第四章：圈图与重整化

量子场论导论，王一，香港科技大学物理学系

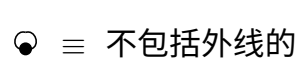
（本文为草稿，如发现错误，请查看最新版：https://pan.baidu.com/s/1Ql1-MbgoiYtik3R2YmNKkg?pwd=kurv
如仍有错，欢迎指正．邮件：tririverwangyi@gmail.com，B 站：王一研究宇宙）

1 重整化：心理学、物理学和数学原因

这一章里，我们将讨论 ϕ^4 理论中的圈图（带有圈的费曼图），并由此引入量子场论的核心概念：“重整化”．在讨论重整化的具体概念和技术细节前，我们先从各个角度看一看，上一章里我们构建的量子场论框架有什么不完整的地方？也就是说，为什么要引入重整化的概念？

重整化的心理学原因

上一章我们已经发现，一些圈图具有“紫外发散”．例如我们已经写出过费曼规则的（本章中，我们将计算 $i\mathcal{M}$ 而不是 iT，所以不包含 $(2\pi)^4\delta^4(k-p)$）



$$= -\frac{1}{2}i\lambda\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{-i}{q^2+m^2-i\epsilon}\xrightarrow{|q|\to\infty}\infty \tag{1}$$

类似地，形如  的费曼图，当圈积分趋于无穷大时，也会出现发散（但是它们的发散程度不同）．后面我们会看到， 会修正粒子质量 m， 会修正相互作用强度 λ．要是这些修正算出来是无穷大，肯定哪里错了．我们必须找出错误（后面我们将看到，不是前面我们哪里已经算错了需要修改，而是之前忽略了一些“相互作用”，需要加进来）．

. . . . . .

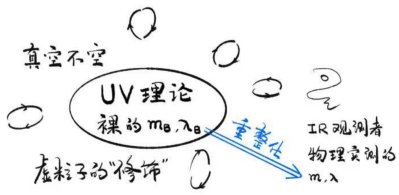
尽管很多教科书（以及历史发展） 将“消掉紫外发散”作为需要对场论进行重整化的原因，甚至重整化的定义；但是，这里我们需要强调，不是只有“计算出现无穷大”才出错，只要理论计算不能符合观测，就说明理论存在错误；“出现无穷大”只是错误刚好非常明显，更容易被我们发现而已（所以，看到无穷大才想起要重整化，一定意义上讲只是“心理学”上觉得问题太严重，马虎不过去了而已．相反地，有限的量子效应也要重整化．例如固体

理论中，原子尺度自然为声子提供了紫外截断，但仍然需要重整化（重整化群）方法. 作为更简单的例子，Coleman 也用水中一个乒乓球的例子谈论过重整化，见 Coleman §10.1）.

与其趁无穷大刚冒出来就把它消掉，让我们进一步分析，和圈图相关的一些物理和数学考虑.

重整化的物理学原因：圈图体现了量子涨落

量子理论中，“真空不空”. 虽然真空的能量已经最低，但是仍然充满着虚粒子的产生和湮灭（自由场的零点振动，以及考虑相互作用后，这些零点振动之间复杂的耦合）. 当我们在真空中放上一个真实的粒子（即具有一份能量，满足相对论质能关系的实粒子） 时，虚粒子会被实粒子影响. 也就是说，包裹在实粒子周围的虚粒子，和远处的虚粒子性质稍有不同（在量子电动力学中，对于电荷来讲，这种“影响”体现为极化，相应的现象也就叫“真空极化”）.



所以，当观测者在远处（即大空间尺度，红外，infrared，简称 IR，与之相反的是小空间尺度，紫外，ultra-violet，简称 UV） 观测一个粒子时，测量到的不是单独一个实粒子，而是实粒子，和周围受实粒子影响，性质发生变化的众多虚粒子组成的整体. 所以，实粒子“裸的”质量 m_B （B 代表 bare，所谓“退潮时，你才知道谁在裸泳”，“裸的”指没有经过量子涨落所修正的，或者“真理是赤裸裸的”；在下文中，我们将在数学上更仔细解释“裸”的含义）和观测者观测到的质量 m 不同.

相似地，观测者在远处观测两个粒子的散射过程，观测到的也不是单独的两个实粒子，而是各自裹挟着一团虚粒子的两团东西的散射. 所以，实粒子“裸的”耦合常数 λ_B 和观测者观测到的耦合常数 λ 不同.

所谓“重整化”，就是要得到“描述裸粒子的量” (ϕ_B, m_B, λ_B) 和“低能标可观测量” (ϕ, m, λ) 之间的关系. 这种关系可以看成是对理论参数的重新归一化，所以叫重整化（renormalization）.

那么，为什么当我们计算树图的时候没看到量子涨落的效应，而计算圈图时，却要考虑量子效应呢？这是因为，如果把 $\hbar$ 明显地写出来，我们将可以发现，费曼图中每多一个圈，就会多一个 $\hbar$ 因子 （更完整的数量级估计：每多一个圈，就乘上 (耦合常数)$\times\hbar/(4\pi)^2$）. 所以圈图对应 $\hbar$ 更高阶的量子效应 （但是，并不是所有量子效应都通过圈图体现出来. 量子力学有多个基本假设，对应很多种量子效应，例如量子纠缠就是通过量子态，而不是动力学中的 $\hbar$ 高阶项来体现的）.

“非线性展开”为何刚好也是“量子展开”？

你可能会问：圈图的含义是“λ 的高阶项”，也就是“非线性的”；那么，这里“非线性的”为什么刚好也是“量子的”？

这里我们说圈图是“量子的”，假设了圈中传播的是真空扰动. 如果圈中是“具有很多粒子数的经典状态”，那么，费曼图的计算就回到了经典的“微扰解微分方程”（注意到量子的“传播子”刚好是经典运动方程对应的“格林函数”），就只是非线性，不是量子的了.

重整化的数学原因：场的“重新定义”，带来的理论与观测上的歧义

让我们想象，一个理论家推导出了一个理论（例如从弦论中，取弦的长度趋于 0，得到的时空中的场论，当然，弦论可以得到包含引力子、额外维、超对称的更复杂的场论，这里我们只举其中一部分示意），理论的拉氏量是（这里我们暂且用下标 B 来表示“理论家推出来的理论”里面的量，稍后我们会看到它与“裸量”之间的联系）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi_B\partial_\mu\phi_B - \frac{1}{2}m_B^2\phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4 \tag{2}$$

这个理论家问：这里的 (ϕ_B, m_B, λ_B) 直接对应实验观测中看到的场、质量和耦合常数吗？就算理论家没想到有“量子效应对裸量的修正”这回事儿，理论家也会注意到，一个理论中具有“场和常数重新定义”的任意性. 我们可以重新定义

$$\phi_B \equiv Z^{\frac{1}{2}}\phi\ , \qquad Zm_B^2 \equiv m^2 + \delta_{m^2}\ , \qquad Z^2\lambda_B \equiv \lambda + \delta_\lambda \tag{3}$$

其中 $Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda$ 是常数，则理论家之前写出的同一个拉氏量 $\mathcal{L}$ 也可以写成

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\lambda + \mathcal{L}_{CT}\ , \tag{4}$$
$$\mathcal{L}_0 \equiv -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\ , \quad \mathcal{L}_\lambda(\phi) \equiv -\frac{\lambda}{4!}\phi^4\ ,$$
$$\mathcal{L}_{CT} \equiv -\frac{\delta_Z}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi^4$$

这里 $\delta_Z \equiv Z - 1$. 我们称 $\mathcal{L}_{CT}$ 中的项为“抵消项”（counter term）.

