J^n(y))$，而第二个乘子可以利用公式(19.3)和电磁场收缩(19.7)，按初等方式展开. 因此得到：

$$\begin{aligned}
S_2(x, y) = &-e^2\sum_{m,n}(:A_m(x)A_n(y): + ig^{mn}D_0^c(x-y))\{:J^m(x)J^n(y): - \\
&-i:\bar{\psi}(y)\gamma^nS^c(y-x)\gamma^m\psi(x): - i:\bar{\psi}(x)\gamma^mS^c(x-y)\gamma^n\psi(y): + \\
&+\mathrm{Sp}(S^c(x-y)\gamma^nS^c(y-x)\gamma^m)\} = \\
= &-e^2\sum_{m,n}\{:J^m(x)A_m(x)J^n(y)A_n(y): + i:J^m(x)J^n(y):g^{mn}D_0^c(x-y) - \\
&-i:\bar{\psi}(y)\gamma^nA_n(y)S^c(y-x)\gamma^mA_m(x)\psi(x): - \\
&-i:\bar{\psi}(x)\gamma^mA_m(x)S^c(x-y)\gamma^nA_n(y)\psi(y): + \\
&+g^{mn}:\bar{\psi}(y)\gamma^nS^c(y-x)D_0^c(x-y)\gamma^m\psi(x): + \\
&+g^{mn}:\bar{\psi}(x)\gamma^mS^c(x-y)D_0^c(x-y)\gamma^n\psi(y): + \\
&+\mathrm{Sp}:S^c(x-y)\gamma^nA_n(y)S^c(x-y)\gamma^mA_m(x): + \\
&+ig^{mn}D_0^c(x-y)\mathrm{Sp}(S^c(x-y)\gamma^nS^c(y-x)\gamma^m)\}.
\end{aligned} \tag{20.5}$$

---

1) 更精确的值是 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.036}$.

在表式(20.4)和(20.5)中，取矩阵算符写法的顺序使得在正规乘积记号下算符旋量 $\bar{\psi}$ 和 $\psi$ 的位置总是按照确定的原则. 根据(20.3)式，在每一 $\mathscr{L}$ 中出现旋量 $\bar{\psi}$ 和 $\psi$ 各一. 因此在 $T$ 乘积记号下，$n$ 阶项含有 $n$ 个 $\bar{\psi}$ 算符和 $n$ 个 $\psi$ 算符. 在 $T$ 乘积化为正规形式过程中，某些对算符 $\bar{\psi}(x_i)$, $\psi(x_j)$ 用相应的收缩来代替. 因此，当 $T$ 乘积中个别项化成正规形式时，所得表式中的每一项有相同个数的算符 $\bar{\psi}$ 及 $\psi$ [例如(20.5)式中各项]. 同时，每一 $\bar{\psi}(x_k)$ 可以按照收缩中宗量的序列与确定的 $\psi(x_{j_k})$ 相对应:

$$\overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_{i_k})},\ \overbrace{\psi(x_{i_k})\bar{\psi}(x_{l_k})},\ \cdots,\ \overbrace{\psi(x_{m_k})\bar{\psi}(x_{j_k})}. \tag{20.6}$$

因此，一定可以将正规乘积中的自由算符 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 分成有相同宗量的对（如果某一 $\mathscr{L}(x)$ 中 $\psi$ 与 $\bar{\psi}$ 两个算符均不组成收缩时，也是如此），或者其宗量与相应的 $S^c$ 函数的一连串宗量相联系.

我们规定自由算符的写法，使得组成对的算符并列(其间只能插有 $c$ 函数)，而在每一对中，$\bar{\psi}(x_k)$ 总在 $\psi(x_{j_k})$ 之左，也就是形式为

$$:\bar{\psi}(x_1)\psi(x_{i_1})\bar{\psi}(x_2)\psi(x_{i_2})\cdots\bar{\psi}(x_k)\psi(x_{i_k}):. \tag{20.7}$$

对与对之间的对易并不改变正规乘积之值，因此对的次序并无关系. 在(20.4)式及(20.5)式中所有项写成(20.7)的形式. 以后我们总保持这种写法；用这种写法，可以简单地得出当将 $T$ 乘积展成(18.31)形式时如何确定任意项前符号的定则.

可以无困难地得到高阶项表式与(20.5)相同. 利用 $T$ 乘积的 Wick 定理，可以立即求得，系数 $S_n$（精确到 $i^n$）等于含有一切可能收缩的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)$ 的正规乘积之和. 利用这一定理，还可以得到将散射矩阵的成分(因而，矩阵元也如此)自动地写成正规形式的法则.

## 20.2. Feynman 图和对应定则

为了实现这种写法，将 $S$ 矩阵元和图形相对应，这些图是 Feynman (1949a, б)首先引进来的，我们称之为 Feynman 图.

为了引进 Feynman 图，必须建立确定的对应定则. 我们已经阐明，根据 Wick 定理，算符函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 可以表示为和的形式，其中每一项是若干个电磁场算符的收缩 $\overbrace{A(x)A(y)}$ 以及旋量场算符的收缩 $\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}$ 的乘积，并含有自由算符 $\bar{\psi}$, $\psi$, $A$ 的正规乘积以及若干个矩阵 $\gamma^n$.

显然，为了将我们所讨论的(20.3)式的散射矩阵元用图形来描述，只要给出两个收缩

$$\overbrace{A_m(x_i)A_n(x_j)},\quad \overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)},$$

三个自由算符

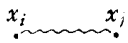
$$\psi(x_i),\ \bar{\psi}(x_j),\ A_n(x_k)$$

和 Dirac 矩阵 $\gamma^n$ 的图形表示，就已经足够.

因此规定收缩

$$\overbrace{A_m(x_i)A_n(x_j)} = \overbrace{A_n(x_j)A_m(x_i)} = ig^{mn}D_0^c(x_i - x_j)$$

对其宗量 $x_i$ 及 $x_j$ 为对称，在图形上用连接 $x_i$ 及 $x_j$ 两点之间的波纹线来表示:




可以认为这条线表示光子在 $x_i$ 与 $x_j$ 两点之间的运动.

不对称收缩

$$\overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}}(x_l) = \frac{1}{i} S^c(x_k - x_l)$$

在图形中与连接 $x_k$ 与 $x_l$ 两点的有方向直线相当. 按照如下的直观性的考虑选择连线的方向比较合理. 正如我们已经规定,我们认为算符 $\psi(x)$描述在 $x$ 点正电子的产生及电子的消失,而算符 $\bar{\psi}(x)$ 描述在 $x$ 点电子的产生及正电子的消失. 换句话说, 算符 $\psi(x)$ 仿佛相当于电子向 $x$ 点进入, 而 $\bar{\psi}(x)$ 相当于从这一点发出电子 (对正电子而言, 恰好相反).

因为旋量场$\psi$的粒子是电子, 自然可将收缩 $\overbrace{\psi(x_k)\bar{\psi}}(x_l)$ 在图形上对应于从 $x_l$ 点到 $x_k$ 点的有向线,即




用这样方式引进的方向线,可以认为描述电子在图形上 $x_l$ 与 $x_k$ 点之间的运动 (或者描述正电子从 $x_k$ 点到 $x_l$ 点的运动)[1].

自由算符 $A(x)$, $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 相当于从 $x$ 点到图形边缘的连线. 这时,算符 $A_m(x)$ 相当于无指向的波纹线(光子线):



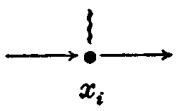

算符 $\psi(x)$ 相当于进入 $x$ 点的方向线(电子线):




而算符 $\bar{\psi}(x)$ 相当于离开 $x$ 点的方向线(电子线):




拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x_i)$中的 Dirac 矩阵 $\gamma^k$ 乘上相互作用常数 $e$ (参阅(20.3)), 相当于图形中 $x_i$ 点,从此点引出一条光子线,一条进入电子线和一条射出电子线:

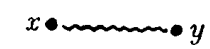
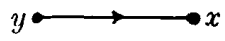
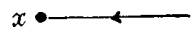
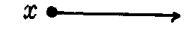
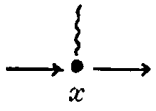



这种点称为图形的结点或顶点. 在表 1 中列出算符函数 $S_n$ 各乘子和 Feynman 图形各组元之间的对应定则.

---

1) 关于用这样方式引进的图形与实际发生过程的对应问题,可参阅 § 21.

表1　对应定则

| № п/п | 散射矩阵中乘子 | Feynman 图形的组成元 |
|---|---|---|
| 1. | 电磁场算符收缩<br>$\overbrace{A_n(x)\,A_m(y)} = ig^{mn}D_0^c(x-y)$ | 内部光子线<br> |
| 2. | 旋量场算符收缩<br>$\overbrace{\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)} = \frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x-y)$ | 内部电子线<br> |
| 3. | 正规乘积号内的自由算符 $A_m(x)$ | 外部光子线<br> |
| 4. | 正规乘积号内的自由算符 $\psi(x)$ | 射入外电子线<br> |
| 5. | 正规乘积号内的自由算符 $\bar{\psi}(x)$ | 射出外电子线<br> |
| 6. | 拉氏函数密度中 Dirac 矩阵 $\gamma^k$ 乘上 $e$<br>$e\gamma^k$ | 顶点<br> |

我们来建立对应定则，使得算符函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 表示成正规形式后，其中每一项所对应的图形由 $n$ 个顶点和若干条内外部光子线和电子线所组成. 由于相互作用拉格朗日函数密度(20.3)的定域性，每一顶点上进入并引出一条电子线. 因此，在一切图形中，电子线在各顶点上是相连结的，或者组成封闭图形，或者组成不封闭的折线，在图形的边缘开始并且终止. 此时收缩中宗量的序列和图形中各电子线的顶点的序列相对应，而在正规乘积中，自由算符对 $\bar{\psi}(x_i)\psi(x_j)$ 对应于各不封闭电子线的起点 $(x_{j_i})$ 和终点 $(x_i)$. 对应定则还有如下的显著特征：算符式 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$：

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i K_i(x_1, \cdots, x_n) : A(x_j) \cdots \bar{\psi}(x_k) \cdots \psi(x_l) \cdots :$$

中的系数函数 $K_i(x_1, \cdots, x_n)$ 完全由算符 $\psi$, $\bar{\psi}$ 和 $A$ 的时序收缩所组成，它和图形中内部线相对应，而正规乘积记号中的自由算符则和图形的外部线相对应.

作为示例，我们来研究 $S_2(x, y)$ 的表式(20.5)中一个二阶项

$$\begin{aligned} i^2e^2 : \overbrace{\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)\,\overbrace{\bar{\psi}(y)\hat{A}(y)\psi(y)}} : &= \\ &= e^2\mathrm{Sp}\{i:S^c(y-x)\hat{A}(x)iS^c(x-y)\hat{A}(y):\} = \\ &= -e^2\mathrm{Sp}\{:S^c(y-x)\hat{A}(x)S^c(x-y)\hat{A}(y):\}. \end{aligned} \tag{20.8}$$

利用对应定则，我们得到相应的 Feynman 图(图 3). (即所谓"光子的自能图形"，详细情况请参阅 § 24).




图3　光子自能图

作为第二个例子，我们考察 $S_3(x, y, z)$ 中的一个三阶项：

$$(ie)^3\sum_{m,n} :\bar{\psi}(x)\gamma^m A_m(x)\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)\hat{A}(y)\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(z)\gamma^n A_n(z)\psi(z):=$$

$$=-e^3\sum_n g^{nn}D_0^c(x-z):\bar{\psi}(x)\gamma^n S^c(x-y)\hat{A}(y)S^c(y-z)\gamma^n\psi(z):. \quad (20.9)$$

这时对应定则使我们得到图 4 中所示的图形.

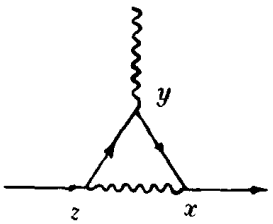
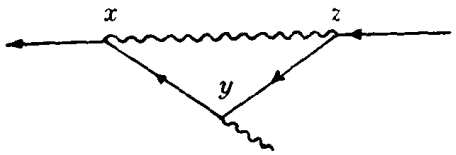



图 4　三阶顶点图

我们讨论最简单的图形(图 3 和 4 )，可以看出，沿电子线方向的运动恰相当于 $S$ 矩阵中相应项的矩阵元从右向左的次序. 例如，在第二种情况时，将图 4 表示成图 5 形式，我们得到非对易矩阵乘子

$$\bar{\psi}(x)\gamma^m S^c(x-y)\hat{A}(y)S^c(y-z)\gamma^n\psi(z),$$

其中非对易矩阵乘子的次序与(20.9)式完全相同.




$\bar{\psi}(x)\gamma^m S^c(x-y)\hat{A}(y)S^c(y-z)\gamma^n\psi(z)$

图　5

注意，根据上述定则，可使含收缩的正规乘积对应于一定的图形，但还可能引起符号错误. 因此对以上所建立的对应定则，应该补充符号定则.

为了这一目的，我们注意，只有在对应于电子封闭迴线的表式中，符号才可能发生错误. 事实上，根据对应定则，图 3 中图形对应于表式：

$$(ie)^2\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x),$$

此式与(20.8)式只差一符号. 也很明显，在更一般情况下，对应于图形中每一封闭迴线的一组收缩，有一个符号上的差别与这些迴线的次序无关. 由此可得出结论，根据对应定则所得到的表式，应该附带乘上

$$\eta=(-1)^l, \quad (20.10)$$

其中 $l$ 是所讨论图形中封闭迴线的个数.

## 20.3. 示例

用例子来说明对应定则以及符号定则(20.10)的应用. 我们求作四阶算符函数 $S_4(x, y, z, t)$ 中与

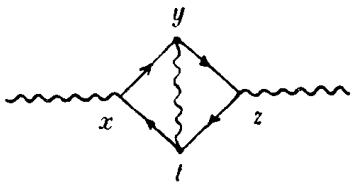
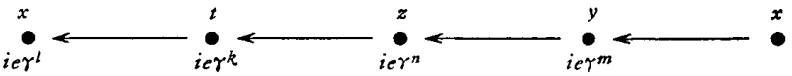



图 6

图 6 中图形相对应的项. 从 $x$ 点沿着电子迴线,得到矩阵乘子




$$\frac{1}{i}S^c(x-t) \qquad \frac{1}{i}S^c(t-z) \qquad \frac{1}{i}S^c(z-y) \qquad \frac{1}{i}S^c(y-x) \tag{20.11}$$

$$= -\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(t)}; \quad = -\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}(z)}; \quad = -\overbrace{\psi(z)\bar{\psi}(y)}; \quad = -\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(x)}.$$

将乘积(20.11)乘上光子因子

$$A_n(z),\ ig^{mk}D_0^c(y-t),\ A_l(x),$$

及

$$\eta = (-1)^1 = -1,$$

再对旋量指标和电磁場的极化指标 $(k, l, m, n)$ 求和,得到表式

$$-ie^4\sum_{k,m}\mathrm{Sp}[:(S^c(x-t)\gamma^k g^{mk}D_0^c(t-y)S^c(t-z)\hat{A}(z)S^c(z-y)\gamma^m S^c(y-x)\hat{A}(x)):]=$$

$$= -e^4\sum_{k,m}\mathrm{Sp}[:\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(t)}\gamma^k\overbrace{A_k(t)\,\psi(t)\bar{\psi}(z)\hat{A}(z)\psi(z)\bar{\psi}(y)}\gamma^m A_m(y)\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(x)}A(x):]=$$

$$= ie^4\sum_{k,m}:(\overbrace{\bar{\psi}(t)\gamma^k\overbrace{A_k(t)\,\psi(t)\bar{\psi}(z)\hat{A}(z)\psi(z)\bar{\psi}(y)}\gamma^m A_m(y)\psi(y)\bar{\psi}(x)}\hat{A}(x)\psi(x)):,$$

它是函数

$$S_4(x, y, z, t) = i^4T(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(z)\mathscr{L}(t))$$

含时序收缩的正规乘积的展开式中的一项.

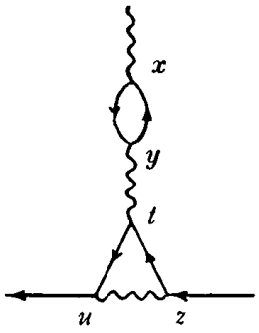
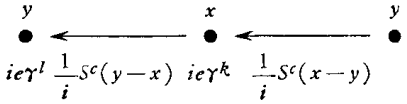
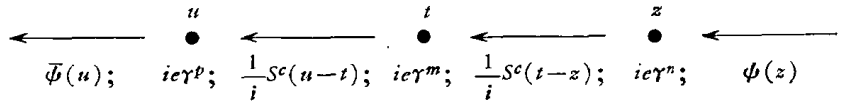



图 7

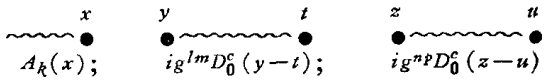
作为第二个示例,我们求作五阶算符函数 $S_5(x, y, z, t, u)$ 之项, 它相应于图 7 中含有二条电子迴线的图形. 我们循序写出与封闭迴线相应的矩阵乘子:



和非封闭迴线相应的矩阵乘子：




将上式乘上光子乘子：




及乘上

$$\eta = (-1)^1 = -1,$$

对极化指标 $(k, l, m, n, p)$ 和旋量指标求和，我们得到表式为

$$-(ie)^5 \sum_{l,m,n,p} : \mathrm{Sp}\Big(\gamma^l \frac{1}{i}S^c(y-x)\hat{A}(x)\frac{1}{i}S^c(x-y)ig^{lm}D_0^c(y-t)\times$$

$$\times \bar{\psi}(u)\gamma^p \frac{1}{i}S^c(u-t)\gamma^m \frac{1}{i}S^c(t-z)ig^{np}D_0^c(z-u)\gamma^n\psi(z)\Big): =$$

$$= -(ie)^5 \sum_{l,m,n,p} : \mathrm{Sp}\,(\gamma^l \overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(x)}\hat{A}(x)\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}) \overbrace{A_l(y)A_m}(t)\times$$

$$\times \bar{\psi}(u)\gamma^p\overbrace{\psi(u)\bar{\psi}(t)}\gamma^m\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}(z)}\overbrace{A_n(z)\ A_p}(u)\gamma^n\psi(z) : =$$

$$= (ie)^5 \sum_{l,m,n,p} : \bar{\psi}(u)\gamma^p \times$$

$$\times A_p(u)\overbrace{\psi(u)\bar{\psi}(t)}\gamma^m A_m(t)\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}(z)}\gamma^n A_n(z)\psi(z)\overbrace{\bar{\psi}(y)\gamma^l A_l(y)\psi(y)}\overbrace{\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)}\psi(x) :$$

它是函数

$$S_5(x, y, z, t, u) = i^5 T(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(z)\mathscr{L}(t)\mathscr{L}(u))$$

的含时序收缩的正规乘积展开式中的一项.

## 20.4. 结语

因此，我们已经证实，对应定则和符号定则一起实际上可以将函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 各项自动地写成正规形式. 显然，为了得到 $n$ 阶算符函数的完全表式 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$，必须根据 Wick 定理写出相应于含 $n$ 个顶点的一切可能的 $n$ 阶图形的正规乘积. 例如，当

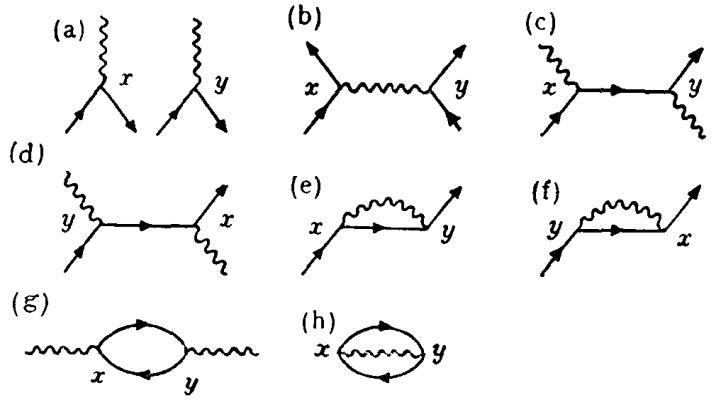



图 8

$n=2$ 时，应该写出相应于图形(图 8)的各项，将二阶的可能图形完全包括进去，相应的正规乘积之和给出 $S_2(x, y)$ 的表式(20.5).

以上我们对 $S$ 矩阵各项的结构进行的详细分析，只限于与电磁场及电子-正电子场的相互作用拉格朗日函数密度(20.3)有关的情况. 完全清楚，利用 Feynman 图形来构成 $S$ 矩阵各项的方法，毫无困难地可以应用于任何其他的定域性相互作用. 此时，不言而喻，应该相应地补充对应定则. 例如，核子旋量场和赝标量介子场的赝标量相互作用拉格朗日函数密度具有形式:

$$\mathscr{L}(x)=g\sum_{i=1,2,3}:\bar{\Psi}(x)\gamma^5\tau_i\Psi(x)\varphi_i(x):, \tag{20.12}$$

其中 $g$ 是相互作用常数，$\Psi$ 和 $\bar{\Psi}$ 是核子的八分量旋量，$\tau_i$ 是同位旋的三个矩阵，$\varphi_i$ 是带荷的中性介子场的三个函数(这方面的较详细情况，请参阅 § 33.1). 这一拉格朗日函数密度的对应定则，完全类似表 1 中所罗列的定则. 其中核子旋量 $\Psi$ 起着旋量 $\psi$ 的作用，势 $A$ 用 $\varphi$ 来代替，而矩阵 $e\gamma^n$ 用 $g\gamma^5\tau_i$ 来代替. 在相应图形中的每一顶点，将有一条介子线及两条核子线.

当讨论 $\beta$ 衰变过程时，利用(8.8)类型的拉格朗日函数密度:

$$\mathscr{L}(x)=g':\bar{\Psi}(x)O\Psi(x)\bar{\psi}(x)O\nu(x):, \tag{20.13}$$

上式含有三种形式的旋量场，即核子的 $\Psi$，电子-正电子的 $\psi$ 以及中微子的 $\nu$，在这种情况下，应该对算符 $\Psi$, $\bar{\Psi}$, $\psi$, $\bar{\psi}$, $\nu$, $\bar{\nu}$ 及其相互的收缩构成对应定则，在相应的图形的顶点上将有四条线: 两条核子线，一条电子线和一条中微子线. 此处只有核子线在图形中有连续性.

不同性质的相互作用结合在一起的复杂过程，也是有意义的. 中性电荷的中子磁矩似乎应该表示为中子和电磁场的多级相互作用过程的结果: 设想中子一开始转化为 $\pi^-$ 介子和质子，然后荷电粒子之一($\pi^-$ 或 $p$)与电磁场相互作用，最后 $\pi^-$ 介子及质子转化为中子. 这一过程可以明显地表示成图 9 中所示的图形. 显然，$S$ 矩阵的相应项相当于两个拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{mes}}$ ((20.12) 类型) 以及一个拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{e.d.}}$ ((20.3) 类型)的 $T$ 乘积:

$$T(\mathscr{L}_{\text{mes}}(x)\mathscr{L}_{\text{e.d.}}(y)\mathscr{L}_{\text{mes}}(z)).$$

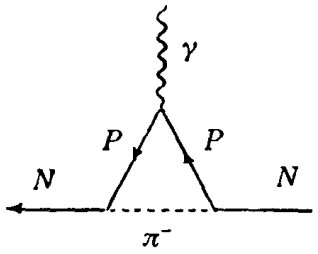



图 9

这些图形与 $S$ 矩阵各项的对应定则，就是拉格朗日函数密度(20.3)式和(20.12)式的对应定则的总和.

因此，我们看到，利用 Feynman 图形来表示 $S$ 矩阵各项，是适用于任何定域性相互作用拉格朗日函数密度的普遍方法，用此法可以自动地求得我们感到有兴趣的过程在 $S$ 矩

陣中的相应展开项.

## §21. 計算散射矩陣元的 Feynman 定則

### 21.1. 化为动量表象

我们来讨论散射矩陣中矩陣元的计算过程，当计算各种散射过程和粒子相互转化过程时，此种计算占有中心的地位.

计算矩陣元时，化为动量表象最为方便，因为在动量表象中场算符 $u(x)$ 和因果函数 $\Delta^c(x-y)$ 具有简单的结构:

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)u(k)dk,$$

$$u(k)=\sum_\sigma v^\sigma(k)a_\sigma(k),$$

$$\Delta^c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}\Delta(k)dk,$$

$$\Delta(k)=\frac{P(k)}{m^2-k^2-i\varepsilon}.$$

我们将 $S$ 矩陣写成动量表象，根据 Wick 定理，散射矩陣中第 $n$ 阶之项化成正规形式后，用以下各项之和来表示:

$$\int dx_1\cdots\int dx_nK_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n):\cdots u_\alpha(x_j)\cdots u_\beta^\dagger(x_i)\cdots:. \tag{21.1}$$

此时系数函数 $K_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}(x_1,\cdots,x_n)$ 相当于 Feynman 图形的內部线，而且是所讨论的场函数收缩的多重乘积. 正规乘积

$$:\cdots u_\alpha(x_j)\cdots u_\beta^\dagger(x_i)\cdots: \tag{21.2}$$

含有相当于 Feynman 图的外部线的自由算符.

为确定起见，我们再一次限于讨论电磁场和电子-正电子旋量场的相互作用情况，用拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}(x)=e:\bar\psi(x)\hat A(x)\psi(x): \tag{20.3}$$

来描述.

在此情况下，系数函数是电磁场的收缩:

$$\left.\begin{aligned}\overbrace{A_m(x)A_n(y)}&=ig^{mn}D_0^c(x-y),\\ D_0^c(x-y)&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}dk,\end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

和电子-正电子场的收缩:

$$\left.\begin{aligned}\overbrace{\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)}&=\frac{1}{i}S_{\alpha\beta}^c(x-y),\\ S_{\alpha\beta}^c(x-y)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip(x-y)}\frac{(m-\hat p)_{\alpha\beta}}{m^2-p^2-i\varepsilon}dp\end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

的乘积，而正规乘积(21.2)式含有电磁场及电子-正电子场的算符函数，其动量展开式如下：

$$A_m(x) = A_m^{(+)}(x) + A_m^{(-)}(x),$$

$$A_m^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm kx} \delta(k^2) A_m^{(\pm)}(k) dk,$$

$$A_m^{(\pm)}(k) = \sum_{\nu=0,1,2,3} e_m^\nu a_\nu^{(\pm)}(k); \tag{21.5}$$

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x),$$

$$\psi_\sigma^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2) \psi_\sigma^{(\pm)}(p) dp,$$

$$\psi_\sigma^{(\pm)}(p) = \sum_{\nu=1,2} v_\sigma^{\nu,\pm}(p) a_\nu^{(\pm)}(p); \tag{21.6}$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x),$$

$$\bar{\psi}_\sigma^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2) \bar{\psi}_\sigma^{(\pm)}(p) dp,$$

$$\bar{\psi}_\sigma^{(\pm)}(p) = \sum_{\nu=1,2} \bar{v}_\sigma^{\nu,\pm}(p) a_\nu^{*\pm}(p). \tag{21.7}$$

将(21.3)—(21.7)式代入(21.1)式中，我们看到，对变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的积分化为计算如下类型的独立积分：

$$\int dx_j\, e^{ix_j(p_1 - p_2 + k)} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 + k). \tag{21.8}$$

现在已经有可能来建立对应定则，以构成动量表象中 $S$ 矩阵元. 但是，讨论从 $S$ 矩阵的项来计算矩阵元的过程，并由此直接表述矩阵元构成的对应定则是比较方便的. 这些定则是 Feynman (1949a,6)首先提出的，因此名为 Feynman 定则.

## 21.2. 矩阵元的计算

我们来讨论正规乘积 (21.2) 在含有确定动量的粒子的各种态之间的矩阵元. 在 § 9 中已经阐明，含有 $n$ 个不同种类的并且具有确定动量值的粒子的态振幅可以表成形式：

$$\Phi_{\cdots k\cdots} = a_1^{(+)}(\mathbf{k}_1) a_2^{(+)}(\mathbf{k}_2) \cdots a_n^{(+)}(\mathbf{k}_n) \Phi_0 =$$

$$= \int dk_1^0 \sqrt{2k_1^0}\, \delta(k_1^2 - m^2) a_1^{(+)}(k_1) \cdots \int dk_n^0 \sqrt{2k_n^0}\, \delta(k_n^2 - m_n^2) a_n^{(+)}(k_n) \Phi_0. \tag{21.9}$$

当计算矩阵元

$$\Phi^*_{\cdots k'\cdots} : \cdots u_\alpha(x_i) \cdots u_\beta^\dagger(x_i) \cdots : \Phi_{\cdots k\cdots} \tag{21.10}$$

时，产生算符 $u^{(+)}$ 和 $u^{\dagger(+)}$ 应和振幅 $\Phi^*_{\cdots k'\cdots}$ 中的消失算符 $a_i^{(-)}$ 相对易，而算符 $u^{(-)}$ 和 $u^{\dagger(-)}$ 应和振幅 $\Phi_{\cdots k\cdots}$ 中的算符 $a_i^{(+)}$ 相对易，直到其中并无一个作用于 $\Phi_0$ 或 $\Phi_0^*$ 上，不然将为零.

在 § 16 的开始，已经详细讨论过这些散射矩阵元的计算过程. 在那里已经阐明，散射矩阵元(21.10)将不等于零，如果对于每一算符

$$u(x) = u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x),$$

可以找到相应场在$\Phi$中的一个算符$a^{*(+)}$或在$\Phi^*$中的一个$a^{*(-)}$与之相互对易而"消去". 因此，如果每一个场在初态$\Phi_{\ldots k'\ldots}$和终态$\Phi_{\ldots k\ldots}$中粒子的总和恰好等于正规乘积(21.2)中该场的算符函数的个数，则(21.10)式将不等于零. 矩阵元(21.10)在以下情况下也将不等于零，如果除去使正规乘积"消去"的算符以外，还在$\Phi^*_{\ldots k'\ldots}$和$\Phi_{\ldots k\ldots}$中含有互相消去的算符. 此时态$\Phi^*_{\ldots k'\ldots}$和$\Phi_{\ldots k\ldots}$的粒子总数比(21.2)式中算符的个数超过某一偶数. 但是如同§16中已经证明的，只有当上述的"多余"粒子在状态$\Phi_{\ldots k'\ldots}$及$\Phi_{\ldots k\ldots}$的动量相同时，矩阵元才不等于零.

我们限定讨论粒子的初态的动量等于终态的动量时情况，我们得到结论，矩阵元(21.10)可以表示为算符

$$u^{(-)}(x_j) \quad 与 \quad \int \theta(k^0) a^{*(+)}_\rho(k)\delta(k^2-m^2)\sqrt{2k^0}\,dk^0 = a^{*(+)}_\rho(\mathbf{k}),$$

及算符

$$u^{(+)}(x_l) \quad 与 \quad \int \theta(k^0) a^{*(-)}_\sigma(k)\delta(k^2-m^2)\sqrt{2k^0}\,dk^0 = a^{*(-)}_\sigma(\mathbf{k}).$$

对易后的乘积，它们的计算要利用写成以下形式:

$$\delta(p^2-m^2)\delta(k^2-m^2)\{a^{(-)}_\sigma(p)a^{*(+)}_\rho(k)\} = \delta_{\sigma\rho}\delta(p-k)\delta(k^2-m^2)$$

的对易律，我们得到

$$\begin{aligned}\{u^{(-)}(x_j),\ a^{*(+)}_\rho(\mathbf{k})\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk^0\theta(k^0)\sqrt{2k^0}\int dp e^{-ipx_j}\sum_\sigma v^{\sigma,-}(p)\ \times\\ &\times\{a^{(-)}_\sigma(p),\ a^{*(+)}_\rho(k)\}\delta(k^2-m^2)\delta(p^2-m^2) =\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk^0\theta(k^0)\sqrt{2k^0}\int dp e^{-ipx_j}\sum_\sigma v^{\sigma,-}(p)\delta(p-k)\delta(k^2-m^2)\delta_{\sigma\rho} =\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk^0\theta(k^0)\sqrt{2k^0}\delta(k^2-m^2)e^{-ikx_j}v^{\rho,-}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v^{\rho,-}(\mathbf{k})e^{-ikx_j},\end{aligned} \tag{21.11}$$

其中

$$v^{\rho,-}(\mathbf{k}) = \left.\frac{v^{\rho,-}(k)}{\sqrt{2k^0}}\right|_{k^0=\sqrt{k^2+m^2}}.$$

通过类似的计算，我们还求到

$$\{a^{*(-)}_\rho(\mathbf{k}),\ u^+(x_j)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v^{\rho,+}(\mathbf{k})e^{ikx_j}. \tag{21.12}$$

因此矩阵元(21.10)对易以后，实际上可以用乘积形式来表示:

$$\prod_{(k)}\frac{v^-(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ikx_j}\prod_{(k')}\frac{v^+(\mathbf{k}')}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik'x_i}, \tag{21.13}$$

其中乘子$(2\pi)^{-3/2}e^{-ikx}v^-(\mathbf{k})$相当于初态的粒子，而乘子$(2\pi)^{-3/2}e^{ik'x}v^+(\mathbf{k}')$相当于终态的粒子.

我们现在将所得结果从它与Feynman图形相对应的观点来研究. 最重要的是这一事实: 从矩阵元结构而言，图中任一外部线相当于初态或终态时的实际粒子. 根据这一情况，可以认为Feynman图形是基本粒子相互作用实际发生过程的草图式描述. 此时，过程的类型决定于图中顶点的构造，后者又和拉格朗日函数密度有关.

显然，可以将旋量电动力学拉格朗日函数密度 $e\bar{\psi}\hat{A}\psi$ 的结点认为是下述过程的草图式描述，即正电子(或电子)吸收(或发射)光子的过程，电子-正电子偶产生及湮没过程(有光子被吸收或发射)，也即是图 10 中所表示的各种类型的过程（并参阅图 1）. $\beta$ 相互作用的拉格朗日函数密度的结点描述有四个粒子同时参加时的相互作用行为，即两个核子，一个电子(正电子)及一个中微子. 在 § 8 中已经列举这些过程的详细分类[参阅(8.8)].

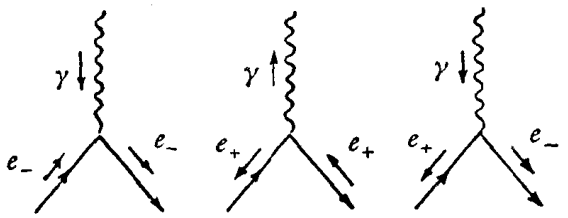



图 10

当化为动量表象(21.8)时，出现了形式为 $\delta(p-p'+k\cdots)$ 的 $\delta$ 函数，显然，此函数表明了在每一独立反应中相互作用粒子的能量-动量守恒定律. 将所有这些函数的宗量相加，我们得到条件：

$$\sum p-\sum p'=0, \tag{21.14}$$

这条件表明参与上述过程中的所有实际粒子的能量-动量四维矢量的守恒定律.

为了表述矩阵元与 Feynman图形之间的具体对应定则，我们回到旋量电动力学(20.3)的情况，不难证明，在初态具有动量 $\mathbf{p}$ 的电子对应于 $\psi(x)$ 和 $a_\nu^{*(+)}(\mathbf{p})$ 相对易后的结果，即等于

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v^{\nu,-}(\mathbf{p})e^{-ipx},$$

动量为 $\mathbf{p}$ 的正电子对应于因子

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p})e^{-ipx},$$

在终态的电子对应于因子

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p})e^{ipx},$$

在终态的正电子对应于因子

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v^{\nu,+}(\mathbf{p})e^{ipx},$$

在初态具有动量 $\mathbf{k}$，极化 $e_n$ 的光子对应于 $A_m(x)$ 与 $a_n^\dagger(\mathbf{k})$ 相对易的结果，即等于

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{g^{nn}e_m^n}{\sqrt{2k^0}}e^{-ikx},$$

最后在终态的光子对应于因子

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{g^{nn}e_m^n}{\sqrt{2k^0}}e^{ikx}.$$

从这里我们看到，进入 $x$ 点的动量为 $\mathbf{k}$ 的粒子相应于负频率指数 $\exp(-ikx)$，而离

开 $x$ 点的粒子相应于因子 $\exp(ikx)$. 因此，对于图形的内部线，我们规定仍保持这一对应是方便的.

与此相应，收缩 $\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)$ 描述电子从 $y$ 点向 $x$ 点的运动过程，现在采用公式

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int e^{-ip(x-y)}\frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}dp \tag{21.15}$$

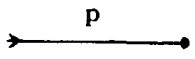
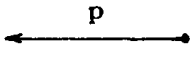
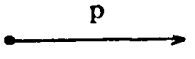
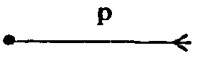
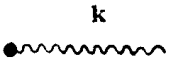
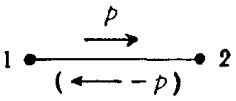
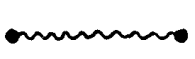
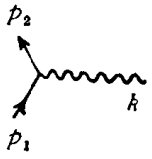
来代替表式(21.4).

此时四维动量 $p$ 可以解释为离开 $y$ 点（因子 $\exp(ipy)$）进入 $x$ 点（因子 $\exp(-ipx)$）的电子的四维动量. 关系式(21.15)显然描述电子运动比较方便，而(21.4)式描述正电子的运动较为方便. 但是今后我们将对正电子利用(21.15)式，只要考虑到在此情况下式中四维动量 $p$ 等于正电子的四维动量，而符号相反.

考虑到(21.8)式，对变量 $x_1, \cdots, x_n$ 积分，我们得到表 2 中所列举的对应定则.

表 2　动量表象矩阵元的对应定则

（不计符号定则及对称性）

| №п/п | 粒子和它的态 | 矩阵元中的因子 | Feynman 图的组成元 |
|---|---|---|---|
| 1. | 初态中动量为 p 的电子 | $\frac{v^{\nu,-}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}}$ |  |
| 2. | 初态中动量为 p 的正电子 | $\frac{\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}}$ |  |
| 3. | 终态中动量为 p 的电子 | $\frac{\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}}$ |  |
| 4. | 终态中动量为 p 的正电子 | $\frac{v^{\nu,+}(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}}$ |  |
| 5. | 初态或终态中的极化为 $e_n$、动量为 k 的光子 | $-\frac{g^{nn}e_m^n}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}=\frac{e_m^n}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}(n\neq 0)$ |  |
| 6. | 电子从 1 至 2 的运动（或正电子由 2 至 1） | $\frac{1}{(2\pi)^4 i}\times\frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}$ |  |
| 7. | 光子在求和指标为 $m$ 和 $n$ 的顶点间的运动 | $\frac{g^{mn}}{(2\pi)^4 i}\frac{1}{k^2+i\varepsilon}$ |  |
| 8. | 求和指标为 $m$ 的结点，其中进入电子线 $p_1$，光子线 $k$，而离开电子线 $p_2$ | $ie\gamma^m(2\pi)^4\delta(p_2-p_1-k)$ |  |

## 21.3. 对称性的考虑

当构成动量表象的矩阵元时，还必须考虑到散射矩阵 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的系数的对称性. 例如，$S_2(x_1, x_2)$ 系数对它的宗量 $x_1$ 和 $x_2$ 的对称性，使得 Compton 散射的图形（图 8 c, d）在 $x$ 表象中与 $S_2(x_1, x_2)$ 中的两项相对应，即

$$:\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\overbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2):$$

及

$$:\overbrace{\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)}\psi(x_2):=:\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1):,$$

以上两式对 $x_1$ 及 $x_2$ 积分后得到相同的表式. 不难证明,对于一般情况, 必须这样来考虑 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的对称性: 如果 $n$ 个顶点中有 $m$ 个顶点在图形中以不对称方式出现, 就必须将所对应的矩阵元乘上 $n!/(n-m)!$. 若图形的 $n$ 个顶点中有分别为 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k$ 个的 $k$ 组顶点对称出现,则此时整个表式应当乘上

$$\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_k!}.$$

应当指出以下情况: 在初态和终态中若干粒子具有同一的性质(如有几个光子、电子等等). 为叙述简单起见,讨论有$N$个相同粒子的终态. 此时振幅

$$\Phi^*_{\cdots p'\cdots} = \Phi_0^* a^{(-)}(\mathbf{p}_1)\cdots a^{(-)}(\mathbf{p}_N) \tag{21.16}$$

中的消失算符可以和正规乘积(21.2)中的相应算符 $a_i^{(+)}(\mathbf{p})$ 以 $\nu!$ 种不同方式进行对易. 所得表式中每一项相应于外部线动量值的不同标记法. 例如,电子-正电子对的双光子湮没由相应于图 11 中两个图形的矩阵元的和来描述, 在此图形中, $p_1$ 表示电子的动量, $p_2$ 表示正电子的动量, $k_1$ 和 $k_2$ 表示光子的动量. 因此计算这种情况的矩阵元并没有困难. 只要考虑到含有$N$个相同粒子的态的归一化振幅(详细参阅 § 22)的形式为

$$\Phi_{\cdots p\cdots} = \frac{a^{(+)}(\mathbf{p}_1)\cdots a^{(+)}(\mathbf{p}_N)}{\sqrt{N!}}\Phi_0, \tag{21.17}$$

而当存在相同的 Fermi 子时,最后的散射矩阵应该对任何 Fermi 粒子对的对易是反对称化了的.

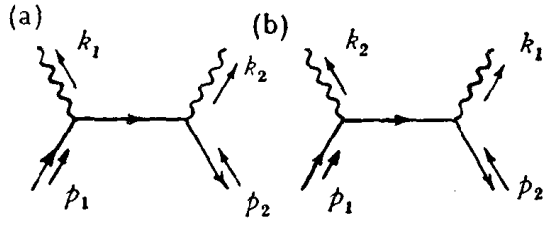



图 11

总结讨论的结果, 我们看到, 为了写出任一粒子的散射过程或相应转化过程的矩阵元,必须根据表 2 中列举的对应定则,将这一过程用一个或几个 Feynman 图形来描述, 求出相应的矩阵元, 利用符号定则(20.10)确定矩阵元的符号, 再将所得的表式进一步乘上因子

$$\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_k!}\frac{1}{\prod_j(\sqrt{N_j!})}, \tag{21.18}$$

并且校验相同 Fermi 子的反对称性.

注意, 引进的 Feynman 图形实际上同时描述几个过程.

例如,图 11a 首先描述如下的过程: 其中电子 $p_1$ 先放出光子 $k_1$, 然后与正电子 $p_2$ 一起湮没并发出光子 $k_2$. 此外,这同一图形还描述另一过程,其中正电子 $p_2$ 先发射光子 $k_2$, 然后与电子 $p_1$ 一起湮没,并

产生光子 $k_1$. 在第一种情况，内部电子线即为电子运动的方向，在第二种情况，正电子在相反方向上运动.

在一般情况下，可以认为每一内部电子线或者描述四维动量为 $p$ 的电子(当 $p^0>0$ 时)，或者描述四维动量为 $-p$ 的正电子(当 $p^0<0$ 时)，而每一内部光子线描述沿两个可能方向之一运动的光子，因为粒子运动的全部图景整体与能量-动量守恒定律不相矛盾：

$$p - p' \pm k = 0,$$

此式从矩阵元的顶点结构推出. 此时因果函数 $\Delta^c$ 的正频率部分描述在一个方向上的运动，而负频率部分描述在相反方向上的运动.

用这种描述方法时，只在中间态出现的粒子(例如，图 8b 类型的图形中的光子)称为虚粒子. 实际粒子的中间态，例如图 11a 的图形中的电子态 $p_1-k_1$ (或正电子态 $p_2-k_2=-(p_1-k_1)$)，则称为虚态.

实际粒子的虚态和虚粒子的态与实际粒子态的差别如下：在前两状态中，能量和动量互相没有关系，即在虚态中不满足以下关系：

$$p^2 - m^2 = 0.$$

## 21.4. 外场所产生的散射

我们来讨论粒子受到外界经典场散射过程的矩阵元的结构. 这些外界场用非量子化势 $u^{ext}(x)$ 来描述，它是空间坐标 $\mathbf{x}$ 和时间 $x^0$ 的已知函数. 例如，外界经典电磁场用势 $A_n^{ext}(x)$ 来描述. 我们所讨论的旋量电动力学的相互作用的总拉格朗日函数密度现在具有形式：

$$\mathscr{L}(x) = -\sum_n j^n(A_n(x) + A_n^{ext}(x)). \tag{21.19}$$

在散射矩阵中，相应地将出现含有非量子场 $A^{ext}$ 的项. 矩阵元中有外界势的动量表象为

$$A_n^{ext}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{iqx}A_n^{ext}(q)dq. \tag{21.20}$$

由于上式的非算符性，不应该将它与态振幅内的光子算符相对易，而且与图形外部线所表示的实际粒子没有关系.

因此我们规定，因子

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}A^{ext}(k) \tag{21.21}$$

对应于波纹线，该线从拉格朗日函数密度项 $j^n(x)A_n^{ext}(x)$ 所对应的顶点引出，而到达象征散射中心的阴线小圆为止(图 12).

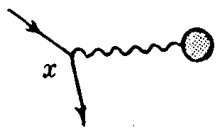



图 12

将与经典场的相互作用表示为相互作用粒子(此处指电子)与经典场源交换虚光子的

这种描述方法，符合于现象的物理本质. 经典场与量子场的差别仅在于前者是固定的，而且相互作用过程对它没有影响. 可以将经典场认为是某一通常量子场当强度无限增大时的极限. 在取极限时，与这些场的相互作用的确通过虚光子来实现，此处虚光子的传播不是用光子因果函数 $D_0^c$，而是用已知势 $A^{\text{ext}}$ 来描述.

化为动量表象时，要对变量 $x_i$ 积分. 将表式

$$j^n(x_k)A_n^{\text{ext}}(x_k) \tag{21.22}$$

对变量 $x_k$ 积分，我们得到与虚光子传递了部分能量和动量相应的乘子 $\delta(p_1 - p_2 + q)$. 因此在经典场散射过程中，实际粒子的能量-动量并不满足守恒定律(21.14).

我们来讨论稳定经典场引起散射这一重要特例：

$$A_n^{\text{ext}}(x) = a_n(\mathbf{x}),$$

$$a_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}\varphi_n(\mathbf{q})d\mathbf{q}. \tag{21.23}$$

在稳定势的展开式中没有变量 $q^0$，因此描述与稳定场相互作用的虚光子具有能量 $q^0 = 0$，而且只传递动量. 将(21.30)式对 $x$ 积分，我们得到 $\delta$ 函数

$$\delta(p - p' + \mathbf{q}) = \delta(p^0 - p'^0)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{q})$$

表示能量守恒定律 ($p^0 = p'^0$) 和动量传递定律 ($\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{q}$). 但是第二个乘子对 $q$ 积分后就消失. 因此总守恒定律(21.14)已经不成立，而单独用能量守恒定律来代替：

$$\sum p^0 - \sum p'^0 = 0. \tag{21.24}$$

## 21.5. 矩阵元的一般结构

我们来讨论散射矩阵

$$S = S(1)$$

的结构的一般性质，$S(1)$ 的定义如 § 17，它是当 $g(x) = 1$ 的区域无限扩大以至包括整个时空时 $S(g)$ 矩阵的极限形式.

为此，还必须研究 $S(g)$ 的矩阵元

$$\Phi^*_{\ldots p'\ldots}S(g)\Phi_{\ldots p\ldots} \tag{21.25}$$

的结构和极限过渡 $g(x)\to 1$ 的特点.

从表示成形式

$$S(g) = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x;\, g)dx\right) \tag{18.38}$$

的矩阵 $S(g)$ 的结构，可以得出结论，矩阵元(21.24)与已经研究过的矩阵元

$$\Phi^*_{\ldots p'\ldots}S(1)\Phi_{\ldots p\ldots}$$

的差别在于相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 中有辅助乘子 $g(x)$. 因此，可以假定认为 $g(x)$ 是某一外界经典场，在 Feynman 图形的每一顶点上均与此场发生相互作用. $g$ 场的 Fourier 映象

$$\tilde{g}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-i\kappa x}g(x)dx \tag{21.26}$$

在图形上可以与类似于图 13 中所示的虚线相对应，此线从每一结点引出，但并不越出图形的范围. 此外，显然在拉格朗日函数密度中引进函数 $g(x)$，破坏了每一结点的能量-动量守恒定律，因而也就是破坏了整个图形的能量-动量守恒定律.

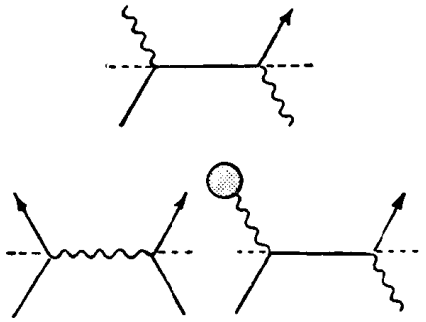


图 13

利用 Wick 定理，可以将矩阵元(21.25)表成形式:

$$\Phi^*_{\cdots p'\cdots}S(g)\Phi_{\cdots p\cdots}=\sum_{n,i_n}\int K_{i_n}(x_1,\cdots,x_n)g(x_1)\cdots\times$$
$$\times\cdots g(x_n)\,\Phi^*_{\cdots p'\cdots}:\cdots u_a(x_j)\cdots:\Phi_{\cdots p\cdots}dx_1\cdots dx_n,\quad(21.27)$$

经过对易以后，右端矩阵元给出

$$\Phi^*_{\cdots p'\cdots}:\cdots u_a(x_i)\cdots:\Phi_{\cdots p\cdots}=$$
$$=\sum A(\cdots p'\cdots p\cdots)\exp\{i(p'_1x_{j_1}+\cdots+p'_sx_{j_s}-p_1x_{i_1}-\cdots-p_rx_{i_r})\}$$
$$(i,j=1,\cdots,n).\qquad(21.28)$$

由于系数函数 $K(x_1,\cdots,x_n)$ 的平移不变性，它们的动量表象含有 $\delta$ 函数

$$K(x_1,\cdots,x_n)=\int\delta(\sum k_i)Q(k_1,\cdots,k_n)e^{i\sum\limits_j k_jx_j}dk_1\cdots dk_n.$$

再利用关系式(21.26)，由此得到

$$K(x_1,\cdots,x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)=$$
$$=\int\delta(\sum k_i)Q(k_1,\cdots,k_n)\tilde g(k'_1)\cdots\tilde g(k'_n)e^{i\sum(k_j+k'_j)x_j}\cdots dk\cdots dk'\cdots=$$
$$=\int K_g(k_1,\cdots,k_n)e^{i\sum k_jx_j}\cdots dk\cdots,\qquad(21.29)$$

其中

$$K_g(k_1,\cdots,k_n)=\int\delta(\sum k_i-\sum k'_j)Q(k_1-k'_1,\cdots,k_n-k'_n)\times$$
$$\times\tilde g(k'_1)\cdots\tilde g(k'_n)\cdots dk'\cdots.\qquad(21.30)$$

将(21.28)式和(21.29)式代入(21.27)式中，得到

$$\Phi^*_{\cdots p'\cdots}S(g)\Phi_{\cdots p\cdots}=(2\pi)^{4n}\sum A(\cdots p'\cdots p\cdots)K_g(\cdots k\cdots),\qquad(21.31)$$

其中每一个 $k$ 或者等于 $p'$ 中或 $p$ 中之一，或者等于 $p$ 和 $p'$ 之差，最后或者等于零. 不论如何，

$$\sum k_i=\sum p'-\sum p.$$

正如已经提到过，函数 $g(x)$ 是发生相互作用的四维空间域内的函数．如果认为过程在体积 $V$、时间间隔 $T$ 内发生，我们得到

$$g(x) = 1, \quad \text{当 } \mathbf{x} \in V, \ x^0 \in T,$$

而且在这一区域的边界附近，函数 $g(x)$ 相当迅速地减少为零．将区域 $V$ 和 $T$ 的线度无限地增大，我们得到极限情况，即相互作用在无穷远过去时加入，而在无穷远将来时撤除，并且分布在整个空间内．通常也就利用这一极限过渡来定义散射矩阵 $S(1)$．

此时 Fourier 映象 $\tilde{g}(k)$ 趋近于与 $\delta(k)$ 成比例的量．为求比例系数，我们注意

$$\int \tilde{g}(k)dk = g(0) = 1,$$

因而近似地有

$$\tilde{g}(k) \cong \delta(k). \tag{21.32}$$

现在将(21.30)式积分，利用(21.32)式，得到

$$\begin{aligned} K_g(k_1, \cdots, k_n) = \int Q(k_2' + \cdots + k_n' - k_2 - \cdots - k_n, k_2 - k_2', \cdots, k_n - k_n') \times \\ \times \tilde{g}(\sum k_j - \sum k_j' + k_1')\tilde{g}(k_2') \cdots \tilde{g}(k_n')dk_2' \cdots dk_n' \approx \\ \approx \tilde{g}(\sum k_j)Q(-k_2 - \cdots - k_n, \cdots, k_2, \cdots, k_n) \approx \\ \approx \tilde{g}(\sum k_j)Q(k_1, \cdots, k_n). \end{aligned} \tag{21.33}$$

为了算出这一积分，重要的是函数 $Q$ 在点 $(k_1, \cdots, k_n)$ 的邻域内为连续的．

将(21.33)式代入(21.31)式中，现在得到

$$\Phi^*_{\cdots p' \cdots} S(g) \Phi_{\cdots p \cdots} \approx \tilde{g}(\sum p - \sum p')F(p', p), \tag{21.34}$$

而由于(21.32)式，

$$\Phi^*_{\cdots p' \cdots} S(1) \Phi_{\cdots p \cdots} = \delta(\sum p - \sum p')F(p', p). \tag{21.35}$$

当决定散射过程的几率时，必须计算

$$|\Phi^*_{\cdots p' \cdots} S \Phi_{\cdots p \cdots}|^2 \tag{21.36}$$

类型的矩阵元平方，上式自然定义下列表式

$$|\Phi^*_{\cdots p' \cdots} S(g) \Phi_{\cdots p \cdots}|^2 \approx |\tilde{g}(\sum p - \sum p')|^2 \ |F(p', p)|^2$$

为 $V \to \infty$，$T \to \infty$ 时的渐近式．

为了决定 $|\tilde{g}(k)|^2$，我们注意到，与 $\tilde{g}(k)$ 相同，它应该与 $\delta(k)$ 成正比，而且从模量守恒要求

$$\int |\tilde{g}(k)|^2 dk = \frac{1}{(2\pi)^4} \int |g(x)|^2 dx = \frac{VT}{(2\pi)^4}$$

来决定比例系数，我们近似地求得

$$|\tilde{g}(k)|^2 \approx \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta(k).$$

现在得到我们感到有意义的矩阵元平方(21.36)的极限式

$$|\Phi^*_{\cdots p' \cdots} S(1) \Phi_{\cdots p \cdots}|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta(\sum p - \sum p') |F(p', p)|^2. \tag{21.37}$$

当粒子被(21.23)类型的稳定经典场散射时，我们可以进行同样的计算．在这种情况

下，正如前面已经证明过，动量并不守恒，只有能量才守恒，而且代替(21.35)式和(21.37)式，我们得到

$$\Phi^*_{\cdots p'\cdots}S(1)\Phi_{\cdots p\cdots}=\delta(\sum p^0-\sum p'^0)F(p',p), \tag{21.38}$$

$$|\Phi^*_{\cdots p'\cdots}S(1)\Phi_{\cdots p\cdots}|^2=\frac{T}{2\pi}\delta(\sum p^0-\sum p'^0)|F(p',p)|^2. \tag{21.39}$$

## §22. 散射过程的几率和有效截面

### 22.1. 态振幅的归一化

我们来建立 $S$ 矩阵的矩阵元和散射过程几率之间的关系. 我们先讨论，当强度为 $g(x)$ 的相互作用施加的区域局限于有限的时空域中的情况. 我们研究散射理论中常见的问题：在相互作用发生前，$S$ 束粒子流具有精确确定的动量 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_s$ 和表征质量、电荷和自旋的内禀量子数 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$，必须求动量在无穷小区域 $d\mathbf{p}'_1,\cdots,d\mathbf{p}'_r$ 内而内禀量子数为 $\sigma'_1,\cdots,\sigma'_r$ 的散射粒子的平均数.

首先，很清楚，正如通常量子力学中类似的问题一样，此处涉及不能归一化的态振幅，因此我们应该利用对单位体积的归一化. 为了定义这样归一化的态振幅，自然要考虑极限过渡，讨论取其通常模数为无限递增的一序列态振幅.

首先我们来求单粒子时的这个振幅、取单粒子的态振幅

$$\Phi_1=\int\chi_\sigma(\mathbf{p})a^\dagger_\sigma(\mathbf{p})d\mathbf{p}\Phi_0, \tag{22.1}$$

而且注意它的模数等于

$$\Phi_1^*\Phi_1=\int|\chi_\sigma(\mathbf{p})|^2d\mathbf{p}=N. \tag{22.2}$$

因此，令 $N=1$，可以认为表式

$$|\chi_\sigma(\mathbf{p})|^2d\mathbf{p}$$

是用内禀量子数 $\sigma$ 表征的粒子具有动量在平均值 $\mathbf{p}$ 的邻近间隔 $d\mathbf{p}$ 内的几率. 因此函数 $\chi(\mathbf{p})$ 本身是动量表象中粒子的波函数. 因此它的 Fourier 映象

$$\varphi_\sigma(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\mathbf{px}}\chi_\sigma(\mathbf{p})d\mathbf{p} \tag{22.3}$$

是组态表象中的波函数，其模为

$$\int|\varphi_\sigma(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}=\int|\chi_\sigma(\mathbf{p})|^2d\mathbf{p}=N.$$

当 $N=1$ 时，可将值

$$|\varphi(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x} \tag{22.4}$$

解释为组态空间中的几率. 设$N$等于比 1 大得多的粒子数，则得(22.4)式为无穷小体积元 $d\mathbf{x}$ 中粒子的平均数.

现在将模$N$无限地增大，以使 $\chi_\sigma(\mathbf{p})$ 趋近表式

$$(2\pi)^{3/2}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0),$$

我们将得到动量越发确定的波包. 从(22.3)式,我们得到

$$|\varphi_\sigma(\mathbf{x})| \to 1,$$

因此也有

$$|\varphi_\sigma(\mathbf{x})|^2 \to 1,$$

当趋近极限时,在单位体积内将有一个粒子.

在(22.1)式中取极限,则得到归一化到单位体积中的单粒子态振幅

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})\Phi_0. \tag{22.5}$$

当存在几种粒子时,代替(22.1)式,我们应讨论下式:

$$\Phi_s = \int \chi_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1) a_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \cdots \int \chi_{\sigma_s}(\mathbf{p}_s) a_{\sigma_s}^\dagger(\mathbf{p}_s) d\mathbf{p}_s \Phi_0, \tag{22.6}$$

其中所有 $\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 并不相同. 显然, 这一振幅的模数是 $s$ 个单粒子的态模数的乘积:

$$\Phi_s^* \Phi_s = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} \int |\chi_{\sigma_i}(\mathbf{p}_i)|^2 d\mathbf{p}_i = \prod_i N_i. \tag{22.7}$$

对于每一乘子(22.6)和(22.7)分别重复上述讨论,我们得到结论, 如果对于多粒子态的每一粒子分别按单位体积归一化,则多粒子的态振幅将具有形式:

$$\Phi_s = (2\pi)^{\frac{3s}{2}} a_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) a_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \cdots a_{\sigma_s}^\dagger(\mathbf{p}_s)\Phi_0. \tag{22.8}$$

特别需要考虑内禀量子数 $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ 中有全同的, 也就是在 $s$ 粒子中有几组全同粒子的情况. 假定头 $\nu$ 个量子数相重合:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_\nu = \sigma,$$

则当计算模量(22.7)时, $\Phi$ 中的相应算符

$$a_\sigma^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a_\sigma^\dagger(\mathbf{k}_\nu)$$

可以与 $\Phi^*$ 中的算符 $a_\sigma(\mathbf{k}_1'), \cdots, a_\sigma(\mathbf{k}_\nu')$ 以 $\nu!$ 种不同方式进行对易. 当有好几种全同粒子,其个数分别为 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\alpha$ 时,我们相应地得到

$$\Phi^*\Phi = \prod(\nu!) \prod_i \int |\chi_{\sigma_i}(\mathbf{p}_i)|^2 d\mathbf{p}_i = \prod(\nu!) \prod_i N_i, \tag{22.9}$$

此处采用了记号

$$\prod(\nu!) = \nu_1!\nu_2! \cdots \nu_\alpha!.$$

因此多粒子的态振幅按单位体积归一化后将具有形式:

$$\Phi = \frac{(2\pi)^{\frac{3s}{2}}}{\sqrt{\Pi(\nu!)}} a_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) a_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) \cdots a_{\sigma_s}^\dagger(\mathbf{p}_s)\Phi_0. \tag{22.10}$$

但是就是在这一情况下,我们也将应用(22.8)式,因为在 Feynman 定则(21.18)中已经考虑到乘子 $[\Pi(\nu!)]^{-\frac{1}{2}}$.

## 22.2. 跃迁几率的计算

我们回到本节开始时提出的问题. 由于相互作用系统将由态(22.8)跃迁到用以下振幅描述的态:

$$S(g)(2\pi)^{\frac{3s}{2}}\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s},$$

其中

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s}=a^{\dagger}_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1)\cdots a^{\dagger}_{\sigma_s}(\mathbf{p}_s)\Phi_0, \tag{22.11}$$

因此根据量子力学的一般法则，用归一化振幅来描述的终态的粒子平均数等于

$$(2\pi)^{3s}\frac{|\Phi^*_a S(g)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s}|^2}{\Phi^*_a\Phi_a}. \tag{22.12}$$

此处我们关于归一化的选择，是假定在初态中单位体积内的粒子平均数等于 1. 如果这些数分别等于 $n_1,\cdots,n_s$，则(22.12)式应该变成

$$n_1n_2\cdots n_s(2\pi)^{3s}\frac{|\Phi^*_a S(g)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s}|^2}{\Phi^*_a\Phi_a}. \tag{22.13}$$

现在我们感到有兴趣的是在平均值 $\mathbf{p}'_1,\cdots,\mathbf{p}'_r$ 邻近 $\Delta p'_1,\cdots,\Delta p'_r$ 的动量间隔中所散射的粒子数. 于此我们将与 § 21.5 中所作的预先声明相同，假定每一粒子在初态和终态具有不同的动量值. 在实验上这相当于将动量不变的粒子归于基本的原始粒子注内，而认为动量改变了的粒子是被散射的粒子.

因此我们取终态的振幅 $\Phi_a$ 的形式为

$$\Phi_a=(2\pi)^{\frac{3r}{2}}\int_G\Phi_{\mathbf{k}_1\sigma_1\cdots\mathbf{k}_r\sigma_r}d\mathbf{k}_1\cdots d\mathbf{k}_r,$$

其中区域 $G$ 等于 $\Delta\mathbf{p}'_1,\cdots,\Delta\mathbf{p}'_r$ 诸体积的乘积. 计算 $\Phi_a$ 的模量，即得

$$\Phi^*_a\Phi_a=(2\pi)^{3r}\Delta\mathbf{p}'_1\cdots\Delta\mathbf{p}'_r,$$

而代替(22.13)式，可得表式

$$\frac{n_1\cdots n_s(2\pi)^{3s}}{\Delta\mathbf{p}'_1\cdots\Delta\mathbf{p}'_r}\int_G d\mathbf{k}_1\cdots d\mathbf{k}_r\,(\Phi^*_{\mathbf{k}_1\sigma_1\cdots\mathbf{k}_r\sigma_r}S(g)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s})^*\times$$

$$\times\int_G d\mathbf{k}'_1\cdots d\mathbf{k}'_r(\Phi^*_{\mathbf{k}'_1\sigma_1\cdots\mathbf{k}'_r\sigma_r}S(g)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_s\sigma_s}),$$

根据区域 $G$ 的定义，上式等于

$$n_1\cdots n_s(2\pi)^{3s}|\Phi^*_{\cdots\mathbf{p}'\cdots}S(g)\Phi_{\cdots\mathbf{p}\cdots}|^2\Delta\mathbf{p}'_1\cdots\Delta\mathbf{p}'_r. \tag{22.14}$$

此处为简单起见，记号 $\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1\cdots\mathbf{p}_r\sigma_r}$ 用 $\Phi_{\cdots\mathbf{p}\cdots}$ 代替.

矩阵元的平方

$$|\Phi^*_{\cdots\mathbf{p}'\cdots}S(g)\Phi_{\cdots\mathbf{p}\cdots}|^2$$

的结构以及极限过渡 $g(x)\to 1$，在 § 21 中已经研究过. 将(21.37)式代入(22.14)式中，并除以 $VT$，我们得到在间隔 $d\mathbf{p}'_1,\cdots,d\mathbf{p}'_r$ 中单位时间单位体积内的散射粒子数为

$$(2\pi)^{3s-4}n_1\cdots n_s|F(p',p)|^2\delta(\sum p-\sum p')d\mathbf{p}'_1\cdots d\mathbf{p}'_r. \tag{22.15}$$

利用公式(21.39)，我们得到单位时间内被稳定经典场散射的粒子数的相应表式

$$(2\pi)^{3s-1}n_1\cdots n_s|F(p',p)|^2\delta(\sum p^0-\sum p'^0)d\mathbf{p}'_1\cdots d\mathbf{p}'_r. \tag{22.16}$$

我们再一次強调，只有当函数 $F(p',p)$ 在动量 $p'$，$p$ 确定值的邻域内满足连续性条件时，所得表式(22.15)、(22.16)才有意义. 在各种具体计算中，我们得到的表式相当于微扰理论中前几项之和. 因此在 $F(p',p)$ 中出现的奇点可能使微扰理论并不适用.

这样，为了确定散射粒子数或者相应的几率，必须首先计算矩阵元(21.37)(或者

(21.39)) 和将所得结果中的 $\delta$ 函数前的乘子作为函数 $F(p', p)$ 代入 (22.15) 式中 (或 (22.16)式中). 此时只有当 $F(p', p)$ 在其宗量已知值的邻域内是连续的,结果才有意义.

我们考虑一个粒子对另一个粒子的散射过程. 在这一情况下, $r = 2$, $s = 2$, 代替 (22.15)式,我们得到表式

$$(2\pi)^2 n_1 n_2 |F(p', p)|^2 \delta(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2',$$

在我们所采用的单位制中,上式的量纲为

$$[V^{-1}T^{-1}] = \text{厘米}^{-4}.$$

由于 $\mathbf{p}_1'$ 完全决定于 $\mathbf{p}_2'$,而且反之也成立,对 $\mathbf{p}_2'$ 积分后,我们得到

$$(2\pi)^2 n_1 n_2 |F(p', p)|^2 \delta(p_1^0 + p_2^0 - p_1'^0 - p_2'^0) d\mathbf{p}_1', \tag{22.17}$$

而在 $F$ 中设

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1'.$$

## 22.3. 微分有效截面和总有效截面

表式(22.17)通常表示为乘积形式:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot v_1 \cdot d\sigma,$$

其中 $v_1$ 是四维动量 $p_1$ 的粒子的速度模量, 光子的速度模量等于 1, 对于静止质量不等于零的粒子,其值为 $|\mathbf{p}_1|/p_1^0$.

乘子 $d\sigma_1$ 具有面积的量纲[厘米$^2$], 它与散射后粒子 $p_1'$ 的立体角元素成正比, 称为微分有效截面. 将 $d\sigma_1$ 对整个立体角作积分后,称为总有效截面.

因此粒子对粒子散射的微分有效截面具有形式:

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1} |F(p', p)|^2 d\mathbf{p}_1' \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{v_1} |F(p', p)|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') p_1'^2 dp_1' d\Omega_1' \quad (E_i \equiv p_i^0,\ p_i' = |\mathbf{p}_i'|).$$

注意,为了消去 $\delta$ 函数,利用关系式

$$(E_1')^2 - (\mathbf{p}_1')^2 = m^2, \tag{22.18}$$

对 $dp_1'$ 的积分可以化为对 $dE_1'$ 的积分,因为

$$p_1' dp_1' = E_1' dE_1'.$$

对 $E_1'$ 作积分时必须考虑到,一般说来, $E_1$, $E_2$, $E_1'$ 和 $E_2'$ 是非独立的函数, 因为其中每一函数与它的动量之间存在关系式(22.18),而动量之和又为零. 因此令

$$E_1' + E_2' - E_1 - E_2 = f(E_1'),$$

积分后得到

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2 p_1' E_1'}{v_1 |f'(E_1')|} |F(p', p)|^2 d\Omega_1' \Big|_{p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 0}, \tag{22.19}$$

其中

$$f'(E') = \frac{\partial f}{\partial E_1'}.$$

将(22.19)式对 $d\Omega_1'$ 积分,得到总有效截面为

$$\sigma(p_2, p_1') = \frac{(2\pi)^2}{v_1}\int_\Omega \frac{p_1'E_1'}{|f'(E_1')|}|F(p', p)|^2 d\Omega_1'. \tag{22.20}$$

我们还要注意，通常在计算微分散射截面以及总散射截面时，对于粒子的自旋态并不感到兴趣．因此对被散射粒子的自旋指标求和，而对于散射粒子的自旋指标求平均值．这些运算用记号 $\sum_\sigma$ 表示，我们得到微分散射截面的形式为

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2 p_1'E_1'}{v_1|f'(E_1')|}\sum_\sigma |F(p_1', p)|^2 d\Omega_1'\Big|_{p_1+p_2-p_1'-p_2'=0}. \tag{22.21}$$

从一般公式(22.15)和(22.16)用相同方式可以求得其他可能过程的几率以及截面的表示式．我们再求动量为 $p_1$ 的粒子在稳定外场中散射时的公式．为具体起见，我们考虑以下情况：粒子被势散射后还产生一个粒子 $k$，也就是类如韧致辐射的过程．在(22.16)式中令 $s = 1$，$r = 2$，得到表式

$$(2\pi)^2 n_1 |F(p', p)|^2 \delta(E_1 - E_1' - E_k) d\mathbf{p}_1' d\mathbf{k}, \tag{22.22}$$

在我们所采用的单位制中，上式之量纲为 $[T^{-1}]$ = 厘米$^{-1}$；将(22.22)式表示成形式 $n_1 v_1 d\sigma_1$，对 $dE_1'$ 积分，并对自旋指标求和及求平均之后，我们求得微分有效截面为：

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1}|F(p', p)|^2 p_1'E_1' d\Omega_1' d\mathbf{k}\Big|_{E-E_1'-E_k=0}. \tag{22.23}$$

## §23. 二阶过程的計算示例

作为应用§22中所述方法的示例，我们来计算以下过程的一阶非零近似截面：Compton 散射，电子-正电子对的双光子湮没以及电子在核場中韧致辐射．因为所求得的是很熟悉的公式，我们不拟详细讨论．

### 23.1. Compton 散射

我们来计算光子在自由电子上的散射截面．初态包含动量为 $\mathbf{k}_1$、能量为 $k_1 = |\mathbf{k}_1|$ 的光子及四维动量为 $p_1$ 的电子．我们认为电子是静止的，即 $\mathbf{p}_1 = 0$，$p_1^0 = m$，这并不影响广泛性．在终态存在着散射后的光子，其动量为 $\mathbf{k}_2$，能量为 $k_2 = |\mathbf{k}_2|$，而电子得到反冲动量 $\mathbf{p}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 后，能量为

$$p_2^0 = E_2 = \sqrt{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 + m^2} = \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2 - 2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cos\theta + m^2},$$

其中 $\theta$ 是矢量 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_2$ 之间的夹角．

根据一般公式(22.21)，上述过程的微分有效截面等于

$$d\sigma = (2\pi)^2 \frac{k_2^2}{|f'(k_2)|}\sum_\sigma |F(p', p)|^2 d\Omega = (2\pi)^2 \frac{k_2^3 E_2}{k_1 m}\sum_\sigma |F(p', p)|^2 d\Omega. \tag{23.1}$$

矩阵元 $F(p', p)$ 由公式(21.35)来决定．在计算矩阵元时，我们限于图14中所示的二阶可能图形．与这些图形相应的矩阵元根据§21中所表述的对应定则来求得．

我们详细写出图14a的矩阵元．将从顶点2引出的、四维动量为 $p_2$ 的外部电子线与以下因子相对应：

$$(2\pi)^{-3/2}\bar{v}_{\nu_2}(\mathbf{p}_2),$$

而从顶点2引出的动量为 $\mathbf{k}_2$ 的外部光子线与因子

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e_m^2}{\sqrt{2k_2}} \quad (m \neq 0)$$

相对应. 因为这一顶点相当于因子

$$ie\gamma^n(2\pi)^4\delta(p-k_2-p_2),$$

则以上二个因子的乘积等于

$$\delta(p-k_2-p_2)\frac{ie}{\sqrt{2k_2}}(2\pi)^{5/2}\sum_{\alpha=1,2,3}e_2^\alpha\gamma^\alpha=-\delta(p-k_2-p_2)\frac{ie(2\pi)^{5/2}}{\sqrt{2k_2}}\hat{e}_2.$$

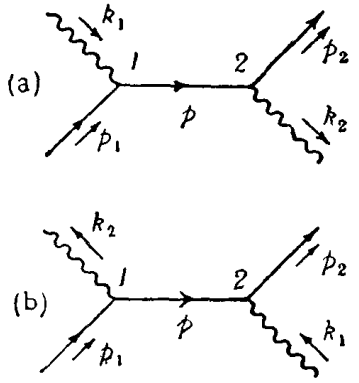



图 14

内部电子线相应于因子

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon},$$

顶点 1 与外部光子线 $k_1$ 相应于

$$-\delta(p_1+k_1-p)\frac{ie(2\pi)^{5/2}}{\sqrt{2k_1}}\hat{e}_1,$$

最后外部电子线 $p_1$ 相应于

$$(2\pi)^{-3/2}\quad v^{\nu',-}(p_1).$$

将上列因子按照电子线的运动顺序连续相乘,并对 $p$ 积分,我们得到表式

$$\delta(p_1+k_1-p_2-k_2)F_a(p,\ k),$$

其中

$$F_a(p,k)=\frac{e^2}{8\pi^2 i}\frac{1}{\sqrt{k_1k_2}}\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)\hat{e}_2\frac{\hat{p}_1+\hat{k}_1+m}{(p_1+k_1)^2-m^2}\hat{e}_1v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1).$$

图 14b 给出相似项:

$$F_b(p,k)=\frac{e^2}{8\pi^2 i}\frac{1}{\sqrt{k_1k_2}}\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)\hat{e}_1\frac{\hat{p}_1-\hat{k}_2+m}{(p_1-k_2)^2-m^2}\hat{e}_2v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1).$$

注意

$$(p_1+k_1)^2-m^2=2(p_1k_1)=2mk_1,$$
$$(p_1-k_2)^2-m^2=-2(p_1k_2)=-2mk_2,$$

将 $F_a$ 和 $F_b$ 相加,我们得到

$$F(p,k)=\frac{e^2}{16\pi^2 i}\frac{1}{m(k_1k_2)^{3/2}}\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)Mv^{\nu',-}(\mathbf{p}_1),\tag{23.2}$$

而

$$M=k_2\hat{e}_2(\hat{p}_1+\hat{k}_1+m)\hat{e}_1-k_1\hat{e}_1(\hat{p}_1-\hat{k}_2+m)\hat{e}_2.$$

当计算 $\sum_\sigma|F|^2$ 时,我们注意必须对初态的自旋指标 $\nu'$ 求平均值,而对终态的自旋指标 $\nu$ 求和. 因

此利用关系(7.20)和(7.21),得到

$$\sum_{\sigma}|F|^2=\frac{1}{2}\sum_{\nu\nu'}FF^*=$$

$$=\frac{e^4}{2(4\pi)^4m^2(k_1k_2)^3}\sum_{\nu\nu'}\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)Mv^{\nu',-}(\mathbf{p}_1)\bar{v}^{\nu',+}(\mathbf{p}_1)\bar{M}v^{\nu,-}(\mathbf{p}_2)=$$

$$=\frac{e^4}{8(4\pi)^4E_2(mk_1k_2)^3}\mathrm{Sp}A,\tag{23.3}$$

其中

$$A=(\hat{p}_2+m)M(\hat{p}_1+m)\bar{M}.\tag{23.4}$$

因为四维矢量 $k$, $p$ 和 $e$ 为实的,$\gamma^0$ 为厄米的,而 $\gamma$ 是反厄米的,故如果 $M=\sum_i c_i\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_i$,则有

$$\bar{M}=\sum_i c_i^*\hat{a}_i\hat{a}_{i-1}\cdots\hat{a}_1,$$

其中 $a_1,\cdots,a_i$ 是 $k$, $p$ 和 $e$ 类型的矢量.

在计算(23.4)式前,将 $M$ 略加简化. 考虑到Dirac 矩阵的定义,可得

$$\hat{a}\hat{b}+\hat{b}\hat{a}=2(ab),$$

故可以将 $M$ 表示成形式

$$M=k_2\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1-k_2\hat{e}_2\hat{e}_1(\hat{p}_1-m)+2k_2\hat{e}_2(p_1e_1)+k_1\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2+$$
$$+k_1\hat{e}_1\hat{e}_2(\hat{p}_1-m)-2k_1\hat{e}_1(p_1e_2).\tag{23.5}$$

但是因为 $M$ 出现于下列组合

$$\bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}_2)Mv^{\nu,-}(\mathbf{p}_1)$$

中,而根据场方程

$$(\hat{p}_1-m)v^{\nu,-}(\mathbf{p}_1)=0,$$

而且由于

$$(p_1e_2)=(p_1e_1)=0,$$

可将矩阵 $M$ 表示成形式

$$M=k_2\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1+k_1\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2.$$

现在可以将矩阵 $A$ 表示为三项之和:

$$A=A_1+A_2+A_3,$$

其中

$$A_1=(\hat{p}_1+m)M(\hat{p}_1+m)\bar{M},\quad A_2=(\hat{k}_1-\hat{k}_2)M\hat{p}_1\bar{M},\quad A_3=m(\hat{k}_1-\hat{k}_2)M\bar{M}.$$

在计算矩阵迹时,利用电磁場的横向性条件(6.16)

$$(e_1k_1)=(e_2k_2)=0,$$

以及关系

$$(p_1e_1)=(p_1e_2)=0,\quad (p_1k_1)=mk_1,\quad (p_1k_2)=mk_2,$$
$$(k_1k_1)=(k_2k_2)=0,\quad e_1^2=e_2^2=-1.$$

$A_3$ 项含有奇数个 Dirac 矩阵的乘积,因此

$$\mathrm{Sp}A_3=0.$$

为了计算 $\mathrm{Sp}A_1$,只要将 $A_1$ 中的头二个乘子对易,并利用(6.16)式中第三公式,这就给出

$$\mathrm{Sp}A_1=32m^2k_1^2k_2^2(e_1e_2)^2=32m^2k_1^2k_2^2\cos^2\theta.\tag{23.6}$$

为了计算 $A_2$,利用矩阵迹记号下乘子可以循环对易的性质,将 $A_2$ 表示为以下形式较为方便:

$$A_2=\bar{M}(\hat{k}_1-\hat{k}_2)M\hat{p}_1+\tilde{A}_2\quad(\mathrm{Sp}\tilde{A}_2=0).$$

进行对易，使相同乘子并列，我们得到

$$(\hat{k}_1 - \hat{k}_2)M = a + b,$$

其中

$$a = k_2\hat{e}_2\hat{k}_2\hat{k}_1\hat{e}_1 - k_1\hat{e}_1\hat{k}_1\hat{k}_2\hat{e}_2,$$
$$b = 2(k_1e_2)k_2\hat{k}_1\hat{e}_1 - 2(k_1e_1)k_1\hat{k}_2\hat{e}_2.$$

然后求得

$$\mathrm{Sp}\,\bar{M}a\hat{p}_1 = 8k_1k_2m(k_1k_2)(k_1 - k_2) + 8k_1k_2m\{k_1(k_2e_1)^2 - k_2(k_1e_2)^2\}, \tag{23.7}$$

$$\mathrm{Sp}\,Mb\hat{p}_1 = 8k_1k_2m\{k_2(k_1e_2)^2 - k_1(k_2e_1)^2\}. \tag{23.8}$$

将(23.6)—(23.8)诸式相加，并计及下式：

$$(k_1k_2) = m(k_1 - k_2),$$

得到

$$\mathrm{Sp}\,A = 8m^2k_1^2k_2^2\left\{4\cos^2\theta + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - 2\right\}.$$

将上式与(23.3)式代入(23.1)式中，求得微分有效截面

$$d\sigma = \frac{e^4}{(8\pi)^2m^2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left\{4\cos^2\theta + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - 2\right\}d\Omega.$$

引进“电子半径”

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi m},$$

我们得到熟知的 Klein-仁科芳雄公式：

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{4}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left\{4\cos^2\theta + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} - 2\right\}d\Omega. \tag{23.9}$$

## 23.2. 电子-正电子对的湮没

我们考虑电子-正电子的湮没过程．这一过程的最简单图形(图 15)是唯一的一阶图形．

但是，不难注意到，这一图形所描述的单光子湮没是与能量—动量守恒定律不相容的．事实上守恒定律给出

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$
$$|\mathbf{k}| = \sqrt{|\mathbf{p}_1|^2 + m^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2|^2 + m^2},$$

例如，变换到电子和正电子的质心系 ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$)，我们得到明显的矛盾．

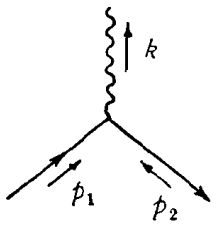



图 15

双光子的湮没用图 11 中所示的两个二阶图形描述．

在电子和正电子的质心系中进行计算．此时采用记号

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p},\ \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p},\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{k},\ \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k},$$

我们得到

电子: $(E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p})$,

正电子: $(E_p, -\mathbf{p})$,

第一个光子: $(k^0 = |\mathbf{k}|, \mathbf{k})$,

第二个光子: $(k^0, -\mathbf{k})$.

根据公式(22.21)，并且考虑到双光子态振幅的归一化以及关系式 $|f'(E')| = 2$，此过程的截面等于

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2(k^0)^2}{4v(p_1)} \sum_{\sigma} |F|^2 d\Omega = (2\pi)^2 \frac{(k^0)^3}{4p} \sum_{\sigma} |F|^2 d\Omega, \tag{23.10}$$

其中应用了记号 $p = |\mathbf{p}|$.

根据对应定则作矩阵元

$$F_a(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 i k^0} \bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p}_2) \hat{e}_2 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \hat{e}_1 v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1),$$

$$F_b(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2 i k^0} \bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p}_2) \hat{e}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \hat{e}_2 v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1);$$

两式相加后，我们得到

$$F(p, k) = \frac{ie^2}{8\pi^2 k^0} \cdot \frac{\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p}_2) M v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1)}{2(p_1 k_1)(p_2 k_2)},$$

而

$$M = (p_1 k_2)\hat{e}_2(\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m)\hat{e}_1 + \hat{e}_1(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m)\hat{e}_2(p_1 k_1).$$

将 $\hat{p}_1\hat{e}_1$ 与 $\hat{p}_2\hat{e}_2$ 相对易，而且利用場方程

$$(\hat{p}_1 - m)v(\mathbf{p}_1) = 0,$$

将 $M$ 化成形式

$$M = (p_1 k_2)[2(p_1 e_1)\hat{e}_2 - \hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1] + (p_1 k_1)[2(p_1 e_2)\hat{e}_1 - \hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2],$$

由此还可得出

$$\bar{M} = (p_1 k_2)[2(p_1 e_1)\hat{e}_2 - \hat{e}_1\hat{k}_1\hat{e}_2] + (p_1 k_1)[2(p_1 e_2)\hat{e}_1 - \hat{e}_2\hat{k}_2\hat{e}_1].$$

当计算 $\sum_{\sigma} |F|^2$ 时，必须对电子及正电子的自旋求平均值. 因此考虑到(7.20)式和(7.21)式，

$$\sum_{\sigma} |F|^2 = \frac{e^4}{(8\pi^2 k^0)^2} \frac{1}{16(p_1 k_1)^2(p_1 k_2)^2} \sum_{\nu,\nu'} \bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{p}_2) M v^{\nu',-}(\mathbf{p}_1) \bar{v}^{\nu',+}(\mathbf{p}_1) \bar{M} v^{\nu',+}(\mathbf{p}_2) =$$

$$= \frac{e^4}{(4\pi k^0)^4} \frac{1}{16(p_1 k_1)^2(p_1 k_2)^2} \mathrm{Sp}\, A, \tag{23.11}$$

其中

$$A = (\hat{p}_2 - m)M(\hat{p}_1 + m)\bar{M}.$$

利用四维动量的守恒定律

$$p_2 = k_1 + k_2 - p_1,$$

将 $A$ 表示为和的形式：

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

其中

$$A_1 = (\hat{k}_1 + \hat{k}_2)M\hat{p}_1\bar{M},$$

$$A_2 = -(\hat{p}_1 + m)M(\hat{p}_1 + m)\bar{M},$$

$$\mathrm{Sp}A_3 = 0.$$

当计算 $\mathrm{Sp}A_1$ 和 $\mathrm{Sp}A_2$ 时，利用(6.16)式和由有关定义所推得的以下关系：

$$(k_1e_1) = (k_2e_2) = (k_1e_2) = (k_2e_1) = 0,$$
$$(k_1k_2) = 2(k^0)^2, \quad k_1^2 = k_2^2 = 0,$$
$$(k_1p_1) = (k^0)^2 - \mathbf{k}_1\mathbf{p}_1 = k^0(k^0 - p\cos\theta),$$
$$(k_2p_1) = (k^0)^2 - \mathbf{k}_2\mathbf{p}_1 = k^0(k^0 + p\cos\theta),$$

其中 $\theta$ 为矢量 $\mathbf{k}_1$ 与 $\mathbf{p}_1$ 之夹角.

与以上的情况相同，计算矩阵迹的一般方法在于将相同的四维矢量矩阵逐次移动到一起. 我们略去初等的但是繁杂的计算,列出结果如下:

$$\mathrm{Sp}\, A_1 = 32(k^0)^2(pk_1)(pk_2)\{2(e_1e_2)(pe_1)(pe_2) + k_0^2 + (pe_1)^2 + (pe_2)^2\},$$
$$\mathrm{Sp}\, A_2 = -32(k^0)^2(pk_1)(pk_2)\{2(e_1e_2)(pe_1)(pe_2) + (pe_1)^2 + (pe_2)^2\} -$$
$$-32\{2(k^0)^2(pe_1)(pe_2) + (e_1e_2)(pk_1)(pk_2)\}^2,$$
$$\mathrm{Sp}\, A = 32(pk_1)^2(pk_2)^2 \times$$
$$\times\left\{\frac{(k^0)^4}{(pk_1)(pk_2)} - \frac{4(k^0)^4(pe_1)^2(pe_2)^2}{(pk_1)^2(pk_2)^2} - \frac{4(k^0)^2(e_1e_2)(pe_1)(pe_2)}{(pk_1)(pk_2)} - (e_1e_2)^2\right\}.$$

对光子的极化方向求和,并计及关系

$$\sum_{e_1}(pe_1)^2 = \sum_{e_2}(pe_2)^2 = p^2\sin^2\theta, \quad \sum_{e_1,e_2}(pe_1)^2(pe_2)^2 = p^4\sin^4\theta,$$

$$\sum_{e_1,e_2}(e_1e_2)^2 = 2, \quad \sum_{e_1,e_2}(e_1e_2)(pe_1)(pe_2) = -p^2\sin^4\theta.$$

我们得到

$$\mathrm{Sp}\, A = 64(pk_1)^2(pk_2)^2\left[\frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2\sin^2\theta}{(k^0)^2 - p^2\cos^2\theta} - \frac{2p^4\sin^4\theta}{((k^0)^2 - p^2\cos^2\theta)^2}\right].$$

将上式代入(23.11)式及(23.10)式中,我们得到电子-正电子对湮没时的微分有效截面的熟知公式(Heitler (1940),第 224 页):

$$d\sigma = \frac{e^4}{4(4\pi)^2k^0p}\left\{\frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2\sin^2\theta}{(k^0)^2 + p^2\cos^2\theta} - \frac{2p^4\sin^4\theta}{((k^0)^2 - p^2\cos^2\theta)^2}\right\}d\Omega. \qquad (23.12)$$

## 23.3. 轫致辐射

我们来研究电子在核場中的轫致辐射. 这一过程在于电子经过核旁时，在核的电場作用下放出光子. 此时核本身获得了一部分必需的动量,使得能量守恒. 根据 Coulomb 定律,电荷 $Z_e$ 的核有势

$$a_0(\mathbf{x}) = \frac{Z_e}{4\pi|\mathbf{x}|},$$

因此

$$\varphi_0(\mathbf{q}) = \frac{Z_e}{(2\pi)^{3/2}|\mathbf{q}|^2}. \qquad (23.13)$$

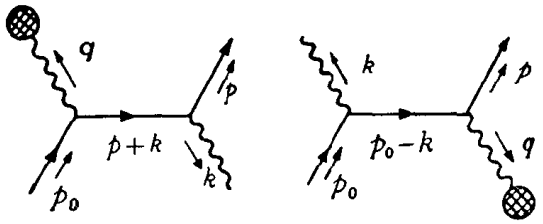



图 16

轫致辐射的一阶非零近似是用图 16 所示的两个二阶图形来描述的，其中 $p_0$ 表示电子的初始的四维动量，$\mathbf{q}$ 是传给核的动量，$p$ 是电子终态的四维动量，而 $k$ 是所辐射的光子的动量.

根据基本公式(22.23)，该过程的截面等于

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^2 EE_0 p}{p_0} \sum_{\sigma} |F(p', p)|^2 d\Omega_p d\Omega_k (k^0)^2 dk^0, \tag{23.14}$$

其中利用了简写：

$$p_0 = |\mathbf{p}_0| \quad 和 \quad p = |\mathbf{p}|.$$

为了计算矩阵元，引进设想的反冲时间赝光子的“极化矢量” $e_q$，它只具有时间分量，即

$$e_q^{\mu} = \delta_{\mu 0}.$$

然后根据一般的方案，得到

$$F(p', p) = \frac{e^2\varphi(\mathbf{q})}{i(2\pi)^2} \bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\hat{e}}{\sqrt{2k^0}} \frac{\hat{p} + \hat{k} + m}{2(pk)} \hat{e}_q - \hat{e}_q \frac{\hat{p}_0 - \hat{k} + m}{2(p_0 k)} \frac{\hat{e}}{\sqrt{2k_1^0}} \right\} v^{\nu',-}(\mathbf{p}_0),$$

或

$$F(p', p) = \frac{e^2\varphi(\mathbf{q})}{2i(2\pi)^2\sqrt{2k^0}} \bar{v}^{\nu,+}(\mathbf{p}) M v^{\nu',-}(\mathbf{p}_0), \tag{23.15}$$

其中 $M$ 经过通常的简化后，可以化成形式

$$M = \frac{a}{(pk)} + \frac{b}{(p_0 k)},$$

$$(a = \hat{e}\hat{k}\hat{e}_q + 2(ep)\hat{e}_q, \; b = \hat{e}_q\hat{k}\hat{e} - 2(ep_0)\hat{e}_q).$$

取(23.15)式的平方，对自旋 $\nu$ 和极化 $e$ 求和，并对自旋 $\nu'$ 求平均，我们得到

$$\sum_{\sigma} |F|^2 = \frac{Z^2 e^6}{64(2\pi)^7 k^0 EE_0} \frac{1}{(\mathbf{q}^2)^2} \mathrm{Sp}\tilde{A}, \tag{23.16}$$

其中

$$A = (\hat{p} + m)M(\hat{p}_0 + m)\bar{M},$$

而在 $A$ 上的波纹记号表示对极化 $e$ 求和.

$\mathrm{Sp}\tilde{A}$ 的计算分为三步来进行，将 $A$ 表示为三项之和：

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_1 = \frac{1}{(pk)^2} \{(\hat{p} + m)a(\hat{p}_0 + m)\bar{a}\}, \quad A_2 = \frac{1}{(p_0 k)^2} \{(\hat{p} + m)b(\hat{p}_0 + m)\bar{b}\},$$

$$A_3 = \frac{1}{(pk)(p_0 k)} \{(\hat{p} + m)a(\hat{p}_0 + m)\bar{b} + (\hat{p} + m)b(\hat{p}_0 + m)\bar{a}\}.$$

我们注意，$A_2$ 可以经过替代

$$E \to E_0, \qquad \mathbf{p}_0 \to -\mathbf{p},$$
$$E \to -E, \qquad \mathbf{p} \to -\mathbf{p}_0,$$

来从 $A_1$ 求得. 因此计算矩阵迹

$$\mathrm{Sp}\, A_1 = \frac{8}{(pk)^2} \{(pk)(2E_0 k^0 - (p_0 k)) + 2(ep)^2(2EE_0 - (pp_0) + m^2) +$$
$$+ 2(ep)^2(2E_0 k^0 - (p_0 k)) + 2(ep)(ep_0)(pk)\},$$

$$\mathrm{Sp}\, A_3 = \frac{16(ep)(ep_0)}{(p_0 k)(pk)} \{(p_0 k) - (pk) - 2m^2 - 4EE_0 + 2(pp_0)\} +$$
$$+ \frac{16}{(p_0 k)(pk)} \{k^0[k^0(pp_0) - E(p_0 k) - E_0(pk)] +$$
$$+ (p_0 k)(pk) - m^2(k^0)^2 + (ep)^2(p_0 k) - (ep_0)^2(pk)\},$$

并对光子的极化 $e$ 求和，考虑到关系

$$\left.\begin{aligned}&\sum_e (ep)^2 = p^2\sin^2\theta,\quad \sum_e (ep_0)^2 = p_0^2\sin^2\theta_0,\\&\sum_e (ep_0)(ep) = pp_0\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{23.17}$$

其中 $\theta$ 是 $\mathbf{k}$ 与 $\mathbf{p}$ 的夹角，$\theta_0$ 是 $\mathbf{k}$ 与 $\mathbf{p}_0$ 的夹角，$\varphi$ 是 $(\mathbf{k},\mathbf{p})$ 与 $(\mathbf{k},\mathbf{p}_0)$ 两平面的夹角，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,\tilde{A} = {}&\frac{8p^2\sin^2\theta}{(pk)^2}(4E^2-q^2) + \frac{8p_0^2\sin^2\theta_0}{(p_0k)^2}(4E_0^2-q^2) -\\&-\frac{16pp_0\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi}{(pk)(p_0k)}[4EE_0 - q^2 + 2(k^0)^2] + 16(k^0)^2\frac{p_0^2\sin^2\theta_0 + p^2\sin^2\theta}{(pk)(p_0k)}.\end{aligned}$$

将(23.16)式代入(23.14)式中，有

$$d\sigma = \frac{Z^2e^6}{64(2\pi)^5}\frac{p}{p_0}\frac{k^0dk^0d\Omega_kd\Omega_p}{\mathbf{q}^2\mathbf{q}^2}\,\mathrm{Sp}\,\tilde{A}.$$

设

$$d\Omega_kd\Omega_p = \sin\theta\,d\theta\sin\theta_0d\theta_0d\varphi d\varphi_0,$$

对 $d\varphi_0$ 积分以后，得到微分截面表式的形式为

$$\begin{aligned}d\sigma = {}&\frac{Z^2}{2\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^3\frac{p}{p_0}\frac{k_0dk_0\sin\theta d\theta\sin\theta_0d\theta_0d\varphi}{\mathbf{q}^2\mathbf{q}^2}\left\{\frac{p^2\sin^2\theta}{(pk)^2}(4E^2-q^2) +\right.\\&+\frac{p_0^2\sin^2\theta_0}{(p_0k)^2}(4E_0^2-q^2) - \frac{2pp_0\sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi}{(pk)(p_0k)}(4EE_0 - q^2 + 2k_0^2) +\\&\left.+\frac{2(k^0)^2(p_0^2\sin^2\theta + p^2\sin^2\theta)}{(pk)(p_0k)}\right\}.\end{aligned} \tag{23.18}$$

因为

$$\begin{aligned}(pk) &= k^0(p_0 - |p|\cos\theta),\\(p_0k) &= k^0(p_0 - |p|\cos\theta_0),\end{aligned}$$

则(23.18)式与熟知的公式相一致(Heitler (1940)，第 181 页)。

# 第四章　$S$ 矩阵发散性的消除

## §24. 电动力学中 $S$ 矩阵的发散性(二阶)

在 Compton 散射、正电子湮没和轫致辐射的示例中，我们详细地熟悉了二阶图形之一所对应的各种类型的矩阵元.

利用顶点的 $\delta$ 函数 (21.8)，可以轻易地完成相应矩阵元的积分，而主要的工作在于计算矩阵迹. 当图形内有几条虚粒子内线时，顶点 $\delta$ 函数的个数不足以收缩所有的积分，而 (21.35) 式中的函数 $F(p', p)$ 表示成多重积分形式. 此时发现在一般情况下，这些积分在大动量区域中是发散的. 例如 Compton 散射和粒子对湮没的矩阵元在 $e^2$ 的高阶项中($e^4$ 以及更高阶)是发散的. 和图 17 相应的二阶矩阵元也是发散的.

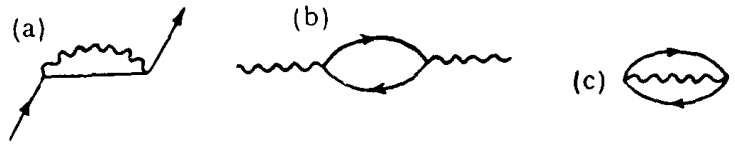



图 17　电动力学的二阶发散图形

### 24.1. 含有两条外部电子线的发散图形 $\Sigma$

将图 17a 中图形的相应散射矩阵项

$$-e^2 : \bar{\psi}(x) \sum_n g^{nn} \gamma^n S^c(x-y) \gamma^n D_0^c(x-y) \psi(y) : \tag{24.1}$$

表示成形式[1]

$$-i : \bar{\psi}(x) \Sigma(x-y) \psi(y) :, \tag{24.2}$$

其中

$$\Sigma(x-y) = -ie^2 \sum_n g^{nn} \gamma^n S^c(x-y) \gamma^n D_0^c(x-y). \tag{24.3}$$

不难通过简单计算，证明矩阵 $\Sigma(x-y)$ 的 Fourier 映象 $\Sigma(p)$

$$\Sigma(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} \Sigma(p)\, dp \tag{24.4}$$

在 $S$ 矩阵元中以如下方式出现：

$$F(p', p) = (2\pi)^4 \bar{v}(p') \Sigma(p) v(p), \quad (p' = p), \tag{24.5}$$

其中 $\bar{v}$ 和 $v$ 为与场函数 $\bar{\psi}$ 及 $\psi$ 对应的旋量振幅. 因此矩阵元 $F$ 的收敛性完全决定于矩阵

1) 此处引入因子 $-i$ 是为了今后计算的方便. 在这一归一化下，当 $k^2<0$ 时，算符 $\Sigma$ 在动量表象中为实的(参阅 §32.2)，它与电子质量 $m$ 之和构成 Green 函数方程中的质量算符(参阅 §34.3).

$\Sigma(p)$ 的收敛性. 我们记住,在动量表象中的因果函数具有形式 [参阅 (21.3) 式及 (21.4) 式]:

$$D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon}, \tag{24.6}$$

$$S^c(p) = \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}, \tag{24.7}$$

我们得到 $\Sigma(p)$ 为

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \sum_n g^{nn} \int dk D_0^c(k) \gamma^n S^c(p-k) \gamma^n =$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \sum_n g^{nn} \int \frac{dk}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^n \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^n. \tag{24.8}$$

当 $|k|$ 为大值时,被积函数按 $|k|^{-3}$ 递减,因此,一般而言,积分(24.8)是线性发散的,这样,我们看到在目前情况下,通常所采用的处理因果函数乘积的法则导致毫无意义的结果.

就本质上言,此处出现的情况指出,我们没有将奇异函数的乘积定义为可积的奇异函数. 为了解决将时序乘积

$$T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$$

的系数函数定义为可积的广义函数问题,我们利用如同 § 16 中所作的极限过程方法. 为了这一点,首先研究辅助性的设想情况,即设场的算符函数满足用 reg $(\Delta^c)$ 代替因果函数 $\Delta^c$ 的对易关系.

代替(24.6)、(24.7)式,在 $\Sigma(p)$ 中应代入以下函数:

$$\text{reg } D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} - \sum_M c_M \frac{1}{k^2 + i\varepsilon - M^2}, \tag{24.9}$$

$$\text{reg } S^c(p) = (m + \hat{p}) \left\{ \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} + \sum_M c_M \frac{1}{M^2 - p^2 - i\varepsilon} \right\}. \tag{24.10}$$

此时发现,只要一个辅助质量 $M$, 已经足够使 $\Sigma(p)$ 正规化. 令

$$c_M = -1,$$

有

$$\text{reg } D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} = \frac{M^2}{(k^2 + i\varepsilon)(k^2 - M^2 + i\varepsilon)},$$

$$\text{reg } S^c(k) = \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} - \frac{M + \hat{p}}{M^2 - p^2 - i\varepsilon} = \frac{(m + \hat{p})(M^2 - m^2)}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(M^2 - p^2 - i\varepsilon)}.$$

显然 reg $D_0^c(k)$ 按 $|k|^{-4}$ 递减, 而 reg $S^c(p)$ 按 $|k|^{-3}$ 递减. 因此当 $|k|$ 为大值时, reg $\Sigma(p)$ 式中的积分

$$\text{reg } \Sigma(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4 i} \sum_n g^{nn} \int dk \text{ reg } D_0^c(k) \gamma^n \text{ reg } S^c(p-k) \gamma^n \tag{24.11}$$

收敛如下:

$$\int^k \frac{d^4k}{|k|^7} \sim \frac{1}{|k|^3}.$$

现在来研究在消除正常化过程中当 $M \to \infty$ 时 reg $\Sigma(p)$ 的性质，算出 reg $\Sigma(p)$ 的明显形式后，就便于进行这一研究.

为了计算积分(24.11)，我们利用以下的辅助方法. 将(24.11)式中分母的乘子表示为如下形式:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{i\alpha(k^2-m^2+i\varepsilon)}\,d\alpha, \tag{24.12}$$

此时对 $k$ 的积分化为求 Gauss 积分.

Gauss 型的四维基本积分具有形式:

$$\int e^{i(ak^2+bk)}\,dk = \frac{\pi^2}{ia^2}e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a>0). \tag{24.13}$$

从研究以下的典型积分，可以得到公式(24.13):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(at^2+bt)}\,dt \quad (a>0),$$

上式总可以认为是表式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2+bt)-\eta t^2}\,dt \quad \text{当 } \eta \to +0$$

的极限.

为了计算它起见，利用变量代换

$$t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}x - \frac{b}{2a},\quad i(at^2+bt) = -ax^2 - \frac{ib^2}{4a},$$

使坐标系转动$-\frac{\pi}{4}$，并使原点移动. 因此，当 $\eta \to 0$ 为极限时，我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(at^2+bt)}\,dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{ib^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a>0). \tag{24.14}$$

当 $a<0$ 时，这一积分的值可以用复共轭运算求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(at^2+bt)}\,dt = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\,e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a<0). \tag{24.15}$$

现在可以着手计算所求的四维积分

$$\int e^{i(ak^2+bk)}\,dk,$$

其中

$$k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2,\quad bk = b^0k^0 - \mathbf{bk},\quad dk = dk^0\,d\mathbf{k}.$$

利用公式(24.14)和(24.15)，直接得到(24.13)式:

$$\int e^{i(ak^2+bk)}\,dk \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ak0^2+b^0k^0)}\,dk^0 \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant 3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ak^{\alpha 2}+b^\alpha k^\alpha)}\,dk^\alpha =$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-\frac{i}{4a}(b^{02}-\mathbf{b}^2)} = \frac{\pi^2}{ia^2}e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a>0).$$

从(24.13)式对分量 $b$ 多次微分，可以得到这种类型的其他必需的积分，例如，

$$\int e^{i(ak^2+bk)}k^n\,dk = \frac{ib^n}{2a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a>0), \tag{24.16}$$

$$\int e^{i(ak^2+bk)}k^mk^n\,dk = \frac{2ag^{mn} - ib^mb^n}{4a^2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 e^{-\frac{ib^2}{4a}} \quad (a>0). \tag{24.17}$$

当 $a<0$ 时，这种类型的公式可以从 (24.13)、(24.16) 和 (24.17) 式通过复共轭运算来得到.

我们回到积分(24.11)的计算. 在其中代入奇异函数(24.12)的积分表示:

$$\operatorname{reg} D_0^c(k)=i\int_0^\infty e^{iak^2-\varepsilon a}\left(1-e^{-iaM^2}\right)d\alpha, \tag{24.18}$$

$$\operatorname{reg} S^c(k)=i(m+\hat{p})\int_0^\infty e^{iap^2-\varepsilon a}\left(e^{-iam^2}-e^{-iaM^2}\right)d\alpha, \tag{24.19}$$

利用(24.13)式和(24.16)式，对 $k$ 积分，并考虑到

$$\sum_n g^{nn}\gamma^n\hat{p}\gamma^n=-2\hat{p}\quad\text{和}\quad\sum_n g^{nn}\gamma^n\gamma^n=4, \tag{24.20}$$

我们得到 reg $\Sigma(p)$ 表式

$$\operatorname{reg}\Sigma(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\,\frac{e^{-\varepsilon(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)^2}e^{\frac{i\alpha\beta p^2}{\alpha+\beta}}\times$$
$$\times\left(2m-\hat{p}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\left(1-e^{-i\alpha M^2}\right)\left(e^{-i\beta m^2}-e^{-i\beta M^2}\right). \tag{24.21}$$

化成新变量:

$$\alpha=\xi\lambda,\quad\beta=(1-\xi)\lambda, \tag{24.22}$$

考虑到 Jacobi 式

$$\frac{(\partial\alpha,\partial\beta)}{(\partial\xi,\partial\lambda)}=\lambda, \tag{24.23}$$

我们得到

$$\operatorname{reg}\Sigma(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1(2m-\hat{p}\xi)J_\varepsilon(\xi,M)\,d\xi, \tag{24.24}$$

其中积分值

$$J_\varepsilon(\xi,M)=\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\lambda\varepsilon+i\lambda\xi(1-\xi)p^2}\left(1-e^{-i\lambda\xi M^2}\right)\left(e^{-i(1-\xi)\lambda m^2}-e^{-i(1-\xi)\lambda M^2}\right)$$

可利用对参数 $p^2$ 微分求出，当 $\varepsilon\to0$ 极限时，有

$$J_0(\xi,M)=\ln\left|\frac{M^2-\xi p^2}{m^2}\right|+\ln\left|\frac{m^2}{m^2-\xi p^2}\cdot\frac{\xi M^2+(1-\xi)m^2-\xi(1-\xi)p^2}{M^2-\xi(1-\xi)p^2}\right|.$$

## 24.2. $\Sigma$ 中发散部分的分离

将所得之值 $J_0(\xi,M)$ 代入(24.24)式中，得到

$$\operatorname{reg}\Sigma(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 d\xi(2m-\hat{p}\xi)\ln\left|\xi\frac{M^2-\xi p^2}{m^2}\right|+$$
$$+\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 d\xi(2m-\hat{p}\xi)\ln\left|\frac{m^2}{m^2-\xi p^2}\cdot\frac{\xi M^2+(1-\xi)m^2-\xi(1-\xi)p^2}{M^2-\xi^2(1-\xi)p^2}\right|; \tag{24.25}$$

当 $M\to\infty$ 时，(24.25) 式中第二项趋于确定的极限，即

$$\Sigma'(p)=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 d\xi(2m-\hat{p}\xi)\ln\left|\frac{m^2}{m^2-\xi p^2}\right|. \tag{24.26}$$

(24.25) 式的上述分解方法是为了有如下二式:

$$\Sigma'(0)=0,\quad \left.\frac{\partial\Sigma'(p)}{\partial p^n}\right|_{p=0}=0. \tag{24.27}$$

在(24.25)式中,第一项当$M\to\infty$时显然是对数型发散的.

化成组态表象,当$M$相当大时,可得

$$\operatorname{reg}\Sigma(x)=\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left\{\ln\frac{M^2}{m^2}\left(4m-i\frac{\hat\partial}{\partial x}\right)+\left(\frac{i}{2}\frac{\hat\partial}{\partial x}-4m\right)\right\}\delta(x)+\Sigma'_M(x), \tag{24.28}$$

这里函数 $\Sigma'_M(x)$ 的 Fourier 映象是用 (24.25) 式中第二项表示的. 重复 § 16 中的讨论,可以证明,当 $M\to\infty$ 时, $\Sigma'_M(x)$ 广义收敛于可积函数

$$\lim\Sigma'_M(x)=\Sigma'(x),$$

上式的 Fourier 映象由 (24.26) 式来表示. 至于函数 $\operatorname{reg}\Sigma(x)$ 整体, 则由于存在因子 $\ln\left(\frac{M}{m}\right)^2$, 当 $M\to\infty$ 时甚至也不广义收敛. 因为,除此之外,当 $x\neq 0$ 时,第一项为零,可以写成

$$\lim_{M\to\infty}\operatorname{reg}\Sigma(x)=\Sigma'(x),\quad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时到处成立.}$$

这里我们已从奇异函数 $\Sigma(x)$ 中分离出了发散部分, 但是, 我们要强调, 分离奇点的手续并非唯一的,事实上,如果将(24.28)式表示成形式

$$\operatorname{reg}\Sigma(x)=\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\ln\left(\frac{M}{\mu}\right)^2\left(4m-i\frac{\hat\partial}{\partial x}\right)+\left(\frac{i}{2}\frac{\hat\partial}{\partial x}-2m\right)\right\}\delta(x)+\Sigma''_M(x),$$

其中

$$\Sigma''_M(x)=\frac{e^2}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu}{M}\right)^2\left(4m-i\frac{\hat\partial}{\partial x}\right)\delta(x)+\Sigma'_M(x),$$

而 $\mu$ 是任意的有限质量, 我们得到的正常部分 $\Sigma''_M$ 与 $\Sigma'_M$ 相差一个与 $\delta(x)$ 及其一阶导数成比例的项.

当改为任何其他一种正常化方法时, 有限部分 $\Sigma'_M$ 有性质相同的变化. 例如, 如果 $\Sigma(p)$ 的正常化方法是在积分(24.9)式中引进 Feynman 截断乘子(1948, 1949 б):

$$\frac{M^2}{M^2-k^2},$$

用我们的写法,这相当于只将光子的 $D_0^c$ 函数正常化,那么可以将结果表示为形式:

$$\operatorname{reg}_F\Sigma(x)=\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\ln\left(\frac{M}{m}\right)^2\left(4m-i\frac{\hat\partial}{\partial x}\right)+\left(\frac{i}{2}\frac{\hat\partial}{\partial x}-4m\right)\right\}\delta(x)+\Sigma'_F(x),$$

其中动量表象的正常函数 $\Sigma'_F$ 与 $\Sigma'$ 相差之值为

$$\frac{e^2}{16\pi^2}\int_0^1 d\xi(\hat p\xi-2m)\ln(1-\xi)=\frac{e^2}{16\pi^2}\left(2m-\frac{3}{4}\hat p\right).$$

因此,显而易见,当消除正常化时,趋近于确定极限的并非 $\operatorname{reg}\Sigma(p)$,而是例如从后者减去 Maclaurin 级数前二项后的表式:

$$\operatorname{reg}\Sigma(p)-\operatorname{reg}\Sigma(0)-\sum_n\frac{\partial}{\partial p^n}\operatorname{reg}\Sigma(p)\Big|_{p=0}p^n, \tag{24.29}$$

上式趋近的极限与正常化方式无关，因为在 reg $\Sigma(p)$ 上加上任何对 $p$ 的一阶多项式，并不会改变所写出的“剩余”项(24.29)式.

对(24.29)式加上 $p$ 的任意一阶多项式，我们获得 $\Sigma'(p)$ 的一般式. 从相对论协变性来考虑，这一多项式应具有形式:

$$c_1(\hat{p} - m) + c_2 m,$$

因此，获得 $\Sigma'(p)$ 的一般式如下:

$$\Sigma'(p) = \frac{e^2}{8\pi^2}\left\{\int_0^1 d\xi(2m - \hat{p}\xi)\ln\left|\frac{m^2}{m^2 - p\xi^2}\right| + c_1(\hat{p} - m) + c_2 m\right\}. \quad (24.30)$$

与此相应，$\Sigma'$ 式的 $x$ 表象可以确定至仅差一项:

$$\frac{e^2}{8\pi^2}\left\{c_1\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right) + c_2 m\right\}\delta(x),$$

此差当 $x \neq 0$ 时化为零. 从一般考虑亦可预计，在 $T$ 乘积中这一项的不定性只存在于点 $x = 0$ 的无穷小邻域内.

### 24.3. 含有二条外部光子线的发散图形 $\Pi$

现在讨论 $S_2(x, y)$ 中第二个发散项，相当于图 17b 的散射矩阵项可以表示为形式:

$$-e^2{:}\ \mathrm{Sp}\,(\hat{A}(x)S^c(x - y)\hat{A}(y)S^c(y - x)){:} =$$

$$= -i\sum_{m,n} {:}\, A_m(x)\Pi^{mn}(x - y)A_n(y){:},$$

其中

$$\Pi^{mn}(x - y) = -ie^2\,\mathrm{Sp}\,\gamma^m S^c(x - y)\gamma^n S^c(y - x), \quad (24.31)$$

化成动量表象:

$$\Pi^{mn}(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\Pi^{mn}(k)\,dk, \quad (24.32)$$

我们发现积分

$$\Pi^{mn}(k) = \frac{k^2}{(2\pi)^4 i}\int dp\,\mathrm{Sp}\left(\gamma^m\frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\gamma^n\frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\right) \quad (24.33)$$

在大动量区域内为二次发散的.

应用计算 $\Sigma(p)$ 时相同的方法，可求 $\Pi^{mn}(k)$ 的显式. 利用正常化了的 $S^c$ 函数(24.19)，依靠公式(24.13)、(24.16)和(24.17)，对 $p$ 作积分，并根据(6.16)式，计算矩阵迹，我们得到

$$\mathrm{reg}\,\Pi^{mn}(k) = \frac{ie^2}{4\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\, e^{-\varepsilon(\alpha+\beta)+i\frac{\alpha\beta k^2}{\alpha+\beta}}(e^{-i\alpha m^2} - e^{-i\alpha M^2})(e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta M^2}) \times$$

$$\times\frac{1}{(\alpha + \beta)^2}\left\{\frac{i\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2}(2k^n k^m - k^2 g^{mn}) - g^{mn}\left(\frac{1}{\alpha + \beta} + im^2\right)\right\}.$$

引入新变量:

$$\alpha = \xi\lambda, \quad \beta = (1 - \xi)\lambda,$$

则上式化为

$$\operatorname{reg}\Pi^{mn}(k)=\frac{ie^2}{4\pi^2}\int_0^1 d\xi\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\varepsilon\lambda}(e^{-i\xi\lambda m^2}-e^{-i\xi\lambda M^2})\times$$

$$\times(e^{-i(1-\xi)\lambda m^2}-e^{-i(1-\xi)\lambda M^2})\,e^{i\lambda\xi(1-\xi)k^2}\left\{i\xi(1-\xi)(2k^mk^n-g^{mn}k^2)-g^{mn}\left(\frac{1}{\lambda}+im^2\right)\right\}.$$

为了对 $\lambda$ 积分，将分母中含 $\lambda^2$ 之项表示为

$$\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2}e^{-\varepsilon\lambda}f(\lambda),$$

其中

$$f(\lambda)=e^{i\lambda\xi(1-\xi)k^2}(e^{-i\xi\lambda m^2}-e^{-i\xi\lambda M^2})(e^{-i(1-\xi)\lambda m^2}-e^{-i(1-\xi)\lambda M^2}),$$

再作分部积分，考虑到当 $\lambda\to\infty$ 时，$f(\lambda)$ 为有限，而当 $\lambda\to 0$ 时，$f(\lambda)$ 象 $\lambda^2$ 一样趋于零．我们求得

$$\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2}f(\lambda)\,e^{-\varepsilon\lambda}=\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{-\varepsilon\lambda}f(\lambda))\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\varepsilon\lambda}\frac{df(\lambda)}{d\lambda}.$$

因此，有

$$\operatorname{reg}\Pi^{mn}(k)=\frac{ie^2}{4\pi^2}\int_0^1 d\xi F_\varepsilon(\xi,M),$$

其中积分

$$F_\varepsilon(\xi,M)=\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}e^{-\varepsilon\lambda}\left\{f(\lambda)[i\xi(1-\xi)(2k^nk^m-g^{mn}k^2)-im^2g^{mn}]-g^{mn}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right\}$$

可以通过对参数 $\varepsilon$ 作微分而求得，这样得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(\xi,M)=F_0(\xi,M)=[2i\xi(1-\xi)(k^nk^m-g^{mn}k^2)-im^2g^{mn}]\times$$

$$\times\left\{\ln\left|\frac{(1-\xi)M^2+\xi m^2-\xi(1-\xi)k^2}{m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|-\right.$$

$$\left.-\ln\left|\frac{M^2-\xi(1-\xi)k^2}{\xi M^2+(1-\xi)m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|\right\}+$$

$$+ig^{mn}\xi\left\{m^2\ln\left|\frac{(1-\xi)M^2+\xi m^2-\xi(1-\xi)k^2}{m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|-\right.$$

$$\left.-M^2\ln\left|\frac{M^2-\xi(1-\xi)k^2}{\xi M^2+(1-\xi)m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|\right\}+$$

$$+ig^{mn}(1-\xi)\left\{m^2\ln\left|\frac{\xi M^2+(1-\xi)m^2-\xi(1-\xi)k^2}{m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|-\right.$$

$$\left.-M^2\ln\left|\frac{M^2-\xi(1-\xi)k^2}{(1-\xi)M^2+\xi m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|\right\}.$$

当 $M\to\infty$ 时，上式化为

$$\lim_{M\to\infty}F_0(\xi,M)=$$

$$=ig^{mn}(M^2-m^2)[\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)]+$$

$$+2i\xi(1-\xi)\ln\frac{M^2}{m^2}(k^nk^m-g^{nm}k^2)+$$

$$+2i\xi(1-\xi)(k^nk^m-g^{nm}k^2)\ln\left|\frac{\xi(1-\xi)m^2}{m^2-\xi(1-\xi)k^2}\right|+$$

$$+ig^{nm}[m^2-\xi(1-\xi)k^2].$$

### 24.4. $\Pi$ 中发散的分离和梯度不变性

对 $\xi$ 积分，我们获得当 $M$ 为大值时的极限：

$$\operatorname{reg}\Pi^{mn}(k)=\frac{e^2}{8\pi^2}g^{mn}(M^2-m^2)-\frac{e^2}{4\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\frac{k^nk^m-g^{nm}k^2}{3}+\Pi'^{mn}(k), \quad (24.34)$$

其中

$$\Pi'^{mn}(k)=\frac{e^2}{2\pi^2}(k^nk^m-g^{nm}k^2)\int_0^1 d\xi\cdot\xi(1-\xi)\ln\left|\frac{m^2-\xi(1-\xi)k^2}{\xi(1-\xi)m^2}\right| \quad (24.35)$$

是正常函数.

