· 909613

量子场论引论

程国均　杨宇智　编译

四川大学出版社

ISBN 7—5614—0131—0/O·26

定价：3.40元

999613
3312
264

量子场论引论

程国均 杨守智 编译

四川大学出版社

1989年·成都

内 容 提 要

本书根据英国曼彻斯特大学物理系F.Mandl教授所著《Quantum Field Theory》（1984年）和《Introduction to Quantum Field Theory》（1959年）两书编译而成，原著是作者在英、美几所大学讲课的讲稿基础上修改完善后成书的，它取材精炼，物理图象清晰，数学描述简炼，是一本受欢迎的教材。

编译本保持了[illegible]书内容的[illegible]，某[illegible]又作了[illegible]当的改[illegible]内容着重[illegible]量子场论的基本概念和现代微扰理论方法。为了方便自学，补充了书中各重要公式的推导和全部习题的解答。本书起点不高，凡具有经典力学、非相对论量子力学和电动力学基础知识的读者，都能顺利阅读。本书是一本较好的量子场论入门读物。

本书可作为大学高年级的选修课教材、研究生基础课教材或教学参考书。也可供科技人员参考，还适合初学者自学。

INTRODUCTION TO QUANTUM FIELD THEORY

Translated from F.Mandl's two books by
Cheng Guojun with Yang Shouzhi
Edited and Supplemented by
Cheng Guojun

COPYRIGHT 1989, BY Sichuan University Press.

量子场论引论

程国均 杨守智 编译

责任编辑 樊程方　　封面设计 蒋仲文

四川大学出版社出版发行　四川省新华书店经销

郫县犀浦印刷厂印刷

开本787×1092 1/16　印张17　字数310千

1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷

印数：1—1400册

ISBN7—5614—0131—0/O·26

定价：3.40元

序　言

英国曼彻斯特大学物理系F.Mandl教授所著《量子场论引论》(Introduction to Quantum Field Theory，1959年出版）是一本专为大学高年级学生、研究生和一般科技人员编写的介绍量子场论基本理论的基础教材。该书着重阐述量子场论的基本概念和现代协变微扰理论方法，对物理概念的讲解深入浅出，同时注意介绍量子场论的基本运算技巧，再加上在讲述书中的内容时注意循序渐进，文字简洁易懂，使具有理论物理一般基础知识的初学者易于掌握该书基本内容，是一本很好的介绍量子场论的基础教材，在国际上深受欢迎。

1984年，F.Mandl教授扩充了原书《量子场论引论》的内容，出版了新著《量子场论》(Quantum Field Theory)，新著对量子场论基本理论的阐述更加系统深入，并反映了它的近年来发展动向。但在对量子场论基本概念和现代协变微扰理论方法的阐述上，和原书的内容相比基本上没有改变。新著增加的规范场理论及弱电统一模型等内容一般可安排在量子场论以外的其他专门选修课内。

四川大学程国均与杨宁智两同志编译的F.Mandl教授著《量子场论引论》一书，是同时参照他的原著《量子场论引论》和新著《量子场论》而编译出来的。在编译过程中，除了注意保持原书内容的完整性和文字的简洁流畅，还在必要的地方作了适当的改写与补充。编译本还对书中所有的重要公式补充了必要的推导，并对原书的习题作了解答，以便于初学者自学。原书《量子场论引论》曾作为四川大学核物理及核技术专业硕士研究生的《量子场论》课基础教材多次试用过，并取得了很好的效果。他们编译的这本《量子场论引论》，是一本较好的适用于国内高等院校理工科类专业本科高年级学生和研究生的量子场论课基础教材或教学参考书，也是一本对一般的科技工作者和青年自学量子场论的有用的参考书。我们高兴地看到这本《量子场论引论》编译本的出版，并希望这本书的出版对量子场论的教材建设，起着促进和交流的作用。

胡诗可

1988年2月

前　言

F.Mandl 教授著的《量子场论引论》(Introduction to Quantum Field Theory)一书，是他精心总结了多年的教学经验，根据在美国罗契斯特大学，英国牛津大学及曼彻斯特大学等校授课的讲稿修改完善而成的。该书着重在阐明量子场论的基本概念和现代微扰理论方法，内容比较全面而又容易读懂，是一本专为大学高年级学生、研究生和一般科技人员编写的介绍量子场论基本理论的优秀入门书。凡具有经典力学、非相对论量子力学和电动力学基础知识的读者，都能通过阅读该书而熟练掌握场论的基本物理概念和基本理论方法。

F.Mandl 教授是国际上著名的学者，他的《量子场论引论》一书，文笔优美，行文生动，语言简洁，除着重在阐明基本物理概念外，对运算技巧和方法也给予了足够的重视。全书各章都配备了习题，便于读者练习，以检查阅读效果和熟练运算技巧，从而加深对内容的理解。

1984年，F.Mandl 教授出版了他的新著《量子场论》(Quantum Field Theroy)，和他的旧作《量子场论引论》相比，新著主要增加了规范场理论及弱电统一模型的内容，篇幅也相应地增加了近一倍。但在量子场论的基本概念及现代微扰理论方法两大内容上，新著和旧作大体上是一致的。这说明了，尽管旧作《量子场论引论》出版于1959年，但并未影响该书对基本物理概念论述的正确性。

四川大学核物理及核技术专业曾用 F.Mandl 教授的《量子场论引论》一书作为硕士生量子场论基础阶段课程的教材，在使用中，我们深感该书确是一本好书。所以，我们根据F.Mandl 教授的 "Introduction to Quantum Field Theory" (1959年版)一书，并参照他的新著 "Quantum Field Theory" (1984年版)，编译出了本书。和原书不同的是，编译本给出了书中所有公式的推导和习题解答，并在必要的地方作了适当改写和补充。本书可作为理工类专业本科生和研究生的教材或教学参考书，也是物理学工作者和一般工程技术人员很有用的参考书，还适合正在自修大学课程的广大青年自学。

本书的习题解答及书中公式的推导曾由何启智教授审阅。中国科学院理论物理研究所安瑛教授和中国原子能科学研究院苏宗涤教授、萨本豪教授及四川大学龙先灌教授曾就书中一些专题与编译者作过多次讨论，并提供了建设性的意见。重庆大学讲师胡炳全，华中师范大学讲师罗来奇，四川大学讲师王乔等学者也提出过很好的意见。四川大学胡诗可教授在百忙中为本书撰写了序言并提出了建设性的意见。借此机会，编译者谨向上面各位学者致最衷心的感谢。

本书第一章至第七章的译稿由杨守智同志提供的。此外，书稿的誊写及制图还得到四川大学计算机系毛志芳同志的大力帮助，谨此致谢。

编译者

1988年5月

TA042/12

目　录

序言

前言

第一章　多粒子表象……（1）
第二章　经典场……（8）
第三章　场算符……（12）
第四章　简单示例……（20）
第五章　相互作用绘景……（28）
第六章　不变量 △-函数……（34）
第七章　荷电介子……（42）
第八章　费米子……（51）
第九章　光子（Ⅰ）……（67）
第十章　光子（Ⅱ）……（77）
第十一章　相互作用……（84）
第十二章　散射矩阵……（92）
第十三章　S矩阵展开式……（95）
第十四章　费曼图……（102）
第十五章　康普顿散射……（109）
第十六章　库仑散射……（126）
第十七章　辐射修正……（131）
第十八章　费米子自能……（135）
第十九章　真空极化……（149）
第二十章　顶角修正……（153）
第二十一章　电子的反常磁矩……（156）
第二十二章　重正化……（158）

习题及解答

第一章……（165）
第二章……（166）
第三章……（173）
第六章……（177）
第七章……（180）
第八章……（184）

第九章……(194)
第十章……(195)
第十一章……(198)
第十二章……(203)
第十三章……(204)
第十四章……(207)
第十五章……(212)
第十六章……(219)
第十八章……(231)
第十九章……(233)
第二十章……(237)
第二十一章……(241)

附录A 狄拉克方程……(244)
附录B 费曼规则……(253)

第一章　多粒子表象

本书所要研究的主要问题是两个或两个粒子系统之间的相互作用，例如，介子和核子之间的相互作用；光子和电子之间的相互作用。我们将要考虑光子在电子上的散射（即康普顿散射）或 π 介子在核子上的散射过程，以及韧致辐射和电子对湮没等荷电粒子的非弹性散射过程。因此，我们必须发展一种适当的机制，来描述这些过程，包括那些有粒子产生或消失的过程（如韧致辐射）。

让我们来考查一个这样的典型过程：康普顿散射。当然，我们将使用波包来描述这个过程。但是，正如在非相对论散射理论中那样，我们将只考虑数学上比较理想的情况，并且使用平面波。因此，我们有时将稍微不严格地使用‘波包’的概念来使问题更为形象化一些，当光子和电子相距很远还没有开始相互作用时，我们用电子的动量 $\boldsymbol{P}$ 及自旋 $\boldsymbol{S}$，光子的动量 $\boldsymbol{K}$ 及偏振矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 来确定体系的初态。在散射发生后，光子和电子再一次分开很远，这时，我们用相应的量 $\boldsymbol{P}'$，$\boldsymbol{S}'$，$\boldsymbol{K}'$，$\boldsymbol{\varepsilon}'$ 来确定体系的终态。这种描述是典型的微扰理论处理方式，也就是本书的基本处理方式。在这种处理方式中，体系的总哈密顿量假定可分成三部分：两个无相互作用体系的哈密顿量以及它们的一个相互作用哈密顿量。体系的初态和终态可根据总哈密顿量中无相互作用部分的本征态来确定，总哈密顿量中的相互作用项仅仅引起散射或者使体系从初态变化到终态。

现在，确定一个态的方法是很明显的。首先，我们列举出单粒子态的完全集，然后，我们来确定这些单粒子态的占有数，这就给出了多粒子体系的完全描述。如果没有相互作用，则占有数保持恒定。否则，由于相互作用的结果，占有数将相应于散射、粒子产生等过程而随时间变化。

我们来考虑一个质量为 m，自旋为 0，电荷为 0 的无相互作用的介子系统。这时，根据介子的动量 $\boldsymbol{K}$，就足以确定它的态了。介子的能量 ω_K 是相对论性的，由下式给出：

$$\omega_K^2 = m^2 + \boldsymbol{K}^2 \qquad (1.1)$$

（在本书中，我们总是使用自然单位：$\hbar = c = 1$。）把 ω_K 和 $\boldsymbol{K}$ 视为作用在波函数 $\phi(x)$ 上的算符，使用通常的方法就可从（1.1）式导出相对论波动方程。于是我们得到克莱因-戈登（Klein-Gordon）方程：

$$(\Box^2 - m^2)\phi(x) = 0 \qquad (1.2)$$

（1.2）式的导出：将（1.1）式的两边同时作用于 $\phi(x)$，则由 $\omega_K \to i\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\boldsymbol{K} \to \frac{1}{i}\nabla$ 可得

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = (m^2 - \nabla^2)\phi(x) \qquad (1.2\text{-}1)$$

即有

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{2t^2}\right)\phi(x)=m^2\phi(x) \qquad (1.2\text{-}2)$$

于是可得

$$\Box^2\phi(x)=m^2\phi(x) \qquad (1.2\text{-}3)$$

移项即得(1.2)式.

我们将要使用下列记号来标记矢量. 符号 x_λ, $\lambda=1, 2, 3, 4$, 标记一个四度矢量, 它有空间分量x_1, x_2, x_3和虚的类时分量 $x_4=ix_0=it$. 三度空间矢量$\boldsymbol{X}$的分量将用拉丁字母 l, m, n, ……等作为下标来标记, 同时用希腊字母 λ, μ, ν, ……等作为下标来标记四度矢量. 标积

$$\sum_{\lambda=1}^{4}k_\lambda x_\lambda$$

将简写成 $k_\lambda x_\lambda$, 此即表示遍及于标量积中所有重复的希腊文下标求和, 也就是采用爱因斯坦惯例. 在不引起混乱时, 我们也将略去四度矢量 x_λ的下标而简单地写成 x (例如在(1.2)式中). 同时把标积$k_\lambda x_\lambda$简写成kx. 此外, 在(1.2)式中

$$\Box^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda\,\partial x_\lambda} \qquad (1.3)$$

为了得到克莱因-戈登方程的本征解的完全集, 我们必须确定边界条件. 为方便起见, 我们在这里规定系统限制在一个体积为 $V=L^3$ 的立方箱中, 并在立方箱的表面施予周期性边界条件的限制. 于是, 我们得到一个完全正交的本征函数系:

$$\phi_{\boldsymbol{K}}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{iKx} \qquad (1.4)$$

式中, 由于周期性边界条件的限制, 矢量$\boldsymbol{K}$必须取下列值:

$$\boldsymbol{K}=\frac{2\pi}{L}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3), \qquad (1.5)$$

这里, γ_1, γ_2, γ_3是整数. 我们将把(1.5)式所确定的动量$\boldsymbol{K}$称为容许动量(the allowed momenta).

(1.4)式的导出: 由(1.2)式, 我们有

$$\nabla^2\phi(\mathbf{X},\ t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{X},\ t)=m^2\phi(\mathbf{X},\ t) \qquad (1.4\text{-}1)$$

设上式的解$\phi(\mathbf{X},\ t)$为:

$$\phi(\mathbf{X},\ t)=A(\mathbf{X})T(t) \qquad (1.4\text{-}2)$$

把（1.4-2）代入（1.4-1）式，即得

$$\frac{\nabla^2 A(\mathbf{X})}{A(\mathbf{X})} = \frac{T''(t)}{T(t)} + m^2 = -\boldsymbol{K}^2 \qquad (1.4\text{-}3)$$

由此，我们可得：

$$\nabla^2 A(\mathbf{X}) + \boldsymbol{K}^2 A(\mathbf{X}) = 0 \qquad (1.4\text{-}4a)$$

$$T''(t) + (m^2 + \boldsymbol{K}^2) T(t) = 0 \qquad (1.4\text{-}4b)$$

令

$$k_0^2 = \omega_{\boldsymbol{K}}^2 = m^2 + \boldsymbol{K}^2 \qquad (1.4\text{-}5)$$

于是可得

$$\phi(\mathbf{X}, t) = C e^{i\boldsymbol{K}\cdot\mathbf{X}} e^{-i\omega_{\boldsymbol{K}} t} \qquad (1.4\text{-}6)$$

式中，归一化常数C可求出为

$$C = \frac{1}{\sqrt{V}} \qquad (1.4\text{-}7)$$

把上式和 $kx = \boldsymbol{K}\cdot\mathbf{X} + ik_0\cdot(it) = \boldsymbol{K}\cdot\mathbf{X} - k_0 t = \boldsymbol{K}\cdot\mathbf{X} - \omega_{\boldsymbol{K}} t$ 代入（1.4-6）式，即得

$$\phi(x) = \phi(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikx} \qquad (1.4)$$

对每个容许动量$\boldsymbol{K}$而言，出现在（1.4）式中的k_0，是根据能量-动量关系（1.1）式确定的：

$$k_0 = \omega_{\boldsymbol{K}} \equiv +\sqrt{(m^2 + \boldsymbol{K}^2)} \qquad (1.6)$$

因此，我们有时也将四度矢量k写成 $k \equiv (\boldsymbol{K}, ik_0)$。下面，我们来考虑一个容许动量$\boldsymbol{K}$以及通过能量关系（1.6）式和它相关的$k_0$。

现在，我们能按一定顺序列举出容许动量$\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$，……$\boldsymbol{K}_i$……和相应的单粒子态$\phi_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots\cdots$。因此，我们可通过如下的描述来完全确定由许多个无相互作用粒子组成的一个系统：n_1个介子处于单粒子态ϕ_1，n_2个介子处于单粒子态ϕ_2，……，n_i个介子处于单粒子态ϕ_i，……。我们用态矢量（State Vector）来描述多粒子态：

$$|n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots\rangle \equiv \Phi(n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots) \qquad (1.7)$$

由上式可见，态矢量类似于单粒子理论中的波函数。当我们假定态矢量（1.7）提供了多粒子系统的完全描述时，我们已作了一个量子力学假定，即全同粒子是不可区别的。在这一点上，态矢量似乎是一个相当抽象的概念。我们将在不久以后就来讨论它的意义以及如何应用它。不过应该了解，在写下（1.7）式时，我们的意思也不过就是上面所说的那些。特别要注意的是，（1.7）式中的$\Phi(n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots)$不应该被认为是粒子的位置矢量或粒子的动量等变量的函数。

我们将取态矢量（1.7）的集合建立无限维矢量空间的一个正交基底*），定义任意

*） 这样的一个矢量空间也称为希尔伯特（Hilbirt）空间或函数空间，在F.Mandl所著的《量子力学》第一章中，对希尔伯特空间作了不严格的简单讨论。Quantum Mechanics, 2nd ed., London, Academic Press, 1957. 以下将把这本书简称为QM.

两个态矢量的标量积为：

$$\begin{aligned}&\langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots|\ n_1',\ n_2',\ \cdots,\ n_i',\ \cdots\rangle\\&=(\Phi(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots),\ \Phi(n_1',\ n_2',\ \cdots,\ n_i',\ \cdots))\\&=\prod_{i=1}^{\infty}\delta(n_i,\ n_i')\end{aligned}\tag{1.8}$$

式中，$\delta(a,\ b)$即是 Kronecker δ符号δ_{ab}。

现在，我们用态矢量$\Phi(t)$来表示与时间有关的一般的态，$\Phi(t)$是基底矢量（1.7）式的线性组合，组合系数是时间的函数：

$$\Phi(t)=\sum_{n_1,\cdots,n_i,\cdots}C_{n_1\cdots n_i\cdots}(t)\,\Phi(n_1\cdots n_i\cdots),\tag{1.9}$$

$|C_{n_1\cdots n_i\cdots}(t)|^2$是在时刻$t$有$n_i$个粒子处于态$\phi_i$的几率，（$i=1,\ 2,\ \cdots$）。在写下(1.9)式时，我们已用了薛定谔绘景（Schrodinger Picture）*），这个绘景用态矢量来描述系统随时间的变化。

一般说来，系统的占有数将随时间变化；例如，如果一个处于动量态$\boldsymbol{K}_1$的介子在散射后处于动量态$\boldsymbol{K}_2$，则n_1将减少一个单位，而n_2将增加一个单位。（为了能够发生这种变化，我们当然需要一个散射中心，也就是相互作用）。现在，我们来考虑在这个矢量空间中的算符相应于占有数的变化，这些算符将把一个态矢量变换成另一个态矢量。基本算符(fundamental operators)就是使独态的占有数改变一个单位的算符，所有其他算符都是根据这些基本算符建造的。对于每一个容许动量$\boldsymbol{K}_i$而言，通过说明如何使一个一般的基底矢量发生变换，我们定义吸收算符(absorption Operator)$a(\boldsymbol{K}_i)$如下（亦称湮灭算符(annihilation Operator)）：

$$a(\boldsymbol{K}_i)\,\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)=\sqrt{n_i}\ \Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i-1,\ \cdots)\tag{1.10}$$

这样，$a(\boldsymbol{K}_i)$就使第i态的占有数减少了一个单位，剩下的所有其他占有数则不变。（1.10）式中的因子$\sqrt{n_i}$是物理解释所要求的。

根据（1.10）式，我们立刻可得到吸收算符$a(\boldsymbol{K}_i)$的矩阵表示，由此，可知伴算符$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)$满足

$$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)\,\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)=\sqrt{n_i+1}\ \Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots).\tag{1.11}$$

这样，$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)$是一个产生算符（Creation Operator），它使第i态的占有数增加一个单位，而剩下的所有其他占有数则不变。

根据吸收算符$a(\boldsymbol{K}_i)$和产生算符$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)$的定义（1.10—11）式（或根据相应的矩阵表示），我们能直接证明两个很重要的结果：

（i）第i态的占有数算符为

$$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i)\,\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)=n_i\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)\tag{1.12}$$

上式表明，基底矢量$\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)$是算符$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i)$的属于本征值$n_i$的本征函

*）参见QM，§23。

数，n_i是第i态的占有数．由此，我们称算符$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i)$为第$i$态的占有数算符（the Occupation number Operator），这种本征态的线性叠加，例如（1.9）式，当然就不再是本征态。

（ii）产生算符和湮灭算符满足下列对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[a(\boldsymbol{K}_i),\ a(\boldsymbol{K}_j)]=[a^\dagger(\boldsymbol{K}_i),\ a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)]=0\\&[a(\boldsymbol{K}_i),\ a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)]=\delta(\boldsymbol{K}_i,\ \boldsymbol{K}_j)\end{aligned}\right\}\qquad(1.13)$$

若把矢量$\boldsymbol{K}_i$的分量写为K_{im}（$m=1,\ 2,\ 3$），则上面第二等式中的δ符号当然就可以写为$\prod_m\delta(K_{im},\ K_{jm})$。

现在，我们来定义在理论中起重要作用的真空态（Vacuum State），我们用Φ_0来表示它．在真空态中，所有的单粒子态都是空的，即所有$n_i=0$：

$$\Phi_0\equiv\Phi(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)$$

因此，要从真空态吸收粒子是不可能的，这在数学上可表示为：

$$a(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0=0\qquad(1.14)$$

对于所有容许动量$\boldsymbol{K}_i$而言，上式和湮灭算符的定义式（1.10）显然是自洽的，并且事实上也是必要的．（1.10）式没有定义$a(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0$，这是因为在这种情况下，（1.10）式的右边显然是无意义的。

连续应用适当的产生算符，我们能够从真空态产生所有其他的基底矢量$\Phi(n_1,\cdots,n_i,\ \cdots)$．这样，仅存在一个动量为$\boldsymbol{K}_i$的介子的态，就用$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0$来表示．根据对易关系（1.13）式，我们能够证明态$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0$是正确地归一化了的。

证明：$\int[a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0]^*a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0d\tau$

$$\begin{aligned}&=\int[a(\boldsymbol{K}_i)a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0]^*\Phi_0d\tau\\&=\int[1-a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i)\Phi_0]^*\Phi_0d\tau\qquad\text{（代入（1.13）式）}\\&=\int\Phi_0^*\Phi_0d\tau=1\end{aligned}$$

同样，我们可以用$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)\Phi_0$来表示任一两介子态．根据对易关系（1.13）式，我们可以断定，在粒子互换下，即$\boldsymbol{K}_i\leftrightarrow\boldsymbol{K}_j$，这个态是对称的．这样，上面的机制描述了满足玻色-爱因斯坦统计的粒子（即玻色子）体系．显然，玻色子的占有数可以取所有的值0，1，2，…．费米子（即满足费米-狄拉克统计的粒子）满足泡利不相容原理，在任何态中至多只能有一个粒子，因而占有数只能取0和1．要把上面的机制应用于费米子，还必须从根本上加以修改。

既然处于态$\boldsymbol{K}_i$的一个粒子的能量为

$$\omega(\boldsymbol{K}_i)=+\sqrt{(m^2+\boldsymbol{K}_i^2)}\qquad(1.15)$$

那末，处于态$\Phi(n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots)$的一个多粒子体系的能量就是

$$\sum_i n_i\omega(\boldsymbol{K}_i)\qquad(1.16)$$

这是因为介子之间没有相互作用．于是根据（1.12）式，我们预期多粒子体系的哈密顿

算符为

$$H=\sum_i a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i)\omega(\boldsymbol{K}_i) \tag{1.17}$$

$\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)$则是$H$的属于本征值$\sum_i n_i\omega(\boldsymbol{K}_i)$的本征函数.

通过和单粒子量子力学类比，我们可以得到体系的运动方程为

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=H\Phi(t) \tag{1.18}$$

其哈密顿量H则由（1.17）式给出. 上式给出了体系随时间的变化。体系的能量本征态可通过把

$$\Phi(t)=\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)e^{-iEt} \tag{1.19}$$

代入（1.18）式而得到，即有

$$(H-E)\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)=0 \tag{1.20}$$

$$E=\sum_i n_i\omega(\boldsymbol{K}_i) \tag{1.21}$$

正如所预期的那样，在没有相互作用时，占有数是运动常数. 这一点，根据占有数算符

$$a^{\dagger}(\boldsymbol{K}_i)a(\boldsymbol{K}_i) \tag{1.22}$$

的性质也可推出，因为根据（1.17）式，哈密顿量和占有数算符相互对易.

上面对具有给定性质（如给定动量）的分立‘单位’（如粒子或光子）系统的描述仅仅是可能的描述模式之一。例如，在对电磁场作经典描述时，我们就没有使用上面的模式，而是用随时空点x变化的矢量$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$，或用四维矢势$A_\alpha(x)$，$\alpha=1, 2, 3, 4$来描述电磁场。这里，四维矢势$A_\alpha(x)$就是矢势$\boldsymbol{A}(x)$和$A_4(x)=iV(x)$，$V(x)$是标量势。这样，一个电子周围环绕有它自己的电磁场；使用‘粒子’语言，我们就说电子周围环绕有光子云。类似地，在麦克斯韦理论中，两电子的相互作用是通过场作为媒介物发生的，现在则认为两电子的相互作用是通过在它们的电子云之间交换光子引起的。这里所涉及到的，正是我们在普通量子力学中已经熟悉了的波-粒二象性.

波-粒二象性当然也存在于自旋为零的介子的情况中（迄今为止，本章所讨论的都是这种情况）. 仅有的差别就是介子的情况是相当简单的（没有自旋，没有规范不变性等），和光子场需要两个矢量场$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$来描述不同，一个单场（single field）$\phi(x)$就足以对介子系统作出完全的描述了. 这个介子场所起的作用完全类似于光子场，这样，类似于把两电子的相互作用归因于光子场. 我们可以把核力归因于介子场. 使用粒子语言，我们就说核力是通过在环绕每个核子的介子云之间交换介子引起的. 核子之间的力是短程力，其力程是π介子康普顿波长（compton Wave-length）的数量级（康普顿波长为1.4×10^{-13}cm），这个事实可以看成是上述假定的一个惊人示例. 实际上，正是为了解释核力的短程性，汤川秀树（Yukawa）才假定存在一种适当质量的粒子，以上面所说的方式起作用.

具有上述波－粒二象性的这种理论，必须是一个量子化场的理论．这样一个理论可通过几种方式得到．这儿所用的方法具有几个缺点．特别是它选出了和空间坐标比较的时间，这就是隐藏了理论的相对论不变性，并且长时期地阻碍了理论的进一步发展．尽管如此，我们仍将遵循上面所述方法来开始介绍我们的理论．这是因为这种方法和普通量子力学中所用方法非常类似，这就使读者能更加容易地了解理论的真谛．根据这个方法，我们首先用哈密顿形式论导出经典场论；然后再依据哈密顿体系的通常假定使这个理论量子化．在下面的两章中，我们将导出经典场论和使经典场论量子化．

第二章　经典场

在本章中，我们要发展一个哈密顿形式的经典场论。不过，我们将只导出这个理论的一小部分，即在第三章的量子化过程中所需要的那一部分。因此，我们将仅仅涉及到获得共轭变量的一个完全集合。所用的方法则严格地遵从经典力学。设存在有一拉氏函数，借助于变分原理，我们就可以从作用量积分中导出场方程。由拉氏函数，我们可得到与场变量相共轭的动量，然后，假定在场变量和共轭动量之间有一定的对易法则成立，我们就能从经典理论过渡到量子化理论。和经典粒子力学相比较，这里需要注意的新奇特色，就是我们所处理的是一个具有不可数自由度的系统。

在上一章中，我们考虑了和满足Klein-Gordon方程的一个单场有关的粒子。现在，我们来考虑几个场$\phi^{\alpha}(x)$，$\alpha=1,2,\cdots\cdots,N$的一般情况。这$N$个场是为确定系统所需要的。这个推广符合在实际中发生的多数情况，也不会使分析复杂化。指标α标记的场可能是一个场的不同分量，（例如，对于用四维矢势$A_{\alpha}(x)$描述的光子场而言，α从1到4；而我们在第一章中讨论过的标量场$\phi(x)$，则只有一个分量）也可能是不同的完全独立的场。我们假定场ϕ^{α}是实数场，如果有复数场出现，它们必须被分解成一对实数场。

现在，我们把讨论严格地限于经典场论，借助于变分原理，我们可以从作用量积分导出经典场论。设有拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}\left(\phi^{\alpha},\ \phi,^{\alpha}_{\nu}\right) \tag{2.1}$$

式中，我们使用了简写符号

$$\phi,^{\alpha}_{\nu}\equiv\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \tag{2.2}$$

（2.1）式所给出的拉格朗日密度，仅仅取决于场量及其一阶导数，当然不代表能够将理论加以发展的最一般情况，但是它处理了有实际意义的全部情况，并且使理论得到极大的简化。

对于四维时－空连续区的任意一个区域Ω，我们定义作用量积分$I(\Omega)$为：

$$I(\Omega)=\int_{\Omega}d^{4}x\,\mathscr{L}(\phi^{\alpha},\ \phi,^{\alpha}_{\nu}) \tag{2.3}$$

式中，$d^{4}x$代表四维积分元$dx_1dx_2dx_3dx_4=d^{3}xdt$。

现在，我们假定系统的运动方程，即场方程，可根据和经典力学中的哈密顿原理非常类似的变分原理获得。设对一任意区域Ω，使场量$\phi^{\alpha}(x)$这样变化，即

$$\phi^{\alpha}(x)\longrightarrow\phi^{\alpha}(x)+\delta\phi^{\alpha}(x)$$

场量的上述变化在区域Ω的边界面上所引起的作用量积分$I(\Omega)$的变化为零，于是作

用量积分$I(\Omega)$取驻定值（Stationary Value），即有

$$\delta I(\Omega) = 0 \tag{2.4}$$

根据（2.3）式，我们可算出$\delta I(\Omega)$为*）：

$$\delta I(\Omega) = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha}\delta\phi^\alpha + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu}\delta\phi,^\alpha_\nu \right\}$$

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu} \right) \right\} \delta\phi^\alpha$$

$$+ \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu}\delta\phi^\alpha \right\} \tag{2.5}$$

式中，记住

$$\delta\phi,^\alpha_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta\phi^\alpha \tag{2.6}$$

利用分步积分法即可得到（2.5）式的最后一步。(2.5)式中的最后一项是四维散度的四维体积分，根据高斯定理，我们可以把它变换成遍及于表面Γ的面积分，即有：

$$\int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu}\delta\phi^\alpha \right\} = \int_\Gamma dS_\nu \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu}\delta\phi^\alpha \right\} \tag{2.7}$$

式中，dS_ν是表面Γ上的面积分元。因为在表面Γ上$\delta\phi^\alpha = 0$，所以（2.7）式中的面积分为0。这样，如果对于任意变量$\delta\phi^\alpha(x)$，（2.4）式都成立，即$\delta I(\Omega)$都为0，则从（2.5）式，可知下列方程必定成立：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi,^\alpha_\nu} \right) = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{2.8}$$

这些方程就是场量$\phi(x)$所需满足的微分方程。我们称它们为变分问题（2.4）的欧拉方程，这些方程和经典力学中的拉氏方程相对应。理论的相对论不变性要求作用量积分在洛仑兹变换下是不变的；由此根据（2.3）式即可断定拉格朗日密度必须是一个标量，即在洛仑兹变换下保持不变。

为了能够用普通量子力学的方法把这个经典场理论量子化，我们首先必须转向哈密顿形式论。对于具有可数自由度的系统，哈密顿形式论已被人们作了详细的论述。我们正在处理的系统具有不可数的无限多自由度，这些自由度与作为时间函数的场ϕ^α在空间每一点X的值相对应。因此，我们必须使用若干极限过程。

设在某一瞬刻t有一系统，用平直的类空曲面 t = 常数把三维空间分解成小体积元

*）在（2.5）式中，出现在乘积中的重复指标意味着求和，以后不再说明。

$\delta X^{(s)}$，这些小体积元用指标$S=1$，2，…来标记。这样，我们所处理的具有不可数无限多自由度的系统，现在能够用下列可数个变量来确定：

$$q_s^a=\phi^a(s,\ t),\qquad (a=1,\ \cdots\cdots,\ N;\ s=1,\ 2\cdots\cdots) \tag{2.9}$$

这些变量给出了适当定义的在每个小体积元中的场值。当然，我们最终将令小体积元趋于零而过渡到连续区的极限情况。现在，我们用邻近体元之间的差商置换对空间坐标的微商，并且定义系统的拉氏函数为：

$$L(t)=\sum_s \delta X^{(s)}\mathscr{L}^{(s)} \tag{2.10}$$

式中，$\mathscr{L}^{(s)}$是第s个体元的拉氏函数密度（2.1）的值。于是，我们能够定义与q_s^a共轭的动量p_s^a为：

$$p_s^a=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s^a}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^a(s,t)}=\frac{\partial \mathscr{L}^{(s)}}{\partial \dot{\phi}^a(s,t)}\delta X^{(s)} \tag{2.11}$$

式中，字母顶上的点“·”表示对时间求导*）。现在，我们可以用通常的形式定义哈密顿函数$H(t)$为

$$H=\sum_s p_s^a\dot{q}_s^a-L \tag{2.12}$$

为了更方便地过渡到极限情况$\delta X^{(s)}\longrightarrow 0$，我们定义场量$\phi^a(x)$的共轭场为：

$$\pi^a(x)\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^a} \tag{2.13}$$

于是（2.11）式变成

$$p_s^a=\pi^a(s,t)\delta X^{(s)} \tag{2.14}$$

哈密顿函数（2.12）式则变成：

$$H=\sum_s\delta X^{(s)}\left\{\pi^a(s,\ t)\dot{\phi}^a(s,\ t)-\mathscr{L}^{(s)}\right\} \tag{2.15}$$

如果我们现在过渡到极限情况$\delta X^{(s)}\longrightarrow 0$，我们就能把哈密顿函数写成为：

$$H(t)=\int d^3x\mathscr{H}(X,t) \tag{2.16}$$

而哈密顿函数密度则为

$$\mathscr{H}(x)=\pi^a(x)\dot{\phi}^a(x)-\mathscr{L}(x) \tag{2.17}$$

---

*）根据(2.1)式所给出的拉氏函数密度，在（2.11）式的最后一步中，$\dot{\phi}^a(s,t)$仅仅出现在$\mathscr{L}^{(s)}$中。

作为例子，考虑拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(\phi,\phi_{,\nu})=-\frac{1}{2}\left\{\phi_{,\nu}\,\phi_{,\nu}+m^2\phi^2\right\} \tag{2.18}$$

的系统，其拉格朗日方程就是克莱茵-戈登方程(1.2)，这就意味着，(2.18)所给出的拉格朗日密度描述了质量为m的自旋为0的介子.把(2.18)式代入(2.13)式中，即得相应的共轭场为

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x) \tag{2.19}$$

由此，根据(2.17)式，可得哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}(x)=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{2.20}$$

(2.20)式的导出：

由(2.18)式，我们有

$$\mathscr{L}(\phi,\phi_{,\nu})=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{1}$$

由(2.13)式，可得

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i^2}\cdot 2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\dot{\phi}(x) \tag{2}$$

此即(2.19)式.

把(1)和(2)式代入(2.17)式，即得.

$$\mathscr{H}(x)=\dot{\phi}(x)\,\dot{\phi}(x)+\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{2.20}$$

现在，从共轭变量q_S^a和p_S^a的分立集的哈密顿方程出发，我们能得到共轭场量$\phi^a(x,t)$和$\pi^a(x,t)$的哈密顿方程，但由于我们不需要这些方程，所以他们的导出将被略去.在下一章中，我们将从共轭坐标q_S^a和p_S^a出发，使经典共轭场ϕ^a和π^a量子化.用这种方法，我们将重新得到第一章中的粒子描述.

第三章 场 算 符

通过把共轭坐标q_s^α，p_s^α解释成满足通常的正则对易关系的算符，我们就能很容易地把已在第二章中详述过的经典哈密顿场论加以量子化。根据（2.9）式和（2.14）式，我们有，

$$\left.\begin{aligned}&[\phi^\alpha(s,t),\phi^\beta(s',t)]=0\\&[\pi^\alpha(s,t),\pi^\beta(s',t)]=0\\&[\phi^\alpha(s,t),\pi^\beta(s',t)]=i\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta_{ss'}}{\delta\mathbf{X}^{(s)}}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(\alpha,\beta=1,\cdots,n)\\&(s,s'=1,2,\cdots\cdots)\end{aligned}\qquad(3.1)$$

（3.1）式中最后一式的推导：

根据正则对易关系，我们有

$$\begin{aligned}[q_s^\alpha,p_{s'}^\beta]&=[\phi^\alpha(s,t),\pi^\beta(s',t)\delta\mathbf{X}^{(s')}]\\&=\delta\mathbf{X}^{(s')}[\phi^\alpha(s,t),\pi^\beta(s',t)]\\&=i\delta_{\alpha\beta}\delta_{ss'}\end{aligned}$$

于是移项即可得

$$[\phi^\alpha(s,t),\pi^\beta(s',t)]=i\delta_{\alpha\beta}\frac{\delta_{ss'}}{\delta\mathbf{X}^{(s)}}$$

现在，如果我们让小格的体积趋于零，即令$\delta\mathbf{X}^{(s)}\to 0$，那末我们就能得到在$\mathbf{X}$和$\mathbf{X}'$点的场在同一个时刻$t$的对易关系。迄今为止，我们还没有规定如何描述系统随时间的变化。比如，我们是使用薛定谔绘景呢还是使用海森堡绘景。由于我们仅仅考虑系统在某一时刻t的情况，所以我们再次使用薛定谔绘景，在这种绘景中，算符不随时间变化，因此，我们能够取定时刻$t=0$，并且把$\phi^\alpha(\mathbf{X},0)$写成$\phi^\alpha(\mathbf{X})$等。于是在特定的$t=0$时刻，场的对易关系变成：

$$\left.\begin{aligned}&[\phi^\alpha(\mathbf{X}),\phi^\beta(\mathbf{X}')]=[\pi^\alpha(\mathbf{X}),\pi^\beta(\mathbf{X}')]=0\\&[\phi^\alpha(\mathbf{X}),\pi^\beta(\mathbf{X}')]=i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}'),\end{aligned}\right.\qquad(3.2)$$

$$(\alpha,\beta=1,\cdots,N)$$

显而易见，当$\delta\mathbf{X}^{(s)}\to 0$，$\delta_{ss'}/\delta\mathbf{X}^{(s)}$就变成三维狄拉克$\delta$函数$\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}')$，这里，$\mathbf{X}$和$\mathbf{X}'$分别是第$s$个小格和第$s'$个小格内的点。

（3.2）式最后一式的推导如下：

（i）当$s=s'$，即$\mathbf{X}=\mathbf{X}^{(s')}$，这时若$\delta\mathbf{X}^{(s)}=\delta\mathbf{X}^{(s')}\to 0$，则可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta X^{(s')}} \longrightarrow \infty$$

（ii）当$s \neq s'$，即$X \neq X^{(s')}$，这时$\delta_{ss'} = 0$于是可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta X^{(s')}} \longrightarrow 0$$

（iii）整个空间的体积为1，即有

$$\lim_{\delta X^{(s)} \to 0} \sum_{s} \frac{\delta_{ss'}}{\delta X^{(s')}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{ss'}}{\delta X^{(s')}} d^3x = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(X - X')\, d^3x$$

于是根据δ函数的定义，可得

$$\frac{\delta_{ss'}}{\delta X^{(s')}} \longrightarrow \delta(X - X')$$

为了和第一章给出的粒子解释建立联系，我们要对场算符$\phi(x)$和$\pi(x)$进行付里叶分析。这里，我们每次仅限于讨论满足 Klein-Gordon 方程的实单场的情况，也就是仅限于讨论用（2.18—20）式描述的场。我们再次从经典场出发，并把这些经典场展开为付里叶级数*）：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{K} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{a(K)e^{ikx} + a^*(K)e^{-ikx}\} \tag{3.3a}$$

根据(2.19)式，$\pi(x) = \frac{d\phi(x)}{dt}$，于是有

$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{K} \sqrt{\frac{k_0}{2}} \{-a(K)e^{ikx} + a^*(K)e^{-ikx}\} \tag{3.3b}$$

式中的求和遍及于所有可容许的动量K（我们现在略去以前常用来标记动量的下标 i），k_0是和动量k相应的能量，其值由（1.6）式确定，k_0也出现在指数因子的标积$kx = KX - k_0t$中。在目前，我们不应该将付氏级数(3.3)中的展开系数$a(K)$和$a^*(K)$与第一章中引进的吸收算符和产生算符混为一谈。实际上，过一会儿我们就将看到，由于（3.3a）式中的$(2k_0)^{-1/2}$等因子，在量子化理论中，我们将能得到这个同一性。

现在，在量子化理论的薛定谔绘景（取$t = 0$）中，我们把$\phi(X)$和$\pi(X)$解释为算符，

---

*）场函数可以用任一组“力学量完全集合”的本征函数去展开，在最简单的具有一定能量和动量的自由粒子的情形，能量动量就是对易力学量，而相应的本征函数就是平面波解。其物理图象就是将自由粒子的连续运动表达为无穷多个简谐振动的叠加。(3.3a)式右边的括号中之所以引入两个相加的复数共轭项，乃是为了保证$\phi(x)$是实数。这是因为中性π介子的场是实场，即有$\phi^*(x) = \phi(x)$。当然，若$\phi(x)$是复场，就无须引入复数共轭项了。
——编译者注。

于是对这些算符而言，(3.3)式变成：

$$\phi(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}}\{a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a^{\dagger}(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}}\} \tag{3.4a}$$

$$\pi(\mathbf{X}) = \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{K}}}{2}}\{-a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a^{\dagger}(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}}\} \tag{3.4b}$$

式中，我们已根据(1.6)式把动量为$\mathbf{K}$的介子的能量写成$\omega_{\mathbf{K}}$.实际上，$\phi(\mathbf{X})$和$\pi(\mathbf{X})$的算符特征就反映在我们把经典振幅$a(\mathbf{K})$和$a^{*}(\mathbf{K})$解释成算符这一点上.相应地我们已用伴算符$a^{\dagger}$置换了复数共轭a^{*}.这就确保了场算符$\phi(\mathbf{X})$和$\pi(\mathbf{X})$是厄密算符，正如我们在原始定义(3.3a)式中确保了经典场量是实数一样.

把(3.4)式代入场的对易关系(3.2)式，我们就能得到算符$a(\mathbf{K})$和$a^{\dagger}(\mathbf{K})$的对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[a(\mathbf{K}),\ a(\mathbf{K}')] = [a^{\dagger}(\mathbf{K}),\ a^{\dagger}(\mathbf{K}')] = 0\\&[a(\mathbf{K}),\ a^{\dagger}(\mathbf{K}')] = \delta(\mathbf{K},\ \mathbf{K}')\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

上式表明，我们已重新导出了对易关系(1.13)式，这说明我们在把对易关系及其解释应用于上面引进的算符$a(\mathbf{K})$和$a^{\dagger}(\mathbf{K})$时是正确的.反之，我们容易证明，(3.5)式包含了由(3.4)式定义的算符ϕ和π的对易关系(3.2)式.

(3.5)式的推导如下：

因
$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{K}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k} \tag{1}$$

故由(3.4)式，可得

$$\phi(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{2\,\omega_{\mathbf{K}}}}\{a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a^{\dagger}(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}}\}$$

$$= \frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}}\{a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a^{\dagger}(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}}\}d^3\mathbf{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\mathbf{K}}}}a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}d^3\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\infty}^{-\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\mathbf{K}}}}a^{\dagger}(-\mathbf{K}')e^{i\mathbf{K}'\mathbf{X}}d^3(-\mathbf{K}')$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\mathbf{K}}}}a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}d^3\mathbf{K} + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_{\mathbf{K}}}}a^{\dagger}(-\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}d^3\mathbf{K}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V}{2\omega_K}}\left[a(K)+a^\dagger(-K)\right]e^{iKX}d^3K \qquad (2)$$

由付里叶变换公式，可知

$$\sqrt{\frac{V}{2\omega_K}}\left[a(K)+a^\dagger(-K)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(X)e^{-iKX}d^3X \qquad (3)$$

式中，$d^3X=dx_1dx_2dx_3$。

同理可得

$$\pi(X)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_K\sqrt{\frac{\omega_K}{2}}\{-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\}$$

$$=\frac{i\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\omega_K}{2}}\{-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\}d^3K,$$

（将第二项的K换为－K）

$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V\omega_K}{2}}\left[-a(K)+a^\dagger(-K)\right]e^{iKX}d^3K \qquad (4)$$

于是我们有

$$i\sqrt{\frac{V\omega_K}{2}}\left[-a(K)+a^\dagger(-K)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\pi(X)e^{-iKX}d^3X \qquad (5)$$

由（3）式可得

$$a(K)+a^\dagger(-K)=\sqrt{\frac{2\omega_K}{V}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(X)e^{-iKX}d^3X \qquad (6)$$

由（5）式可得

$$a(K)+a^\dagger(-K)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{V\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(X)e^{-iKX}d^3X \qquad (7)$$

把（6）式和（7）式的两边分别相加，即得

$$a^\dagger(-K)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2\omega_K}{V}}\phi(X)+\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{V\omega_K}}\pi(X)\right]e^{-iKX}d^3X$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A\phi(X)-iB\pi(X)\right]e^{iKX}d^3X \qquad (8)$$

式中，

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_K}{V}}\,,\qquad B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{V\omega_K}}$$

把（6）式和（7）式的两边分别相减，即得

$$a(K)=\int_{-\infty}^{\infty}[A\phi(X)+iB\pi(X)]e^{-iKX}d^3X \tag{9}$$

由（8）式和（9）式，我们有

$$[a(K),\ a(K')]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{-i(KX+K'X')}[A\phi(X)+iB\pi(X),\ A'\phi(X')+iB'\pi(X')]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'e^{-i(KX+K'X')}\cdot\{AA'[\phi(X),\ \phi(X')]-iBA'[\phi(X'),$$

$$\pi(X)]+iAB'[\phi(X),\ \pi(X')]-BB'[\pi(X),\ \pi(X')]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{-i(KX+K'X')}\{AA'\cdot0-iBA'\cdot i\delta(X'-X)+$$

$$+iAB'\cdot i\delta(X-X')-BB'\cdot0\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{-i(KX+K'X')}[BA'\delta(X'-X)-AB'\delta(X-X')]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3X\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d^3X'\,e^{-i(KX+K'X')}(BA'-AB')\,\delta(X'-X)\right\}$$

（把A，B，A'，B'代入）

$$=\frac{1}{2V}\,\frac{\omega_{K'}-\omega_K}{\sqrt{\omega_{K'}\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(K+K')X}d^3X$$

$$=\frac{1}{2V}\,\frac{\omega_{K'}-\omega_K}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\delta(K+K')(2\pi)^3 \tag{10}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}\omega_{K'} &= \sqrt{m^2+K'^2}\\ \omega_K &= \sqrt{m^2+K^2}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

把（11）式代入（10）式，即得

$$[a(K),\ a(K')] = \frac{1}{2V}\frac{\sqrt{m^2+K'^2}-\sqrt{m^2+K^2}}{\sqrt[4]{(m^2+K'^2)(m^2+K^2)}}\delta(K+K')(2\pi)^3 \tag{12}$$

当$K=-K'$时，因$(-K')^2=K'^2$，故$\omega_{K'}-\omega_K=0$，于是我们有

$$\frac{1}{2V}\frac{\omega_{K'}-\omega_K}{\sqrt{\omega_{K'}\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(K+K')X}d^3X=0 \tag{13}$$

当$K\neq -K'$时，由于$\delta(K+K')=0$，故有

$$\frac{1}{2V}\frac{\sqrt{m^2+K'^2}-\sqrt{m^2+K^2}}{\sqrt[4]{(m^2+K^2)(m^2+K'^2)}}\delta(K+K')(2\pi)^3=0 \tag{14}$$

于是根据（13—14）式，可知不论K为何值，均有

$$[a(K),\ a(K')]=0$$

类似地，我们可得：

$$[a^\dagger(K'),\ a^\dagger(K)]=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{i(KX+K'X')}[A'\phi(X')-iB'\pi(X'),$$

$$A\phi(X)+iB\pi(X)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{i(KX+K'X')}\{AA'[\phi(X'),\ \phi(X)]-BB'[\pi(X'),\pi(X)]$$

$$-iA'B[\phi(X'),\ \pi(X)]+iB'A[\phi(X),\ \pi(X')]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3Xd^3X'\,e^{i(KX+K'X')}\{iB'Ai\delta(X-X')-iA'Bi\delta(X'-X)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d^3X(A'B-AB')e^{i(K+K')X}$$

$$=\frac{1}{2V}\frac{\omega_{K'}-\omega_K}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\delta(K+K')(2\pi)^3$$

$$= \begin{cases} 0 & K \neq -K' \\ 0 & K = -K' \quad (\text{因这时}\omega_{K'} - \omega_K = 0) \end{cases} \tag{15}$$

同样，我们有

$$[a(K),\ a^\dagger(K')] = \int_{-\infty}^{\infty} d^3X d^3X'\, e^{i(K'X' - KX)} \cdot \{AA'[\phi(X),\ \phi(X')]$$

$$+ iBA'[\pi(X),\ \phi(X')] + iAB'[\pi(X'),\ \phi(X)] + BB'[\pi(X),\ \pi(X')]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3X d^3X'\, e^{i(K'X' - KX)} \{-iBA' \cdot i\delta(X' - X) - iAB' \cdot i\delta(X - X')\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3X d^3X'\, e^{i(K'X' - KX)} (BA' + AB')\delta(X' - X)$$

$$= \frac{1}{2V} \frac{\omega_{K'} + \omega_K}{\sqrt{\omega_{K'}\omega_K}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K' - K)\cdot X} d^3X$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2V} \dfrac{2\omega_K}{\omega_K} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d^3X = 1 & (\text{当}K = K') \\ \dfrac{1}{2V} \dfrac{\omega_{K'} + \omega_K}{\sqrt{\omega_{K'}\omega_K}} (2\pi)^3 \delta(K' - K) = 0 & (\text{当}K \neq K') \end{cases}$$

$$= \delta_{KK'} = \delta(K,\ K')$$

这样，我们就推导出了(3.5)式.

(3.5)式的导出意味着我们重新获得了产生算符和湮灭算符的对易关系(1.13)式，这说明我们把对易关系这个术语及其解释应用于上面引进的算符$a(K)$和$a^\dagger(K)$时是正确的.反之，我们容易证明，(3.5)式就包含了由(3.4)式定义的算符$\phi(X)$和$\pi(X)$的对易关系(3.2)式.

现在，让我们来简要地概括一下上述很重要的结果，并且把它们和普通量子力学中的相应概念加以比较.

在量子场论中，场的付里叶振幅(a和$a^\dagger$)被解释为吸收和产生算符，它们满足对易关系(3.5)式.这样，场$\phi(X)$和$\pi(X)$当然也是算符.由(3.4)式，根据产生算符和湮灭算符可给出场算符$\phi(X)$和$\pi(X)$，$\phi(X)$和$\pi(X)$满足对易关系(3.2)式.这样，在场论中，$\phi(X)$是算符，也就是说，$\phi(X)$是a和$a^\dagger$的函数，而X则不过是一个参数(C数).与此相比较，在单粒子量子理论中，$\phi(X)$是确定系统状态的波函数，而位置坐标X则是算符.另一方面，在场论中，用态矢量$\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)$来规定系统的态，而$\Phi(n_1, \cdots, n_i, \cdots)$是占有数的函数.什么量是算符，什么力是波函数的这些区别，对于数学程式(mathematical formalism)解释来说是很重要的.为此，在下一章中，我们将给出几个很简单的例子，说明我们如何用这些量来进行运算.同时，我们也将更清楚地看

到，物理解释是如何从数学符号得出的。当我们初次接触这些数学符号时，它们可能是相当抽象的。不过，现在我们还是首先来说明其他两个小问题。

在第一章中，我们写下了无相互作用无自旋介子系统的哈密顿算符之表示式(1.17)。既然哈密顿量H现在被解释成静定谱绘景中的算符，于是在（2.16）式中令$t=0$，我们就能够从（2.16）、（2.20）和（3.4）式来计算这个哈密顿量。由此我们得到：

$$H=\sum_{K}\left(a^{+}(\mathrm{K})\,a(\mathrm{K})+\frac{1}{2}\right)\omega_{\mathrm{K}} \tag{3.6}$$

上式推导见习题（3.2）解答。

（3.6）式由于第二项的存在而不同于（1.17）式。即使当所有占有数为0，即系统处于真空态时，（3.6）式中的第二项仍存在。这样，（3.6）式中的第二项就代表零点能（实际上是无穷大）。不过，通过改变能量标度的零点，我们可以完全消除掉这个零点能；这种能量标度的改变不会在物理上导致任何观察结果。通过计算介子场的动量（见习题3.3），再一次说明了把$a(\mathrm{K})$和$a^{+}(\mathrm{K})$解释为动量是K的介子的吸收算符和产生算符是正确的。

我们将总是在一个有限的很大体积V内使系统归一化。凡是有物理意义的量，例如截面，当然是和这个归一化体积无关的。根据下列众所周知的对应关系，用积分代替遍及所允许动量值的求和，常常是方便的：

$$\frac{1}{V}\sum_{K}\longrightarrow\frac{1}{(2\pi)^{3}}\int d^{3}\mathrm{K} \tag{3.7}$$

式中，$d^{3}\mathrm{K}$是动量空间$dK_{1}dK_{2}dK_{3}$中的体积元。在作（3.7）式表明的代换时，将出现小的误差，然而，当我们最终令体积V趋于无限大时，这个误差将趋于零。

第四章 简单示例

现在，我们来考虑几个很简单的例子以阐明我们在前几章中引进的概念。当然，我们现在还不能处理实际问题，因此，在后面的章节中，我们将把下面示例中表述的许多概念继续发展成更复杂的系统方法。

我们考虑中性π介子和核子的相互作用，设相互作用哈密顿量密度为

$$\mathscr{H}_I(\mathbf{X}) = g\rho(\mathbf{X})\phi(\mathbf{X}) \tag{4.1}$$

$\mathscr{H}_I(\mathbf{X})$是加到介子场的哈密顿量密度（2.20）式上去的。式中，$\rho(\mathbf{X})$是在$\mathbf{X}$点的核子密度，$\phi(\mathbf{X})$是由（3.4a）式给出的介子场的场量，g是表明相互作用强度的耦合常数。这个表示式和电动力学中的相互作用哈密顿量密度非常类似。对电荷－电流密度（即四维电流密度）$-eS_\mu(\mathbf{X})$而言，它和电磁场$A_\mu(\mathbf{X})$的相互作用哈密顿量密度为：

$$\mathscr{H}_I(\mathbf{X}) = eS_\mu(\mathbf{X})A_\mu(\mathbf{X}) \tag{4.2}$$

现在，我们把核子看成是具有无穷大质量的点粒子，所以我们可以把它们看成是固定在点$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，……上。于是我们可把密度函数写成

$$\rho(\mathbf{X}) = \sum_n \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_n) \tag{4.3}$$

在散射过程中，这样固定在点上的核子不可能经历一个反冲过程，表明了这种类型的相互作用只有很有限的用处。

根据（2.16）式，（4.1）式和（4.3）式，我们可得相互作用哈密顿量为

$$H_I = \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{K}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}} [a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}_n} + a^\dagger(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}] \tag{4.4}$$

（4.4）式的推导如下：

$$\begin{aligned} H_I &= \int \mathscr{H}_I(\mathbf{X},t)d^3\mathbf{X} \\ &= \int g\sum_n \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_n)\phi(\mathbf{X})d^3\mathbf{X} \\ &= g\sum_n \phi(\mathbf{X}_n) \qquad \text{〔代入(3.4}a\text{)式〕} \\ &= \frac{g}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{K}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}} [a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}_n} + a^\dagger(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}] \end{aligned}$$

（4.4）式所给出的哈密顿量是吸收算符和产生算符的线性组合。（4.4）式方括号中的每一项都将吸收或产生一个动量为$\mathbf{K}$的介子。因此，仅有的非零矩阵元是：

$$\left.\begin{array}{l}(\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}+1, \cdots), H_I\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}\cdots)) \\ (\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}, \cdots), H_I\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}+1, \cdots))^*\end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{n_{\mathbf{K}}+1}{2\omega_{\mathbf{K}}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}$$

$$(n_{\mathbf{K}}=0,1,\cdots) \qquad (4.5)$$

(4.5)式的推导如下：

$$H_I\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}, \cdots) = \frac{g}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{K}}\sum_{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}}[a(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}+a^{\dagger}(\mathbf{K})e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}]\cdot\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}, \cdots)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\sum_{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}}(\sqrt{n_{\mathbf{K}}}\,\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}-1, \cdots)e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}_n}$$

$$+\sqrt{n_{\mathbf{K}}+1}\,\Phi(\cdots, n_{\mathbf{K}}+1, \cdots)e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}_n})$$

把上式代入(4.5)式左边，即得第一式成立．同理可得第二式成立．

(4.5)式中的占有数表明了处于动量态$\mathbf{K}$的介子数目，在这些跃迁中，所有其他占有数保持不变；这就是说，唯一所允许的跃迁就是那些使独态的占有数改变一个单位的跃迁。

应当指出，核子和介子在这里是以相当不同的方式处理的．只有介子场被量子化，使介子的产生和湮灭成为可能，而核子则是以经典方式处理的．在这里，核子只不过是介子场的源和漏．这样，在一个特定问题中，核子数N和它们的位置$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，…，$\mathbf{X}_N$是固定的，不变的，所以，描述系统的态矢量将仅仅是介子占有数的函数．例如，真空态Φ_0现在将仅仅有N个核子存在而没有任何介子存在．

在下面的应用中，我们使用了与时间无关的微扰理论．这种理论仅仅对弱相互作用H_I即小耦合常数g是有用的．因此，它适用于电动力学但不适用于耦合常数很大的介子．

作为第一个例子，我们来考虑核力问题．这就是说，我们将计算位于$\mathbf{X}_1$和$\mathbf{X}_2$的两个核子，由于通过介子场相互作用而在能量上产生的变化ΔE．未微扰波函数现在是真空态Φ_0(有两个核子存在，但没有介子存在)．在一级微扰理论中

$$\Delta E = (\Phi_0, H_I\Phi_0) \qquad (4.6)$$

根据(4.5)式，$\Delta E=0$．然而，在二级微扰理论中，ΔE将不为0．有贡献的中间态是只存在有一个动量为$\mathbf{K}$的介子的态$\Phi(\mathbf{K})$，这时，ΔE为：

$$\Delta E = \sum_{\mathbf{K}}\frac{(\Phi_0, H_I\Phi(\mathbf{K}))(\Phi(\mathbf{K}), H_I\Phi_0)}{(-\omega_{\mathbf{K}})} \qquad (4.7)$$

式中，分母就是二级微扰理论中的普通能量差：用初态Φ_0的能量($E_0=0$)减去中间态$\Phi(\mathbf{K})$的能量($E_{\mathbf{K}}=\omega_{\mathbf{K}}$)．把(4.5)式代入(4.7)式，考虑到核子数为2，即得：

$$\Delta E = \frac{-g^2}{V}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{K}}^2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}e^{i\mathbf{K}(\mathbf{X}_n-\mathbf{X}_m)} \qquad (4.8)$$

上式遍及于m，n的求和产生了四项：m，$n=1$，2，分别和介子被两个核子发射和

重吸收的各种方式相对应.在图1中，我们简略地描述了这些方式.标记1和2的实线代表核子，虚线代表介子. 图1（a）表示介子被位于$\mathbf{X}_1$的核子1发射，然后被位于$\mathbf{X}_2$的核子2吸收.

图（c）和（d）与核子相互之间的作用无关，因此，在这里我们将略掉它们. 它们代表核子的自能效应：核子和它自己的介子云相互作用. 这个效应将修正自由核子的性质. 我们在上面考虑的是没有介子云的裸核子. 图（c）代表了把裸核子转换成物理核子

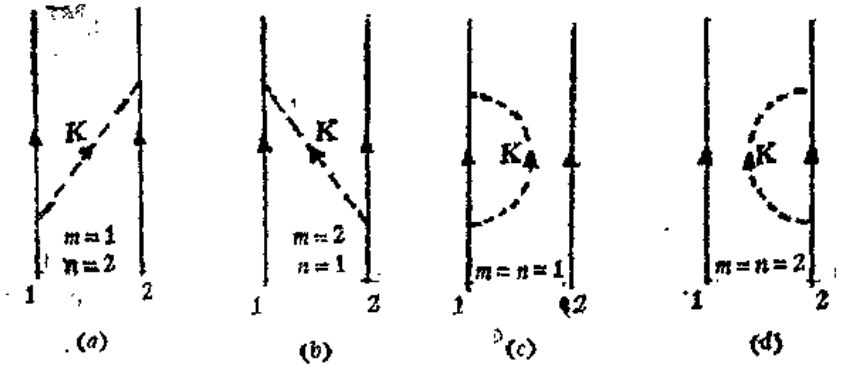


图1　核子－核子相互作用

的整个一族虚过程中最简单的情况. 根据（3.7）式，（4.8）式中的自能项（$n=m$），通过取极限$V\to\infty$，将给出一个线性发散贡献.于是由（4.8）式，可得自能项引起的能量修正为

$$\frac{-g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(m^2+\mathbf{K}^2)}=-\frac{g^2}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2dx}{m^2+x^2} \qquad (4.9)$$

式中，$x=|\mathbf{K}|$，上式在$x\to\infty$时线性发散.以后我们将看到如何通过把这些发散自能效应合并在物理核子的性质中而消去它们.这就是质量重正化过程.

（4.9）式的推导如下：

首先，注意到这时只有$n=m=1$和$n=m=2$两种情况，于是由（4.8）式，可得

$$\Delta E=\frac{-g^2}{V}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{K}}^2}\left(e^{i\mathbf{K}(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1)}+e^{i\mathbf{K}(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2)}\right)=-\frac{g^2}{V}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{w_{\mathbf{K}}^2},$$

由（3.7）式，并注意到$x=|\mathbf{K}|$，得

$$\Delta E=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3k}{(m^2+\mathbf{K}^2)}=-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty x^2dx\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\sin\theta d\theta\frac{1}{(m^2+x^2)}$$

$$=-\frac{g^2}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2dx}{m^2+x^2}$$

对于核子-核子相互作用而言，（4.8）式中 $m \neq n$ 的项给出的二级能量修正为：

$$\Delta E = \frac{-g^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_K^2} (e^{iKX} + e^{-iKX}) \tag{4.10a}$$

$$= \frac{-g^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{iKX}}{m^2 + |K|^2} \tag{4.10b}$$

$$= -g^2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{4.10c}$$

式中，$X = X_2 - X_1$，$r = |X|$ 是核子之间的距离。通过把（4.10a）的第二个积分中的积分变量从K变为$-K$，我们就可得到（4.10b）式。

（4.10c）式的推导如下：

由于K是积分变量，X是定数，所以我们取极轴沿X方向，这样，在球极坐标系中，

$$d^3K = K^2 \sin\theta d\theta d\varphi dK \tag{1}$$

令$r = |X|$，于是由（4.10b）可得

$$\Delta E = \frac{-g^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty K^2 dK \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{e^{iKr\cos\theta}}{m^2 + K^2} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{K^2 dK}{m^2 + K^2} \cdot \frac{e^{iKr} - e^{-iKr}}{iKr}$$

$$= -\frac{g^2}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{m^2 + K^2} K dK \tag{2}$$

我们来考虑积分I：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iKr}}{m^2 + K^2} K dK = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos Kr}{m^2 + K^2} K dK + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kr}{m^2 + K^2} K dK$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kr}{m^2 + K^2} K dK \tag{3}$$

式中最后一步中的第一项积分为零，是因为K是奇函数，而$\cos Kr$是偶函数。由（3）式即得

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kr}{m^2 + K^2} K dK = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iKr}}{m^2 + K^2} K dK \quad （由约当引理和留数定理）$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{-mr} \cdot im}{2mi} = i\pi e^{-mr} \qquad (4)$$

注意$\sin Kr$和K是奇函数，于是由（4）式即可得

$$\int_0^\infty \frac{\sin Kr}{m^2+K^2} KdK = \frac{1}{2i} \cdot i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Kr}{m^2+K^2} KdK = \frac{1}{2i} \cdot i\pi e^{-mr} = \frac{\pi}{2} e^{-imr} \qquad (5)$$

把（5）式代入（2）式，即得

$$\Delta E = -g^2 \frac{e^{-mr}}{4\pi r} \qquad (4.10c)$$

（4.10c）就是著名的汤川势；它是相距r的两个核子之间的势。它和两电荷之间的库仑势类似，但是和库仑势不同，它是短程的。它的力程是介子康普顿波长$\frac{1}{m}$的数量级，π介子的康普顿波长约为1.4×10^{-13}cm。这样一个势既不能重现我们所观察到的核力，也不能从这样一个粗糙的理论导出来。我们应当使用容许核子反冲的相对论性理论，来描述作为赝标量粒子的π介子和考虑带电的π介子及中性的π介子。最后，我们还要指出，相互作用是强的，微扰理论的应用似乎还没有被证实是恰当的*）。

作为第二个例子，根据同样的相互作用哈密顿量（4.4），我们来考虑π介子-核子散射。现在，我们仅有一个固定在点X的核子。考虑从一个单介子态$\Phi(K)$（动量为K，能量为ω_K的介子）到另一个单介子态$\Phi(K')$（动量为K′，$|K'|=|K|$，能量为$\omega_{K'}=\omega_K$）的弹性散射。由于在这种跃迁中，两个占有数都变化了，因而最低级的跃迁矩阵元为零：

$$(\Phi(K'),\ H_I\Phi(K)) = 0 \qquad (4.12)$$

在二级微扰理论中，有贡献的两个中间态是：

（a）无介子存在的态Φ_0，其能量为0。

（b）有两个介子存在的态$\Phi(K, K')$，其能量为$\omega_K+\omega_{K'}=2\omega_K$。

上述两种跃迁如图2所示。它们相应于在介子K′被发射之前，介子K被吸收；或者在介子K被吸收前，介子K′被发射。

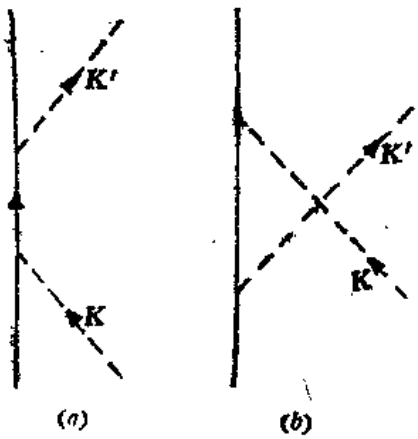


图2　介子-核子散射

由上所述，我们可得跃迁矩阵元为

*）　事实上，我们能够证明，上面所得到的二级能量修正结果是精确的。这只不过是没有反冲的自旋为零的中性标量场理论的特殊情况。根据这个理论，Wentzel证明了，借助于规范变换，总哈密顿量能够被写为

$$\sum_K \omega_K a^\dagger(K)a(K) - g^2 e^{-mr}/4\pi r \qquad (4.11)$$

请参见Wentzel, G. Quantum Theory of Fields, P.47, New York, Interscience, 1949.

$$M=\frac{(\Phi(K'),H_I\Phi_0)(\Phi_0,H_I\Phi(K))}{\omega_K-0}$$

$$+\frac{(\Phi(K'),H_I\Phi(K,K')(\Phi(K,K'),H_I\Phi(K))}{\omega_K-2\omega_K}$$

把（4.5）式代入上式，即得

$$M=\frac{g^2}{V}\frac{1}{2\omega_K}e^{i(K-K')x}\left\{\frac{1}{\omega_K}+\frac{1}{-\omega_K}\right\}=0 \qquad (4.13)$$

这样，在这个理论中，一直到g^2级都没有散射发生．这是由于图2中（a）和（b）的贡献精确地相互抵消．如果我们允许反冲效应发生或考虑带电介子，就不会有这个相互抵消发生．在这一点上，中性标量无反冲理论又是特殊的，它不仅到g^2级是正确的，而且代表了精确结果．根据（4.11）式所给出的哈密顿量，这个结论是明显的．（4.11）式所给出的哈密顿量是两项之和：一项仅包含了介子变量，另一项仅包含了核子变量；但是恰恰没有相互作用项，这样，就不可能有任何散射发生．

（4.12）式和（4.13）式的推导如下：

设有一个动量为K的介子存在，而动量为K′的介子不存在的初态$\Phi(K)$为

$$\Phi(K)=|10\rangle \qquad (1)$$

设有一个动量为K′的介子存在，而动量为K的介子不存在的终态$\Phi(K')$为

$$\Phi(K')=|01\rangle \qquad (2)$$

设动量为K和K′的介子都不存在的中间态$\Phi(0)$为

$$\Phi(0)=|00\rangle \qquad (3)$$

设存在有一个动量为K的介子和一个动量为K′的介子的中间态$\Phi(K,K')$为

$$\Phi(K,K')=|11\rangle \qquad (4)$$

由此可得：

$$\left.\begin{aligned}
&a(K)|10\rangle=|00\rangle\\
&a(K)|01\rangle=0\\
&a(K)|00\rangle=0\\
&a(K)|11\rangle=|01\rangle
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a^\dagger(K)|10\rangle=\sqrt{2}\,|20\rangle\\
&a^\dagger(K)|01\rangle=|11\rangle\\
&a^\dagger(K)|00\rangle=|10\rangle\\
&a^\dagger(K)|11\rangle=\sqrt{2}\,|21\rangle
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a(K')|10\rangle=0\\
&a(K')|01\rangle=|00\rangle\\
&a(K')|00\rangle=0\\
&a(K')|11\rangle=|10\rangle
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} a^{\dagger}(K')\,|\,10\rangle &= |\,11\rangle \\ a^{\dagger}(K')\,|\,01\rangle &= \sqrt{2}\ \ |\,02\rangle \\ a^{\dagger}(K')\,|\,00\rangle &= |\,01\rangle \\ a^{\dagger}(K')\,|\,11\rangle &= \sqrt{2}\ \ |\,12\rangle \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

于是由（4.4）式，我们有

$$H_I\Phi(K) = H_I\,|\,10\rangle = \sum_{\kappa}\frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left(a(K)\,e^{iKx} + a^{\dagger}(K)\,e^{-iKx}\right)|\,10\rangle$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left(a(K)\,e^{iKx} + a^{\dagger}(K)\,e^{-iKx} + a(K')\,e^{iK'x} + a^{\dagger}(K')\,e^{-iK'x}\right)|\,10\rangle$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left[e^{iKx}|\,00\rangle + e^{-iKx}\sqrt{2}\,|\,20\rangle + e^{iK'x}\cdot 0 + e^{-iK'x}|\,11\rangle\right]$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left[e^{iKx}|\,00\rangle + e^{-iKx}\sqrt{2}\,|\,20\rangle + e^{-iK'x}|\,11\rangle\right] \qquad (9)$$

同理可得

$$H_I\Phi(K') = H_I\,|\,01\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left(e^{-iKx}|\,11\rangle + e^{iK'x}|\,00\rangle + e^{-iK'x}\sqrt{2}\,|\,02\rangle\right)$$

$$(10)$$

$$H_I\Phi(0) = H_I|\,00\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left(e^{-iKx}|\,10\rangle + e^{-iK'x}|\,01\rangle\right) \qquad (11)$$

$$H_I\Phi(K,K') = H_I|\,11\rangle$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left(e^{iKx}|\,01\rangle + e^{-iKx}\sqrt{2}\,|\,21\rangle + e^{iK'x}|10\rangle + e^{-iK'x}\sqrt{2}\,|\,12\rangle\right) \qquad (12)$$

于是我们有

$$\left(\Phi(K'), H_I\Phi(K)\right) = \langle\,01|\,H_I|\,10\rangle$$

$$= \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left[e^{iKx}\langle\,01|\,00\rangle + e^{-iKx}\sqrt{2}\,\langle\,01|\,20\rangle + e^{-iK'x}\langle\,01|\,11\rangle\right]$$

$$= 0 \qquad (13)$$

这就是（4.12）式。

同样可得：

$$\left(\Phi(K'), H_I\Phi(0)\right) = \langle\,01|\,H_I|\,00\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{-iK'x} \qquad (14)$$

$$(\Phi(0), H_I\Phi(K)) = \langle 00|H_I|10\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{iKx} \tag{15}$$

$$(\Phi(K'), H_I\Phi(K,K')) = \langle 01|H_I|11\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{iKx} \tag{16}$$

$$(\Phi(K,K'), H_I\Phi(K)) = \langle 11|H_I|10\rangle = \frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{-iK'x} \tag{17}$$

于是我们有

$$M = \frac{1}{\omega_K}\cdot\frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{-iK'x}\cdot\frac{g}{\sqrt{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{iKx}$$

$$+\frac{1}{-\omega_K}\cdot\frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{iKx}\cdot\frac{g}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}e^{-iK'x}$$

$$= \frac{g^2}{V}\frac{1}{2\omega_K}e^{i(K-K')x}\left\{\frac{1}{\omega_K}+\frac{1}{-\omega_K}\right\} = 0 \tag{18}$$

这就是(4.13)式.

第五章　相互作用绘景

迄今为止，我们都是用薛定谔绘景（S.P.）来描述与时间有关的系统，现在，我们将引进相互作用绘景（I.P.）来代替薛定谔绘景．相互作用绘景特别适合于用微扰理论来处理两个相互作用着的系统（如介子和核子）．相互作用绘景使得我们能够用相对论协变的方式作计算．

在S.P.中，体系的运动方程是含时薛定谔方程

$$i\frac{\partial \Phi^S(t)}{\partial t} = H^S \Phi^S(t) \tag{5.1}$$

式中，上标s是$S.P.$中物理量的标记，H^S是体系的总哈密顿量．我们假定体系的总哈密顿量可分解成与相互作用无关的部分H_0^S和相互作用部分H_I^S，即有

$$H_0^S = H_0^S(A) + H_0^S(B) \tag{5.2}$$

$$H_I^S = H_I^S(A, B) \tag{5.3}$$

$$H^S = H_0^S + H_I^S \tag{5.4}$$

I.P.中的态矢量$\Phi(t)$和算符$O(t)$，可通过幺正变换从S.P.中的相应物理量获得：

$$\Phi(t) = e^{iH_0^S t}\Phi^S(t) \tag{5.5}$$

$$O(t) = e^{iH_0^S t} O^S e^{-iH_0^S t} \tag{5.6}$$

根据（5.5—6）式，我们可得出在时刻$t=0$时，两种描述是等价的．若令$O^S = H_0^S$，则有

$$H_0 = H_0^S \tag{5.7}$$

式中，没有上标S的态矢量和算符是I.P.中的物理量．这个约定将贯彻全书始终，下面不再说明．

根据（5.1）式，我们可导出I.P.中态矢量的运动方程．利用（5.5—7）式，我们容易推出：

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=H_I\Phi(t) \tag{5.8}$$

这样，由于用相互作用哈密顿量H_I代替总哈密顿量，I.P.中的态矢量就具有S.P.的时间相关性。

（5.8）式可导出如下：

根据（5.5）式，我们有

$$\Phi^S(t)=e^{-iH_0^S t}\ \Phi(t) \tag{1}$$

把（1）式和（5.4）式代入（5.1）式，可得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-iH_0^S t}\Phi(t)\right]=H_I^S\Phi^S(t)+H_0^S\Phi^S(t) \tag{2}$$

由于H_0^S和$e^{-iH_0^S t}$对易，所以对（2）式右边求导后即可得

$$e^{-iH_0^S t}\cdot i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=H_I^S\ \Phi^S(t) \tag{3}$$

把（1）代入（3）式，然后在两边左乘$e^{iH_0^S t}$，即得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)=e^{iH_0^S t}\ H_I^S\ e^{-iH_0^S t}\ \Phi(t) \tag{4}$$

根据（5.6）式，我们有：

$$H_I(t)=\ e^{iH_0^S t}\ H_I^S\ e^{-iH_0^S t} \tag{5}$$

把（5）式代入（4）式，即得（5.8）式.

把（5.6）式改写为：

$$O(t)=\ e^{iH_0 t}\ O(0)\ e^{-iH_0 t} \tag{5.9}$$

这就是算符$O(t)$在I.P.中的运动方程．然而，我们也能把（5.9）式给出的算符$O(t)$解释成是用与相互作用无关的哈密顿量H_0置换总哈密顿量H后的H.P.（海森堡绘景）中的算符．这样，相互作用系统在I.P.中的算符就等价于无相互作用系统在H.P.中的算符．因此，I.P.中的运动方程和算符对易子就是无相互作用情况下的运动方程和算符对易子．这些结果的导出是很容易的．对于介子场来说，我们已在第三章中导出了这些结果.在处理相互作用系统时，我们将能立刻利用它们．另一方面，在H.P.中，运动方程和对易子都将由于相互作用的存在而需要加以修正．根据（5.9）式，我们可以得到

运动方程的微分形式为

$$i\frac{\partial O(t)}{\partial t}=\left[\, O(t),\ H_0 \,\right] \tag{5.10}$$

(5.10)式可导出如下：

将(5.9)式两边对时间求微商，即得

$$\frac{\partial O(t)}{\partial t}=iH_0 e^{iH_0 t}\,O(0)\,e^{-iH_0 t}-ie^{iH_0 t}\,O(0)\,e^{-iH_0 t}\,H_0$$

$$=i\left[H_0 O(t)-O(t)H_0\right] \tag{1}$$

由(1)式即得

$$i\frac{\partial O(t)}{\partial t}=\left[O(t)H_0-H_0O(t)\right]=[O(t),\ H_0] \tag{2}$$

现在，我们来导出在I.P.中介子场的对易关系，我们将看到这些对易关系是协变的．在I.P.中的薛定谔方程(5.8)式当然不是协变的，这是因为在我们的特殊洛仑兹框架内，时间导数仅仅挑选出了t=常数的平面．然而，我们能够用广义的类空曲面来置换这些类空平面，所导出的代替(5.8)式的态矢量随时间变化的方程是协变的*)．不过，我们将不讨论理论的这种更一般的程式．

下面，我们将把在S.P.中已得出的介子场有关结果转换到I.P.中去．把吸收算符$a(\boldsymbol{K})$写成$a_{\mathbf{K}}$，产生算符$a^{\dagger}(\boldsymbol{K})$写成$a_{\mathbf{K}}^{\dagger}$，于是可得相应的I.P.算符为：

$$a_{\mathbf{K}}(t)=e^{iH_0 t}\,a_{\mathbf{K}}\,e^{-iH_0 t} \tag{5.11a}$$

同理，可得$a_{\mathbf{K}}^{\dagger}(t)$的相应定义为

$$a_{\mathbf{K}}^{\dagger}(t)=e^{iH_0 t}\,a_{\mathbf{K}}^{\dagger}\,e^{-iH_0 t} \tag{5.11b}$$

于是，介子场的付里叶展开式(3.4a)在I.P.中变成：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}}\left\{a_{\mathbf{K}}(t)\,e^{i\mathbf{K}x}+a_{\mathbf{K}}^{\dagger}(t)\,e^{-i\mathbf{K}x}\right\} \tag{5.12}$$

(5.11a)式的求解是很容易的．首先，我们只需要考虑介子场哈密顿量H_0〔(1.17)式〕中的项$\omega_{\mathbf{K}}a_{\mathbf{K}}^{\dagger}a_{\mathbf{K}}$，因为$H_0$中的所有其他项都和$a_{\mathbf{K}}$对易，这样，它们就从(5.11a)式中消失了．根据S.S.Schweber等著的“Mesons and Fields”一书第一卷§15的结果，我们考虑

$$\frac{d}{d\lambda}a_{\mathbf{K}}(\lambda t)=\frac{d}{d\lambda}\left\{e^{iH_0\lambda t}\,a_{\mathbf{K}}(\lambda t)\,e^{-iH_0\lambda t}\right\}=$$

*) 参见 Schweber, S.S., et al. “Field”, in Mesons and Fields, Vol.I, Evanston, Ill.; Row, Peterson, 1955.

$$= \frac{d}{d\lambda}\left\{ e^{i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K}\, a_K e^{-i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K} \right\}$$

$$= i\omega_K t\, e^{i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K}\left[a_K^\dagger a_K,\ a_K \right] e^{-i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K}$$

$$= -i\omega_K t\, e^{i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K}\, a_K e^{-i\omega_K \lambda t a_K^\dagger a_K}$$

式中，我们用到了对易关系（3.5）式。由此可得

$$\frac{d}{d\lambda} a_K(\lambda t) = -i\omega_K t a_K(\lambda t)$$

对上式积分，然后令$\lambda = 1$，即得

$$a_K(t) = a_K e^{-i\omega_K t} \tag{5.13a}$$

同理，可得

$$a_K^\dagger(t) = a_K^\dagger e^{i\omega_K t} \tag{5.13b}$$

把（5.13）式代入（5.12）式，并且把指数写成四维矢量的标积 $kx = \mathbf{K}\mathbf{X} - k_0 t$，最后，我们就得到在 I.P. 中的介子场为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_0 = \omega_K} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ a(\mathbf{K}) e^{ikx} + a^\dagger(\mathbf{K}) e^{-ikx} \right\} \tag{5.14}$$

式中，求和遍及于所有可容许的动量$\mathbf{K}$，k_0则由相应的能量ω_K给出，如求和号下面所表明的那样。

（5.14）式的说明：

式中求和号下面对 k_0的限制条件

$$k_0 = \omega_K = \sqrt{m^2 + \mathbf{K}^2} \tag{1.6}$$

意味着介子的能量和动量要满足相对论粒子所应满足的质量壳层关系 $m^2 + \mathbf{K}^2 = \omega_K^2$，以后凡是求和号下面有这样的限制条件，其意义都是这样。

$\omega_K^2 = m^2 + \mathbf{K}^2$ 是四维时空中的一个曲面，凡是满足质量壳层关系的粒子称为在壳（on shell），我们把这样的粒子称为实粒子，即我们能实际观测到的粒子。凡是不满足质量壳层关系的粒子称为离壳（off shell），我们把这样的粒子称为虚粒子，即我们实际观测不到的粒子。

为方便起见，我们常把 $\phi(x)$ 分解为

$$\phi(x)=\phi^{+}(x)+\phi^{-}(x) \tag{5.15}$$

式中，$\phi^{+}(x)$和$\phi^{-}(x)$分别是仅含有吸收算符和产生算符的部分．于是，我们现在能把真空定义（1.14）式用下式代替：

$$\phi^{+}\Phi_0=0 \tag{5.16}$$

算符ϕ^{+}和ϕ^{-}分别被称为场的正频部分和负频部分．根据（5.14）和（5.15）式，我们有

$$\phi^{+}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}a(K)\,e^{ikx} \tag{5.17a}$$

$$\phi^{-}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}a^{\dagger}(K)\,e^{-ikx} \tag{5.17b}$$

$$(\phi^{+})^{\dagger}=\phi^{-} \tag{5.17c}$$

根据展开式（5.14）式和对易关系（3.5）式，我们能容易地计算出场量在两个任意的时空点x和x'的对易关系$[\phi(x),\ \phi(x')]$．由于两个产生算符相互对易，两个吸收算符也相互对易，于是只有交叉项才有贡献，这样，我们有

$$[\phi(x),\ \phi(x')]=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_K}\sum_{k_0'=\omega_K}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\{[a_K,\ a_{K'}^{\dagger}]e^{i(kx-k'x')}$$

$$+[a_K^{\dagger},\ a_{K'}]e^{-i(kx-k'x')}\}$$

$$=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K}\frac{d^3k}{k_0}\{e^{ik(x-x')}-e^{-ik(x-x')}\}$$

$$=i\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K}\frac{d^3k}{k_0}\sin k(x-x')$$

式中，考虑到要取极限$V\to\infty$，所以我们已根据（3.7）式用动量积分来代替了求和．定义函数$\Delta(x)$为

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K}\frac{d^3k}{k_0}\sin kx \tag{5.18}$$

由此，我们最后可得：

$$[\phi(x),\ \phi(x')]=i\Delta(x-x') \tag{5.19}$$

根据（5.18）式，$\Delta(x)$是x的一个实的奇函数，考虑到（5.19）式的左边是两个厄密算符的对易子，这对于使（5.19）式自洽是必要的．而且，既然场量ϕ本身是一个标量，Δ－函数也必须是不变的．我们将在下一章中直接证明这一点．这样，（5.19）式

是一个协变的对易关系式.

