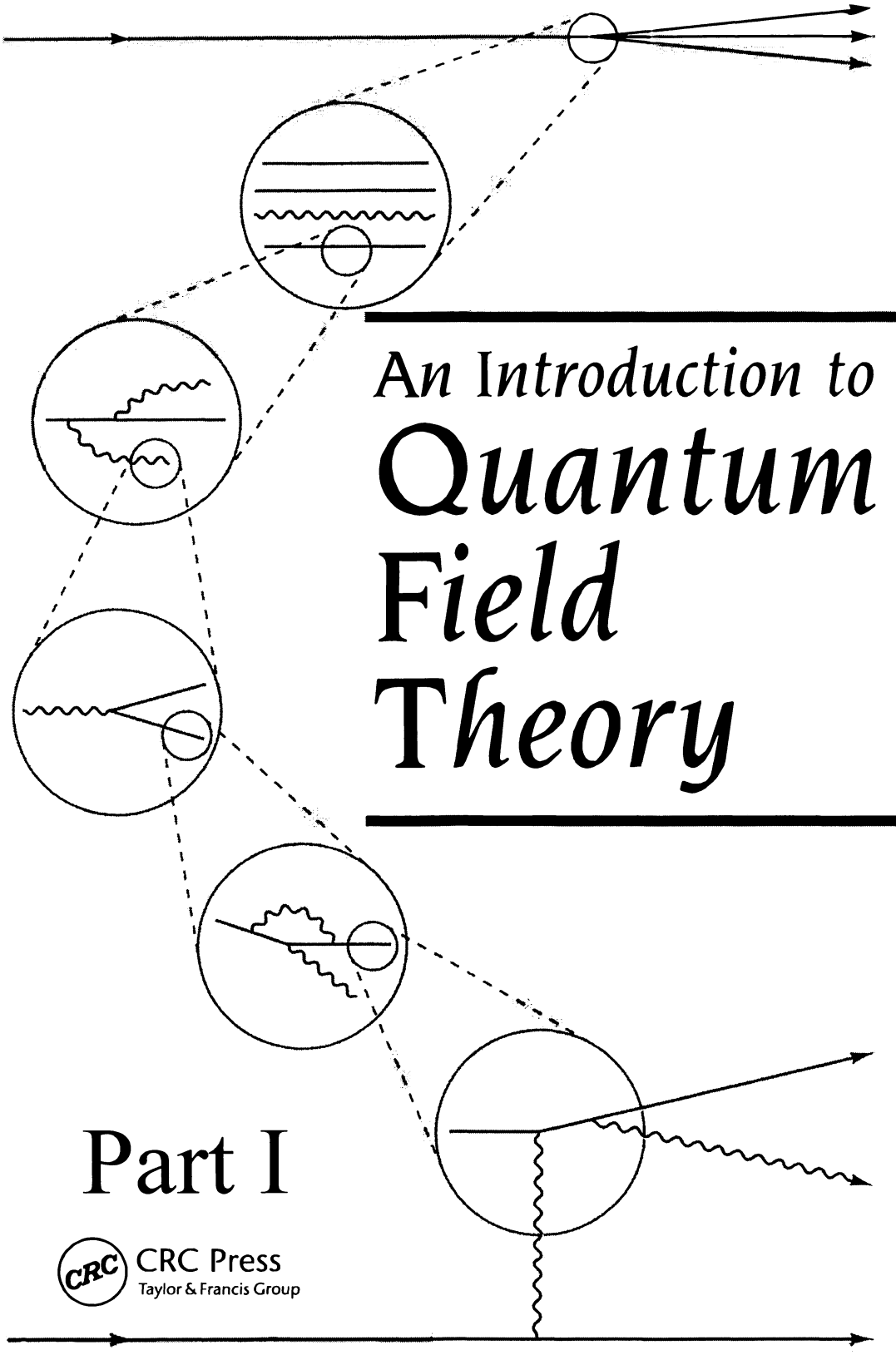


An Introduction to Quantum Field Theory

Part I

CRC Press
Taylor & Francis Group

Michael E. Peskin ♦ Daniel V. Schroeder

Made By. Minrusen

目 录

符号和约定 3

1. Invitation:e^+e^-湮灭中对的产生 3

最简单的情况 4

修正与问题 8

2. 克莱因-高登场 13

2.1 场观点的必要性 13

2.2 经典场论的元素 15

拉格朗日场论 15

哈密顿场理论 16

诺特定理 17

2.3 谐振子的克莱因-高登场 19

2.4 时空中的的克莱因-高登场 25

因果性 27

克莱因-高登传播子 29

由经典源产生粒子 32

3. 狄拉克场 35

3.1 波方程的洛伦兹不变性 35

3.2 狄拉克方程 40

Weyl 旋量 44

3.3 狄拉克方程的自由粒子解 45

旋量和 49

3.4 狄拉克矩阵与狄拉克场双线性量 49

3.5 狄拉克场量子化 52

如何量子化狄拉克场：自旋与统计的教训 53

量子化的 Dirac 场 58

狄拉克传播子 63
3.6 狄拉克理论的分立对称性 64
宇称 65
时间反演 67
电荷共轭 70
C、P、T总结 71
4. 相互作用场和费曼图 77
4.1 微扰论——哲学与实例 77
4.2 关联函数的微扰展开 82
4.3 Wick 定理 88
4.4 费曼图 90
4.5 截面与S矩阵 99
截面 99
S矩阵 102
4.6 用费曼图计算S矩阵元 108
4.7 费米子的费曼规则 115
汤川 Yukawa 理论 116
Yukawa 势 121
4.8 量子电动力学的费曼规则 123
库仑势 125
5. 量子电动力学的基本过程 131
5.1 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$导论 131
迹技巧 133
非极化截面 135
夸克-反夸克对的产生 139
5.2 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$：螺旋度结构 141
5.3 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$：非相对论极限 146

束缚态 148
矢量介子的产生与衰变 150
5.4 交叉对称 153
电子-μ子散射 153
交叉对称 155
Mandelstam 变量 156
5.5 康普顿散射 158
光子极化和 159
Klein-Nishina 公式 161
高能表现 164
对湮灭为光子 168
6. 辐射修正：导论 175
6.1 软韧致辐射 176
经典计算 177
量子计算 182
6.2 电子顶点函数：形式化结构 184
6.3 电子顶点函数：计算 189
费曼参数 189
形状因子的计算 190
QED 精度测试 196
6.4 电子顶点函数：红外发散 199
6.5 红外发散的总结和解释 202
7. 辐射修正：一些正规的发展 211
7.1 场强重正化 211
一个例子：电子自能 216
7.2 LSZ 约化公式 222
7.3 光学定理 230

费曼图的光学定理 232
不稳定粒子 236
7.4 Ward-Takahashi 等式 238
7.5 电荷的重正化 244
电荷重正化概述 245
Π_2的计算 247
维数正规化 249
Π_2的计算:继续 251
Π_2的解释 252
Final Project：胶子喷注的辐射 259

符号和约定

单位制

我们将使用自然单位制，这里有

$$\hbar = c = 1$$

在这个体系里面，

$$[\text{length}] = [\text{time}] = [\text{energy}]^{-1} = [\text{mass}]^{-1}.$$

因此粒子的质量(m)等于其静止能量(mc^2)，也等于它的康普顿波长的倒数：($mc/\hbar$)。例如

$$m_{\text{electron}} = 9.109 \times 10^{-28}\text{g} = 0.511\text{MeV} = (3.862 \times 10^{-11}\text{cm})^{-1}.$$

附录中将给出一些实用的数值和转换因子。

相对论和张量

我们关于相对论的约定会遵循Jackson(1975)，Bjorken和Drell(1964，1965)，以及现在几乎所有的场论教材通用的约定。我们使用张量矩阵

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

其中希腊指标依次取0,1,2,3或者t, x, y, z，罗马指标(i, j, k等)只表示空间的三分量。所有情况下都要对重复的指标求和。四维矢量都会用细斜体表示，和普通的数一样。三维矢量都会用黑体表示，单位三矢量由一个带帽的细斜体符号表示。比如

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \qquad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x});$$
$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

对一个有质量的粒子，有

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2.$$

注意，位移矢量x^μ是逆变的升指标，但是求导算符是协变的降指标：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right),$$

我们定义完全反对称张量$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$，于是

$$\epsilon^{0123} = +1,$$

必须小心的是，这里暗示了$\epsilon_{0123} = -1$和$\epsilon^{1230} = -1$。(本约定与Jackson一致，但不适用于Bjorken和Drell)。

量子力学

我们将经常涉及量子力学的单粒子薛定谔波函数。能量和动量算符作用在波函数上，它们的表示遵循如下的约定

$$E = i\frac{\partial}{\partial x^0}, \qquad \mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}.$$

这些方程式被结合成

$$p^\mu = i\partial^\mu;$$

在∂^μ上提升指标可以方便地解释出现的负号。平面波$e^{-ik\cdot x}$有动量k^μ，因为

$$i\partial^\mu(e^{-ik\cdot x}) = k^\mu e^{-ik\cdot x}.$$

符号'h.c.'表示厄密共轭

在量子力学对自旋的讨论中，使用了泡利 sigma 矩阵

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这些矩阵的乘积满足等式

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k.$$

定义它们的线性组合也很方便：$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$：

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

傅里叶变换和分布

我们将经常使用 Heaviside 阶梯函数$\theta(x)$和狄拉克 delta 函数$\delta(x)$，定义如下

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0; \end{cases} \qquad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x),$$

对于n维 delta 函数，表示为$\delta^{(n)}(\mathbf{x})$，除了$\mathbf{x}=0$，处处为零。且满足

$$\int d^n x \delta^{(n)}(\mathbf{x}) = 1.$$

在傅里叶变换中，对动量的积分经常会伴随因子2π，例如在四维中

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} \tilde{f}(k)\,;$$
$$\tilde{f}(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x} f(x)\,.$$

(在三维变换中指数的符号分别是$+$和$-$)其中$\tilde{f}(k)$的波浪线在没有潜在的混乱时，常常省略掉。对另一个重要因子2π的记忆来源于下面的恒等式

$$\int d^4x e^{ik\cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k).$$

电动力学

我们使用 Heaviside-Lorentz 约定，这里因子4π没有出现在麦克斯韦的理论中，而是出现在库仑定律和精细结构常数。如此一来，一个点电荷Q的库仑势为

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r},$$

精细结构常数是

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}\,.$$

这里符号e代表的是电子电荷，是一个负的量(尽管符号是无关紧要的)。我们普遍使用的是相对论形式的麦克斯韦方程

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu,$$

这里

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}), \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

我们已经把电量e从四矢量流密度j^μ中提取出来了。

狄拉克方程

我们的一些约定跟 Bjorken 和 Drell(1964,1965)以及其他一些教科书的不一样。对于狄拉克矩阵我们使用的是手征基矢，狄拉克旋量使用相对论归一化的，这些约定我们将在 3.2 和 3.3 节介绍，并且总结在附录中。

Part I

Feynman Diagrams and Quantum Electrodynamics

Chapter 1

Invitation:e^+e^-湮灭中对的产生

在本书中，第一部分的主要意图是发展出量子场论的基本计算方法，和费曼图的形式理论体系。然后我们将会应用这种形式理论体系，在量子电动力学(电子和光子的量子理论)中做计算。

量子电动力学(QED)可能是我们拥有的最好的基础物理理论，这个理论是由一组简单的方程来表述的(麦克斯韦方程和 Dirac 方程)，它们的形式在本质上是由相对论不变性确定的。这些方程的量子力学解，给出了从宏观距离到比质子小几百倍的区域的电磁现象的详细预测。

费曼图给予这个优雅的理论一个同样优雅的计算过程：想象一个可以由电子和光子进行的过程，绘制出一个图，然后用这张图写出当这个过程发生时的量子力学振幅的数学形式。

在本文第一部分，我们将从量子力学和相对论的基本原理出发，发展 QED 理论和费曼图的解法。最后，我们将到达一个点，在这里我们可以计算出一些可观测量，它们在基本粒子的研究中非常有意义。但是要想达到目标，使用这个简单的计算方法，很不幸地我们首先必须严肃的绕道到形式理论中去。接下来的三章几乎完全是正规的。读者可能会怀疑，在这一发展过程中，我们将走向何方？我们想先通过讨论一个特别简单的 QED 过程的物理性质来部分地回答这个问题，这个过程非常简单，它许多特性都直接来自物理直觉。当然这种直觉的、自下而上的方法将包含很多缺陷。在 5 章我们将用费曼图形式理论再次回到这个过程。从更高的角度来看这个过程的话，就会看到所有这些困难都消失了。

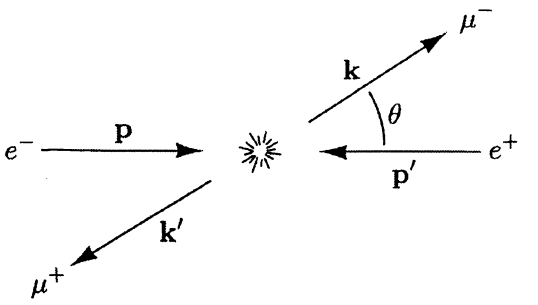


图 1.1 在质心系下的湮灭反应$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

最简单的情况

由于大多数粒子物理实验都涉及散射，散射截面是量子场论中最常见的计算量。所以现在我们来计算最简单的量子电动力学过程的截面：一个电子与它的反粒子电子(正电子)湮灭，形成一对更重的轻子(如介子)。反粒子的存在实际上是量子场论的预测，我们将在第 2 和 3 章讨论，目前我们就承认它们存在了。

测量这种湮灭概率的实验将通过向一束正电子发射一束电子来进行，可观测量就是反应$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的截面，它是质心能 E 以及入射电子和出射μ子的相对夹角θ的函数。这个过程展示在图 1.1。为简单起见，我们在质心系工作，其中动量满足$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$和$\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$。我们假设束流能量 E 远大于电子或μ子的质量，则$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = E \equiv E_{\rm cm}/2$(这里黑体字表示三矢量，普通的斜体字表示四矢量)。

由于电子和μ子都具有自旋 1/2，我们必须指定它们的自旋方向。对于定义了每个粒子自旋量子化的轴，将它取为粒子的运动方向有是很有用的，于是每个粒子的自旋极化可以平行或反平行于这个轴。在实验中，电子和正电子束往往非极化的，而介子探测器通常是探测不到μ介子的极化。因此，我们应该对电子和正电子自旋方向上的截面求平均，并在μ子自旋方向上的截面求和。

对于任何一组给定的自旋方向，传统的方法是为我们的过程写出微分截面，其中μ^-产生在立体角$d\Omega$中，有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\rm cm}^2} \cdot |\mathcal{M}|^2 \tag{1.1}$$

其中因子E_{cm}^{-2}为截面提供了正确的量纲，因为我们的单位制中，有$(\mathrm{energy})^{-2}\sim(\mathrm{length})^2$，因此$\mathcal{M}$是无量纲的量，它是过程发生的量子力学振幅(类似于非相对论量子力学中的散射振幅f)，我们现在的问题是如何从基本理论出发计算它。表达式中的其他因子仅仅是约定的问题。等式(1.1)实际上是一种特殊情况，当末态包含两个无质量粒子时，对于质心散射是有效的，我们将在 4.5 节推导出更加普遍的公式(其形式不能从量纲分析推导得到)。

现在有一些好消息和坏消息。

坏消息是即使对于这个最简单的 QED 过程，我们也不知道$\mathcal{M}$的确切表达式。实际上这个事实不应该令人惊讶，因为即使在非相对论量子力学中，散射问题也很少能被精确的求解，我们所能做的最好的是得到$\mathcal{M}$的一个微扰级数的形式表达式(在电磁相互作用的强度下)，并对该级数中的前几个项进行计算。

好消息是，费曼已经发明了一种漂亮的方法来组织和可视化这种微扰级数：费曼图方法。粗略的讲，费曼图展示了散射过程中电子和光子的流动。在我们特殊的计算中，微扰级数中最低阶项可以用一张图来代表，显示在图 1.2 中，这张图由三个不同的部分组成：1.外线(代表四个进入和出去的粒子) 2.内线(代表“虚”粒子，在这里表示一个虚光子)3.顶点。按照惯例，使用直线表示费米子，使用波浪线表示光子。直线上的箭头表示负电流动的方向，而不是动量方向。如图，我们给每个外线分配一个四动量矢量。在图中，一条内线的动量q由任一顶点的动量守恒确定：$q=p+p'=k+k'$。我们还必须把自旋态(“向上”或“向下”)与每个外部费米子联系起来。

根据费曼规则，每个图都能被直接转化成对$\mathcal{M}$的一个贡献。费曼规则给图中的每一个元素分配了一些简短的代数因子，这些因子的乘积给出了微扰级数中相应项的值。然而，将$\mathcal{M}$的结果表达式转换成可用的形式仍然是非常重要的。在随后的章节里面我们将发展更有用的技巧来做这样的计算。但是现在我们还不知道这个技巧，所以为了得到我们的特殊问题的答案，我们将不用真正的费曼规则，而是使用一些启发性的论点。

回忆下在量子力学的微扰论中，一个跃迁振幅可以计算到第一阶，表达式的形式为

$$\langle \text{final state}|\ H_I\ |\text{initial state}\rangle, \tag{1.2}$$

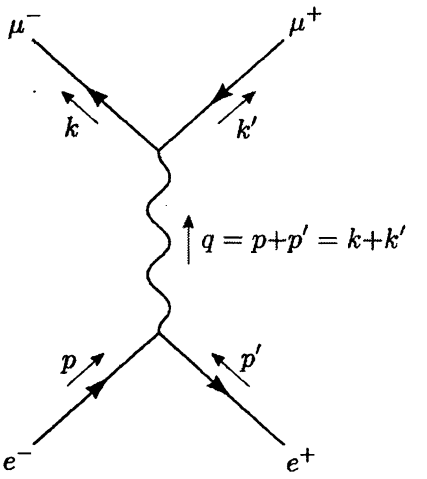


图 1.2. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$截面最低阶项的费曼图，在这一阶中唯一可能的中间态是一个光子

这里H_I是总哈密顿量的相互作用部分。在我们的例子中初态是$|e^+e^-\rangle$末态是$\langle\mu^+\mu^-|$，但是我们的相互作用的哈密顿量是通过电磁场把电子和μ子耦合起来(那就是光子)，不是直接作用。于是一阶结果的1.2式会为零，我们必须转向二阶的表达式：

$$\mathcal{M} \sim \langle\mu^+\mu^-|H_I|\gamma\rangle^\mu \ \langle\gamma|H_I|e^+e^-\rangle_\mu \ . \tag{1.3}$$

这只是一种启发式的做法，可以从图1.2出发来写出对$\mathcal{M}$的贡献。电子外线对应了$|e^+e^-\rangle$，μ子外线对应$\langle\mu^+\mu^-|$，顶点对应H_I，而光子的内线则对应了算符$|\gamma\rangle\langle\gamma|$，我们加上了矢量指标($\mu$)因为光子是一个有着四分量的矢量粒子。现在有四种可能的中间态，它们对应每个分量，根据微扰理论的规则我们需要对中间态求和。注意到(1.3)式的求和是四矢量点积的形式，只要(1.3)的每一半是一个四矢量，振幅$\mathcal{M}$将是洛伦兹不变的标量。

让我们试试猜测矢量$\langle\gamma|H_I|e^+e^-\rangle_\mu$的形式。因为$H_I$是以$e$(电子电荷)的强度耦合电子和光子，所以矩阵元应该与e成正比。现在考虑初态和末态有一组特定的自旋方向，如图 1.3 所示。电子和μ子的自旋平行于它们的运动方向，它们是“右手的”。类似的，反粒子是“左手的”，电子和正电子的自旋加起来是$+z$方向上的一个单位的角动量。因为H_I应该保持角动量守恒，这些粒子相互耦合出来的光子必须具有正确的极化矢量，以使其具有相同的角动量：$\epsilon^\mu = (0,1,i,0)$，这样我们便有：

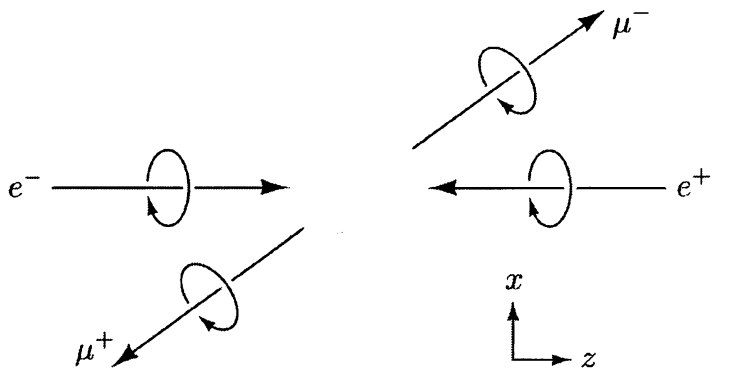


图 1.3 一组可能的的自旋方向，电子和μ子的自旋平行于它们的运动方向，它们是“右手的”。反电子和反μ子是“左手的”

$$\langle\gamma|\ H_I\ |e^+e^-\rangle^\mu \propto e(0,1,i,0). \tag{1.4}$$

类似的，μ子矩阵元应该沿μ^-的动量方向$\mathbf{k}$有一个极化，对应着一个单位的角动量，为了得到正确的矢量，将 1.4 式在xz平面内转动一个角度θ：

$$\langle\gamma|\ H_I\ |\mu^+\mu^-\rangle^\mu \propto e(0,\cos\theta\,,i,-\sin\theta). \tag{1.5}$$

为计算振幅$\mathcal{M}$，我们取这个矢量的复共轭并和 1.4 式点积，发现对于这组自旋取向：

$$\mathcal{M}(RL\to RL)=-e^2(1+\cos\theta)\ . \tag{1.6}$$

当然我们不可能用这方法确定所有的因子，但 1.6 式恰巧是正确的，感谢 1.1 式的约定！注意振幅在$\theta=180°$的时候为零，正如人们所预料的：一个角动量在$+z$方向的态不可能和一个角动量在$-z$方向的态有重叠。

接下来考虑的是电子和反电子都是右手的情况。现在他们的总自旋角动量为零，讨论变得更加微妙。我们可能期望得到纵向极化的光子，其中 CG 系数是$1/\sqrt{2}$，就像我们在三维里对角动量相加：$|\uparrow\downarrow\rangle=(1/\sqrt{2})(|j=1,m=0\rangle+|j=0,m=0\rangle)$。但实际上我们是在四维洛伦兹群里把角动量相加，所以我们不仅要考虑自旋(态在旋转下的变换性质)，也要考虑态在平动(boost)变换下的变换性质。结果就如我们将在第三章讨论的，将一个四矢量和无质量费米子态$|e_R^+e_R^-\rangle$耦合到一起的 CG 系数将为零(准确地说，这个态是标量和张量的反对称部分的叠加态)，因此振幅$\mathcal{M}(RR\to RL)$为零，其余的十一个初态或者末态的总角动量为零的情况，它们的振幅也为零。

与第一个振幅类似，剩下的非零振幅可以用同样的方法得到，它们是

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(RL \to LR) &= -e^2(1-\cos\theta),\\ \mathcal{M}(LR \to RL) &= -e^2(1-\cos\theta),\\ \mathcal{M}(LR \to LR) &= -e^2(1+\cos\theta).\end{aligned} \tag{1.7}$$

将这些表达式代入 1.1 式，对初态的四个自旋方向求平均，然后对末态的四个自旋方向求和，我们可以得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2}(1+\cos^2\theta), \tag{1.8}$$

这里$\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$。现在对角度变量$\theta$和$\varphi$求积分可以给出总截面：

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{cm}}^2} \tag{1.9}$$

式 1.8 和 1.9 的结果只与实验符合了10%，绝大多数的差异都来自微扰级下一阶项的贡献，对应着图 1.4 中的费曼图。这些表达式的定性特征——角度依赖和随着能量急剧下降——在真实数据中得到明显的表现(这些结果的性质将在 5.1 节详细讨论)。

修正与问题

我们已经用角动量的方法对 QED 过程的$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$反应的角分布进行了预言，而没用到基础的形式理论。但是我们在很大程度上简化了过程的特征——使用了高能极限近似和质心系，当我们放宽了任何简化的假设时，我们提出的分析就会崩溃。我们该如何执行一般 QED 计算？为了回答这个问题我们必须回到费曼规则。

正如之前提到的，费曼规则告诉我们，把所考虑的过程画成费曼图，然后将每个费曼图的每一部分与对应的简短的代数因子联系起来。图 1.5 显示了我们的反应的费曼图，带着各种的计算指示。

对于光子内线我们写上了$-ig_{\mu\nu}/q^2$，这里$g_{\mu\nu}$就是通常的 Minkowski 矩阵张量，q是虚光子的四动量。这个因子在我们的启发性的表达式 1.3 中对应着算符$|\gamma\rangle\langle\gamma|$。

每一个顶点我们写上了$-ie\gamma^\mu$，对应 1.3 的H_I。其中，γ^μ是一组四个4×4

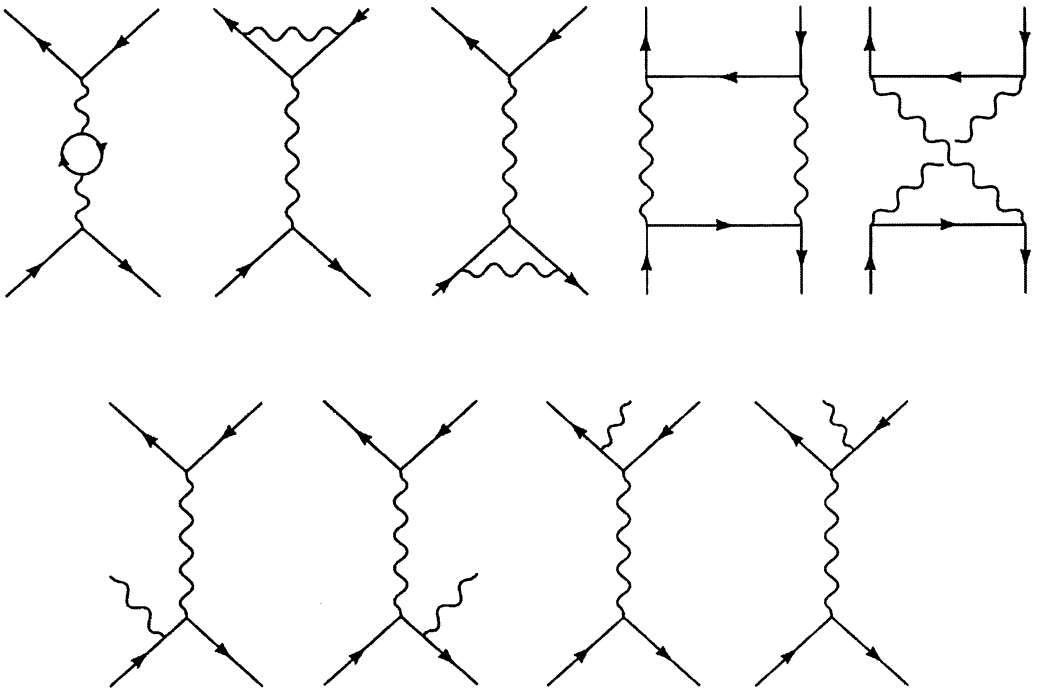


图 1.4 在反应$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$贡献了α^3项的费曼图

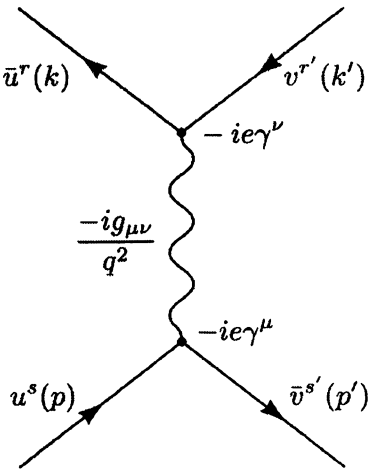


图 1.5 图 1.2 的费曼图的每一内线、顶点、外线对应的表达式

的常矩阵，它们为我们做的就是“角动量加法”，将两个自旋 1/2 的粒子组成的态和一个矢量粒子耦合在一起。

外线携带着的表达式是有着四分量的列旋量u, v或者行旋量$\bar{u}, \bar{v}$，它们是初态和末态粒子的至关重要的动量空间波函数，对应 1.3 式中的$|e^+e^-\rangle$和$\langle\mu^+\mu^-|$，指标s, s', r, r'表示的是自旋态上或下。

我们现在可以写下$\mathcal{M}$的表达式了，直接观察费曼图的每一部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \overline{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^{\mu})u^{s}(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\overline{u}^{r}(k)(-ie\gamma^{\nu})v^{r'}(k') \\ &= \frac{ie^2}{q^2}\left(\overline{v}^{s'}(p')\gamma^{\mu}u^{s}(p)\right)\left(\overline{u}^{r}(k)\gamma_{\mu}v^{r'}(k')\right).\end{aligned} \tag{1.10}$$

将这个和 1.3 式仔细的对比一下是很有益的。

为了从(1.10)推导截面(1.8)，我们可以回到之前使用的角动量论点，补充一些关于γ矩阵和狄拉克旋量的具体的知识。我们将在 5.2 节以这种方式中做计算。然而有一些有用的技巧可以用来处理像 1.10 式这样的表达式，特别是当我们只想计算非极化的散射截面时。而使用“费曼求迹技巧”(这样叫是因为我们必须计算γ矩阵乘积的迹)，我们甚至不需要知道γ矩阵和狄拉克旋量明确的表达式。这样一来计算变得几乎不需要我们思考，得到答案 1.8 式也只用到少于一页纸的代数计算。而因为费曼规则和求迹技术如此强大，我们可以放宽简化了的假设。为了结束这一部分，让我们讨论几种可能令我们的计算变得更困难的方式。

可以放宽的最简单的假设是μ子的无质量性。如果束流能量并没有比μ子的质量大多少，我们的所有预言应该都依赖于比值m_{μ}/E_{cm}(因为电子比μ子轻了两百倍，所以只要能量是比产生的μ子大，它都可以被认为是无质量的)，使用费曼求迹技巧，将μ子的质量放回我们的计算中是极其简单的。代数的数值增加了约百分之五十，振幅和散射截面的关系(1.1)式必须稍做修改，但答案是值得的努力。我们将在 5.1 节中做详细的计算。

要在其他的参考系中做计算也是很简单的，唯一需要做的修改是振幅和散射截面的关系(1.1)式，或者我们直接简单的在质心系中做洛伦兹变换，平动变换到其他的坐标系中。

当初态与(或)末态的自旋已知的时候，我们仍然想保留μ子的质量，这时计算很难处理但是原则上没有困难。求迹技术可以推广到这种情况，但是利用旋量u和v明确已知的值，直接计算 1.10 式常常更简单。

接下来可以计算不同过程的散射截面，比如 Bhabha 散射：$e^{+}e^{-}\to e^{+}e^{-}$，因为存在第二个允许的费曼图(如图 1.6)，所以会更困难。注意，这两个费曼图的散射振幅首先必须先加起来，然后再平方。

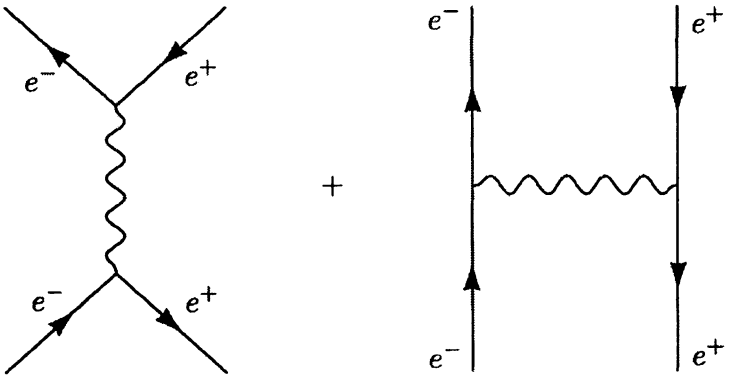


图 1.6 Bhabha 散射的两个最低阶费曼图：$e^+e^- \to e^+e^-$

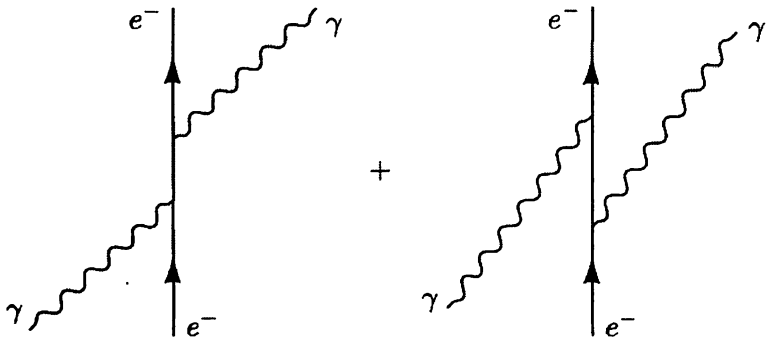


图 1.7 康普顿散射的两个最低阶的费曼图

其他一些过程会在初态与(或)末态包含光子。范例是康普顿散射，其中两个最低阶的费曼图显示在图 1.7 中。对于光子的外线和电子的内线，费曼规则并没有比我们之前看到的更复杂。我们将在 5.5 节详细讨论康普顿散射。

最后，我们可以计算微扰级数中更高阶的项，感谢费曼，至少我们很容易画出费曼图，我们已经在图 1.4 中看到了$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的散射截面的下一项。值得注意的是，将代数因子分配到图的各个部分，这种算法适用于所有的高阶贡献，并允许人们以一种简单明了(或者说单调)的方式来计算这样的费曼图。在一篇研究论文的水平上，要计算出完整的九个费曼图是一件非常麻烦的事。

在本书中，从第六章开始，我们将会对高阶的费曼图的物理进行详尽的分析，比如图 1.4 中的那些。我们将看到那些费曼图中的最后四个图是必须存在的，其中末态包含了额外的光子，因为没有一个探测器足够灵敏到能够注意到极低能量光子的存在。因此，包含了这样一个光子的末态，不能与我们想要的仅仅是介子对的末态相区别。

图 1.4 的其他五个费曼图的中间态包含了多种虚粒子，而不是只有单个虚光子。这些费曼图的每一个图都包含这样一个虚粒子，其动量没有被顶点动量守恒所确定。因为微扰理论要求我们对所有可能的中间态求和，所以我们必须对所有可能的动量值做积分。但是在这一步，出现了一个新的困难：在我们天真地对前三个图的圈动量执行积分时，结果是无穷大。我们将在第一部分的最后为这个问题提供一个解决方案，从而得到有限的结果。但这些发散的物理根源问题不能这么轻易地加以驳斥，这将是这本书第二部分的主题。

我们已经探讨了，将费曼图视为一种执行计算的算法，下面的章节将充分的说明这个工具的强大。当我们揭开费曼图更多的应用时，它们开始呈现出自己的生命和意义。它们指出了不同物理过程之间不容置疑的关系，并且建议使用直觉的观点，之后可以通过计算验证。我们希望这本书让读者你能够拿起这个工具，以新奇的和启发性的方式应用它。

Chapter 2

克莱因-高登场

2.1 场观点的必要性

量子场论是量子力学在场的动力学体系中的应用，在同等意义上，量子力学的基础课程主要涉及到粒子的动力学体系的量子化。这是理解基本粒子物理学当前状态的绝对重要的学科。通过一些修改，我们即将讨论的方法也会在原子物理、核物理、凝聚态物理等大多数活跃领域起着关键的作用。然而在本书第一部分，我们主要关心的是基本粒子和相对论场。

考虑到我们想要理解的过程发生在很小的尺度(量子力学层面的)和很高的能量下(相对论的)，有人会问为什么我们必须得学习场的量子化。为什么我们不能直接把相对论性的粒子量子化，就像我们量子化非相对论粒子一样？

这个问题可以从许多层面上回答。大概最好的接近方法是写下单粒子的相对论性波动方程(比如克莱因-高登方程或者狄拉克方程)然后会看到它产生了负能态和其他的矛盾解。通常这样的讨论会出现在研究生量子力学课程的最后阶段，我们不想重复。然而它可以很简单的去理解为什么这样的接近是行不通的。我们无权假定任何相对论过程都可以用单个粒子来解释，毕竟爱因斯坦关系$E = mc^2$允许粒子-反粒子对产生。即使没有足够的能量产生粒子对，多粒子态也会出现，例如出现在微扰论的二阶项的中间态中。根据不确定性原理$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$，我们可以把这样的态想象成只存在于非常短的时间里。当我们走向微扰论的更高阶项时，任意多的虚粒子都可以被产生。

多粒子理论的必要性也可以以一种不太明显的方式出现——从因果关系考虑。考虑一个自由粒子从$\mathbf{x}_0$传播到$\mathbf{x}$的振幅：

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle.$$

在非相对论量子力学里面我们有$E = \mathbf{p}^2/2m$，于是

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x}|e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t}|\mathbf{x}_0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle \mathbf{x}|e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t}|\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}|\mathbf{x}_0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t}\cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2t}. \end{aligned}$$

这个表达式在所有的x和t都不为零，表示一个粒子可以在任意的两点、任意短的时间内传播，在相对论中，这个结果会破坏因果关系。你可能认为使用相对论的表达式可能会有帮助：$E = \sqrt{p^2 + m^2}$，但是却并没有。类比于非相对论的情况，我们有

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x}|e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}|\mathbf{x}_0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\cdot e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}\int_0^\infty dp\; p\,\sin(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}. \end{aligned}$$

这个积分可以被精确的积出为贝塞尔函数*。使用稳定相位法，观察它在$x^2 \gg t^2$(光锥外)时的渐进行为会让我们满意。相位函数$px - t\sqrt{p^2+m^2}$在$p = imx/\sqrt{x^2-t^2}$时有一个平稳点，我们可以自由地选取积分围道向上，让它经过这一点。将这个值插入 p，我们发现会得到 x 和 t 的有理函数：

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}.$$

这样我们便发现在光锥外，传播振幅很小但不为零，因果关系仍然被破坏。

量子场论以一种神奇的方式解决了因果关系问题，我们将在2.4节讨论。我们会发现，在多粒子场论中，一个粒子穿过类空间隔的“传播”和它的反粒子以相反方向的“传播”，是难以分辨的(见图 2.1)。当我们问在x_0点的观测是否会影响到在x点上的观测，我们会发现，粒子和反粒子传播的振幅会精确地消掉----这样因果关系就被保护了。

量子场论能提供一种自然的方式，不仅处理了多粒子态，还处理了不同的粒子数目间的态的转换。它引入反粒子解决了因果律问题，然后继续揭示了自旋和

*见 Gradshteyn and Ryzhik(1980), #3.914

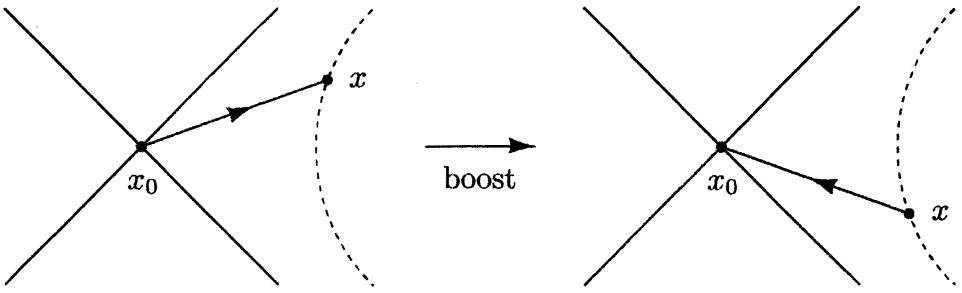


图 2.1 某个参考系从x_0到x点的传播在另一个参考系看起来像从x到x_0点的传播

统计之间的关系。但最重要的是，它提供了一种不可或缺的工具，用来计算无数的散射截面，粒子寿命，以及其他可观测的物理量。这些预言的实验证实，常常达到了前所未有的精确水平，这才是我们研究量子场论的真正原因。

2.2 经典场论的元素

在这一部分我们回顾经典场论中的一些形式理论，它们对量子场论接下来的讨论是必要的。

拉格朗日场论

经典力学的基本量是作用量S，它是拉格朗日量L对时间的积分。在一个定域场论中拉氏量可以写作拉氏量密度对空间的积分，表示为$\mathcal{L}$，它是一个或者多个场$\phi(x)$及其导数$\partial_\mu\phi$的函数，这样我们有：

$$S = \int L\,dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\,d^4x. \tag{2.1}$$

因为这是本场论书，我们简单的将$\mathcal{L}$视为拉氏量。

最小作用量原理指出，当一个系统在时间t_1到t_2之间从一个给定的位形演化到另一个位形时，它沿着的位形空间的“路径”将使S是一极值(通常是最小值)。我们可以将这条件写为

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

最后一项可转化为四维时空区域积分边界的表面积分。由于场的初位形和末位形都假设是给定的，$\delta\phi$在该区域的时间开始和结束时为零，如果把我们的考虑限制

在空间边界上为零的形变$\delta\phi$上，那么表面项将为零。接着将$\delta\phi$从前两项中分离出来，我们注意到，由于积分对任意的$\delta\phi$都必须为零，所以乘上$\delta\phi$的物理量应该在所有的点都为零。这样我们可以得到关于场的欧拉-拉格朗日运动方程，

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \tag{2.3}$$

如果拉氏量包含多个场，那么对每个场都有这样的一个方程。

哈密顿场理论

场论的拉格朗日公式特别适用于相对论动力学，因为所有的表达式都是显式的洛伦兹不变的。尽管如此，我们将在本书的第一部分中使用哈密顿公式，因为这将使得过渡到量子力学更容易。回想一下，对于离散系统，你可以对每一个动力学变量q定义一个共轭动量$p \equiv \partial L/\partial \dot{q}$(这里$\dot{q} = \partial q/\partial t$)，于是哈密顿量为$H \equiv \sum p\dot{q} - L$。推广到连续系统是最好理解为假装空间点$\mathbf{x}$是离散的间隔，我们可以定义

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \int \mathcal{L}\big(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})\big)\, d^3y \\ &\sim \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \sum_{\mathbf{y}} \mathcal{L}\big(\phi(\mathbf{y}), \dot{\phi}(\mathbf{y})\big) d^3y \\ &= \pi(\mathbf{x}) d^3x, \end{aligned}$$

其中

$$\pi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})} \tag{2.4}$$

被称为$\phi(\mathbf{x})$的**共轭动量密度**。这样哈密顿量就可以写成

$$H = \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L.$$

推广到连续，就变成

$$H = \int d^3x \left[\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}\right] \equiv \int d^3x\, \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

这一节的结尾，我们将用不同的方法重新推导出哈密顿密度$\mathcal{H}$的表达式。

举个简单的例子，考虑一个单个场$\phi(x)$的理论，受拉氏量的支配：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

现在我们把$\phi(x)$当作一个实场，在 2.3 节里物理量m将被解释为质量，现在我们只需把它看成一参数。从拉氏量出发，用通常的过程可以给出运动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\phi=0 \qquad \text{or} \qquad (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi=0, \tag{2.7}$$

这就是著名的克莱因-高登方程(现在这个语境下，它仅仅是经典场方程，像麦克斯韦方程而不是量子力学波动方程)。注意，$\phi(x)$的共轭正则动量密度为$\pi(x)=\dot{\phi}(x)$，同样构建哈密顿量为

$$H=\int d^3x\,\mathcal{H}=\int d^3x\left[\tfrac{1}{2}\pi^2+\tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\tfrac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \tag{2.8}$$

我们可以认为三个项分别是，在时间中移动的能量，在空间切变的能量，以及围绕的场本身的能量。在第2.3节和第2.4节中，我们将进一步研究哈密顿量。

诺特定理

接下来让我们讨论经典场论中对称性和守恒律的关系，总结起来就是**诺特定理**。这个定理涉及的是场ϕ的连续变换，无穷小变换形式为

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\phi(x)+\alpha\Delta\phi(x), \tag{2.9}$$

这里α是无穷小的参数，$\Delta\phi$是场位形的某些形变。如果这种变换使得运动方程保持不变，我们把它称为一种对称性。这就保证了在(2.9)变换下运动是否保持不变。更一般地，我们可以允许作用量被一个表面项来改变，因为这样的项的存在不会影响我们推导出欧拉-拉格朗日运动方程(2.3)。因此拉氏量在(2.9)变换下一定是不变的，除了相差一个四散度(对于一些$\mathcal{J}^\mu$)：

$$\mathcal{L}(x)\to\mathcal{L}(x)+\alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x), \tag{2.10}$$

让我们把$\Delta\mathcal{L}$的这个期望值和通过改变场得到的结果相比较：

$$\begin{aligned}\alpha\Delta\mathcal{L}&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi)+\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\phi)\\&=\alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right)+\alpha\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\Big]\Delta\phi.\end{aligned} \tag{2.11}$$

第二项可被欧拉-拉格朗日方程(2.3)消去。我们令剩下这项等于$\alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$，发现

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \qquad \text{for} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}^\mu. \tag{2.12}$$

(如果对称包括多种场，$j^\mu(x)$的这个表达式第一项应该被替代为对每个场的这样的项求和)这个结果说明流矢量$j^\mu(x)$守恒。对于$\mathcal{L}$的每一个连续对称性，我们有这样一个守恒律。

守恒定律也可以定义为荷来表示

$$Q \equiv \int_{\text{all space}} j^0 \, d^3x \tag{2.13}$$

在时间变化中它是一个常数。然而要注意的是，用定域拉格朗日密度来表述的场论，直接导致的是守恒定律的定域形式(2.12)。

守恒定律最简单例子是只有动力学项$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$的拉氏量，变换为$\phi \to \phi + \alpha$，$\alpha$是一常数，这样$\mathcal{L}$不变，结论为流矢量$j^\mu(x) = \partial^\mu \phi$守恒。还有更好的例子，考虑拉氏量

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2, \tag{2.14}$$

现在ϕ是一个**复数**场，你可以很简单的得到这拉氏量的运动方程仍然是Klein-Gordon方程(2.7)，这个拉氏量在变换$\phi \to e^{i\alpha}\phi$下是不变的，无穷小变换是

$$\alpha\Delta\phi = i\alpha\phi; \qquad \alpha\Delta\phi^* = -i\alpha\phi^*. \tag{2.15}$$

(我们将ϕ和ϕ^*视为独立的场。我们还可选择为场ϕ的实部和虚部)现在事情变得很简单，守恒的诺特流矢量为

$$j^\mu = i\big[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\big]. \tag{2.16}$$

(总常数已被任意选择)你可以直接检查这个流矢量的散度，在利用 Klein-Gordon 方程之后会为零。之后我们会给这个拉氏量增加一些ϕ和电磁场的耦合项，然后我们将j^μ解释为场携带的电磁流密度，j^0的空间积分就是电荷。

诺特定理也可用于时空变换，如平移和旋转，我们将无限小变换描述为

$$x^\mu \to x^\mu - a^\mu$$

或者说场形式的变换为

$$\phi(x) \to \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x).$$

拉氏量也是一个标量，所以它必须按相同的方式变换

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu \left(\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}\right).$$

将这个式子和(2.10)比较，可以看到我们有非零的$\mathcal{J}^\mu$，把这一项考虑进去，应用定理我们可以得到四个分别守恒的流

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu. \tag{2.17}$$

这是精确的**应力-能量张量**，也叫做场ϕ的**能量-动量张量**。与时间变换相关联的守恒荷是哈密顿量：

$$H = \int T^{00}\, d^3x = \int \mathcal{H}\, d^3x. \tag{2.18}$$

通过在 Klein-Gordon 场中计算这个量，你可以再次得到结果(2.8)，与空间变换相关联的守恒荷是：

$$P^i = \int T^{0i}\, d^3x = -\int \pi \partial_i \phi \; d^3x, \tag{2.19}$$

我们自然将其解释为场携带的(物理的)动量(不要与正则动量搞混了)。

2.3 谐振子的克莱因-高登场

我们开始讨论量子场论，先对最简单场——Klein-Gordon场进行相当正规的处理。从经典场出发(由拉氏量(2.6)支配的经典标量场论)，对它量子化，就是将动力学变量解释为算符且遵从正则对易关系*。然后我们用谐振子做类比，通过寻找本征值和本征态来“求解”这个理论。

前面的章节简洁但充分的讨论了Klein-Gordon场的经典理论，相关表达式在(2.6)(2.7)(2.8)给出，为了量子化这个理论，我们遵循像其他动力学系统那样同样的步骤。将ϕ和π提升为算符并强加上合适的对易关系，回想离散系统的单粒子或多粒子的对易关系：

$$\begin{aligned} \left[q_i, p_j\right] &= i\delta_{ij}; \\ \left[q_i, q_j\right] &= \left[p_i, p_j\right] = 0. \end{aligned}$$

*为了将产生的 Klein-Gordon 方程(其中ϕ是一个算符)和旧的粒子的 Klein-Gordon 方程(其中ϕ是一个函数)区分开，这个过程有时被称为二次量子化。在这本书中，我们没有采用后者的观点，我们从一个经典方程出发(其中ϕ是一个经典场)而且量子化了一次。

对于一个连续系统，推广是很自然的，因为$\pi(\mathbf{x})$是动量密度，我们用狄拉克delta函数代替克罗内克δ符号：

$$\begin{aligned}\left[\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})\right]&=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y});\\ \left[\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{y})\right]&=\left[\pi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})\right]=0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

(目前为止我们都是在薛定谔绘景中工作，这里ϕ和π都不依赖于时间，当我们在下一节转换到海森伯绘景时，如果在相同时间考虑两个算符，这些“等时”的对易关系仍然成立)。

作为ϕ和π的函数，哈密顿量也成为了算符。我们下个任务就是寻找哈密顿量的本征谱。因为没有明显的办法可以这样做，让我们先在傅里叶空间写出Klein-Gordon 方程作为引导，如果我们将经典 Klein-Gordon 场展开为

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,\phi(\mathbf{p},t)$$

(因为$\phi^*(\mathbf{p})=\phi(-\mathbf{p})$，于是$\phi(\mathbf{x})$是实的)，于是 Klein-Gordon 方程(2.7)变为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(|\mathbf{p}|^2+m^2\right)\right]\phi(\mathbf{p},t)=0.\tag{2.21}$$

这个方程和谐振子的运动方程是一样的，对应频率为：

$$\omega_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}.\tag{2.22}$$

我们已经知道如何找到谐振子系统的谱，让我们回想下是怎么做的，先写下哈密顿量

$$H_{\text{SHO}}=\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}\omega^2\phi^2.$$

为了找到H_{SHO}的本征值，我们根据阶梯算符写出ϕ和p：

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a+a^\dagger);\qquad p=-i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a-a^\dagger).\tag{2.23}$$

正则对易关系$[\phi,p]=i$等价于

$$\left[a,a^\dagger\right]=1.\tag{2.24}$$

哈密顿量现在可以重新写成

$$H_{\text{SHO}}=\omega(a^\dagger a+\tfrac{1}{2}).$$

满足$a|0\rangle=0$的态$|0\rangle$是H对应本征值为零点能$\omega/2$的本征矢，此外还有对易子

$$\left[H_{\text{SHO}},a^\dagger\right]=\omega a^\dagger,\qquad\left[H_{\text{SHO}},a\right]=-\omega a$$

很容易可以确认以下态：

$$|n\rangle\equiv(a^\dagger)^n\,|0\rangle$$

是H对应本征值为$(n+\frac{1}{2})\omega$的本征矢，这些态穷尽了能谱。

我们可以用同样的技巧得到Klein-Gordon场哈密顿量的谱，但是现在场的每个傅里叶模式都被看做是一个独立的谐振子，带着a和$a^\dagger$，类比(2.23)式我们写出：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \left(a_\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right); \tag{2.25}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}} \left(a_\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_\mathbf{p}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right). \tag{2.26}$$

很容易推导出a和$a^\dagger$作为ϕ和π的函数的相反表达式，但是很少用到。在下面的计算中，我们发现将(2.25)和(2.26)重新安排为下面的形式是很方便的：

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \left(a_\mathbf{p} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \tag{2.27}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{p}}{2}} \left(a_\mathbf{p} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \tag{2.28}$$

对易关系(2.24)变成了

$$\left[a_\mathbf{p}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{2.29}$$

用这个你可以证明ϕ和π的对易子能正确地得到：

$$\begin{aligned}\left[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\right] &= \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_\mathbf{p}}} \left(\left[a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}\right] - \left[a_\mathbf{p}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right]\right) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}')} \\ &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\end{aligned} \tag{2.30}$$

(如果对这个和下个表达式的计算你还不熟，请你小心地推导它们。经过些许练习之后它们就变得十分简单了，对后面两章的形式内容来说也是很基本的)。

我们现在已准备好用阶梯算符表达哈密顿量。先从它的表达式(2.8)开始：

$$\begin{aligned}H = \int d^3x \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \Bigg\{ &-\frac{\sqrt{\omega_\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}'}}}{4} \left(a_\mathbf{p} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)\left(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right) \\ &+ \frac{-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + m^2}{4\sqrt{\omega_\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}'}}} \left(a_\mathbf{p} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger\right)\left(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger\right) \Bigg\} \\ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_\mathbf{p} &\left(a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\left[a_\mathbf{p}, a_\mathbf{p}^\dagger\right]\right).\end{aligned} \tag{2.31}$$

第二项正比于$\delta(0)$，一个无穷大的c数。如果你有点不安，考虑到它简单的是所有模式的零点能$\omega_\mathbf{p}/2$的和，因此它的存在完全是预料之中的。幸运的是，这个无穷大的能量移动不能被实验探测到，因为实验只能测量到与H的基态的能量

差别。因此在我们所有的计算中都将忽略这个无穷大的常数项。当然有可能这个基态的能量移动会在更深层次的理论中形成问题，我们会在结尾的时候讨论这个事。

利用按a和$a^\dagger$写出来的哈密顿表达式，我们可以很简单的计算对易子：

$$[H, a^\dagger_{\mathbf{p}}] = \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}}; \qquad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{2.32}$$

我们现在可写下理论的能谱，像谐振子一样。对所有的$\mathbf{p}$，满足$a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$的态$|0\rangle$，叫基态或者**真空**，如果在(2.31)中丢掉无穷大常数，便有$E = 0$。将产生算符作用在$|0\rangle$上，可以构建出所有的能量本征态。态$a^\dagger_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}} \cdots |0\rangle$对应 H 能量为$\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \cdots$的本征态，这些态穷尽了谱。

找到了 H 的谱,，让我们来尝试解释它的本征态。从(2.19)和类似于(2.31)的计算，我们可写出总动量算符，

$$\mathbf{P} = -\int d^3x\, \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \mathbf{p}\, a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \tag{2.33}$$

所以算符$a^\dagger_{\mathbf{p}}$产生了动量$\mathbf{p}$和能量$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$。类似的，态$a^\dagger_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}} \cdots |0\rangle$动量为$\mathbf{p} + \mathbf{q} + \ldots$。自然就称这些激发态为**粒子**，因为它们是有正确相对论能动量关系的离散实体(对**粒子**我们说不一定定域在空间；$a^\dagger_{\mathbf{p}}$产生的是动量本征态粒子)。现在起我们令$\omega_{\mathbf{p}}$等于$E_{\mathbf{p}}$(或简单的是E)，因为它正是一个粒子的能量。注意，粒子的能量总是正的：$E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$。

形式理论允许我们确定粒子的统计性质。考虑双粒子态$a^\dagger_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle$，因为$a^\dagger_{\mathbf{p}}$与$a^\dagger_{\mathbf{q}}$对易，这个态等价于$a^\dagger_{\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$，这样子，两个粒子可以互相交换。此外，一个单模式$\mathbf{p}$可以包含任意多的粒子(就像单个谐振子可以被激发到任意高的能级)。于是我们可以下结论：Klein-Gordon粒子服从**玻色-爱因斯坦统计**规律。

我们自然地选择令真空态归一化：$\langle 0|0\rangle = 1$。单粒子态$|\mathbf{p}\rangle \propto a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$也经常出现，对它们的归一化采取一种约定是有必要的。最简单的归一化为$\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$(很多书都使用了)却不是洛伦兹不变的，考虑三个方向平动(boost)变换的影响，很容易可以证明。这样的平动下我们有$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E)$，以及$E' = \gamma(E + \beta p_3)$，利用 delta 函数的性质：

$$\delta\big(f(x) - f(x_0)\big) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0), \tag{2.34}$$

我们可以算出：

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\cdot\frac{dp_3'}{dp_3}\\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\gamma\left(1+\beta\frac{dE}{dp_3}\right)\\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\frac{\gamma}{E}(E+\beta p_3)\\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')\frac{E'}{E}.\end{aligned}$$

问题是在平动下体积不是不变的。因为洛伦兹收缩，静止系中体积为V的箱子，在运动系中体积为V/γ。但从上面的计算可见$E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$是洛伦兹不变的，因此我们定义：

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,|0\rangle\,, \tag{2.35}$$

于是

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{2.36}$$

(因子 2 不是必要的，但却很方便，因为 2.25 式中也有因子 2)。

在量子态的希尔伯特空间中，洛伦兹变换Λ作为一个幺正算符$U(\Lambda)$实现。我们的归一化条件(2.35)意味着

$$U(\Lambda)\,|\mathbf{p}\rangle = |\Lambda\mathbf{p}\rangle\,. \tag{2.37}$$

如果我们更愿意将这个变换想成作用在算符$a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$上，我们也可以写成

$$U(\Lambda)\,a_{\mathbf{p}}^{\dagger}\,U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\Lambda\mathbf{p}}^{\dagger}. \tag{2.38}$$

由于这个归一化，我们必须在其他地方除以$2E_{\mathbf{p}}$。例如，单粒子态的完备性关系是：

$$(\mathbf{1})_{\text{1-particle}} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,|\mathbf{p}\rangle\,\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\langle\mathbf{p}|\,, \tag{2.39}$$

其中左边的算符仅仅是单粒子态的子空间中的恒等式，而在希尔伯特空间的其余部分是零，这个形式的积分经常会有，事实上，以下积分：

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2-m^2)\Big|_{p^0>0} \tag{2.40}$$

是洛伦兹不变的三动量积分，即如果$f(p)$是洛伦兹不变的，$\int d^3p\,f(p)/(2E_{\mathbf{p}})$也

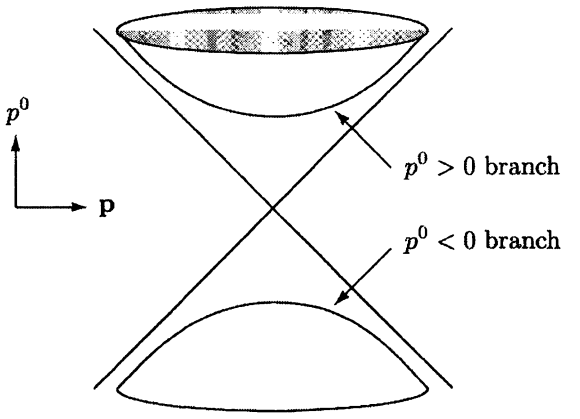


图 2.2 洛伦兹不变的三动量积分，积分域在双曲面$p^2 = m^2$上的上半分支

是洛伦兹不变的。整体可看成是在四动量空间双曲面$p^2 = m^2$上$p^0 > 0$的分支的求积。

最后让我们考虑态$\phi(\mathbf{x})|0\rangle$的诠释，从展开式(2.25)可看到

$$\phi(\mathbf{x})\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,|\mathbf{p}\rangle \tag{2.41}$$

是一些有明确动量的单粒子态的线性叠加。除了因子$1/2E_{\mathbf{p}}$，这个式子和非相对论的位置本征矢$|\mathbf{x}\rangle$的表达式是一样的。实际上对于很小(非相对论)的$\mathbf{p}$，额外的因子几乎是常数。因此我们提出了相同的诠释，并声称算符$\phi(\mathbf{x})$作用在真空上会在位置$\mathbf{x}$产生一个粒子。当我们做下面的计算时，这样的诠释被进一步确认了：

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\phi(\mathbf{x})\,|\mathbf{p}\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\left(a_{\mathbf{p}'}e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{p}'}e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right)\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\,a^\dagger_{\mathbf{p}}\,|0\rangle \\ &= e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

我们将这个解释为一个单粒子态$|\mathbf{p}\rangle$在位置空间表象的波函数。就像在非相对论量子力学中一样，$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$是态$|\mathbf{p}\rangle$的波函数。

2.4 时空中的 Klein-Gordon 场

在前面的章节我们在薛定谔绘景下量子化了 Klein-Gordon 场，用相对论粒子论解释了结果，在这一节我们将转到海森伯绘景，这样我们更容易讨论有时间依赖的物理量和因果性问题。经过一些准备后，我们将回到 2.1 节中提出的反因果传播的问题。我们还将导出 **Klein-Gordon 传播子**表达式，它是第四章发展出的费曼规则中非常重要的部分。

在海森伯绘景，用通常的方法让算符ϕ和π变成时间依赖的：

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}, \tag{2.43}$$

对$\pi(x) = \pi(\mathbf{x}, t)$是类似的。海森伯运动方程，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H], \tag{2.44}$$

它允许我们计算ϕ和π的时间依赖：

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t) &= \Big[\phi(\mathbf{x},t), \int d^3x' \Big\{\tfrac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}',t) + \tfrac{1}{2}\big(\nabla\phi(\mathbf{x}',t)\big)^2 + \tfrac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}',t)\Big\}\Big] \\
&= \int d^3x' \Big(i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\pi(\mathbf{x}',t)\Big) \\
&= i\pi(\mathbf{x},t); \\
i\frac{\partial}{\partial t}\pi(\mathbf{x},t) &= \Big[\pi(\mathbf{x},t), \int d^3x' \Big\{\tfrac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}',t) + \tfrac{1}{2}\phi(\mathbf{x}',t)\big(-\nabla^2+m^2\big)\phi(\mathbf{x}',t)\Big\}\Big] \\
&= \int d^3x' \Big(-i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(-\nabla^2+m^2\big)\phi(\mathbf{x}',t)\Big) \\
&= -i(-\nabla^2+m^2)\phi(\mathbf{x},t).
\end{aligned}$$

结合这两个结果得到：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (\nabla^2 - m^2)\phi, \tag{2.45}$$

这就是 Klein-Gordon 方程。

写出ϕ和π的产生与湮灭算符的表达式，可以更容易理解它们的时间依赖性，注意到：

$$Ha_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}(H - E_{\mathbf{p}}),$$

and hence

$$H^n a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}(H - E_{\mathbf{p}})^n,$$

对任意n都成立。对$a_{\mathbf{p}}^\dagger$有相似的表达式(用$-$代替$+$)，这样便能推得一些性质：

$$e^{iHt}a_{\mathbf{p}}e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \qquad e^{iHt}a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}}t}, \tag{2.46}$$

我们可以把上式用在(2.25)，根据(2.43)得到海森伯算符$\phi(x)$需要的表达式(我们将一直使用符号$a_{\mathbf{p}}$和$a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$代表不依赖时间的薛定谔绘景的阶梯算符)，结果是

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}};\\ \pi(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t).\end{aligned} \tag{2.47}$$

值得提到的是我们可以用同样的操作将$\mathbf{P}$代替H，来联系$\phi(\mathbf{x})$和$\phi(0)$。分析2.46 得到：

$$e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \qquad e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{2.48}$$

因此：

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})}\phi(0)e^{-i(Ht-\mathbf{P}\cdot\mathbf{x})}\\ &= e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{-iP\cdot x},\end{aligned} \tag{2.49}$$

这里的$P^{\mu}=(H,\mathbf{P})$(这里的符号令人迷惑但却是标准的表达，记住$\mathbf{P}$是动量算符，本征值是系统的总动量，另一方面$\mathbf{p}$是场的单个傅里叶模式的动量，我们解释为在那个模式下的一个粒子的动量。对有确定动量的单粒子态，$\mathbf{p}$是$\mathbf{P}$的本征值)。

量子场$\phi(x)$的方程(2.47)明显的有着粒子和波的双重解释，一方面$\phi(x)$被写为希尔伯特空间的算符，这些算符产生和湮灭粒子----场激发态的量子，另一方面$\phi(x)$被写成 Klein-Gordon 方程的解的线性组合($e^{ip\cdot x}$和$e^{-ip\cdot x}$)。时间依赖的正负符号都出现在指数上：我们发现e^{-ip^0t}和e^{+ip^0t}，虽然p^0总是正的。如果这些是单粒子波函数，它们就对应正能和负能的状态；让我们更一般地将它们称为正频和负频模式。粒子产生算符和这里显示的波形之间的联系对于自由量子场总是有效的：场方程的正频解的系数作为一个算符，湮灭单粒子波函数下的一个粒子。场方程的负频率解，是正频率解的厄米共轭，其系数作为算符，在该正能单粒子波函数中产生粒子。这样，相对论波动方程既有正频率解，也有负频率解，这与要求一致：一个有意义的量子理论只包含正激发能。

因果性

让我们回到本章开头提出的因果性问题，现在的理论仍是在海森伯绘景下，一个粒子从y传播到x的振幅是$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$，我们称这个量为$D(x-y)$，每个算符$\phi$是算符$a$和$a^\dagger$的和，但只有$\langle 0\left|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger\right|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$剩在表达式中，容易得到剩下的结果为：

$$D(x-y) = \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.50}$$

我们已经在(2.40)知道这样的积分形式是洛伦兹不变的，现在让我们针对$x-y$的一些特殊值来计算这个积分。

首先考虑的是$x-y$的变化仅在时间方向：$x^0-y^0=t, \mathbf{x}-\mathbf{y}=0$(如果$y$到$x$的间隔是类时的，那么总是存在一个参考系是这样的情况)于是我们得到

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}}e^{-i\sqrt{p^2+m^2}t} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_m^\infty dE\,\sqrt{E^2-m^2}\,e^{-iEt} \\ &\underset{t\to\infty}{\sim} e^{-imt}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

接下来考虑的情形是$x-y$仅仅是空间上的变化，$x^0-y^0=0, \mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{r}$，振幅便是：

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr} \\ &= \frac{-i}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty dp\,\frac{p\,e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}. \end{aligned}$$

被积函数看成是p的复函数，$\pm im$点出发沿着虚轴有分支割线(图 2.3)，为计算积分我们让围道向上围绕上部的分支割线，定义$\rho=-ip$,我们得到

$$\frac{1}{4\pi^2 r}\int_m^\infty d\rho\,\frac{\rho\,e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2-m^2}} \underset{r\to\infty}{\sim} e^{-mr}. \tag{2.52}$$

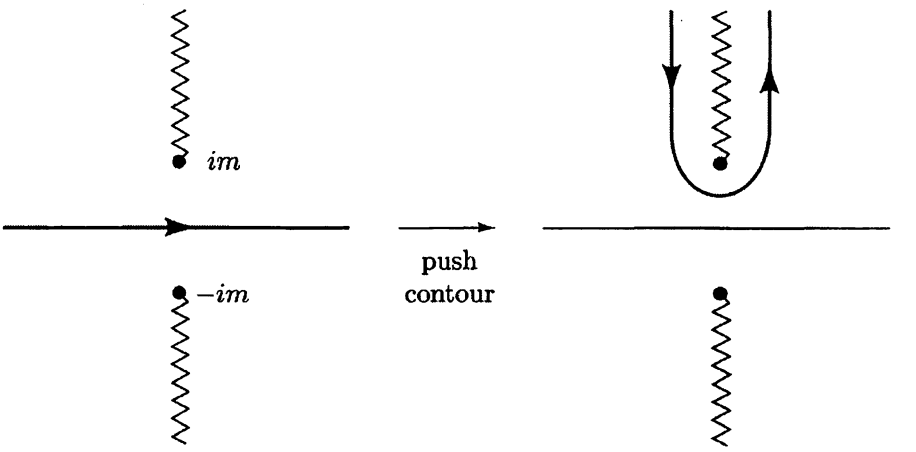


图 2.3 在类空间隔下计算传播振幅$D(x-y)$的围道

我们再次发现，在光锥之外，传播振幅呈指数消失，但非零。

为真正的讨论因果性，我们不应该问粒子是否可以在类空间隔传播，而应该问在一个点的测量是否会影响到另一个点(距第一个点是类空间隔的点)的测量。我们可以测量的最简单的是场ϕ，所以我们需要计算对易子$[\phi(x),\phi(y)]$，如果对易子为零，一个测量不能影响到另一个。事实上，如果对于$(x-y)^2<0$对易子为零，因果性得到普遍的保护，因为ϕ的任何函数的对易子，包括$\pi(x)=\partial\phi/\partial t$，都会为零。当然从方程(2.20)我们知道对于$x^0=y^0$对易子为零，现在让我们进行更一般的计算：

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi(y)] &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}} \\ &\qquad\times\left[\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{ip\cdot x}\right),\left(a_{\mathbf{q}}e^{-iq\cdot y}+a_{\mathbf{q}}^{\dagger}e^{iq\cdot y}\right)\right] \\ &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{ip\cdot(x-y)}\right) \\ &= D(x-y)-D(y-x). \end{aligned}\tag{2.53}$$

当$(x-y)^2<0$的时候，我们可以对第二项施加一次洛伦兹变换(因为每一项都分别是洛伦兹不变的)，令$(x-y)\to(y-x)$，如图 2.4，因此这两项相等，相消为零，因果性被保护。注意对于$(x-y)^2>0$不存在连续的洛伦兹变换使得$(x-y)\to(y-x)$，振幅(很幸运)不为零，对于$\mathbf{x}-\mathbf{y}=0$的特殊情况，它约等于$e^{-imt}-e^{imt}$。这样我们总结，Klein-Gordon 理论中，光锥外一个点的测量不能影响到另一个点的测量。

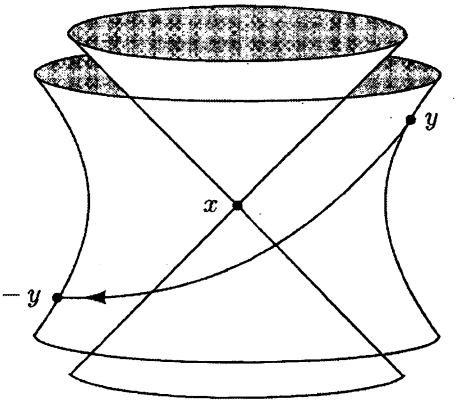


图 2.4 当$x-y$是类空的，有一个连续的洛伦兹变换使得$x-y$变换到$y-x$

Klein-Gordon 理论中因果关系被保护仅在第 2.1 节被提到了，但是为了正确理解这一机制，我们应该扩大我们讨论的背景，应包括一个复的 Klein-Gord-on 场，它具有明显的粒子和反粒子的激发态。正如方程 2.5 中提到的，通过考虑场$\phi(x)$是复的而不是实的，我们可以为 Klein-Gordon 理论增加一个守恒荷。当复标量场被量子化时(看问题 2.2)，$\phi(x)$产生正荷粒子和湮灭负荷粒子，而$\phi^\dagger(x)$将执行相反的操作。于是对易子$[\phi(x),\phi^\dagger(y)]$会有非零的贡献，为了保护因果性在光锥外应该精确为零。(2.53)的两项贡献有时空解释，但附加了荷。第一项表示一个负荷粒子从y到x的传播，第二项表示一个正荷粒子从x到y的传播。为了使这两个过程存在并振幅相消，这两个粒子必须存在，而且它们必须具有相同的质量。于是在量子场论因果性要求每一个粒子有对应的反粒子，有相同的质量但是相反的量子数(在这种情况下是电荷)。在实的 Klein-Gordon 场中，一个粒子是它自己的反粒子。

克莱因-高登传播子

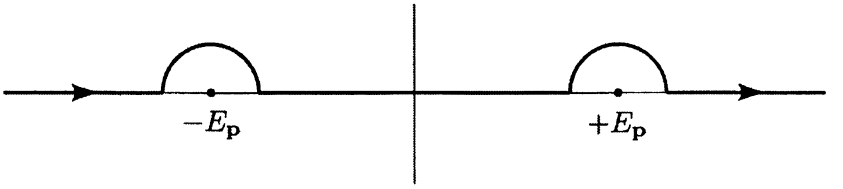
让我们进一步研究传播子$[\phi(x),\phi(y)]$，因为它是一个 c 数，于是我们可以将它写成$[\phi(x),\phi(y)]=\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle$，这个式子可以写成四维的积分，假定现在$x^0>y^0$，进行如下计算：

$$\langle 0|\left[\phi(x),\phi(y)\right]|0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{ip\cdot(x-y)}\right)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \right\}$$

$$\underset{x^0>y^0}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.54}$$

在最后一步的积分是按照下面的积分围道：



对于$x^0 > y^0$我们选择围道是下半平面的，包括了所有的奇点可以得到式 2.54 的上一行，对于$x^0 < y^0$我们需要包围上半平面得到结果为零。于是式 2.54 的最后一行，再加上围绕奇点的方式，得到一个表达式，我们叫做：

$$D_R(x-y) \equiv \theta(x^0-y^0) \langle 0| [\phi(x), \phi(y)] |0\rangle . \tag{2.55}$$

为了更好的理解这个量，让我们做另一个计算

$$\begin{aligned}
(\partial^2+m^2)D_R(x-y) &= \big(\partial^2\theta(x^0-y^0)\big) \langle 0| [\phi(x), \phi(y)] |0\rangle \\
&\quad + 2\big(\partial_\mu\theta(x^0-y^0)\big)\big(\partial^\mu \langle 0| [\phi(x), \phi(y)] |0\rangle\big) \\
&\quad + \theta(x^0-y^0) (\partial^2+m^2) \langle 0| [\phi(x), \phi(y)] |0\rangle \\
&= -\delta(x^0-y^0) \langle 0| [\pi(x), \phi(y)] |0\rangle \\
&\quad + 2\delta(x^0-y^0) \langle 0| [\pi(x), \phi(y)] |0\rangle + 0 \\
&= -i\delta^{(4)}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

说明$D_R(x-y)$是Klein-Gordon场的格林函数算符，因为在$x^0 < y^0$时为零，也称为延迟格林函数。如果我们没能推导出式2.54，我们可以通过傅里叶变换得到，写出