化成组态表象，当 $M$ 为相当大时，我们求得

$$\operatorname{reg}\Pi^{mn}(x)=\frac{e^2}{8\pi^2}g^{mn}(M^2-m^2)\delta(x)+$$

$$+\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\left(g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}g^{mm}\frac{\partial}{\partial x^m}-g^{mn}\Box\right)\delta(x)+\Pi'^{mn}_M(x). \quad (24.36)$$

当 $M\to\infty$ 时，$\Pi'^{mn}_M(x)$ 项广义趋近于可积函数 $\Pi'^{mn}(x)$：

$$\lim_{M\to\infty}\Pi'^{mn}_M(x)=\Pi'^{mn}(x),$$

它的 Fourier 映象由公式(24.35)给出. 这样，从 $\Pi^{mn}(x)$ 分离奇异性的工作就完成了，注意，与上面情况相同，将 $\operatorname{reg}\Pi^{mn}(x)$ 分成奇异部分和有限部分的分法不是唯一的. 因此，有限部分 $\Pi'^{mn}(x)$ 也不是单值的，$\Pi^{mn}(x)$ 上可以加上分量 $k^n$ 的不高于二阶的任意多项式，因为在目前情况下，奇异部分是 $k$ 的二阶多项式.

为了结束对 $\Pi^{mn}$ 式的分析，再来构成 $\Pi^{mn}$ 应当满足的梯度不变条件. 容易证明，与函数 $\Sigma(p)$ 相类似，函数 $\Pi^{mn}(k)$ 与势 $A_m(k)$ 以如下组合形式出现于矩阵元中：

$$(2\pi)^4\sum_{m,n}:A_m(k)\Pi^{mn}(k)A_n(k):. \quad (24.37)$$

正如 §6 中已经指明的，从最初引入电磁场势 $A_m$ 的时候就已使得所有可观察物理量之值在势作如下梯度变换时是不变的：

$$A_m(x)\to A'_m(x)=A_m(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x^m},$$

或者在动量表象中为

$$A_m(k)\to A'_m(k)=A_m(k)+ig^{mm}k^mf(k).$$

因此，类似(24.37)的算符的矩阵元的不变性要求

$$\sum_{m,n}:A'_m(k)\Pi^{mn}(k)A'_n(k):=\sum_{m,n}:A_m(k)\Pi^{mn}(k)A_n(k):,$$

此式导至条件

$$\sum_n g^{nn}k^n\Pi^{mn}(k)=0, \quad (24.38)$$

由此可得出结论，函数 $\Pi^{mn}$ 应该具有形式：

$$\Pi^{mn}(k)=(k^mk^n-g^{mn}k^2)\pi(k^2). \quad (24.39)$$

回到公式(24.34),(24.35),我们看到,由于函数 $\Pi^{mn}(k)$ 的发散性,可以只对有限部分 $\Pi'^{mn}(k)$ 要求梯度不变性(24.38). 从(24.35)式得到结论,为了使 $\Pi'(k)$ 满足条件(24.38),对它可以加上表式:

$$c_3(k^n k^m - g^{mn}k^2),$$

也就是,一般而言,分解(24.36)式必须用下式代替:

$$\operatorname{reg}\Pi^{mn}(x) = \frac{e^2}{8\pi^2}g^{mn}(M^2 - m^2)\delta(x) + \left(\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2} + \frac{e^2}{2\pi^2}c_3\right)\times$$
$$\times\left(g^{nn}\frac{\partial}{\partial x^n}g^{mn}\frac{\partial}{\partial x^m} - g^{mn}\Box\right)\delta(x) + \Pi'^{mn}_{\text{inv}}(x),$$

其中有限部分 $\Pi'^{mn}_{\text{inv}}(x)$ 是梯度不变的,它在动量表象中具有如(24.39)式的形式:

$$\Pi^{mn}_{\text{inv}}(k) = \frac{e^2}{2\pi}(k^m k^n - g^{mn}k^2)\left(c_3 + \int_0^1 d\xi\,\xi(1-\xi)\ln\left|\frac{m^2 - \xi(1-\xi)k^2}{\xi(1-\xi)m^2}\right|\right). \quad (24.40)$$

同理,可以研究相当于图 17b 的 $S$ 矩阵项,不进行具体计算,我们注意,正常化以后相应的函数 $R(x_1 - x_2)$ 在动量表象中可以写成下式:

$$R(k) = R'_M(k) + R_{\text{sing}}(M, k),$$

而当 $M \to \infty$ 时,函数 $R'_M(k)$ 趋近于可积的极限:

$$\lim_{M\to\infty} R'_M(k) = R'(k),$$

而 $R_{\text{sing}}$ 趋近于四维矢量 $k$ 分量的多项式函数,它象 $M^4$ 一样发散.

## 24.5. 可积函数 $S_2$ 的构成

我们得到结论: 在所讨论的正常化情况下 ($M < \infty$), 散射矩阵的二阶项

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T(\mathscr{L}(x_1), \mathscr{L}(x_2))$$

可以表成下式:

$$i^2T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) = i^2T'_M[\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)] -$$
$$-i\left\{a_2^M{:}\bar\psi(x_1)\left(i\frac{\hat\partial}{\partial x} - m\right)\delta(x_1 - x_2)\psi(x_2){:} - \delta m{:}\bar\psi(x_1)\delta(x_1 - x_2)\psi(x_2){:} +\right.$$
$$+\delta\mu\sum_{n,m}g^{mn}{:}A_m(x_1)\delta(x_1 - x_2)A_n(x_2){:} +$$
$$+a_3^M\sum_{m,n}{:}A_n(x_1)\left(g^{nn}\frac{\partial}{\partial x_1^n}g^{mm}\frac{\partial}{\partial x_1^m} - \Box_1 g^{mn}\right)\delta(x_1 - x_2)A_m(x_2){:} +$$
$$\left.+R_{\text{sing}}\left(M, \frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x_1 - x_2) + \text{以 } x_2 \text{ 代 } x_1 \text{ 后的相同项}\right\}. \quad (24.41)$$

同时,当 $M$ 为大值时,常数 $a_2^M$, $a_3^M$, $\delta m$, $\delta\mu$ 为发散的:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &\sim \frac{e^2}{16\pi^2}\left[\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} - c_1\right], \quad \delta m \sim \frac{e^2}{16\pi^2}\left[3m\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{7m}{2} + c_2\right], \\ a_3 &\sim \frac{e^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{M^2}{m^2} - c_2\right], \quad \delta\mu \sim \frac{e^2}{8\pi^2}(M^2 - m^2), \end{aligned}\right\} \quad (24.42)$$

而当构成式 $T'_M$ 的系数函数时, 对应定则应该作如下改变: Feynman 图中简单线条应用

reg $\Delta^c$ 代替 $\Delta^c$，而封闭图形应用相应的有限函数 $\Sigma'_M$，$\Pi'^{mn}_{M\,\mathrm{inv}}$ 和 $R'_M$. 这时显然，当正常化消除后，表式 $T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$ 的所有系数函数向有限极限收敛.

我们还看到，$S_2(x_1, x_2)$ 中所有的发散是由于与 $\delta(x_1 - x_2)$ 及其导数成正比之项，这些项在 $x_1 = x_2$ 点的无限小邻域中不等于零. 在 § 19 中已经指明，就在这一邻域中，$T$ 乘积 $T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$ 并不是完全确定的.

因此，就有可能将 $T$ 乘积在 $x_1 = x_2$ 点的邻域定义为下式:

$$T'(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) = \lim_{M\to\infty} T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$$

的极限，这就保证了 $S_2(x_1, x_2)$ 的可积性.

另外还有一个完全等效的方法可求出可积的 $S_2$，在 § 18 中已经证明，$S_2$ 的最一般形式包括任意的准定域性算符:

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) + iA_2(x_1, x_2). \tag{24.43}$$

因此当未过渡到极限 $M \to \infty$ 时，可以将准定域性算符 $iA_2(x_1, x_2)$ 定义为

$$iA_2(x_1, x_2) = T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) - T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)), \tag{24.44}$$

使得它抵消 (24.34)式中的 $T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$的所有奇异项，这样，当趋近于极限 $M \to \infty$ 后，我们得到 $S_2(x_1, x_2)$ 是可积的多重定域性算符:

$$S_2(x_1, x_2) = -T'(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)).$$

在 § 18 中已经证明，准定域性算符 $iA_2$ 可以包含在有效的相互作用总拉格朗日函数密度中. 为了这一点，在 $\mathscr{L}(x)$ 中必须引进辅助项 $\mathscr{L}^{(2)}(x)$，这些项对 $dx$ 积分后抵消 $S_2$ 中的奇异项，即

$$i\int \mathscr{L}^{(2)}(x)dx + \frac{i^2}{2}\int \{T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) - T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))\}\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

利用表式(24.41)，分部积分后，这些抵消项可以写成形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2}\int A_2(x, y)\, dy = \\ &= a_2^M\left\{\frac{i}{2}\sum_n :\left(\bar\psi(x)\gamma^n\frac{\partial\psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar\psi}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right): - m:\bar\psi\psi:\right\} - \\ &\quad - \delta m:\bar\psi(x)\psi(x): + \delta\mu\sum_n g^{nn}:A_n(x)A_n(x): + \\ &\quad + a_3^M\left\{\sum_{m,n} g^{mm}g^{nn} : \frac{\partial A_n}{\partial x^m}\frac{\partial A_n}{\partial x^m}: - :\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2:\right\} + R,\end{aligned} \tag{24.45}$$

其中常数 $a_2$, $a_3$, $\delta m$ 和 $\delta\mu$ 的阶为 $e^2$，而且当 $M \to \infty$ 时是发散的.

这样在 $x_1 = x_2$ 点的邻域重新定义 $T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$ 之后，或者在引进辅助的准定域性算符 (24.24) 式后，这又相当于在相互作用拉格朗日函数密度中引进阶为 $e^2$ 的抵消项，再令 $M \to \infty$，我们就得到 $S$ 矩阵 $e^2$ 阶各项的正常化表式:

$$\frac{i^2}{2!}\int dx_1\, dx_2 T'(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)).$$

在通常叙述中 [Dyson (1949 б), 竹田 (1952), Matthews, Salam (1954)]，并不提到

极限过渡，而且事实上是用无意义的发散式来作为抵消项．我们的叙述本质上是与通常的叙述等效的，其差别只不过是更高度的严密性而已．

## §25. 电动力学中 $S$ 矩阵的发散(三阶)

我们已经彻底地讨论了矩阵的 $e$ 的二阶项的正常化问题．但是，不难证明，通过完全类似的手续，可以将 $S$ 矩阵中较高阶项正常化．

讨论散射矩阵的三阶项：

$$S_3(x, y, z) = i^3 T(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(z)). \tag{25.1}$$

$S_3$ 中含有二阶发散项部分(例如，相当于图 18 所示的图形)在消去 $S_2$ 中发散的同时被二阶抵消项所补偿了，也就是说，由于在任意两个宗量相重合的点上，重新定义了(25.1)中的 $T$ 乘积而被消去了．

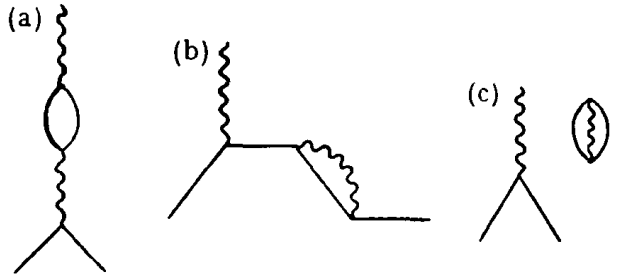



图 18

因此，三阶的特殊发散只能包含于相应于图 19 及 20 中所示的图形的各 $S_3$ 项内．然而与 19a 对应的各项的总和总等于零，与 19b 对应各项的和也如此．事实上，上述各项与 $e^3$ 成正比，而且不含有自由电子和正电子的因子，因此，当电荷共轭变换(12.15)时，相应的矩阵元改变一个因子 $(-1)^3 = -1$，而且由于实际电子及正电子并不存在，它们描写同样的过程，因此总和等于零[1]．

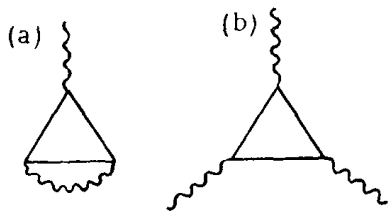



图 19

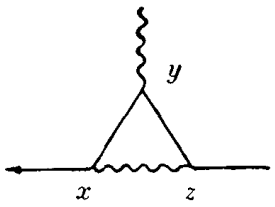



图 20 三阶发散图形

### 25.1. 三阶的顶角图形

因此只需要讨论与图 20 相应的三阶项．这一项可以表示为形式：

$$(ie)^3 : \bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\hat{A}(y)\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(z)}\hat{A}(z)\psi(z) : =$$

$$= ie \sum_n : \bar{\psi}(x)\Gamma^n(x, z|y)\psi(z)A_n(y) :,$$

1) 这一论断是 W. Furry 定理(参阅 §30)的特殊情况．

其中引进了三阶的顶角函数

$$\Gamma^n(x, z|y) = ie^2 \sum_k g^{kk}\gamma^k S^c(x-y)\gamma^n S^c(y-z)\gamma^k D_0^c(x-z). \tag{25.2}$$

化为动量表象

$$\Gamma^n(x, z|y) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int e^{ip(z-x)+ik(y-x)}\Gamma^n(p, k)\,dp\,dk, \tag{25.3}$$

我们得到顶角函数的表式如下:

$$\Gamma^n(p, k) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int dq D_0^c(p-q)\sum_k g^{kk}\gamma^k S^c(q+k)\gamma^k S^c(q)\gamma^k =$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\sum_k g^{kk}\int \frac{dq}{(p-q)^2+i\varepsilon}\gamma^k \frac{\hat{q}+\hat{k}+m}{(q+k)^2-m^2}\gamma^n \frac{\hat{q}+m}{q^2-m^2}\gamma^k. \tag{25.4}$$

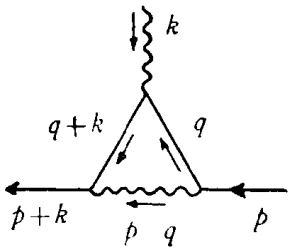


图 21 三阶顶点图形中动量标记的选择

同时注意到(25.3)、(25.4)式中所选定的动量变量与这样的图形相对应,其中进入电子线具有动量 $p$,光子线具有动量 $k$,离开电子线具有动量 $p+k$. 我们取进入电子及虚光子的四维动量之差作为(25.4)式中的积分变量 $q$, 如图 21 所示.

当大 $q$ 时积分 (25.3) 是对数发散的. 为了计算这一积分,利用已经采用的正常化手续(24.18)、(24.19). 将 $S^c$ 和 $D_0^c$ 两式代入(25.4)式中,经过 Dirac 矩阵几次换位以后,我们得到

$$\mathrm{reg}\,\Gamma^n(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,e^{i\alpha p^2+i\beta k^2-\varepsilon(\alpha+\beta+\gamma)}(1-e^{-i\alpha M^2})(e^{-i\beta m^2}-e^{-i\beta M^2})\times$$

$$\times(e^{-i\gamma m^2}-e^{-i\gamma M^2})\int dq e^{iq^2(\alpha+\beta+\gamma)+2iq(k\beta-p\alpha)}[\gamma^n m^2+\hat{q}\gamma^n(\hat{k}+\hat{q})-2m(k^n+2q^n)].$$

利用(24.13)、(24.16) 和 (24.17)式对 $q$ 积分,并且化成新变量 $x$, $y$, $\lambda$:

$$\alpha = \lambda x,\ \beta = \lambda y,\ \gamma = \lambda(1-x-y), \tag{25.5}$$

当在大$M$极限时,对 $\lambda$ 积分后,我们得到

$$\mathrm{reg}\,\Gamma^n(p, k) = \frac{e^2}{8\pi^2}\gamma^n\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left\{\ln\frac{M^2}{m^2}+\ln\frac{xy(1-x-y)}{(1-x)(1-y)(x+y)}+\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{m^2}{m^2(1-x)-x(1-x)p^2-y(1-y)k^2-2xy(pk)}\right|\right\}+$$

$$+\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{\gamma^n m^2-2mk^n+(\hat{p}x-\hat{k}y)\gamma^n\hat{k}+4m(k^n y-p^n x)+(\hat{p}x-\hat{k}y)\gamma^n(\hat{p}x-\hat{k}y)}{m^2(1-x)-xp^2-yk^2+(xp-yk)^2}.$$

## 25.2. $\Gamma$ 中发散的分离和梯度不变性

这样,我们看到 reg $\Gamma$ 可以表示成和的形式:

$$\mathrm{reg}\,\Gamma^n(p, k) = \frac{e^2}{16\pi^2}\gamma^n\left[\ln\frac{M^2}{m^2}-\frac{1}{2}\right]+\Gamma'^n_M(p, k), \tag{25.6}$$

而当$M$很大时, $\Gamma'^n_M$ 项趋近有限极限,经过简短变换后,此极限具有形式:

$$\Gamma'^{n}(p,k)=\frac{e^2}{8\pi^2}\gamma^n\left\{\frac{(p+k)^2-m^2}{2(p+k)^2}-\frac{3}{4}-\frac{[(p+k)^2-m^2]^2}{2(p+k)^4}\ln\left(\frac{(p+k)^2-m^2}{m^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\,y\,\frac{k^2(1-2y)+2xkp}{m^2(1-x)-xp^2-yk^2+(xp-yk)^2}\right\}+$$
$$+\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\,\frac{\gamma^n m^2-2mk^n+(\hat{p}x-\hat{k}y)\gamma^n\hat{k}+4m(k^n y-p^n x)+(\hat{p}x-\hat{k}y)\gamma^n(\hat{p}x-\hat{k}y)}{m^2(1-x)-xy(p+k)^2-x(1-x-y)p^2-y(1-x-y)k^2}. \tag{25.7}$$

化成组态表象后，我们得到，当$M$为这些值时，存在关系式：

$$\mathrm{reg}\,\Gamma^n(x,z|y)=\frac{e^2}{16\pi^2}\gamma^n\left(\ln\frac{M^2}{m^2}-\frac{1}{2}\right)\delta(x-z)\delta(x-y)+\Gamma'^n_M(x,z|y), \tag{25.8}$$

而当 $M\to\infty$ 时，$\Gamma'^n_M$ 项趋于可积函数 $\Gamma'^n$，在动量表象中，$\Gamma'^n$ 决定于(25.7)式. 当 $M\to\infty$ 时，(25.8)式的第一项是对数发散的.

自然，把(25.6)式的分离并非单值的. 在目前情况下，分离式的选择是使得有

$$\Gamma'^n(0,0)=0. \tag{25.9}$$

非单值性的程度决定于奇异项的结构. 因此，对表式(25.7)式可以加上与矩阵 $\gamma^n$ 成正比的常数. 但是这一常数并非任意的，它决定于梯度不变性条件.

试考察这一条件如何应用于散射矩阵的三阶项. 这些项可以分成两类，其中一类的各项包含电磁场的三个算符 $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$，但不包含电磁收缩 $D^c_0$，而在另一类中所出现的项含有一个算符$A$及一个收缩 $D^c_0$. 第一类的各项相当于图 22 所示图形. 相当于图 22 a—c 的各项是最低阶项所构成的正常乘积，因此，显然是梯度不变的. 相应于图 22d 之各项，根据 Furry 定理等于零，最后，可以用直接计算来验算相应于图 22e 之项是梯度不变性的.

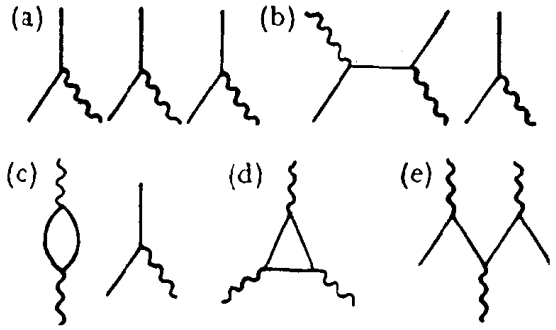



图 22

含有真正的三阶发散的第二类各项之和可以写成

$$\sum_n :A_n(x)J^n(x,y,z): + \sum_n :A_n(y)J^n(y,z,x): + \sum_n :A_n(z)J^n(z,x,y):$$

梯度不变性要求对于上式中的各项加上如下条件：

$$\sum_n\int\frac{\partial f(x)}{\partial x^n}J^n(x,y,z)\,dx=0,$$

由于 $f$ 为任意函数，上式给出

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} J^n(x, y, z) = 0. \tag{25.10}$$

今讨论函数 $J^n(x, y, z)$ 的结构. 这一函数所含各项相应于四个图形(图 23)以及由这些图形将 $x$ 点和 $y$ 点相互对易而得的另四个图形.

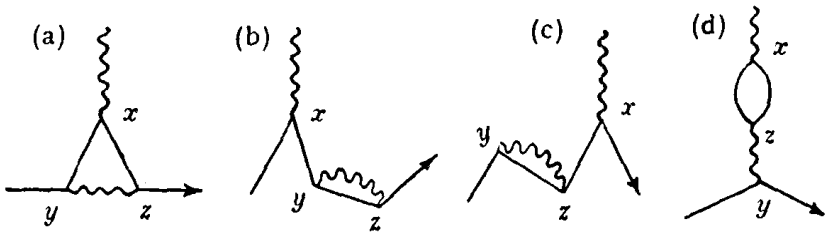



图 23

首先注意 $J^n$ 中相应于图 23d 的项:

$$J_d^n(x, y, z) \sim \Big\{ \sum_{m,k} \Pi^{mn}(x - z) g^{nk} : \bar{\psi}(y) \gamma^k \psi(y) : D_0^c(y - z) + \\ + x \text{ 与 } y \text{ 相对易之项.}$$

根据条件(24.38), 消除发散后, 自动得到

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} J_d^n(x, y, z) = 0.$$

因此只需要考察 $S_3$ 中相应于图 23 的前三个图形的项:

$$\sum_m g^{mm} \{ : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z - x) \gamma^n S^c(x - y) \gamma^m \psi(y) : + \\ + : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z - y) \gamma^m S^c(y - x) \gamma^n \psi(x) : + \\ + : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x - z) \gamma^m S^c(z - y) \gamma^m \psi(y) : \} D_0^c(y - z). \tag{25.11}$$

将上式对 $x^n$ 形式上微分, 考虑以下方程:

$$\left.\begin{aligned} &\left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) \psi(x) = 0, \quad i \sum_n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} + m \bar{\psi}(x) = 0, \\ &\left( i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) S^c(x) = i \sum_n \frac{\partial S^c(x)}{\partial x^n} \gamma^n - m S^c(x) = -\delta(x), \end{aligned}\right\} \tag{25.12}$$

然后求和, 我们得到

$$D_0^c(y - z) \sum_m \{ : \bar{\psi}(z) \gamma^m \delta(z - x) S^c(x - y) \gamma^m \psi(y) : - \\ - : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z - x) \delta(x - y) \gamma^m \psi(y) : + \\ + : \bar{\psi}(z) \gamma^m S^c(z - y) \gamma^m \delta(y - x) \psi(x) : - \\ - : \bar{\psi}(x) \delta(x - z) \gamma^m S^c(z - y) \gamma^m \psi(y) : \} = 0.$$

这样, $S$ 矩阵中与图 23 a、b、c 图形相应的各项之和确为梯度不变量.

我们对条件(25.10)所作的验证纯粹是形式的, 因为表式(25.11)的每一项实际上是发散的. 实际上, 必需验证上式有限部分的梯度不变性条件. 为了验证上的方便, 首先利用 Feynman 的正常化方法是合适的, 然后, 再过渡到我们所采用的正常化方法. 因此, 如果

只使一个光子函数正常化

$$D_0^c(y-z) \to \mathrm{reg}\, D_0^c(y-z),$$

获得表式

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}\, D_0^c(y-z) \sum_m g^{mm}\{&:\bar\psi(z)\gamma^m S^c(z-x)\gamma^n S^c(x-y)\gamma^m\psi(y): + \\ &+ :\bar\psi(z)\gamma^m S^c(z-y)\gamma^m S^c(y-x)\gamma^n\psi(x): + \\ &+ :\bar\psi(x)\gamma^n S^c(x-z)\gamma^m S^c(z-y)\gamma^m\psi(y):\},\end{aligned} \tag{25.13}$$

显然，上式整体满足条件(25.10)，因为此处被微分的乘子

$$\bar\psi(x),\ S^c(x-w),\ S^c(w-x),\ \psi(x)\quad (w=y,z)$$

并不改变.

当 $M<\infty$ 时，考虑到以下展开式:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{reg}_F\, \Sigma(x-y) = \Sigma'_F(x-y) - a_2^F\left(i\frac{\hat\partial}{\partial x} - m\right)\delta(x-y) - \delta m\delta(x-y),\\ &\mathrm{reg}_F\, \Gamma^n(x,y|\xi) = a_1^F\gamma^n\delta(x-y)\delta(y-\xi) + \Gamma'^n_F(x,y|\xi),\end{aligned}\right\} \tag{25.14}$$

奇异部分(25.13)可表示为

$$\begin{aligned}&a_1^F:\bar\psi(z)\gamma^n\delta(z-x)\delta(x-y)\psi(y): + \\ &+ a_2^F:\bar\psi(z)\left[\left(i\frac{\hat\partial}{\partial z} - m\right)\delta(z-y)\right]S^c(y-x)\gamma^n\psi(x): - \\ &- \delta m:\bar\psi(z)\delta(z-y)S^c(y-x)\gamma^n\psi(x): + \\ &+ a_2^F:\bar\psi(x)\gamma^n S(x-z)\left[\left(i\frac{\hat\partial}{\partial z} - m\right)\delta(z-y)\right]\psi(y): - \\ &- \delta m:\bar\psi(x)\gamma^n S^c(x-z)\delta(z-y)\psi(y):.\end{aligned}$$

将上一组合对 $x^n$ 微分，并对 $n$ 求和，考虑到方程(25.12)，可得下式

$$\begin{aligned}(a_1^F - a_2^F)\Big\{&:\bar\psi(z)\left(\frac{\hat\partial}{\partial x}\delta(z-x)\right)\delta(x-y)\psi(y): + \\ &+ :\bar\psi(z)\delta(z-x)\left(\frac{\hat\partial}{\partial x}\delta(x-y)\right)\psi(y):\Big\},\end{aligned}$$

## 25.3. Ward 恒等式

这样，为了保证表式(25.14)的奇异部分的梯度不变性，必需有

$$a_1^F = a_2^F. \tag{25.15}$$

由于表式(25.13)整体的梯度不变性，这一条件同时保证了它的有限部分的不变性. 过渡到极限 $M\to\infty$，在将有效拉格朗日函数密度调整之后，我们所得到的 $S_3$ 的梯度不变式并不包含无穷大. 奇异常数的恒等式(25.15)保证梯度不变性，这是 Ward (1950) 首先用更普遍些的形式证明的，因而此式称为 Ward 恒等式.

我们是在进行 Feynman 正常化时得到这一恒等式的. 今证明，利用通常所采用的正常化方法，上式亦存在. 为此，用简写记号:

$$\mathrm{reg}_F\, \Sigma \equiv \Sigma_F \text{ 和 } \mathrm{reg}_F\, \Gamma^n = \Gamma_F^n,$$

将关系式(25.14)表成形式

$$\Sigma_F(p) + a_2^F \hat{p} + m a_2^F + \delta m = \Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \\ - \sum_n \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n}\Big|_{p=0} \cdot p^n + c_0^F + c_2^F \hat{p}, \tag{25.16}$$

$$\Gamma_F^n(p, k) - a_1^F \gamma^n = \Gamma_F^n(p, k) - \Gamma_F^n(0, 0) - c_1^F \gamma^n, \tag{25.17}$$

由此根据 Feynman 正常化时的(25.15), 我们得到

$$a_2^F \gamma^n = g^{nn} \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n}\Big|_{p=0} - c_2^F \gamma^n = -\Gamma_F^n(0, 0) - c_1^F \gamma^n. \tag{25.18}$$

通过直接计算,容易证明

$$g^{nn} \frac{\partial \Sigma_F(0)}{\partial p^n} = -\Gamma_F^n(0, 0). \tag{25.19}$$

因此从(25.18)式,得到

$$c_1^F = c_2^F.$$

现在记住,根据(24.29)式,下列组合

$$\Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \sum_n \frac{\partial \Sigma_F}{\partial p^n}\Big|_{p=0} \cdot p^n$$

与正常化方式无关,而根据(24.27)式,它等于(24.26)式,对函数 $\Gamma^n$ 利用类似的思考,得到结论: 表式

$$\Sigma'(p) + c_0 + c_2 \hat{p} \text{ 和 } \Gamma'^n(p, k) - c_1 \gamma^n,$$

在

$$c_1 = c_2$$

条件下满足梯度不变性要求. 因此,在通常正常化方法中,函数 $\Sigma(x)$ 及 $\Gamma(x, y|\xi)$ 的相互消去的奇异部分可以写成形式:

$$a_1\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right)\delta(x) + \delta m \delta(x), \tag{25.20}$$

$$- a_1 \gamma^n \delta(x - y)\delta(x - \xi), \tag{25.21}$$

其中

$$a_1 = \frac{e^2}{16\pi^2}\left[\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{1}{2} - c_1\right], \tag{25.22}$$

$$\delta m = \frac{e^2}{16\pi^2}\left\{3m \ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{7m}{2} + c_0\right\}. \tag{25.23}$$

因此,在我们所用的正常化方法中, Ward 恆等式成立. 由于在上述讨论中只利用了关系式

$$\Sigma(0) = 0, \frac{\partial \Sigma}{\partial p^n}\Big|_{p=0} = 0, \Gamma^n(0, 0) = 0,$$

这就证明了: 一般而言, Ward 恆等式与正常化方法无关.

### 25.4. 可积函数 $S_3$ 的求得

我们达到结论,散射矩陣中三阶项可以表示为形式

$$S_3(x_1, x_2, x_3) = i^3T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}(x_3)) - i^2T'(\mathscr{L}(x_1)\Lambda(x_2, x_3)) -$$
$$- i^2T(\mathscr{L}(x_2)\Lambda_2(x_1, x_3)) - i^2T(\mathscr{L}(x_3)\Lambda_2(x_1, x_2)) - i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3), \quad (25.24)$$

其中 $T'_M$ 是正常的算符函数，在它的系数函数中，对应于简单线，应取函数 $\mathrm{reg}\,\Delta^c$，对应于图 17a，b 中的封闭图形，应取函数 $\Pi'_M$ 和 $\Sigma'_M$，对应于顶角部分（图 20），应取函数 $\Gamma'^n_M$.

显然，在消除正常化时，算符 $T'_M$ 的所有系数函数趋近于由 $\Delta^c$，$\Pi'$，$\Sigma'$ 和 $\Gamma'$ 决定的有限极限、表式(25.24)中含有函数

$$i\Lambda_2(x_1, x_2) = T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) - T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))$$

的各项考虑到与图 18 中图形相对应的二阶发散，而准定域性算符

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = -a_1e\{:\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_2)\psi(x_3):\delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3) +$$
$$+ \text{宗量对易后的项}\} \quad (25.25)$$

与顶角部分（图 20）的发散相对应.

含有函数 $\Lambda_2$ 之项对 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 积分后，对 $S$ 矩阵的贡献为

$$\frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2\,dx_3T(\mathscr{L}(x_1)\Lambda(x_2, x_3)).$$

它抵消了 $S_2$ 中含有抵消项 $\mathscr{L}^{(2)}(x)$ 的那些项：

$$\frac{i^2}{2!}\int T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}^{(2)}(x_2))\,dx_1\,dx_2 + \frac{i^2}{2!}\int T(\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}^{(2)}(x_1))\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2\,dx_3T(\mathscr{L}(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)).$$

(25.24) 式中的最后的发散项，应该利用相互作用拉格朗日函数密度中附加对 $e$ 为三阶的如下新抵消项来补偿：

$$\mathscr{L}^{(3)}(x) = -ea_1:\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x): = \frac{1}{3!}\int \Lambda_3(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \quad (25.26)$$

这样，在拉格朗日函数密度中引进辅助抵消项 $\mathscr{L}^{(2)}(x)$ 及 $\mathscr{L}^{(3)}(x)$ 后，过渡到极限 $M\to\infty$，我们得到 $S$ 矩阵中二阶、三阶各项的可积式为

$$T'(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) \text{ 和 } T'(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)\mathscr{L}(x_3)). \quad (25.27)$$

同时我们强调，$S_2$ 及 $S_3$ 的可积表式(25.27)不用抵消项也可以得到，只要在它们的宗量重合区域内，对 $T$ 乘积重新作适当的定义就可以了. 后一方式是比较可取的，因为抵消项的结构不仅依赖于辅助正常化的具体形式，而且依赖于函数 $g(x)$ 所描述的相互作用的“施加区域”.

到目前为止，我们限于考察相互作用在整个时空中完全加入而且 $g(x) = 1$ 的情况. 在计算散射过程以及粒子相互转化过程的矩阵元时，相互作用实际上是在无穷远的过去时加入，而在无穷远将来时撤除，故 $g(x) = 1$ 的情况正是重要的.

但是，如果我们对束缚态粒子系统的特征如能级、寿命、束缚态之间的跃迁几率等（更详细的参阅第六章）感到兴趣，我们就不得不研究以下情况：相互作用只在四维空间的某一部分加入，而在包围这一部分四维空间的曲面的无穷小邻域内，函数 $g(x)$ 由零增至 1.

考虑到后一情况，我们研究有效拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x; g)$ 中抵消项的结构，这些

抵消项保证以下算符的可积性：

$$S(g) = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x;\, g)dx\right).$$

考察二阶项，抵消项 $\mathscr{L}^{(2)}(x;\, g)$ 决定于关系式(24.43)的自然推广的条件：

$$\int \mathscr{L}^{(2)}(x;\, g)\,dx = \frac{1}{2i}\int dx_1\,dx_2\,g(x_1)g(x_2)\,[T(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2)) - T'_M(\mathscr{L}(x_1)\mathscr{L}(x_2))].$$

将(24.41)式中差值 $T - T'_M$ 的明显表达式代入上式，再作分部积分后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(2)}(x;\, g) = {}& \mathscr{L}^{(2)}(x)g^2(x) - ia_2\sum_n :\bar{\psi}(x)\gamma^n\frac{\partial g(x)}{\partial x^n}\psi(x):g(x) + \\ & + a_3\sum_{m,n} g^{mm}g^{nn}\left\{:A_m(x)A_n(x):\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^n\partial x^m} + :A_n(x)\frac{\partial A_m}{\partial x^n}:\frac{\partial g}{\partial x^m} - \right. \\ & \left. - :A_m(x)\frac{\partial A_n}{\partial x^n}:\frac{\partial g(x)}{\partial x^m} + :A_m(x)A_m(x):\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^n\partial x^n}\right\}g(x) + \\ & + \{\text{含有 } R \text{ 及其导数之项}\},\end{aligned} \tag{25.28}$$

此处算符 $\mathscr{L}^{(2)}(x)$ 决定于关系式 (24.44)．并且不难看出，在三阶时

$$\mathscr{L}^{(3)}(x;\, g) = \mathscr{L}^{(3)}(x)g^3(x),$$

其中 $\mathscr{L}^{(3)}(x)$ 决定于关系式 (25.26)．

这样，当分部积分时在 $\mathscr{L}(x;\, g)$ 中出现含有函数 $g(x)$ 导数之项，它的算符结构与通常抵消项不同．从 Schrödinger 方程中消除发散时，这一情况极为重要．

## §26. 消除 $S$ 矩阵发散性的一般法则

### 26.1. 问题的提法

在§24、§25 中旋量电动力学的示例中已经建立起 $S_2$ 和 $S_3$ 的可积表式．在本节中我们来构成消除 $S$ 矩阵的任意阶发散项的一般方法，所根据的原则与上述各例相同 (Боголюбов, 1952)．

首先我们将真正的因果函数 $\Delta^c$ 用含有适当个数的辅助质量 $M_i$ 的正常化表式 $\mathrm{reg}\,\Delta^c$ 来代替．当这些质量取有限值时，拉格朗日函数密度的通常 $T$ 乘积

$$T(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)) \tag{26.1}$$

是完全确定的，而且它的系数函数是连续的．但是我们从具体的例子中可以证明，即使从广义收敛来理解，也不能在(26.1)式中取极限 $M\to\infty$．

更确切地说，算符 (26.1) 的系数函数只在所有宗量 $x_1, \cdots, x_n$ 毫无例外地全不相同的那部分时空域中才会广义收敛．为了从 (26.1) 式分离“收敛部分”，必须如上述示例利用减法手续．为了表述这一手续，从一般公式 (18.40) 出发较为方便，此式用相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x) = \Lambda_1(x)$ 及准定域性算符 $\Lambda_v(v\geqslant 2)$ 来表示 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$：

$$\begin{aligned}S_n(x_1, \cdots, x_n) = {}& i^n T(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)) + \\ & + \sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1\\ \sum v_i = n}\right)}\frac{i^m}{m!}P(x_1, \cdots, x_{v_1}|\cdots|\cdots, x_n)T(\Lambda_{v_1}(x_1, \cdots, x_{v_1})\cdots\Lambda_{v_m}(\cdots, x_n)) + \\ & + i\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n).\end{aligned} \tag{26.2}$$

以前已经证明，上式是最普遍的表式，当任意选定厄米协变定域性算符 $\Lambda_\nu$ 时，它满足加在 $S_n$ 上的一切条件（对称性、协变性、么正性及因果性）.

如果能够选择准定域性算符 $\Lambda_\nu$，使表式 $S_n$ 收敛（我们总是按广义来理解这类表式的收敛），则当 $M \to \infty$ 时，它们的极限首先是可积的算符函数（按 § 16 中定义的意义），其次，它将满足对 $S_n$ 的一切要求. 事实上，协变性条件(18.4)是线性的，因此对它的极限过渡可以轻易地完成. 根据 § 16 中所证明的定理，即二个算符函数的通常乘积的极限等于两极限的乘积，可见对么正性(18.9)和因果性(18.13)条件取极限也是允许的.

因此只要找到一个方法，可以从已知的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x) = \Lambda_1(x)$ 出发，逐步构成准定域性算符的序列 $\Lambda_\nu(\nu \geqslant 2)$，以保证使(26.2)式收敛，就足够了. 这样获得的极限式自动满足对 $S_n$ 的一切条件（包括可积性条件）. 显然，为了解决这一问题，只要选择与(26.1)式（当 $n = \nu$）同一算符类型的准定域性算符作为 $\Lambda_\nu(x_1, \cdots, x_n)$ 已经足够. 这里所说 $\Lambda_\nu(x_1, \cdots, x_n)$ 属于与 (26.1) 式同一的算符类型，我们理解 $\Lambda_\nu$ 与 (26.1) 式相同，也由相同的算符项

$$:\cdots u_a(x_j)\cdots: \tag{26.3}$$

来构成，只是系数函数有所不同.

现在从(26.2)式得出结论，$S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 也与 (26.1) 是同一型的算符式，为了简化公式，令

$$i^{1-\nu}\Lambda_\nu(x_1, \cdots, x_\nu) = \Delta_\nu(x_1, \cdots, x_\nu), \quad \mathscr{L}(x) = \Lambda_1(x) = \Delta_1(x), \tag{26.4}$$

于是

$$S_n = i^n T'_n, \tag{26.5}$$

其中

$$\begin{aligned} T'_n = {} & T(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)) + \\ & + \sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1 \\ \sum\nu_i = n}\right)} \frac{1}{m!} P(x_1, \cdots, x_{\nu_1}|\cdots|\cdots, x_n) T(\Delta_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1})\cdots\Delta_{\nu_m}(\cdots, x_n)) + \\ & + \Delta_n(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{26.6}$$

因为 $T'_n$ 与(26.1)式属于同一算符类型，显然可以找到一个方法，将算符 $T$ 的系数函数作某些变换来实际构成 $T'_n$. 这时应用图形表示是方便的.

## 26.2. 减法手续的图形表示和运算 $\Delta(G)$

任一含有 $\nu$ 个顶角及给定的内部线的图形所对应的 $T$ 乘积的系数函数，用正常因果函数的乘积来表示：

$$\prod_l \{\mathrm{reg}\,\Delta_l^c(x_a - x_b)\}, \tag{26.7}$$

同一图的准定域性算符 $\Delta_\nu$ 的系数函数是 $\delta$ 函数及其导数的乘积. 因此在图形中所有各点 $x_1, \cdots, x_\nu$ 作为一个整体而出现，因此对 $\Delta_\nu$ 运算时，引进广义顶点 $G$ 的概念是方便的（参阅图 24），用 $d_G(x_1, \cdots, x_\nu)$ 表示算符 $\Delta_\nu$ 的系数函数与已知的广义顶点 $G$ 相对

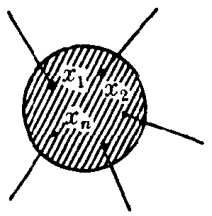


图 24

应. 现在来讨论表式

$$T(\Delta_\nu(x_1, \cdots, x_\nu)\mathscr{L}(x_{\nu+1})\cdots\mathscr{L}(x_n)). \tag{26.8}$$

不难证明,通过以下手续,可以从算符(26.1)的系数函数求得上式的系数函数. 我们讨论对应于算符(26.8)的任一图. 将其中各点 $x_1, \cdots, x_\nu$ 连接成广义顶点 $G$,这等于将对 $G$ 为内部线 $l$ 的乘积(26.7)用系数函数 $d_G(x_1, \cdots, x_\nu)$ 来代替. 这一代替运算在形式上用符号 $\Delta(G)$ 来表示. 这样从算符(26.1)的系数函数通过运算 $\Delta(G)$,可以得到算符(26.8)的系数函数.

而且显然,对于更一般情况

$$T(\Delta_{\nu_1}(x_1, \cdots, x_{\nu_1})\Delta_{\nu_2}(x_{\nu_1+1}, \cdots, x_{\nu_1+\nu_2})\cdots\Delta_{\nu m}(\cdots, x_n)),$$

系数函数可以利用运算

$$\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)$$

从算符(26.1)的系数函数求出,此运算在于将 $x_1, \cdots, x_\nu, x_{\nu+1}, \cdots, x_{\nu_1+\nu_2}, \cdots, x_n$ 各点连接为广义顶点 $G_1, G_2, \cdots, G_m$,并且用 $d_{G_1}, \cdots, d_{G_m}$ 来代替乘积(26.7)中对于 $G_1, \cdots, G_m$ 中每一顶点为内部线的乘子,此时与各广义顶点间的连线相对应的因子保持不变.

这样应用以下运算:

$$R(G) = 1 + \sum_{\left(G=G_1*G_2*\cdots*G_m\right)}^{2\leqslant m\leqslant n-1} \frac{1}{m!}\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m) + \Delta(G), \tag{26.9}$$

可以从 $T$ 得到[1] $T'$,此处对把图形 $G$ 的 $x_1, \cdots, x_n$ 点分成广义顶点 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 的一切可能分法取和. 在此情况下,上述分法使 $x_1, \cdots, x_n$ 各点完全对称地出现,因而保证了与对称化算符 $P$ [出现于(26.2)式中]相关的 $T'_n$ 对称性. 应该强调指出,公式(26.9)中所含的广义顶点不包括通常顶点在内.

运算 $R(G)$ 的定义暂且是纯粹形式的. 仅当对于给定的图形 $G_a$,给出了决定函数 $d_{G_a}$ 的法则以后,此运算才能获得具体的意义. 给定 $d_G$,我们也就决定了 $\Delta_\nu$,因而也就决定了 $T'_n$. $d_G$ 是根据 $T'_n$ 当 $M \to \infty$ 时的可积性选定的.

在开始表述 $d_G$ 的构成方法以前,我们引入图形的连通性这一概念. 如果已知图形可以分成相互之间没有连线的两个部分,我们将称此图形为不连通的,与此情况相反的图形称为连通的. 如果连通图形去掉一条线后,可以变成非连通的,则称之为弱连通,如果不可能这样分开,则称为强连通.

现在注意,不连通图形中,$T$ 乘积的系数函数可表示为具有不同宗量的两个系数函数的乘积. 但是两个不同宗量的系数函数的乘积为收敛的,如果每一函数分别为收敛的. 从这里得出结论,在不连通图形中,当在其连通子图形中消除发散以后,整个图形的发散将自动地消除. 因此,不连通图形的算符 $\Delta(G)$ 应认为等于零.

这样选定 $\Delta(G)$ 后,在由两个不连通部分 $G_1$ 及 $G_2$ 所组成的图形所相应的 $T$ 乘积的系数函数上进行的运算 $R(G)$,可分解为二个运算 $R(G_1)$、$R(G_2)$ 的乘积,此两运算分别作用于与图形 $G_1$ 和 $G_2$ 所对应的系数函数.

---

1) 此处用记号 $G_1*G_2*\cdots*G_n$ 表示 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的拓扑乘积.

对于弱连通图形，系数函数的形式为

$$K_M(x_1, \cdots, x_k)\ \mathrm{reg}\ \Delta^c(x_a - y_b) Q_M(y_1, \cdots, y_s),$$

由于$K$和$Q$的平移不变性，令

$$x - x_a = x',\ y - y_b = y',\ x_a - y_b = \xi,$$

得到具有独立宗量的几个系数函数的乘积：

$$K_M(x_1, \cdots, x_k)\ \mathrm{reg}\ \Delta^c(\xi) Q_M(y'_1, \cdots, y'_s). \tag{26.10}$$

如果$K$与$Q$分别收敛，整个表式也将收敛．因此对于弱连通图形，也应该令$\Delta(G) = 0$.

与前一情况一样，这里很清楚，当如上选定算符$\Delta(G)$后，在弱连通图形中算符$T'_n$的系数函数具有结构（26.10）．这样，在（26.9）式中只考虑根据强连通性分裂成的广义顶点$G_a$.

**26.3. 图形指标$\omega(G)$和发散度**

为了使算符$\Delta(G)$具体化，再引进图形指标这一概念．为此，我们化到动量表象，显然，在$p$表象中，$T$乘积的系数函数将具有形式：

$$J_M(k) = \int \prod_{(1\leqslant q\leqslant n)} \delta(\sum p - k_q) \prod_l \{\mathrm{reg}\ \Delta_l^c(p_l)\, dp_l\}, \tag{26.11}$$

其中$\delta$函数之宗量是图形中在顶点$q$相遇的各内部线动量的代数和，并加上外动量$k_q$.

根据我们所采用的$\Delta^c$函数正常化手续，尚有

$$\mathrm{reg}\ \Delta^c(p) = Z(p) \left\{\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} - \sum_j c_j \frac{1}{M_j^2 - p^2 - i\varepsilon}\right\},$$

其中$Z(p)$是在未正常化$\Delta^c$函数中的同一多项式.

如果（26.11）式过渡到极限$M_j \to \infty$，则一般而言，整个积分在大动量处为发散的．现在来计算该积分的总发散度．因为我们考虑的是连通图形，利用$\delta$函数可减去$4(n-1)$个积分（留下的一个$\delta$函数表示整个四维动量的守恒定律），还剩下$4(L - n + 1)$个独立积分变量，此处$L$表示内部线的总数.

对三维空间积分时，引入半径作为积分变量，与此相似，对$4(L - n + 1)$维空间作积分时引进相应的"径向"动量$P$．这时乘积$\prod_l dp_l$中独立的微分给出乘子$P^{4(L-n+1)} \times dP/P$．只考虑函数$\Delta^c(p)$的最高阶项，得到乘子

$$P^{\sum_l r_l - 2L} = P^{\sum_l (r_l - 2)}.$$

因此当对$P$积分时，对于甚大的$P$，$\dfrac{dP}{P}$的乘子将如同

$$P^{\sum_l (r_l+2) - 4(n-1)}$$

一样递增或递减.

因此如果

$$\sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) \geqslant 0,$$

则对 $P$ 的积分是发散的;如果

$$\sum_l (r_l + 2) - 4(n - 1) < 0,$$

则这一积分收敛.

我们将数

$$\omega(G) = \sum_l (r_l + 2) - 4(n - 1) \tag{26.12}$$

称之为图形 $G$ 的指标.

不言而喻,从对 $P$ 积分的收敛性,还不能得出整个(26.11)类型积分的收敛性.

此处可能产生类似于计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{x}{(y^2 + 1)^2}$$

的情况. 积分

$$\iint \frac{\rho^2 d\rho \cos^2 \varphi d\varphi}{(\rho^2 \sin^2 \varphi + 1)^2}$$

对径向变量 $\rho(\rho = x/\cos\varphi = y/\sin\varphi)$ 是收敛的,但是由于 $\varphi = 0, \varphi = \pi$ 两个奇点,留下的对 $\varphi$ 积分仍是发散的.

图形指标 $\omega(G)$ 也可与约定的动量增长度连系起来. 为了计算此增长度,将所有外动量和质量乘上某一数 $a$ 后计算积分 (26.11) 式随着增加的倍数,这时不考虑正常化,只考虑 $a$ 的最高阶. 不难看出,增大的倍数恰好等于

$$a^{\omega(G)}. \tag{26.13}$$

这样,图形指标恰恰等于约定增长度.

我们注意,增长度称为约定的,是由于估计值(26.13)完全是形式的,既没有细致分析积分的收敛性,也没有考虑到对数发散因子的存在.

注意到以下事实,将 $G$ 分成为 $S$ 个广义顶点:

$$G = G_1 * G_2 * \cdots * G_s,$$

我们将有

$$\omega(G) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \omega(G_j) + \sum_l (r_l + 2) - 4(s - 1). \tag{26.14}$$

以下我们来讨论系数函数 $d_{G_j}$. 在动量表象中,它的形式为

$$\delta(\sum p_i)\, Z_{G_j}(\cdots p \cdots),$$

其中 $Z_{G_j}(\cdots p \cdots)$ 是 $p$ 的分量的某一多项式.

我们以下将看到, 为了抵消 $T$ 乘积中的发散, 只要选取幂为 $\omega(G_j)$ 的多项式作为 $Z_{G_j}(\cdots p \cdots)$. 从(26.14)式得到结论,这样选定 $d_{G_j}$ 后,施行运算 $\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)$ 时,总的发散阶数不增加,约定的动量增长度也不增加,因此当施行整个运算 $R(G)$ 时, $\omega(G)$ 并不增加.

从上述示例我们已经证实,当计算及分析 (26.11) 式类型的积分时,最好利用因果函数的积分表示(以后我们称之为 "$\alpha$ 表象"):

$$\Delta^c(p) = Z(p) i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)}\, d\alpha,$$

$$\mathrm{reg}\,\Delta^c(p) = Z(p)i\int_0^\infty e^{i\alpha(p^2-m^2+i\varepsilon)}I(\alpha)\,d\alpha,$$

其中

$$I(\alpha) = 1 + \sum_M c_M e^{-i\alpha(M^2-m^2)}.$$

将乘子 $Z(p)$ 表为指数函数形式较为方便. 为了这一点,利用关系式

$$Z(p) = Z(-i\nabla_q)e^{ipq}|_{q=0}.$$

然后将(26.11)式对内动量的积分化为 Gauss 型积分

$$\prod_l Z(-i\nabla_{q_l})\int e^{i\sum_l \alpha_l p_l^2 + i\sum_l p_l q_l}\prod_{1\leqslant q\leqslant n}\delta(\sum p + k_q)\prod_l dp_l\Big|_{q_l=0} =$$

$$= \delta(\sum k)f(\cdots k\cdots\alpha\cdots), \tag{26.15}$$

剩下的只是对变量 $\alpha$ 积分:

$$J_M(k) = \delta(\sum k)\int_0^\infty d\alpha_1\cdots\int_0^\infty d\alpha_L f(\cdots k\cdots\alpha\cdots)e^{-i\sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon\sum_l \alpha_l}\prod_{1\leqslant l\leqslant L} I(\alpha_l). \tag{26.16}$$

对 $p_l$ 积分,我们得到

$$f(\cdots k\cdots\alpha\cdots) = F(\cdots k\cdots\alpha\cdots)e^{i\sum_{a,b} A_{ab}(\cdots\alpha\cdots)(k_a k_b)}, \tag{26.17}$$

其中 $F$ 是 $k$ 的多项式,而且是 $\alpha$ 的有理函数,当有些 $\alpha$ 为零时,它具有不可积的极点. 由于因子 $\exp\left(-\varepsilon\sum_l \alpha_l\right)$ 保证了积分 (26.16) 式在 $\alpha$ 为大值时的收敛性,在这一表象中的非正常情况下所以会含有发散性的唯一原因,就是因为存在上述的不可积极点.

为了阐明奇异性的机构,我们引进新变量

$$\alpha_j = \lambda\xi_j, \quad \sum\xi_j = 1,$$

并且先固定 $\xi_j \neq 0$, 计算 $\lambda = 0$ 处极点之幂. 为了这一点,将(26.15)式化为新"动量":

$$p_l\sqrt{\lambda} = P_l; \quad q_l\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = Q_l; \quad k_q\sqrt{\lambda} = K_q,$$

我们得到

$$f(\cdots k\cdots\alpha\cdots) = \lambda^{-\frac{4L-4(n-1)}{2}}\prod_l\left[Z\left(-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\nabla_Q\right)\right]\int e^{i\sum_l \xi_l P_l^2 + i\sum_l (P_l Q_l)}\prod_{1\leqslant q\leqslant n}\delta(\sum P +$$

$$+ K_q)\prod_l dP_l|_{Q=0}.$$

只考虑到 $\Pi\{Z(\cdots)\}$ 中 $\lambda$ 的高次幂,当 $\lambda$ 较小时,我们得到

$$f(\cdots k\cdots\alpha\cdots) = \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2}-L}F'(\cdots k\cdots)e^{i\sum_{a,b} A'_{ab}(k_a k_b)} =$$

$$= \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2}-L}F'(\cdots\sqrt{\lambda}k\cdots)e^{i\sum_{a,b} A'_{ab}(\xi)(k_a k_b)}. \tag{26.18}$$

因此考虑到

$$\frac{(\partial\alpha_1,\cdots,\partial\alpha_l)}{(\partial\xi_1,\cdots,\partial\xi_{l-1},\partial\lambda)} = \lambda^{L-1},$$

可见在 $\lambda = 0$ 处 $\lambda$ 的极点的有效幂实际上决定于图形指标 $\omega(G)$.

### 26.4. 指数二次型的结构

现在来讨论二次型的结构

$$A \equiv A_{ab}(\cdots\alpha_j\cdots) = \lambda A_{ab}(\cdots\xi_i\cdots),$$

不难证明,上式不依赖于多项式 $Z(-i\nabla_q)$, 而且是 $\alpha_l$ 的一阶齐次函数.

除此之外,我们现在要证明,如果 $x$ 是欧几里德矢量,上式具有恆正性:

$$\sum_{a,b} A_{ab}x_a x_b > 0 \qquad (\sum x^2 \neq 0), \tag{26.19}$$

并满足以下条件:

$$\sum_{a,b} A_{ab}x_a x_b < \sum_l \alpha_l \left(\sum_a |x_a|\right)^2. \tag{26.20}$$

应用归纳法来验证(26.19)和(26.20)两个关系式是方便的. 因为对于最简单的图形,上式的正确性并不引起怀疑 (参看 § 24 及 § 25 中示例). 我们把归纳法分成两个步骤: a) 在给定顶点个数的条件下, 添加一条新的内部线; b) 添加一个新顶点以及从此顶点至一原顶点的连线.

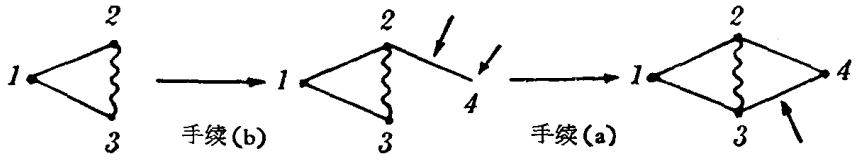



图 25 由三阶顶点图形构成光子的四阶自能图形

应该指出,上述手续 a 及 b 分开看并无意义, 但是不难证明, 由最简单的图形接连地应用上述手续,可以构成任何图形(例如, 参看图 25).

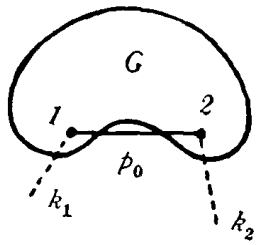



图 26 在顶点 1 与 2 之间添加内部线 $p_0$

我们来讨论手续 a). 为了确定起见,我们认为在顶点 1 和 2 之间添加了动量 $p$ 的内部线(如图 26 所示),不考虑对指数的结构没有影响的乘子 $Z(-i\nabla_q)$, 可以说,在 (26.15) 式中,代替乘子 $\delta\left(\sum_1 p + k_1\right)\delta\left(\sum_2 p + k_2\right)$ 将出现乘子

$$e^{ia_0 p_0^2}\delta\left(\sum_1 p + k_1 + p_0\right)\delta\left(\sum_2 p + k_2 - p_0\right),$$

并且添加一个对 $p_0$ 的积分. 因此积分(26.15)的变化可以写成下列形式:

$$f(k_1, k_2, \cdots|\cdots\alpha\cdots) \to \int e^{ia_0 p_0^2} f(k_1 + p_0, k_2 - p_0, \cdots k\cdots|\cdots\alpha\cdots)\, dp_0 =$$

$$= \int e^{ia_0 p_0^2} F(k_1 + p_0, k_2 - p_0, \cdots k\cdots|\cdots\alpha\cdots) \exp\{i\sum A_{ab}(k_a + e_a p_0)(k_b + e_b p_0)\}\, dp_0,$$

其中符号 $e_a$ 决定如下:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = -1, \quad e_q = 0 \quad (q > 2).$$

将所得积分表示成(26.17)形式，我们注意，由于多项式的性质，函数 $F(k_1+p_0, k_2-p_0, \cdots k\cdots|\cdots\alpha\cdots)$ 并不影响最后指数的结构. 因此计算积分

$$\int dp_0 \exp\{i\alpha_0 p_0^2 + i\sum A_{ab}(k_a+e_a p_0)(k_b+e_b p_0)\} =$$

$$= \int dp_0 \exp i\{(\alpha_0+\sum A_{ab}e_a e_b)p_0^2 + 2\sum A_{ab}e_a(p_0 k_b) + \sum A_{ab}k_a k_b\},$$

我们得到指数的形式为

$$\exp i\left(\sum A_{ab}k_a k_b - \frac{(\sum A_{ab}k_b e_a)^2}{\alpha_0+\sum A_{ab}e_a e_b}\right).$$

这样当图形中含有新内部线时，指数改变如下：

$$\sum A_{ab}k_a k_b \to \sum A_{ab}k_a k_b - \frac{(\sum A_{ab}k_b e_a)^2}{\alpha_0+\sum A_{ab}e_a e_b}. \tag{26.21}$$

由于(26.19)二次型的正值性，设

$$x_a = k_a^n t_1 + e_a t_2 \qquad (n=0, 1, 2, 3),$$

从判别式非负的条件，我们得到不等式

$$\left(\sum_{a,b} A_{ab}k_a^n k_b^n\right)\left(\sum_{a,b} A_{ab}e_a e_b\right) \geqslant \left(\sum_{a,b} A_{ab}k_b^n e_a\right)^2.$$

将此式代入写成第 $n$ 个分量的(26.31)式，我们有

$$\sum A_{ab}k_a^n k_b^n \to \sum_{a,b} A_{ab}k_a^n k_b^n - \frac{(\sum A_{ab}k_b^n e_a)^2}{\alpha_0+\sum A_{ab}e_a e_b} \geqslant$$

$$\geqslant \sum A_{ab}k_a^n k_b^n \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\sum A_{ab}e_a e_b} \geqslant 0.$$

因此当加入新内部线时，性质 (26.19) 并不破坏. 因为在变换(26.21)之下二次型(26.12)减少，故条件 (26.20) 也并不破坏.

现在来考虑在图形中加进新顶点及其连线的过程. 为确定起见，我们认为新顶点 $O$ 用动量为 $p_0$ 之线与顶点 1 相连 (图 27).

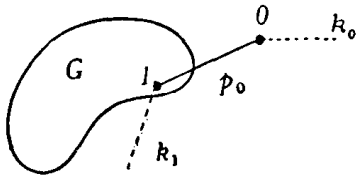


图 27　加进新顶点 $O$ 及 $O$ 与 $G$ 的连线 $p_0$

这在积分(26.15)式中，引起替代

$$\delta\left(\sum_1 p + k_1\right) \to e^{i\alpha_0 p_0^2}\delta\left(\sum_1 p + k_1 + p_0\right)\delta(k_0 - p_0),$$

而且出现对 $p_0$ 的补充积分，这也可以表示成形式：

$$f(\cdots k\cdots\alpha\cdots) \to \int dp e^{i\alpha_0 p_0^2} f(k_1+p_0, k_2, \cdots\alpha_2\cdots)\,\delta(p_0-k_0) =$$

$$= e^{i\alpha_0 k_0^2} f(k_0+k_1, k_2, \cdots\alpha\cdots).$$

相应地指数中的变化为

$$\sum A_{ab}k_a k_b \to \alpha_0 k_0^2 + \sum A_{ab}(k_a+e_a k_0)(k_b+e_b k_0), \tag{26.22}$$

其中 $e_1=1$, $e_a=0$ $(a\geqslant 2)$. 根据(26.20)式，由此获得

$$\alpha_0 x_0^2 + \sum_{a,b} A_{ab}(x_a + e_a x_0)(x_b + e_b x_0) \leqslant \alpha_0 \sum_a (x_0 e_a + x_a)^2 +$$

$$+ \sum_{1\leqslant l} \alpha_l \sum_{1\leqslant a} (x_a + e_a x_0)^2 = \sum_{0\leqslant l} \alpha_l \left| \sum_{1\leqslant a} (x_a + e_a x_0) \right|^2 = \sum_{0\leqslant l} \alpha_l \left( \sum_{0\leqslant a} |x_a| \right)^2.$$

因此当包含新顶点及联线时，条件(26.20)仍然成立. 性质(26.19)也保持不变，因为引进顶点后二次型有增加.

因此对性质 (26.19)、(26.20) 的验证已经完成. 注意，此时实际上得到了由关系式(26.21)和(26.22)表达的构成二次型的手续.

现在来讨论由于我们采用积分形式的 $\alpha$ 表象(26.15)在施行运算 $\Delta(G)$ 之后，$T$ 乘积的系数函数所产生的变化. 我们记住，根据定义，在 $x$ 表象中，运算 $\Delta(G_j)$ 在于将 $G_j$ 中的内部线的部分乘积 $\prod_l \Delta_l^{c_l}(x_a - x_b)$ 用准定域性算符 $d_{G_j}(\cdots x_a \cdots)$ 的系数函数来代替，在 $p$ 表象中，这些系数函数具有多项式形式，并乘上 $\delta$ 函数，即 $\delta(\sum p) Z_{G_j}(\cdots p \cdots)$.

当过渡到积分表象 (26.15) 时，为了将多项式 $Z_G$ 化成指数形式，我们利用以下关系式:

$$Z_G(\cdots p \cdots) = Z_G(\cdots -i\nabla_q \cdots) e^{i\Sigma(p_a q_a)}\big|_{q=0}, \qquad (26.23)$$

上式是 $\Delta_l^{c_l}(p)$ 中 $Z_l(p)$ 的自然推广. 此时显然指数中的二次型既不依赖于 $Z_G$，也不依赖于 $Z_l$. 因此应用运算 $\Delta(G_j)$ 的结果，我们再一次得到(26.17)类型的表式，它并不含有内部线 $G_j$ 的变量.

如令内部线 $G_j$ 的所有 $x_l$ 为零，就可从“旧的”指数二次型得到“新的”指数二次型. 这时与广义顶点 $G_j$ 中的顶点相应的动量 $k_a$ 自动消去. 而且显然，上述 $\alpha_l$ 并不在指数前的乘子 $F(\cdots k \cdots \alpha \cdots)$ 里出现.

为了分析奇异性，现在我们将所有 $\alpha_l$ 按比例减少，令

$$\alpha_i = \xi_i \lambda, \quad \sum \xi_i = 1, \quad \xi_i > 0, \quad \lambda \to 0,$$

现在来确定在所得的积分中，在 $\lambda = 0$ 极点处的最高有效幂次. 前面已经证明，极点的最高有效幂次等于约定增长度的一半再加上 1，而且当施行运算 $\Delta(G_j)$ 时，约定增长度并不改变. 因此在目前情况下，极点的有效幂次等于

$$\frac{\omega(G)}{2} + 1.$$

对于极点的有效幂次当施行运算 $\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)$ 时的不变性，可以作出完全相同的结论.

## 26.5. 运算 $\Delta(G)$ 的选择

在阐明上述的重要性质以后，我们着手具体地构成 $\Delta(G)$. 我们先来讨论所有场粒子的质量 $m_i$ 全大于零的情况. 我们刚才已经阐明，在 $\alpha$ 表象中表式 $\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m) J_M(k)$ 的极点的有效幂次等于 $\frac{\omega(G)}{2} + 1$.

另一方面，由(26.16)式及(26.18)式得出结论，对动量分量 $k_a$ 每作一次微分，极点的

幂次降低 1/2，因此求对分量 $k_a$ 的 $N$ 阶偏导数：

$$\frac{\partial^N J_M(\cdots k\cdots)}{\partial^{N_1}k_1\cdots\partial^{N_m}k_m} \qquad (\sum N_i = N),$$

我们得到一个表式，其中极点的有效幂次降低 $N/2$，而且等于 $(\omega(G) - N + 2)/2$. 选定 $N = \omega(G) + 1$ 后，我们在积分号下得到因子 $\lambda^{-\frac{1}{2}}d\lambda$. 但是因为所有函数是变量 $\alpha$ 的有理函数，它们也应该是 $\lambda$ 的有理函数. 因此乘子 $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ 实际上并不存在.

现在我们注意到，如果从函数 $J(\cdots k\cdots)$ 中减去它的 Maclaurin 级数展开式中直到阶为 $\omega(G)$ 的前几项，则根据熟知的 Schloemilch 公式，可将剩余项

$$J(\cdots k\cdots) - \{J(\cdots k\cdots)\}_{\omega(G)}$$

表示为 $\omega(G) + 1$ 阶的偏导数的积分. 因此在剩余项中，极点 $\lambda = 0$ 的有效幂次等于零.

现在我们定义运算 $\Delta(G)$ 如下：

$$\Delta(G) = -M(G)\left\{1 + \sum_{\left(G=G_1*G_2*\cdots*G_n\right)}^{2\leqslant m\leqslant n-1} \frac{1}{m!}\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)\right\}, \tag{26.24}$$

其中运算 $M(G)$ 由以下关系给定：

$$M(G)[\delta(\sum k)F(k)] = \delta(\sum k)\{F(k)\}_{\omega(G)}. \tag{26.25}$$

根据(26.9)式，有

$$R(G)J_M(k) = \{1 - M(G)\}J'_M(k),$$

其中 $J'_M(k) = \left(1 + \sum_{\left(G=G_1*G_2*\cdots*G_n\right)}^{2\leqslant m\leqslant n-1} \frac{1}{m!}\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)\right)J_m(k),$

而且由于 $J'_M$ 中对 $\lambda$ 的极点并不強于 $J_M$ 中的极点，所以 $R(G)J_M$ 在 $\lambda = 0$ 点上一般沒有奇点.

这样证明了，当所有 $\alpha$ 按比例趋近于零时，应用最后一运算 $\Delta(G)$ 可消除奇异性. 因为与此同时，运算 $\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)$ 在只有某些 $\alpha$ 趋于零的区域中抵消了奇异性，因此十分显然，在 $R(G)J_m$ 中根本沒有奇异性.

以上论断成为一个重要定理的內容；不久以前 Парасюк (1955 а, б)[1] 证明了这一定理，并给出其必要的估计值. 这一定理的內容如下：应用运算 $R(G)$ 以后，函数 $J_M(k)$ 表示为形式：

$$R(G)J_M(k) = \delta(\sum k)\int_0^\infty d\alpha_1\cdots\int_0^\infty d\alpha_L \times$$

$$\times \prod_{1\leqslant l\leqslant L}\left\{I(\alpha_l)\exp\left(-i\sum\alpha_l m_l^2 - \varepsilon\sum_l\alpha_l\right)f(\cdots k\cdots\alpha\cdots\right), \tag{26.26}$$

而函数 $f(\cdots k\cdots\alpha\cdots)$ 表示为如下各项之和：

$$F(\cdots k\cdots\alpha\cdots\tau)\exp i\sum A_{ab}(\cdots\alpha\cdots)p_a^\mu p_b^\mu,$$

其中 $p_a^\mu = (1 - \xi^\mu)\sum_{G_a} k_a$，$\xi^\mu$ 为变量 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_r$ 之函数

---

1) 同时参阅 Боголюбов, Парасюк (1955 а、б).

$$0 \leqslant \xi^{\mu} \leqslant 1,$$

而 $F$ 满足以下估计式[1]

$$|F(\cdots k\cdots\alpha\cdots\tau)| \leqslant \frac{c}{\prod\limits_{l}(\alpha_l^{1-\frac{1}{2}L})}; \tag{26.27}$$

其中 $L$ 是图解 $G$ 中所有内部线的数目，而 $c$ 则限定为变量 $k$, $\alpha$, $\tau$ 的多项式.

从这一估计值直接得出结论，在确定的 $\varepsilon > 0$ 时，可以在 (26.25) 式中取极限 $M \to \infty$. 实际上因子 $\exp(-\varepsilon \sum \alpha_l)$ 使积分(26.26)在大 $\alpha$ 时为绝对收敛，而当 $\alpha \to 0$ 时，根据 (26.27) 式，可能的极点具有可积的性质.

这样在消除正常化过程中，令因子 $I(\alpha)$ 趋于 1，我们得到，$R(G)J_M$ 按通常意义趋近于表式

$$R(G)J(k) =$$
$$= \delta(\sum k)\int_0^{\infty} d\alpha_1 \cdots \int_0^{\infty} d\alpha_L \exp\left(-i\sum_l \alpha_l m_l^2 - \varepsilon \sum_l \alpha_l\right) f(\cdots k\cdots\alpha\cdots). \tag{26.28}$$

这里必须强调在选择运算 $R(G)$ 时所存在的不定性. 事实上，根据 (26.25) 式，运算 $M(G)$ 成为从 $F$ 中减去幂次等于增长度的 Maclaurin 多项式，为了消除无穷大，这一点已经足够. 十分明显，如果定义运算 $M(G)$ 为从 $F$ 中减去幂次 $n > \omega(G)$ 的 Maclaurin 多项式，那么我们也会得到不含发散的表式. 可以证明，上述的与选定 $n$ 有关的不定性，实际上改变了拉格朗日函数密度. 此处所选定的极小值 $n = \omega(G)$ 所引起的抵消项的算符结构与原始拉格朗日函数密度各项的区别最小. 不过，这一选择并非必然的.

### 26.6. 当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限过渡

本节考察所得表式的解析性以及过渡到 $\varepsilon \to 0$ 的可能性. 在复平面中，将变量 $\alpha$ 之轴转动 $90^{\circ}$，也就是作变量替换:

$$\alpha_k = -i\beta_k, \tag{26.29}$$

我们可以把积分(26.27)式写成

$$\int_0^{\infty} d\beta_1 \cdots \int_0^{\infty} d\beta_L F(\cdots k\cdots\beta) \exp\left(-\sum_l \beta_l m_l^2 + i\varepsilon \sum_l \beta_l + \right.$$
$$\left. + \sum A_{ab}(\cdots\beta\cdots) k_a' k_b'\right). \tag{26.30}$$

将指数表示如下

$$A = \sum A_{ab}(\cdots\beta\cdots) k_a^0 k_b^0 - \sum A_{ab}(\cdots\beta\cdots)\mathbf{k}_a\mathbf{k}_b -$$
$$- \sum \beta_l m_l^2 + i\varepsilon \sum \beta_l,$$

利用条件(26.20)，我们得到

$$A < \sum_l \beta_l \left(\sum_a k_a^0\right)^2 - \sum_l \beta_l m_l^2 + i\varepsilon \sum_l \beta_l.$$

---

1) 与通常情况相似，估计值(26.27)总是偏高的，但是却完全足够，因为它保证函数在 $\alpha_l = 0$ 点邻域内的绝对可积性. 在估计值 (26.27) 式的分母中必然出现 $\alpha_l$，这一事实不仅由于估计手法粗略，而且也与以下情况有关: 当不同的 $\alpha_l$ 不按比例趋于零，而其中有一个比其余的更迅速趋于零时，函数增长的性质可能会有改变.

现在很明显，当满足下列条件

$$\left(\sum_a k_a^0\right)^2 < \min m_l^2 \tag{26.31}$$

时，形式 $A$ 是负的，积分 (26.30) 绝对收敛，而变换 (26.29) 是合理的. 在所得表式中，当 $\varepsilon \to 0$ 时，可以过渡到极限，并得出在不等式(26.31)所确定的区域中解析的函数，这一不等式可以写成为相对论不变形式:

$$\left|\sum_a (k_a \xi)\right|^2 < \min m_l^2,$$

其中 $\xi$ 为指向未来的时间型单位矢量:

$$\xi^2 = 1, \quad \xi^0 > 0.$$

在上述手续中，我们首先令 $M \to \infty$，然后作极限过渡 $\varepsilon \to 0$. 但是，也可以在极限过渡 $M \to \infty$ 之前进行旋转运算(26.29). 这时，我们将获得含有质量 $M_i$ 的(26.30)类型积分的线性组合. 当同时作极限过渡 $M \to \infty$ 及 $\varepsilon \to 0$ 时，含有 $M_i$ 之项趋于零，我们得到同一结果.

因此，在所讨论的情况中，$k_a = 0$ 点是正常的，而且展开为 Maclaurin 级数是允许的. 这一情况是由于，所有质量 $m_l$ 根据假定是大于零的，而且

$$\min m_l^2 > 0.$$

但在某些质量等于零时，$k_a > 0$ 点可能并非正常的，此时，在确定运算 $\Delta(G)$ 时，将 $k_a = 0$ 点选定为展开中心，可能是不允许的，因而展开中心必须位于某点 $(k^0, \mathbf{k})$，其时间分量为纯虚数 $k^0 = i\omega$. 但是，由于在动量空间中选定任何特殊点(除 $k = 0$ 点以外)对于四维旋转并非不变的，因而相应的多项式还须对球

$$\omega^2 + \mathbf{k}^2 = \mu^2, \quad \text{其中 } \mu^2 = \text{const},$$

取平均值. 这样选定运算 $\Delta(G)$ 后，经运算 $R(G)$ 所得的系数函数的上述性质，显然仍然保持不变，但是，还有一点不同: 只有 $k^0$ 为纯虚数的点，对 $k$ 的解析性才成立.

现在，设动量 $k$ 完全是任意的. 若质量具有有限的负纯虚数附加项 $-i\varepsilon$，则在积分中含有截断乘子 $\exp\left(-\varepsilon \sum_l \alpha_l\right)$，而函数为正常的. 当 $\varepsilon$ 趋近于零时，截断因子只是广义收敛. 这时所得到的极限式是 $T'$ 乘积的真正系数，它是广义的，而且在其宗量值的某些区域中，可能具有奇异性.

但是，由于可积性，算符积分

$$\int T'(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n))\, g(x_1)\cdots g(x_n)\, dx_1\cdots dx_n$$

在函数 $g(x)$ 相当正常而且在无穷远处相当迅速地递减的条件下是收敛的. 当过渡到极限 $g(x) \to 1$ 时，此处要产生困难，即相应的矩阵元 $S(1)$ 是发散的. 通常将这种情况的发散称为红外灾难类型的发散或者称为共振分母类型发散.

大家知道，在描述极小能量的量子过程时，由于应用微扰方法引起第一类奇异性，通过 Bloch-Nordsieck 方法(1937)，或者在光子 $D_0^c$ 函数中引进一个起"光子质量"作用的小常数，可以从结果中消除这种奇异性.

第二类奇异性存在于以下情况中，例如，在某一已知动量值下的高阶散射过程可以归结为一些较简单的互不依赖的低阶过程.

应该注意，这两类发散在通常量子力学中当不能应用微扰理论时也将出现. 利用此机会我们强调指出，算符函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的可积性条件仅仅保证量子场论所特有的"大动量时的发散"不存在.

以上我们表述了给算符 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 构成可积的系数函数的手续. 现在注意到，正常化的因果函数

$$\Delta^c \to \operatorname{reg} \Delta^c$$

的引进，在我们的叙述中纯粹只带有辅助性质，实质上，它的用处只在于表明所得的 $S_n$ 表式满足对散射矩阵展开项所加的全部条件. 实际上，例如计算上述的系数函数时，完全可以运用"真正的" $\Delta^c$ 函数. 此时，化到 $\alpha$ 表象，可以应用运算 $R(G)$，只要在对 $\alpha$ 的积分区域中除掉 $\alpha = 0$ 点的无穷小邻域.

### 26.7. $\Delta(G)$ 构成方案的推广

上述构成 $\Delta(G)$ 的步骤在选择 $k = 0$ 点作为展开中心(当所有 $m_i \neq 0$)，或将取平均值的四维球的"半径"定为 $\mu$ (当某些 $m_i$ 等于零) 时含有一定的任意性. 因此，应当将运算 $\Delta(G)$ 略为推广.

为了这一目的，讨论幂次不高于 $\omega(G)$ 的有限多项式

$$Z'_G(\cdots k \cdots),$$

使表式

$$Z'_G(\cdots k \cdots)\delta(\sum k)$$

是某些厄米的协变的准定域性算符 $A'(\cdots x \cdots)$ 的系数函数的动量表象. 如果将它定义为以前引进的运算 (26.24) 以及附加多项式 $Z'_G$ 这一运算之和，可以获得到运算 $\Delta(G)$ 的最一般表式，即

$$\begin{aligned}\Delta(G)J_G(\cdots k \cdots) = \\ = -M(G)\left\{1 + \sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1 \\ G=G_1*G_2*\cdots*G_n}\right)} \frac{1}{m!}\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m)\right\}J_G(\cdots k \cdots) + \\ + Z'_G(\cdots k \cdots)\delta(\sum k). \qquad (26.32)\end{aligned}$$

算符 $S_n$ 的相应于 (26.32) 式的最一般式与以前所得的表式不同，在于含有厄米的协变的准定域性算符 $A'_n$. 但是，上面已经阐明，在 $S_n$ 中添加某些 $A'_n$，可以通过改变有效相互作用拉格朗日函数密度而考虑进去. 因此可积系数函数构成运算的改变，等于在有效拉格朗日函数密度中添加新的有限抵消项. 因此可以认为和上面一样，$T'$ 乘积是确定的，但在选择拉格朗日函数密度时有任意性. 这一任意性在于 $\mathscr{L}(x)$ 中可能包含相当于(18.37)类型的准定域性算符，它和含有非负指标 $\omega(G)$ 的强连通的广义顶点 $G$ 有关.

这样，我们得到求算符函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的一般步骤如下. 将任何一个 $G$ 的通常 $T$ 乘积的系数函数变成"$\alpha$ 表象". 暂时去掉 $\alpha_l = 0$ 点的无穷小邻域后，应用运算

$$R(G) = 1 + \sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1 \\ G=G_1*\cdots*G_m}\right)} \frac{1}{m!}\Delta(G_1)\cdots\Delta(G_m) + \Delta(G),$$

这里 $\Delta(G_j)$ 本身含有 $Z'_{G_j}$ 等项，然后在积分中加进去 $\alpha_l = 0$ 点的邻域，最后在所得表式中取广义极限 $\varepsilon \to 0$，就给出算符 $S_n$ 的系数函数.

## §27. 动量表象中系数函数的解析性

### 27.1. $S_n$ 的解析性

在上节中已经证明，在动量表象中散射矩阵的系数函数 $S_n$，在完成极限过渡 $\varepsilon \to 0$ 以后，在动量值 $k_a$ 的如下区域内为解析函数：

$$\sum_a k_a^0 < \min m_l. \tag{27.1}$$

因此可以认为，消除无穷大后的函数 $S_n$，可以定义为其宗量在不等式 (27.1) 所限的区域中的解析函数，而函数 $S_n$ 在这一区域外之值可以利用解析延拓来得到，即对内部线的所有质量 $m_l$ 附加上无穷小的纯虚负量：

$$m_l \to m_l - i\varepsilon_l. \tag{27.2}$$

现在我们证明，利用解析延拓的另一方案，可以从 $S_n$ 得到系数函数 $H_n$ [参看 (18.11) 式]，如以下将要证明的 (第六章)，在我们的理论中起着哈密顿函数作用的特殊算符 $H(x; g)$，就必须由这些 $H_n$ 函数来构成.

### 27.2. $H_n$ 函数的结构

我们来讨论函数 $H_n(x, x_1, \cdots, x_n)$. 根据 (18.12) 式，这些函数可以用散射矩阵 $S_v(x_1, \cdots, x_v)$ 的系数函数简单地表示出来，即 $H_n$ 的算符结构完全决定于 $S_{n+1}$ 的算符结构. 事实上，从(18.12)式得出结论，在系数函数 $H_n$ 中，首先是系数函数 $S_{n+1}$，其次是相当于下面乘积的项：

$$S_{k+1}(x, x_1, \cdots, x_n)\, S^{\dagger}_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n). \tag{27.3}$$

展开(27.3)式，将场算符乘积化为正规形式，我们获得一个和式，其中各项的算符结构与 $S_{n+1}(x, x_1, \cdots, x_n)$ 相同，但是与后者之差别在于，对于连结不同点集 $(x, x_1, \cdots, x_n)$ 及 $(x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 的内部线，以各种方式用函数 $D^{(-)}$ 替代了函数 $D^c$. 这样，$H_n$ 的算符结构实际上决定于 $S_{n+1}$ 的 Feynman 图.

现在将所得系数函数作更详细的讨论. 首先，证明不连通图形相应的系数函数等于零. 设含有 $(x, \cdots, x_a, \cdots)$ 及 $(\cdots, x_b, \cdots)$ 点的两部分图形是不连通的. $H_n$ 的相应系数函数具有形式：

$$K^H(x, \cdots, x_a, \cdots, x_b, \cdots) = \sum_i Q_i(x, \cdots, x_a, \cdots)\, Q'_i(\cdots, x_b, \cdots),$$

而 $Q_i$ 及 $Q'_i$ 是平移不变的. 将宗量 $Q_i$ 平移 $\xi$，使 $x^0 + \xi^0 > x_b^0$，由于 (18.13) 式的性质，我们得到

$$K^H(x, \cdots, x_a, \cdots, x_b, \cdots) = K^I(x + \xi, \cdots, x_a + \xi, \cdots, x_b, \cdots) = 0.$$

因此，以后我们只讨论连通图形.

化为动量表象

$$\int K(x, x_1, \cdots, x_n) \exp i\left(px + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) dx\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \delta\left(p + \sum_j p_j\right) K(p_1, \cdots, p_n),$$

其中

$$K_n(p_1, \cdots, p_n) = \int K(x, x_1, \cdots, x_n) \exp i\left(\sum_j p_j(x_j - x)\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad (27.4)$$

是动量 $p_1, \cdots, p_n$ 的某一广义函数.

### 27.3. $H_n$ 函数的解析性

如将变量 $p_l$ 认为是复数的,并表示为下面形式:

$$p_l = v_l + i\Gamma_l,$$

其中 $v$ 和 $\Gamma$ 是四维实矢量. 显然,这时代替(27.4)式,可以写成

$$K(p_1, \cdots, p_n) = \int K(x, x_1, \cdots, x_n) g'(x_1) \cdots g'(x_n) \exp\left(i \sum_l v_l (x_l - x)\right) dx_1 \cdots dx_n,$$

其中

$$g'(x_l) = \exp[-\Gamma_l(x_l - x)].$$

现在可以看出,如果选择将来方向的纯时间四维矢量作为 $\Gamma_l$:

$$\Gamma = (\Gamma^0, 0, 0, 0), \quad \Gamma^0 > 0,$$

则当 $x_l^0 \to \infty$ 时, 函数 $g$ 将以指数方式趋近于零. 由于积分是对 $x_l^0 > x^0$ 的区域进行的, 故积分 (27.4) 是收敛的, 而函数 $K(p_1, \cdots, p_n)$ 对 $p_l = v_l + i\Gamma_l$ 是正常的函数. 显然, 如果取将来方向的时间型四维矢量作为 $\Gamma_l$, 同样也是正确的. 此时, 对于实值 $p_l$, 函数 $K(p_1, \cdots, p_n)$可以认为是正常函数在 $\Gamma_l \to 0$ 时的广义极限. 换句话说,函数 $K(p_1, \cdots, p_n)$ 在区域

$$p_l = v_l + i\varepsilon_l\Gamma$$

中是解析的, 其中 $v_l$ 是四维实矢量, $\varepsilon_l$ 是正的实参量, 而 $\Gamma$ 是将来方向的时间型四维矢量.

现在证明,当满足条件(27.1)时,算符 $H_n$ 的系数函数也是解析的,而且等于 $S_{n+1}$ 的系数函数. 在 § 26 中已经证明, 函数 $S_{n+1}$ 在条件(27.1)式所限制的区域内是正常函数. 因此,只要证明乘积(27.3)式在这一区域中[1]对 $H_n$ 没有贡献. 相应的系数函数具有形式:

$$\int Q(\cdots, k_a - \sum \lambda, \cdots)\delta(\sum k_a - \sum \lambda) Q'(\cdots, k_b + \sum \lambda \cdots)\delta(\sum k_b + \sum \lambda) \times$$

$$\times \prod \{Z_{a\beta}(\lambda_{a\beta})\theta(-\lambda_{a\beta}^0)\delta(\lambda_{a\beta}^2 - m_{a\beta}^2)\, d\lambda_{a\beta}\}.$$

从 $\lambda_{a\beta}^0 < 0$ 及 $\lambda_{a\beta}^0 = m_{a\beta}^2$ 两条件,可得出

$$-\sum \lambda_i^0 \geqslant m_i;$$

1) 当最小质量为零时(电磁场),在本节的叙述中,可以认为它等于某一微量 $\kappa$. 这一运算不致引起任何矛盾.

另一方面,我们有

$$\sum |k| \leqslant \min m,$$

因此在两个要求

$$\sum k_a^0 - \sum \lambda^0 = 0 \text{ 和 } \sum k_b^0 + \sum \lambda^0 = 0$$

中,总有一个要求不能满足,(27.3)的贡献实际上将等于零,而且 $H_n$ 与解析函数 $S_n$ 相重合. 记住,通过对质量附加纯虚数的负微量(27.2),得到在整个动量变量平面上为解析的函数 $S_n$,于是我们得到从算符 $S_{n+1}$ 的系数函数构成算符 $H_n$ 的系数函数的程序如下.

我们讨论相当于某一(必须是连通的)图形的算符 $S_{n+1}$. 当 $\varepsilon = 0$ 时,这一算符的系数函数是在小动量区域中解析的. 利用替代式(27.2),将这些表式解析延拓到大动量区域,使我们重新得到算符 $S_{n+1}$ 的系数函数. 至于为了计算 $H_n$ 的系数函数,则应该利用替代式

$$p_j^0 \to p_j^0 + i\Gamma^0, \tag{27.5}$$

在大动量区域中进行解析延拓.

此处我们讨论算符

$$S(g) \quad 和 \quad H(x;\, g) = i\frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} S^{\dagger}(g)$$

的系数函数之间的关系.

在 § 17 中已经表明,如果引进的辅助泛函宗量不是"相互作用强度"$g$,而是经典外场 $u$,那末算符

$$i\frac{\delta S(u)}{\delta u(x)} S^{\dagger}(u)$$

也具有因果性(17.31),因此它的系数函数与矩阵 $S(u)$ 的系数函数相似. 此时发现,当任意引进 $u$ 场时,不必将 $S(u)$ 及 $i[\delta S(u)/\delta u(x)]\, S^{\dagger}(u)$ 进行泛函展开,就可以对这两算符的整体确定其解析关系. 在第九章中将阐明这一点.

## § 28. 各种理論的可重正化性的分类

### 28.1. 第一类和第二类相互作用

在上节中已经证明,由于存在非负指标 $\omega(G)$ 的强连通图形 $G$,要引进抵消项来改变有效相互作用的拉格朗日函数密度. 我们来讨论这些图形的构造与 $x$ 表象中相应抵消项的结构之间的关系.

如果上述图形包括 $n$ 个顶点,而且具有 $s$ 条外部线,则相应的准定域性算符的形式是

$$:u_a(x_{i_1})\cdots u_{a_s}(x_{i_s}):Z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x}\cdots\right)\delta(x_1 - x_2)\cdots\delta(x_{n-1} - x_n),$$

而多项式 $Z$ 的幂次等于图形的指标 $\omega(G)$. 将上式对所有变量 $x_i$ 积分(除去一个变量),我们得到拉格朗日函数密度的抵消项. 当完成这些平庸积分时,对 $\delta$ 函数的微分改作用在算符 $u$ 上,结果表示为几个场算符函数及其导数的正规乘积形式. 此时导数的总幂次

等于图形指标 $\omega(G)$，而整个表式对算符函数的“幂次”等于外部线的条数 $s$.

因此，如果某一理论(这完全由相互作用拉格朗日函数密度的基本项以及因果函数的结构来决定)所导致的非负指标的强连通图形均具有有限的 $\omega(G)$ 及 $s$，那末，为了完全消除所有的发散，这种理论需要引进的抵消项类型的数目是有限的. 应该将此处抵消项的“类型”理解为它的算符类型以及每一场算符导数的阶数. 与此相反时，抵消项类型的数目是无限的.

现在来分析指标为 $\omega(G)$ 的图形的内部线和外部线总数的关系. 为了这一点，我们用等式

$$\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{l_{\text{int}}}(r_l + 2) - 4 \tag{28.1}$$

来定义顶点指标这一概念. 此处求和是对在顶点 $i$ 相遇的所有内部线而作的. 不难注意到，可以用图形的顶点指标来表示图形指标:

$$\omega(G) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\omega_i + 4, \tag{28.2}$$

因为每条内部线遇到两个顶点. 当遇到某一个顶点的线全是内部线时，它的顶点指标 $\omega_i$ 取这一类型顶点中的最大值 $\omega_i^{\max}$. 如果

$$\omega_i^{\max} \leqslant 0, \tag{28.3}$$

则从(28.2)式可以得到结论:

$$\omega(G) \leqslant 4.$$

相反，如果对于某些类型的顶点，

$$\omega_i^{\max} > 0, \tag{28.4}$$

那末总可以作出图形 $G$，其中含有足够个数的这类顶点，使得 $\omega(G)$ 大于任意给定的数. 这样，图形指标或者不超过 4，或者可以任意大.

考虑到

$$\omega_i = \omega_i^{\max} - \frac{1}{2}\sum_{l_{\text{ext}}}(r_l + 2),$$

其中 $l_{\text{ext}}$ 是进入此顶点的外部线的指标，$\omega(G)$ 和外部线数目的关系可以写成

$$\omega(G) = \sum_i \omega_i^{\max} + 4 - \frac{1}{2}\sum_{l_{\text{ext}}}(r_l + 2), \tag{28.5}$$

最后一项是对此图形中所有的外部线求和.

因此，在(28.3)式的情况下，含正指标的图形中外部线的数目不超过 4. 在此情况中，$\omega(G)$ 及 $s$ 两量的上界均为 4，相应的抵消项类型的数目是有限的，而且可以将它们进行详细分类. 而在 (28.4) 式情况下，在 (28.5) 式的右边的二个和式，可以任意大，而仍使 $\omega(G)$ 是非负的. $\omega(G)$ 及 $s$ 两个特征都没有上界，为了抵消幂次增高的发散，需要引进“线”数递增及含许多导数的抵消项. 这时不能获得有效总拉格朗日函数密度的封闭式.

根据上述，相互作用的类型可以分成两种:

a) 第一类相互作用(所有 $\omega_i \leqslant 0$)，

b）第二类相互作用（有些 $\omega_i > 0$）. 相应的理论称为可重正化理论或不可重正化理论.

关于所引用的定义必须作一重要的声明. 问题在于有些情况，个别顶点因子可以互相抵消，因此减低 $\omega_i$ 的有效值，例如，讨论通常 Fermi 场（自旋为 1/2）与中性矢量介子场的相互作用

$$\sum_n : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\varphi_n(x) : . \tag{28.6}$$

在直接计算 $\omega_i$ 时，利用 $p$ 表象中矢量场的收缩具有形式

$$\frac{g^{mn} - (k^m k^n)/m^2}{k^2 - m^2},$$

因此，它的 $r_l$ 等于 2，显然，我们得到 $\omega_i = 1$，而拉格朗日函数密度属于不可重正化类型. 但是可以证明，实际上拉格朗日函数密度 (28.6) 描述第一类相互作用. 为此，按照 Stückelberg (1949)，我们将矢量场分成纵向及横向部分

$$\varphi(x) = \Phi_n(x) + \frac{1}{m}\frac{\partial B}{\partial x^n},$$

相应的收缩是

$$\overbrace{\Phi_n(x)\Phi_m(y)} \sim ig^{mn},$$

$$\overbrace{\frac{\partial B(x)}{\partial x^n}\frac{\partial B(y)}{\partial y^m}} \sim -k^m k^n.$$

现在记住，散射矩阵 $S$ 并不依赖于拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$，而依赖于整个积分 $\int \mathscr{L}(x)\,dx$. 将以上分解式代入此式后，有

$$\int \mathscr{L}(x)\,dx = \sum_n \int : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\Phi_n(x) : dx + \frac{1}{m}\sum_n \int : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\frac{\partial B}{\partial x^n} : dx.$$

利用旋量流的守恒定律（更确切地说，利用连续性方程，中性介子的存在并不破坏此定律）

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} : j^n(x) : = \sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x) : = 0,$$

对第二项作部分积分，我们得到其值为零，故

$$\int \mathscr{L}(x)\,dx = \sum_n \int : \bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\Phi_n(x) : dx.$$

因此，纵场 $\partial B/\partial x^n$ 实际上从 $S$ 矩阵中消掉，有效值 $r_l$ 及顶点指标 $\omega_i$ 减少至零，而拉格朗日函数密度(28.6)是可重正化的.

关于在梯度变换之类的正则变换下的“收缩的有效变化”问题，以后在讨论了电荷和梯度不变性条件后，将特地予以讨论，目前暂不涉及这些问题.

这里不拟详细讨论这些十分重要的抵消奇异性的特殊情况，这些情况是由于某些变换羣而产生的. 现在只对 § 8 中所引进的那些最简单的拉格朗日函数密度作一般的分类.

## 28.2. 第一类相互作用的列举

在建立指标 $\omega_i^{\max}$ 时，我们考虑到根据对易函数及因果函数的一般结构，对于标量场以及质量为零(电磁场)而有标量耦合的矢量场来说，多项式的幂次 $r_l$ 为零；对于自旋为 1/2 的旋量场，$r_l$ 为 1；对于有标量耦合的矢量场(当 $m \neq 0$)，$r_l$ 为 2. 利用公式 (19.11)，在梯度耦合情况中，我们求得标量场及电磁场的 $r_l$ 等于 2，而矢量场的 $r_l$ 等于 4.

已经指明，非负指标的强连通图形中外部线的数目不能大于 4. 因此，第一类相互作用拉格朗日函数密度的线数的最高幂次等于 4，从公式

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2}\sum_l (r_l + 2) - 4, \tag{28.7}$$

此处对于在此顶点相遇的所有线求和，我们得到，所有四条线应该具有指标 $r_l = 0$，也就是，只有标量场和电磁场的四重乘积：

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{a_3}\varphi_{a_4}:,\ :\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}A_k A_k:,\ :A_k A_k A_l A_l: \tag{28.8}$$

描述第一类相互作用. 其余的四粒子相互作用，例如自旋算符函数的四个 Fermi 子相互作用

$$(\bar{\psi}_{a_1} O \psi_{a_2})(\bar{\psi}_{a_3} O \psi_{a_4}) \qquad (\omega_i = 2),$$

包含有场的导数及矢量函数的四重相互作用，例如

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\frac{\partial \varphi_{a_3}}{\partial x^k} A_k: \qquad (\omega_i = 1),$$

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}U^k U^k: \qquad (\omega_i = 2)$$

表示第二类相互作用.

显然在第一类拉格朗日函数密度中，三重项可以具有下列结构：

a) 不含导数的三个标量函数与电磁场函数的乘积：

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{a_3}:,\ :\varphi_{a_1}A_k A_k: \quad (\omega_i = -1) \tag{28.9}$$

(其余的组合不构成标量)；

b) 三个标量及电磁函数的乘积，其中有一个是一阶导数：

$$:\varphi_{a_1}\frac{\partial \varphi_{a_2}}{\partial x^k} A_k: \qquad (\omega_i = 0), \tag{28.10}$$

带有电荷的标量介子与电磁场的相互作用(标量电动力学)即是按此方式；

c) 一个标量函数，一个矢量函数及一个电磁函数的乘积：

$$\sum_k :\varphi_\alpha \varphi_\beta^k A_k: \qquad (\omega_i = 0); \tag{28.11}$$

d) 两个自旋函数及一个标量函数或电磁函数的乘积：

$$\sum_{\alpha,\beta} :\bar{\psi}_\alpha M_{\alpha\beta}\psi_\beta \varphi:,\ \sum_{\alpha,\beta,k} :\bar{\psi}_\alpha \Gamma^k_{\alpha\beta}\psi_\beta A_\beta: \quad (\omega_i = 0). \tag{28.12}$$

其他一切三重相互作用，例如自旋场与标量场的梯度耦合类型的相互作用

$$\sum_{\alpha,\beta,k} :\bar{\psi}_\alpha \Gamma^k_{\alpha\beta}\psi_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}: \quad (\omega_i = 1),$$

导致不可重正化理论[1].

第一类相互作用的可能类型限于上列几种拉格朗日函数密度(28.8)—(28.12)[2],因为满足条件(28.3)的二次型相当于通过一顶点只有二条线. 这种形式不描述粒子的相互转化过程,因此只表示抵消项的可能类型.

将拉格朗日函数密度如上地分成第一类及第二类相互作用,本质上是不够彻底的. 进行上述分类是假定了 $S$ 矩阵展开成耦合常数的幂级数时各个项是收敛的. 完全可能,对此级数求和以后,所研究的函数的解析性具有另一性质,这就影响上述的分类.

因此产生了一个问题,就是不依赖微扰理论,来确定哪些相互作用属于第一类,哪些相互作用属于第二类的问题. 换句话说,所产生的问题在于对那些定域性拉格朗日函数密度可以建立封闭的理论. 如我们现在要证明的,这一问题的重要性是由于第一类与第二类理论之间存在着实质的物理区别.

### 28.3. 第二类相互作用的非定域性

现在比较详细地讨论第二类相互作用的性质. 我们已经证明,这些理论中所引起的无数类型的抵消项中,含有同一算符类型而导数幂为无限增大的各项. 这类对导数的幂级数实际上是某些非定域性表式的展开式,因而在本质上是非定域性相互作用.

例如,赝矢量介子-核子耦合的拉格朗日函数密度

$$:\bar{\psi}\gamma^5\gamma^k\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}:,$$

要求在有效拉格朗日函数密度中引进无穷个数下列形式的抵消项:

$$C_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}:\bar{\psi}\gamma^5\gamma^k\psi\frac{\partial^n}{(\partial x^\alpha)^n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right):,$$

可以将这些抵消项之和当作是非定域性表式

$$\int:\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^k\psi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^k}:K(x-y)\,dy$$

展开为任意函数 $\varphi$ 的幂级数.

因此,在第二类相互作用时,有效拉格朗日函数密度已经不仅依赖于场函数在 $x$ 点的无穷小邻域的性质,定域性实际已消失. 此时发现除了依赖于微小的相互作用常数外,在大动量时,高阶项也已经十分重要. 实际上从量纲考虑出发,可以得到结论,含有 $n$ 阶导数的抵消项与因子 $l^n$ 成正比,其中量纲为长度的小参数 $l$ ("普适长度") 与相互作用常数有多项式的关系. 在 $p$ 表象中,导数 $\partial/\partial x$ 化为动量,我们得到对

$$pl=\frac{l}{\lambda}\tag{28.13}$$

的展开式,其中

$$\lambda=\frac{1}{p}$$

1) 不考虑拉格朗日函数密度 (28.6) 式.

2) 事实上,由于电荷及梯度不变性,它们的数目还要减少 (参阅下面).

是 Compton 波长. 当 $p$ 相当大时，$\lambda$ 与普适长度 $l$ 为同一数量级，而非定域性拉格朗日函数密度的展开参数 (28.13) 并不很小. 在这种情况下，普适长度 $l$ 描述粒子的实际“弥散”，它的出现标志粒子内部的结构有重要的影响.

这样，第二类相互作用拉格朗日函数密度仿佛是将非定域性形式的“片断”表示为定域化相互作用. 为了彻底地建立这类理论，从一开始，就必须从非定域性拉格朗日函数密度出发，并且考虑到基本粒子的内部结构. 从这里得出结论，在第一类和第二类相互作用之间存在着深刻的物理差别.

在自然界中一切可实现的相互作用是不是都属于第一类[1]，这一问题就极为重要.

我们强调，只有通过实验与不用微扰理论的计算相比较，才能对上述问题得到有充分根据的答覆.

在目前还完全不清楚，例如，在微扰理论的基础上属于第一类的相互作用，是不是的确属于第一类相互作用.

如果有某些眞正的相互作用属于第二类，则关于基本粒子的内部结构问题以及利用非定域性拉格朗日函数密度彻底地描述它们的相互作用问题，就将具有重要的意义. 此时由于所有粒子有相互连系，如果可以把它们中间的某些相互作用孤立地取来属于第一类，则任何粒子的全面描述必须是非定域性的.

因为在量子场论中至今研究非定域性相互作用的方法实际上还不存在，我们将如上所述，一般地不讨论第二种可能性，而且假定一切存在的相互作用都属于第一类.

### 28.4. 用有限个常数确定第一类理论

我们来对建立第一类理论的可能性作更细致的分析. 上面已经证明，有效相互作用拉格朗日函数密度中各项的可能类型，只限于场算符的四阶、三阶及二阶的有限个项. 因此在第一类理论中，相互作用拉格朗日函数密度的选择化为有限个“耦合常数”的选择. 由于考虑到梯度不变性、电荷守恆、电荷共轭不变性等等要求，其中独立的个数会有减少. 为了完全确定理论，不言而喻，必须再给定相互作用不存在时粒子的质量. 这样任何第一类理论完全由有限个的参数集合来表征，即设想的互不作用粒子的质量以及耦合常数.

在我们的理论方案中，除了自由粒子的拉格朗日函数密度（它决定非相互作用场的性质）是基本量外，相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 也是基本量. 我们已经证明，通过重新定义 $T$ 乘积，用通常方式选择 $\mathscr{L}(x)$ 可以得到 $S$ 矩阵各项的可积式

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = i^n T'(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n)).$$

虽然构成 $T'$ 算符的方案并不是唯一的，但是其中所含的不定性相当于相互作用拉格朗日函数密度中耦合常数的变化，也就是相当于在原先的拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 中附带地引进与第一类许可的有效拉格朗日函数密度项同一类型的有限抵消项. 因此为了计算的完全单值性，必须适应于 $T'$ 乘积的确定构成方案来给定 $\mathscr{L}(x)$.

另一方面，我们已看到，如果不用补充定义 $T$ 乘积，而应用通常的 $T$ 乘积（在讨论中间

1) 例如参阅梅泽在这方面的工作 (1952).

应用这一或那一辅助正常化)，但因此代替 $\mathscr{L}(x)$，利用某些有效的相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$（它除了包含原来的相互作用拉格朗日函数密度外，还含有发散的抵消项来补偿通常 $T$ 乘积的发散)，则可以得到完全等效的结果. 从 $S$ 矩阵的观点看来，问题是这样的，如果代替原来的总拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}(x),$$

我们有拉格朗日函数密度：

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{eff}},$$

其中所含的“质量”、“电荷”，也就是在相应的算符组合前的系数，是发散的；但是利用它们来计算可观察量(其中也包括质量、电荷，等等)却具有有限值.

我们通过这样的途径达到“重正化”观点，在拉格朗日函数密度中，为了使计算的可观察量为有限值，应引进无穷大的“原始质量”“原始电荷”以及其他等等. 这时就说，通过基本常数的“重正化”可以从理论中消去无穷大，而重正化因子含有发散的表式.

但是这一观点不能彻底贯彻，因为在 $\mathscr{L}_{\text{tot}}$ 中不能不附带地引进一些抵消项，它们并不归结为基本量的重正化[例如，在旋量电动力学中，显然是相对论协变性的光子质量项[1]及 $(\partial A^m/\partial x^m)^2$，介子理论的第四项及其他等等]. 此外，在讨论广义散射矩阵 $S(g)$ 时，在 § 28 中已经证明，抵消项的结构有变化，而与函数 $g(x)$ 的性质有关；以下将要证明，正是 $S(g)$ 矩阵决定了力学系统的有效哈密顿函数密度.

由于这一切原因，我们不拟保留“重正化”的术语，而将引进抵消项作为一个形式上的方法，来保证计算结果为有限的.

---

1) 当应用与 § 24.2 中所应用的方法相似的、具有梯度不变性的正常化方法时.

# 第五章　消除发散的一般理論对具体情况的应用

## §29. 有非綫性相互作用的标量場

### 29.1. Hurst-Thirring 场

在上一章中，详细地叙述了相互作用量子场论中正常化的一般方法．现在我们将这一方法应用到相互作用波动场的各种组合．

在这一节中，将讨论非线性实标量场的最简单情况．在拉格朗日函数密度中，非线性项采用 Hurst (1952)-Thirring (1953) 形式：

$$\lambda\varphi^3(x).$$

这一项在总拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L}_{\text{tot}}(x) = \frac{1}{2}\sum_n g^{nn}:\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)^2: - \frac{m}{2}:\varphi^2(x): + \lambda:\varphi^3(x): \tag{29.1}$$

中可以认为是场 $\varphi$ 与它本身的相互作用，即“自身作用”：

$$\mathscr{L}_{\text{int}}(x) = \mathscr{L}(x) = \lambda:\varphi^3(x):. \tag{29.2}$$

根据表式(29.2)，可以构成 $S$ 矩陣和 Schrödinger 方程，而且可以按照描述相互作用场相似的方案来描述 Hurst-Thirring 场．

我们从一开始就应该強调，由拉格朗日函数密度(29.1)所定义的波动场，就它的本质而言，完全是设想的，但是对它的研究却有一定的方法论意义，因为从分析观点而言，拉格朗日函数密度(29.2)最最简单，而在相互作用理论的方案中，这个场的描述是以标量场中唯一的最简单的因果函数为基础：

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}\,dk. \tag{29.3}$$

### 29.2. 发散图形个数的有限性

根据§28中的一般方案，将相应于发散矩陣元的图形进行分类．从“相互作用”拉格朗日函数密度(29.2)的结构得出结论，在 Feynman 图形中每一顶点有三条相同的线相交．

由于因果函数(29.3)中分子上的多项式的幂次等于零，从(28.1)式发现，顶点的最大指标是负的：

$$\omega_i^{\max} = -1, \tag{29.4}$$

因此，拉格朗日函数密度(29.2)属于可重正化类型．现在可以用公式(28.5)将发散图形进

行完备的分类.

先研究真空图形 ($l_{ext} = 0$)，在此情况下，这些图形总含有偶数个顶点. 从 (28.5) 式可以得到结论，只有当 $i = 2$ 和 $i = 4$ 时，真空图形的指标才是非负的. 第一种场合，相当于图 28 中所示的图形，此时 $\omega(G) = 2$，因而我们得到平方发散. 但在第二种场合(图 29)，$\omega(G) = 0$，发散带有对数性.



图 28

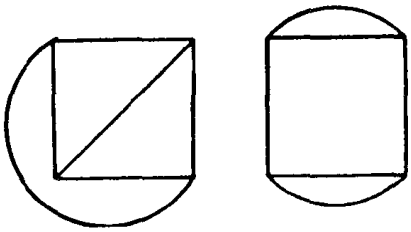


图 29

对于只有一条外部线 ($l_{ext} = 1$) 的图形，顶点的个数在所讨论的情况(29.2)中总是奇数. 在一条外部线时一个顶点的图形是不存在的，而图 30 所示含有三个顶点 ($i = 3$) 的图形会导致对数发散 [$\omega(G) = 0$]. 当 $l_{ext} = +1$ 时并不产生其他的发散.

最后，有两条外部线的唯一发散图形含有两个顶点 (图 31). 它的指标等于零，因而相应的发散是对数发散.

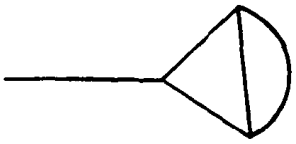


图 30



图 31

图 28—31 所示的图形完全包括了 Hurst-Thirring 场的全部发散图形. 我们强调指出，拉格朗日函数密度(29.2)的重要特征是有有限个发散图形. 下面我们将要看到，在其他理论中，对于耦合常数的任意高阶，总存在相应的发散图形，而图形的总数是无限的.

在上述情况下，只有在第二、第三和第四阶含有发散. 因此相应的正常化准定域性算符具有形式:

$$\Lambda_2(x_1, x_2) = (A_1 + A_2\Box_{x_1})\delta(x_1 - x_2) + A_3{:}\varphi^2(x_1){:}\delta(x_1 - x_2), \tag{29.5}$$

$$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = B\varphi(x_1)\delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3), \tag{29.6}$$

$$\Lambda_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = C\delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\delta(x_1 - x_4), \tag{29.7}$$

积分以后得到抵消项

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{A_3}{2!}{:}\varphi^2(x){:} + \frac{B}{3!}{:}\varphi(x){:} + \frac{C}{4!} + A_{1,2}, \tag{29.8}$$

当 $M \to \infty$ 时，常数 $A_3$, $B$ 和 $C$ 是对数发散的，而 $A_{1,2}$ 是平方发散的.

从重正化观点看来，抵消项 $C$ 和 $A_{1,2}$ 是无关紧要的相加常数，$A_3{:}\varphi^2(x){:}$ 项导致质量重正化，而 $B\varphi$ 项实现了势的相加性重正化和质量的补充重正化:

$$\mathscr{L} + \Delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_n g^{nn}{:}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)^2{:} - \frac{m}{2}{:}\varphi^2{:} + \lambda{:}\varphi^3(x){:} + A{:}\varphi^2(x){:} +$$

$$+ B:\varphi(x): + C + A_{1,2} = \frac{1}{2}\sum_k g^{kk}:\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x^k}\right)^2: - \frac{m'}{2}:\varphi'^2(x): +$$
$$+ \lambda:\varphi'^3(x): + C', \tag{29.9}$$

其中

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \varphi_0, \tag{29.10}$$

而 $\varphi_0$, $m'$, $C'$ 是可用 $m$, $\lambda$, $A$ 的代数形式来表示的常数. 而且我们注意，由于准定域性算符中沒有依赖于场函数 $\varphi(x)$ 的微分算符， Schrödinger 方程的抵消项具有以下形式:

$$\Delta\mathscr{L}(x;g) = \frac{A_3}{2!}:\varphi^2(x):g(x) + \frac{B}{3!}:\varphi(x):g^2(x). \tag{29.11}$$

Hurst-Thirring 标量场的非线性方案的讨论到此结束.

## §30. 旋量电动力学

### I. 抵消项的一般形式

#### 30.1. 发散图形的类型和 Furry 定理

作为相互作用量子波动场的第二个例子，我们将详细讨论旋量电动力学这一重要的实际情况，即由矢量电磁场和旋量 Fermi 子场所构成的相互作用系统，其相互作用的拉格朗日函数密度为

$$\mathscr{L}(x) = e\sum_n :\bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)A_n(x): = e:\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x):. \tag{20.3}$$

我们记住，根据表式(20.3)的结构，在 Feynman 图形的每一顶点有两条 Fermi 子线和一条光子线相交，而相互作用场的因果函数具有形式:

$$i\overbrace{A_m(x)A_n(y)} = -g^{mn}D_0^c(x-y) = g^{mn}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{dke^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}, \tag{21.3}$$

$$i\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y) = S^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}e^{-ip(x-y)}dp. \tag{21.4}$$

因此光子线因果函数分子中的多项式 $P$ 的幂次等于零，而 Fermi 子因果函数的分子中多项式之幂次等于 1. 由公式

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2}\sum_l (r_l+2) - 4 \tag{28.7}$$

所决定的最大顶点指标等于零，因此拉格朗日函数密度(20.3)属于可重正化类型.

现在根据公式(28.5)将发散图形进行分类. 首先注意到，由于最大顶点指标 $\omega_i^{\max}$ 等于零，图形指标 $\omega(G)$ 和顶点的个数无关，只和外部线的数目和性质有关:

$$\omega(G) = 4 - \frac{1}{2}\sum_{l_{\text{ext}}}(r_l+2). \tag{30.1}$$

正如 §28 中已经指出，发散图形中外部线的最高数目不能超过四条. 从 (30.1) 式可以得出结论，在旋量电动力学中，有四条外光子线的图形是四外线类型的唯一图形. 这一图形

的指标 $\omega(G)$ 等于零.

我们讨论含有三条外部线的图形. 由于旋量线的连续性(参看 § 20),外部旋量线的总数必为偶数,因此只要讨论有三条外部光子线的图形以及有两条外部 Fermi 子线和一条光子线的图形已经足够. 根据下述的 Furry 定理,当没有外部旋量线时,外部光子线为奇数的图形对矩阵元的总贡献等于零.

含有两条外部旋量线和一条光子线的图形,指标 $\omega(G)$ 等于零;含有两条外部旋量线的图形,指标等于 1,含有两条外部光子线的图形,指标等于 2. 由于 Fermi 子线的连续性,含有一条外部 Fermi 子线的图形并不存在,至于含有一条外部光子线的图形,根据 Furry 定理是不许可的.

发散图形的列举到此结束. 在开始研究相应的准定域性算符之前,我们来证明上述的 Furry 定理.

首先应注意,上述的发散图形的一般分类并未考虑到对称性以及系统对于各种变换的不变性. 为满足这些性质,图形的可能类型将大受限制,以下可以看出,这些性质的满足还在各种发散图形所对应的正常化定域性算符之间建立一些关系. 举例来说,上述旋量线的连续性本质上是反映 Fermi 子的电荷守恒性(相应的变换请参阅 § 8).

电荷不变性对于图形的可能类型加上重要的限制,电荷不变性是指当在过程的初态和终态中没有带电的 Fermi 子时对于电荷符号改变的不变性. 这类过程正是用外部线全是光子线的图形来描述. 显然,此处电荷不变性的变换使得中间过程的虚 Fermi 子的电荷符号发生变化. 上述虚粒子的运动在 Feynman 图形上是通过封闭的旋量迴线来描述的.

Furry 定理(1937)的内容如下: 图形中只要有一条封闭旋量迴线的顶点数是单数,相应的矩阵元即相互抵消. 我们来讨论这样的图形 $G$, 其中 $L$ 是单数顶点的封闭迴线(图 32). 显然,相应于该图的矩阵元是两项之和,其中一项相当于电荷沿 $L$ 顺时针方向的运动,而另一项相当于电荷在相反方向的运动. 现在来证明,此两项只差一符号,因而总和为零[此证明属于 Feynman (1949a)].

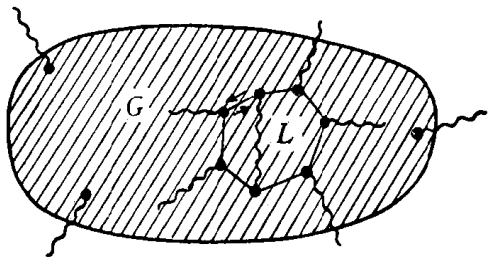


图 32

沿顺时针方向绕 $n$ 个顶点的封闭迴线 $L$ 时所相应的矩阵元乘子,可以写成下列形式[1]:

$$\mathrm{Sp}\,[\gamma S^c(1\div 2)\gamma S^c(2\div 3)\cdots\gamma S^c(n\div 1)] =$$

$$= \sum_{\alpha,\cdots,\nu} \{\gamma_{\alpha\beta}S^c_{\beta\gamma}(1\div 2)\gamma_{\gamma\delta}S^c_{\delta\varepsilon}(2\div 3)\cdots\gamma_{\mu\nu}S^c_{\nu\alpha}(n\div 1)\}. \qquad (30.2)$$

我们利用以下事实,即旋量场的一切关系式,特别是决定 Dirac 矩阵的关系

$$\gamma^m\gamma^n + \gamma^n\gamma^m = 2g^{mn},$$

1) 此处例如 $S(n\div 1)$ 表示 $S(x_n - x_1)$ 的缩写,其他类推.

