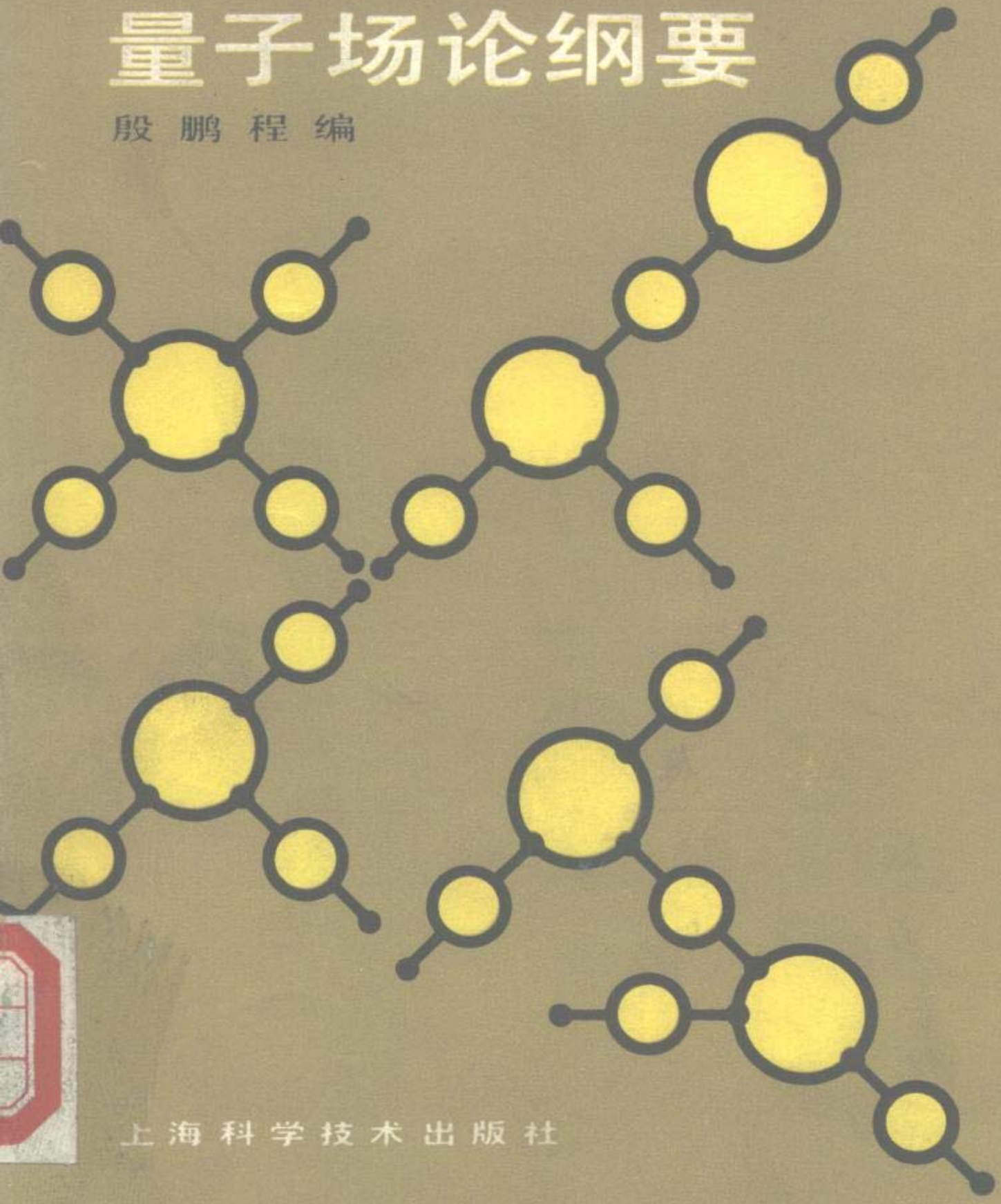
量子场论纲要

殷鹏程编

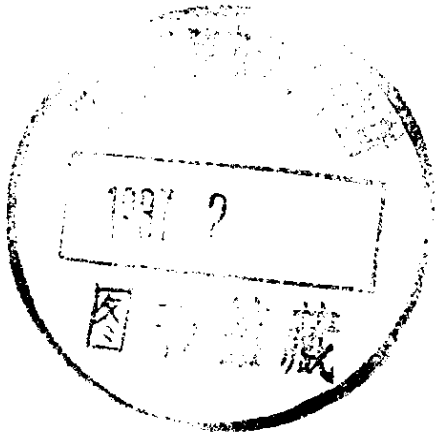


上海科学技术出版社

53.366
575

量子场论纲要

殷鹏程 编



上海科学技术出版社

8710119

量子场论纲要

殷鹏程　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 17　字数 448,000

1986 年 6 月第 1 版　1986 年 9 月第一次印刷

印数 1—3,300

统一书号：13119·1333　　定价：3.75 元

目　录

前言

第一章　相对论量子力学 ……（1）

§1.1　Dirac 方程 ……（1）
§1.2　Dirac 的 γ_μ 矩阵 ……（5）
§1.3　关于 γ 矩阵的表示……（8）
§1.4　Dirac 方程的协变性质 ……（10）
§1.5　Dirac 矩阵所形成的张量 ……（14）
§1.6　Dirac 方程的一般解 ……（16）
§1.7　Dirac 方程的平面波特解及其物理意义 ……（20）
§1.8　Dirac 方程解的正交归一性和封闭性 ……（24）
§1.9　Dirac 粒子在外场中的运动 ……（28）
§1.10　电荷共轭 ……（33）
§1.11　Dirac 方程的非相对论近似……（35）
§1.12　中微子两分量理论 ……（38）

第二章　量子场论的基本原理 ……（42）

§2.1　Lagrange 函数与作用量原理 ……（42）
§2.2　场的能量和动量……（46）
§2.3　场的角动量张量和自旋张量……（49）
§2.4　场的电荷电流矢量……（52）
§2.5　场的量子化及其物理基础……（54）
§2.6　对称性质与守恒定律……（58）

第三章　标量场的量子化理论 ……（63）

§3.1　标量场的动量、能量 ……（63）

§3.2 复标量场的电荷、动量、能量……(65)
§3.3 标量场的量子化……(67)
§3.4 粒子的湮灭算符和产生算符,场的粒子性 ……(68)
§3.5 对易关系及其协变性质……(71)
§3.6 π 介子的同位旋……(74)

第四章 电磁场的量子化理论 ……(78)

§4.1 电磁场的规范不变性……(78)
§4.2 电磁场的量子化……(81)
§4.3 光子的自旋……(84)
§4.4 $A_\mu(x)$的对易关系和 Lorentz 条件 ……(86)
§4.5 矢量场的量子化理论……(88)

第五章 Dirac 场的量子化理论 ……(91)

§5.1 Dirac 场的动量、能量、电荷与自旋 ……(91)
§5.2 Dirac 场的量子化 ……(93)
§5.3 ψ 与 $\bar{\psi}$ 的反对易关系及其协变性质……(95)
§5.4 核子的同位旋……(96)
§5.5 正规乘积与真空态的平均值……(102)
§5.6 各种场方程的 Green 函数……(104)

第六章 自由场的变换性质 ……(110)

§6.1 空间反演与宇称……(110)
§6.2 电荷共轭(正粒子——反粒子共轭)……(117)
§6.3 时间反演……(121)
§6.4 G 变换与 G 宇称 ……(127)
§6.5 双粒子体系……(132)

第七章 场的相互作用 ……(137)

§7.1 场相互作用的引入……(137)

§7.2 场相互作用的分类 …… (140)
§7.3 轻、重粒子数守恒定律 …… (142)
§7.4 电荷守恒定律与规范不变性 …… (143)
§7.5 电荷无关性与同位旋守恒 …… (146)
§7.6 PCT 定理 …… (148)
§7.7 πN 的强相互作用 …… (150)
§7.8 奇异粒子的强相互作用 …… (154)
§7.9 费米子和光子的电磁相互作用 …… (163)
§7.10 玻色子和光子的电磁相互作用 …… (164)
§7.11 弱相互作用 …… (165)
§7.12 弱矢流守恒定律和轴矢流部分守恒 $PCAC$ …… (171)

第八章 S 矩阵与协变的微扰理论 …… (177)

§8.1 相互作用图象 …… (177)
§8.2 S 矩阵 …… (179)
§8.3 算符的并缩 …… (183)
§8.4 Wick 定理 …… (185)
§8.5 Feynman 图 …… (187)
§8.6 Feynman 图应用示例 …… (195)
§8.7 费米子线回路, Furry 定理 …… (201)

第九章 关于运动学的计算及其应用 …… (205)

§9.1 跃迁几率与有效截面 …… (205)
§9.2 两体衰变的生命期 …… (209)
§9.3 三体衰变的能量分布和角关联 …… (212)
§9.4 $\omega\to 3\pi$ 的运动学分析 …… (218)
§9.5 散射振幅与光学定理 …… (222)
§9.6 Dirac 粒子自旋的求和与求平均 …… (225)
§9.7 极化矩阵及有关 r 矩阵的计算 …… (229)

§9.8 光子极化的求和与求平均 …… (233)
§9.9 对称性质与 S 矩阵元，精细平衡 …… (238)
§9.10 旋转不变性，πN 散射的分支比 …… (243)
§9.11 两体衰变的角分布 …… (246)
§9.12 替换定律 …… (252)

第十章 场相互作用示例(无辐射修正) …… (255)

§10.1 $\pi^- \to l^- + \bar{\nu}$ 衰变 …… (255)
§10.2 μ 介子衰变 …… (258)
§10.3 Compton 散射 …… (263)
§10.4 关于 Compton 散射的极化情况 …… (269)
§10.5 韧致辐射 …… (272)
§10.6 电子-电子散射 …… (279)
§10.7 荷电介子和光子的散射 …… (283)

第十一章 S 矩阵的发散及其消除，重整化理论 …… (286)

§11.1 高级修正的一般考虑 …… (287)
§11.2 Feynman 图形的分类 …… (291)
§11.3 关于 $\Sigma^*(p)$ 和 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$ 的一般表达式 …… (296)
§11.4 Dyson 方程与 Ward 等式 …… (299)
§11.5 既约图形的发散及其分类 …… (302)
§11.6 质量重整化与场量重整化 …… (307)
§11.7 满载的传播函数与满载的顶角函数 …… (312)
§11.8 真空极化与电荷重整化 …… (316)
§11.9 S 矩阵元的重整化及其按 e_c 的展开 …… (320)
§11.10 紫外发散的消除 …… (326)
§11.11 真空起伏 …… (330)
§11.12 红外发散及其消除 …… (332)
§11.13 介子理论里的发散问题 …… (341)

第十二章　辐射修正示例 …… (346)

§ 12.1　发散积分 …… (346)
§ 12.2　电子的固有能量 …… (354)
§ 12.3　真空极化 …… (359)
§ 12.4　顶角型修正 …… (364)
§ 12.5　电子在外场中势能的修正、电子的反常磁矩 …… (368)
§ 12.6　Lamb 能级迁移 …… (372)

第十三章　路线积分理论形式 …… (379)

§ 13.1　单粒子量子力学的路线积分形式 …… (379)
§ 13.2　矩阵元的路线积分形式 …… (384)
§ 13.3　产生泛函 …… (386)
§ 13.4　线型谐振子 …… (391)
§ 13.5　量子场论的路线积分形式(Green 函数) …… (395)
§ 13.6　费米场的路线积分形式 …… (399)
§ 13.7　微扰展开与 Feynman 图形 …… (405)
§ 13.8　连接的 Green 函数 …… (416)
§ 13.9　单粒子不可约 Green 函数(1PI) …… (420)
§ 13.10　圈图展开 …… (427)
§ 13.11　Ward-Takahashi 等式及 Goldstone 理论 …… (434)

第十四章　维数正规化与重整化群方法 …… (442)

§ 14.1　n 维空间的 Feynman 积分 …… (444)
§ 14.2　重整化和正规化程序简介 …… (449)
§ 14.3　发散积分的维数正规化 …… (454)
§ 14.4　量纲分析与 γ 矩阵 …… (458)
§ 14.5　QED 的维数正规化 …… (462)
§ 14.6　Adler 反常 …… (469)
§ 14.7　φ^4 理论的维数正规化 …… (476)

