

现代物理学丛书

邹国兴 编著

# 量子场论导论

科学出版社

# 量子场论导论

鄂国兴 编著

科学出版社

1980

## 内 容 简 介

本书主要阐述量子场论的基础. 第一章主要简述海森堡表象中微观物质运动量子化的正则方法. 第二、三、四章应用这个方法对几个典型的自由场进行量子化，从而讲述介子、光子、自旋为$\frac{1}{2}$的费米子等微观粒子的性质和它们的运动规律，特别是它们的产生算符和湮没算符. 电磁场的量子化采用不定度规的表述，以保证明显的协变性. 第五章简要地讨论粒子物理中各种比较典型的相互作用和它们的场论表示方法. 第六、七、八章及附录比较详细地阐述相互作用表象中量子场论的求解问题和物理过程的跃迁振幅及各种跃迁几率的计算方法. 第九章应用量子场论方法对粒子物理中的一些比较典型的过程进行理论计算并与实验作简单比较.

本书偏重于各种相互作用的粒子物理过程的理论处理，即量子场论协变方法对粒子物理的应用. 它可作为高等院校的粒子物理学课程的教材，也可供粒子物理学工作者参考.


量子场论导论

邹国兴 编著

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1980年2月第一版 开本：850×1168 1/32

1980年2月第一次印刷 印张：6 1/8

印数：0001—9,180 字数：158,000

统一书号：1168

定价：0.92元

## 《现代物理学丛书》编委会

主　编　　王竹溪

副主编　　朱洪元　汪德昭　周光召　谢希德

编　委　　于　敏　王之江　王天眷　冯　端

卢鹤绂　吴式枢　汤定元　何祚庥

李整武　张志三　苟清泉　郝柏林

郭贻诚　葛庭燧

O11/216/2

# 前　言

本书是根据作者1975年和1977年在北京大学编写的《量子场论》讲义补充修改而成．本书在数学工具方面力求简单，如避免应用变分法和协变态矢方程等．书中内容着重于阐述强子、轻子、光子等粒子的相互作用动力学．没有特别突出量子电动力学，也没有介绍规范场理论，因此也没有讨论重整化问题．物理过程跃迁振幅的求解在相互作用表象中进行．本书第七章在推导费曼规则时采用了对具体物理过程作具体分析的比较直观的方法．第八章比较详细地处理了场论中各种跃迁几率的计算方法和有关的一些运动学问题．最后一章选取了近年来粒子物理中几个比较典型的问题，概括地介绍量子场论微扰近似的一些具体应用．书末附录介绍了场算符的编时乘积和威克定理．

本书承高崇寿、宋行长、陈鹤琴、赵志詠等同志审阅并提出宝贵意见，特此致谢．但是由于本人水平所限，书中难免有不妥和错误之处，欢迎读者批评指正．

著　者

1978年9月于北京

# 目　　录


第一章　场量子化的一些预备知识 …… 1

1.1 一个新单位制 …… 4

1.2 动力系运动的量子化;广义坐标和共轭动量 …… 5

1.3 简谐振子 …… 8

第二章　标量场 …… 11

2.1 实标量场及其量子化 …… 11

2.2 动量空间;量子场的粒子性;粒子的产生和湮没算符 …… 16

2.3 介子的玻色统计性 …… 21

2.4 荷电介子与复标量场 …… 23

第三章　电磁场 …… 28

3.1 自由电磁场 …… 28

3.2 规范不变性;矢量场与附加条件 …… 29

3.3 矢量场的物理量及量子化 …… 30

3.4 极化矢量;矢量粒子 …… 31

3.5 量子电磁场的物理态 …… 36

3.6 不定度规 …… 37

3.7 附加条件的表式 …… 40

3.8 电磁场物理态的确定 …… 41

第四章　旋量场 …… 45

4.1 旋量波动方程的不变性;由旋量构成的张量 …… 45

4.2 自由粒子解;正反粒子波函数 …… 50

4.3 旋量场的物理量与量子化问题 …… 53

4.4 反对易关系与费米统计性 …… 56

4.5 空穴理论;负能粒子态的重新解释 …… 58

4.6 旋量场的多粒子态;粒子与反粒子的产生和湮没算符 …… 60

第五章　量子场的相互作用 …… 63

5.1 旋量场与电磁场的相互作用 …… 64
5.2 荷电标量场的电磁相互作用 …… 67
5.3 $\pi^0 N$ 相互作用 …… 69
5.4 $\pi^{\pm} N$ 相互作用 …… 70
5.5 同位旋守恒的 $\pi N$ 强相互作用 …… 71
5.6 四费米子耦合 …… 76
第六章 相互作用表象;散射矩阵;跃迁振幅 …… 79
6.1 量子力学的表象问题 …… 79
6.2 相互作用表象 …… 83
6.3 量子场论求解;$U$ 矩阵 …… 85
6.4 散射矩阵;跃迁振幅 …… 86
第七章 微扰近似 …… 88
7.1 微扰展开 …… 89
7.2 场算符的正规乘积 …… 90
7.3 一级微扰跃迁振幅 …… 93
7.4 二级微扰导致的一些物理过程 …… 96
7.5 传播函数 …… 109
7.6 二级微扰过程的动量空间跃迁振幅 …… 112
7.7 对物理过程求跃迁振幅的一般性规则 …… 117
第八章 衰变宽度或寿命;碰撞截面;角分布;能量分布 …… 121
8.1 物理过程的跃迁几率 …… 121
8.2 衰变寿命或宽度;角分布;能量分布 …… 125
8.3 碰撞问题;微分截面 …… 128
8.4 二体二体碰撞反应 …… 131
第九章 一些物理过程的初级近似 …… 134
9.1 简单的强衰变 …… 134
9.2 赝标介子的轻子型衰变 …… 138
9.3 中性赝标介子的电磁衰变 …… 142
9.4 矢量介子衰变为轻子对 …… 145
9.5 矢量介子的辐射衰变 …… 149
9.6 赝标介子的半轻子型衰变 …… 150
9.7 正负电子在高能碰撞中转化为 $\mu$ 轻子对 …… 155

9.8 高能正负电子散射 …… 160
9.9 高能中微子电子弹性散射 …… 163
9.10 $\pi$ 介子的光生反应 …… 166
9.11 外场问题;库仑散射 …… 171
附录 编时乘积和散射矩阵的约化 ……176
A1 编时乘积 …… 176
A2 场算符的收缩 …… 179
A3 编时乘积约化为正规乘积 …… 181
A4 散射矩阵的约化 …… 186

# 第一章　场量子化的一些预备知识

量子场论是早期量子力学的继续和发展．它的实验基础仍然是微观物质运动的波粒二重性，其内容能够反映微观物质运动的一部分重要客观规律，进一步解决由波粒二重性所提出的物理理论课题．

微观物质运动的波粒二重性首先是在电磁和光的现象中发现的．二十世纪初，在对黑体辐射所进行的实验和理论分析中，人们提出了电磁辐射机制的量子假说；对光电效应的分析研究，又进一步提出了具有确定能量 $\hbar\omega$ 的光量子概念，并且推断出光量子还具有确定的动量 $\hbar\omega/c$．后来，二十年代初期的光和电子的散射实验明确地证实了这一点，由此充分揭示了光量子的粒子性．这样，就确立了静质量为零的光子的概念．可是对光和电磁现象的理论认识，直到二十年代中期，基本上还仅仅局限于宏观电磁场理论，即经典电动力学．因此人们迫切要求在宏观电磁场理论的基础上建立起能够反映微观电磁现象的粒子(光子)理论．这就需要对经典电磁场进行“量子化”．

在微观电磁现象的波粒二重性被发现并确立以后，有人推想，电子以及其它微观粒子的运动也可能具有类似的特性．起初仅仅是理论性的探讨，但是不久就得到了实验的确切验证．同时，在理论上又找到了能够反映微观粒子运动规律的一种具体数学形式，即波动方程．开始时，波动方程是非相对论的，即薛定谔波动方程：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi \tag{1.1}$$

其中 $\Psi(\mathbf{x},t)$ 是复数函数，称为波函数；$V(\mathbf{x},t)$ 是外力势．波粒二重性要求波函数 $\Psi$ 具有统计性物理意义，即 $|\Psi(\mathbf{x},t)|^2$ 代表在

$t$ 时刻微观粒子存在于 $\mathbf{x}$ 处的几率密度 $\rho(\mathbf{x},t)$. 当然，几率密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ 必须满足下列基本条件： $\rho$ 在任意 $\mathbf{x}$ 时，$t$ 是正定的，即 $\rho(\mathbf{x},t)\geqslant 0$; 总几率 $\int_{\infty}\rho d^3x$ 守恒. 从波动方程(1.1)可以推得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0, \tag{1.2}$$

这里

$$\rho=|\Psi|^2,\quad \mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi-\nabla\Psi^*\Psi\right). \tag{1.3}$$

因此，当用非相对论波动方程(1.1)描述微观粒子运动时，波函数 $\Psi$ 满足统计性解释的要求. ($\Psi$ 在 $\mathbf{x}\to 0$ 的边界条件，使 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}\oint\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}=0$.)

与非相对论波动方程(1.1)直接对应的相对论性波动方程显然具有下列形式:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\left(\nabla^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi. \tag{1.4}$$

这个方程一般称为克莱因-戈登方程. 这时 $\varphi(\mathbf{x},t)$ 可以是实函数，也可以是复函数. 取 $\varphi$ 为复函数时，同样可以推得式(1.2)的守恒定律，不过现在

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\varphi\right),$$

$$\mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi^*\nabla\varphi-\nabla\varphi^*\varphi\right), \tag{1.5}$$

这里虽然 $\mathbf{j}$ 同式(1.3)中的一样，但 $\rho$ 却完全不同. 由于波动方程(1.4)对 $t$ 是二次微商，$\varphi$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 必须是两个独立的初始条件. 因此 $\rho$ 不是正定的量，它可正可负，也可以是零. 所以 $\rho(\mathbf{x},t)$ 不能看作粒子存在于 $(\mathbf{x},t)$ 的几率密度. 这样，严格地讲，相对论波动方程(1.4)不能同式(1.1)一样来描述一个微观粒子的运动. 但是后来人们发现，相对论波动方程(1.4)虽然不能严格地用来描述单

粒子的微观运动，但可以把它看作类似于宏观电磁场方程的经典场方程；在进行量子化之后，正如电磁场描述多光子系统的运动一样，$\varphi$ 场也描述一个多粒子系统的运动．实践证明，量子场 $\varphi$ 可以正确地反映 $\pi$ 介子、$K$ 介子等一类微观粒子的运动规律．

按照上面的分析，相对论波动方程(1.4)之所以不能严格地用来描述单粒子运动，是因为它对 $t$ 是二次微商．于是人们就设法建立一个对 $t$ 是一次微商(因而对 $x$, $y$, $z$ 也必须是一次微商)的相对论性波动方程，即狄喇克旋量波动方程：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + i\frac{mc}{\hbar}\beta\right)\psi = 0, \tag{1.6}$$

式中 $\psi(\mathbf{x},t)$ 是四分量旋量波函数；$\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta$ 是四个相互反对易的 4-4 厄米矩阵．从式 (1.6) 及其共轭方程，同样可推得式(1.2)的守恒定律，不过现在

$$\rho = \psi^{+}\psi, \qquad \mathbf{j} = c\psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\psi, \tag{1.7}$$

这时 $\rho$ 确是正定的量．旋量波动方程 (1.6) 好象可以正确地描述单粒子微观运动．但是波动方程(1.6)不但有正能解，同时还有负能解．这个困难后来由空穴理论所解决．可是空穴理论引进了一个负能态全部被“负能粒子”所填满的物理真空概念．快速变化的强电磁场可以从这个真空态激发起正负电子对．因此严格地说(特别在高能的情形)，旋量波动方程(1.6)也同(1.4)一样，并不能描述单粒子的微观运动，而只描述一个多粒子系统的运动．怎样使波动方程(1.6)正确地反映一个多粒子系统的微观运动呢？我们可以同对待波动方程 (1.4) 一样，先把式 (1.6) 看作一个经典的旋量场方程，然后再进行量子化．实验证明，量子旋量场可以正确地反映电子、$\mu$ 轻子以及质子、中子等一类微观粒子的性质和运动规律．

一般地说，所有的相对论性波动方程都不能严格地用来描述单粒子微观运动，而只能先看作经典意义的场方程；在通过量子化之后，可以反映某种多粒子系统的微观运动规律．

由于各种类型的高能粒子加速器和对撞机的建造以及一些高山宇宙射线实验的发展，高能粒子物理学近年来进展极快. 物质世界的特征是存在着多种多样不同类型的微观粒子，它们可以产生、湮没. 它们之间不停息地相互作用，并不断地相互转化，而且能量越高，这些现象表现得就越突出. “这些物体是互相联系的，这就是说，它们是相互作用着的，并且正是这种相互作用构成了运动.”(恩格斯:《自然辩证法》,第 54 页)“而转化过程是一个伟大的基本过程，对自然的全部认识都综合于对这个过程的认识中.”(恩格斯: 《反杜林论》, 第 11 页) 相对论性量子场论的任务正是在于正确地反映高能微观粒子之间相互作用和相互转化过程的基本客观规律. 按照量子场论观点，每一类型的粒子由一个相应的量子场来描述，不同粒子之间的相互作用就是这些量子场之间的适当的相互耦合. 从这个观点发展起来的粒子相互作用理论已取得一定的成功，这在电磁相互作用方面(量子电动力学) 特别显著. 但也有很大的局限性. 点粒子模型和由此所导致的发散困难，微扰近似法对强相互作用不能适用等，都还没有令人满意的解决. 但是量子电动力学能够非常精确地反映电磁现象的微观运动规律这一事实，显示了量子场论的基本思想具有一定层次性的正确性.

在讨论量子场论具体内容之前，我们先介绍一些有关的预备知识，并复习一下量子力学中动力系运动的量子化的一般规律.

## § 1.1 一个新单位制

在相对论的量子理论中，经常出现两个基本常数，即 $c$ 和 $\hbar$. 为了简便起见，一般在公式或方程中，都不把它们明显地写出来. 这样做相当于采用一个适当的新单位制，即取 $c$ 为速度的单位，$\hbar$ 为作用量的单位. 第三个单位的选取是相当任意的，只要它的量纲独立于 $c$ 和 $\hbar$ 的量纲就行. 下面我们选取能量的单位为十亿电子伏 (GeV)，这对高能粒子物理很方便. 现在来对比一下这个新单位制和 CGS 单位制.

| CGS 单位 | | 新单位 | |
|---|---|---|---|
| 长度 $L$ | 厘米 (cm) | 速度 $V$ | $c$ |
| 时间 $T$ | 秒 (sec) | 作用量 $A$ | $\hbar$ |
| 质量 $M$ | 克 (g) | 能量 $E$ | GeV |

两种单位制量纲的转换关系是

$$L = VAE^{-1} \qquad V = LT^{-1}$$

$$T = AE^{-1} \qquad A = ML^2T^{-1}$$

$$M = V^{-2}E \qquad E = ML^2T^{-2}$$

单位的转换关系则是(取三位有效数字)

$$1\,c = (c)\text{cm}\cdot\text{sec}^{-1} \qquad (c) = 3.00 \times 10^{10}$$

$$1\,\hbar = (\hbar)\text{g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{sec}^{-1} \qquad (\hbar) = 1.05 \times 10^{-27}$$

$$1\,\text{GeV} = (e)\text{g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{sec}^{-2} \qquad (e) = 1.60 \times 10^{-3}$$

反过来,

$$1\,\text{cm} = (e)(c)^{-1}(\hbar)^{-1}\text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar$$

$$= 5.05 \times 10^{13}\text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar,$$

$$1\,\text{sec} = (e)(\hbar)^{-1}\text{GeV}^{-1}\cdot\hbar = 1.52 \times 10^{24}\text{GeV}^{-1}\cdot\hbar,$$

$$1\,\text{g} = (e)^{-1}(c)^2\text{GeV}\cdot c^{-2} = 0.562 \times 10^{24}\text{GeV}\cdot c^{-2}.$$

在新单位制中,长度 $L$、时间 $T$、质量 $M$ 的单位分别是

$$1\,\text{GeV}^{-1}\cdot c\cdot\hbar = (e)^{-1}(c)(\hbar)\text{cm} = 0.198 \times 10^{-13}\text{cm},$$

$$1\,\text{GeV}^{-1}\cdot\hbar = (e)^{-1}(\hbar)\text{sec} = 0.658 \times 10^{-24}\text{sec},$$

$$1\,\text{GeV}\cdot c^{-2} = (e)(c)^{-2}\text{g} = 1.78 \times 10^{-24}\text{g}.$$

这些单位的数量级在高能粒子物理中很适用.

在选取新单位后,常数 $c$ 和 $\hbar$ 就不再明显地出现了.

## §1.2 动力系运动的量子化; 广义坐标和共轭动量

对场进行量子化,我们将采用正则方法,亦即采用量子力学中动力系运动量子化的类似方法. 首先回顾一下这个方法的一般规

则.

### 1. 广义坐标;广义速度

假设有一个自由度为 $n$ 的动力系. $q_i(t)$ 是它的坐标 ($i=1, 2, \cdots, n$). 它们可以是一个粒子的直角坐标, 球坐标或柱坐标 ($n=3$); 也可以是$N$个粒子耦合系统的坐标 ($n=3N$), 或者是一根绳子或一面鼓皮上各点的坐标(自由度分别是 $\infty^1$ 和 $\infty^2$); 也可以是一个三维场各点的坐标(自由度 $\infty^3$). 一般 $q_i(t)$ 称为动力系的广义坐标. 对应的速度称为广义速度, $\dot{q}_i(t)=dq_i(t)/dt$.

### 2. 拉氏量;运动方程

动力系的运动可由一个拉氏量

$$L=L(q,\dot{q}) \tag{1.8}$$

来描述, $q$ 代表所有的 $q_i$, $\dot{q}$ 代表所有的 $\dot{q}_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 假设动力系是一个孤立系或守恒系, 则 $L$ 不是 $t$ 的显函数. 还假设 $L$ 与 $q$ 的高次微商 $\ddot{q}, \dddot{q}, \cdots$ 无关. 于是这个动力系的运动方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1, 2, \cdots, n. \tag{1.9}$$

### 3. 共轭动量; 哈氏量; 正则方程

由 $L$ 可定义动力系的共轭动量(即正则动量)

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i=1, 2, \cdots, n. \tag{1.10}$$

然后,动力系的哈氏量是

$$H(q, p)=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L(q, \dot{q}), \tag{1.11}$$

$p$ 代表所有的 $p_i$. 必须注意: $L$ 中的独立力学变量是 $q_i$ 和 $\dot{q}_i$, 而 $H$ 中的独立力学变量是 $q_i$ 和 $p_i$. 它们之间由 $n$ 个关系式(1.10)联系着. 从式(1.9)和(1.11)可以推导出正则运动方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1, 2, \cdots, n, \tag{1.12}$$

若 $F(q, p)$ 是动力系的一个物理量（如动能、势能、角动量等），由式(1.12)可推得

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \tag{1.13}$$

因此 $\dot{H} = 0$，$H$ 是一个守恒量，它是动力系的能量.

### 4. 动力系的量子化

以上是经典力学中动力系的宏观运动规律. 动力系的微观运动规律在量子力学中已有详细阐述. 首先力学变量 $q_i$, $p_i$ 不再是 $c$ 数而是 $q$ 数，是一个线性矢量空间的厄米算符，并有对易关系

$$\begin{aligned} &[q_i(t), q_i(t)] = [p_i(t), p_i(t)] = 0, \\ &[q_i(t), p_i(t)] = i\delta_{ij} \qquad i、j = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{1.14}$$

这里 $[A, B] = AB - BA$，称为算符 $A$, $B$ 的对易子. 式(1.14)就是动力系运动的量子化规则. 假设这些力学变量算符 $q_i$, $p_i$ 也满足经典力学变量的运动方程(1.12)（这是量子力学海森堡表象的基本假设），结合式(1.14)，就可以推得量子力学的正则运动方程

$$\dot{q}_i = i[H, q_i], \quad \dot{p}_i = i[H, p_i] \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.15}$$

任意物理量 $F(q, p)$ 现在也是算符，由式(1.15)可推得

$$\dot{F} = i[H, F]. \tag{1.16}$$

若 $[H, F] = 0$，则 $F$ 是一个守恒量算符，这是海森堡表象中守恒定律的表式. 显然哈氏量 $H$ 本身是一个守恒量，是动力系的能量算符.

### 5. 本征态问题

一个自由度为 $n$ 的动力系有 $n$ 个两两相互对易的守恒量：$H$ $K, L, \cdots$（其中包含 $H$）. 它们有共同的本征态. 对这个动力系的量子力学问题求解，就是结合对易关系(1.14)对下列联立本征方程求解：

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle,$$

$$K|\alpha\rangle = k_\alpha|\alpha\rangle,$$
$$L|\alpha\rangle = l_\alpha|\alpha\rangle,$$
$$\cdots\cdots\cdots. \tag{1.17}$$

$|\alpha\rangle$是共同本征态矢；$E_\alpha$, $k_\alpha$, $l_\alpha$, $\cdots$分别是 $H$, $K$, $L$, $\cdots$的本征值. 标志共同本征态 $|\alpha\rangle$ 的参数$\alpha$是$n$个量子数(分立的或连续的)的集合. 因为$H$守恒，动力系是守恒系，所以可以规定它的态矢 $|\alpha\rangle$ 与 $t$ 无关(海森堡表象).

对易关系(1.14)，运动方程(1.15)和本征方程(1.17)是动力系运动量子化的基本方程组.

## §1.3 简谐振子

现在来讨论一维简谐振子的量子化问题. 它不但是上节中量子化规则的一个典型例子，而且它的解将对场的量子化问题直接有用.

简谐振子的坐标记为 $q(t)$，运动方程是

$$m\ddot{q} = -kq,$$

对应的拉氏量则为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2.$$

由$L$推得共轭动量和哈氏量(能量)为

$$p = m\dot{q},$$
$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2q^2\right), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.18}$$

进行量子化时，算符 $q$, $p$ 满足对易关系

$$[q, p] = i. \tag{1.19}$$

一维谐振子只有一个守恒量，即 $H$. 现在就按式(1.17)求$H$的本征值和本征态. 一个简便的方法是采取新的力学变量

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p - im\omega q), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p + im\omega q) \tag{1.20}$$

以代替 $q$, $p$. 这时容易证明:

$$[a, a^+] = 1, \tag{1.21}$$

$$H = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \tag{1.22}$$

$$N = a^+a. \tag{1.23}$$

简谐振子运动的量子化问题就变为对算符 $N$ 本征态的求解问题，即

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \tag{1.24}$$

$n$ 是$N$的本征值.

首先，$N$ 是厄米算符，故 $n$ 必为实数，而且容易看到，$n \geqslant 0$ (只有 $a|n\rangle = 0$ 时才 $n = 0$). 还可以证明，当 $m$ 是正整数时，

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^m] = -ma^m,$$
$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, a^{+m}] = ma^{+m}.$$

因此

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \quad Na^m|n\rangle = (n-m)a^m|n\rangle, \tag{1.25}$$
$$Na^+|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle, \quad Na^{+m}|n\rangle = (n+m)a^{+m}|n\rangle. \tag{1.26}$$

所以若 $|n\rangle$ 是 $N$ 的本征态矢，$a|n\rangle$ 和 $a^+|n\rangle$ 也是 $N$ 的本征态矢，而且

$$a|n\rangle \sim |n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle \sim |n+1\rangle. \tag{1.27}$$

因此 $a$ 可称为降级算符，它每作用一次都使谐振子的能级降低一级. 同样，$a^+$ 称为升级算符，它每作用一次都使谐振子的能级升高一级.

按式 (1.25)，若 $n$ 是$N$的本征值，则 $n-1, n-2, n-3, \cdots$ 也都是$N$的本征值. 但是$N$的本征值都为正数；因此这个数列必须截止，即一定有正整数$m$存在使 $n = m$, $Na^n|n\rangle = 0$. 所以 $n$ 必为正整数，$n = 0, 1, 2, \cdots$. 于是 $a^n|n\rangle \sim |0\rangle$. 这里 $|0\rangle$ 是$N$的(也是$H$的)基态矢. 又因 $n \geqslant 0$，必须

$$a|0\rangle = 0. \tag{1.28}$$

假设基态矢归一，$\langle 0|0\rangle = 1$，则可证明

$$\langle 0|a^m a^{+n}|0\rangle = n!\delta_{mn}$$

于是按式(1.27)，$N$和$H$的正交归一的本征态矢都可写为

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n}|0\rangle, \tag{1.29}$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \tag{1.30}$$

按式(1.22)，$H$的本征值是

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.31}$$

这就是简谐振子的能级.

最后,因为 $a$ 和 $a^+$ 是降级和升级算符,因此,它们导致的跃迁振幅是有意义的. 从式(1.24), (1.27)和(1.30)可以证明,

$$\begin{aligned} n + 1 &= \langle n|N + 1|n\rangle = \langle n|aa^+|n\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\langle n|a|m\rangle\langle m|a^+|n\rangle = \langle n|a|n+1\rangle\langle n+1|a^+|n\rangle \\ &= |\langle n|a|n+1\rangle|^2 = |\langle n+1|a^+|n\rangle|^2. \end{aligned}$$

不考虑相因子时,跃迁振幅分别是

$$\begin{aligned} \langle m|a|n\rangle &= \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}, \\ \langle m|a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

# 第二章　标　量　场

任何粒子必须通过相互作用才能显示其存在．探测器能够观测粒子是由于粒子同探测物质发生相互作用．粒子的产生、湮没、相互转化都必须通过同其它粒子的相互作用．不参加相互作用的粒子是不可想像的．不过在一定情形下，粒子的运动状态可以近似地看作是“自由”的．为了便于理论处理，往往先从抽象化的“自由粒子”出发，研究它们各自的特性，然后再在这个基础上分析各类粒子之间的相互作用．

按照场论观点，自由粒子对应于自由量子场，简称自由场．最简单的自由场是只有一个场变量的场，即标量场或赝标场。只有相互作用才能区分这两种场．这里场变量只有一个时空分量，它所能描述的微观粒子的自旋必是零．实验证明，量子赝标场确实能够反映 $\pi$ 介子、$K$ 介子等一类微观粒子的性质和运动规律．

下面先介绍实标量场(或厄米标量场)及其量子化问题．

对于相对论理论，首先必须规定时空度规．为了避免区分物理量的协变性和抗变性的麻烦起见，我们将采用时空度规张量 $\delta_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$．时空坐标相应地取为

$$x = (x_\mu) = (\mathbf{x}, it), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad x_4 = it.$$

度规不变量则为

$$\begin{aligned} dx^2 &= \delta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = dx_\mu dx_\mu \\ &= d\mathbf{x}^2 - dt^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2. \end{aligned}$$

## §2.1　实标量场及其量子化

这里场变量是一个实标量或实赝标量，记为 $\varphi(x)$．自由场场方程是

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \tag{2.1}$$

其中 $\Box = \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ ($\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$). 这个场是从相对论波动方程(1.4)得来的.

场的概念是同一个空间物质分布联系着的. 下面我们将把场的运动作为一个动力系的运动,类似于一根绳子(一维经典场)或一面鼓皮(二维经典场)的运动. 因此场的微观运动规律也是量子力学规律.作为一个动力系,场的运动必有一对应的拉氏量$L$.又因为场是空间分布的物质,$L$必然是一个拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 的空间总和,即

$$L = \int \mathscr{L} d^3x. \tag{2.2}$$

由于场方程(2.1)对时空坐标是二次微商,实标量场作为动力系的独立力学变量是 $\varphi(x)$ 和 $\partial_\mu\varphi(x)$. 因此

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)),$$

而参照式(1.9), 场的拉氏方程应为

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi(x)}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi(x)} = 0. \tag{2.3}$$

结合式(2.3)和(2.1),就推得实标量场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + m^2\varphi^2), \tag{2.4}$$

式中系数 $-\frac{1}{2}$ 是为了场的物理量的一种合适的归一化而引人的(参看 §2.2).

从力学观点看, 场是一个具有无穷多自由度的动力系. 空间每一个点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 的场变量 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 都是这个动力系的"坐标"(广义坐标), $\mathbf{x}$ 是自由度参数. 这些坐标是连续地一个紧接着一个的. 为了便于理解和使用正则方法 (§ 1.3) 起见,我们可以把整个空间分隔成很小的小格. 小格的数目虽然还是无穷多, 但是是可数的. 这时场是一个具有无穷多可数自由度的动力系. 记 $\Delta v_i$ 为第 $i$ 小格的体积元. 对应于这个小格的场的广义坐标 $\varphi_i(t)$ 将取为场变量 $\varphi(x)$ 在这个小格中的平均值,即

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i}\int_{\Delta v_i} \varphi(\mathbf{x}, t) d^3x, \tag{2.5}$$

对应的广义速度是

$$\dot{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i}\int_{\Delta v_i} \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)d^3x. \tag{2.6}$$

又按微商定义，并以 $y$ 代表 $x_1$, $x_2$ 或 $x_3$，则

$$\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial y}\right)_i \longrightarrow \frac{\Delta\varphi_i(t)}{\Delta y_i} = \frac{\varphi_{i+a}(t) - \varphi_i(t)}{y_{i+a} - y_i},$$

其中 $i + a$ 是 $y$ 方向第 $i$ 小格的相邻小格。此式只与“坐标” $\varphi_i$ 和 $\varphi_{i\pm a}$ 有关。今以 $\Delta v$ 代表所有的 $\Delta v_i$，则在 $\Delta v \to 0$ 的极限之下，式 (2.2) 可写为

$$L = \sum_i \mathscr{L}_i \Delta v_i, \tag{2.7}$$

式中 $\mathscr{L}_i$ 是在第 $i$ 小格中心的 $\mathscr{L}$ 的数值，是 $\varphi_i(t)$, $\dot{\varphi}_i(t)$ 和相邻各小格中场量 $\varphi_{i\pm a}(t)$ 的函数：

$$\mathscr{L}_i = \mathscr{L}_i(\dot{\varphi}_i(t), \varphi_i(t), \varphi_{i\pm a}(t), \cdots).$$

显然

$$\lim_{\Delta v\to 0} \mathscr{L}_i(\dot{\varphi}_i(t), \varphi_i(t), \varphi_{i\pm a}(t), \cdots) = \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)), \tag{2.8}$$

式中 $x = (\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}$ 是第 $i$ 小格在 $\Delta v_i \to 0$ 时收缩到的空间点.

在取了可数自由度的情况下，场作为动力系的拉氏量 $L$ 是式 (2.7)。于是按 § 1.3 的正则方法，广义坐标 $\varphi_i(t)$ 的共轭动量 $p_i(t)$ 是

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i} = \frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\varphi}_i}\Delta v_i = \pi_i\Delta v_i, \qquad \pi_i(t) = \frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}.$$

今定义

$$\pi(x) = \lim_{\Delta v_i\to 0} \pi_i(t),$$

则由式 (2.8) 得到

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}, \tag{2.9}$$

这里 $\dot{\varphi}(x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x)$. $\pi(x)$ 称为场变量 $\varphi(x)$ 的共轭动量. 按式(2.4)，实标量场的共轭动量是

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x). \tag{2.10}$$

从拉氏量 $L$ 式(2.7)和共轭动量 $p_i(t)$ 还可按 § 1.3 的方法推得场的哈氏量:

$$H = \sum_i p_i\dot{\varphi}_i - L = \sum_i \mathscr{H}_i\Delta v_i,$$

$$\mathscr{H}_i = \pi_i\dot{\varphi}_i - \mathscr{L}_i.$$

今定义

$$\mathscr{H}(x) = \lim_{\Delta v_i\to 0} \mathscr{H}_i(t),$$

于是

$$\mathscr{H}(x) = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathscr{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)), \tag{2.11}$$

则

$$H = \int \mathscr{H} d^3x. \tag{2.12}$$

因此 $\mathscr{H}(x)$ 是场在空间 $\mathbf{x}$ 点的哈氏量密度. 实际上 $H$ 是场的总能量,而 $\mathscr{H}$ 是能量密度. 按式(2.4), (2.10)和(2.11), 实标量场的哈氏量密度为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\pi^2 + \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + m^2\varphi^2). \tag{2.13}$$

现在来求场的动量 $\mathbf{P}$. 由场的拉氏方程 (2.3) 可以证明二阶张量

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial_\nu\varphi + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{2.14}$$

满足连续性方程

$$\partial_\mu\mathscr{T}_{\mu\nu} = 0.$$

今定义

$$P_\nu = -i\int \mathscr{T}_{4\nu} d^3x. \tag{2.15}$$

场量 $\varphi$ 在 $\mathbf{x}\to\infty$ 的边界条件足以使

$$\dot{P}_\nu = 0.$$

所以 $P_1, P_2, P_3, P_0$ 是四个守恒量,并可证明 $P_0 = H$ 是场的能量,故 $\mathbf{P}$ 是场的动量. $\mathscr{T}_{\mu\nu}$ 称为场的能量动量张量. 很明显,结合式

(2.4)和(2.14)推得实标量场的能量动量张量为

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{2.16}$$

因此

$$\mathbf{P} = -\int \dot{\varphi}\nabla\varphi d^3x = -\int \pi\nabla\varphi d^3x \tag{2.17}$$

是实标量场的动量.

现在我们可以对实标量场进行量子化了. 为此先把场看作一个具有无穷多可数自由度的动力系,然后再应用 § 1.3 的量子力学规律. 因此对实标量场,量子化规则就是下列对易关系:

$$[\varphi_i(t), \varphi_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0,$$
$$[\varphi_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij} \qquad i,j = 1, 2, 3, \cdots;$$

或是

$$[\varphi_i(t), \varphi_j(t)] = [\pi_i(t), \pi_j(t)] = 0,$$
$$[\varphi_i(t), \pi_j(t)] = i\frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j}.$$

当 $\Delta v \to 0$ (即所有的 $\Delta v_i \to 0$) 时,假设第 $i$ 小格收缩于 $\mathbf{x}$ 点,而第 $j$ 小格收缩于 $\mathbf{x}'$ 点,很容易证明

$$\left(\frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j}\right)_{\Delta v\to 0} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j} = \delta^{(3)}(x - x').$$

于是标量场的量子化规则写为

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0,$$
$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(x - x'). \tag{2.18}$$

结合式(2.12), (2.13), (2.18)可以推得量子标量场满足下列一般性的动力系正则运动方程:

$$\dot{\varphi}(x) = i[H, \varphi(x)], \quad \dot{\pi}(x) = i[H, \pi(x)]. \tag{2.19}$$

若 $F = F(\varphi(x), \pi(x))$ 是量子标量场的一个物理量算符,则

$$\dot{F} = i[H, F]. \tag{2.20}$$

假如 $F$ 与 $H$ 对易, 即 $[H,F] = 0$, 则 $\dot{F} = 0$, 即算符 $F$ 所表示的物理量是一个守恒量. 显然 $\dot{H} = 0$, 故场的能量守恒. 还可以证明 $[H, \mathbf{P}] = 0$, 则 $\dot{\mathbf{P}} = 0$, 场的动量也守恒.

量子场的本征态问题同一般动力系的量子化问题一样 [见

§1.3 式 (1.17)],就是结合对易关系 (2.18)，对下面能量动量算符 $P_\mu = (\mathbf{P}, iH)$ 本征方程求解:

$$P_\mu|\alpha\rangle = K_{\mu\alpha}|\alpha\rangle, \tag{2.21}$$

式中 $K_{\mu\alpha} = (\mathbf{K}_\alpha, iE_\alpha)$ 是动量能量本征值.

对这些本征方程求解后，实标量场的量子化问题到此原则上已经解决. 这是在坐标空间进行的,就是说,以空间点 $\mathbf{x}$ 作为自由度参数进行的. 但是从这样的量子化过程，我们还看不出量子场的物理特性和基本内容. 特别是量子场应当反映微观粒子的物理性质和运动规律，而至此还没有看出量子场的粒子性. 按照量子力学，物质的粒子性表现在具有相当确定的动量和能量. 因此要使量子场呈现出明显的粒子性,有必要过渡到动量空间,即以动量 $\mathbf{k}$ 作为场的自由度参数来分析场的量子化问题.

## §2.2 动量空间;量子场的粒子性;粒子的产生和湮没算符

本节我们用动量作为场的自由度参数，即在动量空间中来分析量子标量场的物理内容.

场方程(2.1)有平面波解,场变量 $\varphi(x)$ 可对平面波展开. 为了合适的归一化起见,我们取下面的展开形式:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\left[a(k)e^{ikx} + a^+(k)e^{-ikx}\right], \tag{2.22}$$

式中 $kx = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t$. 我们将看到，$\mathbf{k}$ 是粒子的动量，$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ 是粒子能量. 按式(2.10),共轭动量则是

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[a(k)e^{ikx} - a^+(k)e^{-ikx}\right]. \tag{2.23}$$

利用三维 $\delta$ 函数:

$$\delta^{(3)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x.$$

由式(2.22)和(2.23)解得

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{-ikx}[\omega\varphi(x) + i\pi(x)], \quad (2.24)$$

$$a^+(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{ikx}[\omega\varphi(x) - i\pi(x)]. \quad (2.25)$$

这里式(2.24)和(2.25)把标量场的表达式从坐标空间过渡到动量空间. 在坐标空间，场的力学变量是 $\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$，构成一个 $\infty^3$ 自由度的动力系，自由度参数是空间点的坐标 $\mathbf{x}$. 在动量空间，场的力学变量是 $a(k)$ 和 $a^+(k)$，当然还构成一个 $\infty^3$ 自由度的动力系，不过自由度参数现在是动量 $\mathbf{k}$.

根据坐标空间的量子化规则 (2.18) 和动量空间力学变量 $a(k)$，$a^+(k)$ 的表式(2.24)，(2.25)，就可以推导得量子场在动量空间的量子化规则：

$$[a(k), a(k')] = [a^+(k), a^+(k')] = 0,$$
$$[a(k), a^+(k')] = \delta^{(3)}(k - k'). \quad (2.26)$$

另一方面，将式(2.22)和(2.23)代入式(2.12)，(2.13)和(2.17)，就得到标量场的能量动量算符 $P_\mu = (\mathbf{P}, iH)$ 的动量空间表式：

$$P_\mu = \int d^3k \frac{k_\mu}{2}[a^+(k)a(k) + a(k)a^+(k)]. \quad (2.27)$$

为了便于理解上面这些结果的物理内容，并便于对量子场的本征态求解，有必要将连续的动量空间分成可数的很小的小格. 在 $\mathbf{k}$ 点的小格的体积元记为 $\Delta\tau_k$，并以 $\Delta\tau$ 代表所有的 $\Delta\tau_k$，而且假设

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\tau_k}{\Delta\tau_{k'}} = 1 \quad (\text{任意 } k, k'),$$

即所有小格的体积的大小在 $\Delta\tau \to 0$ 的极限下皆相等. 于是不难证明：

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\delta^{(3)}_{kk'}}{\sqrt{\Delta\tau_k\Delta\tau_{k'}}} = \delta^{(3)}(k - k').$$

现在定义

$$a_k = a(k)\sqrt{\Delta\tau_k}, \quad a_k^+ = a^+(k)\sqrt{\Delta\tau_k}.$$

在 $\Delta\tau \to 0$ 的极限下，由式(2.26)可以推得对易关系：

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}^{(3)}. \tag{2.28}$$

同时，在 $\Delta\tau \to 0$ 时，式(2.27)可写为

$$P_\mu = \sum_k P_{\mu k} = \sum_k \frac{k_\mu}{2}(a_k^+ a_k + a_k a_k^+) = \sum_k k_\mu\left(N_k + \frac{1}{2}\right), \tag{2.29}$$

这里

$$N_k = a_k^+ a_k. \tag{2.30}$$

现在把式 (2.28), (2.29), (2.30) 同 § 1.3 中的式 (1.21), (1.22), (1.23) 作对比，可以看出，标量场的每个动量空间自由度 **k** 的运动，同一个一维简谐振子的运动完全相似. 所以，量子场的本征态问题的求解，同简谐振子的量子力学问题完全一样. 于是按式(1.24)，对应于量子标量场的每个自由度 **k** 都有如下的本征解：

$$N_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle \qquad n_k = 0, 1, 2, 3, \cdots. \tag{2.31}$$

按式(2.28) 可以证明 $[N_k, N_{k'}] = 0$ (任意 $k, k'$)，则 $[H, N_k] = 0$, $[H, \mathbf{P}] = 0$. 因此，所有的 $N_k$, $H$, $\mathbf{P}$ 都有共同本征态 $|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle$，而

$$N_k|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle = n_k|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle, \tag{2.32}$$

$$P_\mu|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle = K_\mu|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle, \tag{2.33}$$

式中 $K_\mu = \sum_k k_\mu\left(n_k + \frac{1}{2}\right) = (\mathbf{K}, iE)$ 是量子标量场的动量能量的本征值.

上面的分析好像表示量子标量场是一系列简谐振子的组合，对应于每个自由度 **k** 有一个一维简谐振子，其哈氏量是 $H_k = \omega_k\left(N_k + \frac{1}{2}\right)$，其实不然. 除了能量$H$之外，场还有动量 **P**，本征值是 **K**，而 **K** 不可能是一系列简谐振子的动量本征值. 事实上，由式(1.19)可知，简谐振子的动量算符是 $p_k = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a_k +$

$a_k^+$). 显然，$p_k$ 不是 $\mathbf{P}_k$，$p_k$ 不是矢量，也没有本征值 $\mathbf{k}n_k$. 因此量子标量场并不是一系列简谐振子的组合. 不过两者的量子力学求解的数学问题完全一样. 按照表式(2.33)，我们显然可以作这样的解释，即量子场的任一本征态表示一定数目的粒子，$k=(\mathbf{k},\omega)$ 是粒子的动量和能量，而 $n_k$ 则是具有动量 $\mathbf{k}$ 和能量 $\omega$ 的粒子的数目. 于是 $N_k$ 就是这样的粒子数算符. $m=\sqrt{\omega^2-\mathbf{k}^2}$ 就是这种粒子的(静)质量. 又按式(1.27)推得

$$a_k|n_k\rangle\sim|n_k-1\rangle,\quad a_k^+|n_k\rangle\sim|n_k+1\rangle.$$

因此，$a_k^+$ 是产生一个粒子 $k=(\mathbf{k},\omega)$ 的算符，而 $a_k$ 是湮没一个粒子 $k$ 的算符.

然后量子场的本征态 $|n_k,n_{k'},\cdots\rangle$ 是存在有 $n_k$ 个粒子 $k$，$n_{k'}$ 个粒子 $k'$，$\cdots$ 的量子态，而

$$|0\rangle=|0,0,\cdots\rangle \tag{2.34}$$

是量子场的真空态，即不存在有任何粒子的态. 在式(2.33)中，$\frac{1}{2}\sum_k\omega$ 称为场的零点能，虽然发散，但不可直接观察. 假如对 $H$ 中的场算符的顺序进行一定的适当安排，零点能就不出现(详见第七章 §7.2).

上面的分析表明，自由标量场的量子力学问题有精确解. 量子标量场的本征态体现了它是一个多粒子系统. 应用 §1.3 的结果可总结如下：

$|0\rangle$ 是量子场的真空态；

$$|n_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_k!}}a_k^{+n_k}|0\rangle$$

是有 $n_k$ 个粒子 $k$ 的量子态；

$$|n_k,n_{k'},\cdots\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_k!}\sqrt{n_{k'}!}\cdots}a_k^{+n_k}a_{k'}^{+n_{k'}}\cdots|0\rangle \tag{2.35}$$

是有 $n_k$ 个粒子 $k$，$n_{k'}$ 个粒子 $k'$，$\cdots$ 的量子态. 所有这些本征态都是正交归一的(见 §1.3). 另一方面，$a_k^+$ 是产生一个粒子 $k$ 的算符；$a_k$ 是湮没一个粒子 $k$ 的算符，于是

$$a_k|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a_k^+ = 0, \quad (\text{任意 } k). \tag{2.36}$$

又按 § 1.3 的式(1.32)，产生和湮没算符所导致的跃迁振幅分别是

$$\begin{aligned}&\langle m_k, m_{k'}, \cdots | a_k^+ | n_k, n_{k'}, \cdots \rangle \\ &\quad = \sqrt{n_k + 1}\delta(m_k, n_k + 1)\,\delta(m_{k'}, n_{k'})\cdots, \\ &\langle m_k, m_{k'}, \cdots | a_k | n_k, n_{k'}, \cdots \rangle \\ &\quad = \sqrt{n_k}\,\delta(m_k, n_k - 1)\delta(m_{k'}, n_{k'})\cdots.\end{aligned} \tag{2.37}$$

真空态 $|0\rangle$ 可以理解为量子场的基态，而 $|n_k, n_{k'}, \cdots\rangle$ 是它的激发态，正好像二胡的弦(一维经典场)在静止不动时是基态，而用弓一拉就激发起各种谐音振动一样. 又因 $\dot{N}_k = i[H, N_k] = 0$，自由量子场的每个自由度 $\mathbf{k}$ 的粒子数皆守恒，即自由场的量子态不能改变. 只有在同其它场发生相互作用时才可能改变，正如只有用弓来弹奏二胡时才能产生并改变弦的激发态一样.

最后，我们再回到连续动量空间的情形，即取极限 $\Delta\tau \to 0$. 量子标量场本征态的物理意义同上面分立情形时所说的基本上一样，它仍然是一个多粒子系统. 今记

$$N(k) = a^+(k)a(k),$$

结合式(2.26)，(2.27)，并把零点能略去，就得到标量场的动量能量算符

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu N(k). \tag{2.38}$$

把这个表式与式(2.29)和(2.30)作对比得知，$N(k)d^3k$ 是动量在 $\mathbf{k}$—$(\mathbf{k} + d\mathbf{k})$ 之间的粒子数算符，而 $N(k)$ 则是单位动量空间体积内动量为 $\mathbf{k}$ 的粒子数算符. 用类似于分立的动量空间的分析方法得知：

$a^+(k)$ 是在单位动量空间体积内产生一个动量 $\mathbf{k}$ 粒子的算符；

$a(k)$ 是在单位动量空间体积内湮没一个动量 $\mathbf{k}$ 粒子的算符.

现在仍以 $|0\rangle$ 表示量子场的真空态，并且归一化，$\langle 0|0\rangle = 1$. 于是

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n}(k)|0\rangle \tag{2.39}$$

是单位相空间体积内有 $n$ 个动量能量为 $k$ 的粒子的态，又

$$\frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}\cdots}a^{+n}(k)a^{+n'}(k')\cdots|0\rangle \tag{2.40}$$

是单位相空间体积内有 $n$ 个粒子 $k$，$n'$ 个粒子 $k'$，$\cdots$的态．显然

$$a(k)|0\rangle=0,\quad \langle 0|a^{+}(k)=0(\text{任意 } k). \tag{2.41}$$

在时空点 $x=(\mathbf{x},t)$ 的产生和湮没一个粒子的算符也是很有意义而且很有用的．现将式(2.22)分写为两项之和：

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x), \tag{2.42}$$

这里显然

$$\varphi^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}e^{-ikx}a^{+}(k) \tag{2.43}$$

是在 $x$ 点单位体积内产生一个粒子的算符；而

$$\varphi^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}e^{ikx}a(k) \tag{2.44}$$

是在 $x$ 点单位体积内湮没一个粒子的算符．不过这时产生或湮没的粒子的动量是完全不确定的，式(2.43)和(2.44)表明任意 $\mathbf{k}$ 都可能．与此对应，$a_k^+$ 和 $a_k$ 是产生和消失一个动量为 $\mathbf{k}$ 的粒子的算符，但在时空中，何时何处产生或湮没却完全不确定．这些都反映了测不准关系的内容．

把 $\varphi(x)$ 按式(2.42)分解为 $\varphi^{(+)}(x)$ 和 $\varphi^{(-)}(x)$ 两项之和是一个相对论不变的步骤．

场在量子化之后呈现出明显的粒子性，称为场量子．标量场或赝标场的场量子一般称为标量或赝标介子，如 $\pi^0$．

## §2.3 介子的玻色统计性

我们可以证明，标量或赝标介子满足玻色统计，因此它们称为玻色子．

首先这些全同的微观粒子在运动中是不可分辨的，这从下面的简单说明即可看出．量子标量场的正交归一的本征态矢一般可

写为

$$|k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^+_{k_1}\cdots a^+_{k_i}\cdots a^+_{k_j}\cdots a^+_{k_n}|0\rangle. \quad (2.45)$$

这是存在有 $n$ 个粒子的态，动量分别是 $\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_i,\cdots,\mathbf{k}_j,\cdots\mathbf{k}_n$，但是所有的产生算符相互对易，因此

$$|k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n\rangle=|k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n\rangle. \quad (2.46)$$

这就是说，一个介子有动量 $\mathbf{k}_i$，而另一个有 $\mathbf{k}_j$ 的态等同于前者有 $\mathbf{k}_j$ 而后者有 $\mathbf{k}_i$ 的态，所以介子是在运动中不可分辨的全同粒子.

其次，在 §2.2 中已经知道，

$$|n_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_k!}}a^{+n_k}_k|\mathbf{0}\rangle \quad (2.47)$$

是量子标量场的一个允许的本征态，所以在同一个粒子态 $\mathbf{k}$ 可以存在任意数目 $n_k$ 个全同介子. 由此并可知道，式 (2.45) 中 $k_1,\cdots,k_i,\cdots,k_j,\cdots,k_n$ 可以完全相同，也可以完全不同，也可以有几个相同而另外一些不同等等.

式(2.45)和(2.47)都是量子标量场在动量空间的本征态. 量子场的一般性的物理态 $|A\rangle$ (如角动量的一个本征态或任意一个混合态)都可写为

$$\begin{aligned}|A\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_n}|k_1\cdots k_n\rangle\langle k_1\cdots k_n|A\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_n}\Phi^{(n)}_A(k_1\cdots k_n)\frac{1}{\sqrt{n!}}a^+_{k_1}\cdots a^+_{k_n}|0\rangle, \quad (2.48)\end{aligned}$$

这里

$$\Phi^{(n)}_A(k_1\cdots k_n)=\langle k_1\cdots k_n|A\rangle$$

是物理态 $|A\rangle$ 中 $n$ 个介子的动量空间波函数. 态 $|A\rangle$ 的归一化要求

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_n}|\Phi^{(n)}_A(k_1\cdots k_n)|^2=1,$$

其中 $|\Phi^{(n)}_A(k_1\cdots k_n)|^2$ 是态 $|A\rangle$ 在场的特定的本征态 $|k_1\cdots k_n\rangle$ 的几率，而 $\Phi^{(n)}_A(k_1\cdots k_n)$ 是相应的振幅，即多粒子系统的通常意

义的动量空间波函数．由式(2.48)结合式(2.46)得到

$$\Phi_A^{(n)}(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)=\Phi_A^{(n)}(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)．\quad(2.49)$$

所以 $n$ 介子系统的波函数对粒子的交换完全对称．

结合全同介子的不可分辨性与本征态(2.47)的存在以及波函数(2.49)的交换对称性，可以判定介子满足玻色统计．这是由介子场的量子化规则是对易关系式(2.26)或(2.28)所决定的．结论是：标量和赝标介子都是玻色子．

## §2.4 荷电介子与复标量场

介子有中性的，也有荷电的，如 $\pi^0,\pi^+,\pi^-,K^0,\bar{K}^0,K^+,K^-$ 等都存在．自从相对论量子力学的电子理论提出了反粒子和粒子反粒子对的概念以后，人们就试图把这些概念扩充到其它类型的粒子．同 $e^+$-$e^-$ 一样，电荷相等而反号的同类粒子也都被看作粒子反粒子对，如 $\pi^+$-$\pi^-$，$K^+$-$K^-$，$p$-$\bar{p}$ 等．这样的粒子反粒子对具有两个电荷自由度．假如要用一个量子场来描述粒子反粒子对的性质和运动规律，场变量必须由两个独立变量所组成．§2.1 中介绍过的实标量场只有一个独立场变量，不能描述正负介子对如 $\pi^+$-$\pi^-$，$K^+$-$K^-$ 的性质和运动．实践证明，一个场变量是复函数的标量场或赝标场就能实现这一要求．

第一章中提到的相对论波动方程(1.4)就是采取复波函数的．这时有守恒定律(1.2)，(1.5)，其中 $\rho$ 不能看作单粒子运动在坐标空间的几率密度．但是当把式(1.4)看作一个场方程，又把 $e\rho$，$e\mathbf{j}$ 看作场的电荷和电流密度时就没有困难了．因此一个复标量场在理论上是可以描述正负介子对的运动和性质的．通过场量子化的具体实践并同实验结果作比较后，证实了这一点．实践还进一步证明了不荷电的正反介子对如 $K^0$-$\bar{K}^0$ 也可以用复赝标场来描述，这时 $\int\rho d^3x$ 应当理解为中性 $K$ 介子系统的奇异数．

在实标量场的情形，不存在像式(1.5)中的物理量 $\rho$ 和 $\mathbf{j}$．因

此实标量场只能描述不荷电的、并且粒子和反粒子全同的介子(如 $\pi^0$) 的性质和运动规律.

现在,我们来研究复标量场及其量子化问题.

