量子场论导论

LIANGZI CHANGLUN DAOLUN

张振球 雷武祖／编著

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

责任编辑／唐丹宇
封面设计／智　骐

ISBN 7-5633-3342-8
9 787563 333424 >

ISBN 7-5633-3342-8/O·051
定价：10.00 元

量子场论导论

张振球　雷式祖　编著

广西师范大学出版社
·桂林·

序

量子场论是20世纪二三十年代发展起来的现代物理分支之一，到20世纪五六十年代，它获得了进一步的充实与完善. 当前，量子场论已成为研究基本粒子的前沿学科；量子场论被广泛应用于统计物理学、天体物理学、固体物理学、高能物理与粒子物理等学科. 随着现代科学技术的发展，量子场论在科学技术领域上的应用必将与日俱增.

由于量子场论是具有相当深度和难度的现代物理理论，要学好本课程，要求读者必须具备一定的基础物理、理论物理知识，特别是相对论、电磁场理论、高等量子力学以及高等数学基础知识，从而使初学者在学习上遇到的困难不少. 有鉴于此，在多年的教学实践中，我们深感

有编写一本比较适用于初学者的教科书之必要.

本书是作者自20世纪80年代以来,在有关专业硕士研究生和本科物理专业高年级学生讲授量子场论课程(包括选修课)所编讲义基础上修改而成.作为大学物理专业高年级学生的选修课,要求它在减少由于数学方面的原因所诱发的困难、提高学生对理论物理内涵的领会方面更具特色,我们正是在这方面做出努力,力求使所编教材更贴近学生实际.实践表明,教材的如此处理对于初学本课程的学生是符合实际的;同时,对于开设量子场论课程的有关专业硕士研究生也不失是一本较方便自学的入门参考书.

本书的内容可分为两部分:前一部分(第一章至第四章)属于基础理论范畴,而后一部分(第五、六章)属于应用范畴.有关量子场论的应用可以说丰富多彩,但限于篇幅及读者对象,这里只选择一些典型事例给予介绍.

随着物理学的逐步发展,特别是粒子物理中顶夸克存在的实验验证的成功,给20世纪最后阶段的物理学注入了新的血液,相信随着21世纪钟声的来临,量子场论与物理学的其他分支一样,将会迎来新的发展的宏伟图景.

本书在编写出版过程中,承蒙广西师范大学物理系理论物理教研室老师们的帮助和广西师范大学出版社的支持,借此表示感谢.广西大学物理系丘国春教授和广西师范大学物理系柳继锋教授为本书审阅了书稿,并提出

了宝贵的修改意见，借此一并表示谢意.

由于本学科内容丰富、发展迅速，加上作者水平所限，书中错漏与不妥在所难免，祈望读者多予指教.

作者

1999 年 8 月

目　录

绪　言……（1）
第一章　量子场论的基本原理……（6）
第一节　相对论的波动方程……（7）
一、自然单位制……（7）
二、薛定谔方程……（9）
三、克莱因-高登方程……（10）
四、狄拉克方程……（11）
五、量子场论的物理思想……（14）
第二节　经典力学……（16）
一、哈密顿最小作用量原理……（16）
二、欧拉-拉格朗日方程……（16）
三、哈密顿正则方程……（18）
四、泊松括号……（19）
第三节　量子力学……（20）
一、波动力学……（20）
二、海森堡运动方程……（21）

三、谐振子 …… (23)
第四节 经典场论 …… (28)
一、场作为无限自由度的连续系统 …… (28)
二、经典场方程的拉格朗日形式 …… (29)
三、经典场的哈密顿方程 …… (31)
四、对称性与守恒律 …… (33)
第五节 量子场论的建立 …… (39)
一、场量子化的物理基础 …… (39)
二、场量子化的正则形式 …… (40)
第二章 自由场的量子化 …… (43)
第一节 标量场的量子化 …… (44)
一、厄米标量场 …… (44)
二、标量场的量子化 …… (46)
三、标量场的运动方程 …… (47)
四、本征问题 …… (49)
五、标量量子场的粒子性 …… (49)
第二节 电磁场的量子化 …… (59)
一、经典电磁场 …… (60)
二、矢量场的拉格朗日密度 …… (64)
三、矢量场的量子化 …… (66)
四、动量空间展开 极化矢量 …… (67)
五、矢量场的粒子态 …… (72)
第三节 旋量场的量子化 …… (75)
一、γ 矩阵的性质 …… (76)

二、狄拉克方程的共轭形式 …… (80)
三、旋量场的分立对称变换 …… (81)
四、旋量场的量子化 …… (87)
第三章　量子场的相互作用 …… (97)
第一节　场相互作用的分类 …… (97)
第二节　电磁相互作用 …… (100)
一、真空态和对称化 …… (100)
二、带电粒子在电磁场中运动的拉氏密度 …… (100)
三、场方程 …… (103)
四、量子化规则 …… (103)
五、物理量　运动方程 …… (104)
第三节　强相互作用 …… (108)
一、相互作用的拉氏密度 …… (109)
二、场方程 …… (109)
三、共轭动量和哈密顿量 …… (110)
第四节　弱相互作用 …… (111)
第四章　散射矩阵与协变微扰论 …… (116)
第一节　相互作用图景 …… (116)
一、S-图景 …… (117)
二、H-图景 …… (119)
三、I-图景 …… (121)
第二节　散射矩阵 …… (125)
第三节　散射矩阵微扰展开 …… (127)

第四节 散射矩阵的简化 …… (133)
一、正规乘积 …… (134)
二、场算符的收缩 …… (135)
三、维克定理 …… (142)
第五节 费曼图 …… (146)
一、坐标空间场算符的图示 …… (147)
二、正规乘积的图示 …… (149)
三、动量空间的费曼图 …… (154)
第六节 费曼规则 …… (163)
第五章 微扰论的应用 …… (168)
第一节 衰变寿命与碰撞截面 …… (168)
一、过程的跃迁几率 …… (169)
二、衰变寿命 …… (172)
三、碰撞及微分截面 …… (175)
第二节 最简单的强衰变 …… (177)
第三节 正负电子对的高能碰撞 …… (180)
第六章 重整化 …… (185)
第一节 基本发散 …… (185)
一、基本发散 …… (185)
二、法雷定理 …… (187)
三、不可约化图形 …… (187)
第二节 电荷重整化 …… (190)
一、顶角函数 …… (190)
二、正规化处理 …… (192)

三、电荷重整化 …… (197)
第三节　质量重整化简介 …… (198)
主要参考文献 …… (200)

绪　言

量子场论是描述具有无穷多个自由度的粒子体系的物理理论. 电磁场、电子场、介子场、介质中的波场以及引力场和各种多粒子体系的量子系统，都是量子场论描述的对象. 近三四十年来，量子场论有了较快的发展，并已应用到近代物理的许多学科，如固体物理、统计物理、天体物理、粒子物理、高能物理和等离子体物理等领域.

量子电动力学是量子场论最先发展也是最成功的一部分理论.

在宏观世界里，粒子与场间存在一道鸿沟，它们被看成毫不相关的两种物质存在形式. 到了近代物理学，尤其是在量子力学中，微观领域里出现波粒二象性，它使这道鸿沟消失了. 光就是既可看做光子(粒子)也可看做场(电磁波)的典型例子. 推而广之，人们将每种粒子，也都看成相应的有一种与其联系的场存在. 因而，与电子对应的有电子场，与介子对应的有介子场. 概而言之，物质存在既具有粒子性又具有场的二重性. 在微观领域里，人们首先接触较

多的是光子和电子，因此，自然首先要对电子和光子之间的运动和相互作用问题予以讨论.

在非相对论力学中，用波函数描述一般微观粒子的状态.但是，在电磁理论中，电磁场通过力学量 $A_\mu(A,i\varphi)$ 来描述.而力学量 A_μ 并不称为光子的波函数.这就使对光子与一般微观粒子的描述，由于历史方面的原因而遗留一些问题.为了解决历史上遗留的这方面问题，有必要把对光子与一般微观粒子的描述统一起来.这方面的工作，导致实现电磁场的量子化.

1927 年，狄拉克(P. A. M. Dirac，1902－ 1984，英国)通过对电磁场的量子化，首先提出二次量子化理论，他把电磁场的运动看成某种基本的谐振动，并由这一系列基本的谐振动产生电磁波.若将每个振动代表一个自由度，那么，电磁场就可以看成具有无穷多个谐振动的体系.同时，电磁场中的每个谐振子的运动，都满足薛定格方程，从而实现了电磁场的量子化.与谐振子振动频率 ν 相对应的能量 $h\nu$ 代表了一个光子的能量，n 个谐振子的态就代表 n 个光子.电磁场被激发就有光子产生.

1928 年，狄拉克在研究电子运动基础上，找出了描述单个高速运动电子所满足的狄拉克方程

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial X_\mu} + m\psi = 0 \qquad (\mu = 1,2,3,4)$$

它还不能反映电子的产生和湮灭.为了反映电子的产生和湮灭，人们参照了处理光子的办法，引进电子场概念，并将电子场量子化.按照这一理论，量子电子场的激发代表产生电子，而量子电子场激发的消失代表电子的湮灭，处在不同激发状态下的电子场代表处在不同状态下的电子.首先提出电子场量子化方法的是 Jordan 和 Wigner(1928)，他们不把波函数看做粒子的状态，而把波函数 ψ 与 A_μ 一样看做经典的场量，即把 ψ 满足的方程，看做经典场方

程，然后进行量子化. 每一种微观粒子，都有一个场与之相对应. 这样，电磁场是一份一份激发的，每一份代表一个光子，这种电磁场就是量子化的. 同样，电子场也是一份一份激发的，每一份代表一个电子(或正电子)，电子场也是量子化的.

量子电动力学(QED)是研究量子化电磁场与量子化电子场及其相互作用规律的理论. 它是在狄拉克方程描述的电子场量子化的基础上，形成一个关于电子、正电子与光子相互作用的理论.

用量子电动力学计算电磁相互作用时，在低级近似下与实验结果符合得很好，但在高级近似时却出现发散困难. 1948 年，费曼(R. P. Feynman，1918— ，美国)等分析了量子电动力学存在的问题，提出了量子电动力学新的理论形式、计算方法和重整化方法，克服了发散困难，使量子电动力学成为微观物理学中最精确的理论.

把每一种微观粒子看成一种相应的量子化场的激发，把粒子的吸收、放出和转化看成是一种量子化场与另一种量子化场相互作用的结果，这样建立起来的理论，就称为量子场论.

根据量子场论的观点，每一种粒子(广而推之，每一种物质)都与一种场相对应，场存在各种状态，其能量的最低状态称为真空态. 真空中，不存在实物粒子，但是，真空只不过是物质的不同状态，并非没有物质存在. 当物质的场受激发到较高能量状态时，产生粒子，反之，当粒子从高能态到低能态时，粒子湮灭. 这些都已被大量的实验事实所证实.

物质是相互作用的，所以，除了研究自由场外，更重要的还要考虑场与场的相互作用. 在量子场论中，相互作用是通过传递粒子来传递能量的. 譬如，电磁相互作用的传递粒子是光子，核子间相互作用的传递粒子是 π 介子，而弱相互作用交换的是中间玻色子 $W^{\pm}$ 和 Z^{0}.

将量子场论的基本思想推广到弱相互作用中，首先提出四费米子流—流耦合理论．它虽然不可重整化，但在低能情况下，还是取得一定成功．然而，在高能条件下，理论出现发散困难．到了20世纪60年代初期，格拉肖(S. L. Glashow，1932－　，美国)等人提出弱作用是通过传递某种弱介子来实现的理论，它为弱电统一理论奠定了基础，直到1983年，果然发现了传递弱相互作用的中间玻色子 $W^{\pm}$ 和 Z^{0} 等弱介子．

核子与核子间的相互作用属强相互作用，核子是由夸克组成的，夸克按其种类不同，以味道和颜色区分．现在人们已经知道，夸克有6种味(u,d,s,c,b,t)和3种色(红、绿、蓝)．味和色只是物理学上的术语，它们反映了夸克的内部自由度．各种不同色荷的夸克发生相互作用，就构成诸如质子、中子、π 介子和 K 介子等参与强相互作用的粒子．

夸克间相互作用的传递者称为胶子．20多年来，人们一直找不到自由夸克存在，它们被禁闭在强子内部，胶子带有8种色荷，描述这些带有色荷的夸克与胶子间的相互作用理论，称为量子色动力学(QCD)．量子色动力学是20世纪70年代发展起来的强相互作用理论，它是颜色空间的定域规范对称理论．

对称性的理论和方法在量子场论中的重要性越来越被人们重视，对称理论和结构模型，是粒子物理的两大支柱，当前的量子场论，是拉格朗日场论．它常常是先建立运动方程，再写出拉格朗日函数．现在，人们用另一种不同考虑，即主要从对称性出发写出拉氏函数，并对其对称性做深入探讨．对称性的思想和方法，在理论的建立与发展中，起着关键的作用．所以有人说，“对称性控制着相互作用”，“对称理论在量子场论中居主导地位”，等等，是不无道理的．

20世纪50年代以前，人们主要研究时空对称性，从60年代

开始，人们开始研究内部空间的对称性，特别是内部空间的规范对称性. 内部空间是时空空间以外的空间，人们将其分为味空间和色空间. 量子色动力学是颜色空间的定域规范对称理论.

在量子场论中，取得成功的理论大多是规范对称理论. 例如，量子电动力学是 $U(1)$ 规范理论，弱电统一是 $SU(2)\times U(1)$ 规范理论，强作用的量子色动力学是 $SU(3)$ 规范理论. 把弱、电和强三种相互作用统一起来的大统一理论，也是规范理论；超引力理论是超对称的规范理论. 由此可见，规范理论在量子场论中所处的重要地位，简而言之，规范场是传递相互作用的场. 不同的规范场，传递不同的相互作用. 人们最早认识的规范场是电磁场. 电磁场是使带电粒子具有定域规范不变性而必须引入的场. 1954 年，杨振宁和 Mills 提出一种杨-Mills 规范场，它是传递弱相互作用的规范场. 到了 20 世纪 60 年代，格拉肖、温伯格和萨拉姆(G. W. S)进一步建立了对称性自发破缺的弱电统一相互作用规范场理论.

量子色动力学也具有规范不变性，胶子虚交换的净效应是产生一种力，它倾向于把夸克束缚于色中性系统中. 实际认为，强子和胶子束缚于色中性系统中是绝对的，夸克和胶子永远被囚禁于强子中. 有人提出，将强相互作用、弱相互作用及电磁相互作用统一成大统一理论. 有人进一步提出将引力相互作用也统一进去而成超统一理论. 当今，已发现的粒子大约有三百多种，按量子场论观点，对应地存在三百多种量子场. 因此，人们企图在这些为数众多的量子场中找到某种统一的理论，这就是人们热衷于寻找统一理论、大统一理论甚至超统一理论的缘由. 目前已发展的有弱电统一理论并为实验所证实，至于大统一理论以及超统一理论，还处于理论探索阶段.

本课程主要介绍量子场论的基本内容. 重点讨论相对论波动方程、量子场论的基本原理、标量场、电磁场、旋量场以及场的相互作用、相互作用表象和微扰理论及其应用等. 为了让读者对重整化理论有初步了解，我们还在最后一章介绍有关这方面的基本知识.

第一章

量子场论的基本原理

早在量子场论建立以前，近代物理学已有相当程度的发展，无论是经典力学、经典场论还是量子力学、相对论，都已有各自完整的理论体系，量子场论也正是在这些物理基础上建立起来的现代物理理论.

正因为量子场论的建立与上述这些物理理论密不可分，因此，在学习量子场论的主体内容之前，有必要重温这些基础理论及其基本原理.

本章我们先回顾经典力学和量子力学的基本理论、了解相对论波动力学的基本方程，然后讨论场的量子化的物理基础与场量子化的正则形式.

第一节　相对论的波动方程

一、自然单位制

量子场论是研究微观粒子体系运动规律的理论，它以相对论和量子理论为理论基础．但是，在这两种理论中，又常会遇到物理量 c（光速）和 $\hbar$（普朗克常数），为使我们的计算简化，人们寻找另一种称为自然单位制的新单位制．在自然单位制里，通常令 c 和 $\hbar$ 等于 1，即

$$c=\hbar=1$$

在普通的 C.G.S 单位制里，其基本单位是质量（M）、长度（L）和时间（T），其他物理量是这几个基本单位的导出量．例如：光速的量纲 $=[L/T]=[LT^{-1}]$，普朗克常数的量纲 $=[ML^2T^{-1}]$，电荷的量纲 $=[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}]$，等等．

在自然单位制中（$c=\hbar=1$），也采用三个基本单位：光速（c）、普朗克常数（$\hbar$）和长度（L），由于在这种单位制里，$c=\hbar=1$，因此，其他导出单位就只包含长度 L 的量纲．

设在通常的 C.G.S 单位制中，物理量 A 的量纲为

$$[A]=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}$$

当转换为自然单位制时，可表为普通单位及 $\hbar$、c 的幂式：

$$[A]=[A][\hbar]^{\sigma}[c]^{\epsilon}$$
$$=[M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}][ML^2T^{-1}]^{\sigma}[LT^{-1}]^{\epsilon}$$

考虑到在自然单位制中，不存在质量、时间的量纲，这要求：

对于质量：　$\alpha+\sigma=0$　　即　$\sigma=-\alpha$

对于时间：

$$\gamma-\sigma-\varepsilon=0 \quad \text{即} \quad \varepsilon=\alpha+\gamma$$

因此，在自然单位制中：

$$[A]=[A][\hbar]^{-\alpha}[c]^{\alpha+\gamma} \tag{1.1-1}$$

【例 1】 求质量 M 在自然单位制下的量纲[M].

解：由式(1.1-1)

$$\begin{aligned}[M]&=[M][\hbar]^{-\alpha}[c]^{\alpha+\gamma}\\&=M\cdot(ML^2T^{-1})^{-\alpha}(LT^{-1})^{\alpha+\gamma}\\&=M^{1-\alpha}T^{-\gamma}L^{\gamma-\alpha}\end{aligned}$$

由于在自然单位制中，不应存在质量和时间的量纲，要求

$$1-\alpha=0,\ -\gamma=0,$$

所以 $\alpha=1,\gamma=0$，故

$$[M]=L^{-1}$$

【例 2】 试求能量 E 在自然单位制下的量纲[E].

解：在 C.G.S 单位制下，能量的量纲为

$$[E]=ML^2T^{-2}$$

所以，由(1.1-1)式，在自然单位制下，能量 E 的量纲为

$$\begin{aligned}[E]&=[E][\hbar]^{-\alpha}[c]^{\alpha+\gamma}\\&=ML^2T^{-2}(ML^2T^{-1})^{-\alpha}(LT^{-1})^{\alpha+\gamma}\\&=M^{1-\alpha}T^{-2-\gamma}L^{2-\alpha-\gamma}\end{aligned}$$

由于在自然单位制下，不含质量和时间的量纲，要求

$$1-\alpha=0,$$

$$-2-\gamma=0,$$

则有 $\alpha=1$，$\gamma=-2$，故

$$[E]=L^{-1}$$

由上述两个例子可见，在自然单位制里，质量和能量具有相同的量纲[L^{-1}].

二、薛定谔方程

在经典力学中，自由粒子的能量可记为 $E=p^2/2m$，此处 m 为粒子的静止质量，若将能量 E 及动量 p 用算符表示（注意到 $\hbar=c=1$），有

$$E\to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$p\to -\mathrm{i}\hbar\nabla=-\mathrm{i}\nabla$$

则可得非相对论量子力学中自由粒子的运动方程——薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\psi=0 \tag{1.1-2}$$

波函数 ψ 决定在时空点 (r,t) 处找到粒子的几率密度

$$\rho=\psi^*(r,t)\psi(r,t)$$

且 ρ 必是正定的，由薛定谔方程，可以导出几率密度 ρ 所满足的连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot j=0 \tag{1.1-3}$$

其中，

$$j=-\frac{\mathrm{i}}{2m}[\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\psi]$$

就是几率流密度.

对于多粒子体系，当存在力场 $U(r)$ 时，其薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\sum_i^N\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\nabla_i^2\psi+U(r)\psi \tag{1.1-4}$$

在自然单位制下，化为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\sum_i^N\frac{1}{2\mu_i}\nabla_i^2\psi+U(r)\psi$$

薛定谔方程的波函数可作几率解释，由于它具有正定的解，所以它应用广泛. 但是，它是关于时间一次、空间二次的时空不对称

的非相对论方程.

三、克莱因-高登方程

将相对论与量子力学相结合,自然要用到相对论的能量形式

$$E^2=c^2p^2+m^2c^4$$

考虑到自然单位制下 $\hbar=c=1$,有

$$E^2=p^2+m^2$$

将它取代经典的能量表示式 $E=p^2/2m$,并按如下的算符表示

$$E\to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$p\to -\mathrm{i}\nabla$$

再将其作用于波函数 $\psi(r,t)$ 上,可得

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\nabla^2\psi+m^2\psi$$

或

$$(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-m^2)\psi=0 \tag{1.1-5}$$

上式称为克莱因-高登方程(简称 K-G 方程),若令

$$\Box=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}=\partial_\mu^2$$

那么,K-G 方程可简写成

$$(\Box-m^2)\psi=0$$

或

$$(\partial_\mu^2-m^2)\psi=0 \tag{1.1-6}$$

K-G 方程是关于时间和空间作用次数均等的相对论性波动方程,其形式相当简洁、对称,但是,它并不能给出正定的解.事实上,若以平面波解

$$\psi=e^{-ipx}$$

代入 K-G 方程，可得能量和动量关系

$$E^2=p^2+m^2$$

从而可得能量解

$$E=\pm(p^2+m^2)^{1/2}$$

确实存在负能解. 根据物质有往低能态运动趋势的规律，负能解的出现，会导致自然界将呈现“运动益衰、温度日低”的“极冷”状态，这是与实际相矛盾的结论. 正因为负能的困难无法消除，使人们长时间怀疑 K-G 方程的正确性，直到 1934 年，泡利和威斯科夫指出，不应把 K-G 方程中的 ψ 看做单粒子波函数，而应看做场方程的算符，这样，负几率困难才得到解决.

四、狄拉克方程

克莱因-高登方程的负几率困难源于该方程存在对时间的二次微商，为此，狄拉克建立只存在时间一次微商的相对论波动方程.

狄拉克考虑到薛定谔方程是关于时间一次微商、空间二次微商的非相对论方程，而克莱因-高登方程则是关于时、空的二次微商的方程，但又出现负几率困难，因此，不论前者或后者，都不能充当相对论量子力学方程. 为了解决这一矛盾，狄拉克认为，一个相对论的量子力学方程，应是含时、空一次微商的方程；同时，他认为，几率密度的正定性是必须坚持的量子力学概念. 下面，我们遵循狄拉克的基本思想建立狄拉克方程.

第一，为保证几率的正定性，方程应只含对时间 t 的一阶导数. 因此，可假定它仍具有薛定谔形式：

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi \tag{1.1-7}$$

第二，为保证方程的洛仑兹不变性，上式右边的算符 $\hat{H}$ 同样

只含有对空间坐标的一阶导数. 换句话说，$\hat{H}$ 应有如下形式：

$$\hat{H}=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\beta m \tag{1.1-8}$$

因此，(1.1-7)式可改写为

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\psi+\beta m\psi \tag{1.1-9}$$

或

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\alpha\cdot\nabla-\beta m\right)\psi=0 \tag{1.1-10}$$

第三，式(1.1-9)中的 $\alpha_j(j=1,2,3)$ 和 β 不能是普通的数(C数)，而必须是一些矩阵算符(q数)，这样，才能保证(1.1-9)具有洛仑兹不变性(因为，假如 α_j 是C数，$\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ 将像三维矢量的分量一样地变换，即使在三维空间正转动下，方程(1.1-9)也不是不变的). 与此相应，$\psi(x)$ 也必须是一列矩阵.

第四，方程(1.1-9)的解 $\psi(x)$ 应能保持量子力学波函数的几率解释，而且这种解释，应与所选定的洛仑兹参考系无关，这同样要求 $\psi(x)$ 应不是普通数而应是洛仑兹协变量.

第五，式(1.1-9)作为一个相对论波动方程，应能导致经典的能量、动量关系 $E=\pm(p^2+m^2)^{1/2}$. 这就是说，一个自由粒子的能量，动量本征值仍应满足相对论力学所建立的经典关系. 这一要求，导致 $\psi(x)$ 的每一分量均应满足 K-G 方程(1.1-6). 为此，分别将(1.1-9)两边的算符重复作用一次，并适当调整求和指标得

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\sum_{j,i=1}^{3}\frac{\alpha_j\alpha_i+\alpha_i\alpha_j}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\mathrm{i}}m(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\beta^2m^2\psi \tag{1.1-11}$$

不难发现，只要 α_j 和 β 满足关系

$$\alpha_j\alpha_i+\alpha_i\alpha_j=2\sigma_{ji}\quad(j,i=1,2,3) \tag{1.1-12a}$$

$$\alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0 \tag{1.1-12b}$$

$$\alpha_j^2=\beta^2=I_N \quad (N\text{ 为待定的正整数}) \tag{1.1-12c}$$

则式(1.1-11)就与克莱因-高登方程(1.1-6)一致.这里,I_N 是 $N\times N$ 单位矩阵,式(1.1-12c)中的 $N\times N$ 矩阵 α_j、β 的本征值均为 ±1,即这些矩阵在对角形式下,其对角元素是+1 或−1;另一方面,由(1.1-12b)和(1.1-12c)分别可得

$$T'\alpha_j=0,\quad T'\beta=0 \tag{1.1-13}$$

它与(1.1-12c)式表明,α_j 和 β 是偶维矩阵.此外,作为量子力学的哈密顿算符,$\hat{H}$ 应当是厄米的.按(1.1-8)式,α_j 和 β 也必须是厄米矩阵.根据以上诸特点及代数关系(1.1-12),我们来寻找 α_j、β 的矩阵表示.

首先,设 $N=2$,在所有 2×2 矩阵里,具有这些特点的矩阵是三个泡利矩阵:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{1.1-14}$$

因此,在 $N=2$ 情况下,无法找到四个满足(1.1-12)的矩阵.为此,再看 $N=4$ 的四维矩阵.此时,可用三个泡利矩阵和 2×2 单位矩阵 I_2 构成 α_j、β 的如下矩阵表示:

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}0&\sigma_j\\\sigma_j&0\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&-I_2\end{pmatrix} \tag{1.1-15}$$

从物理学理论"简单性原则"考虑,我们不必去寻找更高维的矩阵表示.另一方面,从洛仑兹不变性和空间反演不变性的要求考虑,波函数 ψ 具有四个分量,这同样排除了高维表示的可能性.因此,式(1.1-15)就是所寻找的矩阵表示,与此相应,$\psi(x)$ 应是一个 4×1 矩阵:

$$\psi(x)=\begin{bmatrix}\psi_1(x)\\\vdots\\\psi_4(x)\end{bmatrix} \tag{1.1-16}$$

式(1.1-9)、(1.1-15)和(1.1-16)相结合，就完全确定了狄拉克方程的具体形式，若引入如下定义的 γ 矩阵：

$$\begin{aligned}&\gamma_j=-\mathrm{i}\beta\alpha_j \qquad (j=1,2,3)\\&\gamma_4=\beta\end{aligned} \tag{1.1-17}$$

并以 β 乘以(1.1-9)两边，就可以将狄拉克方程(1.1-9)式写成四维形式

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x)=0 \tag{1.1-18}$$

将式(1.1-15)代入(1.1-17)得

$$\gamma_j=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma_j\\ \mathrm{i}\sigma_j & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & -I_2\end{pmatrix} \tag{1.1-19a}$$

或形式地写成

$$\gamma=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\sigma\\ \mathrm{i}\sigma & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma_4=\begin{pmatrix}I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix} \tag{1.1-19b}$$

这里 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$、$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，$\gamma$ 矩阵的这种表示，称为泡利表示.

五、量子场论的物理思想

狄拉克方程虽然避开了 K-G 方程所存在的负几率困难，但仍保留负能困难. 严格地说，这些方程都不能作为量子力学的波动方程. 退一步说，在相对论量子力学范围内，即使不存在负几率困难和负能困难，仍然无法描述粒子的相互作用和转化现象. 这是因为参与相互作用的粒子数至少为 2，而量子力学却是有关单粒子的方程，更不允许粒子种类发生变化. 基于上述原因，人们有必要建立新的量子理论. 可以设想，在新的理论中，波函数不再是单粒子的几率幅，且这种理论还必须是多粒子理论，在这种新理论下，为了能够描述粒子间的相互作用与转化，它还应允许粒子的数目和种类发生变化. 这种新的理论，就称为量子场论.

与量子力学相似，量子场论也是建立在几个基本假设之上. 而从量子力学过渡到量子场论，其基本物理思想和概念的飞跃，可以

归纳为如下几点：

第一，抛开了量子力学中波函数的几率解释，并把量子力学的波动方程看成经典波动场的场方程.

第二，对这些经典波动方程式进行类似于从经典质点力学过渡到量子力学时所进行的量子化步骤，这种量子化称为二次量子化，它是粒子的一次量子化向波动领域的推广.

第三，抛弃了量子力学对定态薛定谔方程的解所做的解释，把由二次量子化所得的能量子解释为上述经典波动方程式在原来量子力学意义下所描述的微观粒子，因此，这些能量子就属于波动场的粒子. 经二次量子化的场，是一个既具波动性又具粒子性的场，称为量子场. 正如量子力学所描述的对象是具有波粒二象性的微观粒子一样，量子场论所描述的是具有波动与微粒二象性的量子场. 处于相互作用和转化中的所有粒子都属于某量子场的量子.

第四，既然微观客体是以量子场的形态存在，那么，实验观测到的粒子之间的相互作用就应当是量子场之间的相互作用.

量子场论的建立，把人们对微观世界的认识发展到某一新的深度，依据这个新的认识，微观客体不以“粒子”的形态存在，而是以“量子场”的形态存在. 实验上所观测到的各种基本粒子，都是相应的量子场的激发态；即使在某一段时间内，在某一空间区域里不存在粒子，而在这一区域里也仍然存在着量子场，只不过此时的量子场处于真空态，我们用现有的实验手段还不能直接观察到它. 这样，量子场论对于波粒二象性的认识就超出了就事论事的范围，进行了高度科学的抽象. 因此，应当认为，“量子场”不应仅仅看做一个有用的概念，它所赖以建立的是一种物理模型；量子场论不应被看成是量子力学的另一种表达形式，而是在量子力学基础上的新发展. 可以认为，量子场论的建立，是物理学史上的又一次重大变革. 近 60 年来，量子场论对人们认识高速微观现象起了很大的积极作用. 下面，我们将采用类似于从经典力学过渡到量子力学的处理方式，介绍从经典场论过渡到量子场论的基本处理方法.

第二节 经典力学

一、哈密顿最小作用量原理

描述力学体系的最普遍原理是最小作用量原理，而具有普遍意义的运动方程是拉格朗日方程和哈密顿方程.

设体系的拉格朗日函数为 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$，此处，q_i 是广义坐标，$\dot{q}_i$ 是广义速度($i=1,2,3,\cdots,N$)，则体系的作用量定义为

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

若体系的运动使其相应的作用量 A 具有极小值，则函数 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$为拉格朗日函数，且哈密顿最小作用量原理(即哈密顿原理)为

$$\delta A = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0 \tag{1.2-1}$$

哈密顿原理指出，真实的运动使作用量具有极值.

二、欧拉-拉格朗日方程

描述力学系的运动微分方程，可通过最小作用量原理导出. 如图 1-1 所示，为简单计，只考虑一个广义坐标 q，图中实线表示运动轨迹，虚线表示假想轨迹，在 t_1 与 t_2 时刻，两轨迹重合，所以有边界条件

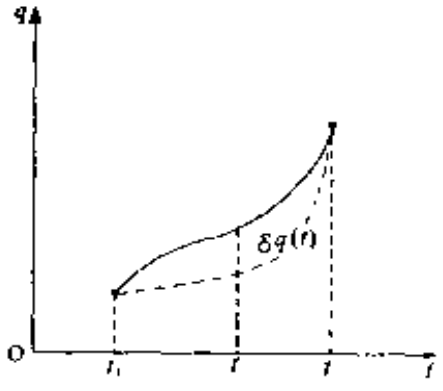


图 1-1

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0 \tag{1.2-2}$$

而在 t 时刻，轨迹的变分为

$$q(t)\to q(t)+\delta q(t)$$

$$\dot{q}(t)\to \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t)=\dot{q}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q(t)$$

将作用量变为

$$\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{d}t \tag{1.2-3}$$

利用分部积分法，对第二项积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta\dot{q}\,\mathrm{d}t=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q\mathrm{d}t$$

右边第一项由边界条件(1.2-2)知其为零，所以有

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t$$

依最小作用量原理 $\delta A=0$，考虑到 δq 是任意的，这要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{1.2-4}$$

上式称为欧拉-拉格朗日方程.

若力学系有几个独立广义坐标，则上述欧拉-拉格朗日方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2-5}$$

若定义广义动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{1.2-6}$$

和广义力

$$F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1.2-7}$$

则欧拉-拉格朗日方程(1.2-5)转化为熟知的牛顿方程

$$F_i=\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \tag{1.2-8}$$

三、哈密顿正则方程

在很多物理问题中常采用相空间$(p_i,\dot{q}_i)$来描述运动，并以广义动量p_i取代广义速度$\dot{q}_i$，这样，拉格朗日函数L的全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L(q_i,\dot{q}_i,t)&=\sum_i^n\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i+\sum_i^n\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\mathrm{d}q_i+\sum_i p_i\mathrm{d}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\sum_i\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+\sum_i p_i\mathrm{d}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

考虑到 $\mathrm{d}(\sum_i p_i\dot{q}_i)=\sum p_i\mathrm{d}\dot{q}_i+\sum\dot{q}_i\mathrm{d}p_i$

有 $\sum p_i\mathrm{d}\dot{q}_i=\mathrm{d}(\sum p_i\mathrm{d}\dot{q}_i)-\sum\dot{q}_i\mathrm{d}p_i$

代入上式得

$$\mathrm{d}(\sum p_i\dot{q}_i-L)=-\sum\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+\sum\dot{q}_i\mathrm{d}p_i-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

定义哈密顿函数

$$H=\sum_i^n p_i\dot{q}_i-L \tag{1.2-9}$$

则有

$$\mathrm{d}H=-\sum_i\dot{p}_i\mathrm{d}p_i+\sum_i q_i\mathrm{d}p_i-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t$$

考虑到$H=H(q_i,p_i,t)$，因此有

$$\mathrm{d}H=\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

由于q_i、p_i和t是独立变量，故有

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{1.2-10}$$

这就是力学系的哈密顿正则方程，对于单粒子保守系统，哈密顿函数

$$H=T+V$$

此处 T 为系统的动能，V 为系统的势能，根据式(1.2-9)

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q}-L \\ &=(mv)v-L \\ &=2\times\frac{1}{2}mv^2-L \\ &=2T-L \end{aligned}$$

或　　$T+V=2T-L$

所以

$$L=T-V \tag{1.2-11}$$

四、泊松括号

考虑力学系统的任意函数 $G(p_i,q_i,t)$ 随时间的变化，并将哈密顿方程(1.2-10)的关系代入，则

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(p_i,q_i,t) &= \frac{\partial G}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial G}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H\} \end{aligned} \tag{1.2-12}$$

上式称为泊松方程，而符号

$$\{G,H\}=\sum_i\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{1.2-13}$$

称为泊松括号，一般地，由 L、K 构成的泊松括号定义为

$$\{L,K\}=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial K}{\partial p_i}-\frac{\partial L}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial q_i}\right) \tag{1.2-14}$$

根据哈密顿正则方程，我们有

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\sum_i\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial q_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=\{q_i,H\}$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial p_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=\{p_i,H\}$$

因此，正则方程也可表示为

$$\begin{aligned}\dot{q}_i&=\{q_i,H\}\\ \dot{p}_i&=\{p_i,H\}\end{aligned} \tag{1.2-15}$$

根据泊松括号的定义，不难证明它具有如下性质：

$$\begin{aligned}&\{L,K\}=-\{K,L\},\\ &\{L,L\}=0,\\ &\{-L,K\}=-\{L,K\},\\ &\frac{\partial}{\partial t}\{L,K\}=\{\frac{\partial L}{\partial t},K\}+\{L,\frac{\partial K}{\partial t}\},\\ &\{L,K+m\}=\{L,K\}+\{L,m\}\\ &\{L,Km\}=K\{L,m\}+\{L,K\}m\end{aligned} \tag{1.2-16}$$

特别地

$$\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0 \tag{1.2-17}$$

$$\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

第三节 量子力学

一、波动力学

描写微观粒子体系波粒二象性及其状态的是波函数，在量子

力学中，波函数 ψ 满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \tag{1.3-1}$$

在这里，选取自然单位制，$\hbar=c=1$.

力学量的平均值，即力学量 G 在态 ψ 下的期待值为

$$\langle G\rangle=\int\psi^*G\psi\mathrm{d}\tau \tag{1.3-2}$$

二、海森堡运动方程

海森堡方法与经典力学方法非常相似.

在经典力学中，体系运动遵循正则方程

$$\begin{aligned}\dot{q}_i&=\{q_i,H\}\\ \dot{p}_i&=\{p_i,H\}\end{aligned} \tag{1.3-3}$$

这里，$\{q_i,H\}$、$\{p_i,H\}$称为经典泊松括号，为了使量子力学运动方程在形式上与经典运动方程相似，海森堡采用量子泊松括号$[A,B]$，它与经典泊松括号$\{A,B\}$之间满足关系

$$\{G,H\}=\mathrm{i}\hbar[H,G] \tag{1.3-4a}$$

考虑到在自然单位制下，$\hbar=1$，所以有

$$\{G,H\}=\mathrm{i}[H,G] \tag{1.3-4b}$$

且量子泊松括号

$$[G,H]=GH-HG \tag{1.3-4c}$$

由于正则方程(1.3-3)中的 q_i 和 p_i 不再是普通实数(c 数)，而是线性空间中的厄米算符(q 数)，它们间满足对易关系

$$\begin{aligned}[q_i,q_j]&=[p_i,p_j]=0\\ [q_i,p_j]&=\mathrm{i}\delta_{ij}\end{aligned} \tag{1.3-5}$$

由式(1.3-3)和(1.3-4)，我们有

$$\begin{aligned}\dot{q}_\alpha&=\mathrm{i}[H,q_\alpha]\\ \dot{p}_\alpha&=\mathrm{i}[H,p_\alpha]\end{aligned} \tag{1.3-6}$$

一般地，若 F 不显含 t，则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\mathrm{i}[H,F]=\mathrm{i}[H,F]$$

即

$$\dot{F}=\mathrm{i}[H,F] \tag{1.3-7}$$

方程(1.3-6)或(1.3-7)称为海森堡运动方程.

在海森堡图像中，波函数用希尔伯特空间态矢 $|\psi\rangle$ 表示，物理量的本征方程为

$$\begin{aligned} H|\psi_n\rangle&=E_n|\psi_n\rangle \\ L|\psi_n\rangle&=L_n|\psi_n\rangle \end{aligned} \tag{1.3-8}$$

运动方程(1.3-6)、本征方程(1.3-8)和对易关系(1.3-5)是力学体系量子化的基本方程.

通过上面的讨论我们发现，量子力学与经典力学方程有其形式上相似之处(这可由下表的对比看出). 由所给的对比表可见，只要把经典力学中 p_α 和 q_α(c 数)，换成算符(q 数)$\hat{p}_\alpha$ 和 $\hat{q}_\alpha$，就容易实现从经典力学到量子力学方程与公式的过渡. 基于上述这种相似，我们似乎也可以以经典场论为基础，通过类比的方法，实现从经典场论向量子场论的过渡.

	量子力学	经典力学
泊松括号	$\mathrm{i}[H,G]$ q_α,p_α 是 q 数(厄米算符)	$\{G,H\}$ q_α,p_α 是 c 数(普通实数)
对易关系	$[q_k,q_l]=[p_k,p_l]=0$ $[q_k,p_l]=\mathrm{i}\delta_{kl}$	$\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0$ $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$
泊松方程	$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial G}{\partial t}+\mathrm{i}[H,G]$	$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H\}$
本征方程	$H\|\psi_n\rangle=E_n\|\psi_n\rangle$	
运动方程	$\dot{q}_\alpha=\mathrm{i}[H,q_\alpha]$ $\dot{p}_\alpha=\mathrm{i}[H,p_\alpha]$	$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$ $\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

三、谐振子

为了进一步了解经典力学与量子力学处理问题的区别与联系，我们以谐振子为例，利用经典力学与量子力学两种不同的处理方法进行讨论.

在经典力学中，谐振子的动能和势能分别表示为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

$$V=\frac{1}{2}kq^2$$

因此，谐振子的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$$

将其代入拉格朗日方程(1.2-5)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q})+kq=0$$

或

$$m\ddot{q}+kq=0 \tag{1.3-9}$$

这就是谐振子的经典运动方程，由式(1.2-6)和式(1.2-7)，谐振子的广义动量和广义力为

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$$

$$f=\frac{\partial L}{\partial q}=-kq$$

在一维情况下，$q=x$，有

$$p=m\dot{x}$$

$$f=-kx \tag{1.3-10}$$

这正是一般力学中的谐振子运动方程.

让我们再考察量子力学对谐振子的处理方法. 对谐振子情况，其哈密顿函数为

$$H=T+V=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2m}(p^2+m^2\omega^2q^2)$$

此处 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

引入算符(为简单起见，以下省略算符上的"^"符号)

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p-\mathrm{i}m\omega q)\\ a^+&=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p+\mathrm{i}m\omega q) \end{aligned} \tag{1.3-11}$$

考虑到

$$\begin{aligned} a^+a&=\frac{1}{2m\omega}(p+\mathrm{i}m\omega q)(p-\mathrm{i}m\omega q)\\ &=\frac{H}{\omega}-\frac{1}{2}\\ aa^+&=\frac{H}{\omega}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以

$$[a,a^+]=aa^+-a^+a=1 \tag{1.3-12}$$

又因为

$$\begin{aligned} a^+a+aa^+&=\left(\frac{H}{\omega}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{H}{\omega}+\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{2}{\omega}H \end{aligned}$$

故

$$H=\frac{\omega}{2}(a^+a+aa^+)+[a^+a+(a^+a+1)]\frac{\omega}{2}$$

$$=(a^{+}a+\frac{1}{2})\omega$$

$$=(N+\frac{1}{2})\omega \tag{1.3-13}$$

此处 $N=a^{+}a$, (1.3-14)

称为粒子数算符.

根据谐振子的本征方程

$$H|\psi_n\rangle=E_n|\psi_n\rangle \tag{1.3-15}$$

由式(1.3-13)有

$$(N+\frac{1}{2})\omega|\psi_n\rangle=E_n|\psi_n\rangle$$

由于 $N|\psi_n\rangle=n|\psi_n\rangle$

此处 n 是粒子数算符的本征值,所以

$$H|\psi_n\rangle=\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega|\psi_n\rangle$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega|\psi_n\rangle$$

因此,H 的本征值为

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \quad (n=0,1,2\cdots) \tag{1.3-16}$$

为了进一步了解算符 a、a^{+} 和 $N=a^{+}a$ 的物理意义,让我们先讨论它们如下的一些性质:

$$[N,a]=(Na-aN)$$

$$=(a^{+}a)a-a(a^{+}a)$$

$$=[a^{+},a]a$$

$$=-[a,a^{+}]a$$

$$=-a \tag{1.3-17}$$

且

$$[a,N]=-[N,a]=a \tag{1.3-18}$$

又

$$[N,a^{2}]=a^{+}aa^{2}-a^{2}a^{+}a$$

$$
\begin{aligned}
&=(a^{\dagger}a^{2}-a^{2}a^{\dagger})a \\
&=(a^{+}a^{2}-a(aa^{+}))a \\
&=[a^{+}a^{2}-a(1+a^{\dagger}a)]a \\
&=-2a^{2}
\end{aligned}
\tag{1.3-19}
$$

一般地有

$$
[N,a^{m}]=-ma^{m} \tag{1.3-20}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
&[N,a^{\dagger}]=a^{+} \\
&[a^{\dagger},N]=-a^{\dagger} \\
&[N,a^{-m}]=ma^{\dagger m}
\end{aligned}
\tag{1.3-21}
$$

考虑到

$$
[N,a]=Na-aN=-a
$$

所以

$$
Na=a(N-1)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
Na|n\rangle&=a(N-1)|n\rangle \\
&=a(n-1)|n\rangle \\
&=(n-1)a|n\rangle
\end{aligned}
\tag{1.3-22}
$$

此处$|n\rangle$代表$|\psi_n\rangle$，而n是算符N在态$|n\rangle$下的本征值.

如果将$a|n\rangle$看做新的本征态，那么由上述关系可见，态$a|n\rangle$关于算符N的本征值是$(n-1)$，而与此本征值对应的本征态是$|n-1\rangle$，因此，态$a|n\rangle$对应于态$|n-1\rangle$，就是说，态$|n\rangle$在算符a作用下，变成态$|n-1\rangle$，因此，称算符a为降级算符，它的作用，使谐振子的能级降低了一级.

类似地，由

$$
Na^{+}|n\rangle=(n+1)a|n\rangle
$$

可知，态$a^{+}|n\rangle$对应于态$|n+1\rangle$，因此，称算符a^{+}为升级算符，在它作用下，使谐振子能级升高一级.

