第二章：标量场

量子场论导论，王一，香港科技大学物理学系

(本文为草稿,如发现错误,请查看最新版: https://pan.baidu.com/s/1Ql1-MbgoiYtik3R2YmNKkg?pwd=kurv
如仍有错，欢迎指正. 邮件：tririverwangyi@gmail.com，B 站：王一研究宇宙)

1 标量场的作用量原理

前文中，通过床垫的类比，我们已经粗略地写出了标量场的动能、梯度能量和势能. 在相对论性场论中，我们通常把一个场的作用量作为定义场论的出发点. 比如，对于 Heisenberg 绘景下的实标量场 $\Phi(x)$（在经典场论中，在给定时空点上，实标量场 $\Phi(x)$ 是个实数. 很快，我们将对 $\Phi(x)$ 进行量子化，这时， 实标量场 $\Phi = \Phi^\dagger$ 是个厄米算符. 另外，场论中常用 Heisenberg 绘景，而不是 Schrödinger 绘景，这是因为 Schrödinger 绘景中场算符不依赖时间，却依赖空间，$\Phi_S = \Phi_S(\vec{x})$ 不是明显 Lorentz 不变的），Φ 的作用量是：

实标量场的作用量

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\Phi(x), \partial\Phi(x)) \tag{1}$$

其中 $d^4x \equiv d^3x dt$，$\mathcal{L}$ 是拉氏量密度：

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I(\Phi), \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \ , \quad \mathcal{L}_I(\Phi) \equiv -\frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \cdots \tag{3}$$

其中，$\mathcal{L}_0$ 是拉氏密度的自由部分，其中的 $-\frac{1}{2}\partial^\mu\Phi\partial_\mu\Phi \equiv \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\Phi)^2$ 称为场的动能项（这里我们已经假设 Lorentz 对称性，于是时间导数和空间导数项刚好可以合成四维时空的导数 ∂_μ，否则，如果两项的系数不相等，$\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}c_s^2(\partial_i\Phi)^2$，则无法合写成 Lorentz 不变的形式，此时场的传播速度 $c_s \neq 1$ 不是光速）；$\mathcal{L}_I$ 是相互作用（注解：(1) 为什么只考虑 $\lambda\Phi^4$ 相互作用？$\mathcal{L}_I$ 中也可以包括其它项，例如 Φ^3，Φ^6 等. 为简单起见，我们假设 Φ 具有 $\Phi \to -\Phi$ 的对称性，以除掉所有 Φ 的奇

为什么选择“作用量”作为第一原理?

哈密顿量和能量相对应，看起来更直观. 我们为什么选作用量作为场论的出发点?

这是因为作用量是 Lorentz 不变的. 而要写出哈密顿量，就要指定一个时间方向，于是 Lorentz 不变性不再明显，理论就显得更冗长复杂. 但是，对场做正则量子化时，我们仍需要把拉氏量做 Legendre 变换到哈密顿量进行量子化.

凝聚态理论通常没有明显的洛伦兹对称性. 所以当把场论应用于凝聚态时，常把哈密顿量作为理论的出发点.

对质量和耦合常数的约定

在 (2) 中，我们设 m, g, λ 是物理上实际测得的质量和耦合常数. 这初看起来不言自明，但是，当后文讲到重整化，读者就会看到，

- 物理上：需要区分理论未经量子修正的“裸量”，和实验观测到的“重整化后的量”. 所以，这里需要讲清楚，这里的 m, λ 是重整化后的量.
- 符号约定上：在做重整化时，Weinberg、Srednicki、Peskin 教材中对待抵消项的约定各自不同. 这里我们一开始就指定拉氏量中的参数为物理参数，这与 Weinberg 的符号约定相同.

数次幂，并且，后面我们将介绍，“可重正性”允许我们在低能有效理论中，只考虑 Φ 的幂次不大于 4 的项. 所以这里我们只考虑 $\lambda\Phi^4$ 项. （2）当 $\mathcal{L}_I$ 只依赖于 Φ，不依赖于 $\dot{\Phi}$ 时，$-\mathcal{L}_I$ 可以解释为相互作用造成的能量密度改变. （3）为什么把拉氏密度分为自由和相互作用部分？因为自由部分对应线性的运动方程，通常可以精确解出来. 相互作用部分的运动方程是非线性的，通常需要用类似 Taylor 展开的技术进行微扰求解. （4）后面我们将看到，$\mathcal{L}_I$ 中还可以包括抵消项，是裸量和重整化后量的区别）.