记 $\varphi(x)$ 为场变量, $\varphi^+(x)$ 也是独立场变量,则自由场场方程为

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (\Box - m^2)\varphi^+(x) = 0. \tag{2.50}$$

结合拉氏方程 (2.3) 可推得这个场的拉氏量密度

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu\varphi^+\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^+\varphi. \tag{2.51}$$

类似于式 (2.9), 场的共轭动量为

$$\pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^+, \quad \pi^+ = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^+} = \dot{\varphi}. \tag{2.52}$$

再用 §2.1 的类似方法可求得场的能量 $H$ 和动量 $\mathbf{P}$:

$$H = \int \mathscr{H} d^3x, \tag{2.53}$$

$$\mathscr{H} = \pi\pi^+ + \nabla\varphi^+ \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^+\varphi, \tag{2.54}$$

$$\mathbf{P} = -\int (\pi\nabla\varphi + \nabla\varphi^+\pi^+)d^3x. \tag{2.55}$$

式 (1.2) 和 (1.5) 表示复标量场的电荷守恒. 现在定义电流密度 4- 矢量

$$j_\mu = -ie(\varphi^+\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^+\varphi), \tag{2.56}$$

则

$$\partial_\mu j_\mu = 0.$$

场的总电荷是

$$Q = \int j_0 d^3x = ie\int(\varphi^+\pi^+ - \pi\varphi)d^3x. \tag{2.57}$$

复标量场的量子化问题同 §2.1 中实标量场的量子化完全相似. 量子化规则就是下面的对易关系:

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\varphi^+(\mathbf{x}, t), \pi^+(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(x - x'). \tag{2.58}$$

场算符的其它对易子都是 0. 量子复标量场的正则运动方程是

$$\dot{\varphi} = i[H, \varphi], \quad \dot{\pi} = i[H, \pi],$$
$$\dot{\varphi}^+ = i[H, \varphi^+], \quad \dot{\pi}^+ = i[H, \pi^+], \tag{2.59}$$

若 $F = F(\varphi, \varphi^+, \pi, \pi^+)$ 是场的一个物理量算符，则

$$\dot{F} = i[H, F]. \tag{2.60}$$

因此，若 $[H, F] = 0$，$F$ 是守恒量算符. 显然 $\dot{H} = 0$，场的能量守恒. 还可证明 $\dot{\mathbf{P}} = 0$，$\dot{Q} = 0$，场的动量和电荷也是守恒量. 又因 $H, \mathbf{P}, Q$ 都相互对易，量子复标量场的能量、动量、电荷有共同本征态，并可同时按下面本征方程求解：

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle, \quad \mathbf{P}|\alpha\rangle = \mathbf{K}_\alpha|\alpha\rangle, \quad Q|\alpha\rangle = e_\alpha|\alpha\rangle. \tag{2.61}$$

若要量子场呈现出明显的粒子性，我们还须从坐标空间过渡到动量空间. 为此，类似于式 (2.22) 和 (2.23)，我们取下面的平面波表示：

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [a(k)e^{ikx} + c^+(k)e^{-ikx}], \tag{2.62}$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [c(k)e^{ikx} + a^+(k)e^{-ikx}]. \tag{2.63}$$

然后共轭动量是

$$\pi(x) = \dot{\varphi}^+(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [c(k)e^{ikx} - a^+(k)e^{-ikx}], \tag{2.64}$$

$$\pi^+(x) = \dot{\varphi}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(k)e^{ikx} - c^+(k)e^{-ikx}]. \tag{2.65}$$

逆表示则为

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{-ikx}[\omega\varphi(x) + i\pi^+(x)], \tag{2.66}$$

$$a^+(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{ikx}[\omega\varphi^+(x) - i\pi(x)], \tag{2.67}$$

$$c(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{-ikx}[\omega\varphi^+(x) + i\pi(x)], \tag{2.68}$$

$$c^+(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{ikx}[\omega\varphi(x) - i\pi^+(x)]. \tag{2.69}$$

正如 $\varphi(x)$, $\varphi^+(x)$, $\pi(x)$, $\pi^+(x)$ 是场的坐标空间的力学变量一样，$a(k)$, $a^+(k)$, $c(k)$, $c^+(k)$ 是场的动量空间的力学变量.

由式 (2.50) 结合式 (2.66)—(2.69)，可以推得复标量场的动量空间的量子化规则，即

$$[a(k), a^+(k')] = [c(k), c^+(k')] = \delta^{(3)}(k - k'). \quad (2.70)$$

场算符的其它对易子都是 0. 还很容易证明场的动量能量 $P_\mu = (\mathbf{P}, iH)$ 和电荷 $Q$ 算符的动量空间表式是

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu [N_+(k) + N_-(k)], \quad (2.71)$$

$$Q = \int d^3k e[N_+(k) - N_-(k)]; \quad (2.72)$$

这里

$$N_+(k) = a^+(k)a(k), \; N_-(k) = c^+(k)c(k). \quad (2.73)$$

$H$ 和 $Q$ 中本来还有所谓零点能和零点电荷项，但都不是可观察量，皆略去不写 (参看 § 2.2 和 § 7.2). 用对实标量场的同样分析方法得知，$N_\pm(k)d^3k$ 是动量在 $\mathbf{k}$—$(\mathbf{k} + d\mathbf{k})$ 之间的正负介子数算符，而 $N_\pm(k)$ 则是动量空间单位体积内动量为 $\mathbf{k}$ 的正负介子数算符. 另一方面，

$a^+(k)$, $a(k)$ 分别是在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量 $\mathbf{k}$ 的正介子的算符;

$c^+(k)$, $c(k)$ 分别是在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量 $\mathbf{k}$ 的负介子的算符.

记 $|0\rangle$ 为量子场的真空态，并且归一: $\langle 0|0\rangle = 1$ 则

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^+(k) = 0;$$

$$c(k)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|c^+(k) = 0, \quad (\text{任意 } k).$$

显然

$$a^+(k)c^+(k')\cdots|0\rangle$$

是在单位相空间体积内有一个动量 $\mathbf{k}$ 的正介子、一个动量 $\mathbf{k}'$ 的负介子 …… 的态.

坐标空间中正负介子的产生和湮没算符可按式 (2.62) 和 (2.63) 得到:

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x),$$
$$\varphi^{+}(x) = \varphi^{+(+)}(x) + \varphi^{+(-)}(x). \tag{2.74}$$

这里

$$\varphi^{+(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx} a^{+}(k) \tag{2.75}$$

是在 $x = (\mathbf{x}, t)$ 点的单位体积内产生一个正介子的算符；

$$\varphi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{ikx} a(k) \tag{2.76}$$

是在 $x$ 点的单位体积内湮没一个正介子的算符；

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx} c^{+}(k) \tag{2.77}$$

是在 $x$ 点的单位体积内产生一个负介子的算符；

$$\varphi^{+(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{ikx} c(k) \tag{2.78}$$

是在 $x$ 点的单位体积内湮没一个负介子的算符.

# 第三章　电　磁　场

在近代物理实验和理论发展过程中（参看第一章），电磁场是第一个必须量子化的经典场．电磁场也确实是人们首先尝试量子化的场．但是，由于场变量是多分量（时空分量）的，又特别因为光子的质量是零，电磁场的量子化问题曾经遇到不少困难．经过相当长时间的努力之后，才得到自洽的满意的解决．

## §3.1　自由电磁场

电磁场的宏观运动规律就是经典电动力学方程组，可写为

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho}=0, \tag{3.1}$$

$$\partial_\lambda F_{\lambda\rho}=0, \tag{3.2}$$

这里 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 是完全反对称的四阶张量，并且 $\varepsilon_{1234}=1$．$F_{\mu\nu}$ 是电磁场场强张量，是一个反对称的二阶张量．

由方程（3.1），我们可以对电磁场采取电磁势表示，即

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \tag{3.3}$$

这里 $A_\mu=(\mathbf{A},iA_0)$ 是电磁势 4- 矢量．$A_0(x)$ 称为电磁场的标势，$\mathbf{A}(x)$ 称为矢势．$F_{23}=H_1$，$F_{31}=H_2$，$F_{12}=H_3$ 是磁场场强；$iF_{14}=E_1$，$iF_{24}=E_2$，$iF_{34}=E_3$ 是电场场强．

在取 $A_\mu(\mu=1,2,3,4)$ 为独立场变量时，独立的场方程组只有式（3.2）．因此，电磁场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

按 §2.1 的正则方法，对应于场变量 $A_\mu$ 的共轭动量是

$$\pi_\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=iF_{4\mu}. \tag{3.5}$$

于是按照标量场量子化的类似方法，电磁场的量子化规则应当是下列对易关系：

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.6}$$

其它的对易子都是 0．可是按照式 (3.5)，$\pi_4 = 0$，则式 (3.6) 不能成立．因此以 $A_\mu$ 为独立场变量并以式(3.2)为基本场方程组来对电磁场进行量子化时有困难．

## §3.2 规范不变性；矢量场与附加条件

因为从经典电动力学方程组 (3.2) 来对电磁场进行量子化有困难，就必须寻求别的可能途径．为此，我们将利用电磁场的一个特性：规范不变性．

结合式 (3.3)，电磁场场方程组 (3.2) 可写为

$$\Box A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) = 0, \tag{3.7}$$

式中 $\chi = \partial_\nu A_\nu$．显然，式 (3.2)，(3.3)，(3.7) 对下列变换(规范变换)都不变：

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu B(x), \tag{3.8}$$

其中 $B(x)$ 是任意标量函数．假如变换之前的 $\chi$ 不等于 0，就可取一适当 $B(x)$ 满足 $\Box B = -\chi$；这时通过规范变换 (3.8) 的新的场变量 $A_\mu$ 就满足

$$\chi(x) = 0. \tag{3.9}$$

然后按式 (3.7)，新的场方程组为

$$\Box A_\mu(x) = 0. \tag{3.10}$$

可是这样定义的新的场变量 $A_\mu$ 仍然具有一定的规范不变性，因为式 (3.9) 和 (3.10) 仍然在下列规范变换下保持不变：

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad \Box \Lambda(x) = 0. \tag{3.11}$$

在式 (3.11) 规范不变性的限制下，就得到场方程组(3.10)．这是一个矢量场的场方程组，场变量 $A_\mu$ 是一个 4-矢量，有四个独立时空分量．显然这个矢量场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu. \tag{3.12}$$

于是场变量 $A_\mu$ 的共轭动量为

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \dot{A}_\mu. \tag{3.13}$$

这时场的量子化规则应当是下列对易关系:

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(x - x'),$$
$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{x}', t)] = [\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = 0. \tag{3.14}$$

这样,式 (3.5) 与 (3.6) 之间的矛盾就不再出现了.

但是,矢量场 $A_\mu$ 并不就是电磁场. 只有在式 (3.9) 的限制下才是电磁场.所以式 (3.9) 称为电磁场的附加条件,即洛伦兹条件.

电磁场量子化的一个比较方便而且明显协变的方法是分作两个步骤来进行. 首先对矢量场 $A_\mu$ (3.10) 直接进行量子化, 然后再处理附加条件 (3.9) 并分析它所导致的物理结果. 下面我们就按这个方法来讨论电磁场的量子化问题.

## §3.3 矢量场的物理量及量子化

矢量场 $A_\mu$ 有四个时空分量,它们都能满足场方程 (3.10),可以看作是四个实标量场. 不过有这样一些差别: $A_\mu$ 四个分量的变换性质不是任意的, 它们构成一个 4-矢量; $A_1$, $A_2$, $A_3$ 都是厄米场, 而 $A_4$ 是反厄米场; $A_\mu$ 场的场量子的质量为 0. 但是在仅对矢量场 $A_\mu$ 的量子化问题进行数学处理时,实标量场的量子化方法是完全适用的.

已经知道矢量场的场方程是式 (3.10), 拉氏量密度是式 (3.12), 共轭动量是式 (3.13), 量子化规则是式 (3.14).

应用 §2.1 中处理实标量场的正则方法,就得到矢量场 $A_\mu$ 的哈氏量算符:

$$H = \int \mathscr{H} d^3x, \tag{3.15}$$

其中哈氏量密度算符是

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\Pi_\mu \Pi_\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A_\mu). \tag{3.16}$$

又场的动量算符是

$$\mathbf{P} = -\int \Pi_\mu \nabla A_\mu d^3x. \tag{3.17}$$

因为场变量或者是纯厄米的 $(A_1, A_2, A_3)$，或者是纯反厄米的 $(A_4)$，所以矢量场 $A_\mu$ 不荷电(参看 §2.4).

按对易关系 (3.14)，量子矢量场的正则运动方程是

$$\dot{A}_\mu = i[H, A_\mu], \quad \dot{\Pi}_\mu = i[H, \Pi_\mu]. \tag{3.18}$$

若 $F = F(A_\mu, \Pi_\mu)$ 是场的一个物理量算符，则

$$\dot{F} = i[H, F].$$

显然，$\dot{H} = 0$，自由量子矢量场的能量守恒. 另一方面，还可证明 $[H, \mathbf{P}] = 0$，场的动量也守恒. 同时动量能量 $P_\mu = (\mathbf{P}, iH)$ 有共同本征态 $|\alpha\rangle$：

$$P_\mu|\alpha\rangle = K_{\mu\alpha}|\alpha\rangle, \tag{3.19}$$

其中 $K_{\mu\alpha} = (\mathbf{K}_\alpha, iE_\alpha)$ 是动量能量本征值.

与标量场的情形一样，矢量场 $A_\mu$ 的量子化问题由式 (3.14)，(3.18)，(3.19) 得到完全解决，并有精确解. 但是量子矢量场要呈现出明显的粒子性，也同样须要过渡到动量空间.

## §3.4 极化矢量；矢量粒子

与标量场的情形一样 (§2.2)，我们现在从坐标空间过渡到动量空间. 为此，对矢量场取下面的平面波表示：

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [a_\mu(k) e^{ikx} + a_\mu^+(k) e^{-ikx}], \tag{3.20}$$

$$\Pi_\mu(x) = \dot{A}_\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a_\mu(k) e^{ikx} - a_\mu^+(k) e^{-ikx}]. \tag{3.21}$$

由场方程 (3.10) 得知，$k^2 = 0$，故 $\omega = |\mathbf{k}|$.

在动量空间，场变量和共轭动量是 $a_\mu(k)$ 和 $a_\mu^+(k)$，都有四个时空分量 $\mu = 1, 2, 3, 4$. 这些分量是相对于任意坐标系 $(x_\mu)$ 取的. 但是用实验仪器可以直接分辨并测定的是宏观电磁波的偏振或微观光子的极化，即垂直于电磁波传播方向或光子运动方向的振动分量. 因此，为了能够直接反映实验的实际情况，我们必须把动量空间的矢量场场变量 $a_\mu(k)$ 和 $a_\mu^+(k)$ 按照极化坐标系来取分量. 所谓极化坐标系，就是以光子的运动方向 $\mathbf{k}/\omega$（作为轴 3）和垂直于 $\mathbf{k}$ 的两个相互正交的方向（作为轴 1 和轴 2）所构成的右手坐标系（见图 3.1），时间轴与原坐标系 $(x_\mu)$ 的时间轴相同. 这时，相对于原坐标系 $(x_\mu)$，极化坐标系四个轴方向的单位矢量就称为矢量场平面波 $k$ 的四个极化矢量，以下记为 $e_\mu^\sigma(k)$ $(\sigma = 1,2,3,4)$，可定义如下：

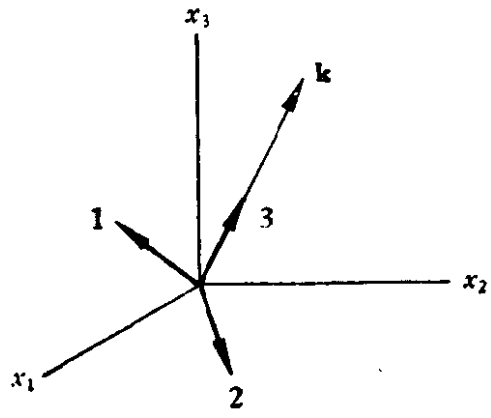


图 3.1

$$e_\mu^1(k) = [\mathbf{n}^{(1)}(k), 0], \quad e_\mu^2(k) = [\mathbf{n}^{(2)}(k), 0],$$
$$e_\mu^3(k) = \left[\frac{\mathbf{k}}{\omega}, 0\right], \quad e_\mu^4(k) = [\mathbf{0}, 1], \tag{3.22}$$

式中 $\mathbf{n}^{(1)}(k)$ 和 $\mathbf{n}^{(2)}(k)$ 是垂直于 $\mathbf{k}$ 并互相正交的两个单位 3-矢量，即

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}^{(a)}(k) = 0, \quad \mathbf{n}^{(a)}(k) \cdot \mathbf{n}^{(b)}(k) = \delta_{ab},$$

$a, b = 1, 2$. 不难证明，四个极化矢量 (3.22) 是正交归一的，即

$$e_\mu^\sigma(k) e_\mu^\tau(k) = \delta_{\sigma\tau} \qquad \sigma, \tau = 1, 2, 3, 4, \tag{3.23}$$

而且

$$\sum_{\sigma=1}^{4} e_\mu^\sigma(k) e_\upsilon^\sigma(k) = \delta_{\mu\upsilon}. \tag{3.24}$$

四个极化矢量都不是 4-矢量，因为它们是相对于 3-矢量 $\mathbf{k}$ 定义的.

极化 1,2 称为横极化，$\sigma = 3$ 称为纵极化，我们称 $\sigma = 4$ 的

分量为 0 极化.

现在把任意坐标系 $(x_\mu)$ 中的场分量 $\mathrm{a}_\mu(k)$ 和 $\mathrm{a}_\mu^+(k)$ 用极化分量来表示,即

$$\mathrm{a}_\mu(k) = \sum_{\sigma=1}^{4} \varepsilon_\mu^\sigma(k) a_\sigma(k),$$

$$\mathrm{a}_\mu^+(k) = \sum_{\sigma=1}^{4} \varepsilon_\mu^\sigma(k) a_\sigma^+(k). \tag{3.25}$$

反过来,利用式 (3.23),则有

$$a_\sigma(k) = \varepsilon_\mu^\sigma(k)\mathrm{a}_\mu(k),$$

$$a_\sigma^+(k) = \varepsilon_\mu^\sigma(k)\mathrm{a}_\mu^+(k) \qquad \sigma = 1, 2, 3, 4. \tag{3.26}$$

这里 $a_\sigma(k)$, $a_\sigma^+(k)$ 是矢量场的极化为 $\sigma$ 的动量空间场变量和共轭动量. 于是矢量场的平面波表示式 (3.20), (3.21) 可改为

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sum_{\sigma=1}^{4} \varepsilon_\mu^\sigma(k)[a_\sigma(k)e^{ikx} + a_\sigma^+(k)e^{-ikx}], \tag{3.27}$$

$$\Pi_\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} \sum_{\sigma=1}^{4} \varepsilon_\mu^\sigma(k)[a_\sigma(k)e^{ikx} - a_\sigma^+(k)e^{-ikx}]. \tag{3.28}$$

逆表示则是

$$a_\sigma(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{-ikx} \varepsilon_\mu^\sigma(k) \times [\omega A_\mu(x) + i\Pi_\mu(x)], \tag{3.29}$$

$$a_\sigma^+(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int d^3x e^{ikx} \varepsilon_\mu^\sigma(k) \times [\omega A_\mu(x) - i\Pi_\mu(x)]. \tag{3.30}$$

按照式 (3.14) 并结合式 (3.29), (3.30) 和 (3.23) 就得到矢量场的动量空间量子化规则,即对易关系

$$[a_\sigma(k), a_\tau(k')] = [a_\sigma^+(k), a_\tau^+(k')] = 0,$$

$$[a_\sigma(k), a_\tau^+(k')] = \delta_{\sigma\tau}\delta^{(3)}(k - k') \qquad \sigma, \tau = 1, 2, 3, 4. \tag{3.31}$$

在动量空间, 矢量场的能量和动量算符 (3.15), (3.17) 可合写为

$$P_\mu = \int d^3k \frac{k_\mu}{2} \sum_{\sigma=1}^{4} [a_\sigma^+(k)a_\sigma(k) + a_\sigma(k)a_\sigma^+(k)]. \qquad (3.32)$$

若把零点能略去(参看 § 2.2 和 § 7.2), 则得

$$P_\mu = \int d^3k k_\mu \sum_{\sigma=1}^{4} N_\sigma(k), \qquad (3.33)$$

这里

$$N_\sigma(k) = a_\sigma^+(k)a_\sigma(k) \qquad \sigma = 1, 2, 3, 4. \qquad (3.34)$$

矢量场的场量子称为矢量粒子. 按式 (3.33) 和 (3.34), $N_\sigma(k)d^3k$是动量在 $\mathbf{k}$—$(\mathbf{k} + d\mathbf{k})$ 之间极化为 $\sigma$ 的矢量粒子数算符, 而 $N_\sigma(k)$则是单位动量空间体积内动量为 $\mathbf{k}$ 极化为 $\sigma$ 的矢量粒子数算符. 另一方面, $a_\sigma^+(k)$, $a_\sigma(k)$ 分别是在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量为 $\mathbf{k}$、极化为 $\sigma$ 的矢量粒子的算符.

记 $|0\rangle$为量子矢量场的真空态, 而且归一化, $\langle 0|0\rangle = 1$, 则

$$a_\sigma(k)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a_\sigma^+(k) = 0 \qquad (\text{任意 } k, \sigma).$$

又

$$a_\sigma^+(k)a_\tau^+(k')\cdots|0\rangle \qquad (3.35)$$

是在单位相空间体积内有一个 $(\mathbf{k}, \sigma)$ 粒子、一个 $(\mathbf{k}', \tau)$ 粒子、……的态.

在坐标空间, 式 (3.27) 可以分解为两项之和:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x),$$

$$A_\mu^{(\pm)}(x) = \sum_{\sigma=1}^{4} A_\mu^{\sigma(\pm)}(x); \qquad (3.36)$$

其中

$$A_\mu^{\sigma(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx} \varepsilon_\mu^\sigma(k) a_\sigma^+(k) \qquad (3.37)$$

是在 $x = (\mathbf{x}, t)$ 点单位坐标空间体积内产生一个 $(\mathbf{k}, \sigma)$ 矢量粒子的算符;

$$A_\mu^{\sigma(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} e^{ikx} \varepsilon_\mu^\sigma(k) a_\sigma(k) \qquad (3.38)$$

是在 $x$ 点单位体积内湮没一个 $(\mathbf{k}, \sigma)$ 粒子的算符.

矢量场 $A_\mu$ 有四个时空分量, 场量子 (矢量粒子) 的质量是 0

(即 $k^2=0$). 四个时空分量表现为四种不同的极化. 横极化的矢量粒子($\sigma=1,2$)一般简称为横光子,纵极化的粒子 ($\sigma=3$) 称为纵光子,而 0 极化($\sigma=4$)的称为标量光子. 但是矢量粒子的极化实际上就是它的自旋分量.矢量场场量子是自旋为 1 或 0 的粒子. 可以证明,自旋为 1 的矢量场单粒子态的三个自旋本征态分别为

右旋圆偏振横光子态 (自旋分量为+1):

$$a_+^+(k)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^+(k)-ia_2^+(k)]|0\rangle;$$

左旋圆偏振横光子态(自旋分量为−1):

$$a_-^+(k)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^+(k)+ia_2^+(k)]|0\rangle;$$

纵光子态(自旋分量为 0 ):

$$a_3^+(k)|0\rangle;$$

自旋为 0 的单粒子态是

$$a_4^+(k)|0\rangle,$$

即标量光子态. 量子电磁场只有两种真实的场量子. 即线偏振 ($\sigma=1,2$) 的或左右圆偏振的横光子.

矢量场 $A_\mu$ 的量子化规则是对易关系 (3.14) 或 (3.31). 因此矢量粒子满足玻色统计(参看 § 2·3),是玻色子. 因此光子是一种玻色子.

最后,我们注意到: 按照式 (3.34), $N_4(k)$ 和 $N_1(k)$, $N_2(k)$, $N_3(k)$ 一样, 也是看作厄米算符的. 又按照对易关系 (3.31), 它们都有正定的本征值(参看 § 2·2 的讨论). 所以四个 $N_\sigma(k)$ 都是正定厄米算符. 因此在把四种极化都按 (3.31) 作同等处理时, 与相对论协变性的要求不合. 另一方面,就电磁场而言,纵光子和标量光子都不是真实粒子,所以极化分量 $\sigma=3,4$ 不应当在电磁场的能量和动量中出现. 在下面的讨论中, 我们将会看到, 在对附加条件 (3.9) 作适当处理后, 不但可以使极化 3, 4 不再作为真实粒子出现,即在场的能量和动量中消失,而且对上面提到的在处理极化 4 时不满足相对论协变性要求的困难,也可以同时得到解决.

## §3.5 量子电磁场的物理态

要从量子矢量场 $A_\mu$ 得到正确的量子电磁场的运动规律，必须引进附加条件．它的经典表式是(3.9)．场量子化后，$A_\mu(x)$ 和 $\chi(x)$ 都是场算符，而

$$\chi = \nabla \cdot \mathbf{A} - i\Pi_4. \tag{3.39}$$

假如像经典场的情形 (3.9) 一样，这里把 $\chi = \nabla \cdot \mathbf{A} - i\Pi_4 = 0$ 也看作是场算符的恒等式，则得

$$[A_4(\mathbf{x}, t), \chi(\mathbf{x}', t)] = 0.$$

显然这与对易关系 (3.14) 相矛盾 (取 $\mu = \nu = 4$ 时)．因此对量子电磁场而言，附加条件不能看作场算符本身的恒等式．

在经典电动力学里，$\chi$ 本身是宏观电磁场的可观测的物理量，而且在取洛伦兹规范时 $\chi = 0$．在量子电磁场的情形，我们也只要求场算符 $\chi$ 的期待值是零就够了，即

$$\langle \chi(x) \rangle = 0 \qquad (\text{任意 } x). \tag{3.40}$$

按照标量场量子化的类似情形 (2.37)，很容易看出，在分立的动量空间，

$$|n_{1k}, n_{2k}, n_{3k}, n_{4k}, \cdots\rangle$$

$$n_{\sigma k} = 0, 1, 2, 3, \cdots, \sigma = 1, 2, 3, 4, \qquad \text{任意 } k,$$

都是量子矢量场 $A_\mu$ 的本征态．显然，它们不可能都是量子电磁场的物理态，因为在这些物理态中不可能存在有任意数目的纵光子和标量光子．在上面这些矢量场的本征态中，只有那些满足附加条件 (3.40) 的态才是电磁场的物理态，以下记为 $|\rangle_W$．于是，量子电磁场的物理态 $|\rangle_W$ 必须满足下列能量动量的本征方程，并同时满足 (3.40) 的附加条件，即

$$P_\mu |\rangle_W = K_\mu |\rangle_W, \tag{3.41}$$

$$_W\langle \chi(x) \rangle_W = 0. \tag{3.42}$$

我们将看到 (见 §3.7)，在所有物理态 $|\rangle_W$ 中，纵光子和标量光子都不再作为真实粒子出现，而只有横光子才是真实粒子．

但是还有一个困难必须解决. 上节曾提到，与 $N_1$, $N_2$, $N_3$ 一样，$N_4$ 也当作厄米算符，而且有正定的本征值. 这一点与相对论协变性的要求不合. 这个困难的产生是我们按照对易关系 (3.31)，把四种极化作同等处理，即同 $a_i(k)$ 和 $a_i^+(k)$ $(i=1,2,3)$ 一样，$a_4(k)$ 和 $a_4^+(k)$ 也分别看作标量光子的湮没和产生算符，也就是把 $A_4(x)$ 同 $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ 一样看作厄米的场算符. 不过，算符本身不满足相对论协变性的要求时，问题并不严重，只要可观测的场量值亦即场算符的期待值能满足这个要求. 一个厄米算符如 $A_4(x)$ 怎样会有虚期待值，而同时一个正定算符如 $N_4(k)$ 怎样会有负期待值呢？这就必须把习惯采用的线性矢量空间适当加以扩充，并引进一个与在量子力学和线性代数中学习过的度规完全不相同的度规概念，即不定度规.

## §3.6 不 定 度 规

### 1. 正定度规与不定度规

为了便于理解度规问题，几何学中关于空间性质的确定是一个很好的例子. 在微分几何学中，一个空间的特性可由空间两邻点间距离平方的定义表式来确定. 它就称为这个空间的度规. 例如三维欧氏空间中两邻点的距离平方的表式是

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}dx_i^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}dx_idx_j, \tag{3.43}$$

这里显然 $ds^2\geqslant 0$，因此可以称为“正定度规”；$\delta_{ij}$ 或如下单位矩阵：

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

称为三维欧氏空间的度规张量. 然而，狭义相对论把三维欧氏空间和时间结合成一个四维赝欧氏空间，这个四维空间中两邻点距离的平方是

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2 = g_{\lambda\sigma}dx_\lambda dx_\sigma, \tag{3.45}$$

式中 $\lambda, \sigma = 0, 1, 2, 3$; $g_{00} = -1$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g_{i0} = g_{0i} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$. 这里度规 $ds^2$ 不是正定的. 可以有 $ds^2 > 0$ (类空间隔), $ds^2 < 0$ (类时间隔), $ds^2 = 0$ (类光间隔), 所以不再是正定度规, 而称为不定度规. 式 (3.45) 中的 $g_{\lambda\sigma}$ 亦即下面的 4-4 矩阵:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

称为四维赝欧氏空间的度规张量.

量子力学中, 任意动力系的完备的本征态构成一个线性矢量空间,其基矢就是这些本征态矢. 这个矢量空间中任意态矢 $|\rangle$ 的模方都是正数,即

$$\langle|\rangle > 0 \tag{3.47}$$

其物理意义就是几率总是正数. 若 $F$ 是动力系的一个物理量算符,它在态 $|\rangle$ 的期待值则是

$$\langle F\rangle = \langle|F|\rangle. \tag{3.48}$$

若 $F$ 是厄米的, $F^+ = F$, 则

$$\langle|F|\rangle^* = \langle|F^+|\rangle = \langle|F|\rangle. \tag{3.49}$$

因此任意厄米算符的期待值必是实数. 同时, 一个正定算符如 $N = a^+a$ 的期待值必是正数,因为

$$\langle|N|\rangle = \langle|a^+a|\rangle \geqslant 0, \tag{3.50}$$

式中等号只有当 $a|\rangle = 0$ 时才成立.

将式 (3.47) 与式 (3.43) 作对比, 我们可以说, 这样的线性矢量空间有正定度规. 对应于度规张量, 线性矢量空间有一个度规算符. 正定度规的度规算符与式 (3.44) 一样是一个单位矩阵.

正如几何学可以有像赝欧氏空间的不定度规 (3.45) 一样, 我们也可以把量子力学的度规概念扩充到不定度规. 为此, 我们可以取一个类似于度规张量 (3.46) 的度规算符 $\eta$, 它不再是单位矩阵. 线性矢量空间中任一态矢 $|\rangle$ 的模方不再是$\langle|\rangle$而将取类似于

式 (3.45) 的定义，即

$$\langle|\eta|\rangle. \tag{3.51}$$

首先它必须是实数. 因此按式 (3.49)，$\eta$ 必须是一个厄米算符：

$$\eta^+ = \eta. \tag{3.52}$$

不过这时 $\langle|\eta|\rangle$ 可以取正值，可以取负值，也可以是 0. 但是一个物理态的模方必须是正定的，即

$$_w\langle|\eta|\rangle_w \geqslant 0.$$

所有 $\langle|\eta|\rangle < 0$ 的态 $|\rangle$ 都是非物理态.

按态矢模方的定义 (3.51)，任意物理量算符 $F$ 在态 $|\rangle$ 的期待值应当是

$$\langle F\rangle = \langle|\eta F|\rangle. \tag{3.53}$$

这时即使 $F$ 是厄米的，即 $F^+ = F$，它的期待值 $\langle F\rangle$ 也不一定是实数，因为这时

$$\langle|\eta F|\rangle^* = \langle|F\eta|\rangle.$$

假如我们采用不定度规，则应当取什么样的不定度规呢？就是说，应当取什么度规算符 $\eta$ 呢？这必须根据具体的量子力学问题的要求来决定. 下面我们来确定量子电磁场所要求的不定度规.

## 2. 电磁场量子化问题所要求的不定度规

在 § 3.4 中 $A_1(x)$，$A_2(x)$，$A_3(x)$，$A_4(x)$ 都同样看作厄米算符. 可是相对论协变性要求 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 的期待值都是实数，而 $A_4$ 的期待值是虚数，即

$$\langle A_i(x)\rangle = \langle|\eta A_i(x)|\rangle = \text{实数} \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\langle A_4(x)\rangle = \langle|\eta A_4(x)|\rangle = \text{虚数} \qquad (\text{任意 } x).$$

由此很容易证明，$\eta$ 必须满足下列条件：

$$[\eta, A_i(x)] = 0, \tag{3.54}$$

$$\{\eta, A_4(x)\} = 0. \tag{3.55}$$

这里 $[A, B] = AB - BA$ 称为算符 $A$，$B$ 的对易子；$\{A, B\} = AB + BA$ 称为反对易子. 在动量空间，显然有

$$[\eta, a_i(k)] = [\eta, a_i^+(k)] = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.56}$$

$$\{\eta, a_4(k)\} = \{\eta, a_4^+(k)\} = 0 \qquad (\text{任意 } k). \tag{3.57}$$

由此还可以证明，

$$[\eta^2, a_i(k)] = [\eta^2, a_i^+(k)] = 0, \tag{3.58}$$

$$[\eta^2, a_4(k)] = [\eta^2, a_4^+(k)] = 0. \tag{3.59}$$

可是 $a_i(k)$, $a_i^+(k)$, $a_4(k)$, $a_4^+(k)$ 是量子电磁场这个动力系的全部力学变量算符，而 $\eta^2$ 同它们都对易，因此，必然 $\eta^2 = cI$. $I$ 是单位矩阵. 为了简单起见，可取常数 $c = 1$. 于是

$$\eta^2 = I. \tag{3.60}$$

量子电磁场所要求的不定度规算符 $\eta$ 由式 (3.52), (3.60), (3.56), (3.57) 完全确定. $\eta$ 有显示的矩阵表示，但用处不大，所以不加深究了.

采用这样的不定度规后，还可以证明：在任意物理态，$N_4$ 的期待值都是负数，见后面式 (3.78). ($N_4$ 有负期待值应当理解为标量光子的能量期待值是负数.)

## § 3.7 附加条件的表式

在把 $A_4(x)$ 同 $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ 一样看作厄米算符 (§ 3.4)，并对量子电磁场相应地确定了合适的不定度规 (§ 3.6) 后，我们可以写出附加条件的显示表式，并分析它所导致的物理结果.

由矢量场 $A_\mu(x)$ 的平面波表示式 (3.27) 推得

$$\chi(x) = \chi^{(+)}(x) + \chi^{(-)}(x), \tag{3.61}$$

$$\chi^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a_3(k) + ia_4(k)] e^{ikx}, \tag{3.62}$$

$$\chi^{(+)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a_3^+(k) + ia_4^+(k)] e^{-ikx}. \tag{3.63}$$

按式 (3.53) 的规则，量子电磁场的附加条件 (3.42) 应为

$$_W\langle \chi(x) \rangle_W = {}_W\langle |\eta\chi(x)| \rangle_W = 0. \tag{3.64}$$

这里 $|\rangle_W$ 是场的任意物理态. 于是由于平面波相互正交，结合式(3.56), (3.57), (3.62), (3.63)，就得到

$$ {}_W\langle|\eta[a_3(k)+ia_4(k)]|\rangle_W=0 \quad (\text{任意 } k), \tag{3.65}$$

$$ {}_W\langle|\eta[a_3^+(k)+ia_4^+(k)]|\rangle_W={}_W\langle|[a_3^+(k) -ia_4^+(k)]\eta|\rangle_W=0. \tag{3.66}$$

式(3.65)和式(3.66)的充分条件显然是

$$ [a_3(k)+ia_4(k)]|\rangle_W=0 \quad (\text{任意 } k). \tag{3.67}$$

这就是量子电磁场附加条件的动量空间表式. 相应地，结合式(3.62)和(3.67)，坐标空间的附加条件表式是

$$ \chi^{(-)}(x)|\rangle_W=0 \quad (\text{任意 } x). \tag{3.68}$$

现在可以立刻看到这个附加条件所导致的一个重要结果. 在量子电磁场的能量动量算符中，单位动量空间体积内，纵、标光子数算符之和为

$$ N_3(k)+N_4(k)=a_3^+(k)a_3(k)+a_4^+(k)a_4(k) $$

$$ =\frac{1}{2}[a_3^+(k)-ia_4^+(k)][a_3(k)+ia_4(k)] $$

$$ +\frac{1}{2}[a_3^+(k)+ia_4^+(k)][a_3(k)-ia_4(k)]. $$

再按附加条件表式(3.67)，$N_3(k)+N_4(k)$ 在任意物理态的期待值都是 0，即

$$ {}_W\langle|\eta[N_3(k)+N_4(k)]|\rangle_W=0. \tag{3.69}$$

因此，场的能量动量在任意物理态的期待值是

$$ {}_W\langle P_\mu\rangle_W={}_W\langle|\eta P_\mu|\rangle_W=\int d^3k k_\mu {}_W\langle|\eta[N_1(k)+N_2(k)]|\rangle_W. \tag{3.70}$$

纵、标光子对量子电磁场的动量能量都无贡献，所以它们都不是真实粒子.

## §3.8 电磁场物理态的确定

量子电磁场的物理态必须满足附加条件(3.67)或(3.68). 现

在我们明显地来确定这些物理态.

为了便于说明和理解起见,以下讨论分立的动量空间情形,并且只须考虑单一动量 $\mathbf{k}$ 的问题就行. 因此,动量参数 $\mathbf{k}$ 也用不着明显地标示出来.

首先我们确定满足附加条件的纵、标光子态. 今以 $|0\rangle_{LS}$ 表示没有纵、标光子的物理态(也没有横光子). 于是

$$a_3|0\rangle_{LS}=0,\quad a_4|0\rangle_{LS}=0.$$

按照对应于 (3.31) 的对易关系很容易看出,

$$[a_3+ia_4,\ a_4^+ + ia_4^+]=[a_3,\ a_3^+]-[a_4,\ a_4^+]=0.$$

因此,满足附加条件 (3.67) 的纵、标光子态(归一化的)是

$$|\rangle_{LS}^{(\nu)}=\frac{1}{\sqrt{\nu!}}(a_3^+ + ia_4^+)^\nu|0\rangle_{LS}. \tag{3.71}$$

显然,这是纵、标光子总数为 $\nu$ (没有横光子)的物理态. 今记

$$|n_3,\ n_4\rangle_{LS}=\frac{1}{\sqrt{n_3!n_4!}}a_3^{+n_3}a_4^{+n_4}|0\rangle_{LS},$$

这是有 $n_3$ 个纵光子和 $n_4$ 个标量光子的矢量场 $A_\mu$ 的本征态. 将式 (3.71) 展开,得到

$$|\rangle_{LS}^{(\nu)}=\sum_{\lambda=0}^{\nu} i^{\nu-\lambda}\sqrt{\frac{\nu!}{\lambda!(\nu-\lambda)!}}\,|\nu,\ \nu-\lambda\rangle_{LS}. \tag{3.72}$$

上式清楚地表明,矢量场 $A_\mu$ 的本征态不可能都是电磁场的物理态,而只当它们按照规则 (3.72) 的线性迭加才是电磁场的物理态. 为了便于理解,下面列出几个最简单的特殊情形:

$$|\rangle_{LS}^{(0)}=|0\rangle_{LS},$$

$$|\rangle_{LS}^{(1)}=|1,\ 0\rangle_{LS}+i|0,\ 1\rangle_{LS},$$

$$|\rangle_{LS}^{(2)}=|2,\ 0\rangle_{LS}+i\sqrt{2}\,|1,\ 1\rangle_{LS}-|0,\ 2\rangle_{LS},$$

$$|\rangle_{LS}^{(3)}=|3,\ 0\rangle_{LS}+i\sqrt{3}\,|2,\ 1\rangle_{LS}-\sqrt{3}\,|1,\ 2\rangle_{LS}-i|0,\ 3\rangle_{LS},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此,例如纵、标光子总数为 3 的物理态 $|\rangle_{LS}^{(3)}$,是 $|3,\ 0\rangle_{LS}$, $|2,\ 1\rangle_{LS}$, $|1,\ 2\rangle_{LS}$, $|0,\ 3\rangle_{LS}$ 四个矢量场本征态按上面第四式规则的

线性迭加.

可以证明 ${}_{LS}\langle 0|\eta|0\rangle_{LS} = {}_{LS}\langle 0|0\rangle_{LS}$. 设 $|0\rangle_{LS}$ 归一化: ${}_{LS}\langle 0|0\rangle_{LS} = 1$. 不难证明,物理态 $|\rangle_{LS}^{(\nu)}$ 满足下面关系:

$$ {}_{LS}^{(\nu')}\langle|\eta|\rangle_{LS}^{(\nu)} = \delta_{\nu 0}\delta_{\nu' 0}. \tag{3.73}$$

因此,所有这些物理态不但互相正交,而且所有 $\nu \neq 0$ (即有纵、标光子)的态矢的模方都是0,只有 $\nu = 0$ (即没有纵、标光子)的物理态矢 $|\rangle_{LS}^{(0)} = |0\rangle_{LS}$ 的模方是1.

由态矢 $|\rangle_{LS}^{(\nu)}(\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 的线性迭加,可以组成量子电磁场在没有横光子时的最一般的物理态 $|\rangle_{LS}$,即

$$ |\rangle_{LS} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu |\rangle_{LS}^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_\nu}{\sqrt{\nu!}} (a_3^+ + ia_4^+)^\nu |0\rangle_{LS}, \tag{3.74}$$

其中 $g_\nu$ 是迭加系数. 若取 $|g_0| = 1$, 利用式(3.73),可以证明

$$ {}_{LS}\langle|\eta|\rangle_{LS} = 1. \tag{3.75}$$

所以没有横光子时,电磁场的任意物理态 $|\rangle_{LS}$ 是归一的.

我们现在进一步再来确定有横光子时,量子电磁场的一般物理态.

现以 $|\rangle_T$ 表示只有横光子而没有纵、标光子的物理态. 于是量子电磁场的一般物理态显然是

$$ |\rangle_W = |\rangle_{LS}|\rangle_T. \tag{3.76}$$

按式(3.75), $|\rangle_W$ 的模方是

$$ {}_W\langle|\eta|\rangle_W = {}_T\langle|_{LS}\langle|\eta|\rangle_{LS}|\rangle_T = {}_T\langle|\rangle_T > 0. \tag{3.77}$$

因此,虽然采用了不定度规,电磁场的物理态矢 $|\rangle_W$ 的模方总是正数,而且在 $|\rangle_T$ 和 $|\rangle_{LS}$ 都归一化时, $|\rangle_W$ 也归一化. 这些结果完全符合量子力学几率规律的基本要求.

通过一些计算,可以证明, $N_4$ 在任意物理态 $|\rangle_W$ 的期待值是负数,而 $N_3$ 的期待值是数值相等的正数,并且

$$ {}_W\langle N_4\rangle_W = {}_W\langle|\eta N_4|\rangle_W = -|g_1|^2, \tag{3.78}$$

$$ {}_W\langle N_3\rangle_W = {}_W\langle|\eta N_3|\rangle_W = +|g_1|^2. \tag{3.79}$$

它们在任意物理态的期待值正好抵消,这就进一步证明了式(3.69)的结果,

又按照式 (3.70) 并结合式 (3.75)，量子电磁场的动量能量在物理态 $|\rangle_W$ 的期待值是

$$ {}_W\langle P_\mu\rangle_W = {}_W\langle|\eta P_\mu|\rangle_W = \sum_k k_{\mu T}\langle|N_{1k} + N_{2k}|\rangle_T. $$

回到连续的动量空间时，则得

$$ {}_W\langle|\eta P_\mu|\rangle_W = \int d^3k k_{\mu T}\langle|N_1(k) + N_2(k)|\rangle_T. \qquad (3.80) $$

因此能量的期待值总是正数，而且仅由正定度规的横光子物理态 $|\rangle_T$ 所确定. 纵、标光子不作为真实粒子出现.

最后，我们分析一下包含有纵、标光子的物理态(3.76)的具体意义. 现以

$$ |\rangle_W^{(0)} = |\rangle_{LS}^{(0)}|\rangle_T = |0\rangle_{LS}|\rangle_T \qquad (3.81) $$

表示没有纵、标光子而只有横光子的物理态. 结合式 (3.27)，(3.67) 和 (3.74)，(3.75)，计算后可以证明，场算符 $A_\mu(x)$ 在物理态 (3.76) 的期待值是

$$ \begin{aligned} {}_W\langle|\eta A_\mu(x)|\rangle_W &= {}_W^{(0)}\langle|\eta A_\mu(x)|\rangle_W^{(0)} + \partial_\mu\Lambda(x) \\ &= {}_T\langle|A_\mu(x)|\rangle_T + \partial_\mu\Lambda(x), \end{aligned} \qquad (3.82) $$

这里

$$ \Lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega^3}}[\lambda(k)e^{ikx} + \lambda^+(k)e^{-ikx}], $$

$$ \lambda(k) = -ig_0^*(k)g_1(k), $$

$$ \Box\Lambda(x) = 0. $$

因此，对量子电磁场采用有一定数目的纵、标光子的物理态 $|\rangle_W$ (3.76) 等效于对电磁场选取一定的规范 $\Lambda(x)$ [参看 (3.11) 式]，这对电磁场的物理内容没有作任何改变 (参看 § 3.2). 在物理问题的实际计算中，我们完全可以选取没有纵、标光子的态 $|\rangle_W^{(0)}$ (3.81) 作为量子电磁场的物理态.

总之，采用不定度规对量子电磁场的物理内容没有改变，一切都仍然是物理的. 但是，它允许我们对四个场算符 $A_1(x)$，$A_2(x)$，$A_3(x)$，$A_4(x)$ 作同等处理，从而保证了电磁场量子化理论从头到尾的明显协变性.

# 第四章　旋　量　场

轻子 e, $\mu$, $\nu$ 和许多重子如 $p$, $n$, $\Lambda$, $\Sigma$, $\Xi$ 等等都是自旋 1/2 的粒子. 描述它们微观运动规律的既不是标量场,也不是矢量场,而是自旋为 1/2 的旋量场. 本章将分两部分来讨论它们. 首先简单地介绍旋量波动方程的一些不变性和它的自由粒子解, 然后再讨论旋量场的量子化.

## § 4.1　旋量波动方程的不变性;由旋量构成的张量

旋量波动方程就是第一章里讨论的狄喇克方程(1.6). 今取下面四个 4-4 矩阵:

$$\gamma_j = -i\beta\alpha_j, \quad \gamma_4 = \beta \qquad (j = 1, 2, 3)$$

波动方程(1.6)可改写为下列明显的协变形式:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0. \tag{4.1}$$

这些矩阵有如下一些性质:

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu,$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \tag{4.2}$$

定义 $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, 则

$$\gamma_5^+ = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = I, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0.$$

现定义

$$\psi(x) = \psi^+(x)\gamma_4, \tag{4.3}$$

于是式(4.1)的共轭方程可写为

$$\partial_\mu\psi(x)\gamma_\mu - m\psi(x) = 0, \tag{4.4}$$

或

$$(\gamma_\mu^T\partial_\mu - m)\psi^T(x) = 0, \tag{4.5}$$

这里,指标 $T$ 表示矩阵转置.

现在先简单地介绍旋量波动方程的一些不变性和波函数的各种变换性质. 主要目的有二: 一是确定反粒子的定义, 二是从旋量和共轭旋量构成张量物理量.

## 1. 空间反射不变性

空间反射变换是

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad t \to t' = t.$$

在此变换下, 波动方程 (4.1) 变为

$$(-\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}' + \gamma_4 \partial_4' + m)\psi(-\mathbf{x}', t') = 0.$$

假设有一个 4-4 矩阵 $P$ 和反矩阵 $P^{-1}$ 存在,并满足下列条件:

$$P\boldsymbol{\gamma}P^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad P\gamma_4 P^{-1} = \gamma_4, \tag{4.6}$$

由此再定义一个新旋量

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = P\psi(-\mathbf{x}', t') = P\psi(\mathbf{x}, t). \tag{4.7}$$

这时上面的波动方程在新坐标系中又回到了原来 (4.1) 的形式, 即

$$(\gamma_\mu \partial_\mu' + m)\psi(x') = 0.$$

满足条件 (4.6) 的矩阵 $P$ 确实存在, 可取 $P = \gamma_4$. 因此, 旋量波动方程具有空间反射不变性, 波函数的对应的变换性质见式 (4.7).

## 2. 时间反演不变性

时间反演变换是

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x}, \quad t \to t' = -t.$$

这时我们从共轭旋量方程出发. 在此变换之下, 式 (4.5) 变为

$$(\boldsymbol{\gamma}^T \cdot \boldsymbol{\nabla}' - \gamma_4^T \partial_4' - m)\bar{\psi}^T(\mathbf{x}', -t') = 0.$$

假设有 4-4 矩阵 $T$ 及其反矩阵 $T^{-1}$ 存在, 满足下列条件:

$$T\boldsymbol{\gamma}^T T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad T\gamma_4^T T^{-1} = \gamma_4. \tag{4.8}$$

再定义一个新旋量

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = T\bar{\psi}^T(\mathbf{x}', -t') = T\bar{\psi}^T(\mathbf{x}, t). \tag{4.9}$$

那么, 上面的方程在新坐标系中就又回复到原来的式 (4.1) 的形式, 即

$$(\gamma_\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') = 0.$$

可以证明，满足 (4.8) 的 4-4 矩阵 $T$ 和 $T^{-1}$ 确实存在并可具体确定. 因此，旋量波动方程具有时间反演不变性，而旋量波函数的相应变换性质由式 (4.9) 表示.

### 3. 电荷共轭（粒子反粒子共轭）

为了便于理解电荷共轭这一变换的物理意义，我们讨论一个荷电旋量粒子(如电子或质子)在静电场 $V(\mathbf{x})$中的运动. 这时，波动方程和共轭方程分别是

$$[\gamma_\mu \partial_\mu + m + e\gamma_4 V(\mathbf{x})]\psi(x) = 0, \tag{4.10}$$

$$[\gamma_\mu^T \partial_\mu - m - e\gamma_4^T V(\mathbf{x})]\bar{\psi}^T(x) = 0. \tag{4.11}$$

现在研究这两个方程之间的可能联系. 设 $C$ 是一个 4-4 矩阵，并假设反矩阵 $C^{-1}$ 存在，满足下列条件：

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \tag{4.12}$$

再定义一个新旋量

$$\psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x). \tag{4.13}$$

于是由式 (4.11) 就可推得下面的波动方程：

$$[\gamma_\mu \partial_\mu + m - e\gamma_4 V(\mathbf{x})]\psi^C(x) = 0. \tag{4.14}$$

这个 $C$ 变换后的方程基本上又回到原来的波动方程 (4.10)，只是电荷 $e$ 改了号. 因此，若 $\psi(x)$ 是粒子波函数，$\psi^C(x)$ 就是反粒子波函数. 所以，变换 $C$ 又称为粒子反粒子共轭.

可以证明，矩阵 $C$ 和 $C^{-1}$ 确实存在，并可确定它们的具体表式. 它们还有下面一些特性：

$$C^+ = C^{-1}, \qquad C^T = -C.$$

由此很容易推得式 (4.13) 的反变换，即

$$\psi(x) = C\overline{\psi^C}^T(x).$$

这与式 (4.13) 完全对称.

### 4. *CPT* 共 轭

*CPT* 共轭变换就是同时进行前面讲过的三种变换 $P$, $T$, $C$.

我们仍然考虑一个荷电粒子在静电场中的运动. 首先进行坐标变换

$$x_\mu \to x'_\mu = -x_\mu.$$

在 $CPT$ 变换下, $V(\mathbf{x}) \to V'(-\mathbf{x}') = V(\mathbf{x}')$. 于是波动方程(4.10)写为

$$[-\gamma_\mu \partial'_\mu + m + e\gamma_4 V(\mathbf{x}')]\psi(-x') = 0.$$

假设有一个 4-4 矩阵 $A$ 和反矩阵 $A^{-1}$ 存在,满足

$$A\gamma_\mu A^{-1} = -\gamma_\mu, \tag{4.15}$$

由此再定义一个新旋量

$$\psi^a(x') = A\psi(-x') = A\psi(x). \tag{4.16}$$

从上面的方程可推得新波动方程

$$[\gamma_\mu \partial'_\mu + m - e\gamma_4 V(\mathbf{x}')]\psi^a(x') = 0. \tag{4.17}$$

显然矩阵 $A$ 存在,可取 $A = \gamma_5$. 变换 $A$ 就称为 $CPT$ 共轭变换.

比较式(4.17)与(4.10)得知, 在 $CPT$ 共轭之下, 电荷 $e$ 反号,这同电荷共轭 $C$ 的情形一样.

同 $C$ 一样, $CPT$ 共轭也能定义反粒子. 在自由粒子的情形,两种定义完全等价(见§ 4.2). 但用 $CPT$ 共轭来定义反粒子时则较为简单. 这时,若 $\psi(x)$ 是粒子波函数, $\psi^a(x)$ 就是反粒子波函数. 但因 $\psi^a(x) = \gamma_5\psi(-x)$, 反粒子可以看作逆时轴方向(即 $-t$ 方向)运动的粒子.因此利用 $CPT$ 共轭来定义反粒子时,对波函数或场的动量空间表示特别方便(详见§ 4.2).

### 5. 正时坐标变换不变性

现在考虑下面的一般性变换:

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \quad a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu}, \quad a_{44} > 0.$$

反变换则是

$$x'_\mu \to x_\mu = a_{\nu\mu}x'_\nu, \quad a_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

这个一般性变换包括空间转动、正洛伦兹变换、空间反射、但不包括时间反演和粒子反粒子共轭,也不包括 $CPT$.

在这个变换下,旋量方程(4.1)变为

$$(a_{\nu\mu}\gamma_\mu\partial'_\nu + m)\psi(x) = 0.$$

$\psi(x)$ 中的自变量 $x$ 应理解为 $x_\mu = a_{\nu\mu}x'_\nu$. 可以证明，存在有 4-4 矩阵 $\Lambda$ 和反矩阵 $\Lambda^{-1}$，满足

$$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = a_{\nu\mu}\gamma_\nu$$

或

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma_\nu. \tag{4.18}$$

假如再定义一个新旋量

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x), \tag{4.19}$$

上面的方程在新坐标系 $(x'_\mu)$ 中又恢复了原来式 (4.1) 的形式. 因此旋量波动方程 (4.1) 在正时坐标变换下保持不变.

变换系数 $a_{ij}$, $a_{44}$ 都是实数 $(i, j = 1, 2, 3)$，而 $a_{i4}$, $a_{4i}$ 都是纯虚数. 于是可以证明，变换矩阵 $\Lambda$ 满足下面的么正性条件:

$$\gamma_4\Lambda^+\gamma_4 = \Lambda^{-1}. \tag{4.20}$$

然后再由式 (4.19) 推得

$$\overline{\psi'}(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}. \tag{4.21}$$

### 6. 由旋量构成的张量

用实验可直接测量的粒子运动的或场的物理量都是张量. 现在来讨论怎样由旋量构成张量.

假设 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 是两个旋量波函数，各有四个独立分量，于是 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 的乘积有 16 个独立分量. 现在把这 16 个分量按照下面的线性组合加以安排:

$$\begin{aligned}
&\bar{\phi}\psi && \text{标量},\\
&i\bar{\phi}\gamma_\mu\psi && \text{矢量 (极矢量)},\\
&\bar{\phi}\sigma_{\mu\nu}\psi && \text{二阶反对称张量},\\
&i\bar{\phi}\gamma_5\gamma_\mu\psi && \text{赝矢量 (轴矢量)},\\
&i\bar{\phi}\gamma_5\psi && \text{赝标量}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

这里 $\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. 这些量在 $\phi = \psi$ 时都是实物理量. 它们都是张量，其变换性质在式 (4.22) 中已标出. 证明并不难. 例如按

式 (4.18)、(4.19) 和 (4.21),

$$\overline{\phi'}(x')\psi'(x') = \bar{\phi}(x)\Lambda^{-1}\Lambda\psi(x) = \bar{\phi}(x)\psi(x),$$

$$\overline{\phi'}(x')\gamma_\mu\psi'(x') = \bar{\phi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda\psi(x) = a_{\mu\nu}\bar{\phi}(x)\gamma_\mu\psi(x).$$

因此 $\bar{\phi}\psi$ 是标量，$\bar{\phi}\gamma_\mu\psi$ 是 4-矢量. 其它的证明相同.