尽管理论家写出的 (ϕ_B, m_B, λ_B) 理论更简单些，但是，由于场和常数的定义具有任意性，没什么理由证明 (ϕ_B, m_B, λ_B) 理论是“实验可以直接测量到”那一个，而 (ϕ, m, λ) 理论不是. 由于 (ϕ, m, λ) 理论更加一般（因为我们可以选择不同的 $\delta_Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda$. 当它们取 0 时，我们也可以回到 (ϕ_B, m_B, λ_B) 理论），所以我们不妨设 (ϕ, m, λ) 才是“实验可以直接测量到”的那一个理论.

总结一下，我们从理论家这里学到的经验是：当我们试图将一个理论家写下的理论与实验相联系，因为场重新定义的任意性，我们需要加上抵消项 $\mathcal{L}_{CT}$.

抵消项可以看成前两章的补充

注意，虽然这里我们新引入了“抵消项” $\mathcal{L}_{CT}$，但这并不是彻底颠覆了前两章建立的理论. 因为，$\mathcal{L}_{CT}$ 可以看成是前两章定义的相互作用 $\mathcal{L}_I$ 的一部分，也就是说加入了新的相互作用，是前两章的补充，而不是颠覆.

如何确定抵消项中 $\delta_Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda$ 的取值

读到这里，读者可能会问：如何确定抵消项中引入的常数 $\delta_Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda$ 的值？它们是任意的吗？对这个问题的两层思考，对应着对重整化的旧理解和现代理解：

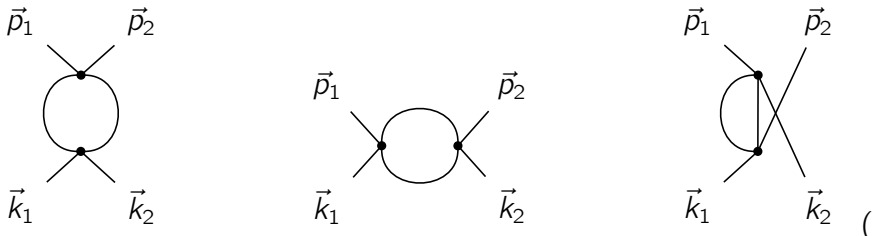
- 抵消项不是任意的：之前我们提到，量子效应的计算（即圈图）出现了发散. 让我们**在做观测的低能标上，用抵消项把量子效应消掉**. 这样，就确定了抵消项中 $\delta_Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda$ 的取值. 回到我们对重整化的物理理解：用抵消项把量子效应消掉，对应着我们实验实际观测到的 (ϕ, m, λ)，不再像“雾里看花”一样隔着一层量子修正，所以 (ϕ, m, λ) 理论确实是对应“实验可以直接测量到”的那个理论. 这是人们对重整化的旧理解（在“重整化群”时代之前的理解）. 由此，我们也可以把理论分为 **可重整的**（可以用有限多个抵消项把所有紫外发散消掉） 和 **不可重整的**（不能用有限多个抵消项把所有紫外发散消掉）. 理论严格的可重整性需要仔细计算来证明，但是，我们经常可以通过量纲分析（具体分析参见 Weinberg §12.1） 得到一个方便的近似概念：**表观可重整性**，即如果耦合常数具有质量的负幂次，则能量越高，这样的项越重要，这样的项会导致紫外发散不可控，理论不可重整 （例如，$m^2\phi^2$ 和 $\lambda\phi^4$ 都是可重整的，但 ϕ^6/M^2 相互作用不可重整，这就是我们这里限于研究 ϕ^4 理论的原因）

- 但如果我们想得再深一层，抵消项也有一定任意性. 因为，假如我们并不是在极低能量下做实验，而是在某个有限的能量标度（即“能标”）上做实验，比如在一个原子（典型能标为 eV） 中考虑能级移动，或者在一个 TeV 能标的粒子对撞机上对撞粒子，那么，随着不同的能标，我们可以定义这个能标上的 (ϕ, m, λ) 理论，让抵消项把“从 UV 能标到这个能标到量子效应”消掉. 这样，随着能标的变化，我们就不只有一个理论，而是得到了“一组理论”，可以考察随着能标变化：(1) 这组理论的参数如何变化？(2) 如果除了考虑 ϕ^4，还考虑 $\phi^6, \cdots$ 相互作用，则这些相互作用如何互相转化？(3) 在理论空间中，这组理论是否趋于某个不动点？这几个问题的解答，就是“有效场论”和“重整化群”. 我们将针对 (1) 进行介绍；问题 (2) 和 (3) 可参见 Peskin §12.1, 12.2

2 相互作用顶角的表达式及其化简

两体散射圈图的结构和 Mandelstam 变量

在上一章介绍费曼规则后，我们已经提到，对于两体到两体的散射过程，在 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 阶，我们需要计算的费曼图为（注意，时间方向是从下至上的）



(5)

这三个图分别称为是 s 道（channel）、t 道、u 道的图. 下文中将看到，这三个图可以分别用 Lorentz 不变的 Mandelstam 变量来表示

$$
\begin{aligned}
s &= -(k_1+k_2)^2 = -(p_1+p_2)^2 \\
t &= -(p_1-k_1)^2 = -(p_2-k_2)^2 \\
u &= -(p_1-k_2)^2 = -(p_2-k_1)^2
\end{aligned} \tag{7}
$$

另外，这三个费曼图的数学结构高度相关：第二个图相当于第一个图做替换 $k_2 \Leftrightarrow -p_1$（由于我们假设入射粒子的动量方向是向内的，出射粒子的动量方向是向外的，把出射和入射粒子交换，需要加一个符号，这个符号不仅要加在三维动量上，也要加在能量上，因为形式上我们也反转了这个粒子的时间方向），也就是 $s \Rightarrow t$；第三个图相当于第一个图做替换 $k_2 \Leftrightarrow -p_2$，也就是 $s \Rightarrow u$. 这样，我们只需计算第一个图 $\bowtie$，再做简单变量代换就能得到第二、三个图的结果.

Mandelstam 变量的意义和性质

为什么引入 Mandelstam 变量?

因为 $i\mathcal{M}$ 是 Lorentz 不变的，所以对“两体到两体散射”而言，Lorentz 不变的 Mandelstam 变量 s, t, u 比 Lorentz 四矢量 k_1, k_2, p_1, p_2 更接近散射问题的物理实质. 越是深入研究散射振幅的性质，就会越看到 Mandelstam 变量的重要性.

如何理解 Mandelstam 变量的物理意义?

注意到由于质心系的三维总动量为 0，$\sqrt{s}$ 的物理意义是质心系内入射粒子的总能量（也等于质心系内出射粒子的总能量）. 而 t，u 可以看成散射过程中的能动量交换程度.