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \widetilde{D}_R(p), \tag{2.57}$$

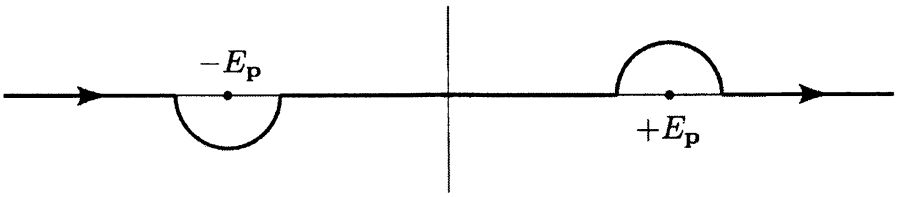
可以得到代数表达式

$$(-p^2+m^2)\widetilde{D}_R(p) = -i.$$

这样我们便立刻得到结果

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2} e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{2.58}$$

2.58 式的积分可以在四种不同的围道下积出来，2.54 式仅仅只是其中的一种，在第四章我们会看到一种不一样的奇点围绕方式是极其有用的：



它叫做**费曼方案**，记忆它的一种方便的方式是写出

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{2.59}$$

因为奇点是在$p^0 = \pm(E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)$，恰好分别在实轴的上面和下面。对于$x^0 > y^0$积分围道选择在下半平面，可精确得到传播振幅(2.50)，对$x^0 < y^0$围道选在上半平面，得到同样的表达式但是x和y交换了，于是我们有

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \begin{cases} D(x-y) & \text{for } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{for } x^0 < y^0 \end{cases} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0| \phi(y)\phi(x) |0\rangle \\ &\equiv \langle 0| T\phi(x)\phi(y) |0\rangle . \end{aligned} \tag{2.60}$$

最后一行定义了“编时算符”符号T，它指示我们将算符按最晚发生的顺序依次放置到左边。将$(\partial^2 + m^2)$作用到最后一行上，你会直接发现D_F是 Klein-Gordon 算符的一个格林函数。

从实际观点看，方程 2.59 和 2.60 是本章最重要的结果。其中，格林函数$D_F(x-y)$叫做一个 Klein-Gordon 粒子的**费曼传播子**，因为它毕竟是传播振幅。实际上费曼传播子会被证明是费曼规则的一部分：$D_F(x-y)$(或$\widetilde{D}_F(p)$)是费曼图内线的表达式，代表虚粒子的传播。

然而想要做任何实际的计算我们还有很长的路要走，因为至今我们只讲了**自由的** Klein-Gordon 场，场方程是线性的且没有相互作用。单个的粒子生活在各自孤立的模式中，对彼此的存在和其他任何模式的粒子的存在视而不见。在这样的理论中，没办法通过散射或者其他任何方法做任何观测。另一方面，我们已经发展出来的形式理论是极其重要的，因为自由场理论是在相互作用理论中进行微扰计算的基础。

由经典源产生粒子

然而有一种类型的相互作用我们已经有能力去处理。考虑一个 Klein-Gordon 场和外部的经典源场$j(x)$相耦合，也就是考虑场方程：

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x), \tag{2.61}$$

这里$j(x)$是一些稳定的已知的关于空间和时间的函数，只在有限时间间隔里不为零。如果我们从真空态出发，在$j(x)$被打开和关闭之后，我们会发现什么？

场方程可以从如下的拉氏量得到

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\phi(x). \tag{2.62}$$

但是如果$j(x)$只在有限的时间里打开，最简单的方法是直接使用场方程解决这个问题。在$j(x)$开启之前，$\phi(x)$有如下的形式

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\right).$$

如果没有源，这将是所有时刻的解。有了源，运动方程的解可以用延迟格林函数构建出来

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) + i\int d^4y\, D_R(x-y)j(y)\\ &= \phi_0(x) + i\int d^4y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\,\theta(x^0-y^0)\\ &\qquad\qquad \times\left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\right)j(y).\end{aligned} \tag{2.63}$$

如果一直等到$j(x)$过去，θ函数在整个积分域中等于 1。于是$\phi(x)$只包含j的傅里叶变换

$$\tilde{j}(p) = \int d^4y\, e^{ip\cdot y}j(y),$$

四动量p是$p^2 = m^2$。把正频率项与$a_{\mathbf{p}}$和负频率项与$a^\dagger_{\mathbf{p}}$结合起来是很自然的。这样得到

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left\{\left(a_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}(p)\right)e^{-ip\cdot x} + \text{h.c.}\right\}. \tag{2.64}$$

现在，你可以猜测或计算出$j(x)$作用后的哈密顿量的形式，只需要将$a_{\mathbf{p}}$替代为$(a_{\mathbf{p}} + i\tilde{j}(p)/2E_{\mathbf{p}})$：

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\mathbf{p}}\left(a^\dagger_{\mathbf{p}} - \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}^*(p)\right)\left(a_{\mathbf{p}} + \frac{i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\tilde{j}(p)\right).$$

在源关闭之后系统的能量为

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2} |\tilde{\jmath}(p)|^2, \tag{2.65}$$

这里$|0\rangle$仍然表示自由理论的基态。我们可以用粒子来解释这些结果，将$(|\tilde{\jmath}(p)|^2/2E_{\mathbf{p}})$看作在模式$p$下产生一个粒子的概率密度。于是产生的粒子的总数为

$$\int dN = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} |\tilde{\jmath}(p)|^2. \tag{2.66}$$

只有那些与“在质壳$(i.e., p^2 = m^2)$的 Klein-Gordon 波”共振的$j(x)$的傅里叶分量，才对产生粒子是有效的。

我们将在问题 4.1 回到这个项目。在第六章我们将研究加速电子(韧致辐射)产生光子的类似问题。

Chapter 3

狄拉克场

详尽处理了最简单的相对论场方程之后，我们现在进入了第二简单的狄拉克方程。你可能已经熟悉了狄拉克方程原有的化身——单粒子的量子力学波动方程*。在这一章，我们的观点将十分不同，首先我们把狄拉克方程作为一种经典的相对论场方程重新推导出来，特别强调其相对论不变性。然后在 3.5 节，我们将使用在 Klein-Gordon 场中用到的类似方式，对狄拉克场进行量子化。

3.1 波方程的洛伦兹不变性

首先我们必须解决第二章略过的一个问题，当我们说一个方程是“相对论不变的”是什么意思？一个合理的定义如下：如果ϕ是一个场或场的集合，$\mathcal{D}$是一些微分算符，则说法“$\mathcal{D}\phi = 0$是相对论不变的”表示的是如果$\phi(x)$满足这个方程，我们施加一个旋转或者平动去到不同的参考系，于是被变换的场在新参考系下也满足同样的方程。同样的我们可以想象将所有的粒子或场在物理上进行旋转或平动同样的角度或者速度，在变换下方程$\mathcal{D}\phi = 0$应再次是正确的。我们将在下面的分析中采取变换的“主动”观点。

场论中拉氏量的方法对于讨论洛伦兹不变性特别方便。如果一个运动方程的拉格朗日函数是洛伦兹标量，则它推导出来的运动方程自动是洛伦兹不变的。这是最小作用量原理的直接结论：如果平动使得拉氏量不变，作用量的极值在平动之下也是一个极值。

*例如, Schiff(1968), 第 13 章; Baym (1969), 第 23 章; Sakurai(1967), 第 3 章, 涵盖了这一主题。虽然本章是独立的, 但我们建议您在某一点上也研究单粒子狄拉克方程。

作为一个例子，考虑 Klein-Gordon 理论，我们写下任意的洛伦兹变换为：

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{3.1}$$

Λ是一些4×4矩阵。在这样的变换下 Klein-Gordon 场$\phi(x)$发生了什么？把场$\phi(x)$看作对某个物理量在空间分布的定域值的测量。如果这个物理量在$x = x_0$有累积，$\phi(x)$会在x_0有一个最大值，则如果再把这个初始分布进行平动变换，新分布会在$x = \Lambda x_0$有最大值，这展示在图 3.1(a)。于是，对应的场的转换是

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \tag{3.2}$$

于是，被变换的场在平动之后的点的值，与初始场在平动之前的点的值，是一样的。

我们应验证一下，在变换之下 Klein-Gordon 场拉氏量的形式没有改变。根据(3.2)式，质量项$\frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$简单的移到了点$(\Lambda^{-1}x_0)$。而$\partial_\mu\phi(x)$的变换为

$$\partial_\mu\phi(x) \to \partial_\mu\big(\phi(\Lambda^{-1}x)\big) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu(\partial_\nu\phi)(\Lambda^{-1}x). \tag{3.3}$$

因为张量矩阵$g^{\mu\nu}$是洛伦兹不变的，矩阵Λ^{-1}服从性质：

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\,(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\,g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}. \tag{3.4}$$

使用这个性质我们可以计算 Klein-Gordon 场拉氏量的动能项的转换定律：

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\phi(x))^2 &\to g^{\mu\nu}\big(\partial_\mu\phi'(x)\big)\big(\partial_\nu\phi'(x)\big)\\ &= g^{\mu\nu}\big[(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\phi\big]\big[(\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu\partial_\sigma\phi\big](\Lambda^{-1}x)\\ &= g^{\rho\sigma}\big(\partial_\rho\phi\big)\big(\partial_\sigma\phi\big)(\Lambda^{-1}x)\\ &= (\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x).\end{aligned}$$

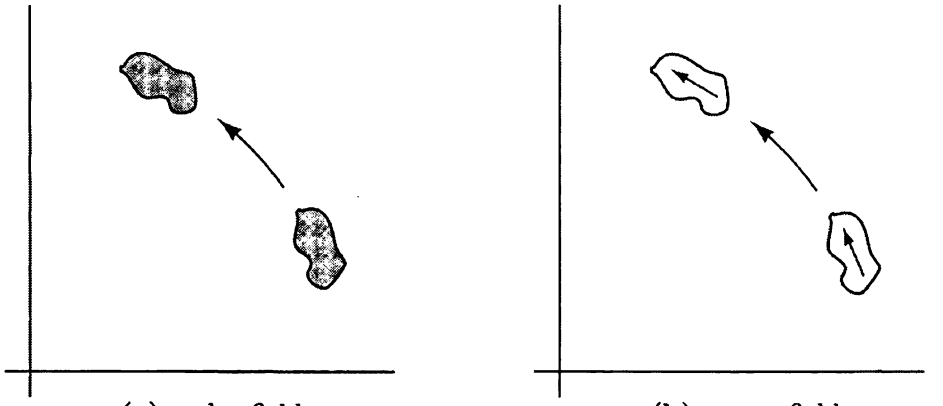
于是，整个拉氏量就像标量一样被简单的变换：

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x). \tag{3.5}$$

由$\mathcal{L}$对时空积分形成的作用量S也是洛伦兹不变量，相似的计算说明运动方程是不变的：

$$\begin{aligned}(\partial^2 + m^2)\phi'(x) &= \left[(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu(\Lambda^{-1})^{\sigma\mu}\partial_\sigma + m^2\right]\phi(\Lambda^{-1}x)\\ &= (g^{\nu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(3.2)对$\phi(x)$的变换定律是对场最简单的变换定律，它是只有一个分量的场的唯一可能变换。但我们知道多分量的场是按照更复杂的方式变换的，最熟悉的例



(a) scalar field　　(b) vector field

图 3.1 当旋转作用在矢量场，它会影响矢量的方向以及包含该位形的区域的位置。

子是矢量场，比如四流密度$j^\mu(x)$以及矢势$A^\mu(x)$。在这种情况下，这些分布在时空中的物理量也携带着方向，必须被旋转或平动，如图 3.1(b)所示。随着场的计算点的改变，方向必须正向旋转：

$$\begin{aligned} &\text{under 3-dimensional rotations,} && V^i(x) \to R^{ij}V^j(R^{-1}x);\\ &\text{under Lorentz transformations,} && V^\mu(x) \to \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x). \end{aligned}$$

通过加上更多指标，任意阶的张量可以看做是多个矢量组成的，也在变换定律中对应着更多的Λ因子。用这些矢量和张量场可写出不同的洛伦兹不变的方程。比如 Maxwell 方程

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{or} \qquad \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0, \tag{3.6}$$

它们可以由下面的拉氏量推得：

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 = -\tfrac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2. \tag{3.7}$$

普遍的，任何方程，如果每项都具有相同的未收缩的洛伦兹指标，将自然地在洛伦兹变换下是不变的。

这种张量表示法产生一大类的洛伦兹不变的方程，但事实证明还有更多。我们如何找到他们？我们可以尝试系统地找出场的所有可能的变换规律，于是就不难写出不变拉氏量。简单点说，我们要将我们的注意力限制为线性变换，于是，如果Φ_n是一个n分量的多重态，洛伦兹变换律应该由一个$n \times n$矩阵$M(\Lambda)$给出

$$\Phi_a(x) \to M_{ab}(\Lambda)\Phi_b(\Lambda^{-1}x). \tag{3.8}$$

它表示最一般的非线性变换律可以由这些线性变换构造出来，因此考虑比 3.8 式更一般的变换是没有好处的。在下面的讨论中我们将限制场的参数的变化，把变换 3.8 写成形式

$$\Phi \to M(\Lambda)\Phi. \tag{3.9}$$

那么$M(\Lambda)$允许的形式是怎么样的呢？通过想象两个连续变换Λ和Λ'，可以发现对$M(\Lambda)$的基本限制。得到的结果必须是一个新的洛伦兹变换Λ''；也就是说洛伦兹变换形成一个群。这给出了矩阵$M(\Lambda)$必须满足的一致性条件：按照两个变换$\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$的顺序有：

$$\Phi \to M(\Lambda')M(\Lambda)\Phi = M(\Lambda'')\Phi, \tag{3.10}$$

因此，矩阵M与变换Λ之间的对应关系必须在乘法中保持。用数学语言，我们说矩阵M形成了洛伦兹群的n维表示。所以现在我们的问题换成了数学语言：洛伦兹群的(有限维)矩阵表示是什么？

在对洛伦兹群回答这个问题之前，我们考虑一个更简单的群，三维旋转群。这个群在每个维数n下都有表示，在量子力学中熟悉的是，它们作为矩阵将不同自旋粒子的n分量波函数进行旋转，维数n通过$n = 2s + 1$与自旋量子数s联系起来。最重要的非平凡表示是二维表示，对应是自旋$1/2$，这个的表示矩阵是2×2的行列式为 1 的幺正矩阵，可以表达为：

$$U = e^{-i\theta^i\sigma^i/2}, \tag{3.11}$$

这里θ^i是三个任意参数而σ^i是泡利 sigma 矩阵。

对于任何连续群，与恒等式无穷接近的变换定义了一个矢量空间，称为群的**李代数**。这个矢量空间的基矢称为李代数的或群的**生成元**。对于旋转群，生成元是角动量算符J^i，满足对易关系：

$$\left[J^i, J^j\right] = i\epsilon^{ijk}J^k. \tag{3.12}$$

有限旋转算符通过这些算符的指数化得到。在量子力学中，算符

$$R = \exp\left[-i\theta^i J^i\right] \tag{3.13}$$

给出了沿着轴$\hat{\theta}$转角为$|\theta|$的转动。算符J^i的对易关系决定了这些旋转算符的乘

法法则。这样一来，一组满足对易关系(3.12)的矩阵通过像(3.13)那样指数化，可以产生旋转群的一个表示。在前几段给出的例子里，角动量算符的表示

$$J^i \to \frac{\sigma^i}{2} \tag{3.14}$$

产生了由式 3.11 给出的旋转群的表示。更普遍的，可以通过寻找连续群的生成元的矩阵表示，来得到连续群的矩阵表示(生成元必须满足恰当的对易关系)，接着，将这些无穷小的变换指数化。

我们当前的问题是需要知道洛伦兹群的生成元的对易关系。对于旋转群，可以把生成元写成微分算符来得到对易关系，根据表达式

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times (-i\nabla), \tag{3.15}$$

角动量对易关系 3.12 可以直接得到。3.15中叉乘的使用是很特殊的，只适用于三维情况下。然而我们还可以把算符写成反对称张量：

$$J^{ij} = -i(x^i\nabla^j - x^j\nabla^i),$$

于是$J^3 = J^{12}$等等。现在推广到四维洛伦兹变换是很自然地：

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu). \tag{3.16}$$

我们很快就会看到，这六个算符生成了洛伦兹群的三个平动和三个旋转。

为了确定洛伦兹代数的对易规则，我们现在可以简单计算微分算符(3.16)的对易子，结果为

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\big(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}\big). \tag{3.17}$$

这个代数的任何表示矩阵必须遵守这些同样的对易规则。

为了看到这个式子的正确性，来看一个特殊的表示(简单变出一点东西)，考虑4 × 4矩阵

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\alpha). \tag{3.18}$$

(这里μ和ν标记了我们想要的矩阵，α和β标记了矩阵的分量)你可以简单的发现，这些矩阵满足对易关系3.17。其实它们不是别的，正是作用在普通洛伦兹

四矢量上的矩阵，为看到这一点，将无穷小变换参数化为：

$$V^{\alpha} \to \left(\delta^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}\right)V^{\beta}, \tag{3.19}$$

这里V是4矢量，而$\omega_{\mu\nu}$(反对称张量)给出无穷小角。比如，考虑情况为$\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$，同时$\omega$所有其他的分量为零，这样3.19式变成

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.20}$$

这个正是xy平面的无穷小转角，你也可以证实到令$\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta$会给出

$$V \to \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V, \tag{3.21}$$

这是一个x方向的无穷小平动。用同样的方法，ω的其他分量生成了其余的平动和旋转。

3.2 狄拉克方程

现在我们已经看到了洛伦兹群的一个有限维表示，按逻辑下一步将发展形式理论来寻找所有其他表示。虽然这不是很难做到(见问题 3.1)，但对于我们的目的来说，这几乎是不必要的。因为我们主要对自旋1/2对应的表示感兴趣。

使用Dirac的技巧我们可找到这样的表示：假设有一组$n \times n$矩阵γ^{μ}满足反对易关系：

$$\left\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right\} \equiv \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n\times n} \qquad \text{(Dirac algebra)}. \tag{3.22}$$

然后我们可以立即写出洛伦兹代数的n维表示，即是：

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]. \tag{3.23}$$

通过重复使用 3.22 式，很容易验证这些矩阵满足对易关系 3.17 式。

这个计算可以在任何维度上进行，可用洛伦兹度规或欧几里得度规，特别

是，它应该可以在三维欧几里得空间中工作，事实上我们可以简单地写：

$$\gamma^j \equiv i\sigma^j \qquad \text{(Pauli sigma matrices)},$$
$$\text{so that} \qquad \{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij}.$$

第一行中的i因子和第二行中的负号仅是惯例，然后洛伦兹代数的表示矩阵是：

$$S^{ij} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k, \tag{3.24}$$

我们认识到这是旋转群的二维表示。

现在让我们找到四维闵可夫斯基空间的狄拉克矩阵γ^μ，结果证明，这些矩阵必须至少为4×4(例如，没有第四个2×2矩阵与三个泡利矩阵反对易)。狄拉克代数的所有4×4表示都是等价的*。因此我们只需要写出狄拉克代数的一个显式实现。在2×2块形式中，一个表示是

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

这种表示被称为 Weyl 或手征表示，我们将发现它是一种特别方便的选择。我们将在本书中专门使用它。(然而要小心，因为许多场论教科书选择了不同的表示，其中γ^0是对角的。此外，使用手征表示的书往往会对符号约定有不同的选择) 。

在我们的表示中，平动和旋转生成元为：

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

与

$$S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k. \tag{3.27}$$

按照 3.26 式和 3.27 式在平动和旋转下变换的四分量场ψ称为**狄拉克旋量**。注意，旋转生成元 3.27 式中的S^{ij}只是将三维旋量变换矩阵 3.24 式复制了两次的，平动生成元S^{0i}不是厄米的，因此平动变换不是幺正的(这对矢量表示 3.18 式也是正确的)。事实上洛伦兹群是“非紧致”群，没有忠实的、有限维的幺正表示。但这对我们并不重要，因为ψ不是波函数，它是一个经典的场。

---

†这个和前面的一个陈述，是从在问题 3.1 中导出的洛伦兹群表示的一般理论得到的。

现在我们有了ψ的变换规则，接着应该去找一个适当的场方程。一种可能性简单地是 Klein-Gordon 方程：

$$(\partial^2 + m^2)\psi = 0. \tag{3.28}$$

这个方程能成立，因为旋量变换矩阵 3.26 和 3.27 只作用在“内部的”空间，它们直接穿过微分算符。但是有可能写出一个更强的，一阶的方程，它隐含着 3.28 式，却同时包含着更多的信息。为了得到它，我们需要知道γ矩阵更多的性质。经过一些简短的计算你可以证实：

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

或者等价于

$$\big(1 + \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\big)\gamma^\mu\big(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\big) = \big(1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\big)^\mu{}_\nu\gamma^\nu.$$

这个式子仅仅是下述式子的无穷小形式：

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{3.29}$$

这里

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\big(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\big) \tag{3.30}$$

是洛伦兹变换Λ的旋量表示(对比 3.19)。式 3.29 说明γ矩阵在同时旋转它们的矢量和旋量指标时是不变的(就像空间旋转下的σ^i)。换句话说，“必须认真对待γ^μ中的矢量指标μ”，让γ^μ与∂_μ点积来构造洛伦兹不变的微分算符。

我们现在已经准备好写下狄拉克方程，即是：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{3.31}$$

为了显示它的洛伦兹不变性，写出左手边的洛伦兹变换形式并计算：

$$\begin{aligned}
\big[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big]\psi(x) &\to \big[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\big]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\big[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\big]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\big[i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\big]\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\big[i\Lambda^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m\big]\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\big[i\gamma^\nu\partial_\nu - m\big]\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

为了看到狄拉克方程暗示了Klein-Gordon方程，用$(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$作用在左边：

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi \\ &= (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi \\ &= (\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi \\ &= (\partial^2 + m^2)\psi. \end{aligned}$$

为写出狄拉克理论的拉格朗日量，我们必须知道如何将两个狄拉克旋量相乘来形成洛伦兹标量。显然$\psi^\dagger\psi$不起作用，在洛伦兹平动下变成$\psi^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi$。如果平动矩阵是幺正的，将有$\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$，一切都很好。但是$\Lambda_{\frac{1}{2}}$不是幺正的，因为生成元(3.26)不是厄米的。

解决方法是定义

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0. \tag{3.32}$$

在用$\omega_{\mu\nu}$参数化的无穷小洛伦兹变换下，我们有$\bar{\psi} \to \psi^\dagger(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger)\gamma^0$。对$\mu$和$\nu$的和有六个不同的非零项。对于旋转项，$\mu$和$\nu$都非零，$(S^{\mu\nu})^\dagger = S^{\mu\nu}$，且$S^{\mu\nu}$和$\gamma^0$对易。对于平动项，$\mu$或$\nu$是零，$(S^{\mu\nu})^\dagger = -S^{\mu\nu}$，但$S^{\mu\nu}$和$\gamma^0$反对易。将$\gamma^0$左移，因此去掉了$S^{\mu\nu}$的$\dagger$，由此得到变换定律：

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}, \tag{3.33}$$

因此$\bar{\psi}\psi$是洛伦兹标量。类似的你可以推导$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$是洛伦兹矢量(借助 3.29 式)。

因此正确的，洛伦兹不变的狄拉克拉格朗日量是：

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \tag{3.34}$$

关于$\bar{\psi}$(或$\psi^\dagger$)的欧拉-拉格朗日方程立即得到(3.31)形式的狄拉克方程，而关于ψ的欧拉-拉格朗日方程给出了在厄密共轭形式下的相同的方程：

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \tag{3.35}$$

Weyl 旋量

从生成元(3.26)和(3.27)的块对角线形式来看，洛伦兹群的狄拉克表示显然是可约的*。我们可以构成两个 2 维表示，通过分别考虑每个块并写成：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

*如果我们使用不同的γ矩阵表示，那么可约性就会不明显，这本质上是使用手性表示的原因。

这两个分量ψ_L和ψ_R被称为左手和右手的 **Weyl 旋量**。你可以很容易地验证它们的变换法则，在无穷小的旋转$\boldsymbol{\theta}$和平动$\boldsymbol{\beta}$下是：

$$\begin{aligned}\psi_L &\to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\tfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\tfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L;\\ \psi_R &\to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\tfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\tfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R.\end{aligned} \tag{3.37}$$

这些变换律是通过复共轭联系的；利用恒等式：

$$\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^2, \tag{3.38}$$

不难证明物理量$\sigma^2\psi_L^*$像右手旋量一样变换。

使用ψ_L和ψ_R，狄拉克方程写成：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}) & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} = 0. \tag{3.39}$$

洛伦兹群的两个表示ψ_L和ψ_R通过狄拉克方程中的质量项混合。但是若设$m=0$，则ψ_L和ψ_R的方程解耦合：

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi_L &= 0;\\ i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi_R &= 0.\end{aligned} \tag{3.40}$$

这些被称为 **Weyl 方程**；它们在处理中微子和弱相互作用理论时特别重要。

可以稍稍整理这个符号，定义：

$$\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \qquad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.41}$$

于是

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

($\bar{\sigma}$上的 bar 与$\bar{\psi}$上的 bar 绝对没有任何关系)于是狄拉克方程可以写为：

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma\cdot\partial \\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_R\end{pmatrix} = 0, \tag{3.43}$$

Weyl 方程写为：

$$i\bar{\sigma}\cdot\partial\psi_L = 0; \qquad i\sigma\cdot\partial\psi_R = 0. \tag{3.44}$$

3.3 狄拉克方程的自由粒子解

为得到对狄拉克方程的一些物理感觉，让我们现在来讨论它的平面波解。由于狄拉克场ψ服从 Klein-Gordon 方程，我们立即知道它可以作为平面波的线性组合：

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}, \qquad \text{where } p^2 = m^2. \tag{3.45}$$

目前我们将集中于正频的解，也就是说，$p^0 > 0$。列向量$u(p)$必须服从一个附加的约束，通过将(3.45)插入到狄拉克方程中：

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \tag{3.46}$$

在静止系中分析这个方程是最容易的，即$p = p_0 = (m, 0)$；对于一般p的解可以通过$\Lambda_{\frac{1}{2}}$平动得到。在静止坐标系中，等式(3.46)变为：

$$(m\gamma^0 - m)u(p_0) = m\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0,$$

以及对于任何数值的二分量旋量ξ的解是：

$$u(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

我们将ξ通常归一化为$\xi^\dagger\xi = 1$。加入的因子$\sqrt{m}$是为了将来的方便。我们可以通过观察旋转生成元(3.27)来解释旋量ξ：ξ在旋转下像旋转群中的普通二分量旋量一样变换，从而用通常的方法确定狄拉克解的自旋方向。例如，$\xi = \binom{1}{0}$，表示粒子沿第三方向自旋向上。

请注意，在应用狄拉克方程后，我们可以自由选择$u(p)$的四个分量中的两个。这正是我们想要的，因为自旋1/2的粒子只有两个物理状态——自旋向上和自旋向下(当然，我们谈到**粒子**和**自旋**有点过早。我们将证明，当我们对第 3.5 节中的狄拉克理论量子化时，狄拉克粒子的自旋角动量为$\hbar/2$。现在只需注意，任何动量p有两种可能的解$u(p)$)。

现在我们有$u(p)$在静止系中的一般形式，我们可以通过平动变换得到任何其他系中的$u(p)$。考虑沿着第三方向的平动。首先，我们应该提醒自己，平动对四动量矢量的作用是什么。在无穷小的形式下，

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[1 + \eta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中η是一些无穷小的参数。对于有限η，我们必须写为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}E\\p^3\end{pmatrix} &= \exp\left[\eta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}\\ &= \left[\cosh\eta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\sinh\eta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}m\cosh\eta\\m\sinh\eta\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

参数η称为**快度**，它是连续平动时的相加量。

现在对$u(p)$应用相同的平动操作。根据(3.26)和(3.30)：

$$\begin{aligned}u(p) &= \exp\left[-\tfrac{1}{2}\eta\begin{pmatrix}\sigma^3&0\\0&-\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\\xi\end{pmatrix}\\ &= \left[\cosh(\tfrac{1}{2}\eta)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\sinh(\tfrac{1}{2}\eta)\begin{pmatrix}\sigma^3&0\\0&-\sigma^3\end{pmatrix}\right]\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\\xi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)+e^{-\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right) & 0\\ 0 & e^{\eta/2}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)+e^{-\eta/2}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\end{pmatrix}\sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\\xi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\left[\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)+\sqrt{E-p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)\right]\xi\\ \left[\sqrt{E+p^3}\left(\frac{1+\sigma^3}{2}\right)+\sqrt{E-p^3}\left(\frac{1-\sigma^3}{2}\right)\right]\xi\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

最后一行可以简化为

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

这里取矩阵的平方根应理解为，我们取每个特征值的正根。$u(p)$的这个表达式不仅更紧凑，而且对于任意方向的$\mathbf{p}$也是有效的。当使用这个形式的表达式时，知道以下性质是很有用的：

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2. \tag{3.51}$$

然后你可以直接验证(3.50)是狄拉克方程的解——以(3.43)的形式。

在实践中，使用特定的旋量ξ往往是很方便的。这里的一个有用的选择是σ^3的本征态。例如，如果$\xi = \binom{1}{0}$(沿着第 3 轴自旋向上)，我们得到

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{E-p^3}\binom{1}{0}\\ \sqrt{E+p^3}\binom{1}{0}\end{pmatrix} \underset{\text{large boost}}{\longrightarrow} \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\ \binom{1}{0}\end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

对于$\xi = \binom{0}{1}$(沿着第 3 轴自旋向下)，我们有

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3}\binom{0}{1} \\ \sqrt{E-p^3}\binom{0}{1} \end{pmatrix} \underset{\text{large boost}}{\longrightarrow} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \binom{0}{1} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

在极限$\eta \to \infty$下，态退化为无质量粒子的二分量旋量(现在我们看到了(3.47)中$\sqrt{m}$因子的原因：它使旋量表达式在无质量极限下保持有限)。

(3.52)和(3.53)的解是螺旋度算符的本征态

$$h \equiv \hat{p} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}\hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

$h = +1/2$的粒子称为右手，而$h = -1/2$的粒子称为左手。有质量粒子的螺旋度取决于参照系，因为我们总是可以平动到一个动量方向相反的参考系(但其自旋不变)。但是对于一个以光速行进的无质量粒子来说，不能进行这样的平动变换。

对于作为螺旋度本征态的无质量粒子，$u(p)$的极其简单的形式使得这种粒子的行为易于理解。在第 1 章中，它使我们能够在无质量极限下猜测$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$截面的形式。在以后的章节中，我们经常会先做无意识的计算，然后在高能极限下看看螺旋度本征态，来理解我们所做的工作。

顺便说一下，我们现在已经准备好了解 Weyl 旋量的记号ψ_L和ψ_R的起源。Weyl 方程的解是有明确螺旋度的态，分别对应于左手粒子和右手粒子。螺旋度(对于无质量的粒子)的洛伦兹不变性在 Weyl 旋量的记号中得到体现，因为ψ_L和ψ_R存在于洛伦兹群的不同表示中。

用洛伦兹不变量的方法写出$u(p)$的归一化条件是很方便的。我们看到上面的$\psi^\dagger\psi$不是洛伦兹不变量。同样地：

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= \left(\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma},\, \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\right)\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix} \\ &= 2E_{\mathbf{p}}\xi^\dagger\xi. \end{aligned} \tag{3.55}$$

为形成一个洛伦兹标量，我们定义：

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0. \tag{3.56}$$

然后通过几乎相同的计算，

$$\bar{u}u = 2m\xi^\dagger\xi. \tag{3.57}$$

一旦我们还要求两分量旋量ξ照常归一化：$\xi^\dagger\xi = 1$，那么这将是我们的归一化条

件，照惯例也要选择基旋量ξ^1和ξ^2(比如$\binom{1}{0}$和$\binom{0}{1}$)是正交的。对无质量粒子，方程(3.57)是平凡的，因此我们必须以(3.55)的形式写出归一化条件。

让我们总结一下我们的讨论。狄拉克方程的通解可以作为平面波的线性组合。正频波的形式为：

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}, \qquad p^2 = m^2, \qquad p^0 > 0. \tag{3.58}$$

$u(p)$有两个线性无关解，

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2 \tag{3.59}$$

我们根据以下归一化：

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs} \qquad \text{or} \qquad u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}. \tag{3.60}$$

以同样的方式，我们可以找到负频率的解：

$$\psi(x) = v(p)e^{+ip\cdot x}, \qquad p^2 = m^2, \qquad p^0 > 0. \tag{3.61}$$

(注意我们选择将+符号放入指数形式，而不是$p^0 < 0$)$v(p)$有两个线性独立的解，

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\eta^s \end{pmatrix}, \qquad s = 1,2 \tag{3.62}$$

其中η^s是双分量旋量的另一些基矢。这些解根据以下方式归一化：

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs} \qquad \text{or} \qquad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = +2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}. \tag{3.63}$$

而这些u和v彼此也正交：

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0. \tag{3.64}$$

注意，$u^{r\dagger}(p)v^s(p) \neq 0$以及$v^{r\dagger}(p)u^s(p) \neq 0$，然而，还要注意到：

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0, \tag{3.65}$$

其中我们改变了每个旋量乘积中的一个因子的三动量的符号。

旋量和

在费曼图的计算中，我们经常希望对费米子的极化态进行求和。我们可以用一个简单的计算导出相关的完备性关系：

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix} (\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}},\, \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma}) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma} \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix}.$$

我们在第二行使用：

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这样我们就得到了所需的公式，

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma\cdot p + m. \tag{3.66}$$

类似的：

$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m. \tag{3.67}$$

组合$\gamma\cdot p$经常存在，于是费曼引入符号$\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$。从现在开始，我们将经常使用这种符号。

3.4 狄拉克矩阵与狄拉克场双线性量

我们在第 3.2 节中看到物理量$\bar{\psi}\psi$是洛伦兹标量。很容易显示$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$是四矢量——我们用这个事实写下狄拉克拉格朗日量(3.34)。现在让我们来问一个更一般的问题：考虑表达式$\bar{\psi}\Gamma\psi$，其中Γ是任意4×4常矩阵。我们能不能把这个表达式分解成一些项，它们在洛伦兹群下具有确定的变换性质呢？答案是肯定的，我们可以定义出γ矩阵的反对称组合，使用下列 16 个4×4基矩阵将Γ表示出来：

$\mathbf{1}$	1 of these
γ^μ	4 of these
$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} \equiv -i\sigma^{\mu\nu}$	6 of these
$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$	4 of these
$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^{\sigma]}$	1 of these
	16 total

这些矩阵的洛伦兹变换性质很容易确定。例如，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi &\to \left(\bar{\psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\right)\left(\tfrac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\left(\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}} - \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\nu\Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\right)\psi\\ &= \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi.\end{aligned}$$

每一组矩阵都像(阶数不断增加的)反对称张量一样变换。

最后两组矩阵可以通过引入附加的伽玛矩阵来简化，

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma. \tag{3.68}$$

于是$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5$以及$\gamma^{\mu\nu\rho} = +i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5$，矩阵$\gamma^5$具有以下属性，所有这些属性可以使用(3.68)和反对易关系(3.22)来验证：

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \tag{3.69}$$

$$(\gamma^5)^2 = 1; \tag{3.70}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{3.71}$$

最后一个属性表示$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$。因此，狄拉克表示必须是可约的，因为$\gamma^5$的对应特征值不同的本征矢在变换时不混合(这个可约性准则被称为舒尔引理)。在我们的基上，

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

是块对角形式的。因此，只有左(右)手分量的狄拉克旋量是具有特征值$-1(+1)$的γ^5的特征态，并且这些旋量确实是在不混合的情况下进行变换，正如我们在 3.2 节中明确看到的。

现在让我们重写我们的4×4矩阵的表，并介绍一些标准术语：

1	scalar	1
γ^μ	vector	4
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	tensor	6
$\gamma^\mu\gamma^5$	pseudo-vector	4
γ^5	pseudo-scalar	1
		16

术语**赝矢量**和**赝标量**来源于以下事实：在连续洛伦兹变换下，这些量分别像矢量和标量进行变换，但在宇称变换下，它们具有附加的符号变化(我们将在第 3.6 节中讨论)。

根据矢量和赝矢量矩阵，我们可以从狄拉克场双线性量中形成两个流：

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x); \qquad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x). \tag{3.73}$$

让我们计算这些流的散度，假设ψ满足狄拉克方程：

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= (im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.74}$$

因此，如果$\psi(x)$满足狄拉克方程，则j^μ总是守恒的。当我们将狄拉克场耦合到电磁场时，j^μ将成为电流密度。同样，人们可以计算：

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{3.75}$$

如果$m = 0$，这个流(通常称为**轴矢量流**)也守恒。然后形成线性组合是有用的：

$$j_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\Big(\frac{1-\gamma^5}{2}\Big)\psi, \qquad j_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\psi. \tag{3.76}$$

当$m = 0$时，它们分别是左手和右手粒子的电流密度，并且分别守恒。

这两个流$j^\mu(x)$和$j^{\mu 5}(x)$是对应于下面两个变换的诺特流：

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \qquad \text{and} \qquad \psi(x) \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x).$$

第一个是狄拉克拉格朗日量(3.34)的对称性。第二个，称为**手征变换**，是$\mathcal{L}$中导数项的对称性，但不是质量项的；因此，诺特定理证实了轴矢量流只有在$m = 0$时才是守恒的。

狄拉克双线性量的乘积服从互换关系，称为 **Fierz 恒等式**。我们将只讨论其中最简单的一个，这将在本书后面多次需要。使用等式(3.36)中引入的二分量 Weyl 旋量，最容易写出这个最简单的等式。

这个关系的核心是方程(3.41)定义的2×2矩阵σ^μ的性质：

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}. \tag{3.77}$$

(这里α, β等是旋量指标，ϵ是反对称符号)你可以这样理解这个关系，注意指标α, γ在ψ_L的洛伦兹表示中变换，而β, δ在ψ_R的独立表示中变换，并且整个量必须是洛伦兹不变的。另一种做法是，你可以仅仅去显式地验证(3.77)的 16 个分量。

通过将恒等式(3.77)夹在 Dirac 旋量u_1, u_2, u_3, u_4的右手部分(即下半部分)之间，我们得到了恒等式：

$$\begin{aligned}(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) &= 2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1R\alpha}\bar{u}_{3R\gamma}\epsilon_{\beta\delta}u_{2R\beta}u_{4R\delta} \\ &= -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}).\end{aligned} \tag{3.78}$$

这个非平凡的关系表明，(3.78)中双线性量的乘积在标签 2 和 4 的交换下，以及

在 1 和 3 的交换下都是反对称的。性质(3.77)也适用于$\bar{\sigma}^\mu$，因此我们也发现：

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}) = -(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{4L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{2L}). \tag{3.79}$$

将 Fierz 恒等式(3.78)与联系σ^μ和$\bar{\sigma}^\mu$的恒等式结合起来有时是有用的：

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\gamma} = (\bar{\sigma}^{\mu T})_{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}. \tag{3.80}$$

这种关系也很容易去明确地验证。利用(3.80)、(3.79)和关系

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma_\mu = 4, \tag{3.81}$$

我们可以简化双线性量的恐怖乘积，例如：

$$\begin{aligned}(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) &= 2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta \\ &= 2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta \\ &= 2\cdot(4)^2\cdot\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\beta\delta}u_{2L\beta}u_{4L\delta} \\ &= 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}).\end{aligned} \tag{3.82}$$

对于4分量的狄拉克旋量和4×4狄拉克矩阵也存在Fierz重排列等式。然而，为了得到这些，采用更系统的方法是有用的。问题3.6给出了一个通用的方法，并给出了它的应用实例。

3.5 狄拉克场量子化

我们现在准备构造自由狄拉克场的量子理论。从拉格朗日量

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \tag{3.83}$$

我们看到ψ的正则共轭动量是$i\psi^\dagger$，因此哈密顿是

$$H = \int d^3x\,\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi = \int d^3x\,\psi^\dagger\left[-i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0\right]\psi. \tag{3.84}$$

如果我们定义$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \beta = \gamma^0$，可把括号中的量看成是单粒子量子力学的狄拉克哈密顿量：

$$h_D = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\beta. \tag{3.85}$$

如何量子化狄拉克场：自旋与统计的教训

为了类似于 Klein-Gordon 场来量子化狄拉克场，我们将强制正则对易关系：

$$\left[\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab}, \qquad \text{(equal times)} \tag{3.86}$$

其中a和b表示ψ的旋量分量。这看起来很奇怪：如果$\psi(x)$是实值，那么在$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$下左手边将是反对称的，而右手边是对称的。但是$\psi$是复的，所以我们还没有矛盾。事实上，我们很快就会发现，当我们在狄拉克场上强加对易关系时，会出现更严重的问题。但是，为了更好地理解自旋和统计之间的关系，看看我们能走到多远是有启发性的。因此，让我们继续前进，只需记住，接下来的几页将最终变成一条死胡同。

我们的第一个任务是找到能对角化H的产生算符和湮没算符对易关系的表示。从哈密顿量(3.84)的形式来看，在h_D的本征函数的基矢上展开$\psi(x)$显然会有帮助。我们已经从第 3.3 节的计算中知道这些本征函数，在那里我们发现

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\right]u^s(p)e^{-ip\cdot x} = 0,$$

因此$u^s(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$是本征值为$E_{\mathbf{p}}$的$h_D$本征函数。类似地，函数$v^s(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$(或等价地，$v^s(-\mathbf{p})e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$)是本征值为$-E_{\mathbf{p}}$的$h_D$本征函数。这些构成了一组完备本征函数，因为对于任何$\mathbf{p}$，都有两个u和两个v，这给出 4×4 矩阵h_D的四个本征矢量。

在此基上展开ψ，我们得到

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\sum_{s=1,2}\Big(a^s_{\mathbf{p}}u^s(\mathbf{p}) + b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}v^s(-\mathbf{p})\Big), \tag{3.87}$$

其中$a^s_{\mathbf{p}}$和$b^s_{\mathbf{p}}$是算符系数(现在我们在薛定谔绘景中工作，ψ不依赖于时间)假设对易关系

$$\left[a^r_{\mathbf{p}}, a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = \left[b^r_{\mathbf{p}}, b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs}. \tag{3.88}$$

然后很容易验证ψ和$\psi^\dagger$的对易关系(3.86)：

$$\begin{aligned}
\left[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})\right] &= \int \frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}\,2E_{\mathbf{q}}}}e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \\
&\qquad\times\sum_{r,s}\Big(\left[a^r_{\mathbf{p}}, a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\right]u^r(\mathbf{p})\bar{u}^s(\mathbf{q}) + \left[b^r_{-\mathbf{p}}, b^{s\dagger}_{-\mathbf{q}}\right]v^r(-\mathbf{p})\bar{v}^s(-\mathbf{q})\Big)\gamma^0 \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\
&\qquad\times\Big[\left(\gamma^0E_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m\right) + \left(\gamma^0E_{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - m\right)\Big]\gamma^0 \\
&= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\times\mathbf{1}_{4\times4}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

在第二步中，我们使用了自旋和完备性关系(3.66)和(3.67)。

现在我们准备用a和b来表示H。经过另一个简短计算(利用正交关系(3.60)、(3.63)和(3.65))，我们发现

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\Big(E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s-E_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s\Big). \tag{3.90}$$

第二项有些错误：通过$b^\dagger$创造越来越多的粒子，我们可以无限地降低能量(重命名$b\leftrightarrow b^\dagger$不会有帮助，因为这样做会破坏对易关系(3.89))。

我们似乎陷入了相当深的困境，但还是继续往前讲，探讨这一理论的因果关系。为了做到这一点，我们应该在不相等的时间计算$[\psi(x),\psi^\dagger(y)]$(或者更方便地计算$[\psi(x),\bar\psi(y)]$)，并且希望在光锥之外得到零。首先，我们必须切换到海森堡绘景并恢复ψ和$\bar\psi$的时间依赖性。利用关系

$$e^{iHt}a_{\mathbf{p}}^se^{-iHt}=a_{\mathbf{p}}^se^{-iE_{\mathbf{p}}t},\qquad e^{iHt}b_{\mathbf{p}}^se^{-iHt}=b_{\mathbf{p}}^se^{+iE_{\mathbf{p}}t}, \tag{3.91}$$

我们立即有

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\Big(a_{\mathbf{p}}^su^s(p)e^{-ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}}^sv^s(p)e^{ip\cdot x}\Big);\\ \bar\psi(x)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\Big(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\bar u^s(p)e^{ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\bar v^s(p)e^{-ip\cdot x}\Big).\end{aligned} \tag{3.92}$$

现在我们可以计算一般的对易子

$$\begin{aligned}[\psi_a(x),\bar\psi_b(y)]&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s\Big(u_a^s(p)\bar u_b^s(p)e^{-ip\cdot(x-y)}+v_a^s(p)\bar v_b^s(p)e^{ip\cdot(x-y)}\Big)\\ &=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\Big((\not p+m)_{ab}e^{-ip\cdot(x-y)}+(\not p-m)_{ab}e^{ip\cdot(x-y)}\Big)\\ &=(i\not\partial_x+m)_{ab}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\Big(e^{-ip\cdot(x-y)}-e^{ip\cdot(x-y)}\Big)\\ &=(i\not\partial_x+m)_{ab}[\phi(x),\phi(y)].\end{aligned}$$

由于$[\phi(x),\phi(y)]$(实 Klein Gordon 场的对易子)在光锥外为零，这个量也是如此。

然而，关于因果关系问题的这个解有些奇怪。设$|0\rangle$是被所有$a_{\mathbf{p}}^s$和$b_{\mathbf{p}}^s$湮灭的状态：$a_{\mathbf{p}}^s|0\rangle=b_{\mathbf{p}}^s|0\rangle=0$，然后

$$\begin{aligned}[\psi_a(x),\bar\psi_b(y)]&=\langle0|\left[\psi_a(x),\bar\psi_b(y)\right]|0\rangle\\ &=\langle0|\,\psi_a(x)\bar\psi_b(y)\,|0\rangle-\langle0|\,\bar\psi_b(y)\psi_a(x)\,|0\rangle\,,\end{aligned}$$

就像 Klein-Gordon 场一样。但是在 Klein-Gordon 情况下，我们从下面两部分中的每一部分都得到对易子的一项：在光锥外，一个粒子从y到x的传播被一个反粒子从x到y的传播所抵消。在这里，因为第二部分是零，两项都来自第一部分：$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$。抵消发生在正能粒子和负能粒子之间，它们都从$y$传播到$x$。

这一观察实际上可以引导我们解决负能量问题。我们量子化狄拉克理论的假设之一必定是错误的。因此，让我们忘记假定的对易关系(3.86)和(3.88)，看看我们能否找到正能粒子在两个方向上传播的方法。我们还必须放弃我们对真空$|0\rangle$的定义，把它定义为被所有$a^s_{\mathbf{p}}$和$b^s_{\mathbf{p}}$湮灭的状态。然而，我们将保留$\psi(x)$和$\bar{\psi}(x)$作为海森堡算符的表达式(3.92)，因为如果$\psi(x)$和$\bar{\psi}(x)$是狄拉克方程的解，它们必须可分解成这样的平面波解。

首先考虑传播振幅$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$，它表示正能粒子从$y$传播到$x$。在这种情况下，我们希望(海森堡)态$\bar{\psi}(y)|0\rangle$仅由正能，或负频率分量组成(因为海森堡态$\Psi_H = e^{+iHt}\Psi_S$)。因此，只有$\bar{\psi}(y)$的$a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$项可以有贡献，这意味着$b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$必须湮灭真空。类似地，$\langle 0|\psi(x)$只能包含正频率分量。这样我们有

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_r a^r_{\mathbf{p}}u^r(p)e^{-ipx} \\ \times\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}\sum_s a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\bar{u}^s(q)e^{iqy}\,|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{3.93}$$

即使我们不知道如何交换$a^r_{\mathbf{p}}$和$a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}$，利用平移不变性和旋转不变性，我们也可以讨论一下矩阵元$\langle 0|a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle$。如果基态$|0\rangle$在平移下是不变的，我们必须有$|0\rangle = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}|0\rangle$。此外，由于$a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$产生动量$\mathbf{q}$，我们可以用方程(2.48)来计算：

$$\begin{aligned}\langle 0|\,a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\,|0\rangle &= \langle 0|\,a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\,|0\rangle \\ &= e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,\langle 0|\,e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\,|0\rangle \\ &= e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}\,\langle 0|\,a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

这表示如果$\langle 0|a^r_{\mathbf{p}}a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}|0\rangle$是非零，$\mathbf{p}$必须等于$\mathbf{q}$。类似地，可以知道$|0\rangle$的旋转不变性意味着$r = s$(这应该直观清晰，并且在本节后面讨论角动量算符之后可以进行检查)。从这些考虑，我们可以得出矩阵元可以被写为：

$$\langle 0|\, a^r_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\, |0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs}\cdot A(\mathbf{p}),$$

其中$A(\mathbf{p})$至今尚未确定。但是，请注意，如果态的归一化总是正的(就像它应该在任何自洽的希尔伯特空间中一样)，那么$A(\mathbf{p})$必须大于零。现在我们可以回到(3.93)，然后写

$$\begin{aligned}\langle 0|\, \psi(x)\bar{\psi}(y)\, |0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p)A(\mathbf{p})e^{-ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}(\not{p}+m)A(\mathbf{p})e^{-ip(x-y)}.\end{aligned}$$

只有当$A(\mathbf{p})$是洛伦兹标量，即$A(\mathbf{p})=A(p^2)$时，该表达式在平动下才是不变的。由于$p^2=m^2$，A必须是常数。所以最终我们得到

$$\langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle = \left(i\not{\partial}_x + m\right)_{ab}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-ip(x-y)}\cdot A. \tag{3.94}$$

类似地，在振幅$\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle$中，我们希望唯一的贡献来自$\bar{\psi}(y)$的正频项和$\psi(x)$的负频项。所以$a^s_{\mathbf{p}}$仍然湮灭真空，但是$b^s_{\mathbf{p}}$没有。通过与上面给出的参数相同的参数，我们得到

$$\langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle = -\left(i\not{\partial}_x + m\right)_{ab}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{ip(x-y)}\cdot B, \tag{3.95}$$

其中B是另一个正常量。负符号是重要的，它来自于$\Sigma v\bar{v}$的完备性关系(3.67)和指数因子中的x符号。这意味着在光锥外不能有$\langle 0|[\psi(x),\bar{\psi}(y)]|0\rangle = 0$：如果$A=-B$，这两个项(3.94)和(3.95)确实会抵消，但是这是不可能的，因为A和B必须都是正的。

然而现在已经掌握了解决方案。通过设$A=B=1$，很容易获得(在光锥之外)

$$\langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle = -\langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle .$$

即旋量场在类空间隔中反对易。这足以保持因果关系，因为所有合理的可观测量(如能量、电荷和粒子数)都是由偶数个旋量场构成的；对于任何这样的可观测量$\mathcal{O}_1$和$\mathcal{O}_2$，对于$(x-y)^2<0$，我们仍然有$[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]=0$。

值得注意的是，对狄拉克场反对易关系的假设解决了负能量问题。等时反对易关系将是

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x}),\psi^\dagger_b(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab}; \\ \{\psi_a(\mathbf{x}),\psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi^\dagger_a(\mathbf{x}),\psi^\dagger_b(\mathbf{y})\} = 0.\end{aligned} \tag{3.96}$$

我们可以像以前一样用$a^s_{\mathbf{p}}$和$b^s_{\mathbf{p}}$展开$\psi(\mathbf{x})$(方程(3.87))。产生和湮没算符现在必须服从

$$\left\{a^r_{\mathbf{p}}, a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\right\} = \left\{b^r_{\mathbf{p}}, b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\right\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs} \tag{3.97}$$

(所有其他反对易子等于零)以满足(3.96)。另一个计算给出了哈密顿量，

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \Big(E_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}}\Big),$$

和以前一样，$b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$仍然产生负能量。但是，关系$\{b^r_{\mathbf{p}}, b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs}$在$b^r_{\mathbf{p}}$和$b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}$之间是对称的，所以让我们简单地重新定义

$$\tilde{b}^s_{\mathbf{p}} \equiv b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}; \qquad \tilde{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \equiv b^s_{\mathbf{p}}. \tag{3.98}$$

这些当然遵循完全相同的反对易关系，但现在哈密顿量的第二项是

$$-E_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}} = +E_{\mathbf{p}} \tilde{b}^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \tilde{b}^s_{\mathbf{p}} - (\text{const}).$$

如果我们选择$|0\rangle$是被$a^s_{\mathbf{p}}$和$\tilde{b}^s_{\mathbf{p}}$湮没的状态，那么$|0\rangle$的所有激发态都具有正能量。

发生了什么？为了更好地理解这个技巧，让我们暂时放弃场理论，考虑具有一对b和$b^\dagger$算符的理论，服从$\{b, b^\dagger\} = 1$和$\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$。选择状态$|0\rangle$，使得$b|0\rangle = 0$。于是$b^\dagger|0\rangle$是一个新的状态，称之为$|1\rangle$。该状态满足$b|1\rangle = |0\rangle$和$b^\dagger|1\rangle = 0$。所以$b$和$b^\dagger$仅在希尔伯特的两个状态$|0\rangle$和$|1\rangle$上进行运算。我们可以说，$|0\rangle$代表一个“空的”状态，并且$b^\dagger$“填充”状态。但我们同样可以称$|1\rangle$为空态并说$b = \tilde{b}^\dagger$填充它。这两个描述是完全等价的，除非我们指定一些可观察量，允许我们在物理上区分状态。在我们的例子中，正确的选择是把低能量的状态变成空的状态。而且，把箭头放在产生出正能量的算符上，便不会混乱。这正是我们所做的。

顺便说一下，因为$(\tilde{b}^\dagger)^2 = 0$，状态不能被填充两次。更一般地说，反对易关系意味着，在两个粒子的交换下：$a^\dagger_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle = -a^\dagger_{\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle$，任何多粒子态都是反对称的。因此，我们得出结论：如果阶梯算符服从**反对易**关系，则相应的粒子服从**费米-狄拉克**统计。

我们刚刚表明，为了确保真空中只有正能量激发，我们必须用反对易关系对狄拉克场进行量子化；在这些条件下，与狄拉克场有关的粒子服从费米-狄拉克

统计。这个结论是一个更一般的结果(Pauli*首先导出的)的一部分：洛伦兹不变性、正能量、正范数和因果关系一起意味着整数自旋的粒子服从Bose-Einstein统计，而半整数自旋的粒子服从 Fermi-Dirac 统计。

量子化的 Dirac 场

现在让我们系统地总结量子化的狄拉克理论的结果。既然尘埃已经落定，我们应该整理一下我们的记号：从现在开始，我们将把$\tilde{b}_{\mathbf{p}}$(降低状态能量的算符)写成$b_{\mathbf{p}}$，以及$\tilde{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}}$写成$b^{\dagger}_{\mathbf{p}}$。所有我们以后工作中需要用到的表达式都列在下面；之前相应的表达式(它们不同)应该被忘记。

首先我们写下场算符：

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\Big(a^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ip\cdot x}+b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ip\cdot x}\Big);\tag{3.99}$$

$$\bar{\psi}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\Big(b^s_{\mathbf{p}}\bar{v}^s(p)e^{-ip\cdot x}+a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\bar{u}^s(p)e^{ip\cdot x}\Big).\tag{3.100}$$

产生和湮没算符服从反对易规则

$$\{a^r_{\mathbf{p}},a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\}=\{b^r_{\mathbf{p}},b^{s\dagger}_{\mathbf{q}}\}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs},\tag{3.101}$$

所有其他反对易子等于零。然后ψ和$\psi^{\dagger}$的等时反对易关系：

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x}),\psi^{\dagger}_b(\mathbf{y})\}&=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab};\\ \{\psi_a(\mathbf{x}),\psi_b(\mathbf{y})\}&=\{\psi^{\dagger}_a(\mathbf{x}),\psi^{\dagger}_b(\mathbf{y})\}=0.\end{aligned}\tag{3.102}$$

真空$|0\rangle$被定义为这样的态

$$a^s_{\mathbf{p}}|0\rangle=b^s_{\mathbf{p}}|0\rangle=0.\tag{3.103}$$

哈密顿量可以被写为

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_{\mathbf{p}}\Big(a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}+b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}b^s_{\mathbf{p}}\Big),\tag{3.104}$$

在这里我们丢弃了来自$b^s_{\mathbf{p}}$和$b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$反对易的无限常数项。从这一点上，我们看到真空和预期一样是能量最低的状态。动量算符是

$$\mathbf{P}=\int d^3x\,\psi^{\dagger}(-i\boldsymbol{\nabla})\psi=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\mathbf{p}\Big(a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}a^s_{\mathbf{p}}+b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}b^s_{\mathbf{p}}\Big).\tag{3.105}$$

W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716(1940)，转载于 Schwinger (1958). R. F Streater 和 A. S. Wightman 给出了严格的处理，*PCT, Spin and Statisticsand All That* (Benjamin/Cummings, Reading, Mass, 1964).

因此，$a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$和$b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$都产生具有能量$+E_{\mathbf{p}}$和动量$\mathbf{p}$的粒子。我们将$a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$产生的粒子称为费米子，而$b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$产生的粒子称为反费米子。

单粒子态定义为

$$|\mathbf{p},s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\,|0\rangle \tag{3.106}$$

它们的内积

$$\langle \mathbf{p},r|\mathbf{q},s\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta^{rs} \tag{3.107}$$

是洛伦兹不变的。这意味着，对希尔伯特空间的态实施洛伦兹变换的算符$U(\Lambda)$是幺正的，即使对于平动来说，$\Lambda_{\frac{1}{2}}$不是幺正的。

为了可靠，做一个一致性检查，以便看到$U(\Lambda)$在$\psi(x)$上实现了正确的变换。所以计算

$$U\psi(x)U^{-1} = U\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(a_{\mathbf{p}}^s u^s(p)e^{-ipx}+b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}v^s(p)e^{ipx}\right)U^{-1}. \tag{3.108}$$

我们可以专注于第一项，第二项完全类似。等式(3.106)意味着根据

$$U(\Lambda)a_{\mathbf{p}}^s U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\Lambda\mathbf{p}}^s, \tag{3.109}$$

假设自旋量子化的轴与平动或旋转轴平行。为使用这个关系来计算(3.108)，将积分重写为

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}^s = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\cdot\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^s.$$

第二个因子以简单的方式由U变换，第一个是洛伦兹不变积分。因此，如果我们应用(3.109)并进行置换$\tilde{p}=\Lambda p$，等式(3.108)变为

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \int\frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}\sum_s u^s(\Lambda^{-1}\tilde{p})\,\sqrt{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}a_{\tilde{\mathbf{p}}}^s e^{-i\tilde{p}\cdot\Lambda x}+\cdots.$$

但是$u^s(\Lambda^{-1}\tilde{p}) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}u^s(\tilde{p})$，所以实际上我们有

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) &= \int\frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{\mathbf{p}}}}}\sum_s\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}u^s(\tilde{p})a_{\tilde{\mathbf{p}}}^s e^{-i\tilde{p}\cdot\Lambda x}+\cdots \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x). \end{aligned} \tag{3.110}$$

这个结果表明，变换场在点Λx上产生和消灭粒子，正如它必须的那样。然而，请注意，与等式(3.2)(其中被变换的场ϕ是在$\Lambda^{-1}x$点计算的)相比，该变换似乎在错

误的方向上，不同之处在于，在第 3.1 节中，我们假设我们变换的是一个预先存在的场分布，它被测量为$\phi(x)$。而在这里我们变换的是$\phi(x)$产生或湮灭粒子的行为，这两种实现洛伦兹变换的方法在相反的方向上工作。但是请注意，与式(3.8)一致的是，矩阵作用于ψ上和坐标x的变换具有正确的相反的方向。

接下来我们要讨论狄拉克粒子的自旋。我们期望狄拉克费米子具有自旋 1/2，现在我们可以从形式理论中证明这个性质。我们已经表明，在$a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$和$b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$所产生的粒子中，每个粒子都有两个“自旋”态：$s=1,2$。但我们还没有证明，这种“自旋”与角动量有关。要做到这一点，我们必须写出角动量算符。

回想一下，我们在第 2.2 节中通过寻找与平移不变性相关的守恒量找到了线性动量算符。我们可以用旋转不变性的结果，以类似的方式找到角动量算符。在旋转(或任何洛伦兹变换)下，狄拉克场ψ(在我们的原始约定下)的变换是

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x).$$

要应用诺特定理，我们必须在固定点上计算场的改变，也就是说，

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x).$$

为确定起见，考虑坐标系绕z轴以θ角作无穷小旋转。这个变换的参数化在等式(3.19)下面给出了：$\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$，在方程(3.30)中使用相同的参数，我们发现

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 1 - \tfrac{i}{2}\theta\Sigma^3.$$

我们现在可以计算

$$\begin{aligned}\delta\psi(x) &= \big(1 - \tfrac{i}{2}\theta\Sigma^3\big)\psi(t, x+\theta y, y-\theta x, z) - \psi(x)\\ &= -\theta\big(x\partial_y - y\partial_x + \tfrac{i}{2}\Sigma^3\big)\psi(x) \equiv \theta\Delta\psi.\end{aligned}$$

然后守恒的诺特流的时间分量为：

$$j^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\Delta\psi = -i\bar{\psi}\gamma^0\big(x\partial_y - y\partial_x + \tfrac{i}{2}\Sigma^3\big)\psi.$$

类似的表达式适用于x轴和y轴的旋转，因此角动量算符是

$$\mathbf{J} = \int d^3x\, \psi^\dagger\Big(\mathbf{x}\times(-i\boldsymbol{\nabla}) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\Big)\psi. \tag{3.111}$$

对于非相对论费米子，(3.111)的第一项给出了轨道角动量。因此第二项给出了自

旋角动量，不幸的是，对于相对论费米子，将(3.111)分成自旋部分和轨道部分并不那么直接，因此用阶梯算符写出这个量的一般表达式并不简单。

然而，为了证明狄拉克粒子具有自旋1/2，考虑静止粒子就足够了。我们想将J_z用于态$a_0^{s\dagger}|0\rangle$，并表明这个态是它的一个本征矢。用一个技巧来做最简单：因为J_z必须湮灭真空，所以$J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = [J_z, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$。仅当$J_z$的项中有$\mathbf{p}=0$的湮灭算符，对易子才非零。对于这些项，(3.111)的轨道部分没有贡献。为了用阶梯算符写出(3.111)的自旋项，使用展开式(3.99)和(3.100)，在$t=0$计算：

$$J_z = \int d^3x \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}\, 2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ \times \sum_{r,r'} \Big(a_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger} u^{r'\dagger}(\mathbf{p}') + b_{-\mathbf{p}'}^{r'} v^{r'\dagger}(-\mathbf{p}') \Big) \frac{\Sigma^3}{2} \Big(a_{\mathbf{p}}^{r} u^{r}(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r\dagger} v^{r}(-\mathbf{p}) \Big).$$

将它和$a_0^{s\dagger}$放进对易子，唯一的非零项具有结构$\left[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^{r}, a_0^{s\dagger}\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}) a_0^{r\dagger} \delta^{rs}$；对易子中的其它三个项要么为零，要么湮灭真空。因此我们发现

$$J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = \frac{1}{2m} \sum_r \Big(u^{s\dagger}(0) \frac{\Sigma^3}{2} u^r(0) \Big) a_0^{r\dagger}|0\rangle = \sum_r \Big(\xi^{s\dagger} \frac{\sigma^3}{2} \xi^r \Big) a_0^{r\dagger}|0\rangle ,$$

在这里，我们使用$u(0)$的显式(3.47)来获得最后表达式。通过选择旋量ξ^r是σ^3的本征态，最容易完成 r 的求和。然后发现对于$\xi^s = \binom{1}{0}$，单粒子态是具有特征值$+1/2$的J_z的特征态，而对于$\xi^s = \binom{0}{1}$，它是具有特征值$-1/2$的J_z的特征态。这结果正是我们对电子所期望的。

类似的计算决定了零动量反费米子的自旋。但是在这种情况下，由于在J_z中b和$b^\dagger$项的顺序是相反的，我们从求$\left[b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_0^\dagger\right] = -\left[b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}, b_0^\dagger\right]$中得到一个额外的负号。因此，对于正电子，旋量$\eta^s$与自旋角动量之间的关系是相反的：$\binom{1}{0}$对应于自旋$-1/2$，而$\binom{0}{1}$对应于自旋$+1/2$。这种符号的反转与狄拉克空穴理论的预测一致。从这个观点来看，正电子是负能量电子的空缺。如果失去的电子有正的J_z，则它的空缺有负的J_z。

总之，零动量费米子的角动量是由

$$J_z a_0^{s\dagger}|0\rangle = \pm\tfrac{1}{2} a_0^{s\dagger}|0\rangle , \qquad J_z b_0^{s\dagger}|0\rangle = \mp\tfrac{1}{2} b_0^{s\dagger}|0\rangle , \tag{3.112}$$

其中上面的符号对应$\xi^s = \binom{1}{0}$，下面的符号对应$\xi^s = \binom{0}{1}$。

狄拉克理论中还有一个重要的守恒量。在第 3.4 节中，我们看到流$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$是守恒的。与此流相关的荷是

$$Q = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} + b^s_{-\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} \right),$$

然而，如果我们忽略另一个无限常数

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} - b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}} \right). \tag{3.113}$$

因此，$a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$产生的费米子带荷$+1$，而$b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$则产生的反费米子带有荷$-1$。当我们将狄拉克场耦合到电磁场时，我们将看到$Q$不是别的，而是电荷(乘上一个常数因子，它取决于我们想要描述哪种类型的粒子；例如，对于电子，电荷Qe)。

在量子电动力学，我们将使用旋量场ψ来描述电子和正电子。由$a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$产生的粒子是电子，它们具有能量$E_{\mathbf{p}}$，动量$\mathbf{p}$，自旋$1/2$，其极化与$\xi^s$相同，电荷$+1$(以$e$为单位)。由$b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}$产生的粒子是正电子，它们具有能量$E_{\mathbf{p}}$，动量$\mathbf{p}$，自旋$1/2$，极化与$\xi^s$的极化相反，电荷$-1$。态$\psi_\alpha(x)|0\rangle$在位置$x$有一个正电子，其极化对应于所选择的旋量分量。类似地，$\bar{\psi}_\alpha(x)|0\rangle$是一个在位置$x$的电子态。

狄拉克传播子

计算狄拉克场的传播振幅现在是一个简单的练习：

$$\begin{aligned}
\langle 0|\, \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\, |0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u^s_a(p)\bar{u}^s_b(p) e^{-ip\cdot(x-y)} \\
&= \left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}, \qquad (3.114) \\
\langle 0|\, \bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)\, |0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s v^s_a(p)\bar{v}^s_b(p) e^{-ip\cdot(y-x)} \\
&= -\left(i\partial\!\!\!/_x + m\right)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(y-x)}. \qquad (3.115)
\end{aligned}$$

正如我们对 Klein-Gordon 方程所做的那样，我们可以构造满足各种边界条件的 Dirac 方程的格林函数。例如，延迟格林函数是

$$S^{ab}_R(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0)\, \langle 0|\, \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}\, |0\rangle\,. \tag{3.116}$$

容易看出：

$$S_R(x-y) = \left(i\not{\partial}_x + m\right) D_R(x-y), \tag{3.117}$$

在右边，涉及$\partial_0\theta(x^0-y^0)$的项消失了。使用(3.117)和$\not{\partial}\not{\partial} = \partial^2$的事实，我们看到$S_R$是狄拉克算符的格林函数：

$$\left(i\not{\partial}_x - m\right) S_R(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y)\cdot \mathbf{1}_{4\times 4}. \tag{3.118}$$

狄拉克算符的格林函数也可以通过傅立叶变换找到。将$S_R(x-y)$展开为傅立叶积分，并用 $(i\not{\partial}_x - m)$作用于两侧，我们发现：

$$i\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\not{p} - m)e^{-ip\cdot(x-y)}\widetilde{S}_R(p), \tag{3.119}$$

这样便

$$\widetilde{S}_R(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2}. \tag{3.120}$$

为了获得延迟格林函数，我们必须根据第 30 页所示的围道来计算(3.120)中的p^0积分。对于$x^0 > y^0$，我们闭合下面的围道，拾取两个极点以获得(3.114)和(3.115)的和。对于$x^0 < y^0$，我们闭合上面的围道并得到零。

费曼边界条件下的格林函数由第 31 页所示的围道定义：

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i(\not{p}+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= \begin{cases} \langle 0|\,\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle & \text{for } x^0 > y^0 \text{ (close contour below)} \\ -\langle 0|\,\bar{\psi}(y)\psi(x)\,|0\rangle & \text{for } x^0 < y^0 \text{ (close contour above)} \end{cases} \\ &\equiv \langle 0|\,T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.121}$$

在这里，我们选择去这样定义旋量场的编时乘积：当算符互换时，会带有一个附加的负号。这个负号在费米子的量子场论中是非常重要的，我们将在第 4.7 节中再次见到它。

与 Klein-Gordon 理论一样，费曼传播子的表达式(3.121)是本章最有用的结果。当我们用费曼图做微扰计算时，我们将把因子$\widetilde{S}_F(p)$与每个内部费米子线联系起来。

3.6 狄拉克理论的分立对称性

在上一节中，我们讨论了狄拉克理论在希尔伯特空间上如何实现连续洛伦兹变换。我们发现，对于每个变换，都有一个幺正算符$U(\Lambda)$，它导出了场的正确的变换：

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x). \tag{3.122}$$

在本节中，我们将讨论在狄拉克场上实现各种分立对称性的类似算符。

除了连续的洛伦兹变换，还有两个时空运算是拉格朗日函数的潜在对称性：宇称和时间反演。宇称，由P表示，导致$(t,\mathbf{x}) \to (t,-\mathbf{x})$，反转空间的手性。时间反演，由$T$表示，导致$(t,\mathbf{x}) \to (-t,\mathbf{x})$，互换前和后光锥。这两种操作都不能通过从单位等式开始的连续洛伦兹变换来实现。然而两者都保持了闵可夫斯基间隔$x^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$。在标准术语中，连续洛伦兹变换称为**恰当的**(proper)，**正时的**(orthochronous)洛伦兹群，$\mathbf{L}_+^\uparrow$。然后完整洛伦兹群分成四个断开的子集，如下

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{L}_+^\uparrow & \overset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\uparrow = P\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{“orthochronous”} \\
T\updownarrow & & \updownarrow T & & \\
\mathbf{L}_+^\downarrow = T\mathbf{L}_+^\uparrow & \underset{P}{\longleftrightarrow} & \mathbf{L}_-^\downarrow = PT\mathbf{L}_+^\uparrow & & \text{“nonorthochronous”} \\
\text{“proper”} & & \text{“improper”} & &
\end{array}$$

在讨论P和T的同时，可以方便地讨论第三种(非时空)分立操作：电荷共轭，用C表示。这种操作下，粒子和反粒子互换。

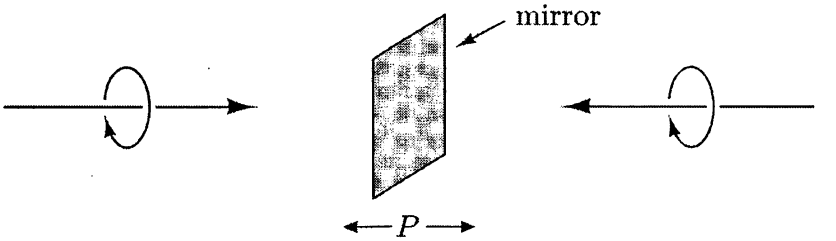
相对论性的场论都必须在$\mathbf{L}_+^\uparrow$下是不变的，但它不必在P、T或C下是不变的。这些对称操作在现实世界中的地位如何？通过实验，我们知道自然界的三种力——引力、电磁和强相互作用——相对于P、C和T是对称的。弱相互作用分别破坏C和P，但保持CP和T。但某些罕见的过程(迄今观察到的包括中性K介子)也表现出CP和T破坏。所有的观测表明，组合的CPT是一个完美的对称性。

目前公认的弱相互作用的理论模型是Glashow-Weinberg-Salam规范理论，在第20章中描述。这个理论以最大可能的方式破坏了C和P。实际上，令人惊讶的是(虽然不是完全意外)，在大多数容易观察到的过程中，C和P恰好是很好的对称性。另一方面，没人知道是否有一个破坏CP的非常美丽的理论。在当前的理论中，当存在三代(或更多代)费米子时，存在包含一个参数的空间，如果该参

数非零，将导致CP破坏。但这个参数的值并不比电子质量值被更好地理解，CP破坏的物理起源仍然是个谜。我们将在第 20.3 节进一步讨论这个问题。

宇称

通过介绍，我们现在讨论P、T和C在狄拉克粒子和场上的作用。首先考虑宇称。算符P应该在没有反转自旋的情况下颠倒粒子的动量：



从数学上讲，这意味着P应该由一个幺正算符(称为$U(P)$更适当，但是我们仅仅称它为P)实现，例如，它把状态$a^s_{\mathbf{p}}|0\rangle$转换为$a^s_{-\mathbf{p}}|0\rangle$。换句话说我们有

$$Pa^s_{\mathbf{p}}P = \eta_a a^s_{-\mathbf{p}} \qquad \text{and} \qquad Pb^s_{\mathbf{p}}P = \eta_b b^s_{-\mathbf{p}}, \tag{3.123}$$

其中η_a和η_b是可能的相位。这些相位受到以下条件的限制：两次应用宇称算符应该将可观测值返回到它们的初始值。由于可观测量是由偶数费米算符建立的，所以需要$\eta_a^2, \eta_b^2 = \pm 1$。