## §4.2 自由粒子解;正反粒子波函数

旋量波动方程 (4.1) 的自由粒子解指的是具有确定的动量和能量的粒子态，也就是平面波解 $p = (\mathbf{p}, iE)$，$E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

### 1. 正能解. 粒子态

波动方程 (4.1), (4.4) 有如下的平面波解:

$$\psi^{(+)}(p, x) = w^{(+)}(p)e^{ipx}, \quad \overline{\psi^{(+)}}(p, x) = \overline{w^{(+)}}(p)e^{-ipx}, \tag{4.23}$$

其中 $E > 0$, $w^{(+)}(p)$ 看作是正能粒子解的旋量波函数. 一般简单记 $u(p) = w^{(+)}(p)$, 则

$$\psi^{(+)}(p, x) = u(p)e^{ipx}, \quad \overline{\psi^{(+)}}(p, x) = \bar{u}(p)e^{-ipx}. \tag{4.24}$$

今记 $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$. 按式 (4.1) 和 (4.4), 旋量 $u(p)$ 和共轭旋量 $\bar{u}(p)$ 分别满足下列动量空间波动方程:

$$(i\hat{p} + m)u(p) = 0, \tag{4.25}$$

$$\bar{u}(p)(i\hat{p} + m) = 0. \tag{4.26}$$

式 (4.23) 或 (4.24) 是正能解，具有确定的 $\mathbf{p}$ 和 $E(>0)$ 的粒子态. $u(p)$ 虽有四个分量，但只有两个独立的. 因此波动方程(4.25)只有两个独立解，记为 $u_r(p)$, $r = 1, 2$. 它们可以取作自旋 $\frac{1}{2}$ 的两个本征态: $+\frac{1}{2}$ $(r = 1)$, $-\frac{1}{2}$ $(r = 2)$. 所以旋量粒子态是由两个物理参数所决定，即粒子动量 $\mathbf{p}$ 和自旋 $r$, 记为 $(p, r)$.

### 2. 负能解. 反粒子态

除了正能解 (4.23) 或 (4.24) 之外，波动方程 (4.1), (4.4) 还

有负能解:

$$\psi^{(-)}(x) = w^{(-)}(-p)e^{-ipx}, \quad \overline{\psi^{(-)}}(x) = \overline{w^{(-)}}(-p)e^{ipx}. \tag{4.27}$$

$w^{(-)}(p)$是负能解旋量波函数,一般记为 $v(p) = w^{(-)}(-p)$. 于是

$$\psi^{(-)}(x) = v(p)e^{-ipx}, \quad \overline{\psi^{(-)}}(x) = \bar{v}(p)e^{ipx}. \tag{4.28}$$

动量空间波动方程则是

$$(-i\hat{p} + m)v(p) = 0, \tag{4.29}$$

$$\bar{v}(p)(-i\hat{p} + m) = 0. \tag{4.30}$$

这里$-p = (-\mathbf{p}, -iE)$. 实际上式(4.28)是式(4.24)的 $CPT$ 共轭态,证明如下. 按式 (4.16) 并取 $A = \gamma_5$, 式 (4.24) 的 $CPT$ 共轭是

$$\gamma_5\psi^{(+)}(p, -x) = \gamma_5 u(p)e^{-ipx}, \tag{4.31}$$

而用 $\gamma_5$ 从左边作用于波动方程 (4.25) 时,得到

$$(-i\hat{p} + m)\gamma_5 u(p) = 0.$$

与式 (4.29) 比较, 再取适当的归一化,就知道

$$v(p) = \gamma_5 u(p). \tag{4.32}$$

结合式 (4.28) 和式 (4.31), 就得到

$$\psi^{(-)}(-p, x) = \gamma_5\psi^{(+)}(p, -x). \tag{4.33}$$

因此,负能解 (4.28) 是正能解 (4.24) 的 $CPT$ 共轭.

于是按 § 4.1 的 4, 假如式 (4.24) 是粒子态, 式 (4.28) 就是反粒子态; 而且按式 (4.33), 动量能量为 $p = (\mathbf{p}, iE)$ 的反粒子可以看作逆时轴方向 (即$-t$ 方向) 运动的动量能量为 $-p = (-\mathbf{p}, -iE)$ 的粒子.

同式(4.25)一样, 波动方程(4.29)也只有两个独立解, 记为 $v_r(p)$, $r = 1, 2$, 可分别是自旋的两个本征态: $+\frac{1}{2}(r = 1)$, $-\frac{1}{2}(r = 2)$. 反粒子态同粒子态一样, 也由 $(p, r)$ 两个物理参数所决定.

### 3. 波函数 $u, v$ 的正交归一性

从式 (4.25), (4.26), (4.29), (4.30) 很容易证明下列关系:

$$mu^+(p)u(p) = E\bar{u}(p)u(p),$$
$$mv^+(p)v(p) = -E\bar{v}(p)v(p).$$

按§ 4.1 的 6，$i\bar{u}\gamma_\mu u$ 和 $i\bar{v}\gamma_\mu v$ 都是实 4-矢量. 自由粒子解唯一的 4-矢量是 $p_\mu$. 所以采取下面的波函数 $u$ 和 $v$ 的归一化方案是合适的:

$$i\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) = i\bar{v}(p)\gamma_\mu v(p) = \frac{p_\mu}{m}. \tag{4.34}$$

因此

$$u^+(p)u(p) = v^+(p)v(p) = \frac{E}{m}, \tag{4.35}$$

$$\bar{u}(p)u(p) = -\bar{v}(p)v(p) = 1. \tag{4.36}$$

因为粒子和反粒子的不同自旋态都互相正交，所以对任意 $p$ 及 $r, s(=1, 2)$,

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_r(p)u_s(p) = -\bar{v}_r(p)v_s(p) = \delta_{rs},\\
&\bar{u}_r(p)v_s(p) = \bar{v}_s(p)u_r(p) = 0,\\
&u_r^+(p)u_s(p) = v_r^+(p)v_s(p) = \frac{E}{m}\delta_{rs},\\
&u_r^+(\mathbf{p}, E)v_s(-\mathbf{p}, E) = v_s^+(-\mathbf{p}, E)u_r(\mathbf{p}, E) = 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

### 4. 旋量空间的完备性关系

按照上面列举的波函数 $u, v$ 的正交归一性，可以证明下面的矩阵关系式:

$$\sum_{r=1}^{2}[u_r(p)\bar{u}_r(p) - v_r(p)\bar{v}_r(p)] = I. \tag{4.38}$$

$I$ 是 4-4 单位矩阵. 这就是波函数 $u, v$ 的旋量空间完备性关系. 这里 $u_r, \bar{u}_r, v_r, \bar{v}_r$ 看作是独立旋量波函数. 但是，独立旋量也可以取为 $u_r, u_r^+, v_r, v_r^+$; 这时，旋量空间完备性关系就表达为

$$\sum_{r=1}^{2}[u_r(\mathbf{p}, E)u_r^+(\mathbf{p}, E) + v_r(-\mathbf{p}, \mathbf{E})v_r^+(-\mathbf{p}, E)] = \frac{E}{m}I. \tag{4.39}$$

### 5. 正负能投影算符

现在定义矩阵算符

$$\Lambda_+(p)=\frac{m-i\hat{p}}{2m},\qquad \Lambda_-(p)=\frac{m+i\hat{p}}{2m}. \tag{4.40}$$

结合式(4.25)和(4.29)，很容易证明：

$$\begin{aligned}&\Lambda_+(p)u(p)=u(p),\quad \Lambda_+(p)v(p)=0,\\&\Lambda_-(p)u(p)=0,\quad \Lambda_-(p)v(p)=v(p).\end{aligned} \tag{4.41}$$

按定义，由式(4.40)可以直接推得下面的一些性质：

$$\begin{aligned}&\Lambda_+(p)+\Lambda_-(p)=I,\\&\Lambda_+^2(p)=\Lambda_+(p),\quad \Lambda_-^2(p)=\Lambda_-(p),\\&\Lambda_+(p)\Lambda_-(p)=\Lambda_-(p)\Lambda_+(p)=0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

结合式(4.41)和(4.42)，可见 $\Lambda_+(p)$ 是正能(或粒子态)投影算符，而 $\Lambda_-(p)$ 是负能(或反粒子态)投影算符.

利用旋量空间完备性关系(4.38)，还可以证明正负能投射算符的下列有用表式：

$$\Lambda_+(p)=\sum_{r=1}^{2}u_r(p)\bar{u}_r(p),\qquad \Lambda_-(p)=-\sum_{r=1}^{2}v_r(p)\bar{v}_r(p). \tag{4.43}$$

## §4.3 旋量场的物理量与量子化问题

由于负能解的存在和空穴理论，旋量波动方程(4.1)严格地讲不能描述单粒子运动，而只能描述一个多粒子系统的微观运动. 为此，我们必须将 $\psi(x)$ 看作一个旋量场，而把(4.1)看作场方程. 在进行量子化之后，旋量场就呈现出粒子性. 场量子是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的旋量粒子和反粒子.

旋量场的场变量是 $\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$. 当把旋量场看作一个动力系时，它们就是这个动力系的力学变量. 结合场方程(4.1)和拉氏方程(2.3)得知，旋量场的拉氏量密度写为

$$\mathscr{L}=-\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x). \tag{4.44}$$

于是 $\psi(x)$ 的共轭动量是

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\psi\gamma_4=i\psi^+. \tag{4.45}$$

由此并推得场的哈氏量

$$H = \int \mathscr{H} d^3x, \tag{4.46}$$

$$\mathscr{H} = \pi\phi - \mathscr{L}$$

$$= \bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi = \psi^+(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta)\psi. \tag{4.47}$$

另一方面，很容易证明

$$\mathscr{T}_{\mu\nu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + \delta_{\mu\nu}\bar{\psi}(\gamma_\lambda\partial_\lambda + m)\psi$$

是一个守恒张量，$\partial_\mu\mathscr{T}_{\mu\nu} = 0$. 于是

$$P_\nu = -i\int \mathscr{T}_{4\nu} d^3x$$

是一个守恒的 4-矢量. [$\psi(x)$ 在 $\mathbf{x}\to\infty$ 的边界条件足以保证这一点.] 不难看出，$P_4 = iH$，于是

$$\mathbf{P} = -i\int \psi^+\nabla\psi d^3x = -\int \pi\nabla\psi d^3x \tag{4.48}$$

是旋量场的动量. $\mathscr{T}_{\mu\nu}$ 称为旋量场的能量动量张量.

再按式 (1.7)，旋量场的电流电荷密度是

$$j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{4.49}$$

于是场的电荷是

$$Q = e\int \psi^+\psi d^3x. \tag{4.50}$$

与标量场和电磁场的情形一样，我们现在分析动量空间中旋量场的物理性质. 场方程 (4.1) 既有正能解 (4.23)，也有负能解 (4.27). 它们构成完备系. 因此，当取平面波表示时，必须结合这两种解，

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}[b_r(p)w_r^{(+)}(p)e^{ipx}$$

$$+ b_r(-p)w_r^{(-)}(-p)e^{-ipx}], \tag{4.51}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E}}\sum_{r=1}^{2}[b_r^+(p)\overline{w_r^{(+)}}(p)e^{-ipx}$$

$$+ b_r^+(-p)\overline{w_r^{(-)}}(-p)e^{ipx}]. \tag{4.52}$$

这时 $b_r(p)$, $b_r(-p)$, $b_r^+(p)$, $b_r^+(-p)$ 是旋量场的动量空间力学变量. 将式 (4.51), (4.52) 代入 $H$, $\mathbf{P}$, $Q$ 的表式 (4.46), (4.48),

(4.50)，就得到旋量场的能量、动量、电荷算符的动量空间表式：

$$P_\mu = \int d^3p p_\mu \sum_{r=1}^{2} [N_r(p) - N_r(-p)], \tag{4.53}$$

$$Q = \int d^3p e \sum_{r=1}^{2} [N_r(p) + N_r(-p)], \tag{4.54}$$

这里

$$N_r(p) = b_r^+(p)b_r(p), \quad N_r(-p) = b_r^+(-p)b_r(-p). \tag{4.55}$$

与§ 2.2 中讨论标量场时一样，为了便于理解，我们把动量空间分隔为可数的很小小格，在动量 p 点的小格的体积元是 $\Delta\tau_p$。然后定义

$$b_{p,r} = b_r(p)\sqrt{\Delta\tau_p}, \qquad b_{p,r}^+ = b_r^+(p)\sqrt{\Delta\tau_p},$$

$$b_{-p,r} = b_r(-p)\sqrt{\Delta\tau_{-p}}, \qquad b_{-p,r}^+ = b_r^+(-p)\sqrt{\Delta\tau_{-p}}. \tag{4.56}$$

现以 $\Delta\tau$ 代表所有的 $\Delta\tau_p$。在 $\Delta\tau \to 0$ 的极限下，式(4.53)和(4.54)写为

$$P_\mu = \sum_p p_\mu \sum_{r=1}^{2} (b_{p,r}^+ b_{p,r} - b_{-p,r}^+ b_{-p,r}) = \sum_p p_\mu \sum_{r=1}^{2} (N_{p,r} - N_{-p,r}), \tag{4.57}$$

$$Q = \sum_p e \sum_{r=1}^{2} (b_{p,r}^+ b_{p,r} + b_{-p,r}^+ b_{-p,r}) = \sum_p e \sum_{r=1}^{2} (N_{p,r} + N_{-p,r}); \tag{4.58}$$

这里

$$N_{p,r} = b_{p,r}^+ b_{p,r} = N_r(p)\Delta\tau_p,$$

$$N_{-p,r} = b_{-p,r}^+ b_{-p,r} = N_r(-p)\Delta\tau_{-p}. \tag{4.59}$$

如果同标量场和电磁场一样，我们也用场算符的对易关系来对旋量场进行量子化，则 $b_{p,r}$, $b_{p,r}^+$, $b_{-p,r}$, $b_{-p,r}^+$ 满足类似于式(2.28)的对易关系。这时，$N_{p,r}$ 和 $N_{-p,r}$ 的本征值是

$$n_{p,r}, n_{-p,r} = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

$n_{p,r}$ 是粒子态 $(p, r)$ 的正能粒子数，$N_{p,r}$ 是对应的正能粒子数算符；而 $n_{-p,r}$ 是粒子态为 $(-p, r)$ 的负能粒子数，$N_{-p,r}$ 是负能粒子数算符。

这个量子化过程产生两个困难。首先，按式(4.57)，量子旋

量场的能量本征值不是正定的. 正能态的粒子有正能，负能态的粒子有负能. 可是实验从来没有观察到任何负能量的粒子，也没有观察到任何负能量的场. 其次，因为 $n_{p,r}$ 和 $n_{-p,r}$ 可以是任意正整数，在一个给定的正能粒子态（$p$, $r$）或负能粒子态（$-p$, $r$）都可以有任意数目的粒子. 这也与实验不符. 在原子和分子结构物理中，人们早就知道，一个确定的电子态最多只能有一个电子（泡利不相容原理）. 因此，用对易关系对旋量场进行量子化同不相容原理相冲突.

怎样解决这些困难呢？ 理论实践证明，若采用场算符的反对易关系来对旋量场进行量子化时，就可以实现不相容原理的要求，同时也可以解决负能困难.

## §4.4 反对易关系与费米统计性

首先证明，用反对易关系来对旋量场进行量子化时，可以满足不相容原理的要求.

为此，我们只须讨论一个单一自由度动力系的量子力学问题. 设 $b$ 和 $b^+$ 是这个动力系的力学变量（算符），满足反对易关系

$$\{b, b^+\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0. \tag{4.60}$$

现在对算符 $N = b^+b$ 的本征值本征态问题求解：

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \tag{4.61}$$

首先，按式 (4.60)，$b^2 = b^{+2} = 0$，于是

$$N^2 = b^+bb^+b = b^+(\{b, b^+\} - b^+b)b = b^+b = N$$

或

$$N(N-1) = 0.$$

于是

$$N(N-1)|n\rangle = n(n-1)|n\rangle = 0,$$

故

$$n(n-1) = 0.$$

因此，算符 $N$ 只有两个本征值：0 和 1，对应的本征态是 $|0\rangle$, $|1\rangle$,

$$N|0\rangle = 0, \qquad N|1\rangle = |1\rangle. \tag{4.62}$$

另一方面，从式(4.60)推得

$$[N, b] = -b, \qquad [N, b^+] = b^+, \tag{4.63}$$

于是

$$Nb|n\rangle = (n-1)b|n\rangle, \quad Nb^+|n\rangle = (n+1)b^+|n\rangle. \tag{4.64}$$

即 $b|n\rangle$ 和 $b^+|n\rangle$ 也是$N$的本征态，对应的本征值分别是 $n-1$ 和 $n+1$，所以

$$b|n\rangle \sim |n-1\rangle, \quad b^+|n\rangle \sim |n+1\rangle. \tag{4.65}$$

但是 $n$ 只取两个数值 0 和 1，因此必须截止，即

$$b|0\rangle = 0, \quad b^+|1\rangle = 0. \tag{4.66}$$

现在把$N$理解为粒子数算符，$n$ 就是粒子数本征值. 按式(4.65)，$b$ 则是湮没一个粒子的算符，$b^+$ 是产生一个粒子的算符. 显然 $|1\rangle \sim b^+|0\rangle$. 可以证明，$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 正交. 假设二者都归一，则

$$|1\rangle = b^+|0\rangle, \quad |0\rangle = b|1\rangle. \tag{4.67}$$

产生和湮没算符 $b^+, b$ 所导致的跃迁振幅可按下列方法推得：

$$1-n = \langle n|1-N|n\rangle = \langle n|bb^+|n\rangle = \langle n|b|n+1\rangle \cdot$$

$$\langle n+1|b^+|n\rangle = |\langle n|b|n+1\rangle|^2 = |\langle n+1|b^+|n\rangle|^2.$$

若不考虑相因子，则得到

$$\langle n|b|n+1\rangle = \langle n+1|b^+|n\rangle = \sqrt{1-n}.$$

但是 $n$ 只取 0，1，所以实际上只有下面几个跃迁振幅：

$$\langle 0|b|1\rangle = \langle 1|b^+|0\rangle = 1, \quad \langle 1|b|0\rangle = \langle 0|b^+|1\rangle = 0,$$

$$\langle 0|b|0\rangle = \langle 1|b|1\rangle = \langle 0|b^+|0\rangle = \langle 1|b^+|1\rangle = 0. \tag{4.68}$$

按照上面的分析，粒子数 $n$ 只能是 0 或 1. 又因为 $b^{+m}|n\rangle = 0$ $(m \geqslant 2)$，所以每个自由度(即确定的粒子态)不能有两个或两个以上的全同粒子. 这些结果表明，按反对易关系对旋量场进行量子化时与不相容原理的要求吻合. 根据式(4.60)，旋量场的量子化规则显然应该是

$$\{b_{p,r}, b^+_{p',s}\} = \{b_{-p,r}, b^+_{-p',s}\} = \delta_{rs}\delta^{(3)}_{pp'},$$

$$\{b_{p,r}, b_{p',s}\} = \{b^+_{p,r}, b^+_{p',s}\} = 0,$$

$$\{b_{-p,r}, b_{-p,s}\} = \{b^+_{-p,r}, b^+_{-p',s}\} = 0,$$
$$\{b_{p,r}, b_{-p',s}\} = \{b_{p,r}, b^+_{-p',s}\} = 0,$$
$$\{b^+_{p,r}, b_{-p',s}\} = \{b^+_{p,r}, b^+_{-p',s}\} = 0. \qquad (4.69)$$

具有不相容原理特性的全同微观粒子满足费米统计. 所以按照这些反对易关系进行量子化的旋量场场量子称为费米子.

## §4.5 空穴理论;负能粒子态的重新解释

上节证明了反对易关系量子化规则满足不相容原理的要求. 现在再讨论它是否也同时能解决负能困难.

我们知道,空穴理论能够解决负能困难是基于不相容原理.首先简单地分析一下空穴理论在旋量场量子化问题中所能导致的结果. 今以 $|0\rangle$ 表示量子旋量场的物理真空态. 按照空穴理论,在这个真空态中,所有的正能粒子态 $(p, r)$ 都空着,而每个负能粒子态 $(-p, r)$ 都为一个负能粒子所填满. 于是按式 (4.62),

$$N_{p,r}|0\rangle = 0, \quad N_{-p,r}|0\rangle = |0\rangle. \qquad (4.70)$$

因此量子旋量场的能量、动量、电荷算符 $P_\mu$ (4.53) 和 $Q$ (4.54) 的真空期待值为

$$\langle 0|P_\mu|0\rangle = -\sum_p \sum_r p_\mu,$$

$$\langle 0|Q|0\rangle = \sum_p \sum_r e.$$

这些都不是可观察量. 可观察的物理量算符当然是从 $P_\mu$, $Q$ 算符中分别扣除这些数值之后的表式. 为了简便起见,以下仍用同样符号 $P_\mu$, $Q$ 来表示这些可观测的物理量算符. 于是旋量场的可观测的能量、动量、电荷算符分别是

$$P_\mu = \sum_p \sum_r p_\mu(b^+_{p,r}b_{p,r} - b^+_{-p,r}b_{-p,r} + 1),$$

$$Q = \sum_p \sum_r e\,(b^+_{p,r}b_{p,r} + b^+_{-p,r}b_{-p,r} - 1).$$

这时,这些可观测物理量的真空期待值都是 0,符合真空态 $|0\rangle$ 的

意义.

应用反对易关系(4.69)时，上面这些物理量算符改写为下列表式:

$$P_\mu = \sum_p p_\mu \sum_r (N_{p,r} + N'_{-p,r}), \tag{4.71}$$

$$Q = \sum_p e \sum_r (N_{p,r} - N'_{-p,r}); \tag{4.72}$$

这里

$$N_{p,r} = b^+_{p,r} b_{p,r}, \quad N'_{-p,r} = b_{-p,r} b^+_{-p,r}. \tag{4.73}$$

它们的本征值都是正定的. 因此，现在能量是正定算符，而电荷却同原来的式(4.53)相反，不是正定算符.

因此，结合空穴理论，反对易关系也解决了量子旋量场的负能困难.

现在再按空穴理论进一步来看算符 $b_{-p,r}$, $b^+_{-p,r}$ 和 $N'_{-p,r}$ 的物理意义.

$b^+_{-p,r}$ 是产生一个 $(-p, r)$ 的负能粒子的算符. 但是按照空穴理论，要产生一个负能粒子，必须有一个相应的空穴空着才能承受这个产生的粒子.而这个空穴在填满以后就湮没了.因此产生一个$(-p, r)$负能粒子就是湮没一个 $(-p, r)$ 空穴，也就是湮没一个 $(p, s)$ 的正能反粒子，$s \neq r (r, s = 1, 2)$. 因此可写 $b^+_{-p,r} = d_{p,s}$. 这里 $d_{p,s}$ 是湮没一个 $(p, s)$ 正能反粒子的算符.

$b_{-p,r}$ 是湮没一个 $(-p, r)$ 的负能粒子的算符. 但是要湮没一个负能粒子，必须在相应的空穴里有这个粒子存在着，而在负能粒子 $(-p, r)$ 湮没后就留下一个 $(-p, r)$ 空穴，也就是产生一个 $(p, s)$ 的正能反粒子，$s \neq r$. 于是 $b_{-p,r}$ 实际上是产生一个 $(p, s)$ 正能反粒子的算符，即 $b_{-p,r} = d^+_{p,s}$.

按照式(4.69)，$d_{p,s}$ 和 $d^+_{p,s}$ 也满足反对易关系，即

$$\{d_{p,r}, d^+_{p',s}\} = \delta_{rs}\delta^{(3)}_{pp'},$$
$$\{d_{p,r}, d_{p',s}\} = \{d^+_{p,r}, d^+_{p',s}\} = 0. \tag{4.74}$$

于是

$$N'_{-p,r} = 1 - d_{p,s} d^+_{p,s} = d^+_{p,s} d_{p,s} = \bar{N}_{p,s}, \tag{4.75}$$

$s \neq r$. $\bar{N}_{p,s}$ 是$(p, s)$ 的正能反粒子数算符.

因此按照空穴理论，对 $b_{-p,r}$, $b^{+}_{-p,r}$ 和 $N'_{-p,r}$ 作了重新解释以后，负能粒子没有了，而只有正能粒子和正能反粒子.这样，旋量场的负能困难，在按反对易关系进行量子化时完全解决了. 同时，场量子满足费米统计，实现了不相容原理的要求.

经过这样重新解释之后，量子旋量场的能量、动量、电荷算符写为

$$P_\mu = \sum_p p_\mu \sum_r (N_{p,r} + \bar{N}_{p,r}), \tag{4.76}$$

$$Q = \sum_p e \sum_r (N_{p,r} - \bar{N}_{p,r}). \tag{4.77}$$

显然

$N_{p,r} = b^{+}_{p,r} b_{p,r}$ 是 $(p, r)$ 正能粒子数算符;

$\bar{N}_{p,r} = d^{+}_{p,r} d_{p,r}$ 是 $(p, r)$ 正能反粒子数算符.

它们都只有两个本征值 0 和 1. 式 (4.77) 表示粒子的电荷是 $e$，反粒子的电荷是 $-e$.

## §4.6 旋量场的多粒子态;粒子与反粒子的产生和湮没算符

最后我们再回到连续动量空间的情形，即取极限 $\Delta\tau \to 0$.

因为 $(p, r)$ 的正能反粒子态就是 $(-p, s)$ 空穴，$s \neq r$，也就是负能粒子态 $(-p, s)$，所以

$$v_r(p) = w_s^{(-)}(-p), \quad \bar{v}_r(p) = \overline{w_s^{(-)}}(-p).$$

另一方面，

$$u_r(p) = w_r^{(+)}(p), \quad \bar{u}_r(p) = \overline{w_r^{(+)}}(p).$$

又按式(4.56)，可以定义

$$d_r(p) = \frac{d_{p,r}}{\sqrt{\Delta\tau_p}} = b_s^{+}(-p),$$

$$d_r^{+}(p) = \frac{d^{+}_{p,r}}{\sqrt{\Delta\tau_{-p}}} = b_s(-p). \tag{4.78}$$

于是旋量场平面波表示式 (4.51)，(4.52) 现在应改写为

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} [b_r(p) u_r(p) e^{ipx} + d_r^+(p) v_r(p) e^{-ipx}], \tag{4.79}$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^{2} [d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{ipx} + b_r^+(p) \bar{u}_r(p) e^{-ipx}]. \tag{4.80}$$

又按式 (4.69) 和 (4.74)，取极限 $\Delta\tau \to 0$ 时（参看 § 2.2），就得到连续动量空间的反对易关系

$$\begin{aligned}
&\{b_r(p), b_s^+(p')\} = \{d_r(p), d_s^+(p')\} = \delta_{rs}\delta^{(3)}(p - p'),\\
&\{b_r(p), b_s(p')\} = \{b_r^+(p), b_s^+(p')\} = 0,\\
&\{d_r(p), d_s(p')\} = \{d_r^+(p), d_s^+(p')\} = 0,\\
&\{b_r(p), d_s(p')\} = \{b_r(p), d_s^+(p')\} = 0,\\
&\{b_r^+(p), d_s(p')\} = \{b_r^+(p), d_s^+(p')\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$r, s = 1, 2$. 今记

$$N_r(p) = b_r^+(p) b_r(p), \quad \bar{N}_r(p) = d_r^+(p) d_r(p), \tag{4.82}$$

量子旋量场的能量、动量、电荷算符分别写为

$$P_\mu = \int d^3p\, p_\mu \sum_r [N_r(p) + \bar{N}_r(p)], \tag{4.83}$$

$$Q = \int d^3p\, e \sum_r [N_r(p) - \bar{N}_r(p)]. \tag{4.84}$$

因此，$N_r(p)d^3p$ 和 $\bar{N}_r(p)\, d^3p$ 分别是动量在 **p**—**p** + $d$**p** 之间的自旋态为 $r$ 的正、反粒子数算符. 于是 $b_r^+(p)$ 和 $b_r(p)$ 是在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量 **p** 自旋态 $r$ 的粒子的算符，而 $d_r^+(p)$ 和 $d_r(p)$ 是在单位动量空间体积内产生和湮没一个动量 **p** 自旋态 $r$ 的反粒子的算符.

现以 $|0\rangle$ 表示量子旋量场的真空态，即既无粒子亦无反粒子存在的态，并且归一化，$\langle 0|0\rangle = 1$. 于是

$$b_r^+(p) d_s^+(q) \cdots\cdots |0\rangle \tag{4.85}$$

是在单位相空间体积内存在一个 $(p, r)$ 粒子、一个 $(q, s)$ 反粒子、…的态.

粒子和反粒子的坐标空间产生和湮没算符可以从式(4.79)和(4.80)得到，将 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 分解为两项之和：

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x),$$

$$\psi^{(\pm)}(x) = \sum_{r=1}^{2} \psi_r^{(\pm)}(x), \quad \bar{\psi}^{(\pm)}(x) = \sum_{r=1}^{2} \bar{\psi}_r^{(\pm)}(x). \tag{4.86}$$

这里

$$\psi_r^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}}\, \bar{u}_r(p) e^{-ipx} b_r^+(p) \tag{4.87}$$

是在 $x$ 点单位坐标空间体积内产生一个自旋态 $r$ 粒子的算符；

$$\psi_r^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}}\, u_r(p) e^{ipx} b_r(p) \tag{4.88}$$

是在 $x$ 点单位体积内湮没一个自旋态 $r$ 粒子的算符；

$$\psi_r^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}}\, v_r(p) e^{-ipx} d_r^+(p) \tag{4.89}$$

是在 $x$ 点单位体积内产生一个自旋态 $r$ 反粒子的算符；

$$\bar{\psi}_r^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}}\, \bar{v}_r(p) e^{ipx} d_r(p) \tag{4.90}$$

是在 $x$ 点单位体积内湮没一个自旋态 $r$ 反粒子的算符.

最后我们还可以推导旋量场的坐标空间的量子化规则. 由式(4.79)，(4.80)，(4.81)，并利用 $u$，$v$ 的旋量空间完备性关系(4.39)，很容易证明下列反对易关系：

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\psi_\alpha^+(\mathbf{x}, t), \psi_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} = 0, \tag{4.91}$$

其中旋量指标 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$.

# 第五章　量子场的相互作用

在前面几章，我们讨论了三种自由场的量子化：标量场、电磁场、旋量场．它们各有各的特殊性．它们是量子场的主要典型，其它高自旋$\left(1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\right)$的场的量子化问题，基本上同这三个场没有多大区别．

自由量子场只能反映自由微观粒子的性质．但是粒子之间不停地相互作用．只有通过相互作用才能产生或湮没粒子，才能使粒子相互转化．本章将研究粒子之间的相互作用问题．

按照场论，粒子间的相互作用就是相应的量子场之间的相互作用．一个场的激发或去激发，反映了粒子的产生或湮没；一些场的去激发伴随另一些场的激发则反映粒子之间的相互转化，如$\gamma p \to \pi^+ n$，$\gamma n \to \pi^- p$，$\rho \to \pi^+\pi^-$，$n \to p e^- \nu$ 等等．但是任意场的激发或去激发都是相互作用所导致的．因此量子场的相互作用是粒子产生、湮没、相互转化等过程的动力学根源和基本机制．

量子场之间究竟有什么相互作用呢？极少数相互作用可按经典物理中已经确立的规律来决定，如电磁相互作用基本上是确定的，它必须满足规范不变性，这是由光子的质量为 0 所决定的．除此而外，大多数相互作用都是在实验结果的基础上决定的，称为唯象相互作用．大量的实验结果与理论分析总结出粒子间相互作用中存在着一系列守恒定律．一些守恒定律是确立了的，如能量、动量、角动量、电荷守恒等；另一些守恒定律的实验基础，还不很坚实．在每一个守恒定律的背后，都有一个相应的对称性或不变性．比如能量和动量守恒是相互作用对时间和空间平移的不变性的反映；角动量守恒是相互作用对空间转动的不变性的反映；两者结合起来，再略加扩充，就得到一般的狭义相对论不变性．其它象电荷

守恒和重子数、轻子数守恒等，则表示相互作用的各种相应的规范不变性. 宇称守恒是相互作用对空间反射不变性的反映；粒子反粒子对称是对电荷共轭的不变性；同位旋守恒则是相互作用对一个抽象的三维同位旋空间转动的不变性；等等. 相反，实验还证明，也有一些相互作用违反某些守恒定律，比如在弱相互作用中宇称不守恒，就反映了这些相互作用缺乏对空间反射的不变性，等等.

在具体数学表示方面，相互作用究竟怎样体现出各种各样的不变性或对称性呢？在前几章中，我们看到场的理论是从场的拉氏量密度出发的，它是一个相对论不变量. 因此要考虑相互作用时，除了自由量子场的拉氏量密度 $\mathscr{L}_0$ 外，还必须引进一个相互作用拉氏量密度 $\mathscr{L}_I$，它是各个场场变量和微商的函数，也必须是相对论不变量. 相互作用的各种对称性或守恒性，就具体地表现为 $\mathscr{L}_I$ 表式的各种不变性. 例如，相对论不变性使 $\mathscr{L}_I$ 对空间、时间平移和对空间转动不变，这就导致了相互作用中的动量、能量和角动量守恒. 又因为场系统的物理量都是从拉氏量密度推得的，所以同 $\mathscr{L}_0$ 一样，$\mathscr{L}_I$ 必须也是厄米的.

不过，即使 $\mathscr{L}_I$ 满足所有已知的不变性，即所有已知的守恒定律，它的数学表式还是不能唯一地确定. 可能的表式往往还很多，那时就只能由实验来判定了.

下面将简单地介绍粒子物理中三类不同的相互作用：电磁、强、弱相互作用. 为此，我们将只介绍几个比较典型的、并已经实验相当可靠的确立了的相互作用.

## §5.1 旋量场与电磁场的相互作用

荷电粒子同光子的相互作用是一切微观电磁现象的基础. 按照场论，它们是荷电量子场同量子电磁场之间的相互作用. 研究微观电磁过程的场论，通常称为量子电动力学. 由于光子的质量是零，一切电磁相互作用都具有规范不变性(见第三章). 下面我

们讨论两个典型例子.

首先讨论电子、质子等一类荷电费米子同光子的相互作用.

量子旋量场的电荷共轭不变性和场算符的反对易性要求我们明显地考虑粒子反粒子对称. 显然，具有这种对称的旋量场拉氏量密度是（参看 § 4.3）

$$\mathscr{L}_\psi = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi^c}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi^c$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi - \frac{1}{2}\psi^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - m)\bar{\psi}^T. \quad (5.1)$$

电磁场具有规范不变性，即对下面的规范变换保持不变：

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x). \quad (5.2)$$

荷电粒子在电磁场中的运动自然也必须具有这个规范不变性. 为此，结合式 (5.2)，还必须作下列相应的旋量场变换：

$$\psi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)}; \quad (5.3)$$

这里 $e$ 是一个常数，即粒子的电荷（见后）. 可是 $\mathscr{L}_\psi$ 本身对这个定域规范变换 (5.3) 并不是不变的. 但若结合式 (5.2) 和 (5.3)，可以证明

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \to e^{ie\Lambda}\cdot(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi,$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi} \to (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}\cdot e^{-ie\Lambda},$$

于是

$$\mathscr{L}_{\psi A} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi$$

$$-\frac{1}{2}\psi^T[\gamma_\mu^T(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\bar{\psi}^T \quad (5.4)$$

在联合定域规范变换式 (5.2)—(5.3) 之下不变. 这时 $\mathscr{L}_{\psi A}$ 是旋量粒子在电磁场中运动的拉氏量密度. 显然 $e$ 是粒子电荷，$-e$ 是反粒子电荷. 式 (5.4) 可写为

$$\mathscr{L}_{\psi A} = \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_I, \quad (5.5)$$

$$\mathscr{L}_I = j_\mu A_\mu, \quad j_\mu = \frac{ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T). \quad (5.6)$$

$\mathscr{L}_\psi$ 是旋量场本身的拉氏量密度，即式 (5.1). $\mathscr{L}_I$ 称为相互作用拉氏量密度，并称为旋量场的“最小”电磁相互作用.

精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 是电磁相互作用耦合强度之量度(参看第七章).

$\mathscr{L}_I$ 是相对论不变量，保证了动量、能量、角动量守恒. 规范不变性导致电荷守恒. 还可以证明，$\mathscr{L}_I$ 对空间反射不变，因此在电磁相互作用中宇称也守恒.

旋量场电磁场两场系统的拉氏量密度显然是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_I + \mathscr{L}_A, \tag{5.7}$$

其中 $\mathscr{L}_A$ 是电磁场本身的拉氏量密度(见第三章). 于是两场场方程分别是

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + m\psi = 0,$$
$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0,$$
$$\Box A_\mu = -j_\mu$$

(矢量 $A_\mu$ 还应满足附加条件，详见第三章). 这些场方程显示了两场之间的相互影响. 由式(5.7)可推得场系统的哈氏量密度为

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_I, \tag{5.8}$$

$$\mathscr{H}_\psi = \frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi + \frac{1}{2}\psi^T(\boldsymbol{\gamma}^T\cdot\boldsymbol{\nabla} - m)\bar{\psi}^T, \tag{5.9}$$

$$\mathscr{H}_A = \frac{1}{2}(\Pi_\mu\Pi_\mu + \boldsymbol{\nabla}A_\mu\cdot\boldsymbol{\nabla}A_\mu), \tag{5.10}$$

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = -j_\mu A_\mu. \tag{5.11}$$

显然 $\mathscr{H}_I$ 是相互作用哈氏量密度. 注意 $\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I$. 只要 $\mathscr{L}_I$ 与场变量的微商无关，这个简单关系总是成立的.

式(5.7)不是唯一的规范不变的电磁相互作用. 下面的相互作用显然也具有这种规范不变性:

$$\mathscr{L}'_I = \frac{\mu'}{2}\Sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{5.12}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\psi\sigma_{\mu\nu}\psi - \psi^T\sigma^T_{\mu\nu}\bar{\psi}^T), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

忽略 $e$ 的高次项后，可以证明

$$\mathscr{L}_I + \mathscr{L}'_I = J_\mu A_\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2m} + \mu'\right)\Sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad (5.13)$$

这里

$$J_\mu = \frac{ie}{4m}(\partial_\mu\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\partial_\mu\psi - \psi^T\partial_\mu\bar{\psi}^T + \partial_\mu\psi^T\bar{\psi}^T)$$

是由单纯电荷运动所产生的电流密度，而旋量场的自旋效应则表现在 $\frac{e}{4m}\Sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 项中. 所以旋量粒子有磁矩 $\frac{e}{2m}$，而 $\mu'$ 称为它的反常磁矩.

旋量场究竟有没有反常磁矩相互作用 $\mathscr{L}'_I$ 呢？这要由实验来决定. 实验测定的电子磁矩基本上是 $\frac{e}{2m}$，因此电子没有这种反常磁矩 $\mu'$. 可是质子磁矩的实验值是 $2.793\frac{e}{2M}$，中子磁矩的实验值是 $-1.913\frac{e}{2M}$（$M$ 是质子质量）. 所以它们各有反常磁矩

$$\mu'_p = 1.793\frac{e}{2M}, \quad \mu'_n = -1.913\frac{e}{2M}.$$

这些反常磁矩的根源还不太清楚，在唯象地描述 $p$，$n$ 的运动时，引入反常磁矩相互作用 (5.12) 是必要的.

有相互作用的场系统的量子化仍然可以用正则方法(§ 2.1)来处理. 这里我们可以证明，旋量场电磁场场系统的量子化规则仍然同没有相互作用时一样. 唯一的新东西是两个不同场场算符应该满足的关系. 一条规则是：玻色子场同任意其它场都对易. 于是

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \psi_\alpha(\mathbf{x}', t)] = [A_\mu(\mathbf{x}, t), \psi^+_\alpha(\mathbf{x}', t)] = 0,$$
$$[\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \psi_\alpha(\mathbf{x}', t)] = [\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \psi^+_\alpha(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (5.14)$$

式中 $\Pi_\mu$ 是电磁场 $A_\mu$ 的共轭动量.

## § 5.2 荷电标量场的电磁相互作用

这是 $\pi^\pm$，$K^\pm$ 等荷电介子同光子的相互作用，也必须是规范不

变的．这时，联合定域规范变换是

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$
$$\varphi(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\varphi(x), \quad \varphi^+(x) \to \varphi^+(x)e^{-ie\Lambda(x)}. \tag{5.15}$$

显然下列拉氏量密度对这个变换保持不变：

$$\mathscr{L}_{\varphi A} = -(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^+(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi - m^2\varphi^+\varphi. \tag{5.16}$$

它可写为

$$\mathscr{L}_{\varphi A} = \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_I,$$

其中 $\mathscr{L}_\varphi$ 是标量场本身的拉氏量密度 (2.51)；$\mathscr{L}_I$ 是相互作用拉氏量密度：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I &= -ie(\varphi^+\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^+\varphi)A_\mu - e^2A_\mu A_\mu\varphi^+\varphi \\ &= j_\mu A_\mu + e^2A_\mu A_\mu\varphi^+\varphi,\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$j_\mu = -ie[\varphi^+(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi - (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^+\varphi]. \tag{5.18}$$

式 (5.18) 是标量场的电流密度．这里，$\mathscr{L}_I$ 不是简单地等于 $j_\mu A_\mu$，而且与标量场的微商有关．

很明显，两场场系统的拉氏量密度是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_I + \mathscr{L}_A, \tag{5.19}$$

场方程则是

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi - m^2\varphi = 0,$$
$$(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^+ - m^2\varphi^+ = 0,$$
$$\Box A_\mu = -j_\mu.$$

再按 § 2.1 的正则方法推得两场的共轭动量：

$$\pi = \dot{\varphi}^+ - eA_4\varphi^+, \quad \pi^+ = \dot{\varphi} + eA_4\varphi, \quad \Pi_\mu = \dot{A}_\mu.$$

由此并推导出哈氏量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^+\pi^+ + \Pi_\mu\dot{A}_\mu - \mathscr{L} \\ &= \mathscr{H}_\varphi + \mathscr{H}_A + \mathscr{H}_I,\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\mathscr{H}_I = -j_\mu A_\mu - e^2(A_\mu A_\mu - A_4^2)\varphi^+\varphi.$$

这里相互作用哈氏量密度 $\mathscr{H}_I \neq -\mathscr{L}_I$，$\mathscr{H}_I$ 也不是一个不变量．原因是 $\mathscr{L}_I$ 与 $\varphi$ 和 $\varphi^+$ 的微商有关．

场系统的量子化规则仍同没有相互作用时一样，即两场各自的对易关系．又因两场都是玻色子场，故相互对易，

## §5.3 $\pi^0N$ 相互作用

现在讨论强相互作用. 这是介子 ($\pi, K, \rho, \omega, \cdots$) 和重子 ($p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \cdots$)等强子之间的相互作用.强相互作用至今基本上都是唯象的.它们都是按实验所总结的一些守恒定律来确定.除了相对论不变性和电荷守恒外，强相互作用满足的守恒定律主要还有 $P, T, C$，重子数、同位旋、奇异数等.这里我们以 $\pi$ 介子和核子 $N$ 的相互作用为例,介绍强相互作用的一些重要结构和性质.

按大量实验分析，$\pi^0$ 的自旋是 0，$\pi^0$-$N$ 相互作用中宇称守恒. 因此可以定义 $\pi^0$ 的宇称,实验结果 $\pi^0$ 有负宇称. 所以 $\pi^0$ 是赝标介子,应当用赝标场 $\varphi(x)$ 来描述. 现以 $\psi(x)$ 代表 $p$ 或 $n$ 的旋量场. 按实验,能够反映 $\pi^0$-$N$ 相互作用的是下列赝标型耦合拉氏量密度:

$$\mathscr{L}_I = \frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T)\varphi, \tag{5.21}$$

其中 $g$ 是耦合常数,是实数; $\frac{g^2}{4\pi}$ 是相互作用强度的量度. 实验测定 $\frac{g^2}{4\pi} = 1\text{—}15$, 比 $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 大得多. 因此式 (5.21) 称为强相互作用. $\mathscr{L}_I$ 是厄米的,而且是不变量.(实际上,我们所以说 $\pi^0$ 有负宇称,就是因为 $\mathscr{L}_I$ 中的 $\varphi$ 是赝标场.)

$\pi^0$-$N$ 场系统的拉氏量密度显然是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\psi + \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_I, \tag{5.22}$$

$\mathscr{L}_\psi$ 和 $\mathscr{L}_\varphi$ 分别是核子场和介子场本身的拉氏量密度. 由式 (5.22) 可推得场方程

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + M - ig\gamma_5\varphi)\psi = 0,$$

$$(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M + ig\gamma_5^T\varphi)\bar{\psi}^T = 0,$$

$$(\Box - m^2)\varphi = -\frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T),$$

式中 $M$, $m$ 分别是 $N$ 和 $\pi^0$ 的质量. 还可推导出场系统的哈氏量

密度

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\psi + \mathscr{H}_\varphi + \mathscr{H}_I, \tag{5.23}$$

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = -\frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T)\varphi. \tag{5.24}$$

两场场系统的量子化规则仍同没有相互作用时一样，$\varphi$ 与 $\psi$ 之间则相互对易（参看 § 5.1）.

## § 5.4 $\pi^{\pm}N$ 相互作用

实验结果表明，$\pi^{\pm}$ 的自旋也是 0，$\pi^{\pm}N$ 相互作用也是类似于 (5.21) 的赝标型耦合. 因此电荷守恒的 $\pi^{\pm}N$ 相互作用拉氏量密度是

$$\mathscr{L}_I = \frac{ig}{2}(\bar{p}\gamma_5 n - n^T\gamma_5^T\bar{p}^T)\varphi + \frac{ig}{2}(\bar{n}\gamma_5 p - p^T\gamma_5^T\bar{n}^T)\varphi^+. \tag{5.25}$$

这里我们用粒子本身的符号 $p$，$n$ 来表示它们各自的场量算符. 实验还证明，耦合常数 $g$ 与 $\pi^0$-$N$ 耦合的数量级相同.

很明显，场系统的拉氏量密度现在是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_I, \tag{5.26}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_N = \mathscr{L}_p + \mathscr{L}_n = &-\frac{1}{2}\bar{p}(\gamma_\mu\partial_\mu + M_p)p \\ &-\frac{1}{2}p^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M_p)\bar{p}^T - \frac{1}{2}\bar{n}(\gamma_\mu\partial_\mu + M_n)n \\ &-\frac{1}{2}n^T(\gamma_\mu^T\partial_\mu - M_n)\bar{n}^T.\end{aligned} \tag{5.27}$$

$\mathscr{L}_\varphi$ 是荷电赝标场本身的拉氏量密度（见 § 2.4）. 由此推得场系统的哈氏量密度

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_N + \mathscr{H}_\varphi + \mathscr{H}_I, \tag{5.28}$$

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I. \tag{5.29}$$

$\mathscr{H}_N = \mathscr{H}_p + \mathscr{H}_n$ 和 $\mathscr{H}_\varphi$ 是各个场本身的哈氏量密度.

按式 (2.56) 和 (5.6)，$\pi^{\pm}N$ 场系统的电流密度是

$$j_\mu = \frac{ie}{2}(\bar{p}\gamma_\mu p - p^T\gamma_\mu^T\bar{p}^T) + ie(\partial_\mu\varphi^+\varphi - \varphi^+\partial_\mu\varphi). \quad (5.30)$$

即使在有相互作用的情形下，电荷也守恒：$\partial_\mu j_\mu = 0$. 这是因为 $\mathscr{L}_I$ 具有规范不变性.

在量子化规则中，玻色子场同其它场都相互对易，但是不同的旋量场则相互反对易，部分理由见 § 5.5.

## § 5.5 同位旋守恒的 $\pi N$ 强相互作用

大量的实验和理论工作分析了原子核中 $NN$ 结合力的性质以及 $NN$ 散射、$\pi N$ 散射、$\pi$ 介子产生和吸收等过程，发现 $\pi N$ 相互作用是这些现象的基本相互作用，并且 $\pi N$ 和 $NN$ 的相互作用都具有电荷无关性，即当 $\pi N$ 或 $NN$ 系统处于相同的径向和角动量本征态时，$\pi N$ 或 $NN$ 之间的相互作用都同粒子的电荷无关. 于是人们引进了一个新概念，即 $p$, $n$ 可以看作同一个粒子(核子 $N$)的两个不同的电荷态，$\pi^0$, $\pi^+$, $\pi^-$ 也可看作同一个粒子 ($\pi$ 介子) 的三个不同的电荷态，而 $\pi N$ 的相互作用具有电荷无关性. 后来在与粒子的自旋作对比时，人们还把这个新概念更推进了一步，即 $\pi$ 和 $N$ 都有一种抽象的内禀性质：同位旋，$I$. 正像 $p$ 或 $n$ 有自旋 $\frac{1}{2}$ 一样，$N$ 的同位旋是 $\frac{1}{2}$，它的两个电荷态 $p$, $n$ 是 $I = \frac{1}{2}$ 的两个同位旋本征态，即 $I_3 = +\frac{1}{2}(p)$, $-\frac{1}{2}(n)$. 同样，$\pi$ 介子的同位旋是 1，它的三个电荷态 $\pi^+$, $\pi^0$, $\pi^-$ 是 $I = 1$ 的三个同位旋本征态，即 $I_3 = +1(\pi^+)$, $0(\pi^0)$, $-1(\pi^-)$. 同时，正如自旋是波函数或场变量对空间转动的变换性质的反映一样，同位旋也可以看作 $N$ 和 $\pi$ 对某一个三维空间转动的变换性质的反映. 不过这个三维空间不是普通空间，而是一个抽象空间，称为同位旋空间. 这样，电荷无关性就是 $\pi N$ 和 $NN$ 相互作用具有对同位旋空间某些

特定的转动的不变性的反映. 若考虑同位旋空间的连续转动，这个不变性就导致了同位旋守恒. 大量实验验证了同位旋守恒在 $\pi N$ 和 $NN$ 强相互作用中确是一个精确度相当高的规律. 因此，强相互作用不区分 $p$ 态和 $n$ 态或它们的任意混合态，只有电磁相互作用才能把 $p$ 和 $n$ 区分开来.

核子场的拉氏量密度是式(5.27). 按实验，$\frac{M_n - M_p}{M_p} = 0.13\%$，但是 $n - p$ 的质量差可以认为是电磁相互作用的效应，而在强相互作用中，可取 $M_p = M_n (= M)$. 今以

$$N = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}, \qquad \bar{N} = [\bar{p}\ \bar{n}]. \tag{5.31}$$

表示核子场场变量，并且都是 8 个分量的旋量，它们既是时空旋量，同时也是同位旋空间的二分量旋量，称为同位旋旋量. 于是核子场的拉氏量密度 (5.27) 写为

$$\mathscr{L}_N = -\frac{1}{2}\bar{N}(\gamma_\mu \partial_\mu + M)N - \frac{1}{2}N^T(\gamma_\mu^T \partial_\mu - M)\bar{N}^T. \tag{5.32}$$

显然 $\mathscr{L}_N$ 是一个同位旋标量，其中 $\gamma_\mu$ 是 8-8 矩阵，代表 $I \otimes \gamma_\mu$. 今取

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

可以证明，$\bar{N}\boldsymbol{\tau}N$ 是一个同位旋 3-矢量.

若 $\varphi_0(x)$ 是 $\pi^0$ 赝标场；$\varphi(x)$，$\varphi^+(x)$ 是 $\pi^\pm$ 赝标场；并以 $m_0$ 表示 $\pi^0$ 质量；$m_c$ 表示 $\pi^\pm$ 质量. $\pi$ 介子场的拉氏量密度显然是

$$\mathscr{L}_\pi = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + m_0^2 \varphi_0^2) - \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m_c^2 \varphi^+ \varphi.$$

按实验，$\frac{m_c - m_0}{m_c} \approx 3\%$. 可以认为，在忽略电磁效应时，$m_0 = m_c (= m)$. 若取

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2), \quad \varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \qquad \varphi_0 = \varphi_3, \tag{5.33}$$

$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$ 都是厄米赝标场，则 $\mathscr{L}_\pi$ 可写为

$$\mathscr{L}_\pi = \frac{-1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\varphi} + m^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}), \tag{5.34}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$. 假设 $\boldsymbol{\varphi}$ 是一个同位旋 3-矢量,则 $\mathscr{L}_\pi$ 是一个同位旋标量.

现在再来讨论 $\pi N$ 相互作用. 按式 (5.21) 和 (5.25), 赝标耦合写为

$$\mathscr{L}_I = ig_c(\bar{p}\gamma_5 n\varphi + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^+) + ig_p\bar{p}\gamma_5 p\varphi_0 + ig_n\bar{n}\gamma_5 n\varphi_0, \tag{5.35}$$

其中 $g_c, g_p, g_n$ 是相应的耦合常数. 现定义

$$\tau_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2), \quad \tau_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2).$$

很容易证明,

$$\bar{p}\gamma_5 n = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{N}\gamma_5\tau_+ N, \quad \bar{n}\gamma_5 p = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{N}\gamma_5\tau_- N,$$

$$\bar{p}\gamma_5 p = \frac{1}{2}\bar{N}\gamma_5(1+\tau_3)N, \quad \bar{n}\gamma_5 n = \frac{1}{2}\bar{N}\gamma_5(1-\tau_3)N.$$

于是式 (5.35) 可改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I &= \frac{ig_c}{\sqrt{2}}(\bar{N}\gamma_5\tau_+ N\varphi + \bar{N}\gamma_5\tau_- N\varphi^+) \\ &\quad + \frac{i}{2}[g_p\bar{N}\gamma_5(1+\tau_3)N + g_n\bar{N}\gamma_5(1-\tau_3)N]\varphi_0 \\ &= \frac{ig_c}{\sqrt{2}}(\bar{N}\gamma_5\tau_1 N\varphi_1 + \bar{N}\gamma_5\tau_2 N\varphi_2) \\ &\quad + \frac{i}{2}(g_p - g_n)\bar{N}\gamma_5\tau_3 N\varphi_3 + \frac{i}{2}(g_p + g_n)\bar{N}\gamma_5 N\varphi_3.\end{aligned}$$

若要保证相互作用中同位旋守恒, $\mathscr{L}_I$ 必须是同位旋标量. 充要条件是

$$g_p = -g_n = \frac{g_c}{\sqrt{2}}(=g).$$

这时

$$\mathscr{L}_I = ig\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}N. \tag{5.36}$$

最后,同位旋守恒的 $\pi N$ 场系统的拉氏量密度是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_N + \mathscr{L}_\pi + \mathscr{L}_I, \tag{5.37}$$

于是场方程是

$$\gamma_\mu \partial_\mu N + MN - ig\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} N = 0,$$
$$\partial_\mu \bar{N} \gamma_\mu - M\bar{N} + ig\bar{N}\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0,$$
$$(\Box - m^2)\boldsymbol{\varphi} = -ig\bar{N}\gamma_5 \boldsymbol{\tau} N.$$

并推得哈氏量密度

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_N + \mathscr{H}_\pi + \mathscr{H}_I. \tag{5.38}$$

若明显地考虑粒子反粒子对称，则

$$\mathscr{H}_N = \frac{1}{2}\bar{N}(\gamma_i \partial_i + M)N + \frac{1}{2}N^T(\gamma_i^T \partial_i - M)\bar{N}^T, \tag{5.39}$$

$$\mathscr{H}_\pi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \partial_i \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_i \boldsymbol{\varphi} + m^2 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}), \tag{5.40}$$

$$\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = -\frac{ig}{2}(\bar{N}\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} N - N^T \gamma_5^T \boldsymbol{\tau}^T \cdot \boldsymbol{\varphi} \bar{N}^T), \tag{5.41}$$

对 $i = 1, 2, 3$ 求和. $\boldsymbol{\pi}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的共轭动量.