关于（5.19）式的说明：

由（5.19）式，我们有

$$\phi(x)\phi(x')-\phi(x')\phi(x)=i\Delta(x-x') \qquad (1)$$

（1）式的右边 $=-\phi(x')\phi(x)+\phi(x)\phi(x')$

$$=-[\phi(x')\phi(x)-\phi(x)\phi(x')] \qquad (2)$$

（1）式的右边 $=[i\Delta(x-x')]$

$$=\begin{cases}-i\Delta(x'-x), & \text{若}\Delta(x)\text{是}x\text{的奇函数} \qquad (3a)\\ i\Delta(x'-x), & \text{若}\Delta(x)\text{是}x\text{的偶函数} \qquad (3b)\end{cases}$$

当$\Delta(x)$是x的奇函数时，由（2）和（3a）式，（5.19）式保持自洽；当$\Delta(x)$是x的偶函数时，则（5.19）式不成立.

根据（5.18）式，我们可得：

$$\Delta(\mathbf{X},\ t=0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_{\mathbf{K}}}\sin\mathbf{KX}=0 \qquad (5.20)$$

上式右边等于0是因为被积函数是矢量$\mathbf{K}$的奇函数，而积分是整个空间进行. 于是，我们可得等时对易关系：

$$[\phi(\mathbf{X},\ t),\ \phi(\mathbf{X}',\ t)]=i\Delta[(\mathbf{X}-\mathbf{X}'),\ (t-t)=0]=0 \qquad (5.21)$$

和（3.2）式一致. 然而，我们能对这个结果给出一个更广泛的解释. 既然Δ-函数是一个不变量，那末就有

$$\Delta(x)=0,\ \text{如果}x^2=\mathbf{X}^2-t^2>0 \qquad (5.22)$$

上式表明，不但对特殊的类空矢量$(\mathbf{X},0)$，而且对任何类空矢量x，都有$\Delta(x)=0$. 实际上，通过一个适当的洛仑兹变换，任何类空矢量都能被转换成$(\mathbf{X},\ 0)$这种形式. 这样，不变量$\Delta(x)$函数在光锥$|\mathbf{X}|=t$外面等于0. 相应地，如图3所示，对于任何两个具有类空间隔$(x-x')^2>0$的点x和x'，对易子（5.19）式都为0. 这正好是特殊相对论和量子力学的基本假定所要求的. 两个厄密算符的对易子（5.19）不为0，意味着在时空点x和x'的相应可观察场的测量相互干涉. 但如果$x-x'$是类空的，这样的干涉就不可能发生；因为如要发生干涉，则信号必须用大于光速的速度在x和x'之间传播，这和特殊相对论正好相反. 这样，对易子（5.19）对类空的$(x-x')$而言为0，就代表了量子力学和特殊相对论的更满意的衔接.

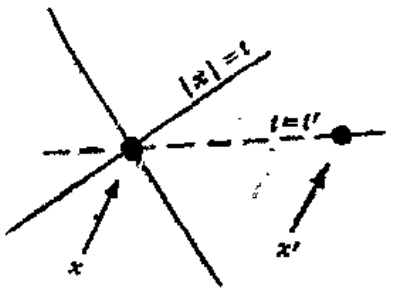


图3

第六章　不变量 Δ－函数

在这一章中，我们将对 Δ－函数以及有关函数的性质作进一步的研究*），在本章末尾，我们将把这些结果用来计算场算符的一定组合的真空平均值。这些场算符的组合是我们以后要用到的。对这些纯数学推导没有多少兴趣的读者可以略去这一章，或者是仅仅浏览一下，在需要时再来阅读有关部分。

不变量Δ－函数（5.18）式可以被写为：

$$\Delta(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.1}$$

式中，$d^4k=d^3kdk_0$，关于d^3k的积分遍及于所有动量K，k_0不再被限制到能量ω_K，而仅仅是一个积分变量。（6.1）式中被积函数的分母可改写为

$$k^2+m^2=-(k_0^2-\omega_K^2) \tag{6.2}$$

（6.2）式可推导如下：

$$\begin{aligned}k^2+m^2&=(K^2-k_0^2)+m^2\\&=(K^2+m^2)-k_0^2\\&=\omega_K^2-k_0^2\\&=-(k_0^2-\omega_K^2)\end{aligned}$$

由（6.2）式可知，在$k_0=\pm\omega_K$处，（6.1）中被积函数有两个一阶极点。因此，对k_0的积分必须被解释成是在复k_0－平面上沿特定围道C的围道积分。如图4所示，若取围道C为沿反时针方向且包围了两个极点的封闭曲线，则(6.1)式和$\Delta(x)$的定义(5.18)式是等价的。根据留数定理计算围道积分，则由（6.1）式可得：

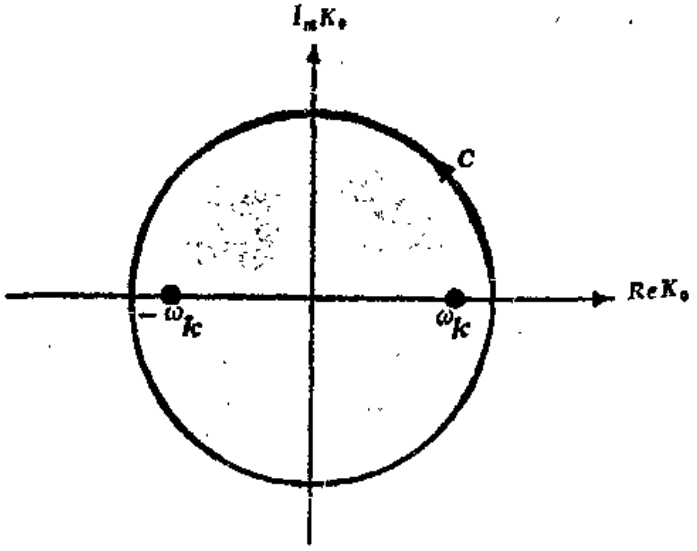


图4　$\Delta(x)$的围道C

$$\Delta(x)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k\,e^{iKx}\int_C\frac{dk_0e^{ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_K^2}$$

*）在这些Δ－函数的精确定义方面有若干任意性，如负号等等，所以，在使用文献所刊出的结果时要特别小心，

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{iKx} 2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega_K x_0}}{2\omega_K} + \frac{e^{i\omega_K x_0}}{-2\omega_K}\right\} \qquad (6.1^*)$$

如果我们在上式的第二项中把积分变量从K改为－K，则可以得到和（5.18）式一致的结果。

下面给出从上式得出（5.18）式的推导：

$$\Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{iKx} 2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega_K x_0}}{2\omega_K} + \frac{e^{i\omega_K x_0}}{-2\omega_K}\right\}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{ikx}}{2\omega_K} + \int_{\infty}^{-\infty} d^3(-k) e^{-iKx} \frac{e^{i\omega_K x_0}}{-2\omega_K}\right)$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{ikx}}{2\omega_K} + \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{-iKx} \frac{e^{i\omega_K x_0}}{-2\omega_K}\right)$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2\omega_K}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{\sin kx}{\omega_K}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K} d^3k \frac{\sin kx}{k_0}$$

此即（5.18）式。

使用狄拉克δ－函数，我们也能用四重完全实积分来表示$\Delta(x)$（即k_0积分也是沿实轴遍及于$-\infty<k_0<\infty$的实积分）：

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{ikx}\varepsilon(k)\delta(k^2+m^2) \qquad (6.3)$$

式中，

$$\varepsilon(k) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1, & 若k_0>0 \\ -1, & 若k_0<0 \end{cases} \qquad (6.4)$$

容易看出，（6.3）式是正确的；例如，把（6.3）式中的δ－函数写为：

$$\delta(k^2+m^2) = \delta(k_0^2 - \omega_K^2) = \frac{1}{2\omega_K}[\delta(k_0+\omega_K) + \delta(k_0-\omega_K)]$$

然后对k_0积分，于是可得出$\Delta(x)$的原始定义（5.18）式。

下面给出从（6.3）式得出（5.18）式的推导：

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, e^{i(Kx-k_0x_0)}\varepsilon(k)\frac{1}{2\omega_K}[\delta(k_0+\omega_K)+\delta(k_0-\omega_K)]$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKx}\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\, e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\frac{\delta(k_0+\omega_K)}{2\omega_K}$$

$$+\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKx}\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\, e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\frac{\delta(k_0-\omega_K)}{2\omega_K}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKx}\frac{e^{-i(-\omega_K)x_0}}{2\omega_K}\cdot(-1)$$

$$+\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKx}\frac{e^{-i\omega_Kx_0}}{2\omega_K}\cdot(+1)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{\infty}^{-\infty} d^3(-k)\, e^{-iKx}e^{i\omega_Kx_0}\frac{1}{2\omega_K} - \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{ikx}\frac{1}{2\omega_K}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\,(e^{-ikx}-e^{ikx})\frac{1}{2\omega_K}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K} d^3k\,\frac{\sin kx}{k_0}$$

此即（5.18）式。

因为 k_0 在正洛仑兹变换下不变号，所有 $\varepsilon(k)$ 在正洛仑兹变换下是不变的。这样，我们可以看到，在正洛仑兹变换下，（6.3）式中的每个因子都是不变的。因此，根据（6.3）式，我们可以推出$\Delta(x)$在正洛仑兹变换下的不变性。

很清楚，通过修改围道C，我们能够从（6.1）式进一步得到有关的Δ－函数。这些Δ－函数都可以从下面两个特殊情况导出：

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{\pm}} d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \qquad (6.5)$$

式中，围道$C^{\pm}$如图5所示，它们在$k_0=\pm\omega_K$处分别包围了一个极点，并且都是沿反

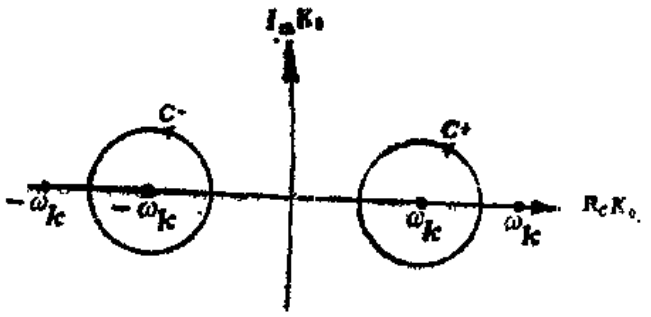


图5　$\Delta^{\pm}(x)$的围道$C^{\pm}$

时针方向.

由此，我们可得

$$\Delta(x)=\Delta^{+}(x)+\Delta^{-}(x) \tag{6.6}$$

上式的导出是十分简单的，只须将（6.1*）式的围道的形状加以适当改变，就立刻可以得到.Δ-函数$\{-i\Delta^{(1)}(x)\}$则可以由下式定义：

$$\left\{-i\Delta^{(1)}(x)\right\}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{(1)}}d^4k\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.7}$$

式中，围道$C^{(1)}$如图6所示.类似于（6.6）式，我们同样可得

$$-i\Delta^{(1)}(x)=\Delta^{+}(x)-\Delta^{-}(x) \tag{6.8}$$

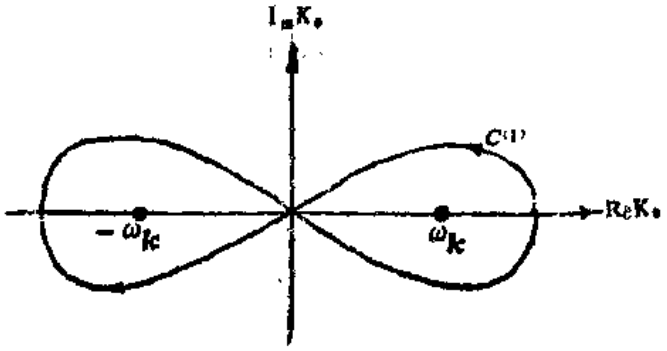


图6　$\Delta^{(1)}(x)$的围道$C^{(1)}$

根据上面给出的$\Delta(x)$的这些定义，我们容易得出Δ-函数的其他表示式以及这些Δ-函数的性质，例如：

$$\Delta^{\pm}(x)=\mp\frac{i}{(2\pi)^3 2}\int_{k_0=\omega_K}\frac{d^3k}{k_0}e^{\pm ikx} \tag{6.9}$$

根据（6.9）式，我们容易得出

$$\Delta^{+}(x)=-\Delta^{-}(-x) \tag{6.10}$$

（6.9）式的推导如下：

根据（6.5）式，我们有

$$\Delta^{+}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_+}\frac{d^4k\ e^{ikx}}{m^2+k^2}$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k\,e^{iKX}\int_{C_+}\frac{dk_0e^{-ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_K^2},\ \text{（代入（6.2）式）}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k\, e^{ikx} \left\{ 2\pi i \cdot \frac{e^{-i\omega_K x_0}}{2\omega_K} \right\}, \quad \text{(应用留数定理)}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3 2} \int d^3k\, e^{ikx} \cdot \frac{1}{\omega_K}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3 2} \int_{k_0=\omega_K} \frac{d^3k}{k_0} e^{ikx}$$

同理，可求$\Delta^-(x)$.

实际上，在（5.19）式的推导中已出现了Δ－函数，在那里，我们事实上已证明了

$$\left.\begin{aligned} &[\phi^+(x),\ \phi^+(x')] = [\phi^-(x),\ \phi^-(x')] = 0 \\ &[\phi^\pm(x),\ \phi^\mp(x')] = i\Delta^\pm(x-x') \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

在上式的证明中，我们使用了对易关系（3.5）式．由此，我们导出了（5.18—19）式．

下面，我们来考虑场算符乘积的真空态期待值．具有代表性的项是（Φ_0，$\phi(x)\phi(x')\Phi_0$），它的值容易根据（5.14）式和（5.15）式计算出来．因为这是一个从真空态到真空态的跃迁，只有项（Φ_0，$\phi^+(x)\phi^-(x')\Phi_0$）对跃迁矩阵元的贡献不为零（$\phi^-$能产生一个粒子而$\phi^+$能重新吸收这个粒子）．因此

$$(\Phi_0,\ \phi(x)\phi(x')\Phi_0) = \frac{1}{V} \sum_{\substack{k_0=\omega_K \\ k_0'=\omega_K}} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}} e^{i(kx-k'x')} (\Phi_0,\ a_K a_{K'}^\dagger,\ \Phi_0)$$

由于$a_K\Phi_0 = 0$，所以，根据对易关系（3.5）式，考虑到（3.7）式，即可得出：

$$(\Phi_0,\ \phi(x)\phi(x')\Phi_0) = \frac{1}{(2\pi)^3 2} \int_{k_0=\omega_K} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik(x-x')}$$

$$= i\Delta^+(x-x') \qquad (6.12)$$

（6.12）式的推导如下：

首先，由（5.14）和（5.15）式，我们可得出场算符的乘积为：

$$\phi(x)\phi(x') = \frac{1}{V} \sum_{\substack{k_0'=\omega_{K'} \\ k_0=\omega_K}} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}} [a(K)e^{ikx} + a^\dagger(K)e^{-ikx}]$$

$$\times [a(K')e^{ik'x'} + a^\dagger(K')e^{-ik'x'}]$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\substack{k_0=\omega_K \\ k_0'=\omega_{K'}}} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}} [a(K)a(K')e^{i(kx+k'x')}$$

$$+a^{\dagger}(K)\,a(K')\,e^{-i(kx-k'x')}+a(K)\,a^{\dagger}(K')\,e^{i(kx-k'x')}$$

$$+a^{\dagger}(K)\,a^{\dagger}(K')\,e^{-i(kx+k'x')}] \qquad (1)$$

由于矩阵元（Φ_0，$\phi(x)\phi(x')\Phi_0$）是一个从真空态到真空态的跃迁，故（1）式中只有第三项对矩阵元的贡献不为0，于是我们有：

$$(\Phi_0,\ \phi(x)\phi(x')\Phi_0)=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}(\Phi_0,a(K)a^{\dagger}(K')\Phi_0)$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}(\Phi_0,\ [a^{\dagger}(K')a(K)$$

$$+\delta(K,\ K')]\Phi_0)$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0\,k_0'}}\,e^{i(kx-k'x')}(\Phi_0,\ \delta(K,\ K')\Phi_0)$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{2\,k_0}\,e^{ik(x-x')}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_K}d^3k\,\frac{e^{ik(x-x')}}{2\,k_0}$$

$$=i\Delta^{+}(x-x')$$

这就是（6.12）式。

算符$\phi(x)$和$\phi(x')$的戴逊（Dyson）编时乘积定义为：

$$P\{\phi(x)\phi(x')\}=\begin{cases}\phi(x)\phi(x'), & 若\ x_0>x_0'\\ \phi(x')\phi(x), & 若\ x_0'>x_0\end{cases} \qquad (6.13)$$

也就是依照时间流驶的年代次序从右到左写下算符，使得“较早”的算符“较早”作用．使用（6.4）式定义的ε-符号，我们可以把（6.13）式写成：

$$P\{\phi(x)\phi(x')\}=\frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\phi(x)\phi(x')+\frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\phi(x')\phi(x) \qquad (6.14)$$

于是，根据（6.12）和（6.10）式，我们可得

$$(\Phi_0,P\{\phi(x)\phi(x')\}\Phi_0)=\frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\,i\Delta^{+}(x-x')-\frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\,i\Delta^{-}(x-x')$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_F(x-x') \tag{6.15}$$

上式给出了Δ_F-函数的定义：

$$\Delta_F(x) = [1+\varepsilon(x)]i\Delta^+(x) - [1-\varepsilon(x)]i\Delta^-(x) \tag{6.16}$$

于是，我们可得：

$$\frac{1}{2i}\Delta_F(x) = \begin{cases} \Delta^+(x), & 若\ x_0>0 \\ -\Delta^-(x), & 若\ x_0<0 \end{cases} \tag{6.17}$$

根据$\Delta^{\pm}(x)$的积分表示式（6.5）式，我们可以立刻推出：

$$\Delta_F(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4}\int_{C_F} d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \tag{6.18}$$

式中，围道C_F在极点 $k_0 = -\omega_k$处从下面绕过，而在极点 $k_0 = \omega_k$处则从上面绕过，如图7所示。

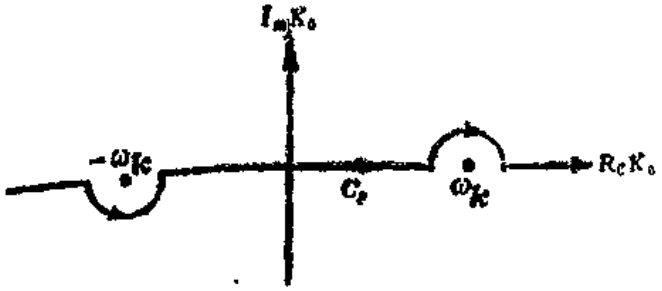


图7　$\Delta_F(x)$的围道C_F

容易看出，(6.18)式和（6.17）式是等价的。当$x_0>0$时，我们可以借助于在$I_m k_0<0$的下半平面上的一个半径为∞的半圆，使围道C_F闭合；这样，当$|k_0|\to\infty$时，由于$e^{-ik_0x_0}\to 0$，所以沿这个半圆的积分对$\Delta_F(x)$没有贡献。所得到的沿顺时针方向的闭合围道仅仅包围了位于 $k_0=\omega_k$处的一个极点。这样，根据（6.5）式和(6.18)式，当$x_0>0$时，我们有

$$\Delta_F(x) = (-2i)[-\Delta^+(x)]$$

这和（6.17）式一致。类似地，借助于在上半平面 $I_m k_0>0$内的一个半径为∞的半圆，使围道C_F闭合，就可以得到$x_0<0$时的结果。

代替图7中使围道变形的方法，我们可以把极点移离开实轴一无穷小距离η（参看图8），然后沿实轴积分，于是（6.18）式就变成：

$$\Delta_F(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ikx}}{-\{k_0^2-(\omega_k-i\eta)^2\}}$$

$$= \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \qquad (6.19)$$

式中，$\varepsilon = 2\eta\omega_K$是一个很小的正数，在积分后我们将让它趋于零（这也是为什么η^2项可以被忽略的理由）．在（6.19）式中，对四个变量k_0，k_1，k_2，k_3中每个变量的积分现在都是沿整个实轴（$-\infty$，∞）进行．

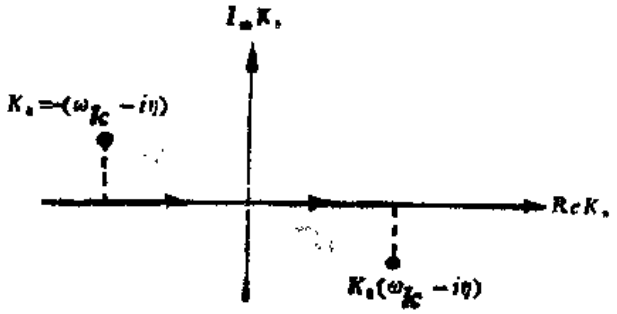


图 8

第七章　荷电介子

迄今为止，我们所研究的场都是实场，现在，我们来考虑复场$\phi(x)$。我们将看到，和这样一个场相联系的粒子能够被解释成是荷电粒子。

首先，我们的讨论将是经典的。因为一个复场$\phi(x)$可以被分解成两个实场$\phi_1(x)$和$\phi_2(x)$：

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x)-i\phi_2(x)] \tag{7.1}$$

第二章的方法可以立刻运用到上述情况。然而，代替把拉格朗日量密度$\mathscr{L}$考虑为ϕ_r和$\partial\phi_r/\partial x_\nu$（$r=1,2$）的函数，我们把拉格朗日量密度$\mathscr{L}$写为下式，则可以更清楚地显示出复场的物理意义：

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\ \phi^*,\ \phi_{,\nu},\ ,\ \phi^*_{,\nu}) \tag{7.2}$$

式中，$\phi_{,\nu}\equiv\partial\phi/\partial x_\nu$等。把$\delta\phi$和$\delta\phi^*$而不是把$\delta\phi_1$和$\delta\phi_2$作为独立变分，于是可得到代替（2.8）式的场方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\right)=0\\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*_{,\nu}}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

为了使场量ϕ_1和ϕ_2始终保持为实数，拉格朗日量密度$\mathscr{L}$必须是实函数，因此，（7.3）式的两个场方程是相互复共轭的。现在，我们将对拉格朗日量密度施加进一步的限制，即它在场的下列变换中必须保持不变：

$$\phi\to\phi e^{i\alpha},\qquad \phi^*\to\phi^* e^{-i\alpha} \tag{7.4}$$

式中，α是一个任意实常数。这个变换被称为第一种规范变换。$\mathscr{L}$在这些规范变换下的不变性使我们能够把ϕ和ϕ^*解释为能产生满足连续性方程的电荷和电流密度，在量子化理论中，ϕ和ϕ^*就代表荷电粒子。

作为一个特殊例子，考虑拉格朗日量密度

$$\mathscr{L}=-(\phi_{,\nu}\phi^*_{,\nu}+m^2\phi\phi^*) \tag{7.5}$$

这是实场的拉格朗日量密度的自然推广。场方程（7.3）式现在变成：

$$(\Box^2-m^2)\phi=0,\qquad (\Box^2-m^2)\phi^*=0 \tag{7.6}$$

既然ϕ_1和ϕ_2分别满足克莱因-戈登方程，所以（7.6）式的导出是必然的。同时，我们

还能把拉格朗日量密度（7.5）式写成为：

$$\mathscr{L}=\sum_{r=1}^{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu}+m^2\phi_r^2\right)\right) \tag{7.7}$$

（7.5）式所给出的拉格朗日量密度，仅含有ϕ和ϕ^*的乘积以及它们的导数的乘积，所以在（7.4）式所给出的变换下，显然保持不变。

（7.7）式的导出如下：

由（7.5）式可得

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}-i\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right)-\frac{m^2}{2}(\phi_1-i\phi_2)(\phi_1+i\phi_2)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\right)-\frac{m^2}{2}(\phi_1\phi_1+\phi_2\phi_2)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial x_\nu}+m^2\phi_1\phi_1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_2}{\partial x_\nu}+m^2\phi_2\phi_2\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{2}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu}+m^2\phi_r^2\right)\right\}$$

这就是（7.7）式。

定义四维矢量$s_\nu(x)$为

$$es_\nu(x)=-ie\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\phi-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*_{,\nu}}\phi^*\right\} \tag{7.8}$$

式中，e是一个未定常数。根据运动方程（7.3）和哈密顿量密度$\mathscr{L}$的规范不变性，我们可以推出：

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu}=0 \tag{7.9}$$

这就是通常的连续性方程，由此我们可以把$es(x)$解释为电流密度矢量，把第4个分量$e\rho(x)=es_4(x)/i$解释为电荷密度。在习题2.5中，我们证明了象（7.9）式那样的连续性方程就对应着一个守恒定律。对于实场ϕ而言，电流也同样为零。因为根据（7.8）式，这时$s_\nu(x)=0$。

对于拉格朗日量密度（7.3），我们有

$$es_\nu(x)=ie\left\{\phi_{,\nu}\phi-\phi_{,\nu}\phi^*\right\} \tag{7.10}$$

由场方程（7.6）式，我们可直接证实连续性方程（7.9）式。

注意 $\phi_{,\nu}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}$，于是由（7.10）式，我们有

$$\frac{\partial s_\nu(x)}{\partial x_\nu} = i\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\phi,^\nu + \phi\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi,^\nu) - \phi^*\frac{\partial\phi,_\nu}{\partial x_\nu} - \phi,_\nu\frac{\partial\phi^*}{\partial x_\nu}\right\}$$

$$= i\left\{\phi,_\nu\phi,^\nu + m^2\phi\phi^* - m^2\phi^*\phi - \phi,_\nu\phi,^\nu\right\}$$

$$= 0$$

这就证明了（7.10）式的四维矢量$s_\nu(x)$满足连续性方程（7.9）式.在推导中用到了（7.6）式.

为了更一般地证明（7.9）式，考虑一个无穷小规范变换（即α很小,所以$e^{i\alpha}\approx 1+i\alpha$等）：

$$\phi\longrightarrow\phi(1+i\alpha),\quad \phi^*\longrightarrow\phi^*(1-i\alpha) \qquad (7.11)$$

一个简单的计算表明，（7.11）式的变换将导致拉格朗日量密度（7.2）的变化$\delta\mathscr{L}$：

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu}\delta\phi,_\nu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu}\delta\phi,^\nu$$

$$= i\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu}\phi,_\nu\right] - i\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\phi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu}\phi,^\nu\right] \qquad (7.12)$$

根据（7.8）式计算散度（7.9）式，利用场方程（7.3）式和（7.12）式，我们可得

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{\alpha}\delta\mathscr{L} = 0 \qquad (7.13)$$

式中，最后一步的导出是根据拉格朗日量密度$\mathscr{L}$在第一型规范变换下的不变性得出的.这样，我们就证明了连续性方程（7.9）式.〔另一种推导参见习题（7.1）〕.

（7.13）式的推导如下：

根据（7.8）式，我们有：

$$\frac{\partial s_\nu(x)}{\partial x_\nu} = -i\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu} + \phi\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu}\right) - \frac{\partial\phi^*}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu} - \phi^*\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu}\right)\right\}$$

$$= -i\left\{\left(\phi,_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu} + \phi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\right) - \left(\phi^*,_\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu} + \phi^*\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\right)\right\}$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,_\nu}\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi,^\nu}\phi^*\right\}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\delta\mathscr{L} = 0$$

这就是（7.13）式.证明中用到了（7.3）式和（7.12）式.

对复场ϕ和ϕ^*（它们现在是非厄密算符）来说，到量子化理论的过渡或者通过第三章的方法直接实现，或者通过使用（7.1）式和量子化场ϕ_1和ϕ_2的性质来实现.我们将采用后一种方法.由于所有这些考虑都是实场ϕ相应结果的推广，我们将简略地列举对我们有特别意义的若干要点，并且将立刻使用相互作用绘景I.P.（因为考虑的是自由场，所以也就是海森堡绘景H.P.）.

现在，我们再次仅限于考虑满足克莱茵-戈登方程的场，也就是从拉格朗日量密度（7.5）式导出的场.类似于（5.14）式，我们把每种场$\phi_r(x)$展开为：

$$\phi_r(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_r(\mathbf{K})\,e^{ikx}+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,e^{-ikx}\right\} \tag{7.14}$$

每种场$\phi_r(\mathbf{K})$（$r=1,\ 2,\ $）的产生和吸收算符$a_r^{\dagger}(\mathbf{K})$和$a_r(\mathbf{K})$满足和（3.5）式类似的对易关系：

$$\left[a_r(\mathbf{K}),\ a_s^{\dagger}(\mathbf{K}')\right]=\delta_{rs}\delta(\mathbf{K},\mathbf{K}') \tag{7.15}$$

所有其他对易子通通为0。

定义算符

$$\left.\begin{aligned}a(\mathbf{K})&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1(\mathbf{K})-i\,a_2(\mathbf{K})\right]\\ b^{\dagger}(\mathbf{K})&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_1^{\dagger}(\mathbf{K})-i\,a_2^{\dagger}(\mathbf{K})\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

根据（7.14）和

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2),\qquad \phi^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2) \tag{7.17}$$

我们可以推出

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a(\mathbf{K})\,e^{ikx}+b^{\dagger}(\mathbf{K})\,e^{-ikx}\right\} \tag{7.18a}$$

$$\phi^{\dagger}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a^{\dagger}(\mathbf{K})\,e^{-ikx}+b(\mathbf{K})\,e^{ikx}\right\} \tag{7.18b}$$

（7.18）式的推导如下：

由（7.17）和（7.14）式，我们有

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_1(\mathbf{K})\,e^{ikx}+a_1^{\dagger}(\mathbf{K})\,e^{-ikx}\right\}-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a_2(K)\,e^{ikx}+a_2^{\dagger}(K)\,e^{-ikx}\right.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(K)-ia_2(K)\right)e^{ikx}\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^{\dagger}(K)-ia_2^{\dagger}(K)\right)e^{-ikx}\left.\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{a(K)\,e^{ikx}+b^{\dagger}(K)\,e^{-ikx}\right.$$

这就是（7.18a）式，同理可得（7.18b）式。

根据（7.14—18）式，容易导出ϕ_1和ϕ_2；ϕ和$\phi^{\dagger}$；$a(K)$，$b(K)$和$a^{\dagger}(K)$，$b^{\dagger}(K)$的对易关系。例如，根据（7.15—16）式，我们有

$$\left[a(K),\ a^{\dagger}(K')\right]=\left[b(K),\ b^{\dagger}(K')\right]=\delta(K,\ K') \tag{7.19}$$

$a(K)$，$b(K)$和$a^{\dagger}(K)$，$b^{\dagger}(K)$的所有其他对易关系都为零.

（7.19）式的推导如下：

$$\left[a(K),\ a^{\dagger}(K')\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(K)-ia_2(K)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^{\dagger}(K')+ia_2^{\dagger}(K')\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^{\dagger}(K')+ia_2^{\dagger}(K')\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1(K)-ia_2(K)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\delta(K,K')-i\left(a_2(K)a_1^{\dagger}(K')-a_1^{\dagger}(K')a_2(K)\right)\right.$$

$$\left.+i\left(a_1(K)a_2^{\dagger}(K')-a_2^{\dagger}(K')a_1(K)\right)+\delta(K,\ K')\right\}$$

$$=\delta(K,\ K')$$

式中，我们用到了（7.15）式.同理可得$[b(K),\ b^{\dagger}(K')]=\delta(K,\ K')$.

下面，我们来考虑（7.16）式定义的算符$a(K)$，$b^{\dagger}(K)$和它们的厄密共轭算符$a^{\dagger}(K)$，$b(K)$的解释. 算符a_r和$a_r^{\dagger}$是和实场ϕ_r有关的介子吸收算符和介子产生算符.但是我们将看到，ϕ_r以及a_r和$a_r^{\dagger}$的特定线性组合（7.16—17）式包含着一个简单的物理解释.

$a(K)$和$a^{\dagger}(K)$，$b(K)$和$b^{\dagger}(K)$满足同样的对易关系（7.19）式，就象实场的吸收

算符和产生算符那样(7.19)式)；并且，这四个算符之间的对易子，除(7.19)式外，通通为零。由此，我们可以把$a(\mathbf{K})$和$a^\dagger(\mathbf{K})$，$b(\mathbf{K})$和$b^\dagger(\mathbf{K})$解释成动量为$\mathbf{K}$的两种不同类型的介子的吸收算符和产生算符。我们马上就会看到，这两种介子仅仅在电荷上不同。特别是根据(7.19)式，我们可以得出

$$\left.\begin{aligned} N^+(\mathbf{K}) &= a^\dagger(\mathbf{K})a(\mathbf{K}) \\ N^-(\mathbf{K}) &= b^\dagger(\mathbf{K})b(\mathbf{K}) \end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

$N^+(\mathbf{K})$和$N^-(\mathbf{K})$就是这两种介子的占有数算符，其本征值为0，1，2，……。

如果我们计算系统的总能量，就能证实上面的解释是正确的。根据拉格朗日量密度(7.7)，可以导出类似于(3.6)式的哈密顿量。略掉零点能，我们得到

$$H = \sum_{\mathbf{K}} \omega_{\mathbf{K}} \sum_{r=1}^{2} a_r^\dagger(\mathbf{K})\, a_r(\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{K}} \omega_{\mathbf{K}} \left[N^+(\mathbf{K}) + N^-(\mathbf{K}) \right] \tag{7.21}$$

式中，我们用到了(7.16)和(7.20)式。

(7.21)式的推导如下：

根据(2.16)式，我们有

$$H = \int \mathscr{H}(\mathbf{X})\, d^3\mathbf{X} \tag{1}$$

根据(7.7)式，(7.14)式和(2.17)式，可得哈密顿量密度$\mathscr{H}(\mathbf{X})$为：

$$\mathscr{H}(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} \left\{ \pi_r^2(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial x_i} \right)^2 + m^2 \phi_r^2 \right\} \tag{2}$$

由(7.14)式，可得$\phi_r(\mathbf{X})$为

$$\phi_r(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{K}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{K}}}} \left\{ a_r(\mathbf{K})\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a_r^\dagger(\mathbf{K})\, e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}} \right\} \tag{3}$$

由(2.13)式，可得$\pi_r(\mathbf{X})$为

$$\pi_r(\mathbf{X}) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{K}}}{2}} \left\{ -a_r(\mathbf{K})\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}} + a_r^\dagger(\mathbf{K})\, e^{-i\mathbf{K}\mathbf{X}} \right\} \tag{4}$$

把(3)和(4)代入(2)式，即得

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{K},\mathbf{K}'} \left(-\sqrt{\omega_{\mathbf{K}}\omega_{\mathbf{K}'}} - \frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}'}{\sqrt{\omega_{\mathbf{K}}\omega_{\mathbf{K}'}}} \right) \Big\{ & a_r(\mathbf{K})\, a_r(\mathbf{K}')\, e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{K}')\mathbf{X}} \\ & + a_r^\dagger(\mathbf{K})\, a_r^\dagger(\mathbf{K}')\, e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{K}')\mathbf{X}} - a_r^\dagger(\mathbf{K})\, a_r(\mathbf{K}')\, e^{-i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\mathbf{X}} \\ & - a_r(\mathbf{K})\, a_r^\dagger(\mathbf{K}')\, e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\mathbf{X}} \Big\} + \sum_{r=1}^{2} \frac{m^2}{4V} \sum_{\mathbf{K},\mathbf{K}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{K}}}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{K}'}} \end{aligned}$$

$$\times\Big\{a_r(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')\,e^{i(K+K')x}+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\,e^{-i(K+K')x}$$

$$+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')\,e^{-i(K-K')x}+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\,e^{i(K-K')x}\Big\}\qquad(5)$$

把（5）式代入（1）式，即得

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}(X)d^3X$$

$$=\sum_{r=1}^{2}\frac{1}{4V}\sum_{K,K'}\frac{-\omega_K\omega_{K'}-K\cdot K'}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\Big\{\big[a_r(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big](2\pi)^3$$

$$\times\delta(\mathbf{K}+\mathbf{K}')-\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big](2\pi)^3\delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\Big\}$$

$$+\sum_{r=1}^{2}\frac{m^2}{4V}\sum_{K,K'}\frac{1}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\Big\{\big[a_r(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big](2\pi)^3\delta(\mathbf{K}+\mathbf{K}')$$

$$+\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big](2\pi)^3\delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\Big\}$$

$$=\sum_{r=1}^{2}\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{K}}\int d^3\mathbf{K}'\,\frac{-\omega_K\omega_{K'}-K\cdot K'}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\Big\{\big[a_r(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big]$$

$$\times\delta(\mathbf{K}+\mathbf{K}')-\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big]\delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\Big\}$$

$$+\sum_{r=1}^{2}\frac{m^2}{4}\sum_{\mathbf{K}}\int d^3\mathbf{K}'\,\frac{1}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\Big\{\big[a_r(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big]$$

$$\times\delta(\mathbf{K}+\mathbf{K}')+\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K}')+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K}')\big]\delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}')\Big\}$$

$$=\sum_{r=1}^{2}\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{K}}\Big\{\frac{-\omega_K^2+K^2}{\omega_K}\big[a_r(\mathbf{K})\,a_r(-\mathbf{K})+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(-\mathbf{K})\big]-\frac{-\omega_K^2-K^2}{\omega_K}$$

$$\times\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K})+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\big]\Big\}+\sum_{r=1}^{2}\frac{m^2}{4}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{\omega_K}\Big\{\big[a_r(\mathbf{K})a_r(-\mathbf{K})$$

$$+a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(-\mathbf{K})\big]+\big[a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\,a_r(\mathbf{K})+a_r(\mathbf{K})\,a_r^{\dagger}(\mathbf{K})\big]\Big\}$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{4} \sum_{K} \left\{ \frac{-\omega_K^2 + K^2 + m^2}{\omega_K} \cdots \cdots \left[a_r(K) a_r(-K) + a_r^{\dagger}(K) a_r^{\dagger}(-K) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_K^2 + K^2 + m^2}{\omega_K} \cdots \left[a_r^{\dagger}(K) a_r(K) + a_r(K) a_r^{\dagger}(K) \right] \right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{4} \sum_{K} 2\omega_K \left[a_r^{\dagger}(K) a_r(K) + a_r^{\dagger}(K) a_r(K) + 1 \right] \qquad \text{（略掉零点能）}$$

$$= \sum_{K} \omega_K \sum_{r=1}^{2} a_r^{\dagger}(K) a_r(K) = \sum_{K} \omega_K \left[N^{+}(K) + N^{-}(K) \right]$$

这就是（7.21）式。

下面考虑算符

$$Q = \int d^3x e\rho(x) = \int d^3x \left[e s_4(x)/i \right] \qquad (7.22)$$

Q给出系统在时刻$x_0 = t$时的总电荷，三维积分遍及全部X空间。由(7.10)式和(7.18—19）式，经过简短的计算后即可得出

$$Q = e \sum_{K} \left[N^{+}(K) - N^{-}(K) \right] \qquad (7.23)$$

这样，如我们所预期的，总电荷是一个运动常数。根根（7.23）式，可知算符$a(K)$，$a^{\dagger}(K)$和$N^{+}(K)$是动量为K，电荷为$+e$的介子的吸收，产生和占有数算符；而算符$b(K)$，$b^{\dagger}(K)$和$N^{-}(K)$则是动量为K，电荷为$-e$的介子的吸收，产生和占有数算符。取$e > 0$，则$a(K)$等算符和正介子相关，而$b(K)$等算符和负介子相关。从（7.23）式，我们可以看到，量子场论自然地导致电荷的量子化，系统的电荷仅仅是基本单位电荷e的倍数。根据（7.18）式，算符ϕ吸收一个正介子或产生一个负介子，从而使系统的电荷减少e，而算符$\phi^{\dagger}$则吸收一个负介子或产生一个正介子，从而使系统的电荷增加e。

这里所阐述的理论对正介子和负介子来说是完全对称的。变换$e \to -e$的唯一效果就是使正负介子相互交换。这个算符被称为电荷共轭算符。由此可知上面的理论相对于电荷共轭而言是完全对称的，我们可以用不同的方式来说明这一点。假设我们称正介子为粒子，称负介子为反粒子(同样，我们可以称负介子为粒子，而称正介子为反粒子)，则电荷共轭就是交换粒子和反粒子的运算。根据场量（7.18）式，电荷共轭使场ϕ和它的厄密共轭$\phi^{\dagger}$相互交换。对于在前面几章中所讨论过的厄密场ϕ而言，$\phi = \phi^{\dagger}$，我们现在可以看到，ϕ和电中性介子相对应；因此我们可以认为，中性介子的反粒子就是它自身。粒子成对出现（如粒子和反粒子）似乎是相对论性量子场论的基本结果。所有实验证据似乎都证实了这个结论。

最后，我们来更一般地证明场的正频部分和负频部分是分别和吸收算符及产生算符相关的。这也是我们在（5.14—15）式和（7.18）式中已得到过的结果。这个关系可以仅仅根据海森堡绘景中算符的运动方程（5.10）式得出。设Φ_1和Φ_2是系统哈密顿量H具有本征值E_1和E_2的本征态，如果我们把(5.10)式运用到出现在(7.18a)式所给出的

场量ϕ中的算符$a(\mathbf{K})e^{ikx}$上，并取（5.10）式在态Φ_1和Φ_2间的距阵元，则有

$$(\omega_{\mathbf{K}}+E_2-E_1)(\Phi_2,\ a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1)=0 \qquad (7.24)$$

（7.24）式的推导如下：

由（5.10）式可得

$$i\frac{\partial}{\partial t}[a(\mathbf{K})e^{ikx}]=[a(\mathbf{K})e^{ikx},\ H_0] \qquad (1)$$

由（1）式可得

$$\omega_{\mathbf{K}}a(\mathbf{K})e^{ikx}=a(\mathbf{K})e^{ikx}H_0-H_0a(\mathbf{K})e^{ikx} \qquad (2)$$

在（2）式两边右乘Φ_1，左乘Φ_2^*，然后对整个空间积分，即得

$$\int\Phi_2^*\omega_{\mathbf{K}}a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1d\tau=\int\Phi_2^*a(\mathbf{K})e^{ikx}H_0\Phi_1d\tau-\int\Phi_2^*H_0a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1d\tau \qquad (3)$$

由（3）式得

$$\omega_{\mathbf{K}}(\Phi_2,\ a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1)=E_1(\Phi_2,\ a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1)-E_2(\Phi_2,\ a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1) \qquad (4)$$

由（4）式得

$$(\omega_{\mathbf{K}}+E_2-E_1)(\Phi_2,\ a(\mathbf{K})e^{ikx}\Phi_1)=0$$

这就是（7.24）式。

从（7.24）式可知，只有当

$$\omega_{\mathbf{K}}+E_2-E_1=0 \qquad (7.25)$$

时，（7.24）式中的矩阵元才不等于0，这就是说算符$a(\mathbf{K})e^{ikx}$这时才影响从Φ_1态到Φ_2态的跃迁。由于$\omega_{\mathbf{K}}>0$，这就意味着$E_1>E_2$：在Φ_1到Φ_2的跃迁中，系统的能量减少了$\omega_{\mathbf{K}}$，这就是说，$a(\mathbf{K})e^{ikx}$是吸收算符。相应地，具有负频部分的算符是产生算符，这就是说，它们使系统的能量增加，这在机制的明显解释中必定相当于发射粒子。

第八章　费米子

迄今为止，我们所考虑的粒子都是满足克莱因-戈登方程的无自旋粒子，它们的量子化导致玻色-爱因斯坦统计．现在，我们来研究电子．电子的自旋为$\frac{1}{2}$，并且由狄拉克方程来很好地加以描述．对一个电子体系而言，泡利不相容原理成立，这就是说，电子服从费米-狄拉克统计．

这些差别表明，如果要把对玻色子所发展的机制应用来描述费米子的情况，就必须对机制加以修正．不过，由于两种情况非常相似，所以我们将在海森堡绘景中展开论述，这样就可以借重玻色子的相应结果．因为厄密费米子场在自然界中似乎不起任何作用，所以我们将直截了当地考虑非厄密算符．因此，我们的论述将和上一章中阐述荷电介子的机制非常类似．在量子电动力学中，这里所阐述的理论在描述电子和正电子时是极其成功的．对于核子，我们的理论也可以提供一个相当好的描述*)．

根据狄拉克理论，电子由下列方程描述：

$$\left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + M\right)\psi(x) = 0 \tag{8.1}$$

式中，M是电子的质量，$\Psi(x)$是4分量旋量波函数，γ_λ（$\lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4$）是4×4矩阵，它们满足下列反对易关系：

$$\gamma_\lambda\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu} \quad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{8.2}$$

当然，满足（8.2）式的四个反对易矩阵可以有很多种选择方式．对大多数用途来说，由于有关性质可以直接根据反对易法则（8.2）式获得，所以我们并不要求这些γ矩阵有一个明显的表示式．不过，在实际中，有时在一个特定表象内工作是特别有益的．文献中最常用的表象具有一个特点，这就是非相对论极限能够以一种特别简单的方式获得**)．此外，似乎并不具有任何其他优点．然而，为了更好地理解一般原理和研究理论的对称性质，我们将通过使用一个不同的表象来获得γ矩阵的一个更为清楚的图象***)．

这个表象的一个特点就是矩阵γ_1，γ_2，γ_3是纯实数的，而矩阵γ_4则是纯虚数的．我们把具有这些性质的表象称为马约喇纳（Majorana）表象．一个特定的马约喇纳表象为

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

*）我们将看到，自旋为1/2的荷电粒子，例如电子和正电子，必定用非厄密场来表示。然而，即使是电中性的粒子，也未必就一定能用厄密场来表示。例如，中子具有内禀磁矩，根据磁矩的符号，我们将再次有两种类型的粒子，粒子（中子）和反粒子（反中子），这些粒子仍然是只能用非厄密场来加以描述。

**）在附录A中给出了或导出了狄拉克理论的有关结果。在附录A中的等式都用字母A标记。上面所说的表象可参见（A.7）式。

***）本章的主要结果将在以后更一般地加以论述，从而使读者能够使用任何表象。

这些 γ 矩阵只不过是常用表象（$A7$）式中各 γ 矩阵的一个重新排列，因而它们也满足（8.2）式。四维自旋矩阵 $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$（参见 $A6a$）现在是纯虚的：

$$\sigma_k^* = -\sigma_k \quad (k=1, 2, 3) \tag{8.4}$$

式中，星号“*”代表复数共轭，即把 i 换成 $-i$ 但不转置。根据 γ_k 矩阵的厄密性质，我们可以推出 σ_k 的厄密性质：

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k \quad (k=1, 2, 3) \tag{8.5}$$

式中，剑号“†”代表厄密共轭。

（8.4—5）式的推导如下：

由（$A6a$）式，我们有

$$\sigma_k = -i\gamma_l\gamma_m = i\gamma_4\gamma_5\gamma_k \tag{1}$$

在上式两边取复数共轭，即有

$$\sigma_k^* = i\gamma_l\gamma_m = -i\gamma_4\gamma_5\gamma_k = -\sigma_k \tag{2}$$

由（1）式，我们有

$$\begin{aligned}\sigma_k^\dagger &= -i\gamma_k^\dagger\gamma_5^\dagger\gamma_4^\dagger = -i\gamma_k\gamma_5\gamma_4 = -i\gamma_k(-\gamma_4\gamma_5) = i(-\gamma_4\gamma_k)\gamma_5 \\ &= -i\gamma_4(-\gamma_5\gamma_k) = i\gamma_4\gamma_5\gamma_k = \sigma_k\end{aligned} \tag{3}$$

式中，我们用到了 γ 矩阵的厄密性质和反对易性质。

设狄拉克方程（8.1）式的解为：

$$\psi^{(r)}(\boldsymbol{P}) = u^{(r)}(\boldsymbol{P})e^{ipx} \quad (r=1, 2) \tag{8.6}$$

$\psi^{(r)}(\boldsymbol{P})$ 归一化到每单位体积内有 E_P/M 个粒子，其动量本征值为 $\boldsymbol{P}$，其能量本征值则为

$$E_P = +(M^2+\boldsymbol{P}^2)^{1/2} \tag{8.7}$$

$r=1$ 时，其自旋和 $\boldsymbol{P}$ 平行；$r=2$ 时，其自旋和 $-\boldsymbol{P}$ 平行*）。

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{|\boldsymbol{P}|}u^{(r)}(\boldsymbol{P}) = \pm u^{(r)}(\boldsymbol{P}) \begin{cases} r=1 \\ r=2 \end{cases} \tag{8.8}$$

在马约刺纳表象中，$\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+M\right)$ 是实数，由此可知，（8.6）式的复数共轭

$$\psi^{(r+2)}(\boldsymbol{P}) \equiv \psi^{(r)*}(\boldsymbol{P}) = u^{(r)*}(\boldsymbol{P})e^{-ipx} \quad (r=1, 2) \tag{8.9}$$

也是狄拉克方程（8.1）式的解，其动量本征值为 $\boldsymbol{P}$，能量本征值为 $-E_P$。而且，如果我们取（8.8）式的复数共轭，则根据（8.4）式可知（8.8）式所给出的态是自旋本征态。

*）这些解已在附录A中作了讨论，参见（A12—21）。在（8.9）式中，我们引进记号 $\psi^{(r+2)}$ 以便和附录A中所用记号一致。

其自旋在$r=1$时和$-P$平行，在$r=2$时和P平行。

我们把（8.6）式称为狄拉克方程的正能解，把（8.9）式称为负能解。对于满足周期条件（1.5）的所有可容许动量P而言，正能解和负能解构成了狄拉克方程的解的完全集合。类似于（7.18）式，我们可以根据这个集合来展开旋量算符$\psi(x)$*)。

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_P}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}\left\{C_r(P)u^{(r)}(P)e^{ipx}\right.$$

$$\left.+d_r^{\dagger}(P)u^{(r)*}(P)e^{-ipx}\right\} \tag{8.10a}$$

对上式取厄密共轭，即得

$$\psi^{\dagger}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_P}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}\left\{C_r^{\dagger}(P)u^{(r)*}(P)e^{-ipx}\right.$$

$$\left.+d_r(P)u^{(r)}(P)e^{ipx}\right\} \tag{8.10b}$$

如同上一章我们研究荷电介子时的情形一样，根据上章末尾的论证，和正频部分e^{ipx}有关的算符$C_r(P)$和$d_r(P)$是吸收算符，和负频部分e^{-ipx}有关的算符$C_r^{\dagger}(P)$和$d_r^{\dagger}(P)$是产生算符。如果我们取算符$C_r(P)$适用于带负电荷$-e(e>0)$的电子，则对能量为E_P，动量为P，$r=1$时自旋平行于P，$r=2$时自旋反平行于P的电子（“粒子”）而言，$C_r(P)$是吸收算符，而$C_r^{\dagger}(P)$则是产生算符。由于自旋可看成是一种旋转，所以我们把处于$r=1$态的电子称为右旋电子，而把处于$r=2$态的电子称为左旋电子。

对算符$C_r(P)$和$d_r(P)$，$C_r^{\dagger}(P)$和$d_r^{\dagger}(P)$来说，（8.10）式是完全对称的。根据上一章在荷电玻色子情况下所得到的结果，我们可以期望把$d_r(P)$和$d_r^{\dagger}(P)$解释为电子的反粒子的吸收算符和产生算符。电子的反粒子称为正电子，它带正电荷$+e>0$，而质量则和电子相同，都是M。正电子处于能量E_P，动量为P，$r=1$时自旋平行于P，

*) 和通常一样，我们使用矩阵记号，来压缩代表旋量分量下标和γ矩阵下标的指标α，β……（这些指标从1取到4）。例如，(8.10b) 式就代表下列四个式子，

$$\psi_{\alpha}^{\dagger}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_P}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{1/2}\sum_{r=1}^{2}\left\{C_r^{\dagger}(P)u_{\alpha}^{(r)*}(P)e^{-ipx}\right.$$

$$\left.+d_r(P)u_{\alpha}^{(r)*}(P)e^{ipx}\right\},\quad \alpha=1,\ \cdots\cdots,\ 4$$

在矩阵的初等研究中，通常要对行矢量和列矢量加以区别。本书在任何地方都不作这种区别，因为这种区别是无意义的。这就是说，对任一矢量ψ而言，我们都有$\psi^T=\psi$，T表示转置，即行和列互换，写成分量，即有

$$\psi_{\alpha}^T=\psi_{\alpha}$$

另一方面，对矩阵而言，我们有两种不同的矩阵存在：M和M^T，它们仅仅在对称矩阵的情况下才是相等的，这时，我们有$M=M^T$，也就是$M_{\alpha\beta}=M^T{}_{\alpha\beta}=M_{\beta\alpha}$

$r=2$时自旋反平行于P的态。类似于电子的情况，我们把处于$r=1$态的正电子称为右旋正电子，而把处于$r=2$态的正电子称为左旋正电子。马约喇纳表象的优点之一就是对粒子和反粒子而言是完全对称的。这就使得（8.10）式非常类似于玻色子的情况，从而极大地有助于我们对算符作出解释。马约喇纳表象还极大地有助于我们研究系统在电荷共轭变换（即交换电子和正电子）以及时间反演等有关对称变换下的对称性质*）。如果我们不使用马约喇纳表象，则（8.10）式中旋量的各分量就将产生混和，从而使出现在每个方程中的旋量都不再是相应复数共轭的，这就把粒子-反粒子对称性隐藏起来了。

为了证明上面对$C_r(P)$等算符的解释是正确的，我们必须从拉格朗日量密度$\mathscr{L}$出发，来计算系统的能量、电荷等物理量。引进定义

$$\bar{\psi}(x)\equiv\psi^{\dagger}(x)\gamma_4 \tag{8.11}$$

式中，剑号“†”表示厄密共轭。$\bar{\psi}(x)$满足和（8.1）式相共轭的方程：

$$\bar{\psi}(x)\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)=0 \tag{8.11a}$$

设有拉格朗日量密度

$$\mathscr{L}=-\psi^{\dagger}(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\right]\psi(x) \tag{8.12}$$

在上式中，$\mathscr{L}$的场量$\psi_\alpha(x)$和$\psi_\alpha^{\dagger}(x)$是独立变量，$\alpha=1,\cdots\cdots,4$，分别和（8.10）式中旋量$u^{(r)}(P)$的四个分量相对应**）。由于$\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\psi}_\alpha^{\dagger}=0$，所以类似于（2.17）式，我们可得哈密顿量密度为：

$$\mathscr{H}(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{\alpha,4}}\psi_{\alpha,4}-\mathscr{L}=\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+M\right)\psi(x) \tag{8.13}$$

式中，

$$\psi_{\alpha,4}=\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_4}$$

---

*）参见 Wick, G.C., Invariance Principles of Nuclear Physics, in Annual Review of Nuclear Science, Vol.8, 1958. 或者参见，程国均编著，群表示论及其在量子力学中的应用，第五章，四川大学出版社，1988年。

**）(8.12)式中的表示式$\psi^{\dagger}\gamma_4\psi$代表

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\psi_\alpha^{\dagger}\,(\gamma_4)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta$$

(8.18) 式中的$\psi\gamma_4\psi^{\dagger}$代表

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\psi_\alpha\,(\gamma_4)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta^{\dagger}$$

所得出的这些表示式由于和吸收算符、产生算符$C_r(P)$，$C_r^{\dagger}(P)$相关，所以也是算符，不过是不对易的。如果读者对这些矩阵感到困难，我们总告您明确地写出旋量指标。

（8.13）式的导出如下：

根据（8.12）式和（2.13）式，我们可得ψ_α和$\bar{\psi}_\alpha$的共轭场为

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger \tag{1}$$

$$\overline{\pi}_\alpha(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} \equiv 0 \tag{2}$$

于是有

$$\mathscr{H}(x) = -\psi_\alpha^\dagger(x)\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} + \psi^\dagger(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\right]\psi(x)$$

$$= -\psi_\alpha^\dagger(x)\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_4} + \psi_\alpha^\dagger(x)(\gamma_4)_{\alpha\beta}(\gamma_4)_{\beta\gamma}\frac{\partial \psi_\gamma(x)}{\partial x_4} +$$

$$+\psi^\dagger(x)\gamma_4\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k} + M\right)\psi(x)$$

$$= \psi^\dagger(x)\gamma_4\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k} + M\right)\psi(x)$$

这就是（8.13）式.

把场量的展开式（8.10）代入（8.13）式，并利用旋量$u^{(r)}(\boldsymbol{P})$的正交关系（A20）式作坐标空间的积分运算，我们就能得出哈密顿量（2.16）式：

$$H(t) = \int d^3x\mathscr{H}(\mathbf{X}, t) \tag{8.14}$$

经过一个直截了当的但稍嫌繁冗的计算后（参见习题8.1），我们可得

$$H = \sum_{\mathbf{P}}E_{\mathbf{P}}\sum_{r=1}^{2}\{C_r^\dagger(\boldsymbol{P})C_r(\boldsymbol{P}) - d_r(\boldsymbol{P})\,d_r^\dagger(\boldsymbol{P})\} \tag{8.15}$$

在导出（8.15）式时，我们必须格外小心，不能对$C_r(\boldsymbol{P})$等算符作任何置换，因为迄今为止，我们还不知道这些算符的对易关系.现在，我们就来决定这些对易关系.这些对易关系应该和我们上面关于算符C_r，d_r，$C_r^\dagger$和$d_r^\dagger$是粒子和反粒子的吸收算符和产生算符的解释自洽，以便使这些算符满足和荷电介子情况下的算符a，b，$a^\dagger$，$b^\dagger$相同的对易关系〔参见(7.19)式〕.占有数算符为

$$N_r(\boldsymbol{P}) = C_r^\dagger(\boldsymbol{P})C_r(\boldsymbol{P}),\quad \bar{N}_r(\boldsymbol{P}) = d_r^\dagger(\boldsymbol{P})d_r(\boldsymbol{P}) \tag{8.16}$$

由于我们将会有对易关系$[d_r(\boldsymbol{P}),\ d_r^\dagger(\boldsymbol{P})] = 1$，于是（8.15）式变成：

$$H=\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\sum_{r=1}^{2}\{N_r^-(\boldsymbol{P})-N_r^+(\boldsymbol{P})-1\} \tag{8.17}$$

由于每个动量为$\boldsymbol{P}$的正电子具有能量$-E_{\mathbf{p}}$，而算符$N_r^{\pm}(\boldsymbol{P})$具有本征值0，1，2，…，所以哈密顿量（8.17）不是正定的.*)

在表明如何解决这个严重的负能困难之前，我们必须对另外一个问题加以讨论．在量子化理论中，ψ和$\psi^{\dagger}$是算符，然而，在从经典理论到量子化理论的过渡中，关于这些算符的次序通常都存在有一些模糊不清的地方.设有拉格朗日量密度

$$\mathscr{L}=-\psi(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\right]\psi^{\dagger}(x) \tag{8.18}$$

从（8.18）式给出的拉格朗日量密度或者从（8.18）式和（8.12）式的两个拉格朗日量密度的线性组合出发，我们同样可以得出和上面类似的结果.（8.18）式和（8.12）式的不同之处仅仅在于粒子和反粒子的互换（$\psi\longleftrightarrow\psi^{\dagger}$），因此，拉格朗日量密度（8.18）式所导致的哈密顿量将仍然是（8.17）式，只不过其中的$N^{+}(\boldsymbol{P})$和$N^{-}(\boldsymbol{P})$相互作了交换．因此，能确保哈密顿量是正定的．拉格朗日量密度（8.12）和（8.18）的唯一一个线性组合是完全对称的：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\Big\{&\psi^{\dagger}(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\psi(x)\right.\\&\left.+\psi(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\right]\psi^{\dagger}(x)\right\}\end{aligned} \tag{8.19}$$

但是，在这种情况下，所得到的正定哈密顿量最终只不过是一个常数．因此，通过修改拉格朗日量密度，我们不可能克服上面的负能困难．

为了解决负能困难，约旦和维格纳（Jordan and Wigner，1928）首先引进了下列反对易关系：

$$[Cr(\boldsymbol{P}),\ C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')]_+=[d_r(\boldsymbol{P}),\ d_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')]_+=\delta_{rs}\delta(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}') \tag{8.20a}$$

式中，反对易子

$$[A,\ B]_+\equiv AB+BA \tag{8.21}$$

吸收算符和产生算符的所有其他反对易子通通为零；如果设$C_r\equiv C_r(\boldsymbol{P})$，$C_s\equiv C_s(\boldsymbol{P}')$，…，等等，则有

$$\left.\begin{aligned}&[C_r,C_s]_+=[C_r^{\dagger},C_s^{\dagger}]_+=[d_r,d_s]_+=[d_r^{\dagger},\ d_s^{\dagger}]_+=0\\&[C_r,d_s]_+=[C_r,d_s^{\dagger}]_+=[C_r^{\dagger},d_s]_+=[C_r^{\dagger},\ d_s^{\dagger}]_+=0\end{aligned}\right\} \tag{8.20b}$$

*）正如在玻色子情况下一样〔参见（3.6）式〕，我们将简单地略去无穷大零点能$-2\sum_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}$．

根据反对易法则（8.20）式和占有数算符 $N_r^{\pm}(\boldsymbol{P})$（8.16）式的定义，我们能立即证明（参见习题8.3）

$$\{N_r^{\pm}(\boldsymbol{P})\}^2 = N_r^{\pm}(\boldsymbol{P}) \tag{8.22}$$

上式表明 $N_r^{\pm}(\boldsymbol{P})$ 仅有两个本征值：或者为零，或者为1.这就意味着，每个单粒子态，或者没有容纳任何粒子；或者最多只能容纳一个粒子.因此，反对易关系（8.20）式使得我们能够描述服从泡利不相容原理的粒子系统，也就是说，我们正在研究费来-狄拉克统计.

根据2×2矩阵的乘积，我们容易得出遵从（8.20）式的产生算符和吸收算符以及相应的态矢量的构造.这些态矢量的自变量是只能取0或1两个值的单粒子态的占有数.然而，由于我们不需要这个矩阵表示，所以这里将略去它们，感兴趣的读者可参考：G. Wentzel, Quantum Theory of Fields, New York; Interscience, 1949.PP.172—175.实际上，我们只要知道这些算符满足反对易法则（8.20）式就够了.

真空态 Φ_0 是能量为零，动量也为零的态.换言之，Φ_0 是不存在有任何电子或正电子的态：

$$C_r(\boldsymbol{P})\Phi_0 = d_r(\boldsymbol{P})\Phi_0 = 0 \tag{8.23}$$

式中，$r=1$，2，$\boldsymbol{P}$ 取所有可能的值.$C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\Phi_0$ 是含有一个电子的态，$d_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\Phi_0$ 是含有一个正电子的态.以此类推，存在有两个电子的态是 $C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')\Phi_0$，…，等等.根据反对易法则（8.20），我们可以推出：

$$\{C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\}^2 = 0 \tag{8.24}$$

$$C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')\Phi_0 = -C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\Phi_0 \tag{8.25}$$

（8.24）式再次表明，在同一个单粒子态中不可能有两个电子.（8.25）式表明，我们正在研究的态对于粒子互换是反对称的.这些论证同样也适用于正电子态.

（8.24）式的推导如下：

由（8.20b）式，我们有

$$C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}') + C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P}) = 0 \tag{1}$$

将上式两边分别作用于真空态 Φ_0，即得

$$\left(C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}') + C_s^{\dagger}(\boldsymbol{P}')C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\right)\Phi_0 = 0 \tag{2}$$

令 $r=s$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'$，即得

$$2C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\Phi_0 = 0 \qquad (3)$$

$\Phi_0 \neq 0$，故有

$$\{C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})\}^2 = 0 \qquad (4)$$

这就是（8.24）式。

类似于（5.15）式，我们把算符（8.10）式分解成正频（e^{ipx}）部分和负频（e^{-ipx}）部分：

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x)\\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x)\end{aligned}\right\} \qquad (8.26)$$

式中，我们已用(8.11)式定义的$\bar{\psi}$置换了$\psi^{\dagger}$，因为在实际问题中，$\bar{\psi}$是比$\psi^{\dagger}$更有用的．算符ψ^{+}和ψ^{-}分别吸收电子和产生正电子，而算符$\bar{\psi}^{+}$和$\bar{\psi}^{-}$则分别产生电子和吸收正电子．由此，代替（8.23）式，我们能够把真空态定义为：

$$\psi^{+}(x)\Phi_0 = \bar{\psi}^{+}(x)\Phi_0 = 0 \qquad (8.27)$$

下面，我们来考察四维电流密度矢量，类似于（7.8）式，我们把四维电流密度矢量定义为：

$$-es_\nu(x) = ie\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{a,\nu}}\psi_a - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{a,\nu}^{\dagger}}\psi_a^{\dagger}\right\} \qquad (8.28)$$

根据拉格朗日量密度（8.12），（8.18—19）的规范不变性（参见（7.4）式），四维电流密度矢量满足连续性方程（7.9）式．

现在，我们必须在三个拉格朗日量密度（8.12），（8.18）和（8.19）中作出选择．（8.19）式所给出的拉格朗日量密度，在电荷共轭变换（即$\psi \longleftrightarrow \psi^{\dagger}$）下是不变的，所以将导出一个电子和正电子间是对称的理论．*）因此，我们将使用（8.19）式所给出的拉格朗日量密度，于是由（8.28）式，四维电流密度矢量为**）

---

*）实验已表明，在电荷共轭变换下，β-衰变和π-μ-e衰变过程的相互作用并不是不变的。尽管这样，为了使自由场的拉格朗日量密度保持对称，我们还是可以要求理论在电荷共轭变换下是不变的，尤其是因为电荷共轭变换下的不变性可以消除和我们在前面遇到过的无穷大真空能量相似的无穷大真空电荷。

在费米子情况下所遇到的这些困难和模糊性，也同样出现在玻色子的情况中。一般性的概念是相当类似的。因此，在上一章的玻色子量子化理论中，原则上我们应该用下列对称的拉格朗日量密度$\mathscr{L}$来代替（7.5）式的拉格朗日量密度：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial\phi_\nu} + m^2\phi\phi^{\dagger}\right) + \left(\frac{\partial\phi^{\dagger}}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + m^2\phi^{\dagger}\phi\right)\right\}$$

用上式代替（7.5）式后，对哈密顿量（7.12）式将不会有任何影响。玻色子场的四维电流密度矢量（7.10）式，是已经正确地对称化了的。根据上式所给出的拉格朗日量密度，可以导以（7.10）式。

**）由于ψ和$\psi^{\dagger}$现在是算符，所以我们对四维电流密度矢量中的因子次序要特别小心。可以证明，（8.28）式正确地表示出了由拉格朗日量密度（8.19）式所导出的四维电流密度矢量。由（8.28）式即可导出（8.29）式。

$$-e\,s_\nu(x)=-\frac{ie}{2}\{\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\nu\psi-\psi\gamma_4\gamma_\nu\psi^\dagger\} \tag{8.29}$$

因为在马约喇纳表象中，$\gamma_4^T=-\gamma_4$，$\gamma_k^T=\gamma_k$（$k=1,2,3$），上标 T 是转置矩阵的标记，所以我们能够将（8.29）式改写成比较方便的形式。于是，我们有

$$\gamma_4\gamma_\nu=\gamma_\nu^T\gamma_4^T \tag{8.30}$$

（8.30）式的推导如下：

$$\gamma_4\gamma_\nu=\gamma_4\gamma_k+\gamma_4\gamma_4=-\gamma_k\gamma_4+(-\gamma_4)(-\gamma_4)=\gamma_k^T\gamma_4^T+\gamma_4^T\gamma_4^T=\gamma_\nu^T\gamma_4^T$$

式中，$k=1,2,3$；$\nu=1,2,3,4$。

由于 $$\gamma_4^T\psi^\dagger=\psi^\dagger\gamma_4=\bar{\psi} \tag{8.31}$$

把（8.30）和（8.31）式代入（8.29）式，即得

$$-es_\nu(x)=-\frac{ie}{2}\left\{\bar{\psi}\gamma_\nu\psi-\psi\gamma_\nu^T\bar{\psi}\right\}=-\frac{ie}{2}\left[\bar{\psi},\gamma_\nu\psi\right] \tag{8.32}$$

（8.31）式的推导如下：

由53页注解，有$(\psi^*)^T=\psi^*$，故

$$\gamma_4^T\psi^\dagger=\gamma_4^T(\psi^*)^T=\psi^*\gamma_4=(\psi^*)^T\gamma_4=\psi^\dagger\gamma_4=\bar{\psi}$$

根据（8.32）式，我们可得电荷算符Q为

$$Q=\int d^3x[-es_4(x)/i]$$

$$=-\frac{e}{2}\int d^3x(\psi^\dagger\psi-\psi\psi^\dagger) \tag{8.33}$$

作积分运算，并使用（8.10），（$A21$），（8.20）和(8.16)式，即得（参见习题8.5）

$$Q=e\sum_{\mathbf{P}}\sum_{r=1}^{4}\left[N_r^+(\boldsymbol{P})-N_r^-(\boldsymbol{P})\right] \tag{8.34}$$

这就证实了我们根据电子和正电子所作的解释是正确的。

下面，我们来简单讨论一下，如果我们不使用马约喇纳表象，那末应该如何来对上面的分析加以修正呢？正如在附录A中所讨论的，狄拉克方程的本征解的完全集为

$$\psi^{(r)}(\boldsymbol{P})=u^{(r)}(\boldsymbol{P})e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}\qquad(r=1,2,3,4) \tag{8.35}$$

这些解的物理性质（如能量、动量和自旋的本征值）和（8.6）式及（8.9）式所给出的解完全相同。但是（8.35）式所给出的解将不满足

$$\psi^{(r+2)}(\boldsymbol{P}) = \psi^{(r)*}(\boldsymbol{P}) \tag{8.36}$$

用下标M来标记马约喇纳表象中的物理量，则马约喇纳表象中的旋量

$$u_M^{(r)}, \quad u_M^{(r+2)} = u_M^{(r)*} \qquad (r=1,2) \tag{8.36a}$$

将由旋量

$$u^{(r)} = Su_M^{(r)} \tag{8.36b}$$

来代替，上式中的S是一个4×4的非奇异矩阵。马约喇纳表象中的费米子场量$\psi_M(x)$也将相应地由场量

$$\psi(x) = S\psi_M(x) \tag{8.36c}$$

来代替。把场量的正频部分和负频部分（8.26）式，代入场量的一般展开式(8.10)式，即得：

$$\left.\begin{aligned}
\psi^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}C_r(\boldsymbol{P})u^{(r)}(\boldsymbol{P})e^{ipx}\\
\psi^-(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}d_r^+(\boldsymbol{P})u^{(r+2)}(\boldsymbol{P})e^{-ipx}\\
\bar{\psi}^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}d_r(\boldsymbol{P})\bar{u}^{(r+2)}(\boldsymbol{P})e^{ipx}\\
\bar{\psi}^-(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}C_r^+(\boldsymbol{P})\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P})e^{-ipx}
\end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

式中，$C_r(\boldsymbol{P})$等算符的解释和前面相同，它们所遵从的反对易法则也仍然是(8.20)式。由于旋量空间中的内积在表象变换下保持不变，而（8.32）式中的四维电流密度矢量的表示式是由旋量空间中的内积构成的，所以这个表示式不但在马约喇纳表象中是正确的，而且一般说来在其他表象中也是正确的。另一方面，由于电荷共轭变换不再简单地由变换$\psi\longleftrightarrow\psi^\dagger$给出，所以拉格朗日量密度在电荷共轭变换下将不再保持不变。我们使用马约喇纳表象，建立了费米子的量子化场机制，并对这个机制作了解释。下面，我们将使用一般表象（8.37）式，在这个表象中，γ矩阵是厄密的，由于这个优点，我们以后将只使用这个表象。

在上面我们看到，为了使哈密顿量是正定的，我们不得不使用反对易关系即根据费米-狄拉克统计来使理论量子化。当我们根据玻色-爱因斯坦统计（即对易法则）使半奇数自旋（$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，…）粒子的理论量子化时，典型的缺陷就是能量不正定。这也是泡利

在建立自旋与统计之间的关系时所用的论证之一。泡利证明了，半奇数自旋的粒子系统，只有根据费米-狄拉克统计来进行量子化，才能使能量是正定的。这就是反对易法则和不相容原理。

反过来，泡利也证明了，如果我们试图根据费米-狄拉克统计来使整数自旋（0，1，…）粒子（如介子和光子）系统量子化，那末就将在物理解释上产生矛盾。在第五章中，我们看到，对于自旋为0的粒子，如果$(x-x')$是类空矢量，如果我们希望把$\phi(x)$解释为可观测量，则我们要求〔参见（5.19）式和（5.22）式〕：

$$[\phi(x),\ \phi(x')]=0 \tag{8.38}$$

在第五章中，我们已经证明了，当按照玻色-爱因斯坦统计来使整数自旋粒子（介子）的场量子化时，（8.38）式是成立的。现在，我们来简要地证明，如果我们按照费米-狄拉克统计来使介子场量子化，则（8.38）式就不成立。

首先，我们用下列反对易法则来代替对易法则（3.5）式：

$$\begin{aligned}&[a(K),\ a(K')]_+=[a^\dagger(K),\ a^\dagger(K')]_+=0\\&[a(K),\ a^\dagger(K')]_+=\delta(K,\ K')\end{aligned} \tag{8.39}$$

然后，根据介子场量的付里叶展开式（5.14）式，计算对易子$[\phi(x),\ \phi(x')]$，就能得出我们所要的结果。和（5.18—19）式类似，我们可得：

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi(x')]=&\frac{1}{V}\sum_K\sum_{K'}\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\{a(K)a(K')e^{i(kx+k'x')}\\&+a(K)a^\dagger(K')e^{i(kx-k'x')}+a^\dagger(K)a(K')e^{-i(kx-k'x')}\\&+a^\dagger(K)a^\dagger(K')e^{-i(kx+k'x')}-a(K')a(K)e^{i(kx+k'x')}\\&-a(K')a^\dagger(K)e^{-i(kx-k'x')}-a^\dagger(K')a(K)e^{i(kx-k'x')}\\&-a^\dagger(K')a^\dagger(K)e^{-i(kx+k'x')}\}\\=&\frac{1}{V}\sum_K\sum_{K'}\frac{1}{2\sqrt{k_0k_0'}}\{a(K)a(K')e^{i(kx+k'x')}\\&+a^\dagger(K)a(K')e^{-i(kx-k'x')}+a^\dagger(K)a^\dagger(K')e^{-i(kx-k'x')}\\&-a^\dagger(K')a(K)e^{i(kx-k'x')}+[\delta(K,K')-\\&-a^\dagger(K')a(K)]e^{i(kx-k'x')}-[-a(K)a(K')]e^{i(kx+k'x')}\\&-[\delta(K,K')-a^\dagger(K)a(K')]e^{-i(kx-k'x')}\\&-[-a^\dagger(K)a^\dagger(K')]e^{-i(kx+k'x')}\}\\=&\frac{1}{V}\sum_K\frac{1}{2k_0}[e^{ik(x-x')}-e^{-ik(x-x')}]+\frac{1}{V}\sum_K\sum_{K'}\frac{1}{\sqrt{k_0k_0'}}\\&\times\{a(K)a(K')e^{i(kx+k'x')}+a^\dagger(K)a^\dagger(K')e^{-i(kx+k'x')}\\&+a^\dagger(K)a(K')e^{-i(kx-k'x')}-a^\dagger(K')a(K)e^{i(kx-k'x')}\}\end{aligned} \tag{8.40}$$

式中，$k_0 = \omega_K$，$k_0' = \omega_{K'}$．因为$a(K)\Phi_0 = 0$，故有

$$(a^\dagger(K)a^\dagger(K')\Phi_0, [\phi(x),\phi(x')]\Phi_0) = \frac{1}{V}\frac{1}{\sqrt{k_0 k_0'}}[e^{-i(kx+k'x')} - e^{-i(k'x+kx')}] \tag{8.41}$$

一般说来，即使$(x-x')$是类空矢量，（8.41）式中的矩阵元也不为零．这就表明，在这种情况下，对易子（8.38）式不等于零．这就和根据不相容原理对自旋为零的粒子系统进行量子化后所得的结果相矛盾*)．由此可知，表明自旋和统计之间关系的不相容原理，在自然界中的有效性没有任何例外．这是相对论性量子场论取得成功的一个给人印象深刻的例子．

根据产生算符和吸收算符的对易法则（8.20）式，场的付里叶展开式（8.26）式和（8.37）式，我们容易导出场ψ和$\bar{\psi}$的反对易法则．其计算是直截了当的，和（5.19）式的导出过程类似．我们把这个计算留给读者作为练习(参见习题8.6)．由此我们可得

$$\left.\begin{aligned}
&[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')]_+ = 0\\
&[\bar{\psi}_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = 0\\
&[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}(x-x')
\end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

式中，α和β是旋量场分量的下标，$S(x)$则由下式给出：

$$S(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\, e^{ipx}(iM + \not{p})\varepsilon(p)\delta(p^2+M^2) \tag{8.43}$$

式中，$S(x)$和$(iM+\not{p})$是旋量空间中的4×4矩阵，$\not{p}$由附录A中的（$A10$）定义．

如果我们把（6.3—4）式定义的$\Delta(x)$函数写成$\Delta(x, m)$以表明$\Delta(x)$函数和参数m相关，则在积分号下直接作微分运算，就可从（6.3）式得出：

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - M\right)\Delta(x,\ M) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4p e^{ipx}(i\not{p} - M)\varepsilon(p)\delta(p^2+M^2)$$
$$= S(x) \tag{8.44}$$

在（8.44）式推导中，只须注意到

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}e^{ipx} = ip_\mu e^{ipx} \tag{1}$$

由附录A中的（$A10$）式，有

$$\not{p} = \gamma_\mu p_\mu \tag{2}$$

把（1）和（2）式代入

*) 这里的论证不适用于厄密的费米子算符$(\psi+\psi^\dagger)$和$i(\psi-\psi^\dagger)$，同样，反对易法则也不适用于厄密的费米子算符$(\psi+\psi^\dagger)$和$i(\psi-\psi^\dagger)$．这些算符能影响偶数个费米子的态与奇数个费米子的态之间的跃迁，在这个意义上，这些算符不是可观察量．之所以不能观察到这样的跃迁是因为，所有的相互作用能——更一般地，所有的可观察量——都是ψ和$\bar{\psi}$的双线性函数．根据费米子场量的反对易法则，我们能精确地得出可观察量的对易性质．比如，在习题8.10中，我们就得出了四维电流密度的对易子．

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)\Delta(x,\ M)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4p\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{x_\mu}-M\right)e^{ipx}\varepsilon(p)\delta(p^2+M^2)$$

即可得出（8.44）式.

由（8.44）式，出现在费米子场量的反对易法则中的函数$S(x)$，简单地和出现在玻色子场量的对易关系中的函数$\Delta(x)$相关．于是我们立刻就可想到，通过把微分算符$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)$运用于在第六章中定义的各种$\Delta(x)$函数上，就能获得各种各样的$S(x)$函数．例如，和(6.18)或(6.19)式定义的函数$\Delta_F(x,\ m)$相对应，我们定义

$$S_F(x)=\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)\Delta_F(x,\ M) \tag{8.45}$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^4}\int_{C_F}d^4p\,e^{ipx}\frac{\not p+iM}{p^2+M^2} \tag{8.46}$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ipx}\frac{\not p+iM}{p^2+M^2-i\varepsilon} \tag{8.47}$$

在（8.46）中，C_F代表出现在（6.18）式中的费曼围道（图7）．而在和（6.19）式相对应的（8.47）式中，我们已把极点的位置作了移动（图8），对p_0的积分现在沿实轴进行．为方便起见，我们引进恒等式

$$(\not p-iM)^{-1}=(\not p+iM)(p^2+M^2)^{-1}$$

于是我们可把（8.26）式写成：

$$S_F(x)=\frac{2}{(2\pi)^4}\int_{C_F}d^4p\,\frac{e^{ipx}}{\not p-iM} \tag{8.46a}$$

在计算费米子场量的正频部分和负频部分的反对易子时，以及在计算费米子场量乘积的真空期待值时，都将出现和第六章中的有关$\Delta(x)$函数非常类似的$S(x)$函数．读者在处理这些函数时，应该是没有困难的．以后，我们将仅仅引用一些重要结果．

根据（8.37）式和（8.20）式，我们可得：

$$\begin{aligned}\left[\psi_\alpha^+(x),\ \ \bar\psi_\beta(x)\right]_+&=-iS_{\alpha\beta}^+(x-x')\\ \left[\psi_{\bar\alpha}^-(x),\ \ \bar\psi^+(x)\right]_+&=-iS_{\bar\alpha\beta}^-(x-x')\end{aligned} \tag{8.48}$$

费米子场量$\psi^\pm$，$\bar\psi^\pm$的所有其他反对易子（一共有8个）都为0．〔（8.48）式的推导可参见习题8.6〕．

现在，和（6.13）或（6.14）式定义的戴逊编时乘积（用P来标记）不同，我们来定义维克（Wick）编时乘积（用T来标记）．

（i）当两个场量都是玻色子场时，戴逊编时乘积和维克编时乘积的定义相同，即有

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = P\{\phi(x)\phi(x')\} \tag{8.49}$$

（ii）设$A(x)$表示算符$\psi_\alpha(x)$或$\bar{\psi}_\alpha(x)$，$B(x')$表示算符$\psi_\beta(x')$或$\bar{\psi}_\beta(x')$，则戴逊编时乘积的定义不变，而维克编时乘积则定义如下：

$$T\{A(x)B(x')\} = \varepsilon(x-x')P\{A(x)B(x')\}$$

$$= \begin{cases} A(x)B(x') & ，若\ x_0 > x'_0 \\ -B(x')A(x) & ，若 x'_0 > x_0 \end{cases} \tag{8.50}$$

由于费米子算符的反对易特征，所以两个费米子场量在相互交换时，乘积的符号要发生改变。维克编时乘积能反映费米子算符的反对易特征，因此，在费米子的情况下，维克编时乘积是更适合的。和（6.15）式类似，我们能够证明

$$\left(\Phi_0,\ T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}\Phi_0\right) = -\frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-x') \tag{8.51}$$

（8.51）式的推导如下：

首先，由（8.26）式，我们有

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x') = \left\{\psi^+_\alpha(x) + \psi^-_\alpha(x)\right\}\left\{\bar{\psi}^+_\beta(x') + \bar{\psi}^-_\beta(x')\right\}$$

$$= \psi^+_\alpha(x)\bar{\psi}^+_\beta(x') + \psi^-_\alpha(x)\bar{\psi}^+_\beta(x') + \psi^+_\alpha(x)\bar{\psi}^-_\beta(x')$$

$$+ \psi^-_\alpha(x)\bar{\psi}^-_\beta(x) \tag{1}$$

根据（1）式，在真空态到真空态的跃迁中，只有第三项$\psi^+_\alpha(x)\bar{\psi}^-_\beta(x')$的贡献不为零，其余各项的贡献通通为零。根据（1）式和（8.37）式，我们有

$$\left(\Phi_0,\ \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\Phi_0\right) = \left(\Phi_0,\ \psi^+_\alpha(x)\bar{\psi}^-_\beta(x')\Phi_0\right)$$

$$= \frac{M}{V}\sum_{p_0=E_{\mathbf{p}}}\ \sum_{p'_0=E_{\mathbf{p}'}}\frac{1}{\sqrt{p_0 p'_0}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}\left(\Phi_0,\ C_r(\boldsymbol{P})C^+_S(\boldsymbol{P}')\Phi_0\right)$$

$$\times\ u^{(r)}_\alpha(\boldsymbol{P})\,\bar{u}^{(S)}_\beta(\boldsymbol{P}')e^{i(px-p'x')}$$

$$= \frac{M}{V}\sum_{p_0=E_{\mathbf{p}}}\ \sum_{p'_0=E_{\mathbf{p}'}}\frac{1}{\sqrt{p_0 p'_0}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}u^{(r)}_\alpha(\boldsymbol{P})\,\bar{u}^{(S)}_\beta(\boldsymbol{P}')e^{i(px-p'x')}$$

$$\times\left(\Phi_0,\ [\delta_{rS}\delta(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}') - C^+_S(\boldsymbol{P}')C_r(\boldsymbol{P})]\Phi_0\right)$$

$$= \frac{M}{V} \sum_{p_0=E_p} \sum_{p_0'=E_{p'}} \frac{1}{\sqrt{p_0 p_0'}} \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} u_\alpha^{(r)}(P)\, \bar{u}_\beta^{(s)}(P') e^{i(px-p'x')}$$

$$\times \delta_{rs} \delta(P, P')$$

$$= \frac{M}{V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} \sum_{r=1}^{2} u_\alpha^{(r)}(P)\, \bar{u}_\beta^{(r)}(P') e^{ip(x-x')}$$

$$= \frac{M}{V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} \Lambda_{\alpha\beta}^{+}(P) e^{ip(x-x')} \quad \text{〔代入（}A.27\text{）式〕}$$

$$= -\frac{1}{2V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} (i\not{p} - M)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} \quad \text{〔代入（}A.22\text{）式〕}$$

$$= (i\not{p} - M)_{\alpha\beta} \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int_{p_0=E_p} \frac{d^3p}{p_0} e^{ip(x-x')} \quad \text{〔代入（3.7）式〕}$$

$$= (i\not{p} - M)_{\alpha\beta} [-i\Delta^{+}(x-x', M)] \quad \text{〔代入（6.12）式〕}$$

$$= -i\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M\right)_{\alpha\beta} \Delta^{+}(x-x', M) \quad \text{〔代入（}A.10\text{）式〕}$$

$$= -iS_{\alpha\beta}^{+}(x-x') \tag{2}$$

在导出上式的最后一步中，我们用到了（8.44）式.

