# 第三章：微扰论

量子场论导论，王一，香港科技大学物理学系

（本文为草稿，如发现错误，请查看最新版：https://pan.baidu.com/s/1Ql1-MbgoiYtik3R2YmNKkg?pwd=kurv
如仍有错，欢迎指正．邮件：tririverwangyi@gmail.com，B 站：王一研究宇宙）

## 1 粒子物理中的可观测量

在后续章节中，我们将在场论中做很多计算．但是在做计算之前，我们需要提问：我们应该算什么？场论中哪些量是可观测的？当然，这个问题的答案取决于将场论应用于哪个领域．这里，我们针对高能物理，特别是粒子物理对撞实验，讨论场论中的可观测量．

### 粒子对撞实验：入态与出态

原则上说，既然场是一种物理存在，我们应该可以直接对场进行测量（例如，中学物理就学过如何观测电磁场；实标量场对应厄米算符，原则上也可观测，例如测量基本粒子质量，一定意义上就是“观测”了希格斯的真空期望值）．但是，研究粒子物理最常见的实验是粒子对撞实验；粒子物理对撞实验中，直接测量场或场的关联函数非常困难（不过，在场论的其它应用，比如凝聚态或宇宙学中，观测场的关联函数是可能的．这里我们不展开讨论这些应用）．这是因为，粒子对撞实验研究的是在极小的距离尺度下，例如 $10^{-20}$ 米的尺度，粒子体现出的性质．但是我们无法用探测器直接测量这么小的尺度．通常，探测器在距离粒子对撞点几厘米到数十米的宏观距离上，探测飞出粒子的径迹．为了用探测器得到的信号推断粒子对撞实验中发生了什么，我们注意到入射粒子（入态）和出射粒子（出态）具有如下特征：

入态：在对撞发生前足够远的过去，在加速器里彼此互相接近过程中的粒子可以近似成自由粒子（当然，对撞前的粒子可能受到磁场约束，一个束流的粒子彼此之间具有静电排斥力，或者这些粒子可能是约束在核子中的夸克．但是这些相互作用与对撞无关，且我们假设对撞的能标远高于这些相互作用的特征能标，所以我们仍可以把这些粒子近似为自由粒子）．我们把对撞发生前接近自由粒子的状态称为入态．例如，在相互作用绘景下，两个动量分别为 $\vec{k}_1$ 和 $\vec{k}_2$ 的

**粒子对撞** （这里我们考虑的是自旋为 0 的一种特定标量粒子. 如果有多种粒子，或粒子有自旋，我们标记粒子时，也要指定粒子的种类和自旋. 另外，入态的概念可以推广到单粒子衰变的情况，或多于两个粒子对撞的情况. 但是三个粒子同时在极小空间尺度对撞的概率很小，只有在极高密度情况下才可能有重要效果），在 $t \to -\infty$ 时，对应的入态为 $|\text{in}, \vec{k}_1\vec{k}_2, t \to -\infty\rangle \simeq |\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$.

出态：对撞发生后，粒子接近光速彼此远离. 在到达探测器时，粒子之间距离已经很远，彼此之间的相互作用可以忽略（这里暂时忽略软光子、夸克喷注等带来的复杂性. 场论中处理红外发散时，会讨论这些问题）. 我们把对撞发生后接近自由粒子的状态称为出态. 例如，出射 $n$ 个粒子，其动量分别为 $\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n$ 的出态，在 $t \to +\infty$ 时为 $|\text{out}, \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n, t \to +\infty\rangle \simeq |\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n\rangle$

如何从接近自由粒子的入态与出态读出对撞发生时，相互作用的信息？如果没有相互作用，则出态仍是入态那些自由粒子，相互作用绘景下的出态与入态没有区别. 而有相互作用时，相互作用的信息体现在出态相对于入态发生了什么变化. 量子力学意义上，就是说，我们要计算某个特定出态与入态之间的内积. 如何计算出态与入态之间的内积？根据量子理论中测量的基本假设，“该内积的绝对值平方”正比于“测量到这个特定出态的概率”.

你可能问：计算内积有什么难的？内积不就是

$$\langle \text{out}, \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n, t \to +\infty | \text{in}, \vec{k}_1\vec{k}_2, t \to -\infty \rangle$$

吗？但是，量子测量所要求的内积，应该作用在同一时刻的两个态上，而不是一个态在无穷远的过去，另一个态在无穷远的未来（从另一个角度看，如果我们真的按照上式计算内积，则根据自由粒子态的正交性，我们只能得到一个平庸的 $\delta$ 函数，而得不到粒子对撞的信息）. 所以，我们要用时间演化算符把两个态的时间演化到一样，再做内积，如边栏示意图所示；这就是 $S$ 矩阵元（这里矩阵元的意思，是在完备的自由粒子基上的期望值）. 所有 $S$ 矩阵元组成的矩阵，就是 $S$ 矩阵：

自由真空 $|0\rangle$ 和完整真空 $|\Omega\rangle$ 的区别

这里，我们忽略了 $|0\rangle$ 和 $|\Omega\rangle$ 的区别. 作为注解，在 Schrödinger 绘景下，可以做展开 $|\Omega\rangle = c_0|0\rangle + \sum_n c_n e^{-iE_n t}|E_n\rangle$，其中 $|E_n\rangle$ 是自由场的非零能量本征态. $S$ 矩阵涉及无穷长时间的演化：$t \to \infty$. 在无穷长时间极限下，为了去掉 $|E_n\rangle$，我们可以为时间引入无穷小虚部：$t \to \infty(1 - i\epsilon)$. 这样，$t$ 的虚部就可以指数压低 $|E_n\rangle$ 的贡献. 相关讨论参见 Peskin §4.2. 另外，在 Lorentz 不变的场论中，$|\Omega\rangle$ 和 $|0\rangle$ 的区别不明显，但是，如果没有 Lorentz 对称性，例如宇宙学中计算关联函数，如果忽略时间上的虚部，则即使树图计算也会出现非物理的发散.