量子化规则显然是

$$[\varphi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$[\varphi_a(\mathbf{x}, t), \varphi_b(\mathbf{x}', t)] = [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{x}', t)] = 0; \tag{5.42}$$
$$\{N_\sigma(\mathbf{x}, t), N_\rho^+(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\sigma\rho}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\{N_\sigma(\mathbf{x}, t), N_\rho(\mathbf{x}', t)\} = \{N_\sigma^+(\mathbf{x}, t), N_\rho^+(\mathbf{x}', t)\} = 0; \tag{5.43}$$

$a, b = 1, 2, 3$ 是同位旋空间指标; $\sigma, \rho = 1, 2, \cdots, 8$. 两场相互对易

$$[\varphi_a(\mathbf{x}, t), N_\sigma(\mathbf{x}', t)] = [\varphi_a(\mathbf{x}, t), N_\sigma^+(\mathbf{x}', t)] = 0,$$
$$[\pi_a(\mathbf{x}, t), N_\sigma(\mathbf{x}', t)] = [\pi_a(\mathbf{x}, t), N_\sigma^+(\mathbf{x}', t)] = 0. \tag{5.44}$$

从式 (5.43) 得知,

$$\{p_\alpha(\mathbf{x}, t), n_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{p_\alpha(\mathbf{x}, t), n_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} = 0,$$
$$\{p_\alpha^+(\mathbf{x}, t), n_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{p_\alpha^+(\mathbf{x}, t), n_\beta^+(\mathbf{x}', t)\} = 0. \tag{5.45}$$

时空旋量指标 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. 因此，抽象的同位旋对称性要求不同的旋量场相互反对易.

$\pi N$ 场系统的电流密度仍然是式 (5.30). 现在可以改写为

$$j_\mu = \frac{ie}{4}[\bar{N}\gamma_\mu(1+\tau_3)N - N^T\gamma_5^T(1+\tau_3)^T\bar{N}^T] + e(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\varphi})_3. \quad (5.46)$$

电荷则是

$$Q = e\int d^3x\left\{\frac{1}{4}[N^+(1+\tau_3)N - N^T(1+\tau_3)^TN^{+T}] + (\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\pi})_3\right\}. \quad (5.47)$$

相互作用 (5.36) 规范不变, 故电荷守恒.

$\pi N$ 场系统还有另一个重要守恒量,即同位旋. 场系统的同位旋流密度是

$$\mathbf{i}_\mu = \frac{i}{4}(\bar{N}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}N - N^T\gamma_\mu^T\boldsymbol{\tau}^T\bar{N}^T) + \partial_\mu\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\varphi}. \quad (5.48)$$

它既是时空 4-矢量, 也是同位旋 3-矢量. 相互作用 (5.36) 保证同位旋守恒, 即 $\partial_\mu\mathbf{i}_\mu = 0$. 场系统的同位旋则是

$$\mathbf{I} = \int d^3x\,\mathbf{i}_0.$$

$$= \int d^3x\left[\frac{1}{4}(N^+\boldsymbol{\tau}N - N^T\boldsymbol{\tau}^T\bar{N}^T) + \boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\pi}\right]. \quad (5.49)$$

不难证明,同位旋矢量 $\mathbf{I}$ 满足角动量的对易关系

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I} = i\mathbf{I}. \quad (5.50)$$

因此, $\mathbf{I}^2$ 和 $I_3$ 有共同本征态.

比较式 (5.47) 和式 (5.49), 得到下列关系:

$$Q = e\left(I_3 + \frac{B}{2}\right), \quad (5.51)$$

其中

$$B = \frac{1}{2}\int d^3x(N^+N - N^TN^{+T}) \quad (5.52)$$

称为核子 $N$ 的重子数算符. $B$ 也是一个守恒量. 关系式 (5.51)不但对 $\pi N$ 场系统适用,对各自的 $N$ 和 $\pi$ 场也分别适用. (介子的重子数为 0.)

## §5.6 四费米子耦合

许多粒子的衰变过程都通过弱相互作用，如原子核的 $\beta$ 衰变 $n \to pe\bar{\nu}$，$\mu$ 轻子衰变 $\mu \to e\nu\bar{\nu}$，$\mu^-$ 俘获 $\mu^- p \to n\nu$；又如 $\pi$，$K \to e\nu$，$\mu\nu$，$K \to \pi e\nu$，$\pi\mu\nu$ 等等. 弱相互作用有一个特性，即宇称 $P$ 不守恒，也没有粒子反粒子共轭对称性 $C$. 大量实验和理论分析显示了弱相互作用是四费米子耦合型的，而且轻子数和重子数分别守恒.

现以衰变过程 $n \to pe\bar{\nu}$ 作为具体例子来讨论四费米子耦合型弱相互作用. 今以 $\mathcal{Q}_t$ $(t = S, P, V, A, T)$ 表示旋量场的 16 个独立的 4-4 厄米矩阵，即

$$\mathcal{Q}_S = I, \quad \mathcal{Q}_V = \gamma_\mu, \quad \mathcal{Q}_T = \sigma_{\mu\nu},$$
$$\mathcal{Q}_P = \gamma_5, \quad \mathcal{Q}_A = i\gamma_5\gamma_\mu. \tag{5.53}$$

于是重子数、轻子数守恒，但 $P$，$C$ 不守恒的四费米子耦合型拉氏量密度的一般表式是

$$\mathscr{L}_I = \sum_t [C_t(\bar{p}\mathcal{Q}_t n)(\bar{e}\mathcal{Q}_t \nu) + C_t^*(\bar{n}\mathcal{Q}_t p)(\bar{\nu}\mathcal{Q}_t e)]$$
$$+ \sum_t [C_t'(\bar{p}\mathcal{Q}_t n)(\bar{e}\mathcal{Q}_t\gamma_5\nu) - C_t'^*(\bar{n}\mathcal{Q}_t p)(\bar{\nu}\gamma_5\mathcal{Q}_t e)]. \tag{5.54}$$

第一求和项是标量，第二求和项是赝标量. 二项干涉效应导致 $P$，$C$ 不守恒. 式中各因子如 $\bar{p}\mathcal{Q}_t n$，$\bar{e}\mathcal{Q}_t\gamma_5\nu$ 等称为弱流或流. 这里只限于荷电流，即每个流的作用都改变粒子的电荷. 没有考虑中性流（参看 §9.9）. 式 (5.54) 合并后可写为

$$\mathscr{L}_I = \sum_t \{(\bar{p}\mathcal{Q}_t n)[\bar{e}\mathcal{Q}_t(C_t + C_t'\gamma_5)\nu]$$
$$+ (\bar{n}\mathcal{Q}_t p)[\bar{\nu}(C_t^* - C_t'^*\gamma_5)\mathcal{Q}_t e]\}. \tag{5.55}$$

十个耦合常数 $C_t$ 和 $C_t'$ 只能由实验决定.

总结大量实验结果后得到

$$C_S \approx C_S' \approx C_P \approx C_P' \approx C_T \approx C_T' \approx 0,$$

$$C_V \approx C'_V \approx -C_A \approx -C'_A \left(= \frac{G}{\sqrt{2}}\right),$$

即只有 V-A 型四费米子耦合. 这时式 (5.55) 可简化为

$$\mathscr{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{p}\gamma_\lambda(1 + a\gamma_5)n][\bar{e}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu] + [\bar{n}\gamma_\lambda(1 + a\gamma_5)p][\bar{\nu}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)e]\}. \quad (5.56)$$

严格的 V-A 型耦合是 $a = 1$. 但实验分析结果 $a = 1.25$. 这个约 25% 的偏差可能是核子的强相互作用的重整化效应. 对 $\mu$ 轻子衰变过程, V-A 型耦合是相当精确的, 即

$$\mathscr{L}_I(\mu e) = \frac{G}{\sqrt{2}}\{[\bar{\mu}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_\mu][\bar{e}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\nu_e] + [\bar{\nu}_\mu\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\mu][\bar{\nu}_e\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)e]\}. \quad (5.57)$$

这里 $i\bar{\psi}_1\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\psi_2$ 一般称为 V-A 型弱流或 V-A 流. 在上式中, 我们区别了两种中微子: 电子中微子 $\nu_e$ 和 $\mu$ 中微子 $\nu_\mu$. $\nu_e$ 总是同 $e$ 而不同 $\mu$ 一道起作用, 相反, $\nu_\mu$ 只同 $\mu$ 而不同 $e$ 一道起作用. 这是经过实验证明了的. 在式 (5.57) 型弱作用中, $P$ 和 $C$ 不守恒达到了最大效应.

式 (5.56) 和 (5.57) 中都只有一个耦合常数 $G$, 而且基本上相等. 因此这种四费米子耦合称为 V-A 型普适弱相互作用. 实验结果指出:

$$GM_p^2 = 1.01 \times 10^{-5}. \quad (5.58)$$

若把式 (5.56) 与电磁型或赝标型耦合作对比, 相应的耦合常数应为 $f \approx \frac{G}{\sqrt{2}} M_p^2 = 0.7 \times 10^{-5}$. 因此

$$\frac{f^2}{4\pi} \approx 10^{-11}.$$

同 $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 和 $\frac{g^2}{4\pi} = 1$—15 相比是很小的, 所以式(5.56)和(5.57)称为弱相互作用.

最后, 有必要分析一下场论中的量纲问题. 由于 $\mathscr{H}$ 或 $\mathscr{H}_I$

是能量密度，在新单位制（§ 1.1）中，显然 $\mathscr{H} \sim [E]^4$. 由此可以推得各个场场变量的量纲分别是

$$\varphi \sim [E]^1, \quad A_\mu \sim [E]^1, \quad \psi \sim [E]^{3/2}.$$

然后可以推知各种相互作用耦合常数的量纲，如

$$e \sim [E]^0, \quad g \sim [E]^0, \quad G \sim [E]^{-2}.$$

所以在新单位制中，$e$ 和 $g$ 是无量纲的耦合常数.

# 第六章　相互作用表象；散射矩阵；跃迁振幅

在前几章中，我们研究了自由场的量子化问题，它们都有精确解；另一方面，还讨论了有相互作用的场系统．现在最重要的课题是对这种有相互作用的场系统的量子力学问题求解；具体地说，就是求取场系统的不同量子态之间的跃迁振幅和跃迁几率．实践证明，如果采用量子力学的相互作用表象，这个求解问题就会方便得多，而且可以保证明显的协变性．因此，我们首先简单地讨论一下相互作用表象．

## §6.1　量子力学的表象问题

经典力学中，一个动力系的运动状态由任意时刻 $t$ 时各个自由度的坐标 $q_i(t)$ 和动量 $p_i(t)$ 的数值来表示．这是因为只要知道某一时刻 $t$ 的 $q_i$ 和 $p_i$，这个动力系在整个时空中的运动状态就完全确定了．在描述微观动力系运动的量子力学里，$q_i$ 和 $p_i$ 都不是一般的数，而是算符，并且互相不对易

$$[q_i(t),\ p_j(t)] = i\delta_{ij},$$

其中 $i$，$j$ 是自由度指标．因而 $q_i$ 和 $p_i$ 不是同时可以精确测量的力学量(测不准关系)．因此量子力学中没有经典的轨道概念．动力系的一般物理量 $F$ 都是 $q_i$，$p_i$ 的函数，而 $F(q, p)$ 也是算符(这里 $q$ 代表所有的 $q_i$，$p$ 代表所有的 $p_i$)．

另一方面，量子力学引进了一个新概念，即动力系的态，它的表示是态矢 $|\rangle$．它给出动力系的一套完备的、两两相互对易的物理量算符取各组本征值的几率振幅．按照量子力学规律，实验能

测量的物理量 $F$ 的数值是在某个给定态 $|\rangle$ 中算符 $F(q, p)$ 的期待值，即

$$\bar{F} = \langle | F(q, p) | \rangle .$$

假如对动力系的同一个态，我们能找到态矢的另一种表示，记为 $|'\rangle$，同时对力学变量 $q_i$, $p_i$ 和物理量 $F(q, p)$ 也都找到另一种相应的算符表示：$q_i'$, $p_i'$, $F'(q', p')$，使得

$$\langle' | q_i' | '\rangle = \langle | q_i | \rangle, \quad \langle' | p_i' | '\rangle = \langle | p_i | \rangle,$$
$$\langle' | F'(q', p') | '\rangle = \langle | F(q, p) | \rangle .$$

那么，前后两种量子力学表示给出了相同的实验可测量的结果.因此，这两种表示等价. 态矢和力学变量、物理量算符的每一组可能的表示称为动力系的一个量子力学表象. 原则上，表象有无穷多，量子力学有表象不定性. 究竟应当采取哪一种表象，应取决于物理问题的具体特性，以便于数学求解或物理图象的理解.

下面我们只简单地介绍一些与时间 $t$ 有关的量子力学表象. 在这方面，最常用的表象有 $S$ 表象(薛定谔表象)、$H$ 表象(海森堡表象)和 $I$ 表象(相互作用表象).

### 1. $S$ 表象

在学习量子力学时，总要对下列波动方程(态矢运动方程)求解：

$$i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = H(q, p) |t\rangle,$$

$|t\rangle$ 是与时间 $t$ 有关的态矢，$H(q, p)$ 是动力系的厄米哈氏量(即能量)算符. 可观测的物理量 $F(q, p)$ 都是厄米算符，$F^+ = F$. 它在态 $|t\rangle$ 的期待值是

$$\bar{F}(t) = \langle t | F(q, p) | t \rangle,$$

一般与 $t$ 有关. 值得注意的是，在对上面的波动方程求解时，人们假设：作为算符，$q_i$, $p_i$, $H(q,p)$, $F(q, p)$ 都与 $t$ 无关，即 $\dot{q}_i = 0$, $\dot{p}_i = 0$，因而 $\dot{H} = 0$, $\dot{F} = 0$. 这时动力系的时间演化完全表现在态矢 $|t\rangle$ 上. 这就是量子力学的 $S$ 表象.

$S$ 表象（其态矢和算符都用 $S$ 标号）可总结如下：首先算符 $q_{iS}, p_{iS}$ 与 $t$ 无关，即

$$\dot{q}_{iS} = 0, \quad \dot{p}_{iS} = 0; \tag{6.1}$$

并满足对易关系

$$[q_{iS}, p_{jS}] = i\delta_{ij}. \tag{6.2}$$

态矢 $|\rangle_S$ 与 $t$ 有关，并满足波动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_S = H_S|\rangle_S, \tag{6.3}$$

其中 $H_S = H_S(q_S, p_S)$ 是厄米哈氏量算符. 任意物理量也是厄米算符，$F_S(q_S, p_S)$. 由式 (6.1) 得知，$\dot{H}_S = 0$，$\dot{F}_S = 0$. 物理量 $F_S$ 的期待值是

$$\bar{F}_S = {}_S\langle|F_S|\rangle_S. \tag{6.4}$$

由式 (6.1) 和 (6.3) 很容易证明，它的时间演化由下列运动方程决定：

$$\dot{\bar{F}}_S = i_S\langle|[H_S, F_S]|\rangle_S. \tag{6.5}$$

上面就是量子力学 $S$ 表象的基本内容.

## 2. $H$ 表象

假设有一个变换算符（矩阵）$V(t)$，将 $S$ 表象的态矢 $|\rangle_S$ 变换为另一种态矢表示 $|\rangle_H$：

$$|\rangle_H = V|\rangle_S, \quad {}_H\langle| = {}_S\langle|V^+, \tag{6.6}$$

这里 $|\rangle_H$ 和 $|\rangle_S$ 只是动力系同一个态的两个不同表示. 因为几率与态矢表示应无关，所以 $V$ 必须满足

$${}_H\langle|\rangle_H = {}_S\langle|V^+V|\rangle_S = {}_S\langle|\rangle_S;$$

即 $V^+V$ 必须是单位变换算符，$V^+V = I$. 另一方面，式 (6.6) 的反变换是

$$|\rangle_S = V^{-1}|\rangle_H, \quad {}_S\langle| = {}_H\langle|V^{+-1}.$$

这时

$${}_S\langle|\rangle_S = {}_H\langle|(VV^+)^{-1}|\rangle_H = {}_H\langle|\rangle_H,$$

则要求 $VV^+ = I$，于是

$$V^+ = V^{-1}, \tag{6.7}$$

即 $V$ 必须是一个么正变换.

在这个变换下，力学变量 $q_i$, $p_i$ 和任意物理量 $F$ 的期待值必须不变，例如

$$_S\langle|F_S|\rangle_S = {}_H\langle|VF_SV^{-1}|\rangle_H = {}_H\langle|F_H|\rangle_H.$$

因此变换后的算符表示必须是

$$F_H = VF_SV^{-1}. \tag{6.8}$$

反之，$F_S = V^{-1}F_HV$. 若 $F_S^+ = F_S$，则 $F_H^+ = F_H$.

对易关系 (6.2) 在么正变换 $V$ 之下保持不变.

现在来看变换之后的波动方程. 结合式 (6.3) 和式 (6.6) 得到

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_H = (i\dot{V} + VH_S)V^{-1}|\rangle_H,$$

至此我们只知道算符 $V$ 是么正的，并未确定. 今取 $V$ 满足下列方程:

$$\dot{V} = iVH_S. \tag{6.9}$$

由 $\dot{H}_S = 0$ 得到

$$V = e^{iH_St}, \tag{6.10}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_H = 0. \tag{6.11}$$

因此态矢 $|\rangle_H$ 与 $t$ 无关.

变换后的哈氏量算符是

$$H_H = e^{iH_St}H_Se^{-iH_St} = H_S,$$

故哈氏量不变. 变换后物理量算符 (6.8) 的运动方程是

$$\dot{F}_H = i[H_H, F_H]. \tag{6.12}$$

期待值的运动方程则是

$$\dot{\bar{F}}_H = i_H\langle|[H_H, F_H]|\rangle_H = {}_H\langle|\dot{F}_H|\rangle_H. \tag{6.13}$$

在通过这样一个么正变换 $V$ 之后，$S$ 表象转变为一个新表象，称为 $H$ 表象. $H$ 表象的特点是: 动力系的态 $|\rangle_H$ 与 $t$ 无关，见式 (6.11). 与此相反，力学变量算符都与 $t$ 有关. 因此动力系的时

间演化完全表现在这些力学变量算符的性质上. 不论在 $S$ 表象还是在 $H$ 表象，物理量期待值 $\bar{F}$ 的运动方程是一样的，即式 (6.5) 和 (6.13)，并都同经典力学的运动方程 (1.13) 相对应. 这是人们可以预期的结果.

因为 $H$ 表象的态矢 $|\rangle_H$ 与 $t$ 无关，所以在采用 $H$ 表象时，量子力学和经典力学在数学表述形式方面极为相似.

在第二、三、四章讨论自由场量子化和在第五章讨论相互作用时，我们都一直采用 $H$ 表象.

## §6.2 相互作用表象

量子力学的另一种非常有用的表象是相互作用表象 ($I$ 表象). 采用 $I$ 表象时，量子场论的求解问题特别方便. 由于在讨论自由场和相互作用时一直采用 $H$ 表象，我们现在就从 $H$ 表象出发变换到 $I$ 表象.

进行一个变换 $W(t)$:

$$|\rangle_I = W|\rangle_H, \quad {}_I\langle| = {}_H\langle|W^+. \tag{6.14}$$

因为 $|\rangle_I$ 和 $|\rangle_H$ 只是动力系同一个态的不同表示，几率应与变换 $W$ 无关，即 ${}_I\langle|\rangle_I = {}_H\langle|\rangle_H$. 于是，按 §6.1 的同样方法，可以证明 $W$ 必须是一个么正变换:

$$W^+ = W^{-1}. \tag{6.15}$$

当然，任意物理量的期待值也必须与变换无关，即

$${}_H\langle|F_H|\rangle_H = {}_I\langle|WF_HW^{-1}|\rangle_I = {}_I\langle|F_I|\rangle_I.$$

因此变换后的物理量算符应为

$$F_I = WF_HW^{-1}. \tag{6.16}$$

而且若 $F_H^+ = F_H$，则 $F_I^+ = F_I$.

对易关系 (6.2) 对么正变换不变.

按照式 (6.10) 和 (6.14)，变换后的波动方程是

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_I = i\dot{W}W^{-1}|\rangle_I,$$

与变换$W$有关.

按第五章的讨论，$W$变换后的场系统的哈氏量算符 $H_I$ 可写为

$$H_I = H_{I0} + H_{II}, \tag{6.17}$$

式中 $H_{I0}$ 是各个场本身的哈氏量之和，$H_{II}$ 是相互作用哈氏量(都是新表象中的算符). 现在用下面方程来确定$W$：

$$i\dot{W} = H_{II}W. \tag{6.18}$$

于是变换后的波动方程变为

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_I = H_{II}|\rangle_I. \tag{6.19}$$

这样，新表象就确定了. 这时、态矢 $|\rangle_I$ 的时间演化完全由相互作用哈氏量 $H_{II}$ 所决定. 因此新表象就称为相互作用表象或 $I$ 表象.

从式 (6.12)、(6.16)、(6.18) 可以推得 $I$ 表象的物理量算符 $F_I$ 满足运动方程

$$\dot{F}_I = i[H_{I0}, F_I]. \tag{6.20}$$

因此算符 $F_I$ 本身满足没有相互作用时的"自由"动力系的运动规律. 特别有 $\dot{H}_{I0} = 0$，即 $I$ 表象的"自由"动力系的能量算符与 $t$ 无关. 但是同在 $S$ 或 $H$ 表象中一样，$F_I$ 的期待值的运动方程则由总哈氏量 $H_I$ 所决定，即

$$\dot{\bar{F}}_I = i_I\langle|[H_I, F_I]|\rangle_I. \tag{6.21}$$

因此 $\dot{H}_I = 0$，但 $\dot{H}_{I0} \neq 0$，即动力系的总能量守恒而"自由"部分的能量并不守恒. 这是有相互作用的必然结果.

总之，$I$ 表象的特点是：态矢的时间演化完全由相互作用所决定，见式 (6.19)；而力学变量和物理量算符都满足"自由"动力系运动方程，就好象相互作用不存在一样，见式 (6.20).

在没有相互作用时，$I$ 表象显然与 $H$ 表象等同.

$I$ 表象对量子场论的求解问题提供了很大方便. 首先，场算符满足自由场运动规律，这在第二、三、四章中已论述过，而且都是相对论协变的规律. 其次，在相互作用哈氏量算符

$$H_{II} = \int d^3x\mathscr{H}_{II}$$

中，$\mathscr{H}_{II}$ 一般是相对论不变量. 因此波动方程 (6.19) 的解也是

明显协变的(详见第七章). 由于这些原因，量子场论求解问题在 $I$ 表象中进行时非常方便，并能确保求解过程的明显协变性.

## §6.3 量子场论求解；$U$ 矩阵

现在讨论怎样对有相互作用的量子场问题求解. 这将在 $I$ 表象中进行（见 §6.2). 首先，场算符满足自由量子场的运动规律. 因此主要问题在对波动方程 (6.19) 求解. 下面为了书写简单起见，略去代表表象的指标 $I$ 而回到第五章的记号，即仍用 $H_I(t)$ 表示相互作用哈氏量算符（在相互作用表象中). $H_I(t)$ 并不是 $t$ 的显函数，而只是通过场算符与 $t$ 有关. 于是波动方程(6.19)改写为

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_I(t)|t\rangle, \tag{6.22}$$

这里 $|t\rangle$ 代表 $|\rangle_I$. 式 (6.22) 是 $|t\rangle$ 的线性方程，而对 $t$ 又是一个一次微分方程. 因此在求解时，只需要一个初始条件，即某一给定时刻 $t_0$ 的初态矢 $|t_0\rangle$. 任意时刻 $t$ 的态矢 $|t\rangle$ 都可以从 $|t_0\rangle$ 按式 (6.22) 的规律对时间演化得到. 又因为式 (6.22) 是线性的，所以这个思想可用下面的数学式表述出来:

$$|t\rangle = U(t, t_0)|t_0\rangle, \tag{6.23}$$

$U(t, t_0)$ 是一个表示时间演化的变换算符（矩阵)，简称为 $U$ 矩阵. 显然它有下列一些性质:

$$U(t, t) = U(t_0, t_0) = I \text{ (单位矩阵)}, \tag{6.24}$$

$$U(t, t')U(t', t_0) = U(t, t_0), \tag{6.25}$$

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0). \tag{6.26}$$

再按式 (6.22)，$U$ 满足下列波动方程:

$$i\dot{U}(t, t_0) = H_I(t)U(t, t_0). \tag{6.27}$$

在式 (6.22) 中，$H_I^+ = H_I$. 由此可以证明:

$$\frac{d}{dt}\langle t|t\rangle = 0, \quad \langle t|t\rangle = \text{常数}, \tag{6.28}$$

这表示孤立动力系的几率守恒. 这时由式 (6.23) 并结合式(6.28)，

得到

$$\langle t|t\rangle = \langle t_0|U^+(t, t_0)U(t, t_0)|t_0\rangle = \langle t_0|t_0\rangle,$$

故

$$U^+(t, t_0)U(t, t_0) = I.$$

反之，也必须有

$$\langle t_0|t_0\rangle = \langle t|[U(t, t_0)U^+(t, t_0)]^{-1}|t\rangle = \langle t|t\rangle,$$

故

$$U(t, t_0)U^+(t, t_0) = I.$$

因此，$U(t, t_0)$ 是一个么正变换

$$U^+(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0). \tag{6.29}$$

结合式 (6.26)，则有

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0) = U^+(t, t_0). \tag{6.30}$$

总之，对波动方程 (6.22) 求解问题现在转化为求解 $U$ 矩阵的问题. 在相互作用 $H_I(t)$ 给定时，结合式 (6.24) 对方程 (6.27) 进行求解，就得到 $U$ 矩阵.

## §6.4 散射矩阵；跃迁振幅

在第二、三、四章中讨论自由场时，我们对微观粒子运动采取了平面波的极限表示. 因此，场与场之间的相互作用，原则上在整个空间 ($V = \infty$)、整个时间 ($T = \infty$) 里进行(详见 §8.1). 这是理论的抽象. 实际观测的粒子不是抽象的平面波，而是波包，所以有效的相互作用不会在整个空间、整个时间里进行. 但是实践证明，这个理论抽象对实验的实际情况是一个很好的近似. 因此按照量子场论的相互作用理论，一个物理过程中动力系的初态应是它在 $t = -\infty$ 的物理态，即 $|-\infty\rangle$；它的末态应是 $t = \infty$ 的物理态，即 $|\infty\rangle$. 按式 (6.23)，初态末态之间的联系应是

$$|\infty\rangle = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U(t, t_0)|-\infty\rangle.$$

假如 $U$ 矩阵的这个极限存在，我们就记

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} U(t, t_0) = U(\infty, -\infty) = S. \tag{6.31}$$

这时

$$|\infty\rangle = S|-\infty\rangle, \tag{6.32}$$

$S$ 称为散射矩阵. 同$U$矩阵一样，$S$也是么正矩阵，$S^+ = S^{-1}$. 显然$S$由相互作用$H_I$所决定. 没有相互作用时，$S = I$. 这时末态$|\infty\rangle$与初态$|-\infty\rangle$等同，即没有发生任何物理过程.

在物理实验的实际情况中，粒子之间相互作用的有效时间不是$\infty$而是短暂的. 但是相互作用的时间$T$被场论的抽象看作$\infty$(参看§8.1). 实验仪器进行观测的时间，比起粒子间相互作用的有效时间要长得多，按照场论的抽象，实验观测时间比相互作用时间应是更高的$\infty$. 因此实验观测的初态和末态，都是没有相互作用的自由场系统的物理态：初态$|-\infty\rangle$是相互作用发生之前自由场系统的一个物理态，而末态$|\infty\rangle$是相互作用发生之后自由场系统的一个物理态. (这里的物理态特别是指自由的物理粒子态：不同粒子之间虽无相互作用，但每个粒子同它自己的辐射场始终有着相互作用，其结果是实验观测的具有物理质量、物理电荷的物理粒子，而非所谓裸粒子.)

假设自由场系统的初态是一个确定的粒子态，记为$|\rangle_i$. 通过相互作用$H_I$，这个初态就按式(6-32)的规律演化为下列末态：

$$|\infty, i\rangle = S|\rangle_i.$$

按量子力学规律，这个末态一般是许多相互正交的自由场系统本征态的线性迭加. 假设同$|\rangle_i$一样，$|\rangle_f$也是自由场系统的一个确定的粒子态，它可能包含在末态$|\infty, i\rangle$之中. 它包含在$|\infty, i\rangle$之中的几率振幅是

$${}_f\langle|\infty, i\rangle = {}_f\langle|S|\rangle_i.$$

显然这就是从确定的初态$|\rangle_i$通过相互作用$H_I$演化为确定的末态$|\rangle_f$的跃迁振幅，也就是$S$矩阵的$fi$矩阵元，简单地记为

$$S_{fi} = {}_f\langle|S|\rangle_i. \tag{6.33}$$

量子场的相互作用理论的主要任务是首先设法求取各给定物理过程的跃迁振幅$S_{fi}$(详见第七章)，然后再从$S_{fi}$推算各不同物理过程中由实验可以直接测定的跃迁几率(详见第八章).

# 第七章 微扰近似

在第六章里，我们分析了对相互作用中的量子场求解的一般性问题，并指出了什么是物理过程的跃迁振幅. 本章将讨论一个具体的求解方法，即一个计算跃迁振幅的方法.

在第二、三、四章中看到，每个自由场的量子化问题都有精确解. 但是在有相互作用时，问题就复杂了. 几乎所有能够反映实验所总结的关于粒子产生、湮没、相互影响、相互转化等运动规律的相互作用（电磁、强、弱）都没有精确解，因此只能用近似方法求解，而最常用的方法是微扰近似. 这种近似法首先假设相互作用很微弱，波动方程 (6.22) 的解——即 $U$ 矩阵或 $S$ 矩阵，可以对相互作用进行展开，然后再一步一步地对各级展开项进行具体计算. 显然这个方法对微弱的相互作用（如电磁作用和弱作用）原则上是适用的，而对不够微弱的相互作用（如强作用问题）就不是一个好方法. 另一方面，在任何相互作用问题的高级近似项中，一般都出现发散积分. 虽然采用一个适当步骤（称为重整化）有时可以回避这个发散困难，可是事实上并没有真正解决这个困难；而且也只有对少数特殊的相互作用问题（如电磁作用问题）行之有效，对大部分其它相互作用（即便是微弱的四费米子耦合型弱作用）就不适用. 实践证明，微扰近似法在电磁相互作用领域（量子电动力学）里非常有效，而在其它方面（特别是强作用方面）则有很大局限性.

在第五章里，相互作用问题同自由场一样，都是在 $H$ 表象中讨论的. 为了在 $I$ 表象中对相互作用中的量子场问题进行求解，必须先进行 § 6.2 的么正变换. 变换后的场算符仍满足自由场的运动规律，而一切物理量（特别是哈氏量 $H$ 或哈氏量密度 $\mathscr{H}$ ）都是这些场算符的函数. 以后的讨论都将在这样的 $I$ 表象中进行.

## §7.1 微 扰 展 开

现在面临的量子力学问题是在相互作用 $H_I(t)$ 给定时对波动方程 (6.27) 求解，以求取物理过程的 $U$ 矩阵和 $S$ 矩阵. [在一物理过程中，若有几个不同的相互作用，则 $H_I(t)$ 是各相互作用哈氏量之和.] 为了便于求解，我们把微分方程 (6.27) 改写为积分方程形式. 在考虑 $U(t_0, t_0) = I$ 时，就得到

$$U(t, t_0) = I - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)U(t_1, t_0). \tag{7.1}$$

假设相互作用 $H_I(t)$ 很微弱，使得

$$\left|\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)U(t_1, t_0)\right| \ll I, \tag{7.2}$$

就可以对方程 (7.1) 进行迭代展开. 于是得到

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0), \quad U^{(0)}(t, t_0) = I, \tag{7.3}$$

$$U^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \times \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n). \tag{7.4}$$

注意式 (7.4) 中的时间顺序

$$t > t_1 > t_2 > \cdots > t_{n-1} > t_n > t_0,$$

现在定义一个函数

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

称为 $\tau$ 的阶越函数. 利用这个函数，式 (7.4) 可改写为

$$U^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \theta(t_1 - t_2)\cdot \theta(t_2 - t_3)\cdots\theta(t_{n-1} - t_n)H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n). \tag{7.6}$$

这时 $n$ 重积分的上下限都相同了，而被积函数的性质一般都允许对 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的积分顺序任意改变，这对式 (7.6) 的运算可以提供方便.

按式(6.31)的定义，$S$ 矩阵的微扰展开是

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S^{(n)},\quad S^{(0)}=I, \tag{7.7}$$

$$S^{(n)}=(-i)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_1dt_2\cdots dt_n\theta(t_1-t_2)\cdot$$
$$\theta(t_2-t_3)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n). \tag{7.8}$$

但是

$$H_I(t)=\int_{\infty}d^3x\mathscr{H}_I(x),$$

因此式(7.8)可进一步写作下列表式:

$$S^{(n)}=(-i)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_n\theta(t_1-t_2)\cdot$$
$$\theta(t_2-t_3)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\mathscr{H}_I(x_n). \tag{7.9}$$

值得注意的是，相互作用哈氏量密度 $\mathscr{H}_I$ 一般是相对论不变量.(或者,严格地应该说，人们总可以使 $\mathscr{H}_I$ 成为一个不变量.)因此 $S^{(n)}$ 也是相对论不变的算符.

结合式(6.33)，(7.7)，(7.9)，得到从初态 $i$ 通过相互作用 $\mathscr{H}_I$ 转化为末态 $f$ 的物理过程的跃迁振幅

$$S_{fi}=\sum_{n=0}^{\infty}S_{fi}^{(n)}, \tag{7.10}$$

这里

$$S_{fi}^{(n)}={}_f\langle|S^{(n)}|\rangle_i \tag{7.11}$$

称为 $n$ 级微扰跃迁振幅.

## §7.2 场算符的正规乘积

相互作用哈氏量密度 $\mathscr{H}_I$ 是场算符的乘积. 因此散射矩阵 $S$ 或各级微扰项 $S^{(n)}$ 也是场算符的乘积. 每一个场算符都可以分解为粒子的产生和湮没算符. 若要跃迁振幅 $S_{fi}^{(n)}={}_f\langle|S^{(n)}|\rangle_i\neq 0$，必要条件自然是算符 $S^{(n)}$ 能够并恰好湮没初态 $|\rangle_i$ 的所有粒子而又恰好能产生末态 $|\rangle_f$ 的所有粒子. 因此要使 $S^{(n)}$ 中每一个场

算符乘积具有确切的和单一的物理意义，这些乘积中所有的粒子产生算符必须都位于所有湮没算符的左侧. 这样的乘积称为场算符的正规乘积. 又因为所有产生算符都相互对易或反对易，所有湮没算符也都相互对易或反对易，所以每一个正规乘积只能导致一个并仅仅一个初态粒子和末态粒子都确定的物理过程.

记$N$为"正规化"算符. 当$N$作用于一个场算符乘积时，就将这个乘积安排成正规乘积. 在安排的过程中，必须注意场算符之间的对易或反对易，但把所有的对易子和反对易子都当作零. 因此，在安排时，玻色子场算符同所有其它场算符都对易，而费米子场算符都相互反对易. 例如

$$\begin{aligned}
N(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}\psi_\gamma^{(-)}\bar{\psi}_\delta^{(-)}) &= \bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}\psi_\gamma^{(-)}\bar{\psi}_\delta^{(-)} \\
&= -\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\delta^{(-)}\psi_\gamma^{(-)}, \\
N(\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\delta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\gamma^{(-)}) &= -\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\bar{\psi}_\delta^{(-)}\psi_\gamma^{(-)} \\
&= -\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}\psi_\gamma^{(-)}\bar{\psi}_\delta^{(-)}, \\
N(\psi_\alpha^{(-)}\varphi^{(+)}\varphi^{+(-)}\bar{\psi}_\beta^{(+)}) &= -\bar{\psi}_\beta^{(+)}\varphi^{(+)}\varphi^{+(-)}\psi_\alpha^{(-)} \\
&= -\bar{\psi}_\beta^{(+)}\varphi^{(+)}\psi_\alpha^{(-)}\varphi^{+(-)}, \\
N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}A_\mu^{(+)}\psi_\beta^{(+)}) &= -\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)}A_\mu^{(+)} \\
&= -\psi_\beta^{(+)}A_\mu^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)};
\end{aligned}$$

又如

$$\begin{aligned}
N(\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)}) &= \psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)}, \\
N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)}) &= -\psi_\beta^{(+)}\bar{\psi}_\alpha^{(-)},
\end{aligned}$$

故

$$N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\Gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta^{(+)}) = -\psi_\beta^{(+)}\Gamma_{\beta\alpha}^T\bar{\psi}_\alpha^{(-)}.$$

$\Gamma_{\beta\alpha}^T = (\Gamma^T)_{\beta\alpha}$. 若对旋量指标 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ 求和，则得到

$$N(\bar{\psi}^{(-)}\Gamma\psi^{(+)}) = -\psi^{(+)T}\Gamma^T\bar{\psi}^{(-)T}. \tag{7.12}$$

在学习自由场的量子化时，我们曾遇到过无穷大的"零点能"和"零点电荷"(见第二章). 这是由于在用正则方法进行量子化时，我们直接采用了经典场论的能量密度、动量密度、电流电荷密度等表式. 在经典场论中，场变量在任意乘积中的相对位置无关紧要；但在量子化时，场算符之间一般不对易，问题就不同了. 可

是在量子场的情形，并没有理由一定要直接采用各物理量的经典表式. 我们完全可以定义各物理量算符中所有的场算符乘积都是正规乘积，例如标量场（见第二章）的哈氏量密度可定义为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2} N(\pi^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^2). \tag{7.13}$$

这时无穷大的零点能就不再出现了. 相应地从一开始就可以定义拉氏量密度正规乘积

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} N(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + m^2\varphi^2). \tag{7.14}$$

采取这个定义时，零点能和零点电荷自然就一起消失了，而且相互作用拉氏量密度 $\mathscr{L}_I$ 以及哈氏量密度 $\mathscr{H}_I$ 也自然同时应采取正规乘积的表式.

但是即使不采取上述步骤，也可以证明一些相互作用哈氏量密度 $\mathscr{H}_I$ 本身就是正规乘积. 为此，先比较场算符乘积 $\bar{\psi}\Gamma\psi - \psi^T\Gamma^T\bar{\psi}^T$ 和正规乘积 $N(\bar{\psi}\Gamma\psi)$，其中 $\Gamma$ 代表旋量场的任意 4-4 矩阵. 将 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 分解为产生算符和湮没算符，并直接采用平面波表示式 (4.79) 和 (4.80)，可以证明，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\bar{\psi}\Gamma\psi - \psi^T\Gamma^T\bar{\psi}^T) - N(\bar{\psi}\Gamma\psi) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{m}{2E}\sum_r [\bar{u}_r(p)\Gamma u_r(p) - \bar{v}_r(p)\Gamma v_r(p)] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{m}{2E}\sum_r \bar{u}_r(p)(\Gamma + \gamma_5\Gamma\gamma_5)u_r(p).
\end{aligned}$$

显然 $\gamma_\mu + \gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 = 0$. 因此

$$\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T) - N(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) = 0.$$

在 $\Gamma = \gamma_5$ 时，分别有 $\bar{u}_r(p)\gamma_5 u_r(p) = 0$，$\bar{v}_r(p)\gamma_5 v_r(p) = 0$，因此也有

$$\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi - \psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T) - N(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = 0.$$

所以电磁相互作用和赝标耦合型强相互作用哈氏量密度本身就都

是正规乘积，即

$$-\frac{ie}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi^T\gamma_\mu^T\bar{\psi}^T)A_\mu=-ieN(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu),$$

$$-\frac{ig}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi-\psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T)\varphi=-igN(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi), \tag{7.15}$$

$$-\frac{ig}{2}(\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N-N^T\gamma_5^T\boldsymbol{\tau}^T\bar{N}^T)\cdot\boldsymbol{\varphi}=-igN(\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N\cdot\boldsymbol{\varphi}).$$

至于四费米子耦合型弱相互作用哈氏量密度，它是四个完全不同场的场算符乘积，因而总是正规乘积.

## §7.3 一级微扰跃迁振幅

从本节起，我们将分析散射矩阵 $S$ 的几个低级微扰项所导致的物理过程和它们的跃迁振幅.

零级近似项是 $S^{(0)}=I$，故 $S_{fi}^{(0)}=\delta_{fi}$. 所以 $S^{(0)}$ 不导致任何粒子或粒子态的改变. 这是由于在零级近似下，相互作用 $\mathscr{H}_I$ 没有起作用的缘故.

一级微扰项是

$$S^{(1)}=-i\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\mathscr{H}_I(x). \tag{7.16}$$

现以电子和光子的相互作用为例来进行分析. 以下记 $\hat{A}=\gamma_\mu A_\mu$. 按式(7.15)，

$$\mathscr{H}_I(x)=-ieN[\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)]. \tag{7.17}$$

将 $\psi$, $\bar{\psi}$, $A_\mu$ 按式(4.86)和(3.36)分解为产生算符和湮没算符，再应用式(7.12)，就得到

$$\begin{aligned}N[\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)]&=\bar{\psi}^{(+)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(+)}(x)\\&+\bar{\psi}^{(-)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(-)}(x)\\&+\bar{\psi}^{(+)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(-)}(x)\\&-\psi^{(+)T}(x)[\hat{A}^{(+)T}(x)+\hat{A}^{(-)T}(x)]\bar{\psi}^{(-)T}(x).\end{aligned} \tag{7.18}$$

因此 $S^{(1)}$ 是八项之和，每一项都是场算符的正规乘积，所以 $S^{(1)}$ 导致八个不同的一级微扰过程. 它们分别是：

在 $x$ 点正负电子对的产生伴随一个光子的产生或湮没：

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(+)}(x);$$

在 $x$ 点正负电子对的湮没伴随一个光子的产生或湮没：

$$\bar{\psi}^{(-)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(-)}(x);$$

在 $x$ 点电子发射或吸收一个光子：

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)[\hat{A}^{(+)}(x)+\hat{A}^{(-)}(x)]\psi^{(-)}(x);$$

在 $x$ 点正电子发射或吸收一个光子：

$$-\psi^{(+)T}(x)[\hat{A}^{(+)T}(x)+\hat{A}^{(-)T}(x)]\bar{\psi}^{(-)T}(x).$$

现以正负电子对的产生伴随一个光子的湮没的一级电磁过程（$\gamma\to e^+e^-$）为例来确定一级微扰跃迁振幅．这里初态矢和末态矢分别是

$$|\rangle_i=|\gamma\rangle=a_\sigma^+(k)|0\rangle,\quad |\rangle_f=|e^+e^-\rangle=b_r^+(p)d_s^+(q)|0\rangle.$$

上面 $(k,\sigma)$ 是光子态，$\sigma=1,2$（横光子）；$(p,r)$ 是电子态，$(q,s)$是正电子态，$r,s=1,2$（参看第三、四章）．显然式(7.18)中对这个过程有贡献的只是八项中的一项，即 $\bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}^{(-)}(x)\psi^{(-)}(x)$．于是

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(1)}&=-e\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_f\langle|\bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}^{(-)}(x)\psi^{(-)}(x)|\rangle_i\\&=-e\int_{-\infty}^{\infty}d^4x\langle 0|d_s(q)b_r(p)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\gamma_{\mu\alpha\beta}\psi_\beta^{(+)}(x)\\&\quad\times A_\mu^{(-)}(x)a_\sigma^+(k)|0\rangle,\end{aligned}\tag{7.19}$$

式中对旋量指标 $\alpha,\beta=1,2,3,4$ 求和．但是

$$\begin{aligned}A_\mu^{(-)}(x)a_\sigma^+(k)|0\rangle&=[A_\mu^{(-)}(x),a_\sigma^+(k)]|0\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\sum_{\tau=1}^{4}\varepsilon_\mu^\tau(k')e^{ik'x}[a_\tau(k'),a_\sigma^+(k)]|0\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\varepsilon_\mu^\sigma(k)e^{ikx}|0\rangle,\end{aligned}\tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}\langle 0|b_r(p)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)&=\langle 0|\{b_r(p),\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\}\\&=\langle 0|\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p'\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\sum_{r'}\bar{u}_{r'\alpha}(p')e^{-ip'}\{b_r(p),b_{r'}^+(p')\}\end{aligned}$$

$$= \langle 0| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_{r\alpha}(p) e^{-ipx}, \tag{7.21}$$

$$\langle 0|d_s(q)\psi_\beta^{(+)}(x) = \langle 0|\{d_s(q), \psi_\beta^{(+)}(x)\}$$

$$= \langle 0| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q' \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}} \sum_{s'} v_{s'\beta}(q') \cdot$$

$$e^{-iq'x}\{d_s(q), d_{s'}^+(q')\} = \langle 0| \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} v_{s\beta}(q) e^{-iqx}. \tag{7.22}$$

因此当真空态归一时，即 $\langle 0|0\rangle = 1$，式 (7.19) 写为

$$S_{fi}^{(1)} = -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}_{r\alpha}(p) e^{-ipx} \cdot \gamma_{\mu\alpha\beta}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} v_{s\beta}(q) e^{-iqx} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\mu^\sigma(k) e^{ikx}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}_r(p)}_{①} \cdot \underbrace{(-e)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p - q)}_{②}$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} v_s(q)}_{③} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\mu^\sigma(k)}_{④}. \tag{7.23}$$

上式中引用了四维 $\delta$ 函数的定义

$$\delta^{(4)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{\pm ikx} d^4x.$$

这个跃迁振幅 (7.23) 可以用一个图（称为费曼图）来表示，如图 7.1. 这里 $t$ ↑ 表示时轴方向. 曲纹线代表光子，顺时轴的直线代表电子（粒子），逆时轴的直线代表正电子（反粒子）. § 4.2 中证明过，反粒子可以看作逆时向运动的粒子. 反粒子的动量能量是 $q$ 时，逆时向运动的粒子的动量能量是 $-q$（如图 7.1 所示）. 光子线和电子线相交处称为顶点. 顶点代表不同粒子的相互作用. 它在电磁跃迁振幅中的对应

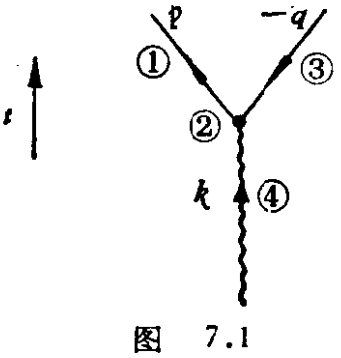


图 7.1

因子是

$$-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q),$$

$\delta^{(4)}(\cdots)$ 表示在这个顶点能量和动量守恒. 电子线、正电子线和光子线在跃迁振幅中的对应因子见图 7.1 和式 (7.23) 中的对应标号 ①, ③, ④.

由于电子和正电子质量相同,光子质量是 0, 能量和动量守恒不能同时满足;因此电子光子的一级电磁过程实际不能发生.

$S^{(1)}$ 所导致的其它七个一级过程也同样可分别用图 7.2 来表

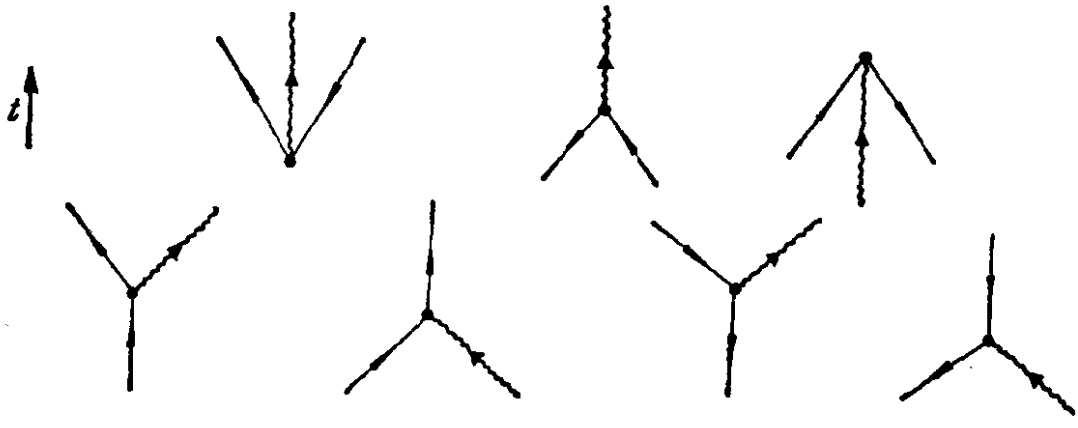



图 7.2

示. 它们的跃迁振幅可用同样方法来确定. 实际上两个费米子质量相同时, 能量和动量同时守恒禁戒了所有这些一级电磁过程.

## §7.4 二级微扰导致的一些物理过程

讨论 $S$ 矩阵的主要目的是要分析各级微扰项 $S^{(n)}$ 可以导致的物理过程, 并推导出任意给定物理过程各级跃迁振幅的一般性规则.为了这个目的,通常都采取一种代数方法[1],把各级微扰的矩阵算符 $S^{(n)}$ 全部约化为正规乘积, 然后再分析每个正规乘积所对应的物理过程, 并在约化过程中找出确定跃迁振幅的一般规则. 现在我们将用另一种方法,即取几个具体物理过程作为对象,来分析

1) 这里指的是先将 $S$ 矩阵表达为编时乘积(即 $T$ 乘积), 然后再运用威克定理约化为正规乘积的一个系统性方法(参看本书附录).

一些低级微扰项对每个这些过程的贡献，并在推导它们的跃迁振幅时，总结出确定跃迁振幅的一般性规则. 采用这个方法时，每一步的物理意义都很明确.

§ 7.3 中已经讨论过一级微扰项 $S^{(1)}$. 现在来分析二级微扰项 $S^{(2)}$，并取下面几个具体的物理过程作为具体的分析对象：

$N\bar{N}$ 散射

$ee$ 散射

$\gamma e$ 散射

真空极化

我们将看到，从这几个过程的二级微扰分析中，已足够总结出确定所有物理过程的各级微扰跃迁振幅的一般性规则(费曼规则).

### 1. 核子反核子散射跃迁振幅

$N\bar{N}$ 散射是最简单的二级微扰过程之一，我们首先来对它进行分析. 这个反应是

$$\underset{(p,r)}{N} + \underset{(q,s)}{\bar{N}} \to \underset{(p',r')}{N} + \underset{(q',s')}{\bar{N}}$$

各粒子态已标示如上. $r, s, r', s' = 1, 2$ 是费米子自旋态指标. 这个过程的初态矢和末态矢分别是

$$|\rangle_i = d_s^+(q)b_r^+(p)|0\rangle, \quad |\rangle_f = b_{r'}^+(p')d_{s'}^+(q')|0\rangle.$$

为了简单起见，这里只考虑 $\pi^0 N$ 强相互作用，于是按照 § 7.2 的讨论结果，相互作用哈氏量密度是

$$\mathscr{H}_I(x) = -igN[\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x)]. \tag{7.24}$$

显然 $N\bar{N}$ 散射的最低级微扰贡献是二级的. 因此必须考虑

$$S^{(2)} = (-g)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1d^4x_2\theta(t_1-t_2)N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)$$

$$\times N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2). \tag{7.25}$$

这里记 $\psi_1 = \psi(x_1)$, $\psi_2 = \psi(x_2)$, $\varphi_1 = \varphi(x_1)$ 等等.

下面我们只分析 $N\bar{N} \to N\bar{N}$ 的散射道而不考虑湮没道效应，即在这个过程中，$N \to N$, $\bar{N} \to \bar{N}$.

现将 $\psi$, $\bar{\psi}$ 先分解为产生和湮没算符而 $\varphi$ 暂不分解，得到

$$N(\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi) = \bar{\psi}^{(+)}\gamma_5\psi^{(+)}\varphi + \bar{\psi}^{(-)}\gamma_5\psi^{(-)}\varphi + \bar{\psi}^{(+)}\gamma_5\psi^{(-)}\varphi - \psi^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}^{(-)T}\varphi. \tag{7.26}$$

显然 $N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2)$ 共有 16 项. 每一项都是六个场算符的乘积. 首先要分析这 16 项中哪些项对 $N\bar{N}$ 散射有贡献，即有不等于 0 的跃迁振幅，

$$S_{fi}^{(2)} = \langle 0|d_{s'}(q')b_{r'}(p')S^{(2)}d_s^+(q)b_r^+(p)|0\rangle. \tag{7.27}$$

为了书写方便，我们作如下定义. $A$ 和 $B$ 是两个算符，$A \neq B$，但是 ${}_f\langle|A|\rangle_i = {}_f\langle|B|\rangle_i$，则记

$$A \Rightarrow B. \tag{7.28}$$

即对于给定的初态 $i$ 和末态 $f$，$A$ 和 $B$ 给出相同的跃迁振幅，因此 $A$ 等价于 $B$.