正如4×4的常矩阵$\Lambda_{\frac{1}{2}}$在 Dirac 场上实现连续洛伦兹变换一样，宇称变换也应用4×4常矩阵表示。为找到这矩阵并确定η_a和η_b，我们计算P在$\psi(x)$上的作用。用(3.123)，我们有

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s \left(\eta_a a^s_{-\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + \eta_b^* b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\right). \tag{3.124}$$

现在改变变量$\tilde{p} = (p^0, -\mathbf{p})$。注意到$p\cdot x = \tilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x})$，且$\tilde{p}\cdot\sigma = p\cdot\bar{\sigma}$和$\tilde{p}\cdot\bar{\sigma} = p\cdot\sigma$，这样我们可以写出

$$u(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi\end{pmatrix} = \gamma^0 u(\tilde{p});$$

$$v(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi\\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,\xi\\ -\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,\xi\end{pmatrix} = -\gamma^0 v(\tilde{p}).$$

(3.124)式变成了

$$P\psi(x)P = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s \Big(\eta_a a^s_{\tilde{p}}\gamma^0 u^s(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}(t,-\mathbf{x})} - \eta_b^* b^{s\dagger}_{\tilde{p}}\gamma^0 v^s(\tilde{p})e^{i\tilde{p}(t,-\mathbf{x})}\Big).$$

这应该等于一些常数矩阵乘上$\psi(t,-\mathbf{x})$，且如果我们使$\eta_a^* = -\eta_a$，它确实成功了；这意味着

$$\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1. \tag{3.125}$$

因此，我们有$\psi(x)$的宇称变换的最终形式，

$$P\psi(t,\mathbf{x})P = \eta_a \gamma^0 \psi(t,-\mathbf{x}). \tag{3.126}$$

了解各种狄拉克场双线性量在宇称下如何变换(例如，在写拉格朗日量时)是非常重要的。回想那五个双线性量是

$$\bar{\psi}\psi, \qquad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad i\bar{\psi}\big[\gamma^\mu,\gamma^\nu\big]\psi, \qquad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \qquad i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{3.127}$$

这里因子i被用来使所有这些量厄密，你可以很容易地验证(我们添加到拉格朗日量的任何新项都必须是实的)首先我们应该计算

$$P\bar{\psi}(t,\mathbf{x})P = P\psi^\dagger(t,\mathbf{x})P\gamma^0 = \big(P\psi(t,\mathbf{x})P\big)^\dagger\gamma^0 = \eta_a^*\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0. \tag{3.128}$$

然后标量双线性量的变换为

$$P\bar{\psi}\psi P = |\eta_a|^2\bar{\psi}(t,-\mathbf{x})\gamma^0\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) = +\bar{\psi}\psi(t,-\mathbf{x}), \tag{3.129}$$

而对于矢量，我们得到

$$P\bar{\psi}\gamma^\mu\psi P = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t,-\mathbf{x}) & \text{for } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(t,-\mathbf{x}) & \text{for } \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{3.130}$$

注意，矢量在空间分量上获得负号，与矢量x^μ相同的。类似地，赝标量和赝矢量的变换是

$$Pi\bar{\psi}\gamma^5\psi P = i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) = -i\bar{\psi}\gamma^5\psi(t,-\mathbf{x}); \tag{3.131}$$

$$P\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi P = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi(t,-\mathbf{x}) = \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi & \text{for } \mu = 0, \\ +\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi & \text{for } \mu = 1,2,3. \end{cases} \tag{3.132}$$

正如我们在第 3.4 节中预期的那样，“赝”表示了宇称变换中的一个额外减号($i\bar{\psi}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi = 2\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$的变换性质留给问题 3.7)。请注意，费米子双线性量的变换性质独立于η_a，所以从一开始就设置$\eta_a = -\eta_b = 1$不失一般性。

然而，(3.125)中费米子与反费米子的宇称变换之间的相对负号有一些重要的结论。考虑费米子-反费米子态，$a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{q}}^{s'\dagger}|0\rangle$。应用$P$，我们发现$P(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{q}}^{s'\dagger}|0\rangle) = -(a_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{-\mathbf{q}}^{s'\dagger}|0\rangle)$。因此，包含费米子-反费米子对的态在宇称下得到额外的(-1)。这个信息在束缚态环境中最有用，其中费米子和反费米子的动量态与薛定谔波函数相结合，产生一个定域于空间的系统。我们在 5.3 节详细地考虑了这种态，但是

在这里我们应该指出，如果空间波函数在$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$下是对称的，那么态具有奇宇称，而如果它在$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$下是反对称的，则态具有偶宇称。例如，$L = 0$束缚态具有奇宇称；$J = 0$的态像赝标量一样变换，而三个$J = 1$态像矢量的空间分量一样变换。这些性质出现在电子偶素和夸克-反夸克的系统的衰变的选择规则中(见问题 3.8)。

时间反演

现在让我们来谈谈时间反演的实现。我们希望T采取幺正算符的形式，它把$a_{\mathbf{p}}$变为$a_{-\mathbf{p}}$(对于$b_{\mathbf{p}}$是类似的)，和把$\psi(t,\mathbf{x})$变为$\psi(-t,\mathbf{x})$(乘以一些常数矩阵)。然而这些性质极其难实现，因为我们在前面看到，在ψ的展开中将$a_{\mathbf{p}}$变为$a_{-\mathbf{p}}$实际是将$(t,\mathbf{x})$变为$(t,-\mathbf{x})$。如果我们强加约束：时间反演应该是自由狄拉克理论的一种对称性，$[T,H]=0$，困难甚至更加明显。然后

$$\begin{aligned} &\psi(t,\mathbf{x}) = e^{iHt}\psi(\mathbf{x})e^{-iHt} \\ \Rightarrow\ &T\psi(t,\mathbf{x})T = e^{iHt}\left[T\psi(\mathbf{x})T\right]e^{-iHt} \\ \Rightarrow\ &T\psi(t,\mathbf{x})T\,|0\rangle = e^{iHt}\left[T\psi(\mathbf{x})T\right]|0\rangle\,, \end{aligned}$$

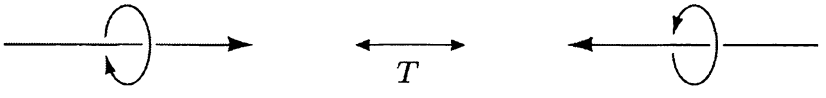
其中假设$H|0\rangle = 0$。右手侧仅为负频率项之和。但是如果T要颠倒$\psi(t,\mathbf{x})$的时间依赖性，那么左边是(差一个常数矩阵)$\psi(-t,\mathbf{x})|0\rangle = e^{-iHt}\psi(\mathbf{x})|0\rangle$，它是正频率项的和。因此我们证明了$T$不能作为线性幺正算符来实现。

我们能做什么？出路在于保持幺正条件$T^\dagger = T^{-1}$，但T同时作用于c数和算符，如下：

$$T(\text{c-number}) = (\text{c-number})^* T. \tag{3.133}$$

于是，即使$[T,H]=0$，所有指数因子的时间依赖性都颠倒了：$Te^{+iHt} = e^{-iHt}T$。由于量子力学中所有的时间演化都是用这样的指数因子执行的，所以这有效地改变了t的符号。注意，复共轭运算是非线性的；T被称为**反线性**或**反幺正**算符。

除了颠倒粒子的动量外，T还应该反转自旋：



在本章的前半部分，我们用标号$s = 1,2$表示费米子的自旋态。在本节的其余部分，

我们将把s与沿着一个特殊轴的费米子物理自旋分量联系在一起。如果这个轴具有极坐标θ,ϕ，沿该轴自旋向上和自旋向下的二分量旋量为：

$$\xi(\uparrow)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad \xi(\downarrow)=\begin{pmatrix}-e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

令$\xi^s=(\xi(\uparrow),\xi(\downarrow))$，$s=1,2$，同时定义

$$\xi^{-s}=-i\sigma^2(\xi^s)^*. \tag{3.134}$$

这个量是翻转旋量；从显式公式来看，

$$\xi^{-s}=(\xi(\downarrow),-\xi(\uparrow)). \tag{3.135}$$

自旋反转关系的更一般形式从等式$\boldsymbol{\sigma}\sigma^2=\sigma^2(-\boldsymbol{\sigma}^*)$得到。这个等式说明对于某些轴$\boldsymbol{n}$，如果$\xi$满足$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\xi=+\xi$，则

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(-i\sigma^2\xi^*)=-i\sigma^2(-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^*\xi^*=i\sigma^2(\xi^*)=-(-i\sigma^2\xi^*).$$

注意，用自旋翻转的这个约定，两个连续的自旋翻转会将自旋改变回(-1)乘以初始态。

现在我们将各种费米子自旋态与这些旋量联系起来。电子湮没算符$a^s_{\mathbf{p}}$湮灭的电子其旋量$u^s(p)$含的是ξ^s。正电子湮没算符$b^s_{\mathbf{p}}$湮灭了的正电子其旋量$v^s(p)$中含的是ξ^{-s}：

$$v^s(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{-s}\\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{-s}\end{pmatrix}. \tag{3.136}$$

像等式(3.135)一样，我们定义

$$a^{-s}_{\mathbf{p}}=(a^2_{\mathbf{p}},-a^1_{\mathbf{p}}),\qquad b^{-s}_{\mathbf{p}}=(b^2_{\mathbf{p}},-b^1_{\mathbf{p}}). \tag{3.137}$$

我们现在可以算出狄拉克旋量u和v之间的关系以及它们的时间反演。定义$\tilde{p}=(p^0,-\mathbf{p})$，这个矢量满足等式$\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\sigma^2=\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}$；为证明这一点，像(3.49)一样展开平方根。对于一些自旋和动量，对应于狄拉克旋量$u^s(p)$，让$u^{-s}(\tilde{p})$是具有翻转动量和反转自旋的旋量。这些量由下面关系联系在一起：

$$\begin{aligned}u^{-s}(\tilde{p})&=\begin{pmatrix}\sqrt{\tilde{p}\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2\xi^{s*})\\ \sqrt{\tilde{p}\cdot\bar{\sigma}}\,(-i\sigma^2\xi^{s*})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^{s*}\\ -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^{s*}\end{pmatrix}\\ &=-i\begin{pmatrix}\sigma^2&0\\0&\sigma^2\end{pmatrix}\left[u^s(p)\right]^*=-\gamma^1\gamma^3\left[u^s(p)\right]^*.\end{aligned}$$

类似的，对于$v^s(p)$：

$$v^{-s}(\tilde{p})=-\gamma^1\gamma^3\left[v^s(p)\right]^*;$$

在这个关系中，v^{-s}包含了$\xi^{-(-s)}=-\xi^s$

利用(3.137)的标记，我们定义费米子湮灭算符的时间反演变换如下：

$$Ta^s_{\mathbf{p}}T = a^{-s}_{-\mathbf{p}}, \qquad Tb^s_{\mathbf{p}}T = b^{-s}_{-\mathbf{p}}. \tag{3.138}$$

(额外的整体相位对于我们讨论的其余部分没有影响，并且为了简单起见而省略)

关系(3.138)允许我们计算T对费米子场$\psi(x)$的作用：

$$\begin{aligned}
T\psi(t,\mathbf{x})T &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s T\left(a^s_{\mathbf{p}}u^s(p)e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}v^s(p)e^{ipx}\right)T \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\left(a^{-s}_{-\mathbf{p}}\left[u^s(p)\right]^* e^{ipx} + b^{-s\dagger}_{-\mathbf{p}}\left[v^s(p)\right]^* e^{-ipx}\right) \\
&= (-\gamma^1\gamma^3)\int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}}\sum_s\Big(a^{-s}_{\tilde{p}}u^{-s}(\tilde{p})e^{i\tilde{p}(t,-\mathbf{x})} \\
&\qquad\qquad + b^{-s\dagger}_{\tilde{p}}v^{-s}(\tilde{p})e^{-i\tilde{p}(t,-\mathbf{x})}\Big) \\
&= (-\gamma^1\gamma^3)\psi(-t,\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{3.139}$$

在最后一个步中，我们使用$\tilde{p}\cdot(t,-\mathbf{x}) = -\tilde{p}\cdot(-t,\mathbf{x})$，类似于宇称，我们推导了费米子场$\psi(x)$的简单变换定律。粒子和反粒子的变换律中的相对负号也出现在这里，隐含在v^{-s}的二次翻转的旋量中。

现在我们可以检查T对各种双线性量的作用。首先我们需要

$$T\bar{\psi}T = (T\psi T)^\dagger(\gamma^0)^* = \psi^\dagger(-t,\mathbf{x})\left[-\gamma^1\gamma^3\right]^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}(-t,\mathbf{x})\left[\gamma^1\gamma^3\right]. \tag{3.140}$$

然后，双线性标量的变换是

$$T\bar{\psi}\psi(t,\mathbf{x})T = \bar{\psi}(\gamma^1\gamma^3)(-\gamma^1\gamma^3)\psi(-t,\mathbf{x}) = +\bar{\psi}\psi(-t,\mathbf{x}). \tag{3.141}$$

赝标量在T通过i时获得一个额外的负号：

$$Ti\bar{\psi}\gamma^5\psi T = -i\bar{\psi}(\gamma^1\gamma^3)\gamma^5(-\gamma^1\gamma^3)\psi = -i\bar{\psi}\gamma^5\psi(-t,\mathbf{x}).$$

对于矢量，我们必须分别计算四个$\mu = 0,1,2,3$的每一个。经过一些工作你应该发现

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T &= \bar{\psi}(\gamma^1\gamma^3)(\gamma^\mu)^*(-\gamma^1\gamma^3)\psi \\
&= \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t,\mathbf{x}) & \text{for } \mu = 0; \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t,\mathbf{x}) & \text{for } \mu = 1,2,3. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.142}$$

这正是我们想要的矢量(如流密度)的变换性质。你可以验证赝矢量在时间反演中以完全相同的方式变换。

电荷共轭

三个分立对称性中的最后一个是粒子-反粒子对称性C。将C实现为幺正线性算符不会有问题。电荷共轭通常用于将具有给定自旋方向的费米子变成具有相同自旋方向的反费米子。因此对于费米子湮没算符的变换，一个方便的选择是

$$Ca^s_{\mathbf{p}}C = b^s_{\mathbf{p}}; \qquad Cb^s_{\mathbf{p}}C = a^s_{\mathbf{p}}. \tag{3.143}$$

再次，我们忽略可能的额外相位，以作简化。

接下来我们研究C在$\psi(x)$上的作用。首先，我们需要$v^s(p)$和$u^s(p)$之间的关系。使用(3.136)和(3.134)，

$$\big(v^s(p)\big)^* = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}(-i\sigma^2\xi^*) \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}(-i\sigma^2\xi^*)\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\sqrt{p\cdot\bar\sigma}^*\xi^* \\ i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma}^*\xi^*\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi\end{pmatrix},$$

其中ξ代表ξ^s，即是

$$u^s(p) = -i\gamma^2\big(v^s(p)\big)^*, \qquad v^s(p) = -i\gamma^2\big(u^s(p)\big)^*. \tag{3.144}$$

如果我们将(3.144)替换为费米子场算符的表达式，然后用C变换这个算符，我们发现

$$\begin{aligned} C\psi(x)C &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s\Big(-i\gamma^2 b^s_{\mathbf{p}}\big(v^s(p)\big)^*e^{-ipx} - i\gamma^2 a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\big(u^s(p)\big)^*e^{ipx}\Big) \\ &= -i\gamma^2\psi^*(x) = -i\gamma^2(\psi^\dagger)^T = -i\big(\bar\psi\gamma^0\gamma^2\big)^T. \end{aligned} \tag{3.145}$$

注意，C是一个线性幺正算符，即使它令$\psi\to\psi^*$。

再一次，我们想知道C是如何作用于费米子双线性量的。首先我们需要

$$C\bar\psi(x)C = C\psi^\dagger C\gamma^0 = (-i\gamma^2\psi)^T\gamma^0 = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T. \tag{3.146}$$

得到双线性量的变换有点棘手，写出旋量指标是有帮助的。对于标量，

$$\begin{aligned} C\bar\psi\psi C &= (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T(-i\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = -\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c\bar\psi_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea} \\ &= +\bar\psi_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea}\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c = -\bar\psi\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\psi \\ &= +\bar\psi\psi. \end{aligned} \tag{3.147}$$

(第三步中的减号来自于费米子反对易)赝标量并不困难：

$$Ci\bar\psi\gamma^5\psi C = i(-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^5(-i\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = i\bar\psi\gamma^5\psi. \tag{3.148}$$

我们必须分别对矢量和赝矢量的每个分量这样做。注意到γ^0和γ^2是对称矩阵，而

γ^1和γ^3是反对称的，我们最终发现

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \tag{3.149}$$

$$C\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi C = +\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \tag{3.150}$$

虽然算符C交换ψ和$\bar{\psi}$，但它实际上并不改变产生和湮灭算符的顺序。因此，如果将$\bar{\psi}\gamma^0\psi$定义为减去上面等式(3.113)中的无穷常数，则该常数在由C进行共轭的过程不会再出现。

C、P、T总结

在下面的表中总结了各种费米子双线性量在C、P和T下的变换性质。在这里，我们使用了：对于$\mu = 0$有$(-1)^\mu \equiv 1$，对于$\mu = 1,2,3$有$(-1)^\mu \equiv -1$。

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	∂_μ
P	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$	$(-1)^\mu$
T	$+1$	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$	$-(-1)^\mu$
C	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
CPT	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1

我们已经包括了双线性张量的变换性质(参见问题 3.7)和导数算符。

首先注意自由狄拉克拉格朗日量$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$在$C$、$P$和$T$下是不变的。我们可以通过给$\mathcal{L}_0$加上一些微扰$\delta\mathcal{L}$来建立破坏这些对称性的更一般的量子系统。但是$\delta\mathcal{L}$必须是洛伦兹标量，并且表的最后一行表明$\bar{\psi}$和$\psi$的所有洛伦兹标量组合在组合对称$CPT$下是不变的。实际上，一个普遍的事实是，我们无法构造出一个洛伦兹不变且哈密顿量厄密的量子场论是破坏了CPT的†。

†这一定理和自旋统计定理在 Streater 和 Wightman 的著作中得到了很好的证明。

Chapter 4

相互作用场和费曼图

4.1 微扰论——哲学与实例

现在我们已经详细讨论了两个自由场论的量子化，这些理论对自然界中发现的许多粒子给出了近似描述。然而，到目前为止，自由粒子态一直是哈密顿量的本征态，我们没有看到相互作用和散射。为了得到更接近现实世界的描述，我们必须在哈密顿量(或拉格朗日量)中包括新的非线性项，这些项将把不同的傅里叶模式(以及占据它们的粒子)彼此耦合。为了保持因果关系，我们坚持认为，新项只能涉及同一时空点的场的乘积：$[\phi(x)]^4$可以，但不允许有$\phi(x)\phi(y)$。因此，描述相互作用的项将有形式为：

$$H_{\text{int}} = \int d^3x\ \mathcal{H}_{\text{int}}\big[\phi(x)\big] = -\int d^3x\ \mathcal{L}_{\text{int}}\big[\phi(x)\big].$$

现在我们的理论仅仅局限于$\mathcal{H}_{\text{int}} = (-\mathcal{L}_{\text{int}})$只是场的函数，而不是它们的导数的函数。

在这一章，我们将讨论相互作用场论的三个重要例子。第一个是“ϕ-4”理论，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{4.1}$$

其中λ是无量纲耦合常数(ϕ^3的相互作用会稍微简单一些，但是能量不是正定的，除非我们加上更高的偶数次幂的ϕ)。尽管我们现在引入这个理论纯粹出于教学原因(因为它是所有相互作用量子理论中最简单的)，但是现实世界的模型确实包含ϕ^4相互作用；粒子物理学最重要的例子是标准电弱理论中希格斯场的自相互作用。在第二部分，我们将看到ϕ^4理论也出现在统计力学。ϕ^4理论运动方程是

$$(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3, \tag{4.2}$$

它不能像自由 Klein-Gordon 方程一样用傅立叶分析求解。在量子理论中，我们强加等时对易关系：

$$\left[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

它不被$\mathcal{L}_{\text{int}}$影响(然而注意，如果$\mathcal{L}_{\text{int}}$包含$\partial_\mu\phi$，$\pi(\mathbf{x})$的定义将改变)。作为一个简单的练习，可以写下这个理论的哈密顿量，并且找到算符$\phi(x)$的海森堡运动方程；就像在自由理论中一样，其结果与经典运动方程(4.2)相同。

我们相互作用场理论的第二个例子是量子电动力学：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中A_μ是电磁矢势，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$是电磁场张量，$e = -|e|$是电子电荷。(为了描述电荷为$Q$的费米子，用$Q$代替$e$。如果我们想同时考虑多个种类的带电粒子，我们简单地重复写出加上的每种粒子的$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$和$\mathcal{L}_{\text{int}}$)。这样一个简单的拉格朗日函数能够对从宏观尺度到$10^{-13}$cm的几乎所有观察到的现象进行解释，这是相当惊人的。事实上，QED 拉氏量可以写得更简单：

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(iD\!\!\!/ - m)\psi - \tfrac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2, \tag{4.4}$$

其中D_μ是**规范协变导数**，

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \tag{4.5}$$

QED 拉氏量的一个重要性质是，它在规范变换下是不变的:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \tag{4.6}$$

这是在狄拉克场上实现的**局域**相位旋转。这种局域相位旋转下的不变性具有基本的几何意义，它激发了**协变导数**项。然而，对于我们目前的目的，仅仅将(4.6)看作理论的一个对称性就足够了。

从(4.3)遵循标准过程可以得到运动方程。ψ的欧拉-拉格朗日方程为：

$$(iD\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0, \tag{4.7}$$

这只是用**最小耦合**方案：$\partial \to D$，将狄拉克方程耦合到电磁场。A_μ的欧拉-拉格朗日方程是

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = ej^\nu. \tag{4.8}$$

这些是非齐次Maxwell方程，其中电流密度$j^\nu = \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$由守恒的狄拉克矢量流(3.73)给出。与$\phi^4$理论一样，运动方程也可作为算符$\psi(x)$和$A_\mu(x)$的海森堡运动方程来获得。这对于$\psi(x)$是很容易验证的，但我们至今没有讨论电磁场的量子化。

事实上，在本书中，我们将不讨论电磁场的规范量子化。这是一个棘手的问题，本质上是因为规范不变性。注意，由于$\dot{A}^0$在拉格朗日量(4.3)中没有出现，所以A^0的动量共轭是完全的零。这与正则对易关系$[A^0(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$是矛盾的。一种解决方法是在库仑规范下量子化，其中$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$，$A^0$是被约束的而不是动力学的变量；但接着表明这是牺牲了洛伦兹不变性的。另一种方法是，可以在洛伦兹规范$\partial_\mu A^\mu = 0$下对场量子化。这接着有可能修改拉格朗日量，添加$\dot{A}^0$项。你得到了对易关系$\left[A^\mu(\mathbf{x}), \dot{A}^\nu(\mathbf{y})\right] = -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$，本质上与四个Klein-Gordon场相同。但是，$[A^0, \dot{A}^0]$中额外的负号会导致另一个(难以克服的)困难：由$a^{0\dagger}_{\mathbf{p}}$所产生的态具有负范数*。

当计算包含光子的散射振幅时，费曼规则在场论的泛函积分公式中更容易推导出来，这将在第 9 章中讨论。这个方法还有一个优点，即很容易推广到非阿贝尔规范场的情况，如我们将在第三部分中看到的。在本章中，我们将简单地猜测关于光子的费曼规则。这其实是很容易的，在我们推导出类似的但更简单的理论——**Yukawa理论**的规则之后：

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} - g\bar{\psi}\psi\phi. \tag{4.9}$$

这将是我们的第三个例子。它类似于QED，但是光子被一个标量粒子ϕ所代替。相互作用项包含一个无量纲耦合常数g，类似于电子电荷e。Yukawa最初发明这个理论来描述核子(ψ)和π子(ϕ)。在现代粒子理论中，标准模型包含将标量希格斯场耦合到夸克和轻子的Yukawa相互作用项；标准模型中的大多数自由参数是Yukawa耦合常数。

在写下我们的三个范例的相互作用之后，让我们暂停一下，讨论一下在自然界中可以发现哪些其他相互作用。起初，这个列表似乎是无限的，即使对于标量理论，我们也可以写下对任意n的形式为ϕ^n的相互作用。但值得注意的是，一个简单而合理的公理排除了几乎所有可能的相互作用。该公理说，如下所述的理论

*两个量子化过程的优秀处理方法是容易获得的。对于库仑规范量子化，参见 Bjorken 和 Drell(1965)，第 14 章；对于 Lorentz 规范量子化，参见 Mandl 和 Shaw(1984)，第 5 章。

是**可重整的**。如第一章提到，微扰论中的高阶项将涉及中间(“虚”)粒子的 4 动量的积分。这些积分往往形式上是发散，这通常需要施加一些形式的截断程序；最简单的方法是在某个很大而有限的动量Λ上截断积分，在计算结束时，取极限$\Lambda \to \infty$，并希望物理量是独立于Λ的。如果确实如此，则该理论被称为**可重整化**。然而，假设理论包含的相互作用耦合常数的量纲是质量的负幂次。然后为了得到无量纲的散射振幅，这个耦合常数必须乘以一些质量量纲为正的物理量，结果是这个量不是别的，正是Λ。这样的项在$\Lambda \to \infty$时发散，因此该理论不可重整化。

我们将在第 10 章中详细讨论这些问题。现在我们只需注意到，任何含有负质量量纲的耦合常数的理论都不可重整。一点点的量纲分析，允许我们扔掉几乎所有候选的相互作用。由于作用量$S = \int \mathcal{L} d^4x$是无量纲的，$\mathcal{L}$必须具有量纲(质量)^4(或简单的说是量纲4)。根据各种自由拉格朗日量的动力学项，我们注意到标量场和矢量场ϕ和A^μ具有量纲 1，而旋量场ψ具有量纲 3/2。现在我们可以列出所有允许可重整化的相互作用。

对于只涉及标量的理论，所允许的相互作用项是

$$\mu\phi^3 \qquad \text{and} \qquad \lambda\phi^4.$$

耦合常数μ有量纲 1，而λ是无量纲的。形式ϕ^n的项对于$n > 4$是不允许的，因为它们的耦合常数有量纲$4 - n$。当然加进几个实或复标量场，可以得到更有趣的理论(参见问题 4.3)。

接下来我们可添加旋量场。旋量的自相互作用是不允许的，因为ψ^3(除违反洛伦兹不变性之外)已经具有 9/2 维，因此唯一允许的新相互作用是 Yukawa 项，

$$g\bar{\psi}\psi\phi,$$

尽管类似的相互作用也可以由 Weyl 和 Majoranas 旋量来构造。

当我们添加矢量场时，有可能出现许多新的相互作用。最常见的是 QED 的矢量-旋量相互作用，

$$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

同样，很容易用Weyl和Majoranas旋量构造类似的项。不太重要的是**标量QED**拉氏量，

$$\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2, \qquad \text{which contains} \quad eA^\mu\phi\partial_\mu\phi^*,\ e^2|\phi|^2A^2.$$

这是我们关于导数相互作用的第一个例子，用泛函积分形式来量子化这个理论会

更容易，因此我们将其讨论推迟到第九章。包含矢量的其他可能的洛伦兹不变项是：

$$A^2(\partial_\mu A^\mu) \qquad \text{and} \qquad A^4.$$

虽然远非显而易见，但是这些项会导致矛盾，除非根据一种特殊类型的对称性精确地选择它们的耦合常数，而这种对称性必须涉及多个矢量场。这种对称性是非阿贝尔规范理论的基础，这将是第三部分的主要内容。对于矢量场，质量项$\frac{1}{2}m^2A^2$也是矛盾的，除了某些特殊情况下它被加到 QED 中；在任何情况下，它破坏(阿贝尔或非阿贝尔)规范不变性。

这耗尽了包含标量、旋量和矢量粒子的可能拉格朗日量的列表。有趣的是，目前公认的强、弱和电磁相互作用的模型涵盖上面列出的**所有**类型的相互作用。本章要研究的三种范例的相互作用包括了几乎一半的可能性；我们将在本书后面详细研究其他范例。

现实理论必须是可重正化的这个假设当然是方便的，因为不可重正理论几乎没有预测能力。然而，人们可能仍然会问，**为什么**大自然如此仁慈以至于只使用可重整的相互作用。人们可能已经预料到，真正的自然理论将是一种更一般类型的量子理论。但是可以证明，无论一个基本理论在高能量下显得多么复杂，我们在实验中看到的这个理论的低能量近似应该是一个可重整化的量子场论。我们将在第 12.1 节中论证这一点。

在更实际的层面上，前面的分析强调了非相对论量子力学和相对论量子场论在方法上的巨大差异。由于薛定谔方程中出现的势$V(\mathbf{r})$是完全任意的，所以对于在真实世界中可以发现什么相互作用，非相对论量子力学没有限制。但是我们已经看到量子场论对自然施加了非常严格的限制(反之亦然)。从字面上讲，我们的讨论意味着粒子物理学家剩下的唯一任务是列举存在的基本粒子，并测量它们的质量和耦合常数。虽然这种观点可能过于傲慢，但可想而知的事实是，这无疑是一个迹象，表明粒子物理学家正朝着一个基本理论走在正确轨道上。

给定一组粒子和耦合常数，我们仍然必须计算出实验结果。我们如何分析相互作用的场论的量子力学？为了了解相互作用理论的性质。如果我们能明确地解出至少几个例子来会很好(也就是，精确的本征值和本征矢，像我们对自由理论所做的那样)。不幸的是，这说起来容易做起来难。在两个以上的时空维度上，

目前还不知道明确可解的相互作用场论，而且即使在那里，可解模型也涉及特殊的对称性和相当大的技术复杂性*。研究这些理论将是有趣的，但是在这个阶段几乎不值得努力。相反，我们将依靠一种更简单和更普遍适用的方法：将相互作用项H_{int}视为微扰，尽可能在微扰论中计算它的影响，并希望耦合常数足够小，这就给出了精确答案的合理近似值。事实上，通过使用**费曼图**，我们得到的微扰级数在结构上会变得非常简单，至少可以把相互作用的影响可视化到任意高阶。

对相对论场论微扰级数的这种简化是 Tomonaga、Schwinger 和 Feynman 的巨大进展。为实现这种简化，他们每个人都独立地找到了一种方法来重新计算量子力学，以消除时间的特殊作用，然后应用他的新观点将微扰展开的每个项重新构造为时空过程。在第 9 章中，我们将从时空的观点出发，使用费曼的**泛函积分**方法来发展量子场论。在本章中，我们遵循由 Dyson 提出的一条更简单的分析路线，从量子力学的传统机制推导出微扰论的时空图像**。

4.2 关联函数的微扰展开

接下来，让我们开始研究用于相互作用场的微扰论，旨在形成一种形式理论，使我们能够将微扰级数可视化为时空过程。虽然我们不需要重新计算量子力学，但我们将以一种便于我们使用的形式重新推导依赖于时间的微扰论。最后，当然，我们要计算散射截面和衰变率。然而，就目前而言，让我们不那么雄心勃勃，尝试计算ϕ^4理论中一个更简单(但更抽象)的量，即**两点关联函数**或**两点格林函数**，

$$\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle\,, \tag{4.10}$$

我们引入符号$|\Omega\rangle$来表示相互作用理论的基态，这通常不同于自由理论的基态$|0\rangle$。插入编时符号T以方便以后使用。关联函数可以从物理上解释为粒子或激发态在y和x之间的传播振幅。在自由理论中，它仅仅是费曼传播子：

---

*结语部分简要介绍了精确可解量子场论。

** 有关 Tomonaga、Schwinger、Feynman 和 Dyson 贡献的历史记录，请参阅 Schweber(1994)。

$$\langle 0|\, T\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle_{\text{free}} = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i\,e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}. \tag{4.11}$$

我们想知道这种表达在相互作用的理论中如何改变。一旦我们分析了两点关联函数，就很容易把我们的结果推广到更高的关联函数(出现两个以上场算符)。在第 4.3 和 4.4 节中，我们将继续分析关联函数，最终发展费曼图的形式，以用于微扰地求解它们。然后在第 4.5 和 4.6 节中，我们将学习如何使用相同的技术计算截面和衰变率。

为了解决这个问题，我们把ϕ^4理论的哈密顿量写成

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = H_{\text{Klein–Gordon}} + \int d^3x\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4(\mathbf{x}). \tag{4.12}$$

我们想得到两点关联函数(4.10)在λ下的一个幂级数表达式。相互作用哈密顿H_{int}从两个地方进入(4.10)：首先在海森堡场的定义中，

$$\phi(x) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}; \tag{4.13}$$

其次，就是在$|\Omega\rangle$的定义中。我们必须用我们懂得如何操作的量来表示$\phi(x)$和$|\Omega\rangle$：自由场算符和自由理论真空$|0\rangle$。

从$\phi(x)$开始是最容易的。在任何固定时间t_0，我们当然可以像阶梯算符一样展开：

$$\phi(t_0,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right).$$

然后为了在$t \neq t_0$得到$\phi(t,\mathbf{x})$，我们像以往一样换到海森堡表象：

$$\phi(t,\mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0,\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)}.$$

对于$\lambda = 0$，H变成H_0，这化简为

$$\phi(t,\mathbf{x})\big|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0,\mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t,\mathbf{x}). \tag{4.14}$$

当λ很小时，这个表达式仍然给出$\phi(x)$的时间依赖中最重要的部分，因此给这个量取一个名字是很方便的：**相互作用绘景场**，$\phi_I(t,\mathbf{x})$。由于我们可以对H_0进行对角化，所以很容易显式地构造ϕ_I：

$$\phi_I(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\left(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\right)\Big|_{x^0=t-t_0}. \tag{4.15}$$

这仅仅是第二章熟悉的自由场表达式。

现在的问题是用ϕ_I表示完整的海森堡场ϕ。

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t,\mathbf{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &\equiv U^\dagger(t,t_0)\phi_I(t,\mathbf{x})U(t,t_0),\end{aligned} \tag{4.16}$$

这里我们定义幺正算符

$$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}, \tag{4.17}$$

称为相互作用绘景传播子或时间演化算符。我们想用ϕ_I完全表示$U(t,t_0)$，因为对于ϕ_I我们有用阶梯算符展开的显式表达式。为此，我们注意到$U(t,t_0)$是如下简单微分方程(薛定谔方程)的唯一解，有着初始条件$U(t_0,t_0)=1$：

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)}\big(H-H_0\big)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}\big(H_{\text{int}}\big)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}\big(H_{\text{int}}\big)e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_I(t)\,U(t,t_0),\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}\big(H_{\text{int}}\big)e^{-iH_0(t-t_0)} = \int d^3x\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4 \tag{4.19}$$

是相互作用绘景中相互作用哈密顿量。这个关于$U(t,t_0)$的微分方程的解应该类似于$U\sim\exp(-iH_It)$；这是我们所期望的根据ϕ_I写出的关于U的公式。做得更仔细，我们将证明实际的解是λ的幂级数：

$$\begin{aligned}U(t,t_0) = 1 &+ (-i)\int_{t_0}^{t}dt_1\,H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\,H_I(t_1)H_I(t_2) \\ &+ (-i)^3\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3\,H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3) + \cdots.\end{aligned} \tag{4.20}$$

为验证这一点，只需要求微分：每个项给出了前一项乘以$-iH_I(t)$。对于$t=t_0$，初始条件$U(t_0,t_0)=1$显然被满足。

注意，(4.20)中H_I的各种因子按编时排列，时间晚的在左边。这使得我们可以使用编时符号T来大大简化表达式。例如，H_I^2项可以被写为:

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\,H_I(t_1)H_I(t_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\,T\big\{H_I(t_1)H_I(t_2)\big\}. \tag{4.21}$$

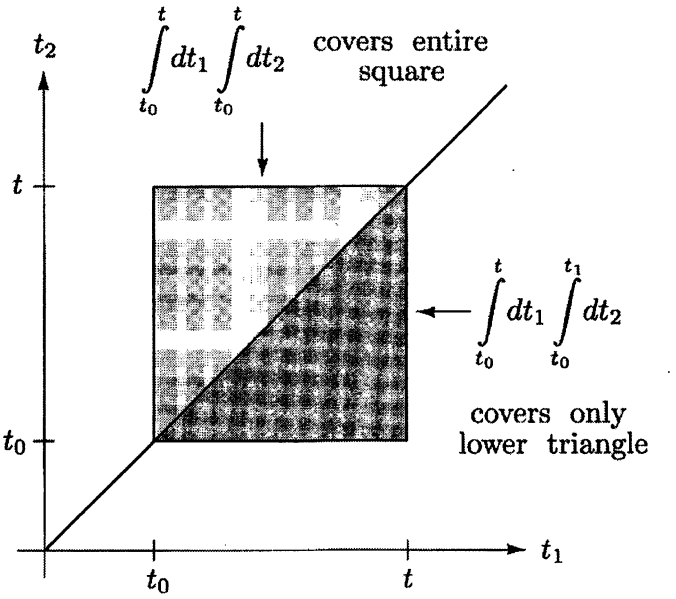


图 4.1 (4.21)式子的几何解释

右边的二重积分仅仅是对一切都记了两次数，因为在$t_1 - t_2$平面中，被积函数$T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}$关于线$t_1 = t_2$是对称的(参见图 4.1)。

类似的等式适用于更高的项：

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots dt_n \, T\{H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\}.$$

这种情况有点难以想象，但要说服自己它是对的并不难。使用这个等式，我们现在可以以非常紧凑的形式来写$U(t, t_0)$：

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^{t} dt_1 \, H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \, dt_2 \, T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \cdots \\ &\equiv T\left\{ \exp\left[-i \int_{t_0}^{t} dt' \, H_I(t') \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

其中编时指数仅定义为泰勒级数的每一项都是编时的。当我们进行实际计算时，我们只保留级数前几项，编时的指数只是书写和记住正确表达式的一种紧凑方式。

我们现在已经掌控了$\phi(t, \mathbf{x})$，完全用ϕ_I写出了它。然而，在继续考虑$|\Omega\rangle$之前，可以方便地推广U的定义，允许它的第二个参数取值，而不是我们的“参考时间”t_0。

正确的定义很自然的为：

$$U(t,t') \equiv T\left\{\exp\left[-i\int_{t'}^{t} dt''\, H_I(t'')\right]\right\}. \qquad (t \geq t') \tag{4.23}$$

从这一点出发，有几个性质需要验证。首先，$U(t,t')$满足相同的微分方程(4.18)，

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = H_I(t)U(t,t'), \tag{4.24}$$

但现在初始条件为，在$t=t'$时$U=1$。从这个等式你可以看出:

$$U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0(t'-t_0)}, \tag{4.25}$$

这证明了U是幺正的。最后，$U(t,t')$满足下列恒等式(对于$t_1 \geq t_2 \geq t_3$)：

$$\begin{aligned} U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) &= U(t_1,t_3); \\ U(t_1,t_3)\left[U(t_2,t_3)\right]^\dagger &= U(t_1,t_2). \end{aligned} \tag{4.26}$$

现在我们可以继续讨论$|\Omega\rangle$，因为$|\Omega\rangle$是H的基态，我们可以通过下面的过程来将它区别对待。想象一下，从H_0的基态$|0\rangle$开始，通过H随着时间演化：

$$e^{-iHT}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle,$$

其中E_n是H的本征值。我们必须假设$|\Omega\rangle$与$|0\rangle$有一些重叠，即$\langle\Omega|0\rangle \neq 0$(如果不是这种情况，$H_I$就绝不是一个小的扰动)。然后上面级数包含了$|\Omega\rangle$，我们可以写:

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle,$$

其中$E_0 \equiv \langle\Omega|H|\Omega\rangle$(能量的零点将由$H_0|0\rangle = 0$定义)。由于对所有$n\neq 0$, $E_n > E_0$，我们可以通过令T在微虚的方向趋向∞：$T\to\infty(1-i\epsilon)$，来摆脱级数中的所有$n\neq 0$项。然后对于$n=0$，指数因子e^{-iE_nT}消失得最慢，我们有

$$|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0T}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}e^{-iHT}|0\rangle. \tag{4.27}$$

既然T现在很大，我们可以用一个小常数来移动它：

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}e^{-iH(T+t_0)}|0\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(t_0-(-T))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}e^{-iH(t_0-(-T))}e^{-iH_0(-T-t_0)}|0\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left(e^{-iE_0(t_0-(-T))}\langle\Omega|0\rangle\right)^{-1}U(t_0,-T)|0\rangle. \end{aligned} \tag{4.28}$$

在第二行中，我们使用了$H_0|0\rangle = 0$。忽略前面的c数因子，这个表达式告诉我们，我们可以通过算符U简单地将$|0\rangle$从时间$-T$演化到时间t_0来得到$|\Omega\rangle$。同样，我们也可以表达$\langle\Omega|$：

$$\langle\Omega| = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \langle 0|\, U(T,t_0) \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\,\Omega\rangle\right)^{-1}. \tag{4.29}$$

让我们把两个点的关联函数放在一起。目前，假设$x^0 > y^0 > t_0$。然后

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\,\Omega\rangle\right)^{-1} \langle 0|\, U(T,t_0) \\ &\quad \times \left[U(x^0,t_0)\right]^\dagger \phi_I(x) U(x^0,t_0) \left[U(y^0,t_0)\right]^\dagger \phi_I(y) U(y^0,t_0) \\ &\quad \times U(t_0,-T)\,|0\rangle \left(e^{-iE_0(t_0-(-T))} \langle\Omega|\,0\rangle\right)^{-1} \\ &= \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \left(|\langle 0\,|\Omega\rangle\,|^2 e^{-iE_0(2T)}\right)^{-1} \\ &\quad \times \langle 0|\, U(T,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-T)\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

它开始看起来简单了，除了前面的尴尬因子。为了摆脱它，可以除以以下形式表示的 1：

$$1 = \langle\Omega|\,\Omega\rangle = \left(|\langle 0\,|\Omega\rangle\,|^2 e^{-iE_0(2T)}\right)^{-1} \langle 0|\, U(T,t_0)U(t_0,-T)\,|0\rangle\,.$$

于是我们的公式，仍然对于$x^0 > y^0$，变成

$$\langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\, U(T,x^0)\phi_I(x)U(x^0,y^0)\phi_I(y)U(y^0,-T)\,|0\rangle}{\langle 0|\, U(T,-T)\,|0\rangle}.$$

现在注意这个表达式两边的所有场都是按时间顺序排列的。如果我们考虑$y^0 > x^0$的情况，这仍然是正确的。因此，我们得到我们的最终表达式，现在对于任何x^0和y^0都有效：

$$\langle\Omega|\,T\{\phi(x)\phi(y)\}\,|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\,T\left\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt\, H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\,T\left\{\exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt\, H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}. \tag{4.31}$$

考虑编时乘积的优点是显而易见的：它允许我们把所有的东西都放在一个大的T算符中。类似的公式适用于任意多个场的更高的关联函数；对于左边的ϕ的每个额外因子，在右边加上ϕ_I的一个额外因子。到目前为止，这个表达式是精确的。但它非常适合于做微扰计算，我们只需要将指数的泰勒级数展开式保留到希望保留的项。

4.3 Wick 定理

现在我们已经将计算关联函数的问题降到了计算下式形式的表达式：

$$\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\}\,|0\rangle\,,$$

也就是说，有限数目(但是任意的)自由场算符的编时乘积的真空期望值。对于$n=2$，这个表达式仅仅是费曼传播子。对于较高的n，你可以强行插入ϕ_I的阶梯算符展开式来求解它。然而，在这一节和下一节，我们将看到如何简化这些计算。

再考虑两个场的情况，$\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\}|0\rangle$。我们已经知道如何计算这个量，但是现在我们想把它改写成易于计算的形式，并且推广到两个以上的场的情况。要做到这一点，我们首先将$\phi_I(x)$分解成正频和负频部分：

$$\phi_I(x) = \phi_I^+(x) + \phi_I^-(x), \tag{4.32}$$

这里

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}; \qquad \phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\,a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{+ip\cdot x}.$$

这种分解可以对任意自由场进行。它很有用，因为

$$\phi_I^+(x)\,|0\rangle = 0 \qquad \text{and} \qquad \langle 0|\,\phi_I^-(x) = 0.$$

例如，考虑$x^0 > y^0$的情况。然后，两个场的编时乘积是

$$\begin{aligned} T\phi_I(x)\phi_I(y) \underset{x^0>y^0}{=} & \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^+(x)\phi_I^-(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) \\ = & \phi_I^+(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(y)\phi_I^+(x) + \phi_I^-(x)\phi_I^+(y) + \phi_I^-(x)\phi_I^-(y) \\ & + \big[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)\big]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

对于每一项(除了对易子)，所有$a_{\mathbf{p}}$都在所有$a_{\mathbf{p}}^\dagger$的右边。这样的项(例如$a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{l}}$)被称为**正规乘积**，并且真空期望值为零。让我们也可以将正规乘积符号$N()$定义为，把它包含的所有算符置换为正规乘积，例如，

$$N\big(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{q}}\big) \equiv a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}. \tag{4.34}$$

在右边中$a_{\mathbf{p}}$和$a_{\mathbf{q}}$的顺序不会产生差异，因为它们对易*。

*文献中你经常看到用标记: $\phi_1\phi_2$:代替$N(\phi_1\phi_2)$

如果我们考虑$y^0 > x^0$的情况，我们会得到与(4.33)相同的四个正规排序，但是这次最后的对易子将是$[\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)]$。因此，让我们再定义一个量：两个场的**收缩**，如下：

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} \equiv \begin{cases} [\phi^+(x), \phi^-(y)] & \text{for } x^0 > y^0; \\ [\phi^+(y), \phi^-(x)] & \text{for } y^0 > x^0. \end{cases} \tag{4.35}$$

这个量正是费曼传播子：

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)} = D_F(x-y). \tag{4.36}$$

(从这里开始，我们通常会为方便放弃下标I；收缩将总是涉及相互作用绘景的场)

编时和正规乘积之间的关系现在可以非常简单地表达，至少对于两个场：

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = N\{\phi(x)\phi(y) + \overbrace{\phi(x)\phi(y)}\}. \tag{4.37}$$

但是现在我们有了这种新的符号，推广到任意多的场也很容易写下来：

$$\begin{aligned} &T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_m)\} \\ &\quad = N\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_m) + \text{all possible contractions}\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

这个恒等式被称为 **Wick 定理**，我们将在很快证明它。对于$m=2$，它与(4.37)相同。短语"**所有可能的收缩**"意味着在对m个场进行成对地收缩时，每种可能的方式都产生一个项。因此，对于$m=4$，我们有(为简洁，写$\phi(x_a)$为ϕ_a)：

$$\begin{aligned} T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = N\{&\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2}\phi_3\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4 + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \\ &+ \phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4 + \phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3\phi_4} + \phi_1\phi_2\overbrace{\phi_3\phi_4} \\ &+ \overbrace{\phi_1\phi_2}\overbrace{\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3}\phi_4} + \overbrace{\phi_1\overbrace{\phi_2\phi_3\phi_4}}\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

当收缩符号连接不相邻的两个算符时，我们仍然定义它，并给出一个D_F因子。例如，

$$N\{\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}\phi_4\} \qquad \text{means} \qquad D_F(x_1-x_3)\cdot N\{\phi_2\phi_4\}.$$

在真空期望值(4.39)中，因为$\langle 0|N\big(\text{任何算符}\big)|0\rangle = 0$，任何项如果残留有算符未被收缩，它都给出零。只有最后一行中三个完全收缩的项幸存，且它们都是c数，所以我们有：

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = &D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) \\ &+ D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) \\ &+ D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3). \end{aligned} \tag{4.40}$$

现在让我们证明 Wick 定理。自然的证明是通过对场的数目m进行归纳法。我们已经证实了$m=2$的情况。因此，假设对$m-1$个场的定理成立，让我们尝试证明它对m个场也成立。在不损失一般性的情况下，我们可将自己限制为$x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots x_m^0$的情况；如果不是这样，我们只能重新标记点，但不会影响(4.38)的任何一边。然后将 Wick 定理应用到$\phi_2 \cdots \phi_m$，我们得到

$$\begin{aligned} T\{\phi_1 \cdots \phi_m\} &= \phi_1 \cdots \phi_m \\ &= \phi_1 N\Big\{\phi_2 \cdots \phi_m + \begin{pmatrix}\text{all contractions}\\ \text{not involving } \phi_1\end{pmatrix}\Big\} \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) N\Big\{\phi_2 \cdots \phi_m + \begin{pmatrix}\text{all contractions}\\ \text{not involving } \phi_1\end{pmatrix}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

我们想在$N\{\}$中移动ϕ_1^+和ϕ_1^-。对于ϕ_1^-项来说，这很容易：只需将它移进里面，因为(在左边)它已经正规了。具有ϕ_1^+的项必须让它穿过其他所有ϕ，对易到右边，才能按正规顺序排列。例如，考虑没有收缩的项：

$$\begin{aligned} \phi_1^+ N(\phi_2 \cdots \phi_m) &= N(\phi_2 \cdots \phi_m)\phi_1^+ + [\phi_1^+, N(\phi_2 \cdots \phi_m)] \\ &= N(\phi_1^+ \phi_2 \cdots \phi_m) \\ &\quad + N\big([\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3 \cdots \phi_m + \phi_2[\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_4 \cdots \phi_m + \cdots\big) \\ &= N\big(\phi_1^+ \phi_2 \cdots \phi_m + \overbrace{\phi_1 \phi_2}\phi_3 \cdots \phi_m + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} \cdots + \cdots\big). \end{aligned}$$

将最后一行的第一项与(4.41)中ϕ_1^-项的一部分结合，给出$N\{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_m\}$，因此我们现在有了Wick定理右边的第一项，以及涉及ϕ_1与另一个场的单次收缩的所有可能项。类似地(4.41)中含有单次收缩的项，将产生出包含该收缩和另一个收缩(ϕ_1与其他场之一)的所有可能的项。用(4.41)的所有的项来这样做，我们最终得到包括ϕ_1的所有场的所有收缩，。因此归纳步骤是完整的，这证明了Wick定理。

4.4 费曼图

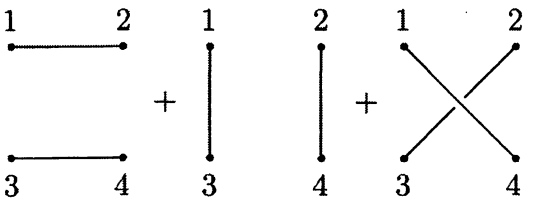
Wick 定理允许我们将下列形式的任何表达式

$$\langle 0|\, T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\}\,|0\rangle$$

转换为费曼传播子的积的和。现在我们准备将这些表达式用图进行解释。首先考虑四个场的情况，所有场都在不同的时空点，如我们在(4.40)中得到的。让我们用圆点表示x_1到x_4的每个点，并且每个因子$D_F(x-y)$由一条x连接到y的线表示。

然后，(4.40)可以表示为三个图的总和(称为**费曼图**)：

$$\langle 0|\,T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}\,|0\rangle =$$



(4.42)

虽然这个量并不完全可以测量，但是图确实给出了一种解释：粒子是在两个时空点产生的，从每个点传播到另一个点，然后它们被湮灭。这可能以三种方式发生，对应于将点成对连接的三种方式，如三个图所示。该过程的总振幅是三个图的和。

当表达式在同一个时空点包含多个场时，事情变得更加有趣。现在让我们回到两点函数$\langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle$的计算，并使用公式(4.31)。我们将忽略分母直到本节的末尾。而分子的指数展开为幂级数，是

$$\langle 0|\,T\Big\{\phi(x)\phi(y)\;+\;\phi(x)\phi(y)\Big[-i\int dt\,H_I(t)\Big]\;+\cdots\Big\}\,|0\rangle\,. \tag{4.43}$$

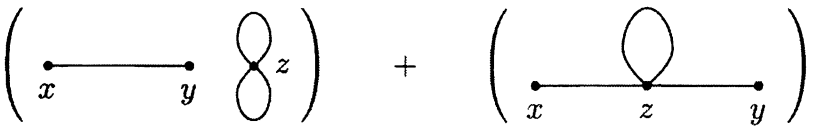
第一个项给出了自由场结果，$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = D_F(x-y)$，而第二项在$\phi^4$理论中为

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,T\Big\{\phi(x)\phi(y)\,(-i)\int dt\int d^3z\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big\}\,|0\rangle\\ &\qquad=\langle 0|\,T\Big\{\phi(x)\phi(y)\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)\int d^4z\,\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\Big\}\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

现在应用 Wick 定理。我们得到的每一项，对应于每一种将这六个ϕ算符彼此成对收缩的方法。有 15 种方法可以做到这一点，但幸运的是，其中只有两种方法是真的不同的。如果我们用$\phi(y)$来收缩$\phi(x)$，那么有三种方式可以将四个$\phi(z)$彼此收缩，并且这三种方式给出相同的表达式。另一种可能性是，将$\phi(x)$与$\phi(z)$中的一个(四个选择)、$\phi(y)$与其他中的一个(三个选择)收缩，其余两个$\phi(z)$彼此收缩(一个选择)。有十二种方法可做到这一点并都给出相同表达式。因此我们有

$$\begin{aligned}&\langle 0|\,T\Big\{\phi(x)\phi(y)\,(-i)\int dt\int d^3z\,\frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big\}\,|0\rangle\\ &\quad=3\cdot\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)D_F(x-y)\int d^4z\,D_F(z-z)D_F(z-z)\\ &\qquad+12\cdot\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)\int d^4z\,D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-z).\end{aligned} \tag{4.44}$$

如果我们将每项表示为费曼图，我们可以更好地理解这个表达式。再次，我们把每个收缩D_F画成一条线，每个点画成一个圆点。但是这次我们必须区分“外部”点，x和y，以及“内部”点z；每个内部点都与$(-i\lambda)\int d^4z$的因子相关联。我们将稍后再担心常数因子。使用这些规则，我们可以看到上面的表达式(4.44)等于两个图的和：



我们把这些图中的线称为**传播子**，因为它们代表传播振幅D_F。四个线相遇的内部点称为**顶点**。因为$D_F(x-y)$是自由Klein-Gordon粒子在x和y之间传播的振幅，所以实际上这些图将解析公式解释为，发生在时空中的粒子产生、传播和湮灭的过程。

现在让我们尝试一个更复杂的收缩，从关联函数的展开中的λ^3项开始：

$$\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,\tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{-i\lambda}{4!}\right)^3\int d^4z\,\phi\phi\phi\phi\int d^4w\,\phi\phi\phi\phi\int d^4u\,\phi\phi\phi\phi\,|0\rangle$$

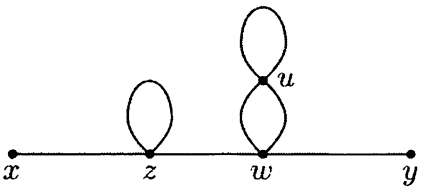
$$= \frac{1}{3!}\left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^3\int d^4z\,d^4w\,d^4u\;D_F(x-z)D_F(z-z)D_F(z-w)$$

$$\times D_F(w-y)D_F^2(w-u)D_F(u-u). \qquad (4.45)$$

给出这个相同表达式的“不同”收缩的数量很大：

$$\underbrace{3!}_{\substack{\text{interchange}\\ \text{of vertices}}} \times \underbrace{4\cdot 3}_{\substack{\text{placement of}\\ \text{contractions}\\ \text{into } z \text{ vertex}}} \times \underbrace{4\cdot 3\cdot 2}_{\substack{\text{placement of}\\ \text{contractions}\\ \text{into } w \text{ vertex}}} \times \underbrace{4\cdot 3}_{\substack{\text{placement of}\\ \text{contractions}\\ \text{into } u \text{ vertex}}} \times \underbrace{1/2}_{\substack{\text{interchange}\\ \text{of } w\text{–}u\\ \text{contractions}}}$$

这些组合学因子的乘积是 10368，大约是 135135 个可能的 14 个算符的全收缩的总和的 1/13。这种特殊收缩的结构可以用下面的“仙人掌”图来表示：

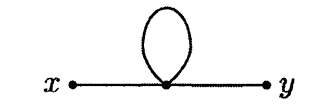


显然按照惯例让这一个图代表所有 10368 个相同的项的总和。

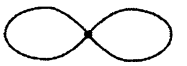
在实践中人们总是先画图，用它作为帮助记忆的策略以写下解析表达式。但是问题出现了，整体的常数是什么？当然我们可以像上面一样计算它：我们可以将每个顶点与一个因子$\int d^4z(-i\lambda/4!)$关联，放入来自泰勒级数的$1/n!$，然后通过写出(4.45)中场的乘积并计数来进行组合学计算。但是来自泰勒级数的$1/n!$几乎总是能抵消掉来自交换顶点的$n!$，所以我们可以仅仅忽略所有这样的因子。此外，一般的顶点有四条线来自四个不同的地方，所以这些收缩到$\phi\phi\phi\phi$的不同安排产生因子4!(如上面的ω顶点)，它抵消掉了$(-i\lambda/4!)$中的分母。因此很方便地，将每个顶点与表达式$\int d^4z(-i\lambda)$关联(这是ϕ^4耦合中4!出现的原因!)。

在上面的图中，这个方案给出了一个过大的常数，为$8=2\cdot 2\cdot 2$，即图的对称因子。两个因子 2 来自于在同一顶点出发和终止的那些线：在这样一条线的两末端互换的情况下，该图是对称的。另一个因子 2 来自连接ω和u的两个传播子：在两条线彼此互换的情况下，这个图是对称的。第三种可能的对称类型是两个顶点的等价性。为了得到正确的图的总常数，我们除以它的对称因子，它通常是在不改变图的情况下交换组件的方式的数目。

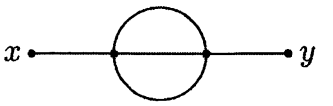
大多数人从不需要求解一个对称因子大于 2 的图，因此不必过于担心这些技术问题。但这里有几个例子，令你从上述规则中得到一些感觉：



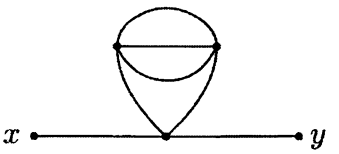
$S=2$



$S=2\cdot 2\cdot 2=8$



$S=3!=6$



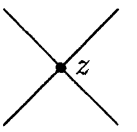
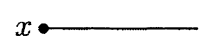
$S=3!\cdot 2=12$

当有疑问时，总是可以通过对等价的收缩进行计数来确定对称因子，正如我们上面所做的。

现在我们准备总结一下计算$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$的表达式(4.31)分子的规则

$$\langle 0|T\Big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\Big[-i\int dt\,H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle = \begin{pmatrix}\text{sum of all possible diagrams}\\ \text{with two external points}\end{pmatrix},$$

其中每个图是由传播子、顶点和外部点构成的。用于将解析表达式与图关联的规则称为费曼规则。在ϕ^4理论中，规则是：

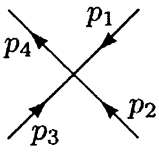
1. For each propagator,  $= D_F(x-y)$;
2. For each vertex,  $= (-i\lambda)\int d^4z$;
3. For each external point,  $= 1$;
4. Divide by the symmetry factor.

解释这些规则的一种方法是将顶点因子$(-i\lambda)$看作粒子在顶点处发射和/或吸收的振幅。积分$\int d^4z$指示我们对可以发生这个过程的所有点求和。这只是量子力学的**叠加**原理：当一个过程可以以另一种方式发生时，我们将每一种可能方式的振幅**相加**。为了计算每个单独的振幅，费曼规则告诉我们，将过程的每个独立部分的振幅(传播子和顶点因子)**相乘**。

由于这些规则是根据时空点x、y等来编写的，因此它们有时被称为位置空间费曼规则。在大多数计算中，通过引入每个传播子的傅里叶展开式，在动量下表示费曼规则更为简单：

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\,e^{-ip\cdot(x-y)}. \tag{4.46}$$

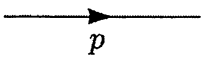
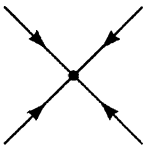
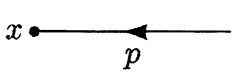
为了在图中表示它，可通过给每个传播子分配一个四动量p，用箭头指示方向(因为$D_F(x-y)=D_F(y-x)$，所以p的方向是任意的)于是当四条线在一个顶点相遇时，图的z依赖因子是



$$\longleftrightarrow \quad \int d^4z\,e^{-ip_1z}e^{-ip_2z}e^{-ip_3z}e^{+ip_4z} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-p_4). \tag{4.47}$$

换句话说，动量在每个顶点都是守恒的。现在，来自顶点的δ函数可以被用来执

行来自传播子的一些动量积分。我们剩下的**动量空间的费曼规则**如下：

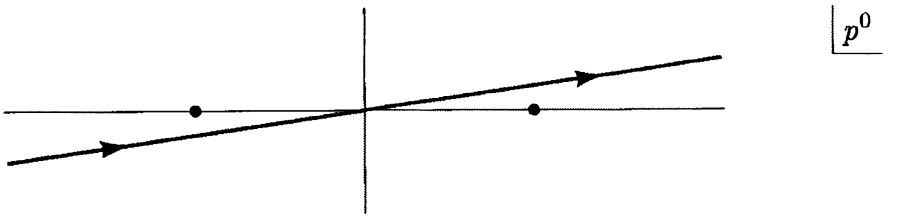
1. For each propagator,  $= \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$;
2. For each vertex,  $= -i\lambda$;
3. For each external point,  $= e^{-ip\cdot x}$;
4. Impose momentum conservation at each vertex;
5. Integrate over each undetermined momentum: $\displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$;
6. Divide by the symmetry factor.

同样，我们可以把每个因子解释为过程中对应的部分的**振幅**，积分来自叠加原理。外点的指数因子只是粒子出现在那个点并具有所需动量的振幅，或者，取决于箭头的方向，指具有确定动量的粒子在那个点被发现的振幅。

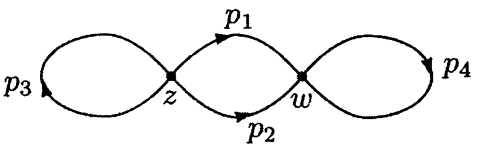
这几乎完成了我们对关联函数计算的讨论，但是仍然有一些松散的结束。首先，大时间T取$\infty(1-i\epsilon)$发生了什么？我们在这一节中，从等式(4.43)开始就完全掩饰了它。放回它的地方是等式(4.47)，这里我们不简单的对d^4z积分，代替的应该是

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^{T} dz^0 \int d^3z\, e^{-i(p_1+p_2+p_3-p_4)\cdot z}.$$

指数在$z^0 \to \infty$或$z^0 \to -\infty$时很大，除非它的幅角完全是虚的。为了达到这个目的，我们可以让每个p^0有一个小的虚部：$p^0 \propto (1+i\epsilon)$。但是，这正是我们在计算$D_F$所遵循的费曼边界条件时所做的：我们沿着被旋转到稍微偏离实轴的围道进行积分，使得$p^0 \propto (1+i\epsilon)$为：



当我们在(4.46)取极限$T \to \infty$时，T的显式依赖性似乎消失了。但考虑图



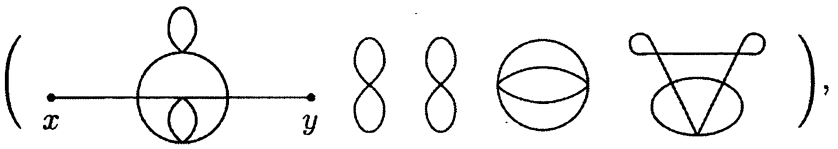
(4.48)

左边顶点的δ函数是$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)$，所以右边顶点动量守恒被自动满足，在那里我们得到$(2\pi)^4\delta(0)$。通过回到位置空间这个尴尬的因子很容易理解。它只是$d^4\omega$对一个常数的积分：

$$\int d^4w\,(\text{const}) \propto (2T)\cdot(\text{volume of space}). \tag{4.49}$$

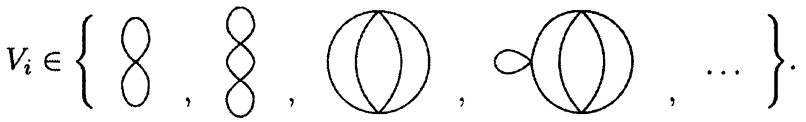
这仅仅告诉我们，时空过程(4.48)可以发生在空间中的任何地方，以及$-T$和T之间的任何时间。图中每个非连通的部分——即每个没有连接到外点的那部分都将有这样的一个因子：$(2\pi)^4\delta(0) = 2T\cdot V$。

借助一个非常漂亮的等式——**非连通图的指数化**，可以更好地理解这些图对关联函数的贡献。它的工作原理如下。典型的图具有形式



(4.50)

包含有连接到x和y的一个部分，以及一些非连通的部分(因为每个顶点都有偶数条线进入，所以x和y必须相互连通)。用V_i标记各种可能非连通部分：



(4.51)

元素V_i在内部连接，但是没有与外点连接。假设这样一个图(比如(4.50))，除了与x和y连接的那个部分之外，对于每个i，形式为V_i的部分有n_i个(在任何给定的图中，非零的n_i将只有有限个)。如果我们也让V_i表示V_i那个部分的值，那么这种图的值是

$$(\text{value of connected piece})\cdot\prod_i \frac{1}{n_i!}(V_i)^{n_i}.$$

其中$1/n_i!$是对称因子，来自n_i个相同的V_i的互换。所有图的总和，代表着我们关

于两点关联函数的公式的分子，于是：

$$\sum_{\substack{\text{all possible}\\ \text{connected}\\ \text{pieces}}} \sum_{\text{all } \{n_i\}} \begin{pmatrix} \text{value of} \\ \text{connected piece} \end{pmatrix} \times \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

这里“所有$\{n_i\}$”的意思是“所有非负整数的有序集$\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$”。将连通部分的因子的总和从这个表达式中提出，给出

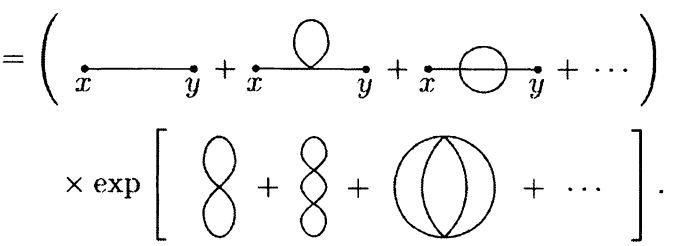
$$= \left(\sum \text{connected} \right) \times \sum_{\text{all } \{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right),$$

其中($\sum$ connected)是所有连通部分的值之和的缩写。不难看出，表达式的其余部分也可以被分解为(尝试倒着推导)：

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum \text{connected} \right) \times \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} V_1^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} V_2^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3} \frac{1}{n_3!} V_3^{n_3} \right) \cdots \\
&= \left(\sum \text{connected} \right) \times \prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) \\
&= \left(\sum \text{connected} \right) \times \prod_i \exp(V_i) \\
&= \left(\sum \text{connected} \right) \times \exp\left(\sum_i V_i \right).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

我们刚刚证明了，**所有图**的和等于所有**连通**图的和，乘以所有**非连通**图的和的指数(我们应该在等式的右边说“部分”而不是“图”，但是从现在开始，我们通常只称单个部分为“图”)。 从图上看，等式是

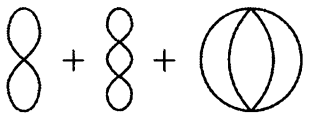
$$\lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp\left[-i \int_{-T}^{T} dt\, H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$



(4.53)

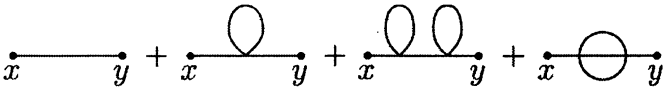
现在考虑我们两点函数公式(4.31)的**分母**。通过与上面相同的论证，它只是

$$\langle 0|\,T\Big\{\exp\Big[-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)\Big]\Big\}\,|0\rangle = \exp\Big[\quad + \quad + \quad + \cdots\quad\Big],$$



它抵消了分子中的非连通图的指数。这是公式的最后简化，现在写为：

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\,T\big[\phi(x)\phi(y)\big]\,|\Omega\rangle\\ &\quad=\ \text{sum of all connected diagrams with two external points}\\ &\quad=\end{aligned}$$



$$+\cdots. \tag{4.54}$$

我们已经从我们原来的公式(4.31)走了很长的路。

在抵消了关联函数公式中的非连通图之后，我们可能会暂停片刻，以此返回并物理地解释它们。要看的地方是(4.30)，可以写为

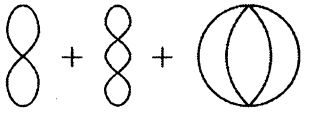
$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\langle 0|\,T\Big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp\Big[-i\textstyle\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)\Big]\Big\}\,|0\rangle\\ &\qquad=\langle\Omega|\,T\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle\cdot\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\big(|\langle 0\,|\Omega\rangle\,|^2e^{-iE_0(2T)}\big).\end{aligned}$$

只看两边的T依赖部分，这意味着

$$\exp\Big[\sum_i V_i\Big]\propto\exp\Big[-iE_0(2T)\Big]. \tag{4.55}$$

由于每个非连通图V_i都包含$(2\pi)^4\delta(0)=2T\cdot V$的因子，因此这给出了真空能量密度的公式(相对于由$H_0|0\rangle=0$设置的能量零点)：

$$\frac{E_0}{\text{volume}}=i\Big[\quad + \quad + \quad + \cdots\quad\Big]\Big/\Big[(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)\Big]. \tag{4.56}$$



我们应该强调右手边与T和(体积)无关，特别令人放心的是看到E_0与空间体积成正比。在第 11 章中，我们将发现这个公式实际上是有用的。

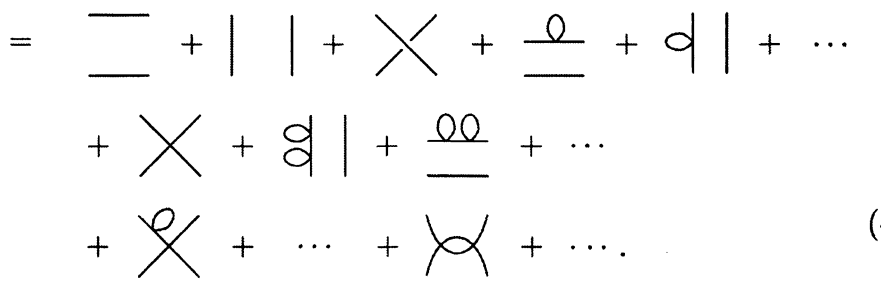
这就完成了我们对两点关联函数的分析。推广到更高的关联函数是很容易的：

$$\langle\Omega|\,T\big[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\big]\,|\Omega\rangle=\begin{pmatrix}\text{sum of all connected diagrams}\\ \text{with } n \text{ external points}\end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

与前面一样，非连通图通过相同的论证进行指数化、因子化，并被抵消。然而，术语中存在着潜在的混淆。“非连通”的意思是“与所有外部点都不连接”——与

(4.51)的图完全相同(它们有时被称为“真空气泡”或“真空到真空的跃迁”)。在更高的关联函数中，图也可以在另一个意义上说是非连通的。例如，考虑四点函数：

$\langle\Omega|\, T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \,|\Omega\rangle$



(4.58)

在许多这些图中，外部点**彼此**不连通。这种图不是指数或因子，它们和完全连通图(其中的任何点都可以被到达，只要从其他任何点出发通过沿线移动)一样，对振幅有贡献。

注意，在ϕ^4理论中，奇数个场的所有关联函数都为零，因为不可能绘制一个具有奇数个外部点的被允许的图。通过回到 Wick 定理，我们也可以看到这一点：相互作用哈密顿H_I包含偶数个场，所以奇关联函数的微扰展开中的所有项都包含奇数个场。但是，不可能完全成对地收缩奇数个场，并且只有完全收缩的项的真空期望值不为零。

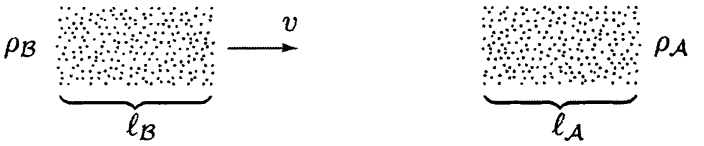
4.5 截面与S矩阵

现在我们有一个非常漂亮的公式，方程(4.57)，用于计算一个非常抽象的量：n点关联函数。我们的下一个任务是找出同样漂亮的方法去计算实际可测量的量：截面和衰变率。在本节中，在简要回顾这些对象的定义之后，我们(通过相当有技术性但相当仔细的推导)将它们与更原始的量——S矩阵相关联。在下一节中，我们将学习如何使用费曼图计算S矩阵的矩阵元。

截面

探测基本粒子行为的实验，特别是在相对论状态下，是散射实验。我们将两束具有明确定义的动量的粒子相撞，并观察结果如何。任何特定的末态的可能性可以用**截面**来表达，截面是碰撞粒子固有的物理量，因此允许我们比较具有不同**束流大小**和**强度**的两个不同实验。

截面的定义如下所示。考虑一个靶，是静止的A型粒子，密度为ρ_A(单位体积的粒子数)。一束B型粒子瞄准这个靶，具有密度ρ_B和速度v：



让ℓ_A和ℓ_B成为粒子簇的长度。然后，我们期望散射事件的总数(或者任何特定期望类型的散射事件)与ρ_A、ρ_B、ℓ_A、ℓ_B以及两个束流共同的截面积A成比例。截面用σ表示，只是事件的总数(无论希望什么类型)除以所有这些量：

$$\sigma \equiv \frac{\text{Number of scattering events}}{\rho_A\, \ell_A\, \rho_B\, \ell_B\, A}. \tag{4.59}$$