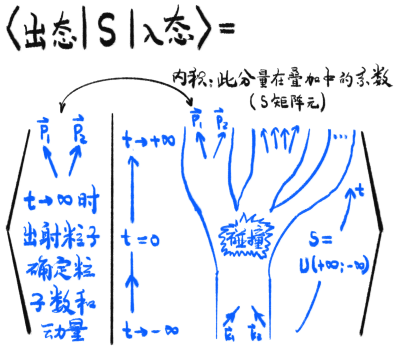
## $S$ 矩阵

我们定义 $S$ 矩阵元为：

$$\begin{aligned} &\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | S | \vec{k}_1\vec{k}_2 \rangle \\ \equiv\ &\langle \text{out}, \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n, t \to +\infty | U(+\infty, -\infty) | \text{in}, \vec{k}_1\vec{k}_2, t \to -\infty \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

根据上文的讨论，入态和出态在无穷远的过去和无穷远的未来分别可以用自由粒子态来近似，所以 $S$ 矩阵为

$$S = U(+\infty, -\infty) \tag{2}$$



### $S$ 矩阵中的相互作用部分：$T$ 矩阵及其不变矩阵元 $\mathcal{M}$

虽然 $S$ 矩阵携带了粒子对撞的信息，但是考虑到在相互作用较弱时（否则，如果相互作用较强，则微扰论失效，我们能解析计算的东西极其有限），粒子发生相互作用的概率较小（准确讲，是量子线性叠加意义上的概率幅度较小）. 所以，我们从 $S$ 矩阵中分离出一个“没发生相互作用”的单位矩阵，和发生相互作用的部分 $T$：

$$S = 1 + iT \tag{3}$$

注意到 $T$ 矩阵中包含一个能量-动量守恒的 $\delta$ 函数，我们可以进一步定义不变矩阵元 $\mathcal{M}$ 为（$\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，证明参见 Weinberg §3.4 中的 $R_{\beta\alpha}$. 不过注意到 Weinberg 定义的态归一化与这里不同，所以 Weinberg 的 $M_{\beta\alpha}$ 不是 Lorentz 不变的）：

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | T | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)\ \mathcal{M}(k_1 k_2 \to p_1 \cdots p_n) \tag{4}$$

其中 $\delta^4(\Sigma p) \equiv \delta^4(p_1 + \cdots + p_n - k_1 - k_2)$ 是能动量守恒的简写.

上面，我们定义的 $S$ 矩阵及其相互作用部分，拉近了量子场论理论与粒子对撞实验现象间的距离. 但是，注意到：(1) $S$ 矩阵正比于能动量守恒 $\delta$ 函数；(2) $S$ 矩阵是概率幅度，$|S|^2$ 才正比于概率. 于是，发生反应的概率正比于能动量守恒 $\delta$ 函数的平方 $[\delta^4(\Sigma p)]^2 = \delta^4(0) \times \delta^4(\Sigma p) = \infty \times \delta^4(\Sigma p)$. 出现这个发散的根源是，我们的入态和出态都是平面波. 平面波弥漫于全空间，发生反应的体积，和反应持续的时间都无穷大.

所以，我们可以考虑更贴近实验现象的可观测量，来消去这个无穷大. 具体做法如下：(1) 在有限空间体积的盒子里，以及有限时间长度内建立量子场论，并写出 $S$ 矩阵；(2) 定义衰变率、散射截面等在盒子体积和时间长度趋于无穷时不发散的可观测量，并算出它们与 $S$ 矩阵之间的关系；(3) 取盒子体积和时间长度无穷大的极限. （上述步骤的具体实现比较技术性，且这些技术细节对初学场论帮助有限. 感兴趣的读者可参见，例如 Weinberg §3.4. 这里，我们只给出衰变率和散射截面的定义. 这些定义应该也可以在量子场论的一些先修课程，例如原子物理或高等量子力学中找到. ）经过这个手续，对入态粒子数为 1 的衰变过程，和入态粒子数为 2 的散射过程，我们可以分别得到衰变率与散射截面：

### 入态粒子数为 1：衰变率

衰变率是一个粒子单位时间发生衰变的概率. 设这个粒子初始处于静止状态（否则需要乘上相对论时间膨胀因子），质量为 $m$，则微分衰变率对应第 $i$ 个粒子的动量处于区间 $(\vec{p}_i, \vec{p}_i + d\vec{p}_i)$（$i = 1, \cdots, n$）的概率：

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)}{2m} |\mathcal{M}(k_1 k_2 \to p_1 \cdots p_n)|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}_i}} \tag{5}$$

### 入态粒子数为 2: 散射截面

散射截面 $\sigma$ 是单位时间，单位束流强度（对于有限空间体积中的单粒子平面波，对于打向固定靶的一束粒子，束流强度是 $\Phi = u/V$，其中 $u$ 是粒子的速度）的粒子对撞，发生反应概率.