今在 $N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2)$ 的 16 项中，试看 $\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(+)}\cdot\varphi_1\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(+)}\varphi_2$ 或 $\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(+)}\varphi_1\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(-)}\varphi_2$. 对旋量场而言，这些项都已是正规乘积，但对 $N\bar{N}$ 散射显然没有贡献. 又如 $\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(+)}\cdot\varphi_1\bar{\psi}_2^{(-)}\gamma_5\psi_2^{(-)}\varphi_2$, $\bar{\psi}_1^{(-)}\gamma_5\psi_1^{(-)}\varphi_1\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(+)}\varphi_2$ 虽有贡献，但只通过湮没道起作用，这里都不考虑. 对 $N\bar{N}$ 散射过程的散射道有贡献的显然只有下面两项:

$$-\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(-)}\varphi_1\psi_2^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}^{(-)T}\varphi_2, \quad -\psi_1^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}_1^{(-)T}\varphi_1\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(-)}\varphi_2.$$

于是按式 (7.28) 的定义，

$$N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2) \Rightarrow -\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(-)}\psi_2^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}_2^{(-)T}\varphi_1\varphi_2 - \psi_1^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}_1^{(-)T}\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(-)}\varphi_1\varphi_2. \tag{7.29}$$

但是两项都还不是正规乘积. 现在必须把每一项约化为若干正规乘积之和，再按式 (7.28) 的定义，只保留那些对 $N\bar{N}$ 散射有贡献的乘积. 首先约化介子场算符乘积

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(-)} + \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)} + \varphi_2^{(+)}\varphi_1^{(-)} + [\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}] \Rightarrow [\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}]. \tag{7.30}$$

于是式 (7.29) 的第一项约化为

$$-\bar{\psi}_1^{(+)}\gamma_5\psi_1^{(-)}\psi_2^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}_2^{(-)T}\varphi_1\varphi_2 \Rightarrow -\bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\psi_{2\beta'}^{(+)}\gamma_{5\beta\beta'}\psi_{2\beta}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}]$$

$$= \bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\psi_{2\beta'}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\gamma_{5\beta\beta'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}],$$

式中对旋量指标 $\alpha, \beta, \alpha', \beta' = 1, 2, 3, 4$ 求和. 同样,式(7.29)的第二项约化为

$$\begin{aligned}
&- \psi_1^{(+)T}\gamma_5^T\bar{\psi}_1^{(-)T}\bar{\psi}_2^{(+)}\gamma_5\psi_2^{(-)}\varphi_1\varphi_2 \\
&\Leftrightarrow - \psi_{1\beta'}^{(+)}\gamma_{5\beta\beta'}\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}\bar{\psi}_{2\alpha}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\psi_{2\alpha'}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}] \\
&= \bar{\psi}_{2\alpha}^{(+)}\psi_{1\beta'}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\gamma_{5\beta\beta'}\psi_{2\alpha'}^{(-)}\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}].
\end{aligned}$$

于是式(7.27)写为

$$\begin{aligned}
&N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2) \\
&\Leftrightarrow \bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\psi_{2\beta'}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\gamma_{5\beta\beta'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}] \\
&+ \bar{\psi}_{2\alpha}^{(+)}\psi_{1\beta'}^{(+)}\gamma_{5\alpha\alpha'}\gamma_{5\beta\beta'}\psi_{2\alpha'}^{(-)}\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}[\varphi_1^{(-)}, \varphi_2^{(+)}].
\end{aligned} \tag{7.31}$$

将式(7.31)代入(7.25),得到

$$\begin{aligned}
S^{(2)} \Leftrightarrow (-g)^2 \iint & d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_{\beta'}^{(+)}(x_2)\gamma_{5\alpha\alpha'}\Delta_F^0(x_1 - x_2) \\
& \times \gamma_{5\beta\beta'}\psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2),
\end{aligned} \tag{7.32}$$

这里

$$\begin{aligned}
\Delta_F^0(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}\Delta_F(x_1 - x_2) &= \theta(t_1 - t_2)[\varphi_{(x_1)}^{(-)}, \varphi^{(+)}(x_2)] \\
&+ \theta(t_2 - t_1)[\varphi^{(-)}(x_2), \varphi^{(+)}(x_1)]
\end{aligned} \tag{7.33}$$

称为 $(x_1, x_2)$ 之间量子介子场的传播函数($\Delta_F$ 是通常采用的符号). 它的物理意义如下: 在 $t_1 > t_2$ 时只有第一项, 这时先在 $x_2$ 由 $\varphi^{(+)}(x_2)$ 产生一个介子,而到 $x_1$ 再由 $\varphi^{(-)}(x_1)$ 湮没, 见图 7.3

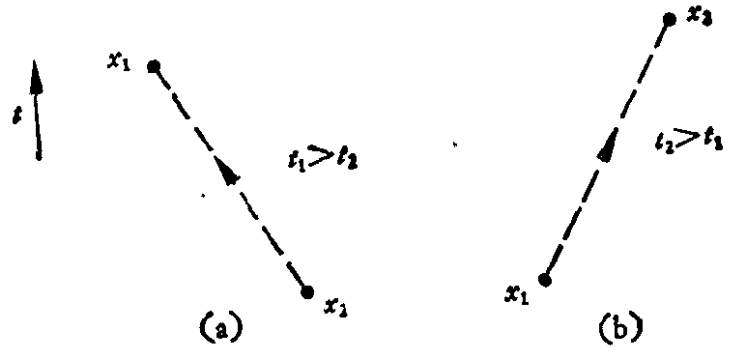



图 7.3

(a). 在 $t_2 > t_1$ 时,只有第二项,这时先在 $x_1$ 由 $\varphi^{(+)}(x_1)$ 产生一个介子,而到 $x_2$ 再由 $\varphi^{(-)}(x_2)$ 湮没,见图 7.3(b). $\Delta_F^0(x_1 - x_2)$ 代表

量子介子场在 $(x_1, x_2)$ 之间的总传播效应. 很明显，$\Delta_F^0(x)$ 是 $x$ 的偶函数，总传播效应 $\Delta_F^0(x_1 - x_2)$ 无方向性，一般用 $(x_1, x_2)$ 之间一条无箭头的虚线来表示，如图 7.4

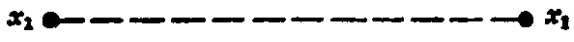



图 7.4

现在可以求 $N\bar{N}$ 散射过程的跃迁振幅了. 结合式 (7.27) 和 (7.32)，得到

$$S_{fi}^{(2)} = (-g)^2 \int\int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | b_{r'}(p') d_{s'}(q') \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x_1) \psi_{\beta'}^{(+)}(x_2) \gamma_{5\alpha\alpha'} \times \Delta_F^0(x_1 - x_2) \gamma_{5\beta\beta'} \psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x_2) d_s^+(q) b_r^+(p) | 0 \rangle.$$

再按式 (7.21)，(7.22) 的同样方法，可以证明：

$$\psi_{\alpha}^{(-)}(x_1) \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x_2) b_r^+(p) d_s^+(q) | 0 \rangle$$
$$= \{\psi_{\alpha}^{(-)}(x_1), b_r^+(p)\} \{\bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x_2), d_s^+(q)\} | 0 \rangle$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_p}} u_{r\alpha}(p) e^{ipx_1} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_q}} \bar{v}_{s\beta}(q) e^{iqx_2} | 0 \rangle,$$

$$\langle 0 | d_s(q) b_r(p) \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x_1) \psi_{\beta}^{(+)}(x_2)$$
$$= \langle 0 | \{b_r(p), \bar{\psi}_{\alpha}^{(+)}(x_1)\} \{d_s(q), \psi_{\beta}^{(+)}(x_2)\}$$
$$= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_p}} \bar{u}_{r\alpha}(p) e^{-ipx_1} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_q}} v_{s\beta}(q) e^{-iqx_2},$$

式中 $M$ 是核子质量. 设真空态归一，$\langle 0 | 0 \rangle = 1$. 最后得到

$$S_{fi}^{(2)} = \iint d^4x_1 d^4x_2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_{p'}}} \bar{u}_{r'}(p') e^{-ip'x_1} \cdot (-g)\gamma_5 \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_p}} u_r(p) e^{ipx_1} \cdot \Delta_F^0(x_1 - x_2) \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_q}} \bar{v}_s(q) e^{iqx_2} \cdot (-g)\gamma_5 \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_{q'}}} v_{s'}(q') e^{-iq'x_2}. \tag{7.34}$$

这个跃迁振幅的意义很清楚：核子 $N$ 在 $x_1$ 点受到 $\pi^0$ 场的散射作用，而反核子 $\bar{N}$ 在 $x_2$ 点受到类似的作用. 介子场在 $x_1$ 与 $x_2$

之间则起传播作用. 式(7.34)可以用一个图(坐标空间的费曼图)来表示,但用处不大,所以未画出.

从 $N\bar{N}$ 散射过程分析中推导出介子场的传播函数 $\Delta_F^0(x_1-x_2)$ 以及产生和湮没一个费米子和反费米子的各个对应因子.

## 2. 电子电子散射跃迁振幅

这是一个类似于 $N\bar{N}$ 散射的过程,不过这里初态和末态都是两个全同粒子,因而比较复杂:

$$\overset{e}{(p,r)} + \overset{e}{(p',r')} \rightarrow \overset{e}{(q,s)} + \overset{e}{(q',s')}$$

各粒子态如上标示. 初态矢和末态矢分别是

$$|\rangle_i = b_r^+(p)b_{r'}^+(p')|0\rangle, \quad |\rangle_f = b_s^+(q)b_{s'}^+(q')|0\rangle.$$

这里考虑电磁相互作用,哈氏量密度是式(7.17). 显然 $ee$ 散射至少要通过二级微扰效应. 为了计算方便,取 $S^{(2)}$ 的对称化形式:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}(-e)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1d^4x_2[\theta(t_1-t_2)N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2) + \theta(t_2-t_1)N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)], \tag{7.35}$$

这里 $\psi_1=\psi(x_1)$, $\psi_2=\bar{\psi}(x_2)$, $A_{2\mu}=A_\mu(x_2)$, $\cdots$. 现在先将旋量场算符分解为产生算符和湮没算符:

$$\begin{aligned} N(\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x)) &= \bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}(x)\psi^{(+)}(x) \\ &+ \bar{\psi}^{(-)}(x)\hat{A}(x)\psi^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}(x)\psi^{(-)}(x) \\ &- \psi^{(+)T}(x)\hat{A}^T(x)\bar{\psi}^{(-)T}(x), \end{aligned} \tag{7.36}$$

则 $N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)$ 共有 16 项. 首先分析哪些项对 $ee$ 散射过程有贡献. 因为初态和末态都是两个电子(粒子,无反粒子),16 项中只有一项有贡献,即 $\bar{\psi}_1^{(+)}\hat{A}_1\psi_1^{(-)}\bar{\psi}_2^{(+)}\hat{A}_2\psi_2^{(-)}$. 还要把它约化为正规乘积,并只保留对 $ee$ 散射有贡献的乘积. 首先约化电磁场算符乘积;对 $ee$ 散射而言,显然

$$A_{1\mu}A_{2\nu} \backsim [A_{1\mu}^{(-)}, A_{2\nu}^{(+)}],$$

于是

$$N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1)N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2) \overset{\sim}{=} \bar{\psi}_1^{(+)}\hat{A}_1\psi_1^{(-)}\bar{\psi}_2^{(+)}\hat{A}_2\psi_2^{(-)}$$
$$= \bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha\alpha'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\psi_{2\beta'}^{(-)}A_{1\mu}A_{2\nu}$$
$$\overset{\sim}{=} -\bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\psi_{2\beta}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha\alpha'}\gamma_{\nu\beta\beta'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\psi_{2\beta'}^{(-)}[A_{1\mu}^{(-)}A_{2\nu}^{(+)}].$$

同样

$$N(\bar{\psi}_2\hat{A}_2\psi_2)N(\bar{\psi}_1\hat{A}_1\psi_1) \overset{\sim}{=} \bar{\psi}_2^{(+)}\hat{A}_2\psi_2^{(-)}\bar{\psi}_1^{(+)}\hat{A}_1\psi_1^{(-)}$$
$$\overset{\sim}{=} -\bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha\alpha'}\gamma_{\nu\beta\beta'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\psi_{2\beta'}^{(-)}[A_{2\nu}^{(-)}, A_{1\mu}^{(+)}].$$

代入式(7.35)，得到

$$S^{(2)} \overset{\sim}{=} \frac{1}{2}(-e)^2\iint d^4x_1d^4x_2\bar{\psi}_{1\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha\alpha'}\gamma_{\nu\beta\beta'}\psi_{1\alpha'}^{(-)}\psi_{2\beta'}^{(-)}$$
$$\times\{\theta(t_1-t_2)[A_{1\mu}^{(-)}, A_{2\nu}^{(+)}] + \theta(t_2-t_1)[A_{2\nu}^{(-)}, A_{1\mu}^{(+)}]\}$$
$$= \frac{1}{2}(-e)^2\iint d^4x_1d^4x_2\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2)\gamma_{\mu\alpha\alpha'}\cdot$$
$$D_F^0(x_1-x_2)_{\mu\nu}\cdot\gamma_{\nu\beta\beta'}\psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1)\psi_{\beta'}^{(-)}(x_2), \qquad (7.37)$$

式中

$$D_F^0(x_1-x_2) = \theta(t_1-t_2)[A_\mu^{(-)}(x_1), A_\nu^{(+)}(x_2)]$$
$$+\theta(t_2-t_1)[A_\nu^{(-)}(x_2), A_\mu^{(+)}(x_1)] \qquad (7.38)$$

称为 $(x_1, x_2)$ 之间的量子电磁场的传播函数. 在式(7.38)中，当 $t_1 > t_2$ 时只有第一项，其物理意义是：先在 $x_2$ 点由 $A_\nu^{(+)}(x_2)$ 产生一个分量 $\nu$ 的光子，到 $x_1$ 点转化为分量 $\mu$ 的光子，并由 $A_\mu^{(-)}(x_1)$ 湮没，见图 7.5 (a). 在 $t_2 > t_1$ 时只有第二项. 这时先在 $x_1$ 点由 $A_\mu^{(+)}(x_1)$ 产生一个分量 $\mu$ 的光子，而到 $x_2$ 点转化为分量 $\nu$ 的光子，并由 $A_\nu^{(-)}(x_2)$ 加以湮没，见图 7.5 (b). 传播函数(7.38)表示量子电磁场的总传播效应. 容易证明，$D_F^0(x)_{\mu\nu}$ 是 $x$ 的偶函数，总传播效应无方向性，一般用 $(x_1, x_2)$ 之间的一条曲线表示，见图 7.6.

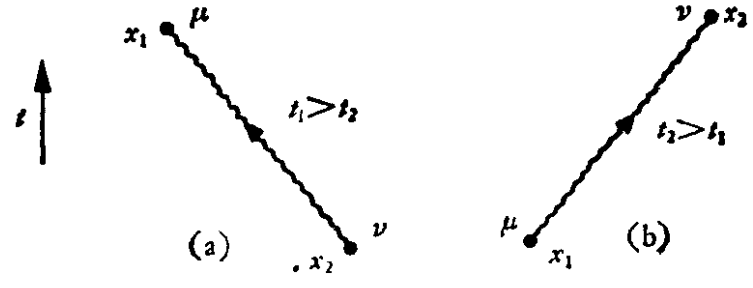



图 7.5

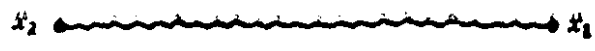



图 7.6

由式(7.37)可推得 $ee$ 散射的二级微扰跃迁振幅

$$S_{fi}^{(2)} = -\frac{1}{2}(-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | b_{s'}(q') b_s(q) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \times \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2) \gamma_{\mu\alpha\alpha'} \cdot D_F^0(x_1 - x_2)_{\mu\nu} \cdot \gamma_{\nu\beta\beta'} \psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1) \times \psi_{\beta'}^{(-)}(x_2) b_r^+(p) b_{r'}^+(p') | 0 \rangle .$$

可以证明,

$$\psi_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(-)}(x_2) b_r^+(p) b_{r'}^+(p') | 0\rangle = -(\{\psi_\alpha^{(-)}(x_1), b_r^+(p)\}\{\psi_\beta^{(-)}(x_2), b_{r'}^+(p')\} - \{\psi_\alpha^{(-)}(x_1), b_{r'}^+(p')\}\{\psi_\beta^{(-)}(x_2), b_r^+(p)\}) | 0\rangle ,$$

$$\langle 0 | b_{s'}(q') b_s(q) \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1) \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2) = \langle 0 | (\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1), b_s(q)\}\{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2), b_{s'}(q')\} - \{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1), b_{s'}(q')\}\{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2), b_s(q)\} .$$

将这些结果代入前式,再通过合并后就得到

$$S_{fi}^{(2)} = (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 [\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1), b_s(q)\} \times \{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2), b_{s'}(q')\} \gamma_{\mu\alpha\alpha'} \cdot D_F^0(x_1 - x_2)_{\mu\nu} \times \gamma_{\nu\beta\beta'} \{\psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1), b_r^+(p)\}\{\psi_{\beta'}^{(-)}(x_2), b_{r'}^+(p')\} - \{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1), b_{s'}(q')\}\{\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2), b_s(q)\}\gamma_{\mu\alpha\alpha'} \cdot D_F^0(x_1 - x_2)_{\mu\nu} \cdot \gamma_{\nu\beta\beta'} \{\psi_{\alpha'}^{(-)}(x_1), b_r^+(p)\}\{\psi_{\beta'}^{(-)}(x_2), b_{r'}^+(p')\}] . \quad (7.39)$$

但是

$$\{\psi_\alpha^{(-)}(x), b_r^+(p)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_{r\alpha}(p) e^{ipx},$$

$$\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x), b_r(p)\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \bar{u}_{r\alpha}(p) e^{-ipx},$$

于是 $ee$ 散射二级微扰振幅 (7.39) 最后写为

$$S_{fi}^{(2)} = \iint d^4x_1 d^4x_2 \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \bar{u}_s(q) e^{-iqx_1} \cdot (-e\gamma_\mu) \right.$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u_r(p)e^{ipx_1}\cdot D_F^0(x_1-x_2)_{\mu\nu}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\,\bar{u}_{s'}(q')e^{-iq'x_2}\cdot(-e\gamma_\nu)$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\,u_{r'}(p')e^{ip'x_2}$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\,\bar{u}_{s'}(q')e^{-iq'x_1}\cdot(-e\gamma_\mu)$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u_r(p)e^{ipx_1}\cdot D_F^0(x_1-x_2)_{\mu\nu}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\,\bar{u}_s(q)e^{-iqx_2}\cdot(-e\gamma_\nu)$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\,u_{r'}(p')e^{ip'x_2}\Bigg]. \tag{7.40}$$

注意这个振幅有两项，而且是两项之差.

从 $ee$ 散射过程的分析中，推导出了量子电磁场的传播函数 $D_F^0(x_1-x_2)_{\mu\nu}$ 以及产生和湮没电子的各个对应因子.

### 3. 光子电子散射跃迁振幅

我们这里要分析的过程是

$$\underset{(k,\sigma)}{\gamma} + \underset{(p,r)}{e} \rightarrow \underset{(l,\tau)}{\gamma} + \underset{(q,s)}{e}$$

这里 $r,s=1,2$（电子自旋态）；$\sigma,\tau=1,2$（横光子极化）. 初态矢和末态矢分别是

$$|\rangle_i = a_\sigma^+(k)b_r^+(p)|0\rangle,\quad |\rangle_f = a_\tau^+(l)b_s^+(q)|0\rangle.$$

$\gamma e$ 散射是电磁过程，相互作用哈氏量密度仍然是式 (7.17). 这个过程至少是二级微扰效应. 二级 $S$ 矩阵是

$$S^{(2)} = (-e)^2\iint d^4x_1d^4x_2\theta(t_1-t_2)N(\psi_1\hat{A}_1\psi_1)N(\psi_2\hat{A}_2\psi_2). \tag{7.41}$$

这时 $N(\psi_1\hat{A}_1\psi_1)N(\psi_2\hat{A}_2\psi_2)$ 的 16 项中有两项对 $\gamma e$ 散射有贡献，

即

$$N(\phi_1\hat{A}_1\phi_1)N(\phi_2\hat{A}_2\phi_2) \overset{\frown}{\circ} \bar{\phi}_1^{(+)}\hat{A}_1\phi_1^{(-)}\bar{\phi}_2^{(+)}\hat{A}_2\phi_2^{(-)} + \bar{\phi}_1^{(-)}\hat{A}_1\phi_1^{(-)}\bar{\phi}_2^{(+)}\hat{A}_2\phi_2^{(+)}. \tag{7.42}$$

再把每一项约化为正规乘积，并只保留那些对 $\gamma e$ 散射有贡献的乘积. 首先约化电磁场算符乘积;对 $\gamma e$ 散射,显然

$$A_{1\mu}A_{2\nu} \overset{\frown}{\circ} A_{1\mu}^{(+)}A_{2\nu}^{(-)} + A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)}, \tag{7.43}$$

于是式(7.42)的第一项约化为

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1^{(+)}\hat{A}_1\phi_1^{(-)}\bar{\phi}_2^{(+)}\hat{A}_2\phi_2^{(-)} &= \bar{\phi}_{1\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\phi_{1\alpha}^{(-)}\bar{\phi}_{2\beta}^{(+)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{2\beta'}^{(-)}A_{1\mu}A_{2\nu}\\ &\overset{\frown}{\circ} \bar{\phi}_{1\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}(-\bar{\phi}_{2\beta}^{(+)}\phi_{1\alpha}^{(-)} + \{\phi_{1\alpha}^{(-)}, \bar{\phi}_{2\beta}^{(+)}\})\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{2\beta'}^{(-)}(A_{1\mu}^{(+)}A_{2\nu}^{(-)}\\ &+ A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)}) \overset{\frown}{\circ} \bar{\phi}_{1\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\phi_{1\alpha}^{(-)}, \bar{\phi}_{2\beta}^{(+)}\}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{2\beta'}^{(-)}(A_{1\mu}^{(+)}A_{2\nu}^{(-)}\\ &+ A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)}),\end{aligned}$$

式中对旋量指标 $\alpha, \beta, \alpha', \beta' = 1, 2, 3, 4$ 求和. 同样,式(7.42)的第二项约化为

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1^{(-)}\hat{A}_1\phi_1^{(-)}\bar{\phi}_2^{(+)}\hat{A}_2\phi_2^{(+)} &= \bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{1\beta'}^{(-)}\bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\phi_{2\alpha}^{(+)}A_{1\nu}A_{2\mu}\\ &\overset{\frown}{\circ} \bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}\gamma_{\nu\beta\beta'}(-\bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\phi_{1\beta'}^{(-)} + \{\phi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\})\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\phi_{2\alpha}^{(+)}(A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\\ &+ A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)}) \overset{\frown}{\circ} -\bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}\bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{1\beta'}^{(-)}\phi_{2\alpha}^{(+)}(A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\\ &+ A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)}) = -\bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}\phi_{2\alpha}^{(+)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{1\beta'}^{(-)}(A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\\ &+ A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)}) \overset{\frown}{\circ} -\bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}, \phi_{2\alpha}^{(+)}\}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{1\beta'}^{(-)}(A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)}\\ &+ A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}).\end{aligned}$$

把上面的结果代入式(7.42)，就得到

$$\begin{aligned}&N(\bar{\phi}_1\hat{A}_1\phi_1)N(\bar{\phi}_2\hat{A}_2\phi_2)\\ &\overset{\frown}{\circ} \bar{\phi}_{1\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\phi_{1\alpha}^{(-)}, \bar{\phi}_{2\beta}^{(+)}\}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{2\beta'}^{(-)}(A_{1\mu}^{(+)}A_{2\nu}^{(-)} + A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)})\\ &- \bar{\phi}_{2\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\bar{\phi}_{1\beta}^{(-)}, \phi_{2\alpha}^{(+)}\}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{1\beta'}^{(-)}(A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)} + A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}).\end{aligned}$$

将此式代入式(7.41)得到

$$\begin{aligned}S^{(2)} &\overset{\frown}{\circ} (-e)^2\iint d^4x_1d^4x_2\bar{\phi}_{1\alpha'}^{(+)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}S_F^0(x_1 - x_2)_{\alpha\beta}\gamma_{\nu\beta\beta'}\phi_{2\beta'}^{(-)}\cdot\\ &\quad (A_{1\mu}^{(+)}A_{2\nu}^{(-)} + A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)})\\ &= (-e)^2\iint d^4x_1d^4x_2[A_\mu^{(+)}(x_1)\phi^{(+)}(x_1)\gamma_\mu S_F^0(x_1 - x_2)\cdot\\ &\quad \gamma_\nu\phi^{(-)}(x_2)A_\nu^{(-)}(x_2) + A_\mu^{(+)}(x_2)\bar{\phi}^{(+)}(x_1)\gamma_\nu S_F^0(x_1 - x_2)\cdot\end{aligned}$$

$$\gamma_\mu \psi^{(-)}(x_2) A_\nu^{(-)}(x_1)\Big], \tag{7.44}$$

式中

$$\begin{aligned} S_F^0(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} S_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} \\ &= \theta(t_1 - t_2)\{\psi_\alpha^{(-)}(x_1), \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2)\} \\ &\quad - \theta(t_2 - t_1)\{\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2), \psi_\alpha^{(+)}(x_1)\}, \end{aligned} \tag{7.45}$$

称为量子旋量场从 $x_2$ 到 $x_1$ 的传播函数. ($S_F$ 是通常采用的记号.)它的物理意义是: 在 $t_1 > t_2$ 时,只有第一项,这时在 $x_2$ 点由算符 $\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x_2)$ 产生一个电子 $e^-$, 而到 $x_1$ 点由算符 $\psi_\alpha^{(-)}(x_1)$ 湮没, 见图 7.7 (a). 在 $t_2 > t_1$ 时, 只有第二项, 这时先在 $x_1$ 点由 $\psi_\alpha^{(+)}(x_1)$ 产生一个正电子 $e^+$, 而到 $x_2$ 点再由 $\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x_2)$ 湮没, 见图 7.7 (b). $S_F^0(x_1 - x_2)$ 代表从 $x_2$ 到 $x_1$ 的正反粒子都贡献的总的传

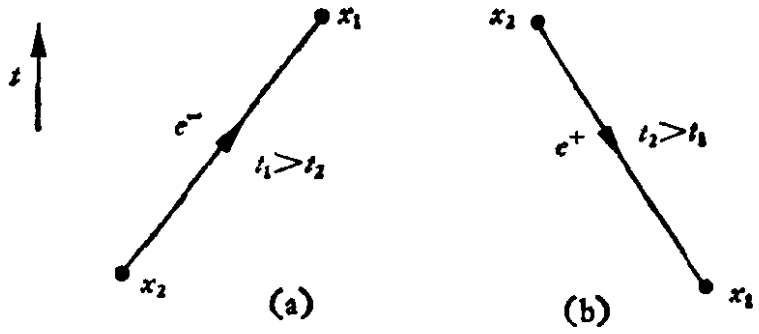



图 7.7

播效应. 显然 $S_F^0(x)$ 是 $x$ 的奇函数. 总传播效应 $S_F^0(x_1 - x_2)$ 有方向性: $x_2 \to x_1$, 可以用从 $x_2$ 向 $x_1$ 的一个带箭头的直线表示如图 7.8.




图 7.8

最后利用式 (7.20) 和 (7.21), 从式 (7.44) 就得到 $\gamma e$ 散射的二级微扰跃迁振幅;

$$S_{fi}^{(2)} = (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | b_s(q) a_r(l) S^{(2)} a_\sigma^+(k) b_\tau^+(p) | 0 \rangle$$

$$= \iint d^4x_1 d^4x_2 \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \varepsilon_\nu^\tau(l) e^{-ilx_1} \right.$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \bar{u}_s(q) e^{-iqx_1} \cdot (-e\gamma_\nu) \cdot S_F^0(x_1 - x_2)$$

$$\times (-e\gamma_\mu) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_r(p) e^{ipx_2}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\mu^\sigma(k) e^{ikx_2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\mu^\sigma(k) e^{ikx_1}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \bar{u}_s(q) e^{-iqx_1} \cdot (-e\gamma_\nu) \cdot S_F^0(x_1 - x_2)$$

$$\times (-e\gamma_\mu) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u_r(p) e^{ipx_2}$$

$$\left. \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \varepsilon_\nu^\tau(l) e^{-ilx_2} \right]. \tag{7.46}$$

这个振幅是两项之和.

从 $\gamma e$ 散射过程的分析中推导了量子旋量场的传播函数 $S_F^0(x_1 - x_2)$ 以及产生和湮没光子和电子的各个对应因子.

### 4. 真空极化振幅

现在讨论二级微扰真空极化问题. 还是用电磁相互作用为例子. 光子可以产生正负电子对，而正负电子对又湮没为光子(参看 § 7.3). 这是一个 $\gamma \to \gamma$ 的简单过程，通过量子旋量场的传播效应而进行. 这是一个纯粹量子力学效应，是光子的自能问题. 但也可以理解为电磁场的存在通过正负电子对的产生和湮没而导致旋量场的真空极化.

有待分析的过程是

$$\overset{\gamma}{(k, \sigma)} \quad \to \quad \overset{\gamma}{(l, \tau)}$$

现在计算它的二级微扰跃迁振幅. 初态矢和末态矢显然是

$$|\rangle_i = a_\sigma^+(k)|0\rangle, \quad |\rangle_f = a_\tau^+(l)|0\rangle,$$

$S^{(2)}$ 仍是式 (7.40). 这时 $N(\psi_1\hat{A}_1\psi_1)N(\psi_2\hat{A}_2\psi_2)$ 的 16 个乘积中只有一个对这个过程有贡献，即 $\psi_1^{(-)}\hat{A}_1\psi_1^{(-)}\psi_2^{(+)}\hat{A}_2\psi_2^{(+)}$. 于是

$$
\begin{aligned}
N(\psi_1\hat{A}_1\psi_1)N(\psi_2\hat{A}_2\psi_2) &\rightarrowtail \psi_1^{(-)}\hat{A}_1\psi_1^{(-)}\psi_2^{(+)}\hat{A}_2\psi_2^{(+)} \\
&= \psi_{1\beta}^{(-)}\hat{A}_{1\beta\beta'}\psi_{1\beta'}^{(-)}\psi_{2\alpha'}^{(+)}\hat{A}_{2\alpha'\alpha}\psi_{2\alpha}^{(+)} \\
&= \psi_{1\beta}^{(-)}\hat{A}_{1\beta\beta'}(\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\} - \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\psi_{1\beta'}^{(-)})\hat{A}_{2\alpha'\alpha}\psi_{2\alpha}^{(+)} \\
&= \hat{A}_{1\beta\beta'}\hat{A}_{2\alpha'\alpha}\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\}(\{\psi_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} - \psi_{2\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}) \\
&\quad - \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\hat{A}_{1\beta\beta'}(\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} - \psi_{2\alpha}^{(+)}\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)})\hat{A}_{2\alpha'\alpha}\psi_{1\beta'}^{(-)} \\
&\rightarrowtail \hat{A}_{1\beta\beta'}\hat{A}_{2\alpha'\alpha}\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\}\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} \\
&\rightarrowtail (A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)} + A_{2\mu}^{(+)}A_{1\nu}^{(-)})\gamma_{\nu\beta\beta'}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\}\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} \\
&= A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\}\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} \\
&\quad + A_{2\nu}^{(+)}A_{1\mu}^{(-)}\gamma_{\mu\alpha'\alpha}\gamma_{\nu\beta\beta'}\{\psi_{1\alpha}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\beta}^{(+)}\}\{\bar{\psi}_{1\alpha'}^{(-)}, \psi_{2\beta'}^{(+)}\}.
\end{aligned}
$$

代入式 (7.41)，得到

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} \rightarrowtail (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\gamma_{\mu\alpha'\alpha} \\
\times [\theta(t_1 - t_2)\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\}\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\} \\
+ \theta(t_2 - t_1)\{\psi_{2\alpha}^{(-)}, \bar{\psi}_{1\beta}^{(+)}\}\{\psi_{2\alpha'}^{(-)}, \psi_{1\beta'}^{(+)}\}].
\end{aligned}
$$

按阶越函数 $\theta(\tau)$ 的定义得知，$[\theta(\tau)]^2 = \theta(\tau)$，$\theta(\tau)\theta(-\tau) = 0$. 于是上式可写为

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} &\rightarrowtail (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 A_{1\nu}^{(+)}A_{2\mu}^{(-)}\gamma_{\nu\beta\beta'}\gamma_{\mu\alpha'\alpha} \\
&\quad \times [\theta(t_1 - t_2)\{\psi_{1\beta'}^{(-)}, \bar{\psi}_{2\alpha'}^{(+)}\} - \theta(t_2 - t_1)\{\bar{\psi}_{2\alpha'}^{(-)}, \psi_{1\beta'}^{(+)}\}] \\
&\quad \times (-1)[\theta(t_2 - t_1)\{\psi_{2\alpha}^{(-)}, \bar{\psi}_{1\beta}^{(+)}\} - \theta(t_1 - t_2)\{\bar{\psi}_{1\beta}^{(-)}, \psi_{2\alpha}^{(+)}\}] \\
&= (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 A_\alpha^{(+)}(x_1)A_\mu^{(-)}(x_2)\gamma_{\nu\beta'\beta}\gamma_{\mu\alpha'\alpha} \cdot \\
&\quad S_F^0(x_1 - x_2)_{\beta'\alpha'} \cdot (-1)S_F^0(x_2 - x_1)_{\alpha\beta} \\
&= (-e)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 A_\nu^{(+)}(x_1)(-1)\mathrm{Tr}[(-e)\gamma_\nu S_F^0(x_1 - x_2) \\
&\quad \times (-e)\gamma_\mu S_F^0(x_2 - x_1)]A_\mu^{(-)}(x_2), \qquad (7.47)
\end{aligned}
$$

这里 Tr 表示 4-4 矩阵的迹，也就是它的对角元之和（详见 § 9.1）. $S_F^0(x)$ 是量子旋量场的传播函数（见 §7.4, 3）.

最后利用式(7.20)，从式(7.47)可推得二级真空极化振幅如下：

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \langle 0 | a_r(l) S^{(2)} a_\sigma^+(k) | 0 \rangle \\
&= \iint d^4x_1 d^4x_2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} e_\nu^r(l) e^{-ilx_1} \cdot (-1)\mathrm{Tr}[(-e)\gamma_\nu \\
&\quad \times S_F^0(x_1 - x_2) \cdot (-e)\gamma_\mu S_F^0(x_2 - x_1)] \\
&\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e_\mu^\sigma(k) e^{ikx_2}; \qquad (7.48)
\end{aligned}
$$

注意这个振幅中的 $(-1)\mathrm{Tr}$，这是计算费米子闭合回路的一条一般性规则(详见 § 7.6).

以上只讨论了由单一相互作用所导致的一些物理过程. 假如一个过程中有几个不同的相互作用，则 $\mathscr{H}_I(x)$ 是各个相互作用哈氏量密度之和.

散射矩阵的二级微扰项 $S^{(2)}$ 还导致许多其它过程，如 $e^+e^+$ 散射，费米子自能，真空涨落等. 它们的跃迁振幅都可以用类似方法推得，不一一讨论了. 实际上，从上面分析的四个二级过程的跃迁振幅的表式，已经可以总结出对任意物理过程直接写出各级跃迁振幅的全部实用规则，即费曼规则. 为此，比较简便的方法是采用跃迁振幅的全部动量空间表示. 这样做也符合实验的实际情况，因为实验一般直接测量粒子的动量和能量. 显然我们首先需要确定各个量子场的传播函数的动量空间表式. 这个问题将在下节讨论.

## § 7.5 传播函数

在二级微扰(§ 7.4)和高级微扰跃迁振幅中，都出现传播函数. 它们表示各量子场的传播效应. 在上节中，我们得到了介子场、电磁场、旋量场的传播函数 $\Delta_F^0(x)$, $D_F^0(x)_{\mu\nu}$, $S_F^0(x)$，即式(7.33), (7.38), (7.45). 这些都是坐标空间表式，而且都是用场算符的对易子或反对易子来表示的. 为了便于应用，传播函数的动量空间表式很有用.

## 1. 介子场的传播函数 $\Delta_F^0(x)$

$\Delta_F^0(x)$ 是最简单的传播函数，其定义见式 (7.33)，即

$$\begin{aligned}\Delta_F^0(x-x') &= \frac{1}{2}\Delta F(x-x') \\ &= \theta(t-t')[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')] \\ &\quad + \theta(t'-t)[\varphi^{(-)}(x'), \varphi^{(+)}(x)]\end{aligned}$$

其物理意义已见 § 7.4 的 1. $\Delta F$ 是通常采用的记号. 现用第二章中标量场的平面波表示式(2.43),(2.44) 及对易关系 (2.26)，得到

$$\Delta_F^0(x-x') = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{ik(x-x')} & t > t', \\ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-ik(x-x')} & t < t', \end{cases} \tag{7.49}$$

式中 $k_0 = \omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. 把 $\Delta_F^0(x)$ 表达为一个四维动量空间积分 [即将式 (7.49) 写成一个单一的积分表式] 是很有用的. 为此需要引进对 $k_0$ 的积分. 按照复变函数理论，式 (7.49) 可表达为

$$\Delta_F^0(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{ikx}. \tag{7.50}$$

这里对 $k_0$ 的积分沿复平面的实轴进行，$-\infty\to+\infty$ (见图 7.9). 积分计算后取极限 $\varepsilon \to +0$.

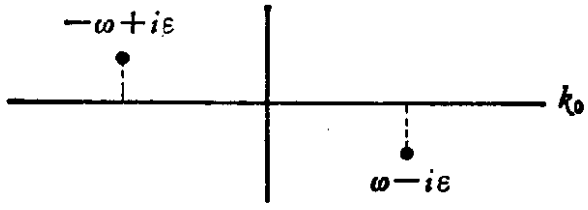



图 7.9

## 2. 电磁场的传播函数 $D_F^0(x)_{\mu\nu}$

$D_F^0(x)_{\mu\nu}$ 的定义见式 (7.38)，即

$$\begin{aligned}D_F^0(x-x')_{\mu\nu} &= \theta(t-t')[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] \\ &\quad + \theta(t'-t)[A_\nu^{(-)}(x'), A_\mu^{(+)}(x)],\end{aligned}$$

其物理意义见 § 7.4 的 2. 利用第三章中电磁场的平面波表示式 (3.37), (3.38) 与对易关系 (3.31), 得到

$$D_F^0(x-x')_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}D_F^0(x-x')=\delta_{\mu\nu}\frac{1}{2}D_F(x-x'), \quad (7.51)$$

其中 $D_F(x)$ 是通常采用的记号,并且有

$$D_F^0(x-x')=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{d^3k}{2\omega}e^{ik(x-x')}, & t>t',\\ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{d^3k}{2\omega}e^{-ik(x-x')} & t<t',\end{cases} \quad (7.52)$$

式中 $k_0=\omega=|\mathbf{k}|$. 四维动量空间表式是

$$D_F^0(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{1}{k^2-i\varepsilon}e^{ikx}, \quad (7.53)$$

对 $k_0$ 积分的定义与式 (7.50) 相同. 积分后取极限 $\varepsilon\to+0$.

### 3. 旋量场的传播函数 $S_F^0(x)$

$S_F^0(x)$ 的定义见式 (7.45), 即

$$\begin{aligned}S_F^0(x-x')_{\alpha\beta}&=-\frac{1}{2}S_F(x-x')_{\alpha\beta}\\&=\theta(t-t')\{\psi_\alpha^{(-)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\}\\&\quad-\theta(t'-t)\{\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x'),\psi_\alpha^{(+)}(x)\},\end{aligned}$$

其物理意义见 § 7.4 的 3. $S_F(x)$ 是通常的记号. 利用第四章中旋量场的平面波表示式 (4.87)—(4.90) 及旋量场的反对易关系 (4.81), 就得到

$$S_F^0(x-x')=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{d^3p}{2E}(m-i\not{p})e^{ip(x-x')} & t>t',\\ \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int\frac{d^3p}{2E}(m+i\not{p})e^{-ip(x-x')} & t<t',\end{cases} \quad (7.54)$$

式中 $p_0=E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. 可以证明,

$$S_F^0(x)=(m-\gamma_\mu\partial_\mu)\Delta_F^0(x). \quad (7.55)$$

传播函数 $S_F^0(x)$ 的四维动量空间表示是

$$S_F^0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{m - i\not{p}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{ipx}. \qquad (7.56)$$

对 $p_0$ 积分的定义与式 (7.50), (7.53) 相同. 积分后取极限 $\varepsilon \to +0$.

## §7.6 二级微扰过程的动量空间跃迁振幅

在 §7.4 中我们推导了一些物理过程的坐标空间的二级微扰跃迁振幅. 在把各个量子场的传播函数在动量空间表示之后 (§7.5), 就可以推导这些跃迁振幅的动量空间表式. 现在分别讨论于下.

### 1. $N\bar{N}$ 散射

二级微扰 $N\bar{N}$ 散射的跃迁振幅的坐标空间表式是式 (7.34), 介子场传播函数 $\Delta_F^0(x)$ 的动量空间表式是式 (7.50). 代入式 (7.34) 后, 对 $x_1$ 和 $x_2$ 积分. 利用四维 $\delta$ 函数的定义

$$\delta^{(4)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{\pm ikx},$$

就得到 $N\bar{N}$ 散射过程的动量空间二级跃迁振幅的表式为

$$S_{fi}^{(2)} = \int d^4k \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_{p'}}} \bar{u}_{r'}(p')}_{①}$$

$$\times \underbrace{(-g)\gamma_5(2\pi)^4\delta^{(4)}(p - p' - k)}_{②} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_p}} u_r(p)}_{③}$$

$$\times \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}}_{④} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_q}} \bar{v}_s(q)}_{⑤}$$

$$\times \underbrace{(-g)\gamma_5(2\pi)^4\delta^{(4)}(q - q' + k)}_{⑥} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E_{q'}}} v_{s'}(q')}_{⑦}. \qquad (7.57)$$

积分后取 $\varepsilon \to +0$.

跃迁振幅的这个表式很有规律性,可用图 7.10 (称为费曼图)来表示. 图中每条线和每个顶点 (参看 § 7.3) 都分别对应 $S_{fi}^{(2)}$ 表式中的一个因子. 式 (7.57) 中各因子的标号 ①, ②, ③, … 也同样标在图中对应的线或顶点上. 在 § 4.2 中看到,动量能量为 $q$ 的反粒子定义为逆时向运动的动量能量为 $-q$ 的粒子. 因此, 反粒子线如图 7.10 所示 (并参看 § 7.3).

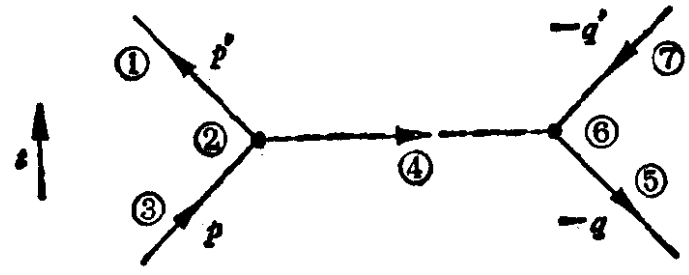



图 7.10

**2. ee 散射**

这个过程的二级微扰跃迁振幅的坐标空间表式是式 (7.46), 其中电磁场传播函数取动量空间表式 (7.53) 后, 就得到

$$S_{fi}^{(2)} = \int d^4k \Bigg[ \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}}\, \bar{u}_s(q)}_{①}$$

$$\times \underbrace{(-e)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q-k)}_{②} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, u_r(p)}_{③}$$

$$\times \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\, \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}}_{④} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\, \bar{u}_{s'}(q')}_{⑤}$$

$$\times \underbrace{(-e)\gamma_\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - q' + k)}_{⑥} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\, u_{r'}(p')}_{⑦}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{q'}}}\, \bar{u}_{s'}(q')}_{⑧} \cdot \underbrace{(-e)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q' - k)}_{⑨}$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}u_r(p)}_{⑩} \cdot \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}}_{⑪}$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\bar{u}_s(q)}_{⑫} \cdot \underbrace{(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'-q+k)}_{⑬}$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}u_{r'}(p')}_{⑭}\Big]. \tag{7.58}$$

积分后取极限 $\varepsilon \to +0$. 同 $N\bar{N} \to N\bar{N}$ 散射道的跃迁振幅 (7.57) 不一样，这个过程的跃迁振幅 (7.58) 有两项，而且是两项之差. 每一项都可以用一个费曼图来表示，图 7.11(a) 表示第一项，图 7.11 (b) 表示第二项. 对应因子见标号. 从两图的对比看，唯一区别是把两个出射粒子 $q, q'$ 交换. 由于费米统计规律，两个对应振幅有符号差别. 量子场论结果式 (7.58) 恰好反映了这一点. 两图之所以都有贡献是由于全同粒子 (电子 $q, q'$) 的不可分辨性.

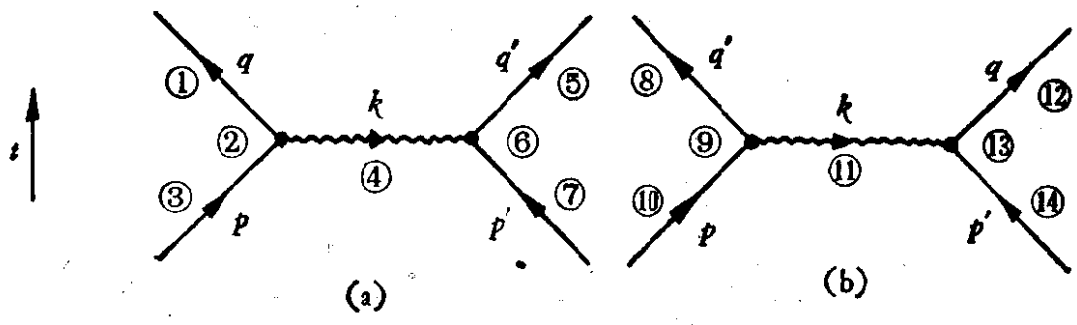



图 7.11

我们看到两个出射粒子的全同性导致了两个图有贡献，而出射粒子不全同时只有一个图有贡献(如 $N\bar{N}$ 散射). 这里两个图的对应跃迁振幅的干涉效应很重要，但只有在全同粒子情况下才会出现. 另一方面，在由两个振幅之差 (7.58) 求取总跃迁几率 (详见第八章) 的过程中，必须对末态粒子的出射方向求和. 这时，若末态是两个全同粒子(自旋或极化也不可分辨时)而对出射方向考虑整个空间角 $4\pi$ 时，就相当于把末态重复计算了两次. 因此由跃迁振幅所推得的总跃迁几率必须除以 2 才是这个全同粒子末态过

程的正确的总跃迁几率(参看 § 9.3). 初态全同粒子没有这个不可分辨性问题,因为入射方向或入射束流是确定的.

假如一个过程的末态有 $n$ 个全同粒子,就会有 $n!$ 个不同的图对它有贡献,而矩阵元就是 $n!$ 个跃迁振幅之和或差(由统计性决定),它们对应于这些全同粒子的 $n!$ 个不同组合. 另一方面,在由 $|S_{fi}|^2$ 求取总几率时,必须对所有末态粒子的出射方向求和. 这时,按全同粒子的不可分辨性(当自旋或极化也都不可分辨时),这样求得的总跃迁几率必须除以 $n!$ 才是这一过程的正确的跃迁几率.

### 3. γe 散射

二级微扰 $\gamma e$ 散射跃迁振幅是式(7.46). 旋量场传播函数 $S_F^0(x)$ 的动量空间表示是式(7.56),代入式(7.46),并对 $x_1$, $x_2$ 积分,就得到 $\gamma e$ 散射的动量空间跃迁振幅的表式为

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} = \int d^4p' \Big[ & \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \varepsilon_\nu^\tau(l)}_{①} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}}\, \bar{u}_s(q)}_{②} \\
& \times \underbrace{(-e)\gamma_\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+l-p')}_{③} \cdot \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{m - i\not{p}'}{p'^2 + m^2 - i\varepsilon}}_{④} \\
& \times \underbrace{(-e)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'-p-k)}_{⑤} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}}\, u_r(p)}_{⑥} \\
& \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\mu^\sigma(k)}_{⑦} + \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \varepsilon_\nu^\sigma(k)}_{⑧} \\
& \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}}\, \bar{u}_s(q)}_{⑨} \cdot \underbrace{(-e)\gamma_\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q-k-p')}_{⑩} \\
& \times \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{m - i\not{p}'}{p'^2 + m^2 - i\varepsilon}}_{⑪} \cdot \underbrace{(-e)\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'-p+l)}_{⑫}
\end{aligned}
$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u_r(p)}_{⑬} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}\,\varepsilon_\mu^\tau(l)}_{⑭}\Big]. \qquad (7.59)$$

积分后取极限 $\varepsilon \to +0$. 这个振幅 (7.59) 是两项之和. 每一项对应一个图. 图 7.12 (a) 表示第一项, 图 7.12 (b) 表示第二项. 图中每条线和每个顶点的对应因子见对应标号. 两图之所以都有贡献是由于全同粒子 (光子 $k, l$) 的不可分辨性.

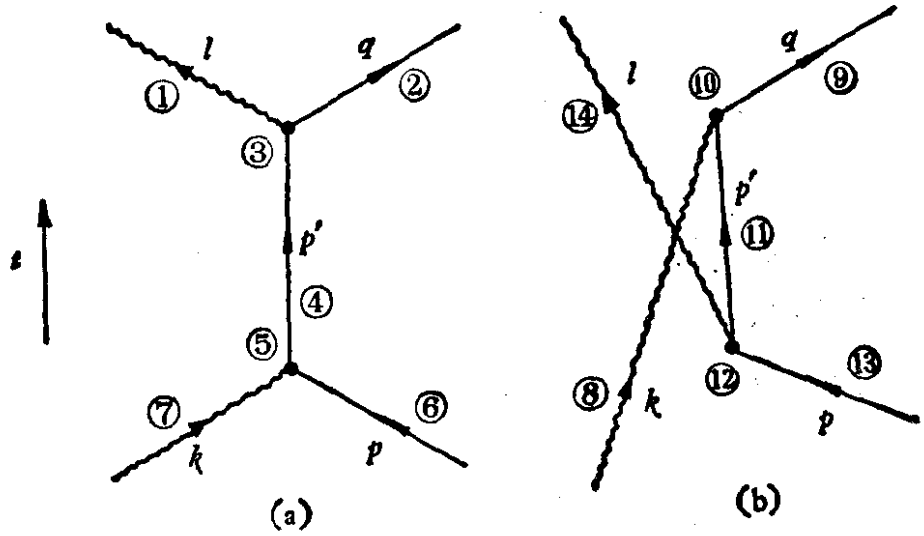



图 7.12

这里两个光子的全同性虽然导致了两个图有贡献, 但是它们不同是末态粒子, 而末态的两个粒子 (光子和电子) 不全同. 因此在对 $\gamma e$ 散射过程求取总跃迁几率时, 没有上面第 2 小节末尾所提到的全同粒子不可分辨性问题.

### 4. 真空极化

二级真空极化振幅的坐标空间表式是 (7.48), 其中有两个旋量场传播函数 $S_F^0(x)$, 并对旋量场各因子的乘积取迹, 再乘以 $-1$. 把 $S_F^0(x)$ 的动量空间表示式 (7.56) 代入式 (7.48), 就得到真空极化振幅的动量空间表式如下:

$$S_{fi}^{(2)} = \iint d^4p d^4q \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}\,\varepsilon_\nu^\tau(l)}_{①}$$

$$\times(-1)\,\mathrm{Tr}\Big[\underbrace{(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(l-p+q)}_{②}$$

$$\times\underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{m-i\hat{p}}{p^2+m^2-i\varepsilon}}_{③}\cdot\underbrace{(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k)}_{④}$$

$$\times\underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{m-i\hat{q}}{q^2+m^2-i\varepsilon}}_{⑤}\Big]\cdot\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}}_{⑥}\varepsilon_\mu^o(k). \tag{7.60}$$

显然这个振幅对应的费曼图是图 7.13.

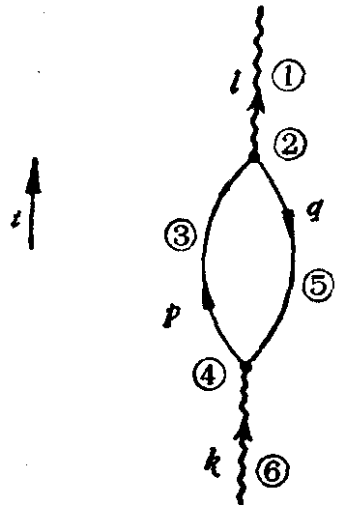


图 7.13

## §7.7 对物理过程求跃迁振幅的一般性规则

§7.3 讨论了一级微扰过程的跃迁振幅. 特别是式(7.23)给出了振幅的动量空间表式. §7.4 和 §7.6 讨论了二级微扰过程的跃迁振幅，并推导了它们相应的动量空间表式(7.57)—(7.60). 所有这些振幅的表式都极有规律性，而且都可以用一个或一个以上确定的费曼图来表示. 现在来总结这些规律性，就可以得到所谓费曼规则. 然后只要按照这些规则，就可以直接写出任意物理过程的各级微扰跃迁振幅.

首先,物理过程是预先确定了的,即初态 $i$ 和末态 $f$ 完全确定.

其次，再确定导致这个物理过程的相互作用. 有时相互作用是已知的(如电磁相互作用). 但是在大多数情形中，只能根据已知的实验结果加以推测(即唯象相互作用).

然后，还必须判定对给定的物理过程要计算的微扰近似的级次(例如 §7.3 中是一级，§7.4 和 §7.6 中是二级微扰).

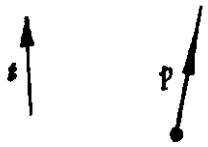
问题这样最后决定之后，就可以按 §7.3 和 §7.6 的方法划出能够导致这个物理过程的费曼图. 必须考虑所有可能的、结构不同而又相互独立的同一级的图，例如 $ee$ 散射和 $\gamma e$ 散射过程各有

两个不同的图. 每一个图对应跃迁振幅中的一项，任何图中费米子线不中断. 按反粒子定义，费米子线箭头是单向的. 荷电的反玻色子也可同样定义；因此在电磁相互作用中，荷电的玻色子线也有类似的情形.

最后，怎样按费曼图写出跃迁振幅的表式（动量空间）呢？总结 § 7.3 和 § 7.6 的结果，可得到下面一系列规则. 在按图并按这些规则写出跃迁振幅时，要逆着费米子线（或电磁相互作用中的荷电玻色子线）的箭头方向依次写出各条线和各个顶点的对应因子. 所有的图都由外线、内线、顶点所构成. 外线代表入射或出射粒子，即初态或末态粒子；其一端连结于一个顶点，另一端是自由的. 内线两端连结于两个顶点，代表量子场的传播因子；顶点则代表相互作用的发生，在任意顶点能量动量守恒. 费曼规则分为两大类：一类是与相互作用无关的，另一类是由相互作用的具体形式所决定的.

**1. 与相互作用无关的规则**

产生一个费米子 $(p, r)$ 的外线：



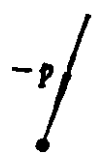

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,\bar{u}_r(p);$$

湮没一个费米子 $(p, r)$ 的外线：



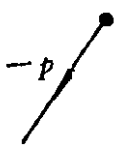

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,u_r(p);$$

产生一个反费米子 $(p, r)$ 的外线：



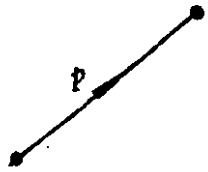

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,v_r(p);$$

湮没一个反费米子 $(p, r)$ 的外线：




$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,\bar{v}_r(p);$$

费米子内线：




$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{m-i\not{p}}{p^2+m^2-i\varepsilon}.$$

这是旋量场的传播因子.