我们假设读者熟悉经典力学中的作用量原理. 无论 Φ 是数还是算符，作用量原理都成立. 不过，经典力学中常见的作用量，处理的对象是拉氏量 $L = L(\Phi, \dot{\Phi}) = \int d^3x\mathcal{L}$. 这里我们处理拉氏密度 $\mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi)$，所以这里我们将对作用量原理做简要推导：

变分原理：从作用量到运动方程

作用量原理要求，当场的取值有无穷小变化 $\delta\Phi(x)$ 时：

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x) + \delta\Phi(x) \tag{4}$$

作用量取极值 $\delta S = 0$. 在场变化 $\delta\Phi$ 后，新的拉氏密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi', \partial\Phi') &= \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial\Phi + \partial\delta\Phi) \\ &\simeq \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) + \frac{\partial L}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu\delta\Phi\end{aligned} \tag{5}$$

第二行，我们只保留到 $\delta\Phi$ 的线性阶，忽略了 $\mathcal{O}(\delta\Phi^2)$ 的项. 于是，作用量的变化为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu\delta\Phi\right) \\ &\xrightarrow[\text{积分}]{\text{分部}} \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right)\right)\delta\Phi\end{aligned} \tag{6}$$

作用量原理要求，对任何不改变初态和末态的 $\delta\Phi$，都有 $\delta S = 0$. 于是，我们就从作用量原理推导出了 Φ 的运动方程：

$$-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = 0 \tag{7}$$

这种运动方程的一般形式，叫做 Euler-Lagrange 方程. 带入作用量的具体形式 (2)，得：

$$\partial^2\Phi - m^2\Phi = \frac{\lambda}{6}\Phi^3 \tag{8}$$

这里 $\partial^2 \equiv \partial^\mu\partial_\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. 对于自由场，上式右边为 0，这就是 Klein-Gordon 方程（在 Peskin，Schwartz 等教材中，由于采取了不同的度规约定，Klein-Gordon 方程左边两项的相对符号与这里不同）.

为何做分部积分？

为使用作用量原理，我们希望把 (6) 写成

$$\delta S = \int d^4x(\text{运动方程})\delta\Phi$$

的形式，这样，对任何变分 $\delta\Phi$ 都有 $\delta S = 0$，我们就得到了 (运动方程) $= 0$. (6) 中的 $\partial_\mu\delta\Phi$ 项阻止了我们这样做. 为了去掉 $\partial_\mu\delta\Phi$ 中的 ∂_μ，对任何函数 $f(x)$，

$$f\partial_\mu\delta\Phi = \partial_\mu(f\delta\Phi) - (\partial_\mu f)\delta\Phi$$

其中第一项是个全微分，而变分原理中，我们固定初态和末态的 Φ，所以全微分的时间积分为 0. 于是，

$$\int d^4x\ f\partial_\mu\delta\Phi = -\int d^4x\ (\partial_\mu f)\delta\Phi$$

这样，我们就达到了把变分中的 $\partial_\mu\delta\Phi$ 变成 $\delta\Phi$ 的目的，就可以推出运动方程了.

2 标量场的量子化

虽然上一小节的作用量原理计算，对 Φ 是数（经典场） 或者算符（量子场） 都适用，但是，对于 Φ 是量子场的情况，我们还没有指定 Φ 对应什么样的算符，“指定 Φ 是什么算符，满足什么样的代数关系”的手续，就是对 Φ 进行“正则量子化”（本导论中，我们将主要使用正则量子化方法. 很多情况下，另一种等价的量子化方法“路径积分量子化”非常方便，参见多数其它教材）.

如何对 Φ 进行正则量子化？我们可以借鉴量子力学中对更简单系统做量子化的例子：谐振子的量子化. 我们假设读者已学过量子谐振子. 不过，因为量子谐振子是整个场论的基础，这里我们再把量子谐振子的要点简单回顾一下：

回顾：谐振子的正则量子化

正则量子化手续需要从哈密顿量出发，把哈密顿量写成坐标 q 和动量 p 的函数，之后指定坐标和动量的对易关系. 考虑一个单位质量的谐振子（m=1） 谐振子的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{9}$$

接下来，我们要量子化谐振子的哈密顿量：作为量子力学的基本假设之一，我们指定厄米算符 p 和 q 满足正则对易关系（量子化条件）：

$$[q(t), p(t)] \equiv q(t)p(t) - p(t)q(t) = i \ . \tag{10}$$

这就完成了谐振子的量子化（注意，上式需要 q 和 p 取同一时间 t，即“等时量子化”. 如果要计算 $[q(t), p(t')]$，则需要用 Heisenberg 方程将 q, p 演化到同一时间，再应用等时量子化条件计算）.