散射截面分为微分截面和总截面. 微分截面 $d\sigma$，对应第 $i$ 个粒子的动量处于区间 $(\vec{p}_i, \vec{p}_i + d\vec{p}_i)$（$i = 1, \cdots, n$）的概率：

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)}{4\omega_{\vec{k}_1} \omega_{\vec{k}_2} u} |\mathcal{M}(k_1 k_2 \to p_1 \cdots p_n)|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}_i}} \tag{6}$$

其中 $u \equiv \sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 - m_2^2}/(E_1 E_2)$（在质心系中，可计算 $u = |(\vec{k}_1/E_1) - (\vec{k}_2/E_2)|$ 是质心系看来，两个粒子之间的速度差，极端相对论情况下，$u = 2$）.

“这个确定 $n$ 体末态的反应”的总截面 $\sigma$ 则是对上述微分式的积分. 如果理论中包含不同种类、自旋的粒子，我们还可以对粒子种类、自旋求和；以及可以对末态粒子数量求和，得到更“总”的总截面.

散射截面的量纲为面积，它的物理意义可以看成，把每个粒子想象成具有一定横截面积的“硬球”，只要入射粒子打到这个面积里面就发生反应，否则不发生反应. 这种情况下发生反应的概率就是靶的面积.

通常教科书里面的散射截面计算，只包含两个出射粒子（一般用计算机程序来计算具有更多出射粒子的散射截面）. 这时，我们可以用能动量守恒 $\delta$ 函数明显积出一些动量方向，只剩下一个出射粒子的立体角积分 $d\Omega$，于是，在 3+1 维空间的质心系中，两体末态的散射截面可以简化为

$$d\sigma = \frac{|\vec{p}_1|\,|\mathcal{M}(k_1 k_2 \to p_1 p_2)|^2}{64\pi^2 \omega_{\vec{k}_1} \omega_{\vec{k}_2} (\omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}) u} d\Omega \tag{7}$$

作为小结，本小节中，我们发现，量子场论理论中的时间演化算符 $U$，可以写

**粒子物理的其它可观测量**

除了散射截面和衰变率，还有其它可观测量可以把粒子物理的量子场论理论和实验联系起来，例如作为复合粒子的质子、中子质量，$\mu$ 子磁矩，中子电偶极矩，Lamb 位移等.

成更贴近实验的 $S$ 矩阵，而 $S$ 矩阵的相互作用部分 $\mathcal{M}$，可以用来计算“实验中可观测的”衰变率 $\Gamma$ 和散射截面 $\sigma$. 尽管我们已经建立起了这些概念上的联系，我们仍需把时间演化算符 $U$ 写成更方便的形式，以便做微扰计算. 这就是下一小节“协变微扰论”的内容.

## 2 协变微扰论

在上一小节，我们已经建立起了量子场论与粒子对撞实验可观测量之间的联系. 如果不怕麻烦，原则上，已经可以利用上一小节的公式计算任何费曼图代表的物理过程. 但是，上一小节中，我们并没有把时间演化算符 $U$ 写成 Lorentz 不变的形式，所以无法发挥 Lorentz 对称性带来的便利. 这里，我们把时间演化算符写成 Lorentz 不变的形式：

### 通过微分方程把时间演化算符改写成编时乘积形式

在上一章，我们已经得到时间演化算符（在 $H[\phi(0),\pi(0)]$ 等处，我们用中括号表示 $H$ 对 $\phi,\pi$ 的依赖关系，因为 $H$ 中有空间积分，所以 $H$ 是 $\phi(0),\pi(0)$ 的泛函，而不是普通函数）

$$U(t,0)\equiv e^{iH_0[\phi(0),\pi(0)]t}e^{-iH[\phi(0),\pi(0)]t} \tag{8}$$

注意到 $U$ 满足微分方程（注意到 $e^{iH_0t}V_I[\phi(0),\pi(0)]e^{-iH_0t}=V_I[\phi(t),\pi(t)]$）：

$$i\partial_t U(t,0)=V_I[\phi(t),\pi(t)]U(t,0) \tag{9}$$

可以逐项验证，以下无穷级数也满足上面的微分方程，并且具有相同的初始条件 $U(0,0)=1$，所以与上面定义的时间演化算符等价（这里只给出了推导的关键步骤，初学者也可以暂且略过推导步骤，直接记住最后一行的结论）：

$$\begin{aligned}
U(t,0)=&1+(-i)\int_0^t dt_1\ V_I(t_1)+(-i)^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ V_I(t_1)V_I(t_2)\\
&+(-i)^3\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^{t_2}dt_3\ V_I(t_1)V_I(t_2)V_I(t_3)+\cdots\\
=&1+(-i)\int_0^t dt_1\ V_I(t_1)+\frac{(-i)^2}{2!}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\ T\{V_I(t_1)V_I(t_2)\}\\
&+\frac{(-i)^3}{3!}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\int_0^t dt_3\ T\{V_I(t_1)V_I(t_2)V_I(t_3)\}+\cdots\\
\equiv&T\left\{e^{-i\int_0^t dt'\ V_I(t')}\right\}
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $T\{\cdots\}$ 是编时乘积，定义为把括号中的算符（如果算符在指数上，则 Taylor 展开成多项式之后），按照“时间晚在左，时间早在右”进行排序（这

里“左”代表较晚时间，和 $S$ 矩阵需要计算的 ⟨末态|初态⟩ 内积中，“末态在左”是一致的）. 例如，两个算符的编时乘积可以明显写成：

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \tag{11}$$

其中 $\theta(z)$ 是 Heaviside $\theta$ 函数（$z > 0$ 时 $\theta(z) = 1$, $z < 0$ 时 $\theta(z) = 0$）.