同样，我们还有

$$\left.\begin{aligned} Na|n\rangle &= (n-1)a|n\rangle \\ Na^m|n\rangle &= (n-m)a^m|n\rangle \\ Na^+|n\rangle &= (n+1)a^+|n\rangle \\ Na^{+m}|n\rangle &= (n+m)a^{+m}|n\rangle \end{aligned}\right\} \tag{1.3-23}$$

由于 N 的本征值为正数，即 $n\geqslant 0$，由(1.3-23)第二式知，当 $m=n$ 时，有

$$Na^n|n\rangle = (n-n)a^n|n\rangle = 0|0\rangle = 0$$

这就是说，态 $a^n|n\rangle$ 对应于 $n=0$ 的最低能态，称为基态，记作 $|0\rangle$，即

$$a^n|n\rangle = |0\rangle$$

态 $|0\rangle$ 表示没有任何粒子存在，它是真空态，因此

$$Na^n|n\rangle = N|0\rangle = 0|0\rangle$$

同理，当 $m=n-1$ 时，有

$$N|n-m\rangle = N|1\rangle = (n-(n-1))|1\rangle = 1|1\rangle$$

当 $m=n-2$ 时，有

$$N|n-m\rangle = N|2\rangle = 2|2\rangle$$

当 $m=n-3$ 时，有

$$N|n-m\rangle = N|3\rangle = 3|3\rangle$$

……

可见，算符 N 的本征值 n 取 0，1，2……，因此，谐振子的能量的本征值由式(1.3-16)有

$$E_n = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

考虑到 n 取 0，1，2……值，因此，谐振子的能级是量子化的. 当 $n=0$ 时，

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega$$

称为零点能. 总而言之：

(1)算符 $N=a^{+}a$ 称为粒子数算符，由本征方程 $N|n\rangle=n|n\rangle$，反映态矢 $|n\rangle$ 是算符 N 属于本征值 n 的本征态.

(2)对应于本征值 n 的谐振子，其相应的能级为

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)=\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (\text{因为 } \hbar=1)$$

因此，谐振子的能级，只能以 ω(即 $\hbar\omega$)为单位改变着，这就是能量的量子化表现.

(3)可以证明

$$a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{1.3 24}$$

$$a^{+}|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

这就意味着，本征态 $|n\rangle$ 在算符 a^{+} 作用下，变成 $|n+1\rangle$ 态，即相当于多产生一个能量为 $\hbar\omega$ 的粒子，因此，称算符 a^{+} 为升级算符或产生算符，同理可以看出，算符 a 对态 $|n\rangle$ 的作用，使其变成态 $|n-1\rangle$，因而称 a 为降级算符或湮灭算符.

第四节　经典场论

一、场作为无限自由度的连续系统

欧拉-拉格朗日方程(1.2-5)和哈密顿方程(1.2-10)不仅适用于有限自由度的分立系统，也仍然适用于具有无限多个自由度的连续系统.

在经典力学中，一个由 m 个质点组成的力学体系具有 $3m$ 个自由度，在这种体系中，时间 t 是独立变量，而其 $3m$ 个广义坐标

$q_i(t)(i=1,2,3,\cdots,3m)$是 t 的函数.

对于一个做连续波动的场，其独立变数是 $x_1、x_2、x_3、x_4=it$，其广义坐标便是场存于其间的那部分空间内各点的场函数值，若以

$$\Phi_\sigma(x)\quad(\sigma=1,2,\cdots,n)$$

代表经典场的一组独立的场函数，那么，在场所存在的那部分空间区域内，任意点 x 就与一组独立的场函数 $\Phi_\sigma(x,t)$相对应. 考虑到任一空间区域都由一个无限点集组成，因此，场是一个具有无限多自由度的连续体系. 为了方便起见，假定场存在于有限空间区域 V 中，且场函数 $\Phi_\sigma(x)$在 V 的边界上满足周期边界条件，场的广义动量便是其广义坐标 $\Phi_\sigma(x,t)$对独立变量的偏导数$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_\sigma(x,t)$，因此，场在某时刻$t$的运动状态，就决定于该时刻各点的场函数 $\Phi_\sigma(x,t)$和$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_\sigma(x,t)=\partial_\mu\Phi_\sigma(x,t)$.

二、经典场方程的拉格朗日形式

设所研究的场可由场函数 $\Phi(x)$描述，且满足洛仑兹不变性的作用量可表示为

$$A=\int_\Omega \mathrm{d}^4x\mathscr{L} \tag{1.4-1}$$

此处 d^4x 是四度空间 Ω 的体积元，而 $\mathscr{L}$ 称为拉格朗日函数密度，它与场的拉格朗日函数 L 之间满足关系：

$$L=\int_V \mathscr{L}\left(\Phi(x,t),\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi(x,t)\right)\mathrm{d}^3x \tag{1.4-2}$$

由于作用量积分 A 是洛仑兹不变量，它与坐标的选择无关，所以 $\mathscr{L}$ 也应是洛仑兹不变量，又因为 $\mathscr{L}$ 不应包含场量对坐标的二次或高次微商，否则作用量积分 A 就会包含坐标变量，因此，拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 具有如下的泛函形式

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\Phi,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi) \tag{1.4-3}$$

根据哈密顿最小作用量原理知：

$$\delta A=\delta\int_\Omega \mathscr{L}(\Phi,\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu})\mathrm{d}^4x=0 \tag{1.4-4}$$

此处 $\delta A=0$ 表示场函数由 $\Phi\to\Phi+\delta\Phi$ 时，作用量 A 不变，根据作用量线积分在 t_1、t_2 点处的线积分边界条件(1.2-2)式：

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0 \tag{1.4-5}$$

此时，作用量的四度积分边界条件是场函数 Φ 在四度曲面 Σ 上的变分为零，即

$$(\delta\Phi)_\Sigma=0 \tag{1.4-6}$$

若场函数的分量有多个，那么，场函数 Φ 可表为 Φ_σ，此处 σ 是场函数分量的不连续脚标，由式(1.4-4)，我们有

$$\begin{aligned}
0=&\delta A\\
=&\int\mathrm{d}^4x\delta\mathscr{L}\left(\Phi_\sigma,\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\\
=&\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\delta\Phi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)\right]\\
=&\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\delta\Phi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma\right\}\\
=&\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right]\delta\Phi_\sigma\\
&+\int\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right\}\delta\Phi_\sigma\right]\mathrm{d}^4x\\
=&\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right]\delta\Phi_\sigma
\end{aligned}$$

由于 $\delta\Phi_\alpha$ 的任意性，要求

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_\alpha}=0 \tag{1.4-7}$$

这就是经典场的拉格朗日方程. 在上式推导过程中，我们利用了高斯散度定理及式(1.4-6)的边界条件，将式(1.4-7)与经典力学的拉格朗日方程(1.2-5)对比，不难发现有如下两个对应关系：

$$\Phi_\alpha \rightarrow q_i$$

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu} \rightarrow \dot{q}_i$$

因此，把场函数 Φ_α 称为场的正则坐标，而将 $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}$ 称为场的正则速度.

三、经典场的哈密顿方程

在经典力学中，分立系统的哈密顿函数为

$$H=p_i\dot{q}_i-L \tag{1.4-8}$$

在这里，p_i 是广义动量，且有

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

因此，哈密顿量可写作

$$H=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L(\dot{q}_i,q_i) \tag{1.4-9}$$

此处，L 是体系的拉格朗日函数，而 q_i 是与广义动量 p_i 正则共轭的广义坐标. 由于场是能量、动量等的负载者，且场分布于一定空间范围中，因此，对于场的情况，需要引入“密度”概念. 与经典力学中的拉格朗日函数 L 相对应，在经典场论情况下，要引用拉格朗日密度 $\mathscr{L}$，因而，类似地可定义场的正则动量

$$\pi_\sigma=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}$$

它是与场的正则坐标(即场函数)Φ_σ相对应的共轭量.因此,类似于方程式(1.4-9),场的哈密顿密度应为

$$\mathscr{H}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\dot{\Phi}_\sigma-\mathscr{L}(\dot{\Phi}_\sigma,\Phi_\sigma)=\pi_\sigma\dot{\Phi}_\sigma-\mathscr{L} \tag{1.4-10}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\Phi_\sigma}&=\pi_\sigma\frac{\partial\dot{\Phi}_\sigma}{\partial\Phi_\sigma}-\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\frac{\partial\dot{\Phi}_\sigma}{\partial\Phi_\sigma}\right)\\&=\left(\pi_\sigma-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\right)\frac{\partial\dot{\Phi}_\sigma}{\partial\Phi_\sigma}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\\&=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\end{aligned} \tag{1.4-11}$$

及

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\sigma}=\dot{\Phi}_\sigma \tag{1.4-12}$$

根据场的拉格朗日方程(1.4-7)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}&=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_4}\right)}\right),(i=1,2,3)\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)+\dot{\pi}_\sigma\end{aligned}$$

或

$$\dot{\pi}_\sigma=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)$$

$$=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\Phi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}\right)}\right] \tag{1.4-13}$$

又由方程(1.4-10),有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}\right)}\right]=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}\right)}\right]$$

考虑到关系式(1.4-12),我们有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Phi}_\alpha&=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi_\alpha}\\ \dot{\pi}_\alpha&=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\Phi_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}\right)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.4-14}$$

这就是经典场的哈密顿正则方程.如果我们将上式与式(1.2-10)比较,就会发现这两个正则方程之间的差别.产生这个差别的原因是,场是具有无限自由度的体系,而与通常具有有限自由度的力学体系根本不同.

四、对称性与守恒律

自然界存在各种各样的守恒律,所有的守恒律都与某种对称性相联系.例如,空间平移对称性与动量守恒定律相联系,时间平移对称性与能量守恒定律相联系,转动对称性又与角动量守恒定律相联系,等等.可以认为,每一守恒定律分别以某一种对称性作为其深一层的物理原因.在基本粒子理论中,对称性的考虑占有相当重要的地位,其内容远已超出与守恒定律的相互联系.

对称性是指物理学理论的基本方程在某种变换之下保持不变的一种性质.自然界存在很多对称性,借助于对称原理,自然界的很多复杂现象常能得到条理化,对称原理在物理学的发展中起着重要作用.这里我们着重讨论经典场中对称性与守恒律之间的关

系.

奈特(Noether)于 1935 年指出:使作用量变分等于零的任一连续对称坐标变换,对应存在一个守恒定律,由该守恒定律,可以确定某一守恒量.这就是奈特定理.下面我们证明这个定理.

假定四维时空存在无穷小的连续变换

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \tag{1.4-15}$$

而场函数也相应地有线性变换

$$\Phi'_\alpha = \Phi_\alpha + \delta\Phi_\alpha \tag{1.4-16}$$

在这些变换共同作用下,若作用量 A 保持不变

$$\delta A = \delta\int_\Omega \mathscr{L}\mathrm{d}^4x = \delta\int\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x' = 0 \tag{1.4-17}$$

则将会导致场的守恒定律.

根据式(1.4-16),场函数 $\Phi_\alpha(x)$ 的全变分可表示为

$$\delta\Phi_\alpha(x) = \bar{\delta}\Phi_\alpha(x) + \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \tag{1.4-18}$$

其中,$\bar{\delta}\Phi_\alpha(x)$ 是场函数的自变分,而右边第二项,是由于四维坐标的改变 δx_μ 所导致的场函数的改变.因此,作用量的变分可写成

$$\begin{aligned}\delta A &= \delta\int_\Omega \mathscr{L}\mathrm{d}^4x \\ &= \int_\Omega \mathscr{L}\delta(\mathrm{d}^4x) + (\delta\mathscr{L})\mathrm{d}^4x = 0\end{aligned}$$

由于在四维时空的洛仑兹变换中,四维体积元 d^4x 变成 d^4x',且

$$\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x + \frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu}\mathrm{d}^4x$$

故

$$\begin{aligned}\delta(\mathrm{d}^4x) &= \mathrm{d}^4x' - \mathrm{d}^4x \\ &= \frac{\partial(\delta x_\mu)}{\partial x_\mu}\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

因此,由作用量的变分

$$\delta A = \int_{\Omega} \mathscr{L}(\delta(\mathrm{d}^4x)) + \int_{\Omega} (\delta\mathscr{L})\mathrm{d}^4x = 0$$

有

$$\delta A = \int \left[\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \right) + \delta\mathscr{L} \right] \mathrm{d}^4x = 0 \tag{1.4-19}$$

类似于场函数的变分关系式(1.4-18)，对于拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 的变分，我们有

$$\delta\mathscr{L} = \bar{\delta}\mathscr{L} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \tag{1.4-20}$$

考虑到 $\mathscr{L}$ 是 Φ_σ 及 $\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}$ 的函数，并由式(1.4-7)及(1.4-18)，有

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\bar{\delta}\Phi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right]\bar{\delta}\Phi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\bar{\delta}\Phi_\sigma\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\left(\delta\Phi_\sigma - \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.4-21}$$

因此，根据式(1.4-19)、(1.4-20)和式(1.4-21)，作用量的变分

$$\begin{aligned}
\delta A &= \int_{\Omega}\left[\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda\right) + \delta\mathscr{L}\right]\mathrm{d}^4x \\
&= \int_{\Omega}\left\{\mathscr{L}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda\right]\right\}\mathrm{d}^4x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(\mathscr{L}\delta x_\lambda) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\varphi_\sigma\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda\right]\right\}\mathrm{d}^4x\\
&= \int_{\Omega}\mathrm{d}^4x\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\left[\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right]\delta x_\lambda\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma\right\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

由于 d^4x 的任意性，要上式成立，要求被积函数满足

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{1.4-22}$$

式中

$$J_\mu=\left[\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\right]\delta x_\lambda+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma \tag{1.4-23}$$

式(1.4-22)是 J_μ 的连续方程，也是守恒定律的微分形式，因此，称 J_μ 为场的守恒流.

将(1.4-22)式对空间体积元 d^3x 积分，再利用高斯散度定理，有

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}\mathrm{d}^3x = \int\frac{\partial J_k}{\partial x_k}\mathrm{d}^3x + \int\frac{\partial J_4}{\partial x_4}\mathrm{d}^3x\\
&= \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V + \int\frac{\partial J_4}{\partial x_4}\mathrm{d}^3x\\
&= \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \mathrm{i}\int\frac{\partial J_4}{\partial t}\mathrm{d}^3x
\end{aligned}
$$

考虑到场量在无穷远边界处的面积分趋于零，由上式有

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\mathrm{i}\int J_4\mathrm{d}^3x) = 0 \tag{1.4-24}$$

或　　$$\frac{\partial}{\partial t}(G_\lambda)=0 \tag{1.4-25}$$

此处　$$G_\lambda=-\mathrm{i}\int J_4\mathrm{d}^3x=\text{常数} \tag{1.4-26}$$

由式(1.4-25)可见，G_λ 是不随时间改变的守恒量，称为场的守恒荷. 于是，使作用量变分为零的任一连续对称坐标变换，对应存在场的某一守恒律(1.4-22)，由这一守恒律，又可以确定一守恒量 G_λ，这就证明了奈特定理.

由于时间、空间的均匀性，使绝对时间与绝对空间具有不可观察性，要求物理规律在四维坐标平移下具有不变性，或拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 在四维坐标平移下具有不变性，这将导致能量和动量守恒定律.

若定义场的能量动量密度

$$T_{\mu\lambda}=\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\lambda} \tag{1.4-27}$$

及场的四维动量

$$p_\lambda=-\mathrm{i}\int T_{4\lambda}\mathrm{d}^3x \tag{1.4-28}$$

则场的守恒流 J_μ 可表示为

$$J_\mu=T_{\mu\lambda}\delta x_\lambda+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Phi_\sigma \tag{1.4-29}$$

设时空坐标存在一无限小平移 $\delta x_\lambda=a_\lambda$，那么，

$$x_\lambda'=x_\lambda+a_\lambda \qquad (\lambda=1,2,3,4)$$

若仅是纯时间平移，且也未导致场函数 Φ_σ 的变化(即 $\delta\Phi_\sigma=0$)，那么，由式(1.4-26)及式(1.4-23)和式(1.4-10)知

$$G_\lambda=-\mathrm{i}\int J_4\mathrm{d}^3x$$

$$= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\mathscr{L}\delta_{\lambda\lambda} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_4}\right)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\lambda}\delta x_\lambda\right] \tag{1.4-30}$$

由于仅存在时间平移，$\lambda=4$，且 $\delta x_\lambda = a_\lambda = a_4$，因此

$$\begin{aligned} G_4 &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\mathscr{L}\delta_{44} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_4}\right)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_4}a_4\right] \\ &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\dot{\Phi}_\sigma\right]a_4 \\ &= \mathrm{i}a_4\int \mathrm{d}^3x[\pi\dot{\Phi}_\sigma - \mathscr{L}] \\ &= \mathrm{i}a_4\int \mathrm{d}^3x\mathscr{H} \\ &= \mathrm{i}a_4 H \end{aligned} \tag{1.4-31}$$

此处，H 是场的能量，因此，在时间平移条件下，场的守恒量 G_λ 与场的能量守恒相对应.

对于纯空间平移情况，$\delta_{x\lambda}=a_k(k=1,2,3)$，考虑到 $\delta_{xk}=0$，因此，由式(1.4-30)：

$$G_k = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_4}\right)}\left(\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_k}\right)\right]a_k$$

考虑到 $\pi_\sigma\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_k} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_k} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_\sigma}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial\dot{x}_k} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_k}$

所以 $$\begin{aligned} G_k &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_\sigma}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_k}\right]a_k \\ &= a_k\int \mathrm{d}^3x(\pi\nabla\Phi_\sigma) \\ &= a_k p_k \end{aligned}$$

因此，在空间平移情况下，守恒量 G_k 的不变性导致场的动量(p_k)

守恒.

在上面讨论中,我们将奈特定理应用于时、空平移不变性,导致场的能量守恒和动量守恒.由此可见,场的运动规律,不因时空坐标系原点的平移而变化,因而,它也反映了时空的均匀性.

第五节　量子场论的建立

一、场量子化的物理基础

前面所讨论的内容,并未涉及场的量子化问题,下面,我们讨论场为什么要量子化以及如何进行量子化问题.

我们知道,物质具有波粒二象性,这已由光电效应、电子衍射以及康普顿效应等所证实.但是,在场量子化之前,理论只停留在由事实总结的唯象阶段,只有在场量子化以后,关于物质的波粒二象性才获得更好的解释.

对场的观测只有通过它与粒子相互作用才能进行,例如,电磁场的强度就是通过荷电粒子的动量改变进行观测,而电子的动量和位置是满足测不准关系的,由于电子与电磁场相互作用时其总动量守恒,因此,要保持量子理论的内部协调,电磁场的动量、能量和空间位置也应有相应的测不准关系,以致场强之间也存在测不准关系,这一点已得到了实验事实的证明.但是,在场未量子化前,无法反映这一事实,只有场经过量子化以后,才能反映场的测不准关系.

自然界中各色各样的基本粒子,可以分成费米子和玻色子两大类,它们分别满足不同的统计法则.在场未量子化以前,理论也

只停留在唯象阶段，场量子化后，就可以得出这两种不同的统计法则，并正确给出统计与自旋的关系.

此外，基本粒子之间能够互相转换，它反映了粒子的产生与湮灭这一基本过程. 但是，量子力学即使是狄拉克的相对论量子力学，也不能解决粒子数发生变化情况，无法反映粒子的产生与湮灭过程. 然而，在场量子化后，量子力学所无法解决的这种问题获得了完满解释.

基于上述各方面原因，场的量子化就显得很有必要. 因此，无论是粒子还是波场，都要用量子化的场来描述.

二、场量子化的正则形式

由经典质点力学过渡到量子力学，尤其是由经典力学的正则形式过渡到量子力学的量子化方法，可以为我们对场的量子化提供借鉴. 在这里，我们拟利用由经典力学的正则形式过渡到量子力学的量子化方法，来建立场的量子化的正则形式.

前面我们在讨论量子力学的海森堡方程时指出，如果我们把实数的物理量（c 数）都用厄米算符（q 数）表示，那么，共轭正则变量(q,p)满足对易关系（量子化条件）为

$$[q_k,p_l]=\mathrm{i}\delta_{kl}$$
$$[q_k,q_l]=[p_k,p_l]=0 \tag{1.5-1}$$

对应的海森堡方程：

$$\dot{q}_\sigma=\mathrm{i}[H,q_\sigma]$$
$$\dot{p}_\sigma=\mathrm{i}[H,p_\sigma] \tag{1.5-2}$$

另一方面，在经典场论中我们看到，由几个场函数 $\Phi_\sigma(\sigma=1,2,3,\cdots,n)$描述的场，其拉格朗日运动方程(1.4-7)为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_\sigma}=0 \tag{1.5-3}$$

且其正则方程可表示为(1.4-14)

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_\sigma}\\ \dot{\pi}_\sigma &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Phi_\sigma}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_i}\right)}\right)\end{aligned} \tag{1.5-4}$$

由于场作为连续的无限自由度体系，与一般的有限自由度力学体系有着根本差别，因此，我们不能简单地把从经典(质点)力学到量子力学的量子化方法(一次量子化)用于从经典场到量子场的量子化(二次量子化)．但是，我们可以将经典场看做某一间断的可数的有限自由度的体系，再将它类似于一次量子化方法进行场的量子化．因此，对于经典场，我们也可以将其正则方程表示为

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_\sigma^{(s)} &= \frac{\partial H}{\partial \pi^{(s)}}\\ p_\sigma^{(s)} &= -\frac{\partial H}{\partial \Phi_\sigma^{(s)}}\end{aligned} \tag{1.5-5}$$

其中

$$p_\sigma^{(s)}=\pi_\sigma^{(s)}\Delta V$$

$$H=\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x$$

式中 $\Phi_\sigma^{(s)}$、$\pi^{(s)}$ 分别是场中第 s 个小体积元的正则坐标(场函数)和共轭正则动量的平均值．因此，场中的小体积元的共轭正则量 $\Phi_\sigma^{(s)}$ 和 $\pi^{(s)}$ 与质点力学中的广义坐标 q_i 及广义动量 p_i 相类似，这样，我们就可以将质点力学的量子化方法推广到场的量子化，就是说，我们将 $\Phi_\sigma^{(s)}$、$\pi^{(s)}$ 等经典场量当做算符(q 数)并令其遵守与量子力学类似的对易关系(量子化条件)：

$$\left.\begin{aligned}&[\Phi_\sigma^{(i)},\pi_{\sigma'}^{(i')}]=i\delta_{ii'}\delta_{\sigma\sigma'}\\&[\Phi_\sigma^{(i)},\Phi_{\sigma'}^{(i')}]=[\pi_\sigma^{(i)},\pi_{\sigma'}^{(i')}]=0\end{aligned}\right\}\tag{1.5-6}$$

当小体积元趋于无限小时，上述关系过渡到同时对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\Phi_\sigma(x,t),\pi_{\sigma'}(x',t)=\mathrm{i}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x,x')\\&[\Phi_\sigma,\Phi_{\sigma'}]=[\pi_\sigma,\pi_{\sigma'}]=0\end{aligned}\right\}\tag{1.5-7}$$

这里 $$\delta(x,x')=\frac{\delta_{xx'}}{\Delta V(s')}$$

当 x 与 x' 在同一体积元 ΔV 中时，则 $\delta_{xx'}=1$，否则为 0. 所以，当小体积元 $\Delta V\to 0$ 时，$\delta(x,x')$ 可由三维狄拉克符号 $\delta(x-x')$ 表示. 于是，场的量子化规则是对易关系：

$$\begin{aligned}&[\Phi_\sigma(x,t),\pi_{\sigma'}(x',t)]=\mathrm{i}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x-x')\\&[\Phi_\sigma(x,t),\Phi_{\sigma'}(x',t)]=\pi_\sigma(x,t),\pi_{\sigma'}(x',t)]=0\end{aligned}\tag{1.5-8}$$

类似于从质点力学到量子力学的量子化，我们可得量子场的海森堡运动方程为

$$\begin{aligned}&\dot{\Phi}_\sigma=\mathrm{i}[H,\Phi_\sigma]\\&\dot{\pi}_\sigma=\mathrm{i}[H,\pi_\sigma]\end{aligned}\tag{1.5-9}$$

或

$$\dot{F}(\Phi_\sigma,\pi_\sigma)=\mathrm{i}[H,F]\tag{1.5-10}$$

此处，H 是场的哈密顿算符，且

$$H=\int\mathscr{H}(\Phi_\sigma,\nabla\Phi_\sigma,\pi_\sigma)\mathrm{d}^3x\tag{1.5-11}$$

而 $$\mathscr{H}=\pi_\sigma\dot{\Phi}_\sigma-\mathscr{L}\tag{1.5-12}$$

量子场的对易关系式(1.5-6)和量子运动方程(1.5-9)是场量子化的基本方程.

第二章

自由场的量子化

与自由粒子相对应的场，称为自由场. 本章主要讨论几种自由量子场的运动.

量子场论的任务主要是讨论基本粒子之间的相互作用与转化. 作为不同量子场的激发态的不同粒子，它们之间的相互作用是永恒与绝对的. 但是，在量子场论里，关于自由场的理论与经典力学中自由质点的运动、量子力学中不受外场束缚的自由粒子的运动一样，具有同等重要的地位. 因为只有了解自由量子场的理论，才有助于我们处理量子场的相互作用问题.

本章主要介绍自由标量场、自由电磁场和自由旋量场的量子化问题. 在自由场条件下，粒子之间不存在相互作用，因而，也不发生粒子的产生与湮灭. 因此，这里所讨论的情况，仍属子粒子数守恒范围.

第一节 标量场的量子化

一、厄米标量场

厄米标量场是最简单的自由场，它只由一个实标量所描述. 比如，自旋为零的中性 π^0 介子或 k^0 介子的场，就属于这种场. 由于这种场由一个实标量所描述，因此也称为实标量场或单分量厄米场.

设以 $\Phi(x)$ 表示标量场的场函数，那么，$\Phi(x)$ 满足的自由场方程就是 K-G 方程(1.1-6)：

$$(\Box - m^2)\Phi(x) = 0 \tag{2.1-1}$$

此处 m 是与场相对应的粒子的质量. 对于一定的场系统，必存在一定的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$，且满足拉格朗日方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right\} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_\alpha} = 0 \tag{2.1-2}$$

由于场方程(2.1-1)是关于时空的二阶偏微分方程，因此，可以选择双线性型的拉氏密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} + m^2\Phi^2\right) \tag{2.1-3}$$

事实上，只要将式(2.1-3)中的 $\mathscr{L}$ 代入拉格朗日方程(2.1-2)，就可以得到标量场的场函数 $\Phi(x)$ 所满足的 K-G 方程(2.1-1).

这样，标量场的正则坐标是 $\Phi(x)$，正则共轭动量是 π，且

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \dot{\Phi} \tag{2.1-4}$$

场的哈密顿密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi\cdot\dot{\Phi}-\mathscr{L}\\ &= \pi^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}+m^2\Phi^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(\pi^2+\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi+m^2\Phi^2)\end{aligned}\tag{2.1-5}$$

因而，场的哈密顿量（总能）为

$$\begin{aligned}H &= \int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x\\ &= \int(\pi\dot{\Phi}-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x\\ &= \int\frac{1}{2}(\pi^2+\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi+m^2\Phi^2)\mathrm{d}^3x\end{aligned}\tag{2.1-6}$$

以及由式(1.4-28)场的四度动量

$$p_\lambda = -\mathrm{i}\int T_{4\lambda}\mathrm{d}^3x\tag{2.1-7}$$

考虑到式(1.4-27)，场的能量动量密度为

$$T_{\mu\lambda}=\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\lambda}\tag{2.1-8}$$

因此

$$T_{4k}=\mathscr{L}\delta_{4k}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\right)}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)=-\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}$$

故标量场的三度动量为

$$p_k = -\mathrm{i}\int T_{4k}\mathrm{d}^3x = -\int\dot{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\mathrm{d}^3x$$

或

$$\boldsymbol{p} = -\int\pi\nabla\Phi\mathrm{d}^3x\tag{2.1-9}$$

另一方面，由式(2.1-7)，场的四度动量 p_λ 的第四个分量

$$
\begin{aligned}
p_4 &= -\mathrm{i}\int T_{44}\mathrm{d}^3x \\
&= -\mathrm{i}\int\left[\mathscr{L}\delta_{44}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\right)}\frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\right]\mathrm{d}^3x \\
&= -\mathrm{i}\int(\mathscr{L}-(-\mathrm{i}\dot{\Phi})(-\mathrm{i}\dot{\Phi}))\mathrm{d}^3x \\
&= \mathrm{i}\int\frac{1}{2}(\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi+\dot{\Phi}\dot{\Phi}+m^2\Phi^2)\mathrm{d}^3x \\
&= \mathrm{i}\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x \\
&= \mathrm{i}H
\end{aligned}
\tag{2.1-10}
$$

因此，标量场的四度动量为 $p_\mu=p_\mu(p_x,p_y,p_z,\mathrm{i}H)$，其第四个分量与能量有关.

二、标量场的量子化

上面讨论的是经典标量场的基本性质与物理量及其运动规律，然而，第一章第五节对场进行量子化时，是令场量 $\Phi(x)$及其共轭动量 $\pi(x)$为厄米算符，并且由式(1.5-8)，当二者的时间 $t=t'$ 时，$\Phi(x)$与 $\pi(x)$满足对易关系(量子化规则)

$$
\left.\begin{aligned}
&[\Phi(x,t),\pi(x',t)]=\mathrm{i}\delta(x-x') \\
&[\Phi(x,t),\Phi(x',t)]=[\pi(x,t),\pi(x',t)]=0
\end{aligned}\right\}
\tag{2.1-11}
$$

在经典力学中，正则坐标 q_i 与正则动量 p_i 共轭，在经典场论中，类似地存在场量 $\Phi(x)$与场的动量 $\pi(x)$共轭. 因此，我们可以利用某一正交归一完全系 $\psi_i(x)$，将 $\Phi(x)$与 $\pi(x)$进行展开：

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,t)&=\sum_i q_i(t)\psi_i(x) \\
\pi(x',t)&=\sum_j p_j(t)\psi_j^*(k')
\end{aligned}
\tag{2.1-12}
$$

由于完全系满足正交归一完备性，即

$$\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)\mathrm{d}^3x = \delta_{mn} \quad \text{（正交归一）} \tag{2.1-13}$$

$$\sum_i \psi_i^*(x)\Phi_i(x') = \delta^3(x-x') \quad \text{（完备性）} \tag{2.1-14}$$

因此，$\Phi(x,t)$与$\pi(x',t)$的对易关系为

$$\begin{aligned}
&[\Phi(x,t),\pi(x',t)] = \Phi\pi - \pi\Phi \\
&= \sum_i q_i\psi_i \sum_j p_j\psi_j^* - \sum_j p_j\psi_j^* \sum_i q_i\psi_i \\
&= \sum_i \sum_j (q_i p_j - p_j q_i)\psi_i\psi_j^* \\
&= \sum_i \sum_j [q_i, p_j]\psi_i(x)\psi_j^*(x') \\
&= \sum_i \sum_j \mathrm{i}\delta_{ij}\psi_i(x)\psi_j^*(x') \\
&= \sum_i \mathrm{i}\psi_i(x)\psi_i^*(x) \\
&= \mathrm{i}\delta(x-x')
\end{aligned} \tag{2.1-15}$$

类似地可证明

$$[\Phi(x,t),\Phi(x',t)] = 0 \tag{2.1-16}$$

$$[\pi(x,t),\pi(x',t')] = 0 \tag{2.1-17}$$

式(2.1-15)、(2.1-16)和(2.1-17)就是标量场的量子化规则(对易关系).

三、标量场的运动方程

在量子力学中，物理量由算符表示，其运动方程是海森堡方程

$$\dot{F} = \mathrm{i}[H,F] \tag{2.1-18}$$

这里，H 是哈密顿函数. 在将量子力学过渡到量子场论时，我们利用了场函数 $\Phi(x)$及场动量 $\pi(x)$与广义坐标 q_i 及广义动量 p_i 的对应关系，因此，由运动方程

$$\dot{q} = \mathrm{i}[H,q], \qquad \dot{p} = \mathrm{i}[H,p] \tag{2.1-19}$$

就可对应地得到场的运动方程：

$$\dot{\Phi}=\mathrm{i}[H,\Phi],\qquad \dot{\pi}=\mathrm{i}[H,\pi] \tag{2.1-20}$$

式(2.1-20)称为海森堡运动方程，我们可以利用标量场的哈密顿密度和对易关系(2.1-17)证明这一方程，事实上，

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}[H,\Phi] &= \mathrm{i}\left[\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x',\Phi(x)\right]\\
&= \mathrm{i}\left[\left(\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x'\right)\Phi-\Phi\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x'\right]\\
&= \mathrm{i}\left\{\left[\int \frac{1}{2}(\pi'\pi'+\nabla'\Phi'\cdot\nabla'\Phi'+m^2\Phi'^2)\mathrm{d}^3x'\right]\Phi\right.\\
&\quad \left.-\Phi\frac{1}{2}(\pi'\pi'+\nabla'\Phi'\cdot\nabla'\Phi'+m^2\Phi'^2)\mathrm{d}^3x'\right\}\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x'\{\pi'\pi'\Phi-\Phi\pi'\pi'+\nabla'\Phi'\cdot\nabla'\Phi'\Phi\\
&\quad -\Phi\nabla'\Phi'\cdot\nabla'\Phi'+m^2(\Phi'^2\Phi-\Phi\Phi'^2)\}\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x'\{\pi'\pi'\Phi-\Phi\pi'\pi'+\nabla'\Phi'\cdot[\nabla'\Phi',\Phi]\\
&\quad +[\nabla'\Phi',\Phi]\cdot\nabla'\Phi'\}\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x'\{\pi'[\pi',\Phi]+[\pi',\Phi]\pi'\\
&\quad +\nabla'\Phi'\cdot[\nabla'\Phi',\Phi]+[\nabla'\Phi',\Phi]\cdot\nabla'\Phi'\}\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x'\{\pi'(-\mathrm{i}\delta^3(x-x'))\\
&\quad +(-\mathrm{i}\delta^3(x-x'))\pi'\}\\
&= \int \pi(x')\delta^3(x-x')\mathrm{d}^3x'\\
&= \pi(x)\\
&= \dot{\Phi}(x)
\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $\dot{\pi}=\mathrm{i}[H,\pi]$成立.

若物理量算符 F 与哈密顿量 $\dot{H}$ 对易，由式(2.1-18)得

$$\dot{F}=[H,F]=HF-FH=0 \tag{2.1-21}$$

因此，物理量 F 是守恒量. 考虑到任何算符自身的可对易性，因此，对于能量算符(哈密顿量)H，必有

$$\dot{H}=[H,H]=0 \tag{2.1-22}$$

因此，标量场满足能量守恒关系，类似地，由 $\dot{p}_k=[H,p_k]=0$，可以证明，标量场满足动量守恒.

四、本征问题

标量场的四度动量 p_μ 的本征方程为

$$p_\mu|n\rangle=p_{\mu n}|n\rangle \tag{2.1-23}$$

这里，$p_{\mu n}=(\boldsymbol{p}_n,\mathrm{i}E_n)$是对应于本征态$|n\rangle$的本征值. 量子场的本征问题，就是通过场的量子化规则，求解本征方程(2.1-23)的解，得出四度动量的本征值谱，获得了场的动量谱($\boldsymbol{p}_n$)和能量谱(E_n)的问题.

至此，我们建立了标量场的运动方程，并获得了场的对易关系(量子化规则)，场的量子化问题应该说已基本完成，尤其通过对本征方程的求解，求出了量子场的能量、动量.

五、标量量子场的粒子性

以上我们对标量场的量子化方法，是以坐标 $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为自由度参数，即场的量子化是在坐标空间中进行的. 这种采用坐标空间的量子化方式，无法观察到量子场的粒子性. 为了显示场的粒子性，通常采用在动量空间中的量子化方式，就是说，以动量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}=\boldsymbol{K}$ 作为自由度参数处理场的量子化问题.

我们知道，标量场 $\Phi(x)$满足自由场的 K-G 方程

$$(\Box-m^2)\Phi(x)=0 \tag{2.1-24}$$

而 K-G 方程最简单的解是平面波解

$$\Phi(x)=ce^{ikx},$$

此处

$$kx=k_\mu x_\mu=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+k_4x_4=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t$$

由于 K-G 方程是线性的，因此，其一般解可由平面波解的线性叠加得到. 考虑到场函数 $\Phi(x)$ 在动量空间的傅利叶展开为

$$\Phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)\delta(k^2+m^2)e^{ikx}d^4k \tag{2.1-25}$$

此处 $d^4k=d\boldsymbol{k}\cdot d\omega$，而 δ 函数是四度 δ 函数，根据 δ-函数的性质

$$x\delta(x)=0 \tag{2.1-26}$$

可以证明式(2.1-25)是式(2.1-24)的解.

为了将标量场场函数 $\Phi(x)$ 表示成动量空间形式，我们可先把式(2.1-25)中的 δ-函数通过对 ω 积分而去掉，为此，引入记号

$$k^2=\boldsymbol{k}^2+k_4^2=\boldsymbol{k}^2-\omega^2 \quad (\because k_4=i\omega)$$

$$\delta(k^2+m^2)=\delta(\boldsymbol{k}^2+m^2-\omega^2)=\delta(\omega_k^2-\omega^2)$$

此处 $\omega_k^2=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$

考虑到 δ-函数的如下性质：

$$\delta(x)=\delta(-x) \tag{2.1-27}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \tag{2.1-28}$$

$$\begin{aligned}\delta(k^2+m^2)&=\delta(\boldsymbol{k}^2+m^2-\omega^2)\\&=\delta(\omega_k{}^2-\omega^2)=\delta(\omega^2-\omega_k{}^2)\\&=\frac{1}{2\omega_k}[\delta(\omega+\omega_k)+\delta(\omega-\omega_k)]\end{aligned} \tag{2.1-29}$$

因此，式(2.1-25)可写成

$$\Phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{1}{2\omega_k}[\delta(\omega+\omega_k)+\delta(\omega-\omega_k)]\cdot c(\boldsymbol{k},\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})-\omega t}d\boldsymbol{k}\cdot d\omega$$

再利用 δ- 函数的性质

$$\int f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \tag{2.1-30}$$

将上式对 $\mathrm{d}\omega$ 积分得

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{2\omega_k}[c(\boldsymbol{k},-\omega_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot x+\omega_k t)} + c(\boldsymbol{k},\omega_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot x-\omega_k t)}]\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{2.1-31}$$

由于 $\boldsymbol{k}$ 的积分变化范围是 $-\infty\to+\infty$，因此

$$c(\boldsymbol{k},-\omega_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot x}=c(-\boldsymbol{k},-\omega_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot x}$$

又因为 $\omega_k^2=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}$ 是 $\boldsymbol{k}$ 的函数，所以

$$c(\boldsymbol{k},\omega_k)=c(\boldsymbol{k})$$

$$c(-\boldsymbol{k},-\omega_k)=c(-\boldsymbol{k})$$

故式(2.1-31)括号内可改写成

$$[c(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot x-\omega_k t)}+c(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot x-\omega_k t)}]$$

$$=[c(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+c(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]$$

故

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{2\omega_k}[c(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + c(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{2.1-32}$$

由于场函数 $\Phi(x)$ 的厄米共轭是 $\Phi^{\cdot}(x)$，厄米条件 $\Phi^{+}=\Phi$，故有

$$\Phi^{-}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{2\omega_k}[c^{+}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c^{-}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{2.1-33}$$

比较 Φ 与 Φ^{-} 式中幂次相同的系数，知

$$\left.\begin{aligned} c^{-}(-\boldsymbol{k})&=c(\boldsymbol{k})\\ c^{+}(\boldsymbol{k})&=c(-\boldsymbol{k})\end{aligned}\right\} \tag{2.1-34}$$

为了归一化需要，令

$$\left.\begin{aligned} c(\boldsymbol{k}) &= \sqrt{4\pi\omega_k}\,a(\boldsymbol{k}) \\ c^{-}(\boldsymbol{k}) &= \sqrt{4\pi\omega_k}\,a^{+}(\boldsymbol{k}) \end{aligned}\right\} \tag{2.1-35}$$

此处称 $a^{+}(\boldsymbol{k})$ 为标量场产生动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子的产生算符，而 $a(\boldsymbol{k})$ 是湮灭动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子的湮灭算符. 将式(2.1-35)的结果代入式(2.1-33)，可得在连续动量空间中，实标量场函数的表示式

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a^{-}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\mathrm{d}^3k \tag{2.1-36}$$

通常，将场函数 $\Phi(x)$ 表示为正频与负频两部分之和

$$\Phi(x) = \Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x) \tag{2.1-37}$$

其中

$$\Phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a^{-}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3k \tag{2.1-38}$$

$$\Phi^{(-)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3k \tag{2.1-39}$$

上述讨论是在连续动量空间中进行的. 对于分立动量空间，式(2.1-36)对 $\mathrm{d}\boldsymbol{k}$ 的积分必须变成求和. 让我们来寻找连续动量空间对动量的积分与分立动量空间对动量求和 $\sum_{k}'$ 之间的关系. 为此，假定考察边长为 L 的立方箱体中的场量 $\Phi(x)$，根据周期边界条件

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x+L) &= \Phi(x) \\ \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x+L) &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x) \end{aligned}\right\} \tag{2.1-40}$$

它们要求 $\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k})$，$(n_1, n_2, n_3 = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

因此，动量只能取如下分立值

$$k_1=\frac{2\pi}{L}n_1,k_2=\frac{2\pi}{L}n_2,k_3=\frac{2\pi}{L}n_3 \tag{2.1-41}$$

所以

$$\int \mathrm{d}k=\int \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3=\frac{(2\pi)^3}{L^3}\mathrm{d}n_1\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_3$$

故对分立动量的求和可写成

$$\sum_k{}'=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}\sum_{n_3}\xrightarrow{\text{(对应于)}}\int \mathrm{d}n_1\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_3$$

或

$$\int \mathrm{d}k\xrightarrow{\text{(对应于)}}\frac{(2\pi)^3}{V}\sum_k$$

即

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}k\longrightarrow\frac{1}{V}\sum_k \tag{2.1-42}$$

这里，已将箱的体积 L^3 用 V 表示，因而，在分立动量空间内，标量场函数 $\Phi(x)$ 的表示式(2.1-36)应变成

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+a^{-}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{2.1-43}$$

为了进一步讨论标量量子场的粒子性，让我们观察场函数 $\Phi(x)$ 式(2.1-36)的共轭动量.

$$\begin{aligned}\pi(x)&=\dot{\Phi}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(x)\\&=-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\sqrt{\frac{\omega}{2}}[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-a^{+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}]\end{aligned} \tag{2.1-44}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\omega\Phi(x)-\mathrm{i}\pi(x)&=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{\frac{\omega}{2}}\mathrm{d}^3ka^{+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\\&=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int\sqrt{2\omega}\mathrm{d}^3ka^{+}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\end{aligned}$$

将上式乘以 $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}$ 并对 d^3x 积分，再利用三度 δ-函数关系式

$$\delta^3(k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{d}^4(x) \tag{2.1-45}$$

有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(\omega\Phi-\mathrm{i}\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{d}^3x\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{2\omega}a^-(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3x\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\sqrt{2\omega}a^+(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3k\\&=\int\sqrt{2\omega}a^+(k)\delta^3(k)\mathrm{d}^3k\end{aligned}$$

因此，

$$a^-(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(\omega\Phi-\mathrm{i}\pi) \tag{2.1-46}$$

类似地可得

$$a(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(\omega\Phi+\mathrm{i}\pi) \tag{2.1-47}$$

此处，$a^-(k)$和$a(k)$分别是产生动量为k和湮灭动量为k的粒子的产生和湮灭算符. 至此我们把标量场的表达式从坐标空间的形式$(\Phi(x),\pi(x))$转换成动量空间中的表示$(a^+(k),a(k))$. 它们分别反映了粒子的产生与湮灭，标量场的粒子性至此明显可见.

至于在动量空间中，标量场所满足的量子化规则，可以通过坐标空间的量子化规则式(2.1-15)～(2.1-17)以及动量空间的力学变量$a^-(k)$与$a(k)$的表达式(2.1-46)和(2.1-47)导出. 事实上，我们有

$$\begin{aligned}&[a(k),a^+(k')]=a(k)a^+(k')-a^-(k')a(k)\\&=\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega)}\iint\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x'}[\omega\Phi(x)\\&\quad+\mathrm{i}\pi(x),\omega\Phi(x')-\mathrm{i}\pi(x')]\\&=\frac{1}{(2\pi)^3(2\omega)}\iint\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-k'x')}\{[\omega\Phi,\omega\Phi']+[\mathrm{i}\pi,\omega\Phi']\end{aligned}$$

$$+[\omega\Phi-\mathrm{i}\pi']+[\mathrm{i}\pi,-\mathrm{i}\pi']\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega}\iint \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-k'x')}\{\omega+\omega\}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-k'x')}\delta^3(x-x')$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}=\delta^{(3)}(k-k')$$

即

$$\left.\begin{aligned}&[a(k),a^+(k')]=\delta^{(3)}(k-k')\\ &\text{类似地有}\\ &[a(k),a(k')]=[a^+(k),a^+(k')]=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.1\text{-}48)$$

可见，在动量空间中，$a(k)$与$a^+(k')$的量子化规则(2.1-48)与在坐标空间中$\Phi(x)$与$\pi(x)$的量子化规则(2.1-15)～(2.1-17)形式完全相似.