§14.8 重整化群的简单回顾 …… (480)
§14.9 重整化群方程 …… (482)
§14.10 重整化群方程的解 …… (487)
§14.11 重整化群函数的性质与 Green 函数的渐近行为 …… (491)
§14.12 重整化群函数的计算 …… (494)
附录 I 泛函微商 …… (500)
附录 II 光子物理态与不定度规量子化方法 …… (504)
附录 III Wick 定理 …… (510)
习题 …… (513)
单位、度规与符号 …… (528)

前　言

本书是作者多年来给研究生讲授量子场论课程的系统总结，材料的选择以及讲述的顺序，都适当地考虑了国内学生的实际情况。

量子场论是一门内容丰富而且发展迅速的学科，要想在一本著作中包罗无遗几乎是不可能的；同时，从教学上来看也无此必要。因此本书所选的内容主要在于介绍量子场论中的主干和发展线索，故书名称为"纲要"比较合适。

为使这门课程所占的学时不致太多，有些重要课题也只好放在其他课程中去讲授，例如规范场理论将在规范场论课程中讲授；有些重要的片段性的理论，例如色散关系、流代数、束缚态场论、QCD 微扰论以及强子结构理论等将在粒子理论课程中讲授。因此本书仅为学习上述后继课程以及研究理论物理特别是基本粒子理论提供了必要的基础。虽然如此，本书内容依然可自成体系独立成册。至于主干外的枝叶、花朵，则在习题中作了适当补充，当然大部分习题是为学生深入理解课程内容和熟练运算技巧而选取的。

本书内容大体上可分前后两大部分：第十章以前的内容，主要是介绍量子场论的基本概念、基本原理、基本运算以及一些有关基本粒子的重要知识，以培养学生的基本运算技巧，使学生初步具备解决基本粒子实际问题的能力。自第十一章以后，我们介绍了重整化理论、量子场论中发散量的处理以及量子场论理论形式的提炼和最新进展。这些内容在后继课程和近代文献中都有着广泛的应用，是研究基础理论的学生所必备的基础知识。原想更多地介绍一些最新成就，然而时间和精力有限，难以求全了，只能做到引导入门而已。

本书比较强调协变的数学形式，对场的量子化、S 矩阵的微扰

展开以及具体问题的运算都是这样强调的。理论形式当然不是本质问题，也许只是个人的爱好，而且在有些场合非协变形式也有其物理图象比较清楚的优点。这时作者常把非协变形式也一并介绍以作比较，在习题中也作了适当的补充。

重要的结论和公式加方框标出，有时也还给出在 Bjorken 度规下的相应表示式以便查考。有些读者想要很快了解本书的概貌，那末初次浏览时，可以忽略那些非重要的计算部分，这时方框标记将起到一定的指导作用。

本书所采用的度规是通常所谓的 pauli 度规($\delta_{\mu\nu}$)，这对国内学生当然并不陌生，不过在国际上目前也通用另一种 Bjorken 度规($g_{\mu\nu}$)。为了便于阅读外国文献和其他专著，在书后附有两种度规的符号和公式的对照表，以备查考。

学海无涯，而个人的才学有限，挂一漏万，在所难免，深望这一方面的专家和广大读者多提宝贵意见，以便今后改进。

本书的逐渐形成同历届选读本课程的同学的努力是分不开的，他们的提问、讨论、对材料的选取以及习题的演算都为本书内容的充实做出了积极的贡献，在此特向他们致以谢意。

殷鹏程

1985 年 10 月

O4/24

内 容 提 要

本书是作者多年来讲授“量子场论”课程的总结性论著，比较适合国内学生的水平。特点是以相对论协变形式贯彻始终，最后两章是量子场论理论形式的最新进展，内容为国内量子场论书籍中所未涉及过的。

全书共十四章，大体上分前后两部分：第十章以前的内容，主要是介绍量子场论的基本概念、基本原理、基本运算以及一些有关基本粒子的重要知识，以培养学生的基本运算技巧，使学生能初步具备解决基本粒子实际问题的能力。自第十一章以后，介绍了重整化理论、量子场论中发散量的处理、量子场论理论形式的提炼和最新进展。这些内容在后继课程和近代文献中都有广泛的应用，也是研究基本理论必备的基础知识。

本书可作为高等学校物理专业的教材，也可供有关理论物理研究的人员参考。

第一章　相对论量子力学

相对论量子力学是 Schrödinger 非相对论量子力学的进一步发展，也是量子理论发展过程中的一个重要标志。Dirac 方程不仅有其直接的重要结论，例如氢原子的精细结构及电子的磁矩等；而且，对于作为 Dirac 粒子的场方程，即 Dirac 方程的研究，在量子场论里也占着极重要的地位。尤其在许多实际问题的计算中，对这方面的了解更不可缺少。为了接近于历史发展的顺序，我们在未讨论场论以前，先在本章里讨论单粒子相对论量子力学。

本章第一、二、三节讨论 Dirac 方程本身及 γ 矩阵的一些性质。第四、五两节讨论 Dirac 方程的变换性质。第六至第十节讨论 Dirac 方程解的一些性质。第十一节讨论 Dirac 方程的非相对论近似。这样，使读者不仅可以对此方程能有较清楚的物理理解而且还可了解在实际计算中经常需要的一些重要结论。第十二节则介绍中微子两分量理论，为以后讨论弱相互作用作一些准备。

§1.1 Dirac 方　程

Schrödinger 方程是非相对论的。这是因为 Schrödinger 方程可由非相对论哈密顿函数，以 $p_\mu \to i\partial_\mu$ 的代换而得到，它是对时间 t 的一次微分方程，另一方面又是对空间坐标 x 的二次微分方程，显然时间和空间坐标并不处在对称的地位。这样，该方程就不能正确地反映高速（接近光速）微观粒子的行为，也不能自动给出电子的自旋以及自旋与轨道的耦合。虽然 Pauli 在这个方程里唯象地引进了电子自旋，但它依然是非相对论的。

Klein-Gordon 于 1927 年把自由单粒子的 Schrödinger 方程推广到相对论情况，而使其在 Lorentz 变换下，保持协变性质。

8710119

他们由相对论自由粒子的动量能量关系式*

$$\boldsymbol{p}^2+m^2=E^2$$

(其中 $\boldsymbol{p}$, m 和 E 分别为粒子的动量、质量和能量)出发,利用对应关系

$$p_\mu \to -i\partial_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

就得到

$$(\Box - m^2)\psi = 0。 \qquad (1.1)_1$$

其中 $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$。$(1.1)_1$ 式即为 Klein-Gordan 方程(以后简称 K-G 方程)。

如果以 K-G 方程作为 Schrödinger 方程在相对论情况下的推广,人们自然希望能用它来描写自由电子的一般行为,可是却遇到了以下的困难。在 $(1.1)_1$ 式的基础上,如果引进

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{2m_i}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \qquad (1.2)_1$$

$$\rho = \frac{i}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)。 \qquad (1.3)_1$$

分别作为粒子流密度和粒子密度的表达式(注意,以上 $\boldsymbol{j}$ 的表达式和 Schrödinger 方程的 $\boldsymbol{j}$ 的表达式是一样的,但 ρ 的表达式却不相同),就可以证明二者满足粒子守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0。$$

由于 K-G 方程是二阶微分方程,ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 在初始时刻的数值是可以任意给定的,这样,由 $(1.3)_1$ 式所表示的粒子密度既可取正值也可取负值,也就是说 $(1.3)_1$ 式并不能满足在某处找到粒子的几率是恒正的要求。这个困难,不能通过修改 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 的表达式而加以消除。因此,虽然 K-G 方程满足相对论的要求,却不能用来圆满地描写自由单电子的行为,故而 K-G 方程被人们忽视了很久。直到后来,在场的量子理论里,把 K-G 方程加以量子化用来作为

* 以后除特别说明外,一般都取所谓自然单位,即 $\hbar=1$, $c=1$。

自旋为零的粒子(例如 π 介子) 的场方程，它才重新被人们重视起来。这个问题以后我们还要讨论到。

在微分方程运算中，我们常常用增加变量的办法，使得原方程的阶数下降。这种方法也可以用来降低 K-G 方程的阶数从而使 ρ 成为恒正的，因而也就消除上述困难。

Dirac 用增加 ψ 的分量方法，并根据一些原则改进了 K-G 方程。他于 1928 年提出了电子的 Dirac 方程。这些原则是：

(1) 因为自由粒子的能量、动量满足关系 $|\boldsymbol{p}|^2+m^2=E^2$，所以正确波函数的任一分量都应满足 K-G 方程，这一点我们以后简称为 K-G 条件；

(2) 为保证 ρ 的数值恒正，要设法消除 ρ 表式中的对时间的微商项，这将要求波函数的方程中只有对时间的一次微商出现。除了上述的 K-G 条件外，设想 ψ 各分量之间还满足一阶微分方程组(由于相对论)的要求，时间和空间具有同等地位，因而方程组中对空间和对时间都应只有一阶微商出现；

(3) 由于态迭加原理要求，所得方程应该是线性的。

Dirac 设想，电子波函数有 n 个分量，它们满足一阶线性方程组：

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)\psi_\beta(x)=0 \quad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots n), \qquad (1.4)_1$$

式中 $\psi_\beta(x)$ 为电子波函数，$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$ 为一 $n\times n$ 的矩阵，n 应为多少，暂且不必固定。为使 $(1.4)_1$ 式为一阶微分方程组，Λ 应为时间、空间微分算符 ∂ 的线性函数，也就是说 $\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$ 一般可写成 (这里省掉矩阵指标 α, β)

$$\Lambda(\partial)=\rho_\mu\partial_\mu+\rho m, \qquad (1.5)_1$$

其中 ρ_μ，ρ 均为常数矩阵。

由于 K-G 条件的要求，假定存在微分算符矩阵 $d(\partial)$ 使得

$$d_{\alpha\gamma}(\partial)\Lambda_{\gamma\beta}(\partial)=(\Box-m^2)\delta_{\alpha\beta}。 \qquad (1.6)_1$$

对于自旋为 1/2 的粒子，可以证明 $d(\partial)$ 只是时空的一阶微商的函数，我们把它写成：

$$d(\partial)=a_\mu\partial_\mu+am, \qquad (1.7)_1$$

式中 a_μ 和 a 均为常数矩阵。

把$(1.7)_1$式和$(1.5)_1$式代入$(1.6)_1$式，比较两边常数项得到

$$m^2a\rho=-m^2$$

即

$$a\rho=-1。$$

因而矩阵ρ的行列式$\|\rho\|\neq0$，即有ρ^{-1}存在。把$(1.5)_1$式代入$(1.4)_1$式并乘以ρ^{-1}得到：

$$\boxed{(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=(\gamma\cdot\partial+m)\psi=0} \qquad (1.8)_1$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{(\gamma^\mu\partial_\mu+im)\psi=(\gamma\cdot\partial+im)\psi=0} \qquad (1.8')_1$$

其中$\gamma_\mu=\rho^{-1}\rho_\mu$。因为$\rho^{-1}$经常存在，我们以后限于讨论$(1.8)_1$式以代替$(1.4)_1$并不丧失其一般性。把$(1.7)_1$式和$(1.8)_1$式代入$(1.6)_1$式并比较两边系数，容易看出

$$\begin{gathered}am^2=-m^2,\\ a\gamma_\mu\partial_\mu+a_\nu\partial_\nu=0,\\ a_\mu\gamma_\nu\partial_\mu\partial_\nu=\Box。\end{gathered} \qquad (1.9)_1$$

解上式得到：

$$a=-1 \quad a_\mu=\gamma_\mu$$

$$\boxed{\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}} \qquad (1.10)_1$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}} \qquad (1.10')_1$$

对应$(1.8)_1$式有

$$d(\partial)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)。$$

$(1.8)_1$式即所谓 Dirac 方程，其中γ_μ满足$(1.10)_1$式的对易关系。事实上$d(\partial)$和$A(\partial)$的地位互换，并不影响上述全部讨论过程。这一点也反映在满足$(1.10)_1$式的γ矩阵并非是唯一的这一事实中。例如，将所有的γ_μ换成$-\gamma_\mu$，$(1.10)_1$式仍然被满足。甚至我们还可经常对γ_μ加以附加限制$\gamma_\mu^+=\gamma_\mu$，即限取γ_μ是自厄密的。在本书里除特别说明外都是如此选取的。