对于所有外线都在壳的情况，s, t, u 不是独立的，而是要满足

$$s + t + u = 4m^2 \tag{6}$$

应用费曼规则得到 s 道费曼图 $\bowtie$ 的表达式

应用费曼规则，s 道费曼图对不变矩阵元 $i\mathcal{M}$ 的贡献为（费曼规则中有四个 $(-i)$ 因子，$(-i)^4 = 1$，另外注意这个图有个对称性因子 $1/2$）

$$\bowtie = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[q^2+m^2-i\epsilon][(q+k_1+k_2)^2+m^2-i\epsilon]} \tag{8}$$

虽然这个积分表达式并不长，下面我们将进一步化简这个积分，并从这个积分中看到丰富的物理内容.

化简费曼图 ⧖：费曼参数法

虽然上面 ⧖ 的表达式 (8) 已经写成了 4 矢量的形式，已经具有明显的 Lorentz 不变性，但是，我们希望让 Lorentz 不变性发挥更强大的作用：把圈积分 d^4q 直接写成一个只关于四矢量长度 $|q|$（而不依赖于 Lorentz 转动和推动）的积分. 为此，我们（Feynman）注意到一个数学恒等式：

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1 dx\ \frac{1}{[xA+(1-x)B]^2} \tag{9}$$

这种“使用一重额外的积分 x，将分母中的两项化成一项的平方”（一般地，可引入 $n-1$ 重积分，来把 n 项乘积化成一项的 n 次方）的做法，叫做费曼参数法. 于是，

$$\begin{aligned}
⧖ &\xlongequal{\text{费曼参数法}} \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{\{(1-x)[q^2+m^2-i\epsilon]+x[(q+k_1+k_2)^2+m^2-i\epsilon]\}^2}\\
&\xlongequal{\text{整理配平方}} \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{\{[q+x(k_1+k_2)]^2+x(1-x)(k_1+k_2)^2+m^2-i\epsilon\}^2}\\
&\xlongequal[s=-(k_1+k_2)^2]{q\to q-x(k_1+k_2)} \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{[q^2-x(1-x)s+m^2-i\epsilon]^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

这样，我们就把两个“纠结在一起”的洛伦兹四矢量 q 和 k_1+k_2 分成了两个分别的洛伦兹不变量 q^2 和 s，简化了 ⧖ .

为什么要做费曼参数法?

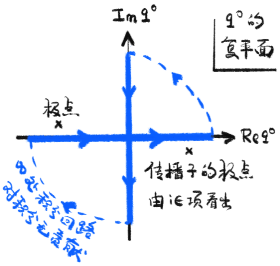
假如不做费曼参数法，是什么阻碍了我们“把圈积分 d^4q 直接写成一个只关于四矢量长度 $|q|$ 的积分”?

⧖ 中阻碍我们“达到这一目的”的项是 $(q+k_1+k_2)^2$. 这一项虽然 Lorentz 不变，但是 q 的积分却依赖 k_1+k_2 的方向，不是 q 和 k_1+k_2 各自独立 Lorentz 不变的. 如果 ⧖ 的分母中只有这一项，那么我们可以做积分变量平移 $q\to q-k_1-k_2$ 来让 $(q+k_1+k_2)^2\to q^2$，以让 d^4q 积分只依赖于 $|q|$. 但是，⧖ 的分母中还有 q^2. 如果做积分变量平移，则这一项又变成了 $(q-k_1-k_2)^2$，我们仍然没法让积分只依赖 $|q|$. 真是“按住葫芦起了瓢”.

在讨论 ⧖ 的性质之前，我们希望再进一步化简 ⧖ . 上面我们已经把 ⧖ 写成了只关于 Lorentz 四矢量长度的积分. 还有什么比“一个 Lorentz 四矢量长度”的积分更简单呢？如果有，那就是对“一个四维欧氏空间四矢量长度”进行积分.

化简费曼图 ⧖：通过“Wick 转动”转到欧氏空间

我们希望把 ⧖ 中的圈积分重写到欧氏空间中. 这是因为，(1) Lorentz 推动的参数不容易从积分中分离出来（这是因为，Lorentz 群不是紧致的，具有无穷大的群空间. Lorentz 变换可以取到无穷大的 γ 因子）；(2) 如果去查找数学公式表，欧氏空间中我们能找到更多公式可用. （还有一个好处 (3)，可能更加重要，但是在正则量子化体系下不明显，在路径积分量子化中才明显体现出来，就是在欧氏空间中，偏离最小作用量的路径被 e^{-S} 指数压低，而不是按 e^{iS} 振荡相消，所以量子理论更容易定义. ）为此，我们把积分写成 $d^4q=d^3qd(q^0)$，保持三维矢量部分 d^3q 不变，按如下步骤对积分中的 $d(q^0)$ 进行“Wick 转动”：



- 通过留数定理得到沿 q^0 实轴积分和沿虚轴积分的关系：注意到，如右图所示，如果我们按照图中蓝色闭合回路对 q^0 积分，则由于闭合回路中不包含极点，积分贡献为 0. 而图中两个虚线 1/4 圆周位于 $|q^0| \to \infty$，被分母压低，对积分没有贡献，所以，$\int_{-\infty}^{+\infty} dq^0(\cdots) + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dq^0(\cdots) = 0$，也就是说 $\int_{-\infty}^{+\infty} dq^0(\cdots) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0(\cdots)$.
- 使用 $\int_{-\infty}^{+\infty} dq^0(\cdots) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dq^0(\cdots)$，在复平面中，沿逆时针方向，将 $\mathcal{K}$ 中 dq^0 的积分回路从实轴转到虚轴上.
- 做变量代换 $q^0 = iq^4$，其中 q^4 理解为欧氏四维矢量 $q = (q^1, q^2, q^3, q^4)$ 的第四分量，则 $\mathcal{K}$ 中 dq^0 的积分变成：$\int_{-\infty}^{+\infty} dq^0(\cdots) = i\int_{-\infty}^{+\infty} dq^4(\cdots)$. 注意到，当我们做变量代换 $q^0 = iq^4$ 后，之前被积函数中的 Lorentz 不变量 $q^2 \equiv -(q^0)^2 + (\vec{q})^2 = (\vec{q})^2 + (q^4)^2$ 自动变成了欧氏空间中的四维转动不变量.
- 最后，我们将 d^3q 与 $d(q^4)$ 合写成四维欧氏积分，为与闵氏积分表示区别，我们记 $d_E^4 q \equiv d^3 q d(q^4)$.

作为以上步骤的总结，为了从闵氏空间转到欧氏空间，可以令 $q^0 = iq^4$，这个代换的效果是圈动量积分中 $\int d^4q(\cdots) = i\int d_E^4 q(\cdots)$，其它 Lorentz 不变量变成对应的欧氏不变量. 于是 (10) 可写成 （由于我们已经远离 q^0 实轴，所以不再有“用于标记 q^0 实轴附近极点位置的 $i\epsilon$ 因子”）

$$\mathcal{K} = \frac{i\lambda^2}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d_E^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - x(1-x)s + m^2]^2} \tag{11}$$

3 紫外发散、正规化与重整化

紫外发散与正规化

我们分析 (11). 积分中 $\int d_E^4 q(\cdots) = \int dq\ 2\pi^2 q^3(\cdots)$（其中 $2\pi^2$ 是三维单位球面的面积），这个积分 (11) 在 $q \to \infty$ 的极限下是发散的，也就是说这个积分是紫外发散的（这并不奇怪. 因为圈积分本来就紫外发散，虽然之前我们进行过费曼参数法和 Wick 转动，但是它们都是恒等操作，一个本来就紫外发散的积分，经过这些操作肯定还是紫外发散的）.