每个费米子闭合回路（任意级微扰）取迹并乘以 $-1$，即

$$(-1)\,\mathrm{Tr}(\cdots).$$

产生一个光子 $(k,\sigma)$ 的外线：



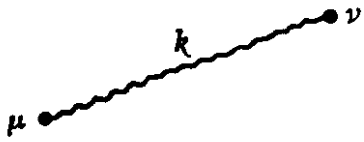

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\varepsilon_\mu^\sigma(k);$$

湮没一个光子 $(k,\sigma)$ 的外线：




$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\varepsilon_\mu^\sigma(k);$$

光子内线：




$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}.$$

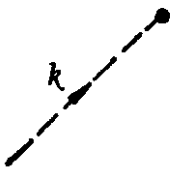
这是电磁场的传播因子.

产生一个介子 $(k)$ 的外线：




$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}};$$

湮没一个介子 $(k)$ 的外线：




$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}};$$

介子内线




$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{ij}}{k^2+m^2-i\varepsilon}.$$

这是介子场的传播因子（$i, j = 1, 2, 3$ 是介子同位旋分量或电荷态指标）.

每一条内线（费米子或玻色子）有一个四重动量积分

$$\int d^4p' \text{ 或 } \int d^4k'.$$

## 2. 与相互作用有关的规则

只有微扰级次 $n$，费曼图的结构以及顶点因子是由相互作用所决定的. 下面以两种典型相互作用为例给出顶点因子.

费米子的电磁相互作用 $\mathscr{H}_I = -ieN(\bar{\psi}\hat{A}\psi)$ 的顶点因子是

$$-e\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).$$

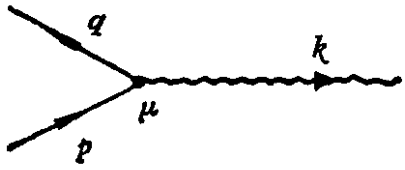



图 7.14

同位旋守恒的强相互作用 $\mathscr{H}_I = -igN(\bar{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\varphi}N)$ 的顶点因子是

$$-g\gamma_5\tau_i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k).$$

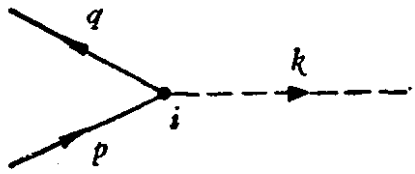



图 7.15

这是同位旋态为 $i$ 的介子线的顶点.

顶点因子中，$\delta^{(4)}(p-q-k)$ 表示在相互作用中动量和能量守恒.

对任意相互作用，只要计算一级微扰跃迁振幅（参看 § 7.3），就可以确定相应的顶点因子.

# 第八章　衰变宽度或寿命；碰撞截面；角分布；能量分布

在第七章里，我们讨论了在相互作用给定时，怎样用微扰近似法，对一个确定的物理过程求取跃迁振幅的方法．本章将进一步分析怎样从跃迁振幅推导出实验能够直接测定的物理过程的跃迁几率．不过对不同类型的过程，有确切物理意义的跃迁几率的表达形式不一样．当初态只有一个粒子时，跃迁几率就是这个粒子的衰变宽度，其倒数即为衰变寿命．初态若有两个粒子，它们的相互作用过程就是碰撞问题．在两个粒子的碰撞反应中，跃迁几率的有确切意义的表达式是碰撞截面．在这两种情形里，跃迁几率都可以同时给出末态粒子的角分布、能量分布、角关联、能量关联等重要物理量．

## §8.1　物理过程的跃迁几率

首先一般性地来分析一下怎样从已知的跃迁振幅求取物理过程的跃迁几率．现在考虑一个一般性的粒子反应：初态有$N$个粒子 $A_i\,(i=1,2,\cdots,N)$，动量能量各为 $p_i=(\mathbf{p}_i, iE_i)$；末态有 $n$ 个粒子 $B_c(c=1,2,\cdots,n)$，动量能量各为 $q_c=(\mathbf{q}_c, i\varepsilon_c)$：

$$A_1+A_2+\cdots+A_N\to B_1+B_2+\cdots+B_n,$$

以下记为

$$P=\sum_{i=1}^{N}p_i,\quad Q=\sum_{c=1}^{n}q_c.$$

并记 $B$ 为参与反应的玻色子总数（初态和末态中介子、光子等总数）；$F$ 为反应中的费米子总数（初态和末态中轻子、重子等总

数). 当然，$B + F = N + n$.

### 1. 跃迁振幅的一般形式

对一个确定的物理过程，在相互作用给定时，任意级微扰跃迁振幅 $S_{fi}^{(\nu)}$ 一般是若干项之和(或差)，每一项对应一个费曼图，按图再按第七章中推导总结的费曼规则 (§ 7.7) 就可以写出这一项的表式. 在这些规则中，有下列一般性因子：

每一条费米子外线有一个因子 $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{W}}$；

每一条玻色子外线有一个因子 $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$；

每一条费米子或玻色子内线有一个因子 $\frac{-i}{(2\pi)^4}$；

每一个顶点有一个因子 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(\cdots)$；

每一条费米子或玻色子内线有一个四重积分 $\int d^4p'$ 或 $\int d^4k'$.

这里，$W$ 表示费米子能量；$\omega$ 表示玻色子能量. $\nu$ 级微扰项有 $\nu$ 个顶点，对 $\nu - 1$ 条内线积分后就只剩下一个 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - Q)$ 的因子，它反映整个过程的动量和能量守恒. 再把所有的外线因子分别写开之后，整个 $\nu$ 级微扰跃迁振幅就可以写作如下的一般形式：

$$S_{fi}^{(\nu)}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(P-Q)\prod_{a=1}^{F}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_a}{W_a}}\prod_{b=1}^{B}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_b}}M_{fi}^{(\nu)}$$

$$=(2\pi)^4\delta^{(4)}(P-Q)\frac{1}{2^{B/2}(2\pi)^{3(N+n)/2}}\prod_{a=1}^{F}m_a^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{N}E_i^{-\frac{1}{2}}\prod_{c=1}^{n}\omega_c^{-\frac{1}{2}}M_{fi}^{(\nu)}, \tag{8.1}$$

式中 $M_{fi}^{(\nu)}$ 是相对论不变量，称为不变振幅.

### 2. 单位时间的跃迁几率

从一个确定初态 $|\rangle_i$ 到一个确定末态 $|\rangle_f$ 的物理过程的跃迁

几率可以直接由式(8.1)得到,即 $|S_{fi}|^2$(以下不标微扰级次). 假如实验不测量初态粒子的某些量子数(如自旋态、极化),也不测量末态粒子的某些量子数,就必须对前者求平均并对后者求和. 以下用符号 $\bar{\Sigma}$ 来表示这两个计算步骤. 于是这样的实验所测量的跃迁几率是

$$\bar{\Sigma}|S_{fi}|^2 = (2\pi)^8\delta^{(4)}(0)\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3(N+n)}}$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}E_i^{-1}\prod_{c=1}^{n}\varepsilon_c^{-1}\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2, \tag{8.2}$$

式中

$$K=\prod_{a=1}^{F}m_a.$$

对粒子运动,我们一直用平面波的极限表示. 所以量子场之间的相互作用在整个空间、整个时间里进行,就是说,式(8.2)表示相互作用在整个空间、整个时间内所导致的跃迁几率. 这一点体现于

$$\delta^{(4)}(0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x=\lim_{V,T\to\infty}\frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

这里 $V$ 和 $T$ 只是为了书写方便而采用的记号,其定义是

$$\lim_{V\to\infty}V=\int_{\infty}d^3x,\quad \lim_{T\to\infty}T=\int_{-\infty}^{\infty}dt.$$

显然单位时间的跃迁几率是

$$W_{fi}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\bar{\Sigma}|S_{fi}|^2=\lim_{V\to\infty}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P-Q)\frac{KV}{2^B(2\pi)^{3(N+n)}}$$

$$\times\prod_{i=1}^{N}E_i^{-1}\prod_{c=1}^{n}\varepsilon_c^{-1}\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2.$$

按照平面波态矢的归一化规则(见第二、三、四章),$|S_{fi}|^2$ 实际上是从确定初态 $|\rangle_i$ 到确定末态 $|\rangle_f$ 的跃迁几率的相空间密度(多粒子动量的位形空间一般也称为相空间). 可是实验既不能探测动量具有单一精确值的粒子,也不能直接测定跃迁几率的相空间密度. 实验只能直接测量在一个给定相空间中的跃迁几率;就

是说，只能探测动量在适当间隔 $\mathbf{q}_c - \mathbf{q}_c + d\mathbf{q}_c$ 之间的出射粒子 ($c = 1, 2, \cdots, n$) 和动量在一定间隔 $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i$ 之间的入射粒子 ($i = 1, 2, \cdots, N$). 这时，反应过程的相空间体积元是

$$\prod_{i=1}^{N} d^3p_i \prod_{c=1}^{n} d^3q_c.$$

可是每个入射粒子态原则上是确定的，因为入射粒子态的测定是另一个实验的事，与现在考虑的本次实验无关. 不过我们对粒子运动采取了连续谱的平面波表示，而上面又采用了 $V$ 和 $T$ 的记号和 $V \to \infty$、$T \to \infty$ 的极限步骤，很明显，必须有

$$\lim_{V\to\infty} d\mathbf{p}_i = 0.$$

不过因为对本次实验而言，入射粒子态是确定的单一态，所以在动量空间体积元 $d^3p_i$ 中，入射粒子 $A_i$ 只有一个态. 于是按照相空间定则，

$$\lim_{V\to\infty} \frac{Vd^3p_i}{(2\pi)^3} = 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{8.3}$$

通过这样一些分析之后，实验能够测定的反应过程的单位时间跃迁几率是

$$\begin{aligned} dW_{fi} &= \lim_{V\to\infty} W_{fi} \prod_{c=1}^{n} d^3q_c \prod_{i=1}^{N} d^3p_i \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3(N+n)}} \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2 \prod_{c=1}^{n} \frac{d^3q_c}{\varepsilon_c} \\ &\quad \times \lim_{V\to\infty} \frac{Vd^3p_1}{E_1} \prod_{i=2}^{N} \frac{d^3p_i}{E_i}, \end{aligned}$$

这里 $p_1$ 是任意一个（今取为第一个）入射粒子的动量. 结合式 (8.3)，单位时间的跃迁几率是

$$\begin{aligned} dW_{fi} &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3(N+n-1)}E_1} \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2 \prod_{c=1}^{n} \frac{d^3q_c}{\varepsilon_c} \\ &\quad \times \lim_{V\to\infty} \prod_{i=2}^{N} \frac{d^3p_i}{E_i}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

显然有确切物理意义的量与 $d^3p_i$ 都应无关.

## §8.2 衰变寿命或宽度;角分布;能量分布

现在讨论初态只有一个粒子的问题 ($N = 1$). 由式(8.4)得到末态粒子动量在 $\mathbf{q}_c - \mathbf{q}_c + d\mathbf{q}_c$ 之间 ($c = 1, 2, \cdots, n$) 单位时间的初态粒子衰变几率为

$$dW_{fi} = \delta^{(4)}(p - Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3n-4}E}\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2\prod_{c=1}^{n}\frac{d^3q_c}{\varepsilon_c}, \qquad (8.5)$$

式中 $p = (\mathbf{p}, iE)$ 是衰变粒子(费米子或玻色子)的动量能量. 式(8.5)与 $d^3p$ 无关, 是实验可以测定的有意义的物理量. 相互作用的动力学效应包含在 $\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2$ 之中, 其它都是运动学因子, 特别是 $\prod_{c=1}^{n} d^3q_c/\varepsilon_c$ 称为出射粒子的不变相空间因子(相对论不变量). 上式分母中的能量因子 $E$ 反映了粒子衰变寿命的相对论效应. 除 $E$ 之外, 其它因子都是相对论不变量.

### 1. 两体衰变

这是末态只有两个粒子的特殊情形 ($n = 2$). 式(8.5)简化为

$$dW_{fi} = \delta^{(4)}(p - Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^2E}\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2\frac{d^3q_1d^3q_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad (8.6)$$

式中 $Q = q_1 + q_2$. 末态粒子 $B_1$ 和 $B_2$ 的动量 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ 表面上虽有六个自由度, 但是由 $\delta^{(4)}(p - Q)$ 所反映的动量能量守恒给出了四个限制条件, 因此实际上只有两个独立自由度. 现在就取粒子 $B_1$ 的出射方向 $(\theta, \varphi)$ 作为这两个独立自由度, 其它四个自由度将通过对 $\delta^{(4)}(p - Q)$ 的积分而消失. 为此, 首先取 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{Q}$ 作为变量, 而 $\mathbf{q}_2 = \mathbf{Q} - \mathbf{q}_1$. 可以证明, $d^3q_1d^3q_2 = d^3q_1d^3Q$. 然后取球坐标时, 可得

$$d^3q_1 = |\mathbf{q}_1|^2d|\mathbf{q}_1|\sin\theta\ d\theta d\varphi$$

$$= |\mathbf{q}_1|^2 \left[\frac{\partial|\mathbf{q}_1|}{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right]_{\theta\varphi} dQ_0 d\Omega_1(\theta,\varphi),$$

$$d\Omega_1(\theta,\varphi) = \sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

现取 $\theta = \angle(\mathbf{q}_1, \mathbf{p})$. 因为能量动量守恒，可以证明，

$$\left[\frac{\partial|\mathbf{q}_1|}{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right]_{\theta\varphi} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E|\mathbf{q}_1| - \varepsilon_1|\mathbf{p}|\cos\theta} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2|\mathbf{q}_1|}{E|\mathbf{q}_1|^2 - \varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{p}}.$$

于是

$$d^3q_1 d^3q_2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2|\mathbf{q}_1|^3}{E|\mathbf{q}_1|^2 - \varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{p}} d\Omega_1(\theta,\varphi) d^4Q. \qquad (8.7)$$

这可看作立体角元 $d\Omega_1(\theta,\varphi)$ 中出射粒子态密度（不计 $d^4Q$）. 现在四个非独立自由度就是 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_0$ [在式 (8.6) 中仍作为独立自由度出现]. 将式 (8.7) 代入式 (8.6)，再对 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_0$ 积分；就得到单位时间内末态粒子 $B_1$ 的出射方向在 $\theta$—$(\theta+d\theta)$，$\varphi$—$(\varphi+d\varphi)$ 之间的初态粒子衰变几率

$$dw_{fi} = \int_{\Omega} dW_{fi}$$

$$= \frac{K}{2^B(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_1|^3}{E(E|\mathbf{q}_1|^2 - \varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{p})} \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2 d\Omega_1(\theta,\varphi), \quad (8.8)$$

式中各量现在满足动量能量守恒. 式 (8.8) 表示出射粒子 $B_1$ 的角分布和能量分布. 不过两体衰变时，任意坐标系中出射粒子的能量决定于出射方向. 因此能量分布决定于角分布.

在衰变粒子(质量 $M$)的静止系中，问题特别简单. 这时 $\mathbf{p} = 0$, $E = M$, $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$. 设 $m_1, m_2$ 是两个出射粒子的质量. 由动量能量守恒可以证明，

$$|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = \frac{1}{2M}\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)$$

$$= \frac{1}{2M}[M^2 - (m_1 - m_2)^2]^{\frac{1}{2}}[M^2 - (m_1 + m_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

式中 $\lambda$ 函数的定义是

$$\lambda(a,b,c) = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，在静止系中，式 (8.8) 简化为

$$dw_{fi} = \frac{K}{2^B(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{q}_1|}{M^2}\Sigma|M_{fi}|^2 d\Omega_1(\theta,\varphi)$$
$$= \frac{K}{2^B(2\pi)^2}\frac{[M^2-(m_1-m_2)^2]^{\frac{1}{2}}[M^2-(m_1+m_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{2M^3}$$
$$\times\Sigma|M_{fi}|^2 d\Omega_1(\theta,\varphi). \tag{8.9}$$

在衰变粒子静止系中，两个末态粒子的能量是确定的，只有角分布.

单位时间的总衰变几率 $w_{fi}$ 可由式 (8.9) 对出射方向 $(\theta,\varphi)$ 积分得到. 初态粒子通过末态 $f$ (即 $f$ 模式或 $f$ 道)的衰变寿命 $\tau_{fi}$ 和衰变宽度 $\Gamma_{fi}$ 分别是

$$\tau_{fi} = w_{fi}^{-1}, \tag{8.10}$$
$$\Gamma_{fi} = \tau_{fi}^{-1} = w_{fi}. \tag{8.11}$$

**2. 三体衰变**

这时末态有三个粒子 ,$n=3$. 式(8.5)变为

$$dW_{fi} = \delta^{(4)}(p-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^5 E}\Sigma|M_{fi}|^2\frac{d^3q_1d^3q_2d^3q_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}, \tag{8.12}$$

这里 $Q = q_1+q_2+q_3$. 三个末态粒子的动量 $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ 虽有九个自由度,但由于动量能量守恒,只有五个独立自由度,取作粒子 $B_1$ 的出射方向$(\theta,\varphi)$和粒子 $B_2$ 的动量 $\mathbf{q}_2$. 这样,粒子 $B_3$ 的动量已经确定,不需要观测了. 首先取 $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{Q}$ 为变量，而 $\mathbf{q}_3=\mathbf{Q}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2$. 可以证明，$d^3q_1d^3q_2d^3q_3 = d^3q_1d^3q_2d^3Q$. 再写

$$d^3q_1 = |\mathbf{q}_1|^2 d|\mathbf{q}_1|\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= |\mathbf{q}_1|^2\left[\frac{\partial|\mathbf{q}_1|}{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\right]_{\theta\varphi\mathbf{q}_2} dQ_0 d\Omega_1(\theta,\varphi).$$

今取 $\theta = \angle(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2-\mathbf{p})$. 类似于式 (8.7)，这里同样可以证明

$$d^3q_1d^3q_2d^3q_3 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2|\mathbf{q}_1|^3}{(E-\varepsilon_2)|\mathbf{q}_1|^2+\varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{q}_2-\mathbf{p})}$$
$$\times d\Omega_1(\theta,\varphi)d^3q_2d^4Q. \tag{8.13}$$

此式是在相空间元 $d\Omega_1(\theta,\varphi)d^3q_2$ 中 $B_1$ 和 $B_2$ 的粒子态密度 ($d^4Q$ 不计).

将式 (8.13) 代入式 (8.12)，再对 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_0$ 积分，就得到单位时间内粒子 $B_1$ 的出射方向在 $\theta$—$(\theta+d\theta)$，$\varphi$—$(\varphi+d\varphi)$ 之间和粒子 $B_2$ 的动量在 $\mathbf{q}_2$—$(\mathbf{q}_2+d\mathbf{q}_2)$ 之间的初态粒子衰变几率

$$dw_{fi}=\int_{\Omega}dW_{fi}$$
$$=\frac{K}{2^B(2\pi)^5}\frac{|\mathbf{q}_1|^3}{E\varepsilon_2[(E-\varepsilon_2)|\mathbf{q}_1|^2+\varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{q}_1-\mathbf{p})]}\Sigma|M_{fi}|^2$$
$$\times d\Omega_1(\theta,\varphi)d^3q_2. \tag{8.14}$$

此式给出粒子 $B_1$ 和 $B_2$ 的角分布、能量分布、角关联、能量关联等物理量.

在衰变粒子(质量$M$)的静止系中，

$$\mathbf{p}=0,\ E=M,\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0,\ \theta=\angle(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2).$$

这时式 (8.14) 简化为

$$dw_{fi}=\frac{K}{2^B(2\pi)^5}\frac{|\mathbf{q}_1|^3}{M\varepsilon_2[(M-\varepsilon_2)|\mathbf{q}_1|^2+\varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2]}$$
$$\times\Sigma|M_{fi}|^2d\Omega_1(\theta,\varphi)d^3q_2. \tag{8.15}$$

单位时间的总衰变几率 $w_{fi}$ 由式 (8.14) 和 (8.15) 积分得到. 不过末态三体问题的积分比较复杂 (参看 § 9.6). 初态粒子通过末态 $f$ (即 $f$ 模式或 $f$ 道)的衰变宽度仍是式 (8.11).

## § 8.3 碰撞问题;微分截面

现在来讨论初态有两个粒子的相互作用问题 ($N=2$). 这时，单位时间跃迁几率式 (8.4) 写作

$$dW_{fi}=\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3n-1}E_1E_2}\Sigma|M_{fi}|^2\prod_{c=1}^{n}\frac{d^3q_c}{\varepsilon_c}\lim_{V\to\infty}d^3p_2. \tag{8.16}$$

此式与 $d^3p_2$ 有关，不是一个有直接测量意义的物理量. 下面讨论怎样从式 (8.16) 得到有物理意义的并且可由实验直接测定的量.

## 1. 入射粒子相对流强

在两个粒子的碰撞问题中，对入射粒子相对流强 $I$ 这个运动学因子必须加以考虑. 碰撞粒子的能量不同时，相对流强也不同;即使在同一碰撞过程中，坐标系不同时，相对流强也不同. 而且通过简单分析表明，实验测量的碰撞几率与 $I$ 成正比. 因此粒子碰撞过程的本质性的反应几率应是单位流强下从初态到末态的跃迁几率，即 $dW_{fi}/I$. 现在先来分析一下入射粒子相对流强 $I$ 这个运动学因子.

在实验室系中，$I$ 的意义很清楚. $I$ 是单位时间内穿过垂直于投射方向的单位截面积的投射粒子数. 设 $A_1$ 为投射粒子，$A_2$ 为靶粒子，则

$$\mathbf{p}_2 = 0, \quad E_2 = M_2, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_L,$$

$$E_1 = E_L, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{p}_L}{E_L}.$$

指标 $L$ 表示实验室系的量. 设 $n_L$ 为实验室系中投射粒子数密度. 按定义，实验室系中的入射粒子流强显然是

$$I_L = n_L|\mathbf{v}_L| = \frac{n_L|\mathbf{p}_L|}{E_L}.$$

但是，在一次碰撞中，只有一个投射粒子，故 $n_L = \lim_{V\to\infty} V_L^{-1}$. 于是

$$I_L = \lim_{V\to\infty} \frac{|\mathbf{p}_L|}{V_L E_L} = \lim_{V\to\infty} \frac{|\mathbf{v}_L|}{V_L}.$$

我们现在需求任意坐标系中入射粒子相对流强的表式. 为此，先讨论下面的相对论不变量

$$J = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}, \tag{8.17}$$

其中 $M_1$ 和 $M_2$ 是入射粒子 $A_1$ 和 $A_2$ 的质量. 首先在实验室系中，很明显，

$$J_L = M_2|\mathbf{p}_L| = M_2 E_L|\mathbf{v}_L|,$$

所以

$$|\mathbf{v}_L| = \frac{J_L}{M_2 E_L} = \left(\frac{J}{E_1 E_2}\right)_L.$$

另一方面，在入射粒子的质心系中，$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$. 今记 $\mathbf{p}_1=-\mathbf{p}_2=\mathbf{p}$，很容易证明，

$$J_{cm}=|\mathbf{p}|(E_1+E_2)_{cm}=(E_1E_2|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|)_{cm}.$$

因此入射粒子的相对速度是

$$|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|_{cm}=\left(\frac{J}{E_1E_2}\right)_{cm}.$$

结合上面的结果可知，在实验室系中，入射粒子相对流强的表式是

$$I_L=\lim_{V\to\infty}\frac{|\mathbf{v}_L|}{V_L}=\lim_{V\to\infty}\left(\frac{J}{VE_1E_2}\right)_L.$$

质心系中的相对流强则是

$$I_{cm}=\lim_{V\to\infty}\frac{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|_{cm}}{V_{cm}}=\lim_{V\to\infty}\left(\frac{J}{VE_1E_2}\right)_{cm}.$$

因此可以推知，在任意坐标系中，入射粒子的相对流强的表式是

$$I=\lim_{V\to\infty}\frac{J}{VE_1E_2}. \tag{8.18}$$

不变量 $J$ 的下列表式很有用：

$$\begin{aligned}J&=\frac{1}{2}\lambda(s,M_1^2,M_2^2)\\&=\frac{1}{2}[s-(M_1-M_2)^2]^{\frac{1}{2}}[s-(M_1+M_2)^2]^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{8.19}$$

式中不变量 $s=-(p_1+p_2)^2=(E_1+E_2)_{cm}^2$ 是质心系中入射粒子总能量的平方.

## 2. 微分截面

结合式(8.16)，(8.18)和(8.3)就得到单位流强下单位时间的碰撞反应的跃迁几率

$$\begin{aligned}d\Sigma_{fi}&=\frac{dW_{fi}}{I}=\lim_{V\to\infty}\frac{VE_1E_2}{J}dW_{fi}\\&=\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^{3n-4}J}\Sigma|M_{fi}|^2\prod_{c=1}^{n}\frac{d^3q_c}{\sigma_c}.\end{aligned} \tag{8.20}$$

这是实验可以测量的物理量. $d\Sigma$ 的量纲是面积，它测量入射粒子

$A_1$, $A_2$ 的相互作用在碰撞时可以激发起反应的平均有效截面积的大小，故称为微分截面. 它是一个相对论不变量. 相互作用的动力学效应包含在 $\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2$ 之中，其它都是运动学因子，特别是 $\prod_{c=1}^{n} d^3q_c/\varepsilon_c$ 称为 $n$ 个出射粒子的不变相空间因子.

式(8.20)给出末态粒子的角分布、能量分布、角关联、能量关联等重要物理量.

## §8.4 二体二体碰撞反应

这是 $N=n=2$ 的粒子碰撞反应问题. 此时式(8.20)写为

$$d\Sigma_{fi}=\delta^{(4)}(P-Q)\frac{K}{2^B(2\pi)^2J\varepsilon_1\varepsilon_2}\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2d^3q_1d^3q_2, \tag{8.21}$$

这里 $P=p_1+p_2$, $Q=q_1+q_2$. 同二体衰变问题一样，出射粒子的动量 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ 只有两个独立自由度，仍取为粒子 $B_1$ 的出射方向 $(\theta,\varphi)$. 同§8.2的方法一样，若取 $\theta=\angle(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$，可以证明，

$$\begin{aligned}d^3q_1d^3q_2&=|\mathbf{q}_1|^2\left[\frac{\partial|\mathbf{q}_1|}{\partial(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right]_{\theta\varphi}d\Omega_1(\theta,\varphi)d^4Q\\&=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2|\mathbf{q}_1|^3}{(E_1+E_2)|\mathbf{q}_1|^2-\varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)}d\Omega_1(\theta,\varphi)d^4Q.\end{aligned} \tag{8.22}$$

这是立体角元 $d\Omega_1(\theta,\varphi)$ 中 $B_1$ 的粒子态密度($d^4Q$ 除外). 将式(8.22)代入式(8.21)，再对非独立自由度 $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_0$ 积分，就得到二体二体碰撞反应微分截面

$$\begin{aligned}d\sigma_{fi}&=\int_\Omega d\Sigma_{fi}\\&=\frac{K}{2^B(2\pi)^2J}\frac{|\mathbf{q}_1|^3}{(E_1+E_2)|\mathbf{q}_1|^2-\varepsilon_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)}\\&\quad\times\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2d\Omega_1(\theta,\varphi).\end{aligned} \tag{8.23}$$

在二体二体碰撞问题中，出射粒子的能量在任意坐标系中一般是

出射方向 $(\theta, \varphi)$ 的函数;因此只有角分布,能量分布决定于角分布.

在实验室系中,$\mathbf{p}_2 = 0$, $E_2 = M_2$, $\theta = \angle(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$. 式(8.23)简化为

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_1(\theta,\varphi)} = \frac{K}{2^B(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_1|^3}{M_2|\mathbf{p}_1|[(E_1+M_2)|\mathbf{q}_1|^2 - \varepsilon_1 \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_1]} \cdot \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2. \tag{8.24}$$

在碰撞粒子的质心系中,$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$. 设 $M_1$, $M_2$ 是入射粒子的质量, $m_1$, $m_2$ 是出射粒子的质量,则有

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda(s, M_1^2, M_2^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}} [s - (M_1 - M_2)^2]^{\frac{1}{2}} [s - (M_1 + M_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda(s, m_1^2, m_2^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}} [s - (m_1 - m_2)^2]^{\frac{1}{2}} [s - (m_1 + m_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

再应用式(8.19),由式(8.23)就可以推得质心系中的微分截面

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_1(\theta, \varphi)} = \frac{K}{2^B(2\pi)^2 J} \frac{|\mathbf{q}_1|}{\sqrt{s}} \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2$$

$$= \frac{K}{2^B(2\pi)^2} \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{s\lambda(s, M_1^2, M_2^2)} \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2$$

$$= \frac{K}{2^B(2\pi)^2} \frac{[s - (m_1 - m_2)^2]^{\frac{1}{2}} [s - (m_1 + m_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{s[s - (M_1 - M_2)^2]^{\frac{1}{2}} [s - (M_1 + M_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \overline{\Sigma}|M_{fi}|^2. \tag{8.25}$$

对二体二体碰撞反应过程,采用下面的相对论不变的运动学参数很方便:

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2, \\ t &= -(p_1 - q_1)^2, \\ u &= -(p_1 - q_2)^2. \end{aligned} \tag{8.26}$$

但是 $s + t + u = M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + m_2^2$，因此 $s$，$t$，$u$ 中只有两个独立参数. $s$ 是碰撞粒子的质心系总能量的平方，$t$ 是碰撞过程中朝前 4-动量转换，而 $u$ 是朝后 4-动量转换. 在质心系中很容易证明

$$\begin{aligned} dt &= 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{q}_i| d\cos\theta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda(s, M_1^2, M_2^2)\lambda(s, m_1^2, m_2^2) d\cos\theta. \end{aligned}$$

于是从式 (8.23) 得到质心系中的不变微分截面

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{fi}}{dt} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_1(\theta, \varphi)} d\varphi \\ &= \frac{K}{2^{B+1}\pi^2\lambda^2(s, M_1^2, M_2^2)} \int_0^{2\pi} \Sigma |M_{fi}|^2 d\varphi \\ &= \frac{K}{2^{B+1}\pi^2[s - (M_1 - M_2)^2][s - (M_1 + M_2)^2]} \cdot \\ &\quad \int_0^{2\pi} \Sigma |M_{fi}|^2 d\varphi. \end{aligned} \tag{8.27}$$

将式 (8.23) 或式 (8.24) 对 $\theta$，$\varphi$ 积分，或将式 (8.27) 对 $t$ 积分，就得到碰撞反应过程的总截面.

对产生三个或更多末态粒子的碰撞过程，可以用类似方法推导出微分截面和总截面(参看 § 8.2 中三体衰变问题).

# 第九章　一些物理过程的初级近似

经过前面几章的分析和讨论，我们现在可以进入具体物理问题的理论计算了．本章将讨论量子场论微扰近似法的一些具体应用．我们将看到，量子场论怎样反映微观粒子运动的客观规律，即粒子的产生、湮没、相互作用、相互转化等过程的具体机制．这里只准备计算一些物理过程的“初级近似”，不考虑高级效应．所谓初级近似，就是指一个确定的相互作用对一个给定物理过程有贡献的最低级微扰近似．高级微扰效应只有在荷电轻子 $l$，$\mu$ 的电磁相互作用等问题中才有重要意义．我们不打算仔细钻研轻子的量子电动力学．粒子物理中非常重要的是参加强相互作用和弱相互作用的重子和介子（统称强子）．四费米子耦合型弱作用虽然微弱，但高级微扰效应的发散困难不能避免，所以高级近似的意义不大．对强作用，微扰近似法本身就不可靠．因此，对粒子物理的大部分问题，只计算初级近似就行了．初级近似跃迁振幅可以看作这类物理问题的有效振幅，对物理问题作初步估计很有用处．

下面选取近年来粒子物理中几个比较典型的问题作为例子，概括地介绍量子场论微扰近似的具体应用．在分析过程中，还将介绍一些经常遇到的具体计算方法，如对初态和末态粒子的自旋或极化求平均或求和，对旋量场矩阵求迹等．

## §9.1 简单的强衰变

首先我们先计算一个最简单的两体衰变过程，即

$$N^* \to N\pi$$

$N(940)$ 和 $N^*(1470)$ 都是自旋宇称为 $\frac{1}{2}^+$ 的费米子．

## 1. 唯象的相互作用

按实验，$N^*$ 的衰变宽度 $\Gamma(N^*) \approx 250\text{MeV}$，分支比 $B(N^* \to N\pi) \approx 60\%$．所以，这个衰变过程应通过强作用．因此可以假设宇称守恒．为了简单起见，这里只考虑 $\pi^0$；产生 $\pi^\pm$ 的衰变可按同位旋守恒定则推算出来．于是有效相互作用哈氏量密度可唯象地写为(参看第五章)．

$$\mathscr{H}_I(x) = -ig[\bar{N}(x)\gamma_5 N^*(x) + \overline{N^*}(x)\gamma_5 N(x)]\varphi(x), \quad (9.1)$$

其中 $\varphi(x)$ 是描述 $\pi^0$ 的厄米赝标场算符．

## 2. 一级微扰跃迁几率

相互作用 (9.1) 的一级微扰效应可以导致 $N^* \to N\pi$，见图 9.1．若 $N^*$，$N$，$\pi^0$ 的粒子态分别是 $(p, r)$，$(q, s)$，$k$，则初态矢和末态矢是

$$|\rangle_i = |N^*\rangle = b_r^+(p)|0\rangle,$$

$$|\rangle_f = |N\pi^0\rangle = a^+(k)b_s^+(q)|0\rangle.$$

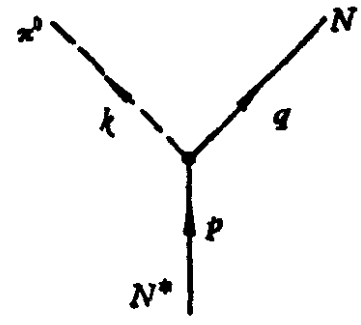


图 9.1

又假设 $M^*$，$M$，$m$ 分别是 $N^*$，$N$，$\pi^0$ 的质量，则其能量为

$$E^* = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^{*2}},$$

$$E = \sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2}, \quad \omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}.$$

然后按图 9.1 并按 § 7.7 总结的规则，就可以直接写出跃迁振幅

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{-1}{\sqrt{2\omega}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E}}\, \bar{u}_s(q)$$

$$\times(-g)\gamma_5(2\pi)^4\delta^{(4)}(p - q - k) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M^*}{E^*}}\, u_r(p)$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p - q - k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^{9/2}} \sqrt{\frac{MM^*}{\omega E E^*}} \cdot (-g)M_{fi}, \quad (9.2)$$

$$M_{fi} = \bar{u}_s(q)\gamma_5 u_r(p). \quad (9.3)$$

按式(8.9)，在衰变粒子 $N^*$ 的静止系中，单位时间的衰变几率是

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta,\varphi)}=\frac{g^2}{2(2\pi)^2}\times\frac{M[M^{*2}-(M-m)^2]^{1/2}[M^{*2}-(M+m)^2]}{2M^{*2}}\Sigma|M_{fi}|^2. \tag{9.4}$$

实验探测 $\pi^0$ 的出射方向 $(\theta,\varphi)$.

假如实验仪器不测定粒子的极化，$\Sigma$ 表示对 $N^*$ 的自旋态求平均，并对 $N$ 的自旋态求和. 为此，我们先介绍旋量场矩阵的迹.

### 3. 矩阵的迹

定义　矩阵 $A$ 的对角元之和称为它的迹，记为 $\mathrm{Tr}A$，即

$$\mathrm{Tr}A=A_{\alpha\alpha}\left(=\sum_{\alpha}A_{\alpha\alpha}\right).$$

若 $I$ 是 4-4 单位矩阵，则 $\mathrm{Tr}I=4$. 若 $A$ 和 $B$ 是同行同列矩阵，则

$$\mathrm{Tr}AB=A_{\alpha\beta}B_{\beta\alpha}=B_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}=\mathrm{Tr}BA.$$

旋量场矩阵 $\gamma_\mu$ 的迹都是 0，证明如下：

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu=\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_5^2=\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5=-\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_5^2=-\mathrm{Tr}\gamma_\mu,$$

故

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu=0.$$

同样

$$\mathrm{Tr}\gamma_5=0.$$

很容易证明，

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu=4\delta_{\mu\nu}\qquad\mu,\nu=1,2,3,4,$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda=0,$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho=4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}),$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu=0,$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu=0,$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = 0,$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho = 4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}.$$

所有其它比较复杂的矩阵乘积的迹都可以类似推得.

**4. 对初态粒子 $N^*$ 的自旋求平均，并对末态粒子 $N$ 的自旋求和**

在任意坐标系中，利用旋量波函数 $u$，$v$ 的性质 (4.43) 和 (4.40)，可以计算

$$\begin{aligned}
\Sigma|M_{fi}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\bar{u}_s(q)\gamma_5 u_r(p)|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\sum_r \bar{u}_r(p)\gamma_5\sum_s u_s(q)\bar{u}_s(q)\gamma_5 u_r(p) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_r \bar{u}_r(p)\gamma_5\Lambda_+(q)\gamma_5 u_r(p) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma_5\Lambda_+(q)\gamma_5)_{\alpha\beta}\sum_r u_{r\beta}(p)\bar{u}_{r\alpha}(p) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma_5\Lambda_+(q)\gamma_5)_{\alpha\beta}\Lambda_+(p)_{\beta\alpha} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\gamma_5\Lambda_+(q)\gamma_5\Lambda_+(p) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Lambda_-(q)\Lambda_+(p) \\
&= -\frac{1}{8MM^*}\mathrm{Tr}(M + i\hat{q})(M^* - i\hat{p}) \\
&= -\frac{MM^* + p\cdot q}{2MM^*}.
\end{aligned}$$

按动量能量守恒，$k = p - q$，因此

$$p\cdot q = -\frac{1}{2}(k^2 - p^2 - q^2) = -\frac{1}{2}(M^{*2} + M^2 - m^2),$$

于是

$$\Sigma|M_{fi}|^2 = \frac{(M^* - M + m)(M^* - M - m)}{2MM^*}. \qquad (9.5)$$

显然这是一个与坐标系无关的不变量.

### 5. 静止系中 $\pi^0$ 的角分布

将式(9.5)代入式(9.4)，就得到 $\pi^0$ 的出射角分布

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta,\varphi)}=\frac{g^2}{16(2\pi)^2}\frac{[(M^*-M)^2-m^2]^{3/2}[(M^*+M)^2-m^2]^{1/2}}{M^{*2}}. \tag{9.6}$$

因此，在不测量 $N$ 和 $N^*$ 的极化(即自旋态)时，静止系中 $\pi^0$ 角分布是球对称的.

### 6. 静止系中衰变宽度

将式(9.6)对 $\pi^0$ 的出射方向 $(\theta、\varphi)$ 积分，再按式(8.11)就得到 $N^*\to N\pi^0$ 的部分衰变宽度

$$\Gamma(N^*\to N\pi^0)=\frac{g^2}{4\pi}\cdot\frac{[(M^*-M)^2-m^2]^{3/2}[(M^*+M)^2-m^2]^{1/2}}{4M^{*2}}. \tag{9.7}$$

根据实验，$M^*=1.47\text{GeV}$、$M=0.94\text{GeV}$，$m=0.14\text{GeV}$；又假设同位旋守恒，则 $\Gamma(N^*\to N\pi^0)\approx 50\text{MeV}$. 按式(9.7)可推得 $\frac{g^2}{4\pi}\approx 2$. 这正是强相互作用耦合常数的数量级.

## §9.2 赝标介子的轻子型衰变

实验结果启示 $\pi$、$K\to e\nu$，$\mu\nu$ 是弱衰变，即通过弱相互作用进行的过程，并且宇称不守恒.

导致一个给定物理过程的相互作用在理论上是不完全确定的. 所取的相互作用正确与否只能由实验作出最后判断，故称为唯象相互作用. 现在就以 $\pi$，$K$ 介子的轻子型衰变为例，对此作一些具体说明. 下面假设两种不同类型的相互作用(赝标型和赝矢型耦合)来进行场论计算，再同实验结果作比较，就可以判断哪一种耦合能够符合实验结果.

今以 $\varphi$ 代表赝标场 ($\pi$ 或 $K$), $l$($e$ 或 $\mu$) 和 $\nu$ (中微子) 代表各个轻子场. 轻子数守恒的过程是

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & \to & l & + & \bar{\nu} \\ (k) & & (p,\ r) & & (q,\ s) \end{array}$$

**1. 赝标型耦合**

对比 § 9.1, 宇称不守恒的唯象有效弱相互作用好像很自然应该是

$$\mathscr{H}_I = -f[\bar{l}(1 + a\gamma_5)\nu\varphi + \bar{\nu}(1 - a\gamma_5)l\varphi^+]. \tag{9.8}$$

$f$ 和 $fa$ 是耦合常数, $a$ 是宇称不守恒系数. 一级微扰就可以导致衰变过程 $\varphi \to l\bar{\nu}$, 见图 9.2. 设 $M$, $m$, $m_0$ 分别是 $\varphi$, $l$, $\nu$ 的质量;各自的动量能量则是

$$k = (\mathbf{k}, i\omega),$$
$$p = (\mathbf{p}, iE),$$
$$q = (\mathbf{q}, iE_0).$$

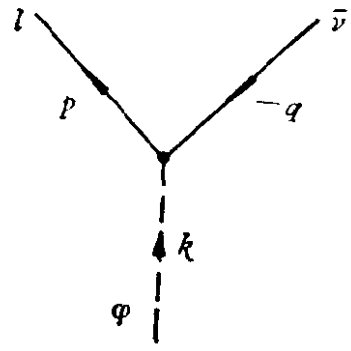


图 9.2

于是一级微扰跃迁振幅是

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k - p - q) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\ (2\pi)^{9/2}}\sqrt{\frac{mm_0}{\omega E E_0}} \cdot iM_{fi}, \tag{9.9}$$

$$M_{fi} = \bar{u}_r(p)(1 + a\gamma_5)v_s(q). \tag{9.10}$$

在衰变介子静止系中, 单位时间内轻子 $l$ 出现于 $\theta$—$(\theta + d\theta)$, $\varphi$—$(\varphi + d\varphi)$ 之间的跃迁几率可从式 (8.9) 推得.

实验若不测定轻子 $l$, $\bar{\nu}$ 的极化(自旋态), 则必须对二者的极化求和. 用 § 9.1 的同样方法计算,得

$$\begin{aligned} \Sigma|M_{fi}|^2 &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\bar{u}_r(p)(1 + a\gamma_5)v_s(q)|^2 \\ &= \sum_r\sum_s \bar{u}_r(p)(1 + a\gamma_5)v_s(q)\bar{v}_s(q)(1 - a\gamma_5)u_r(p) \\ &= -\mathrm{Tr}(1 + a\gamma_5)\Lambda_-(q)(1 - a\gamma_5)\Lambda_+(p, \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4mm_0}\mathrm{Tr}(1+a\gamma_5)(m_0+i\hat{q})(1-a\gamma_5)(m-i\hat{p})$$

$$= -\frac{1}{mm_0}\cdot[(1-a^2)mm_0+(1+a^2)p\cdot q]$$

$$= \frac{1}{2mm_0}\{M^2-(m+m_0)^2+a^2[M^2-(m-m_0)^2]\}. \tag{9.11}$$

把上式代入式(8.9)，就得到衰变粒子静止系中轻子 $l$ 的角分布

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta,\varphi)} = \frac{f^2}{8(2\pi)^2M^2}[M^2-(m-m_0)^2]^{1/2}[M^2-(m+m_0)^2]^{1/2}$$
$$\cdot\{M^2-(m+m_0)^2+a^2[M^2-(m-m_0)^2]\}. \tag{9.12}$$

实验不测定 $l$，$\bar{\nu}$ 的极化时，角分布是球对称的. 虽然原始的相互作用(9.8)宇称不守恒，但是只有在极化实验中才显示出来.

在介子静止系中，由式(9.12)对出射方向 $(\theta,\varphi)$ 积分后，得到单位时间内介子的轻子型衰变几率

$$w(\varphi\to l\bar{\nu}) = \frac{f^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2M^3}[M^2-(m-m_0)^2]^{1/2}[M^2-(m+m_0)^2]^{1/2}$$
$$\times\{M^2-(m+m_0)^2+a^2[M^2-(m-m_0)^2]\}. \tag{9.13}$$

按宇称实验，$a=1$. 而 $m_0\ll m, M$. 因此

$$w(\varphi\to l\bar{\nu}) = \frac{f^2}{4\pi}\frac{(M^2-m^2)^2}{M^3}. \tag{9.14}$$

可是实验测量结果

$$\frac{w(\pi\to e\bar{\nu})}{w(\pi\to\mu\bar{\nu})} = 1.267\times10^{-4},$$
$$\frac{w(K\to e\bar{\nu})}{w(K\to\mu\bar{\nu})} = 2.51\times10^{-5}. \tag{9.15}$$

理论结果(9.14)显然与实验不符. 因此，赝标型耦合(9.8)不能反映实际的 $\varphi$，$l$，$\nu$ 的有效弱相互作用. 下面研究另一种耦合.

## 2. 赝矢型耦合

对 $\mu$ 轻子衰变和原子核 $\beta$ 衰变的分析结果表明，轻子 $l$，$\nu$ 以 V-A 型耦合的形式起作用（参看 § 5.6）.因此，衰变过程 $\varphi \to l\bar{\nu}$ 也应该通过下面耦合形式的唯象相互作用：

$$\mathscr{H}'_I = -if'[\bar{l}\gamma_\lambda(1+b\gamma_5)\nu\partial_\lambda\varphi + \bar{\nu}\gamma_\lambda(1+b\gamma_5)l\partial_\lambda\varphi^+]. \quad (9.16)$$

$f'$ 和 $f'b$ 是耦合常数，$b$ 是宇称不守恒系数. 这时介子湮没或反介子产生的顶点因子是

$$-if'\hat{k}(1+b\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q).$$

于是，按图 9.2，一级微扰振幅可写为

$$S'^{(1)}_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}\,\bar{u}_r(p)\cdot(-if')\hat{k}(1+b\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_0}{E_0}}\,v_s(q)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^{9/2}}\sqrt{\frac{mm_0}{\omega EE_0}}\cdot(-if')M'_{fi}, \quad (9.17)$$

这里

$$\begin{aligned} M'_{fi} &= \bar{u}_r(p)(\hat{p}+\hat{q})(1+b\gamma_5)v_s(q) \\ &= i\bar{u}_r(p)[m(1+b\gamma_5)-m_0(1-b\gamma_5)]v_s(q) \\ &= i(m-m_0)\bar{u}_r(p)(1+c\gamma_5)v_s(q), \\ c &= b\,\frac{m+m_0}{m-m_0}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

在衰变介子静止系中，轻子 $l$ 的角分布可以从式 (8.9) 推得.

对轻子 $l$，$\bar{\nu}$ 的极化求和的结果显然同式 (9.11) 完全相似，即

$$\Sigma|M'_{fi}|^2 = \frac{(m-m_0)^2}{2mm_0}\{M^2-(m+m_0)^2+c^2[M^2-(m-m_0)^2]\}. \quad (9.19)$$

把式 (9.19) 代入式 (8.9)，就得到介子静止系中轻子 $l$ 的角分布. 在不测定极化的实验中，角分布仍然是球对称的. 于是最后

得到静止系中单位时间内介子的轻子型衰变几率

$$w'(\varphi\to l\bar{\nu}) = \frac{f'^2(m-m_0)^2}{8\pi M^3}[M^2-(m-m_0)^2]^{1/2}[M^2-(m+m_0)^2]^{1/2}$$
$$\times\{M^2-(m+m_0)^2+c^2[M^2-(m-m_0)^2]\}. \tag{9.20}$$

但是按宇称实验，$b=1$；而 $m_0 \ll m, M$，所以 $c=1$. 于是式(9.20)简化为

$$w'(\varphi\to l\bar{\nu}) = \frac{f'^2m^2(M^2-m^2)^2}{4\pi M^3}. \tag{9.21}$$

因此

$$\frac{w'(\pi\to e\bar{\nu})}{w'(\pi\to\mu\bar{\nu})} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\frac{(M_\pi^2-m_e^2)^2}{(M_\pi^2-m_\mu^2)^2} = 1.30\times10^{-4},$$
$$\frac{w'(K\to e\bar{\nu})}{w'(K\to\mu\bar{\nu})} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\frac{(M_K^2-m_e^2)^2}{(M_K^2-m_\mu^2)^2} = 2.57\times10^{-5}. \tag{9.22}$$

这与实验测量结果(9.15)符合得很好.

所以实验最后判定，赝矢型耦合(9.16)能够反映实际的 $\varphi$, $l$, $\nu$ 的有效弱相互作用.

## §9.3 中性赝标介子的电磁衰变

$\pi^0$ 的质量很小，是一个比较稳定的介子. 实验表明，$\pi^0$ 主要是通过二级电磁效应衰变为两个光子. $\eta$ 介子衰变为两个光子的几率也很大. 不过 $\pi^0$ 和 $\eta$ 都是中性粒子，好象没有电磁相互作用. 但是，它们同核子有强相互作用，再通过核子可以与电磁场耦合. 另一方面，按照强子结构理论，$\pi^0$ 和 $\eta$ 由荷电的层子和反层子组合而成，因此有直接电磁耦合. 我们现在暂且不管这些机制问题，而只用一个有效耦合唯象地来描述 $\pi^0$, $\eta\to\gamma\gamma$ 衰变过程. 因为 $\pi^0$, $\eta$ 是赝标介子，所以满足规范不变性的 $\pi^0\gamma\gamma$ 或 $\eta\gamma\gamma$ 的有效相互作用哈氏量密度可写为

$$\mathscr{H}_I(x) = -\frac{1}{4}fN(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}(x)F_{\lambda\rho}(x)\varphi(x))$$
$$= -fN(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu(x)\partial_\lambda A_\rho(x)\varphi(x)). \tag{9.23}$$

显然，一级微扰就可导致有待分析的衰变过程

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & \to & \gamma & + & \gamma \\ (p) & & (k,\ \sigma) & & (l,\ \tau) \end{array}$$

$\varphi$ 是赝标介子 ($\pi^0$ 或 $\eta$)，动量能量是 $p=(\mathbf{p}, i\varepsilon)$，质量是 $m$；$\sigma$，$\tau=1,2$ 是光子的极化．很容易看出，衰变过程的顶点因子是

$$-if\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu l_\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k-l). \tag{9.24}$$

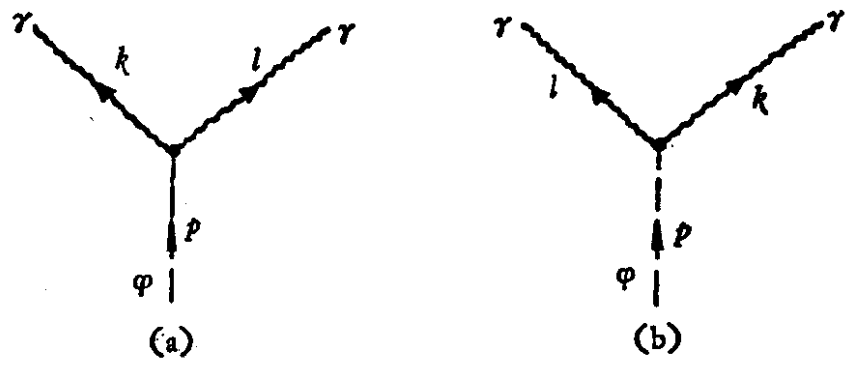



图 9.3

这里末态是两个全同粒子．用 §7.4 的第 2 小节的同样推导方法，可以证明，有两个图对 $\varphi\to\gamma\gamma$ 有贡献，见图 9.3(a) 和 (b)．很明显，两个图对应的振幅完全一样，又因光子是玻色子，两个振幅必须相加，所以

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= 2\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e_\nu^\sigma(k)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_l}}e_\rho^\tau(l) \\ &\quad\times(-i)f\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu l_\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k-l)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k-l)\cdot\frac{1}{2^{3/2}(2\pi)^{9/2}\sqrt{\varepsilon\omega_k\omega_l}}\cdot 2if M_{fi}, \end{aligned} \tag{9.25}$$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu l_\lambda e_\nu^\sigma(k)e_\rho^\tau(l) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda l_\rho e_\mu^\sigma(k)e_\nu^\tau(l). \end{aligned} \tag{9.26}$$

实验一般不测定末态光子的极化．因此必须对两个光子的极化求和：

$$\Sigma|M_{fi}|^2=\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{\tau=1}^{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda l_\rho e_\mu^\sigma(k)e_\nu^\tau(l)\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k_\gamma l_\delta e_\alpha^\sigma(k)e_\beta^\tau(l)\}^*$$

$$= -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k_\lambda k_\gamma l_\rho l_\delta \sum_{\sigma=1}^{2}\varepsilon_\mu^\sigma(k)\varepsilon_\alpha^\sigma(k)\sum_{\tau=1}^{2}\varepsilon_\nu^\tau(l)\varepsilon_\beta^\tau(l).$$

现在，在 $\gamma\gamma$ 质心系(即 $\varphi$ 静止系)中对每个光子的极化求和，得到

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\varepsilon_\mu^\sigma(k)\varepsilon_\nu^\sigma(k) = \sum_{\sigma=1}^{4}\varepsilon_\mu^\sigma(k)\varepsilon_\nu^\sigma(k) - \varepsilon_\mu^3(k)\varepsilon_\nu^3(k) - \varepsilon_\mu^4(k)\varepsilon_\nu^4(k)$$
$$= \delta_{\mu\nu} - \omega_k^{-2}[k_\mu k_\nu - i\omega_k(k_\mu\delta_{\nu 4} + k_\nu\delta_{\mu 4})]. \tag{9.27}$$

在 $\gamma\gamma$ 质心系中，$\mathbf{k}+\mathbf{l}=0$，$\omega_k=\omega_l(=\omega)$. 于是

$$\begin{aligned}\Sigma|M_{fi}|^2 &= -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k_\lambda k_\gamma l_\rho l_\delta\cdot\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\\ &= -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}k_\lambda k_\gamma l_\rho l_\delta\\ &= -2(\delta_{\lambda\gamma}\delta_{\rho\delta}-\delta_{\lambda\delta}\delta_{\rho\gamma})k_\lambda k_\gamma l_\rho l_\delta\\ &= 8\omega^4 = \frac{1}{2}m^4.\end{aligned} \tag{9.28}$$

现将式 (9.28) 代入式 (8.9)，得到质心系中光子的角分布为

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta,\varphi)} = \frac{f^2m^3}{32\pi^2} = \frac{f^2\omega^3}{4\pi^2} = \frac{f^2}{4\pi^2}|\mathbf{k}|^3, \tag{9.29}$$

其中 $\theta$，$\varphi$ 是一个光子的出射方向. 显然不测定光子极化时，角分布是球对称的.