以及任意个数矩阵相乘的迹，都对于以下替代式是不变的：

$$\gamma \to -\overset{T}{\gamma}, \quad \text{即} \quad \gamma_{\alpha\beta} \to -\gamma_{\beta\alpha}. \tag{30.3}$$

因变换(30.3)的结果，因果函数

$$S^c_{\beta\gamma}(1\div 2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{(m+\hat{p})_{\beta\gamma}}{m^2-p^2-i\varepsilon} e^{ip(2\div 1)}\, dp$$

的形式变为

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{(m-\hat{p})_{\gamma\beta}}{m^2-p^2-i\varepsilon} e^{ip(2\div 1)}\, dp = S^c_{\gamma\beta}(2\div 1).$$

因此对表式(30.2)作变换(30.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\,[\gamma S^c(1\div 2)\gamma S^c(2\div 3)\cdots\gamma S^c(n\div 1)] = \\
&=(-1)^n \sum_{\alpha,\cdots,\nu} \{\gamma_{\beta\alpha}S^c_{\gamma\beta}(2\div 1)\gamma_{\delta\gamma}S^c_{\varepsilon\delta}(3\div 2)\cdots\gamma_{\mu\nu}S^c_{\alpha\nu}(1\div n)\} = \\
&=(-1)^n\,\mathrm{Sp}\,\{\gamma S^c(1\div n)\cdots\gamma S^c(3\div 2)\gamma S^c(2\div 1)\}.
\end{aligned}$$

从这里明显看出，由于矩阵迹对变换(30.3)的不变性，当 $n$ 是偶数时，乘子(30.2)等于下式：

$$\mathrm{Sp}\,\{\gamma S^c(1\div n)\cdots\gamma S^c(3\div 2)\gamma S^c(2\div 1)\}, \tag{30.4}$$

此式相当于在反时针方向沿着迴线一周，而当 $n$ 是奇数时，与它只差一符号. 在后一情况下，相应于单数顶点的迴线的不同方向的矩阵元之和为零，Furry 定理因而得证.

注意，上述 Furry 定理的证明实质上是有些形式的，因为我们此处讨论是未经正常化的因果函数的奇异乘积. 但是不难看出，当 $S^c$ 换成 reg $S^c$ 后，证明仍旧成立，且正常化后矩阵元之和仍为零. 因此令与这些图形对应的准定域性算符等于零

$$\Lambda_n(x_1,\cdots,x_n) = 0, \tag{30.5}$$

在代入之后，对于消除发散后的总系数函数 $S_n(x_1,\cdots,x_n)$，我们也得到 Furry 定理的证明.

应该強调指出，并不一定非要采用条件 (30.5) 来保证在消除发散以后理论上的电荷不变性. 用其他条件来代替(30.5)式，我们就可以得到另一些形式的电荷不变理论.

我们再来讨论图形. 外部只有光子线的图形，如果光子线是单数的，图形必具有单数个顶点，于是至少必含有一个顶点是单数的旋量迴线，因此其矩阵元必定相消. 以上我们已经利用这一情况，限定有三条和一条外部光子线的图形并不存在.

这样，考虑到 Furry 定理后，在旋量电动力学中只有下列四种类型的发散图形，如图 33 中所示，在这些草图中带阴线的圆圈表示图形的內部含有任意个数的顶点（在 a，c，和

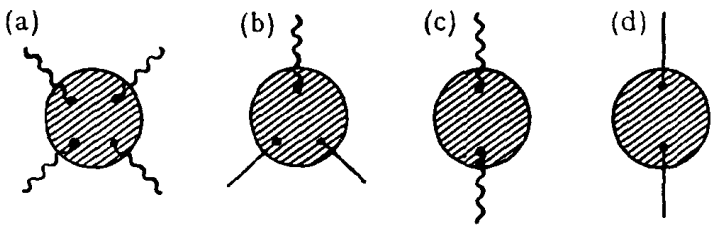



图 33

d 中是偶数，在 b 中是奇数）. 我们记住，在旋量电动力学中，从最大顶点指标为零得出发散度与顶点的个数无关.

现在我们来研究相当于每一发散图形的准定域性算符的形式，对每个偶数 $n$，从 $n=4$ 开始，图形 a 相应于 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 中如下的项：

$$A_n \sum_{k,l} g^{kk}g^{ll} : A_k(x_i)A_k(x_j)A_l(x_m)A_l(x_p) : \times$$
$$\times \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n). \tag{30.6}$$

根据图形 a 的指标之值，在这一表式中微分多项式之幂为零. 对每一奇数 $n$，从 $n = 3$ 开始，图形 b 相当于准定域性算符：

$$B_n : \bar{\psi}(x_i)\hat{A}(x_k)\psi(x_j) : \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n)$$
$$(i \neq k, i \neq j, k \neq j). \tag{30.7}$$

当 $n$ 为偶数时，从 $n = 2$ 开始，图形 c 相当于 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 中的项：

$$\sum_{m,k} : A_m(x_i) \left\{ \left( C_n g^{mk} + D_n g^{mm} g^{kk} \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial}{\partial x_j^k} + E_n g^{mk} \sum_l g^{ll} \frac{\partial}{\partial x_i^l} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n) \right\} A_k(x_j) : \quad (i \neq j). \tag{30.8}$$

根据相应图形的指标，此处微分多项式是二次幂的. 在多项式中一次项并不存在，因为不可能构成含有一次项的不变组合. 最后，对每一偶数 $n$，从 $n = 2$ 开始，图形 d 相当于算符

$$: \bar{\psi}(x_i) \left\{ \left[ F_n + G_n \frac{i}{2} \left( \frac{\hat{\partial}}{\partial x_i} - \frac{\hat{\partial}}{\partial x_j} \right) \right] \delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n) \right\} \psi(x_j) : . \tag{30.9}$$

从上列各式可以看到，准定域性算符含有相当多的任意常数.

### 30.2. 散射矩阵的梯度不变性

但是我们注意到，到目前为止，我们还没有考虑到梯度不变性要求. 为了表述这一要求，首先讨论电磁场势的无穷小梯度变换：

$$A_m(x) \to A_m(x) + \frac{\partial f}{\partial x^m}, \tag{30.10}$$

其中 $f$ 是任意的无穷小函数. 在这一变换下，散射矩阵 $S(1)$ 的第 $n$ 阶之项

$$\int S_n(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n, \tag{30.11}$$

在考虑到 $S_n$ 对不同宗量的势 $A(x_i)$ 的线性依赖关系后，得到增量

$$\sum_{m,i} \int \frac{\partial S_n}{\partial A_m(x_i)} \frac{\partial f}{\partial x_i^m} dx_1 \cdots dx_n.$$

将上式分部积分，我们得到：如果恒等式

$$\mathrm{div}_i^{(4)} \frac{\partial S_n(x_1, \cdots, x_n)}{\partial A(x_i)} \equiv \sum_m \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial S_n(x_1, \cdots, x_n)}{\partial A_m(x_i)} = 0 \tag{30.12}$$

成立，则上一增量等于零.

不难证明，如果满足这一条件，在有限的梯度变换下，表式(30.11)也将不变. 这是由于被积函数下的增量中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 高次幂前的系数可以用(30.12)式对 $A(x_j)$ 的导数来表示.

从上述的考虑出发，我们将条件(30.12)作为理论具有梯度不变性的条件. 以下我们将看到(第六章)，除了 $S(1)$ 的不变性外，上述条件也保证了满足电流守恒的微分定律.

现在来分析当加上(30.12)形式的梯度不变性条件的限制以后，在表式(30.6)—(30.9)中选择系数 $A_n$, $B_n$, $\cdots$, $F_n$, $G_n$ 的任意程度. 例如讨论算符函数 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的顶点部分：

$$\sum_{\substack{(i,j,k,m)\\ i\neq j\neq k}} :\bar{\psi}(x_i)\Gamma^m(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n|x_k)\psi(x_j)A_m(x_k):. \tag{30.13}$$

为了满足梯度不变性条件，此量应该满足关系

$$\mathrm{div}_k^{(4)} : \bar{\psi}(x_i)\Gamma^m(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n|x_k)\psi(x_j): = 0.$$

我们看到，与(30.7)式相比较，函数 $\Gamma^m$ 确定到差一个如下的项：

$$b_n\gamma^m\delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n). \tag{30.14}$$

此时很清楚，引进 $b_n$ 相当于改变系数 $B_n$. 但是不难注意到，如果顶角 (30.13) 满足条件(30.12)，则当 $\Gamma^m$ 加上(30.14)项后，它就丧失这一性质，因为

$$\mathrm{div}_k^{(4)} : \bar{\psi}(x_i)\gamma\psi(x_j):\delta(x_1 - x_2)\cdots\delta(x_1 - x_n) \neq 0, \quad 当\ k \neq i, j.$$

因此，如果选定准定域性算符 (30.7)，使得减法程序的结果是梯度不变的，那末这一选择完全是唯一的，也就是说，梯度不变性要求消除了不定性.

完全同理，可以证明表式(30.6)中系数 $A_n$ 以及表式 (30.8) 中 $C_n$ 的单值性. 不含电磁场势的表式(30.9)在选择系数 $F_n$ 和 $G_n$ 时可有任意性，这一点也很清楚.

再来讨论以下类型的算符式：

$$\sum_{(m,k,i\neq j)} : A_m(x_i)\Pi^{mk}(x_1, \cdots, x_n)\ A_k(x_j):$$

对于与(30.8)式的系数为 $D_n$ 及 $E_n$ 的项有同样结构的一些项的非单值性. 将这些项

$$\sum_{(m,k,i\neq j)} : A_m(x_i)\left\{\left(d_n g^{mm}g^{kk}\frac{\partial}{\partial x_i^m}\frac{\partial}{\partial x_i^m} + e_n g^{mk}\sum_l g^{ll}\frac{\partial}{\partial x_i^l}\frac{\partial}{\partial x_j^l}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\delta(x_1 - x_2)\delta(x_1 - x_3)\cdots\delta(x_1 - x_n)\right\} A_k(x_j):$$

代入条件(30.12)中，考虑到 $\delta$ 函数的导数性质：

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - y) = -\frac{\partial}{\partial y}\delta(x - y),$$

求得 $d_n$ 与 $e_n$ 之间的关系为

$$d_n + e_n = 0, \tag{30.15}$$

在这些系数的选择中还留有一个自由度.

因此，对于每一 $n$，有三个非单值的常数 $F_n$, $G_n$ 和例如 $D_n$，但是在拉格朗日函数密度的抵消项中一共只有三个数是非单值的(参阅 (18.42))：

$$D=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}D_n,\qquad F=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}F_n,\qquad G=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}G_n.$$

以后我们可以看到，这三个数只以两种组合出现在最终结果中，而且通过选定自旋粒子的质量和电荷以后，非单值性完全被消除掉.

现在必须证明，通过选择相应的抵消项，事实上可以得到梯度不变的理论. 大家知道，拉格朗日函数密度的抵消项用来描述理论中所采用的某一减法过程. 记住，我们所采用的减法程序是从发散式中减去它以 $p=0$ 点为展开中心的足够多项的 Maclaurin 级数，并且将此结果加上确定幂次的任意有限多项式. 根据刚才所得的结果，这一不定性使(30.9)类型的项中有两个常数，而在(30.8)类型的项中有一个常数. 我们来证明，用这样方法消除发散后所得到的理论是梯度不变的.

在证明中我们利用以下的含有辅助质量的正常化方案. 我们将光子因果函数用通常方式(参阅(24.9)式)正常化，而旋量因果函数并不单独正常化，而是将它的相当于封闭迴线

$$\mathrm{Sp}\,[\gamma S^c(x_1-x_2)\gamma S^c(x_2-x_3)\cdots\gamma S^c(x_{n-1}-x_n)\gamma S^c(x_n-x_1)] \tag{30.16}$$

的乘积用表式

$$\sum_M C_M\,\mathrm{Sp}\,[\gamma S_M^c(x_1-x_2)\gamma S_M^c(x_2-x_3)\cdots\gamma S_M^c(x_n-x_1)] \tag{30.17}$$

来代替，其中 $S_M^c(x)$ 是质量为 $M$ 的 Fermi 子因果函数:

$$S_M^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{M+\hat{p}}{M^2-p^2-i\varepsilon}e^{-ipx}dp. \tag{30.18}$$

上述将旋量函数正常化的方法是 Pauli-Villars 正常化(1949)的一个方案.

与此相关，我们注意到，根据第四章中所证明的正常化表式的一般性质，改变辅助性的正常化方法，并不改变正常化最终表式的结构，后者是算符 $S'_n$ 的系数函数，它用于确定不含无穷大的散射矩陣.

现在来证明 Pauli-Villars 正常化从封闭迴线的相应矩陣元中消除掉发散. 为此，我们讨论表式(30.16)积分后写成动量表象的结果:

$$\int dp\,\frac{\mathrm{Sp}\,[\gamma(m+\hat{p})\gamma(m+\hat{p}+\hat{k}_1)\cdots\gamma(m+\hat{p}+\hat{k}_{n-1})]}{(m^2-p^2-i\varepsilon)(m^2-(p+k_1)^2-i\varepsilon)\cdots(m^2-(p+k_{n-1})^2-i\varepsilon)}. \tag{30.19}$$

当 $p$ 大时，被积表式的性质和 $p^{-n}$ 相同，而当 $n<5$ 时，积分是发射的，如同

$$\int^{\infty}\frac{p^3dp}{p^n}\sim\int^{\infty}\frac{dp}{p^{n-3}}.$$

注意，当 $p$ 大时，(30.19)式的被积表式

$$\frac{P_n(p)+m^2P_{n-2}(p)+\cdots+m^n}{P_{2n}(p)+m^2P_{2n-2}(p)+\cdots+m^{2n}}\simeq$$

$$\simeq\left\{\frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)}+\frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)}\left[\frac{P_{n-2}(p)}{P_n(p)}-\frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)}\right]m^2+\cdots\right\}$$

(其中 $P_i(p)$ 是对 $p$ 为 $i$ 次幂的多项式) 可以表示成 $m^2$ 的幂级数形式，而当 $p\to\infty$ 时，$m^2$ 的 $k$ 次幂的系数对 $p$ 的增长度等于 $p^{-n-2k}$. 因此很清楚，如果在和式(30.17)中系数

$c_M$ 满足 $k$ 个关系式:

$$\sum_M c_M = 0, \quad \sum_M c_M M^2 = 0, \cdots, \quad \sum_M c_M M^{2k-2} = 0,$$

则相应于(30.17)式的被积表式的性质和 $p^{-2k-n}$ 相同，而 Pauli-Villars 方案将上述表式及其对 $x_i$ 的头 $2k+n-5$ 个导数正常化. 将因果函数化成"$\alpha$ 表象"后，也可以证明 Pauli-Villars 方案的这一性质.

因此，我们只对光子线和封闭的旋量迴线才引进辅助质量. 对于不封闭的旋量迴线，我们一般将不进行正常化. 容易看到，在光子函数中只要引进一个辅助质量，而在封闭旋量迴线中要引进两个辅助质量. 事实上，含有封闭旋量迴线的图形的最大发散度等于 2 (图 33c 类型的图形) ($n=2$)，而引进两个辅助质量使发散度降少 4. 经过这一手续后，当 $p \to \infty$ 时，积分收敛如同

$$\int^{\infty} dp\, p^{-3}.$$

另一方面，有内光子线的图形的最大发散度等于 1 (图 33d 类型的图形). 在光子函数中，引进一个辅助质量使发散度减少 2，而积分收敛如同

$$\int^{\infty} dp\, p^{-2},$$

因此将不封闭旋量迴线正常化并没有必要. 从这里我们看到，当辅助质量 $M_i$ 为有限值时，所有矩阵元是收敛的.

但是我们记住，应用辅助质量的正常化只是在讨论的中间过程中所采用的技巧，发散的实际消除要通过减法程序. 因此，对于以上得到的散射矩阵正常化表式，我们现在采用通常的动量表象中 Maclaurin 级数的减法程序，同时加上三个任意的有限常数. 根据以前的证明，这样相减的结果对于辅助质量的引入方式是不变的，故我们只要证明 Pauli-Villars 正常化是梯度不变的，以及正常化后的减法程序是梯度不变的.

现在来证明在施行减法程序以前正常化矩阵 $S(1)$ 的梯度不变性. 此时我们利用以下情况：具有 $k(k>1)$ 条外部光子线的 $n$ 阶图形的总和，可以从具有 $k-1$ 条外部光子线的 $n-1$ 阶图形通过在其中的任一外部或内部旋量线上嵌入辅助的第 $n$ 个顶点 $\xi$ 而得到. 嵌入程序(为简便起见，将称为 $\xi$ 过程)同时建立下列两式之间的图形对应关系:

$$\sum_i \frac{\partial S_n(x_1, \cdots, x_n)}{\partial A(\xi)}\bigg|_{\xi=x_i} \text{ 和 } S_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

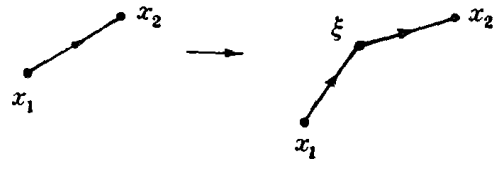



图 34 Fermi 子内部线中 $\xi$ 顶角嵌入过程

首先讨论内部旋量线的 $\xi$ 过程. 在线 $x_1$，$x_2$ 中嵌入 $\xi$ 顶点，我们得到图 34. 计算因子

$$S^c(x_2-\xi)\gamma S^c(\xi-x_1)$$

对 $\xi$ 的散度 (30.12)，利用 $S^c$ 的方程，我们得到

$$\operatorname{div}^{(4)}_{\xi}[S^c(x_2-\xi)\gamma S^c(\xi-x_1)] \equiv \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} S^c(x_2-\xi)\gamma^j S^c(\xi-x_1) =$$

$$= \frac{1}{i}(\delta(x_2-\xi)-\delta(\xi-x_1))\, S^c(x_2-x_1). \qquad (30.20)$$

复杂的 Fermi 子迴线的內部线的 $\xi$ 过程可以用图 35 的示意图来表示. 利用(30.20)式求相应于示意图中右边各项的和的散度,不难证明,这一散度和相应于示意图左边的各项成比例,而比例乘子等于

$$\frac{1}{i}(\delta(x_n-\xi)-\delta(x_1-\xi)). \tag{30.21}$$

由此得出结论,上述散度对于封闭迴线(即当 $x_1=x_n$)等于零.

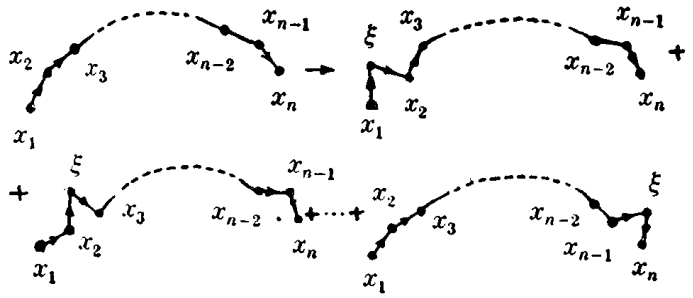



图 35 Fermi 子迴线內部线的 $\xi$ 过程

将上述讨论应用到由內部光子线以及任意个数的封闭的和不封闭的 Fermi 子迴线所组成的更复杂图形,我们得到关系

$$\mathrm{div}_\xi^{(4)} K_{n+1}(x_1,\cdots,x_n|\xi)=i\left[\sum_a\delta(\xi-x_a)-\sum_b\delta(\xi-x_b)\right]K_n(x_1,\cdots,x_n), \tag{30.22}$$

其中 $\sum_a$ 和 $\sum_b$ 是对图形的所有顶点求和,$(x_a)$ 是进入这些顶点的外部 Fermi 子线,而 $(x_b)$ 是离开这些顶点的外部 Fermi 子线; 其中 $K_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $n$ 阶的系数函数,而 $K_{n+1}(x_1,\cdots,x_n|\xi)$ 是从 $K_n(x_1,\cdots,x_n)$ 通过 $\xi$ 过程而得到的 $(n+1)$ 阶的系数函数.

为了完成证明,我们再来讨论外部 Fermi 子线(进入的以及离开的)的 $\xi$ 过程(图 36). 计算相应的散度

$$\mathrm{div}_\xi^{(4)} S^c(x_1-\xi)\gamma\psi(\xi)=\frac{1}{i}\delta(x_1-\xi)\psi(x_1) \tag{30.23}$$

$$\mathrm{div}_\xi^{(4)} \bar\psi(\xi)\gamma S^c(\xi-x_n)=-\frac{1}{i}\delta(\xi-x_n)\bar\psi(x_n). \tag{30.24}$$

将上式与(30.21)式相比较,我们证明 $S_n(x_1,\cdots,x_n)$实际上满足梯度不变性条件(30.12). 事实上,根据刚才的证明,描述封闭迴线的因子的散度等于零. 不封闭迴线的相应算符的散度等于系数函数中 $\xi$ 嵌入和外部线 $\xi$ 嵌入之和的散度,它也等于零, 因为 (30.24) 式抵消(30.21)式中第一项,而(30.23)式抵消第二项.

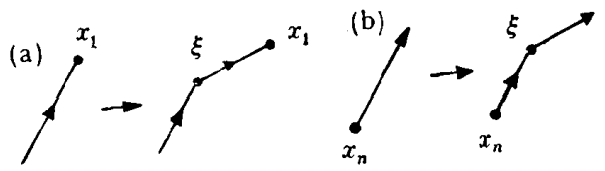



图 36 Fermi 子外部线的 $\xi$ 过程

正常化过程前矩阵 $S(1)$ 的梯度不变性形式上由此得证. 但是，我们注意到，只有封闭 Fermi 子迴线受到 Pauli-Villars 正常化，同时，一切因果函数 $S_c$ 的表式(30.17)中每一附加项中质量之值相同. 因此经过 $\xi$ 过程后，上述附加项的散度等于零，从而我们得到结论，应用 Pauli-Villars 方案以后，正常化矩阵 $S(1)$ 满足梯度不变性要求. 此处我们注意到，保持梯度不变性是 Pauli-Villars 正常化的优点，正是由于考虑到这一点我们才采用此法而不采用以前的引进辅助质量的方法.

现在来证明，将准定域性算符 $A_n$ 包括进去并不破坏梯度不变性. 在讨论过程中，方程(30.22)会有用处，利用公式[1]

$$K_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int e^{i\sum_1^n p_j x_j} \tilde{K}_n(p_1, \cdots, p_n)\, dp_1 \cdots dp_n, \tag{30.25}$$

$$K_{n+1}(x_1, \cdots, x_n|\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{4(n+1)}} \int e^{i\sum_1^n p_j x_j + i\pi\xi} \tilde{K}_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) d\pi\, dp_1 \cdots dp_n, \tag{30.26}$$

$$\delta(\xi - x_a) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\pi(\xi - x_a)}\, d\pi, \tag{30.27}$$

可将(30.22)式化到动量表象中得到

$$\pi\tilde{K}_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) = \sum_b \tilde{K}_n(p_1, \cdots, p_b + \pi, \cdots, p_n) - \\ - \sum_a K_n(p_1, \cdots, p_a + \pi, \cdots, p_n). \tag{30.28}$$

由于在 $x$ 表象中系数函数 $K_n$ 及 $K_{n+1}$ 的平移不变性，上一关系式中所有的量与总动量的 $\delta$ 函数成正比:

$$\tilde{K}_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) = \delta(\sum p + \pi) K'_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi),$$
$$K_n(p_1, \cdots, p_i + \pi, \cdots, p_n) = \delta(\sum p + \pi) K'_n(p_1, \cdots, p_i + \pi, \cdots, p_n).$$

将此 $\delta$ 函数分出，显然得到

$$\pi K'_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) = \sum_b K'_n(p_1, \cdots, p_b + \pi, \cdots, p_n) - \\ - \sum_a K'_n(p_1, \cdots, p_a + \pi, p_n). \tag{30.29}$$

作为示例，我们注意到，可以从图 33d 通过 $\xi$ 过程得到 (图 33b) 类型的图形 (参阅图 37). 根据(30.29)式，下列算符式的系数函数 $\Sigma$ 及 $\Gamma$

$$:\bar{\psi}(x_b)\Sigma_n(x_1, \cdots, x_n)\psi(x_a):, \qquad :\bar{\psi}(x_b)\Gamma_{n+1}(x_1, \cdots, x_n|\xi)\psi(x_a)A(\xi):$$

满足关系式

$$\pi\Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) = \Sigma'_n(p_1, \cdots, p_b + \pi, \cdots, p_n) - \\ - \Sigma'_n(p_1, \cdots, p_a + \pi, \cdots, p_n). \tag{30.30}$$

---

1) 在公式(30.26)、(30.27)中采用 $\pi$ 作为积分变量，我们希望不致和它的通常意义引起混淆. 参阅 Dirac (1937) 第 165 页.

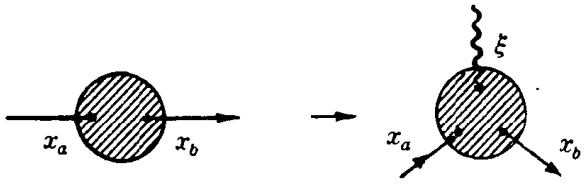



图 37

然后，除外部动量 $(\pi, p_a, p_b)$ 外，对所有动量积分

$$\int \Gamma'_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi)\, dp_1 \cdots dp_{a-1}\, dp_{a+1} \cdots dp_{b-1}\, dp_{b+1} \cdots dp_n = \Gamma_{n+1}(p_b, p_a|\pi),$$

$$\int \Sigma'_n(p_1, \cdots, p_a + \pi, \cdots, p_n)\, dp_1 \cdots dp_{a-1}\, dp_{a+1} \cdots dp_{b-1}\, dp_{b+1} \cdots dp_n =$$

$$= \Sigma_n(p_b + \pi, p_a),$$

$$\int \Sigma'_n(p_1, \cdots, p_b + \pi, \cdots, p_n)\, dp_1 \cdots dp_{a-1}\, dp_{a+1} \cdots dp_{b-1}\, dp_{b+1} \cdots dp_n =$$

$$= \Sigma_n(p_b, p_a + \pi),$$

对 $\pi$ 微分，并令 $\pi = 0$，获得

$$\Gamma_{n+1}(p_b, p_a|0) = \frac{\partial \Sigma_n(p_b, p_a)}{\partial p_b} - \frac{\partial \Sigma_n(p_b, p_a)}{\partial p_a}, \tag{30.31}$$

或者

$$\Gamma_{n+1}(p, 0) = -\frac{\partial \Sigma_n(p)}{\partial p} \tag{30.32}$$

此处根据(24.4)式和(25.3)式，令

$$\Gamma_{n+1}(p, k) = \Gamma_{n+1}(-p, p|k),$$

$$\Sigma_n(p) = \Sigma_n(-p, p).$$

公式 (30.32) 建立了 $n$ 阶近似的自能图形系数函数与 $(n+1)$ 阶近似的顶角图形系数函数之间的关系，它无论在非正常化理论中 (形式上)，或是在 Pauli-Villars 正常化之后，都是成立的.

现在来证明减法程序的梯度不变性. 由于在减法过程前条件(30.12)是满足的，显然应该证明准定域性算符 $\Lambda_n$ 的梯度不变性. 如果此时发现，与图 33a 和 c 图形相应的减法算符分别是梯度不变的，而与图 33b 和 d 图形相应的算符满足关系 (30.29)，就可以证明减法程序的梯度不变性. 我们证明实际上的确这样.

利用对于 $e$ 的二阶和三阶的减法程序的梯度不变性条件是已建立了的(参阅 § 25)这一事实，我们用归纳法来证明. 假定直到某一奇数

$$n - 1 = 2\nu - 1$$

的准定域性算符 $\Lambda_n$ 满足上述条件. 我们来讨论减去准定域性算符 $\Lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 以前的散射矩阵 $S_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的项. 由于已证明 $S$ 矩阵在减法过程前是梯度不变的以及已假定低阶准定域性算符

$$\Lambda_\nu(x_1, \cdots, x_n) \qquad (\nu = 1, \cdots n-1)$$

是梯度不变的，因此 $S'_n$ 的表式也是梯度不变的. 当 $n$ 为偶数时，特定的 $n$ 阶发散相当于图 33a, c, d 中所示的图形.

由于 $S'_n$ 的梯度不变性，它的相当于上述三个图形的部分也是梯度不变的[1]：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\binom{p,q,r,s}{a,b,c,d}} :A_p(x_a)A_q(x_b)A_r(x_c)A_s(x_d):\square^{pqrs}(x_1,\cdots,x_n),\\&\sum_{(p,q,a,b)} :A_p(x_a)A_q(x_b):\Pi^{pq}(x_1,\cdots,x_n),\\&\sum_{(a,b)} :\bar{\psi}(x_b)\Sigma(x_1,\cdots,x_n)\psi(x_a):\end{aligned}\right\}\tag{30.33}$$

最后一式的梯度不变性是显而易见的，而四光子及二光子部分的梯度不变性则给出

$$\sum_p g^{pp}k_a^p\,\square^{pqrs}(k_1,\cdots,k_a,\cdots,k_n)=0,\tag{30.34}$$

$$\sum_p g^{pp}k_a^p\,\Pi^{pq}(k_1,\cdots,k_a,\cdots,k_n)=0.\tag{30.35}$$

将(30.34)式对 $k_a^p$ 微分，并令 $k_a=0$，得到

$$\square^{pqrs}(k_1,\cdots,k_{a-1},0,k_{a+1},\cdots,k_n)=0.\tag{30.36}$$

关系式 (30.36) 具有重要的意义. 由于图形 33a 只是对数发散的 ($\omega(G)=0$)，减去的 Maclaurin 级数归结为从 □ 减去它在外部光子动量为零时之值：

$$\square^{pqrs}(k_1,\cdots,k_n)|_{k_a=k_b=k_c=k_d=0}.\tag{30.37}$$

根据(30.36)式，此值等于零，而函数□本身是收敛的. 因此，一般不须要从图 33a 中消除发散.

我们来研究双光子图形. 将关系式 (30.35) 的左端对分量 $k_a$ 微分一次、二次以至三次，并且令 $k_a=0$，我们得到 $\Pi^{pq}$ 的 Maclaurin 级数的第一、第二和第三展开系数，乘上 $k_a^p$（对指标 $p$ 取和）后，分别为零. 结果得到

$$\left.\begin{aligned}&\sum_p g^{pp}k_a^p\,\Pi^{pq}_{(0,k_a)}(k_1,\cdots,k_n)=0,\\&\sum_p g^{pp}k_a^p\,\Pi^{pq}_{(1,k_a)}(k_1,\cdots,k_n)=0,\\&\sum_p g^{pp}k_a^p\,\Pi^{pq}_{(2,k_a)}(k_1,\cdots,k_n)=0,\end{aligned}\right\}\tag{30.38}$$

其中符号 $\Pi_{(i,k_a)}$ 表示对于变量 $k_a$ 的第 $i$ 项 Maclaurin 级数. 将所得的表式再对变量 $k_b$ 展成 Maclaurin 级数分别至二阶、一阶和零阶，得到总和

$$\sum_p k_a^p\{\Pi^{pq}(k_1,\cdots,k_n)\}_2^{k_a,k_b}=0,\tag{30.39}$$

此处记号 $\{\cdots\}_i^{x,y,z}$ 按常例表示 Maclaurin 级数对于变量 $x$, $y$, $z\cdots$ 直到 $i$ 阶在内的各项之和. 但是 (30.39) 式中，Maclaurin 级数正是从 $S'_n$ 中减去的、与二光子图形相应的算符 $\Lambda_n$ 的系数函数. 关系 (30.39) 是它的梯度不变式. 可以决定上述算符 $\Pi$ 正确到 $k=k_a=k_b$ 的分量的任意二阶的有限多项式. 考虑到相对论协变性以及已证明了的表式

1) 此处记号 □ 表示与图 33a 图形相应的函数.

(30.8) 中系数 $C_n$ 的单值性，并利用(30.15)，我们得到结论：这一满足梯度不变性要求的多项式具有形式：

$$d_n(g^{pq}k^2 - k_pk_q). \tag{30.40}$$

与电子的固有质量（图 33d）相应的算符 $\Lambda_n$ 的梯度不变性是显然的. 根据已经证明的有限多项式的任意性，可确定这一算符正确到表式

$$f_nm + g_n\hat{p}, \tag{30.41}$$

这样对 $\Lambda_n$ 各项的讨论已经完毕.

我们来讨论以下的奇次阶 $n+1$. 由于它是奇数，顶角图形(参阅图 33b)是唯一的应该消除发散的图形. 我们已经阐明，只要验证是否满足关系式(30.29)或者它的等同关系式(30.30). 因为准定域性算符 $\Sigma'^{减}_n$ 和 $\Gamma'^{减}_{n+1}$ 的系数函数对于动量是线性的，它们的关系式(30.30)具有形式：

$$\Gamma'^{减}_{n+1}(p_1, \cdots, p_n|\pi) = \frac{\partial\Sigma'^{减}_n(p_1, \cdots, p_b+\pi, \cdots, p_n)}{\partial p_b} -$$
$$- \frac{\partial\Sigma'^{减}_n(p_1, \cdots, p_a+\pi, \cdots, p_n)}{\partial p_a}. \tag{30.42}$$

此处除 $p_a$ 和 $p_b$ 外，对所有变量积分，得到函数 $\Gamma(p, k)$ 和 $\Sigma(p)$（类似于从(30.30)式过渡到(30.32)式). 然后利用被减部分 $\Gamma$ 和 $\Sigma$ 正确到有限多项式是上述函数的 Maclaurin 级数：

$$\Gamma^{减}_{n+1}(p, k) = \Gamma_{n+1}(p, k)|_{p=k=0} + b_{n+1}\gamma,$$
$$\Sigma^{减}_n(p) = \{\Sigma_n(p)\}^p_2 + f_n - g_n\hat{p},$$

通过直接代入可以证实，考虑到(30.32)式，条件(30.42)化为以下要求：

$$b_{n+1} = g_n. \tag{30.43}$$

由于已经证明常数 $b_{n+1}$ 为单值的，它就可以由这些关系来决定. 当(30.43)式成立时，$n+1$ 阶的减法程序也是梯度不变的. 至此证毕.

再注意到，关系式(30.32)和(30.43)一起对 $n$ 的每一阶确立了算符(30.7)和(30.9)中的常数 $G_n$ 和 $B_{n+1}$ 的相等式，也就是全部 Ward 恒等式（参阅 § 25).

### 30.3. 抵消项

现在写出将矩阵 $S(1)$ 正常化的拉格朗日函数密度的抵消项. 将表式(30.7)—(30.9)代入(18.42)式中，经过分部积分，并对 $\nu$ 求和以后，得到相互作用的总拉格朗日函数密度的形式如下：

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(x; 1) = eZ_1{:}\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x){:} - \delta m{:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:} +$$
$$+ (Z_2-1)\left\{\frac{i}{2}\sum_k {:}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k\psi(x)\right){:} -\right.$$
$$\left. - m{:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:}\right\} - (Z_3-1)\left\{\frac{1}{2}\sum_{m,n} g^{mm}g^{nn}{:}\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m}\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m}{:} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}{:}\left(\sum_n g^{nn}\frac{\partial A_n}{\partial x^n}\right)^2{:}\right\}, \tag{30.44}$$

其中采用记号

$$Z_1 = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu+1}, \quad Z_2 = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\nu}}{(2\nu)!} G_{2\nu},$$
$$Z_3 = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}, \quad \delta m = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\nu}}{(2\nu)!} (F_{2\nu} + G_{2\nu}). \tag{30.45}$$

由于

$$B_{2\nu+1} = G_{2\nu},$$

Ward 恆等式用以上记号表示后具有形式:

$$Z_1 = Z_2. \tag{30.46}$$

由关系式(30.45)所决定的常数 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ 和 $\delta m$ 是与辅助质量 $M$ 有关的,同时,当这些质量趋于无穷大时,展开式(30.45)中的系数是对数发散的,但是,当 $M \to \infty$ 时下列矩阵的矩阵元

$$S(1) = T\left(\exp i \int \mathscr{L}(x; 1)\, dx\right)$$

趋于有限值.

由于 Pauli-Villars 程序的梯度不变性,拉格朗日函数密度(30.44)不同于利用非梯度不变正常化所获得的拉格朗日函数密度(24.45),前者并不含光子质量项:

$$\delta m_\Phi \sum_n g^{nn} : A_n(x) A_n(x) :, \tag{30.47}$$

因此,显然是梯度不变的.

这样我们看到,抵消项的形式和性质根本上依赖于辅助正常化方法. 所以,象在第四章中从 $S_2$ 及 $S_3$ 中分离无穷大时那样,对光子收缩及 Fermi 子收缩作非梯度不变正常化时,我们必须引进类如(30.47)的非梯度不变的抵消项. 与此相反,当采用具有梯度不变性的 Pauli-Villars 辅助正常化时,我们得到的表式(30.44)没有非梯度不变项,不但如此,可能抵消项并不具备 Lorentz 不变性. 正如 Степанов (1956)所证明的,当应用非 Lorentz 不变的辅助正常化时,确实存在这样的情况. 然而,很明显,消除辅助正常化以后,散射矩阵既是梯度不变,又是 Lorentz 不变的.

现在来求当 $g(x) \neq 1$ 时的有限矩阵 $S(g)$. 将准定域性算符表式代入 (18.39) 式中,得到使矩阵 $S(g)$ 正常化的抵消项:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(x; g) = {} & e Z_1(g) g(x) : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : - \\
& - \delta m(g) : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + (Z_2(g) - 1) \times \\
& \times \left\{ \frac{i}{2} \sum_k : \left( \bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi(x) \right) : - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \right\} - \\
& - (Z_3(g) - 1) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m,n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} : - \frac{1}{2} : \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 : \right\} - \\
& - \frac{Z_3(g) - 1}{g^2(x)} \frac{1}{2} \sum_{m,n} g^{mm} g^{nn} : \left\{ A_m(x) A_m(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x^n} \frac{\partial g(x)}{\partial x^n} + \right.
\end{aligned}$$

$$+2\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m}A_n(x)g(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x^m}-2A_n(x)\frac{\partial A_m}{\partial x^m}\frac{\partial g}{\partial x^n}g(x)-$$

$$-A_n(x)A_m(x)\frac{\partial g}{\partial x^n}\frac{\partial g}{\partial x^m}\Big\}:, \tag{30.48}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Z_1(g)&=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{[eg(x)]^{2\nu}}{(2\nu)!}B_{2\nu+1},\\ Z_2(g)&=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{[eg(x)]^{2\nu}}{(2\nu)!}G_{2\nu},\\ Z_3(g)&=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{[eg(x)]^{2\nu}}{(2\nu)!}D_{2\nu},\\ \delta m&=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{[eg(x)]^{2\nu}}{(2\nu)!}(F_{2\nu}+G_{2\nu}). \end{aligned}\right\} \tag{30.49}$$

(30.48)式以及矩阵 $S(g)$ 已经不是梯度不变的.

## § 31. 旋量电动力学

## II. 质量和电荷的重正化

### 31.1. 收缩 $\overbrace{AA}$ 的梯度变换

我们来更详细地研究散射矩阵 $S(1)$. 在上节中, 已经证明了它的梯度不变性. 我们事先注意到, 梯度不变性允许在将矩阵 $S(1)$ 中各项化为正常式过程中所采用的电磁势收缩

$$\overbrace{A_m(k)A_n(k')}$$

上添加一个表式

$$k_mk_nf(k^2),$$

其中 $f(k^2)$ 是任意函数. 换句话说, 当

$$\overbrace{A_m(k)A_n(k')}\equiv\langle T(A_m(k)A_n(k')\rangle_0=-\frac{ig^{mn}}{k^2+i\varepsilon}\delta(k+k') \tag{31.1}$$

代之以下式

$$\frac{1}{i}\left(g^{mn}\frac{1}{k^2}+k_mk'_nf(k^2)\right)\delta(k+k')$$

时, 散射矩阵元并不改变其值.

为了证明此点, 考虑梯度变换

$$A_n\to A'_n=A_n+k_nF(k^2)(k\cdot A(k)). \tag{31.2}$$

定义新算符 $A'$ 的时序收缩:

$$\overbrace{A'_n(k)A'_m(k')}=\frac{1}{ik^2}\left\{g^{mn}+k_mk'_n[2F(k^2)+k^2F(k^2)F(k^2)]\right\}\delta(k+k'). \tag{31.3}$$

由于上节中所证明的 $S(1)$ 的梯度不变性，它的矩阵元与函数

$$f(k^2) = 2F(k^2) + k^2F(k^2)F(k^2)$$

无关. 因此，要求已经得证. 再注意到，设

$$f(k^2) = \frac{-d_l^0 + 1}{k^2}, \tag{31.4}$$

我们可将表式(31.3)写成形式:

$$i\overbrace{A'_n(k)A'_m(k')} = \frac{1}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right)\delta(k+k') + \frac{d_l^0}{k^2}\frac{k_m k_n}{k^2}\delta(k+k'). \tag{31.5}$$

公式(31.5)是最方便的表式. 在式中将收缩 $\overbrace{AA}$ 明显地分解为纵向和横向（在四维意义下）部分，而规范变换时的任意性完全属于纵向部分（系数 $d_l^0$）. 此时一般说来，根据(31.4)式，$d_l^0$ 可能与 $k^2$ 有关. 但是为了今后讨论起见，我们将 $d_l^0$ 看作常数已经足够.

令 $d_l^0 = 0$，从(31.5)式，我们得到表式:

$$i\overbrace{A_n^{\mathrm{tr}}(k)A_m^{\mathrm{tr}}(k')} = \frac{1}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right)\delta(k+k'), \tag{31.6}$$

此式具有横向性:

$$\sum_n k^n\overbrace{A_n^{\mathrm{tr}}(k)A_m^{\mathrm{tr}}(k')} = 0. \tag{31.7}$$

当 $d_l^0 = 1$ 时，我们得到通常的对角型收缩(31.1).

### 31.2. 消除无穷大过程的非唯一性

在 § 30 中已经证明，在得到不含无穷大的梯度不变矩阵 $S(1)$ 的过程中，存在着与三个有限常数相关的任意性，这些常数可以表示为与拉格朗日函数密度抵消项(30.44)属于同一类型的算符式前的系数形式.

因此，或者引进发散抵消项(30.44)，或者重新定义时序乘积来消除无穷大以后，$S$ 矩阵表式含有一定的任意性，将这一任意性写成对原来的相互作用拉格朗日函数密度的有限附加项形式，最为方便:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = {} & e(z_1 - 1){:}\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x){:} - \delta m{:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:} + \\ & + (z_2 - 1)\left\{\frac{i}{2}\sum_n {:}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^n\frac{\partial\psi}{\partial x^n} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right){:} - m{:}\bar{\psi}(x)\psi(x){:}\right\} - \\ & - (z_3 - 1)\left\{\frac{1}{2}\sum_{m,n} g^{mm}g^{nn}{:}\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m}\frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m}{:} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right\}.\end{aligned} \tag{31.8}$$

此处 $z_1$, $z_2$, $z_3$ 及 $\delta m$ 是有限常数，根据 Ward 恒等式

$$z_1 = z_2. \tag{31.9}$$

现在我们考虑有限项(31.8)对矩阵的影响，并且证明，此影响相等于 Fermi 子的质量和电荷的重正化. 为了这一目的，将(31.8)式写成动量表象[1]:

---

1) 此处采用记号 $\bar{\psi}\hat{A}\psi = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\bar{\psi}(p)\hat{A}(q)\psi(p')\delta(p+q+p')\,dq\,dp'$.

$$\delta\mathscr{L}(p) = (z_1 - 1)e{:}\bar{\psi}\hat{A}\psi{:} + (z_2 - 1){:}\bar{\psi}(p)(\hat{p} - m)\psi(-p){:} -$$

$$- \delta m{:}\bar{\psi}(p)\psi(-p){:} - (z_3 - 1)\frac{1}{2}\sum_{m,n}{:}A_m(p)(g^{mn}p^2 - p^m p^n)A_n(-p){:}. \quad (31.10)$$

拉格朗日函数密度 $\mathscr{L} + \delta\mathscr{L}$ 与通常的相互作用"原始"拉格朗日函数密度

$$\mathscr{L} = e\bar{\psi}\hat{A}\psi$$

不同，它在 Feynman 图形中相当于三类顶点. $(z_2 - 1)$ 项对应与两条 Fermi 线相交的顶点，为简单起见，我们称它是 $z_2$ 顶点. $(z_3 - 1)$ 项相当于连接两条光子线的 $z_3$ 顶点. 最后 $z_1$ 项对应于通常类型的顶点 ($z_1$ 顶点).

我们来讨论与新的复杂图形的内部线相应的传播因子的结构. 先考察 Fermi 子的内部线，因子 $(z_2 - 1)(\hat{p} - m)$ 属于 $z_2$ 顶点，而因子 $cz_1$ 属于 $z_1$ 顶点，我们得到结果，Fermi 子的简单内部线相应于收缩[1]

$$\overbrace{\psi(-p)\bar{\psi}(p)} = \frac{i}{\hat{p} - m},$$

它与连接这一内部线的顶点类型无关. 现在计算在两个 $z_1$ 顶点之间运动粒子的"全传播因子". 显然，这一因子表示 Fermi 子的一个"开"迴线的相应因子的总和，该开迴线的起点和终点在 $z_1$ 类型的顶点上，并且含有任意个数的 $z_2$ 类顶点. 继续计算这类因子，考虑到 $n$ 阶 $S$ 矩阵前的乘子 $i^n$ 以及过渡到动量表象时将分母上的 $n!$ 予以补偿，我们得到

$$\frac{i}{\hat{p} - m},$$

$$\frac{i}{\hat{p} - m}i(z_2 - 1)(\hat{p} - m)\frac{i}{\hat{p} - m} = -(z_2 - 1)\frac{i}{\hat{p} - m},$$

也就是引进一个新的 $z_2$ 顶点相当于出现乘子

$$y_2 = 1 - z_2.$$

因此对不同个数的 $z_2$ 顶点的相应因子，从零到无穷大求和，我们得到

$$\frac{i}{\hat{p} - m}(1 + y_2 + y_2^2 + \cdots) = \frac{i}{\hat{p} - m}\frac{1}{1 - y_2} = \frac{1}{z_2}\frac{i}{\hat{p} - m}.$$

我们得到结论，从 Fermi 子内部线观点看来，相互作用拉格朗日函数密度中出现 $(z_2 - 1)$ 项等于将 Fermi 子的因果函数作重正化如下：

$$S^c(p) \to S'^c(p) = z_2^{-1}S^c(p). \quad (31.11)$$

用完全类似的方法，可以证明，在 Fermi 子的外部线中，考虑 $(z_2 - 1)$ 项，使得此线的自由端相应的算符 $\bar{\psi}$ 及 $\psi$ 前出现因子 $z_2^{-1}$：

$$\psi(p) \to z_2^{-1}\psi(p), \quad \bar{\psi}(p) \to z_2^{-1}\psi(p). \quad (31.12)$$

现在讨论光子的内部线. 将顶点 $z_3$ 与以下的因子对比：

$$\frac{1 - z_3}{2}(g^{mn}p^2 - p^m p^n) = \frac{y_3}{2}(g^{mn}p^2 - p^m p^n),$$

而将内部光子线与任意规范下的收缩相对比：

---

1) 为简单起见，这里我们省去总动量 $\delta(p + p')$ 的 $\delta$ 函数，并且令 $p' = -p$.

$$\overrightarrow{A_m(-p)A_n}(p)=\frac{1}{ip^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right)+\frac{d_l^0}{ip^2}\frac{p_mp_n}{p^2}. \tag{31.13}$$

现在来研究与光子在两个顶点间的运动相应的式子的结构. 利用下列两个关系式

$$\sum_{l,k}(g^{ml}p^2-p^mp^l)\frac{\left(g^{lk}-\dfrac{p_lp_k}{p^2}\right)}{p^2}(g^{kn}p^2-p^kp^n)=g^{mn}p^2-p^mp^n,$$

及

$$\sum_{l,k}(g^{ml}p^2-p^mp^l)\frac{p_lp_n}{p^2}=0,$$

我们得到依次加上 $z_3$ 顶点相当于依次加上以下各项:

$$\frac{1}{ip^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right)+\frac{d_l^0}{ip^2}\frac{p_mp_n}{p^2},$$

$$\sum_{k,l}\left\{\frac{1}{ip^2}\left(g^{mk}-\frac{p_mp_k}{p^2}\right)+\frac{d_l^0}{ip^2}\frac{p_mp_k}{p^2}\right\}\left\{2i\frac{y_3}{2}(g^{kl}p^2-p^kp^l)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{ip^2}\left(g^{ln}-\frac{p_lp_n}{p^2}\right)+\frac{d_l^0}{ip^2}\frac{p_lp_n}{p^2}\right\}=\frac{y_3}{ip^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right),$$

$$\frac{y_3^2}{ip^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

顶点 $z_3$ 的因子有乘子 2，这是由于 (31.10) 式中 $z_3$ 项中算符 $A$ 可能有两个不同的收缩次序. 对 $z_3$ 顶点的一切可能个数求和:

$$(1+y_3+y_3^2+y_3^3+\cdots)=\frac{1}{1-y_3}=\frac{1}{z_3},$$

得到表式

$$\frac{1}{z_3}\frac{1}{ip^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right)+\frac{d_l^0}{ip^2}\frac{p_mp_n}{p^2}.$$

因此 $(z_3-1)$ 项只使光子的 Green 函数的横向部分重正化，而纵向部分没有任何改变. 通常考察散射矩阵时，利用散射矩阵的上述梯度不变性事实，而略去纵向项 [Dyson (1949b), Matthews 与 Salam (1954)]，因此，在 $S$ 矩阵理论中，光子函数的“非完全重正化”，事实上并不重要.

当过渡到相互作用场 Green 函数一般理论时，情况有了改变，该函数相应于单由内部线组成的图形的总和. 在这一情况下，基本工具的表述，并不需要对矩阵元及 Lorentz 条件作任何考虑. 这里纵向项已经不能略去. 但是，可以避免所引起的困难，如果选择纯粹横向式

$$D_{mn}^{c,\mathrm{tr}}(p)=-\frac{1}{p^2}\left(g^{mn}-\frac{p_mp_n}{p^2}\right) \tag{31.14}$$

作为 Green 函数的零级近似.

在这种情况下，考虑到 $(z_3-1)$ 项，将导致纯粹的乘法重正化:

$$D_{mn}^{c,\mathrm{tr}}(p)\to D_{mn}^{c,\mathrm{tr}}(p)=z_3^{-1}D_{mn}^{c,\mathrm{tr}}(p). \tag{31.15}$$

进一步研究在外部光子线中嵌入 $z_3$ 顶点的过程，我们证明，考虑到加于许可状态上的弱 Lorentz 条件，$A$ 的二次项含有下列变换：

$$A_m(p) \to z_3^{-1} A_m(p). \tag{31.16}$$

（并且清楚，$(z_1 - 1)$ 项使得电荷值改变

$$e \to e' = z_1 e.) \tag{31.17}$$

将讨论的结果进行总结，根据 (31.11)、(31.12)、(31.15)—(31.17) 等式得到结论，从 $S$ 矩阵的结构看来，相互作用拉格朗日函数密度中引进有限项 $(z_1 - 1)$，$(z_2 - 1)$ 及 $(z_3 - 1)$，等于将传播因子、场算符及电子电荷作如下变换：

$$S^c(p) \to z_2^{-1} S^c(p), \qquad D^{c,\,\mathrm{tr}}(p) \to z_3^{-1} D^{c,\,\mathrm{tr}}(p), \qquad e \to z_1 e, \tag{31.18}$$

$$\bar{\psi}(p) \to z_2^{-1} \bar{\psi}(p), \qquad \psi(p) \to z_2^{-1} \psi(p), \qquad A(p) \to z_3^{-1} A(p). \tag{31.19}$$

公式(31.18)可以推广到 $d_l^0 \neq 0$ 的情况，实际上，以下过渡

$$D^c_{mn}(p) = -\frac{1}{p^2}\left(g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2}\right) - \frac{d_l^0}{p^2}\frac{p_m p_n}{p^2} \to -\frac{1}{z_3}\frac{1}{p^2}\left(g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2}\right) - \frac{d_l^0}{p^2}\frac{p_m p_n}{p^2}$$

可以写成下列形式：

$$D^c_{mn}(p \mid d_l^0) \to D'^c_{mn}(p \mid d_l'^0) = z_3^{-1} D^c_{mn}(p \mid d_l'^0),$$

其中 $d_l'^0 = z_3 d_l^0$，因此代替 (31.18) 式，我们得到

$$S^c \to z_2^{-1} S^c, \quad D^c \to z_3^{-1} D^c, \quad e \to z_1 e, \quad d_l^0 \to z_3 d_l^0. \tag{31.20}$$

此处应注意，与其余一切二次项相反，表式 $\delta m \bar{\psi}\psi$ 的作用不能导致任何重正化，或者导致因果函数及势的变化，因此必须保留在相互作用拉格朗日函数密度中. 事实上，不难证实，在 Fermi 子内部线中将 $\delta m$ 类型的顶点加进去，导致 Fermi 子的新质量：

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \to \frac{1}{\hat{p} - m'}, \qquad m' = m + \delta m. \tag{31.21}$$

在 Fermi 子外部线中，加进顶点 $\delta m$ 将导致表式

$$\psi(p) \to \frac{\hat{p} - m}{\hat{p} - m'}\psi(p),$$

在计算矩阵元时上式为零. 这样，从 $S$ 矩阵看来，引进 $\delta m \bar{\psi}\psi$ 项，不能用 Fermi 子的质量改变来彻底描写.

## 31.3. 总 Green 函数 $G$、$D$ 和顶角部分 $\Gamma$

还可以证明，对于 Feynman 图形的内部线，变换 (31.19)、(31.20) 一起与 (31.10) 式的各项等价，它们可以完全化为电子质量 $m$ 及电荷 $e$ 的变化. 为此，较详细地讨论考虑到辐射修正后图形内部元素所相应的因子结构.

我们从 Fermi 子的内部线开始，该线的辐射修正决定于自能类型的图形. 我们用有两个 Fermi 子进入的图来表示一切可能的这类强连通的各阶图形(图 38)，相应的因子用 $\frac{1}{i}\Sigma^*$ 表示[1].

---

1) 通过这种方式所引进的 $\Sigma$ 是 § 24 所讨论的 $e^2$ 阶 Fermi 子自能算符的推广.

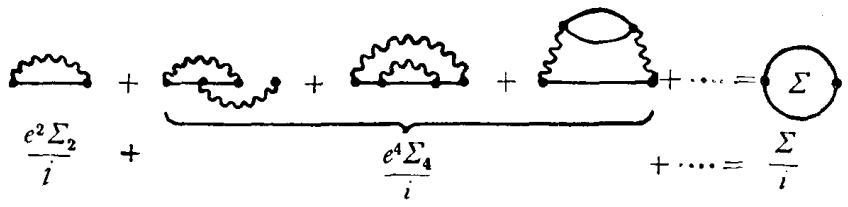


图 38　电子的总自然算符 $\Sigma$

显然，$\Sigma$ 是动量 $p_1$ 和 $p_2$ 的函数，而 $p_1$ 和 $p_2$ 分别是输入及输出动量．但是，由于 $p_1 + p_2 = 0$，故

$$\Sigma(p_1, p_2) = \Sigma(p),$$

此处，根据(24.4)式，

$$-p_1 = p_2 = p.$$

Fermi 子的总传播因子 $G$ 含有一切可能的自能类型的辐射嵌入，该因子相应于图 39 图形的总合，并且可以表示为形式：

$$\frac{1}{i(m-\hat{p})} + \frac{1}{i(m-\hat{p})}\frac{\Sigma}{i}\frac{1}{i(m-\hat{p})} + \frac{1}{i(m-\hat{p})}\frac{\Sigma}{i}\frac{1}{i(m-\hat{p})}\frac{\Sigma}{i}\frac{1}{i(m-\hat{p})} + \cdots =$$

$$= \frac{i}{\hat{p}-m}\left(1 + \Sigma\frac{1}{\hat{p}-m} + \Sigma\frac{1}{\hat{p}-m}\Sigma\frac{1}{\hat{p}-m} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{i}{\hat{p}-m}\left(1 - \frac{\Sigma}{\hat{p}-m}\right)^{-1} = \frac{i}{\hat{p}-m-\Sigma(p)},$$

即

$$G(p) = \frac{1}{m + \Sigma(p) - \hat{p}}. \tag{31.22}$$

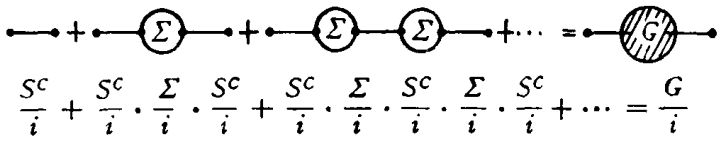


图 39　与电子总 Green 函数对应的图形集合

用同样的方式，可以构成光子总 Green 函数及广义顶点部分．因此对光子自能部分 $\pi(k)$ 的贡献求和

$$\Pi^{mn}(k) = \pi(k)\left(g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2}\right), \tag{31.23}$$

我们得到光子的总传播因子．

$$D_{mn}(k) = \frac{1}{\pi(k) - k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) - \frac{d_l^0}{k^2}\frac{k_m k_n}{k^2}. \tag{31.24}$$

公式 (31.24) 的主要特点是由于算符 $\Pi$ 的横向性，纵向项的辐射修正等于零．与此相关，我们记住，$\Pi$ 的横向形式取决于对于散射矩阵的梯度不变性要求 [参阅 (24.39) 和 (30.35)]．也可以证明，$\pi(k)$ 本身是梯度不变量，而且与 $d_l^0$ 无关．

最后考察以下类型的顶点图形，有一个 Fermi 子进入，一个 Fermi 子引出和一个光

子外部线的连通图形. 可以讨论它们的总和 $\Gamma$, 有时将总和表成以下形式较方便:

$$\Gamma^n(p, q, k) = \gamma^n + \Lambda^n(p, q, k), \tag{31.25}$$

显然,此处 $\gamma^n$ 是基本项,而 $\Lambda^n$ 是一切可能的辐射修正的总和.

现在我们注意, 虽然在消除无穷大过程前, 关系式 (31.22)、(31.24) 和 (31.25) 形式上也可以存在, 但使我们感到兴趣的主要是不含发散的诸量间的这种联系. 因此可以认为上述关系式是在无穷大已经消除后而写出的.

这时,在有限量 $G$、$D$ 和 $\Gamma$ 中存在非唯一性, 它是和在相互作用拉格朗日函数密度中引入有限项(31.10)的可能性相关的. 因此我们来建立对拉格朗日函数密度附加 (31.10) 式时 $G$、$D$ 和 $\Gamma$ 的变换形式. 首先, 考察变换 $\Sigma$ 和 $\Pi$. 上面已经证明, 当引入以上各项时,函数 $S^c$, $D^{c,\mathrm{tr}}$ 及电荷 $e$ 按照公式(31.18)变换. 现在, 我们注意到,因为在每一顶点有两条 Fermi 子线和一条光子线相交, 那么可以认为变换(31.18)相当于使 $S^c$ 及 $D^{c,\mathrm{tr}}$ 保持不变,而使对 $\Sigma$ 和 $\Pi$ 而言为内部的顶点上的电荷 $e$ 依下式变化:

$$e \to e' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-\frac{1}{2}} e \tag{31.26}$$

(图 40a). 至于 $\Sigma$ 和 $\Pi$ 的两个"外部"顶点(即将 $\Sigma$、$\Pi$ 与图形的其他部分相连接的顶点), 则 (31.26) 式不足以使之完全重正化, 相应的各 $z$ 尚差一平方根 (参阅图 40b). 因此, $\Sigma$ 和 $\Pi$ 的变换定律可以表示为形式

$$\Sigma(p, e) \to z_2 \Sigma(p, e'), \tag{31.27}$$

$$\Pi(k, e) \to z_3 \Pi(k, e'), \tag{31.28}$$

此时, $e'$ 由(31.26)式给定

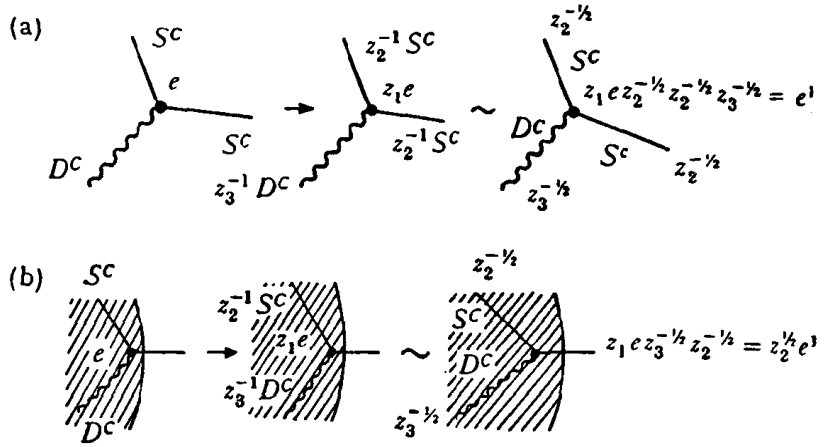



图 40 (a) 相对于 $\Sigma$ 及 $\Pi$ 而言为内部的顶点的变换
(b) $\Sigma$ 中外部顶点的变换

回到总 Green 函数 $G$ 和 $D$ 的变换,我们注意,在 (31.22) 和 (31.24) 的求和过程中,只须要作替代

$$\Sigma(p, e) \to z_2 \Sigma(p, e'), \qquad \Pi(k, e) \to z_3 \Pi(k, e'),$$

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \to \frac{1}{z_2} \frac{1}{\hat{p} - m}, \qquad \frac{1}{k^2} \to \frac{1}{z_3} \frac{1}{k^2},$$

这就给出:

$$G(p, e) \to z_2^{-1} G(p, e'), \tag{31.29}$$

$$D^{\mathrm{tr}}(k, e) \to z_3^{-1} D^{\mathrm{tr}}(k, e'). \tag{31.30}$$

最后在所有 Fermi 子内部线中考虑到 $\delta m$ 项，得到质量重正化：

$$m \to m' = m + \delta m. \tag{31.31}$$

同样，不难证明，在顶点类型图形中考虑(31.10)项给出

$$e\Gamma^n(p, k, q|e, m) \to z_2 z_3^{1/2} e' \Gamma^n(p, k, q|e', m') = z_1 e \Gamma^n(p, q, k|e', m'). \tag{31.32}$$

求和后，我们得出结论：引入(31.10)项等于使 $G$, $D$, $\Gamma$, $e$ 及 $m$ 作以下变换：

$$\left.\begin{aligned} &G(p, e, m) \to z_2^{-1} G(p, e', m'), \qquad D^{\mathrm{tr}}(k, e) \to z_3^{-1} D^{\mathrm{tr}}(k, e', m'), \\ &\Gamma(p, q, k|e, m) \to z_1 \Gamma(p, q, k|e', m'), \end{aligned}\right\} \tag{31.33}$$

而

$$e' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-1/2} e, \quad m' = m + \delta m.$$

再注意到，利用因子 $G$、$D$ 和 $\Gamma$ 来作任意高阶的任何过程的计算时，可以在所谓 Feynman “骨架”图基础上进行. 从所有连通图形的总和中消去图 33 所示元素，即得到骨架图的总和. 因此骨架图并不含有自能部分及顶角部分. 但是，在计算相应的系数函数时，我们应该利用的不是通常的传播因子 $S^c$ 及 $D^c$，而是总传播因子 $G$ 及 $D$，而且骨架图的顶点不是与 $\gamma^n$ 对应，而是与 $\Gamma^n$ 对应. 我们强调，在这一计算方案中，运用已重正化的函数 $G$, $D$ 及 $\Gamma$ 时已经不需要再施行减法程序，因为正如上面所阐明了的，只需对型如图 33 中的各元素运用减法手续.

由此也可以得出结论：(31.10) 的各项对 $S$ 矩阵的更复杂的不可约化图的系数函数的影响，完全由 $G$、$D^{\mathrm{tr}}$、$\Gamma$ 诸量的重正化来描述，此处 $G$、$D^{\mathrm{tr}}$、$\Gamma$ 诸量是指相应的骨架图的元素，此外并不产生任何别的效应.

我们也很清楚，骨架图的因子 $G$、$D$ 和 $\Gamma$ 中的相应乘子 $z_2^{-1}$, $z_3^{-1}$ 和 $z_1$，归根结底相当于使得骨架图内部顶点上的电荷重正化 (31.26).

这样，从任意复杂的任意阶图形的内部来看，引入 $(z_1 - 1)$、$(z_2 - 1)$、$(z_3 - 1)$诸项等于将 $G$、$D$ 和 $\Gamma$ 诸量重正化：

$$\Gamma \to z_1 \Gamma, \qquad G \to z_2^{-1} G, \qquad D^{tr} \to z_3^{-1} D^{\mathrm{tr}}, \tag{31.34}$$

这些又等效于电荷的重正化(31.26)，或者计及 Ward 恒等式

$$e \to e' = z_3^{-\frac{1}{2}} e. \tag{31.35}$$

上述 $\delta m$ 项的影响与此式一起表明，(31.10) 式中四项的作用使质量 $m$ 及电荷 $e$ 重正化，此重正化用公式(31.31)和(31.35)来描述.

因此，如果在引进 (31.10) 式各项的同时，原来方程中质量 $m$ 及电荷 $e$ 用以下两量来代替：

$$\left.\begin{aligned} m'' &= m - \delta m, \\ e'' &= z_3^{1/2} e, \end{aligned}\right\} \tag{31.36}$$

则由于变换(31.31)及(31.35)，结果我们得到质量 $m$ 和电荷 $e$ 的原始值. 相反，不必引进 (31.10) 各项，只要一开始过渡到新的质量 $m'$ 和电荷 $e'$，也就足够了.

这样，同时实行重正化 (31.33) 及 (31.36) 的结果所得出的理论等效于原始理论. 显

然，这些变换具有羣的性质，我们得到使可观察值 $m$ 和 $e$ 保持不变的变换羣. 我们将此羣称为重正化羣. 在第八章中，将更详细地讨论重正化羣.

可以将方程(31.33)和(31.35)直接推广到 $d_l^0 \neq 0$ 的情况：

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1 \to z_1\Gamma, \qquad G \to z_2^{-1}G, \quad D \to z_3^{-1}D, \\ &m \to m + \delta m, \quad e \to z_3^{-\frac{1}{2}}e, \quad d_l^0 \to z_3 d_l^0. \end{aligned}\right\} \tag{31.37}$$

重要的是指出，为了保持重正化后质量及电荷的物理意义，任意常数必须满足某些条件. 这样，从质量的有限性和正值性要求以及从电荷的有限性和实数性要求，对于 $\delta m$ 和 $z_3$ 得出下列限制：

$$0 < m + \delta m < \infty, \quad 0 < z_3 < \infty. \tag{31.38}$$

## 31.4. 无穷大量重正化在形式上的特征

与上述相关，必须作以下说明：

1. 对无穷大抵消项 $(Z_1 - 1)$，$(Z_2 - 1)$，$(Z_3 - 1)$ 及 $\delta m$ 对于 Green 函数 $G$，$D$ 和顶部 $\Gamma$ 的影响在形式上进行类似上述的讨论，可以得到 (31.35) 形式的电荷及质量重正化公式，但具有无穷大的 $\delta m$ 和 $Z$. 因为上述无穷大抵消项消除了所有的发散，可以认为公式 (31.33) 相当于从 $\Gamma$，$G$ 及 $D^{\mathrm{tr}}$ 中将发散乘子明显地去掉.

$$\Gamma_{\mathrm{sing}} \to \Gamma_{\mathrm{reg}} = Z_1\Gamma_{\mathrm{sing}}, \; G_{\mathrm{sing}} \to G_{\mathrm{reg}} = Z_2^{-1}G_{\mathrm{sing}}, \; D^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{sing}} \to D^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{reg}} = Z_3^{-1}D^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{sing}}, \tag{31.39}$$

特别是 Dyson (1949б) 首先在量子电动力学中通过这些方式提出消除无穷大的方案.

然后，过渡到质量和电荷，代替(31.31)式及(31.35)式，得到

$$m_1 = m + \delta\bar{m}, \quad e_1 = Z_3^{-1/2}e, \tag{31.40}$$

而 $\delta\bar{m}$ 及 $Z_3$ 为含发散系数的 $e^2$ 的级数.

在(31.40)式中出现的 $m_1$ 及 $e_1$ 表示电子的原始质量和电荷. 可以认为 $m_1$ 和 $e_1$ 是互不作用的"裸"电子的特征，并可称为原始电荷和原始质量，同时，$m$ 和 $e$ 对应于有限的公式，并且等于实际电子的质量和电荷的可观察值. 公式(31.40)建立了质量和电荷的原始值和可观察值之间的关系.

但是很清楚，由于 $Z_3$ 和 $\delta\bar{m}$ 的奇异性，关系式 (31.40) 只具有形式上的性质，如果将这些值与某些直观的对象直接等同起来，例如认为可观察电荷是由于眞空极化过程所产生的虚电荷使"裸"电荷屏蔽的结果，这种作法可以导致种种佯谬.

我们来讨论如下情况：为了辅助正常化，在虚光子和虚电子的大动量区域中利用截断法，如所周知，这相当于放弃相互作用的定域性. 例如，取非定域性相互作用拉格朗日函数密度形式为 [Боголюбов, Ширков (1955г)]

$$\mathscr{L}(x) = e\int : \bar{\psi}(x)\hat{A}(z)\psi(x) : K(x - z)\, dz, \tag{31.41}$$

其中 $K(x - z)$ 是"弥散的 $\delta$ 函数"，它可以用动量空间中的某一有效截断参量来标志，为简单起见，可以认为

$$K(x - z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\left[\frac{M_\Phi^2}{M_\Phi^2 - k^2}\right]^{1/2} e^{ik(x-z)}\, dk.$$

不难证明，这种形式的 $K$ 函数相当于将光子收缩用一个辅助质量 $M_\Phi$ 加以正常化：

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M_\Phi^2} = \frac{1}{k^2}\frac{M_\Phi^2}{M_\Phi^2 - k^2},$$

除此以外，还有

$$\lim_{M_\Phi\to\infty} K(x-z)=\delta(x-z).$$

用通常的方式将散射矩阵写成时序指数形式(18.43),我们所获得的理论中的发散只与二阶光子自能有关,因为相应的图形(图 3)是不含内光子线的唯一图形,因此当引入截断乘子 $M_\Phi^2/M_\Phi^2-k^2$ 时,它并不要修改. 当从 $\delta(x-z)$ 过渡到 $K(x-z)$ 时,其他一切发散由于它们的对数性全将消失.

这一理论的唯一发散可以通过重新定义 $T$ 乘积:

$$T(:\bar\psi(x)\gamma^n\psi(x):\,:\bar\psi(y)\gamma^m\psi(y):)$$

来予以消除,这等于在原始拉格朗日函数密度中添加一个抵消项 $(Z_3-1)$. 按照惯例,在决定 $Z_3$ 的具体形式时,我们利用一个辅助质量使电子收缩作过渡性正常化

$$\frac{\hat p+m}{m^2-p^2}\to(m+\hat p)\left(\frac{1}{m^2-p^2}-\frac{1}{M_e^2-p^2}\right).$$

然后,重复§24 中讨论,不作任何改变,我们得到

$$Z_3=1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{M_e^2}{m^2}-e^2G, \tag{31.42}$$

其中 $G$ 是有限常数,可以从 $e$ 与电荷可观察值相等这一条件来决定,而且当 $M_e$ 很大时,它与 $M_e$ 无关. 消除对 $M_e$ 的辅助正常化 $(M_e\to\infty)$,并且过渡到局部极限 $(M_\Phi\to\infty)$,求得 $Z_3\to-\infty$. 将此结果代入电荷重正化公式(31.40),对 $e_1$ 求得无意义之值:

$$e_1\to\frac{i}{\infty}. \tag{31.43}$$

于是我们得到荒谬的结果,原始电荷 $e_1$ 之值为纯虚的,而且小至可以略去不计,这与原始拉格朗日函数的厄米性条件正好矛盾.

有时甚至将(31.42)、(31.43)类型的公式作为现代定域性理论含有内在矛盾的明证. 例如,Померанчук 根据他利用所谓"双极限截断法"(它在实质上与上述讨论等同)而得到的(31.42)、(31.43)类型公式,达到了量子电动力学在物理上不封闭的结论[1].

但是这种结论丝毫没有说服力. 公式(31.42)、(31.43)只表明讨论(31.39)和(31.40)类型的没有意义的发散式是不合法的. 显然,在目前,理论中是否存在某种矛盾是个没有解决的问题,为了研究这一问题,需要进行更深刻的考虑(关于这方面,参阅§43.2).

2. 与类似(31.34)、(31.35)的重正化关系式相关,我们再注意量子場论的一个方向. 在这一方向的论文中[2],作者们企图超出微扰理论的局限,运用所谓"已重正化"的場算符,写出包含无意义的发散常数 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ 和 $\delta m$ 的相互作用拉格朗日函数密度,建立已重正化算符的 Heisenberg 方程,对后者形式上加以运算,并且用这种方法得到一系列关系式. 但是显然,这种讨论方式完全没有根据,为了使此法有意义(即使只是数学上的),必须事先引入某一辅助性正常化. 而且不言自明,建立这种辅助性正常化相当复杂,因为引进这一正常化相当于拋弃定域性,然而彻底的非定域性理论目前并不存在.

## 31.5. 外綫的辐射修正和有限常数的选择

现在将減法手续具体化,而且将被減多项式中的任意性消除. 平常定义減法运算时(§28),我们规定,从发散式中(目前为 $\Sigma$、$\Pi$ 及 $\Lambda$)減去其 Maclaurin 级数的前几项. 但是为了实际上的目的,将 $\hat p=m$ 点作为 Fermi 子自能部分的展开中心较为便利. 因此,我们定义正规函数 $\Sigma_{reg}$ 如下:

1) 并请参阅 Ландау, Померанчук (1955).
2) Källen (1952), Lehmann (1954) 及其它.

$$\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})=\Sigma(\hat{p})-\Sigma(\hat{p})\Big|_{\hat{p}=m}-\frac{\partial\Sigma(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m}(\hat{p}-m). \tag{31.44}$$

此处，我们利用这一事实，$\Sigma$只通过 $\hat{p}$ 及 $p^2=(\hat{p})^2$ 才与 $p$ 有关. 在这样的减法中，

$$\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})\,|_{\hat{p}=m}=0, \tag{31.45}$$

及

$$\frac{\partial\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m}=0. \tag{31.46}$$

由此，还可以得出结论，即

$$\frac{1}{\hat{p}-m}\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})\,|_{\hat{p}=m}=\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})\,\frac{1}{\hat{p}-m}\Big|_{\hat{p}=m}=0. \tag{31.47}$$

从(31.45)式得出结论，$m$ 等于电子的可观察质量. 从总 Green 函数的极点

$$G(p)=\frac{1}{m-\hat{p}+\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})},$$

与函数

$$S^c(p)=\frac{1}{m-\hat{p}}$$

的极点重合，可以直接作出上述结论.

条件(31.46)将使 Fermi 子外部线的辐射修正为零.

还必须注意到，当选择 $\hat{p}=m$ 点 ($p^2=m^2$) 作为函数 $\Sigma$ 的展开中心时，正如在第四章(§§ 26.2, 27.1) 中已经证明了的，当 $\varepsilon\to 0$ 时，正常化后的表式的解析区域被条件(27.1)所限定，在我们的情况下，它具有形式：

$$p^0<\min m_i.$$

因为在所讨论的情况下，最小质量等于零(光子质量)，则函数 $\Sigma(p)$ 在 $p^2=m^2$ 点上不可能具有解析性，实际上，在此点的导数 $\frac{\partial\Sigma}{\partial\hat{p}}$ 是发散的. 但是，这一发散表示众所熟知的"红外灾难"(参阅 § 32)，为了消除这一发散，只要在讨论中间引入辅助量——设想的无穷小光子质量 $\lambda_0$，已经足够. 因此，今后只要有必要，我们总假定光子具有微小质量 $\lambda_0$.

再考虑顶角 $\Gamma^n(p,q,k)$ 的减法程序. 在 § 30 中已经证明，从梯度不变性要求可以得出结论，$\Lambda$ 的减法程序完全决定于 $\Sigma$ 的减法. 从(31.44)式直接得到

$$\left.\begin{aligned}\Lambda^n_{\mathrm{reg}}(p,q,k)&=\Lambda^n(p,q,k)-\Lambda^n_1,\\ \Gamma^n_{\mathrm{reg}}(p,q,k)&=\gamma^n+\Lambda^n(p,q,k)-\Lambda^n_1,\end{aligned}\right\} \tag{31.48}$$

而根据(30.32)式

$$\Lambda^n_{\mathrm{reg}}(-p,p,0)=-g^{nn}\frac{\partial\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})}{\partial p^n}, \tag{31.49}$$

因此

$$\Lambda^n_1=-\frac{\partial\Sigma_{\mathrm{reg}}(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m}\gamma^n.$$

我们还要定义光子自能部分的减法运算. 按惯例，取 $k=0$ 点为展开中心，有

$$\Pi^{mn}_{reg}(k) = \Pi^{mn}(k) - \Pi^{mn}(0) - $$

$$- \sum_l \frac{\partial \Pi^{mn}(k)}{\partial k^l}\Big|_{k=0} k^l - \frac{1}{2}\sum_{l,s} \frac{\partial^2 \Pi^{mn}(k)}{\partial k^l \partial k^s}\Big|_{k=0} k^l k^s. \tag{31.50}$$

此式满足条件

$$\Pi^{mn}_{reg}(0) = 0, \tag{31.51}$$

及

$$\frac{1}{k^2}\Pi^{mn}_{reg}(k)|_{k=0} = 0. \tag{31.52}$$

由于性质(31.51), $\Pi_{reg}$ 并不改变光子函数的极点,而且根据 (31.52) 式, 它还使得光子外部线没有辐射修正.

不仅如此,还可以证明, 表式 (31.50) 保证了相互作用拉格朗日函数密度中常数 $e$ 等于电子的可观察电荷值. 实际上,我们在方程 (31.50) 的右端加上破坏条件 (31.52) 的表式

$$c(g^{mn}k^2 - k^m k^n). \tag{31.53}$$

此式相当于在拉格朗日函数密度中引进有限项 ($z_3 - 1 = c$), 结果使电荷与 $(1+c)^{-\frac{1}{2}}$ 相乘. 因此我们根据 $e$ 应等于 Fermi 子电荷可观察值这一条件, 就可以确定任意的有限常数 $c$. 兹假定零能量光子对 Fermi 子的散射行为决定此值, 为了描述这一过程, 得出表式

$$e\bar{\psi}(p)\Gamma^n_{reg}(p, -p, 0)\psi(-p). \tag{31.54}$$

当计算(31.54)式时,在 $\Gamma^n_{reg}$ 中的差式

$$\Lambda^n_1 - \Lambda^n(p, -p, 0) = g^{nn}\frac{\partial \Sigma_{reg}(\hat{p})}{\partial p^n} - \gamma^n \frac{\partial \Sigma_{reg}(\hat{p})}{\partial \hat{p}}\Big|_{\hat{p}=m} \tag{31.55}$$

的贡献等于零. 为了证实这一点,注意 $\Sigma(p)$ 可以表示为形式

$$\Sigma(\hat{p}) = (\hat{p} - m)f(p^2) + m\varphi(p^2).$$

计算(31.55)式,得到

$$\Lambda^n_1 - \Lambda^n(p, -p, 0) = (\hat{p} - m)2p^n \frac{\partial f}{\partial p^2} + 2p^n m \frac{\partial \varphi}{\partial p^2} + \gamma^n[f(p^2) - f(m^2)] -$$

$$- 2\hat{p}\gamma^n m \frac{\partial \varphi}{\partial p^2}.$$

定义矩阵元

$$\bar{\psi}(p)[\Lambda^n(p, -p, 0) - \Lambda^n_1]\psi(-p),$$

并计及场方程

$$\bar{\psi}(p)(\hat{p} - m) = 0, \qquad (\hat{p} - m)\psi(-p) = 0,$$

再利用变换

$$2(p^n - m\gamma^n) = (\hat{p} - m)\gamma^n + \gamma^n(\hat{p} - m),$$

我们可以证明上述贡献等于零.

考虑到重正化,最后得到

$$e\bar{\psi}\Gamma^n_{reg}\psi = \frac{e}{\sqrt{1+c}}\bar{\psi}\gamma^n\psi,$$

由此得出结论，$e$ 等于电荷实验值的条件为

$$c = 0.$$

因此公式(31.50)实际上既保证外部光子线没有辐射修正，又保证 $e$ 等于电子的可观察电荷值.

## §32. 旋量电动力学

### III. 二阶辐射修正

现在我们应用所得的结果来计算旋量电动力学效应的低阶辐射修正. 为了这一目的，首先求得光子传播因子 $D$，电子传播因子 $G$ 以及顶角函数 $\Gamma$ 的修正表式.

#### 32.1. 光子函数的修正

零阶近似的光子 Green 函数 $D$ 相当于相互作用并不存在，当任意 $d_l^0$ 时，其形式为

$$D^c_{mn}(k) = -\frac{1}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) - \frac{d_l^0}{k^2}\frac{k_m k_n}{k^2}. \tag{32.1}$$

为了计算(32.1)式的辐射修正，应该添加相当于光子线的项，而且其中嵌入光子的二阶自能（图 41），这一项的形式是

$$\sum_{k,l} D^c_{mk}(k)\Pi^{kl}(k)D^c_{ln}(k). \tag{32.2}$$



图 41 $D_{mn}$ 内主要项及一阶辐射修正项的图形

对于极化算符 $\Pi$，利用其梯度不变式(24.40)，并从它的二阶偏导数在 $k = 0$ 点等于零的条件决定其中的常数，我们得到

$$\Pi^{kl}(k) = \frac{e^2}{4\pi^2}(g^{kl}k^2 - k^k k^l)I(k^2), \tag{32.3}$$

其中

$$I(k^2) = 2\int_0^1 dx(1-x)x \ln\left|\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2}\right|. \tag{32.4}$$

将(32.3)式代入(32.2)式中，并与(32.1)式相加，得到

$$D_{mn}(k) = -\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) - \frac{d_l^0}{k^2}\cdot\frac{k_m k_n}{k^2}, \tag{32.5}$$

其中

$$d(k^2) = 1 + \frac{e^2}{4\pi^2}I(k^2). \tag{32.6}$$

正如我们所预料的，从 (32.4)—(32.6) 式得出结论，一方面纵向函数 $d_l^0$ 对横向函数 $d(k^2)$ 的辐射修正没有影响，另一方面，辐射修正在 $d_l$ 中没有贡献. 因此，我们限于考察光子 Green 函数的纯横向部分，将它写成下列形式：

$$D^{\mathrm{tr}}_{mn}(k) = -\frac{1}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) d(k^2). \tag{32.7}$$

通过变量替代 $z = 1 - 2x$，并分部积分，在 $d(k^2)$ 定义中的积分 $I$ 可以化成以下形式[1]：

$$I(k^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 dz(1-z^2)\ln\left|1 - \frac{1-z^2}{4}\frac{k^2}{m^2}\right| = -k^2\int_0^1 \frac{z^2\left(1-\frac{z^2}{3}\right)dz}{4m^2 - k^2(1-z^2)}. \tag{32.8}$$

当 $k^2 > 4m$ 时，积分 (32.8) 的分母有零点，初看来，这将导致不可积的奇异性. 但是我们记住，在这种情况下，必须认为电子的质量有无穷小的虚数附加项 $m^2 \to m^2 - i\varepsilon$，以致上述奇点是可积的.

在(32.8)式中再作一次变量替代：$4m^2/(1-z^2) = M^2$，计及上述虚附加量，得到

$$I(k^2) = -\frac{k^2}{3}\int_{4m^2}^{\infty} \frac{dM^2(1+2m^2/M^2)\sqrt{1-4m^2/M^2}}{M^2(M^2 - k^2 - i\varepsilon)}. \tag{32.9}$$

将(32.9)式代入(32.6)和(32.7)式中，得到光子 Green 函数的熟悉参数表示[2]：

$$D^{\mathrm{tr}}_{mn}(k) = -\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right)\left\{\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} - \frac{e^2}{12\pi^2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{(1+2m^2/M^2)\sqrt{1-4m^2/M^2}}{M^2 - k^2 - i\varepsilon}\right\}. \tag{32.10}$$

可以将积分(32.9)写成明显形式. 为了这一目的，将它表示成形式

$$I(k^2) = -\frac{5}{9} - \frac{4m^2}{3k^2} - \left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right)\frac{2}{3}\left(1 + 2\frac{m^2}{k^2}\right)J(k^2), \tag{32.11}$$

此处引入量

$$J(k^2) = \frac{k^2}{2}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\frac{(1-4m^2/M^2)^{-\frac{1}{2}}}{M^2 - k^2 - i\varepsilon},$$

当 $k^2 < 4m^2$ 时，上式在积分号下没有奇点：

$$J(k^2) = \begin{cases} \left(\dfrac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{当 } 0 < k^2 < 4m^2, \\ \left(1 - \dfrac{4m^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,th}\left(1 - \dfrac{4m^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{当 } k^2 < 0. \end{cases} \tag{32.12}$$

当 $k^2 > 4m^2$ 时，被积式有极点，围绕极点的法则决定于附加量 $-i\varepsilon$. 为了直接计算，应用下式：

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \mathscr{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x),$$

($\mathscr{P}$ 是主值的记号) 是方便的，这就得到

$$J(k^2) = \frac{i\pi}{2\sqrt{1-4m^2/k^2}} + \frac{1}{2}(1-4m^2/k^2)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-4m^2/k^2}}{1+\sqrt{1-4m^2/k^2}}. \tag{32.13}$$

1) 与 Karplus 和 Kroll 的结果一致.

2) 比较 Källen (1952) 以及 Gell-Mann 与 Low (1954).

结合(32.12)式和(32.13)式,并代入(32.11)式中[1], 得到[2]

$$I(k^2) = -\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3}\frac{m^2}{k^2}\right) - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}\,\mathrm{arc\,th}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 4m^2/k^2}} -$$

$$- \theta(k^2 - 4m^2)\,\frac{i\pi}{3}\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}. \qquad (32.14)$$

当小 $k^2$ 时,从上式得到

$$I(k^2) = -\frac{1}{15}\frac{k^2}{m^2} + O\left(\frac{k^2}{m^2}\right)^2 \qquad (k^2 \ll m^2).$$

将这一结果与(32.6)式比较, 得到重要的性质[3]: 当 $k^2 \to 0$ 时函数 $d(k^2)$ 的辐射修正

$$d(k^2) = 1 - \frac{e^2}{60\pi^2}\frac{k^2}{m^2} + \cdots \qquad (k^2 \ll m^2)$$

为零.

在大 $|k^2|$ 的区域中,相应地得到

$$I(k^2) = \frac{1}{3}\ln\frac{|k^2|}{m^2} + O\left(\frac{m^2}{k^2}\right) \qquad (|k^2| \gg m^2).$$

这就给出

$$d(k^2) = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{|k^2|}{m^2} + \cdots. \qquad (32.15)$$

## 32.2. 电子 Green 函数的修正

电子 Green 函数的二阶修正具有形式:

$$\frac{i}{\hat{p} - m}\,\frac{\Sigma^{(2)}(p)}{i}\,\frac{i}{\hat{p} - m}.$$

为了决定 $\Sigma^{(2)}(p)$, 必须从任意 $d_l^0$ 的光子因果函数出发. $\Sigma^{(2)}(p)$ 表式中的任意常数由下列条件决定:

$$\Sigma^{(2)}(m) = 0, \qquad \left.\frac{\partial\Sigma^{(2)}(\hat{p})}{\partial\hat{p}}\right|_{\hat{p}=m} = 0. \qquad (32.16)$$

这时发现,导数 $\partial\Sigma^{(2)}(\hat{p})/\partial\hat{p}$ 含有形式为 $\ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)$ 的项, 当 $\hat{p} \to m$ 时, 它是发散的. 这一发散就是红外灾难, 出现此发散的原因是由于在小动量的光子起作用的过程中, 按照发射的光子数来展开是不合理的. Bloch 和 Nordsieck 曾研究了红外发散的性质(1937). 关于上述困难更详细的分析, 读者可参看本节第四段 (并请参阅第八章 §§ 43.3 和 44.3). 这里我们只指明, 总跃迁几率按 $e^2$ 的各阶展开均没有红外发散, 通常通过引进光子的假想小质量 $\lambda_0$ 来实现中间表式的实际正常化.

---

1) 考虑到关系

$$ix\ \mathrm{arc\,th}\,\frac{1}{ix} = x\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}.$$

2) 此处 $\theta$ 是(3.18)式中所引入的熟知间断函数.

3) 这一性质是极化算符的二级导数在 $k = 0$ 点为零的推论 [参阅 (31.52)].

修改 § 24 中的相应计算，代替(24.30)式，得到

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\frac{p^2-m^2}{m^2}\left(d_l^0\frac{p^2+m^2}{p^2}\hat{p}-(d_l^0+3)m\right)A(p^2)+\right.$$
$$\left.+d_l^0\hat{p}\frac{p^2-m^2}{p^2}+c_1(\hat{p}-m)+c_2m\right\},\tag{32.17}$$

其中 $\left[\text{略去虚部}-\pi i\frac{m^2}{p^2}\theta(p^2-m^2)\right]$

$$A(p^2)=\int_0^1\frac{dx(x-1)m^2}{(1-x)(m^2-xp^2)+x\lambda_0^2}=\begin{cases}\dfrac{m^2}{p^2}\ln\left|\dfrac{p^2-m^2}{m^2}\right|, & \text{当 } |p^2-m^2|\gg\lambda_0^2,\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\lambda_0^2}{m^2}, & \text{当 } p^2=m^2.\end{cases}\tag{32.18}$$

从条件(32.16)决定常数 $c_1$ 和 $c_2$，得到(32.17)式化为

$$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\frac{p^2-m^2}{m^2}\left[d_l^0\frac{p^2+m^2}{p^2}\hat{p}-(d_l^0+3)m\right]A(p^2)+d_l^0\hat{p}\frac{p^2-m^2}{p^2}-\right.$$
$$\left.-2d_l^0(\hat{p}-m)+2(3-d_l^0)A(m^2)(\hat{p}-m)\right\}=$$
$$=\frac{e^2}{16\pi^2}(\hat{p}-m)\left\{A(p^2)\left(d_l^0\frac{p^2}{m^2}-3\right)+A(m^2)(6-2d_l^0)-d_l^0+\right.$$
$$\left.+\frac{\hat{p}}{m}\left[A(p^2)\left(d_l^0\frac{m^2}{p^2}-3\right)+d_l^0\frac{m^2}{p^2}\right]\right\}.\tag{32.19}$$

将(32.19)式代入下式：

$$G(p)=\frac{1}{m-\hat{p}}\left(1+\Sigma(p)\frac{1}{\hat{p}-m}\right),$$

得到

$$G(p)=\frac{1}{m-\hat{p}}\left\{1+\frac{e^2}{16\pi^2}\left[A(p^2)\left(d_l^0\frac{p^2}{m^2}-3\right)+A(m^2)(6-2d_l^0)-d_l^0\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{\hat{p}}{m}\left[A(p^2)\left(d_l^0\frac{m^2}{p^2}-3\right)+d_l^0\frac{m^2}{p^2}\right]\right\},\tag{32.20}$$

有时将 $G(p)$ 表示成形式

$$G(p)=\frac{\hat{p}a(p^2)+mb(p^2)}{m^2-p^2}\tag{32.21}$$

较为方便，此处根据(32.20)式，

$$a(p^2)=1+\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\frac{(p^2-m^2)^2}{p^2m^2}d_l^0A(p^2)+[A(p^2)-A(m^2)](2d_l^0-6)-\right.$$
$$\left.-d_l^0+d_l^0\frac{m^2}{p^2}\right\},\tag{32.22}$$

$$b(p^2)=1+\frac{e^2}{16\pi^2}\left\{\frac{p^2-m^2}{p^2m^2}(d_l^0-3)A(p^2)+[A(p^2)-A(m^2)](2d_l^0-6)\right\}.\tag{32.23}$$

当 $p^2\gg m^2$ 时，得到

$$G(p)=-\frac{1}{\hat{p}}\left\{1+\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}\ln\frac{p^2}{m^2}\right\}.\tag{32.24}$$

## 32.3. 顶角部分的修正

现在来研究顶角部分

$$\Gamma^n(p, q, k) = \gamma^n + \Lambda^n(p, q, k).$$

按惯例，此处 $p$ 和 $q$ 分别是射出和射入电子的四维动量，而 $k = p - q$ 是进入光子的动量（图 42）. 在 § 25 中已经证明，$\Lambda_3^n$ 的最一般形式含有 $C\gamma^n$ 项，其中系数 $C$ 是任意常数. 根据 § 30，这一常数应该由散射矩阵的梯度不变性要求来决定，其形式为

$$\Lambda_3^n(p, p, 0) = -g^{nn}\frac{\partial \Sigma_2(p)}{\partial p^n}. \tag{32.25}$$

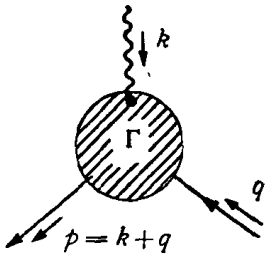


图 42 顶角部分的动量变量

将 § 25 中相应的计算推广到 $d_l^0 \neq 0$，$\lambda \neq 0$ 的情况，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma^n_{\text{reg}}(p, q, k) = \gamma^n + \frac{e^2}{16\pi^2}\Bigg\{&\gamma^n\left[(1 + d_l^0)\int_0^1 dx \ln\left|\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)k^2}\right| - \frac{3}{2} - \right.\\ &\left. - 2d_l^0 - C\right] + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\,[2A^n + A^n(1 - x - y)(d_l^0 - 1) - 4\hat{Q}Q^n - \\ &- 2R^n - (d_l^0 - 1)D^n]Z^{-1} + (d_l^0 - 1)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1 - x - y)B^n}{Z^2} - \\ &- 2\gamma^n \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln\left|\frac{(x + y)m^2}{Z}\right|\Bigg\},\end{aligned} \tag{32.26}$$

其中记号

$$\left.\begin{aligned} A^n &= \gamma^n(\hat{q} + m)\hat{p} - (\hat{p} - m)(\hat{q} + m)\gamma^n - (\hat{p} - m)\gamma^n(\hat{q} - 2m),\\ B^n &= \hat{Q}(\hat{p} + m)\gamma^n(\hat{q} + m)\hat{Q},\\ D^n &= \gamma^n(\hat{q} + m)\hat{Q} + \hat{Q}(\hat{p} + m)\gamma^n,\\ Q &= xq + yp,\\ R^n &= \hat{Q}\hat{k}\gamma^n - \gamma^n\hat{k}\hat{Q} - (\hat{p} - 2m)\gamma^n\hat{Q} - \hat{Q}\gamma^n(\hat{q} - 2m),\\ Z &= (1 - x - y)yp^2 + (1 - x - y)xq^2 + xyk^2 - m^2(x + y) - \\ &\quad - (1 - x - y)\lambda_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{32.27}$$

从条件(32.25)决定常数 $C$，得到 $C$ 的值为

$$C = 2d_l^0 + (3 - d_l^0)\ln\frac{x_0^2}{m^2} = 2[-d_l^0 + (3 - d_l^0)A(m^2)]. \tag{32.28}$$

## 32.4. Klein-仁科公式修正的计算方案

$D$、$G$ 和 $\Gamma$ 的公式 (32.5)、(32.6)、(32.20) 和 (32.26) 含有对基本表式的 $e^2$ 阶辐射修正，可以用来直接计算旋量电动力学效应的 $e^2$ 阶辐射修正. 作为示例，我们对 § 23 中所得到的 Klein-仁科公式的辐射修正的计算程序作概要的讨论. 显然，为此应该计及含有两条外部光子线和两条外部电子线的四阶图形. 这样的图形共有 8 个，其中 4 个与 Compton 效应的基本图形的差别是外部线中有自能嵌入，并且根据条件 (31.47) 和

(31.52)，对矩阵元没有贡献．还有两个图形含有两阶的顶角部分（图 43a，b），一个图形含有内部 Fermi 子线的自能嵌入（图 43c），最后一个图形相当于发射附加的虚光子（图 43d）．

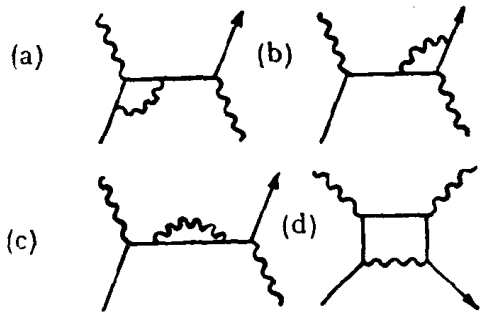



图 43　Compton 效应的矩阵元不等于零的辐射修正

图 43a、b 所对应的矩阵元的结构与二阶基本矩阵元的结构相似，除了这些图形所含的顶角部分所对应的不是矩阵 $\gamma^n$，而是由公式（32.26）所决定的表式 $\Gamma^n(p, q, k)$ 之外．

关于这方面，我们注意到，在上述矩阵元中顶角因子 $\Gamma^n(p, q, k)$ 相应于下列二组条件之一：

1) $\hat{p} = m$，$k^2 = 0$，$\sum_n e_n k^n = 0$；

2) $\hat{q} = m$，$k^2 = 0$，$\sum_n e_n k^n = 0$．

在这两种情况下，(32.26)式中所含的积分几乎可以完全算出，而顶角因子 $\Gamma^n$ 用 Dirac 矩阵、动量、对数和函数

$$w(z) = \frac{1}{z-1}\int_1^z \frac{dt}{t}(1-t)\ln(1-t) \tag{32.29}$$

的代数组合表示．

相应于图 43c 中图形的矩阵元在中间状态利用表式（32.20）作为 Fermi 子的传播函数来构成(包括由于图形中自能迴线而出现的辐射修正)．

因此除去图 43d 以外，利用上面得到的 $G$ 和 $\Gamma$ 的有限表式，可以非常简单地计算 Compton 散射一切四阶图形所对应的矩阵元．这一计算已经没有对四维动量的积分，并且实际上化为对矩阵元和的平方取矩阵迹[参阅(23.3)，(23.4)式]．

末了，求最后图形(图 43d)的相应矩阵元时，需要计算积分的形式为

$$\sum_n g^{nn}\int \frac{dq}{q^2 + i\varepsilon}\gamma^n \frac{1}{\hat{p}_2 - \hat{q} - m}\gamma^m \frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - \hat{q} - m}\gamma^l \frac{1}{\hat{p}_1 - \hat{q} - m}\gamma^n, \tag{32.30}$$

其中 $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$．

显然，积分（32.30）不含紫外发散．但是当 $\hat{p}_1 = m$，$\hat{p}_2 = m$ 时，在小 $q$ 区域内积分是对数发散的，实际上，在这种情况下，奇点的形式如下：

$$\int \frac{dq}{q^2}\frac{1}{(p_2 q)(p_1 q)},$$

按惯例，引进光子质量 $\lambda_0$ 可以消除奇点. 实际计算积分 (32.30) 是没有困难的，只要利用因果函数换为 $\alpha$ 表象 [(24.12)类型]，由于计算十分繁重，我们不拟计算(32.30)的积分和矩陣迹，对于考虑到 $e^4$ 阶辐射修正的 Klein-仁科公式的最后形式，读者如果感到兴趣，请参阅 Brown 和 Feynman 的论文(1952).

我们再说明一下在最后表式中抵消红外发散的问题. 我们在上面已经看到，与 $\ln\frac{\lambda_0^2}{m^2}$ 成正比的各项在许多 Compton 散射的四阶矩陣元中均含有. 这种项也在跃迁几率的式子中出现，因此上述八个四阶图形所对应的 Compton 散射的几率表式是沒有意义的.

这一原因在于问题的提法是物理上不正确的[1]. 已经提到过，红外災难是由于在光子的小能量区域对发射光子数作展开式是不适当的. 从实验的观点看来，上述情况相当于相互间的差别是发射或未发射某些小能量光子的两个过程在物理上是不能区分的. 实际上，发射极小能量光子这一事实，只能根据测定参加过程的其他粒子的能量间接地加以确定，但这只能以某一有限精确度来进行. 因此总有可能，所发射光子的总能量小于由测量可能误差决定的某一值 $E_{max}$.

在现有情况中，由于二阶项和四阶项的干涉而出现的对于 Klein-仁科公式的 $e^6$ 阶的前几项辐射修正和双重 Compton 效应在物理上是不能区别的，所谓双重效应，除了通常的可观察的 Compton 光子外，还发射第二个能量很小的光子，而几率也是 $e^6$ 阶. 考虑到双重 Compton 效应的几率，对第二个光子的能量从零到 $E_{max}$ 积分，所得到的表式沒有红外災难，但是其中明显地含有 $E_{max}$.

## § 33. 贋标量介子理論

### 33.1. 同位旋形式

作为消除发散一般理论的第三个应用例子，我们讨论贋标量介子理论，即贋标量场介子理论以及具有贋标量耦合的旋量核场理论. 此时我们讨论所谓对称性方案，由此得到对电荷为对称的核力(例如，导致质子-质子、中子-中子散射矩陣有相同的矩陣元). 对称贋标量理论的数学描述在同位旋形式的范围內最方便，其內容如下：

用四分量的旋量波函数 $\Psi_N$ 和 $\Psi_P$ 来描述核子，其中指标 $N$ 和 $P$ 是指核子，即中子和质子的二个电荷态. 这些函数结合成八分量的核子函数

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_P \\ \Psi_N \end{pmatrix}. \tag{33.1}$$

为了描述质子与核子态之间的跃迁过程，引进算符 $\tau_+$ 和 $\tau_-$，定义如下：

$$\left.\begin{aligned} \tau_+\Psi_N &= \Psi_P, \quad \tau_-\Psi_N = 0, \\ \tau_+\Psi_P &= 0, \quad \tau_-\Psi_P = \Psi_N. \end{aligned}\right\} \tag{33.2}$$

这些算符在(33.1)的表象中具有矩陣形式：

---

1) Brown, Feynman (1952), Ахиезер, Берестецкий (1953), Heitler (1956).

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{33.3}$$

它们有性质

$$\tau_+^2 = \tau_-^2 = 0, \qquad \tau_-\tau_+ + \tau_+\tau_- = 1. \tag{33.4}$$

进一步引进算符:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_+ + \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_2 &= -i(\tau_+ - \tau_-) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 &= \tau_+\tau_- - \tau_-\tau_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{33.5}$$

这些算符的代数性质和 Pauli 旋量矩阵 $\sigma$ 的代数性质相似，称之为同位旋矩阵，$\tau_1$, $\tau_2$ 和 $\tau_3$ 一起构成同位旋空间中的矢量.

正电荷介子 ($\pi^+$)，负电荷介子 ($\pi^-$) 以及中性介子 ($\pi^0$) 分别用复波函数 ($\varphi$、$\varphi^*$) 和实波函数 ($\varphi_0$) 来描述，我们认为这些函数是赝标量的. 此时，可将实组合

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \varphi^*}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_2 = i\frac{\varphi - \varphi^*}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_3 = 0 \tag{33.6}$$

认为是同位旋空间中三维矢量的分量.

对于"同位旋空间旋转"不变的拉格朗日函数密度具有形式:

$$\mathscr{L}(x) = g \sum_{i=1,2,3} :\bar{\Psi}(x)\gamma^5\tau_i\Psi(x)\varphi_i(x):. \tag{33.7}$$

常数 $g$ 起着耦合常数的作用，称为介子荷.

还注意到，为简单起见，有时考虑赝标量理论中所谓"中性模型"，它的拉格朗日函数密度是

$$\mathscr{L}(x) = g:\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\varphi(x):, \tag{33.8}$$

其中 $\bar{\psi}$, $\psi$ 是四分量的旋量，$\varphi$ 是单分量的实函数. 中性模型与对称模型的不同点在于没有"同位旋代数"，但却保持它的结构的基本要素. 为简单起见，我们有时将 (33.7) 式和 (33.8) 式结合成形式:

$$\mathscr{L}(x) = g:\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\varphi(x):, \tag{33.9}$$

而并不将顶点矩阵 $\Gamma$ 的结构具体化.

### 33.2. 发散图形的类型和抵消项

我们来分析发散图形，注意到基本收缩的形式为

$$\overbrace{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)} = \frac{1}{i}\frac{1}{(2\pi)^4}\int dp e^{-ipx}\frac{(M + \hat{p})_{\alpha\beta}}{M^2 - p^2 - i\varepsilon}, \tag{33.10}$$

$$\overbrace{\varphi_i(x)\varphi_j(y)} = \frac{\delta_{ij}}{i(2\pi)^4}\int \frac{dk e^{ikx}}{\mu^2 - k^2 - i\varepsilon}, \tag{33.11}$$

其中 $M_{\alpha\beta} = MI_{\alpha\beta}$, $\hat{p}_{\alpha\beta} = \sum_n g^{nn}p^n\gamma^n_{\alpha\beta}$, $I_{\alpha\beta}$ 是八阶的单位矩阵，而 $\gamma^n_{\alpha\beta}$ 是八阶矩阵，它与

通常的四阶 Dirac 矩阵有以下关系：

$$\gamma^n_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma^n & 0 \\ 0 & \gamma^n \end{pmatrix}_{\alpha\beta},$$

最后$M$和$\mu$分别是核子和介子的质量.

在此情况下，对于我们重要的是：根据(33.10)式和(33.11)式，可见介子线的因果函数分子中的多项式$P$的幂次为零，而核子线的都是 1，因此极大顶点的指标

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2}\sum_l (r_l + 2) - 4$$

等于零，而拉格朗日函数密度(33.9)式属于可重正化类型.

再来讨论发散图的分类，注意，此处情况在相当程度上与旋量电动力学相似，其差别仅为以下各点：

a) 介子的质量不为零，所以没有梯度不变性.

b) 介子函数构成同位旋三维矢量，而不是电磁场中的通常四维矢量.

c) 顶角矩阵$\Gamma$的结构与四维矢量的 Dirac 矩阵$\gamma^k$不同.

因此 § 30 和 § 31 中对旋量电动力学讨论的一部分结果，可以直接用在赝标量介子理论上.

这样，考虑到 Furry 定理，我们得到图 44 所示的四种发散图形. 此时，由于没有梯度不变性，与旋量电动力学不同，含有四条 Bose 子外部线的图形将引起发散，而为了抵消它，必须引进特殊的“四介子”的抵消项$Z{:}\varphi^4{:}$，而为了减去与介子自能图(图 44c) 相关的发散，除了引进$(Z_3-1)\varphi(p^2-\mu^2)\varphi$型的抵消项以外，还要引进一个介子固有质量的抵消项$\delta\mu\varphi^2$. 结果我们得到相互作用总拉格朗日函数密度的形式为

$$\mathscr{L}_{\text{tot}} = \mathscr{L} + \Delta\mathscr{L} = g{:}\bar{\Psi}\Gamma\Psi\varphi{:} + (Z_1-1)g{:}\bar{\Psi}\Gamma\Psi\varphi{:} + (Z_2-1){:}\bar{\Psi}(\hat{p}-M)\Psi{:} - \\ - \delta M{:}\bar{\Psi}\Psi{:} + (Z_3-1){:}\varphi(p^2-\mu^2)\varphi{:} - \delta\mu^2{:}\varphi\varphi{:} + Z{:}\varphi^4{:}. \qquad (33.12)$$

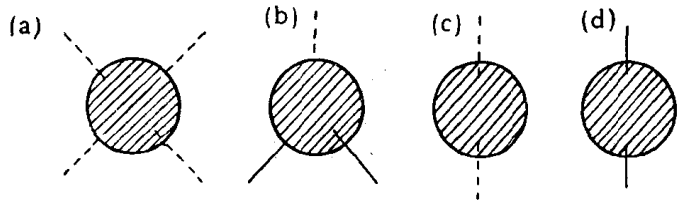



图 44 赝标量介子场论中发散图形的类型. 实线指核子，虚线指介子.
(a) $\omega(G)=0$, (b) $\omega(G)=0$, (c) $\omega(G)=2$, (d) $\omega(G)=1$.

### 33.3. 第二电荷、相乘重正化和外部线

从一般理论推出，在相互作用拉格朗日函数密度中引进抵消项 (33.12)，可以用重新定义的相应时序乘积来代替. 但是对我们重要的是，此时理论中出现任意性，它是由于在相互作用拉格朗日函数密度中可以引入六个任意常数

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \delta M,\ \delta\mu^2 \text{ 和 } z \qquad (33.13)$$

的有限项而引起的，这些项的算符结构与(33.12)相同.

分析这些项对于核子 Green 函数 $G$，介子 Green 函数 $\Delta$，顶角部分 $\Gamma$，质量与电荷的影响以后，我们得到结论，引入常数 $z_1$，$z_2$ 和 $z_3$ 相当于将 $G$，$\Delta$ 和 $\Gamma$ 重正化，因而改变电荷 $g$，而 $\delta M$ 及 $\delta\mu^2$ 改变图形内部线的介子和核子的质量.

但是 $z\varphi^4$ 项并不使 $g$，$M$ 和 $\mu^2$ 改变. 这表明在理论中除了质量 $M$、$\mu$ 及介子荷 $g$ 外，实际上还含有一个常数 $h$，此常数从一开始可以作为 $\varphi^2$ 前的系数而引入相互作用拉格朗日函数密度. 因此，$\mathscr{L}(x)$ 的形式为

$$\mathscr{L}(x) = g{:}\Psi(x)\Gamma\Psi(x)\varphi(x){:} + h{:}\varphi^2\varphi^2{:} \tag{33.14}$$

$\left(\text{在对称理论时，}\varphi^2 = \sum_i \varphi_i\varphi_i\right)$.

所引入的常数实际上起着第二电荷作用. 后者与量 $g$ 一样，应该根据实验数据决定. 将 $z$ 表示成如下形式

$$z = (z_4 - 1)h$$

是方便的. 现在含 $z$ 之项的引入使电荷 $h$ 重正化.

利用与 § 31.2 中类似的讨论，我们得到结论，对相互作用拉格朗日函数密度加上有限项

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = {} & (z_1 - 1)g{:}\bar{\Psi}\Gamma\Psi\varphi{:} + (z_2 - 1){:}\bar{\Psi}(\hat{p} - M)\Psi{:} - \delta M{:}\bar{\Psi}\Psi{:} + \\ & + (z_3 - 1){:}\varphi(p^2 - \mu^2)\varphi{:} - \delta\mu^2{:}\varphi^2{:} + (z_4 - 1)h{:}\varphi^2\varphi^2{:}\end{aligned} \tag{33.15}$$

相当于将核子的和介子的 Green 函数 $G$，$\Delta$ 及顶角函数 $\Gamma$ 和□重正化：

$$\left.\begin{aligned} G(m, M, g, h) &\to z_2^{-1}G(m', M', g', h'), \\ \Delta(m, M, g, h) &\to z_3^{-1}\Delta(m', M', g', h'), \\ \Gamma(m, M, g, h) &\to z_1\Gamma(m', M', g', h'), \\ \square(m, M, g, h) &\to z_4\square(m', M', g', h'), \end{aligned}\right\} \tag{33.16}$$

式中

$$m' = m + \delta m, \qquad M' = M + \delta M, \qquad g' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-\frac{1}{2}} g, \qquad h' = z_4 z_3^{-2} h, \tag{33.17}$$

而□是四顶点函数，它可以用含四条外部介子线的图形之和(图 45)来表示. 继续 § 32 中

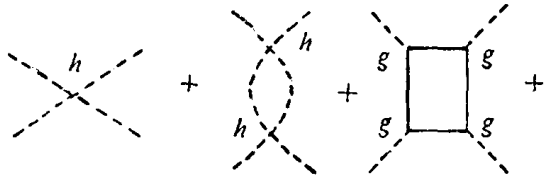



图 45　四阶顶角函数□的图形

的讨论，我们看到，从图形的内部看来，引入六项 (33.15) 相当于变换两个质量及两个电荷：

$$\begin{aligned} \mu^2 \to \mu'^2 = \mu^2 + \delta\mu^2, \qquad & M \to M' = M + \delta M, \\ g \to g' = z_1 z_2^{-1} z_3^{-\frac{1}{2}} g, \qquad & h \to h' = z_4 z_3^{-2} h. \end{aligned} \tag{33.18}$$

现在来讨论外部线. 按照 § 31.5 进行的讨论，我们得到结论，为了消除外部线的不定性，将介子的和核子的自能的展开中心分别选在 $k^2 = \mu^2$ 和 $\hat{p} = M$ 两点较为方便. 这些条件就决定了常数 $\delta\mu$，$\delta M$，$z_2$ 和 $z_3$.

至于常数 $z_1$ 和 $z_4$，在确定了测量电荷 $g$ 和 $h$ 的实验方法后，例如，令电荷 $g$ 之值由零速度介子对于核子的散射行为决定，而值 $h$ 决定于二个零速度介子的相互散射行为，则能单值地决定这些常数.

## § 34. Green 函数的 Schwinger 方程[1)]

### 34.1. 总 Green 函数和 $T$ 乘积的真空期待值的关系

在前面的理论的叙述中，我们已经不止一次强调自由场算符的时序收缩 $\Delta^c$（即相应场方程的 Green 函数）的主要作用. 从散射矩阵的观点看来，Green 函数表示与其他场没有相互作用的在 $x$ 和 $y$ 两点之间运动的粒子的传播因子.

正如 § 31 中已经证明的，相互作用对传播过程的影响可以利用函数 $\Delta^c(x-y)$ 的辐射修正考虑进去，结果导致总 Green 函数 $\Delta(x-y)$，它是在 $x$ 及 $y$ 两点之间运动的相互作用粒子的传播因子. 因此可以将它们看作是自由场 Green 函数的概念在相互作用情况下的推广.

按照自由场 Green 函数的方式求上述广义 Green 函数方程的封闭形式是有意义的，因为 Green 函数完全表征力学系统的行为. 在求得了 Green 函数的形式以后，不难算出相应的跃迁矩阵元. 另一方面，与总 Green 函数的非齐次方程相应，研究"广义波函数"的齐次方程，我们就能够计算封闭系统中自能的辐射修正，并且解决其他类似的问题.

可能会尝试通过展开 Feynman 图形来建立这些方程. 例如，旋量电动力学中 Fermi 子的 Green 函数可以用光子的 Green 函数及顶角函数来表示. 而顶角本身又可用更复杂的顶角函数以及 Fermi 子和光子的 Green 函数等等来表示.

但是用这样的方式，我们得到愈益复杂的方程的序列，此序列看来过于庞杂. 因此，自然地想利用泛函导数来建立相应的导出方程. 为了这一点，显然必须引进泛函宗量作为某些辅助的经典场，而对于这些泛函宗量我们可以施行泛函微分的运算.

我们限定讨论旋量电动力学情况，按照 Schwinger (1951 a)[2)]，我们引入外界流作为经典场. 换句话说，我们所研究的相互作用系统是电子旋量场及光子电磁场，它们处于外界电荷所产生的外界流 $J(x)$ 的场中，即在相互作用拉格朗日函数密度中添加一项：

$$J(x)A(x)=\sum_n J^n(x)A_n(x). \tag{34.1}$$

为了导出封闭形式的变分导数方程，我们应用场算符的时序乘积及散射矩阵的真空期待值来定义 Green 函数. 我们记住，可以将自由场的 Green 函数定义为相应算符的时序乘积的真空期待值，例如，

$$S^c_{\sigma\rho}(x-y)=i\langle T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y))\rangle_0\equiv i(\Phi_0^* T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)),\Phi_0), \tag{34.2}$$

$$g^{mn}D^c_0(x-y)=\frac{1}{i}\langle T(A_m(x)A_n(y))\rangle_0. \tag{34.3}$$

---

1) 本节的叙述是按照 Поливанов 的论文 (1955).

2) 与 Schwinger 不同，我们并不引进旋量场的经典源.

我们再引进

$$\langle T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)S)\rangle_0, \qquad \langle T(A_m(x)A_n(y)S)\rangle_0 \tag{34.4}$$

类型的表式，在$T$积中有散射矩阵：

$$S \equiv S(1) = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x)\,dx\right), \tag{34.5}$$

而且研究这些表式对耦合常数不同升幂的结构.

我们对于(34.4)类型的表式的性质先作若干说明，这些表式在时序乘积记号下含有与时间无关的算符乘子(在目前情况，即散射矩阵$S$). 初看来，从$T$乘积记号下取出这些"与时间无关的"乘子似乎是合适的. 但是，我们计算真空期待值后所得到的表式中某些时序收缩将被通常收缩来代替，也就是得到不正确的结果. 必须注意到上述算符乘子是用与时间有关的场算符的积分来表示的. 因此，例如，应该认为(34.4)式中的一阶项

$$i\left\langle T\left(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)\int \mathscr{L}(z)\,dz\right)\right\rangle_0 \tag{34.6}$$

是表式

$$i\langle T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)\mathscr{L}(z))\rangle_0$$

对$z$的积分. 显然，这里"提出"乘子$\int \mathscr{L}(z)\,dz$是不许可的.

今讨论(34.4)式中各项的结构. 十分显然，首先展开式的零项导致自由场的 Green 函数(34.2)及(34.3)，在 Feynman 图形中它相当于简单线条




然后代入旋量电动力学相互作用拉格朗日函数密度的显式，我们可以证明，(34.4)式中的一阶项等于零，而二阶项的表式与因果函数的下列组合成比例：

$$\begin{aligned}&\int dz\,dt\,\psi_\sigma\overbrace{(x)\bar{\psi}_\eta}(z)\gamma^n_{\eta\eta'}\overbrace{\psi_{\eta'}(z)\bar{\psi}_\tau}(t)\gamma^m_{\tau\tau'}\overbrace{\psi_{\tau'}(t)\bar{\psi}_\rho}(y)\overbrace{A_n(z)A_m}(t),\\&\int dz\,dt\,\overbrace{A_m(x)A_k}(z)\,\mathrm{Sp}\{\overbrace{\psi(z)\bar{\psi}}(t)\gamma^l\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}}(z)\gamma^k\}\overbrace{A_l(t)A_n}(y),\end{aligned} \tag{34.7}$$

显然，这些表式表示 Green 函数$S^c$及$D^c$的二阶辐射修正. 这些组合由图 46 的图形描述.