如何处理紫外发散？我们之前说过，我们希望用抵消项把这个发散消掉. 但是，如果我们直接令抵消项为无穷大，再进行 $\infty - \infty$ 的操作，两个无穷大相减可以等于任意有限数或无穷大，在数学上是没有良好定义的.

所以，为了处理紫外发散，我们希望先把 (11) 中的紫外发散表示成某个有限过程的极限. 这就是“正规化”.

正规化方案

“把紫外发散表示成某个有限过程的极限”这件事听起来十分随意. 确实，我们有无穷多种办法把一个发散的积分变成“一个有限的积分”的极限. 这些不同的办法，叫做“正规化方案”. 比如说，我们可以用以下方式来定义发散积分：

- 动量截断：令 $\int d_E^4 q(\cdots) \equiv \lim_{\Lambda\to\infty} \int^\Lambda d_E^4 q(\cdots)$. 这种方式最直观，但是它过于简单粗暴，会带来一些问题：(1) 之前我们对积分动量做过平移 $q \to q - k_1 - k_2$. 但是当我们对积分取截断，这种平移就必须考虑对积分限带来的影响；(2) 未来我们讨论规范理论时，动量截断会破坏规范不变性. 我们希望，在选取正规化方案时，要尽量保持理论的对称性与不变性，所以，动量截断方法有些过于“简单粗暴”了.
- Pauli-Villars 正规化：把传播子的表达式改成 $\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon} - \frac{-i}{p^2+\Lambda^2-i\epsilon}$，这样，通分后可以看到，圈积分不再紫外发散. 所有计算完成后（即抵消项抵消发散后），再取 $\Lambda \to \infty$ 的极限回到正常传播子.
- 维数正规化：把时空维数从 4 维改为 $d = 4 - \varepsilon$ 维. 这个正规化方法有点抽象，但是很好用. 一会我们再讨论维数正规化的细节.

我们列举了好几种正规化方案. 而数学上可能的正规化方案是无穷多的. 那么，采用哪种正规化方案是“正确的”呢？没有第一原理告诉我们应该选取哪种正规化. 为了处理的方便，我们一般选取一个保持理论对称性和不变性的正规化方案，在这个前提下，通常选哪种正规化方案都可以，我们就选一个数学上最方便处理的正规化方案就行了.

有效场论和正规化方案的等价性

为什么用不同的正规化方案处理无穷大，一般会得出同样的物理结果呢？这里，我们稍用一点后面还没讲到的知识，来解释正规化的“合法性”：

学过“重整化群”之后我们将会知道，有紫外发散的量子场论，需要作为“有效场论”来理解. 就是说，在足够高的能标，这个量子场论就失效了，需要用更完备的理论代替. 这个完备的理论可能是另一个没有紫外发散的场论（例如有足够多超对称），也可能是弦论等没有紫外发散的理论. 物理上，这个完备理论里面，应该不存在紫外发散. 也就是说，“真实的量子修正”其实是有限的（并且通常比较小）.

但是，我们并不知道这个“完备理论”，怎么办呢？

我们为什么不知道这个“完备理论”？不是我们对低能标的实验现象解释得不够仔细，而是，像 ϕ^4 这样的相互作用（一般说来，可重整的相互作用）对高能标物理不敏感. 即然 ϕ^4 场论对高能标物理不敏感，我们无论是用那个“未知但真实的完备理论”，还是用一个同样是紫外有限的玩具模型（就是一种正规化方案），来代替 ϕ^4 场论的高能标部分，在低能标可观测量看来，最后的结果都大致一样. 这就是“不同正规化方案应该给出同样的低能标物理结果”的原因.

使用维数正规化计算圈积分

我们形式上把时空维数改为一般的 d 维. 这样，我们要计算的积分就变

成了（令 $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)s$）

$$\int \frac{d_E^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2+\Delta)^2} \xrightarrow[\text{角向部分}]{\text{积掉}} \Omega_d \int_0^\infty \frac{d\kappa}{(2\pi)^d} \frac{\kappa^{d-1}}{(\kappa^2+\Delta)^2} \tag{12}$$

其中 $\kappa \equiv |q|$，Ω_d 是积掉角向部分得到的 $d-1$ 维单位球面的面积：

$$\Omega_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{13}$$

其中 $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ 是 Γ 函数（它是阶乘函数的推广，是一个非常重要的特殊函数，可解析延拓到除 0 和负整数外的整个复平面上）. 在 d 是整数时，可以由多元微积分计算，(12) 等式左右相等. 现在，我们要求 $d = 4-\varepsilon$ 不是整数时，(12) 等式仍然左右相等. 这时，我们可以把等式右边当成是等式左边的数学定义（在复变函数意义上，这是等式左边作为 d 的函数的解析延拓）. 于是，我们就可以直接积出 (12) 的等式右边（例如，用 Mathematica 就可以积出一个形式稍不同，但是数学上等价的结果；这里，我们采用场论中常用的，用 Euler β 函数积出的形式，而 β 函数与弦论有深刻的渊源），得

$$\begin{aligned} &\int \frac{d_E^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2+\Delta)^2} = \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log\Delta + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\gamma \simeq 0.577$ 是欧拉常数，$\frac{2}{\varepsilon}$ 是发散部分（但是由于 $\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi)$ 常常一起出现，我们也可以认为这个组合是“费曼图的发散部分”）. 并且，请务必注意到这里的 $\log\Delta$ 因子，后面我们将看到，它是量子修正的“精华”.

. . . . . .

未来我们会用到更一般的积分，这时有（其中整数 $m > 0, n \geq 0, m-n-2 \leq 0$）

$$\int \frac{d_E^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^{2n}}{(q^2+\Delta)^m} = \Gamma\left(m-n-\frac{d}{2}\right) \times \frac{\Gamma(n+\frac{d}{2}) \Delta^{n-m+\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(m) \Gamma(\frac{d}{2})} \tag{15}$$

注意到 $\Gamma(0), \Gamma(-1), \Gamma(-2), \ldots$ 是发散的，在 $\varepsilon \equiv 4-d \to 0$ 的极限下，我们需要对 $\Gamma\left(m-n-\frac{d}{2}\right)$ 做 Laurent 展开：

$$\Gamma\left(m-n-2+\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \frac{(-1)^{n-m}}{\Gamma(n-m+3)} \left(\frac{2}{\varepsilon} + H_{n-m+2} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \tag{16}$$

其中 $H_k \equiv \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$ 是第 k 个调和数. 尽管我们可以把 $\Gamma\left(m-n-\frac{d}{2}\right)$ 的 Laurent 展开带入到 (15) 中，再精确到 $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$，但得到的结果冗长. 实际计算中，先带入 m, n 的具体值，再进行取极限的计算比较方便.

维数正规化的一些定义约定

在 (12) 中，我们把分母上的 $(2\pi)^4$ 也改成了 $(2\pi)^d$，这纯粹是个方便的定义，虽影响中间计算，但不会影响重整化后的物理可观测量.

另外，在稍稍改变时空维数的同时，我们也稍稍改变了 (12) 式的量纲：$d_E^d q$ 与 $d_E^4 q$ 的量纲是不同的. 所以，一些文献中会引入一个质量量纲的参数 μ 来把量纲补齐：$d_E^4 q \to \mu^{4-d} d_E^d q$. 这样做的结果是，下文中每当出现 $\log\Delta$ 的地方，就用 $\log(\Delta/\mu^2)$ 来替代. 这样做，在一种直接扔掉发散 $\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi)$ 的“最小减除重整化方案”（$\overline{MS}$ 方案）中非常方便.