量子化与表象

在初等量子力学课程中，我们常指定一个更明确的对易关系：让 q 是一个数，而 $p = -i\partial/\partial_q$. 不过，这种手续同时做了两件事：选定位置表象，和量子化. 同样，可以选定动量表象，让 p 是数，而 $q = i\partial/\partial_p$. 更“存粹”的量子化与表象无关，只是 q 和 p 之间的代数关系.

下一个问题是，一个谐振子可以处于哪些可能状态？这个问题有两种常见解法：解 Schrödinger 方程，或代数解法. 这里我们采用代数解法（解 Schrödinger 方程会给出更多信息：谐振子每个状态的波函数，即粒子分布的概率幅度，代价是引入了更多解微分方程的技术细节）. 定义下降算符 α 和上升算符 $\alpha^\dagger$：

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q + \frac{ip}{\omega}\right) \ , \qquad \alpha^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q - \frac{ip}{\omega}\right) \tag{11}$$

虽然 $\alpha, \alpha^\dagger$ 不是厄米的，所以不像算符 p, q 一样直接对应可观测量，但是 $\alpha, \alpha^\dagger$ 的好处在于，它们是谐振子能量状态的上升、下降算符. 这是因为，$\alpha, \alpha^\dagger$ 的对易子为：

$$[\alpha, \alpha^\dagger] = 1 \ , \ \text{即} \ \alpha\alpha^\dagger = \alpha^\dagger\alpha + 1 \ , \ \text{即} \ \alpha^\dagger\alpha = \alpha\alpha^\dagger - 1 \tag{12}$$

而谐振子的哈密顿量可以写成：

$$H = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \qquad \text{其中激发数算符 } N \equiv \alpha^\dagger \alpha \tag{13}$$

注意到 N 的本征态 $N|n\rangle = n|n\rangle$ 也是哈密顿量 H 的本征态，$|n\rangle$ 满足

$$\alpha^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle, \quad \alpha|n\rangle \propto |n-1\rangle \text{ (for } n > 0), \quad \alpha|0\rangle = 0 \tag{14}$$

所以，上升、下降算符确实对应谐振子能级的上升和下降.

与谐振子的正则量子化类似，为了对标量场进行量子化，我们要首先计算出标量场的哈密顿量，再指定量子化条件.

标量场的哈密顿量和量子化

正如经典力学里学过的，标量场的哈密顿量密度 $\mathcal{H}$ 可以从拉氏量密度做 Legendre 变换而得到（这里，$\mathcal{L}_I(\Phi)$ 不依赖 $\dot\Phi$. 否则，对一般的 $\mathcal{L}_I(\Phi, \dot\Phi)$，我们需要仔细解出 Π 和 $\dot\Phi$ 之间的非线性关系，这通常需要使用微扰论才能做到）：

正则动量
$$\Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\Phi} = \dot\Phi \tag{15}$$

哈密顿量密度
$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \Pi\dot\Phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_l \Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \mathcal{L}_I(\Phi)\end{aligned} \tag{16}$$

哈密顿量
$$H = \int d^3x\ \mathcal{H} \equiv H_0 + V_I, \quad V_I \equiv -\int d^3x\ \mathcal{L}_I$$

Heisenberg 方程
$$i\partial_t F(\Phi, \Pi) = [F, H] \tag{17}$$

即
$$F(t) = e^{iHt} F(0) e^{-iHt} \tag{18}$$

量子化条件
$$[\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{19}$$

这里，量子化条件 (19) 是 (10) 在无穷多自由度时的推广（当然，我们最好把 (19) 推导出来，而不是做类比. 这时，可以把空间分立化成格点，考虑每个格子上的量子力学谐振子及它们的相互作用，得到等时量子化条件，再取连续极限回到场论. 另外，再次强调，这里量子化是在同一时间的场之间进行的）.