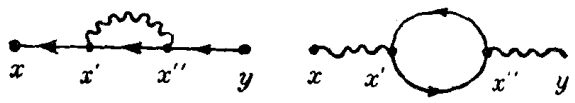



图 46

同理，(34.4)式的更高阶项含有$S^c$及$D^c$的更高阶辐射修正. 但是，(34.4)式还不是相互作用理论中所要求的 Green 函数，其中还含有用不连通 Feynman 图描述的不可观察的真空跃迁项. 因此，例如，在第二阶项中，除了(34.7)式，还包含有下式：

$$\overbrace{\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)}\int dz\,dt\,\mathrm{Sp}\{\overbrace{\psi(z)\bar{\psi}}(t)\gamma^l\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}}(z)\gamma^k\}\overbrace{A_l(t)A_k}(z),$$

$$\overbrace{A_m(x)A_n}(y)\int dz\,dt\,\mathrm{Sp}\{\overbrace{\psi(z)\bar{\psi}}(t)\gamma^l\overbrace{\psi(t)\bar{\psi}}(z)\gamma^k\}\overbrace{A_l(t)A_k}(z),$$

图 47 为相应于上式的图形. 上述真空附加项在 (34.4) 式中以 $S$ 矩阵的真空期待值形式作为相乘因子而出现:

$$S_0 = \langle S \rangle_0 = (\Phi_0^* S \Phi_0). \tag{34.8}$$

为了确信这一点,考察(34.4)式中含有图形中某一确定连通部分 $X$ 的各项.

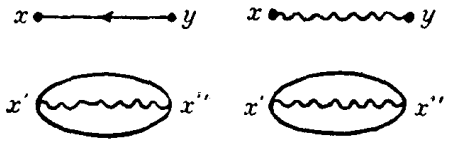



图 47

除了恰好相应于 $X$ 部分之项以外,在 (34.4) 式中还有无数项, 其对应图形,除了包含 $X$ 部分之外, 还包含有一切可能的真空环线. 考察与这些图形 (图 48) 相应的各项之和, 我们看到,此和等于 $X$ 项乘上 $S_0$. 因此, 为了得到所求的 Green 函数, 表式(34.4)尚须除以 $S_0$.

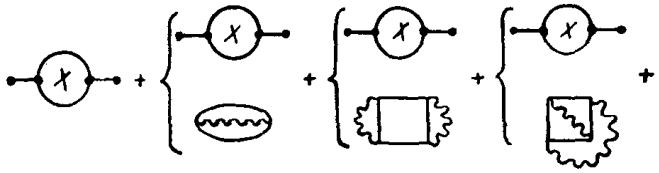



图 48

结果得到计及所有辐射修正的实际相互作用粒子的 Green 函数, 在撤除相互作用的极限情况下,此函数化为自由场的 Green 函数(34.2)及(34.3),其形式为[1)]

$$G_{\sigma\rho}(x, y) = i \frac{\langle T(\psi_\sigma(x)\, \bar{\psi}_\rho(y) S) \rangle_0}{S_0}, \tag{34.9}$$

$$D_{mn}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\langle T(A_m(x) A_n(y) S) \rangle_0}{S_0}. \tag{34.10}$$

首先注意到, 此处我们处处应用散射矩阵 $S = S(1)$, 它是当表征相互作用施加区域的函数 $g(x)$ 在整个时空中趋于 1 时从 $S(g)$ 得到的. 但是,应该估计到,根据 $S$ 矩阵的定义,即使在这一极限情况下,在时间变量为正负无穷处,函数 $g(x)$ 绝热地趋于零. 由此得出结论,应该将(34.9)式及(34.10)式中所有有无限积分区域的积分,理解为在时间变量为正负无穷大处相互作用绝热地加入及撤除意义下的相应极限式.

我们回到上面引进的外界经典流密度 $J(x)$, 我们指出, Green 函数 $G$ 和 $D$ 通过拉格朗日函数密度及矩阵 $S$ 与 $J(x)$ 有关. 因此,它们是流 $J(x)$ 的泛函. 我们强调,所引入的外界流密度只是数学上的辅助手法, 并不意味实际上存在着外界电荷. $J(x)$ 是辅助函数,在某种程度上与 $g(x)$ 函数相类似, 它保证我们以后可能将总 Green 函数方程写成泛函形式. 当实际外界电荷不存在时,在讨论或计算的最后阶段,将令流 $J(x)$ 等于零.

1) 此处我们用记号 $D$ 表示光子的总 Green 函数, 而在第二章中我们用同一 $D$ 表示 Pauli-Jordan 对易函数. 虽然如此,这并不引起任何混淆.

## 34.2. 广义 Wick 定理

在建立 Green 函数的方程以前，我们来讨论一个辅助命题，此命题可称为“广义 Wick 定理”，其内容如下：$n+1$ 个线性算符 $A, B_1, \cdots, B_n$ 的时序乘积真空期待值，等于其中某一算符（例如 $A$）与其他所有算符组成的具有一切可能收缩的时序乘积的 $n$ 个真空期待值之和，即

$$\langle T(AB_1\cdots B_n)\rangle_0 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\langle T(\overbrace{AB_1\cdots B_i}\cdots B_n)\rangle_0. \tag{34.11}$$

我们注意(34.11)式的右端与通常的 Wick 定理不同[例如，参阅(16.17)式]，并不含有收缩数多于 1 的表式.

不但如此，可以从通常 Wick 定理直接推出(34.11)式的正确性. 由于任何个数不为零的非收缩算符的正规乘积真空期待值为零，故(34.11)式的左端等于算符

$$AB_1\cdots B_n \tag{34.12}$$

乘积中完全相互收缩的一切可能方案之和，即所有算符全部要组成收缩. 完全同理，(34.11) 式右端之和的任一项，例如第一项，可以表示为形式

$$\overbrace{AB_1}\langle T(B_2\cdots B_n)\rangle_0,$$

它等于收缩 $\overbrace{AB_1}$ 乘上算符 $B_2, \cdots, B_n$ 的一切可能的完全收缩之和.

把(34.11)式右端对 $i$ 求和，得到算符(34.12)的一切可能的完全收缩之和. 因而证明了广义 Wick 定理.

我们注意到，在定义总 Green 函数所用的真空期待值内的 $T$ 乘积记号下，也含有并非线性算符的矩阵 $S$，我们将定理(34.11)式推广到这种情况. 为此，我们来研究线性算符 $A$ 与散射矩阵展开式中第 $n$ 项

$$\frac{i^n}{n!}\int T(\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_n))\,dx_1\cdots dx_n \tag{34.13}$$

组成收缩的过程.

我们引进线性算符 $A$ 与拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 的收缩运算，$\mathscr{L}(x)$ 也不是线性算符. 表式 $\overbrace{A\mathscr{L}}(x)$ 自然定义为 $A\mathscr{L}$ 乘积之和，其中算符 $A$ 对 $\mathscr{L}$ 中的算符构成一切可能的收缩. 例如，在旋量电动力学情况中，当考虑到外界流(34.1)时，$\mathscr{L}(x)$ 具有形式：

$$\mathscr{L}(x) = e\sum_n :\bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)A_n(x): + \sum_k J^k(x)A_k(x), \tag{34.14}$$

根据定义，我们得到

$$\overbrace{\psi(x)\mathscr{L}}(y) = e\sum_k \overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)\gamma^k:\psi(y)A_k(y):, \tag{34.15}$$

$$\overbrace{\bar{\psi}(x)\mathscr{L}}(y) = e\sum_k :A_k(y)\bar{\psi}(y):\gamma^k\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}}(x), \tag{34.16}$$

$$\overbrace{A_l(x)\mathscr{L}}(y) = e\sum_k :\bar{\psi}(y)\gamma^k\psi(y):\overbrace{A_l(x)A_k}(y) + \sum_k J^k(y)\overbrace{A_l(x)A_k}(y). \tag{34.17}$$

同时我们注意到，上面所定义的总 Green 函数相当于 Feynman 图中内部线的贡献之

和，它自然含有与散射矩阵相类似的发散. 为了消除这些发散，应该从一开始就在相互作用拉格朗日函数密度中引入通常抵消项. 但是，为了叙述简单起见，我们从拉格朗日函数(34.14)出发，先引进 Green 函数的 Schwinger 方程，然后再考虑到抵消项.

回到(34.13)式与线性算符 $A$ 的收缩；我们得到下列各项之和：

$$\frac{i^n}{n!}\sum_j \int T(A\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_j)\cdots\mathscr{L}(x_n))\,dx_1\cdots dx_n,$$

由于(34.13)式对积分变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称性，上式可以表示如下：

$$\frac{i^n}{(n-1)!}\int d\tau \int dx_1\cdots dx_{n-1} T(\overbrace{A\mathscr{L}}(\tau)\mathscr{L}(x_1)\cdots\mathscr{L}(x_{n-1})).$$

对 $n$ 求和，得到算符 $A$ 与矩阵 $S$ 收缩之结果如下：

$$\overbrace{AS} = i\int d\tau T\left(\overbrace{A\mathscr{L}}(\tau)\exp i\int \mathscr{L}(x)\,dx\right) = i\int d\tau T(\overbrace{A\mathscr{L}}(\tau)S). \tag{34.18}$$

从公式(34.14)—(34.18)，容易求得 Green 函数的方程.

### 34.3. Schwinger 方程

例如，考察 Green 函数 $G_{\sigma\rho}(x, y)$. 利用广义 Wick 定理及公式(34.18)，将(34.9)式的分子

$$g_{\sigma\rho}(x, y) = i\langle T(\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)S)\rangle_0 \tag{34.19}$$

表示如下

$$\begin{aligned} g(x, y) &= i\langle T(\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)S)\rangle_0 + i\langle T(\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)S})\rangle_0 = \\ &= i\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y)S_0 + i^2\int d\tau\langle T(\overbrace{\psi(x)\mathscr{L}}(\tau)\bar{\psi}(y)S)\rangle_0. \end{aligned} \tag{34.20}$$

其次，考虑到关系式(34.15)及定义

$$i\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(y) = S^c(x-y),$$

我们得到

$$\begin{aligned} g_{\sigma\rho}(x, y) &= S^c_{\sigma\rho}(x-y)S_0 + \\ &+ ie\int d\tau \sum_{(\alpha,\beta,k)} S^c_{\sigma\alpha}(x-\tau)\gamma^k_{\alpha\beta}\langle T(\psi_\beta(\tau)\bar{\psi}_\rho(y)A_k(\tau)S)\rangle_0. \end{aligned} \tag{34.21}$$

我们记住，函数 $S^c(x-y)$ 满足方程

$$\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right)S^c(x-y) = -\delta(x-y),$$

对方程(34.21)的两端施运算

$$\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right),$$

得到

$$\begin{aligned} &\sum_\sigma \left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right)_{a\sigma} g_{\sigma\rho}(x, y) = \\ &= -\delta(x-y)S_0\delta_{a\rho} - ie\sum_{(k,\beta)}\gamma^k_{a\beta}\langle T(\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\rho(y)A_k(x)S)\rangle_0. \end{aligned} \tag{34.22}$$

另一方面，讨论下式

$$\frac{\delta}{\delta J^k(z)} g_{\sigma\rho}(x, y) = i\left\langle T\left(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)\frac{\delta S}{\delta J^k(z)}\right)\right\rangle_0.$$

将 $S$ 矩阵展成级数，并且逐项作泛函微分，求得

$$\frac{\delta S}{\delta J^k(z)} = iT(A_k(z)S). \tag{34.23}$$

因此，

$$\frac{\delta}{\delta J^k(z)} g_{\sigma\rho}(x, y) = i^2\langle T(\psi_\sigma(x)\bar{\psi}_\rho(y)A_k(z)S)\rangle_0. \tag{34.24}$$

将(34.24)式代入(34.22)式中，重新归并各项，并舍弃矩阵指标，得

$$\left\{i\sum_k \gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - e\frac{\delta}{\delta J^k(x)}\right) - m\right\} g(x, y) = -\delta(x-y)S_0. \tag{34.25}$$

化为原来的 Green 函数 $G$:

$$g(x, y) = G(x, y)S_0,$$

除以 $S_0$ 后，有

$$\left\{i\sum_k \gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - e\frac{\delta}{\delta J^k(x)}\right) - m\right\} G(x, y) =$$

$$= -\delta(x-y) + \frac{ie}{S_0}\sum_k \gamma^k \frac{\delta S_0}{\delta J^k(x)} G(x, y). \tag{34.26}$$

利用(34.23)式，我们得到表式

$$\frac{1}{iS_0}\frac{\delta S_0}{\delta J^k(x)} = \frac{\langle T\{A_k(x)S\}\rangle_0}{S_0} = \mathfrak{A}_k(x) \tag{34.27}$$

是按照 Green 函数形式构成的，而且可以解释为电磁场的可观察值.

由(34.27)式还可得出结论，表式 $\mathfrak{A}_k$ 可以表示为对 $S_0$ 的对数导数形式:

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{1}{i}\frac{\delta \ln S_0}{\delta J^k(x)}. \tag{34.28}$$

从形式上看来，关系式 (34.28) 和统计物理学中熟知的关系式相似，在统计物理学中力学量的平均值也是用分布函数 $Z$ 的对数变分导数来表示的. $S$ 矩阵的真空期待值与分布函数 $Z$ 的类似将愈益显明，如果考虑到，引进辅助的旋量源就可以用 $S_0$ 的泛函导数来表示 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 的平均值以及总 Green 函数(参阅以下的(34.34)方程).

将(34.27)式代入(34.26)式中，得到单 Fermi 子 Green 函数的泛函方程

$$\left\{i\sum_k \gamma^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - e\frac{\delta}{\delta J^k(x)} - ie\,\mathfrak{A}_k(x)\right) - m\right\} G(x, y) = -\delta(x-y). \tag{34.29}$$

现在来建立 $\mathfrak{A}_k$ 的相应方程. 为此，利用(34.11)式及(34.18)式，将 $\mathfrak{A}_k$ 表示为

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{1}{S_0}\langle T(A_k(x)S)\rangle_0 = \frac{1}{S_0}\langle T(\overbrace{A_k(x)S})\rangle_0 =$$

$$= \frac{i}{S_0}\int \langle T(\overbrace{A_k(x)\mathscr{L}(\tau)}S)\rangle_0 d\tau. \tag{34.30}$$

再利用(34.17)式和(34.3)式，得到

$$\mathfrak{A}_k(x) = -\frac{1}{S_0}\sum_l g^{kl}\int D_0^c(x-\tau)[e\langle T(j^l(\tau)S)\rangle_0 + J^l(\tau)S_0]\,d\tau, \qquad (34.31)$$

其中应用了记号

$$j^l(\tau) = :\bar{\psi}(\tau)\gamma^l\psi(\tau):.$$

我们记住，函数 $D_0^c$ 满足方程

$$\Box D_0^c(x-\tau) = -\delta(x-\tau),$$

对(34.31)式施行运算□后，得到

$$\Box\mathfrak{A}_k(x) = g^{kk}J^k(x) - g^{kk}e\frac{\langle T(j^k(x)S)\rangle_0}{S_0}.$$

我们注意到

$$\langle T(j^k(x)S)\rangle_0 = \sum_{(\sigma,\sigma')}\langle T(\bar{\psi}_\sigma(x)\gamma^k_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)S)\rangle_0 =$$

$$= -\sum_{(\sigma,\sigma')}\gamma^k_{\sigma\sigma'}\langle T(\psi_{\sigma'}(x)\bar{\psi}_\sigma(x)S)\rangle_0 = i\,\mathrm{Sp}\,(\gamma^k G(x,x)), \qquad (34.32)$$

我们获得 $\mathfrak{A}_k$ 的方程如下：

$$\Box\mathfrak{A}_k(x) = g^{kk}J^k(x) + ieg^{kk}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma^k G(x,x)). \qquad (34.33)$$

方程(34.29)及(34.33)式构成方程组，由此方程组可以从已知函数 $J$ 确定两个未知函数 $G$ 和 $\mathfrak{A}$. Schwinger (1951a, б) 从他所特殊拟定的量子动力学原理出发，首先推导出这些方程. 因而方程(34.29)式及(34.33)式被称为 Schwinger 方程.

从 $J$ 过渡到新的宗量 $\mathfrak{A}$ 比较方便，为此注意到，光子 Green 函数 $D(x,y)$ 及电磁势的平均值相互之间有以下关系(当 $J\to 0$ 时)：

$$D_{kl}(x,y) = -\frac{\delta\mathfrak{A}_k(x)}{\delta J^l(y)}, \qquad (34.34)$$

上式的正确性通过直接代入就可以验证. 因此，$J$ 的变分导数可以通过下式用 $\mathfrak{A}$ 的变分导数来表示

$$\frac{\delta}{\delta J^l(y)} = \sum_k\int\frac{\delta\mathfrak{A}_k(\xi)}{\delta J^l(y)}\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}_k(\xi)}d\xi = -\sum_k\int D_{kl}(\xi,y)\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}_k(\xi)}d\xi, \qquad (34.35)$$

将此式代入(34.29)式中，得到

$$\left\{\sum_k\gamma^k\left(i\frac{\partial}{\partial x^k} + e\mathfrak{A}_k(x)\right) - m\right\}G(x,y) +$$

$$+ ie\sum_k\gamma^k\int D_{kl}(\xi,x)\frac{\delta G(x,y)}{\delta\mathfrak{A}_l(\xi)}d\xi = -\delta(x-y). \qquad (34.36)$$

另一方面，考虑到(34.34)式及(34.35)式，将方程(34.33)式对 $J^l$ 微分，求得

$$\Box_x D_{kl}(x,y) = -g^{kl}\delta(x-y) + ieg^{kk}\int d\xi\,\mathrm{Sp}\left\{\gamma^k\frac{\delta G(x,x)}{\delta\mathfrak{A}_m(\xi)}\right\}D_{ml}(\xi,y). \qquad (34.37)$$

方程(34.36)及(34.37)形成方程组，由此可以确定 Green 函数 $G$ 及 $D$ 为外场 $\mathfrak{A}$ 的泛函. 而函数 $J$ 从这些方程中完全消去.

上述方程组中所含的函数 $G$ 的变分导数可以变换为某一积分算符. 为此目的，引入

Fermi 子的用以下方程来定义的逆 Green 函数 $G^{-1}$:

$$\int G(x, x')G^{-1}(x', y)\,dx' = \int G^{-1}(x, x')G(x', y)\,dx' = \delta(x - y). \tag{34.38}$$

此时就有

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)} = \int \frac{\delta G(x, x')}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)}\delta(x' - y)\,dx' = \int \frac{\delta G(x, x')}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)} G^{-1}(x', x'')G(x'', y)dx'\,dx''. \tag{34.39}$$

另一方面,将(34.38)式对 $\mathfrak{A}_k$ 微分,得到关系式

$$\int \frac{\delta G(x, x')}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)} G^{-1}(x', y)\,dx' = -\int G(x, x')\frac{\delta G^{-1}(x', y)}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)}\,dx',$$

将上式代入(34.39)式后,我们有

$$\frac{\delta G(x, y)}{\delta \mathfrak{A}_k(\xi)} = e\int G(x, x')\Gamma^k(x', x''|\xi)G(x'', y)\,dx'\,dx'', \tag{34.40}$$

其中函数

$$\Gamma^k(x', x''|\xi) = -\frac{\delta G^{-1}(x', x'')}{\delta e\mathfrak{A}_k(\xi)} \tag{34.41}$$

被称为顶角算符,从以下叙述将会清楚这一名称的意义.

将(34.40)式代入方程(34.36)及(34.37)式中,得到

$$\sum_k \gamma^k\left(i\frac{\partial}{\partial x^k} + e\mathfrak{A}_k(x)\right)G(x, y) - \int M(x, x')G(x', y)\,dx' = -\delta(x - y), \tag{34.42}$$

及

$$\Box_x D_{kl}(x, y) = -g^{kl}\delta(x - y) + \sum_m \int P_k^m(x, \xi)D_{ml}(\xi, y)\,d\xi, \tag{34.43}$$

其中所引入的质量算符 $M$ 及极化算符 $P$ 由以下关系式来定义:

$$M(x, x') = m\delta(x - x') - ie^2\sum_{k,l}\gamma^k\int G(x, x'')\Gamma^l(x'', x'|\xi)D_{kl}(\xi, x)\,d\xi\,dx'', \tag{34.44}$$

$$P_k^m(x, \xi) = ie^2 g^{kk}\,\mathrm{Sp}\left\{\gamma^k\int G(x, x')\Gamma^m(x', x''|\xi)\,G(x'', x)\,dx'\,dx''\right\}. \tag{34.45}$$

我们强调,与 Green 函数 $G$ 及 $D$ 相似,算符 $\Gamma$, $M$ 及 $P$ 是 $\mathfrak{A}$ 的泛函.

为了阐明算符 $\Gamma$, $M$ 及 $P$ 的物理意义,利用算符□及 $\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m\right)$ 的逆运算,从微分积分方程(34.42)、(34.43)过渡到纯粹的积分方程较为方便. 为此,只要将(34.42)式乘上 $S^c(z - x)$,而将(34.43)式乘上 $D_0^c(z - x)$,并对 $x$ 积分. 由分部积分得到

$$G(z, y) = S^c(z - y) - e\sum_k \gamma^k\int dx\mathfrak{A}_k(x)S^c(z - x)G(x, y) + \\ + \int S^c(z - x)M'(x, x')G(x', y)\,dx\,dx', \tag{34.46}$$

$$M'(x, x') = M(x, x') - m\delta(x - x'), \tag{34.47}$$

$$D_{kl}(z, y) = g^{kl}D_0^c(x - y) - \sum_m \int dx\,d\xi D_0^c(z - x)P_k^m(x, \xi)D_{ml}(\xi, y). \tag{34.48}$$

方程(34.46)—(34.48)可以与图 49 的图形相对应. 这些图中出现的元素 $M'$ 和 $P$, 可利用关系式(34.44)和(34.45)来说明(图 50).

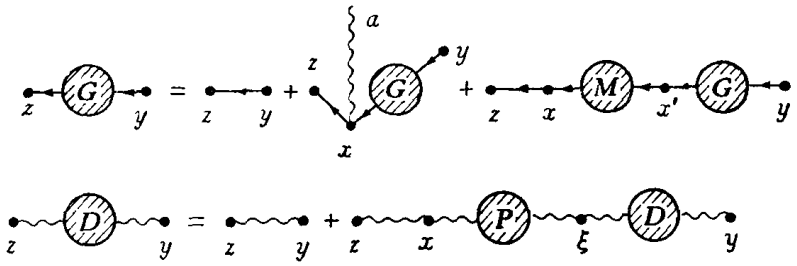



图 49

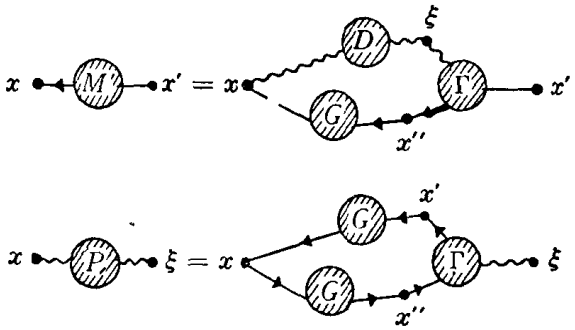



图 50

从上列图形可知, 算符 $M'$ 及 $P$ 含有对 Fermi 子及光子运动的全部辐射修正, 而算符 $\Gamma$ 相当于图形的顶角部分, 这一点说明了 $\Gamma$ 的名称是适当的.

也可以直接应用上述方法来得到构造更复杂的封闭方程组, 例如两个 Fermi 子、两个光子的 Green 函数等等. 用相应个数的场算符的时序乘积的真空期待值来定义类似的函数. 再利用广义 Wick 定理, 可以建立这些函数的方程, 与 Schwinger (1951 6) 所得到的双 Fermi 子 Green 函数的方程相似.

### 34.4. 抵消项的考虑

上面已经指出, "总" Green 函数含有与散射矩阵同一类型的发散. 为了抵消这些发散, 在相互作用的拉格朗日函数密度中, 必须引进熟悉的抵消项, 也就是从拉格朗日函数密度(34.14)过渡到(30.44)式.

我们记住, 抵消项(30.44)从 $S$ 矩阵中消去了除真空迴线以外的一切发散, 根据定义, 在 Green 函数中, 真空迴线被乘子 $(S_0)^{-1}$ 所抵消.

对拉格朗日函数密度 (30.44) 式重复以上的讨论, 即在 (34.15)—(34.17), (34.21), (34.22) 等等公式中引入抵消项(30.44), 我们得到 Green 函数的不含发散的 Schwinger 方程形式为

$$Z_2\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x}-m\right)G(x,y)-iZ_1e\sum_k\gamma^k\left(\frac{\delta}{\delta J^k(x)}+i\mathfrak{A}_k(x)\right)G(x,y)=-\delta(x-y), \tag{34.49}$$

$$Z_3\Box D_{kl}(x,y)=-g^{kl}\delta(x-y)+iZ_1eg^{kk}\int d\xi\sum_m \mathrm{Sp}\left\{\gamma^k\frac{\delta G(x,x)}{\delta\mathfrak{A}_m(\xi)}\right\}D_{ml}(\xi,y)-$$

$$-(Z_3-1)\sum_n g^{nn}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^n}D_{nl}(x,y), \tag{34.50}$$

用完全同样的方法，可以得到(34.42)、(34.43)型的方程组，它不含变分导数，只含算符$M$及$P$.

函数$D$的方程(34.50)与方程(34.37)的根本区别在于前者含有下面的项：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^n}D_{nl}(x,y).$$

此项的出现与抵消项的横向形式$(Z_3-1)$有关，而后者与自由电磁场的拉格朗日函数密度相差$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$. 这里我们实质上遇到的是含有纵向分量的$D$函数经过“非完全重正化”所招致的后果. 可以证明，为了得到含有抵消项的方程，并使其形式上与不含抵消项的方程相同，只要利用纯粹横向收缩来代替电磁场算符的对角型收缩.

对于方程组(34.49)、(34.50)还必须作以下说明. 建立 Schwinger 方程的直接动机是希望得到一些与微扰理论工具无关的关于总 Green 函数方面的知识. 但是方程组(34.36)、(34.37)的解含有发散，而 Green 函数的方程组(34.49)、(34.50)虽然不含无穷大，却含有发散的常数，因而也只有形式上的意义. 因此想利用 Schwinger 方程来得到总 Green 函数的一些知识的企图，就遇到与无穷大分离程序相关的根本性困难.

显而易见，如果仅将这些方程作为出发点来求得以耦合常数为幂的形式上的展开式，则相应的发散将互相抵消，但此时我们所得到的结果与微扰理论的结果比较起来，毫无不同之处. 寻找不以微扰理论为基础的有效方法来求解决这些方程的问题，目前距离稍许令人满意的结局还极其遥远.

# 第六章　Schrödinger 方程和力学量

## § 35. 态振幅的 Schrödinger 方程

### 35.1. $\Phi(g)$ 的变分导数方程

在研究自由场的相互作用方面，我们到目前为止只讨论了相互作用在有限的时空区域中有效的情况. 利用相应的极限过渡方法，使相互作用的"有效范围"无限地扩大，我们就有可能来确定散射矩阵元. 这些矩阵元本身又可用来计算散射过程的有效截面，此处在散射过程的初始时刻和终结时刻，可以认为粒子是自由的. 但是，这些并未包括理论所面临的全部问题. 这些问题是指：确定束缚态的能量特征及其他特征，确定激发态的寿命，以及当过程的初态及终态中存在粒子的束缚复合时，确定这些过程的有效截面等等.

为了解决这些问题，单凭散射矩阵是不够的，必须要有更细致的描述系统的工具，例如，Schrödinger 类型的方程. 为了自然地建立这类方程，在形式上我们从以前已经建立了的关系式(17.13)出发：

$$\Phi(g) = S(g)\Phi,$$

其中 $\Phi$ 是常量，$S(g)$ 是当加入强度为 $g$ 的相互作用时的散射矩阵，而 $\Phi(g)$ 是系统受到上述强度的相互作用时的态振幅. 将以上关系式对 $g(x)$ 求变分，并利用 $S(g)$ 矩阵的么正性条件，我们得到

$$\frac{\delta\Phi(g)}{\delta g(x)} = \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)}\Phi = \frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} S^{\dagger}(g)\Phi(g).$$

因此，引入算符(参看 §§ 18.2, 27.2)

$$H(x; g) = i\frac{\delta S(g)}{\delta g(x)} S^{\dagger}(g), \tag{18.10}$$

我们可以写成[1]

$$i\frac{\delta\Phi(g)}{\delta g(x)} = H(x; g)\Phi(g), \tag{35.1}$$

或者写成积分形式：

$$i\delta\Phi(g) = \int H(x; g)\Phi(g)\delta g(x)dx. \tag{35.2}$$

方程(35.2)就其形式而言是 Schrödinger 方程的变分类比，而算符 $H(x; g)$ 起着广义哈密顿函数(更确切地说，是广义哈密顿函数密度)的作用. 不但如此，和 Schrödinger 方程的

1) 参阅 Боголюбов (1951б 及 1952).

类似将愈益明显，而且我们在下面可以看到二者在形式上将趋于一致，如果函数 $g(x)$ 趋于一个间断函数．对于四维空间中时间坐标小于某一固定值

$$x^0 = \tau$$

的一切点，此间断函数等于 1；而对于所有 $x^0 > \tau$ 各点，则等于零．显然，这样的函数 $g(x)$ 描述在 $x^0 = \tau$ 时刻整个三维空间中相互作用的瞬时撤除过程．这时态振幅 $\Phi(g)$ 成为参量 $\tau$ 的函数，因此可以用 $\Phi_\tau$ 来表示．

但是，和通常的理论一样，利用相互作用在时刻 $\tau$ 的瞬时撤除过程，可以引进象时刻 $\tau$ 的波函数这样的概念．当相互作用这样瞬时撤除后，波函数不再改变，我们简单地有

$$\Phi_\tau = \Phi_\infty.$$

如果相互作用不是在四维平面 $x^0 = \tau$ 上撤除，而是在某一空间型的四维曲面 $\sigma$ 上撤除

$$x^0 = T_\sigma(\mathbf{x}),$$

则我们得到著名的朝永-Schwinger 形式的协变方程．和通常的 Schrödinger 方程相同，此时哈密顿函数密度 $H(x;\sigma)$ 也与场在 $x$ 点无穷小邻域中的行为有关．我们的观点不同于通常观点之处在于：我们应用了连续撤除相互作用的过程，而不是瞬时撤除相互作用过程．

## 35.2. 相互作用表象中的 Schrödinger 方程和朝永-Schwinger 方程

现在我们来研究当连续函数 $g(x)$ 趋于上述间断极限时算符 $H(x;g)$ 的性质．首先，我们应该记住：正如 § 18.2 已经证明过的，广义哈密顿函数密度 $H(x;g)$ 可以用按相互作用为幂的泛函展开式来表示：

$$H(x;g) = H_0(x) + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int H_n(x, x_1, \cdots, x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n, \quad (35.3)$$

其中 $H_n$ 利用关系式

$$H_0(x) = -\mathscr{L}(x), \quad (35.4)$$

$$H_n(x, x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= i\sum_{0\leqslant k\leqslant n} P\left(\frac{x_1, \cdots, x_k}{x_{k+1}, \cdots, x_n}\right) S_{k+1}(x, x_1, \cdots, x_k)S^\dagger_{n-k}(x_{k+1}, \cdots, x_n) \quad (18.12)$$

通过 $S(g)$ 矩阵展开式的系数 $S_k(x_1, \cdots, x_k)$ 来表示．由于 $S(g)$ 受到因果性条件的限制，$H_n$ 具有以下性质：

$$\left.\begin{array}{ll} H_n(x, x_1, \cdots, x_n) = 0, & (n = 1, 2, \cdots), \\ \text{只要对某一个 } x_j, \text{ 有 } x^0 \gtrsim x_j^0, & (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array}\right\} \quad (18.13)$$

因此在展开式(35.3)的各项中，对每一个 $x_j$ 的积分，实际上是对 $x$ 点指向未来的光锥进行积分．只要权重函数 $g(x)$ 相当光滑，而且当 $x_j^0$ 趋向无穷大时，足够迅速地递减(例如，按指数函数递降)，则 (35.3) 式中的积分的收敛性就得到保证．如果我们把函数 $g(x)$ 定义为熟知的间断函数 $\theta(\tau - x^0)$ (参阅 (3.18)) 的逼近值，当 $x^0$ 大于某一参数 $\tau$ 时，其值为零，则 $g(x)$ 显然满足以上的条件．例如，我们令

$$g(x) = f(\tau - x^0), \quad (35.5)$$

其中

$$f(t) - \theta(t) = 0, \quad \text{当} \quad |t| \geqslant \Delta t,$$

而且这时选择相当光滑的函数作为 $f(t)$. 显然，这样选定 $g(x)$ 后，积分(35.3)是收敛的. 因为当 $x_j^0 \to \infty$ 时，$g(x_j)$ 相当迅速地递减，而由于(18.13)式的性质，积分(35.3)的性质与 $g(x_i)$ 在空间变量为无穷大及时间变量为负无穷大时无关.

以上对 $g(x)$ 的选择相当于从 $-\infty$ 到 $\tau - \Delta t$ 时在整个三维空间中施加相互作用，并从 $\tau - \Delta t$ 到 $\tau + \Delta t$ 间隔内逐渐撤除相互作用.

现在可以认为态振幅是参数 $\tau$ 的函数：

$$\Phi(g) = \Phi_\tau.$$

从(35.5)式来确定变分 $\delta g$：

$$\delta g(x) = f'(\tau - x^0)\delta\tau,$$

利用(35.2)式，我们求得

$$i\delta_\tau\Phi_\tau = \int H(x; f)f'(\tau - x^0)dx\delta_\tau\Phi_\tau,$$

由此得到

$$i\frac{\partial\Phi_\tau}{\partial\tau} = \int H(x; f)f'(\tau - x^0)dx\Phi_\tau. \tag{35.6}$$

根据函数 $f$ 的定义，这里是对从 $\tau + \Delta t$ 到 $\tau - \Delta t$ 的时间“薄层”进行积分. 另一方面，正如前面已经证明了的，(35.3)式是对“高度”为

$$h = \tau + \Delta t - x^0$$

的光锥进行积分.

考虑到在 (35.6) 式中 $x^0$ 总是大于 $\tau - \Delta t$，我们得到 $h \leqslant 2\Delta t$ (图 51). 这样一来，(35.3)式是对满足于条件

$$|x_j^0 - x^0| \leqslant 2\Delta t, \ |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}| \leqslant 2\Delta t \tag{35.7}$$

的区域进行积分.

因此，在 (35.6) 式中，“有效”哈密顿函数密度 $H(x; f)$ 依赖于 $x$ 点上数量级为 $2\Delta t$ 的邻域内场函数的性质. 如果在 (35.6) 式中可以过渡到极限 $\Delta t \to 0$，而且可以用 $\theta$ 代替 $f$，则代替 (35.6) 式，我们得到方程

$$i\frac{\partial\Phi_\tau}{\partial\tau} = \int H(x)d\mathbf{x}\Phi_\tau, \tag{35.8}$$

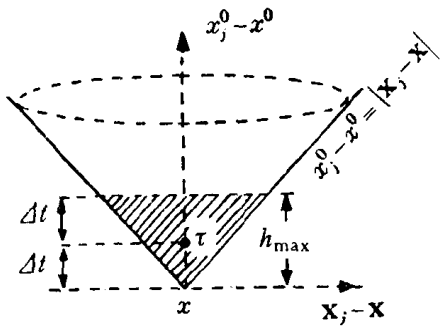



图 51

其中哈密顿函数密度 $H(x)$ 依赖于 $x$ 点无穷小邻域中的场的性质. 方程(35.8)实质上即为相互作用表象中的 Schrödinger 方程.

直到现在，我们所讲到的是一个特殊情况，即相互作用在 $x^0 = \tau$ 平面上撤除. 但是要推广这一讨论并不困难. 我们来研究空间型曲面 $\sigma$：

$$x^0 = T_\sigma(\mathbf{x}),$$

此曲面在強意义下满足空间型条件

$$|T_\sigma(\mathbf{x}) - T_\sigma(\mathbf{y})| < \lambda|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (x \neq y),$$

其中常数 $\lambda < 1$. 我们引入间断函数 $\theta_\sigma(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \theta_\sigma(x) &= 1, \quad 当 \quad x^0 > T_\sigma(\mathbf{x}), \\ \theta_\sigma(x) &= 0, \quad 当 \quad x^0 < T_\sigma(\mathbf{x}), \end{aligned}\right\} \tag{35.9}$$

也就是引入 $\theta_\sigma = \theta(x^0 - T_\sigma(\mathbf{x}))$,并考虑某一相当光滑的函数 $g(x)$,该函数仅在

$$|x^0 - T_\sigma(\mathbf{x})| \leqslant \Delta t$$

层内与 $\theta_\sigma(-x)$ 不同. 显然,在表达式

$$\int H_n(x, x_1, \cdots, x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{35.10}$$

中,对每一个 $x_j$ 的有效积分区域,与以上所分析情况类似,决定于 $x$ 点的上部光錐与 $\sigma$ 曲面邻近高为 $2\Delta t$ 的"薄层"所组成的截面,且此"薄层"与錐轴所成的角度不小于

$$\varphi = \operatorname{arc\,ctg} \lambda. \tag{35.11}$$

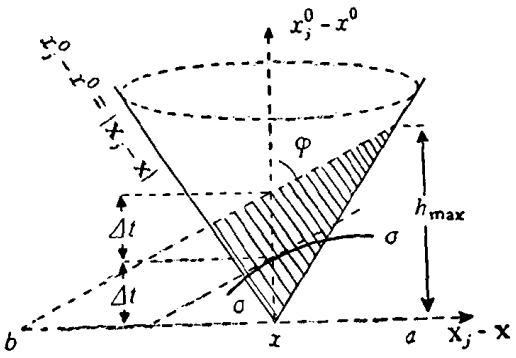



图 52

由图 52 可见,包含有积分区域(图中绘有影线部分)的那一部分角錐的高度不超过 $\dfrac{2\Delta t}{1-\lambda}$.

因此,积分区域被下列不等式限定:

$$\left.\begin{aligned} x_j^0 - x^0 &\leqslant \frac{2\Delta t}{1-\lambda}, \\ |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}| &\leqslant \frac{2\Delta t}{1-\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{35.12}$$

可以看出,就在这一情况中,(35.10) 式中积分有效区域的时间及空间的线度不超过与 $\Delta t$ 成比例之值. 因此,算符 $H(x; g)$ 将只依赖于 $x$ 点邻域中场的状态,而且当波函数 $g(x)$ 所分出的"陡变层"变狭时,这一邻域的线度将趋近于零. 如果现在使方程(35.2)形式上趋近下极限,即使 $g(x)$ 的陡变层无限地变狭,也就是

$$\Delta t \to 0, \quad g(x) \to \theta_\sigma(-x) = \sigma(x),$$

则在极限时,我们求得

$$i\delta_\sigma\Phi(\sigma) = \int H(x; \sigma)\delta\sigma(x)dx\Phi(\sigma),$$

或者

$$i\frac{\delta\Phi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = H(x; \sigma)\Phi(\sigma), \tag{35.13}$$

其中算符 $H(x; \sigma)$ 只与 $x$ 点无穷小邻域内场的性质有关. 我们得到了熟知的朝永-Schwinger 方程.

这样,当函数 $g(x)$ 的变化区域缩小而趋近于间断的极限时,我们实际上从 (35.1) 式既能得到通常的 Schrödinger 方程,又能得到朝永-Schwinger 方程. 这时候有效的哈密顿函数密度 $H(x; \sigma)$ 或 $H(x; f)$ 显然是表式(35.3)的相应极限.

## 35.3. 广义哈密顿函数密度的奇异性

但是，一般而论，上述极限并不存在. 为了说明这一情况，试以 Hurst-Thirring 场为例来研究，如同前面已经证明了的，这种场含有最弱的发散. 由公式(29.8)得出结论：在有效哈密顿函数密度的二阶项中含有因子：

$$H(x) \sim \int H_1(x, x')g(x')dx' \sim \int \Lambda_2(x, x')g(x')dx' \sim$$

$$\sim A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \delta(x - x')g(x')dx' = A_2 \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2},$$

当完成极限过渡

$$g(x) = f(\tau - x^0) \to \theta_\sigma(-x)$$

时，这二阶项给出哈密顿函数密度的不可积表式为

$$\int f'(\tau - x^0)f''(\tau - x^0)dx.$$

我们应该特别注意，这一困难当辅助质量趋近于无穷大时与 $A_2$ 型系数的发散无关.

这样，由(35.1)式到 Schrödinger 方程及朝永-Schwinger 方程的过渡，即使在因果函数为正常值时($M < \infty$)，也就是说，当散射矩阵的系数函数为有限值时，也使得相互作用的哈密顿函数密度中出现无意义的发散式.

现在我们来更详细地研究哈密顿函数密度的极限式的构造. 由二阶项开始，从(18.12)及(18.40)二方程出发，我们得到

$$H(x, x') = -\Lambda_2(x, x') + i\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(x') - iT(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(x')).$$

对 $x'$ 积分后得到

$$\int H_1(x, x')g(x')dx' = -\int \Lambda_2(x, x')g(x')dx', \tag{35.14}$$

因为当辅助质量为有限值时，表式

$$\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(x') - T(\mathscr{L}(x)\mathscr{L}(x'))$$

是正常的，而对 $x'$ 的积分区域是被不等式(35.12)所限定，当 $\Delta t \to 0$ 时，积分区域缩为一点. 至于准定域性算符 $\Lambda_2$ 则含有 $\delta$ 函数，因此积分(35.14)不等于零.

用完全类似的讨论可以证明，对于更一般的情况，以下的极限等式成立：

$$\int H_n(x, x_1, \cdots, x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n =$$

$$= -\int \Lambda_{n+1}(x, x_1, \cdots, x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

为了证明这一点，将 $H_n$ 表示为二项之和

$$H_n(x, x_1, \cdots, x_n) = -\Lambda_{n+1}(x, x_1, \cdots, x_n) + \widetilde{H}_n(x, x_1, \cdots, x_n),$$

然后只要证实下面一点已经足够，即算符 $\widetilde{H}_n$ 所包含的 $\delta$ 函数少于 $n$ 个，因此它对无穷小区域的 $n$ 重积分也将为零.

因此当 $\Delta t \to 0$ 时，哈密顿函数密度的极限式具有形式：

$$H(x;\delta)=\lim_{g\to\sigma}\left\{-\mathscr{L}(x)-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int\Lambda_{n+1}(x,x_1,\cdots,x_n)g(x_1)\cdots g(x_n)dx_1\cdots dx_n\right\}$$

$$=-\lim_{g\to\sigma}\int\frac{\delta\mathscr{L}(y;g)}{\delta g(x)}dy. \tag{35.15}$$

显然，如果此时准定域性算符 $\Lambda_{n+1}$ 含有 $\delta$ 函数的导数，那么，由于积分之后这些导数移到 $g(x)$ 函数上去. 在 $g\to\sigma$ 极限过程中，我们所得之项不仅依赖于 $x$ 点的场函数，而且还通过 $\frac{\partial\theta_\sigma}{\partial x}$ 类型的因子依赖于 $\sigma$ 面在该点的微分特征. 由此可见，甚至在用基本极限过渡 $M\to\infty$ 消除正常性之前，这些与曲面有关之项就可能是发散的.

我们回到 Hurst-Thirring 场. 从准定域性算符的构造(29.8)可见，$\delta$ 函数的导数仅仅包含在二阶眞空项中，也就是包含在不含算符的项中. 在 (35.15) 式中对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，以及在方程 (35.8) 中对 $x$ 进行所有积分后，所有眞空项对能量算符的贡献为(发散的)常数. 这些常数在 Schrödinger 方程中沒有任何的物理意义，形式上可以当作是眞空的能量. 利用么正变换移动时间的位相，可以从方程中消去这些常数，因此一般不必予以考虑. 对(29.8)式中其他诸项进行积分后，我们得到

$$H(x;\sigma)=\lim_{g\to\sigma}\left\{-\lambda{:}\varphi^3(x){:}-A_3^M{:}\varphi^2(x){:}g(x)+\frac{B^M}{2}{:}\varphi(x){:}g^2(x)\right\},$$

$$\int H(x;\sigma)dx=-\int d\mathbf{x}\mathscr{L}(\mathbf{x},x^0)|_{x^0=T_\sigma(\mathbf{x})},$$

而

$$\mathscr{L}(x)=\lambda{:}\varphi^3(x){:}+A_3^M{:}\varphi^2(x){:}+\frac{B^M}{2}{:}\varphi(x){:}$$

与 Hurst-Thirring 相互作用场的总拉格朗日函数密度的算符部分相同(参看(29.11)).

当 $M\to\infty$ 时，常数 $A_3^M$, $B^M$ 作对数发散. 由此得出结论：在某些情况下，可以立即写出"眞正的" Schrödinger 方程(含有瞬时撤除)，但此时在方程中自动地出现发散项.

因此，我们看到，甚至当"曲面型"发散不存在的情况下，散射矩陣与 Schrödinger 方程之间也存在着就出现无穷大意义而言的互补性. 这样，在通常理论中，哈密顿函数密度(也就是 Schrödinger 方程)是正常的，但是，在 $S$ 矩陣中含有无穷大项. 另一方面，我们刚才已经证实了，如果将散射矩陣正常化，则在 Schrödinger 方程中必然自动地出现发散.

与此相关，对于出现这类发散的物理性质可以作以下假定：当相互作用瞬时撤除时，这种过程对系统的影响非常巨大，以致实际上完全不可能决定系统在相互作用撤除以前的任何特征. 从形式上来看，这里我们的情况和 Heisenberg 测不准原理有些类似；大家知道[1]：测不准原理与波动过程的最一般性质有关.

但是，在旋量电动力学中，将所出现的一切曲面型无穷大包括在眞空项中，已告失败. 从 $\mathscr{L}(x;g)$ 的(30.48)表式得出结论，在算符项中出现导数 $\frac{\partial g}{\partial x}$，将这些算符化为哈密顿算符 $H(x;\sigma)$ 后，令 $g\to\sigma$ 就将得到发散的算符表式[2]. 我们再一次指出，上述发散的出

1) 例如，参考 Блохенцев (1949).

2) Stückelberg (1951) 首先指出存在这种类型的发散.

现与 Pauli-Villars 类型的正常化无关，当辅助质量为有限值时，它也存在.

我们得到以下的结论：在一般的情况下，可以相当简单地写出振幅 $\Phi(g)$ 的有限方程，其中 $g$ 是相当光滑的函数，但是不可能趋向极限 $g\to\sigma$，从而求得有意义的振幅 $\Phi(\sigma)$. 因此，一般而言，Schrödinger 方程和朝永-Schwinger 方程在量子场论中只有纯粹的形式上的意义.

为了在理论上避免无穷大出现，我们应该运用相当光滑的函数 $g(x)$. 此时可以注意到为了使所讨论的积分收敛，不必要求在厚度为 $2\Delta t$ 的薄层外 $g(x)$ 处处为零，只要要求在此层外 $g(x)$ 相当迅速地递减(例如，按指数函数)，而且处处足够光滑就足够了. 非常明显，对于任意的 Lorentz 变换，由这些函数所组成的族 $G$ 具有相对论不变性，也就是说，如果 $g(x)\in G$，则 $g(Lx)\in G$ 也成立.

## 35.4. 广义哈密顿函数密度的基本性质

现在我们来确定所引入的广义哈密顿函数的一系列基本性质. 显然，首先算符 $H(x;\ g)$ 是厄米的(这点在 § 18.2 已经阐明)，也就是

$$H^{\dagger}(x;\ g)=H(x;\ g). \tag{35.16}$$

可以从矩阵 $S(g)$ 的协变性条件

$$S(Lg)=U_L S(g)U_L^{\dagger} \tag{17.21}$$

来求出 $H(x;\ g)$ 的变换性质. 我们记得 $Lg(x)=g(L^{-1}x)$，由此得到

$$H(x;\ Lg)=i\frac{\delta S(Lg)}{\delta g(L^{-1}x)}S^{\dagger}(Lg)=iU_L\frac{\delta S(g)}{\delta g(L^{-1}x)}U_L^{\dagger}U_L S^{\dagger}(g)U_L^{\dagger},$$

即

$$\left.\begin{aligned}H(x;\ Lg)&=U_L H(L^{-1}x;\ g)U_L^{\dagger},\\ \text{或者}\quad H(x;\ g)&=U_L H(L^{-1}x;\ L^{-1}g)U_L^{\dagger}.\end{aligned}\right\} \tag{35.17}$$

现在我们容易看出，方程 (35.1) 的协变性应该是态振幅 (17.18) 和哈密顿函数密度 (35.17)变换定律的推论. 事实上，将(35.2)式中的 $g$ 变为 $L^{-1}g$，并利用(17.18)式，我们顺次地得到

$$i\delta\Phi'(g)=iU_L\delta\Phi(L^{-1}g)=U_L\int H(x;\ L^{-1}g)\delta g(Lx)dx\Phi(L^{-1}g)=$$

$$\underset{Lx\to x}{=}U_L\int H(L^{-1}x;\ L^{-1}g)\delta g(x)dxU_L^{\dagger}U_L\Phi(L^{-1}g),$$

或者考虑到 (35.17)，

$$i\delta\Phi'(g)=\int H(x;\ g)\delta g(x)dx'\Phi'(g),$$

因而协变性得证.

我们不难看出，考虑到 $S$ 矩阵的幺正性，哈密顿函数密度的定义 (18.10) 自动地保证方程(35.1)的相容性. 为了这一点，只要计算态振幅的二阶变分

$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta g(x)\delta g(y)},$$

并且证明当 $x\sim y$ 时上式之值与变分的次序无关即可 (关于这一点，更详细可参阅

§ 36).

这样我们看到，从散射矩阵出发(它是由么正性、因果性和协变性条件所定义的)，可以得到唯一的 Schrödinger 类型方程，它满足协变性、相容性及哈密顿函数密度的定域性等条件. 也可以证明反过来的可能性.

正如前面已经指出的：在 $g$ 属于族 $G$ 的条件下，两种形式(即 Schrödinger 方程和 $S$ 矩阵)不含有通常的发散. 因此，产生了将全部理论用相互作用强度 $g(x)\in G$ 的情况来加以表述的问题. 换句话说，要求能够利用态振幅 $\Phi(g)$ 来决定基本物理量，如同在通常理论中应用 $\Phi_\tau$ 及 $\Phi_\sigma$ 振幅一样，因为函数 $g$ 的特殊形式没有物理意义，在建立理论时，就必须保证物理量的可观察值与 $g(x)$ 的特定选择无关.

## § 36. 相互作用場系統的力学量

我们来讨论关于相互作用场系统的动力学特征的构成问题(例如，能量-动量四维矢量、动量矩张量及流四维矢量). 在非相互作用场理论中，利用 Noether 定理和作用量驻值原理就可直接得到相应的表式. 但对于相互作用场我们不能采用这个方法，因为我们并没有相互作用场方程的精确解，这些正确解使整个系统的总作用量取极值. 这时，不得不用自由场算符性波函数，并从它构成各种物理量.

利用自由场的算符来表示相互作用场系统的力学量，这一问题是否在一切情况下可解，事先是完全不清楚的. 其中构成能量-动量张量问题原来就是不可解的 (Степанов (1953)).

### 36.1. 能量、动量和动量矩张量[1)]

为了求作能量-动量四维矢量和动量矩张量，必须修改 Noether 的论证，而且代替作用量，必须利用无穷小移动及转动时变换态振幅的么正算符

$$x\to x'=x+\delta x,\quad \delta x^k=a^k+\sum_l g^{ll}x^l\omega^{kl}(\omega^{kl}+\omega^{lk}=0), \tag{9.1}$$

$$\Phi(g)\to\Phi'(g)=U_L\Phi(L^{-1}g)=\Phi(g)+\delta_L\Phi(g). \tag{36.1}$$

根据(9.4)式及(9.5)式，么正算符有以下形式：

$$U_L=1+\delta U_L,$$

$$\delta U_L=i\sum_k g^{kk}P_0^k a^k+\frac{i}{2}\sum_{k,l}g^{kk}g^{ll}M_0^{kl}\omega^{kl}, \tag{36.2}$$

其中 $P_0$ 及 $M_0$ 分别是没有相互作用时动力学系统的能量-动量的四维矢量算符及动量矩的张量算符.

另一方面，

$$g(Lx)-g(x)=\sum_i\frac{\partial g}{\partial x^i}a^i+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\left(x^k g^{kk}\frac{\partial g}{\partial x^l}-x^l g^{ll}\frac{\partial g}{\partial x^k}\right)\omega^{lk}.$$

因此，考虑到(35.2)式和(17.17)式，我们得到态振幅的全变分：

---

1) 这一部分的叙述是根据 Боголюбов 的论文 (1951a).

$$\delta_L\Phi(g)=\delta U_L\Phi(g)+\int\frac{\delta\Phi(g)}{\delta g(x)}[g(Lx)-g(x)]dx=$$

$$=i\left\{(P_0\cdot a)+\frac{1}{2}\sum_{k,l}g^{kk}g^{ll}M_0^{kl}\omega^{kl}\right\}\Phi(g)+$$

$$+\int\frac{\delta\Phi(g)}{\delta g(x)}\left\{\left(a\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\left(x^kg^{kk}\frac{\partial g}{\partial x^l}-x^lg^{ll}\frac{\partial g}{\partial x^k}\right)\omega^{lk}\right\}dx=$$

$$=\left\{(P(g)\cdot a)+\frac{1}{2}\sum_{k,l}g^{kk}g^{ll}M^{kl}(g)\omega^{kl}\right\}\Phi(g),\tag{36.3}$$

其中

$$P^k(g)=P_0^k-g^{kk}\int H(x;g)\frac{\partial g(x)}{\partial x^k}dx,\tag{36.4}$$

$$M^{ik}(g)=M_0^{ik}-\int H(x;g)\left(x^ig^{kk}\frac{\partial g}{\partial x^k}-x^kg^{ii}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)dx.\tag{36.5}$$

这样,我们得到了当有相互作用存在时动力学系统的能量-动量四维矢量和动量矩张量的分量的所求形式. 从公式的写法,显而易见,所求得的表式的变换性质是正确的.

取

$$g(x)=f(\tau-x\cdot\xi),$$

其中 $\tau$ 是曲面的参数,而 $\xi$ 是表征曲面的几何性质的四维矢量;我们求得

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=-f'(\tau-x\xi)\frac{\partial(x\xi)}{\partial x^k}=-\xi_kf'(\tau-x\xi),$$

因而

$$P^k(\tau)=P_0^k+\xi^k\int f'(\tau-x\xi)H(x;f)dx.\tag{36.6}$$

特别是,如果将 $\xi$ 取作为沿时间轴的单位矢量

$$\xi^k=\delta_{k0},$$

则得到

$$P^\alpha(\tau)=P_0^\alpha\qquad(\alpha=1,2,3),\tag{36.7}$$

$$P^0(\tau)=P_0^0+\int f'(\tau-x^0)H(x;f)dx.\tag{36.8}$$

可以看出,在这种情况下,总动量仍然是相互作用不存在时的形式,而总能量的表式却是粒子的"自能" $P_0^0$ 及相互作用能量

$$\int f'(\tau-x^0)H(x;f)dx$$

之和.

和量子力学中通常的表述比较起来,我们在这里得到完全的类似. 而且清楚的是,可以认为 $H(x;f)$ 是相互作用能量的密度,精确到函数 $f$ 的"陡变程度".

现在证明,当 $g$ 在所讨论的许可函数类中变化时,下列平均值

$$\Phi^*(g)P^i(g)\Phi(g),\qquad\Phi^*(g)M^{ik}(g)\Phi(g)$$

与 $g$ 的形式无关. 为了证明这一点,我们从以下事实出发(参看 § 35.4),即变换后的态振幅

$$\Phi'(g)=U_L\Phi(L^{-1}g)$$

也满足积分形式的 Schrödinger 方程. 因此, 对于任意的 Lorentz 变换 (其中包括无穷小变换), 有

$$i\delta\{U_L\Phi(L^{-1}g) - \Phi(g)\} = \int H(x; g)\delta g(x)dx\{U_L\Phi(L^{-1}g) - \Phi(g)\},$$

但是以前已经证明了, 对于上式有

$$U_L\Phi(L^{-1}g) - \Phi(g) = J(g)\Phi(g),$$

其中

$$J(g) = i(P(g)\cdot a) + \frac{i}{2}\sum_{k,l} g^{kk}g^{ll}M^{kl}(g)\omega^{kl}.$$

故有

$$i\delta[J(g)\Phi(g)] = \int H(x; g)\delta g(x)dxJ(g)\Phi(g).$$

由此式, 并考虑到

$$i\delta\Phi^*(g) = -\Phi^*(g)\int H(x; g)\delta g(x)dx,$$

我们得到

$$i\delta[\Phi^*(g)J(g)\Phi(g)] = i\delta\Phi^*(g)J(g)\Phi(g) + i\Phi^*(g)\delta[J(g)\Phi(g)] = 0.$$

也就是

$$\delta(\Phi^*(g)J(g)\Phi(g)) = 0.$$

我们记得, $J(g)$ 是含有任意系数 $a$, $\omega$ 的 $P(g)$ 和 $M(g)$ 的线性组合, 我们证明了存在下列关系:

$$\delta(\Phi^*(g)P^i(g)\Phi(g)) = 0, \quad \delta(\Phi^*(g)M^{ik}(g)\Phi(g)) = 0, \tag{36.9}$$

以上正是我们所要证明的.

现在我们来证明, 当 $g$ 在族 $G$ 中变化时, 所讨论的算符 $P^i(g)$ 和 $M^{ik}(g)$ 的本征值并不改变. 以能量算符为例, 设在某一许可值 $g = g_0$ 时, 这一算符的本征函数为 $\Phi_E$, 而其相应的本征值为 $E$. 此时

$$(P^0(g) - E)\Phi_E = 0.$$

设 $\Phi(g)$ 是满足基本方程的态振幅, 当 $g = g_0$ 时, $\Phi(g)$ 化为 $\Phi_E$, 即

$$(P^0(g) - E)\Phi(g) = 0, \quad 当 \quad g = g_0. \tag{36.10}$$

另一方面, 正如前面已经证明过的, 如果 $\Phi(g)$ 满足 Schrödinger 方程(35.1), 则 $J(g)\Phi(g)$ 也满足 Schrödinger 方程, 但是, 由于 $J(g)$ 既是算符 $P(g)$ 和 $M(g)$ 含任意系数的线性组合, 则其中任一项将单独具有上述性质. 所以, $P^0(g)\Phi(g)$ 满足方程(35.1), 因而 $\psi(g) \equiv (P^0(g) - E)\Phi(g)$ 也满足该方程. 由此我们得到结论: 因为根据 (36.10) 式, 当 $g = g_0$ 时, $\psi(g)$ 为零, 则 $\psi(g)$ 在 $G$ 中处处为零. 因此在 $G$ 中处处存在

$$(P^0(g) - E)\Phi(g) = 0,$$

这就证明了本征值的不变性. 我们也清楚, 总可以选择满足基本方程的态振幅来作为本征函数.

已经证明了的上述算符的预期值及本征值的不变性, 在我们的理论中表示为守恒定律、协变性法则以及已知物理量与空间型许可曲面陡变度无关的法则. 例如, $g$ 的变化是

由平移引起的，则对于改变 $g$ 的不变性，显然相当于通常的守恆定律. $g$ 的变化是由于 Lorentz 旋转引起的，则对于改变 $g$ 的不变性实际上保证了协变性. 最后设 $g$ 的变化是由于函数 $g$ 的光滑化过程改变引起的，则对于改变 $g$ 的不变性，表示所讨论的物理量与相互作用撤除过程的特征无关.

因此我们注意到，一般而论，如果对于某一 $O(g)$ 存在下列关系式：

$$\delta_g(\Phi^*(g)O(g)\Phi(g)) = 0,$$

则在我们的表象中，这表示 $O(g)$ 量是运动积分.

## 36.2. 定域性力学量[1)]

在上一小节中，我们引进了能量-动量四维矢量和动量矩能量，这些量是整个量子场系统的特征量. 但是，相互作用场系统的某些更细致的特征量也是有意义的，这些量不但与相互作用的施加区域有关，而且还与点 $x$ 有关，例如，流密度就是这种量. 上面所讨论的哈密顿函数密度 $H(x; g)$ 也是这样的定域性量.

现在来讨论上述类型的定域力学量 $B(x; g)$ 的一般性质. 首先我们来表述这些变量必须满足的物理要求. 为此，试将 $B(x; g)$ 表示为依 $g$ 为"幂"的泛函展开式

$$B(x; g) = B(x) + \sum_{n>1} \frac{1}{n!} \int B_n(x, x_1, \cdots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (36.11)$$

我们从定域性开始讨论. 力学量 $B(x; g)$ 的定域性可表述如下，在函数 $g(x)$ 趋向间断函数 $\sigma(x)$ 的范围内(参看 § 35)，$B(x; g)$ 只依赖于场在 $x$ 点无穷小邻域中的性质. 不难证明，展开函数 $B_n$ 的相应条件有以下形式：

$$\left.\begin{aligned} &B_n(x, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ &\text{如果即使对一个 } x_j (j = 1, \cdots, n), \text{ 存在} \\ &x \gtrsim x_j. \end{aligned}\right\} \quad (36.12)$$

事实上哈密顿函数密度 $H(x; g)$ 的定域性可以直接以(18.13)形式的条件 (36.12) 来建立. 显然，条件(36.12)也可以写成

$$\frac{\delta B(x; g)}{\delta g(y)} = 0 \quad \text{当} \quad x \gtrsim y. \quad (36.13)$$

重要的条件是当撤除相互作用 $g \to 0$ 时，$B(x; g)$ 与自由场理论中所取的 $B(x)$ 必须相等：

$$B(x; 0) = B(x). \quad (36.14)$$

最后，有一个条件也是很重要的，即可观察值

$$\Phi^*(g)B(x; g)\Phi(g) \quad (36.15)$$

与 $x$ 时刻以后的函数 $g$ 的性质无关：

$$\frac{\delta(\Phi^*(g)B(x; g)\Phi(g))}{\delta g(y)} = 0 \quad \text{当} \quad y \gtrsim x. \quad (36.16)$$

---

1) 这一小节的叙述根据 Степанов 的论文 (1955).

上述条件是因果性原理的推论，而且它表明了以下事实：(36.15)式所描述的在时刻 $x$ 的测量结果，不可能与系统在以后时刻的演变有关.

利用 Schrödinger 方程(35.1)，我们求得方程

$$i\frac{\delta B(x;g)}{\delta g(y)}=[H(y;g),B(x;g)]\quad 当\quad y\gtrsim x, \tag{36.16a}$$

在 $B(x;g)=H(x;g)$ 这一特殊情况下，上式成为

$$i\frac{\delta H(x;g)}{\delta g(y)}-i\frac{\delta H(y;g)}{\delta g(x)}=[H(y;g),H(x;g)]. \tag{36.17}$$

当 $x\sim y$ 时，关系式(36.17)给出

$$\frac{\delta H(x;g)}{\delta g(y)}-\frac{\delta H(y;g)}{\delta g(x)}=0,$$

此即 Schrödinger 方程(35.1)的相容条件.

注意，上述定域性力学量的定义是 Schwinger (1948) 定域性理论中所研究的相应概念的自然推广. 我们来研究当函数 $g$ 趋向经过 $x$ 点的间断函数 $\sigma$ 时二次型($\Phi^*(g)B(x;g)\Phi(g)$) 的性质. 假如这一极限过渡是可能的，我们就会获得 Schwinger 所研究过的同一类型的表式：

$$\Phi^*(\sigma)B_\sigma(x)\Phi(\sigma). \tag{36.18}$$

在 Schwinger 这篇论文中曾经证明了：表式(36.18)与经过 $x$ 点的曲面 $\sigma$ 的形状无关. 在我们所讨论的情形中，此条件具有比较一般的形式(36.16).

我们也注意到，由于(36.16a)式，存在比(36.16)式更广泛的关系式：

$$\frac{\delta(\Phi_1^*(g)B(x;g)\Phi_2(g))}{\delta g(y)}=0,\quad y\gtrsim x, \tag{36.19}$$

其中 $\Phi_1$ 与 $\Phi_2$ 是 Schrödinger 方程(35.1)的二个不同解.

从关系式(36.11)，(36.12)，(36.14)，(36.16)出发，适当修改在决定 $S$ 矩阵展开式系数时所用的讨论，我们就可以决定所有的系数 $B_n$. 但是，因为对上述类型算符 $H(x;g)$ 已经这样讨论过，我们就将问题化如上述情况. 为了作到这一点，在相互作用拉格朗日函数密度中引进补充项：

$$\mathscr{L}(x)\to\mathscr{L}(x)-B(x)b(x), \tag{36.20}$$

其中 $B(x)$ 为相应于 $B(x;g)$ 的自由算符，而 $b(x)$ 是张量维数相同的某一经典函数. 矩阵 $S(g)$ 及 $H(x;g)$ 成为与 $b$ 有关的泛函：

$$S(g)\to S(g;b)\quad H(x;g)\to H(x;g;b)=i\frac{\delta S(g;b)}{\delta g(x)}S^\dagger(g;b).$$

现在来证明，算符 $B(x;g)$ 可以表示为形式

$$B(x;g)=\frac{\partial H(x;g;b)}{\partial b(x)}\bigg|_{b=0}. \tag{36.21}$$

事实上，对(36.21)式作泛函微分，并考虑通常微分与泛函微分运算的对易性，得到

$$\frac{\delta B(x;g)}{\delta g(y)}=\frac{\partial}{\partial b(x)}\left[i\frac{\delta}{\delta g(y)}\left(\frac{\delta S(g,b)}{\delta g(x)}S^\dagger(g,b)\right)\right]_{b=0},$$

考虑矩阵 $S(g;\ b)$ 的因果性条件，就有

$$\frac{\delta B(x;\ g)}{\delta g(y)} = 0, \quad \text{当} \quad x \gtrsim y.$$

由此可以断言，算符 $B(x;\ g)$ 的定域性是散射矩阵的因果性条件的直接推论，进一步考虑到

$$H(x;\ 0) = H_0(x) = -\mathscr{L}(x).$$

对 $b$ 求微分，求得

$$B(x;\ 0) = B(x).$$

最后，当 $b \neq 0$，(36.17)式对 $b$ 作微分，然后设 $b = 0$，考虑到(36.21)式，我们获得因果性条件(36.16).

我们还看出，如果在(36.20)式中选择 $B(x)$ [因此，也是 $b(x)$] 为厄米的，则由于 $H(x;\ g)$ 的厄米性，由公式(36.21)所决定的 $B(x;\ g)$ 也是厄米的. 显然，这时 $B(x;\ g)$ 是协变的.

### 36.3. 流矢量

作为示例，我们来讨论电动力学中关于流密度的表式. 注意，在相互作用拉格朗日函数密度中，算符 $j(x)$ 总是出现于下列组合中：

$$j(x)A(x),$$

其中 $A(x)$ 是电磁场的势. 我们看到为了得到 $j(x;\ g)$，必须将 $H(x;\ g)$ 对一个辅助经典场微分，而这个场正好只是 $A(x)$ 的附加项. 因此，一般可以令

$$j^k(x;\ g) = -\frac{\partial H(x;\ g)}{\partial A_k(x)}. \tag{36.22}$$

根据刚才所证明过的，量(36.22)满足定域性和因果性条件，而且当相互作用撤除后，它将化成自由场的流算符. 现在来证明，此量还满足连续性方程：

$$\operatorname{div}_x^{(4)} j(x;\ g) = 0. \tag{36.23}$$

将条件(36.23)用系数函数 $H_n$ 表示，就有

$$\operatorname{div}_x^{(4)} \frac{\partial H_n(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)}{\partial A(x)} = 0. \tag{36.24}$$

利用关系(18.11)将 $H_n$ 表成 $S_n$ 的二次型，其中依赖于 $x$ 的 $S_k$ 以线性形式出现，我们得到(30.12)式中的 $S$ 矩阵的梯度不变性条件

$$\operatorname{div}_{x_i}^{(4)} \frac{\partial S(x,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)}{\partial A(x_i)} = 0,$$

它保证满足条件(36.24)，因此也保证由(36.22)式所决定的流满足连续性方程.

现在回到系统的总电荷表式. 在通常理论中，此式的形式为

$$Q = \int d\mathbf{x} \cdot j^0(x), \tag{2.33}$$

其中 $j^0$ 是流矢量的零分量. 但是关系(2.33)显然对于 Lorentz 变换不是不变的. 如在其中完成与(2.19)式向(2.18)式相类似的过渡，则得 Lorentz 不变的表式：

$$Q = \sum_k \int d\sigma_k j^k(x), \tag{36.25}$$

其中 $d\sigma_k$ 是正交于 $x^k$ 轴的三维曲面元，而积分是对整个三维曲面 $\sigma$ 的. 显然，这一表式可以表示为以下形式：

$$\int d\sigma_k j^k = \int d\Sigma \cos(nx^k) j^k = \int \frac{\partial \theta_\sigma(x)}{\partial x^k} j^k(x) dx,$$

其中 $d\Sigma$ 是曲面 $\sigma$ 的元面积，$\cos(nx^k)$ 是 $x^k$ 轴与曲面 $\sigma$ 在 $x$ 点的法线 $n$ 所成角度的余弦，而 $\theta_\sigma(x)$ 是在 § 35 中引进的间断函数

$$\theta_\sigma(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{当} \quad x^0 > T_\sigma(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{当} \quad x^0 < T_\sigma(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\} \theta_\sigma(x) = \theta(x^0 - T_\sigma(\mathbf{x})). \tag{35.9}$$

这时，电荷的表式为

$$Q = \sum_k \int dx j^k(x) \frac{\partial \theta_\sigma(x)}{\partial x^k}. \tag{36.26}$$

在我们的理论中，这一关系式的自然推广是下式：

$$Q(g) = -\sum_k \int dx j^k(x; g) \frac{\partial g(x)}{\partial x^k}, \tag{36.27}$$

当 $g(x) \to \theta_\sigma(-x)$ 时，它在形式上化为(36.26)式. 我们将要证明，所选定的表式(36.27)是运动积分，即可观察量 $Q$ 与函数 $g(x)$ 的形式无关，而且，当任意变分 $\delta g(x)$ 时，它的变分

$$\delta_g \langle Q(g) \rangle = \delta_g (\Phi^*(g) Q(g) \Phi(g)) \tag{36.28}$$

为零.

为了证明(36.28)式，我们从(36.17)式出发，对 $A(x)$ 微分，得

$$-i\left( \frac{\delta j(x; g)}{\delta g(y)} + \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} \right) = -[H(y; g), j(x; g)],$$

上式可以表示为形式

$$i \frac{\delta j(x; g)}{\delta g(y)} - [H(y; g), j(x; g)] = -i \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)}. \tag{36.29}$$

由于(36.23)式，从(36.29)式也可得出

$$\mathrm{div}_x^{(q)} \frac{\partial}{\partial A(x)} \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} = 0. \tag{36.30}$$

考虑到 Schrödinger 方程以及(36.27)、(36.29)两关系式，计算变分(36.28)，获得

$$\delta_{g(y)} \langle Q(g) \rangle = \Phi^*(g) \left\{ \frac{\delta Q(g)}{\delta g(y)} + i[H(y; g), Q(g)] \right\} \Phi(g) \delta g(y) =$$

$$= -\sum_k \int dx \Phi^*(g) \left[ \left\{ \frac{\delta j^k(x; g)}{\delta g(y)} + i[H(y; g), j^k(x; g)] \right\} \frac{\partial g(x)}{\partial x^k} + \right.$$

$$\left. + j^k(x; g) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\delta g(x)}{\delta g(y)} \right] \Phi(g) \delta g(y) =$$

$$= -\sum_k \int dx \Phi^*(g) \left[ -\frac{\partial}{\partial A_k(x)} \left( \frac{\delta H(y; g)}{\delta g(x)} \right) \frac{\partial g(x)}{\partial x^k} + \right.$$

$$+ j^k(x;g)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x^k}\Big]\Phi(g)\delta g(y).$$

对第二项作部分微分，由于连续性方程(36.23)，得

$$-\sum_k\int dx j^k(x;g)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x^k}=\sum_k\frac{\partial j^k(x;g)}{\partial x^k}=0,$$

同样，由于(36.30)式，得

$$\sum_k\int dx\frac{\partial}{\partial A_k(x)}\frac{\delta H(y;g)}{\delta g(x)}\frac{\partial g(x)}{\partial x^k}=0.$$

当时间变量为正无穷大时 $g(x)$ 变为零；由于定域化条件(36.13)，当时间变量为负无穷大、空间变量为无穷大时，$\frac{\delta H(y;g)}{\delta g(x)}$ 变为零.

### 36.4. Lorentz 条件

最后，我们来讨论一下相互作用场系统的许可状态的补充条件问题. 大家知道，在自由场理论中，这一条件的形式为

$$\left(\frac{\partial A^{(-)}(x)}{\partial x}\right)\Phi\equiv\sum_k g^{kk}\frac{\partial A_k^{(-)}(x)}{\partial x^k}\Phi=0. \tag{13.8}$$

在相互作用系统情况下，这一条件所采取的形式为

$$\Omega^{(-)}(x;g)\Phi(g)=0, \tag{36.31}$$

其中算符 $\Omega^{(-)}(x;g)$，一方面当 $g\to 0$ 时应该变为 $\left(\frac{\partial A^{(-)}(x)}{\partial x}\right)$，另一方面，应该是运动积分，因为 (36.31) 式是个与时间无关的本征值为零的算符 $\Omega^{(-)}$ 的方程. 这一要求是方程(36.31)与 Schrödinger 运动方程的相容条件.

略去相应的计算，我们指出，上述两个条件可以完全决定算符 $\Omega^{(-)}$ 的形式为

$$\Omega^{(-)}(x;g)=\left(\frac{\partial A^{(-)}(x)}{\partial x}\right)-\int D_0^{(-)}(x-y)\sum_k j^k(y;g)\frac{\partial g(y)}{\partial y^k}dy,$$

而条件(36.31)的形式为

$$\left\{\left(\frac{\partial A^{(-)}(x)}{\partial x}\right)-\int D_0^{(-)}(x-y)\sum_k j^k(y;g)\frac{\partial g(y)}{\partial y^k}dy\right\}\Phi(g)=0, \tag{36.32}$$

其中 $D_0^{(-)}(x)$ 是 Pauli-Jordan 光子函数的负频率部分

$$D_0^{(-)}(x)=\frac{i}{8\pi^3}\int dk\delta(k^2)\theta(-k^0)e^{ikx}.$$

### 36.5. 波动场算符

象算符 $j(x;g)$ 一样，我们还可引进一些算符

$$A(x;g),\quad \psi(x;g),\quad \bar{\psi}(x;g)$$

来推广自由场理论中相应的定域量. 为此，我们按照相互作用理论中建立定域量的一般方法，在旋量电动力学的相互作用拉格朗日函数密度 $L$ 中，引进下列补充项：

$$\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)+J(x)A(x). \tag{36.33}$$

其中 $J(x)$ 是非量子化函数，可以恆等于某些外界流，$\bar{\eta}(x)$ 和 $\eta(x)$ 是非量子化的相互为反对易的旋量函数，而且它们对于场 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$ 也是反对易的．这些“经典旋量场”并沒有物理意义，而利用这些场（Schwinger（1951a））完全带有纯粹形式的性质．

引进下列表式：

$$\left.\begin{aligned} A(x;\,g) &= -\frac{\partial H(x;\,g)}{\partial J(x)} = -\frac{i}{g(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta J(x)}\,S^{\dagger}\right), && (36.34)\\ \psi(x;\,g) &= -\frac{\partial H(x;\,g)}{\partial \bar{\eta}(x)} = -\frac{i}{g(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta \bar{\eta}(x)}\,S^{\dagger}\right), && (36.35)\\ \bar{\psi}(x;\,g) &= -\frac{\partial H(x;\,g)}{\partial \eta(x)} = -\frac{i}{g(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta \eta(x)}\,S^{\dagger}\right), && (36.36) \end{aligned}\right\} \quad (J,\,\eta,\,\bar{\eta}=0).$$

需注意，与 $\eta$，$\bar{\eta}$ 不同，辅助“场” $J(x)$ 是有物理意义的．事实上，假设需要研究某些外界电场的点源对所讨论量子场的影响，这些点源可用外界流密度 $J(x)$ 的非量子化矢量来表征．显然，这时不用(36.34)式，应该令

$$A(x;\,g) = -\frac{i}{g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta J(x)}\,S^{\dagger}\right)\Big|_{\eta,\bar{\eta}=0,\,J=J_0}. \tag{36.37}$$

可以认为，用这样方法引进来的算符 $A(x;\,g)$，$\psi(x;\,g)$，$\bar{\psi}(x;\,g)$ 是将自由场算符推广到相互作用施加強度 $g$ 的情况．在 §§ 37 和 38 中，我们将利用这些算符来研究电子的反常磁矩和原子中电子的能级移动．

## § 37. 眞空极化和电子的反常磁矩

### 37.1. 眞空极化

现在我们来讨论上述形式上的一般理论的某些应用．首先，我们研究在非量子化的外界流 $J(x)$ 的作用下，或在与此等效的外界势 $A^{\mathrm{ext}}(x)$ 的作用下，眞空状态的变化问题．势 $A^{\mathrm{ext}}(x)$ 与流 $J$ 之间有如下关系：

$$\Box A^{\mathrm{ext}}(x) = -J(x). \tag{37.1}$$

可以指出，由于不可能直接观察眞空性质的改变，这一问题只有理论上的意义．但是，在外界电磁场作用下眞空性质的改变是许多可观察效应中的组成部分（如原子中电子能级的移动，光对光的散射，等等）．

为了解决这一问题，应该讨论电磁场算符的平均可观察值．根据上述的一般方案（§ 36.5），在拉格朗日函数密度中引进附加项

$$J(x)A(x). \tag{37.2}$$

此时，根据(36.37)，电磁势的平均可观察值为

$$A^{\mathrm{eff}}(x) = -\Phi_0^*(g;\,J)\,\frac{i}{g(x)}\,\frac{\delta S(x;\,g;\,J)}{\delta J(x)}\,S^{\dagger}(g;\,J)\Phi_0(g;\,J). \tag{37.3}$$

其中 $\Phi_0(g;\,J)$ 是在外界流 $J(x)$ 作用下改变了的实际眞空振幅，而当所有 $y \lesssim x$ 时，函数 $g(y) = 1$．按照一般原理，$A^{\mathrm{eff}}$ 与特殊选定的 $g$ 无关．显然，仅当外界流可以看作与时间无关时，这一情况才是有物理意义的，因为否则外界流将引起实际粒子的相互转化

过程. 因此,我们将讨论以下情况:

$$J(x) = J(\mathbf{x}). \tag{37.4}$$

此时,可以将 $\Phi_0(g; J)$ 定义为在有 $J(\mathbf{x})$ 的情况下动力学系统的最低能量状态.

首先,我们注意到:

$$S^\dagger(g; J)\Phi_0(g; J) = \Phi_0, \tag{37.5}$$

其中 $\Phi_0$ 是自由场真空的态振幅. 利用表式(37.3)对函数 $g$ 的具体形式的无关性,我们作通常的极限过渡 $g(x) \to 1$. 此时得到

$$A^{\text{eff}}(x) = -i\Phi_0^* S^\dagger \frac{\delta S}{\delta J(x)}\Phi_0, \tag{37.6}$$

其中量

$$S = S(1; J)$$

表示当相互作用在极远的过去和极远的未来为零时的散射矩阵.

既然在相互作用以类似绝热的方式加入和撤除时不可能有产生粒子的实际过程,因而有

$$S\Phi_0 = a\Phi_0, \tag{37.7}$$

显然,其中

$$a = \langle S\rangle_0 = S_0, \tag{37.8}$$

而

$$aa^* = 1,$$

因此,

$$\Phi_0^* S_0^\dagger = \Phi_0^* a^* = \frac{\Phi_0^*}{S_0}. \tag{37.9}$$

将式(37.9)代入式(37.6),得到

$$A^{\text{eff}} = -i\frac{\Phi_0^* \dfrac{\delta S}{\delta J(x)}\Phi_0}{\Phi_0^* S\Phi_0} = -\frac{i}{S_0}\left\langle \frac{\delta S}{\delta J(x)}\right\rangle_0. \tag{37.10}$$

再进一步,应将方程(37.10)的右端用光子总 Green 函数表示. 为此考察下式:

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}(S_0 \cdot A^{\text{eff}}(x)).$$

利用(37.10),我们得到

$$\frac{\delta}{\delta J^m(y)}[S_0 \cdot A_n^{\text{eff}}(x)] = \frac{1}{i}\left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta J^m(y)\delta J^n(x)}\right\rangle_0. \tag{37.11}$$

现在我们来指明 (37.11) 右端对外流作二重变分运算的意义. 矩阵 $S(1; J)$ 可以用这样一组图形表示,在这些图形中除通常的顶点外,还包含相当于拉格朗日函数密度中 $J(x)A(x)$ 项的顶点,从这种顶点分别引出一条光子线(在 § 23 讨论韧致辐射过程中已经遇到这类顶点). 对 $J$ 作变分的结果,相应的光子线就有自由端,而在 $T$ 乘积记号下将出现算符 $A(x)$. 因此,以明显方式对式(37.11)的右端完成二重变分运算,我们得到

$$\bar{D}_{nm}(x, y; J) = i\left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta J^m(y)\delta J^n(x)}\right\rangle_0 = \frac{1}{i}\langle T(A_m(y)A_n(x)S)\rangle_0, \tag{37.12}$$

此量表示与含有二个自由光子端的一切可能图形的内线所对应的系数函数之和. 这样,

$\bar{D}$ 是光子在流 $J$ 的外场中运动时的 Green 函数 $D(x, y; J)$，只差一个乘子 $S_0^{-1}$. 现在我们可以写出

$$\frac{\delta}{\delta J^m(y)}(S_0 \cdot A_n^{\text{eff}}(x)) = -S_0 D_{nm}(x, y; J). \tag{37.13}$$

从 $S_0$ 和 $D(x, y; J)$ 的泛函展开式出发，可用上式写出 $A^{\text{eff}}$ 依 $J$ 为"幂"的泛函展开式. 为了今后的应用，我们认为外流 $J$ 为小值，只保留(37.13)式中主要项，现在我们以明显形式完成这一展开.

假定在(37.13)式中，$J \to 0$，得到

$$S_0 \frac{\delta A_n^{\text{eff}}(x)}{\delta J^m(y)} = -S_0 D_{nm}(x, y). \tag{37.14}$$

其中利用了以下事实，即当 $J \to 0$ 时，表式

$$\frac{\delta S_0}{\delta J^m(y)} = i\langle A_m(y) S\rangle_0$$

相应于一条光子线图形，而且等于零. 并注意下式

$$D_{nm}(x, y) = D_{nm}(x, y; J)|_{J=0}$$

表示当外界流不存在时光子的总 Green 函数.

消去(37.14)式中的 $S_0$，并对 $\delta J$ 积分，我们得到

$$A_n^{\text{eff}}(x) = -\sum_m \int D_{nm}(x, y) J^m(y) dy. \tag{37.15}$$

过渡到动量表象：

$$\left.\begin{aligned} A_n^{\text{eff}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ikx} A_n^{\text{eff}}(k) dk, \\ J^m(y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{iqy} J^m(q) dq, \\ D_{nm}(x, y) &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\left\{\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{nm} - \frac{k_n k_m}{k^2}\right) + \frac{d_l^0}{k^2}\frac{k_n k_m}{k^2}\right\} dk, \end{aligned}\right\} \tag{37.16}$$

考虑到外流的连续性方程：

$$\sum_m k_m J^m(k) = 0,$$

得到

$$A_n^{\text{eff}}(x) = \sum_m g^{nm}\frac{d(k^2)}{k^2} J^m(k) = \frac{d(k^2)}{k^2} J_n(k). \tag{37.17}$$

在所讨论的特殊情况(37.4)式中，当 $J$ 与时间无关时，我们可以令

$$J_n(k) = 2\pi\delta(k^0) J_n(\mathbf{k}^2). \tag{37.18}$$

将此式代入(37.16)和(37.15)，得到

$$A_n^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\frac{d(-\mathbf{k}^2)}{-\mathbf{k}^2} J_n(\mathbf{k}^2) d\mathbf{k}. \tag{37.19}$$

由 (37.19) 式得到光子 Green 函数的"空间部分" $\frac{d(-\mathbf{k}^2)}{-\mathbf{k}^2}$ 是一个有效势，它是由于

单位电荷与电子-正电子及光子的真空相互作用的结果而产生的(为此,只要令 $J_m(y) = \delta_{m0}\delta(\mathbf{y})e_0$, 即 $J(\mathbf{k}^2) = e_0$). 对于自由场, 当 $d(-\mathbf{k}^2) = 1$ 时, 势 (37.19) 化为 Coulomb 势,利用这一点,在一般情况下可将它用下式来表示:

$$V(r) = \frac{e_0}{(2\pi)^3}\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\frac{d(-\mathbf{k}^2)}{-\mathbf{k}^2}d\mathbf{k} = -e_0\frac{\rho(r)}{4\pi r} \quad (r = |\mathbf{r}|). \tag{37.20}$$

此处所引用的函数 $\rho(r)$ 与 1 之差相当于势 $V(r)$ 与 Coulomb 势之差 (在动量表象中,函数 $d$ 起着类似的作用), 有效势与 Coulomb 势这一偏差是由于真空极化的结果, 并且可以将之直观地解释为由于电荷在真空中产生假想电子-正电子偶而引起的屏蔽效应. 此时函数 $\rho$ 表征相应的屏蔽程度. 为了得到 $\rho$ 的具体形式, 必须研究光子的传播函数的相应部分.

到目前为止,这一函数在理论上还没有得到完备的形式. 但是为了达到我们的目的, 可以利用 $d$ 以 $e^2$ 为幂的展开式,展开式的第一项已在 § 31 中获得.

首先考虑大 $r$ 的情况. 将积分(37.20)化为新变量 $|\mathbf{k}|r = x$, 对角变量积分后, 就变成以下形式:

$$\frac{\rho(r)}{r} = \frac{1}{\pi^2 r}\int_0^\infty dx\, d\left(-\frac{x^2}{r^2}\right)\int_{-1}^{+1}d\mu e^{-ix\mu} = \frac{2}{\pi r^2}\int_0^\infty dx\,\frac{\sin x}{x}\,d\left(-\frac{x^2}{r^2}\right). \tag{37.21}$$

由此得出结论, 为了研究大 $r$ 的渐近值, 必须知道小 $k^2$ 时函数 $d$ 的性质. 由 (32.6) 式得到

$$d(k^2)|_{k^2\ll m^2} = 1 + e^2 O(k^2).$$

将此式代到 (37.21) 式中, 我们得到, 当大 $r$ 时(是指与 $\frac{1}{m}$ 相比较, 或者用通常单位, 与 $r_0 = \frac{\hbar}{mc} = 3.862\times 10^{-11}$ 厘米相比较), $\rho(r)$ 趋近于 1[1]:

$$\rho(r) = 1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \left(r \gg \frac{1}{m}\right). \tag{37.22}$$

因此,常数 $e_0$ 应该与可观察的电荷之值相等. 当 $r$ 小时, 函数 $\rho(r)$ 的形式可以根据式(37.21)并通过研究 $k^2$ 为大值时 $d(k^2)$ 的渐近式而求得. 利用公式(35.15),我们得到

$$d(k^2)|_{k^2\gg m^2} = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2} + \cdots.$$

由此直接积分可以得到小 $r$ 时 $\rho(r)$ 的渐近式 (Schwinger (1949a)):

$$\rho(r) = 1 + \frac{e^2}{6\pi^2}\left[\ln\frac{1}{rm} - \frac{5}{6} - \mathbf{C}\right] + \cdots, \tag{37.23}$$

其中 $\mathbf{C} \approx 0.5772$ 是 Euler 常数.

这样, 当小 $r \ll \frac{1}{m}$ 时, 有效密度 $\rho(r)$ 增大; 当 $r \to 0$ 时, $\rho(r)$ 具有对数奇点. 但是,必须强调指出,公式 (37.23) 是利用微扰理论而获得的,因此粗略说来, 只有在第二项显然小于第一项的区域内,这一公式才是正确的. 所以, 当 $r \to 0$ 时, 只有利用与微扰论

---

1) 如考虑到微扰论的较高级近似时,这一性质并不改变.

无关的探讨，才能得到 $\rho(r)$ 的真正性质.

### 37.2. 电子的反常磁矩

作为一般理论应用于实际问题的第二个示例，我们来计算电子的磁矩，并计及辐射修正.

为此，必须研究一个电子与外场相互作用的问题，并将计及辐射修正，以决定引起这一相互作用的能量. 显然，我们将认为外场（外界流）对时间不变，因为只有在这一条件下，电子才具有一定的能量.

以上我们研究当有恆稳外界流

$$J(x) = J(\mathbf{x})$$

时真空性质的变化问题. 现在，应该来阐明单电子态性质的改变. 重复以上的讨论，利用(36.37)式，我们得到

$$\frac{\delta E(J)}{\delta J(x)} = -A_1^{\text{eff}}(x) = i\Phi_1^* \frac{\delta S(J)}{\delta J(x)} \Phi_1 \frac{1}{\langle S\rangle_0}, \tag{37.24}$$

其中

$$S(J) = S(1; J),$$

而矩陣元是对以下两个单电子态来取的：

$$\Phi_1^* = (2\pi)^{3/2}\Phi_0^* a_\nu^-(\mathbf{k}'), \quad \Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_\nu^{*+}(\mathbf{k})\Phi_0. \tag{37.25}$$

考虑到(37.25)式，并展开变分导数 $\frac{\delta S}{\delta J(x)}$，就得到

$$\frac{\delta E(J)}{\delta J^n(x)} = -\frac{(2\pi)^3}{S_0}\Phi_0^* a_{\nu'}^-(\mathbf{k}')T(A_n(x)S)a_\nu^{*+}(\mathbf{k})\Phi_0. \tag{37.26}$$

考虑到能量式 $E(J)$ 中对应于磁矩的项对于外界场来讲是线性的. 可以令方程 (37.26) 的右端中 $J = 0$.

现在我们注意到，如果 (37.26) 式中算符 $a^-$ 与 $a^+$ 在 $T$ 乘积记号下，这一表式就相应于一条光子线与两条外电子线的、不同阶的连通图形之和，就可以表示为

$$G'G\Gamma^n D_{nk}; \tag{37.27}$$

其中第一个电子 Green 函数 $G'$ 相当于外电子线 $k'$，而第二个 $G$ 相当于外电子线 $k$，$D_{nk}$ 为相应于算符 $A_k(x)$ 的光子 Green 函数. 此外，与通常相同，顶角部分 $\Gamma^n$ 表示其端点与 $G'$、$G$ 和 $D$ 相应的強连通图形的总和. 由于上述注记，可以认为 $G'$，$G$，$\Gamma$ 和 $D$ 是与自由粒子相对应的（当 $J = 0$ 时）.

但是，由于在表式(37.26)中，算符 $a^-$ 和 $a^{*+}$ 并不在 $T$ 乘积记号下出现，它与(37.27)式不同. 差别是在(37.27)中 $G'$ 和 $G$ 中最后的“外”收缩，在(37.26)式中用如下的通常的收缩来代替：

$$\underbrace{\phi(x)a_\nu^{*+}(\mathbf{k})} = \frac{v^{\nu,-}(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}},$$

也就是

$$\frac{1}{\hat{k} - m} \to \frac{v^-(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\hat{k}' - m} \to \frac{\bar{v}^+(\mathbf{k}')}{(2\pi)^{3/2}},$$

或

$$\left.\begin{aligned} G(k) &\to G(k)(\hat{k}-m)\frac{v^{-}(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}, \\ G'(k') &\to \frac{\bar{v}^{+}(\mathbf{k}')}{(2\pi)^{3/2}}(\hat{k}'-m)G'(k'). \end{aligned}\right\} \tag{37.28}$$

(37.28)式右端的表式不可能直接解释，因为$(\hat{k}-m)v^{-}(\mathbf{k})=\bar{v}^{+}(\mathbf{k}')(\hat{k}'-m)=0$，而$G(k)$在$\hat{k}=m$处具有极点. 为了去掉此一不定性，将 Green 函数$G$用本征能量算符$\Sigma$来表示

$$G(k)=\frac{1}{m-\hat{k}+\Sigma(k)}.$$

此时，我们认为，利用引进光子的小质量$\lambda_0$(如同§32.2)，可以从$\Sigma$中消除红外灾难，而$\Sigma(k)$满足方程

$$\left.\frac{\Sigma(k)}{\hat{k}-m}\right|_{\hat{k}=m}=0.$$

这样得到

$$(m-\hat{k})G(k)|_{\hat{k}=m}=\left.\frac{m-\hat{k}}{m-\hat{k}-\Sigma(k)}\right|_{\hat{k}=m}=1, \tag{37.29}$$

因此,考虑到能量守恒($k_0=k_0'$),

$$(2\pi)^3\Phi_0^* a_{\nu'}^{-}(\mathbf{k}')T\left\{A_k(x),\frac{S}{S_0}\right\}a_{\nu}^{*+}(\mathbf{k})\Phi_0=$$

$$=\sum_n e\int \bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma^n(k',k|q)v^{\nu',+}(\mathbf{k})D_{nk}(q)e^{iqx}dq\delta(k'-k-q)=$$

$$=e\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma^n(k',k|\mathbf{k}'-\mathbf{k})v^{\nu',+}(\mathbf{k})D_{nk}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}.$$

将此式代入(37.24)式中,并对$J(x)=J(\mathbf{x})$积分,求得

$$\sum_{k,n}e\int d\mathbf{x}J^k(\mathbf{x})e^{i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma^n(k',k|\mathbf{k}'-\mathbf{k})v^{\nu',+}(\mathbf{k})D_{nk}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})=$$

$$=e\sum_{k,n}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma^n(k',k|\mathbf{k}'-\mathbf{k})v^{\nu',+}(\mathbf{k})D_{nk}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})J^k(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

将流$J$用外场$A^{\mathrm{ext}}$表示,并考虑到以下表式:

$$D_{nk}=-\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g_{nk}-\frac{k_nk_k}{k^2}\right)-\frac{k_nk_k}{k^2}\frac{d_l^0}{k^2},$$

及外场的 Lorentz 条件:

$$(k\cdot A^{\mathrm{ext}}(k))=0,$$

可以将上式化成

$$e\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma^n(k',k|\mathbf{k}'-\mathbf{k})v^{\nu',+}(\mathbf{k})A_n^{\mathrm{ext}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')d(-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2). \tag{37.30}$$

为了决定磁矩,必须从(37.30)式中分出与磁场强度$\mathbf{H}$成比例的项:

$$H_1=H_{23},\quad H_2=H_{31},\quad H_3=H_{12},$$

$$H_{ik}=\frac{\partial A_k^{\mathrm{ext}}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i^{\mathrm{ext}}}{\partial x^k}\to i(q_iA_k^{\mathrm{ext}}(q)-q_kA_i^{\mathrm{ext}}(q)).$$

首先研究式(37.30)中的主要项,当

$$\Gamma^n = \gamma^n, \quad 和 \quad d = 1.$$

与外场相互作用的能量(37.30)为

$$E = -\sum_n j^n A_n^{ext}, \tag{37.31}$$

其中

$$j^n = e\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\gamma^n v^{\nu,+}(\mathbf{k}). \tag{37.32}$$

为了由此式得到磁矩,应该过渡到非相对论极限. 当 $\mathbf{k} \to 0$, $k^0 > 0$ 时正电子分量 $v_1$ 和 $v_2$ 和电子分量 $v_3$ 和 $v_4$ 相比为很小(参看 (7.8)),其数量级为 $|\mathbf{k}|/2k^0$. 用 $v_{II}$ 表示电子分量,$v_I$ 表示正电子分量,即

$$\left.\begin{aligned} v^+ &= (v_I, v_{II}), \\ v^{*-} &= (v_I^*, v_{II}^*), \end{aligned}\right\} \tag{37.33}$$

注意,根据(6.19)式,

$$j^n = e(\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\gamma^n v^{\nu,+}(\mathbf{k})) = ev^{*\nu,-}(\mathbf{k}')a_n v^{\nu,+}(\mathbf{k}), \quad 当 \quad n = 1, 2, 3,$$

因为在"分块"表示(37.33)中

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{37.34}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 为二阶 Pauli 旋量矩阵,所以有

$$\mathbf{j} = e(v_I^{*\nu}(\mathbf{k}')\boldsymbol{\sigma}v_{II}^{\nu}(\mathbf{k})) + e(v_{II}^{*\nu}(\mathbf{k}')\boldsymbol{\sigma}v_I^{\nu}(\mathbf{k})). \tag{37.35}$$

现在注意由 Dirac 方程得到的关系式:

$$(k^0 + m)v_I = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})v_{II},$$
$$v_I^*(k^0 + m) = v_{II}^*(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}),$$

而且计及当在小 $\mathbf{k}$ 极限时,

$$k^0 + m \approx 2m,$$

得到

$$j_a = \frac{e}{2m} v_{II}^{*\nu}[(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}')\sigma_a + \sigma_a(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})]v_{II}^{\nu}. \tag{37.36}$$

将 (37.36) 式代入 (37.31) 式,考虑到由于外界场为纯粹磁性 $A_0^{ext} = 0$, 而且根据(6.19)式,

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2,$$

我们得到

$$E = \mathbf{j}\mathbf{A}^{ext} = -\frac{e}{2m} v_{II}^{*\nu}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}v_{II}^{\nu} - \frac{e}{m} v_{II}^{\nu}(\mathbf{k}'\mathbf{A}^{ext}(q))v_{II}^{\nu}. \tag{37.37}$$

第二项含有外界势,而和磁矩沒有关系. 第一项相应于电子的磁矩

$$M = \mu_0 v_{II}^*\sigma v_{II}, \tag{37.38}$$

其中 $\mu_0$ 为 Bohr 磁子:

$$\mu_0 = \frac{e}{2m}. \tag{37.39}$$

下面我们来讨论辐射修正. 为了计算对 $\mu_0$ 的一次修正,必须研究公式 (37.30) 中出

现的乘积 $\Gamma^n d$ 的 $e^2$ 阶项. 但是，显然，因为我们关心的是对 $A^{\text{ext}}$ 导数的线性项，而 $d(q)$ 在 $q=0$ 邻近的展开式是从二次项开始，所以实际上应该只研究对 $\Gamma^n$ 的修正.

根据(32.26)式，表式

$$\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\Gamma(k', k|\mathbf{k}'-\mathbf{k})v^{\nu,+}(\mathbf{k}),$$

在 $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$ 小值极限时，正确到 $e^2$ 项，可以表示为

$$\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\gamma^n v^{\nu,+}(\mathbf{k})+\frac{e^2}{16\pi^2 m}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k}')\gamma^n\hat{q}v^{\nu,+}(\mathbf{k}).$$

如同刚才所证明了的，第一项为 Bohr 磁子，而第二项给出

$$\Delta E=\frac{e}{2m}\frac{e^2}{8\pi^2}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})\hat{A}^{\text{ext}}(q)\hat{q}v^{\nu,+}(\mathbf{k})=$$

$$=-\mu_0\frac{e^2}{8\pi^2}\bar{v}^{\nu,-}(\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}(q))v^{\nu,+}(\mathbf{k}).$$

将此式化为非相对论极限时，四行四列矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 利用"分块"表示(37.34)，可以用二行二列的 Pauli 矩阵以对角形式表示. 结果，我们得到

$$\Delta E=-\mu_0\frac{e^2}{8\pi^2}v_{\text{II}}^{*}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})v_{\text{II}}=-\mu_0\frac{e^2}{8\pi^2}(\mathbf{MH}).$$

根据这一表式，$e^2$ 阶的辐射修正给出电子的附加磁矩，即为

$$\Delta\mu=\mu_0\frac{e^2}{8\pi^2}=\mu_0\frac{\alpha}{2\pi}=0.001161\mu_0.$$

这一结果首先由 Schwinger (1949) 求得. Karplus 和 Kroll (1950) 作出了 $e^4$ 阶近似项的同样计算. 他们的结果

$$\mu=\mu_0\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}-2.97\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)=1.001145\mu_0$$

与最精确的实验测量值 (König, Prodell, Kusch (1952)) 达到了极好的符合:

$$\mu=(1.001146\pm0.000012)\mu_0.$$

## §38. 含有辐射修正的 Dirac 方程

### 38.1. 电子的广义波函数

我们现在所提出的问题是求在已知外界电磁场 $A^{\text{ext}}(x)$ 中单电子的运动方程.

在经典理论中，非量子化的电子-正电子场的自旋波函数 $\psi(x)$ 的方程，可以利用对于系统的总拉格朗日函数密度的变分原理获得，总拉格朗日函数密度等于电子-正电子自由场的拉格朗日函数密度及 $\psi(x)$ 场与外场 $A^{\text{ext}}$ 相互作用的拉格朗日函数密度之和，即

$$\mathscr{L}(x)=\frac{i}{2}\sum_n\left(\bar{\psi}(x)\gamma^n\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^n}-\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right)-$$

$$-m\bar{\psi}(x)\psi(x)+e\bar{\psi}(x)\hat{A}^{\text{ext}}(x)\psi(x). \tag{38.1}$$

对于这样的拉格朗日函数密度，由变分原理可以求出著名的 Dirac 方程

$$(i\hat{\partial}+e\hat{A}^{\text{ext}}-m)\psi(x)=0. \tag{38.2}$$

根据这一方程，相对论量子力学当时在解释电子的磁性，计算氢原子能级的精细结构等方面，曾经取得了很大成就.

但是，这一方程并未考虑到量子化的特殊效应，例如，真空极化，虚粒子偶的产生及其它等等. 因此，在量子场论中应该适当地推广这个方程. 为了解决所提出的问题，我们先来研究自由的非相互作用的电子-正电子场如何在量子理论中描述. 这里，有确定的动量 $\mathbf{p}$ 及确定的自旋方向的单电子态，将用以下的函数来描述：

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} a_\nu^{*+}(\mathbf{p})\Phi_0. \tag{37.25}$$

一般单电子态是由这些"单纯"态迭加而得到：

$$\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \sum_\nu \int c_\nu(\mathbf{p}) a_\nu^{*+}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}\Phi_0. \tag{38.3}$$

引入表式

$$\Phi_0^* \psi(x)\Phi_1 = (2\pi)^{3/2} \sum_\nu \int c_\nu(\mathbf{p})\Phi_0^* a_\nu^{*+}(\mathbf{p})\Phi_0 d\mathbf{p}. \tag{38.4}$$

而且注意到，由于对易关系

$$\psi(x)a_\nu^{*+}(\mathbf{p}) + a_\nu^{*+}(\mathbf{p})\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} v^{\nu,-}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \quad (p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}).$$

因此

$$\Phi_0^* \psi(x)\Phi_1 = \int e^{-ipx} \sum_\nu v^{\nu,-}(\mathbf{p}) c_\nu(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \tag{38.5}$$

因为根据定义，

$$(\hat{p} - m) v^{\nu,-}(\mathbf{p}) = 0,$$

可以看出，非量子化旋量

$$\psi(x) = \Phi_0^* \psi(x)\Phi_1 \tag{38.6}$$

满足自由场的 Dirac 方程

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0.$$

由表式 (38.5) 还可以推出，旋量 $\psi(x)$ 完全决定振幅 $c_\nu(\mathbf{p})$，因此，也就决定状态 $\Phi_1$. 尤其是，在这一状态的电子具有一定的能量 $E > 0$，则

$$c_\nu(\mathbf{p}) = f_\nu(\mathbf{p})\delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - E),$$

而且，从(38.5)式获得

$$\psi(x) = e^{-iEx^0}\chi(\mathbf{x}). \tag{38.7}$$

在作了上述这些预备说明以后，下面将讨论我们感到有兴趣的问题，并为了得到表征单电子态的非量子化旋量，我们将推广 (38.6) 式. 这里态振幅 $\Phi_0$, $\Phi_1$ 显然应该用 $\Phi_0(g)$, $\Phi_1(g)$ 来代替. 作为推广 $\psi(x)$ 的定域性算符，我们自然地选择 $\psi(x; g)$. 为了消除对 $g$ 的依赖关系，姑且只讨论使

$$g_x(y) = 1, \quad 当 \quad y \lesssim x \tag{38.8}$$

的 $g = g_x(y)$，此时由于 § 36 中一般结果，表式

$$\varphi(x) = \Phi_0^*(g)\psi(x; g)\Phi_1(g) \tag{38.9}$$

是非量子化旋量，它与特殊选定的满足条件(38.8)的函数 $g$ 无关.

首先，我们来讨论当外界电磁场不存在，因而存在着平移不变性的情况. 研究某一平

移 $L$，

$$x \to x + a,$$

并且注意到，根据矩阵 $S(g)$ 的变换法则(17.21)，

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^{\dagger},$$

而按算符 $\psi(x)$ 在平移变换时的变换法则(参看(9.9)式及(2.7)式)，

$$\psi(Lx) = U_L \psi(x) U_L^{\dagger},$$

根据定义(36.35)，有下列关系：

$$\psi(Lx, Lg) = U_L \psi(x; g) U_L^{\dagger},$$

或

$$\psi(Lx, g) = U_L \psi(x; L^{-1}g) U_L^{\dagger}.$$

但是，对于无穷小平移 $a = \delta a$，有

$$U_L = 1 + \delta U_L, \quad \delta U_L = i(P \cdot \delta a).$$

因此，与(9.12)式相应，有

$$ig^{nn} \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x^n} = [\psi(x; g), P_0^n] + ig^{nn} \int \frac{\delta \psi(x; g)}{\delta g(y)} \frac{\partial g(y)}{\partial y^n} dy.$$

由于(38.8)式，

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y^n} = 0, \quad \text{当 } y \lesssim x \text{ 时},$$

且根据(36.16)式，

$$i \frac{\delta \psi(x; g)}{\delta g(y)} = [H(x; g), \psi(x; g)], \quad \text{当 } y \gtrsim x \text{ 时}.$$

由此有

$$ig^{nn} \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x^n} = \left[\psi(x; g), \left(P_0^n - g^{nn} \int H(y; g) \frac{\partial g(y)}{\partial y^n} dy\right)\right].$$

因而根据(36.4)式，我们得到

$$ig^{nn} \frac{\partial \psi(x; g)}{\partial x^n} = [\psi(x; g), P^n(g)].$$

从而有

$$ig^{nn} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n} = \Phi_0^*(g) \psi(x; g) P^n(g) \Phi_1(g) - \Phi_0^*(g) P^n(g) \psi(x; g) \Phi_1(g).$$

研究当电子状态 $\Phi_1(g)$ 具有一定的能量-动量四维矢量的情形. 此时

$$P^n(g) \Phi_1(g) = p^n \Phi_1(g).$$

另方面，对于真空态总有

$$P^n(g) \Phi_0(g) = 0, \quad \Phi_0^*(g) P^n(g) = 0.$$

因此

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^n} = -ig^{nn} p^n \varphi(x),$$

而且

$$\varphi(x) = Ce^{-ipx} \quad (C = \text{const}, p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}).$$

因为，$\varphi(x)$ 还具有旋量的变换性质，故可得到

$$(i\hat{\partial} - m)\varphi(x) = 0. \tag{38.10}$$

在单电子态 $\Phi_1(g)$ 有确定的能量-动量四维矢量时，以上方程是满足的. 由于任何单电子状态可以由这种类型的态迭加而成，我们看到，在一般情况下，Dirac 方程也是满足的.

最后，讨论外界电磁场存在时的情况. 如果这外场与时间无关，对时间移动将保持不变；因此，重复上面的论述，我们可以相信，如果在所讨论的单电子态有一定的能量 $E$，则

$$\varphi(x) = e^{-iEx_0}\chi(\mathbf{x}).$$

这样，定常的单电子态的能级应该从一个本征值问题的解答中求得.

## 38.2. 广义 Dirac 方程

将(38.10)式代入广义 Dirac 方程，我们已得到上述问题的解. 为了实际上建立这一方程，我们回到公式(38.9). 将表式(36.35)代到其中，我们得到

$$\varphi(x) = \frac{1}{ig(x)}\Phi_0^* S^\dagger(g)\frac{\delta S(g)}{\delta\bar{\eta}(x)}\Phi_1,$$

其中 $\Phi_0$ 和 $\Phi_1$ 分别是相互作用不存在时的真空态和单电子态.

作通常的极限过渡 $g \to 1$，求得

$$\varphi(x) = \frac{1}{i}\Phi_0^* S^\dagger \frac{\delta S}{\delta\bar{\eta}(x)}\Phi_1, \tag{38.11}$$

但是

$$\frac{\delta\mathscr{L}(x)}{\delta\bar{\eta}(x)} = i\psi(x),$$

由此得到

$$\frac{\delta S}{\delta\bar{\eta}(x)} = iT(\psi(x)S). \tag{38.12}$$

为了在一开始就消除通常的发散，我们认为，这里的 $T$ 乘积是这样重新定义的，即使(38.12)式不含有紫外无穷大. 因此，有

$$\varphi(x) = \Phi_0^* S^\dagger T(\psi(x)S)\Phi_1 = \frac{\Phi_0^* T(\psi(x)S)\Phi_1}{S_0},$$

其中 $\Phi_1$ 由公式(38.3)给出.

由此我们看到，决定 $\varphi(x)$ 的图形可直接由下列没有发散的 Green 函数的相应图形而得到：

$$G(x, y|A^{\text{ext}}) = i\frac{\Phi_0^* T(\psi(x)\bar{\psi}(y)S)\Phi_0}{S_0},$$

其办法是把射入线因子

$$i\Phi_0^* T(\psi(x)\bar{\psi}(z))\Phi_0 = S^c(x - z)$$

换成“外”因子

$$\Phi_0^*\psi(x)\Phi_1 = \int e^{-ipx}\sum_\nu v^\nu{}^-(\mathbf{p})c_\nu(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \psi(x).$$

因此，$\varphi(x)$ 与 $G$ 之间的关系可以写成下式：

$$\varphi(x) = \int \frac{\Phi_0^* T(\psi(x)\bar{\psi}(y)S)\Phi_0}{S_0} \frac{[S^c(y-\tau)]^{-1}}{i}\psi(\tau)d\tau dy$$

$$= \int G(x, y|A^{ext})S^{c-1}(y-\tau)\psi(\tau)dyd\tau. \tag{38.13}$$

在§34中根据广义 Wick 定理,我们得到电子 Green 函数的 Schrödinger 方程,它的积分形式(34.46)可用记号表为如下形式:

$$G = S^c - eS^c\hat{\mathfrak{A}}G + S^cM'G.$$

将此式代入方程(38.13)中,写成形式

$$\varphi = G\frac{1}{S^c}\psi,$$

我们得到

$$\varphi = (S^c - eS^c\hat{\mathfrak{A}}G + S^cM'G)\frac{1}{S^c}\psi = \psi - eS\hat{\mathfrak{A}}\varphi + S^cM'\varphi,$$

也就是

$$\varphi(x) = \psi(x) - e\int S^c(x-y)\mathfrak{A}(y)\varphi(y)dy + \int S^c(x-y)M'(y, z)\varphi(z)dydz. \tag{38.14}$$

对式(38.14)运用 Dirac 算符,考虑到 $\psi(x)$ 满足自由场的 Dirac 方程,我们求出 $\varphi(x)$ 的方程

$$(i\hat{\partial} + e\hat{\mathfrak{A}}(x))\varphi(x) - \int M(x, y)\varphi(y)dy = 0, \tag{38.15}$$

此方程首先由 Schwinger (1951б) 获得. 记住,这里 $M(x, y)$ 表示§34.3中所引进的质量算符,根据(34.44)式,它的形式为

$$M(x, y) = m\delta(x-y) - ie^2\sum_{k,l}\gamma^k\int G(x, z)\Gamma^l(z, y|\xi)D_{kl}(\xi, x)dxd\xi, \tag{38.16}$$

此外还有

$$\mathfrak{A}(x) = \frac{1}{S_0}\langle T[(A(x) + A^{ext}(x))S]\rangle_0. \tag{38.17}$$

现在很清楚,在与量子电磁场的相互作用消失的范围内 ($e\to 0$, $eA^{ext}$ 有限[1]),我们从(38.15)式求出在外场中经典电子的 Dirac 方程

$$(i\hat{\partial}_x + e\hat{A}^{ext}(x) - m)\varphi(x) = 0.$$

这样,(38.15)式代表含有辐射修正的 Dirac 方程. 可以看出,这些辐射修正属于二种不同类型. $\mathfrak{A}$ 项是由外场势和真空中"感应"场的有效平均势组成. 这一项含有与真空极化相关的对 $A^{ext}$ 的修正. 量 $M(x, y)$ 表示质量算符,其中包括自能的效应. 这些量对 $e^2$ 的低阶可以写成形式(认为 $e^2 \ll 1$,而 $eA^{ext}$ 有限)

$$M(x, y) = m\delta(x-y) - ie^2\sum_{k,l}\gamma^k\int S^c(x, z|A^{ext})\gamma^l\delta(z-y)\delta(z-\xi)\times$$

1) 此处我们所考虑的情况,即电荷 $e$ 虽然很小,而它与外界电磁场的相互作用 $eA^{ext}$ 并不小. 最简单的例子是电子在具有大电荷 $Z$ 的核 Coulomb 场中的运动.此时

$$eA^{ext}\sim Ze^2\sim 1 \quad 当 \quad Z \gg 1.$$

$$\times D^c_{kl}(\xi - x)d\xi dz = m\delta(x-y) - ie^2\sum_{k,l}\gamma^k S^c(x, y|A^{\text{ext}})\gamma^l D^c_{k,l}(y-x), \tag{38.18}$$

而且

$$\mathfrak{A}_k(x) = A^{\text{ext}}_k(x) - ie^2\sum_{m,n}\int \text{Sp}[S^c(y-\tau)\gamma^m S^c(\tau - y)\gamma^n]\times$$
$$\times D^c_{nk}(y-x)A^{\text{ext}}_m(\tau)dyd\tau. \tag{38.19}$$

因此，当考虑到 $e^2$ 阶的修正，广义 Dirac 方程(38.15)可以写成形式为

$$\left(i\frac{\hat\partial}{\partial x} + e\hat A^{\text{ext}}(x) - m\right)\varphi(x) -$$
$$- ie^2\sum_{k,m,n}\gamma^k\varphi(x)\int dyd\tau D^c_{kn}(x-y)\text{Sp}[S^c(y-\tau)\gamma^m S^c(\tau-y)\gamma^n]eA^{\text{ext}}_m(\tau) +$$
$$+ ie^2\sum_{k,l}\int dy\gamma^k S^c(x, y|A^{\text{ext}})\gamma^l D^c_{kl}(y-x)\varphi(y) = 0, \tag{38.20}$$

其中 $S^c(x, y|A^{\text{ext}})$ 是在已知外场 $A^{\text{ext}}$ 中运动着的经典粒子的 Green 函数. 根据定义，这一函数满足方程：

$$\left(i\frac{\hat\partial}{\partial x} + e\hat A^{\text{ext}} - m\right)S^c(x, y|A^{\text{ext}}) = -\delta(x-y), \tag{38.21}$$

而且它表示有两条外电子线及任意条外光子线（相当于已知场 $A^{\text{ext}}$，图 53）的图形之和. 可以从表式

$$S^c(x, y|A^{\text{ext}}) = -\frac{1}{i\hat\partial - m + e\hat A^{\text{ext}}} = \frac{1}{m - i\hat\partial - e\hat A^{\text{ext}}}$$

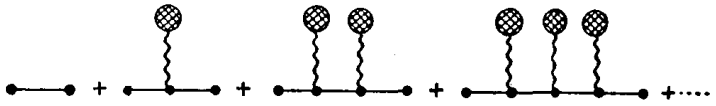


图 53

按 $A^{\text{ext}}$ 展开的幂级数形式上求得 $S^c(|A^{\text{ext}})$ 按图 53 的展开式：

$$S^c(x, y|A^{\text{ext}}) = S^c(x-y) + e\int S^c(x-z)\hat A^{\text{ext}}(z)S^c(z-y)dz +$$
$$+ e^2\int S^c(x-z)\hat A^{\text{ext}}(z)S^c(z-t)\hat A^{\text{ext}}(t)S^c(t-y)dzdt + \cdots \tag{38.22}$$

方程(38.20)可以用来计算束缚态中能级的辐射修正.

### 38.3. Lamb 能级移动

计算氢原子中电子能级的辐射移动问题——即所谓 Lamb 移动，是这类问题中的重要例子. 为了计算超精细结构，我们来考察电子在核的 Coulomb 场中的运动. 在这种情况，

$$\left.\begin{aligned} A^{\text{ext}}_n(x) &= \delta_{n0}A_0(\mathbf{x}), \\ A_0(\mathbf{x}) &= \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \end{aligned}\right\} \tag{38.23}$$

或者在动量表象中为

$$A_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}A_0(\mathbf{q})d\mathbf{q}, \tag{38.24}$$

$$A_0(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{(2\pi)^{3/2}|\mathbf{q}|^2}. \tag{38.25}$$

在这种情况下，函数 $\varphi(x)$ 的形式如式(38.10)，将式(38.10)代入式(38.15)后，可以由以下方程求出能量 $E$：

$$(E\gamma^0 - i\partial\boldsymbol{\gamma} + e\hat{\mathfrak{A}}(x))\chi(\mathbf{x}) = \int e^{iE(x^0-y^0)}M(x, y)\chi(\mathbf{y})dy, \tag{38.26}$$

其中 $E$ 写成对 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 的幂级数：

$$E = E_0 + \alpha E_1 + \cdots \tag{38.27}$$

是便利的，这里选择没有辐射修正的情形作为零级近似. 在此近似下，方程

$$(E_0\gamma^0 - i\partial\boldsymbol{\gamma} + e\gamma^0 A_0(\mathbf{x}) - m)\chi_0(\mathbf{x}) = 0 \tag{38.28}$$

是电子在核的 Coulomb 场中运动的一般 Dirac 方程，而函数 $\chi_0$ 和固有能 $E$ 相当于氢能级的精细结构. 显然，对 $E$ 的附加项就是所求的 Lamb 能级移动，它由辐射修正引起.