但是，在没有理解重整化的物理内容前，很难解释引入这个能标的物理动机. 所以，我们还是不在这里引入 μ^{4-d}. 正如我们在正规化方案等价性的地方讨论的，这些正规化方案的选择不会影响重整化后的物理结果.

圈图的量级估计

(14) 式的第二行，我们把一个 $1/(4\pi)^2$ 因子提到括号外，因为一般地，圈图与树图贡献的比例为（耦合常数幂次）$/(4\pi)^2$. 这个 $1/(4\pi)^2$ 因子来自 $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(\cdots) = \int \frac{d(\kappa^2)}{(4\pi)^2}(\cdots)$，与具体动力学无关.

有了以上准备，让我们再回到 ϕ^4 理论的具体计算中来，完成顶角的重整化.

ϕ^4 理论相互作用顶角的树图、抵消项、圈图贡献

- **树图贡献**：上一章我们已经算出：$\mathrm{X} = -i\lambda$（注意，上一章我们算的是 iT，所以带有 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$. 这里我们算的是 $i\mathcal{M}$，没有这个因子）
- **抵消项贡献**：我们用 $\otimes$ 来表示一个抵消项顶角. 则完全平行于上一章树图的分析，ϕ^4 两体到两体散射中，抵消项的贡献为：$\otimes = -i\delta\lambda$（抵消项 $\delta\lambda$ 的最低阶是 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 贡献，但是还有更高阶 $\mathcal{O}(\lambda^3)$ 贡献等，在高圈图时才会用到）
- **圈图贡献**：使用维数正规化，我们可以把使用了费曼参数法和 Wick 转动后的  图 (11) 写成

$$\begin{aligned} \text{} &= \frac{i\lambda^2}{2}\int_0^1 dx \int \frac{d_E^4 q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[q^2 - x(1-x)s + m^2]^2} \\ &\xrightarrow[\text{正规化}]{\text{维数}} \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left\{\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \int_0^1 dx\ \log\left[m^2 - x(1-x)s\right]\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

这里 Feynman 参数 x 的积分可以解析积出，但是我们暂不积出它反而比较方便. 注意到 t 道和 u 道的图只是把 中的 s 分别替换成 t 和 u，所以 ϕ^4 两体散射完整的一圈图贡献为：

$$(\text{圈图贡献}) = \text{} + (\text{}/.\ s \to t) + (\text{}/.\ s \to u) \tag{18}$$

把以上树图、圈图、抵消项贡献加起来，就是 ϕ^4 理论两体到两体散射，精确到 $O(\lambda^2)$ 阶的完整贡献了. 但是，我们如何确定抵消项中 $\delta\lambda$ 的取值呢？在第一节，我们已经讨论了“观测”对定义量子场论的重要性. 为了确定 $\delta\lambda$，我们需要回到观测上来：

重整化条件

回忆本章第一节：如果不指定什么量是可以观测的，原则上怎么观测，则一个纯理论家拥有“重新定义理论中场、参数”的自由，一个由裸量 (ϕ_B, m_B, λ_B) 写成的理论，可以重定义成一个由 (ϕ, m, λ) 写成的理论. 为了让量子场论与真实世界联系起来，我们必须至少在原则上指定，我们如何从观测上定义 m 和 λ（由于本小节讨论散射问题，我们讨论如何从观测上定义 λ）.

无论是为了用类似 Millikan 油滴实验的实验定义相互作用，还是和我们熟悉的量子力学衔接起来，一个自然的，定义可观测量的方法（但不是唯

一方法，我们将在“重整化群”处讨论这个问题），是在物理实验的最低能标定义 λ. 把这句话拆开，我们要回答两个问题：

1. 什么是物理实验的最低能标？就是 ϕ 场的两个粒子尽量缓慢地接近，入态、出态每个粒子的动量都非常接近 $(m, 0, 0, 0)$. 这里注意动量零分量是粒子的静止质量，是散射问题中无法移除的. 于是，用 Mandelstam 变量表示，物理实验的最低能标是 $s = 4m^2, t = u = 0$.

2. 怎么定义 λ？我们可以约定，在物理实验的最低能标，相互作用的强度就是 λ.

综合以上两点，我们指定 **重整化条件**：

在 $s = 4m^2, t = u = 0$ 时： $i\mathcal{M} = -i\lambda$，圈图与抵消项完全抵消 (19)

也就是说

$$(\text{⚡} /. \ s \to 4m^2) + 2(\text{⚡} /. \ s \to 0) - i\delta\lambda = 0 \tag{20}$$

需要强调的是，“圈图和抵消项完全抵消”这件事，只有在重整化条件指定的那个动量组合上，也就是 **重整化点** 上（就是这里的 $s = 4m^2, t = u = 0$）才发生. 当取其它的 s, t, u 时，圈图和抵消项不再完全抵消. 它们的发散部分仍然是抵消的，但是有限部分将会残留下来，可以被实验检验（这里体现为入射、出射动量改变时，相互作用的有效强弱发生变化）.

重整化后的顶角

由重整化条件 (20)，我们可以解出 $\delta\lambda$，再把树图、抵消项和圈图加起来，得：

$$i\mathcal{M} = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \ \log\left\{\frac{[1 - x(1-x)\frac{s}{m^2}][1 - x(1-x)\frac{t}{m^2}][1 - x(1-x)\frac{u}{m^2}]}{1 - 4x(1-x)}\right\} + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{21}$$

这里，$\mathcal{O}(\lambda)$ 的第一项是树图贡献；$\mathcal{O}(\lambda^2)$ 的第二项是一圈图和一圈阶抵消项的贡献；$\mathcal{O}(\lambda^3)$ 的项是高于一圈的图，和相应抵消项的贡献.

我们看到，一圈图和相应抵消项的贡献加在一起，是一个 $\log(\cdots)$ 的形式. 未来，我们将在 ϕ^4 理论的其它计算、QED 等量子场论各个地方，都看到用抵消项抵消发散后，留下一个 $\log(\cdots)$.

为什么这些量子修正会体现为 log 的形式？并不是自然界偏爱 log，而是

因为，当我们选取重整化条件时，我们要求在某个能标（重整化点），圈图与抵消项完全抵消. 这不仅消掉了发散，也把量子修正里面可能存在的多项式部分同时抵消掉了（回顾一下费曼规则，不难发现，抵消项和树图一样，不会出现 log 因子），我们看不到这些量子修正. 所以，这里只有 log 修正，只是因为量子修正中的 log 部分比较特立独行，所以在重整化手续后幸存下来了而已（一个可重整的理论中只有有限个抵消项，它们被有限多个可观测量确定下来. 其它圈图的量子修正中可以出现“没被抵消项抵消的”多项式部分）.

4 重整化群简介

我们已经完成了 ϕ^4 理论一圈阶散射过程的计算. 这里，作为例子，我们把上一小节的计算应用到高能标物理实验当中. 我们将不仅看到上一章的结果如何应用，也会看到上一章结果的一些不方便之处，并由此引入重整化群.