由于我们的场论具有相互作用项 V_I，我们难以再进一步，把哈密顿量像 (13) 一样进行对角化，并由此定义粒子（一种简便的处理，是先把 V_I “扔掉”，定义粒子之后，再把 V_I “加回来”进行微扰计算. 这种处理虽然方便，但是在学习中，经常让我们混淆哪些结果是自由场，哪些结果是带有相互作用的. 所以，为清晰起见，我们只用相互作用过绘景处理自由场）. 为此，我们将定义相互作用绘景，在相互作用绘景下定义粒子，再把相互作用绘景和 Heisenberg 绘景联系起来. 当然，相互作用绘景的

习题

- 推导 (13)
- 推导 (14)，并定出比例系数
- 推导 (16)
- 由 (17) 推导 (8)

这些习题旨在练习如何把经典力学、量子力学的基础知识应用到场论上. 如读者觉得困难，可能需要在学习场论前，加强经典力学、量子力学的相关基础.

Schrodinger 方程是“非相对论”的吗?

Heisenberg 方程转到 Schrödinger 绘景即为态的 Schrödinger 方程. 通常说 Schrödinger 方程是非相对论的，指的是 H 为非相对论粒子哈密顿量的 Schrödinger 方程. 当 H 为场的哈密顿量 (16) 时，场论在 Schrödinger 绘景下仍形式上满足 Schrödinger 方程.

作用不止于此. 更重要的是，稍后，我们将用相互作用绘景建立起场论微扰论的体系.

我们这里的简单标量系统不含约束. 如果系统有约束，则需要细心处理，参见 Weinberg §7.6.

3 相互作用绘景下的算符：自由场

Heisenberg 绘景下的场虽然明显 Lorentz 协变，但是在有相互作用 V_I 时，Heisenberg 绘景具有如下困难：(1) 场的运动方程是非线性的，无法一般求解；(2) 哈密顿量难以像谐振子一样对角化，所以难以定义粒子（一种解决方式是定义“入态”和“初态”，由此与自由态相联系，详见 Weinberg §3.1. 这里我们跳过这些讨论）. 为解决这些困难，并被后文微扰论打下基础，我们引入相互作用绘景. 在相互作用绘景下，算符按照自由哈密顿量 H_0 随时间演化.

关于绘景的符号约定

在标量场章节，我们将用 Φ 表示 Heisenberg 绘景下的场，用 ϕ 表示相互作用绘景下的场. 由于相互作用绘景下的场 ϕ 按哈密顿量的自由部分 H_0 随时间演化，我们也把 ϕ 叫做自由场. 在矢量场和旋量场章节，我们将不再用大小写希腊字母区分绘景.

相互作用绘景

定义相互作用绘景下的场算符 ϕ 与共轭动量 π：在时间 $t=0$，它们与 Heisenberg 绘景下的量相同：

$$\phi(0,\vec{x})=\Phi(0,\vec{x})\ ,\qquad \pi(0,\vec{x})=\Pi(0,\vec{x}) \tag{20}$$

在一般时间 t，我们要求 ϕ 和 π 按自由哈密顿量 $H_0[\phi(t),\pi(t)]$ 演化：

$$\phi(t,\vec{x})=e^{iH_0t}\phi(0,\vec{x})e^{-iH_0t}\ ,\quad \pi(t,\vec{x})=e^{iH_0t}\pi(0,\vec{x})e^{-iH_0t} \tag{21}$$

所以，只由 ϕ 和 π 组成的任何算符 $f(\phi,\pi)$ 也像上式一样按 H_0 演化. 特别地，$[\phi,\pi]$ 也按 H_0 演化，而在 $t=0$ 时，由 (19)，$[\phi,\pi]=$ 数字常数，而数字常数不随时间演化. 所以，在任何时间 t，都有量子化条件：

$$[\phi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{y})]=i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{22}$$

由于 ϕ 和 π 只“知道”二次型的自由哈密顿量 H_0，ϕ 和 π 可以看成自由场. 为了进一步借鉴谐振子量子化的经验，我们对比谐振子的哈密顿量 (9) $H_{\text{osc}}=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$ 与自由场的哈密顿量 (16) $H_0=\int d^3x\ \left[\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\right)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$. 我们立即发现两者的两个区别：(1) H_0 中包含对空间的积分，也就是说，场论是无穷多自由度的系统. 这是场论的特点决定的，我们无法不失一般性地进行简化；(2) H_0 中多出了 $\partial_i\phi$ 相关的项. 用什么工具解决这个问题？Fourier 变换. 所以，让我们把自由场的哈密顿量变换到动量空间.