把时间演化算符写成 (10) 最后一行，我们可以明显地看到时间演化算符的幺正性：$U^\dagger(t,0) = U^{-1}(t,0) = U(0,t)$（我们曾提到，为了把 $|\Omega\rangle$ 变成 $|0\rangle$，我们为时间引入了一个无穷小虚部，在这个无穷小虚部变得重要的少数情况下，我们不能使用时间演化算符幺正性的结论）. 这允许我们推广从时间 $t = 0$ 开始演化的假设，可以写出从任何时间开始演化的时间演化算符：$U(t,t_0) = U(t,0)U(0,t_0)$（这是因为，我们不必在意编时乘积中的算符排序，反正编时乘积会将算符最终排到正确位置，所以可以直接把时间演化算符的乘积写成指数上积分限的加和：$\int_0^t + \int_{t_0}^0 = \int_{t_0}^t$），满足：

$$U(t,t_0) = T\left\{e^{-i\int_{t_0}^t dt'\ V_I(t')}\right\} \tag{12}$$

$U(t,t_0)$ 中明确指定了时间 $t$ 和 $t_0$，所以显然和参考系选取有关. 不过，为了计算 $S$ 矩阵，我们只需要计算 $S = U(+\infty,-\infty)$. 所以，$U$ 中的起止时间不再破坏 Lorentz 不变性（对任何观测者，无穷远的过去和未来都是一样的）. 下面，我们将看到，只要满足一个“微观因果性”条件，则 $U(+\infty,-\infty)$ 确实是 Lorentz 不变的：

### 无穷长时间演化算符 $U(+\infty,-\infty)$ 的 Lorentz 不变性

为了检查 $U(+\infty,-\infty)$ 的 Lorentz 不变性，我们注意到，在 Lorentz 变换下：

- 指数中的 $\int_{-\infty}^{\infty} dt' V_I(t')$ 是出现在作用量中的项，所以是 Lorentz 不变的.
- 我们要求编时乘积也要 Lorentz 不变. 也就是，不同速度的观测者按照 $T\{\cdots\}$ 定义的算符顺序必须是等价的. （1）如果这些算符所在的时空点是类时或类光的，狭义相对论保证了，它们之间具有绝对的时间顺序，不同观测者的编时乘积是相同的；（2）如果这些算符所在的时空点是类

空的，我们则需要额外的要求来保证 $U(+\infty,-\infty)$ 的 Lorentz 不变性：

$$[\phi(x),\phi(y)]=0 \quad \text{for } (x-y)^2>0 \tag{13}$$

也就是说，类空算符对易. 这个条件叫做“微观因果性”（我们把它叫做因果性，是因为“类空算符对易”也可以理解成，类空算符具有共同本征态，所以测量先后顺序不影响测量结果. 可以验证，上一章我们用产生湮灭算符写出的 $\phi(x)$ 确实满足微观因果性）.

于是，由 (4)，我们可以将散射振幅的计算写成如下形式：

协变微扰论中不变矩阵元的计算

由 (2)，(4)，(10) 式，可得不变矩阵元 $\mathcal{M}$ 的计算公式：

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\ \mathcal{M}(k_1k_2\to p_1\cdots p_n)\\&=\left\langle \vec{p}_1\cdots\vec{p}_n\left|T\left\{e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\ V_I(t)}\right\}\right|\vec{k}_1\vec{k}_2\right\rangle-(\text{其它贡献})\end{aligned} \tag{14}$$

我们稍后再讨论这里的第二项“其它贡献”，先来讨论第一项. 第一项可以按以下步骤计算（稍后，我们将会进一步化简计算步骤）：

1. 把 $e^{-i\int dt\ V_I(t)}$ 进行 Taylor 展开，保留到某个给定阶数
2. 把 $V_I$ 中的所有的场展开成产生湮灭算符
3. 把上式中入态写成产生、湮灭算符作用到真空上：$|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle=\sqrt{2\omega_{\vec{k}_1}}a^\dagger_{\vec{k}_1}\sqrt{2\omega_{\vec{k}_2}}a^\dagger_{\vec{k}_2}|0\rangle$，以及相似地处理出态
4. 使用产生湮灭算符的对易关系，把所有的湮灭算符移动到最右边湮灭右矢真空，把所有的产生算符移动到最左边湮灭左矢真空

经过以上四个步骤，$\mathcal{M}$ 中就不再含有算符，只剩下产生湮灭算符经过对易后剩下的一串函数. 也就是说，我们算出了 $\mathcal{M}$ 的具体表达式. 这里，前三步可以看成是准备工作，第四步中产生湮灭算符的对易是计算的关键. 我们先来计算一个例子，再从例子中归纳出：

- 有哪些“其它贡献”需要去掉
- 从产生湮灭算符的对易操作中画出费曼图. 于是，未来，我们就不必每次做产生湮灭算符的对易操作，而是可以直接画费曼图进行计算了

## 例子：$\phi^4$ 理论的两体末态散射：第 $\mathcal{O}(\lambda^0)$ 阶

让我们考虑一个具体例子：在介绍标量场时，我们曾引入相互作用

$$V_I(\phi) = \int d^3x \, \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{15}$$

下面，我们考虑入态为 $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$，出态为两个粒子 $|\vec{p}_1\vec{p}_2\rangle$，并且在 $e^{-i\int dt' \; V_I(t')}$ 中展开到 $\mathcal{O}(\lambda^0)$ 阶. 我邀请感兴趣的读者先自己按上面的步骤试着算一下，再往下看.