要从角分布 (9.29) 通过积分来求单位时间的总衰变几率 $w$ 时，必须注意末态是两个全同粒子，实验无法分辨它们. 这时在对一个光子的出射方向从 0 到 $4\pi$ 进行积分时，就相当于把末态重复计算了两次. 因此所得结果必须除以 2 才是正确的总衰变几率(参看 §7.6 的 2). 按此分析，从式 (9.29) 推得 $\varphi\to\gamma\gamma$ 的单位时间的衰变几率是

$$w(\varphi\to\gamma\gamma) = \frac{1}{2}\cdot\frac{f^2m^3}{32\pi^2}\cdot 4\pi = \frac{f^2m^3}{16\pi} = \frac{f^2}{2\pi}|\mathbf{k}|^3. \tag{9.30}$$

假设 $f$ 与初态介子无关，则

$$\frac{w(\eta\to\gamma\gamma)}{w(\pi^0\to\gamma\gamma)} = \frac{m_\eta^3}{m_{\pi^0}^3},$$

而实验结果是

$$\frac{w(\eta \to \gamma\gamma)}{w(\pi^0 \to \gamma\gamma)} \approx 66, \quad \frac{m_\eta^3}{m_{\pi^0}^3} \approx 42,$$

相差不大.

## §9.4 矢量介子衰变为轻子对

中性矢量介子有一个特性，它可以衰变为轻子对. 这对 1974 年以来 $\psi$ 族介子的发现和测定起了很大作用. 为了计算这个过程，首先简单地介绍有质量的矢量介子场的量子化问题.

### 1. 矢量场及其量子化

设 $B_\mu(x)$ 是一个有质量的中性矢量场的厄米场变量. 自由场方程是

$$(\Box - M^2)B_\mu(x) = 0, \tag{9.31}$$

还必须加上附加条件

$$\partial_\mu B_\mu(x) = 0, \tag{9.32}$$

$M$ 是量子化后场量子(称为矢量介子)的质量.

无附加条件的矢量场 (9.31) 的任意平面波 $e^{ikx}(k^2 + M^2 = 0)$ 有四个极化分量，对应的四个极化矢量(参看 § 3.4) 是

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu^1(k) &= [\mathbf{n}^{(1)}(k), 0], \\
\varepsilon_\mu^2(k) &= [\mathbf{n}^{(2)}(k), 0], \\
\varepsilon_\mu^3(k) &= \left[\frac{\omega\mathbf{k}}{M|\mathbf{k}|}, i\frac{|\mathbf{k}|}{M}\right], \\
\varepsilon_\mu^4(k) &= \left[i\frac{\mathbf{k}}{M}, -\frac{\omega}{M}\right] = iM^{-1}k_\mu;
\end{aligned} \tag{9.33}$$

这里

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2},$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}^{(a)}(k) = 0, \quad \mathbf{n}^{(a)}(k) \cdot \mathbf{n}^{(b)}(k) = \delta_{ab},$$

$a, b = 1, 2$. 可以证明，极化矢量 (9.33) 满足下列正交归一性:

$$\varepsilon_\mu^\sigma(k)\varepsilon_\mu^\tau(k) = \delta_{\sigma\tau} \qquad \sigma, \tau = 1, 2, 3, 4, \tag{9.34}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{4} \varepsilon_\mu^\sigma(k)\varepsilon_\nu^\sigma(k) = \delta_{\mu\nu}. \tag{9.35}$$

引进附加条件式 (9.32) 后，矢量场只有三个独立极化分量，对应的极化矢量是式 (9.33) 中的前三个. 于是采用平面波表示时，

$$B_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_\mu^i(k)[a_i(k)e^{ikx} + a_i^+(k)e^{-ikx}], \tag{9.36}$$

这里 $a_i(k)$ 和 $a_i^+(k)$ 是动量空间的矢量场场变量；$i = 1, 2, 3$ 是极化指标.

矢量介子是玻色子. 同电磁场的情形相似，矢量场的量子化规则具有下列对易关系:

$$\begin{aligned} &[a_i(k), a_j(k')] = [a_i^+(k), a_j^+(k')] = 0, \\ &[a_i(k), a_j^+(k')] = \delta_{ij}\delta^{(3)}(k - k'), \end{aligned} \tag{9.37}$$

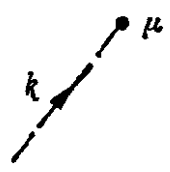
$i, j = 1, 2, 3$. 由此按 § 7.4，§ 7.5 和 § 7.6 的类似方法，可推得关于矢量介子的费曼规则如下:

产生一个矢量介子 $(k, i)$ 的外线



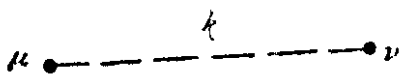

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varepsilon_\mu^i(k);$$

湮没一个矢量介子 $(k, i)$ 的外线




$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varepsilon_\mu^i(k);$$

矢量介子的内线




$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\mu\nu} + M^{-2}k_\mu k_\nu}{k^2 + M^2 - i\varepsilon}.$$

## 2. 中性矢量介子衰变为轻子对

用 $V$ 代表矢量介子，$l$ 代表 $e^-$ 或 $\mu^-$，$\bar{l}$ 代表 $e^+$ 或 $\mu^+$. 这里要分析的衰变过程是

$$\begin{array}{ccccc} V & \to & l & + & \bar{l} \\ (k,\ i) & & (p,\ r) & & (q,\ s) \end{array}$$

关于荷电轻子 $e$，$\mu$ 反常磁矩和类氢原子能谱的精密实验结果表明，除了弱作用之外，轻子 $e$，$\mu$ 只参与电磁相互作用，即只有同光子的直接耦合，哈氏量密度自然是

$$\mathscr{H}_I(x) = -ieN(\bar{l}(x)\hat{A}(x)l(x)), \qquad (9.38)$$

而轻子 $e$，$\mu$ 同 $V$ 没有直接耦合. 因此衰变过程 $V \to l\bar{l}$ 还必须通过 $V$ 和 $\gamma$ 之间的直接相互作用才能进行. 除了质量之外，$V$ 和 $\gamma$ 有完全相同的量子数，它们之间可以直接耦合，有效的相互作用哈氏量密度是

$$\mathscr{H}'_I(x) = -\xi B_\mu(x)A_\mu(x), \qquad (9.39)$$

其中 $\xi$ 是耦合常数. 顶点因子显然是

$$i\xi\delta_{\mu\nu}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_V - k_\gamma). \qquad (9.40)$$

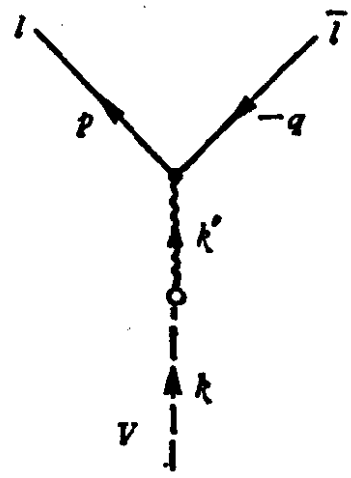


图 9.4

两种耦合 (9.38) 和 (9.39) 各自的一级效应可导致衰变过程 $V \to l\bar{l}$，结合起来是二级微扰，见图 9.4. 设 $M$，$m$ 分别是 $V$，$l$ 和 $\bar{l}$ 的质量. 于是衰变过程的初级微扰跃迁振幅是

$$S_{fi}^{(2)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4k' \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_p}}\,\bar{u}_r(p)$$

$$\times(-e)\gamma_\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'-p-q)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_q}}\,v_s(q)$$

$$\times\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\lambda\rho}}{k'^2-i\varepsilon}\cdot i\xi\delta_{\rho\nu}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'-k)$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_\nu^i(k)$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(k-p-q)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^{9/2}}\frac{m}{\sqrt{\omega E_p E_q}}\cdot\frac{e\xi}{M^2}M_{fi},$$

(9.41)

$$M_{fi} = \bar{u}_r(p)\hat{\epsilon}^i(k)v_s(q) \qquad k = p+q. \tag{9.42}$$

若实验不测定 $V$ 的极化，也不测定 $l$ 和 $\bar{l}$ 的自旋，则必须对前者求平均并对后者求和. 首先对 $l$, $\bar{l}$ 的自旋求和:

$$\begin{aligned}\Sigma|M_{fi}|^2 &= \sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\epsilon_\mu^i(k)\bar{u}_r(p)\gamma_\mu v_s(q)|^2\\ &= -\epsilon_\mu^i(k)\epsilon_\nu^i(k)\sum_r\sum_s\bar{u}_r(p)\gamma_\mu v_s(q)\bar{v}_s(q)\gamma_\nu u_r(p)\\ &= \epsilon_\mu^i(k)\epsilon_\nu^i(k)\mathrm{Tr}\gamma_\mu\Lambda_-(q)\gamma_\nu\Lambda_+(p)\\ &= \frac{1}{m^2}\epsilon_\mu^i(k)\epsilon_\nu^i(k)[(m^2-p\cdot q)\delta_{\mu\nu}+p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu],\end{aligned}$$

然后再对 $V$ 的极化求平均. 由式 (9.35) 首先推得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\epsilon_\mu^i(k)\epsilon_\nu^i(k) &= \sum_{\sigma=1}^{4}\epsilon_\mu^\sigma(k)\epsilon_\nu^\sigma(k)-\epsilon_\mu^4(k)\epsilon_\nu^4(k)\\ &= \delta_{\mu\nu}+M^{-2}k_\mu k_\nu,\end{aligned} \tag{9.43}$$

因此，对 $V$ 的极化求平均并对 $l$, $\bar{l}$ 的自旋求和，得到

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2 &= \frac{1}{3m^2}(\delta_{\mu\nu}+M^{-2}k_\mu k_\nu)[(m^2-p\cdot q)\delta_{\mu\nu}+p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu]\\ &= \frac{1}{3m^2}[3m^2-p\cdot q+2M^{-2}(p\cdot k)(q\cdot k)],\end{aligned}$$

式中 $k = p+q$, 所以

$$p\cdot q = -\frac{1}{2}(M^2-2m^2), \quad p\cdot k = q\cdot k = -\frac{1}{2}M^2.$$

于是最后得到

$$\bar{\Sigma}|M_{fi}|^2 = \frac{1}{3m^2}(M^2+2m^2). \tag{9.44}$$

现将式 (9.44) 代入式 (8.9)，就得到 $V$ 静止系中轻子 $l$ 的角分布，即 $l$ 的出射方向在 $\theta$—$(\theta+d\theta)$, $\varphi$—$(\varphi+d\varphi)$ 之间单位时间内的衰变几率. 因 $m^2 \ll M^2$, 忽略 $m^2/M^2$ 时，$l$ 的角分布是

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta,\varphi)}=\frac{e^2\xi^2}{12(2\pi)^2M^3}. \tag{9.45}$$

不测定粒子的极化时，$V$ 静止系中的角分布是球对称的. 将式 (9.45) 对 $l$ 的出射方向积分，再按式 (8.11)，矢量介子 $V$ 的轻子对型衰变宽度是

$$\Gamma(V\to l\bar{l})=\frac{e^2\xi^2}{12\pi M^3}=\frac{\alpha\xi^2}{3M^3}. \tag{9.46}$$

## §9.5 矢量介子的辐射衰变

在粒子物理中，矢量介子 $V$（带电或中性）往往通过 $\gamma$ 辐射衰变为赝标介子 $\varphi$，如 $\rho\to\pi\gamma$；$\omega\to\pi\gamma$；$\phi\to\pi\gamma$，$\eta\gamma$；$J/\psi\to\pi\gamma$，$\eta\gamma$，$\eta'\gamma$ 等等. 下面唯象地计算这一类过程的衰变宽度：

$$\begin{array}{ccccc} V & \to & \gamma & + & \varphi \\ (k,\ i) & & (k',\ \sigma) & & (l) \end{array}$$

$i=1,2,3$ 表示 $V$ 的极化；$\sigma=1,2$ 是光子 $\gamma$ 的极化.

如同 §9.3 中所讨论的问题一样，规范不变的有效相互作用哈氏量密度应是下列形式：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_I&=\frac{-1}{4}f\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}G_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\varphi+\text{H. C.}\\&=-f\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu B_\nu\partial_\lambda A_\rho\varphi+\text{H. C.}\end{aligned} \tag{9.47}$$

（对中性矢量介子，没有厄米共轭项 H. C.）. 湮没一个矢量介子并产生一个光子的顶点因子是

$$if\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu k'_\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-k'-l). \tag{9.48}$$

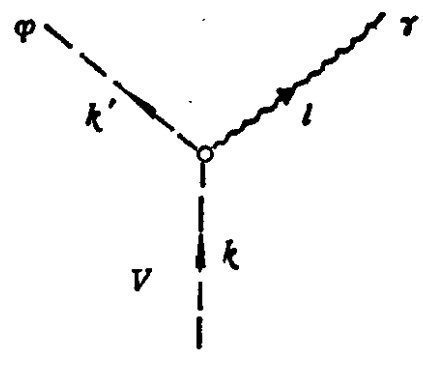


图 9.5

今记 $k=(\mathbf{k},i\omega)$，

$k'=(\mathbf{k}',i\omega')$，

$l=(\mathbf{l},i\varepsilon)$.

介子 $V$ 和 $\varphi$ 的质量分别记为 $M$ 和 $m$.

于是按照图 9.5，一级微扰跃迁振幅

写为

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k - k' - l) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\varepsilon\omega\omega'}} \cdot (-ig)M_{fi}, \tag{9.49}$$

$$M_{fi} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_\mu k'_\nu e^i_\lambda(k) e^\sigma_\rho(k'). \tag{9.50}$$

在衰变介子 $V$ 的静止系中，很容易证明

$$|\mathbf{l}| = |\mathbf{k}'| = \frac{M^2 - m^2}{2M}. \tag{9.51}$$

实验不测定粒子 $V$ 和 $\gamma$ 的极化时，应用式 (9.27) 和 (9.43)，可计算得

$$\begin{aligned}\Sigma|M_{fi}|^2 &= -\frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k_\mu k'_\nu k_\alpha k'_\beta \cdot \sum_{i=1}^{3} e^i_\lambda(k) e^i_\gamma(k) \\ &\quad \times \sum_{\sigma=1}^{2} e^\sigma_\rho(k') e^\sigma_\delta(k') \\ &= -\frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}k_\mu k'_\nu k_\alpha k'_\beta \cdot (\delta_{\lambda\gamma} + M^{-2}k_\lambda k_\gamma) \\ &\quad \times \{\delta_{\rho\delta} - \omega'^{-2}[k'_\rho k'_\delta - i\omega'(k'_\rho\delta_{\delta 4} + k'_\delta\delta_{\rho 4})]\} \\ &= -\frac{1}{3}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}k_\mu k'_\nu k_\alpha k'_\beta = \frac{2}{3}(k \cdot k')^2 \\ &= \frac{1}{6}(M^2 - m^2)^2 = \frac{2}{3}M^2|\mathbf{l}|^2. \end{aligned} \tag{9.52}$$

现将式 (9.52) 代入式 (8.9)，得到光子 $\gamma$ (或介子 $\varphi$) 在 $V$ 静止系中的角分布

$$\frac{dw}{d\Omega(\theta, \varphi)} = \frac{f^2}{12(2\pi)^2}|\mathbf{l}|^3 = \frac{f^2(M^2 - m^2)^3}{48(2\pi)^2M^3}, \tag{9.53}$$

角分布是球对称的. 总衰变几率或宽度则是

$$\Gamma = w = \frac{f^2(M^2 - m^2)^3}{48\pi M^3} = \frac{f^2}{12\pi}|\mathbf{l}|^3. \tag{9.54}$$

## §9.6 赝标介子的半轻子型衰变

这一节将讨论一类简单的三体衰变问题，即

$$\pi^{\pm} \to \pi^0 e^{\pm} \nu, \qquad K^{\pm} \to \pi^0 l^{\pm} \nu,$$

其中 $l$ 代表荷电轻子 $e$ 或 $\mu$. 现以 $\varphi$ 代表初态荷电赝标介子 $\pi$ 或 $K$. 有待计算的物理过程是

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi^- & \to & \pi^0 & + l^- & + & \bar{\nu} \\ (k) & & (l) & (p, r) & & (q, s) \end{array}$$

这里假设了轻子数守恒. 各粒子态已标示如上.

§5.6 和 §9.2 的讨论表明, V-A 耦合型弱相互作用能够反映实验结果. 现在也假设类似的唯象相互作用,即

$$\mathscr{H}_I = -if\bar{l}\gamma_\lambda(1 + b\gamma_5)\nu(\varphi^+\partial_\lambda\pi^0 - \partial_\lambda\varphi^+\pi^0) + \text{H. C.}, \quad (9.55)$$

式中 $f$ 和 $fb$ 是耦合常数, $b$ 是宇称不守恒系数. H. C. 代表前一项的厄米共轭项. 这时湮没一个 $\varphi^-$ 并产生 $\pi^0$ 的顶点因子是

$$if(\hat{k} + \hat{l})(1 + b\gamma_5)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k - l - p - q). \quad (9.56)$$

相互作用 (9.56) 的一级微扰可以导致衰变过程 $\varphi^- \to \pi^0 l^- \bar{\nu}$, 见图 9.6. 设 $M$, $M_0$, $m$, $m_0$ 分别是介子 $\varphi$, $\pi^0$ 和轻子 $l$, $\nu$ 的质量, 并以 $\omega, \omega_0, E, E_0$ 代表它们的能量. 于是一级微扰跃迁振幅写为

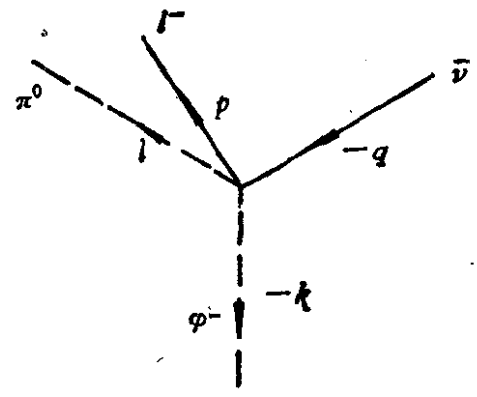


图 9.6

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k - l - p - q) \cdot \frac{1}{2(2\pi)^6}\sqrt{\frac{mm_0}{\omega\omega_0 E E_0}} \cdot if M_{fv}, \quad (9.57)$$

$$M_{fi} = \bar{u}_r(p)(\hat{k} + \hat{l})(1 + b\gamma_5)v_s(q). \quad (9.58)$$

实验若测定轻子 $l$ 的动量 $\mathbf{p}$ 并测定中微子 $\bar{\nu}$ 的出射方向 $(\theta, \varphi)$, 应用式 (8.15) 就得到衰变介子 $\varphi$ 静止系中单位时间的跃迁几率

$$dw = \frac{f^2}{4(2\pi)^5} \frac{mm_0|\mathbf{q}|^3}{ME[(M - E)|\mathbf{q}|^2 + E_0\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]} \times \Sigma|M_{fi}|^2 d\Omega_\nu(\theta, \varphi)d^3p, \quad (9.59)$$

式中 $\theta = \angle(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

假如实验不测定末态轻子 $l$, $\bar{\nu}$ 的极化, 必须对它们求和. 由

式(9.58)得到

$$\Sigma|M_{fi}|^2 = -\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\bar{u}_r(p)(\hat{k}+\hat{l})(1+b\gamma_5)v_s(q)\bar{v}_s(q)$$
$$\times(\hat{k}+\hat{l})(1+b\gamma_5)u_r(p)$$
$$= -\mathrm{Tr}(\hat{k}+\hat{l})(1+b\gamma_5)\Lambda_-(q)(\hat{k}+\hat{l})(1+b\gamma_5)\Lambda_+(p)$$
$$= \frac{1}{mm_0}\{(k+l)^2[(1-b^2)mm_0-(1+b^2)(p,q)]$$
$$+2(1+b^2)(k+l,p)(k+l,q)\},$$

这里 $(A,B)\equiv A\cdot B$，表示两个矢量的四维点乘积. 按能量守恒，$l=k-p-q$，可推得

$$(k+l)^2 = -4M^2 - m^2 - m_0^2 - 4(k,p+q) + 2(p,q),$$
$$(k+l,p) = m^2 + 2(k,p) - (p,q),$$
$$(k+l,q) = m_0^2 + 2(k,q) - (p,q),$$

于是

$$\Sigma|M_{fi}|^2 = \frac{2(1+b^2)}{mm_0}\left\{[m^2+2(k,p)-(p,q)][m_0^2+2(k,q)\right.$$
$$-(p,q)] + \left[2M^2+\frac{1}{2}(m^2+m_0^2)+2(k,p+q)\right.$$
$$\left.\left.-(p,q)\right]\left[(p,q)-\frac{1-b^2}{1+b^2}mm_0\right]\right\}. \qquad (9.60)$$

以下我们比较仔细地计算 $\varphi(\pi,K)\to\pi^0 e\nu$ 衰变过程. 这时，$m^2, m_0^2 \ll M^2, M_0^2, E^2, E_0^2, \cdots$，式(9.60)可简化为

$$mm_0\Sigma|M_{fi}|^2 = 4(1+b^2)[2(k,p)(k,q)+M^2(p,q)]. \qquad (9.61)$$

在 $\varphi$ 静止系中，

$$\mathbf{k}=0,\quad \omega=M,\quad (k,p)=-ME,\quad (k,q)=-ME_0,$$

则

$$mm_0\Sigma|M_{fi}|^2 = 4(1+b^2)M^2(EE_0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$$
$$= 4(1+b^2)M^2EE_0(1+\cos\theta). \qquad (9.62)$$

代入式(9.59)，得到在 $\varphi$ 静止系中的衰变几率

$$dw = \frac{f^2(1+b^2)}{(2\pi)^5}\frac{ME^2E_0^2(1+\cos\theta)}{M-E(1-\cos\theta)}d\Omega_\nu(\theta,\varphi)dEd\Omega_e(\theta',\varphi'),$$

(9.63)

这里 $(\theta',\varphi')$ 是电子 $e$ 的出射方向. 上式给出了末态轻子 $e,\bar{\nu}$ 在衰变介子 $\varphi$ 静止系中的角分布、能量分布、角关联、能量关联.

如将式 (9.63) 积分，就可以得到总衰变几率 $w$. 不过末态三体问题的积分一般相当复杂. 但若从原始的衰变几率表达式 (8.12) 直接积分则比较简便. 在任意坐标系中，结合式 (9.61)，式 (8.12) 在这里写为

$$dW = \delta^{(4)}(K-P)\frac{8f^2(1+b^2)}{(2\pi)^5\omega}[2(k,p)(k,q) + M^2(p,q)]\frac{d^3p}{2E}\frac{d^3q}{2E_0}\frac{d^3l}{2\omega_0}, \tag{9.64}$$

式中 $K=k-l$, $P=p+q$. 现记

$$L_{\mu\nu} = \iint \delta^{(4)}(K-P)p_\mu q_\nu \frac{d^3p}{2E}\frac{d^3q}{2E_0}, \tag{9.65}$$

由式 (9.64) 就可以得到对 $\mathbf{p},\mathbf{q}$ 积分后单位时间的衰变几率

$$dw = \frac{8f^2(1+b^2)}{(2\pi)^5\omega}(2k_\mu k_\nu L_{\mu\nu} + M^2L_{\mu\mu})\frac{d^3l}{2\omega_0}. \tag{9.66}$$

此式给出 $\pi^0$ 的动量分布.

$L_{\mu\nu}$ 是一个二阶张量. 在轻子 $e,\bar{\nu}$ 的质心系中进行积分计算相当容易. 这时 $\mathbf{K}=0$，而 $d^3pd^3q = d^3pd^3P$. 因此，在 $e,\bar{\nu}$ 质心系中，式 (9.65) 变为

$$L^{cm}_{\mu\nu} = \iint \delta(K_0-P_0)\delta^{(3)}(\mathbf{P})p_\mu q_\nu \frac{d^3pd^3P}{4E^2}$$

$$= -\frac{\pi}{24}K_0^2(\delta_{\mu\nu}+2\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}).$$

于是协变化到任意坐标系时，得到

$$L_{\mu\nu} = \frac{\pi}{24}(\delta_{\mu\nu}K^2 + 2K_\mu K_\nu). \tag{9.67}$$

结合式 (9.67) 和 (9.66)，得到

$$dw = \frac{f^2(1+b^2)}{3(2\pi)^4\omega\omega_0}[M^2K^2 + (k, K)^2]d^3l,$$

但是

$$K^2 = -M^2 - M_0^2 - 2(k, l), \quad (k, K) = -M^2 - (k, l),$$

$$M^2K^2 + (k, K)^2 = (k, l)^2 - M^2M_0^2,$$

因此

$$dw = \frac{f^2(1+b^2)}{3(2\pi)^4\omega\omega_0}[(k, l)^2 - M^2M_0^2]d^3l. \tag{9.68}$$

最后在衰变介子 $\varphi$ 静止系中，单位时间的衰变几率是

$$dw = \frac{f^2(1+b^2)M}{3(2\pi)^4}|\mathbf{l}|^3 d\omega_0 d\cos\Theta d\Phi. \tag{9.69}$$

这时 $\pi^0$ 角分布是球对称的. 对 $\pi^0$ 的出射方向 $(\Theta, \Phi)$ 积分，得到 $\pi^0$ 能量分布(又按宇称实验，$b = 1$)

$$\frac{dw}{de} = \frac{f^2MM_0}{6\pi^3}|\mathbf{l}|^3$$

$$= \frac{f^2MM_0^4}{6\pi^3}(e^2 - 1)^{3/2}, \tag{9.70}$$

式中 $e = \frac{\omega_0}{M_0}$. 再对 $e$ 积分，就得到介子 $\varphi$ 静止系中的衰变几率. 首先很容易证明 $e$ 的下限是 1，而上限是 $e_0 = \frac{M^2 + M_0^2}{2MM_0}$. 于是在 $\varphi$ 静止系中，

$$w = \frac{f^2MM_0^4}{6\pi^3}\int_1^{e_0}(e^2 - 1)^{3/2}de$$

$$= \frac{f^2M^5}{384\pi^3}I(M^2, M_0^2), \tag{9.71}$$

$$I(a, b) = \frac{1}{a^4}(a^2 - b^2)[(a-b)^2 - 6ab] + \frac{3b^2}{2a^2}\ln\frac{a}{b}. \tag{9.72}$$

在 $K \to \pi^0 e\nu$ 的特殊情形，$M_0^2 \ll M^2$. 而 $I(a, 0) = 1$，因此

$$w = \frac{f^2M^5}{384\pi^3}. \tag{9.73}$$

在考虑 $\frac{w(\pi\to\pi^0 e\nu)}{w(K\to\pi^0 e\nu)}$, $\frac{w(K\to\pi^0 e\nu)}{w(K\to\pi^0\mu\nu)}$ 等相对衰变几率时，理论结果式(9.72)和(9.73)与实验基本符合.

## §9.7 正负电子在高能碰撞中转化为 $\mu$ 轻子对

现在来分析两个粒子碰撞的问题.

利用储存环装置使两束粒子在质心系中对撞，可以获得非常高能的粒子反应. 正负电子在储存环中的高能碰撞实验，对于1974年以来 $\psi$ 族介子 $J/\psi(3098)$, $\psi'(3684)$ 等等的发现和测定起了重要作用. 在 $e^+e^-$ 对撞过程中，实验可以探测出射的轻子对，$\mu^+\mu^-$ 或 $e^+e^-$，并能相当精确地测量反应截面. 本节将用量子场论方法首先计算转化为 $\mu^+\mu^-$ 对的 $e^+e^-$ 高能碰撞截面；不转化的碰撞过程 $e^+e^-\longrightarrow e^+e^-$ 比较复杂，下节再讨论.

有待计算和分析的碰撞反应是

$$\begin{array}{ccccccc} e^- & + & e^+ & \to & \mu^- & + & \mu^+ \\ (p,r) & & (q,s) & & (p',r') & & (q',s') \end{array}$$

下面我们记

$p=(\boldsymbol{p}, iE)$, $q=(\boldsymbol{q}, i\varepsilon)$,

$p'=(\boldsymbol{p}', iE')$, $q'=(\boldsymbol{q}', i\varepsilon')$,

并记 $m$ 是电子的质量，$m'$ 是 $\mu$ 轻子的质量.

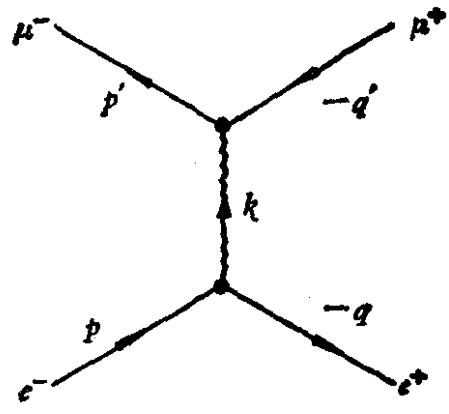


图 9.7

轻子 $e$, $\mu$ 之间的相互作用主要通过电磁作用式(9.38)，详见§9.4. 因此上面的碰撞反应基本是一个单纯的量子电动力学问题. 导致这个过程的初级近似显然是二级微扰效应，见图9.7. 对应的跃迁振幅是

$$S_{fi}^{(2)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4k\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m'}{E'}}\bar{u}_{r'}(p')\cdot(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k)$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m'}{\varepsilon'}}v_{s'}(q')\cdot\frac{-i}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\nu\mu}}{k^2-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\bar{v}_s(q)$$

$$\times(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-k)\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}u_r(p)$$

$$=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')\cdot\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{mm'}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}\cdot\frac{ie^2}{s}M_{fi},\tag{9.74}$$

式中

$$s=-(p+q)^2=-(p'+q')^2,$$

$$M_{fi}=\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu v_{s'}(q')\bar{v}_s(q)\gamma_\mu u_r(p).\tag{9.75}$$

在 $e^+e^-$ 对撞实验中，仪器观测都在入射粒子质心系中进行。应用式 (8.27)，并结合式 (9.74)，$e^+e^-$ 对撞反应在质心系的不变微分截面是

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{e^4}{2\pi^2}\frac{m^2m'^2}{s^3(s-4m^2)}\int_0^{2\pi}\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2d\varphi,\tag{9.76}$$

式中 $t=-(p-p')^2=-(q-q')^2$；$\varphi$ 是末态轻子 $\mu^-$（或 $\mu^+$）相对于初态正负电子碰撞方向的方位角。

高能正负电子碰撞实验一般不测定初态 $e^+$，$e^-$ 的极化（自旋态），也不测定末态 $\mu^+$，$\mu^-$ 的极化。因此在计算反应截面时，必须对前者求平均，并对后者求和，即

$$\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}\sum_{s'=1}^{2}|\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu v_{s'}(q')\bar{v}_s(q)\gamma_\mu u_r(p)|^2$$

$$=\frac{1}{4}\sum_r\sum_s\bar{u}_r(p)\gamma_\mu v_s(q)\bar{v}_s(q)\gamma_\nu u_r(p)$$

$$\times\sum_{r'}\sum_{s'}\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\nu v_{s'}(q')\bar{v}_{s'}(q')\gamma_\mu u_{r'}(p')$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\Lambda_-(q)\gamma_\nu\Lambda_+(p)]\mathrm{Tr}[\gamma_\nu\Lambda_-(q')\gamma_\mu\Lambda_+(p')]$$

$$=\frac{1}{4m^2m'^2}[(m^2-p\cdot q)\delta_{\mu\nu}+p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu]$$

$$\times[(m'^2-p'\cdot q')\delta_{\mu\nu}+p'_\mu q'_\nu+p'_\nu q'_\mu]$$

$$= \frac{1}{2m^2m'^2}(2m^2m'^2 - m'^2p\cdot q - m^2p'\cdot q'$$
$$+ p\cdot p'q\cdot q' + p\cdot q'q\cdot p').$$

按运动学不变参数 $s$, $t$, $u$ 的定义(§ 8.4),很容易证明

$$p\cdot q = -\frac{s}{2} + m^2, \quad p'\cdot q' = -\frac{s}{2} + m'^2,$$

$$p\cdot p' = q\cdot q' = \frac{1}{2}(t - m^2 - m'^2),$$

$$p\cdot q' = q\cdot p' = \frac{1}{2}(u - m^2 - m'^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(s + t - m^2 - m'^2).$$

于是

$$\Sigma|M_{fi}|^2 = \frac{1}{8m^2m'^2}[2(m^2 + m'^2)s + (t - m^2 - m'^2)^2$$
$$+ (s + t - m^2 - m'^2)^2] \qquad (9.77)$$

显然在不测定粒子极化的实验中,跃迁几率与方位角 $\varphi$ 无关. 因此,结合式(9.76)和(9.77),最后得到质心系中不变微分截面

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{e^4}{8\pi s^3(s - 4m^2)}[(s + t - m^2 - m'^2)^2$$
$$+ (t - m^2 - m'^2)^2 + 2(m^2 + m'^2)s]. \qquad (9.78)$$

在高能碰撞中,$m^2$, $m'^2 \ll s$, $|t|_{\max}$. 因此在 $|t| \gg m'^2$ 时,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^4}(s^2 + 2st + 2t^2), \qquad (9.79)$$

式中 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. 现将上式对 $t$ 积分,就得到总反应截面. $t$ 的上下限是

$$-|t|_{\min} = t|_{\theta=0} \approx 0,$$
$$-|t|_{\max} = t|_{\theta=\pi} \approx -s.$$

于是在高能碰撞中,总反应截面是

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \qquad (9.80)$$

因此 $e^+e^-$ 高能对撞时，单纯的量子电动力学效应的总反应截面 $\sigma$ 与碰撞总能量的平方 $s$ 成反比.

理论结果(9.80)同实验测定的总截面 $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ 的行为基本上符合，但只限于背景曲线. 可是在背景上面，实验曲线还显示了一些共振峰结构. 怎样理解这些共振峰呢？ 我们可以回忆一下 §9.4 关于矢量介子衰变的问题. 光子不但同轻子 $e$, $\mu$ 有直接相互作用，并且同中性矢量介子也可以直接耦合. 这个耦合还相当强，见式(9.39). 它对碰撞过程 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 显然也应当有适当的贡献. 很明显，包含这种耦合的初级近似是图 9.8 所示的四级微扰效应. 图 9.8 中的虚线代表中性矢量介子场的传播作用. 设 $M$ 是这个矢量介子的质量. 参照 §9.4 中所列规则，这个四级微扰所导致的跃迁振幅是

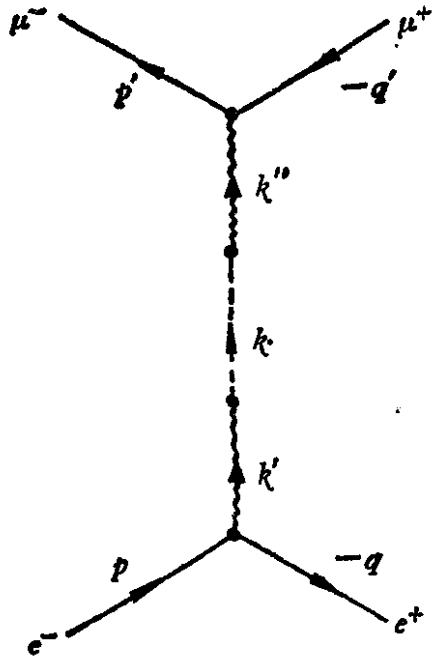


图 9.8

$$S_{fi}^{(4)} = \lim_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''\to+0} \iiint d^4k d^4k' d^4k'' \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m'}{E'}}\, \bar{u}_{r'}(p')$$

$$\times(-e)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+q'-k'') \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m'}{\varepsilon'}}\, v_{s'}(q')$$

$$\times \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\nu\lambda'}}{k''^2 - i\varepsilon''} \cdot i\xi\delta_{\lambda'\lambda}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k''-k)$$

$$\times \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\lambda\rho} + M^{-2}k_\lambda k_\rho}{k^2 + M^2 - i\varepsilon} \cdot i\xi\delta_{\rho\rho'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k-k')$$

$$\times \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\rho'\mu}}{k'^2 - i\varepsilon'} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\, \bar{v}_s(q)$$

$$\times(-e)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k'-p-q) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}}\, u_r(p)$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')\cdot\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{mm'}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}$$
$$\times ie^2\xi^2\cdot\frac{\delta_{\nu\mu}+M^{-2}(p+q)_\nu(p+q)_\mu}{s^2(s-M^2)}$$
$$\times\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\nu v_{s'}(q')\bar{v}_s(q)\gamma_\mu u_r(p). \tag{9.81}$$

但是

$$(p+q)_\mu\bar{v}_s(q)\gamma_\mu u_r(p)=\bar{v}_s(q)(\hat{q}+\hat{p})u_r(p)=0,$$
$$(p+q)_\nu\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\nu v_s'(q_r)=\bar{u}_{r'}(p')(\hat{p}'+\hat{q}')v_s'(q_r)=0$$

因此跃迁振幅式(9.81)简化为

$$S_{fi}^{(4)}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')$$
$$\times\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{mm'}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}\cdot\frac{ie^2\xi^2}{s^2(s-M^2)}M_{fi}$$
$$=\frac{\xi^2}{s(s-M^2)}S_{fi}^{(2)}. \tag{9.82}$$

这里 $M_{fi}$ 和 $S_{fi}^{(2)}$ 仍是式(9.75)和(9.74).

显然我们应当考虑量子电动力学效应(9.74)和矢量介子传播效应(9.82)的干涉作用. 于是碰撞反应 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的总的初级跃迁振幅为

$$S_{fi}=S_{fi}^{(2)}+S_{fi}^{(4)}=\left[1+\frac{\xi^2}{s(s-M^2)}\right]S_{fi}^{(2)}. \tag{9.83}$$

然后,按照式(9.80),高能碰撞时,$e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的总反应截面

$$\sigma=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\left[1+\frac{\xi^2}{s(s-M^2)}\right]^2. \tag{9.84}$$

因此假如实验测定的总截面 $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$ 在 $s\sim M^2$ 处出现共振峰,人们就可以推测有一个质量为 $M$ 的中性矢量介子存在,并参加碰撞过程的相互作用. 实验结果确实显示有 $\rho^0(770)$,$\omega(783)$ 等共振峰,在1974年还发现了 $J/\psi(3098)$,$\psi'(3684)$ 等 $\psi$ 族介子共振峰.

在 $s\sim M^2$ 共振峰的具体形状并不像式(9.84)所显示的那样简单,而且 $\sigma$ 也不是无穷大. 严格地讲,量子场论只能描述稳定的物理粒子的性质和相互作用规则(至少相互作用必须非常微弱).

按照§9.4，中间态的中性矢量介子不是稳定粒子．因此式(9.84)在 $s \sim M^2$ 处只能反映 $\sigma$ 的近似行为．

按式(9.84)，由于矢量介子传播效应和纯粹量子电动力学效应二者之间的干涉作用，在紧靠共振峰 $s = M^2$ 附近，总截面 $\sigma$ 在 $s > M^2$ 处应当超出量子电动力学背景之上，而在 $s < M^2$ 处应低于背景．高能正负电子的电磁辐射作用也产生类似效应(称为辐射尾)．这些都与实验结果的行为符合．

## §9.8 高能正负电子散射

在电子储存环中，高能正负电子进行对撞时，由实验可以探测出射粒子仍然是 $e^+e^-$ 的反应，并能相当精确地测量反应截面．现在用量子场论方法来分析这个散射过程，即

$$\underset{(p,r)}{e^-} + \underset{(q,s)}{e^+} \rightarrow \underset{(p',r')}{e^-} + \underset{(q',s')}{e^+}$$

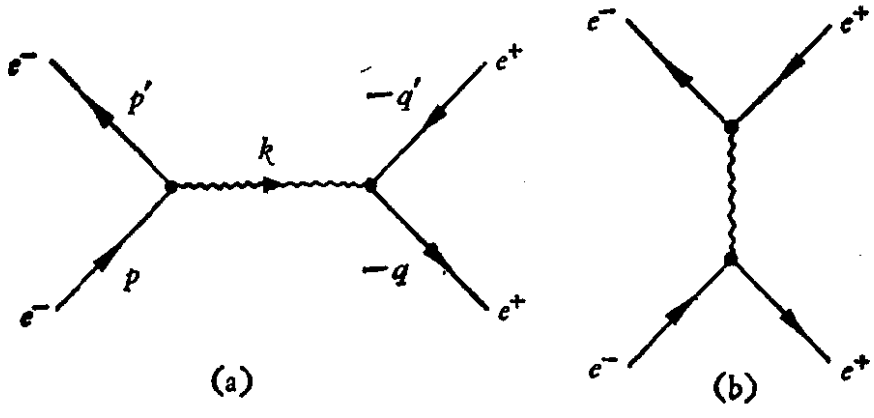



图9.9

显然，§9.7中对碰撞反应 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 有贡献的两个图对现在这个问题同样也有贡献(把出射粒子 $\mu^+\mu^-$ 换作 $e^+e^-$)．此外，还有一个散射型反应[图9.9(a)]，它不但有贡献，而且很重要．这个散射型反应称为 $e^+e^-$ 碰撞过程的散射道，或称为“$t$ 道”，因为这里的量子电磁场的传播因子 $\sim t^{-1}$．上节考虑的纯粹量子电动力学初级效应[图9.9(b)]称为湮没道，或称为“$s$ 道”，因为这

时电磁场的传播因子～ $s^{-1}$ [参看式 (9.74)].

现在先分析 $t$ 道的碰撞效应. 按图 9.10(a), $t$ 道的初级(二级)微扰跃迁振幅为

$$S'^{(2)}_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q') \times\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{m^2}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}\frac{ie^2}{t}M'_{fi}, \tag{9.85}$$

式中 $t=-(p-p')^2=-(q-q')^2$,

$$M'_{fi}=\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu u_r(p)\bar{v}_s(q)\gamma_\mu v_{s'}(q'). \tag{9.86}$$

质心系中不变微分截面可从式 (8.27) 推得:

$$\frac{d\sigma'}{dt}=\frac{e^4}{2\pi^2}\frac{m^4}{s(s-4m^2)t^2}\int_0^{2\pi}\Sigma|M'_{fi}|^2d\varphi, \tag{9.87}$$

其中 $\varphi$ 是末态 $e^-$ (或 $e^+$) 相对于初态 $e^+e^-$ 对撞方向的方位角.

若实验不测定初态和末态正负电子的极化, 则必须对初态正负电子极化求平均,并对末态正负电子极化求和,即

$$\begin{aligned}\Sigma|M'_{fi}|^2&=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}\sum_{s'=1}^{2}|\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu u_r(p)\bar{v}_s(q)\gamma_\mu v_{s'}(q')|^2\\&=\frac{1}{4}\sum_r\sum_{r'}\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu u_r(p)\bar{u}_r(p)\gamma_\nu u_{r'}(p')\\&\quad\times\sum_s\sum_{s'}\bar{v}_s(q)\gamma_\mu v_{s'}(q')\bar{v}_{s'}(q')\gamma_\nu v_s(q)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\Lambda_+(p)\gamma_\nu\Lambda_+(p')]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\Lambda_-(q')\gamma_\nu\Lambda_-(q)]\\&=\frac{1}{4m^4}[(m^2+p\cdot p')\delta_{\mu\nu}-p_\mu p'_\nu-p_\nu p'_\mu]\\&\quad\times[(m^2+q\cdot q')\delta_{\mu\nu}-q_\mu q'_\nu-q_\nu q'_\mu]\\&=\frac{1}{2m^4}[2m^4+m^2(p\cdot p'+q\cdot q')\\&\quad+(p\cdot q)(p'\cdot q')+(p\cdot q')(p'\cdot q)]\\&=\frac{1}{8m^4}[t^2+2st+2(s-2m^2)^2].\end{aligned} \tag{9.88}$$

此式与方位角 $\varphi$ 无关. 于是代入式 (9.87), 就得到质心系中不变

微分截面

$$\frac{d\sigma'}{dt}=\frac{2\pi\alpha^2}{s(s-4m^2)t^2}[t^2+2st+2(s-2m^2)^2]. \quad (9.89)$$

碰撞几率与散射角 $\theta=\angle(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ 的明显关系也很有意义. 首先很容易证明,在 $e^+e^-$ 质心系中,

$$t=-\frac{1}{2}(s-4m^2)(1-\cos\theta). \quad (9.90)$$

于是式 (9.89) 可改写为

$$\frac{d\sigma'}{d\cos\theta}=\frac{\pi\alpha^2}{s(s-4m^2)^2(1-\cos\theta)^2}[(s-4m^2)^2(1-\cos\theta)^2 - 4s(s-4m^2)(1-\cos\theta)+8(s-4m^2)^2]. \quad (9.91)$$

显然,再按式 (9.89), 得

$$\left(\frac{d\sigma'}{dt}\right)_{\theta=0}=\infty,$$

$$\left(\frac{d\sigma'}{dt}\right)_{\theta=\pi}=2\pi\alpha^2\frac{(s-4m^2)^2+8m^4}{s(s-4m^2)^3}.$$

后者是 $\frac{d\sigma'}{dt}$ 的最小值. 不难看出,散射道总截面 $\sigma'$ 是无穷大. 这是因为电磁作用是长程作用. 显然散射道对 $e^+e^-$ 的散射截面贡献很大.

中性矢量介子 $V$ 的传播作用既然对湮没道有贡献, 对散射道自然也有贡献,见图 9.10.

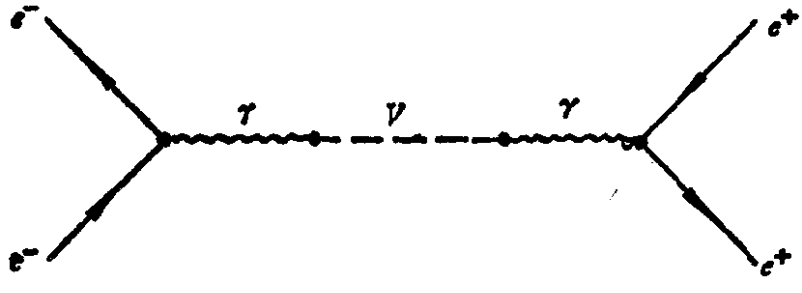



图 9.10

这时同式 (9.81)、(9.82) 相似,初级(四级)微扰跃迁振幅是

$$S_{fi}'^{(4)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')$$
$$\times\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{m^2}{\sqrt{EE'\varepsilon\varepsilon'}}\cdot\frac{ie^2\xi^2}{t^2(t-M^2)}M'_{fi}$$
$$=\frac{\xi^2}{t(t-M^2)}S_{fi}'^{(2)}, \tag{9.92}$$

其中 $S_{fi}'^{(2)}$ 和 $M'_{fi}$ 仍是式 (9.85) 和 (9.86).

结合式 (9.85) 和 (9.92), 散射道的初级跃迁振幅现在是

$$S'_{fi}=S_{fi}'^{(2)}+S_{fi}'^{(4)}=\left[1+\frac{\xi^2}{t(t-M^2)}\right]S_{fi}'^{(2)}. \tag{9.93}$$

于是散射道的不变微分截面可写为

$$\frac{d\sigma'}{dt}=\frac{2\pi\alpha^2}{s(s-4m^2)t^2}\left[1+\frac{\xi^2}{t(t-M^2)}\right]^2[t^2+2st+2(s-2m^2)^2] \tag{9.94}$$

按式 (9.90), $t\leqslant 0$. 因此在散射道不出现矢量介子共振峰. 而且在散射角 $\theta$ 不太小时, 矢量介子的传播效应可以忽略. 但是同 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的情形一样,在 $e^+e^-\to e^+e^-$ 的湮没道也出现矢量介子共振峰,并与实验结果相符.

对于高能正负电子散射过程 ($e^+e^-\to e^+e^-$), 我们自然必须同时考虑湮没道和散射道的效应. 不过两个道干涉作用的计算比较复杂,这里不再仔细讨论了.

## §9.9 高能中微子电子弹性散射

高能质子加速器可以产生大量的高能 $\pi^\pm$ 介子. 通过衰变 (§9.2), 它们又产生高能中微子 $\nu$ 和反中微子 $\bar{\nu}$. 利用这些中微子或反中微子来轰击原子核或电子, 可以激发起各种不同的粒子反应. 由于中微子和反中微子只参与弱相互作用, 这一类反应是研究弱相互作用结构性质的极好途径.

在粒子物理中, 人们现在提出了一个弱作用和电磁作用的统一理论(如瓦因伯格-萨拉姆模型等). 这个理论预言,轻子之间以及轻子和强子之间不但有如 §5.6 所讲过的带电流耦合,而且还有

中性流耦合，并已为实验所证实. 在动量能量转换不大时，这个理论预言，中微子和电子的相互作用可用下面两个有效四费米子耦合来描述：一是 V-A 型带电流耦合(参看 § 5.6)：

$$\mathscr{H}_I^{(c)} = -\frac{G}{\sqrt{2}} N(\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)e \cdot \bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu); \quad (9.95)$$

二是中性流耦合：

$$\mathscr{H}_I^{(n)} = -\frac{G}{\sqrt{2}} N(\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu \cdot \bar{e}\gamma_\mu(c_V + c_A\gamma_5)e). \quad (9.96)$$

$c_V$ 和 $c_A$ 是两个确定的无量纲参数.

$\nu e$ 和 $\bar{\nu}e$ 弹性散射是检验这个理论的好方法. 这个理论还进一步预言，对 $\nu e$ 相互作用有贡献的只有中性流耦合一项，即式(9.96)；而对 $\bar{\nu}e$ 相互作用，带电流和中性流耦合都有贡献.

由于费米子场的反对易性，在进行一个所谓费尔茨变换之后，式(9.95)可写为

$$\mathscr{H}_I^{(c)} = -\frac{G}{\sqrt{2}} N(\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu \cdot \bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)e). \quad (9.97)$$

因此 $\bar{\nu}e$ 相互作用的有效四费米子耦合哈氏量密度是

$$\mathscr{H}_I = \mathscr{H}_I^{(c)} + \mathscr{H}_I^{(n)}$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{2}} N(\bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu \cdot \bar{e}\gamma_\mu(g_V + g_A\gamma_5)e), \quad (9.98)$$

式中

$$g_V = c_V + 1, \qquad g_A = c_A + 1. \quad (9.99)$$

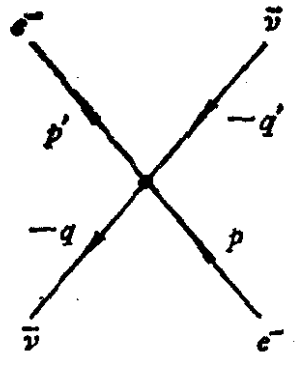


图 9.11

对初级 $\bar{\nu}e$ 弹性散射截面，我们用量子场论微扰近似来进行计算. 有待分析的过程是

$$\bar{\nu} + e^- \rightarrow \bar{\nu} + e^-$$

$$(q, s) \quad (p, r) \quad (q', s') \quad (p', r')$$

现记 $p = (\mathbf{p}, iE)$, $p' = (\mathbf{p}', iE')$,

$q = (\mathbf{q}, i\varepsilon)$, $q' = (\mathbf{q}', i\varepsilon')$.

中微子和电子的质量分别记为 $m_0$ 和 $m$(实际上 $m_0 = 0$). 有效四费米子耦合式(9.98)的

一级微扰即导致上述散射过程，见图 9.11. 对应的跃迁振幅很简单，即

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+q-p'-q')\cdot\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{mm_0}{\sqrt{EE'\theta\theta'}}\cdot\frac{iG}{\sqrt{2}}M_{fi}^{(1)},\tag{9.100}$$

$$M_{fi}^{(1)} = \bar{v}_s(q)\gamma_\mu(1+\gamma_5)v_{s'}(q')\cdot\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu(g_V+g_A\gamma_5)u_r(p).\tag{9.101}$$

为了简便起见，我们在 $\bar{\nu}e$ 的质心系中计算散射微分截面. 为此，可应用式 (8.27)，其中

$$s = -(p+q)^2 = -(p'+q')^2,$$
$$t = -(p-p')^2 = -(q-q')^2.$$

中微子实验目前还不能进行极化实验. 因此必须对两个初态轻子的自旋求平均，并对两个末态轻子的自旋求和，即必须计算

$$\begin{aligned}\overline{\sum}|M_{fi}^{(1)}|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}\sum_{s'=1}^{2}|\bar{v}_s(q)\gamma_\mu(1+\gamma_5)v_{s'}(q')\\&\quad\times\bar{u}_{r'}(p')\gamma_\mu(g_V+g_A\gamma_5)u_r(p)|^2\\&=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(1+\gamma_5)\Lambda_-(q')\gamma_\nu(1+\gamma_5)\Lambda_-(q)]\\&\quad\times\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(g_V+g_A\gamma_5)\Lambda_+(p)\gamma_\nu(g_V+g_A\gamma_5)\Lambda_+(p')].\end{aligned}$$

通过计算，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(g_V+g_A\gamma_5)(m-i\not{p})\gamma_\nu(g_V+g_A\gamma_5)(m-i\not{p}')]\\&\quad=m^2(g_V^2-g_A^2)\delta_{\mu\nu}+(g_V^2+g_A^2)(p\cdot p'\delta_{\mu\nu}-p_\mu p'_\nu-p_\nu p'_\mu)\\&\qquad-2g_Vg_A\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda p'_\rho.\end{aligned}$$

然后，应用下列关系：

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = 2(\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\rho\tau}-\delta_{\lambda\tau}\delta_{\rho\sigma}),$$

很容易证明

$$\begin{aligned}\overline{\sum}|M_{fi}^{(1)}|^2 &= \frac{1}{m^2m_0^2}[(g_V-g_A)^2(p\cdot q)(p'\cdot q')\\&\quad+(g_V+g_A)^2(p\cdot q')(q\cdot p')+m^2(g_V^2-g_A^2)(q\cdot q')]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4m^2m_0^2}[(g_V - g_A)^2(s - m^2 - m_0^2)^2$$
$$+ (g_V + g_A)^2(s + t - m^2 - m_0^2)^2$$
$$+ 2m^2(g_V^2 - g_A^2)(t - 2m_0^2)]. \qquad (9.102)$$

因此在非极化实验中，角分布与方位角 $\varphi$ 无关.

现将式 (9.102) 代入式 (8.27)，然后取 $m_0 = 0$，就得到 $\bar{\nu}e$ 弹性散射不变微分截面如下:

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}e)}{dt} = \frac{G^2}{8\pi(s - m^2)^2}[(g_V - g_A)^2(s - m^2)^2$$
$$+ (g_V + g_A)^2(s + t - m^2)^2 + 2m^2(g_V^2 - g_A^2)t]. \qquad (9.103)$$

在 $\bar{\nu}e$ 弹性散射中，若记 $\theta = \angle(\mathbf{q}', \mathbf{q})$，则在质心系中，

$$t = -2\epsilon^2(1 - \cos\theta).$$

因此 $t$ 的上下限分别是 0 和 $-4\epsilon^2$. 在高能情形，$m^2 \ll s$，则 $t$ 的上下限是 0 和 $-s$. 这时假使我们不考虑原先的动量能量转换 $t$ 要小的理论限制，而对式 (9.103) 进行积分，就得到 $\bar{\nu}e$ 弹性散射总截面

$$\sigma(\bar{\nu}e) = \frac{G^2s}{8\pi}\left[(g_V - g_A)^2 + \frac{1}{3}(g_V + g_A)^2\right]. \qquad (9.104)$$

因为 $GM_p^2 = 1.01 \times 10^{-5}$，$\sigma(\bar{\nu}e)$ 的数量级是 $10^{-39}$ $s\,\mathrm{cm}^2$ ($s$ 的单位是 GeV). 因此中微子能量必须很高，实验才能进行有意义的测量.