根据（2）式和（8.42）式，我们有

$$(\Phi_0, \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\Phi_0) = (\Phi_0, [-iS_{\alpha\beta}(x-x') - \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')]\Phi_0)$$

$$= -iS_{\alpha\beta}(x-x') - [-iS_{\alpha\beta}^{+}(x-x')]$$

$$= -iS_{\alpha\beta}^{-}(x-x')$$

$$= -i\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M\right)_{\alpha\beta} \Delta^{-}(x-x', M) \tag{3}$$

根据（6.4）式给出的ε—符号的定义，我们有

$$T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\} = \frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x') - \frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x) \tag{4}$$

由（2），（3）和（4）式，我们可得

$$\left(\Phi_0,\ T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}\Phi_0\right)=\frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\left[-iS^+_{\alpha\beta}(x-x')\right]$$

$$-\frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\left[-iS^-_{\alpha\beta}(x-x')\right]$$

$$=\frac{1+\varepsilon(x-x')}{2}\left[-i\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)_{\alpha\beta}\Delta^+(x-x',\ M)\right]$$

$$-\frac{1-\varepsilon(x-x')}{2}\left[-i\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)_{\alpha\beta}\Delta^-(x-x',\ M)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)_{\alpha\beta}\left\{[1+\varepsilon(x-x')]i\Delta^+(x-x',\ M)\right.$$

$$\left.-[1-\varepsilon(x-x')]i\Delta^-(x-x',\ M)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-x',\ M)\quad\text{〔代入(6.16)式〕}$$

$$=-\frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-x')\quad\text{〔代入(8.45)式〕}$$

这就是(8.51)式.

第九章　光　子（Ⅰ）

在本章中，我们来讨论电磁场的量子化.这将把我们引导到量子电动力学.正是在量子电动力学中，相对论性量子场论取得了惊人的成功. 由于电磁场和电子场之间的耦合常数很弱，因此可以应用微扰理论来处理它们之间的相互作用.

光子理论的困难在于光子的静止质量为零以及规范不变性的要求等.一个详尽的分析证明，我们能够忽略掉这些复杂性，而使用和前面章节中的介子论述相类似的简单方法来阐述光子理论.在本章中，我们将只简单地来讨论一下这些困难以及这些困难的解决方法，阐明在应用中所需要的一些结果.在下一章中，我们将对本章的论述作出更完全的说明.

在经典理论中，电磁场是用电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$来描述的.$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$可根据四维矢势$A_\mu(x)=(\boldsymbol{A}, iV)$导出：

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{E}=-\nabla V-\partial\boldsymbol{A}/\partial t \tag{9.1}$$

自由空间中的麦克斯韦方程可用矢势表述为：

$$\Box^2 A_\mu-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}\right)=0 \tag{9.2}$$

电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$不能唯一地确定矢势A_μ.这是因为对任意函数$\Lambda(x)$而言，在变换

$$A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu} \tag{9.3}$$

下，（9.2）式都保持不变.我们把变换(9.3)式称为规范变换.和场强$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{H}$不同，矢势A_μ没有直接的物理意义，因此，在规范变换（9.3）式下，理论必定是不变的.

我们能够利用四维矢势的任意性把（9.2）式加以简化，为此，我们要求四维矢势满足洛仑兹条件

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu}=0 \tag{9.4}$$

于是，（9.2）式变成波动方程

$$\Box^2 A_\mu=0 \tag{9.5}$$

然而，洛仑兹条件并不能唯一地确定四维矢势.倘若

$$\Box^2\Lambda(x)=0 \tag{9.6}$$

则规范变换（9.3）式将导出一个也满足洛仑兹条件的四维矢势A'_μ.我们把满足（9.4）

式的四维矢势称为属于洛仑兹规范.

作为一个特殊情况，我们来考虑平面波，

$$A_\mu(x) = e_\mu(k)e^{\pm ikx} \tag{9.7}$$

式中，和静止质量为零的粒子相对应，$k^2 = 0$.

令

$$\Lambda(x) = \lambda(k)e^{\pm ikx} \tag{9.8}$$

式中的$\Lambda(x)$满足（9.6）式.于是规范变换（9.3）式变成

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = [\,e_\mu(k) \pm i\lambda(k)k_\mu\,]e^{\pm ikx} \tag{9.9}$$

对于没有电荷存在的自由场，我们能够选择一个规范，其中的$V = 0$，这时，洛仑兹条件化成$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，这正是横场（transverse vector field）条件.矢势$\boldsymbol{A}$的付里叶变换为

$$\boldsymbol{A}(x) = \int \varepsilon(k)e^{ikx}d^4k \tag{9.10}$$

把（9.10）式代入$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，即得横向性条件：

$$\varepsilon \cdot \boldsymbol{K} = 0 \tag{9.11}$$

在对电磁场进行量子化时，让我们从一开始就忽略洛仑兹条件（9.4），这样，我们就能把电磁场的四个分量A_μ，$\mu = 1, \cdots, 4$看成独立变量.根据习题2.1，从拉格朗日量密度可以导出场方程，这就意味着我们能够利用第二章和第三章中的正则量子化方法来对自由电磁场进行量子化.由此，类似于（5.19）式，我们可得算符$A_\mu(x)$在海森堡绘景中的对易关系为：

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu}D(x - x') \tag{9.12}$$

式中，

$$D(x) = \lim_{m \to 0}\Delta(x,\ m) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k\ \frac{e^{ikx}}{k^2} \tag{9.13}$$

〔参见（6.1）式和习题9.1〕.通过和介子场的对易子（5.19）式比较，我们预期要得到的电磁场的对易子正是（9.12）式.因为我们现在研究的是四个相互独立的玻色子场，其中的每一个场都满足静止质量为零的粒子的“克莱因-戈登方程”（9.5）式.

现在，我们能够把第六章的结果运用到光子的情况.特别是根据(6.15)式和(6.19)式，我们有

$$(\Phi_0,\ P\{A_\mu(x)A_\nu(x')\}\Phi_0) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_F(x - x') \tag{9.14}$$

式中，

$$D_F(x)=\lim_{m\to 0}\Delta_F(x,\ m)=\frac{-2i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ikx}}{k^2-i\varepsilon} \tag{9.15}$$

根据习题2.1的拉格朗日量密度，可得矢量场$A_\mu(x)$的共轭场量为

$$\pi_\mu(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu(x)}=\dot{A}_\mu(x)$$

于是等时对易关系（3.2）式变成

$$\left.\begin{aligned}&[A_\mu(\mathrm{X},\ t),\ A_\nu(\mathrm{X}',\ t)]=0\\&[\pi_\mu(\mathrm{X},\ t),\ \pi_\nu(\mathrm{X}',\ t)]=0\\&[A_\mu(\mathrm{X},\ t),\ \pi_\nu(\mathrm{X}',\ t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta(\mathrm{X}-\mathrm{X}')\end{aligned}\right\} \tag{9.15a}$$

矢量场$A_\mu(x)$和$\pi_\mu(x)$的付里叶展开式为：

$$A_\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|\mathrm{K}|}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\{a_m(\boldsymbol{K})e^{ikx}+a_m^{+}(\boldsymbol{K})e^{-ikx}\} \tag{9.16a}$$

$$\pi_\mu(x)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|\mathrm{K}|}\sqrt{\frac{k_0}{2}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\{-a_m(\boldsymbol{K})\ e^{ikx}+a_m^{+}(\boldsymbol{K})e^{-ikx}\} \tag{9.16b}$$

式中，四个相互正交的单位矢量构成一个极化坐标系，上标$m=1$，…，4是这些极化单位矢量的标号，而下标$\mu=1$，…，4则是第m个极化单位矢量各个分量的标号。这些极化单位矢量张成了一个空间-时间四维连续区，任何4-矢量，例如$A_\mu(x)$，都可以表示为这些极化单位矢量的叠加。这些极化单位矢量的选择具有极大的任意性，特别是，我们之所以要把这些极化单位矢量表示成$\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})$，就是为了表明，对于每一个波矢$\boldsymbol{K}$，我们都能选择不同的极化单位矢量。在实际中，为了方便起见，通常是按如下方式来选择这些极化单位矢量：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_\mu^{(1)}(\boldsymbol{K})=[\boldsymbol{n}^{(1)}(\boldsymbol{K}),\ 0]\\&\varepsilon_\mu^{(2)}(\boldsymbol{K})=[\boldsymbol{n}^{(2)}(\boldsymbol{K}),\ 0]\\&\varepsilon_\mu^{(3)}(\boldsymbol{K})=[\boldsymbol{n}^{(3)}(\boldsymbol{K}),\ 0]\\&\varepsilon_\mu^{(4)}(\boldsymbol{K})=[\boldsymbol{O},\ 1]\end{aligned}\right\} \tag{9.17a}$$

式中，$\boldsymbol{n}^{(1)}(\boldsymbol{K})$和$\boldsymbol{n}^{(2)}(\boldsymbol{K})$是垂直于光子动量$\boldsymbol{K}$并相互正交的两个三维单位矢量，$\boldsymbol{n}^{(3)}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{K}/|\boldsymbol{K}|$，即

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{n}^{(m)}(\boldsymbol{K})=0,\ m=1,\ 2\\&\boldsymbol{n}^{(l)}(\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{n}^{(m)}(\boldsymbol{K})=\delta_{lm},\ l,\ m=1,\ 2,\ 3\end{aligned}\right\} \tag{9.17b}$$

容易证明，四个极化矢量是正交归一的，即

$$\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\varepsilon_\mu^{(n)}(\boldsymbol{K})=\delta_{mn},\quad m,n=1,\cdots,4 \tag{9.17c}$$

并且有

$$\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\ \varepsilon_\nu^{(m)}(\boldsymbol{K})=\delta_{\mu\nu} \tag{9.17d}$$

根据这个定义，矢量势$\varepsilon^{(1)}$和$\varepsilon^{(2)}$描述横向线性极化的光子，$\varepsilon^{(3)}$描述纵向极化的光子，而具有矢量势$\varepsilon^{(4)}$的光子则被认为是纯“类时”光子或标量光子。以后，我们必须记住，虽然我们在这里处理了光子的四种不同的极化态，然而，从上面我们可以看到，经典自由场仅用横极化光子来描述。

我们在上面对光子所作的解释，可以根据（9.16）式得出。把（9.16）式代入对易关系（9.15a）式即可得出：

$$\left.\begin{aligned}&[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n(\boldsymbol{K}')]=[a_m^\dagger(\boldsymbol{K}),\ a_n^\dagger(\boldsymbol{K}')]=0\\&[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n^\dagger(\boldsymbol{K}')]=\delta_{mn}\delta(\boldsymbol{K},\ \mathrm{K}')\end{aligned}\right\}\ (m,n=1,\cdots,4) \tag{9.18}$$

这正是玻色子场的对易关系（3.5）式。由（9.18）式可把$a_m(\boldsymbol{K})$和$a_m^\dagger(\boldsymbol{K})$解释为动量为$\boldsymbol{K}$和极化态为$m$的光子的吸收算符和产生算符，于是可得这些光子的占有数算符为

$$N_m(\boldsymbol{K})=a_m^\dagger(\boldsymbol{K})a_m(\boldsymbol{K}) \tag{9.19}$$

$N_m(\boldsymbol{K})$的本征值为0，1，2，……。上述解释和第七章末尾处的讨论当然也是一致的：和（9.16）式中的正频部分相关的算符是吸收算符，和（9.16）式中的负频部分相关的算符是产生算符。由此，我们可以定义真空态Φ_0为：

$$a_m(\boldsymbol{K})\Phi_0=0,\quad m=1,\cdots,4,\ \boldsymbol{K}\text{取所有可能的值} \tag{9.20}$$

同样，我们还可把真空态定义为

$$A_\mu^\dagger(x)\Phi_0=0,\quad \mu=1,\cdots,4 \tag{9.21}$$

（9.18）式的推导如下：

把（3.7）式代入（9.16a）式，即得：

$$A_\mu(\mathrm{X},\ t)=\frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3K}{\sqrt{2\omega_{\mathrm{K}}}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\{a_m(\boldsymbol{K})e^{ikx}+a_m^\dagger(\boldsymbol{K})e^{-ikx}\}$$

$$=\frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3K}{\sqrt{2\omega_{\mathrm{K}}}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})a_m(\boldsymbol{K})e^{i\mathrm{KX}}e^{-ik_0t}$$

$$+\frac{\sqrt{V}}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3K}{\sqrt{2\omega_K}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m^{\dagger}(K)e^{-iKX}\,e^{ik_0t}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{2\omega_K}}\Big[\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)\,e^{-ik_0t}$$

$$+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)\,a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}\Big]e^{iKX}d^3K \qquad (1)$$

式中，$\omega_K\approx|K|$。由付里叶变换公式，可知

$$\sqrt{\frac{V}{2\omega_K}}\Big[\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)\,e^{-ik_0t}+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}\Big]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}A_\mu(X,t)e^{-iKX}d^3x \qquad (2)$$

同理可得

$$\Pi_\mu(X,t)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{V\omega_K}{2}}\Big[-\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)\,e^{-ik_0t}$$

$$+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}\Big]e^{iKX}d^3K \qquad (3)$$

于是有

$$i\sqrt{\frac{V\omega_K}{2}}\Big[-\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)e^{-ik_0t}+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}\Big]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_\mu(X,t)\,e^{-iKX}d^3x \qquad (4)$$

由（2）式和（4）式，可得：

$$\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)\,e^{-ik_0t}+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}$$

$$=\sqrt{\frac{2\omega_K}{V}}\int A_\mu(X,t)\,e^{-iKX}d^3x \qquad (5)$$

$$-\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\,a_m(K)\,e^{-ik_0t}+\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^{\dagger}(-K)\,e^{ik_0t}$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{V\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_\mu(X,t)\,e^{-ikX}d^3x \qquad (6)$$

把（5）式和（6）式的两边分别相加，即得

$$\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)a_m^\dagger(-K)\,e^{ik_0t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{2\omega_K}{V}}A_\mu(X,t)-i\sqrt{\frac{2}{V\omega_K}}\Pi_\mu(X,t)\right]e^{-ikX}d^3x \qquad (7)$$

在（7）式两边同乘$\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)\,e^{-ik_0t}$，即得

$$a_m^\dagger(-K)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x e^{-ikX}\,e^{-ik_0t}\varepsilon_\mu^{(m)}(-K)[\omega_K A_\mu(X,t)-i\Pi_\mu(X,t)] \qquad (8)$$

由（8）式即得

$$a_m^\dagger(K)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,e^{ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)[\omega_K A_\mu(X,t)-i\Pi_\mu(X,t)] \qquad (9)$$

同样，把（5）式和（6）式的两边分别相减，最后可得

$$a_m(K)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega_K}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,e^{-ikx}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)[\omega_K A_\mu(X,t)+i\Pi_\mu(X,t)] \qquad (10)$$

根据（10）式，可得

$$[a_m(K),\ a_n(K')]=\frac{1}{2V\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,d^3x'\,e^{-i(kx+k'x')}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K')$$

$$\cdot\left[\omega_K A_\mu(X,t)+i\Pi_\mu(X,t),\ \omega_{K'}A_\nu(X',t)+i\Pi_\nu(X',t)\right]$$

$$=\frac{1}{2V\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,d^3x'\,e^{-i(kx+k'x')}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K')$$

$$\cdot\{\omega_K\omega_{K'}[A_\mu(X,t),\ A_\nu(X',t)]-i\omega_{K'}[A_\nu(X',t),\ \Pi_\mu(X,t)]$$
$$+i\omega_K[A_\mu(X,t),\ \Pi_\nu(X',t)]-[\Pi_\mu(X,t),\ \Pi_\nu(X',t)]\} \qquad (11)$$

把（9.15a）式代入（11）式，即得

$$[a_m(K),\ a_n(K')]=\frac{1}{2V\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\,d^3x'\,e^{-i(kx+k'x')}\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K')$$

$$\cdot\{\omega_K\omega_{K'}\cdot 0-i\omega_{K'}\cdot[i\delta_{\nu\mu}\delta(X'-X)]+i\omega_K[i\delta_{\mu\nu}\delta(X-X')]-0\}$$

$$= \frac{1}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, d^3x'\, e^{-i(kx+k'x')}\, e_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\, e_\nu^{(n)}(\boldsymbol{K}')$$

$$\cdot \delta_{\mu\nu}\delta(\mathrm{X}-\mathrm{X}')(\omega_{K'}-\omega_K)$$

$$= \frac{\omega_{K'}-\omega_K}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \delta_{mn} e^{i(k_0+k'_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x'\, e^{-i(\mathrm{KX}+\mathrm{K}'\mathrm{X}')}$$

$$\times \delta(\mathrm{X}-\mathrm{X}')$$

$$= \frac{\omega_{K'}-\omega_K}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \delta_{mn} e^{i(\omega_K+\omega_{K'})t} e^{-i(\mathrm{K}+\mathrm{K}')\mathrm{X}}$$

$$= \frac{\omega_{K'}-\omega_K}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \delta_{mn} e^{i(\omega_K+\omega_{K'})t}(2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}')$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{2V}\delta_{mn}\delta(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}') \frac{|\boldsymbol{K}'|-|\boldsymbol{K}|}{\sqrt{|\boldsymbol{K}|\cdot|\boldsymbol{K}'|}} e^{i(|\mathrm{K}|+|\mathrm{K}'|)t} \qquad (12)$$

当$\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{K}'$时，因$|\boldsymbol{K}|=|\boldsymbol{K}'|$，故由（12）式可得

$$[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n(\boldsymbol{K}')]=0 \qquad (13)$$

当$\boldsymbol{K}\neq-\boldsymbol{K}'$时，因$\delta(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}')=0$，故由（12）式得

$$[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n(\boldsymbol{K}')]=0 \qquad (14)$$

根据（13）和（14）式，可知不论$\boldsymbol{K}$为何值，都有

$$[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n(\boldsymbol{K}')]=0 \qquad (15)$$

同理可证

$$[a_m^{\dagger}(\boldsymbol{K}),\ a_n^{\dagger}(\boldsymbol{K}')]=0 \qquad (16)$$

由（9）式和（10）式，我们有

$$[a_m(\boldsymbol{K}),\ a_n^{\dagger}(\boldsymbol{K}')] = \frac{1}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, d^3x'\, e^{i(k'x'-kx)}\, e_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\, e_\nu^{(n)}(\boldsymbol{K}')$$

$$\cdot\left[\omega_K A_\mu(\mathrm{X},t)+i\Pi_\mu(\mathrm{X},t),\ \omega_{K'}A_\nu(x',t)-i\Pi_\nu(x',t)\right]$$

$$= \frac{1}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, d^3x'\, e^{i(k'x'-kx)}\, e_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\, e_\nu^{(n)}(\boldsymbol{K}')$$

$$\cdot\{\omega_K\omega_K[A_\mu(\mathrm{X},t),\ A_\nu(\mathrm{X}',t)]-i\omega_{K'}[A_\nu(\mathrm{X}',t),\ \Pi_\mu(\mathrm{X},t)]$$
$$-i\omega_K[A_\mu(\mathrm{X},t),\ \Pi_\nu(\mathrm{X}',t)]+[\Pi_\mu(\mathrm{X},t),\ \Pi_\nu(\mathrm{X}',t)]\}$$

$$= \frac{1}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, d^3x'\ e^{i(k'x' - kx)}\ \varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K')$$

$$\cdot\{-i\omega_{K'}\cdot[i\delta_{\mu\nu}\delta(X' - X)] - i\omega_K[i\delta_{\mu\nu}\delta(X - X')]\}$$

$$= \frac{1}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x\, d^3x'\, e^{i(K'X' - KX)} \cdot e^{i(\omega_{K'}t - \omega_K t)}$$

$$\cdot\varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K')\delta_{\mu\nu}\delta(X - X')(\omega_{K'} + \omega_K)$$

$$= \frac{\omega_{K'} + \omega_K}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{i(K' - K)X} e^{-i(\omega_{K'} - \omega_K)t} \varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\mu^{(n)}(K')$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2V} \cdot \frac{2\omega_K}{\omega_K} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \delta_{mn} = \frac{1}{V} \cdot V \cdot \delta_{mn} = \delta_{mn}, & \text{当 } K = K' \\ \frac{\omega_{K'} + \omega_K}{2V\sqrt{\omega_K \omega_{K'}}} \cdot (2\pi)^3 \delta(K' - K) e^{-i(\omega_{K'} - \omega_K)t} \\ \quad \cdot \varepsilon_\mu^{(m)}(K)\varepsilon_\nu^{(n)}(K') = 0, & \text{当 } K \neq K' \end{cases}$$

$$= \delta_{mn}\delta(K, K') \qquad (17)$$

（15）式，（16）式和（17）式就是我们所要求证的（9.18）式。

(9.16)式和(9.18)式之间是不自洽的，这是一个严重的困难，下面，我们就来讨论它.上面，我们把$a_m(K)$和$a_m^\dagger(K)$解释为吸收算符和产生算符，这种解释当然是基于算符$a_m^\dagger(K)$是$a_m(K)$的伴算符，我们所用的符号也表明了这一点.不过，这样就意味着，根据（9.16）式，矢势$A_\mu(x)$的所有四个分量都是厄密算符，而我们要求$A_4 = iV$是反厄密算符.下面，我们将采用古普塔（Gupta）和布勒利尔（Bleuler）的方法来解决这个问题.在这个方法中，展开式（9.16）和对易关系（9.18）都予以保留，于是对$m = 1$，…，3和4来说，$a_m^\dagger$都是a_m的伴算符.这样，所有四个场量A_μ都是厄密算符.为了使场量A_μ具有适当的客观性质，我们将希尔伯特空间中标积的定义加以推广：场量$A_i(x)$的期望值总是实数，其中$i = 1$，2，3；而场量$A_4(x)$的期望值总是虚数。古普塔方法也使我们能特别简单地处理洛仑兹条件，横向性条件和理论的规范不变性。在下一章中，我们将比较详细地来讨论这些问题.这里，我们将仅仅是给出一些定性讨论的结果.

我们在上面已经看到，自由光子的横向性和洛仑兹条件（9.4）式密切相关.然而，洛仑兹条件和对易关系（9.12）式并不相洽，根据（9.12）式，我们有

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu},\ A_\nu(x')\right] = i\frac{\partial}{\partial x_\nu} D(x - x')$$

$$= \frac{\cdot i}{(2\pi)^4} \int_c d^4k\, \frac{1}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} e^{ik(x - x')} \neq 0 \qquad (9.22)$$

然而由洛仑兹条件（9.4）式，上式左边为零.

根据（9.22）式，我们不再把（9.4）式作为一个算符方程，而仅仅把它看成是量子化光子场的一个附加条件.根据这个附加条件，所有可容许的态Φ必须满足

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\Phi = 0 \tag{9.23}$$

古普塔和布勒利尔提出了一个更为简单的机制，这个机制的特点在于能清晰地把相对论性质表现出来. 古普塔和布勒利尔建议，用对容许态Φ的限制较弱的条件来代替（9.23）式：

$$\frac{\partial A_\mu^+}{\partial x_\mu}\Phi = 0 \tag{9.24}$$

上式对容许态Φ的限制仅仅涉及到吸收算符.（9.24）式说明，只有某些态是容许的，在这些态中，不存在那种可以被吸收的光子.在下一章中我们将会看到，对于场量的期待值来说，（9.24）式足以确保作为理论的经典极限的麦克斯韦方程成立.

为了理解量子化光子场附加条件（9.24）式的物理意义，我们把(9.24)式在动量空间中表示出来.把（9.16a）和（9.17）式代入（9.24）式，即得

$$[a_3(\boldsymbol{K}) + ia_4(\boldsymbol{K})]\Phi = 0，\ (\boldsymbol{K}\text{的所有值}) \tag{9.25}$$

上式表明，只有满足这个限制的态才是物理上真实的态.（9.25）式是对纵光子和标量光子的线性组合（对每个动量$\boldsymbol{K}$而言）的一个限制，但它并不影响横向光子.由于自由场的哈密顿量在占有数算符空间是对角的，所以附加条件（9.25）式和运动方程显然是相容的.也就是说，如果附加条件（9.25）式在$t=0$时成立，那末它将一直成立.

（9.25）式的推导如下：

由（9.16）式，我们有

$$A_\mu^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|\mathrm{K}|}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4}\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})a_m(\boldsymbol{K})e^{ikx} \tag{1}$$

由（1）可得

$$\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|\mathrm{K}|}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{4} ik_\mu\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})a_m(\boldsymbol{K})e^{ikx} \tag{2}$$

把（2）式代入（9.24）式，即得

$$\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu}\Phi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|\mathrm{K}|}\frac{ie^{ikx}}{\sqrt{2k_0}}\{k_\mu\varepsilon_\mu^{(1)}(\boldsymbol{K})a_1(\boldsymbol{K}) + k_\mu\varepsilon_\mu^{(2)}(\boldsymbol{K})a_2(\boldsymbol{K})$$

$$+ k_\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(K) a_3(K) + k_\mu \varepsilon_\mu^{(4)}(K) a_4(K) \Big\} \Phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_0 = |K|} \frac{i e^{ikx}}{\sqrt{2k_0}} \Big\{ |K| a_3(K) + i k_0 a_4(K) \Big\} \Phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_0 = |K|} \frac{i k_0 e^{ikx}}{\sqrt{2k_0}} \Big\{ a_3(K) + i a_4(K) \Big\} \Phi = 0 \qquad (3)$$

式中，我们用到了（9.17）式.由（3）式即得

$$\left[a_3(K) + i a_4(K) \right] \Phi = 0, \quad (K\text{的所有值})$$

这就是（9.25）式.

设有某一个只存在一定横光子的态，根据这个态，我们能构造出具有同样的横光子但具有纵光子与标光子的不同组合的态的整个族，这些纵光子与标光子都满足量子化电磁场的附加条件（9.25）式.可以证明，这些态是通过规范变换而相关的. 也就是说，这些态代表了相同的物理态，只不过它们是用不同的势A_μ来描述的，这些势通过规范变换而相关.

迄今为此，我们只考虑了自由场.这使我们能对散射问题(例如，康普顿散射或韧致辐射）中的初态光子和末态光子作出适当的描述.这是因为我们在散射问题中将使用绝热截止方法（参见12章）.在这个方法中，系统在发生散射以前很久的初态以及在发生散射以后很久的终态，相互作用耦合常数（在量子电动力学中，这个耦合常数就是电荷）被“关掉”了，因此，我们观测到的初态和末态，都是没有相互作用的自由场系统的物理态.对于初态，通过适当选择规范，我们能确保它只存在有横光子.然而，倘若我们使用规范不变理论来进行计算，那末，我们也可以用只含有横光子的态矢量来描述终态。

虽然我们仅用横光子就能描述系统的初态和终态，但是我们却不能够把纵光子和标光子一起抛弃掉.这是因为，当有电荷存在时，纵光子和标光子代表了这些电荷之间的瞬间静止库仑相互作用(the instantaneous static Coulomb interaction).事实上，在量子电动力学的早期理论中，人们就是把这个库仑相互作用分离出来，而仅仅对场的横向部分进行量子化.人们就是用库仑散射加上横光子的交换来描述电子——电子散射的.我们现在是用四种光子的交换来描述这个电子——电子散射过程的.布勒利尔证明了，这两种描述方式是完全等价的.

在实际中，用四种光子进行的协变描述较之早期的方法常常是更为简单的.况且，横场的分离并不是相对论不变的.以后，我们将会看到，如果我们希望计算辐射修正（参见17章），那末就必须使理论是相对论不变的.

第十章　光　子　（II）

在本章中，我们将对古普塔-布勒利尔（Gupta-Bleuler）方法加以比较详细的讨论*）。

正如在上一章中所说的，付里叶展开式（9.16）和对易关系（9.18）式在古普塔-布勒利尔方法中仍然予以保留。于是标光子将处于和横光子及纵光子相同的地位；a_m是吸收算符，$m=1,\cdots\cdots,4$；$a_m^\dagger$是产生算符，$m=1,\cdots\cdots,4$；场量$A_\mu(x)$（$\mu=1,,\cdots\cdots,4$）的所有四个分量都是厄密算符。然而，因为$A_4=iV$，所以我们要求在任何态中，A_4的期待值都是纯虚数。为了达到这个目的，我们必须对两个态矢量标积的定义进行修改。

现在，我们把态矢Φ的模方的定义

$$N(\Phi)=(\Phi,\ \Phi) \tag{10.1}$$

修改为

$$N(\Phi)=(\Phi,\ \eta\Phi) \tag{10.2}$$

式中，η是算符。我们要求模方$N(\Phi)$总是实数，于是η就必定是厄密算符：

$$\eta^\dagger=\eta \tag{10.3}$$

一般说来，（10.2）式所定义的模方$N(\Phi)$，将不再是正定的。根据$N(\Phi)>0$，$N(\Phi)<0$，$N(\Phi)=0$，我们可以把态矢量分为三类。只有满足$N(\Phi)>0$的态才符合通常的几率解释，所以，我们要求有物理意义的态都归在这一类中。正如我们将看到的，辅助条件（9.24）式确保了这一点成立。我们把η称为度规算符，而把模方不是正定的度规称为不定度规。

算符O的期待值现在定义为：

$$\langle O\rangle=(\Phi,\ \eta O\Phi) \tag{10.4}$$

如果O是厄密算符，则当

$$[\eta,\ O]=0 \tag{10.5a}$$

时，算符O的期待值是实数；当

$$[\eta,\ O]_+=0 \tag{10.5b}$$

时，算符O的期待值是纯虚数。因此，为了使$A_r(x)$（$r=1,\ 2,\ 3$）的期待值是实数，$A_4(x)$的期待值是纯虚数，我们将规定度规算符η满足

$$\left.\begin{aligned}&[\eta,\ A_r(x)]=0,\quad(r=1,\ 2,\ 3)\\&[\eta,\ A_4(x)]_+=0\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

---

*）参见K. Bleuler, Helv. phys. Acta, Vol.23, P.567. 1950.

在动量空间，上式变为：

$$\left.\begin{aligned}&[\eta,\ a_m(K)]=0,\quad (m=1,\ 2,\ 3)\\&[\eta,\ a_4(K)]_+=0\end{aligned}\right\}\qquad (10.7)$$

根据（10.6）式或（10.7）式，可知η^2是c数，即和所有算符对易．适当选择数值因子，我们能够使η满足

$$\eta^2=\eta\,\eta^\dagger=1\qquad (10.8)$$

设由K和m（$m=1$，……，4）确定的光子的占有数为$n_m(K)$，利用算符$a_m(K)$的矩阵表象〔参见（1.10—11）式〕，我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\Phi(\cdots n_m(K)\cdots),\ a_m(K)\Phi(\cdots n'_m(K)\cdots)\Big)\\&\quad=\Big(\Phi(\cdots n'_m(K)\cdots),\ a_m^\dagger(K)\Phi(\cdots n_m(K)\cdots)\Big)\\&\quad=\Big[n_m(K)+1\Big]^{\frac{1}{2}}\delta\Big[n_m(K)+1,\ n'_m(K)\Big]\end{aligned}\qquad (10.9)$$

算符$a_m(K)$和$a_m^\dagger(K)$在所有其它占有数中都是对角的．如果在这个表象中，η是对角算符：

$$\begin{aligned}&\Big(\Phi(\cdots n_m(K)\cdots),\ \eta\Phi(\cdots n'_m(K)\cdots)\Big)\\&\quad=(-1)^{n_4}\prod_K\prod_{m=1}^{4}\delta[n_m(K),\ n'_m(K)],\end{aligned}\qquad (10.10)$$

式中，n_4是在态$\Phi(\cdots n_m(K)\cdots)$中的标光子总数，即有

$$n_4=\sum_K n_4(K)\qquad (10.11)$$

于是我们可直接证明η满足（10.7）式．

根据附加条件（9.24）式和期待值的定义（10.4）式，洛仑兹条件变成：

$$\left\langle\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right\rangle=\left(\Phi,\ \eta\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\Phi\right)=0\qquad (10.12)$$

根据上式，我们足以建立量子化理论和经典电动力学之间的联系．为了证明（10.12）式，我们注意到，根据（10.6—7）式和$(A^+)^\dagger=A^-$，我们有

$$\left(\eta\frac{\partial A_\mu^-(x)}{\partial x_\mu}\right)^\dagger=\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu}\eta=\eta\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu}\qquad (10.13)$$

根据附加条件（9.24）式，我们可得

$$\left(\Phi,\ \eta\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\Phi\right)=\left(\Phi,\ \eta\frac{\partial A_\mu^-}{\partial x_\mu}\Phi\right)$$

$$=\left(\eta\frac{\partial A_\mu^+}{\partial x_\mu}\Phi,\ \Phi\right)\ =0 \qquad (10.14)$$

(10.13—14)式的推导如下：

$$\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu}\eta=\frac{\partial A_r^+(x)}{\partial x_r}\eta+\left(\frac{\partial A_4^+(x)}{-\partial x_4}\right)\eta,\quad (\text{代入}(10.6)\text{式})$$

$$=\eta\frac{\partial A_r^+(x)}{\partial x_r}+\eta\frac{\partial A_4(x)}{\partial x_4}=\eta\frac{\partial A_\mu^+(x)}{\partial x_\mu} \qquad (10.13)$$

$$\left(\Phi,\ \eta\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)=\left(\Phi,\eta\frac{\partial A_\mu^+}{\partial x_\mu}\Phi\right)+\left(\Phi,\eta\frac{\partial A_\mu^-}{\partial x_\mu}\Phi\right),\quad (\text{代入}(9.24)\text{式})$$

$$=\left(\Phi,\eta\frac{\partial A_\mu^-}{\partial x_\mu}\Phi\right) \qquad (10.14)$$

现在，我们来看看，附加条件（9.24）对态矢量究竟施加了什么限制.根据（9.25）式，我们有

$$[a_3(\boldsymbol{K})+ia_4(\boldsymbol{K})]\Phi=0 \qquad (10.15)$$

这就是对态Φ中纵光子和标光子的所能容许的混合的限制条件.

设$\Phi_{\boldsymbol{K}}(n_3,\ n_4)$是有$n_3$个动量为$\boldsymbol{K}$的纵光子和$n_4$个动量为$\boldsymbol{K}$的标光子的矢量场$A_\mu$的归一化的本征态.根据对易关系（9.18）式，容易看出

$$[\{a_3(\boldsymbol{K})+ia_4(\boldsymbol{K})\},\ \{a_3^\dagger(\boldsymbol{K})+ia_4^\dagger(\boldsymbol{K})\}]=0 \qquad (10.16)$$

因此，满足附加条件（10.15）式的归一化纵、标光子态是

$$\Phi_{\boldsymbol{K}}^{(\nu)}=\frac{1}{\sqrt{(\nu)!}}\left(a_3^\dagger(\boldsymbol{K})+ia_4^\dagger(\boldsymbol{K})\right)^\nu\Phi_{\boldsymbol{K}}(0,\ 0),\ \nu=0,1,2,\cdots \qquad (10.17)$$

显然，这是纵、标光子总数为$\nu=n_3+n_4$（没有横光子）的矢量A_μ的本征态.$\Phi_{\boldsymbol{K}}(0,0)$是既没有横光子也没有纵、标光子的矢量场$A_\mu$的本征态.将（10.17）式展开，即有

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_K^{(0)} = \Phi_K(0,\ 0)\\
&\Phi_K^{(1)} = \Phi_K(1,\ 0) + i\Phi_K(0,\ 1)\\
&\Phi_K^{(2)} = \Phi_K(2,0) + i\sqrt{2}\,\Phi_K(1,\ 1) - \Phi_K(0,\ 2)\\
&\Phi_K^{(3)} = \Phi_K(3,0) + i\sqrt{3}\,\Phi_K(2,1) - \sqrt{3}\,\Phi_K(1,2) - i\Phi_K(0,3)\\
&\cdots\cdots\\
&\Phi_K^{(\nu)} = \Phi_K(\nu,\ 0) + i\sqrt{\nu}\,\Phi_K(\nu-1,\ 1) + \cdots\\
&\qquad + i^r\sqrt{{}^{\nu}C_r}\,\Phi_K(\nu-r,r) + \cdots\cdots + i^{\nu}\Phi_K(0,\ \nu)\\
&\qquad = \sum_{r=0}^{\nu} i^r\sqrt{{}^{\nu}C_r}\,\Phi_K(\nu-r,\ r)
\end{aligned}\right\} \quad (10.18)
$$

式中，$^{\nu}Cr = \dfrac{\nu!}{r!(\nu-r)!}$。上式清楚地表明，矢量场$A_\mu$的本征态不可能都是量子电磁场的物理态，只有把这些本征态按照（10.17）式进行线性叠加后才能得到量子电磁场的物理态。例如，纵、标光子总数为3的物理态$\Phi_K^{(3)}$，是四个A_μ的本征态$\Phi_K(3,\ 0)$，$\Phi_K(2,1)$，$\Phi_K(1,\ 2)$和$\Phi_K(0,\ 3)$按（10.18）式中第四式的规则进行线性叠加后得到的。

由（10.17—18）式，我们可得

$$
\left(\Phi_K^{(\nu)},\ \eta\,\Phi_{K'}^{(\nu')}\right) = \delta_{KK'}\,\delta^{\nu}_{\nu'}\sum_{r=0}^{\nu}(-1)^r\,{}^{\nu}C_r = \delta_{KK'}\,\delta^{\nu}_{\nu'}\delta^{\nu}_{0} \qquad (10.19)
$$

上式表明，由（10.17）式确定的这些物理态相互正交，并且所有存在有纵、标光子的物理态（即$\nu \neq 0$）的模方都是零，只有不存在有纵、标光子的物理态（即$\nu = 0$）$\Phi_K^{(0)} = \Phi_K(0,\ 0)$的模方是1。

根据上面的结果，我们可得满足附加条件的最一般的态矢为

$$
\Phi = \sum_i\sum_{\nu} c_i(\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots\cdots,\ \nu_r,\ \cdots\cdots)\,\Phi_T^{(i)}\left\{\prod_{r=1}^{\infty}\Phi_{K_r}^{(\nu_r)}\right\} \qquad (10.20)
$$

式中，$\sum_{\nu}$表示遍及于ν_1，$\nu_2\cdots\cdots = 0$，1，2，……，的求和，仅存在有横光子的态矢$\Phi_T^{(i)}$形成一个完全系。把不含纵光子或标光子的项分出来，则（10.20）式可写成：

$$
\Phi = \Phi_T\Phi_{LS}^{(0)} + \Phi_{LS} \qquad (10.21)
$$

式中，

$$
\Phi_{LS}^{(0)} = \prod_r \Phi_{K_r}^{(0)} \qquad (10.22)
$$

$\Phi_{LS}^{(0)}$ 是不含有纵光子和标光子的态，$\Phi_T = \sum_n \alpha_n \Phi_T^{(n)}$ 是仅含有横光子的一般态矢；Φ_{LS} 和 $\Phi_{LS}^{(0)}$ 相互正交，所以 Φ_{LS} 必定含有纵光子和标光子．Φ_{LS} 包含了（10.20）式中所有那些 ν_r 不全为零的项．（10.20）式表明，满足附加条件的一般态不可能含有任意数目的纵光子和标光子；说得更确切一点，纵光子和标光子的数目必须满足（10.17—18）式。（10.20）式中的系数 $C_i(\nu_1, \cdots)$ 是任意的．以后，我们将把纵光子和标光子的这些组合称为可容许的组合，相应的态称为可容许的态．现在，我们将看到，当 Φ_T 一定而可容许的组合不同时，态矢（10.21）式相当于使用与一个规范变换相关的不同矢量势来描述电磁场．

根据（10.17—22）式，对于具有相互独立的纵标光子的可容许组合的两个态，我们可推出：

$$(\Phi,\ \eta\Phi') = (\Phi_T,\ \Phi_T') \tag{10.23}$$

（10.23）式的推导如下：

$$(\Phi, \eta\Phi') = ((\Phi_T\Phi_{LS}^{(0)} + \Phi_{LS}),\ \eta(\Phi_T'\Phi_{LS}^{(0)} + \Phi_{LS}'))$$

$$= (\Phi_T\Phi_{LS}^{(0)},\ \eta\Phi_T'\Phi_{LS}^{(0)}) + (\Phi_{LS},\ \eta\Phi_T'\Phi_{LS}^{(0)})$$

$$+ (\Phi_T\Phi_{LS}^{(0)},\ \Phi_{LS}') + (\Phi_{LS},\ \Phi_{LS}') \quad [\text{代入（10.19）式}]$$

$$= \langle\Phi_T \mid \langle\Phi_{LS}^{(0)} \mid \eta \mid \Phi_{LS}^{(0)}\rangle \mid \Phi_T'\rangle \quad [\text{代入（10.19）式}]$$

$$= \langle\Phi_T \mid \Phi_T'\rangle = (\Phi_T,\ \Phi_T')$$

为了表明不同的容许组合等效于选取不同的规范，让我们来考查没有横光子存在（$\Phi_T^{(0)}$）而只有纵、标光子的容许组合存在的态 Φ：

$$\Phi = \Phi_T^{(0)}\{\Phi_{LS}^{(0)} + \sum C(\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots)\prod \Phi_{k_r}^{(\nu_r)}\},\ (\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots$$

$$0 =, 1, 2, \cdots\cdots \nu_r;\ \nu_r\text{不全为 } 0) \tag{10.24}$$

系数 $C(\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots)$ 可取任意值。现在，我们来计算场算符 $A_\mu(x)$ 在态 Φ 的期待值（参见习题10.1），由（10.17—24）式，我们可得：

$$\langle A_\mu(x)\rangle = (\Phi,\ \eta A_\mu(x)\Phi) = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_\mu} \tag{10.25}$$

$$\Lambda(x) = \frac{i}{\sqrt{V}}\sum_S \frac{1}{\sqrt{2k_0^S}}\{-C_1(K_S)e^{-ik_Sx} + C_1^+(K_S)e^{ik_Sx}\} \tag{10.26}$$

式中，$k_0=|K_S|$，$C_1(K_S)$就是（10.24）式中的系数$C(\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots)$，其中

$$\left.\begin{aligned}\nu_s&=1,\\ \nu_r&=0,\ r\neq s\end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

（10.25—26）式表明，改变态矢中纵、标光子的容许组合，就相当于对态矢作了一个规范变换．这里，我们仅仅是对系数$C_1(K)$作了证明，然而，如果我们计算矢势乘积的期待值及其规范变换，那么，我们就会发现，上面的结论对（10.24）式中的其他系数来说也是成立的．因此，对量子电磁场采用有纵、标光子的容许组合的物理态，就等效于对电磁场选取一定的规范，这对电磁场的物理内容没有作任何改变．同样，我们可以对横光子的真空态（transverse vacuum）$\Phi_T^{(0)}$〔(10.24)式〕作出类似的考虑，并且把它应用到任一仅有横光子存在的态矢Φ_T中去．一个特别简单和有用的规范相应于定义真空态Φ_0，在真空态中，没有任何光子存在，即在（10.24）式中，所有的系数$C(\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots)=0$：

$$\Phi_0=\Phi_T^{(0)}\prod_r\Phi_{K_r}^{(0)} \tag{10.28}$$

这相应于选取一个规范，在这个规范中，

$$(\Phi_0,\ \eta A_\mu\Phi_0)=(\Phi_0,\ A_\mu\Phi_0)=0 \tag{10.29}$$

上面，我们对自由电磁场的情况作了讨论．当有电荷存在时，情况就变得更为复杂．这时，我们应当用四维电流密度矢量〔$-e\,s_\mu(x)$〕〔参见（7.8）式〕和相互作用哈密顿量密度〔(4.2)式〕来描述所发生的情况．下面，我们就来简单讨论一下，如何将上面对自由电磁场所作的讨论加以修正．

相互作用表象中的态矢量现在变成一个与时间相关的量$\Phi(t)$，$\Phi(t)$满足运动方程（5.8）式．附加条件（9.24）式和可容许的态都必须加以修正，附加条件现在变成

$$\Omega^+(x',\ t)\Phi(t)=0,\ \text{对}x'\text{的所有值} \tag{10.30}$$

式中，

$$\Omega^+(x',\ t)=\frac{\partial A_\mu^+(x')}{\partial x'_\mu}+e\int_{x_0=t}D^+(x'-x)\rho(x)d^3x \tag{10.31}$$

这里，$\rho(x)=s_4(x)/i$，$D^+(x)$是$D(x)$的正频部分〔参见(9.13)式〕．（10.30）式所给出的附加条件是更一般的，我们能够证明它和运动方程是相容的．这就是说，如果在某一时刻t_0，附加条件（10.30）式成立，那么它就将在任何时刻都成立．

在上一章中我们说过，在考虑散射问题时，我们将使用绝热截止方法．在第十二章中我们将详细讨论这个问题。根据绝热截止方法，耦合常数e将是时间t的函数，$e=e(t)$，并且当$|t|\to\infty$时，$e\to0$；这就是说，在散射发生以前很久以及在散射发生以后

很久，相互作用被“关掉”了。由（10.30—31）式，我们可以看到，这就意味着初态 $\Phi_i = \Phi(-\infty)$，通过运动方程（5.8）式，我们可以从 Φ_i 得到终态 $\Phi(+\infty)$。Φ_i 和 $\Phi(+\infty)$都满足自由场附加条件（9.24）式。因此，对这些态而言，所容许的态矢量的形式如（10.20—22）式及（10.17）式所示。

因此，我们总能把初态 $\Phi_i = \Phi(-\infty)$选成没有纵、标光子存在的态；这相当于选择一个特殊规范。于是，态 $\Phi(+\infty)$仍然是一个可容许的态。在散射理论中，我们感兴趣的仅仅是从态 Φ_i跃迁到某一特定终态 Φ_j的几率幅。根据（10.23）式，我们可以看到，这个几率幅和纵、标光子的组合无关，所以，我们可以把 Φ_j 选择为不含有纵、标光子的态。并且，我们还可以从几率幅中略去度规算符 η，而把几率幅简单地写成（Φ_j，$\Phi(+\infty)$）。为方便起见，我们把上述重要结果概述如下：在散射问题中使用绝热截止方法来计算跃迁 $\Phi_i \to \Phi_j$ 的几率幅时，我们可以仅用横光子来描述初态 $\Phi_i = \Phi(-\infty)$和某一特定终态 Φ_j。并且，由于度规算符 η 现在等于 1，所以，我们可以从几率幅中把度规算符 η 略去。当然，我们并不就把纵光子和标光子一起放弃。在荷电粒子之间发生散射作用时，如果它们靠得很近，那末就会有瞬间库仑相互作用。这时，我们就可以用纵、标光子来描述这个库仑作用。在我们的阐述中，瞬间库仑相互作用是通过 D_F-函数（9.14—15）式出现的。D_F 函数代表了荷电粒子之间四种类型光子的交换。正如前面所说，这样的描述强调了理论的相对论性质。和仅考虑横场量子化的方法相比较，使用 D_F 函数描述的方法要简单得多。

第十一章　相互作用

在第四章中，我们引进了理想化的相互作用（4.1）式．在（4.1）式中，只有玻色子场被量子化了，而费米子则仍然是用经典理论来描述．现在，我们来讨论更实际的情况，这就是两个量子化场的相互作用．

首先，我们来分析电子和光子的相互作用，即量子电动力学．这种情况下的相互作用哈密顿量密度就是我们在第四章中引进的（4.2）式：

$$\mathscr{H}_I(x) = e s_\mu(x) A_\mu(x) \tag{11.1}$$

式中，$A_\mu(x)$ 就是在第九章中讨论过的光子场，$s_\mu(x)$ 是电子-正电子流（8.32）式．然而，由于我们在这里只讨论相互作用的定性特征，所以，我们将不按正确对称化的形式（8.32）式来写出四维电流-电荷密度矢量，而仅仅使用狄拉克单粒子理论的表示式：

$$s_\mu(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \tag{11.2}$$

于是，把场分解成正频部分和负频部分并省略掉变量x后，（11.1）式就变成：

$$\mathscr{H}_I(x) = ie(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)\gamma_\mu(\psi^+ + \psi^-)(A_\mu^+ + A_\mu^-) \tag{11.3}$$

（11.3）式中的算符$\psi^\pm$等和吸收算符及产生算符的相关性如下：

$$\begin{aligned}
&\psi^+ \text{是电子吸收算符的线性函数}\\
&\bar{\psi}^- \text{是电子产生算符的线性函数}\\
&\bar{\psi}^+ \text{是正电子吸收算符的线性函数}\\
&\psi^- \text{是正电子产生算符的线性函数}\\
&A_\mu^+ \text{是光子吸收算符的线性函数}\\
&A_\mu^- \text{是光子产生算符的线性函数}
\end{aligned} \tag{11.4}$$

根据（11.4）式，在哈密顿量（11.3）式中，能够对吸收一个电子（ψ^+）和吸收一个光子（A_μ^+）并发射一个电子（$\bar{\psi}^-$）的跃迁产生影响的项是：

$$ie\bar{\psi}^-\gamma_\mu A_\mu^+\psi^+ \tag{11.5}$$

这个电子散射事件可以用图9表示如下：图中，实线代表电子，虚线代表光子．入射粒子用一条指向顶点x的带箭头的线来代表，出射粒子则用一条从x点出发的带箭头的线来代表．顶点代表不同粒子的相互作用，在顶点x

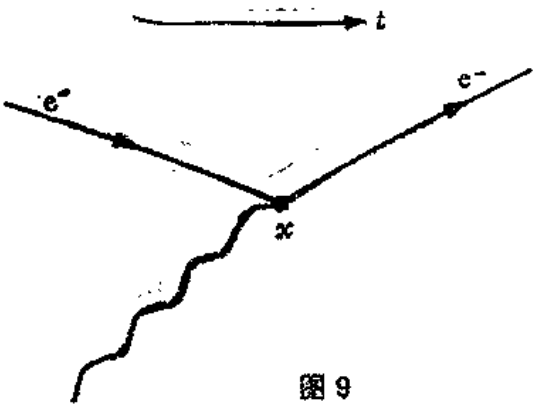


图9

处，入射粒子被吸收，而出射粒子被产生。我们把象图 9 这样的图，称为费曼图（Feynman graph）。

类似地，我们可以把（11.3）式中的所有其他项解释成电子散射，正电子散射，电子-正电子对的产生或淹没。在每种情况中，都会有一个光子或被发射，或被吸收，这取决于相应的项中是含 A_μ^- 还是 A_μ^+。为了能用费曼图来表示这些事件，我们必须把电子和正电子的图形表示区别开来。对于费米子来说，一条指向顶点 x 的带箭头的实线就表示在顶点 x 处吸收了一个电子或产生了一个正电子，一条从顶点 x 出发的带箭头的实线就表示在顶点 x 处吸收了一个正电子或产生了一个电子。因此，在代表费米子的实线上，指向顶点 x 的箭头和算符 $\psi^\pm(x)$ 相关，从 x 点出发的箭头和算符 $\overline{\psi}^\pm(x)$ 相关。根据上述规定，我们可把(11.3)式中的不同的项用图10中的费曼图来表示。在每种情况下，一条费米子线或是在顶点处结束，或是在顶点处出发。在同一条费米子线上的箭头，其意义都相同。为了在图中把电子和正电子区分开来，例如把图10a 的电子散射和图10b 的电子散射区分开，我们规定，在电子线上的箭头总是“向右”，在正电子线上的箭头总是“向左”。

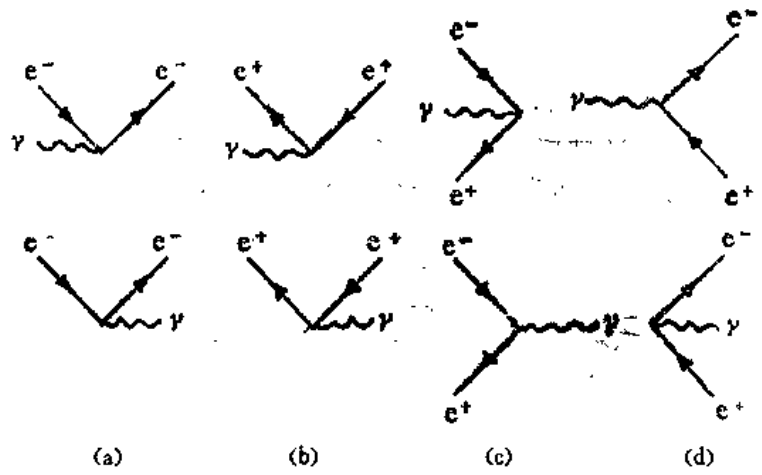


图10

(a) 电子散射：$ie\overline{\psi}^-\not{A}\psi^+$；(b) 正电子散射：$ie\overline{\psi}^+\not{A}\psi^-$；
(c) 电子－正电子对产生：$ie\overline{\psi}^-\not{A}\psi^-$；(d) 电子－正电子对湮没：$ie\overline{\psi}^+\not{A}\psi^+$

在图10中，我们依据 A_μ 而不是 A_μ^+ 写下了相应的相互作用，因此，我们还没有确定各个图中的光子是被吸收还是被发射。在第十三章中，我们将看到，和同一个顶点相关的三个粒子的四维能量-动量矢量必须满足能量-动量守恒定律。例如，和同一个顶点相关的三个粒子不可能都被发射或者都被吸收。我们已经相当详细地解释了在画费曼图时所应遵照的规定。我们将发现，在对数学机制作出直观的物理解释方面，费曼图是极端有用的。在后面两章中，我们将对数学机制加以详细讨论。

在量子电动力学中，对相互作用的了解是根据经典物理获悉的。但是，一般说来，我们并不知道如何根据各别的场来建立相互作用。例如，π 介子-核子力的情况就是这样。不过，对理论的不变性（例如在洛仑兹变换下的不变性）和对称性的要求严格地限制了相互作用的可能形式。现在，我们就来对这些问题加以讨论。

我们只考虑定域相互作用.这种相互作用仅取决于场及场的时空导数在点x的值.量子电动力学中的相互作用(11.1)就是这种类型.考虑更一般的非定域相互作用也是可能的,但是这样的理论遇到了相当大的困难,特别是关于洛仑兹不变性的困难.

不包含场的导数值的定域相互作用在洛仑兹变换下的不变性,意味着相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I(x)$在洛仑兹变换下是一个标量.为此,我们假定根据第二章中的拉格朗日量-哈密顿量机制,能够从拉格朗日密度$\mathscr{L}_0$和$\mathscr{L}$导出有相互作用场的理论和无相互作用场的理论.在第二章中,我们看到,理论的相对论不变性要求$\mathscr{L}_0$,$\mathscr{L}$和相互作用拉格朗日量密度$\mathscr{L}_I$是标量.其中$\mathscr{L}_I$为

$$\mathscr{L}_I = \mathscr{L} - \mathscr{L}_0 \tag{11.6}$$

倘若$\mathscr{L}_I$仅取决于场值而和场的导数值无关,则在导出相应于拉格朗日量密度$\mathscr{L}_0$和$\mathscr{L}$的哈密顿量密度$\mathscr{H}_0$和$\mathscr{H}$后,可从(2.13)和(2.17)立刻推出

$$\mathscr{H}_I \equiv \mathscr{H} - \mathscr{H}_0 = -\mathscr{L}_I \tag{11.7}$$

因此,这时$\mathscr{H}_I$也必定是一个标量,例如,(11.1)式的情形就是如此.这代表了对相互作用形式的一个很严格的限制.

作为一个例子,我们来考虑介子场$\phi(x)$和核子的相互作用,核子用旋量场$\psi(x)$和$\bar{\psi}(x)$来描述.假定介子自旋为0,不带电,具有偶宇称,也就是说,是中性标量介子.这就是说,在空间坐标反射下:$\mathbf{X}\to\mathbf{X}' = -\mathbf{X}$,场$\phi(x)$保持不变:

$$\phi(\mathbf{X},t)\to\phi'(\mathbf{X},t) = \phi(-\mathbf{X},t) \tag{11.8}$$

根据旋量场ψ和$\bar{\psi}$,我们能够构造出五个基本协变量(A11)式.于是,由(A11)式和介子场量$\phi(x)$,我们必须构造出一个标量.在相互作用对$\phi(x)$,$\psi(x)$,$\bar{\psi}(x)$都必须是线性的限制条件下,仅有的不包含导数的标量相互作用是:

$$\mathscr{H}_I(x) = g\bar{\psi}(x)\phi(x)\psi(x) \tag{11.9}$$

这个相互作用的形式和(11.3)式相同,因而可用相似的费曼图来予以解释.耦合常数g和(11.3)式中的e相对应,它表征了两个场相互作用的强弱.

如果我们用赝标量介子来代替标量介子,即在空间反射下,我们有

$$\phi(\mathbf{X},t)\to\phi'(\mathbf{X},t) = -\phi(-\mathbf{X},t) \tag{11.10}$$

于是,在和(11.9)式相同的限制条件下,唯一可能不包含导数的标量相互作用是:

$$\mathscr{H}_I(x) = ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\phi(x)\psi(x) \tag{11.11}$$

我们在上式中引进了因子i,这样,当耦合常数g为实数时,算符$\mathscr{H}_I$是厄密的.

利用反对易关系对相互作用(11.11)式中的旋量部分进行代数运算,我们能够把(11.11)式写成和电动力学中的相互作用相似的对称形式(参见习题11.1):

$$\mathscr{H}_I(x) = \frac{i}{2}g[\bar{\psi},\ \gamma_5\psi]\phi \tag{11.12}$$

上面讨论的相互作用是基于自然定律在空间反射下保持不变的假定，也就是说，这些相互作用在左手坐标系和右手坐标系中具有相同的形式.这就是宇称守恒定律.目前，人们确信，宇称守恒对所谓强相互作用（如π介子-核子相互作用，核子-核子相互作用）和电磁相互作用是成立的.但是，在弱相互作用（如β-衰变，超子、K介子、π介子和μ介子的衰变）中，宇称并不守恒.如果对于某一特定的相互作用，比如说β-衰变，我们不再要求宇称守恒，那末相应的哈密顿量密度$\mathscr{H}_I$，也就不再需要在空间反射下保持不变了.

如果相互作用包含了导数，那末相互作用拉格朗日量密度$\mathscr{L}_I$将仍是标量，不过（11.7）式将不再成立.根据（2.13）和（2.17）式，在相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I$中将出现附加项，并且还有其他复杂性出现.然而，我们可以证明，在下一章将阐述的微扰理论中，这些附加项和复杂性可以被忽略掉.这就是说，在实际应用中，我们可以把相互作用拉格朗日量密度$\mathscr{L}_I$当成相互作用哈密顿量密度*）.因此，我们可以用和处理无导数耦合相同的方式来处理有导数的耦合.例如，对于和核子相互作用的赝标介子来说，我们得到所谓ps（pv）相互作用：

$$\mathscr{H}_I(x)=i\frac{f}{m}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\psi \tag{11.13}$$

式中，f是耦合常数，但由于存在有因子$1/m$，所以，象（11.11）式中的g那样，是无量纲的.这里，ps代表介子的赝标量特性（Pseudo-scalar），括号中的pv代表旋量场的赝矢量协变性（Pseudo-vector）.类似地，相互作用（11.9）式可称为s（s）相互作用；相互作用(11.11)式可称为ps(ps）相互作用.ps(ps)相互作用没有非相对论极限存在（所谓非相对论极限，是指核子的速度v和光速相比是相当小的），这即是说，在表象（A7）中，“离开对角线”（Off-diagonal）的算符γ_5把四维旋量的大分量和小分量联系起来了.另一方面，ps(pv)相互作用则存在有一个非相对论极限.这个非相对论的ps(pv)相互作用是（参见习题11.2）：

$$\mathscr{H}_I^{NR}(x)=\frac{f}{m}(\psi^+\sigma\psi)\nabla\phi \tag{11.14}$$

虽然ps(ps)相互作用和ps(pv)相互作用是完全不同的，然而，我们能够证明，如果我们取

$$\frac{f}{m}=\frac{g}{2M} \tag{11.15}$$

那末，ps(ps)和ps(pv)相互作用到耦合常数的一级是完全等价的**）.

对于和电磁场（用矢势$A_\mu(x)$来表示）之间的相互作用而言，规范不变性的要求对相互作用的形式施加了进一步的严格限制.当然，我们没有要求相互作用项本身而仅仅

*）参见 Matthews, P.T., Phys. Rev. Vol. 76, P. 84, 1949 and ibid. P. 1419 (erratum).

**）参见 Schweber, S.S. et al. “Fields”, in Mesons and Fields, Vol.I, Evanston, Ill, Row, Peterson, 1955.

是要求总哈密顿量是规范不变的.现在，我们必须把（9.3）式所给出的规范变换的定义加以推广．因为把第一型规范变换运用到与光子相互作用的荷电粒子的场量上，我们有可能补偿由（9.3）式的规范变换所引起的变化.于是，理论仅需要在这样的联合变换下保持不变.我们把这样的联合变换称为第二型的规范变换.对量子电动力学而言，这些推广的规范变换是（参见习题11.3）：

$$\left.\begin{aligned} A_\mu' &= A_\mu - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} \\ \psi' &= \psi e^{ie\Lambda(x)} \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{-ie\Lambda(x)} \end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

（11.11）式是中性介子的 ps（ps）相互作用，它相应于象 $P \to P + \pi^0$ 这样的基本过程.然而，我们还必须考虑荷电介子，在 $N \to P + \pi^-$ 或者 $\pi^+ + N \to P$ 这样的过程中，我们可以从实验上观察到荷电介子.在上述过程中，π^-介子的发射或π^+介子的吸收都伴随着一个中子变成质子，这说明电荷守恒似乎是严格成立的．由此，我们可以想到，中子和质子是同一个粒子（核子）的两个不同的电荷态．在过程当中，核子电荷的变化方式，和核子自旋变化的方式相同.

电荷态和自旋态之间的这种类似，使我们可以把一个核子的质子态和中子态表示如下：

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.17}$$

于是，可以看到，这两个矢量张成了一个同位旋空间，这个空间非常类似于自旋为 1/2 的粒子的普通自旋空间．由此，我们可以引进和泡利矩阵类似的算符，这些算符在同位旋空间中作用：

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.18}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

于是我们有

$$\left.\begin{aligned} \tau_3 P &= P & \tau_+ N &= \sqrt{2}P \\ \tau_3 N &= -N & \tau_- P &= \sqrt{2}N \end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

由（11.20）式，可知核子的质子态和中子态就是算符 τ_3 的本征态，其本征值分别为 $+1$和 -1．由上所述，我们说核子的同位旋为$\frac{1}{2}$，其含意和说核子的普通自旋为$\frac{1}{2}$一样.

现在，我们要运用上述概念来研究荷电介子和核子的相互作用．由（7.17）式，我

们有

$$\phi_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{11.21}$$

式中，ϕ_C是荷电介子的场量，下标C表示荷电，相应地，我们用ϕ_0来表示中性介子的场量。ϕ_C吸收π^+介子并产生π^-介子。因此，为了保证电荷守恒，我们把$ps(ps)$相互作用写成下列形式：

$$\mathscr{H}_I(x) = ig_C[\bar{\psi}_P\gamma_5\psi_N\phi_C + \bar{\psi}_N\gamma_5\psi_P\phi_C^+] + ig_N\bar{\psi}_N\gamma_5\psi_N\phi_0 + ig_P\bar{\psi}_P\gamma_5\psi_P\phi_0 \tag{11.22}$$

式中，ψ_P和$\bar{\psi}_P$是质子的旋量场场量，ψ_P吸收质子或产生反质子，$\bar{\psi}_P$产生质子或吸收反质子；ψ_N和$\bar{\psi}_N$的意义可类推。(11.22)式中的第一项相应于下列基本过程之一：

$$\left.\begin{array}{ll} N\to P+\pi^- & \pi^+ + N\to P \\ \bar{P}\to\bar{N}+\pi^- & \pi^+ + \bar{P}\to\bar{N} \end{array}\right\} \tag{11.23}$$

式中，$\bar{P}$和$\bar{N}$代表反质子和反中子。(11.22)式中的第二项代表四个电荷共轭反应(即粒子和反粒子互换的反应)，这样，(11.23)式中的第一个反应就变成：

$$\bar{N}\to\bar{P}+\pi^+ \tag{11.24}$$

余类推。(11.22)式中的第三项和第四项和核子吸收或发射π^0介子的八个可能过程相对应。(11.22)式中的三个耦合常数g_C，g_N和g_P必须是实数，以保证哈密顿量密度$\mathscr{H}_I(x)$是厄密的。

现在，我们把质子场和中子场合并成八个分量的旋量算符，用来表示核子场场量：

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_P \\ \psi_N\end{pmatrix},\quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix}\bar{\psi}_P & \bar{\psi}_N\end{pmatrix} \tag{11.25}$$

我们称ψ和$\bar{\psi}$为同位旋旋量，它们既是八个分量的时空旋量，又同时是同位旋空间的二分量旋量，不过这时的每个分量本身都是四个分量的时空旋量。根据(11.18—19)式，我们可立刻得出：

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\psi}\tau_+\gamma_5\psi = \sqrt{2}\,\bar{\psi}_P\gamma_5\psi_N \\ \bar{\psi}\tau_-\gamma_5\psi = \sqrt{2}\,\bar{\psi}_N\gamma_5\psi_P \end{array}\right\} \tag{11.26}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\psi}\dfrac{1-\tau_3}{2}\gamma_5\psi = \bar{\psi}_N\gamma_5\psi_N \\ \bar{\psi}\dfrac{1+\tau_3}{2}\gamma_5\psi = \bar{\psi}_P\gamma_5\psi_P \end{array}\right\} \tag{11.27}$$

上述结果和(11.20)式非常类似：τ_+把一个中子转换成质子，τ_-把一个质子转换成中子。把(11.26—27)式，(11.21)和(11.19)式代入(11.22)式，我们可以把相互作用重新写成：

$$\mathscr{H}_I(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}g_c\bar{\psi}(\tau_1\phi_1+\tau_2\phi_2)\gamma_5\psi+\frac{i}{2}(g_P+g_N)\bar{\psi}\phi_0\gamma_5\psi+\frac{i}{2}(g_P-g_N)\bar{\psi}\tau_3\phi_0\gamma_5\psi \tag{11.28}$$

（11.26）式的推导如下：

首先，我们要注意的是，同位旋空间是一个抽象空间。（11.25）式定义的ψ和$\bar{\psi}$是同位旋空间中的二分量旋量，（11.18—19）定义的算符是在同位旋空间中作用的矩阵，普通四维空间中的矩阵γ_5在同位旋空间中则仅仅是一个数。由此，我们可得：

$$\bar{\psi}\tau_+\gamma_5\psi=(\bar{\psi_P}\quad\bar{\psi_N})\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}\\0&0\end{pmatrix}\gamma_5\begin{pmatrix}\psi_P\\\psi_N\end{pmatrix}=(\bar{\psi_P}\quad\bar{\psi_N})\begin{pmatrix}\sqrt{2}\gamma_5\psi_N\\0\end{pmatrix}=\sqrt{2}\bar{\psi}_P\gamma_5\psi_N \tag{1}$$

这就是（11.26）式的第一式，类似地，可得出（11.26）式的第二式。

（11.28）式的推导如下：

由（11.22）式，我们可得：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_I(x)&=ig_c\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\tau_+\gamma_5\psi\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\tau_-\gamma_5\psi\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2)\right]\\&\quad+ig_N\bar{\psi}\frac{1-\tau_3}{2}\gamma_5\psi\phi_0+ig_P\bar{\psi}\frac{1+\tau_3}{2}\gamma_5\psi\phi_0\\&=ig_c\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1+i\tau_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1-i\phi_2)\gamma_5\psi\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1-i\tau_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2)\gamma_5\psi\right]\\&\quad+ig_N\bar{\psi}\frac{1-\tau_3}{2}\gamma_5\psi\phi_0+ig_P\bar{\psi}\frac{1+\tau_3}{2}\gamma_5\psi\phi_0\\&=\frac{i}{\sqrt{2}}g_c\bar{\psi}\left[\frac{1}{2}(\tau_1\phi_1+i\tau_2\phi_1-i\tau_1\phi_2+\tau_2\phi_2)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}(\tau_1\phi_1-i\tau_2\phi_1+i\tau_1\phi_2+\tau_2\phi_2)\right]\gamma_5\psi\\&\quad+\frac{i}{2}(g_N+g_P)\bar{\psi}\phi_0\gamma_5\psi+\frac{i}{2}(g_P-g_N)\bar{\psi}\tau_3\phi_0\gamma_5\psi\\&=\frac{i}{\sqrt{2}}g_c\bar{\psi}(\tau_1\phi_1+\tau_2\phi_2)\gamma_5\psi+\frac{i}{2}(g_P+g_N)\bar{\psi}\phi_0\gamma_5\psi\\&\quad+\frac{i}{2}(g_P-g_N)\bar{\psi}\tau_3\phi_0\gamma_5\psi\end{aligned} \tag{2}$$

这就是（11.28）式.

现在，我们可以把$\vec{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$看成是三维同位旋空间中的一个矢量，当同位旋空间中的坐标系旋转时，$\vec{\tau}$将象一个矢量那样变换，于是将使同位旋波函数（11.17）式产生相应的变换.如果我们设

$$\phi_3=\phi_0 \tag{11.29}$$

并且定义$\vec{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$也是三维同位旋空间中的一个矢量，则在同位旋空间中，（11.28）式对坐标系的旋转变换保持不变.可以证明，这实际上就表示了电荷守恒.我们已经看到，电荷守恒，即连续性方程的成立，事实上就是理论在第一型规范变换下保持不变的结果*）.第一型规范变换（7.4）式，是根据实场ϕ_1和ϕ_2来表出的：

$$\left.\begin{aligned}\phi_1\to\phi_1'&=\phi_1\cos\alpha+\phi_2\sin\alpha\\ \phi_2\to\phi_2'&=-\phi_1\sin\alpha+\phi_2\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

根据（11.30）式，我们可把第一型规范变换看成是同位旋空间中围绕第三轴转过一个角度α的旋转变换.

如果我们要求相互作用（11.28）式在同位旋空间中的旋转变换下保持不变，理论就需要有更大的对称性.这样，相互作用仅和标积$\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}$有关，这就要求

$$g_P+g_N=0,\quad \frac{1}{2}(g_P-g_N)=\frac{1}{\sqrt{2}}g_c \tag{11.31}$$

由此可得

$$g_P=-g_N=\frac{1}{\sqrt{2}}g_c\equiv g \tag{11.32}$$

于是相互作用（11.28）式变成：

$$\mathscr{H}_I(x)=ig\bar{\psi}(\vec{\tau}\cdot\vec{\phi})\gamma_5\psi \tag{11.33}$$

（11.33）式的相互作用将把我们引向克茂（Kemmer）的对称ps（ps）介子理论**），这个理论可得出与电荷无关的核子-核子相互作用.类似地，这个理论对π介子-核子相互作用也引进了附加的对称性，我们把这个对称性也称为电荷无关性，这就可以用一个耦合常数g来代替三个独立的耦合常数g_c，g_P，g_N.在核子-核子相互作用和介子-核子相互作用中，电荷无关性都很好地成立.

利用同位旋空间中的旋转不变性，我们能够在数学上把电荷无关性表示出来.于是，我们可以得出一个“同位旋守恒”的推论，这个推论非常类似于角动量守恒定律.对于介子-核子相互作用和核反应，由同位旋守恒可得出同位旋选择定则.例如，π介子的同位旋为1，和它的三个电荷态相对应.设有一个由π介子和核子组成的系统，则系统的总同位旋T是π介子同位旋1和核子同位旋$\frac{1}{2}$的矢量和，T只能取两个值：$\frac{1}{2}$和$\frac{3}{2}$.

*）参看：程国均编著，群表示论及其在量子力学中的应用，第五章，四川大学出版社，1988年.

**）参见 Kemmer, N., Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 34, P.354, 1938.

第十二章　散射矩阵

在本章中，我们将回到相互作用系统的运动方程（5.8）式：

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=H_I(t)\Phi(t) \tag{12.1}$$

我们希望能求出上面方程的一个特别适于描述散射过程的解。在时刻 $t=-\infty$，系统处于初态：

$$\Phi(-\infty)=\Phi_i \tag{12.2}$$

上式完全确定了在散射发生之前很久所有粒子都相距很远的初始时刻所存在的粒子。例如，在量子电动力学中，Φ_i 将给出参加散射过程的电子，正电子和光子以及它们的动量、自旋和极化。(12.1)式告诉我们，态矢量 Φ_i 如何随时间变化。特别是，（12.1）式将给出在散射发生之后很久所有粒子再一次相距很远的最终时刻系统的状态。于是，我们把散射矩阵或 S-矩阵定义为把初态 $\Phi(-\infty)$ 转换成终态 $\Phi(+\infty)$ 的算符：

$$\Phi(+\infty)=S\Phi(-\infty) \tag{12.3}$$

因此，寻求 S 矩阵就等价于求解运动方程（12.1）式。

把（12.1）式改写成积分方程：

$$\Phi(t)=\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\Phi(t_1) \tag{12.4}$$

用迭代法解这个方程，可得

$$\Phi(t)=\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\left\{\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\,H_I(t_2)\,\Phi(t_2)\right\}$$

$$=\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\Phi(-\infty)+(-i)^2$$

$$\times\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\,H_I(t_2)\left\{\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t_2}dt_3\,H_I(t_3)\,\Phi(t_3)\right\}$$

$$=\Phi(-\infty)+(-i)\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\Phi(-\infty)+(-i)^2\int_{-\infty}^{t}dt_1$$

$$\times H_I(t_1)\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H_I(t_2)\Phi(-\infty)+(-i)^3\int_{-\infty}^{t}dt_1H_I(t_1)\int_{-\infty}^{t_1}dt_2$$

$$\times H_I(t_2)\int_{-\infty}^{t_2} dt_3 H_I(t_3)\varphi(t_3) \tag{12.5}$$

我们可以把迭代过程一直继续进行下去，由此即得S矩阵：

$$S=1+(-i)\int_{-\infty}^{\infty}dt_1 H_I(t_1)+(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n\{H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)\} \tag{12.6}$$

上式可以改写为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots dt_n P\{H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)\} \tag{12.7}$$

式中，n个因子的戴逊编时乘积$P\{\cdots\}$是两个因子的戴逊编时乘积的推广。对于求和中的每一项n来说，（12.6）式和（12.7）式都是等价的，并且容易被证实（参见习题12.1）。根据相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I$，我们可以把（12.7）式改写为：

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_n P\{\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)\} \tag{12.8}$$

式中，$d^4x=d^3xdt$，积分遍及整个四维时空。

设Φ_i和Φ_j是两个给定的态矢量，$\Phi_i\to\Phi_j$跃迁的几率振幅为

$$(\Phi_j,\ S\Phi_i) \tag{12.9}$$

一般而言，一个给定的初态Φ_i，可能跃迁到许多不同的终态。例如，由一个电子和一个正电子构成的初态Φ_i，可以通过下列过程跃迁到终态：弹性散射，韧致辐射，电子-正电子对湮没。从展开式（12.8）中挑选出引起特殊跃迁的合适部分，是下一章的任务。现在，我们首先来讨论由于上面的处理而产生的两个问题。

在普通量子力学中，我们使用非微扰波函数来确定散射问题中的初态和终态。这是因为在普通量子力学中，我们只考虑短程势，所以当粒子相距很远时，它们之间不发生相互作用。然而，在量子场论中，这样的描述是不正确的，因为我们处理的是真实的物理粒子，而不是裸粒子，即使当粒子之间相距很远时也是如此。一个电子，即使和其他电子相距很远很远，也仍然被它自己的光子云所包围。因此，我们需要证明，在(12.9)式中使用裸粒子态来确定初态和终态是合理的。

为此，我们引入绝热假设，它对散射过程将作出下列描述：在初始时刻$t=-\infty$，我们可以用裸粒子来描述系统*)。在散射发生以前很久的某一时刻$t=-T$，粒子仍然相距很远，但是在$-\infty<t\leqslant -T$这段时间，运动方程（12.1）式已经把裸粒子转变成了真实的物理粒子。这样，在时刻$t=-T$，我们用来描述系统的粒子是真实的物理粒子。这

*) 这里，我们把粒子看成波包。当然，在计算中，为方便起见，可采用平面波。

相当于耦合常数的“绝热打开”。在时刻$t=-\infty$，耦合常数为0，然后单调地增加，在时刻$t=-T$时达到其最大值g。在$-T\leqq t\leqq T$期间，耦合常数保持其最大值g。特别是在粒子非常靠近和实际发生散射的极其短的间隔$-\tau\leqq t\leqq\tau$内（$\tau\ll T$），耦合常数一直保持其最大值g不变。接着，当$t\geqq T$时，耦合常数再一次绝热地“关掉”，然后单调地减少到0。在时刻$t=+\infty$，我们再次用裸粒子来代替物理粒子。绝热假设的本质就是散射实际上只在极短的时间间隔$-\tau\leqq t\leqq\tau$内发生，而与系统在$t\ll-\tau$和$t\gg+\tau$时的性质无关。在数学上，绝热截止方法相当于用一个如上所述随时间变化的耦合常数来代替（12.8）式中相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I$中的耦合常数g。这个方法避免了粒子自能效应（例如，电子和它的光子云相互作用，参见十八章）。仅仅在计算的最后，我们才取极限$T\to\infty$。当然，如果我们使用最低阶的微扰理论（即仅使用（12.8）式中给出非零结果的最低阶项），则相互作用只不过是引起跃迁，而没有把裸粒子转换成真实的物理粒子。因此，我们可以把初态粒子和终态粒子都处理成裸粒子，并直截了当地取极限$T\to\infty$，即使用恒定的耦合常数将不会遇到发散困难。关于绝热假设的讨论，可参见Jauch, J.M. and Rohrlich, F., The Theory of Photons and Electrons, P.134, Cambridge, Mass; Addison-wesley, 1955.