注意到 $\mathcal{O}(\lambda^0)$ 的项不含 $V_I$，所以肯定与散射问题无关. 不过我们还是来计算一下，因为 (1) 熟悉计算规则；(2) 了解我们要扔掉这一项的原因. (14) 中的期望值可写成：

$$\begin{aligned}
\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}(\lambda^0)} \equiv \left\langle \vec{p}_1\vec{p}_2 \left| T\left\{e^{-i\int dt \; V_I(t)}\right\} \right| \vec{k}_1\vec{k}_2 \right\rangle_{\mathcal{O}(\lambda^0)} &= c\langle 0|a_{\vec{p}_1}a_{\vec{p}_2}a^\dagger_{\vec{k}_1}a^\dagger_{\vec{k}_2}|0\rangle \\
\xrightarrow[\text{右移一位}]{\text{将 } a_{\vec{p}_2} \text{ 算符}} & c\langle 0|a_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{k}_1}a_{\vec{p}_2}a^\dagger_{\vec{k}_2}|0\rangle + c(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_2-\vec{k}_1)c\langle 0|a_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{k}_2}|0\rangle \\
\xrightarrow[\text{右移一位}]{\text{再将 } a_{\vec{p}_2} \text{ 算符}} & c(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_2-\vec{k}_2)\langle 0|a_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{k}_1}|0\rangle + c(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}_2-\vec{k}_1)\langle 0|a_{\vec{p}_1}a^\dagger_{\vec{k}_2}|0\rangle
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $c \equiv \sqrt{8\omega_{\vec{p}_1}\omega_{\vec{p}_2}\omega_{\vec{k}_1}\omega_{\vec{k}_2}}$. 这里我们看到，我们不断向右移动 $a_{\vec{p}_2}$ 算符的结果是，产生一系列项，每一项中，$a_{\vec{p}_2}$ 选择与一个产生算符“收缩”成一个 $\delta$ 函数. 我们可以用连接粒子的线来图形化地表示收缩的过程. 例如，$a_{\vec{p}_2}$ 和 $a^\dagger_{\vec{k}_1}$ 的收缩，可以由右图表示. 这可以看成是最简单的一张“费曼图”. 当然，(16) 的最后一行中还含有算符，所以我们还没完成计算. 我们需要再把 $a_{\vec{p}_1}$ 移动到最右边，这样

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}(\lambda^0)} = c(2\pi)^6\left[\delta^3(\vec{p}_2-\vec{k}_2)\delta^3(\vec{p}_1-\vec{k}_1) + (\vec{p}_1 \Leftrightarrow \vec{p}_2)\right] \tag{17}$$

它对应的费曼图如右图所示.

无论是从上面表达式，还是从图形，相信读者都看到了要扔掉这一项的原因：$\mathcal{O}(\lambda^0)$ 项对应粒子间没有相互作用，直接跑过去. 这部分是 $S = 1 + iT$ 中的“1”所代表的. 所以它不是 $\mathcal{M}$ 的一部分，而属于 (14) 中的“其它贡献”. 即：**不连通图属于“其它贡献”** （一会儿，我们还会看到稍复杂些的不连通图，但是它们也属于“其它贡献”）.

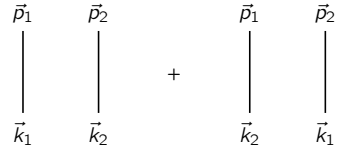
**最简单的费曼图**

$a_{\vec{p}_2}$ 和 $a^\dagger_{\vec{k}_1}$ 对易产生 $\delta$ 函数，可以用图形表示为：




这里我们设时间方向是从下到上，像时空图一样. 也有的书里时间方向是从左到右.

当我们把所有产生湮灭算符都收缩掉，我们就得到了费曼图：




这里，我们还没有制定费曼规则，也就是图形和公式之间定量的联系. 稍后，在更有用的例子中，我们将介绍费曼规则.

## 从 $\mathcal{O}(\lambda^0)$ 阶得到的经验：所有收缩与 Wick 定理

虽然 $\mathcal{O}(\lambda^0)$ 阶的项被扔掉了，但是我们得到一个重要经验：把所有湮灭算符移动到最右边，所有产生算符移到最左边，对应这些产生湮灭算符移动路径上的所有配对收缩. 上面计算中，因产生湮灭算符对易带来的“收缩”可以改写成一个更明晰和便于推广的形式：

$$\langle a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2} a^\dagger_{\vec{k}_1} a^\dagger_{\vec{k}_2}\rangle = \langle a_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{k}_1}\rangle\langle a_{\vec{p}_2} a^\dagger_{\vec{k}_2}\rangle + \langle a_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{k}_2}\rangle\langle a_{\vec{p}_2} a^\dagger_{\vec{k}_1}\rangle \tag{18}$$

当然，我们还有形如 $\langle a_{\vec{p}_1} a_{\vec{p}_2}\rangle\langle a^\dagger_{\vec{k}_1} a^\dagger_{\vec{k}_2}\rangle$ 的收缩，但是这样的收缩结果为零. 我们也可以省去把粒子写成产生湮灭算符作用在真空上的步骤，直接把上式写成

$$\langle \vec{p}_1\vec{p}_2|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle = \langle \vec{p}_1|\vec{k}_1\rangle\langle \vec{p}_2|\vec{k}_2\rangle + \langle \vec{p}_1|\vec{k}_2\rangle\langle \vec{p}_2|\vec{k}_1\rangle \tag{19}$$