波函数$\psi(x)$一般为复量，我们可找出ψ^+所满足的方程。由

$(1.8)_1$ 式取厄密共轭可得

$$(\partial_\mu^* \psi^+)\gamma_\mu^+ + m\psi^+ = 0。$$

由于我们采取了 $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$，所以上式可写成

$$(\partial_\mu^* \psi^+)\gamma_\mu + m\psi^+ = 0。$$

应该指出 $\partial_4 = \dfrac{\partial}{i\partial t} = -i\dfrac{\partial}{\partial t} = -i\partial_0$。所以 $\partial_4^* = -\partial_4$；而 $\partial_i^* = \partial_i (i = 1, 2, 3)$，所以上式具体展开就成为

$$-\partial_4 \psi^+ \cdot \gamma_4 + \partial_i \psi^+ \cdot \gamma_i + m\psi^+ = 0。$$

这个方程与$(1.8)_1$式相比，形式并不对称，但如果在上式乘以 γ_4 则可得：

$$\boxed{(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma_\mu - m\bar{\psi} = \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial} \cdot \gamma - m) = 0} \qquad (1.11)_1$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu - im\bar{\psi} = \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial} \cdot \gamma - im) = 0} \qquad (1.11')_1$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$ 称为 ψ 的 Dirac 共轭。引进 $\bar{\psi}$ 以代替 ψ^+ 不仅使方程具有对称的形式，而且在以后讨论其协变性质时也比较方便。

§1.2 Dirac 的 γ_μ 矩阵

上节已经提到过满足$(1.10)_1$式对易关系的 γ_μ 矩阵，其具体形式是可以多种多样的。不过 γ_μ 矩阵的一些一般性质，与它的具体表示无关，只需由$(1.10)_1$式关系便可直接导出。本节就来讨论 γ 矩阵的一般性质。

当 $\mu \neq \nu$ 时，由$(1.10)_1$式得

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu = -I\gamma_\nu \gamma_\mu,$$

两边取行列式：

$$\|\gamma_\mu\| \cdot \|\gamma_\nu\| = (-1)^n \cdot \|\gamma_\nu\| \cdot \|\gamma_\mu\| \cdots\cdots, \qquad (2.1)_1$$

式中 n 为 γ 矩阵的阶数，由上式可知 n 应为偶数。但 $n=2$ 时，并不存在四个相互独立的 γ_μ 矩阵满足$(1.10)_1$式，最多只能有三个相互独立的 γ_μ(例如 Pauli 的三个自旋矩阵)满足$(1.10)_1$式，因

而我们得到结论 n 应为偶数，而且 $n>2$，至少为 4。以后讨论中限取 $n=4$。

由于 γ 矩阵要满足 $(1.10)_1$ 关系，由 γ_μ 矩阵之间相乘所能造成的相互独立的矩阵可有 16 个（这一点也足以说明 2×2 矩阵不能胜任）。我们把它分为五类，列出如下：

$$\gamma_A=\begin{cases} I & \text{共有一个分量} \\ \gamma_\mu & \text{共有四个分量} \\ \sigma_{\mu\nu}=\dfrac{(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)}{2i} & \text{共有六个分量}\quad(\nu\neq\mu) \\ i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho(=\pm i\gamma_\lambda\gamma_5,) & \text{共有四个分量} \\ & (\mu,\nu,\lambda,\rho\text{ 无相同者}) \\ \gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 & \text{共有一个分量} \end{cases} \tag{2.2}_1$$

容易看出上表所列出的每一个 γ_A 都满足 $\gamma_A^2=1$，而且 $\gamma_A^+=\gamma_A$。由 $(1.10)_1$ 式的对易关系可以证明：

$$\gamma_5\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5=0。 \tag{2.3}_1$$

亦即
$$-\gamma_\mu=\gamma_5^{-1}\gamma_\mu\gamma_5。$$

下面讨论 γ 矩阵乘积的迹的性质。先考虑 m 个 γ 矩阵的乘积的求迹：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1},\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})&=(-1)^m\mathrm{Tr}(\gamma_5^{-1}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\gamma_5)\\&=(-1)^m\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})\end{aligned}$$

所以当 m 为奇数时

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})=0 \tag{2.4}_1$$

也就是说：奇数个 γ_μ 乘积的迹为零。

进一步讨论当 m 为偶数的情况，首先令 $m=2$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu)&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)\\&=\delta_{\mu\nu}\mathrm{Tr}I=4\delta_{\mu\nu}。\end{aligned} \tag{2.5}_1$$

其次令 $m=4$。先设四个 γ_μ 均不相同，即求 γ_5 的迹。由 $(2.3)_1$ 式可得 $\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\mu^{-1}=-\gamma_5$，类似以上的方法可得：$\mathrm{Tr}\gamma_5=-\mathrm{Tr}\gamma_5$ 可见：

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5)=0。 \tag{2.6}_1$$

如果四个γ中有的相同，则每两个相同的γ经常可利用对易关系化简为单位矩阵，所以问题又归结为两个γ或单位矩阵的求迹，这已在上面讨论过。此外利用对易关系可以得到$\gamma_A\cdot\gamma_B\sim\gamma_C$，因而总结可得一般结论如下：

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\gamma_A)=0,\quad \text{当}\ \gamma_A\neq 1;\\&\mathrm{Tr}(\gamma_A\gamma_B)=4\delta_{AB}。\end{aligned}}\qquad (2.7)_1$$

其中A，B或C代表上述五类十六个分量中任一个。

利用上述结论可以进一步证明16个γ_A是相互独立的。也就是说除了所有的$C_A=0$外，不存在关系

$$\sum_{A=1}^{16}C_A\gamma_A=0。$$

证明如下：

如果存在关系$\sum_{A=1}^{16}C_A\gamma_A=0$，则$\sum_{A\neq B}C_A\gamma_A=-C_B\gamma_B$。

乘以γ_B则得到$\sum_{A\neq B}C_A\gamma_A\gamma_B+C_B=0$，

$$\mathrm{Tr}\sum_{A\neq B}C_A\gamma_A\gamma_B+C_B\mathrm{Tr}I=0。$$

由$(2.7)_1$式便得到$C_B\mathrm{Tr}I=0$，即$C_B=0$。因为B的选取是任意的，所以得到结论：只有当所有$C_B=0$时，$\sum_A C_A\gamma_A=0$才成立，也就是说γ_A是相互独立的。

任何一个4×4矩阵都可以写成16个相互独立的4×4矩阵的线型和，因而任何一个4×4矩阵的代数函数x均可写成γ_A的线型和。即

$$x=\sum_A C_A\gamma_A=\sum_A\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\gamma_A\cdot x)\cdot\gamma_A。\qquad (2.8)_1$$

上式对于任一x都成立，因而有

$$4\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}=\sum_A(\gamma_A)_{\alpha\beta}\cdot(\gamma_A)_{\gamma\delta}\qquad (2.9)_1$$

我们可以把$(2.7)_1$式的第二式和上式分别称为γ矩阵的正交性和封闭性。

§1.3 关于 γ 矩阵的表示

把$(1.10)_1$式的对易关系分别取厄密共轭、转置和复数共轭，便得到同样的对易关系

$$\begin{aligned}\gamma_\mu^+\gamma_\nu^+ + \gamma_\nu^+\gamma_\mu^+ &= 2\delta_{\mu\nu},\\ \gamma_{\mu T}\gamma_{\nu T} + \gamma_{\nu T}\gamma_{\mu T} &= 2\delta_{\mu\nu},\\ \gamma_\mu^*\gamma_\nu^* + \gamma_\nu^*\gamma_\mu^* &= 2\delta_{\mu\nu}。\end{aligned} \qquad (3.1)_1$$

这说明满足$(1.10)_1$对易关系的γ矩阵可以有多种多样的表示，不过这些不同表示是相互等效的。实际上前面介绍的16个γ_A和16个$(-\gamma_A)$(把其中所有的i除掉)，形成了一个相对于矩阵乘法的有限群。γ矩阵的不同表示也就是这个群的不同表示，它们满足相同的对易关系。用与上节相同的方法可以证明

$$\mathrm{Tr}\gamma_A^+ = \mathrm{Tr}\gamma_{AT} = \mathrm{Tr}\gamma_A^* = \mathrm{Tr}\gamma_A = 0$$

因而γ_A^+, γ_{AT}, γ_A^*与γ_A乃是同一个群的等效表示。所以存在非奇异的矩阵A, B和C分别满足以下关系，而且除了只相差一常数因子外，它们可以由下列等式唯一地确定。

$$\begin{aligned}A_\pm\gamma_\mu A_\pm^{-1} &= \pm\gamma_\mu^+,\\ B_\pm\gamma_\mu B_\pm^{-1} &= \pm\gamma_{\mu T},\\ C_\pm\gamma_\mu C_\pm^{-1} &= \pm\gamma_\mu^*。\end{aligned} \qquad (3.2)_1$$

以上等式两边同时取正号，或同时取负号。

由于$\gamma_5^2=1$而且$\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$故有

$$\begin{aligned}A_- &= 常数\cdot A_+\gamma_5,\\ B_- &= 常数\cdot B_+\gamma_5,\\ C_- &= 常数\cdot C_+\gamma_5。\end{aligned} \qquad (3.3)_1$$

这儿已考虑到γ_μ代以$-\gamma_\mu$，也满足相同的对易关系。

可以证明(作为习题)A, B和C之间满足一系列关系，例如(限取A, B和C的行列式均为1或-1。)

$$\begin{aligned}A_\pm^+ &= A_\pm,\\ B_\pm &= kB_{\pm T},\end{aligned} \qquad (3.4)_1$$

$$C_{\pm}^{*}=C_{\pm}^{-1}。$$

$$A_{+}=(B^{-1}C_{T})^{-1}=C_{T}^{-1}B=C_{T}^{*}B=C^{+}B, \qquad (3.5)_1$$

$$B^{+}=AB^{-1}A_{T}。$$

以上等式可能有常数因子 K 被忽略，而 $K^4=1$。

上面讨论的结论与 γ 矩阵的具体表示无关。我们通常限取 $\gamma_{\mu}^{+}=\gamma_{\mu}$，这个条件是经常可行的，因为这不过是相当于限取 A 为单位矩阵而已。即使在 γ 为厄密时，它的具体表示还是可以多种多样的。通常所取的有下列两类，第一类即所谓的 Pauli 表示，第二类即所谓 Majorana 表示。在本书中除特别说明外都采用 Pauli 表示。现将两类表示列出如下，供读者参考。

Pauli 表示

$$\gamma_j=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma_j\\ i\sigma_j & 0\end{vmatrix}\quad (j=1,\ 2,\ 3); \qquad (3.6)_1$$

$$\gamma_4=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix}=\beta;\quad \gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{vmatrix}=-\rho。 \qquad (3.7)_1$$

此时 $B=C$

$$\left.\begin{aligned}&A_{+}=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix};\quad B_{+}=B_{+}^{-1}=i\gamma_1\gamma_3=\begin{vmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{vmatrix};\\ &C_{+}=i\gamma_1\gamma_3=\begin{vmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{vmatrix};\quad A_{-}=\gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{vmatrix};\\ &B_{-}=i\gamma_2\gamma_4=\begin{vmatrix}0 & -\sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{vmatrix};\quad C_{-}=i\gamma_2\gamma_4=\begin{vmatrix}0 & -\sigma_2\\ -\sigma_2 & 0\end{vmatrix}。\end{aligned}\right\} \qquad (3,8)_1$$

Majorana 表示

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_1=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix};\quad \gamma_2=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{vmatrix};\quad \gamma_3=\begin{vmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{vmatrix};\\ &\gamma_4=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma_1\\ i\sigma_1 & 0\end{vmatrix};\quad \gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma_3\\ i\sigma_3 & 0\end{vmatrix};\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)_1$$

$$A_+=\begin{vmatrix}-I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix};\quad B_+=-B_+^{-1}=\begin{vmatrix}i\sigma_2 & 0\\ 0 & i\sigma_2\end{vmatrix}。$$

$$C_+=\begin{vmatrix}-i\sigma_2 & 0\\ 0 & -i\sigma_2\end{vmatrix},\quad A_-=-\gamma_5=\begin{vmatrix}0 & i\sigma_3\\ -i\sigma_3 & 0\end{vmatrix},\tag{3.10}_1$$

$$B_-=-\gamma_4=\begin{vmatrix}0 & i\sigma_1\\ -i\sigma_1 & 0\end{vmatrix},\quad C_-=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma_1\\ i\sigma_1 & 0\end{vmatrix}。$$