这个定义在A和B之间是对称的，所以我们当然可以让B处于静止状态，或者在任何其他参考系中工作。

截面具有面积单位。事实上，它是一个束流中的每个粒子从另一个束流中取出的有效面积，它随后成为我们感兴趣的末态。

在真实束流中，ρ_A和ρ_B 不是常数，束流中心处的粒子密度通常大于边缘处的粒子密度。然而，我们将假定粒子之间的相互作用的范围和单个粒子波包的宽度都比束流直径小。然后我们可以认为ρ_A和ρ_B 在下文中是常数，并且记住，为了计算实际加速器中的事件速率，必须在束流面积上积分：

$$\text{Number of events} = \sigma\, \ell_A\, \ell_B \int d^2x\ \rho_A(x)\, \rho_B(x). \tag{4.60}$$

如果密度是常数，或者如果我们用这公式来计算束流的有效面积A，那么我们有

$$\text{Number of events} = \frac{\sigma N_A N_B}{A}, \tag{4.61}$$

其中N_A和N_B是A和B粒子的总数。

许多不同过程的截面可能与单次散射实验有关。例如，在e^+e^-碰撞中，可以测量产生$\mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-\gamma, \mu^+\mu^-\gamma\gamma$等的截面，以及涉及强子产生的无数过程，更不用说简单的e^+e^-散射。通常，当然，我们不仅要测量末态粒子是什么，还要测量它们产生的动量。在这种情况下，我们对σ的定义(4.59)仍然有效，但是，如

果我们指定所需的确切动量，σ将是无穷小。解决方法是定义**微分截面**，$d\sigma/(d^3p_1 \cdots d^3p_n)$。它是一个简单的量，当在任何小的$d^3p_1 \cdots d^3p_n$上积分时，给出散射到末态动量空间那个区域的截面。各种末态动量并不都是独立的：四个分量总是受到四动量守恒的约束。在最简单的情况下，只有两个末态粒子，只剩下两个无约束的动量分量，通常取其中一个粒子的动量角θ和ϕ。将$d\sigma/(d^3p_1 d^3p_2)$在四个受约束的动量分量上积分，我们就得到了通常的微分截面$d\sigma/d\Omega$。

一个稍微简单的可观测量，是一个不稳定粒子$\mathcal{A}$(假定静止)衰变到特定末态(两个或更多个粒子)的**衰变率**Γ。它被定义为

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Number of decays per unit time}}{\text{Number of } \mathcal{A} \text{ particles present}}. \tag{4.62}$$

粒子的寿命τ是其衰变到所有可能的末态的衰变率之和的倒数(粒子的半衰期为$\tau \cdot \ln 2$)。

在非相对论量子力学中，不稳定的原子态在散射实验中表现为**共振**。在共振能量E_0附近，散射振幅由 Breit-Wigner 公式给出。

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}. \tag{4.63}$$

因此截面具有的峰值的形式为

$$\sigma \propto \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}.$$

共振峰的宽度等于不稳定状态的衰变率。

Breit-Wigner 公式(4.63)也适用于相对论量子力学。特别地，它给出了初始粒子结合形成不稳定粒子然后衰变的过程的散射振幅。不稳定粒子，被视为真空的一个激发态，是不稳定的非相对论原子态的直接类比。如果我们称不稳定粒子的 4 动量为p及其质量为m，我们可以作出(4.63)的相对论不变的推广：

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \approx \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(p^0 - E_{\mathbf{p}} + i(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma/2)}. \tag{4.64}$$

不稳定粒子在一般的参考系中的衰变率为$(m/E_{\mathbf{p}})\Gamma$，符合相对论时间膨胀。虽然(4.64)中的两个表达式在共振附近是相等的，但是左手边明显是洛伦兹不变量，它更加方便。

S矩阵

那么，我们如何计算截面呢？我们必须建立代表初态粒子的波包，用相互作用场论的时间演化算符$\exp(-iHt)$对这个初始状态进行长时间的演化，并将得到的末态与想要得到的一组末态粒子的波包重叠。这给出了产生该末态的概率振幅，这简单地与截面有关。我们将发现，动量空间波包非常窄的极限下，振幅仅取决于波包的动量，而不取决于其形状的细节*。

一些想要的状态$|\phi\rangle$的波包表示可以表达为

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \phi(\mathbf{k}) \, |\mathbf{k}\rangle \,, \tag{4.65}$$

其中$\phi(\mathbf{k})$是空间波函数的傅里叶变换，$|\mathbf{k}\rangle$是相互作用理论中动量$\mathbf{k}$的单粒子态。在自由理论中，我们有$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a^\dagger_{\mathbf{k}} |0\rangle$。$\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$因子将$|\mathbf{k}\rangle$的相对论归一化转换为常规的归一化，其中所有概率的和加起来等于1：

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \qquad \text{if} \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left|\phi(\mathbf{k})\right|^2 = 1. \tag{4.66}$$

我们希望计算的概率是

$$\mathcal{P} = \big|\langle \underbrace{\phi_1\phi_2\cdots}_{\text{future}} | \underbrace{\phi_A\phi_B}_{\text{past}} \rangle\big|^2, \tag{4.67}$$

其中$|\phi_A\phi_B\rangle$是遥远的过去构建的两个波包的状态，$\langle\phi_1\phi_2\cdots|$是遥远的未来构建的多个波包的状态(对应每个末态粒子)。波包定域在空间中，所以每个波包都可以独立于其他波包构造出来。以这种方式构造的态称为**入态**和**出态**。注意，我们使用海森堡绘景：状态是时间独立的，但是我们给态起的名称取决于时间相关的算符的本征值或期望值。因此，在不同时间构造的态具有不同的名称，具有非平凡的重叠，这取决于算符的时间依赖性。

如果我们在遥远的过去设置$|\phi_A\phi_B\rangle$，然后取极限为波包$\phi_i(\mathbf{k}_i)$集中在确定动量$\mathbf{p}_i$上，这就定义了一个具有确定初动量的**入态**$|\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B\rangle_{\text{in}}$。将$|\phi_A\phi_B\rangle$视为这种

*这部分的大部分内容是基于泰勒(1972)，第 2，3 和 17 章给出的非相对论散射的处理。我们集中于相对论理论的额外复杂性，掩饰许多微妙之处，这两种情况都是常见的，泰勒对此作了仔细解释。

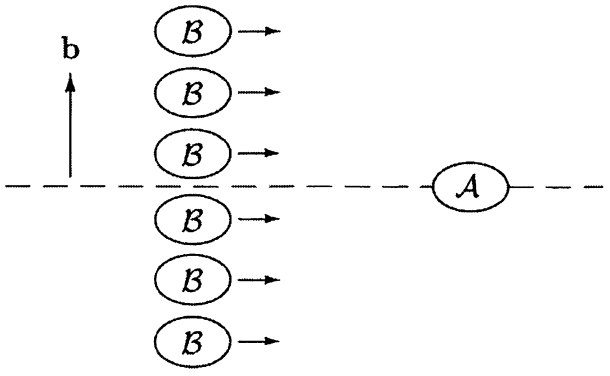


图 4.2 入射波包在碰撞参数b下均匀分布

态的线性叠加是有用的。然而重要的是，要考虑位置空间中的波包ϕ_B相对于ϕ_A的横向位移(参见图4.2)。虽然我们可以把这个隐含在形式$\phi_B(\mathbf{k}_B)$中，但是我们采用的惯例是我们的参考动量空间波函数是共线的(即，具有碰撞参数$\mathbf{b}=0$)，并用显式因子$\exp(-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_B)$写入$\phi_B(\mathbf{k}_B)$来解释空间平移。然后，由于$\phi_A$和$\phi_B$是在不同的位置独立构造的，因此可以将初态写为

$$|\phi_A\phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3k_A}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k_B}{(2\pi)^3}\,\frac{\phi_A(\mathbf{k}_A)\phi_B(\mathbf{k}_B)e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}_B}}{\sqrt{(2E_A)(2E_B)}}\,|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}}. \tag{4.68}$$

我们可以用类似的定义，用在渐近未来形成的确定动量出态来展开$\langle\phi_1\phi_2\cdots|$：**

$${}_{\text{out}}\langle\phi_1\phi_2\cdots| = \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{\phi_f(\mathbf{p}_f)}{\sqrt{2E_f}}\right){}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|.$$

然而，在概率振幅(4.67)中，使用定动量的出态作为末态要容易得多，并且很容易在振幅平方后乘以各种归一化因子。这在物理上是合理的，只要末态粒子探测器主要测量动量，即它们不能分辨德布罗意波长级别的位置。

现在我们可以把实际实验中散射的概率与一组理想化的跃迁振幅联系起来，即是被渐近定义的动量确定的入态和出态之间跃迁，

$${}_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}}. \tag{4.69}$$

**这里和下面，乘积符号(象征性地)应用于括号中的积分以及其他因子；积分也适用于括号之外的部分。

为计算入态与出态的重叠，我们注意到，定义两组态时的约定与时间变换相关：

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}} &= \lim_{T\to\infty}\langle \underbrace{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}_{T}|\underbrace{\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B}_{-T}\rangle \\ &= \lim_{T\to\infty}\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\, e^{-iH(2T)}\,|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.70}$$

在最后一行中，态是在任意公共参考系的时间被定义的。因此，入态和出态由一系列幺正算符的极限联系在一起。这个取极限的幺正算符称为**S矩阵**：

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle_{\text{in}} \equiv \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\, S\,|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle\,. \tag{4.71}$$

S矩阵具有以下结构：如果所讨论的粒子根本不相互作用，S只是恒等算符。即使理论中包含相互作用，这些粒子也有可能只是彼此遗漏。为了分离出S矩阵的有趣部分，即相互作用的部分，我们定义了T矩阵

$$S = \mathbf{1} + iT. \tag{4.72}$$

接下来我们注意到S的矩阵元应该反映 4 动量守恒。因此，S或T应该总是包含一个因子$\delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum p_f)$；提取这个因子，我们定义**不变矩阵元$\mathcal{M}$**，

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots|\, iT\,|\mathbf{k}_A\mathbf{k}_B\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}\big(k_A+k_B-\textstyle\sum p_f\big)\cdot i\mathcal{M}(k_A,k_B\to p_f). \tag{4.73}$$

我们已经用4动量p和k写了这个表达式，但是当然所有的4动量都在质量壳上：$p^0 = E_{\mathbf{p}}$，$k^0 = E_{\mathbf{k}}$(注意，我们的整个处理是针对初始状态仅包含两个粒子的情况进行的。对于3 →多或多→多的相互作用，人们可以发明类似的结构，但是我们在本书中不会考虑这种复杂的实验)。

矩阵元$\mathcal{M}$类似于单粒子量子力学的散射振幅f。它是有用的，因为它允许我们把所有依赖于相互作用哈密顿量(“动力学”)的细节的物理和不依赖于相互作用哈密顿量的物理(“运动学”)分开。在下一节中，我们将讨论如何使用费曼图计算$\mathcal{M}$。但是，我们首先必须指出如何用$\mathcal{M}$重建截面σ。

为了做到这一点，让我们用$\mathcal{M}$计算初态$|\phi_A\phi_B\rangle$发生散射并变成动量落到$d^3p_1\cdots d^3p_n$的小区域中的n个粒子的末态的概率。在我们的归一化中，这种可能性是

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}\to 1\,2\,\ldots n) = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\big|{}_{\text{out}}\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n\;|\;\phi_A\phi_B\rangle_{\text{in}}\big|^2. \tag{4.74}$$

对单靶($\mathcal{A}$)粒子和多个具有不同碰撞参数$\mathbf{b}$的入射($\mathcal{B}$)粒子，散射事件的数量是

$$N = \sum_{\substack{\text{all incident} \\ \text{particles } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2b\, n_{\mathcal{B}}\, \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

其中$n_{\mathcal{B}}$是$\mathcal{B}$粒子数密度(单位面积的粒子)。因为我们假设这个数密度在相互作用的范围内是恒定的，所以$n_{\mathcal{B}}$可以取在积分之外。然后截面是

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2b\, \mathcal{P}(\mathbf{b}). \tag{4.75}$$

用$\mathcal{M}$中导出σ的简单表达式现在是一个相当直接的计算。结合(4.75)、(4.74)和(4.68)，我们有(写为$d\sigma$而不是σ，因为这是一个极小的量)

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\int d^2b\left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}}\int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}}\int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i^*(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}}\right)$$
$$\times\, e^{i\mathbf{b}\cdot(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}-\mathbf{k}_{\mathcal{B}})}\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)^*, \tag{4.76}$$

其中，我们在平方振幅的后半部分使用$\bar{k}_{\mathcal{A}}$和$\bar{k}_{\mathcal{B}}$作为哑积分变量。d^2b积分可给出因子$(2\pi)^2\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp}-\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$。用$\mathcal{M}$写出(4.76)的最后两个因子从而得到更多$\delta$函数。假设我们对没有发生相互作用的向前散射的微小情况不感兴趣，我们可在等式(4.72)中扔掉1，并将这些因子写为

$$\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\right) = i\mathcal{M}(\{k_i\}\to\{p_f\})\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\textstyle\sum k_i - \sum p_f);$$
$$\left({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\right)^* = -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\}\to\{p_f\})\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\textstyle\sum \bar{k}_i - \sum p_f).$$

我们可以使用这些δ函数的第二个，连同$\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp}-\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$，来执行(4.76)中所有六个$\bar{k}$积分。在六个积分中，只有$\bar{k}_{\mathcal{A}}^z$和$\bar{k}_{\mathcal{B}}^z$上的积分需要一些工作：

$$\begin{aligned}
&\int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z d\bar{k}_{\mathcal{B}}^z\,\delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z+\bar{k}_{\mathcal{B}}^z-\textstyle\sum p_f^z)\,\delta(\bar{E}_{\mathcal{A}}+\bar{E}_{\mathcal{B}}-\sum E_f)\\
&\quad=\int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z\,\delta\Big(\sqrt{\bar{k}_{\mathcal{A}}^2+m_{\mathcal{A}}^2}+\sqrt{\bar{k}_{\mathcal{B}}^2+m_{\mathcal{B}}^2}-\textstyle\sum E_f\Big)\Big|_{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z=\Sigma p_f^z-\bar{k}_{\mathcal{A}}^z}\\
&\quad=\frac{1}{\left|\dfrac{\bar{k}_{\mathcal{A}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{A}}}-\dfrac{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{B}}}\right|}\equiv\frac{1}{|v_{\mathcal{A}}-v_{\mathcal{B}}|}.
\end{aligned}\tag{4.77}$$

在最后一行和等式(4.76)的其余部分中，可理解为现在使用了约束$\bar{k}_{\mathcal{A}}^z+\bar{k}_{\mathcal{B}}^z=\sum p_f^z$和$\bar{E}_{\mathcal{A}}+\bar{E}_{\mathcal{B}}=\sum E_f$(除了来自其他四个积分的约束$(k_{\mathcal{A}}^{\perp}=\bar{k}_{\mathcal{A}}^{\perp})$和$(k_{\mathcal{B}}^{\perp}=\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$

之外)。差$|v_A - v_B|$是从实验室系观察到的束流的相对速度。

现在回想一下，初始波包定域在动量空间中，以$\mathbf{p}_A$和$\mathbf{p}_B$为中心。这意味着，我们可以对是$\mathbf{k}_A$和$\mathbf{k}_B$的光滑函数的所有因子，将它们在$\mathbf{p}_A$和$\mathbf{p}_B$处的值求出，并拉出积分之外。这些因子包括$E_A, E_B, |v_A - v_B|$和$\mathcal{M}$——除了剩余δ函数之外的所有因子。这样做后我们得到了表达式

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\frac{\left|\mathcal{M}(p_A, p_B \to \{p_f\})\right|^2}{2E_A 2E_B\,|v_A - v_B|}\int\frac{d^3k_A}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k_B}{(2\pi)^3} \times \left|\phi_A(\mathbf{k}_A)\right|^2\left|\phi_B(\mathbf{k}_B)\right|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum p_f). \tag{4.78}$$

为进一步简化这个公式，我们应该对实际粒子探测器的性质进行更多的思考。我们已经注意到，实际探测器主要投射到动量的本征态。但是实际探测器具有有限的分辨率，也就是说，它们非相干地对有限大小的动量位点求和。通常，对末态动量的测量质量不够高，不能分辨初始波包ϕ_A和ϕ_B的动量扩展引起的这个动量的微小变化。在这种情况下，我们甚至可以把δ函数内部的动量向量$k_A + k_B$看成是由它的中心值$p_A + p_B$很好地近似的。利用这进一步的近似，我们可使用归一化条件(4.66)对k_A和k_B进行积分。这就产生S矩阵元与截面之间关系的最终形式，

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B\,|v_A - v_B|}\left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right) \times \left|\mathcal{M}(p_A, p_B \to \{p_f\})\right|^2 (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f). \tag{4.79}$$

所有对波包形状的依赖消失了。

(4.79)中的末态动量的积分具有结构

$$\int d\Pi_n = \left(\prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - \sum p_f), \tag{4.80}$$

其中P为总初始4动量。这个积分显然是洛伦兹不变的，因为它由一个被4动量δ函数约束的3动量不变积分构成的。这种积分被称为**相对论不变的n体相空间**。在(4.79)的其它成分中，矩阵元$\mathcal{M}$也是洛伦兹不变量。因此，(4.79)的洛伦兹变换性质完全来自前置因子：

$$\frac{1}{E_A E_B |v_A - v_B|} = \frac{1}{|E_B p_A^z - E_A p_B^z|} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu x \nu} p_A^\mu p_B^\nu|}.$$

这不是洛伦兹不变量，但它在沿 z 方向的平动下是不变的。事实上，这个表达式具有一个截面面积的精确的变换性质。

对于末态有两个粒子的特殊情况，我们可以通过部分地求出质心系中的相空间积分来简化一般表达式(4.79)。标记两个末态的动量为p_1和p_2。我们首先选择在δ函数上对$\mathbf{p}_2$的所有三个分量积分，从而实现 3 动量守恒。这使得$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$并将两体相空间上的积分转换为形式

$$\int d\Pi_2 = \int \frac{dp_1\, p_1^2\, d\Omega}{(2\pi)^3\, 2E_1\, 2E_2}\,(2\pi)\delta(E_{\rm cm} - E_1 - E_2), \tag{4.81}$$

其中$E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$, $E_2 = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$和$E_{\rm cm}$是总的初始能量。最后的$\delta$函数上的积分给出

$$\begin{aligned}\int d\Pi_2 &= \int d\Omega\, \frac{p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2}\left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2}\right)^{-1} \\ &= \int d\Omega\, \frac{1}{16\pi^2}\frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\rm cm}}.\end{aligned} \tag{4.82}$$

对于绕碰撞轴对称的反应，两体相空间可以简单写成在质心系中的极角上的积分：

$$\int d\Pi_2 = \int d\cos\theta\, \frac{1}{16\pi}\frac{2|\mathbf{p}_1|}{E_{\rm cm}}. \tag{4.83}$$

最后一个因子在高能量下趋于 1。

将这种简化应用于(4.79)，我们发现对于两个末态粒子，截面形式如下：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{1}{2E_A 2E_B\,|v_A - v_B|}\,\frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2\, 4E_{\rm cm}}\,\big|\mathcal{M}(p_A, p_B \to p_1, p_2)\big|^2. \tag{4.84}$$

在所有四个粒子具有相同质量(包括通常看到的极限$m \to 0$)的特殊情况下，这简化为第一章中引用的公式，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\rm cm}^2} \qquad \text{(all four masses identical)}. \tag{4.85}$$

为了总结这一部分，我们应该用$\mathcal{M}$推导一个微分衰变率$d\Gamma$的公式。正确的表达式只是(4.79)的一个微小的修改，并且很容易猜测：只要从(4.79)中去除(在初态由单粒子组成的情况下)没有意义的因子即可。Γ的定义假定衰变粒子处于静止状态，因此归一化因子$(2E_A)^{-1}$变成$(2m_A)^{-1}$(在任何其他系中，这个因子都会给出通常的时间膨胀)。因此衰变率公式是

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A}\left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\big|\mathcal{M}(m_A \to \{p_f\})\big|^2\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A - \textstyle\sum p_f). \tag{4.86}$$

不幸的是，这个公式的含义还不清楚。因为一个不稳定的粒子不能被发送到无限

遥远的过去，我们使用S矩阵对$\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \to \{p_f\})$的定义(4.93)这文中是没有意义的。然而公式(4.86)是正确的，当$\mathcal{M}$根据 S 矩阵元的费曼规则(我们将在下节介绍)被计算出来时。我们将在第 7.3 节进一步讨论这些问题以及等式(4.86)的证明。在此之前，$\mathcal{M}$作为跃迁振幅的直觉概念应该足够了。

无论末态是否包含几个相同的粒子，方程(4.79)和(4.86)是完全一般的(当然，当存在相同的粒子时，$\mathcal{M}$的计算将非常不同，但这是另一回事)。然而，当对这些公式中的任何一个进行积分以获得总截面或衰变率时，我们必须小心避免多次计算相同的末态。如果末态中有n个相同的粒子，我们必须要么将积分限制为不相等的构型，要么在所有动量集合上进行积分后除以$n!$。

4.6 用费曼图计算S矩阵元

既然我们已经有了用不变矩阵元$\mathcal{M}$表示的截面和衰变率的公式，剩下的唯一任务就是在各种相互作用场论中找到计算各种过程的$\mathcal{M}$的方法。在本节中，我们将根据费曼图写出(并试图激发)$\mathcal{M}$的一个公式。我们将这个公式的实际证明推迟到第 7.2 节，因为该证明有些技术性，并且在我们了解了如何使用公式之后将更容易理解。

从等式(4.71)的定义中回想起，S矩阵仅是t非常大的极限中的时间演化算符$\exp(-iHt)$：

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \, S \, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = \lim_{T \to \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \, e^{-iH(2T)} \, | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle \, . \tag{4.87}$$

为计算这个量，我们想将4.87中的外部平面波态——H的本征态，用未扰动理论中的对应物来代替。我们成功地在等式(4.27)中对真空态$|\Omega\rangle$进行了这样的替换：

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \left(e^{-iE_0 T} \langle \Omega | \, 0 \rangle \right)^{-1} e^{-iHT} \, |0\rangle \, .$$

这一次，我们想建立一种以下形式的关系

$$|\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle \propto \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}}\rangle_0, \tag{4.88}$$

在这里我们省略了一些未知的相位和重叠因子，如(4.27)中的那些。找到这样的关系并非易事。在(4.27)中，我们使用了真空是绝对最低能量的态这个事实。这里我们只能使用更弱的陈述：初态和末态粒子分离良好的的外部状态，才具有与

预先确定的非零动量值一致的最低能量。这是一个很深的问题，它与场论中最基本的难题之一有关，即相互作用不仅影响不同粒子的散射，而且影响单粒子态本身的形式。

如果公式(4.88)可以以这种方式调整，那么我们可以用它将(4.87)的右手边重写为

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|e^{-iH(2T)}|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0\\ &\qquad\propto \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} {}_0\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|T\left(\exp\left[-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)\right]\right)|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0.\end{aligned} \tag{4.89}$$

在求真空期望值时，自由真空态和相互作用真空态之间尴尬的比例因子从最终的公式——方程式(4.31)中抵消了。在目前情况下，这些因子太可怕了，我们甚至没有试图把它们写下来；我们只能希望这里将发生类似的戏剧性抵消。事实上，这样的抵消确实会发生，尽管从我们目前的方法得出这个结论并不容易。加上一个小修改(对于我们目前的目的来说这不重要)，S矩阵的非平凡部分的公式可以简化为以下形式：

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|\,iT\,|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle\\ &\quad=\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\left({}_0\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|T\left(\exp\left[-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)\right]\right)|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0\right)_{\substack{\text{connected,}\\ \text{amputated}}}\end{aligned} \tag{4.90}$$

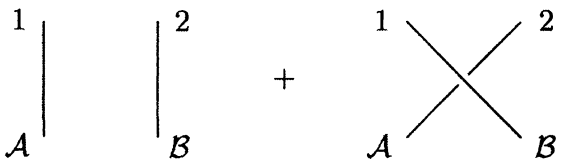
“连通(connected)”和“截腿(amputated)”的贡献指的是对可能的费曼图的限制，这些项将在接下来被定义。我们将在第 7.2 节中证明等式(4.90)。在本节的其余部分中，我们将解释这个公式，并激发出我们添加的新限制。

首先，我们必须学习如何将(4.90)中的矩阵元表示为费曼图的和。让我们在ϕ^4理论中末态有两个粒子的情况下明确地计算前几项。第一项是

$$\begin{aligned}{}_0\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0 &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_\mathcal{A} 2E_\mathcal{B}}\,\langle 0|\,a_1 a_2 a_\mathcal{A}^\dagger a_\mathcal{B}^\dagger\,|0\rangle\\ &= 2E_\mathcal{A}2E_\mathcal{B}(2\pi)^6\Big(\delta(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{p}_\mathcal{B}-\mathbf{p}_2)\\ &\qquad+\delta(\mathbf{p}_\mathcal{A}-\mathbf{p}_2)\delta(\mathbf{p}_\mathcal{B}-\mathbf{p}_1)\Big).\end{aligned} \tag{4.91}$$

δ函数迫使末态与初态相同，所以这个项是$S=\mathbf{1}+iT$中的“$\mathbf{1}$”的一部分，对散射

矩阵元$\mathcal{M}$没有贡献。我们可以用图来表示：



$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|S|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle$的下一项是

$$\begin{aligned} &{}_0\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|T\Big(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\phi_I^4(x)\Big)|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0 \\ &\quad = {}_0\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|N\Big(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,\phi_I^4(x)+\text{contractions}\Big)|\mathbf{p}_\mathcal{A}\mathbf{p}_\mathcal{B}\rangle_0, \end{aligned} \tag{4.92}$$

其中利用了 Wick 定理。由于外部态不是$|0\rangle$，未完全收缩的项不一定消失；我们可以使用来自$\phi_I(x)$的湮没算符来湮灭初态粒子，或者使用来自$\phi_I(x)$的产生算符来产生末态粒子。例如，

$$\begin{aligned} \phi_I^+(x)|\mathbf{p}\rangle_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\,a_\mathbf{k}e^{-ik\cdot x}\ \sqrt{2E_\mathbf{p}}a_\mathbf{p}^\dagger|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{k}}}\,e^{-ik\cdot x}\sqrt{2E_\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,|0\rangle \\ &= e^{-ip\cdot x}\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.93}$$

在(4.92)的N乘积内的一个未收缩ϕ_I算符有两项：最右边的ϕ_I^+和最左边的ϕ_I^-；对于每一种将ϕ_I^+中的a经过对易而穿过初态$a^\dagger$的方式，以及每一种将ϕ_I^-中的$a^\dagger$经过对易而穿过末态a的方式，我们都得到对S矩阵元的一个贡献。因此，很自然的定义外部态与场算符的收缩：

$$\overbrace{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle} = e^{-ip\cdot x}; \qquad \overbrace{\langle\mathbf{p}|\phi_I(x)} = e^{+ip\cdot x}. \tag{4.94}$$

为计算如(4.92)的S矩阵元，我们只需简单写下各ϕ_I算符和外部动量态所有可能的完全收缩。

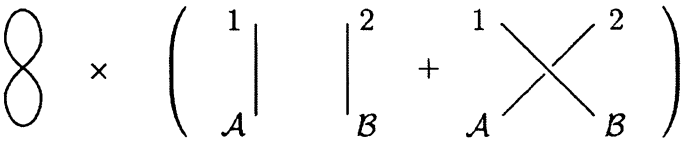
为了看到这个方式是正确的，让我们详细求解(4.92)。N乘积包含如下形式的项

$$\phi\phi\phi\phi; \qquad \overbrace{\phi\phi\phi\phi}; \qquad \overbrace{\phi\phi}\,\overbrace{\phi\phi}. \tag{4.95}$$

最后一项，其中ϕ算符彼此完全收缩，等于真空泡图乘以上计算的(4.91)的值：

$$-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\,{}_0\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\overbrace{\phi\phi\phi\phi}|\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B\rangle_0$$

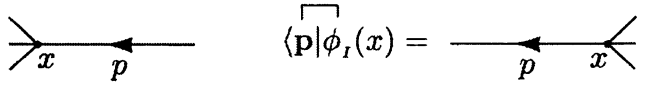
$$= \quad \times \quad \left(\quad + \quad \right) \tag{4.96}$$



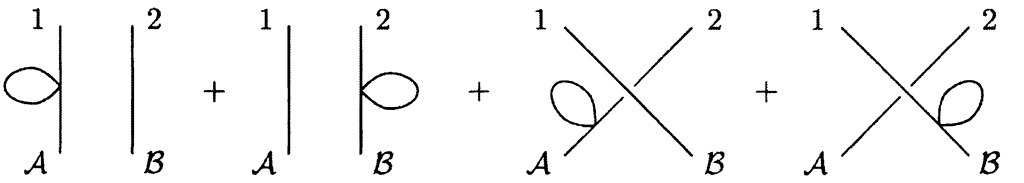
这只是对 S 矩阵的平凡部分的另一种贡献，所以我们忽略了它。

接下来考虑第(4.95)项的第二项，其中四个ϕ算符中的两个收缩。其余两个场的正规乘积看起来像$(a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + aa)$。当我们将这些算符与初态和末态的$a$和$a^\dagger$进行对易时，我们发现，只有$a$与$a^\dagger$的数目相等的的那一项才能存活。用收缩的语言来说，这表示ϕ中的一个必须与初态$|\mathbf{p}\rangle$收缩，另一个必须与末态$\langle\mathbf{p}|$收缩。未收缩的$|\mathbf{p}\rangle$和$\langle\mathbf{p}|$给出δ函数，如(4.91)中。为了表示这些量，在我们的费曼规则引入外线：

$$\overbrace{\phi_I(x)|\mathbf{p}\rangle} = \qquad \overbrace{\langle\mathbf{p}|\phi_I(x)} = \tag{4.97}$$



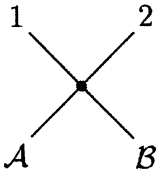
S矩阵元的费曼图总是包含外线，而不是关联函数的图的外部点。(4.95)的第二项由此产生四个图：



积分$\int d^4x$在每个顶点产生一个动量守恒δ函数(包括外部动量)，因此这些图再次描述了初态和末态相同的平凡过程。这说明了一个一般原理：只有**完全连通**的图，其中所有外线相互连接，才能对T矩阵有贡献。

最后，考虑(4.95)中没有一个ϕ算符发生彼此收缩的项。我们的方法告诉我们用$|\mathbf{p}_A\mathbf{p}_B\rangle$来收缩$\phi$中的两个，另外两个用$\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$来收缩。有$4!$种这样做的方法。

于是我们得到图：



$$= (4!) \cdot \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) \int d^4x\, e^{-i(p_{\mathcal{A}}+p_{\mathcal{B}}-p_1-p_2)\cdot x} \tag{4.98}$$

$$= -i\lambda\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2).$$

这正是形式：$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - p_1 - p_2)$，其中$\mathcal{M} = -\lambda$。

在继续讨论S矩阵元的费曼图之前，我们当然应该停下来把这个结果转换成截面。对于质心系中的散射，我们可以简单地将$|\mathcal{M}|^2 = \lambda^2$插入到方程(4.85)中以获得：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2}. \tag{4.99}$$

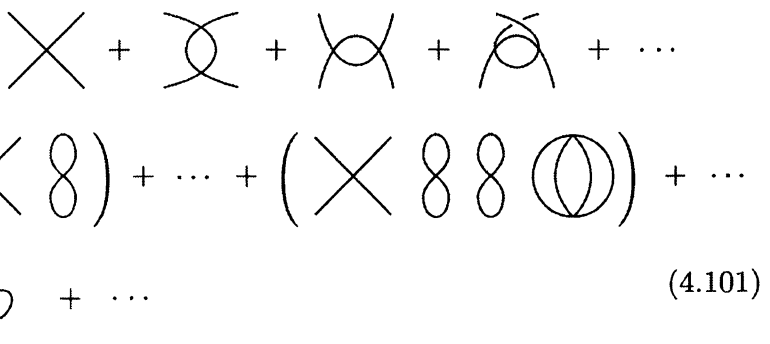
我们刚刚计算了我们的第一个量子场论截面。这是一个相当枯燥的结果，根本没有角度依赖性(当我们在下一节中考虑费米子时，这种情况将被纠正)。在$d\Omega$上积分，再除以二(因为在末态有两个相同的粒子)，我们求出总截面，

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{cm}}^2}. \tag{4.100}$$

在实践中，人们可能会用这个结果来测量λ的值。

回到我们的一般讨论，让我们考虑过程$\mathcal{A},\mathcal{B} \to 1,2$的$T$矩阵的一些高阶贡献。如果我们暂时忽略“连通和截腿”的方案，我们就有公式

$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\, iT\, |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}}\rangle \overset{?}{=}$



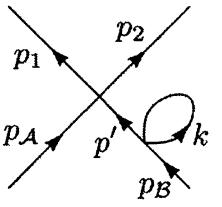
(4.101)

加上四个外线不全部都相互连接的那些图。我们已经看到，这最后一类图对T矩阵没有贡献。(4.101)中所示的第一个图给出了对T的最低阶贡献，这是我们上面

计算的。接下来的三个图给出了这个振幅的预期修正，包括产生和湮灭额外的“虚”粒子。

(4.101)第二行中的图包含非连通的“真空气泡”。通过与第 4.4 节末尾相同的论证，非连通的部分指数化为一个整体相位因子，给出了发生散射处的相互作用真空态的能量移动。因此它们与 S 无关。现在我们已经看到，只有完全连通的图才对 S 矩阵元有合理的贡献。

最后一个图更麻烦，让我们来求一下它的值。在对两个顶点位置积分之后，我们得到

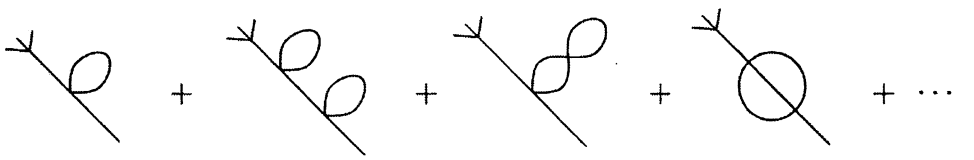


$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\frac{i}{p'^2-m^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2} \\ &\quad \times (-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p'-p_1-p_2) \\ &\quad \times (-i\lambda)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_B-p'). \end{aligned} \tag{4.102}$$

我们可以使用第二个δ函数在p'上进行积分。它告诉我们要计算

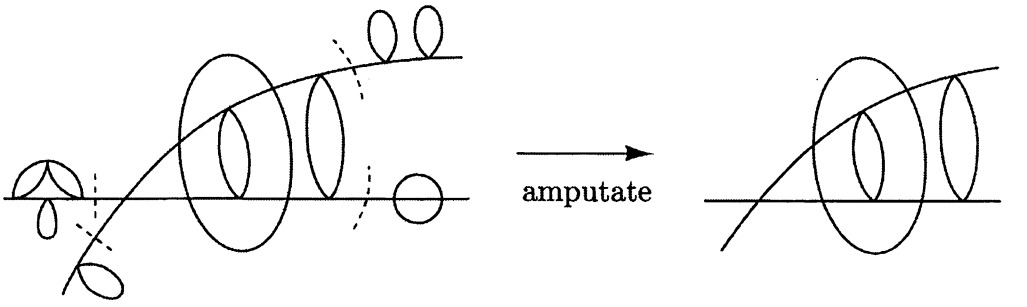
$$\frac{1}{p'^2-m^2}\Big|_{p'=p_B} = \frac{1}{p_B^2-m^2} = \frac{1}{0}.$$

我们得到无穷大，因为一个外部粒子的动量p_B是在壳上的：$p_B^2=m^2$。这是一场灾难。显然，我们关于S的公式只有在排除这种形式的图时才有意义，即，这种图带的圈仅与一条外腿连接。幸运的是，这在物理上是合理的：与真空气泡图表示$|0\rangle$到$|\Omega\rangle$的演变一样，这些外腿修正，



代表$|\mathbf{p}\rangle_0$演变为$|\mathbf{p}\rangle$，它是相互作用理论的单粒子态。由于这些修正与散射过程无关，我们应该将它们排除在S的计算之外。

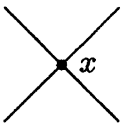
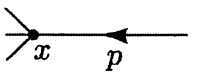
对于具有外腿的一般图，我们用以下方法定义**截腿图**。从每个外腿的尖端开始，寻找最后一个点——通过在该点移除一个单传播子可以将图切割，这样一来此操作将该腿与图的其余部分分开。切割那里，例如：



让我们总结一下我们用来计算散射振幅的方案。我们的S矩阵元公式(4.90)，可以重写

$$\begin{aligned} &i\mathcal{M}\cdot(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B-\textstyle\sum p_f) \\ &\qquad=\begin{pmatrix}\text{sum of all connected, amputated Feynman}\\ \text{diagrams with } p_A,\ p_B \text{ incoming, } p_f \text{ outgoing}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.103}$$

我们现在所说的“连通”是指完全连通，是说，没有真空气泡，且所有外腿相互连接。ϕ^4理论里散射振幅的费曼规则，在位置空间中为

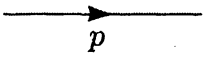
1. For each propagator,  $= D_F(x-y)$;
2. For each vertex,  $= (-i\lambda)\int d^4x$;
3. For each external line,  $= e^{-ip\cdot x}$;
4. Divide by the symmetry factor.

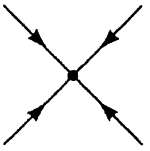
请注意，入射线的因子只是该粒子在其所连接的顶点处被发现的振幅，即该粒子的波函数。类似地，出射线的因子是拥有期望的末动量的粒子在顶点处产生的振幅。

与关联函数的费曼规则一样，引入传播子的动量空间表示通常更简单，进行顶点积分得到动量守恒δ函数，并使用这些δ函数来对尽可能多的动量进行积分。然而，在散射振幅中，总会有一个总的δ函数，可以用来抵消等式(4.103)左侧的δ函数。然后我们剩下

$$i\mathcal{M} = \text{sum of all connected, amputated diagrams,} \tag{4.104}$$

其中的图根据下列规则进行计算：

1. For each propagator,  $= \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$;

2. For each vertex,  $= -i\lambda$;

3. For each external line,  $= 1$;

4. Impose momentum conservation at each vertex;

5. Integrate over each undetermined loop momentum: $\int \dfrac{d^4p}{(2\pi)^4}$;

6. Divide by the symmetry factor.

这是我们的ϕ^4理论的费曼规则的最新版本；这些规则也列在附录中，以供参考。

实际上，(4.103)仍然不太正确。还有一个修正是必须的，涉及等式(4.89)中省略的比例因子。但是这种修正只影响了包含圈的图，因此我们将其讨论推迟到第 6 章和第 7 章，在那里我们首先求解这些图。通过把 S 矩阵元与关联函数联系起来，我们将证明第 7.2 节中修正后的公式(4.103)，而对于关联函数，我们实际上已经根据费曼图导出了一个公式。

4.7 费米子的费曼规则

本章到目前为止，以避免不必要的复杂性，我们只讨论了ϕ^4理论。我们现在准备将我们的结果推广到包含了费米子的理论。

在 4.2 节，我们对关联函数的处理没有任何困难。洛伦兹不变性要求相互作用哈密顿量H_I是偶数个旋量场的乘积，因此在定义编时的H_I的指数时没有困难。

然而为应用 Wick 定理，我们必须推广编时符号和正规乘积符号的定义以包括费米子。我们在 3.5 节的末尾看到，对于作用在两个旋量场上的编时算符 T，用附加的负号来定义最方便：

$$T\big(\psi(x)\bar{\psi}(y)\big) \equiv \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{for } x^0 > y^0; \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{for } x^0 < y^0. \end{cases} \tag{4.105}$$

通过这一定义，狄拉克场的费曼传播子是：

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)} = \langle 0|\, T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle\,. \tag{4.106}$$

对于两个以上旋量场的乘积，我们自然地推广了这一定义：编时乘积必须将场按时间顺序排列，对于算符的每次互换乘上一个负号。例如，

$$T(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = (-1)^3\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2 \qquad \text{if } x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0.$$

旋量场的正规乘积的定义是类似的：为费米子的每次交换乘上一个负号。反对易性质使得可以用多种方式编写正规乘积，但是根据我们的约定，这些是完全等价的：

$$N(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{r}}^\dagger) = (-1)^2 a_{\mathbf{r}}^\dagger a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}} = (-1)^3 a_{\mathbf{r}}^\dagger a_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}.$$

利用这些定义，不难推广Wick定理。首先考虑两个Dirac场的情况，比如$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)]$。与(4.37)类似，定义两个场的收缩为

$$T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y). \tag{4.107}$$

更准确地，对于狄拉克场，

$$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} & \text{for } x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\} & \text{for } x^0 < y^0 \end{array} \right\} = S_F(x-y); \tag{4.108}$$

$$\overbracket{\psi(x)\psi}(y) = \overbracket{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}}(y) = 0. \tag{4.109}$$

在正规乘积符号下定义收缩，包括了算符交换的负号：

$$N(\overbracket{\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3}\bar{\psi}_4) = -\overbracket{\psi_1\bar{\psi}_3}\, N(\psi_2\bar{\psi}_4) = -S_F(x_1-x_3)\, N(\psi_2\bar{\psi}_4). \tag{4.110}$$

有了这些约定，Wick 定理的形式与以前相同：

$$T[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\cdots] = N[\psi_1\bar{\psi}_2\psi_3\cdots + \text{all possible contractions}]. \tag{4.111}$$

证明基本上与玻色子情况没有变化，因为所有额外的负号都由上述定义来解释。

汤川 Yukawa 理论

写下费米子关联函数的费曼规则现在很简单，但是让我们继续并讨论散射过程。为了明确起见，我们从分析 Yukawa 理论开始：

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein–Gordon}} + \int d^3x\, g\bar{\psi}\psi\phi. \tag{4.112}$$

这是量子电动力学的简化模型。在本节中，我们将仔细地计算出 Yukawa 理论的计算规则，以便在下一节中我们可以毫不费力地猜测 QED 的规则。

更具体地，考虑两粒子散射反应

$$\text{fermion}(p) + \text{fermion}(k) \longrightarrow \text{fermion}(p') + \text{fermion}(k').$$

主要贡献来自 S 矩阵的H_I^2项：

$$_0\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | T\Big(\frac{1}{2!}(-ig)\int d^4x\, \bar{\psi}_I\psi_I\phi_I \;\; (-ig)\int d^4y\, \bar{\psi}_I\psi_I\phi_I\Big)|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle_0. \tag{4.113}$$

为了求解这个表达式，使用Wick定理将T乘积简化为带着收缩子的N乘积，然后将未收缩的场作用在初态和末态粒子上。将后一个过程表示为收缩：

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi_I(x)|\mathbf{p}, s\rangle} &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}\sum_{s'} a^{s'}_{\mathbf{p}'}u^{s'}(p')e^{-ip'\cdot x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a^{s\dagger}_{\mathbf{p}}|0\rangle \\ &= e^{-ip\cdot x}u^s(p)|0\rangle.\end{aligned} \tag{4.114}$$

类似的表达式适用于$\bar{\psi}_I$与末态费米子的收缩，以及ψ_I和$\bar{\psi}_I$与反费米子态的收缩。注意ψ_I可以与右边的费米子或左边的反费米子收缩，而$\bar{\psi}_I$则相反。

我们可以写下矩阵元(4.113)的收缩的典型贡献：

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}'|\tfrac{1}{2!}(-ig)\textstyle\int d^4x\, \bar{\psi}\psi\phi \;\; (-ig)\int d^4y\, \bar{\psi}\psi\phi\, |\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle. \tag{4.115}$$

加上一个可能的减号，这个量的值是

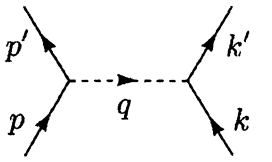
$$\begin{aligned}(-ig)^2\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m_\phi^2}(2\pi)^4\delta(p'-p-q)& \\ \times (2\pi)^4\delta(k'-k+q)\bar{u}(p')u(p)\bar{u}(k')u(k).&\end{aligned}$$

(我们已经把因子1/2!去掉，因为有第二个相同的项来自于(4.115)中的x和y互换)。使用任一个δ函数进行积分，我们发现这个表达式采用的形式为$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\delta(\sum p)$，这里

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2-m_\phi^2}\bar{u}(p')u(p)\bar{u}(k')u(k). \tag{4.116}$$

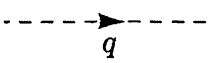
当以这种方式书写时，我们必须记住强加约束$p-p'=q=k'-k$。

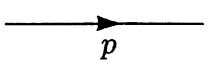
代替(4.115)的计算，我们可以画一个费曼图：

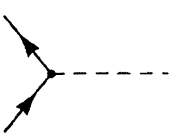


我们用虚线表示标量粒子，用实线表示费米子。然后可以直接从下面的动量空间费曼规则获得 S 矩阵元。

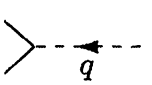
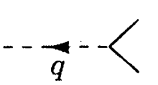
1. Propagators:

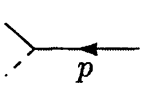
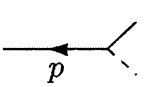
$\overbracket{\phi(x)\phi}(y) =$  $= \dfrac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}$

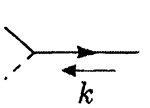
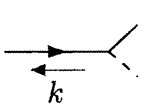
$\overbracket{\psi(x)\bar{\psi}}(y) =$  $= \dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2. Vertices:  $= -ig$

3. External leg contractions:

$\overbracket{\phi\,|\mathbf{q}\rangle} =$  $= 1$ $\qquad$ $\overbracket{\langle\mathbf{q}|\,\phi} =$  $= 1$

$\overbracket{\psi\,\underbrace{|\mathbf{p}, s\rangle}_{\text{fermion}}} =$  $= u^s(p)$ $\qquad$ $\overbracket{\underbrace{\langle\mathbf{p}, s|}_{\text{fermion}}\,\bar{\psi}} =$  $= \bar{u}^s(p)$

$\overbracket{\bar{\psi}\,\underbrace{|\mathbf{k}, s\rangle}_{\text{antifermion}}} =$  $= \bar{v}^s(k)$ $\qquad$ $\overbracket{\underbrace{\langle\mathbf{k}, s|}_{\text{antifermion}}\,\psi} =$  $= v^s(k)$

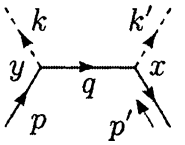
4. Impose momentum conservation at each vertex.
5. Integrate over each undetermined loop momentum.
6. Figure out the overall sign of the diagram.

按照这些规则的顺序有几个评论。

首先，注意来自编时指数的泰勒级数的$1/n!$，总是被可以得到相同收缩的$n!$种互换顶点的方式抵消。Yukawa 理论的图从来没有对称因子，因为H_I中的三个场($\bar{\psi}\psi\phi$)在收缩中不能相互替代。

第二，费米子线上动量的方向是很重要的。在外线中，和玻色子一样，动量

的方向对于初态粒子总是在入射，对于末态粒子总是在出射。这个从ψ和$\bar{\psi}$的展开也立即看出，其中湮灭算符$a_{\mathbf{p}}$和$b_{\mathbf{p}}$都乘以$e^{-ip\cdot x}$，而产生算符$a_{\mathbf{p}}^\dagger$和$b_{\mathbf{p}}^\dagger$都乘以$e^{+ip\cdot x}$。在内费米子线(传播子)上，动量必须沿着粒子数流动的方向分配(对于电子，这是负电流动的方向)。这一要求最容易通过来自第一原理的例子的计算来看出，即考虑费米子和反费米子湮灭成两个玻色子：



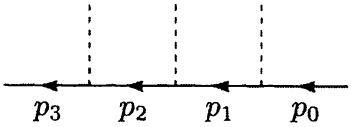
$$= \langle \mathbf{k},\mathbf{k}'| \int d^4x\, \phi\bar{\psi}\psi \int d^4y\, \phi\bar{\psi}\psi\, |\mathbf{p},\mathbf{p}'\rangle$$

$$\sim \int d^4x \int d^4y\, e^{ik'\cdot x}\, \bar{v}(p') e^{-ip'\cdot x} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2} e^{-iq\cdot(x-y)}\, u(p) e^{-ip\cdot y}\, e^{ik\cdot y}.$$

x和y上的积分给出δ函数，迫使q从y流到x，如图所示。在内玻色子线上，动量的方向是不相关的，可以按照方便进行选择，因为$D_F(x-y) = D_F(y-x)$。

传统的做法是在费米线上画箭头，如图所示，来表示粒子数流的方向。动量被分配给费米子传播子然后沿着这个箭头的方向流动。然而，对于外部的反粒子，动量与箭头相反；通过在线旁边画第二个箭头，有助于显式地显示这一点。

第三，注意，在我们的例子中，狄拉克指标沿着费米子线收缩在一起。这也会发生在更复杂的图中：



$$\sim \bar{u}(p_3) \cdot \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2} \cdot \frac{i(\not{p}_1 + m)}{p_1^2 - m^2} \cdot u(p_0). \qquad (4.117)$$

最后，让我们花些时间去担心费米子负号。回到费米子-费米子散射过程的例子。对于初态和末态，我们采用符号约定：

$$|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \qquad \langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'| \sim \langle 0|\, a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}, \qquad (4.118)$$

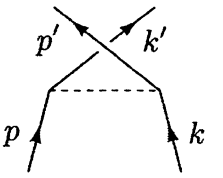
于是$(|p,k\rangle)^\dagger = \langle p,k|$，收缩便是

$$\langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'|(\bar{\psi}\psi)_x\,(\bar{\psi}\psi)_y|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim \langle 0|\, a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}\, \bar{\psi}_x\psi_x\, \bar{\psi}_y\psi_y\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger\, |0\rangle$$

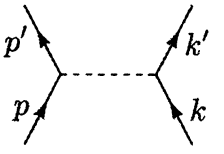
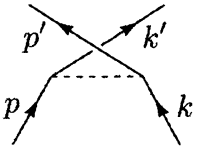
可以通过将$\bar{\psi}_y$向左移动两个位置来解开，因此得到一个因子$(-1)^2 = +1$。但注意在以下收缩中

$$\langle \mathbf{p}',\mathbf{k}'|(\bar{\psi}\psi)_x\,(\bar{\psi}\psi)_y|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle \sim \langle 0|\, a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}\, \bar{\psi}_x\psi_x\, \bar{\psi}_y\psi_y\, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger\, |0\rangle,$$

将$\bar{\psi}_y$向左边移动一个空间就足够了，给出因子-1。这种收缩对应于图



因此，对于这个过程的 S 矩阵元，得到的最低阶的全部结果是

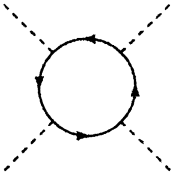
$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} = &\quad \text{  } \quad + \quad \text{  } \\
&= (-ig^2)\left(\bar{u}(p')u(p)\frac{1}{(p'-p)^2-m_\phi^2}\bar{u}(k')u(k)\right. \\
&\qquad \left. -\bar{u}(p')u(k)\frac{1}{(p'-k)^2-m_\phi^2}\bar{u}(k')u(p)\right).
\end{aligned}
\tag{4.119}
$$

这些图之间的负号差异是费米统计的反映。将这个表达式转换为显式截面将需要一些额外的工作；我们将这种计算推迟到第 5 章，那时我们可以使用 QED 而不是不太有趣的 Yukawa 理论。

在复杂的图中，通常可以简化对负号的确定，只要注意到乘积$(\bar{\psi}\psi)$，或任何其他的费米子对，与任何算符都对易。因此，

$$
\begin{aligned}
\cdots(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_w\cdots &= \cdots(+1)(\bar{\psi}\psi)_x(\bar{\psi}\psi)_z(\bar{\psi}\psi)_y(\bar{\psi}\psi)_w\cdots \\
&= \cdots S_F(x-z)S_F(z-y)S_F(y-w)\cdots .
\end{aligned}
$$

但是注意，在n个费米子传播子的闭圈图中，我们有



$$
\begin{aligned}
&= \bar{\psi}\psi\ \bar{\psi}\psi\ \bar{\psi}\psi\ \bar{\psi}\psi \\
&= (-1)\ \mathrm{tr}\big[\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\psi\,\bar{\psi}\big] \\
&= (-1)\ \mathrm{tr}\big[S_F\,S_F\,S_F\,S_F\big].
\end{aligned}
\tag{4.120}
$$

闭合费米子圈总是给出-1的因子和狄拉克矩阵乘积的迹。

Yukawa 势

我们现在已经有了计算 Yukawa 理论中散射振幅的所有正式规则。在讨论 QED 之前，让我们先简要地从抽象下降到具体物理，并考虑这些规则的一个非常简单的应用：在非相对论极限下**可分辨**费米子的散射。通过将这个过程的振幅与非相对论量子力学的玻恩近似公式进行比较，我们可以确定由 Yukawa 相互作用产生的势$V(r)$。

如果两个相互作用的粒子是可分辨的，则只有(4.119)中的第一个图有贡献。为了计算非相对论极限下的振幅，我们仅将各项保持在 3-动量的最低阶。因此，加上$\mathcal{O}(\mathbf{p}^2, \mathbf{p}'^2, \cdots)$，

$$\begin{aligned} p &= (m, \mathbf{p}), & k &= (m, \mathbf{k}), \\ p' &= (m, \mathbf{p}'), & k' &= (m, \mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{4.121}$$

使用这些表达式，我们有

$$\begin{aligned} (p'-p)^2 &= -|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4), \\ u^s(p) &= \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

其中ξ^s是二分量常旋量，归一化为$\xi^{s'\dagger}\xi^s = \delta^{ss'}$。然后，(4.119)中的旋量积是

$$\begin{aligned} \bar{u}^{s'}(p')u^s(p) &= 2m\xi^{s'\dagger}\xi^s = 2m\delta^{ss'}; \\ \bar{u}^{r'}(k')u^r(k) &= 2m\xi^{r'\dagger}\xi^r = 2m\delta^{rr'}. \end{aligned} \tag{4.122}$$

因此，我们的第一个物理结论是，在这个非相对论散射相互作用中，每个粒子的自旋分别守恒，这是一个令人满意的结果。

把散射振幅(4.119)的各部分放在一起

$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2 + m_\phi^2}\, 2m\delta^{ss'}\, 2m\delta^{rr'}. \tag{4.123}$$

这应当与非相对论量子力学中用势函数$V(\mathbf{x})$描述的散射振幅的玻恩近似进行比较：

$$\langle p'|iT|p\rangle = -i\widetilde{V}(\mathbf{q})\,(2\pi)\delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}), \qquad (\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \tag{4.124}$$

显然，对于 Yukawa 相互作用，

$$\widetilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}. \tag{4.125}$$

(在(4.123)中的$2m$因子源于我们的相对论归一化约定，当与(4.124)对比时必须被扔掉，其中(4.124)假定了态是传统的非相对论归一化的。当我们在靶的动量上进行积分时，附加的$\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$就消失了)。

反演傅立叶变换来求$V(\mathbf{x})$需要一个简短的计算：

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2+m_\phi^2}\,e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dq\,q^2\,\frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{iqr}\,\frac{1}{q^2+m_\phi^2} \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\frac{q\,e^{iqr}}{q^2+m_\phi^2}. \end{aligned} \tag{4.126}$$

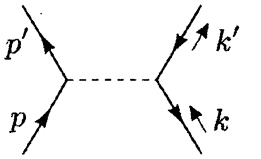
这个积分的围道可以在复平面中向上闭合，我们在$q=+im_\phi$处拾取单极点的留数。因此我们发现

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{r}e^{-m_\phi r}, \tag{4.127}$$

一个吸引的“Yukawa势”，范围为$1/m_\phi=\hbar/m_\phi c$，是交换玻色子的康普顿波长。Yukawa把这种势能作为他的核力理论的基础，并且从力的范围(大约，1 fm)倒推来预测所需的玻色子——π介子的质量(大约 200 MeV)。

如果我们代替地将粒子被反粒子散射，会发生什么？对于该过程

$$f_1(p)\bar{f}_2(k)\longrightarrow f_1(p')\bar{f}_2(k'),$$



我们需要求解(非相对论地)

$$\bar{v}^s(k)v^{s'}(k')\approx m(\xi^{s\dagger},-\xi^{s\dagger})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{s'}\\-\xi^{s'}\end{pmatrix}=-2m\delta^{ss'}. \tag{4.128}$$

我们还必须算出费米子负号。使用$|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle=a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle$和$\langle\mathbf{p}',\mathbf{k}'|=\langle 0|b_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{p}'}$，可以将收缩矩阵元写为

$$\langle\mathbf{p}',\mathbf{k}'|\,\bar\psi\psi\;\bar\psi\psi\,|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle = \langle 0|\,b_{\mathbf{k}'}a_{\mathbf{p}'}\;\bar\psi\psi\;\bar\psi\psi\;a^\dagger_{\mathbf{p}}b^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle\,.$$

要解开收缩需三个算符交换，因此总因子为 -1。这抵消了(4.128)中额外的负号，因此我们看到费米子和反费米子之间的Yukawa势也具有吸引力，并且强度与两个费米子之间的势相同。

剩下的情况要考虑的是两个反费米子的散射。毫不奇怪，势能再次具有吸引力；将另一个$\bar{u}u$变为$\bar{v}v$还有一个附加的负号，解开收缩所必需的互换数量是偶数的。因此，我们得出结论，Yukawa 势具有普遍的吸引力，无论是在一对费米子、一对反费米子之间，还是在每一个费米子之间。

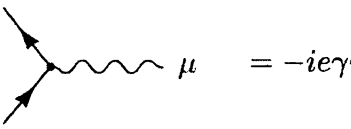
4.8 量子电动力学的费曼规则

现在我们准备从 Yukawa 理论到量子电动力学。为此，我们用矢量粒子A_μ代替标量粒子ϕ，并将 Yukawa 相互作用哈密顿量代替为

$$H_{\text{int}} = \int d^3x\, e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \tag{4.129}$$

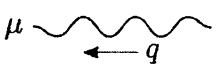
费曼规则如何改变？答案虽然难以证明，但很容易猜出来。除了上节的费米子规则，我们有

New vertex:



$= -ie\gamma^\mu$

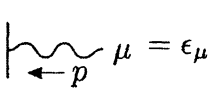
Photon propagator:



$= \dfrac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$

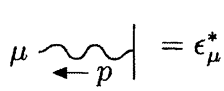
External photon lines:

$\overrightarrow{A_\mu}\,|\mathbf{p}\rangle =$



$= \epsilon_\mu(p)$

$\langle\mathbf{p}|\,\overleftarrow{A_\mu} =$



$= \epsilon^*_\mu(p)$

光子通常被描绘成波状线。符号$\epsilon_\mu(p)$代表初态或末态光子的极化矢量。

为了证明这些规则，回想在洛伦兹规范(用来保持明确的相对论不变性)，A_μ的场方程是

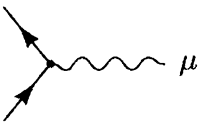
$$\partial^2 A_\mu = 0. \tag{4.130}$$

因此，A的每个分量分别服从 Klein-Gordon 方程(有着$m = 0$)。这个方程的动量空间解是$\epsilon_\mu(p)e^{-ip\cdot x}$，其中$p^2 = 0$，$\epsilon_\mu(p)$是任意 4 向量。从经典电磁学角度出发，应该熟悉$\epsilon$作为场的极化矢量的解释。如果我们用波动方程的经典解来将量子化的电磁场展开，就像我们对 Klein-Gordon 场所做的那样，我们发现

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_{r=0}^{3}\left(a^r_{\mathbf{p}}\epsilon^r_\mu(p)e^{-ip\cdot x} + a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\epsilon^{r*}_\mu(p)e^{ip\cdot x}\right), \tag{4.131}$$

其中$r = 0,1,2,3$是极化矢量的基矢。上面的费曼规则中的外线因子紧随这个展开式而来，正如我们得到u和v作为狄拉克粒子的外线因子一样。唯一的微妙之处是，我们必须去限制初态和末态光子是被横向极化的：它们的极化矢量总是$\epsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\epsilon})$的形式，其中$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$。对于沿$z$轴的$\mathbf{p}$，右手和左手极化矢量为$\epsilon^\mu = (0,1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$。

QED 顶点因子的形式也很容易证明，只要看相互作用哈密顿量(4.129)。注意，QED 振幅中的γ矩阵将位于旋量或其他γ矩阵之间，其狄拉克指标沿着费米线收缩。还要注意，这个相互作用项是特定于电子(及其反粒子，正电子)的情况。一般来说，对于一个带电荷$Q|e|$的狄拉克粒子有，



$$= -iQ|e|\gamma^\mu.$$

例如，电子具有$Q = -1$，上夸克具有$Q = +2/3$，而下夸克具有$Q = -1/3$。

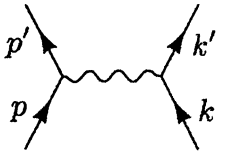
要推导光子传播子的形式没有简单的方法，所以现在我们要勉强接受一个貌似有道理的的论点。由于在洛伦兹规范中，电磁场服从无质量 Klein-Gordon 方程，因此光子传播子与无质量 Klein-Gordon 传播子几乎相同，也就不足为奇了。然而，$-g_{\mu\nu}$因子需要解释。洛伦兹不变性规定光子传播子是一个各向同性的二阶张量，它可以与两端顶点的γ^μ和γ^ν点乘。最简单的候选是$g^{\mu\nu}$。为了理解传播子的整体符号，来计算它的傅立叶变换：

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq\cdot(x-y)} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{q}|} e^{-iq\cdot(x-y)} \cdot (-g_{\mu\nu}). \qquad (4.132)$$

假设这等于$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle$。现在设$\mu = \nu$，从正方向取极限$x^0 \to y^0$。然后这个量成为态$A_\mu(x)|0\rangle$的范数，它应该是正的。我们看到，在传播子中我们对符号的选择意味着，由A_i产生的三个态，其中$i = 1,2,3$，的确具有正范数。这些态包括所有实(非虚)光子，它们总是具有类空极化。不幸的是，由于$g_{\mu\nu}$不是正定的，由A_0产生的态必然有负范数。对于任何具有矢量粒子的理论来说，这是一个潜在的严重问题。对于量子电动力学，我们将在第 5.5 节中显示，由A_0产生的负范数态在物理过程中从未产生。在第 9.4 节中，我们将仔细推导光子传播子。

库仑势

作为这些费曼规则的简单应用，并且为了更好地理解传播子的符号，让我们重复前面部分的非相对论散射计算，这次针对 QED。领头阶贡献是

$i\mathcal{M} =$ 

$= (-ie)^2 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p'-p)^2} \bar{u}(k')\gamma^\nu u(k).$ (4.133)

在非相对论极限中

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = u^\dagger(p')u(p) \approx +2m\xi'^\dagger\xi.$$

如果$p = p' = 0$，很容易验证其他项$\bar{u}(p')\gamma^i u(p)$为零；则在非相对论极限中与$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$相比，它们可以忽略不计。因此我们有

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &\approx \frac{+ie^2}{-|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}(2m\xi'^\dagger\xi)_p(2m\xi'^\dagger\xi)_k \cdot g_{00} \\ &= \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}(2m\xi'^\dagger\xi)_p(2m\xi'^\dagger\xi)_k. \end{aligned} \tag{4.134}$$

与 Yukawa 情形(4.123)相比，我们看到有一个额外的 -1 因子；该势是具有$m = 0$的**排斥** Yukawa 势，即排斥库仑势：

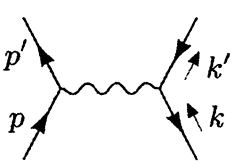
$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}, \tag{4.135}$$

其中$\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$是精细结构常数。

对于粒子-反粒子散射，首先请注意

$$\bar{v}(k)\gamma^0 v(k') = v^\dagger(k)v(k') \approx +2m\xi^\dagger\xi'.$$

γ^0的存在消除了我们在Yukawa情形中发现的负号。因此，非相对论散射振幅是

$i\mathcal{M} =$ 

$= (-1) \cdot \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}(+2m\xi'^\dagger\xi)_p(+2m\xi^\dagger\xi')_k,$ (4.136)

其中(-1)是我们在 Yukawa 情形中看到的相同的费米子负号。这是一个**吸引势**。类似地，对于反费米子-反费米子散射，发现排斥势。我们刚刚证实，在量子场论中，当交换一个矢量粒子时，同种电荷排斥，而异种电荷吸引。

注意，费米子-费米子散射中的排斥完全来自于矢量玻色子传播子中的额外因子$-g_{00}=-1$。一个张量玻色子，例如引力子，会有一个传播子



$$=\frac{1}{2}\Big((-g_{\mu\rho})(-g_{\nu\sigma})+(-g_{\mu\sigma})(-g_{\nu\rho})\Big)\left(\frac{i}{q^2+i\epsilon}\right),$$

在非相对论碰撞中，它给出一个因子$(-g_{00})^2=+1$；这将导致具有普遍吸引力的势。令人欣慰的是，量子场论确实再现了电力和引力的明显特征：

Exchanged particle	ff and $\bar{f}\bar{f}$	$f\bar{f}$
scalar (Yukawa)	attractive	attractive
vector (electricity)	repulsive	attractive
tensor (gravity)	attractive	attractive

Chapter 5

量子电动力学的基本过程

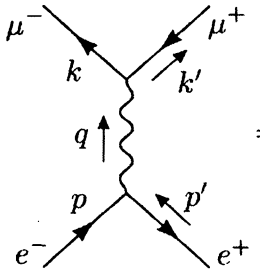
最后，在形式理论的三个长章之后，我们准备进行一些真正的相对论计算，开始计算量子电动力学的预测。首先我们将回到第一章讨论的过程，电子-正电子对的湮灭成一对较重的费米子。我们将在接下来的三节中详细研究这个范例过程，然后在 5.4 和 5.5 节中做一些更简单的 QED 计算。本章末尾的问题讨论了几个附加的 QED 过程。关于 QED 的更完整的调查可以在 Jauch 和 Rohrlich(1976)以及 Berestetskii、Lifshitz 和 Pitaevskii(1982)的书中找到。

5.1 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$导论

反应$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$是所有 QED 过程中最简单的，也是高能物理中最重要的过程之一。它是理解e^+e^-碰撞中所有反应的基础，并实际上被用于校准这种机制。而相关过程$e^+e^- \to q\bar{q}$(夸克-反夸克对)在确定基本粒子的性质方面特别有用。

在本节中，我们将计算$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的**非极化**截面，至最低阶。在第一章中，我们在所有费米子都无质量的极限下，用初等论点来猜测答案(等式(1.8))。现在我们放宽这个限制，在计算中保留μ子质量。保留电子质量也是容易的但毫无意义，因为在微扰级数中，比值$m_e/m_\mu \approx 1/200$与因忽略高阶项导致的相对误差相比还要小得多。

使用第 4.8 节中的 Feynman 规则，我们可以立即绘制图并写下过程的振幅：



$$= \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\bar{u}^r(k)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(k').$$

稍微重新安排一下，并隐含自旋上标，我们有

$$i\mathcal{M}\big(e^-(p)e^+(p')\to\mu^-(k)\mu^+(k')\big)=\frac{ie^2}{q^2}\Big(\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\Big)\Big(\bar u(k)\gamma_\mu v(k')\Big). \quad (5.1)$$

振幅$\mathcal{M}$的这个答案很简单，但是还不是很有启发性。

为计算微分截面，我们需要一个$|\mathcal{M}|^2$的表达式，所以我们必须找到$\mathcal{M}$的复共轭。双旋量积，如$\bar v\gamma^\mu u$，可以复共轭如下：

$$(\bar v\gamma^\mu u)^*=u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger v=u^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 v=u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v=\bar u\gamma^\mu v.$$

(这是“bar”符号的另一个优点)。因此，矩阵元的平方是

$$|\mathcal{M}|^2=\frac{e^4}{q^4}\Big(\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\bar u(p)\gamma^\nu v(p')\Big)\Big(\bar u(k)\gamma_\mu v(k')\bar v(k')\gamma_\nu u(k)\Big). \quad (5.2)$$

此时，我们仍然可以自由地指定任何特定的旋量$u^s(p)$，$\bar v^{s'}(p')$等等，这些旋量对应于任何想要的费米子的自旋态。然而，在实际的实验中，很难(尽管不是不可能)保持对自旋态的控制；人们必须用极化材料制备初态，和/或使用自旋相关的多重散射来分析末态。在大多数实验中，电子束和正电子束是非极化的，因此测量的截面是电子和正电子自旋s和s'的**平均**。μ子探测器通常是无法分辨极化的，因此测量的横截面是对μ子自旋r和r'**求和**。

抛弃自旋信息时，$|\mathcal{M}|^2$的表达式大大简化了。我们想计算

$$\frac12\sum_s\frac12\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}\big|\mathcal{M}(s,s'\to r,r')\big|^2.$$

可以使用来自第 3.3 节的完备性关系来执行自旋和：

$$\sum_s u^s(p)\bar u^s(p)=\not p+m;\qquad \sum_s v^s(p)\bar v^s(p)=\not p-m. \quad (5.3)$$

计算(5.2)前半部分并写出旋量指标，这样我们可以自由地将v移到$\bar v$的旁边，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{s,s'}\bar v_a^{s'}(p')\gamma^\mu_{ab}u_b^s(p)\bar u_c^s(p)\gamma^\nu_{cd}v_d^{s'}(p')&=(\not p'-m)_{da}\gamma^\mu_{ab}(\not p+m)_{bc}\gamma^\nu_{cd}\\&=\operatorname{trace}\big[(\not p'-m)\gamma^\mu(\not p+m)\gamma^\nu\big].\end{aligned}$$

用同样的方法计算(5.2)的后半部分，我们得到期望的简化：

$$\tfrac14\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{e^4}{4q^4}\operatorname{tr}\Big[(\not p'-m_e)\gamma^\mu(\not p+m_e)\gamma^\nu\Big]\operatorname{tr}\Big[(\not k+m_\mu)\gamma_\mu(\not k'-m_\mu)\gamma_\nu\Big]. \quad (5.4)$$

旋量u和v消失了，留下一个更清晰的γ矩阵表达式。这个技巧非常普遍：任何包含外部费米子的 QED 振幅，当取平方并在自旋上求和或平均时，都可以用这种方式转换成狄拉克矩阵乘积的迹。

迹技巧

如果必须强行去费力地计算迹，那么上一步几乎不会有什么改进。但是 Feynman 发现，借助于γ矩阵的代数性质，它们可以很容易地计算出来。由于在 QED 计算中经常出现对这些迹的计算，因此值得暂停一下并系统地、一劳永逸地处理这个问题。

我们想要计算n个γ矩阵乘积的迹，其中$n = 0,1,2,...$(对于目前的问题，我们需要$n = 2,3,4$)。$n = 0$的情况相当简单：$\mathrm{tr}\ \mathbf{1} = \mathbf{4}$。一个$\gamma$矩阵的迹也很简单。根据手征表示中矩阵的显式形式，我们有

$$\mathrm{tr}\,\gamma^\mu = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

用更抽象的方式证明这个结果是有用的，可以推广到任意奇数的γ矩阵：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\gamma^\mu &= \mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu && \text{since } (\gamma^5)^2 = 1 \\
&= -\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 && \text{since } \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \\
&= -\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu && \text{using cyclic property of trace} \\
&= -\mathrm{tr}\,\gamma^\mu.
\end{aligned}$$

因为迹等于它本身的负，所以它必须为零。对于n个γ矩阵，我们会在第二步得到n个负号(当我们把第二个γ^5移动到最右边时)，则如果n是奇数，迹必须为零。

为了计算两个γ矩阵的迹，我们再次使用迹的反对易性质和循环性质：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu &= \mathrm{tr}\big(2g^{\mu\nu}\cdot\mathbf{1} - \gamma^\nu\gamma^\mu\big) && \text{(anticommuatation)} \\
&= 8g^{\mu\nu} - \mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu && \text{(cyclicity)}
\end{aligned}$$

因此$\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$。任何偶数个$\gamma$矩阵的迹都可以用同样的方法求出：把第一个$\gamma$矩阵一直向右边反对易，然后循环回到左边。因此，对于四个矩阵的轨迹，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) &= \mathrm{tr}\big(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\big) \\
&= \mathrm{tr}\big(2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\big).
\end{aligned}$$

使用上一项中的循环性质并将其带到左边，我们发现

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) &= g^{\mu\nu}\operatorname{tr}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} - g^{\mu\rho}\operatorname{tr}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + g^{\mu\sigma}\operatorname{tr}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} \\ &= 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right).\end{aligned}$$

以这种方式，人们总是可以将n个γ矩阵的迹减少为$n-2$个γ矩阵的迹的和。情况$n=6$很容易算出，但是有15项(将六个指标成对的分组，以构成形式$g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}$的项的方法的数目)。幸运的是，我们在这本书中不需要它(如果你确实需要计算这种复杂的迹，那么学习使用能够对Dirac矩阵执行符号操作的几个计算机程序之一可能更容易)。

从5.2节开始，我们经常需要计算涉及γ^5的迹。由于$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，$\gamma^5$乘以其他任何奇数个$\gamma$矩阵的迹是零。也很容易表明$\gamma^5$本身的迹是零：

$$\operatorname{tr}\gamma^5 = \operatorname{tr}\left(\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right) = -\operatorname{tr}\left(\gamma^0\gamma^5\gamma^0\right) = -\operatorname{tr}\left(\gamma^0\gamma^0\gamma^5\right) = -\operatorname{tr}\gamma^5.$$

同样的技巧对于$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^5)$也是适用的，只要我们用某些与$\mu$和$\nu$都不同的$\alpha$，插入两个$\gamma^{\alpha}$因子。涉及$\gamma^5$的第一个非零迹包含了另外四个$\gamma$矩阵。在这种情况下除非每个$\gamma$矩阵出现，否则技巧仍然有效，即除非$(\mu\nu\rho\sigma)$是(0123)的某个置换，否则$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^5) = 0$。根据反对易规则，交换任何两个指标都会简单地改变迹的符号，因此$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^5)$必须与$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$成正比。整体常数的结果是$-4i$，你可以通过插入$(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$轻松地进行检查。