动量空间中的自由场：空间中每点上独立的谐振子

我们把 $\phi(t,\vec{x})$ 的 Fourier 变换 $\phi(\vec{x})=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{k}}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ 代入 (16) 中的 H_0. 则其中的 $\partial_i\phi=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{k}}\ (ik_i)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$，

$$\begin{aligned}\int d^3x\ \phi^2(t,\vec{x}) &= \int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{k}}(t)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{q}}(t)\ e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\\ &\xlongequal{\text{积掉 x}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{k}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{q}}\ (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{q})\\ &\xlongequal{\text{积掉 q}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\phi_{\vec{k}}(t)\phi_{-\vec{k}}(t)\end{aligned}\tag{26}$$

作为习题，如读者不熟悉以上计算，请练习推导完整的哈密顿量：

$$H_0=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2}\pi_{\vec{k}}\pi_{-\vec{k}}+\frac{\omega^2}{2}\phi_{\vec{k}}\phi_{-\vec{k}}\right]\tag{27}$$

其中 $\omega\equiv\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ 是圆频率，在自然单位制下，也就是单个粒子的能量（注意，这里 $\omega\equiv\omega_{\vec{k}}$ 是依赖于 $\vec{k}$ 的，对不同种类粒子而言，也依赖于质量. 但是在不引起混淆的情况下，为简洁起见，我们常忽略下标 $\vec{k}$）. 这样，我们就看到，自由场确实像谐振子一样简单：自由场就是动量空间每一点上的谐振子（$\phi_{\vec{k}}\phi_{-\vec{k}}$ 乘到一起，体现了动量守恒. 如果细心的读者因此感觉上式还不足够像谐振子，稍后，我们将写出产生湮灭算符，相信能解决读者的这个疑虑）.

产生湮灭算符

谐振子的经验启发我们，可以定义 α 和 $\alpha^\dagger$ 来降低和升高系统的能量. 由于在场论中，场的激发对应粒子，场论中相应的算符将可以产生和湮灭粒子. 比照 (11)（当然，物理学不是靠类比建立起来的，所谓“比照”，是说我们可以重做 (11) 背后的所有计算来得到结论），我们定义：

$$\alpha_{\vec{k}}(t)\equiv\sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi_{\vec{k}}(t)+\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\pi_{\vec{k}}(t)\ ,\ \text{则}\ \alpha^\dagger_{\vec{k}}=\sqrt{\frac{\omega}{2}}\phi_{-\vec{k}}-\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\pi_{-\vec{k}}\tag{28}$$

作为练习，可以证明，像谐振子一样，量子化条件 (22) 要求

$$[\alpha_{\vec{p}},\alpha^\dagger_{\vec{q}}]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\ ,\qquad[\alpha_{\vec{p}},\alpha_{\vec{q}}]=[\alpha^\dagger_{\vec{p}},\alpha^\dagger_{\vec{q}}]=0\tag{29}$$

于是自由哈密顿量 H_0 可以写成：

Fourier 变换及其逆变换

$$f(\vec{x})=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}f_{\vec{k}}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tag{23}$$

$$f_{\vec{k}}\ =\int d^3x\ f(\vec{x})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tag{24}$$

如果 $f^\dagger(\vec{x})=f(\vec{x})$，则 $f^\dagger_{\vec{k}}=f_{-\vec{k}}$

伴随 Fourier 变换，我们也经常用到

$$\begin{aligned}\int d^3k\ e^{\pm i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}&=(2\pi)^3\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\\ \int d^3x\ e^{\pm i\vec{x}\cdot(\vec{k}-\vec{q})}&=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\\ \int d^4k\ e^{\pm ik\cdot(x-y)}&=(2\pi)^4\delta^4(x-y)\\ \int d^4x\ e^{\pm ix\cdot(k-q)}&=(2\pi)^4\delta^4(k-q)\end{aligned}\tag{25}$$

$$H_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega\left(\alpha^\dagger_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k}} + \frac{V}{2}\right) \tag{30}$$

其中 $V = \lim_{\vec{p}\to 0}\int d^3x\ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^3(0)$ 是无限大的空间体积. 未来，我们将用正规乘积定义 H，扔掉零点能的部分. 所以，自由标量场相当于在动量空间每一点放一个谐振子. 可以计算，

$$[\alpha_{\vec{p}}, H_0] = \omega\alpha_{\vec{p}}\ , \qquad [\alpha^\dagger_{\vec{p}}, H_0] = -\omega\alpha^\dagger_{\vec{p}} \tag{31}$$