展开式（12.8）式的导出纯碎是形式上的，关于它的收敛性我们一无所知。(12.8)式是耦合常数g的幂级数，当耦合常数g很小时，我们可以预期，最低阶的微扰理论计算也将给出好的结果。电动力学的情况正是这样。在电动力学中，耦合常数就是电荷e，$e^2/4\pi=1/137$是精细结构常数。即使在所谓辐射修正的高阶修正中，计算也是极为成功的。以后，我们将再来讨论这个问题。当然，对于强相互作用，例如$ps(ps)$介子理论，微扰计算是不成功的。这时，$g^2/4\pi\sim10$。于是，为求解运动方程，我们必须寻求另外的更有效的方法。不过，由于下列两个理由，我们仍将不时使用介子理论作为“弱相互作用”论证的例子。首先，这些所谓更有效的“强相互作用”方法，和弱耦合方法是密切相关的。其次，我们已经看到，在某些方面，介子较光子更为简单。因此，许多基本概念可以在无须引进不相关的复杂性的情况下予以解释。

第十三章 S 矩 阵 展 开 式

在本章中，我们来讨论如何根据S矩阵展开式(12.8)和相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I$，计算一给定跃迁 $\Phi_i \to \Phi_j$ 的S矩阵元（12.9）式到耦合常数的某一量级 g^n。对于量子电动力学来说，$\mathscr{H}_I$ 由（11.1）式和（8.32）式确定，p_S（p_S）介子理论的$\mathscr{H}_I$则由（11.12）式给出。

在第十一章中，我们根据产生算符和吸收算符分析了电动力学的相互作用，发现它能导致许多不同的过程。相应地，S 矩阵展开式（12.8）将影响许多更复杂的跃迁。然而，S矩阵中只有一定的项才对跃迁$\Phi_i \to \Phi_j$有贡献。这些项必须含有刚好能使Φ_i中的粒子消失的算符，还含有刚好能产生 Φ_j 中的粒子的算符。这些项中可能还含有额外的产生算符和吸收算符，这些额外算符先产生粒子，随后又将它们加以吸收。这些粒子仅存在于中间态。

通过避免明确引进虚中间粒子，就能使计算大大简化。设算符O是若干个产生算符和吸收算符的乘积，利用算符的对易关系，将算符O中各算符的位置调动，使O中的所有吸收算符都排在O中的所有产生算符之右边。我们把这样排列后所得到的算符乘积称为正规乘积（normal product）。于是，正规乘积算符总是首先吸收一定数目的粒子，然后再发射一些粒子。它不会引起中间态粒子的发射和重新吸收。这样，我们的目标就是使用戴逊和维克（Wick）的方法，把 S 矩阵展开式（12.8）中的每一项都写成正规乘积的和。每一个正规乘积都将影响一个特定的跃迁 $\Phi_i \to \Phi_j$，类似于第十一章，我们可以用费曼图来表示这些跃迁。

设A，B，……L是 $\psi_a^{\pm}$，$\bar{\psi}_a^{\pm}$，$A_\lambda^{\pm}$，$\phi^{\pm}$型的算符，也就是说，A，B，……L都仅仅是产生算符或吸收算符的线性组合。我们定义正规乘积为

$$N(AB\cdots\cdots L) = (-1)^P(QR\cdots\cdots W) \tag{13.1}$$

式中，$QR\cdots\cdots W$是算符乘积 $AB\cdots\cdots L$ 按一定次序的重新排列，以便乘积中的所有吸收算符（即场量的正频部分）都排在乘积中的所有产生算符（即场量的负频部分）之右边。指数P是把$AB\cdots\cdots L$排成$QR\cdots\cdots W$时费米子算符对所需要交换的次数。所有的费米子算符相互反对易，两个玻色子算符或一个玻色子算符和一个费米子算符则相互对易。

为简明起见，在下面关于正规乘积的例子中，我们将把场的自变量略去，即有 $A_\lambda \equiv A_\lambda(x_1)$，$A_\mu \equiv A_\mu(x_2)$ 等等，类似地，$\psi_a \equiv \psi_a(x_1)$ 等等。于是，我们有

$$N(A_\lambda^+ A_\mu^- A_\nu^+ A_\sigma^-) = A_\sigma^- A_\mu^- A_\nu^+ A_\lambda^+ \tag{13.2}$$

$$N(\psi_\alpha^+ \bar{\psi}_\beta^- \psi_\gamma^+ \psi_\delta^-) = -\psi_\delta^- \bar{\psi}_\beta^- \bar{\psi}_\gamma^+ \psi_\alpha^+ \tag{13.3}$$

（13.3）式中的负号是由交换 $\psi_\alpha^+ \longleftrightarrow \psi_\delta^-$ 产生的。对正规乘积 $N\{\cdots\}$ 而言，费米子算符加“门”或不加“门”都是无关紧要的，重要的仅仅是场量的正频部分或负频部分。至于吸收算符乘积部分或者产生算符乘积部分的内部次序则完全是任意的。这是因为对玻色子场而言，场量的正频部分和正频部分相互对易，负频部分和负频部分相互对易，如（6.11）式。对费米子场而言，正频部分和正频部分反对易，负频部分和负频部分反对易，如（8.48）式。所以，一个正规乘积可以用不同的方式写出，它们事实上都是相等的。例如，（13.3）式还可写成：

$$N(\psi_\alpha^+ \ \overline{\psi}_\beta^- \ \overline{\psi}_\gamma^+ \ \psi_\delta^-) = + \ \overline{\psi}_\beta^- \ \psi_\delta^- \ \overline{\psi}_\gamma^+ \ \psi_\alpha^+ \tag{13.4}$$

正规乘积（13.1）具有一个重要性质，这就是它的真空平均值为0：

$$(\Phi_0, \ N(AB\cdots\cdots L)\Phi_0) = 0 \tag{13.5}$$

上式的证明是容易的。因为或者 $AB\cdots\cdots L$ 中至少含有一个吸收算符，由（13.1）式，$N(AB\cdots\cdots L) = (-1)^P(QR\cdots\cdots W)$，设 W 为吸收算符，则由（1.14）式，$W\Phi_0 = 0$；或者 A，B，……，L 全是产生算符，于是它们的厄米共轭算符 $A^\dagger$，$B^\dagger$……，$L^\dagger$ 全是吸收算符，这样就有

$$\begin{aligned}(\Phi_0, \ N(AB\cdots\cdots L)\Phi_0) &= (\Phi_0, \ (-1)^P(QR\cdots\cdots W)\Phi_0) \\ &= (-1)^P(Q^\dagger\Phi_0, \ (R\cdots\cdots W)\Phi_0) = 0\end{aligned}$$

式中，$Q^\dagger\Phi_0 = 0$。

通过要求正规乘积服从分配律，我们可将正规乘积的定义（13.1）式加以推广：

$$N(AB\cdots\cdots + RS\cdots\cdots) = N(AB\cdots\cdots) + N(RS\cdots\cdots) \tag{13.6}$$

于是有

$$N(A_\lambda A_\mu) = A_\lambda^+ \ A_\mu^+ + A_\lambda^- \ A_\mu^- + A_\lambda^- \ A_\mu^+ + A_\mu^- \ A_\lambda^+ \tag{13.7}$$

$$N(\psi_\alpha \psi_\beta) = \psi_\alpha^+ \ \psi_\beta^+ + \psi_\alpha^- \ \psi_\beta^- + \psi_\alpha^- \ \psi_\beta^+ - \psi_\beta^- \ \psi_\alpha^+ \tag{13.8}$$

用 $\overline{\psi}_\alpha$（或 $\overline{\psi}_\beta$）置换（13.8）式中的 ψ_α（或 ψ_β），或者同时置换 ψ_α 与 ψ_β，即可得到相应的关系式。

现在，我们用正规乘积把 p_S（p_S）-介子理论的相互作用哈密顿量密度（11.12）式表示为

$$\mathscr{H}_I(x) = igN(\overline{\psi}(x)r_5\phi(x)\psi(x)) \tag{13.9}$$

类似地，量子电动力学的相互作用哈密顿量密度可用正规乘积表示为

$$\mathscr{H}_I(x) = ieN(\overline{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)) \tag{13.10}$$

利用费米子场的反对易关系（8.42）和（8.48），即可导出（13.9—10），参见习题13.1—2。

在第八章中，我们定义了两个算符的维克编时乘积〔参见（8.49—50）式〕。现

在，我们根据戴逊编时乘积$P\{\cdots\}$把任意个玻场算符$A(x_1)$，$B(x_2)$，……，的维克编时乘积$T\{\cdots\}$定义如下：

$$T\{A(x_1)B(x_2)\cdots\cdots\}=(-1)^P P\{A(x_1)B(x_2)\cdots\cdots\} \qquad (13.11)$$

式中，$A(x_1)$，$B(x_2)$，……代表场算符$\psi_a(x)$，$\bar{\psi}_a(x)$，$\phi(x)$，$A_\mu(x)$等。指数P是把$\{A(x_1)$，$B(x_2)\cdots\cdots\}$按时间顺序排列时费米子场算符对所需要交换的次数。

若相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I(x)$是费米子场算符的双线性函数（如电动力学或ps（ps）介子理论），则在S矩阵展开式（12.8）式中，我们可以简单地用维克编时乘积$T\{\cdots\}$来置换戴逊编时乘积。这是因为费米子场算符对的交换次数总是偶数。对量子电动力学来说，S矩阵展开式（12.8）式变成：

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}(-)^n\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_n T\{N(\bar{\psi}\gamma\psi)_{x_1}\cdots N(\bar{\psi}\gamma\psi)_{x_n}\} \qquad (13.12)$$

式中，下标x_i代表相应正规乘积中所有场算符的自变量。

在（13.12）式中，编时乘积$T\{\cdots\}$的因子是正规乘积，我们称这样的编时乘积为混合编时乘积。现在，我们要来讨论如何将混合编时乘积展开成正规乘积的和。

设有两个算符$A=A(x_1)$，$B=B(x_2)$，根据正规乘积的定义（13.1）式，我们有

$$AB=N(AB)+c \qquad (13.13)$$

式中，c是态矢量函数空间中的一个c数。因此，根据（13.5）式，取（13.13）式的真空平均值，可得

$$c=(\Phi_0,\ AB\Phi_0) \qquad (13.14)$$

（13.13）式的导出如下：设有

$$\left.\begin{aligned}A&=A^+ + A^-\\ B&=B^+ + B^-\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

当A，B是费米子场算符时，我们有

$$\begin{aligned}AB&=A^+B^+ + A^-B^+ + A^-B^- + A^+B^- + B^-A^+ - B^-A^+\\ &=(A^+B^+ + A^-B^+ + A^-B^- - B^-A^+) + [A^+,\ B^-]_+\\ &=N(AB)+c\end{aligned} \qquad (2)$$

（2）式中的c虽然是态矢量函数空间中的c数，但当然仍是旋量空间中的4×4矩阵：

$$c=[A^+,\ B^-]_+ \qquad (3)$$

当A，B是玻色子场算符时，我们有

$$\begin{aligned}AB&=A^+B^+ + A^-B^+ + A^-B^- + A^+B^- - B^-A^+ + B^-A^+\\ &=(A^+B^+ + A^-B^+ + A^-B^- + B^-A^+) + [A^+,\ B^-]\\ &=N(AB)+c\end{aligned} \qquad (4)$$

（4）式中的c为

$$c=[A^+,\ B^-] \tag{5}$$

若A，B中一个是玻色子场算符，一个是费米子场算符，有

$$\begin{aligned}AB&=A^+B^++A^-B^++A^-B^-+A^+B^-\\&=A^+B^++A^-B^++A^-B^-+B^-A^+\end{aligned} \tag{6}$$

（6）式中的c为

$$c=0 \tag{7}$$

因为

$$N(AB)=\pm N(BA) \tag{13.15}$$

当A，B都是费米子场算符时，（13.15）式的右边是负号，除此以外都是正号．根据（13.13—15）式，我们有

$$T\{A(x_1)B(x_2)\}=N\{A(x_1)B(x_2)\}+(\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \tag{13.16}$$

（13.16）式的推导如下：

由（13.13）式，我们有

$$A(x_1)B(x_2)=N(A(x_1)B(x_2))+(\Phi_0,\ A(x_1)B(x_2)\Phi_0) \tag{1}$$

在（1）式两边取维克编时乘积$T\{\cdots\}$，则有

$$\begin{aligned}T\{A(x_1)B(x_2)\}&=T\{N(A(x_1)B(x_2))\}+T\{(\Phi_0,\ A(x_1)B(x_2)\Phi_0)\}\\&=T\{N(A(x_1)B(x_2))\}+(\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0)\end{aligned} \tag{2}$$

当$x_{20}<x_{10}$时，我们有

$$\left.\begin{aligned}T\{A(x_1)B(x_2)\}&=A(x_1)B(x_2)\\T\{N(A(x_1)B(x_2))\}&=N(A(x_1)B(x_2))\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

把（3）式代入（2）式，即得（13.13）式．于是可知下式成立：

$$T\{A(x_1)B(x_2)\}=N\{A(x_1)B(x_2)\}+(\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \tag{4}$$

当$x_{20}>x_{10}$时，我们分下列两种情况来讨论：

1．$A(x_1)$和$B(x_2)$都是费米子场算符，则由（8.50）式，我们有

$$T\{A(x_1)B(x_2)\}=-B(x_2)A(x_1) \tag{5}$$

由（13.15）式，有

$$T\{N(A(x_1)B(x_2))\}=-N\{B(x_2)A(x_1)\} \tag{6}$$

把（5）和（6）式代入（2）式，即得

$$-B(x_2)A(x_1)=-N\{B(x_2)A(x_1)\}-(\Phi_0,\ B(x_2)A(x_1)\Phi_0) \tag{7}$$

即是

$$B(x_2)A(x_1)=N\{B(x_2)A(x_1)\}+(\Phi_0,\ B(x_2)A(x_1)\Phi_0) \tag{8}$$

这即是（13.13）式。于是可知下式成立：

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = N\{A(x_1)B(x_2)\} + (\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \qquad (9)$$

2. $A(x_1)$ 和 $B(x_2)$ 中一个是玻色子场算符，另一个是费米子场算符；或者两个都是玻色子场算符，于是有

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = B(x_2)A(x_1) \qquad (10)$$

$$T\{N(A(x_1)B(x_2))\} = N(B(x_2)A(x_1)) \qquad (11)$$

把（10）和（11）式代入（2）式，即得

$$B(x_2)A(x_1) = N\{B(x_2)A(x_1)\} + (\Phi_0,\ B(x_2)A(x_1)\Phi_0) \qquad (12)$$

这即是（13.13）式。于是可知下式成立：

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = N\{A(x_1)B(x_2)\} + (\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \qquad (13)$$

由（4）式，（9）式和（13）式，可知下式必定成立：

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = N\{A(x_1)B(x_2)\} + (\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \qquad (14)$$

这就是（13.16）式。

为方便起见，人们把算符$A(x_1)$和$B(x_2)$的维克编时乘积的真空平均值称为算符$A(x_1)$和$B(x_2)$的收缩，记为

$$\overbrace{A(x_1)B(x_2)} \equiv (\Phi_0,\ T\{A(x_1)B(x_2)\}\Phi_0) \qquad (13.17)$$

作为真空平均值，$\overbrace{A(x_1)B(x_2)}$只有在它们中的一个产生粒子而另一个随后就加以吸收时才不为零。量子电动力学中的所有非零收缩都已列在（9.14—15）和（8.51）式及（8.46a）式中：

$$\overbrace{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)} = \frac{1}{2}\delta_{\nu\mu}D_F(x_2 - x_1) \qquad (9.14)$$

$$\overbrace{\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\alpha(x_1)} = -\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = -\frac{1}{2}S_{F\beta\alpha}(x_2 - x_1) \qquad (8.51)$$

在（9.14）式中，每一个场算符都包括了光子吸收算符和光子产生算符。在（8.51）式中，场算符$\bar{\psi}_\alpha$则包含了电子发射和正电子吸收算符，场算符ψ_β则包含了电子吸收和正电子发射算符。容易证明：

$$\overbrace{\psi_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)} = \overbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)\bar{\psi}_\alpha(x_1)} = \overbrace{\psi_\beta(x_2)A_\mu(x_1)} = \overbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)A_\mu(x_1)} = 0 \qquad (13.18)$$

为了把（13.16）式推广到几个算符 $A = A(x_1)$，…，$M = M(x_m)$，…的情况，我们定义推广的正规乘积为：

$$N(ABCDEF\cdots JKLM\cdots) = (-1)^P AK\,BM\,DF\cdots N(CE\cdots JL\cdots) \qquad (13.19)$$

式中，P 是在将各对应该收缩的算符调动位置使得收缩的各对算符排在一起，从而把 $(ABCD\cdots)$ 变成 $(AKBM\cdots)$ 时费米子算符所需要交换的次数。

例如：

$$N(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)A_\mu(x_3)\psi_\sigma(x_4)\bar{\psi}_\tau(x_5))$$

$$=(-1)\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\tau(x_5)N(\psi_\alpha(x_1)A_\mu(x_3)\bar{\psi}_\sigma(x_4))$$

对于不等时的情况（即$x_{i0}\neq x_{j0}$，$i\neq j$），维克已证明了可把（13.16）式推广为：

$$\begin{aligned}T(ABCD\cdots WXYZ)&=N(ABCD\cdots WXYZ)\\&+N(ABCD\cdots WXYZ)+N(ABCD\cdots WXYZ)+\cdots+N(ABCD\cdots WXYZ)\\&+N(ABCD\cdots WXYZ)+\cdots+N(ABCD\cdots WXYZ)+\cdots\\&+N(ABCD\cdots XYZ)+\cdots\end{aligned}\qquad(13.20)$$

（13.20）式的右边是算符（$ABCD\cdots WXYZ$）能构成的所有可能的推广正规乘积的和，它包括了一切有着不同的收缩算符对的项。等式右边的第一行是没有算符收缩的全部项；第二行是只有一对算符收缩的全部项；第三行是只有两对算符收缩的全部项；…；等等。我们把（13.20）式称为维克定理，其证明可参见Wick,G.C.,phys.Rev.,Vol.80, P.268, 1950.

在（13.12）式中出现的混合编时乘积具有如下形式：

$$T\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}\qquad(13.21)$$

现在，我们来讨论如何将（13.21）式中的混合编时乘积展开成为正规乘积之和。在正规乘积$N(\bar{\psi}A\psi)_{x_r}$中，用$\xi_r=(x_r,\ ix_{r0}\pm i\varepsilon)$置换$x_r$，场算符的吸收部分用$\xi_r^-=(x_r,\ ix_{r0}-i\varepsilon)$，场算符的产生部分则用$\xi_r^+=(x_r,\ ix_{r0}+i\varepsilon)$。于是有

$$T\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}=\lim_{\varepsilon\to 0}T\{N(\bar{\psi}A\psi)_{\xi_1}\cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{\xi_n}\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}T\{N[(\bar{\psi}^-(\xi_1^+)+\bar{\psi}^+(\xi_1^-))\gamma_\mu(A_\mu^-(\xi_1^+)+A_\mu^+(\xi_1^-))(\psi^-(\xi_1^+)+\psi^+(\xi_1^-))]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdot N[(\bar{\psi}^-(\xi_n^+)+\bar{\psi}^+(\xi_n^-))\gamma_\mu(A_\mu^-(\xi_n^+)+A_\mu^+(\xi_n^-))(\psi^-(\xi_n^+)+\psi^+(\xi_n^-))]\}$$

吸收部分的时间ξ_r^-早于产生部分的时间ξ_r^+，所以在维克编时乘积号$T\{\cdots\}$的制约下，场算符的所有吸收部分总是排在场算符的所有产生部分的右边。由此可见，在作$x_r\to\xi_r$代换后，维克编时乘积T内部各组因子$(\bar{\psi}A\psi)$的排列顺序在编时乘积号$T\{\cdots\}$的制约下

就自然地符合正规乘积的顺序，于是维克编时乘积T内部的正规乘积号N可以取消，即有

$$T\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\cdots N(\bar{\psi}A\psi_{x_n}\}=\lim_{\varepsilon\to 0}T\ (\bar{\psi}A\psi)_{\xi_1}\cdots(\bar{\psi}A\psi)_{\xi_n}\} \qquad (13.22)$$

上式右边每一组算符内部的收缩，也就是等时收缩，通通为零.因为我们从上面所述已经知道，每一组算符实际上都是按正规乘积顺序排列的，而由（13.5）式，正规乘积的真空平均值为零.因此，混合编时乘积（13.21）式仍旧可以利用（13.20）式展开成为正规乘积之和，只是必须将（13.21）式中每一个正规乘积内部各因子的收缩所产生的项略去，即有

$$T\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}=T\{(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\cdots(\bar{\psi}A\psi)_{x_n}\}\ |\ \text{no e.t.c.} \qquad (13.23)$$

式中，“no e.t.c.”即是“不含等时收缩”（no equal times contractions）之意.

（13.20）式和(13.23)式表明，编时乘积和混合编时乘积都可以展开成为一系列正规乘积之和.这些正规乘积中的每一项都和一定的过程相对应，这些过程的特征是由没有收缩的算符来表示的.这些没有收缩的算符吸收初态粒子，产生终态粒子.在下一章中，我们将会看到，收缩可以依据中间态中的虚粒子来予以解释.

上面的论述当然也适合于ps（ps）介子理论.

第十四章　费曼图

由于可能发生的散射过程所具有的多样性，把S矩阵展开后，我们所得到的关于正规乘积的展开式是相当复杂的.即使当n较小时，也是如此.不过,利用在第十一章中引进的费曼图，我们容易对展开式中的这些项给出物理解释.下面，我们将采用戴逊的方法来阐述这个问题.在本章中，我们将使用（13.12）式中的$n=2$项作为例子，定性地讨论有关的基本概念.在下一章中，我们再来作定量讨论.

根据（13.20）式和（13.23）式，（13.12）式中的二级微扰项是

$$S^{(2)}=\sum_{i=A}^{F}S_i^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2T\left\{N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\right\} \tag{14.1}$$

式中，

$$S_A^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2N\left\{(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\right\} \tag{14.2a}$$

$$S_B^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2\left[N\left\{(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\right\}\right.$$

$$\left.+N\left\{(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\right\}\right] \tag{14.2b}$$

$$S_C^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2N\left\{(\bar{\psi}\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\right\} \tag{14.2c}$$

$$S_D^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2\left[N\left\{(\bar{\psi}\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\right\}\right.$$

$$\left.+N\left\{(\bar{\psi}\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\right\}\right] \tag{14.2d}$$

$$S_E^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2N\left\{(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\right\} \tag{14.2e}$$

$$S_F^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2N\left\{(\bar{\psi}\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\right\} \tag{14.2f}$$

在（14.1—2）式中，我们已略去了正规乘积内部各因子的收缩以及不同场的场量的收缩所产生的项。因为根据上一章的结果，这些项通通为零。

在第十一章中，我们引进了费曼图。我们把费米子线和玻色子线的相交处称为顶点。由具有两条费米子线和一条玻色子线的一个顶点构成的图称为基本顶点部分（basic vertex part），它代表不同粒子的相互作用$\mathscr{H}_I$。S矩阵中的二级项(14.2*a*—*f*)可用由适当连起来的两个基本顶点部分构成的费曼图来描述。对一个特定的项$S_i^{(2)}$来说，它所能影响的跃迁，完全取决于它所含有的外场算符。所谓外场算符，就是那些不参加收缩的算符。在散射过程中，吸收初态粒子并产生终态粒子的算符，正是这些外场算符。

(14.2*a*）式所确定的项$S_A^{(2)}$，仅包含了外场，所以我们对$S_A^{(2)}$并不特别感兴趣。$S_A^{(2)}$相应于两个相互独立地进行的过程，如图10所示。

(14.2*b*）式中的两项是完全等价的，我们只须把算符置换一下就可看出这一点。费米子场量是旋量，并且由于和产生算符及吸收算符相关而不可对易。不过，每个组$(\bar{\psi}A\psi)$的旋量指标是自洽的，所以，交换整个组并不会影响这些旋量指标。而且，这种交换总是费米子场算符的偶置换，因此，我们可得

$$N\{(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\}=N\{(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}\} \tag{14.3}$$

把（14.2*b*）式中第二项的积分变量x_1和x_2加以对换，即得：

$$S_B^{(2)}=e^2\int\int d^4x_1d^4x_2N\{(\bar{\psi}A\psi)_{x_2}(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\} \tag{14.4}$$

（14.4）式可以更完全地写为

$$S_B^{(2)}=e^2\int\int d^4x_1d^4x_2N\{(\bar{\psi}^+(x_2)+\bar{\psi}^-(x_2))\gamma_\nu(A_\nu^+(x_2)+A_\nu^-(x_2))$$
$$\times\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu(A_\mu^+(x_1)+A_\mu^-(x_1))(\psi^+(x_1)+\psi^-(x_1))\} \tag{14.5}$$

在（14.5）式所描述的各种过程中，有一个过程就是康普顿散射。在康普顿散射中，入射光子被电子散射，而电子本身则经历一个反冲（$\gamma+e^-\to\gamma+e^-$）。算符$\psi^+(x_1)$吸收初态电子，算符$\bar{\psi}^-(x_2)$发射终态电子，算符$A_\mu^+(x_1)$或算符$A_\nu^+(x_2)$吸收了初态光子，而算符$A_\nu^-(x_2)$或$A_\mu^-(x_1)$则发射了终态光子。这样，(14.5)式中能引起康普顿散射的部分是

$$S_C^{(2)}{}_{\cdot}S_{\cdot}=S_a^{(2)}+S_b^{(2)} \tag{14.6}$$

式中，

$$S_a^{(2)}=e^2\iint d^4x_1d^4x_2\{\bar{\psi}^-(x_2)\gamma_\nu A_\nu^-(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu A_\mu^+(x_1)\psi^+(x_1)\} \tag{14.7a}$$

$$S_{fi}^{(2)} = e^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \bar{\psi}^-(x_2)\gamma_\nu A_\nu^+(x_2)\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu A_\mu^-(x_1)\psi^+(x_1) \right\} \tag{14.7b}$$

(14.7a)和(14.7b)的费曼图如图11(a)和图11(b)所示。在图11(a)中，初态光子i在x_1处被吸收，终态光子f在x_2处被产生；在图11(b)中，终态光子f在x_1处被产生，初态光子i在x_2处被吸收。

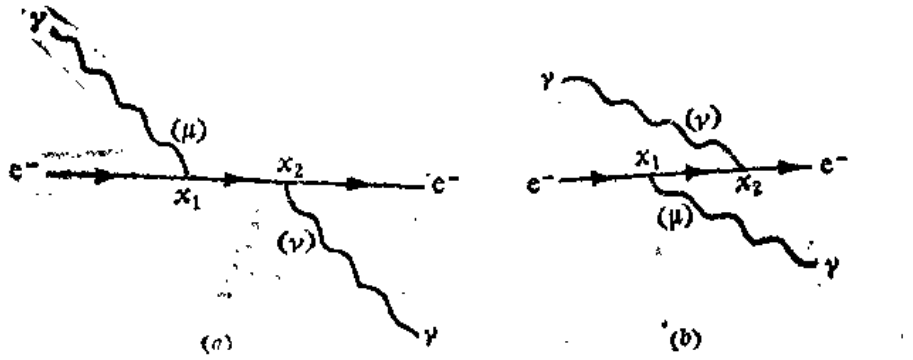


图11　在电子上的康普顿散射

吸收初态电子的算符$\psi(x_1)$用一条指向顶点x_1的带箭头的线来代表，产生终态电子的算符$\bar{\psi}(x_2)$则用一条从x_2点出发的带箭头的线来代表。一对费米子算符的收缩$\underline{\psi x_2}\,\bar{\psi}(x_1)$则用一根从顶点$x_1$出发到顶点$x_2$终止的带箭头的线来代表，箭头从$x_1$指向$x_2$。根据(8.51)式，我们可以对这个收缩作出如下的物理解释。当$x_{10}<x_{20}$时，收缩$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$描述一个电子先在$x_1$点产生，而后到$x_2$点湮没。当$x_{20}<x_{10}$时，$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$描述一个正电子先在$x_2$点产生，而后到$x_1$点湮没。换言之，当$x_{20}<x_{10}$时，我们可以认为图11(a)描述的物理过程是：先在x_2点产生一个电子－正电子对并发射光子f，而后正电子传播到x_1点和入射电子相遇而湮没，并吸收光子i。类似地，当$x_{20}<x_{10}$时，我们可以认为图11(b)描述的物理过程是：先在x_2点产生一个电子－正电子对并吸收光子i，而后正电子传播到x_1点和入射电子相遇而湮没，并发射光子f。于是，我们把收缩$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$称为费米子传播子。费米子传播子描述的是虚的中间态费米子：当$x_{20}>x_{10}$时，$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$描述的是电子传播子；当$x_{20}<x_{10}$时，$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$描述的是正电子传播子。这里要注意的是，我们在画图11的费曼图时，并没有考虑时间顺序。图11(a)〔或图11(b)〕代表了两种类型的中间态过程：一个虚电子或一个虚的电子－正电子对。而且，这个传播子已包含了遍及虚费米子的所有自旋态的求和。在第十一章中，我们曾规定，用带有向上箭头的线来代表电子，而用带有向下箭头的线来代表正电子。现在，我们放宽这个限制，只把这个限制运用于外线，而不运用于传播子。在传播子$\underline{\psi(x_2)\,\bar{\psi}}(x_1)$的费曼图中，箭头是从$x_1$指向$x_2$，它代表两种情况。上述直观的物理解释是很有用的。

除了康普顿散射之外，(14.5)式所能产生的其他物理过程还有下列三类：

（1）在正电子上的康普顿散射（$\gamma+e^{+}\to\gamma+e^{+}$），这个过程和在电子上的康普顿散射相同。相应的费曼图如图12（a）和图12（b）所示。算符$\bar{\psi}(x_2)$吸收初态正电子，算符$\psi^{-}(x_1)$产生终态正电子。

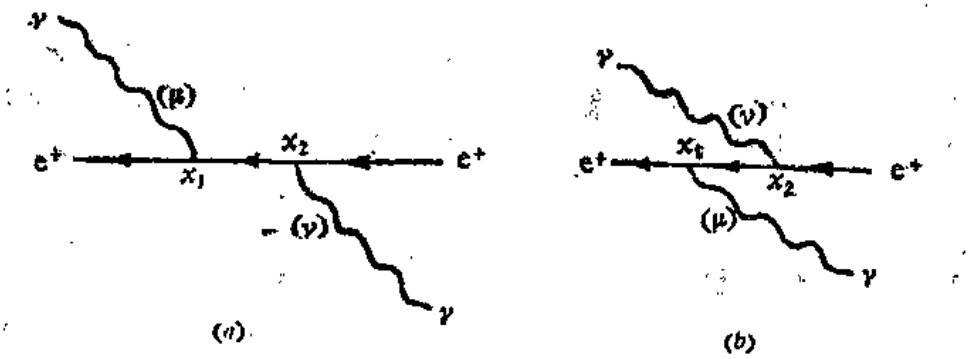


图12　在正电子上的康普顿散射

（2）光子对的湮没（$\gamma+\gamma\to e^{+}+e^{-}$），即两个$\gamma$光子湮没而产生一个电子-正电子对，这个过程的典型费曼图如图13所示。

（3）光子对的产生（$e^{+}+e^{-}\to\gamma+\gamma$），在这个过程中，一个电子-正电子对湮没，产生两个γ光子，如图14所示。

把（14.5）式完全展开后，一共有十六项。然而我们只考虑能引起上述四种过程的其中六项。这是因为S矩阵只能影响那些在初态和终态都保持能量动量守恒的跃迁。在下一章中，我们将详尽地讨论这个问题。

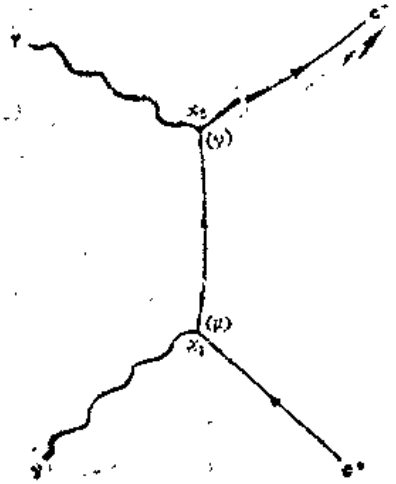


图13　光子对的湮没

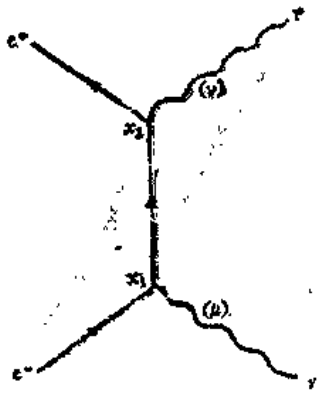


图14　光子对的产生

现在，我们来简单地讨论一下在（14.2c）式到（14.2f）式中的几项。其中的细节，读者可根据上面对康普顿散射的讨论而自行加以补充。

在（14.2c）式中，光子仅出现在收缩$A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)$中，和费米子的情况相似，我们将把收缩$A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)$称为费米子传播子。当$x_{10}<x_{20}$时，一个光子先在x_1点产生，而后到x_2点处湮没；当$x_{10}>x_{20}$时，一个光子先在x_2点产生，而后到x_1点处湮没。由于在（14.2c）式中含有四个没有收缩的费米子算符，因此，（14.2c）

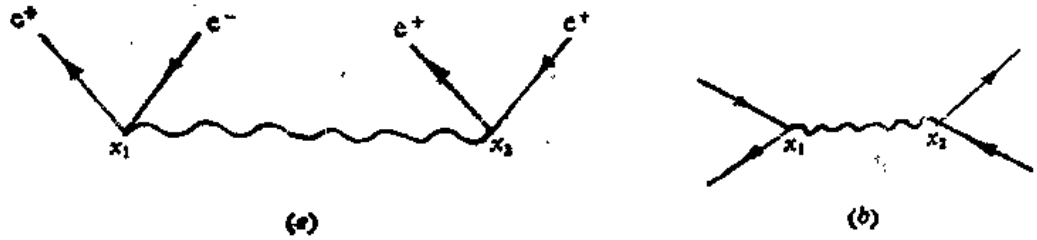
式所能反映的物理过程就是费米子-费米子散射：

（1）两个电子相互散射，即$e^- + e^- \to e^- + e^-$.

（2）两个正电子相互散射，即$e^+ + e^+ \to e^+ + e^+$.

（3）一个电子和一个正电子相互散射，即$e^+ + e^- \to e^+ + e^-$

一般把两个电子的相互散射，称为摩勒（MΦller）散射；一个电子和一个正电子的相互散射，称为巴布哈（Bhabha）散射．两个正电子相互散射的费曼图如图15（a）所示；电子-正电子对湮没过程的费曼图如图15（b）所示，它表示初态的电子和正电子先在x_1点处湮没，产生虚光子，而后虚光子传播到x_2点处产生电子-正电子对．

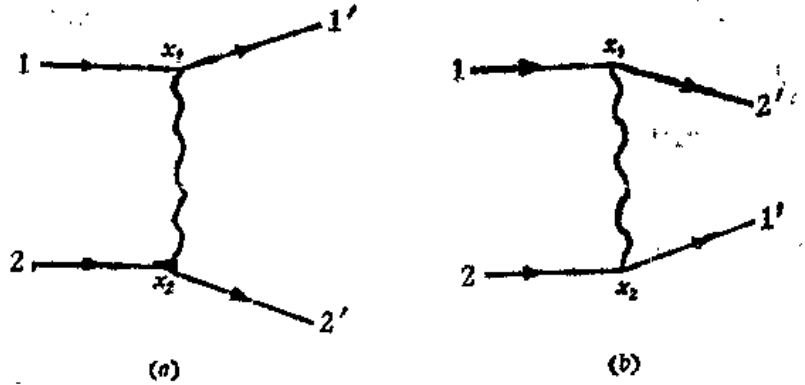


(a)　　(b)

图15　(a)正电子-正电子散射；(b)电子-正电子对在电子的场中湮没

在（14.2c）式中，由于A_μ和A_ν要分别乘以矩阵γ_μ和γ_ν，所以光子传播子$A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)$就自动地要对虚光子的所有四个极化态（μ，$\nu=1$，2，3，4）求和．光子收缩$A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)$描述了电荷之间通过交换横光子、纵光子和标光子而产生的相互作用．这种描述和通常根据横光子交换产生的瞬间库仑相互作用所作的描述是等价的．

现在，我们来考虑两个电子的摩勒散射$e^- + e^- \to e^- + e^-$，初态电子的能量-动量矢量分别为p_1和p_2，终态电子的能量-动量矢量分别为p_1'和p_2'．由于每个算符$\psi^+(x_i)$($i=1$，2）都能吸收四维能量-动量矢量为p_1和p_2的初态电子，每个算符$\bar{\psi}^-(x_i)$（$i=1$，2）都能发射四维能量-动量矢量分别为p_1'和p_2'的终态电子，所以，在（14.2c）式中，共有四项能影响摩勒散射．这四项可以分成两组，每组由两项组成．组与组之间的不同仅仅在于把（14.2c）式中的积分变量x_1与x_2相互交换．所以，在实际计算时，我们只需要考虑一组就够了，最后再把所得结果乘以因子2．我们需要考虑的两项所表征的物理过程可用图16中的费曼图来反映．由于费米子态是反对称的，所以，根据泡利不相容



(a)　　(b)

图16　电子-电子散射

(a) 直接散射　　(b) 交换散射

原理，这两项仅仅符号相反。

（14.2d）式含有两个没有收缩的费米子算符，它能发生两个过程，随初终态所存在的费米子是电子还是正电子而定。（14.2d）式中的两项是相等的。电子情况下的费曼图如图17所示，它反映了由于裸电子和辐射场相互作用而对裸电子性质所作的修正。这是把裸电子转变成物理电子的所有过程中最简单的一个过程，所谓物理电子，就是周围环绕有光子云的一个电子。这个相互作用使系统的能量发生变化，也就是说，物理电子的质量和裸电子的质量是不同的。我们把这个变化称为电子自能，同时把图17称为自能图。对电子自能的计算导致一个发散积分。通过把这些发散积分合并进物理电子的性质中，我们就能把这些发散积分消除掉。这就是我们将要在以后讨论的重正化过程。

（14.2e）式描述了光子自能，其费曼图如图18所示。光子和电子-正电子场之间的相互作用使光子在x_1点处湮没，产生虚的电子-正电子对，而后虚的电子-正电子对到x_2处湮没。一个外电磁场的存在(例如一个重核)，将使这些电子-正电子对的分布发生变化，也就是说，使真空极化。这和电磁场使电介质极化的物理过程是基本相同的。因此，光子自能图也常被称为真空极化图。和电子自能的情况相似，光子自能的计算也将导致无穷大。不过我们在以后可以看到，这些无穷大同样可以利用重化过程来予以消除。



图17 电子自能



图18 光子自能（真空极化）

（14.2e）式中的正规乘积可以写成：

$$N\{(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\}=(-1)T_r\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\}N\{A_\nu(x_1)A_\mu(x_1)\}$$

（14.8）

式中的负号是费曼图中闭合费米子迴路的特征。在闭合费米子迴路中，要把一个费米子算符从因子乘积的一端变换到另一端，其对换次数总是奇数。通过明确写出旋量指标，并使用（8.51）式，就可导出（14.8）式。（14.8）式中的求迹运算相当于遍及虚的电子—正电子对的所有自旋态求和。可参见附录A中的（A28—A31）式。

（14.8）式的导出如下：

$$N\{(\bar{\psi}\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\}$$

$$=\{(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)_{x_1}\}N\{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)\}$$

$$=\{\bar{\psi}_\alpha(x_2)(\gamma_\nu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\lambda(x_1)(\gamma_\mu)_{\lambda\sigma}\psi_\sigma(x_1)\}N\{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)\}$$

$$= -\{\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\lambda(x_1)(\gamma_\mu)_{\lambda\sigma}\psi_\sigma(x_1)\bar{\psi}_\alpha(x_2)(\gamma_\nu)_{\alpha\beta}\}N\{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)\}$$

$$= (-1)T_r\{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\}N\{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)\}$$

这就是（14.8）式。

（14.2f）式所描述的物理过程可用图19中的费曼图表示。这个图完全没有外线，因此不引起任何跃迁。可以证明，在初等应用中，这样的真空图（即完全没有外线的费曼图）可全部略掉。

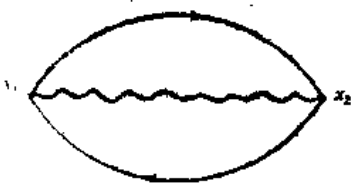


图19　最简单的真空图

到此为止，我们已经对二级微扰项$S^{(2)}$的正规乘积展开式中的所有各项作了初步分析。我们看到，这些项各自和一定的物理过程相对应。在对这些项及其所反映的过程作出物理解释时，费曼图是特别有用的。当我们在对高级微扰项$S^{(3)}$，… 等作分析时，不会有新的特征出现，上面所阐明的方法已足以解决问题了。仅有的不同是数学繁难性随微扰项级数的增加而迅速增加。

第十五章　康普顿散射

根据S矩阵，我们能求出任何物理过程的反应截面或跃迁几率。在本章中，我们将根据微扰理论，计算图11中费曼图所反映的康普顿散射过程的截面的最低级近似。计算过程将比较详细地给出，以便读者能根据本章结果处理其他物理过程。

这个问题可分成三步来解决：①计算（12.9）式中的矩阵元；②根据所得出的矩阵元计算截面；③对电子自旋态和光子极化态求和。

1. 矩阵元

康普顿散射过程是

$$\underset{(k,m)}{\gamma} + \underset{(p,r)}{e} \longrightarrow \underset{(,n)}{\gamma} + \underset{(,s)}{e}$$

这里，r，$s=1$，2〔电子自旋态 $u^{(r)}(P)$ 和 $u^{(s)}(P)$〕；m，$n=1$，2〔横极化光子的极化矢量 $\varepsilon_\mu^{(m)}(K)$〕。设初态为$|i\rangle$，在$|i\rangle$态中的电子，动量为P，能量为 $p_0=E_{\mathbf{p}}=(M^2+\boldsymbol{P}^2)^{\frac{1}{2}}$，即有

$$p^2+M^2=0 \tag{15.1}$$

在$|i\rangle$态中的光子，动量为K，能量为 $k_0=\omega_{\mathbf{k}}=|\boldsymbol{K}|$，即有

$$k^2=0 \tag{15.2}$$

于是，初态$|i\rangle$为

$$|i\rangle=a_m^\dagger(\boldsymbol{K})\,C_r^\dagger(\boldsymbol{P})|0\rangle,\quad m=1,\ 2;\ r=1,\ 2 \tag{15.3}$$

式中，$|0\rangle$是真空态。同样，末态$|j\rangle$为

$$|j\rangle=a_n^\dagger(\boldsymbol{K}')\,C_s^\dagger(\boldsymbol{P}')|0\rangle,\quad n=1,\ 2;\ s=1,\ 2, \tag{15.4}$$

由（14.6—7）式和（15.3—4）式，可得康普顿散射的矩阵元为

$$M_{fi}=\langle j|S_e^{(2)}|i\rangle+\langle j|S_e^{(2)}|i\rangle \tag{15.5}$$

（15.5）式中的第一项和图11(a)相对应，为了实现从$|i\rangle$到$|j\rangle$的跃迁，我们要求在$S_e^{(2)}$中含有算符$a_m(\boldsymbol{K})$，$C_r(\boldsymbol{P})$，$a_n^\dagger(\boldsymbol{K}')$和$C_s^\dagger(\boldsymbol{P}')$以吸收$|i\rangle$中的粒子和产生$|f\rangle$中的粒子。根据（14.7a）式，$S_e^{(2)}$为

$$S_e^{(2)}=e^2\iint d^4x_1d^4x_2\{\bar\psi^-(x_2)\gamma_\nu A_\nu^-(x_2)\psi(x_2)\bar\psi(x_1)\gamma_\mu A_\mu^+(x_1)\psi^+(x_1)\} \tag{15.7a}$$

由（8.37）式和（9.16）式，可得 $S_e^{(2)}$ 中的各算符为

$$\psi^-(x_2)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0'=E_{p'}}\left(\frac{M}{p_0'}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{S=1}^{2}C_S^{\dagger}(\boldsymbol{P}')\bar{u}^{(S)}(\boldsymbol{P}')\,e^{-ip'x_2} \tag{15.7b}$$

$$\psi^+(x_1)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}C_r(\boldsymbol{P})u^{(r)}(\boldsymbol{P})\,e^{ipx_1} \tag{15.7c}$$

$$A_\nu^-(x_2)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0'=|K'|}\frac{1}{\sqrt{2k_0'}}\sum_{n=1}^{2}a_n^{\dagger}(\boldsymbol{K}')\varepsilon_\nu^{(n)*}(\boldsymbol{K}')\,e^{-ik'x_2} \tag{15.7d}$$

$$A_\mu^+(x_1)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|K|}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{2}a_m(\boldsymbol{K})\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K})\,e^{ikx_1} \tag{15.7e}$$

根据（8.51）和（8.46a）式得 $S_e^{(2)}$ 中的传播子 $\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}$ 为

$$\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}=-\frac{1}{2}S_F(x_2-x_1)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{e^{iq(x_2-x_1)}}{\not{q}-iM} \tag{15.7f}$$

这里，我们的归一化是对一个很大的空间V进行的，这在实际计算中是很方便的，特别是在计算相空间因子时更是如此．不过在写下（15.7f）式时，我们再次是用一个积分来近似地代替遍及于所有容许动量值的求和〔参见（3.7）式〕．由此引起的误差将在取极限$V\to\infty$时消失．

由于对横向极化来说，极化矢量 $\varepsilon^{(n)}$ 是实数，$\varepsilon_4^{(n)}$ 分量为 0．所以，我们将把 $\gamma_\mu\varepsilon_\mu^{(n)}(\boldsymbol{K}')$写成$\not{\varepsilon}^{(n)}(\boldsymbol{K}')$．很显然，我们有

$$\langle j\,|\,a_n^{\dagger}(\boldsymbol{K}')C_S^{\dagger}(\boldsymbol{P}')a_m(\boldsymbol{K})C_r(\boldsymbol{P})\,|\,i\rangle=\langle 0\,|\,0\rangle=1 \tag{15.8}$$

于是有

$$\langle j\,|\,S_e^{(2)}\,|\,i\rangle=\langle j\,|\,e^2\iint d^4x_1d^4x_2\Big[\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0'=E_{p'}}\left(\frac{M}{p_0'}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{S=1}^{2}C_S^{\dagger}(\boldsymbol{P}')\bar{u}^{(S)}(\boldsymbol{P}')$$

$$\times e^{-ip'x_2}\Big]\gamma_\nu\Big[\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0'=|K'|}\frac{1}{\sqrt{2k_0'}}\sum_{n=1}^{2}a_n^{\dagger}(\boldsymbol{K}')\varepsilon_\nu^{(n)*}(\boldsymbol{K}')e^{-ik'x_2}\Big]$$

$$\times\Big[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{e^{iq(x_2-x_1)}}{\not{q}-iM}\Big]\gamma_\mu$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=|K|}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^{2}a_m(K)\varepsilon_\mu^{(m)}(K)e^{ikx_1}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{p_0=E_p}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}C_r(P)u^{(r)}(P)e^{ipx_1}\right]\Big|i\rangle$$

$$=\langle j|e^2\iint d^4x_1d^4x_2\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{M}{E_{p'}}\right)^{\frac{1}{2}}C_S^{\dagger}(P')\bar{u}^{(S)}(P')e^{-ip'x_2}\right]\gamma_\nu$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{K'}}}a_n^{\dagger}(K')\varepsilon_\nu^{(n)*}(K')e^{-ik'x_2}\right]$$

$$\times\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{e^{iq(x_2-x_1)}}{\not{q}-iM}\right]\gamma_\mu$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}a_m(K)\varepsilon_\mu^{(m)}(K)e^{ikx_1}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{M}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}}C_r(P)u^{(r)}(P)e^{ipx_1}\right]\Big|i\rangle \qquad (15.9a)$$

式中，由于在壳条件 $p_0'=E_{p'}$，$k_0'=|K'|$，$k_0=|K|$，$p_0=E_p$ 的限制以及考虑到(15.8)式，所以，全部求和号都取消了．再由(15.3—4)式和(15.8)式，由(15.9a)式即得

$$\langle j|S_e^{(2)}|i\rangle=e^2\iint d^4x_1d^4x_2\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{M}{E_{p'}}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(S)}(P')e^{-ip'x_2}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{K'}}}\not{\varepsilon}^{(n)}(K')e^{-ik'x_2}\right]$$

$$\times\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{e^{iq(x_2-x_1)}}{\not{q}-iM}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\not{\varepsilon}^{(m)}(K)e^{ikx_1}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{M}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(r)}(P)e^{ipx_1}\right] \qquad (15.9)$$

四维狄拉克δ-函数的的定义是

$$\int d^4x e^{ipx} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) \tag{15.10}$$

根据（15.10）式，（15.9）式中对x_1和x_2的积分可立刻算出，于是有

$$\iint e^{-ip'x_2}\, e^{-ik'x_2}\, e^{iq(x_2-x_1)}\, e^{ikx_1}\, e^{ipx_1}\, d^4x_1 d^4x_2$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q-p'-k')(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-q) \tag{15.11a}$$

把（15.11a）代入（15.9）式，即得

$$\langle j \mid S_s^{(2)} \mid i \rangle = \frac{-e^2}{(2\pi)^4 V^2} \left(\frac{M^2}{4E_p E_{p'} \omega_K \omega_{K'}}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^4 q\, (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p+k-q)$$

$$\times \delta^{(4)}(q-p'-k')\, \bar{u}^{(s)}(P') \left[\Xi^{(n)}(K') \frac{1}{\not{q} - iM} \Xi^{(m)}(K) \right]$$

$$\times u^{(r)}(P) \tag{15.11}$$

在（15.11）式中对q积分，我们可得

$$\langle j \mid S_s^{(2)} \mid i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{(-e^2)}{V^2} \left(\frac{M^2}{4E_p E_{p'} \omega_K \omega_{K'}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \bar{u}^{(s)}(P') \left[\Xi^{(n)}(K') \frac{1}{\not{p} + \not{k} - iM} \right] \Xi^{(m)}(K) \left] u^{(r)}(P) \right.$$

（15.12）

根据（8.46—47）式，我们有

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - iM} = \frac{\not{p} + \not{k} + iM}{(p+k)^2 + M^2 - i\varepsilon} \tag{15.13}$$

显然有

$$\left.\begin{aligned} E_p &= (M^2 + P^2)^{\frac{1}{2}} > P \\ \omega_K &= (M^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} > K \end{aligned}\right\} \tag{15.14a}$$

于是由（15.1—2）式，可得

$$(p+k)^2 + M^2 = p^2 + M^2 + k^2 + 2pk = 2(pk)$$

$$= 2(PK - E_p \omega_K) < 0 \tag{15.14}$$

这里，我们已令$\varepsilon = 0$，因为在（15.13）式中引进ε是为了避免分母为零。

根据（15.7）式，我们可以把

$$\frac{1}{\not{q}-iM} \qquad (15.15)$$

解释成动量空量中的费米子传播函数，费米子所具有的四维能量-动量矢量为q.

在（15.11）式中出现了两个狄拉克δ-函数，这就意味着在每个顶点和遍及整个散射过程，能量-动量是守恒的．特别是，如图20所示，处于虚中间态的电子，其能量-动量取固定值：

$$q = p + k = p' + k' \qquad (15.16)$$

由此，我们可对虚过程作如下理解：虚粒子的能量和动量只能由虚过程的能量和动量守恒来定义，而不象实粒子那样事先就有了明确含义．于是，虚粒子的能量和动量不再满足相对论粒子的质量壳层关系（15.1-2）式，换言之，虚粒子不在壳上．我们也可以从另一角度来理解虚过程，即中间态只存在极短的时间$\Delta\tau$，根据测不准关系$\Delta\tau\cdot\Delta E \sim \hbar$，中间态的能量具有很大的不确定性：$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta\tau}$.因此，在测不准关系允许的范围内，中间态虚粒子的能量动量矢量是可以不守恒的．很显然，这两种理解是完全等价的．

（15.5）式中的第二项$\langle j|S_b^{(2)}|i\rangle$可用和第一项$\langle j|S_a^{(2)}|i\rangle$完全相同的处理方式得到．这两项之间的不同之处仅仅在于两个光子被发射和吸收的次序不同．在第二项$\langle j|S_b^{(2)}|i\rangle$中，中间态费米子的四维能量-动量矢量满足：

$$q = p - k' = p' - k \qquad (15.17)$$

如图20(b)所示．因此，在(15.12)式中，交换$\Phi^{(m)}(K)$和$\Phi^{(n)}(K')$，并在(15.15)式的分母中用（15.17）式代替（15.16）式，于是就得到$\langle j|S_b^{(2)}|i\rangle$．这样，由

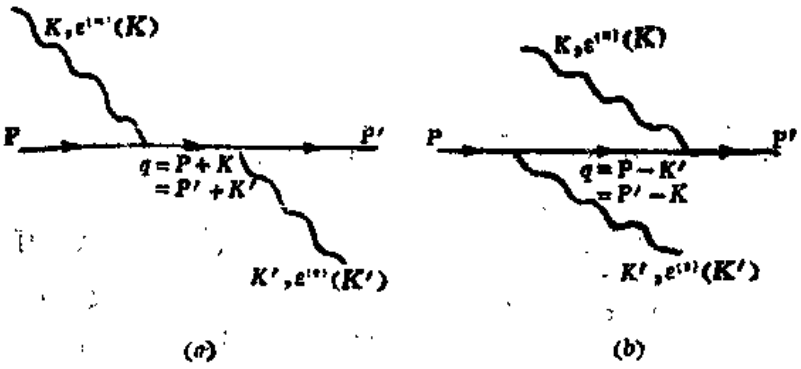


图20 康普顿散射（图中，P,K,P',K'是四维矢量，ε^m(K)和ε^n(K')的宗量K,K'是三维矢量）

（15.5）式，我们可得：

$$M_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p + k - p' - k')\left(\frac{-e^2}{V^2}\right)\left(\frac{M^2}{4E_P E_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot A \qquad (15.18)$$

式中

$$A=\bar{u}^{(s)}(P')\left[\not{\varepsilon}^{(s)}\frac{1}{\not{P}+\not{K}-iM}\not{\varepsilon}^{(m)}+\not{\varepsilon}^{(m)}\frac{1}{\not{P}-\not{K}'-iM}\not{\varepsilon}^{(s)}\right]u^{(r)}(P) \quad (15.19)$$

这里，我们采用了缩写记号，$\not{\varepsilon}^{(m)}\equiv\not{\varepsilon}^{(m)}(K)$，$\not{\varepsilon}^{(s)}\equiv\not{\varepsilon}^{(s)}(K')$.

2. 截面

$|i\rangle$态到$|j\rangle$态在整个时间整个空间内的总跃迁几率就是$|M_{ji}|^2$. 在定义散射矩阵时〔(12.3)式〕，我们采用了无限大的时间间隔，并且用平面波来描述入射粒子和靶核. 由于对散射过程进行了这样理想化的描述，所以我们在物理解释和数学处理上都遇到了困难. 为了更符合实际情况，我们将采用有限的时间间隔，并且用波包来描述入射粒子和靶核. 下面，我们将阐明如何用一种简单的方法，根据上述机制导出跃迁几率. 对这些问题的详尽讨论感兴趣的读者，可参见M.Gell-Mann and M.L.Goldberger, Phys. Rev. V.91, P.398, 1953. 和 B. A. Lippmann and J.Schwinger, Phys. Rev. V.79, P.469, 1950.

根据(15.18)式，可得

$$|M_{ji}|^2=(2\pi)^8[\delta^{(4)}(p+k-p'-k')]^2\frac{1}{V^4}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2$$

$$=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\frac{1}{V^4}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2\int d^4x \quad (15.20)$$

在导出(15.20)式的最后一步时，我们使用了下述技巧. 即有

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)=\int e^{ipx}d^4x \quad (15.21)$$

取$p=0$，则有

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)=\int d^4x=VT \quad (15.21a)$$

式中，VT是总的时空体积. 于是，根据狄拉克δ-函数的性质，我们有

$$(2\pi)^8[\delta^{(4)}(p+k-p'-k')]^2=(2\pi)^8\delta^{(4)}(0)\delta^{(4)}(p+k-p'-k')$$
$$=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')VT \quad (15.21b)$$

把(15.21b)代入(15.20)式的第一步，即得出最后结果. 由(15.20)式，可得单位时间单位体积的跃迁几率为

$$w_{ji}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\frac{1}{V^4}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2 \quad (15.22)$$

(15.22)式是从初态$|i\rangle$到唯一的一个终态$|j\rangle$的跃迁几率. 实际上，我们对一个粒子被散射进具有确定动量的一个终态这种物理过程并不感兴趣. 我们感兴趣的是一个粒

子被散射进一组末态的物理过程。比如在康普顿散射过程中，末态电子的动量在间隔（P'，$P'+dP'$）内，末态光子的动量在间隔（K'，$K'+dK'$）内。这组末态的总数目是

$$\frac{V^2}{(2\pi)^6}d^3p'd^3k' \tag{15.23}$$

末态电子的自旋是确定的，末态光子的极化矢量也是确定的。由（15.22—23）式，可得单位时间单位体积内的跃迁几率是：

$$w=\frac{1}{(2\pi)^2V^2}\int d^3p'd^3k'\,\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2 \tag{15.24}$$

在（15.24）式中，对那些变量积分以及积分区间，都完全取决于我们所考虑的物理过程。如果要计算一个光子以散射角θ被散射进极角（θ，ϕ）方向的立体角元$d\Omega$的跃迁几率，则令

$$d^3k'=\omega_{K'}^2d\omega_{K'}d\Omega \tag{15.25}$$

保持极角（θ，ϕ）不变，遍及P'和$\omega_{K'}$积分，则由（15.24）式可得

$$w=\frac{d\Omega}{(2\pi)^2V^2}\int\omega_{K'}^2d\omega_{K'}\delta(E_P+\omega_K-E_{P'}-\omega_{K'})\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2$$

$$=\frac{d\Omega}{(2\pi)^2V^2}\left\{\omega_{K'}^2\left[\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial(E_{P'}+\omega_{K'})}\right]_{\theta\phi}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2\right\} \tag{15.26}$$

式中，E_P，ω_K，θ和ϕ都是独立变数，它们取固定值，特别是在求（15.26）式中的导数时更是如此，$\omega_{K'}$的值则由能量守恒确定。

（15.26）式的推导如下：

首先，我们把（15.24）式中的狄拉克δ-函数写为

$$\delta^{(4)}(p+k-p'-k')=\delta^{(3)}(P+K-P'-K')\,\delta(E_P+\omega_K-E_{P'}-\omega_{K'}) \tag{1}$$

其次，我们有

$$d^3k'=|K'|^2d|K'|d\Omega=|K'|^2\frac{\partial|K'|}{\partial E_f}dE_fd\Omega=\omega_{K'}^2\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial E_f}dE_fd\Omega \tag{2}$$

式中，$d\Omega=\mathrm{Sin}\theta d\theta d\phi$。

设E_i和E_f分别是初态能量和末态能量，即有

$$\left.\begin{aligned} E_i &= E_P + \omega_K \\ E_f &= E_{P'} + \omega_{K'} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

由（15.24）式，可得

$$w = \frac{1}{(2\pi)^2 V^2}\int d^3p'd^3k'\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}-\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{K}')\delta(E_P+\omega_K-E_{P'}-\omega_{K'})$$
$$\times\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\cdots\right)|A|^2$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2V^2}\int d^3k'\delta(E_P+\omega_K-E_{P'}-\omega_{K'})\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\Big)|A|^2 \qquad (4)$$

在上式的推导中，由于被积函数中没有含$\boldsymbol{P}'$的函数项，所以我们有

$$\int d^3p'\delta^{(3)}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}-\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{K}')=1 \qquad (5)$$

这里要注意的是，$|A|^2$ 中的$\boldsymbol{P}'$只有一个固定值，即末态电子的动量$\boldsymbol{P}'$由能量－动量守恒定律确定，不是变量，因而与积分变数 d^3p' 无关．把（2）和（3）式代入（4）式，即得

$$w=\frac{1}{(2\pi)^2V^2}\int \omega_{K'}^2\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial E_f}dE_fd\Omega\delta(E_f-E_i)\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\Big)|A|^2$$
$$=\frac{d\Omega}{(2\pi)^2V^2}\left\{\omega_{K'}^2\left(\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial E_f}\right)_{E_f=E_i}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\cdots\right)|A|^2\right.$$
$$\left.=\frac{d\Omega}{(2\pi)^2V^2}\left\{\omega_{K'}^2\left[\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial(E_{P'}+\omega_{K'})}\right]_{\theta\phi}\left(\frac{e^4M^2}{4E_PE_{P'}\omega_K\omega_{K'}}\right)|A|^2\right\}\right. \qquad (6)$$

这就是（15.26）式．

由（15.16）式可得

$$p-k'=p'-k \qquad (15.16a)$$

两边平方，并代入（15.1—2）式，即得

$$pk'=p'k=pk-k'k \qquad (15.27)$$

迄今为止，我们使用的是一般参考系，并没有假定初态电子是静止的．因此，对初态和终态而言，所有表示式是更加对称的．在对自旋指标和极化指标求和时，这种对称是非常有用的．而且，在这种参考系中所得出的表示式，在反应过程A和B之间存在有非常密切的关系．这里，A是一个光子和一个电子（或一个正电子）被吸收(发射)的过程，B是一个光子和一个电子（或一个正电子）被发射（吸收）的过程．因此，过程B中的散射矩阵元，对自旋指标和极化指标的求和，可根据过程A得出．然而，为了计算(15.26)式中的相空间因子，我们将假定初态电子是静止的，即初态电子的动量为

$$p=(0\ 0\ 0,\ iM) \tag{15.27a}$$

这个假设代表了最重要的情况，并且使分析简化了。能量动量守恒方程（15.16a）现在变成

$$\left.\begin{aligned} E_{P'}+\omega_{K'}&=M+\omega_K\\ \boldsymbol{P}'+\boldsymbol{K}'&=\boldsymbol{K}\end{aligned}\right\} \tag{15.16b}$$

（15.16b）的推导如下：

因为 $p=(0\ 0\ 0,\ iM)$，故由（15.16a）式，可得

$$i\boldsymbol{M}-(\boldsymbol{K}'+i\omega_{K'})=(\boldsymbol{P}'+iE_{P'})-(\boldsymbol{K}+i\omega_K) \tag{1}$$

所以可得

$$\left.\begin{aligned} iM-i\omega_{K'}&=iE_{P'}-i\omega_K\\ -\boldsymbol{K}'&=\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{K}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由（2）式移项即得（15.16b）式。

（15.27）式则变成：

$$\omega_{K'}=\frac{M\omega_K}{M+\omega_K(1-\cos\theta)} \tag{15.28}$$

$\omega_{K'}$是一个光子被一个静止电子散射到θ角方向后所具有的能量，光子的初态能量为ω_K。（15.28）式表明，$\omega_{K'}$与方位角ϕ无关。

（15.28）式的推导如下：

$$k=(\boldsymbol{K},\ ik_0)=(\boldsymbol{K},\ i\omega_K)$$

由（15.2）式，即得

$$\boldsymbol{K}^2=\omega_K^2,\quad |\boldsymbol{K}|=\omega_K \tag{1}$$

初态电子处于静止状态，故有

$$p=(0\ 0\ 0,\ iM) \tag{2}$$

因此，我们可得

$$\left.\begin{aligned} pk'&=-M\omega_{K'}\\ pk&=-M\omega_K\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

于是有

$$\begin{aligned} k'k&=\boldsymbol{K}'\cdot\boldsymbol{K}-\omega_K\omega_{K'}=|\boldsymbol{K}'||\boldsymbol{K}|\cos\theta-\omega_K\omega_{K'}\\ &=\omega_K\omega_{K'}\cos\theta-\omega_K\omega_{K'}\end{aligned} \tag{4}$$

把（3）和（4）式代入（15.27）式中，即得

$$-M\omega_{K'}=-M\omega_K-\omega_K\omega_{K'}\cos\theta+\omega_K\omega_{K'} \tag{5}$$

由（5）式即得

$$\omega_{K'} = \frac{M\omega_K}{M + \omega_K(1-\cos\theta)} \qquad (6)$$

这就是（15.28）式.

根据（15.16b）式和 $E_{P'} = (M^2 + P'^2)^{\frac{1}{2}}$，可得

$$\omega_{K'} + E_{P'} = \omega_{K'} + [M^2 + \omega_{K'}^2 + \omega_K^2 - 2\omega_K\omega_{K'}\cos\theta]^{\frac{1}{2}} \qquad (15.29a)$$

把θ和ϕ看成常数，把（$\omega_{K'} + E_{P'}$）看成自变数，在（15.29a）两边求微商，即有

$$\left[\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial(\omega_{K'} + E_{P'})}\right]_{\theta\phi} = \frac{E_{P'}}{E_{P'} + \omega_{K'} - \omega_{K'}\cos\theta} = \frac{E_{P'}\omega_{K'}}{M\omega_K} \qquad (15.29)$$

式中，最后一步是根据（15.16b）和（15.28）式得出的.

（15.29a）和（15.29）式的推导如下：

首先，由（15.16b）式，我们有

$$\boldsymbol{P'} = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{K'} \qquad (1)$$

由（15.1—2）式和（1）式，我们可得

$$P'^2 = \omega_K^2 + \omega_{K'}^2 - 2\omega_K\omega_{K'}\cos\theta \qquad (2)$$

把（2）式代入$E_{P'} = (M^2 + P'^2)^{\frac{1}{2}}$即得

$$E_{P'} = (M^2 + \omega_K^2 + \omega_{K'}^2 - 2\omega_K\omega_{K'}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

由（3）式即得

$$\omega_{K'} + E_{P'} = \omega_{K'} + (M^2 + \omega_K^2 + \omega_{K'}^2 - 2\omega_K\omega_{K'}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

这就是（15.29a）式.将（4）式两边对$\omega_{K'}$求导，即得

$$\left[\frac{\partial(\omega_{K'} + E_{P'})}{\partial\omega_{K'}}\right]_{\theta\phi} = 1 + \frac{1}{2}(M^2 + \omega_K^2 + \omega_{K'}^2 - 2\omega_K\omega_{K'}\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times (2\omega_{K'} - 2\omega_K\cos\theta)$$

$$= 1 + \frac{\omega_{K'} - \omega_K\cos\theta}{E_{P'}}, \quad [\text{代入（3）式}]$$

$$= \frac{E_{P'} + \omega_{K'} - \omega_K\cos\theta}{E_{P'}} \qquad (5)$$

由（5）式即得

$$\left[\frac{\partial\omega_{K'}}{\partial(\omega_{K'}+E_{P'})}\right]_{\theta\phi}=\frac{1}{\left[\frac{\partial(\omega_{K'}+E_{P'})}{\partial\omega_{K'}}\right]_{\theta\phi}}$$

$$=\frac{E_{P'}}{E_{P'}+\omega_{K'}-\omega_K\cos\theta}\quad\text{（代入（15.16b）式）}$$

$$=\frac{E_{P'}}{M+\omega_K-\omega_K\cos\theta}\quad\text{（代入（15.28）式）}$$

$$=\frac{E_{P'}\omega_{K'}}{M\omega_K}\qquad(6)$$

这就是（15.29）式.

由于我们把态矢量归一化到在体积V内只含有一个粒子，所以，ωV 就代表单位时间内在每个散射中心上的跃迁几率. $I=\frac{1}{V}$是入射光子束的流强，即在每秒内穿过垂直于入射方向的每平方厘米的入射光子数（记住，我们已取光速为1）。因此，由（15.26），（15.27a）式和（15.29）式，我们可得微分截面$(\omega V)/I$为

$$\frac{\omega V}{I}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2|A|^2\qquad(15.30)$$

对于具有自旋的粒子，考虑到不同自旋取向的影响（极化效应），（15.30）式还须加以改正.在一般的实验中，入射束不极化，也不区分出射粒子和靶的极化.这时，因为初态仅是可能的自旋指标和极化指标中的一个，所以截面$(\omega V)/I$应该对初态的自旋指标和极化指标求平均；因为末态仅是可能的自旋指标和极化指标中的一个，所以截面$(\omega V)/I$应该对末态的自旋指标和极化指标求和. 于是，康普顿散射的未极化微分截面是

$$\sigma(\theta)d\Omega=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2\left\{\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}|A|^2\right\}\qquad(15.31)$$

在截面表示式（15.30—31）中，归一化体积V消掉了.这对一个合理的物理解释来说是必要的：当V足够大时，在V中所发生的物理过程必定和V表面上的边界条件无关.当归一化体积V趋于无穷大时，根据（3.7）式在传播子S_F中用积分代替动量求和所引进的误差就趋于零.

3. 对自旋指标和极化指标的求和

现在，我们来计算（15.31）式中的求和.为方便起见，我们引进下列缩写记号：

$$\left.\begin{aligned} M^2\xi_1 &= pk = p'k' \\ M^2\xi_2 &= -pk' = -p'k \end{aligned}\right\} \qquad (15.32a)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= p+k = p'+k' \\ f_2 &= p-k' = p'-k \end{aligned}\right\} \qquad (15.32b)$$

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \not{f}_1 + iM \\ g_2 &= \not{f}_2 + iM \end{aligned}\right\} \qquad (15.32c)$$

式中，$\not{f}_1$和$\not{f}_2$的定义参见附录A的（A10）式。由（15.32）式和（15.13—14）式，我们有

$$\frac{1}{\not{p}+\not{k}-iM} = \frac{\not{p}+\not{k}+iM}{(p+k)^2+M^2} = \frac{\not{f}_1+iM}{2(pk)} = \frac{g_1}{2M^2\xi_1} \qquad (15.33a)$$

$$\frac{1}{\not{p}-\not{k}'-iM} = \frac{\not{p}-\not{k}'+iM}{(p-k')^2+M^2} = \frac{\not{f}_2+iM}{-2(pk')} = \frac{g_2}{2M^2\xi_2} \qquad (15.33b)$$

把上面两式代入（15.19）式，即得

$$A = \bar{u}^{(s)}(P')Ou^{(r)}(P) \qquad (15.36)$$

式中，

$$O = \frac{1}{2M^2}\left[\not{\varepsilon}^{(s)}\frac{g_1}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(m)} + \not{\varepsilon}^{(m)}\frac{g_2}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(n)}\right] \qquad (15.34)$$

这里，g_1，g_2，ξ_1和ξ_2都是标量。由（15.34）式可得

$$\tilde{O} = \gamma_4 O^\dagger \gamma_4 = -\frac{1}{2M^2}\left[\not{\varepsilon}^{(m)}\frac{g_1}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(n)} + \not{\varepsilon}^{(n)}\frac{g_2}{\xi_2}\not{\varepsilon}^{(m)}\right] \qquad (15.35)$$

（15.35）式的推导如下：

首先，由（15.34）式，我们有

$$\left[\not{\varepsilon}^{(m)}\frac{g_1}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(n)}\right]^\dagger = \left[\gamma_\alpha \varepsilon_\alpha^{(n)}\frac{g_1}{\xi_1}\gamma_\beta \varepsilon_\beta^{(m)}\right]^\dagger$$

$$= \varepsilon_\beta^{(m)*}\gamma_\beta^\dagger\left(\frac{g_1}{\xi_1}\right)^\dagger \varepsilon_\alpha^{(n)*}\gamma_\alpha^\dagger$$

$$= \gamma_\beta \varepsilon_\beta^{(m)}\left(\frac{g_1}{\xi_1}\right)^\dagger \gamma_\alpha \varepsilon_\alpha^{(n)}$$

$$= \not{\varepsilon}^{(m)}\left(\frac{g_1}{\xi_1}\right)^\dagger \not{\varepsilon}^{(n)} \qquad (1)$$

把（15.32）式代入（ 1 ）式，即可得：

$$\gamma_4\left[\Phi^{(n)}\frac{g_1}{\xi_1}\Phi^{(n)}\right]^\dagger\gamma_4=\gamma_4\Phi^{(n)}\left(\frac{g_1}{\xi_1}\right)^\dagger\Phi^{(n)}\gamma_4$$

$$=\gamma_4\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(p_\alpha^\dagger\gamma_\alpha^\dagger+k_\beta^\dagger\gamma_\beta^\dagger-iM)\Phi^{(n)}\gamma_4$$

$$=\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(\gamma_4p_\alpha^\dagger\gamma_\alpha^\dagger\gamma_4+\gamma_4k_\beta^\dagger\gamma_\beta^\dagger\gamma_4-iM\gamma_4^2)\Phi^{(n)}$$

$$=\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(p_\alpha\gamma_4\gamma_\alpha\gamma_4+k_\beta\gamma_4\gamma_\beta\gamma_4-iM)\Phi^{(n)}$$

$$=-\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(p_\alpha\gamma_\alpha+k_\beta\gamma_\beta+iM)\Phi^{(n)}$$

$$=-\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(\not{P}+\not{K}+iM)\Phi^{(n)}$$

$$=-\Phi^{(n)}\frac{1}{\xi_1}(\not{f}_1+iM)\Phi^{(n)}$$

$$=-\Phi^{(n)}\frac{g_1}{\xi_1}\Phi^{(n)}\qquad(2)$$

同理可得

$$\gamma_4\left[\Phi^{(n)}\frac{g_2}{\xi_2}\Phi^{(n)}\right]^\dagger\gamma_4=-\Phi^{(n)}\frac{g_2}{\xi_2}\Phi^{(n)}\qquad(3)$$

由（15.34）式，（ 2 ）式和（ 3 ）式，即得

$$\tilde{O}=-\frac{1}{2M^2}\left[\Phi^{(n)}\frac{g_1}{\xi_1}\Phi^{(n)}+\Phi^{(n)}\frac{g_2}{\xi_2}\Phi^{(n)}\right]\qquad(4)$$

这就是（15.35）式。

根据（15.35）式和附录 A 中的（A28—A31）式，可计算出（15.31）式中的求和为：

$$\frac{1}{4}\sum_{r,s}\sum_{\alpha,\beta}|A|^2=\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}Tr\{\tilde{O}\Lambda^+(P')O\Lambda^+(P)\}$$

$$=\frac{1}{64M^6}\cdot B\qquad(15.36)$$

式中

$$B\equiv\sum_{m,n=1}^{2}Tr\left\{\left[\frac{1}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(n)}g_1\not{\varepsilon}^{(n)}+\frac{1}{\xi_2}\not{\varepsilon}^{(n)}g_2\not{\varepsilon}^{(m)}\right](\not{p}'+iM)\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\xi_1}\not{\varepsilon}^{(n)}g_1\not{\varepsilon}^{(m)}+\frac{1}{\xi_2}\not{\varepsilon}^{(m)}g_2\not{\varepsilon}^{(n)}\right](\not{p}'+iM)\right\}\qquad(15.37)$$

根据附录A中的（A39—A47）式，在（15.37）式中，我们可以用γ_m来代替$\not{\varepsilon}^{(m)}(K)$，用$\gamma_n$来代替$\not{\varepsilon}^{(n)}(K')$，同时把对$m$，$n$的求和范围拓展成从1到4．这样，（15.37）式就变成

$$B=\frac{1}{\xi_1^2}T_{11}+\frac{1}{\xi_2^2}T_{22}+\frac{1}{\xi_1\xi_2}(T_{12}+T_{21})\qquad(15.38)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}T_{11}&=T_r\{\gamma_m g_1\gamma_n(\not{p}'+iM)\gamma_n g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}\\T_{22}&=T_r\{\gamma_n g_2\gamma_m(\not{p}'+iM)\gamma_m g_2\gamma_n(\not{p}+iM)\}\\T_{12}&=T_r\{\gamma_m g_1\gamma_n(\not{p}'+iM)\gamma_m g_2\gamma_n(\not{p}+iM)\}\\T_{21}&=T_r\{\gamma_n g_2\gamma_m(\not{p}'+iM)\gamma_n g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}\end{aligned}\right\}\qquad(15.39)$$

式中，对m，n的求和是从1到4．

在（15.32）式中，用$-k'$代替k，也就是使ξ_1，f_1，g_1和ξ_2，f_2，g_2分别对换．相应地，（15.39）式中的T_{11}与T_{22}互相对换，T_{12}和T_{21}互相对换．于是，我们只需计算T_{11}和T_{12}．并且，由于（15.39）式中的T_{12}和T_{21}中的各因子都是γ矩阵和$c-$数，所以根据附录A中的（A35）式，反转T_{12}中各因子的顺序，即得到T_{21}，于是$T_{12}=T_{21}$．这表明T_{12}和T_{21}对ξ_1和ξ_2是对称的，在计算T_{12}时，这一点是很有用的．

根据附录A中的（A32—A38）式，就可以计算出T_{11}和T_{12}．由（15.38）式，即可得：

$$B=32M^4\left[\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)^2-2\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)-\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\right]\qquad(15.40)$$

把（15.40）和（15.36）式代入（15.31）式，即有

$$\sigma(\theta)d\Omega=\frac{1}{2}r_0^2d\Omega\left(\frac{\omega_K'}{\omega_K}\right)^2\left[\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)^2-2\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)-\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\right]\qquad(15.41)$$

式中，$r_0\equiv\frac{e^2}{4\pi M}$是电子的经典半径．设初态电子处于静止状态，即有

$$p=(0\ 0\ 0,\ iM)\qquad(15.42a)$$

把（15,42a）代入（15.32a）式，即得

$$\left.\begin{aligned} M\xi_1 &= -\omega_K \\ M\xi_2 &= +\omega_K' \end{aligned}\right\} \qquad (15.42)$$

把（15.28）式和（15.42）式代入（15.41）式，即得

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{1}{2} r_0^2 d\Omega \left(\frac{\omega_K'}{\omega_K}\right)^2 \left[\frac{\omega_K'}{\omega_K} + \frac{\omega_K}{\omega_K'} - \sin^2\theta\right] \qquad (15.43)$$

式中，ω_K' 由（15.28）式确定．这样，我们就得出了著名的克莱因和仁科（Klein & Nishina）公式*）．

（15.36）—（15.43）式的推导如下：

首先，根据附录A中的（$A28$—$A31$）式，可计算出（15.31）式中的求和为：

$$\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}|A|^2 = \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} T_r\{\bar{O}_A^+(P')O_A^+(P)\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} T_r\left\{-\frac{1}{2M^2}\left[\mathfrak{E}^{(m)}\frac{g_1}{\xi_1}\mathfrak{E}^{(n)} + \mathfrak{E}^{(n)}\frac{g_2}{\xi_2}\mathfrak{E}^{(m)}\right]\left(\frac{\not{P}'+iM}{2iM}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2M^2}\left(\mathfrak{E}^{(n)}\frac{g_1}{\xi_1}\mathfrak{E}^{(m)} + \mathfrak{E}^{(m)}\frac{g_2}{\xi_2}\mathfrak{E}^{(n)}\right)\left(\frac{\not{P}+iM}{2iM}\right)\right\} = \frac{1}{64M^6}\cdot B \qquad (1)$$

式中，

$$B \equiv \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} T_r\left\{\left(\frac{1}{\xi_1}\mathfrak{E}^{(m)}g_1\mathfrak{E}^{(n)} + \frac{1}{\xi_2}\mathfrak{E}^{(n)}g_2\mathfrak{E}^{(m)}\right)(\not{P}'+iM)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\xi_1}\mathfrak{E}^{(n)}g_1\mathfrak{E}^{(m)} + \frac{1}{\xi_2}\mathfrak{E}^{(m)}g_2\mathfrak{E}^{(n)}\right)(\not{P}+iM)\right\} \qquad (2)$$

（1）式和（2）式分别就是（15.36）式和（15.37）式．根据（$A39$—$A47$）式，在（2）式中，用γ_m代替$\mathfrak{E}^{(m)}$，用γ_n代替$\mathfrak{E}^{(n)}$，同时把对m，n的求和从1到2拓展成从1到4．于是可得

$$B = \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} T_r\left\{\frac{1}{\xi_1^2}\mathfrak{E}^{(m)}g_1\mathfrak{E}^{(n)}(\not{P}'+iM)\mathfrak{E}^{(n)}g_1\mathfrak{E}^{(m)}(\not{P}+iM)\right.$$

$$+\frac{1}{\xi_2^2}\mathfrak{E}^{(n)}g_2\mathfrak{E}^{(m)}(\not{P}'+iM)\mathfrak{E}^{(m)}g_2\mathfrak{E}^{(n)}(\not{P}+iM)$$

$$+\frac{1}{\xi_1\xi_2}\mathfrak{E}^{(m)}g_1\mathfrak{E}^{(n)}(\not{P}'+iM)\mathfrak{E}^{(m)}g_2\mathfrak{E}^{(n)}(\not{P}+iM)$$

$$\left.+\frac{1}{\xi_1\xi_2}\mathfrak{E}^{(n)}g_2\mathfrak{E}^{(m)}(\not{P}'+iM)\mathfrak{E}^{(n)}g_1\mathfrak{E}^{(m)}(\not{P}+iM)\right\}$$

---

*) O. Klein & U. Nishina, Zs. f. Phys., 52, 853 (1929)

用γ_m代替$\not{e}^{(m)}$，用γ_n代替$\not{e}^{(n)}$，得

$$B=\frac{1}{\xi_1^2}T_{11}+\frac{1}{\xi_2^2}T_{22}+\frac{1}{\xi_1\xi_2}T_{12}+\frac{1}{\xi_1\xi_2}T_{21} \tag{3}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}T_{11}&=T_r\{\gamma_m g_1\gamma_n(\not{p}'+iM)\gamma_n g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}\\T_{22}&=T_r\{\gamma_n g_2\gamma_m(\not{p}'+iM)\gamma_m g_2\gamma_n(\not{p}+iM)\}\\T_{12}&=T_r\{\gamma_m g_1\gamma_n(\not{p}'+iM)\gamma_m g_2\gamma_n(\not{p}+iM)\}\\T_{21}&=T_r\{\gamma_n g_2\gamma_m(\not{p}'+iM)\gamma_n g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

（3）式和（4）式分别就是（15.38）式和（15.39）式.根据前面的说明，我们只需计算T_{11}和T_{12}即可得出B.

$T_{11}=T_r\{\gamma_m g_1\gamma_n(\not{p}'+iM)\gamma_n g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}$ 〔根据（A38）式〕

$=T_r\{\gamma_m g_1(-2\not{p}'+4iM)g_1\gamma_m(\not{p}+iM)\}$ 〔代入（15.32）式〕

$=T_r\{\gamma_m(\not{f}_1+iM)(-2\not{p}'+4iM)(\not{f}_1+iM)\gamma_m(\not{p}+iM)\}$

$=T_r\{\gamma_m(-2\not{f}_1\not{p}'\not{f}_1-4iM\not{p}'\not{f}_1-8M^2\not{f}_1+2M^2\not{p}'+4iM\not{f}_1\not{f}_1-4iM^3)$
$\times\gamma_m(\not{p}+iM)\}$ 〔根据(A38)式〕

$=T_r\{(4\not{f}_1\not{p}'\not{f}_1-16iM(p'f_1)+16M^2\not{f}_1-4M^2\not{p}'+16iM(f_1f_1)$
$-16iM^3](\not{p}+iM)\}$

$=T_r\{4\not{f}_1\not{p}'\not{f}_1\not{p}-16iM(p'f_1)\not{p}+16M^2\not{f}_1\not{p}-4M^2\not{p}'\not{p}+16iM(f_1f_1)\not{p}$
$-16iM^3\not{p}+4iM\not{f}_1\not{p}'\not{f}_1+16M^2(p'f_1)+16iM^3\not{f}_1-4iM^3\not{p}'$
$-16M^2(f_1f_1)+16M^4\}$ 〔根据(A34)式〕

$=T_r\{4\not{f}_1\not{p}'\not{f}_1\not{p}+16M^2\not{f}_1\not{p}-4M^2\not{p}\not{p}'+16M^2(p'f_1)-16M^2(f_1f_1)$
$+16M^4\}$ 〔根据A（36）和（A37）式〕

$=16[(f_1p')(f_1p)-(f_1f_1)(p'p)+(f_1p)(p'f_1)]+64M^2(f_1p)$
$-16M^2(pp')+64M^2(p'f_1)-64M^2(f_1f_1)+64M^4$

$=-16(pp')[(f_1f_1)+M^2]+32(p'f_1)[(pf_1)+2M^2]-64M^2(f_1f_1)$
$+64M^4+64M^2(pf_1)$ 〔代入（15.32）式和（15.1—2）式〕

$=-32(pp')(pk)+32(pp')(pk)+32(p'k)(pk)+32(pp')M^2$
$+32(p'k)M^2-128(pk)M^2+64M^4+64M^4+64M^2(p^2+pk)$

$=32(-M^2\xi_2)(M^2\xi_1)+32M^2(-M^2\xi_2)-128M^2(M^2\xi_1)+128M^4$
$+32M^2(pk-pk'-M^2)+64M^2(-M^2+M^2\xi_1)$

$=-32M^4\xi_1\xi_2-32M^4\xi_2-128M^4\xi_1+32M^4+32M^4\xi_1+32M^4\xi_2+64M^4\xi_1$

$=32M^4-32M^4\xi_1-32M^4\xi_1\xi_2$

$=32M^4(1-\xi_1-\xi_1\xi_2)$ (5)

同理可得

$$T_{22}=32M^4(1-\xi_2-\xi_1\xi_2) \tag{6}$$

$$T_{12}=T_{21}=32M^4\left(1-\frac{\xi_1}{2}-\frac{\xi_2}{2}\right) \tag{7}$$

把（5）—（7）式代入（3）式，即得

$$B=32M^4\left[\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)^2-2\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)-\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\right] \tag{8}$$

这就是（15.40）式.

若令$p=(0\ 0\ 0\ ,iM)$，即初态电子处于静止不动的状态，则由（15.32）式可得

$$\xi_1=-\frac{\omega_K}{M},\quad \xi_2=+\frac{\omega_{K'}}{M} \tag{9}$$

把（9）式代入（15.41）式，即得

$$\sigma(\theta)d\Omega=\frac{1}{2}r_0^2d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2\left[M^2\left(\frac{1}{\omega_{K'}}-\frac{1}{\omega_K}\right)^2-2M\left(\frac{1}{\omega_{K'}}-\frac{1}{\omega_K}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}+\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ r_0^2d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2\left[\left(\frac{M}{\omega_{K'}}-\frac{M}{\omega_K}-1\right)^2+\left(\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}+\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)-1\right]$$

〔代入（15.28）式〕

$$=\frac{1}{2}\ r_0^2d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2\left[\left(\frac{\omega_K\omega_{K'}\ (1-\cos\theta)}{\omega_K\omega_{K'}}-1\right)^2+\left(\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}+\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ r_0^2d\Omega\left(\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}\right)^2\left[\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}+\frac{\omega_{K'}}{\omega_K}-\sin^2\theta\right] \tag{10}$$

这就是（15.43）式.