这里是对迹定理的总结，以方便参考：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\ \operatorname{tr}(\text{any odd \# of } \gamma\text{'s}) &= 0 \\ \operatorname{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) &= 4g^{\mu\nu} \\ \operatorname{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ \operatorname{tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \operatorname{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^5) &= 0 \\ \operatorname{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned} \tag{5.5}$$

使用最后一个公式得到的表达式可以通过以下等式简化

$$\begin{aligned}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -24 \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} &= -6\delta^{\mu}{}_{\nu} \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2\left(\delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}\delta^{\nu}{}_{\rho}\right)\end{aligned} \tag{5.6}$$

首先通过求助于对称参数，然后计算一个特殊情况来确定整体常数，所有这些都

可以导出来。

另一个有用的等式允许人们反转迹中所有γ矩阵的顺序：

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots) = \mathrm{tr}(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu). \tag{5.7}$$

为了证明这种关系，考虑矩阵$C \equiv \gamma^0\gamma^2$(本质上是电荷共轭算符)。这个矩阵满足$C^2 = 1$和$C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$。因此，如果在迹中有$n$个$\gamma$矩阵，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots) &= \mathrm{tr}(C\gamma^\mu C\,C\gamma^\nu C\cdots)\\ &= (-1)^n\,\mathrm{tr}\big[(\gamma^\mu)^T(\gamma^\nu)^T\cdots\big]\\ &= \mathrm{tr}(\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu),\end{aligned}$$

因为除非n是偶数，否则迹为零。当迹包含一个或多个γ^5因子时，很容易表明反转等式(5.7)也是有效的。

当迹中有两个γ矩阵点乘在一起时，在求迹之前消除它们是最容易的。例如，

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4. \tag{5.8}$$

当其他γ矩阵介于两者之间时，可以使用以下**收缩等式**，所有这些收缩等式都易于使用反对易关系来证明：

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho}\\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\end{aligned} \tag{5.9}$$

注意上一个等式中的顺序颠倒。

本节中证明的所有γ矩阵恒等式都收集在附录中以供参考。

非极化截面

现在我们回到对平方矩阵元等式(5.4)的求值。电子迹是

$$\mathrm{tr}\big[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\big] = 4\big[p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p\cdot p' + m_e^2)\big].$$

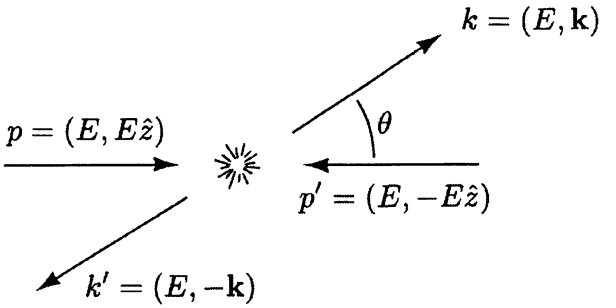
仅具有m的一个因子的项为零，因为它们包含奇数个γ矩阵。类似地，μ子迹是

$$\mathrm{tr}\big[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu\big] = 4\big[k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(k\cdot k' + m_\mu^2)\big].$$

从现在开始我们将设置$m_e = 0$，如本节开头所讨论的。将这些表达式点乘在一起并收集各项，我们得到简单的结果。

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\Big[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) + m_\mu^2(p\cdot p')\Big]. \tag{5.10}$$

为了得到一个更明确的公式，我们必须专门研究一个特定的参照系，并根据该参照系中的基本运动学变量——能量和角度——来表示矢量p, p', k, k', q。在实践中，参照系的选择将取决于实验条件。在这本书中，我们通常将作出最简单的选择来计算截面——质心系。对于这个选择，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的初 4 动量和末 4 动量可以写如下：



$$|\mathbf{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{z} = |\mathbf{k}| \cos\theta$$

要计算矩阵元平方，我们需要

$$q^2 = (p+p')^2 = 4E^2; \qquad p \cdot p' = 2E^2;$$

$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\mathbf{k}|\cos\theta; \qquad p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\mathbf{k}|\cos\theta.$$

我们现在可以用E和θ来重写等式(5.10)：

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{16E^4}\left[E^2(E - |\mathbf{k}|\cos\theta)^2 + E^2(E + |\mathbf{k}|\cos\theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2\right] \\ &= e^4\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

剩下的就是把这个表达式插入 4.5 节导出的截面公式中。由于只有两个粒子处于末态，而且我们在质心系中工作，所以我们可以使用简化公式(4.84)。对于我们的问题，$|v_A - v_B| = 2$和$E_A = E_B = E_{\text{cm}}/2$，所以

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2E_{\text{cm}}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} \cdot \frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

对$d\Omega$积分，求出总截面：

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\text{cm}}^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \tag{5.13}$$

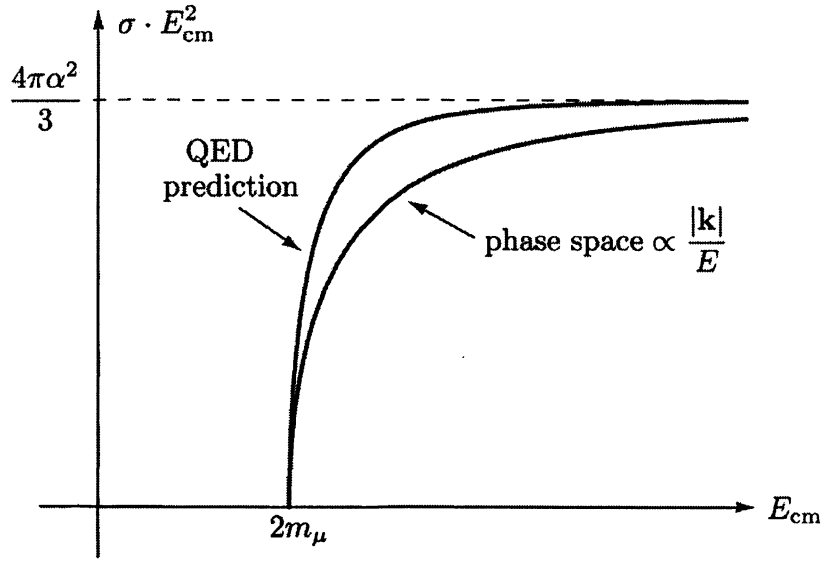


图 5.1 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的总截面的能量依赖性，与"相空间"的能量依赖性相比。

在$E \gg m_\mu$的高能极限下，这些公式约化为到第一章给出的那些：

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\underset{E\gg m_\mu}{\longrightarrow} \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}(1+\cos^2\theta); \\ \sigma_{\rm total} &\underset{E\gg m_\mu}{\longrightarrow} \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm cm}^2}\left(1-\frac{3}{8}\left(\frac{m_\mu}{E}\right)^4-\cdots\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

注意，这些表达式具有正确的截面量纲。在高能极限下，$E_{\rm cm}$是问题中唯一带量纲的物理量，因此量纲分析规定$\sigma_{\rm total} \propto E_{\rm cm}^{-2}$。因为我们从一开始就知道$\sigma_{\rm total} \propto \alpha^2$，所以我们只需要努力得到因子$4\pi/3$。

总截面公式(5.13)在阈值附近的能量依赖性如图 5.1 所示。当然，对于$E_{\rm cm} < 2m_\mu$，截面为零。如果$|\mathcal{M}|^2$不依赖于能量，即如果所有的能量依赖都来自相空间因子$|\mathbf{k}|/E$，那么将获得的形状与实际曲线的形状进行比较会很有趣。为了测试量子电动力学，实验必须能够解决偏离原始相空间预测的问题。由双轻子对产生的实验结果表明这些粒子的行为符合 QED 的预测。图 5.2 将公式(5.13)与$\tau^+\tau^-$阈值的实验测量进行比较。

在进一步讨论我们的结果之前，让我们停下来总结一下我们是如何得到它的。该方法可以直接推广到其它 QED 过程的非极化截面的计算。普遍程序如下：

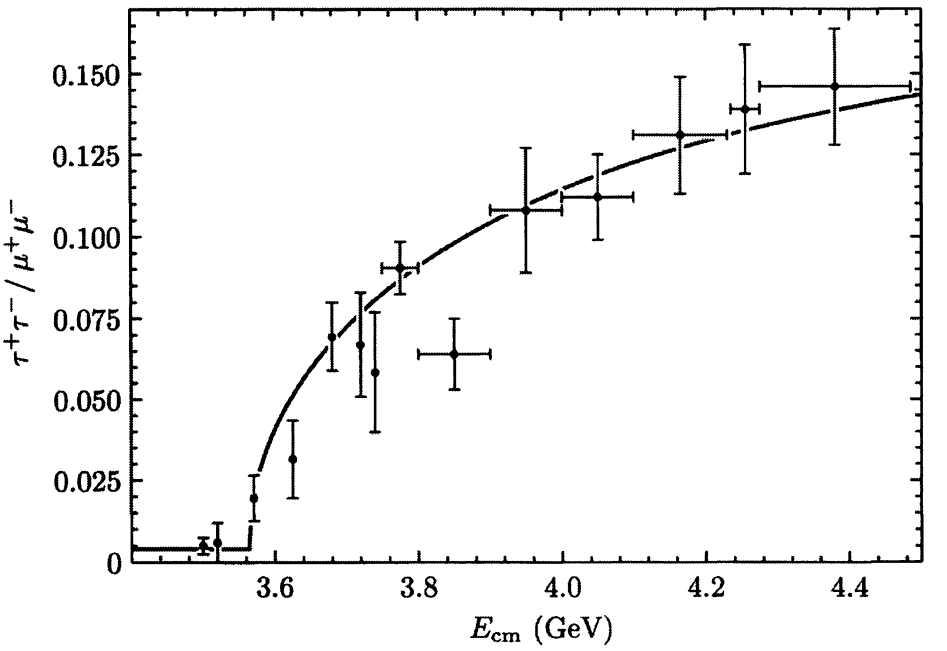


图 5.2 根据 DELCO collaboration, W. Bacino, et. al., *Phys. Rev. Lett.* **41**, 13(1978)测量：在$\tau^+\tau^-$对的产生的阈值附近的测量截面的比率：$\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$。由于只包括$\tau$衰变的一小部分，因此整体标度很小。曲线与理论公式(5.13)相吻合，添加了能量无关的小背景。拟合结果$m_\tau = 1782^{+2}_{-7}$MeV。

1. 画出所需过程的图。
2. 用费曼规则写下振幅$\mathcal{M}$。
3. 将振幅平方并使用完备性关系(5.3)对自旋求和或求平均(对于末态涉及光子的过程，存在类似的完备性关系，在第 5.5 节中导出)。
4. 使用迹定理(5.5)求迹；整合各项并尽可能简化答案。
5. 专门研究一个特定的参照系，并画出该参照系中的运动学变量的图。用适当选择的一组变量(如E和θ)来表示所有 4-动量向量。
6. 将得到的$|\mathcal{M}|^2$表达式插入横截面公式(4.79)，对没有被测量的相空间变量进行积分，以获得所需形式下的微分横截面(在我们的例子中，这些积分是对约束动量$\mathbf{k}'$和$|\mathbf{k}|$的积分，并且是在等式(4.84)的推导下进行的)。

虽然其他计算(尤其是那些涉及圈图的计算)通常需要额外的技巧，但几乎每个 QED 计算都将涉及这里概述的基本过程。

夸克-反夸克对的产生

$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$截面公式渐近的能量依赖为所有e^+e^-湮没的截面设置了标度。一个特别重要的例子是

$$e^+e^- \to \text{hadrons},$$

也就是说，产生任意数量的强相互作用粒子的总截面。

在我们目前对强相互作用的理解中，由量子色动力学(QCD)理论给出，所有的强子都由称为**夸克**的狄拉克费米子组成。夸克以各种各样的形式出现，称为**味**，每种味都有自己的质量和电荷。夸克还带有一个附加的量子数，**色**，它取三个值之一。色作为 QCD 的“荷”，我们将在第 17 章中讨论。

根据 QCD，最简单的以强子结尾的e^+e^-过程是

$$e^+e^- \to q\bar{q},$$

一个电子和一个正电子通过一个虚光子湮灭成夸克-反夸克对。在夸克对被产生出来后，夸克通过它们的强力彼此相互作用，产生更多的夸克对。最终，夸克和反夸克结合并形成了一些介子和重子。

为使用我们适用于μ子产生的结果来处理夸克的情况，我们必须做三个修改：

1．用夸克电荷$Q|e|$代替μ子电荷e。

2．对每个夸克计数三次，每次对应一种色。

3．考虑进夸克和反夸克产生的强相互作用的影响。

前两个变化很容易做出。首先，只需要知道夸克每一种味的质量和电荷。对于u，c和t夸克，我们有$Q = 2/3$，而对于d，s和b夸克，我们有$Q = -1/3$。截面公式与末态粒子电荷的平方成比例，所以我们可以简单地将因子Q^2插入这些公式中的任何一个，以获得产生任何特定种类的夸克的截面。对色计数是必要的，因为实验测量产生所有三种颜色的总横截面(实际检测到的强子是无色的)。无论如何，这种计数很简单：只要将答案乘以 3。

然而，如果你对强相互作用有一点了解的话，你可能会认为这全都是一个大笑话。当然，第三种修正很难进行，并且会极大地改变 QED 的预测。令人惊讶的事实是，在高能量极限下，强相互作用对夸克产生过程的影响可以被完全忽略。正如我们将在第三部分中讨论的，强相互作用(在这个极限中)的唯一作用是将末

态夸克装扮成强子束。这种简化是由于一种叫做**渐近自由**的现象，它在确定量子色动力学是强力的正确理论中起着至关重要的作用。

因此，我们期望反应$e^+e^- \to q\bar{q}$在高能极限下的截面接近$3 \cdot Q^2 \cdot 4\pi\alpha^2/3E_{\rm cm}^2$。传统定义是

$$1 \text{ unit of R} \equiv \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm cm}^2} = \frac{86.8\,\text{nbarns}}{(E_{\rm cm} \text{ in GeV})^2}. \tag{5.15}$$

因此，以R为单位的截面的值，是它与$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$截面的渐近值(由式(5.14)预测)的比率。在实验上，最容易测量的量是产生所有强子的总速率。渐近地，我们期望

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) \underset{E_{\rm cm}\to\infty}{\longrightarrow} 3 \cdot \left(\sum_i Q_i^2\right) \text{R}, \tag{5.16}$$

其中求和遍历所有质量小于$E_{\rm cm}/2$的夸克。当$E_{\rm cm}/2$在一个夸克质量附近时，强相互作用导致与这个公式的大偏差。这种效应最引人注目的是，在刚刚低于$E_{\rm cm} = 2m_q$处的**束缚态**的出现，在截面上表现为非常尖锐的尖峰。

图 5.3 显示了 2.5 到 40 GeV 之间e^+e^-湮没为强子的截面的实验测量结果。数据显示了三个不同的区域：产生u、d和s夸克对的低能区域； c夸克对产生的阈值以上的区域；以及b夸克对产生的阈值以上的区域。(5.16)的预测被显示为一组实线；只要能量远离高能近似不再适用的阈值，它就与每个区域的数据非常一致。虚线显示了改进的理论预测，包括来自 QCD 的高阶修正——我们将在第 17.2 节讨论。这种e^+e^-湮没截面的解释是 QCD 的一个显著成功。特别是，(5.16)中因子 3 的实验验证是色存在的一个证据。

实验上也观察到了微分截面的角度依赖性*。在高能下，强子出现在喷注中，几个强子团簇都沿着大致相同的方向运动。在大多数情况下，有两个喷注，具有背靠背的动量，并且这些喷注确实具有角度依赖性：$(1 + \cos^2\theta)$。

---

*高能e^+e^-湮灭中强子产生的基本特征由可看综述 P. Duinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 325 (1982).

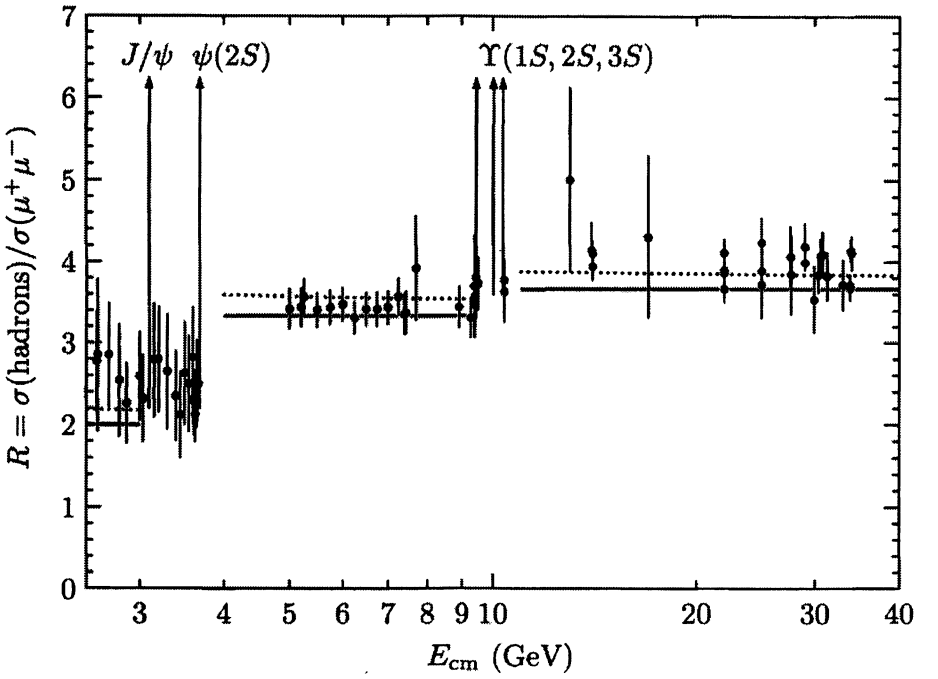


图 5.3. 反应$e^+e^- \to$强子的总截面的实验测量，来自 M. Swartz, *Phys.Rev.* D53, 5268 (1996)的数据汇编。这里提供了各种实验的完整参考。测量值与量子色动力学的理论预测值进行比较，如文中所解释的。实线是简单的(5.16)的预测。

5.2 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$：螺旋度结构

反应的非极化截面通常易于计算(和测量)，但难以理解。角依赖性$(1 + \cos^2\theta)$来自哪里？我们可以通过分别计算在每组自旋方向下的$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$截面来回答这个问题。

首先，我们必须选择极化态的基矢。为了在高能量极限下得到一个简单答案，最好的选择是沿着粒子的运动方向量子化每个自旋，即使用定螺旋度的态。回想一下，在无质量极限中，狄拉克粒子的左手和右手的螺旋度态存在于洛伦兹群的不同表示中。因此，我们可能期望他们能够独立表现，事实上他们是这样做的。

在本节中，我们将使用螺旋度基矢，以两种不同的方式计算$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的极化截面：首先，使用求迹技术，但添加螺旋度投影算符，以投影出期望的左手或右手旋量；其次，将旋量的显式表达式直接插入到振幅$\mathcal{M}$的公式中。在这一节中，我们在高能极限下工作，所有费米子都是无质量的(计算可以针对更低的能量进行，但是它更加困难并且没有更多的指导意义)*。

我们的极化截面的两种计算方法的起点是振幅：

$$i\mathcal{M}\big(e^-(p)e^+(p')\to\mu^-(k)\mu^+(k')\big)=\frac{ie^2}{q^2}\Big(\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\Big)\Big(\bar u(k)\gamma_\mu v(k')\Big). \quad (5.1)$$

我们希望使用自旋求和等式，像以前一样用迹来写出振幅平方，即使我们现在想一次只考虑一组极化。为此，我们注意到对于无质量费米子，矩阵

$$\frac{1+\gamma^5}{2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \frac{1-\gamma^5}{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad (5.17)$$

分别是右手和左手上的投影算符。因此，如果在(5.1)中我们进行替换

$$\bar v(p')\gamma^\mu u(p)\longrightarrow \bar v(p')\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)u(p),$$

右手电子的振幅不变，而左手电子的振幅变为零。请注意，因为

$$\bar v(p')\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)u(p)=v^\dagger(p')\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\gamma^0\gamma^\mu u(p), \quad (5.18)$$

同样的替换要求$v(p')$也是右手旋量。然而回想 3.5 节，右手旋量$v(p')$对应于左手正电子。因此我们看到，当电子和正电子都是右手时，湮没振幅就消失了。一般来说，除非电子和正电子具有相反的螺旋度，否则振幅会为零(在无质量极限中)，或者等价地，除非它们的旋量具有相同的螺旋度。

插入这个投影算符后，在平方振幅中，我们现在可以自由地对电子和正电子的自旋求和；在求和的四个项中，只有一个(我们想要的那个)是非零的。对于右手电子和左手正电子，$|\mathcal{M}|^2$的电子那一半就是

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spins}}\Big|\bar v(p')\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)u(p)\Big|^2&=\sum_{\text{spins}}\bar v(p')\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)u(p)\,\bar u(p)\gamma^\nu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)v(p')\\&=\mathrm{tr}\Big[\not p'\gamma^\mu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\not p\gamma^\nu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\Big]\\&=\mathrm{tr}\Big[\not p'\gamma^\mu\not p\gamma^\nu\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

---

*在 M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys.* **7**, 404 (1959)的美妙论文中，给出了定螺旋度的态之间的 S 矩阵元的普遍形式。

$$= 2\big(p'^{\mu}p^{\nu} + p'^{\nu}p^{\mu} - g^{\mu\nu}p\cdot p' - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}p'_{\alpha}p_{\beta}\big). \qquad (5.19)$$

这个表达式中的指标将和振幅平方的μ子那一半的那些指标点乘。对于右手μ^-和左手μ^+，相同的计算得出

$$\sum_{\text{spins}}\left|\bar{u}(k)\gamma_{\mu}\Big(\frac{1+\gamma^5}{2}\Big)v(k')\right|^2 = 2\big(k_{\mu}k'_{\nu}+k_{\nu}k'_{\mu}-g_{\mu\nu}k\cdot k'-i\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}k^{\rho}k'^{\sigma}\big). \quad (5.20)$$

将(5.19)点乘入(5.20)中，我们发现质心系中$e^-_R e^+_L \to \mu^-_R\mu^+_L$的矩阵元是

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4}\Big[2(p\cdot k)(p'\cdot k') + 2(p\cdot k')(p'\cdot k) - \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}p'_{\alpha}p_{\beta}k^{\rho}k'^{\sigma}\Big] \\
&= \frac{8e^4}{q^4}\Big[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k) - (p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k)\Big] \\
&= \frac{16e^4}{q^4}(p\cdot k')(p'\cdot k) \\
&= e^4\big(1+\cos\theta\big)^2. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

将该结果插入(4.85)给出微分截面，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\big(e^-_R e^+_L \to \mu^-_R\mu^+_L\big) = \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{cm}}}\big(1+\cos\theta\big)^2. \qquad (5.22)$$

不需要重复整个计算来获得其他三个不为零的螺旋度振幅。例如，$e^-_R e^+_L \to \mu^-_L\mu^+_R$的平方振幅等价于(5.20)，但是左手边的$\gamma^5$被$-\gamma^5$代替，因此$\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$在右手边被$-\epsilon_{\rho\mu\sigma\nu}$代替。通过(5.21)传播这个符号，我们很容易看到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\big(e^-_R e^+_L \to \mu^-_L\mu^+_R\big) = \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{cm}}}\big(1-\cos\theta\big)^2. \qquad (5.23)$$

类似的

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega}\big(e^-_L e^+_R \to \mu^-_R\mu^+_L\big) &= \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{cm}}}\big(1-\cos\theta\big)^2; \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}\big(e^-_L e^+_R \to \mu^-_L\mu^+_R\big) &= \frac{\alpha^2}{4E^2_{\text{cm}}}\big(1+\cos\theta\big)^2.
\end{aligned} \qquad (5.24)$$

(这两个结果实际上通过宇称不变性可以从前两个结果得到)其他十二个螺旋度截面(例如，$e^-_R e^+_L \to \mu^-_L\mu^+_L$)是零，如我们从等式(5.18)中看到的。把 16 个贡献加起来，除以 4 来对电子和正电子自旋求平均，我们重新获得了无质量极限中的非极化截面，等式(5.14)。

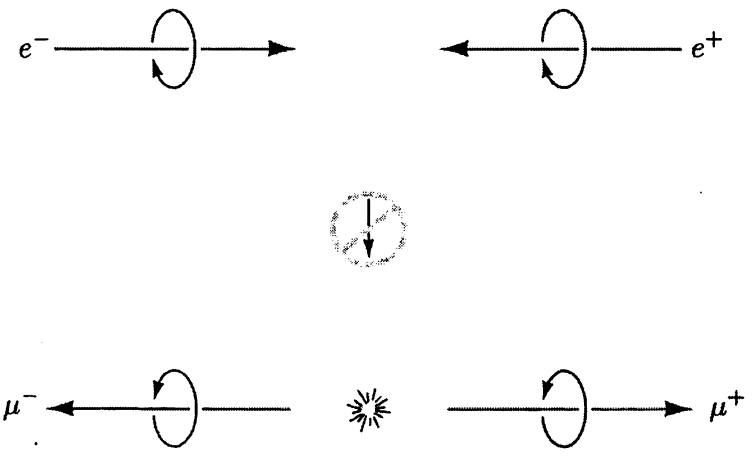


图 5.4 角动量的守恒要求如果测量角动量的z分量，它必须具有与初始值相同的值。

注意，$e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+$的截面(5.22)在$\theta = 180°$处为零。这正是我们所期望的，因为对于$\theta = 180°$，末态的总角动量与初态的角动量相反(参见图 5.4)。

这就完成了我们对$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的极化截面的第一次计算。现在，我们将以一种更加直接、更具启发性、并且不再困难的方式重新进行计算。我们将使用旋量和γ矩阵的显式值直接计算振幅$\mathcal{M}$(而不是平方振幅)。这种方法确实有其缺点：它迫使我们更早地专门研究特定的参考系，所以显式洛伦兹不变性消失了。从更实用点看，它非常麻烦，除了在非相对论和超相对论的极限下。

再考虑一下振幅

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2}\Big(\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\Big)\Big(\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\Big). \tag{5.25}$$

在高能极限下，狄拉克旋量的普遍表达式是

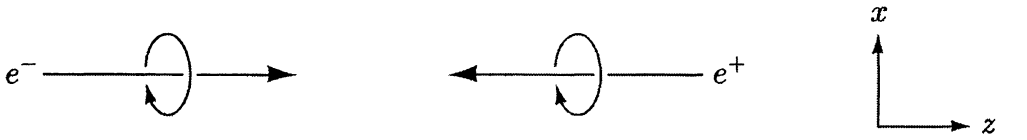
$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} \underset{E\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \\ \frac{1}{2}(1+\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \end{pmatrix}; \\ v(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} \underset{E\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2E}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \\ -\frac{1}{2}(1+\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

右手旋量满足$(\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$，而左手旋量满足$(\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = -\xi$。(再一次记住，对于反粒子，旋量的手性与粒子的手性相反)我们必须计算形式为$\bar{v}\gamma^\mu u$的表达式，因此我们需要

$$\gamma^0\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

因此，我们清楚地看到，当一个旋量是左手而另一个旋量是右手时，振幅是零。在第 1 章的语言中，将矢量光子耦合到这些旋量乘积的 Clebsch-Gordan 系数是零；这些系数只是矩阵$\gamma^0\gamma^\mu$(在手性表示中)的分块对角元素。

让我们选择p和p'在$\pm z$方向，首先考虑电子右手和正电子左手的情况：



因此对于电子，我们有$\xi = \binom{1}{0}$，对应于z方向上的自旋向上，而对于正电子，我们有$\xi = \binom{0}{1}$，也对应于z方向的(物理的)自旋向上。两个粒子都有$(\hat{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi = +\xi$，所以旋量是

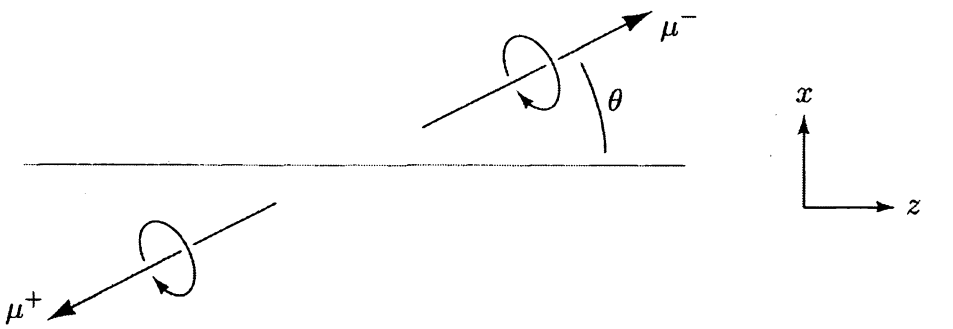
$$u(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \qquad v(p') = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

因此，矩阵元的电子那一半是

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = 2E\,(0,\ -1)\sigma^\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2E\,(0,1,i,0). \tag{5.29}$$

可以使用虚光子在$+z$方向具有圆极化来解释这表达式，它的极化矢量是$\epsilon_+ = (1/\sqrt{2})(\hat{x}+i\hat{y})$。

接下来，我们必须计算矩阵元的μ子那一半。让μ^-以与z轴成角度θ发射，首先考虑它是右手的情况(因此μ^+是左手的)：



为了计算$\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')$，我们可以回到表达式(5.26)，但是必须找到与沿着μ子动量的极化相对应的正确的旋量ξ。使用技巧要容易得多：因为$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$形式的任何表达式都像 4 矢量一样变换，所以我们可以旋转结果(5.29)。在xz平面上以θ角度旋

转这个向量，我们发现

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^{\mu}v(k') &= \left[\bar{v}(k')\gamma^{\mu}u(k)\right]^{*} \\ &= \left[-2E\,(0,\cos\theta,i,-\sin\theta)\right]^{*} \\ &= -2E\,(0,\cos\theta,-i,-\sin\theta).\end{aligned} \tag{5.30}$$

这个矢量也可以解释为虚光子的极化，当它与(5.29)有非零重叠时，我们得到一个非零振幅。将(5.29)和(5.30)插入(5.25)，我们看到振幅是

$$\mathcal{M}(e_R^-e_L^+\to\mu_R^-\mu_L^+)=\frac{e^2}{q^2}(2E)^2(-\cos\theta-1)=-e^2(1+\cos\theta), \tag{5.31}$$

与(1.6)一致，也与(5.21)一致。这组螺旋度的微分截面现在可以用与上面相同的方法获得，产生(5.22)。

我们可以用类似的方法计算其他三个不为零的螺旋度振幅。对于左手电子和右手正电子，我们很容易发现

$$\bar{v}(p')\gamma^{\mu}u(p)=-2E\,(0,1,-i,0)\equiv-2E\cdot\sqrt{2}\,\epsilon_{-}^{\mu}.$$

执行旋转以获得对应于左手μ^-和右手μ^+的向量：

$$\bar{u}(k)\gamma^{\mu}v(k')=-2E\,(0,\cos\theta,i,\sin\theta).$$

以各种方式将这些部件组合在一起产生剩余的振幅，

$$\begin{gathered}\mathcal{M}(e_L^-e_R^+\to\mu_L^-\mu_R^+)=-e^2(1+\cos\theta);\\ \mathcal{M}(e_R^-e_L^+\to\mu_L^-\mu_R^+)=\mathcal{M}(e_L^-e_R^+\to\mu_R^-\mu_L^+)=-e^2(1-\cos\theta).\end{gathered} \tag{5.32}$$

5.3 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$：非相对论极限

现在我们到能谱的另一端，讨论非相对论极限下的反应$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$。当E几乎不大于m_{μ}时，我们先前关于非极化微分截面的结果(5.12)变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\underset{|\mathbf{k}|\to0}{\longrightarrow}\frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{cm}}^2}\sqrt{1-\frac{m_{\mu}^2}{E^2}}=\frac{\alpha^2}{2E_{\mathrm{cm}}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{E}. \tag{5.33}$$

我们可以通过显式的自旋来计算振幅，重新获得这个结果，还能了解反应的自旋依赖性。我们再次从矩阵元开始

$$\mathcal{M}=\frac{e^2}{q^2}\Big(\bar{v}(p')\gamma^{\mu}u(p)\Big)\Big(\bar{u}(k)\gamma_{\mu}v(k')\Big).$$

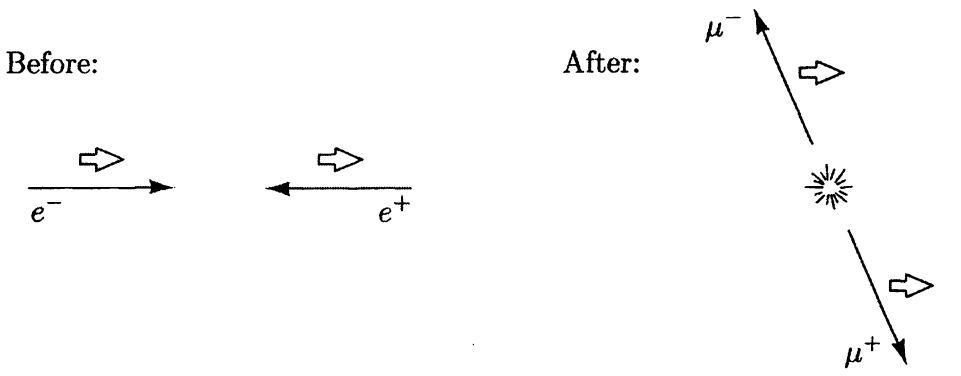


图 5.5 在非相对论极限下，系统的总自旋是守恒的，因此μ子产生自旋都沿着z轴向上。

电子和正电子仍然是非常的相对论的，所以如果我们选择它们具有确定的螺旋度，这个表达式将非常简单。设电子是右手，在$+z$方向上移动，正电子是左手，在$-z$方向上移动。然后从方程式(5.29)我们得到

$$\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p) = -2E\,(0,1,i,0). \tag{5.34}$$

在矩阵元的另一半，我们应该使用非相对论表达式

$$u(k) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi\\ \xi\end{pmatrix}, \qquad v(k') = \sqrt{m}\begin{pmatrix}\xi'\\ -\xi'\end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

请记住，在本节的讨论中，旋量ξ'给出的是反粒子的翻转自旋。让μ子旋量ξ和ξ'暂时不确定，我们可以很容易地计算

$$\begin{aligned}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k') &= m(\xi^\dagger, \xi^\dagger)\begin{pmatrix}\bar{\sigma}^\mu & 0\\ 0 & \sigma^\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi'\\ -\xi'\end{pmatrix}\\ &= \begin{cases}0 & \text{for } \mu = 0,\\ -2m\xi^\dagger\sigma^i\xi' & \text{for } \mu = i.\end{cases}\end{aligned} \tag{5.36}$$

为了计算$\mathcal{M}$，我们简单地将(5.34)点乘(5.36)并乘以$e^2/q^2 = e^2/4m^2$。结果是

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \mu^+\mu^-) = -2e^2\xi^\dagger\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xi'. \tag{5.37}$$

由于这个表达式中没有角度依赖性，所以μ子在任何方向上都以同样的可能性出现。更准确地说，它们以s波发射，轨道角动量为零。因此，角动量守恒要求末态的总自旋等于 1，并且除非μ子和反μ子都沿着z轴自旋向上，否则矩阵乘积实际上等于零(参见图 5.5)。

为了求出此过程的总速率，我们对μ子自旋求和，得到$\mathcal{M}^2 = 4e^4$，从而得到横截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \to \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{E_{\rm cm}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{E}. \tag{5.38}$$

对于左手电子和右手正电子，同样的表达式成立。因此，自旋平均截面只是这个表达式的$2\cdot(1/4)$倍，与(5.33)一致。

束缚态

到目前为止，我们已将散射过程的初态和末态视为孤立单粒子态。然而非常接近阈值时，μ子的库仑吸引力应该成为一个重要的影响。在刚刚低于阈值处，我们仍然可以将$\mu^+\mu^-$对构成电磁束缚态。

量子场论中束缚态的处理是一个丰富而复杂的课题，但主要超出了本书的范围*。幸运的是，自然界中许多熟悉的束缚系统可以被当作非相对论系统(至少是一个很好的近似)，其中内部运动很慢。从真空中产生组分粒子的过程仍然是一个相对论效应，需要量子场论对其进行适当的描述。在本节中，我们将发展一个公式，来对两粒子的、非相对论的束缚态的产生和湮灭的振幅进行计算。我们首先计算在e^+e^-湮没中产生一个$\mu^+\mu^-$束缚态的截面。

首先考虑电子和正电子的自旋都指向z轴向上的情况。从前面的讨论，我们知道得到的μ子都有自旋向上，因此我们能够产生的束缚态的唯一类型是总自旋1，也指向上。在这种构型中产生自由μ子的振幅是

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \to \mathbf{k}_1\uparrow, \mathbf{k}_2\uparrow) = -2e^2, \tag{5.39}$$

独立于μ子的动量(我们现在称为$\mathbf{k}_1$和$\mathbf{k}_2$)。

接下来，我们需要知道如何用自由粒子态写出束缚态。对于具有等质量成分的普遍两体系统，质心和相对坐标是

$$\mathbf{R} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{5.40}$$

这些有共轭动量

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \qquad \mathbf{k} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \tag{5.41}$$

总动量$\mathbf{K}$在质心系中为零。如果我们知道粒子之间的力(对于$\mu^+\mu^-$，这只是库

关于这个主题的评论可以在下面找到:Bodwin, Yennie, and Gregorio, *Rev.Mod. Phys.* **57, 723 (1985), 和 Sapirstein and Yennie, in Kinoshita (1990).,

仑力)，我们可以求解非相对论的薛定谔方程，得到薛定谔波函数，$\psi(\mathbf{r})$。束缚态仅仅是被这个波函数加权的、定$\mathbf{r}$或定$\mathbf{k}$的自由态的线性叠加。为了我们的目的，使用$\psi(\mathbf{r})$的傅里叶变换在动量空间中建立这个叠加更加方便：

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int d^3x\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}); \qquad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left|\widetilde{\psi}(\mathbf{k})\right|^2 = 1. \tag{5.42}$$

如果$\psi(\mathbf{r})$按常规进行归一化，则$\widetilde{\psi}(\mathbf{k})$给出求特定值$\mathbf{k}$的振幅。对于质量$M \ll 2m$，动量$\mathbf{K} = \mathbf{0}$，自旋为 1 向上的束缚态的一个显式表达式是

$$|B\rangle = \sqrt{2M}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\widetilde{\psi}(\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{2m}}\,|\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\uparrow\rangle\,. \tag{5.43}$$

因子$(1/\sqrt{2m})$将我们相对论归一化的自由粒子态转换，使得它们与$\widetilde{\psi}(\mathbf{k})$的积分是一个范数为1的态(这些因子应该包括$\sqrt{2E_{\pm\mathbf{k}}}$，但是对于一个非相对论束缚态，$|\mathbf{k}| \ll m$)。外部因子$\sqrt{2M}$转换回了相对论归一化，这是由我们关于截面的公式所假设的。这些归一化因子可以很容易地被修改，以此描述具有非零总动量$\mathbf{K}$的束缚态。

给定束缚态的这个表达式，我们可以立即写下产生束缚态的振幅：

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \to B) = \sqrt{2M}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\widetilde{\psi}^*(\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{2m}}\,\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \to \mathbf{k}\uparrow,\, -\mathbf{k}\uparrow). \tag{5.44}$$

由于(5.39)的自由态振幅与μ子的动量无关，$\mathbf{k}$上的积分给出$\psi^*(0)$——在原点计算的位置空间波函数。很自然地，由点状虚光子产生两粒子态的振幅，应该与波函数在零分离点的值成正比。整合各个部分，我们发现振幅很简单：

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \to B) = \sqrt{\frac{2}{M}}(-2e^2)\psi^*(0). \tag{5.45}$$

稍后我们将由这个振幅计算截面。然而，首先，让我们推广这个讨论，来处理具有更一般的自旋构型的束缚态。对于动量为$\mathbf{k}$和$-\mathbf{k}$的非相对论费米子产生的任何 S 矩阵元，在(5.37)前面的分析将会把它转换成一个自旋矩阵元的形式：

$$i\mathcal{M}(\text{something} \to \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \xi^\dagger\big[\Gamma(\mathbf{k})\big]\xi', \tag{5.46}$$

其中$\Gamma(\mathbf{k})$是某些 2×2 矩阵。现在我们必须用束缚态的归一化的自旋波函数来代

替旋量。在刚刚完成的例子(5.37)中，我们作了替换：

$$\xi'\xi^\dagger \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\quad 0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

更普遍地，通过以下替换可得到自旋为 1 的态：

$$\xi'\xi^\dagger \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{5.48}$$

这里$\mathbf{n}$是单位矢量，选择$\mathbf{n}=(\hat{x}+i\hat{y})/\sqrt{2}$可以得到(5.47)，同时，选择$\mathbf{n}=(\hat{x}-i\hat{y})/\sqrt{2}$和$\mathbf{n}=\hat{z}$将给出另外的两个自旋为1的态$\downarrow\downarrow$和$(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$(在最后一种情况下，(5.48)中的相对负号来自于翻转自旋的规则(3.135))。类似地，零自旋态$(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$由以下替换给出

$$\xi'\xi^\dagger \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{1}, \tag{5.49}$$

涉及了2×2单位矩阵。利用这些规则，我们可以将形式为(5.46)的S矩阵元相当普遍地转换为用于产生静止束缚态的S矩阵元：

$$i\mathcal{M}(\text{something}\to B)=\sqrt{\frac{2}{M}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\widetilde{\psi}^*(\mathbf{k})\;\mathrm{tr}\Big(\frac{\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2}}\,\Gamma(\mathbf{k})\Big), \tag{5.50}$$

其中，对 2 分量的旋量指标求迹。对于自旋为 0 的束缚态，用单位矩阵替换$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$。

矢量介子的产生与衰变

方程(5.45)可以直接转换成在e^+e^-湮没中产生$\mu^+\mu^-$束缚态的截面。为了便于提取这个方程中的所有物理量，我们引入初态和末态自旋构型的极化矢量：$\boldsymbol{\epsilon}_+=(\hat{x}+i\hat{y})/\sqrt{2}$(来自方程(5.29))，和$\mathbf{n}$(来自方程式(5.48))。然后(5.45)可以更不变的形式重写，即

$$\mathcal{M}(e^-_{\overline{R}}e^+_L\to B)=\sqrt{\frac{2}{M}}\,(-2e^2)\,\big(\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+\big)\,\psi^*(0). \tag{5.51}$$

束缚态自旋极化$\mathbf{n}$平行投影于$\boldsymbol{\epsilon}_+$。注意，如果电子最初未极化，则产生B的截面将涉及极化平均

$$\frac{1}{4}\big(|\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_+|^2+|\mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_-|^2\big)=\frac{1}{4}\big((n^x)^2+(n^y)^2\big). \tag{5.52}$$

因此，所产生的束缚态仍将沿e^+e^-碰撞轴优先极化。

假设一束非极化电子束，在$\mathbf{n}$的三个可能的方向上对(5.52)求和，我们得到用于产生束缚态的总截面的下列表达式：

$$\sigma(e^+e^- \to B) = \frac{1}{2}\frac{1}{2m}\frac{1}{2m}\int \frac{d^3K}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p'-K)\cdot\frac{2}{M}(4e^4)\frac{1}{2}|\psi(0)|^2. \tag{5.53}$$

注意1体相空间积分只能去除4个δ函数中的3个。通常，我们使用$\delta(P^0-K^0) = 2K^0\delta(P^2-K^2)$重写最后一个$\delta$函数。于是

$$\sigma(e^+e^- \to B) = 64\pi^3\alpha^2\frac{|\psi(0)|^2}{M^3}\delta(E_{\mathrm{cm}}^2 - M^2). \tag{5.54}$$

最后一个δ函数强制了总质心能量必须等于束缚态质量的约束，因此束缚态在e^+e^-湮没中作为一个共振态产生了。如果束缚态的寿命是有限的，那么这个δ函数将变宽，成为共振峰。在实际应用中，e^+e^-束能量的本征展开往往是一个更重要的拓展机制。无论哪种情况，(5.54)都正确地预测了共振峰下的面积。

如果束缚态B可以由e^+e^-产生，那么它也可以湮没回到e^+e^-或任何其它足够轻的轻子对。根据(4.86)，该衰变模式的总宽度给出为

$$\Gamma(B \to e^+e^-) = \frac{1}{2M}\int d\Pi_2\,|\mathcal{M}|^2, \tag{5.55}$$

其中$\mathcal{M}$是我们用来计算B产生的矩阵元(5.51)的复共轭。因此

$$\Gamma = \frac{1}{2M}\int\left(\frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}\right)\frac{8e^4}{M}|\psi(0)|^2(|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\epsilon}|^2 + |\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*|^2). \tag{5.56}$$

现在我们必须在电子极化态上求和，并在三个可能的$\mathbf{n}$值上求平均值。

$$\Gamma(B \to e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2}{3}\frac{|\psi(0)|^2}{M^2}. \tag{5.57}$$

B的衰变宽度的公式与产生截面的公式非常相似，这并不奇怪：两个计算都涉及同一矩阵元的平方，在初始和末态极化上求和。这两种计算只在如何形成极化平均和相空间因子上有所不同。通过这种逻辑，我们发现了两个量之间的关系，

$$\sigma(e^+e^- \to B) = 4\pi^2\cdot\frac{3\Gamma(B \to e^+e^-)}{M}\cdot\delta(E_{\mathrm{cm}}^2 - M^2), \tag{5.58}$$

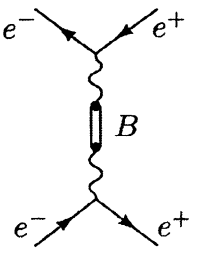
上式非常通用，完全独立于矩阵元计算的细节。(5.58)中的因子 3 来自$\mathbf{n}$的取向平均值，对于自旋为J的束缚态，这个因子将是$(2J+1)$。

这个形式理论最著名的应用不是μ子的束缚态，而是夸克的束缚态：**夸克偶素**。我们在图 5.3 中看到了$q\bar{q}$束缚态(例如J/ψ和Υ)的实验证据(共振峰太高太窄，无法在图中显示，但是它们的大小已被仔细测量)。公式(5.54)和(5.57)必须乘以颜色因子 3，以给出自旋为 1 的$q\bar{q}$束缚态的产生截面和衰变宽度。$q\bar{q}$波函数在原点的值$\psi(0)$不能由第一原理计算，但可从$q\bar{q}$谱的非相对论模型中估计出来，它带有从唯象上选择的势能。或者我们可以使用公式：

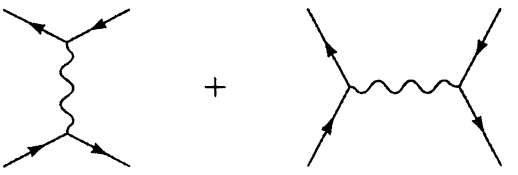
$$\Gamma(B(q\bar{q}) \to e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 Q^2 \frac{|\psi(0)|^2}{M^2} \tag{5.59}$$

来测量$q\bar{q}$束缚态的$\psi(0)$。例如$s\bar{s}$ 的自旋为1的$1S$态，ϕ介子，其e^+e^-局部宽度为 1.4 keV，质量为1.02 GeV。由此我们可以推断出$|\psi(0)|^2 = (1.2\text{ fm})^{-3}$。这个结果在物理上是合理的，因为强子尺寸通常约是1 fm。

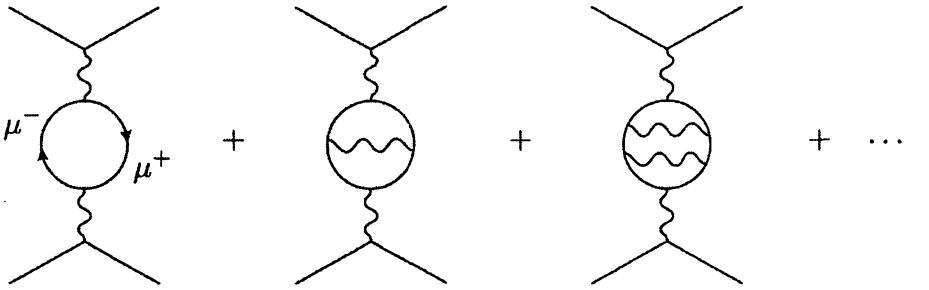
我们在这一节中的观点与前面几节中的观点大不相同：我们用一点量子场论和一点非相对论量子力学拼凑出一个近似公式，而不是从第一原理计算一切。然而，原则上，我们可以完全在相对论形式理论中处理束缚态。考虑一个e^+e^-对的湮灭，形成一个$\mu^+\mu^-$束缚态，然后它衰变回e^+e^-。在我们目前的形式理论中，我们可以用图表示这个过程



净过程是简单的$e^+e^- \to e^+e^-$(Bhabha 散射)。如果我们直接用 QED 微扰理论计算 Bhabha 散射截面会发生什么？显然，树级图中没有$\mu^+\mu^-$贡献：



然而，当我们在微扰级数中求高阶时，我们求出(除其他外)下列一组图：

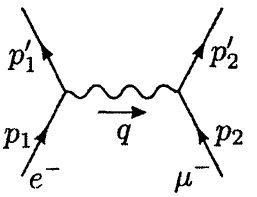


在$E_{\rm cm}$的大多数值中，这些图只对树级表达式进行了小的修正。但是，当$E_{\rm cm}$接近$\mu^+\mu^-$阈值时，μ子内涉及光子交换的图，包含μ子之间的库仑相互作用，因此变得相当大。我们必须对所有这样的图求和，并且能够表明这个求和等价于求解非相对论性薛定谔方程*。最后的预测是截面包含了共振峰，其面积由(5.54)给出，其宽度由(5.57)给出。

5.4 交叉对称

电子-μ子散射

现在我们已经完成了对过程$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的讨论，让我们考虑一个不同但密切相关的 QED 过程：电子-μ子散射，或$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$。最低阶 Feynman 图只是前一个翻过来的图：



$$= \frac{ie^2}{q^2}\,\bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1)\,\bar{u}(p_2')\gamma_\mu u(p_2).$$

当我们计算振幅平方，在自旋上求和求平均时，过程$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$和$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$之间的关系变得清晰：

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\,\mathrm{tr}\Big[(\not{p}'_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu\Big]\,\mathrm{tr}\Big[(\not{p}'_2 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu\Big].$$

这与我们的$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的结果(5.4)完全相同，通过使用替换：

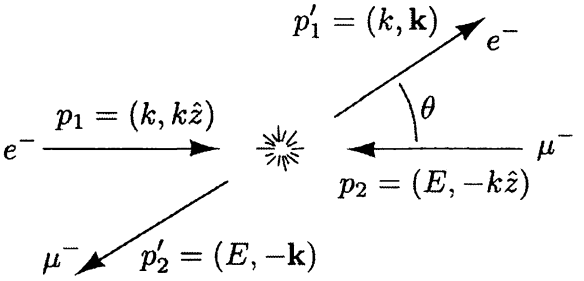
$$p \to p_1, \qquad p' \to -p_1', \qquad k \to p_2', \qquad k' \to -p_2. \tag{5.60}$$

*这一分析由 Berestetskii、Lifshitz 和 Pitaevskii(1982)进行。

因此，我们不需要从头开始计算这些迹，而是可以在以前的结果(等式(5.10))中进行相同的替换。设置m_e=0，我们发现

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{8e^4}{q^4}\Big[(p_1\cdot p_2')(p_1'\cdot p_2)+(p_1\cdot p_2)(p_1'\cdot p_2')-m_\mu^2(p_1\cdot p_1')\Big]. \quad (5.61)$$

为了计算这个表达式，我们必须计算出运动学，这将是完全不同的。在质心系下工作，我们完成以下作业：



$$E^2=k^2+m_\mu^2$$
$$\mathbf{k}\cdot\hat{z}=k\cos\theta$$
$$E+k=E_{\text{cm}}$$

我们需要的组合是

$$p_1\cdot p_2=p_1'\cdot p_2'=k(E+k); \qquad p_1'\cdot p_2=p_1\cdot p_2'=k(E+k\cos\theta);$$
$$p_1\cdot p_1'=k^2(1-\cos\theta); \qquad q^2=-2p_1\cdot p_1'=-2k^2(1-\cos\theta).$$

现在平方矩阵元的表达式是

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{2e^4}{k^2(1-\cos\theta)^2}\Big((E+k)^2+(E+k\cos\theta)^2-m_\mu^2(1-\cos\theta)\Big). \quad (5.62)$$

为了得到这个表达式的横截面，我们使用等式(4.84)，在一个粒子无质量的情况下，它采用简单的形式：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}}=\frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2(E+k)^2}. \quad (5.63)$$

因此，我们得到了质心系中非极化的电子-μ子散射的结果：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2k^2(E+k)^2(1-\cos\theta)^2}\Big((E+k)^2+(E+k\cos\theta)^2-m_\mu^2(1-\cos\theta)\Big), \quad (5.64)$$

其中$k=\sqrt{E^2-m_\mu^2}$。在高能极限下我们可以设置$m_\mu=0$，微分截面变成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2E_{\text{cm}}^2(1-\cos\theta)^2}\Big(4+(1+\cos\theta)^2\Big). \quad (5.65)$$

注意公式(5.64)和(5.65)的奇异行为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\propto\frac{1}{\theta^4} \qquad \text{as } \theta\to 0 \quad (5.66)$$

这个奇点与卢瑟福公式(问题4.4)相同。这种行为在库仑散射中总是存在的，它来源于靠近壳层(即$q^2 \approx 0$)的虚光子。

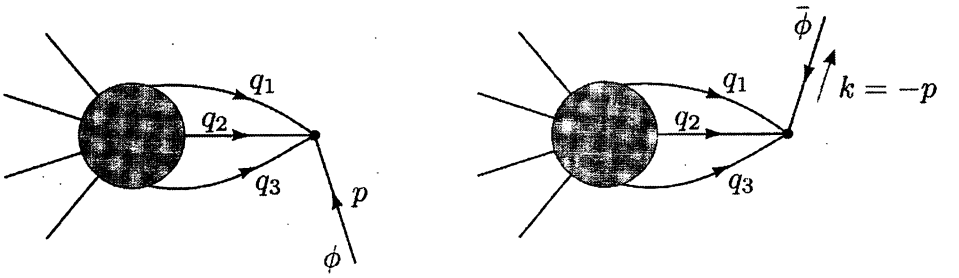
交叉对称

我们这里使用的技巧，即两个过程$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$和$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$之间的关系，是我们称为**交叉对称**关系的类型的第一个例子。一般来说，初态包含一个动量p的粒子的任何过程的S矩阵，等于末态包含一个动量$k = -p$的反粒子但在其它方面相同的过程的S矩阵。那就是：

$$\mathcal{M}\big(\phi(p) + \cdots \to \cdots\big) = \mathcal{M}\big(\cdots \to \cdots + \bar{\phi}(k)\big), \tag{5.67}$$

其中$\bar{\phi}$是ϕ的反粒子，$k = -p$(注意，物理上允许p和k都存在的p值是没有的，因为粒子必须具有$p^0 > 0$并且反粒子必须具有$k^0 > 0$。因此从技术上讲，我们应该说，通过解析延拓，两个振幅都可以从另一个获得)。

关系(5.67)直接遵循Feynman规则。对这两个振幅有贡献的图的自然一一对应的，其中对应的图只有在将入射的ϕ改变为出射的$\bar{\phi}$时才会有所不同。典型的一对图是这样的：



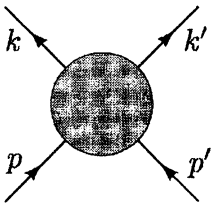
在第一个图中，从图的其余部分进入顶点的动量q_i必须加起来等于$-p$，而在第二个图中它们必须加起来等于k。因此，除了外腿因子可能有任何不同外，如果$p = -k$，这两个图是相等的。如果ϕ是自旋为零的玻色子，则没有外腿因子，因此证明了等式。如果ϕ是费米子，分析就更微妙了，因为这个关系取决于外部旋量u和v的相对相位约定。如果我们简单地在费米子极化求和中用$-k$替换p，会发现

$$\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p} + m = -(\not{k} - m) = -\sum v(k)\bar{v}(k). \tag{5.68}$$

负号可以通过改变$v(k)$的相位约定来补偿。在实践中，手动去取消每个交叉费米子的负号最简单。根据旋量$u(p)$和$v(k)$的适当约定，无需自旋平均即可证明等式(5.67)。

Mandelstam 变量

存在一些使得交叉关系易于应用的变量，通常用这些变量来表示散射振幅是很有用的。对于2体→ 2体过程，可以像下面那样做。将四个外部动量标记为

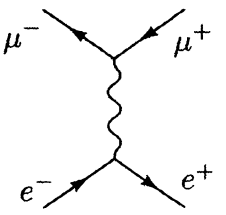


我们现在定义新物理量——**Mandelstam 变量**

$$\begin{aligned} s &= (p+p')^2 = (k+k')^2; \\ t &= (k-p)^2 = (k'-p')^2; \\ u &= (k'-p)^2 = (k-p')^2. \end{aligned} \tag{5.69}$$

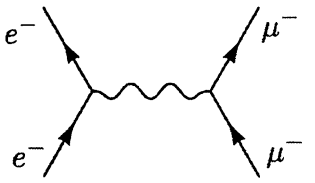
t和u的定义似乎可以互换(通过重命名$k \to k'$)，通常将t定义为最相似粒子的初动量和末动量的平方差。对于任何过程，s是总的初始 4 动量的平方。请注意，如果我们把所有四个动量都定义为入射，那么这些定义中的所有符号都将是+。

为介绍 Mandelstam 变量的使用。让我们首先考虑$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$的平方振幅，为了简单在无质量极限下工作。在这个极限中我们有$t = -2p\cdot k = -2p'\cdot k'$和$u = -2p\cdot k' = -2p'\cdot k$。当然$s = (p+p')^2 = q^2$。参照前面的结果(5.10)，我们发现



$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{s^2}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]. \tag{5.70}$$

为转换为过程$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$，我们将图放在一边，并利用交叉关系，这在 Mandelstam 变量方面变得非常简单。例如，交叉关系告诉我们改变正电子动量p'的符号，并将其重新解释为出射电子的动量。因此，$s = (p+p')^2$就变成了我们所称的t，即出射和入射电子动量的差。类似地，t变成s，而u保持不变。因此，对于$e^-\mu^- \to e^-\mu^-$我们可以马上写下：

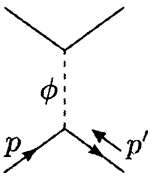


$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{t^2}\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right]. \tag{5.71}$$

您可以很容易地检查这与无质量极限(5.61)是否一致。注意，虽然(5.70)和(5.71)看起来非常相似，但它们在物理上非常不同：第一个的分母只是$s^2 = E_{\text{cm}}^4$，但是第二个的分母涉及t，它取决于角度，并且当$\theta \to 0$时变为零。

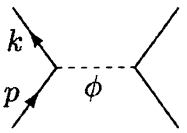
当一个2体$\to$ 2体图只包含一个虚粒子时，通常把该粒子描述为处于某个“确定的道”中。道可以从Feynman图的形式读取。每个道都导致了截面的特征性角度依赖关系：

s-channel:



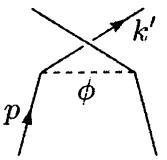
$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{s - m_\phi^2}$$

t-channel:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{t - m_\phi^2}$$

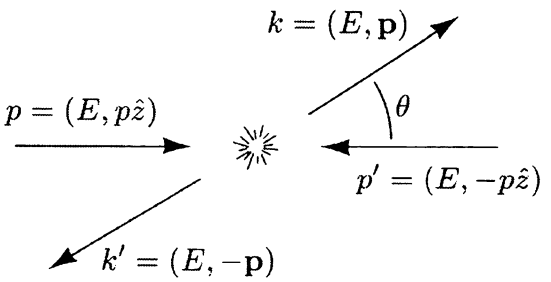
u-channel:



$$\mathcal{M} \propto \frac{1}{u - m_\phi^2}$$

在许多情况下，单个过程将将从多个道得到贡献；这些道必须被一致地添加。例如，Bhabha散射的振幅$e^+e^- \to e^+e^-$是s和t道的图的和。Moller散射$e^-e^- \to e^-e^-$包括t和u道的图。

为了更好地理解s、t和u，让我们在所有粒子质量都为m的质心系下明确地计算它们。运动学像通常一样：



这样 Mandelstam 变量就是

$$
\begin{aligned}
s &= (p+p')^2 = (2E)^2 = E_{\mathrm{cm}}^2; \\
t &= (k-p)^2 = -p^2\sin^2\theta - p^2(\cos\theta - 1)^2 = -2p^2(1-\cos\theta); \\
u &= (k'-p)^2 = -p^2\sin^2\theta - p^2(\cos\theta + 1)^2 = -2p^2(1+\cos\theta).
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

我们看到当$\theta \to 0$时$t \to 0, \theta \to \pi$时$u \to 0$(当质量不全相等时，t和u的极限值将略有移动)。

注意(5.72)，当所有四个粒子都有质量m时，Mandelstam 变量的和是$s+t+u = 4E^2 - 4p^2 = 4m^2$。这是一个更一般的关系的特例，它通常非常有用：

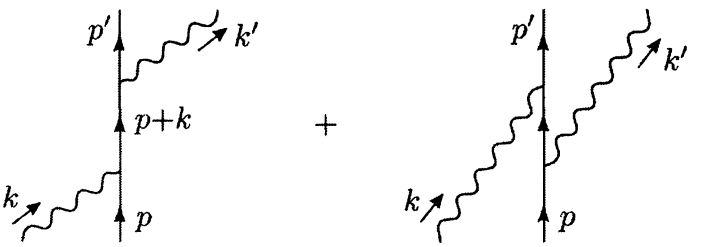
$$
s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2, \tag{5.73}
$$

求和覆盖四个外部粒子。将方程(5.69)右侧的项相加，再应用形式为$(p+p'-k-k')^2 = 0$的动量守恒，这个等式很容易证明。

5.5 康普顿散射

现在我们继续考虑一个稍微不同的 QED 过程：康普顿散射，或者$e^-\gamma \to e^-\gamma$。我们将把这个反应的非极化截面，计算到以α展开的最低阶。计算将采用我们迄今为止发展的所有机制，包括前一节的 Mandelstam 变量。我们还将发展一些处理外部光子的新技术。

这是我们涉及两个图的计算的第一个例子：



像往常一样，Feynman 规则告诉我们如何精确地写出$\mathcal{M}$。注意，因两个图的费米子部分是相同的，所以这两个项之间没有相对负号。使用$\epsilon_\nu(k)$和$\epsilon_\mu^*(k')$表示初态和末态光子的极化矢量，我们有

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} = {} & \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(k')\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k)u(p) \\
& + \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k)\frac{i(\not{p}-\not{k}'+m)}{(p-k')^2-m^2}(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(k')u(p)
\end{aligned}
$$

$$= -ie^2\epsilon^*_\mu(k')\epsilon_\nu(k)\,\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\nu}{(p+k)^2-m^2}+\frac{\gamma^\nu(\not{p}-\not{k}'+m)\gamma^\mu}{(p-k')^2-m^2}\right]u(p).$$

在求这个表达式的平方之前，我们可以做一些简化。因$p^2 = m^2$和$k^2 = 0$，传播子的分母是

$$(p+k)^2-m^2 = 2p\cdot k \qquad \text{and} \qquad (p-k')^2-m^2 = -2p\cdot k'.$$

为了简化分子，我们使用一些狄拉克代数：

$$\begin{aligned}(\not{p}+m)\gamma^\nu u(p) &= (2p^\nu - \gamma^\nu\not{p}+\gamma^\nu m)u(p)\\ &= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu(\not{p}-m)u(p)\\ &= 2p^\nu u(p).\end{aligned}$$

对每个传播子的分子使用这个技巧，我们得到

$$i\mathcal{M} = -ie^2\epsilon^*_\mu(k')\epsilon_\nu(k)\,\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{-\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu+2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(p). \quad (5.74)$$

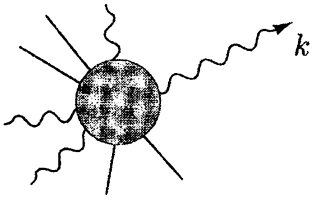
光子极化和

计算中的下一步是使$\mathcal{M}$的表达式平方，以及求电子和光子极化态的和(或平均)。使用等式$\sum u(p)\bar{u}(p) = \not{p}+m$，可以像以前一样执行电子极化的和。幸运的是，在光子极化矢量上求和也有类似的技巧。正确的方法是进行替换：

$$\sum_{\text{polarizations}} \epsilon^*_\mu\epsilon_\nu \;\longrightarrow\; -g_{\mu\nu}. \quad (5.75)$$

箭头表示这不是实际的等式。然而，只要两边都点乘到 QED 振幅$\mathcal{M}$的表达式的其余部分，则替换是有效的。

为了推导这个公式，让我们考虑一个任意的 QED 过程，它涉及具有动量k的外部光子：



$$= i\mathcal{M}(k) \equiv i\mathcal{M}^\mu(k)\epsilon^*_\mu(k). \quad (5.76)$$

由于振幅总是包含$\epsilon^*_\mu(k)$，所以我们提取了这个因子，并将$\mathcal{M}^\mu(k)$定义为振幅$\mathcal{M}$的其余部分。截面与以下式子成正比：

$$\sum_\epsilon \left|\epsilon^*_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)\right|^2 = \sum_\epsilon \epsilon^*_\mu\epsilon_\nu\,\mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k).$$

为了简单起见，我们将k指向第 3 方向：$k^\mu = (k, 0,0, k)$。然后我们正在求和的两个横向极化矢量可以选择为

$$\epsilon_1^\mu = (0,1,0,0); \qquad \epsilon_2^\mu = (0,0,1,0).$$

有了这些约定，我们有

$$\sum_\epsilon \left|\epsilon_\mu^*(k)\mathcal{M}^\mu(k)\right|^2 = \left|\mathcal{M}^1(k)\right|^2 + \left|\mathcal{M}^2(k)\right|^2. \tag{5.77}$$

现在回顾一下第 4 章，外部光子是由相互作用项$\int d^4x e j^\mu A_\mu$产生的，其中$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$是狄拉克矢量流，因此我们期望$\mathcal{M}^\mu(k)$由海森堡场$j^\mu$的矩阵元给出。

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x\, e^{ik\cdot x} \left\langle f\right| j^\mu(x) \left|i\right\rangle, \tag{5.78}$$

其中初态和末态包括除了光子之外的所有粒子

经典的运动方程中，我们知道当前的j^μ是守恒的：$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$。只要这个性质在量子理论中仍然成立，我们可以将$k_\mu$点乘到(5.78)中，来获得：

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \tag{5.79}$$

当极化矢量$\epsilon_\mu(k)$被k_μ替换时，振幅$\mathcal{M}$为零。这个著名的关系被称为 **Ward 等式**。它本质上是流守恒的陈述，而流守恒是 QED 的规范对称性的结果。我们将在第 7.4 节给出 Ward 等式的正式证明，并对这个快速的“推导”中略过的一些微妙点进行讨论。

明确地检查(5.74)中给出的康普顿振幅是否服从 Ward 等式是有用的。为此，将$\epsilon_\nu(k)$替换为k_ν或$\epsilon_\mu^*(k')$替换为k'_μ，并巧妙地处理 Dirac 矩阵的积。无论哪种情况(在一些代数计算之后)，来自两个图的项相互抵消，结果为零。

回到我们对极化求和公式(5.75)的推导，对$k^\mu = (k, 0,0, k)$，Ward恒等式采取以下形式

$$k\mathcal{M}^0(k) - k\mathcal{M}^3(k) = 0. \tag{5.80}$$

于是$\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_\epsilon \epsilon_\mu^*\epsilon_\nu\, \mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k) &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 \\ &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 \\ &= -g_{\mu\nu}\, \mathcal{M}^\mu(k)\mathcal{M}^{\nu*}(k).\end{aligned}$$

也就是说，我们可以用$-g_{\mu\nu}$代替$\sum \epsilon_\mu^*\epsilon_\nu$来对外部光子的极化求和。

注意，这证明了(在我们对 Ward 等式进行一般性证明之前)，非物理的类时光子和径向光子可以在 QED 计算中始终被忽略，因为在任何情况下，产生这些态的平方振幅会抵消，从而导致总概率为零。类时光子态的负范数——在等式(4.132)之后的讨论中困扰我们的一个性质——在这抵消中起着至关重要的作用。

Klein-Nishina 公式

康普顿散射截面的其余计算是直截了当的，虽然稍微整理一下会很有用。我们希望在平方振幅中的初始电子和光子极化上求平均，在末态电子和光子极化上求和。从 $\mathcal{M}$ 的表达式(5.74)开始，我们发现

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4}\,g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma}\cdot\mathrm{tr}\Big\{(\not{p}'+m)\Big[\frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\mu-2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k'}\Big]\\ \cdot(\not{p}+m)\Big[\frac{\gamma^\sigma \not{k}\gamma^\rho+2\gamma^\rho p^\sigma}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^\rho \not{k}'\gamma^\sigma-2\gamma^\sigma p^\rho}{2p\cdot k'}\Big]\Big\}\\ \equiv\frac{e^4}{4}\left[\frac{\mathbf{I}}{(2p\cdot k)^2}+\frac{\mathbf{II}}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')}+\frac{\mathbf{III}}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)}+\frac{\mathbf{IV}}{(2p\cdot k')^2}\right],\end{aligned}\tag{5.81}$$

其中**I**、**II**、**III**和**IV**是复杂的迹。注意，如果我们用$-k'$替换k，**IV**与**I**相同。此外，由于我们可以反转迹内γ矩阵的顺序(等式(5.7))，我们看到**II** = **III**，因此我们只必须计算**I**和**II**。

迹的第一项是

$$\mathbf{I}=\mathrm{tr}\big[(\not{p}'+m)(\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p}+m)(\gamma_\nu \not{k}\gamma_\mu+2\gamma_\mu p_\nu)\big].$$

迹中有 16 个项，但是一半包含奇数个γ矩阵——因此为零。现在我们必须对另外八个项逐个进行计算。例如，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\big[\not{p}'\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu \not{p}\gamma_\nu \not{k}\gamma_\mu\big] &= \mathrm{tr}\big[(-2\not{p}')\not{k}(-2\not{p})\not{k}\big]\\ &= \mathrm{tr}\big[4\not{p}'\not{k}(2p\cdot k-\not{k}\not{p})\big]\\ &= 8p\cdot k\ \ \mathrm{tr}[\not{p}'\not{k}]\\ &= 32(p\cdot k)(p'\cdot k).\end{aligned}$$

通过类似地使用收缩等式(5.8)和(5.9)以及其他 Dirac 代数，例如$\not{p}\not{p}=p^2=m^2$，当烟雾消散时，**I**中的每个项可以简化为不超过两个γ矩阵的轨迹，我们发现

$$\mathbf{I}=16\big(4m^4-2m^2p\cdot p'+4m^2p\cdot k-2m^2p'\cdot k+2(p\cdot k)(p'\cdot k)\big).\tag{5.82}$$

虽然这个表达式并不明显，但是可以进一步简化。为看到如何做，引入Mandelstam变量：

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = 2p\cdot k + m^2 = 2p'\cdot k' + m^2; \\ t &= (p'-p)^2 = -2p\cdot p' + 2m^2 = -2k\cdot k'; \\ u &= (k'-p)^2 = -2k'\cdot p + m^2 = -2k\cdot p' + m^2. \end{aligned} \tag{5.83}$$

回想一下(5.73)，动量守恒意味着$s+t+u=2m^2$，用s、t和u写出所有东西，并且利用这个等式，我们最终得到了

$$\mathbf{I} = 16\big(2m^4 + m^2(s-m^2) - \tfrac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\big). \tag{5.84}$$

令$k \leftrightarrow -k'$，我们马上写出

$$\mathbf{IV} = 16\big(2m^4 + m^2(u-m^2) - \tfrac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\big). \tag{5.85}$$

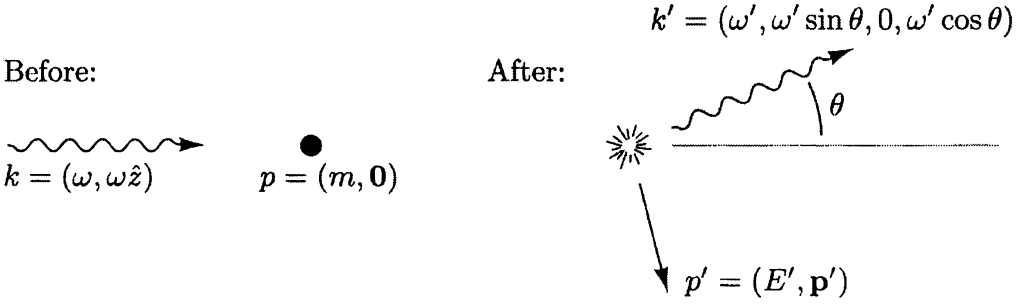
计算分子 II，III 中的迹所需工作量与我们刚才所做的工作量大致相同。答案是

$$\mathbf{II} = \mathbf{III} = -8\big(4m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2)\big). \tag{5.86}$$

把平方矩阵元(5.81)的各个部分放在一起，用$p\cdot k$和$p\cdot k'$对s和u进行重写，最后得到结果。

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\Big(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\Big) + m^4\Big(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\Big)^2\right]. \tag{5.87}$$

为了把这个表达式转换为截面，我们必须选定一个参考系，并画出运动学图。康普顿散射通常在电子初始静止的实验室参考系内分析。



我们将用ω和θ来表示截面。我们可以找到末态光子的能量ω'。使用以下技巧：

$$\begin{aligned} m^2 = (p')^2 &= (p+k-k')^2 = p^2 + 2p\cdot(k-k') - 2k\cdot k' \\ &= m^2 + 2m(\omega-\omega') - 2\omega\omega'(1-\cos\theta), \end{aligned}$$

$$\text{hence,} \qquad \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta). \tag{5.88}$$

最后一行是康普顿公式，用于计算光子波长的位移。然而，对于ω'

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \tag{5.89}$$

这个参考系中的相空间积分是

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega'}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k' + p' - k - p) \\
&= \int \frac{(\omega')^2 d\omega'\, d\Omega}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega' E'} \\
&\qquad \times 2\pi\,\delta(\omega' + \sqrt{m^2+\omega^2+(\omega')^2-2\omega\omega'\cos\theta} - \omega - m) \\
&= \int \frac{d\cos\theta}{2\pi}\frac{\omega'}{4E'}\frac{1}{\left|1 + \dfrac{\omega' - \omega\cos\theta}{E'}\right|} \\
&= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\,\frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{8\pi}\int d\cos\theta\,\frac{(\omega')^2}{\omega m}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

将所有部分都插入我们的普遍的截面公式(4.79)并设置$|v_A - v_B| = 1$，我们发现

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{2\omega}\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{8\pi}\frac{(\omega')^2}{\omega m}\cdot\Big(\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\Big).$$

为了计算$|\mathcal{M}|^2$，我们在(5.87)中替换了$p\cdot k = m\omega$和$p\cdot k' = m\omega'$。写出最终结果的最快捷方法是

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2\Big[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\Big], \tag{5.91}$$

其中ω'/ω由(5.89)给出。这是(自旋平均)**Klein-Nishina 公式**，1929 年首次导出*。

在极限$\omega \to 0$下，我们从(5.89)中看到，$\omega'/\omega \to 1$，所以截面变成

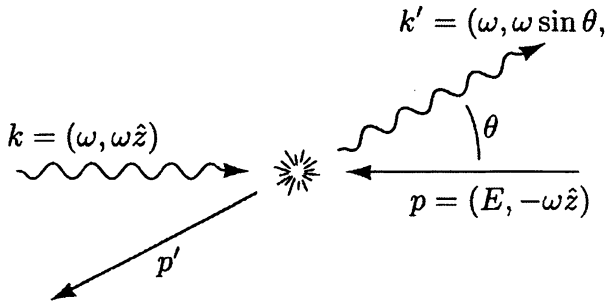
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + \cos^2\theta); \qquad \sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \tag{5.92}$$

这是经典电磁辐射被自由电子散射的汤姆逊截面。

* O. Klein and Y. Nishina, Z. *Physik*, **52**, 853 (1929).