为了下文方便，我们把这个经验再推广一下，如果我们要计算包含场 $\phi$ 的期望值（注意，我们要算的场算符 $\phi$ 都在编时乘积里面），则注意到 $\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a_{\vec{k}}\, e^{ik\cdot x} + a^\dagger_{\vec{k}}\, e^{-ik\cdot x}\right)$ 中既包含产生算符，又包含湮灭算符，所以，$\phi(x)$ 的湮灭算符部分要向右移动，产生算符部分要向左移动，对应的是 $\phi(x)$ 要和所有其它算符配对收缩. 例如

$$\begin{aligned}&\langle a_{\vec{p}} T\{\phi(x)\phi(y)\} a^\dagger_{\vec{k}}\rangle \\ =&\langle a_{\vec{p}}\phi(x)\rangle\langle\phi(y) a^\dagger_{\vec{k}}\rangle + \langle a_{\vec{p}}\phi(y)\rangle\langle\phi(x) a^\dagger_{\vec{k}}\rangle + \langle a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{k}}\rangle\langle T\{\phi(x)\phi(y)\}\rangle\end{aligned} \tag{20}$$

上式中，当 $\phi$ 与入、出态的产生湮灭算符收缩时，可以把 $\phi$ 提到编时乘积外面（可以将编时乘积明显写成 $\theta$ 函数后看出来）. 但是，当 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 收缩时，必须仍保持编时乘积. 上式中，

$$\begin{aligned}\langle \vec{p}|\phi(x)|0\rangle &= \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\langle a_{\vec{p}}\phi(x)\rangle = e^{-ip\cdot x} \\ \langle 0|\phi(x)|\vec{k}\rangle &= \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\langle\phi(x) a^\dagger_{\vec{k}}\rangle = e^{ik\cdot y}\end{aligned} \tag{21}$$

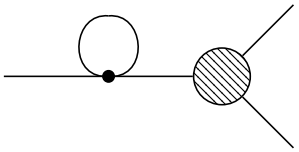
以及，我们定义 **费曼传播子**：$D_F(x-y) \equiv \langle T\{\phi(x)\phi(y)\}\rangle$.

综上所述，我们移动产生湮灭算符的结果，就是对期望值中的算符进行“**所有收缩**”（一般地，这个“编时乘积=正规乘积+所有收缩”的原则叫做“Wick 定理”. 虽然入、出态没有在编时乘积里面，但是考虑到它们分别“生活”在时间的 $-\infty$ 和 $\infty$，它们也可以看成是 Wick 定理适用范围的一部分）.

### LSZ 约化公式：联系 $S$ 矩阵与编时乘积

这里，我们粗略地说，$\phi$ 可以与入、出态的产生湮灭算符进行收缩，以建立编时乘积与 $S$ 矩阵的联系. 严格来讲，这种联系是 LSZ 约化公式保证的. 参见 Peskin §7.2，或 Weinberg §10.2 和 10.3，以及 Srednicki 的另一种证明方式.

LSZ 约化公式证明了，我们不必计算连在外线上的圈，例如下图. (即：我们需要计算的费曼图不包括下图，我们称我们需要计算的图为“**截腿的**”. )



我们可以直观地理解为，所有这样的图加在一起，贡献了从自由粒子到非微扰粒子的演化.

### 费曼传播子的计算

马上我们就会看到，费曼图的内线是“费曼传播子的 Fourier 变换”. 所以，这里我们先把费曼传播子计算出来：

$$
\begin{aligned}
& D_F(x-y) \equiv \langle T\{\phi(x)\phi(y)\}\rangle \\
= \ & \theta(x^0-y^0)\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega}e^{iq\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega}e^{-iq\cdot(x-y)} \\
= \ & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\cdot(x-y)}\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

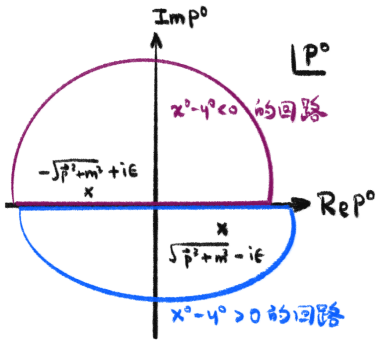
从第二行“三维动量积分”到最后一行“四维动量积分”的证明，倒过来证比较方便：考虑用留数定理将最后一行的 $\int dp^0$ 积掉，则视 $x^0-y^0>0$ 或 $x^0-y^0>0$，要在下半平面或上半平面闭合积分回路，分别得到第二行的两个 $\theta$ 函数以及后面的留数项. 我们对这个结果做几点说明：

- 所以，传播子 $D_F(x)$ 的四维 Fourier 变换为 $\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}$（由于有 $p^2=g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$，不同度规符号约定的书中，传播子的表达式会有 $p^2 \leftrightarrow -p^2$ 的差别）
- (22) 最后一行能写成四维 Fourier 变换，是 Lorentz 对称性的结果. 后面我们看到，这将让我们不必明显地做时间积分，极大简化费曼图的计算.
- (22) 最后一行中，$p^0$ 是自由的积分变量，可以从 $-\infty$ 到 $\infty$ 随意变化，不受质能方程 $\omega=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ 约束. 我们说这样的动量是“不在壳”的. 我们将看到，费曼传播子是费曼图的内线，所以，在协变微扰论中，费曼图的内线是不在壳的，不满足相对论质能关系（“内线不在壳”可以看成一种用 Lorentz 协变性简化计算的数学技巧，我们不必对它的物理内容做过多想像. 因为求解 Lippmann-Schwinger 方程的旧微扰论中，并没有“内线不在壳”这回事）.