第十六章　库仑散射

在研究康普顿散射时，电子和光子都是用包含有产生算符与吸收算符的量子化场来描述的．不过，在某些问题中，场的量子涨落是不重要的，我们可以用包含有产生算符与吸收算符的量子化场来描述其中的一个场，而另一个场则可用纯碎的经典方式描述为时空坐标的函数，我们把这个经典场称为外场．例如，我们可以考虑一个电子被一个重核散射．这个重核可看成是一个质量为无穷大的粒子，而把电子看成是被重核产生的外场所散射．一般说来，在讨论韧致辐射和辐射修正一类的问题时，我们有必要考虑两个场：外部电磁场 $A_\mu^e(x)$ 和辐射场 $A_\mu(x)$．这时，在散射矩阵的展开式（13.12）式中，我们要用总电磁场 $A_\mu^e(x)+A_\mu(x)$ 来代替辐射场，即有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_n T\left\{N\left[\bar{\psi}(\not{A}+\not{A}^e)\psi\right]_{x_1}\cdots N\left[\bar{\psi}(\not{A}+\not{A}^e)\psi\right]_{x_n}\right\} \tag{16.1}$$

对电子被外场散射这一过程作出贡献的（16.1）式中的一级项是：

$$S_e^{(1)}=e\int d^4x\,\bar{\psi}^-(x)\gamma_\mu A_\mu^e(x)\psi^+(x) \tag{16.2}$$

式中，$\psi^+(x)$ 和 $\bar{\psi}^-(x)$ 是量子化的费米子场〔（8.37）式〕．和（16.2）式相对应的费曼图如图21所示．图中，符号“×”代表经典场的源．如果外场是纯粹的静电场，则有

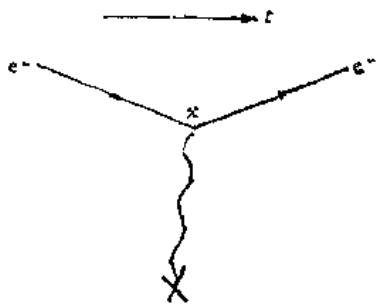


图21　电子被外场散射在位形空间中的费曼图

$$A_i^e(x)=0,\quad i=1,2,3 \tag{16.3}$$

$$A_4^e(x)=iV(X)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\phi(q)e^{iqx}d^3q \tag{16.4}$$

$$\phi(q)=\int V(X)e^{-iqx}d^3x \tag{16.5}$$

当电子被重核散射时，重核所能引起的外场就是库仑场：

$$V(X)=\frac{Ze}{4\pi|X|} \tag{16.6}$$

当电子处于初态 $|i\rangle$ 时，它的四维动量为 $p=(P,iE_P)$，旋量为 $u^{(r)}(P)$；电子处于末态 $|j\rangle$ 时，它的四维动量为 $p'=(P',iE_{P'})$，旋量为 $u^{(s)}(P')$．于

是，电子从 $|i\rangle$ 态到 $|j\rangle$ 态的弹性散射矩阵元为：

$$M_{ji} = \langle j | S_e^{(1)} | i \rangle \tag{16.7}$$

$$\left.\begin{aligned} |i\rangle &= C_r^\dagger(\boldsymbol{P})\,|0\rangle \\ |j\rangle &= C_s^\dagger(\boldsymbol{P}')\,|0\rangle \end{aligned}\right| \tag{16.7a}$$

由（16.2—5）式和（8.37）式，可得（推导见习题16.1）：

$$M_{ji} = 2\pi\delta(E_{\boldsymbol{P}} - E_{\boldsymbol{P}'})\,\frac{ie}{V}\left(\frac{M}{E_{\boldsymbol{P}}}\right)\phi(\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P})\,(u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{P}')\,u^{(r)}(\boldsymbol{P})) \tag{16.8}$$

（16.8）式中的 δ 函数确保了能量守恒．我们现在没有考虑动量守恒是因为我们忽略了外场场源的反冲．如果外场场源是一个重核，那末它的反冲显然是可以忽略不计的．

根据（16.8）式，可得单位时间内的跃迁几率为

$$\omega_{ji} = \frac{|M_{ji}|^2}{T} = 2\pi\delta(E_{\boldsymbol{P}} - E_{\boldsymbol{P}'})\,\frac{1}{V^2}\left(\frac{eM}{E_{\boldsymbol{P}}}\right)^2 |\phi(\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P})|^2 \cdot |u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{P}')\,u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2 \tag{16.9}$$

式中，$T = \int_{-\infty}^{\infty} dt$ 是整个时间．由于这里只有一个散射中心（产生外部电磁场的重核），所以和（15.20—22）式不同，用不着去考虑单位体积内的跃迁几率．（16.9）式是电子在单位时间内从一个确定初态到一个确定末态的跃迁几率．在导出（16.9）式时，我们用到了（15.21b）式的技巧，即根据狄拉克δ函数的性质，我们有

$$\begin{aligned}(2\pi)^2[\delta(E_{\boldsymbol{P}} - E_{\boldsymbol{P}'})]^2 &= (2\pi)^2\delta(0)\,\delta(E_{\boldsymbol{P}} - E_{\boldsymbol{P}'}) \\ &= (2\pi)\,\delta(E_{\boldsymbol{P}} - E_{\boldsymbol{P}'})\,T\end{aligned} \tag{16.9a}$$

$$T = 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \tag{16.9b}$$

设 $P \equiv |\boldsymbol{P}|$，$P' \equiv |\boldsymbol{P}'|$．在（16.9）式两边同乘以 $V d^3p'/(2\pi)^3$［参见（15.23）式］，我们就得到单位时间内，电子从一个确定初态到动量在一定间隔 $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{P}' + d\boldsymbol{P}')$ 内的末态连续区的跃迁几率．然后再除以入射电子束的流强 I，我们就得到了电子被外场散射的微分截面 $\sigma(\theta)d\Omega$ 为

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{\omega_{ji} V d^3p'}{(2\pi)^3 I} \tag{16.9a}$$

入射电子速度的相对论表示式为

$$v = \frac{P}{E_{\boldsymbol{P}}} \tag{16.10}$$

于是入射电子束的流强 I 为

$$I=\frac{v}{V}=\frac{P}{E_{\mathrm{p}}V} \tag{16.10a}$$

设$d\Omega$是散射角θ方向的立体角元，于是有

$$d^3p'=d\Omega(P')^2dP'=d\Omega P'E_{\mathrm{p}'}dE_{\mathrm{p}'} \tag{16.11}$$

式中，我们用到了$P'dP'=E_{\mathrm{p}'}dE_{\mathrm{p}'}$，这里$P'\equiv|\boldsymbol{P}'|$．由$E_{\mathrm{p}'}^2=M^2+\boldsymbol{P}'^2$即可得$|\boldsymbol{P}'|\,d\,|\boldsymbol{P}'|=E_{\mathrm{p}'}dE_{\mathrm{p}'}$．把（16.9）式和（16.11）式代入（16.9a）式，即可得出极化确定的截面为

$$\begin{aligned}\sigma(\theta)d\Omega&=\int\frac{W_{fi}Vd\Omega P'E_{\mathrm{p}'}dE_{\mathrm{p}'}E_{\mathrm{p}}V}{(2\pi)^3P}\\&=\int\frac{V^2P'E_{\mathrm{p}'}E_{\mathrm{p}}d\Omega dE_{\mathrm{p}'}}{(2\pi)^3P}\cdot(2\pi)\delta(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p}'})\frac{1}{V^2}\left(\frac{eM}{E_{\mathrm{p}}}\right)^2\\&\quad\times|\phi(\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P})|^2|u^{(S)\dagger}(\boldsymbol{P}')u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2\\&=\left(\frac{eM}{2\pi}\right)^2d\Omega|\phi(\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P})|^2|u^{(S)\dagger}(\boldsymbol{P}')u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2\end{aligned} \tag{16.12}$$

上式表明，$\sigma(\theta)d\Omega$和归一化体积V无关．

如果实验不测量入射电子的自旋量子数，也不测量出射电子的自旋量子数，则为了求出这种不考虑极化的截面，我们就必须对入射电子的自旋态求平均并对出射电子的自旋态求和．于是，（16.12）式中的最后一个因子$|u^{(S)\dagger}(\boldsymbol{P}')u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2$变成：

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}|\bar{u}^{(S)}(\boldsymbol{P}')\gamma_4u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2$$

$$=\frac{1}{2}Tr\{\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})\}=\frac{1}{2M^2}(M^2+E_{\mathrm{p}}^2+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}') \tag{16.13}$$

在上式的推导中，我们用到了附录A中的（A28—A31）式，以及（A22）式，（A 2）式和（A33）式．

（16.13）式的推导如下：

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{P}')\gamma_4u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}[\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P})\gamma_4u^{(s)}(\boldsymbol{P}')][\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{P}')\gamma_4u^{(r)}(\boldsymbol{P}')]\quad[\text{代入(A27)式}]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}[\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P})\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4u^{(r)}(\boldsymbol{P})]\quad[\text{根据(A14)和(A25)式}]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}[\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P})\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})u^{(r)}(\boldsymbol{P})]\varepsilon_r$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\bar{u}_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})[\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})]_{\alpha\beta}\quad u_\beta^{(r)}(\boldsymbol{P})\varepsilon_r \quad 〔\text{代入(A26)式}〕$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}[\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})]_{\alpha\beta}\quad \delta_{\beta\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{4}[\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})]_{\alpha\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}Tr\{\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P}')\gamma_4\Lambda^+(\boldsymbol{P})\} \quad 〔\text{代入(A22)式}〕$$

$$= \frac{1}{2}Tr\left\{\gamma_4\frac{\not{P}'+iM}{2iM}\gamma_4\frac{\not{P}+iM}{2iM}\right\}$$

$$= \frac{1}{8M^2}Tr\left\{\gamma_4\left(\frac{\gamma_\mu p'_\mu}{i}+M\right)\gamma_4\left(\frac{\gamma_\alpha p_\alpha}{i}+M\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8M^2}Tr\left\{\left(\gamma_4\gamma_4\frac{iE_{\boldsymbol{P}'}}{i}+\gamma_4\gamma_i\frac{p'_i}{i}+M\gamma_4\right)\left(\gamma_4\gamma_4\frac{iE_{\boldsymbol{P}}}{i}+\gamma_4\gamma_k\frac{p_k}{i}+M\gamma_4\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8M^2}Tr\left\{\left(E_{\boldsymbol{P}'}+\frac{1}{i}\gamma_4\gamma_i p'_i+M\gamma_4\right)\left(E_{\boldsymbol{P}}+\frac{1}{i}\gamma_4\gamma_k p_k+M\gamma_4\right)\right\}$$

根据（A33）和(A34）式

$$= \frac{1}{8M^2}Tr\{E_{\boldsymbol{P}'}E_{\boldsymbol{P}}+M^2\gamma_4\gamma_4-\gamma_4\gamma_i p'_i\gamma_4\gamma_k p_k\}$$

$$= \frac{1}{8M^2}Tr\{E_{\boldsymbol{P}'}E_{\boldsymbol{P}}+M^2+4\delta_{ik}p'_i p_k\}$$

$$= \frac{1}{2M^2}(M^2+E_{\boldsymbol{P}'}E_{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}')$$

$$= \frac{1}{2M^2}(M^2+E_{\boldsymbol{P}}^2+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}')$$

这就是（16.13）式.最后一步的导出是由于（16.12）式中δ函数$\delta(E_{\boldsymbol{P}}-E_{\boldsymbol{P}'})$的存在保证了能量守恒.

由能量动量守恒定律可得

$$M^2 = E_{\boldsymbol{P}}^2 - \boldsymbol{P}^2 \qquad (16.14a)$$

由$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\cos\theta$，可得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' = P^2\cos\theta \tag{16.14b}$$

把（16.14a），（16.14b）和（16.10）式代入（16.13）式，即得

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{P}')\gamma_4 u^{(r)}(\boldsymbol{P})|^2 = \frac{1}{2M^2}(E_p^2 + E_p^2 - P^2 + P^2\cos\theta)$$

$$= \frac{E_p^2}{M^2}\left(1 - \frac{P^2}{E_p^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{E_p}{M}\right)^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{16.14}$$

把（16.14）式代入（16.12）式，即得不考虑极化的截面为

$$\sigma(\theta)d\Omega = \left(\frac{eE_p}{2\pi}\right)^2 d\Omega|\phi(\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P})|^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{16.15}$$

对于（16.6）式所给出的库仑势，我们有

$$\phi(\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}) = \frac{Ze}{|\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}|^2} = \frac{Ze}{(2P\sin\frac{\theta}{2})^2} \tag{16.16}$$

把（16.16）式代入（16.15）式，即得莫特（Mott）散射公式*）：

$$\sigma(\theta)d\Omega = \left(\frac{Ze^2}{8\pi}\frac{E_p}{P^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 d\Omega\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{16.17}$$

对（16.17）式取非相对论极限：$v \ll 1$，$E_p \to M$，$P \to Mv$，则可得到著名的卢瑟福（Rutherford）库仑散射公式：

$$\sigma(\theta)d\Omega = \left(\frac{Ze^2}{8\pi Mv^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 d\Omega \tag{16.18}$$

*） N.F.Mott, Proc. Roy. Soc., London A124, 425 (1929).

第十七章　辐射修正

迄今为止，我们应用量子场论对一些物理过程作了最低次微扰近似计算.通过考虑S矩阵展开式中的高级项，我们能够对这些近似计算进行修正，以求得更精确的结果.在下面的几章中，我们将讨论对最低次微扰近似结果所作的辐射修正计算.

在本章中，我们将通过考虑库仑散射的辐射修正，来定性地引进这些概念.在16章中，最低次的微扰计算是基于（16.2）式进行的，相应的费曼图是图21.现在，我们将只考虑外场A_μ^e的线性项，但将考虑量子化辐射场A_μ的平方项，这一项和发射一个虚光子随后又加以吸收的物理过程相对应*).在（16.1a）式中，令$n=3$，我们就得到二级辐射修正：

$$S^{(2)}=\frac{e^3}{2!}\int\cdots\int d^4x\,d^4x_1\,d^4x_2\,T\{N(\bar{\psi}\not{A}^e\psi)_x N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1} N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}\} \quad (17.1)$$

式中，外场只在顶点x作用，而辐射场则只在顶点x_1和x_2作用.$S^{(2)}$对弹性散射所作出的贡献如图22所示.这五个图中的每个图都将出现两次，与辐射场作用的两个顶点x_1和

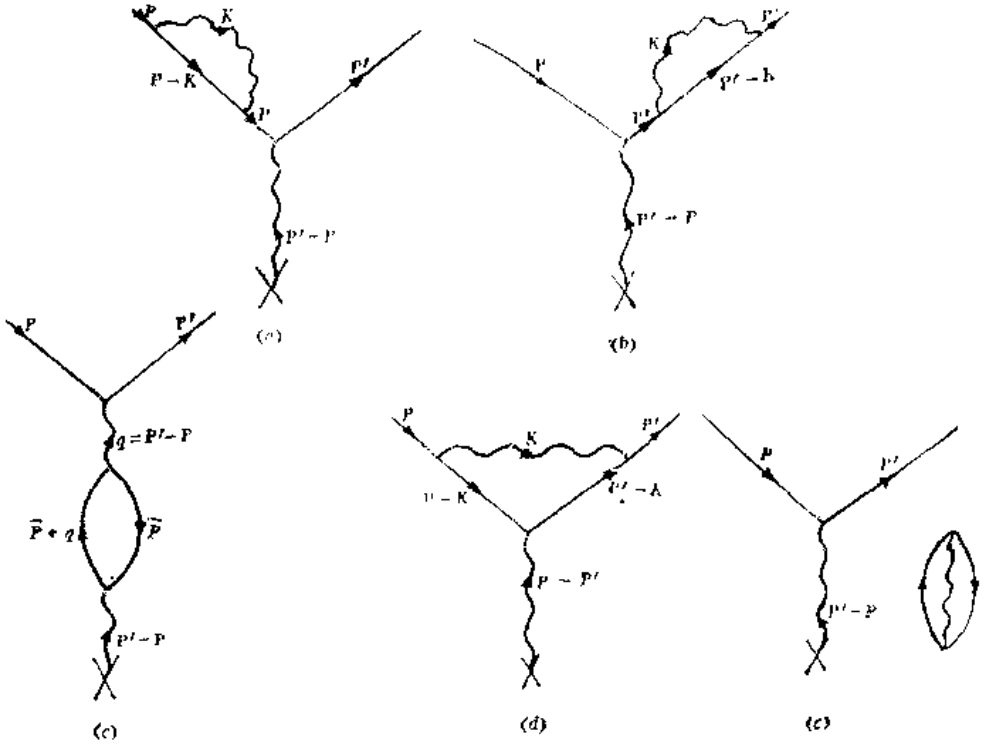


图22　对库仑散射的二级辐射修正（图中，K，P，P′分别是四维矢量）

*）在（16.1）式中，A_μ的线性项对弹性电子散射没有贡献，它代表的是非弹性电子散射，例如，韧致辐射.弹性电子散射要求光子的发射和吸收，所以A_μ的平方项才有贡献.假定外场A_μ^e是微弱的，所以在（16.1）式中只需考虑A_μ^e的线性项.于是，我们可把（16.1）式写成：

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(n-1)!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,T\left\{N(\bar{\psi}\not{A}^e\psi)_{x_1}N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}\cdots N(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_n}\right\} \quad (16.1a)$$

x_2的对换相对应。

图22的五个费曼图是对图21的基本费曼图的修正。除了图22(d)以外，我们已经在图17到19中遇到过这些修正。正如在第十四章中关于图19所说过的，象图22(e)这样由真空图构成而没有任何外线的修正，不会产生任何可观察的效应，所以可以略掉。图22 中剩下的修正，可分成三种类型，如图23所示。图23(a)代表对费米子线的e^2修正。这条费米子线可以是外线，代表一个入射费米子或出射费米子，如图22(a)和(b)所示；也可以是一条内线，代表费米子传播子。例如，在计算康普顿散射的二级辐射修正时，如图24所示的修正图将会出现。图23(b)代表对玻色子线的e^2修正，在量子电动力学的情形下，这个玻色子就是光子。这条玻色子线可以是外线，也可以是光子传播子。

图 23（a）和（b）中的W-修正与W'-修正的解释可参见第十四章图 18 所作的讨论。它们代表由相互作用所引起的场的修正。电子周围永远存在着它自己所产生的光子云，我们可以把这些光子云形象地看成是给裸电子穿上了衣服。当然，完全穿上了衣服的真实电子只有在考虑所有辐射修正后才会得到。这里，我们只考虑了e^2修正，所以，它只能把裸电子转换成穿上了部分衣服的真实电子。同样，图23(b)代表由于形成虚的电子-正电子对（即真空极化）而对辐射场所产生的修正。粒子和它自己的场相互作用所引起的修正称为自能效应。电子自能效应和光子自能效应将对粒子的质量和耦合常数（在量子电动力学中，耦合常数就是 e）产生修正，我们把这种修正称为质量和电荷的重正化。类似地，图 23(c)代表对粒子之间相互作用所引起的修正，这个修正将导致电荷的重正化。M和e分别是裸粒子的质量和电荷，M_0和e_0分别是真空粒子的质量和电荷。对单独的一个电子而言，自能效应仅导致质量重正化。当我们考虑一个电子和电磁场相互作用时，例如摩勒散射或库仑散射，就将会有额外的可观察到的对最低次微扰近似计算的辐射修正。如何计算这些修正和如何进行这些重正化的问题将在下面几章中讨论。

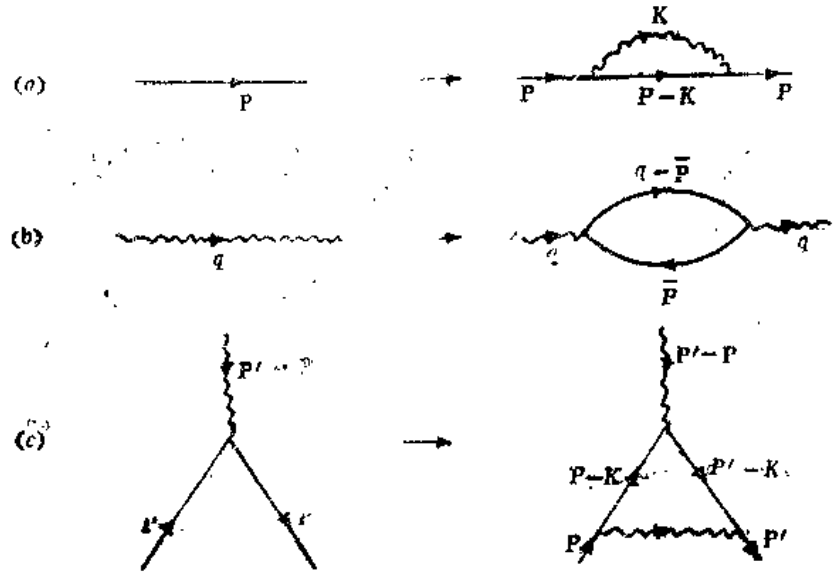


图23　二级辐射修正（图中，$\bar{P}$, K, P, P′，分别是四维矢量）

(a) 对费米子线的二级辐射修正，表示为W－修正。(b) 对顶色子线的二级辐射修正，表示为W'－修正。(c) 对顶点的二级辐射修正，表示为V_1－修正

根据微扰理论，辐射修正只不过是对低级近似计算的微小修正。就量子电动力学而言，这种修正是精细结构常数（约为$\frac{1}{137}$）的数量级，即为百分之几。然而，根据(17.1)式对辐射修正所做的计算将导致发散积分。现在，人们对于量子场论中出现的无穷大的物理意义已有了比较深刻的认识，同时还发现了如何处理这些无穷大的有效方法。这就是将电子的质量重新定义的质量重正化方法和将电子的电荷重新定义的电荷重正化方法。这些无穷大的产生，是由于在相对论性量子场论中，我们把粒子看成是没有内部结构的几何点。通过引进形状因子，把电子看成有大小，于是电子和光子的相互作用就不在一个点上了，而是在一个有广延性的区域之中。这样构造的量子场论虽然没有发散困难，但通常却导致了其他困难，即不能符合所谓微观因果性这个狭义相对论的要求。

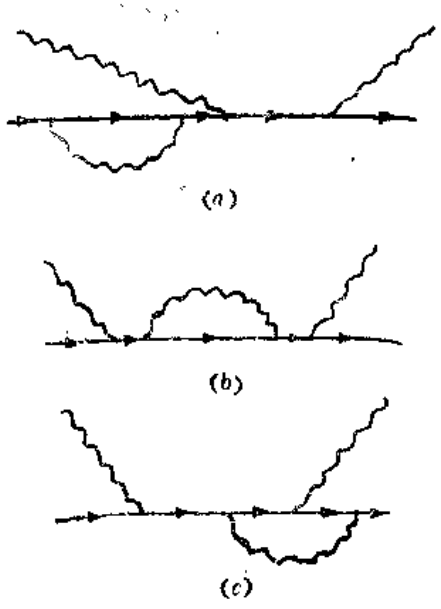


图24　对康普顿散射的二级辐射修正

经过质量重正化和电荷重正化以后，量子场论中的无穷大便出现在裸粒子和物理粒子的关系之中。这些关系，如同裸粒子本身一样，是完全观测不到的。令重正化了的质量和电荷取有限的实验测定值以后，在每一高次微扰近似计算中就不会再出现无穷大。用相同的方法，我们可以计算电子与光子相互作用中所有高次近似的贡献。因此，辐射修正的计算可以达到很高的精确度。目前，非常精确的一些实验已经证实，高次近似微扰计算中所给出的微小修正在实验上不仅存在，而且在数值上也与实验结果完全符合。例如，根据量子电动力学对电子反常磁矩所作的计算，和实验符合得相当好；此外，量子电动力学还成功地解释了兰姆移位。

关于这些辐射修正的详尽计算已超出了本书的范围，在后面三章中，我们将根据图23所给出的三个修正图，对重正化理论进行最初步然而也是最基本的讨论。我们将阐明重正化理论的基本概念和基本方法，并为更完全更详尽的计算提供引导。在任何情况下，图23所给出的三个修正图都是最重要的。这首先是因为，这三个图在重正化理论中起了特殊的作用；其次是因为在对任何物理过程所作的最低级辐射修正的计算中，它们是唯一出现的发散图。因此，如果我们能熟练地处理这三个图，那末，在对任何物理过程所作的二级辐射修正计算中，我们就不会有任何困难。

现在，我们用康普顿散射作为例子，对二级辐射修正作一简要说明。康普顿散射的

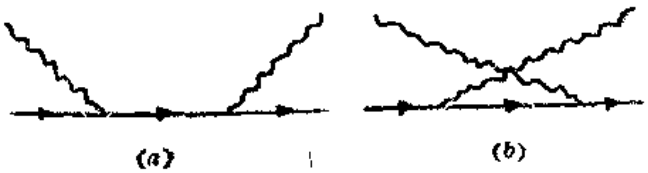


图25　康普顿散射的两个最低级费曼图

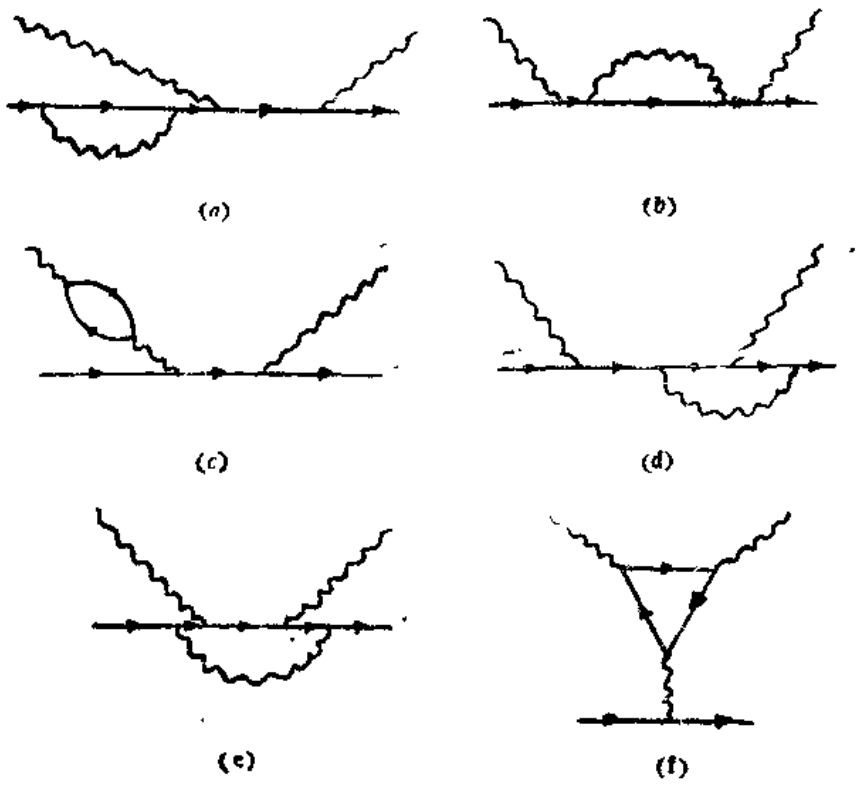


图26　康普顿散射的e^2辐射修正

基本图如图25所示，它本身就是e^2级的。参见习题14.1，对康普顿散射的最低级辐射修正起源于(13.12)式中的e^4项，相应的费曼图如图26所示。图(*a*)—(*d*)是对图25中含有两个顶点的费曼图的所有修正。这些修正图都含有四个顶点和正确的外线。图(*a*)和(*b*)是对电子线的修正，图(*c*)是对光子线的修正，图(*d*)是对顶点的修正。如果按通常的法则对图(*e*)进行计算，那末它也将给出一个有限的贡献。然而，根据习题14.2所给出的法雷定理，象图(*f*)那样的三角图，将没有任何贡献。所以，如果我们能根据图23的三个修正图得出有限的贡献，我们就能对二级辐射修正进行计算。

这里关于康普顿散射辐射修正的描述，阐明了辐射修正的特征。任何物理过程的二级辐射修正，都可以根据图23用一切可能的方式对全部电子线、全部光子线和全部顶点进行修正后得到。在对发散积分进行重正化以后，这些修正图就给出有限的二级辐射贡献。一般说来，还存在一些额外的费曼图对e^2级辐射修正有贡献，如图26(*e*)就是这样。这些费曼图不能根据图23对最低费曼图进行W-修正，W'-修正和V_1-修正而得到。不过，它们的贡献是有限的，不会导致无穷大，所以不需要重正化。

第十八章　费米子自能

在本章中，我们来讨论图23(*a*)中的费米子自能图W.为明确起见，我们只限于考虑量子电动力学的情况.在费曼图的外电子线或内电子线中插进W修正，就能描述由于裸电子和它自己周围环绕的光子云相互作用而导致的e^2级辐射修正.这是一个把裸电子部分地转换成真实电子的过程.

根据计算费曼图的一般方法，我们首先来考虑一条电子线的W修正.所得的结果具有一般性，可以代进任何费曼图中.因此，我们来讨论电子传播子的W修正，其他情况则只是简单地提一下.

如图27所示，用图(*b*) + (*c*)代替图(*a*)，就意味着用考虑二级辐射修正后的电子传播子来代替最低级的费米子传播子.这在数学上就相当于用$S'_F(x_2-x_1)$代替$S_F(x_2-x_1)$.

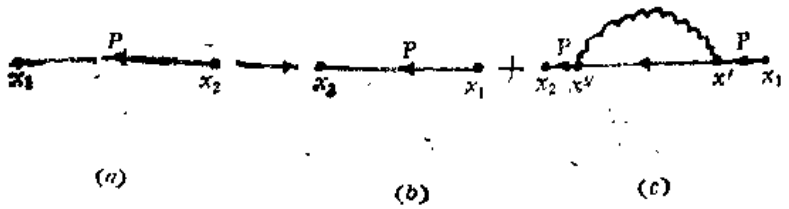


图27　修正后的费米子传播子（图中，K，P分别为四维矢量）

$$\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)} = -\frac{1}{2}S_F(x_2-x_1) \tag{18.1}$$

$$-\frac{1}{2}S'_F(x_2-x_1) = -\frac{1}{2}S_F(x_2-x_1) - \frac{1}{2}S_F^{(2)}(x_2-x_1) \tag{18.2}$$

式中，

$$-\frac{1}{2}S_F^{(2)}(x_2-x_1) = \int\int d^4x'\,d^4x''\,\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x'')}\{e^2\gamma_\mu\overbrace{\psi(x'')\bar{\psi}(x')}\gamma_\lambda$$
$$\times \overbrace{A_\mu(x'')A_\lambda(x')}\}\overbrace{\psi(x')\bar{\psi}(x_1)} \tag{18.3}$$

现在，我们从位形空间转到动量空间.根据(8.46*a*)，我们定义费米子传播函数$S_F(x)$的付里叶变换为

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p}-iM} \tag{18.4}$$

于是我们有

$$\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)} = -\frac{1}{2}S_F(x_2-x_1) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ip(x_2-x_1)}S_F(p) \qquad (18.5)$$

和（18.5）式类似，我们根据$S_F^{(2)}(x)$可定义$S_F^{(2)}(p)$，根据$S_F'(x)$可定义$S_F'(\phi)$。于是，利用传播函数（8.46a)式和（9.15）式的动量表象，在（18.3）式中遍及x'和x''积分，则（18.2—3）式就变成：

$$S_F'(p) = S_F(p) + S_F^{(2)}(p) \qquad (18.6)$$

$$S_F^{(2)}(p) = \frac{1}{\not{p}-iM}\Sigma(W,p)\frac{1}{\not{p}-iM} \qquad (18.7)$$

式中，

$$\Sigma(W,p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma_\mu\frac{1}{\not{p}-\not{k}-iM}\gamma_\mu\frac{1}{k^2} \qquad (18.8)$$

我们可以把（18.7—8）式看成是代表图27(c)中的费曼图的适当形式，除了数值因子外，我们可以根据图27（c)直接把（18.7—8）式写下来。

（18.7—8）式的导出如下：

由（18.3）式可得：

$$-\frac{1}{2}S_F^{(2)}(x_2-x_1) = \int\int d^4x'd^4x''\left[-\frac{1}{2}S_F(x_2-x'')\right]\left[e^2\gamma_\mu\left(-\frac{1}{2}S_F(x''-x')\right)\gamma_\lambda\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}D_F(x''-x')\right)\right]\left(-\frac{1}{2}S_F(x'-x_1)\right)$$

$$= \int\int d^4x'd^4x''\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,e^{ip_2(x_2-x'')}S_F(p_2)\right]$$

$$\times\left[e^2\gamma_\mu\left(\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,e^{ip'(x''-x')}S_F(p')\right)\gamma_\mu\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int d^4k\frac{e^{ik(x''-x')}}{k^2}\right)\right]\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\,e^{ip_1(x'-x_1)}S_F(p_1)\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,e^{ip_2x_2}S_F(p_2)(2\pi)^4\delta(p'+k-p_2)\right]$$

$$\times\left[e^2\gamma_\mu\left(\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p'S_F(p')\right)\gamma_\mu\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\right)\right]$$

$$\times\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\,e^{-ip_1x_1}S_F(p_1)(2\pi)^4\delta(p_1-k-p')\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,e^{ip_2x_2}S_F(p_2)(2\pi)^4\delta(p'+k-p_2)\right]$$

$$\times\left[e^2\gamma_\mu\left(\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p'S_F(p')\right)\gamma_\mu\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\right)\right]$$

$$\times\left[-e^{-i(p'+k)x_1}S_F(p'+k)\right]$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2e^{ip_2x_2}S_F(p_2)\left[\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu S_F(p_2-k)\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\right]$$

$$\times e^{-ip_2x_1}S_F(p_2),\quad p_2=p_1=p$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip(x_2-x_1)}S_F(p)\left[\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu S_F(p-k)\right.$$

$$\left.\times\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\right]S_F(p)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip(x_2-x_1)}S_F(p)\Sigma(W,p)S_F(p)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip(x_2-x_1)}S_F^{(2)}(p) \tag{1}$$

$$S_F^{(2)}(p)=S_F(p)\Sigma(W,p)S_F(p) \tag{2}$$

$$S_F(p)=\frac{1}{\not p-iM} \tag{3}$$

$$S_F(p-k)=\frac{1}{\not p-\not k-iM} \tag{4}$$

$$\Sigma(W,p)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{1}{\not p-\not k-iM}\gamma_\mu\frac{1}{k^2} \tag{5}$$

这就导出了（18.7）和（18.8）式.

(18.8)式中对光子动量k的积分遍及于k的所有值：

$$|k|=\sqrt{k^2}=\sqrt{(K^2-k_0^2)} \tag{18.9a}$$

考查一下(18.8)式中积分中分母和分子的幂次，就可以发现(18.8)式中的积分是线性发散的，即可以化为

$$\int^{\infty} d|k| \tag{18.9b}$$

我们知道，在线性发散的积分中，被积函数随着积分变量$|k|\to\infty$而趋于常数.因此，当移动积分变量的坐标原点时，可能使积分的数值改变一个有限的常数.

当然，我们说(18.8)式中的积分是线性发散的，仅仅是表明了它的最大可能发散程度.由于被积函数的特殊形式，或许某些项会出现抵消，因而使积分的发散程度降低，甚至使积分收敛.(18.8)式中的积分正是这种情况，它实际上是对数发散的，即可以把它化成

$$\int^{\infty}\frac{d|k|}{|k|} \tag{18.9c}$$

我们知道，在对数性发散的积分中，当移动积分变量的坐标原点时，积分的数值不会改变. 令$k\to\infty$，我们可以把(18.8)式化为

$$\gamma_\mu\int d^4k\,\frac{k_\mu}{(k^2)^2} \tag{18.9}$$

这个多重积分并不是绝对收敛的,所以它的值和计算方法有关.然而，在(18.9)式中，积分号前面的矩阵γ_μ表明，为了保持相对论不变性，积分必定是一个四维常矢量. 因为不存在具有恒定分量的四维矢量，所以(18.9)式中的积分必定为零.这相当于我们是在一个积分变量的坐标原点位于零处的四维空间极坐标系内进行积分计算的，由于对称性的考虑，角度积分部分的值为零.

下面，我们就来讨论如何计算(18.8)式中的积分. 用$(\not p-\not K+iM)$乘以(18.8)式的分子和分母，并由附录A中的(A38)式，我们可得

$$\Sigma(W,p)=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{(\not K-\not p+2iM)}{(p-K-iM)(p-K+iM)k^2} \tag{18.10}$$

引进新参数

$$z=p-iM \tag{18.11}$$

由(18.10)式，$\Sigma(W,p)$仅通过p和p相关，于是我们可把(18.10)式写成

$$\Sigma(W,p)=\int d^4kR_W(k,z) \tag{18.12}$$

式中，

$$R_W(k,z)=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\frac{(\not k-\not p+2iM)}{(p-k-iM)(p-k+iM)k^2} \tag{18.13}$$

把$R_W(k,z)$展开成z的泰勒级数，并只取级数的前面几项和剩余项，于是我们可得

$$R_W(k,z)=R_W(k,0)+\left[\frac{\partial R_W(k,z)}{\partial z}\right]_{z=0}Z+R_{W_c}(k,z)z \tag{18.14}$$

根据维数比较可知，（18.14）式中的泰勒级数的后面几项的分母中含有k的额外因子，所以，我们实际上是按$(\frac{z}{k})$的幂次展开的.由此可知，把（18.14）式代入（18.12）式中，泰勒级数第二项后面各项的发散程度将会降低.于是，我们有

$$\Sigma(W,p)=A+B(\not p-iM)+S_c(W,p)(\not p-iM) \tag{18.15}$$

式中，

$$A=\int d^4kR_W(k,0) \tag{18.16}$$

A至多是一个k的线性发散的常数.

$$B=\int d^4k\left[\frac{\partial R_W(k,z)}{\partial z}\right]_{z=0} \tag{18.17}$$

B至多是一个对数发散的常数.

$$S_c(W,p)=\int d^4k\,R_{W_c}(k,z) \tag{18.18}$$

$S_c(W,p)$是四维动量p的有限函数.

上面我们用相对论不变的方式把$\Sigma(W,p)$分解成了发散程度不同的项之和.上面写下的所有这些表示式都是出现在两个旋量之间的旋量算符，这些表示式都遵从洛仑兹变换，因此，z和$R_W(k,z)$是相对论不变量.由此，（18.15）式中的A、B和$S_c(W,p)$也都是相对论不变量.它们都是e^2级的.

为了说明如何用费曼方法来计算量子场论中出现的动量积分，我们将简要地说明如何根据（18.10—16）式计算常数A.在（18.15）式中，令$\not p-iM=0$，也就是设电子满足“自由粒子条件”，则A的计算就等价于$\Sigma(W,p)$的计算.下面，我们将反复使用“自由粒子条件”，不再一一说明.于是，（18.10）式变成

$$A=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\not k+iM}{k^2(k^2-2pk)} \tag{18.19}$$

（18.19）式的导出如下：

由（18.10）式和（18.11）式，我们有

$$A=\Sigma(W,p)\Big|_{\not p-iM=0}$$

$$=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{(\not k-\not p+2iM)}{(\not p-\not k-iM)(\not p-\not k+iM)k^2}$$

$$=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{(\not k-\not p+2iM)}{[(\not p-\not k)^2+M^2]k^2}$$

$$=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{[(\not k+iM)-(\not p-iM)]}{(k^2-2pk+p^2+M^2)k^2},\quad(\text{代入}\not p-iM=0\text{和}\ p^2+M^2=0)$$

$$=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{\not k+iM}{k^2(k^2-2pk)}$$

使用费曼恒等式*)

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1 dt\,\frac{1}{[at+b(1-t)]^2}\qquad(18.19a)$$

令$a=(k^2-2pk)$，$b=k^2$，则（18.19）式变成

$$A=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dt\int d^4k\,\frac{\not k+iM}{(k^2-2pkt)^2}\qquad(18.20)$$

作变换

$$k=q+tp\qquad(18.20a)$$

则（18.20）式变成

$$A=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dt\int d^4q\,\frac{\not q+t\not p+iM}{(q^2-t^2p^2)^2},\quad\text{代入}\ \not p=iM$$

$$=\frac{-2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dt\int d^4q\,\frac{iM+iMt}{(q^2+t^2M^2)^2}$$

$$=\frac{2Me^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dt\,(1+t)\int d^4q\,\frac{1}{(q^2+t^2M^2)^2}\qquad(18.21)$$

*）费曼恒等式的证明如下：

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b-a}\int_b^a\frac{dx}{x^2}$$

令$x=at+b(1-t)$，代入即得（18.19a）式。

式中，根据（18.9）式，我们有

$$\int d^4q\frac{\not{q}}{(q^2-t^2p^2)}=0 \tag{18.21a}$$

由于（18.20）式，我们降低了（18.21）式q积分的发散度，因此，（18.21）式中的q积分从线性发散变成对数发散。

为了计算(18.21)式的积分，我们引入四维极坐标*），首先将q_0的积分途径从实数轴改变为虚数轴，于是q_0变换成iq_0^*，q_0^*是实数，同样，$q^2=q^2-q_0^2$变换成$q^{*2}+q_0^{*2}$。这样，我们就可以引入四维空间的极坐标，令

$$\left.\begin{aligned}q_0^*&=K\cos\Phi\\q_3^*&=K\sin\Phi\cos\theta\\q_2^*&=K\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi\\q_1^*&=K\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{18.21b}$$

各个变数的积分限是：

$$\left.\begin{aligned}&K:\ 0\to\infty;\quad \Phi:\ 0\to\pi;\\&\theta:\ 0\to\pi;\quad \varphi:\ 0\to2\pi.\end{aligned}\right\} \tag{18.21c}$$

于是积分元为

$$d^4q^*=K^3dKd\varphi\sin\theta d\theta\sin^2\Phi d\Phi \tag{18.21d}$$

按立体角Φ，θ和φ积分得

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\Phi d\Phi=2\pi^2 \tag{18.21e}$$

于是有

$$d^4q=id^4q^*=2\pi^2iK^3dK \tag{18.21f}$$

计算（18.21）式中对q的积分，我们有

$$\int\frac{d^4q}{(q^2+M^2t^2)^2}=\lim_{K\to\infty}2i\pi^2\ln\left(\frac{K}{Mt}\right) \tag{18.22}$$

当$K\to\infty$时，上式右边是对数发散的，为此，我们定义对数发散常数R为

$$R=\lim_{K\to\infty}\ln\left(\frac{K}{M}\right)+\frac{5}{6} \tag{18.23}$$

---

*）参见 Jauch J.M.and Rohrlich, F., The Theory of photons and Electrons, Appendix A5, Cambridge, Mass, Addison—Wesley, 1955.

把（18.22—23）式代入（18.21）式，对t积分，即得

$$A=\frac{3i}{2\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)MR=\frac{3i}{2\pi}\left(\frac{MR}{137}\right) \tag{18.24}$$

现在，我们来解释（18.15）式中的系数A，B和$S_c(W,\ p)$的物理意义.

为了解释A，我们来考虑不是在两个传播子之间而是在两条外线之间的W－修正，即如图17所示.由（14.2d）式，我们有

$$S_D^{(2)}=\int\int d^4x'\,d^4x''\bar{\psi}(x'')\{e^2\gamma_\mu\psi(x'')\bar{\psi}(x')\gamma_\lambda A_\mu(x'')A_\lambda(x')\}\psi(x') \tag{18.25}$$

正如我们所预期的，（18.25）式和（18.3）式非常相似.定义费米子场量的付氏变换为

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{ipx}\psi(p) \tag{18.26a}$$

$$\bar{\psi}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ e^{-ipx}\bar{\psi}(p) \tag{18.26b}$$

于是，（18.25）式就变成：

$$S_D^{(2)}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \ \bar{\psi}(p)\Sigma(W,p)\psi(p) \tag{18.27}$$

可以将上式和（18.7—8）比较.

（18.27）式的导出如下：

$$S_D^{(2)}=\int\int d^4x'\,d^4x''\bar{\psi}(x'')\left\{e^2\gamma_\mu\left(-\frac{1}{2}S_F(x''-x')\right)\gamma_\lambda\left(\frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}D_F(x''-x')\right)\right\}\psi(x')$$

$$=\int\int d^4x'\,d^4x''\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\,e^{-ip_2x''}\ \bar{\psi}(p_2)\right)\left\{e^2\gamma_\mu\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,e^{ip'(x''-x')}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times S_F(p')\right)\gamma_\mu\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik(x''-x')}}{k^2}\right)\right\}\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1e^{-ip_1x'}\psi(p_1)\right)$$

$$=\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\bar{\psi}(p_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k-p_2)\right]\left\{e^2\gamma_\mu\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p'S_F(p')\right)\gamma_\mu\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\right)\right\}\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_1\psi(p_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p'-k)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\bar{\psi}(p_2)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k-p_2)\right]\left\{e^2\gamma_\mu\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p'S_F(p')\right)\gamma_\mu\right.$$

$$\times\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2}\right)\Big\}[-\psi(p'+k)]$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p_2\bar{\psi}(p_2)\left[\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu S_F(p_2-k)\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\right]\psi(p_2)$$

〔代入$p_2=p_1=p$〕

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \ \bar{\psi}(p)\left[\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu S_F(p-k)\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\right]\psi(p)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\bar{\psi}(p)\Sigma(W,\ p)\psi(p)$$

这就是（18.27）式。

$\psi(p)$和$\bar{\psi}(p)$满足无相互作用场的狄拉克方程，使用相互作用表象，我们有

$$\left.\begin{aligned}(\not{p}-iM)\psi(p)&=0\\ \bar{\psi}(p)(\ \ -iM)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(18.28)$$

把（18.15）和（18.28）式代入（18.27）式，即得

$$S_0^{(2)}=\frac{-A}{(2\pi)^4}\int d^4p\bar{\psi}(p)\psi(p)\qquad(18.29)$$

通过质量重正化的过程，我们能够把无穷大常数A从散射矩阵中消掉。所谓质量重正化，就是用可观测的真实电子的物理质量M_0代替裸电子的质量M，即有

$$M\to M_0=M+\delta M\qquad(18.30)$$

式中，δM代表真实电子由于和它自己周围的幅射场相互作用而在能量（质量）上引起的变化。如果我们根据（18.30）式把拉格朗日量密度（8.19）式中的M消掉，那么，我们就将在无相互作用电子场的哈密顿量密度中，得到下列附加项（参见习题18.1的解答）：

$$\mathscr{H}'(x)=-\frac{1}{2}\delta M\{\psi^\dagger\gamma_4\psi+\psi\gamma_4\psi^\dagger\}=-\delta M\bar{\psi}(x)\psi(x)\qquad(18.31)$$

由于质量修正是由于电子和它自己周围的光子云相互作用而产生的，所以，在哈密顿量密度中，（18.31）式所给出的$\mathscr{H}'(x)$更适合于合并到相互作用哈密顿量密度$\mathscr{H}_I(x)$〔（13.10）式〕中去，而不适合于和自由场的哈密顿量密度合并，即有

$$\mathscr{H}_I(x)=ieN[\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)]-\delta M\bar{\psi}(x)\psi(x)\qquad(18.32)$$

由此，我们以后在S矩阵展开式（13.8）式中将使用这个修正的相互作用哈密顿量密

度，并仍和以前一样，用S来表示修正后的散射矩阵.

如果我们使用修正后的S矩阵，在低级微扰近似中重新计算电子的自能，那么，由于(18.32)式中第二项的存在，我们就将得到对（18.29）式中$S_B^{(2)}$的一个附加贡献.即有

$$(-i)\int d^4x\{-\delta M\bar{\psi}(x)\psi(x)\}=\frac{i\delta M}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\bar{\psi}(p)\psi(p) \tag{18.33}$$

（18.33）式的推导如下：

由（18.26）式，我们有

$$(-i)\int d^4x(-\delta M)\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$=i\delta M\int d^4x\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ipx}\,\bar{\psi}(p)\right]\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p'\,e^{ip'x}\psi(p')\right]$$

$$=\frac{i\delta M}{(2\pi)^8}\iint d^4p\,d^4p'(2\pi)^4\,\delta(p-p')\,\bar{\psi}(p)\psi(p')$$

$$=\frac{i\delta M}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\bar{\psi}(p)\psi(p)$$

这就是（18.33）式.

于是由（18.29）和（18.33）式，可得修正后的S矩阵算符为

$$S_B^{(2)}=\frac{-1}{(2\pi)^4}(A-i\delta M)\int d^4p\,\bar{\psi}(p)\psi(p) \tag{18.34}$$

（18.16）式确定了常数A，（18.24）式给出了A的值.另一方面，在（18.30—31）式中引进的δM迄今还是相当随意的，我们可以令δM等于任何值.现在，我们来特别选定δM的一个值，即有

$$A-i\delta M=0 \tag{18.35}$$

由（18.35）式，$S_B^{(2)}$为零.所以，只要我们用电子的物理质量M_0来代替电子的裸质量M，则一个单独的电子就不再有自能效应.

一般说来，在相互作用哈密顿量密度(18.32)式和S矩阵中使用抵消项δM的方法将产生两个效应.其一就是，凡是用了裸粒子质量M的地方，都要用物理质量M_0来予以取代；其二就是，抵消项将产生一个附加贡献，凡是使用了（18.15）式所确定的$\Sigma(W,p)$的地方，都要用下式来予以取代：

$$\Sigma(W,p)-i\delta M=B(\not{p}-iM_0)+S_c(W,p)(\not{p}-iM_0) \tag{18.36}$$

这里，我们已经使用了（18.35）式.

由上所述，（18.5）式将变成

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - iM_0} \tag{18.37}$$

（18.7）式将变成

$$S_F^{(2)}(p) = \frac{1}{\not{p} - iM_0}\{\Sigma(W, p) - i\delta M\}\frac{1}{\not{p} - iM_0} \tag{18.38}$$

于是（18.6）式变成

$$S_F'(p) = S_F(p)(1 + B) + S_F(p)S_C(W, p) \tag{18.39}$$

W-修正不仅对电子传播函数产生了影响，而且对外电子线也产生了影响．这样，动量空间中的波函数$\psi(p)$将变成

$$\psi'(p) = \psi(p) + \frac{1}{\not{p} - iM_0}\{\Sigma(W, p) - i\delta M\}\psi(p)$$

$$= \psi(p) + \frac{1}{\not{p} - iM_0}\{B(\not{p} - iM_0) + S_C(w, p)(\not{p} - iM_0)\}\psi(p) \tag{1.40}$$

根据（18.14）式，$S_C(W, p)$和$(\not{p} - iM_0)$成正比，因此，根据动量空间中的狄拉克方程（18.28）式，（18.40）式的最后一项为0，于是我们有

$$\psi'(p) = \psi(p) + \frac{1}{\not{p} - iM_0}\{B(\not{p} - iM_0)\}\psi(p) \tag{18.40a}$$

在（18.40a）式中，B的系数是不定的，因为展开第二项的括号，由（18.28)式，我们有

$$\frac{B}{\not{p} - iM_0}[(\not{p} - iM_0)\psi(p)] = 0 \tag{18.40b}$$

$$B\left[\frac{\not{p} - iM_0}{\not{p} - iM_0}\right]\psi(p) = B\psi(p) \tag{18.40c}$$

于是我们可得

$$\psi'(p) = \psi(p) \tag{18.40d}$$

$$\psi'(p) = (1 + B)\psi(p) \tag{18.40e}$$

为了确定W-修正对S矩阵元中代表外电子线的波函数$\psi(p)$产生的影响，我们可以在物理上把一条内电子线看成是由两条外电子线合成的，其中一条是射出外电子线，另一

条是射入外电子线*)。因此，W-修正对代表这两条外电子线的波函数的影响应该相当于对代表一条内电子线的传播函数的影响，于是我们有

$$\psi'(p)=\sqrt{1+B}\,\psi(p)=\left(1+\frac{B}{2}\right)\psi(p) \tag{18.41a}$$

这就是说，应该取（18.40d）和（18.40e）式的几何平均值。在这里，我们用到了$\sqrt{1+B}$的泰勒展开式。类似地，我们可得

$$\bar{\psi}'(p)=\sqrt{1+B}\;\bar{\psi}(p)=\left(1+\frac{B}{2}\right)\bar{\psi}(p) \tag{18.41b}$$

人们有时把（18.41）式称为波函数重正化。

上面，我们根据微扰理论把费米子的自能效应计算到e^2级。用同样的方法，我们可以计算电子与辐射场相互作用现象中高次微扰近似对δM的贡献，这些贡献可看成是耦合常数e的幂级数展开式。如同在计算e^2级W-修正的情况下一样，我们把高次微扰近似对抵消项δM的贡献看成为就是用电子的物理质量M_0来代替裸质量M，而一个单独的电子则不再有自能效应。

（18.39）式和（18.41）式分别表明了W-修正对内电子线和外电子线的影响，现在我们来讨论这种影响的物理意义。

为了求出电子自能效应所引起的全部e^2级辐射修正，我们必须把W-修正的电子自能图依次插进每个内电子线中。对每一条内电子线而言，W-修正对S矩阵元的影响就是用修正后的电子传播函数$S_F'(p)$来代替原来的电子传播函数$S_F(p)$。从（18.39）式中，我们可以看到，这就是用

$$S_F'(p)=S_F(p)(1+B)+S_F(p)S_C(W,\ p)\_ \tag{18.39}$$

代替$S_F(p)$去代表内电子线。同样，对每一条外电子线而言，W-修正对S矩阵元的影响就是用

$$\psi'(p)=\sqrt{1+B}\,\psi(p)=\left(1+\frac{B}{2}\right)\psi(p) \tag{18.41a}$$

和

$$\bar{\psi}'(p)=\sqrt{1+B}\,\bar{\psi}(p)=\left(1+\frac{B}{2}\right)\bar{\psi}(p) \tag{18.41b}$$

代替$\psi(p)$和$\bar{\psi}(p)$去代表外电子线。由于和费曼图相对应的S矩阵元是正比于耦合常数e的，所以，我们能够把因子$(1+B)$吸收进耦合常数e之中。这是一个重新定义电荷e的过程，我们把它称为电荷重正化。为了求出电子自能效应所引起的全部e^2级辐射修正，我们应考虑费曼图的所有可能的W-修正。

*) 参见Dyson, F.J., Phys. Rev. 83, 608, 1951.

设某一费曼图 G 一共有 F_i 条内电子线和 F_e 条外电子线，那么，根据（18.39）式和（18.41）式，所有 W-修正对费曼图 G 的影响就是将 G 的 S 矩阵元乘以因子：

$$1+\left(F_i+\frac{1}{2}F_e\right)B \tag{18.42}$$

另一方面，G 的顶点数目 n 和电子线的数目之间存在着如下关系：

$$F_i+\frac{1}{2}F_e=n \tag{18.42a}$$

把（18.42a）代入（18.42）式，即得

$$(1+nB)=(1+B)^n \tag{18.42b}$$

由于 G 的矩阵元本身就和 e^n 成正比，所以，我们可以把因子 $(1+B)^n$ 合并进电荷 e^n 中。这就相当于用

$$e_0=e(1+B) \tag{18.43}$$

来代替 e。e_0 就是可观测的物理电子的电荷。因此，W-修正的一部分影响就是用物理电子的电荷 e_0 来代替裸电子的电荷 e。

总括起来，由电子自能效应所引起的二级辐射修正的影响共有三方面：

（i）电子质量的重正化，这就是（18.30）式。

（ii）电子电荷的重正化，这就是（18.43）式。从实用的观点来说，上述两方面的影响只不过意味着我们必须用物理电子的质量和电荷来代替裸电子的质量和电荷。

（iii）插进内电子线的 W-修正将对 S' 矩阵元产生有限的 e_0^2 级的可观测的辐射修正。为了计算这些辐射修正，我们必须用（18.39）式中的收敛部分 $S'_{Fc}(p)$ 来代替费曼图 G 的表示式中的每个电子传播函数 $S_F(p)$：

$$S'_{Fc}(p)=S_F(p)+S_F(p)S_c(W,\ p) \tag{18.44}$$

第一项 $S_F(p)$ 是费曼图 G 的第 n 级原始矩阵元，第二项是 $S_c(W,\ p)$ 的线性项，系由于电子自能效应产生的对原始矩阵元的二级辐射修正。

电子自能产生的辐射修正是引起氢原子能级的兰姆移位的原因。根据狄拉克理论，氢原子的两条能级 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2P_{\frac{1}{2}}$ 应该是简并的，但是，兰姆等所进行的精确实验表明，这两条能级并不完全重合，它们之间有一定的距离。$2S_{\frac{1}{2}}$ 能级较 $2P_{\frac{1}{2}}$ 能级略高。它们之间差别的最新实验值*）是

$$\Delta E\equiv\Delta E\,(2S_{\frac{1}{2}})-\Delta E\,(2P_{\frac{1}{2}})=1057.862\pm0.020\text{兆周/秒} \tag{18.45}$$

这就是氢原子的兰姆移位现象。图22中的费曼图本是描述电子被外电磁场散射的二级辐射修正的，不过，只要根据氢原子态来解释电子线和传播子，我们就可以借用图22中的

*）参见 D. A. Andrews and G.Newton, Phys. Rev. Lett. Vol.37, P.1254, 1976.

这些费曼图来描述氢原子的束缚态．束缚态问题的计算是更为复杂的，我们不给出这些计算过程，感兴趣的读者可参见Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory, §7-3-2, P.358, McGraw-Hill Inc., 1980.

由电子自能效应所引起的二级辐射修正〔仅由图22中的(*a*)和(*b*)产生〕对 ΔE 的贡献的理论计算值是1011.45兆周/秒，这表明兰姆移位主要是由电子自能效应引起的．真空极化〔图22(*c*)〕和顶点修正〔图22(*d*)〕对 ΔE 的贡献分别是27.13兆周/秒和67.82兆周/秒．把上述三部分结果加起来，就得到二级微扰近似所得出的兰姆移位的理论值如下

$$\Delta E = 1052.14\text{兆周/秒} \tag{18.46}$$

(18.45)式和(18.46)式的一致表明了重正化理论的惊人成功．后来的计算考虑了四阶效应得出的理论值与实验符合得更好．但是仍存在微小的差异．目前最新的理论计算值是

$$\Delta E = 1057.864 \pm 0.014\text{兆周/秒}^{*)} \tag{18.47}$$

*) 参见P.J.Mohr, Phys. Rev. Lett. Vol.34, P.1050, 1975.

第十九章 真空极化

在本章中，我们来讨论玻色子自能修正W'，其费曼图如图23(*b*)所示。W'-修正和上一章讨论的费米子自能修正W非常类似，所以，本章的讨论将是比较简略的。

在量子电动力学中，W'-修正代表虚的电子-正电子对的产生和随之湮灭。一般而言，如果有外电磁场存在，那么这些虚的电子-正电子对就将被极化，就犹如电介质在电场中被极化一样。由于这个原因，人们也把W'-修正称为真空极化修正。真空极化将产生辐射修正。

我们用 ps (ps) - 介子理论作为讨论真空极化的例子。在介子线上插进W' - 修正图，就将产生三种影响，即介子质量的重正化、耦合常数的重正化和有限的辐射修正。

在自由场哈密顿量密度（2.20）式中，我们用介子的物理质量m_0来代替裸质量m，即有

$$m_0^2 = m^2 + \delta(m^2) \tag{19.1}$$

在相互作用哈密顿量密度（13.9）式中引进抵消项，则有

$$\mathscr{H}_I(x) = igN(\bar{\psi}\gamma_5\phi\psi) - \frac{1}{2}\delta(m^2)\phi^2 - \delta M\bar{\psi}\psi \tag{19.2}$$

这里，我们不考虑核子质量的重正化，所以，我们把（19.2）式中的最后一项略掉。

现在，我们就来讨论介子传播子的真空极化修正W'，如图28所示。首先，我们把动量空间中的玻色子传播子 $\Delta_F(k)$定义如下：

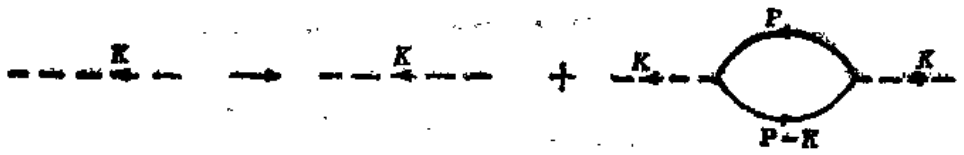


图28 （图中，K，P分别为四维矢量）

$$\overbrace{\phi(x_2)\,\phi(x_1)} = \frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik(x_2-x_1)}\,\Delta_F(k) \tag{19.3a}$$

由（6.15—18）式，我们可得

$$\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 + m_0^2} \tag{19.3}$$

图28所给出的变换就相当于用 $\Delta_F'(k)$来代替$\Delta_F(k)$，由习题19.1的推导，我们可得

$$\Delta_F'(k) = \Delta_F(k) + \Delta_F^{(2)}(k) \tag{19.4}$$

式中，

$$\Delta_F^{(2)}(k) = \frac{i}{k^2+m_0^2}\left\{\Pi(W',\ k) - \frac{i}{2}\delta(m^2)\right\}\frac{i}{k^2+m_0^2} \tag{19.5}$$

这里，

$$\Pi(W',\ k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4pT_r\left[\gamma_5\frac{1}{\not p - iM_0}\gamma_5\frac{1}{\not p - \not k - iM_0}\right] \tag{19.6}$$

考查（19.6）式中的积分就可以发现，当对 d^4p 积分的极限趋于无穷大时，$\Pi(W',\ k)$ 是二次发散的，即有

$$\int d^4p\frac{1}{p^2} \tag{19.6a}$$

显然，（19.6）式中的被积函数是有限的，引进新参数

$$z = -i(k^2+m_0^2) \tag{19.7}$$

把（19.6）式中的被积函数按z展开成泰勒级数，和上一章对费米子的讨论相类似，我们只取级数的前两项加一项剩余项，于是有

$$\Pi(W',\ k) = A' + B'z + \Delta_C(W',\ k)z \tag{19.8}$$

在这里，我们是按动量的二次项k^2而不是按四维矢量k_μ展开的，因为根据（19.6）式，$\Pi(W',\ k)$是洛仑兹变换下的一个标量．在（19.8）式中，每个系数都是常数，我们知道，没有四维常矢量存在，因而仅有四维矢量k_μ是不能构成标积的，所以，我们只能按k^2来展开．事实上，使用z而不是用k^2来作为展开参数，只不过是相当于泰勒展开式中各项的重排．因此，对自由介子来说，我们有

$$z = -i(k^2+m_0^2) = -i(K^2 - k_0^2 + m_0^2) = 0 \tag{19.9}$$

这里，$k_0^2 = K^2 + m_0^2$．（19.7）式中的因子（$-i$）保证了z是（19.3）式给出的传播子的倒数，这在实际计算中是方便的．〔参见（18.5）和（18.11）式〕．

根据维数论证可知，A'是二次发散的，B'是对数发散的，函数$\Delta_C(W',\ k)$是有限的．以下关于这些发散积分的讨论和上一章完全一样，我们这里不再重复．和上一章的处理相同，在（19.5）式中，我们选择抵消项$\delta(m^2)$为

$$A' - \frac{i}{2}\delta(m^2) = 0 \tag{19.10}$$

传播子（19.4）则变成

$$\Delta'_F(k) = \Delta_F(k)(1+B') + \Delta_F(k)\Delta_C(W', k) \qquad (19.11)$$

读者可以将（19.11）式和（18.39）式加以比较．类似地，对外玻色子线来说，我们可得到和（18.41）式类似的等式为

$$\phi'(x) = \left(1+B'\right)^{\frac{1}{2}}\phi(x) = \left(1+\frac{1}{2}B'\right)\phi(x) \qquad (19.12)$$

这里，和上一章相同，A'，B' 和 $\delta(m^2)$ 都是微小的量．并且，类似于上一章的论述，（19.11）式中最后一项对S 矩阵元给出有限的二级辐射修正；（19.11）式中的第一项和（19.12）式一起，导致了耦合常数 g 的重正化，设费曼图 G 有 B_i 条内玻色子线，B_e 条外玻色子线，n 个顶点，则有

$$1+\left(B_i+\frac{1}{2}B_e\right)B' = \left(1+\frac{1}{2}nB'\right) = \left(1+B'\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (19.13)$$

式中，我们用到了 $2B_i+B_e=n$．于是，真空极化效应对于S矩阵元的修正就是要将 n 级S 矩阵元乘上因子 $(1+B')^{\frac{n}{2}}$，把这个因子和耦合常数因子 g^n 合并，则有

$$g \to g_0 = g(1+B')^{\frac{1}{2}} \qquad (19.14)$$

这样，通过耦合常数重正化，我们就把对数发散常数 B' 吸收进耦合常数中了，g_0 就是重新定义的耦合常数．因此，真空极化的一部分效应在于改变了耦合常数的数值，使 g 变为 g_0．经过耦合常数重正化以后，真空极化只在S矩阵元中留下有限的修正．这种修正的来源就是（19.11）式中的第三项，我们把这种修正称为真空极化所导致的辐射修正．这种辐射修正不但是有限的，而且常常是微小的．

在量子电动力学中，（19.2）式中的抵消项必须用下式来代替：

$$-\frac{1}{2}\delta(m^2)\,A_\mu^2 \qquad (19.15)$$

对于没有相互作用的纯粹辐射场来说，裸光子的静止质量必须为零，以便能保证理论是规范不变的．通过对称考虑〔参照（18.9）式〕可以证明，在相互作用场的情况下，电磁相互作用的规范不变性要求也意味着物理光子的静止质量为零．因此，（19.15）式中的抵消项 $\delta(m^2)$ 必须为零．当然，经过适当修改后，由真空极化修正所得出的（19.11—12）式仍然适用于光子的情况．由此就能得出，光子真空极化的一部分效应在于改变了电子电荷的数值，即有

$$e \longrightarrow e_0 = e(1+B')^{\frac{1}{2}} \qquad (19.14a)$$

经过电荷重正化以后，光子的真空极化只在S矩阵元中留下有限的辐射修正，而且，这

种修正常常也是微小的.

正如我们在上一章中提到过的，兰姆移位等实验证实，真空极化效应所给出的微小修正不仅存在，而且在数值上也与实验结果完全符合. 真空极化效应对氢原子兰姆移位的贡献，理论计算结果是 27 兆周/秒，与实验结果只差 0.1 兆周/秒.从物理上来说，我们可以把在兰姆移位实验中存在的真空极化效应，看成是对核的库仑场的修正. 质子使虚的电子－正电子对极化，质子吸引电子而排斥正电子，于是质子的库仑场被修正了. 氢原子中的电子正是在这样一个经过修正的库仑场中运动，从而产生了能级的兰姆移位.

第二十章　顶角修正

在本章中，我们来讨论量子电动力学中的顶角修正V_1，其费曼图如图23(c)所示。设x_1和x_2是两个四维矢量，$F(x_1, x_2)$是x_1和x_2的函数，我们定义$F(x_1, x_2)$的傅里叶变换为

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4p_1 d^4p_2\, e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\, F(p_1, p_2) \qquad (20.1)$$

基本顶点部分的修正如图29所示，它表明，矩阵γ_μ应该用下式来代替：

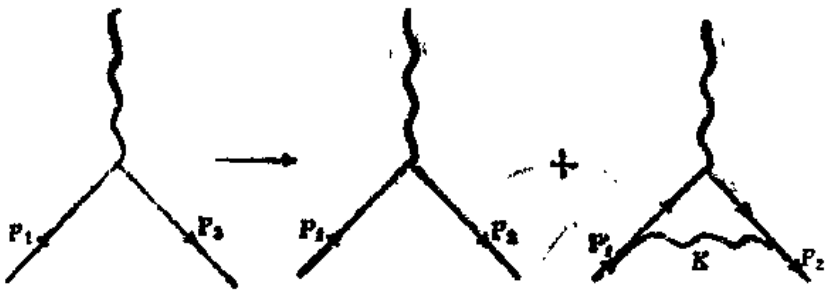


图29　二级顶角修正（图中，K，P_1，P_2分别为四维矢量）

$$\Gamma_\mu(V_1, p_2, p_1) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(V_1, p_2, p_1) \qquad (20.2)$$

式中

$$\Lambda_\mu(V_1, p_2, p_1) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - iM_0}\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - iM_0}\gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \qquad (20.3)$$

(20.2—3)式的推导参见习题20.1．当对d^4k积分的极限趋于无穷大时，$\Lambda_\mu(V_1, p_2, p_1)$是对数发散的，即有

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2)^2} \qquad (20.3a)$$

(20.3a)式可说明如下：

引入四维极坐标 $K = |k| = \sqrt{k^2}$ 和 Φ，θ，φ〔参见(18.21b)式〕，对于只依赖于k^2的被积函数，我们有

$$\int d^4k = \int K^3dK\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\Phi\, d\Phi = 2\pi^2\int K^3dK$$

于是(20.3a)式变成

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2)^2} = 2\pi^2 \int \frac{dK}{K}$$

这表明（20.3a）式是对数发散.

由（20.3）式，我们有

$$\Lambda_\mu(V_1,\ p_2,\ p_1) = \int d^4k R_{V_1}(k,\ z_2,\ z_1) \tag{20.4}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \not{p}_1 - iM_0 \\ z_2 &= \not{p}_2 - iM_0 \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

于是由（20.3）式可得

$$R_{V_1}(k,\ z_2,\ z_1) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma_\lambda \frac{1}{z_2 - \not{K}} \gamma_\mu \frac{1}{z_1 - \not{K}} \gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \tag{20.4a}$$

把上式展开成如下形式：

$$R_{V_1}(k,\ z_2,\ z_1) = R_{V_1}(k,\ 0,\ 0) + R_{V_{1c}}(k,\ z_2,\ z_1) \tag{20.6}$$

式中，

$$R_{V_1}(k,\ 0,\ 0) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\gamma_\lambda \frac{1}{\not{K}} \gamma_\mu \frac{1}{\not{K}} \gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \tag{20.6a}$$

因此，我们有

$$\Lambda_\mu(V_1,\ p_2,\ p_1) = A'' + \Lambda_{\mu C}(V_1,\ p_2,\ p_1) \tag{20.7}$$

式中，A''是与p_2和p_1无关的对数发散的常数：

$$A'' = \int d^4k R_{V_1}(k,\ 0,\ 0) \tag{20.8}$$

$\Lambda_{\mu C}(V_1,\ p_2,\ p_1)$则是$p_1$和$p_2$的有限函数：

$$\Lambda_{\mu C}(V_1,\ p_2,\ p_1) = \int d^4k R_{V_1 C}(k,\ z_2,\ z_1) \tag{20.9}$$

根据（20.3）式可知，A''和$\Lambda_{\mu C}$都是e^2级的.

理论的相对论不变性要求Γ_μ〔（20.2）式〕的上述展开式中的每一项都必须是一四维矢量. 这就限制了A''的形式，即A''只能取下列形式：

$$A'' = L\gamma_\mu \tag{20.10}$$

式中，L是一个对数发散的标量常数. 由（20.2），（20.7）和（20.10）式，我们最后可得：

$$\Gamma_\mu(V_1,\ p_2,\ p_1) = \gamma_\mu(1+L) + \Lambda_{\mu C}(V_1,\ p_2,\ p_1) \tag{20.11}$$

在费曼图G中，在每个顶点处依次用Γ_μ来代替γ_μ．（20.11）式中的第二项将给出有限的e^2级的辐射修正，而（20.11）式中的第一项则产生电荷重正化，即有

$$e \to e_0 = e(1+L) \tag{20.12}$$

把W-修正，W'-修正和V_1-修正所产生的电荷重正化合并起来，就可得到

$$e_0 = e(1+B)(1+L)(1+B')^{\frac{1}{2}} \tag{20.13}$$

用e_0代替e作为从实验上观察到的电子电荷，我们把这个过程称为电荷重正化．在将S矩阵元中的质量m_0和电荷e_0以有限的实验测定值代入以后，由电子自能效应，真空极化效应和顶点修正效应所引起的无穷大发散积分就全部消去了，留下的只是微小的有限辐射修正，这些辐射修正是可以在实验中观测到的，如兰姆移位实验．

如果我们用计算A〔参见（18.19）式〕的方法来计算对数发散常数B和L，我们就可发现

$$B = -L \tag{20.14}$$

即常数B和L是由同样的发散积分给出的〔参见习题20.3〕．在本章及前面两章中，我们只讨论了二次近似的修正，因此所得到的结果只精确到与e^2成比例的项．由于B，L和B'都与e^2成正比，所以由（20.14）式，我们可把（20.13）式写成：

$$e_0 = e(1+B')^{\frac{1}{2}} \tag{20.15}$$

这样，W-修正和V_1-修正所导致的电荷重正化的效应恰巧抵消，留下的只是W'-修正所导致的电荷重正化效应．这个结果不仅在二级微扰近似计算中而且在所有高次微扰计算中都是正确的．这就意味着，电荷重正化仅仅取决于光子的自能效应(真空极化)，而和费米子自能效应及顶点修正效应无关．

第二十一章　电子的反常磁矩

在前面三章中，我们看到，电子自能效应，真空极化效应和顶角修正对高级微扰近似计算结果的修正有两部分：一部分是不可观测的发散积分，这已通过质量重正化和电荷重正化而消除掉了；另一部分是可观测的，这就是有限的微小的辐射修正．在本章中，我们将通过计算电子的反常磁矩，简要地讨论一下关于辐射修正的最简单问题．

根据狄拉克理论，电子具有一个磁矩

$$\mu=\left(\frac{-e_0}{2M_0}\right) \tag{21.1}$$

当一个电子被外电磁场 $A_\beta^e(x)$ 散射时，电子的磁矩就将显现出来．电子被外场 $A_\beta^e(x)$ 散射的最低次微扰近似的费曼图如图21所示．设散射前电子初态的四维动量为 p，旋量态为 $u(P)$；散射后电子末态的四维动量为 p'，旋量态为 $u'(P')$，则由（16.2）式可得散射矩阵元为

$$\frac{M_0}{V(E_PE_{P'})^{\frac{1}{2}}}e_0\bar{u}'(P')\gamma_\alpha u(P)A_\alpha^e(q) \tag{21.2}$$

式中，e_0 是物理电荷，M_0 是实验观测到的电子质量．

$$A_\alpha^e(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,e^{iqx}A_\alpha^e(q) \tag{21.3}$$

在散射中的动量转移为

$$q=p'-p \tag{21.4}$$

由狄拉克方程

$$\left.\begin{aligned}&(\not p-iM_0)u(P)=0\\&\bar{u}'(P')(\not p'-iM_0)=0\end{aligned}\right\} \tag{21.4a}$$

和自旋矩阵 $\sigma_{\alpha\beta}$［(A6)式］，我们可将矩阵元(21.2)式写成下列形式（参见习题 21.1）：

$$-\frac{M_0}{V(E_PE_{P'})^{\frac{1}{2}}}\frac{\mu}{2}\Big\{-2i\bar{u}'(P')\Big[(p+p')A^e(q)\Big]u(P)$$
$$+\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}\,u(P)\,[q_\alpha A_\beta^e(q)-q_\beta A_\alpha^e(q)]\Big\} \tag{21.5}$$

当电子以很小的速度在静磁场 H 中运动时，（21.5）式中的第二项就等价于一个磁矩为 μ 的粒子被静止的外磁场散射的矩阵元．这和非相对论泡利理论所得出的结果一致．

现在，我们来考虑对电子散射的二级辐射修正，如图22(a)—(d)所示．图 22(a)和

（b）是在外电子线上插入的电子自能$W-$修正，正如在第十八章所看到的，这样的修正仅仅导致电荷重正化。图22(d)是顶角修正V_1，V_1-修正所产生的电荷重正化和电子自能$W-$修正所产生的电荷重正化相互抵消。此外，V_1-修正还对S矩阵元产生有限的辐射修正，通过用(20.9)式的$A_{ac}(V_1,p',p)$来代替矩阵元（21.2）式中的γ_a，就可求出这个修正。图22c是真空极化$W'-$修正，它导致电荷重正化，还对S矩阵元产生有限的二级辐射修正。

在第十九章中，我们讨论了在两个量子化的玻色子场算符之间插入一个真空极化$W'-$修正〔参见(19.11)式〕。在图22c的真空极化$W'-$修正中，外电磁场$A^e_\alpha(q)$没有量子化，而是按经典方式处理的。在这种情况下，类似于19章的讨论，图22(c)的真空极化$W'-$修正，就相当于把矩阵元（21.2）式中的$A^e_\alpha(q)$用下式来代替：

$$D_F(q)\prod(W',q)A^e_\alpha(q)=[B'+D_C(W',q)]A^e_\alpha(q) \qquad (21.6)$$

上式和（19.4）及（19.11）式非常类似，差别仅在于十九章讨论的是介子，而这里讨论的是光子。

严格地说，为了使理论自洽，在（21.2）式中，我们应该使用裸电荷e而不是物理电荷e_0。只有在把零级矩阵元（21.2）式和(21.6)式的B'项所产生的矩阵元合并以后，我们才能把e写成e_0。根据（20.15）式，这就相当于被散射电子电荷的重正化，以及外场$A^e_\alpha(q)$的源电荷重正化。我们把这称为外场重正化：

$$(A^e_\alpha(q))_0=A^e_\alpha(q)(1+B')^{\frac{1}{2}} \qquad (21.7)$$

把对应于图22(a)到(d)的所有矩阵元合并起来，我们就能够再次以(21.5)式的形式写出和二级辐射修正相对应的矩阵元。它将是两项的和，一项和自旋矩阵$\sigma_{\alpha\beta}$无关，另一项则和自旋矩阵$\sigma_{\alpha\beta}$成正比。正比于$\sigma_{\alpha\beta}$的这一项完全来源于图22(d)的顶角修正V_1，并且在低速运动电子的非相对论极限下，等价于（21.5）式中的第二项，但这时要把相应的μ值用$\delta\mu$来代替，即有

$$\delta\mu=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e_0^2}{4\pi}\right)\mu=0.001\ 161\ 4\mu \qquad (21.8)$$

$\delta\mu$就是电子由于和量子化电磁场相互作用所引起的二级辐射修正导致的附加的“反常”磁矩。这个结果首先由许温格导出*），它与实验符合得相当好。因此，电子总磁矩的数值是

$$\mu_0=\mu+\delta\mu=1.001\ 161\ 4\mu \qquad (21.9)$$

电子反常磁矩的最新实验值是

$$\delta\mu=(0.001\ 159\ 652\ 410\pm0.000\ 000\ 000\ 200)\mu \qquad (21.10)$$

而计入六阶辐射修正后最精密的理论计算值是

$$\delta\mu=(0.001\ 159\ 652\ 375\pm0.000\ 000\ 000\ 261)\mu \qquad (21.11)$$

这是到目前为止，在物理学中与实验测定值符合精度最高的理论结果，是近年来量子场论所取得的重大胜利之一。关于（21.10）式和（21.11）式的详尽讨论及原始文献，请参阅F. H. Combley, Rep. Prog. Phys. 42, 1889, 1979.

*) Schwinger, J., Phys. Rev. 73, 416, 1948 and Phys. Rev. 76, 790, 1949

第二十二章　重正化

迄今为止，我们已考虑了对费米子线、玻色子线和顶角部分的二级修正。当然，还存在有一个高阶修正的无穷系列。一些典型的四级修正如图30所示。如何系统地处理这些高阶图的理论是由戴逊（Dyson），萨拉姆（Salam）和华德（Ward）等人完成的。其主要结果是：对于可重正化的量子场论来说，在前面几章中作二阶修正时所用的方法也适用于作任何有限阶的修正。这就是说，对某一特定过程而言，如果我们已考虑了直到某一有限 n 阶微扰近似的所有费曼图，则这些图就等价于一个最低阶的费曼图加上若干有限的辐射修正，再加上把所有发散积分都消除了的质量重正化和电荷重正化。这种可重正化场论的典型例子就是电动力学和中性介子理论以及对称 $ps(ps)$ 介子理论。下面，

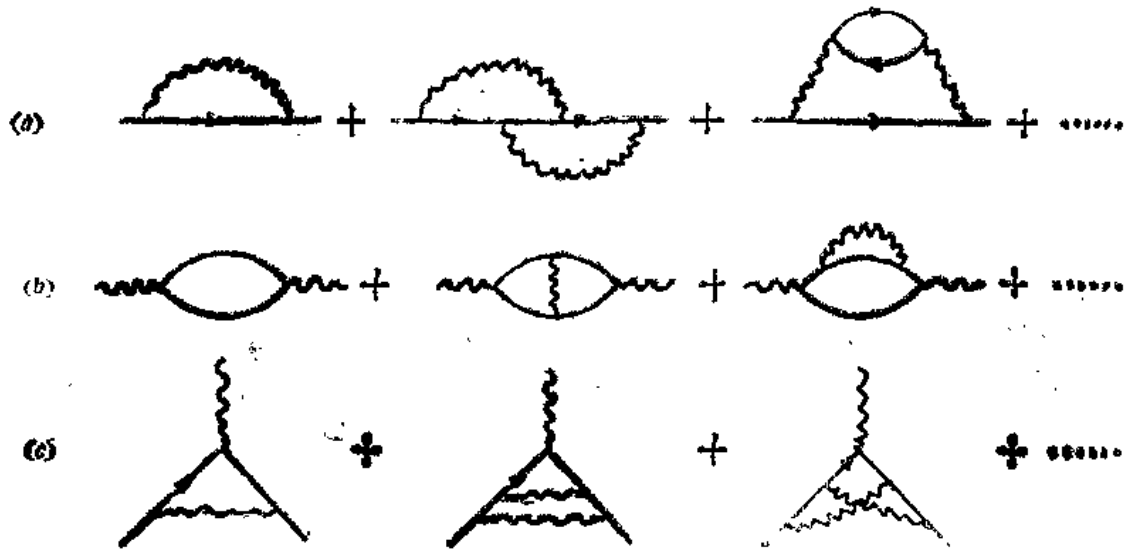


图30　四级修正

(a) 费米子自能 W - 修正插入；(b) 光子自能 W' - 修正插入；(c) 顶角 V_1 - 修正插入

我们将用量子电动力学作为例子，对高阶辐射修正作一简要讨论，主要是说明高阶辐射修正的一些有趣特征，并且对更完全地考虑高阶辐射修正作一点引论性的介绍。

根据前面几章的讨论，我们知道，原始发散的图形只有图23所给出的三种：电子自能部分，光子自能（真空极化）部分和顶角部分。为了对费曼图进行修正以消除无穷大，只须把电子自能部分插进电子线，把真空极化部分插进光子线，把顶角修正部分加进顶点。现在，我们来考虑一个称为约化（reduction）的过程。在一个费曼

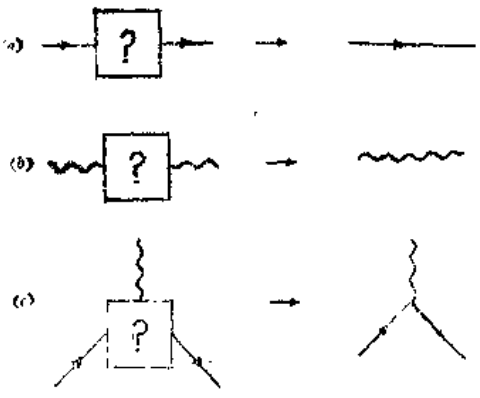


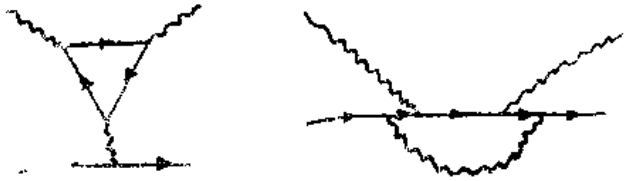
图31

(a) 费米子传播子的约化；(b) 光子传播子的约化；(c) 顶点部分的约化

图G中，如果我们把所有费米子自能插入，所有玻色子自能插入和所有顶角插入通通去掉，就得到另一个图G_0，我们称G_0为G的骨架图.把一个费曼图G约化为它的骨架图G_0的过程，如图31所示.如果一个费曼图G等于它自己的骨架图G_0，则称G为不可约图.例如，康普顿散射的二级和四级不可约图如图32和图33所示.根据法雷定理，图33(a)中的三角图对S矩阵元没有贡献（参见习题14.2）.