$E_1$ 的第一次修正的计算可以在方程(38.20)的基础上进行. 将式(38.25)和式(38.27)代入其中，并考虑式(38.28)，将阶为 $e^2$ 之项相等起来，化为动量表象

$$\chi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\chi(\mathbf{p})d\mathbf{p},$$

而从 $\chi(x)$ 的左边乘上共轭旋量 $\bar{\chi}(\mathbf{p})$，使

$$\bar{\chi}(\mathbf{p})\gamma^0\chi(\mathbf{p}) = \chi^*(\mathbf{p})\chi(\mathbf{p}) = 1,$$

我们发现 $E_1$ 可以表示为二项之和，其中一项 $E_1'$ 相当于对质量算符的辐射修正，而第二项 $E_1''$ 相当于真空极化的辐射修正：

$$\alpha E_1 = E_1' + E_1'', \tag{38.29}$$

其中

$$\begin{aligned} E_1' &= (2\pi)^{-3/2}\bar{\chi}(\mathbf{p})\int d\mathbf{x}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\int M'(x, y)dy e^{iE(x^0-y^0)}\chi(\mathbf{y}) = \\ &= \frac{e^2}{i(2\pi)^{3/2}}\bar{\chi}(\mathbf{p})\int dy^0 e^{iE(x^0-y^0)}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\sum_{k,l}\gamma^k S^c(x, y|A^{\mathrm{ext}})\times \\ &\quad\times\gamma^l D_{kl}(y-x)\chi(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{38.30}$$

而

$$E_1'' = -\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\bar{\chi}(\mathbf{p})\int d\mathbf{x}e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\sum_{k,n,m}\gamma^k\chi(\mathbf{x})\int D^c_{k,n}(x-y)\Pi^{nm}(y-\tau)A^{\mathrm{ext}}_m(\tau)dyd\tau, \tag{38.31}$$

其中 $\Pi^{nm}(y-\tau)$ 是在第四章中已经研究过了的二阶极化算符. 根据 (32.3) 式和 (32.8) 式，消除发散以后，这一算符的形式为

$$\Pi^{nm}(y) = (2\pi)^{-4}\int e^{iky}\Pi^{nm}(k)dk, \tag{38.32}$$

其中

$$\Pi^{nm}(k) = \frac{e^2}{4\pi^2}(g^{mn}k^2 - k^n k^m)I(k^2), \tag{38.33}$$

而

$$I(k^2) = -\frac{k^2}{4m^2}\int_0^1 \frac{z^2\left(1-\frac{z^2}{3}\right)}{1-\frac{k^2}{4m^2}(1-z^2)}dz. \tag{38.34}$$

表式(38.30)给出辐射能级移动的基本贡献. 将 $S^c(x, y|A^{ext})$ 的展开式(38.22)代入(38.30)中,我们得到,第一项化为电子自能类型的发散表达式,它完全被 $T$ 乘积中相应的重新定义项所抵消(参看(38.12)). 第二项为下式

$$E_1'^{(2)} = \frac{e^3}{i(2\pi)^{3/2}}\bar{\chi}(\mathbf{p})\int dy^0 e^{iE(x^0-y^0)}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}e^{-i\mathbf{px}}\times$$

$$\times\sum_{k,l}\int dz\gamma^k S^c(x-z)\hat{A}^{ext}(z)S^c(z-y)\gamma^l D^c_{lk}(y-x)\chi(\mathbf{y}) =$$

$$= -\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\bar{\chi}(\mathbf{p})\int dy^0 e^{iE(x^0-y^0)}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}e^{i\mathbf{px}}\int dz\sum_n \Lambda^n(x, y|z)A_n^{ext}(z)\chi(\mathbf{y}), \tag{38.35}$$

其中 $\Lambda^n(x, y|z)$ 是 § 25.1 中所引入的顶点函数;当消除紫外发散后,它可以表为下式

$$\Lambda^n(x, y|z) = (2\pi)^{-8}\int e^{ipx+iqz+iky}\Lambda^n(p, q|k)\delta(p+q+k)dpdqdk, \tag{38.36}$$

而 $\Lambda^n(p, q|k)$ 决定于式(32.28),正如上面所确立了的,后者含有红外奇点. 为了消除这一奇点,应该讨论质量算符中其次的项. 读者如对计算细节感到兴趣,请参阅原始研究文章[1];此处我们注意到 $E_1'$ 中的主要贡献是由相当于外场 $A_0(\mathbf{q})$ 的小动量 $\mathbf{q}^2 \ll m^2$ 的非相对论项所给出,Bethe (1947) 首先计算此值.

表式(38.35)的主要特点是它和 $\chi$, $\bar{\chi}$ 的形式明显相关,以致氢原子中不同能级的电子的 Lamb 移动值不相同. 就因为这一情况,使得实验上观察到 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2P_{\frac{1}{2}}$ 的能级分裂;而根据 Dirac 单电子理论这些能级是重合的.

真空极化项 (38.31) 和这不相同,它导致和波函数 $\chi$, $\bar{\chi}$ 无关的移动. 事实上将(38.23)、(38.24)、(38.32)、(38.33)等式代到(38.31)式中,我们得到

$$E_1'' = \frac{e\alpha}{\pi}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int I(-\mathbf{k}^2)A_0(\mathbf{k})d\mathbf{k}, \tag{38.37}$$

其中 $I(-\mathbf{k}^2)$ 决定于当 $k^2 = -\mathbf{k}^2$ 时的(38.24)式.

最后我们注意到,关于氢的 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级移动的计算值,当计及电子和核的磁偶极子场的相互作用效应以及核结构和核质量的有限性对超精细结构的影响,精确到 $Z\alpha^3$ 阶,其值为 1057.8 兆赫,这和 Triebwasser, Dayhoff 和 Lamb (1953) 所得的实验值 1057.77 ± 0.1 兆赫达到良好的符合.

---

1) Karplus, Klein, Schwinger (1952); Baranger, Bethe, Feynman (1953).

## 38.4. 结语

自然，本节第一小段中所叙述的方法的应用，并不限于研究氢的 Lamb 能级移动，可将这一方法毫无困难推广到含有任意数目的电子和正电子系统.

例如，正电子的波函数所具有的形式显然为

$$\bar{\varphi}(x)=\frac{1}{i}\Phi_0^* S^\dagger \frac{\delta S}{\delta \eta(x)}\Phi_1=\frac{\Phi_0^* T(\bar{\psi}(x)S)\Phi_1}{S_0}, \tag{38.38}$$

其中 $\Phi_1$ 为一个正电子的态振幅. 注意到，$\bar{\varphi}(x)$ 和一个电子的 Green 函数不同，其中用 $\bar{\psi}(x)$替换了外射线因子 $S^c$，再进行与上述类似的讨论，就可以得到含有辐射修正的 $\bar{\varphi}(x)$ 的 Dirac 方程.

同样，可以引进二个电子-正电子的波函数. 为了研究电子-正电子偶，引进下量较为方便：

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{i^2}\Phi_0^* S^\dagger \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\eta}(x)\delta\eta(y)}\Phi_2=\frac{\Phi_0^* T(\psi(x)\bar{\psi}(y)S)\Phi_2}{S_0}, \tag{38.39}$$

其中 $\Phi_2$ 是具有一个电子和一个正电子的态振幅. 相应地修改双电子的 Green 函数方程

$$G(x,x',y,y')=\frac{\Phi_0^* T(\psi(x)\psi(x')\bar{\psi}(y)\bar{\psi}(y')S)\Phi_0}{S_0},$$

可以得到 $\varphi(x,y)$ 的方程.

显然，引进 $S$ 矩阵的较高阶变分导数的矩阵元来进行讨论，可以将所得的结果推广到任意的多电子系统.

# 第七章　泛函平均值法

## § 39. Green 函数的連續积分表示式

### 39.1. 引言

我们现在开始来讨论超出微扰理论的局限的各种尝试. 在这些尝试中，本章所叙述的方法是有重大意义的，此法基于连续积分的应用，是由 Feynman (1947) 引进来的. 我们将要证明，这里能够得到含有辐射修正的总 Green 函数的封闭式. 可以认为这些表式是在已知外场中运动着的粒子的经典 Green 函数对此外场的量子起伏求平均值的公式. 泛函空间的连续积分就是由于这一求平均值的过程而引起的.

应该指出，在这一领域中的研究离开完成还很远，其中尚有一系列的既有技术性的、也有原则性的沒有解决的问题.

Green 函数可以用不同方法表示成连续积分的形式. 其中一个方法[1]是将 § 34 中所讨论的 Green 函数的变分方程形式上加以积分. 但是，我们将叙述另一个照作者看来更简单的途径 (Боголюбов (1954))，它的出发点是将 Green 函数表为时序乘积的眞空預期值，同时将对 Bose 子的眞空求平均的运算解释为泛函积分.

当讨论泛函积分法在电动力学 Green 函数梯度变換问题 (§ 42) 中的应用，以及在研究 Bloch-Nordsieck 模型 (§ 43) 中的应用时，我们将按照 Свидзинский 的论文 (1955) 来叙述.

这样，我们将从 § 34 中所求到的含有辐射修正的总 Green 函数的表式出发，此函数表示为相应算符及 $S$ 矩陣的时序乘积的眞空預期值形式. 这里我们是指电子 Green 函数表式

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = i \frac{\langle T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)S)\rangle_0}{S_0}, \tag{34.9}$$

以及光子 Green 函数表式

$$D_{mn}(x, y) = \frac{1}{i} \frac{\langle T(A_m(x)A_n(y)S)\rangle_0}{S_0}, \tag{34.10}$$

此处

$$S = S(1) = T\left(\exp i \int \mathscr{L}(x)dx\right),$$

1) Edwards, Peierls (1954), Symanzik (1954), Гельфанд, Минлос (1954), Фрадкин (1954), Халатников (1955).

而在旋量电动力学中，相互作用拉格朗日函数密度 $\mathscr{L}(x)$ 的形式为

$$\mathscr{L}(x) = e{:}\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x){:}. \tag{20.3}$$

对于其他理论也能写出相应的表式. 例如，在 § 33 中所讨论的赝标量介子理论情况，核子 Green 函数 $G$ 和介子 Green 函数 $\Delta$ 具有如下的形式：

$$G(x, y) = i\frac{\langle T(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)S)\rangle_0}{S_0}, \tag{39.1}$$

$$\Delta(x, y) = i\frac{\langle T(\varphi(x)\varphi(y)S)\rangle_0}{S_0}, \tag{39.2}$$

而且根据(33.14)式，

$$\mathscr{L}(x) = g{:}\bar{\Psi}(x)\Gamma\Psi(x)\varphi(x){:} + M(x), \tag{39.3}$$

其中 $M$ 是与旋量场 $\Psi$、$\bar{\Psi}$ 无关的那部分拉格朗日函数密度.

当计算(34.9)、(34.10)、(39.1)、(39.2)类型的真空平均值时，对 Bose 子及 Fermi 子的平均可以独立进行，因为相应的表式是用对每一真空的平均值的乘积的线性形式来表示的. 因此，我们先来讨论只含有 Bose 场算符式的真空平均值的计算程序.

我们提出求任意泛函 $F$ 的真空平均值 $\langle T(F(\varphi))\rangle_0$ 问题，此处 $F$ 与 Bose-Einstein 量子化的实场算符函数 $\varphi$ 有关. 此时我们认为算符 $\varphi$ 的时序收缩为已知，而在动量表象中具有形式

$$\overbrace{\varphi(p)\varphi(p')} = -i\delta(p + p')\Delta^c(p). \tag{39.4}$$

我们先讨论当 $F$ 是指数函数形式的特殊情况，而且要计算下式：

$$I = \left\langle T\left(\exp i\int v(p)\varphi(p)dp\right)\right\rangle_0, \tag{39.5}$$

其中 $v(p)$ 是任意函数.

## 39.2. $\left\langle T\left(\exp i\int v\varphi\, dp\right)\right\rangle_0$ 的计算

为了计算 $I$，我们注意到与 Bose 场 $\varphi$ 有关的任何算符性的 $T$ 型泛函 $F$ 化为正规形式时，可以通过下述程序来完成[1]. 在 $F$ 中用量 $\varphi'$ 来代替 $\varphi$，而 $\varphi'$ 在动量表象中具有形式[2]

$$\varphi'(k) = \varphi(k) + \int \overbrace{\varphi(k)\varphi(k')}\frac{\delta}{\delta\varphi(k')}dk' = \varphi(k) - i\Delta^c(k)\frac{\delta}{\delta\varphi(-k)}. \tag{39.6}$$

经过替代 (39.6) 后，应该认为泛函 $F(\varphi')$ 是对非量子化函数 $\varphi$ 及其泛函导数的通常 $c$ 泛函，并且应该对它进行必要的泛函微分，这时假设 $F$ 右方乘上 1，这一运算结果所得的表式可以认为是将算符函数 $\varphi$ 的泛函 $F$ 写成了正规形式：

---

1) 例如参阅 Anderson (1954).

2) 在 $x$ 表象中相应地有

$$\varphi'(x)\longrightarrow\varphi(x) - i\int\Delta^c(x - x')\frac{\delta}{\delta\varphi(x')}dx'.$$

$$T\left(\int \varphi(k)a(k)dk\int \varphi(k')b(k')dk'\right)\to$$

$$\to\int\left[\varphi(k)-i\Delta^c(k)\frac{\delta}{\delta\varphi(-k)}\right]a(k)dk\int\left[\varphi(k')-i\Delta^c(k')\frac{\delta}{\delta\varphi(-k')}\right]b(k')dk'\cdot 1=$$

$$=\int\varphi(k)a(k)dk\int\varphi(k')b(k')dk'-i\int\Delta^c(k)b(-k)a(k)dk,$$

即

$$T\left(\int\varphi(k)a(k)dk\int\varphi(k')b(k')dk'\right)=$$

$$=\int a(k)dk\int b(k')dk':\varphi(k)\varphi(k'):-i\int a(k)\Delta^c(k)b(-k)dk,$$

上式可以通过直接代入来验证.

当 $F$ 是多项式时，我们容易直接检验上述方案的正确性;从这里可以得出结论，对于任何可以展成幂级数的 $F$，上述方案也是正确的. 此外，我们清楚，为了计算真空平均值，只要在结果中令 $\varphi=0$，即

$$\langle T(F(\varphi))\rangle_0=\left\{F\left(\varphi-i\Delta^c\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)\cdot 1\right\}_{\varphi=0}. \tag{39.7}$$

对积分(39.5)应用方案(39.7)，我们得到，此积分可表示成形式

$$I=\left[\left\{\exp i\int v(p)\left(\varphi(p)-i\Delta^c(p)\frac{\delta}{\delta\varphi(-p)}\right)dp\right\}\cdot 1\right]_{\varphi=0}. \tag{39.8}$$

为了计算(39.8)式，我们来求辅助量

$$U(\lambda|\varphi)=\exp\left(i\lambda\int v(p)\left(\varphi(p)-i\Delta^c(p)\frac{\delta}{\delta\varphi(-p)}\right)dp\right), \tag{39.9}$$

此时显然有

$$I=U(1|0). \tag{39.10}$$

将(39.9)式对参数 $\lambda$ 微分，得到 $U$ 的微分方程为

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial\lambda}=i\int v(p)\left[\varphi(p)-i\Delta^c(p)\frac{\delta}{\delta\varphi(-p)}\right]dpU(\lambda), \tag{39.11}$$

它的解满足初始条件

$$U(\lambda|\varphi)|_{\lambda=0}=U(0|\varphi)=1, \tag{39.12}$$

我们将求如下形式的解:

$$U(\lambda|\varphi)=e^{s(\lambda|\varphi)}. \tag{39.13}$$

将(39.13)式代入(39.11)式中，得到 $s$ 的“偏微分”方程:

$$\frac{\partial s}{\partial\lambda}=\int v(p)\left(iv(p)+\Delta^c(p)\frac{\delta s}{\delta\varphi(-p)}\right)dp. \tag{39.14}$$

为了解此方程，将 $s$ 表示成形式

$$s(\lambda|\varphi)=i\lambda\int v(p)\varphi(p)dp+r(\lambda), \tag{39.15}$$

其中 $r$ 与 $\varphi$ 无关，并满足方程

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = i\lambda \int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp, \tag{39.16}$$

考虑到边界条件，将上式积分后，得到

$$r(\lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp. \tag{39.17}$$

因此有

$$U(\lambda|\varphi) = \exp i\left\{\lambda\int v(p)\varphi(p)dp + \frac{\lambda^2}{2}\int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp\right\}. \tag{39.18}$$

根据(39.7)式及(39.8)式，有

$$I = \left\langle T\left(\exp i\int v(p)\varphi(p)dp\right)\right\rangle_0 = \exp\left[\frac{i}{2}\int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp\right]. \tag{39.19}$$

### 39.3. 连续积分

为了从(39.19)式过渡到泛函积分，我们引进分立的"晶格式"的动量表象，它的基础是动量空间中的有限点，且对于变换

$$p \to -p$$

是对称的.

设 $\Delta p$ 是晶格的四维体积元，则通过引入记号

$$\varphi(p_j) = \varphi_j, \qquad \Delta^c(p_j) = \Delta^c_j, \qquad v(p_j)\Delta p = v_j, \tag{39.20}$$

并考虑到 $\Delta^c$ 是偶的，我们从(39.19)式得到

$$\left\langle T\left(\exp i\sum_j v_j\varphi_j\right)\right\rangle_0 = \exp\left(\frac{i}{2\Delta p}\sum_j v_j\Delta^c_j v_{-j}\right) = \prod_j\left(\exp\frac{i}{2\Delta p}v_j\Delta^c_j v_{-j}\right) =$$

$$= \prod_{j>0}\exp\left(\frac{i}{\Delta p}v_j\Delta^c_j v_{-j}\right). \tag{39.21}$$

注意在分立的动量表象中，$\varphi(x)$ 为实场的条件是

$$\varphi^*(p_j) = \varphi(-p_j),$$

并选择记号系统，使

$$-p_j = p_{-j},$$

令

$$\varphi_j = x_j + iy_j,$$

$$\varphi_{-j} = x_j - iy_j,$$

此处 $j > 0$，而所有的 $x_j$ 和 $y_j$ 为实.

然后，利用 Gauss 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\, e^{i[-a(x^2+y^2)+\lambda x+i\mu y]} = \frac{\pi}{ia}e^{i\frac{\lambda^2-\mu^2}{4a}},$$

(39.21)式右端的乘子可以表成形式：

$$\exp\left(\frac{i}{\Delta p}v_j\Delta^c_j v_{-j}\right) = \frac{i\Delta p}{\pi\Delta^c_j}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_j\int_{-\infty}^{+\infty}dy_j\exp i\left(v_j\varphi_j + v_{-j}\varphi_{-j} - \frac{i\Delta p}{\Delta^c_j}\varphi_j\varphi_{-j}\right) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp i\left(v_j\varphi_j + v_{-j}\varphi_{-j} - \frac{i\Delta p}{\Delta_j^c}\varphi_j\varphi_{-j}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp\left(-\frac{i\Delta p}{\Delta_j^c}\varphi_j\varphi_{-j}\right)} =$$

$$= \int \exp i(v_j\varphi_j + v_{-j}\varphi_{-j})d\varphi_j, \tag{39.22}$$

其中引进记号

$$\int d\varphi_j = \frac{i\Delta p}{\pi\Delta_j^c}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp\left(-\frac{i\Delta p}{\Delta_j^c}\varphi_j\varphi_{-j}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j\, dy_j}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} dy_j \exp\left(-\frac{i\Delta p}{\Delta_j^c}\varphi_j\varphi_{-j}\right)} \exp\left(-\frac{i\Delta p}{\Delta_j^c}\varphi_j\varphi_{-j}\right). \tag{39.23}$$

我们回到(39.21)式,得到

$$\left\langle T\left(\exp i\sum_j v_j\varphi_j\right)\right\rangle_0 = \prod_{j>0}\left(\int \exp i(v_j\varphi_j + v_{-j}\varphi_{-j})d\varphi_j\right) =$$

$$= \int \exp\left(i\sum_j v_j\varphi_j\right)\prod_{j>0} d\varphi_j, \tag{39.24}$$

其中 $d\varphi_j$ 决定于关系式(39.23).

乘积 $\prod_j d\varphi_j$ 表示分立泛函空间中积分的权重. 因为它与 $v_j$ 无关,利用对变量 $v_j$ 的 Fourier 映象,可以得到结论,对于变量为 $\cdots\varphi_j\cdots$ 的任意函数 $F$,(39.24)关系式是成立的,即

$$\langle T[F(\cdots\varphi_j\cdots)]\rangle_0 = \int F(\cdots\varphi_j\cdots)\prod d\varphi_j. \tag{39.25}$$

现在通过缩小晶格元 $\Delta p$ 并增大晶格所占有的四维动量空间的区域,可以完成向连续动量空间的逆过渡. 我们将泛函(连续)积分定义为(39.24)、(39.25)两式右端的相应的极限式,将它用记号

$$\int \cdots d\varphi$$

来表示,也就是使(39.21)、(39.24)、(39.25)等式过渡为极限,我们令

$$\left\langle T\left(\exp i\int v(p)\varphi(p)dp\right)\right\rangle_0 = \exp\left(\frac{i}{2}\int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp\right) =$$

$$= \int \exp\left(i\int v(p)\varphi(p)dp\right)d\varphi, \tag{39.26}$$

而且

$$\langle T(F(\varphi))\rangle_0 = \int F(\varphi)d\varphi, \tag{39.27}$$

此时在(39.26)、(39.27)两式的左端 $\varphi$ 是算符,而在右端代表 $c$ 函数.

可以将上述二个关系式作为连续积分的定义. 这二式可以看作以真空 $T$ 期待值 $\langle T(\cdots)\rangle_0$ 为一方以及依赖于经典 $c$ 场的相应表式对此场的量子起伏取的泛函平均值为另一方的关系式.

有时利用连续积分的另一种写法. 此时考虑到(39.26)式,在公式(39.22)中形式上完成极限过渡,我们得到

$$\int \exp\left(i\int v(p)\varphi(p)dp\right)d\varphi = \frac{\int \exp\left(i\int v(p)\varphi(p)dp + iA_0\right)\delta\varphi}{\int \exp(iA_0)\delta\varphi}, \tag{39.28}$$

其中 $\delta\varphi$ 表示微分乘积 $dx_j\,dy_j$ 的极限,而

$$A_0 = -\frac{1}{2}\int \varphi(p)\frac{1}{\Delta^c(p)}\varphi(-p)dp = \frac{1}{2}\int \varphi(p)(p^2-m^2)\varphi(-p)dp = \int \mathscr{L}_0(p)dp$$

等于自由 Bose 场的作用量. 这样形式地有

$$d\varphi = e^{iA_0}\delta\varphi \Big/ \int e^{iA_0}\delta\varphi. \tag{39.29}$$

容易看出,(39.28)式可以表示为对 $\delta\varphi$ 的 Gauss 积分. 利用关系式(39.26),有

$$\int \exp\left\{i\int v(p)\varphi(p)dp - \frac{i}{2}\int \varphi(p)\frac{1}{\Delta^c(p)}\varphi(-p)dp\right\}\delta\varphi =$$

$$= C\exp\left\{\frac{i}{2}\int v(p)\Delta^c(p)v(-p)dp\right\}, \tag{39.30}$$

其中

$$C = \int \exp\left(-\frac{i}{2}\int \varphi(p)\frac{1}{\Delta^c(p)}\varphi(-p)dp\right)\delta\varphi. \tag{39.31}$$

我们还注意到,公式(39.30)可以用线性代换:

$$\varphi(p) = \varphi'(p) + v(-p)\Delta^c(p)$$

来直接验证.

我们再一次強调,向连续泛函空间的极限过渡只是形式上完成. 为了使这一极限过渡收敛,对于泛函类别和函数空间 $\varphi$ 必须加上的限制的问题,需要分别研究,而在目前离开这一问题的解决还极遙远.

## 39.4. Green 函数的闭式

利用(39.28)式来求 Green 函数的泛函积分形式并沒有困难. 例如我们讨论 Fermi 场和 Bose 场的相互作用系统,它们的相互作用拉格朗日函数密度具有形式:

$$\mathscr{L}(x) = g{:}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\varphi(x){:} + M(x), \tag{39.3}$$

其中 $\Gamma$ 是顶角矩陣(例如,在对称贋标量介子理论中为 $\gamma^5\tau$),而 $M(x)$ 是拉格朗日函数密度中只依赖于 Bose 场 $\varphi(x)$ 的项. $M(x)$ 既可以包含类如 $J(x)\varphi(x)$ 的"经典源"的项,也可以包含类如 $h\varphi^4$ 的非线性项.

我们进一步研究 Fermi 子的 Green 函数

$$G(x,y) = i\frac{\langle T(\psi(x)\bar{\psi}(y)S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}, \tag{34.9}$$

其中

$$S = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(x)dx\right), \tag{34.5}$$

而 $\mathscr{L}(x)$ 决定于关系式(39.3). 注意在表式(34.9)中可令

$$\langle\cdots\rangle = \langle\langle\cdots\rangle_{F_0}\rangle_{B_0}, \tag{39.32}$$

也就是先对 Fermi 子真空 ($F_0$) 求平均值，然后再对 Bose 子真空 ($B_0$) 求平均值. 根据(39.25)式，记住对 Bose 真空求平均值的运算化为泛函求积，在考虑到(39.32)、(34.5)及(39.3)等式后，从(34.9)式得到

$$G(x, y) = \frac{i\int\left\langle T\left[\psi(x)\bar{\psi}(y)\exp\left(ig\int\bar{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\varphi(z)dz\right)\right]\right\rangle_{F_0}\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi}{\int\left\langle T\left[\exp\left(ig\int\bar{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\varphi(z)dz\right)\right]\right\rangle_{F_0}\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi}. \tag{39.33}$$

另一方面，在经典外场 $\varphi$ 中一个 Fermi 子的 Green 函数具有形式

$$G(x, y|\varphi) = i\frac{\left\langle T\left[\psi(x)\bar{\psi}(y)\exp\left(ig\int\bar{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\varphi(z)dz\right)\right]\right\rangle_{F_0}}{S_0(\varphi)}, \tag{39.34}$$

其中

$$S_0(\varphi) = \left\langle T\left[\exp\left(ig\int\bar{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\varphi(z)dz\right)\right]\right\rangle_0, \tag{39.35}$$

因此

$$G(x, y) = \frac{\int G(x, y|\varphi)S_0(\varphi)\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi}{\int S_0(\varphi)\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi}. \tag{39.36}$$

留下的问题只是计算 $S_0(\varphi)$. 为了这一目的，在 $S_0(\varphi)$ 的宗量中引进辅助参数 $\lambda$ 作为 $\varphi$ 的乘子. 此时

$$\frac{\partial S_0(\lambda\varphi)}{\partial\lambda} = ig\int\left\langle T\left[\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\exp\left(i\lambda g\int\bar{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\varphi(z)dz\right)\right]\right\rangle_{F_0}\varphi(x)dx =$$

$$= -g\int \mathrm{SP}\{G(x, x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\}dx\, S_0(\lambda\varphi),$$

此时 $S_0(0) = 1$，而记号 SP 表示对自旋指标以及 Bose 子指标求和. 积分后，我们得到

$$S_0(\varphi) = \exp\left(-g\int_0^1 d\lambda\int dx\,\mathrm{SP}\{G(x, x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\}\right). \tag{39.37}$$

将(39.37)式代到(39.36)式中，求得

$$G(x, y) = \frac{\int G(x, y|\varphi)\exp\left(-g\int_0^1 d\lambda\int dx\,\mathrm{SP}\{G(x, x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\} + i\int M(x)dx\right)d\varphi}{\int\exp\left(-g\int_0^1 d\lambda\int dx\,\mathrm{SP}\{G(x, x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\} + i\int M(x)dx\right)d\varphi}. \tag{39.38}$$

可以没有困难地推出多粒子 Green 函数的类似公式.

由此可见，当计及辐射修正时，Fermi 子的 Green 函数可以从在经典场 $\varphi$ 中运动着的粒子的通常 Green 函数对此场的量子起伏求平均值而得到.

我们来讨论 Bose 子的 Green 函数

$$\Delta(x, y) = i\frac{\langle T(\varphi(x)\varphi(y)S)\rangle_0}{S_0},$$

利用(39.26)、(39.29)、(39.31)和(39.32)式,得到

$$\Delta(x,\ y)=i\frac{\int S_0(\varphi)\varphi(x)\varphi(y)\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi}{\int S_0(\varphi)\exp\left(i\int M(x)dx\right)d\varphi},$$

考虑到(39.37)式,上式给出

$$\Delta(x,\ y)=i\frac{\int\varphi(x)\varphi(y)\exp\left(-g\int_0^1 d\lambda\int dx\,\mathrm{SP}\{G(x,\ x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\}+i\int M(x)dx\right)d\varphi}{\int\exp\left(-g\int_0^1 d\lambda\int dx\,\mathrm{SP}\{G(x,\ x|\lambda\varphi)\Gamma\varphi(x)\}+i\int M(x)dx\right)d\varphi}. \tag{39.39}$$

公式(39.38),(39.39)是 Fermi 子 Green 函数 $G$ 和 Bose 子 Green 函数 $\Delta$ 的封闭式,这些表式中含有在给定经典外场中运动着的 Fermi 子的 Green 函数 $G(x,\ y|\varphi)$.

会产生这样的印象,求 $G$ 和 $\Delta$ 问题这样就化成了求 $G(x,\ y|\varphi)$ 的问题. 但是这里应该强调,即使能够在某一近似下得到 $G(x,\ y|\varphi)$ 的封闭式,这在一般情况已是个极其复杂的问题,何况在(39.38)式和(39.39)式中还留有决不是轻易可求出的泛函积分.

问题在于目前计算泛函积分的技术实际上还没有,唯一可供计算的连续积分或者是 Gauss 积分,或者通过替换泛函宗量后可化成 Gauss 积分;这些积分可以利用 (39.26),(39.30) 类型的公式来计算. 因此,所得到方程的实际用处目前并不很大. Green 函数的连续积分表示式的根本性缺点还在于这些表象与总 Green 函数的因果结构之间的关系还没有找到(关于 Green 函数因果结构较详细的叙述,请参阅第九章 §§ 48, 49).

因此,以下我们只限于讨论上述两个公式在旋量电动力学中的两个应用. 首先,我们讨论当电磁场势作梯度变化时电子 Green 函数的变化;为此不需要算出 $G(x,\ y|A)$ 的显式. 其次,我们研究旋量电动力学中 Bloch-Nordsieck 模型,此处可将解化成 Gauss 型泛函积分,因而可以求出积分的显式.

## §40. 旋量电动力学中电子 Green 函数的梯度变换

### 40.1. 化为横向规范和 Green 函数 $G(x,y|A)$ 的变换

在 § 31 中已经证明,由电磁场势的梯度变换,可以借助于收缩的纵向部分 $d_l$ 的任意改变而将基本收缩 $\overline{AA}$ 从一种形式变成另一种形式. 我们当前的目的是建立当 $d_l$ 改变时旋量电动力学 Green 函数的变换法则. 此时我们从势 $A$ 的任意规范出发;换句话说,我们将认为基本收缩 $\overline{AA}$ 含有任意的纵向部分 $d_l^0$:

$$\overline{A_n(k)A_m(k')}=\frac{\delta(k+k')}{ik^2}\left(g^{mn}-\frac{k_mk_n}{k^2}\right)+\frac{\delta(k+k')}{ik^2}\frac{k_mk_n}{k^2}d_l^0(k^2). \tag{40.1}$$

势 $A$ 可以分解为纵向及横向分量(在四维意义上),也就是可表示成形式

$$A_n(k)=A_n^{\mathrm{tr}}(k)+\chi_n(k), \tag{40.2}$$

其中 $A_n^{\mathrm{tr}}(k)$ 是纯粹横向场,它满足 Lorentz 条件

$$(k \cdot A^{\mathrm{tr}}(k)) \equiv \sum_n k^n A_n^{\mathrm{tr}}(k) = 0, \tag{40.3}$$

而且具有横向形式的收缩

$$\overbrace{A_n^{\mathrm{tr}}(k) A_m^{\mathrm{tr}}(k')} = \frac{\delta(k+k')}{ik^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right). \tag{40.4}$$

在(40.2)式中，$\chi_n(k)$ 项则为纵向分量，而且根据(40.3)式可以表为

$$\chi_n(k) = k_n \frac{(k \cdot A(k))}{k^2}.$$

这样 $\chi$ 具有梯度的结构，由此可见，(40.2)式事实上是电磁场四维势的梯度变换.

对我们重要的是纵向分量 $\chi$ 与横向分量的相互收缩等于零：

$$\overbrace{A_n^{\mathrm{tr}}(k)\chi_m(k')} = 0, \tag{40.5}$$

而算符 $\chi$ 的相互收缩可以表示成形式：

$$\overbrace{\chi_n(k)\chi_m(k')} = \frac{i^2 k_n k'_m}{k^2 \cdot k'^2}(k \cdot \overbrace{A(k))(k' \cdot A}(k')) = i\delta(k+k')F(k^2)k_n k_m, \tag{40.6}$$

其中

$$F(k^2) = \frac{d_l^0(k^2)}{k^2 \cdot k^2}. \tag{40.7}$$

下面我们来讨论当 $A$ 过渡到 $A^{\mathrm{tr}}$ 时 Green 函数的变换. 在 § 32 中已经指明，光子总 Green 函数

$$D(k^2) = -\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right) - \frac{d_l}{k^2}\frac{k_m k_n}{k^2} \tag{32.5}$$

的横向部分 $d(k^2)$ 是梯度不变的，即与 $d_l^0$ 无关，此时因纵向部分 $d_l(k^2)$ 不含辐射修正，因此

$$d_l(k^2) = d_l^0(k^2).$$

至于电子-正电子场算符的基本收缩 $\overbrace{\psi\bar{\psi}}$，它们自然与电磁势的规范无关. 但是电子的总 Green 函数 $G$ 已经不是梯度不变量，因为收缩 $\overbrace{AA}$ 的形式要影响 $G$ 的辐射修正. 在已知外场中电子的 Green 函数也是如此，它的变换法则容易从它所满足的方程

$$\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m + e\hat{A}(x)\right)G(x, y|A) = -\delta(x-y) \tag{40.8}$$

的规范协变性条件来决定. 在这一方程中化为横向势：

$$A_n(x) = A_n^{\mathrm{tr}}(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x^n} = \chi_n\right) \tag{40.9}$$

(显然，此处 $f$ 和 $A$、$A^{\mathrm{tr}}$ 一样是已知的非量子化函数). 令

$$G(x, y|A) = G\left(x, y|A^{\mathrm{tr}} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = R(x)R^{-1}(y)G(x, y|A^{\mathrm{tr}}), \tag{40.10}$$

其中 $R$ 是某一未知函数. 将(40.10)式代到(40.8)式中，而且乘上 $R(y)$，我们得到

$$R(x)\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m + e\hat{A}^{\mathrm{tr}}(x)\right)G(x, y|A^{\mathrm{tr}}) +$$

$$+\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x}R(x)+eR(x)\frac{\hat{\partial}}{\partial x}f(x)\right)G(x,\ y|A^{\mathrm{tr}})=-R(x)\delta(x-y).$$

为了使新变量 $A^{\mathrm{tr}}$ 的方程具有(40.8)的形式,只要假定

$$i\frac{\partial R(x)}{\partial x^n}+eR(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^n}=0,$$

上式给出

$$R(x)=\exp[ief(x)].$$

这样,我们得到在规范变换(40.9)之下,电子在给定外场中 Green 函数的变换法则:

$$G(x,\ y|A)=e^{ie[f(x)-f(y)]}G(x,\ y|A^{\mathrm{tr}}). \tag{40.11}$$

将此式代到总 Green 函数 $G(x,\ y)$ 的泛函积分(39.38)式中,我们即可以得到它的变换法则.

## 40.2. 横向规范时 $G(x,y)$ 的泛函积分

在讨论旋量电动力学中(39.38)类型的电子 Green 函数的泛函表示式时,我们注意到公式(39.36)可以直接推广到这一情况:

$$G(x,\ y)=\frac{\int G(x,\ y|A)S_0(A)dA}{\int S_0(A)dA}, \tag{40.12}$$

其中

$$S_0(A)=\exp\left(-e\int_0^1 d\lambda\int dx\ \mathrm{SP}G(x,\ x|\lambda A)\hat{A}(x)\right). \tag{40.13}$$

(40.12)式中的泛函积分是对势 $A$ 的四个独立分量作积分,而记号 $dA$ 应该理解为分量 $A_0$, $A_1$, $A_2$ 及 $A_3$ 微分的乘积.

我们也清楚,在电磁场的对角型规范情况下, $d_l^0=1$, 而基本收缩

$$D_{mn}^0=-g^{mn}\frac{1}{k^2}$$

是 d'Alembert 算符之逆,这时 $dA$ 可以在形式上表示成

$$dA=e^{iA_0}\delta A\Big/\int e^{iA_0}\delta A,$$

其中 $A_0$ 是自由电磁场的作用量:

$$A_0=\int\mathscr{L}_0(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{m,n}\int A_m(k)k^2A_n(-k)dk=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{m,n}g^{mm}g^{nn}\int\frac{\partial A_m}{\partial x^n}\frac{\partial A_m}{\partial x^n}dx.$$

现在来讨论将(40.2),(40.10)式化为横向势. 此时根据 Lorentz 条件(40.3),势 $A^{\mathrm{tr}}$ 只有三个分量是独立的,而泛函积分应该只对三个泛函宗量作积分. 为了自然地得到相应的表式,最好是取(39.26)类型的关系式作为出发点:

$$\int\exp\left(i\sum_n\int v^n(k)A_n(k)dk\right)dA=\exp\left(-\frac{i}{2}\sum_{n,m}\int v^n(k)D_{nm}^0(k)v^m(-k)dk\right), \tag{40.14}$$

前面已经指出过，可以认为此式是对 $A$ 的泛函积分的定义. 在(40.14)式中进行替换

$$A_n(k) = A_n^{\mathrm{tr}}(k) + ik_n f(k),$$

考虑到对 $A^{\mathrm{tr}}$ 和对 $f$ 的积分可以分离，由于(40.5)式，我们得到

$$\int \exp\left(i\sum_n v^n(k)A_n^{\mathrm{tr}}(k)dk\right) dA^{\mathrm{tr}} \int \exp\left\{i\sum_n \int v^n(k)ik_n f(k^2)dk\right\} df =$$

$$= \exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_{n,m}\int v^n(k)D_{nm}^{\mathrm{tr}}(k)v^m(-k)dk\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\sum_{n,m} v^n(k)k_n F(k^2)k_m v^m(-k)dk\right\}.$$

由于纵向分量和横向分量的相互独立性，从这里得到两个关系：

$$\int \exp\left(i\sum_n \int v^n(k)A_n^{\mathrm{tr}}(k)dk\right) dA^{\mathrm{tr}} =$$

$$= \exp\left(-\frac{i}{2}\sum_{n,m}\int v^n(k)D_{nm}^{\mathrm{tr}}(k)v^m(-k)dk\right), \tag{40.15}$$

和

$$\int \exp\left(i\int \xi(k)f(k)dk\right) df = \exp\left(-\frac{i}{2}\int \xi(k)F(k^2)\xi(-k)dk\right) \tag{40.16}$$

$\left(\text{其中记号 } i\sum_n k_n v^n(k) = \xi(k)\right)$.

可以认为关系式 (40.15) 是对满足横向条件的电磁场势 $A^{\mathrm{tr}}$ 的泛函积分的定义，此时可以认为式 (40.16) 是对电磁场纵向分量的泛函积分的定义，式 (40.16) 中 $F(k^2)$ 利用 (40.7)式来决定.

### 40.3. 函数 $G(x, y)$ 的梯度变换

经过上述辅助性质的讨论之后，我们着手来确定电子总 Green 函数的梯度变换法则. 此时我们从它的泛函积分的表示形式 (40.12) 出发. 然后利用它在已知外场中的变换法则(40.11)，并且分别对纵向分量和横向分量作泛函积分，就得到所求的公式.

首先我们讨论(40.13)式中 $S_0(A)$ 所含的积分

$$\int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x, x|\lambda A)\hat{A}(x),$$

并证明它是梯度不变的，也就是

$$\int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x, x|\lambda A)\hat{A}(x) = \int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x, x|\lambda A^{\mathrm{tr}})\hat{A}^{\mathrm{tr}}(x). \tag{40.17}$$

注意，根据(40.11)式，

$$G(x, x|\lambda A) = G(x, x|\lambda A^{\mathrm{tr}}), \tag{40.18}$$

我们计算以下差式

$$\int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x, x|\lambda A^{\mathrm{tr}})(\hat{A}(x) - \hat{A}^{\mathrm{tr}}(x)) = \int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x, x|\lambda A^{\mathrm{tr}})\frac{\hat{\partial}}{\partial x} f.$$

分部积分后，考虑到场在积分区域的时空边界上消失，有

$$\int dx\ \mathrm{Sp}\ G(x,\ x|\lambda A^{\mathrm{tr}})\frac{\delta f}{\partial x}=-\int dx\sum_n\frac{\partial}{\partial x^n}[\mathrm{Sp}\ \gamma^n G(x,\ x|\lambda A^{\mathrm{tr}})]f(x).\quad(40.19)$$

但是根据 Green 函数 $G$ 的定义，此处出现的矩阵迹可以表示成形式

$$\mathrm{Sp}\ \gamma^n G(x,\ x|\lambda A^{\mathrm{tr}})=i\ \mathrm{Sp}\ \gamma^n\frac{\langle T(\psi(x)\bar{\psi}(x)S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}=-i\frac{\langle T(\bar{\psi}(x)\gamma^n,\psi(x)S)\rangle_0}{\langle S\rangle_0}=$$

$$=-\frac{1}{S_0}\frac{\delta S_0}{\delta eA_n(x)}=-\frac{1}{eS_0}\left\{\sum_m\frac{1}{(m-1)!}\int\frac{\partial S_m(x,\ x_2,\cdots,\ x_m)}{\partial A_n(x)}dx_2\cdots dx_m\right\}.$$

因此根据散射矩阵的梯度不变性条件(30.12)，(40.19)式的右端等于零，也就是

$$\sum_n\frac{\partial}{\partial x^n}\mathrm{Sp}\ \gamma^n G(x,\ x|A)=0,$$

因此等式(40.17)获证.

在(40.12)式中分解横向和纵向的积分变量，考虑到(40.18)式和(40.11)式，并且根据刚才所作的讨论

$$S_0(A)=S_0(A^{\mathrm{tr}}),$$

我们得到

$$G(x,\ y)=\frac{\int G(x,\ y|A^{\mathrm{tr}})e^{ie[f(x)-f(y)]}S_0(A)dA^{\mathrm{tr}}df}{\int S_0(A)dA^{\mathrm{tr}}df}.\quad(40.20)$$

由此可见，对 $A^{\mathrm{tr}}$ 及 $f$ 的积分已经分离. 我们注意到，对于纯粹横向规范存在下列关系：

$$G^{\mathrm{tr}}(x,\ y)=\frac{\int G(x,\ y|A^{\mathrm{tr}})S_0(A^{\mathrm{tr}})dA^{\mathrm{tr}}}{\int S_0(A^{\mathrm{tr}})dA^{\mathrm{tr}}},$$

我们得到

$$G(x,\ y)=\int e^{ie[f(x)-f(y)]}df\cdot G^{\mathrm{tr}}(x,\ y).\quad(40.21)$$

公式(40.21)是所求的电子 Green 函数的梯度变换定律.

利用公式(40.16)，可以在上述变换的第一个乘子中对 $f$ 积分，得到

$$\int\exp ie[f(x)-f(y)]df=\int\exp\left[\frac{ie}{(2\pi)^2}\int f(k)(e^{ikx}-e^{iky})dk\right]df=$$

$$=\exp\left[\frac{-ie^2}{2(2\pi)^4}\int(e^{ikx}-e^{iky})(e^{-ikx}-e^{-iky})F(k^2)dk\right]=$$

$$=\exp\{-ie^2[F(0)-F(x-y)]\}.$$

上式中常量

$$F(0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F(k^2)dk=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{d_l^0}{k^2\cdot k^2}dk\quad(40.22)$$

在一般情况下是发散的. 这样由于梯度变换，结果在 Fermi 子 Green 函数前出现奇异乘子. 但是，根据 § 31 中的结果，通过相应的减法程序可以消除这一乘子. 结果我们得到不含无穷大的函数的梯度变换公式：

$$G^{\mathrm{tr}}(x,\ y)\to G(x,\ y)=\exp[ie^2F(x-y)]G^{\mathrm{tr}}(x,\ y),\quad(40.23)$$

其中

$$F(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\frac{d_1^0(k)}{k^2\cdot k^2}dk. \tag{40.24}$$

## § 41. Bloch-Nordsieck 模型的研究

### 41.1. Bloch-Nordsieck 模型和 $G(x,y|A)$ 的确定

在本节中我们讨论将泛函平均值法应用到旋量电动力学中 Bloch-Nordsieck 模型的计算. 大家知道，为了消除红外灾难，Bloch 和 Nordsieck (1937) 提出了不以微扰理论为基础的近似方法来解决低频区域内 Fermi 子与电磁场的相互作用问题. 他们的方法的一级近似相当于将 Dirac 矩阵用常数 $u$ 来代替，经过这一替代后的电动力学方程，我们称之为 Bloch-Nordsieck 模型的方程.

除了对于分析红外灾难的意义外，上述问题在方法论方面也有意义，因为在上述模型中可不作任何忽略而将泛函积分进行到底. 这就能够在一切细节上遵循求 Green 函数的封闭式和消除其中无穷大的程序. 同时和过去的作法相同，我们在中间的阶段将利用 Pauli-Villars 的辅助正常化方法.

Bloch-Nordsieck 模型的特点在于其中并不存在真空极化:

$$G_0(A)=\langle G\rangle_{F_0}=1, \tag{41.1}$$

也就是与光子自能有关的效应并不存在，这一点可以从以下的简单推论得出: 自由电子的 Green 函数 $G_0$ 在此情况下由一阶方程式来确定:

$$\left(i\sum_n u^n\frac{\partial}{\partial x^n}-m\right)G_0(x-y)=-\delta(x-y), \tag{41.2}$$

同时

$$\sum_n g^{nn}u^nu^n=1,$$

在动量表象下，在通常电动力学中 Green 函数具有二个极点，而现在 $G_0$ 只有一个极点:

$$G_0(p)=\frac{1}{m-up-i\varepsilon}. \tag{41.3}$$

根据这一点，

$$G_0(x-y)=0, \quad \text{当} \quad x^0<y^0,$$

即 $G_0$ 是纯粹推迟函数. 因此，电子闭迴线所对应的矩陣元中 (例如，图 54 中所示的图形)，至少有一个 $G_0$ 等于零. 在物理上这相当于在 Bloch-Nordsieck 模型中沒有反粒子，因此不能产生粒子对.

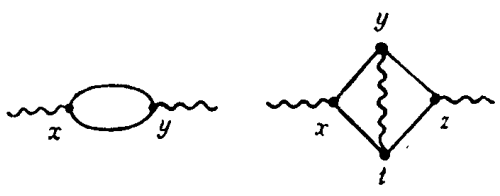


图 54

因此在这一模型中对光子 Green 函数沒有辐射修正，只需要对电子 Green 函数加以确定，根据 (40.12) 式，此函数定义为在此外场 $G(x,\ y|A)$ 中电子 Green 函数的泛函平均值.

这个 $G(x, y|A)$ 在所讨论的情况中满足方程

$$\left\{\sum_n u^n\left(i\frac{\partial}{\partial x^n}+eA_n(x)-m\right)\right\}G(x, y|A)=-\delta(x-y), \tag{41.4}$$

此方程可以积分求解. 为此我们应用 Фок 的第五参数法. 这一方法的基础是将逆算符的符号表示为对第五参数的指数积分形式:

$$H^{-1}=-i\int_0^\infty dv\, e^{ivH-\varepsilon v}. \tag{41.5}$$

利用这一表示,并令

$$H=\left\{\sum_n u^n\left[i\frac{\partial}{\partial x^n}+eA_n(x)\right]-m\right\}, \tag{41.6}$$

可将(41.4)方程的解写成形式

$$G(x, y|A)=i\int_0^\infty dv\, U(v), \tag{41.7}$$

其中函数 $U(v)$ 决定于关系式

$$U(v)=\exp iv\left\{\sum_n u^n\left[i\frac{\partial}{\partial x^n}+eA_n(x)\right]-m+i\varepsilon\right\}\delta(x-y), \tag{41.8}$$

它满足第五变量的一阶齐次常微分方程

$$-i\frac{\partial U(v)}{\partial v}=\left\{\sum_n u^n\left[i\frac{\partial}{\partial x^n}+eA_n(x)\right]-m+i\varepsilon\right\}U(v), \tag{41.9}$$

和初始条件

$$U(v)|_{v=0}=\delta(x-y). \tag{41.10}$$

将 $\delta$ 函数化成动量表象

$$\delta(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-y)}dp, \tag{41.11}$$

我们将依照如下形式求 $U(v)$

$$U(v)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i[K(x,v)-p(x-y)-(m-up-i\varepsilon)v]}dp. \tag{41.12}$$

这时函数 $K$ 决定于方程

$$\frac{\partial K}{\partial v}=\sum_n u^n\frac{\partial K}{\partial x^n}+e\sum_n u^nA_n(x), \tag{41.13}$$

和初始条件

$$K(v)|_{v=0}=0.$$

方程(41.13)是常系数的线性方程. 应用 Fourier 变换解此方程,得到

$$K=\frac{e}{(2\pi)^2}\int dk(u\cdot A(k))e^{-ikx}\int_0^v dv' e^{i(uk)v'}, \tag{41.14}$$

因此考虑到(41.7),(41.12)式

$$G(x, y|A)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dv\int dp\exp[-ip(x-y)-iv(m-up-i\varepsilon)+iK(v|A)]. \tag{41.15}$$

公式(41.15)表示对于 Bloch-Nordsieck 模型求得的在已知外场中电子 Green 函数的明显的封闭式. 得到此式后,我们可以着手确定电子的总 Green 函数.

## 41.2. $G(x,y)$ 的计算

为了这点我们利用公式(40.12),并且考虑到 $\langle G\rangle_{F_0}$ 已经不是由公式(40.13)来决定,而是根据(41.1)式应等于1. 这就给出

$$G(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-y)}G(p)dp, \tag{41.16}$$

$$G(p)=i\int_0^\infty \exp[-i(m-up-i\varepsilon)]dv\int \exp[iK(v|A)]dA. \tag{41.17}$$

因此为了求 $G$, 必须计算如下形式的泛函积分:

$$\int \exp[iK(v|A)]dA=\int \exp\left[\frac{i}{(2\pi)^2}\int dk\sum_n R^nA_n(k)\right]dA, \tag{41.18}$$

其中

$$R^n(k)=eu^ne^{-ikx}\int_0^v dv'e^{i(uk)v'}.$$

积分(41.18)属于 Gauss 型(相对于 $\delta A$),利用公式(40.14)可以计算

$$\int \exp[iK(v|A)]dA=$$

$$=\exp\left\{-i\sum_{n,m}\frac{1}{2(2\pi)^4}R^n(k)D^0_{nm}(k)R^m(-k)\right\}=\exp\{f(v)\},$$

其中

$$f(v)=-\frac{ie^2}{2(2\pi)^4}\int (uD^0(k)u)\int_0^v dv'e^{i(uk)v'}\int_0^v dv''e^{-i(uk)v''}dk. \tag{41.19}$$

由此得到

$$G(p)=i\int_0^\infty dv\exp[-iv(m-up-i\varepsilon)+f(v)]. \tag{41.20}$$

考虑到 $D$ 是偶函数,在(41.19)式中对 $v'$ 和 $v''$ 积分,我们得到

$$f(v)=-\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int [uD^0(k)u]\frac{1-e^{i(uk)v}}{(uk)^2}dk. \tag{41.21}$$

我们将用任意规范

$$D^0_{mn}(k)=-\frac{1}{k^2}\left[g^{mn}-\frac{k_mk_n}{k^2}\right]-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k_mk_n}{k^2}d_l^0$$

作进一步计算. 此时考虑到 $u^2=1$, 显然有

$$f(v)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{1-e^{i(uk)v}}{(uk)^2\cdot k^2}\left[1+(d_l^0-1)\frac{(uk)^2}{k^2}\right]dk. \tag{41.22}$$

显然,这一积分在大 $|k|$ 区域内是对数发散的,但是非常重要的是它在小 $|k|$ 区域内不含有任何发散. 因此在完全解(41.20)中不存在红外灾难.

为了计算积分(41.22)的明显形式, 利用 Pauli-Villars 的辅助正常化较为方便. 我们

略去相当繁长的计算[1)]，只列出当 (41.22) 式中只对一个乘子作如下辅助正常化时的最后结果：

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M^2}.$$

在这一情况下

$$f(v) = \frac{e^2}{8\pi^2}(3 - d_l^0)\left(\ln\frac{M}{m} + \ln vm\right), \tag{41.23}$$

(41.23)式中第一项

$$\frac{e^2}{8\pi^2}(3 - d_l^0)\ln\frac{M}{m}$$

当消去辅助正常化时 ($M \to \infty$) 是对数发散的，它相当于重正化后的 Green 函数乘上因子

$$Z = \exp\left[\frac{e^2}{8\pi^2}(3 - d_l^0)\ln\frac{M}{m}\right] = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{e^2}{8\pi^2}(3-d_l^0)}, \tag{41.24}$$

通过相应的减法程序可以消去这一乘子，而根据消除无穷大的一般理论(§ 31)，减法程序化为重新定义时序乘积.

在消除红外发散之后，我们得到 Green 函数的最终形式为

$$G'(p) = i\int_0^\infty dv \exp\left[-iv(m - up - i\varepsilon) + \frac{e^2}{8\pi^2}(3 - d_l^0)\ln vm\right] =$$

$$= im^{\frac{e^2(3-d_l^0)}{8\pi^2}} \int_0^\infty dv \exp[-i(m - up - i\varepsilon)v] v^{\frac{e^2(3-d_l^0)}{8\pi^2}}. \tag{41.25}$$

我们来讨论 $m - (up) > 0$ 时情况. 在(41.25)式中进行变量替换

$$[m - (up)]v = x,$$

我们得到

$$G'(p) = \frac{\left[1 - \dfrac{(up)}{m}\right]^{\frac{e^2(d_l^0-3)}{8\pi^2}}}{m - (up)} I, \tag{41.26}$$

其中

$$I = i\int_0^\infty dx \cdot x^{\frac{e^2(3-d_l^0)}{8\pi^2}} e^{-ix-\varepsilon x}.$$

利用 $e^2(3 - d_l^0)/8\pi^2 \ll 1$ 后，可以近似地估算积分 $I$，这样得到

$$I = i\int_0^\infty dx e^{-ix-\varepsilon x} + O(e^2) = 1 + O(e^2).$$

当

$$(up) - m > 0$$

---

1) 所有计算的细节可以从 Свидзинский 的论文(1955)中找到(并参阅(1956)).

时，通过同样方式应用变量替代：

$$[(up) - m]v = y,$$

得到表式

$$G'(p) = \frac{\left[\frac{(up)}{m} - 1\right]^{\frac{e^2(d_l^0-3)}{8\pi^2}}}{(up) - m} I', \tag{41.27}$$

其中

$$I' = i\int_0^\infty dy\, y^{\frac{e^2(3-d_l^0)}{8\pi^2}} e^{iy-\varepsilon y} = -1 + O'(e^2).$$

将表式(41.26)和(41.27)统一起来，我们得到 Bloch-Nordsieck 模型的电子 Green 函数的最终表式为

$$G'(p) = \frac{1}{m - (up)}\left|1 - \frac{(up)}{m}\right|^\beta, \tag{41.28}$$

其中

$$\beta = -\frac{e^2(3 - d_l^0)}{8\pi^2} = -\frac{\alpha}{2\pi}(3 - d_l^0) \tag{41.29}$$

$\left(\alpha = \frac{1}{137}\text{是精细结构常数}\right)$.

将(41.28)式与(41.3)式比较，我们看到总 Green 函数和自由场 Green 函数差一乘子

$$\left|1 - \frac{(up)}{m}\right|^\beta.$$

如果将总函数 $G'(p)$ 依 $\alpha$ 为幂而展开，则在每一近似中得到对数项

$$\left|1 - \frac{(up)}{m}\right|^\beta = e^{\beta \ln\left|1-\frac{(up)}{m}\right|} = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}(3 - d_l^0)\ln\left|1 - \frac{(up)}{m}\right| + \cdots,$$

这些项是红外灾难所特有的.

在下一章中（§ 43.3）将要证明，在通常的旋量电动力学中电子 Green 函数的红外奇点也具有(41.28)式的特征.

# 第八章　重正化羣

## §42. 旋量电动力学中的相乘重正化羣

### 42.1. 引言

现在我们来研究改善微扰理论公式的方法，此法基于第五章中已提到过的场论中存在的重正化羣. 这一方法的思想非常简单，它根据下述事实：在微扰理论中，Green 函数和顶角部分的级数展开式中个别项对于重正化羣并非不变的，但是这些量本身对于重正化羣却是不变的. 因此，例如在紫外区域内，微扰理论的级数并不是按电荷平方 $e^2$ 为幂，而是按乘积 $e^2 \ln \frac{k^2}{m^2}$ 为幂来展开.

从这些考虑出发，我们企图将通常展开式变换成为对重正化不变的表式. 为了这一点，与此重正化羣相应的 Lie 微分方程将成为计算技术上重要的工具.

我们应该指出，Stückelberg 和 Peterman (1953)曾经注意到重正化羣的存在以及重正化羣在量子场论中的作用；他们还指明了引进相应的无穷小算符的重要性，从而指出了建立 Lie 微分方程的可能性.

实际上，Gell-Mann 和 Low 应用过这一重正化羣，可是他们是从另一观点出发的，他们用它得到了在大动量渐近区域中电磁 Green 函数的性质的具体知识. 但是 Gell-Mann 和 Low 的研究是不够清楚的，而且其中含有由于忽视被重正化的光子 Green 函数的横向性而产生的若干错误，因而他们的研究并不能够进行到底.

这些问题在 Боголюбов 和 Ширков (1955 б, в)、(1956 а, б)、Ширков (1955) 的工作中进行了比较彻底的探讨，我们的叙述就按照上述工作来进行. 在讨论顶角算符的变换问题时，我们还利用 Бланк 和 Ширков (1956 а, б) 的结果；至于推广到 $d_1^0 \neq 0$ 时的情况，我们将依照 Логунов 的论文(1956)来进行讨论.

### 42.2. 相乘重正化的羣性质

第五章中已经证明了，在重正化理论的拉格朗日函数密度中引进一些有限项，一般说来，等于将基本 Green 函数和电荷作一有限的重正化. 显然，此时应该考虑到自能类型的项并不引起相乘的重正化，而且在量子电动力学中要做到光子 Green 函数纯粹的相乘重正化，必须先选定此函数为横向形式

$$D_{mn}^{\mathrm{tr}} = -\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}\right). \tag{32.7}$$

为了这一目的，在微扰理论中，只要选定零级近似(即电磁场算符的时序收缩)为横向形式就已经足够了，这一点可以由选择适当的规范来保证.

而且我们已经证明过，在旋量电动力学的拉格朗日函数密度中引进三个有限项

$$(z_1-1)e\bar{\psi}\hat{A}\psi+(z_2-1)\bar{\psi}(\hat{p}-m)\psi+\frac{z_3-1}{2}\sum_{m,n}A_m(g^{mn}p^2-p^mp^n)A_n, \quad (31.10)$$

相当于将电子 Green 函数 $G$、光子 Green 函数 $D$ 以及顶角函数 $\Gamma$ 作如下的重正化:

$$G\to z_2^{-1}G,\ \Gamma\to z_1\Gamma,\ D^{tr}\to z_3^{-1}D^{tr}, \quad (31.34)$$

这将引起电荷有效值的改变:

$$e^2\to z_1^2z_2^{-2}z_3^{-1}e^2. \quad (31.26)$$

现在我们已经清楚，如果在引进(31.10)项的同时，对电荷作与(31.26)相逆的补偿重正化

$$e^2\to z_1^{-2}z_2^2z_3e^2, \quad (42.1)$$

那末作为这二次运算的结果是 $e^2$ 之值不变.

为了今后的方便起见，我们写出公式 (31.34) 及 (42.1) 的逆式. 考虑到 Ward 恒等式

$$z_1=z_2=z,$$

写出逆式后，得到

$$\left.\begin{aligned}&G_1\to G_2=zG_1,\ \Gamma_1\to\Gamma_2=z_2^{-1}\Gamma_1,\ D_1\to D_2=z_3D_1,\\&e_1^2\to e_2^2=z_3^{-1}e_1^2.\end{aligned}\right\} \quad (42.2)$$

变换式(42.2)的意义是：利用 $G_1$, $\Gamma_1$, $D_1$ 及 $e_1$ 诸量所得的结果和利用 $G_2$, $\Gamma_2$, $D_2$ 及 $e_2$ 诸量所得的结果完全相同，也就是说，都用同一个耦合常数 $e$ 来描述光子和电子的相互作用，可以选定这 $e$ 的值等于它的实验值.

相乘重正化的变换(42.2)显然具有变换羣的性质. 我们将相应的羣称为相乘重正化羣或简称为重正化羣.

根据定义，重正化羣是一些相乘变换 (42.2) 的羣，这些羣包含在 Green 函数、电荷等类型的中间量的理论中，而对于可观察效应的公式并不引起任何改变. 特别是，在这个羣中的变换下，散射矩阵元之值并不改变，只要同时对与 Feynman 图的外线相应的因子也进行适当的重正化.

而且我们也清楚，相乘重正化羣的存在并不是旋量电动力学所特有的，它在任何可重正化理论中都可以建立起来. 为此，必须从该理论的一切许可抵消项中只选出引起相应 Green 函数的相乘重正化之项，并且求得(42.2)类型的变换关系. 以下(§ 45)将讨论赝标量介子理论中双电荷方案的重正化羣.

### 42.3. 重正化羣的泛函方程

用变换羣(42.2)可以推导 Green 函数的简单泛函方程以及 Lie 羣微分方程.

在旋量电动力学中，为了推导出 Green 函数的简单泛函方程，我们讨论基本函数 $G$, $D$ 及 $\Gamma$. 为简单起见，首先限于讨论下述情况，即当光子 Green 函数 $D$ 具有纯粹横向

形式(32.7),而羣变换具有(42.2)形式时的情况[1].

可以将电子函数 $G(p)$ 表示成形式

$$G(p)=\frac{a(p^2)\hat{p}+b(p^2)m}{m^2-p^2}. \tag{42.3}$$

这样,利用公式(32.7)及(42.3),四维动量 $k$ 和 $p$ 的函数 $D$ 及 $G$ 可以通过 $d$, $a$ 及 $b$ 来表示,后者之中每一个只依赖于一个宗量 $k^2$ 或 $p^2$. 顶角函数与上述函数不同,它依赖于两个独立的四维动量,因此不能用这样简单的形式来表示. 由于顶角函数的相对复杂性,以下将单独进行讨论.

根据 (42.2) 式,在函数 $D$ 和 $G$ 中含有有限个相乘任意常数. 我们将要利用归一化条件来固定这些常数. 例如可以将函数 $d(k^2)$ 前的任意乘子也归入此函数的宗量,只要设 $d$ 的归一化决定于以下条件:

$$d=1, \quad 当 \quad k^2=\lambda^2, \tag{42.4}$$

此处 $\lambda^2$ 起着归范用的动量平方的作用.

显然,只有使得通常的(在 $k^2=0$ 处归一化了的)光子函数 $d_0$ 取实正值的 $\lambda^2$ 才可能使之归一化. 这是由于函数 $d$ 的重正化与电荷平方重正化采用同一个量 $z_3$,因此它应该是实的,而且是正值的.

$d_0$ 当 $k^2=\lambda^2$ 时为实的这一条件,根据二阶微扰理论的公式(32.10)可化为以下的条件:

$$\lambda^2<4m^2. \tag{42.5}$$

可以证明,当考虑到微扰理论的高阶项时,这一条件变为

$$\lambda^2<0. \tag{42.6}$$

因此,从函数 $d$ 为实数的条件可以得出结论,归一化动量遵守条件 (42.6). 但是在许多情况下,例如当计算电子 Green 函数的红外渐近时,只要讨论 $d$ 依 $e^2$ 幂的展开式的第一项已经足够,这时可以利用条件(42.5).

现在从动量空间的均匀性可以得到结论,$d$ 可以表示成无量纲的动量变量的函数

$$d=d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right),$$

此时 $\lambda^2<0$,而且

$$d\left(1,\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right)=1. \tag{42.7}$$

同理,对 $a$ 和 $b$ 两个函数之一加上归一化条件后,可以确定常数 $z$,考虑到动量空间的均匀性,这两个函数可以写成形式

$$f\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right),$$

而

$$a\left(1,\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right)=a^0,\ b\left(1,\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right)=b^0. \tag{42.8}$$

---

1) 这一限制不是原则性的;在 $D$ 中还含有纵向部分的更一般性情况将在 § 44 中讨论.

一般而言，我们根据以下几点理由不令归一化常数 $a^0$ 与 $b^0$ 等于 1：

1）函数 $a$ 和 $b$ 的归一化的点在一般情况下并不重合.

2）在 $k^2 = m^2$ 点的小邻域内，函数 $a$ 和 $b$ 具有红外奇点，根本不能够在此处归一化.

3）归一化常数 $a^0$, $b^0$ 在以后讨论中是无关紧要的乘子.

从(42.7)式可以看出，归一化动量的平方 $\lambda^2$ 与电荷 $e^2$ 有泛函关系. 将 (42.7) 式代入方程

$$D_2 = z_3 D_1,$$

考虑到方程

$$e_2^2 = z_3^{-1} e_1^2,$$

我们得到

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_2^2\right) \equiv z_3 d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right). \tag{42.9}$$

在上式中令 $k^2 = \lambda_1^2$，并且考虑到(42.7)式，得到 $z_3$ 的表式为

$$z_3 = d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right),$$

将上式代到(42.9)式中，得到 $d$ 的泛函方程：

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e^2\right) = d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) \Big/ d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right), \tag{42.10}$$

而

$$e_1^2 = e_2^2 d\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right). \tag{42.11}$$

现在将公式(42.10)和(42.11)中所含的电荷 $e^2$ 与电荷的可观察值

$$\frac{e_0^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}$$

联系起来. 上式中的电荷值相当于光子函数 $d_0$. 正如在第五章中已经指出过，当 $k^2 = 0$ 时，光子函数 $d_0$ 归一化为 1，因此 $d_0$ 具有形式

$$d_0 = d_0\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{42.12}$$

由(42.10)式和(42.11)式可得出结论：乘积 $e^2 d$ 是与 $\lambda$ 无关的量

$$e_1^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = e_2^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right),$$

而且它是 $k^2$ 的某一普适函数，可以取作如下形式：

$$e_\lambda^2 d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e_\lambda^2\right) = e_0^2 d_0\left(\frac{k^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{42.13}$$

量 $e^2 d$ 是重正化羣的不变量，我们称之为不变电荷. 在 (42.13) 式中令 $k^2 = \lambda^2$，可得 $e_\lambda^2$ 对 $\lambda^2$ 的明显的关系式

$$e_\lambda^2 = e_0^2 d_0\left(\frac{\lambda^2}{m^2}, e_0^2\right). \tag{42.14}$$

现在来讨论电子 Green 函数. 我们对 $a$ 和 $b$ 两函数同时来进行讨论，暂时用 $s$ 作为

这两个函数的共同记号. 写出它们与(42.9)式相类似的方程,并决定常数 $z$,将 $z$ 消去后,我们得到 $s$ 的泛函方程

$$s\left(\frac{k^2}{\lambda_2^2}, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) s\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right) = s\left(1, \frac{m^2}{\lambda_2^2}, e_2^2\right) s\left(\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right). \tag{42.15}$$

### 42.4. Lie 微分方程

利用以下的辅助记号可以将方程(42.10)、(42.11)、(42.15)写成比较简洁的形式:

$$\frac{k^2}{\lambda_2^2} = x, \frac{m^2}{\lambda_2^2} = y, \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = t. \tag{42.16}$$

于是我们有

$$e^2 d(x, y, e^2) = e^2 d(t, y, e^2) d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right), \tag{42.17}$$

和

$$s(x, y, e^2) s\left(1, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right) = s(t, y, e^2) s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right). \tag{42.18}$$

方程(42.17)和(42.18)表示函数 $d$, $a$ 和 $b$ 中所有的三个宗量同时变换时的重正化羣泛函方程. 我们认为这两个方程是未知函数 $d$ 和 $s$ 的方程,这样就可以提出由这些方程决定函数 $d$ 和 $s$ 的问题.

正如 Овсянников (1956) 已经证明过的,在解决这一问题时,这些方程的通解可以确定到两个宗量的任意函数. 因此,用(42.17)、(42.18)式来求电动力学 Green 函数的具体形式是不够的.

下面我们来求羣方程(42.17)、(42.18)的解,这些解在一定条件下可化为 Green 函数的已知明显表式. 我们选定小 $e^2$ 情况作为这类条件,并且要求当宗量 $x$ 和 $y$ 为任意值时,上述方程的解 $d$ 和 $s$ 在小 $e^2$ 的范围内具有以下形式:

$$d(x, y, e^2) = 1 + e^2 d_1(x, y) + e^4 d_2(x, y) + \cdots, \tag{42.19}$$

$$s(x, y, e^2) = 1 + e^2 s_1(x, y) + e^4 s_2(x, y) + \cdots, \tag{42.20}$$

其中函数 $d_1, d_2 \cdots$ 和 $s_1, s_2 \cdots$ 由微扰理论来决定. 根据 § 32 中的公式当 $d_l = 0$ 时,这些函数具有形式如下:

$$d_1(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 \alpha(1-\alpha) \ln \left| \frac{y - \alpha(1-\alpha)x}{y - \alpha(1-\alpha)} \right| d\alpha, \tag{42.21}$$

$$a_1(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ -3 \frac{y}{x} \ln \left| \frac{x-y}{y} \right| + c(y) \right\}, \tag{42.22}$$

$$b_1(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ -\frac{3(x+y)}{2x} \ln \left| \frac{x-y}{y} \right| + c(y) \right\}. \tag{42.23}$$

在这些公式中我们保留了任意常数 $c(y)$, 利用 $c(y)$ 可以将函数 $a$ 或 $b$ 之一归一化.

为了求得上述解,我们由 (42.17)、(42.18) 式过渡到 Lie 微分方程, 因为重正化羣是连续变换羣,故可以完全用无穷小变换的形式来表征. 描述此羣的无穷小变换的方程——Lie 微分方程——可以用以下的方式来求得. 将(42.17)式微分,将(42.18)式对 $x$ 取

对数微分，然后令 $t = x$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x} e^2 d(x, y, e^2) = \frac{e^2 d(x, y, e^2)}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right), \tag{42.24}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln s(x, y, e^2) = \frac{1}{x} \psi\left(\frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right), \tag{42.25}$$

其中

$$\varphi(y, e^2) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} d(\xi, y, e^2)\right]_{\xi=1}, \tag{42.26}$$

$$\psi(y, e^2) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln s(\xi, y, e^2)\right]_{\xi=1}. \tag{42.27}$$

公式 (42.24)、(42.25) 是量子电动力学中重正化羣的 Lie 方程. 从这些方程得出结论，为了决定在宗量的全部变化区域中的函数 $d$ 和 $s$，只要在 $x = 1$ 点的小邻域中决定 $d(x, y, e^2)$ 和 $s(x, y, e^2)$ 的性质即可.

为此，我们利用通常的微扰理论，这将自动保证当 $e^2 \to 0$ 时满足相应的要求. 同时注意到，在 (42.26)、(42.27) 式中利用在 $e^2 \ll 1$ 条件下成立的 $d$ 和 $s$ 的展开式，导致 Lie 方程中出现按“不变电荷” $e^2 d$ 的幂展开的 $\varphi$ 和 $\psi$. 因此 Lie 方程的解的适用范围要被“不变电荷”是微量的条件

$$e^2 d \ll 1 \tag{42.28}$$

所限制.

我们还指出，实际上只要求解方程(42.24)，因为当已知 $d$ 时函数 $s$ 可以从(42.25)式利用简单积分来求出，即

$$\ln \frac{s(x, y, e^2)}{s(x_0, y, e^2)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{z} \psi\left(\frac{y}{z}, e^2 d(z, y, e^2)\right). \tag{42.29}$$

## 42.5. 顶角函数

现在来讨论顶角函数 $\Gamma^n_{\alpha\beta}$. 与 Green 函数不同，$\Gamma^n_{\alpha\beta}$ 是四维矢量，具有复杂的矩阵结构，并且依赖于两个独立的四维动量. 顶部函数 $\Gamma^n_{\alpha\beta}(p, q)$ 在一般情况下可以按不同数目的 Dirac 矩阵与宗量动量的四个分量的乘积而分解. 用这种方式可以明显地分出顶部 $\Gamma^n_{\alpha\beta}$ 的矩阵结构和矢量结构(依指标 $\alpha$, $\beta$ 及 $n$)，将 $\Gamma^n_{\alpha\beta}$ 用三个不变宗量 $p^2$, $q^2$, $k^2 (k = p - q)$ 的标量函数来表示，例如，表成如下形式:

$$\Gamma^n_{\alpha\beta}(p, q) = \sum_{\substack{(\nu, \nu', \mu', \mu = 0, 1) \\ \nu + \nu' + \mu' + \mu \leqslant 2}} [(\hat{p})^{\nu} (\hat{q})^{\nu'} \gamma^n (\hat{q})^{\mu'} (\hat{p})^{\mu}]_{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\nu'\mu'\mu}(p^2, q^2, k^2).$$

再来讨论一个有确定指标值 $\nu$, $\nu'$, $\mu'$, $\mu$ 的标量函数 $\Gamma_{\nu,\nu',\mu',\mu}$，用 $\Gamma$ 来表示这一函数. 根据(42.2)式，此函数的相乘重正化导致变换如下:

$$\Gamma \to z^{-1} \Gamma. \tag{42.30}$$

由此可知，函数 $\Gamma$ 只确定到可差任意常数 $z$. 按惯例，将这一任意常数移至函数 $\Gamma$ 的宗量中，引进辅助质量的平方 $\lambda^2$，化成无量纲宗量:

$$\Gamma \to \Gamma\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{q^2}{\lambda^2}, \frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right).$$

此时代替(42.30)式,可以写成

$$\Gamma\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{q^2}{\lambda^2}, \frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = z\Gamma\left(\frac{p^2}{\lambda_1^2}, \frac{q^2}{\lambda_1^2}, \frac{k^2}{\lambda_1^2}, \frac{m^2}{\lambda_1^2}, e_1^2\right), \tag{42.31}$$

其中 $e = e_2$ 满足(42.11)式.

现在将 $\Gamma$ 写成 $p^2$ 的函数,暂时固定其他的动量变量. 引进记号

$$\frac{p^2}{\lambda^2} = x, \frac{q^2}{\lambda^2} = y, \frac{k^2}{\lambda^2} = z, \frac{m^2}{\lambda^2} = u, \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} = t, \tag{42.32}$$

而且从(42.31)中消去常数 $z$, 我们得到泛函方程

$$\frac{\Gamma(x, y, z, u, e^2)}{\Gamma(t, y, z, u, e^2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{u}{t}, e^2 d(t, u, e^2)\right)}{\Gamma\left(1, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{u}{t}, e^2 d(t, u, e^2)\right)}. \tag{42.33}$$

将(42.33)式对 $x$ 微分,然后令 $t = x$, 就得到 Lie 微分方程. 与原始方程相同,在用这种方式得到的方程中,变量 $x$ 起着特殊的作用. 但是,完全清楚,对于其余两个动量宗量 $y$ 或 $z$ 中的任何一个, 也都可以进行类似讨论. 结果得到三个微分方程的方程组. 考虑到对应原理,上述方程组的彻底解可以有效地改善通常微扰理论的公式(参阅 § 44.3).

## § 43. 电动力学 Green 函数的渐近性质

### 43.1. 问题的提出

利用微扰理论的工具,已经获得相乘重正化的基本关系式 (31.34). 有一些理由来假定,在更一般的与微扰理论的限制无关的情况下, 这些方程也是正确的. 但是, 我们没有支持这一假定的任何严格的论证, 也不具备不从微扰理论推导出来的关于 Green 函数的知识.

因此我们下面只限于讨论如何改进通常微扰理论的结果,为此,我们利用羣微分方程的解,此解满足与微扰理论互相对应的要求.

当函数 $\varphi$ 决定到微扰理论的第二阶时, 可以很容易地获得方程 (42.24) 的解. 此时 (42.24) 式可以明显形式积分到底. 事实上,因为根据 (42.19) 及 (42.21) 式,在这一情况下,

$$d(x, y, e^2) = 1 + \frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^t t(1-t)\ln\left|\frac{y - t(1-t)x}{y - t(1-t)}\right| dt + \cdots =$$

$$= 1 + e^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right) \div f\left(\frac{1}{y}\right)\right] + \cdots, \tag{43.1}$$

则

$$\varphi(y, e^2) = e^2\left[\frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\frac{\xi}{y}\right)\right]_{\xi=1},$$

因此

$$\frac{\partial e^2 d(x, y, e^2)}{\partial x} = \frac{e^4 d^2}{x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\frac{x\xi}{y}\right)\right]_{\xi=1} = e^4 d^2\left[\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{y}\right)\right],$$

从这里

$$d^{-1}(x, y, e^2) = 1 - e^2\int_1^x dx \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{y}\right) = 1 - e^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)\right]. \quad (43.2)$$

当确定 $\varphi$ 精确到更高阶量的更一般情况下，方程(42.24)只有当宗量 $x$ 和 $y$ 是某些特殊值时才能积分，方程(42.29)也是如此. 我们这里指的是实际上颇重要的"紫外灾难"及"红外灾难"区域.

这一点可以这样解释：由于参数

$$\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

是微小量，一般而言，电动力学 Green 函数的幂级数展开式的各项迅速递减. 只有当 $p^2 \sim m^2$ 及 $|p^2| \gg m^2$ 时，这种情况才被破坏，因为此时在上述展开式中出现了对数项[特别是，参看(42.21)—(42.23)]，例如，在"紫外"区域，当 $|p^2| \gg m^2$ 时，形式如下：

$$\left(\alpha \ln\left|\frac{p^2}{m^2}\right|\right)^n.$$

可以说，在这些情况下，实际上不是按小参数 $\alpha$ 为幂，而是按 $\alpha$ 与相应对数的乘积为幂来展开.

因此产生在"紫外"及"红外"灾难区域中改进微扰理论的级数收敛性问题. 这一问题以下将利用重正化羣方程来进行研究.

### 43.2. 紫外渐近行为

首先讨论当 $|p^2| \gg m^2$ 时大动量的渐近区域. 在这种情况下，微扰理论的级数中一些个别项成为 $\ln x = \ln\frac{|p^2|}{\lambda^2}$ 的函数，而不再与变量 $y$ 有关.

在公式(42.24)、(42.29)中消去 $y$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x} e^2 d(x, e^2) = \frac{e^2 d}{x}\varphi(e^2, d), \quad (43.3)$$

$$\ln\frac{s(x, e^2)}{s(x_0, e^2)} = \int_{x_0}^x \frac{dz}{z}\psi(e^2 d(x, e^2)), \quad (43.4)$$

其中 $d(x, e^2)$, $s(x, e^2)$, $\varphi(e^2)$ 及 $\psi(e^2)$ 是函数 $d(x, y, e^2)$, $s(x, y, e^2)$, $\varphi\left(\frac{y}{x}, e^2\right)$ 及 $\psi\left(\frac{y}{x}, e^2\right)$ 当 $x \gg y$ 时的极限式，这些函数只与 $\ln x$ 有关.

为了决定在所研究区域 $x \gg y$ 中以上各式的 $e^2$ 与可观察电荷值平方 $e_0^2$ 的关系，我们注意到，这一条件等于以下关系

$$|p^2| \gg \lambda^2 \sim m^2, \quad (43.5)$$

将此式代到(42.13)式中，考虑到 $d_0(x, e_0^2)$ 对第一宗量的依赖关系是对数性质的，我们得

到精确到对数的关系

$$e^2 d(x, e^2) = e_0^2 d_0^{as}(x, e^2),$$

因此

$$e^2 = e_0^2 d_0^{as}(1, e_0^2), \tag{43.6}$$

此处 $d_0^{as}(x, e^2)$ 表示函数 $d_0(x, e^2)$ 当 $x$ 为大值时的渐近式.

考虑到函数 $d$ 的归一化,将(43.3)式积分,我们得到方程

$$\int_{e^2}^{e^2 d(x, e^2)} \frac{dz}{z\varphi(z)} = \ln x, \tag{43.7}$$

而(43.4)式通过替换积分变量化成形式为

$$\ln \frac{s(x, e^2)}{s(x_0, e^2)} = \int_{e^2 d(x_0, e_0^2)}^{e^2 d(x, e^2)} \frac{dz}{z\varphi(z)} \psi(z). \tag{43.8}$$

为了从方程 (43.7) 来决定函数 $d(x, e^2)$, 我们来计算在极限情况 $x \gg y$ 时由公式 (42.26) 所决定的函数 $\varphi$. 从(42.21)式取 $d_0$ 对 $z$ 的级数展开的第一项,为了决定第二项,利用 Jost 和 Luttinger 的计算(1950),这样得到

$$d_0(x, e^2) = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln x + \frac{e^4}{16\pi^2} \left( \frac{1}{4\pi^2} \ln x + \frac{1}{9\pi^2} \ln^2 x \right) + \cdots \tag{43.9}$$

利用(42.26)式,考虑到 $z$ 为微小量,由上式获得

$$\frac{1}{\varphi(z)} \approx \left( \frac{z}{12\pi^2} + \frac{z^2}{64\pi^4} \right)^{-1} \approx \frac{12\pi^2}{z} \left( 1 - \frac{3z}{16\pi^2} + z^2 c_1 + \cdots \right). \tag{43.10}$$

由此直接得出结论,量 $e^2 d$ 并不可能对于任何 $x$ 都是微小的. 实际上只要 $e^2 d$ 是微小量(因此 $z$ 也是微小量),就存在下列关系:

$$\frac{1}{\varphi(z)} < \frac{12\pi^2}{z}(1 + c) \quad (c > 0),$$

因此

$$\ln x < 12\pi^2 \int_{e^2}^{e^2 d} \frac{dx}{x}(1 + c) < \frac{12\pi^2}{e^2}(1 + c).$$

应该指出, 函数 $\varphi$ 的宗量是电荷的平方, 因此为了阐明当动量为超大值, 以至 $e^2 d$ 成为数量级等于 1 和大于 1 的量时 Green 函数的性质,必需研究 $e^2$ 为大值的区域(强耦合). 此时应该考虑到这里 $\varphi(z)$ 的结构已经不能根据对展开式 (43.8) 的有限项进行分析来决定.

将(43.10)式代入(43.7)式中,我们得到

$$1 - d^{-1} - \frac{3e^2}{16\pi^2} \ln d + c_1 e^4 (d - 1) + \cdots = \frac{e^2}{2\pi^2} \ln x, \tag{43.11}$$

从此式直接求出[1)]

$$d^{-1}(x, e^2) = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln x + \frac{3e^2}{16\pi^2} \ln \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln x \right) + \cdots. \tag{43.12}$$

完全同理,利用积分 (43.8) 可以改善通常微扰理论中电子 Green 函数的系数 $a$ 和 $b$

---

1) 如果限于前两项,我们就得到首先由 Ландау, Абрикосов 和 Халатников (1954 б) 求出的公式.

的展开式. 因而根据微扰理论,我们有

$$a_0(x, e^2) = 1 - \frac{1}{2(4\pi)^4} e^4 \ln x + \cdots, \tag{43.13}$$

$$b_0(x, e^2) = b_0\left[1 - \frac{3e^2}{16\pi^2}\ln x + \frac{e^4}{(4\pi^2)^2}(\alpha_1 \ln^2 x + \alpha_2 \ln x) + \cdots\right]. \tag{43.14}$$

在这些展开式中,数量级为 $e^2$ 的各项从公式 (42.22)、(42.23) 在极限 $x \gg y$ 下得到,但在决定(43.13)中数量级为 $e^4$ 的项时,我们利用 Горьков 的计算(1955).

从(43.13)式和(43.14)式得到

$$\psi_a(z) = -\frac{1}{2(4\pi)^4} z^2 + \cdots, \psi_b(z) = -\frac{3z}{16\pi^4} + \frac{\alpha_2}{16\pi^4} z^2 + \cdots.$$

将这些表式代到(43.8)式中,考虑到(43.10)式,令 $a(1, e^2) = 1$,我们获得表式

$$\ln a(x, e^2) = -\frac{3}{8(4\pi)^2} e^2(d(x, e^2) - 1) + \cdots, \tag{43.15}$$

$$\ln \frac{b(x, e^2)}{b(1, e^2)} = \frac{9}{4}\ln d^{-1} + \frac{3}{4\pi^2}\left(\alpha_2 + \frac{9}{16}\right) e^2(d - 1) + \cdots, \tag{43.16}$$

在(43.15)、(43.16)式中应该用展开式(43.12)来代替 $d$.

从以上三个表式可见,对所讨论的 Green 函数可求得如下形式的展开式:

$$f(e^2 \ln x) + e^2 f_1(e^2 \ln x) + \cdots. \tag{43.17}$$

将这些表式与公式 (43.9)、(43.13)、(43.14) 相比较, 可得出结论, 函数 $f_1 f_2 \cdots$ 的解析结构完全由羣微分方程决定, 但精确到只差数字系数未定, 而当已知前几个函数 $f$, $f_1$, $\cdots$, $f_{n-1}$ 时, 为了决定下一个函数 $f_n$ 的显式,只要按通常微扰理论求出 $f_n$ 对 $e^2 \ln x$ 展成级数的第一项即可,第一项的形式为 $c_n e^{2n+2} \ln x$.

表式(43.12)、(43.15)、(43.16)的引人注意的第二个特点在于: 当 $x$ 之值相当大以致乘积 $e^2/12\pi^2 \ln x \to 1$ 时,函数 $e^2 d(x,e^2)$ 不再是 $e^2$ 阶的微小量,从形式上来看,根据(43.12)式它将无限地增大.

因此,如果在公式(43.12)中取到 1 以后的第一项,我们获得 $d$ 的表式如下:

$$\frac{1}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left|\frac{p^2}{m^2}\right|}, \tag{43.18}$$

当

$$1 = \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left|\frac{p^2}{m^2}\right| \tag{43.19}$$

时,上式具有极点.

在这一基础上,有些作者(例如 Ландау 和 Померанчук (1955)) 甚至得出现代量子电动力学在逻辑上还不完整的结论.

但是很明显, 表式 (43.18) 只表示函数 $d$ 展成 (43.17) 类型级数的第一项, 在推导中利用了函数 $\varphi$ (通过 $d_0$) 以"不变电荷" $e^2 d$ 为幂的展开式, 也就是说 $e^2 d \ll 1$. 因此表式(43.18)的适用范围由以下条件来限定:

$$1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\left|\frac{p^2}{m^2}\right|\gg e^2. \tag{43.20}$$

至于在设想的极点(43.19)附近，$e^2d$ 不再满足条件 (42.28)，光子 Green 函数的真正性质问题是不能在上述微扰理论的基础上解决的.

与此相应，电子 Green 函数的表式(43.15)及(43.16)的适用范围也仅限于以下区域

$$1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln x\gg e^2.$$

关于这方面需要指出，方程(43.7)有一有趣的性质. 我们假定函数 $\varphi(x)$ 在其宗量的整个变化区域 $0<z<\infty$ 中是正定的，而且

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dz}{z\varphi(z)}=\infty.$$

同样我们假定当 $x\to\infty$ 时，真正函数 $d(x,e^2)$ 具有唯一的奇点，而且理论并不含有(43.18)类型"对数奇点"的任何不愉快的意外情况.

其次，假设我们利用函数 $\varphi_\Lambda(z)$ 的某一极限过渡来计算函数 $\varphi(z)$，$\varphi_\Lambda(z)$ 具有以下的性质：

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\varphi_\Lambda(z)=\varphi(z),\quad \text{当 } z \text{ 为任意值},$$

但此时对于任意确定的 $\Lambda$ 有

$$\varphi_\Lambda(z)>z\cdot\tau_\Lambda>0. \tag{A}$$

将 $\varphi_\Lambda$ 代入(43.7)式中，有

$$\int_{e^2_\Lambda}^{e^2_\Lambda d_\Lambda}\frac{dz}{z\varphi_\Lambda(z)}=\ln x. \tag{B}$$

根据 (A)，由上式可得

$$\ln x<\int_{e^2_\Lambda}^{\infty}\frac{dz}{z^2\tau_\Lambda}=\frac{1}{\tau_\Lambda e^2_\Lambda}$$

现在已清楚，为了将公式 (B) 应用到 $\ln x$ 的整个变域中(从 0 到$\infty$)，必须令

$$e^2_\Lambda=0.$$

不难设想，Ландау 和 Померанчук 所作的就是求得 $\varphi(z)$ 的这一种渐近，而当辅助正常化时，利用了非定域性的相互作用. 上述讨论表明，在渐近的基础上，对于精确解作出任何结论都是危险的.

## 43.3. 红外渐近行为

现在来研究 $p^2\sim m^2$ 区域，电子 Green 函数在此域内具有奇点. 因为此处光子 Green 函数是正常的，我们只考虑函数 $s=a、b$. 将这些函数表示成以下的形式较为方便：

$$s\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\frac{m^2}{\lambda^2},e^2\right)=S\left(\frac{k^2-m^2}{\lambda^2-m^2},\frac{\lambda^2-m^2}{m^2},e^2\right). \tag{43.21}$$

我们回到方程(42.25)，令其中 $y=1$. 此时在表式(43.21)中得到

$$\ln\frac{s(x,e^2)}{s(x_0,e^2)}=\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{z-1}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln S(\xi,z-1,e^2d(z,1,e^2))\right], \tag{43.22}$$

其中引进记号

$$s(x,1,e^2)=s(x,e^2). \tag{43.23}$$

我们还要提一下，动量 $\lambda$ 只是函数 $d$ 的归一化点，它不必与 $s$ 的归一化有关. 因此，

令 $y=1$（即 $\lambda^2=m^2$），我们对在电子 Green 函数的奇点 $x=1$ 点上的 $s$ 的归一化并不作出任何假定，仅仅是保证了“不变电荷” $e^2d$ 在所讨论的区域 $x\sim 1$ 中接近 $e^2$.

在(43.22)式中应该选定积分极限，迴避开在 $x=1$ 处的极点. 因此，设

$$x_0>1, \quad \text{当} \quad x>1,$$

及

$$x_0<1, \quad \text{当} \quad x<1.$$

为了从(43.22)式决定 $s$，我们只须知道在点

$$\xi=\frac{k^2-m^2}{\lambda^2-m^2}=1$$

的无穷小邻域中函数 $S(\xi, z-1, e^2)$ 的性质. 为此，我们利用通常微扰理论的公式. 取理论的二阶近似(42.22)式及(42.23)式后，有

$$A(\xi, z-1, e^2)=a\left(\frac{1-\xi}{z}+\xi, \frac{1}{z}, e^2\right)=$$

$$=1-\frac{e^2}{8\pi^2}\left\{\frac{\xi}{1+\xi(z-1)}\ln[\xi(z-1)]+c\right\}+\cdots, \tag{43.24}$$

$$B(\xi, z-1, e^2)=b\left(\frac{1-\xi}{z}+\xi, \frac{1}{z}, e^2\right)=$$

$$=1-\frac{e^2}{8\pi^2}\left\{\frac{\xi}{2}\frac{2+\xi(z-1)}{1+\xi(z-1)}\ln[\xi(z-1)]+c\right\}+\cdots, \tag{43.25}$$

$$e^2d(x, 1, e^2)=e_0^2+\cdots, \tag{43.26}$$

我们在 $z=1$ 点的邻域获得精确到数量级 $e_0^4$ 的项

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln A(\xi, z-1, e^2d)\right]_{\xi=1}=-\frac{3e_0^2}{8\pi^2}=-\frac{3\alpha}{2\pi},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln B(\xi, z-1, e^2d)\right]_{\xi=1}=-\frac{3e_0^2}{8\pi^2}=-\frac{3\alpha}{2\pi}.$$

将这些表式代到(43.22)式中，我们得到

$$\frac{a(x, e^2)}{a(x_0, e^2)}\sim\left|\frac{x-1}{x_0-1}\right|^{-\frac{3\alpha}{2\pi}},$$

$$\frac{b(x, e^2)}{b(x_0, e^2)}\sim\left|\frac{x-1}{x_0-1}\right|^{-\frac{3\alpha}{2\pi}}.$$

由此可见，当 $k^2\sim m^2$ 时，函数 $a$, $b$ 具有熟知的红外奇点

$$a, b\sim\left|1-\frac{k^2}{m^2}\right|^{-\frac{3\alpha}{2\pi}}. \tag{43.27}$$

函数的这种性质实质上可以直接从 (43.23) 式中得到. 事实上，在所讨论的区域中，这一关系式的右端积分的主部等于

$$\beta(e_0^2)\ln\left|1-\frac{k^2}{m^2}\right|.$$

因此，函数 $s$ 的相应的主部等于

$$c_1\left|1-\frac{k^2}{m^2}\right|^{\beta(e_0^2)} \quad (c_1=\text{const}).$$

可见微扰理论的第二阶逼近给出指标 $\beta(e_0^2)$ 的值是 $-\frac{3e_0^2}{8\pi^2}$.

## §44. 电动力学中的重正化羣(当 $d_l^0\neq 0$ 时)

### 44.1. 羣方程的推广

在以上所有论述中，将量子电动力学的重正化羣问题限于电磁场势的时序收缩只具有横向形式(32.7)的情况. 但是,对于更一般的情况,即当光子 Green 函数

$$D_{mn}(k)=-\frac{d(k^2)}{k^2}\left(g^{mn}-\frac{k_mk_n}{k^2}\right)-\frac{d_l(k^2)}{k^2}\frac{k_mk_n}{k^2} \tag{32.5}$$

含有纵向部分 $d_l$ 时,也可以构成重正化羣.

如同 § 31 中所指明了的，引进抵消项 $(z_3-1)$ (参阅(31.10)式)，只使(32.5)式中第一项重正化. 此时第二项(纵向项)并无任何变化.

对于 $d_l$ 单独写出变换定律以后，重正化羣的相应修改就便于表述. 此时，重正化羣方程可以写成以下形式(参看(31.37)式):

$$\left.\begin{aligned}&G_1\to G_2=zG_1,\ D_1\to D_2=z_3D_1,\ \Gamma_1\to\Gamma_2=z^{-1}\Gamma_1,\\&e_1^2\to e_2^2=z_3^{-1}e_1^2,\ (d_l)_1\to(d_l)_2=z_3(d_l)_1.\end{aligned}\right\} \tag{44.1}$$

上述方程将变换(42.2)直接推广到含有任意纵向部分的光子收缩.

和上述情况相似，变换 (44.1) 的意义在于: $G_1$, $D_1$, $\Gamma_1$, $e_1$, $(d_l)_1$ 及 $G_2$, $D_2$, $\Gamma_2$, $e_2$, $(d_l)_2$ 诸量在描述电子-正电子与光子的相互作用时是完全等同的.

从函数 $G$ 和 $D$ 过渡到函数 $a$, $b$, $d$ 及 $d_l$ 时[按照公式(42.3)及(32.5)，函数 $a$, $b$, $d$ 及 $d_l$ 与相应的四维动量平方值 $p^2$ 或 $k^2$ 有关],必须注意以下各点:

首先,(32.5)式的纵向部分 $d_l$ 与所选定的电磁场势的规范有关. 已经证明过,此时从极化算符 $\Pi$ 的梯度不变性要求出发可以得出结论: $d_l$ 项与 $e^2$ 无关，而且等于光子的未扰动 Green 函数的纵向项，也就是电磁场算符时序收缩的纵向项. 为简单起见，可认为此项与 $k^2$ 无关,并用 $d_l^0$ 来表示(与 § 32 中相似).

其次,改变势的规范就改变了电子 Green 函数的形式,但是对于光子 Green 函数的横向部分 $d(k^2)$ 没有影响. 因此函数 $a$ 及 $b$ 在上述情况中与 $d_l^0$ 有关,而此时 $d$ 与 $d_l^0$ 无关.

引进归一化的动量,并根据公式 (42.16)，化为无量纲变量,消去常数 $z$ 及 $z_3$ 以后,得到泛函方程:

$$e^2d(x,y,e^2)=e^2d(t,y,e^2)d\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},e^2d(t,y,e^2)\right), \tag{44.2}$$

及

$$\frac{s(x,y,e^2,e^2d_l^0)}{s(t,y,e^2,e^2d_l^0)}=\frac{s\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},e^2d(t,y,e^2),e^2d_l^0\right)}{s\left(1,\frac{y}{t},e^2d(t,y,e^2),e^2d_l^0\right)}. \tag{44.3}$$

方程(44.2)与方程(42.17)相一致,而方程(44.3)是方程(42.18)的推广.

我们来讨论 Lie 微分方程,对第二方程积分,我们得到,第一方程与(42.24)相合,代替方程(42.29),有

$$\ln\frac{s(x,\ y,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{s(x_0,\ y,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{z}\psi\left(\frac{y}{z},\ e^2d(z,\ y,\ e^2),\ e^2d_l^0\right),\tag{44.4}$$

其中

$$\psi(y,\ e^2,\ e^2d_l^0)=\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln s_0(\xi,\ y,\ e^2,\ e^2d_l^0)\right]_{\xi=1}.\tag{44.5}$$

此时上式中函数 $s_0(x,\ y,\ e^2,\ e^2d_l^0)$ 具有式(42.20)的形式,其中 $a$, $b$ 及其他个别项可以利用电磁收缩

$$i\overbrace{A_mA_n}=\frac{1}{k^2}\left(g^{mn}-\frac{k_mk_n}{k^2}\right)+\frac{1}{k^2}\frac{k_mk_n}{k^2}d_l^0\tag{44.6}$$

来计算.

因此,例如

$$a_1(x,\ y,\ d_l^0)=\frac{1}{8\pi^2}\left\{-3\frac{y}{x}\ln\left|\frac{x-y}{y}\right|+\right.$$
$$\left.+d_l^0\frac{x^2+y^2}{2x^2}\ln\left|\frac{x-y}{y}\right|+d_l^0\frac{y}{2x}+c(y,\ d_l^0)\right\},\tag{44.7}$$

$$b_1(x,\ y,\ d_l^0)=\frac{1}{8\pi^2}\left\{-\frac{3(x+y)}{2x}\ln\left|\frac{x-y}{y}\right|+\right.$$
$$\left.+d_l^0\frac{x+y}{2x}\ln\left|\frac{x-y}{y}\right|+c(y,\ d_l^0)\right\}.\tag{44.8}$$

## 44.2. "紫外"和"红外"渐近行为的确定

我们来确定电子 Green 函数的紫外和红外渐近. 令(44.7)式和(44.8)式中 $x\gg y$,我们得到

$$a_1(x,\ d_l^0)=\frac{d_l^0}{16\pi^2}\ln x,$$

$$b_1(x,\ d_l^0)=\frac{d_l^0-3}{16\pi^2}\ln x.$$

将这些表式代到(44.5)式中,然后代到(44.4)式,我们分别得到

$$\ln\frac{a(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{a(1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\int_1^x\frac{dz}{z}\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}=\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}\ln x,$$

$$\ln\frac{b(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{b(1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\int_1^x\frac{dz}{z}\left(\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}-\frac{3e^2}{16\pi^2}d(z,\ e^2)\right)=\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}\ln x-\frac{3e^2}{16\pi^2}\int_1^x\frac{dz}{z}d(z,\ e^2).$$

将表式(43.38)代入 $d(z,\ e^2)$ 中

$$d(z,\ e^2)=\frac{1}{1-\dfrac{e^2}{12\pi^2}\ln z},$$

我们得到

$$\ln\frac{b(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{b(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}\ln x-\frac{9}{4}\ln d(x,\ e^2).$$

因此[1]

$$a(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)=a(1,\ e^2,\ e^2d_l^0)x^{\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}},\tag{44.9}$$

$$b(x,\ e^2,\ e^2d_l^0)=b(1,\ e^2,\ e^2d_l^0)x^{\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}}[d(x,\ e^2)]^{-9/4}.\tag{44.10}$$

公式(44.9)、(44.10)是§43中相应公式的推广，而且当 $d_l^0=0$ 时，化为公式(43.15)和(43.16)的一次逼近.

在红外区域中，在公式(44.4)及(44.5)中引进新变量：

$$\ln\frac{s(x,\ 1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{s(x_0,\ 1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\ln S(\xi,\ t-1,\ e^2d(t,\ 1,\ e^2),\ e^2d_l^0)\right\}_{\xi=1}$$

在这一关系式的右边，利用当 $z\to1$ 时 $A$ 和 $B$ 的极限值，以及取对 $e^2$ 的一级近似：

$$A(\xi,\ z-1,\ e^2,\ e^2d_l^0)|_{z\to1}=a\left(\frac{1-\xi}{z}+\xi,\ \frac{1}{z},\ e^2\right)\Big|_{z\to1}\approx$$

$$\approx1+\frac{e^2}{8\pi^2}\{(d_l^0-3)\ln[\xi(z-1)]+c\},$$

$$B(\xi,\ z-1,\ e^2,\ e^2d_l^0)|_{z\to1}=b\left(\frac{1-\xi}{z}+\xi,\ \frac{1}{z},\ e^2\right)\Big|_{z\to1}\approx$$

$$\approx1+\frac{e^2}{8\pi^2}\{(d_l^0-3)\ln[\xi(z-1)]+c\},$$

对 $s=a,\ b$，我们得到

$$\ln\frac{s(x,\ 1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}{s(x_0,\ 1,\ e^2,\ e^2d_l^0)}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t-1}\frac{e^2d_l^0-3e^2d(t,\ 1,\ e^2)}{8\pi^2}=\frac{(d_l^0-3)e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{x-1}{x_0-1}\right|.\tag{44.11}$$

因此，我们求得 $d_l^0\neq0$ 时电子 Green 函数的奇点

$$\left|1-\frac{k^2}{m^2}\right|^{\beta}$$

的指标 $\beta$ 在对 $e^2$ 的一级近似下的值为

$$\beta=\frac{(d_l^0-3)e_0^2}{8\pi^2}=\frac{\alpha(d_l^0-3)}{2\pi}.\tag{44.12}$$

### 44.3. 顶角部分的渐近行为

最后我们讨论在紫外和红外渐近区域中顶角部分的渐近表式. 通过与研究函数 $G$ 所采用的类似步骤，可以从泛函方程(42.33)中得到这些表式.

---

1) Ландау, Абрикосов 和 Халатников (1954, а,в) 通过解 Green 函数的近似积分方程首先得到这些公式.

当 $d_l^0 \neq 0$ 时，方程(42.33)可以写成形式为

$$\frac{\Gamma(x, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0)}{\Gamma(t, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0)} = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{u}{t}, e^2 d(t, u, e^2), e^2 d_l^0\right)}{\Gamma\left(1, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, \frac{u}{t}, e^2 d(t, u, e^2), e^2 d_l^0\right)}. \tag{44.13}$$

为了上述目的，下面我们限于讨论 $\Gamma_{\alpha\beta}^n$ 中与 Dirac 矩陣 $\gamma^n$ 成比例的项

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n \sim \gamma_{\alpha\beta}^n \Gamma, \tag{44.14}$$

即在方程 (44.13) 中今后将 $\Gamma$ 理解为完全确定的函数，它对顶部 $\Gamma^n$ 的贡献与 $\gamma^n$ 成正比．以下可以见到，这一点已经完全足够．

将方程(44.13)取对数后对 $x$ 微分，令 $t = x$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0) =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \Gamma\left(\xi, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}, e^2 d(x, u, e^2), e^2 d_l^0\right)\right]_{\xi=1}. \tag{44.15}$$

(44.15)式的解具有形式

$$\ln \frac{\Gamma(x, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0)}{\Gamma(x_0, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \Gamma\left(\xi, \frac{y}{x'}, \frac{z}{x'}, \frac{u}{x'}, e^2 d(x', u, e^2), e^2 d_l^0\right)\right]_{\xi=1}. \tag{44.16}$$

现在把 $\Gamma(x_0, y, z\cdots)$ 看成是 $y$ 的函数，然后认为 $\Gamma(x_0, y_0, z\cdots)$ 是 $z$ 的函数，得到最后的公式：

$$\ln \frac{\Gamma(x, y, z, u, e^2, e^2 d_l^0)}{\Gamma(x_0, y_0, z_0, u, e^2, e^2 d_l^0)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{x'}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \Gamma\left(\xi, \frac{y}{x'}, \frac{z}{x'}, \frac{u}{x'}, e^2 d(x', u, e^2), e^2 d_l^0\right)\right]_{\xi=1} +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{y'}\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \Gamma\left(\frac{x_0}{y'}, \eta, \frac{z}{y'}, \frac{u}{y'}, e^2 d(y', u, e^2), e^2 d_l^0\right)\right]_{\eta=1} +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{z'}\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \Gamma\left(\frac{x_0}{z'}, \frac{y_0}{z'}, \zeta, \frac{u}{z'}, e^2 d(z', u, e^2), e^2 d_l^0\right)\right]_{\zeta=1}. \tag{44.17}$$

显而易见，(44.17)式中可以用另一种积分次序．以下我们可以看到，在每一具体情况中，这一次序根据微扰理论的对应性考虑可以唯一地决定．

如果我们利用微扰理论的二阶项来决定式中之 $\Gamma$：

$$\Gamma(x, y, z, e^2, e^2 d_l^0) = 1 + e^2\left[\Lambda_l\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}\right) - \tilde{\Lambda}_l(u)\right] +$$

$$+ e^2 d_l^0\left[\Lambda_l\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}\right) - \tilde{\Lambda}_l(u)\right], \tag{44.18}$$

(44.17)式的右边将大大简化，因为在这一情况下，可以将含有 $\Lambda_l$ 的积分(44.17)式计算到底．显然，只有在下述的情况下，利用(44.18)式才是合法的，即

$$\left.\begin{aligned} e^2\Lambda_t\left(\frac{x}{u},\frac{y}{u},\frac{z}{u}\right)&\ll 1,\\ e^2\Lambda_l\left(\frac{x}{u},\frac{y}{u},\frac{z}{u}\right)&\ll 1,\end{aligned}\right\} \tag{44.19}$$

这是对函数 $\Lambda_t$ 和 $\Lambda_l$ 的宗量所加的一定的限制. 在(44.17)式的右端求 $\Gamma$ 时应该考虑到这一限制.

我们讨论紫外渐近的具体情况

$$|k^2| \gg |p^2|, \quad |q^2| \gg m^2,$$

或者

$$|z| \gg |x|, \quad |y| \gg |u|.$$

Абрикосов (1956) 和 Судаков (1956) 完成了微扰理论第二阶相应的计算. 他们得到

$$\Lambda_l = 0, \ \Lambda_t\left(\frac{x}{u},\frac{y}{u},\frac{z}{u}\right) = -\frac{1}{8\pi^2}\ln\left|\frac{z}{x}\right|\ln\left|\frac{z}{y}\right|. \tag{44.20}$$

正如其他类似的情况,在此处已经消去"质量"变量 $u$.

为了获得 $\Gamma$ 的渐近性质,改变公式(44.17)式中的积分次序,将该式写成如下形式:

$$\ln\frac{\Gamma(x, y, z, e^2)}{\Gamma(x_0, y_0, z_0, e^2)} = I_1(x, y, z, e^2|z_0) + I_2(x, y, z_0, e^2|x_0) + I_3(x_0, y, z_0, e^2|y_0), \tag{44.21}$$

$$I_1 = \int_{z_0}^{z}\frac{dz'}{z'}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\Gamma\left(\frac{x}{z'},\frac{y}{z'},\xi, e^2d(z', e^2)\right)\right]_{\xi=1}, \tag{44.22}$$

$$I_2 = \int_{x_0}^{x}\frac{dx'}{x'}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\Gamma\left(\eta,\frac{y}{x'},\frac{z_0}{x'}, e^2d(x', e^2)\right)\right]_{\eta=1}, \tag{44.23}$$

$$I_3 = \int_{y_0}^{y}\frac{dy'}{y'}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\Gamma\left(\frac{x_0}{y'},\zeta,\frac{z_0}{y'}, e^2d(y', e^2)\right)\right]_{\zeta=1}. \tag{44.24}$$

我们认为 $x_0$, $y_0$, $z_0$ 是数量级相同的量,这样可以应用通常的微扰理论计算 $I_3$ 而得到

$$I_3 = \frac{e^2}{8\pi^2}\ln\frac{z_0}{x_0}\int_{y_0}^{y}\frac{dy'}{y'}d(y', e^2) = \frac{3}{2}\ln\frac{z_0}{x_0}\ln\frac{d(y, e^2)}{d(y_0, e^2)}. \tag{44.25}$$

所得公式的适用性照常受到下列不变性微扰理论应用条件的限制:

$$e^2d(y, e^2) \ll 1,$$

或者

$$1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln y \gg e^2. \tag{44.26}$$

现在来计算 $I_2$. 当 $x' \sim x_0$ 时, (44.23) 式右端的函数 $\Gamma$ 的第二个宗量可以比 1 大得多,而对第一及第三宗量,这是不可能的. 因此,为了决定 $I_2$ 中的 $\Gamma$,我们利用对变量 $y$ 积分后所得的(44.16)类型的方程

$$\ln\frac{\Gamma(\bar{x}, y, \bar{z}, e^2)}{\Gamma(\bar{x}, y_0, \bar{z}, e^2)} = I_3(\bar{x}, y, \bar{z}, e^2|y_0). \tag{44.27}$$

此处 $\bar{x}$ 及 $\bar{z}$ 不能比 1 大得多,而 $y$ 的变化区域只由条件(44.26)所限定. 将(44.27)式代入(44.23)式中,考虑到(44.20)式,我们得到

$$I_2(x, y, z_0, e^2|x_0) =$$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2} \ln \frac{z_0}{y_0} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial x'}{x'} d(x', e^2) - \frac{3}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial x'}{x'} \ln \frac{d\left(\frac{y}{x'}, e^2 d(x', e^2)\right)}{d\left(\frac{y_0}{x'}, e^2 d(x', e^2)\right)} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln \frac{z_0}{y_0} \ln \frac{d(x, e^2)}{d(x_0, e^2)} - \frac{3}{2} \ln \frac{x}{x_0} \ln \frac{d(y, e^2)}{d(y_0, e^2)}. \tag{44.28}$$

当变量 $y$ 及 $x$ 满足(44.28)条件时，上述公式是正确的.

最后我们来求 $I_1$. 考虑到(44.22)式右端的函数 $\Gamma$ 的宗量，可以证明，为了求 $I_1$，应该利用(44.27)类型的方程，此方程的右端为 $I_2 + I_3$ 之和. 相应的计算使我们得到下式:

$$I_1(x, y, z, e^2|z_0) = 3\left(\ln \frac{z}{z_0} - \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{d(z, e^2)}{d(z_0, e^2)}\right) +$$
$$+ \frac{3}{2} \ln \frac{z}{z_0} \left[\ln \frac{d(x, e^2)}{d(x_0, e^2)} + \ln \frac{d(y, e^2)}{d(y_0, e^2)}\right] +$$
$$+ \frac{3}{2} \ln x_0 y_0 \cdot \ln \frac{d(z, e^2)}{d(z_0, e^2)}. \tag{44.29}$$

在将(44.21)式右端写成最后形式之前，须作以下说明. 虽然(44.29)式对 $x$ 和 $y$ 是对称的，但是 (44.25) 和 (44.28) 两式之和并不具有这一性质，因为当求 $I_2$ 和 $I_3$ 时，我们假定这些表式对 $x$ 和 $y$ 是不对称的. 但是，既然原始方程是对称的，我们可施行相应的对称化. 这就给出

$$\ln \frac{\Gamma(x, y, z, e^2)}{\Gamma(x_0, y_0, z_0, e^2)} = 3\left[\ln \frac{z}{z_0} - \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{d(z, e^2)}{d(z_0, e^2)}\right] +$$
$$+ \frac{3}{2} \ln x_0 y_0 \cdot \ln \frac{d(z, e^2)}{d(z_0, e^2)} + \frac{3}{2}\left[\ln \frac{z}{x_0} \ln \frac{d(y, e^2)}{d(y_0, e^2)} +\right.$$
$$\left. + \ln \frac{z}{y_0} \ln \frac{d(x, e^2)}{d(x_0, e^2)}\right] + \frac{3}{4}\left[\ln \frac{x_0}{x} \ln \frac{d(y, e^2)}{d(y_0, e^2)} +\right.$$
$$\left. + \ln \frac{y_0}{y} \ln \frac{d(x, e^2)}{d(x_0, e^2)}\right]. \tag{44.30}$$

要上述表式成立需满足以下条件:

$$\left.\begin{aligned} &1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln z \gg e^2, \\ &\ln z > \ln x, \ln y \geqslant \ln x_0, \ln y_0, \ln z_0, \\ &z_0, y_0, x_0 \gg 1. \end{aligned}\right\} \tag{44.31}$$

此时 $\ln x_0 \sim \ln y_0$，而 $\ln z_0$ 比 $\ln x_0$, $\ln y_0$ 不能大得很多.

而且注意当 $e^2 \ln z \ll 1$ 时，我们得到公式[1)]

$$\ln \frac{\Gamma(x, y, z, e^2)}{\Gamma(x_0, y_0, z_0, e^2)} = \frac{e^2}{8\pi^2}\left[\ln \frac{z}{x} \ln \frac{z}{y} - \ln \frac{z_0}{x_0} \ln \frac{z_0}{y_0}\right]. \tag{44.32}$$

---

1) 这一公式首先由 Судаков (1956) 对一系列的 Feynman "主要"图形求和而得到，然后由 Бланк (1956) 利用本征时间法对 Schwinger 方程近似求解而得到.

对紫外渐近的另一种情况

$$p^2 = q^2 \gg k^2, m^2,$$

微扰理论给出

$$\Lambda_l = 0, \Lambda_l\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}\right) = -\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{x}{u}, \tag{44.33}$$

从此式得到

$$\frac{\Gamma(x, x, e^2, e^2d_l^0)}{\Gamma(x_0, x_0, e^2, e^2d_l^0)} = \left(\frac{x}{x_0}\right)e^{-\frac{e^2d_l^0}{16\pi^2}}. \tag{44.34}$$

我们讨论红外渐近，研究当

$$p^2 = q^2 \to m^2, \quad k^2 < 0$$

时的情况，Абрикосов (1956) 完成了微扰理论第二阶的相应计算. 他得到

$$\Lambda_l\left(\frac{x}{u}, \frac{z}{u}\right) = \frac{1}{8\pi^2}\ln\left|\frac{u}{x-u}\right|, \tag{44.35}$$

$$\Lambda_l\left(\frac{x}{u}, \frac{z}{u}\right) = \varphi\left(\frac{z}{u}\right) + \psi\left(\frac{z}{u}\right)\ln\left|\frac{u}{x-u}\right|, \tag{44.36}$$

其中

$$\varphi\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{1-\dfrac{2u}{z}}{\sqrt{1-\dfrac{4u}{z}}}\left[\ln\left|1-\frac{z}{2u}\right|\right]^2, \tag{44.37}$$

$$\psi\left(\frac{z}{u}\right) = 2\frac{\dfrac{2u}{z}-1}{\sqrt{1-4\dfrac{u}{z}}}\ln\left(1-\frac{4u}{z}+\frac{|z|}{2u}\sqrt{1+\frac{4u}{|z|}}\right)-1. \tag{44.38}$$

完成相应的积分后，我们得到

$$\ln\frac{\Gamma(x, z, u, e^2, e^2d_l^0)}{\Gamma(x_0, z_0, u, e^2, e^2d_l^0)} =$$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left|\frac{x_0-u}{x-u}\right|\Phi\left(\frac{z}{u}, \frac{z_0}{u}, u\right) + \frac{e^2}{8\pi^2}\Psi\left(\frac{z}{u}, \frac{z_0}{u}, \frac{x_0}{u}, u\right), \tag{44.39}$$

其中

$$\Psi\left(\frac{z}{u}, \frac{z_0}{u}, \frac{x_0}{u}, u\right) = \int_{z_0}^{z} d(z', u, e^2)\left[\frac{\partial\varphi\left(\dfrac{z'}{u}\right)}{\partial z'} + \ln\left|\frac{u}{x_0-u}\right|\frac{\partial\psi\left(\dfrac{z'}{u}\right)}{\partial z'}\right]dz'. \tag{44.40}$$

$$\Phi\left(\frac{z}{u}, \frac{z_0}{u}, u\right) = \int_{z_0}^{z} d(z', u, e^2) + \frac{\partial\psi(z'/u)}{\partial z'}dz' + f\left(\frac{z_0}{u}\right) - 1 + d_l^0. \tag{44.41}$$

我们来更细致地研究红外奇点

$$\Phi\left(\frac{z}{u}, \frac{z_0}{u}, u\right)$$

的指标. 为了计算积分(44.41)，我们注意到，函数 $d$ 在上述情况具有形式(43.2)，而式中

出现的函数 $f(t)$ 在大 $t$ 的区域内与 $\psi(t)$ 成正比. 因此, 精确到数量级 $e^2$ 的微小项, 可以令

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{1-e^2\left[f\left(\frac{z'}{u}\right)-f\left(\frac{1}{u}\right)\right]} \frac{\partial\psi\left(\frac{z'}{u}\right)}{\partial z'} \approx$$

$$\approx \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{1-(e^2/24\pi^2)\psi(z'/u)} \frac{\partial\psi\left(\frac{z'}{u}\right)}{\partial z'} =$$

$$= \frac{24\pi^2}{e^2} \ln \frac{1-(e^2/24\pi^2)\psi(z_0/u)}{1-(e^2/24\pi^2)\psi(z/u)}. \tag{44.42}$$

将此式代到(44.41)式中,考虑到 $(e^2/24\pi^2)\psi(z_0/u)$ 是微小量,对于红外奇点

$$\Gamma(p^2, p^2, k^2, m^2, e^2, e^2d_1^0) \approx \left|\frac{m^2}{p^2-m^2}\right|^{\beta\left(\frac{k^2}{m^2}\right)}$$

的指标,我们得到表式

$$\beta\left(\frac{k^2}{m^2}\right) = \frac{e^2d_1^0}{8\pi^2} - 3\ln\left[1-\frac{e^2}{24\pi^2}\psi\left(\frac{k^2}{m^2}\right)\right]. \tag{44.43}$$

在大 $k^2$ 的极限情况下,当

$$\frac{e^2}{24\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2} \sim 1,$$

从此得到

$$\beta\left(\frac{k^2}{m^2}\right) = \frac{e^2d_1^0}{8\pi^2} + 3\ln d\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right).$$

另一方面,在

$$\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2} \ll 1$$

的情况下,当

$$\frac{e^2}{24\pi^2}\psi\left(\frac{k^2}{m^2}\right) \ll 1$$

时,我们得到[1)]

$$\beta\left(\frac{k^2}{m^2}\right) = \frac{e^2}{8\pi^2}\left[d_1^0 + \psi\left(\frac{k^2}{m^2}\right)\right]. \tag{44.44}$$

在(44.44)式中过渡到极限 $k^2 \to 0$, 我们得到公式

$$\beta(0) = \frac{e^2}{8\pi^2}(d_1^0 - 3), \tag{44.45}$$

根据 Ward 恒等式,上式与(44.12)式相一致.