正如前面曾提到过的，上述等式一般允许有一个常数相因子未予确定。以上的 σ 即为 Pauli 自旋矩阵：

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad \sigma_2=\begin{vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{vmatrix},\tag{3.11}_1$$

$$\sigma_3=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}。$$

§1.4 Dirac 方程的协变性质

Dirac 方程并不象 K-G 方程那样显而易见地具有 Lorentz 协变性质。事实上直到目前为止，我们还没有讨论过，在 Lorentz 变换下，ψ 的四个分量之间究竟应该怎样变换，才能使 Dirac 方程保持 Lorentz 协变的形式。对于这个问题的分析就是本节的中心内容。在讨论中，我们将采用 γ 矩阵的具体形式在坐标变换下保持不变这样的传统。

单纯时空原点的移动，不会给 Dirac 方程带来变化。因此我们可以认为对于时空原点的平移，ψ 的各个分量保持不变，即当 $x_\mu\to x'_\mu=x_\mu+a_\mu$ 时 $\partial_\mu\to\partial'_\mu=\partial_\mu$，$\psi'_\alpha(x')=\psi_\alpha(x)$。

对于齐次的 Lorentz 变换，包括空间坐标旋转和坐标系的相对运动，一般可写成

$$x_\mu\to x'_\mu=L_{\mu\nu}x_\nu;\quad \partial'_\mu=L_{\mu\nu}\partial_\nu。\tag{4.1}_1$$

设想对应于任一 $L_{\mu\nu}$，存在非奇异的幺正矩阵 $S_{\alpha\beta}(L_{\mu\nu})$，$S$ 为 $L_{\mu\nu}$ 的函数，且其行列式 $\|S_{\alpha\beta}\|\neq 0$，以使

$$\psi'_\alpha(x')=S_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)。 \qquad (4.2)_1$$

在带"′"坐标里仍具有 Dirac 方程的原有形式，也就是

$$(\gamma_\mu\partial'_\mu+m)\psi'(x')=0。$$

这里我们已暗中假定了在带"′"的坐标系里，γ 矩阵的形式不变。其实 γ 矩阵的具体表示并不是本质的，其本质的东西只是它们之间的对易关系。因此我们没有必要要求 γ 矩阵的形式随坐标变换而改变。

以 $(4.1)_1$ 式和 $(4.2)_1$ 式代入上式得

$$(\gamma_\mu L_{\mu\nu}\partial_\nu+m)S\psi(x)=0。$$

再以 S^{-1} 左乘上式得

$$(S^{-1}\gamma_\mu SL_{\mu\nu}\partial_\nu+m)\psi(x)=0。$$

将此式与 Dirac 方程 $(1.8)_1$ 相比较，可知

$$S^{-1}\gamma_\mu SL_{\mu\nu}=\gamma_\nu。 \qquad (4.3)_1$$

以 $L_{\rho\nu}$ 乘上式并利用 $L_{\rho\nu}L_{\mu\nu}=\delta_{\rho\mu}$ 可得

$$\boxed{S^{-1}\gamma_\rho S=L_{\rho\nu}\gamma_\nu。} \qquad (4.4)_1$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{S^{-1}\gamma_\rho S=L''_\rho\gamma_\nu。} \qquad (4.4)'_1$$

这就是说满足上式的 S，将使 Dirac 方程具有 Lorentz 协变性。可以证明满足上式的非奇异 S，一般是存在的。下面我们来具体找出 S 的形式，也就在实际上证明了这一结论。上述对 S 的限制 $(4.4)_1$ 可以允许一个常数因子未确定。因此我们可以进一步限制 S 的行列式为 1 即 $\|S\|=1$。首先考虑微量的 Lorentz 变换，即 $L_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu}$，其中 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为一微量，且由 $L_{\mu\rho}L_{\nu\rho}=\delta_{\mu\nu}$ 可以证明

$$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}。 \qquad (4.5)_1$$

设想 $S(\varepsilon_{\mu\nu})$ 在 $\varepsilon_{\mu\nu}=0$ 附近展开，并忽略高级微量，则有

$$\begin{aligned}S(\varepsilon_{\mu\nu})&=1+\left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}\right)_0\cdot\varepsilon_{\mu\nu}\\&=1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{\mu\nu}}\right)_0\varepsilon_{\mu\nu}+\left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0\varepsilon_{\nu\mu}\right]\end{aligned}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}-\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0\right]\varepsilon_{\mu\nu}=1+\frac{1}{2}S_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}。$$

$$(4.6)_1$$

式中 $S_{\mu\nu}$ 为 $\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\right)_0$ 的相对于 μ, ν 的反对称部分

$$S_{\mu\nu}\equiv\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}-\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{\nu\mu}}\right)_0=-S_{\nu\mu}。\qquad (4.7)_1$$

把$(4.6)_1$ 和$(4.7)_1$ 式代入$(4.4)_1$ 式得

$$(\delta_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})\gamma_\nu=\left(1-\frac{1}{2}S_{\rho\lambda}\varepsilon_{\rho\lambda}\right)\gamma_\mu\left(1+\frac{1}{2}S_{\rho\lambda}\varepsilon_{\rho\lambda}\right)$$

$$=\gamma_\mu+\frac{1}{2}(\gamma_\mu S_{\rho\lambda}-S_{\rho\lambda}\gamma_\mu)\varepsilon_{\rho\lambda}+\cdots\cdots,$$

比较两边 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 的系数便有

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu S_{\rho\lambda}-S_{\rho\lambda}\gamma_\mu)=\frac{\gamma_\lambda\delta_{\rho\mu}-\gamma_\rho\delta_{\lambda\mu}}{2}。\qquad (4.8)_1$$

$S_{\mu\nu}$ 为一 4×4 矩阵: 根据$(2.8)_1$ 式, 一般可写成

$$S_{\mu\nu}=\sum_A C^A_{\mu\nu}\gamma_A。$$

同时由$(4.8)_1$式得出 $S_{\mu\nu}$ 和 γ_ρ 连乘只出现一个 γ_μ 项, 这只有在$(2.2)_1$ 式中的第一类或第三类才能具有这样性质, 然而第一类是单位矩阵, 也不能满足$(4.8)_1$ 式关系和相对 μ, ν 反对称的要求。因而 $S_{\mu\nu}$ 可以写成

$$S_{\mu\nu}=C(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)。$$

常数 C 可用上式代入 $(4.8)_1$ 式求得。于是得到

$$\boxed{S_{\mu\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)=\frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}}\qquad (4.9)_1$$

在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{S^{\mu\nu}=\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=-\frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}}\qquad (4.9')_1$$

最后由$(4.6)_1$式得

$$S=I+\frac{1}{2}S_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}=I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\cdot\varepsilon_{\mu\nu}。\qquad (4.10)_1$$

由于 $\sigma_{\mu\nu}$ 是自厄密矩阵，所以 S 是幺正的。

在 Pauli 表示里 $\sigma_{\mu\nu}$ 的空间部分有如下关系：

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{ij}=2\sigma_k=\frac{2}{i}\gamma_4\gamma_k\gamma_5 \quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.11a)_1$$

其中 σ_k 为由 Pauli 矩阵对角扩张而得的 4×4 矩阵。而对于时空部分有

$$\sigma_{i4}=\alpha_i=-\sigma_{4i} \quad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.11b)_1$$

其中 $$\boldsymbol{\alpha}=i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix}$$

当变换是绕空间某一方向旋转一微量角度 $\boldsymbol{\theta}$ 时，则

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ijk}\theta_k, \quad \varepsilon_{i4}=0=\varepsilon_{44}。$$

以上 ε_{ijk} 为完全反对称的单位张量。把上式和$(4.11)_1$式代入$(4.10)_1$式便得出

$$S=I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}=I+\frac{i}{4}\sigma_{ij}\varepsilon_{ijk}\theta_k=I+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}。 \qquad (4.12)_1$$

如果旋转角度 $\boldsymbol{\theta}$ 是有限的，而不是微量，我们可设想这是 n 次旋转连续运转而得，每次旋转角度为 $\frac{\boldsymbol{\theta}}{n}$。当 $n\to\infty$ 时每一次旋转就都是微量。连续运用上式可得

$$S(\boldsymbol{\theta})=\left(I+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\boldsymbol{\theta}}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\left[\,i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta}\,\right]$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}+i\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}。 \qquad (4.13)_1$$

以上最后一步利用了$(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=1$。其中 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 方向的单位矢量，θ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的绝对值，与此同时有

$$S^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\exp\left[\,-i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\theta}\,\right]=\cos\frac{\theta}{2}-i\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (4.14)_1$$

如果变换是由于坐标系沿某一方向 x_{iy} 有相对速度 $V\to0$ 的微量特殊 Lorentz 变换，则($V=\mathrm{th}\,\phi$)

$$\varepsilon_{i4}=i\phi_i=-\varepsilon_{4i} \quad \text{其余 } \varepsilon_{ij}=0=\varepsilon_{44}$$

代入$(4.10)_1$便得到

$$S(\boldsymbol{V})=I-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}。\qquad (4.15)_1$$

当 $\boldsymbol{V}$ 为有限时，同样可以证明

$$S(\boldsymbol{V})=\exp\left[-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}\right]$$

$$=\mathrm{ch}\frac{\phi}{2}-\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\frac{\phi}{2}。\qquad (4.16)_1$$

同样，这里的 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的单位矢量。

最后考虑空间反演时 S 的形式。此时不存在微量变换。我们直接由 $(4.4)_1$ 式求解。得到

空间反演 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$; $x_4'=x_4$ 时，S 记以 S_{123}:

$$S_{123}=\pm\gamma_4,\quad \pm i\gamma_4 \qquad (4.17)_1$$

而时间反演 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$; $x_4'=-x_4$ 时，S 记以 S_4:

$$S_4=\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3;\quad \pm i\gamma_1\gamma_2\gamma_3。 \qquad (4.18)_1$$

时空同时反演，即 $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$; $x_4'=-x$，则

$$S_{1234}=\pm\gamma_5;\quad \pm i\gamma_5。 \qquad (4.19)^1$$

§1.5 Dirac 矩阵所形成的张量

由上节的讨论知道，Dirac 方程是具有 Lorentz 协变性质的，可是 ψ 的变换却又与通常的张量不同。满足 $(4.2)_1$ 式和 $(4.4)_1$ 式变换的 ψ 量，常称为双旋量。也就是说 ψ 为 Lorentz 群的双旋量表示。由双旋量的二次形式可形成各种 Lorentz 张量。

我们定义 $\bar{\psi}\equiv\psi^+\gamma_4$，当 ψ 有一变换 $\psi'=S\psi$ 时。$\bar{\psi}$ 应有相应的变换:

$$\bar{\psi}'(x')\equiv\psi'^+(x')\gamma_4=\psi^+(x)S^+\gamma_4$$

$$=\bar{\psi}(x)\gamma_4S^+\gamma_4=\pm\bar{\psi}(x)S^{-1}。 \qquad (5.1)_1$$

当 $L_{44}>0$，时间不反向时取正号。当 $L_{44}<0$，时间反向时取负号。以下同此。上式推导中最后一步利用了关系

$$\gamma_4S^+\gamma_4=L_{44}S^{-1}。 \qquad (5.2)_1$$

关于此式的证明作为习题

首先讨论 $\bar{\psi}$ 和 ψ 的标积的变换：

$$\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}'I\psi'=\pm\bar{\psi}S^{-1}IS\psi=\pm\bar{\psi}I\psi=\pm\bar{\psi}\psi。\qquad (5.3)_1$$

其次再讨论如下变换关系：

$$\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi'=\pm\bar{\psi}S^{-1}\gamma_\mu S\psi=\pm L_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi,\qquad (5.4)_1$$

$$\bar{\psi}'\sigma_{\mu\nu}\psi'=\pm\bar{\psi}S^{-1}\sigma_{\mu\nu}S\psi=\pm L_{\mu\rho}L_{\nu\lambda}\bar{\psi}\sigma_{\rho\lambda}\psi。\qquad (5.5)_1$$

为了进一步讨论，我们研究一下 γ_5 的一些重要性质。γ_5 可以写成

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho。\qquad (5.6)_1$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 为完全反对称的单位张量。即