重整化的例子：高能散射

一个具体的两体散射过程，粒子传递动量由 s, t, u 三个参数决定，它们可能具有不同的能标. 这里，简单起见，我们假设在某种高能散射实验里，这三个参数处于同一个很高的能标（这时，入射和出射粒子的四动量不可能都是在壳的，否则就违背了 $s+t+u=4m^2$，但不在壳这一点对我们的讨论影响不大，另外为了讨论中不出现虚数因子，我们设 $-s$ 很大，而不是 s 很大，但这也是技术简化，和物理实质无关）：

$$\text{实验能标 } \mathcal{E}^2 = -s = -t = -u \gg m^2 \tag{22}$$

如何用上一小节的重整化场论描述这个能标下的散射？我们已经完成了一圈阶计算 (21). 只需在 (21) 中指定 $s=t=u=-\mathcal{E}^2$，就可以描述高能标的实验现象了. 此时：

$$\begin{aligned} -\mathcal{M} &= \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\ \log\left\{\frac{[1+x(1-x)\frac{\mathcal{E}^2}{m^2}]}{[1-4x(1-x)]^{1/3}}\right\} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &\xlongequal{\mathcal{E}\gg m} \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\left[\log\left(\frac{\mathcal{E}}{m}\right) + \int_0^1 dx\ \log\left(\frac{x(1-x)}{(1-4x(1-x))^{1/3}}\right)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

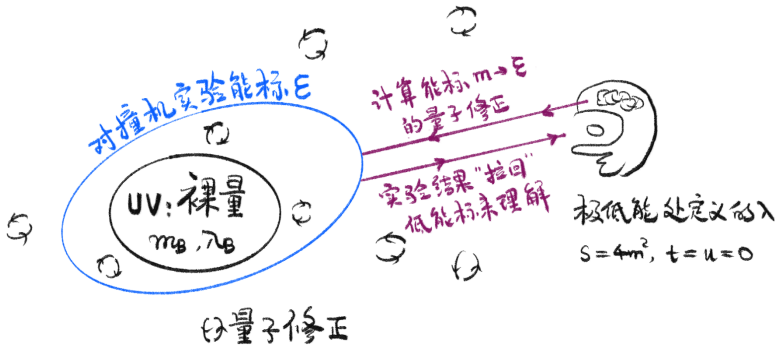
我们注意到，根据 (23)， $-\mathcal{M} = \lambda + (\text{量子修正})$ 可以看成是在能标 $\mathcal{E}$ 时，有效的相互作用强度. 随着 $\mathcal{E}$ 增大，有效的相互作用强度 $-\mathcal{M}$ 增大（当然，给定重整化条件时，拉氏量里的耦合常数 λ 是不变的，这里是 $\lambda+$(量子修正) 的总和变大），其增大速度可以用一个无量纲量表示（这里的 β 数值上等于重整化群中著名的 β 函数，但这里的推导并不是引入 β 函数的标准方式，因为我们甚至

还没有引入重整化群的概念. 稍后我们将用更常见的方式来推导 β 函数)：

$$\beta \equiv \mathcal{E}\frac{\partial(-\mathcal{M})}{\partial \mathcal{E}} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \tag{24}$$

高能散射例子中的不方便之处

读者可能注意到了，从物理概念上，上面的例子有点儿绕弯子、不方便：我们感兴趣的是高能标的物理实验，为什么要绕到低能标的重整化点来定义耦合常数呢？这时，我们要“透过”能标 $\mathcal{E}$ 与 m 之间的量子修正，来间接理解实验结果，如下图所示，这是不是有点不方便呢？



同样的问题也可以从数学表达式上看到：当 $\mathcal{E}$ 比 m 大很多个量级，$\log(\mathcal{E}/m)$ 会贡献一个很大的系数，微扰论会变得更不准确（严格来讲，从 (23) 本身，我们并看不出微扰论变坏，但是可以想象，$\mathcal{O}(\lambda^3)$ 阶的贡献也会随 $\log(\mathcal{E}/m)$ 变大而变大，但我们忽略了这一阶的贡献，所以微扰论误差变大了）.

如何解决上面的概念绕弯子问题，和与之相关的微扰论不准确问题？

重整化群：随实验典型能标而变化的重整化点

解决上面“高能散射不方便”问题的答案呼之欲出：如果我们要计算及与实验比对的量，大多数都在实验典型的能标 $\mathcal{E} \gg m$ 的能标下，那么用 $\mathcal{E}$ 做重整化点就行了. 我们要求抵消项 $\delta\lambda$ 满足与能标相关的重整化条件：

在 $s=t=u=-\mu^2$ 时： $i\mathcal{M} = -i\lambda$，圈图与抵消项完全抵消 (25)

为简单起见，我们仍设重整化点的能标很高：$\mu \gg m$. 这时，抵消项

$$\delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\left[\log\mu + (\text{不含 } \mu \text{ 的项})\right] \tag{26}$$

当重整化点随能标 μ 变化，根据这种重整化方案定义出来的耦合常数自然也会随 μ 变化. 如何得到耦合常数 λ 随 μ 变化的规律？

注意到裸量 $Z^2\lambda_B = \lambda + \delta\lambda$ 不随 μ 变化（这里我们暂且设 Z 是常数，我们还没有学习如何计算 δ_Z. 不过在高能极限下，确实可以忽略 Z 随能标的变化），所以

$$0 = \mu\frac{\partial(Z^2\lambda_B)}{\partial\mu} = \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial\delta\lambda}{\partial\mu} \tag{27}$$

于是

$$\beta \equiv \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = -\mu\frac{\partial\delta\lambda}{\partial\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \tag{28}$$

由此，我们可以解出在不同的重整化点上，λ 随能标的对数跑动：

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{3\lambda_0}{16\pi^2}\log\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{29}$$

与前面讨论相同，提高重整化点的能标 μ 时，相互作用的强度变强. 不过，这里通过移动重整化点得到耦合常数随能标的跑动，与 (24) 把 $-\mathcal{M}$ 作为有效耦合常数的方法相比，虽然稍抽象一点，但是更加精确、普适和系统化：

- 精确性：避免了大对数因子 $\log(\mathcal{E}/m)$ 或 $\log(\mu/m)$，微扰论更精确（这种精确性的来源，可以看成是把一些微扰论高阶贡献重求和到了微扰论低阶里）
- 普适性：(24) 中明确指定了 s, t, u 的值. 如果考虑出射粒子任意动量分布，则 t, u 的值不同，这时把 $-\mathcal{M}$ 作为有效耦合常数的含义就不再清楚了. 但是采取重整化群，移动重整化点的方法，之后仍然可以任意选取 s, t, u 的值，只要 s, t, u 都在能标 μ 附近，移动重整化点就能得到更精确些的结论
- 系统性：这里我们只介绍了 λ 的跑动，这可以推广到理论所有参数（例如 ϕ^4 理论的 Z, m, λ）一起跑动的情况. 这种情况下，重整化群方程变成一组联立的微分方程组

利用重整化群和跑动耦合常数改进过的微扰论，虽然有以上优点，但是毕竟多了些步骤，所以在研究具体问题时，要视问题的复杂程度、微扰论适用程度和期望精度选用.