我们在这里讨论了当 $\Gamma^n$ 与矩阵 $\gamma^n$ 成正比时顶部函数的基本渐近式.

---

1) Абрикосов (1950) 用将一系列的基本图形求和的方法首先得到这一公式.

当考虑到 $e^2$ 的高次项时，必须研究另一个矩阵结构的分量 $\Gamma^n$. 从上述讨论得出结论，相应的方法也可以推广到这一情况.

### 44.4. 各种可能性

在量子电动力学中，重正化羣不仅可以改进 Green 函数和顶角函数的微扰理论公式，还可以用于改进外部线多于三条时的图形的微扰理论公式. 这些图形本身不是发散的，只是由于它们的组成部分 Green 函数及顶角的发散性才引起图形的发散. 因此在重正化时，通过研究图形的具体结构可以直接得到它们的变换公式.

例如，我们讨论电子在外场中发射光子的散射图形（或者光子受电子的散射）. 这时不是考虑微扰理论的二阶图形，而是考虑散射矩阵的具有两条光子外部线和两条电子外部线的可能图形的总和. 用 $M$ 来表示相应于这一广义图形的算符. 从图形的结构显而易见，算符 $M$ 的相乘重正化导致以下变换：

$$M_1 \to M_2 = z_1^{-1} z_2 z_1^{-1} M_1,$$

或者考虑到 Ward 恆等式，化为

$$M_2 = z_1^{-1} M_1, \tag{44.46}$$

也就是说，$M$ 的变换和顶角一样.

利用 (44.46) 式，可以用通常方法写出这一算符的矩阵元的泛函方程，然后写出它的微分方程. 后者可能是可积的. 当 $d = 1$ 时，得到特别简单的表式：

$$M_{\alpha\beta} = \exp\{\ln M^0_{\alpha\beta}\}; \tag{44.47}$$

此式的意义是，为了改善微扰理论，应该展成级数的不是矩阵元本身，而是位于指数中的对数.

同理，可以讨论具有三个光子自由端和两个电子自由端的图形（双重 Compton 效应），一般说来，可以讨论任何过程的图形. 当 $d = 1$ 时，即当略去电子-正电子迴线时，结果将大大简化.

为了研究因计算散射的辐射修正而引起的“红外災难”，可以直接利用(44.47)式. 大家知道，为了消除这一災难，必须讨论的不是纯粹弹性散射，而是能量损耗不超过 $\Delta\varepsilon$ 的散射. 通常的微扰理论导致微分有效截面对于 $\Delta\varepsilon$ 的不正确关系，也就是，当 $\Delta\varepsilon \to 0$ 时，即对于纯粹弹性散射时，$d\sigma \to \infty$. 利用改善了的微扰理论来讨论会给出物理上正确的结果：当 $\Delta\varepsilon \to 0$ 时，$d\sigma \to 0$. 为此，必须利用 (44.47) 式和顶角部分的相应的表式. 当 $\Delta\varepsilon$ 与零相差很大时，通常的和改善后的微扰理论的结果是一致的. 可以完全同样地讨论由于计算 Compton 效应的辐射修正而产生的“红外災难”.

## § 45. 双电荷赝标量介子理論中的重正化羣

### 45.1. 介子理论的第二电荷

可以将重正化羣方法应用到任意的可重正化介子理论，例如讨论具有赝标量耦合的赝标量介子理论. 在 § 33 中已经证明，上述情况与旋量电动力学的本质的区别在于介子

理论中存在着第二电荷，这是由于减去发散时，除了与量子电动力学所应用的抵消项相应的项以外，还必须引进“四介子”的抵消项 $h\varphi^4$. 系数 $h$ 的发散部分由减法程序单值地决定，但在有限部分中含有任意性. 这样，在理论中除了介子电荷 $g$ 以外，实际上还含有一个有限常数 $h$，因此，相互作用拉格朗日函数密度可以写成形式

$$\mathscr{L} = g{:}\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi{:} + h{:}\varphi^4{:}. \tag{33.14}$$

此处 $\psi$, $\bar{\psi}$ 是质量为 $M$ 的核子场的旋量函数，$\varphi$ 是质量为 $\mu$ 的介子场的赝标量函数，$\Gamma$ 是顶角部分矩阵.

将拉格朗日函数密度中有限的相乘附加项写成形式为

$$(z_1-1)g{:}\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi{:} - (z_2-1){:}\bar{\psi}(\hat{p}-M)\psi{:} + (z_3-1){:}\varphi(p^2-\mu^2)\varphi{:} + \\ + (z_4-1)h{:}\varphi^4{:}, \tag{45.1}$$

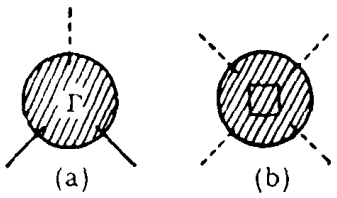


图 55

我们引进核子 Green 函数 $G$，介子 Green 函数 $\Delta$，三顶角函数 $\Gamma^5$ 和四介子函数□来进行讨论. 与以前相同，这里 $\Gamma^5$ 表示图 55a 中内部线所对应的各项的和，它含有一条外部介子线和两条外部核子线，而□相当于具有四条外部介子线的图形(图 55b).

分析 (45.1)式中各项对 $G$, $\Delta$, $\Gamma^5$ 和□的影响，不难得到下列方程(并请参阅(33.16)式和(33.18)式):

$$\left.\begin{aligned} &G_1 \to G_2 = z_2 G_1,\ \Gamma_1^5 \to \Gamma_2^5 = z_1^{-1}\Gamma_1^5,\ \Delta_1 \to \Delta_2 = z_3\Delta_1, \\ &\square_1 \to \square_2 = z_4^{-1}\square_1,\ g_1^2 \to g_2^2 = z_1^2 z_2^{-2} z_3^{-1} g_1^2,\ h_1 \to h_2 = z_4 z_3^{-2} h_1, \end{aligned}\right\} \tag{45.2}$$

这些方程定义介子理论中双电荷的重正化羣.

## 45.2. 化为羣泛函方程

在动量表象中，利用关系

$$G(p) = \frac{\hat{p}s_1(p^2) + Ms_2(p^2)}{M^2 - p^2}, \tag{45.3}$$

$$\Delta(k) = \frac{d(k^2)}{\mu^2 - k^2}, \tag{45.4}$$

可以将函数 $G$ 和 $\Delta$ 通过只依赖于相应的四维动量平方的标量函数 $s_1$, $s_2$ 和 $d$ 来表示.

顶角部分函数 $\Gamma^5_{\alpha\beta}$ 和 $\square_{ijkl}$ 也依赖于许多标宗量，并且可以写成下列形式:

$$\Gamma^5_{\alpha\beta}(p, q) = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}\Gamma(p^2, q^2, (p+q)^2), \tag{45.5}$$

$$\square_{ijkl}(p, q, k) = \tilde{\square}_{ijkl}\square(p^2, q^2, k^2, (p+q)^2, (p+k)^2, (p+q+k)^2), \tag{45.6}$$

这里 $\Gamma$ 和□是标宗量的标函数. 这样，在一般情况下羣方程中的函数含有三甚至六个动量变量.

利用归一化动量 $\lambda$，化成无量纲的宗量，有

$$s\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right)\Big|_{p^2=\lambda^2} = 1,$$

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right)\Big|_{k^2=\lambda^2} = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{p^2}{\lambda^2}, \frac{q^2}{\lambda^2}, \frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right)\Big|_{p^2=q^2=k^2=\lambda^2} = 1,$$

$$\square\left(\frac{p_1^2}{\lambda^2}, \cdots, \frac{p_6^2}{\lambda^2}, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right)\Big|_{p_1^2=\cdots=p_6^2=\lambda^2} = 1. \tag{45.7}$$

我们能够决定，并且从方程(45.2)中消去常数 $z_1, \cdots, z_4$. 这样，我们得到

$$\left.\begin{aligned} g_2^2 &= g_1^2\psi\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \frac{\mu^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, g_1^2, h_1\right), \\ h_2 &= h_1\varphi\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}, \frac{\mu^2}{\lambda_1^2}, \frac{M^2}{\lambda_1^2}, g_1^2, h_1\right), \end{aligned}\right\} \tag{45.8}$$

其中

$$\psi(x, y, Y, g^2, h) = \\ = s^2(x, y, Y, g^2, h)\Gamma^2(x, x, x, y, Y, g^2, h)d(x, y, Y, g^2, h), \tag{45.9}$$

以及

$$\varphi(x, y, Y, g^2, h) = d^2(x, y, Y, g^2, h)\square(x, \cdots, x, y, Y, g^2, h). \tag{45.10}$$

从(45.8)式可以得到，函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 的变换法具有以下形式

$$g_1^2\psi_1 = g_2^2\psi_2, \quad h_1\varphi_1 = h_2\varphi_2, \tag{45.11}$$

注意，函数 $\psi$ 描述两个核子之间的有效相互作用，而函数 $\varphi$ 是指两个介子之间的相互作用，如讨论相应的 Feynman 图形，就不难证实这一点.

从 (45.11) 式可以得到结论：乘积 $g^2\psi$ 和 $h\varphi$ 是双电荷重正化羣的不变量，可以分别称为不变核电荷和不变介子电荷.

我们注意到根据(45.9)式和(45.10)式不变电荷是由 Green 函数的对称渐近式的乘积来定义的.

注意，按照(45.7)式，$\psi$ 和 $\varphi$ 的归一化条件具有形式

$$\psi\left(1, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right) = 1, \tag{45.12}$$

$$\varphi\left(1, \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \frac{M^2}{\lambda^2}, g^2, h\right) = 1. \tag{45.13}$$

我们得到方程组：

$$\psi(x, y, Y, g^2, h) = \psi(t, y, Y, g^2, h)\psi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{Y}{t}, g_1^2, h_1\right), \tag{45.14}$$

$$\varphi(x, y, Y, g^2, h) = \varphi(t, y, Y, g^2, h)\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{Y}{t}, g_1^2, h_1\right), \tag{45.15}$$

$$\frac{a(x, y, Y, g^2, h)}{a(t, y, Y, g^2, h)} = \frac{a\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{Y}{t}, g_1^2, h_1\right)}{a\left(1, \frac{y}{t}, \frac{Y}{t}, g_1^2, h_1\right)}, \tag{45.16}$$

其中

$$x = \frac{k^2}{\lambda_2^2}, \ y = \frac{\mu^2}{\lambda_2^2}, \ Y = \frac{M^2}{\lambda_2^2}, \ t = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \tag{45.17}$$

和

$$g_1^2 = g^2\psi(t, y, Y, g^2, h), \tag{45.18}$$

$$h_1 = h\varphi(t, y, Y, g^2, h), \tag{45.19}$$

而 $a$ 表示 $s$, $\tilde{\Gamma}$, $d$ 和 $\tilde{\square}$ 中任意一个函数.

方程 (45.14)—(45.19) 表明以下事实,由于存在重正化羣,可以改变质量和动量的大小,同时改变电荷 $g$ 和 $h$.

将方程(45.14)、(45.15)和对数方程(45.16)对 $x$ 作微分,然后令 $t = x$, 我们得到双电荷介子理论的 Lie 微分方程:

$$\frac{\partial\psi(x, y, Y, g^2, h)}{\partial x} = \frac{\psi(x, y, Y, g^2, h)}{x}\Psi\left(\frac{y}{x}, \frac{Y}{x}, g^2\psi, h\varphi\right), \tag{45.20}$$

$$\frac{\partial\varphi(x, y, Y, g^2, h)}{\partial x} = \frac{\varphi(x, y, Y, g^2, h)}{x}\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{Y}{x}, g^2\psi, h\varphi\right), \tag{45.21}$$

$$\frac{\partial \ln a(x, y, Y, g^2, h)}{\partial x} = \frac{1}{x}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln a\left(\xi, \frac{y}{x}, \frac{Y}{x}, g^2\psi, h\varphi\right)\right]_{\xi=1}, \tag{45.22}$$

其中

$$\Psi(y, Y, g^2, h) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(\xi, y, Y, g^2, h)\right]_{\xi=1}, \tag{45.23}$$

$$\Phi(y, Y, g^2, h) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(\xi, y, Y, g^2, h)\right]_{\xi=1}. \tag{45.24}$$

这样将问题化成(44.20)、(44.21)两个方程的方程组,因为当已知 $\psi$ 和 $\varphi$ 时,利用下列积分:

$$\ln\frac{a(x, y, Y, g^2, h)}{a(x_0, y, Y, g^2, h)} = \int_{x_0}^{x}\frac{dz}{z}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln a\left(\xi, \frac{y}{z}, \frac{Y}{z}, g^2\psi(z, y, Y, g^2, h), h\varphi(z, y, Y, g^2, h)\right)\right]_{\xi=1}, \tag{45.25}$$

可以由(44.22)式来决定其余一切函数 $a$.

假定利用微扰理论确定了方程(45.20)—(45.22)右端的函数,我们有可能求出满足通常微扰理论要求的函数 $\psi$, $\varphi$, $s$, $\tilde{\Gamma}$, $\Delta$ 和 $\tilde{\square}$[1].

### 45.3. 紫外渐近行为

现在将得到的羣方程应用到大动量区域中,

$$|k^2| \gg M^2 > \mu^2.$$

在这一情况下,微扰理论级数的各项变成 $\ln x$ 的函数,而且与变量 $y$ 和 $Y$ 无关. 因此,在方程(45.20)—(45.25)中可以作相应的过渡,在方程中略去 $y$ 和 $Y$. 再用记号

$$g^2\psi(x, g^2, h) = \sigma(z, g^2, h), \tag{45.26}$$

---

1) 自然,这时应该注意到由于耦合常数 $\left(\frac{g^2}{4\pi}\sim 15\right)$ 的可观察值是大值,这里对介子动力学微扰理论所进行的改善与实验没有直接的联系,因而带有模型的性质.

$$h\varphi(x, g^2, h) = \rho(z, g^2, h), \tag{45.27}$$

其中

$$z = \ln x,$$

而 $\sigma$ 和 $\rho$ 所表示的不是别的，而是不变电荷. 代替(45.21)式和(45.22)式，我们得到方程组

$$\frac{d\sigma}{dz} = \sigma\Psi(\sigma, \rho), \tag{45.28}$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \rho\Phi(\sigma, \rho), \tag{45.29}$$

其中

$$\Psi(\sigma,\rho) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(\xi, \sigma, \rho)\right]_{\xi=1}, \tag{45.30}$$

$$\Phi(\sigma,\rho) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(\xi, \sigma, \rho)\right]_{\xi=1}, \tag{45.31}$$

而且，除此以外，有

$$\ln\frac{a(x, g^2, h)}{a(x_0, g^2, h)} = \int_{\ln x_0}^{\ln x} dz\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\ln a(\xi, \sigma(z, g^2, h), \rho(z, g^2, h))\right]_{\xi=1}. \tag{45.32}$$

将(45.29)式除以(45.28)式，就消去了变量 $z$：

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{\rho\Phi(\sigma, \rho)}{\sigma\Psi(\sigma, \rho)}. \tag{45.33}$$

在弱耦合场合，当 $g^2h \ll 1$ 时，不难分析方程(45.33)式，而函数 $\Psi$ 和 $\Phi$ 的级数展开可以从通常的微扰理论来得到. 研究低阶的图形，我们求到这些函数的展开式的前几项：

$$\Psi(\sigma, \rho) = \psi_1\sigma + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma\rho + \psi_4\rho^2 + \cdots, \tag{45.34}$$

$$\rho\Phi(\sigma, \rho) = \varphi_1\sigma + \varphi_2\sigma\rho + \varphi_3\rho^2 + \varphi_4\sigma\rho^2 + \cdots, \tag{45.35}$$

其中 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \varphi_1, \varphi_2$ 是某些数字系数.

从这些展开式直接可以得出结论，在点 $\sigma = 0$ 的邻域，(45.33)有两个奇异解：

$$\rho(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \cdots, \tag{45.36}$$

式中第一个系数 $a_1$ 是下列二次方程的根：

$$\varphi_3 a_1^2 + (\varphi_2 - \psi_1)a_1 + \varphi_1 = 0. \tag{45.37}$$

将展开式(45.36)代到方程(45.33)和(45.29)中，我们证实：在这一情况下，$\sigma$ 的方程的主要近似的形式与电荷 $h$ 不存在时的形式相同：

$$\frac{d\sigma}{dz} = \psi_1\sigma^2 + \cdots. \tag{45.38}$$

作为示例，我们来解方程(45.37)并且求出当 $\psi_1 = \dfrac{5}{16\pi^2}$ 时对称赝标量理论中函数 $s$，$\tilde{\Gamma}$，$d$ 和□的渐近式. 将(45.38)式积分，我们得到：

$$\sigma(z, g^2, h) = g^2\psi(x, g^2, h) = g^2\left(1 - \frac{5}{16\pi^2}g^2\ln x\right)^{-1}. \tag{45.39}$$

为了确定 $s$，$d$，$\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{\square}$，利用表式(45.39)，通过微扰理论的最低阶的计算，我们还求得：

$$\left.\begin{aligned} S(x, g^2) &= \left(1 - \frac{5}{16\pi^2} g^2 \ln x\right)^{-3/10}, \quad d(x, g^2) = \left(1 - \frac{5}{16\pi^2} g^2 \ln x\right)^{-4/5}, \\ \tilde{\Gamma}(x, g^2) &= \left(1 - \frac{5}{16\pi^2} g^2 \ln x\right)^{1/5}, \quad \tilde{\square}(x, g^2) = \left(1 - \frac{5}{16\pi^2} g^2 \ln x\right)^{3/5}, \\ h &= a_1 g^2. \end{aligned}\right\} \tag{45.40}$$

从公式(45.39)我们得出结论：与电动力学中情况相类似，在动量相当大时，即使当 $g^2$ 是小值时，函数 $\sigma = g^2\psi$ 也可以达到数量级是 1 的值，因此我们已超出弱耦合范围.

在 $\sigma \sim \rho \ll 1$ 这样更一般的情况下，将方程(45.33)积分也沒有困难. 此时方程的形式是

$$\psi_1 \frac{d\rho}{d\sigma} = \varphi_1 + \varphi_2\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) + \varphi_3\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2.$$

不久以前 Гинзбург (1956) 已经求出这一方程的解，并完成积分曲线在相平面 $(\sigma, \rho)$ 上性质的详细研究.

读者如对这一研究的细节感到兴趣，请参阅原作. 我们注意到，从这一讨论可以得出结论，当动量相当大时，即使常数 $g^2$ 和 $h$ 是微值，函数 $\sigma$ 和 $\rho$ 在一般情况下也超出坐标原点的邻域. 因此，当小 $g^2$ 和小 $h$ 之间有任意关系时，我们不可避免地会落到強耦合区域上.

# 第九章　色散关系

## §46. 本法的一般概念

### 46.1. 引言

在我们的叙述中，直到现在所用的基本研究工具是微扰理论方法．就是应用这一方法，并考虑到物理上因果性、么正性以及协变性的要求，对散射矩阵的结构进行了一般的分析，同时表述了无穷大消除法以及求理论基本量的级数展开法．

前面已经指明，这一方法在介子理论领域中并不适用，因为其中展开式的参数 $g^2/4\pi\hbar c$ 并非微小量（根据最近的研究，这一参数约等于 15）．因此级数展开式中以后几项之值迅速递增，而这些项的有限和甚至在定性上与实验也不相符．不仅如此，在上章中已经指明了，就是在量子电动力学领域内（其中 $e^2/4\pi\hbar c = \frac{1}{137}$），微扰理论的应用范围也有局限．由于这一点，微扰理论并不是内在封闭的．

因此，从根本上超出微扰理论的局限性的任何尝试会引起很大的兴趣．在目前所有这类性质的工作可以分为四个不同的方向：泛函积分法、强耦合法、研究各种模型理论的方法以及色散关系法．

其中第一种方法在第七章中已经讨论过．我们已经指明，这一方法在数学上遇到根本性的困难，因此，应用此法到目前还沒有获得重要的结果．

上述方向中第二种方法和第三种方法，就其基础而言，在实质上都是近似的，因此可以预计，应用这两个方法只能获得有限的结果．不但如此，无论强耦合法［Pauli、Dancoff (1942)、Serber、Dancoff (1943)、Пекар (1956)］或者研究模型理论的方法［李政道 (1955)，Ruijgrok 和 van Hove (1956)］，目前都沒有能给出任何重要的结果，前法是尝试在对耦合参数倒数的级数展开式的基础上建立场论，而后法在于研究有精确解的各种相互作用模型．

本章中所叙述的第四个方向极其重要．在这一方向的工作中（详细文献请参阅 §46.3），获得了散射矩阵中个别矩阵元之间的关系式．这些关系式从一开始就与任何幂级数展开无关，而是以研究 $S$ 矩阵中矩阵元整体的解析性为基础，这个情况是特别重要的．

### 46.2. 色散关系的数学和物理基础

色散关系的数学基础是 Cauchy 积分公式．如所周知，这一公式可用复变量 $z$ 的解析

函数 $f$ 对封闭迴路 $\Gamma$ 的积分来表示，$\Gamma$ 包围一个 $f(z)$ 在其中为解析的区域 $G$. 根据这一公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z')dz'}{z'-z}=\begin{cases}f(z), & \text{如 } z \text{ 位于 } \Gamma \text{ 内},\\ 0, & \text{如 } z \text{ 位于 } \Gamma \text{ 外}.\end{cases} \tag{46.1a}$$

(46.1b)

在中间情况时，点 $z$ 位于积分迴线上，讨论主值意义下的 Cauchy 积分导致以下公式[1)]

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\mathscr{P}\int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}dz'. \tag{46.2}$$

分别讨论方程 (46.2) 的实部和虚部，我们得到 $\mathrm{Re}\, f$ 与 $\mathrm{Im}\, f$ 之间的关系. 色散关系正是表示散射矩阵元的实部和虚部之间的这类关系.

因此，显而易见，为了建立色散关系，矩阵元的解析性的研究是非常重要的. 为了这一目的，通常研究作为能量的函数的散射矩阵元的解析性，以及这些函数在上半平面解析延拓的可能性.

经过这样解析延拓后，我们得到的函数 $g(E)$ 当 $|E|\to\infty$ 时在上半平面的递减不慢于 $\mathrm{const}\cdot|E|^{-1}$，即

$$|g(E)|\leqslant\frac{A}{|E|},\quad \text{当}\quad |E|\to\infty, \tag{46.4}$$

于是取实轴以及在上半平面上半径为无穷大的半圆作为 (46.2) 式的积分迴线，我们可以略去沿半圆上的积分而获得公式

$$g(E)=\frac{1}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(E')dE'}{E'-E}. \tag{46.5}$$

对(46.5)式取实部，得到函数 $g$ 的实部与虚部之间的关系：

$$\mathrm{Re}\, g(E)=\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, g(E')}{E'-E}dE. \tag{46.6}$$

应该指出，对物理学上的应用来说，条件 (46.4) 是比较狭隘的. 但是，不难将上述讨论推广到当 $|E|$ 为大值时函数 $g(E)$ 按多项式而增长时的情况. 例如，令 $g(E)$ 在无穷大处具有 $n$ 阶极点，即

$$g(E)\leqslant A|E|^n,\quad \text{当}\quad |E|\to\infty. \tag{46.7}$$

此时量

$$\frac{g(E)}{(E-E_0)^{n+1}} \tag{46.8}$$

在上半平面将为解析函数，对于任何虚部为负的 $E_0$，它满足条件(46.4). 将(46.8)式代入(46.2)式中，选择和以前在(46.4)式中相同的迴线，在过渡到 $\mathrm{Im}\, E\to 0$ 的极限以后[2)]，我们

---

1) 利用符号等式

$$\frac{1}{z'-z\mp i\varepsilon}=\mathscr{P}\frac{1}{z'-z}\pm i\pi\delta(z'-z)\qquad(\varepsilon\to+0). \tag{46.3}$$

可以由 (46.1a) 求得这一公式.

2) 此极限过渡可利用下列公式完成:

$$\frac{1}{(E'-E+i\varepsilon)^{n+1}}=\mathscr{P}\frac{1}{(E'-E)^{n+1}}-\frac{i\pi(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(E'-E), \tag{46.9}$$

此公式由(46.3)式经过 $n$ 次微分而得.

得到一个关系式，其实部具有形式

$$\operatorname{Re} g(E)=\frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(E')dE'}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}}+$$

$$+\operatorname{Re} g(E_0)+\cdots+\frac{\operatorname{Re} g^{(n)}(E_0)}{n!}(E-E_0)^n\quad(-\infty<E,\ E_0<\infty).\tag{46.10}$$

早在二十年代，Kronig（1926）和 Kramers（1927）在经典电动力学领域中所获得的折射率的实部和虚部之间的色散关系[1]

$$\operatorname{Re}[n(\omega)-n(0)]=\frac{2}{\pi}\mathscr{P}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\operatorname{Im} n(\omega')}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}d\omega',\tag{46.11}$$

就是这种类型的关系式.

为了表明对 Kramers-Kronig 公式的继承性，(46.10)类型的关系式称为色散关系.

我们强调指出，向能量变量上半平面解析延拓的可能性，因而也就是求得（46.10）类型公式本身的可能性，取决于因果性的考虑，因果性是色散关系的物理基础.

为了阐明上述联系，将问题的实际情况略为简化后，我们假定

$$f(E)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{iEt}dt,\tag{46.12}$$

此处由于"因果性条件"，与时间 $t$ 有关的函数 $F$ 具有性质：

$$F(t)=0,\quad 当\quad t<0.$$

当延拓到上半平面时，对 $E$ 加上 $+i|\operatorname{Im} E|$，而对积分(46.12)添上乘子 $\exp(-t|\operatorname{Im} E|)$，这一乘子保证积分收敛，起着截断因子的作用. 因为当 $t<0$ 即 $\exp(-t|\operatorname{Im} E|)$ 递增时，函数 $F(t)$ 则由于因果性条件而等于零.

还可以证明，即使 $F(t)$ 是奇异函数，只要它按 § 16 定义的意义为可积，则积分(46.6)将是收敛的，而且它定义一个在无穷远处不存在本性奇点的函数.

当 $F(t)$ 只在 $t<-a$ 时等于零，此处 $a$ 是某一基本长度，则将存在另一种情况. 此时，将(46.12)中积分号下的 $t$ 换为 $t-a$，得到

$$f(E)=e^{-iaE}f_1(E),\tag{46.13}$$

此处函数 $f_1(E)$ 在无穷远处没有本性奇点（乘子 $\exp(-iaE)$ 含有本性奇点）. 因此，为了在此情况时获得满足色散关系的函数，必须将 $F(E)$ 乘上 $\exp i\alpha E$，其中 $\alpha\geqslant a$.

不言而喻，仅仅就代替（46.12）的表式中会有大量的积分变量一点而言，实际的情况也会复杂得多，但是，上述讨论虽然必须在技术上作重要的改进，它的基础仍将保持不变.

## 46.3. 色散关系方面工作的概述

显然，为了利用色散关系来研究粒子的任意碰撞过程，必须事先证明，作为能量函数的散射特征，可以用适当方式延拓到上半平面去.

在量子力学中，通常将所谓散射振幅 $f$ 作为这种特征来研究；在量子场论中（为确定起见，限于核子对介子的弹性散射），我们以如下方式来引进散射振幅：

---

1) 当 $n=0$，$E_0=0$，且 $\operatorname{Im} g(E')=-\operatorname{Im} g(-E')$ 时，从(46.10)式可得 Kramers-Kronig 公式.

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|S|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta_{\rho\rho'} + \\ + \frac{i}{2\pi\sqrt{q^0q'^0}}\delta(p'+q'-p-q)f_{s'\rho',s\rho}(\mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{p}, \mathbf{q}), \qquad (46.14)$$

此处 $\mathbf{p}(\mathbf{p}')$ 是核子在散射前(后)的动量，$s(s')$ 是核子在散射前(后)自旋和同位旋的分立指标的集合，$\mathbf{q}$, $\rho$, $\mathbf{q}'$, $\rho'$ 是介子的相应的特征：

$$|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = a_s^{(+)}(\mathbf{p})a_\rho^{(+)}(\mathbf{q})\Phi_0; \qquad (46.15)$$

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'| = \Phi_0^* a_{s'}^{(-)}(\mathbf{p}')a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}'), \qquad (46.16)$$

而 $f$ 是散射振幅. 可以看出，引进的函数 $f$ 和过去所应用的函数 $F$ 只相差一个乘子 $i[2\pi\sqrt{q^0q'^0}]^{-1}$ (参看 (21.35))。

有许多工作讨论散射振幅的解析延拓问题。我们可以提出，例如，Heisenberg (1943a,б; 1946)、胡宁 (1948)、Ахиезер 和 Померанчук (1948)、van Kampen (1953 a, б) 和 Крейн (1955) 的工作. 在这些工作中，从通常量子力学观点出发研究了两个粒子的弹性碰撞过程，它可以化为一个粒子对静止力心的散射问题. 取作 $g(E)$ 的是有一定动量矩的分波散射振幅的分量，主要是 $s$ 波分量.

得到的重要结果是以下定理，即如果相互作用在距离大于某一“作用范围”的半径时实际上消失，则 $s$ 散射的振幅 $f_s(E)$ 可以向上半平面解析延拓. 但是，发现 $f_s(E)$ 在无穷远处可能具有本性奇点. 这一奇点可以用乘上截断因子 $\exp iaE$ 来消除[根据(46.13)式]，因此函数 $f_s(E)e^{iaE}$ 在上半平面将是正则的，对此函数可以应用色散关系 (46.10)，Karplus 和 Ruderman (1955) 利用这类色散关系来研究核子对 $\pi$ 介子的弹性散射. 根据 $s$ 散射的实验数据，这些作者发现，其中特别是介子-核子相互作用半径应该超过 0.1 介子 Compton 波长. 但是，应该强调，这方面的工作是从通常的量子力学的方案出发，没有考虑到场论的特征，特别是粒子的产生和湮没过程的可能性.

量子场论中 Bose 子散射的色散关系是另一个研究方向的课题，代表性的工作是 Gell-Mann, Goldberger 和 Thirring (1954), Goldberger (1955 a, б), Karplus 和 Ruderman (1955), Goldberger、宫泽和 Oehme (1955), Oehme(1955, 1956), Salam (1956), Salam 和 Gilbert (1956), Polkinghorne (1956) 及其他. 在这些工作中，将朝前散射振幅取作为 $g(E)$ ($E$ 是介子的能量) 来研究，同时实验数据给出令人信服的基础，因而可以认为 $g(E)$ 在无穷远处的奇点不高于一阶. 讨论朝前散射的振幅特别方便，这是因为根据所谓“光学定理”，这一函数的虚部与过程的总有效截面成正比.

为了证明这一点，我们研究 $SS^\dagger = 1$ 在态振幅 $\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|$ 和 $|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle$ 之间的矩阵元，这些态含有动量为 $\mathbf{p}'(\mathbf{p})$ 和分立指标为 $s'(s)$ 的核子，以及动量为 $\mathbf{q}'(\mathbf{q})$ 和分立指标为 $\rho(\rho')$ 的介子：

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|SS^\dagger|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = \langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'||\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta_{\rho\rho'}. \qquad (46.17)$$

将此式的左端写成对态振幅的完备系 $|n\rangle$ 求和的形式，我们获得

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|SS^\dagger|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = \sum_n \langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|S|n\rangle\langle n|S^\dagger|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle. \qquad (46.18)$$

此处对 $n$ 求和既包括对态 $|n\rangle$ 的分立特征求和，也包括对态的连续特征求积分.

在 (46.18) 式的右端中限定对包含一个核子 $(\mathbf{p}'', s'')$ 和一个介子 $(\mathbf{q}'', \rho'')$ 的态求和，并利用 (46.14)式，化为散射幅，我们有

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|SS^{\dagger}|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta_{\rho\rho'} +$$
$$+ \frac{i\delta(p'+q'-p-q)}{2\pi\sqrt{q^0q'^0}}\left(f_{s'\rho',s\rho}(\mathbf{p}',\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{q}) - f^*_{s'\rho',s\rho}(\mathbf{p}',\mathbf{q}',\mathbf{p},\mathbf{q})\right) +$$
$$+ \frac{\delta(p'+q'-p-q)}{(2\pi)^2\sqrt{q^0q'^0}}\sum_{s''\rho''}\int\frac{d\mathbf{p}''d\mathbf{q}''}{q''^0}f_{s'\rho',s''\rho''}(\mathbf{p}',\mathbf{q}',\mathbf{p}'',\mathbf{q}'')\times$$
$$\times f^*_{s''\rho'',s\rho}(\mathbf{p}'',\mathbf{q}'',\mathbf{p},\mathbf{q})\delta(p''+q''-p-q).$$

考虑到(46.18)式,对朝前散射情况, $\mathbf{p}'=\mathbf{p}$, $\mathbf{q}'=\mathbf{q}$, $s'=s$, $\rho'=\rho$, 由此获得

$$i\left(f_{s\rho,s\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}) - f^*_{s\rho,s\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q})\right) =$$
$$= -\sum_{s''\rho''}\int\frac{d\mathbf{p}''d\mathbf{q}''}{2\pi q''^0}\delta(p''+q''-p-q)|f_{s\rho,s''\rho''}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{q}'')|^2 =$$
$$= -\int\frac{d\mathbf{q}''}{2\pi q''^0}\delta(p''^0+q''^0-p^0-q^0)\sum_{s''\rho''}|f_{s\rho,s''\rho''}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{q}'')|^2\Big|_{\mathbf{p}''=\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{q}''}. \tag{46.19}$$

将此式与§22中公式相比较,获得

$$\mathrm{Im}\,f = \frac{|\mathbf{q}|}{4\pi}\sigma, \tag{46.20}$$

$$\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{\Omega}} = |f|^2. \tag{46.21}$$

此处 $\sigma$ 及 $\frac{d\sigma}{d\boldsymbol{\Omega}}$ 分别是介子对核子弹性散射的总有效截面和微分有效截面，而 $f$ 是朝前散射的振幅:

$$f = f_{s\rho,s\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

可以证明,在(46.19)式右端的和式中,考虑到含有大量粒子的状态的项,导致如下结果,即在(46.20)式中应将 $\sigma$ 理解为一切可能过程的总有效截面.

我们引录上面提到的 Karplus 与 Ruderman (1955) 关于中性介子论文中的结果. 如果根据他们的论述,我们假定散射振幅在上半平面为解析,而它在无穷远处的极点不高于一阶,则我们可以利用 $n=1$ 时的公式(46.10). 注意,由于标量介子场的实数性,从正能量向负能量过渡等效于复共轭运算,即

$$f^*(E) = f(-E),$$

因此

$$\mathrm{Im}\,f(-E) = -\mathrm{Im}\,f(E), \quad \mathrm{Re}\,f(-E) = \mathrm{Re}\,f(E).$$

当消去 $\mathrm{Re}\,f$ 的导数项及负区域的积分后,从(46.10)式,我们获得

$$\mathrm{Re}[f(E)-f(E_0)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\,f(E')E'dE'\left\{\frac{1}{E'^2-E^2}-\frac{1}{E'^2-E_0^2}\right\}. \tag{46.22}$$

如果根据公式(46.20)从 $\mathrm{Im}\,f(E)$ 向总截面 $\sigma$ 过渡,并从能量变量 $E$ 化为动量参量 $p=(E^2-\mu^2)^{1/2}$ (除去不可观察区域 $0\leqslant E'\leqslant\mu$ 以后), 获得核子对中性介子散射的色散关系的最终形式

$$\mathrm{Re}[f(k)-f(k_0)] = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\sigma(k')dk'\left\{\frac{k^2}{k'^2-k^2}-\frac{k_0^2}{k'^2-k_0^2}\right\}. \tag{46.23}$$

Goldberg (1955) 以及 Goldberg、宫泽和 Oehme (1955) 讨论了核子对荷电介子散射的类似的色散关系. Oehme (1955) 得到了核子对介子的自旋变向散射振幅的相应方程(由于散射结果, 核子的自旋改变方向, 称为自旋变向散射). 更确切地说,得到了自旋

变向振幅在角度为 $0^\circ$ 处的导数的色散关系[1]. Ochme 在稍后一些的工作中(1956)得到了自旋没有变向散射在零角度时的高阶导数的色散关系. 同时, Salam 和 Gilbert (1956 a, б) 也解决了这一问题. 最后,不久以前出现一系列关于核子上光生 $\pi$ 介子过程的色散关系的论文[2].

所有这些色散关系在右端有(46.20)类型的积分,能量范围是从零到无穷大. 但是显然,只有当介子的能量大于静止能量即 $E > \mu$ 时,才能由实验上确定 $\mathrm{Im}\, f(E)$(或 $\sigma(E)$),因此,上述积分总含有相当于 $0 < E < \mu$ 间隔内的"不可观察部分".

但是,幸而在许多重要的场合(例如,介子-核子朝前散射振幅),对这一间隔的积分可以算出显式,因为 $f(E)$ 与 $\delta(E - E_p)$ 成正比,此处 $E_p$ 是某一束缚态的能量.

现在我们不拟讨论这一重要的问题,因为以后将作详细的研究(§§ 50—52),我们只指出应用色散关系的两个基本可能性.

在整理介子-核子散射的实验数据时,我们利用仅以散射矩阵的协变性和么正性为基础的相移分析. 如所周知,相移分析不能唯一地决定相角,但是给出相角的可能集合. 用其他性质(也就是因果性)为基础的色散关系,给出一系列的补充等式,使我们能够鉴别这些集合,从而选择一组正确的相角[例如,参阅 Anderson, Davidon 和 Kruse (1955)].

此外,从原则观点看来特别重要的是:色散关系使我们能够进行基本长度是否存在的实验检验. 微观因果性条件和散射振幅的解析延拓性之间的关系前面已经作了輪廓性的研究. 该处已经证明[公式(46.13)],当在数量级为 $a$ 的短距离处不存在因果性条件时,为了求得满足色散关系的函数,必须将 $f(E)$ 乘上 $\exp i\alpha E$ $(\alpha \geqslant a)$.

显然,实际情况将更加复杂得多. 但是当基本长度存在时,色散关系须加以一定的修改这个事实还是存在的,因此如果实验结果与通常色散关系有所偏差,则将是理论须作非定域性修改的证明.

### 46.4. 基础问题

在最近二年来已经获得了对许多最有意义的问题的色散关系. 但是应该指出,这些色散关系的正确数学推导直到最近时期还没有得到. 这与在证明散射振幅的解析性时所遇到的困难有关.

在量子场论的形式体系中色散关系的第一个推导是由 Gell-Mann, Goldberg 和 Thirring (1954) 所提出的,他们利用 Cauchy 定理,預先建立了朝前散射振幅应有的解析性. 但是这一证明(无论如何,至少对于静止质量不等于零的粒子)引起种种责难,后来这些作者本人也承认了这些责难的严重性(参阅 Goldberg (1955 б)).

Karplus 和 Ruderman (1955) 基于事先假设的散射振幅的解析性,建立了核子对中性介子散射的色散关系(46.23).

---

1) 自旋变向的向前散射振幅本身为零.

2) Б. Л. Иоффе, А. А. Логунов, Б. М. Степанов 及 А. Н. Тавхелидзе 在莫斯科全苏高能物理会议上的报告(1956年5月)以及 Goldberg、Low、Chew 及 Nambu 在西雅图国际理论物理学家会议上的报告(1956年9月).

Goldberg (1955 б) 企图完全迴避复平面上散射振幅的解析延拓问题，将色散关系简单地当作一个等式，它可以通过纯粹的代数方法，用对完整的中间态求和来表示散射矩阵的厄米和反厄米部分的方法导出. 但是，他所采取的论证是不正确的，因为当 $E < \mu$ 时，相应的表式是发散的.

Oehme (1956) 似乎注意到这个情况，他重新回到利用复变函数的定理. 但是，只有在函数的平方可积性的假定下，他才成功地实现了散射振幅向上半平面的解析延拓. 对于实际的物理过程，这样的假定显得过強，因为它排除了应用广义函数(例如 $\delta$ 函数)的可能性.

最后，刚刚不久以前提出了色散关系的两个证明，其中之一[1]是对于朝前散射的，另一个[2]是对于任意散射角的，这两个证明并未遇到责难.

因此，现在可以认为已经证明了色散关系实际上是从现代量子场论的基本原理导出的，为了推导这些关系，微观因果性条件是非常重要的.

本章包括核子对 $\pi$ 介子的散射振幅的色散关系的推导. 我们的叙述基本上是根据 Боголюбов、Поливанов 和 Медведев 的工作(1957)，并将散射矩陣(17.30)、(17.31)类型的因果性条件作为基础. 以后在 § 47 中将分析和选择为获得色散关系所必需的现代量子场论的基本原理，在 §§ 48 和 49 中建立单粒子 Green 函数的所谓谱(参数)表示. 将参数表示方面的材料包括在本章中的理由是，从方法上来看，推导这些表示法和推导色散关系非常相近. 它也可以利用复平面解析延拓来进行，这时推导就大为简化了. 对于以后的叙述，§§ 48 和 49 所起的作用和方法论上的导引相同.

在 §§ 50 和 51 中包含色散关系的推导. 最后在 § 52 中列出了具体散射过程的明显形式的公式.

## § 47. 定域性場論中 $S$ 矩陣的基本性質

### 47.1. 前言

在上述的大部分工作中，色散关系是利用对称赝标量介子理论的常用方案来确定的，虽然同时也指出，相互作用的具体模型并不重要，重要的只是几个一般的物理原理，其中占首要位置的是因果性条件.

由于色散关系的应用问题原则上十分重要，而且由于这些关系有可能推广，因此将推导这些关系实际上所需要的基本原理表述成明显形式是适当的.

本书在建立散射矩陣理论时，我们尝试按照同样方案，取 $S$ 矩陣的明显表述的条件(么正性、协变性、因果性)作为出发点. 同时，理论的结构局限于微扰理论范围内.

除此之外，上述的理论结构还具有另一个严重的缺点，这和采用辅助函数 $g(x)$ 有关. 利用这一函数，我们表述过关于相互作用绝热加入和撤除的普遍采用的"赝物理"概念，而

1) Symanzik 在西雅图国际理论物理工作者会议上的报告 (1956 年 9 月).

2) Боголюбов 在西雅图国际理论物理工作者会议上的报告 (1956 年 9 月)，并参阅 Боголюбов、Поливанов 和 Медведев (1957).

且借助于这个函数，也使我们有可能研究理论的定域特征．这种可能性在技术上是和 $S$ 矩阵对 $g(x)$ 的泛函微分运算有关．

因此现在应当对我们的基本原理体系进行重新考察，这是为了不再引用函数 $g(x)$，实质上只是为了得到对相互作用微量的级数展开，此函数才是必要的．事实上在 § 17.6 中已经指明，在描写与 $S$ 矩阵的变分导数相关的理论的定域性构造时，外界经典场可以代替 $g(x)$ 而起泛函宗量的作用．这就有可能在形式上导出 $S$ 矩阵对量子场的相应的泛函导数，将这些导数定义为对 $\eta(x)$ 的相应泛函导数当 $\eta = 0$ 时的极限，$\eta(x)$ 是对量子化了的 $u(x)$ 的经典附加项：

$$\frac{\delta^k S}{\delta u_{a_1}(x_1)\cdots\delta u_{a_k}(x_k)} = \left\{\frac{\delta^k}{\delta\eta_{a_1}(x_1)\cdots\delta\eta_{a_k}(x_k)} S(\eta)\right\}_{\eta=0}, \tag{47.1}$$

其中 $S(\eta)$ 是利用下列替代由 $S$ 得到的：

$$u_i(x) \to u_i(x) + \eta_i(x). \tag{47.2}$$

为了使得这样得到的对 Fermi 场 $\psi$ 的变分导数具备应有的反对易性，必须区别右向和左向导数，并且认为辅助的经典旋量 $\eta$ 自身之间及与所有的 $\psi$ 均严格地为反对易．

此时根据定义，变分的“左向导数” $\delta C/'\delta\psi(x)$

$$\delta C(\psi + \eta) = \int \delta\eta_i(x)' A_i(x; \psi + \eta)dx = \int A_i'(x, \psi + \eta)\delta\eta_i(x)dx,$$

$$\frac{\delta C}{'\delta\psi_i(x)} = \lim_{\eta\to 0}{}' A_i(x; \psi + \eta),$$

当 $C$ 函数含有偶数个 Fermi 算符 $\psi$，它和“右向导数” $\delta C/\delta'\psi(x)$ 差一符号

$$\frac{\delta C}{\delta'\psi_i(x)} = \lim_{\eta\to 0} A_i'(x; \psi + \eta),$$

如果 $C$ 与奇数个 $\psi$ 有关时，则二者相等．

例如我们考虑

$$C = A = \int \mathscr{L}(x)dx = g\int :\bar{\psi}(x)O\varphi(x)\psi(x):dx.$$

显然，

$$\frac{\delta A}{\delta'\bar{\psi}(x)} = -\frac{\delta A}{'\delta\bar{\psi}(x)} = -gO:\varphi(x)\psi(x):.$$

另一方面，

$$\frac{\delta}{\delta'\psi(y)}\left(\frac{\delta A}{\delta'\bar{\psi}(x)}\right) = \frac{\delta}{'\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta A}{\delta'\bar{\psi}(x)}\right) = -gO\varphi(x)\delta(x - y).$$

以后我们常对核子旋量 $\psi$ 取“右向”导数，而对共轭 $\bar{\psi}$ 取“左向”导数，这样比较方便．因此，我们用记号

$$\frac{\delta}{\delta'\psi} \equiv \frac{\delta}{\delta\psi} \quad 和 \quad \frac{\delta}{'\delta\bar{\psi}} \equiv \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}. \tag{47.3}$$

我们也将不通过一般采用的相互作用绝热地加入和撤除的概念来引进 $S$ 矩阵．我们回到 Heisenberg 对散射矩阵所下的原始定义，把从 $t = -\infty$ 时的一个态跃迁到 $t = \infty$ 时的另一个态的几率振幅作为此矩阵之元．处于上述每一种态的既可以是相互之间距离

为无穷大的单个粒子系，也可以是处于束缚态的粒子复合．这样引进来的 $S$ 矩阵，比我们以前所采用的更为现实；因为我们并不假定，在实际情况下，当 $t = \pm\infty$ 时，与虚场的相互作用并不存在(§ 17.1)．

这样产生了描述在空间分隔的实际粒子的初态和终态问题以及它们的束缚态问题．但是我们不拟讨论这些复杂的问题，现在将我们感到有意义的现代场论中必需的基本物理前提加以表述．

不久以前，Klein (1955) 研究了在一般理论中空间分隔的粒子以及它们的束缚复合的描述问题，他用下述的一个巧妙方法分出自身作用项，从而解决了这一问题．

如果对于用总哈密顿函数密度 $H$ 描述的系统，用 $R_0$ 表示真空态，用 $R_1$ 表示所有的单粒子本征态(即含有一个实际的基本粒子)的空间，而(如果哈密顿函数密度许可有束缚态)用 $R_2$, $R_3$, … 表示所有用二，三 … 个实际粒子构成的一个束缚复合态的空间(注意，也可以认为这类态是"单粒子"的，如果记住它们的两个特点：a) 从观察它们的观点而言，有一定程度上的定域化；б) 它们的稳定性；那么，我们感兴趣的含有任意数目的实际粒子和束缚复合的初态(或终态)，就可以用空间 $R_0$ 与空间 $R_1$、$R_2$、$R_3$… 的直接乘积所获得的空间的矢量来表示，并且其中每一乘子在直接乘积中可出现任意次来与可能有任意个此类粒子相应：

$$R = R_0 \times R_1 \times R_1 \cdots \times R_2 \times R_2 \cdots \times R_k \times R_k \cdots .$$

为了构成"自由"哈密顿函数密度，使其本征函数是含有任意个互不作用的实际粒子和束缚复合的态振幅，我们引进投影算符 $P_0$, $P_1$… 将哈密顿函数密度 $H$ 投影在空间 $R_0$, $R_1$, $R_2$… 上，并且这样定义"自由"哈密顿函数密度 $H_0$：

$$H_0 = P_0H + P_1H + P_1H + \cdots + P_2H + P_2H + \cdots + P_kH + P_kH + \cdots . \tag{47.4}$$

现在总哈密顿函数密度 $H$ 可以表述成形式

$$H = H_0 + V = H_0 + (H - H_0). \tag{47.5}$$

此处相互作用哈密顿函数密度 $V$ 只描述各种粒子及其复合的相互作用，而不描述自身作用，后者完全包括在 $H_0$ 中．更确切地说，$V$ 仅指涉及粒子及其复合的散射过程和相互转化过程的那部分能量．因为将粒子"保持"在其复合组成中的相互作用也包含在 $H_0$ 中．因此，向初态或终态过渡时($t \to \pm\infty$)，例如我们可以利用 $V$ 的绝热撤除，而这既不使得自身作用消失，也不使得束缚态分离．

## 47.2. 一般性质

我们强调指出，以下所表述的全部原理并不是新的，而是现代一般理论中众所周知的[1]．但是另一方面，我们也并不认为，现代理论的内容已由这些原理阐述完尽，或者在某种程度上这些原理构成独立公理的完备体系．我们把这些有意义的问题全部搁在一边，而对以下所引用的前提体系只当作足以求得色散关系的一组原理．

将所有这些原理分成二类较为方便：a) 一般性质，非常广泛的各种类型的可能理论用它作为特征．б) 特殊的定域性质，特别是微观因果性条件与此有关．

### 一　般　性　质

A[2]．系统的渐近态含有相距无穷远的实际粒子及其束缚复合．这些粒子以及这些复

1) 例如，关于这方面参阅 Haag (1955)、Lehmann、Symanzik 与 Zimmerman (1955) 的论文．

2) 以后引录这些条目时，写作 47.2A, 47.2Б 等等．

合之间的相互作用等于零，因此系统的动力学基本特征(类如能量、动量、动量矩等等)是可以迭加的. 这些态用振幅 $|\cdots\rangle$ 来描述，它是某一线性空间的元.

Б. 存在变换 $L$ 的羣 $G$，其中包括时空变换的 Lorentz 羣 ($G$ 也可以含其他因素，例如同位旋变换). 在 $G$ 的变换 $L$ 的作用下，态振幅 $|\cdots\rangle$ 的变换按照羣的某一么正表示 $U_L$ 来变换.

В. 如果态 $|p\rangle$ 有确定的四维能量动量矢量 $p$，则

$$U_{L_a}|p\rangle = e^{-ipa}|p\rangle, \tag{47.6}$$

其中 $L_a$ 是平移 $x \to x + a$. 存在着眞空态 $|0\rangle$:

$$U_{L_a}|0\rangle = |0\rangle. \tag{47.7}$$

Г. 存在着振幅系统 $|n, \mathbf{k}\rangle$，它与振幅 $|0\rangle$ 一起构成完备系，使

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \sum_n \int d\mathbf{k}\langle\alpha|A|n, \mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|B|\beta\rangle, \tag{47.8}$$

而此时在 $|n, k\rangle$ 态中有确定的动量 $\mathbf{k}$ 和能量 $E_n(\mathbf{k}) > 0$. 指标 $n$ 表示分立和连续量子数的集合，此集合与 $\mathbf{k}$ 一起完全表征了此封闭系统的态. 对于 $G$ 的其他子羣的不可约表示，特别是对应于角动量的表示，可以表述出类似的性质.

Д. 从态 $|\alpha\rangle$ 跃迁到态 $|\beta\rangle$ 的几率振幅由算符 $S$ (散射矩陣) 的矩陣元 $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ 所给定，$S$ 满足么正性条件

$$SS^\dagger = 1. \tag{47.9}$$

Е. 在羣 $G$ 的变换 $L$ 下散射矩陣 $S$ 利用么正表示 $U_L$ 来变换.

Ж. 设 $|\alpha\rangle$ 是眞空振幅，或者是含有一个实际粒子或一个稳定复合的态振幅，那末这些态的稳定性条件具有形式:

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle. \tag{47.10}$$

条件(47.10)只用来确定么正的位相乘子，而通常的散射矩阵只确定到可差这样一个乘子. 这样从三、四各章中所叙述的通常理论的观点，(47.10)式就化为眞空态和单粒子态的稳定条件.

将通常的散射矩阵 $S$ 用算符 $S'$ 来代替就可得此条件，而 $S'$ 是从 $S$ 利用相互作用拉格朗日函数密度中减去眞空与单粒子抵消项而获得的. 例如，对于旋量电动力学，

$$S' = T\left[\exp i\int dp\{\mathscr{L}(p) - (Z_2 - 1)\bar{\psi}(\hat{p} - m)\psi - \delta m\bar{\psi}\psi\} - \right.$$
$$\left. - (Z_3 - 1)\sum_{n,m} A_n(g^{mn}p^2 - p^m p^n)A_m - R_{\text{vac}}\right],$$

于是

$$\langle 0|S'|0\rangle = 1,$$

而且

$$\langle \text{单光子}\,|S'|\,\text{单光子}\rangle = 1,$$
$$\langle \text{单电子}\,|S'|\,\text{单电子}\rangle = 1,$$

这就与(47.10)式等价.

原理 47.2А—47.2Ж 是很广泛的，即使今后基本粒子理论可能有所修改，这些原理似乎仍将保持不变.

### 47.3. 定域性质

在叙述我们所必须的理论的定域性质以前，先提一下通常方案中的相应之点. 首先，

我们注意到，将散射矩阵 $S$ 通过 $T$ 指数表为

$$S = T\left(\exp i\int \mathscr{L}(z)dz\right),$$

就允许我们利用类似(47.1)、(47.2)式的运算立即求出它的变分导数. 例如

$$\frac{\delta S}{\delta u_a(x)} = iT\left(\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial u_a(x)}\exp i\int \mathscr{L}(z)dz\right).$$

对于高阶的变分导数也可以得到这种类型的表式.

现在可以将因果性条件写成类如(17.31)的形式:

$$\frac{\delta}{\delta u_a(x)}\left[\frac{\delta S}{\delta u_\beta(y)}S^\dagger\right] = 0, \quad 当 \quad x \lesssim y. \tag{47.11}$$

其次注意到，自由粒子的散射过程（即其中不产生也没有束缚态的过程）的几率振幅可用 $S$ 矩阵对自由场的变分导数取真空平均值来表示. 实际上，这样的矩阵元是

$$\frac{(2\pi)^{\frac{3(r+s)}{3}}}{S_0}\langle 0|a^{(-)}_{\beta_1}(\mathbf{p}'_1)\cdots a^{(-)}_{\beta_s}(\mathbf{p}'_s)Sa^{(+)}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\cdots a^{(+)}_{\alpha_r}(\mathbf{p}_r)|0\rangle, \tag{47.12}$$

在这过程中初态具有动量为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_r$，而其他量子数为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的粒子，而在终态具有动量为 $\mathbf{p}'_1, \cdots, \mathbf{p}'_s$ 而其他量子数为 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 的粒子（按惯例，此时认为在 $\mathbf{p}_i\alpha_i$，$\mathbf{p}'_j\beta_j$ 各对之间是不相同的）. 利用(21.11)、(21.12)类型的对易关系

$$\left.\begin{aligned}\{a^{(-)}_\beta(\mathbf{p}'), u_\gamma(x)\}_\pm &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip'x}v^{\beta,+}_\gamma(\mathbf{p}'),\\ \{u_\gamma(x), a^{(+)}_\alpha(\mathbf{p})\}_\pm &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-ipx}v^{\alpha,-}_\gamma(\mathbf{p}),\end{aligned}\right\} \tag{47.13}$$

并且注意到 $\mathscr{L}(x)$ 应是 Fermi 场的偶函数. 这就给出

$$\left.\begin{aligned}\{a^{(-)}_\beta(\mathbf{p}'), S\}_- &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\sigma v^{\beta,+}_\sigma(\mathbf{p}')\int dx e^{ip'x}\frac{\delta S}{\delta u_\sigma(x)},\\ \{S, a^{(+)}_\alpha(\mathbf{p})\}_- &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\sigma v^{\alpha,-}_\sigma(\mathbf{p})\int dx e^{-ipx}\frac{\delta S}{\delta u_\sigma(x)}.\end{aligned}\right\} \tag{47.14}$$

将 (47.12) 式中所有的消失算符向右移，直到这些算符作用在 $|0\rangle$ 上给出零值为止，而产生算符则向左移. 此时利用(47.14)式，我们可以将矩阵元(47.12)表示成与积分

$$\int\left\langle 0\left|\frac{\delta^{r+s}S}{\delta u_{\beta_1}(x'_1)\cdots\delta u_{\alpha_r}(x_r)}\right|0\right\rangle\exp i\left(\sum_\beta p'x' - \sum_\alpha px\right)dx'_1\cdots dx_r. \tag{47.15}$$

成正比的项之和的形式.

消去真空环线，我们在积分号下得到矩阵元的形式为

$$\frac{1}{S_0}\left\langle 0\left|\frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\cdots\delta u_n(x_n)}\right|0\right\rangle = \left\langle 0\left|\frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\cdots\delta u_n(x_n)}S^\dagger\right|0\right\rangle. \tag{47.16}$$

容易证明上述关系的正确性，如果计及振幅 $S^\dagger|0\rangle$ 和 $|0\rangle$ 只能差一相位乘子，而这一乘子恰好等于 $(S_0)^{-1}$.

因此，我们得到 $n$ 阶辐射算符这个重要概念:

$$H_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\cdots\delta u_n(x_n)}S^\dagger. \tag{47.17}$$

可以看出此处所谓算符的阶应该理解为变分导数的总次数. 矩陣元就化为这些辐射算符的眞空預期值(47.12).

关于对量子場作(47.1)类型的变分导数的合法性,可能引起疑问,因为定义(47.1)中絲毫沒有反映量子化函数满足場方程的性质. 但是不难证明,这类疑问是沒有任何根据的. 实际上,在 $S$ 矩阵中,上述性质与计算矩阵元的过程有关,而从 Feynman 图的观点看来,它只在与外线相对应的那些場算符中显现出来. 此时,上述性质是出现在 $S$ 矩阵中的算符 $u(x)$ 与出现在态振幅表式中的自由粒子产生算符(或消失算符) $a^{(\pm)}(k)$ 之间的对易关系(47.13)的自然推论. 因此在讨论 $S$ 矩阵和它的变分导数时,我们可以完全不管上述性质,并且认为我们此处只讨论将泛函 $S$ 形式地推广到不遵守任何方程的函数类. 显然,在过渡到矩阵元的最后阶段中,我们必须考虑 $S$ 在满足自由場方程的算符集合上的投影(只计及对应于 Feynman 图外线的算符!)

为了今后的叙述,不但不需要将 $S$ 矩陣用 $T$ 指数来表示,而且也不需要相互作用拉格朗日函数这一概念. 只要保持 $S$ 矩陣求变分导数的可能性,形式为(47.11)的因果性条件以及保持用(47.15)类型的积分来表示跃迁振幅(47.12)的可能性,就已经足够了. 因此我们有可能来表述以下的定域性质.

## 定　域　性　质

А[1]. 实际的基本粒子(而不是复合!)是以 Bose 子和 Fermi 子的场 $u(x)$ 来表征,这些场具有和自由场理论中同样的变換性和对易性. 算符 $S$ 具有这些场的任意阶变分导数. 这里的变分导数具有一切普通的性质;例如,导数的变換性质决定于场的变換性. 对 Bose 子场的导数可对易,而对 Fermi 子场的导数是互相反对易的.

辐射算符(47.17)以及具有独立宗量的这些算符的乘积是可积分的(按 § 16 定义的意义),即所有矩陣元

$$\langle\beta|H(x_1, \cdots, x_n)\cdots H(z_1, \cdots, z_k)|\alpha\rangle$$

是广义函数,在函数类 $C(q, r, n)$ 之一上是可积的.

Б. 满足形式为(47.11)的因果性条件.

В. 设

$$|\alpha, \mathbf{p}_1, \cdots, \alpha_r, \mathbf{p}_r\rangle = |\omega\rangle$$

表示动量为 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_r$, 而其他量子数为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的相距无穷远的基本粒子系统的态振幅,此时,矩陣元

$$S_{\omega'\omega} = \langle\omega'|S|\omega\rangle$$

可以借助以下的形式方法用辐射算符的眞空平均值来表示. 我们写成

$$S_{\omega'\omega} = \langle 0|a^{(-)}_{\alpha'_1}(p'_1)\cdots a^{(-)}_{\alpha'_s}(p'_s)Sa^{(+)}_{\alpha_1}(p_1)\cdots a^{(+)}_{\alpha_r}(p_r)|0\rangle,$$

并且将消失算符 $a^{(-)}$ 向右对易,而 $a^{(+)}$ 向左对易,直到得到 $a^{(-)}$ 作用于 $|0\rangle$, $a^{(+)}$ 作用于 $\langle 0|$ 的为零项为止. 此时为了对易 $a^{(+)}$, $a^{(-)}$, 将利用非相互作用场理论中的通常对易关系式,而为了对易 $a^{(+)}$, $a^{(-)}$ 和 $S^-$, 将利用(47.14)类型的关系式.

通过这样的方法将 $S_{\omega'\omega}$ 用 $S$ 矩陣的变分导数的眞空期待值来表示,然后利用条件

---

1) 以下提到这些性质时写为 47.3А, 47.3Б….

47.2Ж，可以将它们化为辐射算符的眞空平均值.

## §48. π 介子 Green 函数的譜表示

在本节和下节中将求得所谓介子及核子 Green 函数的谱表示. 这种类型的表示方法在电动力学中首先是由 Källen (1952) 得到的，而在介子理论中则首先由 Lehmann (1954) 得到. 但是，不能够认为在这些论文中应用的方法是满意的，因为在形式上运用了无穷大的重正化常数等等(关于这一方向论文的批判，请参阅 § 31.4).

以下我们来求赝标量介子理论中 Green 函数的 Källen-Lehmann 谱表示，这时我们从 § 47 中所建立的定域性场论的一般性质出发，并应用复平面上的解析延拓法. 已经指明，§ 48 和 § 49 中的材料和色散关系的最后结论沒有直接关系，因而可以认为是方法论上的导引.

### 48.1. 一阶和二阶辐射算符及其眞空平均值

考虑到将来要应用到介子-核子的散射过程，我们限于讨论八分量的旋量核子场和三分量的介子场以电荷对称方式而相互作用，而且我们将不考虑电磁场的存在以及与轻粒子的弱相互作用.

和前面相同 (§ 33.1)，我们取具有三个实赝标量分量 $\varphi_i(x)$ 的场作为介子场，$\varphi_i(x)$ 在同位旋空间中组成矢量(同位旋矢量). 这时相应于粒子 $\pi^+$，$\pi^-$ 和 $\pi^0$ (质量 $\mu$) 的场是

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}},\ \varphi_- = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}},\ \varphi_0 = \varphi_3. \tag{48.1}$$

至于具有质量 $M$ 的核子场，则用旋量来表示:

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} \Psi_P(x) \\ \Psi_N(x) \end{vmatrix}. \tag{48.2}$$

除了同位旋不变性，即在三维同位旋空间中对于旋转变换的不变性外，我们将利用对于第一类梯度变换的不变性概念，也就是，我们将认为以下两个变换:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x),\ \bar{\psi}(x) \to e^{i\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{48.3}$$

属于在条件 47.2Б 中所表述的羣 $G$.

我们研究上述理论范围内的第一类和第二类辐射算符的眞空平均值.

不难证明，在通常的和同位旋的空间中，根据对于旋转的协变性考虑，一阶辐射算符的眞空期待值为零，对 Bose 场、Fermi 场各作一次微分的二阶辐射算符的眞空期待值也为零. 对于梯度变换(48.3)的不变性，也要求 $\delta^2 S/\delta\psi\delta\psi$ 和 $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}\delta\bar{\psi}$ 的眞空期待值为零. 因此，只有辐射算符 $\delta^2 S/\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)$ 和 $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)$ 的眞空期待值不等于零. 由于平移不变性，这些期待值只能依赖于差 $x - y$; 因此可以将它们写成下列形式:

$$i\left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)} S^\dagger \right| 0 \right\rangle = Q_{\sigma\rho}(x - y), \tag{48.4}$$

$$i\left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)\delta\psi_\beta(y)} S^\dagger \right| 0 \right\rangle = R_{\alpha\beta}(x - y). \tag{48.5}$$

注意，根据 47.2Ж，$S^\dagger|0\rangle = |0\rangle$，因此，(48.4)式和(48.5)式中的乘子 $S^\dagger$ 可以略去.

为了阐明表式(48.4)和 (48.5) 在通常理论范围中的意义，我们指出，利用以下根据 § 34.2 中所述的"广义 Wick 定理"的讨论，以上两式可以与总 Green 函数非常简单地联系起来.

将此定理应用到介子的总 Green 函数

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i\frac{\langle T(\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)S)\rangle_0}{S_0},$$

得到

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i\overbrace{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)} + \frac{i}{S_0}\sum_\alpha\int\left\langle\overbrace{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)\varphi_\alpha(z)}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\alpha(z)}\right\rangle_0 dz.$$

然后将此定理再应用到第二项，我们得到

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = \Delta^0_{\sigma\rho}(x-y) - \sum_{\alpha,\beta}\int\Delta^0_{\sigma\alpha}(x-z)Q_{\alpha\beta}(z-\tau)\Delta^0_{\beta\rho}(\tau-y)dzd\tau, \qquad (48.6)$$

其中

$$\Delta^0_{\sigma\rho}(x-y) = i\overbrace{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)}.$$

利用以下类型的公式

$$Q_{\alpha\beta}(z-\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(z-\tau)}q_{\alpha\beta}(p)dp, \qquad (48.7)$$

将(48.6)式化至动量表象后，我们得到

$$\Delta_{\sigma\rho}(p) = \frac{1}{\mu^2-p^2} - \frac{1}{\mu^2-p^2}q_{\sigma\rho}(p)\frac{1}{\mu^2-p^2}. \qquad (48.8)$$

同理可以得到核子 Green 函数 G:

$$G(p) = (M-\hat{p})^{-1} - (M-\hat{p})^{-1}r(p)(M-p)^{-1}. \qquad (48.9)$$

我们强调指出，列出(48.8)和(48.9)式的目的只是为了举例说明而已.

## 48.2. $\delta^2S/\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)$ 的真空期待值

现在更详细地来讨论 $Q(x-y)$. 为此引入一阶的辐射 Bose 算符

$$j_\sigma(x) = i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}S^\dagger, \qquad (48.10)$$

我们称上式为流算符(为了和通常的赝标量介子理论相对应). 算符 $j$ 是厄米的:

$$j^\dagger_\rho(x) = j_\rho(x), \qquad (48.11)$$

厄米性是 $\varphi$ 的实数性以及 $S$ 的幺正性的推论；利用简单计算可以证明此点(与 § 18.2 中证明广义哈密顿函数密度的厄米性的计算是相似的).

现在可以用 $j$ 及其变分导数来表示 (48.4) 式中的辐射算符. 将(48.10)式变分，并考虑到 $S$ 矩阵的幺正性和流的厄米性(48.11)，得到

$$\frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = i\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^\dagger + i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}\frac{\delta S^\dagger}{\delta\varphi_\rho(y)} =$$

$$= i\frac{\delta^2S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^\dagger + ij_\sigma(x)j_\rho(y). \qquad (48.12)$$

现在注意到，根据条件 47.3Б,

$$\frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = 0, \quad \text{当} \quad y \lesssim x,$$

得到

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^\dagger = -ij_\sigma(x)j_\rho(y), \quad \text{当} \quad y \lesssim x. \tag{48.13}$$

因为上列关系式的左边对于 $(x, \sigma)$ 与 $(y, \rho)$ 的互易是对称的，故我们得到

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^\dagger = -ij_\rho(y)j_\sigma(x), \quad \text{当} \quad x \lesssim y. \tag{48.14}$$

因此我们得到

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)}S^\dagger = -iT(j_\sigma(x)j_\rho(y)). \tag{48.15}$$

从(48.13)式和(48.14)式，还可以得出结论：

$$[j_\sigma(x), j_\rho(y)]_- = 0, \quad \text{当} \quad x \sim y.$$

从(48.15)式得到 $Q(x-y)$ 为

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = -i\langle T(j_\sigma(x)j_\rho(y))\rangle_0 = \begin{cases} -i\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0, & \text{当} \quad x \gtrsim y, \\ -i\langle j_\rho(x)j_\sigma(y)\rangle_0, & \text{当} \quad y \gtrsim x. \end{cases} \tag{48.16}$$

### 48.3. 两流相乘的真空期待值

我们将 $Q$ 用两流乘积的真空期待值 $\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0$ 来表示.

利用条件 47.2Г，比较详细地讨论上式的结构. 注意，正如不久前（§ 48.1）已经证明的，流的真空期待值等于零，现在可以写出

$$\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0 = \sum_n \int d\mathbf{k}\langle 0|j_\sigma(x)|n, \mathbf{k}\rangle\langle n, \mathbf{k}|j_\rho(y)|0\rangle. \tag{48.17}$$

然后利用性质 42.2Б 和 42.2В，有

$$\langle n, \mathbf{k}|j_\rho(y)|0\rangle = \langle n, \mathbf{k}|U_{L_y}^\dagger j_\rho^{(0)}U_{L_y}|0\rangle = \langle n, \mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle e^{i[E_n(\mathbf{k})y^0 - \mathbf{k}\mathbf{y}]}. \tag{48.18}$$

类似地来表示 $\langle 0|j_\sigma(x)|n, \mathbf{k}\rangle$，代替(48.17)式，我们得到

$$\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0 = \sum_n \int d\mathbf{k}e^{-i[E_n(\mathbf{k})(x^0-y^0)-\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}\langle 0|j_\sigma(0)|n, \mathbf{k}\rangle\langle n, \mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle. \tag{48.19}$$

现在假定在(48.19)的和式中具有一个、二个和三个介子的态是真空以上的最低能量态（这相当于假定没有介子和核子的质量小于 $3\mu$ 的束缚复合，这一点似乎和实验不相矛盾，同时也相当于假定与比 $\pi$ 介子轻的粒子没有相互作用）. 我们证明，对于单介子态 $|n, \mathbf{k}\rangle$，矩阵元

$$\langle n, \mathbf{k}|j_\sigma(0)|0\rangle \tag{48.20}$$

等于零. 为此，引进介子消失算符 $a_\rho^{(-)}(\mathbf{p})$，它具有通常的对易关系（比较 (11.12) 式和 (3.36)式）：

$$[a_\rho^{(\mp)}(\mathbf{p}), \varphi_\sigma(x)] = \pm\frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}e^{\pm ipx} \quad (p^0 = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2} > 0),$$

并且利用条件 47.3В. 这就给出

$$a_\sigma^{(\mp)}(\mathbf{p})S - Sa_\sigma^{(\mp)}(\mathbf{p}) = \pm\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}\int e^{\pm ipx}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}dx. \tag{48.21}$$

利用这一关系式，真空以及单介子态的条件 47.2 米 (47.10)，得到

$$\int e^{-ipx}\langle n,\mathbf{k}|j_\sigma(x)|0\rangle\,dx = i\int e^{ipx}\left\langle n,\mathbf{k}\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}S^\dagger\right|0\right\rangle dx =$$

$$= i(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}\{-\langle n,\mathbf{k}|a_\sigma^{(+)}(\mathbf{p})|0\rangle + \langle n,\mathbf{k}|Sa_\sigma^{(+)}(\mathbf{p})S^\dagger|0\rangle\} = 0.$$

因此，由于(48.18)式，

$$\delta(p-k)\langle n,\mathbf{k}|j_\sigma(0)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx}\langle n,\mathbf{k}|j_\sigma(0)|0\rangle dx = 0,$$

这就证明了上述假设. 再注意到，对于双介子状态，(48.20)式等于零，这可以从介子的赝标量性直接得到.

因此，在态 $|n,\mathbf{k}\rangle$ 的展开式(48.19)中至少含有三个介子，对于这些介子，

$$E_n^2(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 \geqslant (3\mu)^2. \tag{48.22}$$

现在注意到，根据平移不变性和同位旋不变性，

$$\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0 = \delta_{\sigma\rho}u(x-y).$$

函数 $u$ 可以表示为

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}v(k)dk.$$

而根据(48.19)式，函数 $v(k)$ 具有以下形式:

$$v(k) = (2\pi)^3\sum_n |\langle 0|j_\sigma(0)|n,\mathbf{k}\rangle|^2\delta(k^0 - E_n(\mathbf{k})), \tag{48.23}$$

根据(48.22)式和(48.23)式，考虑到 Lorentz 协变性，可以作出结论

$$v(k) = \theta(k^0)J(k^2), \tag{48.24}$$

而函数 $J$ 具有性质

$$J(k^2) \geqslant 0, \tag{48.25}$$

和

$$J(k^2) = 0 \quad 当 \quad k^2 < (3\mu)^2. \tag{48.26}$$

因此，我们得到

$$\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0 = \frac{\delta_{\sigma\rho}}{(2\pi)^3}\int e^{-ik(x-y)}\theta(k^0)J(k^2)dk. \tag{48.27}$$

这一公式实质上是 $\langle j_\sigma(x)j_\rho(y)\rangle_0$ 的谱表示.

从 (48.16) 式和 (48.27) 式得出结论，和 Green 函数相同，函数 $Q(x-y)$ 具有“因果性”；当 $x^0 > y^0$ 时，该函数对于宗量 $x^0 - y^0$ 而言只具有负频率，而当 $x^0 < y^0$ 时，只具有正频率. 因此，我们以后用 $Q^c$ 来表示它:

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = \delta_{\sigma\rho}Q^c(x-y). \tag{48.28}$$

### 48.4. $Q^r$ 和 $Q^a$ 的解析性

但是关于函数 $Q^c$ 的解析性质，只用关系式(48.16)和(48.17)还不足以作结论. 问题在于只有当 $x \neq y$ 时，关系式(48.16)才能决定 $Q^c$. 为了补足尚不充分的关系，我们不得不再引入两个函数来讨论，即

$$\delta_{\sigma\rho}Q^r(x-y)=\left\langle\frac{\delta j_\rho(y)}{\delta\varphi_\sigma(x)}\right\rangle_0, \tag{48.29}$$

$$\delta_{\sigma\rho}Q^a(x-y)=\left\langle\frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(y)}\right\rangle_0. \tag{48.30}$$

在写出上述关系式的左端时，我们利用了平移不变性和同位旋不变性. 指标 $r$ 和 $a$ 相应于以下的性质:

$$Q^r(x-y)=Q^a(y-x)=0, \quad 当 \quad x\lesssim y.$$

显然,一般而言,

$$Q^r(x-y)=Q^a(y-x). \tag{48.31}$$

化为动量表象

$$Q(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}q(k)dk,$$

根据(48.12)式和(48.27)式,得到

$$q^c(k)=-i2\pi\theta(k^0)J(k^2)+q^a(k)=i2\pi\theta(-k^0)J(k^2)+q^r(k). \tag{48.32}$$

因此,特别有

$$q^c(k)=q^a(k)=q^r(k), \quad 当 \quad k^2<(3\mu)^2. \tag{48.33}$$

现在讨论函数

$$q^r(k)=\int Q^r(k)e^{ikx}dx \tag{48.34}$$

的解析性,并考虑到由于因果性条件,

$$Q^r(x)=0, \quad 当 \quad x\lesssim 0. \tag{48.35}$$

关系式(48.34)在分量 $k$ 的实值区域中决定 $q^r(k)$. 从(48.35)式得出结论, $q^r(k)$ 可以用一定方式延拓到 $k$ 的复数区域. 设 $k$ 的虚部不等于零,即

$$\left.\begin{aligned}&k=p+i\Gamma,\\&p=\mathrm{Re}\,k,\ \Gamma=\mathrm{Im}\,k,\ \Gamma^2>0,\ \Gamma^0>0.\end{aligned}\right\} \tag{48.36}$$

此时得到

$$q^r(p+i\Gamma)=\int Q^r(x)e^{ipx-\Gamma x}dx. \tag{48.37}$$

乘子 $\exp(-\Gamma x)$ 起着截断因子的作用,以保证积分的收敛性. 事实上, 根据(48.35)式,(48.37)式是在

$$x^0\geqslant 0,\ \mathbf{x}^2\leqslant(x^0)^2$$

区域取积分的,在这一区域中按照最粗略的估计,

$$\Gamma x=\Gamma^0x^0-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}>(\Gamma^0-|\boldsymbol{\Gamma}|)x^0>\frac{1}{2}(\Gamma^0-|\boldsymbol{\Gamma}|)(x^0+|\mathbf{x}|),$$

因此

$$e^{-\Gamma x}\leqslant e^{-\alpha(|x^0|+|\mathbf{x}|)}, \tag{48.38}$$

根据(48.36)式,此处 $\alpha=\frac{1}{2}(\Gamma^0-|\boldsymbol{\Gamma}|)>0$.

同时根据条件 47.3Â, 函数 $Q^r(x)$ 是可积的,因此积分

$$\int Q^r(x)h(x)dx$$

是函数 $h(x)$ 空间 [$C(q, n, 1)$ 类]中的线性泛函，$h(x)$ 满足有限性条件：

$$h_{mn} = \sup\left\{|x|^m \frac{\partial^n h(x)}{(\partial x^0)^{\alpha_0}\cdots(\partial x^3)^{\alpha_3}}\right\},\quad \begin{matrix} m = 0, 1, \cdots, r; \\ n = \alpha_0 + \cdots + \alpha_3 = 0, 1, \cdots, q, \end{matrix}$$

此泛函存在，而它的绝对值由量 $h_{mn}$ 的线性组合所限定.

根据估值(48.38)，函数 $\exp(ipx - \Gamma x)$ 必然属于 $C(q, r, 1)$，而 $q$, $r$ 为任意有限值，使得积分(48.37)及其对 $k$ 的导数

$$\int Q^r(x)(x^0)^{\beta_0}\cdots(x^3)^{\beta_3}e^{ikx}dx \tag{48.39}$$

是收敛的. 这样，$q^r(k)$ 是在区域 (48.36) 中 $k$ 的解析函数. 此时因为 $e^{ikx}$ 对分量 $x$ 的导数与幂次 $k$ 成正比，函数 $q^r(k)$ 由量 $h_{mn}$ 的组合所限定，而在无穷远处，该函数的增长不比幂次不高于 $n$ 的 $k$ 的多项式更迅速(显然，在我们所讨论的 $k$ 值下，不等式(48.38)并不削弱).

通过如下的广义极限过渡，可以实施向实数 $k$ 过渡：

$$q^r(p + i\Gamma) \to q^r(p);\ \Gamma^2 \to +0,\ \Gamma^0 \to +0. \tag{48.40}$$

用类似的讨论可以证明，函数 $q^a(k)$ 可以延拓到复变量区域：

$$k \to p - i\Gamma;\ \Gamma^2 > 0,\ \Gamma^0 > 0, \tag{48.41}$$

并具有与 $q^r(k)$ 相同的解析性质.

但是，因为根据(48.33)，当 $k$ 为实数，且 $k^2 < (3\mu)^2$ 时，以上两函数相重合，应该把它们看作定义在区域(48.36)和(48.41)中的同一个解析函数 $f$. 因为在上述区域中，这两函数还与 $q^c(k)$ 相等，由于 $Q^c(x)$ 的协变性和时间反演不变性，$q^c(k)$ 只与 $k^2$ 有关，故函数 $f$ 也只与 $k^2$ 有关.

因此函数 $f(k^2)$ 在宗量值的如下区域中为解析，这些宗量相应于使

$$\Gamma^2 = (\mathrm{Im}\ k)^2 > 0 \tag{48.42}$$

的复 $k$ 分量.

引进记号

$$\mathrm{Re}\ k^2 = \xi,\ \mathrm{Im}\ k^2 = \eta \quad 即 \quad k^2 = \zeta = \xi + i\eta,$$

于是

$$\xi = p^2 - \Gamma^2,\ \eta = 2(p\Gamma). \tag{48.43}$$

现在已经清楚，条件(48.42)使得从 $\zeta$ 的复平面上除去正实数的半轴[1]：

$$\eta = 0,\ 0 < \xi < \infty. \tag{48.44}$$

因此函数 $f(\zeta)$ 是具有割线 (48.44) 的解析函数，而且在无穷远处，它的增长不比某一多项式迅速.

将函数 $f$ 在割线的上下岸的边界值定义为相应的广义极限

$$f_\pm(p^2) = \lim_{\eta \to \pm 0} f(k^2). \tag{48.45}$$

---

1) 实际上，如果 $\xi > 0$，则有 $p^2 > \Gamma^2 + \xi > 0$. 但因 $\Gamma^2 > 0$，所以 $\eta = 2p\Gamma \neq 0$.

现在从(48.4)、(48.31)、(48.36)、(48.41)和(48.43)等式，得出结论：

$$q^r(k) = q^a(-k) = \begin{cases} f_+(k^2), & \text{当} \quad k^0 > 0, \\ f_-(k^2), & \text{当} \quad k^0 < 0. \end{cases} \tag{48.46}$$

考虑到(48.32)式，也可得到

$$f_+(k^2) - f_-(k^2) = 2\pi i J(k^2). \tag{48.47}$$

现在注意到，根据(48.33)式，当 $k^2 < (3\mu)^2$ 时，差式(48.47)为零，我们得到，割线不是整个半实数轴，而只是部分的实轴：

$$\eta = 0, \ (3\mu)^2 \leqslant \xi < \infty. \tag{48.48}$$

考虑到(48.43)式，这些极限关系式可以写成更精简的形式：

$$q^r(k) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(k^2 + i\varepsilon k^0), \tag{48.49}$$

$$q^a(k) = \lim_{\varepsilon \to -0} f(k^2 - i\varepsilon k^0). \tag{48.50}$$

将这些表式和(48.32)式相结合，我们有

$$q^c(k) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(k^2 + i\varepsilon). \tag{48.51}$$

### 48.5. $q^r$, $q^a$ 和 $q^c$ 的谱表示

关于解析函数 $f(\zeta)$ 所得的结论，可以用来求得 $q^r$, $q^a$ 和 $q^c$ 的(48.27)类型的谱表示. 为了这一目的，与 § 46.2 中所进行的讨论相似，我们利用 Cauchy 的积分定理. 引入辅助函数

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \mu^2)^{n+1}},$$

它具有适当的 $n$，并且取图 56 所示的环线作为封闭迴线. 过渡到极限 $R \to \infty$，然后令 $\rho \to 0$, $\delta \to 0$，我们得到

$$f(z) = \frac{(z-\mu^2)^{n+1}}{2\pi i} \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{f_+(z') - f_-(z')}{(z'-\mu^2)^{n+1}(z'-z)} dz' + \\ + \frac{(z-\mu^2)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{\rho} \frac{dz'}{(z'-\mu^2)^{n+1}} \frac{f(z')}{z'-z}.$$

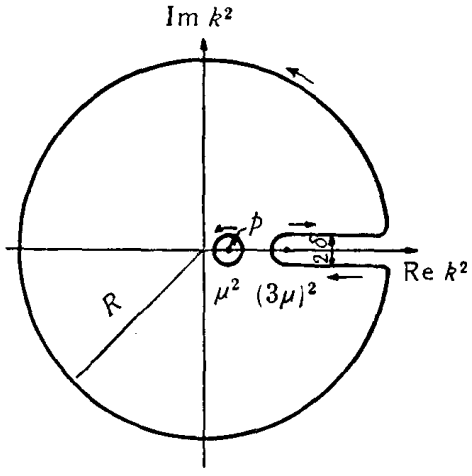



图 56　求谱表示的积分迴线

对以点 $\mu^2$ 为心、$\rho$ 为半径的小圆作积分，并且利用(48.47)式，得到

$$f(k^2)=(k^2-\mu^2)^{n+1}\int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-\mu^2)^{n+1}(z-k^2)}+i\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\frac{(k^2-\mu^2)^m}{m!}f^{(m)}(\mu^2),\quad(48.52)$$

$$f^{(m)}(\mu^2)=\left[\frac{\partial^m f(z)}{\partial z^m}\right]_{z=\mu^2}.$$

利用关系式(48.49)—(48.51)，可以在(48.52)式中立即换为 $q^a$, $q^r$, $q^c$ 中的任一函数. 因此，例如对于 $q^c$，有

$$q^c(k^2)=(k^2-\mu^2)^{n+1}\int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-\mu^2)^{n+1}(z-k^2-i\varepsilon)}+$$

$$+i\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\frac{(k^2-\mu^2)^m}{m!}f^{(m)}(\mu^2).\quad(48.53)$$

对于 $q^a$ 和 $q^r$，可以写出相似的关系式，它们与(48.53)式的差别在于用 $\pm i\varepsilon k^0$ 代替 $i\varepsilon$.

此处我们注意到，利用"减法程序"，从(48.16)和(48.17)式可以形式地直接得出谱表示式(48.53). 事实上，从上述关系有

$$Q(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)J(k^2)dk=\int_{(3\mu)^2}^{\infty}dz'J(z')\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-z')dk=$$

$$=\int_{(3\mu)^2}^{\infty}dz'J(z')D_{z'}^{(-)}(x)dz',\quad\text{当}\quad x\gtrsim 0,\quad(48.54)$$

此处 $D_z^{(-)}$ 是质量为 $\sqrt{z'}$ 的 Pauli-Villars 函数的负频率部分：

$$D_{z'}^{(-)}(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-z')dk,$$

在区域 $x\lesssim 0$ 中，将(48.54)式与相应的 $Q(x)$ 的表示相结合，我们得到

$$Q(x)-\int_{(3\mu)^2}^{\infty}J(z')D_{z'}^{c}(x)dz'=0,\quad\text{当}\quad x\neq 0,$$

由此得出结论

$$q^c(k)=\int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{z-k^2-i\varepsilon}+P(k^2),\quad(48.55)$$

其中 $P(k^2)$ 是对 $k^2$ 的某一多项式.

如果函数 $J(z)$ 在无穷远处减弱得不够迅速，那么(48.55)式中的积分是发散的. 但是，通过减法程序可以使它收敛，因而给予(48.55)式确定的意义. 利用公式

$$\frac{1}{z-k^2}=\frac{1}{z-\mu^2-(k^2-\mu^2)}=\frac{1}{z-\mu^2}\left\{1+\frac{k^2-\mu^2}{z-\mu^2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{k^2-\mu^2}{z-\mu^2}\right)^n\right\}+\frac{(k^2-\mu^2)^{n+1}}{(z-k^2)(z-\mu^2)^{n+1}},$$

将(48.55)式表示成形式

$$q^c(k)=(k^2-\mu^2)^{n+1}\int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-k^2-i\varepsilon)(z-\mu^2)^{n+1}}+$$

$$+\sum_{0\leqslant m\leqslant n}(k^2-\mu^2)^m\int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-\mu^2)^{m+1}}+P(k^2).\quad(48.56)$$

选择足够大的数 $n$，使得(48.56)式中第一积分是收敛的. 和式中含幂 $(k^2-\mu^2)$ 的发散项可以用多项式 $P(k^2)$ 来抵消. 这一"发散抵消"在通常减法程序中是典型的，结果我们得到(48.53)式.

现在证明，由于我们的条件，在(48.53)的求和符号下没有零次项，即

$$f(\mu^2) = 0. \tag{48.57}$$

为此，应该注意到，根据条件 47.3B，$S$ 在两个单介子态 $\langle \mathbf{p}'\sigma|$ 和 $|\mathbf{p}\rho\rangle$ 之间的矩阵元可以利用(48.21)式表示成

$$\langle \mathbf{p}'\sigma|S|\mathbf{p}\rho\rangle = \langle 0|Sa_\sigma^{(-)}(\mathbf{p}')a_\rho^{(+)}(\mathbf{p})|0\rangle + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p'^0}}\int\left\langle 0\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}a_\rho^{(+)}(\mathbf{p})\right|0\right\rangle e^{ip'x}dx, \quad \text{当} \quad p^2 = p'^2 = \mu^2.$$

考虑到 47.2 米和(48.4)式，将积分号下右端的 $a^{(+)}$ 和 $\delta S/\delta\varphi$ 相对易，我们得到

$$\langle \mathbf{p}'\sigma|S|\mathbf{p}\rho\rangle = \langle a_\sigma^{(-)}(\mathbf{p}')a_\rho^{(+)}(\mathbf{p})\rangle_0 + \frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{p^0p'^0}}\int Q_{\sigma\rho}(x, y)e^{i(p'x-py)}dx\,dy = \\ = \langle \mathbf{p}'\sigma|\mathbf{p}\rho\rangle + \delta_{\sigma\rho}\frac{\pi}{p^0}\delta(p-p')q^c(p), \quad \text{当} \quad p^2 = \mu^2.$$

另一方面，根据同一条件，我们可以直接写出

$$\langle \mathbf{p}'\sigma|S|\mathbf{p}\rho\rangle = \langle \mathbf{p}'\sigma|\mathbf{p}\rho\rangle,$$

考虑到(48.33)式和(48.51)式，从上式得到(48.57)式.

再证明常数 $f^{(m)}(\mu^2)$ 是纯虚数. 事实上，根据定义(48.4)式以及 $\varphi$ 是实函数，因此函数 $Q$ 是厄米的，再考虑到 $q^c(k)$ 是偶函数，我们有

$$q^{*c}(k^2) = -q^c(k^2).$$

但是由于根据(48.33)式和(48.51)式，在点 $\mu^2$ 的邻域中，函数 $q^c$ 与 $f$ 重合，这就给出

$$f^{*(m)}(\mu^2) = -f^{(m)}(\mu^2).$$

因此证明了函数 $q^r$, $q^a$ 和 $q^c$ 可以有(48.52)类型的谱表示，其中

$$f^{(0)}(\mu^2) = f(\mu^2) = 0, \tag{48.58}$$

和

$$f^{*(m)}(\mu^2) = -f^{(m)}(\mu^2). \tag{48.59}$$

加上“增长度” $n$ 等于 1 的条件以后，可以利用 (48.8) 式，从公式 (48.53)、(48.58) 和 (48.59) 得到 Bose 子的 Green 函数的 Källen-Lehmann 著名结果. 将(48.53)代入(48.8)式中，此时得到

$$\Delta(p) = \frac{1 + if^{(1)}(\mu^2)}{\mu^2 - p^2} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{I(z)dz}{z-p}, \quad I(z) = \frac{J(z)}{(z-\mu^2)^2}. \tag{48.60}$$

## §49. Fermi 子 Green 函数的譜表示

### 49.1. $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}\delta\psi$ 的眞空期待值的谱表示

让我们来构成二阶的 Fermi 辐射算符的眞空期待值

$$R^c_{\alpha\beta}(x-y) = i\left\langle\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)\delta\psi_\beta(y)}S^\dagger\right\rangle \tag{48.5}$$

的谱表示. 正如在 § 48.1 已经证明的，上式是唯一的二阶 Fermi 算符，它含有二次变分导数，并且含有不等于零的眞空平均值. 因为下述论证与 § 48 中内容的区别仅仅决定于 $R$ 和 $Q$ 的不同变换性质，我们只作比较概略的叙述.

为了辅助性的目的，引进一阶 Fermi 辐射算符[1]：

$$\vartheta(x) = iS\frac{\delta S^\dagger}{\delta\bar{\psi}(x)}, \tag{49.1}$$

和

$$\bar{\vartheta}(x) = -i\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}S^\dagger. \tag{49.2}$$

考虑 Fermi 变分导数 $\delta\vartheta/\delta\psi$，$\delta\bar{\vartheta}/\delta\bar{\psi}$ 和 $\delta^2S/\delta\bar{\psi}\delta\psi$ 之间的联系，和在 § 48.2 中对 Bose 导数所进行的讨论相同，考虑到么正性条件，我们得到公式[2]

$$\frac{\delta\vartheta(x)}{\delta\psi(y)} = i\frac{\delta^2S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^\dagger + i\vartheta(x)\bar{\vartheta}(y), \tag{49.4}$$

$$\frac{\delta\bar{\vartheta}(y)}{\delta\bar{\psi}(x)} = -i\frac{\delta^2S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}S^\dagger + i\bar{\vartheta}(y)\vartheta(x). \tag{49.5}$$

利用因果性条件，从上式得到

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\frac{\delta}{\delta\psi(y)}S\right\}S^\dagger = -T(\vartheta(x)\bar{\vartheta}(y)),$$

$$i\left\{\frac{\delta\vartheta(x)}{\delta\psi(y)} + \frac{\delta\bar{\vartheta}(y)}{\delta\bar{\psi}(x)}\right\} + [\vartheta(x), \bar{\vartheta}(y)]_+ = 0, \quad \text{当} \quad x \sim y.$$

引进真空平均值：

$$R^r(x-y) = -\left\langle\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\vartheta}(y)\right\rangle_0, \tag{49.6}$$

$$R^a(x-y) = \left\langle\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\vartheta(x)\right\rangle_0, \tag{49.7}$$

$$R^{(-)}(x-y) = i\langle\vartheta(x)\bar{\vartheta}(y)\rangle_0, \tag{49.8}$$

$$R^{(+)}(x-y) = -i\langle\bar{\vartheta}(x)\vartheta(y)\rangle_0, \tag{49.9}$$

根据(49.4)式和(49.5)式，这些表式与 $R^c$ 有以下关系：

$$\left.\begin{aligned} R^a(x) &= R^c(x) + R^{(-)}(x), \\ R^r(x) &= R^c(x) + R^{(+)}(x). \end{aligned}\right\} \tag{49.10}$$

由于因果性条件，有

$$\left.\begin{aligned} R^r(x) &= 0, \quad \text{当} \quad x \lesssim 0, \\ R^a(x) &= 0, \quad \text{当} \quad x \gtrsim 0. \end{aligned}\right\}$$

根据各向同性及 Lorentz 不变性，所有这些函数都具有结构：

$$R(x) = \delta_{st}(i\hat{\partial}u_1(x) + u_2(x)), \tag{49.11}$$

其中 $u_1$ 和 $u_2$ 是不变的标量函数，$s$ 和 $t$ 是同位旋指标(质子-中子的)，而分量 $\hat{\partial}$ 含有通常的四阶 Dirac 矩阵.

---

1) 利用(47.3)式，不难证明

$$\bar{\vartheta}(x) = [\vartheta(x)]^*\gamma^0.$$

2) 应用对乘积的微分公式：

$$\frac{\delta(AB)}{\delta\psi} = \frac{\delta A}{\delta\psi}B + (-1)^{\eta_A}A\frac{\delta B}{\delta\psi}, \tag{49.3}$$

其中 $\eta_A$ 是对于 Fermi 算符 $A$ 的“幂次”.

然后注意到表式(49.6)—(49.9)对于电荷共轭变换(参阅 § 12.3)的不变性，我们得到函数 $u(x)$ 相互之间有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(+)}(x) &= -u_1^{(-)}(-x),\ u_2^{(+)}(x) = u_2^{(-)}(-x), \\ u_1^r(x) &= -u_1^a(-x),\ u_2^r(x) = u_2^a(-x). \end{aligned}\right\} \tag{49.12}$$

我们来考虑函数 $R^{(-)}$. 根据条件 47.2B，可以将它写成形式

$$R^{(-)}(x-y) = \sum_n \int d\mathbf{k}\langle 0|\vartheta(0)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n,\mathbf{k}|\bar{\vartheta}(0)|0\rangle e^{ik(x-y)}. \tag{49.13}$$

正如在 § 48.2 中一样，这一和式开始几项的级数等于零. 因为根据协变性考虑，对于无核子态 $|n,\mathbf{k}\rangle$，有

$$\langle 0|\vartheta(0)|n,\mathbf{k}\rangle = 0, \tag{49.14}$$

除此之外，和 § 48.3 中的讨论相同，可以证明，对于单核子态，(49.14)也是正确的，因此积分(49.13)实际上在 $k^2 \geqslant (M+\mu)^2$ 区域中分布. 现在已经清楚，$R^{(-)}$ 可以表示成形式

$$R^{(-)}(x) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^3 i}\int e^{-ikx}\theta(k^0)[\hat{k}\rho_1(k^2) + \rho_2(k^2)]dk, \tag{49.15}$$

$$\rho_{1,2}(k^2) = 0, \quad 当 \quad k^2 \leqslant (M+\mu)^2.$$

对于 $R^a$, $R^r$ 和 $R^c$，引进用标量函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 表示的类似动量表象：

$$R(x) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}[\hat{k}\varphi_1(k) + \varphi_2(k)]dk, \tag{49.16}$$

利用(49.10)式和(49.12)式，得到关系式

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) - 2\pi i\theta(k^0)\rho_i(k^2) = \varphi_i^a(k) + 2\pi i\theta(-k)\rho_i(k^2) \quad (i=1,2). \tag{49.17}$$

由此利用(49.16)式，还得到

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) = \varphi_i^a(k), \quad 当 \quad k^2 < (M+\mu)^2. \tag{49.18}$$

由于(49.17)式和(49.18)式完全与(48.32)式和(48.33)式相似，现在对函数 $u$ 可以逐字重复 § 48.8 中关于函数 $q$ 的讨论.

这样，我们得到

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i^r(k) &= \lim_{\varepsilon\to+0} f_i(k^2 + i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^a(k) &= \lim_{\varepsilon\to+0} f_i(k^2 - i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^c(k) &= \lim_{\varepsilon\to+0} f_i(k^2 + i\varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{49.19}$$

其中函数 $f_i$ 在它的宗量的整个复平面上解析，除去割线

$$\mathrm{Im}\, k^2 = 0,\ \mathrm{Re}\, k^2 > (M+\mu)^2.$$

在无穷远处，$f_i$ 的增长不比 $n$ 阶多项式迅速，因此与 (48.52) 式相似，可以表示成以下形式：

$$f_i(k^2) = (k^2 - M^2)^{n+1}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty}\frac{\rho_i(z)dz}{(z-M^2)^{n+1}(z-k^2)} + i\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\frac{(k^2-M^2)^m}{m!}f_i^{(m)}(M^2). \tag{49.20}$$

现在来建立函数 $\rho_i$ 必须满足的不等式. 为此注意到，根据(49.11)、(49.13)和(49.18)式，存在下列关系式：

$$\hat{k}_{\alpha\beta}\rho_1(k^2)+\delta_{\alpha\beta}\rho_2(k^2)=\sum_{n,\omega}\langle 0|\vartheta_\alpha(0)|n,\mathbf{k}\rangle\langle n,\mathbf{k}|\vartheta^*_\omega(0)|0\rangle\gamma^0_{\omega\beta},\qquad(49.21)$$

对于所有 $k^2=M_n^2$, $k^0>0$, 上式是正确的. 令其中[1)]

$$\mathbf{k}=0,\ k^0=\nu>0,\ k^2=\nu^2,\ \alpha=\beta.$$

并且利用通常表示下的矩阵[2)]

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

此时得到

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 }\alpha=1,2\text{ 时},\ \nu\rho_1(\nu^2)+\rho_2(\nu^2)=\sum_n|\langle 0|\vartheta_\alpha(0)|n,0\rangle|^2>0,\\&\text{当 }\alpha=3,4\text{ 时},\ -\nu\rho_1(\nu^2)+\rho_2(\nu^2)=-\sum_n|\langle 0|\vartheta_\alpha(0)|n,0\rangle|^2<0.\end{aligned}\right\}\qquad(49.22)$$

现在引进函数

$$J_1(\nu)=\frac{\rho_1(\nu^2)-\dfrac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2},\ J_2(\nu)=\frac{\rho_1(\nu^2)+\dfrac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2},$$

由于(49.22)式,这些函数是非负的:

$$J_1(\nu)\geqslant 0,\ J_2(\nu)\geqslant 0,\qquad(49.23)$$

而且注意到

$$\hat{k}\rho_1(\nu^2)+\rho_2(\nu^2)=(\hat{k}-\nu)J_1(\nu^2)+(\hat{k}+\nu)J_2(\nu^2).\qquad(49.24)$$

但是根据(49.20)式和(49.24)式,现在可作结论: 以下的组合

$$R(\hat{k})=\hat{k}f_1(k^2)+f_2(k^2)\qquad(49.25)$$

具有谱表示

$$R(\hat{k})=(k^2-M^2)^{n+1}\int_{\nu>M+\mu}^{\infty}\frac{(\hat{k}-\mu)J_1(\nu)+(\hat{k}+\nu)J_2(\nu)}{(\nu^2-M^2)^{n+1}}\frac{d\nu^2}{\nu^2-k^2}+$$
$$+i\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\frac{(k^2-M^2)^m}{m!}(\hat{k}f_1^{(m)}(M^2)+f_2^{(m)}(M^2)).\qquad(49.26)$$

显然, 由于(49.16)式和(49.19)式, 可以在 (49.26) 式中代替 $R(\hat{k})$ 选取 $R^r$, $R^a$ 和 $R^c$ 的动量表象,这时只要根据(49.19)式选择围绕极点 $\nu^2=k^2$ 的相应法则.

可以将谱表示式(49.26)略加变换. 为此注意到差式

$$\left(\frac{k^2-M^2}{\nu^2-M^2}\right)^{n+1}\frac{1}{\nu\pm\hat{k}}-\left(\frac{\hat{k}-M}{\nu\pm M}\right)^{2n+2}\frac{1}{\nu\pm\hat{k}}$$

是对于 $\hat{k}$ 的 $2n+1$ 次多项式. 因此,(49.26)式可以写成形式为

$$R(\hat{k})=(\hat{k}-M)^{2n+2}\int_{(\nu\geqslant M+\mu)}\left(\frac{I_1(\nu)}{\nu+\hat{k}}+\frac{I_2(\hat{k})}{\nu-\hat{k}}\right)d\nu+\sum_{0\leqslant m\leqslant 2n+1}B_m(\hat{k}-M)^m,\qquad(49.27)$$

---

1) 即选定 $k$ 为纯粹时间型的,并且用 $\nu$ 表示使(49.21)式的右边不等于零的 $M_n$ 的集合.

2) 此处没有必要引进 Dirac 矩阵的具体表示,我们只是为了叙述上简便才提到它.

其中

$$\left.\begin{aligned} I_1(v) &= \frac{2vJ_1(v)}{(v+M)^{2n+2}} \geqslant 0, \\ I_2(v) &= \frac{2vJ_2(v)}{(v-M)^{2n+2}} \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{49.28}$$

而 $B_m$ 是标量常数.

和 Bose 子函数 $q$ 时的情况一样,可以证明 $B_0 = 0$, 因为根据 (48.9) 式,只有这样才能使相应的 Green 函数在 $\hat{k} = M$ 点上有一阶极点. 与 Bose 子的情况相似,通过考察 $S$ 在两个单核子态间的矩阵元,就可以得到相应的证明.

最后,利用可由定义(49.5)及(49.7)得到的共轭性质

$$\bar{R}^r(x-y) \equiv (R^r(x-y))^*\gamma^0 = R^a(y-x),$$

由此还可得到

$$\gamma^0 R^{*r}(k)\gamma^0 = R^a(k),$$

可见所有的 $B_m$ 都是实的.

假定 $n = 0$, 利用 (48.9) 式,可以由此得到 Fermi 子 Green 函数的 Källen-Lehmann 表示式.

此处我们又遇到有意义的事实(和 § 48.5 中相同),在我们所给出的条件系下(§ 47.2, 3), 给定"增长度"等效于给定拉格朗日函数密度.

### 49.2. 接近于矛盾

最后对条件(47.3A) 说明几句, 根据这一条件,辐射算符的真空平均值应该是广义的"可积函数".

我们来阐明下述情况的结果: 如果对真空平均值 $h(x_1, \cdots, x_n)$ 加上比较强的条件,要求它们是通常函数,并存在积分

$$\int |h(x_1, \cdots, x_n)|\rho(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n, \tag{49.29}$$

而权重函数 $\rho$ 在无穷远处减弱如

$$\left(\frac{1}{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\right)^m \quad (|x| = |x^0| + |\mathbf{x}|),$$

其中 $m$ 取足够高的值.

因为我们没有减弱我们的条件体系, 而相反地, 使它更加强了,以上证明的全部定理仍旧有效. 特别是关系式(48.52)、(49.26)和(49.27)式依旧满足.

例如,化为 $x$ 表象. 我们得到

$$\begin{aligned} Q_{\sigma\rho}(x-y) = \delta_{\rho\sigma}(\Box_x - \mu^2)^{n+1}\int_{(3\mu)^2}^{\infty} I(z)D_z^c(x-y)dz + \\ + \sum_{1\leqslant m\leqslant n} c_m(\mu^2 - \Box_x)^m\delta(x-y), \end{aligned} \tag{49.30}$$

其中

$$\Box_x = \Delta_x - \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}, \; I(z) = \frac{J(z)}{(z-\mu^2)^{n+1}} \geqslant 0,$$

而 $D_z^c$ 是质量为 $\sqrt{z}$ 的场的因果函数.

但是大家知道(参阅 § 15.2), 函数 $D_z^c(x-y)$ 在光锥上有 $1/(x-y)^2$ 型的奇异性. 由于积分 (49.30) 中的权重函数的正值性, 所有这些奇异性不相抵消, 而是相迭加的. 算符 $(\square-\mu^2)^m$ 的作用使得光锥上奇异性的性质更加加强. 因此积分 (49.29) 对于函数 $Q$ 是发散的, 此处 $Q$ 属于所考查的函数类, 即辐射算符的真空期待值.

因此, 只要将我们的条件体系(47.2),(47.3)中的一个条件稍为加强, 就可以得到内在矛盾. 显而易见, 关于"不能变形"的条件系 (47.2), (47.3) 的相容性, 从这里不能作出结论. 我们只是希望注意到, 一切定域性理论的内在矛盾问题, 并不是完全清楚的.

我们还应该注意到有意义的另一点. 常常有人提出如下意见, 即场论中的减法程序的应用与采用微扰理论有关. 我们认为这一意见并不正确.

事实上我们已经看到, 总 Green 函数在光锥上有奇异性, 无论如何, 此奇异性决不弱于自由场中 $D^c$ 函数的奇异性. 我们设想必须作乘法运算

$$D_\alpha^c(x-y)D_\beta^c(x-y).$$

为使此乘式具有意义, 必须运用减法程序, 因为如果采用平庸的解释, 我们立即发现这将引起紫外灾难类型的发散. 因此, 对我们说来, 减法程序是任何定域性理论不可避免的属性.

## § 50. 核子对介子的散射振幅

本节中包含辅助材料, 在 § 51 中将根据这些材料导出核子对介子的散射过程的色散关系. 此处我们引进所有基本量和辅助量, 并且指出在朝前散射情况下色散关系的比较简单的数学推导.

### 50.1. 散射振幅与"推迟"和"超前"矩阵元的关系

我们认为在散射以前, 核子所处的态是以动量 $\mathbf{p}$、不连续的自旋指标和同位旋指标来表征的, 后二个指标一起用字母 $s$ 表示, 而介子($\pi$ 介子)处于有动量 $\mathbf{q}$ 与不连续指标 $\rho$ 的态, 核子和 $\pi$ 介子在散射以后的态的相应特征用带撇的记号来表示 (对于核子是 $\mathbf{p}'s'$, 对于 $\pi$ 介子是 $\mathbf{q}'$, $\rho'$). 今后较为方便的是将 $\pi$ 介子的动量 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{q}'$ 特别写出, 而将初态和终态的其余特征的集合用一个符号来表示:

$$\alpha=(\mathbf{p}, s, \rho),\ \omega=(\mathbf{p}', s', \rho').$$

根据(46.14)式, 上述过程的散射振幅可以用矩阵元表示:

$$\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|S|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle.$$

从初态和终态中分出 $\pi$ 介子算符 $a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}')$ 和 $a_\rho^{(+)}(\mathbf{q})$, 将 $a^+$ 与 $S$ 矩阵置换:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}'s', \mathbf{q}'\rho'|S|\mathbf{p}s, \mathbf{q}\rho\rangle &= \langle \mathbf{p}'s'|a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}')Sa_\rho^{(+)}(\mathbf{q})|\mathbf{p}s\rangle = \\ &= \langle \mathbf{p}'s'|a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}')a_\rho^{(+)}(\mathbf{q})S|\mathbf{p}s\rangle + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^0}}\int dy e^{iqy}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\, a_{\rho'}^{(-)}(\mathbf{q}')\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(y)}\,\right|\mathbf{p}s\right\rangle. \qquad (50.1)\end{aligned}$$

为了计算第一项, 我们利用单核子态的稳定条件. 然后将算符置换, 我们得到这一项

等于 $\delta$ 函数的乘积. 在第二项中应该也将 $a^{(-)}$ 与 $\delta S/\delta\varphi$ 对易，注意到(46.14)式，从这里得到散射振幅的表式如下：

$$\delta(p+q-q'-p')f(\alpha\mathbf{q},\omega\mathbf{q}')=$$
$$=\frac{\pi}{(2\pi)^3 i}\int dxdy e^{i(q'x-qy)}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{\dagger}\right|\mathbf{p}\,s\right\rangle, \tag{50.2}$$
$$p'^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2},\cdots,q^0=\sqrt{\mathbf{q}^2+\mu^2}.$$

积分号中的矩阵元，按照与 § 48，§ 49 中所讨论的真空期待值和 Green 函数相类比，可称为“因果矩阵元”，并用 $F^c$ 来表示：

$$F^c(x,y)=\frac{2\pi^2}{i}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{\dagger}\right|\mathbf{p}s\right\rangle. \tag{50.3}$$

今后利用以下两量较为方便：

$$F^{\mathrm{ret}}(x,y)=\frac{2\pi^2}{i}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho}(y)}S^{\dagger}\right)\right|\mathbf{p}s\right\rangle, \tag{50.4}$$

$$F^{\mathrm{adv}}(x,y)=\frac{2\pi^2}{i}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho}(y)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}S^{\dagger}\right)\right|\mathbf{p}s\right\rangle, \tag{50.5}$$

它们具有性质：

$$F^{\mathrm{ret}}(x,y)=0,\quad \text{当}\quad x\lesssim y. \tag{50.6}$$
$$F^{\mathrm{adv}}(x,y)=0,\quad \text{当}\quad x\gtrsim y, \tag{50.7}$$

而表式

$$F^{(-)}(x,y)=\frac{2\pi^2}{i}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)}\frac{\delta S^{\dagger}}{\delta\varphi_{\rho}(y)}\right|\mathbf{p}s\right\rangle=$$
$$=\frac{2\pi^2}{i}\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho'}(x)j_{\rho}(y)|\mathbf{p}s\rangle, \tag{50.8}$$

$$F^{(+)}(x,y)=\frac{2\pi^2}{i}\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho}(y)j_{\rho'}(x)|\mathbf{p}s\rangle, \tag{50.9}$$

与 $F^{\mathrm{ret}}$、$F^{\mathrm{adv}}$ 和 $F^c$ 有关系式：

$$F^c=F^{\mathrm{ret}}-F^{(+)}=F^{\mathrm{adv}}-F^{(-)}. \tag{50.10}$$

根据条件 47.2B，47.2E 和(47.6)，作平移变换 $a=(x+y)/2$，可见矩阵元 $F^c$，$F^{\mathrm{ret}}$，$F^{\mathrm{adv}}$，$F^{(+)}$ 和 $F^{(-)}$ 可以表示为

$$F(x,y)=e^{i(p'-p)a}F(x-a,y-a)=e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)}F(x-y), \tag{50.11}$$

其中

$$F(x-y)=F\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right).$$

对函数 $F(x)$ 宜于引进 Fourier 表示：

$$T_{a\omega}(k)=\int dk e^{ikx}F(x). \tag{50.12}$$

从定义(50.4)—(50.9)得出 $T$ 的下列关系式（$P_{\rho\rho'}$ 是指标 $\rho$ 和 $\rho'$ 的对易符号）：

$$\left.\begin{aligned}T^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(k)&=P_{\rho\rho'}T^{\mathrm{adv}}_{a\omega}(-k),\\ T^{(-)}_{a\omega}(k)&=P_{\rho\rho'}T^{(+)}_{a\omega}(-k),\end{aligned}\right\} \tag{50.13}$$

考虑到(50.10)式,从上式还得到

$$T^{c}_{\alpha\omega}(k) = T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k) - T^{(+)}_{\alpha\omega}(k) = T^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(k) - T^{(-)}_{\alpha\omega}(k), \tag{50.14}$$

和

$$T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k) - T^{\mathrm{adv}}_{\alpha\omega}(k) = T^{(+)}_{\alpha\omega}(k) - P_{\rho\rho'}T^{(+)}_{\alpha\omega}(-k). \tag{50.15}$$

注意,散射振幅与 $T^c$ 有以下的关系:

$$f(\alpha\mathbf{q}, \omega\mathbf{q}') = T^{c}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right). \tag{50.16}$$

与上述讨论相似,将因果函数 $T^c$ (或 $F^c$) 化成超前或推迟函数,我们注意到,由于性质(50.6)和(50.7),函数 $F^{\mathrm{ret}}$ 和 $F^{\mathrm{adv}}$ 比较便于解析延拓. 为了这一目的,我们更详细地考虑量 $T^{(+)}$

$$T^{(+)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{i}\int dx e^{i\frac{q+q'}{2}x}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|j_\rho\left(\frac{y-x}{2}\right)j_{\rho'}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\mathbf{p}s\right\rangle.$$

我们来利用函数系(47.21)的完备性,作替代

$$j(z) = U^{\dagger}_{L_z}j(0)U_{L_z},$$

并且利用性质(47.6)对 $x$ 积分后,我们得到

$$\begin{aligned} T^{(+)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) &= \frac{2\pi^2}{i}\int dx e^{i\frac{q+q'}{2}x}\sum_n\int d\mathbf{k}\left\langle \mathbf{p}'s'\left|j_{\rho'}\left(-\frac{x}{2}\right)\right|\mathbf{k}n\right\rangle \times \\ &\times\left\langle \mathbf{k}n\left|j_{\rho'}\left(\frac{x}{2}\right)\right|\mathbf{p}s\right\rangle = \frac{(2\pi)^5\pi}{i}\sum_n\delta\left(\sqrt{\mathbf{k}^2+M_n^2}+\frac{q^0+q'^0-p^0-p^{0\prime}}{2}\right)\times \\ &\times\langle \mathbf{p}'s'|j_\rho(0)|\mathbf{k}n\rangle\langle \mathbf{k}n|j_\rho(0)|\mathbf{p}s\rangle;\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{q}-\mathbf{q}'}{2}. \end{aligned} \tag{50.17}$$

因为根据(50.16)式,在我们感到有意义的区域中,

$$p+q+p'-q' = 0$$

故在和式(50.17)中,$\delta$ 函数的宗量可以表示成形式:

$$\sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q}')^2+M_n^2}+q'^0-p^0 = \sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q}')^2+M_n^2}+\sqrt{\mu^2+\mathbf{q}'^2}-\sqrt{M_n^2+\mathbf{p}^2}. \tag{50.18}$$

因为表式(50.18)是在 $\delta$ 函数的记号下,故应有

$$\sqrt{M_n^2+(\mathbf{p}-\mathbf{q}')^2}+\sqrt{\mu^2+\mathbf{q}^2} = \sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}.$$

上述关系式相当于一个质量为 $M$ 的粒子转化为质量为 $\mu$ 和 $M_n$ 的两个粒子. 但因在一切情况下,

$$M_n \geqslant M, \tag{50.19}$$

所以这一转化根据能量和动量守恒定理是不可能的. 从这里得出结论,表式 (50.18)必为正值,因此 $T^{(+)}$ 化为零.

因此,如果矩阵元是在实际粒子态之间取定的,这些态有正能量

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2} > 0, \text{ 等等.}$$

并且满足四维动量守恒定律,则因果矩阵元与推迟函数相一致:

$$\left.\begin{aligned} &T^{c}_{\alpha\omega}(k) = T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}(k), \\ &k^0 = \frac{q^0+q'^0}{2} > \mu. \end{aligned}\right\} \tag{50.20}$$

完全同理,可以证明

$$T^{c}_{a\omega}(k) = T^{\mathrm{adv}}_{a\omega}(k), \quad \text{当} \quad k^0 < -\mu. \tag{50.21}$$

## 50.2. 化到固定参考系. 解析延拓的困难

在§46中已经指出,为了获得色散关系,必须阐明在能量变量复平面上函数的解析性. 在§46的示例中,对于一个宗量的推迟函数,从与(50.6)类似的色散性质,已经直接获得函数的解析性.

在目前情况下,我们所讨论的函数含有许多独立的宗量(不同粒子的动量),而与§48,§49中所考虑的例子不同,这些宗量并不归结为一个标量(类型如四维动量平方$k^2$). 这就使得问题根本上复杂化.