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}=\begin{cases}+1 & \text{当 } \mu\nu\lambda\rho \text{ 为 1234 的偶次对易所得的顺序,}\\ -1 & \text{当 } \mu\nu\lambda\rho \text{ 为 1234 的奇次对易所得的顺序,}\\ 0 & \text{当 } \mu\nu\lambda\rho \text{ 中有相同指标出现时。}\end{cases}$$

利用 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 也可得到：

$$\|L\|\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=L_{\alpha\mu}L_{\beta\nu}L_{\gamma\lambda}L_{\delta\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}。\qquad (5.7)_1$$

由此可见 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 实际为一权重为 -1 的四级反对称张量。这种张量有时称为赝张量。利用 $(5.6)_1$ 式和 $(5.7)_1$ 式可得

$$\begin{aligned}S^{-1}\gamma_5S&=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}S^{-1}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho S\\&=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}L_{\lambda\gamma}L_{\rho\delta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\\&=\|L\|\cdot\gamma_5。\end{aligned}\qquad (5.8)_1$$

利用上式得到

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi'=\pm\bar{\psi}S^{-1}\gamma_5S\psi=\pm\|L\|\bar{\psi}\gamma_5\psi。\qquad (5.9)_1$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\psi'&=\pm\bar{\psi}'i\gamma_5\gamma_\rho\psi'=\pm\bar{\psi}S^{-1}i\gamma_5\gamma_\rho S\psi\\&=\pm\|L\|L_{\rho\sigma}\bar{\psi}i\gamma_5\gamma_\sigma\psi。\end{aligned}\qquad (5.10)_1$$

由以上讨论可知，$(2.2)_1$ 式所引五类 γ_A 和 $\bar{\psi}$，ψ 的乘积 $\bar{\psi}\gamma_A\psi$ 实际上形成五种 Lorentz 张量。总结其结论如下：

$T_{44}>0$ 无时间反向	变换性质	独立元数目
$S=\bar{\psi}I\psi$	标　　量	1
$V_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\rightarrow(\boldsymbol{V}, iV_0)$ $=-i\psi^+(\boldsymbol{\alpha}, i)\psi$	矢　　量	4
$T_{\mu\nu}=\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ $(\boldsymbol{H}, -i\boldsymbol{E})$ $=\psi^+(\beta\boldsymbol{\sigma}, \beta\boldsymbol{\alpha})\psi$	反对称二级张量	6
$A_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\rightarrow$ $(\boldsymbol{A}, iA_0)$ $=i\psi^+(\boldsymbol{\sigma}, i\rho)\psi$	赝　矢　量	4
$P=\psi\gamma_5\psi$	赝　标　量	1

其中 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{E}$ 为三维极矢量; $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为三维轴矢量; V_0 和 A_0 为四维矢量的时间部分。

由于 γ_μ 存在反对易关系。我们由 $\bar{\psi}$ 及 ψ 的二次式所能组成的张量只能有以上五种。其中值得现在就指出的是矢量

$$j_\mu=ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi。\qquad (5.11)_1$$

此即电流电荷矢量, 利用 Dirac 方程可以证明它满足电荷守恒定律:

$$ie\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)=0。\qquad (5.12)_1$$

由$(5.11)_1$式知道

$$j_4=i\rho=ie\bar{\psi}\gamma_4\psi=ie\psi^+\psi,$$

$$\therefore\quad \rho=e\psi^+\psi。$$

式中 ρ 为电荷密度。几率密度 $\psi^+\psi>0$, 是恒正的。这样就解决了 K-G 的方程用于电子时所遇到的困难。

以上讨论的各种张量形式。对以后讨论场的相互作用关系极大。

§1.6 Dirac 方程的一般解

容易看出, Dirac 方程$(1.8)_1$式有平面波特解。以

$$\psi(x)=\psi(k)e^{ikx}$$

代入$(1.8)_1$式得到

$$(i\gamma k+m)\psi(k)=0。 \qquad (6.1)_1$$

其中 $\gamma k\equiv\gamma_\mu k_\mu$, $kx\equiv k_\mu x_\mu$ (以下同此)。

上式实际上就是Dirac方程在动量空间的表示。为要有 $\psi(k)\neq0$ 的解, $(i\gamma\cdot k+m)$ 的行列式必须为零。于是, 便导致了 $k^2+m^2=0$, 这也是所有自由粒子的 k 所应满足的条件, 其实就是K-G条件。把该条件展开,就得到

$$k_0=\pm\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+m^2}=\pm\varepsilon。$$

也就是说,具有一定动量 k 的Dirac粒子,其能量 k_0 是可正可负的。

由于Dirac方程是线型的, 它的一般解可以写成各种平面波的线型迭加,即

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dke^{ikx}\delta(k^2+m^2)\psi(k)。 \qquad (6.2)_1$$

式中 $dk\equiv d\boldsymbol{k}\,dk$。$\psi(k)$为解的旋量部分。$\delta(k^2+m^2)$是为了保持 $k^2+m^2=0$ 而引进的, 这样也就保证了 $\psi(x)$确是满足K-G条件。

利用关系

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]。 \qquad (6.3)_1$$

可以把$(6.2)_1$式写成

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dke^{ikx}\cdot\frac{1}{2\varepsilon}[\delta(k_0-\varepsilon)+\delta(k_0+\varepsilon)]\psi(k)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[\int d\boldsymbol{k}e^{ikx}\cdot\frac{\psi(k)}{2\varepsilon}+\int d\boldsymbol{k}e^{-ikx}\frac{\psi(-k)}{2\varepsilon}\right]_{k_0=\varepsilon>0}\\&=\psi^{(-)}(x)+\psi^{(+)}(x)。\end{aligned} \qquad (6.4)_1$$

式中

$$\psi^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{k}e^{\mp ikx}\cdot\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\,|_{k_0=\varepsilon>0}。 \qquad (6.5)_1$$

上式两边同时取上面或下面的符号。$\psi^{(\pm)}(x)$分别称为 $\psi(x)$解的负频、正频部分。其中

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\equiv\frac{\psi(\mp k)}{2\varepsilon} \qquad (6.6)_1$$

$$\varepsilon=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+m^2}>0。 \qquad (6.7)_1$$

把自由粒子的波函数分解为负频、正频部分，可以说是 K-G 条件的直接结论。其实也可直接由 K-G 方程，用分离变量法求解其时间部分，而得到这一结论。因此这样的分解对于所有自由粒子的波函数(在量子场论里就是场方程的解)都是可行的。下面我们对解的旋量部分稍做进一步的研究，也许这样才能看出 Dirac 波函数的特色来。

比较$(6.6)_1$式和$(6.1)_1$式可以得到统一的关系(以下都取 $k_0=\varepsilon$)

$$(-i\gamma k\pm m)\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})=0 \quad k_0>0。 \qquad (6.8)_1$$

因此可以把 $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$看成为算符$(-i\gamma k)$的本征态。它们对应的本征值分别为 $\Lambda=\mp m$。根据这样的观点，我们就把旋量部分记以 $W_\Lambda(\boldsymbol{k})$以代替 $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$，分别称为负频、正频解的旋量部分。与它们相应的时空部分分别为 $e^{\mp ikx}$。因而对于一定的 $\boldsymbol{k}$ 值，$W_\Lambda(\boldsymbol{k})$满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned}&(-i\gamma k-\Lambda)W_\Lambda(\boldsymbol{k})=0,\\ \text{与此同时应有}\quad &\overline{W}_{\Lambda'}(\boldsymbol{k})(-i\gamma k-\Lambda)=0。\end{aligned}\right\} \qquad (6.9)_1$$

仅据上式还不足以唯一确定 $W_\Lambda(\boldsymbol{k})$。也就是说 $W_\Lambda(k)$依然是简并的。为了消除简并，可引进算符

$$S_{/}(\boldsymbol{k})=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}。 \qquad (6.10)_1$$

容易证明 $S_{/}^2=1$，因而 $S_{/}$ 的本征值 $h=\pm1$。也可证明 $S_{/}(\boldsymbol{k})$和$(-i\gamma k)$是相互对易的。因而 $W_\Lambda(k)$也可能同时是 $S_{/}$ 的本征态，亦即

$$\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}-h\right)W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=0。 \qquad (6.11)_1$$

以上我们把 $W_\Lambda(k)$加以下指标 h，以表明它同时是$(-i\gamma k)$和 $S_{/}$ 的本征态。对于一定的 $\boldsymbol{k}$，其旋量部分可以有 $\Lambda=\pm m$ 和 $h=\pm1$，四个相互独立的态。为了便于阅读文献或其他有关专著，我们把 $W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})$和常见的符号 $u^h(\boldsymbol{k})$和 $V^h(\boldsymbol{k})$的关系，列在下面：

$$W_{m,h}(\boldsymbol{k})\equiv u^h(\boldsymbol{k}), \qquad (6.12)_1$$

$$W_{-m,-h}(\boldsymbol{k})\equiv V^h(\boldsymbol{k})。$$

因而把 $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$一般可写成：

$$\psi^{(-)}(\boldsymbol{k})=\sum_{h=-1}^{+1}a_h(\boldsymbol{k})\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}u^h(\boldsymbol{k}),\qquad (6.13)_1$$

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{k})=\sum_{h=-1}^{+1}b_h^*(\boldsymbol{k})\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}V^h(\boldsymbol{k})。$$

式中 u 和 V 都是归一化的。$\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}$ 为运动学因子，它的引进是为了使得 a_h 和 b_h^* 有较简单的物理意义。在场量子化以后，它们分别对应于粒子的湮灭算符和反粒子的产生算符(以后我们还要对它们作详细的讨论)。把上述所得关系代入$(6.5)_1$式和$(6.4)_1$式就得到

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi^{(-)}(x)+\psi^{(+)}(x)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\sum_h\left[a_h(\boldsymbol{k})u^h(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right.\\&\quad\left.+b_h^*(\boldsymbol{k})v^h(\boldsymbol{k})e^{-ikx}\right]_{k_0=\varepsilon>0}。\end{aligned}\qquad (6.14)_1$$

用完全类似的方法可以把 $\bar{\psi}(x)$展开：

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)&=\bar{\psi}^{(+)}(x)+\bar{\psi}^{(-)}(x)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\sum_h\left[a_h^*(\boldsymbol{k})\bar{u}^h(\boldsymbol{k})\cdot e^{-ikx}\right.\\&\quad\left.+b_k(\boldsymbol{k})\bar{V}^h(\boldsymbol{k})e^{+ikx}\right]_{k_0=\varepsilon>0}\end{aligned}\qquad (6.15)_1$$

式中 $\bar{u}=u^+\gamma_4$ 和 $\bar{V}=V^+\gamma_4$。应该指出：

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(x)=\overline{\psi^{(\mp)}}(x)。\qquad (6.16)_1$$

上面考虑到 $\psi(x)$在整个空间是归一化的。如果认为 $\psi(x)$在体积 V 内归一化，则以上结论要作相应的改变。例如将积分变为求和，引进态密度

$$\rho_k=\frac{V}{(2\pi)^3}。$$

$\rho_k d\boldsymbol{k}$ 即为$\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ 之间态的数目，则

$\int \rho_k dk \cdots\cdots = \sum_k \cdots$ 并引进 $\psi_k = \rho_k^{-1/2}\psi(k)$，于是上述的积分表式，可转换为相应的求和表式

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dk \cdots \psi(k) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \cdots \psi_k。 \qquad (6.17)_1$$

在很多情况下用分立动量谱，即用求和形式较为方便。

§1.7 Dirac 方程的平面波特解及其物理意义

在上一节里，我们讨论了对于一定的 k，$\psi(x)$ 可以有四个相互独立的态对应于 $\Lambda = \pm m$，和 $h = \pm 1$，而在本节里，我们来讨论这些态的物理意义，以及在 Pauli 表示下的具体形式。

容易看出，Dirac 方程的平面波特解 $\psi^{(\pm)}(k)e^{\mp ikx}$ 是动量标符 $p = -i\partial$ 的本征态，并分别对应于本征值 $\mp k$。也就是 $\psi^{(\pm)}(k)$ 或 $W_{\mp m,h}(k)$ 分别为动量为 $\mp k$ 的波函数的旋量部分。

此外，以 γ_4 乘 Dirac 方程可得

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 m\right)\psi = 0。 \qquad (7.1)_1$$

与 Schrödinger 方程比较，便知对应 Dirac 方程的哈密顿函数应为

$$H = \left(-i\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 m\right)。 \qquad (7.2)_1$$