图32　康普顿散射的不可约e^2图



(a)　　(b)

图33　康普顿散射的不可约e^4图

为了把一个特定过程的散射振幅计算到n级，我们无须考虑所有可能的直到n级的费曼图.首先，我们画出所有可能的对这个特定过程有贡献的不可约图，这些不可约图具有正确的外线，并且顶点不多于n个.在这些不可约图中，用重正化了的传播子和重正化了的顶角函数来代替原始传播子和基本顶点部分，我们就能得到对这个过程具有直到n级贡献的所有费曼图.于是和（18.6）式，（19.4）式以及（20.2）式类似，我们有

$$\left.\begin{aligned} S'_F &= S_F + S_F^{(2)} + \cdots \\ D'_F &= D_F + D_F^{(2)} + \cdots \\ \Gamma_\mu &= \gamma_\mu + \Lambda_\mu + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (22.1)$$

把S'_F，D'_F和Γ_μ展开为电荷e的幂级数，直到e^n级.这样，我们就得出了到n级的所有修正.不过，在运用这个方法时，我们需要特别小心，每个拓朴结构不同的图，数一次而且只能数一次.

现在，我们来考虑到e^4级的康普顿散射振幅.仅有的不可约e^2图如图32所示，不可约e^4图如图33所示.把图27—29的二级修正插入不可约e^2图（图32）中的内外电子线，内外光子线和基本顶点部分，就得到图26(a)—(d).图33中的不可约图已经是e^4级的，它们和图26(e)—(f)一致.

我们在上面已经概括地介绍了计算高阶辐射修正的一般方法，下面，我们来看看如何处理在这种方法中所产生的发散.我们将只考虑由于虚粒子（传播子）的四维动量矢量取无穷大值所引起的发散积分.使理论产生严重困难的正是这些发散极分，它们是我们在前面的章节中已处理过的.当然，其他类型的发散，例如电动力学中的红外发散，也会发生，但由于它们容易予以解决，所以我们在这里不再考虑.

设费曼图G本身是发散的，如果我们将它的任一条内线割开，使之变成两条外线，

G便变成一个不再发散的图形，那末就将G的发散称为“原始发散”。费米子二级自能图W，玻色子二级自能图W'和二级顶角修正图V_1都是原始发散图。例如，把真空极化图W'的任一个费米子传播子割开，我们就得到康普顿散射图（图32）。费米子自能修正W和真空极化修正W'是唯一的原始发散的自能图，但原始发散的顶角高阶修正图则有无穷多个。在一个原始发散图G中，任何内线的动量都是一个积分变数，否则，把这条内线割开后，我们所得到的图将不是收敛的。对一个原始发散图说来，相应的被积函数是有限的。因此，把被积函数展开成泰勒级数后，级数中各项的发散度是依次减少的。在前面的几章中，我们已用过这个方法，一般而言，我们可以把这个方法用于原始发散图。原始发散图之所以重要，是因为通过连续处理出现在图G中的原始发散“点”(bit)，我们能够处理任何发散图G。

设有一个图G，通过割开它的一条或更多条内线，就将它分解为不相连接的两部分，这样，我们就可得到一个新图，而把G的另一部分抛弃掉，我们把这样得到的一个新图称为图G的子图（Subgraph）。例如，图34的三角图，就是图33(a)的子图。

下面，我们来列举不同类型的原始发散图。为此，我们只考查具有如下两个性质的图G。

（i）G没有原始性发散的子图，这就是说，G或者是有限的，或者本身就是原始发散的。

（ii）在图G中，内线动量都是积分变数，而不是固定的。如果一个图的内线动量是固定的而不是积分变数，那末这个图一定不是原始性发散的。例如，图32的康普顿散射图就是这样。

对于具有上述两个性质的一个图G而言，我们可以用一个简单易行的方法来确定G是有限的还是原始性发散的。这就是在对应于G的S矩阵元的表示式中，数一数分子和分母中动量因子的个数。在十八与十九章中，我们已用过这个方法。戴逊证明了，对个方法虽然是简朴的，但也是有效的和合理的。可参见Dyson, F. J., Phys, Rev., 75, 1736, 1949。因此，利用这个方法，我们可以将和图G对应的S矩阵元的表示式写成

$$\int d^4p\, p^{K-4} \sim p^K \tag{22.2}$$

显而易见，当$K<0$时，积分必定是收敛的；当$K=0$时，积分可能发散，但至多是对数型的；当$K>0$时，积分可能发散，但至多是p^K型的。

设原始性发散图G共有n个顶点；F_i条内费米子线，B_i条内玻色子线；F_e条外费米子线，B_e条外玻色子线，于是我们有

$$\begin{aligned} F_e + 2F_i &= 2n \\ B_e + 2B_i &= n \end{aligned} \tag{22.3}$$

设d是不受顶点处能量动量守恒约束的内线动量的个数，则和图G相对应的S矩阵元的维数是

$$K = 4d - F_i - 2B_i \tag{22.3a}$$

和图G的顶点相联系的δ－函数一共有n个，在这些δ－函数中，只有和外线动量相关的

一个是用来确保整个物理过程的能量-动量守恒的。因此，在 F_i+B_i 个内线动量中，独立的积分变数只有d个：

$$d=F_i+B_i-(n-1) \qquad (22.3b)$$

这样，由（22.3）式，（22.3a）式和（22.3b）式，我们有

$$K=4-\frac{3}{2}F_e-B_e \qquad (22.4)$$

根据（22.2）式，$K\geqslant 0$就是费曼图G为原始性发散图的必要条件。由(22.4)式，K的值仅取决于图G中外费米子线和外玻色子线的数目。因此，如果图G具有足够多的外线，那末就能使K的值小于零，于是图 G 必定是收敛的。换言之，(22.4)式告诉我们，不同类型的原始性发散图的个数是非常有限的。下面，我们就来简单地讨论一下所有可能的这些原始性发散图。

（i）真空极化图：

如图31（b）所示，$F_e=0$，$B_e=2$，$K=2$。唯一的原始性发散的真空极化图就是如图23（b）所示的W'-迴路修正。在介子理论中，这个原始性发散图将导致二次发散；在量子电动力学中，规范不变性将把二次型发散约化为对数型发散。

（ii）三角图：

如图34所示，$F_e=0$，$B_e=3$，$K=1$。根据法雷定理〔参见习题 14.2〕，在量子电动力学和ps（ps）介子理论中，这个图的贡献为零。不过一般而言，这个图也将导致一个需要加以特别考虑的发散积分，比如在 s（s）介子理论中就是这样。

（iii）四方图：

如图 35所示，$F_e=0$，$B_e=4$，$K=0$。一般说来，这个图导致对数型发散。在量子电动力学中，四方图代表光子-光子散射的物理过程。由于规范不变性的要求，四方图是收敛的。

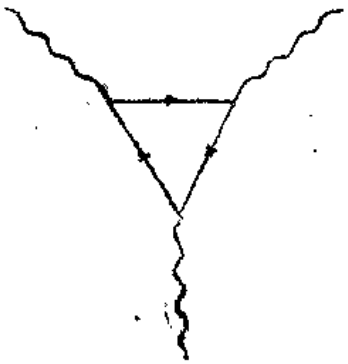


图34　三角图

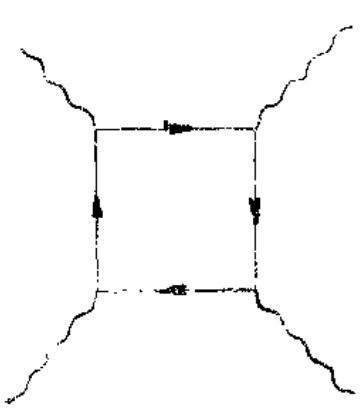


图35　四方图

根据（22.4）式，当$F_e=0$，$B_e>4$ 时，$K<0$，这就意味着，所有这样的图都是有限的。

（iV）费米子自能图：

如图31（a）所示，$F_e=2$，$B_e=0$，$K=1$．唯一的原始性发散图就是W-修正本身．正如我们在前面所看到的，费米子自能图所导致的发散积分只不过是对数型发散．

（Ⅴ）顶角修正图：

如图31（c）所示，$F_e=2$，$B_e=1$，$K=0$．原始性发散的顶角修正图有无穷多个．两个最低次的顶角修正图是图23（c）中的V_1-修正和图30c中的V_2修正．

到此为止，我们已穷尽了不同类型的原始性发散图．在量子电动力学中，原始性发散图只有三种：费米子自能修正W，真空极化修正W'和顶角修正V_1．既然一个不可约图不含有W-修正，W'-修正和顶角修正，因此，一切不可约图都是有限的．

为了计算在不可约图中插入费米子自能修正、真空极化修正和顶角修正后所引起的辐射修正，我们必须弄清楚如何把这些传播子和顶角部分分解成一个有限部分与一个发散部分的和．其中有限部分给出有限的辐射修正，发散部分则代表较低阶图的重正化．十八至二十章中，我们讨论了二级修正的情况．在一般情况下的修正则要复杂得多．

由于我们现在必须考虑非原始性的发散图，所以在把(22.1)式中的S_F'，D_F'和Γ_μ分解成有限部分与发散部分的和时，困难就发生了．例如，在计算S_F'时，我们就将遇到图36中的三个费曼图．对图36(a)和图36(b)的计算不会发生困难．在图36（a）中，我们分别处理每个W-修正．在图36（b）中，我们首先处理内部一个回路的W-修正，

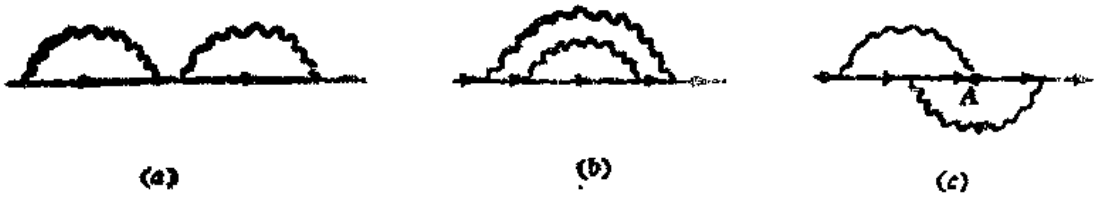


图36　对费米子传播子的e^4修正

然后再处理外部一个回路的W-修正．这样，在计算过程的每一个阶段，我们都将只有一个单独的发散积分，其被积函数是有限的，因而我们可以用通常的展开方法来处理．

当我们对图36（c）中的费曼图进行计算时，困难就产生了．我们把对应于图36(c)中费曼图的发散称为“交缠发散”（Overlapping divergences）．在这里，当我们对S矩阵元中的一个变数积分而使其他积分变数保持不变时，我们遇到的是发散的多重积分．因此，我们能够使用泰勒展开方法来计算第一个积分．然而，我们不可能继续使用泰勒展开方法来把积分进行下去，因为在计算第一个积分后，下一步积分的被积函数本身就已经是无穷大了．所以，我们需要有一个更成熟的有效方法来处理“交缠发散”．

对实际计算来说，幸而存在一个简单的方法，使得我们能计算出“交缠发散”积

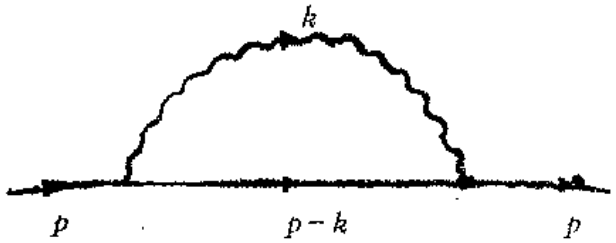


图37　电子自能W－修正

分．例如我们可以把图36（c）看成是图37的电子自能W-修正图中顶点 A 的V_1 顶角修正．根据（18.8）式和(18.38)式，对应于图37的S矩阵元为

$$S_F^{(2)} = \frac{1}{\not p - iM_0}\left\{\Sigma(W,\ p) - i\delta M\right\}\frac{1}{\not p - iM_0} \tag{22.5a}$$

$$\Sigma(W,\ p) = \frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{1}{\not p - \not k - iM_0}\gamma_\mu\frac{1}{k^2} \tag{22.5b}$$

由（20.7）式和（20.10）式，我们可得图37中顶点A的V_1顶角修正为

$$\Lambda_\mu(V_1,\ p-k,\ p) = L\gamma_\mu + \Lambda_{\mu c}(V_1,\ p-k,\ p) \tag{22.5}$$

为了求出相应于图36（c）的S矩阵元，我们用（22.5）式给出的 $\Lambda_\mu(V_1,\ p-k,\ p)$ 置换（22.5b）式中的第二个因子γ_μ．即有

$$\Sigma^*(W,\ p) = \frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{1}{\not p - \not k - iM_0}\gamma_\mu\frac{1}{k^2}\cdot L +$$

$$+\frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{1}{\not p - \not k - iM_0}\Lambda_{\mu c}(V_1,\ p-k,\ p)\frac{1}{k^2} \tag{22.6}$$

上式的第一项可写成$L\Sigma(W,p)$，其中$\Sigma(W,p)$由（22.5b）式给出．由此可知，（22.6）式中的第一项只不过是原始W-修正的L倍，L是由（20.10）式确定的一个有限数．因而我们将舍弃掉这一项，而把它合并到重正化效应中．（22.6）式中的第二项代表在顶点A处的一个修正了的相互作用，也就是说，这个相互作用是有限的．这样，在（22.6）式的第二项中，被积函数又成为有限的了。这样，我们就能用通常的方式把被积函数展开为泰勒级数．由此即可得到正确的有限部分（the correct finite part），即正确的辐射修正（the correct radiative correction）．然而，被我们舍弃掉的无穷大是“错的无穷大”（“the wrong infinite part”），也就是说，这个无穷大并不和重正化相对应．但是，如果我们使用一个更成熟的方法，我们将得出和上面相同的有限部分（the same finite part）和不相同的发散项，于是我们能够证明发散项确实仅仅代表一个重正化效应．我们在这里简要说明的计算“交缠发散”的有限部分的方法是相当一般的．

如果我们处理包含有梯度耦合（gradient coupling）的相互作用〔如$ps(pv)$介子理论，参见（11.13）式〕，则上面的论证需要作一些修改．这样，在导出(22.4)式时，由于$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$将在动量空间中给出一个动量因子 k_μ，所以，我们将从顶点得到对动量因子数目的附加贡献．不过，由于外介子线仅涉及到固定动量，不含有积分变数，因而外介子线对动量因子数目没有贡献．于是，在涉及到梯度耦合的相互作用的情况下，（22.4）式变成：

$$K = \left(4 - \frac{3}{2}F_e - B_e\right) + (n - B_e) \qquad (22.7)$$

这样，发散度不仅取决于外线的数目，而且也取决于图G的顶点数目．当我们考虑较高阶的近似时，新的原始性发散图就会一直出现．现在，这些新的原始性发散图有无穷多个．正是这个特征，使我们能够把可重正化的理论与不可重正化的理论区别开来．在可重正化的理论中，原始发散图的类型有有限个；而在不可重正化的理论中，原始性发散图的类型有无穷多个．在可重正化理论的情况下，我们需要作有限数目的实验以测定可重正化常数，但此后我们就能使用这个理论来对实验作出预言．另一方面，对于不可重正化的理论说来，每一次较高阶的近似都将给理论引进一个新的重正化常数，说明重正化方法在现在这种情况下是无效的．在可重正化的理论中，通过系统地考虑某一特定过程的所有各级修正，我们就能把相应的矩阵元按已重正化了的耦合常数作幂级数展开，这时的展开系数是有限的．

从上面我们可以看出，在消去发散困难方面，重正化理论具有很大的实用价值．关于重正化理论的详尽讨论，已超出了本书的范围，读者可参阅 Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber, Quantum Field Theory, Chapter 8, McGraw-Hill Inc., 1980.

习 题 及 解 答

第 一 章

1.1 根据（1.10）式导出（1.11）式。

解 为方便起见，我们采用狄拉克符号。根据（1.10）式，我们有

$$a(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ m_i,\ \cdots\rangle = \sqrt{m_i}\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ m_i-1,\ \cdots\rangle \qquad (1)$$

在（1）式左右两边取厄密共轭，即得

$$\langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ m_i,\ \cdots|\,a^\dagger(\boldsymbol{K}_i) = \langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ m_i-1,\ \cdots|\,\sqrt{m_i} \qquad (2)$$

在（2）式中，令$m_i = n_i+1$，则有

$$\langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots|\,a^\dagger(\boldsymbol{K}_i) = \langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots|\,\sqrt{n_i+1} \qquad (3)$$

在（3）式两边右乘右矢$|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle$，则得

$$\langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots|\,a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle$$
$$= \sqrt{n_i+1}\,\langle n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots|\,n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle = \sqrt{n_i+1} \qquad (4)$$

（4）式中的最后一步是根据态矢的正交归一得出的。因（4）式右边不为零，所以必有

$$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle = C\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots\rangle \qquad (5)$$

把（5）代入（4）式，根据态矢的正交归一条件，即有

$$C = \sqrt{n_i+1} \qquad (6)$$

把（6）代入（5），即得

$$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots\rangle \qquad (7)$$

此即（1.11）式。

1.2 根据（1.10—11）式导出（1.12）式。

解
$$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,a(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ n_2,\ \cdots n_i,\ \cdots\rangle$$
$$= a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,\sqrt{n_i}\,|n_1,\ n_2,\ \cdots n_i-1,\ \cdots\rangle,\ [\text{代入（1.10）式}]$$
$$= \sqrt{n_i}\cdot\sqrt{(n_i-1)+1}\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ (n_i-1)+1,\ \cdots\rangle,\ [\text{代入(1.11)式}]$$
$$= n_i\,|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots\rangle$$

即为所求。

1.3 根据（1.10—11）式导出对易关系（1.13）式。

解 玻色子体系的波函数具有交换对称性，即由（1.11）式可得：

$$a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)\,|n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots,\ n_j,\ \cdots\rangle$$
$$= \sqrt{n_i+1}\cdot\sqrt{n_j+1}\,|n_1,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots,\ n_j+1,\ \cdots\rangle \qquad (1)$$
$$a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)\,|n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots,\ n_j,\ \cdots\rangle$$
$$= \sqrt{n_j+1}\cdot\sqrt{n_i+1}\,|n_1,\ \cdots,\ n_i+1,\ \cdots,\ n_j+1,\ \cdots\rangle \qquad (2)$$

将（1）和（2）式的两边分别相减，即得：

$$[a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)a^\dagger(\boldsymbol{K}_j) - a^\dagger(\boldsymbol{K}_j)a^\dagger(\boldsymbol{K}_i)]\,|n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots,\ n_j,\ \cdots\rangle = 0 \qquad (3)$$

在（3）式中，$|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\rangle$是任意的，故有：

$$a^\dagger(K_i)a^\dagger(K_j) - a^\dagger(K_j)a^\dagger(K_i) = [a^\dagger(K_i),\ a^\dagger(K_j)] = 0 \tag{4}$$

同样，由（1.10）式可得：

$$a(K_i)a(K_j)\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\rangle = \sqrt{n_i}\cdot\sqrt{n_j}\,|n_1, \cdots, n_i-1, \cdots, n_j-1, \cdots\rangle \tag{5}$$

$$a(K_j)a(K_i)\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\rangle = \sqrt{n_j}\cdot\sqrt{n_i}\,|n_1, \cdots, n_i-1, \cdots, n_j-1, \cdots\rangle \tag{6}$$

将（5）式和（6）式两边分别相减，并考虑到在上面两式中的$|n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\rangle$是任意的，即得：

$$a(K_i)a(K_j) - a(K_j)a(K_i) = [a(K_i),\ a(K_j)] = 0 \tag{7}$$

设$i \neq j$，同样可得

$$a(K_i)a^\dagger(K_j) - a^\dagger(K_j)a(K_i) = [a(K_i),\ a^\dagger(K_j)] = 0 \tag{8}$$

根据（1.10—11）式，我们有

$$\begin{aligned} &a(K_i)a^\dagger(K_i)\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots\rangle \\ &= a(K_i)\sqrt{n_i+1}\,|n_1, \cdots, n_i+1, \cdots\rangle \\ &= \sqrt{n_i+1}\cdot\sqrt{n_i+1}\,|n_1, \cdots, (n_i+1)-1, \cdots\rangle \\ &= (n_i+1)\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

根据（1.12）式，我们有

$$a^\dagger(K_i)a(K_i)\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots\rangle = n_i\,|n_1, \cdots, n_i, \cdots\rangle \tag{10}$$

将（9）式和（10）式的两边分别相减，并考虑到在上面两式中的$|n_1, \cdots, n_i, \cdots\rangle$是任意的，即得：

$$a(K_i)a^\dagger(K_i) - a^\dagger(K_i)a(K_i) = [a(K_i),\ a^\dagger(K_i)] = 1 \tag{11}$$

于是由（4），（7），（8），（11）式可得

$$\left.\begin{aligned} &[a(K_i),\ a(K_j)] = [a^\dagger(K_i),\ a^\dagger(K_j)] = 0 \\ &[a(K_i),\ a^\dagger(K_j)] = \delta(K_i,\ K_j) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

即为所求。

第二章

2.1 设有四维场$A_\mu(x)$，$\mu = 1, \cdots 4$，拉格朗日密度$\mathscr{L}(x)$为

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{1}$$

导出四维场$A_\mu(x)$的欧拉方程。

解 将（1）式代入（2.8）式，即得

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\right)}\right] = 0 \tag{2}$$

于是有

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right]=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}A_\mu=\Box^2 A_\mu(x)=0 \qquad (3)$$

$$\mu=1,\ \cdots,\ 4$$

(3)式实际上就是自由电磁场的达朗贝尔方程，$A_\mu(x)=(\boldsymbol{A},\ iV)$，加上洛仑兹条件

$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$后，即等价于麦克斯韦方程.

即为所求.

2.2 设Λ_1，…，Λ_4是场$\phi^a(x)$的函数，证明：如果用

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\frac{\partial \Lambda_\nu}{\partial x_\nu} \qquad (1)$$

$$\nu=1,\ \cdots,\ 4$$

代替(2.1)式所给出的拉格朗日密度，不会使场方程发生改变.

证明 把(1)式代入(2.3)式，即得

$$I'(\Omega)=\int_\Omega d^4x\,\mathscr{L}'=\int_\Omega d^4x\,\mathscr{L}+\int_\Omega d^4x\frac{\partial A_\nu(\phi^a)}{\partial x_\nu}$$

$$=I(\Omega)+\int_\Omega d^4x\frac{\partial A_\nu(\phi^a)}{\partial x_\nu} \qquad (2)$$

设在任意区域Ω中，场量ϕ^a作一微小改变：

$$\phi^a(x)\to\phi^a(x)+\delta\phi^a(x) \qquad (3)$$

并假定在积分区域Ω的边界Γ上

$$\delta\phi^a(x)=0 \qquad (4)$$

则$I'(\Omega)$的变分为

$$\delta I'(\Omega)=\delta I(\Omega)+\int_\Omega d^4x\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\nu(\phi^a)$$

$$=\delta I(\Omega)+\int_\Gamma dS_\nu\delta A_\nu,\ (\text{利用高斯定理})$$

$$=\delta I((\Omega)+\int_\Gamma dS_\nu\left[\frac{\partial A_\nu(\phi^a)}{\partial\phi^a}\delta\phi^a\right] \qquad (5)$$

由于在边界Γ上$\delta\phi^a$等于0，故有

$$\int_\Gamma dS_\nu\left[\frac{\partial A_\nu(\phi^a)}{\partial\phi^a}\delta\phi^a\right]=0 \qquad (6)$$

把（6）式代入（5）式，即得

$$\delta I'(\Omega)=\delta I(\Omega) \tag{7}$$

（7）式表明，$\mathscr{L}$的微小改变（1）式并不改变作用量积分的变分，因而由变分原理必定得到同样的场方程.这就是说，在变换$\mathscr{L}\to\mathscr{L}'$下，场方程具有不变性.

2.3 根据场方程（2.8）式，证明张量

$$T_{\mu\nu}=-\phi^{\alpha}_{,\nu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha}_{,\mu}}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \tag{1}$$

满足方程

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}}=0\qquad(\nu=1,\ \cdots,\ 4) \tag{2}$$

拉格朗日密度$\mathscr{L}$为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi^{\alpha},\ \phi^{\alpha}_{,\nu}) \tag{3}$$

证明 由场方程（2.8）式，我们可得

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha}_{,\nu}}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{\alpha}} \tag{4}$$

于是由（1）式，我们有

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}}=-\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\nu}}\right)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)}-\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)}\right)+\delta_{\mu\nu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{\mu}}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)}-\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial\phi_{\nu}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^{\alpha}}+\delta_{\mu\nu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{\mu}}$$

$$=-\frac{\partial\mathscr{L}\left(\phi^{\alpha},\ \frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\nu}}\right)}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial\mathscr{L}\left(\phi^{\alpha},\ \frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x_{\nu}}\right)}{\partial x_{\nu}}$$

$$=0$$

即为所求.

2.4 设一介子场的拉格朗日密度由（2.18）式确定，即为

$$\mathscr{L}(\phi,\ \phi_{,\nu})=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial\phi}{\partial x_{\nu}}+m^{2}\phi\phi\right\} \tag{1}$$

导出由习题2.3所定义的张量$T_{\mu\nu}$，并证明

$$(-T_{44})=\mathscr{H}(x) \tag{2}$$

这里，$\mathscr{H}(x)$即是由（2.20）式确定的哈密顿量密度；

$$\mathscr{H}(x)=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{3}$$

解 习题2.3所定义的张量$T_{\mu\nu}$为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \tag{4}$$

把（1）代入（4），即得

$$T_{\mu\nu}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \tag{5}$$

由（5）式可得：

$$-T_{44}=-\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_4}-\mathscr{L}=\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}-\mathscr{L} \tag{6}$$

根据（2.13）式，我们可得ϕ的共轭场$\pi(x)$为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}=\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{7}$$

把（1）式代入（6）式，并考虑到（7）式，即得

$$-T_{44}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+m^2\phi^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\}=\mathscr{H}(x)$$

即为所求。

2.5 定义

$$P_\lambda(t)=-i\int d^3x T_{4\lambda} \tag{1}$$

式中，$T_{\mu\nu}$是由习题2.3的（1）式和（2）式所确定的张量，积分在时刻t遍及于全部三维空间.证明：当$|X|\to\infty$时，如果场$\phi^a(x,\ t)$足够快地趋近于零，则$P_\lambda(t)$是守恒量.解释这个结果.

证明 由习题2.3的（2）式，我们有

$$\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}=0 \tag{2}$$

由（2）式可得：

$$-\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}=-\frac{1}{i}\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial t}=\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3} \tag{3}$$

根据（1）式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{dP_\lambda(t)}{dt}&=\frac{1}{i}\int d^3x\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial t}=\int d^3x\frac{\partial T_{4\lambda}}{\partial x_4}\\&=-\int d^3x\left(\frac{\partial T_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{2\lambda}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{3\lambda}}{\partial x_3}\right)\\&=-\int d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{T}_\lambda\end{aligned} \tag{4}$$

式中，三维矢量$\boldsymbol{T}_\lambda$为

$$\boldsymbol{T}_\lambda=\boldsymbol{e}_1T_{1\lambda}+\boldsymbol{e}_2T_{2\lambda}+\boldsymbol{e}_3T_{3\lambda} \tag{5}$$

利用高斯定理，从（4）式可得

$$\frac{dP_\lambda(t)}{dt}=-\oiint\boldsymbol{T}_\lambda\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6}$$

根据题设条件，在无限远处场量为零，即有

$$\lim_{|X|\to\infty}\phi^a(X,\ t)=0 \tag{7}$$

$$\lim_{|X|\to\infty}\phi^a_{,\nu}(X,\ t)=0 \tag{8}$$

由（7）式和（8）式，我们有

$$\lim_{|X|\to\infty}\mathscr{L}(\phi^a,\ \phi^a_{,\nu})=0 \tag{9}$$

把（9）代入习题2.3的（1）式，即得

$$\lim_{|X|\to\infty}\boldsymbol{T}_\lambda=0 \tag{10}$$

把（10）式代入（6）式右边，即得

$$\oiint T_\lambda \cdot dS = 0 \tag{11}$$

由此可得

$$\frac{dP_\lambda(t)}{dt} = 0 \tag{12}$$

这就证明了 $P_\lambda(t)$ 是守恒量。

由习题2.4可知

$$-T_{44} = \mathscr{H} \tag{13}$$

于是由（1）式可得

$$P_4(t) = -i\int d^3x T_{44} = i\int d^3x \mathscr{H}(\mathbf{X},t) = iH(t) \tag{14}$$

$H(t)$ 是场 $\phi^a(\mathbf{X},t)$ 的总能量，因此根据（14）式，$P_4(t)$ 守恒就是说能量守恒。当 $\lambda=4$ 时，（12）式就是能量守恒定律。

定义三维矢量 ζ_r 为

$$\zeta_r = -iT_{r4},\quad r=1,\ \cdots,\ 3 \tag{15}$$

令 $\nu=4$，则可把习题2.3的(2)式写成：

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial \zeta_r}{\partial x_r}\right) = 0 \tag{16}$$

上式表明，三维矢量 ζ_r（$r=1,\ \cdots,\ 3$）能够被解释成场的能通量。

定义三维矢量 $\mathscr{G}_r$ 为

$$\mathscr{G}_r = -iT_{4r} \qquad (r=1,\ \cdots,\ 3) \tag{17}$$

令 $\nu=1,\ 2,\ 3$，则可把习题2.3的(2)式分别写成：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathscr{G}_1}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial T_{r1}}{\partial x_r} = 0\\
&\frac{\partial \mathscr{G}_2}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial T_{r2}}{\partial x_r} = 0\\
&\frac{\partial \mathscr{G}_3}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial T_{r3}}{\partial x_r} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

类似于（16）式，我们可把 $\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$，$\mathscr{G}_3$ 解释成场的动量密度，(18）式就是场的动量守恒定律。

综上所述，我们可把习题2.3的(1)式所定义的 $T_{\mu\nu}$ 称为正则能量－动量密度张量。(13)式所确定的 T_{44} 是场的哈密顿量密度；（17）式所确定的 $\mathscr{G}_r$（$r=1,\ \cdots,\ 3$）是场的动量密度；（15）式所确定的 ζ_r（$r=1,\ \cdots,\ 3$）则是场的能通量；（18）式所确定的 T_{rs}（$r,\ s=1,\ \cdots,\ 3$）则是场的胁强张量（Stress tensor）。这样，根据(1)式，我们有

$$\left.\begin{aligned} P_1(t) &= -i\int d^3xT_{41} = \int d^3x\mathscr{G}_1 \\ P_2(t) &= -i\int d^3xT_{42} = \int d^3x\mathscr{G}_2 \\ P_3(t) &= -i\int d^3xT_{43} = \int d^3x\mathscr{G}_3 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(19)式表明，$P_1(t)$，$P_2(t)$，$P_3(t)$ 分别是四维能量-动量矢量 $p_\mu=(p_x,\ p_y,\ p_z,\ iH)$ 的第一、二、三分量，（14）式确定的$P_4(t)$则是p_μ的第四分量。

2.6 证明：如果能量-动量张量$T_{\mu\nu}$是对称的，

$$\frac{\partial \mu_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda}=0 \tag{1}$$

这里

$$\mu_{\lambda\mu\nu}=T_{\lambda\mu}x_\nu-T_{\lambda\nu}x_\mu \tag{2}$$

则场的总角动量守恒。

证明 由（2）式，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{\lambda\mu\nu}}{\partial x_\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T_{\lambda\mu}x_\nu-T_{\lambda\nu}x_\mu) \\ &= \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\lambda}x_\nu+T_{\lambda\mu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial T_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}x_\mu-T_{\lambda\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} \\ &= T_{\lambda\mu}\delta_{\nu\lambda}-T_{\lambda\nu}\delta_{\mu\lambda} \\ &= T_{\nu\mu}-T_{\mu\nu}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

这里，我们用到了习题2.3的（2）式，且考虑到$T_{\mu\nu}$是对称的。

由（3）式，我们可得

$$\begin{aligned} \int d^3x\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\mathscr{M}_{\lambda\mu\nu} &= \int d^3x\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{M}_{i\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x_4}\int d^3x\mathscr{M}_{4\mu\nu} \\ &= \oint\!\!\!\!\!\!\int dS\cdot(e_1\mathscr{M}_{1\mu\nu}+e_2\mathscr{M}_{2\mu\nu}+e_3\mathscr{M}_{3\mu\nu}) \\ &+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\mathscr{M}_{4\mu\nu}=0 \end{aligned} \tag{4}$$

在上式中，我们用了高斯定理，积分遍及于无穷大空间的整个表面，由于场在无穷远处趋于零，故（4）式中的第一项为零，所以我们有

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\mathscr{M}_{4\mu\nu}=0 \tag{5}$$

于是我们有

$$\frac{1}{i}\int d^3x\mathscr{M}_{4\mu\nu}=\text{常数} \tag{6}$$

由（2）式，我们有

$$\frac{1}{i}\mathscr{M}_{4\mu\nu}=\frac{1}{i}(T_{4\mu}x_\nu-T_{4\nu}x_\mu)=\mathscr{G}_\mu x_\nu-\mathscr{G}_\nu x_\mu=\mathscr{M}_{\mu\nu} \tag{7}$$

式中，我们用到了习题2.5的（17）式，与力学中类比，可知

$$\mathscr{M}_{\mu\nu}=-\mathscr{M}_{\nu\mu}=\mathscr{G}_\mu x_\nu-\mathscr{G}_\nu x_\mu \tag{8}$$

能够被解释为场的角动量密度，由（8）式

$$\mathscr{M}=\int d^3x\,\mathscr{M}_{\mu\nu}=\frac{1}{i}\int d^3\mathscr{M}x_{4\mu\nu} \tag{9}$$

则是场的总角动量，即为所求.

第 三 章

3.1 根据场的对易关系（3.2）式，导出（3.5）式.

（本题解答见本书第三章14页）.

3.2 导出（3.6）式.

解 $$H=\int\mathscr{H}(X)\,d^3X \tag{1}$$

$$\mathscr{H}(X)=\frac{1}{2}\left\{\pi^2+\sum_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2+m^2\phi^2\right\} \tag{2}$$

$$\phi(X)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_K\frac{1}{\sqrt{2\omega_K}}\left\{a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)\,e^{-iKX}\right\} \tag{3}$$

$$\pi(X)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{K'}\sqrt{\frac{\omega_{K'}}{2}}\left\{-a(K')\,e^{iK'X}+a^\dagger(K')e^{-iK'X}\right\} \tag{4}$$

把（3）和（4）代入（2），得：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(X)=\frac{1}{4V}\sum_{K,K'}&\left(-\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}-\frac{K\cdot K'}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\right)\{a(K)a(K')\,e^{i(K+K')X}\\&+a^\dagger(K)a^\dagger(K')\,e^{-i(K+K')X}-a^\dagger(K)a(K')\,e^{-i(K-K')X}\\&-a(K)a^\dagger(K')\,e^{i(K-K')X}\}+\frac{m^2}{4V}\sum_{K,K'}\frac{1}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\\&\times\{a(K)a(K')e^{i(K+K')X}+a^\dagger(K)a^\dagger(K')e^{-i(K+K')X}\\&+a^\dagger(K)a(K')e^{-i(K-K')X}+a(K)a^\dagger(K')e^{i(K-K')X}\}\end{aligned} \tag{5}$$

把（5）代入（1）得：

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}(X)\,d^3X=\frac{1}{4V}\sum_{K,K'}\frac{-\omega_K\omega_{K'}-K\cdot K'}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\{[a(K)a(K')+$$

$$+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')](2\pi)^3\delta(K+K')-[a^{\dagger}(K)a(K')+a(K)a^{\dagger}(K')]$$

$$\times\delta(K-K')(2\pi)^3\}+\frac{m^2}{4V}\sum_{K,K'}\frac{1}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\{[a(K)a(K')+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')]$$

$$\times\delta(K+K')(2\pi)^3+[a^{\dagger}(K)a(K')+a(K)a^{\dagger}(K')]\delta(K-K')(2\pi)^3\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{K}\int d^3K'\ \frac{-\omega_K\omega_{K'}-K\cdot K'}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\{[a(K)a(K')+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')]$$

$$\times\delta(K+K')-[a^{\dagger}(K)a(K')+a(K)a^{\dagger}(K')]\delta(K-K')\}$$

$$+\frac{m^2}{4}\sum_{K}\int d^3K'\ \frac{1}{\sqrt{\omega_K\omega_{K'}}}\{[a(K)a(K')+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')]$$

$$\times\delta(K+K')+[a^{\dagger}(K)a(K')+a(K)a^{\dagger}(K')]\delta(K-K')\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{K}\left\{\frac{-\omega_K^2+K^2}{\omega_K}[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]\right.$$

$$-\frac{-\omega_K^2-K^2}{\omega_K}[a^{\dagger}(K)a(K)+a(K)a^{\dagger}(K)]+\frac{m^2}{\omega_K}$$

$$\times[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]+[a^{\dagger}(K)a(K)+a(K)a^{\dagger}(K)]$$

$$\left.\times\frac{m^2}{\omega_K}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{K}\left\{\frac{-\omega_K^2+K^2+m^2}{\omega_K}[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_K^2+K^2+m^2}{\omega_K}[a^{\dagger}(K)a(K)+a(K)a^{\dagger}(K)]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{K}\frac{2\omega_K^2}{\omega_K}[a^{\dagger}(K)a(K)+a^{\dagger}(K)a(K)+1]$$

$$=\sum_{K}\left[a^{\dagger}(K)a(K)+\frac{1}{2}\right]\omega_K\qquad\text{即为所求.}$$

3.3 设量子化介子场的能量-动量张量由算符$T_{\mu\nu}$给出：

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right\}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}\qquad(1)$$

式中，$\mathscr{L}$由（2.18）式给出。证明场的动量P为

$$P=\sum_K a^\dagger(K)a(K)K \tag{2}$$

证明

$$P=\sum_r P_r e_r\ (r=1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

场的动量密度为

$$\mathscr{G}_r=-iT_{4r}\ (r=1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

于是我们可得场动量P_r为

$$\begin{aligned}
P_r&=\int d^3X\,\mathscr{G}_r=-i\int d^3X\,T_{4r}\\
&=-i\int d^3X\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_r}+\frac{\partial\phi}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\int d^3X\left\{\pi\frac{\partial\phi}{\partial x_r}+\frac{\partial\phi}{\partial x_r}\pi\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\int d^3X\left\{\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_K\sqrt{\frac{\omega_K}{2}}\left[-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\right]\right.\\
&\quad\times\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{K'}\frac{ik'_r}{\sqrt{2\omega_{K'}}}\left[a(K')e^{iK'X}-a^\dagger(K')e^{-iK'X}\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{K'}\frac{ik'_r}{\sqrt{2\omega_{K'}}}\left[a(K')e^{iK'X}\right.\\
&\quad\left.\left.-a^\dagger(K')\cdot e^{-iK'X}\right]\cdot\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_K\sqrt{\frac{\omega_K}{2}}\left[-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\int d^3X\sum_{K,K'}\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}k'_r\left\{\left[-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\right]\right.\\
&\quad\times\left[a(K')e^{iK'X}-a^\dagger(K')e^{-iK'X}\right]+\left[a(K')e^{iK'X}-a^\dagger(K')e^{-iK'X}\right]\\
&\quad\left.\times\left[-a(K)e^{iKX}+a^\dagger(K)e^{-iKX}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\sum_{K,K'}\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}k'_r\int d^3X\left\{-e^{i(K+K')X}\left[a(K)a(K')+a(K')a(K)\right]\right.\\
&\quad+e^{-i(K-K')X}\left[a^\dagger(K)a(K')+a(K')a^\dagger(K)\right]+e^{i(K-K')X}\\
&\quad\times\left[a(K)a^\dagger(K')+a^\dagger(K')a(K)\right]-e^{-i(K+K')X}\\
&\quad\left.\times\left[a^\dagger(K)a^\dagger(K')+a^\dagger(K')a^\dagger(K)\right]\right\}\\
&=\frac{1}{4V}\sum_{K,K'}\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}k'_r\left\{-\left[a(K)a(K')+a(K')a(K)\right](2\pi)^3\delta(K+K')\right.\\
&\quad\left.+\left[a^\dagger(K)a(K')+a(K')a^\dagger(K)\right](2\pi)^3\delta(K-K')\right.
\end{aligned}$$

$$+[a(K)a^{\dagger}(K')+a^{\dagger}(K')a(K)](2\pi)^3\delta(K-K')$$
$$-[a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')+a^{\dagger}(K')a^{\dagger}(K)](2\pi)^3\delta(K+K')\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_K\int d^3K'\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}\,k'_r\{-[a(K)a(K')+a(K')a(K)]$$
$$\times\delta(K+K')+[a^{\dagger}(K)a(K')+a(K')a^{\dagger}(K)]\delta(K-K')$$
$$+[a(K)a^{\dagger}(K')+a^{\dagger}(K')a(K)]\delta(K-K')$$
$$-[a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(K')+a^{\dagger}(K')a^{\dagger}(K)]\delta(K+K')\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_K(-k_r)(-1)[a(K)a(-K)+a(-K)a(K)]$$
$$+(-k_r)(-1)[a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)+a^{\dagger}(-K)a^{\dagger}(K)]$$
$$+k_r[a^{\dagger}(K)a(K)+a(K)a^{\dagger}(K)]+k_r[a(K)a^{\dagger}(K)+a^{\dagger}(K)a(K)]\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_K k_r\{2[2a^{\dagger}(K)a(K)+1]+2[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]\}$$

$$=\sum_K k_r a^{\dagger}(K)a(K)+\sum_K\frac{k_r}{2}+\sum_K\frac{k_r}{2}[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]$$

$$=\sum_K k_r a^{\dagger}(K)a(K) \qquad (5)$$

在上式的最后一步中，我们用到了

$$\sum_K\frac{k_r}{2}=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\frac{k_r}{2}=0 \qquad (6)$$

现在我们来证明，在导出（5）式的最后一步中，第三项为零，为方便起见，我们把K的求和上下限写出，于是有

$$\sum_K\frac{k_r}{2}[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{K=-\infty}^{\infty}+\sum_{-K=-\infty}^{-\infty}\right)k_r[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{K=-\infty}^{\infty}k_r[a(K)a(-K)+a^{\dagger}(K)a^{\dagger}(-K)]\right.$$
$$\left.+\sum_{K=-\infty}^{\infty}(-k_r)[a(-K)a(K)+a^{\dagger}(-K)a^{\dagger}(K)]\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{K=-\infty}^{\infty}k_r\left\{[a(K),\ a(-K)]+[a^{\dagger}(K),\ a^{\dagger}(-K)]\right\}$$

$$=0 \qquad (7)$$

在上式的最后一步中，我们用到了

$$\left.\begin{aligned}[a(K),\ a(-K)] &= 0\\ [a^{\dagger}(K),\ a^{\dagger}(-K)] &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

把（5）式代入（3）式，即得

$$P = \sum_{k} a^{\dagger}(K)a(K)K \qquad (9)$$

第 六 章

6.1 导出（6.3）式.

解 由$\Delta(x)$的原始定义（5.18）式，我们有

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_0=\omega_k} \frac{d^3k}{k_0}\sin kx = \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\,\frac{1}{2\omega_k}\left\{e^{-ikx} - e^{ikx}\right\}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{-iKX}e^{i\omega_K x_0}\,\frac{1}{2\omega_K} - \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\frac{e^{ikx}}{2\omega_K}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{-\infty} d^3(-k)e^{iKX}e^{i\omega_K x_0}\,\frac{1}{2\omega_K} + \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\,\frac{e^{ikx}}{2\omega_K}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{iKX}\,e^{i\omega_K x_0}\,\frac{1}{2\omega_K} - \frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\,\frac{e^{ikx}}{2\omega_K}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKX}\frac{e^{-i(-\omega_K)x_0}}{2\omega_K}\cdot(-1) + \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKX}\frac{e^{-i\omega_K x_0}}{2\omega_K}$$

$\cdot(+1)$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKX}\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\, e^{ik_0x_0}\varepsilon(k)\,\frac{\delta(k_0+\omega_K)}{2\omega_K} + \frac{-i}{(2\pi)^3}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{iKX}\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\, e^{-ik_0x_0}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta(k_0-\omega_K)}{2\omega_K}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k e^{i(kX-k_0x_0)}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta(k_0+\omega_K)}{2\omega_K}$$

$$+ \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k e^{i(kX-k_0x_0)}\,\varepsilon(k)\,\frac{\delta(k_0-\omega_K)}{2\omega_K}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, e^{ikx}\varepsilon(k)\,\frac{1}{2\omega_K}[\delta(k_0+\omega_K)+\delta(k_0-\omega_K)]$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{ikx}\varepsilon(k)\delta(k_0^2-\omega_K^2)$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{ikx}\varepsilon(k)\delta(k^2+m^2)$$

这就是(6.3)式.

6.2 导出(6.11')式.

解 由(5.14)式和(5.15)式，有

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}a(K)e^{ikx} \qquad (1)$$

$$\phi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k_0=\omega_K}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}a^\dagger(K)e^{-ikx} \qquad (2)$$

根据(1)，(2)和(3.5)式，我们可得

$$[\phi^+(x),\ \phi^+(x')] = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}[a(K),\ a(K')]e^{i(kx+k'x')}$$

$$= 0 \qquad (3)$$

同理可得

$$[\phi^-(x),\ \phi^-(x')] = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}[a^\dagger(K),\ a^\dagger(K')]e^{-i(kx+k'x')}$$

$$= 0 \qquad (4)$$

由(3)和(4)式，有

$$[\phi^+(x),\ \phi^+(x')] = [\phi^-(x),\ \phi^-(x')] = 0$$

这就是(6.11)式中的第一个式子.

$$[\phi^+(x),\ \phi^-(x')] = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K\\ k_0'=\omega_{K'}}}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}e^{i(kx-k'x')}[a(K),\ a^\dagger(K')]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_K}\sum_{k_0'=\omega_{K'}}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}e^{i(kx-k'x')}\delta(K,\ K')$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_K} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0}} e^{ik(x-x')}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3 2}\int_{k_0=\omega_K} \frac{d^3k}{k_0} e^{ik(x-x')} = i\cdot\frac{-i}{(2\pi)^3 2}\int_{k_0=\omega_K} \frac{d^3k}{k_0}$$

$$\times e^{ik(x-x')} = i\Delta^+(x-x') \qquad (5)$$

同理可得

$$[\phi^-(x), \phi^+(x')] = \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K \\ k_0'=\omega_{K'}}} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}} e^{i(kx'-kx)}[a^\dagger(K), a(K')]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k_0=\omega_K}\sum_{k_0'=\omega_{K'}} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}} e^{-i(kx-kx')}[-\delta(K, K')]$$

$$= \frac{-1}{V}\sum_{k_0=\omega_K} \frac{1}{2k_0} e^{-ik(x-x')}$$

$$= i\cdot\frac{i}{(2\pi)^3 2}\int_{k_0=\omega_K} \frac{d^3k}{k_0} e^{-ik(x-x')}$$

$$= i\Delta^-(x-x') \qquad (6)$$

由（5）式和（6）式得

$$[\phi^\pm(x), \phi^\mp(x')] = i\Delta^\pm(x-x')$$

这就是（6.11）式中的第二个式子.

6.3 证明$\Delta(x)$是克莱因-戈登方程的解.

证明 由（6.1）式，我们有

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} \qquad (1)$$

把（1）式代入克莱因—戈登方程，即得

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k \frac{1}{k^2+m^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\lambda} - m^2\right\} e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k \frac{1}{k^2+m^2}\left\{-(k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_0^2) - m^2\right\} e^{ikx}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k\, e^{ikx}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k\, e^{iKx} \int_c d\, k_0 e^{-ik_0 x_0}$$
$$= 0$$

上面的最后一步是根据柯西定理得出的，因为 $e^{-ik_0 x_0}$ 是复平面的解析函数。

第 七 章

7.1 设拉格朗日量密度 $\mathscr{L}(\phi^a, \phi^a_{,\nu})$ 在变换

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \delta\phi^a$$

下保持不变，证明由此得到的作用量积分（2.3）式的不变性将导致守恒方程

$$\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \tag{1}$$

式中

$$j_\nu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \delta\phi^a \tag{2}$$

这里，ϕ^a 是场方程的解。

解 由（2.3）式，我们有

$$\delta I(\Omega) = \int_\Omega d^4x\, \delta\mathscr{L}(\phi^a, \phi^a_{,\nu}) \tag{3}$$

在变换 $\phi^a \longrightarrow \phi^a + \delta\phi^a$ 下，$\delta\mathscr{L} = 0$，故有

$$\delta I(\Omega) = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \delta\phi^a_{,\nu} \right\}$$

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \right) \right\} \delta\phi^a + \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \delta\phi_a \right\} \tag{4}$$

$$= 0$$

利用场方程（2.8）式，可知（4）式最后一步中第一项积分为零，于是有

$$\delta I(\Omega) = \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \delta\phi^a \right\} = 0 \tag{5}$$

四维体元 Ω 是任意的，于是有

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}} \delta\phi^a \right\} = \frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \tag{6}$$

这就是我们所要求的守恒方程。

7.2 设（7.2）式所给出的拉格朗日量密度在规范变换（7.11）式下是不变的，证明由此得到的作用量积分（2.3）式的不变性将导致四维电荷-电流矢量的连续性方程。

解 当拉格朗日量密度为$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\ \phi^*,\ \phi_{,\nu},\ \phi^*_{,\nu})$时，场方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\right)=0\\&\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*_{,\nu}}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

设有第一种规范变换：

$$\left.\begin{aligned}&\phi^a\longrightarrow\phi^a e^{i\theta}\\&\phi^{a*}\longrightarrow\phi^{a*}e^{-i\theta}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}&\delta\phi^a=\phi^a e^{i\theta}-\phi^a\approx\phi^a(1+i\theta)-\phi^a=i\theta\phi^a\\&\delta\phi^{a*}=-i\theta\phi^{a*}\\&\delta\phi^a_{,\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta\phi^a)=i\theta\frac{\partial\phi^a}{\partial x_\nu}=i\theta\phi^a_{,\nu}\\&\delta\phi^{a*}_{,\nu}=-i\theta\phi^{a*}_{,\nu}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

在变换（2）下，我们有

$$\delta I(\Omega)=\int_\Omega d^4x\,\delta\mathscr{L}\left(\phi^a,\ \phi^{a*},\ \phi^a_{,\nu},\ \phi^{a*}_{,\nu}\right)=0\tag{4}$$

于是可得

$$\delta I(\Omega)=\int_\Omega d^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a_{,\nu}}\delta\phi^a_{,\nu}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}}\delta\phi^{a*}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}_{,\nu}}\delta\phi^{a*}_{,\nu}\right\}$$

$$=i\theta\int_\Omega d^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}\phi^a+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a_{,\nu}}\phi^a_{,\nu}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}}\phi^{a*}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}_{,\nu}}\phi^{a*}_{,\nu}\right\}$$

$$=i\theta\int_\Omega d^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a_{,\nu}}\right)\right\}\phi^a+i\theta\int_\Omega d^4x\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a_{,\nu}}\phi^a\right)$$

$$-i\theta\int_\Omega d^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}_{,\nu}}\right)\right\}\phi^{a*}-i\theta\int_\Omega d^4x\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^{a*}_{,\nu}}\phi^{a*}\right)$$

$$= i\theta \int_\Omega d^4x \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}}\phi^a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{;\nu}}\phi^{a*}\right) = 0 \qquad (5)$$

因四维体元Ω是任意的，故由（5）式可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}}\phi^a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{;\nu}}\phi^{a*}\right) = 0 \qquad (6)$$

定义

$$j_\nu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{,\nu}}\phi^a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a_{;\nu}}\phi^{a*} \qquad (7)$$

则由（6）式得：

$$\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (8)$$

这就是四维电荷-电流矢量的连续性方程。

7.3 导出（7.23）式，并证明它和哈密顿量（7.21）式对易。

解 由（7.10）和（7.18）式，我们有

$$\frac{1}{i}s_4(x) = \left\{\phi^*_{;4}\phi - \phi_{,4}\phi^*\right\}$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K \\ k'_0=\omega_{K'}}} \sqrt{\frac{k_0}{k'_0}}\left\{\left(a^\dagger(K)a(K') + a(K')a^\dagger(K)\right)e^{-i(k-k')x}\right.$$

$$\left. -\left(b(K)b^\dagger(K') + b^\dagger(K')b(K)\right)e^{i(k-k')x}\right\}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\substack{k_0=\omega_K \\ k'_0=\omega_{K'}}} \sqrt{\frac{k_0}{k'_0}}\left\{\left(a^\dagger(K)a(K') + \frac{1}{2}\delta(K, K')\right)e^{-i(K-K')x}\right.$$

$$\left. \cdot e^{i(\omega_K-\omega_{K'})t} - \left(b^\dagger(K')b(K) + \frac{1}{2}\delta(K, K')\right)e^{i(K-K')x}\, e^{-i(\omega_K-\omega_{K'})t}\right\}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{K,K'}\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}\left\{a^\dagger(K)a(K')e^{-i(K-K')x}\cdot e^{i(\omega_K-\omega_{K'})t}\right.$$

$$\left. - b^\dagger(K')\,b(K)\,e^{i(K-K')x}\,e^{-i(\omega_K-\omega_{K'})t}\right\} \qquad (9)$$

把（1）式代入（7.22）式，即得

$$Q=\int d^3X\, e\rho(X)=\int d^3X\,[\,es_4(x)\,]$$

$$=\frac{1}{V}(2\pi)^3 c\sum_{K,K'}\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}\Big\{a^\dagger(K)a(K')\,e^{i(\omega_K-\omega_{K'})t}$$

$$-b^\dagger(K')\,b(K)\,e^{-i(\omega_K-\omega_{K'})t}\Big\}\delta(K-K')$$

$$=e\sum_K\int d^3K'\sqrt{\frac{\omega_K}{\omega_{K'}}}\Big\{a^\dagger(K)a(K')\,e^{i(\omega_K-\omega_{K'})t}$$

$$-b^\dagger(K')\,b(K)\,e^{-i(\omega_K-\omega_{K'})t}\Big\}\delta(K-K')$$

$$=e\sum_K[\,a^\dagger(K)a(K)-b^\dagger(K)b(K)\,]$$

$$=e\sum_K[\,N^+(K)-N^-(K)\,] \qquad (2)$$

这就是（7.23）式.

由（2）式和（7.21）式，我们有

$$[Q,\ H]=e\sum_{K,K'}\omega_{K'}\{N^+(K)N^+(K')-N^-(K)N^+(K')$$

$$+N^+(K)N^-(K')-N^-(K)N^-(K')\}-e\sum_{K'K'}\omega_{K'}\{N^+(K')\cdot$$

$$\cdot N^+(K)+N^-(K')N^+(K)-N^+(K')N^-(K)-N^-(K')N^-(K)\}$$

$$=e\sum_{K,K'}\omega_{K'}\{[N^+(K),\ N^+(K')]+[N^+(K),\ N^-(K')]$$

$$+[N^+(K'),\ N^-(K)]+[N^-(K'),\ N^-(K)]\} \qquad (3)$$

现在，我们来计算（3）式中的几个对易子，首先有

$$[N^+(K),\ N^+(K')]=a^\dagger(K)a(K)a^\dagger(K')a(K')-a^\dagger(K')a(K')a^\dagger(K)a(K)$$

$$=a^\dagger(K)[\,a^\dagger(K')a(K)+\delta(K,\ K')\,]a(K')-$$

$$-a^\dagger(K')[\,a^\dagger(K)a(K')+\delta(K,\ K')\,]a(K)$$

$$=a^\dagger(K)a^\dagger(K')a(K)a(K')+a^\dagger(K)a(K')\delta(K,\ K')$$

$$-a^\dagger(K')a^\dagger(K)a(K')a(K)-a^\dagger(K')a(K)\delta(K,\ K')$$

$$=0 \qquad (4)$$

式中，我们用到了（7.19）式.同理可得

$$[N^-(K'),\ N^-(K)]=0 \qquad (5)$$

显然有

$$[N^+(K),\ N^-(K')]=0 \qquad (6)$$

$$[N^+(K'),\ N^-(K)]=0 \qquad (7)$$

把（4），（5），（6），（7）代入（3）式，即得

$$[Q,\ H]=0$$

这正是我们所要证明的对易子.

第 八 章

8.1 导出(8.15)式.

解 由狄拉克方程(8.1)式，可得

$$\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+M\right)\psi=-\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}\psi=i\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad(1)$$

把(1)式代入(8.13)式，即得

$$\mathscr{H}(x)=\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\cdot i\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\psi^{\dagger}\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad(2)$$

把(8.10)式代入(2)式，即得

$$\mathscr{H}(x)=-\frac{M}{V}\sum_{p_0=E_p}\sum_{p_0'=E_{p'}}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\{C_r^{\dagger}(P)u^{(r)*}(P)e^{-ipx}$$

$$+d_r(P)u^{(r)}(P)e^{ipx}\}\{d_s^{\dagger}(P')u^{(s)*}(P')e^{-ip'x}-C_s(P')u^{(s)}(P')e^{ip'x}\}$$

$$=\frac{M}{V}\sum_{p_0=E_p}\sum_{p_0'=E_{p'}}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\{C_r^{\dagger}(P)C_s(P')u^{(r)*}(P)u^{(s)}(P')e^{-i(P-P')x}$$

$$\cdot e^{i(p_0-p_0')t}-d_r(P)d_s^{\dagger}(P')u^{(r)}(P)u^{(s)*}(P')e^{i(P-P')x}e^{-i(p_0-p_0')t}$$

$$+d_r(P)C_s(P')u^{(r)}(P)u^{(s)}(P')e^{i(P+P')x}e^{-i(p_0+p_0')t}$$

$$-C_r^{\dagger}(P)d_s^{\dagger}(P')u^{(r)*}(P)u^{(s)*}(P')e^{-i(P+P')x}e^{i(p_0+p_0')t}\}\qquad(3)$$

把(3)式代入(8.14)式，即得

$$H(t)=\int d^3x\mathscr{H}(x,t)$$

$$=\frac{M}{V}(2\pi)^3\sum_{p_0=E_p}\sum_{p_0'=E_{p'}}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}$$

$$\{C_r^{\dagger}(P)C_s(P')u^{(r)*}(P)u^{(s)}(P')e^{i(p_0-p_0')t}\delta(P-P')$$

$$-d_r(P)d_s^{\dagger}(P')u^{(r)}(P)u^{(s)*}(P')e^{-i(p_0-p_0')t}\delta(P-P')+$$

$$+d_r(\boldsymbol{P})C_s(\boldsymbol{P}')u^{(r)}(\boldsymbol{P})u^{(s)}(\boldsymbol{P}')e^{-i(p_0+p_0')t}\delta(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}')$$

$$-C_r^\dagger(\boldsymbol{P})d_s^\dagger(\boldsymbol{P}')u^{(r)*}(\boldsymbol{P})u^{(s)*}(\boldsymbol{P}')e^{i(p_0+p_0')t}\delta(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}')\}$$

$$=M\sum_{p_0=E_{\boldsymbol{P}}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\{C_r^\dagger(\boldsymbol{P})C_s(\boldsymbol{P})u^{(r)*}(\boldsymbol{P})u^{(s)}(\boldsymbol{P})$$

$$-d_r(\boldsymbol{P})d_s^\dagger(\boldsymbol{P})u^{(r)*}(\boldsymbol{P})u^{(s)*}(\boldsymbol{P})+d_r(\boldsymbol{P})C_s(-\boldsymbol{P})u^{(r)}(\boldsymbol{P})$$

$$\times u^{(s)}(-\boldsymbol{P})e^{-i2p_0t}-C_r^\dagger(\boldsymbol{P})d_s^\dagger(-\boldsymbol{P})u^{(r)*}(\boldsymbol{P})u^{(s)*}(-\boldsymbol{P})e^{i2p_0t}\}$$

$$=M\sum_{p_0=E_{\boldsymbol{P}}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\left\{C_r^\dagger(\boldsymbol{P})C_s(\boldsymbol{P})\frac{E_{\boldsymbol{P}}}{M}\delta_{rs}-d_r(\boldsymbol{P})d_s^\dagger(\boldsymbol{P})\frac{E_{\boldsymbol{P}}}{M}\delta_{rs}\right\}$$

$$=\sum_{\boldsymbol{P}}E_{\boldsymbol{P}}\sum_{r=1}^{2}\{C_r^\dagger(\boldsymbol{P})C_r(\boldsymbol{P})-d_r(\boldsymbol{P})d_r^\dagger(\boldsymbol{P})\}$$

这就是(8.15)式.在推导中，我们用到了(A18)和(A21)式.

8.2 证明：虽然拉格朗日量密度（8.19）式不是厄密算符，但用它所导出的场方程和用厄密的拉格朗日量密度导出的场方程是完全一样的.这就说明，使用拉格朗日量密度(8.19)式是完全正确的.

证明 由（8.19）式，我们有

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\left\{\psi^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}+M\psi^\dagger(x)\gamma_4\psi(x)+\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x_\mu}\right.$$

$$\left.+M\psi(x)\gamma_4\psi^\dagger(x)\right\} \tag{1}$$

由（1）式即得

$$\mathscr{L}^\dagger=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x_k}\gamma_k\gamma_4\psi(x)-\frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi(x)+M\psi^\dagger(x)\gamma_4\psi(x)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\gamma_k\gamma_4\psi^\dagger(x)-\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi^\dagger(x)+M\psi(x)\gamma_4\psi^\dagger(x)\right\} \tag{2}$$

在（1）和（2）式中，我们采用本书前面的约定，希腊字母 $\mu=1,\cdots,4$；拉丁字母 $k=1,2,3$，下同.

由（1）和（2）式，我们有

$$\mathscr{L}'=\frac{1}{2}(\mathscr{L}+\mathscr{L}^\dagger) \tag{3}$$

于是可得

$$\Delta\mathscr{L}\equiv\mathscr{L}'-\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\mathscr{L}^{\dagger}-\mathscr{L})$$

$$=-\frac{1}{4}\Big\{\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_k}\gamma_k\gamma_4\psi(x)-\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi(x)-\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_k\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}$$

$$-\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_4\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_4}+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\gamma_k\gamma_4\psi^{\dagger}(x)-\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi^{\dagger}(x)$$

$$-\psi(x)\gamma_4\gamma_k\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_k}-\psi(x)\gamma_4\gamma_4\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_4}\Big)$$

$$=-\frac{1}{4}\Big\{\Big[-\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_k}\gamma_4\gamma_k\psi(x)-\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi(x)\Big]$$

$$-\Big[\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_k\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}+\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_4\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_4}\Big]$$

$$-\Big[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}\gamma_4\gamma_k\psi^{\dagger}(x)+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_4}\gamma_4\gamma_4\psi^{\dagger}(x)\Big]$$

$$-\Big[\psi(x)\gamma_4\gamma_k\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_k}+\psi(x)\gamma_4\gamma_4\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_4}\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}\Big\{\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_\mu}\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)+\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}$$

$$+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}\gamma_4\gamma_\mu\psi^{\dagger}(x)+\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\frac{\partial\psi^{\dagger}(x)}{\partial x_\mu}\Big\}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big\{\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)+\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^{\dagger}(x)\Big\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Lambda_\mu \qquad (4)$$

(4)式表明，$\Delta\mathscr{L}\equiv\mathscr{L}'-\mathscr{L}$是四维散度的形式.由习题2.2，$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Lambda_\mu$对场方程没有任何影响，所以，虽然(8.19)式不是厄密算符，但由它导出的场方程和由厄密的拉格朗日量密度导出的场方程是完全一样的.这就证明了，使用(8.19)式的拉格朗日量密度是完全正确的.

8.3 导出(8.22)式.

解 由(8.16)式，我们有

$$\{N_r(P)\}^2=d_r^{\dagger}(P)d_r(P)\,d_r^{\dagger}(P)d_r(P)=d_r^{\dagger}(P)\,(1-d_r^{\dagger}(P)d_r(P))\,d_r(P)$$

$$= d_r^{\dagger}(\boldsymbol{P}) d_r(\boldsymbol{P}) - [\, d_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})]^2 [d_r(\boldsymbol{P})]^2$$

$$= d_r^{\dagger}(\boldsymbol{P}) d_r(\boldsymbol{P}) = N_r^{+}(\boldsymbol{P})$$

同理可得

$$\{N_r^{-}(\boldsymbol{P})\}^2 = N_r^{-}(\boldsymbol{P})$$

这就导出了（8.22）式.在推导中，我们用到了（8.24）式.

8.4 根据狄拉克方程，证明四维电流密度矢量（8.32）式满足连续性方程.

证明 由（8.32）式，我们可得

$$s_\nu(x) = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma_\nu\psi - \psi\gamma_\nu^T\bar{\psi}\} \tag{1}$$

由狄拉克方程，有

$$\gamma_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} = -m\psi(x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x_\mu}\gamma_\mu = m\bar{\psi}(x) \tag{3}$$

于是可得

$$\frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} s_\nu(x) = \frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x_\nu}\gamma_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\nu}\gamma_\nu^T\bar{\psi} - \psi\gamma_\nu^T\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x_\nu} \tag{4}$$

因为 $(\psi(x)\gamma_\nu^T)_\alpha = \psi_\beta(x)(\gamma_\nu^T)_{\beta\alpha} = (\gamma_\nu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) = (\gamma_\nu\psi(x))_\alpha$ (5)

$$(\gamma_\nu^T\bar{\psi}(x))_\alpha = (\gamma_\nu^T)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta(x) = \bar{\psi}_\beta(x)(\gamma_\nu)_{\beta\alpha} = (\bar{\psi}\gamma_\nu)_\alpha \tag{6}$$

把(5)，(6)，(2)，(3)式代入(4)式，即得

$$\frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} s_\nu(x) = m\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)(-m\psi(x)) - (-m\psi(x))\bar{\psi}(x)$$

$$-\psi(x)(m\bar{\psi}(x)) = 0$$

也就是

$$\frac{\partial s_\nu(x)}{\partial x_\nu} = 0$$

8.5 导出（8.34）式.

解 由（8.33）式和（8.10）式，我们可得

$$Q = -\frac{e}{2}\int d^3x(\psi^{\dagger}\psi - \psi\psi^{\dagger})$$

$$= -\frac{e}{2}\int d^3x \frac{M}{V}\sum_{p_0=E_p}\sum_{p_0'=E_{p'}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{p_0 p_0'}}$$

$$\times\Big\{\big[C_r^\dagger(P)C_s(P')u^{(r)*}(P)\,u^{(s)}(P')\,e^{-i(P-P')\times}\,e^{i(p_0-p_0')t}$$

$$+ d_r(P)\,d_s^\dagger(P')u^{(r)}(P)u^{(s)*}(P')e^{i(P-P')\times}\,e^{-i(p_0-p_0')t}$$

$$+ d_r(P)C_s(P')u^{(r)}(P)u^{(s)}(P')e^{i(P+P')\times}\,e^{-i(p_0+p_0')t}$$

$$+ C_r^\dagger(P)d_s^\dagger(P')u^{(r)*}(P)u^{(s)*}(P')e^{-i(P+P')\times}\,e^{i(p_0+p_0')t}\big]$$

$$-\big[C_s(P')C_r^\dagger(P)u^{(s)}(P')u^{(r)*}(P)e^{-i(P'-P)\times}\,e^{i(p_0'-p_0)t}$$

$$+ d_s^\dagger(P')d_r(P)u^{(s)*}(P')u^{(r)}(P)e^{i(P'-P)\times}\,e^{-i(p_0'-p_0)t}$$

$$+C_s(P')d_r(P)u^{(s)}(P')u^{(r)}(P)e^{i(P'+P)\times}\,e^{-i(p_0'+p_0)t}$$

$$+ d_s^\dagger(P')C_r^\dagger(P)u^{(s)*}(P')u^{(r)*}(P)e^{-i(P'+P)\times}\,e^{i(p_0'+p_0)t}\big]\Big\}$$

$$= -\frac{e}{2}\sum_{p_0=E_p}\frac{M}{E_p}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\Big\{\big[C_r^\dagger(P)C_s(P)u^{(r)*}(P)u^{(s)}(P)$$

$$+ d_r(P)\,d_s^\dagger(P)u^{(r)}(P)u^{(s)*}(P) + d_r(P)C_s(-P)u^{(r)}(P)u^{(s)}(-P)\,e^{-i2p_0t}$$

$$+ C_r^\dagger(P)d_s^\dagger(-P)u^{(r)*}(P)u^{(s)*}(-P)e^{i2p_0t}\big]$$

$$-\big[C_s(P)\,C_r^\dagger(P)\,u^{(s)}(P)\,u^{(r)*}(P) + d_s^\dagger(P)d_r(P)u^{(s)*}(P)u^{(r)}(P)$$

$$+C_s(-P)d_r(P)u^{(s)}(-P)\,u^{(r)}(P)\,e^{-i2p_0t}$$

$$+ d_s^\dagger(-P)\,C_r^\dagger(P)u^{(s)*}(-P)u^{(r)*}(P)e^{i2p_0t}\big]\Big\}$$

$$= -\frac{e}{2}\sum_{p}\frac{M}{E_p}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\frac{E_p}{M}\delta_{rs}\{C_r^\dagger(P)\,C_s(P) + d_r(P)\,d_s^\dagger(P)$$

$$- C_s(P)\,C_r^\dagger(P) - d_s^\dagger(P)d_r(P)\}$$

$$= -e\sum_{p}\sum_{r=1}^{2}\{C_r^\dagger(P)\,C_r(P) - d_r^\dagger(P)d_r(P)\}$$

$$= e\sum_{p}\sum_{r=1}^{2}\{N_r^+(P) - N_r^-(P)\}$$

这就是（8.34）式.在推导中，我们用到了（A.21）式，（8.20）式和（8.16）式.

8.6 导出反对易关系（8.42）式.

解 由（8.10）式，我们有

$$
\begin{aligned}
[\psi_\alpha(x),\psi_\beta(x')]_+ = \frac{M}{V}\sum_{p_0=E_{\mathbf{p}}}\sum_{p_0'=E_{\mathbf{p}'}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{p_0p_0'}}
\\
\times\{[C_r(\boldsymbol{P}),C_S(\boldsymbol{P}')]_+\ u_\alpha^{(r)*}(\boldsymbol{P})\,u_\beta^{(S)}(\boldsymbol{P}')e^{i(px+p'x')}
\\
+[\,d_r^\dagger(\boldsymbol{P}),d_S^\dagger(\boldsymbol{P}')]_+\ u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})\,u_\beta^{(S)*}(\boldsymbol{P}')e^{-i(px+p'x')}
\\
+[\,d_r^\dagger(\boldsymbol{P}),C_S(\boldsymbol{P}')]_+\ u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})\,u_\beta^{(S)*}(\boldsymbol{P}')e^{-i(px-p'x')}
\\
+[\,C_r(\boldsymbol{P}),\,d_S^\dagger(\boldsymbol{P}')]_+\ u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})\,u_\beta^{(S)*}(\boldsymbol{P}')e^{i(px-p'x')}\}
\\
=0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

上式的最后一步是根据（8.20b）式得出的. 同样，由（8.10）式和（8.20b）式，我们可得

$$
[\bar\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(x')]_+ = 0 \qquad (2)
$$

根据（8.26）式，我们有

$$
\begin{aligned}
[\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(x')]_+ = [\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\beta^+(x')]_+ + [\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\beta^-(x')]_+
\\
+[\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\beta^-(x')]_+ + [\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\beta^+(x')]_+ \qquad (3)
\end{aligned}
$$

根据（8.20b）式，由于

$$
[C_r(\boldsymbol{P}),d_S(\boldsymbol{P}')]_+ = 0,\quad [C_r^\dagger(\boldsymbol{P}),d_S^\dagger(\boldsymbol{P}')]_+ = 0 \qquad (4)
$$

故由（8.10）式，有

$$
[\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\beta^+(x')]_+ = 0,\quad [\psi_\alpha^-(x),\bar\psi_\beta^-(x')]_+ = 0 \qquad (5)
$$

根据（8.10）式，我们可得

$$
\begin{aligned}
&[\psi_\alpha^+(x),\bar\psi_\beta^-(x')]_+
\\
&=\frac{M}{V}\sum_{p_0=E_{\mathbf{p}}}\sum_{p_0'=E_{\mathbf{p}'}}\frac{1}{\sqrt{p_0p_0'}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}[C_r(\boldsymbol{P}),C_S^\dagger(\boldsymbol{P}')]_+\,u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})\bar u_\beta^{(S)}(\boldsymbol{P}')e^{i(px-p'x')}
\\
&=\frac{M}{V}\sum_{p_0=E_{\mathbf{p}}}\sum_{p_0'=E_{\mathbf{p}'}}\frac{1}{\sqrt{p_0p_0'}}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}\delta_{rS}\,\delta(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}')\,u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P})\bar u_\beta^{(S)}(\boldsymbol{P}')e^{i(px-p'x')}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{M}{V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} \sum_{r=1}^{2} u_\alpha^{(r)}(\boldsymbol{P}) \bar{u}_\beta^{(r)}(\boldsymbol{P}) e^{ip(x-x')}, \quad (\text{代入(A27)式})$$

$$= \frac{M}{V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} \Lambda_{\alpha\beta}^{+}(\boldsymbol{P}) e^{ip(x-x')}, \quad (\text{代入(A22)式})$$

$$= \frac{-1}{2V} \sum_{p_0=E_p} \frac{1}{p_0} (i\not{p} - M)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}, \quad (\text{代入(3.7)式})$$

$$= (i\not{\partial} - M)_{\alpha\beta} \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int_{p_0=E_p} d^3p \frac{1}{p_0} e^{ip(x-x')}, \quad (\text{代入(6.9)式})$$

$$= -(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M)_{\alpha\beta}[i\Delta^{+}(x-x', M)], \quad (\text{代入(8.44)式})$$

$$= -iS_{\alpha\beta}^{+}(x-x') \qquad (6)$$

同理可得

$$[\psi_\alpha^{-}(x), \bar{\psi}_\beta^{+}(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{-}(x-x') \qquad (7)$$

把(5)，(6)和(7)式代入(3)式，即得

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = -iS_{\alpha\beta}^{+}(x-x') - iS_{\alpha\beta}^{-}(x-x') = -iS_{\alpha\beta}(x-x') \qquad (8)$$

(1)式，(2)式和(8)式就是反对易关系(8.42)式.

8.7 证明函数$S(x)$是狄拉克方程的解.

证明 由(8.44)式，我们可得

$$(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + M)S(x) = (\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + M)(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M)\Delta(x, M)$$

$$= (\gamma_\nu \gamma_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - M^2)\Delta(x, M) \qquad (1)$$

在(1)式中，$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$对下标$\mu$，$\nu$而言是对称的，即有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \qquad (2)$$

于是我们有

$$\gamma_\nu \gamma_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \qquad (3)$$

把（3）式代入（1）式，即得

$$(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + M)S(x) = \left[\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - M^2\right]\Delta(x,M)$$

$$= (\delta_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - M^2)\Delta(x,M) = (\Box^2 - M^2)\Delta(x,M) = 0 \qquad (4)$$

（4）式表明，$S(x)$是狄拉克方程的解。在导出上式的最后一步时，我们用到了习题6.3的结果。

8.8 证明

$$S(x)|_{x_0=0} = i\gamma_4\delta(\mathbf{X}) \qquad (1)$$

证明 由（8.44）式，我们可得

$$S(x) = (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M)\Delta(x,M) = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Delta(x,M) - M\Delta(x,M) \qquad (2)$$

由（5.20）式，我们有

$$\Delta(x,M)|_{x_0=0} = \Delta(\mathbf{X}, x_0 = 0; M) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{E_\mathbf{p}} \sin\boldsymbol{P}\mathbf{X} = 0 \qquad (3)$$

由（6.1）式，我们可得

$$\Delta(x,\ M) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \frac{e^{i\mathbf{P}\mathbf{X}}}{2E_\mathbf{p}}(e^{-iE_\mathbf{p}t} - e^{iE_\mathbf{p}t}) \qquad (4)$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x,\ M) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \frac{e^{i\mathbf{P}\mathbf{X}}}{2E_\mathbf{p}}[(-iE_\mathbf{p})\, e^{-iE_\mathbf{p}t} - (iE_\mathbf{p})\, e^{iE_\mathbf{p}t}] \qquad (5)$$

由（5）式即得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=t=0} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3p\, e^{i\mathbf{P}\mathbf{X}}$$

$$= -\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) = -\delta(\mathbf{X}) \qquad (6)$$

由（6）式，我们有

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=t=0} = \frac{\partial}{\partial x_4}\Delta(x)\Big|_{x_0=t=0} = i\delta(\mathbf{X}) \qquad (7)$$

再由（6.1）式，可得

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta(x,\ M)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{ipX}}{2E_p}(iP_k)\,(e^{-iE_pt}-e^{iE_pt})\ (k=1,\ 2,\ 3)\qquad(8)$$

由（8）式，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta(x)\Big|_{x_0=t=0}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{ipX}}{2E_p}P_k(1-1)=0\quad(k=1,\ 2,\ 3)\qquad(9)$$

于是，根据（2），（3），（7）和（9）式，我们可得

$$\begin{aligned}S(x)\Big|_{x_0=0}&=\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=0}-M\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=0}\\&=\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=0}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}\Delta(x,\ M)\\&\quad-M\Delta(x,\ M)\Big|_{x_0=0}\\&=\gamma_4 i\delta(X)=i\gamma_4\delta(X)\end{aligned}\qquad(10)$$

这就证明了（1）式是成立的.