至于标量场的能量与动量，在坐标空间已有其具体表示.可以推出，在动量空间中标量场的能量算符与动量算符分别是

$$H=\int \mathrm{d}^3k\,\frac{\omega}{2}[a^+(k)a(k)+a(k)a^+(k)]\qquad(2.1\text{-}49)$$

$$p_\mu=\int \mathrm{d}^3k\,\frac{k_\mu}{2}[a^+(k)a(k)+a(k)a^+(k)]\qquad(2.1\text{-}50)$$

如果将连续动量空间转化为分立动量空间，并规定动量为k的点处空间的小体积元体积是ΔV_k，且定义

$$a_k=a(k)\sqrt{\Delta V_k},a_k^-=a^+(k)\sqrt{\Delta V_k}\qquad(2.1\text{-}51)$$

那么，式(2.1-48)的量子化条件可改写成

$$\left.\begin{aligned}&[a_k,a_{k'}^-]=\delta_{kk'}^{(3)}\\ &[a_k,a_{k'}]=[a_k^+,a_{k'}^+]=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.1\text{-}52)$$

类似地，由式(2.1-49)及(2.1-50)，可将标量场在分立动量空间中的能量和动量表为

$$H = \sum \frac{\omega}{2}[a_k^+ a_k + a_k a_k^-] \tag{2.1-53}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum \frac{\boldsymbol{k}}{2}[a_k^+ a_k + a_k a_k^+] \tag{2.1-54}$$

若定义

$$N_k = a_k^+ a_k \tag{2.1-55}$$

为粒子数算符，则由对易关系(2.1-52)有

$$a_k a_k^+ = a_k^+ a_k + 1 = N_k + 1$$

因此有

$$H = \sum_k \omega\left(N_k + \frac{1}{2}\right) \tag{2.1-56}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_k \boldsymbol{k}\left(N_k + \frac{1}{2}\right) \tag{2.1-57}$$

将其与式(1.3-13)及(1.3-14)比较，不难发现，标量场的每个动量空间自由度 $\boldsymbol{k}$ 的运动与一维谐振子的运动相类似. 因而，在分立动量空间中，量子场在本征态 $|n_k\rangle$ 的求解，与量子力学问题相类似，即也存在关系：

$$N_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle \qquad (n_k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.1-58}$$

由上可见，量子场好像是一系列的谐振子的组合，对应于自由空间的每一自由度 $\boldsymbol{k}$，相当于存在一个一维谐振子，这个谐振子具有 $H = \omega_k\left(N_k + \frac{1}{2}\right)$ 的哈密顿量. 当然，量子标量场并非一系列谐振子的组合，只是二者在数学求解中存在的某些相似之处罢了.

由于

$$\dot{H} = [H, H] = HH - HH = 0 \tag{2.1-59}$$

因此，在分立空间中，自由量子标量场能量守恒.

又由式(2.1-53)和式(2.1-54)知

$$\dot{\boldsymbol{p}} = [H, \boldsymbol{p}] = H\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}H$$

$$= \sum \frac{\omega}{2}(a_k^+ a_k + a_k a_k^-) \cdot \sum \frac{\boldsymbol{k}}{2}(a_k^- a_k + a_k a_k^+)$$
$$- \sum \frac{\boldsymbol{k}}{2}(a_k^+ a_k + a_k a_k^+) \cdot \sum \frac{\omega}{2}(a_k^+ a_k + a_k a_k^-)$$
$$= \sum \frac{1}{4}\omega \boldsymbol{k}[(a_k^+ a_k + a_k a_k^-)^2 - (a_k^- a_k + a_k a_k^-)^2]$$
$$= 0 \qquad (2.1\text{-}60)$$

因此，在分立动量空间中，自由量子标量场满足动量守恒.

再由式(2.1-53)及式(2.1-55)，我们有

$$\dot{N}_k = [H, N_k] = HN_k - N_k H$$
$$= \sum \frac{\omega}{2}\{[a_k^+ a_k + a_k a_k^-]a_k^+ a_k - a_k^+ a_k[a_k^+ a_k + a_k a_k^-]\}$$
$$= \sum \frac{\omega}{2}[(a_k^- a_k)^2 + a_k a_k^{-2} a_k - (a_k^- a_k)^2 - a_k^- a_k^2 a_k^-]$$
$$= \sum \frac{\omega}{2}[a_k a_k^{+2} a_k - a_k^+ a_k^2 a_k^+]$$
$$= \sum \frac{\omega}{2}[(a_k^+ a_k + 1)(a_k^+ a_k) - a_k^- a_k(a_k^+ a_k + 1)]$$
$$= 0 \qquad (2.1\text{-}61)$$

这说明，在分立动量空间中，自由量子标量场的粒子数守恒. 它表明，动量为 k 的粒子数 N_k 不随时间而变化. 只有当场与外界存在相互作用时，粒子产生或湮灭，粒子数守恒才受到破坏.

按照量子力学，两个对易的算符具有共同的本征态，因此，H、$\boldsymbol{p}$、N_k 诸量应具有共同的本征态 $|n_k, n_{k'}\cdots\rangle$，式(2.1-56)能量算符的本征方程为

$$H|n_k, n_{k'}\cdots\rangle = \sum_k \omega\left(N_k + \frac{1}{2}\right)|n_k, n_{k'}\cdots\rangle$$

同理，

$$\boldsymbol{p}|n_k, n_{k'}\cdots\rangle = \sum_k \boldsymbol{k}\left(N_k + \frac{1}{2}\right)|n_k, n_{k'}\cdots\rangle$$

$$N_N|n_k,n_{k'}\cdots\rangle = n_k|n_k,n_{k'}\cdots\rangle$$

因此，能量、动量和粒子数算符的本征值分别是 $\sum_k \omega\left(n_k+\frac{1}{2}\right)$、$\sum k\left(n_k+\frac{1}{2}\right)$ 及 n_k.

标量量子场的本征态 $|n_k,n_{k'}\cdots\rangle$ 表示场中存在一定数目的粒子状态. 具体说来，它表示场中有动量为 k、能量为 $\omega(=\hbar\omega)$ 的粒子数为 n_k，动量为 k'、能量为 ω' 的粒子数为 $n_{k'}$…….

类似地有

$$\begin{aligned} a_k|n_k\rangle &= \sqrt{n_k}\,|n_k-1\rangle \\ a_k^+|n_k\rangle &= \sqrt{n_k+1}\,|n_k+1\rangle \end{aligned} \tag{2.1-62}$$

因此，我们称 a_k^+ 为产生算符，而称 a_k 为湮灭算符，因为它们对本征态 $|n_k\rangle$ 作用后分别能产生(或湮灭)一个动量为 k 的粒子.

量子场的粒子，与场的某一激发态相对应. 考虑到真空态是不存在任何粒子的一种量子场状态，因此，对于真空态，有

$$|0\rangle = |0,0\cdots\rangle \tag{2.1-63}$$

由式(2.1-62)，可知具有 n_k 个动量为 k 的粒子的量子态为

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(a_k^+)^{n_k}|0\rangle \tag{2.1-64}$$

类似地，对于存在 n_k 个动量为 k 的粒子和 $n_{k'}$ 个动量为 k' 的粒子态为

$$|n_k,n_{k'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!\;n_{k'}!}}(a_k^+)^{n_k}(a_{k'}^+)^{n_{k'}}|0\rangle \tag{2.1-65}$$

在真空态下，由于 $n_k=0$，由能量算符的本征值 $\sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(n_k+\frac{1}{2}\right)$ 知，真空态下量子场仍然有能量 $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\omega$. 这一能

量，称为自由标量场的零点能，通过对动量 k 的求和，该零点能会变为无穷大，幸好这个无穷大不至于给我们带来“发散困难”的麻烦，因为只要我们重新把能量的量测标尺“重整化”，就容易摆脱无穷大零点能所带来的困扰了.

上面我们所讨论的单分量厄米标量量子场，由于其场函数能由一个实数所确定，故也称为实标量场. 有时，除中性的 π^0、k^0 等介子外，我们还会处理带电的 $\pi^{\pm}$、$k^{\pm}$ 等介子的情况，由于这种介子已存在两个电荷自由度，仍沿用上述单分量厄米场的方法处理已不可能，这就要运用所谓的“复标量场”理论进行处理了.

在结束本节之前还必须指出，自然界形形色色的基本粒子，可以分成玻色子和费米子，它们都是全同粒子. 玻色子满足玻色统计法则，费米子则满足费米统计法则. 费米子服从泡利原理，没有任何两个费米子能处于同一状态中. 同时，玻色子的波函数是对称的，费米子却是反对称的. 标量量子场的粒子是玻色子.

第二节　电磁场的量子化

电磁场是人们比较熟悉的场，也是理论体系比较完整的经典场之一. 因此，人们在对经典场进行量子化的过程中，首先处理的是经典电磁场的量子化问题. 但是，电磁场的场变量含有关于时间、空间的多个分量，加上作为电磁场的场量子——光子的质量为零，这些都给电磁场的量子化造成不少困难. 经过长时间的努力，人们终于在对电磁场的量子化工作中，得到了较完满的解决，乃至发展成为量子电动力学. 电磁场量子化的成功，不仅为建立量子电动力学提供了理论基础，同时，量子场论中其他有关场的量子化的

理论与概念，在某种程度上都与电磁场的量子化理论紧密相关. 可以说，量子场论的很多概念和理论基础，是借助于量子电动力学发展起来的.

一、经典电磁场

在讨论电磁场的量子化理论之前，有必要先了解经典电磁场的基本理论基础. 我们知道，根据经典电动力学，电磁场的基本运动规律是麦克斯韦(Maxwell)方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2-1}$$

此处，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 是电场的物理量，而 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是磁场方面的物理量. 方程组(2.2-1)指出，静电场是有源无旋场，而稳定磁场是无源有旋场，电磁场被统一成一体，变化的电场能激发涡旋磁场，而变化的磁场能激发涡旋电场. 在时变电磁场情况下，电磁场内部存在着矛盾与运动，不仅电荷、电流可以激发电磁场，而且变化的电场和磁场也可以互相激发. 麦克斯韦方程组不仅揭示了电磁场的运动规律，而且揭示出电磁场可以独立于电荷和电流之外单独存在.

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 可以统一由一个四维势 $A_\mu(\mu=1,2,3,4)$表示，即

$$A_\mu=A_\mu(A_1,A_2,A_3,A_4) \tag{2.2-2}$$

这里 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(A_1,A_2,A_3)$是由四维势的前三个分量构成的三维磁矢势，而四维势的第四个分量

$$A_4=\mathrm{i}\varphi \tag{2.2-3}$$

此处 φ 为电标势. 因此，电磁场的四维势

$$A_\mu = A_\mu(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi) \tag{2.2-4}$$

且场与势满足关系

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}\right\} \tag{2.2-5}$$

由麦克斯韦方程组及场与势的关系，不难求出，电磁势 $\boldsymbol{A}$ 与 φ 间存在着关系：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 j \end{aligned}\right\} \tag{2.2 6}$$

方程组(2.2-6)是四维势 $A_\mu(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\Phi)$ 满足的方程. 但是，根据(2.2-6)，我们还不能完全确定 A_μ. 这是因为 A_μ 是不可直接测量的量，而实验能直接测量的只是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}$. 当 A_μ 作如下变换时，

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(x) \to \boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) + \nabla G(x) \\ &\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(x) \end{aligned}\right\} \tag{2·2-7}$$

仍能维持 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 不变，此处 $G(x)$ 是某一任意的标量函数. 这就是说，势 $A_\mu(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\varphi)$ 在式(2.2-7)变换下，仍能维持电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 不变，四维势 A_μ 的这种变换，称为势的规范变换.

电磁势 A_μ 的规范变换有两种，一种称为库仑规范，另一种称为洛仑兹规范.

在库仑规范条件下，令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.2-8}$$

因而，由方程组(2.2-6)有

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0 \tag{2.2-9}$$

$$\Box^2\boldsymbol{A} - \nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0 j \tag{2.2-10}$$

此处

$$\Box^2=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu}=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.2-11}$$

代表四维拉普拉斯算子. 式(2.2-9)就是泊松方程. 对于自由场($\rho=j=0$),可令电标势 $\varphi=0$,因此,由式(2.2-10),有

$$\Box^2\boldsymbol{A}=0 \tag{2.2-12}$$

这就是在库仑规范条件下,自由电磁场的波动方程(也称达朗贝尔方程).

若选择规范条件(称洛仑兹规范)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

或

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{2.2-13}$$

则式(2.2-6)化为

$$\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.2-14}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

称式(2.2-13)为洛仑兹规范条件. 若引入四维电流密度

$$j_\mu=j_\mu(\boldsymbol{j},\mathrm{i}c\rho)$$

并考虑到四维电磁势 $A_\mu\left(\boldsymbol{A},\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$,那么,方程(2.2-14)可表为

$$\Box^2A_\mu=-\mu_0j_\mu \tag{2·2-15}$$

在自由场条件下,有

$$\Box^2A_\mu=0 \tag{2.2-16}$$

这就是在洛仑兹规范条件下自由电磁场方程(达朗贝尔方程).

电磁场 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$,可由关系式(2.2-5)用电磁势$(\boldsymbol{A},\varphi)$表示. 由电动力学不难看到,电场 $\boldsymbol{E}$ 的诸分量为

$$\left.\begin{aligned}
E_1&=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)\\
E_2&=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)\\
E_3&=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)\\
B_1&=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\\
B_2&=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\\
B_3&=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}
\end{aligned}\right\}\tag{2.2-17}$$

若引入一个四维反对称张量

$$F_{\mu\upsilon}=\frac{\partial A_\upsilon}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\upsilon}\tag{2.2-18}$$

则由式(2.2-17)可见，电磁场构成一个四维张量

$$F_{\mu\upsilon}=\begin{bmatrix}
0 & B_3 & -B_2 & -\dfrac{\mathrm{i}}{c}E_1\\
-B_3 & 0 & B_1 & -\dfrac{\mathrm{i}}{c}E_2\\
B_2 & -B_1 & 0 & -\dfrac{\mathrm{i}}{c}E_3\\
\dfrac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \dfrac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \dfrac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0
\end{bmatrix}\tag{2.2-19}$$

利用电磁场张量，我们可以将麦克斯韦方程组(2.2-1)写成明显的协变形式. 事实上，在方程组(2.2-1)中，含源的第一、四两式可合并写成

$$\frac{\partial F_{\mu\upsilon}}{\partial x_\upsilon}=\mu_0 j_\mu\tag{2.2-20}$$

而方程组(2.2-1)不含源的第二、三两个式子，也可合并写成

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{2.2-21}$$

式(2.2-20)、(2.2-21)就是麦克斯方程组(2.2-1)的洛仑兹协变形式，它们都用四维二阶张量表示.

二、矢量场的拉格朗日密度

若我们这样选择矢量场的四维势 A_μ，使它满足洛仑兹不变性的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 并具有如下形式

$$\mathscr{L}=a\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}+bA_\mu A_\mu \tag{2.2-22}$$

那么，对这样的拉氏密度，由场的欧拉-拉格朗日方程可以导出矢量场的 K-G 方程. 事实上，因为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)}=2a\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

及

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=2bA_\mu$$

所以，由欧拉-拉格朗日方程有

$$2a\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2}-2bA_\mu=0$$

或

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2}-\frac{b}{a}A_\mu=0$$

若令 $\dfrac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}=\Box^2$，$\dfrac{b}{a}=m^2$

则上式可表为

$$(\Box^2-m^2)A_\mu=0 \tag{2.2-23}$$

这就是矢量场的 K-G 方程. 对电磁场说来，其相应的粒子(光子)的静止质量 $m=0$，因此，式(2.2-23)转化为

$$\Box^2 A_\mu = 0 \tag{2.2-24}$$

这正是自由电磁场方程(2.2-16)

我们选择 $\mathscr{L}$ 的表示式(2.2-22)中的系数 $a=-\frac{1}{2}$，以保证场的总能及动量具有正定值，同时，考虑到光子质量 $m=0$，所以，系数 $b=am^2=0$，因此，矢量场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{2.2-25}$$

若令四维势 A_μ 作为矢量场的正则坐标，那么，其共轭正则动量

$$\begin{aligned}\pi_\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_\mu}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{A}_\mu}\left[-\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k}\right)^2 + \dot{A}_\mu^2\right]\\ &= \dot{A}_\mu\end{aligned}$$

所以　　$$\pi_\mu = \dot{A}_\mu \tag{2.2-26}$$

因此，对应于矢量场的正则坐标 A_μ 及其共轭动量 π_μ，可以得到矢量场的量子化规则

$$\begin{aligned}&[A_\mu(x,t),\pi_\nu(x',t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta(x-x')\\ &[A_\mu(x,t),A_\nu(x',t)] = [\pi_\mu(x,t),\pi_\nu(x',t)] = 0\end{aligned} \tag{2.2-27}$$

因而，对于电磁场 A_μ，在选择形如(2.2-22)的拉氏密度后，我们既能导致自由场的 K-G 方程(2.2-24)，还可由 A_μ 及其共轭动量 π_μ 所满足的量子化规则实现对电磁场的量子化.

必须指出，上述的矢量场 A_μ 其实一般地说还不能称为电磁场，这是因为 $A_\mu(\boldsymbol{A}, ic\varphi)$ 有四个分量 A_1、A_2、A_3、A_4，而且 $A_4 = ic\varphi = i\varphi$，因此可以将 A_μ 看做由四个标量场组成，因而，矢量场 A_μ 的量

子化，可以延伸为四个标量场的量子化，而这样处理矢量场 A_μ 的量子化，并不等于对电磁场量子化，这是因为矢量场 A_μ 只有在满足洛仑兹规范条件 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$ 时才是电磁场. 因此，对于电磁场的量子化，要分两步处理：首先，对矢量场 A_μ 直接进行量子化，其次，再处理附加的洛仑兹条件(2.2-13)，并分析其所包含的物理内涵.

三、矢量场的量子化

矢量场 $A_\mu(\boldsymbol{A}, i\varphi)$ 含有四个时空分量，且满足自由场方程(2.2-16)，因此，可以把矢量场当做不带电的、质量 $m=0$ 的四个实标量场处理，只不过 A_μ 的四个分量必须构成一个四维矢量，且其中前三个分量 A_1、A_2、A_3 是厄米标量场，而 $A_4=i\varphi$ 是反厄米标量场. 因此，我们可以沿用标量场的量子化方法实现对矢量场的量子化.

按照矢量场的拉格朗日密度(2.2-25)，可求得矢量场的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} \\ &= \pi_\mu\pi_\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} \\ &= \left(\pi_\mu\pi_\mu - \frac{1}{2}\dot{A}_\mu\dot{A}_\mu\right) + \frac{1}{2}\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu \\ &= \frac{1}{2}(\pi_\mu\pi_\mu + \nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu) \end{aligned} \tag{2.2-28}$$

所以场的总哈密顿量及总动量分别为

$$H = \int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x \tag{2.2-29}$$

$$\boldsymbol{p} = -\int \pi_\mu \nabla A_\mu \mathrm{d}^3x \tag{2.2-30}$$

与标量场的量子化类似，矢量场的量子化规则是

$$[A_\mu(x,t),\pi_\nu(x',t)]=\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}\delta(x-x')$$
$$[A_\mu(x,t),A_\nu(x',t)]=[\pi_\mu(x,t),\pi_\nu(x',t)]=0 \tag{2.2-31}$$

矢量场的正则运动方程为

$$\dot{A}_\mu=\mathrm{i}[H,A_\mu]$$
$$\dot{\pi}_\mu=\mathrm{i}[H,\pi_\mu] \tag{2.2-32}$$

若 $F=F(A_\mu,\pi_\mu)$是矢量场的某一物理量，则也有海森堡运动方程

$$\dot{F}=\mathrm{i}[H,F] \tag{2.2-33}$$

同样地，可以得出矢量场的能量守恒，这是因为

$$\dot{H}=\mathrm{i}[H,H]=0$$

还可以证明，矢量场满足动量守恒

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\mathrm{i}[H,\boldsymbol{p}]=0 \tag{2.2-34}$$

由于 $\boldsymbol{p}$ 与 H 可对易，因此，能量、动量具有共同的本征态$|n\rangle$，且

$$p_\mu|n\rangle=k_{\mu n}|n\rangle$$

此处，$k_{\mu n}(\boldsymbol{k}_n,\mathrm{i}E_n)$是对应于四动量 $p_\mu(\boldsymbol{p},\mathrm{i}H)$关于本征态$|n\rangle$的本征值.

四、动量空间展开　极化矢量

类似于标量场的处理，矢量场 A_μ 在连续动量空间中的傅利叶展开为

$$A_\mu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega}}[a_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+a_\mu^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{2.2-35}$$

及　　$\pi_\mu(x)=\dot{A}_\mu(x)$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - a_\mu^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] \tag{2.2-36}$$

考虑到分立动量空间与连续动量空间的如下对应关系

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \to \frac{1}{V}\sum_k$$

因而，对于分立动量空间，矢量场的场函数 $A_\mu(x)$ 及其共轭动量 $\pi_\mu(x)$ 可表示为

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a_\mu^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] \tag{2.2-37}$$

及

$$\pi_\mu(x) = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a_\mu(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - a_\mu^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] \tag{2.2-38}$$

由以上各式可知，在动量空间中，矢量场的场量 $A_\mu(x)$ 及其共轭动量 $\pi_\mu(x)$ 都决定于变量 $a_\mu(x)$ 和 $a_\mu^-(k)$. 考虑到宏观的电磁波偏振或微观粒子（光子）的极化才是宏观实验仪表所能观测的量，因此，为了能反映实验实际情况，必须把动量空间中的矢量场变量 $a_\mu(k)$、$a_\mu^+(k)$ 按极化坐标取分量.

若以垂直光子运动方向设置坐标的第一、二轴，沿光子运动方向设置坐标系的第三轴，并使三个坐标轴构成右手系（时间轴与一般取法相同），这样建立的坐标系，称为极化坐标系（如图 2-1 所示）. 因此，极化坐标系的单位矢可表示为

$e_\mu^1(1,0,0,0)$ 横向极化矢量

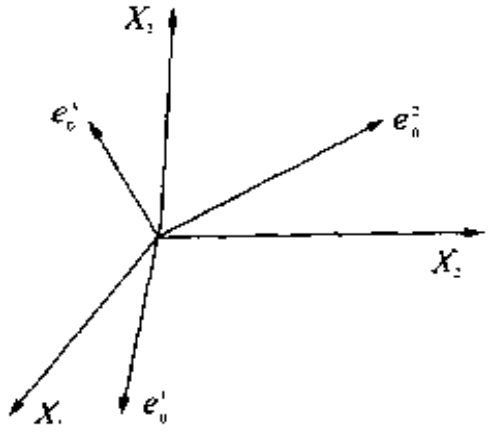


图 2-1 极化坐标系

$e_\mu^2(0,1,0,0)$　横向极化矢量

$e_\mu^3(0,0,1,0)$　纵向极化矢量

$e_\mu^4(0,0,0,1)$　标量极化矢量(沿时轴)

因此，e_μ^σ 与动量 k 的标积可表示为

$$k_\mu e_\mu^\sigma = \begin{cases} 0 & (\sigma=1,2) \\ |\boldsymbol{k}| = \omega & (\sigma=3) \\ i\omega & (\sigma=4) \end{cases} \qquad (\mu \text{ 取 } 1\sim4) \tag{2.2-39}$$

必须指出，e_μ^4 沿时间轴方向，称为标量极化矢量或零极化矢量，且四个极化矢量在四维时空中满足正交归一条件：

及

$$\left.\begin{aligned} e_\mu^\sigma \cdot e_\mu^\tau &= \delta_{\sigma\tau} \\ \sum e_\mu^\sigma e_\nu^\sigma &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\sigma,\tau = 1,2,3,4) \tag{2.2-40}$$

为了将动量空间中的场变量 $a_\mu(k)$、$a_\mu^+(k)$ 用极化坐标系中的 $a_\sigma(k)$、$a_\sigma^+(k)$ 表示，考虑到 $a_\sigma(k)$、$a_\sigma^+(k)$ 是矢量场的极化为 σ 的动量空间场变量及其共轭量，即场变量 $a_\mu(k)$、$a_\mu^+(k)$ 在极化坐标系中的分量，因此，

$$\left.\begin{aligned} a_\mu(k) &= \sum_{\sigma=1}^{4} a_\sigma(k) e_\mu^\sigma \\ a_\mu^+(k) &= \sum_{\sigma=1}^{4} a_\sigma^+(k) e_\mu^\sigma \end{aligned}\right\} \tag{2.2-41}$$

根据 e_μ^σ 的正交归一条件(2.2-40)，可得

$$\begin{aligned} a_\sigma(k) &= a_\mu(k) e_\mu^\sigma \\ a_\sigma^+(k) &= a_\mu^+(k) e_\mu^\sigma \end{aligned} \tag{2.2-42}$$

将式(2.2-41)代入式(2.2-35)、(2.2-36)，则在连续动量空间中有

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sum_{\sigma=1}^{4} e_\mu^\sigma \left[a_\sigma(k) e^{ikx} + a_\sigma^+(k) e^{-ikx}\right] \tag{2.2-43}$$

$$\pi_\mu(x) = \dot{A}_\mu$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\sqrt{\frac{\omega}{2}}\sum_{\sigma=1}^{4}\mathrm{e}_\mu^\sigma[a_\sigma(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - a_\sigma^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{2.2-44}$$

类似地，代入式(2.2-37)及式(2.2-38)，则在分立动量空间中有

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\sigma=1}^{4}\mathrm{e}_\mu^\sigma[a_\sigma(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + a_\sigma^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{2.2-45}$$

$$\pi_\mu(x) = \dot{A}_\mu(x)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{V}}\sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}}\sum_{\sigma=1}^{4}\mathrm{e}_\mu^\sigma[a_\sigma(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - a_\sigma^+(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{2.2-46}$$

类似于(2.1-46)式的推导，我们有

$$a_\sigma^+(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}_\mu^\sigma[\omega A_\mu(x) - \mathrm{i}\pi_\mu(x)] \tag{2.2-47}$$

同理

$$a_\sigma(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}_\mu^\sigma[\omega A_\mu(x) + \mathrm{i}\pi_\mu(x)] \tag{2.2-48}$$

由坐标空间中 $A_\mu(x)$及 $\pi_\mu(x)$的量子化规则(2.2-27)，利用正交归一条件(2.2-40)及式(2.2-47)、(2.2-48)，可以导出极化坐标分量 $a_\sigma(k)$、$a_\sigma^-(k)$所满足的量子化条件(对易关系)为

$$\left.\begin{aligned}&[a_\sigma(k),a_\tau^+(k')] = \delta_{\sigma\tau}\delta^3(k-k')\\&[a_\sigma(k),a_\tau(k')] = [a_\sigma^+(k),a_\sigma^+(k')] = 0\end{aligned}\right\} \tag{2.2-49}$$

至于矢量场的总能

$$H=\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x$$
$$=\int \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}[\pi_\mu\pi_\mu+\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu]$$
$$=\int \mathrm{d}^3x\,\frac{\omega}{2}\sum_{\sigma=1}^{4}[a_\sigma^+(k)a_\sigma(k)+a_\sigma(k)a_\sigma^+(k)] \quad (2.2\text{-}50)$$

令　　$N_\sigma(k)=a_\sigma^+(k)a_\sigma(k)$　　(2.2-51)

为单位动量空间体积中极化为 σ 的矢量粒子数算符，所以，根据量子化条件(2.2-49)

$$a_\sigma a_\sigma^+=a_\sigma^+a_\sigma+1=N_\sigma(k)+1$$

故

$$H=\sum_k\frac{\omega}{2}\sum_{\sigma=1}^{4}[a_\sigma^+a_\sigma+a_\sigma^+a_\sigma+1]$$
$$=\sum_k\omega\Big[\sum_{\sigma=1}^{4}N_\sigma(k)+2\Big] \quad (2.2\text{-}52)$$

略去零点能，则

$$H=\sum_k\omega\sum_{\sigma=1}^{4}N_\sigma(k) \quad (2.2\text{-}53)$$

类似处理，对四动量有

$$p_\mu=\sum_k\frac{k_\mu}{2}\sum_{\sigma=1}^{4}[a_\sigma^+(k)a_\sigma(k)+a_\sigma(k)a_\sigma^-(k)] \quad (2.2\text{-}54)$$

及

$$\boldsymbol{p}=p_k=\sum_k\boldsymbol{k}\sum_{\sigma=1}^{4}N_\sigma(k) \quad (2.2\text{-}55)$$

利用连续动量空间与分立动量空间的对应关系，还可以求出分立空间中能量与动量的表示式. 在上述诸式中，$a_\sigma^+(k)$是产生一个动量为 k、极化为 σ 的粒子的产生算符，而 $a_\sigma(k)$是湮灭一个动量为 k、极化为 σ 的粒子的湮灭算符.

五、矢量场的粒子态

在上面讨论中，我们把矢量场 $A_\mu(x)$ 看成四个标量场 A_1、A_2、A_3、A_4，并且引用标量场量子化方式处理矢量场量子化. 但是，这样处理并不等于完成了电磁场的量子化，为了实现电磁场的量子化，有必要对矢量场的特点做进一步讨论.

根据式(2.2-43)，我们将坐标空间中的矢量场变量 $A_\mu(x)$ 分解成两部分之和

$$A_\mu(x)=A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x)$$

式中

$$A_\mu^{(-)}(x)=\sum_{\sigma=1}^{4}A_\mu^{\sigma(-)}(x)$$

$$A_\mu^{(+)}(x)=\sum_{\sigma=1}^{4}A_\mu^{\sigma(+)}(x)$$

且

$$\left.\begin{aligned}A_\mu^{\sigma(+)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\mathrm{d}^3k\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{e}_\mu^\sigma a_\sigma^+(k)\\A_\mu^{\sigma(-)}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\mathrm{d}^3k\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{e}_\mu^\sigma a_\sigma(k)\end{aligned}\right\}\qquad(2.2\text{-}56)$$

分别代表在空间某点(x,t)处，单位坐标空间体积内产生和湮灭一个极化为 σ 的矢量粒子的算符.

按照“极化矢量”部分(见本章第二节及图 2-1)的讨论，矢量场的粒子，由于其极化不同而不同，一般称具有横向极化的矢量粒子为横光子，而称具有纵向极化和标量极化的矢量粒子为纵向光子和标量光子. 不同矢量粒子具有不同的极化状态，实质上与矢量粒子自旋分量的不同相关. 矢量场的量子，可以由自旋为 1 的三个自旋本征态(即 $s=\pm1,0$ 的自旋三重态)和自旋为 0 的单重态构

成，自旋分量为+1的光子态(右旋圆偏振横光子态)和自旋分量为−1的光子态(左旋圆偏振横光子态)是实际存在的光子态，而自旋分量为0的态(纵光子态)和自旋为0的单粒子态(标量光子态)却是实际电磁场中至今尚未发现的粒子态.这就是说，按照矢量场的量子化理论，对应于$\sigma=1$、2存在两种横光子态，而对应于$\sigma=3$存在纵光子态，对应于$\sigma=4$还存在标量光子态.但是，在电磁场中，只能找到与$\sigma=1$、2情况相对应的横光子，并不存在"纵光子"和"标量光子".因此，对电磁场进行量子化时，有必要注意它与矢量场的这一差异.为什么在矢量场与电磁场间会出现这一差异呢?这是因为，我们在导出自由电磁场方程(2.2-16)时，已利用了洛仑兹规范条件(2.2-13)，因此，在对电磁场进行量子化时，就不能直接沿用矢量场量子化处理方式，还要考虑到洛仑兹规范条件的影响.

必须指出，对矢量场量子化后，洛仑兹规范条件(2.2-13)不能再被直接引用，不然，将会导致与矢量场量子化条件矛盾的结论.这样，在对电磁场进行量子化时，除了采用矢量场$A_\mu(x)$的量子化处理外，还要寻找合乎电磁场实际的洛仑兹条件的表示形式.为此，让我们回顾经典物理与量子物理之间的关系.

我们知道，经典物理量一般用物理量的平均值，且它在经典物理中是c数(普通数).但是，同一物理量，在量子力学中已不是普通数，而成为q数(算符)，并且还要满足一定的对易关系(量子化规则).对应于经典物理学中物理量的平均值，量子力学采用期待值$\langle\psi|F|\psi\rangle$，在量子力学中，只有使物理量$F$存在期待值$\langle\psi|F|\psi\rangle$的态$\psi$才有实际意义.因此，费米在1932年提出应该这样理解洛仑兹条件：在经典电磁场中，并不是所有满足自由电磁场方程(2.2-16)的解都是实际存在的解，只有那些还同时也满足洛仑兹条件(2.2-13)的解才是客观真实的解.因此，在量子电磁理论中，

洛仑兹规范条件的意义应体会为：在所有可能的态中，只有那些使洛仑兹条件$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$的期待值等于零的态，才代表客观实际的态，也才是有实际意义的物理态，这样的态，表示为$|\rangle_W$. 因此，在对电磁场量子化时，除矢量场的量子化理论外，还要求满足如下的洛仑兹条件

$$w\langle\left|\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right|\rangle_W=0 \tag{2.2-57}$$

也就是说，我们不能将洛仑兹条件(2.2-13)直接看成算符恒等式，而应看成算符在某个物理态$|\rangle_W$中的期待值的恒等式. 这样，就可以避免出现与矢量场量子化条件相矛盾的结果. 因此，式(2.2-57)的意义是：所有可能的态中，只有满足$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}$的期待值等于零的态才是客观真实的物理态.

当然，在处理电磁场的量子化时，我们引入了关系式(2.2-57)避开了矛盾，但是，当我们把矢量场$A_\mu(A_1,A_2,A_3,A_4)$的四个分量看成厄米算符时，其前三个分量(即厄米算符A_1,A_2,A_3)的平均值(期待值)是实数，第四个分量A_4的期待值

$$\langle A_4\rangle=i\varphi$$

却出现了虚数，这就是说，电磁场量子化以后，场量A_μ的第四个分量A_4出现虚的期待值. 为了解决这个问题，人们引入度规算符η，并且有对易关系

$$[\eta,A_i(x)]=0,\{\eta,A_4(x)\}=0 \tag{2.2-58}$$

从而得出量子电磁场在不定度规下的洛仑兹条件的表述：

$$\left.\begin{aligned}&w\langle|\eta[a_3(k)+ia_4(k)]|\rangle_W=0\\&w\langle|\eta[a_3^\dagger(k)+ia_4^\dagger(k)]|\rangle_W=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2-59}$$

由于

$$N_3+N_4=a_3^\dagger a_3+a_4^\dagger a_4$$

$$=\frac{1}{2}(a_3^{\dagger}-\mathrm{i}a_4^{\dagger})(a_3+\mathrm{i}a_4)$$

$$+\frac{1}{2}(a_3^{\dagger}+\mathrm{i}a_4^{\dagger})(a_3-\mathrm{i}a_4)$$

因此，利用(2.2-59)关系，有

$$\langle(N_3+N_4)\rangle={}_w\langle|\eta(N_3+N_4)|\rangle_w$$

$$=\frac{1}{2}{}_w\langle\eta(a_3^{+}-\mathrm{i}a_4^{-})(a_3+\mathrm{i}a_4)|\rangle_w$$

$$+\frac{1}{2}{}_w\langle|\eta(a_3^{+}+\mathrm{i}a_4^{+})(a_3-\mathrm{i}a_4)|\rangle_w$$

$$=0$$

或　　$\langle N_3\rangle+\langle N_4\rangle=0$

又由关系式(2.2-53)及(2.2-55)，电磁场的能量 H 及动量 $\boldsymbol{p}$ 分别为

$$\langle H\rangle={}_w\langle|\eta H|\rangle_w$$

$$=\int \mathrm{d}^3k\cdot\omega\,{}_w\langle|\eta(N_1+N_2)|\rangle_w \qquad (2.2\text{-}60)$$

$$\langle\boldsymbol{p}\rangle={}_w\langle|\eta\boldsymbol{p}|\rangle_w$$

$$=\int \mathrm{d}^3k\,{}_w\langle|\eta(N_1+N_2)|\rangle_w\boldsymbol{k} \qquad (2.2\text{-}61)$$

这就是说，受限于洛仑兹条件(2.2-59)，只有横极化($\sigma=1,2$)的横光子对电磁场的能量与动量有贡献.由此可见，电磁波是横波，它所对立的只有两种横光子，而 $\sigma=3$ 的纵光子和 $\sigma=4$ 的标量光子对电磁场的能量、动量无贡献.

第三节　旋量场的量子化

上面讨论的标量场的量子化是关于自旋为零的粒子的场的量

子化问题，而电磁场（或者说矢量场）的量子化是有关自旋为 1 的光子的量子化问题，但是，对于像电子、μ 子和 ν 介子等轻子以及诸如质子、中子和 Σ 超子等重子都是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子，它们除了有空间坐标自由度外，还存在自旋自由度，因而不能用标量场的理论描述. 我们知道，狄拉克方程可以近似地描述单个费米子的运动，成功地解释原子光谱中的精细结构现象，但对于更精密的现象，如兰姆能级移动和真空极化等现象，狄拉克的理论就难以适用了. 另外，狄拉克方程既不能描述多个粒子的运动，又不能反映粒子的产生与湮灭现象，同时它还受到负能困难的困扰. 所有这些现象，只有把狄拉克方程当做经典场方程，然后进一步将其量子化，即采用量子化的费米子场的理论来处理和解决问题.

一、γ 矩阵的性质

在第一章第一节，我们曾遵循狄拉克的基本思想，建立了狄拉克方程(1.1-18)，即

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{2.3-1}$$

它是关于自旋为 1/2 的粒子的相对论运动方程的四维协变形式，此处 $\gamma_\mu(\gamma_j, \gamma_4)$ 是由(1.1-19)式所表示的 γ 矩阵. 为了进一步了解 γ-矩阵的性质，以 $(\gamma_\nu\partial_\nu - m)$ 作用于(2.3-1)，有

$$(\gamma_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\partial_\mu - m^2)\psi(x) = 0 \tag{2.3-2}$$

或写成

$$(\gamma_\mu\gamma_\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi(x) = 0 \tag{2.3-3}$$

上述两式出现对时间的二次微商，其形式与 K-G 方程相似，如果再将上两关系式相加可得

$$[(\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu)\partial_\mu\partial_\nu - 2m^2]\psi(x) = 0$$

为要求它与 K-G 方程(1.1-6)一致，显然应有

$$(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\mu\gamma_\nu)=2\delta_{\mu\nu}$$

以泊松括号表示，则有

$$\{\gamma_\nu,\gamma_\mu\}=2\delta_{\mu\nu} \tag{2.3-4}$$

不难见到，当 $\mu=\nu$ 时，有

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=1 \qquad (\text{当 } \mu=\nu \text{ 时}) \tag{2.3-5}$$

及

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=0 \qquad (\text{当 } \mu\neq\nu \text{ 时}) \tag{2.3-6}$$

即　　$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=0$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$$

可见，γ 矩阵是满足反对易关系的.

在高等量子力学中，通常采用(1.1-10)式表示三维狄拉克方程

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi=0$$

或记为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\mathrm{i}\beta m\right)\psi=0 \quad (j=1,2,3) \tag{2.3-7}$$

假设粒子存在某些分立态，例如，在同一动量状态下存在不同的自旋取向，那么，波函数 ψ 就不仅只有一个分量，而应以一列矩阵表示，

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

与 ψ 厄米共轭的矩阵是

$$\psi^\dagger=(\psi_1^*,\psi_2^*,\cdots) \tag{2.3-8}$$

由于波函数 ψ、$\psi^\dagger$ 是矩阵，那么，式(2.3-8)中的算符 α_j 和 β 也应为矩阵. 为保证几率密度 $\rho=\psi^+\psi$ 的正定以避免负几率困难的困扰，α_j、β 应是厄米矩阵：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_j^+ &= \alpha_j \\ \beta^+ &= \beta\end{aligned}\right\} \tag{2.3-9}$$

又由于 ψ 是 N 行一列矩阵，所以，α_j、β 应是 N 行 N 列方阵，通常采用最简单的 4×4 方阵，按照式(1.1-15)，我们有

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j=1,2,3) \tag{2.3-10}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$$

此处，σ_j 是泡利矩阵(1.1-14)，而 I_2 是 2×2 单位矩阵，即 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，考虑到 α、β 是厄米矩阵，那么，α、β 应满足如下关系

$$\alpha_k\alpha_l + \alpha_l\alpha_k = 2\delta_{kl} \qquad (k,l=1,2,3) \tag{2.3-11}$$

$$\alpha_k\beta + \beta\alpha_k = 0 \tag{2.3-12}$$

$$\beta^2 = 1 \tag{2.3-13}$$

在 $k=l$ 时，由式(2.3-11)有

$$\alpha_k^2 = 1 \tag{2.3-14}$$

利用上述这些关系，可以求出 γ-矩阵的另一些性质.

令

$$\left.\begin{aligned}\gamma_k &= -\mathrm{i}\beta\alpha_k \\ \gamma_4 &= \beta\end{aligned}\right\} \tag{2.3-15}$$

再以 $(-\mathrm{i}\beta)^2$ 左乘式(2.3-11)，并考虑到式(2.3-13)及(2.3-15)，则有

$$\gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k = 2\delta_{kl} \tag{2.3-16}$$

若以 $(-\mathrm{i}\beta)$ 乘式(2.3-12)，则有

$$\gamma_k\beta + \beta\gamma_k = 0$$

或

$$\gamma_k\gamma_4 + \gamma_4\gamma_k = 0$$

又因为 $\beta^2=1$，且 $\beta=\gamma_4$，所以

$$\gamma_4\gamma_4+\gamma_4\gamma_4=\beta^2+\beta^2=2 \tag{2.3-17}$$

综合考虑式(2.3-16)与式(2.3-17)式，我们有

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{2.3-18}$$

或　　$\gamma_\mu\gamma_\nu=-\gamma_\nu\gamma_\mu$　($\mu\neq\nu$ 时)

这正是式(2.3-6)所反映的 γ-矩阵满足的反对易关系.

γ-矩阵可构成 16 个独立矩阵：

$$\Gamma_i\begin{cases} I(\text{单位矩阵}) & (1\text{ 个}) \\ \gamma_\lambda & (4\text{ 个})\quad(\gamma_k,\gamma_4) \\ \mathrm{i}\gamma_\nu\gamma_\mu\quad(\nu<\mu) & (6\text{ 个}) \\ \mathrm{i}\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda\quad(\nu<\mu<\lambda) & (4\text{ 个}) \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 & (1\text{ 个}) \end{cases} \tag{2.3-19}$$

再定义一个新矩阵，令

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \tag{2.3-20}$$

不难证明，γ_5 与 γ_μ 存在反对易关系

$$\gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0 \tag{2.3-21}$$

及

$$\gamma_5^2=1$$

事实上，由(2.3-20)知

$$\gamma_5^2=(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$$

利用 $\gamma_\mu\gamma_\nu$ 的反对易关系(2.3-18)，每对易两个 γ 一次，变一次符号，通过六次移易位置，有

$$\begin{aligned}\gamma_5^2&=(-1)^6\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2\\&=(-\mathrm{i}\beta\alpha_1)^2(-\mathrm{i}\beta\alpha_2)^2(-\mathrm{i}\beta\alpha_3)^2\cdot\beta^2\\&=\alpha_1^2\cdot\alpha_2^2\cdot\alpha_3^2\cdot\beta^2\\&=1\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_5&=\gamma_\mu(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)\\&=(-1)^3(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)\gamma_\mu\end{aligned}$$

$$=-\gamma_5\gamma_\mu\text{(在这里，}\gamma_\mu\text{与同脚标的}\gamma\text{移位时不变号)}$$

因此 $\gamma_\mu\gamma_5+\gamma_5\gamma_\mu=0$

故(2.3-21)的两个关系成立.

此外，可以证明，γ_5 还具有如下诸性质：

$$\gamma_5\gamma_\lambda\gamma_5=-\gamma_\lambda \tag{2.3-22}$$

$$\gamma_\lambda\gamma_5\gamma_\lambda=-\gamma_5 \tag{2.3-23}$$

及

$$\gamma_\mu^+=\gamma_\mu \tag{2.3-24}$$

$$\gamma_5^+=\gamma_5 \tag{2.3 25}$$

二、狄拉克方程的共轭形式

为了寻求狄拉克方程(2.3 1)的共轭形式，我们将其表示为

$$\partial_\mu\psi\gamma_\mu+m\psi=0$$

或

$$\gamma_j\partial_j\psi+\gamma_4\partial_4\psi+m\psi=0$$

取上式的共轭表示

$$\gamma_j\partial_j\psi^*-\gamma_4\partial_4\psi^*+m\psi^*=0$$

此处 ψ^* 是 ψ 的厄米共轭矩阵(2.3-8)，对上式右乘 γ_4 得

$$\gamma_j\partial_j\psi^*\gamma_4-\gamma_4\partial_4\psi^*\gamma_4+m\psi^*\gamma_4=0$$

考虑到 γ_4 与 γ_j 为反对易，即 $\gamma_4\gamma_j=-\gamma_j\gamma_4$，因此

$$-\partial_j\psi^*\gamma_4\gamma_j-\partial_4\psi^*\gamma_4\gamma_4+m\psi^*\gamma_4=0$$

令 $\bar\psi=\psi^*\gamma_4$，

则有 $-\partial_j\bar\psi\gamma_j-\partial_4\bar\psi\gamma_4+m\bar\psi=0$

或

$$\gamma_\mu\partial_\mu\bar\psi-m\bar\psi=0 \tag{2.3-26}$$

$$(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\bar\psi=0$$

这就是狄拉克方程(2.3-1)的共轭形式，这里，$\bar\psi=\psi^*\gamma_4$ 称为狄拉克波函数 ψ 的共轭波函数.

三、旋量场的分立对称变换

在这里，我们要讨论狄拉克方程的时、空反演不变性及电荷共轭变换问题.