由上式，我们马上得到两个结论：第一，α 和 $\alpha^\dagger$ 可以对 H_0 的能量本征态进行上升和下降；第二，由 Heisenberg 方程 (17)，α 的时间演化为：

$$\alpha_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega t}\alpha_{\vec{k}}(0) \equiv e^{-i\omega t}a_{\vec{k}} \tag{32}$$

这里 $a_{\vec{k}}$ 不再依赖时间，可以理解为 Schrödinger 绘景下的 $\alpha_{\vec{k}}$. 习惯上，我们把这个不含时间的 $a_{\vec{k}}$ 称为湮灭算符，它可以湮灭动量为 $\vec{k}$ 粒子. 相应地，$a^\dagger_{\vec{k}}$ 是产生动量 $\vec{k}$ 粒子的产生算符（产生湮灭算符是在什么样的“量子态”上产生和湮灭粒子？简言之，像上文所说，是 H_0 的本征态. 下一小节，我们将对量子态做更多讨论）. 像 $\alpha_{\vec{k}}$ 一样，$a_{\vec{k}}$ 也满足

$$[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\ , \qquad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = 0 \tag{33}$$

$$H_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega\left(a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + \frac{V}{2}\right) \tag{34}$$

后文中，我们将采用正规乘积定义哈密顿量，扔掉上式中的 $V/2$.

零点能与正规乘积

(30) 中的 $V/2$ 是零点能，正如单个谐振子 (13) 中的 $\omega/2$ 对应谐振子的零点能一样. 这是 Φ 和 Π 不确定性原理的基本要求. 这里空间体积 V 的出现，是因为自由场能量密度（简称真空能）$\rho_0 = H_0/V = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\omega}{2}$ 受到所有动量真空涨落的贡献，是发散的。假如给场论一个紫外截断 $|\vec{k}| < \Lambda$，那么自由场能量密度 $\rho_0 \sim \Lambda^4$.

即然真空能是空间中每一点都一样的能量密度，可以扔掉真空能吗？在宇宙学中，宇宙的膨胀速度 (哈勃参数) $= \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$ 是由宇宙的总能量密度支配的，包括真空能密度. 所以，真空能会影响宇宙膨胀，也关系到暗能量问题，是理论物理中最大的问题之一.

但如忽略引力与宇宙膨胀，则平坦空间量子场论只感兴趣能量的差值，不感兴趣全空间能量的整体移动，所以，在本导论中，未来我们将扔掉真空能. 扔掉真空能的系统化办法是引入正规乘积，重新定义哈密顿量 $H \to :H:$，其中冒号代表正规乘积，即要求 H 中所有算符重新排为 $\alpha^\dagger$ 在 α 左边的形式.

将 ϕ 用产生湮灭算符展开

利用 (28)，用产生湮灭算符表示 ϕ，有

$$\phi_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\alpha_{\vec{k}}(t) + \alpha^\dagger_{-\vec{k}}(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(e^{-i\omega t}a_{\vec{k}} + e^{i\omega t}a^\dagger_{-\vec{k}}\right) \tag{35}$$

做空间部分的 Fourier 变换，得

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a_{\vec{k}}\ e^{ik\cdot x} + a^\dagger_{\vec{k}}\ e^{-ik\cdot x}\right) \tag{36}$$