8.9 导出等时反对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\psi_\alpha(X,\ t),\ \psi_\beta(X',\ t)]_+=0\\&[\psi_\alpha^\dagger(X,\ t),\ \psi_\beta^\dagger(X',\ t)]_+=0\\&[\psi_\alpha(X,\ t),\ \psi_\beta^\dagger(X',\ t)]_+=\delta_{\alpha\beta}\delta(X-X')\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

解 由（8.20*b*）式，我们有

$$\left.\begin{aligned}&[C_r(P),\ C_s(P')]_+=0\\&[d_r^\dagger(P),\ d_s^\dagger(P')]_+=0\\&[d_r^\dagger(P),\ C_s(P')]_+=0\\&[C_r(P),\ d_s^\dagger(P')]_+=0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

不论t是否等于t'，根据（8.10）式和（2）式，我们都有

$$[\psi_\alpha(X,\ t),\ \psi_\beta(X',\ t)]_+=0\qquad(3)$$

$$[\psi_\alpha^\dagger(X,\ t),\ \psi_\beta^\dagger(X',\ t)]_+=0\qquad(4)$$

由（8.11）式和（8.42）式，我们可得

$$[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta^\dagger(x')]_+=[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\tau(x')(\gamma_4)_{\tau\beta}]_+$$

$$
\begin{aligned}
&= [\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\tau(x')]_+(\gamma_4)_{\tau\beta} \\
&= -iS_{\alpha\tau}(x-x')(\gamma_4)_{\tau\beta} \\
&= -i[S(x-x')\gamma_4]_{\alpha\beta} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

根据8.8题的（1）式，我们有

$$
S(x-x')\Big|_{t-t'=0} = i\gamma_4\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}') \qquad (6)
$$

于是由（5）和（6）式，我们有

$$
\begin{aligned}
[\psi_\alpha(\mathbf{X},\ t),\ \psi^\dagger_\beta(\mathbf{X}',\ t)]_+ &= -i[S(\mathbf{X}-\mathbf{X}',\ t-t)\gamma_4]_{\alpha\beta} \\
&= -i[i\gamma_4\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}')\gamma_4]_{\alpha\beta} \\
&= (\gamma_4^2)_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}') \\
&= \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}') \qquad (7)
\end{aligned}
$$

这就是我们所要推导的结果。

8.10 若$(x-x')^2>0$，即$(x-x')$是一个类空矢量，证明四维电流密度矢量的对易子

$$
[s_\mu(x),\ s_\nu(x')]=0
$$

证明 由（5.22）式，当$x^2=\mathbf{X}^2-t^2>0$，则有

$$
\Delta(x)=0 \qquad (1)
$$

把（1）式代入（8.44）式，即得

$$
S(x)=0 \qquad (2)
$$

由（2）式，我们有

$$
S_{\alpha\beta}(x)=0 \qquad (3)
$$

当$(x-x')^2>0$时，把（3）式代入（8.42）式，即得

$$
\left.
\begin{aligned}
&[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')]_+=0 \\
&[\bar{\psi}_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]_+=0 \\
&[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]_+=0
\end{aligned}
\right\} \qquad (4)
$$

由（8.32）式，我们有

$$
\frac{2}{i}s_\nu(x)=[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\nu\psi(x)] \qquad (5)
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
-4[s_\mu(x),\ s_\nu(x')] &= \Big[[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)],\ [\bar{\psi}(x'),\ \gamma_\nu\psi(x')]\Big] \\
&= \Big[[\bar{\psi}_\alpha(x),\ (\gamma_\mu)_{\beta\tau}\psi_\tau(x)],\ [\bar{\psi}_\lambda(x'),\ (\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\psi_\sigma(x')]\Big]
\end{aligned}
$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\Big[\,[\bar{\psi}_\alpha(x),\ \psi_\tau(x)],\ [\bar{\psi}_\lambda(x'),\ \psi_\sigma(x')]\,\Big]$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\Big\{[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\tau(x)\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x') + \psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')$$

$$\times \bar{\psi}_\lambda(x') + \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x) + \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)$$

$$\times \psi_\tau(x)] - [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\tau(x)\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x') + \psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\lambda(x')$$

$$\times \psi_\sigma(x') + \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\tau(x) + \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x)]\Big\}$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\Big\{[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')$$

$$+ \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)]\psi_\tau(x) + \psi_\tau(x)[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')$$

$$+ \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\alpha(x)] - [\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')$$

$$+ \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\alpha(x)]\psi_\tau(x) - \psi_\tau(x)[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')$$

$$+ \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)]\Big\}$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\Big\{[\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x') + \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)$$

$$- \bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x') - \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\alpha(x)]\psi_\tau(x)$$

$$+ \psi_\tau(x)[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x') + \bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\alpha(x)$$

$$- \bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\lambda(x')\psi_\sigma(x') - \psi_\sigma(x')\bar{\psi}_\lambda(x')\bar{\psi}_\alpha(x)]\Big\}$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\Big\{2\,\bar{\psi}_\alpha(x)[\bar{\psi}_\lambda(x'),\ \psi_\sigma(x')]_+\psi_\tau(x)$$

$$+ 2\psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x)[\psi_\sigma(x'),\ \bar{\psi}_\lambda(x')]_+\Big\}$$

$$= (\gamma_\mu)_{\beta\tau}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma}\{2\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot 0\cdot\psi_\tau(x) + 2\psi_\tau(x)\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot 0\}$$

$$= 0 \qquad (6)$$

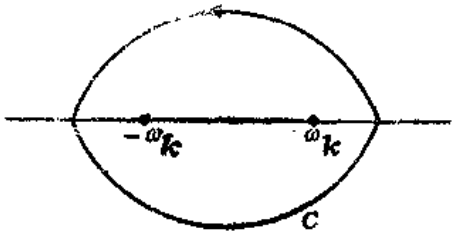
这就是我们所要证明的结果。在证明中，我们反复用到了（4）式。

第 九 章

9.1 证明

$$D(x) = \frac{1}{4\pi r}\Big\{\delta(x_0 + r) - \delta(x_0 - r)\Big\}$$

式中，$r = |\mathbf{X}|$。



习题 9.1 附图

证明 由（9.13）、（6.1）和（6.2）式，可得

$$D(x) = \lim_{m\to 0}\Delta(x,\ m) = \lim_{m\to 0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int_c d^4k \times \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_c d^4k\,\frac{e^{ikx}}{(k_0^2 - \omega_k^2)}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}\int_C \frac{d\,k_0 e^{-ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_{\mathbf{K}}^2}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega_{\mathbf{K}}x_0}}{2\omega_{\mathbf{K}}}+\frac{e^{i\omega_{\mathbf{K}}x_0}}{-2\omega_{\mathbf{K}}}\right\}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{X}}\frac{\sin\omega_{\mathbf{K}}x_0}{\omega_{\mathbf{K}}}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\omega_{\mathbf{K}}x_0}{\omega_{\mathbf{K}}}e^{iKr\cos\theta}K^2\mathrm{Sin}\theta d\theta d\varphi dK$$（由(6.2)式，因$m=0$，故$K=|\boldsymbol{K}|=\omega_{\mathbf{K}}$）

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty K\mathrm{Sim}Kx_0 dK\int_0^\pi e^{iKr\cos\theta}d(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty K\sin Kx_0\cdot\frac{1}{iKr}(e^{-iKr}-e^{iKr})dK$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\int_0^\infty(e^{-iKx_0}-e^{iKx_0})(e^{-iKr}-e^{iKr})dK$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r}\int_0^\infty[\cos(x_0+r)K-\cos(x_0-r)K]dK$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^\infty[\cos(x_0+r)K-\cos(x_0-r)K]dK$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^\infty(e^{-iK(x_0+r)}-e^{-iK(x_0-r)})dK$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\left\{\delta(x_0+r)-\delta(x_0-r)\right\}$$

即为所证。

第 十 章

10.1 导出（10.25）和（10.26）式。

解 由（9.16）式和（10.4）式，我们有

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \langle\Phi|\eta A_\mu(x)|\Phi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{S\\(k_0=|\mathbf{K}_S|)}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{m=1}^4\left\{\varepsilon_\mu^{(m)}(\boldsymbol{K}_S)e^{ik_Sx}(\Phi,\ \eta a_m(\boldsymbol{K}_S)\Phi)+\right.$$

$$+ e_s^{(m)*}(K_S)\,e^{-iw_s\cdot\tau}(\Phi,\ \eta a_m^{\dagger}(K_S)\Phi)\Big\} \qquad (1)$$

由(10.24)式，态Φ中不存在横光子，因而$m=1$，2时，必有

$$(\Phi,\ \eta a_m(K_S)\Phi)=(\Phi,\ \eta a_m^{\dagger}(K_S)\Phi)=0 \quad (m=1,\ 2) \qquad (2)$$

由(10.18)式和(10.24)式，我们有

$$\Phi=\Phi_T^{(0)}\left(\Phi_{LS}^{(0)}+C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)}\right) \qquad (3)$$

式中，

$$\Phi_{k_s}^{(1)}=\left(\Phi_{k_s}^{(1)}\ (1,\ 0)+i\Phi_{k_s}(0,\ 1)\right) \qquad (4)$$

由(3)式和(4)式，当$m=3$，4时，我们有

$$\begin{aligned}(\Phi,\ \eta a_m(K_S)\Phi)&=\left((\Phi_{LS}^{(0)}+C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)}),\ \eta a_m(K_S)(\Phi_{LS}^{(0)}+C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)})\right)\\&=\left(\Phi_{LS}^{(0)},\ \eta a_m(K_S)\Phi_{LS}^{(0)}\right)+\left(\Phi_{LS}^{(0)},\ \eta a_m(K_S)C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)}\right)\\&\quad+\left(C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)},\ \eta a_m(K_S)\Phi_{LS}^{(0)}\right)\\&\quad+\left(C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)},\ \eta a_m(K_S)C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)}\right)\\&=\left(\Phi_{LS}^{(0)},\ \eta a_m(K_S)C_1(K_S)\Phi_{k_s}^{(1)}\right)\\&=\left(\Phi_{LS}^{(0)},\ \eta a_m(K_S)C_1(K_S)(\Phi_{k_s}^{(1)}(1,\ 0)+i\Phi_{K_S}(0,1))\right)\\&=\begin{cases}C_1(K_S) & m=3\\ iC_1(K_S) & m=4\end{cases}\end{aligned} \qquad (5)$$

由(10.7)式，可得：

$$a_3^{\dagger}(K_S)\eta=\eta a_3^{\dagger}(K_S) \qquad (6)$$

$$a_4^{\dagger}(K_S)\eta=-\eta a_4^{\dagger}(K_S) \qquad (7)$$

对(5)式取厄密共轭，再代入(6)和(7)式，即得

$$\left(\Phi,\ \eta a_3^{\dagger}(K_S)\Phi\right)=C_1^{*}(K_S) \qquad (8)$$

$$\left(\Phi,\ \eta a_4^{\dagger}(K_S)\Phi\right)=-iC_1^{*}(K_S) \qquad (9)$$

根据(9.17)式，我们有

$$\varepsilon_\mu^{(3)}(\boldsymbol{K}_S)+i\varepsilon_\mu^{(4)}(\boldsymbol{K}_S)=\frac{\boldsymbol{K}_S}{|\boldsymbol{K}_S|}+i \tag{10}$$

由（10）式，可得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}e^{ik_S x}=i(k_S)_\mu e^{ik_S x}=i(\boldsymbol{K}_S+i|\boldsymbol{K}_S|)\,e^{ik_S x}$$

$$=i|\boldsymbol{K}_S|\left(\frac{\boldsymbol{K}_S}{|\boldsymbol{K}_S|}+i\right)e^{ik_S x}$$

$$=i|\boldsymbol{K}_S|\left(\varepsilon_\mu^{(3)}(\boldsymbol{K}_S)+i\varepsilon_\mu^{(4)}(\boldsymbol{K}_S)\right)e^{ik_S x} \tag{11}$$

同理可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}e^{-ik_S x}=-i(k_S)_\mu e^{-ik_S x}=-i(\boldsymbol{K}_S-i|\boldsymbol{K}_S|)e^{-ik_S x}$$

$$=-i|\boldsymbol{K}_s|\left(\frac{\boldsymbol{K}_S}{|\boldsymbol{K}_S|}-i\right)e^{-ik_S x}$$

$$=-i|\boldsymbol{K}_s|\left[\varepsilon_\mu^{(3)}(\boldsymbol{K}_S)-i\varepsilon_\mu^{(4)}(\boldsymbol{K}_S)\right]e^{-ik_S x}$$

$$=-i|\boldsymbol{K}_s|\left[\varepsilon_\mu^{(3)*}(\boldsymbol{K}_s)-i\varepsilon_\mu^{(4)*}(\boldsymbol{K}_s)\right]e^{-ik_S x} \tag{12}$$

把（2），（8），（9），（11），（12）代入（1）式，即得

$$\langle A_\mu(x)\rangle=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{s\\(k_0=|\boldsymbol{K}_s|)}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left\{\left(\varepsilon_\mu^{(3)}(\boldsymbol{K}_s)+i\varepsilon_\mu^{(4)}(\boldsymbol{K}_s)\right)e^{ik_S x}C_1(\boldsymbol{K}_s)\right.$$

$$\left.+\left[\varepsilon_\mu^{(3)*}(\boldsymbol{K}_s)-i\varepsilon_\mu^{(4)*}(\boldsymbol{K}_s)\right]e^{ik_S x}C_1^*(\boldsymbol{K}_s)\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{s\\(k_0=|\boldsymbol{K}_s|)}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\left[\frac{-i}{|\boldsymbol{K}_s|}C_1(\boldsymbol{K}_s)e^{ik_S x}+\frac{i}{|\boldsymbol{K}_s|}C_1^*(\boldsymbol{K}_s)e^{-ik_S x}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} \tag{13}$$

式中，

$$A(x)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{s\\(k_0=|\boldsymbol{K}_s|)}}\frac{1}{\sqrt{2k_0^3}}\{-C_1(\boldsymbol{K}_s)e^{ik_S x}+C_1^*(\boldsymbol{K}_s)e^{-ik_S x}\}$$

即为所求。

第十一章

11.1 导出（11.12）式.

解 由（11.11）式，我们可得

$$\mathscr{H}_I(x)=ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\phi(x)\psi(x)$$
$$=ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x) \qquad (1)$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)-\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)]$$

$$=\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)-\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)+\frac{1}{2}\gamma_5\psi(x)\bar{\psi}(x)$$

$$=\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)]_+$$

$$=\frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}[\bar{\psi}_\alpha(x),\ \psi_\beta(x)]_+$$

$$=\frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(-i)S_{\beta\alpha}(x-x),\ \text{（代入（8.42）式）}$$

$$=-\frac{i}{2}T_r[\gamma_5 S(x-x)]$$

$$=-\frac{i}{2}T_r[\gamma_5 S(\mathbf{X}-\mathbf{X},\ t-t=0)],\ \text{（代入习题（8.8））}$$

$$=-\frac{i}{2}T_r[\gamma_5(i\gamma_4\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X}))]$$

$$=-\frac{i}{2}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X})T_r(\gamma_5\gamma_4),\ \text{（代入（A7）式）}$$

$$=-\frac{i}{2}\delta(\mathbf{X}-\mathbf{X})\cdot 0$$

$$=0 \qquad (2)$$

由（2）式即得：

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)=\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)] \qquad (3)$$

把（3）式代入（1）式，即得

$$\mathscr{H}_I(x)=\frac{i}{2}g[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)] \qquad (4)$$

即为所求.

11.2 根据相对论性的 $ps(pv)$ 相互作用（11.13）式，导出非相对论性的 ps（pv）相互作用（11.14）式.

解 由（11.13）式，我们可得

$$\mathscr{H}_I(x)=i\frac{f}{m}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\psi \quad .（参照本书第一章关于下标的规定）$$

$$=i\frac{f}{m}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\psi+i\frac{f}{m}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_4\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\psi$$

$$=i\frac{f}{m}\psi^\dagger\gamma_4\gamma_5\gamma_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\psi-\frac{f}{m}\bar{\psi}\gamma_4\gamma_5\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi \quad ,（代入（A6a）式）$$

$$=\frac{f}{m}\psi^\dagger\sigma_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\psi-\frac{f}{m}\psi^\dagger\gamma_5\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$=\frac{f}{m}\psi^\dagger(\sigma\cdot\nabla\phi)\psi-\frac{f}{m}\psi^\dagger\gamma_5\psi\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$=\frac{f}{m}(\psi^\dagger\sigma\psi)\cdot\nabla\phi-\frac{f}{m}\psi^\dagger\gamma_5\psi\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1)$$

我们知道，在（A7）表象中，狄拉克相对论波动方程的解 $\psi(x)$ 是具有四个分量的波函数. 前两个分量的数量级和后两个分量的数量级之比是 $\frac{v}{c}$. 这里，v 是费米子（如核子）的速度，c 是光速，核子在核内动能为 $\frac{1}{2}mv^2\approx10\text{MeV}$，由此可知，$\frac{v}{c}\approx\frac{1}{10}$. 为此，我们把 $\psi(x)$ 的前两个分量称为大分量，后两个分量称为小分量. 在非相对论情况下，$v\ll c$，于是大分量就组成普通的非相对论波函数，而小分量只给出一点点相对论修正. 这样，我们可把 $\psi(x)$ 表示为：

$$\psi(x):\begin{pmatrix}\times\\\times\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix} \qquad (2)$$

式中，“×”代表大分量，“·”代表小分量.

由（A6）和（A7）式，我们有

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma&0\\0&\sigma\end{pmatrix},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}0&-I\\-I&0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

式中，σ是二阶泡利矩阵[(A8)式]，I是二阶单位矩阵.

由（2）式和（3）式，可得

$$\psi^{\dagger}\sigma\psi:(\times\times\cdots)\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\times\\ \times\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\psi^{\dagger}\gamma_6\psi:(\times\times\cdots)\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\times\\ \times\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix} \tag{5}$$

不难看出，在$\psi^{\dagger}\sigma\psi$中，$\psi(x)$的大分量和大分量乘在一起；而在$\psi^{\dagger}\gamma_6\psi$中，$\psi(x)$的大分量和小分量乘在一起.由此可见，$\psi^{\dagger}\gamma_6\psi$比$\psi^{\dagger}\sigma\psi$小$\frac{v}{c}\approx\frac{1}{10}$倍，即约小一个数量级.因而在非相对论情况下，（1）式中的第二项和第一项相比可以忽略，故有

$$\mathscr{H}_I^{NR}(x)=\frac{f}{m}(\psi^{\dagger}\sigma\psi)\cdot\nabla\phi \tag{6}$$

即为所求.

11.3 证明量子电动力学的拉格朗日量密度在规范变换和电荷共轭变换下保持不变.

证明 设量子电动力学的总拉格朗日量密度为$\mathscr{L}$，自由光子场、自由电子场及相互作用拉格朗日量密度分别为$\mathscr{L}_{ph}$、$\mathscr{L}_f$和$\mathscr{L}_I$，于是我们有

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{ph}+\mathscr{L}_f+\mathscr{L}_I \tag{1}$$

式中

$$\mathscr{L}_{ph}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{2}$$

$$\mathscr{L}_f=-\frac{1}{2}\left\{\psi^{\dagger}(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\right]\psi(x)+\psi(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\right]\psi^{\dagger}(x)\right\} \tag{3}$$

$$\mathscr{L}_I=-\mathscr{H}_I=-es_\mu(x)A_\mu(x)=-\frac{ie}{2}\left[\bar{\psi},\ \gamma_\mu\psi\right]A_\mu(x) \tag{4}$$

设有规范变换

$$A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu} \tag{5}$$

$$\psi'(x)=\psi(x)e^{ie\Lambda(x)} \tag{6}$$

$$\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)} \tag{7}$$

这里，$\Lambda(x)$是一标量函数，满足方程

$$\Box^2\Lambda(x)=0 \tag{8}$$

（8）式成立是因为$A'_\mu(x)$必须满足洛仑兹条件。

把（5）式代入（2）式，即得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'_{Ph}=&-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\Big\{\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}-2\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\\&+\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\Big\}\\=&-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}+\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\Big\{\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\Big)\\&+A_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\Big)-A_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\Big)\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big)\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big)\Big\}\\=&\mathscr{L}_{Ph}+\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(A_\mu(x)\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\Big)-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2\Lambda(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big)\\&-\sum_{\mu,\nu=1}^{4}A_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}[\Box^2\Lambda(x)]+\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}[\Box^2\Lambda(x)]\end{aligned} \tag{9}$$

把（8）式代入（9）式，并注意到第二项和第三项都是四维散度的形式，因而其四维体积分都可化成边界面上的面积分，在求拉格朗日量密度$\mathscr{L}_{Ph}$的变分$\delta\mathscr{L}_{Ph}$以导出场方程时，这些面积分均为零，因而它们不影响场方程，故根据（9）式，$\mathscr{L}'_{Ph}$和$\mathscr{L}_{Ph}$等价。

把（3）式和（4）式相加，并代入（5）、（6）、（7）式，即得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'_f+\mathscr{L}'_I=&-\frac{1}{2}\Big\{\psi^\dagger(x)e^{-ie\Lambda(x)}\Big[\gamma_4\Big(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\Big)\Big]\psi(x)e^{ie\Lambda(x)}\\&+\psi(x)e^{ie\Lambda(x)}\Big[\gamma_4\Big(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\Big)\Big]\psi^\dagger(x)e^{-ie\Lambda(x)}\Big\}\\&-\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x)e^{-ie\Lambda(x)},\ \gamma_\mu\psi(x)e^{ie\Lambda(x)}\Big]\Big(A_\mu(x)-\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\Big)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big\{\psi^{\dagger}(x)\Big[\gamma_4\Big(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\Big)\Big]\psi(x)+ie\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$+\psi(x)\Big[\gamma_4\Big(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\Big)\Big]\psi^{\dagger}(x)-ie\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^{\dagger}(x)\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}\Big\}$$

$$-\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)\Big]A_\mu(x)+\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)\Big]\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$=\mathscr{L}_I-\frac{ie}{2}\left[\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)-\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^{\dagger}(x)\right]\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$+\mathscr{L}_I+\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)\Big]\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu},\ \text{代入（8.30）式}$$

$$=\mathscr{L}_I+\mathscr{L}_I-\frac{ie}{2}\Big(\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)-\psi(x)\gamma_\mu^T\gamma_4^T\psi^{\dagger}(x)\Big)\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$+\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)\Big]\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$=\mathscr{L}_I+\mathscr{L}_I-\frac{ie}{2}\Big(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)-\gamma_\mu\psi(x)\bar{\psi}(x)\Big)\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$+\frac{ie}{2}\Big[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)\Big]\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$$

$$=\mathscr{L}_I+\mathscr{L}_I \tag{10}$$

这样，我们就证明了，量子电动力学的拉格朗日量密度在规范变换下保持不变.

设有电荷共轭变换：

$$\psi(x)\longrightarrow\psi^{\dagger}(x) \tag{11}$$

$$\psi^{\dagger}(x)\longrightarrow\psi(x) \tag{12}$$

$$A_\mu(x)\longrightarrow -A_\mu(x) \tag{13}$$

把（13）式代入（2）式，即得

$$\mathscr{L}'_{FA}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial[-A_\mu(x)]}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial[-A_\mu(x)]}{\partial x_\nu}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}$$

$$=\mathscr{L}_{FA} \tag{14}$$

由（3）式，$\psi(x)$和$\psi^{\dagger}(x)$是对称的，故把（11）和（12）式代入（3）式后，（3）式保持不变，即有

$$\mathscr{L}'_f=\mathscr{L}_f \tag{15}$$

由（8.29）式，我们有

$$s_\mu(x)=\frac{i}{2}\{\psi^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)-\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^\dagger(x)\} \tag{16}$$

把（11）和（12）式代入（16）式后即得

$$\begin{aligned}s'_\mu(x)&=\frac{i}{2}\{\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^\dagger(x)-\psi^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)\}\\&=-\frac{i}{2}\{\psi^\dagger(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi(x)-\psi(x)\gamma_4\gamma_\mu\psi^\dagger(x)\}\\&=-s_\mu(x)\end{aligned} \tag{17}$$

把（13）式和（17）式代入（4）式，即得

$$\mathscr{L}'_I=-e[-s_\mu(x)][-A_\mu(x)]=-es_\mu(x)A_\mu(x)=\mathscr{L}_I \tag{18}$$

由（14），（15）和（18）式，即知在电荷共轭变换下，量子电动力学的拉格朗日量密度保持不变。

第十二章

12.1 从（12.6）式导出（12.7）式。

解 由（12.6）式，我们有

$$n=0,\quad S_0=1=\frac{(-i)^0}{0!} \tag{1}$$

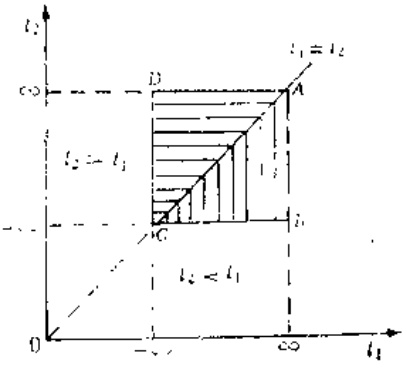
$$n=1,\quad S_1=(-i)\int_{-\infty}^{\infty}dt_1H_I(t_1)=\frac{(-i)^1}{1!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1H_I(t_1) \tag{2}$$

$$n=2,\ S_2=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H_I(t_1)H_I(t_2) \tag{3}$$

如图所示，在$(t_1,\ t_2)$平面中，（3）式中的积分范围显然是坐标轴二等分线OA下面的$\triangle ABC$，这时$t_2<t_1$。现在更换t_1和t_2的位置，则有

$$S_2=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int_{-\infty}^{t_2}dt_1H_I(t_2)H_I(t_1) \tag{4}$$

（4）式中的积分范围是坐标轴二等分线OA上面的$\triangle ADC$，这时$t_2>t_1$。



习题12.1附图

$\triangle ABC$与$\triangle ADC$显然是全等的，（4）式与（3）式的不同之处，仅仅在于改变了因子的次序。如果$H_I(t_1)$与$H_I(t_2)$对易，则有$H_I(t_1)\cdot H_I(t_2)=H_I(t_2)H_I(t_1)$，故（3）和（4）式中的被积函数式相同，因而有

$$S_2=\frac{1}{2}\left\{(-i^2)\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2H_I(t_1)H_I(t_2)\right\}$$

$$=\frac{(-i)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2H_I(t_1)H_I(t_2) \qquad (5)$$

若 $H_I(t_1)$ 与 $H_I(t_2)$ 不对易，即 $H_I(t_1)H_I(t_2)\neq H_I(t_2)H_I(t_1)$，这时，为了使（3）式和（4）式中的被积函数式相同，可引入编时算符 $P\{\cdots\}$〔（6.13）式〕，使 $H_I(t_1)H_I(t_2)$ 和 $H_I(t_2)H_I(t_1)$ 通通按时间先后次序由右向左排列．引入编时算符 $P\{\cdots\}$后，不论 $H_I(t_1)$ 是否和 $H_I(t_2)$ 对易，（3）式和（4）式中的被积函数式就都相等了．同时，由于所有的 H_I 都包含有偶数个费米子场算符，所以在引入编时算符 $P\{\cdots\}$ 后，把算符按时间先后次序由右向左排列，需要将费米子场算符交换的次数一定是偶数，因而被积函数式的符号保持不变．于是可将（5）式改写成：

$$S_2=\frac{(-i)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\,P\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} \qquad (6)$$

由（12.6）式，当 $n=k$ 时，我们有

$$S_k=(-i)^k\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{k-1}}dt_k\{H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_k)\} \qquad (7)$$

这是一个 K 重积分，积分次序交换的可能性共有 $k!$ 种．这 $k!$ 个 k 重积分的积分范围显然都是全等的，它们的不同之处仅仅在于改变了因子的次序．在引入编时算符 $P\{\cdots\}$后，则不论被积函数式中的 k 个 $H_I(t_i)$ 是否相互对易，都有

$$S_k=\frac{(-i)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int_{-\infty}^{\infty}dt_3\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_k\,P\{H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\cdots H_I(t_k)\} \qquad (8)$$

由（12.6）式和（1），（2），（6），（8）式，我们可得

$$S=S_0+S_1+S_2+\cdots+S_k+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\,P\{H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)\}$$

这就是（12.7）式．

第十三章

13.1 导出（13.9）式．

解 由（8.10）式和（8.37）式，我们有

$$\psi(x)=\psi^+(x)+\psi^-(x) \qquad (1)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x) \qquad (2)$$

于是可得

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) = {} & \bar{\psi}^{+}(x)\gamma_5\psi^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x)\gamma_5\psi^{+}(x) + \bar{\psi}^{+}(x)\gamma_5\psi^{-}(x) \\
& + \bar{\psi}^{-}(x)\,\gamma_5\,\psi^{-}(x) \\
= {} & (\gamma_5)_{\alpha\beta}\,[\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)\psi^{+}_{\beta}(x) + \bar{\psi}^{-}_{\alpha}(x)\,\psi^{+}_{\beta}(x) + \bar{\psi}^{-}_{\alpha}(x)\,\psi^{-}_{\beta}(x) \\
& - \psi^{-}_{\beta}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)] + (\gamma_5)_{\alpha\beta}[\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{-}_{\beta}(x) + \bar{\psi}^{-}_{\beta}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)] \\
= {} & (\gamma_5)_{\alpha\beta}\{N[\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)\,\psi^{+}_{\beta}(x)] + N[\bar{\psi}^{-}_{\alpha}(x)\,\psi^{+}_{\beta}(x)] \\
& + N[\bar{\psi}^{-}_{\alpha}(x)\,\psi^{-}_{\beta}(x)] - N[\psi^{-}_{\beta}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)]\} \\
& + (\gamma_5)_{\alpha\beta}[\psi^{-}_{\beta}(x), \bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)]_{+} \\
= {} & N[\bar{\psi}(x)\gamma_5\,\psi(x)] + (\gamma_5)_{\alpha\beta}[\psi^{-}_{\beta}(x), \ \bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)]_{+}
\end{aligned} \qquad (3)$$

由（3）式即得

$$N(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = (\gamma_5)_{\alpha\beta}\{\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta} - [\psi^{-}_{\beta}, \bar{\psi}^{+}_{\alpha}]_{+}\} \qquad (4)$$

由（4）式可得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[\bar{\psi}, , \gamma_5\psi] - N(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}[\bar{\psi}_{\alpha}, \ \psi_{\beta}] - (\gamma_5)_{\alpha\beta}\{\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta} - [\psi^{-}_{\beta}, \bar{\psi}^{+}_{\alpha}]_{+}\} \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{-[\psi_{\beta}(x), \ \bar{\psi}_{\alpha}(x)]_{+} + 2[\psi^{-}_{\beta}(x), \ \bar{\psi}^{+}_{\alpha}(x)]_{+}\} \\
& \qquad\qquad [\text{代入（8.42）式和（8.48）式}] \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{-[-iS_{\beta\alpha}(0)] + 2[-iS^{-}_{\beta\alpha}(0)]\} \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{iS^{+}_{\beta\alpha}(0) - iS^{-}_{\beta\alpha}(0)\}, \ [\text{代入（6.8）式}] \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}\{i[-iS^{(1)}_{\beta\alpha}(0)]\} \\
& = \frac{1}{2}(\gamma_5)_{\alpha\beta}S^{(1)}_{\beta\alpha}(0) = \frac{1}{2}T_r\{\gamma_5 S^{(1)}(0)\}, \ [\text{代入（8.44）式}]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} T_r \left\{ \gamma_5 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M \right) \Delta^{(1)}(x, M) \right\}_{x=0}$$

$$= 0 \qquad (5)$$

式中，我们用到了（A7）式和（A33）式，即是

$$\left.\begin{aligned} T_r(\gamma_5) &= 0 \\ T_r(\gamma_5 \gamma_\mu) &= 4\delta_{5\mu} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

把（5）式代入（11.12）式，即得

$$\mathscr{H}_I(x) = i g N (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \phi$$

$$= i g N [\bar{\psi}(x) \gamma_5 \phi(x) \psi(x)] \qquad (7)$$

这就是（13.9）式。

13.2 导出（13.10）式。

解 把（8.32）式代入（11.1）式，即得

$$\mathscr{H}_I(x) = e s_\mu(x) A_\mu(x)$$

$$= \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] A_\mu(x) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] = \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left\{ (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)_\alpha (\psi^+ + \psi^-)_\beta - (\psi^+ + \psi^-)_\beta (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)_\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left\{ \bar{\psi}^+_\alpha \psi^+_\beta + \bar{\psi}^-_\alpha \psi^+_\beta + \bar{\psi}^+_\alpha \psi^-_\beta + \bar{\psi}^-_\alpha \psi^-_\beta \right.$$

$$\left. - \psi^+_\beta \bar{\psi}^+_\alpha - \psi^-_\beta \bar{\psi}^+_\alpha - \psi^+_\beta \bar{\psi}^-_\alpha - \psi^-_\beta \bar{\psi}^-_\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left\{ (\bar{\psi}^+_\alpha \psi^+_\beta + \bar{\psi}^-_\alpha \psi^+_\beta + \bar{\psi}^-_\alpha \psi^-_\beta - \psi^-_\beta \bar{\psi}^+_\alpha) \right.$$

$$+ [- \psi^-_\beta \bar{\psi}^+_\alpha - i S^-_{\beta\alpha}(0)] + [+ \bar{\psi}^-_\alpha \psi^+_\beta + i S^+_{\beta\alpha}(0)]$$

$$\left. + \bar{\psi}^-_\alpha \psi^-_\beta + \bar{\psi}^+_\alpha \psi^+_\beta \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left\{ 2N(\bar{\psi}_\alpha \psi_\beta) + i [S^+_{\beta\alpha}(0) - S^-_{\beta\alpha}(0)] \right\}$$

$$= N(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S^{(1)}_{\beta\alpha}(0)$$

$$= N(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + \frac{1}{2} T_r \{\gamma_\mu S^{(1)}(0)\} \qquad (2)$$

由（2）式可得

$$\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]-N[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)]=\frac{1}{2}T_r\{\gamma_\mu S^{(1)}(0)\}$$

$$=\frac{1}{2}T_r\left\{\gamma_\mu\left(\gamma_\rho\frac{\partial}{\partial x_\rho}-M\right)\Delta^{(1)}(0)\right\},\ \text{〔代入(8.44)式〕}$$

$$=\frac{1}{2}T_r\left\{\gamma_\mu\left(\gamma_\rho\frac{\partial}{\partial x_\rho}-M\right)\cdot i[\Delta^+(0)-\Delta^-(0)]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}T_r\left\{\gamma_\mu\left(\gamma_\rho\frac{\partial}{\partial x_\rho}-M\right)i\cdot\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}\right\},\ \text{〔代入(6.9)式〕}$$

$$=\frac{1}{2}T_r\left\{\gamma_\mu(-i\gamma_\rho\cdot i\ P_\rho+iM)\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}T_r\left\{\frac{i\gamma_\mu}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}(iM+\gamma_\rho P_\rho)\right.$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\{iMT_r(\gamma_\mu)+P_\rho T_r(\gamma_\mu\gamma_\rho)\}\qquad(3)$$

由(*A7*)式，有

$$T_r(\gamma_\mu)=0\qquad(4)$$

动量P_ρ是奇函数，故对整个动量空间的积分为零，因此，(3)式中的第二项积分为零．把(4)式代入(3)式后，即得

$$\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]-N[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)]=0\qquad(5)$$

把(5)式代入(1)式，即得

$$\mathscr{H}_I(x)=ieN[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)]A_\mu(x)$$

$$=ieN[\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)]\qquad(6)$$

这就是(13.10)式．

第　十　四　章

14.1 画出康普顿散射四级微扰项的费曼图．

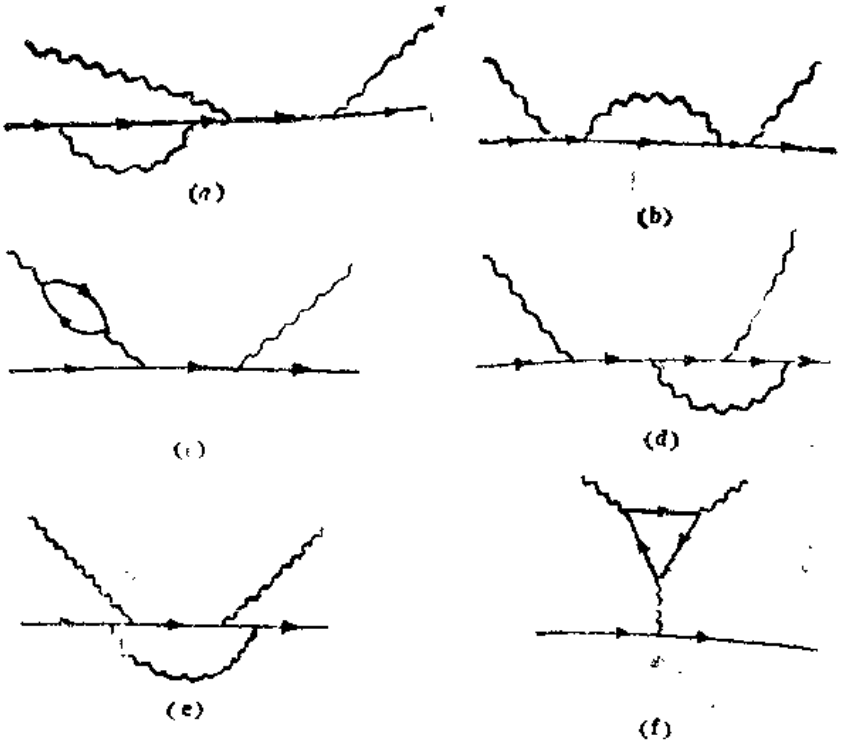
解 康普顿散射是光子入射在电子上被散射，而电子本身则经历一个反冲的过程：

$$\gamma+e^-\to\gamma+e^-\qquad(1)$$

所以，在描述康普顿散射过程的S矩阵中，必然包含有两个没有收缩的费米子算符和两个没有收缩的光子算符，以吸收初态的电子、光子和产生终态的电子、光子．由(13.12)式，可得四级微扰项为

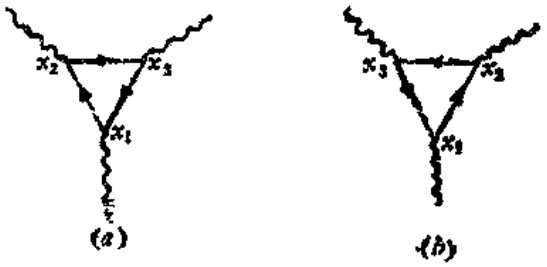
$$S^{(4)}=\frac{e^4}{4!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_4 T\left\{N(\bar{\psi}A\psi)_{x_4}\cdots N(\bar{\psi}A\psi)_{x_1}\right\} \quad (2)$$

根据维克定理(13.20)式，将$S^{(4)}$展开成正规乘积．从中挑出描述康普顿散射过程的项$S^{(4)}(\gamma e^-\to\gamma e^-)$，$S^{(4)}(\gamma e^-\to\gamma e^-)$的费曼图共有四个顶点$x_1$，$x_2$，$x_3$和$x_4$．这四个顶点一共有4!种不同的排列，代表4!种对$S^{(4)}$作出相同贡献的不同的正规乘积．因此，在(2)式分母中的因子4!被抵消掉了．这样，我们就可画出包含有算符ψ^+，$\bar{\psi}^-$，A^+和A^-的$S^{(4)}(\gamma e^-\to\gamma e^-)$具有不同拓扑性质的费曼图如下：



习题14.1附图

14.2 在(13.12)式中，三级微扰e^3项的费曼图只有三条外光子线，没有外费米子线，所以，e^3项对S距阵的贡献为0．证明这个结论．



习题14.2附图

证明 三级微扰项的费曼图如附图所示，由(13.12)式，可得和附图相对应的e^3项是，

$$S^{(3)}=\frac{e^3}{3!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_3 N\left\{A_\nu(x_3)A_\mu(x_2)A_\lambda(x_1)\right.$$

$$\left.\times\left[\bar{\psi}(x_3)\gamma_\nu\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\gamma_\lambda\psi(x_1)+\right.\right.$$

$$+\bar{\psi}(x_3)\gamma_\nu\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\gamma_\lambda\psi(x_1)]\Big\} \qquad (1)$$

(1)式中的第一项和附图(a)对应，第二项和附图(b)对应.由(8.51)式，我们可得

$$\psi_\beta(x_3)\bar{\psi}_\alpha(x_2) = -\frac{1}{2}S_{F\beta\alpha}(x_3-x_2) \qquad (2)$$

$$\psi_\delta(x_2)\bar{\psi}_\varepsilon(x_1) = -\frac{1}{2}S_{F\delta\varepsilon}(x_2-x_1) \qquad (3)$$

$$\psi_\rho(x_1)\bar{\psi}_\sigma(x_3) = -\frac{1}{2}S_{F\rho\sigma}(x_1-x_3) \qquad (4)$$

于是有

$$\bar{\psi}(x_3)\gamma_\nu\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\gamma_\lambda\psi(x_1) =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3 S_{F\beta\alpha}(x_3-x_2)(\gamma_\mu)_{\alpha\delta}S_{F\delta\varepsilon}(x_2-x_1)(\gamma_\lambda)_{\varepsilon\rho}$$

$$\times S_{F\rho\sigma}(x_1-x_3)(\gamma_\nu)_{\sigma\beta}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3 Tr\left[S_F(x_3-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_3)\gamma_\nu\right] \qquad (5)$$

同理可得

$$\bar{\psi}(x_3)\gamma_\nu\psi(x_3)\,\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_1)\gamma_\lambda\psi(x_1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3 Tr\left[S_F(x_3-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_3)\gamma_\nu\right] \qquad (6)$$

现在，我们首先来证明(6.15)式定义的$\Delta_F(x)$是一个偶函数.由(6.17)式，我们有

$$\Delta_F(x) = \begin{cases} 2i\Delta^+(x) & x_0>0 \\ -2i\Delta^-(x) & x_0<0 \end{cases} \qquad (7)$$

设$x_0 = t>0$，则$-x_0 = -t<0$，于是有

$$\Delta_F(x) = 2i\Delta^+(x) \qquad (8)$$

$$\Delta_F(-x) = -2i\Delta^-(-x) \qquad (9)$$

把(6.10)式代入(9)式，即得

$$\Delta_F(-x) = 2i\Delta^+(x) = \Delta_F(x) \tag{10}$$

（10）式表明，$\Delta_F(x)$是偶函数．于是$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta_F(x)$是奇函数．根据（8.45）式，我们有

$$S_F(x) = \left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - M\right)\Delta_F(x)$$

$$= \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta_F(x) - M\Delta_F(x) \tag{11}$$

式中，第一项是奇函数，第二项是偶函数，于是可得

$$S_F(-x) = -\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta_F(x) - M\Delta_F(x) \tag{12}$$

由（11）式，可得

$$Tr\{S_F(x_3-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_3)\gamma_\nu\}$$

$$= Tr\Big[\gamma_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu\gamma_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda\gamma_\delta \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu\gamma_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda(-M)\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu(-M)\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda\gamma_\delta \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$+\gamma_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu(-M)\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda(-M)\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$-M\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu\gamma_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda\gamma_\delta \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$-M\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu\gamma_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda(-M)\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$-M\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu(-M)\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda\gamma_\delta \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu$$

$$-M\Delta_F(x_3-x_2)\gamma_\mu(-M)\Delta_F(x_2-x_1)\gamma_\lambda(-M)\Delta_F(x_1-x_3)\gamma_\nu\Big],$$

（代入附录A中的（A34）式）

$$= Tr\Big\{\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\delta\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\cdot\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\ \frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+M^2\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu\Big[\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\Big]\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+M^2\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\delta\gamma_\nu\Delta_F(x_3-x_2)\Delta_F(x_2-x_1)\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+M^2\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\nu\Delta_F(x_3-x_2)\left[\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\right]\Delta_F(x_1-x_3)\Big\}$$

$$=Tr\{\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\delta\}\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+Tr\{\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\lambda\}M^2\left[\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_3-x_2)\right]\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+Tr\{\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\delta\}M^2\Delta_F(x_3-x_2)\Delta_F(x_2-x_1)\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_1-x_3)$$

$$+Tr\{\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\}M^2\Delta_F(x_3-x_2)\left[\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_2-x_1)\right]\Delta_F(x_1-x_3)$$，（利用附录A中的（A35）式）

$$=Tr\{\gamma_\delta\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F[-(x_3-x_1)]\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F[-(x_1-x_2)]$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F[-(x_2-x_3)]$$

$$+Tr\{\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\}M^2\Delta_F[-(x_3-x_1)]\Delta_F[-(x_1-x_2)]\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F[-(x_2-x_3)]$$

$$+Tr\{\gamma_\delta\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\}M^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F[-(x_3-x_1)]\right\}\Delta_F[-(x_1-x_2)]$$

$$\times\Delta_F[-(x_2-x_3)]$$

$$+Tr\{\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\}M^2\Delta_F[-(x_3-x_1)]\left\{\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F[-(x_1-x_2)]\right\}$$

$$\times\Delta_F[-(x_2-x_3)]$$

$$=-Tr\left\{\left[\gamma_\delta\frac{\partial}{\partial x_\delta}\Delta_F(x_3-x_1)-M\Delta_F(x_3-x_1)\right]\gamma_\lambda\right.$$

$$\times\left[\gamma_\sigma\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Delta_F(x_1-x_2)-M\Delta_F(x_1-x_2)\right]\gamma_\mu$$

$$\left.\times\left[\gamma_\rho\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Delta_F(x_2-x_3)-M\Delta_F(x_2-x_3)\right]\gamma_\nu\right\}$$

$$=-Tr\{S_F(x_3-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_3)\}\qquad(13)$$

把（13）式代入（5）式后，再将所得结果和（6）式一起代入（1）式，即得

$$S^{(3)} = \frac{e^3}{3!}\int\cdots\int d^4x_1\cdots d^4x_3 N\{A_\nu(x_3)A_\mu(x_2)A_\lambda(x_1)$$

$$\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3(-1)Tr\{S_F(x_3-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_3)\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2}\right)^3 Tr\{S_F(x_3-x_1)\gamma_\lambda S_F(x_1-x_2)\gamma_\mu S_F(x_2-x_3)\}\right]\}$$

$$=0 \qquad (14)$$

即为所求。

把本题的证明加以推广，就可以得到**法雷（Furry）定理**：

假如费曼图中有一条封闭的费米子线，在这条封闭费米子线上的顶点数是单数，那末这个费曼图对S距阵元的贡献就等于零。

法雷定理之所以成立，是由于量子电动力学对于电荷共轭变换（正反粒子共轭变换）具有不变性。

第　十　五　章

15.1 在非相对论极限下，求低能光子的康普顿散射微分截面和总截面。

解 在非相对论极限下，$\omega_K \ll M$，所发生的散射是弹性散射，于是由（15.28）式，有

$$\omega_K' = \frac{M\omega_K}{M+\omega_K(1-\cos\theta)} \approx \frac{M\omega_K}{M} = \omega_K \qquad (1)$$

把（1）代式入克莱茵-仁科公式（15.43），即得微分截面为

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{1}{2}r_0^2 d\Omega\left(\frac{\omega_K}{\omega_K}\right)^2\left[\frac{\omega_K}{\omega_K}+\frac{\omega_K}{\omega_K}-\sin^2\theta\right]$$

$$=\frac{1}{2}r_0^2 d\Omega(1+\cos^2\theta) \qquad (2)$$

根据（2）式，我们可得出总截面σ_t，

$$\sigma_t = \int\sigma(\theta)d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma(\theta)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{2}r_0^2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=\pi r_0^2\int_0^{\pi}-(1+\cos^2\theta)d\cos\theta$$

$$=\frac{8}{3}\pi r_0^2 \qquad (3)$$

即为所求.

第 十 六 章

16.1 导出(16.8)式.

解 设初态$|i\rangle$为

$$|i\rangle = C_r^{\dagger}(\boldsymbol{P})|0\rangle,\ r=1,\ 2 \tag{1}$$

$r=1$, 2的限制表明在初态只存在有一个电子.同样, 设末态$|j\rangle$为

$$|j\rangle = C_S^{\dagger}(\boldsymbol{P}')|0\rangle,\ S=1,\ 2 \tag{2}$$

库仑散射的矩阵元M_{fi}由(16.7)式给出:

$$M_{fi} = \langle j|S_e^{(1)}|i\rangle \tag{3}$$

式中, $S_e^{(1)}$由(16.2)式给出:

$$S^{(1)} = e\int d^4x\,\bar{\psi}^-(x)\gamma_\mu A_\mu^e(x)\psi^+(x) \tag{4}$$

这里, $A_\mu^e(x)$是纯静电场, 即有

$$A_i^e(x) = 0,\ i=1,\ 2,\ 3 \tag{5}$$

$$A_4^e(x) = iV(\mathbf{X}) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \phi(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{X}}d^3q \tag{6}$$

$$\phi(\boldsymbol{q}) = \int V(\mathbf{X})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{X}}d^3\mathbf{X} \tag{7}$$

把(8.37)式和(4—7)式代入(3)式, 即得

$$\begin{aligned}
M_{fi} &= \langle j|e\int d^4x\bar{\psi}^-(x)\gamma_\mu A_\mu^e(x)\psi^+(x)|i\rangle \\
&= \langle j|e\int d^4x\frac{1}{V}\sum_{p_0=E_{\boldsymbol{p}'}}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{S=1}^{2}C_S^{\dagger}(\boldsymbol{P}')\bar{u}^{(S)}(\boldsymbol{P}')e^{-ip'x} \\
&\quad\times\gamma_4\frac{i}{(2\pi)^3}\int\phi(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{X}}d^3q\sum_{p_0=E_{\boldsymbol{p}}}\left(\frac{M}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{2}C_r(\boldsymbol{P})u^{(r)}(\boldsymbol{P})e^{ipx}|i\rangle \\
&= e\int d^4x\frac{1}{V}\left(\frac{M^2}{E_{\boldsymbol{p}'}E_{\boldsymbol{p}}}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(S)\dagger}(\boldsymbol{P}')\gamma_4^2e^{i(p-p')x}u^{(r)}(\boldsymbol{P}) \\
&\quad\times\frac{i}{(2\pi)^3}\int\phi(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{X}}d^3q
\end{aligned}$$

$$= \frac{ie}{V}\left(\frac{M^2}{E_{P'}E_P}\right)^{\frac{1}{2}} u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)\int dt e^{i(E_P - E_{P'})t}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \phi(q)d^3q$$

$$\times \int d^3X\, e^{i(P-P'+q)X}$$

$$= \frac{ie}{V}\left(\frac{M^2}{E_{P'}E_P}\right)^{\frac{1}{2}} u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)2\pi\delta(E_P - E_{P'})$$

$$\times \int \phi(q)\delta(P - P' + q)d^3q$$

$$= \frac{ie}{V}\left(\frac{M^2}{E_{P'}E_P}\right)^{\frac{1}{2}} u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)2\pi\delta(E_P - E_{P'})\phi(P' - P)$$

$$= 2\pi\delta(E_P - E_{P'})\frac{ie}{V}\left(\frac{M}{E_P}\right)\phi(P' - P)(u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)) \qquad (8)$$

这就是（16.8）式.

16.2 证明：自由电子-正电子对（即没有外场存在）自行湮灭并发射一个光子的过程是不可能发生的.

证明 这个过程的费曼图如附图所示.

设电子和正电子的四维能量-动量矢量分别是 p_1 和 p_2，所发射的光子的四维能量-动量矢量为 k. 根据能量-动量守恒定律，我们有

$$p_1 + p_2 = k \qquad (1)$$

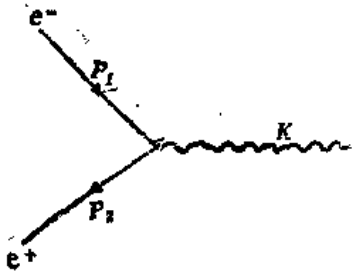
自由粒子满足质量壳层关系，即有

$$p_1^2 + M^2 = p_2^2 + M^2 = k^2 = 0 \qquad (2)$$

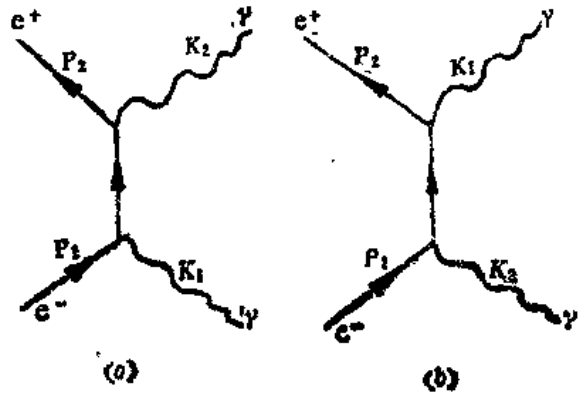
式中，M 是电子质量.

根据(2)式，(1)式是不可能成立的，这就表明，自由电子-正电子对是不可能自行湮灭并发射一个光子的.

16.3 分别在质心系和实验室系中，求电子和正电子湮没而转化为一对光子的微分



习题16.2附图(图中,K,P_1,P_2分别是四维矢量)



习题16.3附图1(图中,K_1,K_2,P_1,P_2分别是四维矢量)

截面：

$$e^- + e^- \to \gamma + \gamma$$

这里，假定电子在初态静止不动.

解 电子和正电子相碰撞时，它们可能湮没而转化为一对光子.设电子和正电子的四维能量-动量分别是p_1和p_2，所产生的两个光子的四维能量-动量分别为k_1和k_2；这一过程的最低次近似可用214页的两个费曼图来表示：

（1）矩阵元：

设初态和终态分别为

$$|i\rangle = C_r^\dagger(\boldsymbol{P}_1)d_s^\dagger(\boldsymbol{P}_2)|0\rangle, \quad (r, s=1, 2) \tag{1}$$

$$|j\rangle = a_m^\dagger(\boldsymbol{K}_1)a_n^\dagger(\boldsymbol{K}_2)|0\rangle, \quad (m, n=1, 2) \tag{2}$$

由（14.2b）式，我们有

$$S_\beta^{(2)} = \frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1 d^4x_2 \{N\{(\overline{\psi}\not{A}\psi)x_2\,(\overline{\psi}\not{A}\psi)x_1\} + N\{(\overline{\psi}\not{A}\psi)x_2\,(\overline{\psi}\not{A}\psi)x_1\}\} \tag{3}$$

矩阵元为

$$M_{ji} = \langle j|S_\beta^{(2)}|i\rangle \tag{4}$$

类似于第十五章的推导，（4）式变成

$$M_{ji} = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2)\left(\frac{-e^2}{V^2}\right)\left(\frac{M^2}{4E_1E_2\omega_1\omega_2}\right)^{\frac{1}{2}}A \tag{5}$$

式中，

$$E_i = \sqrt{(M^2+\boldsymbol{P}_i^2)}, \quad \omega_i = \sqrt{(\boldsymbol{K}_i^2)}, \quad (i=1, 2) \tag{6}$$

$$A = \overline{u}^{(s+2)}(\boldsymbol{P}_2)\left\{\not{\varepsilon}^{(n)}(\boldsymbol{K}_2)\frac{1}{\not{P}_1-\not{K}_1-iM}\not{\varepsilon}^{(m)}(\boldsymbol{K}_1) + \not{\varepsilon}^{(m)}(\boldsymbol{K}_1)\frac{1}{\not{P}_1-\not{K}_2-iM}\not{\varepsilon}^{(n)}(\boldsymbol{K}_2)\right\}u^{(r)}(\boldsymbol{P}_1) \tag{7}$$

（2）截面：

类似于（15.24）式，单位时间内，一个光子被散射进立体角元$d\Omega_1$的几率是

$$W = \frac{1}{(2\pi)^2V^2}\int d^3k_1 d^3k_2\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2)\left(\frac{e^4M^2}{4E_1E_2\omega_1\omega_2}\right)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} |A|^2 \right\} \tag{8}$$

在上式中，我们已经对初态粒子的极化和自旋求了平均，对末态粒子的极化和自旋作了求和。设v是入射正电子相对于电子的速度，于是，入射正电子束的流强I为

$$I = \frac{v}{V} \tag{9}$$

由此可得微分截面$d\sigma$为

$$d\sigma = \frac{WV}{I} = \frac{WV^2}{v} = \frac{V^2}{v} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2 V^2} \int d^3k_1 d^3k_2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$$

$$\times \left(\frac{e^4 M^2}{4E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} \right) \left\{ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} |A|^2 \right\} \tag{10}$$

根据

$$\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_2)\delta(E_1 + E_2 - \omega_1 - \omega_2) \tag{11}$$

和

$$E_i = E_1 + E_2, \quad E_i = \omega_1 + \omega_2 \tag{12}$$

并设

$$d^3k_1 = |\boldsymbol{K}_1|^2 d|\boldsymbol{K}_1| d\Omega = \omega_1^2 \frac{d\omega_1}{dE_i} dE_i \sin\theta d\theta d\varphi \tag{13}$$

保持极角（θ，φ）不变，遍及k_2和ω_1积分，则（10）式变成：

$$d\sigma = \frac{1}{v} r_0^2 \frac{M^4}{E_1 E_2} d\Omega_1 \int \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \frac{\partial \omega_1}{\partial E_i} \delta(E_i - E_i) dE_i$$

$$\times \left\{ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} |A|^2 \right\} \tag{14}$$

式中

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi M} \tag{15}$$

在（14）式对能量的积分中，ω_2不是常数，而是ω_1的函数：

$$\omega_2 = \sqrt{(\boldsymbol{K}_2)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{K}_1)^2} \tag{16}$$

于是，（14）式变成

$$d\sigma = \frac{1}{v} r_0^2 \frac{M^4}{E_1 E_2} d\Omega_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \frac{\partial \omega_1}{\partial(\omega_1 + \omega_2)} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{2} \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} |A|^2 \right\} \tag{17}$$

式中，$\frac{\partial\omega_1}{\partial(\omega_1+\omega_2)}$是在把$P_1$，$P_2$看成常数并且把方向$\frac{K_1}{\omega_1}$加以固定的情况下求值的。

（3）对自旋和极化的求和

根据（7）式，我们有

$$A=\bar{u}^{(s+2)}(P_2)Ou^{(r)}(P_1) \tag{18}$$

这里

$$O=\left\{\Phi^{(n)}(K_2)\frac{1}{\not P_1-\not K_1-iM}\Phi^{(m)}(K_1)+\Phi^{(m)}(K_1)\frac{1}{\not P_1-\not K_2-iM}\Phi^{(n)}(K_2)\right\} \tag{19}$$

由此可得

$$\begin{aligned}A\dagger&=u^{(r)}\dagger(P_1)O\dagger\gamma_4u^{(s+2)}(P_2)\\&=u^{(r)}\dagger(P_1)\gamma_4\gamma_4O\dagger\gamma_4u^{(s+2)}(P_2),\quad\text{（代入（A30）式）}\\&=\bar{u}^{(r)}(P_1)\tilde{O}u^{(s+2)}(P_2)\end{aligned} \tag{20}$$

对（17）式中的自旋指标和极化指标求和，即得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}(\bar{u}^{(r)}(P_1)\tilde{O}u^{(s+2)}(P_2)(\bar{u}^{(s+2)}(P_2)Ou^{(r)}(P_1))^*,$$

（代入（A27）式）

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}[\bar{u}^{(r)}(P_1)\tilde{O}\Lambda^-(P_2)Ou^{(r)}(P_1)],\quad\text{（根据（}A14\text{）和（}A25\text{）式）}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{4}[\bar{u}^{(r)}(P_1)\tilde{O}\Lambda^-(P_2)O\Lambda^+(P_1)u^{(r)}(P_1)]\varepsilon_r$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\bar{u}_\alpha^{(r)}(P_1)[\tilde{O}\Lambda^-(P_2)O\Lambda^+(P_1)]_{\alpha\beta}u_\beta^{(r)}(P_1)\varepsilon_r,$$

（代入（A26）式）

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}[\tilde{O}\Lambda^-(P_2)O\Lambda^+(P_1)]_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{4}[\tilde{O}\Lambda^-(P_2)O\Lambda^+(P_1)]_{\alpha\alpha}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}T_r\{\tilde{O}\Lambda^-(P_2)O\Lambda^+(P_1)\} \tag{21}$$

由（A22）式，我们有

$$A^-(P_2)=A^+(-P_2) \tag{22}$$

把（22）式代入（21）式，即得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2=-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}T_r\{\tilde{O}A^+(-P_2)OA^+(P_1)\} \tag{23}$$

把（23）式和（15.36）式比较后发现，它们之间仅仅差一个因子（-1）。如果我们在（15.36）式中作代换：

$$\left.\begin{aligned} &p\to p_1 \qquad k\to -k_1\\ &p'\to -p_2 \qquad k'\to k_2 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

则所得式子就和初态存在有两个赝米子，终态存在有两个光子的物理过程相对应。因此，根据（15.32）式，我们定义

$$\left.\begin{aligned} M^2\xi_1&=-p_1k_1=-p_2k_2\\ M^2\xi_2&=-p_1k_2=-p_2k_1 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

于是，根据（21—25）式，（15.36）式和（15.40）式，我们可得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2=\frac{1}{2M^2}\left[\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)+2\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)-\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)^2\right] \tag{26}$$

把（26）式代入（17）式，即得有一个光子被散射进立体角元 $d\Omega_1$ 的电子-正电子湮没微分截面的一般表示式是：

$$\begin{aligned} d\sigma=&\frac{1}{v}r_0^2\frac{M^4}{E_1E_2}d\Omega_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\frac{\partial\omega_1}{\partial(\omega_1+\omega_2)}\\ &\times\left\{\frac{1}{2M^2}\left[\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)+2\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)-\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{27}$$

（4）动量中心系统（Center-of-momentum）中的截面

在这种情况下，我们有

$$\left.\begin{aligned} P_1&=P,\quad P_2=-P\\ K_1&=K,\quad K_2=-K \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

于是可得：

$$\begin{aligned} &\text{电子：}\ E_1=\sqrt{P_2+M^2}=E,\ P\\ &\text{正电子：}\ E_2=E\quad ,\quad -P\\ &\text{光子 1：}\ \omega_1=|K|=\omega\quad ,\quad K\\ &\text{光子 2：}\ \omega_2=|K|=\omega\quad ,\quad -K \end{aligned} \tag{29}$$

于是可得电子相对于正电子的速度为

$$v = \left| \frac{\boldsymbol{P}_1}{E_1} - \frac{\boldsymbol{P}_2}{E_2} \right| = \frac{2|\boldsymbol{P}|}{E} \tag{30}$$

在（27）式中，

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial(\omega_1+\omega_2)} = \frac{\partial \omega}{\partial(2\omega)} = \frac{1}{2} \tag{31}$$

由（29）式和能量守恒定律，我们可得

$$E_1 + E_2 = 2E = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega$$

于是有

$$E = \omega \tag{32}$$

因此，（25）式变成

$$\begin{aligned} M^2\xi_1 &= -p_1k_1 = -\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{K}_1 + E\omega \\ &= -|\boldsymbol{P}_1|\ |\boldsymbol{K}_1|\cos\theta + E\omega \\ &= -|\boldsymbol{P}|\ |\boldsymbol{K}|\cos\theta + E\omega \\ &= \omega(E - P\cos\theta) \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} M^2\xi_2 &= -p_2k_1 = -\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{K}_1 + E\omega \\ &= -|\boldsymbol{P}_2|\ |\boldsymbol{K}_1|\cos(\pi-\theta) + E\omega \\ &= |\boldsymbol{P}|\ |\boldsymbol{K}|\cos\theta + E\omega \\ &= \omega(E + P\cos\theta) \end{aligned} \tag{34}$$

式中，P是三维矢量$\boldsymbol{P}$的值，即有 $P = |\boldsymbol{P}|$；θ 是入射正电子和两个出射光子中任一个所成的角。

由（33）和（34）式，我们可得

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\omega(E - P\cos\theta)}{M^2} \\ \xi_2 &= \frac{\omega(E + P\cos\theta)}{M^2} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

把（35）式代入（26）式，即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2 &= \frac{1}{2M^2}\left[\left(\frac{E+P\cos\theta}{E-P\cos\theta} + \frac{E-P\cos\theta}{E+P\cos\theta}\right) + 2\left(\frac{M^2}{\omega(E-P\cos\theta)}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{M^2}{\omega(E+P\cos\theta)}\right) - \left(\frac{M^2}{\omega(E-P\cos\theta)} + \frac{M^2}{\omega(E+P\cos\theta)}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2M^2}\left[\frac{E^2+P^2\cos^2\theta+2EP\cos\theta+E^2+P^2\cos^2\theta-2EP\cos\theta}{E^2-P^2\cos^2\theta}\right. \\ &\quad \left. + \frac{4M^2}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{4M^4}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[\frac{E^2+P^2\cos^2\theta+2M^2}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{2M^4}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right] \qquad (36a)$$

根据质量壳层关系，$M^2 = E^2 - P^2$，于是（36a）式还可写成：

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[\frac{E^2+P^2\cos^2\theta+2(E^2-P^2)}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{2(E^4-2E^2P^2+P^4)}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{M^2(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}[(3E^2+P^2\cos^2\theta-2P^2)(E^2-P^2\cos^2\theta)$$

$$-2(E^4-2E^2P^2+P^4)]$$

$$= \frac{1}{M^2(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}[(E^4-E^2P^2\cos^2\theta)+(P^2E^2-P^4\cos^2\theta)$$

$$+(P^2E^2(1-\cos^2\theta)+P^4\cos^2\theta(\cos^2\theta-1))-2P^4\sin^4\theta]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[\frac{E^2+P^2+P^2\sin^2\theta}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{2P^4\sin^4\theta}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right] \qquad (36b)$$

把（29），（30），（31）和（36a）式代入（27）式，即得在动量中心系统内的截面为

$$d\sigma = \frac{1}{4}r_0^2\frac{M^2}{EP}d\Omega_1\left\{\frac{E^2+P^2\cos^2\theta+2M^2}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{2M^4}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right\} \qquad (37a)$$

把（29），（30），（31）和（36b）式代入（27）式，即得在动量中心系统中的另一截面公式：

$$d\sigma = \frac{1}{4}r_0^2\frac{M^2}{EP}d\Omega_1\left\{\frac{E^2+P^2+P^2\sin^2\theta}{E^2-P^2\cos^2\theta} - \frac{2P^4\sin^4\theta}{(E^2-P^2\cos^2\theta)^2}\right\} \qquad (37b)$$

（5）实验室坐标系

这时，我们有

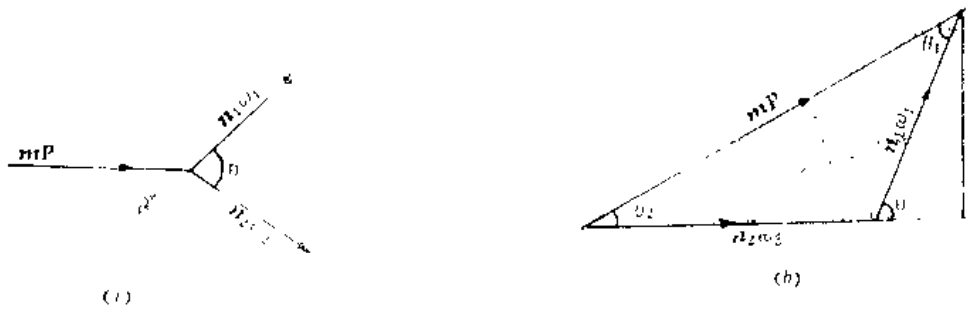
$$\left.\begin{aligned} &p_1 = (000,\ iM)\\ &p_2 = (mP,\ iE) \quad E = \sqrt{(M^2+P^2)}\\ &k_s = (n_s\omega_s,\ i\omega_s),\ s = 1,\ 2, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

式中，m和n_s是单位矢量，$P = |P_2|$，入射正电子相对于电子的速度v为

$$v = \frac{P}{E} \qquad (39)$$

由动量守恒，我们有

$$n_2\omega_2 = mP - n_1\omega_1 \tag{40}$$



习题16.3附图2

如图所示，我们有

$$\begin{aligned} P\cos\theta_2 &= \omega_2 + \omega_1\cos\Theta \\ P\sin\theta_2 &= \omega_1\sin\Theta \end{aligned} \tag{41}$$

式中，$\cos\Theta = \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2$，$\cos\theta_2 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}_2$。在(41)式的第一式中，两边同时对$\omega_1$求导数，即得

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial\omega_1} = -\cos\Theta \tag{42}$$

由此可得

$$\frac{\partial(\omega_1+\omega_2)}{\partial\omega_1} = 1 + \frac{\partial\omega_2}{\partial\omega_1} = 1 - \cos\Theta \tag{43}$$

由习题16.3附图2(*a*)，可得

$$\cos(\Theta - \theta_2) = \cos\theta_1 \tag{44a}$$

(41)式可以写成

$$\begin{aligned} \omega_2 &= P\cos\theta_2 - \omega_1\cos\Theta \\ 0 &= P\sin\theta_2 - \omega_1\sin\Theta \end{aligned} \tag{44b}$$

把(44*b*)两个式子的两边分别平方，再分别相加，即得

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= P^2 + \omega_1^2 - 2P\omega_1(\cos\theta_2\cos\Theta + \sin\theta_2\sin\Theta) \\ &= P^2 + \omega_1^2 - 2P\omega_1\cos(\Theta - \theta_2) \\ &= P^2 + \omega_1^2 - 2P\omega_1\cos\theta_1 \end{aligned} \tag{44c}$$

式中，我们用到了(44*a*)式.由(44*c*)式，我们有

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + \left\{P^2 + \omega_1^2 - 2P\omega_1\cos\theta_1\right\} \tag{44}$$

式中，$\cos\theta_1 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}_1$

在（44）式两边对ω_1求导，我们可得

$$\left[\frac{\partial(\omega_1+\omega_2)}{\partial\omega_1}\right]_{\theta_1}=1+\frac{\omega_1-P\cos\theta_1}{\omega_2} \tag{45}$$

由能量守恒，我们有

$$M+E=\omega_1+\omega_2 \tag{46}$$

根据习题16.3附图2b，我们可得

$$P^2=\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2\cos(\pi-\Theta)$$

$$=\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\Theta \tag{47}$$

由此，

$$E^2-M^2=P^2=\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\Theta$$

$$=(\omega_1+\omega_2)^2+2\omega_1\omega_2(\cos\Theta-1)$$

$$=(M+E)^2+2\omega_1\omega_2(\cos\Theta-1) \tag{48a}$$

由此可得

$$\frac{M(M+E)}{\omega_1\omega_2}=1-\cos\Theta \tag{48}$$

把（38）式代入（25）式，即得

$$\xi_1=\frac{\omega_1}{M},\qquad \xi_2=\frac{\omega_2}{M} \tag{49}$$

于是有

$$\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}=\frac{M(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2}=\frac{M(M+E)}{\omega_1\omega_2},\quad（代入（46）式和（48）式）$$

$$=1-\cos\Theta \tag{50}$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_2}+\frac{\xi_2}{\xi_1}=\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{(\omega_1+\omega_2)^2-2\omega_1\omega_2}{\omega_1\omega_2}=\frac{(M+E)^2}{\omega_1\omega_2}-2$$

$$=\frac{M(M+E)}{\omega_1\omega_2}+\frac{E}{M}\cdot\frac{M(M+E)}{\omega_1\omega_2}-2$$

$$=1-\cos\Theta+\frac{E}{M}(1-\cos\Theta)-2$$

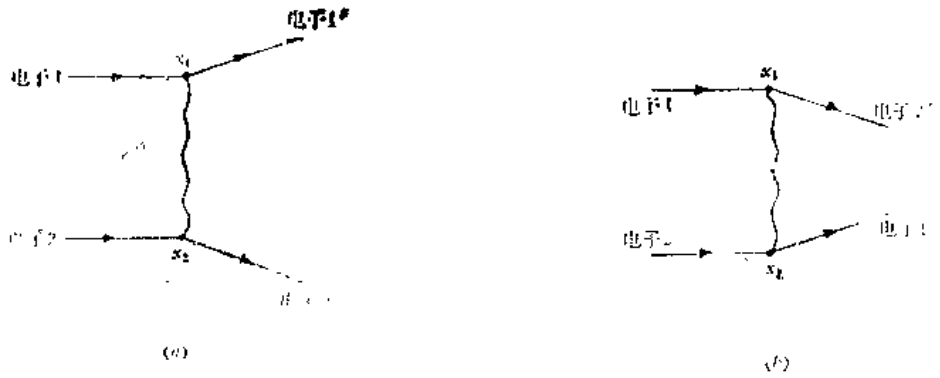
$$=-2+\left(1+\frac{E}{M}\right)(1-\cos\Theta) \tag{51}$$

把（26），（39），（43）和（50—51）式代入（27）式，即得

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\frac{M}{P}d\Omega_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\left[1+\frac{E}{M}-\frac{1+\cos^2\Theta}{1-\cos\Theta}\right] \tag{52}$$

16.4 在任意坐标系和质心坐标系中，求电子-电子弹性散射（摩勒散射）的微分截面。

解 两个电子相互散射的费曼图如图16.4附图1所示：



(a) (b)

习题16.4附题1

在初态中，设

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一个电子}\qquad p_1=(\boldsymbol{P}_1,\ iE_1)\\&\text{第二个电子}\qquad p_2=(\boldsymbol{P}_2,\ iE_2)\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

在终态中，设

$$\left.\begin{aligned}&\text{第一个电子}\qquad p_1'=(\boldsymbol{P}_1',\ iE_1')\\&\text{第二个电子}\qquad p_2'=(\boldsymbol{P}_2',\ iE_2')\end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

（1）矩阵元

设初态和终态分别为

$$\left.\begin{aligned}&|i\rangle=C_r^\dagger(\boldsymbol{P}_1')\,C_s^\dagger(\boldsymbol{P}_2')|0\rangle,\quad(r,\ s=1,\ 2)\\&|j\rangle=C_m^\dagger(\boldsymbol{P}_1)\,C_n^\dagger(\boldsymbol{P}_2)|0\rangle,\quad(m,\ n=1,\ 2)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由(14.2c)式，我们有

$$S_C^{(2)}=\frac{e^2}{2!}\iint d^4x_1d^4x_2N\left\{(\bar\psi\gamma_\nu A_\nu\psi)_{x_2}(\bar\psi\gamma_\mu A_\mu\psi)_{x_1}\right\} \tag{3}$$

矩阵元为

$$M_{ji}=\langle j|S_C^{(2)}|i\rangle \tag{4a}$$

类似于第十五章的推导，(4)式变成

$$M_{fi}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\left(\frac{-ie^2}{V^2}\right)\left(\frac{M^4}{E_1E_2E_1'E_2'}\right)^{\frac{1}{2}}A \qquad (4b)$$

式中，

$$A=\frac{\left(\bar{u}^{(s)}(P_2')\gamma_\nu u^{(n)}(P_2)\right)\left(\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\nu u^{(m)}(P_1)\right)}{(p_1'-p_1)^2}$$

$$-\frac{\left(\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\nu u^{(n)}(P_2)\right)\left(\bar{u}^{(s)}(P_2')\gamma_\nu u^{(m)}(P_1)\right)}{(p_2'-p_1)^2} \qquad (5)$$

式中，第一项和附图1(*a*)的费曼图相对应，第二项和附图1(*b*)的费曼图相对应。

（2）截面

类似于（15.24）式，单位时间内一个电子被散射进立体角元$d\Omega$的跃迁几率是

$$W=\int\frac{V^2}{(2\pi)^6}d^3p_1'd^3p_2'\,|M_{fi}|^2$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2V^2}\int d^3p_1'd^3p_2'\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')(e^4)\left(\frac{M^4}{E_1E_2E_1'E_2'}\right)$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2\right\}. \qquad (6)$$

在上式中，我们已经对初态电子的自旋作了平均，对末态电子的自旋作了求和．设v是电子之间的相对速度，于是，入射电子束的流强I为

$$I=\frac{v}{V} \qquad (7)$$

由此可得微分截面$d\sigma$为

$$d\sigma=\frac{WV}{I}=\frac{WV^2}{v}$$

$$=\frac{4}{v}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{M^4}{E_1E_2}\int\frac{d^3p_1'd^3p_2'}{E_1'E_2'}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')$$

$$\times\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2 \qquad (8)$$

（3）自旋求和：

根据附录A中的（A29）和（A30）式，由（5）式可得

$$A^{\dagger}=\frac{[\bar{u}^{(m)}(P_1)\tilde{\gamma}_\nu u^{(r)}(P_1')][\bar{u}^{(n)}(P_2)\tilde{\gamma}_\nu u^{(S)}(P_2')]}{(p_1'-p_1)^2}$$

$$-\frac{[\bar{u}^{(m)}(P_1)\tilde{\gamma}_\nu u^{(S)}(P_2')][\bar{u}^{(n)}(P_2)\tilde{\gamma}_\nu u^{(r)}(P_1')]}{(p_2'-p_1)^2} \qquad (9)$$

式中，由（A30）式和（A7）式

$$\tilde{\gamma}_\nu=\gamma_4\gamma_\nu^{\dagger}\gamma_4=\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4 \qquad (10)$$

于是有

$$\sum_{\nu=1}^{4}\tilde{\gamma}_\nu(\cdots)\tilde{\gamma}_\nu=\sum_{j=1}^{3}\tilde{\gamma}_j(\cdots)\tilde{\gamma}_j+\tilde{\gamma}_4(\cdots)\tilde{\gamma}_4$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(-\gamma_j)(\cdots)(-\gamma_j)+\gamma_4(\cdots)\gamma_4=\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_\nu(\cdots)\gamma_\nu \qquad (11)$$

式中，我们用到了$\tilde{\gamma}_j=\gamma_4\gamma_j\gamma_4=-\gamma_j$和$\tilde{\gamma}_4=\gamma_4$。把（11）式代入（9）式，即得

$$A^{\dagger}=\frac{\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')}{(p_1'-p_1)^2}$$

$$-\frac{\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')}{(p_2'-p_1)^2} \qquad (12)$$

由（5）式和（12）式，可得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}|A|^2=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}AA^{\dagger}=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}$$

$$\left\{\frac{[\bar{u}^{(S)}(P_2')\gamma_\mu u^{(n)}(P_2)][\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\mu u^{(m)}(P_1)][\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')]}{(p_1'-p_1)^4}\right.$$

$$\times[\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')]+\frac{[\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\mu u^{(n)}(P_2)][\bar{u}^{(S)}(P_2')\gamma_\mu u^{(m)}(P_1)]}{(p_2'-p_1)^4}$$

$$\left.\times[\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')][\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')]-\frac{[\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\mu u^{(n)}(P_2)]}{(p_2'-p_1)^2(p_1'-p_1)^2}\right.$$

$$\times[\bar{u}^{(S)}(P_2')\gamma_\mu u^{(m)}(P_1)][\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')][\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')]$$

$$-\frac{(\bar{u}^{(S)}(P_2')\gamma_\mu u^{(n)}(P_2)][\bar{u}^{(r)}(P_1')\gamma_\nu u^{(m)}(P_1)][\bar{u}^{(m)}(P_1)\gamma_\nu u^{(S)}(P_2')]}{(p_2'-p_1)^2(p_1'-p_1)^2}$$

$$\times[\bar{u}^{(n)}(P_2)\gamma_\nu u^{(r)}(P_1')]\Big\} \tag{13}$$

我们可以把（13）式中的第一项写为

$$T_1=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}[\bar{u}_\alpha^{(S)}(P_2')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_\beta^{(n)}(P_2)][\bar{u}_\sigma^{(r)}(P_1')(\gamma_\mu)_{\sigma\delta}u_\delta^{(m)}(P_1)]$$

$$\times[\bar{u}_\eta^{(m)}(P_1)(\gamma_\nu)_{\eta\theta}u_\theta^{(r)}(P_1')][\bar{u}_\tau^{(n)}(P_2)(\gamma_\nu)_{\tau\rho}u_\rho^{(S)}(P_2')]\frac{1}{(p_1'-p_1)^4}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_\beta^{(n)}(P_2)\bar{u}_\tau^{(n)}(P_2)(\gamma_\nu)_{\tau\rho}u_\rho^{(S)}(P_2')\bar{u}_\alpha^{(S)}(P_2')$$

$$\times(\gamma_\nu)_{\sigma\delta}u_\delta^{(m)}(P_1)\bar{u}_\eta^{(m)}(P_1)(\gamma_\nu)_{\eta\theta}u_\theta^{(r)}(P_1')\bar{u}_\sigma^{(r)}(P_1')\frac{1}{(p_1'-p_1)^4}$$

〔代入（A27）式〕

$$=\frac{1}{4}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\Lambda_{\beta\tau}^{+}(P_2)(\gamma_\nu)_{\tau\rho}\Lambda_{\rho\alpha}^{+}(P_2')(\gamma_\mu)_{\sigma\delta}$$

$$\times\Lambda_{\delta\eta}^{+}(P_1)(\gamma_\nu)_{\eta\theta}\Lambda_{\theta\sigma}^{+}(P_1')\frac{1}{(p_1'-p_1)^4}$$

$$=\frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu\Lambda^+(P_2)\gamma_\nu\Lambda^+(P_2')\}T_r\{\gamma_\mu\Lambda^+(P_1)\gamma_\nu\Lambda^+(P_1')\}\frac{1}{(p_1'-p_1)^4} \tag{14a}$$

同理可得（13）式中的第2项T_2，第3项T_3，第4项T_4分别为：

$$T_2=\frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu\Lambda^+(P_2)\gamma_\nu\Lambda^+(P_1')\}T_r\{\gamma_\mu\Lambda^+(P_1)\gamma_\nu\Lambda^+(P_2')\}\frac{1}{(p_2'-p_1)^4} \tag{14b}$$

$$T_3=-\frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu\Lambda^+(P_2)\gamma_\nu\Lambda^+(P_1')\gamma_\mu\Lambda^+(P_1)\gamma_\nu\Lambda^+(P_2')\}\frac{1}{(p_1'-p_1)^2(p_2'-p_1)^2} \tag{14c}$$

$$T_4 = -\frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_2)\gamma_\nu \Lambda^+(P_1')\gamma_\mu \Lambda^+(P_1)\gamma_\nu \Lambda^+(P_2')\}\frac{1}{(p_1'-p_1)^2(p_2'-p_1)^2} \tag{14d}$$

把（14）式代入（13）式，即得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{S=1}^{2}|A|^2 = \frac{a}{(p_1'-p_1)^4} + \frac{b}{(p_2'-p_1)^4} + \frac{c}{(p_1'-p_1)^2(p_2'-p_1)^2} \tag{15}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_2)\gamma_\nu \Lambda^+(P_2')\}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_1)\gamma_\nu \Lambda^+(P_1')\} \\ b &= \frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_2)\gamma_\nu \Lambda^+(P_1')\}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_1)\gamma_\nu \Lambda^+(P_2')\} \\ c &= -\frac{1}{2}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_2)\gamma_\nu \Lambda^+(P_1')\gamma_\mu \Lambda^+(P_1)\gamma_\nu \Lambda^+(P_2')\} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

设

$$\left.\begin{aligned} p_1 p_2 &= p_1' p_2' = -M^2\xi \\ p_1 p_1' &= p_2 p_2' = -M^2\eta \\ p_1 p_2' &= p_1' p_2 = -M^2\zeta \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由（16—17）式，我们可得

$$a = \frac{1}{4}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_2)\gamma_\nu \Lambda^+(P_2')\}T_r\{\gamma_\mu \Lambda^+(P_1)\gamma_\nu \Lambda^+(P_1')\}$$

$$= \frac{1}{4}T_r\left(\gamma_\mu \frac{\not{P}_2 + iM}{2iM}\gamma_\nu \frac{\not{P}_2' + iM}{2iM}\right)T_r\left(\gamma_\mu \frac{\not{P}_1 + iM}{2iM}\gamma_\nu \frac{\not{P}_1' + iM}{2iM}\right), \quad \text{（代入(A34)式）}$$

$$= \frac{1}{64M^4}T_r(\gamma_\mu \not{P}_2\, \gamma_\nu \not{P}_2' - M^2\gamma_\mu\gamma_\nu)\; T_r(\gamma_\mu \not{P}_1 \gamma_\nu \not{P}_1' - M^2\gamma_\mu\gamma_\nu)$$

$$= \frac{1}{64M^4}[T_r(\gamma_\mu\gamma_\lambda p_{2\lambda}\gamma_\nu\gamma_\tau p_{2\tau}') - T_r(M^2\gamma_\mu\gamma_\nu)]\times$$

$$\times[T_r(\gamma_\mu\gamma_\alpha p_{1\alpha}\gamma_\nu\gamma_\beta p_{1\beta}') - T_r(M^2\gamma_\mu\gamma_\nu)], \quad \text{（代入（A33）式）}$$

$$= \frac{1}{64M^4}[(4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\tau} + 4\delta_{\mu\tau}\delta_{\lambda\nu} - 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\tau})p_{2\lambda}p_{2\tau}' - 4\delta_{\mu\nu}M^2]$$

$$\times[(4\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + 4\delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu} - 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta})p_{1\alpha}p_{1\beta}' - 4\delta_{\mu\nu}M^2]$$

$$= \frac{1}{4M^4}\left[p_{2\mu}p'_{2\nu}\,p_{1\mu}p'_{1\nu} + p_{2\mu}p'_{2\nu}\,p_{1\nu}p'_{1\mu} - p_{2\mu}p'_{2\nu}\,p_{1\alpha}p'_{1\alpha}\,\delta_{\mu\nu}\right.$$

$$- p_{2\mu}p'_{2\nu}\,\delta_{\mu\nu}M^2 + p_{2\nu}p'_{2\mu}\,p_{1\mu}p'_{1\nu} + p_{2\nu}p'_{2\mu}\,p_{1\nu}p'_{1\mu}$$

$$- p_{2\nu}p'_{2\mu}\,\delta_{\mu\nu}p_{1\alpha}p'_{1\alpha} - p_{2\nu}p'_{2\mu}\,\delta_{\mu\nu}M^2 - p_{2\lambda}p'_{2\lambda}\delta_{\mu\nu}\,p_{1\mu}p'_{1\nu}$$

$$- p_{2\lambda}p'_{2\lambda}\delta_{\mu\nu}\,p_{1\nu}p'_{1\mu} + p_{2\lambda}p'_{2\lambda}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}p_{1\alpha}p'_{1\alpha} + p_{2\lambda}p'_{2\lambda}\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}M^2$$

$$\left.- M^2\delta_{\mu\nu}\,p_{1\mu}p'_{1\nu} - M^2\delta_{\mu\nu}p_{1\nu}p'_{1\mu} + M^2\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}p_{1\alpha}p'_{1\alpha} + M^2\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}M^2\right]$$

$$= \frac{1}{4M^4}\left[(p_1p_2)(p'_1\,p'_2) + (p_1\,p'_2)\,(p'_1p_2) - (p_1p'_1)\,(p_2p'_2) - M^2(p_2\,p_{f_2})\right.$$

$$+ (p_1\,p'_2)\,(p'_1p_2) + (p'_1\,p'_2)\,(p_1\,p_2) - (p_1p'_1)\,(p_2p'_2) - M^2(p_2\,p'_2)$$

$$- (p_1\,p'_1)(p_2\,p'_2) - (p_1\,p'_1)(p_2\,p'_2) + 4(p_2\,p'_2)(p_1\,p'_1) + 4M^2(p_2\,p'_2)$$

$$\left.- M^2(p_1\,p'_1) - M^2(p_1\,p'_1) + 4M^2(p_1\,p'_1) + 4M^4\right],\ (\text{代入(17)式})$$

$$= \frac{1}{4M^4}\left[2M^4\xi^2 + 2M^4\zeta^2 - 2M^4\eta - 2M^4\eta + 4M^4\right] = \frac{1}{2}(\xi^2 + \zeta^2 - 2\eta + 2)$$

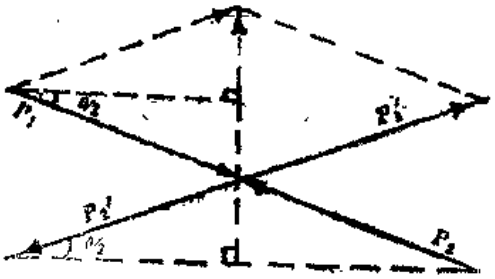
(18a)

类似地，我们可求出

$$b = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta + 2) \tag{18b}$$

$$c = (\xi^2 - \xi - \eta - \zeta + 1) \tag{18c}$$

把(18)式代入(15)式后，再将所得结果代入(8)式，即得在任意坐标系中的截面表示式。



习题16.4附图2 (图中，K，P分别是四维矢量)

(4) 动量中心系统

假设

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= (\boldsymbol{P}_1,\ iE) \qquad p'_1 = (\boldsymbol{P}'_1,\ iE) \\ p_2 &= (\boldsymbol{P}_2,\ iE) \qquad p'_2 = (\boldsymbol{P}'_2,\ iE) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

式中，$\boldsymbol{P}_1 = P\,\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{P}_2 = -P\,\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{P}'_1 = P\,\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{P}'_2 = -P\,\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 是单位矢量，$E = \sqrt{M^2 + P^2}$。

由（19）式，我们有

$$\left.\begin{aligned} p_2' - p_1 &= (\boldsymbol{P}_1' - \boldsymbol{P}_1,\ i(E-E)) = (\boldsymbol{P}_1' - \boldsymbol{P}_1,\ 0) \\ p_2' - p_1 &= (\boldsymbol{P}_2' - \boldsymbol{P}_1,\ i(E-E)) = (\boldsymbol{P}_2' - \boldsymbol{P}_1,\ 0) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

如附图 2 所示，我们可得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1' - \boldsymbol{P}_1 &= 2P\sin\frac{\theta}{2} \\ \boldsymbol{P}_2' - \boldsymbol{P}_1 &= 2P\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中，$\cos\theta = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'$，即 θ 是一个电子的散射角.
由（20）和（21）式可得

$$\left.\begin{aligned} (p_1' - p_1)^2 &= 4P^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ (p_2' - p_1)^2 &= 4P^2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

把（22）式代入（15）式，即得

$$\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2 = \frac{1}{(2P)^4}\left\{\frac{a}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{b}{\cos^4\frac{\theta}{2}} + \frac{c}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\} \tag{23}$$

两电子之间的相对速度为

$$v = \left|\frac{\boldsymbol{P}_1}{E} - \frac{\boldsymbol{P}_2}{E}\right| = \frac{2P}{E} \tag{24}$$

于是类似于十五章和习题16.3中的推导，最后我们可从（8）式得到

$$d\sigma = r_0^2\, d\Omega_1 \left(\frac{M}{E}\right)^2 M^4 \left\{\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}|A|^2\right\} \tag{25}$$

式中，r_0 是电子的经典半径：

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi M} \tag{26}$$

由（17）式，（18）式，（23）式和（25）式，我们最后可得

$$d\sigma = \frac{1}{4}\, r_0^2\, d\Omega_1 \left(\frac{M^2}{P^4E^2}\right)\left\{\frac{4(E^2+P^2)^2}{\sin^4\theta} - \frac{(8E^4 - 4E^2M^2 - M^4)}{\sin^2\theta} - P^4\right\} \tag{27}$$

这就是在动量中心系统中的电子-电子散射截面公式.