1. 狄拉克方程的空间反演不变性

所谓空间反演，从数学上讲，是把空间坐标轴的方向颠倒过来，把右手坐标系变成左手坐标系. 或者说，在经空间反演变换后的四维坐标系里，各四维时空点的空间坐标改变符号而时间坐标不变号的变换，这相当于实现如下的线性变换

$$\begin{aligned} x &\to -x' \\ t &\to t' \end{aligned} \tag{2.3-27}$$

以上的空间反演变换，其实可以通过镜像来理解. 设在坐标原点处垂直放置三个平面镜，并使其三个法线方向分别与三个坐标轴的正向平行，那么，镜里的空间坐标轴（像）与实际的坐标轴的方向正好相反，而镜里的时间轴（像）与镜外的时间轴（物）并无区别. 当我们观察一物理过程时，可以在镜外的（真实的）坐标系里观察，也可以在镜内（像）的坐标观察，从镜外到镜内就实现了一次空间反演. 从经典力学的角度看，空间反演的物理结果是很直观的. 譬如，在反演前的坐标系里粒子的动量为 k，则在反演后的坐标系里粒子的动量为

$$k' = -k$$

若在反演前的坐标系里，粒子的轨道角动量为 $L = r \times k$，那么，在反演后的坐标系中，粒子的轨道角动量为

$$L' = (-r) \times (-k) = L$$

通常，对经空间反演后空间分量出现反号的四维矢量，称为极矢量（或正矢量），而对经空间反演后空间分量符号不变的四维矢量称为赝矢量（或轴矢量），四维动量是极矢量，而轨道角动量和自旋角

动量则是赝矢量.

如果把经典力学量用算符取代,则上述的结果适用于量子力学情况.以前,人们普遍认为,在微观世界里,左和右是完全对称的,也就是说,在空间反演变换下,微观过程的物理规律是不变的,量子体系的这种空间反演对称性导致了宇称守恒定律.1956 年,李政道、杨振宁从理论上预言了弱相互作用的宇称守恒不成立,这一理论后来为吴健雄的实验所证实,自此,人们认识到左右对称性不再是普遍成立的了.

为了证明狄拉克方程的空间反演不变性,我们将

$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}',t=t'$$

代入狄拉克方程(2.3-1)

$$\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi+m\psi=0$$

得

$$\left[\gamma_k\left(-\frac{\partial}{\partial x_k'}\right)+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4'}+m\right]\psi(-\boldsymbol{x}',t')=0 \tag{2.3-28}$$

设以 P 代表空间反演算符,且 P^{-1}是 P 的逆运算,即 $P^{-1}P=I$,且它们满足

$$\begin{aligned}&P\gamma_kP^{-1}=-\gamma_k\\&P\gamma_4P^{-1}=\gamma_4\end{aligned} \tag{2.3-29}$$

而将场量 $\psi(\boldsymbol{x},t)$的反演变换定义为

$$P\psi(\boldsymbol{x},t)=P\psi(-\boldsymbol{x}',t')=\psi'(\boldsymbol{x}',t') \tag{2.3-30}$$

再对方程(2.3-28)进行一次空间反演:

$$P\left\{\left[-\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k'}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4'}+m\right]\psi(-\boldsymbol{x}',t')\right\}=0$$

$$P\left\{\left[-\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k'}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4'}+m\right]P^{-1}P\psi(-\boldsymbol{x}',t')\right\}$$

并由式(2.3-29)的关系,有

$$\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k'}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4'}+m\right)P\psi(-\boldsymbol{x}',t')=0$$

再由式(2.3-30)，可得

$$\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k'}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4'}+m\right)\psi(\boldsymbol{x}',t')=0$$

或

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu'}+m\right)\psi(\boldsymbol{x}',t')=0 \tag{2.3-31}$$

因此，狄拉克方程经空间反演变换后，其形式保持不变. 这就是说，旋量场方程对空间反演是不变的.

2. 狄拉克方程的时间反演不变性

对四维时空坐标作如下的反演变换

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}&\to\boldsymbol{x}'\\ t&\to -t'\end{aligned}\right\} \tag{2.3-32}$$

称为时间反演变换.

为了考察狄拉克方程关于时间反演变换下的不变性，我们从狄拉克方程的共轭形式(2.3-26)出发，并把它记作

$$\gamma_\mu\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}-m\bar{\psi}=0 \tag{2.3-33}$$

对其做转置运算，则

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\right)^T-(m\bar{\psi})^t=0$$

因此有

$$\gamma_\mu^t\frac{\partial\psi^t}{\partial x_\mu}-m\psi^T=0 \tag{2.3-34}$$

或写成

$$\left(\gamma_k^T\frac{\partial}{\partial x_k}+\gamma_4^t\frac{\partial}{\partial x_4}-m\right)\bar{\psi}^T=0$$

对上式进行时间反演变换，有

$$\left(\gamma_k^I \frac{\partial}{\partial x_k^I}-\gamma_4^I \frac{\partial}{\partial x_4^I}-m\right)\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x}^I,-t^I)=0 \tag{2.3-35}$$

假定 T 是时间反演算符，且它与逆算符 T^{-1} 间满足

$$T^{-1}T=1$$

并且假设有关系：

$$\left.\begin{aligned} T\gamma_k^I T^{-1}&=-\gamma_k \\ T\gamma_4^I T^{-1}&=\gamma_4 \end{aligned}\right\} \tag{2.3-36}$$

再定义场量 $\psi^I(\boldsymbol{x}^I,t^I)$ 的时间反演量是

$$T\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x},t)=T\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x}^I,-t^I)=\psi^I(\boldsymbol{x}^I,t^I) \tag{2.3-37}$$

则对式(2.3-35)进行时间反演变换有

$$T\left\{\left(\gamma_k^I \frac{\partial}{\partial x_k^I}-\gamma_4^I \frac{\partial}{\partial x_4^I}-m\right)\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x}^I,-t^I)\right\}=0$$

或

$$T\left\{\left(\gamma_k^I \frac{\partial}{\partial x_k^I}-\gamma_4^I \frac{\partial}{\partial x_4^I}-m\right)T^{-1}T\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x}^I,-t^I)\right\}=0$$

利用关系式(2.3-36)，上式化为

$$\left(-\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k^I}-\gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4^I}-m\right)T\psi^I(\boldsymbol{x}^I,-t^I)=0$$

或

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^I}+m\right)\bar{\psi}^I(\boldsymbol{x}^I,t^I)=0$$

我们又回到了狄拉克方程的协变形式，这就是说，旋量场方程具有时间反演不变性.

3. 电荷共轭变换

为了讨论狄拉克方程在电荷共轭变换下的特性，让我们考察一个带电旋量粒子(质子或电子)在静电场 $V(\boldsymbol{x})$ 中的运动. 在这种情况下，粒子的波动方程为

$$\left[\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}+m+e\gamma_4 V(\boldsymbol{x})\right]\psi(x)=0 \tag{2.3-38}$$

与其共轭的方程是

$$\left[\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m - e\gamma_4^T V(x)\right]\overline{\psi}^t(x)=0 \tag{2.3-39}$$

假定存在一个电荷共轭算符 C，而 C^{-1}是 C 的逆算符，且 C^{-1}与 C 满足

$$\begin{aligned} &C^{-1}C=I \\ &C\gamma_\mu^T C^{-1}=-\gamma_\mu \end{aligned} \tag{2.3-40}$$

并定义 $\overline{\psi}^t(x)$的电荷共轭运算为

$$C\overline{\psi}^t(x)=\psi^C(x) \tag{2.3-41}$$

对方程式(2.3-39)进行电荷共轭运算：

$$C\left\{\left[\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m - e\gamma_4^T V(x)\right]\overline{\psi}^t(x)\right\}=0$$

或

$$C\left\{\left[\gamma_\mu^T \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m - e\gamma_4^T V(x)\right]C^{-1}C\overline{\psi}^t(x)\right\}=0$$

利用式(2.3-40)及式(2.3-41)的关系，有

$$\left[-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m + e\gamma_4 V(x)\right]\psi^C(x)=0$$

故

$$\left[\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - e\gamma_4 V(x)\right]\psi^C(x)=0 \tag{2.3-42}$$

将其与式(2.3-38)比较可见，它们的形式完全相似，只不过式(2.3-42)是在式(2.3-38)中改变电荷 e 的符号的结果. 因此，对旋量场进行 C 的变换，最后只改变电荷的符号，故称这种变换为电荷共轭变换. 由于这种变换使带电粒子的电荷符号发生变化，故也称其为粒子反粒子共轭变换.

4. 正反粒子波函数

我们知道，狄拉克方程存在正、负能解

$$E=\pm\sqrt{p^2+m^2} \tag{2.3-43}$$

对应于有确定的动量 p 和正值的能量($E>0$)的是正能解. 正能解是粒子态,其平面波解是

$$\psi^{(+)}(p,x)=u(p)e^{ipx} \tag{2.3-44}$$

对应的狄拉克共轭为

$$\psi^{(+)}(p,x)=\bar{u}(p)e^{-ipx} \tag{2.3-45}$$

将式(2.3-44)代入狄拉克方程

$$\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi+m\psi=0$$

可得动量空间中的波动方程

$$(i\gamma_\mu p_\mu+m)u(p)=0 \tag{2.3-46}$$

将式(2.3-45)代入式(2.3-26)

$$\gamma_\mu\partial_\mu\bar{\psi}-m\bar{\psi}=0$$

则可得

$$u(p)(i\gamma_\mu p_\mu+m)=0 \tag{2.3-47}$$

这里,$u(p)$有四个分量,由于它要满足方程(2.3-46)和(2.3-47),这样只有两个分量是独立的. 因此,方程(2.3-46)只有两个独立解,记作 $u_r(p)$.

其中
$$r=\begin{cases}1 & (\text{自旋为}+\frac{1}{2}\text{的态})\\ 2 & (\text{自旋为}-\frac{1}{2}\text{的态})\end{cases}$$

通常,称 $u_r(p)$ 为旋量(波函数). 因此,狄拉克正能粒子态由旋量 $u_r(p)$ 决定,它是具有动量为 p、自旋为 r 的粒子态.

至于与负能解对应的反粒子态,其平面波解及其共轭分别是

$$\psi^{(-)}(-p,x)=v(p)e^{-ipx} \tag{2.3-48}$$

$$\psi^{(-)}(-p,x)=\bar{v}(p)e^{ipx} \tag{2.3-49}$$

类似地,由狄拉克方程及其共轭形式,我们也可得

$$(-i\gamma_\mu p_\mu+m)v(p)=0 \tag{2.3-50}$$

$$\bar{v}(p)(-\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu+m)=0 \tag{2.3-51}$$

与正能解的情况类似，负能解也只有两个独立分量 $v_r(p)$，其中 $r=1$、2分别对应于自旋为 $+\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的两个负能粒子态.

四、旋量场的量子化

1. 旋量场的拉氏密度

描述旋量场的拉格朗日密度，可通过狄拉克波函数 ψ 及其共轭 $\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma_4$ 构成，即可由双线性标量 $\bar{\psi}\psi$ 及其导数 $\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu$ 构成，并记为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &=a\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi+b\bar{\psi}\psi\\ &=a\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+b/a)\psi\end{aligned}$$

令 $m=b/a$，并取 $a=-1$ 以保证能量具有正定值，那么，旋量场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi \tag{2.3-52}$$

此处 m 是旋量粒子的质量.

形如式(2.3-52)的拉氏密度的合理性，可以通过代入欧拉-拉格朗日方程而最终导致狄拉克方程来论证.

事实上，将式(2.3-52)的拉氏密度 $\mathscr{L}$ 代入欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}=0 \tag{2.3-53}$$

最终是可以导出狄拉克方程，为此，设

$$\varphi_\alpha=\psi$$

则由式(2.3-52)及式(2.3-53)有

$$-\bar{\psi}m-\frac{\partial}{\partial x_\mu}(-\bar{\psi}\gamma_\mu)=0$$

或

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi-m\bar{\psi}=0 \tag{2.3-54}$$

这正是狄拉克方程的共轭形式.

若设 $\bar{\psi}=\varphi_0$,则由式(2.3-52)有

$$\mathscr{L}=-\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-\bar{\psi}m\psi$$

由欧拉-拉格朗日方程(2.3-53),有

$$\gamma_\mu\partial_\mu\psi+m\psi=0 \tag{2.3-55}$$

这正是狄拉克方程的协变形式.

2. 旋量场的物理量

根据旋量场的拉格朗日密度(2.3-52),可以导出旋量场的基本物理量.事实上,由旋量场的拉氏密度有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi\\&=-\bar{\psi}\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+m\right)\psi\\&=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_4\dot{\psi}-\bar{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\bar{\psi}m\psi\end{aligned} \tag{2.3-56}$$

因此,与场量 $\psi(x)$ 共轭的动量 π 为

$$\begin{aligned}\pi&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_4\\&=\mathrm{i}(\psi^\dagger\gamma_4)\gamma_4\\&=\mathrm{i}\psi^\dagger\end{aligned} \tag{2.3-57}$$

此处 $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma_4$,而旋量场的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\pi\dot{\psi}-\mathscr{L}\\&=(\mathrm{i}\psi^\dagger)\dot{\psi}-\left(\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_4\dot{\psi}-\bar{\psi}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\bar{\psi}m\psi\right)\\&=\bar{\psi}\left(\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+m\right)\psi\quad(k=1,2,3)\end{aligned} \tag{2.3-58}$$

或

$$\mathscr{H}=\bar{\psi}(\gamma\cdot\nabla+m)\psi \tag{2.3-59}$$

故场的总哈密顿量可由下式求出

$$H=\int\mathscr{H}\mathrm{d}^3x \tag{2.3-60}$$

而场的能量的张量密度 $T_{\mu\lambda}$ 为

$$\begin{aligned}T_{\mu\lambda}&=\mathscr{L}\delta_{\mu\lambda}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda}\\&=-\bar{\psi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\psi\delta_{\mu\lambda}+\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda}\end{aligned} \tag{2.3-61}$$

场的四度动量

$$\begin{aligned}p_\lambda&=-\mathrm{i}\int T_{4\lambda}\mathrm{d}^3x\\&=-\mathrm{i}\int\left[-\bar{\psi}\left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+m\right)\psi\delta_{4\lambda}+\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_\lambda}\right]\mathrm{d}^4x\end{aligned} \tag{2.3-62}$$

当 $\lambda=k$ 并取 $k=1$、2、3 时，可得旋量场的动量

$$\begin{aligned}p_k&=-\mathrm{i}\int T_{4k}\mathrm{d}^3x\\&=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\bar{\psi}\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\\&=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x(\psi^\dagger\gamma_4)\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\\&=-\mathrm{i}\int\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\mathrm{d}^3x\\&=-\int\pi\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{p}=-\int\pi\nabla\psi\mathrm{d}^4x \tag{2.3-63}$$

而四度动量的第四个分量

$$p_4=-\mathrm{i}\int T_{44}\mathrm{d}^4x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[-\bar{\psi}\left(\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+m\right)\psi+\bar{\psi}\gamma_4-\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\right]\\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x(\bar{\psi}m\psi)\\
&= \mathrm{i}\int \mathscr{H}\mathrm{d}^4x\\
&= \mathrm{i}H
\end{aligned}
\tag{2.3-64}
$$

3. 狄拉克方程解的动量展开

狄拉克方程(2.3-1)的解可以写成平面波(傅里叶积分)形式：

$$
\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E\xi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{2.3-65}
$$

此处 $\xi(p)$是待定函数. 考虑到四动量算符

$$
p_\mu\rightarrow-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu},
$$

因此，狄拉克方程(2.3-1)可以改写成

$$
(\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu+m)\psi=0 \tag{2.3-66}
$$

由于式(2.3-65)是狄拉克方程的解，因此，它应满足式(2.3-66)，即有

$$
\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E(\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu+m)\xi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}=0 \tag{2.3-67}
$$

由于狄拉克方程存在正、负能解，为将正、负能解分开，引入两个投影算符

$$
\Lambda^{+}=-\frac{-\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu+m}{2m} \tag{2.3-68}
$$

$$
\Lambda^{-}=-\frac{+\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu+m}{2m} \tag{2.3-69}
$$

此处 Λ^{+}称为正能投影算符，Λ^{-} 称为负能投影算符. 可以证明，投影算符具有如下性质

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{-}u=u\\&\Lambda^{-}u=0\\&\Lambda^{-}v=0\\&\Lambda^{-}v=v\end{aligned}\right\}\tag{2.3-70}$$

取其共轭表示，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}\Lambda^{-}=\bar{u}\\&\bar{u}\Lambda^{-}=0\\&\bar{v}\Lambda^{-}=0\\&v\Lambda^{-}=\bar{v}\end{aligned}\right\}\tag{2.3-71}$$

此外，还有如下关系式成立：

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{-}+\Lambda^{+}=1\\&\Lambda^{-}\Lambda^{-}=\Lambda^{-}\Lambda^{+}=0\\&(\Lambda^{-})^{2}=\Lambda^{+}\\&(\Lambda^{+})^{2}=\Lambda^{-}\end{aligned}\right\}\tag{2.3-72}$$

在平面波解(2.3-65)中，我们采用如下的 $\xi(p)$ 形式

$$\xi(p)=\delta^{(4)}(p_{\mu}^{2}+m^{2})\Lambda^{+}f(p)\tag{2.3-73}$$

此处，$\delta^{4}(p_{\mu}^{2}+m^{2})$ 是四维 δ-函数，$f(p)$ 是动量空间的函数，而 Λ^{-} 是正能投影算符，将其代入式(2.3-67)，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E(\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}+m)\delta^{(4)}(p_{\mu}^{2}+m^{2})\\&\qquad\times\left(\frac{-\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}+m}{2m}\right)f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E\,\frac{1}{2m}[m^{2}-(\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu})^{2}]\\&\qquad\times\delta^{4}(p_{\mu}^{2}+m^{2})f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E\,\frac{1}{2m}(p_{\mu}^{2}+m^{2})\\&\qquad\times\delta^{(4)}(p_{\mu}^{2}+m^{2})f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\\&=0\end{aligned}\tag{2.3-74}$$

此处，利用了关系

$$(\gamma_\mu)^2=1$$

$$x\delta(x)=0 \tag{2.3-75}$$

因此，由式(2.3-73)所给定的函数 $\xi(p)$ 满足狄拉克方程，故将式(2.3-73)的 $\xi(p)$ 代入平面波的解(2.3-65)中，有

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E\delta^{(4)}(p_\mu^2+m^2)\Lambda^+ f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{2.3-76}$$

由于四动量 $p_\mu\to p_\mu(\boldsymbol{p},\mathrm{i}E)$，所以

$$p_\mu^2+m^2=p^2-E^2+m^2=E_p^2-E^2 \tag{2.3-77}$$

式中 $E_p=(p^2+m^2)^{1/2}$

再利用 δ-函数公式

$$\int f(x)\delta(x-a)=f(a)$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \tag{2.3-78}$$

因此，式(2.3-76)可改写为

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}E\,\frac{1}{2E_p}[\delta(E_p-E)\\&\quad+\delta(E_p+E)]\Lambda^+ f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\frac{1}{2E_p}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E\Lambda^+ f(p)\delta(E_p+E)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right.\\&\quad\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}E\Lambda^- f(p)\delta(E_p-E)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{2E_p}[\Lambda^+ f(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}+\Lambda^- f(-p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}]\end{aligned} \tag{2.3-79}$$

依投影算符的性质式(2.3-70)，因此，$\Lambda^+ f(p)$ 只存在 u_r 的线性组合而不含 v_r，即，由 $\Lambda^+ u_r=u_r$，有

$$\Lambda^{+} f(p) = \sqrt{8\pi mE}\sum_{r=1}^{2} a_r(p)u_r(p) \tag{2.3-80}$$

同理

$$\Lambda \quad f(-p) = \sqrt{8\pi mE}\sum_{r=1}^{2} a_r(-p)v_r(p)$$

此处，$8\pi mE$ 是归一化系数，而 $a_r(p)$、$a_r(-p)$ 是待定系数. 将式(2.3-80)代入式(2.3-79)，对于连续动量空间，有

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}\left[a_r(p)u_r(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}+a_r^{+}(-p)v_r(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right] \tag{2.3-81}$$

若利用对应关系

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p} \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

则对分立空间的场函数可表示为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p}\sum_{r}\sqrt{\frac{m}{E}}\left[a_{rp}u_r(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}+a_{r(-p)}^{+}v_r(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right] \tag{2.3-82}$$

4. 旋量场的量子化规则

类似于标量场和矢量场，人们容易想到旋量场是否也满足如下形式的量子化规则：

$$\left.\begin{aligned}
&[a_{rp},a_{sp'}^{+}]=[a_{r(-p)}^{+},a_{s(-p')}]=\delta_{rs}\delta_{pp'}\\
&[a_{rp},a_{sp'}]=[a_{rp}^{+},a_{sp'}^{+}]=0\\
&[a_{r(-p)},a_{s(-p)}]=[a_{r(-p)}^{+},a_{s(-p')}^{+}]=0\\
&[a_{rp},a_{s(-p')}]=[a_{rp},a_{s(-p')}^{+}]=0\\
&[a_{rp}^{+},a_{s(-p')}]=[a_{rp}^{+},a_{s(-p')}^{+}]=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.3-83}$$

通过具体的讨论可知，若选择这种量子化方式，就会出现两个困难，首先，旋量场的能量本征值不是正定的，正能态粒子有正能，负

能态粒子具有负能，但实验未观察到负能量粒子和负能的场；其次，对于给定的态，这种粒子将遵从玻色统计，这也与实验不相符. 实验指出，根据泡利原理，对于一定的电子态，最多只能容纳一个电子，而由式(2.3-83)所提供的对易关系，却允许一个态存在任意数目的旋量粒子，这与泡利原理相矛盾. 鉴于上述矛盾的存在，仍采用对易关系(2.3-83)对旋量场进行量子化是不合理的.

以下讨论我们发现，若不采用式(2.3-83)的对易关系，而是用反对易关系对旋量场进行量子化，就可以既避免负能困难又使旋量粒子服从泡利原理.

事实上，采用如下的反对易关系

$$\left.\begin{aligned}&\{a_{\gamma p}, a^{\dagger}_{\gamma' p'}\} = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{pp'}\\&\{a^{\dagger}_{\gamma(-p)}, a_{\gamma'(-p')}\} = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{pp'}\end{aligned}\right\} \qquad (2.3\text{-}84)$$

其余为零

对旋量场进行量子化，确能保证旋量粒子满足泡利原理，服从费米统计.

让我们考察一个确定的粒子态，其动量为 $p = p'$，自旋指标 $\gamma = s$，则由量子化规则(2.3-84)，有

$$\left.\begin{aligned}&\{a_{\gamma p}, a^{+}_{\gamma p}\} = 1\\&\{a^{\dagger}_{\gamma(-p)}, a_{\gamma(-p)}\} = 1\\&\text{其余为零}\end{aligned}\right\} \qquad (2.3\text{-}85)$$

粒子数算符 $N_{\gamma p} = a^{+}_{\gamma p} a_{\gamma p}$ 的本征值问题是

$$N_{\gamma p}|n_{\gamma p}\rangle = n_{\gamma p}|n_{\gamma p}\rangle \qquad (2.3\text{-}86)$$

由式(2.3-85)

$$\begin{aligned}\{a_{\gamma p}, a_{\gamma p}\} &= a_{\gamma p}a_{\gamma p} + a_{\gamma p}a_{\gamma p}\\&= 2[a_{\gamma p}]^2 = 0\end{aligned}$$

同理

$$\{a^{+}_{\gamma p}, a^{+}_{\gamma p}\} = 2[a^{\dagger}_{\gamma p}]^2 = 0$$

$$[a_{\gamma p}]^2=[a_{\gamma p}^+]^2=0 \tag{2.3-87}$$

于是

$$\begin{aligned}[N_{\gamma p}]^2 &=(a_{\gamma p}^+a_{\gamma p})(a_{\gamma p}^+a_{\gamma p})\\ &=a_{\gamma p}^+(a_{\gamma p}a_{\gamma p}^+)a_{\gamma p}\\ &=a_\gamma^+(1-a_\gamma^+a_\gamma)a_\gamma\\ &=a_\gamma^+a_\gamma-a_\gamma^+a_\gamma^+a_\gamma a_\gamma\\ &=a_\gamma^+a_\gamma-a_\gamma^{+2}a_\gamma^2\\ &=a_\gamma^+a_\gamma\\ &=N_{\gamma p}\end{aligned} \tag{2.3-88}$$

同理

$$[N_{\gamma(-p)}]^2=N_{\gamma(-p)} \tag{2.3-89}$$

为方便计，我们略去指标 p，并先处理正能算符，由式(2.3-88)得

$$N_\gamma^2-N_\gamma=0$$

或　　$$N_\gamma(N_\gamma-1)=0$$

其本征方程为

$$N_\gamma(N_\gamma-1)|n_\gamma\rangle=n_\gamma(n_\gamma-1)|n_\gamma\rangle=0 \tag{2.3-90}$$

故　　$$n_\gamma(n_\gamma-1)=0 \tag{2.3-91}$$

因此，算符 N_γ 只有两个本征值 $n_\gamma=0$，$n_\gamma=1$，对应的本征态是 $|0\rangle$，$|1\rangle$，即

$$\begin{aligned}N_\gamma|0\rangle&=0|0\rangle=0\\ N_\gamma|1\rangle&=1|1\rangle=1\end{aligned} \tag{2.3-92}$$

另一方面，由反对易量子化规则(2.3-85)和式(2.3-87)知

$$\begin{aligned}[N_\gamma,a_\gamma]&=N_\gamma a_\gamma-a_\gamma N_\gamma\\ &=(a_\gamma^+a_\gamma)a_\gamma-a_\gamma(a_\gamma^+a_\gamma)\\ &=a_\gamma^+a_\gamma^2-(a_\gamma a_\gamma^+)a_\gamma\\ &=a_\gamma^+a_\gamma^2-(1-a_\gamma^+a_\gamma)a_\gamma\\ &=0-a_\gamma-a_\gamma^+a_\gamma^2=-a_\gamma\end{aligned}$$

即 $$[N_\gamma, a_\gamma] = -a_\gamma \tag{2.3-93}$$
$$[N_\gamma, a_\gamma^+] = a_\gamma^-$$

于是有

$$\begin{aligned} N_\gamma a_\gamma |n_\gamma\rangle &= (a_\gamma N_\gamma - a_\gamma)|n_\gamma\rangle \\ &= a_\gamma N_\gamma |n_\gamma\rangle - a_\gamma |n_\gamma\rangle \\ &= (a_\gamma n_\gamma - a_\gamma)|n_\gamma\rangle \\ &= (n_\gamma - 1)a_\gamma |n_\gamma\rangle \end{aligned} \tag{2.3-94}$$

$$\begin{aligned} N_\gamma a_\gamma^+ |n_\gamma\rangle &= a_\gamma^+ N_\gamma + a_\gamma^+ |n_\gamma\rangle \\ &= (n_\gamma + 1)a_\gamma^+ |n_\gamma\rangle \end{aligned} \tag{2.3-95}$$

因此，$a_\gamma|n_\gamma\rangle$和$a_\gamma^+|n_\gamma\rangle$也是$N_\gamma$的本征态，对应的本征值分别是$(n_\gamma - 1)$及$(n_\gamma + 1)$，故有

$$a_\gamma|n_\gamma\rangle \sim |n_\gamma - 1\rangle$$
$$a_\gamma^+|n_\gamma\rangle \sim |n_\gamma + 1\rangle$$

可见，a_γ^+是产生算符，a_γ是湮灭算符，而粒子数算符N_γ的本征值n_γ就是处于状态(p,γ)的粒子数，由于n_γ只能取0与1两个数，因此有截止条件

$$a_\gamma|0\rangle = 0 \quad 及 \quad a_\gamma^-|1\rangle = 0 \tag{2.3 96}$$

其中第二个条件的意义是，在确定的动量p和自旋γ的态，不存在粒子数大于1的状态.因此，粒子数算符N_γ只存在两个本征态$|0\rangle$和$|1\rangle$，所以，上式可记为

$$a_\gamma^{+m}|n\rangle = 0 \quad (m > 2)$$

这说明，对于某确定的状态(p,γ)，不存在两个或两个以上的全同粒子，这正是泡利不相容原理所要求的，因此，旋量粒子是服从费米统计的费米子.

类似的讨论还给出，反对易量子化规则保证了旋量场的能量算符是正定算符，它具有正定的期待值.

第三章

量子场的相互作用

自由场毕竟是场存在的一种特殊情况，在自然界中，场与场间存在相互作用才是更普适、更符合实际的形式.

本章以自由场的理论为基础，讨论了场与场之间的相互作用问题. 首先介绍了场相互作用的分类，然后重点讨论了电磁相互作用问题，至于强相互作用，介绍了介子与重子间的汤川耦合式强相互作用. 在结束本章之前，还以 β 衰变为例，具体介绍了四费米子耦合型弱相互作用问题.

第一节　场相互作用的分类

由上一章可知，量子化了的场具有粒子性. 一个量子化了的场，可以通过由不同动量的同种粒子的集合描述. 如果以 n_p 表示具有动量为 p 的粒子数，那么，场函数

$$\psi(n_{p1}, n_{p2}, \cdots)$$

表示具有动量为 p_1 的粒子有 n_{p_1} 个，动量为 p_2 的粒子有 n_{p_2} 个……两个量子化了的场若存在相互作用，那么，作用后两个场都要发生变化，而场的最直观的变化就是处于各个态的粒子数的变化，我们就是利用这一现象来描述场的相互作用. 粒子的相互作用是通过相应的量子场的相互耦合来实现的. 在相互作用过程中，一些粒子的场退激，与之相关的粒子湮灭，而一些新的场受激，与之相关的粒子产生，因而场的相互作用导致粒子间的相互转化.

在量子场论中，相互作用的数学形式常通过在自由场的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 上附加某相互作用项表述. 因此，相互作用的场体系的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_I,$$

此处 $\mathscr{L}_0$ 是两个自由场的拉氏密度之和，而 $\mathscr{L}_I$ 称为相互作用的拉氏密度，是由于场的相互作用所具有的附加项.

量子场之间相互作用的强度，通常由“相互作用常数”表示. 场的相互作用常数称为“荷”. 例如，电子与电磁场的相互作用常数称为“电荷”，核子与介子场的相互作用常数称为“核荷”. 由于电磁场理论有比较好的完整性，且库仑力是长程力，可以通过宏观的手段进行测量，因此，电子与电磁场的相互作用常数(电荷)已能精确确定. 但是，由于介子场理论的不够完善，“核荷”这个相互作用常数尚未能精确确定.

根据相互作用强度的大小，相互作用通常分成四类：强相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和引力相互作用. 这四种相互作用的主要特性如下表所示：

分类 / 特性	强相互作用	弱相互作用	电磁相互作用	引力相互作用
作用强度	$\frac{g^2}{4\pi}\approx 1\sim 15$	$\frac{f^2}{4\pi}\approx 4\times 10^{-12}$	$\frac{e^2}{4\pi}\approx\frac{1}{137}$	$G=5.9\times 10^{-39}$
作用范围	$10^{-13}\sim 10^{-14}$cm	10^{-17}cm	∞	∞
场量子	强子	中间玻色子	光子	引力子
被作用粒子	强子	强子、轻子	带电粒子	一切物体
实例	核力	β-衰变	原子力	天体力

上述这些相互作用是在实验基础上得出的，其中，电磁力和引力属于长程力，其作用范围可以趋于无穷远，而强力与弱力属于短程力，其相互作用范围处在微观领域之内.

电磁相互作用在宏观范围内已很好地确立，它与引力相互作用一样，可以在宏观范畴中表现出来. 量子化的电磁场与带电粒子的相互作用是一切微观理论的基础，量子电动力学(QED)就是研究微观电磁过程的场论，它已成为量子场论中最成熟的分支，其他相互作用的处理方法，有时往往仿效量子电动力学的处理方法.

引力相互作用对粒子过程来说是很微弱的，可以忽略不计. 从基本理论研究的角度看，引力场也应是量子化的，其对应的场量子称为“引力子”，但是，由子引力的非线性，其量子化也存在不少困难.

强相互作用和弱相互作用均属子“短程力”，仅在微观范围内起作用，它们的规律目前还只能通过粒子与粒子间的散射唯象地确立.

第二节 电磁相互作用

带电粒子与电磁场的相互作用，称为电磁相互作用. 标量场（带电的介子）与电磁场的相互作用、旋量场（带电的旋量粒子）与电磁场（光子）的相互作用，都属于电磁相互作用. 本节我们主要介绍自旋为 1/2 的带电旋量粒子（如电子、质子和 μ 子等）与光子的电磁相互作用.

一、真空态和对称化

所谓真空态是指任何粒子都不存在的状态，因此真空态是粒子数算符 N（或 $\hat{N}$）的本征值为零的状态. 我们知道，当用对易关系（在旋量场时用反对易关系）将场量子化以后，会出现无穷大的零点能和零点电荷，就是说，真空态是具有无穷大的能量和电荷的态，这当然与事实不符.

狄拉克认为，真空态是正能级没有任何粒子而负能级全部充满负能粒子的态. 因此，它的能量要出现负无穷大. 如果我们将拉格朗日密度对称化，那么，场量子化以后其零点项就会互相抵消，因而不会出现无穷大的零点能和零点电荷. 为此，引入旋量场的对称化拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_\psi = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\psi^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - m)\bar{\psi}^T \qquad (3.2\text{-}1)$$

二、带电粒子在电磁场中运动的拉氏密度

在经典理论中，…自由粒子的哈密顿量为

$$H=\sqrt{\boldsymbol{P}^2+m^2} \tag{3.2-2}$$

若粒子带电荷 e，并在 A_μ 的电磁场中运动，则其哈密顿量为

$$H=e\varphi+\sqrt{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m^2} \tag{3.2-3}$$

式中 $\varphi=-\mathrm{i}A_4$，若对 H 与 $\boldsymbol{P}$ 作变换

$$\left.\begin{aligned} &H\to(H-e\varphi)\\ &\boldsymbol{P}\to(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}) \end{aligned}\right\} \tag{3.2-4}$$

则可以从自由粒子的哈密顿量(3.2-2)过渡到带电粒子在电磁场中运动的哈密顿量(3.2-3)，采用式(3.2-4)这种方式引入电磁耦合的方法，称为最小电磁耦合．利用 $P_4=\mathrm{i}H$，可将式(3.2-4)写成四维形式

$$P_\mu\to P_\mu-eA_\mu \tag{3.2-5}$$

考虑到经典物理与量子物理间存在对应原理，利用这种对应关系，可以将经典电磁相互作用过渡到量子理论．对于自由粒子，应有

$$H(=E)\to\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{P}\to-\mathrm{i}\nabla$$

又因为 $P_4=\mathrm{i}H$，$x_4=\mathrm{i}t$，因此，上述对应关系可写成四维形式

$$P_\mu\to-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{3.2-6}$$

再利用式(3.2-5)的最小电磁耦合，有

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\to\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}-eA_\mu\right) \tag{3.2-7}$$

因此，算符 P_μ 作用在场函数 ψ 与 ψ^* 上，分别相当于 $\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$ 与 $\left(+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$ 的作用．可见，在电磁相互作用下，动量的变换可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}&\to\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\psi\\ \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\mu}&\to\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\mathrm{i}eA_\mu\right)\psi^*\end{aligned}\right\}\tag{3.2-8}$$

这样，引入电磁相互作用后，相当于将拉格朗日密度(简称拉氏密度)式(3.2-1)进行式(3.2-8)的变换，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\psi A}=&-\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)\psi-\frac{1}{2}m\bar{\psi}\psi\\&-\frac{1}{2}\psi^T\gamma_\mu^T(\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu)\bar{\psi}^T+\frac{1}{2}m\psi^T\bar{\psi}^T\end{aligned}\tag{3.2-9}$$

若将旋量粒子在电磁场中的拉氏密度写成

$$\mathscr{L}_{\psi A}=\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_I\tag{3.2-10}$$

此处 $\mathscr{L}_\psi$ 是自由旋量粒子的拉氏密度，$\mathscr{L}_I$ 是旋量粒子与电磁场相互作用的拉氏密度，由式(3.2-1)、(3.2-9)和(3.2-10)有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I=&\frac{\mathrm{i}}{2}e(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T)A_\mu\\=&j_\mu A_\mu\end{aligned}\tag{3.2-11}$$

此处

$$j_\mu=\frac{\mathrm{i}}{2}e(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T)\tag{3.2-12}$$

恰好是四维电流密度 $j_\mu=\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 的反对称形式. 因此，式(3.2-11)表示的相互作用，称为电流型相互作用. 式(3.2-11)所示的电流型相互作用的拉氏密度 $\mathscr{L}_I$ 由两个四维矢量 j_μ 与 A_μ 的标量积决定，它是相对论不变量，从而保证了动量、能量和角动量守恒.

以上是带电粒子与电磁场的相互作用情况，对于旋量场与电磁场之间的相互作用情况，其拉氏密度为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_A+\mathscr{L}_I\tag{3.2-13}$$

此处，$\mathscr{L}_\psi$ 是如式(3.2-1)所示的自由旋量场的拉氏密度，$\mathscr{L}_A$ 是电磁场的拉氏密度[见式(2.2-25)]，而 $\mathscr{L}_I$ 是式(3.2-11)所示的相互

作用的拉氏密度.

三、场方程

对于旋量场与电磁场的相互作用，由式(3.2-13)、(2.2-25)和(3.2-11)知，其拉氏密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_I \\ &= -\frac{1}{2}\psi(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\psi^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - m)\overline{\psi}^T \\ &\quad -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu + j_\mu A_\mu \end{aligned} \tag{3.2-14}$$

由欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\mu}\right)} = 0$$

令 $\varphi_1=\psi$，$\varphi_2=\overline{\psi}$，$\varphi_3=A_\mu$，可以导出运动方程

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\psi + m\psi = 0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\overline{\psi}\gamma_\mu - m\overline{\psi} = 0 \\ &\Box A_\mu = -j_\mu \end{aligned}\right\} \tag{3.2-15}$$

这里第一、二式是旋量粒子在电磁场 A_μ 中的运动方程及其共轭，而第三式是电磁场方程(麦克斯韦方程).

四、量子化规则

由旋量场与电磁场的相互作用拉格朗日密度，可以找出旋量场与电磁场的场量及其共轭动量：

$$\left.\begin{aligned} &\text{旋量场的场量 } \psi(x)\text{，共轭动量 } \pi_\psi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^+ \\ &\text{电磁场的场量 } A_\mu\text{，\quad 共轭动量 } \pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu \end{aligned}\right\} \tag{3.2-16}$$

对相互作用的场系统，仍可通过正则方法处理其量子化问题，旋量场电磁场系统的量子化规则，仍与未相互作用时的各场系统的规则一样，所不同的是两个不同场算符还应满足一个新的对易关系，并遵循玻色子场同其他任意场量都是对易的原则. 因此，对于旋量场及电磁场，其量子化规则为

$$\left.\begin{aligned}&\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\&\text{其余为零}\end{aligned}\right\}\tag{3.2-17}$$

$$\left.\begin{aligned}&[A_\mu(\boldsymbol{x},t),\pi_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\&\text{其余为零}\end{aligned}\right\}\tag{3.2-18}$$

以及由于场相互作用而出现的对易关系

$$\left.\begin{aligned}&[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),A_\mu(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x},t),A_\mu(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi_\mu(\boldsymbol{x}',t)]=0\\&[\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{x},t),\pi_\mu(\boldsymbol{x}',t)]=0\end{aligned}\right\}\tag{3.2-19}$$

五、物理量　运动方程

定义旋量场与电磁场的相互作用场系统的哈密顿量为

$$\mathscr{H}=\pi_\psi\dot{\psi}+\pi_\mu\dot{A}_\mu-\mathscr{L}\tag{3.2-20}$$

由于相互作用场系统的哈密顿量可以写成

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_\psi+\mathscr{H}_A+\mathscr{H}_I\tag{3.2-21}$$

此处，$\mathscr{H}_\psi$与$\mathscr{H}_A$分别是自由旋量场与自由电磁场的哈密顿量

$$\mathscr{H}_\psi=-\frac{1}{2}\bar{\psi}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla+m)\psi+\frac{1}{2}\psi^T(\boldsymbol{r}^T\cdot\nabla-m)\bar{\psi}^T\tag{3.2-22}$$

$$\mathscr{H}_A=\frac{1}{2}(\pi_\mu\pi_\mu+\nabla A_\mu\cdot\nabla A_\mu)\tag{3.2-23}$$

可以证明，旋量场与电磁场相互作用的哈密顿量$\mathscr{H}_I$等于其相互作用拉格朗日密度$\mathscr{L}_I$的负值，考虑到式(3.2-11)，有

$$\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I=-j_\mu A_\mu\tag{3.2-24}$$

而场系统的总哈密顿量

$$H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}^3x = \int (\mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_I)\mathrm{d}^3x$$
$$= H_\psi + H_A + H_I \tag{3.2-25}$$

由对易关系及哈密顿量的表达式，可求出量子运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= \mathrm{i}[H,\psi] \\ \dot{A}_\mu &= \mathrm{i}[H,A_\mu] \\ \dot{\pi}_\mu &= \mathrm{i}[H,\pi_\mu] \end{aligned}\right\} \tag{3.2-26}$$

作为例子，我们证明方程(3.2-26)的第一式成立. 事实上，由于

$$[\psi,H] = [\psi,\int \mathscr{H}\mathrm{d}^3x']$$
$$= \int \mathrm{d}^3x'[\psi,\mathscr{H}]$$
$$= \int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}_\psi(x')+\mathscr{H}_A(x')+\mathscr{H}_I(x')]$$
$$= \int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}_\psi(x')]+\int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}_A(x')]$$
$$+ \int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}_I(x')]$$
$$= \int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\overline{\psi}'(\gamma\cdot\nabla' + m)\psi']$$
$$+ \int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),(-j'_\mu A'_\mu)]$$

又因为

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$
$$\{A,BC\} = \{A,B\}C - B\{A,C\}$$

令

$$\psi = A,\overline{\psi}' = B,(\gamma\cdot\nabla' + m)\psi' = C$$

则

$$\int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}_\psi(x')]$$

$$=\int \mathrm{d}^3x'(\{\psi,\bar{\psi}\}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla'+m)\psi'-\bar{\psi}\{\psi,(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla'+m)\psi'\})$$

$$=\int \mathrm{d}^3x'\{\psi,\psi^+\}\gamma_4(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla'+m)\psi'$$

$$=\int \mathrm{d}^3x'\delta^{(3)}(x-x')\gamma_4(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla'+m)\psi'$$

$$=\gamma_4(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi$$

在这里，利用关系

$$\int f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'=f(x)$$

又由式(3.2-15)

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\psi+m\psi=0$$

所以

$$\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi-\mathrm{i}eA_\mu\psi+m\psi=0$$

$$\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+m\psi=\mathrm{i}eA_\mu\psi$$

或

$$\left(\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+m\right)\psi+\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}=\mathrm{i}e\gamma_\mu A_\mu\psi$$

将上式左乘 γ_4，并注意到 $\gamma_4^2=1$，有

$$\gamma_4(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi-m)\psi=\mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi-\gamma_4^2\frac{\partial\psi}{\partial x_4}$$

$$=\mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x_4}$$

因此

$$\int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),\mathscr{H}(x')]=\mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x_4}$$

又因为

$$\int \mathrm{d}^3x'[\psi(x),(-j'_\mu A'_\mu)] = -\int \mathrm{d}^3x'[\psi,-j'_\mu A'_\mu]$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x'[\psi,\mathrm{i}e\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'_\mu]$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x'[\psi,\mathrm{i}e\bar{\psi}'\gamma_\mu A_\mu\psi']$$

$$= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^3x'\{\psi,\bar{\psi}'\}\gamma_\mu A'_\mu\psi' - \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^3x'\gamma_\mu\bar{\psi}' A_\mu\{\psi,\psi'\}$$

$$= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^3x'\gamma_4\delta^{(3)}(x-x')\gamma_\mu A'_\mu\psi'$$

$$= -\mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi$$

故

$$[\psi,H] = \int \mathrm{d}^3x'[\psi,\bar{\psi}'(\gamma\cdot\nabla'+m)\psi']$$

$$+\int \mathrm{d}^3x'[\psi,(-j'_\mu A'_\mu)]$$

$$= \mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x_4} - \mathrm{i}e\gamma_4\gamma_\mu A_\mu\psi$$

$$= -\frac{\partial\psi}{\partial x_4}$$

$$= \mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= \mathrm{i}\dot{\psi}$$

因此，有

$$\dot{\psi} = \mathrm{i}[H,\psi]$$

证毕.

为了观察哈密顿量 $\mathscr{H}$ 的物理意义，可以将 $A_\mu,\psi,\bar{\psi}$ 等按平面波展开，且此时 A_μ 对应于一系列产生和湮灭光子的算符，而 $\psi,\bar{\psi}$ 则对应于一系列产生与湮灭正反旋量粒子的算符. 这就是说，考虑了相互作用，哈密顿量反映了粒子的产生、湮灭及相互转化. 因此，在将相互作用哈密顿量 $\mathscr{H}_1$ 进行展开后，它成为一系列算符之和，

而每一个算符代表一个具体的物理过程，如轻子(反轻子)放出(吸收)光子、轻子和反轻子转化为光子、光子转化为轻子及反轻子等等.

第三节 强相互作用

介子(如 $\pi, k, \omega\cdots\cdots$)与重子(如质子、中子、$\Sigma\cdots\cdots$)之间的相互作用属于强相互作用. 强相互作用是短程力，不可能在客观尺度内表现出来，因此，不能像电磁相互作用那样，利用经典理论与量子理论的对应原理，导出其相互作用的拉氏密度. 至今，强相互作用仍需由实验现象出发，属于唯象理论.