上式在动量空间的表示则应为

$$H(k) = \alpha\cdot k + \gamma_4 m, \qquad (7.3)_1$$

式中 $\alpha = i\gamma_4\gamma$ 并且满足如下关系

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik},$$
$$\alpha\gamma_4 + \gamma_4\alpha = 0。 \qquad (7.4)_1$$

利用以上关系可以证明

$$H^2 = |k|^2 + m^2。$$

由此可知 H 的本征值

$$k_0 = \pm\varepsilon = \pm\sqrt{|k|^2 + m^2},$$

这和上节的结论是一致的。

另一方面，以 γ_4 乘(6.8)$_1$ 式可得

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k}+\gamma_4 m-\varepsilon)\psi^{(-)}(\boldsymbol{k})$$
$$=[H(\boldsymbol{k})-\varepsilon]\psi^{(-)}(\boldsymbol{k})=0。 \qquad (7.5)_1$$
$$(-\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{k}+\gamma_4 m+\varepsilon)\psi^{(+)}(\boldsymbol{k})$$
$$=[H(-\boldsymbol{k})+\varepsilon]\psi^{(+)}(\boldsymbol{k})=0。$$

因而我们又进一步知道 $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ 或 $W_{\mp m,h}(\boldsymbol{k})$ 分别为动量为 $\mp\boldsymbol{k}$ 且能量为 $\mp\varepsilon$ 的态的旋量部分。

下一步我们要了解量子数 h 的意义，这只要弄清楚算符 S_r 的意义就行。可以证明 $\frac{1}{2}\sigma$ 就是单粒子量子力学中的 Dirac 粒子的自旋算符，这一点可由以下分析看出：首先 $\frac{1}{2}\sigma$ 的确满足角动量的对易关系，即

$$\left[\frac{1}{2}\sigma\times\frac{1}{2}\sigma\right]=i\frac{1}{2}\sigma。$$

其次可以证明单单轨道角动量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

并不与(7.2)$_1$ 式的 H 相对易，而 $\boldsymbol{J}\equiv\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\sigma$ 才与(7.2)$_1$ 式的 H 对易。因此总角动量 J 才是运动常数(而不是轨道角动量 L)。所以 $\frac{1}{2}\sigma$ 可以解释为 Dirac 粒子的自旋算符。而 $S_r=\frac{\sigma\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ 就应该是自旋在 $\boldsymbol{k}$ 方向的投影的算符，称为相对于 k 的涡度算符。

结合(6.11)$_1$ 和(7.5)$_1$ 式，可以看出 $W_{m,h}(\boldsymbol{k})\equiv w^h(\boldsymbol{k})$ 就是动量为 $(+\boldsymbol{k})$，能量 $k_0=+\varepsilon$，涡度为 $+h$，(相对于 $\boldsymbol{k}$)的 Dirac 粒子的波函数的旋量部分；$W_{-m,-h}(\boldsymbol{k})\equiv V^h(\boldsymbol{k})$ 就是动量为 $(-\boldsymbol{k})$，能量为 $-\varepsilon$，涡度为 $-h$，(相对于 $\boldsymbol{k}$)的 Dirac 粒子的波函数的旋量部分，在量子化以后，实际上它就是动量为 $\boldsymbol{k}$，涡度为 h 的反 Dirac 粒子的波函数的旋量部分。

应当指出，涡度 S_r 由其定义的形式，便可明白它不是四维空

间里的一个标量，而只是三维空间里的一个赝标量†，所以对不同的 Lorentz 观察系来看，同一个粒子涡度是可能不同的。实际上对于静质量不为零的粒子，它的速度小于光速。因而总是可以有两种不同观察系，它们的速度分别小于和大于该粒子的速度。这二者所观察到的同一个粒子的速度方向是相反的，而自旋的指向却是相同的，也就是在它们看来该粒子的涡度是不同的。虽然如此，对某一定的观察系而言，由于 S_l 和 H 是对易的(利用 $[\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\sigma}]=2i\boldsymbol{\alpha}$ 和 $[\gamma_4,\ \boldsymbol{\sigma}]=0$)，$S_l$ 却是个很好的守恒量。这就是说自由 Dirac 粒子的自旋在其运动方向的投影是运动常数，这与由非相对论 Pauli 方程所得的，关于电子自旋在某一定方向的投影是运动常数的结论，一般说来，是不相同的。下面我们来具体求解 $W(\boldsymbol{k})$。γ 矩阵取 Pauli 表示，并以 $W(\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\varphi\\ \chi\end{vmatrix}$ 代入(6.9)式，可得

$$\begin{vmatrix}\Lambda-\varepsilon & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} & \Lambda+\varepsilon\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi\\ \chi\end{vmatrix}=0。\qquad (7.6)_1$$

解之则有

$$\chi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{(\Lambda+\varepsilon)}\varphi,\qquad (7.7)_1$$

即

$$W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\varphi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\Lambda+\varepsilon}\varphi\end{vmatrix}\text{或}\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{\varepsilon-\Lambda}\chi\\ \chi\end{vmatrix}\qquad (7.8)_1$$

在非相对论情况下，$|\boldsymbol{k}|\ll\varepsilon$，由上式可知：当 $\Lambda=m$ 时，

† 可以引进所谓 Pauli-Lubanski 协变的自旋矢量

$$\omega_\sigma=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\sigma_{\mu\nu}\partial_\lambda=\gamma_5\sigma_{\sigma\lambda}\partial_\lambda$$

容易看出 $\bar{\psi}\omega_\sigma\psi$ 是一个四维矢量，而且在粒子静止系。ω_σ 为

$$\omega_\sigma=(\pm m\boldsymbol{\sigma},\ 0)$$

正号适用于正能态，负号适用于负能态。一般在动量 $\boldsymbol{k}\neq0$ 的情况下

$$\omega_4=-\frac{i}{2}\varepsilon_{4\mu\nu\lambda}k_\lambda=\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk4}\sigma_{ij}k_k=i\sigma_k k_k=i|\boldsymbol{k}|S_l$$

$$\varphi \gg \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{m+\varepsilon}\varphi=\chi;$$

而当 $\Lambda=-m$ 时，则 $\chi\gg\varphi$。因而对于正频解 $\Lambda=m$，我们称 φ 为大分量，χ 为小分量；对于负频解，则反之。

应该指出，上式只是决定了 φ 和 χ 之间的关系，但 φ（或 χ）本身，依然有两个分量，并无任何限制，也就是说明此时 $W_\Lambda(k)$ 还是简并的。为了消除简并，还要利用 $(6.11)_1$ 式。由于 S_i 矩阵是可约的，当以 $W=\begin{vmatrix}\varphi\\ \chi\end{vmatrix}$ 代入 $(6.11)_1$ 式时，可以简化为两个相同的二元方程，即

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}-h\right)\varphi^{(h)}=0,\\ \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}-h\right)\chi^{(h)}=0。\end{aligned}\right\} \qquad (7.9)_1$$

由此可见 χ^h 和 φ^h 形式是相同的，以后我们只需讨论 φ^h。把上式关系代入 $(7.8)_1$ 式可得

$$W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\varphi^{(h)}\\ \dfrac{h\cdot|\boldsymbol{k}|}{\varepsilon+\Lambda}\varphi^{(h)}\end{vmatrix} \text{或} \begin{vmatrix}\dfrac{h|\boldsymbol{k}|}{\varepsilon-\Lambda}\chi^{(h)}\\ \chi^h\end{vmatrix} \qquad (7.10)_1$$

如果 $\boldsymbol{k}$ 的指向为 $(\theta,\ \varphi)$，则

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{vmatrix}$$

代入 $(7.9)_1$ 式可得

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(+)}&=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{vmatrix} \quad (h=+1),\\ \varphi^{(-)}&=\begin{vmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\\ \cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{vmatrix} \quad (h=-1)\end{aligned}\right\} \qquad (7.11)_1$$

以上的 $\varphi^{(h)}$ 已经归一化了，即

$$\varphi^{(h)+}\cdot\varphi^{(h')}=\delta_{hh'}$$

并且适当地选取了相因子，使得

$$\varphi^{(h)}(-\boldsymbol{k})=i\varphi^{(-h)}(+\boldsymbol{k}) \qquad (7.12)_1$$

且

$$\sigma_2\varphi^{h}=ih\varphi^{-h^*}$$

$$\sigma_2\varphi^{h^*}=ih\varphi^{-h} \qquad (7.13)_1$$

以$(7.11)_1$式代入$(7.10)_1$式，可得：

$W_{m,+}(\boldsymbol{k})=u^+(\boldsymbol{k})$	$W_{m,-}(\boldsymbol{k})=u^-(\boldsymbol{k})$	$W_{-m,+}(\boldsymbol{k})=V^-(\boldsymbol{k})$	$W_{-m,-}(\boldsymbol{k})=V^+(\boldsymbol{k})$
$i\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$\frac{-\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$\frac{i\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$
$i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$\frac{-\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$\frac{-i\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$
$\frac{i\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$-\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$	$-i\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}$
$\frac{i\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{k}\rvert}{\varepsilon+m}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$-\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$	$i\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}$

应该指出，在$W_{\Delta,k}$的具体表式里，还可允许一个常数因子未确定，该因子可由归一化条件来决定[参看下节$(8.9)_1$式]；即使用了归一化条件，该归一化常数依然还允许有不同的相因子供选择。

§1.8 Dirac方程解的正交归一性和封闭性

应该指出，算符$(-i\gamma k)$不是厄密的，一般来说，它的本征矢在普通意义下并不正交，不过我们可以使它在另一种意义下正交。

以$\overline{W}_{\Delta,h}(\boldsymbol{k})$左标乘$(6.9)_1$式的第一式，再减去$W_{\Delta,h}(\boldsymbol{k})$右标乘$(6.9)_1$式的第二式，可得：

$$\overline{W}_{\Delta',h}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Delta,h}(\boldsymbol{k})=C_\Delta\delta_{\Delta\Delta'}。 \qquad (8.1)_1$$

另一方面，与$(6.11)_1$式同时应有

$$W^+_{\Delta,h'}(\boldsymbol{k})\cdot(S_l(\boldsymbol{k})-h')=0。$$

以上考虑到$S_l^+=S_l$。而由于γ_4和S_l是对易的，因此把上式右乘以γ_4可得

$$\overline{W}_{\Delta,h'}(\boldsymbol{k})\cdot(S_l-h')=0。$$

类似$(8.1)_1$式可得

$$\overline{W}_{\Lambda,h'}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=C_h\delta_{hh'}。 \qquad (8.2)_1$$

把$(8.1)_1$和$(8.2)_1$两式合并，则有

$$\overline{W}_{\Lambda',h'}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=C\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{hh'}。 \qquad (8.3)_1$$

下面我们再来分析同一态的归一化。由于γ_5与$(-i\gamma k)$反对易，而与$S_\prime$对易，即

$$\{\gamma_5,\ -i\gamma k\}_+=0,$$
$$[\gamma_5,\ S_\prime]_-=0。 \qquad (8.4)_1$$

所以

$$\gamma_5 W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=CW_{-\Lambda,h}(\boldsymbol{k}), \qquad (8.5)_1$$
$$W^+_{\Lambda,h}\gamma_5\gamma_4=C^*W^+_{-\Lambda,h}\gamma_4。$$

即
$$-\overline{W}_{\Lambda,h}\gamma_5=C^*\overline{W}_{-\Lambda,h}。$$

由此可得

$$-\overline{W}_{\Lambda,h}(k)\cdot W_{\Lambda,h}(k)=|C|^2\overline{W}_{-\Lambda,h}(\boldsymbol{k})W_{-\Lambda,h}(\boldsymbol{k})。$$

可见，正频解和负频解的归一化常数应是符号相反的。我们把上述结论总结如下：

$$\boxed{\overline{W}_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda',h'}(\boldsymbol{k})=\frac{\Lambda}{m}\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{hh'}。} \qquad (8.6)_1$$

值得指出，此等号两边都是四维空间的标量，因而这样的归一化条件是满足 Lorentz 协变的。

为了便于和其他专著比较，下面来讨论一定动量$\boldsymbol{k}$的正负能态以及不同涡度态之间的正交归一关系。能量（哈密顿）算符H，和涡度算符$S_\prime$都是厄密的，因此它们的本征矢是在普通意义下正交的，这一点也可由$(8.6)_1$式导出。利用γ_4和$\boldsymbol{\gamma}$反对易关系，由 Dirac 方程可导出

$$\overline{W}_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})\gamma_4 W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=\frac{2\varepsilon}{\Lambda+\Lambda'}\overline{W}_{\Lambda',h}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda h}(\boldsymbol{k})。 \qquad (8.7)_1$$