16.5 计算：在两电子的质心系中，摩勒散射微分截面的非相对论极限. 以及在实验室系中，当一个电子处于静止不动的状态时，摩勒散射微分截面的非相对论极限.

解 在质心系中，摩勒散射微分截面可根据习题16.4的解答的（23）式和（25）式直接得出. 在非相对论极限下，我们有

$$v \ll 1 \tag{1}$$

$$P \ll M \tag{2}$$

$$E = \sqrt{P^2 + M^2} \approx M \tag{3}$$

式中，$P = |\boldsymbol{P}|$.

于是由习题16.4解答的（17）式和（18）式，我们可得

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由习题16.4解答的（23）和（25）式，即得

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{v^4} d\Omega_1 \left\{ \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \right\} \tag{5}$$

这就是质心系中摩勒散射微分截面的非相对论极限. 这里，v 是两个电子之间的相对速度：

$$v = \frac{2P}{E} \tag{6}$$

设 $d\Omega_1'$ 是实验室系中的立体角元，Θ 是实验室系中的散射角. Θ 和质心系中的散射角 θ 之间的关系为

$$\cos\Theta = \frac{M_1 + M_2\cos\theta}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos\theta}}$$

$$= \frac{M(1+\cos\theta)}{\sqrt{2M^2(1+\cos\theta)}} = \cos\frac{\theta}{2} \tag{7}$$

式中，$M_1 = M_2 = M$ 是电子质量.

由（7）式可得

$$\Theta = \frac{\theta}{2} \tag{8}$$

于是有

$$d\Omega_1 = \sin\theta d\theta d\varphi = 2\sin 2\Theta\, d\Theta\, d\varphi$$
$$= 4\cos\Theta\sin\Theta d\Theta d\varphi$$
$$= 4\cos\Theta\, d\Omega_1' \qquad (9)$$

把（8）式和（9）式代入（5）式，即得

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{v^4} d\Omega_1' \, 4\cos\Theta \left\{ \frac{1}{\sin^4\Theta} + \frac{1}{\cos^4\Theta} - \frac{1}{\sin^2\Theta\cos^2\Theta} \right\} \qquad (10)$$

这就是实验室系中的摩勒散射截面公式.

第 十 八 章

18.1 导出（18.31）式.

解 假设

$$M_0 = M + \delta M \qquad (1)$$

式中，M_0 是电子的可观测物理质量，M 是电子的裸质量，δM 是电子质量的变化. 由（1）式可得

$$M = M_0 - \delta M \qquad (2)$$

把（2）式代入拉格朗日量密度（8.19）式，则得到

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left\{ \psi^\dagger(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\right]\psi(x) + \psi(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\right]\psi^\dagger(x)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{ \psi^\dagger(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M_0 - \delta M\right)\right]\psi(x) \right.$$

$$\left. + \psi(x)\left[\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M_0 - \delta M\right)\right]\psi^\dagger(x) \right\} \qquad (3)$$

由（2.17）式，我们可得

$$\mathscr{H}(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial x_4}\right)} \cdot \frac{\partial \psi_a}{\partial x_4} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \psi_a^\dagger}{\partial x_4}\right)} \cdot \frac{\partial \psi_a^\dagger}{\partial x_4} - \mathscr{L}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{ \psi^\dagger(x)\gamma_4\left(\sum_{k=1}^{3} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + M_0\right)\psi(x) \right.$$

$$\left. + \psi(x)\gamma_4\left(\sum_{k=1}^{3} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + M_0\right)\psi^\dagger(x) \right\}$$

$$-\frac{1}{2}\delta M[\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\psi(x)+\psi(x)\gamma_4\psi^{\dagger}(x)]$$

$$=\mathscr{H}_0(x)+\mathscr{H}'(x) \qquad (4)$$

式中

$$\mathscr{H}_0(x)=\frac{1}{2}\Big\{\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\Big(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+M_0\Big)\psi(x)$$

$$+\psi(x)\gamma_4\Big(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+M_0\Big)\psi^{\dagger}(x)\Big\} \qquad (5)$$

$$\mathscr{H}'(x)=-\frac{1}{2}\delta M[\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\psi(x)+\psi(x)\gamma_4\psi^{\dagger}(x)] \qquad (6)$$

（6）式就是无相互作用场的哈密顿量密度中的附加项.

由（6）式，我们有

$$\mathscr{H}'(x)=-\frac{1}{2}\delta M[\psi^{\dagger}(x)\gamma_4\psi(x)-\psi(x)(-\gamma_4)\psi^{\dagger}(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}\delta M\{\bar{\psi}(x)\psi(x)-\psi(x)[\gamma_4^{T}\psi^{\dagger}(x)]\}$$

$$=-\frac{1}{2}\delta M[\bar{\psi}(x)\psi(x)-\psi(x)\bar{\psi}(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}\delta M[\bar{\psi}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\psi(x)-\bar{\psi}(x)\psi(x)-\psi(x)\bar{\psi}(x)]$$

$$=-\delta M\bar{\psi}(x)\psi(x)+\frac{1}{2}\delta M\Big[\sum_{\alpha=1}^{4}[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)+\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\alpha(x)]\Big] \qquad (7)$$

根据（8.42）式，我们有

$$\frac{1}{2}\delta M\Big[\sum_{\alpha=1}^{4}[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\alpha(x)+\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x)]\Big]=\frac{1}{2}\delta M\sum_{\alpha=1}^{4}[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\alpha(x)]_+$$

$$=\frac{1}{2}\delta M\sum_{\alpha=1}^{4}[-iS_{\alpha\alpha}(0)]=-\frac{i}{2}\delta M\ T_r S(0) \qquad (8)$$

根据（6.1）式，我们可得

$$\Delta(0)=\Delta(x)\Big|_{x=0}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4k\,\frac{1}{k^2+m^2}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_c \frac{dk_0}{k_0^2 - \omega_0^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k (2\pi i) \left(\frac{1}{2\omega_K} - \frac{1}{2\omega_K} \right) = 0 \tag{9}$$

由此可得

$$T, S(0) = T, \left\{ \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - M \right) \Delta(x, M) \Big|_{x=0} \right\} = 0 \tag{10}$$

把（10）式和（8）式代入（7）式，即得

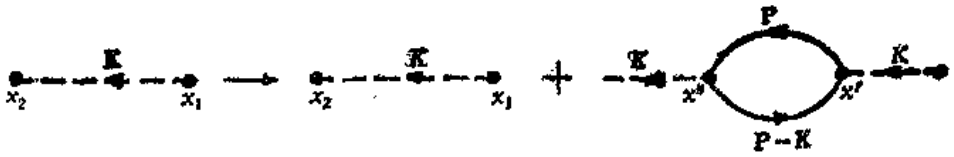
$$\mathscr{H}'(x) = -\delta M \bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{11}$$

这就是（18.31）式.

第十九章

19.1 导出（19.4—6）式.

解 如图所示，考虑介子传播子的二级辐射修正，我们把原始传播子



习题19.1附图 1 （图中，K，P分别是四维矢量）

$$\overbrace{\phi(x_2)\phi(x_1)} = \frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1) \tag{1}$$

换成修正传播子

$$\frac{1}{2}\Delta_F'(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}\Delta_F^{(2)}(x_2 - x_1) \tag{2}$$

式中

$$\frac{1}{2}\Delta_F^{(2)}(x_2 - x_1) = \iint d^4x' d^4x'' \overbrace{\phi(x_2)\phi(x'')} N\{-g^2 \overbrace{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)_{x''} (\bar{\psi}\gamma_5\psi)_{x'}} \} \overbrace{\phi(x')\phi(x_1)} \tag{3}$$

现在，我们转到动量空间，介子传播子的傅里叶变换定义为

$$\frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{ik(x_2 - x_1)} \Delta_F(k) \tag{4}$$

式中

$$\Delta_F(k)=\frac{i}{k^2+m^2} \qquad (5)$$

类似于（14.8）式的推导，（3）式变成

$$\frac{1}{2}\Delta_F^{(2)}(x_2-x_1)=-g^2\int\int d^4x'\,d^4x''\overbrace{\phi(x_2)\phi(x'')}(-1)$$

$$\cdot T_r\{\gamma_5\overbrace{\psi(x'')\bar{\psi}(x')}\gamma_5\overbrace{\psi(x')\bar{\psi}(x'')}\}\overbrace{\phi(x')\phi(x_1)}$$

$$=-g^2\int\int d^4x'\,d^4x''\left[\frac{1}{2}\Delta_F(x_2-x'')\right]T_r\left\{\gamma_5\left[-\frac{1}{2}S_F(x''-x')\right]\right.$$

$$\left.\cdot\gamma_5\left[-\frac{1}{2}S_F(x'-x'')\right]\right\}\left[\frac{1}{2}\Delta_F(x'-x_1)\right]$$

$$=-g^2\int\int d^4x'\,d^4x''\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k_2\,e^{ik_2(x_2-x'')}\Delta_F(k_2)\right]$$

$$\cdot T_r\left\{\gamma_5\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip(x''-x')}S_F(p)\right]\gamma_5\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\int d^4p'\,e^{ip'(x'-x'')}S_F(p')\right]\right\}\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k_1\,e^{ik_1(x'-x_1)}\right.$$

$$\left.\cdot\Delta_F(k_1)\right]$$

$$=-g^2\int d^4k_2d^4pd^4p'\,d^4k_1\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}e^{ik_2x_2}\Delta_F(k_2)\right](2\pi)^4$$

$$\cdot\delta^{(4)}(p-p'-k_2)T_r\left\{\gamma_5\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}S_F(p)\right]\gamma_5\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}S_F(p')\right]\right\}$$

$$\cdot\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}e^{-ik_1x_1}\Delta_F(k_1)\right](2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p'-k_1)$$

$$=\frac{-g^2}{(2\pi)^8}\int d^4p\,d^4k_1\,d^4k_2\,e^{ik_2x_2}\Delta_F(k_2)T_r\{\gamma_5S_F(p)\gamma_5$$

$$\cdot S_F(p-k_2)\}e^{-ik_1x_1}\Delta_F(k_1)\delta^{(4)}(k_2-k_1)$$

$$=\frac{-g^2}{(2\pi)^8}\int d^4p\,d^4k_1\,e^{ik_1(x_2-x_1)}\Delta_F(k_1)$$

$$\cdot T_r\{\gamma_5S_F(p)\gamma_5S_F(p-k_1)\}\Delta_F(k_1)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,e^{ik(x_2-x_1)}\Delta_F(k)$$

$$\times\left[\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4pT_r\{\gamma_5 S_F(p)\gamma_5 S_F(p-k)\}\right]\Delta_F(k)$$

$$=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{ik(x_2-x_1)}\,\Delta_F^{(2)}(k) \qquad (6)$$

式中

$$\Delta_F^{(2)}(k)=\Delta_F(k)\Pi(W',k)\Delta_F(k) \qquad (7)$$

$$\Pi(W',k)=\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4pT_r\{\gamma_5 S_F(p)\gamma_5 S_F(p-k)\}$$

$$=\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4pT_r\left\{\gamma_5\frac{1}{\not p-iM_0}\gamma_5\frac{1}{\not p-\not k-iM_0}\right\} \qquad (8)$$

式中，M_0是核子的物理质量，把（4）式和（6）式代入（2）式，即得

$$\Delta_F'(k)=\Delta_F(k)+\Delta_F^{(2)}(k) \qquad (9)$$

（8）式中的积分是二次发散的，但（8）式中的被积函数是有限的，因此，引进新参数

$$Z=-i(k^2+m_0^2) \qquad (10)$$

并将（8）式中的被积函数按Z展开成泰勒级数，只取前两项和剩余项，遍及于 p 积分后，即得

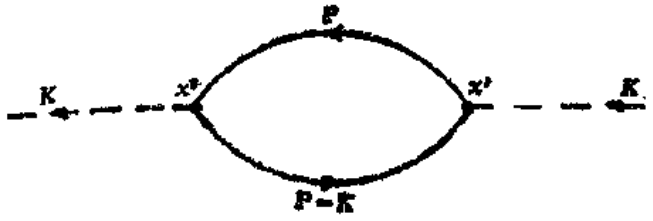
$$\Pi(W',k)=A'+B'Z+\Delta_C(W',k)Z \qquad (11)$$

为了对A'作出物理上的解释，我们来考虑不是位于两个传播子之间而是位于两条外介子线之间的W'－修正，如附图 2 所示，我们有

$$S_D^{(2)}=\iint d^4x'\,d^4x''\phi(x'')N\{-g^2(\bar\psi\gamma_5\psi)_{x''}(\bar\psi\gamma_5\psi)_{x'}\}\phi(x') \qquad (12)$$

显然，（12）式和（6）式是非常类似的.介子场的傅里叶变换可定义如下：

$$\left.\begin{aligned}\phi(x)&=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx}\phi(k)\\ \phi\dagger(x)&=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ikx}\phi\dagger(k)\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$



习题19.1附图2（图中，K，P分别是四维矢量）

由（4）式，（13）式和（12）式可得

$$S_D^{(2)} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k\phi^\dagger(k)\Pi(W', k)\phi(k) \tag{14}$$

对自由介子来说，我们有

$$z = 0 \tag{15}$$

把（11）式代入（14）式，即得

$$S_D^{(2)} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4k\phi^\dagger(k)\{A' + B'z + \Delta_C(W', k)z\}\phi(k)$$

$$= \frac{-A'}{(2\pi)^4} \int d^4k\phi^\dagger(k)\phi(k) \tag{16}$$

由（19.2）式，我们有

$$\mathscr{H}_I(x) = igN(\bar{\psi}\gamma_5\phi\psi) - \frac{1}{2}\delta(m^2)\phi^2 \tag{17}$$

如果我们使用修正后的S矩阵，在最低级微扰近似重新计算介子自能，我们就将得到由（17）式中的第二项所引起的一个附加项．即有

$$(-i)\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\delta(m^2)\phi^2\right\}$$

$$= (-i)\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\delta(m^2)\right)\left(\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ikx}\phi(k)\right)$$

$$\cdot\left(\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k' e^{-ik'x}\phi^\dagger(k')\right)$$

$$= \frac{i\delta(m^2)}{2(2\pi)^8}\int d^4kd^4k'(2\pi)^4\delta(k-k')\phi(k)\phi^\dagger(k')$$

$$= \frac{i}{2}\delta(m^2)\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\phi(k)\phi^\dagger(k) \tag{18}$$

由（16）式和（18）式，我们可得修正后的S矩阵元为

$$S_D^{(2)} = \frac{-1}{(2\pi)^4}\left(A' - \frac{i}{2}\delta(m^2)\right)\int d^4k\phi(k)\phi^\dagger(k) \tag{19}$$

因为$\delta(m^2)$是相当任意的，所以我们能给它以任意值．现在，我们作一特别选择，即

$$A' - \frac{i}{2}\delta(m^2) = 0 \tag{20}$$

把（20）式代入（19）式，即得$S_D^{(2)} = 0$，因此对一个单独的自由介子而言，将没有自

能效应，我们只要用介子的物理质量来代替裸质量就行了。

简言之，在(5)—(8)式中，我们必须用介子的物理质量m_0来代替裸质量m。此外，抵消项的影响就是产生附加贡献，于是(11)式变成

$$\Pi(W', k) - \frac{i}{2}\delta(m^2) = B'\left[-i(k^2 + m_0^2)\right] + \Delta_c(W', k)\left[-i(k^2 + m_0^2)\right] \tag{21}$$

这样，由(9)式，考虑二级辐射修正后的介子传播函数为

$$\Delta_F'(k) = \Delta_F(k) + \Delta_F^{(2)}(k)$$

这里

$$\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 + m_0^2} \tag{22}$$

$$\Delta_F^{(2)}(k) = \frac{i}{k^2 + m_0^2}\left\{\Pi(W', k) - \frac{i}{2}\delta(m^2)\right\}\frac{i}{k^2 + m_0^2} \tag{23}$$

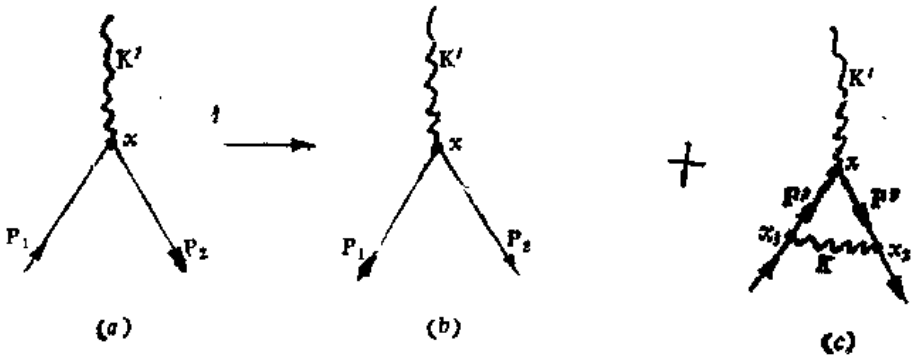
$$\Pi(W', k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4 p\, Tr\left\{\gamma_5 \frac{1}{\not P - iM_0}\gamma_5 \frac{1}{\not P - \not K - iM_0}\right\} \tag{24}$$

这就是(19.4—6)式。

第二十章

20.1 导出(20.2—3)式。

解 对基本顶点部分进行修正后的费曼图如下图所示。



习题20.1附题（图中，K，P分别是四维矢量）

根据费曼图，我们有

$$S'^{(1)} = S^{(1)} + S^{(3)} \tag{1}$$

这里，

$$S^{(1)} = e\int d^4 x\, \bar\psi(x)\gamma_\mu A_\mu(x)\psi(x)$$

$$= e\int d^4 x\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4 p_2\, e^{-ip_2 x}\bar\psi(p_2)\right]\gamma_\mu \times\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4 k'\, e^{ik'x} A_\mu(k')\right]\cdot\left[\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4 p_1\, e^{ip_1 x}\psi(p_1)\right]$$

$$= \frac{-ie}{(2\pi)^8} \int d^4p_2 d^4p_1 d^4k' \, \bar{\psi}(p_2)\gamma_\mu \delta^{(4)}(p_1 + k' - p_2)\psi(p_1) A_\mu(k') \tag{2}$$

$$S^{(3)} = e^3 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 N \left\{ (\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2} (\bar{\psi}\not{A}\psi)_x (\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1} \right\}$$

$$= e^3 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \; \bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu \psi(x_2) \; \bar{\psi}(x)\gamma_\mu A_\mu(x)\psi(x) \; \bar{\psi}(x_1)\gamma_\lambda$$
$$\times A_\nu(x_2) A_\lambda(x_1)\psi(x_1)$$

$$= e^3 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \, \bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu \left[-\frac{1}{2} S_F(x_2 - x) \right] \gamma_\mu \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \right.$$
$$\times \left. \int d^4k' \, e^{ik'x} A_\mu(k') \right] \times \left[-\frac{1}{2} S_F(x - x_1) \right] \gamma_\lambda$$
$$\times \left[\frac{1}{2} \delta_{\nu\lambda} D_F(x_2 - x_1) \right] \psi(x_1)$$

$$= e^3 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 \, e^{-ip_2 x_2} \bar{\psi}(p_2) \right] \gamma_\lambda \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \right.$$
$$\times \int d^4p'' e^{ip''(x_2 - x)} S_F(p'') \left. \right] \gamma_\mu \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k' e^{ik'x} A_\mu(k') \right] \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \right.$$
$$\times \left. \int d^4p' e^{ip'(x - x_1)} S_F(p') \right] \gamma_\lambda \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ik(x_2 - x_1)}}{k^2} \right]$$
$$\times \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 e^{ip_1 x_1} \psi(p_1) \right]$$

$$= e^3 \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 \, \bar{\psi}(p_2) \right] \gamma_\lambda \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p'' S_F(p'') \right] (2\pi)^4 \times$$
$$\times \delta^{(4)}(p'' - p_2 + k) \gamma_\mu \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k' A_\mu(k') \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p'')$$
$$\times \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p' S_F(p') \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k - p') \gamma_\lambda$$
$$\times \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \right] \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \psi(p_1) \right]$$

$$= e^3 \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_2 \, \bar{\psi}(p_2) \right] \gamma_\lambda S_F(p_2 - k) \gamma_\mu \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k' A_\mu(k') \right] \times$$
$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - k + k' - p_2 + k) S_F(p_1 - k)$$
$$\times \gamma_\lambda \left[\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} \right] \left[\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p_1 \psi(p_1) \right]$$

$$= \frac{-ie}{(2\pi)^8} \int d^4p_2 d^4p_1 d^4k' \, \bar{\psi}(p_2) \left\{ \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\lambda S_F(p_2 - k) \gamma_\mu \right.$$
$$\left. \times S_F(p_1 - k) \gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \right\} \delta^{(4)}(p_1 + k' - p_2) \psi(p_1) A_\mu(k')$$

$$= \frac{-ie}{(2\pi)^8} \int d^4p_2 d^4p_1 d^4k' \, \bar{\psi}(p_2) \Lambda_\mu(V_1, p_1, p_2)$$
$$\times \delta^{(4)}(p_1 + k' - p_2) \psi(p_1) A_\mu(k') \qquad (3)$$

式中

$$\Lambda_\mu(V_1, p_1, p_2) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\lambda S_F(p_2 - k) \gamma_\mu S_F(p_1 - k) \gamma_\lambda \frac{1}{k^2}$$
$$= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}_2 - \not{k} - iM_0} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - iM_0} \gamma_\lambda \frac{1}{k^2} \qquad (4)$$

这就是（20.3）式。

把（2—4）式代入（1）式，即得

$$S'^{(1)} = \frac{-ie}{(2\pi)^8} \int d^4p_2 d^4p_1 d^4k' \, \bar{\psi}(p_2) [\gamma_\mu + \Lambda_\mu(V_1, p_2, p_1)]$$
$$\times \delta^{(4)}(p_1 + k' - p_2) \psi(p_1) A_\mu(k')$$

$$= \frac{-ie}{(2\pi)^8} \int d^4p_2 d^4p_1 d^4k' \, \bar{\psi}(p_2) \Gamma_\mu(V_1, p_2, p_1)$$
$$\times \delta^{(4)}(p_1 + k' - p_2) \psi(p_1) A_\mu(k') \qquad (5)$$

这里

$$\Gamma_\mu(V_1, p_2, p_1) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(V_1, p_2, p_1) \qquad (6)$$

这就是（20.2）式。

20.2 证明恒等式

$$\frac{\partial \Sigma(W, p)}{\partial p_\lambda} = -\Lambda_\lambda(V_1, p, p) \qquad (1)$$

解 首先，我们有

$$\left.\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{1}{\not{p} - iM} \\ S_F^{-1}(p) &= \not{p} - iM \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

由（2）式可得

$$S_F(p) S_F^{-1}(p) = 1 \qquad (3)$$

在（3）式两边对p_λ求导数，可得

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\lambda} S_F^{-1}(p) = -S_F(p) \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p_\lambda} = -S_F(p) \gamma_\lambda \qquad (4)$$

由（4）式可得

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\lambda} = -S_F(p)\gamma_\lambda S_F(p) \tag{5}$$

由（18.8）式，我们有

$$\Sigma(W,\ p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma_\mu \frac{1}{\not p - \not k - iM}\gamma_\mu \frac{1}{k^2} \tag{6}$$

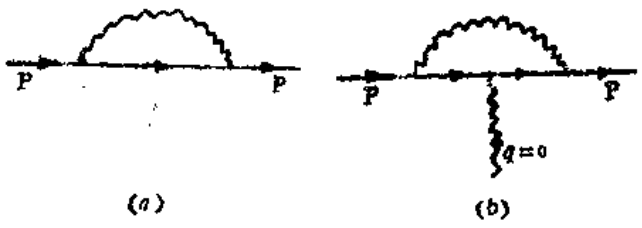
在（6）式两边同时对P_λ求导，并使用（5）式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma(W,\ p)}{\partial p_\lambda} &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu \frac{\partial S_F(p-k)}{\partial p_\lambda}\gamma_\mu \frac{1}{k^2}\\ &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\{-S_F(p-k)\gamma_\lambda S_F(p-k)\}\gamma_\mu \frac{1}{k^2}\\ &= -\left\{\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu S_F(p-k)\gamma_\lambda S_F(p-k)\gamma_\mu \frac{1}{k^2}\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

把（20.3）式代入（6）式，即得

$$\frac{\partial \Sigma(W,\ p)}{\partial p_\lambda} = -\Lambda_\lambda(V_1,\ p,\ p) \tag{7}$$

（7）式是**华德（Ward）恒等式**[*]的特殊情况．华德恒等式把电子传播函数S_F和电子-光子顶角函数Λ_μ联系起来．在费米子自能图上，把一个顶点插入内费米子线上，一个零



习题20.2附图（图中，K，P分别是四维矢量）

能量光子被发射进这条内费米子线，就得到了顶角修正图，如上图所示．我们在这里给出的是二级微扰近似的结果，不过，华德恒等式可推广到所有高次微扰近似的情况．

20.3 证明（20.14）式在e^2级是成立的．

证明 本题实际上就是要证明，在二级微扰近似中，电子自能效应所引起的重正化常数B和顶角修正效应所引起的重正化常数$-L$是相等的．

根据（18.15）式，我们可得

$$\frac{\partial \Sigma(W,\ p)}{\partial p_\nu} = B\gamma_\nu + \frac{\partial[S_C(W,\ p)(\not p - iM)]}{\partial p_\nu} \tag{1}$$

由（20.7）式，我们有

*) Ward, J.C., phys. Rev. 78, 182, 1950.

$$A'' = \Lambda_\nu(V_1, p, p) - \Lambda_{\nu c}(V_1, p, p) \qquad (2)$$

把(20.10)式和华德恒等式代入(2)式，即有

$$L\gamma_\nu = -\frac{\partial \Sigma(W, p)}{\partial p_\nu} - \Lambda_{\nu c}(V_1, p, p) \qquad (3)$$

把(1)式代入(3)式，即得

$$(B+L)\gamma_\nu = -\frac{\partial}{\partial p_\nu}[S_c(W, p)(\not{p} - iM)] - \Lambda_{\nu c}(V_1, p, p)$$

$$= -\left(\frac{\partial S_c(W, p)}{\partial p_\nu}\right)(\not{p} - iM) - S_c(W, p)\gamma_\nu$$

$$- \Lambda_{\nu c}(V_1, p, p) \qquad (4)$$

由于$p^2 + M^2 = 0$，所以有

$$(\not{p} - iM)u(P) = \bar{u}(P)(\not{p} - iM) = 0 \qquad (5)$$

由(4)式，我们有

$$\bar{u}(P)[(B+L)\gamma_\nu]u(P) = -\bar{u}(P)\left(\frac{\partial S_c(W, p)}{\partial p_\nu}\right)(\not{p} - iM)u(P)$$

$$- \bar{u}(P)S_c(W, p)\gamma_\nu u(P) - \tilde{u}(P)\Lambda_{\nu c}(V_1, p, p)u(P) \qquad (6)$$

从(18.14—18)和(20.4—10)式可以看到，$S_c(W, p)$和$\Lambda_{\nu c}(V_1, p, p)$和$(\not{p} - iM)$成正比，所以，根据(5)式，(6)式的右边各项均为零.于是我们有

$$\bar{u}(P)[(B+L)\gamma_\nu]u(P) = 0 \qquad \nu = 1, \cdots, 4 \qquad (7)$$

根据(7)式，即有

$$B + L = 0 \qquad (8)$$

由此可得

$$B = -L \qquad (9)$$

这就是(20.14)式.

第二十一章

21.1 导出(21.5)式

解 根据狄拉克方程

$$\left.\begin{aligned}(\not{p} - iM_0)u(P) &= 0\\ \bar{u}'(P')(\not{p}' - iM_0) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

我们可得

$$\bar{u}'(P') = \frac{\bar{u}'(P')\not{p}'}{iM_0} \qquad (2)$$

$$u(P)=\frac{\not{P}u(P)}{iM_0} \tag{3}$$

根据附录A中的（A6）式，我们有

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha\gamma_\beta&=i\sigma_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\beta}\\ \gamma_\beta\gamma_\alpha&=\delta_{\alpha\beta}-i\sigma_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{4}$$

于是，由（21.2）式，我们可得

$$\frac{M_0}{V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}e_0\bar{u}'(P')\gamma_\alpha\ u(P)A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{M_0e_0}{V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}\left[\bar{u}'(P')\gamma_\alpha u(P)+\bar{u}'(P')\gamma_\alpha u(P)\right]A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{M_0e_0}{2V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\bar{u}'(P')\not{P}}{iM_0}\gamma_\alpha u(P)+\bar{u}'(P')\gamma_\alpha\frac{\not{P}u(P)}{iM_0}\right]A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{e_0}{2iV(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\left[\bar{u}'(P')\gamma_\beta p'_\beta\gamma_\alpha u(P)+\bar{u}'(P')\gamma_\alpha\gamma_\beta p_\beta u(P)\right]A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{e_0}{2iV(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\left[\bar{u}'(P')(\delta_{\alpha\beta}-i\sigma_{\alpha\beta})p'_\beta u(P)\right.$$

$$\left.+\bar{u}'(P')(\delta_{\alpha\beta}+i\sigma_{\alpha\beta})p_\beta u(P)\right]A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{e_0}{2iV(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\left[\bar{u}'(P')\ (p'_\beta+p_\beta)u(P)\delta_{\alpha\beta}-\right.$$

$$\left.-i\,\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}(p'_\beta-p_\beta)u(P)\right]A_\alpha^*(q)$$

$$=\frac{e_0}{2iV(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\left\{\bar{u}'(P')\left[(p'+p)A^*(q)\right]u(P)\right.$$

$$\left.-i\,\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}(p'_\beta-p_\beta)u(P)\,A_\alpha^*(q)\right\},\ \text{〔代入（21.1）式〕}$$

$$=\frac{-M_0}{V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\frac{\mu}{2}\left\{-2i\,\bar{u}'(P')\left[(p'+p)A^*(q)\right]u(P)\right.$$

$$\left.-2\,\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}(p'_\beta-p_\beta)u(P)\,A_\alpha^*(q)\right\} \tag{5}$$

（5）式括号中的第二项可以写成：

$$
\begin{aligned}
&-2\,\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}\,(p'_\beta-p_\beta)u(P)\;A^*_\alpha(q)\\
&\quad=-2\,\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}\,q_\beta\;\;u(P)A^*_\alpha(q)\\
&\quad=-\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}q_\beta\,A^*_\alpha(q)u(P)-\bar{u}'(P')\sigma_{\beta\alpha}q_\alpha\,A^*_\beta(q)u(P)\\
&\quad=-\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}q_\beta\,A^*_\alpha(q)u(P)+\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}q_\alpha\,A^*_\beta(q)u(P)\\
&\quad=\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}\,u(P)\,[\,q_\alpha\,A^*_\beta(q)-q_\beta\,A^*_\alpha(q)\,]
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

把（6）式代入（5）式，即得

$$
\begin{aligned}
&\frac{M_0}{V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}e_0\,\bar{u}'(P')\gamma_\alpha u(P)A^*_\alpha(q)\\
&\quad=-\frac{M_0}{V(E_pE_{p'})^{\frac{1}{2}}}\frac{\mu}{2}\Big\{-2i\;\bar{u}'(P')[(p+p')A^*(q)]u(P)\\
&\qquad+\bar{u}'(P')\sigma_{\alpha\beta}\;u(P)[q_\alpha A^*_\beta(q)-q_\beta\,A^*_\alpha(q)]\Big\}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

这就是（21.5）式。

附录A　狄拉克方程

狄拉克方程可以写为

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=[c\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla)+\beta mc^2]\psi(x) \tag{A1a}$$

在$\hbar=c=1$的自然单位制中，我们有

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi(x)=0 \tag{A1b}$$

式中，m是粒子静质量，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$和$\beta$是$4\times4$厄密矩阵，

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \tag{A1c}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$是泡利矩阵，$I$是$2\times2$单位矩阵。$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$和$\beta$满足如下对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha_i,\ \alpha_j]_+=2\delta_{ij},\\ &[\alpha_i,\ \beta]_+=0,\\ &\beta^2=1,\end{aligned}\right\}(i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{A1d}$$

引进矩阵γ_μ，其定义如下：

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_k=-i\beta\alpha_k\quad k=1,\ 2,\ 3;\\ &\gamma_4=\beta\end{aligned}\right\} \tag{A1e}$$

可以看出，由于$\boldsymbol{\alpha}$和β都是厄密算符，所以，γ_μ都是厄密矩阵.由此，我们可把狄拉克方程写成：

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\psi(x)=0 \tag{A1}$$

根据（A1d）式，可以证明，γ_μ满足下列对易关系：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu},\quad \mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{A2}$$

定义矩阵γ_5为

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \tag{A3}$$

于是可得

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_5^2=1,\\ &\gamma_5\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5=0,\end{aligned}\right\} \tag{A4}$$

由（A1e）式，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_k=i\gamma_4\gamma_k,\ k=1,\ 2,\ 3;\\&\beta=\gamma_4\end{aligned}\right\}\tag{A5}$$

定义4×4自旋矩阵为

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{-i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\tag{A6}$$

特别是，当k，l，m按1，2，3的循环次序取值时，我们有

$$\sigma_k\equiv\sigma_{lm}=-i\gamma_l\gamma_m=i\gamma_4\gamma_5\gamma_k\tag{A6a}$$

下面，我们来导出狄拉克方程的性质，为此，我们无须使用特别的表象.不过，我们将只限于使用γ-矩阵是厄密的表象.文献中经常使用的是下面的表象：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_k&=\begin{pmatrix}0&-i\sigma_k\\i\sigma_k&0\end{pmatrix}\quad k=1,\ 2,\ 3\\\gamma_4&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\\gamma_5&=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{A7}$$

式中，0是2×2零矩阵；1是2×2单位矩阵；σ_k是泡利矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\tag{A8}$$

于是，（A6a）式中的4×4自旋矩阵是

$$\sigma_{lm}=\begin{pmatrix}\sigma_k&0\\0&\sigma_k\end{pmatrix},\ k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3\tag{A6b}$$

引进定义

$$\bar\psi\equiv\psi^\dagger\gamma_4\tag{A9}$$

式中，符号“†”表示厄密共轭.设A_μ是任一四维矢量，引进定义

$$\not{A}\equiv\gamma_\mu A_\mu\tag{A10}$$

通常把符号“$\not{A}$”读为“A slash [sl æʃ]”.

根据旋量$\psi(x)$，$\bar\psi(x)$和γ-矩阵，我们能构造狄拉克理论的五个基本的双线性协变量.在洛仑兹变换下，我们有：

$$\left.\begin{aligned}&\bar\psi\psi\\&s_\mu=i\bar\psi\gamma_\mu\psi\\&\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi\\&i\bar\psi\gamma_5\gamma_\mu\psi\\&i\bar\psi\gamma_5\psi\end{aligned}\right\}\text{象一个}\left\{\begin{aligned}&\text{标量}\\&\text{矢量}\\&\text{反对称二阶张量}\\&\text{赝矢量}\\&\text{赝标量}\end{aligned}\right\}\text{那样变换}\tag{A11}$$

设粒子的三维动量矢量为$\boldsymbol{P}$，其能量相应为

$$E_P = +(M^2+P^2)^{\frac{1}{2}} \tag{A12}$$

于是，我们可把狄拉克方程的四个独立的解写为

$$\psi^{(r)}(P) = u^{(r)}(P)e^{i\varepsilon_r p x} \qquad (r=1, \cdots, 4) \tag{A13}$$

式中，$p=(\boldsymbol{P}, iE_P)$和

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1, & \text{当} r=1, 2 \\ -1, & \text{当} r=3, 4 \end{cases} \tag{A14}$$

（A13）式中的四维旋量$u^{(r)}(P)$满足方程：

$$(\varepsilon_r \not{p} - iM)u^{(r)}(P) = 0 \quad (r=1, \cdots, 4) \tag{A15}$$

前两个解（$r=1, 2$）的能量本征值为E_P，动量本征值为P；后两个解的能量本征值为$-E_P$，动量本征值为$-P$。我们把前两个解称为正能解，后两个解称为负能解。在狄拉克理论中，仅有自旋的纵向分量（与$\pm P$平行）是运动常数。因此，为方便起见，我们选择态（A13）是纵向自旋分量的本征态，即有：

$$\sigma_P\ u^{(r)}(P) = \varepsilon_r\eta_r u^{(r)}(P), \quad (r=1, \cdots, 4) \tag{A16}$$

式中，纵向自旋分量σ_P是σ沿运动方向的投影，称为螺旋度(helicity)

$$\sigma_P \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P}}{|\boldsymbol{P}|} \tag{A16a}$$

$$\eta_r = \begin{cases} +1 & r=1, 3, \\ -1 & r=2, 4, \end{cases} \tag{A17}$$

除了归一化外，（A13）至（A17）式就完全确定了平面波解的完备系。现在，我们规定狄拉克旋量的归一化条件为：

$$(u^{(r)}(P),\ u^{(r)}(P)) \equiv u^{(r)\dagger}(P)u^{(r)}(P) = \frac{E_P}{M} \tag{A18}$$

$$(r=1, \cdots, 4)$$

上式表明，我们把狄拉克旋量相对论不变地归一化到每单位体积有E_P/M个粒子。

在第八章所用过的Majorana表象中〔参见(8.9)式〕，

$$u^{(r+2)}(P) = u^{(r)*}(P) \quad (r=1, 2) \tag{A19}$$

式中，星号“$*$”表示复数共轭，即（A19）中的旋量是列矢量，而不是行矢量。不过，在一般情况下，（A19）式并不是成立的。

根据（A13）至（A18）式，我们容易得出下列正交归一关系：

$$\bar{u}^{(r)}(P)u^{(s)}(P) = \varepsilon_r\delta_{rs}, \quad (r, s=1, \cdots, 4) \tag{A20}$$

$$(\psi^{(r)}(P),\ \psi^{(s)}(P')) = \frac{E_P}{M}\delta_{rs}\delta(P, P') \tag{A21}$$

由（A15）式，我们定义正能投影算符$\Lambda^{+}(P)$和负能投影算符$\Lambda^{-}(P)$为

$$\left.\begin{aligned}\Lambda^{+}(P)&=\frac{\not{P}+iM}{2iM}\\ \Lambda^{-}(P)&=\frac{\not{P}-iM}{-2iM}\end{aligned}\right\}\qquad(A22)$$

$\Lambda^{+}(P)$和$\Lambda^{-}(P)$都具有投影算符的性质：

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{+}(P)+\Lambda^{-}(P)=1\\ &[\Lambda^{+}(P)]^{2}=\Lambda^{+}(P)\\ &[\Lambda^{-}(P)]^{2}=\Lambda^{-}(P)\\ &\Lambda^{+}(P)\Lambda^{-}(P)=0\\ &\Lambda^{-}(P)\Lambda^{+}(P)=0\end{aligned}\right\}\qquad(A23)$$

把（A22）式运用到$u^{(r)}P$上，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{-}(P)u^{(r)}(P)=0 \qquad (r=1,\ 2)\\ &\Lambda^{+}(P)u^{(r)}(P)=u^{(r)}(P) \quad (r=1,\ 2)\end{aligned}\right\}\qquad(A24a)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{+}(P)u^{(r)}(P)=0 \qquad (r=3,\ 4)\\ &\Lambda^{-}(P)u^{(r)}(P)=u^{(r)}(P) \quad (r=3,\ 4)\end{aligned}\right\}\qquad(A24b)$$

同样地，我们可引进螺旋度投影算符（helicity projection operator）为：

$$\left.\begin{aligned}\Pi^{+}(P)&=\frac{1}{2}(1+\sigma_{p})\\ \Pi^{-}(P)&=\frac{1}{2}(1-\sigma_{p})\end{aligned}\right\}\qquad(A24c)$$

$\Pi^{+}(P)$和$\Pi^{-}(P)$同样具有投影算符的性质：

$$\left.\begin{aligned}&\Pi^{+}(P)+\Pi^{-}(P)=1\\ &[\Pi^{+}(P)]^{2}=\Pi^{+}(P)\\ &[\Pi^{-}(P)]^{2}=\Pi^{-}(P)\\ &\Pi^{+}(P)\Pi^{-}(P)=0\\ &\Pi^{-}(P)\Pi^{+}(P)=0\end{aligned}\right\}\qquad(A24d)$$

螺旋度投影算符和能量投影算符相互对易，即有：

$$\left.\begin{aligned}&[\Pi^{+}(P),\ \Lambda^{+}(P)]=0\\ &[\Pi^{-}(P),\ \Lambda^{-}(P)]=0\\ &[\Pi^{+}(P),\ \Lambda^{-}(P)]=0\\ &[\Pi^{-}(P),\ \Lambda^{+}(P)]=0\end{aligned}\right\}\qquad(A24e)$$

上式再次说明了，只有纵向自旋分量和能量是运动常数，可以同时对角化。

（A22）式所给出的能量投影算符使我们能够用遍及于所有四个自旋态的求和来置换仅对正能态或仅对负能态的求和，即有

$$\sum_{r=1}^{2} u^{(r)}(P) f_r(P) = \sum_{r=1}^{4} \Lambda^{+}(P) u^{(r)}(P) f_r(P) \qquad (A25a)$$

$$\sum_{r=3}^{4} u^{(r)}(P) f_r(P) = \sum_{r=1}^{4} \Lambda^{-}(P) u^{(r)}(P) f_r(P) \qquad (A25b)$$

（A25）式使我们能在计算中应用自旋空间的完备关系：

$$\sum_{r=1}^{4} u_{\alpha}^{(r)}(P)\, \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) \varepsilon_r = \delta_{\alpha\beta} \qquad (A26)$$

（A26）式是一个关于 4×4 距阵的算符方程，矩阵的行和列分别用 α 和 β 来标记。把（A26）式应用到任一基矢 $u^{(S)}(P)$ 上，即可证明（A26）式的正确性。于是，使用（A20）式，我们有

$$\sum_{r=1}^{4} u(P) \varepsilon_r \sum_{\beta=1}^{4} \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) u_{\beta}^{(S)}(P) = \sum_{r=1}^{4} \left| u_{\alpha}^{(r)}(P) \right| \varepsilon_r^2 \delta_{rs}$$

$$= u_{\alpha}^{(S)}(P)$$

能量投影算符 $\Lambda^{+}(P)$ 和 $\Lambda^{-}(P)$ 可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^{+}(P) &= \sum_{r=1}^{2} u_{\alpha}^{(r)}(P)\, \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) \\ \Lambda_{\alpha\beta}^{-}(P) &= -\sum_{r=3}^{4} u_{\alpha}^{(r)}(P)\, \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) \end{aligned}\right\} \qquad (A27)$$

（A27）式的证明是容易的，例如

$$\sum_{r=3}^{4} u_{\alpha}^{(r)}(P)\, u_{\beta}^{(r)}(P) = -\sum_{r=3}^{4} u_{\alpha}^{(r)}(P)\, \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) \varepsilon_r$$

$$= -\sum_{\sigma=1}^{4} \Lambda_{\alpha\sigma}^{-}(P) \sum_{r=1}^{4} u_{\sigma}^{(r)}(P)\, \bar{u}_{\beta}^{(r)}(P) \varepsilon_r$$

$$= -\Lambda_{\alpha\beta}^{-}(P)$$

在计算跃迁几率时，我们将不得不计算象 X 这样的表示式：

$$X = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{2} \sum_{S=1}^{2} |M_{Sr}|^2 \qquad (A28)$$

式中，M_{Sr} 是某一算符 O 的距阵元；

$$M_{sr} = (\bar{u}^{(s)}(P')Ou^{(r)}(P)) \qquad (A29)$$

(A28)式所给出的X相当于从一个未极化的动量为P的电子束初态跃迁到动量为P'的终态的跃迁几率，实验不测量末态粒子的极化.因此，我们必须对电子的初始极化态求平均$\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\right)$并对电子的终结极化态求和$\left(\sum_{s=1}^{2}\right)$. 对于正电子及其他费米子的表示式也可同样写下.如果我们定义算符

$$\tilde{O} = \gamma_4 O^{\dagger}\gamma_4 \qquad (A30)$$

则矩阵元M_{sr}的共轭矩阵元$M_{sr}^{\dagger}$为

$$\begin{aligned} M_{sr}^{\dagger} &= (u^{(r)\dagger}(P)O^{\dagger}\gamma_4 u^{(s)}(P')) \\ &= (u^{(r)\dagger}(P)\gamma_4^2 O^{\dagger}\gamma_4 u^{(s)}(P')) \\ &= (\bar{u}^{(r)}(P)\tilde{O}u^{(s)}(P')) \end{aligned} \qquad (A29a)$$

由此可得

$$X = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}(\bar{u}^{(r)}(P)\tilde{O}u^{(s)}(P'))(\bar{u}^{(s)}(P')Ou^{(r)}(P)),\text{〔代入(A27)式〕}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}(\bar{u}(P)\tilde{O}\Lambda^{+}(P')Ou^{(r)}(P),\text{〔代入(A14)和(A25)式〕}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}(\bar{u})^{(r)}(P)\tilde{O}\Lambda^{+}(P')O\Lambda^{+}(P)u^{(r)}(P))\varepsilon_r$$

$$= \frac{1}{2}Tr\left\{\tilde{O}\Lambda^{+}(P')O\Lambda^{+}(P)\right\} \qquad (A31)$$

式中最后一步的导出是因为根据(A26)式，对任一算符Q，我们有

$$\sum_{r=1}^{4}(\bar{u}^{(r)}(P)Qu^{(r)}(P))\varepsilon_r$$

$$= \sum_{r=1}^{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\bar{u}_{\alpha}^{(r)}(P)Q_{\alpha\beta}u_{\beta}^{(r)}(P)\varepsilon_r,\text{〔代入(A26)式〕}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{4}Q_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4}Q_{\alpha\alpha} = TrQ$$

在计算γ-距阵的迹时，我们常常要用到下面的法则.根据反对易关系(A2)式，我们容易证明这些法则：

(1)设U和V是任意两个算符，我们有

$$Tr(UV)=Tr(VU) \tag{A32}$$

（2）$Tr(\gamma_\lambda\gamma_\mu)=4\delta_{\lambda\mu}$ (A33)

$$Tr(\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)=4(\delta_{\alpha\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\nu\sigma}) \tag{A33a}$$

$$\begin{aligned}Tr(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\mu\gamma_\nu)=4(&\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\tau}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\tau\mu}+\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\nu}\delta_{\tau\mu}+\delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\mu\nu}\\&+\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\sigma\tau}+\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\tau\nu}+\delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\nu}\delta_{\sigma\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\tau}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\tau}\delta_{\sigma\mu}-\delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\mu}\delta_{\sigma\nu}\\&-\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\mu}\delta_{\tau\nu}-\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau}\delta_{\mu\nu}-\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\tau\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\tau\nu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\sigma\tau})\end{aligned} \tag{A33b}$$

（3）若$(\gamma_\lambda\gamma_\mu\cdots\gamma_\tau)$含有奇数个因子，则

$$Tr(\gamma_\lambda\gamma_\mu\cdots\gamma_\tau)=0 \tag{A34}$$

（4）对于γ距阵，我们有

$$Tr(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau)=Tr(\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\rho\cdots\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda) \tag{A35}$$

（5）设a是复数，A_λ，B_λ，C_λ，和D_λ是四维矢量，则有

$$Tra=4a \tag{A36}$$

$$Tr(\not{A}\not{B})=4(AB) \tag{A37a}$$

$$\begin{aligned}Tr(\not{A}\not{B}\not{C}\not{B})=4\{&(AB)(CD)-(AC)(BD)+\\&+(AD)(BC)\}\end{aligned} \tag{A37b}$$

一般说来，若A_1，A_2，…，A_{2n}是四维矢量，则有

$$\begin{aligned}Tr(\not{A}_1\not{A}_2\cdots\not{A}_{2n})=\{&(A_1A_2)Tr(\not{A}_3\cdots\not{A}_{2n})-(A_1A_3)Tr(\not{A}_2\not{A}_4\cdots\cdots\not{A}_{2n})\\&+\cdots\cdots+(A_1A_{2n})Tr(\not{A}_2\not{A}_3\cdots\not{A}_{2n-1})\end{aligned} \tag{A37c}$$

（6）A和B是四维矢量，则有

$$(\not{A}\not{B}+\not{B}\not{A})=2(AB) \tag{A38a}$$

$$\not{A}\not{A}=A^2 \tag{A38b}$$

使用爱因斯坦求和惯例，我们有

$$\gamma_\lambda a\gamma_\lambda=4a \tag{A38c}$$

$$\gamma_\lambda\not{A}\gamma_\lambda=-2\not{A} \tag{A38d}$$

$$\gamma_\lambda\not{A}\not{B}\gamma_\lambda=4(AB) \tag{A38e}$$

$$\gamma_\lambda\not{A}\not{B}\not{C}\gamma_\lambda=-2\not{C}\not{B}\not{A} \tag{A38f}$$

$$\gamma_\lambda\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}\gamma_\lambda=2(\not{D}\not{A}\not{B}\not{C}+\not{C}\not{B}\not{A}\not{D}) \tag{A38g}$$

设a_1，a_2，a_3和a_4是不含γ-距阵的数，则有

$$\begin{aligned}&Tr\{(\not{A}_1+a_1)(\not{A}_2+a_2)(\not{A}_3+a_3)(\not{A}_4+a_4)\}\\&=(A_1A_2+a_1a_2)(A_3A_4+a_3a_4)\\&\quad+(A_1A_4+a_1a_4)\cdot(A_2A_3+a_2a_3)\\&\quad-(A_1A_3-a_1a_3)(A_2A_4-a_2a_4)\end{aligned} \tag{A38h}$$

在实际计算中，除了自旋求和外，我们还需要考虑涉及下物理过程中所发射或所吸收的光子的不同极化态求和。

设在一物理过程中，由极化矢量$\varepsilon_\mu^{(m)} \equiv \varepsilon_\mu^{(m)}(\mathbf{K})$（$m=1,2$）确定的一个光子（参见（9.17）式），其四维动量为k_μ，则该物理过程的矩阵元M_m将是$\varepsilon_\mu^{(m)}$的线性函数：

$$M_m = L_\mu \varepsilon_\mu^{(m)}, \quad m=1,2 \tag{A39}$$

当$m=1,2$时，$\varepsilon_\mu^{(m)*} = \varepsilon_\mu^{(m)}$，故极化截面（即没有对极化指标$m$求和的截面）为

$$X_m = M_m^\dagger M_m = L_\mu^\dagger L_\nu \varepsilon_\mu^{(m)} \varepsilon_\nu^{(m)}, \quad m=1,2 \tag{A40}$$

和第十五章对自旋指标求和的情况相类似，若过程发射光子，并且不考虑其极化，则我们必须遍及于终结极化态求和：

$$\sum_{m=1}^{2} X_m = \sum_{m=1}^{2} L_\mu^\dagger L_\nu \varepsilon_\mu^{(m)} \varepsilon_\nu^{(m)} \tag{A41}$$

若过程吸收光子，并且入射光子束是未极化的，则我们必须遍及于初始极化态求平均，即为（A41）式所得出的值的二分之一。

通过运用光子的包括四个极化态的协变描述，我们能大大简化（A41）式的计算。费曼证明了（参见Feynman, R.P., Phys.Rev.76, 769, 1949; section 8），如果我们用光子的四维动量k_μ置换（A39）式中的极化矢量$\varepsilon_\mu^{(m)}(\mathbf{K})$，则矩阵元$M_m$为零，即有

$$L_\mu k_\mu = 0 \tag{A42}$$

（A40）式所给出的截面是矩阵元的平方项，因此，倘若我们用k_μ置换（A40）式中的任一个因子$\varepsilon_\mu^{(m)}(\mathbf{K})$，那末，即使我们用一个任意的四维矢量$v_\mu$置换（A40）式中剩下的另一个因子$\varepsilon_\mu^{(m)}(\mathbf{K})$，截面$X_m$都必定为零。于是，我们可得出下面两个条件：

$$\left.\begin{aligned} L_\mu^\dagger L_\nu k_\nu v_\mu &= 0 \\ L_\mu^\dagger L_\nu v'_\mu k_\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{A43}$$

由（15.2）式，$k_0 = |\mathbf{K}|$，根据（9.17）式，我们有

$$k_\mu = \mathbf{K} + ik_0 = k_0 \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} + ik_0$$

$$= k_0\left(\frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} + i\right) = k_0 (\varepsilon_\mu^{(3)} + i\varepsilon_\mu^{(4)}) \tag{A44a}$$

设有

$$\left.\begin{aligned} v_\mu &= \varepsilon_\mu^{(3)} \\ v'_\mu &= i\varepsilon_\mu^{(4)} \end{aligned}\right\} \tag{A44b}$$

把（A44）式代入（A43）式，即得

$$L_\mu^\dagger L_\nu(\varepsilon_\mu^{(3)}\ \varepsilon_\nu^{(3)} + i\,\varepsilon_\mu^{(4)}\ \varepsilon_\nu^{(3)}) = 0 \tag{A45a}$$

$$L_\mu^\dagger L_\nu(i\,\varepsilon_\mu^{(4)}\ \varepsilon_\nu^{(3)} - \varepsilon_\mu^{(4)}\ \varepsilon_\nu^{(4)}) = 0 \tag{A45b}$$

从（A45a）式减去（A45b）式，并应用（9.17）式，即得：

$$L_\mu^\dagger L_\nu(\varepsilon_\mu^{(3)}\ \varepsilon_\nu^{(3)} + \varepsilon_\mu^{(4)}\ \varepsilon_\nu^{(4)}) = 0 \tag{A46}$$

把（A45）式和（A41）式相加，即得

$$\sum_{m=1}^{2} X_m = L_\mu^\dagger L_\nu\left[\left(\sum_{m=1}^{3}\ \varepsilon_\mu^{(m)}\ \varepsilon_\nu^{(m)}\right) + \varepsilon_\mu^{(4)}\ \varepsilon_\nu^{(4)}\right]$$

$$= L_\mu^\dagger L_\nu \delta_{\mu\nu} \tag{A47a}$$

式中，我们用到了（9.17）式。由（A47a）式，可得

$$\sum_{m=1}^{2} X_m = \sum_{m=1}^{4} L_m^\dagger L_m \tag{A47}$$

矩阵元M_m通过因子$\not{\varepsilon}^{(m)} = \gamma_\mu \varepsilon_\mu^{(m)}$而取决于$\varepsilon_\mu^{(m)}$，于是由(A39)式，$L_\mu$通过因子$\gamma_\mu$而取决于指标$\mu$。这样，（A47）式就向我们表明，在（A41）式中，我们可以用γ_m置换$\not{\varepsilon}^{(m)}$，并且把对极化指标$m=1,2$的求和扩展到对极化指标$m=1,2,3,4$的求和。

显而易见，根据（A47）式的导出，我们能立刻把上述结果推广到多于一个光子的情况。

附录B　费曼规则

从第十五章中，我们可以看到，量子场相互作用理论的主要任务就是首先计算出给定物理过程的跃迁振幅S_{fi}，然后再从S_{fi}推算跃迁几率。

设某一物理系统处于初态i，在相互作用哈密顿量$\mathscr{H}_I$作用后，转变到末态j，若S_{fi}是这个物理过程的跃迁振幅，则有

$$S_{fi} = \langle j|S|i\rangle$$

$$= \left\langle j \left| \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \right| i \right\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_{fi}^{(n)} \qquad (B1)$$

式中，

$$S_{fi}^{(n)} = \langle j|S^{(n)}|i\rangle \qquad (B2)$$

称为n级微扰跃迁振幅。$S_{fi}^{(n)}$一般是若干项的代数和，每一项都和一个费曼图相对应。现在，我们来讨论在动量空间中直接得出S矩阵元的费曼规则，这样，我们就可以避免坐标空间中的繁琐计算了。

首先，确定物理过程，即确定物理系统的初态$|i\rangle$和末态$|j\rangle$，如（15.3）和（15.4）式。

其次，确定导致这个物理过程的相互作用哈密顿量$\mathscr{H}_I$。

第三，判定所考虑的物理过程需要计算的微扰近似的级次，例如在十五章中就是二级微扰近似。

第四，画出和这个物理过程相对应的费曼图。注意必须把所有可能的拓扑结构不同的图都包括在内。每一个图对应跃迁振幅中的一项，任何图中费米子线不中断。

第五，根据所画出的费曼图，逆着费米子线（或电磁相互作用中的荷电玻色子线）的箭头方向依次写下各条外线，各条内线和各个顶点的相应表示式。外线代表入射或出射粒子；内线代表量子场的传播函数；顶点代表相互作用的发生，在任意顶点能量动量守恒，所以相应的表示式中总含有一个δ-函数。

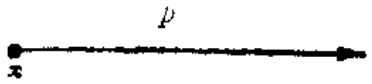
1. 与相互作用无关的费曼规则

（1）在x处产生一个费米子(P, r)的外线：

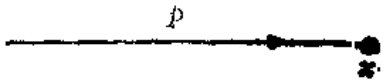
m是费米子静质量；$x=(\mathbf{X}, ix_0)$；$p=(\boldsymbol{P}, ip_0)$，$x_0=t$，$p_0=E_P$。r是自旋指标，下同，不再一一说明。在坐标空间中，和图B1相对应的算符是$\bar{\psi}^-(x)$；在动量空间中，和

图B1相对应的S矩阵元中的因子是

$$\sqrt{\frac{m}{E_p V}}\,\bar{u}^{(r)}(P) \qquad (B3)$$



图B1　费米子从x发出到无穷远



图B2　费米子从无穷远处进入x点

（2）在x处湮没一个费米子（P，r）的外线：

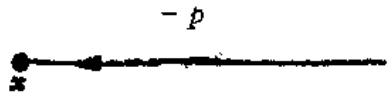
在坐标空间中，和图B2相对应的算符是$\psi^{+}(x)$；在动量空间中，和图B2相对应的S矩阵元中的因子是

$$\sqrt{\frac{m}{E_p V}}\,u^{(r)}(P) \qquad (B4)$$

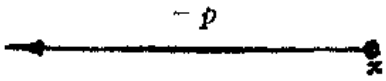
（3）在x处产生一个反费米子（P，r）的外线：

在坐标空间中，和图B3相对应的算符是$\bar{\psi}^{-}(x)$；在动量空间中，和图B3相对应的S矩阵元中的因子是

$$\sqrt{\frac{m}{E_p V}}\,u^{(r+2)}(P) \qquad (B5)$$



图B3　反费米子从x发出到无穷远



图B4　反费米子从无穷远进入x点

（4）在x处湮没一个反费米子（P，r）的外线：

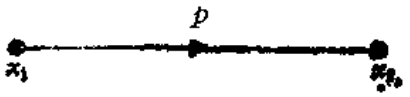
在坐标空间中，和图B4相对应的算符是$\bar{\psi}^{+}(x)$；在动量空间中，和图B4相对应的S矩阵元中的因子是：

$$\sqrt{\frac{m}{E_p V}}\,\bar{u}^{(r+2)}(P) \qquad (B6)$$

（5）费米子内线：

在坐标空间中，和图B5相对应的是旋量场传播函数

$$\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)} = -\frac{1}{2}S_F(x_2 - x_1) \qquad (B7)$$



图B5　费米子从x_1点运动到x_2点

在动量空间中，和图B5相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{-1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\not{p} - im}\left(\text{带}\int d^4p\right) \qquad (B8)$$

（6）在x处产生一个光子（k，m）的外线（m是极化指标）：

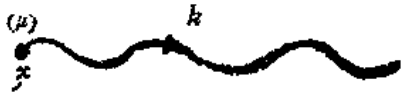
在坐标空间中，和图B6相对应的算符是$A_\mu^+(x)$；在动量空间中，和图B6相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\varepsilon_\mu^{(m)}(k),\quad (m=1,\ 2) \tag{B9}$$

（7）在x处湮没一个光子（k，m）的外线：

在坐标空间中，和图B7相对应的算符是$A_\mu^-(x)$；在动量空间中，和图B7相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}e_\mu^{(m)}(k),\quad (m=1,\ 2) \tag{B10}$$



图B6　光子从x点出发到无穷远



图B7　光子从无穷远处进入x点

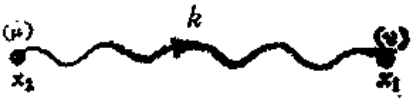
（8）光子内线：

在坐标空间中，和图B8相对应的算符是矢量场传播函数

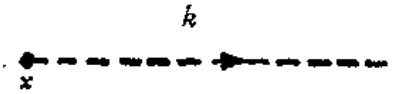
$$\overbrace{A_\mu(x_2)A_\nu(x_1)} = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_F(x_2-x_1) \tag{B11}$$

在动量空间中，和图B8相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\delta_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}\left(\text{带}\int d^4k\right) \tag{B12}$$



图B8　光子从x_2点运动到x_1点



图B9　介子从x点出发到无穷远

（9）在x处产生一个介子（k）的外线：

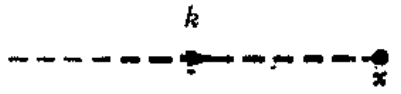
在坐标空间中，和图B9相对应的算符是$\phi^-(x)$，在动量空间中，和图B9相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{B13}$$

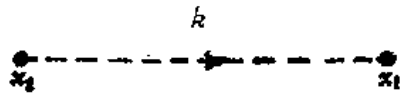
（10）在x处湮没一个介子（k）的外线：

在坐标空间中，和图$B10$相对应的算符是$\phi^+(x)$；在动量空间中，和图$B10$相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \tag{B14}$$



图B10　介子从无穷远处进入x点



图B11　介子从x_2点运动到x_1点

（11）SU（2）不变的赝标介子理论中的介子内线：

在坐标空间中，和图 B11相对应的是SU（2）不变的赝标介子理论〔其哈密顿量密度见（11.33）式〕的传播函数

$$\phi_i(x_2)\phi_j(x_1) = \frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1)\delta_{ij} \tag{B15}$$

在动量空间中，和图B11相对应的S矩阵元中的因子是

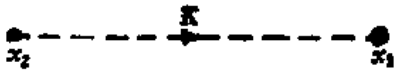
$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\,\delta_{ij}\,\frac{1}{k^2 + m_0^2}\left(\text{带}\int d^4k\right) \tag{B16}$$

式中，m_0是介子的静止质量。i，$j=1$，2，3是介子场同位旋分量或电荷态的指标。

（12）中性赝标介子理论中的介子内线：

在坐标空间中，和图 B12 相对应的是中性赝标介子理论中的传播函数〔参见（6.15—18）和（19.3）式〕：

$$\phi(x_2)\phi(x_1) = \frac{1}{2}\Delta_F(x_2 - x_1) \tag{B17}$$



图B12　介子从x_2点运动到x_1点

在动量空间中，和图B12相对应的S矩阵元中的因子是

$$\frac{-i}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k_2 + m_0^2}\left(\text{带}\int d^4k\right) \tag{B18}$$

2．费曼图中的顶角

量子场的相互作用决定了微扰级次n、费曼图的拓扑结构和费曼图的顶角部分。下面，我们就来列举和相互作用有关的这些顶角因子。

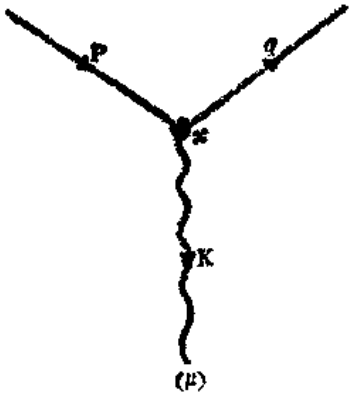
（1）量子电动力学中的顶角：

在本书中，我们用e来表示电子的电荷。设e_0是e的绝对值，即有$e_0 = |e|$，则$e = -e_0$。这样，由（13.10）式，量子电动力学的哈密顿密度$\mathscr{H}_I(x)$为

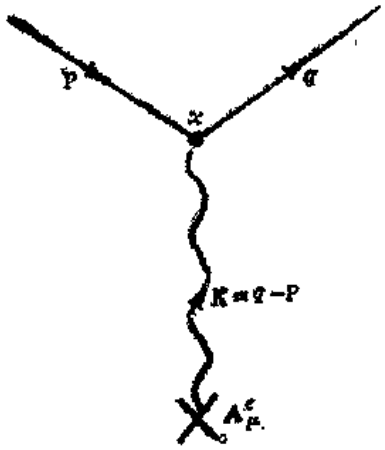
$$\mathscr{H}_I(x) = -ie_0 N[\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)] \tag{B19}$$

费曼图如图 B13．在动量空间中，和图B13相对应的S矩阵元中的因子是

$$-e_0\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \tag{B20}$$



图B13　费米子和光子相互作用
（图中，K，P，q分别是四维矢量）



图B14　电子与外电磁场相互作用
（图中，K，P，q分别是四维矢量）

（2）电子与外电磁场相互作用的顶角

当电子场与外加c数电磁场$A^e_\mu(x)$相互作用时，我们需要在（B19）的哈密顿量$\mathscr{H}_I(x)$上再加上一项表示电子与外加电磁场$A^e_\mu(x)$相互作用的附加哈密顿量：

$$\mathscr{H}'_I(x)=-ie_0N[\bar{\psi}(x)\not{A}^e(x)\psi(x)] \tag{B21}$$

费曼图如图B14．

在动量空间中，和图$B14$相对应的S矩阵元中的顶角因子（包括外场在内）是

$$-e_0\gamma_\mu A^e_\mu(k) \tag{B22}$$

式中，$k=q-p$是顶角处进入的动量．$A^e_\mu(k)$是外电磁场的傅里叶变换

$$A^e_\mu(k)=\int A^e_\mu(x)e^{-ikx}d^4x \tag{B23}$$

这里要注意的是，和量子化电磁场的情形不同，在顶角处进入的动量k不受质量壳层关系$k^2=0$的限制．所以，在有外场的情形下，一阶散射矩阵元不为零．当$A^e_\mu(x)$是静场（static field）时，顶角因子（B22）式变成

$$-e_0\gamma_\mu A^e_\mu(K)2\pi\delta(E_p-E_q) \tag{B24}$$

其中

$$A^e_\mu(K)=\int A^e_\mu(X)\cdot e^{-iK\cdot X}d^3x \tag{B25}$$

这时，虽然动量仍是不守恒的，但（B24）式中的δ-函数保证了能量守恒．

（3）中性赝标介子理论中的顶角：

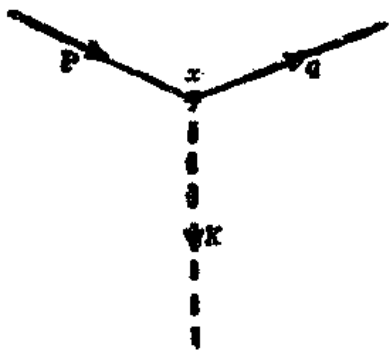
由（13.9）式，可得中性赝标介子理论中相互作用哈密顿量密度为：

$$\mathscr{H}_I(x)=igN[\bar{\psi}(x)\gamma_5\phi(x)\psi(x)] \tag{B26}$$

费曼图如图 B15.

在动量空间中，和图B15相对应的S矩阵元中的因子是

$$g\gamma_5(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \tag{B27}$$



图B15　费米子和中性赝标介子相互作用（图中，K，P，q分别是四维矢量）

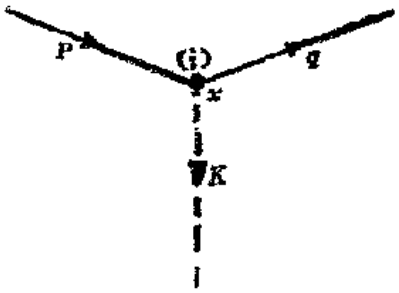


图1B6　费米子和SU(2)不变的赝标介子相互作用（图中，K，P，q分别是四维矢量）

（4）SU（2）不变的赝标介子理论中的顶角：

由（11.33）式，我们可得SU（2）不变的费米子与介子相互作用的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}_I(x)=igN\{\bar{\psi}(x)[\vec{\tau}\cdot\vec{\phi}(x)]\gamma_5\psi(x)\} \tag{B28}$$

费曼图如图B16.

在动量空间中，和图B16相对应的S矩阵元中的因子是：

$$g\gamma_5\tau_i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-q-k) \tag{B29}$$

这是同位旋态为 i 的赝标介子的顶角.

3. 费米子闭合回路

在动量空间中，和图 B13的闭合回路或类似于图 B13 的多角形封闭回路相对应的 S 矩阵元中的因子是

$$(-1)\,T_r\{①②③④\} \tag{B30}$$

式中，①和③是顶角因子，②和④是费米子内线.



图B17　费米子闭合回路

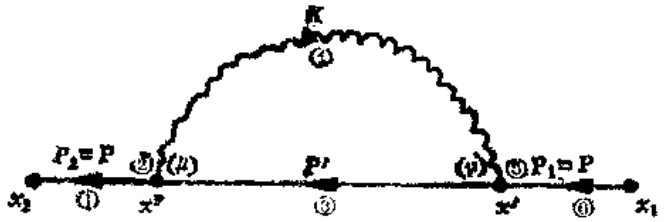
4. 应用

下面，我们举几个例子，来说明如何利用费曼规则直接写出动量空间中的 S 矩阵

元．下面这些例子在动量空间中的 S 矩阵元，都是我们在前面从坐标空间出发，经过繁琐的计算后得出过的．

（1）（18.7—8）式的导出：

由第十八章，费米子传播函数自能修正项的费曼图如图B18所示．



图B18　费米子传播函数的自能修正（图中，K，P′，P分别是四维矢量）

利用费曼规则，我们可直接写出和图 B18对应的动量空间中的S矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)} = \int d^4p_2\, d^4k\, d^4p'\, d^4p_1 \underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not p_2 - iM}}_{①}$$

$$\times \underbrace{(-e_0)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k-p_2)}_{②}$$

$$\times \underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not p' - iM}}_{③}\cdot\underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\delta_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}}_{④}$$

$$\times \underbrace{(-e_0)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k-p_1)}_{⑤}$$

$$\times \underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not p_1 - iM}}_{⑥}$$

$$= \int d^4k d^4p' d^4p_2 \frac{1}{\not p_2 - iM} e\gamma_\mu \delta^{(4)}(p'+k-p_2)$$

$$\times \frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not p' - iM}\cdot\frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot e\gamma_\mu\frac{1}{\not p' + \not k - iM}$$

$$= \int d^4k d^4p_2 \frac{1}{\not p_2 - iM}\cdot e\gamma_\mu\cdot\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not p_2 - \not k - iM}$$

$$\times \frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot e\gamma_\mu\cdot\frac{1}{\not p_2 - iM}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{1}{\not p - iM}\left\{\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\gamma_\mu\frac{1}{\not p - \not k - iM}\right.$$

$$\times \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \Big\} \frac{1}{\not p - iM}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p\, S_F^{(2)}(p) \qquad (B31)$$

式中

$$S_F^{(2)}(p) = S_F(p)\Sigma(W,\ p)S_F(p) \qquad (B32)$$

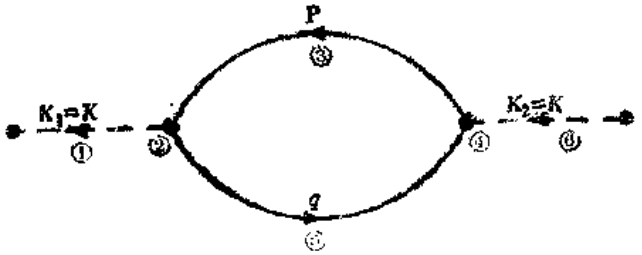
$$S_F(p) = \frac{1}{\not p - iM} \qquad (B33)$$

$$\Sigma(W,\ p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k\, \gamma_\mu \frac{1}{\not q - \not k - iM} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \qquad (B34)$$

这就是（18.7—8）式.

（2）（19.4—6）式的导出：

由第十九章，中性赝标介子传播函数自能修正项的费曼图如图 B19所示.



图B19　中性赝标介子传播函数的自能修正（图中，K，P，q分别是四维矢量）

利用费曼规则，我们可直接写出和图B19对应的动量空间中的S距阵元为

$$S_{fi}^{(2)} = \int d^4k_1 d^4p d^4q\, d^4k_2 \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k_1^2 + m_0^2}}_{①}$$

$$\times (-1) Tr \Big\{ \underbrace{g\gamma_5 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k_1)}_{②} \cdot \underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{\not p - iM_0}}_{③}$$

$$\times \underbrace{g\gamma_5 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k_2)}_{④} \cdot \underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{\not q - iM_0}}_{⑤} \Big\}$$

$$\times \underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k_2^2 + m_0^2}}_{⑥}$$

$$= \int d^4pd^4k_1d^4k_2\,(-g^2)\frac{1}{(2\pi)^8}\delta^{(4)}(k_1-k_2)$$

$$\times \frac{i}{k_1^2+m_0^2} Tr\left\{\gamma_5\frac{1}{\not p-iM_0}\gamma_5\frac{1}{\not p-\not k_1-iM_0}\right\}\frac{i}{k_2^2+m_0^2}$$

$$= \int d^4pd^4k_1\,(-g^2)\frac{1}{(2\pi)^8}$$

$$\times \frac{i}{k_1^2+m_0^2} Tr\left\{\gamma_5\frac{1}{\not p-iM_0}\gamma_5\frac{1}{\not p-\not k_1-iM_0}\right\}\frac{i}{k_1^2+m_0^2}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{i}{k^2+m_0^2}\left\{\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4pTr\left[\gamma_5\frac{1}{\not p-iM_0}\gamma_5\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{1}{\not p-\not k-iM_0}\right]\right\}\frac{i}{k^2+m_0^2}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\Delta_F^{(2)}(k) \qquad \text{(B35)}$$

其中

$$\Delta_F^{(2)}(k) = \Delta_F(k)\Pi(W',\ k)\Delta_F(k) \qquad \text{(B36)}$$

$$\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2+m_0^2} \qquad \text{(B37)}$$

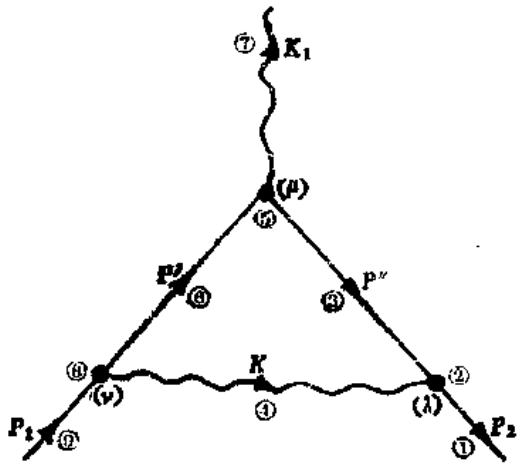
$$\Pi(W',\ k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int d^4p$$

$$\cdot Tr\left[\gamma_5\frac{1}{\not p-iM_0}\gamma_5\frac{1}{\not p-\not k-iM_0}\right] \text{(B38)}$$

这就是（19.4—6）式。

（3）(20.3)式的导出：

由第二十章，二阶顶角修正的费曼图如图B20所示。



图B20　二阶顶角修正

（图中，P_1，K_1，P'，P_2，P''，K分别是四维矢量）

利用费曼规则，我们可直接写出和图B 20对应的动量空间中的S矩阵元为：

$$S_{fi}^{(2)} = \int d^4p''d^4p'\,d^4k\underbrace{\left(\frac{M_0}{E_{P_2}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(\sigma)}(P_2)}_{①}$$

$$\times \underbrace{(-e_0)\gamma_\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_2-p''-k)}_{②}\cdot\underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not{p}''-iM_0}}_{③}$$

$$\times\underbrace{\frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{\delta_{\lambda\nu}}{k^2}}_{④}\cdot\underbrace{(-e_0)\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4(p'-k_1-p'')}_{⑤}$$

$$\times\underbrace{\frac{-1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\not{p}'-iM_0}}_{⑥}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}V}}e_\mu^{(m)}(k_1)}_{⑦}$$

$$\times\underbrace{(-e_0)\gamma_\nu(2\pi)^4\delta^4(p_1-p'-k)}_{⑧}$$

$$\times\underbrace{\left(\frac{M_0}{E_{p_1}V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(s)}(\boldsymbol{P}_1)}_{⑨}$$

$$=\int d^4p''d^4k\left(\frac{M_0}{E_{p_2}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P}_2)e\gamma_\lambda\delta^{(4)}(p_2-p''-k)$$

$$\times\frac{1}{\not{p}''-iM_0}\cdot\frac{-ie}{k^2}\gamma_\mu\delta^{(4)}(p_1-k-k_1-p'')$$

$$\times\frac{1}{\not{p}_1-\not{k}-iM_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}V}}e_\mu^{(m)}(k_1)e\gamma_\lambda\left(\frac{M_0}{E_{p_1}V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(s)}(\boldsymbol{P}_1)$$

$$=\int d^4k\left(\frac{M_0}{E_{p_2}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P}_2)\gamma_\lambda\frac{1}{\not{p}_2-\not{k}-iM_0}\cdot\frac{(-ie^3)}{k^2}$$

$$\times\gamma_\mu\delta^{(4)}(p_1-k-k_1-p_2+k)\cdot\frac{1}{\not{p}_1-\not{k}-iM_0}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}V}}e_\mu^{(m)}(k_1)\gamma_\lambda\left(\frac{M_0}{E_{p_1}V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(s)}(\boldsymbol{P}_1)$$

$$=\left(\frac{M_0}{E_{p_2}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{P}_2)e\Lambda_\mu(V_1,\ p_1,\ p_2)(2\pi)^4$$

$$\times\delta^{(4)}(p_1-p_2-k_1)\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k_1}V}}e_\mu^{(m)}(k_1)\left(\frac{M_0}{E_{p_1}V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(s)}(\boldsymbol{P}_1) \tag{B39}$$

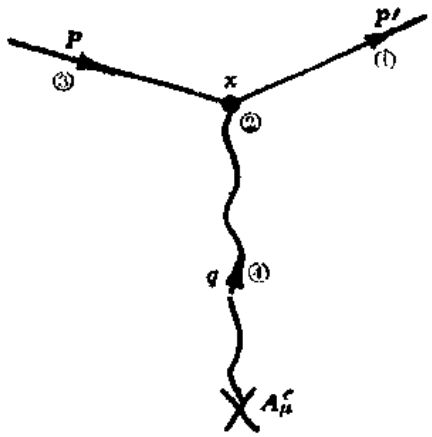
式中

$$\Lambda_\mu(V_1,\ p_1,\ p_2)=\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma_\lambda\frac{1}{\not{p}_2-\not{k}-iM_0}\gamma_\mu\frac{1}{\not{p}_1-\not{k}-iM_0}\gamma_\lambda\frac{1}{k^2} \tag{B40}$$

这就是（20.3）式.

（4）（16.8）式的导出

由第十六章，电子被外静电场$A^e_\mu(x)$散射的费曼图如图B21所示.



图B21　电子被外静电场$A^e_\mu(x)$散射

（图中，P′，q，P分别是四维矢量）

在动量空间中，和图B21相对应的S矩阵元中的因子是：

$$S_{fi}^{(2)} = \underbrace{\left(\frac{M_0}{E_{P'}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(s)}(P')}_{①} \cdot \underbrace{e\gamma_\mu A^e_\mu(k)(2\pi)\delta(E_P - E_{P'})}_{②④} \times \underbrace{\left(\frac{M_0}{E_P V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(r)}(P)}_{③}$$

$$= 2\pi\delta(E_P - E_{P'})\frac{e}{V}\left(\frac{M_0}{E_P}\right)\bar{u}^{(s)}(P')\gamma_4 A^e_4(K)u^{(r)}(P)$$

$$= 2\pi\delta(E_P - E_{P'})\frac{ie}{V}\left(\frac{M_0}{E_P}\right)\phi(P' - P)[u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)] \qquad (B41)$$

式中

$$A^e_1(K) = A^e_2(K) = A^e_3(K) = 0 \qquad (B42)$$

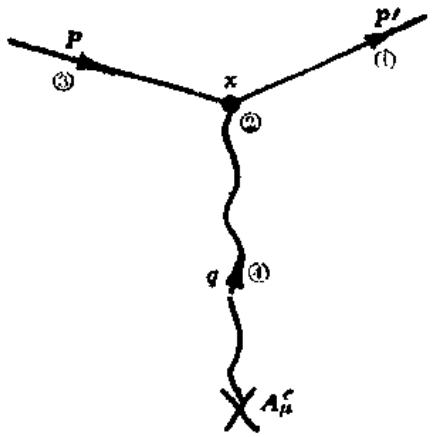
$$A^e_4(K) = \int iV(X)\,e^{-iK\cdot X}d^3x = i\phi(K) = i\phi(P - P') \qquad (B43)$$

这就是（16.8）式.

这就是（20.3）式.

（4）（16.8）式的导出

由第十六章，电子被外静电场$A^e_\mu(x)$散射的费曼图如图B21所示.



图B21　电子被外静电场$A^e_\mu(x)$散射

（图中，P′，q，P分别是四维矢量）

在动量空间中，和图B21相对应的S矩阵元中的因子是：

$$S_{fi}^{(2)} = \underbrace{\left(\frac{M_0}{E_{P'}V}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}^{(s)}(P')}_{①} \cdot \underbrace{e\gamma_\mu A^e_\mu(k)(2\pi)\delta(E_P - E_{P'})}_{②④} \times \underbrace{\left(\frac{M_0}{E_P V}\right)^{\frac{1}{2}}u^{(r)}(P)}_{③}$$

$$= 2\pi\delta(E_P - E_{P'})\frac{e}{V}\left(\frac{M_0}{E_P}\right)\bar{u}^{(s)}(P')\gamma_4 A^e_4(K)u^{(r)}(P)$$

$$= 2\pi\delta(E_P - E_{P'})\frac{ie}{V}\left(\frac{M_0}{E_P}\right)\phi(P' - P)[u^{(s)\dagger}(P')u^{(r)}(P)] \qquad (B41)$$

式中

$$A^e_1(K) = A^e_2(K) = A^e_3(K) = 0 \qquad (B42)$$

$$A^e_4(K) = \int iV(X)\,e^{-iK\cdot X}d^3x = i\phi(K) = i\phi(P - P') \qquad (B43)$$

这就是（16.8）式.