构造强相互作用的拉氏密度 $\mathscr{L}_I$，主要依赖于由实验所确立的守恒定律，从而得出场所满足的对称性或不变性，这些对称性和不变性限制了选取 $\mathscr{L}_I$ 的数学形式.

强相互作用的主要对称性有洛仑兹不变性(时空均匀性导致能量、动量、角动量守恒)、电荷无关性(导致同位旋守恒)、规范不变性(导致电荷 Q、同位旋 I、奇异数 s 等量子数守恒)，此外，还有时空反演和电荷共轭的 CTP 不变性等. 但是，即使考虑了所有的不变性，$\mathscr{L}_I$ 仍有多种可能的数学形式，通常选择其中最简单的一种. 选择 $\mathscr{L}_I$ 的形式，还要受到上述这些守恒律与不变性的限制.

我们从中性 π^0 介子与 N 核子的相互作用这种简单情况出发，讨论强相互作用问题的处理方法，它还能启发我们构造强相互作用理论的一般方法.

一、相互作用的拉氏密度

设以 φ 表示 π^0 介子的厄米标量场，ψ 表示核子的旋量场. 为了满足洛仑兹不变性，相互作用的拉氏密度 $\mathscr{L}_I$ 应是一个标量. 实验指出，π^0-N 相互作用中宇称守恒，因此，满足洛仑兹不变性和宇称守恒的最简单耦合（汤川耦合）

$$\mathscr{L}_I = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \tag{3.3-1}$$

此处，g 称为耦合常数，正是由于 $\frac{g^2}{4\pi}=1\sim15$，它比 $\frac{e^2}{4\pi}\approx\frac{1}{137}$ 要大得多，所以称其为强相互作用. 强相互作用的拉氏密度可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_\varphi+\mathscr{L}_\psi+\mathscr{L}_I \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi+\mu^2\varphi)-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu\psi+m\psi)+ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi\end{aligned} \tag{3.3-2}$$

二、场方程

有了强相互作用的拉氏密度，就可以将其代入欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right\}=0 \tag{3.3-3}$$

从而导出场方程.

若令 $\varphi_\alpha=\varphi$，则由方程(3.3-3)及拉格朗日密度(3.3-2)式得

$$-\frac{\mu^2}{2}\cdot2\varphi+ig\bar{\psi}\gamma_5\psi-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)=0$$

或

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}-\mu^2\varphi=-ig\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

所以

$$(\Box-\mu^2)\varphi=-ig\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{3.3-4}$$

若令 $\varphi_\alpha=\psi$，则由方程(3.3-3)及(3.3-2)有

$$-\bar{\psi}m+ig\bar{\psi}\gamma_5\varphi-\frac{\partial}{\partial x_\mu}(-\bar{\psi}\gamma_\mu)=0$$

故有

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)\bar{\psi}=-ig\bar{\psi}\gamma_5\varphi \tag{3.3-5}$$

若令 $\varphi_\alpha=\bar{\psi}$，类似地处理可得

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\psi=ig\gamma_5\psi\varphi \tag{3.3-6}$$

三、共轭动量和哈密顿量

由于与场量 φ 对应的共轭动量为

$$\pi_\varphi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} \tag{3.3-7}$$

因此，由式(3.3-2)所示的拉格朗日密度，可求得

$$\begin{aligned}\pi_\varphi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}&=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}+\mu^2\varphi^2\right)-\cdots\right]\\&=\dot{\varphi}\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\pi_\psi&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\\&=\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}}\left[\cdots-\bar{\psi}\left(\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial x_4}+m\psi\right)+\cdots\right]\\&=i\psi^+\gamma_4^2\\&=i\psi^+\end{aligned}$$

其中 $\bar{\psi}=\psi^+\gamma_4,\gamma_4^2=1$ (3.3-8)

考虑到哈密顿量 $\mathscr{H}=\pi_\alpha\dot{\varphi}_\alpha-\mathscr{L}$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi_\sigma \dot{\varphi}_\sigma - \mathscr{L} \\ &= \pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_\psi \dot{\psi} - \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \mu^2\varphi^2) \right. \\ &\quad \left. -\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\psi) + \mathrm{i}g\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \right] \\ &= \pi_\varphi \dot{\varphi} - \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \mu^2\varphi^2) \right) + \pi_\psi \dot{\psi} \\ &\quad + \bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\psi - \mathrm{i}g\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi) \\ &= \mathscr{H}_\varphi + \mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_I \end{aligned} \tag{3.3-9}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\varphi &= \pi_\varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \mu^2\varphi^2) \\ \mathscr{H}_\psi &= \pi_\psi \dot{\psi} + \bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi \\ \mathscr{H}_I &= -\mathrm{i}g\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi = -\mathscr{L}_I \end{aligned} \tag{3.3-10}$$

以上介绍的简单耦合(3.3-1)，称为汤川耦合，这种相互作用拉氏密度中，并不含场的平方因子或场的导数因子，是一种线性型的耦合. 汤川耦合是最简单的耦合，更复杂的耦合，还可以在相互作用拉氏密度 $\mathscr{L}_I$ 中，包含场的导数或平方(多次方)因子，它们所对应的强相互作用问题也就比上面介绍的更为复杂.

第四节　弱相互作用

最早发现的弱相互作用是 β 衰变，所有的基本粒子(除光子外)都能参与弱相互作用. 1934 年费米最早提出的弱相互作用理论称为 β 衰变理论. 弱相互作用广泛存在俘获和衰变过程中，如

$$\mu^- + p \to n + \nu \text{(俘获)},$$

$$n\to p+e^-+\bar{\nu}(\beta\text{ 衰变}),$$

等等. 1956 年，李政道和杨振宁首先发现了弱相互作用的宇称不守恒，这使相互作用拉氏密度 $\mathscr{L}_I$ 的选择范围得以扩宽，即 $\mathscr{L}_I$ 可以是标量也可以是膺标量.

理论分析与大量的实验指出，弱相互作用是四费米子耦合型的，且满足重子数与轻子数守恒. 这里，我们以 β 衰变过程

$$n\to p+e^-+\bar{\nu} \tag{3.4-1}$$

为例，具体介绍四费米子耦合型弱相互作用理论.

费米最先提出，对于弱相互作用，其相互作用拉氏密度为

$$\mathscr{L}_I=C_S(\bar{p}n)(\bar{e}\nu)+C_S^*(\bar{n}p)(\bar{\nu}e) \tag{3.4-2}$$

此处 p、n、e 和 ν 分别代表质子、中子、电子和中微子，C_S 是耦合常数. 以下我们将分别以 p、n、e 及 ν 代表相应粒子的场量，对子旋量场，其 $4\times4=16$ 个独立的厄米矩阵的具体表述见下表：

矩　阵	个数	属　性	注　释
$\bar{\psi}\psi$(或 $\bar{\psi}I\psi$)	1	标量	I 为单位矩阵
$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	4	矢量	γ_μ 有 4 个矩阵
$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$	6	张量	$\gamma_\mu\gamma_\nu$ 有 6 种排列
$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	1	膺标量	$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 是一个矩阵
$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	4	膺矢量	

若以 Ω_i 代表上述 5 种可能的矩阵形式，则上述的表示可简记为

$$\sum_{i=1}^{5}\bar{\psi}\Omega_i\psi \tag{3.4-3}$$

因此，以 Ω_i 表示旋量场的 16 个独立的 4×4 矩阵的四费米子耦合型拉氏密度就可表示为

$$\mathscr{L}_I=\sum_{i=1}^{5}[C_i(\bar{p}\Omega_i n)(\bar{e}\Omega_i\nu)+C_i^*(\bar{n}\Omega_i p)(\bar{\nu}\Omega_i e)]$$

$$+\sum_{t=1}^{5}[C_t(\bar{p}\Omega_t n)(\bar{e}\Omega_t\gamma_5\nu)+C_t'(\bar{n}\Omega_t p)(\bar{\nu}\gamma_5\Omega_t e)] \tag{3.4-4}$$

此处，第一求和项是标量，而含 γ_5 的第二求和项是膺标量，由于弱相互作用宇称不守恒，因此，我们不再要求式(3.4-4)经坐标反演变换后仍保持不变这一宇称守恒的限制. 我们将式(3.4-4)改写成

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I=\sum_{t=1}^{5}\{&(\bar{p}\Omega_t n)[\bar{e}\Omega_t(C_t+C_t'\gamma_5)\nu]\\&+(\bar{n}\Omega_t p)[\bar{\nu}(C_t'-C_t'\gamma_5)\Omega_t e]\}\end{aligned} \tag{3.4-5}$$

这里 C_t 及 C_t' 共有 10 个数，它们将由实验确定. 当 t 分别取 S、V、T、P、A 共 5 种耦合情况时，大量的实验结果给出，相应的耦合常数为

$$\begin{aligned}&C_S\approx C_S'\approx C_P\approx C_P'\approx C_T\approx C_T'\approx 0\\&C_V\approx C_V'\approx -C_A\approx -C_A'(=G_F/\sqrt{2})\end{aligned} \tag{3.4-6}$$

这就是说，只存在 V、A 两种耦合，故称为 V-A 型四费米子耦合，因此，式(3.4-5)可简化为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I=\frac{G_F}{\sqrt{2}}\{&[\bar{p}\gamma_\lambda(1+a\gamma_5)n][\bar{e}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\nu]\\&+[\bar{n}\gamma_\lambda(1+a\gamma_5)p][\bar{\nu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)e]\}\end{aligned} \tag{3.4-7}$$

实验指出，上式中的常数 $a=1.25$，这与严格的 V-A 型耦合要求 $a=1$ 存在一定的偏差，这种偏差可能是由质子、中子的质量差异所致，也许需通过质量重整化与质量的重新定义予以解决.

由于式(3.4-7)中只有 G 是耦合常数，故称 G_F 为 V-A 型费米耦合常数，实验表明，G_F 具有质量负二次方量纲，并可用质子质量表示

$$G_F=1.03\times 10^{-5}M_p^{-2} \tag{3.4-8}$$

若将式(3.4-7)与电磁型耦合作一对比，那么，我们也可定义弱相

互作用耦合常数

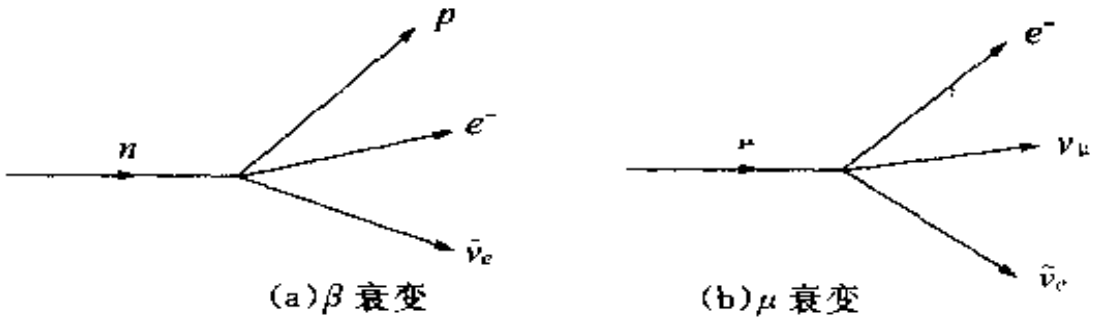
$$f=\frac{G_F}{\sqrt{2}}M_p^2\approx 0.71\times 10^{-5} \tag{3.4-9}$$

这样，弱相互作用的强度是

$$\frac{f^2}{4\pi}\approx 4\times 10^{-12} \tag{3.4-10}$$

与电磁相互作用强度$\frac{e^2}{4\pi}\approx\frac{1}{137}$及强相互作用强度$\frac{g^2}{4\pi}=1\sim 15$比较，弱相互作用确实“弱”得多了.

V-A 型四费米子相互作用理论是盖尔曼和费曼于 1958 年提出的. 这一弱相互作用理论的建立，要比强相互作用理论的建立顺利一些，取得的成效也比较多. 但是，由于有奇异粒子和衰变现象的限制，又无经典理论可资对比，因此，只能从微观现象出发进行研究，弱相互作用的量子场论也是通过粒子的产生和湮灭来描述的. 1934 年，费米首先提出 β 衰变理论，由于这种衰变过程在每一



(a)β 衰变　　(b)μ 衰变

图 3-1

时空点都涉及四个费米子(见图 3-1)，所以称为四费米子模型. 弱相互作用的四费米子模型理论在低能范围内与实验符合得很好，但在高能区，它最大的缺陷是不能像电磁相互作用那样通过重整化将发散困难消除，这是由于相互作用常数 G_F 具有能量的负次幂. 因此，上述理论还不完整. 自 20 世纪 60 年代以来，人们重新注

意弱作用的中间玻色子理论，认为如同带电粒子之间的电磁相互作用是通过光子传递一样，弱相互作用也是通过某种微观粒子——中间玻色子传递. 按照这个理论，中子 β 衰变分两个阶段进行：首先，中子转化为质子和带负电的 w^- 矢量介子，然后，w 介子再转化为电子和反中微子. 这个理论后来为弱电统一理论奠定了基础. 1967 年，美国哈佛大学的 S. Weinberg 等在 Higgs 的工作基础上提出了将弱相互作用与电磁相互作用统一起来的理论，并预言，弱作用是通过带电的中间玻色子 w^+ 和中性的中间玻色子 z^0 来传递的，$w^\pm$ 和 z^0 与光子属于同族粒子. 按照这一理论，弱作用的形式不再是流-流耦合，而是带电的弱流与中间玻色子 w^+ 耦合，中性弱流与不带电的中间玻色子 z^0 的耦合. 因此，除了带电流相互作用外，尚应存在中性流的相互作用. 1983 年 1 月，欧洲核子研究中心宣布发现了传递带电弱流弱相互作用的中间玻色子 $w^\pm$，同年 6 月，又宣布发现了传递中性流弱相互作用的中间玻色子 z^0，这为弱电统一理论提供了直接验证.

第四章

散射矩阵与协变微扰论

量子场的相互作用，将导致原有场的退激与新场的激发，这也对应于相应粒子的相互作用与转化的过程. 要定量研究粒子的转化与相互作用，就需要求解相互作用场的场方程. 但是，由于这些场方程的非线性、非齐次性，其求解十分困难.

这一章，我们讨论如何求解粒子的相互作用问题，具体地说，就是要求解相互作用场系统的不同量子态之间的跃迁振幅和跃迁几率问题. 实践证明，若采用量子力学中的相互作用图景，问题的求解会更为简便，不仅如此，它还能保证具有明显的协变性. 因此，在讨论相互作用场系统的解时，有必要介绍相互作用图景.

本章先介绍相互作用图景，然后讨论相互作用量子场问题求解的散射矩阵及其微扰展开法，最后介绍由费曼等提出的通过一定图形与正规乘积的对应关系，求解散射矩阵的费曼图法。

第一节 相互作用图景

在量子力学中，常用的图景有两种：薛定谔图景（简称 S-图

景)和海森伯图景(简称 H-图景). 在 S-图景下,力学量不随时间变化,而态矢量却随时间而变. 在 H-图景下,情况正好相反,力学量随时间而变化,而态矢量不随时间而变. 必须指出,H-图景在形式上与经典力学的正则形式十分相似. 我们正是利用这种特点,采用了 H-图景,建立并发展了量子场的理论.

前面几章,我们对量子场的讨论都是在 H-图景中进行的. 在第二章有关自由场的理论中,由于理论具有明显的协变性,且由于场方程的线性与齐次等特点,使我们能够求得精确解. 因而,H-图景对于自由场是方便的. 但是,当存在场的相互作用时(第三章),场方程已是非线性、非齐次的了,无法求得精确的平面波解,因而也无法建立不等时的对易和反对易关系,理论也不再具有明显的洛仑兹协变性. 以上表明,从自由场理论过渡到相互作用场理论,采用的图景也将相应改变.

一、S-图景

运动方程是物理学对自然界的一种重要描述,它反映了物理系统随时间的变化、发展规律. 在量子力学的 S-图景(薛定谔图景)中,态矢 $|\rangle_S$ 随时间而变,设在初始 t_0 时刻,态矢为 $|t_0\rangle_S$,则系统的变化完全由与时间相关的态矢 $|t\rangle_S$ 描述. 假定有一算符 $T(t,t_0)$,它能将态 $|t_0\rangle_S$ 变到态 $|t\rangle_S$,即有

$$|t\rangle_S = T(t,t_0)\,|t_0\rangle_S \tag{4.1-1}$$

对应的共轭变换为

$${}_S\langle t| = {}_S\langle t_0|\,T^+(t,t_0) \tag{4.1=2}$$

根据几率守恒,要求

$${}_S\langle t|t\rangle_S = {}_S\langle t_0|\,T^+T\,|t_0\rangle_S = {}_S\langle t_0|t_0\rangle_S$$

这样,算符 $T(t,t_0)$ 应满足 $T^+T=I$,由反变换 $TT^+=I$,要求 T 应

是么正算符，即

$$T^{+}=T^{-1} \tag{4.1-3}$$

对于无限小时间平移变换，算符 T 可写成

$$T(t+\delta t,t)=I-\mathrm{i}H_S\delta t \tag{4.1-4}$$

由于时间平移不变导致能量守恒，因此，H_S 是具有能量量纲的厄米算符. 根据式(4.1-1)，态矢的变换有

$$|t+\delta t\rangle_S=(I-\mathrm{i}H_S\delta t)|t\rangle_S$$

或

$$|t+\delta t\rangle_S-|t\rangle_S=-\mathrm{i}H_S\mathrm{d}t|t\rangle_S$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S=-\mathrm{i}H_S|t\rangle_S$$

所以

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S=H_S|t\rangle_S \tag{4.1-5}$$

若 H_S 是系统的哈密顿量，那么，(4.1-5)就是薛定谔方程.

将式(4.1-1)代入式(4.1-5)中，得到关于算符 T 的方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}T(t,t_0)|t_0\rangle_S=H_ST(t,t_0)|t_0\rangle_S$$

或

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}T(t,t_0)=H_ST(t,t_0) \tag{4.1-6}$$

当 $t=t_0$ 时，由式(4.1-1)，有边界条件

$$T(t,t_0)=I \tag{4.1-7}$$

因此，方程(4.1-6)具有如下形式的解

$$T(t,t_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_S(t-t_0)} \tag{4.1-8}$$

在 S 图景中，算符不明显依赖于时间，因此 q_i，p_i，$H(p,q)$，$F(p,q)$等均与 t 无关. 物理量随时间的变化则通过态矢反映在其期待值随时间的变化上. 由于态矢与时间有关，因此，物理量的期

待值

$$\overline{F}(t)=\langle F(t)\rangle={}_S\langle t|F(p,q)|t\rangle_S \tag{4.1-9}$$

是与时间有关的量，F 的期待值 $\overline{F}$ 随时间的变化 $\dot{\overline{F}}$ 可以由式(4.1-9)对时间求导并考虑到薛定谔方程(4.1-5)得出

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{F}}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_S\langle t|F|t\rangle_S\\
&={}_S\langle t|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F|t\rangle_S\right)+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}_S\langle t|\right)F|t\rangle_S\\
&={}_S\langle t|F\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t\rangle_S\right)+({}_S\langle t|\mathrm{i}H_S)F|t\rangle_S\\
&={}_S\langle t|F(-\mathrm{i}H_S)|t\rangle_S+{}_S\langle t|(\mathrm{i}H_SF)|t\rangle_S\\
&=\mathrm{i}_S\langle t|H_SF|t\rangle_S-\mathrm{i}_S\langle t|FH_S|t\rangle_S\\
&=\mathrm{i}_S\langle t|[H_S,F]|t\rangle_S
\end{aligned} \tag{4.1-10}$$

总之，在S-图景中，算符 q、p 等与时间无关，即 $\dot{q}=0$，$\dot{p}=0$；坐标与动量算符 q、p 满足对易关系

$$[q_i,p_j]=\mathrm{i}\delta_{ij}$$

而体系态矢 $|t\rangle_S$ 与时间有关，并满足薛定谔方程(4.1-5)，物理量 F 的期待值 $\overline{F}_S={}_S\langle t|F_S|t\rangle_S$，而其时间变化率由式(4.1-10)所确定.

二、H-图景

H-图景(海森伯图景)是描述物理系统随时间发展的又一种方法. 在H-图景中，态矢不随时间变化而物理量算符却随时间变化. 在经典力学中，物理量是随时间变化的量，因此，从这一角度看，H-图景与经典力学有着很好的相似.

在S-图景中，态矢由式(4.1-1)定义，而在H-图景中，态矢定

义为

$$\begin{aligned}|t\rangle_H &= T^{-1}(t,t_0)|t\rangle_S \\ &= T^{-1}(t,t_0)T(t,t_0)|t_0\rangle_S \\ &= |t_0\rangle_S \end{aligned} \tag{4.1-11}$$

因此，在 H-图景中，态矢 $|t\rangle_H$ 是 $t=t_0$ 时刻 S-图景中的态矢 $|t_0\rangle_S$，显然，这是一个与时间无关的常态矢，因此

$$\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_H = \frac{\partial}{\partial t}|t_0\rangle_S = 0 \tag{4.1-12}$$

所以，在 H-图景中，态矢 $|t\rangle_H$ 与时间无关. 当态矢进行(4.1-11)变换时，应保持不同图景内力学量 F 的期待值相等，即

$${}_S\langle t|F|t\rangle_S = {}_H\langle t|F|t\rangle_H$$

由于

$${}_S\langle t| = {}_S\langle t_0|T^+ = {}_H\langle t|T^{\dagger}$$

而

$$|t\rangle_S = T|t_0\rangle_S = T|t\rangle_H$$

所以

$$\begin{aligned}{}_S\langle t|F|t\rangle_S &= {}_H\langle t|T^+F_ST|t\rangle_H \\ &= {}_H\langle t|F_H|t\rangle_H \end{aligned} \tag{4.1-13}$$

这就是说，物理量算符满足变换

$$F_H = T^{\dagger}F_ST = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_S(t-t_0)}F_S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_S(t-t_0)} \tag{4.1-14}$$

而算符随时间的变化

$$\begin{aligned}\dot{F}_H &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_H \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T^{\dagger}F_ST) \\ &= T^+\frac{\partial F_S}{\partial t}T + \frac{\partial T^{\dagger}}{\partial t}F_ST + T^+F_S\frac{\partial T}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_S(t-t_0)}F_ST) + T^+F_S\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_S(t-t_0)})\end{aligned}$$

$$=iH_S T^+ F_S T - iT^+ F_S H_S T$$
$$=iH_S F_H - iF_H H_S$$
$$=i[H_S, F_H] \qquad (4.1\text{-}15)$$

当物理量算符是哈密顿算符时，由关系式(4.1-14)有

$$H_H = T^{-1} H_S T$$
$$=e^{iH_S(t-t_0)} H_S e^{-iH_S(t-t_0)}$$
$$=H_S$$

故

$$H_H = H_S \qquad (4.1\text{-}16)$$

就是说，哈密顿算符不随选择的图景而变，因而，方程(4.1-15)可写成

$$\dot{F}_H = i[H_H, F_H] \qquad (4.1\text{-}17)$$

这正是我们在自由场量子化过程中出现过的海森伯方程，只是在那里，我们省略了 H-图景的下标"H"罢了.

至于在 H-图景中物理量 F_H 的期待值随时间的变化率

$$\dot{\bar{F}}_H = {}_H\langle|\dot{F}_H|\rangle_H$$
$$=i{}_H\langle|[H_H, F_H]|\rangle_H \qquad (4.1\text{-}18)$$

形式上与 S-图景中的关系式(4.1-10)相同.

总之，在 H-图景中，体系的态矢与时间无关，而物理量的算符与时间有关，因此，体系的时间演化完全体现在这些力学量算符的性质上.

三、I-图景

在相互作用的量子场中，一方面存在某些场的退激伴随微观粒子的湮灭，另一方面又出现某些场的激发伴随粒子的产生. 此外，整个相互作用场系统的状态也将相应发生变化(跃迁). 就是

说，从具有某些粒子的场态跃迁到具有另一些粒子的场态. 因此，为了描述场相互作用，我们需要引入新的图景，同时，在这种新的图景里，量子场系统在时间中的运动，要求同时用随时间变化的场算符（力学量）和随时间变化的态矢来描述. 这既不可能由 S-图景，也不可能由 H-图景完成，而要引入新的图景，称为相互作用图景（简称 I-图景）.

在普通量子力学中，常采用非相对论微扰法求解. 非相对论微扰法是在 S-图景中处理问题的方法. 由于 S-图景中算符与空间有关而与时间无关，因而不能满足相对论协变性要求. 在处理相互作用量子系统的求解时，也常用微扰方法. 为了发展协变微扰理论，我们要采用 I-图景. I-图景处于 S-图景与 H-图景之间，其算符随时间而变，这与无相互作用的 II-图景一样，而其态矢随时间的演化仅依赖于相互作用. 采用 I-图景处理相互作用场系统问题显得格外方便.

设有一相互作用的量子系统，其薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S = H^S|t\rangle_S \tag{4.1-19}$$

且系统的哈密顿量 H^S 可分解成两部分

$$H^S = H_0^S + H_I^S \tag{4.1-20}$$

此处 H_0^S 是未扰动场（或称裸场）的哈密顿量，而 H_I^S 是相互作用哈密顿量. 现在，引入 I-图景中的态矢 $|t\rangle_I$，它与 S-图景中的态矢 $|t\rangle_S$ 间有关系

$$|t\rangle_S = R(t,t_0)|t\rangle_I \tag{4.1-21}$$

这里，算符 R 满足方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}R = H_0^S R \tag{4.1-22}$$

其形式解为

$$R(t,t_0)=e^{iH_0^S(t-t_0)}$$
$$R^{+}(t,t_0)=e^{iH_0^S(t-t_0)} \tag{4.1-23}$$

当 $t=t_0$ 的初始时刻，$R(t,t_0)=1$，此时，$|t_0\rangle_S=|t_0\rangle_I$，由几率守恒的要求，可知 R 是么正算符，即 $R^{+}=R^{-1}$.

让我们观察态矢 $|t\rangle_I$ 随时间的变化规律，由式(4.1-21)有

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S &= i\frac{\partial}{\partial t}(R|t\rangle_I)\\ &= i\frac{\partial R}{\partial t}|t\rangle_I+iR\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I\\ &= H_0^S R|t\rangle_I+iR\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I\end{aligned} \tag{4.1-24}$$

这里应用了关系式(4.1-22).

再由薛定谔方程(4.1-19)及关系式(4.1-20)，有

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S &= (H_0^S+H_I^S)|t\rangle_S\\ &= (H_0^S+H_I^S)R|t\rangle_I \quad [\text{由式(4.1-21)}]\\ &= H_0^S R|t\rangle_I+H_I^S R|t\rangle_I\end{aligned} \tag{4.1-25}$$

对比关系式(4.1-21)与(4.1-25)，得

$$iR\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I=H_I^S R|t\rangle_I$$

以 R^{-1} 左乘上式，并利用 $R^{-1}R=1$，有

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I=R^{-1}H_I^S R|t\rangle_I=H_I^I|t\rangle_I \tag{4.1-26}$$

此处

$$H_I^I=R^{-1}H_I^S R \tag{4.1-27}$$

关系式(4.1-26)指出，在 I-图景中，态矢随时间的变化规律(形式上与薛定谔方程相似)决定于 I-图景中的相互作用哈密顿量 H_I^I.

让我们再考察物理量算符 F 随时间的变化规律，由于 F 的期待值

$$\langle F\rangle = {}_S\langle|F|\rangle_S = {}_I\langle|R^{+}F_S R|\rangle_I$$
$$= {}_I\langle|F_I|\rangle_I \tag{4.1-28}$$

所以

$$F_I = R^{+}F_S R = R^{-1}F_S R \tag{4.1-29}$$

上面利用了不同图景中物理量的期待值不变及关系式(4.1-21)和 $R^{+}=R^{-1}$，故 F_I 随时间的变化为

$$\dot{F}_I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^{+}F_S R)$$
$$= R^{+}\frac{\partial F_S}{\partial t}R + \frac{\partial R^{+}}{\partial t}F_S R + R^{+}F_S\frac{\partial R}{\partial t}$$
$$= 0 + (\mathrm{i}H_0^S R^{+})F_S R + R^{+}F_S(-\mathrm{i}H_0^S R)$$
[由关系式(4.1-23)]
$$= \mathrm{i}(H_0^S R^{+}F_S R - R^{+}F_S R H_0^S)$$
$$= \mathrm{i}[H_0^S, F_I] \tag{4.1-30}$$

又由式(4.1-27)

$$H_0^I = R^{-1}H_0^S R = R^{-1}RH_0^S = H_0^S$$

所以，式(4.1-30)可写成

$$\dot{F}_I = \mathrm{i}[H_0^I, F_I] \tag{4.1-31}$$

就是说，在 I-图景中，算符随时间的变化，满足海森伯方程，但其哈密顿量取决于 I-图景中未含微扰的 H_0^I.

总之，I-图景的特点是：态矢 $|t\rangle_I$ 的变化决定于相互作用哈密顿量 H_I^I(方程形式上与薛定谔方程相似)，而力学量算符 F_I 的变化决定于 H_0^I，其形式是海森伯方程，即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I = H_I^I|t\rangle_I$$
$$\dot{F}_I = \mathrm{i}[H_0^I, F_I] \tag{4.1-32}$$

若 $H_I^I=0$，由上可知，此时态矢与时间无关，I-图景就转化为 H-图

景，这就是说，在没有相互作用时，I-图景过渡到 H-图景.

第二节　散射矩阵

如上所述，在 I-图景中，场算符满足自由场运动规律. 因此，求解有相互作用的量子场问题，关键在于求解因相互作用引起态矢随时间的变化.

为简便计，以下我们省略态矢中有关 I-图景的记号“I”. 根据式(4.1-26)

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_I(t)|t\rangle \tag{4.2-1}$$

它是关于 t 的一次线性微分方程，求解过程中只需一个初始条件，即给定起始时刻 t_0 的态矢 $|t_0\rangle$，任意 t 时刻的态矢 $|t\rangle$ 就可由方程(4.2-1)给定. 为此，定义时间平移算符 $U(t,t_0)$(称为 U 矩阵)，将它作用于初态 $|t_0\rangle$ 上，可以得到态矢 $|t\rangle$，这相当于将时间做 $t_0 \to t$ 的平移变换，即

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle \tag{4.2-2}$$

按 U 矩阵的定义，应有

$$U(t,t) = U(t_0,t_0) = I \quad \text{(单位矩阵)} \tag{4.2-3}$$

$$U(t,t_1)\cdot U(t_1,t_0) = U(t,t_0) \quad \text{(可加性)} \tag{4.2-4}$$

$$U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0) \quad \text{(有逆矩阵)} \tag{4.2-5}$$

类似地，由几率守恒，U 矩阵还应是么正矩阵，即

$$U^{+} = U^{-1} \quad \text{(么正性)} \tag{4.2-6}$$

若将式(4.2-2)代入式(4.2-1)，那么有

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)|t_0\rangle = H_I U(t,t_0)|t_0\rangle$$

因此，U 矩阵满足方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_I U(t,t_0) \tag{4.2-7}$$

求解这个方程，就可求出 U 矩阵了.

在自由场的讨论中，我们把场置于整个空间范围($V\to\infty$)和无限的时间之中($t\to\infty$)，并对粒子的运动采用平面波极限表示. 实际上，粒子是波包而不是理想的平面波，所以，场与场有效的相互作用并非在整个空间、时间上进行. 实践证明，这样理想化的处理，对实际情况是一个很好近似. 因此，按照场的相互作用理论，一个物理过程(如散射)的初态是 $t\to-\infty$ 时发生的态 $|-\infty\rangle$，而末态应是 $t=\infty$ 时的态 $|\infty\rangle$，且这两个态可以通过时间平移算符 $U(t,t_0)$ 联系起来，因此，由式(4.2-2)得

$$|\infty\rangle=\lim_{t_0\to-\infty}U(t,t_0)|-\infty\rangle \tag{4.2-8}$$

并记为

$$\lim_{t_0\to-\infty}U(t,t_0)=U(\infty,-\infty)=S \tag{4.2-9}$$

因而有

$$|\infty\rangle=S|-\infty\rangle \tag{4.2-10}$$

称矩阵 S 为散射矩阵，S 矩阵是 U 矩阵的极限情况，根据 U 矩阵的幺正性[式(4.2-6)]，S 矩阵应是幺正矩阵

$$S^{\dagger}=S^{-1} \tag{4.2-11}$$

若过程不存在场的相互作用，相互作用哈密顿量 $H_I=0$，由式(4.2-7)知，U 矩阵不随时间而变，因而散射矩阵 $S=U(\infty,-\infty)$ 也不随时间而变，这要求 $S=I$ 是单位矩阵. 所以，由式(4.2-10)，此时应有 $|\infty\rangle=|-\infty\rangle$. 因此，在没有相互作用时，过程的状态没有改变.

设自由场体系的初态 $|i\rangle$ 是一个确定的粒子态. 在相互作用

H_I 作用下，这个初态变为末态：

$$|\infty,i\rangle=S|i\rangle \tag{4.2-12}$$

若$|f\rangle$是自由场系统的本征态，那么其末态可以表示为本征态$|f\rangle$的线性叠加

$$|\infty,i\rangle=\sum_f|f\rangle\langle f|\infty,i\rangle \tag{4.2-13}$$

利用式(4.3-12)知

$$\langle f|\infty,i\rangle=\langle f|S|i\rangle \tag{4.2-14}$$

这就是从确定的初态$|i\rangle$通过相互作用 H_I 演化为确定的末态$|f\rangle$的跃迁振幅，它恰好是 S 矩阵的矩阵元：

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle \tag{4.2-15}$$

量子场论相互作用问题的解，在于求物理过程中不同状态的跃迁几率，再将其与实验直接测出的实测值做对比. 而跃迁几率的计算，还需借助于求解过程的跃迁振幅. 在初、末态已知的条件下，跃迁振幅的求解，又决定于散射矩阵 S 的求解.

第三节　散射矩阵微扰展开

前已述及，对于量子化自由场，它们可以求得精确解. 但是，在相互作用量子场中，问题就不那么简单了. 可以说，能够导致粒子产生、湮灭和相互转化等的相互作用，都难以给出解析的精确解. 目前，解决相互作用量子场问题的一般方法还是近似法，而微扰近似法又是最常用的方法.

微扰法先假设相互作用很微弱，即把 H_I 视为微扰，由此出发可求出 U 矩阵的波动方程(4.2-7)的解，然后再一步一步地对各

级展开项进行具体计算. 显然,这种方法对于电磁作用或弱作用(H_I 较微弱)是适用的,但是,对于 H_I 不微弱的强相互作用,它就不是良好的方法. 在电磁相互作用里,微扰法已发展成非常有效的近似方法.

由式(4.2-7),在 I-图景中,U 矩阵满足波动方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_I(t)U(t,t_0) \tag{4.3-1}$$

下面,我们拟采用微扰法,求出 U 的微扰解,然后通过 S 矩阵与 U 矩阵的联系,找到散射矩阵 S 的微扰解,再从 S 矩阵求出散射振幅,最后求出跃迁几率,这就是处理相互作用量子场问题的解的微扰法具体做法.

设在$(t-t_0)$时间内,$H_I(t)$为常数,那么,方程(4.3-1)有形式解

$$U(t,t_0)\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_I(t-t_0)} \tag{4.3-2}$$

一般地,当存在相互作用时,$H_I(t)$是时间的函数,因此,方程(4.3-1)并不存在像(4.3-2)那样简单的解. 为了进一步讨论方程(4.3-1)的解,我们将其化成积分形式.

由式(4.3-1),我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=-\mathrm{i}H_I(t)U(t,t_0)$$

所以

$$U(t,t_0)-U(t_0,t_0)=-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}H_I(t')U(t',t_0)\mathrm{d}t' \tag{4.3-3}$$

此处积分变量是 t',利用初始条件 $U(t_0,t_0)=I$,有

$$U(t,t_0)=I-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'H_I(t')U(t',t_0) \tag{4.3-4}$$

如果 H_I 不够强,使得

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}tH_I(t,t_0)\ll I \tag{4.3-5}$$

那么，方程(4.3-4)变成

$$U(t,t_0)=I+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1H_I(t_1)U(t_1,t_0)$$

而上式右边的$U(t,t_0)$可类似地写成

$$U(t_1,t_0)=I+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2H_I(t_2)U(t_2,t_0)$$

同理有

$$U(t_2,t_0)=I+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_3H_I(t_3)U(t_3,t_0)$$

……

及

$$U(t_{n-1},t_0)=I+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_nH_I(t_n)U(t_n,t_0)$$

将上述各关系逐一代入并展开可得

$$\begin{aligned}U(t,t_0)=I&+(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1H_I(t_1)\\&+(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2H_I(t_1)H_I(t_2)\\&+\cdots\\&+(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_nH_I(t_1)H_I(t_2)\\&\cdots H_I(t_n)+\cdots\end{aligned}\tag{4.3-6}$$

若将上式写成级数展开形式，则有

$$U(t,t_0)=\sum_n U^{(n)}(t,t_0)\tag{4.3-7}$$

这里　$U^{(0)}(t,t_0)=I$

$$U^{(1)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1H_I(t_1)$$

$$U^{(2)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2H_I(t_1)H_I(t_2)$$

……

$$U^{(n)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_3 \cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n) \tag{4.3-8}$$

分别称为 U 矩阵的 0 级、1 级、2 级……n 级微扰，而式(4.3-6)就是 U 矩阵的微扰近似解.

仔细考察式(4.3-6)，可知各个积分上下限各不相同，这给积分带来不便. 为解决这一困难，有人采用一种叫做“时序乘积”运算法，统一了上述关系式中的积分上下限.

设存在某一时序算符 T，并定义它满足关系：

$$T[H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)]=H_I(t_i)H_I(t_j)\cdots H_I(t_k) \tag{4.3-9}$$

就是说，时序算符 T 对$[H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)]$的作用，是在它们的 $n!$ 可能排列中，选取按时间先后次序自右向左顺序排列. 式(4.3-9)也适用于一般算符的时序乘积.

为具体领会 n 级微扰及时序算符的应用，我们以 $n=2$ 的简单情况为例加以说明.

对于 $n=2$，U 矩阵的 2 级微扰项，由式(4.3-8)得知

$$U^{(2)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_I(t_1)H_I(t_2) \tag{4.3-10}$$

引入阶跃函数 $\theta(\tau)$，并定义为

$$\theta(\tau)=\begin{cases}0 & (\tau<0)\\ 1 & (\tau>0)\end{cases}$$

则式(4.3-10)右边积分上下限可写成

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_1=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\theta(t_1-t_2) \tag{4.3-11}$$

这是因为

$$\int_{t_0}^{t} dt_2\theta(t_1 - t_2) = \int_{t_0}^{t_1} dt_2\theta(t_1 - t_2) + \int_{t_1}^{t} dt_2\theta(t_1 - t_2)$$

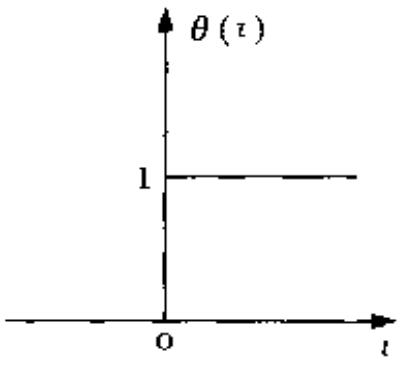


图 4-1

而上式右边第二项，当 t_1 有限，对 t_2 积分，若有值，则 $t=t_2>t_1$，但当 $t_2>t_1$ 时，由阶跃函数知，$\theta(t_1-t_2)=0$，这样，由式(4.3-10)有

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) = \int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\theta(t_1 - t_2)H_I(t_1)H_I(t_2) \tag{4.3-12}$$

因此，右边积分上、下限取得统一，故可变换积分变量 t_1 及 t_2.

$t_1 \to t_2$

$t_2 \to t_1$

且当　$t_1>t_2$ 时，有 $H_I(t_1)H_I(t_2)$

$t_2>t_1$ 时，有 $H_I(t_2)H_I(t_1)$

即

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)\\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\theta(t_1 - t_2)H_I(t_1)H_I(t_2)\\
&= \int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t} dt_1\theta(t_2 - t_1)H_I(t_2)H_I(t_1)\\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_1}^{t} dt_2 H_I(t_2)H_I(t_1)
\end{aligned} \tag{4.3-13}$$

又因为，根据时序乘积的定义，$n=2$ 时，$H_I(t_1)H_I(t_2)$ 有 2! 种排列，它们对积分的贡献是

$$\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)]$$

$$= \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2 H_I(t_2) H_I(t_1)$$

(4.3-14)

等式右边第一项是 $t_1 > t_2$ 时的贡献，t_1 为积分上限，而第二项是 $t_2 > t_1$ 时的贡献，t_1 为积分下限. 由式(4.3-13)可知，式(4.3-14)右边两项相等

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 T[H_I(t_1) H_I(t_2)]$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \tag{4.3-15}$$

这样，式(4.3-8)可写成

$$U^{(2)}(t, t_0) = \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 T[H_I(t_1) H_I(t_2)]$$

(4.3-16)

当 $n = m$ 时，有

$$U^{(m)}(t, t_0) = \frac{(-\mathrm{i})^m}{m!} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_m T[H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_m)] \tag{4.3-17}$$

上面我们求出 U 矩阵的 m 级微扰项，根据散射矩阵的定义式(4.2-9)，再利用 U 矩阵的级数展开式(4.3-7)和(4.3-17)，可得 S 矩阵的展开表示式为

$$S = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} U(t, t_0) = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$$

$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_2 \cdots$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_n T[H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \tag{4.3-18}$$

考虑到

$$\int \mathrm{d}t H_I(t) = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathscr{H}_I(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^4x\mathscr{H}_I(x)$$

则 S 矩阵可记为

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_2\cdots$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_n T[\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)] \quad (4.3\text{-}19)$$

由于 $\mathscr{H}_I$ 是标量，而 d^4x 是洛仑兹不变量，所以，式(4.3-19)所表示的 S 矩阵是协变的，我们称上述的微扰理论为协变微扰理论. 这样，由初态 $|i\rangle$ 通过相互作用 $\mathscr{H}_I$ 转化为末态 $|f\rangle$ 的物理过程的跃迁振幅是

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|\sum_{n=0}^{\infty}S^{(n)}|i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f|S^{(n)}|i\rangle \quad (4.3\text{-}20)$$

其中 $\langle f|S^{(n)}|i\rangle$ 称为 n 级微扰跃迁振幅.

场的相互作用使系统由一确定的初态 $|i\rangle$ 跃迁到某确定的末态 $|f\rangle$，其跃迁振幅 $\langle f|S|i\rangle$ 就由(4.3-20)表示. 但是，在跃迁振幅中，S 是含有无穷多项的各种算符的乘积，如何从这无穷多项中找出对所讨论过程有贡献的一些项，这是我们下一步所关心的问题.

第四节　散射矩阵的简化

上面我们采用时序乘积，使 S 矩阵的微扰展开式中积分上、下限相同，给计算带来方便. 但是，为了实际计算需要，还要将 S 矩阵中的编时乘积简化成正规乘积.

一、正规乘积

从自由场一章的讨论，我们曾得出在不存在粒子的真空态中，其能量、电荷具有无穷大的不切实际的结论. 究其原因，是我们的数学处理有不尽合理之处，如果我们引进正规乘积的概念，便可消除这些"无穷大"困难.

按照微扰近似法，S 矩阵可展开成无穷级数 $\sum S^{(n)}$，而在每个 n 级微扰展开项 $S^{(n)}$ 中，又包含着时序乘积，在时序乘积中的每一个哈密顿密度 $\mathscr{H}_I$ 又包含着各种场算符的乘积. 在 I-图景里，这些场算符又包含着一系列的产生算符和湮灭算符. 所以，S 矩阵实际上包含着一系列产生算符与湮灭算符乘积的项. 在这么多项中，并非每一项都能对给定的物理过程作出贡献，在 S 矩阵中，只有那些具有与初态粒子相对应的湮灭算符及与末态粒子相对应的产生算符作为因子的项，才对散射的跃迁振幅 $\langle f|S|i\rangle$ 有贡献. 当然，在这些算符乘积中，还可能附加包含着一对对的产生与湮灭算符，使所产生的新粒子又被湮灭，在过程中这些出现又消失的"虚粒子"仅出现在物理过程的中间态. 为计算方便，往往利用算符的对易关系将 S 矩阵中各项的算符乘积排列成正规形式，即将所有湮灭算符排列在右边，而产生算符排列在左边，这就使我们容易看出哪些项对过程（从 $i\to f$）的 S 矩阵元有贡献，而哪些项没有贡献，从而使对物理过程的讨论大大简化，这也是我们引入正规乘积的原因.

所谓正规乘积指的是：在某一乘积中，将所有湮灭算符排在右边，而所有产生算符排在左边，这种乘积，称为正规乘积.

由于所有的产生与湮灭算符都可以对易（玻色子）或反对易（费米子），所以，每一个正规乘积只能导致一个初态和末态粒子确定的物理过程. 假定有所谓"正规化"算符 N 存在，当它作用在一

系列的场算符的乘积时，就会将其安排成正规乘积.