为了用明显方式分离出能量和动量的个别独立变量,最方便的是利用如下的参考系,其中核子的动量之和在散射前后等于零:

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0, \tag{50.22}$$

(在朝前散射时,$\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$,这一参考系过渡为实验室坐标系). 在这一坐标系中,$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2$,而且由于能量守恒定律,$\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$,动量守恒定律本身又化成关系式:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}' - \mathbf{q}}{2} \quad \text{和} \quad (\mathbf{q}' + \mathbf{q})\mathbf{p} = 0. \tag{50.23}$$

因此可以令

$$\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} = \lambda \mathbf{e}, \tag{50.24}$$

其中$\mathbf{e}$是垂直于$\mathbf{p}$的单位矢量:

$$\mathbf{e}^2 = 1, \ \mathbf{ep} = 0.$$

从(50.23)式和(50.24)式,得出结论

$$\mathbf{q} = -\mathbf{p} + \lambda \mathbf{e}, \ \mathbf{q}' = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{e},$$

因此

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda^2, \ q^0 = q'^0 = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2},$$

也就是四维矢量的宗量$(q + q')/2$可以用$\lambda$和$\mathbf{e}$来代替. 此时和$\lambda$一起,利用介子能量较为方便:

$$\frac{q^0 + q^{0'}}{2} = q^0 = E = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda^2}. \tag{50.25}$$

当$\mathbf{p}$为确定时,$E$与$\lambda$相互之间有单值关系.

因此在参考系(50.22)中,利用(50.12)式,我们感到有意义的量$T^{\mathrm{ret}}$可以表示成以下形式:

$$T^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(E, \mathbf{e}) = \int dx e^{i(Ex^0 - \mathbf{ex}\sqrt{E^2 - \mu^2 - \mathbf{p}^2})} F^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(x). \tag{50.26}$$

根据(50.6)式,(50.26)式中的积分实际上是对上部光锥$x^0 > |x|$而取的.

我们考虑表式(50.26)向变量$E$的复区域上半平面解析延拓的可能性. 首先注意到,

对于正实数 $a$，总有[1)]

$$\mathrm{Im}\sqrt{E^2-a} > \mathrm{Im}\, E. \tag{50.27}$$

因此对实数 $E$ 加上纯虚量 $i\Gamma$ 时，

$$E \to E + i\Gamma \quad (\Gamma > 0),$$

对于每一 $x_0$ 值，总可求得 $\mathbf{x}$ 的区域，使

$$x^0\Gamma + \mathbf{ex}\,\mathrm{Im}\sqrt{E^2-\mu^2-\mathbf{p}^2} > 0,$$

以致表式(50.26)在变量 $E$ 的上半平面并不具备解析性.

可见这一困难使得向变量 $E$ 的复值区域解析延拓完全不可能. 不仅如此，表式(50.26)只有当 $E^2 > \mu^2 + \mathbf{p}^2$ 时对于实数 $E$ 才有意义，因为通过支点 $E_0 = \pm\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}$ 以后，被积式内有增长因子 $\exp\{\mathbf{ex}\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2E^2}\}$，因而失去意义.

因此，(50.26)式只在两段实轴上才能表示函数 $T$：

$$-\infty < E < -\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}\,,\ \sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2} < E < \infty,$$

并且不能超过这线段范围而直接延拓.

还很清楚，尝试将超前函数 $T^{\mathrm{adv}}(E, e)$ 解析延拓时也产生相同的困难. 为了将 $T^{\mathrm{ret}}$ 和 $T^{\mathrm{adv}}$ 两式解析延拓，不得不应用复杂的人为方法. 在朝前散射情况下，可以认为解析延拓是比较简单的程序，我们现在来叙述这一程序.

### 50.3. 朝前散射振幅的色散关系的求法

在朝前散射情况，当 $\mathbf{p} = 0$，

$$T(E, \mathbf{e}) = \int dx e^{i(Ex^0 - \mathbf{ex}\sqrt{E^2-\mu^2})} F(x), \tag{50.28}$$

而且[2)]

$$T^{(\pm)}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = T^{(\pm)}(q) =$$

$$= (2\pi)^5 \frac{\pi}{i}\delta(\sqrt{M^2+\mathbf{q}^2} - M \pm E)\sum_{s''}\langle 0s'|j_\rho(0)|\mathbf{q}s''\rangle\langle \mathbf{q}s''|j_{\rho'}(0)|0s\rangle +$$

$$+ (2\pi)^5 \frac{\pi}{i}\sum_{(M_n > M+\mu)}\delta(\sqrt{M^2+\mathbf{q}^2} - M \pm E)\langle 0s'|j_\rho(0)|\mathbf{q}n\rangle\langle \mathbf{q}n|j_{\rho'}(0)|0s\rangle. \tag{50.29}$$

我们来研究 $E$ 为任意实值时 (50.29) 式各项的构造. 自然此时我们并不认为 $E$ 是被以下条件所限制：

$$E^2 = \mu^2 + \mathbf{q}^2,\ E > \mu,$$

而认为 $E$ 是与 $\mathbf{q}$ 无关的变量.

当

$$E = \pm(\sqrt{M^2+\mathbf{q}^2} - M),$$

1) 不等式 (50.27) 的直接代数证明是很繁杂的. 在复变量平面上通过作图可以比较简单地确信这一不等式的正确性.

2) 与比 $\pi$ 介子轻的粒子无相互作用的假定，在此处又起重要的作用.

或者与之等效，当

$$E = \pm \frac{E^2 - \mathbf{q}^2}{2M} = \pm \frac{q^2}{2M} \tag{50.30}$$

时，(50.29)式中第一项的贡献不等于零；当

$$|E| = \sqrt{M_n^2 + \mathbf{q}^2} - M > \sqrt{(M+\mu)^2 + \mathbf{q}^2} - M > (M+\mu) - M = \mu \tag{50.31}$$

时，第二项的贡献不等于零.

因此在 $-\mu < E < \mu$ 的一段实轴上，只有能量值与四维动量平方之间有关系式(50.30)的两个单核子的中间态，才在 $T$ 中给出贡献. 因此如果代替函数 $F$，我们引入下式来考虑：

$$\tilde{F}(x) = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\Box}{2M}\right)^2\right] F(x), \tag{50.32}$$

这在动量表象中相当于乘上多项式：

$$\tilde{T}(q) = \left[(q^0)^2 - \left(\frac{q^2}{2M}\right)^2\right] T(q), \tag{50.33}$$

因此当值 $-\mu < q^0 < \mu$ 时，函数 $\tilde{T}^{(+)}$ 和 $\tilde{T}^{(-)}$ 等于零[1]，因此[2]

$$\tilde{T}(q^*) = \tilde{T}^{\mathrm{ret}}(q) = \tilde{T}^{\mathrm{adv}}(q), \quad \text{当} \quad -\mu < q^0 < \mu. \tag{50.34}$$

从(50.28)式得出结论，一般说来，点 $k^0 = \pm\mu$ 是函数 $\tilde{T}$ 的支点. 为了消除平方根 $\pm\sqrt{E^2-\mu^2}$ 前的双重符号，最简单的办法是代替考虑函数 $T(E, \mathbf{e})$，我们考虑它的对称组合和反对称组合：

$$\left.\begin{aligned} S_+T(E,\mathbf{e}) &= \frac{T(E,\mathbf{e}) + T(E,-\mathbf{e})}{2}, \\ S_-T(E,\mathbf{e}) &= \frac{T(E,\mathbf{e}) - T(E,-\mathbf{e})}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{50.35}$$

以后我们用 $ST$ 表示以上两式的总和. 函数 $ST^{\mathrm{ret}}$ 和 $ST^{\mathrm{adv}}$ 可以用以下方式延拓到 $E$ 的复值区域. 引入表式

$$S\int \tilde{F}^{\mathrm{ret}}(x) e^{i(Ex^0 - \mathbf{ex}\sqrt{E^2-\mu^2}) - \varepsilon\mathbf{x}^2} dx^0 d\mathbf{x} = \Phi^r(E, \mathbf{e}; \varepsilon), \tag{50.36}$$

$$S\int \tilde{F}^{\mathrm{adv}}(x) e^{i(Ex^0 - \mathbf{ex}\sqrt{E^2-\mu^2}) - \varepsilon\mathbf{x}^2} dx^0 d\mathbf{x} = \Phi^a(E, \mathbf{e}; \varepsilon). \tag{50.37}$$

此处根据(50.35)式，

$$S_+ e^{-i\mathbf{ex}\sqrt{E^2-\mu^2}} = \cos(\lambda \mathbf{ex}), \tag{50.38}$$

$$S_- e^{-i\mathbf{ex}\lambda} = \frac{\sin(\lambda \mathbf{ex})}{i\lambda}. \tag{50.39}$$

显而易见，首先由于存在乘子 $\exp(-\varepsilon\mathbf{x}^2)$，函数 $\Phi^r(E, \mathbf{e}; \varepsilon)$ 在复值 $E$ 的上半平面为解析，而 $\Phi^a(E, \mathbf{e}; \varepsilon)$ 在下半平面为解析. 其次，根据(50.34)式，

$$\Phi^r(E, \mathbf{e}; \varepsilon) - \Phi^a(E, \mathbf{e}; \varepsilon) = 0 \quad \text{当} \quad -\mu \leqslant \mathrm{Re}\, E \leqslant \mu, \ \mathrm{Im}\, E = 0.$$

---

1) 由于 $x\delta(x) = 0$ 型的关系式.

2) 由于假定 $\mathbf{p} = 0$，因为如 $\mathbf{p} \neq 0$ 则不等式(50.31)不成立.

这样函数 $\Phi^r$ 和 $\Phi^a$ 一起表示以下函数:

$$\Phi(E, \mathbf{e}; \varepsilon) = \begin{cases} \Phi^r(E, \mathbf{e}; \varepsilon), & \text{当} \quad \operatorname{Im} E > 0, \\ \Phi^a(E, \mathbf{e}; \varepsilon), & \text{当} \quad \operatorname{Im} E < 0, \end{cases} \tag{50.40}$$

在宗量 $E$ 的整个复平面域内为解析,除去两段割线:

$$\left.\begin{aligned} -\infty < \operatorname{Re} E < -\mu, \operatorname{Im} E = 0, \\ \mu < \operatorname{Re} E < \infty, \operatorname{Im} E = 0, \end{aligned}\right\} \tag{50.41}$$

此时 $\Phi$ 在割线上岸之值等于 $\Phi^r$ 之值,而在割线的下岸之值则等于 $\Phi^a$ 值.

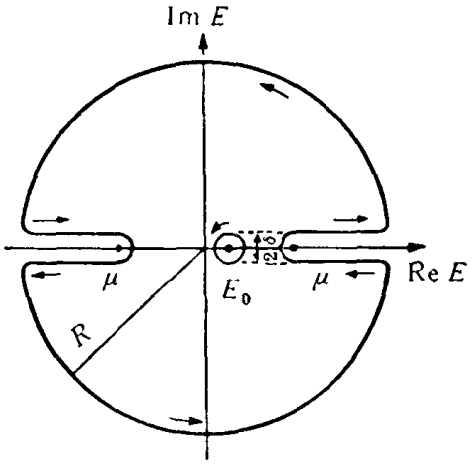


图 57

现在用 $n$ 来表示当 $E$ 大时函数 $\Phi$ 的增长的阶数,可以将 Cauchy 积分定理用于下式:

$$\frac{\Phi(E, \mathbf{e}; \varepsilon)}{(E - E_0)^{n+1}},$$

其中 $E_0$ 是位于 $(-\mu, +\mu)$ 间隔中的某一实参量.

选择积分迴路为: 以 $E_0$ 为中心、以 $\delta$ 为半径的小圆,两个以 $R$ 为半径的大半圆以及与割线平行的(与后者之距离为 $\delta$)连接大小圆的联线(图 57). 令 $R$ 趋于无穷大,沿大半圆的积分为零. 然后,过渡到极限 $\delta \to 0$, 得到

$$\Phi(E, \mathbf{e}; \varepsilon) = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{\Phi(E' + i0, \mathbf{e}; \varepsilon) - \Phi(E' - i0, \mathbf{e}; \varepsilon)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} dE' + \\ + \frac{(E - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\Phi(E' + i0, \mathbf{e}; \varepsilon) - \Phi(E' - i0, \mathbf{e}; \varepsilon)}{(E' - E)(E' - E_0)^{n+1}} dE' + P_n(E), \tag{50.42}$$

其中 $P_n(E)$ 是 $E$ 的 $n$ 阶多项式. 在积分(50.42)中,取极限 $\varepsilon \to 0$. 由于积分是在可观察区域 $E'^2 > \mu^2$ 上进行的,根据(50.36)式及(50.37)式,被积式的分子具有形式:

$$\Phi^r(E', \mathbf{e}; 0) - \Phi^a(E', \mathbf{e}; 0) = S\tilde{T}^{\mathrm{ret}}(E', \mathbf{e}) - S\tilde{T}^{\mathrm{adv}}(E', \mathbf{e}).$$

此时积分本身乘上 $(E - E_0)^{n+1}$ 后,当 $\varepsilon = 0$ 时,它表示除去割线(50.41)以外在复变量 $E$ 的整个区域中的解析函数. 所以, 从(50.42)式可以得出结论,当 $\varepsilon = 0$ 时,右端决定了除上述两条割线以外在整个 $E$ 平面为解析的函数 $\Phi(E, \mathbf{e}; 0)$. 但是从 (50.33)、(50.36)、(50.37)和(50.40)式,可以得出结论, $\Phi(E, \mathbf{e}; 0)$ 与函数

$$S\tilde{T}(E, \mathbf{e}) = \begin{cases} ST^{\mathrm{ret}}(E, \mathbf{e}), & \text{当} \quad \operatorname{Im} E > 0, \\ ST^{\mathrm{rad}}(E, \mathbf{e}), & \text{当} \quad \operatorname{Im} E < 0, \end{cases}$$

只差一乘子(当 $\mathbf{q}^2 = E^2 - \mu^2$):

$$E^2 - \left(\frac{\mu^2}{2M}\right)^2 = \left(E - \frac{\mu^2}{2M}\right)\left(E + \frac{\mu^2}{2M}\right). \tag{50.43}$$

因此很清楚, 函数 $S\tilde{T}(E, \mathbf{e})$ 也将是变量 $E$ 的整个复域内的解析函数, 但两条割线(50.41)以及乘子(50.43)为零之点要除外. 这些点位于割线外, 而函数 $S\tilde{T}(E, \mathbf{e})$ 在这些

点上具有一阶极点. 这时在无穷远处,函数的增长不比 $(n-2)$ 阶多项式迅速.

因此对于函数 $S\tilde{T}(E,\mathbf{e})/(E-E_0)^{n-1}$ 可以应用 Cauchy 积分公式,而选择积分迴线时,应该考虑到存在着与乘子(50.43)有关的附加极点,极点位于

$$E_1=\frac{\mu^2}{2M}<\mu,$$

$$E_2=-E_1=-\frac{\mu^2}{2M}>-\mu,$$

而积分迴线中应添上两个绕极点的圆如图 58.

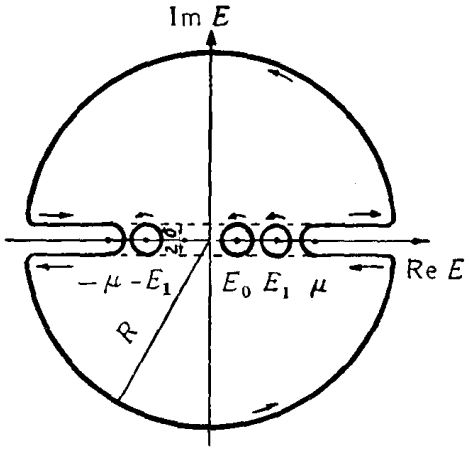


图 58

然后令 $R\to\infty,\delta\to 0$,就将积分项归结为可观察区域中的积分 $(-\infty<E<-\mu,\ \mu<E<\infty)$ (与(50.42)式相似)以及极点 $\pm E_1$ 的留数. 然后令函数 $S\tilde{T}(E,\mathbf{e})$ 在积分号外的宗量趋于可观察区域,我们就得到可观察量 $ST^c(E,\mathbf{e})$ 的色散关系.

但是,我们在这里并不进行计算,因为以下(§ 51)将得到更一般情况 $\mathbf{p}\neq 0$ 时的色散关系,而在 § 52 中将详细讨论这些关系式.

## § 51. 散射振幅的解析延拓問題(当 $\mathbf{p}\neq 0$ 时)

现在我们来推导一般情况即 $\mathbf{p}\neq 0$ 时的色散关系. 在上节中散射振幅表示为

$$\lambda^2=E^2-\mathbf{p}^2-\mu^2 \tag{51.1}$$

时的积分:

$$T^c(E,\mathbf{e})=\int e^{i(Ex^0-\lambda\mathbf{e}\mathbf{x})}F^c(x)dx.$$

已经证明,在 $E$ 的复值区域的解析延拓的一切困难是由于 $\lambda^2<E^2$. 因此,我们首先考虑当 $\lambda^2>E^2$ 时的假想情况,于是向复值 $E$ 的解析延拓并不遇到任何困难,我们来构成这一情况的色散关系,然后向 $\lambda^2<E^2$ 的区域施行解析延拓手续,从而得到实际情况的色散关系.

### 51.1. 在 $\tau<-\mathbf{p}^2$ 假想域中的解析性

代替(51.1)式,我们令

$$\lambda^2=E^2-\mathbf{p}^2-\tau, \tag{51.2}$$

其中 $\tau$ 是新的辅助变量,暂且由以下条件限制:

$$\tau<-\mathbf{p}^2. \tag{51.3}$$

引进表式

$$\left.\begin{aligned} ST^r(E,\mathbf{e};\tau)&=S\int e^{i(Ex^0-\mathbf{e}\mathbf{x}\sqrt{E^2-\mathbf{p}^2-\tau})}F^{\mathrm{ret}}(x)dx,\\ ST^a(E,\mathbf{e};\tau)&=S\int e^{i(Ex^0-\mathbf{e}\mathbf{x}\sqrt{E^2-\mathbf{p}^2-\tau})}F^{\mathrm{adv}}(x)dx, \end{aligned}\right\} \tag{51.4}$$

在实际情况 $\tau = \mu^2$ 时，上式变成以前(§ 50)所讨论过的 $ST^{\mathrm{ret}}(E, \mathbf{e})$ 和 $ST^{\mathrm{adv}}(E, \mathbf{e})$:

$$\left.\begin{aligned} ST^r(E, \mathbf{e}; \mu^2) &= ST^{\mathrm{ret}}(E, \mathbf{e}), \\ ST^a(E, \mathbf{e}; \mu^2) &= ST^{\mathrm{adv}}(E, \mathbf{e}). \end{aligned}\right\} \tag{51.5}$$

显然因为在区域(51.3)中，总有

$$\mathrm{Im}\, E > \mathrm{Im}\sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau} = \mathrm{Im}\, \lambda, \tag{51.6}$$

故 $ST^r(E, \mathbf{e}; \tau)$ 是区域 $\mathrm{Im}\, E > 0$ 中的解析函数，而 $ST^a(E, \mathbf{e}; \tau)$ 是区域 $\mathrm{Im}\, E < 0$ 中的解析函数.

为了建立起函数

$$S\tilde{T}(E, \mathbf{e}; \tau) = \left\{\begin{aligned} &ST^r(E, \mathbf{e}; \tau) \quad \text{当} \quad \mathrm{Im}\, E > 0, \\ &ST^a(E, \mathbf{e}; \tau) \quad \text{当} \quad \mathrm{Im}\, E < 0, \end{aligned}\right\} \tag{51.7}$$

在整个 $E$ 复平面中的解析性(可能除去一定数目的点和实轴上的割线)，我们来考虑到函数 $ST^r$ 和 $ST^a$ 在实轴 $E$ 上的差式. 根据(51.4)、(50.10)和(50.13)式，有

$$ST(E, \mathbf{e}; \tau) \equiv ST^r(E, \mathbf{e}; \tau) - ST^a(E, \mathbf{e}; \tau) =$$

$$= S\int dx e^{i(Ex^0 - \lambda \mathbf{e}\mathbf{x})}\{F^{(+)}(x) - P_{\rho\rho'}F^{(+)}(-x)\}. \tag{51.8}$$

利用(50.12)式和(50.17)，将在上式右边 $F^{(+)}$ 的表示式用态的完备系的和式来表示，积分后得到(在 $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$ 的参考系中):

$$ST(E, \mathbf{e}; \tau) =$$

$$= (2\pi)^5 \pi i \sum_n \delta(E - \sqrt{\lambda^2 + M_n^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}) S\langle \mathbf{p}'s' | j_{\rho'}(0) | \lambda \mathbf{e}, n\rangle\langle \lambda \mathbf{e}, n | j_\rho(0) | \mathbf{p}s\rangle -$$

$$- (2\pi)^5 \pi i \sum_n \delta(E + \sqrt{\lambda^2 + M_n^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}) S\langle \mathbf{p}'s' | j_\rho(0) | -\lambda \mathbf{e}, n\rangle\langle -\lambda \mathbf{e}, n | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}s\rangle. \tag{51.9}$$

现在限制动量 $\mathbf{p}$ 的区域，使

$$\mathbf{p}^2 < \frac{\mu M + \frac{\mu^2}{2} - \tau}{2}, \tag{51.10}$$

引进记号

$$E_1 = \frac{2M\mu + \mu^2 - 2\mathbf{p}^2 - \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} > 0. \tag{51.11}$$

不难证明，在和式(51.9)中单核子项只当

$$E = \pm E_p, \; E_p = \frac{2\mathbf{p}^2 + \tau}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} \tag{51.12}$$

时不为零. 此时由于(51.11)式，

$$-E_1 < -E_p, \; E_p < E_1. \tag{51.13}$$

另一方面，根据以前所作的假定，除了单核子以外，对于一切 $n$，在和式(51.9)中 $M_n > M + \mu$. 从这里得到结论，只有在

$$|E| = \frac{|M_n^2 - M^2 - 2\mathbf{p}^2 - \tau|}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} > E_1 \tag{51.14}$$

的条件下,(51.9)式中所有各项之和(除去单核子)才不等于零.

因此当 $|E| < E_1$ 时,在(51.9)式中只有单核子分量不等于零,可将它写成下式:

$$ST(E, \mathbf{e}; \tau) =$$

$$= (2\pi)^5 \pi i \frac{2M^2 - \tau}{2(M^2 + \mathbf{p}^2)} \delta(E + E_p) S \sum_{s''} \langle \mathbf{p}'s' | j_\rho(0) | \lambda\mathbf{e}, s'' \rangle \langle \lambda\mathbf{e}, s'' | j_\rho(0) | \mathbf{p}s \rangle -$$

$$- (2\pi)^5 \pi i \frac{2M^2 - \tau}{2(M^2 + \mathbf{p}^2)} \delta(E - E_p) S \sum_{s''} \langle \mathbf{p}'s' | j_\rho(0) | -\lambda\mathbf{e}, s'' \rangle \langle -\lambda\mathbf{e}, s'' | j_{\rho'}(0) | \mathbf{p}s \rangle. \tag{51.15}$$

现在已很清楚, $ST'$ 和 $ST^a$ 就是同一个解析函数 $S\tilde{T}$ [参阅(51.7)式],它在 $\mathrm{Im}\, E \neq 0$ 的区域中为正则,沿实轴有割线

$$\left.\begin{aligned} &-\infty < E < E_1 \\ \text{和} \quad &\\ &E_1 < E < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{51.16}$$

而且在点 $E_p$ 和 $E_{-p}$ 上有一级极点.

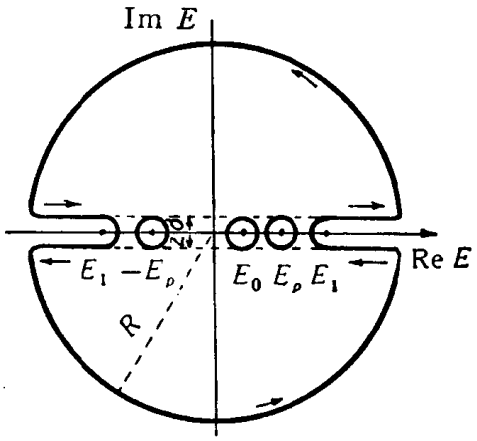



图 59

对于 $S\tilde{T}$ 可以写出 Cauchy 积分定理. 用 $n$ 来表示函数 $S\tilde{T}$ 在无穷远的增长的阶,并引进

$$\frac{S\tilde{T}(E, \mathbf{e}; \tau)}{(E - E_0)^{n+1}}, \tag{51.17}$$

其中 $E_0$ 是某一实参量,位于间隔 $(-E_1, E_1)$ 中,而且和 $\pm E_p$ 不相合. 选择积分线路如图 59 中所示,容易得到,当趋近积分极限 $R \to \infty$, $\delta \to 0$ 时,有

$$S\tilde{T}(E, \mathbf{e}; \tau) = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ST(E', \mathbf{e}; \tau) dE'}{(E' - E_0)^{n+1}(E' - E)} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k(\tau) E^k =$$

$$= \frac{(E - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{|E'| > E_1} \frac{ST(E', \mathbf{e}; \tau) dE'}{(E' - E_0)^{n+1}(E' - E)} + \left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_p}\right)^{n+1} \frac{A_{\rho\rho'}(-\lambda\mathbf{e}, \tau)}{E - E_p} -$$

$$- \left(\frac{E_0 - E}{E_0 + E_p}\right)^{n+1} \frac{A_{\rho'\rho}(\lambda\mathbf{e}, \tau)}{E + E_p} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k(\tau) E^k, \tag{51.18}$$

其中 $c_k(\tau)$ 是与 $\tau$ 有关的常数,而

$$A_{\rho'\rho}(\lambda\mathbf{e}, \tau) = (2\pi)^4 \pi \frac{2M^2 - \tau}{2(M^2 + \mathbf{p}^2)} S \sum_{s''} \langle \mathbf{p}'s' | j_{\rho'}(0) | \lambda\mathbf{e}, s'' \rangle \langle \lambda\mathbf{e}, s'' | j_\rho(0) | \mathbf{p}s \rangle. \tag{51.19}$$

记住,我们目前只在假想的不可观察区域 (51.3) 中 (其中 $\lambda^2 > E^2$) 得到了色散关系 (51.18),并且还必须将它在点 $\lambda^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 - \mu^2$ 实施解析延拓. 但是首先比较详细地讨论 $ST$ 中单核子态贡献的系数(51.19)的结构.

## 51.2. 单核子项的结构

为了将(51.19)式表示为更加简单明了的形式,考察其中所含有的在两个单核子态之间的流的典型矩阵元 $\langle \mathbf{p}''s'' | j_\rho(0) | \mathbf{p}s \rangle$. 注意,在我们的假想情况下,在 $E$ 为任意实数

时，

$$\lambda^2 = E^2 + a,\ a = -\tau - \mathbf{p}^2 > 0,\ 及\ \lambda^2 > 0.$$

我们认为，两个单核子态 $\langle \mathbf{p}''s''|$ 和 $|\mathbf{p}s\rangle$ 具有实动量．由于平移不变性，考虑到条件 47.2B 及 47.2E，我们有

$$\langle \mathbf{p}''s''|j_\rho(0)|\mathbf{p}s\rangle = ie^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')x}\left\langle \mathbf{p}''s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\right|\mathbf{p}s\right\rangle. \tag{51.20}$$

将右端对 $\varphi_\rho(x)$ 的变分根据下式化成对 $\varphi_\rho(q)$ 的变分：

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\int e^{iqx}\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(q)}dq,$$

得到

$$\delta(q+p-p'')\langle \mathbf{p}''s''|j_\rho(0)|\mathbf{p}s\rangle = \frac{i}{(2\pi)^{5/2}}\left\langle \mathbf{p}''s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\mathbf{p}s\right\rangle. \tag{51.21}$$

在右边的矩阵元可以利用条件 43.3B 而变换．将振幅 $\langle \mathbf{p}''s''|$ 和 $|\mathbf{p}s\rangle$ 中的产生算符和消失算符与 $\delta S/\delta\varphi(q)$ 对易（应当计及对旋量场的变分导数的反对易性），逐步得到

$$\begin{aligned}
&i\left\langle \mathbf{p}''s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\mathbf{p}s\right\rangle = \\
&= i\sum_{\alpha,\beta}\int dxdy[a^{-}_{s''}(\mathbf{p}''),\ \bar\psi_\alpha(y)]_+[\psi_\beta(x),\ a^{*+}_s(\mathbf{p})]_+\left\langle\frac{\delta^3 S}{\delta\bar\psi_\alpha(y)\delta\varphi_\rho(q)\delta\psi_\beta(x)}\right\rangle_0 = \\
&= i\left(\bar v^{s''+}(\mathbf{p}'')\left\langle\frac{\delta^3 S}{\delta\bar\psi(p'')\delta\varphi_\rho(q)\delta\psi(p)}\right\rangle_0 v^{s-}(\mathbf{p})\right), \\
&\qquad (p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2},\ p''^0 = \sqrt{\mathbf{p}''^2+M^2}).
\end{aligned}$$

今研究此处三阶变分的真空期待值，从考虑对于扩展 Lorentz 羣以及对于同位旋空间的旋转羣的变换的不变性，可以得出结论：

$$\begin{aligned}
&i\left\langle\frac{\delta^3 S}{\delta\bar\psi_\alpha(p'')\delta\varphi_\rho(q)\delta\psi_\beta(p)}\right\rangle_0 = \\
&\qquad = \delta(p''-q-p)\tau_\rho\sum_{\nu,\omega=0,1}\{[\hat p'']^\omega\gamma^5[\hat p]^\nu\}_{\alpha\beta}h_{\omega\nu}(p''^2,\ p^2;\ q^2),
\end{aligned} \tag{51.22}$$

其中 $h_{\omega\nu}$ 是三个标宗量的标函数．现在注意到，在 (51.12) 式中，只含这样的 $p''$ 及 $p$，使 $p''^2 = p^2 = M^2$，而且自旋函数 $\bar v$ 和 $v$ 满足 Dirac 方程，我们得到

$$\langle \mathbf{p}''s''|j_\rho(0)|\mathbf{p}s\rangle = -\frac{g(k^2)}{(2\pi)^3}(\bar v^{s''+}(\mathbf{p}'')\gamma^5\tau_\rho v^{s-}(\mathbf{p})), \tag{51.23}$$

其中

$$g(k^2) = -\sqrt{2\pi}\sum_{\omega,\nu}M^{\omega+\nu}h_{\omega\nu}(M^2,\ M^2,\ k^2), \tag{51.24}$$

而

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}''-\mathbf{p},\ k^0 = \sqrt{\mathbf{p}''^2+M^2}-\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}. \tag{51.25}$$

从(51.23)式得出结论，在(51.24)式所引入的函数 $g(k^2)$ 是实函数：

$$g^*(k^2) = g(k^2). \tag{51.26}$$

回到我们感到兴趣的表式(51.20)．利用 (51.23) 式，将(51.20)式中流的矩阵元的乘

积加以变换:

$$\sum_{s''}\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho'}(0)|\lambda\mathbf{e},s''\rangle\langle\lambda\mathbf{e},s''|j_{\rho}(0)|\mathbf{p}s\rangle=$$

$$=\frac{g^2(k^2)}{(2\pi)^6}\sum_{s''}(\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\gamma^5\tau_{\rho'}v^{s'',-}(\lambda\mathbf{e}))(\bar{v}^{s'',+}(\lambda\mathbf{e})\gamma^5\tau_{\rho}v^{s,-}(\mathbf{p})),\quad(51.27)$$

此处根据(51.25)式及(50.25)式,有

$$k^2=(\sqrt{M^2+\mathbf{p}'^2}-\sqrt{\lambda^2+M^2})^2-(\mathbf{p}'-\lambda\mathbf{e})^2=$$
$$=(\sqrt{\lambda^2+M^2}-\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2})^2-(\lambda\mathbf{e}-\mathbf{p})^2=2M^2-2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}\sqrt{M^2+\lambda^2}.$$

此处代入(51.2)及(51.12),得

$$\lambda^2=E_p^2-\mathbf{p}^2-\tau=\frac{(2\mathbf{p}^2+\tau)^2}{4(M^2+\mathbf{p}^2)}-\mathbf{p}^2-\tau,$$

经过简单计算以后,得到

$$k^2=\tau.\quad(51.28)$$

此处是对核子的旋量指标及同位旋指标求和. 利用§7.2中对于旋量指标求和的公式:

$$\sum_{\sigma}v^{\sigma;-}_{t',\alpha}(k)\bar{v}^{\sigma;+}_{t,\beta}(k)=\frac{(\hat{k}+M)_{\alpha\beta}}{2k^0}\delta_{t't},\quad(51.29)$$

其中$\alpha,\beta$是通常的Dirac四值指标,而$t',t$是同位旋的二值指标,将(51.27)式代入(51.19)式;并且将矩阵$\gamma^5$结合起来,得到

$$A_{\rho'\rho}(\lambda\mathbf{e},\tau)=\frac{g^2(\tau)}{4\pi}\frac{2M^2-\tau}{2(M^2+\mathbf{p}^2)}\left(\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\tau_{\rho'}\tau_{\rho}S\frac{\hat{\lambda}-M}{2\lambda^0}v^{s,-}(\mathbf{p})\right)=$$
$$=\frac{g^2(\tau)}{4\pi}\frac{\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\tau_{\rho'}\tau_{\rho}S(\hat{\lambda}-M)v^{s,-}(\mathbf{p})}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}},\quad(51.30)$$

因为

$$\lambda^0=\sqrt{\lambda^2+M^2}=\frac{2M^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}\quad\text{及}\quad\boldsymbol{\lambda}=\lambda\mathbf{e}.\quad(51.31)$$

### 51.3. 辅助定理

以上已经推导了公式(51.18),从此式可以获得色散关系式. 但是,这一公式是在假想情况$\tau<-\mathbf{p}^2$下求得的,还必须向实际情况$\tau=\mu^2$过渡,通过对于辅助变量$\tau$的解析延拓法,可以完成这一过渡.

注意,在以上推导朝前散射的色散关系时,实际上只利用了$F^{\text{ret}}$及$F^{\text{adv}}$的超前性、推迟性以及二者在动量表象中某一域内互相相等的一般性质. 以下所进行的讨论也是型如$F^{\text{ret}}$和$F^{\text{adv}}$的矩阵元一般性质的分析,但是由于必须考虑多余变量$\mathbf{p}=-\mathbf{p}'$,讨论将大大地复杂化.

为了将所得的关系式解析延拓至值$\tau=\mu^2$,必须获得有关函数$ST$性质的比较详细的知识,特别是该函数与核子动量$\mathbf{p}$相关的特性. 为此目的,我们考虑下式:

$$\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho'}(x)j_{\rho}(y)-j_{\rho}(y)j_{\rho'}(x)|\mathbf{p}s\rangle=\frac{1}{2\pi^2 i}e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)}F_{\alpha\omega}(x-y),\quad(51.32)$$

根据 (50.8)—(50.11) 式,此式等于推迟和超前矩阵元之差. 依照公式(50.12), 化成动量表象,得到

$$\delta(p'-p+p_3+p_4)T_{a\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{(2\pi)^3}\int\langle \mathbf{p}'s'|j_{\rho'}(x)j_{\rho}(y)-j_{\rho}(y)j_{\rho'}(x)|\mathbf{p}s\rangle e^{i(p_3x+ip_4y)}dxdy. \qquad (51.33)$$

将上式右端的单粒态之间的矩阵元利用性质 47.3B 用眞空平均值表示,借助于(47.14)类型的公式, 将 $\langle \mathbf{p}'s'|$ 和 $|\mathbf{p}s\rangle$ 中核子的产生算符和消失算符与 $j(x)$ 和 $j(y)$ 对易后, 得到

$$\delta(p'-p+p_3+p_4)T_{a\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\left(\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\int e^{i(p'x_1-px_2+p_3x_3+p_4x_4)}\times\right.$$

$$\left.\times\left\langle\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}[j_{\rho'}(x_3)j_{\rho}(x_4)-j_{\rho}(x_4)j_{\rho'}(x_3)]\right\rangle_0 v^{s,-}(\mathbf{p})\right)dx_1dx_2dx_3dx_4. \qquad (51.34)$$

利用被积式的平移不变性,可以写成

$$T_{a\omega}(q)=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\tilde{D}(p',\ -p,\ p_3,\ p_4)v^{s,-}(\mathbf{p}), \qquad (51.35)$$

$$\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)\tilde{D}(p_1,\cdots,p_4)=$$

$$=\int D(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)e^{i(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)}dx_1\cdots dx_4, \qquad (51.36)$$

$$D(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\left\langle\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}[j_{\rho'}(x_3),\ j_{\rho}(x_4)]_-\right\rangle_0 \qquad (51.37)$$

及

$$q=\frac{p'-p}{2}+p_3,\ p'-p+p_3+p_4=0. \qquad (51.38)$$

显然,对于我们感到有意义的情况

$$T(E,\mathbf{e};\tau)=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\tilde{D}(p',\ -p,\ p_3,\ p_4)v^{s,-}(\mathbf{p}), \qquad (51.39)$$

此处根据(50.22)式,

$$\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0,\ p'^0=p^0=\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2},\ p_3^0+p_4^0=0, \qquad (51.40)$$

$$\mathbf{p}_3=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{e},\ \mathbf{p}_4=\mathbf{p}-\lambda\mathbf{e},\ \lambda^2=E^2-\mathbf{p}^2-\tau. \qquad (51.41)$$

现在利用以下定理[1]:

设给定了四个平移不变的广义函数:

$$D_{ij}^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_4)\quad(\alpha=1,2,3,4;\ i,j=a,r), \qquad (51.42)$$

它依照 Lorentz 羣的有限维线性表示而变换,并具有下列性质

$$\left.\begin{aligned}
&D_{rr}^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_4)=0,\quad 当\quad x_1\lesssim x_3,\quad 或者当\quad x_2\lesssim x_4,\\
&D_{ra}^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_4)=0,\quad 当\quad x_1\lesssim x_3,\quad 或者当\quad x_2\gtrsim x_4,\\
&D_{ar}^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_4)=0,\quad 当\quad x_1\gtrsim x_3,\quad 或者当\quad x_2\lesssim x_4,\\
&D_{aa}^{(\alpha)}(x_1,\cdots,x_4)=0,\quad 当\quad x_1\gtrsim x_3,\quad 或者当\quad x_2\gtrsim x_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (51.43)$$

1) Боголюбов, Медведев 及 Поливанов 的工作 (1957) 中含有上述定理的证明 (参阅本书数学附录 II.——译者注).

并设这些函数满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{D}^{(a)}_{rj}(p_1,\cdots,p_4)-D^{(a)}_{aj}(p_1,\cdots,p_4)=0,\quad \text{当}\quad p_1^2<(M+\mu)^2,\ p_3^2<(3\mu)^2;\\&\tilde{D}^{(a)}_{ir}(p_1,\cdots,p_4)-D^{(a)}_{ia}(p_1,\cdots,p_4)=0,\quad \text{当}\quad p_2^2<(M+\mu)^2,\ p_4^2<(3\mu)^2.\end{aligned}\right\}\tag{51.44}$$

及

$$[(p_1+p_3)^2-M^2]\tilde{D}^{(a)}_{ij}(p_1,\cdots,p_4)=0,\tag{51.45}$$

如果 $(p_1+p_3)^2<(M+\mu)^2$，或 $p_1^0+p_3^0<0$，此处 $\tilde{D}$ 为 $D$ 的 Fourier 变换.

那末，就可以构成函数 $\Phi_\omega(z_1,\cdots,z_5;z_6)$，它是实变量 $z_6$ 的广义函数，复变量 $z_1,\cdots,z_5$ 的解析函数，且具有如下性质：

1. 函数 $\Phi_\omega$ 在如下区域内是正则的：

$$|z_1-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_2-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_3-\tau^*|<\rho\mu^2;$$

$$|z_4-\tau^*|<\rho\mu^2;\ -4\frac{M}{M+\mu}\mu^2<\operatorname{Re}z_5\leqslant 0;\ |\operatorname{Im}z_5|\leqslant\rho\mu^2\frac{M^2}{|z_6|},\tag{51.46}$$

此处 $\rho$ 是一个足够小的正数，而实 $\tau^*$ 满足不等式

$$-V\leqslant\tau^*\leqslant\mu^2,\tag{51.47}$$

式中 $V$ 为某一任意而固定的正数.

2. 函数 $\Phi_\omega$ 满足

$$\Phi_\omega(z_1,\cdots,z_5;z_6)=0,\quad \text{如果}\quad z_6<(M+\mu)^2.\tag{51.48}$$

3. 对于满足 $p_1+p_2+p_3+p_4=0$ 的实数 $p_1,\cdots,p_4$，当

$$z_1=p_1^2;\ z_2=p_2^2;\ z_3=p_3^2;\ z_4=p_4^2;\ z_5=(p_1+p_2)^2;\ z_6=(p_1+p_3)^2\tag{51.49}$$

满足不等式(51.46)时，函数 $\tilde{D}^{(v)}_{ij}$ 可以表成如下的有限项的和

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{D}^{(a)}_{ij}(p_1,\cdots,p_4)=\sum_\omega p_{i_1}^{a_1}\cdots p_{i_s}^{a_s}\Phi(z_1,\cdots,z_5;z_6)\\&\text{如果}\qquad p_1^0+p_3^0>0.\end{aligned}\right\}\tag{51.49a}$$

为了能运用此定理，我们必须事先能验证：上述函数(51.37)及(51.39)能写成满足定理中条件(51.43)—(51.45)的函数的线性组合.

将(51.39)对旋量场作泛函微分，求得

$$D(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1-P_{\rho\rho'}P_{34})d(x_1,x_2,x_3,x_4),\tag{51.50}$$

其中

$$d(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left\langle\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_3)j_\rho(x_4)\right\rangle_0=\sum_{1\leqslant i\leqslant 4}d^i(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

而

$$\left.\begin{aligned}d^1(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\left\langle\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)\delta j_\rho(x_4)}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}\right\rangle_0,\\d^2(x_1,x_2,x_3,x_4)&=-\left\langle\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)\delta\bar{\psi}(x_1)}\right\rangle_0,\\d^3(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\left\langle\left\{\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}j_{\rho'}(x_3)\right\}j_\rho(x_4)\right\rangle_0,\\d^4(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\left\langle j_{\rho'}(x_3)\left\{\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)}j_\rho(x_4)\right\}\right\rangle_0.\end{aligned}\right\}\tag{51.51}$$

考察 $d^3$ 的表式. 对此式应用条件 47.2Γ，有

$$d^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\langle \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0 \langle j_\rho(x_4)\rangle_0 +$$

$$+ \sum_n \int d\mathbf{k} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)} \right| n\mathbf{k} \right\rangle \langle n\mathbf{k}|j_\rho(x_4)|0\rangle. \qquad (51.52)$$

正如前面 § 48.3 已经指出，流的真空期待值以及流与真空态和单介子或双介子态之间的矩阵元等于零：

$$\langle j_\rho(x)\rangle_0 = \langle n\mathbf{k}|j_\rho(x)|0\rangle = 0,$$

而当

$$E_n^2(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 \geqslant (3\mu)^2,$$

根据条件 47.2B 及 47.2E，有

$$\langle n\mathbf{k}|j_\rho(x_4)|0\rangle = \langle n\mathbf{k}|j_\rho(0)|0\rangle e^{i(E_n(\mathbf{k})x_4^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}_4)}. \qquad (51.53)$$

这样，函数 $d^3$ 可认为是 $x_4$ 的函数，表示为指数 $\exp(ip_4x_4)$ 的迭加，其中 $p_4$ 受到条件 $p_4^2 \geqslant (3\mu)^2$ 及 $p_4^0 > 0$ 的限制. 因此

$$\tilde{d}^3(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0, \quad \text{如果} \quad p_4^2 < (3\mu)^2. \qquad (51.54)$$

完全相似，我们求得

$$\tilde{d}^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0, \quad \text{如果} \quad p_3^2 < (3\mu)^2. \qquad (51.55)$$

再注意到，根据因果性条件

$$d^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \text{如果} \quad x_1 \lesssim x_3 \text{ 或者如果 } x_2 \lesssim x_4. \qquad (51.56)$$

而且

$$d^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \text{如果} \quad x_2 \lesssim x_3 \text{ 或者如果 } x_1 \lesssim x_4. \qquad (51.57)$$

考虑到(51.49)、(51.50)、(51.54)及(51.55)式，我们可以证明函数 $\tilde{D}$ 满足条件(51.42)式.

现在来构成函数(51.43)，并转到条件(51.44)和(51.45). 显然，首先根据(51.56)式，(51.51)式所定义的函数 $d^1$ 可以按照(51.43)的意义用 $d_{rr}^1$ 来表示. 然后引进表式：

$$\left.\begin{aligned} d_{ar}^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left\langle \frac{\delta\vartheta(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)} \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0, \\ d_{ra}^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left\langle \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)} \frac{\delta\bar{\vartheta}(x_2)}{\delta\varphi_\rho(x_4)} \right\rangle_0, \\ d_{aa}^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left\langle \frac{\delta\vartheta(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)} \frac{\delta\bar{\vartheta}(x_2)}{\delta\varphi_\rho(x_4)} \right\rangle_0 \end{aligned}\right\} \qquad (51.58)$$

$$\left(\vartheta(x_1) = i\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x_1)}S^\dagger, \ \bar{\vartheta}(x_2) = i\frac{\delta S}{\delta\psi(x_2)}S^\dagger\right).$$

它们具有平移不变性，而且按 Lorentz 羣的旋量表示而变换. 根据条件 47.2Б，这些表式也满足(51.43)式. 现在证明，这些表式也适合条件(51.44). 取以下恆等式作为证明的起点：

$$\frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)} - \frac{\delta\vartheta(x_1)}{\delta\varphi(x_3)} = i[\theta(x_1), j(x_3)], \qquad (51.59)$$

$$\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)} - \frac{\delta\bar{\vartheta}(x_2)}{\delta\varphi(x_4)} = i[\bar{\theta}(x_2), j(x_4)]. \qquad (51.60)$$

作差式 $d^1_{rr} - d^1_{ar}$，考虑到(51.59)，得到

$$d^1_{rr}(x_1, x_2, x_3, x_4) - d^1_{ar}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= i\left\langle \theta(x_1) j(x_3) \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0 - i\left\langle j(x_3)\theta(x_1) \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0.$$

对第一项利用条件 47.2Γ，可得：当 $p_3^2 < (3\mu)^2$ 时，此项之 Fourier 映象为零．同理，可以证明，当 $p_1^2 < (M+\mu)^2$ 时，第二项之 Fourier 映象也等于零．这样，我们得到 (51.44) 中第一个等式．不难用同样方法验证函数 $d^1_{ij}$ 的其他条件(51.44)式．

最后，转向最后一个条件(51.45)式．对于 $d^1_{ij}$ 有

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + M^2\right\} d^1_{rr}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \sum_n \int d\mathbf{k} \langle 0 | A(x_1, x_3) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | B(x_2, x_4) | 0 \rangle, \qquad (51.61)$$

其中

$$A(x_1, x_3) = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + M^2\right\} C(x_1, x_2),$$
$$B(x_2, x_4) = \frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}, \quad C(x_1, x_3) = \frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)},$$

但是根据平移不变性：

$$\langle n\mathbf{k} | B(x_2, x_4) | 0 \rangle = \langle n\mathbf{k} | B(0, x_4 - x_2) | 0 \rangle e^{i\{E_n(\mathbf{k})x_2^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}_2\}}, \qquad (51.62)$$
$$\langle 0 | C(x_1, x_3) | n\mathbf{k} \rangle = \langle 0 | C(x_1 - x_3, 0) | n\mathbf{k} \rangle e^{-i\{E_n(\mathbf{k})x_3^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}_3\}}. \qquad (51.63)$$

另一方面，根据核电荷守恒定律，表式

$$\langle n\mathbf{k} | B(x_2, x_4) | 0 \rangle = \left\langle n\mathbf{k} \left| \frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right| 0 \right\rangle$$

对于无核态等于零．至于单核子态，且

$$E_n^2(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 = M^2$$

时，它的贡献被 $A(x_1, x_3)$ 中的微分算符化为零，因此

$$\langle 0 | A(x_1, x_3) | n\mathbf{k} \rangle = 0,$$

对于无核态及单核子态，上式均成立．

因此和式(51.61)只含

$$E_n^2(\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 \geqslant (M+\mu)^2 \qquad (51.64)$$

之状态．

从(51.61)式—(51.64)式可以得出，(51.61)式左端的函数表示指数迭加：

$$\exp i\{q_1(x_1 - x_3) + q_2(x_4 - x_2) + k(x_2 - x_3)\},$$

使

$$k^2 \geqslant (M+\mu)^2, \; k^0 > 0.$$

根据(51.38)式，引进记号：

$$p_1 = -q_1, \; p_2 = q_2 - k, \; p_3 = q_1 + k, \; p_4 = -q_2,$$

我们证明

$$(p_1 + p_3)^2 = k^2 \geqslant (M+\mu)^2, \quad 及 \quad p_1^0 + p_3^0 > 0.$$

由此可知，当 $(p_1+p_3)^2<(M+\mu)^2$ 时，或者当 $p_1^0+p_3^0<0$ 时，(51.61)式的左端的 Fourier 映象为零，因此，函数 $d_{rr}^1$ 适合条件 (51.45)．可以完全同样地验证函数 $d_{ra}^1$，$d_{ar}^1$，$d_{aa}^1$ 满足条件(51.45)．

显而易见，条件 (51.43)—(51.45) 可以毫无困难地推广到函数 $d_{ij}^2$，它和 $d_{ij}^1$ 的区别是调换了其中的算符：

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x_1)} \quad 和 \quad \frac{\delta}{\delta\psi(x_2)}.$$

## 51.4. 函数 $ST$ 的特殊表式

在已经建立了公式(51.49)、(51.40)和(51.41)之间的对应关系之后，现在来证明，在我们的定理的基础上，在

$$|E|<E_1 \tag{51.64a}$$

的区域内，可以得到函数 $ST$ 的特殊表式(利用这一表式，我们可以将色散关系 (51.18) 解析延拓到 $\tau=\mu^2$ 点)．

为此，我们对变量 $p_1,\cdots,p_4$ 代入我们感到兴趣之值(51.40)、(51.41)．然后得到

$$\left.\begin{aligned}
&p_1^2=p'^2=M^2;\ p_2^2=p^2=M^2;\ p_0^2=q'^2=\tau=\tau^*;\\
&p_4^2=q^2=\tau=\tau^*;\ (p_1+p_2)^2=(p'-p)^2=-4\mathbf{p}^2;\\
&(p_1+p_3)^2=(p'+q')^2=\tau+2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2;\\
&(p_1^0+p_3^0)=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+E;\\
&(p_1+p_4)^2=(p'-q)^2=\tau-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}+M^2+2\mathbf{p}^2;\\
&(p_1^0+p_4^0)=p'^0-q^0=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}-E.
\end{aligned}\right\} \tag{51.65}$$

首先，我们考虑 (51.45) 式中的不等式．将 (51.65) 的诸值代入这些表式，并计及 (51.14)式，我们得到

$$\left.\begin{aligned}
&E<E_1(\tau) \quad 代替 \quad (p_1+p_3)^2<(M+\mu)^2,\\
&E<-\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} \quad 代替 \quad p_1^0+p_3^0<0,
\end{aligned}\right\} \tag{51.66}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
&E>-E_1(\tau) \quad 代替 \quad (p_1+p_4)^2<(M+\mu)^2,\\
&E>\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} \quad 代替 \quad p_1^0+p_4^0<0.
\end{aligned}\right\} \tag{51.67}$$

因为对于满足不等式 $\mathbf{p}^2<Mm+\frac{m^2}{2}-\frac{\tau}{2}$ 之 $\mathbf{p}^2$，$E_c(\tau)$ 为正，那么从 (51.66) 式、(51.67)式可以得到以下两个不等式：

$$(p_1+p_3)^2>(M+m)^2 \quad 及 \quad p_1^0+p_3^0<0,$$

或

$$(p_1+p_4)^2>(M+m)^2 \quad 及 \quad p_1^0+p_4^0<0,$$

不能同时满足．因此函数 $\widetilde{D}^{(2)}(p_1,\cdots,p_4)$ 及 $P_{\rho\rho'}P_{34}\widetilde{D}^{(2)}$ 在我们感到兴趣的动量值下，对总 Fourier 映象 $\widetilde{D}(p_1,\cdots,p_4)$ 不作任何贡献．

考虑到这一情况，并利用(51.65)式之值，我们得到函数 $D(x_1,\cdots,x_4)$ 的 Fourier 映象 $\widetilde{D}(p_1,\cdots,p_4)$ 的表示如下：

$$\widetilde{D}(p_1, \cdots, p_4) = \frac{1}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \frac{1}{E_p(\tau)+E} \times$$
$$\times \sum_{\omega} P_\omega \Phi_\omega(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \tau + 2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + M^2 + 2\mathbf{p}^2) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \frac{1}{E_p(\tau)+E} \times$$
$$\times \sum_{\omega} P'_\omega \Phi'_\omega(M^2, M^2, \tau, \tau, -4\mathbf{p}^2; \tau - 2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + M^2 + 2\mathbf{p}^2), \quad (51.68)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\omega(\cdots) &= 0, \quad \text{当} \quad E < E_1(\tau), \\ \Phi'_\omega(\cdots) &= 0, \quad \text{当} \quad E > E_1(\tau). \end{aligned}\right\} \quad (51.69)$$

其中 $P_\omega$ 及 $P'_\omega$ 为动量分量的多项式. 根据(51.46)式及(51.47)式,(51.68)式为真,如果

$$-V \leqslant \tau \leqslant (1+\rho)\mu^2 (\operatorname{Im}\tau = 0) \quad 及 \quad \mathbf{p}^2 < \frac{M}{M+\mu}\mu^2. \quad (51.70)$$

在(51.68)式中的 $\Phi_\omega$ 及 $\Phi'_\omega$ 是前面五个宗量的解析函数,在以下区域

$$\mathbf{p}^2 < \frac{M^2}{M+\mu}\mu^2; \quad -V \leqslant \operatorname{Re}\tau \leqslant (1+\rho)\mu^2; \quad |\operatorname{Im}\tau| < \rho\mu^2 \quad (51.71)$$

内正则,并且是第六个宗量的广义函数.

我们现在注意到,条件组(51.69)使函数 $\widetilde{D}(p_1, \cdots, p_4)$ 在(51.64a)的区域内为零. 由于这一点, 如果在区域 (51.64a) 中条件(51.70)得到满足, 则从表式(51.39)利用运算[1] $S$ 而获得的函数 $ST$ 具有特殊的表式:

$$ST(E, \tau) = F_1(2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + \tau; \tau) + F_2(-2E\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2} + \tau; \tau), \quad (51.72)$$

其中 $F_i(\xi\tau)$ 是变量 $\tau$ 在(51.71)区域中的解析函数,又是实变量 $\xi$ 的广义函数, 它具有性质

$$F_i(\xi, \tau) = 0, \quad 当 \quad \xi < 2M\mu + \mu^2 - 2\mathbf{p}^2, \quad (51.73)$$

而且与求和公式(51.68)中诸项相差一个旋量因子及一个因子 $\pi i S/(2\pi)^6$.

### 51.5. 向 $\tau = \mu^2$ 的解析延拓

这样,定理的前提条件已经检验完毕,我们现在可以来证明,对于我们感兴趣的

$$\tau = \mu^2$$

点,如果 $\mathbf{p}^2$ 足够小,而且满足条件 (51.71), 就可以从表式 (51.72) 得出关系式 (51.18) 成立.

为了证明上述论断, 首先选定负值之 $\tau$ 使适合条件(51.3)式. 对于这样的 $\tau$, 上面所建立的关系式(51.18)以及(根据定理)表式(51.72)是正确的.

将(51.72)式代入(51.18)式,有

$$S\widetilde{T}(E, \mathbf{e}; \tau) = \Phi_1(E, \tau) + \Phi_2(E, \tau) + \left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_p}\right)^{n+1} \frac{A_{\rho\rho'}(-\lambda\mathbf{e}, \tau)}{E - E_p} -$$

1) 此处所需要的是对称化算符 $S$, 由于多项式 $P_\omega$, $P'_\omega$ 可能含有一阶的 $\lambda$, 它对 $\tau$ 有非解析的依赖关系.

$$-\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1}\frac{A_{\rho'\rho}(\lambda\mathbf{e},\tau)}{E+E_p}+\sum_{0\leqslant k\leqslant n}c_k(\tau)E^k, \tag{51.73a}$$

其中

$$\Phi_{12}(E,\tau)=\frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{1,2}(2E'\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2};\tau)dE'}{\left(\pm E'\mp\dfrac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}-E_0\right)^{n+1}\left(\pm E'\mp\dfrac{\tau}{2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}-E\right)}. \tag{51.74}$$

在间隔

$$|E_0|<\frac{M\mu-(\rho+2\sigma)\mu^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} \tag{51.75}$$

中，取任意 $E_0$. 这时，根据函数 $F_1$ 及 $F_2$ 的性质以及条件 (51.47)、(51.48)，显而易见，公式(51.74)将定义为变量 $E$ 和 $\tau$ 的解析函数，其解析区域取决于条件(51.71)及不等式

$$\operatorname{Im}\tau<2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}|\operatorname{Im}E|.$$

另一方面，正如前面所确定的，函数 $S\tilde{T}(E,\tau)$ 在区域(51.6)中解析. 因此，函数

$$\{S\tilde{T}(E,\tau)-\Phi_1(E,\tau)-\Phi_2(E,\tau)\}\{E^2-E_p^2(\tau)\} \tag{51.76}$$

为宗量 $\tau$ 的解析函数，在下列条件所确定的区域内解析：

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}\tau<(1+\rho)\mu^2,\\&|\operatorname{Im}\tau|<\rho\mu^2,\\&\operatorname{Im}\tau<2\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}|\operatorname{Im}E|,\\&|\operatorname{Im}E|>|\operatorname{Im}\sqrt{E^2-\mathbf{p}^2-\tau}|.\end{aligned}\right\} \tag{51.77}$$

但是，由于(51.73a)式，函数(51.76)应该与 $E$ 的多项式

$$\left(\frac{E_0-E}{E_0-E_p}\right)^{n+1}(E+E_p)A_{\rho\rho'}(\tau,-\mathbf{e})-$$

$$-\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1}(E-E_p)A_{\rho'\rho}(\tau,\mathbf{e})+(E^2-E_p^2(\tau))\sum_{0\leqslant k\leqslant n}c_k(\tau)E^k, \tag{51.78}$$

在条件(51.3)所限定的负 $\tau$ 区域中相一致. 因此，它对 $E$ 的 $(n+3)$ 阶导数在 (51.77) 区域中为解析函数，而在 (51.3) 区域中为零. 根据解析函数的唯一性定理，可以断言，它在整个区域 (51.77) 中等于零. 由此可得，在区域 (51.77) 中，函数 (51.76) 本身是对 $E$ 的 $(n+1)$ 阶多项式. 根据定义(51.12)，$E_p(\tau)$ 在所考察区域中是解析函数，我们得到，函数 $c_k(\tau)$ 和 $A_{\rho\rho'}(\tau)$ 在(51.77)区域内可以解析延拓.

现在证明，$c_k(\tau)$ 及 $A_{\rho\rho'}(\tau)$ 在比较广泛的区域 (51.71) 中仍是解析函数. 为此，在 (51.48) 区域中取任一值 $\tau=\tau^*$，它不位于实轴上 ($\operatorname{Im}\tau^*\neq 0$)，并且构成相应的 $E^*$，即令

$$E^*=E_r+iE_i,$$

其中

$$2E_rE_i=\operatorname{Im}\tau^*,\ E_r<M,\ E_r^2-E_i^2-\operatorname{Re}\tau^*-\mathbf{p}^2>0.$$

显然，“点” $(E^*,\tau^*)$ 属于 (51.77) 区域，因此 $\tau^*$ 应该在函数 $c_k(\tau)$ 及 $A(\tau)$ 的解析域内.

由此得出，这些函数在(51.71)区域中是解析的，可能含有位于实轴上($\mathrm{Im}\,\tau = 0$)的割线.

现在证明，实际上，此类割线并不存在，而上述函数在整个(51.71)区域中为正则的. 为了这一目的，考察实 $\tau_r < (1+\rho)\mu^2$，并作点 $(E_+, \tau_+)$ 及 $(E_-, \tau_-)$:

$$\tau_\pm = \tau_r \pm i\eta \quad (\eta > 0),$$

$$E_\pm = E_r \pm \frac{i\eta}{2E_r} \quad (E_r > 0),$$

$$\mathbf{p}^2 + (1+\rho)\mu^2 < E_r^2 < M^2,$$

当 $\eta < \rho\mu^2$ 足够小时，点 $(E_+, \tau_+)$ 及 $(E_-, \tau_-)$ 将满足条件(51.77). 再者注意到，根据(51.74)式，以下极限关系式成立:

$$\lim_{\eta\to 0}\Phi_i(E_\pm, \tau_\pm) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_i(E_r \pm i\varepsilon, \tau_r), \tag{51.79}$$

因为点 $(E_r \pm i\varepsilon, \tau_r)$ 与点 $(E_\pm, \tau_\pm)$ 相同，适合以下条件:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\tau < (1+\rho)\mu^2,\ |\mathrm{Im}\,\tau| < \rho\mu^2, \\ &\mathrm{Im}\,\tau < 2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}\,|\mathrm{Im}\,E|, \end{aligned}\right\} \tag{51.80}$$

这些条件限定一个区域，其中解析函数 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 决定于公式(51.74). 然后，利用公式(46.3)，在(51.74)式中过渡到实值 $E$，我们得到[1)]

$$\Phi_1(E_+, \tau_+) - \Phi_1(E_-, \tau_-) \to F_1(\tau + 2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}),$$

$$\Phi_2(E_+, \tau_+) - \Phi_2(E_-, \tau_-) \to F_2(\tau - 2E\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}).$$

计及(51.72)式，上式给出

$$\Phi_1(E_+, \tau_+) + \Phi_2(E_+, \tau_+) - \Phi_1(E_-, \tau_-) - \Phi_2(E_-, \tau_-) \to ST(E_r, \mathbf{e}, \tau_r), \tag{51.81}$$

另一方面，根据(51.4)式及(51.7)式，

$$\widetilde{ST}(E_+, \tau_+) = \int e^{\frac{-\eta x^0}{2E_r}} F^{\mathrm{ret}}(x) S\exp i\left[E_r x^0 - \mathbf{ex}\sqrt{E_r^2 - \tau_r - \mathbf{p}^2 - \left(\frac{\eta}{2E_r}\right)^2}\right] dx,$$

而且因此

$$\widetilde{ST}(E_+, \tau_+) \to ST^r(E_r, \tau_r). \tag{51.82}$$

完全同理，我们可以证明

$$\widetilde{ST}(E_-, \tau_-) \to ST^a(E_r, \tau_r). \tag{51.83}$$

将(51.81)式—(51.83)式结合起来，得到

$$\lim\{\widetilde{ST}(E_+, \tau_+) - \Phi_1(E_+, \tau_+) - \Phi_2(E_+, \tau_+)\} =$$
$$= \lim\{\widetilde{ST}(E_-, \tau_-) - \Phi_1(E_-, \tau_-) - \Phi_2(E_-, \tau_-), \tag{51.84}$$

但是，因为在 $(E_\pm, \tau_\pm)$ 各点上，函数(51.76)等于多项式(51.78)，所以极限关系式(51.84)对于后者也是成立的. 由此可以得出结论，表式 $A(\tau_r + i\eta)$、$c_k(\tau_r + i\eta)$ 趋近于 $A(\tau_r - i\eta)$、$c_k(\tau_r - i\eta)$ 所趋近的同一极限，因而 $A(\tau)$ 及 $c_k(\tau)$ 没有割线，而是在(51.71)的整

1) 在(51.74)式的被积式中，直接应用公式(46.3)时出现了两个广义函数的乘积，但是，比较详细的考察表明，引入这类函数的"收缩"后，可使计算的合法性成立.

个区域中正则[1].

我们回到关系式(51.73a)；现在已经清楚，此式对于(51.77)区域中各点$(E, \tau)$是成立的. 但是，在(51.73a)式的右端，变量$E, \tau$的解析函数在较广泛的(51.80)区域内为正则. 因此，我们可以将函数$S\tilde{T}(E, \tau)$解析延拓，使得该函数在(51.80)整个区域中等于(51.73a)式之右端.

我们要强调指出，对于以上述方式解析延拓的函数$S\tilde{T}$，如下的广义极限关系式成立:

$$S\tilde{T}(E + i\varepsilon, \tau) \to ST^r(E, \tau), \tag{51.85}$$

$$S\tilde{T}(E - i\varepsilon, \tau) \to ST^a(E, \tau), \tag{51.86}$$

只要假定$E, \tau$及$\lambda = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2 - \tau}$为实量，而且$\tau < (1 + \rho)\mu^2$.

事实上，根据(51.73a)式，我们看到

$$\lim_{\delta \to +0} S\tilde{T}(E + i\delta, \tau) = \lim_{\delta \to +0} S\tilde{T}(E + i\delta, \tau + i2\alpha E\delta),$$

其中

$$|\alpha| < \frac{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}{E}.$$

但是，另一方面，当$\delta$足够小时，点

$$E_+ = E + i\delta, \tau_+ = \tau + i2\alpha E\delta$$

属于(51.77)区域内，在此区域中，我们可以应用公式(51.4)及(51.7)，并且写出

$$S\tilde{T}(E + i\delta, \tau + i2\alpha E\delta) = S\int \exp\{-\delta x^0 + \mathbf{ex}\,\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2 - \tau_+ - \mathbf{p}^2}\} \times$$

$$\times \exp i\{Ex^0 - \mathbf{ex}\,\mathrm{Re}\sqrt{E_+^2 - \tau_+ - \mathbf{p}^2}\}F^{\mathrm{ret}}(x)dx, \tag{51.87}$$

而

$$|\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2 - \tau_+ - \mathbf{p}^2}| < \delta;$$

因此

$$\lim_{\delta \to +0} S\tilde{T}(E + i\delta, \tau + i2\alpha E\delta) = ST^{\mathrm{ret}}(E, \tau).$$

同理，可验证性质(51.82).

这样，我们确定了在(51.82)整个区域中关系式(51.73a)成立. 但是，当任一$E$值不在实轴上时，$\tau = \mu^2$属于这一区域. 因此，(51.73a)式当

$$\mathrm{Im}\,E \neq 0, \tau = \mu^2$$

时总是成立的.

现在将积分变量作替换，它是从(51.18)化为(51.73a)所用变量替换之逆替换，将(51.73a)式变换成形式(51.18)，其中$ST(E', \mathbf{e}, \mu^2)$以下式来代替:

$$F_1(\mu^2 + 2E'\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}; \mu^2) + F_2(\mu^2 - 2E'\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}; \mu^2), \tag{51.88}$$

---

1) 由此可以得出结论，函数$g^2(\tau)$可以解析延拓至$\tau = \mu^2$. 根据定义(51.22)及(51.24)以及数学附录II中定理四，容易证明，函数$g(\tau)$也能解析延拓至$\tau = \mu^2$. 因为当$\tau < -\mathbf{p}^2$时，$g(\tau)$为实，我们得到

$$\mathrm{Im}\,g(\tau) = 0, \quad 当 \quad \tau < -\mathbf{p}^2.$$

由此可知，当$\tau = \mu^2$时，上述关系仍然成立. 这一点表明$g(\mu^2)$为实，而且$g(\mu^2) > 0$.

当

$$E'^2 > \mu^2 + \mathbf{p}^2$$

时，在所考虑的区域，此式与以前的函数相重合.

当

$$|E'| < \frac{M\mu - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}$$

时，表式(51.88)为零，同时，在以下间隔

$$\frac{M\mu - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}} < |E'| < \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2} \tag{51.89}$$

内，函数 $ST(E', \mathbf{e}, \mu^2)$ 通过积分(51.4)直接定义是没有意义的，表式(51.88)可以认为是该函数在区间(51.89)中的适当的解析延拓.

这样，我们证明了对于我们感到有意义的值 $\tau = \mu^2$，推广的函数 (51.87) 满足关系式 (51.18). 利用公式 (51.85)—(51.87) 向 $E$ 的实值过渡. 我们将在 § 52 中实施这一过渡，并得到散射振幅的实部与虚部之间的色散关系.

## § 52. 核子对 $\pi$ 介子散射的色散关系

### 52.1. 化为实量

在 § 51 中，已经确定了对于任一不在实轴上 ($\mathrm{Im}\ E \neq 0$) 的 $E$，存在以下关系式[1]

$$S\tilde{T}(E) = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ST(E')dE'}{(E' - E_0)^{n+1}(E' - E)} + P_n(E), \tag{52.1}$$

这时

$$ST(E') = ST^{\mathrm{ret}}(E') - ST^{\mathrm{adv}}(E'), \ (\mathrm{Im}\ E' = 0), \tag{52.2}$$

而根据(51.85)及(51.86)，函数 $S\tilde{T}$ 具有性质：

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to +0} S\tilde{T}(E + i\varepsilon) &= ST^{\mathrm{ret}}(E), \qquad (52.3) \\ \lim_{\varepsilon \to +0} S\tilde{T}(E - i\varepsilon) &= ST^{\mathrm{adv}}(E), \qquad (52.4) \end{aligned}\right\} \ (\mathrm{Im}\ E = 0).$$

现在，从所观察区域 $E^* > \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2}$ 中选择任意的实值 $E^*$，在 (52.1) 中，令 $E = E^* + i\varepsilon$，并且施行极限过渡 $\varepsilon \to 0$. 对于方程(52.1)的左端利用公式(52.3)，而对于右端利用公式(46.3)，结果得到

$$ST^{\mathrm{ret}}(E) + ST^{\mathrm{adv}}(E) = \\ = \frac{(E - E_0)^{n+1}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ST^{\mathrm{ret}}(E) - ST^{\mathrm{adv}}(E')}{(E' - E_0)^{n+1}} \mathscr{P} \frac{dE'}{E' - E} + 2P_n(E). \tag{52.5}$$

注意到，根据 § 51.1 及 § 51.2 中的结果，在间隔 $|E'| < E$ 中，差式 $ST^{\mathrm{ret}}(E) - ST^{\mathrm{adv}}(E)$ 可以表示为 $\delta$ 函数形式的二项之和：

$$ST(E) = iSf(E) = \frac{ig^2}{2} \delta(E + E_p) B_{\rho'\rho}(\mathbf{e}) - \frac{ig^2}{2} \delta(E - E_p) B_{\rho\rho'}(-\mathbf{e}); \tag{52.6}$$

---

1) 此处略去宗量 $\tau = \mu^2$.

此式允许在间隔 $(-E_1, E_1)$ 中得到明显的积分结果. 这里,

$$B_{\rho'\rho}(\mathbf{e}) = \frac{4\pi}{g^2(\mu^2)} A_{\rho'\rho}(\mathbf{e}, \mu^2) = \frac{\bar{v}^{s',+}(\mathbf{p}')\tau_{\rho'}\tau_{\rho}S(\hat{\lambda} - M)v^{s,-}(\mathbf{p})}{2\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}}; \tag{52.7}$$

以及

$$g = g(\mu^2). \tag{52.8}$$

由关系式(52.8)所定义的常数 $g$,我们称之为介子电荷[1].

应该指出,大家知道,在通常理论中引进介子电荷的手续也不是单值的(试与 Källen (1954) 之结果比较). 问题在于: 由于介子的质量 $\mu$ 不为零,核力作用半径是有限的. 这一点使得不可能(与电动力学相反)建立经典的宏观介子动力学,也不可能把决定介子电荷的手续与宏观实验 (例如 Millikan 实验及木髓球偏移实验) 联系起来. 因此,必须利用理论的基本量以某种方式引入介子电荷 $g$,然后通过理论预言与宏观实验数据的比较,来确定它的数值. 显然,介子电荷引入的方法本身并不重要,但是,必须确定有某一个决定数值 $g$ 的具体方法.

根据(51.22)式及(51.24)式,从通常理论的观点,公式(52.8)相当于定义

$$g\gamma^5\tau_\rho = g_0\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2), \tag{52.9}$$

其中 $g_0$ 是相互作用拉格朗日函数密度 (33.7) 中的裸电荷,而 $\Gamma^5_\rho$ 是顶角算符. 确定时序乘积重新定义的手续,以致使得

$$\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2) = \gamma^5\tau_\rho, \tag{52.10}$$

我们得到使 $g_0$ 与 $g$ 恒等的可能性.

还应注意,函数 $\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2)$ 对实际过程没有直接关系,因为实际核子 $(p^2=M^2, (p\pm q)^2=M^2)$ 放射(或者吸收)实际介子 $(q^2 = \mu^2)$,是被能量-动量守恒定律所禁止的.

变换 (52.6) 中下一步骤与分离散射振幅的厄米与反厄米部分有关. 为此目的,考虑函数 $ST^{\mathrm{ret}}$ 与 $ST^{\mathrm{adv}}$ 的厄米性. 首先注意到,从定义(50.4)可以直接得出

$$F^{*\mathrm{ret}}_{a\omega}(x) = P_{\rho\rho'}F^{\mathrm{ret}}_{\omega a}(x). \tag{52.11}$$

从这里得出在动量表象中的厄米性关系式:

$$T^{*\mathrm{ret}}_{a\omega}(k) = P_{\rho\rho'}T^{\mathrm{ret}}_{\omega a}(-k). \tag{52.12}$$

另一方面,根据(50.13)式,我们有

$$T^{\mathrm{adv}}_{a\omega}(k) = P_{\rho\rho'}T^{\mathrm{ret}}_{\omega a}(-k). \tag{52.13}$$

将(52.12)式及(52.13)式结合起来,得到

$$T^{\dagger\,\mathrm{adv}}_{a\omega}(k) = T^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(k), \tag{52.14}$$

此处引进记号

$$T^{\dagger}_{a\omega}(k) = T^{*}_{\omega a}(k). \tag{52.15}$$

将(52.14)式化为宗量 $E$ 及 $\mathbf{e}$, 还可得到

$$ST^{\dagger\,\mathrm{adv}}_{a\omega}(E) = ST^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(E). \tag{52.16}$$

关系式(52.16)是十分重要的,因为从此式直接得出结论:

$$\frac{ST^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(E) + ST^{\mathrm{adv}}_{a\omega}(E)}{2} = D_{a\omega}(E), \tag{52.17}$$

---

1) Боголюбов、Медведев 和 Поливанов 的著作中 (1958) 证明了这样一点: 不仅 $g^2(\tau)$,而且 $g(\tau)$ 本身可解析延拓至值 $\tau = \mu^2$. 因为当 $\tau < -\mathbf{p}^2$ 时, $g(\tau)$ 为实,则 $g(\mu^2)$ 亦将为实的.

和

$$\frac{ST^{\mathrm{ret}}_{a\omega}(E) - ST^{\mathrm{adv}}_{a\omega}(E)}{2i} = A_{a\omega}(E) \tag{52.18}$$

的线性组合是厄米的:

$$D^{\dagger}_{a\omega}(E) = D_{a\omega}(E),\ A^{\dagger}_{a\omega}(E) = A_{a\omega}(E). \tag{52.19}$$

而且是函数 $ST^{\mathrm{ret}}$ 的厄米及反厄米部分,即

$$ST^{\mathrm{ret}}(E) = D(E) + iA(E). \tag{52.20}$$

现在对增长度 $n$ 之值作一重要的假定. 设 $n = 1$, 即当 $E$ 为大值时,散射振幅的增长并不比 $E$ 迅速(这一假定与实验相合). 指出下面一点是有意义的:正如在以前 § 48, § 49 中一样,代替给定相互作用拉格朗日函数密度的形式,只要确定增长度就已足够了.

将(52.17)及(52.18)两式代入(52.5)式,在以上的假定下,我们得到

$$D_{a\omega}(E) = \frac{(E-E_0)^2}{\pi}\int_{|E'|>E_1}\frac{A_{a\omega}(E')}{(E'-E_0)^2}\mathscr{P}\frac{dE'}{E'-E} + \\ + \frac{(E-E_0)^2}{2\pi}\int_{|E'|<E_1}\frac{Sf(E')dE'}{(E'-E_0)^2(E'-E)} + P_1(E). \tag{52.21}$$

## 52.2. 考虑对 $E$ 的对称性

现在我们消去对负能量的积分(从 $-\infty$ 至 $-E_1$). 为了这一目的,我们要考虑到公式(52.21)中各个项对于替换 $E \to -E$ 的对称性. 将式(52.13),(52.14),(52.17)及(52.18)结合起来,有

$$(1 \pm P_{\rho\rho'})D_{a\omega}(q) = (P_{\rho\rho'} \pm 1)D_{a\omega}(-q);$$
$$(1 \pm P_{\rho\rho'})A_{a\omega}(q) = (P_{\rho\rho'} \mp 1)A_{a\omega}(q).$$

我们注意到,根据定义

$$S_+f(E) = \frac{f(E, \mathbf{e}) + f(E, -\mathbf{e})}{2};$$
$$S_-f(E) = \frac{f(E, \mathbf{e}) - f(E, -\mathbf{e})}{2\lambda},$$

可以对 $(1 + P_{\rho\rho'})S_{\pm}A$ 及 $(1 \pm P_{\rho\rho'})S_{\pm}D$ 类型诸式的奇偶性作出结论. 由此方式,我们得到能量偶函数:

$$D_{\mathrm{even}}(E) = \{(1 + P_{\rho\rho'})S_+D(E);\ (1 - P_{\rho\rho'})S_-D(E)\}; \tag{52.22}$$
$$A_{\mathrm{even}}(E) = \{(1 - P_{\rho\rho'})S_+A(E);\ (1 + P_{\rho\rho'})S_-A(E)\}; \tag{52.23}$$

以及能量奇函数:

$$D_{\mathrm{odd}}(E) = \{(1 - P_{\rho\rho'})S_+D(E);\ (1 + P_{\rho\rho'})S_-D(E)\}; \tag{52.24}$$
$$A_{\mathrm{odd}}(E) = \{(1 + P_{\rho\rho'})S_+A(E);\ (1 - P_{\rho\rho'})S_-A(E)\}. \tag{52.25}$$

讨论函数 $Sf(E)$ 的奇偶性,从式(52.6)及式(52.7)出发,不难证明运算 $(1 - P_{\rho\rho'})S_+$ 及 $(1 + P_{\rho\rho'})S_-$ 导致偶式,而 $(1 - P_{\rho\rho'})S_-$ 及 $(1 + P_{\rho\rho'})S_+$ 导致奇式. 因此,有

$$f_{\mathrm{even}}(E) = \{(1 - P_{\rho\rho'})S_+f(E);\ (1 + P_{\rho\rho'})S_-f(E)\};$$
$$f_{\mathrm{odd}}(E) = \{(1 + P_{\rho\rho'})S_+f(E);\ (1 - P_{\rho\rho'})S_-f(E)\}.$$

考虑到对称性(52.21),而且,在间隔 $|E'| < E_1$ 中,积分成为显式,得到

$$D_{\text{even}}(E) - D_{\text{even}}(E_0) = \frac{2(E^2 - E_0^2)}{\pi} \mathscr{P} \int_{E'}^{\infty} \frac{E' A_{\text{odd}}(E') dE'}{(E'^2 - E_0^2)(E'^2 - E^2)} - \\ - \frac{g^2}{2\pi} \left( \frac{E^2 - E_0^2}{E_p^2 - E_0^2} \right) \frac{E_p}{E_p^2 - E^2} B_{\text{odd}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}), \tag{52.26}$$

以及

$$D_{\text{odd}}(E) - \frac{E}{E_0} D_{\text{odd}}(E_0) = \frac{2E(E^2 - E_0^2)}{\pi} \mathscr{P} \int_{E_1}^{\infty} \frac{A_{\text{even}}(E') dE'}{(E'^2 - E_0^2)(E'^2 - E^2)} + \\ + \frac{g^2}{2\pi} \left( \frac{E^2 - E_0^2}{E_p^2 - E_0^2} \right) \frac{E}{E_p^2 - E^2} B_{\text{even}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}), \tag{52.27}$$

其中

$$B_{\text{even}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}) = \{ -(1 - P_{\rho\rho'}) S_+ B_{\rho'\rho}(-\mathbf{e}); (1 + P_{\rho\rho'}) S_- B_{\rho'\rho}(-\mathbf{e}) \}; \tag{52.28}$$

$$B_{\text{odd}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}) = \{ (1 + P_{\rho\rho'}) S_+ B_{\rho'\rho}(-\mathbf{e}); (1 - P_{\rho\rho'}) S_- B_{\rho'\rho}(-\mathbf{e}) \}. \tag{52.29}$$

## 52.3. 同位旋结构和自旋结构

以上所得到的色散关系,实质上还不属于确定的物理过程,因为介子场 $\varphi$ 描写有三个电荷 (1, 0, −1) 的 $\pi$ 介子,而核子场 $\psi$ 描写四种粒子(质子、中子、反质子及反中子),且其自旋在给定轴上的投影可取两种值. 为了从式(52.26)和式 (52.27) 求得具体的散射过程的色散关系,还应该考虑到散射振幅的同位旋结构和自旋结构.

首先考虑振幅 $T_{a\omega}^{\text{ret}}$ 的同位旋结构. 从同位旋空间的不变性考虑得出结论, $T_{a\omega}^{\text{ret}}$ 具有形式

$$T_{a\omega}^{\text{ret}} = \delta_{t't} \delta_{\rho'\rho} T^{(1)} + \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \tau_{\rho} - \tau_{\rho} \tau_{\rho'}]_{t't} T^{(2)}. \tag{52.30}$$

这一公式可写成另一形式:

$$T_{a\omega}^{\text{ret}} = \delta_{t't} \delta_{\rho'\rho} T^{(1)} - \omega_{\rho'\rho} \tau_{t't} T^{(2)}, \tag{52.31}$$

其中

$$\omega_{\rho'\rho}^{\alpha} = -i e_{\rho'\rho\alpha}, \tag{52.32}$$

而 $e_{\alpha\beta\gamma}$ 是三阶的完全反对称的单位张量 ($e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta} = -e_{\beta\alpha\gamma}$ 且 $e_{123} = 1$). 所引进的矩阵矢量 $\omega$ 恰好是 $\pi$ 介子的同位旋算符,实际上,从式(52.32)直接得出结论:

$$[\omega^{\alpha}, \omega^{\beta}]_- = i e_{\alpha\beta\gamma} \omega^{\gamma} \quad 及 \quad \omega^2 = 2 = 1(1 + 1),$$

即 $\omega$ 是本征值为 1, 0, −1 的动量矩算符.

将核子-$\pi$ 介子系统中总同位旋矩算符用 $\boldsymbol{\Omega}$ 来表示:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}, \quad \boldsymbol{\Omega}^2 = T(T + 1),$$

得到

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega}^2 - \boldsymbol{\omega}^2 - \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \right)^2 = T(T + 1) - 2 - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = T(T + 1) - \frac{11}{4}.$$

从这里得出结论,在总同位旋为 $T = 3/2$ 的状态下,算符 $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau}$ 的本征值等于

$$\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{11}{4} = 1,$$

而在总同位旋为 $T=\frac{1}{2}$ 的状态下，$\omega\tau$ 的本征值为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{11}{4}=-2.$$

因此，如果引进振幅 $T_{3/2}$ 及 $T_{1/2}$，它们属于总同位旋具有确定值的态，即分别等于 3/2 及 1/2，那么，从式(52.31)将得到

$$T_{3/2}=T^{(1)}-T^{(2)} \quad 和 \quad T_{1/2}=T^{(1)}+2T^{(2)},$$

即

$$T^{(1)}=\frac{T_{1/2}+2T_{3/2}}{3},\quad T^{(2)}=\frac{T_{1/2}-T_{3/2}}{3}. \tag{52.33}$$

以后考虑具体的散射的物理过程(即不仅确定了总同位旋 $T$，而且还确定了它的分量 $T_3$)，可以将量 $T^{(1)}$ 及 $T^{(2)}$ 用具体物理过程的振幅来表示. 但是，对此我们将不予讨论，读者可参阅已有的文献[1]. 我们来考虑 $T^{\mathrm{ret}}$ 的自旋结构.

从通常三维空间中的不变性考虑，可以得到类似于式 (52.31) 的结论，$T^{\mathrm{ret}}_{\sigma\sigma'}$ 可以表示为与 $\boldsymbol{\sigma}$ 无关之项及与 $\boldsymbol{\sigma}$ 线性相关之项的和. 线性项应该含有 $\boldsymbol{\sigma}$ 对某一轴矢量的标量乘积. 但是从已有矢量 $\mathbf{p}$ 及 $\mathbf{e}$ 只能够构成一个轴矢量 $[\mathbf{p}\times\lambda\mathbf{e}]=[\mathbf{q}'\times\mathbf{q}]$. 这样我们有

$$T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}=\delta_{\sigma\sigma'}T_{(1)}+i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\lambda\mathbf{e}])_{\sigma\sigma'}T_{(2)}. \tag{52.34}$$

将对自旋空间及同位旋空间的上述分析统一起来[公式(52.30)及(52.34)]，得到

$$T^{\mathrm{ret}}_{\alpha\omega}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\rho'}\delta_{tt'}T^{(1)}_{(1)}+i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\lambda\mathbf{e}])_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho\rho'}\delta_{tt'}T^{(1)}_{(2)}+$$
$$+\frac{1}{2}[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}T^{(2)}_{(1)}+\frac{i}{2}[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{tt'}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\lambda\mathbf{e}])_{\sigma\sigma'}T^{(2)}_{(2)}. \tag{52.35}$$

表式 (52.35) 是较为复杂的. 但是，在色散关系中并不出现 $T^{\mathrm{ret}}$ 本身，而是它的厄米与反厄米部分的偶分量与奇分量. 注意，根据式(52.15)，厄米共轭运算在于作复共轭，并将 $\alpha$ 代替 $\omega$，即

$$\mathbf{p}\rightleftarrows\mathbf{p}'=-\mathbf{p},\ \rho'\rightleftarrows\rho,\ \sigma'\rightleftarrows\sigma,\ t'\rightleftarrows t.$$

我们求得，对 $\rho$，$\rho'$ 和 $\mathbf{e}$，$-\mathbf{e}$ 的对称化运算与厄米对称运算可对易，而且式 (52.35) 中所有矩阵乘子在厄米共轭下变为其自身. 因此，将式(52.35)中函数 $T^{(i)}_{(k)}$ 分成实部及虚部，

$$T^{(i)}_{(k)}=D^{(i)}_{(k)}+iA^{(i)}_{(k)} \quad (i,k=1,2),$$

经过运算 $(1\pm P_{\rho\rho'})S_{\pm}$ 后，代替式(52.22)—式(52.25)，我们得到：

$$D_{\mathrm{even}}(E)=\{2\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}D^{(1)}_{(1)}(E);\ i[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}D^{(2)}_{(2)}(E)\}; \tag{52.36}$$

$$A_{\mathrm{even}}(E)=\{[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}A^{(2)}_{(1)}(E);\ 2i\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}A^{(1)}_{(2)}(E)\}, \tag{52.37}$$

及

$$D_{\mathrm{odd}}(E)=\{[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}D^{(2)}_{(1)}(E);\ 2i\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}D^{(1)}_{(2)}(E)\}; \tag{52.38}$$

$$A_{\mathrm{odd}}(E)=\{2\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\rho'\rho}\delta_{t't}A^{(1)}_{(1)}(E);\ i[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}A^{(2)}_{(2)}(E)\}. \tag{52.39}$$

应该将式(52.28)及式(52.29)中函数 $B_{\rho'\rho}(\mathbf{e})$ 作类似的分析. 为此，应该将 $B_{\rho'\rho}(\mathbf{e})$ 的自旋结构和同位旋结构写成明显形式，为此，根据以下公式从 $\bar{\nu}$ 及 $\nu$ 的 8 分量旋量过渡到质子和中子的 4 分量旋量：

---

1) 例如，参阅 Goldberger，宫泽，Oehme (1955)；Fermi (1956).

$$v^s \equiv v_t^\sigma = \delta_t^P v_P^\sigma + \delta_t^N v_N^\sigma.$$

代替式(52.28)及式(52.29),用这样方式,我们得到

$$B_{\text{even}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}) = \{2\delta_{t't}\delta_{\rho'\rho}\delta_{\sigma'\sigma}B_1(\mathbf{p});\ i[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_{t't}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}B_2(\mathbf{p})\};\quad (52.40)$$

$$B_{\text{odd}}(\mathbf{e}, \mathbf{p}) = \{[\tau_{\rho'}, \tau_\rho]_{t't}\delta_{\sigma'\sigma}B_1(\mathbf{p});\ 2i\delta_{t't}\delta_{\rho'\rho}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}B_2(\mathbf{p})\},\quad (52.41)$$

而

$$B_1(\mathbf{p}) = \frac{\bar{v}^{\sigma,+}(-\mathbf{p})(\gamma^0\lambda_0 - M)v^{\sigma,-}(\mathbf{p})}{4\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}};\quad (52.42)$$

$$i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{e}])_{\sigma'\sigma}B_2(\mathbf{p}) = \frac{\bar{v}^{\sigma',+}(-\mathbf{p})\mathbf{e}\boldsymbol{\gamma}v^{\sigma,-}(\mathbf{p})}{4\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}}.\quad (52.43)$$

在表式(52.42)及(52.43)中略去四分量旋量的同位旋指标($N$, $P$),因为根据同位旋对称条件,中子和质子的旋量应该选定为同一个表象.

表式(52.42)及(52.43)可以用显式计算到底. 为此,可以利用旋量 $\bar{v}$ 及 $v$ 的显式(例如式(7.41),其中从三维空间对于旋转的不变性考虑以后,将结果推广到 $p_2 \neq 0$, $p_1 \neq 0$ 的情况). 用这样方式,得到

$$B_1(\mathbf{p}) = -\frac{M(\mu^2+2\mathbf{p}^2)}{4(M^2+\mathbf{p}^2)^{3/2}};\quad (52.44)$$

$$B_2(\mathbf{p}) = \frac{1}{4(M^2+\mathbf{p}^2)}.\quad (52.45)$$

归并等式(52.36)—(52.45)的结果,将色散关系(52.26),(52.27)写成形式:

$$D_{(i)}^{(i)}(E) - D_{(i)}^{(i)}(E_0) = \frac{2(E^2-E_0^2)}{\pi}\mathscr{P}\int_{E_1}^{\infty}\frac{E'A_{(i)}^{(i)}(E')dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)} -$$

$$-\frac{g^2}{2\pi}B_i(\mathbf{p})\frac{E_p(E^2-E_0^2)}{(E_0^2-E_p^2)(E^2-E_p^2)}\quad (i=1,2);\quad (52.46)$$

$$D_{(k)}^{(i)}(E) - \frac{E}{E_0}D_{(k)}^{(i)}(E_0) = \frac{2E(E^2-E_0^2)}{\pi}\mathscr{P}\int_{E_1}^{\infty}\frac{A_{(k)}^{(i)}(E')dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)} -$$

$$-\frac{g^2}{2\pi}B_k(\mathbf{p})\frac{E(E^2-E_0^2)}{(E_0^2-E_p^2)(E^2-E_p^2)}\quad (i,k=1,2;\ i\neq k).\quad (52.47)$$

## 52.4. 不可观察区域和过渡到朝前散射情况

为了使式(52.46)及(52.47)过渡为可观察量,必须利用散射振幅的虚部和总有效截面之间的关系式(46.20). 但是,总有效截面只在动量为实值的区域,即当 $E > \sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}$ 时,是可观察的(比较式(50.24)及式(50.25)). 因此式(52.46)和式(52.47)的积分区域含有不可观察的积分

$$E_1 = \frac{M\mu - \mathbf{p}^2}{\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}} < E' < \sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}.\quad (52.48)$$

由此我们看到,一般而言,关系式(52.46)和(52.47)含有不可观察量.

朝前散射是例外情况,即当 $\mathbf{p}^2 = 0$ 和区域(52.48)缩成一点时,这时,利用式(46.20),考虑到式(52.44)及式(52.45),得到

$$D_{(1)}^{(1)}(k)-D_{(1)}^{(1)}(k_0)=\frac{k^2-k_0^2}{2\pi^2}\mathscr{P}\int_0^\infty\frac{k'^2\sigma_1^1(k')dk'}{(k'^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}+$$
$$+f^2\frac{\mu^2}{M}\frac{k^2-k_0^2}{[E^2-(\mu^2/2M)^2][E_0^2-(\mu^2/2M)^2]};\tag{52.49}$$
$$D_{(2)}^{(2)}(k)-D_{(2)}^{(2)}(k_0)=\frac{k^2-k_0^2}{2\pi^2}\mathscr{P}\int_0^\infty\frac{k'^2\sigma_2^2(k')dk'}{(k'^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}-$$
$$-f^2\frac{1}{M}\frac{k^2-k_0^2}{[E^2-(\mu^2/2M)^2][E_0^2-(\mu^2/2M)^2]};\tag{52.50}$$
$$D_{(1)}^{(2)}(k)-\frac{E}{E_0}D_{(1)}^{(2)}(k_0)=\frac{E(k^2-k_0^2)}{2\pi^2}\mathscr{P}\int_0^\infty\frac{k'^2}{E'}\frac{\sigma_1^2(k')dk'}{(k'^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}+$$
$$+2f^2\frac{E(k^2-k_0^2)}{[E^2-(\mu^2/2M)^2][E_0^2-(\mu^2/2M)^2]};\tag{52.51}$$
$$D_{(2)}^{(1)}(k)-\frac{E}{E_0}D_{(2)}^{(1)}(k_0)=\frac{E(k^2-k_0^2)}{2\pi^2}\mathscr{P}\int_0^\infty\frac{k'^2}{E'}\frac{\sigma_2^1(k')dk'}{(k'^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}-$$
$$-f^2\frac{2}{\mu^2}\frac{E(k^2-k_0^2)}{[E^2-(\mu^2/2M)^2][E_0^2-(\mu^2/2M)^2]}.\tag{52.52}$$

这里引进介子动量的模数的记号

$$k=\sqrt{E^2-\mu^2}=\sqrt{\mathbf{q}^2},$$

而且

$$f^2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{g\mu}{2M}\right)^2.$$

在 $0<k<\infty$ 区域中，所讨论的公式(52.49)—(52.52)是朝前散射色散关系的最终形式，并且不包含不可观察量. 此时，式(52.49)及式(52.51)相当于自旋方向不变的散射，而式(52.49)和式(52.52)则相当于核子没有换荷时的散射.

## §53. 結　　語

本书的主要篇幅(第三、四、五章)是关于微扰理论的系统的和彻底的探讨. 就其结构而言，此处的叙述与通常的讲法大不相同. 我们不采用哈密顿形式，而是根据一系列的物理条件直接来定义散射矩陣. 在这些条件之中，为了补充熟悉的么正性及相对论不变性条件，我们采用了新形式的因果性条件. 利用这些条件，我们求出 $S$ 矩陣按相互作用微量为幂的展开式中系数 $S_n$ 的一组关系式. 对于这一展开式的整体性质问题，目前还沒有严格的数学分析. 但是，从这些条件来决定系数 $S_n$ 问题的提法却是完全正确的. 引用 Соболев-Schwartz 的广义函数理论，以及 Парашюк 在这一理论中所证明的一系列定理，我们已经获得问题的全部解答.

通过这样的方式，已经提出了求不含发散的算符函数 $S_n$ 的方法. 原来这个方法和通常減法形式的手续是等效的. 減法形式直到现在只具有单纯的方案性质，因此，在微扰理论范围內，減法形式得到了严格的数学论证.

进一步利用构成散射矩陣的基础思想，可以过渡到态振幅方程(第六章)，通过相应的极限过渡，从态振幅方程又能推出朝永-Schwinger 方程. 这时候已经完全阐明了出现于

方程中的"曲面型"附加发散的性质，利用通常的抵消项是不能够消除这些发散的.

这样，虽然从微扰理论展开式的个别项中消除发散问题，可以认为已经解决；但是，微扰理论中级数的整体性质问题，目前还没有解决. 在第七章中关于这方面所讨论的泛函积分法具有特殊的意义. 应用此法可以将量子场论的基本函数写成封闭形式，这些表式似乎是"求积分"，但却具有连续积分的形式. 目前，这些积分的计算技术还处于萌芽状态；因此，量子场论中，利用泛函积分暂时还没有获得任何实质性的新结果.

重正化羣方法(第八章)也是超出通常微扰理论范围的尝试. 此法的本质在于：本来微扰理论级数的任意的有限项之和对于相乘重正化羣并非不变的，如今可以将级数重新组合构成不变式. 此处可以改善量子电动力学中基本 Green 函数的逼近性. 在这一途径上，例如，不同于 Schwinger 泛函方程法，可以自动地确定区域，在此区域内，从通常微扰理论出发，能够获得改善后的公式.

但是，由于在动量变量的紫外区域内存在着上述界限，可以作出关于量子电动力学中弱耦合法的逻辑上不封闭性的结论. 至于目前广泛讨论到的关于量子电动力学本身逻辑上的可能不封闭性问题，则通过重正化羣的研究可作如下的断语：在弱耦合法基础上这一问题是不能解决的；为了解决这一问题需要采用中间耦合法，甚至可能要采用強耦合法.

但是，如果在量子电动力学中，由于电荷平方 $e^2$ 是微量，只在实际上不能达到的能量范围内微扰理论不适用，则在赝标量介子理论中，弱耦合法一般是不适用的，因为此时相应的电荷平方等于 $g^2/4\pi^2 \approx 15$，讨论对此量的级数展开只会"陷于深深的绝望状态之中".

根据上面所列举的事实，在量子场论中，根本上超出弱耦合限制的问题已经提到日程上来了. 依照著者的看法，目前有两个可能的方向，它们在原则上与微扰理论的任何形式毫无关系，而很有前途在现代定域性理论的范围内求得实质性的结果. 连续积分法是其中的第一个方向，关于此法上面已经提到. 此处，可以期望今后由于泛函积分理论中相应数学问题的研究会得到进展. 特别是，目前这类积分的数字计算已经得到许多有意义的结果，这些结果并不属于量子场论的领域内，而是属于一些较简单的问题，例如，晶体中电子的运动问题[1]. 不过将这些结果推广到量子场论领域中需要克服很大的困难，顺便提一下，这些困难与发散消除有关.

因此，在最近期间第二个方向更有希望，它和研究各种色散关系有关(第九章). 在这条道路上，似乎可以得到近似方程(在类如"单介子近似"模型中)，这些方程相当圆满地表征了在能量不很大($\lesssim$ 300 兆电子伏)的情况下，介子与核子的散射过程、光生过程以及其他等等. 但是很难期望，当过渡到较高能量时仍旧保持这一对应，因为既需要考虑大量的虚 $\pi$ 介子，又由于存在较重的粒子，情况更加复杂了. 利用色散关系，在散射过程中实验上发现数量级为"核半径"的基本长度的可能性，也有一定的希望.

如果实验上证实了存在这一基本长度，则建立非定域性场论问题就提到日程上来了，

---

1) И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, А. М. Яглом, 在莫斯科第三次全苏数学学会上的报告(1956 年 7 月).

这与解决现有场论的内在封闭性或矛盾的数学问题以及与建立中间耦合和强耦合理论是完全无关的.

反之,如果实验上没有发现数量级为 $10^{-13}\sim10^{-14}$ 厘米的基本长度，那末不管以后是否会发现数量级更低的基本长度，这将表明，散射过程、光生过程等等直到能量数量级为几千兆电子伏的范围内,在现代的定域性表象的基础上可以得到描述.

此时,不论数学方法以及定域性场论基本原理如何改变,由于定域性对易函数和因果函数的奇异性,理论的基本对象将是广义函数,也就是与这些广义函数的乘法运算相关的某一种减法形式,这将是未来任何定域性理论的必然的特点. 当然,在将来可能的非定域性理论中,关于发散的存在问题目前还是悬而未决.

# 数学附录Ⅰ　奇异函数一览表

## A. 辅助奇异函数

一维 Dirac $\delta$ 函数:

$$\delta(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha\tau}d\tau.$$

四维 Dirac $\delta$ 函数:

$$\delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk$$

$$(kx\equiv k^0x^0-\mathbf{kx},\ dk=dk^0d\mathbf{k}),$$

$$\delta(x)=\delta(x^0)\delta(\mathbf{x})=\delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3).$$

间断函数 $\theta(\alpha)$ 和 $\varepsilon(\alpha)$:

$$\theta(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha\tau}}{\tau-i\varepsilon}\,d\tau=\begin{cases}1, & \text{当 }\alpha>0,\\ 0, & \text{当 }\alpha<0.\end{cases}$$

$$\varepsilon(\alpha)=\frac{1}{\pi i}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha\tau}\frac{d\tau}{\tau}=\theta(\alpha)-\theta(-\alpha)=\begin{cases}1, & \text{当 }\alpha>0,\\ -1, & \text{当 }\alpha<0\end{cases}$$

($\mathscr{P}$ 是主值符号).

$\delta$ 函数的频率部分:

$$\delta_{\pm}(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{\pm i\alpha\tau}d\tau=\frac{1}{2}\left(\delta(\alpha)\pm\frac{i}{\pi}\mathscr{P}\frac{1}{\alpha}\right).$$

若干关系式:

$$\frac{1}{\alpha+i\varepsilon}=\frac{2\pi}{i}\delta_+(\alpha)=\frac{\pi}{i}\delta(\alpha)+\mathscr{P}\frac{1}{\alpha};$$

$$\frac{1}{\alpha-i\varepsilon}=2\pi i\delta_-(\alpha)=\pi i\delta(\alpha)+\mathscr{P}\frac{1}{\alpha}$$

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\alpha)\,e^{i\alpha\tau}d\alpha\right).$$

## B. 标量场函数

Pauli-Jordan 对易函数 $D(x)$:

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_-=\frac{1}{i}D(x-y);$$

$$(\Box-m^2)D(x)=0;$$

$$D(x)=\frac{1}{(2\pi)^3i}\int e^{ikx}\varepsilon(k^0)\delta(k^2-m^2)dk;$$

$$D(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\frac{m}{4\pi\sqrt{\lambda}}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda)J_1(m\sqrt{\lambda})$$
$$(\lambda=x^2\equiv(x^0)^2-\mathbf{x}^2).$$

在光锥邻域中 $D(x)$ 具有形式:

$$D(x)\approx\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\frac{m^2}{8\pi}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda).$$

Pauli-Jordan 函数的频率部分 $D^+(x)$ 和 $D^-(x)$:

$$[\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(y)]_-=\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle_0=\frac{1}{i}D^{(-)}(x-y);$$

$$[\varphi^{(+)}(x),\varphi^{(-)}(y)]_-=\frac{1}{i}D^{(+)}(x-y)=iD^{(-)}(y-x);$$

$$(\Box-m^2)D^{(-)}(x)=0;\quad(\Box-m^2)D^{(+)}(x)=0;$$

$$D^{(-)}(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\theta(-k^0)\delta(k^2-m^2)dk;$$

$$D^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int e^{ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)dk;$$

$$D^{(+)}(x)=\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\frac{mi}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)[N_1(m\sqrt{\lambda})-i\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})]+$$
$$+\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)K_1(m\sqrt{-\lambda});$$

$$D^{(-)}(x)=\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)+\frac{mi}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)[N_1(m\sqrt{\lambda})+i\varepsilon(x^0)J_1(m\sqrt{\lambda})]-$$
$$-\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)K_1(m\sqrt{-\lambda}).$$

在光锥邻域中, $D^{(+)}$ 和 $D^{(-)}$ 具有形式:

$$D^{(+)}(x)\approx\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)+\frac{i}{4\pi^2\lambda}-\frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{2}-\frac{m^2}{16\pi}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda);$$

$$D^{(-)}(x)\approx\frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda)-\frac{i}{4\pi^2\lambda}+\frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{2}-\frac{m^2}{16\pi}\varepsilon(x^0)\theta(\lambda).$$

Green 因果函数 $D^c(x)$:

$$\langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0=\frac{1}{i}D^c(x-y);$$

$$(\Box-m^2)D^c(x)=-\delta(x);$$

$$D^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ikx}D^c(k)dk;\qquad D^c(k)=\frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon};$$

$$D^c(x)=\frac{1}{4\pi}\delta(\lambda)-\frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)[J_1(m\sqrt{\lambda})-iN_1(m\sqrt{\lambda})]+$$
$$+\frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)K_1(m\sqrt{-\lambda}).$$

$D^c(x)$ 在光锥邻域中的性质:

$$D^c(x) \approx \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i\lambda} + \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{m|\lambda|^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda).$$

推迟和超前 Green 函数 $D^{\text{ret}}$ 和 $D^{\text{adv}}$:

$$D^{\text{ret}}(x) = 0, \text{ 当 } x^0 < 0; \qquad D^{\text{adv}}(x) = 0, \text{ 当 } x^0 > 0;$$

$$(\Box - m^2)D^{\text{ret}}(x) = -\delta(x); \qquad (\Box - m^2)D^{\text{adv}}(x) = -\delta(x);$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2 + i\varepsilon k^0}\,dk; \qquad D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon k^0}\,dk;$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\left\{\delta(\lambda) - \theta(\lambda)\frac{m}{2\sqrt{\lambda}}J_1(m\sqrt{\lambda})\right\};$$

$$D^{\text{adv}}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(-x^0)\left\{\delta(\lambda) - \theta(\lambda)\frac{m}{2\sqrt{\lambda}}J_1(m\sqrt{\lambda})\right\}.$$

函数 $D$, $D^{(+)}$, $D^{(-)}$, $D^c$, $D^{\text{adv}}$ 和 $D^{\text{ret}}$ 之间的关系:

$$D(x) = D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x);$$

$$D^c(x) = \theta(x^0)D^{(-)}(x) - \theta(-x^0)D^{(+)}(x);$$

$$D^{\text{ret}}(x) = \theta(x^0)D(x) = D^c(x) + D^{(+)}(x);$$

$$D^{\text{adv}}(x) = -\theta(-x^0)D(x) = D^c(x) - D^{(-)}(x);$$

$$D(x) = D^{\text{ret}}(x) - D^{\text{adv}}(x).$$

### C. 电磁场、矢量场和旋量场的奇异函数

电磁场:

$$[A_m(x), A_n(y)]_- = ig^{mn}D_0(x-y);$$

$$\langle A_m(x)A_n(y)\rangle_0 = ig^{mn}D_0^{(-)}(x-y);$$

$$\langle T(A_m(x)A_n(y))\rangle_0 = ig^{mn}D_0^c(x-y)$$

$$(g^{mn} = 0, \text{ 当 } m \neq n; \quad g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1).$$

当 $m = 0$ 时,从标量场函数 $D$, $D^{(-)}$, $D^c$ 可得函数 $D_0$, $D_0^{(-)}$, $D_0^c$ 等等,例如:

$$D_0^c(x) = D^c(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{k^2 + i\varepsilon}\,dk = \frac{1}{4\pi}\left(\delta(\lambda) - \frac{i}{\pi\lambda}\right) = \frac{1}{2\pi}\delta_+(-\lambda).$$

矢量场:

$$[U_m(x), U_n(y)]_- = \frac{1}{i}D_{mn}(x-y);$$

$$\langle U_m(x)U_n(y)\rangle_0 = \frac{1}{i}D_{mn}^{(-)}(x-y);$$

$$\langle T(U_m(x)U_n(y))\rangle_0 = \frac{1}{i}D_{mn}^c(x-y).$$

函数 $D_{mn}$, $D_{mn}^{(-)}$, $D_{mn}^c$ 等可以从相应标量场函数经如下微分算符作用后而得到:

$$g^{mn} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^m},$$

例如,

$$D_{nl}(x)=\left(g^{nl}+\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^n\partial x^l}\right)D(x)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\left(g^{nl}-\frac{k_nk_l}{m^2}\right)e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\varepsilon(k^0)dk,$$

$$D^c_{nl}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\left(g^{nl}-\frac{k_nk_l}{m^2}\right)\frac{e^{ikx}}{m^2-k^2-i\varepsilon}dk.$$

旋量场:

$$[\psi_\alpha(x),\ \bar\psi_\beta(y)]_+=\frac{1}{i}S_{\alpha\beta}(x-y);$$

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)\rangle_0=\frac{1}{i}S^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y);$$

$$\langle T(\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y))\rangle_0=\frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x-y).$$

函数 $S_{\alpha\beta}$, $S^{(-)}_{\alpha\beta}$, $S^c_{\alpha\beta}$ 等可从标量场的相应函数经微分算符的作用后而得到

$$(i\hat\partial+m)_{\alpha\beta}\equiv i\sum_n\gamma^n_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^n}+mI_{\alpha\beta}$$

(其中 Dirac 矩陣 $\gamma$ 由关系 $\gamma^n\gamma^m+\gamma^m\gamma^n=2g^{mn}$ 来定义),例如,

$$S^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{m-\hat p}{m^2-p^2-i\varepsilon}e^{ipx}dp.$$

**D. 本书中所采用的奇异函数记号与 Stückelberg-Rivier 和 Schwinger 记号之间的关系:**

| 本书记号 | Schwinger 记号 | Stückelberg-Rivier 记号 |
|---|---|---|
| $D(x)$ | $-\Delta(x)$ | $D^0(x)$ |
| $D^{(-)}(x)$ | $-\Delta^{(+)}(x)$ | $\frac{i}{2}D^+(x)$ |
| $D^{(+)}(x)$ | $-\Delta^{(-)}(x)$ | $\frac{1}{2i}D^-(x)$ |
| $D^c(x)$ | $\Delta_+(x)$ | $D^c(x)$ |

Schwinger 和 Stückelberg-Rivier 所应用的特殊函数 $\Delta^1(D^1)$, $\bar\Delta(D^s)$ 和 $D^a$:

$$\Delta^1(x)=D^1(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2-m^2)dk;$$

$$\bar\Delta(x)=D^s(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\mathscr{P}\int\frac{e^{ikx}}{m^2-k^2}dk;$$

$$D^a(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{m^2-k^2+i\varepsilon}dk.$$

可以用本书中所采用的 $D$, $D^{(-)}$, $D^{(+)}$, $D^c$, $D^{\rm ret}$ 及 $D^{\rm adv}$ 表示如下:

$$\Delta^1(x)=D^1(x)=i(D^{(+)}(x)-D^{(-)}(x));$$

$$\bar\Delta(x)=D^s(x)=\frac{1}{2}\varepsilon(x^0)D(x);$$

$$D^a(x)=\theta(x^0)D^{(+)}(x)-\theta(-x^0)D^{(-)}(x).$$

# 数学附录 II[1] 色散关系解析性定理

我们来引进若干定义，设有一函数 $h(x_1, \cdots, x_n; \theta_1, \cdots, \theta_q) = h(x; \theta_1, \cdots, \theta_q)$ 在 $E_n \times \Omega_q$ 为连续，其中 $E_n$ 是点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的实欧几里德空间，而 $\Omega_q$ 是 $q$ 维圆环，环面上各点以角变量 $\theta_1, \cdots, \theta_q$ 为标征，如果对于一切 $(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q) \in E_n \times \Omega_q$，所有形式为

$$x_{\gamma_1} \cdots x_{\gamma_l} \frac{\partial^{p+\mu} h(x; \theta_1, \cdots, \theta_q)}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_p} \partial \theta_{\beta_1} \cdots \partial \theta_{\beta_\mu}},$$

$$0 \leqslant l \leqslant r, \quad 0 \leqslant p \leqslant s, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant v,$$

$$1 \leqslant (\alpha_i, \gamma_i) \leqslant n, \qquad 1 \leqslant \beta_i \leqslant q$$

的表式存在并有界，我们将称此函数属于类 $C(r, s; n|v; \Omega_q)$.

如果这函数 $h$ 的某些指数 $r, s, v$ 可以取任意大数值，则在表明函数类 $C$ 时，我们约定在相应的位置写上 $\infty$. 当所讨论的函数与 $x_1, \cdots, x_n$ 或者与 $\theta_1, \cdots, \theta_q$ 无关时，我们就说，此函数分别属于类 $C(v; \Omega_q)$ 或类 $C(r, s; n)$.

在 $C(r, s; n)$ 类中我们按下式引入模：

$$\| h \| = \sup_{\substack{x \\ 0 \leqslant l \leqslant r \\ 0 \leqslant p \leqslant s}} \left| x_{\gamma_1} \cdots x_{\gamma_l} \frac{\partial^p h(x)}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_p}} \right|.$$

利用此式，$C(r, s; n)$ 化为一线性赋范空间.

$C(r, s; n)$ 空间中的线性(有界)泛函 $f(h)$ (其中 $r, s$ 是任意非负的整数)，我们称为 $C(r, s; n)$ 类上可积的广义函数，此时我们采用记号

$$f(x), \quad \int f(x) h(x) dx.$$

因此，如果 $f$ 是广义函数，总可以找到数 $r$ 和 $s$，使 $f$ 在 $C(r, s; n)$ 类上为可积. 如果可以求得足够大的 $r$ 及 $s$，使得泛函 $f_1 - f_2$ 在 $C(r, s; n)$ 中为零，则称广义函数 $f_1$ 与 $f_2$ 相等.

如果 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 在类 $C(r, s; n)$ 中为可积，而且对于任意 $h(x) \in C(r, s; n)$，存在

$$\int f_n(x) h(x) dx \to \int f(x) h(x) dx, \quad n \to \infty,$$

则称广义函数序列 $f_n(x)$ 在 $C(r, s; n)$ 类上(广义)弱收敛于广义函数 $f(x)$.

如果可以求得足够大的数 $r$ 及 $s$，使得 $f_n(x)$ 序列在 $C(r, s; n)$ 类上弱收敛于 $f(x)$，则称广义函数序列 $f_n(x)$ (广义)弱收敛于广义函数 $f(x)$.

设 $G$ 是 $n$ 维欧几里德空间 $E_n$ 中的开集，而 $\Gamma$ 是它的边界. 如果对于任意点 $x \in \Gamma$，以

1) 根据 Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов 的著作(1958)中附录 A: 解析性定理译出. ——译者注

点 $x$ 为中心的任意球包含与 $G$ 无共同点的另一球，则称边界是正规的.

如果存在足够大的数 $r$ 及 $s$，对于 $C(r, s; n)$ 中所有在 $E_n - G$ 中化为零的 $h(x)$，有

$$\int f(x)h(x)dx = 0,$$

我们就说在以 $\Gamma$ 为正规边界的开集 $G$ 中广义函数 $f(x)$ 等于零.

我们约定说，某一表式

$$f(k, t), \quad k = (k_1, \cdots, k_m), \quad t = (t_1, \cdots, t_n)$$

为(实)变量 $t$ 的广义函数，它在 $C(r, s; n)$ 类中可积，而且是复变量 $k$ 的正规于域 $D$ 的解析函数，如果对于 $C(r, s; n)$ 类中任意函数 $h(t)$，积分

$$\int f(k, t)h(t)dt$$

是正规于 $D$ 域中的 $k$ 的解析函数.

如果在类似的表述中，我们并不特别提到在某一具体函数类 $C(r, s; n)$ 中的可积性，而是简单地讲到广义函数. 我们规定，这是指当 $r$ 及 $s$ 足够大时，这样的函数类是存在的.

当 $n = 4$ 时，我们采用一些特别的记号. 我们按下式定义广义函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\mathfrak{f}(p)$:

$$\mathfrak{f}(p_0, \mathbf{p}) = \int f(x_0, \mathbf{x}) \exp i\,(x_0p_0 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p})dx,$$

此处及以后[1]采用记号如下:

$$x = (x_0, \mathbf{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3),$$

$$xp = x_0p_0 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha p_\alpha, \quad |\mathbf{k}| = \left(\sum_{\alpha=1}^{3} |k_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## § 1

引理 I. 我们讨论四元复变量 $k_0$, $k_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$的解析函数 $\phi(k_0, \cdots, k_\alpha, \cdots)$，它在

$$|k_0| < w \tag{1.1}$$

区域中为正规. 设 $r_0$, $R$ 为满足于不等式

$$r_0 < R < w \tag{1.2}$$

的正数. 再者，设 $r_\alpha$ 为正数，而 $N$ 为正整数，则在

$$|k_0| < r_0, \quad |k_\alpha| < r_\alpha \tag{1.3}$$

区域中，有积分表示式

$$\phi(k_0, \cdots, k_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{\phi(r_0e^{i\theta_0}, \cdots, r_3e^{i\theta_3})d\theta_0, \cdots, d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0}e^{-i\theta_0}\right)\prod_\alpha\left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha}e^{-i\theta_\alpha}\right)}, \tag{1.4}$$

1) 为了书写方便起见，在此附录中所有张量指标置于下方，与通常指标位于上方不同.

除此以外，此处

$$\Phi(r_0e^{i\theta_0}, \cdots, r_3e^{i\theta_3}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3))(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta, \quad (1.5)$$

其中

$$u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3) = \frac{ia_a}{2}R(1-e^{2i\theta}) + b_a;$$

$$a_a = a_a(\theta_0, \cdots, \theta_3) = \frac{2r_a\sin\theta_a}{R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\cos 2\theta_0\right)};$$

$$b_a = b_a(\theta_0, \cdots, \theta_3) = r_a\cos\theta_a - \frac{a_a r_0^2}{2R}\sin 2\theta_0.$$

証明　首先，我们注意到，由于不等式(1.2)，下列各圆

$$|z_0| \leqslant r_0, \cdots, |z_a| \leqslant r_a,$$

完全处于函数 $\phi(k_0, \cdots, k_3)$ 的正规区域中.

因此，在目前情况下，对于四个复变量 $k_0, \cdots, k_3$ 中每一变量我们可以应用 Cauchy 定理，因而证明了关系式(1.4)的正确性.

为了证明表式(1.5)，我们讨论单复变解析函数

$$f(z) = \Phi\left(z, \cdots, \frac{ia_aR}{2}\left(1-\frac{z^2}{R^2}\right)+b_a, \cdots\right)(R^2-z^2)^N. \quad (1.6)$$

因为这一函数在区域

$$|z| \leqslant R < w$$

中为正规，我们可以利用 Cauchy 定理，并且写成

$$f(r_0e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}} d\theta. \quad (1.7)$$

另一方面，根据表式(1.6)有

$$f(r_0e^{i\theta_0}) = \phi(r_0e^{i\theta_0}, \cdots, r_ae^{i\theta_a}, \cdots)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N R^{2N};$$

$$f(Re^{i\theta}) = \phi(Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0 \cdots, \theta_3), \cdots)(1-e^{2i\theta})^N R^{2N}.$$

将这些表式代入等式(1.7)的两端，因而证明表示(1.5).

## §2

引理 II. 假定在上节 1 中所引入的函数 $a_a(\theta_0, \cdots, \theta_3)$ 满足不等式

$$|\mathbf{a}| \leqslant 1-\sigma, \quad (2.1)$$

其中 $\sigma$ 是某一正数.