高能表现

为了分析康普顿散射截面的高能行为，在质心系中工作是最简单的。我们可以很容易地从不变表达式(5.87)构造这个参考系中的微分截面。现在这个反应的运动学是这样的：



$$p \cdot k = \omega(E + \omega)$$
$$p \cdot k' = \omega(E + \omega\cos\theta)$$
$$E^2 = \omega^2 + m^2$$

将这些值插入(5.87)中，我们看到，对于$\theta \approx \pi$，$p \cdot k / p \cdot k'$项变得非常大，而其他项都是$\mathcal{O}(1)$或更小。因此，对于$E \gg m$和$\theta \approx \pi$，我们有

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \approx 2e^4 \cdot \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} = 2e^4 \cdot \frac{E+\omega}{E+\omega\cos\theta}. \tag{5.93}$$

质心系中的截面由(4.84)给出：

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{2\omega}\cdot\frac{\omega}{(2\pi)4(E+\omega)}\cdot\frac{2e^4(E+\omega)}{E+\omega\cos\theta} \\ &\approx \frac{2\pi\alpha^2}{2m^2 + s(1+\cos\theta)}.\end{aligned} \tag{5.94}$$

注意，由于$s \gg m^2$，当光子向反方向发射时($\theta \approx \pi$)，(5.94)的分母几乎消失。事实上，如果不需要切断这个奇异点，在这个公式中可以完全忽略电子质量m。为了在$\cos\theta$上积分，如果我们在$\theta \approx \pi$附近提供一个等价的截断，我们可以扔掉电子质量项。用这种方法我们可以近似康普顿散射截面，通过

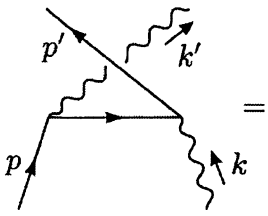
$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\,\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \approx \frac{2\pi\alpha^2}{s}\int_{-1+2m^2/s}^{1} d(\cos\theta)\,\frac{1}{(1+\cos\theta)}. \tag{5.95}$$

因此，我们发现，总截面在高能下表现为

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\log\left(\frac{s}{m^2}\right). \tag{5.96}$$

主要的依赖关系α^2/s遵从量纲分析。但是与光子反向散射相关的奇点导致了能量的一个额外对数的增强。

让我们试着理解这个奇点的物理学。奇点来自u道图的平方，



$$= -ie^2\,\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\bar{u}(p')\gamma^\mu\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu u(p). \qquad (5.97)$$

振幅在$\theta\approx\pi$处很大，因为那时传播子的分母($\sim m^2$)比s小。更确切地说，定义$\chi\equiv\pi-\theta$。我们将对比m/ω大一些的χ值感兴趣，但仍然足够小，我们可以做近似$1-\cos\chi\approx\chi^2/2$。对于这个范围内的$\chi$，分母是

$$(p-k')^2-m^2=-2p\cdot k'\approx-2\omega^2\left(\frac{m^2}{2\omega^2}+1-\cos\chi\right)\approx-(\omega^2\chi^2+m^2). \quad (5.98)$$

它比s小(在χ值的一个很大的范围上)，因此总截面增强。

回头看(5.93)，我们看到，对于$m/\omega\ll\chi\ll1$的χ，平方振幅正比于$1/\chi^2$，因此我们期望$\mathcal{M}\propto1/\chi$，但是我们刚刚看到，$\mathcal{M}$的分母正比于χ^2,，所以分子中必须有一个χ的补偿因子。我们可以通过观察一组特定的电子和光子极化的振幅来理解这个因子的物理起源。

假设初始电子是右手的。(5.97)的主导项来自于传播子分子中涉及$(\not{p}-\not{k}')$的项。由于这一项在(5.97)$\bar{u}$和u之间包含三个γ矩阵，所以末态电子也必须是右手的。因此，振幅是

$$i\mathcal{M}=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')u^\dagger_R(p')\sigma^\mu\frac{\bar{\sigma}\cdot(p-k')}{-(\omega^2\chi^2+m^2)}\sigma^\nu u_R(p), \qquad (5.99)$$

where

$$u_R(p)=\sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad u_R(p')=\sqrt{2E}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad (5.100)$$

如果初始光子是左手光子，其中$\epsilon_\mu(k)=(1/\sqrt{2})(0,1,-i,0)$，那么

$$\sigma^\mu\epsilon_\mu(k)=\begin{pmatrix}0&0\\\sqrt{2}&0\end{pmatrix},$$

组合$u^\dagger_R(p')\sigma^\mu\epsilon_\mu(k)$为零。因此，初始光子必须是右手的。类似地，除非末态光子是右手的，否则振幅就会消失。这组极化的运动情况如图 5.6 所示。注意，末

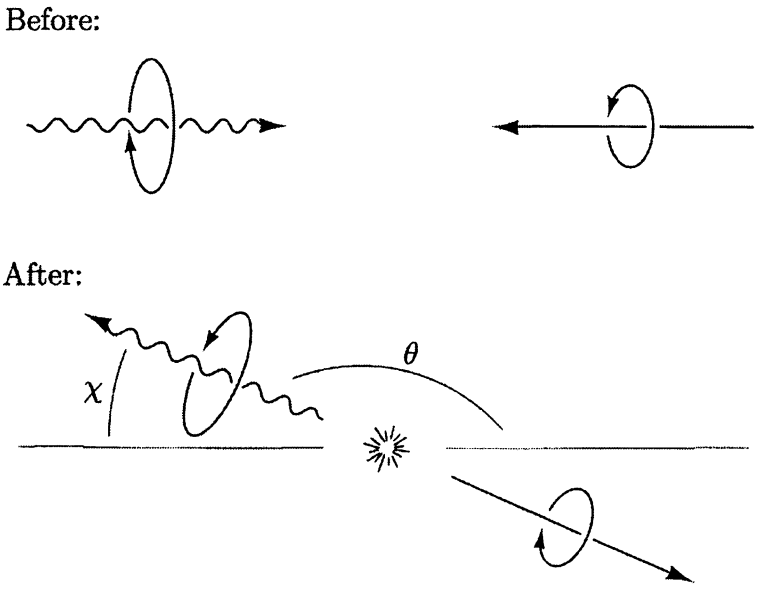


图 5.6. 在高能极限下，末态光子最可能以反向角度发射。由于螺旋度守恒，一个单位的自旋角动量被转换成轨道角动量。

态的总自旋角动量比初态的总自旋角动量小一个单位。

继续我们的计算。让我们考虑(5.99)传播子的分子。对于感兴趣范围内的χ，主导项是

$$-\sigma^1(p-k')^1 = \sigma^1 \cdot \omega\chi.$$

这是上面预期的χ因子。它表明末态是p波，正如角动量守恒所要求的。整合所有的部分，我们获得

$$\mathcal{M}(e_R^-\gamma_R \to e_R^-\gamma_R) \approx e^2\sqrt{2E}\sqrt{2}\frac{\omega\chi}{(\omega^2\chi^2+m^2)}\sqrt{2E}\sqrt{2} \approx \frac{4e^2\chi}{\chi^2+m^2/\omega^2}. \tag{5.101}$$

在所有的初态和末态粒子都是左手的情况下，我们会发现相同的结果。

注意，对于直接反向散射，$\chi=0$，矩阵元(5.101)由于分子中的角动量为零而消失。因此，在非常接近反向角度，我们也应该考虑(5.97)中传播子分子的质量项。这个项只包含两个伽马矩阵，因此将一个右手电子转换成一个左手电子。通过与导出式(5.101)类似的分析,我们可以看到，只有当初态光子左手和末态光子右手时，这个振幅才不消失。通过更详细的分析，我们发现

$$\mathcal{M}(e_R^-\gamma_L \to e_L^-\gamma_R) \approx \frac{4e^2m/\omega}{\chi^2+m^2/\omega^2}. \tag{5.102}$$

所有四个螺旋度反转的反应给出相同的矩阵元。

为了将这个结果与我们之前的计算比较，我们应该将(5.101)和(5.102)对截面的贡献，以及包含的初态电子为左手的反应的相等贡献，相加，除以 4 来对初始自旋求平均。于是非极化微分截面应该为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{2}\frac{1}{2E}\frac{1}{2\omega}\frac{\omega}{(2\pi)4(E+\omega)}\left[\frac{8e^4\chi^2}{(\chi^2+m^2/\omega^2)^2}+\frac{8e^4m^2/\omega^2}{(\chi^2+m^2/\omega^2)^2}\right] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{s(\chi^2+4m^2/s)},\end{aligned} \tag{5.103}$$

这与式(5.94)完全一致。

仅在运动学端点发生螺旋度翻转过程(5.102)的重要性有一个有趣的实验结果。考虑**逆**康普顿散射过程，高能电子束与低能光子束(例如激光束)碰撞产生高能光子束。假设电子能量为E，激光光子的能量为ϖ，散射光子的能量是$E'=yE$，为了简单起见，假设$s=4E\varpi\gg m^2$。然后我们刚刚做的计算适用于这种情况，其中由散射产生的最高能量光子在质心系精确的反向。通过在质心系和实验室系中计算$2k\cdot k'$，很容易表明末态光子能量与质心散射角有关：

$$y\approx\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\approx 1-\frac{\chi^2}{4}.$$

然后可以将方程式(5.103)改写为，在端点附近反向散射光子的能量分布公式

$$\frac{d\sigma}{dy}=\frac{2\pi\alpha^2}{s((1-y)+m^2/s)^2}\left[(1-y)+\frac{m^2}{s}\right], \tag{5.104}$$

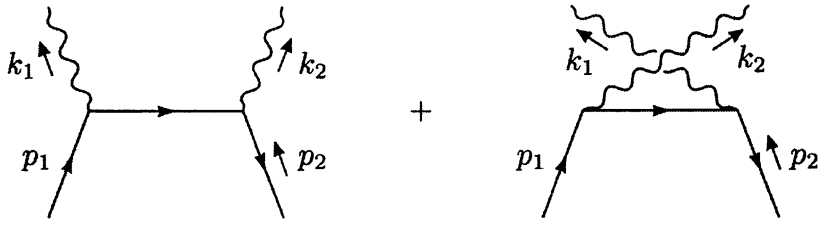
其中，括号中的第一项对应于螺旋度守恒过程，第二项对应于螺旋度翻转过程。因此，例如，如果右手极化激光束被非极化高能电子束散射，则大多数反向散射光子将是右手的，但是最高能量的光子将是左手的。这种效应可用于实验测量电子束的极化，或用来产生能量分布和极化都可以调控的高能光子源。

对湮灭为光子

我们仍然可以从康普顿散射振幅中再得到一个结果，考虑湮没过程

$$e^+e^- \to 2\gamma,$$

得到图表的最低阶：



这过程因交叉对称而与康普顿散射有关；我们可从康普顿振幅得到正确的振幅。

通过替换:

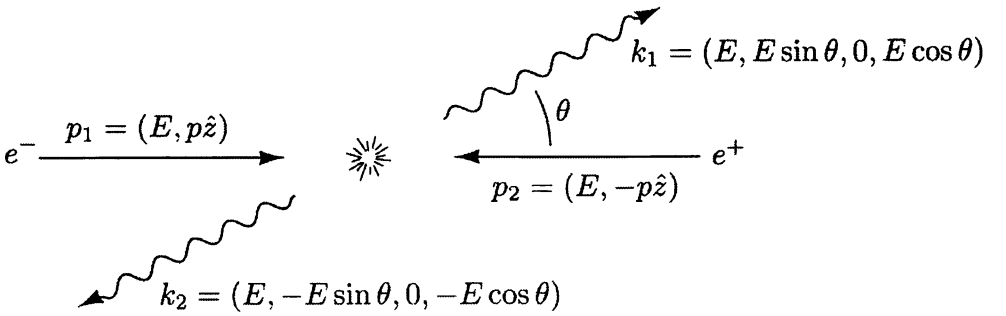
$$p \to p_1 \qquad p' \to -p_2 \qquad k \to -k_1 \qquad k' \to k_2.$$

在(5.87)中进行这些替换，我们发现

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = -2e^4\left[\frac{p_1\cdot k_2}{p_1\cdot k_1}+\frac{p_1\cdot k_1}{p_1\cdot k_2}+2m^2\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1}+\frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)\right.$$
$$\left. - m^4\left(\frac{1}{p_1\cdot k_1}+\frac{1}{p_1\cdot k_2}\right)^2\right]. \tag{5.105}$$

总的负号是交叉关系(5.68)的结果，应该移除。

现在在质心系专门研究。运动学是



通过常规计算可得到微分截面，

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{E}{p}\right)\left[\frac{E^2+p^2\cos^2\theta}{m^2+p^2\sin^2\theta}+\frac{2m^2}{m^2+p^2\sin^2\theta}-\frac{2m^4}{(m^2+p^2\sin^2\theta)^2}\right]. \tag{5.106}$$

在高能极限下，这变成

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \underset{E\gg m}{\longrightarrow} \frac{2\pi\alpha^2}{s}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right), \tag{5.107}$$

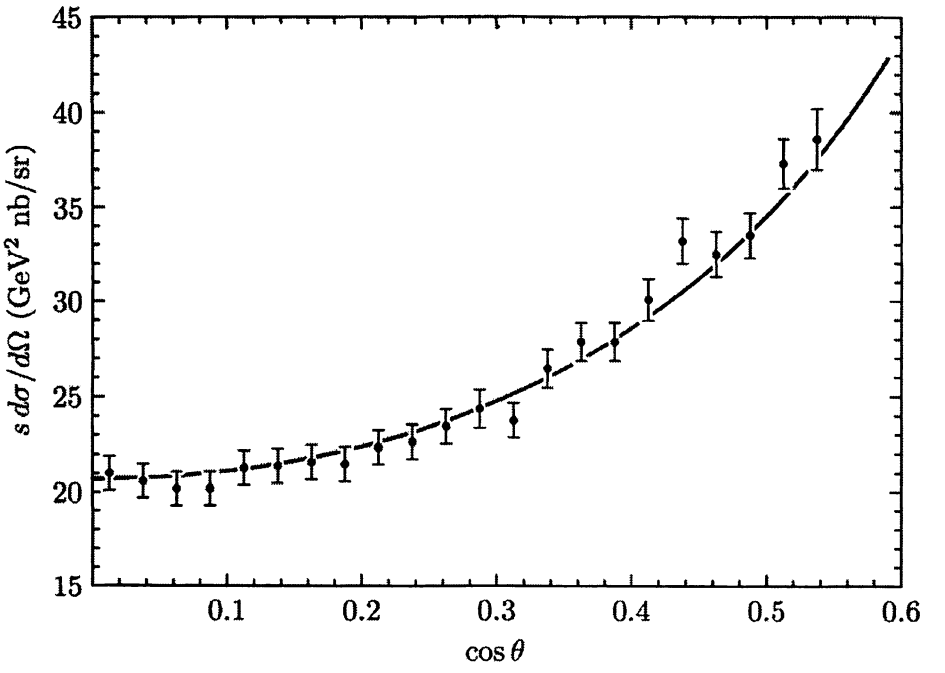


图 5.7 $e^+e^- \to 2\gamma$在$E_{\rm cm}$=29 Gev 处横截面的角依赖性，由 HRS collaboration, M. Derrick, et. al,*Phys. Rev.* **D34**, 3286 (1986).测量。实线是最低阶理论等式(5.107)的预测，

除非$\sin\theta$是m/p的阶数或更小。注意由于两个光子是相同的，我们仅通过积分域$0 \le \theta \le \pi/2$来计算所有可能的末态。因此，总截面计算如下

$$\sigma_{\rm total} = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\frac{d\sigma}{d\,\cos\theta}. \tag{5.108}$$

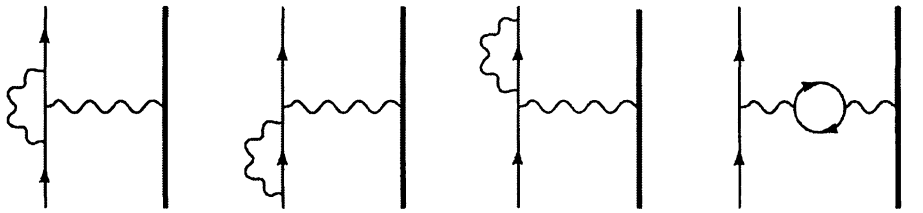
图 5.7 将微分截面的渐近公式(5.107)与在极高能量下e^+e^-湮没成两个光子的测量结果进行了比较。

Chapter 6

辐射修正：导论

现在我们已经获得了一些执行 QED 计算的经验，让我们继续讨论一些更复杂的问题。第 5 章只讨论树级的过程，即不包含圈的图。但是所有这些过程都从包含圈的图中接受高阶的贡献，即所谓的**辐射修正**。QED 中辐射修正的另一个来源是**韧致辐射**，即在反应的过程中发射出额外的末态光子。在本章中，我们将研究这两种类型的辐射修正，并发现如果只包含一种修正而不同时包含另一种修正，将会产生不一致性。

在本章中，为了在最简单的背景下阐明这些观点，我们将考虑电子从另一个非常重的粒子散射的过程。在第 5.4 节和问题 5.1 中，我们在树级上分析了这个过程。在微扰理论的下一阶，我们遇到了以下四个图：



(6.1)

截面的α阶修正来自这些图和树级图之间的干涉项。有六个额外的单圈图是在圈中包含有重粒子，在该粒子比电子重得多的极限情况下可以忽略它们，因为质量出现在传播子的分母中(物理上，重粒子在碰撞过程中的加速度较小，因此辐射较小)。

在(6.1)中的四个图中，第一个图(称为**顶点修正**)是最复杂的，它给出了各种各样的新效应。例如，它引起电子的反常磁矩，我们将在第 6.3 节中计算。

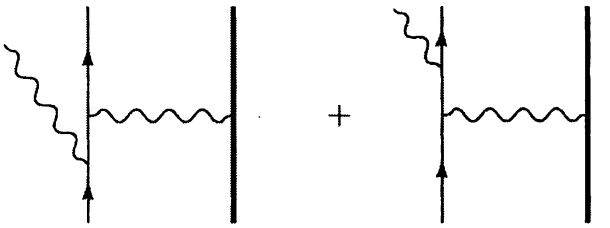
(6.1)接下来的两个图是**外腿修正**。在本章中我们将忽略它们，因为根据我们

的公式(4.90)对于 S 矩阵元的要求，它们是没有截腿的。当我们在第 7.2 节中对该公式进行证明时，我们将更详细地讨论这些图。

(6.1)的最后一个图称为**真空极化**。由于它比其他的图需要更多的计算机制，我们在第 7.5 节之前不计算该图。

因为这些修正的定义不清，我们对它们的研究将变得复杂。(6.1)的每个图都包含到对不确定的圈动量的积分。在每种情况下，积分在$k \to \infty$或**紫外**区域是发散的。幸运的是，这些积分的无穷部分总是被排除到可观测量(如截面)的表达式之外。

(6.1)的前三个图也包含**红外发散**：无穷大来自于圈动量积分的$k \to 0$端。我们将在第6.4节中看到，当我们还包括以下韧致辐射图时，这些发散就被消除了：



(6.2)

当辐射光子的能量趋于零时，这些图是发散的。在这个极限下，光子不能被任何物理探测器观测到，因此在无辐射的散射截面上再加上这些低能光子的产生截面是有意义的。因此，韧致辐射图是这一过程和任何其他QED过程的辐射修正的重要组成部分。

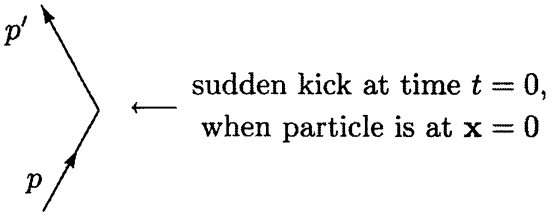
本章的主要目的是了解低能光子的韧致辐射、顶点修正图以及这两类辐射修正之间红外发散的消除。

6.1 软韧致辐射

让我们从分析韧致辐射过程开始研究辐射修正。在这一节中，我们将首先对电子突然加速时低频韧致辐射强度进行经典计算。然后我们将在量子场论中计算一个密切相关的量：由图(6.2)给出的一个非常软的光子发射的截面。我们想了解作为量子结果的极限情况——经典结果是如何产生的。

经典计算

假设一个经典电子在时间$t=0$，位置$\mathbf{x}=0$时受到突然的撞击，导致它的 4 动量从p变为p'。(动量的无限突然变化当然是一个不切实际的理想化。然而，加速过程中轨迹的精确形式并不影响低频辐射。我们的计算对于频率小于散射时间倒数的辐射是有效的)



我们可通过写下电子的流，把这个电流当作麦克斯韦方程组的源，来求出辐射场。

这样一个粒子的流密度是多少？对于$\mathbf{x}=0$的静止带电粒子，流应该是

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= (1,\mathbf{0})^\mu \cdot e\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \\ &= \int dt\,(1,\mathbf{0})^\mu \cdot e\,\delta^{(4)}\big(x-y(t)\big), \qquad \text{with } y^\mu(t)=(t,\mathbf{0})^\mu. \end{aligned}$$

由此我们可以推测任意轨迹$y^\mu(\tau)$的流:

$$j^\mu(x) = e\int d\tau\,\frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\,\delta^{(4)}\big(x-y(\tau)\big). \tag{6.3}$$

注意，该表达式与曲线$y^\mu(\tau)$参数化的精确方法无关：将变量从τ更改为$\sigma(\tau)$在积分测度中给出了一个$d\tau/d\sigma$的因子，该因子通过链式法则与$dy^\mu/d\tau$结合得到$dy^\mu/d\sigma$。我们也可以从(6.3)中证明流是自动守恒的：对于任何在无穷远处衰减的“测试函数”$f(x)$，我们有

$$\begin{aligned} \int d^4x\,f(x)\partial_\mu j^\mu(x) &= \int d^4x\,f(x)\,e\int d\tau\,\frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\,\partial_\mu\delta^{(4)}\big(x-y(\tau)\big) \\ &= -e\int d\tau\,\frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}f(x)\Big|_{x=y(\tau)} \\ &= -e\int d\tau\,\frac{d}{d\tau}f\big(y(\tau)\big) \\ &= -e\,f\big(y(\tau)\big)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

对于我们的过程，轨迹是

$$y^\mu(\tau) = \begin{cases} (p^\mu/m)\tau & \text{for } \tau<0; \\ (p'^\mu/m)\tau & \text{for } \tau>0. \end{cases}$$

这样流可以写为

$$j^\mu(x) = e\int_0^\infty d\tau\,\frac{p'^\mu}{m}\,\delta^{(4)}\Big(x-\frac{p'}{m}\tau\Big) + e\int_{-\infty}^0 d\tau\,\frac{p^\mu}{m}\,\delta^{(4)}\Big(x-\frac{p}{m}\tau\Big).$$

等一下我们需要知道这个函数的傅立叶变换，插入因子$e^{-\epsilon\tau}$和$e^{\epsilon\tau}$使积分收敛，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{j}^\mu(k) &= \int d^4x\, e^{ik\cdot x} j^\mu(x)\\ &= e\int_0^\infty d\tau\,\frac{p'^\mu}{m} e^{i(kp'/m+i\epsilon)\tau} + e\int_{-\infty}^0 d\tau\,\frac{p^\mu}{m} e^{i(kp/m-i\epsilon)\tau}\\ &= ie\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'+i\epsilon} - \frac{p^\mu}{k\cdot p - i\epsilon}\Big).\end{aligned} \tag{6.4}$$

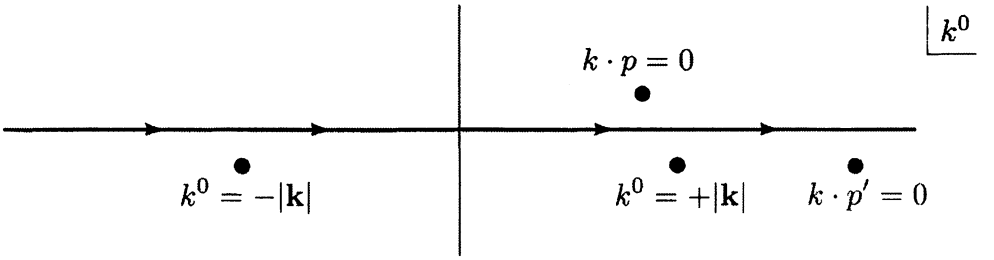
我们现在已经准备好来求解麦克斯韦方程组，在洛伦兹规范($\partial^\mu A_\mu = 0$)中，我们必须求解$\partial^2 A^\mu = j^\mu$，或者在傅立叶空间中

$$\tilde{A}^\mu(k) = -\frac{1}{k^2}\,\tilde{j}^\mu(k).$$

插入(6.4)，我们得到了矢势的公式:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot x}\,\frac{-ie}{k^2}\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'+i\epsilon} - \frac{p^\mu}{k\cdot p - i\epsilon}\Big). \tag{6.5}$$

k^0积分可以在复平面上作为围道积分来执行。极点的位置如下



我们把极点放在实轴下方$k^0 = \pm|\mathbf{k}|$处，这样(我们将尽快确认)辐射场将满足延迟边界条件。

对于$t<0$，我们向上闭合围道，在$k\cdot p = 0$处拾取极点，即$k^0 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}/p^0$。结果是

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}/p^0)t}\,\frac{(2\pi i)(+ie)}{(2\pi)k^2}\,\frac{p^\mu}{p^0}.$$

在粒子初始静止的参考系中，其动量矢量为$p^\mu = (p^0, \mathbf{0})$，矢势化简为

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \frac{e}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (1, \mathbf{0}).$$

这只是未加速电荷的库仑势。正如我们所料，在粒子散射之前，没有辐射场。

散射($t > 0$)后，我们向下闭合围道，在实轴以下拾取三个极点。$k^0 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}'/p'^0$处的极点给出了出射粒子的库仑势。因此，其他两个极点完全负责辐射场。他们的贡献给出

$$\begin{aligned} A^\mu_{\text{rad}}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \frac{-e}{2|\mathbf{k}|} \left\{ e^{-ik\cdot x} \left(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'} - \frac{p^\mu}{k\cdot p} \right) + \text{c.c.} \right\} \Bigg|_{k^0 = |\mathbf{k}|} \\ &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})\, e^{-ik\cdot x}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

在这里，动量空间振幅$\mathcal{A}(\mathbf{k})$由下式得出：

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k}) = \frac{-e}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'} - \frac{p^\mu}{k\cdot p} \right). \tag{6.7}$$

条件$k^0 = |\mathbf{k}|$在这里的计算和其余部分中是隐含的。

为了计算辐射能量，我们必须找到电场和磁场。把$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$写成复傅立叶积分的实部是最容易的，就像我们对A^μ做的一样：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\, e^{-ik\cdot x}; \\ \mathbf{B}(x) &= \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})\, e^{-ik\cdot x}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

辐射场的动量空间振幅$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$和$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})$很简单，是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) &= -i\mathbf{k}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + ik^0 \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k}); \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}) &= i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \hat{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{6.9}$$

使用$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{k})$的显式形式(6.7)，可以很容易地检查电场是横向的：$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) = 0$。

用这种方法表示磁场后，我们就可以计算辐射能量:

$$\text{Energy} = \tfrac{1}{2} \int d^3x \left(|\mathbf{E}(x)|^2 + |\mathbf{B}(x)|^2 \right). \tag{6.10}$$

第一项是

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{8}\int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})e^{-ikx}+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})e^{ikx}\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k}')e^{-ik'x}+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}')e^{ik'x}\Big)\\&\quad=\tfrac{1}{8}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(-\mathbf{k})e^{-2ik^0t}+2\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(-\mathbf{k})e^{2ik^0t}\Big).\end{aligned}$$

包含$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})$的类似表达式适用于第二个项。使用(6.9)和$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$是横向的这一事实，可以证明在$\boldsymbol{\mathcal{E}}$和$\boldsymbol{\mathcal{B}}$之间的时间依赖项消除了，剩下的条件加起来给出

$$\text{Energy}=\tfrac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}).\tag{6.11}$$

既然$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})$是横向的，那么让我们引入两个横向单位极化向量$\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k}),\lambda=1,2$。然后我们可以把被积函数写成

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k})=\sum_{\lambda=1,2}\big|\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k})\big|^2=|\mathbf{k}|^2\sum_{\lambda=1,2}\big|\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\big|^2.$$

根据$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$的显式形式(6.7)，我们最终得出辐射能量的表达式*：

$$\text{Energy}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1,2}\frac{e^2}{2}\left|\boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k})\cdot\Big(\frac{\mathbf{p}'}{k\cdot p'}-\frac{\mathbf{p}}{k\cdot p}\Big)\right|^2.\tag{6.12}$$

在这表达式中我们可以自由地将$\boldsymbol{\epsilon},\mathbf{p}',\mathbf{p}$转换成 4 向量。然后注意，用$k^\mu$代替$\epsilon^\mu$等于零

$$k_\mu\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'}-\frac{p^\mu}{k\cdot p}\Big)=0,$$

我们发现，我们可以使用第 5.5 节的技巧，用$-g_{\mu\nu}$代替$\sum\epsilon_\mu\epsilon_\nu^*$，对极化进行求和。我们的结果就变成了

$$\begin{aligned}\text{Energy}&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{2}(-g_{\mu\nu})\Big(\frac{p'^\mu}{k\cdot p'}-\frac{p^\mu}{k\cdot p}\Big)\Big(\frac{p'^\nu}{k\cdot p'}-\frac{p^\nu}{k\cdot p}\Big)\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^2}{2}\left(\frac{2p\cdot p'}{(k\cdot p')(k\cdot p)}-\frac{m^2}{(k\cdot p')^2}-\frac{m^2}{(k\cdot p)^2}\right).\end{aligned}\tag{6.13}$$

要使此公式更明确，选择一个参考系，其中$p^0=p'^0=E$，于是动量为

$$k^\mu=(k,\mathbf{k}),\qquad p^\mu=E(1,\mathbf{v}),\qquad p'^\mu=E(1,\mathbf{v}').$$

---

*这一结果也来源于杰克逊(1975)，第 703 页。

在这样的参考系下我们的公式变为

$$\text{Energy} = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dk\ \mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}'), \tag{6.14}$$

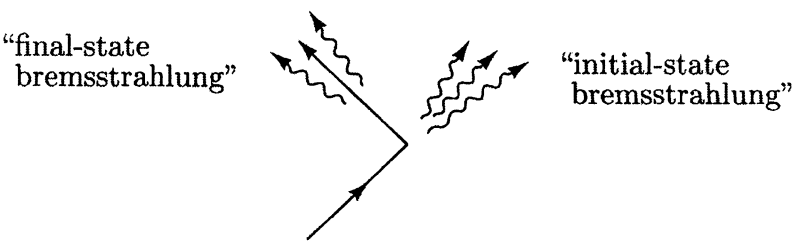
式中，$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$(本质上是微分强度$d$(能量)$/dk$)等于

$$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\hat{k}}}{4\pi}\left(\frac{2(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')}{(1-\hat{k}\cdot\mathbf{v})(1-\hat{k}\cdot\mathbf{v}')} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{k}\cdot\mathbf{v}')^2} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{k}\cdot\mathbf{v})^2}\right). \tag{6.15}$$

因为$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$不依赖于$k$，我们看到(6.14)中$k$的积分是平凡的，但却是发散的。这种发散来自于我们对动量的无限地突然变化的理想化。我们期望公式只对频率小于散射时间倒数的辐射有效。而对于相对论性电子，当单个光子带走相当大一部分的电子能量时，另一个可能的截断会奏效。在这两种情况下，我们的公式在低频极限下都是有效的，只要我们在某个最大频率$k_{\max}$处截断积分。然后我们有

$$\text{Energy} = \frac{\alpha}{\pi}\cdot k_{\max}\cdot\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}'). \tag{6.16}$$

当$\hat{k}$与$\mathbf{v}$或$\mathbf{v}'$平行时，$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$的积分达到峰值：



在极端相对论极限下，大部分辐射能量来自(6.15)第一项中的两个峰值。通过集中在这些峰值周围的区域，让我们在这个极限下，计算$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$。对于每个峰，把积分分解为一个片段，并在每种情况下，沿着峰取$\theta = 0$。对$\theta = 0$附近的一个小区域进行积分，如下所示

$$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \approx \int\limits_{\hat{k}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}}^{\cos\theta=1} d\cos\theta\ \frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{(1-v\cos\theta)(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')} + \int\limits_{\hat{k}\cdot\mathbf{v}'=\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}}^{\cos\theta=1} d\cos\theta\ \frac{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')(1-v'\cos\theta)}.$$

(积分的下限不重要；同样好的选择是$\hat{k}\cdot\mathbf{v} = 1-x(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')$)，只要$x$既不太接

近 0，也不太大于 1。很容易证明相对论极限下的首项不依赖于x)。积分很容易执行，我们得到

$$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \approx \log\left(\frac{1-\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}}{1-|\mathbf{v}|}\right)+\log\left(\frac{1-\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}}{1-|\mathbf{v}'|}\right)=\log\left(\frac{(E^2-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}')^2}{E^2(E-|\mathbf{p}|)^2}\right)$$
$$\approx 2\log\left(\frac{p\cdot p'}{(E^2-|\mathbf{p}|^2)/2}\right)=2\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right), \tag{6.17}$$

这里$q^2=(p-p')^2$。

综上所述，我们发现低频辐射能量由下式给出

$$\text{Energy}=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{k_{\max}} dk\ \mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}') \underset{E\gg m}{\longrightarrow} \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{k_{\max}} dk\ \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right). \tag{6.18}$$

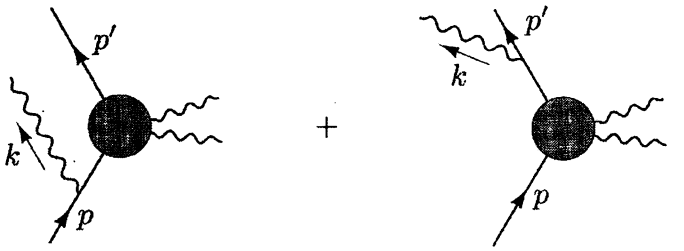
如果这种能量是由光子组成的，那么每一个光子都会贡献能量k。我们会期待

$$\text{Number of photons}=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{k_{\max}} dk\,\frac{1}{k}\,\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}'). \tag{6.19}$$

我们希望量子力学计算能证实这个结果。

量子计算

现在考虑在电子散射过程中一个光子辐射的量子力学过程:



让$\mathcal{M}_0$表示电子与外场相互作用产生的振幅部分。然后是整个过程的振幅是

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\Bigg(&\mathcal{M}_0(p',p-k)\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}\gamma^\mu\epsilon_\mu^*(k) \\ &+\gamma^\mu\epsilon_\mu^*(k)\frac{i(\not{p}'+\not{k}+m)}{(p'+k)^2-m^2}\mathcal{M}_0(p'+k,p)\Bigg)u(p). \end{aligned} \tag{6.20}$$

因为我们对经典极限有兴趣，假设辐射的光子是软的：$|\mathbf{k}|\ll|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|$，那么我们可以近似

$$\mathcal{M}_0(p',p-k)\approx\mathcal{M}_0(p'+k,p)\approx\mathcal{M}_0(p',p), \tag{6.21}$$

我们可以忽略传播子分子中的$k\!\!\!/$。分子可以用狄拉克代数进一步简化。第一项我们有

$$\begin{aligned}(p\!\!\!/ + m)\gamma^\mu \epsilon^*_\mu \, u(p) &= \big[2p^\mu \epsilon^*_\mu + \gamma^\mu \epsilon^*_\mu (-p\!\!\!/ + m)\big] u(p) \\ &= 2p^\mu \epsilon^*_\mu \, u(p).\end{aligned}$$

类似的，第二项是：

$$\bar{u}(p')\,\gamma^\mu \epsilon^*_\mu (p\!\!\!/' + m) = \bar{u}(p')\,2p'^\mu \epsilon^*_\mu.$$

传播子的分母也简化了

$$(p-k)^2 - m^2 = -2p\cdot k; \qquad (p'+k)^2 - m^2 = 2p'\cdot k.$$

因此在软光子近似中，振幅变为

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')\big[\mathcal{M}_0(p',p)\big]u(p)\cdot\left[e\Big(\frac{p'\cdot\epsilon^*}{p'\cdot k} - \frac{p\cdot\epsilon^*}{p\cdot k}\Big)\right]. \tag{6.22}$$

这只是弹性散射(没有韧致辐射)的振幅乘以光子发射因子(括号中)。

我们的过程的截面也很容易用弹性截面来表示；只需为光子变量k插入了一个额外的相空间积分。对两个光子偏振态求和，我们得到了

$$d\sigma\big(p\to p'+\gamma\big) = d\sigma(p\to p')\cdot\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k}\sum_{\lambda=1,2}e^2\left|\frac{p'\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p'\cdot k} - \frac{p\cdot\epsilon^{(\lambda)}}{p\cdot k}\right|^2. \tag{6.23}$$

因此，考虑到电子从p散射到p'时，辐射一个动量为k的光子的微分概率为

$$d(\text{prob}) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_\lambda \frac{e^2}{2k}\left|\epsilon_\lambda\cdot\Big(\frac{\mathbf{p}'}{p'\cdot k} - \frac{\mathbf{p}}{p\cdot k}\Big)\right|^2. \tag{6.24}$$

这看起来很熟悉；如果我们乘以光子能量k来计算辐射的预期能量，我们就重新获得了经典表达式(6.12)。

但有一个问题。方程式(6.24)不是关于辐射光子的期待数目的表达式，而是关于单个光子的辐射概率的表达式。如果我们对光子动量积分，问题会变得更严重。和(6.16)一样，我们的积分只能到软光子近似不适用时能量值；对这种能量的合理估计是$|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}-\mathbf{p}'|$。因此，积分是

$$\text{Total probability} \approx \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{|\mathbf{q}|} dk\,\frac{1}{k}\,\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}'). \tag{6.25}$$

因为$\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')$独立于$k$，所以积分在其下限处发散(此时我们所有的近似都是合理

的)。换句话说，辐射一个非常软的光子的总概率是无限的。这是QED微扰论的红外发散问题。

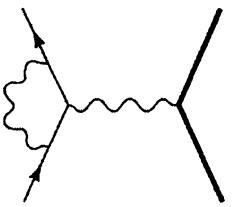
我们可以通过假设光子有一个非常小的质量μ，人为地将(6.25)中的积分定义得很好。这个质量将为积分提供一个较低的截断点，允许我们将这一节的结果写成

$$\begin{aligned} d\sigma\big(p \to p' + \gamma(k)\big) &= d\sigma(p \to p') \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \log\Big(\frac{-q^2}{\mu^2}\Big) \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \\ &\underset{-q^2 \to \infty}{\approx} d\sigma(p \to p') \cdot \frac{\alpha}{\pi} \log\Big(\frac{-q^2}{\mu^2}\Big) \log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big). \end{aligned} \tag{6.26}$$

这个结果的q^2依赖性，即所谓的 **Sudakov 双对数**，是物理的，将再次出现在第 6.4 节中。然而，对μ的依赖性提出了一个我们必须解决的问题。不难猜测，这个问题的解决将涉及到将(6.24)重新解释为光子辐射预期数目，而不是单个光子的辐射概率。我们将在第 6.4 节和第 6.5 节中看到这种重新解释是如何从费曼图中得出的。然而，为了准备讨论，我们需要提高对无辐射散射振幅的理解。

6.2 电子顶点函数：形式化结构

在简要讨论了由于光子发射(韧致辐射)引起的QED辐射修正之后，现在让我们来研究由附加虚光子的存在对电子散射的修正。

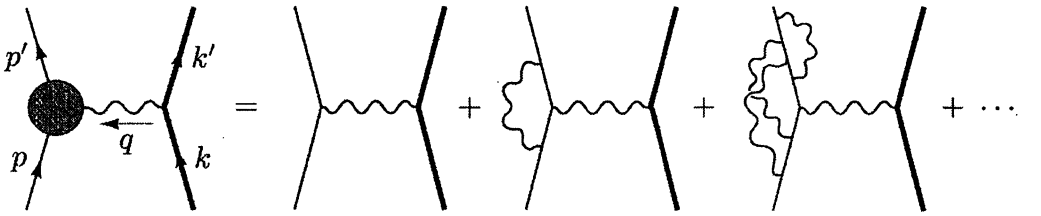


(6.27)

这将是我们第一次使用包含圈的费曼图，这种图在量子场论中引起重大而深刻的复杂性。

计算这个图的结果将相当复杂，因此提前考虑我们期望这个修正应该采取什么形式，以及如何解释它各种可能项将是很有用的。在本节中。我们将考虑顶点修正图的一般性质。我们将看到洛伦兹不变性的基本要求、QED 的分立对称性和 Ward 等式，强烈地约束了顶点的形式。

然后，考虑图的类



其中灰色圆圈表示最低阶电子-光子顶点和所有截腿的圈修正的总和。我们称顶点图的这个和为$-ie\Gamma^{\mu}(p',p)$。然后根据我们关于S矩阵元的主公式(4.103)，电子受到重靶散射的振幅是

$$i\mathcal{M} = ie^2\Big(\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}(p',p)\,u(p)\Big)\frac{1}{q^2}\Big(\bar{u}(k')\gamma_{\mu}u(k)\Big). \tag{6.28}$$

一般来说函数$\Gamma^{\mu}(p',p)$出现在电子受到外部电磁场散射的S矩阵元中。如问题 4.4 所示，在 QED 的哈密顿量中加入相互作用:

$$\Delta H_{\text{int}} = \int d^3x\, eA^{\text{cl}}_{\mu} j^{\mu}, \tag{6.29}$$

其中$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$是电磁流，$A^{\text{cl}}_{\mu}$是固定的经典势。在微扰理论的领头阶中，从该场散射的S矩阵元是

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)\delta(p^{0\prime} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\cdot\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(p'-p),$$

其中$\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(q)$是$A^{\text{cl}}_{\mu}(x)$的傅立叶变换。顶点修正将此表达式修改为

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)\delta(p^{0\prime} - p^0) = -ie\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}(p',p)\,u(p)\cdot\widetilde{A}^{\text{cl}}_{\mu}(p'-p). \tag{6.30}$$

在写(6.28)和(6.30)时，我们故意忽略了真空极化图的贡献，如(6.1)的第四张图。这种遗漏的原因是，这些图应被视为对电磁场本身的修正，而包含在Γ^{μ}中的图，则代表了电子对给定的外加场的响应的修正*。

我们可以用一般的参数来限制$\Gamma^{\mu}(p',p)$的形式，对于最低阶，$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}$。一般来说，$\Gamma^{\mu}$是一些涉及$p, p', \gamma^{\mu}$的表达式，以及常量，如$m, e$和纯数字。这个列表是详尽的，因为在计算对$\Gamma^{\mu}$有贡献的费曼图时，费曼规则中没有出现其他对象。唯一可能在任何理论中出现的另一个对象是$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$(或等价的，$\gamma^5$)，但这在任何宇称守恒理论中是禁止的。

---

*为证明这一论断，我们必须在量子场论中给应用的外场一个小心的定义。我们将在 11 章讨论这个问题。

我们可以通过诉诸于洛伦兹不变性来大大缩小Γ^μ的形式。因为Γ^μ像一个向量一样变换(和γ^μ一样)，它必须是上面列表中向量(γ^μ, p^μ和p'^μ)的线性组合。为方便，我们使用$p'+p$和$p'-p$组合，我们有

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu)\cdot B + (p'^\mu - p^\mu)\cdot C. \tag{6.31}$$

系数A, B, C可以包含 Dirac 矩阵和矢量的点乘，也就是$\not{p}$或者$\not{p}'$，但是，由于$\not{p}u(p) = m\cdot u(p)$和$\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')\cdot m$，我们可以用普通的数来写系数，而不会失去一般性。唯一可用的非平凡标量是$q^2 = -2p\cdot p' + 2m^2$，因此A, B, C必须是q^2(和常量，如m)的函数。

通过应用 Ward 等式(5.79)：$q_\mu \Gamma^\mu = 0$，可以进一步缩短允许的向量列表(请注意我们在第 5.5 节对此等式的论证——和第 7.4 节的证明——中不要求$q^2 = 0$)。将q_μ点乘入(6.31)，我们发现第二项消失，第一项当被夹在$\bar{u}(p')$和$u(p)$之间时也消失。第三项不会自动消失，所以C必须为零。

我们不能在一般原理上进一步简化(6.31)。然而传统上可以通过 Gordon 等式重写(6.31)(见问题 3.2)：

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p). \tag{6.32}$$

这个等式允许我们将$p'+p$项替换为涉及$\sigma^{\mu\nu}q_\nu$的项。我们将最终结果写为

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2), \tag{6.33}$$

其中F_1和F_2是q^2的未知函数，称为**形状因子**。

对于最低阶，$F_1 = 1$和$F_2 = 0$。在下一节中，我们将根据顶点修正图(6.27)，对形状因子计算一个圈(α阶)的修正。原则上，在微扰理论中可以对形状因子进行计算到任意阶。

由于F_1和F_2包含电磁场对电子影响的完整信息，因此特别地，它们应包含电子的总电耦合和磁耦合。为确定电子的电荷我们可以用(6.30)计算非相对论电子在非零静电势区的弹性库仑散射振幅。设$A^{\rm cl}_\mu(x) = (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{0})$，于是$\tilde{A}^{\rm cl}_\mu(q) = ((2\pi)\delta(q^0)\tilde{\phi}(\mathbf{q}), \mathbf{0})$。将其插入(6.30)我们发现

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p')\,\Gamma^0(p', p)\,u(p)\cdot\tilde{\phi}(\mathbf{q}).$$

如果静电场在一个大(可能是宏观的)区域内变化非常缓慢，$\phi(\mathbf{q})$将集中在$\mathbf{q} = 0$

左右；那么我们可以在旋量矩阵元中取极限$\mathbf{q}\to 0$。只有形状因子F_1有贡献。利用旋量的非相对论极限，

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)=u^\dagger(p')u(p)\approx 2m\xi'^\dagger\xi,$$

电场中电子散射的振幅是

$$i\mathcal{M}=-ieF_1(0)\tilde{\phi}(\mathbf{q})\cdot 2m\xi'^\dagger\xi. \tag{6.34}$$

这是由以下势散射的玻恩近似

$$V(\mathbf{x})=eF_1(0)\phi(\mathbf{x}).$$

因此，$F_1(0)$是电子的电荷，单位为e。由于$F_1(0)=1$已经在微扰理论的领头阶中，所以在$q^2=0$时对$F_1(q^2)$的辐射修正应为零。

通过对静矢势的电子散射进行重复分析，我们可以得出形状因子和电子磁矩之间的类似联系*。设置$A^{\rm cl}_\mu(x)=(0,\mathbf{A}^{\rm cl}(\mathbf{x}))$。那么从这个场散射的振幅是

$$i\mathcal{M}=+ie\Big[\bar{u}(p')\Big(\gamma^i F_1+\frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\Big)u(p)\Big]\widetilde{A}^i_{\rm cl}(\mathbf{q}). \tag{6.35}$$

括号中的表达式在$\mathbf{q}=0$时为零，因此我们必须仔细地从中提取q^i的线性贡献。要做到这一点，插入旋量$u(p)$的非相对论展开式，将项保持在动量的一阶中:

$$u(p)=\begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi\\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi\end{pmatrix}\approx\sqrt{m}\begin{pmatrix}(1-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\xi\\ (1+\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2m)\xi\end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

则F_1项可简化为:

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p)=2m\,\xi'^\dagger\left(\frac{\mathbf{p}'\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\sigma^i+\sigma^i\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\xi.$$

应用恒等式$\sigma^i\sigma^j=\delta^{ij}+i\epsilon^{ijk}\sigma^k$，我们发现独立于自旋的项与$(\mathbf{p}'+\mathbf{p})$成正比，依赖于自旋的项与$(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$成正比。第一项是非相对论量子力学的标准动能项中的算符$[\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}]$的贡献。第二项是我们正在寻找的磁矩相互作用。只保留后一个项，我们有

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p)=2m\,\xi'^\dagger\Big(\frac{-i}{2m}\epsilon^{ijk}q^j\sigma^k\Big)\xi.$$

F_2项已包含一个显式的q因子，所以我们可以用旋量展开式的领头阶项来计算它。这给出

$$\bar{u}(p')\Big(\frac{i}{2m}\sigma^{i\nu}q_\nu\Big)u(p)=2m\,\xi'^\dagger\Big(\frac{-i}{2m}\epsilon^{ijk}q^j\sigma^k\Big)\xi.$$

---

*下面的讨论包含许多因子(-1)，来自提升和降低类空指标。在验证代数时要小心。

因此，电子-光子顶点函数中关于q^j的完整线性项是

$$\bar{u}(p')\Big(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}q_\nu}{2m}F_2\Big)u(p) \underset{q\to 0}{\approx} 2m\,\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-i}{2m}\epsilon^{ijk}q^j\sigma^k\big[F_1(0)+F_2(0)\big]\Big)\xi.$$

将这个表达式插入(6.35)，我们发现

$$i\mathcal{M} = -i(2m)\cdot e\xi'^{\dagger}\Big(\frac{-1}{2m}\sigma^k\big[F_1(0)+F_2(0)\big]\Big)\xi\,\tilde{B}^k(\mathbf{q}),$$

这里

$$\widetilde{B}^k(\mathbf{q}) = -i\epsilon^{ijk}q^i\widetilde{A}^j_{\rm cl}(\mathbf{q})$$

是由$\mathbf{A}^{\rm cl}(\mathbf{x})$产生的磁场的傅立叶变换。

同样，我们可以把$\mathcal{M}$解释为势阱中电子散射的玻恩近似。势只是磁矩相互作用的势，

$$V(\mathbf{x}) = -\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

这里

$$\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = \frac{e}{m}\big[F_1(0)+F_2(0)\big]\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi.$$

这个电子磁矩的表达式可以用标准形式重写:

$$\boldsymbol{\mu} = g\Big(\frac{e}{2m}\Big)\mathbf{S},$$

其中S是电子自旋。系数g，称为**朗得g因子**，是

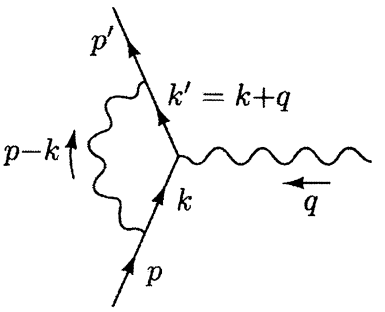
$$g = 2\big[F_1(0)+F_2(0)\big] = 2+2F_2(0). \tag{6.37}$$

由于微扰理论领头阶没给出F_2项，因此 QED 预测了$g=2+\mathcal{O}(\alpha)$。领头项是狄拉克方程的标准预测，然而在更高阶，我们会发现一个非零F_2，因此电子磁矩和狄拉克值之间的有一个很小差异。我们将在下一节计算这个**反常磁矩**的α阶贡献。

由于我们对顶点函数的结构(6.33)的推导使用了一般对称原理，因此我们希望该公式不仅适用于电子，而是适用于任何具有电磁相互作用的费米子。例如，质子的电磁散射振幅也应该由q^2的两个不变函数来描述。由于质子不是基本粒子，我们不应该期望Dirac方程值有$F_1=1$和$F_2=0$是质子形状因子的良好近似值。事实上，两种质子形状因子都强烈依赖于q^2。然而，利用形状因子描述顶点函数提供了在许多能量和角度下的散射数据的有用总结。在问题 6.1 中计算了形状因子和截面之间的精确转换。此外。我们刚刚推导出的$q^2=0$时的一般约束条件应用于质子:$F_1(0)=1$和$2F_2(0)=(g_p-2)$,尽管质子的g因子与 Dirac 值相差 40%。

6.3 电子顶点函数：计算

既然我们知道了答案的形式(方程式(6.33))，我们就可以计算单圈对电子顶点函数的贡献了。在图上指定动量，如下所示



应用费曼规则，我们发现，对于α阶，$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$，其中

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2+i\epsilon} \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^\rho)u(p) \\
&= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')\left[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu\right]u(p)}{((k-p)^2+i\epsilon)(k'^2-m^2+i\epsilon)(k^2-m^2+i\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

在第二行中，我们使用了收缩等式$\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2\gamma^\mu$。注意分母中的$+i\epsilon$项不能被删除；它们是正确计算圈动量积分的必要条件。

积分看起来不可能，事实上也不容易。这种积分的计算需要另一种称为**费曼参数**法的计算技术(尽管施温格更早之前介绍了一种非常相似的方法)。

费曼参数

该方法的目标是将(6.38)的三个分母因子压缩成一个k的二次多项式，并提高到三次方。然后我们可以将k移动一个常数来完成这个多项式的平方，并毫不费力地计算剩下的球对称积分。代价将是辅助参数的引入，它将被求积。

从分母中有两个因子的较简单情况开始是最容易。然后我们会使用以下等式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left[xA+(1-x)B\right]^2} = \int_0^1 dx\, dy\, \delta(x+y-1) \frac{1}{\left[xA+yB\right]^2}. \tag{6.39}$$

它的使用示例可以如下所示

$$\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{1}{\left[x(k-p)^2+y(k^2-m^2)\right]^2}$$
$$= \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{1}{\left[k^2-2xk\cdot p+xp^2-ym^2\right]^2}.$$

如果我们现在让$\ell = k - xp$，我们看到分母只依赖于ℓ^2，在d^4k上积分会容易得多，因为$d^4k = d^4\ell$且被积函数相对于ℓ是球对称的。使这种变换成为可能的变量x和y称为**费曼参数**。

我们的积分(6.38)的分母包含有三个因子，所以我们需要一个更好的等式。通过将(6.39)对B求导，很容易证明

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx\,dy\,\delta(x+y-1)\,\frac{ny^{n-1}}{[xA+yB]^{n+1}}. \tag{6.40}$$

但这还不够好。我们需要的公式是

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n} = \int_0^1 dx_1\cdots dx_n\,\delta(\textstyle\sum x_i-1)\,\dfrac{(n-1)!}{\left[x_1A_1+x_2A_2+\cdots x_nA_n\right]^n}. \tag{6.41}$$

这个等式可通过归纳法证明。$n = 2$的情况只是式(6.39)；归纳步骤并不困难，涉及使用(6.40)。

通过对(6.41)的反复微分，可以得到更一般的等式。

$$\frac{1}{A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1\cdots dx_n\,\delta(\textstyle\sum x_i-1)\,\dfrac{\prod x_i^{m_i-1}}{\left[\sum x_iA_i\right]^{\sum m_i}}\,\dfrac{\Gamma(m_1+\cdots+m_n)}{\Gamma(m_1)\cdots\Gamma(m_n)}. \tag{6.42}$$

即使m_i不是整数，这个公式也是正确的；在第 10.5 节中，我们将在这样的情况下应用它。

形状因子的计算

现在让我们把公式(6.41)应用到(6.38)的分母上。

$$\frac{1}{((k-p)^2+i\epsilon)(k'^2-m^2+i\epsilon)(k^2-m^2+i\epsilon)} = \int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3},$$

其中新分母D是

$$\begin{aligned} D &= x(k^2-m^2)+y(k'^2-m^2)+z(k-p)^2+(x+y+z)i\epsilon \\ &= k^2+2k\cdot(yq-zp)+yq^2+zp^2-(x+y)m^2+i\epsilon. \end{aligned} \tag{6.43}$$

在第二行，我们使用了$x+y+z=1$和$k'=k+q$。现在移动k来完成平方:

$$\ell \equiv k+yq-zp.$$

经过一点代数计算，我们发现D简化为

$$D=\ell^2-\Delta+i\epsilon,$$

这里

$$\Delta \equiv -xyq^2+(1-z)^2m^2. \tag{6.44}$$

由于散射过程的$q^2<0$，Δ是正的；我们可以把它看作一个有效质量项。接下来我们必须用ℓ来表示(6.38)的分子。注意到，因为D只取决于ℓ的大小，所以这个任务被简化了，

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^\mu}{D^3}=0; \tag{6.45}$$

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^\mu\ell^\nu}{D^3}=\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3}. \tag{6.46}$$

第一个等式来自对称。为证明第二个，注意除非$\mu=\nu$，否则积分因对称而为零。洛伦兹不变性要求我们得到正比于$g^{\mu\nu}$的东西。为检查系数，两边同$g_{\mu\nu}$缩并。利用这些等式，我们有

$$\begin{aligned} \text{Numerator} &= \bar{u}(p')\Big[\not{k}\gamma^\mu\not{k}'+m^2\gamma^\mu-2m(k+k')^\mu\Big]u(p) \\ &\to \bar{u}(p')\Big[-\tfrac{1}{2}\gamma^\mu\ell^2+\big(-yq\!\!\!/+zp\!\!\!/\big)\gamma^\mu\big((1-y)q\!\!\!/+zp\!\!\!/\big) \\ &\qquad +m^2\gamma^\mu-2m\big((1-2y)q^\mu+2zp^\mu\big)\Big]u(p). \end{aligned}$$

(记住$k'=k+q$)

把分子变成一个有用的形式现在只不过是一些单调乏味的的狄拉克代数的问题(大约一两页)。这就是我们在上一节中所做的工作得到回报的地方，因为它告诉我们应该期待得到什么形式的答案。我们最终想把所有东西分成两项，分别正比于γ^μ和$i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$。实现这一点最直接的方法是将目标化为形式如下的表达式

$$\gamma^\mu\cdot A \;+\; (p'^\mu+p^\mu)\cdot B \;+\; q^\mu\cdot C,$$

如(6.31)所述。得到这种形式只需要反对易关系(如$\not{p}\gamma^\mu=2p^\mu-\gamma^\mu\not{p}$)和狄拉克方程($\not{p}u(p)=mu(p)$和$\bar{u}(p')\not{p}'=\bar{u}(p')m$; 注意这暗示$\bar{u}(p')\not{q}u(p)=0$)。记住$x+y+$

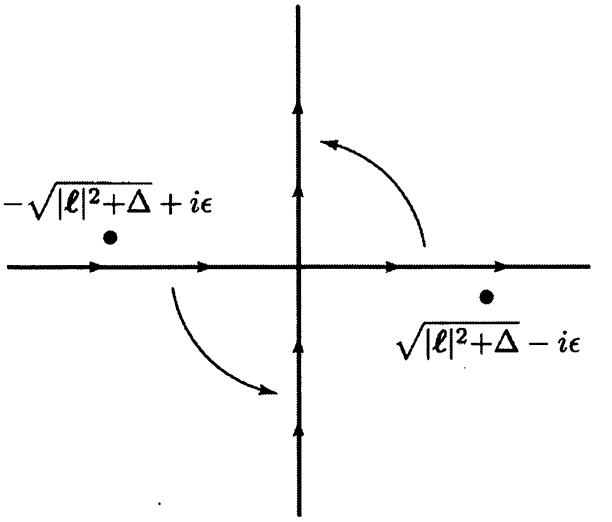


图 6.1 ℓ^0积分的围道可以旋转，如图所示。

$z=1$也很有用。当烟散去时，我们有

$$\text{Numerator} = \bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu\cdot\big(-\tfrac{1}{2}\ell^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-2z-z^2)m^2\big) + (p'^\mu+p^\mu)\cdot mz(z-1)+q^\mu\cdot m(z-2)(x-y)\Big]u(p).$$

如等式(6.31)后面所讨论的，根据 Ward 恒等式，q^μ的系数必须为零。为证明这一点，从(6.44)中注意到分母在$x\leftrightarrow y$下对称。q^μ的系数在$x\leftrightarrow y$下是奇数，因此在x和y上积分时会消失。

在上一节的工作之后，我们现在使用 Gordon 等式(6.32)来消除$(p'+p)$，以得到$i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$。我们对电子顶点的$\mathcal{O}(\alpha)$贡献的整个表达式就变成了

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = 2ie^2\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2}{D^3} \times\bar{u}(p')\Big[\gamma^\mu\cdot\big(-\tfrac{1}{2}\ell^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\big) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\big(2m^2z(1-z)\big)\Big]u(p), \tag{6.47}$$

其中和以前一样，

$$D=\ell^2-\Delta+i\epsilon,\qquad \Delta=-xyq^2+(1-z)^2m^2>0.$$

分解为形状因子现在是很明显的。

由于大部分工作已经完成，我们剩下的主要任务是完成动量积分，将ℓ^0积分作为一个围道积分，然后在球坐标系下进行空间积分，这并不困难。我们将使用

一个更简单的方法，利用一个叫做 **Wick 旋转**的技巧。注意，如果没有 Minkowski 度规中的负号，我们可以在四维的“球”坐标中执行整个四维积分。为去除负号，考虑ℓ^0平面上的积分围道(见图6.1)。极点的位置，以及被积函数在大$|\ell^0|$处迅速下降的事实，使我们能够逆时针旋转该围道 90 度。然后我们定义一个**欧几里德** 4-动量变量ℓ_E：

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0; \qquad \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_E. \tag{6.48}$$

我们的旋转轮廓从$\ell_E = -\infty$到∞。通过简单地将变量变成ℓ_E，我们现在可以在四维球面坐标计算积分。

让我们先计算一下

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^m} &= \frac{i}{(-1)^m}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\ell_E\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^m}\\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4}\int d\Omega_4\int_0^\infty d\ell_E\,\frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2+\Delta]^m}.\end{aligned}$$

(这里我们只需要$m=3$的情况，但更一般的结果对其他圈计算有用)。因子$\int d\Omega_4$是四维单位球体的表面“面积”，恰好等于$2\pi^2$。(计算面积的一种方法是使用四维球面坐标

$$x = (r\sin\omega\sin\theta\cos\phi,\, r\sin\omega\sin\theta\sin\phi,\, r\sin\omega\cos\theta,\, r\cos\omega).$$

积分测度是$d^4x = r^3\sin^3\omega\, d\phi d\theta d\omega dr$)积分的其余部分是直接的，我们有

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2}\,\frac{1}{(m-1)(m-2)}\,\frac{1}{\Delta^{m-2}}. \tag{6.49}$$

类似的

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\,\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2}\,\frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)}\,\frac{1}{\Delta^{m-3}}. \tag{6.50}$$

注意，第二个结果仅在$m>3$时有效。当m=3时。Wick旋转不能被证明，无论如何积分是发散的。但对于(6.47)我们需要的正是这种情况。

最终我们将探讨这种发散的物理意义，但目前我们只需引入一个人为的公式，使我们的积分有限。回到费曼积分的原始表达式(6.38)，在光子传播子中做替换

$$\frac{1}{(k-p)^2+i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2+i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2-\Lambda^2+i\epsilon}, \tag{6.51}$$

其中Λ是一个很大的质量。对于小k，被积函数不受影响(因为Λ是大的)，但当$k \gtrsim \Lambda$时，被积函数被平滑地截断。我们可以把第二项看作是一个虚拟的重光子的传播子，它的贡献被从普通光子的贡献中减去。对于包含重光子的项，分子代数不变，分母被改变

$$\Delta \longrightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\Lambda^2. \tag{6.52}$$

然后积分(6.50)被替换为一个收敛积分，该积分可以进行 Wick 旋转和计算：

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\left(\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}\right) &= \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^\infty d\ell_E^2\left(\frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2+\Delta]^3} - \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2+\Delta_\Lambda]^3}\right)\\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\log\Big(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\Big).\end{aligned} \tag{6.53}$$

(6.47)中的收敛项由Λ^{-2}阶的项修正，我们忽略了这一点。

这个通过引入虚的重粒子来使费曼积分有限的方案被称为 **Pauli-Villars 正规化**。请注意，这个虚拟的光子没有物理意义，而且这种方法只是定义发散积分的众多方法之一(我们将在下一章讨论其他方法；特别参见问题 7.2)。我们必须希望新的参数Λ不会出现在可观测横截面的最终结果中。

利用公式(6.49)和(6.53)来计算(6.47)中的积分，我们得到了一个简单而明确的单圈顶点修正表达式:



$$\begin{aligned}&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\\ &\quad\times \bar{u}(p')\bigg(\gamma^\mu\Big[\log\frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}\Big((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2\Big)\Big]\\ &\qquad + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\Big[\frac{1}{\Delta}2m^2z(1-z)\Big]\bigg)u(p).\end{aligned} \tag{6.54}$$

括号中的表达式是我们对形状因子的期望修正。

在我们试图解释这个结果之前，让我们总结一下我们使用的计算方法。这些技术对于所有圈图计算都是通用的：

1．绘制图并写下振幅。

2．引入费曼参数来组合传播子的分母。

3．通过移动到一个新的圈动量变量ℓ，来完成新分母中的平方。

4．用ℓ来写分子。去掉ℓ的奇数次幂项，使用像(6.46)一样的等式重写ℓ的偶数次幂。

5．通过 Wick 旋转和四维球面坐标进行动量积分。

最后一步的动量积分经常是发散的。在这种情况下，我们必须使用Pauli-Villars方案或其他一些策略来定义(或正规化)积分。

现在我们已把(6.54)中紫外发散参数化，让我们试着解释它。注意发散出现在最糟糕的地方：它修正了$F_1(q^2=0)$，而它应该(根据我们在上节末尾的讨论)固定在值 1。但这是发散项的唯一影响。因此我们将采用一个简单但完全特殊的方法修复这个困难：为保持条件$F_1(0)=1$，从上述表达式中减去一个正比于零阶顶点函数$(\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p))$的项。换言之，进行替换

$$\delta F_1(q^2) \to \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \tag{6.55}$$

(其中δF_1表示对F_1的一阶修正)。本程序的理由涉及到对第4.6节中提到的S矩阵公式(4.103)的微小修正。简言之，由于我们遗漏了(6.1)的外腿修正图，我们正在减去的项是对该遗漏的修正。我们将本声明的理由推迟至第 7.2 节。

$F_1(q^2)$中还有一个红外发散，来自$1/\Delta$项。例如，在$q^2=0$时，这个项是

$$\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{1-4z+z^2}{\Delta(q^2=0)} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\,\frac{-2+(1-z)(3-z)}{m^2(1-z)^2}$$

$$= \int_0^1 dz\,\frac{-2}{m^2(1-z)} + \text{finite terms.}$$

我们可以通过假设光子有一个小的非零质量μ来解决这种弊端。然后在光子传播子的分母中，$(k-p)^2$会变成$(k-p)^2-\mu^2$，这个分母在(6.43)中乘以z。因此，净效应是在Δ中增加一个$z\mu^2$项，我们将在接下来的两节进一步讨论红外发散。

对于这两个临时修正，形状因子是

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1) \times\left[\log\left(\frac{m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2-q^2xy}\right)+\frac{m^2(1-4z+z^2)+q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2-q^2xy+\mu^2z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2+\mu^2z}\right] + \mathcal{O}(\alpha^2); \tag{6.56}$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2-q^2xy}\right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{6.57}$$

请注意，紫外和红外发散都不会影响$F_2(q^2)$。因此，我们可以明确计算

$$\begin{aligned} F_2(q^2=0) &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\,\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\,\frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \tag{6.58}$$

因此，我们得到了对电子的g因子的修正：

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx .0011614. \tag{6.59}$$

这个结果是施温格在 1948 年首次获得的*。实验得出$a_e = .0011597$。显然我们为$F_2(0)$得到的明确的值，在α的更高阶上也是明确正确的。

QED 精度测试

在α阶 QED 对a_e预测成功的基础上，历代物理学家都提高了这个量的理论和实验测定的准确性。a_e的 QED 公式的系数现在知道可以通过α^4阶得到。计算α^2阶或更高阶的系数需要对紫外发散进行系统的处理。

这些具有挑战性的理论计算与越来越多的想象实验相匹配。最近对a_e的测量使用了一种由 Dehmelt 和合作者开发的技术，其中单个电子被困在静电和静磁

*J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416L (1948).

场系统中，并激发到自旋共振态*。今天，a_e的最佳理论值和实验值符合 8 个有效数字。

高阶 QED 计算还针对其他几个量进行了计算。其中包括氢和类氢的跃迁能，μ介子的反常磁矩，以及单重态和三重态正电子的衰变率。其中许多量的测量精度也很高。这些对比的完整集合详细测试了 QED 在各种设置中的有效性。表 6.1 总结了这些精度试验的结果。

在报告 QED 理论与实验之间的精度比较结果时有一些微妙之处，因为理论预测需要非常精确的α值，而它只能从另一个精确的 QED 实验中获得。因此，我们引用理论和实验之间的每一个比较，并作为对α的一次独立确定。α的每一个值都被赋予一个误差，该误差是理论和实验中预期不确定性的综合。如果来自不同来源的α值一致，则 QED 得到了确认。

表 6.1 中的前九项是原子物理设置中的 QED 计算。其中，用拉姆齐的氢脉泽测量的氢超精细分裂是物理学上最精确的已知量。不幸的是，质子内部结构的影响导致了不确定性，限制了理论上预测这个量的准确性。同样的困难也适用于兰姆位移，即氢的$j = 1/2$的 $2S$ 和 $2P$ 能级的分裂。最精确的 QED 测试现在来自于不涉及强相互作用粒子的系统，即电子的g-2和$e^-\mu^+$原子，μ子素中的超精细分裂。这组中的最后一项给出了一种确定α的新方法，通过将非常精确的中子康普顿波长测量值转换为精确已知的电子质量值。这可以与已知的 Rydberg 能量值和精确的 QED 公式相结合来确定α。这些数字之间唯一严重的差异在于三重正电子衰变率；然而有证据表明，相关的α^2阶的图对表中所引用值进行了较大的修正。

接下来的两个条目是从高能电子对撞机的高阶 QED 反应中测定α。这些高能实验通常只能达到百分之几级的精度，但其结果与低能量下的精确信息是一致的。

最后，表中最后两项给出了来自凝聚态系统中奇异量子干涉现象的α的两个独立测量。这两种效应分别提供了一个标准电阻和一个标准频率，人们相信它们

* R. Van Dyck, Jr., P. Schwinb erg, and H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26 (1987).