#### 得到“所有收缩”的不同方法

这里，“所有收缩”是计算散射振幅，总结出费曼规则的关键步骤. 这个步骤可以从多种方法得到. 例如：

- 这里：利用产生湮灭算符的对易. 这是最简单基础，但不大漂亮的方法，参见例如 Weinberg §6.1
- 证明 Wick 定理. 这是上面方法较形式化的推广，是正则量子化手段下，较为系统严格的做法，例如 Peskin §4.3
- 路径积分量子化下，计算高斯积分，例如 Weinberg §9.4
- 路径积分量子化下，添加源，并对源求变分，例如 Srednicki §10




## 3 费曼图与费曼规则

我们继续研究 $\phi^4$ 理论的两体末态散射问题，这个小节中，我们将展开到耦合常数 $\lambda$ 的线性阶，并用计算获得的经验“推导”费曼规则（这里我们并不做严格推导，而只是通过例子 [并且经常只通过一个例子！] 对费曼规则进行了意会式的归纳. 我想，作为导论，这可以给读者更直观的印象. 如果愿意，读者可以考虑级数展开中的一个一般项，更一般地推导费曼规则）.

## 例子：$\phi^4$ 理论的两体末态散射：第 $\mathcal{O}(\lambda^1)$ 阶

我们继续进行微扰展开. 不过，鉴于上面得到的经验，我们不再使用蛮力对易产生湮灭算符，而是采用“所有收缩”这个稍巧一点的方法（我们将用这种方法作为过渡，导出费曼规则. 但是如果你要把场论应用到一个新领域，费曼规则还不清楚，则可以回到“所有收缩”来计算）. 在 $\mathcal{O}(\lambda^1)$ 阶，

$$\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}(\lambda^1)} = -i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\ \langle\vec{p}_1\vec{p}_2|\phi^4(x)|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle = -i\lambda\int d^4x\ \Big\{ \tag{23}$$

$$\langle\vec{p}_1|\phi(x)|0\rangle\ \langle\vec{p}_2|\phi(x)|0\rangle\ \langle 0|\phi(x)|\vec{k}_1\rangle\ \langle 0|\phi(x)|\vec{k}_2\rangle \qquad \Big[\text{对应费曼图：X}\Big] \tag{24}$$

$$+\frac{1}{2}\ \langle\vec{p}_1|\phi(x)|0\rangle\ \langle 0|\phi(x)|\vec{k}_1\rangle\ \langle\vec{p}_2|\vec{k}_2\rangle\ \langle\phi^2(x)\rangle + (\text{置换}) \qquad \Big[\text{对应费曼图：}|\,\text{þ}\Big] \tag{25}$$

$$+\frac{1}{8}\langle\vec{p}_1|\vec{k}_1\rangle\ \langle\vec{p}_2|\vec{k}_2\rangle\ [\langle\phi^2(x)\rangle]^2 + (\text{置换})\Big\} \qquad \Big[\text{对应费曼图：}8\,||\Big] \tag{26}$$

## 由 $\mathcal{O}(\lambda^1)$ 阶计算，总结费曼规则

我们分别讨论 $\langle\cdots\rangle_{\mathcal{O}(\lambda^1)}$ 式中的三行：

第一行 (24)：$\phi^4$ 中的每一个 $\phi$ 要分别和 $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ 收缩，有 4! 种不同的收缩方式，这刚好约掉了我们定义耦合常数 $\lambda\phi^4/(4!)$ 中的 4!. 也就是说，通常（稍后我们讨论例外的情况“对称因子”） **耦合常数定义中的阶乘被 $V_l$ 里面的不同收缩方式约掉**. 利用 (21)，积掉 $x$，有：

$$(24) = \text{X} = -i\lambda\int d^4x\ e^{i(k_1+k_2-p_1-p_2)\cdot x} = -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p) \tag{27}$$

上式中的第一个等号后面，和第二个等号后面，都可看作是费曼图的计算结果，分别对应“**位置空间的费曼规则**”和“**动量空间的费曼规则**”. 这里，为确定起见，我们只列出动量空间的费曼规则：

**规则一** 画费曼图：画出精确到微扰论给定阶，所有联通、截腿的费曼图. 整个图贡献一个动量守恒因子 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$（这里我们计算的是 $iT$. 如果计算 $i\mathcal{M}$，则费曼图将不包含这个动量守恒因子）

**规则二** 外线的费曼规则：每条标量外线贡献因子 1（后面我们将看到，矢量、旋量、张量外线将贡献非平庸因子）

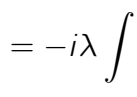
**规则三** 顶角的费曼规则：每个 $\lambda\phi^4/(4!)$ 相互作用顶角贡献因子 $-i\lambda$，且顶角满足四维动量守恒

计算 (24) 的费曼图，只需把上面三条费曼规则对应的因子乘起来.

**指数展开中的阶乘**

与耦合常数定义中的阶乘类似，把 $V_l$ 从指数上展开下来，根据泰勒展开公式，$V_l^n$ 也会伴随着一个阶乘：$V_l^n/(n!)$. 但是，我们也可以自由选择先与哪个 $V_l$ 中的场收缩，再与哪个 $V_l$ 中的场收缩. 所以，除了费曼图的外线不可分辨（例如外线是外场，要除一个对称性因子 $n$）的情况外，这个 $n!$ 也被约掉了. 即 **泰勒展开的阶乘被各 $V_l$ 间的不同收缩方式约掉**.