Wilson 意义下的重整化群

上面，我们已经用两种观点讨论了耦合常数随能标的跑动：直接改变观测能标，以及改变重整化点能标. 那么，还有没有别的能标可以“跑

β 函数的正负号、渐近自由

多数常见的相互作用都和 ϕ^4 类似，有 $\beta > 0$，即高能标相互作用变强. 这有个直观的解释：量子扰动会部分屏蔽裸的耦合常数，比如正负电子对的真空极化会屏蔽裸电荷. 但是，这个直观解释有一个重要的例外：在非阿贝尔规范理论，即杨振宁-Mills 理论中，当规范群和费米子数不同，β 可正可负. 负的 β 可以描述强相互作用的渐近自由现象：在高能，夸克看起来像自由粒子（可明显地计算出来），但是低能标下，夸克被禁闭在强子中（我们对夸克禁闭仍缺乏定量理解）.

如何理解圈图的紫外发散?

刚接触圈图时，紫外发散看起来很神秘. 但耦合常数随能标跑动的因子 $\log(\mu/m)$ 告诉我们，紫外发散没什么神秘的. 我们考虑的能量越高，$\log(\mu/m)$ 因子越大. 如果我们假定裸量对应的能标无穷大（即无穷小空间尺度），则如果把 μ 取到裸量对应的能标，那么 $\log(\mu/m)$ 为无穷大.

当然，上面的无穷大是形式上的. 因为即便裸量生活在量子引力的 Planck 能标 $\mu \sim m_{pl} \sim 10^{19}\text{GeV}$，$\log(10^{19}) \sim 43.7$ 还远远不是无穷大. 所以，圈图计算中出现的这些无穷大，在真实世界中，并不对应无限大的量子效应. 在弱耦合理论中，量子修正通常仍然较小. 不过，可重整的场论对这些细节并不敏感.

动”呢?

至少还有一个能标可以跑动，就是裸量（即理论家写出的裸的理论）的能标，也就是场论的紫外截断 Λ. 我们也可以通过改变场论的紫外截断 Λ，来建立重整化群方程，通常我们称改变 Λ 的重整化群为“Wilson 意义下的重整化群”. 这样重整化群方程的形式，与改变 μ 建立起的重整化群方程形式相同. 这是因为，它们都是把“一部分能标的量子效应”变成“理论参数的重新定义”. 但是，改变 μ 时，我们重新定义的是重整化过的参数 ϕ, m, λ；而改变 Λ 时，我们重新定义的是裸量 ϕ_B, m_B, λ_B.

尽管我个人觉得 Wilson 意义下的重整化群是量子场论最优美的结果之一，限于导论的目的，这里将不再深入介绍 Wilson 意义下的重整化群，不过，提一下它的两个优点：

1. 随着改变 Λ （在路径积分中，我们可以说这是把高能的模式“积掉”），我们可以看到，在理论空间中，不同参数所标记的不同理论，作为在一个能量范围内适用的有效场论，像高山流水一样，随着能标变化，如何从高能标“流动”到低能标 （参见 Peskin §12.1）
2. 可重整和不可重整的耦合常数，在重整化群流动下的性质不同，这让我们对可重整性有更系统的理解 （参见 Weinberg §12.4）

5 质量的重整化

学完相互作用重整化之后，读者应该不难自己计算传播子的一圈修正，对应费曼图 （包括两个传播子）或 （不包括传播子，只包括顶角和圈）. 直觉上，传播子的一圈修正应该和 δ_Z, δ_{m^2} 有关. 在往下读之前，请读者先自己算一下 ，并试着将它和 δ_Z, δ_{m^2} 联系起来，看看有没有遇到什么困难.

传播子的一圈修正

我们可以完全照搬前两章的技术计算 . 除了不用做费曼参数法之外，别的地方都照搬即可：

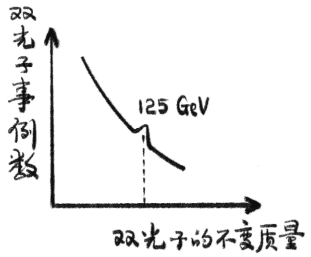
$$\xrightarrow[\text{}]{\text{费曼规则}} -\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon} \xrightarrow[\text{转动}]{\text{Wick}} -\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d_E^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2}$$

$$\xrightarrow[\text{正规化}]{\text{维数}} -\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d_E^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2} \xrightarrow[\text{公式 (15)}]{\text{积分}} -\frac{i\lambda}{2}\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\Delta^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{(4\pi)^{2-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

$$\xrightarrow[\text{展开}]{\varepsilon\to 0} \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log(4\pi)+1-\log(m^2)\right] \tag{30}$$

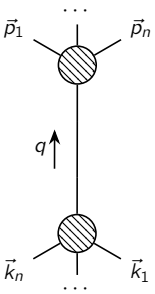
但是，当我们算完这个一圈图之后，我们需要做什么呢？应该怎样把这个结果和观测联系起来，以便确定 δ_Z, δ_{m^2}？直观看来，我们计算的 ◒ 修正了树图传播子．但是对包含了圈修正的传播子，我们应当指定什么样的重整化条件？

场强和质量的观测和重整化条件



近年来粒子物理最大的发现是 Higgs 粒子．Higgs 粒子是怎么发现的？大家可能还记得，在一些末态粒子的四动量总和接近一个 Higgs 粒子在壳条件 $(\Sigma p_i)^2 = -m^2_{\text{Higgs}}$ 时，在实验探测到的事例数上有个峰值（称为“共振峰”），如右图所示．

这个峰是从哪里来的？这里我们考察一个简化的版本，考虑如右图的费曼图：



图中，如粒子 q 是个质量为 m 的标量粒子，它的传播子为 $-i/(q^2+m^2-i\epsilon)$．由动量守恒，$q = \Sigma p_i$，所以当出射四动量之和接近这个粒子的在壳条件 $(\Sigma p_i)^2 = -m^2$ 时，粒子 q 的传播子的分母接近 0，于是，我们会在事例数上看到一个峰（这个峰并不是无穷尖，峰的宽度和粒子的衰变率有关），峰的位置由粒子的质量，即传播子的极点决定，峰的高度与传播子的留数有关（这里的定性讨论可以严格化成一个非微扰的定理，揭示费曼图的极点结构，参见 Weinberg §10.2 和 10.3）．所以，“在传播子接近在壳时，共振峰的位置和高度”启发我们指定如下两个重整化条件：

条件一：传播子作为 p^2 的函数，极点位置仍在 $p^2 = -m^2$ (31)

条件二：传播子作为 p^2 的函数，极点处的留数仍为 $-i$ (32)

接下来，我们需要解决的问题是，如何把这两条重整化条件与我们对 ◒ 图的计算 (30) 联系起来？如果我们只是简单粗暴地考虑传播子的树图加一圈图的结果“- + ◌”，则 ◌ 并没有对“-”的极点和留数起什么作用，也就没法应用重整化条件．如何把“ ◌ 的修正”与“‘-’的极点和留数”联系起来？

回答这个圈图的问题前，我们先来看抵消项的相关问题，抵消项的问题将启发我们解决圈图的问题．

传播子的抵消项：两种观点如何得到同样的结果？

我们考虑 $\mathcal{L}_{CT}$ 中“传播子的抵消项” $-\frac{\delta_Z}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2$ 如何修正传播子. 我们可以从两个观点来看这个问题：

1. 把 $-\frac{\delta_Z}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2$ 当作相互作用顶角，在微扰论的框架下考虑. 注意到变换到 Fourier 空间时，

$$(\partial_x\phi(x))^2\to[ip\widetilde{\phi}(p)]\cdot[i(-p)\widetilde{\phi}(-p)]=p^2\widetilde{\phi}(p)\widetilde{\phi}(-p)$$

则抵消项顶角（$-\otimes-$ 中不包括两端传播子的部分 $\otimes$） $-\frac{\delta_Z}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2$ 对应的费曼规则为

$$\otimes=-i(p^2\delta_Z+\delta_{m^2}) \tag{33}$$

这里，我们也遇到了与圈图类似的问题：为什么抵消项不进入到对传播子极点和留数的修正中？如何应用重整化条件？为了回答这个问题，我们考虑对待抵消项的另一种方式.