几点说明：

- 上式 $a_{\vec{k}}$ 前面的系数中，$e^{-i\omega t}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ 优雅地组合成了 4 维时空矢量的内积：$e^{ik\cdot x}$. 这种优雅的起源是 Lorentz 对称性
- 由于 ϕ 中既有 $a^\dagger_{\vec{k}}$ 又有 $a_{\vec{k}}$，ϕ 即具有产生粒子的能力，又同时具有同等的湮灭粒子的能力. 由于我们的出发点是一个 Lorentz 不变的拉氏量，所以这一点是隐含在出发点中的. 可以证明（见 Weinberg §5.2），即使不从拉氏量出发，场“既产生粒子，又湮灭粒子”的特性也可以从 Lorentz 不变性推导出来
- 上式只对空间积分，并不对时间积分. 其物理意义是，作为“在壳”（即满足相对论质能关系 $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$） 粒子产生湮灭算符，$a^\dagger_{\vec{k}}$ 和 $a_{\vec{k}}$ 只能依赖于动量的空间部分. 粒子的能量已经由动量决定，所以不能再对能量进行积分，也就是说，积分不是能动量积分 d^4k，而只能是动量空间分量积分 d^3k
- 上式中的 $1/\sqrt{2\omega}$ 因子来源于对易子 (22) 和 (33) 的自洽性
- 可以证明（见 Weinberg §5.2），因子 $1/\sqrt{2\omega}$ 刚好联系自旋为 0 粒子的 Poincaré 变换，以及标量场的 Lorentz 变换. 所以，标量场的激发体现为自旋为 0 的粒子
- 我们没费多大力气，就明显解出了 $\phi(t, \vec{x})$ 如何依赖 t. 这是由于 ϕ 按照自由场演化（求解场的 Klein-Gordon 方程，即标量场运动方程 (8) 的自由部分，再把积分常数替换成算符，我们同样可以得到 (36). Heisenberg 绘景下的场满足非线性运动方程 (8)，就没有那么容易求解了）. 下一小节我们将看到，算符时间演化的简单性，是因为我们把时间演化的复杂性放到了物理状态里面

4 相互作用绘景下的量子态：自由态、物理态及其时间演化

在上一小节当中，我们看到，相互作用绘景下的算符 ϕ “不知道”相互作用 V_I. 它们按照 H_0 随时间演化，可以很容易地解出它们随时间演化的明显表达式 (36).

但是，“世界上没有免费的午餐”. 和 Heisenberg 绘景相比，相互作用绘景下物理内容的复杂度和丰富性不是自动消失了，而是转化到了量子态随时间的变化当中. 针对相互作用绘景下的算符 ϕ，可以用两种不同的方式构造量子态：简单但过于理想化的自由态，和现实而复杂的物理态 （自由态和物理态都“生活”在同一个 Hilbert 空间中，只是属于用不同方式构造出来的完备基，可以通过做内积等互相投影）：

由产生湮灭算符 $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ 定义的自由态

像谐振子一样，我们可以用产生湮灭算符 $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ 为量子场的 Hilbert 空间（常被称作 Fock 空间）构造一组完备基. 它们分别对应自由场的：

- 真空 $|0\rangle$：作为 H_0 的基态，$|0\rangle$ 是被所有 $a_{\vec{k}}$ 湮灭的态：对 $\forall k$，$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0$. 我们暂且假设真空是唯一的，并且定义真空的归一化为 $\langle 0|0\rangle = 1$.
- 单粒子态 $|\vec{k}\rangle \equiv \sqrt{2\omega} a^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle$（我们在定义中加入因子 $\sqrt{2\omega}$，这样定义的两个单粒子态的内积是 Lorentz 不变的. 这种约定和 Peskin 和 Schwartz 相同，但与 Weinberg 不同）：利用 (33)，可以计算出单粒子态的正交、归一化条件为：

$$\langle \vec{p}|\vec{q}\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}\langle 0|a_{\vec{p}}a^\dagger_{\vec{q}}|0\rangle = 2\omega_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{37}$$

如果一个过程只涉及到单粒子态，则对 $\forall|\vec{q}\rangle$，由

$$|\vec{q}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}|\vec{p}\rangle(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle \tag{38}$$

可得单粒子态的完备性条件

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{p}}}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1_1 \tag{39}$$

其中我们用下标 1 强调只是对单粒子态完备. 这是因为，推导完备性的前提条件 $\forall|\vec{q}\rangle$ 只是单粒子态（即没包括真空态或多粒子态）.

- 多粒子态：我们可以在真空态上作用多于一个产生算符，得到 $|\vec{k_1}\vec{k_2}\cdots\rangle$. 只要提供足够大能量，量子场论中能产生的粒子数没有上限（对无质量粒子 $m=0$，即使只提供有限大能量，场论中也能产生无穷多粒子. 如果我们不细心处理，这无穷多的粒子会带来一些量发散或等于 0，这就是场论中的红外发散问题. 不过，可以通过小心界定可观测量，来去除场论中的红外发散）.

按照上述手续，我们已经由相互作用绘景的产生湮灭算符 $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ 构造了自由量子态. 但是，眼界决定格局. 由于 $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ 本身只“知道”自由哈密顿量 H_0，从它们直接导出的量子态 $|\vec{k_1}\vec{k_2}\cdots\rangle$ 也只“知道” H_0，不“知道”相互作用 V_I. 所以，它并不精确描述真实世界中具有相互作用的粒子，最多只能作为弱耦合下的一种近似描述（我们将在介绍 S 矩阵、散射振幅等概念时，进一步讨论这种“近似描述”的有效性问题）.