第二行 (25)：这个费曼图不连通，也不是截腿图，所以我们无需计算. 但是，我们仍感兴趣其中连通的圈图部分“b”（因为一方面，它将有助于我们导出更多费曼规则；另一方面，它将在传播子的重整化中出现）：

$$
\begin{aligned}
\text{  }^{\vec{p}_1}_{\vec{k}_1} &= -i\lambda \int d^4x \frac{1}{2} \langle \vec{p}_1|\phi(x)|0\rangle \langle 0|\phi(x)|\vec{k}_1\rangle \langle \phi^2(x)\rangle \qquad (28)\\
&= -\frac{1}{2} i\lambda \int d^4x e^{i(k_1-p_1)\cdot x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i}{q^2+m^2-i\epsilon}\\
&= -\frac{1}{2} i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(k_1-p_1) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i}{q^2+m^2-i\epsilon}
\end{aligned}
$$

除了前面已经看到的动量守恒因子，和顶角的费曼规则外，从上面表达式，我们又能总结出：

**规则四** 内线：每条携带四动量 $p^\mu$ 的内线（不与入、出态产生湮灭算符直接收缩的线） 贡献因子 $\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}$ （这个因子叫“费曼传播子”或“传播子”. 这里，注意到 $\langle\phi^2(x)\rangle$ 是 $\langle T\{\phi(x)\phi(y)\}\rangle$ 刚好收缩到同一点 $y\to x$ 上的特殊情况. 不过，一般的内线，以及下面的圈积分仍满足我们这里列出的规则. 认真的读者可以用图  来验证这一点）

**规则五** 圈积分：每个圈贡献一个积分 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$

最后，我们注意到 (28) 中有一个 1/2 因子. 这个因子是哪里来的？注意到在做“所有收缩”得到 $\langle\phi^2(x)\rangle$ 的时候，两个 $\phi$ 收缩只得到了一项，并不像 $\phi$ 与外线收缩一样有不同的选择 （为了看清这一点，读者可以明显地做一下产生湮灭算符的对易关系）. 所以，当图中有对称的收缩，$\lambda\phi^4/(4!)$ 中的 4! 没有被完全抵消. 对称收缩使得 4! 中残留下来的因子叫做“**对称性因子**”. 就是说，对 $\phi^4$ 理论，我们还需要最后一条费曼规则：

**规则六** 对称性因子：除掉由费曼图对称性造成的对称性因子 （如果你觉得对称性因子有点“摸不着头脑”，在 $\phi^4$ 理论的树图和一圈图中，我们只会遇到这一个对称性因子 1/2. 另外，(26) 将提供另一个练习计算对称性因子的机会）

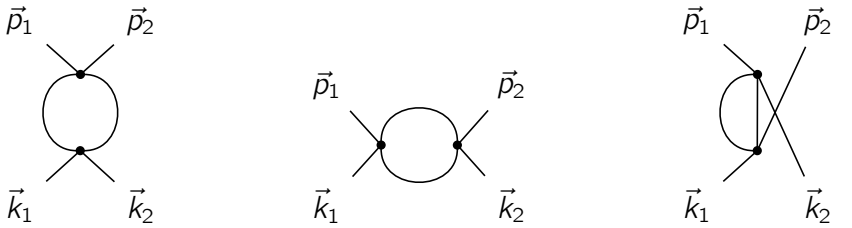
**总结** 在 $\phi^4$ 理论中，给定一个过程，我们按照上述六条规则，把所有费曼图加起来，再把每个费曼图中对应的因子乘起来，得到的结果就是 $iT = i(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)\mathcal{M}$（如果考虑标量场的其它相互作用，添加新顶角的费曼规则即可. 如果考虑光子、电子、或引力子等情况，则需要对不同粒子的内线、外线、顶角添加新的费曼规则）

**圈图与紫外发散**

从拓扑结构上讲，(28) 包含一个圈，它是我们遇到的第一个“圈图”. 圈图为量子场论引入了一个危险的（但后面我们会看到，也是深刻的，和有自知之明的）可能：由于顶角上的动量守恒无法确定圈中粒子的动量，每个圈剩下了一个动量积分 $\int d^4q$. 如果圈中的传播子不足够多（例如，这里只有一个传播子），则在 $q\to\infty$ 时，圈积分 $\to\infty$. 这就是量子场论中的紫外发散问题. 我们将在重整化部分讨论如何从技术上去除紫外发散，并且在重整化群部分进一步讨论紫外发散的起源.

第三行 (26)：这是个真空泡泡图，是费曼图“不连通”的另一种情况. 因为真空泡泡不连接到费曼图的连通部分，它对任何过程的贡献都是相同的，所以我们在“其它贡献”中把它减掉 （事实上，真空泡泡图可以重求和成一个相乘的相因子，所以说“除掉”比“减掉”更准确些，参见 Peskin §4.4）. 另外，也鼓励读者再亲手做一下产生湮灭算符的对易，以理解为什么这里的对称性因子是 $1/8$.

利用费曼图，就可以计算更复杂的过程了. 作为练习，读者可以写下在 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 阶，如下费曼图对应的 $i\mathcal{M}$：




(29)

下一章，我们将计算这些图.

另一个练习：利用我们提供的散射截面公式，计算 $\phi^4$ 理论零头阶 （最低的非平庸阶） 的散射截面.