2. 不用微扰论，而是把 $-\frac{\delta_Z}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2$ 加入到自由拉氏量里统一考虑. 这就相当于，我们推导裸量的传播子，然后再做 $(\phi_B,m_B)\to(\phi,m)$ 的重新定义. 或者，我们从数学上注意到，将抵消项中的这两项加入自由拉氏量，相当于 $p^2\to(1+\delta_Z)p^2$, $m^2\to m^2+\delta_{m^2}$，则“计入抵消项贡献后的传播子”为

$$\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon+\delta_Zp^2+\delta_{m^2}} \tag{34}$$

也就是说，δ_Z 和 δ_{m^2} 的贡献在分母上，会影响 $\mathcal{L}_0$ 传播子的极点和留数（如果圈图也能写成这样的形式，我们就可以应用重整化条件了）. 为什么同样的 $-\frac{\delta_Z}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}\delta_{m^2}\phi^2$ 项，两种处理方法会带来不同的结果呢？

.....

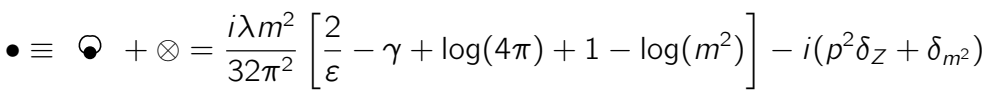
两种处理方式，是微扰与非微扰的区别. 不难发现，对非微扰结果 (34) 进行形如 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ 的 Taylor 展开，我们就能看到 (33) 作用零次、一次、两次 $\cdots$ 的项：

$$\begin{aligned}&\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon+\delta_Zp^2+\delta_{m^2}} \\ =\ &\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}\frac{1}{1-[\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}][(-i)(\delta_Zp^2+\delta_{m^2})]}=\text{“}-\text{”}\times\frac{1}{1-\text{“}-\otimes\text{”}} \\ =\ &\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}+\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}[(-i)(\delta_Zp^2+\delta_{m^2})]\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}+\cdots=\ -+-\otimes-+-\otimes-\otimes-+\cdots\end{aligned} \tag{35}$$

这里非微扰方法和微扰展开之间的关系，是不是为我们处理圈图提供了启发呢？

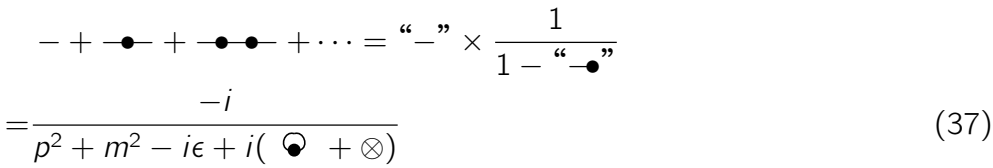
一圈图与抵消项的重求和

一圈图比抵消项复杂，因为我们只知道如何用微扰计算一圈图，而暂时不知道如何直接把一圈图加入到自由拉氏量里统一考虑（马上我们将通过重求和做到这一点，并且这种做法可以推广到有效作用量 (effective action) 方法）. 但是，既然抵消项的微扰处理可以用 (35) 重求和，我们也可以对圈图做同样的事情. 为此，我们定义一圈图和抵消项（在高圈，应引入“单粒子不可约图”，见边栏注释） 的和为：



$$\bullet \equiv \ \text{◒} \ + \otimes = \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) + 1 - \log(m^2)\right] - i(p^2\delta_Z + \delta_{m^2}) \tag{36}$$

于是，我们可以把 (35) 的步骤倒过来，对传播子进行重求和：

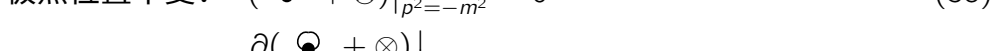


$$= \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon + i(\ \text{◒} \ + \otimes)} \tag{37}$$

一圈阶传播子的重整化

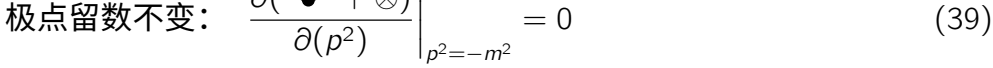
现在，我们就可以应用重整化条件，要求传播子的极点位置 $p^2 \to -m^2$ 和极点处留数与树图传播子相同：

极点位置不变：



$$(\ \text{◒} \ + \otimes)\Big|_{p^2=-m^2} = 0 \tag{38}$$

极点留数不变：



$$\frac{\partial(\ \text{◒} \ + \otimes)}{\partial(p^2)}\Big|_{p^2=-m^2} = 0 \tag{39}$$

通过这两个条件，我们就可以解出 δ_Z 和 δ_{m^2}：

- δ_Z：由极点处留数不变，得 $\delta_Z = 0$
- δ_{m^2}：由极点位置不变，得

$$\delta_{m^2} = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log(4\pi) + 1 - \log(m^2)\right] \tag{40}$$

由于抵消项在所有动量都碰巧完全抵消了圈图，ϕ^4 理论中，精确到一圈修正的传播子仍然是 $-i/(p^2 + m^2 - i\epsilon)$（在两圈图或其它相互作用，这个“碰巧”的抵消将不成立，参见边栏注释）.

单粒子不可约图

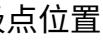
这里我们对一圈图做的重求和很直观. 但如果考虑两圈图，则需要更谨慎严格. 这是因为，如果考虑 ，那么，这个圈是算两圈图，还是算一圈图的重求和?

由于这个考虑，严格来讲，我们要求只对 **单粒子不可约图** 进行重求和，就是切断一条线时，图不能分成两半的图. 例如，  就是一个两圈的单粒子不可约图.

“只对单粒子不可约图求和”的要求是非微扰的. 之后，我们再对单粒子不可约图在给定 λ 的阶数进行微扰展开. 这是高圈传播子修正的系统化处理方法.

ϕ^4 理论一圈传播子的特殊性

对 ϕ^4 理论的一圈图，$\delta_Z = 0$，并且 δ_{m^2} 在所有动量（而不限于在壳动量）都完全消掉了圈图贡献. 这并不是量子场论的一般结论，而是 ϕ^4 理论一圈传播子的特殊性导致的.

这是因为  图里的圈并不“知道”外动量 p，所以圈导致的量子修正和 p 无关，自然也就不需要与 p 相关的抵消项来抵消. 但是，在两圈阶，  的圈“知道”外动量，所以在两圈阶，$\delta_Z \neq 0$. 另外，假如考虑 ϕ^3 相互作用，则一圈阶  就“知道”外动量，所以从一圈阶，就有 $\delta_Z \neq 0$（因此，Srednicki 的书选择介绍 ϕ^3 理论，而不是 ϕ^4 理论）.