场算符对自由粒子的产生湮灭

在正文中，我们通过 $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ 定义了自由粒子态. 而有 (36) 式可见，场算符 ϕ 里既包含 $a^\dagger_{\vec{k}}$，也包含 $a_{\vec{k}}$，前面的系数是 Fourier 变换，所以，当 $\phi(t,\vec{x})$ 作用在 $|0\rangle$ 上时，会在时间 t 位置 $\vec{x}$ 产生一个粒子. 而 ϕ 作用在本来就有粒子的状态上，则同时具有湮灭原有粒子和产生新粒子的效果.

由完整哈密顿量定义的物理态

前面已经提到，自由粒子态并不能精确描述现实世界中具有相互作用的粒子. 精确描述带有相互作用的粒子的量子态，要用完整的哈密顿量 H 定义. 对一个一般的相互作用量子场论，我们对 H 定义的量子态了解远不如自由态那么多. 但是，我们仍知道，H 应该存在最低能量的基态. 我们定义基态为 $|\Omega\rangle$，并且暂且假设 $|\Omega\rangle$ 是唯一的. 为方便（如果我们暂不考虑真空能对宇宙膨胀的影响），我们调整 H 的定义，使得 $H|\Omega\rangle = 0$. 另外，我们设 $\langle 0|\Omega\rangle \neq 0$ （H 定义的真空与 H_0 定义的真空相差不太大，这有助于后文中我们建立微扰论）

真实世界是 H 的基态吗?

不知道. 超对称以及弦理论预言，H 基态的宇宙常数应该是 0 或者负数. 但是观测发现暗能量密度是正的，最简单的解释是正的宇宙常数. 弦论景观猜测认为，弦论中具有很多亚稳态真空，对应 H 的局域极小值，而不是最小值. 这样，我们的真空可能通过量子隧穿衰变到真的真空. Coleman 在 Fate of the false vacuum 中讨论了亚稳态真空如何衰变.

假如我们生活在亚稳态真空，常伟思说，我们的人生中，宇宙没有发生过重大变故，属于偶然. 但我们也不必惊慌. 根据贝叶斯推断，真空上百亿年都没有衰变，在未来几百年衰变的可能性极小.

相互作用绘景下，态随时间的演化

相互作用绘景下，态（包括自由态，物理态）随时间如何演化？由于在给定 t 时刻，算符在任何态下的期望值与选择 Heisenberg 绘景还是相互作用绘景无关，对任意 Heisenberg 绘景下的态 $|\Psi\rangle, |\Theta\rangle$，及它们在相互作用绘景下对应的态 $|\psi\rangle, |\theta\rangle$，都有（由于 H 守恒，以及 H_0 在自由场意义下守恒，这里我们让 $H = H[\Phi(t=0), \Pi(t=0)]$，$H_0 = H_0[\phi(t=0), \pi(t=0)]$，这将为我们下一章的计算提供便利）

$$\langle\Theta|e^{iHt}O(0,\vec{x})e^{-iHt}|\Psi\rangle = \langle\theta|e^{iH_0t}O(0,\vec{x})e^{-iH_0t}|\psi\rangle \tag{40}$$

其中我们已经分别用 Heisenberg 和相互作用绘景下的时间演化算符，把算符 $O(0,\vec{x})$ 演化到了任意时间. 而两个绘景下，算符在时间 0 点是一样的. 且 Heisenberg 绘景下态 $|\Psi\rangle = |\psi, t=0\rangle$，我们有，相互作用绘景下的态随时间演化规律为

$$|\psi,t\rangle = e^{iH_0t}e^{-iHt}|\psi,t=0\rangle \equiv U(t,0)|\psi,t=0\rangle \tag{41}$$

其中，我们定义把态从 $t=0$ 演化到任意时刻 t 的时间演化算符为

$$U(t,0) \equiv e^{iH_0t}e^{-iHt} \tag{42}$$

由于 H 和 H_0 不对易，U 是一个非常复杂的算符. 量子场论的动力学中大部分复杂性都来源于 U 的复杂性. 我们将在后续章节将 U 写成更协变的“编时乘积”的形式 $U(t,t_0) = T\exp[-i\int_{t_0}^{t} V_I(\tau)d\tau]$，并进一步研究它的性质.