由$(8.6)_1$式可得到

$$\boxed{W^+_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})=\frac{\varepsilon}{m}。} \qquad (8.8)_1$$

可以证明[作为习题，参看$(6.12)_1$式]

$$\bar{u}_h(\boldsymbol{k})\gamma_4 V_{h'}(-\boldsymbol{k})=0=\bar{V}_h(\boldsymbol{k})\gamma_4 u_{h'}(-\boldsymbol{k})。$$

要使上节解出的 W 满足归一化条件，还必须把它乘以归一化因子 N。这样由$(7.10)_1$式和$(8.6)_1$式可知，对于 $\Lambda=m$

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})\cdot W_{\Lambda,h}(\boldsymbol{k})&=|N|^2\cdot\left[\varphi^+\varphi-\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{(\varepsilon+\Lambda)^2}\varphi^+\varphi\right]\\&=|N|^2\cdot\frac{2\Lambda}{(\varepsilon+\Lambda)}=\frac{\Lambda}{m}。\end{aligned}$$

因而

$$N=\sqrt{\frac{\varepsilon+\Lambda}{2m}}=\sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2m}}。\qquad(8.9)_1$$

对于 $\Lambda=-m$ 态亦有同样结果。此外还有一个相因子，可供适当选择。

利用$(8.6)_1$式关系可得出，对于一定 $\boldsymbol{k}$ 的任何一个 $W_{\Lambda',h'}$ 都存在以下关系。实际上任何一个四元数都可以展开成四个 W 的线型和，因而以下关系实际上对任何一个四元数都成立。

$$\left[\sum_{\Lambda}\sum_{h}\frac{m}{\Lambda}W_{\Lambda,h}\overline{W}_{\Lambda,h}\right]\cdot W_{\Lambda'h'}=W_{\Lambda',h'}。$$

这说明上式左方括号内所形成的 4×4 矩阵是一个单位矩阵，即

$$\boxed{\sum_{\Lambda,h}\frac{m}{\Lambda}W_{\Lambda,h}\overline{W}_{\Lambda,h}=1。}\qquad(8.10)_1$$

上式就是所谓 W 的封闭性，该式等号两边都为 4×4 矩阵，而$(8.6)_1$式等号两边则为普通的常数。

在以后实际计算中，我们常遇到的是只对一定频号的涡度求和。由 Dirac 方程$(6.9)_1$式可证明

$$-\frac{i\gamma k+\Lambda}{2m}W_{\Lambda,h}=\frac{\Lambda'}{m}W_{\Lambda',h}\delta_{\Lambda'\Lambda}。\qquad(8.11)_1$$

利用上式可以把对一定频号的不同涡度态求和的计算简化

$$\begin{aligned}\sum_h W_{\Lambda,h}W_{\Lambda,h}&=\sum_{\Lambda'}\sum_h\delta_{\Lambda',\Lambda}W_{\Lambda',h}\overline{W}_{\Lambda',h}\\&=\sum_{\Lambda',h}\frac{-i\gamma\cdot k+\Lambda}{2m}\cdot\frac{m}{\Lambda'}W_{\Lambda',h}\overline{W}_{\Lambda',h}\qquad(8.12)_1\end{aligned}$$

$$=\frac{-i\gamma\cdot k+\Lambda}{2m}$$

写得具体些即为：

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_h u^h\bar{u}^h&=\frac{-i\gamma\cdot k+m}{2m}=\Lambda_+(k),\\ \sum_h V^h\bar{V}^h&=\frac{-i\gamma\cdot k-m}{2m}=-\Lambda_-(k).\end{aligned}} \tag{8.13}_1$$

在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_h u^h\bar{u}^h&=\frac{\gamma\cdot k+m}{2m}=\Lambda_+(k),\\ \sum_h V^h\bar{V}^h&=\frac{\gamma\cdot k-m}{2m}=-\Lambda_-(k).\end{aligned}} \tag{8.13'}_1$$

其中引进了算符

$$\boxed{\Lambda_\pm(k)=\frac{\mp i\gamma\cdot k+m}{2m}.} \tag{8.14}_1$$

在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\Lambda_\pm(k)=\frac{\pm\gamma\cdot k+m}{2m},} \tag{8.14'}_1$$

由于(8.11)性质，$\Lambda_\pm(k)$常称为正，负频号的投影算符。容易证明它满足投影算符的一般性质，即

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_\pm\cdot\Lambda_\mp&=0,\\ \Lambda_+ +\Lambda_-&=I,\\ \Lambda_\pm^2&=\Lambda_\pm.\end{aligned}\right\} \tag{8.15}_1$$

同理，我们可有正，负涡度的投影算符

$$\Sigma_\pm(k)=\frac{\pm\sigma\cdot k+|k|}{2|k|}. \tag{8.16}_1$$

满足同样的关系：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_{\pm}\cdot\Sigma_{\mp}&=0,\\ \Sigma_{+}+\Sigma_{-}&=I,\\ \Sigma_{\pm}^{2}&=\Sigma_{\pm}。\end{aligned}\right\}\qquad (8.17)_1$$

而且

$$[\Lambda_{\pm},\ \Sigma_{\pm}]=0。\qquad (8.18)_1$$

当然利用上节所得到的解 $W_{\Lambda,h}$ 的具体形式，是可以直接推得本节的结论的，然而这些结论与具体表示无关。

§1.9 Dirac 粒子在外场中的运动

前面我们分析了自由 Dirac 粒子的运动状态，本节将讨论 Dirac 粒子在外场中的运动状态。由于存在外场，粒子就不再具有坐标平移不变性，粒子的动量矢量不再是守恒量，因而应用动量、涡度来表征粒子的运动状态就很为不便。不过，如果外场是球型对称的(本节仅限于这一特殊情况)，则粒子的哈密顿便具有空间坐标旋转以及反演下不变的性质。所以角动量和宇称是守恒量，可以用它们作为好量子数来表征粒子的运动状态。

电子在外场中的哈密顿函数，根据经典电磁理论，可由自由电子的哈密顿函数以 $p_\mu\to p_\mu-\frac{e}{c}A_\mu$ 的代换而得到，因而我们也可以由同样的代换由自由粒子的 Dirac 方程$(1.8)_1$式经过代换得到

$$\gamma_\mu\left(\partial_\mu-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\psi+m\psi=0。\qquad (9.1)_1$$

这就是在外场中的 Dirac 方程。该方程的求解既不象自由 Dirac 粒子的方程求解那么简单，也比在外场中非相对论 Schrödinger 方程求解复杂，我们不预备在这里作严格的数学推导，而是尽量利用物理的考虑，把解的形式限制在一定的范围之内，然后再经过少量必要的计算，最后把解确定下来。

我们可以设想$(9.1)_1$的解，与非相对论情况一样是由角度部分和径向部分的乘积组成，其角度部分由角动量

$$\boldsymbol{J}=\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)$$

及其投影，和宇称 P 的本征方程来确定，而其径向部分则由哈密顿 H 的本征方程来决定。为简单起见，可以假定 $\boldsymbol{A}=0, eA_4=iV(\gamma)$，那末用推导 $(7.2)_1$ 式的方法便得出在外场中

$$H=-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\partial}+\gamma_4 m+V(\gamma)。\qquad (9.2)_1$$

可以直接证明上式的 H 与

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}^2=\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^2,\\&J_z=\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)_z,\\&P=i\gamma_4 I\end{aligned}\right\}\qquad (9.3)_1$$

相互对易，其中 I 代表把空间坐标反演的运算。由于角动量算符是可约的，以

$$\psi_{EjM\varphi}=\begin{vmatrix}\varphi_{EjMl}\\ \chi_{EjMl'}\end{vmatrix}\qquad (9.4)_1$$

代入 $(9.3)_1$ 式的本征方程，可以简化为两个相同的二元方程

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{J}^2\varphi_{EjMl}=j(j+1)\varphi_{EjMl},\\&\boldsymbol{J}^2\chi_{EjMl'}=j(j+1)\chi_{EjMl'},\end{aligned}\right\}\qquad (9.5)_1$$

以及

$$\left.\begin{aligned}&J_z\varphi_{EjMl}=M\varphi_{EjMl},\\&J_z\chi_{EjMl'}=M\chi_{EjMl'}。\end{aligned}\right\}\qquad (9.6)_1$$

式中 $M=m\pm\frac{1}{2}$（m 为磁量子数，表征轨道角动量的投影）。$(9.3)_1$ 式中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 算符是由 Pauli 矩阵对角扩张而形成的 4×4 矩阵，而上面两式中 $\boldsymbol{J}$ 的 $\boldsymbol{\sigma}$ 则是 2×2 Pauli 矩阵。

由角动量相加法则可知，φ（或 χ）应具有如下形式：

$$\varphi_{EjMl}=iG(r)\begin{vmatrix}\left\langle j,\ M\middle|l,\ m;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M-\frac{1}{2}}\\ \left\langle j,\ M\middle|l,\ m;\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M+\frac{1}{2}}\end{vmatrix}。\qquad (9.7)_1$$

其中 $Y_{l,m}$ 为球谐函数，即轨道角动量的本征函数。$\left\langle j, M \middle| l, m; \frac{1}{2}, \mu \right\rangle$ 为 Clebsh-Gordan 系数。

应该指出，对于一定的 j，轨道角动量 l 可能取 $l=j+\frac{1}{2}$ 或 $j-\frac{1}{2}$。一般讲来，φ_{EjMl} 应是两种 l 值的、如$(9.7)_1$形式的态的线型迭加。不过如果 φ_{EjMl} 同时还是宇称的本征态，那末这样两种不等的 l 态的迭加是被排斥的。这是由于 p 算符也是可约的，其本征方程导致了

$$I\varphi_{EjMl}=\xi\varphi_{EjMl},$$
$$I\chi_{EjMl'}=-\xi\chi_{EjMl'}。 \qquad (9.8)_1$$

其中 ξ 为宇称本征值，等于 $+1$ 或 -1。而且，我们已知

$$I\cdot Y_{lm}(\theta\cdot\varphi)=Y_{l,m}(\pi-\theta, \pi+\varphi)=(-1)^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)。 \qquad (9.9)_1$$

由此可见，l 虽不是运动常数，然而它的奇、偶性却与宇称有直接关系。因而宇称本征态是不会出现奇值 l 和偶值 l 相迭加的情况，所以$(9.7)_1$式就是 φ_{EjMl} 的一般形式。$\chi_{EjMl'}$ 应该和 φ_{EjMl} 有相同形式，只是由于$(9.8)_1$右方的符号相异，以致在 χ 中出现的 l' 和在 φ 中出现的 l 是不能相等的。其实，如果它们的 l 相同。那末所得 ψ_{EjMP} 就成为轨道角动量的本征态了，这便不符合轨道角动量和 H 不对易的事实。此外，χ 和 φ 的径向部分一般也不相同。因此我们可写出 ψ_{EjM_P} 的一般形式应为：

$$\psi_{EjM_P}=\begin{vmatrix}\varphi_{EjMl}\\ \chi_{EjMl'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}iG(r)\Omega_{jMl}(\theta, \varphi)\\ -F(r)\Omega_{jMl'}(\theta, \varphi)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}iG(r)\left\langle j, M \middle| l, m; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M-\frac{1}{2}}\\ iG(r)\left\langle j, M \middle| l, m; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M+\frac{1}{2}}\\ -F(r)\left\langle j, M \middle| l', m; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle Y_{l',M-\frac{1}{2}}\\ -F(r)\left\langle j, M \middle| l', m; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle Y_{l',M+\frac{1}{2}}\end{vmatrix}。 \qquad (9.10)_1$$

其中，引进了

$$\Omega_{jMl}(\theta,\ \varphi)=\begin{vmatrix}\left\langle j,\ M\,|l,\ m;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M-\frac{1}{2}}\\ \left\langle j,\ M\,|l,\ m;\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle Y_{l,M+\frac{1}{2}}\end{vmatrix}。\qquad (9.11)_1$$

这称为球谐旋量函数。

为了确定径向部分我们以 $(9.4)_1$ 代入$(9.2)_1$式 H 的本征方程中便得到

$$\left.\begin{aligned}(E-m-V(\gamma))\varphi&=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\chi,\\ (E+m-V(\gamma))\chi&=(\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})\varphi。\end{aligned}\right\}\qquad (9.12)_1$$