例如，玻色子场算符 φ 与所有其他场算符都对易：

$$\begin{aligned} &N(\varphi^{(-)}\varphi^{(+)})=\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} \\ &N(\varphi^{(\ )}\psi^{(\pm)})=\psi^{(\pm)}\varphi^{(\ )} \end{aligned} \tag{4.4-1}$$

费米子场算符之间反对易：

$$N(\psi^{(\ )}\psi^{(\pm)})=-\psi^{(\pm)}\psi^{(-)} \tag{4.4-2}$$

又例如，轻子与电磁场的相互作用哈密顿量 $\mathscr{H}_I=-j_\mu A_\mu$ 是正规乘积. 事实上，

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_I &= -j_\mu A_\mu \\ &= -(\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)A_\mu \\ &= -\mathrm{i}e\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi \qquad (\text{因 } A_\mu \text{ 是玻色场算符}) \\ &= -\mathrm{i}eN[\bar{\psi}\hat{A}\psi] \qquad (\text{其中 } \hat{A}=\gamma_\mu A_\mu) \end{aligned} \tag{4.4-3}$$

再有，核子与介子的相互作用哈密顿量也是正规乘积，具体证明从略.

二、场算符的收缩

上面我们定义了场算符的时序乘积 T 和正规乘积 N 两种运算，下面我们看看在这两种乘积之间存在什么联系.

设有两个场算符 $\Phi_\alpha(x_1)$ 和 $\Phi_\beta(x_2)$，记它们的时序乘积与正规乘积之差为

$$\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)=T[\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)]-N[\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)] \tag{4.4-4}$$

在这里，我们称 $\Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)$ 为算符收缩. 根据算符收缩的定义式(4.4-4)，可以将时序乘积表示为正规乘积，即

$$T[\Phi_\alpha\Phi_\beta]=N[\Phi_\alpha\Phi_\beta]+\Phi_\alpha\Phi_\beta \tag{4.4-5}$$

由此可见，将两个算符的时序乘积用正规乘积表示时，必须利用算符对易或反对易关系，适当调换两算符的位置，由此产生附加项 $\underbrace{\varphi_\alpha\varphi_\beta}$. 由于在相互作用图景(I-图景)中，场算符的对易关系为 c 数(普通函数)，因而，两算符的积 $\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta}$ 亦必定是 c 数而不是算符了. 正因如此，称 $\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta}$ 为两算符的收缩.

若对式(4.4-5)两边取真空平均值，考虑到普通函数的真空平均值等于原来的函数，而正规乘积的真空平均值为零，即

$$\langle 0|\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta}|0\rangle=\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta} \tag{4.4-6}$$

$$\langle 0|N[\Phi_\alpha\Phi_\beta]|0\rangle=0 \tag{4.4-7}$$

因此，算符的收缩等于时序乘积的真空平均值

$$\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta}=\langle 0|T[\Phi_\alpha\Phi_\beta]|0\rangle \tag{4.4-8}$$

下面我们具体讨论几种场算符的收缩.

1. 介子场算符的收缩

对于厄米标量场，我们有

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)$$

由定义式(4.4-5)有

$$\underbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}=T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]-N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]$$

由于

$$\begin{aligned}N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]&=N[(\varphi^{(+)}(x_1)+\varphi^{(-)}(x_1))(\varphi^{(+)}(x_2)\\&\qquad+\varphi^{(-)}(x_2))]\\&=N[\varphi^{(+)}(x_1)+\varphi^{(+)}(x_2)+\varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2)\\&\quad+\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)+\varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)]\\&=\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)+\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)\\&\quad+\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2)+\varphi^{(+)}(x_2)\varphi^{(-)}(x_1)\end{aligned}$$

当 $t_1>t_2$ 时，由时序乘积定义式(4.3-9)，有

$$T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]=\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

$$=[\varphi^{(+)}(x_1)+\varphi^{(-)}(x_1)][\varphi^{(+)}(x_2)+\varphi^{(-)}(x_2)]$$
$$=\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2)+\varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)$$
$$+\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2)+\varphi^{(+)}(x_1)\varphi^{(-)}(x_2) \qquad (4.4\text{-}9)$$

因此，有收缩

$$\underbrace{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}=T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]-N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]$$
$$=\varphi^{(-)}(x_1)\varphi^{(+)}(x_2)-\varphi^{(+)}(x_2)\varphi^{(-)}(x_1)$$
$$=[\varphi^{(-)}(x_1),\varphi^{(+)}(x_2)] \qquad (4.4\text{-}10)$$

可见，两个介子场算符 $\varphi(x_1)$，$\varphi(x_2)$ 收缩为一个普通函数.

若定义

$$\delta_{ik}\Delta_f(x_1-x_2)=2[\varphi^{(-)}(x_i),\varphi^{(+)}(x_k)] \qquad (4.4\text{-}11)$$

则介子场算符的收缩可记为

$$\varphi_{\underbrace{i}}(x_1)\varphi_k(x_2)\Rightarrow\frac{1}{2}\delta_{ik}\Delta_f(x_1-x_2)=\delta_{ik}\Delta_f^0(x_1-x_2) \qquad (4.4\text{-}12)$$

此处，$\Delta_f^0(x_1-x_2)$ 称为标量场在 (x_1, x_2) 点间的传播函数. 因此，标量场中两点场算符的收缩，等于场在这两点间的传播函数.

图 4-2 表示在 x_2 点处通过产生算符 $\varphi^{(-)}(x_2)$ 产生一个介子，然后由传播函数的作用沿着路径 $x_2\to x_1$ 传播到 x_1 点，再在 x_1 处通过湮灭算符 $\varphi^{(-)}(x_1)$ 把粒子湮灭.

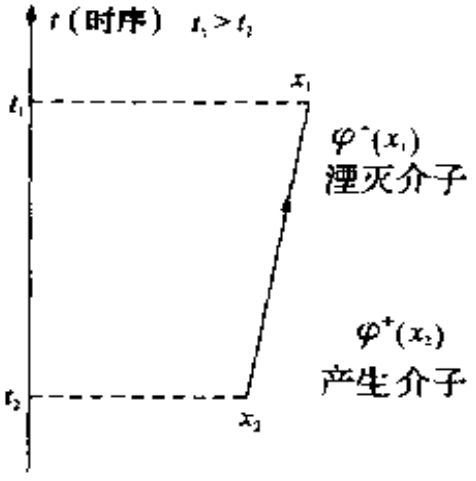


图 4-2

2. 电磁场算符的收缩

在计算电磁场算符的收缩时，必须注意量子电磁场是玻色子场. 根据场算符的收缩定义，我们有

$$\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)=T[A_\nu(x_1)A_\nu(x_2)]-N[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]$$

(4.4-13)

若以 $\Omega(t_1-t_2)$表示取 $t_1>t_2$ 时序，那么

$$\begin{aligned}T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]&=\Omega(t_1-t_2)[(A_\mu^{(+)}(x_1)+A_\mu^{(-)}(x_1))\\&\quad\times(A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\nu^{(-)}(x_2))]\\&=\Omega(t_1-t_2)[A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)\\&\quad+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)]\end{aligned}\tag{4.4-14}$$

又因为

$$\begin{aligned}N[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]&=N[A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\mu^{(+)}(x_1)\\&\quad\times A_\nu^{(-)}(x_2)+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)]\\&=A_\mu^{(+)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)+A_\nu^{(+)}(x_2)\\&\quad\times A_\nu^{(-)}(x_1)+A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(-)}(x_2)\end{aligned}\tag{4.4-15}$$

因此

$$\begin{aligned}&T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]-N[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]\\&=\Omega(t_1-t_2)[A_\mu^{(-)}(x_1)A_\nu^{(+)}(x_2)-A_\nu^{(+)}(x_2)A_\mu^{(-)}(x_1)]\\&=\Omega(t_1-t_2)[A_\mu^{(-)}(x_1),A_\nu^{(+)}(x_2)]\end{aligned}\tag{4.4-16}$$

可见，电磁场算符的收缩也是一个普通函数，即

$$\underbrace{A_\mu(x_1)A_\mu}(x_2)=\Omega(t_1-t_2)[A_\mu^{(-)}(x_1),A_\nu^{(+)}(x_2)]$$

(4.4-17)

若定义

$$\delta_{\mu\nu}D_f(x_1-x_2)=2[A_\mu^{(-)}(x_1),A_\nu^{(+)}(x_2)]\tag{4.4-18}$$

那么，电磁场算符的收缩可记为

$$\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)=\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_f(x_1-x_2)=\delta_{\mu\nu}D_f^0(x_1-x_2)$$

(4.4-19)

此处，$D_f(x_1-x_2)$称为电磁场的传播函数. 所以，电磁场中两点的

场算符的收缩，等于场中两点的传播函数.

类似地，我们也可通过图形来形象地表示电磁场算符的收缩. 如图 4-3 所示，在 x_2 点处，由电磁场算符 $A_\mu^{(+)}(x_2)$ 产生一个场粒子(光子)，在传播函数作用下，光子沿 $x_2 \to x_1$，并在 x_1 点处由算符 $A_\nu^{(-)}(x_1)$ 湮灭一个光子.

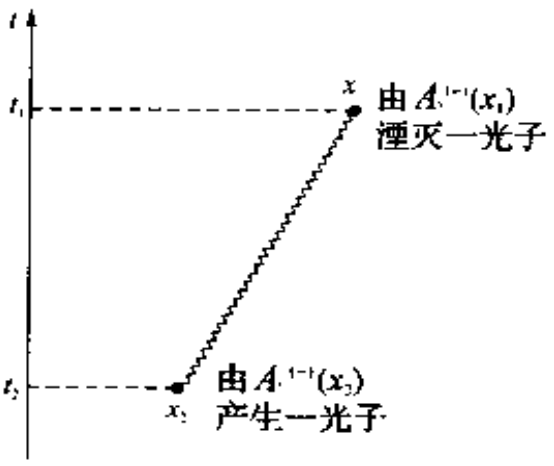


图 4-3

3. 旋量场算符的收缩

设在旋量场中 x_1 和 x_2 点处，分别有场算符 $\psi(x_1)$ 及 $\psi(x_2)$，那么，这两个场算符的收缩定义为

$$\underbrace{\psi(x_1)\psi}(x_2)=T[\psi(x_1)\psi(x_2)]-N[\psi(x_1)\psi(x_2)] \tag{4.4-20}$$

仍选择时序 $t_1>t_2$，那么

$$T[\psi(x_1)\psi(x_2)]=\psi(x_1)\psi(x_2) \tag{4.4-21}$$

同样可以证明

$$N[\psi(x_1)\psi(x_2)]=\psi(x_1)\psi(x_2) \tag{4.4-22}$$

因此，旋量场算符的收缩为

$$\begin{aligned}\underbrace{\psi(x_1)\psi}(x_2)&=T[\psi(x_1)\psi(x_2)]-N[\psi(x_1)\psi(x_2)]\\&=\psi(x_1)\psi(x_2)-\psi(x_1)\psi(x_2)\\&=0\end{aligned} \tag{4.4-23}$$

所以，两个同种(正或反)旋量粒子的场收缩为零，这种场不向外传播，不存在与场传播相关的传播函数.

设有正粒子旋量场 $\psi(x_1)$ 及反粒子旋量场 $\bar{\psi}(x_2)$，我们来求这两个场算符的收缩，仍选择 $t_1>t_2$ 时序，显然有

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}=T[\psi(x_1)\psi(x_2)]-N[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]$$

(4.4-24)

考虑到

$$\begin{aligned}T[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]&=\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\\&=[u_\alpha(x_1)+v_\alpha(x_1)][\bar{u}_\beta(x_2)+v_\beta(x_2)]\\&=u_\alpha(x_1)\bar{u}_\beta(x_2)+u_\alpha(x_1)\bar{v}_\beta(x_2)+v_\alpha(x_1)\bar{u}_\beta(x_2)\\&\quad+v_\alpha(x_1)\bar{v}_\beta(x_2)\end{aligned}\tag{4.4-25}$$

又因为

$$\begin{aligned}N[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]&=N[u_\alpha(x_1)\bar{u}_\beta(x_2)+u_\alpha(x_1)\bar{v}_\beta(x_2)\\&\quad+v_\alpha(x_1)\bar{u}_\beta(x_1)+v_\alpha(x_1)\bar{v}_\beta(x_2)]\\&=-\bar{u}_\beta(x_2)u_\alpha(x_1)+u_\alpha(x_1)\bar{v}_\beta(x_2)\\&\quad+v_\alpha(x_1)\bar{u}_\beta(x_2)+v_\alpha(x_1)v_\beta(x_2)\end{aligned}\tag{4.4-26}$$

故

$$\begin{aligned}&T[\psi(x_1)\psi(x_2)]-N[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]\\&=u_\alpha(x_1)+\bar{u}_\beta(x_2)-[-\bar{u}_\beta(x_2)u_\alpha(x_1)]\\&=u_\alpha(x_1)+\bar{u}_\beta(x_2)+\bar{u}_\beta(x_2)u_\alpha(x_1)\\&=\{u_\alpha(x_1),\bar{u}_\beta(x_2)\}\end{aligned}$$

因此 $\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)=\{u_\alpha(x_1),\bar{u}_\beta(x_2)\}$ (4.4-27)

类似地，当取时序 $t_2>t_1$ 时，有

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)=-\{v_\beta(x_2),\bar{v}_\alpha(x_1)\}\tag{4.4-28}$$

若定义

$$S_{f,\alpha\beta}(x_1-x_2)=\begin{cases}-2\{u_\alpha(x_1),\bar{u}_\beta(x_2)\}(\text{取时序 } t_1>t_2)\\2\{v_\beta(x_1),\bar{v}_\alpha(x_2)\}(\text{取时序 } t_2>t_1)\end{cases}\tag{4.4-29}$$

则当时序 $t_1>t_2$ 时

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)=\{u_\alpha(x_1),\bar{u}_\beta(x_2)\}=-\frac{1}{2}S_f,_{\alpha\beta}(x_1-x_2)$$

(4.4-30)

当时序 $t_2>t_1$ 时

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)=-\{v_\beta(x_2),\bar{v}_\alpha(x_1)\}=-\frac{1}{2}S_f,_{\alpha\beta}(x_1-x_2)$$

(4.4-31)

此处，$S_f,_{\alpha\beta}(x_1-x_2)$是旋量场的传播函数. 可见，在时序$t_1>t_2$时，在 x_2 点处由 $\bar{u}_\beta(x_2)$产生的旋量粒子，传播到 x_1 点后由 $u_\alpha(x_1)$湮灭一个旋量粒子，如图 4-4 所示. 而在时序 $t_2>t_1$ 时，反粒子的产生与湮灭如图 4-5 所示.

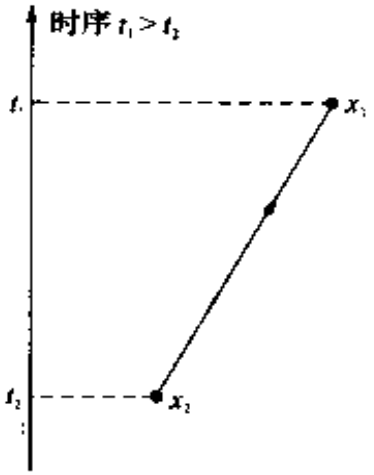


图 4-4

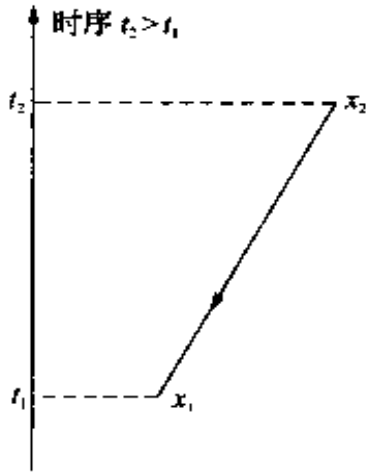


图 4-5

4. 不同场算符的收缩

可以证明，两个不同场算符的收缩等于零，即

$$\underbrace{\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta}(x_2)=\underbrace{A_\mu(x_1)\psi_\beta}(x_2)=\underbrace{\varphi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta}(x_2)=\cdots=0$$

(4.4-32)

例如，取 $t_1>t_2$ 时序，我们可证明$\underbrace{\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta}(x_2)=0$，事实上，

$$\underline{\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)}=T[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]-N[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]$$

考虑到

$$\begin{aligned}
&T[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]\\
&\quad=T[(\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1))(\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\psi_\beta^{(-)}(x_2))]\\
&\quad=T[\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)\\
&\qquad+\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)]\\
&\quad=\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)\\
&\qquad+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&N[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]\\
&\quad=N[(\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1))(\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\psi_\beta^{(+)}(x_2))]\\
&\quad=N[\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)\\
&\qquad+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)]\\
&\quad=\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)\\
&\qquad+\psi_\beta^{(+)}(x_2)\varphi_\alpha^{(+)}(x_1)+\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)}&=T[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]-N[\varphi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)]\\
&=\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_2)-\psi_\beta^{(+)}(x_2)\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\\
&=\psi_\beta^{(+)}(x_2)\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)-\psi_\beta^{(+)}(x_2)\varphi_\alpha^{(-)}(x_1)\\
&=0\quad\text{(对易)}
\end{aligned}$$

三、维克定理

在量子场问题的求解过程中，我们常常要计算 S 矩阵的矩阵元 S_{fi}，但由于物理量取正规乘积时，要求场的相互作用哈密顿量 $\mathcal{H}_I$ 也取正规乘积，因此，S 矩阵元就包含了时序乘积（T 乘积）与正规乘积（N 乘积）的混合乘积. 由于 T 乘积要求算符按时序先后排列，而 N 乘积要求按产生与湮灭算符的顺序排列. 且因为算符

之间存在对易关系，因此，我们可以找到这两种乘积的联系. 维克定理就是解决如何将场算符中的 T 乘积约化为 N 乘积的问题.

维克定理 Ⅰ：m 个场算符的 T 乘积，可以惟一地展开成含有各种可能的收缩因子的 N 乘积之和. 即

$$\begin{aligned}T(\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_m)&=N(\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_m)+N(\underbrace{\Phi_1\Phi_2}\cdots\Phi_m)\\&+(\text{所有其他含单项收缩的 } N \text{ 乘积})\\&+N(\underbrace{\Phi_1\Phi_2}\ \underbrace{\Phi_3\Phi_4}\Phi_5\cdots\Phi_m)\\&+(\text{所有其他含双项收缩的 } N \text{ 乘积})\\&+N(\underbrace{\Phi_1\Phi_2}\ \underbrace{\Phi_3\Phi_4}\ \underbrace{\Phi_5\Phi_6}\Phi_7\cdots\Phi_m)\\&+(\text{所有其他含三项收缩的 } N \text{ 乘积})+\cdots\end{aligned}\tag{4.4-33}$$

有关维克定理(4.4-33)式的证明，可以采用数学归纳法. 若能证明在$(m+1)$重积时上述关系成立，则定理就得证. 在这里，我们不对定理进行具体论证，只对 $m=1$、2、3 等情况与定理的表述的一致性进行讨论.

事实上，若以 $\Phi(x)$代表相互作用场体系的所有场算符，它包含玻色子场 $\varphi(x)$或 $A_\mu(x)$和费米子场 $\psi(x)$，假定 $t_1\neq t_2\neq\cdots\neq t_m$，则当 $m=1$ 时，显然有

$$T(\Phi_1)=N(\Phi_1)\tag{4.4-34}$$

又当 $m=2$ 时，由场算符收缩的定义知

$$\underbrace{\Phi_1\Phi_2}=T(\Phi_1\Phi_2)-N(\Phi_1\Phi_2)$$

所以

$$T(\Phi_1\Phi_2)=N(\Phi_1\Phi_2)+\underbrace{\Phi_1\Phi_2}\tag{4.4-35}$$

当 $m=3$ 时，场算符出现三重积，其 T 乘积与 N 乘积的关系可作如下讨论：

设 $t_1>t_3$，$t_2>t_3$

显然

$$\begin{aligned}T(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)&=T(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3\\&=[N(\Phi_1\Phi_2)+\underbrace{\Phi_1\Phi_2}]\Phi_3\end{aligned}\tag{4.4-36}$$

$$= N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3 + \underbrace{\Phi_1\Phi_2}\Phi_3 \tag{4.4-37}$$

又因为 $N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3 = N(\Phi_1\Phi_2)(\Phi_3^+ + \Phi_3^-)$

$$= N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^+ + N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^- \tag{4.4-38}$$

上式右边第二项是正规乘积，因此只考虑第一项. 由于

$$\begin{aligned} N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^+ &= N[(\Phi_1^+ + \Phi_1^-)(\Phi_2^+ + \Phi_2^-)]\Phi_3^+ \\ &= N(\Phi_1^+\Phi_2^+ + \Phi_1^-\Phi_2^- + \Phi_1^+\Phi_2^- + \Phi_1^-\Phi_2^+)\Phi_3^+ \\ &= \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+ + \Phi_1^-\Phi_2^-\Phi_3^+ + \Phi_1^+\Phi_2^-\Phi_3^+ + \Phi_1^-\Phi_2^+\Phi_3^+ \\ &= \Phi_1^-\Phi_2^+\Phi_3^+ + \Phi_1^-(\Phi_2^-\Phi_3^+) + \Phi_1^+(\Phi_2^-\Phi_3^+) + (\Phi_1\Phi_3)\Phi_2^+ \end{aligned} \tag{4.4-39}$$

考虑到

$$\Phi_A^-\Phi^+ \mp_\mu \Phi_B^+\Phi_A^- = [\Phi_A^-, \Phi_B^+] = \underbrace{\Phi_A\Phi_B} \tag{4.4-40}$$

或

$$\Phi_A^-\Phi_B^+ = \pm\Phi_B^+\Phi_A^- + \underbrace{\Phi_A\Phi_B} \tag{4.4-41}$$

其中，玻色子场取“－”号，费米子场取“＋”号. 由式(4.4-41)和式(4.4-39)可写成

$$\begin{aligned} N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^+ &= \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+ + \Phi_1(\underbrace{\Phi_2\Phi_3} \pm \Phi_3^-\Phi_2^-) + \Phi_1^+(\underbrace{\Phi_2\Phi_3} \\ &\quad \pm \Phi_3^+\Phi_2^-) + (\underbrace{\Phi_1\Phi_3} \pm \Phi_3^+\Phi_1^-)\Phi_2^+ \\ &= \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+ + \Phi_1^-\underbrace{\Phi_2\Phi_3} + (\Phi_3^+\Phi_1^- + \underbrace{\Phi_1\Phi_3})\Phi_2 + \Phi_1^+\underbrace{\Phi_2\Phi_3} \\ &\quad \pm \Phi_1^+\Phi_3^+\Phi_2 + \Phi_2^+\underbrace{\Phi_1\Phi_3} \pm \Phi_2^+\Phi_3^+\Phi_1^- \\ &= \Phi_1^-\Phi_2^+\Phi_3^+ \pm \Phi_3^+\Phi_1^-\Phi_2 \pm \Phi_1^+\Phi_3^+\Phi_2^- \pm \Phi_2^+\Phi_3^+\Phi_1^- \\ &\quad + \underbrace{(\Phi_1^+ + \Phi_1)}\underbrace{\Phi_2\Phi_3} + \underbrace{(\Phi_2^+\Phi_2)}\underbrace{\Phi_1\Phi_3} \\ &= N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3^-) + \Phi_1\underbrace{\Phi_2\Phi_3} + \Phi_2\underbrace{\Phi_1\Phi_3} \end{aligned} \tag{4.4-42}$$

再由式(4.4-37)及式(4.4-38)，有

$$\begin{aligned} T(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) &= N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3 + \Phi_3\underbrace{\Phi_1\Phi_2} \\ &= N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^- + N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^- + \Phi_3\underbrace{\Phi_1\Phi_2} \end{aligned}$$

$$=N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3^+)+\Phi_1\underbrace{\Phi_2\Phi_3}+\Phi_2\underbrace{\Phi_1\Phi_3}+N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3^-$$
$$+\Phi_3\underbrace{\Phi_1\Phi_2}$$

由于　$N(\Phi_1\Phi_2)\Phi_3=N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3^-)$

及　$N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3^+)+N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3^-)=N[\Phi_1\Phi_2(\Phi_3^++\Phi_3^-)]$
$$=N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)$$

则

$$T(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)=N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)+\Phi_1\underbrace{\Phi_2\Phi_3}+\Phi_2\underbrace{\Phi_1\Phi_3}+\Phi_3\underbrace{\Phi_1\Phi_2}$$
$$=N(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)+N(\Phi_1\underbrace{\Phi_2\Phi_3})+N(\Phi_2\underbrace{\Phi_1\Phi_3})+N(\Phi_3\underbrace{\Phi_1\Phi_2}) \tag{4.4-43}$$

上式中利用$\underbrace{\Phi_A\Phi_B}$为一普通数及下列关系

$$N(\underbrace{\Phi_1\Phi_2}\Phi_3\Phi_4\cdots\Phi_m)=\underbrace{\Phi_1\Phi_2}N(\Phi_3\cdots\Phi_m) \tag{4.4-44}$$

至此可见，在 $m=1,2,3$ 时，维克定理成立.

维克定理Ⅱ：正规乘积中，同一时刻的场算符收缩为零.

本定理证明如下：

设 $\Phi_\alpha(x)$与 $\Phi_\beta(x)$是两个同时的场算符，简记为 Φ_α,Φ_β，那么

$$T[N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)]=N(\Phi_\alpha\Phi_\beta) \tag{4.4-45}$$

另一方面

$$N[N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)]=N(\Phi_\alpha\Phi_\beta) \tag{4.4-46}$$

所以，按场算符的收缩定义，有

$$N(\underbrace{\Phi_\alpha\Phi_\beta})=T[N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)]-N[N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)]$$
$$=N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)-N(\Phi_\alpha\Phi_\beta)$$
$$=0$$

同样可证

$$N(\underbrace{\bar{\Phi}_\alpha\bar{\Phi}_\beta})=0$$

由于收缩是与量子场的传播有关的物理过程，考虑到对于同

一时空点不存在传播效应，所以出现收缩为 0 的结果.

第五节 费曼图

由本章前几节的讨论可知，相互作用量子场问题的求解，需借助于散射矩阵的微扰展开(式 4.3-19)

$$S = \sum_{n=0}^{(\infty)} S^{(n)}$$

这里 $S^{(n)}$ 称为 n 级微扰矩阵元，它是一个时序乘积. 在上节里，我们又讨论了如何将 S 矩阵中的混合时序乘积约化为正规乘积，以使我们在对物理过程的求解中更明确地找出对散射振幅有贡献的因素.

但是，采用纯数学的处理方法来解决具体的量子场论问题，其过程是相当复杂的. 然而，由于每一个正规乘积代表每一个具体的散射过程，如果能用一个图形来表示某一散射过程，并将其与场算符的正规乘积联系起来，那将会给量子场问题的求解带来更大的方便. 费曼和戴逊等首先创立了这种方法，通过散射过程的某一图形与正规乘积间的一一对应关系，找出具体过程的 S 矩阵元，从而求出物理过程的散射振幅和跃迁几率，达到最终求解量子场论问题的结果. 这种通过一定图形与正规乘积的对应关系求解散射矩阵元的方法，称为费曼图法.

我们知道，强相互作用原则上不能用微扰论处理，弱相互作用又不必考虑高级修正项，所以，我们只讨论在电磁相互作用的情况下，如何建立费曼图并用以表示场算符正规乘积的方法.

一、坐标空间场算符的图示

在费曼图中，四度时空坐标 x_μ 用点表示，称为顶点. 场算符可以用过顶点的线表示. 场算符产生(湮灭)粒子与一外线对应，而场算符的收缩用内线表示. 通常在坐标空间利用图形表示场算符，会涉及画粒子的外线、顶点与内线问题，这里就如何画产生(湮灭)粒子的外线先作如下约定：

(1)时间轴自下竖直向上，并以过时间原点垂直子时轴的水平轴为界，划分上、下两部分.

(2)反应前(湮灭)的粒子外线画在图形的下半部(时轴的负值部分)，反应后产生的粒子外线画在图形的上半部(时轴的正值部分).

(3)对子标量粒子、光子和正旋量粒子(如 e^-)等，粒子的外线，其指向顺时轴方向.

(4)对于反旋量粒子(如 e^+)的外线，其指向逆时轴方向.

对子自由介子标量场算符，因为

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x)$$

此处 $\varphi^{(+)}(x)$代表在点 x 处产生一介子的场算符，$\varphi^{(-)}(x)$代表在点 x 处湮灭一介子的场算符. $\varphi^{(+)}(x)$，$\varphi^{(-)}(x)$和 $\varphi(x)$的标量场算符图示如图 4-6 所示.

对于自由电磁场 $A_\mu(x)$，由子

$$A_\mu(x)=A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x)$$

此处 $A_\mu^{(+)}(x)$代表在 x 点处产生一光子的算符，$A_\mu^{(-)}(x)$代表在 x 处湮灭一光子的算符. $A_\mu(x)$，$A_\mu^{(+)}$ 和 $A_\mu^{(-)}$ 的电磁场算符图示如图 4-7 所示，图 4-7 中，用带箭头的波纹线表示 $A_\mu(x)$算符.

自由旋量场的算符 $\psi(x)$和 $\bar{\psi}(x)$的图形如图 4-8 所示，由于

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^{(+)}(x)+\bar{\psi}^{(-)}(x)$$

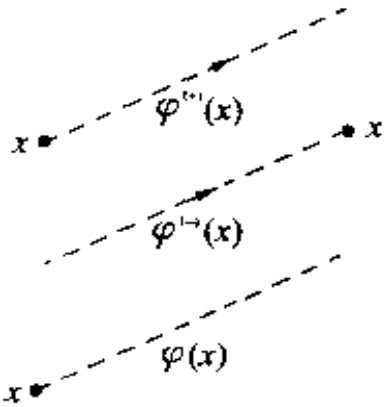


图 4-6

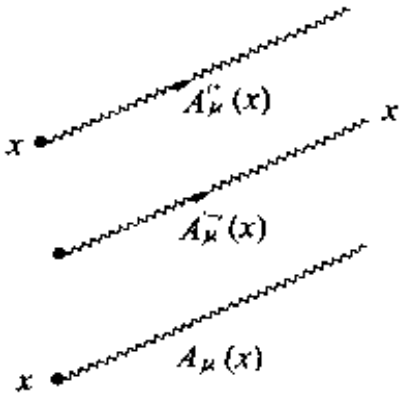
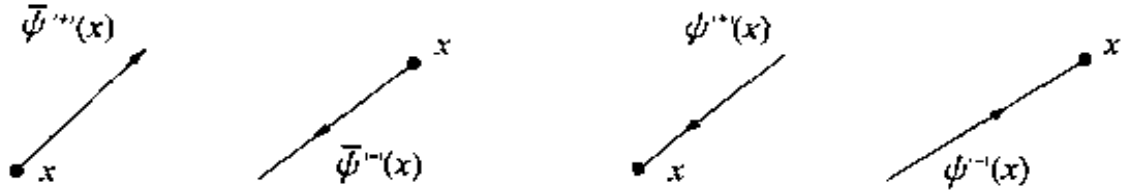


图 4-7

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x)$$

此处 $\bar{\psi}^{(+)}(x)$代表在点 x 处产生一个旋量粒子(e^-),它由 x 点出发的带箭头的实线表示,如图 4-8(a)所示. $\bar{\psi}^{(-)}(x)$代表在点 x 处湮灭一个反旋量粒子(e^+),由图 4-8(b)所示的外线表示. 而 $\psi^{(-)}(x)$代表在 x 点处产生反旋量粒子(e^+),它由指向 x 点的带箭头的实线表示,如图 4-8(c);至于图 4-8(d)表示湮灭反粒子(e^-)的外线.



(a)产生粒子 e^- (b)湮灭反粒子 e^+ (c) 产生反粒子 e^+ (d)湮灭粒子 e^-

图 4-8

场算符的收缩,可以通过连接空间两点 x_1 与 x_2 的无方向线段表示. 图 4-9 表示标量场算符的收缩,图 4-10 表示电磁场算符的收缩,图 4-11 表示旋量场算符的收缩.

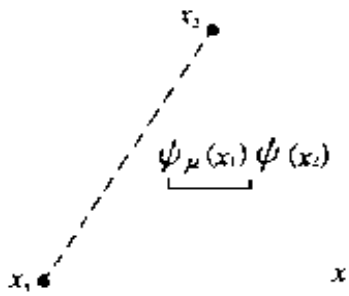


图 4-9

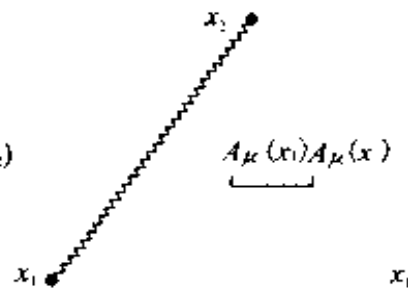


图 4-10

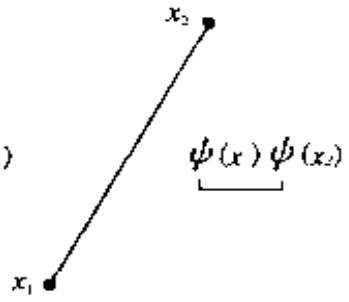


图 4-11

二、正规乘积的图示

在这里，我们以带电粒子与电磁场的电磁相互作用为例，具体介绍如何将混合时序乘积约化为正规乘积，并通过费曼图表示这个正规乘积.

由式(3.2-24)知，电子与电磁场的电磁相互作用哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_I(x)=-j_\mu A_\mu \tag{4.5-1}$$

式中，对称化了的四维电流密度根据式(3.2-12)为

$$j_\mu=\frac{ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^t\gamma_\mu\bar{\psi}^T) \tag{4.5-2}$$

又因为电子与电磁场相互作用哈密顿量 $\mathscr{H}_I(x)$ 的正规乘积是(式 4.4-3)

$$\mathscr{H}_I(x)=-ieN[\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)] \tag{4.5-3}$$

此处　　$\hat{A}(x)=\gamma_\mu A_\mu(x)$ (4.5-4)

而散射矩阵的 n 级微扰矩阵元由式(4.3-19)为

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x_1\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x_2\cdots$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x_nT[\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)]$$

$$= \frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_2 \cdots$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_n T\{N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]$$
$$\times N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)]\cdots N[\psi(x_n)\hat{A}(x_n)\psi(x_n)]\} \tag{4.5 5}$$

其中 $S^{(0)}=I$，此时 $\mathscr{H}_I$ 未起作用，它不导致任何粒子（或粒子态）的变化；而一阶微扰矩阵元 $S^{(1)}$ 只分解为一个正规乘积，且考虑到等时性，有

$$T\{N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]\} = N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]$$

根据上面介绍的场算符的费曼图的画图规则，上式所示的正规乘积可由图4-12表示. 考虑到

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}$$
$$\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$$
$$\hat{A} = \hat{A}^{(-)} + \hat{A}^{(+)}$$

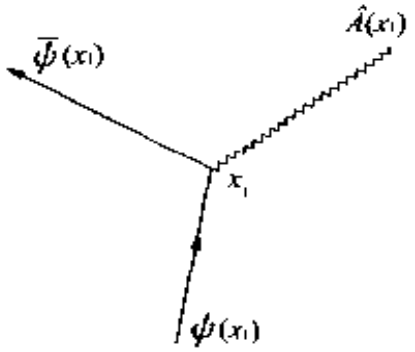


图 4-12

所以，$S^{(1)}$ 包含了 8 项之和，对应 8 个不同的一级微扰过程，其每一项都是场算符的正规乘积，它们是

①$\bar{\psi}^{(+)}\hat{A}^{(+)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点产生 e^-、e^+ 和 γ 光子.

②$\bar{\psi}^{(+)}\hat{A}^{(-)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点，γ 光子湮灭且产生 e^-、e^+ 电子对.

③$\psi^{(+)}\hat{A}^{(-)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点，e^-、e^+ 湮灭同时产生 γ 光子.

④$\psi^{(-)}\hat{A}^{(+)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点，e^-、e^+ 与 γ 光子湮灭.

⑤$\bar{\psi}^{(+)}\hat{A}^{(+)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点，e^- 湮灭且产生 e^- 和 γ 光子.

⑥$\bar{\psi}^{(-)}\hat{A}^{(+)}\psi^{(-)}$——在 x_1 点，e^+ 与 γ 光子湮灭产生 e^+.

⑦$\psi^{(+)}\hat{A}^{(+)}\psi^{(+)}$——在 x_1 点，e^+ 湮灭，产生 e^+ 和 γ 光子.

⑧$\psi^{(+)}\hat{A}^{(-)}\bar{\psi}^{(-)}$——在 x_1 点，e^+ 与 γ 光子湮灭，产生 e^+.

上述 8 项所对应的物理过程，分别由图 4-13①～⑧表示.

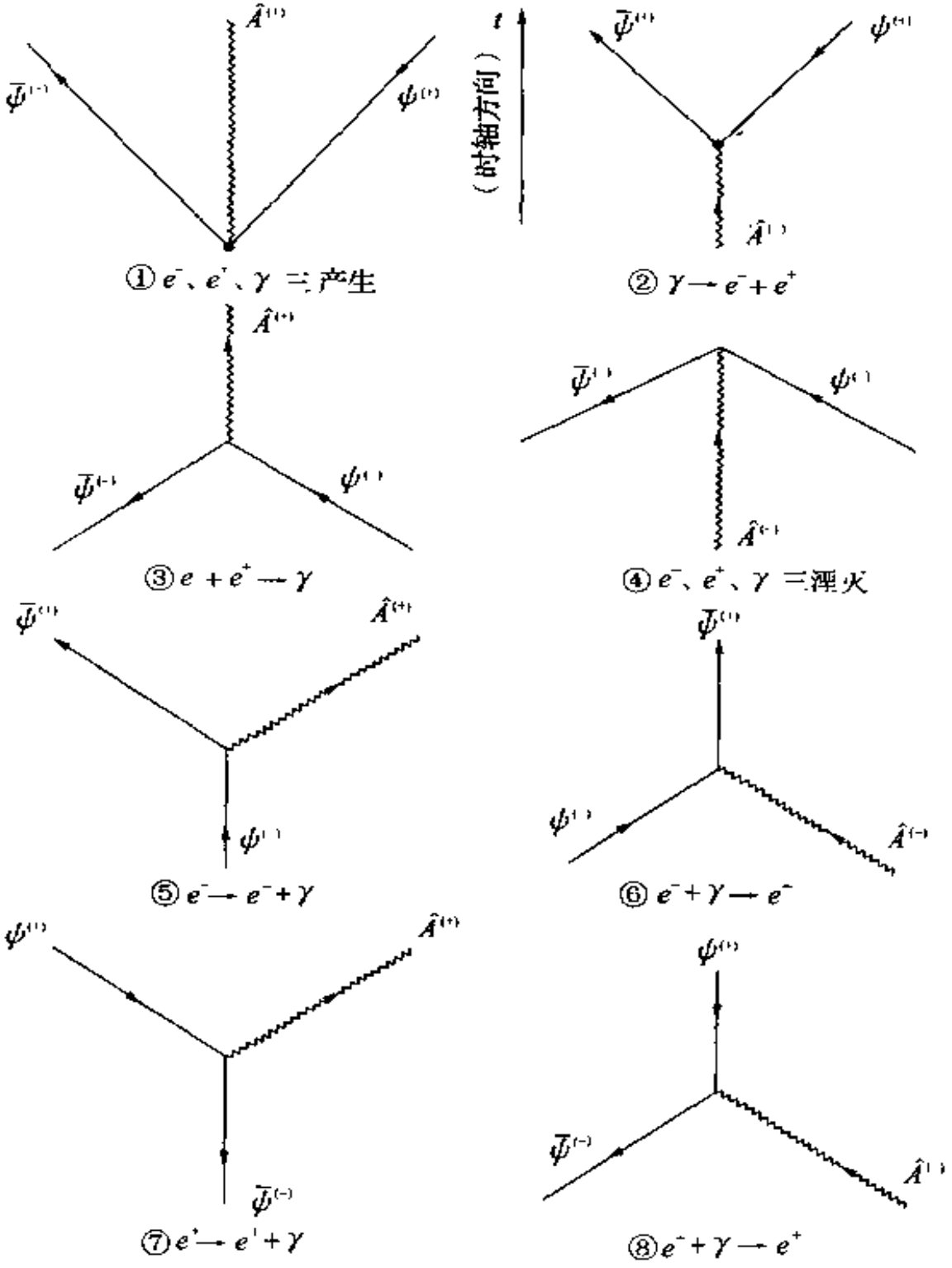

t
（时轴方向）
①e^-、e^+、γ 三产生
②$\gamma \to e^- + e^+$
③$e + e^+ \to \gamma$
④e^-、e^+、γ 三湮灭
⑤$e^- \to e^- + \gamma$
⑥$e^- + \gamma \to e^-$
⑦$e' \to e' + \gamma$
⑧$e^- + \gamma \to e^+$

图 4-13

因此，一级微扰 $S^{(1)}$ 由 8 项组成，每一项都是一个正规乘积，它们各与一个具体的物理过程对应.

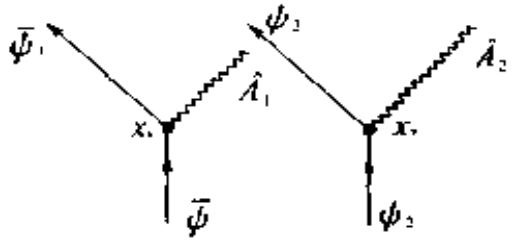
再看二级微扰 $S^{(2)}$. 由式(4.5-5)知

$$S^{(2)}=\frac{(-e)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2 T\{N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)]\times N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)]\} \tag{4.5-6}$$

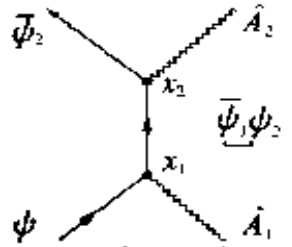
应用维克定理，可将积分号内的混合时序乘积约化成 8 个正规乘积：

$$\begin{aligned}
&T\{N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)\}\\
&=T\{N(\psi_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)\}\\
&=N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)+\text{含一项、二项、三项收缩的正规乘积}\\
&=N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)+N(\underbrace{\bar{\psi}_1}\hat{A}_1\psi_1\psi_2\hat{A}_2\psi_2)\\
&\quad+N(\psi_1\underbrace{\hat{A}_1\psi_1}\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)+N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\underbrace{\psi_1}\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)\\
&\quad+N(\bar{\psi}_1\underbrace{\hat{A}_1\psi_1}\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)+N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\underbrace{\psi_1\psi_2}\hat{A}_2\psi_2)\\
&\quad+N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\underbrace{\psi_1}\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)+N(\bar{\psi}_1\underbrace{\hat{A}_1\psi_1}\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)
\end{aligned}\tag{4.5-7}$$

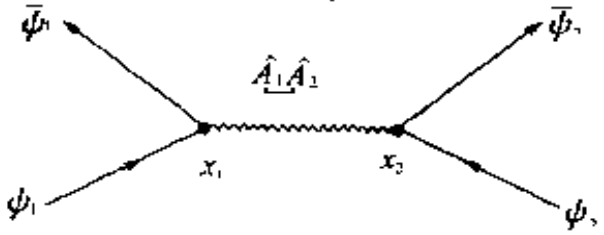
上式中单项收缩项本应有 15 项(6 取 2 的组合)，由于属于同时的收缩项($\bar{\psi}_1\hat{A}_1$，$\bar{\psi}_1\psi_1$，$\hat{A}_1\psi_1$，$\bar{\psi}_2\hat{A}_2$，$\bar{\psi}_2\psi_2$，$\hat{A}_2\psi_2$)等于零，不同场的收缩项($\bar{\psi}_1\hat{A}_2$，$\bar{\psi}_1\hat{A}_2$，$\hat{A}_1\psi_2$，$\hat{A}_1\psi_2$)也等于零及旋量场的收缩项$\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2=\psi_1\psi_2=0$，所以只剩下三个单项收缩项. 考虑到 $\mathscr{H}_I(x)$ 内包含一对费米子算符 ψ、ψ，所以，在正规乘积内将两个 $\mathscr{H}_I$ 位置对调，结果不变. 因此，式(4.5-7)右边第二、四项代入 $S^{(2)}$ 后，所做贡献完全一样，它们可以合并成一项而将 $S^{(2)}$ 中积分前面的因子$\frac{1}{2!}$消去，类似的情况对第五、六项也存在.



① $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_2\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



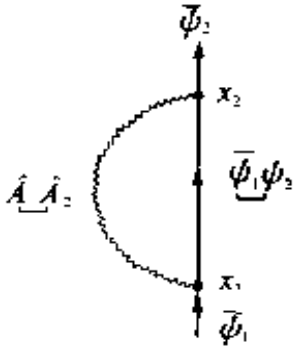
② $N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_1\psi_2)$



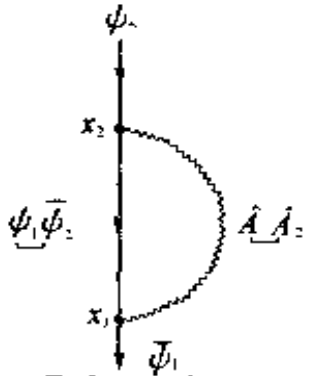
③ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



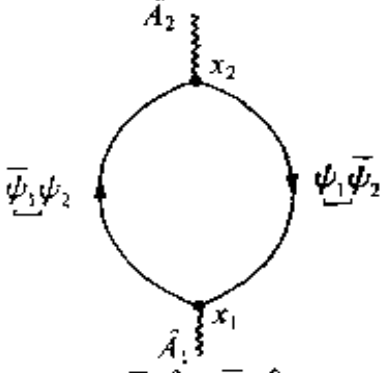
④ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



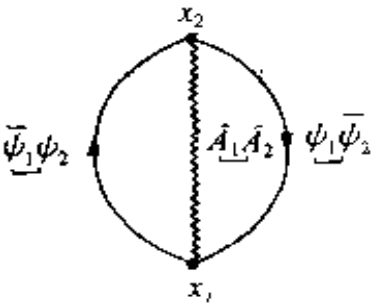
⑤ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



⑥ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



⑦ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$



⑧ $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$

式(4.5-7)的8项正规乘积可由图4-14表示.由图4-13和图4-14可见,一级微扰$S^{(1)}$的费曼图各有一个顶点,二级微扰$S^{(2)}$的费曼图有两个顶点,依此类推,n级微扰$S^{(n)}$的费曼图有n个顶点.