表 6.1 从精密 QED 实验中得到的α^{-1}值

Low-Energy QED:	
Electron $(g-2)$	137.035 992 35 (73)
Muon $(g-2)$	137.035 5 (1 1)
Muonium hyperfine splitting	137.035 994 (18)
Lamb shift	137.036 8 (7)
Hydrogen hyperfine splitting	137.036 0 (3)
$2\,^3S_1$–$1\,^3S_1$ splitting in positronium	137.034 (16)
$^1S_0$ positronium decay rate	137.00 (6)
$^3S_1$ positronium decay rate	136.971 (6)
Neutron compton wavelength	137.036 010 1 (5 4)
High-Energy QED:	
$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-e^+e^-)$	136.5 (2.7)
$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-\mu^+\mu^-)$	139.9 (1.2)
Condensed Matter:	
Quantum Hall effect	137.035 997 9 (3 2)
AC Josephson effect	137.035 977 0 (7 7)

此表中显示的α的每个值都是通过将实验测量值拟合到包含α作为参数的理论表达式而获得的。括号中的数字是最后一个显示数字的标准误差，包括理论和实验的不确定性。该表是根据Kinoshita(1990)精密QED测量结果编制的。这本书包含了一系列清晰的评论，这些评论是为详细分析QED过程而开发的卓越的理论和实验技术。其中五个最精确的值是由来自T. Kinoshita在*History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics*, H. Newman and T. Ypsilantis, eds. (Plenum Press, New York, 1995)。后一篇文章也对未来的精确实验提出了一个有趣的观点。

可以测量电子的电荷因为宏观系统的修正严格为零。*

这张图完全符合所有合理的预期。根据这张表中的证据，QED 是被所有物理理论进行最严格的测试——也是最显著的成功。

关于这些效应及其与α的确切关系的讨论，见 D.R.Yennie.*Rev.Mod.Phys.***59**,781(1987)

6.4 电子顶点函数：红外发散

现在让我们面对结果(6.56)中$F_1(q^2)$的红外发散，对于主导部分。在$\mu \to 0$极限下是

$$F_1(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx\, dy\, dz\, \delta(x+y+z-1) \left[\frac{m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy + \mu^2 z} - \frac{m^2(1-4z+z^2)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2 z} \right]. \quad (6.60)$$

为了理解这个表达式，我们必须做一些工作来简化它，提取和计算积分的发散部分。在本节中，我们只保留$\mu \to 0$极限中出现发散的项。

首先要注意，散度发生在费曼参数空间的角落上，这里$z \approx 1$(因此$x \approx y \approx 0$)。在这个区域中，我们可以在(6.60)的分子中设置$z = 1$和$x = y = 0$。我们也可以在分母中的μ^2项中设置$z = 1$。然后使用δ函数计算x积分得到

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2(1-z)^2 - q^2 y(1-z-y) + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2(1-z)^2 + \mu^2} \right].$$

(z积分的下限不重要)对变量进行改变：

$$y = (1-z)\xi, \qquad w = (1-z),$$

这个表达式变为

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \, \tfrac{1}{2} \int_0^1 d(w^2) \left[\frac{-2m^2 + q^2}{\left[m^2 - q^2\xi(1-\xi)\right] w^2 + \mu^2} - \frac{-2m^2}{m^2 w^2 + \mu^2} \right]$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{-2m^2 + q^2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \log\Big(\frac{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}{\mu^2} \Big) + 2\log\Big(\frac{m^2}{\mu^2} \Big) \right].$$

在极限$\mu \to 0$中，我们可以忽略对数内分子的细节；任何正比于m^2或q^2的东西实际上都是一样的。因此我们写

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{\rm IR}(q^2) \log\Big(\frac{-q^2 \text{ or } m^2}{\mu^2} \Big) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (6.61)$$

其中发散对数的系数为

$$f_{\rm IR}(q^2) = \int_0^1 \Big(\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} \Big) d\xi - 1. \quad (6.62)$$

由于q^2为负，且$\xi(1-\xi)$的最大值为 1/4，第一项大于 1，因此$f_{\rm IR}(q^2)$为正。

这个无限项是如何影响电子从势散射的截面的？因为$F_1(q^2)$只是矩阵元中乘以γ^μ的量，我们可以通过替换$e \to e \cdot F_1(q^2)$找到新的截面。因此，过程$\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$的截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\rm IR}(q^2) \log\left(\frac{-q^2 \text{ or } m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \tag{6.63}$$

其中第一个因子是树级结果。请注意，对横截面的$\mathcal{O}(\alpha)$修正不仅是无穷大的，而且是负值。显然出了大问题。

为了更好地理解发散，让我们在极限$-q^2 \to \infty$中计算发散对数的系数，即$f_{\rm IR}(q^2)$。在这个极限中，我们找到第二个对数

$$\begin{aligned}\int_0^1 d\xi \frac{-q^2/2}{-q^2\xi(1-\xi)+m^2} &\simeq \tfrac{1}{2}\int_0^1 d\xi \frac{-q^2}{-q^2\xi+m^2} + \begin{pmatrix}\text{equal contribution}\\ \text{from } \xi \approx 1\end{pmatrix} \\ &= \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right).\end{aligned} \tag{6.64}$$

因此，该极限中的形状因子为

$$F_1(-q^2 \to \infty) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{6.65}$$

注意，第二个对数中的分子是$-q^2$，而不是m^2；此表达式不仅包含正确的系数$\log(1/\mu^2)$，还包含正确的系数$\log^2(q^2)$。

对于软韧致辐射方程(6.26)，横截面上出现相同的$-q^2$双对数。这一对应关系指向了红外发散问题的解决方法。比较(6.65)和(6.26)，我们发现在极限$-q^2 \to \infty$下

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p') &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]; \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p' + \gamma) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[\ \ + \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right].\end{aligned} \tag{6.66}$$

分离的截面是发散的，但它们的和与μ无关，因此是有限的。

事实上，弹性截面和软韧致辐射截面都不能单独测量，只有它们的和是物理可观测到的。在任何实际实验中，光子探测器能探测到的光子最低只到某个最小

极限能量E_ℓ。散射事件发生而探测器看不到光子的概率是总和：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p \to p') + \frac{d\sigma}{d\Omega}\big(p \to p' + \gamma(k < E_\ell)\big) \equiv \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{measured}}. \tag{6.67}$$

这个“测量”的截面的发散部分是

$$\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{measured}} \approx \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \Big[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\Big(\frac{-q^2 \text{ or } m^2}{\mu^2}\Big) + \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \log\Big(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\Big) + \mathcal{O}(\alpha^2)\Big].$$

我们刚刚看到，当$-q^2 \gg m^2$时，$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$。如果对于一般$q^2$，关系相同，则测量的横截面为

$$\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{measured}} \approx \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \Big[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2) \log\Big(\frac{-q^2 \text{ or } m^2}{E_\ell^2}\Big) + \mathcal{O}(\alpha^2)\Big], \tag{6.68}$$

这取决于实验条件，但不再取决于μ^2。来自软韧致辐射和来自$F_1(q^2)$的红外发散相互抵消，从而产生一个可确实测量到的量的有限横截面。

对于q^2的任意值，我们仍必须验证等式$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = 2f_{\text{IR}}(q^2)$。从(6.13)我们有

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \Big(\frac{2p \cdot p'}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p')^2} - \frac{m^2}{(\hat{k} \cdot p)^2} \Big). \tag{6.69}$$

最后两项很容易计算

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot p)^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{1}{(p^0 - p\cos\theta)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2}.$$

在第一项中，我们可以将分母与费曼参数结合起来，以同样的方式进行积分。

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot p')(\hat{k} \cdot p)} &= \int_0^1 d\xi \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \frac{1}{\big[\xi \hat{k} \cdot p' + (1-\xi)\hat{k} \cdot p\big]^2} \\ &= \int_0^1 d\xi \, \frac{1}{\big[\xi p' + (1-\xi)p\big]^2} = \int_0^1 d\xi \, \frac{1}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2}. \end{aligned}$$

(在最后一步中，我们使用了$2p \cdot p' = 2m^2 - q^2$)把(6.69)的所有项放在一起，我们发现

$$\mathcal{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \int_0^1 \Big(\frac{2m^2 - q^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2} \Big) d\xi - 2 = 2f_{\text{IR}}(q^2), \tag{6.70}$$

这正是我们需要拿来消除红外发散的东西。

虽然式(6.68)证明了红外发散的消除，但这一结果几乎没有实际应用。一个实验主义者想知道对q^2的精确依赖性，我们没有仔细计算。然而，回忆(6.65)，我们在极限$-q^2 \gg m^2$中小心地获得了$\log^2(-q^2)$的正确系数。因此，在该极限中，(6.68)变为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{measured}} \approx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]. \tag{6.71}$$

这个结果是明确和有用的。请注意，$\mathcal{O}(\alpha)$修正再次涉及到 Sudakov 双对数。

6.5 红外发散的总结和解释

前一节中对红外发散的讨论足以使我们从韧致辐射和顶点修正计算中消除无穷大。然而，我们仍有三点没有解决：

1. 我们还没有证明在领头阶之外红外发散的消除。
2. 对红外发散抵消后，通过使光子探测器具有足够低的阈值E_ℓ，可以让可测量截面的修正(方程式(6.68)和(6.71))为任意负数。
3. 我们还没有重现在碰撞中辐射的光子数目的经典结果(6.19)。

我们现在将转向对第一个问题的解决，第二个和第三个问题的解决紧随着它。

对所有阶的红外发散的完整处理超出了本书的范围*。我们在这里只讨论微扰论每一阶下最大对数增强的项。一般来说，这些项的阶数是：

$$\left[\frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)\right]^n \tag{6.72}$$

它们在微扰论的第n阶。在相对论微扰论发明之前，Bloch 和 Nordsieck 首先在一篇有先见之明的论文中提出了我们最后的物理结论**。我们将遵循温伯格的一个现代的，简化的分析版本***。

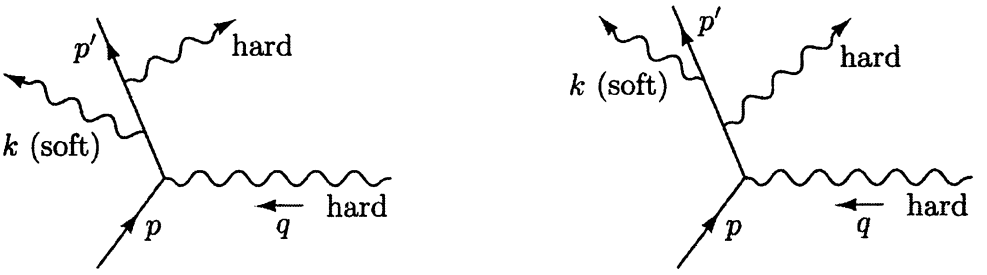
---

*最终处理给出：D. Yennie, S. Frautschi, and H. Suura, *Ann.Phys.* **13**, 379 (1961).

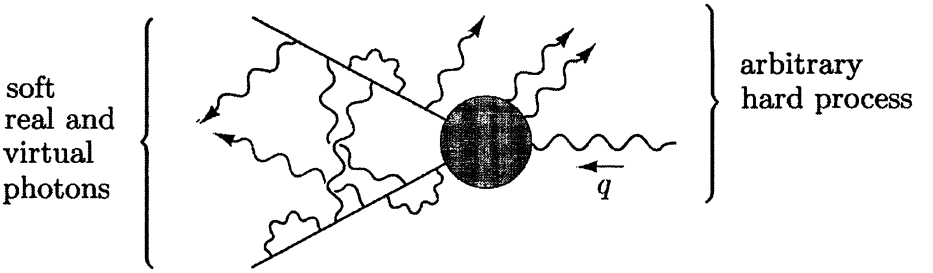
F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52, 54 (1937).

***S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B516 (1965).

红外发散是由具有“软”动量的光子产生的：能量小于某个截止值E_ℓ的实光子，以及(Wick 旋转后的)$k^2 < E_\ell^2$的虚光子。一个典型的高阶图将包含大量的实光子和虚光子。但为了找到一个发散，我们需要的不仅仅是一个软光子；我们需要电子传播子中的一个奇异分母。例如，考虑以下两个图

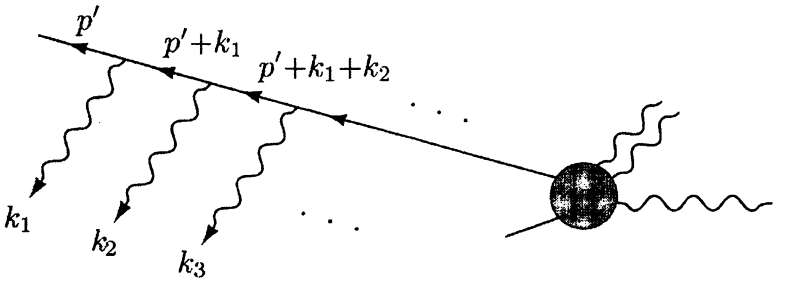


第一张图中电子先发射软光子，然后发射硬光子，没有红外发散，因为两个电子传播子的动量都远离质量壳。然而如果软光子最后发射，相邻传播子的分母是$(p'+k)^2 - m^2 = 2p' \cdot k$ ，当$k \to 0$时为零。因此第二个图确实包含发散。那么，我们想考虑一个图中一个任意的硬过程，可能包含硬光子和软光子的发射，通过在电子腿上添加软的实光子和虚光子来做修正



遵循温伯格，我们将把所有这些图的贡献相加，计算中唯一的新困难将是计算光子出现的所有方式的组合数学。

首先考虑出射电子线



我们将n个光子连接到线上，动量为$k_1 \cdots k_n$。目前我们不关心这些究竟是外部光子、相互连接的虚光子，还是连接到入射电子线的顶点的虚光子。这个图的 Dirac 结构是

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{p}'+\not{k}_1+m)}{2p'\cdot k_1}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{p}'+\not{k}_1+\not{k}_2+m)}{2p'\cdot(k_1+k_2)+\mathcal{O}(k^2)}\\ \cdots(-ie\gamma^{\mu_n})\frac{i(\not{p}'+\not{k}_1+\cdots+\not{k}_n+m)}{2p'\cdot(k_1+\cdots k_n)+\mathcal{O}(k^2)}(i\mathcal{M}_{\text{hard}})\cdots .\end{aligned} \tag{6.73}$$

我们假设所有k_i都很小，去掉分母中的$\mathcal{O}(k^2)$项。我们还将删除分子中的$\not{k}_i$项，就像我们在第 6.1 节中处理韧致辐射一样。同时和在那里一样，我们可以把$(\not{p}'+m)$的各个因子推到左边，然后使用$\bar{u}(p')(-\not{p}'+m)=0$：

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\,\gamma^{\mu_1}(\not{p}'+m)\,\gamma^{\mu_2}(\not{p}'+m)\cdots &= \bar{u}(p')\,2p'^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}(\not{p}'+m)\cdots\\ &= \bar{u}(p')\,2p'^{\mu_1}\,2p'^{\mu_2}\cdots .\end{aligned}$$

这将表达式(6.73)转换为

$$\bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p'\cdot k_1}\right)\left(e\frac{p'^{\mu_2}}{p'\cdot(k_1+k_2)}\right)\cdots\left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p'\cdot(k_1+\cdots+k_n)}\right)\cdots . \tag{6.74}$$

仍然只处理出射电子线，我们现在必须对所有可能动量$k_1\cdots k_n$的顺序求和(当两个光子连接在一起形成一个虚光子时，此过程将重复计数。稍后我们将处理此重复计数)有$n!$种不同的图需要求和，对应于$n!$种n个光子动量的排列。让π表示一个这样的排列，这样$\pi(i)$就是i所指向的介于1和n之间的数(例如如果π表示取$1\to 3$，$2\to 1$和$3\to 2$的排列，则$\pi(1)=3$，$\pi(2)=1$，和$\pi(3)=2$)。

带着这个记号，我们就可以通过以下等式的方法对排列进行求和：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{all permu-}\\ \text{tations }\pi}}\frac{1}{p\cdot k_{\pi(1)}}\frac{1}{p\cdot(k_{\pi(1)}+k_{\pi(2)})}\cdots\frac{1}{p\cdot(k_{\pi(1)}+k_{\pi(2)}+\cdots+k_{\pi(n)})}\\ =\frac{1}{p\cdot k_1}\frac{1}{p\cdot k_2}\cdots\frac{1}{p\cdot k_n}.\end{aligned} \tag{6.75}$$

这个公式的证明是通过对n的归纳而得到的。对于$n=2$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\pi}\frac{1}{p\cdot k_{\pi(1)}}\frac{1}{p\cdot(k_{\pi(1)}+k_{\pi(2)})} &= \frac{1}{p\cdot k_1}\frac{1}{p\cdot(k_1+k_2)}+\frac{1}{p\cdot k_2}\frac{1}{p\cdot(k_2+k_1)}\\ &= \frac{1}{p\cdot k_1}\frac{1}{p\cdot k_2}.\end{aligned}$$

对于归纳步骤，注意(6.75)左侧(LHS)的最后一个因子对于每个排列π都是相同的。将这个因子拉到公式之外，左侧变成

$$\mathrm{LHS}=\frac{1}{p\cdot\sum k}\sum_{\pi}\frac{1}{p\cdot k_{\pi(1)}}\frac{1}{p\cdot(k_{\pi(1)}+k_{\pi(2)})}\cdots\frac{1}{p\cdot(k_{\pi(1)}+\cdots+k_{\pi(n-1)})}.$$

对于任何给定的π，被求和的量不依赖于$k_{\pi(n)}$。如果$i=\pi(n)$，我们现在可以写

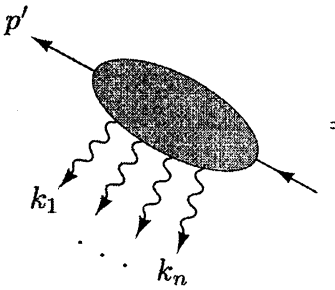
$$\sum_{\pi}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi'(i)},$$

这里$\pi'(i)$是剩余$n-1$个整数所有排列的集合。通过归纳假设(6.75)对$n-1$是真的，我们有

$$\mathrm{LHS}=\frac{1}{p\cdot\sum k}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p\cdot k_1}\frac{1}{p\cdot k_2}\cdots\frac{1}{p\cdot k_{i-1}}\frac{1}{p\cdot k_{i+1}}\cdots\frac{1}{p\cdot k_n}.$$

如果我们现在把这个和中的每一项乘以和除以$p\cdot k_i$，我们很容易得到我们想要的结果(6.75)。

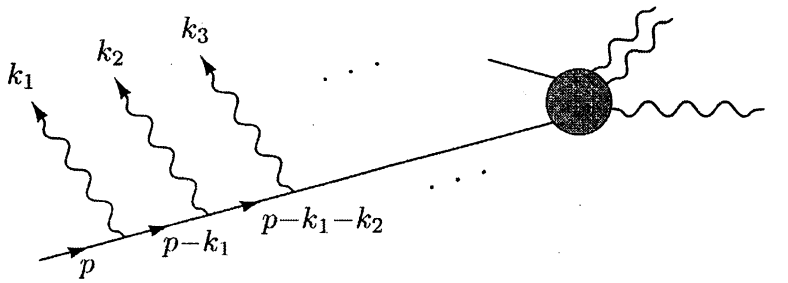
将(6.75)应用于(6.74)，我们发现



$$=\bar{u}(p')\left(e\frac{p'^{\mu_1}}{p'\cdot k_1}\right)\left(e\frac{p'^{\mu_2}}{p'\cdot k_2}\right)\cdots\left(e\frac{p'^{\mu_n}}{p'\cdot k_n}\right),\qquad(6.76)$$

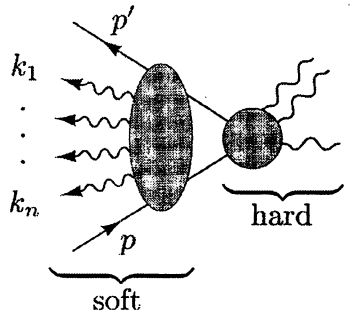
其中那一团表示插入n个光子线的所有可能顺序的和。

一组类似操作简化了软光子插入初始电子线上的和。但是在那里传播子动量是$p-k_1$，$p-k_1-k_2$，等等：



因此，我们在每个光子的因子中得到一个额外的负号，因为$(p-\sum k)^2-m^2\approx -2p\cdot\sum k$。

现在考虑包含n个软光子的图，它们以任何可能的顺序连接到初始或末态的电子线。所有这些图的总和都可以写出来



$$= \bar{u}(p')\, i\mathcal{M}_{\text{hard}}\, u(p) \cdot e\Big(\frac{p'^{\mu_1}}{p'\cdot k_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p\cdot k_1}\Big)\cdot e\Big(\frac{p'^{\mu_2}}{p'\cdot k_2} - \frac{p^{\mu_2}}{p\cdot k_2}\Big) \cdots e\Big(\frac{p'^{\mu_n}}{p'\cdot k_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p\cdot k_n}\Big). \tag{6.77}$$

通过把所有的因子乘出来，你可以看到我们得到了正确的项，可以表示在这两条线之间划分n个光子每一种可能的方式。

接下来，我们必须决定哪些光子是实的，哪些是虚的。

我们可以制造一个虚光子，通过选择两个光子动量k_i和k_j，设置$k_j = -k_i = k$，乘以光子传播子，然后在对k积分。对每个虚光子我们就可以得到表达式

$$\frac{e^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\Big(\frac{p'}{p'\cdot k} - \frac{p}{p\cdot k}\Big)\cdot\Big(\frac{p'}{-p'\cdot k} - \frac{p}{-p\cdot k}\Big) \equiv \mathbf{X}. \tag{6.78}$$

系数 1/2 是必需的，因为我们的程序已经对每个费曼图计数了两次：交换k_i和k_j返回相同的图。我们可以通过小心的围道积分来计算这个表达式，但是有一种更简单的方法。请注意，此近似方案指定了一个带有单圈且没有外部光子的图的值

$$\bar{u}(p')\big(i\mathcal{M}_{\text{hard}}\big)u(p)\cdot\mathbf{X}.$$

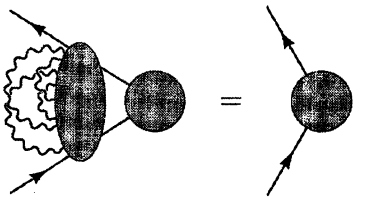
因此，$\mathbf{X}$必须精确地是对形状因子单圈修正的红外极限，如(6.61)所示：

$$\mathbf{X} = -\frac{\alpha}{2\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{-q^2}{\mu^2}\Big). \tag{6.79}$$

前面引用的温伯格的论文给出了由(6.78)到这一结果的直接推导。注意只在减去$q^2 = 0$的值之后，结果(6.79)才从上一节的讨论得到，所以我们应该担心(6.79)是否与n阶图的相应减除一致。此外我们要求和的一些图包含外腿修正，我们没有讨论过。在这里我们简单指出，这些微妙之处都不会影响最终答案；这一证明需要 Yennie、Frautschi 和 Suura 论文中的重机制。

如果有m个虚光子，我们得到m个像(6.79)的因子，还有$1/m!$的附加对称因子。因为相互交换虚光子不会改变图。然后我们可以对m求和，以获得由于任意

多个软虚光子的存在而产生的完整修正：



$$= \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^m}{m!} = \bar{u}(p')\big(i\mathcal{M}_{\text{hard}}\big)u(p)\exp(\mathbf{X}). \tag{6.80}$$

如果除了m个虚光子之外，我们还发射一个实光子。我们必须乘以它的极化矢量，在极化上求和，然后在光子的相空间上对矩阵元平方积分。这给出截面上一个额外的因子

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k}\,e^2(-g_{\mu\nu})\Big(\frac{p'^{\mu}}{p'\cdot k}-\frac{p^{\mu}}{p\cdot k}\Big)\Big(\frac{p'^{\nu}}{p'\cdot k}-\frac{p^{\nu}}{p\cdot k}\Big) \equiv \mathbf{Y} \tag{6.81}$$

假设光子的能量大于μ，小于E_ℓ(探测器阈值)，这个表达式很简单

$$\mathbf{Y} = \frac{\alpha}{\pi}\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}')\log\Big(\frac{E_\ell}{\mu}\Big) = \frac{\alpha}{\pi}f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\Big). \tag{6.82}$$

如果发射n个实光子，我们得到n个这样的因子，还有$1/n!$的对称因子，因为在末态中有n个相同的玻色子。因此，任意数量的软光子的发射截面是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}'+n\gamma) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{Y}^n = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')\cdot\exp(\mathbf{Y}). \tag{6.83}$$

结合我们对虚光子和实光子的结果，我们得出α的所有阶数下，$\mathbf{p}\to\mathbf{p}'+(k<E_\ell$的任何光子数)过程的测量横截面的最终结果：

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{meas.}} &= \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \times \exp(2\mathbf{X}) \times \exp(\mathbf{Y}) \\ &= \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \times \exp\Big[-\frac{\alpha}{\pi}f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{-q^2}{\mu^2}\Big)\Big] \times \exp\Big[\frac{\alpha}{\pi}f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_\ell^2}{\mu^2}\Big)\Big] \\ &= \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \times \exp\Big[-\frac{\alpha}{\pi}f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{6.84}$$

修正系数取决于探测器灵敏度E_ℓ。但是与红外截断值μ无关。注意如果我们把这个结果扩展到$\mathcal{O}(\alpha)$，我们就重新获得先前结果(6.68)。然而现在修正系数的大小控制在0到1之间。

在极限$-q^2 \gg m^2$下，我们的结果是

$$\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{meas.}} = \Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_0 \times \left|\exp\Big[-\frac{\alpha}{2\pi}\log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big)\log\Big(\frac{-q^2}{E_\ell^2}\Big)\Big]\right|^2. \tag{6.85}$$

在这个极限下，没有发射硬光子的散射概率比q^2的任何幂次都下降得更快。包含了 Sudakov 双对数的这个指数的修正因子称为 **Sudakov 形状因子**。

为了总结这一节，让我们用同样的近似方法计算出一些伴随着n个软光子产生的硬散射过程，所有这些光子能量都在E_-和E_+之间。这些光子相空间积分给出了$\log(E_+/E_-)$而不是$\log(E_\ell/\mu)$。如果我们把能量大于E_+的光子看作是过程的“硬”部分，我们会发现截面由(6.84)给出，乘以的附加系数是：

$$\begin{aligned}\text{Prob}(n\gamma \text{ with } E_-<E<E_+) = \frac{1}{n!}\Big[\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_+^2}{E_-^2}\Big)\Big]^n \\ \times \exp\Big[-\frac{\alpha}{\pi} f_{\text{IR}}(q^2)\log\Big(\frac{E_+^2}{E_-^2}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{6.86}$$

这个表达式的形式是泊松分布

$$P(n) = \frac{1}{n!}\lambda^n e^{-\lambda},$$

这里

$$\lambda = \langle n\rangle = \frac{\alpha}{\pi}\log\Big(\frac{E_+}{E_-}\Big)\mathcal{I}(\mathbf{v},\mathbf{v}').$$

这正是我们在式(6.19)中对辐射光子数的半经典估计。

Chapter 7

辐射修正：一些正规的发展

在前三章中我们逃避了四次*，陈述(有时是激发的)一个结果但推迟了证明。这些结果是：

1．用S矩阵元表示的衰变率，公式(4.86)。

2．用费曼图表示的S矩阵元的主公式，公式(4.103)。

3．Ward 等式，公式(5.79)。

4．用来消除顶点修正图中紫外发散的特设减除，公式(6.55)。

现在是时候回到这些问题上给予它们适当的处理了。第 7.2 至 7.4 节中，我们将得出所有四个结果。我们在这一过程中获得的知识将帮助我们解释(6.1)中所示的电子被重靶散射的剩余三个圈图修正：外腿修正和真空极化。我们将在第 7.1 节计算前者，在第 7.5 节计算后者。

本章将比前两章更为抽象。它的主要主题将是费曼图的奇异性，这些奇异性被视为图的外部动量的解析函数。然而，我们会发现，这个显然深奥的主题有丰富的物理含义，它阐明了费曼图和量子理论的一般原理之间的关系。

7.1 场强重正化

在本节中，我们将研究两点关联函数的解析结构，

$$\langle\Omega|\,T\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle \qquad \text{or} \qquad \langle\Omega|\,T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|\Omega\rangle\,.$$

在自由场理论中，两点函数$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$有一个简单的解释：它是粒子从$y$传播到$x$的振幅。这种解释在多大程度上延续到了相互作用理论中？

*第五个逃避是，假设了而不是导出了光子传播子，将在第 9 章中纠正。

我们对两点函数的分析将只依赖相对论和量子力学的一般原理：它将不依赖于相互作用的性质或微扰理论中的展开。但是，我们将把我们的考虑限制在标量场上。自旋场的关联函数也可以得到类似的结果，我们将在分析结束时展示狄拉克场的类似结果。

为仔细分析两点函数$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$，我们将在$\phi(x)$和$\phi(y)$之间插入恒等算符——以一组完备态的和的形式。我们选择这些态作为完全相互作用哈密顿量H的本征态，因为动量算符$\mathbf{P}$与H对易，我们也可以选择这些态作为$\mathbf{P}$的本征态，但我们还可以更有效地利用洛伦兹不变性。设$|\lambda_0\rangle$为H的本征态，动量为0: $\mathbf{P}|\lambda_0\rangle = 0$。那么$|\lambda_0\rangle$的所有平动态也都是$H$的本征态，这些态拥有所有可能的3动量。相对的，$H$的任何定动量的本征态都可以写成某个零动量本征态$|\lambda_0\rangle$的平动。4动量算符$P^\mu = (H, \mathbf{P})$的本征值相互组织成为双曲面，如图7.1所示。

从第 2 章回忆起，单粒子态的完备性关系是

$$(\mathbf{1})_{1-\text{particle}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\,. \tag{7.1}$$

我们可以借助于一点符号，写出整个希尔伯特空间的一个类似的完备性关系，让$|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$为$|\lambda_0\rangle$的平动，动量为$\mathbf{p}$，并假设它像单粒子态$|\mathbf{p}\rangle$这样是相对论归一化的。设$E_{\mathbf{p}}(\lambda) \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_\lambda^2}$，其中$m_\lambda$是态$|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$的质量，即态$|\lambda_0\rangle$的能量。那么期望的完备性关系是

$$\mathbf{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\,, \tag{7.2}$$

其中求和在所有零动量态$|\lambda_0\rangle$上进行。

现在我们在两点函数中的算符之间插入这个展开式。现在假设$x^0 > y^0$。让我们去掉无趣的常数项$\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle\langle\Omega|\phi(y)|\Omega\rangle$(这一项由于对称性通常为零；对于更高自旋的场，它会根据洛伦兹不变性而为零)。两点函数是

$$\langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\,\phi(y)\,|\Omega\rangle\,. \tag{7.3}$$

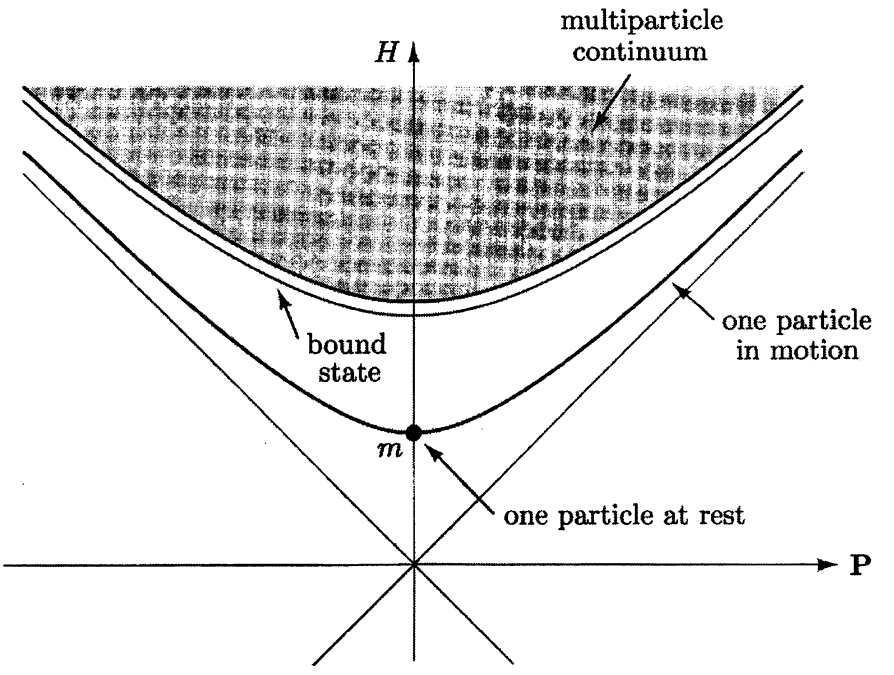


图 7.1　四动量算符$P^\mu = (H, \mathbf{P})$的本征值占据了能量动量空间中的一组双曲面。对于一个典型的理论，态由一个或多个质量为m的粒子组成，因此有单粒子态的双曲面，和双粒子态、三粒子态等的双曲面的连续统。在两个自由粒子产生的阈值下面也可能有一个或多个束缚态双曲面。

我们可以对矩阵元进行如下操作：

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle &= \langle\Omega|\,e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{-iP\cdot x}\,|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \\ &= \langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle\, e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\ &= \langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\, e^{-ip\cdot x}\big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

最后一个等式是$\langle\Omega|$和$\phi(0)$的洛伦兹不变性的结果：插入$U^{-1}U$的因子，其中U是实现从$\mathbf{p}$到0的洛伦兹平动的幺正算符，并使用$U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$(对于具有自旋的场，我们需要跟踪它的非平凡洛伦兹变换)。引入一个积分p^0，我们两点函数表达式(仍然对于$x^0 > y^0$)变成

$$\langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m_\lambda^2+i\epsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)}\big|\langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\big|^2. \tag{7.5}$$

注意费曼传播子$D_F(x-y)$的外观，但将m替换为m_λ。

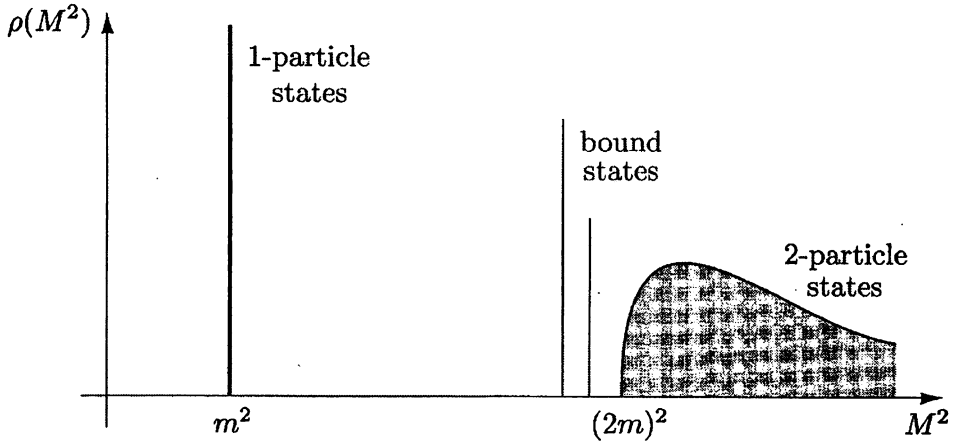


图 7.2 典型相互作用场理论的谱函数$\rho(M^2)$。单粒子态在m^2(粒子质量的平方)处贡献一个δ函数，多粒子态从$(2m)^2$开始有一个连续的光谱。也可能有束缚态。

类似的表达式适用于$y^0 > x^0$的情况。这两种情况都可以概括为两点函数的以下一般表示(Kallen-Lehmann 谱表示法)：

$$\langle\Omega|\, T\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,D_F(x-y;M^2), \tag{7.6}$$

其中$\rho(M^2)$是一个正的谱密度函数

$$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi)\delta(M^2 - m_\lambda^2)\left|\langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\right|^2. \tag{7.7}$$

一个典型的理论的谱密度$\rho(M^2)$如图 7.2 所示。注意，单粒子态对谱密度贡献一个孤立的δ函数：

$$\rho(M^2) = 2\pi\,\delta(M^2 - m^2)\cdot Z + (\text{nothing else until } M^2 \gtrsim (2m)^2), \tag{7.8}$$

其中Z是由(7.7)中的矩阵元的平方给出的数。我们称Z为**场强重正化**。m是单粒子的精确质量，即静止时的精确能量本征值。这个量一般与拉格朗日量中出现的质量参数的值不同。我们将把拉格朗日量中的参数称为m_0，也就是裸质量，把m称为玻色子ϕ的物理质量。只有物理质量m是直接观测到的

谱分解(7.6)产生以下的两点函数的傅里叶变换形式：

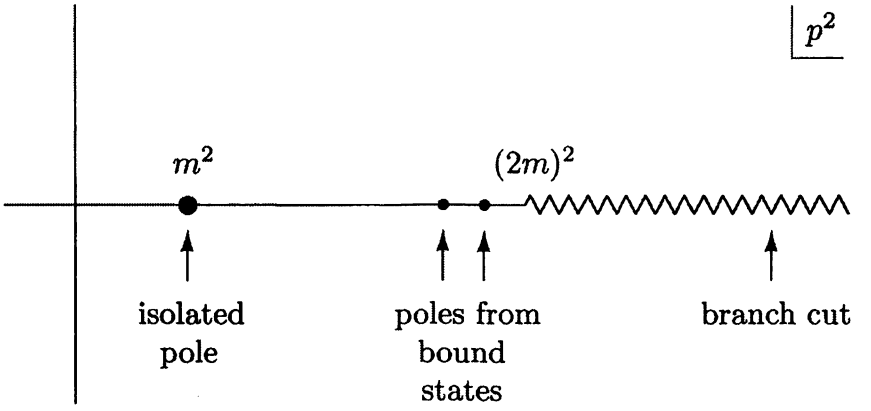


图 7.3 典型理论的两点函数的傅立叶变换在复p^2平面的解析结构。单粒子态在粒子质量的平方处形成一个孤立的极点。两个或两个以上自由粒子的状态会产生分支割线，而束缚态会产生额外的极点。

$$\begin{aligned}\int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\Omega| T\phi(x)\phi(0) |\Omega\rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2-m^2+i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

图 7.3 中给出了该函数在复p^2平面上的解析结构。第一项在$p^2 = m^2$处给出一个孤立的单极点，而第二项在$p^2 = (2m)^2$处提供一个分支割线。如果有任何的双粒子束缚态，它们将在$\rho(M^2)$中作为额外的δ函数出现，因此在割线后面作为额外的极点出现。

在第 2.4 节中，我们发现了自由标量场论中，两点关联函数的显式结果

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle 0| T\phi(x)\phi(0) |0\rangle = \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}. \tag{7.10}$$

对于$x^0 > 0$，我们将此公式解释为从0传播到x的粒子的振幅。方程(7.9)表明在相互作用标量场的最普遍的理论中，两点函数具有类似的形式。一般的表达式实质上是各态(由场算符$\phi(0)$从真空中产生)之间的标量传播振幅之和。在(7.9)和(7.10)之间有两个不同。第一，式(7.9)包含场强重正化因子$Z = |\langle\lambda_0|\phi(0)|\Omega\rangle|^2$，即$\phi(0)$从真空中产生给定的态的概率。在(7.10)，由于自由场理论中$\langle p|\phi(0)|0\rangle = 1$，该因子被隐式地包括在内。第二，式(7.9)包含了来自具有连续质量谱的多粒子中间

态的贡献。在自由场理论中，$\phi(0)$只能从真空中产生单个粒子。有了这两个差异，(7.9)便是(7.10)的直接推广。

在我们以后的分析中很重要的一点是，通过解析奇异性的强度，可以对单粒子和多粒子的中间态对(7.9)的贡献进行区分。p^2中，极点只来自单粒子中间态，而多粒子中间态则产生较弱的分支割线的奇异性。我们将在下一节中看到，这种相当正式的观察可以推广到更高的点关联函数，并在推导S矩阵元的图解公式中起到关键作用。

这一节的分析直接推广到更高自旋场的两点函数。主要的复杂之处在于操作(7.4)的推广，因为现在在平动下，场有一个非平凡的变换律。一般来说，需要几个不变的谱函数来表示多粒子态。但这种复杂的情况并不影响主要的结果：p^2平面中的极点只能由单粒子态(由场算符产生)的贡献产生。例如，Dirac 场的两点函数具有结构：

$$\begin{aligned}\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\,\langle\Omega|\,T\psi(x)\bar{\psi}(0)\,|\Omega\rangle &= \frac{iZ_2\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p)}{p^2-m^2+i\epsilon}+\cdots \\ &= \frac{iZ_2(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}+\cdots,\end{aligned} \tag{7.11}$$

其中省略的项给出了多粒子分支割线。和标量情况下一样，常数Z_2是量子场产生或者湮灭一个H的精确单粒子本征态的概率：

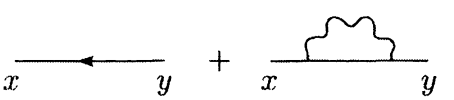
$$\langle\Omega|\,\psi(0)\,|p,s\rangle = \sqrt{Z_2}\,u^s(p). \tag{7.12}$$

(对于反粒子，用$\bar{v}$替换u)在极点，除掉重标度因子Z_2，Dirac 两点函数与有着物理质量的自由场两点函数完全相同。

一个例子：电子自能

尽管两点关联函数的这个非微扰分析与我们通常的费曼图的直接分析非常不同，但由于这个推导是完全通用的，因此它所暗示的两点函数的奇异性结构也应该在费曼图计算中可见。在本节的其余部分中，我们将明确检查 QED 中电子的两点函数的结果。

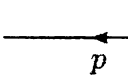
电子两点函数等于以下图的和:

$\langle\Omega|\,T\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|\Omega\rangle =$ 

$+\ \cdots.$ (7.13)

根据关联函数的费曼规则，这里的每一个图中都包含了两个外点的$e^{-ip\cdot(x-y)}$因子，以及初始传播子和末态传播子携带的动量p的积分$\int(d^4p/(2\pi)^4)$。在本节中，我们将始终忽略这些因子；换句话说，每个图都将表示两点函数的傅立叶变换中的相应项。

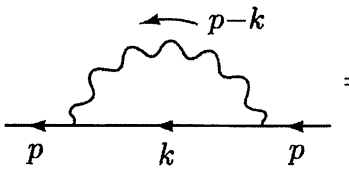
第一个图只是自由场传播子：



$$= \frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2+i\epsilon}. \tag{7.14}$$

在整个计算过程中，我们将把m_0而不是m写成电子传播子中的质量。这就清楚地表明了上面提到的事实，即拉格朗日量中出现的质量，一般来说，与粒子的可观测静止能量不同。然而，如果微扰展开适用，传播子的领头阶表达式应该近似于精确表达式。实际上，函数(7.14)的形式正好是(7.11)，在$p^2=m_0^2$处有一个极点。因此，我们期望两点函数的完整表达式也有一个这种形式的极点，在稍微移动的位置$m^2=m_0^2+\mathcal{O}(\alpha)$处。

(7.13)中的第二个图叫做电子自能，它有些复杂。



$$= \frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}\left[-i\Sigma_2(p)\right]\frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}, \tag{7.15}$$

在这里

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\,\frac{i(\not{k}+m_0)}{k^2-m_0^2+i\epsilon}\,\gamma_\mu\,\frac{-i}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon}. \tag{7.16}$$

(符号Σ_2表示它是我们将在下面定义的量Σ的二阶(对e)贡献)积分Σ_2有一个红外发散，我们通过加入一个小的光子质量μ来调整发散。在这个积分的外面，图在$p^2=m_0^2$处似乎有一个双极点。总而言之，这种修正的形式相当令人不愉快。但是让我们继续，并尝试使用第 6.3 节中为顶点修正开发的计算技术来求解$\Sigma_2(p)$。

首先引入一个费曼参数来组合两个分母

$$\frac{1}{k^2-m_0^2+i\epsilon}\,\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{\left[k^2-2xk\cdot p+xp^2-x\mu^2-(1-x)m_0^2+i\epsilon\right]^2}.$$

现在完成这个平方，定义一个移动的动量$\ell \equiv k - xp$。从分子中去掉ℓ中的线性项。我们有

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m_0}{[\ell^2 - \Delta + i\epsilon]^2}, \tag{7.17}$$

式中$\Delta = -x(1-x)p^2 + x\mu^2 + (1-x)m_0^2$。$\ell$上的积分发散。为了对其进行计算，我们首先使用Pauli-Villars程序(6.51)对其正规化：

$$\frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \to \frac{1}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(p-k)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}.$$

第二个项的形式与(7.17)相同，但如第 6.3 节所述，用Λ代替μ。现在我们将 Wick 旋转并替换欧几里得变量$\ell_E^0 = -i\ell^0$。这给出

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^2} &\to \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty d\ell_E^2 \left(\frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta]^2} - \frac{\ell_E^2}{[\ell_E^2 + \Delta_\Lambda]^2} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right),\end{aligned} \tag{7.18}$$

这里

$$\Delta_\Lambda = -x(1-x)p^2 + x\Lambda^2 + (1-x)m_0^2 \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} x\Lambda^2.$$

因此最后结果是

$$\Sigma_2(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx\, (2m_0 - x\not{p}) \log\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2} \right). \tag{7.19}$$

在讨论这个表达式的发散之前，让我们先求出它作为p^2的函数的解析行为。(7.19)中的对数在其参数变为负数时有一个分支割线，对于任何固定的x，这将发生在足够大的p^2上。更确切地说，割线从以下的点开始：

$$(1-x)m_0^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2 = 0.$$

求解这个x的方程我们发现

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m_0^2 - \mu^2)^2}{4p^4} - \frac{m_0^2}{p^2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m_0^2}{2p^2} - \frac{\mu^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{\left[p^2 - (m_0+\mu)^2\right]\left[p^2 - (m_0-\mu)^2\right]}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

存在p^2使得这个方程有一个实解x介于0和1之间，$\Sigma_2(p)$的分支割线就从该p^2的最小值开始。当$p^2 = (m_0 + \mu)^2$时，即，在二粒子态(电子加光子)产生的阈值处，

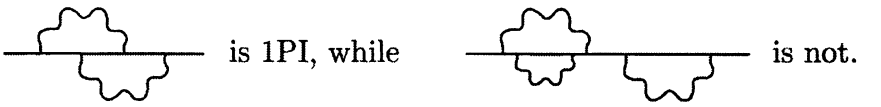
就会发生这种情况。事实上，这是相对论运动学中的一个简单的练习，可以证明(7.20)的平方根写为以下形式时

$$k = \frac{1}{2\sqrt{p^2}}\sqrt{\left[p^2-(m_0+\mu)^2\right]\left[p^2-(m_0-\mu)^2\right]},$$

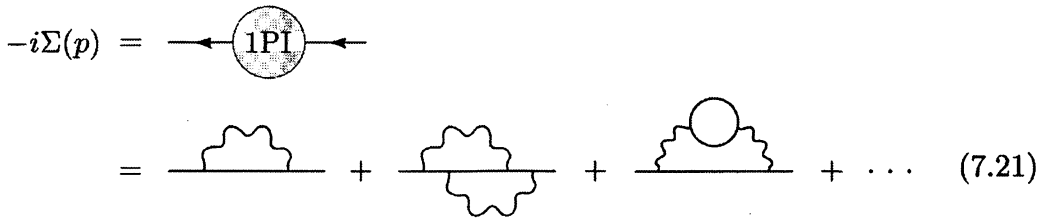
它正好是质量为m_0和μ的两个粒子的质心系动量，总能量为$\sqrt{p^2}$。很自然这个动量在两粒子的阈值上是实的。分支割线的位置正是我们从 Kallen-Lehmann 谱表示中期待的*。

我们现在已经找到了由 Kallen-Lehmann 表示所预测的二粒子分支割线的位置，但是我们还没有在$p^2=m^2$处找到预期的单极点。要找到它，我们实际上必须将费曼图的无穷级数包括进来。幸运的是，这个级数很容易求和。

让我们把一个**单粒子不可约**(1PI)图定义为任何一个不能通过去掉一条线将其一分为二的图：



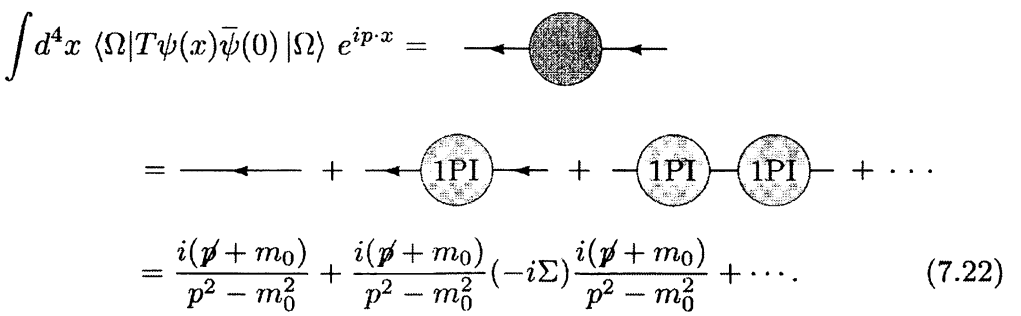
设$-i\Sigma(p)$表示所有带着两个外部费米子线的 1PI 图之和：



(7.21)

(尽管每个图都有两条外线，但这些线的费曼传播子不包括在$\Sigma(p)$的表达式中)对于α的领头阶，我们看到$\Sigma=\Sigma_2$。

两点函数的傅立叶变换现在可以写成



$$= \frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} + \frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}(-i\Sigma)\frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} + \cdots. \tag{7.22}$$

*在实际的 QED 中，$\mu=0$，并且两粒子的分支割线与单粒子的极点合并。这一微妙之处在完全消除红外发散中起到了作用，但超出了我们目前的分析范围。

第一个图在$p^2 = m_0^2$处有一个单极点。第二类中的每个图在$p^2 = m_0^2$处都有一个双极点。当我们包含越来越多的图时，$p^2 = m_0^2$附近的行为变得越来越糟糕。但幸运的是，所有图的和形成了一个几何级数。注意，$\Sigma(p)$与$\not{p}$对易，因为$\Sigma(p)$只是纯数字和$(\not{p})^2$的函数。事实上，写下$p^2 = (\not{p})^2$，我们可以把$\Sigma(p)$看作$\not{p}$的函数。然后我们可以将每个电子传播子改写为$i/(\not{p} - m_0)$，并将上述级数表示为:

$$\begin{aligned}\int d^4x\ \langle\Omega|\, T\psi(x)\bar{\psi}(0)\,|\Omega\rangle\ e^{ip\cdot x}&\\ &= \frac{i}{\not{p}-m_0} + \frac{i}{\not{p}-m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right) + \frac{i}{\not{p}-m_0}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right)^2 + \cdots\\ &= \frac{i}{\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})}.\end{aligned} \tag{7.23}$$

完全传播子有一个单极点，它被$\Sigma(\not{p})$从m_0偏移开。

这个极点的位置，物理质量m，是以下方程的解

$$\left[\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p})\right]\Big|_{\not{p}=m} = 0. \tag{7.24}$$

注意，如果$\Sigma(\not{p})$是由约定(7.21)定义的，那么对Σ的正贡献产生电子质量的正位移。靠近极点，(7.23)的分母具有以下形式

$$(\not{p}-m)\cdot\left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\bigg|_{\not{p}=m}\right) + \mathcal{O}\big((\not{p}-m)^2\big). \tag{7.25}$$

因此，完全的电子传播子有一个形式为(7.11)的单粒子极点，m由(7.24)和以下等式给出

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}}\bigg|_{\not{p}=m}. \tag{7.26}$$

我们对Σ_2的显式计算允许我们计算m和Z_2的第一个修正。让我们从m开始。到α阶，质量移动是

$$\delta m = m - m_0 = \Sigma_2(\not{p}=m) \approx \Sigma_2(\not{p}=m_0). \tag{7.27}$$

于是利用(7.19)

$$\delta m = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_0^1 dx\,(2-x)\log\left(\frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x\mu^2}\right). \tag{7.28}$$

质量移动是紫外发散的；发散项的形式是

$$\delta m \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3\alpha}{4\pi} m_0 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right). \tag{7.29}$$

m与m_0之间存在发散物理量是一个问题吗？这个问题有两个层次，概念和实践。

在概念层面上，我们应该充分期望电子的质量会因其与电磁场的耦合而发生改变。在经典电动力学中，任何电荷的静止能量都被其静电场的能量所增加，这种能量移动在点电荷的情况下发散：

$$\int d^3r\, \tfrac{1}{2}|\mathbf{E}|^2 = \int d^3r\, \frac{1}{2}\left(\frac{e}{4\pi r^2}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}\int \frac{dr}{r^2} \sim \alpha\Lambda. \tag{7.30}$$

事实上，令人费解的是，为什么(7.29)中的发散如此微弱，是Λ的对数，而不和(7.30)一样是线性的。为了理解这个特性，假设m_0设置为 0。那么电子场的两个螺旋度分量ψ_L和ψ_R就不会被 QED 哈密顿量中的任何项所耦合。这意味着，微扰修正永远不会引起ψ_L和ψ_R的耦合，特别是电子质量项。换句话说，当$m_0 = 0$时，δm必须消失。因此，质量移动必须与m_0成正比，因此，通过量纲分析，它只能对数依赖于Λ。

在实践水平上，无限质量移动使我们的微扰计算受到了怀疑。例如，第 5 章中的所有理论结果在技术上都应该涉及到m_0而不是m。为了将理论与实验进行比较，我们必须用关系式$m_0 = m + \mathcal{O}(\alpha)$来消除$m_0$而代入$m$。由于“小的”$\mathcal{O}(\alpha)$修正是无穷大的，所以这个程序的有效性远不明显。如果我们可以用具有正确极点位置的传播子为$i/(\not{p} - m)$而不是为$i/(\not{p} - m_0)$来计算费曼图，那么微扰理论的有效性就更可信了。在第 10 章中，我们将看到如何重新排列微扰级数，使m_0被系统地消除，用m来代替，并看到零阶传播子在物理质量处有极点。在本章的其余部分中，我们将继续简单地在α阶修正的表达式中用m替换m_0。

最后，让我们检查(7.26)对Z_2的微扰修正，我们发现α阶修正$\delta Z_2 = Z_2 - 1$是

$$\begin{aligned}\delta Z_2 &= \left.\frac{d\Sigma_2}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \left[-x\log\frac{x\Lambda^2}{(1-x)^2m^2 + x\mu^2} + 2(2-x)\frac{x(1-x)m^2}{(1-x)^2m^2 + x\mu^2}\right].\end{aligned} \tag{7.31}$$

这个表达式也是对数地紫外发散的。我们将在第 7.2 节末尾讨论这个发散项的可观测性。然而，有趣的是要注意到，甚至在讨论之前，(7.31)在形式上与我们在第 6.3 节计算电子顶点修正时所做的特设减除的值非常相似。根据式(6.56)，这

个减除的值是

$$\begin{aligned}\delta F_1(0) =& \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,dy\,dz\,\delta(x+y+z-1)\\ &\times\left[\log\Big(\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\Big)+\frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right]\\ =&\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz\,(1-z)\left[\log\Big(\frac{z\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\Big)+\frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right]. \quad (7.32)\end{aligned}$$

使用分部积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 dz\,(1-2z)\log\Big(\frac{\Lambda^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\Big) &= -\int_0^1 dz\,z(1-z)\frac{2(1-z)m^2-\mu^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\\ &=\int_0^1 dz\left[(1-z)-\frac{(1-z)(1-z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\right],\end{aligned}$$

不难看出$\delta F_1(0)+\delta Z_2=0$。这等式将在证明第 6.3 节特设减除的合理性方面发挥关键作用。

7.2 LSZ 约化公式

在上一节中，我们看到两点关联函数的傅立叶变换，作为p^2的一个解析函数，在单粒子态的质量上有一个单极点：

$$\int d^4x\,e^{ip\cdot x}\,\langle\Omega|\,T\phi(x)\phi(0)\,|\Omega\rangle \underset{p^2\to m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2-m^2+i\epsilon}. \quad (7.33)$$

(在本节中，我们使用符号~表示两边的极点相同；在本例中，等式(7.9)给出了额外的有限项)在本节中，我们将把这个结果推广为更高的关联函数。在这一节我们将推导关联函数和S矩阵元之间的一般关系(首先由 Lehmann、Symanzik 和 Zimmermann 得到)，称为 **LSZ 约化公式***。这个结果与我们计算关联函数的费曼规则相结合，将证明方程(4.103)，即我们用费曼图表示S矩阵元的主公式。为了简单起见，我们将对标量场的情况进行整体分析。

* H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, Nuovo Cimento 1, 205 (1955).

讨论的策略如下。为了计算 2 体→ n体散射过程的S矩阵元，我们从$n+2$个海森堡场的关联函数开始。对这些场中任意一个场的坐标进行傅立叶变换，我们将在傅立叶变换变量p^2中找到一个形式为(7.33)的极点。我们将讨论，与这些极点相关的单粒子态实际上是渐近态，即，由分离良好的波包集中在确定动量的附近的极限所给出的态。取极限为所有$n+2$个外部粒子都趋于在壳，我们可以把多重极点的系数解释为 S 矩阵元。

首先让我们针对一个参数x将$(n+2)$点的关联函数傅立叶变换，然后我们必须分析积分

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle\Omega| T\{\phi(x)\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\} |\Omega\rangle .$$

我们想确定变量p^0中的极点。要做到这一点，把x^0上的积分分为三个区域：

$$\int dx^0 = \int_{T_+}^{\infty} dx^0 + \int_{T_-}^{T_+} dx^0 + \int_{-\infty}^{T_-} dx^0, \tag{7.34}$$

其中T_+比所有z_i^0大得多，T_-比所有z_i^0小得多，将这三个区间称为区域I, II,和III。由于区域II是有界的，以及被积函数通过解析函数$\exp(ip^0x^0)$依赖于p^0，该区域的贡献在p^0中将是解析的，但是区域I, III是无界的，可能在p^0中产生奇异性。

考虑第一个区域I。这里x^0是最晚的时间，所以$\phi(x)$在编时中处于第一位。以(7.2)的形式插入一组完备的中间态：

$$1 = \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle \langle\lambda_{\mathbf{q}}| .$$

区域 I 上的积分变成

$$\int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int d^3x\, e^{ip^0x^0} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \sum_\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} \langle\Omega| \phi(x) |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle \times \langle\lambda_{\mathbf{q}}| T\{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\} |\Omega\rangle . \tag{7.35}$$

使用式(7.4)

$$\langle\Omega| \phi(x) |\lambda_{\mathbf{q}}\rangle = \langle\Omega| \phi(0) |\lambda_0\rangle e^{-iq\cdot x}\big|_{q^0=E_{\mathbf{q}}(\lambda)},$$

并且加进一个因子$e^{-\epsilon x^0}$，以确保积分被很好地定义，这个积分变成

$$\sum_\lambda \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}(\lambda)} e^{ip^0x^0}e^{-iq^0x^0}e^{-\epsilon x^0}\langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \\ \times\langle\lambda_{\mathbf{q}}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle$$

$$=\sum_\lambda \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)}\frac{ie^{i(p^0-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon)T_+}}{p^0-E_{\mathbf{p}}(\lambda)+i\epsilon}\langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\langle\lambda_{\mathbf{p}}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,. \tag{7.36}$$

分母只是等式(7.5)的分母：$p^2-m_\lambda^2$。p^0中存在解析奇异性；如第 7.1 节所述，根据静止能量m_λ是或否是孤立的，该奇异性将是极点或分支割线。单粒子态对应于一个孤立的能量值$p^0=E_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$，此时等式(7.36)具有极点

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\langle\Omega|\,T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle \\ \underset{p^0\to+E_{\mathbf{p}}}{\sim}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\sqrt{Z}\,\langle\mathbf{p}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,. \tag{7.37}$$

因子$\sqrt{Z}$与式(7.8)中的场强重正化因子相同，因为它替换了与式(7.7)中相同的矩阵元。为了计算区域III的贡献，我们将$\phi(x)$放在算符排序的最后，然后，在$T\{\phi(z_1)\cdots\}$和$\phi(x)$之间插入一组完备的态。重复上述参数会产生一个极点如$p^0\to -E_{\mathbf{p}}$：

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x}\langle\Omega|\,T\{\phi(x)\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle \\ \underset{p^0\to-E_{\mathbf{p}}}{\sim}\langle\Omega|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|-\mathbf{p}\rangle\sqrt{Z}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}. \tag{7.38}$$

接下来我们要对剩下的场坐标进行傅立叶变换。然而，为了防止各种外部粒子相互作用，我们必须在空间中将它们彼此隔离开来。因此，让我们用波包而不是简单的傅立叶变换来重复前面的计算。在等式(7.35)中，代替

$$\int d^4x\, e^{ip^0x^0}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\to\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int d^4x\, e^{ip^0x^0}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{k}), \tag{7.39}$$

其中$\varphi(\mathbf{k})$是一个以$\mathbf{k}=\mathbf{p}$为中心的窄分布。该分布将x限制在一个带中，该带的空间范围是波包的空间范围，是动量为$\mathbf{p}$的粒子的轨迹。通过这种修改，(7.36)的右侧有一个更复杂的奇异性结构。

$$\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{k})\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\frac{i}{p^0-E_{\mathbf{k}}(\lambda)+i\epsilon}\langle\Omega|\,\phi(0)\,|\lambda_0\rangle\langle\lambda_{\mathbf{k}}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle$$

$$\underset{p^0\to+E_{\mathbf{p}}}{\sim}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\varphi(\mathbf{k})\frac{i}{\tilde{p}^2-m^2+i\epsilon}\sqrt{Z}\,\langle\mathbf{k}|\,T\{\phi(z_1)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,, \tag{7.40}$$

其中，在第二行，$\tilde{p}=(p_0,\mathbf{k})$。单粒子奇点现在是一个分支割线，其长度是波包$\varphi(\mathbf{k})$动量空间的宽度。然而，如果$\varphi(\mathbf{k})$定义的动量非常窄，那么这个分支割线就很短，(7.40)有一个定义明确的极限，其中$\varphi(\mathbf{k})$趋于$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})$，(7.40)的奇异性锐化成(7.36)的极点。由遥远过去的单粒子态引起的奇点，式(7.38)，也被用同样的方式修正了。

现在考虑把$(n+2)$点关联函数中的每个坐标与一个波包结合起来进行积分，以形成*

$$\left(\prod_i\int\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\int d^4x_i\,e^{i\tilde{p}_i\cdot x_i}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\right)\langle\Omega|\,T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,. \tag{7.41}$$

波包应选择在$x=0$附近的区域重叠，并在遥远的过去和遥远的未来分开。为了分析这个积分，我们选择了一个大的正时间T_+，这样所有的波包对于$x_i^0>T_+$都是分开的，并且我们选择了一个大的负时间T_-，这样所有的波包对于$x_i^0<T_-$都是被很好分开的。然后我们可以将x_i^0上的每个积分分解为三个区域，如(7.34)所示。有界区域 II 上任意x_i^0的积分导致相应能量p_i^0的表达式解析，因此我们可以集中在所有x_i^0都处于遥远的过去或未来的大时间的情况下。

为了明确起见，考虑未来只有两个时间坐标(x_1^0和x_2^0)的贡献。在这种情况下，场$\phi(x_1)$和$\phi(x_2)$按时间顺序位于其他场的左侧。插入一组完备的态$|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$，(7.41)中对这两个场坐标的积分形式如下

$$\sum_\lambda\int\frac{d^3K}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}}\left(\prod_{i=1,2}\int\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\int d^4x_i\,e^{i\tilde{p}_i\cdot x_i}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\right)$$
$$\times\,\langle\Omega|\,T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}\,|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\,\langle\lambda_{\mathbf{K}}|\,T\{\phi(x_3)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,.$$

态$|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle$被两个约束在遥远波包中的场算符所湮灭。因此，它必须由在两个不同位置的两个不同的真空激发态组成。如果这些激发态被很好地分开，它们应该彼此

*在第 4.5 节中，乘积符号象征性地应用于圆括号内的积分以及其他因子；x_i积分适用于括号之外的事物。

独立，因此我们可以做近似：

$$\sum_{\lambda}\int\frac{d^3K}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{K}}}\langle\Omega|\,T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}\,|\lambda_{\mathbf{K}}\rangle\,\langle\lambda_{\mathbf{K}}|$$
$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\int\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_1}}\int\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}_2}}\langle\Omega|\,\phi(x_1)\,|\lambda_{\mathbf{q}_1}\rangle\,\langle\Omega|\,\phi(x_2)\,|\lambda_{\mathbf{q}_2}\rangle\,\langle\lambda_{\mathbf{q}_1}\,\lambda_{\mathbf{q}_2}|\,.$$

在这个方程中，λ_1和λ_2上的和覆盖了所有的零动量态，但是只有单粒子态将贡献我们正在寻找的极点。在这种情况下，x_1^0和$\mathbf{q}_1$上的积分产生(7.40)形式的p_1^0的尖锐奇点，x_2^0和$\mathbf{q}_2$上的积分在p_2^0中产生相同的奇点行为。在(7.41)中，两个奇点的项都是

$$\left(\prod_{i=1,2}\int\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\varphi_i(\mathbf{k}_i)\frac{i}{\vec{p}_i^{\,2}-m^2+i\epsilon}\cdot\sqrt{Z}\right)\langle\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2|\,T\{\phi(x_3)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,.$$

在波包趋向于δ函数并集中在确定动量$\mathbf{p}_1$和$\mathbf{p}_2$的极限中，这个表达式趋向于

$$\left(\prod_{i=1,2}\frac{i}{{p_i}^2-m^2+i\epsilon}\cdot\sqrt{Z}\right)_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|T\{\phi(x_3)\cdots\}\,|\Omega\rangle\,.$$

态$\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|$正是第 4.5 节中定义的出态，因为它是被约束在分离良好的波包中的粒子态的确定动量的极限。将相同的分析用于遥远过去的时间x_i^0，得到相应p_i^0中最大奇异项的系数是一个有着入态的矩阵元。因此，(7.41)中的这一最奇异的项具有以下形式：

$$\left(\prod_{i=1,2}\frac{i}{{p_i}^2-m^2+i\epsilon}\cdot\sqrt{Z}\right)\left(\prod_{i=3,\ldots}\frac{i}{{p_i}^2-m^2+i\epsilon}\cdot\sqrt{Z}\right)_{\text{out}}\langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|-\mathbf{p}_3\cdots\rangle_{\text{in}}.$$

最后一个因子就是S矩阵元。

我们现在已经证明，可以通过折叠出相应的波包的场的真空期望值，提取能量p_i^0中的领头奇异性，然后取这些波包的极限为动量的δ函数，从而提取S矩阵元的值。然而，如果我们能以相反的顺序进行这些操作，首先让波包变成δ函数，返回到简单的傅立叶变换，然后提取奇异性，计算就会简单得多。事实上，这种操作顺序的切换并没有改变领头奇异性的结果。然而，争论这一点是相当微妙的。大致上，解释如下：在刚刚完成的解析语言中，可能会出现新的奇异性，因为在傅立叶变换中，x_1和x_2可以在遥远的将来紧密地结合在一起。然而，在这个区域，指数因子接近$\exp[i(p_1+p_2)\cdot x]$。因此新的奇异性是变量$(p_1^0+p_2^0)$中的单极点，

而不是两个分开的能量变量中的极点的乘积。在本节开头引用的 Lehmann、Symanzik 以及 Zimmermann 的原始论文中，可以找到一个更为仔细的论点(不幸的是，用一种完全不同的语言表达)。

如果能够对那些操作的顺序进行这个反演，我们就得到了关联函数的傅立叶变换与S矩阵元之间的精确关系。这就是 LSZ 约化公式：

$$\prod_1^n \int d^4x_i\, e^{ip_i\cdot x_i} \prod_1^m \int d^4y_j\, e^{-ik_j\cdot y_j}\ \langle\Omega|\, T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y_1)\cdots\phi(y_m)\}\,|\Omega\rangle$$

$$\underset{\substack{\text{each } p_i^0\to+E_{\mathbf{p}_i}\\ \text{each } k_j^0\to+E_{\mathbf{k}_j}}}{\sim} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{Z}\,i}{p_i^2-m^2+i\epsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{Z}\,i}{k_j^2-m^2+i\epsilon}\right)\langle \mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_n|\, S\,|\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_m\rangle\,. \tag{7.42}$$

方程式中出现的量Z正好是场强重正化常数，在第 7.1 节中定义为场的两点函数中单粒子极点的留数。每个不同的粒子将有一个不同的重正化因子Z，从它自己的两点函数获得。对于更高自旋的场，如等式(7.12)，$\sqrt{Z}$的每个因子都伴随着一个极化因子，如$u^s(p)$。极化s必须在(7.42)的第二行中求和。

换句话说，LSZ 公式表明S矩阵元可以按如下方式计算。计算合适的傅立叶变换的关联函数，对外部粒子靠近质量壳的动量空间的区域进行观察，确定多粒子极点的系数。对于具有自旋的场，还必须乘以极化旋量(如$u^s(p)$)或矢量(如$\epsilon^r(k)$)来投影出所需的自旋态。

我们的下一个目标是用费曼图的语言表达这个过程。我们来分析标量场四点函数的图示展开与 2 粒子→2 粒子散射的S矩阵元之间的关系。我们将明确地考虑对关联子有贡献的完全连通的费曼图。通过类似的分析，可以很容易地确认我们应该忽略非连通图，因为它们没有奇异性结构，而在(7.42)的右侧有四个极点的乘积。

精确四点函数

$$\left(\prod_1^2 \int d^4x_i\, e^{ip_i\cdot x_i}\right)\left(\prod_1^2 \int d^4y_i\, e^{-ik_i\cdot y_i}\right)\langle\Omega|\, T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y_1)\phi(y_2)\}\,|\Omega\rangle$$

具有图 7.4 所示的一般形式。在这幅图中，我们明确地指出了每条腿的图修正；中心中的阴影圆圈代表了所有被截腿的四点图的和。

我们可像前一节对电子传播子所做的那样，对每个外腿的修正进行求和。设

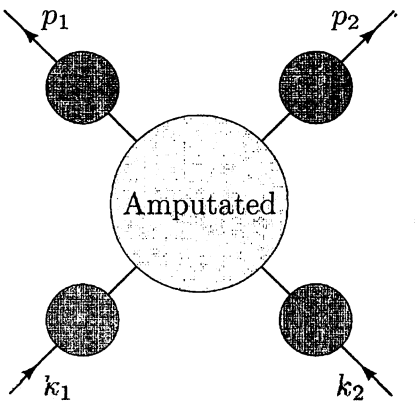
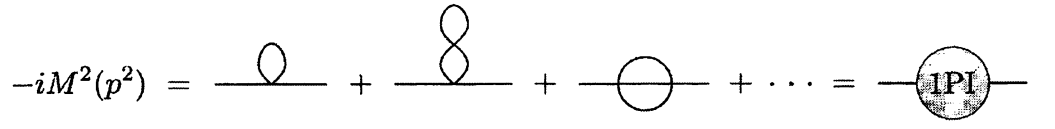


图 7.4 标量场理论中精确四点函数的结构

$-iM^2(p^2)$表示插入到标量传播子的所有单粒子不可约(1PI)的和：



然后，精确的传播子可以写成一个几何级数，并如式(7.23)那样求和：



$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}\left(-iM^2\right)\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \cdots$$

$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}. \tag{7.43}$$

注意，就像在电子传播子的情况中一样，我们对1PI自能$M^2(p^2)$的符号约定意味着，$M^2(p^2)$的一个正的贡献对应于标量粒子质量的一个正的移动。如果我们围绕物理粒子的极点对每个被重新求和的传播子进行展开，我们可以看到四点振幅中的每一外腿贡献出

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2} \underset{p^0 \to E_{\mathbf{p}}}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{regular}). \tag{7.44}$$

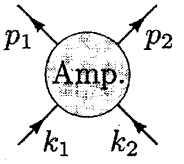
因此，图的总和包含四个极点的乘积：

$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2}\frac{iZ}{p_2^2 - m^2}\frac{iZ}{k_1^2 - m^2}\frac{iZ}{k_2^2 - m^2}.$$

这正是(7.42)第二行的奇点。通过比较这个极点乘积的系数，我们发现联系

为：

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\, S\,|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^4$$

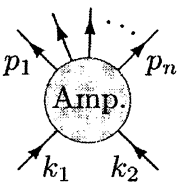


，

其中，阴影圆是被截腿的四点图的和，Z是场强重正化因子。

在一般场论中，$(n+2)$点的关联子的傅立叶变换可以采用相同的分析方法。然后，S矩阵元与费曼图之间的关系形式为

$$\langle \mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n|\, S\,|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = \left(\sqrt{Z}\right)^{n+2}$$



. (7.45)

(如果外部粒子是不同种类的，则每个粒子都有自己的重正化因子$\sqrt{Z}$；如果粒子具有非零自旋，则右侧会有额外的极化因子，如$u^s(k)$)。这几乎精确的就是我们在 4.6 节中写下的S矩阵的图解公式。唯一的新特征是重正化因子$\sqrt{Z}$的出现。Z因子与微扰理论的领头阶计算无关，但在高阶修正的计算中很重要。

到目前为止，我们只完成了一次高阶修正的完整计算，即对电子形状因子的α阶修正的计算。我们没有考虑电子场强重正化的影响。现在让我们加入这个因子并检查它的影响。

由于(6.28)和(6.30)式是用我们先前的不正确的S矩阵元公式推导出来的，我们应该通过为初始和末态电子插入$\sqrt{Z}$因子来修正这些公式。然后精确的顶点结构方程(6.33)写为

$$Z_2\Gamma^\mu(p',p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2), \tag{7.46}$$

用$\Gamma^\mu(p',p)$表示被截腿的电子-光子顶点图的和。

我们可以用这个方程来重新计算形状因子的α阶。因为$Z_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$和$F_2$是从$\alpha$阶开始的，所以我们以前对$F_2$的计算不会受到影响。要计算$F_1$，将(7.46)的左侧写为

$$Z_2\Gamma^\mu = (1+\delta Z_2)(\gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu + \gamma^\mu\cdot\delta Z_2,$$

其中，δZ_2和$\delta\Gamma^\mu$表示这些量的α阶修正。与(7.46)的右边比较，我们看到$F_1(q^2)$收到一个等于δZ_2的新贡献。现在让$\delta F_1(q^2)$表示我们在 6.3 节中计算的对形状因子

的(未被减去的)修正，并从 7.1 节末尾回忆$\delta Z_2 = -\delta F_1(0)$，然后

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) + \delta Z_2 = 1 + \left[\delta F_1(q^2) - \delta F_1(0)\right].$$

这正是我们在第 6.3 节中声明但未证明的结果。场强重正化的结论证明了我们在这里特别应用的减除程序是正确的。

在这个分析水平上，很难看出F_1的发散的消除将如何持续到更高阶。更糟糕的是，尽管我们在第 6.3 节中对一般结果$F_1(0) = 1$进行了论证，但我们对α阶结果的验证似乎取决于数值上的巧合。

我们可这样详细地描述这个问题：通过以下关系定义第二个重标度因子Z_1

$$\Gamma^\mu(q = 0) = Z_1^{-1}\gamma^\mu, \tag{7.47}$$

其中Γ^μ是完整的被截腿的顶点函数。为了找到$F_1(0) = 1$，我们必须证明等式$Z_1 = Z_2$的，这样顶点重标度就可以精确地抵消电子场强重正化。在第 7.4 节末尾，我们将证明这个等式对微扰理论中的所有阶都成立。