对 $\nu e$ 弹性散射，只有中性流耦合 (9.96) 一项有贡献，场论计算方法同 $\bar{\nu}e$ 散射问题完全一样. 不变微分截面 $d\sigma(\nu e)/dt$ 和总截面 $\sigma(\nu e)$ 仍然分别是式 (9.103) 和 (9.104)，只是以 $c_V$ 和 $c_A$ 分别取代 $g_V$ 和 $g_A$.

## §9.10 $\pi$ 介子的光生反应

用高能光子轰击核靶，可以激发起许多不同的粒子反应. 光生介子实验是研究粒子相互作用的重要途径之一. 下面用简单的量子场论方法来分析高能光子打到质子或中子上产生单 $\pi$ 介子的

过程,即

$$\gamma p \to n\pi^+ \qquad \gamma n \to p\pi^-$$

在本章前几节分析粒子衰变过程时,[1] 往往假设唯象的有效相互作用. 这里我们不再仅仅满足于有效耦合,而要考虑导致这些碰撞过程的相互作用的机制. $p$ 和 $\gamma$ 之间有直接电磁耦合,而 $n$ 和 $\gamma$ 之间没有. 实际上,在这两个情形中,$\pi$ 介子的光生反应都只能通过相当复杂的相互作用机制进行. 很明显,我们必须考虑三种不同的相互作用:

1. $N$-$\pi^{\pm}$ 强相互作用,见式 (5.26):

$$\mathscr{H}_I(N\pi^{\pm}) = -ig(\bar{p}\gamma_5 n\varphi + \bar{n}\gamma_5 p\varphi^+);$$

2. $\gamma$-$p$ 电磁相互作用,见式 (7.17)

$$\mathscr{H}_I(\gamma p) = -ieN(\bar{p}\hat{A}p);$$

3. $\gamma$-$\pi^{\pm}$ 电磁相互作用,见式 (5.17):

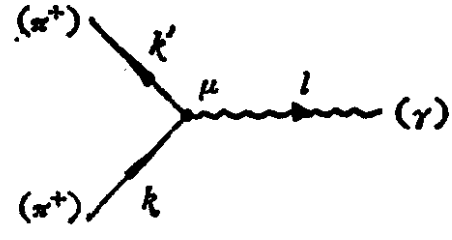
$$\mathscr{H}_I(\gamma\pi^{\pm}) = \mathscr{H}_I^{(1)} + \mathscr{H}_I^{(2)},$$

$$\mathscr{H}_I^{(1)} = -ieN(\partial_\mu\varphi^+\varphi - \varphi^+\partial_\mu\varphi)A_\mu,$$

$$\mathscr{H}_I^{(2)} = e^2N[\varphi^+\varphi(A_\mu A_\mu + A_4^2)].$$

下面我们只计算光生 $\pi$ 介子的初级近似,即强作用和电磁作用的联合二级微扰效应. 因此只需计算一级电磁微扰效应,所以不需要考虑 $\mathscr{H}_I^{(2)}$. 很容易证明,$\mathscr{H}_I^{(1)}$ 所导致的顶点因子是

$$ie(k + k')_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(k - k' - l).$$



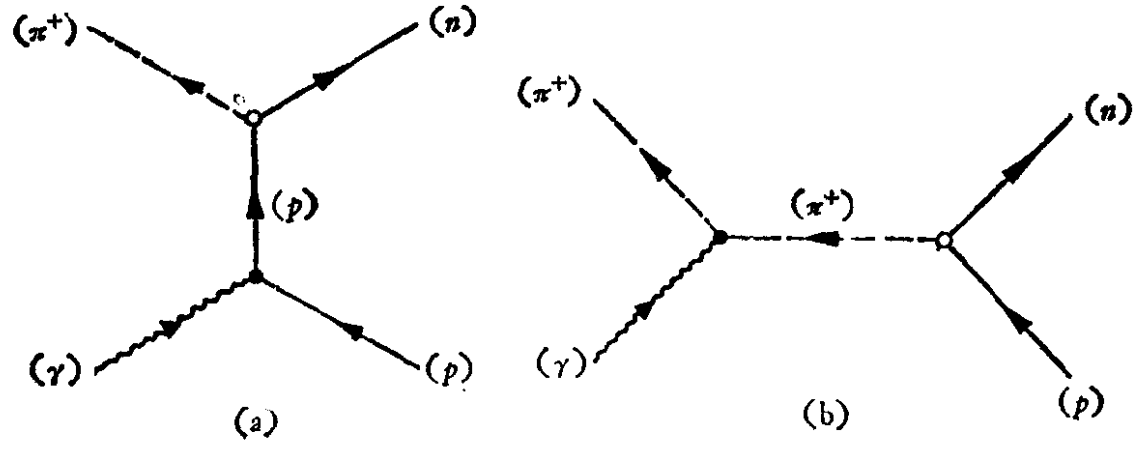




图 9.12

在计算光生 $\pi$ 介子过程的初级近似时,对 $\gamma p \to n\pi^+$ 有贡献的二级图见图 9.12; 图中 • 表示电磁作用顶点, ∘ 表示强作用顶点. 而对 $\gamma n \to p\pi^-$ 有贡献的则见图 9.13

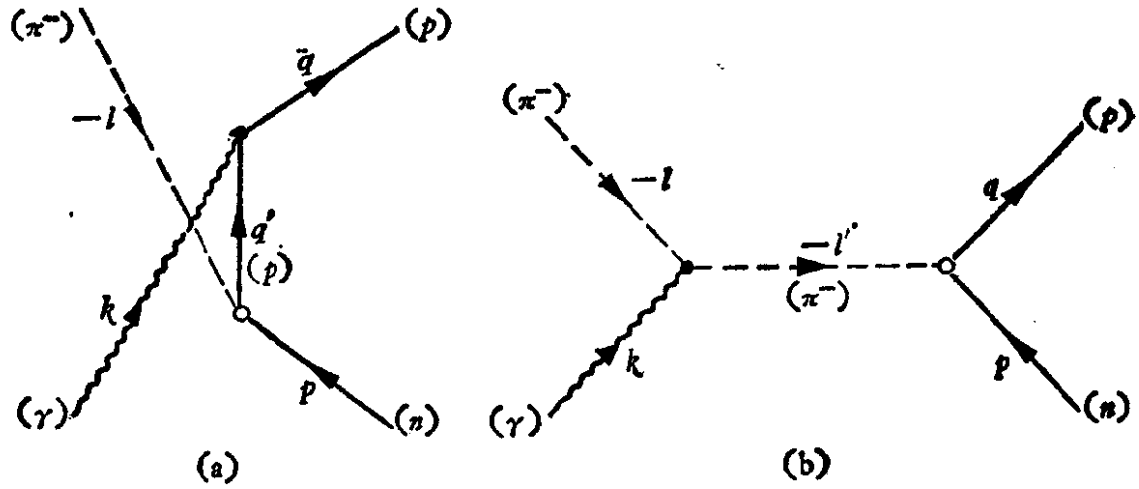



图 9.13

本节仅对下列具体过程的初级近似进行场论计算:

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & + & n & \to & p & + & \pi^- \\ (k,\sigma) & & (p,r) & & (q,s) & & (l) \end{array}$$

对 $\gamma p \to n\pi^+$, 处理方法完全一样. 今取如下的记号:

$k = (\mathbf{k}, i\omega)$ 是入射光子 $\gamma$ 的动量能量,极化 $\sigma = 1, 2$;

$l = (\mathbf{l}, i\epsilon)$ 是出射 $\pi$ 介子的动量能量,质量是 $m$;

$p = (\mathbf{p}, i\varepsilon)$ 是靶中子的动量能量,质量是 $M$;

$q = (\mathbf{q}, iE)$ 是反冲质子的动量能量,质量也是 $M$.

按照图 9.13 的两个费曼图,光生过程 $\gamma n \to p\pi^-$ 的二级微扰跃迁振幅是

$$S_{fi}^{(2)} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p-l-q)\cdot\frac{1}{2(2\pi)^6}\cdot\frac{M}{\sqrt{\omega\epsilon E\varepsilon}}\cdot(-eg)M_{fi}, \tag{9.105}$$

$$M_{fi} = -\varepsilon_\mu^\sigma(k)\bar{u}_s(q)\left[\gamma_\mu\frac{\hat{l}-\hat{p}-iM}{(p-l)^2+M^2} + \frac{(2l-k)_\mu}{(k-l)^2+m^2}\right]\gamma_5 u_r(p), \tag{9.106}$$

但是

$$k_\mu \varepsilon^\sigma_\mu(k) = 0 \qquad \sigma = 1, 2,$$
$$(\hat{p} + iM)\gamma_5 u_r(p) = i\gamma_5(i\hat{p} + M)u_r(p) = 0,$$
$$(p - l)^2 + M^2 = -2p \cdot l - m^2,$$
$$(k - l)^2 + m^2 = -2k \cdot l.$$

于是不变振幅式 (9.106) 简化为

$$M_{fi} = \bar{u}_s(q)\left[\frac{\hat{\varepsilon}^\sigma(k)\hat{l}}{2p \cdot l + m^2} + \frac{l \cdot \varepsilon^\sigma(k)}{k \cdot l}\right]\gamma_5 u_r(p). \quad (9.107)$$

光生介子实验一般都在实验室系中进行，即采用静止的氢或氘核作为靶，故 $\mathbf{p} = 0$，$\varepsilon = M$. 因此在测定 $\pi^-$ 介子的出射方向 $(\theta, \varphi)$ 时，应用式 (8.24) 就得到光生过程 $\gamma n \to p\pi^-$ 在实验室系的微分截面如下：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega(\theta, \varphi)} = \frac{e^2 g^2}{4(2\pi)^2} \cdot \frac{M|\mathbf{l}|^3}{\omega[(M + \omega)|\mathbf{l}|^2 - \varepsilon \mathbf{l} \cdot \mathbf{k}]} \overline{\sum} |M_{fi}|^2, \quad (9.108)$$

式中 $\theta = \angle(\mathbf{l}, \mathbf{k})$. 实验一般不采用极化光子，也不测定靶和反冲核子的自旋. 因此必须对入射光子和靶中子的极化求平均 [故在式 (9.108) 中用双重平均符号]，并对反冲质子的极化求和.

先对初态中子的自旋求平均，并对末态质子的自旋求和. 对任意矢量 $Q_\mu$，可以证明 $\gamma_4 \hat{Q}^+ \gamma_4 = -\hat{Q}$. 因此从式 (9.108) 得到在任意坐标系中，

$$\begin{aligned}\overline{\sum} |M_{fi}|^2 = &-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} \bar{u}_s(q)\left[\frac{\hat{\varepsilon}^\sigma(k)\hat{l}}{2p \cdot l + m^2} + \frac{l \cdot \varepsilon^\sigma(k)}{k \cdot l}\right]\gamma_5 u_r(p) \\ &\times \bar{u}_r(p)\gamma_5\left[\frac{\hat{l}\hat{\varepsilon}^\sigma(k)}{2p \cdot l + m^2} + \frac{l \cdot \varepsilon^\sigma(k)}{k \cdot l}\right] u_s(q) \\ = &-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\left[\frac{\hat{\varepsilon}^\sigma(k)\hat{l}}{2p \cdot l + m^2} + \frac{l \cdot \varepsilon^\sigma(k)}{k \cdot l}\right] \Lambda_+(-p) \right. \\ &\left. \times \left[\frac{\hat{l}\hat{\varepsilon}^\sigma(k)}{2p \cdot l + m^2} + \frac{l \cdot \varepsilon^\sigma(k)}{k \cdot l}\right] \Lambda_+(q)\right\}. \end{aligned} \quad (9.109)$$

在实验室系中，

$$p\cdot e^{\sigma}(k)=0 \qquad \sigma=1,2,$$
$$p\cdot k=-M\omega,$$
$$p\cdot l=-M\varepsilon.$$

代入式(9.109)，经过计算，就得到

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{\omega}{M(2M\varepsilon-m^2)}\left\{M\varepsilon-m^2\left[1+M\omega\frac{(l\cdot e^{\sigma}(k))^2}{(k\cdot l)^2}\right]\right\}. \tag{9.110}$$

现在在实验室系中再对入射光子的极化求平均．首先应用式(9.27)，很容易证明，

$$\sum_{\sigma=1}^{2}[l\cdot e^{\sigma}(k)]^2=-\omega^{-2}[(k\cdot l)^2+2\omega\varepsilon(k\cdot l)+m^2\omega^2].$$

最后，在实验室系中，对初态 $\gamma$ 和 $n$ 的极化求平均，并对反冲质子 $p$ 的极化求和，得到

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{1}{M(2M\varepsilon-m^2)^2}\left\{M\omega\varepsilon+m^2\left(\frac{M}{2}-\omega+\frac{M\omega\varepsilon}{k\cdot l}\right)+\frac{m^4M\omega^2}{2(k\cdot l)^2}\right\}.$$

按动量能量守恒，$k+p=l+q$，可以证明：在实验室系中，

$$k\cdot l=-M(\omega-\varepsilon)-\frac{m^2}{2},$$

于是

$$M(\omega-\varepsilon)=\omega(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-m^2}\cos\theta)-\frac{m^2}{2}.$$

因此，当出射方向 $\theta$ 确定后，$\pi^-$ 的能量 $\varepsilon$ 就由此式决定．由此还可以改写

$$\overline{\sum}|M_{fi}|^2=\frac{1}{M(2M\varepsilon-m^2)^2}\left\{M\omega\varepsilon+m^2\left[\frac{M}{2}-\omega-\frac{2M\omega\varepsilon}{2M(\omega-\varepsilon)+m^2}\right]+\frac{2m^4M\omega^2}{[2M(\omega-\varepsilon)+m^2]^2}\right\}. \tag{9.111}$$

在 $\pi$ 介子的高能光生实验中，$m^2\ll M^2,\ \omega^2,\ \varepsilon^2,\ M\omega,\ M\varepsilon,$

$\omega_\varepsilon$，这时在实验室系中，

$$\varepsilon = \frac{M\omega}{M + \omega(1 - \cos\theta)},$$

$$k \cdot l = -\omega\varepsilon(1 - \cos\theta) = -\frac{M\omega^2(1 - \cos\theta)}{M + \omega(1 - \cos\theta)}.$$

在 $\pi$ 介子出射角 $\theta$ 不太小时，显然

$$\overline{\Sigma}|M_{fi}|^2 = \frac{\omega}{4M^2\varepsilon} = \frac{M + \omega(1 - \cos\theta)}{4M^3}. \qquad (9.112)$$

因此，在高能光生 $\pi$ 介子实验中，当 $\pi$ 介子出射角 $\theta$ 不太小时，反应截面与光子的极化无关.

由式 (9.112) 得知，在不测定入射和出射粒子极化的实验中，反应截面与 $\pi$ 介子的出射方位角 $\varphi$ 无关. 因此，将式 (9.112) 代入式 (9.108)，再对 $\varphi$ 积分，就得到高能光生反应在实验室系中产生 $\pi^-$ 介子的角分布：

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha g^2\varepsilon}{8M^2\omega} = \frac{\alpha g^2}{8M[M + \omega(1 - \cos\theta)]}, \qquad (9.113)$$

式中 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

光生 $\pi$ 介子的过程中有强相互作用，而且质子和中子也都不是点粒子，因此不能期望这个简单的场论计算结果就可以很好地符合实验.

但是通过对 $\pi$ 介子光生反应复杂机制的分析，我们可以更清楚地认识量子场论的粒子相互作用理论怎样反映粒子的产生、湮没、相互转化等过程的物理机制和规律.

## §9.11 外场问题；库仑散射

在第七、第八章中，我们只讨论了粒子之间也就是量子场之间的相互作用问题. 可是在物理实验中，经典场往往也参加相互作用，如库仑散射，同步加速器辐射等等. 这时参加相互作用的除了量子场之外，还有非量子化的经典场，一般称为外场，如库仑散射

中的静电场和同步加速器辐射中的静磁场，又如核散射问题中的静介子场等.

现在就以荷电费米子(电子或质子)在一个外电场中的散射问题为例，简单地阐明量子场论如何处理有外场参加的相互作用问题。这里涉及的是下面的电磁相互作用:

$$\mathscr{H}_I(x) = -ieN(\bar{\psi}(x)\hat{A}^c(x)\psi(x)), \qquad (9.114)$$

其中 $A^c_\mu(x)$ 是一个非量子化的经典场，而 $\psi(x)$ 是描述费米子的量子场. 按式(9.114),这个散射问题的初级近似是一级的. 按照第七章的同样分析方法，对这个过程有贡献的一级散射矩阵只有下面一项:

$$S^{(1)} \Rightarrow -e\int d^4x\psi^{(+)}(x)\hat{A}^c(x)\psi^{(-)}(x).$$

设 $(p, r)$ 是入射粒子态，$(p', r')$ 是出射粒子态. 一级微扰散射振幅显然是

$$S^{(1)}_{fi} = -e\int d^4x\langle 0|b_{r'}(p')\bar{\psi}^{(+)}(x)\hat{A}^c(x)\psi^{(-)}(x)b^+_r(p)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m'}{E'}}\,\bar{u}_{r'}(p')\cdot\mathscr{F}(p-p')\cdot\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}\,u_r(p) \qquad (9.115)$$

(实际上 $m = m'$). 式中

$$\mathscr{F}(p-p') = -e\int d^4x\hat{A}^c(x)e^{i(p-p')x}. \qquad (9.116)$$

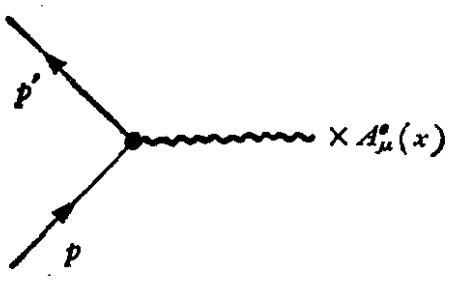


图 9.14

散射振幅 (9.115) 所对应的费曼图见图 9.14. 外场作用的顶点因子是

$$\mathscr{F}(p-p').$$

假设外场是一个静电场，

$$\hat{A}^c(x) = i\gamma_4 V(\mathbf{x}).$$

这时

$$\mathscr{F}(p-p') = -ie\gamma_4\int d^4xV(\mathbf{x})e^{-i(p-p')x}$$

$$= 2\pi\delta(E-E')(-i)e\gamma_4 U(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \qquad (9.117)$$

$$U(\mathbf{k}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{9.118}$$

于是一级散射振幅 (9.115) 可写为

$$S_{fi}^{(1)} = 2\pi\delta(E - E') \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{mm'}{EE'}} (-ie) U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathscr{M}_{fi},$$

(9.119)

$$\mathscr{M}_{fi} = \bar{u}_{r'}(p') \gamma_4 u_r(p). \tag{9.120}$$

在式 (9.119) 中，$\delta(E - E')$ 表示在静外场散射过程中粒子能量守恒. 但是同第八章中所讨论的问题不一样，这里粒子动量一般不守恒. 静外场不吸收也不放出能量，但是可以吸取动量. (这一点与一个粒子和一个质量为 $\infty$ 的物体相碰撞的情形一样.) 这时第八章中求取跃迁几率的一般公式在这里不适用. 但用类似的方法，可以推得从一个确定的粒子初态 $i$ 到一个确定的粒子末态 $f$ 的散射几率是

$$\overline{\Sigma} |S_{fi}^{(1)}|^2 = (2\pi)^2 \delta(0) \delta(E - E') \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{mm'}{EE'}$$

$$\times e^2 |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \overline{\Sigma} |\mathscr{M}_{fi}|^2, \tag{9.121}$$

式中各个符号的意义已见第八章. 这里显然

$$\delta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2\pi},$$

其中 $T$ 是相互作用的时间. 因此单位时间的散射几率是

$$W_{fi} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{\Sigma} |S_{fi}^{(1)}|^2$$

$$= \delta(E - E') \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{mm'}{EE'} e^2 |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \overline{\Sigma} |\mathscr{M}_{fi}|^2.$$

(9.122)

初态粒子动量在 $\mathbf{p} - \mathbf{p} + d\mathbf{p}$ 之间，而末态粒子动量在 $\mathbf{p}' - \mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$ 之间的单位时间散射几率则是

$$dW_{fi} = W_{fi} d^3p d^3p'.$$

若以 $V$ 代表相互作用的空间体积 ($V \to \infty$)，而因为入射粒子态对所讨论的散射实验而言是单一确定的，故按第八章的分析，

$$\lim_{V\to\infty} d\mathbf{p} = 0, \qquad \lim_{V\to\infty} \frac{Vd^3p}{(2\pi)^3} = 1.$$

在实验室系(即静电场坐标系)中,投射粒子流强见 § 8.3 的 1,即

$$I = \lim_{V\to\infty} \frac{|\mathbf{v}|}{V} = \lim_{V\to\infty} \frac{|\mathbf{p}|}{VE}.$$

于是实验室系中单位流强单位时间的散射几率为

$$d\Sigma_{fi} = \frac{dW_{fi}}{I}$$

$$= \delta(E - E') \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{mm'}{|\mathbf{p}|E'} e^2 |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Sigma |\mathscr{M}_{fi}|^2 d^3p'. \tag{9.123}$$

又因为能量守恒,出射粒子动量 $\mathbf{p}'$ 只有两个独立自由度,取为出射方向 $(\theta, \varphi)$. 这时可写

$$d^3p' = |\mathbf{p}'| E' dE' d\Omega(\theta, \varphi).$$

代入式 (9.123) 并对非独立自由度 $E'$ 积分,就得到散射微分截面

$$d\sigma_{fi} = \int_{E'} d\Sigma_{fi}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} mm' e^2 |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Sigma |\mathscr{M}_{fi}|^2 d\Omega(\theta, \varphi). \tag{9.124}$$

现在来计算电子被一个核库仑场散射的具体问题. 这时

$$V(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

又因为 $m = m'$, $E = E'$, 式 (9.124) 简化为

$$d\sigma = \frac{e^2m^2}{(2\pi)^2} |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Sigma |\mathscr{M}_{fi}|^2 d\Omega(\theta, \varphi). \tag{9.125}$$

首先很容易证明,

$$U(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} = \frac{Ze}{4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \tag{9.126}$$

式中 $\theta = \angle(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. 另一方面,实验若不测定入射和出射电子的极化,则按式 (9.120) 得到

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}|\mathscr{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{r'=1}^{2}\bar{u}_{r'}(p')\gamma_4 u_r(p)\bar{u}_r(p)\gamma_4 u_{r'}(p') \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\gamma_4\Lambda_+(p)\gamma_4\Lambda_+(p') \\ &= \frac{1}{2m^2}(m^2 + 2E^2 + p\cdot p') \\ &= \frac{1}{2m^2}(E^2 - \mathbf{p}^2 + E^2 + \mathbf{p}^2\cos\theta) \\ &= \frac{E^2}{m^2}\left(1 - \mathbf{v}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \tag{9.127}$$

括弧中第二项是自旋 1/2 的效应,也就是一种相对论效应.

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/E.$$

最后将式 (9.126) 和 (9.127) 代入式 (9.125),就得到库仑散射微分截面

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{8\pi E\mathbf{v}^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\left(1 - \mathbf{v}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\Omega(\theta,\varphi). \tag{9.128}$$

当 $\theta \to 0$ 时,散射微分截面发散,总截面也发散. 这是由于库仑力是长程作用的缘故.

取非相对论近似时,自旋效应消失,库仑散射微分截面 (9.128) 简化为

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{8\pi m\mathbf{v}^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 d\Omega(\theta,\varphi). \tag{9.129}$$

这是卢瑟福散射公式. 它是非相对论经典力学的严格结果,但只是量子场论一级微扰的非相对论近似.

# 附录　编时乘积和散射矩阵的约化

在第七章里推导费曼规则时，我们采用了对具体物理过程作具体分析的比较直观的方法，总结出了这些规则. 但是为了量子场论的进一步和更广泛的应用，有必要学习通常采用的一种一般性的代数方法，即威克定理. 虽然这并不是一个必不可少的方法(参看第七章)，然而是一个最系统的方法. 在这个附录里将对它作简单的介绍.

为了介绍威克定理，首先必须讨论场算符的编时乘积和场算符的收缩. 这些问题将在 § A1 和 § A2 中分别讨论.

整个理论处理仍然在相互作用表象中进行.

## § A1　编 时 乘 积

在用微扰近似法对波动方程 (7.1) 进行求解时，迭代展开后，得到 $U$ 矩阵的具体表式 (7.3)—(7.4). 然后利用阶越函数 $\theta(\tau)$ 可以把各级微扰项 $U^{(n)}$ 写成式 (7.6)，其中 $n$ 重积分的上下限都相同. 现在记

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n) \equiv \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\cdots\theta(t_{n-1} - t_n) \times H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n). \tag{A1.1}$$

函数 $F$ 的性质一般允许对 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的多重积分任意改变顺序. 这时由式 (7.6) 很容易证明

$$\begin{aligned} U^{(n)}(t, t_0) &= (-i)^n \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 \cdots dt_n F(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &= \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ &\quad \times \sum_P F(t_1, t_2, \cdots, t_n). \end{aligned} \tag{A1.2}$$

这里 $\sum_P$ 表示对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有 $n!$ 个排列求和.

现在定义算符 $T$ 如下:

$$T(H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)) = \sum_P F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= \sum_P \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\cdots\theta(t_{n-1} - t_n)$$

$$\times H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n). \qquad \text{(A1.3)}$$

这个算符 $T$ 有什么意义,由下面简单分析可以立刻看出. 假设时间 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 有下列顺序:

$$t_{\alpha_1} > t_{\alpha_2} > \cdots > t_{\alpha_n},$$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的某一个确定的排列. 按阶越函数 $\theta(\tau)$ 的定义,式 (A1.3) 右侧的 $n!$ 项中只有一项不等于 0,即 $H_I(t_{\alpha_1})\cdots H_I(t_{\alpha_n})$. 于是这时

$$T(H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_{\alpha_n})) = H_I(t_{\alpha_1})H_I(t_{\alpha_2})\cdots H_I(t_{\alpha_n}).$$

因此算符 $T$ 把哈氏量算符乘积按照时间顺序作了重新安排:时间在先的算符位于时间在后的算符的右边,即时间越先,起作用越早. 由于这个特性,算符 $T$ 称为编时算符,而式 (A1.3) 称为哈氏量算符的编时乘积,简称 $T$ 乘积.

对同时的哈氏量算符乘积,自然的定义是

$$T(H_I(t)H_I(t)) = H_I(t)H_I(t).$$

利用 $T$ 乘积的性质,又按式 (A1.2) 和 (A1.3), $U$ 矩阵的展开式 (7.3)—(7.4) 可以简写为

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0), \qquad U^{(0)}(t, t_0) = I,$$

$$U^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2\cdots dt_n T(H_I(t_1)H_I(t_2)$$

$$\cdots H_I(t_n))$$

$$= \frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n T(\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)$$

$$\cdots\mathscr{H}_I(x_n)). \qquad \text{(A1.4)}$$

相应地 $S$ 矩阵的展开式(7.7)—(7.9)也可写为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S^{(n)},\qquad S^{(0)}=I,$$

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_nT(\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)).\qquad\text{(A1.5)}$$

但是算符 $T$ 到此并没有完全定义，因为它还只是对哈氏量算符乘积有了明确定义 (A1.3)，而对一般场算符乘积而言尚未定义．现在我们对算符 $T$ 进一步定义如下：

对玻色子场算符，由于它们满足对易关系，我们定义

$$T(\varphi(x)\varphi(x'))=\begin{cases}\varphi(x)\varphi(x'), & t>t',\\ \varphi(x')\varphi(x), & t'>t.\end{cases}\qquad\text{(A1.6)}$$

(安排时，对易子不计．)费米子场满足反对易关系，我们定义

$$T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))=\begin{cases}\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'), & t>t',\\ -\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x), & t'>t.\end{cases}\qquad\text{(A1.7)}$$

(安排时，反对易子不计．)另一方面，还可以协调地定义

$$T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'))=\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'),\qquad\text{(A1.8)}$$

$$T(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))=\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'),\qquad\text{(A1.9)}$$

不管 $t>t'$ 还是 $t'>t$．最后对两个不同的场，显然也应有类似于式 (A1.8)—(A1.9) 的定义，例如

$$T(\psi_\alpha(x)\varphi(x'))=\psi_\alpha(x)\varphi(x'),\qquad\text{(A1.10)}$$

不管 $t>t'$ 还是 $t'>t$．

假如两个场算符是同时的，它们的 $T$ 乘积自然就是这个乘积本身，例如

$$T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x))=\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x)\qquad\text{(A1.11)}$$

等等．这也自然适用于哈氏量密度乘积，如

$$T(\mathscr{H}_I^{(1)}(x)\mathscr{H}_I^{(2)}(x))=\mathscr{H}_I^{(1)}(x)\mathscr{H}_I^{(2)}(x).$$

两个以上场算符的 $T$ 乘积的定义可由式 (A1.7)—(A1.11) 加以推广得到．

以上对算符 $T$ 的定义同在哈氏量算符乘积情形下的 $T$ 的定义

(A1.3)是协调一致的.

到此$T$乘积就完全定义了.

## § A2 场算符的收缩

上节中我们证明了散射矩阵$S$的任意级微扰项$S^{(n)}$都是一些场算符的编时乘积[见式(A1.5)]; 而按§7.2的分析,具有确切物理意义的场算符乘积都是正规乘积. 因此量子场论求解的一个关键问题就是怎样把场算符的$T$乘积完全约化为$N$乘积.

本节先讨论只有两个场算符的乘积问题, 即将两个场算符的$T$乘积约化为$N$乘积的问题.

### 1. 介子场

在最简单的厄米标量场的情形,按照§7.2中$N$乘积的定义,

$$N(\varphi(x)\varphi(x')) = \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x') + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(+)}(x')\varphi^{(-)}(x).$$

又按$T$乘积的定义(A1.6)可知,在$t > t'$时,

$$T(\varphi(x)\varphi(x')) = \varphi(x)\varphi(x') = \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(+)}(x') + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(x') + \varphi^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x').$$

于是在$t > t'$时,

$$T(\varphi(x)\varphi(x')) - N(\varphi(x)\varphi(x')) = [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')]. \tag{A2.1}$$

同样可以证明,在$t' > t$时,

$$T(\varphi(x)\varphi(x')) - N(\varphi(x)\varphi(x')) = [\varphi^{(-)}(x'), \varphi^{(+)}(x)]. \tag{A2.2}$$

现在记

$$\varphi^{\cdot}(x)\varphi^{\cdot}(x') = T(\varphi(x)\varphi(x')) - N(\varphi(x)\varphi(x')), \tag{A2.3}$$

它称为场算符$\varphi(x)$和$\varphi(x')$的收缩. 于是在结合(A2.1)和(A2.2)时,再按式(7.33)就得到

$$\varphi^{\cdot}(x)\varphi^{\cdot}(x') = \theta(t-t')[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')] + \theta(t'-t)[\varphi^{(-)}(x'), \varphi^{(+)}(x)] = \Delta_F^0(x-x'). \tag{A2.4}$$

因此介子场两点的场算符 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x')$ 的收缩正好就是这个场在这两点之间的传播函数；也就是说，它们的 $T$ 乘积与 $N$ 乘积之差不再是算符而是 $c$ 数，并且等于传播函数.

可是显然

$$\langle 0|N(\varphi(x)\varphi(x'))|0\rangle = 0, \tag{A2.5}$$

所以

$$\varphi^{\cdot}(x)\varphi^{\cdot}(x') = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(x'))|0\rangle. \tag{A2.6}$$

因此介子场两点的场算符的收缩(亦即场的传播函数)就是它们的 $T$ 乘积的真空期待值.

### 2. 电磁场

量子电磁场的情形同介子场完全相似. 两点的场算符的收缩同样可定义为

$$A_\mu^{\cdot}(x)A_\nu^{\cdot}(x') = T(A_\mu(x)A_\nu(x')) - N(A_\mu(x)A_\nu(x')). \tag{A2.7}$$

应用完全相同的步骤，又按式 (7.38) 和 (7.50)，也可以证明

$$A_\mu^{\cdot}(x)A_\nu^{\cdot}(x') = \theta(t-t')[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] + \theta(t'-t)[A_\nu^{(-)}(x'), A_\mu^{(+)}(x)] = \delta_{\mu\nu}D_F^0(x-x'). \tag{A2.8}$$

所以电磁场两点的场算符的收缩就是电磁场在这两点之间的传播函数. 又因为

$$\langle 0|N(A_\mu(x)A_\nu(x'))|0\rangle = 0, \tag{A2.9}$$

所以

$$A_\mu^{\cdot}(x)A_\nu^{\cdot}(x') = \langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(x'))|0\rangle. \tag{A2.10}$$

### 3. 费米子场

首先按 § 7.2 中 $N$ 乘积的定义，

$$N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')) = \psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') + \psi_\alpha^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')$$

$$+\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')-\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\psi_\alpha^{(-)}(x).$$

同玻色子场的情形一样，我们定义 $\psi_\alpha(x)$ 和 $\bar{\psi}_\beta(x')$ 的收缩为

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(x')=T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))-N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')). \quad (A2.11)$$

这时按照 $T$ 乘积定义 (A1.7)，又按式 (7.44)，很容易证明

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(x')&=\theta(t-t')\{\psi_\alpha^{(-)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\}\\&\quad-\theta(t'-t)\{\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x'),\psi_\alpha^{(+)}(x)\}\\&=S_F^0(x-x')\alpha\beta. \quad (A2.12)\end{aligned}$$

这是费米子场由 $x'$ 向 $x$ 的传播函数.

在费米子场的情形，显然也有

$$\langle 0|N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))|0\rangle=0. \quad (A2.13)$$

因此同玻色子场的情形一样，这里也有

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(x')=\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))|0\rangle \quad (A2.14)$$

另一方面，同样可以证明

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\psi_\beta^{\cdot}(x')=T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'))-N(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x'))=0, \quad (A2.15)$$

$$\bar{\psi}_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\psi}_\beta^{\cdot}(x')=T(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))-N(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))=0. \quad (A2.16)$$

#### 4. 两个不同场场算符的收缩

任意两个不同场场算符的收缩都是 0. 例如按式 (A1.10)，不难证明

$$\psi_\alpha^{\cdot}(x)\varphi^{\cdot}(x')=T(\psi_\alpha(x)\varphi(x'))-N(\psi_\alpha(x)\varphi(x'))=0. \quad (A2.17)$$

## § A3 编时乘积约化为正规乘积

微扰近似求解的关键问题是把散射矩阵 $S$ 各级微扰项 (A1.5) 中的场算符 $T$ 乘积完全约化为一系列 $N$ 乘积之和.

今以 $\phi(x)$ 代表一个相互作用场系统的所有场算符. 它可以是玻色子场算符 $\varphi(x)$，$\varphi^+(x)$ 或 $A_\mu(x)$，也可以是费米子场算符

$\psi_\alpha(x)$ 或 $\bar{\psi}_\beta(x)$. 一个 $n$ 个场算符的 $T$ 乘积则是

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)) = T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n),$$

式中 $\phi_i \equiv \phi(x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

首先考虑 $t_1 \neq t_2 \neq \cdots \neq t_n$ 的情形. 现在的问题是把上面的 $T$ 乘积完全约化为 $N$ 乘积之和. 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个确定的排列, 则

$$\begin{aligned} N(\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}\cdots\phi_{\alpha_n}) &= \delta_\alpha N(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n), \\ T(\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}\cdots\phi_{\alpha_n}) &= \delta_\alpha T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n), \end{aligned} \tag{A3.1}$$

在将 $\phi_1\phi_2\cdots\phi_n$ 安排成 $\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}\cdots\phi_{\alpha_n}$ 时, 其中相邻费米子场算符两两交换的次数为偶数时, $\delta_\alpha = +1$; 为奇数时, $\delta_\alpha = -1$. $\delta_\alpha$ 称为 $\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}\cdots\phi_{\alpha_n}$ 的"排列号标".

上面的 $T$ 乘积在 $n = 1$ 时显然无实际意义. 在 $n = 2$ 时约化为 $N$ 乘积的问题在上节中已经解决, 即

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2) &= N(\phi_1\phi_2) + \phi_1^{\cdot}\phi_2^{\cdot} \\ &= N(\phi_1\phi_2) + \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle. \end{aligned} \tag{A3.2}$$

对任意正整数 $n$, 则有下面的威克定理:

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n) &= N(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n) \\ &+ \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle N(\phi_3\cdots\phi_n) + \text{排列项} \\ &+ \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\langle 0|T(\phi_3\phi_4)|0\rangle N(\phi_5\cdots\phi_n) + \text{排列项} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \begin{cases} \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\cdots\langle 0|T(\phi_{n-1}\phi_n)|0\rangle \\ \quad +\text{排列项} \quad \text{若 } n = \text{偶数}, \\ \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\cdots\langle 0|T(\phi_{n-2}\phi_{n-1})|0\rangle\phi_n \\ \quad +\text{排列项} \quad \text{若 } n = \text{奇数}, \end{cases} \end{aligned} \tag{A3.3}$$

式中各个"排列项"指的是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有可能的排列项, 例如在收缩因子 $\langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle = \phi_1^{\cdot}\phi_2^{\cdot}$ 中应取任意可能的一对场算符. 但是当把收缩因子同留剩下来的 $N$ 乘积隔离写开时, 必须应用规则 (A3.1).

威克定理 (A3.3) 一般用归纳法证明. 首先当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时, 式 (A3.3) 显然成立 [见式 (A3.2)]. 现在假设式(A3.3) 在 $n$

时成立，只要证明它在 $n+1$ 时也成立就行了。为此，考虑一个 $n+1$ 个场算符的 $T$ 乘积

$$T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\phi_{n+1}).$$

这里我们总可以按照规则 (A3.1) 把作用时间最早的那个场算符安排在最右端，即

$$t_{n+1} < t_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这时显然

$$T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\phi_{n+1}) = T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n)\phi_{n+1}.$$

现在应用式 (A3.3)，就得到

$$\begin{aligned}
T(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\phi_{n+1}) &= N(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n)\phi_{n+1} \\
&+ \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle N(\phi_3\cdots\phi_n)\phi_{n+1} + \text{排列项} \\
&+ \langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\langle 0|T(\phi_3\phi_4)|0\rangle N(\phi_5\cdots\phi_n)\phi_{n+1} + \text{排列项} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \begin{cases}
\langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\cdots\langle 0|T(\phi_{n-1}\phi_n)|0\rangle\phi_{n+1} \\
\quad +\text{排列项} \quad \text{若 } n = \text{偶数}, \\
\langle 0|T(\phi_1\phi_2)|0\rangle\cdots\langle 0|T(\phi_{n-2}\phi_{n-1})|0\rangle T(\phi_n\phi_{n+1}) \\
\quad +\text{排列项} \quad \text{若 } n = \text{奇数}.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{A3.4}$$

这里各个排列项仍然指 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有可能的排列项，但不包括 $n+1$，同式 (A3.3) 中的排列项意义完全一样。上式最后一行中 $\phi_n\phi_{n+1} = T(\phi_n\phi_{n+1})$ 是显然的。

要使得式 (A3.4) 具有式 (A3.3) 在 $n+1$ 时的形式，必须把 $\phi_{n+1}$ 安放进各个 $N$ 乘积里去。现在就以式 (A3.4) 中的第一项为例来分析这个问题。首先按 $N$ 乘积的定义，

$$\begin{aligned}
N(\phi_1\cdots\phi_n) &= N((\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)})\cdots(\phi_n^{(+)} + \phi_n^{(-)})) \\
&= \sum_I \delta_I \prod_{j\notin I} \phi_j^{(+)} \prod_{i\subset I} \phi_i^{(-)},
\end{aligned} \tag{A3.5}$$

式中 $I$ 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的任意一组指标，$i \subset I$ 表示 $i$ 是 $I$ 中的一个指标，$j \notin I$ 表示 $j$ 是 $I$ 以外的指标。$\delta_I$ 则是每一项相应的排列号标[依照规则 (A3.1) 决定]。于是

$$N(\phi_1\cdots\phi_n)\phi_{n+1} = \sum_I \delta_I \prod_{j\notin I} \phi_j^{(+)} \prod_{i\subset I} \phi_i^{(-)}(\phi_{n+1}^{(+)} + \phi_{n+1}^{(-)}) \tag{A3.6}$$

要把式 (A3.6) 右侧写成一个$N$乘积，产生算符 $\phi_{n+1}^{(+)}$ 必须挪移到 $\prod_{i\subset I}\phi_i^{(-)}$ 的左边去. 假如 $\phi_{n+1}$ 和 $\phi_k(k\subset I)$ 同是玻色子场算符，则

$$\phi_k^{(-)}\phi_{n+1}^{(+)} = \phi_{n+1}^{(+)}\phi_k^{(-)} + [\phi_k^{(-)}, \phi_{n+1}^{(+)}],$$

而

$$[\phi_k^{(-)}, \phi_{n+1}^{(+)}] = \langle 0|[\phi_k^{(-)}, \phi_{n+1}^{(+)}]|0\rangle = \langle 0|\phi_k^{(-)}\phi_{n+1}^{(+)}|0\rangle$$
$$= \langle 0|\phi_k\phi_{n+1}|0\rangle = \langle 0|T(\phi_k\phi_{n+1})|0\rangle.$$

若 $\phi_{n+1}$ 和 $\phi_k$ 同是费米子场算符，则

$$\phi_k^{(-)}\phi_{n+1}^{(+)} = -\phi_{n+1}^{(+)}\phi_k^{(-)} + \{\phi_k^{(-)}, \phi_{n+1}^{(+)}\}.$$

而且同样可以证明

$$\{\phi_k^{(-)}, \phi_{n+1}^{(+)}\} = \langle 0|T(\phi_k\phi_{n+1})|0\rangle.$$

因此不论 $\phi_{n+1}$ 是玻色子场还是费米子场算符，式 (A3.6) 都可写为

$$N(\phi_1\cdots\phi_n)\phi_{n+1} = \sum_I \delta_I' \prod_{j\notin I}\phi_j^{(+)}\phi_{n+1}^{(+)}\prod_{i\subset I}\phi_i^{(-)}$$
$$+ \sum_I \delta_I'' \prod_{j\notin I}\phi_j^{(+)}\sum_{k\subset I}\prod_{i\subset I}{}'\phi_i^{(-)}\langle 0|T(\phi_k\phi_{n+1})|0\rangle$$
$$+ \sum_I \delta_I' \prod_{j\notin I}\phi_j^{(+)}\phi_{n+1}^{(-)}\prod_{i\subset I}\phi_i^{(-)}, \qquad \text{(A3.7)}$$

其中 $\delta_I'$ 和 $\delta_I''$ 是相应的新的排列号标，而 $\prod_{i\subset I}'$ 则表示在 $i$ 乘积中 $i\neq k$. 显然式 (A3.7) 中的第一项和第三项合并为

$$N(\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\phi_{n+1}),$$

而第二项则是

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k\langle 0|T(\phi_k\phi_{n+1})|0\rangle N(\phi_1\cdots\phi_{k-1}\phi_{k+1}\cdots\phi_n),$$

$\delta_k$ 是把 $\phi_1\cdots\phi_{k-1}\phi_k\phi_{k+1}\cdots\phi_n$ 安排成 $\phi_1\cdots\phi_{k-1}\phi_{k+1}\cdots\phi_n\phi_k$ 时的排列号标. 这样式 (A3.7) 最后写为

$$N(\phi_1\cdots\phi_n)\phi_{n+1} = N(\phi_1\cdots\phi_n\phi_{n+1})$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\delta_k\langle 0|T(\phi_k\phi_{n+1})|0\rangle N(\phi_1\cdots\phi_{k-1}\phi_{k+1}\cdots\phi_n). \qquad \text{(A3.8)}$$

这时应用式 (A3.2) 和 (A3.8)，式 (A3.4) 就变成式 (A3.3) 在 $n+1$ 时的形式. 威克定理 (A3.3) 于是证明了.

但是相互作用哈氏量密度 $\mathscr{H}_I(x)$ 一般都是场算符的 $N$ 乘积，如式 (7.17) 和 (7.24). 因此在 $S$ 矩阵的各级微扰项 (A1.6) 中，我们遇到的实际上并不象上面所讨论的单纯 $T$ 乘积，而是 $T$ 和 $N$ 的混合乘积；并且每个相互作用哈氏量密度 $N$ 乘积中的场算符都是同时的. 怎样把这种混合乘积约化为 $N$ 乘积呢？首先我们注意到，按照定义 (A1.11)，

$$T\{N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x))\} = N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x)).$$

另一方面，显然

$$N\{N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x))\} = N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x)).$$

(即正规化算符 $N$ 满足 $N^2 = N$；编时算符 $T$ 也一样.) 因此按照场算符收缩的定义得知，

$$N[\phi_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\phi}_\beta^{\cdot}(x)] = T\{N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x))\} - N\{N(\phi_\alpha(x)\bar{\phi}_\beta(x))\} = 0. \tag{A3.9}$$

同样，

$$N(\phi_\alpha^{\cdot}(x)\phi_\beta^{\cdot}(x)) = N(\bar{\phi}_\alpha^{\cdot}(x)\bar{\phi}_\beta^{\cdot}(x)) = 0. \tag{A3.10}$$

所以 $N$ 乘积中同时的场算符的收缩都是 0. [这里 $N(A\cdot B\cdot)$ 是场算符 $A$ 和 $B$ 的 $N$ 乘积的收缩，而不是 $A$ 和 $B$ 的收缩的 $N$ 乘积，后者是没有意义的.] 这样，当把混合乘积约化为正规乘积时，威克定理 (A3.3) 显然仍旧可以直接应用，只是对每个相互作用哈氏量密度 $N$ 乘积中的同时的场算符不取收缩. (物理意义就是场在同一时空点没有传播效应.) 若以费米子的电磁相互作用为例，则有

$$T\{N(\bar{\phi}_1\hat{A}_1\phi_1)\cdots N(\bar{\phi}_n\hat{A}_n\phi_n)\} = T\{(\bar{\phi}_1\hat{A}_1\phi_1)\cdots(\bar{\phi}_n\hat{A}_n\phi_n)\}_{\text{无}} \tag{A3.11}$$

脚标 "无" 字表示在按照规则 (A3.3) 把 $T$ 乘积展开为 $N$ 乘积的过程中对同时的场算符不取收缩.

有了威克定理 (A3.3) 和 (A3.11)，散射矩阵 $S$ 的各级微扰项 $S^{(n)}$ 完全约化为一系列 $N$ 乘积之和的问题，理论上已经完全解决了.

## § A4 散射矩阵的约化

上节证明的威克定理 (A3.3) 和 (A3.11)，原则上可以把散射矩阵 $S$ 的任意级微扰项 $S^{(n)}$ 完全约化为一系列正规乘积之和. 因此 $S^{(n)}$ 所导致的物理过程和它们的跃迁振幅，原则上可以全部写出来. 不过实际上，当 $n$ 较高时，这些正规乘积为数极多，全部展开非常复杂. 可是在应用费曼图时，不但对每个正规乘积可以给予一个确切的物理图象式的表示，而且还可以避免把 $S^{(n)}$ 全部约化时的数学上的麻烦. 下面以介子核子 ($\pi^0 N$) 相互作用的二级微扰项 $S^{(n)}$ 为例来加以说明.

结合 (A1.5) 和 (7.24)，得到

$$S^{(2)} = \frac{(-g)^2}{2!}\iint_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 d^4x_2 T\{N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1)N(\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2)\}. \quad (A4.1)$$

应用威克定理 (A3.3) 和 (A3.11)，这个混合乘积显然约化为八个 $N$ 乘积之和，它们可以合并为六项，代表六个不同过程，

$$S^{(2)} = S_A^{(2)} + S_B^{(2)} + S_C^{(2)} + S_D^{(2)} + S_E^{(2)} + S_F^{(2)}, \quad (A4.2)$$

这里

$$S_A^{(2)} = \frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\varphi_1\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2\varphi_2);$$

$$S_B^{(2)} = \frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 \gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}\{\langle 0|T(\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\alpha'})|0\rangle N(\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta'}\varphi_1\varphi_2)$$
$$+\langle 0|T(\psi_{2\beta'}\bar{\psi}_{1\alpha})|0\rangle N(\bar{\psi}_{2\alpha'}\psi_{1\beta}\varphi_1\varphi_2)\}$$
$$= (-g)^2\iint d^4x_1 d^4x_2\langle 0|T(\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\alpha'})|0\rangle\gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}$$
$$\times N(\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta'}\varphi_1\varphi_2);$$

$$S_C^{(2)} = \frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\langle 0|T(\varphi_1\varphi_2)|0\rangle N(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_5\psi_2);$$

$$S_D^{(2)} = \frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2\langle 0|T(\varphi_1\varphi_2)|0\rangle\gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}$$
$$\times\{\langle 0|T(\psi_{1\beta}\psi_{2\alpha'})|0\rangle N(\bar{\psi}_{1\alpha}\bar{\psi}_{2\beta'})$$

$$+\langle 0|T(\psi_{2\beta'}\bar{\psi}_{1\alpha})|0\rangle N(\psi_{2\alpha'}\bar{\psi}_{1\beta})\}$$

$$=(-g)^2\iint d^4x_1d^4x_2\langle 0|T(\varphi_1\varphi_2)|0\rangle\langle 0|T(\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\alpha'})|0\rangle$$

$$\cdot\gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}N(\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta'});$$

$$S_B^{(2)}=\frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2\langle 0|T(\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\alpha'})|0\rangle\gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}$$

$$\cdot\langle 0|T(\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta'})|0\rangle\cdot N(\varphi_1\varphi_2);$$

$$S_F^{(2)}=\frac{(-g)^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2\langle 0|T(\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\alpha'})|0\rangle\gamma_{5\alpha\beta}\gamma_{5\alpha'\beta'}$$

$$\cdot\langle 0|T(\bar{\psi}_{1\alpha}\psi_{2\beta'})|0\rangle\langle 0|T(\varphi_1\varphi_2)|0\rangle.$$

在 § A2 中已经证明 $\langle 0|T(\varphi_1\varphi_2)|0\rangle=\varphi_1^+\varphi_2^+$ 是介子场的传播函数，而 $\langle 0|T(\psi_{1\alpha}\bar{\psi}_{2\beta})|0\rangle=\psi_{1\alpha}^+\bar{\psi}_{2\beta}^+$ 是核子场的传播函数。上面各个微扰项中的$N$乘积都可以展开为产生算符和湮没算符的乘积，前者全部位于后者的左侧。湮没算符湮没掉适当初态的所有粒子，而产生算符 则产生出适当末态的所有粒子（详见第七章）.因此每个微扰项所导致的物理过程是完全确定的。

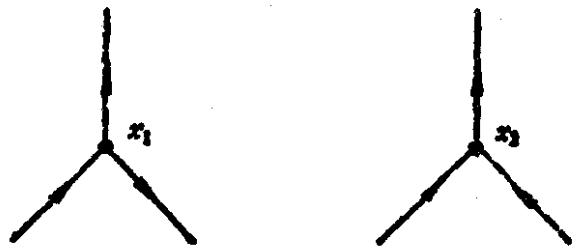



图 A.1

很明显，$S_A^{(2)}$ 只导致一系列两个分别进行的一级过程，而且都可用坐标空间费曼图来表示，例如图 A.1 的过程.（图中虚线代表介子，而实线代表核子.）

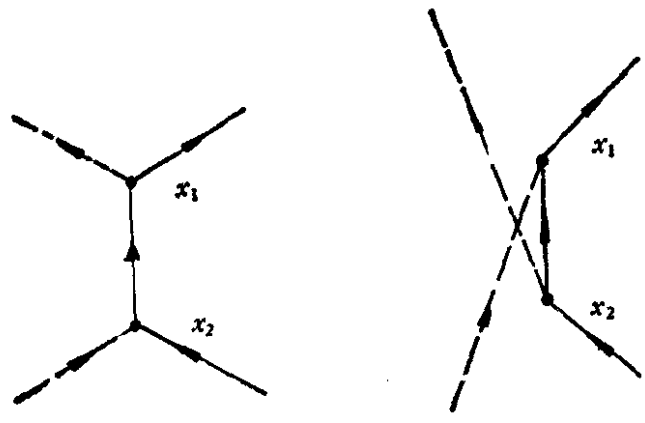



图 A.2

$S_B^{(2)}$ 导致的物理过程中都有两条核子外线和两条介子外线，如 $\pi^0N$ 的散射过程，其坐标空间费曼图有两个，见图 A.2（内线代表传播函数，见 § 7.4）.

$S_C^{(2)}$ 所导致的物理过程都有四条核子外线，而无介子外线，如 $NN$ 散射

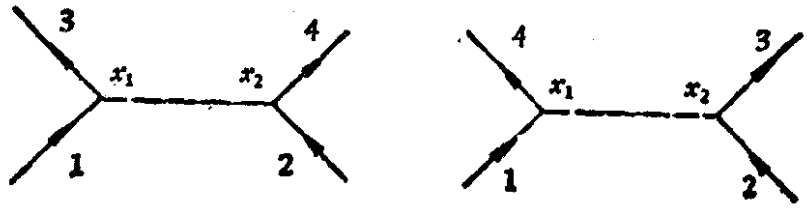



图 A.3

过程，见图 A.3.

另一方面，$S_B^{(2)}$ 显然是核子自能项，只有两条核子外线，而无介子外线，可用坐标空间费曼图 A.4 来表示.




图 A.4




图 A.5




图 A.6

$S_E^{(2)}$ 则对应介子自能图，亦即核子场真空极化项，只有两条介子外线，而无核子外线，见图 A.5.

最后，因为完全没有外线，$S_F^{(2)}$ 是真空涨落项，不导致任何物理过程，其费曼图为图 A.6.

因此应用威克定理(A3.3)—(A3.11)，把相互作用的介子核子场系统的二级微扰项 $S^{(2)}$ 所导致的全部物理过程都确定了. 同时我们还作出了相应于每个过程的坐标空间费曼图. 图 A.1 没有实际物理意义. 图 A.2 和图 A.3 是我们在第七章里仔细讨论过的物理过程. 图 A.4 和图 A.5 代表量子场的二级辐射效应过程，而图 A.6 实际上没有任何物理效应. 所有这些，这里不再详细分析讨论了. 同样的方法亦可用于高级微扰项 $S^{(n)}$，不过情况更为复杂.

假如对介子核子场系统的不同初态 $|\rangle_i$ 和末态 $|\rangle_f$ 求取各个二级微扰项的矩阵元：$S_{Mfi}^{(2)}$，$\cdots$，$S_{Ffi}^{(2)}$，并采取它们的动量空间表式，就得到 § 7.6 中同样跃迁振幅的显示数学表式. 同时在对任意具体物理过程考虑各个拓扑不同的费曼图时，所有二级微扰项的分母因子 2!（一般情形：$n$ 级微扰项的分母因子 $n!$）都消去了，而最后的结果正好就是 § 7.7 所总结的费曼规则.