三、动量空间的费曼图

在动量空间计算微扰矩阵元$S^{(n)}$要比坐标空间更方便,其物理意义也更清晰.在动量空间,场函数由产生算符和湮灭算符表示.为了从坐标空间过渡到动量空间,我们要应用场量的平面波展开.在动量空间讨论问题时,要求场量通过产生算符和湮灭算符表示出来,其图示方法与坐标空间类似.

我们仍以电子与电磁场的电磁相互作用为例,具体介绍一级微扰过程$S^{(1)}$的求算与图示.

对电磁相互作用的一级微扰过程,存在8种正规乘积,现以光子湮灭产生正、负电子对($\gamma\to e^-+e^+$)的过程进行计算.

初态 $|i\rangle=|\gamma\rangle=a_\sigma^{(+)}(k)|0\rangle$

末态 $|f\rangle=|e^-,e^+\rangle=b_\gamma^{(+)}(p)d_s^{(+)}(q)|0\rangle$

此处,$a_\sigma^{(+)}(k)$、$a_\sigma(k)$是光子(γ)的产生、湮灭算符(极化为σ、动量为k);$b_\gamma^{(+)}(p)$、$b_\gamma(p)$为负电子(e^-)的产生、湮灭算符(自旋为γ、动量为p);$d_s^{(+)}(q)$、$d_s(q)$为正电子(e^+)的产生、湮灭算符(自旋为s、动量为q).与$\gamma\to e^-+e^+$过程对应的正规乘积是$\bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x)$,其对应的一级微扰跃迁振幅为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(1)}&=\langle f|S^{(1)}|i\rangle\\&=-e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x\langle f|N(\bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x))|i\rangle\\&=-e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^4x\langle 0|d_s^{(+)}(q)b_\gamma^{(+)}(p)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\\&\quad\times\gamma_{\mu\alpha\beta}\psi_\beta^{(+)}(x)A_\mu^{(-)}(x)a_\sigma^{(+)}(k)|0\rangle\end{aligned}\tag{4.5-8}$$

此处,$\hat{A}_\mu=\gamma_\mu A_\mu$,且对旋量指标$\alpha$、$\beta=1$、2、3、4求和.

由于
$$A_\mu^{(+)}(x)a_\sigma^{(+)}(k)|0\rangle = [A_\mu^{(+)}(x),a_\sigma^{(-)}(k)]|0\rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\sum_{\tau=1}^{4} e_\mu^\tau(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}[a_\tau(k'),a_\sigma^+(k)]|0\rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{\tau=1}^{4} e_\mu^\tau(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\delta_{\tau\sigma}\delta(k-k')|0\rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^\sigma(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|0\rangle \qquad (4.5\text{-}9)$$

在上式推导中利用关系：

$$\begin{cases} A_\mu^{(-)}(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{\sigma=1}^{4} e_\mu^\sigma[a_\sigma(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}] \\ \displaystyle\int f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \end{cases} \qquad (4.5\text{-}10)$$

又因为
$$\langle 0|b_\gamma(p)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) = \langle 0|\{b_\gamma(p),\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\}$$
$$= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\sum \bar{u}_{r\alpha}(p')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x}\{b_\gamma(p),b_{\gamma'}^{(+)}(p')\}$$
$$= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\bar{u}_{\gamma\alpha}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \qquad (4.5\text{-}11)$$

其中
$$\bar{\psi}^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}b^{(+)}(p)$$

以及
$$\langle 0|d_\gamma(q)\psi_\beta^{(+)}(x) = \langle 0|\{d_\gamma(q),\psi_\beta^{(+)}(x)\}$$
$$= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3q'\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\sum v_{s'\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'x}\{d_\gamma(q),d_{s'}^{(-)}(q')\}$$
$$= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}v_{s\beta}(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} \qquad (4.5\text{-}12)$$

故当真空归一$\langle 0|0\rangle = 1$时，由式(4.5-8)，$\gamma \to e^- + e^+$过程的一级

微扰跃迁振幅为

$$S_{fi}^{(1)} = -e\int \mathrm{d}^4x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\bar{u}_{r\alpha}(p)\mathrm{e}^{-ipx}\gamma_{\mu\alpha\beta} \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}v_{s\beta}(q)\mathrm{e}^{-iqx} \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^\sigma(k)\mathrm{e}^{ikx}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}}\ \underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_p}}\bar{u}_r(p)}_{①} \times \underbrace{(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)}_{②}$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}v_s(q)}_{③} \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^\sigma(k)}_{①} \qquad (4.5\text{-}13)$$

在这里应用四维 δ-函数定义式

$$\delta^{(4)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{e}^{\pm ikx}\mathrm{d}^4x \qquad (4.5\text{-}14)$$

对 $\gamma \to e^- + e^+$ 过程的一级微扰跃迁振幅可由动量空间费曼图表示(见图 4-15),图中 t 为时轴,注意到反粒子(e^+)可看做逆时轴方向运动的粒子(e^-),当反粒子动量为 q 时,逆时轴方向运动的粒子动量就是($-q$),将图 4-15 与式(4.5-13)对比可见,产生电子的外线①恰与式(4.5-13)中的因子①相对应,式中的②与顶点对应,而③与图中产生反粒子(e^+)对应,至于式中①与图中光子湮灭线④对应,因此,我们可将这几个对应关系写出如下:

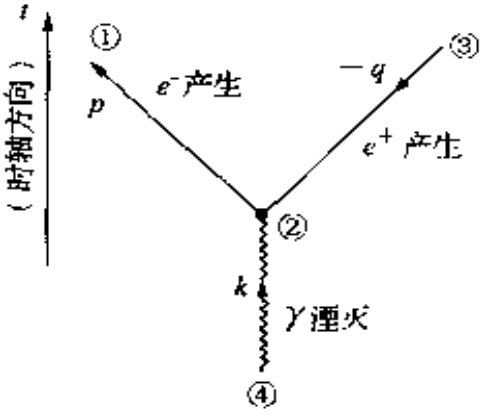


图 4-15

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\bar{u}_r(p)\xrightarrow[\text{(对应于)}]{}\text{产生电子}(e^-)\text{外线}\\
&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}v_r(p)\longrightarrow\text{产生正电子}(e^+)\text{外线}\\
&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}e_\mu^s(k)\longrightarrow\text{湮灭光子外线}\\
&(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)\longrightarrow\text{电磁相互作用顶点}
\end{aligned}\right\}\quad(4.5\text{-}15)$$

在上式中与顶点对应的因子中，包含四维 δ-函数，它表示在顶点处，相互作用必须同时满足能量动量守恒($k-p-q=0$)，考虑到电子与正电子质量相同，光子质量为 0($k^2=0$)，因此，在正负电子对的质心坐标系里，$k-p-q\neq0$，$\delta^{(4)}(k-p-q)=0$，$S_{fi}^{(1)}=0$. 这就是说，由于能量动量守恒的限制，$\gamma\to e^-+e^+$ 一级微扰过程是禁戒的. 实际上，一级微扰 $S^{(1)}$ 的其他几个过程，在两个费米子的质量相同时，也都受到能量动量守恒的禁戒而不可能发生.

由于电子-光子电磁相互作用的一级微扰过程是禁戒的，因此，我们进一步讨论二级微扰过程 $S^{(2)}$. 现以电子-光子的康普顿散射 $\gamma e^-\to\gamma e^-$ 为例(图 4-14②)，对应于这一过程，按式(4.5-6)和式(4.5-7)的讨论知

$$\begin{aligned}
S^{(2)}&=\frac{e^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\{N(\underbrace{\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2})\\
&\quad+N(\psi_1\hat{A}_1\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\hat{A}_2\psi_2)\}\\
&=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,\underbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}N(\hat{A}_1\psi_1\bar{\psi}_2\hat{A}_2)\\
&=e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\int\underbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}N[\hat{A}_\mu(x_1)\hat{A}_\nu(x_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]
\end{aligned}\quad(4.5\text{-}16)$$

由于　　$\hat{A}_\mu(x)=\hat{A}_\mu^{(+)}(x)+\hat{A}_\mu^{(-)}(x)$(此处 $\hat{A}_\mu=\gamma_\mu A_\mu$)

$$\psi_a(x)=\psi_a^{(+)}(x)+\psi_a^{(-)}(x)$$
$$\bar{\psi}_\beta(x)=\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x)+\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x)$$

所以

$$N[\hat{A}_\mu(x_1)\hat{A}_\nu(x_2)]=\hat{A}_{1\mu}^{(+)}\hat{A}_{2\nu}^{(+)}+\hat{A}_{1\mu}^{(+)}\hat{A}_{2\nu}^{(-)}+\hat{A}_{2\nu}^{(+)}\hat{A}_{1\mu}^{(-)}+\hat{A}_{1\mu}^{(-)}\hat{A}_{2\nu}^{(-)}$$
$$N[\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)]=\psi_{1\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}+\psi_{1\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(-)}+\psi_{1\alpha}^{(-)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}+\psi_{1\alpha}^{(-)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(-)}$$

考虑到与 $\gamma e^-\to\gamma e^-$ 过程有关的正规乘积项是

$$N[\hat{A}_\mu(x_1)\hat{A}_\nu(x_2)]=\hat{A}_{1\mu}^{(+)}\hat{A}_{2\nu}^{(-)}+\hat{A}_{2\nu}^{(+)}\hat{A}_{1\mu}^{(-)}+\text{无关项} \tag{4.5-17}$$

$$N[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]=-\bar{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(-)}+\text{无关项}$$

将式(4.5-17)代入 $S^{(2)}$ 的表示式(4.5-16)得

$$\begin{aligned}S^{(2)}&=-e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}[\gamma_\mu A_{1\mu}^{(+)}\bar{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(-)}\gamma_\nu A_{2\nu}^{(-)}\\&\quad+\gamma_\nu A_{2\nu}^{(+)}\bar{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(-)}\gamma_\mu A_{1\mu}^{(-)}]\\&=S_A^{(2)}+S_B^{(2)}\end{aligned} \tag{4.5-18}$$

式中

$$\begin{aligned}S_A^{(2)}&=-e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}[\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_\mu A_{1\mu}^{(+)}\psi_1^{(-)}\gamma_\nu A_{2\nu}^{(-)}]\\&=-e^2\int d^4x_1\int d^4x_2[\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_\nu A_{2\nu}^{(-)}\,\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}\gamma_\mu A_{1\mu}^{(+)}\psi_1^{(-)}]\end{aligned} \tag{4.5-19}$$

且

$$S_B^{(2)}=-e^2\int d^4x_1\int d^4x_2[\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_\nu A_{2\nu}^{(+)}\,\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}\gamma_\mu A_{1\mu}^{(-)}\psi_1^{(-)}] \tag{4.5-20}$$

与式(4.5-19)和式(4.5-20)相应的费曼图，如图 4-16、图 4-17 所示. 因而，$S^{(2)}$ 的二级微扰矩阵元 $S_{fi}^{(2)}$ 为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}&=\langle f|S^{(2)}|i\rangle\\&=\langle f|S_A^{(2)}|i\rangle+\langle f|S_B^{(2)}|i\rangle\end{aligned} \tag{4.5-21}$$

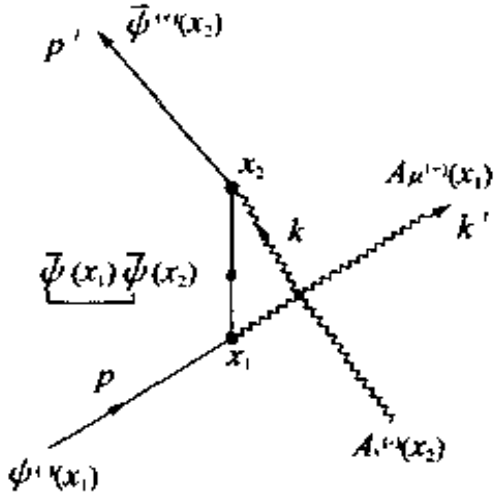


图 4-16

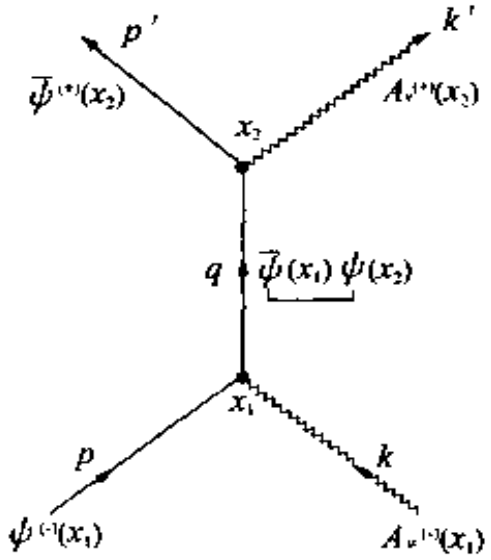


图 4-17

由于对 $\gamma+e^-\to\gamma+e^-$ 的康普顿散射，其初、末态分别为

$$|i\rangle=|kp\rangle=a_\sigma^{(+)}(k)b_\gamma^{(+)}(p)|0\rangle$$

$$|f\rangle=|k'p'\rangle=a_{\sigma'}^{(+)}(k')b_{\gamma'}^{(+)}(p')|0\rangle \tag{4.5-22}$$

我们以图 4-17 的 $S_H^{(2)}$ 进行具体计算. 在图中，进入 x_1 点的 $\psi^{(-)}(x_1)$ 及 $A_\mu^{(-)}(x_1)$ 表示电子、光子湮灭，它们将吸收初态 $|kp\rangle$，例如：

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)|k\rangle &= \gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)a_\sigma^{(+)}(k)|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k''}\sum_{\sigma''}\gamma_\mu\frac{e^{ik''x_1}}{\sqrt{2\omega_{k''}}}e_\mu^{\sigma''}(k'')a_{\sigma''}(k'')a_\sigma^{(+)}(k)|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k''}\sum_{\sigma''}\gamma_\mu\frac{e^{ik''x_1}}{\sqrt{2\omega_{k''}}}e_\mu^{\sigma''}(k'')\left[a_{\sigma''}(k''),a_\sigma^{(+)}(k)\right]|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum\sum\gamma_\mu\frac{e^{ik''x_1}}{\sqrt{2\omega_{k''}}}e_\mu^{\sigma''}\delta_{\sigma\sigma''}\delta_{kk''}|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}}\gamma_\mu\frac{e^{ikx_1}}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^{\sigma}(k)|0\rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\gamma_\mu \frac{e^{ikx_1}}{\sqrt{2\omega_k}} e_\mu^\sigma(k)|0\rangle \tag{4.5-23}$$

若将 $S_H^{(2)}$ 包含的全部算符的作用都予以考虑，那么，由式(4.5-20)及式(4.5-22)有

$$\begin{aligned}
S_{H_{fi}}^{(2)} &= \langle f|S_H^{(2)}|i\rangle \\
&= -e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\langle f|\psi^{(+)}(x_2)\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2) \\
&\quad \times \overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(\ )}(x_1)|i\rangle \\
&= -e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\langle 0|b_{\gamma'}(p')a_{\sigma'}(k')\,\overline{\psi}_1\psi_2\gamma_\nu A_\nu^{(+)}(x_2) \\
&\quad \times \bar{\psi}^{(+)}(x_2)\gamma_\mu A_\mu^{(-)}(x_1)\psi^{(-)}(x_1)a_\sigma^{(+)}(k)b_\gamma^{(+)}(p)|0\rangle
\end{aligned} \tag{4.5-24}$$

又因为与旋量场的收缩$\overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)$对应的传播函数为

$$\overline{\psi}_1\psi_2 = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{i\gamma q - m}{q^2+m^2-i\varepsilon}e^{iq(x_2-x_1)} \tag{4.5-25}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\langle 0|b_{\gamma'}(p')a_{\sigma'}(k')\gamma_\mu A_\nu^{(+)}(x_2)\bar{\psi}^{(+)}(x_2) \\
&= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^4p\,\delta(p'-p) \\
&\quad \times \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\sum \bar{u}_{\gamma'}(p')e^{-ip'x_2}b_{\gamma'}(p')b_\gamma^{(+)}(p)\gamma_\nu\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \\
&\quad \times \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}e^{-ik'x_2}e_\mu^{\sigma'}u_\sigma(k)a_{\sigma'}^{(+)}(k') \\
&= \langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}u_{\gamma'}(p')e^{-ip'x_2}\gamma_\nu\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}e_\nu^{\sigma'}(k')e^{ip'x_2}
\end{aligned} \tag{4.5-26}$$

在计算中，我们利用了如下关系：

$$b_{\gamma'}(p')b_\gamma^{(+)}(p)\Rightarrow[b,b^+]\Rightarrow\delta_{\gamma\gamma'}\delta(p-p')$$

$$f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a)$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\psi^{(-)}(x)b_\gamma^{(+)}(p)|0\rangle\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3p'\sum_\gamma\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}u_\gamma(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}b_\gamma(p')b_\gamma^{(+)}(p)|0\rangle\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3p'\sum_\gamma\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}u_\gamma(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}[b_\gamma(p'),b_\gamma^{(+)}(p)]|0\rangle\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3p'\sum_\gamma\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}u_\gamma(p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}\delta_{\gamma\gamma}\delta(p-p')|0\rangle\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_\gamma(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}|0\rangle
\end{aligned}\tag{4.5-27}$$

将式(4.5-23)、(4.5-25)、(4.5-26)、(4.5-27)诸结果代入式(4.5-24)有

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)}&=\langle f|S_R^{(2)}|i\rangle\\
&=-e^2\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\sum\bar{u}_\gamma(p')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x_2}\\
&\quad\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\gamma_\mu e_r^{\sigma}(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x_2}\Big[\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4q\\
&\quad\times\frac{\mathrm{i}\gamma q-m}{q^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x_2-x_1)}\Big]\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\gamma_\mu e_\mu^{\sigma}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_1}\\
&\quad\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_\gamma(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px_1}|0\rangle
\end{aligned}$$

考虑到$\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^4x=\delta^4(x)$，有

$$\int\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}\mathrm{d}^4x=(2\pi)^4\delta^4(x)$$

所以

$$\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+k-q)x_1}\mathrm{d}^4x_1=(2\pi)^4\delta(p+k-q)$$

$$\int e^{i(q-p'-k')x_2}d^4x_2 = (2\pi)^4\delta(q-p'-k')$$

此处利用 δ- 函数性质

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

因此，上式化为

$$S_{fi}^{(2)} = [\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_r(p')}_{①}] \times [\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}e_\nu^{s'}(k')}_{②}]$$
$$\times [\underbrace{-e\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(q-p'-k')}_{③}]$$
$$\times [\underbrace{\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{i\gamma q - m}{q^2+m^2-i\varepsilon}}_{④}] \times [\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^s(k)}_{⑤}]$$
$$\times [\underbrace{-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p+k-q)}_{⑥}] \times [\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_r(p)}_{⑦}]$$

(4.5-28)

二级微扰矩阵元 $S_{fi}^{(2)}$ 的费曼图如图 4-18 所示，式(4.5-28)中各因子①、②…⑦与图 4-18 中的相应的部位对应. 在这里，顶点③和⑥的 δ-函数关系保证了康普顿散射过程中的能量动量守恒，这是因为，仅当 $q-p'-k'=0$，即 $q=p'+k'$ 时，$\delta(q-k'-k')=1$ 才成立.

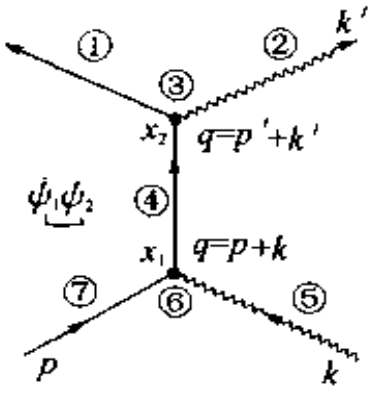


图 4-18

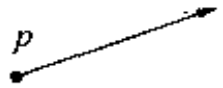
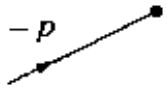
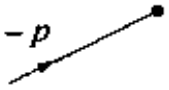
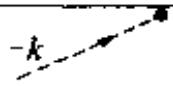
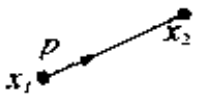
根据式(4.5-28)及图 4-18，我们又可类似于式(4.5-15)写出下面的几个对应关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_r(p)\xrightarrow[\text{(对应于)}]{}\text{湮灭电子外线}\\
&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\mu^\sigma(k)\longrightarrow\text{产生光子外线}\\
&\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\,\frac{\mathrm{i}\gamma q-m}{q^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\longrightarrow\text{费米子内线(电子收缩的传播函数)}
\end{aligned}\right\}\tag{4.5-29}$$

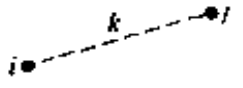
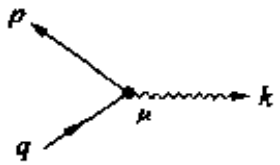
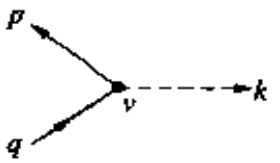
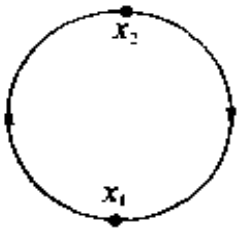
第六节　费曼规则

由上讨论可见，任何物理过程都可由一正规乘积表示，而正规乘积又可由费曼图直观表示. 只要我们掌握了绘制费曼图的规则，就可以通过费曼图找出任意物理过程的各级微扰跃迁振幅.

为了画出物理过程的费曼图，首先要事先确定过程的初态$|i\rangle$和末态$|f\rangle$，其次还需确定与过程相关的相互作用哈密顿密度$\mathscr{H}_I$的具体形式. 当然，还要给出计算微扰的近似级别，这样，才可以按一定规则画出物理过程的费曼图. 费曼图是由一系列的外线、内线、顶点或回线等所构成，而图中的每一条线段或顶点，都与一定的解析因子相对应，通过散射矩阵其他过程的矩阵元的求算，还可以具体寻找出有关的因子的解析表式. 下面我们将常用的费曼图线与S矩阵中的因子列表如下：(时序指向为自下向上)

名　　称	图　　形	S 矩阵中的因子
产生费米子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_r(p)$
湮灭费米子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}u_r(p)$
产生反粒子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}v_r(p)$
湮灭反粒子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{v}_r(p)$
产生光子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_\mu^\sigma(k)$
湮灭光子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_\mu^\sigma(k)$
产生介子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$
湮灭介子外线		$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$
费米子内线($\overbrace{\bar{\psi}_1\psi_2}$)		$\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{m-i\gamma p}{p^2+m^2-i\varepsilon}d^4p$
光子内线($\overbrace{A_1A_2}$)		$\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}d^4k$

续表

名　称	图　形	S 矩阵中的因子
介子内线 $\varphi_1\varphi_2$		$\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int\frac{\delta_{ll}}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{d}^4k$
费米子-光子顶点		$-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p-q-k)$
介子-费米子顶点		$-g\gamma_\nu(2\pi)^4\delta(p-q-k)$
费米子回线		$(-1)T_\gamma$[两个费米子内线与两个顶点因子]

由上可见，费曼图的主要组件是外线、内线和顶点. 外线是与初态和末态粒子相关联的线. 内线是与收缩相关的传播子，每一条内线都包含一个四动量积分 $\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k$，对于包含 n 个顶点的费曼图，要进行 $(n-1)$ 次四动量积分，以积去 $(n-1)$ 个 $(2\pi)^4\delta^4(\sum p)$ 因子. 矩阵元中旋量函数、γ 矩阵顶点代表相互作用的发生处、顶点的 δ-函数与内线所包含的四维动量积分保证了相互作用能量动量守恒的排列顺序，与费曼图中费米子线逆向顺序相对应. 就是说，在写出过程的跃迁振幅时，要逆着费曼图的费米子线(或

玻色子线)箭头方向依次写出相应线和顶点的对应因子,这就是我们根据过程的费曼图求跃迁振幅的一般方法.

下面,我们以电子自能跃迁为例,介绍如何利用费曼图求过程的跃迁振幅问题.

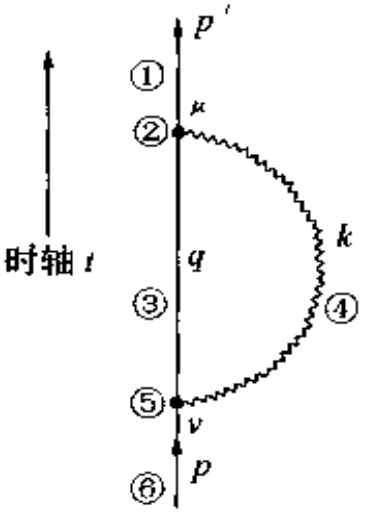


图 4-19

图 4-19 是电子自能跃迁的费曼图,对应于这一电磁相互作用过程,初态有一个电子(p,γ),末态也仅有一个电子(p',γ'),而中间存在费米子内线$(\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2})$和光子内线$(\underbrace{A_1A_2})$,其对应的正规乘积项为

$$N(\bar{\psi}^{(+)}(x_1)\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)\psi^{(\ )}(x_2)\gamma_\nu\underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)$$

因此,过程的初态 $|i\rangle=b_\gamma^+(p)|0\rangle$

过程的末态 $|f\rangle=b_{\gamma'}^+(p')|0\rangle$

故二阶微扰跃迁振幅为

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{-1}{2}e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,\langle f|N(\bar{\psi}_1^{(\ )}\gamma_\mu\psi_1\,\underbrace{\bar{\psi}_2\psi_2^{(-)}}\gamma_\nu\,\underbrace{A_{1\mu}A_{2\nu}})|i\rangle \tag{4.6-1}$$

考虑到下面另一种正规乘积也与电子自能跃迁对应

$$N(\underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2^{(-)}\bar{\psi}_2^{(+)}\psi_2}\gamma_\nu\,\underbrace{A_{1\mu}A_{2\nu}})$$

而它对跃迁振幅的贡献与式(4.6-1)相同,因此,在$S_{fi}^{(2)}$中的因子$\frac{1}{2}$最后可以消去.由式(4.6-1)出发,类似于康普顿散射对式(4.5-24)的计算,最后可以求出$S_{fi}^{(2)}$的结果.但是,计算过程相当麻烦,如果我们应用上面总结出的费曼规则,从费曼图 4-18 出发,就可以很快地写出电子自能跃迁的二级微扰矩阵元$S_{fi}^{(2)}$的结果.

首先,逆着时轴方面,按①、②、③……顺序,对图中所有外线、

内线、顶点等依序编号，按式(4.6-1)～(4.6-14)所给的关系，写出$S_{fi}^{(2)}$的表示式.

$$S_{fi}^{(2)}=\int \mathrm{d}^4q\int \mathrm{d}^4k\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_r(p')\right)}_{①}$$

$$\times\underbrace{[(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(q+k-p')]}_{②}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{-1}{\gamma q-\mathrm{i}m}\right)}_{③}$$

$$\times\underbrace{\left(\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{rs}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)}_{④}\cdot\underbrace{[(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta(p-q-k)]}_{⑤}$$

$$\times\underbrace{\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_r(p)\right]}_{⑥} \tag{4.6-2}$$

这就是电子自能跃迁的二阶微扰矩阵元.由于电子能从动量为 p 的初态跃迁到动量为 p' 的末态，说明初态电子是不稳定的，由于跃迁是由不稳定的电子自己完成的，所以称为电子自能跃迁.必须指出，式(4.6-2)中包含的积分

$$\sum'(p)=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\gamma_\mu\frac{1}{\gamma(p-k)-\mathrm{i}m}\gamma_\mu\frac{1}{k^2} \tag{4.6-3}$$

是发散的，因而这个过程还存在“发散困难”，只有通过质量重整化，重新定义电子质量，把 $\sum'(p)$ 看成有限质量才能解决.

第五章

微扰论的应用

上一章介绍了处理相互作用问题的微扰理论，并以电磁相互作用为对象，具体计算电磁相互作用过程中散射矩阵的一、二级微扰矩阵元 $S_{fi}^{(1)}$、$S_{fi}^{(2)}$ 和跃迁振幅，从而找到求算物理过程跃迁振幅的方法. 但是，实验所能直接测定的是过程的跃迁几率，因此，还必须探讨从跃迁振幅求物理过程跃迁几率方法.

在这一章中，我们以三个实际问题具体介绍微扰论的应用：先介绍衰变寿命与碰撞截面，再介绍简单的强衰变，最后讨论正负电子对的高能碰撞问题.

第一节 衰变寿命与碰撞截面

粒子从一种状态(初态)跃迁到另一状态(末态)称为衰变. 粒子衰变过程的跃迁几率决定于过程跃迁振幅的平方，即

$$w = |\langle f|S|i\rangle|^2 = |S_{fi}|^2 \tag{5.1-1}$$

称为衰变宽度. 衰变宽度的倒数称为衰变寿命.

$$\tau=\frac{1}{w} \tag{5.1-2}$$

对初态有两个粒子相互作用的碰撞问题，与两个粒子碰撞反应的跃迁几率相关的物理量是碰撞截面.

一、过程的跃迁几率

让我们考察一个一般性的粒子反应过程. 设过程的初态有 N 个粒子 A_i(动量为 p_i)，末态有 n 个粒子 B_j(动量为 q_j). 对某一给定的物理过程，在相互作用 $\mathscr{H}_I$ 给定时，任意级微扰跃迁振幅 $S^{(t)}$ 一般是若干项的和，对于 t 级微扰，过程的费曼图包含 t 个顶点、F 个费米子外线和 B 个玻色子外线，因此，该过程的跃迁振幅矩阵元为

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(t)} &= \langle f|S^{(t)}|i\rangle \\
&= \overbrace{(2\pi)^4\delta^4(p-q)}^{\text{所有顶点公因子}} \overbrace{\prod_{a=1}^{F}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_a}{E_a}}}^{\text{所有费米子外线公因子}} \\
&\quad \times \overbrace{\prod_{b=1}^{B}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_b}}M_{fi}^{(t)}}^{\text{所有玻色子外线公因子}} \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q)\left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^F\prod_{a=1}^{F}(m_a)^{1/2}\prod_{a}^{F}(E_a)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right)^B\left(\frac{1}{2^{1/2}}\right)^B\prod_{b=1}^{B}(E_b)^{-\frac{1}{2}}M_{fi}^{(t)} \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q)\frac{1}{2^{B/2}(2\pi)^{3(N+n)/2}}\prod_{a=1}^{F}(m_a)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{N}(E_i)^{-1/2}\prod_{j=1}^{n}(E_j)^{-1/2}\right)M_{fi}^{(t)}
\end{aligned} \tag{5.1-3}$$

这里，$M_{fi}^{(t)}$ 是除各顶点、外线因子以外的其余的公因子.

由一个确定的初态 $|i\rangle$ 到另一个确定的末态 $|f\rangle$ 的跃迁几率 w 由式(5.1-1)决定，即决定于 t 级微扰的散射矩阵元的平方 $|S_{fi}^{(t)}|^2$. 若实验未给出所有初态粒子的自旋和极化，则要取所有初态粒子的自旋或极化的平均. 若末态也不计及自旋和极化，则跃迁几率必须对所有自旋和极化求和，通常以 $\overline{\sum}$ 代表对求和与求平均的计算，于是，物理过程的跃迁几率由式(5.1-3)得

$$\overline{\sum}|S_{fi}|^2 = (2\pi)^{(4)}\delta^4(0)\delta^4(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^{3(N-n)}}\prod_{i=1}^{N}E_i^{-1}$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}E_C^{-1}\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \qquad (5.1\text{-}4)$$

此处

$$k = (\prod_{a=1}^{F}m_a^{1/2})^2 = \prod_{a=1}^{F}m_a$$

称为费米子质量积.

定义跃迁几率密度 —— 单位时间的跃迁几率：

$$W_{fi} = \lim_{V,T\to\infty}\frac{1}{T}\overline{\sum}|S_{fi}|^2$$

$$= \lim_{V,T\to\infty}(2\pi)^4\delta^4(p-q)\frac{kV}{2^B(2\pi)^{3(N-n)}}\prod_{i=1}^{N}E_i^{-1}\prod_{j=1}^{n}E_C^{-1}$$

$$\times\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \qquad (5.1\text{-}5)$$

由于粒子的运动以平面波描述，所以我们讨论的量子场相互作用是在整个空间与时间内进行的，因此，式(5.1-4)表示在整个空间、时间里的跃迁几率. 又因为

$$\delta^{(4)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{ipx}$$

当 $p=0$ 时，

$$\delta^{(4)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x e^0$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-V/2}^{V/2} d^3x \int_{-T/2}^{T/2} dt$$

$$= \lim_{V,T\to\infty} \frac{VT}{(2\pi)^4} \tag{5.1-6}$$

因而，我们可由式(5.1-4)得式(5.1-5).

式(5.1-5)反映的跃迁几率密度并不能为实验所直接检测，实验所能直接测量的仅仅是在一给定的相空间中的跃迁几率，即动量在 $\boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_i + d\boldsymbol{p}_i$ 的入射粒子跃迁到动量为 $\boldsymbol{q}_j \to \boldsymbol{q}_j + d\boldsymbol{q}_j$ 的出射粒子的跃迁几率 dW_{fi}，由于反应过程相空间的体积元为

$$\prod_{i=1}^{N} d^3p_i \prod_{j=1}^{n} d^3q_j$$

所以，实验所能测定的反应过程的单位时间的跃迁几率为

$$dW_{fi} = \lim_{V\to\infty} W_{fi} \prod_{i=1}^{N} d^3p_i \prod_{j=1}^{n} d^3q_j$$

$$= \lim_{V,T\to\infty} (2\pi)^4 \delta^4(p-q) \frac{kV}{2^B(2\pi)^{3(N+n)}} \overline{\sum} |M_{fi}|^2$$

$$\times \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3p_i}{E_i} \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3q_j}{E_j} \tag{5.1-7}$$

考虑到在边长为 L 的方箱($V=L^3$)中的量子化条件是粒子动量 $\boldsymbol{p}$ 取分立值

$$\frac{2\pi\hbar}{L}n_x, \frac{2\pi\hbar}{L}n_y, \frac{2\pi\hbar}{L}n_z \tag{5.1-8}$$

因此，动量空间的状态数为$(L/2\pi\hbar)^3$，而动量在 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ 的动量空间 d^3p 的状态数为

$$\left(\frac{L}{(2\pi\hbar)}\right)^3 \cdot d^3p = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p \qquad (\hbar=1, V=L^3) \tag{5.1-9}$$

实验中，入射粒子是确定的单一态，所以，在动量空间 d^3p_i 中，入射粒子 A_i 只有单一态. 当 $V\to\infty$，$dp_i\to 0$ 时，由式(5.1-9)有

$$\lim_{V\to\infty} \frac{V d^3p_i}{(2\pi)^3} = 1$$

或

$$\lim_{V\to\infty} V\mathrm{d}^3p_i=(2\pi)^3=1/(2\pi)^{-3} \tag{5.1-10}$$

将式(5.1-10)代入式(5.1-7),单位时间的跃迁几率为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_{fi} &= (2\pi)^4\delta^4(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^{3(N+n)}}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\\ &\quad\times\lim_{V\to\infty}\frac{V\mathrm{d}^3p_1}{E_1}\prod_{i=2}^{N}\frac{\mathrm{d}^3p_i}{E_i}\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3q_j}{\epsilon_j}\\ &= (2\pi)^4\delta^4(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^{3(N+n-1)}E_1}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\\ &\quad\times\lim_{V\to\infty}\prod_{i=2}^{N}\frac{\mathrm{d}^3p_i}{E_i}\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^4q_j}{\epsilon_j}\end{aligned} \tag{5.1-11}$$

二、衰变寿命

对初态只有一个粒子($N=1$)时,这个粒子衰变到动量为 $q_j\to q_j+\mathrm{d}q_j$ 之间的衰变几率由式(5.1-11)得

$$\mathrm{d}W_{fi}=\delta^4(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^{3n}E}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3q_j}{E_j} \tag{5.1-12}$$

此处,$p(\boldsymbol{p},\mathrm{i}E)$是衰变粒子的能量动量,由于式(5.1-12)不包含初态粒子的 d^3p,因此,它具有实测意义.

我们具体讨论由一个粒子衰变为两个粒子的二体衰变.对于二体衰变 $N=1,n=2$,因而,由式(5.1-12),二体衰变的跃迁几率为

$$\mathrm{d}W_{fi}=\delta^{(4)}(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^2E}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}^3q_1\mathrm{d}^3q_2}{\epsilon_1\epsilon_2} \tag{5.1-13}$$

此处设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2$,且末态粒子 B_1 和 B_2 的动量 q_1、q_2 虽有 6 个自由度,但由 $\delta^4(p-q)$提供的能量守恒给出四个限制条件,因此,实

际上只有两个自由度，现选粒子 B_1 的出射方向(θ,φ)作为这两个独立的自由度，选 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{Q}$ 作变量，则由图 5-1，有

$$\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}_1$$

且由能量、动量守恒，有

$$E=Q_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2 \quad (5.1\text{-}14)$$

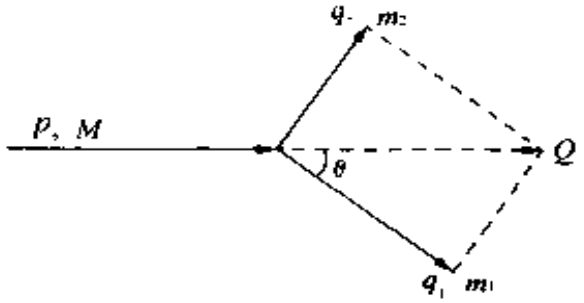


图 5-1

考虑到

$$\theta=L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_1)$$

所以

$$q_2^2=q_1^2+Q^2-2q_1Q\cos\theta$$

$$\varepsilon_2^2=\varepsilon_1^2+Q_4^2-2\varepsilon_1Q_4\cos\theta$$

因此有

$$\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1^2+Q_4^2-2\varepsilon_1Q_4\cos\theta} \quad (5.1\text{-}15)$$

选择球坐标系

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3q_1&=|\boldsymbol{q}_1|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{q}_1|\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=|\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_1||\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1|\sin\theta\mathrm{d}\Omega_1\\&=|\boldsymbol{q}_1|\varepsilon_1\mathrm{d}\varepsilon_1\mathrm{d}\Omega_1\\&=|\boldsymbol{q}_1|\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial Q_4}\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1\end{aligned} \quad (5.1\text{-}16)$$

因为 $\varepsilon_1^2=q_1^2+m_1^2$，所以有 $2\varepsilon_1\mathrm{d}\varepsilon_1=2q_1\mathrm{d}q$（其中 $m_1=$常数）

将式(5.1-14)第一式对 ε 求导

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_4}{\partial\varepsilon_1}&=\frac{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial\varepsilon_1}=1+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\varepsilon_1}\\&=1+\frac{1}{2}\frac{2\varepsilon_1-2Q_1\cos\theta}{\varepsilon_2}\\&=\frac{\varepsilon_2+\varepsilon_1-Q_4\cos\theta}{\varepsilon_2}\end{aligned}$$

$$=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1^2-\varepsilon_1 Q_4\cos\theta}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$=\frac{\varepsilon_1 Q_4-\varepsilon_1 Q_4\cos\theta}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\quad(\text{其中 } Q_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

或

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial Q_4}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 Q_4-\varepsilon_1 Q_4\cos\theta}\tag{5·1-17}$$

因此，由式(5.1-16)得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3q_1&=|\boldsymbol{q}_1|\varepsilon_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial Q_4}\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1\\&=|\boldsymbol{q}_1|\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 Q_4-\varepsilon_1\varepsilon_1 Q_4\cos\theta}\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1\\&=\frac{|\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_1|^2\varepsilon_1\varepsilon_2}{|\boldsymbol{q}_1|^2 Q_4-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1\\&=\frac{|\boldsymbol{q}_1|^3\varepsilon_1\varepsilon_2}{|\boldsymbol{q}_1|^2E-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1\end{aligned}\tag{5.1-18}$$

这里考虑到

$$\varepsilon_1^2=|\boldsymbol{q}_1|^2+m_1^2\simeq|\boldsymbol{q}_1|^2$$

$$\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{Q}$$

且 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{Q}, Q_4=E$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3q_1\mathrm{d}^3q_2&=\mathrm{d}^3q_1\mathrm{d}^3Q\\&=\frac{|\boldsymbol{q}_1|^3\varepsilon_1\varepsilon_2\mathrm{d}Q_4\mathrm{d}\Omega_1}{E|\boldsymbol{q}_1|^2-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}^3Q\\&=\frac{|\boldsymbol{q}_1|^3\varepsilon_1\varepsilon_2}{E|\boldsymbol{q}_1|^2-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}\Omega_1\mathrm{d}^4Q\end{aligned}\tag{5.1-19}$$

这就是在立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 内出射的粒子态密度. 现在，Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 是四个独立自由度，将其代入式(5.1-13)，有

$$\mathrm{d}W_{fi}=\delta^4(p-q)\frac{k}{2^n(2\pi)^2E}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\frac{\mathrm{d}^3q_1}{\varepsilon_1}\frac{\mathrm{d}^3q_2}{\varepsilon_2}$$

$$= \delta^4(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^2E}\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \times \frac{\varepsilon_1\varepsilon_1|\boldsymbol{q}_1|^3}{E|\boldsymbol{q}_1|^2-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}^4Q\mathrm{d}\Omega_1 \tag{5.1-20}$$

再对 d^4Q 积分

$$\mathrm{d}\omega_{fi}=\int_Q \mathrm{d}W_{fi}=\int\delta^4(p-q)\mathrm{d}^4Q\frac{k}{2^B(2\pi)^2E}\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \times\frac{|\boldsymbol{q}_1|^3}{E|\boldsymbol{q}_1|^2-\varepsilon_1\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}\mathrm{d}\Omega_1$$

$$=\frac{k}{2^B(2\pi)^2E}\frac{|\boldsymbol{q}_1|^3}{E|\boldsymbol{q}_1|^2-\varepsilon_1\boldsymbol{q}_1\cdot\boldsymbol{p}} \times\overline{\sum}|M_{fi}|^2\mathrm{d}\Omega_1(\theta,\varphi) \tag{5.1-21}$$

这就是初态粒子单位时间在 $\theta\to\theta+\mathrm{d}\theta$、$\varphi\to\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 方位间的衰变几率.

因此，衰变粒子通过终态 f（称 f 道）的衰变寿命 τ_{fi} 为

$$\tau_{fi}=\frac{1}{W_{fi}}=\frac{1}{\Gamma_{fi}} \tag{5.1-22}$$

W_{fi} 也称为粒子的衰变宽度.

三、碰撞及微分截面

初态 $N=2$ 的两粒子相互作用问题，属于碰撞问题，碰撞也称散射. 对于碰撞问题，单位时间的跃迁率由式(5.1-11)有

$$\mathrm{d}W_{fi}=\delta^{(4)}(p-q)\frac{k}{2^B(2\pi)^{3n-1}E_1E_2} \times\overline{\sum}|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3q_j}{\varepsilon_j}\lim\mathrm{d}^3p_2 \tag{5.1-23}$$

上式中包含 d^3p_2，它不是实验所能直接测量的量，因此，我们需将其转化为实验能直接测量的物理量.

在两粒子相互碰撞时，存在入射粒子流的强弱问题，因此，必

须考虑入射粒子相对流强(I).

实验指出,碰撞几率与入射粒子流的相对流强成正比,因此,反映粒子碰撞过程的物理量应是单位流强下的从初态到末态的跃迁几率 dW_{fi}/I.

在实验室坐标系中,入射粒子相对流强 I 是单位时间内穿过垂直于投射方向的单位截面的粒子数,即

$$I_L=n_L|v_L|=n_L\frac{|\boldsymbol{p}_L|}{E_L} \tag{5.1-24}$$

此处脚标 L 表示实验室系,n_L 表示入射粒子数密度,v_L 是粒子速度. 设入射粒子为 A_1,靶粒子为 A_2,那么,

$$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_L,E_1=E_L,|\boldsymbol{v}_1|=|\boldsymbol{v}_L|=|\boldsymbol{p}_L|/E_L$$

$$\boldsymbol{p}_2=0,\ E_2=M_2,v_2=0(\text{靶静止})$$

在一次碰撞中,V 空间内只有一个入射粒子在运动,因此,入射粒子数密度

$$n_L=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V_L} \tag{5.1-25}$$

于是,由式(5.1-24),实验室系中入射粒子流强为

$$I_L=\lim_{V\to\infty}\frac{|\boldsymbol{p}_L|}{V_LE_L}=\lim_{V\to\infty}\frac{|\boldsymbol{v}_L|}{V_L} \tag{5.1-26}$$

莫雷曾证明,在一般参考系中,存在关系

$$v=J/E_1E_2 \tag{5.1-27}$$

此处 $J=[(p_1p_2)^2-(M_1M_2)^2]^{1/2}$ (5.1-28)

因此,入射粒子流强的一般表示式为

$$I=nv=n\frac{J}{E_1E_2}=\lim_{V\to\infty}\frac{J}{VE_1E_2} \tag{5.1-29}$$

这样,在实验室坐标系中,入射粒子流强为

$$I_L=\lim_{V\to\infty}\left(\frac{J}{VE_1E_2}\right)_L \tag{5.1-30}$$

类似的,在质心坐标系中,入射粒子流强密度为

$$I_C=\lim_{V\to\infty}\left(\frac{J}{VE_1E_2}\right)_C \tag{5.1-31}$$

定义碰撞过程的微分截面为单位入射流强碰撞的单位时间跃迁几率，即

$$\mathrm{d}\sigma_{fi}=\frac{\mathrm{d}W_{fi}}{I} \tag{5.1-32}$$

根据式(5.1-23)，碰撞微分截面可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_{fi}&=\frac{\mathrm{d}W_{fi}}{I}\\&=\lim_{V\to\infty}\frac{VE_1E_2}{J}\mathrm{d}W_{fi}\\&=\delta^{(4)}(p-q)\frac{k}{2^n(2\pi)^{3n-4}E_1E_2}\\&\quad\times\overline{\sum}|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3q_j}{\varepsilon_j}\lim_{V\to\infty}\mathrm{d}^3p_2\,\frac{VE_1E_2}{J}\\&=\delta^{(4)}(p-q)\frac{k}{2^n(2\pi)^{3n-4}J}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3q_j}{\varepsilon_j}\end{aligned} \tag{5.1-33}$$

此处，利用了关系式(5.1-10).