我们用一个进一步的正式观察来结束我们对 LSZ 约化公式的讨论。LSZ 公式通过傅立叶变换动量p_i^0或k_i^0的符号来区分入射和出射。这意味着，通过将p^2中极点的留数从正p^0解析延拓到负p^0，我们可以将末态为$\phi(\mathbf{p})$的S矩阵元转换为初态为反粒子$\phi^*(-\mathbf{p})$的S矩阵元。这正是**交叉对称性**的表述，我们在第 5.4 节中用图解法推导了它：

$$\langle \cdots \phi(p)|\, S \,|\cdots\rangle\big|_{p=-k} = \langle \cdots |\, S \,|\phi^*(k)\cdots\rangle\,.$$

由于 LSZ 公式的证明不依赖于微扰理论，我们发现S矩阵的交叉对称性是量子理论的一般结果，而不仅仅是费曼图的一个性质。

7.3 光学定理

在第 7.1 节中，我们看到量子场的两点关联函数，作为动量p^2的解析函数，具有与多粒子中间态相关的分支割线奇异性。对于那些熟悉非相对论散射理论的人来说，这个结论并不令人惊讶，因为在那里散射振幅作为能量的函数，在正实轴上有一个分支割线。散射振幅的虚部在这一分支割线上表现为不连续。根据**光学定理**，向前散射振幅的虚部与总截面成正比。现在我们将证明光学定理的场论版本，

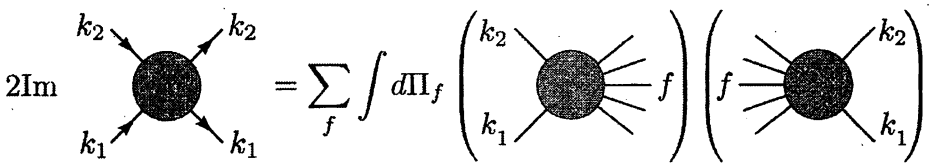


图 7.5 光学定理：向前散射振幅的虚部来自所有可能的中间态粒子的贡献之和。

并说明它是如何在费曼图计算中出现的。

光学定理是S矩阵幺正性的直接结果：$S^\dagger S = 1$。插入(4.72)的$S = 1 + iT$，我们有

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \tag{7.48}$$

让我们在双粒子态$|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$和$|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle$之间取这个方程的矩阵元。要计算右侧，插入一组完备的中间态：

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\, T^\dagger T\, |\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle = \sum_n \Big(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\Big) \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\, T^\dagger\, |\{\mathbf{q}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{q}_i\}|\, T\, |\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle.$$

现在将T矩阵元表示为不变矩阵元$\mathcal{M}$乘以 4 动量守恒的δ函数。然后等式(7.48)变为

$$\begin{aligned} -i\big[\mathcal{M}(k_1k_2 \to p_1p_2) - \mathcal{M}^*(p_1p_2 \to k_1k_2)\big] \\ = \sum_n \Big(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\Big) \mathcal{M}^*(p_1p_2 \to \{q_i\})\mathcal{M}(k_1k_2 \to \{q_i\}) \\ \times (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-\textstyle\sum_i q_i), \end{aligned}$$

乘以整体δ函数$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$。让我们把这个等式缩写为

$$-i\big[\mathcal{M}(a \to b) - \mathcal{M}^*(b \to a)\big] = \sum_f \int d\Pi_f\, \mathcal{M}^*(b \to f)\mathcal{M}(a \to f), \tag{7.49}$$

求和运算在末态粒子的所有可能集合f上。尽管我们到目前为止假定a和b是双粒子态，但等价地，它们可以是单粒子或多粒子渐近态。

对于向前散射这个重要的特殊情况，我们可以设置$p_i = k_i$以获得更简单的等式，如图 7.5 所示。按(4.79)的要求，提供运动学因子来构建截面，我们得到光学定理的标准形式，

$$\operatorname{Im}\mathcal{M}(k_1, k_2 \to k_1, k_2) = 2E_{\rm cm}p_{\rm cm}\sigma_{\rm tot}(k_1, k_2 \to \text{anything}), \tag{7.50}$$

式中，$E_{\rm cm}$是总质心能量，$p_{\rm cm}$是质心系中任一粒子的动量。该方程将向前散射振幅与产生所有末态的总截面联系起来，因为向前散射振幅的虚部给出了粒子束通过靶时向前波的衰减，因此很自然地，这个量应该与散射概率成正比。等式(7.50)给出了精确的联系。

费曼图的光学定理

现在让我们研究一下，在费曼图展开中，S矩阵元虚部的这个等式是如何出现的。很容易检查(例如，在 QED 中)，对S矩阵元$\mathcal{M}$有贡献的每个图都是纯实的，除非某些分母为零，这样子用于处理极点的$i\epsilon$方案就变得相关。因此，只有当图中的虚粒子处于壳上时，费曼图才会产生$\mathcal{M}$的虚部。现在我们将展示如何分离和计算这个虚部。

为了我们现在的目的，让我们用微扰论的费曼规则来**定义**$\mathcal{M}$。这使得我们可以将$\mathcal{M}(s)$视为复变量$s=E_{\rm cm}^2$的一个解析函数，即使只有外部粒子具有实动量的S矩阵元才被定义。

我们首先证明$\mathcal{M}(s)$虚部的出现总是需要一个分支割线的奇异性。设s_0为产生最轻的多粒子态的阈值能量。对于s_0以下的实s，中间态不能在壳，因此$\mathcal{M}(s)$是实的。于是对于实的$s<s_0$，我们有等式

$$\mathcal{M}(s)=[\mathcal{M}(s^*)]^* \tag{7.51}$$

该方程的每一边都是s的解析函数，因此可以解析延拓到整个复s平面。特别是，在$s>s_0$的实轴附近，等式(7.51)意味着

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\mathcal{M}(s+i\epsilon)=\mathrm{Re}\mathcal{M}(s-i\epsilon);\\
&\mathrm{Im}\mathcal{M}(s+i\epsilon)=-\mathrm{Im}\mathcal{M}(s-i\epsilon).
\end{aligned}$$

在实轴上有一个分支割线，从阈值能量s_0开始；割线的不连续性为

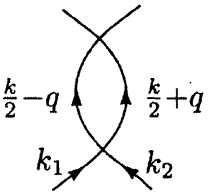
$$\mathrm{Disc}\mathcal{M}(s)=2i\mathrm{Im}\mathcal{M}(s+i\epsilon).$$

通常计算图的不连续性比直接计算虚部更容易。费曼传播子中的$i\epsilon$方案表明物理散射振幅应在切口上方处的$s+i\epsilon$进行计算。

我们已在第 7.1 节中看到，电子自能图有一个从物理的电子-光子阈值开始的分支割线。现在让我们研究更一般的单圈图，并证明它们的不连续性精确地给

出了(7.49)所要求的虚部。Cutkosky*证明了该结果可推广到多圈图中，他在文中过程中指出，费曼图在其分支割线处的不连续性总是由一套简单的**切割规则**给出的**。

我们从在ϕ^4理论中的检查(7.49)开始。因为(7.49)的右边从λ^2阶开始，我们希望$\mathrm{Im}\mathcal{M}$也能从更高阶的图中得到它的第一个贡献。然后，考虑一下λ^2阶图



$$k = k_1 + k_2$$

在s道中有一个圈(很容易检查对于在阈值以上的s，对应的t和u道图没有分支割线奇异性)。总动量为$k = k_1 + k_2$，为简单起见我们选择上面所示的动量的对称路径。这个费曼图的值是

$$i\delta\mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k/2-q)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(k/2+q)^2-m^2+i\epsilon}. \qquad (7.52)$$

当使用第 6.3 节中的方法计算该积分时，Wick 旋转产生一个额外的因子i，因此，低于阈值时，$\delta\mathcal{M}$是纯实的。

我们想验证积分(7.52)在穿过物理区域$k^0 > 2m$的实轴时有一个不连续。通过计算$k^0 < 2m$的积分，然后通过解析延拓来增加k^0，最容易识别这个不连续。用费曼参数法直接计算积分并不困难(见问题 7.1)。然而，使用一种不太直接的方法是很有启发性的，如下所示。

让我们在质心系工作，其中$k = (k^0, \mathbf{0})$。然后是(7.52)的积分在积分变量q^0中有四个极点，位置为

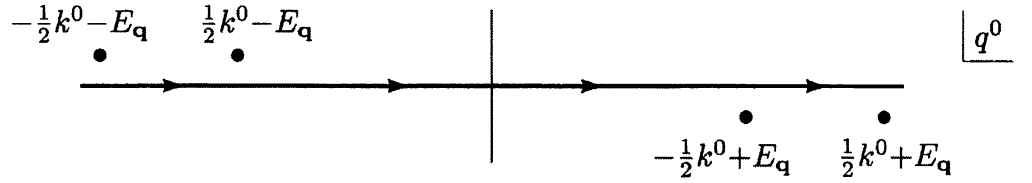
$$q^0 = \tfrac{1}{2}k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\epsilon), \qquad q^0 = -\tfrac{1}{2}k^0 \pm (E_{\mathbf{q}} - i\epsilon).$$

---

*R.E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* 1, 429(1960)

**这些规则只适用于物理区域中的奇异性。远离物理区域的三点和更高点振幅的奇异性可以变得非常复杂。本课题在 R. J. Eden,P. V. Landshoff, D. I. Olive and J. C.Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*(Cambridge University Press, 1966)中进行了综述。

其中两个极点位于实q^0轴上方，两个极点位于下方，如图所示：



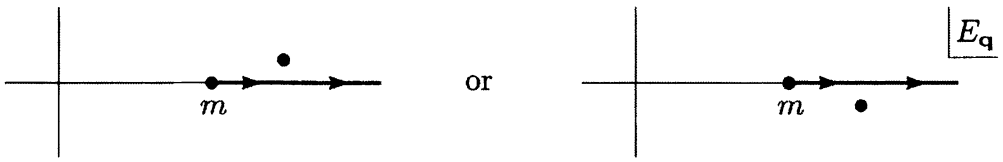
我们将向下闭合积分围道，并在下半平面提取极点的留数。其中，只有$q^0 = -(1/2)k^0 + E_{\mathbf{q}}$处的极点才会导致不连续性。注意提取这个极点的留数等同于在dq^0积分下做代换

$$\frac{1}{(k/2+q)^2 - m^2 + i\epsilon} \to -2\pi i\delta\big((k/2+q)^2 - m^2\big) \tag{7.53}$$

这个极点的贡献产生积分

$$\begin{aligned} i\delta\mathcal{M} &= -2\pi i\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^4}\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}}\frac{1}{(k^0-E_{\mathbf{q}})^2 - E_{\mathbf{q}}^2} \\ &= -2\pi i\frac{\lambda^2}{2}\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_m^\infty dE_{\mathbf{q}}\, E_{\mathbf{q}}|\mathbf{q}|\,\frac{1}{2E_{\mathbf{q}}}\frac{1}{k^0(k^0-2E_{\mathbf{q}})}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

第二行中的被积函数在$E_{\mathbf{q}} = k^0/2$处有一个极点。当$k^0 < 2m$时，该极点不在积分围道上，因此$\delta\mathcal{M}$很明显是实的。当$k^0 > 2m$时，该极点正好位于积分围道的上方或下方，这取决于k^0是给定一个小的正虚部还是负虚部：



因此，积分在$k^2 + i\epsilon$和$k^2 - i\epsilon$之间获得不连续性。要计算此不连续性，应用

$$\frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}} \pm i\epsilon} = P\frac{1}{k^0 - 2E_{\mathbf{q}}} \mp i\pi\delta(k^0 - 2E_{\mathbf{q}})$$

(其中P表示主值)用δ函数代替极点，给出了不连续性。这反过来相当于用δ函数替换原始传播子：

$$\frac{1}{(k/2-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \to -2\pi i\delta\big((k/2-q)^2 - m^2\big). \tag{7.55}$$

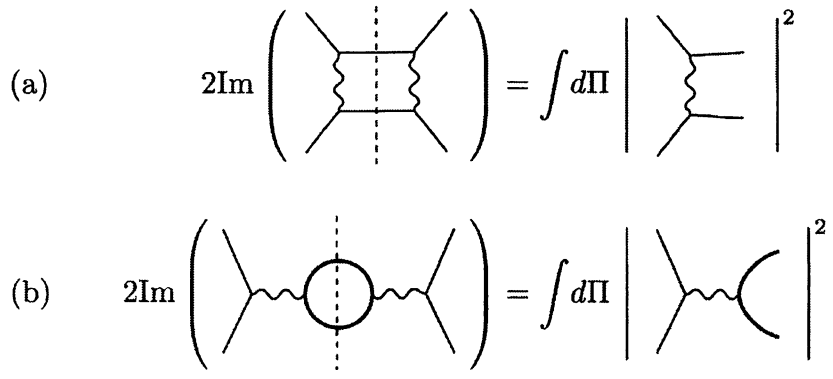


图 7.6 光学定理对 Bhabha 散射的两个贡献

现在让我们回顾一下我们的步骤，看看我们已经证明了什么。回到原积分(7.52)，将两个传播子上的动量重新标记为p_1, p_2，并替换为

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k).$$

我们已经证明了积分的不连续性是通过用δ函数替换两个传播子来计算的：

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \to -2\pi i \delta(p_i^2 - m^2). \tag{7.56}$$

$\mathcal{M}$的不连续性仅来自于d^4q积分的区域，其中两个δ函数同时满足。通过对δ函数的积分，我们把动量p_i放在壳上，把积分d^4p_i转化为相对论相空间上的积分。表达式(7.52)中剩下的只是因子λ^2(领头阶散射振幅的平方)，和对称因子(1/2)(可以重新解释为末态下相同玻色子的对称因子)。因此，我们已经证明，在方程的每一边的λ^2阶下，

$$\begin{aligned} \text{Disc}\,\mathcal{M}(k) &= 2i\,\text{Im}\,\mathcal{M}(k) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \left|\mathcal{M}(k)\right|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k). \end{aligned}$$

这在ϕ^4理论的λ^2阶下明确地证实了(7.49)。

前面的讨论没有必要利用图中的两个传播子质量相等的这一事实，也没有必要利用这些传播子连接到一个简单的点状顶点的这一事实。实际上，这种分析可以应用于任意的单圈图。无论何时，在图的动量积分区域，两个传播子可以同时在壳上。我们可以按照上面的讨论来计算$\mathcal{M}$的非零不连续性。这个不连续性的值是通过对两个传播子的每个都进行(7.56)的替换来得到。例如在图 7.6 所示的α^2

阶 Bhabha 散射图中，我们可以通过如图所示的切割并使用(7.56)将被切传播子放在壳上来计算图的虚部。图中另外的传播子的极点对不连续性没有贡献。通过像上一节一样对δ函数进行积分，我们得到了这些图的虚部与对总截面的贡献之间的指示关系。

Cutkosky 证明了这种计算不连续性的方法是完全通用的。任何费曼图的物理不连续性由以下算法给出：

1. 以所有可能的方式切割图，使被切传播子可以同时放在壳上。
2. 对于每个切割，将每个被切传播子做代换$1/(p^2-m^2+i\epsilon) \to -2\pi i\delta(p^2-m^2)$，然后执行圈积分。
3. 对所有可能切割的贡献求和。

利用这些**切割规则**，可以在微扰理论的所有阶下证明光学定理(7.49)。

不稳定粒子

切割规则意味着广义光学定理(7.49)不仅适用于S矩阵元，而且适用于我们可以用费曼图定义的任何振幅$\mathcal{M}$。这个事实对于处理不稳定粒子是非常有用的，这些不稳定粒子从不出现在渐近态中。

从等式(7.43)中回忆，标量粒子的精确两点函数的形式



$$= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - M^2(p^2)}.$$

我们将量$-iM^2(p^2)$定义为插入玻色子传播子的所有 1PI 的总和，但我们同样可以将其视为 1 粒子$\to$1 粒子“散射”的所有截腿图的总和。LSZ 公式意味着

$$\mathcal{M}(p \to p) = -ZM^2(p^2). \tag{7.57}$$

我们可以利用这个关系和广义光学定理(7.49)来讨论$M^2(p^2)$的虚部。

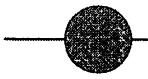
首先考虑标量玻色子稳定的常见情况。在这种情况下，没有可能的末态对(7.49)的右侧有贡献。因此$M^2(p^2)$是实的。极点在传播子中的位置由方程$m^2 - m_0^2 - M^2(m^2) = 0$确定，方程具有实值解$m$。因此，极点位于实的$p^2$轴上，在多粒子分支割线的后面。

然而，通常情况下，一个粒子可以衰变为两个或多个较轻的粒子。在这种情

况下，$M^2(p^2)$将获得一个虚部，因此我们必须稍微修改定义。让我们用以下条件来定义粒子的质量m:

$$m^2 - m_0^2 - \mathrm{Re}\, M^2(m^2) = 0. \tag{7.58}$$

然后传播子中的极点从实轴上移动：



$$\sim \frac{iZ}{p^2 - m^2 - iZ\,\mathrm{Im}\, M^2(p^2)}.$$

如果该传播子出现在费曼图的s道中，则我们在极点附近计算的截面将有形式:

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{s - m^2 - iZ\,\mathrm{Im}\, M^2(s)} \right|^2. \tag{7.59}$$

该表达式与共振区截面的相对论 Breit-Wigner 公式(4.64)非常相似：

$$\sigma \propto \left| \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} \right|^2. \tag{7.60}$$

由(7.58)定义的质量m是共振位置。如果$\mathrm{Im}M^2(m^2)$很小，使得(7.59)中的共振很窄，我们可以在共振宽度上将$\mathrm{Im}M^2(s)$近似为$\mathrm{Im}M^2(m^2)$；那么(7.59)将具有精确的 Breit-Wigner 形式。在这种情况下，我们可以确定

$$\Gamma = -\frac{Z}{m}\,\mathrm{Im}\, M^2(m^2). \tag{7.61}$$

如果共振范围较宽，表明与Breit-Wigner形状的偏差通常在前缘变窄，后缘变宽。

为了计算$\mathrm{Im}M^2$，和Γ，我们可以定义M^2为 1PI 插入到传播子的和。相关圈图的虚部给出了衰变率。但是被 Cutkosky 规则推广到费曼图中的光学定理(7.49)简化了这个程序。如果我们把(7.57)作为矩阵元$\mathcal{M}(p \to p)$的定义，并通过费曼图的展开，来类似地定义衰变矩阵元$\mathcal{M}(p \to f)$，那么(7.49)意味着

$$Z\,\mathrm{Im}\, M^2(p^2) = -\,\mathrm{Im}\, \mathcal{M}(p \to p) = -\frac{1}{2}\sum_f \int d\Pi_f\, |\mathcal{M}(p \to f)|^2, \tag{7.62}$$

求和在所有可能的末态f上。因此，衰变率为

$$\Gamma = \frac{1}{2m}\sum_f \int d\Pi_f |\mathcal{M}(p \to f)|^2, \tag{7.63}$$

如等式(4.86)所述。

我们再次强调，这个方程的推导只适用于长寿命不稳定粒子的情况，因此$\Gamma \ll m$。对于宽共振，必须考虑$M^2(p^2)$的完全的能量依赖性。

7.4 Ward-Takahashi 等式

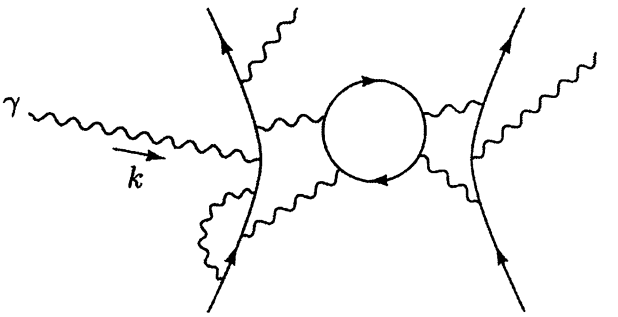
在本章开头列出的松散的结尾中，只剩下一个，即 Ward 等式的证明。从第 5.5 节回忆起，这个等式描述如下：如果$\mathcal{M}(k)=\epsilon_\mu(k)\mathcal{M}^\mu(k)$是一些涉及动量为$k$的外部光子的 QED 过程的振幅，那么如果我们用$k_\mu$替换$\epsilon_\mu$，这个振幅就消失了：

$$k_\mu\mathcal{M}^\mu(k)=0. \tag{7.64}$$

为了证明这个断言，证明 QED 关联函数的更一般的等式是有用的，称为 **Ward-Takahashi 等式**。为了讨论这个更一般的情况，我们让$\mathcal{M}$表示一个被傅立叶变换的关联函数，外部动量不一定在壳上。在这种情况下，(7.64)右端将包含非零项；但当我们应用 LSZ 公式提取 S 矩阵元时，这些项将不起作用。

我们将通过直接观察对$\mathcal{M}(k)$有贡献的费曼图，对α逐阶地证明 Ward - Takahashi 等式。对于个别费曼图，这个等式通常是不正确的：我们必须在任意给定的阶上对$\mathcal{M}(k)$的图求和。

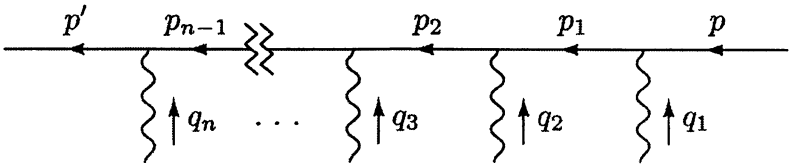
考虑典型振幅$\mathcal{M}(k)$的典型图：



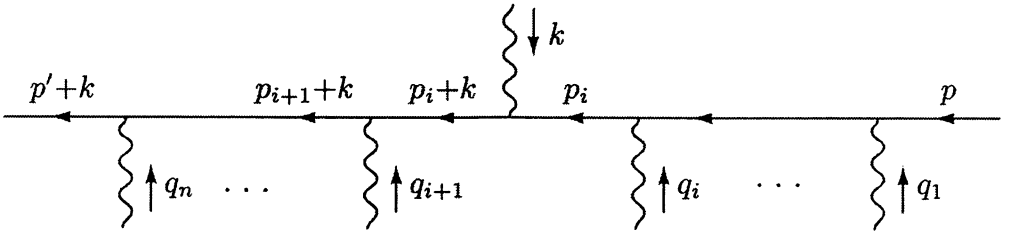
如果我们移除光子$\gamma(k)$，我们得到一个更简单的图，它是一个更简单振幅$\mathcal{M}_0$的一部分。如果我们在这个更简单图的其他地方重新插入光子，我们再次获得对$\mathcal{M}(k)$的一个贡献。关键的观察是，通过对所有对$\mathcal{M}_0$有贡献的图求和，然后在每个图中对所有可能的插入点求和，我们得到$\mathcal{M}(k)$。一旦我们对插入点求和，对于每个对$\mathcal{M}_0$有贡献的图，Ward -Takahashi 等式都分别是正确的；这就是我们将要证明的。

当我们把我们的光子插入$\mathcal{M}_0$的一个图中时，它必须连接到一条从图中引出并连接到两个外点的电子线上，或者连接到一个内部电子圈上。让我们依次考虑这些情况。

首先假设电子线在外点之间运动。在我们插入光子$\gamma(k)$之前，这条线如下所示：



电子传播子具有动量$p, p_1 = p + q_1, p_2 = p_1 + q_2$等，直到$p' = p_{n-1} + q_n$。如果有$n$个顶点，我们可以在$n+1$的不同位置插入光子。假设我们在第$i$个顶点后插入它：



新光子左边的电子传播子的动量增加了k。

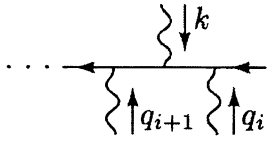
现在用k_μ替换极化向量$\epsilon_\mu(k)$，让我们看看这些图的值。k_μ与新顶点的乘积方便的写为：

$$-iek_\mu\gamma^\mu = -ie\big[(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)\big].$$

乘以相邻的电子传播子，我们得到

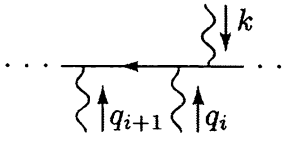
$$\frac{i}{\not{p}_i+\not{k}-m}\left(-ie\not{k}\right)\frac{i}{\not{p}_i-m} = e\left(\frac{i}{\not{p}_i-m} - \frac{i}{\not{p}_i+\not{k}-m}\right). \tag{7.65}$$

因此，在位置i处插入光子的图具有结构



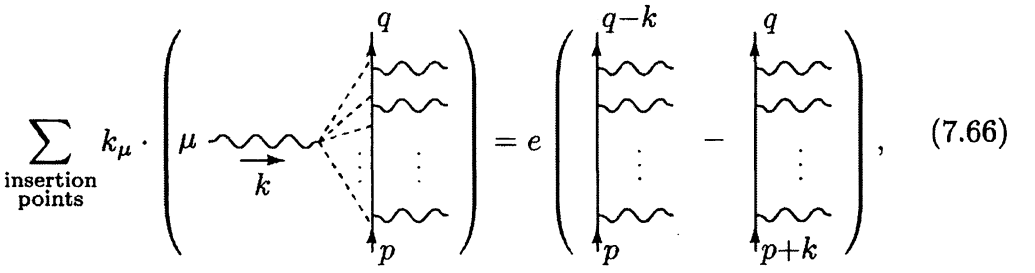
$$= \cdots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1}+\not{k}-m}\right)\gamma^{\lambda_{i+1}}\left(\frac{i}{\not{p}_i-m} - \frac{i}{\not{p}_i+\not{k}-m}\right)\gamma^{\lambda_i} \times \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1}-m}\right)\gamma^{\lambda_{i-1}}\cdots.$$

同样，在位置$i-1$处插入光子的图具有结构



$$= \cdots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1}+\not{k}-m}\right)\gamma^{\lambda_{i+1}}\left(\frac{i}{\not{p}_i+\not{k}-m}\right)\gamma^{\lambda_i} \times \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1}-m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1}+\not{k}-m}\right)\gamma^{\lambda_{i-1}}\cdots.$$

请注意，此表达式的第一项消除了前一个表达式的第二项。有相邻插入的任何其他一对图之间都会发生类似的相消。当我们对行中所有可能的插入点求和时，除端点处的不成对项外，所有项都将相消。最后一个顶点后插入的不成对项(在左边)仅为原始图的值的e倍；另一个不成对项(在第一个顶点之前插入的)是相同的，除了一个负号和各处用$p+k$替换p。从图上看，我们的结果是



(7.66)

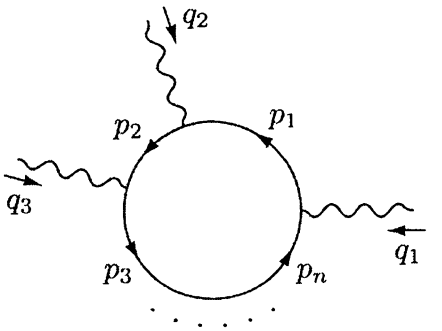
为了对称，我们重新命名了$p'+k \to q$。

在(7.66)左边的每个图中，进入电子线的动量是p，离开的动量是q。根据 LSZ 公式，我们可以从每个图中提取对 S 矩阵元的贡献，方法是取以下的极点乘积的系数

$$\left(\frac{i}{\not q - m}\right)\left(\frac{i}{\not p - m}\right).$$

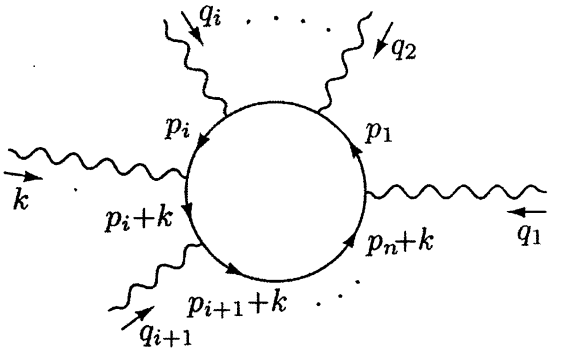
(7.66)右边的项中，每一项都包含这些极点中的其中一个，但都不同时包含两个极点。因此，(7.66)的右侧对 S 矩阵没有贡献*。

为了完成 Ward-Takahashi 等式的证明，我们必须考虑光子与内部电子圈的连接情况。在插入光子之前，一个典型的圈看起来像这样



*只有当我们把微扰级数安排成传播子包含m而不是m_0时，这步骤才是直接的。我们会在第 10 章做这个。

电子传播子有动量$p_1, p_2 = p_1 + q_2$等直到p_n，假设现在我们在顶点i和$i+1$之间插入光子$\gamma(k)$



我们现在有一个额外的动量k从新顶点绕着圈运动；按照惯例，这个动量在顶点 1 处离开。

要计算出所有这种插入到圈的和，对每个图应用等式(7.65)。对于光子被插入到顶点 1 和 2 之间的图，我们获得

$$-e\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\Big[\Big(\frac{i}{\not p_n+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_n}\cdots\Big(\frac{i}{\not p_2+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_2} \times\Big(\frac{i}{\not p_1-m}-\frac{i}{\not p_1+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_1}\Big].$$

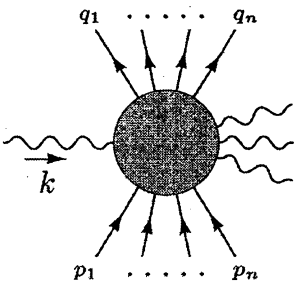
第一项将被来自光子插入顶点 2 和 3 之间的图中的一项消除。类似的抵消也发生在相邻插入的其他一对项之间。当我们对所有n个插入点求和时，剩下的就是

$$-e\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\Big[\Big(\frac{i}{\not p_n-m}\Big)\gamma^{\lambda_n}\Big(\frac{i}{\not p_{n-1}-m}\Big)\gamma^{\lambda_{n-1}}\cdots\Big(\frac{i}{\not p_1-m}\Big)\gamma^{\lambda_1} -\Big(\frac{i}{\not p_n+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_n}\Big(\frac{i}{\not p_{n-1}+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_{n-1}}\cdots\Big(\frac{i}{\not p_1+\not k-m}\Big)\gamma^{\lambda_1}\Big]. \tag{7.67}$$

在第二项中，将积分变量从p_1移动到$p_1 + k$，我们看到剩下的这两项相消。因此光子沿着闭合圈插入的图加起来等于零。

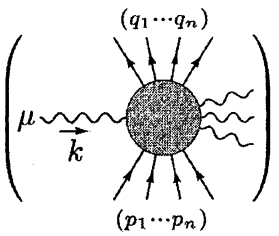
我们现在准备把证明的各个部分拼凑起来。假设振幅$\mathcal{M}$有$2n$条外电子线，n条入线和n条出线。标记入线动量为p_i和出线为q_i：

$$\mathcal{M}(k;p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_n)=$$

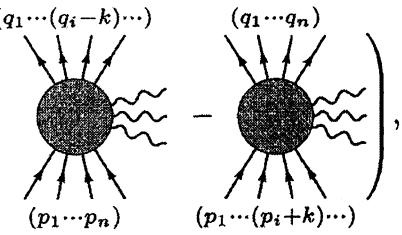


(振幅也可以包含任意数量的附加外部光子)振幅$\mathcal{M}_0$缺少光子$\gamma(k)$，但在其他方面是相同的。要由$\mathcal{M}_0$形成$k_\mu\mathcal{M}^\mu$，我们必须对所有对$\mathcal{M}_0$有贡献的图求和，并且对于每个图，要对光子可以插入的所有点求和。沿着任何图的内部圈图对插入点求和都为零。沿着任何图的一条贯穿的直线对插入点求和，给出了形式(7.66)的贡献。对于任何特定图，对所有插入点求和，我们得到

$$\sum_{\substack{\text{insertion}\\ \text{points}}} k_\mu\cdot$$



$$= e\sum_i$$



,

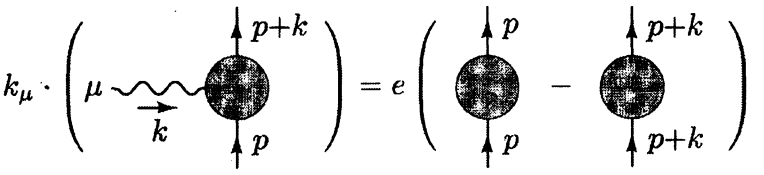
图中阴影的圆表示对$\mathcal{M}_0$有贡献的任何特定图。求和所有这些图，我们最终得到

$$k_\mu\mathcal{M}^\mu(k;p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_n)=e\sum_i\Big[\mathcal{M}_0(p_1\cdots p_n;q_1\cdots(q_i-k)\cdots)-\mathcal{M}_0(p_1\cdots(p_i+k)\cdots;q_1\cdots q_n)\Big]. \tag{7.68}$$

这是 QED 中关联函数的 Ward-Takahashi 等式。我们在(7.66)的下面看到，右侧对 S 矩阵没有贡献；因此，在$\mathcal{M}$是 S 矩阵元的特殊情况下，等式(7.68)化简为 Ward 等式(7.64)。

在进一步讨论这个等式之前，我们应该在上面的证明中提到一个潜在的缺陷。为了在等式(7.67)中找到必要的抵消，我们必须将积分变量移动一个常数，如果积分发散，则不允许这种移动。同样，在公式(7.66)的表达式中也可能存在发散的圈动量积分。这里的证明中没有明确的移动，但在实践中，在计算积分时通常会执行移动。无论哪种情况，紫外发散都可能使 Ward-Takahashi 等式失效。在下一节中，我们将看到这个问题的一个例子，以及它的一般解决方案。

Ward -Takahashi 等式最简单的例子是三点函数，即在左手边包含有一个进入和出去的电子和一个外光子：



右边的量是精确的电子传播子，分别在p和$p+k$处计算。标注这些量为$S(p)$和$S(p+k)$；根据公式(7.23)，

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}.$$

正如等式(7.44)所示，左边的完全三点振幅可以重写为入电子和出电子的完全传播子的乘积，乘以被截腿的散射图。在这种情况下，被截腿的函数仅仅是顶点$\Gamma^\mu(p+k,p)$。然后 Ward-Takahashi 恒等式写为

$$S(p+k)\big[-ie k_\mu \Gamma^\mu(p+k,p)\big]S(p) = e(S(p) - S(p+k)).$$

为了简化这个方程，分别用矩阵$S^{-1}(p+k)$和$S^{-1}(p)$在左右两边相乘。给出

$$-ik_\mu \Gamma^\mu(p+k,p) = S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p). \tag{7.69}$$

“**Ward–Takahashi 等式**”一词通常仅用于指这种特殊情况。

我们可以用等式(7.69)得到归一化因子Z_1和Z_2之间的一般关系。我们通过以下关系定义了(7.47)中的Z_1:

$$\Gamma^\mu(p+k,p) \to Z_1^{-1}\gamma^\mu \qquad \text{as} \quad k \to 0.$$

我们把Z_2定义为$S(p)$的极点的留数：

$$S(p) \sim \frac{iZ_2}{\not{p} - m}.$$

将p设置在质量壳附近，并在约$k=0$处将(7.69)展开，我们发现对于左、右的一阶项

$$-iZ_1^{-1}\not{k} = -iZ_2^{-1}\not{k},$$

即

$$Z_1 = Z_2. \tag{7.70}$$

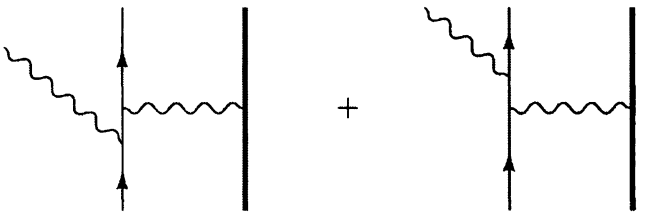
因此，Ward-Takahashi 恒等式保证了电子散射振幅中的无限重标度因子的精确相消，这是我们在第 7.2 节末尾发现的。当与电子形状因子的正确形式表达式

(7.46)结合时，这个恒等式保证了在微扰理论所有阶中都有$F_1(0)=1$。

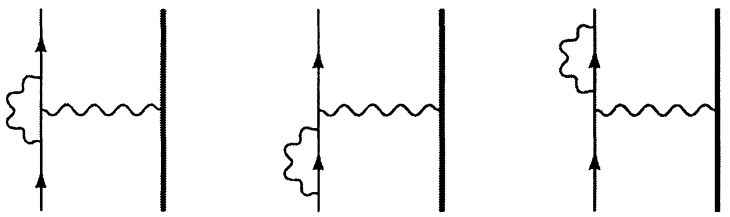
通常，在文献中，“**Ward 等式**”、“**流守恒**”和“**规范不变性**”等术语可以互换使用。这是很自然的，因为 Ward 等式是流守恒的图解式，而流守恒又是规范不变性的结果。然而，在这本书中，我们将区分这三个概念。**规范不变性**是指拉格朗日量的基本对称性；**流守恒**是指从这个对称性引出的运动方程；**Ward 等式**是指将对称性强加于量子力学振幅的图解等式。

7.5 电荷的重正化

在第六章的开头，我们开始研究电子被一个重靶散射的α阶辐射修正。我们(至少在经典极限下)计算了韧致辐射图，

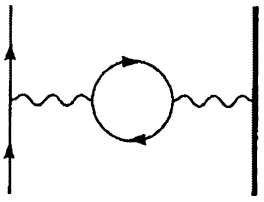


以及虚光子带来的的修正：



我们在本章中对场强重正化的讨论最终阐明了最后两个图的作用。特别是我们已经看到，Ward 恒等式通过关系$Z_1=Z_2$，可以确保当动量转移q变为零时，虚光子修正的总和为零。

对这个过程的辐射修正还有剩下一种类型：

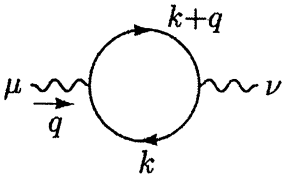


这是α阶**真空极化**图，也称为**光子自能**。它可以看作是一对虚的电子-正电子对光子结构的修正。这个图将改变散射电子所看到的有效场$A^\mu(x)$。它可以潜在地移

动这个场的整体强度，也可以改变场对x的依赖性(或者在傅立叶空间中，对q的依赖性)。在这一节中，我们将计算这个图，并看到它具有这两种效果。

电荷重正化概述

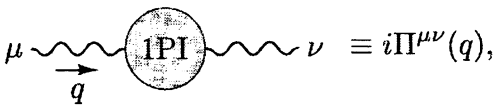
在开始详细的计算之前，让我们先问一下我们期望的答案是什么，以及它的解释是什么。图中有趣的部分是电子圈：



$$= (-ie)^2(-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}-m}\gamma^\nu \frac{i}{\not{k}+\not{q}-m}\right]$$

$$\equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q). \tag{7.71}$$

(式(4.120)得出了(-1)的费米子圈因子)一般来说，让我们把$i\Pi^{\mu\nu}(q)$定义为插入到光子传播子的所有单粒子不可约插入的和，



$$\equiv i\Pi^{\mu\nu}(q), \tag{7.72}$$

所以$\Pi_2^{\mu\nu}(q)$是对$\Pi^{\mu\nu}(q)$的二阶(对e)贡献

唯一能出现在$\Pi^{\mu\nu}(q)$中的张量是$g^{\mu\nu}$和$q^\mu q^\nu$。然而，Ward等式告诉我们，$q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q)=0$。这意味着$\Pi^{\mu\nu}(q)$正比于投影子$(g^{\mu\nu}-q^\mu q^\nu/q^2)$。此外，我们期望$\Pi^{\mu\nu}(q)$在$q^2=0$时没有极点；这种极点唯一明显的来源是无质量的单粒子中间态，它不能出现在任何1PI图中*；因此用以下方法从$\Pi^{\mu\nu}$中提取张量结构很方便：

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2), \tag{7.73}$$

式中，$\Pi^{\mu\nu}(q)$在$q^2=0$时是正规的。

使用这个符号，精确的光子两点函数是



$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left[i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\Pi(q^2)\right]\frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \cdots$$

*我们可以证明没有这样的极点，但这个证明是不平凡的。施温格已经证明，在二维时空中，由于一对无质量费米子的存在，Π_2中的奇异性是一个极点，而不是一个割缝；这是我们论点的一个著名反例。在四维中没有这样的问题

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi^2(q^2) + \cdots,$$

式中$\Delta_\nu^\rho \equiv \delta_\nu^\rho - q^\rho q_\nu/q^2$。注意到$\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma = \Delta_\nu^\rho$，我们可以将此表达式简化为



$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left(\delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}\right)\left(\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \cdots\right)$$

$$= \frac{-i}{q^2\left(1-\Pi(q^2)\right)}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{-i}{q^2}\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right). \qquad (7.74)$$

在任何 S 矩阵元计算中，该精确传播子的至少一端将连接到费米子线。当我们对这条线上所有可以连接的地方求和时，我们必定发现，根据Ward等式，公式中正比于q_μ或q_ν的项为零。因此，为了用于计算S矩阵元，我们可以缩写



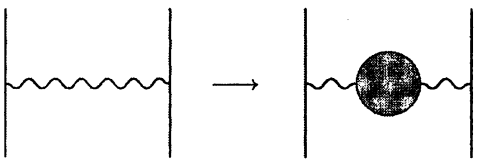
$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2\left(1-\Pi(q^2)\right)}. \qquad (7.75)$$

注意，只要$\Pi(q^2)$在$q^2 = 0$处是正则的，那么精确的传播子在$q^2 = 0$处总是有一个极点。换句话说，在微扰理论中，光子在所有的阶数上都是绝对无质量的。这一断言很大程度上取决于我们在(7.73)中对 Ward 等式的使用。例如，如果$\Pi^{\mu\nu}(q)$包含一个项$M^2 g^{\mu\nu}$ (没有补偿项$q^\mu q^\nu$)，光子质量将移动到M。

$q^2 = 0$极点的留数为

$$\frac{1}{1-\Pi(0)} \equiv Z_3.$$

相对于树级近似，任何低q^2散射过程的振幅都将被该因子所移动：



or $\qquad \cdots \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \cdots \longrightarrow \cdots \frac{Z_3\, e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \cdots .$

由于光子传播子的每一端含有一个因子e，我们可以方便地通过替换$e \to \sqrt{Z_3}e$来解释这种移动。这种替换称为电荷重正化；它在许多方面类似于第 7.1 节中介绍的质量重正化。特别要注意的是，实验中测得的“物理的”电子电荷是$\sqrt{Z_3}e$。因此，我们将改变我们的符号，把这个量简单地称为e。从现在开始，我们将“裸”

电荷(拉格朗日量中乘以$A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$的量)称为$e_0$。然后我们有

$$(\text{physical charge}) = e = \sqrt{Z_3}\, e_0 = \sqrt{Z_3}\cdot(\text{bare charge}). \tag{7.76}$$

对于最低阶，$Z_3 = 1$，$e = e_0$。

除了电荷强度的这种常数移动之外，$\Pi(q^2)$还有另一个效应。考虑一个非零q^2的散射过程，假设我们已将$\Pi(q^2)$算到α的领头阶: $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$。然后过程的振幅将涉及物理量

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e_0^2}{1-\Pi(q^2)}\right) \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\left(\frac{e^2}{1-\left[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)\right]}\right).$$

(将e^2替换为e_0^2对最低阶没有影响)括号中的量可以解释为一个依赖q^2的电荷。因此，用精确的光子传播子代替树级光子传播子的全部效果是做了替换：

$$\alpha_0 \to \alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{e_0^2/4\pi}{1-\Pi(q^2)} \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \frac{\alpha}{1-\left[\Pi_2(q^2)-\Pi_2(0)\right]}. \tag{7.77}$$

(对于领头阶，我们也可以仅仅将Π项放到分子；但我们将在第 12 章中看到，这种形式下，当Π_2被Π替换时，表达式对所有阶都成立)。

Π_2的计算

在努力解释了$\Pi_2(q^2)$之后，我们最好计算它。回到(7.71)，我们有

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2}\gamma^\nu\frac{i(\not{k}+\not{q}+m)}{(k+q)^2-m^2}\right] \\ &= -4e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu(k+q)^\nu+k^\nu(k+q)^\mu-g^{\mu\nu}\big(k\cdot(k+q)-m^2\big)}{\big(k^2-m^2\big)\big((k+q)^2-m^2\big)}. \end{aligned} \tag{7.78}$$

为了方便起见，我们写了e和m，而不是e_0和m_0，因为两者之间的差异只会给出对$\Pi^{\mu\nu}$的一个α^2阶的贡献。

现在引入一个费曼参数来组合分母因子

$$\begin{aligned} \frac{1}{\big(k^2-m^2\big)\big((k+q)^2-m^2\big)} &= \int_0^1 dx\,\frac{1}{(k^2+2xk\cdot q+xq^2-m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx\,\frac{1}{\big(\ell^2+x(1-x)q^2-m^2\big)^2}, \end{aligned}$$

这里有$\ell \equiv k + xq$。对于ℓ，(7.78)的分子是

$$\begin{aligned}\text{Numerator} = 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu}\ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}\left(m^2 + x(1-x)q^2\right) \\ + (\text{terms linear in } \ell).\end{aligned}$$

执行 Wick 旋转并替换$\ell^0 = i\ell_E^0$，我们得到

$$\begin{aligned}i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \\ \times \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^2 + g^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}\left(m^2 + x(1-x)q^2\right)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2},\end{aligned} \tag{7.79}$$

其中$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$。这个积分是非常严重的紫外发散，如果我们在$\ell_E = \Lambda$处切断它，我们会发现对于领头阶，

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \propto e^2\Lambda^2 g^{\mu\nu},$$

没有补偿项$q^\mu q^\nu$。这个结果违反Ward恒等式；它将给光子一个无限质量$M \propto e\Lambda$。

我们对Ward等式的证明已经失败了，这正是上一节末尾所预期的方式：当积分发散时，不允许(7.67)中积分变量的移动。在我们目前的计算中，Ward等式的失败是灾难性的：它导致了一个与实验相冲突的无限光子质量*。幸运的是，有一种方法可以挽救Ward等式。

在上述分析中，我们以最直接最幼稚的方式正规化发散积分：在大动量Λ处截断发散积分。但其他正规子(regulators)是可能的，有些实际上会保护Ward等式。在计算顶点和电子自能图时，我们使用了Pauli-Villars正规子。这个正规子保护了关系$Z_1 = Z_2$——Ward等式的结果；一个幼稚的截断则没有(见问题7.2)。我们可以通过引入Pauli-Villars费米子来修复我们目前的计算。不幸的是，需要好几组费米子，这使得方法更复杂**。我们将使用一个更简单的方法，**维数正规化**，来自't Hooft和Veltman***。维数正规化保护了QED和一大类更为普遍的理论的对称性。

在量子场论中，应该用哪种正规子的问题没有先验答案。通常这种选择对理

*我们仍可以通过在拉格朗日中加入一个补偿的无限光子质量项使观测到的光子质量为零。一般来说我们可以在拉格朗日函数中加上一些项，使 Ward 恒等式对任何n点相关函数都有效。这个过程会产生和我们将要得到的结果相同的结果，但是会更加复杂。

**这种方法在 Bjorken 和 Drell(1964 年)第 154 页提出。

*** G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).

论的预测没有影响。当两个正规子对可观测量给出不同的答案时，通常是因为其中一个(或两个)违反了某些对称性(如 Ward 等式)。在这些情况下，我们将对称性作为基础，并要求正规子保护对称性。但是，这种选择的有效性不能被证明；我们正在采用对称性作为一种新的公理。

维数正规化

维数正规化的思想陈述起来非常简单：将费曼图作为时空维数d的一个解析函数来计算。对于足够小的d，任何圈动量积分都会收敛，因此 Ward 等式可以被证明。任何可观测量的最终表达式都应该有一个定义明确的极限，即$d \to 4$。

让我们做一个练习计算来看看这个技巧是如何工作的。我们认为时空有一个时间维度和$(d-1)$个空间维度。然后我们可以像以前一样 Wick 旋转费曼积分，来给出d维欧几里德空间上的积分。一个典型的例子是

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d}\cdot\int_0^\infty d\ell_E\,\frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2+\Delta)^2}. \tag{7.80}$$

(7.80)中的第一个因子包含d维单位球体的面积。要计算它，使用以下技巧

$$\begin{aligned}(\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^d = \int d^dx\, \exp\Big(-\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)\\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx\, x^{d-1}e^{-x^2} = \left(\int d\Omega_d\right)\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^\infty d(x^2)\,(x^2)^{\frac{d}{2}-1}e^{-(x^2)}\\ &= \left(\int d\Omega_d\right)\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(d/2).\end{aligned}$$

所以d维单位球体的面积是

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \tag{7.81}$$

这个公式再现了常见的特殊情况：

d	$\Gamma(d/2)$	$\int d\Omega_d$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π
4	1	$2\pi^2$

(7.80)中的第二个因子是

$$\int_0^\infty d\ell\,\frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2+\Delta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty d(\ell^2)\,\frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2+\Delta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\Delta}\Big)^{2-\frac{d}{2}}\int_0^1 dx\,x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1},$$

在这里，我们在第二行中替换了$x=\Delta/(\ell^2+\Delta)$。使用 beta 函数的定义

$$\int_0^1 dx\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\tag{7.82}$$

我们可以很容易地计算x上的积分。d维积分的最终结果是

$$\int\frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2}=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\,\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\Big(\frac{1}{\Delta}\Big)^{2-\frac{d}{2}}.$$

因为$\Gamma(z)$在$z=0,-1,-2,...$有孤立的极点，所以这个积分在$d=4,6,8,...$有孤立的极点。要找到$d=4$附近的行为，定义$\epsilon=4-d$并使用近似*

$$\Gamma(2-\tfrac{d}{2})=\Gamma(\epsilon/2)=\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\mathcal{O}(\epsilon),\tag{7.83}$$

其中$\gamma\approx.5772$是 Euler-Mascheroni 常数。(在可观测量中此常数将始终消除)那么积分就是

$$\int\frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2}\;\underset{d\to4}{\longrightarrow}\;\frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}-\log\Delta-\gamma+\log(4\pi)+\mathcal{O}(\epsilon)\Big).\tag{7.84}$$

当我们用公式(7.18)中的 Pauli-Villars 正规子定义这个积分时，我们发现

$$\int\frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2}\underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\log\frac{x\Lambda^2}{\Delta}+\mathcal{O}(\Lambda^{-1})\Big).$$

因此，维数正规化中的$1/\epsilon$极点对应于动量积分中的对数发散。注意一个奇怪的

*紧接着这种展开来自于无限的乘积表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}.$$

事实，即(7.84)涉及到Δ的对数，它是一个带量纲的量。对数的标度被隐藏在$1/\epsilon$项中，并在发散被消除时显式地出现。

你可以很容易地验证更一般的积分公式，

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\,\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}; \tag{7.85}$$

$$\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\,\frac{d}{2}\,\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1}. \tag{7.86}$$

在d维中，$g^{\mu\nu}$服从$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d$。因此，如果一个对称积分的分子包含$\ell^\mu\ell^\nu$，我们应该替换

$$\ell^\mu\ell^\nu \to \frac{1}{d}\,\ell^2\,g^{\mu\nu}, \tag{7.87}$$

与式(6.46)类似。在QED中Dirac矩阵可被处理为一组满足以下条件的d个矩阵，

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{tr}[1]=4. \tag{7.88}$$

在处理等式(7.78)时，这些规则给出的结果与纯四维规则相同。然而，在其他图的计算中，有额外的ϵ阶的贡献。特别是，收缩等式(5.9)在$d=4-\epsilon$中修改为

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -(2-\epsilon)\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma.
\end{aligned} \tag{7.89}$$

如果这些额外的项与来自发散积分的因子ϵ^{-1}相乘，它们就可以对费曼图的最终值有贡献。在 QED 的单圈阶中，这些额外的项出现在顶点图和自能图中，但是当这些图结合起来计算一个可观测量时，这些项就相消了。

Π_2的计算:继续

现在让我们把这些维数正规化公式应用于 7.79 中的动量积分。分子中含ℓ^2的不愉快项给出

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\,\frac{(-\frac{2}{d}+1)g^{\mu\nu}\ell_E^2}{(\ell_E^2+\Delta)^2} &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}}(1-\tfrac{d}{2})\Gamma(1-\tfrac{d}{2})\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-\frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}\cdot(-\Delta g^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

我们期望在$d=2$处有一个极点，因为 4 维的二次发散变成了 2 维的对数发散。但是极点抵消了。Ward 等式是有效的。

计算(7.79)中的剩余项，并使用$\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$，我们得到

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \, \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\quad \times \left[g^{\mu\nu}\left(-m^2 + x(1-x)q^2\right) + g^{\mu\nu}\left(m^2 + x(1-x)q^2\right) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu \right] \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i\Pi_2(q^2), \end{aligned}$$

这里

$$\Pi_2(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, x(1-x) \, \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \tag{7.90}$$

$$\underset{d\to 4}{\to} -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \Big(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) \Big) \qquad (\epsilon = 4-d).$$

对于维数正规化，$\Pi_2^{\mu\nu}(q)$确实采取了Ward等式要求的形式。但它仍然对数发散。

我们现在可以计算电荷的α阶位移:

$$\frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \delta Z_3 \underset{\mathcal{O}(\alpha)}{=} \Pi_2(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}.$$

裸电荷比观察的电荷大个无穷大。但这种差异是不可观测的。可以观察到的是有效电荷(7.77)的q^2依赖性。这个量取决于差值

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \, \log\Big(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \Big), \tag{7.91}$$

在极限$\epsilon \to 0$下与ϵ无关。在本节的其余部分，我们将研究这个表达式包含的物理内容。

Π_2的解释

首先考虑$\widehat{\Pi}_2(q^2)$的解析结构。对于$q^2 < 0$，是光子传播子在t或u道中的情况，$\widehat{\Pi}_2(q^2)$显然是实的，并且是解析的。但是对于s道过程，q^2将是正的。当对数函数的参数变为负数时它有一个分支割线。也就是说，这时

$$m^2 - x(1-x)q^2 < 0.$$

乘积$x(1-x)$最多为$1/4$，所以$\widehat{\Pi}_2(q^2)$有一个从以下极点开始分支割线：

$$q^2 = 4m^2,$$

即一对实的电子-正电子对产生的阈值。

让我们对$q^2 > 4m^2$计算$\widehat{\Pi}_2$的虚部。对于任何固定的q^2，有贡献的x值在点$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta$之间，其中$\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$。因为$\mathrm{Im}[\log(-X \pm i\epsilon)] = \pm\pi$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left[\widehat{\Pi}_2(q^2 \pm i\epsilon)\right] &= -\frac{2\alpha}{\pi}(\pm\pi)\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} dx\, x(1-x) \\
&= \mp 2\alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dy\,(\tfrac{1}{4} - y^2) \qquad\qquad (y \equiv x - \tfrac{1}{2}) \\
&= \mp\frac{\alpha}{3}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right). \qquad (7.92)
\end{aligned}$$

对q^2的依赖性与式(5.13)中产生费米子反费米子对的截面完全相同。这正是我们从图 7.6(b)所示的幺正性关系中所期望的结果；向前 Bhabha 散射图的切割给出了$e^+e^- \to f\bar{f}$的总截面。参数β精确地表示了费米子在质心系中的速度。

接下来，让我们检查$\widehat{\Pi}_2(q^2)$如何针对由等式(7.77)确定的电磁相互作用进行修正。在非相对论极限中，计算势$V(r)$是有意义的。对于不同电荷之间的相互作用，与式(4.126)类似，我们有

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\, \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2\left[1 - \widehat{\Pi}_2(-|\mathbf{q}|^2)\right]}. \qquad (7.93)$$

对于$|q^2| \ll m^2$，将$\widehat{\Pi}_2$展开，我们得到

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2}\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \qquad (7.94)$$

修正项表明电磁力在小距离内变得更强。这种效应可以在氢原子中测量，其中能级被移动了

$$\Delta E = \int d^3x\, |\psi(\mathbf{x})|^2 \cdot \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})\right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2}|\psi(0)|^2.$$

仅对于s波态，波函数$\psi(\mathbf{x})$在原点处才不为零。对于 $2S$ 态，移动是

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \cdot \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1.123 \times 10^{-7}\,\mathrm{eV}.$$

这是表 6.1 中列出的兰姆位移分裂的一个(小)部分。

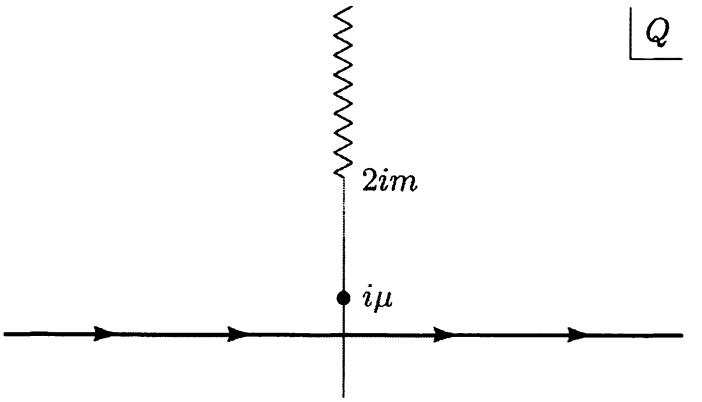


图 7.7 用于计算非相对论极限中电磁相互作用有效强度的围道。$Q = i\mu$处的极点提供了库仑电势。由于真空极化，分支割线产生α阶修正。

式(7.94)中的δ函数只是一个近似：为了找到修正项的真实范围，我们将式(7.93)写成

$$V(\mathbf{x}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \, \frac{Q\, e^{iQr}}{Q^2 + \mu^2} \left[1 + \widehat{\Pi}_2(-Q^2)\right] \qquad (Q \equiv |\mathbf{q}|),$$

其中我们插入了一个光子质量μ来正规化库仑势。为了执行这个积分，我们将围道向上绕(见图 7.7)。主要贡献来自于$Q = i\mu$的极点，给出了库仑势$-\alpha/r$。但是还有一个额外贡献来自$Q = 2mi$开始的分支割线。积分的实部在切口的两边都是一样的，所以对积分的唯一贡献来自于$\widehat{\Pi}_2$的虚部。定义$q = -iQ$，我们发现割线的贡献是

$$\begin{aligned}
\delta V(r) &= \frac{-e^2}{(2\pi)^2 r} \cdot 2 \int_{2m}^{\infty} dq \, \frac{e^{-qr}}{q} \, \mathrm{Im}\left[\widehat{\Pi}_2(q^2 - i\epsilon)\right] \\
&= -\frac{\alpha}{r} \frac{2}{\pi} \int_{2m}^{\infty} dq \, \frac{e^{-qr}}{q} \, \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right).
\end{aligned}$$

当$r \gg 1/m$时，该积分主要受$q \approx 2m$的区域的控制，对这个区域的被积函数进行近似，并用$t = q - 2m$代替，我们发现

$$\begin{aligned}
\delta V(r) &= -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} dt \, \frac{e^{-(t+2m)r}}{2m} \, \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{t}{m}} \left(\frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(t) \\
&\approx -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}},
\end{aligned}$$

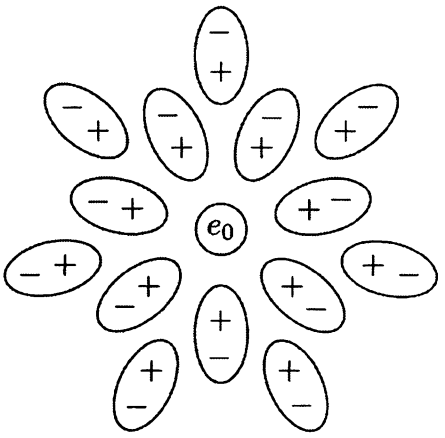


图 7.8 虚e^+e^-对是有效长度$\sim 1/m$的偶极子，它屏蔽了电子的裸电荷。

于是

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\Big(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \cdots\Big). \tag{7.95}$$

因此，修正项的范围大致为电子康普顿波长，$1/m$。由于氢波函数在这个尺度上几乎是恒定的，所以等式(7.94)中的δ函数是一个很好的近似。对$V(r)$的辐射修正称为 **Uehling 势**。

我们可以将修正解释为由于屏蔽。在$r \gtrsim 1/m$处，虚e^+e^-对使真空成为一种介电介质，其中可见电荷比真实电荷要小(见图 7.8)。在较小的距离，我们开始穿透极化云，看到裸电荷。这种现象被称为**真空极化**。

现在考虑相反的极限：小距离或$-q^2 \gg m^2$，方程式(7.91)然后变成

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_2(q^2) &\approx \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\, x(1-x)\Big[\log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big) + \log\big(x(1-x)\big) + \mathcal{O}\big(\frac{m^2}{q^2}\big)\Big] \\ &= \frac{\alpha}{3\pi}\Big[\log\Big(\frac{-q^2}{m^2}\Big) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\big(\frac{m^2}{q^2}\big)\Big].\end{aligned}$$

因此，该极限中的有效耦合常数为

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\log\Big(\dfrac{-q^2}{Am^2}\Big)}, \tag{7.96}$$

其中$A = \exp(5/3)$。当我们穿过虚的电子-正电子对的屏蔽云时，有效电荷在很短的距离内就会变得很大。

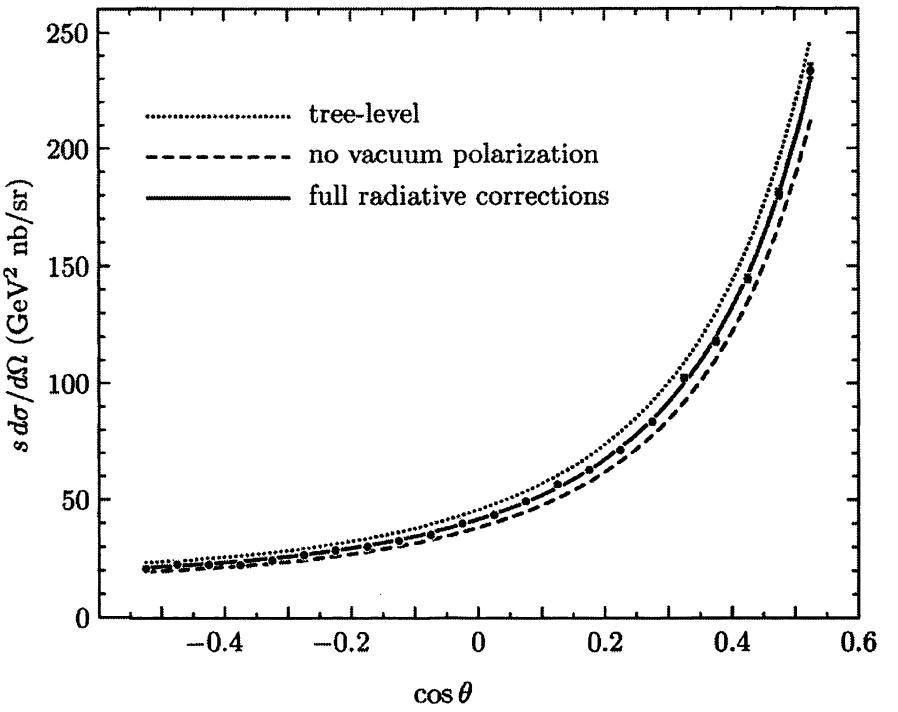


图 7.9 Bhabha 散射$e^+e^- \to e^+e^-$在$E_{\rm cm} = 29$ GeV 的微分截面，，根据 HRS collaboration, M.Derrick, et al.*Phys.Rev.* **D34**, 3286(1986)测量。上曲线是问题 5.2 中导出的α^2阶预测，加上弱相互作用导致的极小(~2%)修正。下曲线包括除真空极化贡献外的到α^3阶的所有 QED 辐射修正；注意，这些修正取决于实验条件，如第 6 章所述。中间曲线也包括真空极化贡献，使得这个能量下α^2阶的有效值增加了 10%左右。

电子、重夸克和轻子的真空极化效应结合在一起，使$\alpha_{\rm eff}(q^2)$的值从$q = 0$到$q = 30$ GeV 下增加了约 5%，且这一效应在高能实验中被观察到。图 7.9 显示了 Bhabha 散射在$E_{\rm cm} = 29$ GeV 时的截面，以及与QED(有真空极化图和无真空极化图)的比较。

我们可以通过设置$q = 1/r$将$\alpha_{\rm eff}$写为r的函数。所有r的$\alpha_{\rm eff}(r)$行为如图 7.10 所示。距离相关(或“尺度相关”或“跑动”)的耦合常数的概念将是本书其余部分的主要主题。

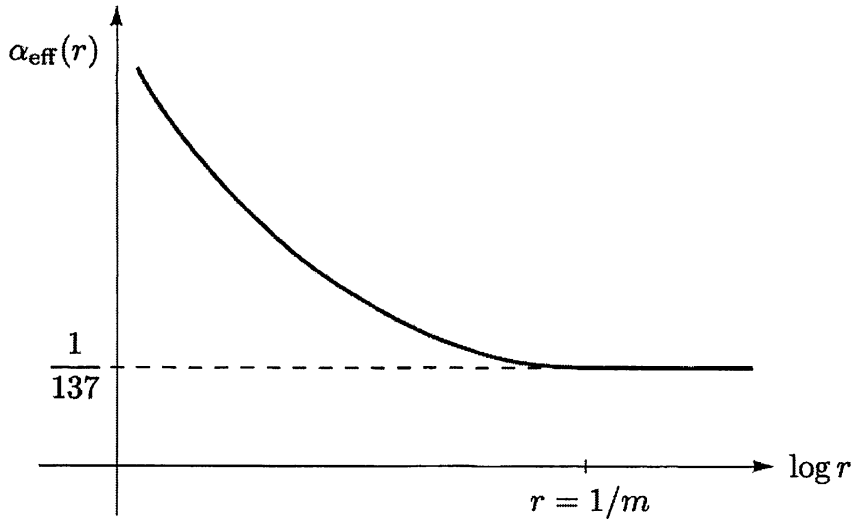


图 7.10 由单圈真空极化图产生的有效电磁耦合常数作为距离函数的定性示意图。水平线的尺度包括了许多阶的级数。

Final Project

胶子喷注的辐射

虽然我们在前两章已经详细讨论了 QED 辐射修正，但到目前为止，我们还没有尝试计算完全辐射修正的截面。当然，是因为这样的计算相当冗长。尽管如此，在仅仅计算出我们所做的孤立效应之后，假装理解辐射修正是不诚实的，这个“最后的项目”是一个试图补救这种情况的尝试。该项目是计算最简单但最重要的辐射修正截面之一。你应该在开始这个项目之前完成第 6 章，但是你不需要阅读第 7 章。

在e^+e^-湮灭中，当虚光子产生一对夸克时，强相互作用粒子——π介子、K介子和质子——被产生出来。如果忽略了强相互作用的影响，就很容易计算出夸克对产生的总截面。在这最后的项目中，我们将分析由于强相互作用对这个公式的第一个修正。

让我们用下面的简单模型来表示强相互作用：引入一种新的无质量矢量粒子，胶子，它与夸克普遍耦合：

$$\Delta H = \int d^3x\, g\bar{\psi}_{fi}\gamma^\mu\psi_{fi}B_\mu.$$

这里f标记夸克的类型(“味”)(u, d, s, c等)，$i = 1,2,3$标记色。强耦合常数g与味和色无关。夸克的电磁耦合依赖于味，因为u夸克和c夸克的电荷为$Q_f = +2/3$，而d夸克和s夸克的电荷为$Q_f = -1/3$。通过与α的类比，让我们定义

$$\alpha_g = \frac{g^2}{4\pi}.$$

在这个练习中，我们将计算正比于α_g的夸克对产生的辐射修正。

夸克的强相互作用模型与目前公认的强相互作用理论量子色动力学(QCD)

并不完全一致。然而通过以下替换，我们将在这里得出的所有结果在 QCD 中也都是正确的

$$\alpha_g \to \frac{4}{3}\alpha_s.$$

我们将在第 17 章对这一断言进行核实。

在这个练习中，你可以忽略夸克的质量。你也可以忽略电子的质量，并对电子和正电子的极化求平均。为了控制红外发散，有必要假设胶子有一个小的非零质量μ，它只能在计算结束时被取为零。然而(正如我们在问题 5.5 中讨论的那样)，对这个重玻色子极化态求和与采用以下替换是一致的：

$$\sum \epsilon^{\mu}\epsilon^{\nu *} \to -g^{\mu\nu};$$

这也意味着我们可以使用传播子

$$\overbrace{B^{\mu}\ B^{\nu}} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}.$$

(a) 从第 5.1 节回忆起，对于α的最低阶，忽略胶子的影响，产生一对味f夸克的总截面是

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2.$$

计算对$e^+e^- \to \bar{q}q$有贡献的包含一个虚胶子的图。按照公式(6.55)中使用的方法，将此表达式简化为费曼参数上的积分，并通过减去$q^2 = 0$的值将其重整化。注意表达式的结果可以被认为是对夸克的$F_1(q^2)$的修正。然后认为，对于无质量夸克，在α_g的所有阶下，产生无胶子伴随的夸克对的总截面是

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3\left|F_1(q^2 = s)\right|^2,$$

这里$F_1(q^2 = 0) = Q_f$。

(b) 在我们尝试计算(a)部分的费曼参数积分之前，让我们先把这一贡献放在一边，研究过程$e^+e^- \to \bar{q}qg$，夸克对产生并伴随一个额外的胶子发射。在我们计算截面之前，先算出一些运动学方程是有用的。设q为反应的总 4 动量，设k_1和k_2是末态夸克和反夸克的 4 动量。设k_3为胶子的 4 动量。定义

$$x_i = \frac{2k_i \cdot q}{q^2}, \qquad i = 1, 2, 3;$$

这是粒子i的质心能与最大可用能之比。然后证明(i) $\sum x_i = 2$，(ii) 只涉及末态动量的其他所有洛伦兹标量可以用x_i和粒子质量来计算，(iii) 3 体相空间上的完全积分可写成

$$\int d\Pi_3 = \prod_i \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_i}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-\sum_i k_i) = \frac{q^2}{128\pi^3}\int dx_1\,dx_2.$$

如果夸克和反夸克没有质量，但是胶子有质量μ，那么便寻找x_1和x_2的积分区域。

(c) 绘制$e^+e^- \to \bar{q}qg$过程的费曼图，至α和α_g的领头阶，并计算微分截面。你可能会丢弃有关初始束流轴和末态粒子方向之间关联性的信息。这很方便地按照如下解决：矩阵元平方的通常求迹技巧给出这个过程的结果，有以下结构：

$$\int d\Pi_3\;\frac{1}{4}\sum|\mathcal{M}|^2 = L_{\mu\nu}\int d\Pi_3\;H^{\mu\nu},$$

其中，$L_{\mu\nu}$代表电子迹，$H^{\mu\nu}$代表夸克迹。如果我们对除标量x_1和x_2之外的所有末态的参数进行积分，那么描述末态的唯一首选4向量是q^μ，另一方面，$H^{\mu\nu}$满足

$$q^\mu H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}q^\nu = 0.$$

为什么是这样？(有一个基于一般原理的论点；但是你可能会发现，显式地验证这个属性是对你计算的一个有用的检查)因为在对末态向量进行积分之后，$\int H^{\mu\nu}$只依赖于q^μ和标量，所以它只能具有形式

$$\int d\Pi_3\,H^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right)\cdot H,$$

其中H是一个标量。根据这些信息，显示

$$L_{\mu\nu}\int d\Pi_3\,H^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left(g^{\mu\nu}L_{\mu\nu}\right)\cdot\int d\Pi_3\,\left(g^{\rho\sigma}H_{\rho\sigma}\right).$$

利用这个技巧，得出微分截面

$$\frac{d\sigma}{dx_1dx_2}(e^+e^-\to\bar{q}qg) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\cdot 3Q_f^2\cdot\frac{\alpha_g}{2\pi}\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

在极限$\mu \to 0$下。如果我们假设每个原始的末态粒子在物理上被实现为强相互作用粒子的喷注，这个公式给出了观察到e^+e^-湮灭中三喷注事件的概率和这些事件的运动学分布。x_i分布的形式是一个绝对的预测，与实验结果吻合。这种分布的归一化是对强相互作用耦合常数的测量。

(d) 现在将(c)部分公式中的$\mu \neq 0$替换为微分截面，并仔细对(b)部分中发现的区域积分。你可以假定$\mu^2 \ll q^2$。在这个极限下，你会发现$\log(q^2/\mu^2)$阶和$\log^2(q^2/\mu^2)$阶的红外发散项，以及 1 阶的有限项，以及被(μ^2/q^2)的幂给显式抑制的项。你可以通过此计算扔掉最后一个类型的项。目前，只收集和计算红外发散项。

(e) 现在分析(a)部分得到的费曼参数积分，再次在极限$\mu^2 \ll q^2$下工作。注意，这个积分在积分的区域有奇异性。这些应该通过计算q的类空积分来控制，然后解析延拓到物理区域。也就是说，写$Q^2 = -q^2$，对$Q^2 > 0$计算积分，然后小心将结果解析延拓到$Q^2 = -q^2 - i\epsilon$。将结果与第(d)部分的答案相结合，形成α_g阶下$e^+e^- \to$强相互作用粒子的总截面，结果表明，所有的红外发散对数项都会从这个量中消去，因此这个总截面在极限$\mu \to 0$中是明确定义的。

(f) 最后，从(d)和(e)部分的积分中收集 1 阶的项，并将它们组合起来。为了计算其中的某些项，你可能会发现以下公式很有用

$$\int_0^1 dx \, \frac{\log(1-x)}{x} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(不难证明这个公式)在α_g阶下，表明总截面现在可以得到：

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q \text{ or } \bar{q}qg) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot 3Q_f^2 \cdot \left(1 + \frac{3\alpha_g}{4\pi}\right).$$

这个公式给出了测量强相互作用常数的第二种方法。实验结果(在现有实验误差范围内)与(c)部分方法得到的结果一致。我们将在第 17.6 节中更全面地讨论α_s的测量。