此时，如果 $\varphi(t)$, $g(t)$ 是类 $C(0, \infty; 1)$ 中的函数，使

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = 0, \ t \leqslant -\delta; \quad g(t) = 0, \ t \leqslant -\delta, \\ &\varphi(t) = 1, \ t \geqslant 0; \quad\ \ g(t) = 1, \ t \geqslant 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

则下式

$$\varphi(x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)\int_0^{\pi}d\theta\frac{(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}\times$$

$$\times\exp i\{x_0Re^{i\theta}-\mathbf{xu}(\theta,\theta_0,\cdots,\theta_3)\}\tag{2.3}$$

作为函数 $f(x_0,\cdots,x_3;\ \theta_0,\cdots,\theta_3)$ 属于任意类 $C(r,s;4|v;\Omega_4)$，对于此类有

$$r+s+v\leqslant N+1.\tag{2.4}$$

証明　首先注意到

$$i\{x_0Re^{i\theta}-\mathbf{xu}(\theta,\theta_0,\cdots,\theta_3)\}=-x_0R\sin\theta+\mathbf{xa}R\sin^2\theta+$$

$$+ix_0R\cos\theta-i\mathbf{x}\left(\frac{\mathbf{a}}{2}R\sin 2\theta+\mathbf{b}\right),$$

$$\frac{1-e^{2i\theta}}{2}=\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta),$$

其次注意到函数

$$\frac{(\sin\theta-i\cos\theta)^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)},\qquad\frac{\mathbf{a}}{2}R\sin 2\theta+\mathbf{b}$$

分别属于类 $C(\infty;\Omega_2)$ 和 $C(\infty;\Omega_5)$。因此，如果我们能够证明下述的比较一般的论断，则以上所表述的引理将获证。

如果

$$f(\theta,\theta_0,\cdots,\theta_3)\in C(\infty;\Omega_5),$$

$$\mathbf{A}(\theta,\theta_0,\cdots,\theta_3)\in C(\infty;\Omega_5),$$

并且如果 $A_\alpha$ 诸值为实，则函数

$$F=\varphi(x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)\int_0^{\pi}d\theta\sin^N\theta f(\theta,\theta_0,\cdots,\theta_3)\times$$

$$\times\exp\{-x_0R\sin\theta+\mathbf{xa}R\sin^2\theta+ix_0R\cos\theta-i\mathbf{xA}\}\tag{2.5}$$

属于函数类 $C(r,s;4|v;\Omega_4)$，其中 $r+s+v\leqslant N+1$.

我们现在就来证明这一论断。首先，显然由于条件式(2.2)，(2.5)只能在

$$x_0\geqslant-\delta,\ \mathbf{x}^2<x_0^2+\delta\tag{2.6}$$

的区域内不等于零。

其次，注意到

$$\frac{\partial^{r+\mu}F}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_r}\partial\theta_{\beta_1}\cdots\partial\theta_{\beta_\mu}},$$

可以表示成以下类型的有限和式

$$\varphi_\lambda(x_0,\cdots,x_3)\mathscr{D}_\lambda(x_0,\cdots,x_3)\int_0^{\pi}d\theta\sin^N\theta f_\lambda(\theta,\cdots,\theta_3)\times$$

$$\times\exp\{-x_0R\sin\theta+\mathbf{xa}R\sin^2\theta+ix_0R\cos\theta-i\mathbf{xA}\},$$

其中

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\lambda\in C(0,0;4)\\ f_\lambda\in C(\infty;\Omega_5)\end{matrix}\right\};\quad\varphi_\lambda=0\text{ 在(2.6)区域之外.}$$

而且 $\mathscr{P}_\lambda(x_0, \cdots, x_3)$ 是幂次不高于 $r+\mu$ 的多项式.

最后,有

$$\left|\int_0^\pi d\theta\ \sin^N\theta f_\lambda \exp\{-x_0R\sin\theta + \mathbf{xa}R\ \sin^2\theta + ix_0R\cos\theta - i\mathbf{xA}\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|f_\lambda(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3)| \times$$

$$\times \int_0^\pi d\theta\ \sin^N\theta \exp\{-x_0R\sin\theta + \mathbf{xa}R\ \sin^2\theta\}.$$

由上所述,可以断言,只要我们证明,在(2.6)区域中,对于足够大的 $x_0$,存在不等式

$$\int_0^\pi e^{-R(x_0\sin\theta - \mathbf{xa}\ \sin^2\theta)}\ \sin^N\theta d\theta \leqslant \frac{\text{const}}{|x_0|^{N+1}},$$

证明就此完毕.

现在来建立这一不等式. 我们注意到在所讨论的区域中

$$x_0\sin\theta - \mathbf{ax}\ \sin^2\theta \geqslant x_0\sin\theta - |\mathbf{a}|\sqrt{x_0^2+\delta}\ \sin^2\theta.$$

因而根据式(2.1)

$$x_0\sin\theta - \mathbf{ax}\ \sin^2\theta \geqslant x_0\sin\theta - (1-\sigma)\sqrt{x_0^2+\delta}\ \sin^2\theta.$$

取正值的 $X$,使

$$(1-\sigma)\sqrt{X^2+\delta} = \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)X.$$

我们将讨论 $x_0 \geqslant X$ 的情况. 因此

$$x_0\sin\theta - \mathbf{ax}\ \sin^2\theta \geqslant \frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta.$$

由此得到

$$\int_0^\pi e^{-R(x_0\sin\theta - \mathbf{xa}\sin^2\theta)}\ \sin^N\theta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta d\theta < \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\ \sin^N\theta\cos\theta d\theta +$$

$$+\frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\ \sin^N\theta(-\cos\theta)d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0t}\ t^N\,dt + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}} <$$

$$< 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{R\sigma x_0}\right)^{N+1}\int_0^\infty e^{-t}t^N\,dt + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}}.$$

因而证毕.

## § 3

现在我们来应用引理 I 及 II.

我们讨论两个广义函数 $F_r(x)$, $F_a(x)$ $(x=(x_0, \mathbf{x}))$,其中一个是推迟函数,而另一

个是超前函数：

$$\left.\begin{aligned} F_r(x) &= 0, \quad x \lesssim 0; \\ F_a(x) &= 0, \quad x \gtrsim 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

我们来构成上两函数的“光滑的 Fourier 映象”：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}_r(k, \varepsilon) &= \int F_r(x) \exp\{-\varepsilon(x_0^2 + \mathbf{x}^2) + i(k_0 x_0 - \mathbf{kx})\} dx, \\ \tilde{F}_a(k, \varepsilon) &= \int F_a(x) \exp\{-\varepsilon(x_0^2 + \mathbf{x}^2) + i(k_0 x_0 - \mathbf{kx})\} dx, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon > 0, \tag{3.2}$$

并且注意到，这些函数是复变量 $k(k_0, k_1, \cdots, k_3)$ 的解析函数，在有限距离内没有奇点.

引入同一复变量的函数 $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ 来考察，令

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}(k, \varepsilon) &= \tilde{F}_r(k, \varepsilon) - T(k, \varepsilon), \quad \operatorname{Im} k_0 > 0; \\ \tilde{F}(k, \varepsilon) &= \tilde{F}_a(k, \varepsilon) - T(k, \varepsilon), \quad \operatorname{Im} k_0 < 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

其中

$$T(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\tilde{F}_r(t, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(t, \mathbf{k}, \varepsilon)}{t - k_0} dt, \tag{3.4}$$

而其中 $\omega$ 是某一正数.

由此可见，除了“割线”

$$\operatorname{Im} k_0 = 0$$

以外，$\tilde{F}(k, \varepsilon)$，$T(k, \varepsilon)$ 在有限距离内没有其他的奇点.

在此线上取 $k_0$，我们得到

$$\tilde{F}(k + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) =$$
$$= \tilde{F}_r(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \{T(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - T(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon)\}.$$

但是当在 $-\omega < k_0 < \omega$ 情况下，可以写成

$$T(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - T(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \{\tilde{F}_r(t, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(t, \mathbf{k}, \varepsilon)\} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{t - k_0 - i0} - \frac{1}{t - k_0 + i0}\right\} dt =$$
$$= \tilde{F}_r(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}_a(k_0, \mathbf{k}, \varepsilon).$$

因而

$$\tilde{F}(k_0 + i0, \mathbf{k}, \varepsilon) - \tilde{F}(k_0 - i0, \mathbf{k}, \varepsilon) = 0, \quad -\omega < k_0 < \omega. \tag{3.5}$$

由此可见，解析函数 $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ 在

$$|k_0| < \omega \tag{3.6}$$

区域内为正规(在其中的有限距离内并无奇点)，因此我们对此函数可以应用引理 I.

因此得到积分表式

$$\tilde{F}(k, \varepsilon) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{\phi_1(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon) - \phi_2(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon)}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_a \left(1 - \frac{k_a}{r_a} e^{-i\theta_a}\right)} d\theta_0 \cdots d\theta_3,$$
$$|k_0| < r_0, \quad |k_a| < r_a, \tag{3.7}$$

式中

$$\phi_1(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{F}_r\{Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3), \cdots; \varepsilon\}}{1 - \frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}} \frac{(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\tilde{F}_a\{Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3), \cdots; \varepsilon\}}{1 - \frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}} \frac{(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta; \quad (3.8)$$

$$\phi_2(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{T\{Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3), \cdots; \varepsilon\}}{1 - \frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}} \frac{(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta. \quad (3.9)$$

为了利用引理 II，必须保证满足不等式(2.1)．为此，我们要求此处所含之 $r_a$ 满足不等式

$$\frac{2|\mathbf{r}|}{R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)} < 1, \quad (3.10)$$

此时，可以从式(1.6)中看出，实际上，例如，当

$$\sigma = 1 - \frac{2|\mathbf{r}|}{R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right)}$$

时，式(2.1)就是满足的．

首先来讨论式(3.8)中右端的第一项．将式(3.2)代入其中，求得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\tilde{F}_r\{Re^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3)\cdots; \varepsilon\}}{1 - \frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}} \frac{(1-e^{2i\theta})^N}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx; \\ &I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3) = \int_0^{\pi} d\theta \frac{(1-e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 Re^{i\theta} - \mathbf{xu}\}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

现在注意到，函数

$$e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3); \quad \varphi(x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)},$$

由于存在截断指数因子属于类 $C(\infty, \infty; 4|\infty; \Omega_4)$．另一方面，如果

$$x_0 \geqslant 0, \quad x_0^2 - \mathbf{x}^2 \geqslant 0,$$

它们的差等于零．但是，在 $x_0 < 0$ 或 $x_0^2 - \mathbf{x}^2 < 0$ 的区域中，函数 $F_r(x)$ 本身化为零(参阅(3.1))．

因此，我们有

$$\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx =$$

$$= \int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}\varphi(x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)I(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx.$$

因此表式(3.11)等于

$$\frac{1}{2\pi}\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}h_+(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)dx,$$

其中

$$h_+(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)=\varphi(x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)\int_0^{\pi}d\theta\frac{(1-e^{2i\theta})^N\exp i\{x_0Re^{i\theta}-\mathbf{xu}\}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}. \quad (3.12)$$

完全同理,可以证明关系式(3.8)中右端第二项等于

$$\frac{1}{2\pi}\int F_a(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}h_-(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)dx;$$

而

$$h_-(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)=\varphi(-x_0)g(x_0^2-\mathbf{x}^2)\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\frac{(1-e^{2i\theta})^N\exp i\{x_0Re^{i\theta}-\mathbf{xu}\}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}. \quad (3.13)$$

现在选择任意高的指标 $r$, $s$, $\nu$, 并且取 $N=r+s+\nu-1$. 此时根据引理 II, 我们可以断言, $h_+$ 及 $h_-$ 两函数属于类 $C(r,s;4|\nu;\Omega_4)$.

因而, 我们可以用上述方法在具有任意高的指标的类 $C(r,s;4|\nu;\Omega_4)$ 中构成两个函数 $h_+$ 及 $h_-$, 使得

$$\Phi_1(\theta_0,\cdots,\theta_3;\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}h_+(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int F_a(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)}h_-(x;\theta_0,\cdots,\theta_3)dx. \quad (3.14)$$

函数 $h_+$, $h_-$ 我们将在以下意义下称为普适函数,即它们只与指标 $r$, $s$, $\nu$ 有关, 而和 $F_r(x)$, $F_a(x)$ 函数的形式无关.

## § 4

为了在关系式(3.7)中,取极限 $\varepsilon\to+0$,我们来叙述并证明下述引理.

引理 III. 我们考察某一广义函数 $f(x)$,并假定存在这样的正数 $\eta$,使得

$$\int f(x)e^{i\mathbf{px}}dx=0, \quad (4.1)$$

在区域

$$p_0^2+\mathbf{p}^2<\eta^2 \quad (4.2)$$

中. 我们选定满足不等式

$$R^2+\delta^2<\omega^2+\delta^2<\frac{\eta^2}{2} \quad (4.3)$$

之正 $R$, $\omega$, $\delta$, 并且构成复变量 $k=(k_0,\mathbf{k})=(k_0,k_1,k_2,k_3)$ 的函数

$$T(k,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\tilde{f}(t,\mathbf{k},\varepsilon)}{t-k_0}dt, \quad (4.4)$$

其中

$$\tilde{f}(k,\varepsilon)=\int f(x)\exp\{-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)+ikx\}dx, \tag{4.5}$$

此时可以断言：在复变量的闭域

$$|k_0|\leqslant R,\quad |\mathbf{k}|\leqslant\delta \tag{4.6}$$

中，有一致收敛：

$$T(k,\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0. \tag{4.7}$$

証明　讨论表式(4.5)，并且在其中代入 Fourier 表示

$$f(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\tilde{f}(p)e^{-ipx}dp,$$

我们得到

$$\tilde{f}(k,\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{f}(p)\left\{\int\exp[-\varepsilon(x_0^2+\mathbf{x}^2)+i(k-p)x]dx\right\}dp=$$

$$=\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^2}\int\tilde{f}(p)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}dp. \tag{4.8}$$

现在确定正值的 $\bar{\eta}$，使

$$\omega^2+\delta^2<\frac{\bar{\eta}^2}{2}<\frac{\eta^2}{2}, \tag{4.9}$$

并在类 $C(0,\infty;1)$ 中作函数 $u(t)$，此函数为

$$u(t)=1,\quad t\geqslant\eta^2;$$

$$u(t)=0,\quad t\leqslant\bar{\eta}^2.$$

我们注意到以下函数($k$ 为确定的)

$$\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\},\quad u(p_0^2+\mathbf{p}^2)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\},$$

属于类 $C(\infty,\infty;4)$. 当

$$p_0^2+\mathbf{p}^2\geqslant\eta^2$$

时，其差为零. 另一方面，根据引理，当 $p_0^2+\mathbf{p}^2\geqslant\eta^2$ 时，函数 $\tilde{f}(p)$ 等于零. 因此，我们看出关系式(4.8)可以表示成形式为

$$\tilde{f}(k,\varepsilon)=\int\tilde{f}(p)H_k(p,\varepsilon)dp, \tag{4.10}$$

$$H_k(p,\varepsilon)=\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^2}u(p_0^2+\mathbf{p}^2)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}. \tag{4.11}$$

在闭域

$$|k_0|\leqslant\omega,\quad \mathbf{k}\leqslant\delta \tag{4.12}$$

中，以任意方式确定 $k$ 以后，我们将作进一步的讨论.

现在来分析当 $\varepsilon\to+0$ 时，序列 $H_k(p,\varepsilon)$ 趋近于零时的性质.

因为根据 $u$ 的定义：

$$u(p_0^2+\mathbf{p}^2)=0,\quad 当\ p_0^2+\mathbf{p}^2\leqslant\bar{\eta}^2, \tag{4.13}$$

所以我们可以限定区域为

$$p_0^2 + \mathbf{p}^2 < \bar{\eta}^2. \tag{4.14}$$

此处有

$$\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} = (p_0-\operatorname{Re}k_0)^2+(\mathbf{p}-\operatorname{Re}\mathbf{k})^2-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}\mathbf{k})^2 =$$
$$= p_0^2+\mathbf{p}^2+(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2-2p_0\operatorname{Re}k_0-2\mathbf{p}\operatorname{Re}\mathbf{k}-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}\mathbf{k})^2.$$

但是

$$p_0 \operatorname{Re} k_0 + \mathbf{p} \operatorname{Re}\mathbf{k} \leqslant \sqrt{p_0^2+\mathbf{p}^2}\sqrt{(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2}.$$

因此

$$\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} \geqslant$$
$$\geqslant 2\left\{\frac{\sqrt{p_0^2+\mathbf{p}^2}}{2}-\sqrt{(\operatorname{Re}k_0)^2+(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2}\right\}^2-(\operatorname{Im}k_0)^2-(\operatorname{Im}\mathbf{k})^2-$$
$$-(\operatorname{Re}k_0)^2-(\operatorname{Re}\mathbf{k})^2+\frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2} \geqslant \frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2}-(|k_0|^2+|\mathbf{k}|^2).$$

因而由于等式(4.9),(4.12),(4.14),

$$\operatorname{Re}\{(p_0-k_0)^2-(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\} > \zeta^2+\frac{p_0^2+\mathbf{p}^2}{2}-\frac{\bar{\eta}^2}{2},$$

其中

$$\zeta^2 = \frac{\bar{\eta}^2}{2}-(\omega^2+\delta^2).$$

因此

$$\left|\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\varepsilon}\right\}\right| < e^{-\frac{\zeta^2}{4\varepsilon}-\frac{1}{8\varepsilon}(p_0^2+\mathbf{p}^2-\bar{\eta}^2)}. \tag{4.15}$$

由于式(4.11),从上式可得当 $s$ 为任意大值时,

$$(p_0^2+\mathbf{p}^2)^s H_k(p,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0, \tag{4.16}$$

对所有 $p$ 及满足式(4.12)的所有 $k$ 是一致的.

不仅如此,由于当微分时,截断指数保持不变,只能乘上多项式,故我们得到结论: 所有偏导式仍一致趋于零:

$$(p_0^2+\mathbf{p}^2)^s \frac{\partial^{\nu+\mu}H_k(p,\varepsilon)}{\partial k_{\alpha_1}\cdots\partial k_{\alpha_\nu}\partial p_{\beta_1}\cdots\partial p_{\beta_\mu}} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0, \tag{4.17}$$

注意到式(4.10), 由此可见, 当 $\varepsilon\to+0$ 时, $\tilde{f}(k,\varepsilon)$ 及其对 $k_0,\cdots,k_3$ 的一切偏导式在(4.12)区域内一致趋于零.

现在我们利用这些结果来研究式(4.4). 我们有

$$T(k,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\tilde{f}(t,\mathbf{k},\varepsilon)-\tilde{f}(k_0,\mathbf{k},\varepsilon)}{t-k_0}\,dt+\tilde{f}(k_0,\mathbf{k},\varepsilon)\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0},$$

由此

$$|T(k,\varepsilon)| < \frac{\omega}{\pi}\max_{|t|\leqslant\omega}\left|\frac{\tilde{f}(t,\mathbf{k},\varepsilon)-\tilde{f}(k_0,\mathbf{k},\varepsilon)}{t-k_0}\right|+|\tilde{f}(k_0,\mathbf{k};\varepsilon)|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}\right|.$$

根据刚才所得的结果,

$$\max_{|t|\leqslant\omega}\left|\frac{\mathfrak{f}(t,\mathbf{k},\varepsilon)-\mathfrak{f}(k_0,\mathbf{k},\varepsilon)}{t-k_0}\right|\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0,\quad |\mathfrak{f}(k_0,\mathbf{k},\varepsilon)|\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0,$$

在(4.12)区域内一致趋于零. 另一方面,如果

$$|k_0|\leqslant R<\omega,$$

则积分

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}\right|<\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\omega+R}{\omega-R}\right|+\frac{1}{2}$$

为有界.

因此,在(4.7)区域内获得一致收敛:

$$T(k,\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0,$$

而我们的引理获证.

## § 5

现在来讨论在积分表式(3.7),(3.8),(3.9),(3.14)中 $\varepsilon\to 0$ 极限过渡问题.

现在作基本假定,即

$$\tilde{F}_r(p)-\tilde{F}_a(p)=0, \tag{5.1}$$

对于

$$p_0^2+\mathbf{p}^2<\eta^2. \tag{5.2}$$

为了利用引理 III,此时我们必须保证在(3.9)积分表示式之右端的 $T$ 式中所含的宗量 $k$ 满足不等式(4.3)及(4.7).

换言之,我们必须保证

$$R^2+\mathbf{r}^2<\frac{\eta^2}{2},\quad R^2+\mathbf{u}^2<\frac{\eta^2}{2}. \tag{5.3}$$

此外,为了应用引理 II,我们还应该注意到不等式

$$\frac{2|\mathbf{r}|}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}<R. \tag{5.4}$$

但从式(1.6)可得

$$|u_a|<|a_a|R+|b_a|<|a_a|R\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right)+r_a|\cos\theta_a|<$$

$$<\frac{2r_a}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}|\sin\theta_a|\left(1+\frac{r_0^2}{R^2}\right)+r_a|\cos\theta_a|,$$

由此

$$\mathbf{u}^2<\mathbf{r}^2\left\{4\left(\frac{1+\frac{r_0^2}{2R^2}}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}\right)^2+1\right\}.$$

结果我们看到,如果选取 $r_0$, $r_a$, $R$ 使

$$2|\mathbf{r}| < R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right), \quad R^2+R^2\left(1+\frac{r_0^2}{R^2}\right)^2+\mathbf{r}^2<\frac{\eta^2}{2} \tag{5.5}$$

一切所要求的条件(5.3),(5.4)均将满足. 我们今后就采用这一选择.

现在来讨论式(3.9),并注意到,根据引理 III 在 $\Omega_5$ 上有

$$T\{\mathrm{R}\epsilon^{i\theta}, \cdots, u_a(\theta, \theta_0, \cdots, \theta_3)\cdots; \varepsilon\} \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0,$$

一致趋于零. 因此

$$\Phi_2(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0, \tag{5.6}$$

也是一致收敛. 现在来讨论公式(3.14). 设广义函数 $F_r(x)$ 及 $F_a(x)$ 在 $C(r, s; 4)$ 类中为可积, 取 $N \geqslant r+s+\nu-1$. 根据引理 II, $h_+$ 及 $h_-$ 属于类 $C(r, s; 4)$. 因此过渡到极限,获得一致收敛

$$\phi_1(\theta_0, \cdots, \theta_3; \varepsilon) \to \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)h_+(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx + \\ + \frac{1}{2\pi}\int F_a(x)h_-(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx. \tag{5.7}$$

考虑到积分表示式(3.7)及所获得的极限关系(5.6),(5.7), 我们证明, 在所考察的复变域(1.3)所含的任一闭域内,函数 $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ 一致趋于极限

$$\tilde{F}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta_0, \cdots, \theta_3)d\theta_0\cdots d\theta_3}{\left(1-\frac{k_0}{r_0}e^{-i\theta_0}\right)\prod_a\left(1-\frac{k_a}{r_a}e^{-i\theta_a}\right)}; \tag{5.8}$$

$$\phi(\theta_0, \cdots, \theta_3) = \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)h_+(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx + \\ + \frac{1}{2\pi}\int F_a(x)h_-(x; \theta_0, \cdots, \theta_3)dx.$$

此函数是 $k$ 的解析函数,在区域(1.3)中为正规.

现在将所获得的积分表式变换成动量变量. 按常例,以 $\tilde{h}_+$, $\tilde{h}_-$ 表示函数 $h_+$, $h_-$ 的 Fourier 映象,而且我们注意到,不论指标 $r_1$, $s_1$ 如何,我们总可以选取 $r$, $s$,此时由包涵

$$h_+ \in C(r, s; 4|\nu; \Omega_4); \quad h_- \in C(r, s; 4|\nu; \Omega_4)$$

可导出包涵

$$\tilde{h}_+ \in C(r_1, s_1; 4|\nu; \Omega_4); \quad \tilde{h}_- \in C(r_1, s_1; 4|\nu, \Omega_4).$$

取 $r_1$, $s_1$ 使 $\tilde{F}_r(p)$, $\tilde{F}_a(p)$ 在类 $C(r_1, s_1; \nu)$ 中可积. 此时

$$\phi(\theta_0, \cdots, \theta_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5\int \tilde{F}_r(p)\tilde{h}_+(-p; \theta_0, \cdots, \theta_3)dp + \\ + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5\int \tilde{F}_a(p)\tilde{h}_-(-p; \theta_0, \cdots, \theta_3)dp.$$

令

$$H_\pm(p; k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^9 \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{h}_\pm(-p; \theta_0, \cdots, \theta_3)d\theta_0\cdots d\theta_3}{\left(1-\frac{k_0}{r_0}e^{-i\theta_0}\right)\prod_a\left(1-\frac{k_a}{r_a}e^{-i\theta_a}\right)}, \tag{5.9}$$

引进这些函数后，我们可以将关系式(5.8)表成形式为

$$\tilde{F}(k)=\int \tilde{F}_r(p)\,H_+(p,k)dp+\int \tilde{F}_a(p)H_-(p,k)dp. \tag{5.10}$$

显然，由公式(5.9)所定义的函数 $H_\pm$ 具有如下的通常的性质，对于任何一个在类 $C(r_1, s_1; 4)$ 中可积的广义函数 $f(p)$ 表式

$$\int f(p)H_\pm(p;k)dp$$

是 $k$ 的解析函数，在区域(1.3)中为正规.

为了精简起见，我们将总意味着 $H_\pm(p,k)$ 有如下的性质，它作为 $p$ 的函数是 $C(r_1, s_1;4)$ 类的，作为 $k$ 的函数是解析的，且在区域(1.3)中为正规. 这样的函数我们将称之为普适函数，因为它们的形式只和类 $C$ 的指标、数 $\eta$ 及其他等等有关. 而和此函数类中 $F_r$, $F_a$ 的特殊选定无关.

现在来讨论在区域(1.3)中实值的[1] $k=p$. 根据引理 III，我们有一致收敛

$$T(p_0\pm i0,\mathbf{p},\varepsilon)\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0,$$

并因而由式(3.3)断定，在所讨论的区域中，当 $\varepsilon\to+0$ 时，我们有

$$\tilde{F}_r(p,\varepsilon)\to\tilde{F}(p),\quad \tilde{F}_a(p,\varepsilon)\to\tilde{F}(p)$$

也是一致收敛的. 另一方面，在实值 $p$ 的整个空间中(广义)

$$\tilde{F}_r(p,\varepsilon)\to\tilde{F}_r(p),\quad \tilde{F}_a(p,\varepsilon)\to\tilde{F}_a(p)\quad \text{当 } \varepsilon\to+0$$

也是成立的.

结果在

$$|p_\alpha|<r_\alpha\quad \alpha=0,1,2,3$$

区域中有

$$\tilde{F}_r(p)=\tilde{F}_a(p)=\tilde{F}(p).$$

此处所获得的结果可以归结成定理形式如下：

定理 I. 1° 设给定广义函数 $F_r(x)$ 及 $F_a(x)$，其中第一个是推迟函数；而第二个为超前函数.

2° 设存在正数 $\eta$，使

$$\tilde{F}_r(p)=\tilde{F}_a(p)$$

于

$$|p_0|^2+|\mathbf{p}|^2<\eta^2$$

区域中.

3° 取正数 $r_0$, $r_a$, $R$ 满足不等式，

$$2|\mathbf{r}|<R\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}\right),\quad R^2+R^2\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right)^2+\mathbf{r}^2<\frac{\eta^2}{2}. \tag{5.11}$$

这时可以构成复变量 $k(k_0, k_1, k_2, k_3)$ 的解析函数 $\tilde{F}(k)$，在

$$|k_\alpha|<r_\alpha\quad \alpha=0,1,2,3$$

---

1) 一般而言，我们规定实动量用字母 $p$ 表示，而复动量用字母 $k$ 表示.

区域内为正规，以致在由不等式(5.12)所决定的实变量 $p(p_0, \cdots, p_3)$ 的区域内有

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_a(p) = \tilde{F}_r(p).$$

此外，取定足够大的指标 $r$，$s$ 以后，我们可以构成具有如下性质的“普适”函数 $H_\pm(p; k)$.

a) $H_\pm(p, k)$ 作为 $p$ 的函数属于类 $C(r, s; 4)$，而作为 $k$ 的函数是解析的，在区域(1.3)内为正规.

b) 在区域(5.12)内存在积分表示

$$\tilde{F}(k) = \int \tilde{F}_r(p) H_+(p; k)dp + \int \tilde{F}_a(p) H_-(p; k)dp.$$

## § 6

现在来推广定理 I. 讨论广义函数

$$F_{r,r}(x_1, x_2), \quad F_{r,a}(x_1, x_2),$$
$$F_{a,r}(x_1, x_2), \quad F_{a,a}(x_1, x_2),$$

对于这些函数

$$\left.\begin{aligned} &F_{r,r}(x_1, x_2) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim 0 \quad 或 \quad x_2 \lesssim 0; \\ &F_{r,a}(x_1, x_2) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim 0 \quad 或 \quad x_2 \gtrsim 0; \\ &F_{a,r}(x_1, x_2) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim 0 \quad 或 \quad x_2 \lesssim 0; \\ &F_{a,a}(x_1, x_2) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim \dot{0} \quad 或 \quad x_2 \gtrsim 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

假定在某一正数 $\eta$ 下：

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2) - \tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2) = 0, \quad 若 \quad p_{10}^2 + \mathbf{p}_1^2 < \eta^2, \quad j = r, a; \\ &\tilde{F}_{j,r}(p_1, p_2) - \tilde{F}_{j,a}(p_1, p_2) = 0, \quad 若 \quad p_{20}^2 + \mathbf{p}_2^2 < \eta^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

对于 $\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2)$，$\tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2)$ 各式应用定理 I，将这些式子视为 $p_1$ 之函数，过渡到函数

$$\tilde{F}_j(k_1; p_2),$$

对此函数的变量 $p_2$ 应用定理 I. 这样，我们证明以下的论断是正确的.

设 $r_0, \cdots, r_3$ 是满足不等式(5.11)的任意正数.

此时存在复变量 $k_1(k_{10}, \cdots, k_{13})$，$k_2(k_{20}, \cdots, k_{23})$ 的解析函数 $\tilde{F}(k_1, k_2)$ 在

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha, \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha \quad \alpha = 0, \cdots, 3 \tag{6.3}$$

区域内为正规. 对于此区域内的实值的 $p_1(p_{10}, \cdots, p_{13})$，$p_2(p_{20}, \cdots, p_{23})$：

$$\tilde{F}(p_1, p_2) = \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2) \quad i = r, a; \ j = r, a.$$

此外，在所考察的区域内存在积分表示式

$$\tilde{F}(k_1, k_2) = \sum_{(i,j=r,a)} \int \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2) H_{i,j}(p_1, p_2; k_1, k_2) dp_1 dp_2;$$

$$H_{ij}(p_1, p_2; k_1, k_2) = H_i(p_1; k_1) H_j(p_2; k_2) \quad H_r = H_+, H_a = H_-. \tag{6.4}$$

只要 $H_\pm$ (作为 $p$ 的函数)所属类 $C(r, s; 4)$ 的指标取得足够大.

我们讨论广义函数

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t) \quad i, j = r, a \quad t 为实数,$$

具有性质(6.1),(6.2),与 $t$ 无关. 我们注意,根据广义函数的定义本身,存在类 $C(r, s; 9)$,对于它函数 $F_{i,j}$ 是可积的. 从类 $C(r, s; 1)$ 中取任意函数 $h(t)$ 并讨论积分

$$F_{i,j}(x_1, x_2) = \int F_{i,j}(x_1, x_2; t)h(t)dt.$$

不难看出,这些 $F_{i,j}(x_1, x_2)$ 是对于类 $C(r, s; 8)$ 为可积的广义函数,而且它们满足条件(6.1),(6.2). 因而我们可以利用早先表述过的论断,因此就获得如下的引理.

引理 IV. 设给定广义函数

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t) \quad i, j = r, a.$$

满足条件

$$\left.\begin{aligned} &F_{r,r}(x_1, x_2; t) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim 0 \quad 或 \quad x_2 \lesssim 0; \\ &F_{r,a}(x_1, x_2; t) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim 0 \quad 或 \quad x_2 \gtrsim 0; \\ &F_{a,r}(x_1, x_2; t) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim 0 \quad 或 \quad x_2 \lesssim 0; \\ &F_{a,a}(x_1, x_2; t) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim 0 \quad 或 \quad x_2 \gtrsim 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{F}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0, \quad 若 \quad p_{10}^2 + \mathbf{p}_1^2 < \eta^2, \quad j = r, a; \\ &\tilde{F}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \tilde{F}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0, \quad 若 \quad p_{20}^2 + \mathbf{p}_2^2 < \eta^2, \quad i = r, a. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

设 $r_0, \cdots, r_3$ 为满足不等式(5.11)的任意正数,此时存在 $t$ 的广义函数 $\tilde{F}(k_1, k_2; t)$,它是复变量 $k_1, k_2$ 的解析函数,在

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha, \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{6.7}$$

区域内为正规. 而在满足不等式(6.7)的实 $p_1, p_2$ 区域内,有

$$\tilde{F}(p_1, p_2; t) = \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2; t).$$

现在讨论满足条件(6.5)的广义函数

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) \quad i, j = r, a.$$

假定代替条件(6.6),满足条件

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{f}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0, \\ &若 \quad |p_{10} - \lambda_{10}(t)|^2 + |\mathbf{p}_1 - \lambda_1(t)|^2 < \eta^2\varepsilon_1^2(t); \\ &\tilde{f}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \tilde{f}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0, \\ &若 \quad |p_{20} - \lambda_{20}(t)|^2 + |\mathbf{p}_2 - \lambda_2(t)|^2 < \eta^2\varepsilon_2^2(t); \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

$$\tilde{f}_{i,j}(p_1, p_2; t) = 0, \quad 若 \quad t < N. \tag{6.9}$$

再则假定此处所标明的函数 $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ 具有下列的共同性质.

1° $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ 在间隔 $N \leqslant t < \infty$ 内为连续,且无限次可微;

2° $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ 如多项式同等有界;

3° $\varepsilon_j(t)$ 恒为正,并适合不等式

$$\varepsilon_j(t) > \frac{\nu}{|t|^m}, \quad \nu > 0, \ m > 0;$$

4° $\lambda_{j\alpha}(t)$, $\varepsilon_j(t)$ 函数的任何导数(不论阶数如何),在 $N \leqslant t < \infty$ 间隔内一致有界.

现在假定将这些函数 $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ 以某一方式延拓至整个实轴,且保持上述性质不变. 这时不难证明,不论类 $C$ 之指标 $r, s$ 如何,总可以找到指标 $r_1, s_1$,以致由 $h(x_1, x_2; t) \in$

$C(r_1, s_1; 9)$ 得出

$$e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}h\{\varepsilon_1(t)x_1,\ \varepsilon_2(t)x_2; t\} \in C(r, s; 9),$$

结果对于任意的广义函数 $f(x_1, x_2; t)$，我们可以选择 $r_1, s_1$ 使积分

$$\int f(x_1, x_2; t)e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}h\{\varepsilon_1(t)x_1, \varepsilon_2(t)x_2; t\}dx_1dx_2dt$$

是 $h\{\varepsilon_1(t)x_1, \varepsilon_2(t)x_2; t\} \in C(r, s; 9)$ 的线性泛函. 但是这一线性泛函可以变换成形式为

$$\int f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; t\right)e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}}\frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4}h(x_1, x_2; t)dx_1dx_2dt,$$

它决定广义函数

$$\frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4}f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; t\right)e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}}.$$

于是，因为 $f_{i,j}(x_1, x_2; t)$ 是广义函数，

$$F_{i,j}(x_1, x_2; t) = \frac{1}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^4}f_{i,j}\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}; t\right)e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}} \tag{6.10}$$

各式也将为广义函数.

再则，由于 $f_{i,j}$ 满足条件(6.5)，所引入的函数 $F_{i,j}$ 也满足这些条件. 再注意到

$$\tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2; t) = \tilde{f}_{i,j}\{\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t\},$$

因此从式(6.8)得出，$\tilde{F}_{i,j}$ 满足条件(6.6).

因此我们对函数 $F_{i,j}(x_1, x_2; t)$ 可以应用引理IV，结果可以证明以下论断为正确的.

引理 V. 设给定广义函数

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t), \quad i, j = r, a$$

满足条件(6.5)，(6.8)，(6.9)，假定函数 $\lambda_{j,a}(t)$，$\varepsilon_j(t)$ 具有 1°，2°，3°，4° 各性质. 与定理 I 相同，取数 $r_a$，$\alpha = 0, 1, 2, 3$. 此时存在广义函数

$$\tilde{f}(\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)k_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)k_2; t),$$

它是复变量 $k_1, k_2$ 的解析函数，在

$$|k_{1a}| < r_a, \quad |k_{2a}| < r_a, \quad \alpha = 0, \cdots, 3 \tag{6.11}$$

区域内为正规，以致在满足不等式(6.11)的实 $p_1, p_2$ 的区域内：

$$\tilde{f}(\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t) =$$
$$= \tilde{f}_{i,j}(\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)p_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)p_2; t).$$

此外

$$\tilde{f}(\lambda_1(t) + \varepsilon_1(t)k_1, \lambda_2(t) + \varepsilon_2(t)k_2; t) = 0 \quad 当 \quad t < N.$$

## § 7

定理 II. 设给定常数：

$$M \geqslant \mu > 0, \quad \delta \geqslant 0, \quad 1 \geqslant \omega \geqslant 0, \quad V \geqslant 0$$

可以求得 $\rho > 0$，使得以下论断成立. 设

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) \quad i, j = r, a$$

是广义函数，对于空间旋转(矢量 $\mathbf{x}$)为不变，并满足条件(6.5)，而且除此之外尚满足条件

$$\mathcal{F}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \mathcal{F}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0, \tag{7.1}$$

若 $(p_{10} + t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < (M + \mu)^2$, $(p_{10} - t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < 9\mu^2$;

$$\mathcal{F}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \mathcal{F}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0, \tag{7.2}$$

若 $(p_{20} + t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < (M + \mu)^2$, $(p_{20} - t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < 9\mu^2$;

$$\mathcal{F}_{i,j}(p_1, p_2; t) = 0, \tag{7.3}$$

若 $t < \frac{1}{2}[M + \mu(1 + \delta)]$.

这时存在变量 $t$ 的广义函数

$$\phi(z_1, \cdots, z_5; t),$$

它是复变量 $z_1, \cdots, z_5$ 的解析函数，在

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \\ &|z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \\ &-V \leqslant \tau < \mu^2(1 - \omega), \quad 4a^2 \leqslant u^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

区域内为正规，其中

$$u^2\left[M + \mu(1 + \delta) + \frac{M^2 - \mu^2(1 - \omega)}{M + \mu(1 + \delta)}\right]^2 - 4M^2, \tag{7.5}$$

并且具有性质

1° $\phi(z_1, \cdots, z_5; t) = 0$, 若 $t < \frac{1}{2}[M + \mu(1 + \delta)]$;

2° 在实四维矢量 $p_1$, $p_2$ 的区域内，以下各量

$$\left.\begin{aligned} &z_1 = (p_{10} + t)^2 - \mathbf{p}_1^2, \quad z_2 = (p_{20} + t)^2 - \mathbf{p}_2^2, \quad z_3 = (p_{10} - t)^2 - \mathbf{p}_1^2, \\ &z_4 = (p_{20} - t)^2 - \mathbf{p}_2^2, \quad z_5 = (p_{10} - p_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

满足不等式

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \\ &|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad -V \leqslant \tau \leqslant \mu^2(1 - \omega), \quad 4a^2 \leqslant u^2, \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

我们有

$$\mathcal{F}_{i,j}(p_1, p_2; t) = \phi(z_1, \cdots, z_5; t). \tag{7.8}$$

证明 我们将以引理V为基础. 令

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{10}(t) = \lambda_{20}(t) = \frac{M^2 - \tau}{4t}; \\ &\lambda_1(t) = \mathbf{e}_1\varphi_1(t) + \mathbf{e}_2 a, \quad \lambda_2(t) = \mathbf{e}_1\varphi(t) - \mathbf{e}_2 a; \\ &\varphi(t) = \sqrt{\left[t - \frac{M^2 - \tau}{4t}\right]^2 - M^2 - a^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

其中 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 为二个任意的互相正交的单位坐标; $\tau$, $a$ 为任意的实数，满足不等式

$$-V \leqslant \tau < \mu^2(1 - \omega)^2, \quad 4a^2 \leqslant u^2; \tag{7.10}$$

并引入

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}}. \tag{7.11}$$

注意，对于我们感到有意义的间隔内

$$t \geqslant \frac{M + \mu(1 + \delta)}{2},$$

将有

$$\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 - a^2 > 0.$$

因此函数 $\varepsilon_j(t)$，$\lambda_j(t)$ 满足引理V中的条件 1°—4°. 然后取数 $\zeta$，使

$$\sup_{2t \geqslant M + \mu(1+\delta)} \left\{ \frac{\zeta}{\mu} \cdot \frac{2\sqrt{-M^2 + 2\left(t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2}}{t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}} + \zeta^2 \frac{1}{\left(t + \dfrac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2} \right\} < \begin{cases} 2\dfrac{M}{\mu} + 1, \\ 8. \end{cases} \tag{7.12}$$

此时显然有

$$2\sqrt{[\lambda_{j0}(t) \pm t]^2 + \lambda_j^2(t)}\, \varepsilon_j(t)\zeta\mu + \varepsilon_j^2(t)\zeta^2\mu^2 < \begin{cases} 2M\mu + \mu^2, \\ 8\mu^2. \end{cases} \tag{7.13}$$

现在取

$$|p_{10} - \lambda_{10}(t)|^2 + |\mathbf{p}_1 - \lambda_1(t)|^2 < \zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t),$$

我们有

$$\begin{aligned} (p_{10} \pm t)^2 - \mathbf{p}_1^2 &= [\lambda_{10}(t) \pm t]^2 - \lambda_1^2(t) + 2[\lambda_{10}(t) \pm t] \cdot [p_{10} - \lambda_{10}(t)] - \\ &\quad - 2\lambda_1(t)[\mathbf{p}_1 - \lambda_1(t)] + [p_{10} - \lambda_{10}(t)]^2 + [\mathbf{p}_1 - \lambda_1(t)]^2 < \\ &< [\lambda_{10}(t) \pm t]^2 - \lambda_1^2(t) + 2\sqrt{[\lambda_{10}(t) \pm t]^2 + \lambda_1^2(t)}\varepsilon(t)\zeta\mu + \varepsilon^2(t)\zeta^2\mu^2. \end{aligned} \tag{7.14}$$

但是，显然

$$[\lambda_{10}(t) + t]^2 - \lambda_1^2(t) = M^2, \quad [\lambda_{10}(t) - t]^2 - \lambda_1^2(t) = \tau,$$

因而根据式(7.13)及(7.14)，

$$(p_{10} + t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < M^2 + 2M\mu + \mu^2 = (M + \mu)^2;$$
$$(p_{10} - t)^2 - \mathbf{p}_1^2 < \tau + 8\mu^2 \leqslant 9\mu^2.$$

完全同理，从不等式

$$|p_{20} - \lambda_{20}(t)|^2 + |\mathbf{p}_2 - \lambda_2(t)| < \zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t),$$

将导出

$$(p_{20} + t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < (M + \mu)^2; \quad (p_{20} - t)^2 - \mathbf{p}_2^2 < 9\mu^2.$$

因此，从式(7.1)及(7.2)，我们得到

$$\mathfrak{f}_{r,j}(p_1, p_2; t) - \mathfrak{f}_{a,j}(p_1, p_2; t) = 0,$$

如果

$$|p_{10} - \lambda_{10}(t)|^2 + |\mathbf{p}_1 - \lambda_1(t)|^2 < \zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t);$$

以及我们得到

$$\mathfrak{f}_{i,r}(p_1, p_2; t) - \mathfrak{f}_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0,$$

如果

$$|p_{20}-\lambda_{20}(t)|^2+|\mathbf{p}_2-\lambda_2(t)|^2<\zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t).$$

因此，我们可以应用引理 V，其中取

$$\eta=\zeta\mu,\quad N=\frac{M+\mu(1+\delta)}{2}.$$

为了满足定理 I 中不等式(5.11)，我们取

$$r_0=\frac{1}{2\sqrt{6}}\zeta\mu,\quad |\mathbf{r}|=\frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu.$$

现在根据上述引理，我们证明下述论断的正确性.

存在 $t$ 的广义函数

$$\mathcal{f}(k_1,k_2;t), \tag{7.15}$$

它是四维复矢量 $k_1$, $k_2$ 的解析函数，在

$$\left.\begin{aligned}&|k_{10}-\lambda_{10}(t)|<\frac{1}{2\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t);\quad |\mathbf{k}_1-\lambda_1(t)|<\frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t);\\&|k_{20}-\lambda_{20}(t)|<\frac{1}{2\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t);\quad |\mathbf{k}_2-\lambda_2(t)|<\frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t)\end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

区域内为正规的，并且具有性质

1° 在实 $p_1$, $p_2$ 适合不等式(7.16)的区域内

$$\mathcal{f}_{i,i}(p_1,p_2;t)=\mathcal{f}(p_1,p_2;t);$$

2° $\mathcal{f}(p_1,p_2;t)=0$，　若　$t<\dfrac{M+\mu(1+\delta)}{2}$.

现在我们利用对于空间旋转的不变性条件，由于这一条件，函数(7.15)只通过五个变量

$$k_{10},\ k_{20},\ \mathbf{k}_1^2,\ \mathbf{k}_2^2,\ \mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2,$$

而与 $k_1$, $k_2$ 有关. 我们可以引进完全等价的一组变量来代替它们:

$$\left.\begin{aligned}&z_1=(k_{10}+t)^2-\mathbf{k}_1^2,\quad z_2=(k_{20}+t)^2-\mathbf{k}_2^2,\quad z_3=(k_{10}-t)^2-\mathbf{k}_1^2,\\&z_4=(k_{20}-t)^2-\mathbf{k}_2^2,\quad z_5=(k_{10}-k_{20})^2-(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)^2.\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

使

$$\mathcal{f}(k_1,k_2;t)=\Phi(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5;t). \tag{7.18}$$

因此，为了完成我们定理的证明，我们只要证实的是(在适当选择数 $\rho$ 之下)：对于满足以下不等式的任意复 $z_1,\cdots,z_5$:

$$\left.\begin{aligned}&|z_1-M^2|<\rho\mu^2,\quad |z_2-M^2|<\rho\mu^2,\quad |z_3-\tau|<\rho\mu^2,\quad |z_4-\tau|<\rho\mu^2,\\&|z_5+4a^2|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,\quad 4a^2\leqslant u^2,\quad -V\leqslant\tau\leqslant\mu^2(1-\omega),\end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

可以找到满足不等式(7.16)的复四维矢量.

因此我们来考虑根据已知 $z_1,\cdots,z_5$; $t$ 而构成 $k_1$, $k_2$ 的问题. 从式(7.17)我们求

得

$$k_{10}=\frac{z_1-z_3}{4t},\quad k_{20}=\frac{z_2-z_4}{4t}, \tag{7.20}$$

而且

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{k}_1^2&=t^2-\frac{z_1+z_3}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2,\\ \mathbf{k}_2^2&=t^2-\frac{z_2+z_4}{2}+\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2,\\ (\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)^2&=-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2.\end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

为了选择满足关系式(7.16)的 $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$,令

$$\mathbf{k}_1=A\mathbf{e}_1+C\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{k}_2=B\mathbf{e}_1-C\mathbf{e}_2,$$

其中 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 是二个相互正交的单位矢量. 此时，为了决定 $A$, $B$, $C$,我们从(7.21)获得方程

$$A^2+C^2=t^2-\frac{z_1+z_3}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2;$$

$$B^2+C^2=t^2-\frac{z_2+z_4}{2}+\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2;$$

$$(A-B)^2+4C^2=-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2,$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}A&=A(t;z_1,\cdots,z_5)\\ B&=B(t;z_1,\cdots,z_5)\end{aligned}\right\}=\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{D}\pm\frac{1}{2\sqrt{D}}\left\{\frac{z_2+z_4-z_1-z_3}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2-\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2\right\};\\ &C(t;z_1,\cdots,z_5)=\frac{1}{2}\left\{-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2-\right.\\ &\left.-\frac{1}{D}\left[\frac{-z_1+z_2-z_3+z_4}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2-\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

其中

$$D=4t^2-(z_1+z_2+z_3+z_4-z_5)+2\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2-\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2.$$

显然地

$$A(t;M^2,M^2;\tau,\tau;-4a^2)=\varphi(t);$$

$$B(t;M^2,M^2;\tau,\tau;-4a^2)=\varphi(t);$$

$$C(t;M^2,M^2;\tau,\tau;-4a^2)=a.$$

因而我们的定理将获证,只要我们证明:

$$\left|\frac{\xi_1-\xi_3}{4t}\right|<\frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\frac{\mu}{t+\dfrac{M^2-\tau}{4t}},\quad \left|\frac{\xi_2-\xi_4}{4t}\right|<\frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\frac{\mu}{t+\dfrac{M^2-\tau}{4t}};$$

$$\left|A\left(t;\ M^2+\xi_1,\ M^2+\xi_2,\ \tau+\xi_3,\ \tau+\xi_4,\ -4a^2+\xi_5\frac{M^2}{t^2}\right)-\right.$$

$$\left.-A(t;\ M^2,\ M^2;\ \tau,\ \tau;\ -4a^2)\right|<\frac{3}{8\sqrt{12}}\frac{\mu}{t+\dfrac{M^2-\tau}{4t}};$$

$$\left|B\left(t;\ M^2+\xi_1,\ M^2+\xi_2,\ \tau+\xi_3,\ \tau+\xi_4,\ -4a^2+\xi_5\frac{M^2}{t^2}\right)-\right.$$

$$\left.-B(t;\ M^2,\ M^2;\ \tau,\ \tau;\ -4a^2)\right|<\frac{3}{8\sqrt{12}}\frac{\mu}{t+\dfrac{M^2-\tau}{4t}};$$

$$\left|C\left(t;\ M^2+\xi_1,\ M^2+\xi_2,\ \tau+\xi_3,\ \tau+\xi_4,\ -4a^2+\xi_5\frac{M^2}{t^2}\right)-\right.$$

$$\left.-C\ (t;\ M^2,\ M^2;\ \tau,\ \tau;\ -4a^2)\right|<\frac{3}{8\sqrt{12}}\frac{\mu}{t+\dfrac{M^2-\tau}{4t}}. \tag{7.23}$$

对于

$$t\geqslant\frac{M+\mu(1+\delta)}{2},\quad -V\leqslant\tau\leqslant\mu(1-\omega),\quad 4a^2\leqslant u^2,$$

$$|\xi_j|<\rho\mu^2,\quad j=1,\cdots,5.$$

但是从考察[1]表式(7.22)直接得出选择足够小的 $\rho$ 是可能的.

注　我们讨论当 $\delta=\omega=0$ 时定理 II 的特殊情况. 在此情况下 $u=0$,因而 $a=0$. 这样,属于函数 $\phi(z_1,\cdots,z_5;\ t)$ 的正规域的 $z_5$ 值域将由不等式

$$|z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

所限定. 但是,利用完全初等的讨论不难扩充 $\mathrm{Re}\,z_5$ 可能变化的界限.

实际上,在类 $C(0,\infty;1)$ 中选取函数 $h(t)$,使

$$h(t)=0,\quad t<M+\frac{\mu}{2},$$

$$h(t)=1,\quad t>M+\mu.$$

令

$$f_{i,j}(x_1,x_2;\ t)=f^{(1)}_{i,j}(x_1,x_2;\ t)+f^{(2)}_{i,j}(x_1,x_2;\ t);$$
$$f^{(1)}_{i,j}(x_1,x_2;\ t)=[1-h(t)]f_{i,j}(x_1,x_2;\ t);$$
$$f^{(2)}_{i,j}(x_1,x_2;\ t)=h(t)f_{i,j}(x_1,x_2;\ t).$$

---

1) 函数 $A$, $B$ 的不等式当 $\xi_5$ 不乘在 $\frac{M^2}{t^2}$ 上时也成立. 只有当保证对函数 $C$ 的不等式时,这样的乘子才有必要,因为只有以 $\xi_5\frac{M^2}{t^2}$ 为宗量时,它的左端才在 $t$ 为大值时与 $\frac{1}{t}$ 成比例.

函数 $f_{i,j}^{(1)}$, $f_{i,j}^{(2)}$ 满足我们定理的条件; $f_{i,j}^{(1)}$ 当 $\omega=0$, $\delta=0$ 时满足,而 $f_{i,j}^{(2)}$ 当 $\omega=0$, $\delta=\dfrac{M}{\mu}$ 时满足. 现在我们来讨论函数 $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ 的正规域,只对宗量 $z_5$ 写出相应的不等式. 对于它们中的第一个有

$$|z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

如果

$$|\mathrm{Re}\, z_5|<\frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2,\quad |\mathrm{Im}\, z_5|<\frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

上面不等式将得到满足.

但是,显然

$$\phi^{(1)}=0,\quad \text{对于}\quad t>M+\mu.$$

因此,当

$$|\mathrm{Re}\, z_5|<\frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{M+\mu}\right)^2,\quad |\mathrm{Im}\, z_5|<\frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

时, $\Phi^{(1)}$ 为正规. 再者,对于 $\phi^{(2)}$,

$$u^2=\left(2M+\mu+\frac{M^2-\mu^2}{2M+\mu}\right)^2-4M^2>0.$$

因此,当

$$-u^2\leqslant \mathrm{Re}\, z_5\leqslant 0,\quad |\mathrm{Im}\, z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

时, $\phi^{(2)}$ 将是正规的. 设 $\rho_1$ 是

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{M+\mu}\right)^2,\quad \left(\frac{u}{\mu}\right)^2$$

两个数中较小的一个. 于是,我们看到, $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ 两函数, 因而它们的和 $\phi=\phi^{(1)}+\phi^{(2)}$, 当

$$-\rho\mu^2\leqslant \mathrm{Re}\, z_5\leqslant 0,\quad |\mathrm{Im}\, z_5|<\frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

时,将是正规的.

这样,我们就证明了下列论断的正确性.

定理 III. 如果当 $\omega=\delta=0$ 时定理 II 的条件得到满足, 则可选取足够小的 $\rho>0$, 使

$$\phi(z_1,\cdots,z_5;t)$$

在

$$|z_1-M^2|<\rho\mu^2,\quad |z_2-M^2|<\rho\mu^2,\quad |z_3-\tau|<\rho\mu^2,\quad |z_4-\tau|<\rho\mu^2,$$

$$-\rho\mu^2\leqslant \mathrm{Re}\, z_5\leqslant 0,\quad |\mathrm{Im}\, z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2;\quad -V\leqslant\tau\leqslant\mu^2$$

区域中为正规.

注意，Re $z_5$ 变化的下限可以大大地移动，但是这一点需要更深入地讨论.

## §8

定理 IV. 试讨论四维矢量 $x$ 的广义函数 $F_r(x)$ 及 $F_a(x)$，其中之一为推迟函数，而另一个为超前函数. 设它们的差式

$$f(x) = F_r(x) - F_a(x)$$

的 Fourier 映象 $\tilde{f}(p)$，当 $|p_0| < m$ 时化为零 ($\tilde{f}(p) = 0$). 此时，存在复四维矢量 $k$ 的解析函数 $\tilde{F}(k)$，在

$$|\mathrm{Im}\,\mathbf{k}| < |\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2 - m^2}| \tag{8.1}$$

区域内为正规，以致对于此域中的实值 $k = p$，有

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p).$$

证明 在函数类 $C(0, \infty; 1)$ 中取函数 $\varphi(t)$，使

$$\varphi(t) = 1, \quad x_0 \geqslant 0;$$
$$\varphi(t) = 0, \quad x_0 \leqslant -\delta,$$

其中 $\delta$ 为某一正数.

确定任意小的正 $\rho$，并且注意到，函数

$$\varphi(x_0)e^{-\rho x^2 + ikx}$$

将属于类 $C(\infty, \infty; 4)$，只要 Im $k_0 > 0$ ($k_0$ 为复量). 因此我们可定义积分

$$\tilde{F}_r(k; \rho) = \tilde{F}_r(k_0, \mathbf{k}; \rho) = \int F_r(x)\varphi(x_0)e^{-\rho x^2 + ikx}dx, \tag{8.2}$$

它表示 $k$ 的解析函数，在 Im $k_0 > 0$ 的区域中为正规. 不难看出，这一积分与函数 $\varphi(t)$ 的特殊选定无关. 实际上，如果 $\varphi_1$ 及 $\varphi_2$ 表示函数 $\varphi$ 的两种可能的实现，则有

$$\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0, \quad \text{对于} \quad x_0 \geqslant 0.$$

由此可见，根据在整个四维空间的推迟性

$$\int F_r(x)[\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)]e^{-\rho x^2 + ikx}dx = 0.$$

因此我们将式(8.2)写成形式

$$\tilde{F}_r(k; \rho) = \int F_r(x)e^{-\rho x^2 + ikx}dx. \tag{8.3}$$

将式(8.2)的右端作为这一积分的定义.

完全同理，我们定义函数

$$\tilde{F}_a(k; \rho) = \int F_a(x)e^{-\rho x^2 + ikx}dx \tag{8.4}$$

为解析函数，在 Im $k_0 < 0$ 的区域中为正规.

我们注意到，表式(8.3)，(8.4)对实值 $k_0$ 是有意义的. 实际上，此时可以将它们认为是一个变量 $x_0$ 的广义函数的 Fourier 映象：

$$\int F_j(x)e^{-\rho x^2 - i\mathbf{kx}}d\mathbf{x}, \quad j = r, a.$$

因此，对于实 $k_0$，$\tilde{F}_r(k_0, \mathbf{k}; \rho)$，$\tilde{F}_a(k_0, \mathbf{k}; \rho)$ 是 $k_0$ 的广义函数，又是 $\mathbf{k}$ 的解析函数. 也不

难证明,(对于实变量 $p_0$)有广义极限:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)&=\tilde{F}_r(p_0,\mathbf{k};\rho);\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)&=\tilde{F}_a(p_0,\mathbf{k};\rho).\end{aligned}\right\}\tag{8.5}$$

最后,广义而言,对于实四维矢量 $p$,

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\rho\to+0}\tilde{F}_r(p;\rho)&=\tilde{F}_r(p);\\ \lim_{\rho\to+0}\tilde{F}_a(p;\rho)&=\tilde{F}_a(p),\end{aligned}\right\}\tag{8.6}$$

其中 $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_a$ 是函数 $F_r(x)$, $F_a(x)$ 的通常的 Fourier 映象.

讨论差式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)\}=$$

$$=\tilde{F}_r(p_0,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0,\mathbf{k};\rho)=\int f(x)e^{ip_0x_0}e^{-\rho\mathbf{x}^2-i\mathbf{k}\mathbf{x}}dx_0d\mathbf{x}.$$

但是根据定理的条件

$$\int f(x)e^{ip_0x_0}dx_0=0,\quad \text{对于}\quad |p_0|<m.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)-\tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\mathbf{k};\rho)\}=0,\quad \text{对于}\quad |p_0|<m.\tag{8.7}$$

因此, $\tilde{F}_a(k;\rho)$, $\tilde{F}_r(k;\rho)$ 分别在 $\operatorname{Im}k_0>0$, $\operatorname{Im}k_0<0$ 的区域中表示同一个解析函数 $\tilde{F}(k;\rho)$. $\tilde{F}(k;\rho)$ 的定义域包含复矢量 $\mathbf{k}$ 的一切位置;对于复变量 $k_0$ 而言,这一函数有割线

$$-\infty<k_0\leqslant -m,\quad m\leqslant k_0<\infty.\tag{8.8}$$

注意此点后,确定数 $\lambda$, $m_1$:

$$0\leqslant\lambda\leqslant 1,\quad 0\leqslant m_1\leqslant m,\tag{8.9}$$

并构成表式

$$\Phi(k_0)=\tilde{F}(k_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho),\tag{8.10}$$

其中 $\mathbf{f}$ 为实矢量, $\mathbf{e}$ 为实单位矢量.

我们来构成"对称化的"及"反对称化的"函数,它们对其中根号符号的变化是不变的:

$$\left.\begin{aligned}\phi_s(k_0)&=\frac{1}{2}\tilde{F}(k_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)+\frac{1}{2}\tilde{F}(k_0,-\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho),\\ \phi_a(k_0)&=\frac{1}{2\sqrt{k_0^2-m_1^2}}\{\tilde{F}(k_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)-\tilde{F}(k_0,-\lambda\mathbf{e}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)\}.\end{aligned}\right\}\tag{8.11}$$

由于式(8.7),这些函数当 $|p_0|<m$ 时将有

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\{\phi_s(p_0+i\varepsilon)-\phi_s(p_0-i\varepsilon)\}=$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{F}_r(p_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)-\frac{1}{2}\tilde{F}_a(p_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)+$$

$$+\frac{1}{2}\tilde{F}_r(p_0,\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)-\frac{1}{2}\tilde{F}_a(p_0,-\lambda\mathbf{e}\sqrt{p_0^2-m_1^2}+\mathbf{f};\rho)=0.\tag{8.12}$$

完全同理，当 $|p_0| < m$，我们还求得

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \{\phi_a(p_0 + i\varepsilon) - \phi_a(p_0 - i\varepsilon)\} = 0. \tag{8.13}$$

因此，我们可以认为 $\Phi_s(k_0)$，$\Phi_a(k_0)$ 是复变量 $k_0$ 的解析函数，除了割线(8.8)以外，这些函数在整个复平面上是正规的.

现在来讨论这些函数在无穷远处可能递增的性质. 从截断因子的讨论

$$\exp(-\rho \mathbf{x}^2 - x_0 \operatorname{Im} k_0 \pm \lambda \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m_1^2}),$$

可以证明以下的性质： 有正整数 $n_0$，使得对于任意小的 $\sigma > 0$，$|\operatorname{Im} k_0| \geqslant \sigma$ 的表式 $|\Phi_s(k_0)|$，$|\Phi_a(k_0)|$ 以某一 $n_0$ 阶的多项式为限.

为了利用 Cauchy 定理，选择相应的乘子 $h(k_0)$ 以保证乘积

$$\Phi_s(k_0)h(k_0), \quad \Phi_a(k_0)h(k_0) \tag{8.14}$$

在无穷远处迅速地递减.

为此，我们取任意实变量 $\tau$ 的函数 $g(\tau)$，它在

$$a \leqslant \tau \leqslant b \quad (a > m^2)$$

间隔内具有各阶的连续导数，且函数及其一切导数在此间隔的界点上为零. 我们作复变函数

$$h^{(n)}(k_0) = \int_a^b \frac{g(\tau)}{(k_0^2 - \tau)^n} d\tau, \tag{8.15}$$

并且注意到它是解析函数，除了割线

$$\operatorname{Im}(k_0) = 0, \quad a \leqslant k_0^2 \leqslant b$$

以外，在整个复平面为正规. 在无穷远处 $h^{(n)}(k_0)$ 及其任意阶导数的递减不慢于

$$\frac{\text{const}}{|k_0^2|^n}.$$

除此以外，当

$$\operatorname{Im} k_0 \to +0; \quad \operatorname{Re} k_0 = p_0,$$

对于 $p_0(-\infty < p_0 < \infty)$ 而言，存在一致收敛[1]

$$h^{(n)}(k_0) \to h_+^{(n)}(p_0), \quad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q} \to \frac{d^q h_+^{(n)}(k_0)}{dp_0^q} \quad q = 1, 2 \cdots.$$

如果

$$\operatorname{Im} k_0 \to -0, \quad \operatorname{Re} k_0 = p_0,$$

则也有对 $p_0(-\infty < p_0 < \infty)$ 的一致收敛.

$$h^{(n)}(k_0) \to h_-^{(n)}(p_0); \quad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q} \to \frac{d^q h_-^{(n)}(p_0)}{dp_0^q}, \quad q = 1, 2 \cdots.$$

实变量 $p_0$ 的极限函数

$$h_+^{(n)}(p_0), \quad h_-^{(n)}(p_0)$$

及其任意阶的导数在整个实轴上为连续. 当 $p_0 \to \pm \infty$ 时，这些函数及其导数不慢于

---

1) 此处所考虑的是通常的一致收敛.

$\frac{\text{const}}{|p_0^2|^n}$ 而趋于零. 最后，显然，如果 $p_0^2 < a$ 或 $p_0^2 > b$，即不论如何，如果 $p_0^2 \leqslant m^2$，则 $h_+^{(n)}(p_0) = h_-^{(n)}(p_0)$.

因此 $(j = s, a)$

$$\Phi_j(p_0 + i0)h_+^{(n)}(p_0) - \Phi_j(p_0 - i0)h_-^{(n)}(p_0) = 0, \quad \text{如} \quad |p_0| \leqslant m, \tag{8.16}$$

其中

$$\Phi_j(p_0 \pm i0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_j(p_0 \pm i\varepsilon).$$

现在取 $2n \geqslant n_0 + 1$. 此时对于任意小的 $\sigma > 0$

$$|h(k_0)\Phi_j(k_0)| < \frac{C\sigma}{|k_0|}, \quad |\operatorname{Im} k_0| \geqslant \sigma.$$

其次，当序列 $\Phi_j(p \pm i\varepsilon)$ 广义收敛，我们可以根据这一收敛的定义本身求出使此收敛成立的类 $C(r, s; 1)$. 我们取 $2n \geqslant r - 1$，此时序列 $h(p_0 \pm i\varepsilon)\Phi_j(p_0 \pm i\varepsilon)$ 在类 $C(1, s; 1)$ 中为广义收敛. 对所选定的数 $n$，我们可以应用 Cauchy 定理，取积分迴线包围割线如图 60 所示. 当 $\delta \to +0$ 时，作极限过渡，我们获得

$$h(k_0)\Phi_j(k_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_j(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_j(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{\zeta - k_0}\, d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_j(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_j(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{\zeta - k_0}\, d\zeta \qquad (j = s, a).$$

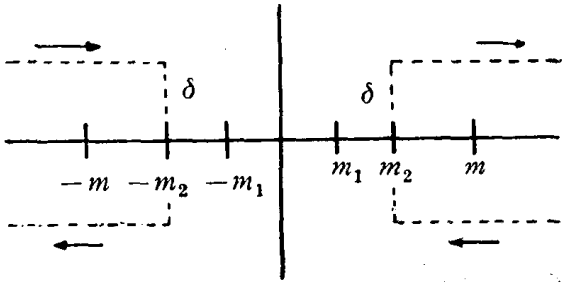



图 60

对于任意不位于割线(8.8)上之 $k_0$ 均成立. 但是根据 $\Phi_s$, $\Phi_a$ 的定义，有

$$\Phi(k_0) = \Phi_s(k_0) + \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\,\Phi_a(k_0).$$

结果

$$h(k_0)\Phi(k_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_s(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_s(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta + \\ + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty} \frac{\Phi_a(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_a(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_s(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_s(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta + \\ + \frac{\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2} \frac{\Phi_a(\zeta + i0)h_+(\zeta) - \Phi_a(\zeta - i0)h_-(\zeta)}{-k_0 + \zeta}\, d\zeta. \tag{8.17}$$

现在来讨论任意四维复矢量 $k$，它满足不等式(8.1). 显然，对于此矢量，可以找到

$m_1^2 < m^2$,使

$$|\mathrm{Im}\,\mathbf{k}| < |\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}|. \tag{8.18}$$

在我们的讨论中就利用 $m_1^2$ 的这种数值. 其次,对于已知 $k$ 我们作 $\lambda(k)$, $\mathbf{e}(k)$,令

$$\lambda(k)=\frac{|\mathrm{Im}\,\mathbf{k}|}{|\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}|},\quad \mathbf{e}(k)=\frac{\mathrm{Im}\,\mathbf{k}}{|\mathrm{Im}\,\mathbf{k}|}\cdot\frac{\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{|\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}|}. \tag{8.19}$$

此时,

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{k}=\lambda(k)\mathbf{e}(k)\,\mathrm{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}, \tag{8.20}$$

并取

$$\mathbf{f}=\mathrm{Re}\,\mathbf{k}-\lambda(k)\mathbf{e}(k)\,\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}+\mathbf{q},$$

其中 $\mathbf{q}$ 是任意实矢量. 由式(8.17)得到

$$\begin{aligned}h(k_0)\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)=&\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{A_s(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)}{-k_0+\zeta}\,d\zeta+\frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{A_a(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)}{-k_0+\zeta}\,d\zeta+&\\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{A_s(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)}{-k_0+\zeta}\,d\zeta+\frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{A_a(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)}{-k_0+\zeta}\,d\zeta,&\end{aligned} \tag{8.21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A_s(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)=\\ &=\frac{h_+(\zeta)}{2}\{\tilde{F}_r(\zeta,\mathbf{V}_-+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)+\tilde{F}_r(\zeta,-\mathbf{V}_++\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)\}-\\ &\quad-\frac{h_-(\zeta)}{2}\{\tilde{F}_a(\zeta,\mathbf{V}_-+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)+\tilde{F}_a(\zeta,-\mathbf{V}_++\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)\};\\ &A_a(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)=\\ &=\frac{h_+(\zeta)}{2\sqrt{\zeta^2-m_1^2}}\{\tilde{F}_r(\zeta,\mathbf{V}_-+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)-\tilde{F}_r(\zeta,-\mathbf{V}_++\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)\}-\\ &\quad-\frac{h_-(\zeta)}{2\sqrt{\zeta^2-m_1^2}}\{\tilde{F}_a(\zeta,\mathbf{V}_-+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)-\tilde{F}_a(\zeta,-\mathbf{V}_++\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)\},\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

并且引入记号

$$\mathbf{V}_\pm=\lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2}\pm\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}).$$

此处我们强调指出:

$$\left.\begin{aligned}A_s(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)=0,\\ A_a(\zeta,\mathbf{q};k,\rho)=0,\end{aligned}\right\}\quad 若\quad |\zeta|<m. \tag{8.23}$$

现在来研究极限过渡 $\rho\to 0$. 譬如说,我们来证明,对于 $\zeta>m_2$,表式

$$\tilde{F}_r\{\zeta,\lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2}-\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2})+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho\}$$

作为变量 $\zeta$, $\mathbf{q}$ 的函数,广义收敛于

$$\tilde{F}_r\{\zeta,\lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2}-\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2})+\mathrm{Re}\,\mathbf{k}+\mathbf{q}\}.$$

事实上,考虑积分

$$\int \tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\}H(\zeta, \mathbf{q})d\zeta d\mathbf{q},$$

其中函数 $H(\zeta, \mathbf{q})$ 属于某一指标 $r, s$ 相当高的函数类 $C(r, s; 4)$，且当 $\zeta < m_2$ 时为零.

我们有

$$\int \tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\}H(\zeta, \mathbf{q})d\zeta d\mathbf{q} =$$

$$= \int \tilde{F}_r(p_0, \mathbf{p}; \rho)H\{p_0, \mathbf{p} + \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2} - \sqrt{p_0^2-m_1^2}) - \mathrm{Re}\,\mathbf{k}\}dp_0 d\mathbf{p}.$$

注意到 $m_2 > m_1$，可以指出 $(p_0^2 - m_1^2)^{1/2}$ 对于 $p_0 > m_2 > m_1$ 是正规的，因此，表示式

$$H\{p_0, \mathbf{p} + \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2} - \sqrt{p_0^2-m_1^2}) - \mathrm{Re}\,\mathbf{k}\}$$

作为 $p_0, p$ 的函数也属于类 $C(r, s; 4)$. 但由于式(8.6)

$$\tilde{F}_r(p_0, \mathbf{p}; \rho) \to \tilde{F}_r(p_0, \mathbf{p}), \quad \rho \to +0.$$

于是，我们有

$$\int \tilde{F}_r(p_0, \mathbf{p}; \rho)H\{p_0, \mathbf{p} + \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2} - \sqrt{p_0^2-m_1^2}) - \mathrm{Re}\,\mathbf{k}\}\, dp_0 d\mathbf{p} \to$$

$$\to \int \tilde{F}_r(p_0, \mathbf{p})H\{p_0, \mathbf{p} + \lambda(k)\mathbf{e}(k)\,(\mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2} - \sqrt{p_0^2-m_1^2}) - \mathrm{Re}\,\mathbf{k}\}dp_0 d\mathbf{p},$$

即

$$\int \tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\}H(\zeta, \mathbf{q})d\zeta d\mathbf{q} \to$$

$$\to \int \tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}\}H(\zeta, \mathbf{q})d\zeta d\mathbf{q}. \quad (8.24)$$

因为式(8.24)中的极限趋近对 $k$ 是一致收敛(在所讨论区域(8.18)中每一点的足够小邻域中)，则我们可以说存在关系式

$$\tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}; \rho\} \to$$

$$\to \tilde{F}_r\{\zeta, \lambda(k)\mathbf{e}(k)(\sqrt{\zeta^2-m_1^2} - \mathrm{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2}) + \mathrm{Re}\,\mathbf{k} + \mathbf{q}\} \quad (8.25)$$

对于变量 $\zeta, \mathbf{q}$ 广义收敛，对于 $k$ 一致收敛. 对于表式(8.22)所含的其他函数 $\tilde{F}_r, \tilde{F}_a$ 情况完全相同.

我们作无限次可微的函数 $u(\zeta)$，使

$$u(\zeta) = 0, \quad \zeta \leqslant m_2,$$
$$u(\zeta) = 1, \quad \zeta \geqslant m.$$

则根据式(8.23)，我们在公式(8.21)右端的积分号下，可以引进函数 $u(\zeta)$ 和 $u(-\zeta)$. 再在指标 $r, s$ 足够大的类 $C(r, s; 3)$ 中取任意函数 $f(\mathbf{q})$，此时在(8.24)类型的关系式中，可以令

$$H(\zeta, \mathbf{q}) = h_+(\zeta)u(\pm\zeta)\frac{f(\mathbf{q})}{k_0 - \zeta},$$

或者

$$H(\zeta, \mathbf{q}) = h_-(\zeta)u(\pm\zeta)\frac{f(\mathbf{q})}{k_0 - \zeta},$$

因为函数 $h_+(\zeta)$，$h_-(\zeta)$ 的递减速度可以取得足够大，而分母 $k_0-\zeta$ 在实际积分区域中不为零．由此可以得出存在极限

$$\lim_{\rho\to+0} h(k_0)\int \tilde{F}(k_0,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)f(\mathbf{q})d\mathbf{q},$$

而且由于 $h(k_0)$ 的任意性，存在极限

$$\lim_{\rho\to+0}\int \tilde{F}(k_0,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)f(\mathbf{q})d\mathbf{q}, \tag{8.26}$$

还容易注意到，对于 $k$ 的极限趋近按上述意义是一致收敛的．

此处我们已证明广义收敛这一事实，以下将加强这一结果，进一步证明

$$\tilde{F}(k_0,\mathbf{k};\rho)\to\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}) \tag{8.27}$$

是一致收敛的．在复平面 $k'_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 中我们作出以 $k_\alpha$ 点为中心，以 $\delta$ 为半径的圆 $C_\alpha$．数 $\delta$ 我们取得足够小，以致分量 $k'_\alpha$ 在 $C_\alpha$ 内或在其边界上的一切 $\mathbf{k}'$ 将属于区域 (8.18)．此时按照 Cauchy 定理有

$$\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}+\mathbf{q};\rho)=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_1\times C_2\times C_3}\frac{\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}'+\mathbf{q};\rho)}{\prod\limits_{(\alpha)}(k'_\alpha-k_\alpha)}\prod_{(\alpha)}dk'_\alpha,$$

采用替代 $\mathbf{k}\to\mathbf{k}-\mathbf{q}$，求得

$$\tilde{F}(k_0,\mathbf{k};\rho)=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_1\times C_2\times C_3}\frac{\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}'+\mathbf{q};\rho)}{\prod\limits_{(\alpha)}(k'_\alpha-k_\alpha+q_\alpha)}\prod_{(\alpha)}dk'_\alpha. \tag{8.28}$$

因为在这一间隔内

$$|k'_\alpha-k_\alpha|=\delta,$$

则当

$$|q_\alpha|<\frac{\delta}{2}$$

时，分母不等于零，而且按其模大于 $\left(\frac{\delta}{2}\right)^3$．

现在取实变量 $q_\alpha$ 的任意函数 $\varphi(\mathbf{q})$，它属于类 $C(r,s;3)$，指标 $r$，$s$ 足够大，使

$$\int\varphi(\mathbf{q})d\mathbf{q}=1, \tag{8.29}$$

如果至少对一个 $\alpha$ 来说，$|q_\alpha|\geqslant\frac{\delta}{2}$，则 $\varphi(\mathbf{q})=0$．此时从式(8.28)得到

$$\tilde{F}(k_0,\mathbf{k};\rho)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_1\times C_2\times C_3}\left\{\int\tilde{F}(k_0,\mathbf{k}'+\mathbf{q};\rho)\frac{\varphi(\mathbf{q})}{\prod\limits_{(\alpha)}(k'_\alpha-k_\alpha+q_\alpha)}d\mathbf{q}\right\}\prod_{(\alpha)}dk'_\alpha. \tag{8.30}$$

但是，由于式(8.29)，变量 $q_\alpha$ 的函数

$$f(\mathbf{q})=\frac{\varphi(\mathbf{q})}{\prod\limits_{(\alpha)}(k'_\alpha-k_\alpha+q_\alpha)}\quad k_\alpha\in C_\alpha,$$

也属于类 $C(r,s;3)$，而且我们对于式(8.30)的右端可以应用前面证明了的关于极限存在

(8.26)以及相应极限的一致性等结果.

这样,我们看出,在区域(8.18)中任意点 $k$ 的足够小的邻域内, $k$ 的解析函数序列

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}; \rho)$$

是一致收敛. 因此根据熟悉的极限函数定理,

$$\tilde{F}(k_0, \mathbf{k}) = \lim_{\rho \to +0} \tilde{F}(k_0, \mathbf{k}; \rho) \tag{8.31}$$

是变量 $k_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ 的解析函数,在区域(8.18)内为正规.

注意,在我们讨论中可取 $m_1$ 任意逼近于 $m$, 我们看到这一函数在整个区域(8.1)内是正规的. 根据式(8.6),我们可证明,对于这一区域中的实 $p$,所讨论的函数与 $\tilde{F}_r = \tilde{F}_a$ 相重合,因而我们的定理完全获证.

## § 9

在上节中所证明的定理IV可以简单地推广到函数依赖于两个四维矢量 $x_1$, $x_2$ 及参量 $t$ 时的情况. 此外,代替中心对称间隔 $|p_0| < m$, 可以讨论更一般的间隔 $a < p_0 < b$. 此时不等式

$$|\mathrm{Im}\, \mathbf{k}|^2 < |\mathrm{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}|^2$$

自然应该用

$$|\mathrm{Im}\, \mathbf{k}|^2 < \left| \mathrm{Im} \sqrt{\left(k_0 - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \right|$$

来代替,因此,我们证明下述论断的正确性.

引理 VI. 设给定广义函数

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) \quad (i, j = r, a)$$

满足条件(6.5). 此外,假设

$$\left.\begin{aligned} f_{r,i}(p_1, p_2; t) - f_{a,i}(p_1, p_2; t) = 0, \quad \text{若} \quad \alpha < p_{10} < \beta; \\ f_{i,r}(p_1, p_2; t) - f_{i,a}(p_1, p_2; t) = 0, \quad \text{若} \quad \alpha < p_{20} < \beta. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

此时存在 $t$ 的广义函数

$$f(k_1, k_2; t)$$

是复变量 $k_1$, $k_2$ 的解析函数,在

$$\left.\begin{aligned} |\mathrm{Im}\, \mathbf{k}_1|^2 < \left| \mathrm{Im} \sqrt{\left(k_{10} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \right|; \\ |\mathrm{Im}\, \mathbf{k}_2|^2 < \left| \mathrm{Im} \sqrt{\left(k_{20} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \right| \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

区域内正规,以致在满足这些不等式的实 $p_1$, $p_2$ 区域内,有

$$f(p_1, p_2; t) = f_{i,j}(p_1, p_2; t).$$

以这一引理以及定理II为基础,我们证明以下的论断.

定理 V. 如果定理III的条件满足,则存在正数 $\rho$, 以致变量 $z_1, \cdots, z_5$ 的"正规域"可以由不等式给定

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2,$$

$$-4\frac{M}{M+\mu}\mu^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad -V \leqslant \tau \leqslant \mu^2. \tag{9.3}$$

証明　我们将分别考虑两种情况:

$$-V \leqslant \tau < 0; \tag{9.4}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \mu^2. \tag{9.5}$$

首先取式(9.4)情况来讨论，并应用定理 II,令 $\omega = 1$, $\delta = 0$. 因为目前所证明的对定理 III 的一切推广只对变量 $z_5$ 而言,此处只写出对此变量的不等式.

在所考察的情况下,

$$|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad 4a^2 \leqslant u^2, \tag{9.6}$$

其中

$$u^2 = \left(M^2 + \mu + \frac{M^2}{M+\mu}\right)^2 - 4M^2. \tag{9.7}$$

但是,如果

$$-u^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

不等式(9.6)将满足,另一方面,从(9.7)有

$$u^2 = \left(M + \mu + \frac{\mu^2}{M+\mu}\right)^2 - 4M^2 > \frac{4M}{M+\mu}\mu^2.$$

因此,在(9.4)情况下,区域(9.3)实际上处于"正规域"之中.

现在来讨论(9.5)情况，我们取足够小的数 $\sigma > 0$(以后将更详细地确定此数)，并在类 $C(0, \infty; 1)$ 中作函数 $h(t)$,使

$$h(t) = 0, \quad t \leqslant \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4} - \sigma\mu,$$

$$h(t) = 1, \quad t \geqslant \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4}.$$

令

$$f_{i,j}(x_1, x_2; t) = f_{i,j}^{(1)}(x_1, x_2; t) + f_{i,j}^{(2)}(x_1, x_2; t),$$

其中

$$f_{i,j}^{(1)} = h(t)f_{i,j}, \quad f_{i,j}^{(2)} = [1 - h(t)]f_{i,j}.$$

在所讨论的式(9.5)情况下,对 $f_{i,j}^{(1)}$ 及 $f_{i,j}^{(2)}$ 分别证明我们的定理，因为这样一来对于它们的和,定理也是正确的.

取 $f_{i,j}^{(1)}$ 并且利用定理 II,令 $\omega = 0$, $\delta = \frac{1}{2} - 2\sigma$,此时注意到,区域

$$-u^2 \leqslant \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

其中

$$u^2 = \left[M + \mu(1+\delta) + \frac{M^2 - \mu^2}{M + \mu(1+\delta)}\right]^2 - 4M^2$$

在"正规域"之中. 实际上,

$$u^2=\left[2M+\frac{\mu^2(1+\delta)^2-\mu^2}{M+\mu(1+\delta)}\right]^2-4M^2>4\frac{M\mu^2}{M+\mu}\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}(2\delta+\delta^2).$$

其次,显然,当 $\delta=\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}[2\delta+\delta^2]>1. \tag{9.8}$$

因此总可以选取 $\sigma$,使得 $\delta=\frac{1}{2}-2\sigma$ 时,式(9.8)是满足的. 此时

$$u^2>4\frac{M\mu^2}{M+\mu},$$

而且区域(9.3)是适当的.

尚待我们讨论 $f_{i,j}^{(2)}$. 此处我们将利用引理 VI. 因为

$$f_{i,j}^{(2)}(p_1,p_2;t)=0,\quad 若\quad t<\frac{M+\mu}{2},\quad 或\ t>\frac{M}{2}+\frac{3\mu}{4},$$

则可以限于间隔

$$\frac{M+\mu}{2}\leqslant t\leqslant\frac{M}{2}+\frac{3\mu}{4}. \tag{9.9}$$

我们取不等式

$$(k_0+t)^2-\mathbf{k}^2<(M+\mu)^2,\quad (k_0-t)^2-\mathbf{k}^2<(3\mu)^2. \tag{9.10}$$

显然,它们将会满足,如果

$$-M-\mu<k_0+t<M+\mu,\quad -3\mu<k_0-t<3\mu.$$

也就是,如果

$$t-3\mu<k_0<M+\mu-t.$$

因此,当

$$\frac{M+\mu(1+\delta)}{2}-3\mu<k_0<M+\mu-\frac{M+\mu(1+\delta)}{2},\quad \delta=\frac{1}{2}$$

时,(9.10)是正确的.

注意到关系式(7.1),(7.2),由此我们证明,当

$$\alpha=\frac{M+\mu(1+\delta)}{2}-3\mu,\quad \beta=M+\mu-\frac{M+\mu(1+\delta)}{2};\quad \delta=\frac{1}{2} \tag{9.11}$$

时,在所讨论的区域中引理 VI 的条件得到满足,但是根据我们定理的条件,函数 $f_{i,j}^{(2)}$ 应该对于空间的旋转是不变的,我们看到,函数

$$f^{(2)}(k_1,k_2;t)$$

在(9.2)区域内为正规,可以表示成形式为

$$\Phi^{(2)}(z_1,\cdots,z_5;t),$$

其中 $z_1,\cdots,z_5$ 由表式(7.17)给定. 与证明定理 II 时的讨论相同,我们将 $k_1$, $k_2$ 通过公式(7.20),(7.22)用 $z_1,\cdots,z_5;t$ 来表示,此时相应的正规域可以由不等式

$$|\operatorname{Im} A|^2+|\operatorname{Im} C|^2<\left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(\frac{z_1-z_3}{4t}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}\right|^2;$$
$$|\operatorname{Im} B|^2+|\operatorname{Im} C|^2<\left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(\frac{z_2-z_4}{4t}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}\right|^2 \tag{9.12}$$

来给定.

设不等式(9.12)对

$$z_1=z_2=M^2,\quad z_3=z_4=\tau,\quad z_5=-4a^2 \tag{9.13}$$

是正确的,其中

$$a^2\leqslant\frac{M}{M+\mu}\mu^2. \tag{9.14}$$

此时，由于函数 $A$, $B$, $C$ 在式(9.13)之邻域为连续，以及 $t$ 的变化间隔为有界，我们总可以选择这样小的正 $\rho$, 使不等式对于区域(9.3)中的一切 $z$ 是满足的. 因而我们的定理获证.

换句话说,我们只要证明对于值(9.13),不等式(9.12)是成立的.

对于所有这些值,我们有

$$|\operatorname{Im} A|^2\leqslant a^2;\quad |\operatorname{Im} B|^2\leqslant a^2,\quad \operatorname{Im} C=0.$$

式(9.12)右端大于 $a^2$,因为由于式(9.5),

$$\left(3-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\mu^2}{4}-\left(\frac{M^2-\tau}{4t}-\frac{M}{2}+\mu\right)^2>\frac{25}{26}\mu^2\left(\frac{M^2}{2(M+\mu)}-\frac{M}{2}+\mu\right)^2=$$
$$=\frac{25}{26}\mu^2-\frac{1}{4}\left(\frac{M\mu+3\mu^2}{M+\mu}\right)^2>\mu^2>\frac{M}{M+\mu}\mu^2\geqslant a^2.$$

这样在条件(9.14)下,对于值(9.13),不等式(9.12)实际上是满足的. 因而证明完毕.

## §10

引理 VII. 我们讨论三个四维矢量的广义标量函数

$$F_{i,j}(y_1,y_2,y_3),\quad i,j=r,a, \tag{10.1}$$

满足下列条件:

$$\left.\begin{aligned}
&F_{r,r}(y_1,y_2,y_3)=0,\quad 若\quad y_1\lesssim 0,\quad 或\quad y_2\lesssim 0;\\
&F_{r,a}(y_1,y_2,y_3)=0,\quad 若\quad y_1\lesssim 0,\quad 或\quad y_2\gtrsim 0;\\
&F_{a,r}(y_1,y_2,y_3)=0,\quad 若\quad y_1\gtrsim 0,\quad 或\quad y_2\lesssim 0;\\
&F_{a,a}(y_1,y_2,y_3)=0,\quad 若\quad y_1\gtrsim 0,\quad 或\quad y_2\gtrsim 0;
\end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde F_{r,j}(q_1,q_2,q_3)-\tilde F_{a,j}(q_1,q_2,q_3)=0,\quad 若\quad \begin{cases}(q_1+q_3)^2<(M+\mu)^2,\\ (q_1-q_3)^2<(3\mu)^2;\end{cases}\\
&\tilde F_{i,r}(q_1,q_2,q_3)-\tilde F_{i,a}(q_1,q_2,q_3)=0,\quad 若\quad \begin{cases}(q_2+q_3)^2<(M+\mu)^2,\\ (q_2-q_3)^2<(3\mu)^2;\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

$$\tilde F_{i,j}(q_1,q_2,q_3)=0,\quad 若\quad q_3^2<\frac{(M+\mu)^2}{4}\quad 或\quad q_{30}<0. \tag{10.4}$$

此时可以构成实变量 $z_6$ 的广义函数

$$\psi(z_1, \cdots, z_5, z_6),$$

它是复变量 $z_1, \cdots, z_5$ 的解析函数，并具有以下性质：

1° $\psi$ 在以下区域内为正规：

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2, \\ &-\frac{4M}{M+\mu}\mu^2 < \operatorname{Re} z_5 \leqslant 0, \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2\frac{M^2}{z_6}, \quad -V \leqslant \tau \leqslant M, \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

其中 $V$ 是任意确定的正数，$\rho$ 是足够小的正数(与 $V$ 有关)；

2° 若 $z_6 < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2$，则 $\psi(z_1, \cdots, z_5, z_6) = 0$； (10.6)

3° 对于实值的 $q_1, q_2, q_3$，

$$z_1 = (q_1 + q_3)^2, \quad z_2 = (q_2 + q_3)^2, \quad z_3 = (q_1 - q_3)^2,$$
$$z_4 = (q_2 - q_3)^2, \quad z_5 = (q_1 - q_2)^2, \quad z_6 = q_3^2.$$

各量满足不等式(10.5)，我们有

$$\tilde{F}_{i,j}(q_1, q_2, q_3) = \psi(z_1, \cdots, z_5, z_6), \quad 若 \quad q_{30} > 0.$$

证明　我们将所作的论断化为引理 VI 及定理 V. 考虑表式

$$\int F_{i,j}(y_1, y_2, y_3)e^{iq_3y_3}dy_3, \tag{10.7}$$

其中 $q_3 = tl$，而 $l$ 是时间型的四维单位矢量

$$l_0 > 0, \quad l^2 = 1.$$

我们作 Lorentz 变换，使得 $l$ 在新的坐标系中相应的量规定用带“撇”的记号来表示. 可以认为表示(10.7)是函数

$$f_{i,j}(y_1', y_2'; t).$$

不难看出，由于我们引理的条件，这些函数满足定理 V 中一切条件. 因此我们可以作相应的函数

$$\phi(z_1, \cdots, z_5; t),$$

其中

$$z_1 = (q_{10}' + t)^2 - \mathbf{q}_1'^2, \quad z_2 = (q_{20}' + t)^2 - \mathbf{q}_2'^2,$$
$$z_3 = (q_{10}' - t)^2 - \mathbf{q}_1'^2, \quad z_4 = (q_{20}' - t)^2 - \mathbf{q}_2'^2,$$
$$z_5 = (q_1' - q_2')^2.$$

当然，由于下列表式的标量性质，显然

$$z_1 = (q_1 + q_3)^2, \quad z_2 = (q_2 + q_3)^2,$$
$$z_3 = (q_1 - q_3)^2, \quad z_4 = (q_2 - q_3)^2,$$
$$z_5 = (q_1 - q_2)^2.$$

但是，

$$\phi(z_1, \cdots, z_5; t) = 0, \quad 对于 \quad t < \frac{M+\mu}{2}.$$

因此可以引进函数 $\psi(z_1, \cdots, z_5, z_6)$，令

$$\psi(z_1, \cdots, z_5, z_6)\begin{cases} = \phi(z_1, \cdots, z_5, \sqrt{z_6}), & z_6 > 0, \\ = 0, & z_6 < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2. \end{cases}$$

引理 VII 的正确性现在显然可见.

注　我们考虑比较一般的情况,当函数

$$F^{\nu}_{i,j}(y_1, y_2, y_3) \quad \nu = 1, 2, \cdots, l$$

满足引理 VII 中除标量性条件以外的一切条件. 我们假定,在 Lorentz 羣中 $\mathscr{L}$ 的变换下,我们的函数作线性变换:

$$F^{\nu}_{i,j}(\mathscr{L}y_1, \mathscr{L}y_2, \mathscr{L}y_3) = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant l} A_{\nu,\nu'}(\mathscr{L})F^{\nu'}_{i,j}(y_1, y_2, y_3), \tag{10.8}$$

其中 $A(\mathscr{L})$ 为此羣的某一表示, 它分解成为通常的张量及旋量表示. 由此得到 $\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(q_1, q_2, q_3)$ 将通过 $q_1, q_2, q_3$ 的标量函数线性地表示出来(以 $q_i$ 为多项式的系数),这就保证了应用引理的可能性. 不难看出,在此情况下,引理 VII 的结果有下列平庸的改变.

可作实变量 $z_6$ 的广义函数的有限系

$$\phi_\lambda(z_1, \cdots, z_5, z_6) \quad \lambda = 1, \cdots, s$$

这些函数是复变量 $z_1, \cdots, z_6$ 的解析函数,而且具有性质 1°, 2°. 对于实 $q_1, q_2, q_3$,诸量 $z$ 满足不等式(10.5),利用

$$q^{\alpha_1}_{i_1} \cdots q^{\alpha_s}_{i_s}\phi_\lambda(z_1, \cdots, z_5, z_6)$$

类型有限项之和,如果此时 $q_{30} > 0$.

从这里得出我们的基本定理.

定理 VI. 考虑四维矢量的平移不变的广义函数

$$F^{\nu}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4) \quad i = r, a, \ j = r, a, \ \nu = 1, \cdots, l,$$

在 Lorentz 羣中 $\mathscr{L}$ 的变换下作线性变换

$$F^{\nu}_{i,j}(\mathscr{L}x_1, \cdots, \mathscr{L}x_4) = \sum_{1\leqslant\nu'\leqslant l} A_{\nu,\nu'}(\mathscr{L})F^{\nu'}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4), \tag{10.9}$$

其中 $A(\mathscr{L})$ 为这一羣中的某一表示, 它分解为通常的张量及旋量表示. 除此之外, 设所引进的函数满足下列条件:

$$\left.\begin{aligned} &F^{\nu}_{r,r}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim x_3, \quad 或 \quad x_2 \lesssim x_4; \\ &F^{\nu}_{r,a}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad 若 \quad x_1 \lesssim x_3, \quad 或 \quad x_2 \gtrsim x_4; \\ &F^{\nu}_{a,r}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim x_3, \quad 或 \quad x_2 \lesssim x_4; \\ &F^{\nu}_{a,a}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad 若 \quad x_1 \gtrsim x_3, \quad 或 \quad x_2 \gtrsim x_4. \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

考虑 Fourier 映象

$$\int F^{\nu}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4)\exp i(p_1x_1 + \cdots + p_4x_4)dx_1 \cdots dx_4 =$$

$$= \delta(p_1 + \cdots + p_4)\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \cdots, p_4),$$

此处

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \cdots, p_4)$$

是定义于流形

$$p_1 + \cdots + p_4 = 0 \tag{10.11}$$

上 $p_1, \cdots, p_4$ 的广义函数. 假定它们满足下列条件

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{F}^{v}_{r,j}(p_1, \cdots, p_4) - \tilde{F}^{v}_{a,j}(p_1, \cdots, p_4) = 0, \quad \text{当} \quad p_1^2 < (M+\mu)^2,\ p_3^2 < (3\mu)^2;\\ &\tilde{F}^{v}_{i,r}(p_1, \cdots, p_4) - \tilde{F}^{v}_{i,a}(p_1, \cdots, p_4) = 0, \quad \text{当} \quad p_2^2 < (M+\mu)^2,\ p_4^2 < (3\mu)^2;\end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

$$\tilde{F}^{v}_{i,j}(p_1, \cdots, p_4) = 0, \quad \text{若} \quad (p_1 + p_3)^2 < (M + \mu)^2, \quad \text{或} \quad p_{10} + p_{30} < 0. \tag{10.13}$$

这时可作实变量 $z_6$ 的广义函数

$$\phi_\lambda(z_1, \cdots, z_5, z_6)$$

是变量 $z_1, \cdots, z_5$ 的解析函数，它具有以下性质：

1° $\phi_\lambda$ 在区域(10.5)内为正规；

2° 若 $z_6 < (M + \mu)^2$, $\phi_\lambda = 0$；

3° 对于流形(10.11)中实 $p_1, \cdots, p_4$，诸量

$$z_1 = p_1^2, \quad z_2 = p_2^2, \quad z_3 = p_3^2, \quad z_4 = p_4^2, \quad z_5 = (p_1+p_2)^2, \quad z_6 = (p_1+p_3)^2$$

满足不等式(10.5)，我们有如下的表示形式：

$$F^{v}_{i,j}(p_1, \cdots, p_4) = \sum p_{i_1}^{a_1} \cdots p_{i_s}^{a_s} \phi_\lambda(z_1, \cdots, z_5, z_6), \tag{10.14}$$

$$\text{如果} \quad p_{10} + p_{30} > 0,$$

和式之项数为有限.

证明　由于函数 $F^{v}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4)$ 的平移不变性，可以认为它是三个变量的函数，例如

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - x_3,\\ y_2 &= x_4 - x_2,\\ y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4.\end{aligned}$$

令

$$F^{v}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4) = F^{v}_{i,j_1}(x_1 - x_3, x_4 - x_2, x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \tag{10.15}$$

其中 $j_1 = r$，如果 $j = a$；$j_1 = a$，如果 $j = r$. 此时清楚的是函数

$$F^{v}_{i,j}(y_1, y_2, y_3)$$

满足引理 VII 注中的条件，以及条件(10.2). 其次，从式(10.15)导出

$$\tilde{F}^{v}_{i,j}(q_1 + q_3, -q_2 - q_3, q_3 - q_1, q_2 - q_3) = \tilde{F}^{v}_{i,j}(q_1, q_2, q_3).$$

令

$$p_1 = q_1 + q_3, \quad p_2 = -q_2 - q_3, \quad p_3 = q_3 - q_1, \quad p_4 = q_2 - q_3.$$

我们有

$$q_3 = \frac{p_1 + p_3}{2}, \quad p_1^2 = (q_1 + q_3)^2, \quad p_2^2 = (q_2 + q_3)^2,$$

$$p_3^2 = (q_1 - q_3)^2, \quad p_4^2 = (q_2 - q_3)^2, \quad (p_1 + p_2)^2 = (q_1 - q_2)^2.$$

从这里可见到引理 VII 的其余的条件也满足，利用对此引理所作的注译，获得我们的基本定理的证明.

注　我们可以引进以下条件来代替条件(10.13)，

$$[(p_1 + p_3)^2 - M^2] F^{v}_{i,j}(p_1, \cdots, p_4) = 0, \quad \text{如果} \quad (p_1 + p_3)^2 < (M + \mu)^2,$$

或者

$$p_{10} + p_{30} < 0.$$

实际上,在此情况下,代替 $F^{\nu}_{i,j}$ 可以考虑函数

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 - M^2\right] F^{\nu}_{i,j}(x_1, \cdots, x_4)$$

满足定理 VI 中一切条件.

此时关系式(10.14)乘上 $[(p_1 + p_3)^2 - M^2]$. 但是,在

$$(p_1 + p_3)^2 \neq M^2$$

的区域中,我们可除以此乘子. 因此如果对条件 $p_{10} + p_{30} > 0$,附加上$(p_1 + p_3)^2 \neq M^2$,式(10.14)依然成立.

## 参 考 文 献


Абрикосов, А. А. (1956), *ЖЭТФ*, **30**, 96.

Ахиезер, А. И., Берестецкий, В. Б. (1953), Квантовая электродинамика, Гостехиздат. 量子电动力学, 于 敏 宋玉升等译, 科学出版社.

Ахиезер, А. И., Померанчук, И. Я. (1948), *ЖЭТФ*, **18**, 603.

Бланк, В. З. (1956), *ДАН СССР*, **107**, 383.

Бланк, В. З., Ширков, Д. В. (1956а), *Nuclear Physics*, **2**, 356; (1956б), *ДАН СССР*, **111**, 1206.

Блохинцев, Д. И. (1949), Основы квантовой механики, Гостехиздат. 量子力学原理, 叶蕴理 金星南译, 高等教育出版社.

Боголюбов, Н. Н. (1951а), *ДАН СССР*, **81**, 757; (1951б), *ДАН СССР*, **81**, 1015; (1952), *ДАН СССР*, **82**, 217; (1954), *ДАН СССР*, **99**, 225; (1955), *Изв. АН СССР*, сер. физ. **19**, 237.

Боголюбов, Н. Н., Медведев, Б. В., Поливанов, М. К. (1958), Вопросы теории дисперсионных соотношений, физмаг, Москва.

Боголюбов, Н. Н., Парасюк О. С. (1955а), *ДАН СССР*, **100**, 25; (1955б), *ДАН СССР*, **100**, 429; (1956), *Изв. АН СССР*, сер. мат. **20**, 585.

Боголюбов, Н. Н., Ширков Д. В. (1955а), *УФН*, **55**, 149; (1955б), *ДАН СССР*, **103**, 203; (1955в), *ДАН СССР*, **103**, 391; (1955г), *ДАН СССР*, **105**, 685; (1956а), *ЖЭТФ*, **30**, 77; (1956б), *Nuovo Cim.* **3**, 845.

Гельфанд, И. М., Минлос Р. А. (1954), *ДАН СССР*, **97**, 209.

Гинзбург, И. Ф. (1956), *ДАН СССР*, **110**, 535.

Горьков, Л. П. (1955), *ДАН СССР*, **105**, 65.

Иоффе, Б. Л. (1954), *ДАН СССР*, **94**, 437.

Крейн, М. Г. (1955), *ДАН СССР*, **105**, 433.

Ландау, Л. Д., Абрикосов, А. А., Халатников, И. М. (1954а), *ДАН СССР*, **95**, 773; (1954б), *ДАН СССР*, **95**, 1177; (1954в), *ДАН СССР*, **96**, 261.

Ландау, Л. Д., Померанчук, И. Я. (1955), *ДАН СССР*, **102**, 489.

Логунов, А. А. (1956), *ЖЭТФ*, **30**, 793.

Овсянников, Л. В. (1956), *ДАН СССР*, **109**, 1121.

Парасюк, О. А. (1955а), *ДАН СССР*, **100**, 643; (1955б), Диссертация, МИАН СССР.

Пекар, С. И. (1956), *ЖЭТФ*, **30**, 304.

Поливанов, М. К. (1955), *ДАН СССР*, **100**, 1061.

Померанчук, И. Я. (1955), *ДАН СССР*, **103**, 1005.

Рыжик, Градштейн (1951), Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3-е изд., Гостехиздат. 函数表与积分表, 高等教育出版社编辑部译, 高等教育出版社.

Свидзинский, А. В. (1955), Диссертация, Львовский гос. ун-т. (1956), *ЖЭТФ*, **31**, № 2, 324.

Соболев, С. Л. (1936), *Матем. сборник* **1 (43)**, 39.

Соколов, А. А. и Ивененко, Д. Д. (1952), Квантовая теория поля, Гостехиздат.

Степанов, Б. М. (1953), Диссертация МИАН СССР; (1955), *ДАН СССР*, **100**, 889; (1956), *ДАН СССР*,

**108**, 1045.
Судаков, В. В. (1956), *ЖЭТФ*, **30**, 87.
Тамм, И. Е. (1945), *Journ. of Phys. USSR.*, **9**, 449 (ПСФ, № 10, 219, 1955).
Фок, В. А. (1932), *Z. physik*, **75**, 622; (1937), *Phys. Zs. Sowjetunion*, **12**, 404.
Фрадкин, Е. С. (1954), *ДАН СССР*, **98**, 47.
Халатников, И. М. (1955), *ЖЭТФ*, **28**, 633.
Шапиро, И. С. (1954), *УФН*, **53**, 7.
Ширков, Д. В. (1955), *ДАН СССР*, **105**, 972.

*　　*　　*

国外文献的俄文翻译，采用以下缩写标明：

СУАЭ——Сборник переводов «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950 (译文集"原子电子的能级移动").

НРКЭ——Сборник переводов «Новейшее развитие кантовой электродинамики», ИЛ. 1954 (译文集"量子电动力学的最新进展").

ПСФ——Сборник переводов из серии «Проблемы современной физики» (译文集"现代物理问题").

ВПКМ——Сборник переводов «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ. 1955. (译文集"量子力学中因果性问题").

Anderson, J. L. (1954), *Phys. Rev.*, **94**, 703.
Anderson, H. L., Davidon, W. C., and Kruse, U. E. (1955), *Phys. Rev.*, **100**, 339; (ПСФ, No. 2, 129, 1957).
Baranger, M., Bethe, H. A., and Feymann, R. P. (1953), *Phys. Rev.*, **92**, 482.
Bethe, H. A. (1947), *Phys. Rev.*, **72**, 339 (СУАЭ, 82 页).
Bleuler, K. (1950), *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567.
Bloch, F., and Nordsieck, A. (1937), *Phys. Rev.*, **52**, 54.
Brown, L. M., and Feynman, R. P. (1952), *Phys. Rev.*, **85**, 231.
Cartan, E. J. (1938), Lecons sur la théorie des spineurs, Hermann, Paris.
Dancoff, S. M. (1950), *Phys. Rev.*, **78**, 382.
Dirac, P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, 1958, 量子力学原理，陈咸亨译，科学出版社.
Dirac, P. A. M., Fock, W. A. and Podolsky, B. (1932), *Physik. Z. Sowjetunion*, **2**, 468.
Duffin, R. J. (1938), *Phys. Rev.*, **54**, 905.
Dyson, F. J. (1949a), *Phys. Rev.*, **75**, 486; (СУАЭ, 94 页); (1949б), *Phys. Rev.*, **75**, 1736; (НРКЭ, 205 页), (1953), *Phys. Rev.*, **85**, 631.
Edwards, S. F. (1953), *Phys. Rev.*, **90**, 284; (НРКЭ, 378 页).
Edwards, S. F., and Peierls, R. E. (1954), *Proc. Roy. Soc.* (London), **A224**, 24; (ПСФ, No. 3, 112, 1955).
Fermi, E. (1955), *Nuovo cimento Suppl.*, **2**, 17.
Feynman, R. P. (1947), *Rev. Mod. Phy.* **20**, 376; (ВПКМ, 167 页); (1948), *Phys. Rev.*, **74**, 1430; (1949a), *Phys. Rev.*, **76**, 749; (НРКЭ, 138 页); (1949б), *Phys. Rev.*, **76**, 769; (НРКЭ, 161 页); (1951), *Phys. Rev.*, 84, 108; (ПСФ, No. 3, 37, 1955).
Furry, W. (1937), *Phys. Rev.*, **51**, 125.
Gell-Mann, M., Goldberger, M. L. and Thirring, W. E. (1954), *Phys. Rev.*, **95**, 1612; (ПСФ, No. 2, 62, 1957).
Gell-Mann, M., and Low, F. (1954), *Phys. Rev.*, **95**, 1300; (ПСФ, No. 3, 195, 1955).
Goebel, C. J., Karplus, R., and Ruderman, M. A. (1955), *Phys. Rev.*, **100**, 240.
Goldberger, M. L. (1955a), *Phys. Rev.*, **97**, 508. (ПСФ, No. 2, 82, 1957); (1955б), *Phys. Rev.*, **99**, 979; (ПСФ, No. 2, 111, 1957).
Goldberger, M. L., Miyazawa, H. and Oehme, R. (1955), *Phys. Rev.*, **99**, 986; (ПСФ, No. 2, 123, 1957).
Gupta, S. (1950), *Proc. Roy. Soc.* (London), **A63**, 681.
Haag, R. (1955). *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd.*, **29**, No. 12.
Heisenberg, W. (1943a) *Z. Physik*, **120**, 513; (1943б), *Z. Physik*, **120**, 673; (1946), *Z. Naturforsch.*, **1**, 673.
Heitler, W. (1936), The Quantum Theory of Radiation, 1st ed. Oxford; 3rd ed. 1954.

Hu Ning (胡宁) (1948), *Phys. Rev.*, **74**, 131.
Hurst, C. A. (1952), *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **18**, 625.
Jost, R., and Luttinger, J. (1950), *Helv. Phys. Acta*, **23**, 201.
Källen, G. (1952), *Helv. Phys. Acta*, **25**, 416; (1954), *Nuovo Cimento*, **12**, 217.
Karplus, R., Klein, A., and Schwinger, J. (1952), *Phys. Rev.*, **86**, 288; (НРКЭ, 305 页).
Karplus, R., and Kroll, N. (1950), *Phys. Rev.*, **77**, 536.
Karplus, R., and Ruderman M. A., (1955), *Phys. Rev.*, **98**, 771; (ПСФ, No. 2, 87, 1957).
Kemmer, N. (1939), *Proc. Roy. Soc.* (London), **A173**, 91.
Klein, A. (1955), *Progr. Theoret. Phys.*, **14**, 580.
König, S. H., Prodell, A. G., and Kusch, R. (1952), *Phys. Rev.*, **88**, 19.
Kramers, H. A. (1927), *Atti congr. intern. Fisici, Como*, **2**, 545.
Kronig, R. (1926), *J. Opt. Soc. Am.*, **12**, 547.
Lee, T. D. (李政道) (1954), *Phys. Rev.*, **95**, 1329.
Lehmann, H. (1954), *Nuovo Cimento*, **11**, 342; (ПСФ, No. 3, 133, 1955).
Lehmann, H., Symanzik, K., and Zimmerman (1955), *Nuovo Cim.*, **1**, 205.
Low, F. E. (1955), *Phys. Rev.*, **97**, 1392.
Mathews, P. T. (1949), *Phys. Rev.*, **76**, 1657.
Mathews, P. T., and Salam, A. (1954), *Phys. Rev.*, **94**, 185.
Oehme, R. (1955), *Phys. Rev.*, **100**, 1503. (1956), *Phys. Rev.*, **102**, 1174.
Pauli, W. (1933), "Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik", 见 Handb. Phys., **24**(1); (1941), "Relativistic Theory of Elementary Particles", *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203; (1955), N. Bohr and the development of Physics, Pergamon, London, McGraw-Hill, New York, 30 页.
Pauli, W., and Dancoff, S. M. (1942), *Phys. Rev.*, **62**, 85.
Pauli, W., and Villars, F. (1949), *Rev. Modern Phys.*, **21**, 434.
Polkinghorne, C. (1956), *Nuovo Cimento*, **4**, 216.
Rivier, D. (1949), *Helv. Phys. Acta*, **22**, 265.
Ruijgrok, T. W. and Hove, L. van (1956), *Physica*, **22**, 880.
Salam, A. (1956), *Nuovo Cimento*, **3**, 424; (ПСФ, No. 2, 186, 1957).
Salam, A., and Gilbert, W. (1956), *Nuovo Cimento*, **3**, 607; (ПСФ, No. 2, 190, 1957).
Schwartz, L. (1950), Théorie des distributions, Hermann, Paris.
Schwinger, J. (1948), *Phys. Rev.*, **74**, 1439; (НРКЭ, 12 页); (1949a), *Phys. Rev.*, **75**, 651; (НРКЭ, 40 页); (1949б), *Phys. Rev.*, **76**, 790; (НРКЭ, 78 页); (1951a), *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **37**, 452; (ПСФ, No. 3, 28, 1955); (1951б), *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **37**, 455; (ПСФ, No. 3, 33, 1955); (1951), *Phys. Rev.*, **82**, 914. (НРКЭ, 115 页).
Serber, R., and Dancoff, S. M. (1943), *Phys. Rev.*, **63**, 143.
Stückelberg, E. C. G. (1951), *Phys. Rev.*, **81**, 130.
Stückelberg, E. C. G. and Green, T. (1951), *Helv. Phys. Acta*, **24**, 153.
Stückelberg, E. C. G. and Petermann, A. (1953), *Helv. Phys. Acta*, **26**, 499.
Stückelberg, E. C. G. and Rivier D. (1949), *Helv. Phys. Acta*, **22**, 215.
Symanzik, K. (1954), *Z. Naturforsch.*, **9a** 809.
Takeda, G. (1952), *Progr. Theoret. Phys.*, **7**, 539.
Thirring, W. (1953), *Helv. Phys. Acta*, **26**, 33.
Tomonaga, S. (1946), *Progr. Theoret. Phys.*, **1**, 27; (НРКЭ. 1 页).
Triebwasser, S., Dayhoff, E. S., and Lamb, W. E. (1953), *Phys. Rev.*, **89**, 98.
Umezawa, H. (1952), *Progr. Theoret. Phys.*, **7**, 551.
Van der Waerden, B. L., Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.
Van Kampen, N. G. (1953a), *Phys. Rev.*, **89**, 1072, (ПСФ, No. 2, 28, 1957); (1953б), *Phys. Rev.*, **91**, 1267; (ПСФ, No. 2, 44, 1957).
Ward, J. C. (1950), *Phys. Rev.*, **78**, 182.
Wentzel, G. (1949), Quantum Theory of Wave Fields,, Interscience, New York.
Wick, G. (1950), *Phys. Rev.*, **80**, 268; (НРКЭ, 244 页).

# 名 詞 索 引

## 一、中文名詞


### 三 划

广义函数 99
～可积性条件 101

### 四 划

反粒子 74
不变电荷 318
不定度规 78
介子荷 242

### 五 划

正则形式 6
电荷 14
～共轭 74
电磁场，量子论 76
～，经典理论 29
电子反常磁矩 274
四维流矢量 14
发散消除，一般定则 186
赝标量介子动力学中的～ 210—241
电动力学中的～ 210—241
～的非唯一性 224
发散，红外 198
共振～ 197
微扰论级数的～ 121
紫外～ 169
～的本性 384

### 六 划

同位旋形式 241
场的不变量 6
场振子 6
红外灾难 197
～顶角函数 321
～电子 Green 函数 315
轨道矩 14
色散关系 329
～一般情况的推导 361
～朝前散射 358
～数学基础 329
$\pi$-$N$ 散射～的显式 380
光学定理 332
因果性条件 119
自旋 14
矢量场的～ 25
电磁场的～ 33
电子的～ 35
自旋矩 14
有效截面 160

### 七 划

作用量 7—8
张量 8
形状因子 1
泛函导变 119,336
泛函(连续)积分 290
时序指数 128
时序(循时，编时)乘积 127
～协变性 127
～，正规乘积 137
～算符可微性 137
～算符对易性 128

### 八 划

变分导数 119,336
顶角部分函数 $\Gamma$ 180
～渐近式 317
～的 $e^2$ 的显式 239
顶角指标 202

### 九 划

相互作用，加入和撤除 117
第一类～ 202
第二类～ 203
～表象 116
相对论协变性 7,38,50,118,122,337
标量 10
标量场，量子化 67
～，经典形式 15
重正化
电荷～ 223—230
质量～ 223—230
总 Green 函数的～ 230
～理论 203
不可～理论 203
～基 231

### 十 划

真空态 58
真空极化 281
能量，页 74
～的正值性 62
能量-动量四维矢量 13
～张量 13

### 十一 划

粒子对的湮灭 164
跃迁几率 158
虚态 153
虚粒子 153
符号定则 143
旋量场，量子论 71
～，经典理论 34

### 十二 划

散射振幅
$\pi$-$N$ 的～ 331
真空的～ 59
～的归一化 157
～的 Фок表象 60
散射矩阵 117
～梯度不变性 213
～协变性 118
～定域性质 338
～最一般表式 130
～一般性质 337
～的因果性 119
～的么正性 118
减法形式(见发散消除)
梯度变换，第一类 15
～，第二类 30
电子 Green 函数的～ 297

### 十三 划

零能 62
零荷 62
辐射修正，外线的 232
顶角部分的～ 239
Compton 散射的～ 240
电子磁矩～ 277
Dirac 方程～ 277

光子 Green 函数～ 235
电子 Green 函数～ 237

十 四 划

算符
电荷～ 57
质量～ 252
场～ 54,269
产生～ 58
消灭～ 58
能量-动量～ 55
定域性～ 113
准定域性～ 113
多重定域性～ 113
算符乘积，正规 61
时序～ 127
反时序～ 127
谱表示，π 介子 Green 函数 341
Fermi 子 Green 函数～ 349
光子 Green 函数～ 235

十 六 划

赝标量 10

## 二、外国人名为首的名詞

Bloch-Nordsieck 模型 41
Bose-Einstein 对易关系 63
Compton 散射 161
Dirac 方程 37
广义～ 280
Dirac 矩阵 35
～ 协变性 38
～ 通常表示 37
Fermi-Dirac 对易关系 63
Feynman 图 140
～顶角 143
～指标 189
连通～ 188
不连通～ 188
強、弱连通～ 188
骨架～ 230
～ Fermi 子自能 169
～光子自能 174
Feynman 定则，矩阵元 148
～，散射矩阵元 142
Furry 定理 179,211
Green 函数 82
推迟～ 82
超前～ 82
因果～ 84
总～ 227
～图表示 253
～红外渐近 313
～紫外渐近 316
～显式和奇点 90
～奇点 353
～輻射修正 235
～重正化 229
～谱表示 349
Schwinger 方程的～ 249
Hurst-Thirring 场 208
Kemmer-Duffin 形式 28
Klein-Gordon 方程 27
Klein-仁科公式 164
～輻射修正 329
Lagrange 形式 6,31
Lagrange 函数密度 7
相互作用的～ 49
Lie 微分方程 307
Lorentz 条件 30
Lorentz 羣 9
非齐次～ 7
完全、非完全～ 7
～表示 9
Maxwell 方程 29
Noether 定理 10
Pauli 原理 66
Pauli 矩阵 44
Pauli-Jordan 函数 67
显式 90
奇点 90
Pauli-Villars 正常化 91
Poisson 括号 56
Schrödinger 方程 255
Schwinger 方程 245
Tamm-Dancoff 法 3
Ward 恒等式 83
Wick 定理，正规乘积 95
～，时序乘积 137
广义～ 248