由于式(5.1-32)中 $\mathrm{d}\sigma_{fi}$ 具有面积量纲，故称其为碰撞截面.

第二节　最简单的强衰变

为了具体介绍量子场论中微扰法的应用，我们在本节中，讨论一些相互作用问题，以了解量子场论是如何反映微观粒子的产生、湮灭、相互作用与转化等具体机制. 在这里，只讨论物理过程的初级近似，即考虑一个确定的相互作用对一给定的物理过程有贡献的最低级微扰近似. 由于高级微扰近似往往还伴随着“发散困难”，加上对强相互作用，微扰法本身并不可靠，因此，讨论高级近似的

意义不大.

核子放出 π^0 介子的过程，属最简单的强衰变：

$$N^* \to N + \pi^0$$

此处 N^* 是不稳定核子（自旋 $r=1/2$，质量为 M^*），而 N 是稳定核子. 对于 $N\pi^0$ 过程，相互作用哈密顿量可唯象地写成

$$\mathscr{H}_I(x) = -gN[\bar{\psi}^*(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x)] \qquad (5.2\text{-}1)$$

上式中括号前的 N 代表取正规乘积，而此处 $\varphi(x)$ 是 π^0 介子的厄米膺标量场算符.

N^* 强衰变费曼图如图 5-2 所示，设 N^*、N、π^0 的粒子态分别为 $N^*(p,\gamma)$、$N(q,s)$、$\pi^0(k)$，则过程的初、末态分别为

$$|i\rangle = |N^*\rangle = b_\gamma^+(p)|o\rangle$$

$$|f\rangle = |N,\pi^0\rangle = a^+(k)b_s^+(q)|o\rangle$$

若以 M^*、M、m 分别代表 N^*、N、π^0 的质量，那么，对应粒子的能量为

$$E^* = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^{*2}},$$

$$E = \sqrt{\boldsymbol{q}^2+M^2},$$

$$\omega = \sqrt{k^2+m^2}$$

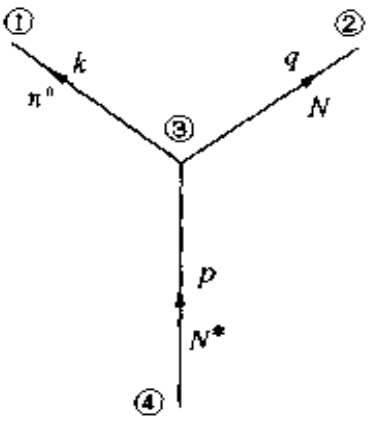


图 5-2

因此，对应于费曼图 5-2 的强衰变过程，其一级微扰跃迁振幅为

$$S_{fi}^{(1)} = \langle f|S^{(1)}|i\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}}}_{①}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{E}}\bar{u}_s(q)}_{②}$$

$$\times\underbrace{(-g)\gamma_5(2\pi)^4\delta^4(p-k-q)}_{③}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{M^*}{E^*}}u_\gamma(p)}_{①}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{9/2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{MM^*}{EE^*\omega}}(2\pi)^4\delta^4(p-q-k)(-g)M_{fi}$$

(5.2-2)

式中

$$M_{fi}=\bar{u}_s(q)\gamma_5 u_\tau(p) \tag{5.2-3}$$

在以衰变粒子 N^* 静止的坐标系内，由式(5.1-21)，π^0 介子的出射角分布为

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{kg^2}{2^B(2\pi)^2}\frac{|\boldsymbol{q}_1|}{M^{*2}}\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \tag{5.2-4}$$

此处 $B=1$ 表示玻色子数取一，$k=\prod_{a=1}^{F}m_a=M^*M$ 表示存在两个费米子，而

$$|\boldsymbol{q}_1|=\frac{1}{2M^*}[M^{*2}-(M-m)^2]^{1/2}[M^{*2}-(M+m)^2]^{1/2}$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{Mg^2}{2(2\pi)^2}\frac{[M^{*2}-(M-m)^2]^{1/2}[M^{*2}-(M+m)^2]^{1/2}}{2M^{*2}}\times\overline{\sum}|M_{fi}|^2 \tag{5.2-5}$$

计算给出

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{(M^*-M+m)(M^*-M-m)}{4M^*M}$$

(5.2-6)

仅是与粒子质量有关而与坐标无关的不变量，因此，将其代入式(5.2-5)中，可得 π^0 介子的出射角分布

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Omega(\theta,\varphi)}=\frac{g^2}{16(2\pi)^2}\frac{[(M^*-M)^2-m^2]^{3/2}[(M^*+M)^2-m^2]^{1/2}}{M^{*3}}$$

(5.2-7)

将上式对 π^0 介子的射出方向(θ,φ)积分，并考虑到

$$\int d\Omega(\theta,\varphi) = 4\pi$$

由式(5.1-21),N^*的衰变宽度为

$$\Gamma_{fi}(N^* \to N + \pi^0) = W_{fi} = \int dW_{fi}$$

$$= \frac{g^2}{16(2\pi)^2} \times \frac{[(M^* - M)^2 - m^2]^{3/2}[(M^* + M)^2 - m^2]^{1/2}}{M^{*3}} d\Omega(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{[(M^* - M)^2 - m^2]^{3/2}[(M^* + M)^2 - m^2]^{1/2}}{4M^{*3}} \tag{5.2-8}$$

由于 $M^* = 1.47\text{GeV}$, $M = 0.94\text{GeV}$, $m = 0.14\text{GeV}$. 若取 $g^2/4\pi \simeq 2$,则可推出

$$\Gamma(N^* \to N + \pi^0) \simeq 50\text{MeV},$$

与实验结果基本一致.

第三节 正负电子对的高能碰撞

利用某种储存环装置,使具有极高能量的两正、负电子束在质心系中进行高能对撞,通过测量出射粒子(μ轻子对 $\mu^+\mu^-$或电子对 e^+e^-)的散射截面来研究这一高能散射过程. 这里,我们用量子场论微扰法计算 e^+e^-电子对高能碰撞转化为 $\mu^+\mu^-$轻子对的碰撞截面.

对应子这一物理过程,其反应式是

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$$

电子对和 μ 轻子对的动量与自旋分别为(q,s)、(p,r)、$(q',$

s')、(p',r'),且

$$p=(\boldsymbol{p},\mathrm{i}E),\ p'=(\boldsymbol{p}',\mathrm{i}E'),\ q=(\boldsymbol{q},\mathrm{i}\varepsilon),\ q'=(\boldsymbol{q}',\mathrm{i}\varepsilon'),$$

而 m、m' 分别是电子与 μ 轻子的质量.

由于 e 和 μ 相互作用属电磁相互作用,由式(4.4-3),其相互作用哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_I(x)=-\mathrm{i}eN[\bar{1}(x)\hat{A}(x)1(x)] \tag{5.3-1}$$

因此,这一过程的二级微扰费曼图如图 5-3 所示,根据费曼规则,该过程的跃迁振幅为

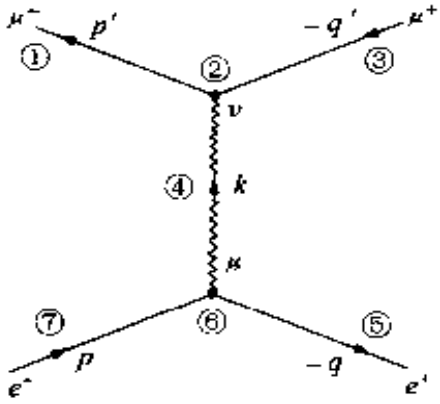


图 5-3

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}^4k\ &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\\
&\times\sqrt{\frac{m'}{E'}}\,\bar{u}_{r'}(p')\\
&\times\underbrace{(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k)}_{②}\\
&\times\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m'}{\varepsilon'}}v_{s'}(q')}_{③}\\
&\times\underbrace{\frac{(-\mathrm{i})}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\bar{v}_s(q)}_{①\qquad\qquad⑤}\\
&\times\underbrace{(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k)}_{⑥}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}u_r(p)}_{⑦}\\
&=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{mm'}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}\frac{\mathrm{i}e^2}{S}M_{fi}
\end{aligned}\tag{5.3-2}$$

式中

$$S=-(p+q)^2=-(p'+q')^2 \tag{5.3-3}$$

$$M_{fi}=\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu v_{s'}(q')\bar{v}_{s}(q)\gamma_\mu u_r(p) \tag{5.3-4}$$

在正、负电子对撞实验中，仪器在入射粒子质心系中进行观测，根据二体二体碰撞理论可以证明，质心系中的不变微分截面可表为

$$\frac{d\sigma_{fi}}{dt}=\frac{k}{2^{n+1}\pi^2[S-(M_1-M_2)^2][S-(M_1+M_2)^2]}\times\int_0^{2\pi}\overline{\sum}|M_{fi}|^2d\varphi \tag{5.3-5}$$

在这里，$m=M_1=M_2$ 为入射粒子质量，$m'=m_1=m_2$ 为出射粒子质量，而

$$k=\int_a^b|m_a=m^2m'^2$$

称为费米子质量积. 由式(5.3-2)，M_{fi} 的相互作用因子为

$$g\Rightarrow\frac{e^2}{S}$$

因此，不变微分截面

$$\frac{d\sigma}{dt}=\left(\frac{e^2}{S}\right)^2\frac{m^2m'^2}{2\pi^2[S-0][S-(2m)^2]}\int_0^{2\pi}\overline{\sum}|M_{fi}|^2d\varphi$$
$$=\frac{e^4}{2\pi^2S^2}\left(\frac{m^2m'^2}{S-4m^2}\right)\int_0^{2\pi}\overline{\sum}|M_{fi}|^2d\varphi \tag{5.3-6}$$

此处 $t=(p-p')^2=-(q-q')^2$ 为朝前 4 动量转换，而 φ 是末态粒子 μ（或 μ'）相对于初态电子的碰撞方位角.

对于高能正、负电子碰撞，在计算反应截面时，必须考虑对粒子的自旋与极化求和与求平均，因此，

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}\sum_{s'=1}^{2}|\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu v_{s'}(q')\bar{v}_s(q)\gamma_\mu u_r(p)|^2$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{r,r'}\sum_{s,s'}\bar{u}_r(p)\gamma_\mu v_s(q)\bar{v}_s(q)\gamma_\nu u_r(p)\times\sum_{r'}\sum_{s'}\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\nu v_{s'}(q')\bar{v}_{s'}(q')\gamma_\mu u_{r'}(p')$$

$$= \frac{1}{4}\gamma_\mu \sum_s v_s(q)\bar{v}_s(q)\gamma_\nu \sum_r u_r(p)\bar{u}_r(p)\gamma_\nu$$
$$\times \sum_{s'} v_{s'}(q')\bar{v}_{s'}(q')\gamma_\mu \sum_{r'} u_{r'}(p')\bar{u}_{r'}(p')$$
$$= \frac{1}{4}(\gamma_\mu \Lambda^-(q))_{\alpha\beta}(\gamma_\nu \Lambda^-(p))_{\beta\alpha}\gamma_\nu \Lambda^-(q')_{\alpha\beta}\gamma_\mu \Lambda^+(p')_{\beta\alpha}$$
$$= \frac{1}{4}T_r[\gamma_\mu \Lambda^-(q)\Lambda^-(p)]T_r[\gamma_\nu \Lambda^-(q')\gamma_\mu \Lambda^+(p')]$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{m^2}[m^2 - p\cdot q)\delta_{\mu\nu} + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu]$$
$$\times \frac{1}{m'^2}[(m'^2 - p'q')\delta_{\mu\nu} + p_\mu' q_\nu' + p_\nu' q_\mu']$$
$$= \frac{1}{2m^2m'^2}[2m^2m'^2 - m'^2 pq - m^2 p'q' + (pp')(qq')$$
$$+ (pq')(qq')] \qquad (5.3\text{-}7)$$

根据运动学不变参数 s(总能)、t(朝前 4 动量交换) 和 u(朝后 4 动量交换) 的定义，有

$$s = -(p+q)^2 = -(p'+q')^2$$
$$t = -(p-p')^2 = -(q-q')^2$$
$$u = -(p-q')^2 = -(q-p')^2$$

可以证明

$$pq = -\frac{s}{2} + m^2$$
$$p'q' = -\frac{s}{2} + m'^2$$
$$p'p = qq' = \frac{1}{2}(t - m^2 - m'^2) \qquad (5.3\text{-}8)$$
$$pq' = qp' = \frac{1}{2}(u - m^2 - m'^2)$$
$$= -\frac{1}{2}(s + t - m^2 - m'^2)$$

于是

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{1}{8m^2m'^2}[2(m^2+m'^2)s+(t-m^2-m'^2)^2 + (s+t-m^2-m'^2)^2] \quad (5.3\text{-}9)$$

若不测定粒子极化，跃迁几率与方位角无关，则

$$\int_0^{2\pi}\overline{\sum}|M_{fi}|^2\mathrm{d}\varphi=\overline{\sum}|M_{fi}|^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi\overline{\sum}|M_{fi}|^2$$

因此，由式(5.3-6)有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{e^4}{8\pi s^3(s-4m^2)}[2(m^2+m'^2)s+(t-m^2-m'^2)^2 + (s+t-m^2-m'^2)^2] \quad (5.3\text{-}10)$$

考虑到在高能碰撞中，

$$m^2、m'^2\ll s、|t|_{\max}$$

即当$|t|\gg m'^2$时，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{e^4}{8\pi s^3 s}(s^2+2st+2t^2) =\frac{2\pi\alpha^2}{s^4}(s^2+2st+2t^2) \quad (5.3\text{-}11)$$

式中$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$称为精细结构常数.

若将上式对t积分，并考虑到动量变换t的积分上、下限分别为

$$|t|_{\min}=t|_{\theta=0}\simeq 0 \qquad [t=-(p-p')^2]$$
$$-|t|_{\max}=t|_{\theta=\pi}\simeq s$$

则

$$\sigma=-\frac{2\pi\alpha^2}{s^4}\int_0^{-s}(s^2+2st+2t^2)\mathrm{d}t \simeq\frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (5.3\text{-}12)$$

因此，正负电子对高能散射时，单纯量子电动力学效应的总反应截面σ与碰撞总能的平方(s)成反比.

第六章

重　整　化

在有关电子自能跃迁的讨论中，出现了发散困难，类似的情况在光子自能跃迁中也会出现. 当然，发散困难给我们的计算带来了麻烦，但是也并非不可克服. 人们发现，这些发散效应可以还原为电荷效应或质量效应，只要通过“电荷重整化”及“质量重整化”等手续，高阶近似中的发散困难就会消失.

本章中我们以量子电动力学为例，具体讨论电荷重整化及发散困难的处理问题，至于质量重整化只做简单介绍.

第一节　基本发散

一、基本发散

检验某一矩阵元是否发散的简便方法，是在动量表象中将 S 矩阵元的表式写下，若与该矩阵元对应的费曼图有 n 个顶角、p

条内部光子线、E_i 条内部电子线、p_e 条外部光子线和 E_e 条外部电子线，那么，按照费曼规则，该 S 矩阵元将由如下诸因子组成：

(1)与 n 个顶角对应的 n 个顶角因子：

$$-e(2\pi)^4\gamma_\mu\delta^{(4)}\left(\sum p\right)$$

(2)与 p_i 条内部光子线对应的 p_i 个光子内线因子：

$$-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}$$

(3)E_i 个电子内线因子：

$$-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\frac{m-\mathrm{i}\gamma p}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}$$

(4)p_e 个光子外线因子：

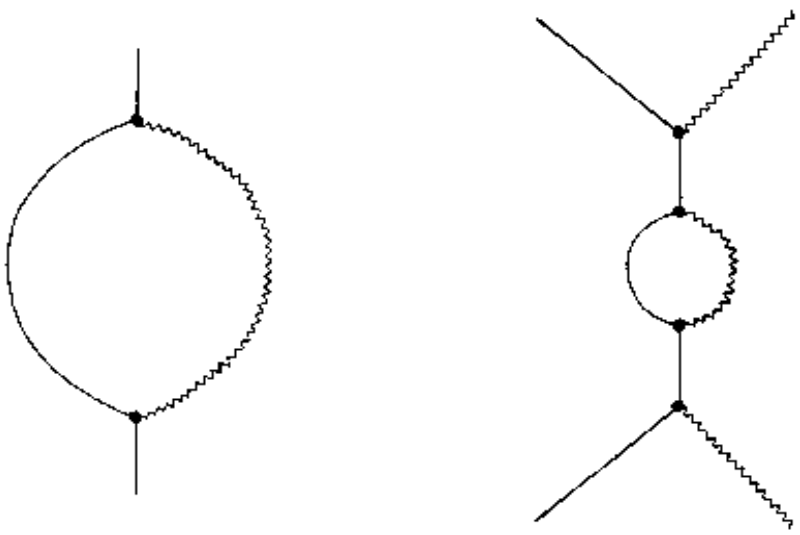
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^a_\mu$$

(5)E_e 个电子外线因子：

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}\bar{u}_r(p)$$

当然，在发散的矩阵元中，有些是带有基本性的，即所谓基本发散；而另一些则不带基本性的，我们可以将其分解成带基本发散的部分. 比如，在图 6-1 中，图(a)是电子自能图，而图(b)是包含电子自能过程的四级微扰康普顿散射过程，它们都存在发散. 但是，图(b)的发散问题，可以归结为图(a)情况. 因此，图(a)比图(b)的发散更基本，称为基本发散或原始发散.

所有矩阵元，若将其中某一内部动量当做恒量而不对它积分，仍然出现无穷大(发散)时，那么，这些矩阵元的发散就不是基本的. 因此，基本发散图形具有这样的特点：与这些图形相对应的矩阵元，假如令其任一内部动量取某定值而不对其积分，必然收敛. 换句话说，假如在某发散图形上，割断任一内线，会变成不发散的



(a)　　(b)

图 6-1

图形，这种图形，称为基本发散图形.

导致基本发散的物理过程只是有限几种，所有其他的发散都可以约化(分解)成这有限几种基本发散，这正是重整化方法能够取得成功的原因之一.

二、法雷定理

若在费曼图中有一封闭的电子线，而这封闭的电子线的顶点数为单数，那么，该图形对于 S 矩阵元没有任何贡献. 这就称为法雷定理.

图 6-2 就是具有 3 个顶点的封闭电子线. 根据法雷定理，这种图形对于 S 矩阵元就不会有贡献.

三、不可约化图形

电子自能、光子自能和顶角部分都属于基本发散图形，最简单

的电子自能如图 6-3(a)所示. 任何只有两条电子外线而不存在光子外线的图形都称为电子自能图(如图 6-3).

同样,我们把只有两条光子外线而没有其他外线的图形,称为光子自能图,如图 6-4 所示.

图 6-5 是发散的顶角图. 任何只有两条电子外线、一条光子外线的图形,称为顶角图形.

由上述诸图可见,在电子自能

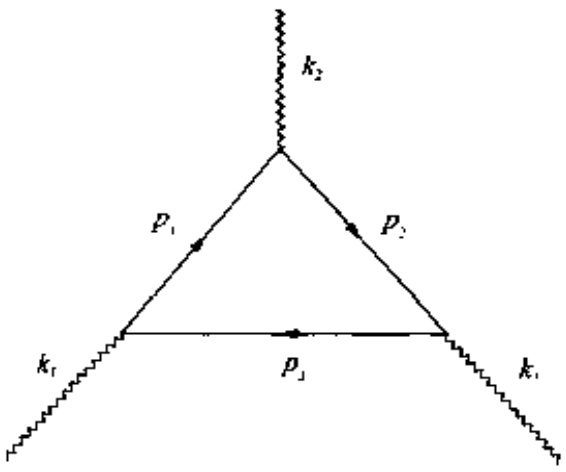
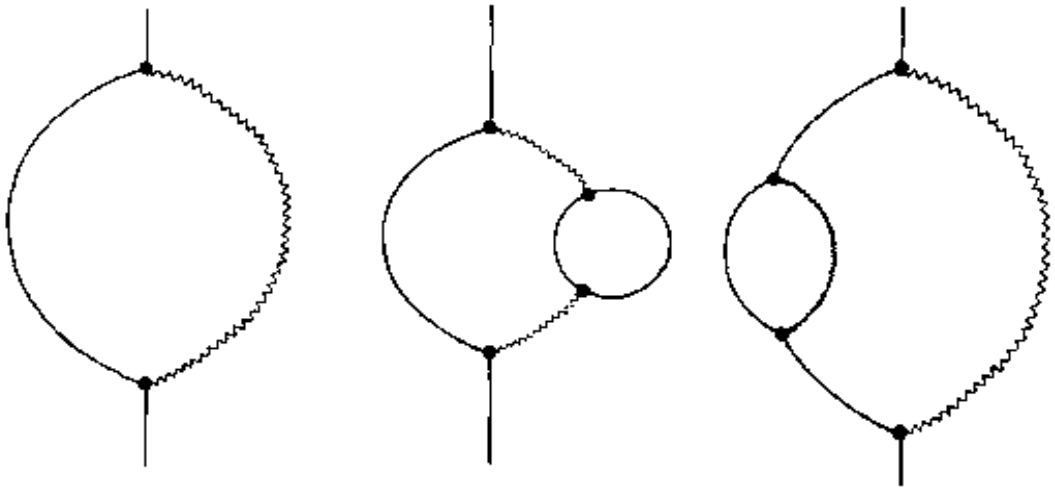


图 6-2

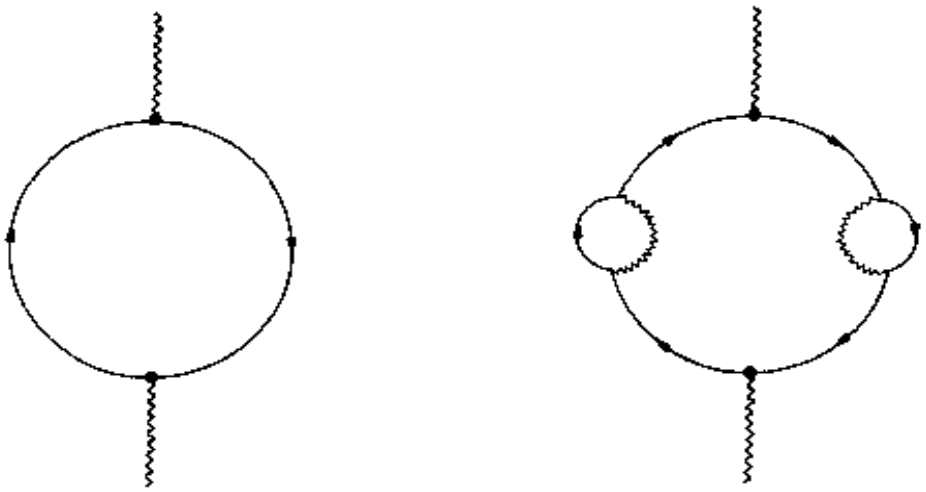


(a) (b) (c)

图 6-3

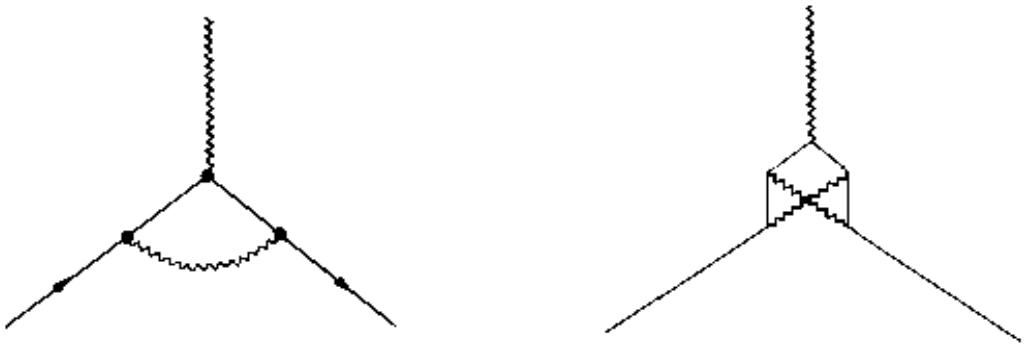
图中,可以包含光子自能和顶角部分[图 6-3(b)];在光子自能图中,也可以包含电子自能和顶角部分[图 6-4(b)];同样,在顶角部分也可以包含电子自能部分和光子自能部分.

为方便分析,我们从最简单的图形入手. 为此,定义所谓的"图



(a)　　(b)

图 6-4



(a)　　(b)

图 6-5

形骨架”. 假如有某图形 A，将其内部所包含的一切电子自能、光子自能和顶角部分略去，分别代以简单的电子线、光子线和顶角，从而得一图形 A'，则称 A' 是 A 的图形骨架. 例如，图 6-4 中图(a)就是图(b)的图形骨架，而图 6-3(a)也是图 6-3(b)的骨架. 若图形 A 的骨架 A' 与其自身(A)完全一样，称 A 为不可约化图形. 显然，图

6-3(a)是不可约化电子自能图，而图 6-4(a)是不可约化光子自能图. 由此可知，一切发散图形可以分解成基本发散图形，而基本发散图形又可以分解成不可约化的基本发散图形. 讨论发散问题，应研究不可约化的基本发散图形.

第二节 电荷重整化

一、顶角函数

让我们研究图 6-6 中含有一个顶点的顶角情况，对应的一级微扰散射振幅为

$$S_{fi}^{(1)}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_2}}\bar{u}_\gamma(p_2)(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p_2-k_1)$$
$$\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_1}}u_\alpha(p_1)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}e_\mu^\sigma(k_1)$$
$$=\frac{-e}{(2\pi)^{1/2}}\sqrt{\frac{mm}{2E_1E_2\omega_l}}\bar{u}_\gamma(p_2)\gamma_\mu\delta^{(4)}(p_1-p_2-k_1)e_\mu^\sigma(k_1)u_\alpha(p_1) \tag{6.2-1}$$

若在顶角处存在一条光子内线(虚光子)，图 6-6 就变成如图 6-7 所示的 3 个顶点情况，即有

$$S_{fi}^{(3)}=\int dp'dp''dk'\Big[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_2}}\bar{u}_\gamma(p_2)(-e\gamma_\nu)$$
$$\times(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'+p''-p_2)\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\rho\nu}}{k'^2-i\varepsilon}\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{m-i\hat{p}''}{p''^2+m^2-i\varepsilon}$$

$$\times(-e\gamma_\mu)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-p''-k_1)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}e^\rho_\mu(k_1)$$

$$\times\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{m-\mathrm{i}\not{p}'}{p'^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}(-e\gamma_\rho)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p'-k')$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_1}}u_s(p_1)$$

$$=\frac{-e}{(2\pi)^{1/2}}\sqrt{\frac{mm}{2E_1E_2\omega_1}}\bar{u}_r(p_2)\delta^{(1)}(p_1-p_2-k_1)$$

$$\times\Lambda(p_1,p_2)e^\rho_\mu(k_1)u_s(p_1) \qquad (6.2\text{-}2)$$

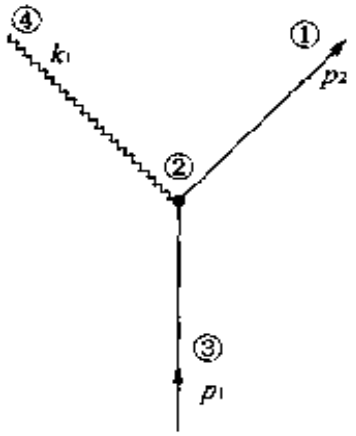


图 6-6

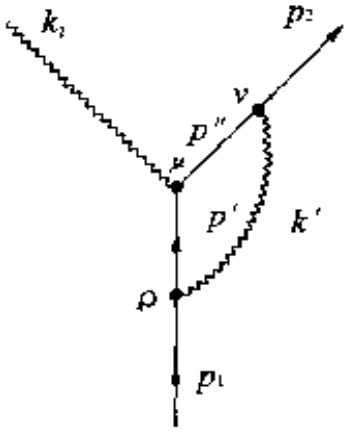


图 6-7

式中

$$\Lambda(p_1,p_2)=\frac{\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k'}{k'^2-\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\lambda\left[\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}_2-\not{k}')-m}{(p_2-k')^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]$$

$$\times\underset{\epsilon\to0}{\gamma_\mu}\left[\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}_1-\not{k}')-m}{(p_1-k')^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\right]\underset{\epsilon\to0}{\gamma_\nu} \qquad (6.2\text{-}3)$$

对比式(6.2-2)及式(6.2-1)可知，$S_{fi}^{(3)}$与$S_{fi}^{(1)}$的差别在于$S_{fi}^{(3)}$中是以$\Lambda(p_1,p_2)$取代$S_{fi}^{(1)}$中的γ_μ，因此，

$$S_{fi}=S_{fi}^{(1)}+S_{fi}^{(3)}$$

$$=[\gamma_\mu+\Lambda(p_1,p_2)]\frac{-e}{(2\pi)^{1/2}}\sqrt{\frac{m^2}{2E_1E_2\omega_l}}\bar{u}_r(p_2)$$

$$\times\delta(p_1-p_2-k_1)e_\mu^\sigma(k_1)u_s(p_1) \tag{6.2-4}$$

总顶角函数

$$\Gamma(p_1,p_2)=\gamma_\mu+\Lambda(p_1,p_2) \tag{6.2-5}$$

二、正规化处理

在本节里，我们要通过适当的方式，将发散积分变成有限积分的极限. 由于 $\Lambda(p_1,p_2)$是一个发散量，因此，顶角也给微扰矩阵元 S 带来发散困难. 为解决这一麻烦，有必要先将 $\Lambda(p_1,p_2)$进行正规化处理，即将发散积分变成有限积分的极限.

考虑到式(6.2-3)中被积函数的分子部分(为简便，此处以 k 代替 k')：

$$\gamma_\nu[\mathrm{i}(\hat{p}_2-\hat{k})-m]\gamma_\mu[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k})-m]\gamma_\nu$$

$$=\gamma_\nu[\mathrm{i}(\hat{p}_2-\hat{k})-m]\hat{\delta}_\mu[\mathrm{i}(\hat{p}_1-\hat{k})-m]\gamma_\nu$$

$$=-\gamma_\nu(\hat{p}_2-\hat{k})\hat{\delta}_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\nu-\mathrm{i}m\gamma_\nu(\hat{p}_2-\hat{k})\hat{\delta}_\mu\gamma_\nu$$

$$-\mathrm{i}m\gamma_\nu\hat{\delta}_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\nu+m^2\gamma_\nu\hat{\delta}_\mu\gamma_\nu$$

$$=2(\hat{p}_1-\hat{k})\hat{\delta}_\mu(\hat{p}_2-\hat{k})-\mathrm{i}m\gamma_\nu^2(p_2-k)\hat{\delta}_\mu-\mathrm{i}m\gamma_\nu^2(p_1-k)\hat{\delta}_\mu$$

$$-\mathrm{i}m\gamma_\nu^2(p_2-k)\hat{\delta}_\mu-2m^2\hat{\delta}_\mu$$

$$=2(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{k})-4\mathrm{i}m(p_{1\mu}-k_\mu)-4\mathrm{i}m(p_{2\mu}-k_\mu)$$

$$-2m^2\gamma_\mu$$

$$=2(\hat{p}_1-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{k})-2\mathrm{i}m[p_{1\mu}+p_{2\mu}-2k_\mu]-m^2\gamma_\mu \tag{6.2-6}$$

这里有

$$\hat{p}=\gamma_\mu p$$

$$\hat{\delta}=\delta_{\mu\nu}\gamma_\nu=\gamma_\mu$$

将式(6.2-6)代入式(6.2-3)，得

$$\Lambda(p_1,p_2)=\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \times\frac{(\hat{p}_2-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})-2im(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2k_\mu)-m^2\gamma_\mu}{k^2[(p_2-k)^2+m^2][(p_1-k)^2+m^2]} \tag{6.2-7}$$

令

$$\left.\begin{aligned}a_1&=(p_2-k)^2+m^2\\a_2&=(p_1-k)^2+m^2\\a_3&=k^2\end{aligned}\right\} \tag{6.2-8}$$

并利用费曼参数积分关系

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}\frac{1}{F^n} \tag{6.2-9}$$

式中　$F=a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots+a_n(1-x_1)$

当 $n=3$ 时，有

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}=(3-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2[a_1x_2+a_2x_1-a_2x_2+a_3-a_3x_1]^{-3}$$

因此，式(6.2-7)的分母部分可转化为对 x 的积分，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{[(p_1-k)^2+m^2][(p_2-k)^2+m^2]k^2}\\&=2\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\{[(p_2-k)^2+m^2]x_2+[(p_1-k)^2+m^2]x_1-[(p_1-k)^2+m^2]x_2+k^2-k^2x_1\}^{-3}\\&=2\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\{[(p_2-k)^2+m^2-(p_1-k)^2-m^2]x_2+[(p_1-k)^2+m^2-k^2]x_1+k^2\}^{-3}\\&=2\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2[(p_2^2-2p_2k-p_1^2+2p_1k)x_2+(p_1^2-2p_1k+m^2)x_1+k^2]^{-3}\end{aligned} \tag{6.2-10}$$

利用 $k_1=p_1-p_2$，上式中括号部分等于

$$(k-p_1x_1-k_1x_2)^2+q^2 \tag{6.2-11}$$

此处

$$q^2=(p_1^2+m^2)x_1+k_1(p_2+p_1)x_2-(k_1x_2+p_1x_1)^2 \tag{6.2-12}$$

将式(6.2-11)的结果代入式(6.2-10)中，再将所得结果代入式(6.2-7)得

$$\Lambda(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int dk\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2 \times\frac{(\hat{p}_2-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})-2im(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2k_\mu)-m^2\gamma_\mu}{[(k-p_1x_1-k_1x_2)^2+q^2]^3} \tag{6.2-13}$$

这属于对数发散积分，作代换

$$k\to Q+p_1x_1+k_1x_2 \tag{6.2-14}$$

故 $Q=k-p_1x-k_1x_2$

再将式(6.2-13)中被积函数的分子记作 T，即

$$\begin{aligned}T&=(\hat{p}_2-\hat{k})\gamma_\mu(\hat{p}_1-\hat{k})-2im(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2k_\mu)-m^2\gamma_\mu\\&=[\hat{p}_1(1-x_1)-\hat{k}_1x_2-\hat{Q}]\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{p}_1x_1-\hat{k}_1x_2-\hat{Q})\\&\quad-2im(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2Q_\mu-2p_{1\mu}x_1-2k_{1\mu}x_2)-m^2\gamma_\mu\end{aligned} \tag{6.2-15}$$

故 $$\Lambda(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int dQ\int dx_1\int dx_2\frac{T}{(Q^2+q^2)^3} \tag{6.2-16}$$

考虑到被积函数的对称性，因而，Q 的奇次项对积分没贡献，故只保留 Q^2 项，且 Q_1^2、Q_2^2、Q_3^2、Q_4^2 对积分的贡献相当于 $Q^2/4$ 对积分的贡献，又因为

$$\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu=-2\gamma_\mu \tag{6.2-17}$$

故

$$T=[\hat{p}_1(1-x_1)-\hat{k}_1x_2]\gamma_\mu(\hat{p}_2-\hat{p}_1x_1-\hat{k}_1x_2)-\frac{Q^2}{2}\gamma_\mu$$
$$-2im(p_{1\mu}+p_{2\mu}-2p_{1\mu}x_1-2k_{1\mu}x_2)-m^2\gamma_\mu \qquad (6.2\text{-}18)$$

为了具体阐明如何导致电荷重整化，让我们讨论电子通过电磁场又未被场散射的实例.

设初、末态电子的四动量为 p_1 及 p_2，由于电子未被场散射，因此有

$$p_1=p_2=p \qquad (6.2\text{-}19)$$

由式(6.2-2)，在微扰振幅 $S_F^{(2)}$ 中，为保证能量守恒 $\delta(p_1-p_2-k_1)$，要求 $p_1-p_2-k_1=0$，即 $p_1-p_2=k_1$. 在本例中，由于 $p_1=p_2$，所以，有 $p_1-p_2=k_1=0$，因此，由式(6.2-18)得

$$T'=(1-x_1)^2\hat{p}\gamma_\mu\hat{p}-\frac{1}{2}Q^2\gamma_\mu-m^2\gamma_\mu-2im(1-x_1)\{\gamma_\mu,\hat{p}\} \qquad (6.2\text{-}20)$$

这里考虑到

$$\{\gamma_\mu,\hat{p}\}=\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}p_\nu=2\delta_{\mu\nu}p_\nu=2p_\mu$$

另一方面，由式(6.2-2)，在 $\bar{u}_r\Lambda u_s$ 中，场量 u_s 满足狄拉克方程

$$(i\hat{p}+m)u_s=0,$$

所以　　$$\hat{p}=im \qquad (6.2\text{-}21)$$

将其代入式(6.2-20)有

$$T'=-m^2(1-x_1)^2\gamma_\mu-\frac{1}{2}Q^2\gamma_\mu-m^2\gamma_\mu+4m^2(1-x_1)\gamma_\mu$$
$$=\gamma_\mu[m^2(2-2x_1-\frac{1}{2}x_1^2)-\frac{1}{2}(Q^2+m^2x_1^2)] \qquad (6.2\text{-}22)$$

又根据式(6.2-12)，并考虑到 $k_1=p_1-p_2=0$，因此

$$q^2=(p_1^2+m^2)x_1+k_1(p_2+p_1)x_2-(k_1x_2+p_1x_1)^2$$
$$=m^2x_1^2 \qquad (6.2\text{-}23)$$

将式(6.2-22)、(6.2-23)代入式(6.2-16)

$$\Lambda(p_1,p_2)=\frac{ie^2}{4\pi^4}\int d^4Q\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\gamma_\mu$$
$$\times\left[\frac{m^2\left(2-2x_1-\frac{x_1^2}{2}\right)-\frac{1}{2}(Q^2+m^2x_1^2)}{(Q^2+m^2x_1^2)^3}\right]$$
$$=\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4Q\int_0^1 x_1dx_1\gamma_\mu\left[\frac{m^2(4-4x_1-x_1^2)}{(Q^2+m^2x_1^2)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(Q^2+m^2x_1^2)^2}\right]$$
$$=L\gamma_\mu \tag{6.2-24}$$

为求上式第二项积分，以 x 取代 x_1，且根据分部积分法，有

$$\int_0^1\frac{xdx}{(Q^2+m^2x^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(Q^2+m^2)^2}+\int_0^1\frac{2m^2x^2}{(Q^2+m^2x^2)^3}xdx \tag{6.2-25}$$

因此，由式(6.2-24)知

$$L=\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4Q\int_0^1 xdx\left[\frac{m^2(4-4x-x^2)}{(Q^2+m^2x^2)^3}\right]$$
$$-\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4Q\left[\frac{1}{2(Q^2+m^2x^2)^2}+\int_0^1\frac{2m^2x^2}{(Q^2+m^2x^2)^3}xdx\right]$$
$$=\frac{\alpha}{4\pi}D+\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4Q\int xdx\,\frac{m^2(4-4x-3x^2)}{(Q^2+m^2x^2)^3} \tag{6.2-26}$$

此处，利用积分关系

$$\int d^4Q\frac{1}{(Q^2+a^2)^2}=i\pi^2D \tag{6.2-27}$$

而
$$D=\lim_{M^2\to\infty}\left[\ln\frac{M^2+a^2}{a^2}+\frac{a^2}{M^2+a^2}-1\right] \tag{6.2-28}$$

及 $a=mx$，这里 M 是 Q 的上限，且 D 随 $M\to\infty$ 而发散.

考虑到式(6.2-26)右边第二项积分收敛，故可调换积分次序，先对 d^4Q 积分，并利用关系

$$J_n=\int\frac{d^4Q}{(Q^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{i\pi^2}{(n-1)(n-2)a^{2(n-2)}} \quad (n \geqslant 3) \tag{6.2-29}$$

有 $$\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4Q\int_0^1 x dx \frac{m^2(4-4x-3x^2)}{(Q^2+m^2x^2)^3}$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi}\left(-4\int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2}\right)$$

因此，由式(6.3-26)有

$$L = \frac{\alpha}{4\pi}\left[D - 4\int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2}\right] \tag{6.2-30}$$

可见，L 所包含的发散量可分成两部分：一部分是 D，它随 Q 的积分上限 $M \to \infty$ 而发散；另一部分是 $\frac{dx}{x}$，它随 x 的下限趋于 0 而发散，它属于因计算方法不合适所引起，并非基本发散. 至此，我们完成了对函数 $\Lambda(p_1, p_2)$ 的正规化处理.

三、电荷重整化

将式(6.2-24)代入式(6.2-5)中，有

$$\Gamma(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \Lambda(p_1, p_2) = (1+L)\gamma_\mu \tag{6.2-31}$$

因此，对我们所讨论的顶角(图6-7)情况，矩阵元中的顶角因子 $(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(\sum p)$ 要用 $(-e)(1+L)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(\sum p)$ 取代，或者说，在存在发散困难的顶角(图 6-7) 情况下，必须以 $e_R = (1+L)e$ 取代一般顶角(图6-6)中的电荷 e. 换句话说，我们要把原来意义下的电荷 e，重新定义为 $e_R = (1+L)e$，以便消除发散困难. 这种对电荷的重新定义，就称为电荷重整化. 可见，重整化后的电子电荷分成两部分

$$e_R = e + Le = e + \delta e \tag{6.2-32}$$

其中 $\delta e = Le$ 是由于电子通过电磁场时，由电磁作用所引起的附加电荷. 即使 $L \to \infty$，但总电荷 $e_R = e(1+L)$ 总是有限的. 实验所测量的电荷也正是这个值. 我们称 e 为电子裸电荷(固有电荷)，$\delta e = eL$

为电磁电荷(由于电磁作用所导致的附加电荷),e_R 为重整化电荷(实验室所测到的电荷).

原来人们认为,电子的固有电荷(裸电荷)代表电子"真正的电荷",但是,这却使对散射矩阵元的计算出现发散困难.通过上述对顶角修正的正规化处理,人们发现有必要改变原来对电荷的认识,重新定义电子的电荷.也就是说,必须以 $e_R=e+\delta e$ 取代原来的 e,以便消除计算中的发散困难,这就是电荷的重整化.

第三节 质量重整化简介

类似于电荷重整化的讨论,质量也可以进行重整化处理.

原来人们认为,电子的质量由两部分构成:电子的固有质量 m(裸质量)和电子的电磁质量 δm(由电子周围所存在的光子云所引起的附加质量).同时,人们还认为,电子的固有质量才是代表电子的"真正"质量.然而,按照这样处理,在电子自能等过程中,出现了无法对付的"发散"困难.

为了消除电子自能等过程中出现的发散困难,1948 年薛温格等提出质量重整化方法,他们把电子自能图解释为电子放出光子又吸收光子的过程.这样,电子不断放出光子,又不断吸收光子,以致在电子周围就出现了一层"光子云",这层光子云对于电子来说,就有如在裸电子周围披上一层"外衣".相应地在裸电子(对应的裸质量为 m)上,又附加地存在大小为 δm 的电磁质量.应该指出,电子周围由于存在光子云所附加上的电磁质量是无法与电子分开而单独存在的.因此,实验室所测得的电子质量 m_r 应该包含电子的裸质量 m 与附加质量 δm 之和,即

$$m_1 = m + \delta m \tag{6.3-1}$$

这一质量，才是我们通常所指的电子的“真正”质量.

按照对电子质量的重新认识的观点处理电子自能等问题，恰恰能使原来存在的发散困难得到克服，因此，人们称这样对质量的处理手续为质量重整化. 有关质量重整化问题，限于篇幅，在这里不再展开，读者可以参阅有关的参考材料.

必须指出，采用重整化方法对电荷与质量重新认识后，能够消除计算过程中出现的某些发散困难. 但是，这种考虑并不能导致我们赖以处理问题的微扰理论是“完全正确”的结论，相反，它仍然只能是一定程度的渐近近似.

主要参考文献

[1]J. D. Bjorken & S. D. Drell Relativistic Quantum Fields. Mcgrow-Hill Book Company, 1965

[2] S. N. Gupta. Quantum Electrodynamics. Gordon and Breach Seience Publishers, 1977

[3]朱洪元. 量子场论. 北京：科学出版社，1960

[4]邹国兴. 量子场论导论. 北京：科学出版社，1981

[5]鲁里. 粒子和场. 北京：科学出版社，1981(中译本)

[6]李淮江. 量子场论导引. 昆明：云南科学技术出版社，1986

[7]何宝鹏等. 量子场论导论. 广州：华南理工大学出版社，1990

[8]曾谨言. 量子力学(下册). 北京：科学出版社，1984