式中的 $\boldsymbol{p}$ 和以前 J 中出现的 $\boldsymbol{p}$ 一样应理解为算符 $-i\partial$。要从上式解出径向部分，首先要消去等式两边的角度部分，但是由于 φ 和 χ中的 l 不同，因而不能直接消去。为此我们利用算符$\sigma_r=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}/r)$的性质。由 σ_r 的定义形式知道 $\bar{\psi}\sigma_r\psi$ 是一个三维空间的赝标量。在空间坐标旋转下，它保持不变；而在空间坐标反演下，它改变符号。也可以直接证明 σ_r 与 $\boldsymbol{J}$ 是对易的，而与空间反演 P 算符是反对易的。因而

$$\boxed{\sigma_r\cdot\Omega_{jMl}=b\Omega_{jMl'}=-\Omega_{jMl'}。}\qquad (9.13)$$

式中 $l'=2j-l$；由 $\sigma_r^2=1$，可知 $b^2=1$，直接在$(\theta,\ \varphi)=(0,\ 0)$方向比较系数可得上式。利用上式则有

$$\begin{aligned}-(\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{p})\Omega_{jMl}&=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\sigma_r\Omega_{jMl'}\\ &=\left[\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\Omega_{jMl'}\\ &=-i\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{r}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\Omega_{jMl'}。\end{aligned}\qquad (9.14)_1$$

以上推导中利用了常用的关系：

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i&=2\delta_{ij};\\ \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i&=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k;\\ \sigma_i\sigma_j&=\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k;\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+i(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{\sigma}。\end{aligned}\qquad (9.15_1$$

$(9.14)_1$ 式中的$(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jMl'}$可以直接计算

$$(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jMl'}=\left[J^2-L^2-\left(\frac{1}{2}\sigma\right)^2\right]\Omega_{jMl'}$$

$$=\left[j(j+1)-l'(l'+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\Omega_{jMl'}。$$

$(9.16)_1$

引进

$$\lambda\equiv\mp\left(j+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}-(l+1), & 当 j=l+\frac{1}{2}\\ l, & 当 j=l-\frac{1}{2}\end{cases}, \qquad (9.17)_1$$

则

$$(2+\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jMl'}=(1+\lambda)\Omega_{jMl'}。 \qquad (9.18)_1$$

以$(9.10)_1$式和$(9.18)_1$式代入$(9.14)_1$式得

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\varphi_{Ejml}=-\Omega_{jMl'}\left(\frac{dG}{dr}+\frac{1+\lambda}{r}G\right),$$

同样有

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\chi_{Ejml'}=-i\Omega_{jMl}\left(\frac{dF}{dr}+\frac{1-\lambda}{r}F\right)。 \qquad (9.19)_1$$

把上式代入$(9.12)_1$式可以把角度部分消去，得到径向部分的方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dG}{dr}+(1+\lambda)\frac{G}{r}-(E+m-V(r))F=0,\\&\frac{dF}{dr}+(1-\lambda)\frac{F}{r}+(E-m-V(r))G=0。\end{aligned}\right\} \qquad (9.20)_1$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d(rG)}{dr}+\frac{\lambda}{r}(rG)-(E+m-V(r))(rF)=0,\\&\frac{d(rF)}{dr}-\frac{\lambda}{r}(rF)+(E-m-V(r))(rG)=0。\end{aligned}\right\} \qquad (9.21)_1$$

以下的计算归结为解联立微分方程组，解法已常见于量子力学课本中，这里不再赘进，只将重要结论列在下面。

如果$V(r)=0$，即对于自由粒子情况可解出

$$iG(r)=Cg_l(kr)=C\left(\frac{\pi k}{Rr}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$$

$$F(r)=C\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}g_\nu(kr)。\qquad (9.22)_1$$

式中 R 为归一化球的半径，$k^2=E^2-m^2$。由上式也可看出在非相对论情况 $k\to 0$ 条件下当 $E>0$ 时，则 $G(r)$ 为大分量，而 $F(r)$ 为小分量；对于 $E<0$ 态则反之。这和以前所得相符，如果 $V(r)$ 为库伦势，则可由 $(9.21)_1$ 式和边界条件，连续条件求出氢原子的能级为

$$E_{n,j}=mc^2\left(1+\frac{\alpha^2z^2}{\left(n'+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2z^2}\right)^2}\right)^{1/2}$$

$$\cong mc^2-\frac{1}{2}\alpha^2mc^2\frac{z^2}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2z^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\right)+\cdots\right]。$$

$$(9.23)_1$$

式中

$$n'=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\quad n=n'+j+\frac{1}{2}=1,\ 2,\ \cdots。$$

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\cong\frac{1}{137}。$$

由上面第一式看出在外场中的 Dirac 粒子也同样具有负能级。上式第二式是在 $E>0$ 时成立。至于氢原子的波函数 $G(r)$ 和 $F(r)$ 的形式复杂，这里不再抄录，读者可参看有关专著。

§1.10 电荷共轭

Dirac 粒子存在无穷多个负能级，给 Dirac 方程解的物理解释带来困难。根据量子理论的原理，这样的 Dirac 粒子在外场附近可能会无限止地放出能量，不断地向更低的能级跃迁。如此一来，原子乃至整个物理世界将不能保持其稳定状态。另一方面，在计算具体过程时，例如光子和电子的 Compton 散射，以及氢原子能级的 Lamb 移动等，为了说明实验结果，却又必须考虑负能态的存在。

Dirac 为了克服以上困难，提出了所谓空穴理论，即认为现实世界中所有负能级都有 Dirac 粒子占满。于是根据 Pauli 原理，正能级的 Dirac 粒子就不再能向负能级跃迁。所谓真空态就是所有负能级都已被 Dirac 粒子占有，同时所有正能级都没有粒子的态。我们不能对这样的态直接观测得到任何物理效应，我们测得任何一个物理量（其他非真空态）的数值，例如电荷电流、磁矩、动量、能量等，都应是相对于真空态的数值。例如较真空态少了一个负能级（动量为负k）的电子（即多出了一个负能级的空穴）的态，其能量较之于真空态为高，其电荷较之于真空态则少了一个e，因而一个负能级（动量为负 k）的空穴，就相当于一个能量为正、电荷也为正（动量为 k）的正电子态。

以后我们将会看到，在场量子化以后，$\psi(x)$ 即为各种态的 Dirac 粒子的湮灭算符，例如 $a_h(\boldsymbol{k})$是动量为 $\boldsymbol{k}$ 的正能态电子的湮灭算符，而 $u^h(\boldsymbol{k})e^{ikx}=W_{+m,h}(k)e^{ikx}$ 即为（湮灭）正能态电子的波函数。$b_h^*(\boldsymbol{k})$即为动量为$(-\boldsymbol{k})$的负能态电子的湮灭算符。根据上面介绍的空穴理论，在真空态中湮灭一个负能态电子，亦即产生一个负能态空穴，这就相当于产生一个正电子（正能量）。因而 $b_h^*(\boldsymbol{k})$也就是动量为 $\boldsymbol{k}$ 的正能量的正电子的产生算符，而

$$V^h(\boldsymbol{k})e^{-ikx}=W_{-m,-h}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}$$

就是（产生）正电子的波函数。此外 $\bar{\psi}(x)$为各种态的 Dirac 粒子的产生算符。同样的考虑，可知 $a_h^*(\boldsymbol{k})$是动量为 $\boldsymbol{k}$ 的正能态电子的产生算符，而 $b_h(\boldsymbol{k})$则为动量是 $\boldsymbol{k}$ 的正电子（正能量）的湮灭算符。同时 $\bar{u}^h(\boldsymbol{k})e^{-ikx}$ 和 $\bar{V}^h(\boldsymbol{k})e^{ikx}$ 则分别是它们相应的波函数（参看$(6.14)_1$式和$(6.15)_1$式）。本段所叙，后面将有详细证明，现在只是给读者有一个初步印象而已。

下面我们来证明，这几个波函数之间存在着一个重要的变换关系。由$(3.2)_1$式知道存在矩阵 C（就是$(3.2)_1$式的 B^{-1}）满足以下关系

$$C^{-1}\gamma_\mu C=-\gamma_{\mu T}。\qquad (10.1)_1$$

此外由$(3.5)_1$式得到

$$C=-C_T。 \tag{10.2}_1$$

在我们以前所取的表示里，γ_μ 和 $(-\gamma_{\mu T})$ 都是自厄密的，所以取 C 为幺正的，即

$$CC^+=I。 \tag{10.3}_1$$

在 Pauli 表示里，C 的具体表示可为

$$C=\gamma_2\gamma_4=\begin{vmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{vmatrix}。 \tag{10.4}_1$$

利用 Dirac 方程$(6.9)_1$式、$(8.2)_1$式、$(6.11)_1$式以及上述 C 矩阵的性质(选取适当的相因子)可知(作为习题)

$$C[\overline{W}_{\lambda,\lambda}(\boldsymbol{k})]_T=W_{-\lambda,-\lambda}(\boldsymbol{k})。 \tag{10.5}_1$$

上式也可直接由$(7.14)_1$式来验证。把它写得更具体些就是

$$\boxed{\begin{aligned} C[\overline{u}^\lambda(\boldsymbol{k})]_T&=V^\lambda(\boldsymbol{k}), \\ C[\overline{V}^\lambda(\boldsymbol{k})]_T&=u^\lambda(\boldsymbol{k})。 \end{aligned}} \tag{10.6}_1$$

以下的变换称为电荷共轭变换：

$$\psi\to\psi_c=C\overline{\psi}_T。 \tag{10.7}_1$$

与此同时

$$\overline{\psi}\to\overline{\psi}_c=-\psi_TC^{-1}=(C^{-1}\psi)_T。 \tag{10.8}_1$$

且 $e\to -e$。

ψ_c 和 $\overline{\psi}_c$ 称为 ψ 和 $\overline{\psi}$ 的电荷共轭波函数。利用 Dirac 方程$(9.1)_1$式和上述 C 矩阵的性质，可以证明 ψ_c 同样满足 Dirac 方程，只是在外场中的 e 要换以 $(-e)$。也就是说 Dirac 方程在电荷共轭变换下保持不变。

由以上的讨论可知，电荷共轭变换的物理意义相当于电子↔正电子的地位互换，在一般情况下就是粒子↔反粒子互换。Dirac 方程在电荷共轭变换下保持不变的意义，就是说自然界规律中，把电子和正电子互换，同时把外场中的 e 换成 $-e$，电磁现象不变。

§1.11 Dirac 方程的非相对论近似

为了与 Pauli 方程比较以便得到清楚的物理意义，并在讨论

具体问题时简化我们的计算，在这一节里我们来讨论 Dirac 方程的非相对论近似。

以$(9.4)_1$式代入$(9.1)_1$式，可得到在一般 $A\neq 0$ 情况下，相应$(9.12)_1$式有关系

$$\left.\begin{aligned}[E-m-V(r)]\varphi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi,\\ [E+m-V(r)]\chi&=\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi。\end{aligned}\right\}\quad(11.1)_1$$

由上式第二式可直接解出

$$\chi=\left(1+\frac{E-m-V(r)}{2m}\right)^{-1}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)}{2m}\varphi。\quad(11.2)_1$$

为明确计算，我们限于讨论正能态$(E>0)$，在非相对论情况下，

$$\frac{E-m-V(r)}{2m}\ll 1;\quad\frac{\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}}{2m}\ll 1,$$

由此可见 χ 相对于 φ 为一级微量；这是早已预知的结论。

在一级近似下可由$(11.2)_1$式和$(11.1)_1$式的第一式得到

$$(E-m-V(r))\varphi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)}{2m}\varphi。\quad(11.3)_1$$

利用公式$(9.15)_1$并考虑 $\boldsymbol{p}=-i\nabla$，由上式可得

$$(E-m-V(r))\varphi=\frac{1}{2m}\left\{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{e}{c}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\}\varphi。$$

亦即

$$(E-m)\varphi=\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}+V(r)\right]\varphi。\quad(11.4)_1$$

上式就是量子力学里的 Pauli 方程，φ 即为其两分量的波函数。不过在 Pauli 方程中，自旋磁矩与外磁场 $\boldsymbol{B}$ 的相互作用项，是根据实验事实而人为地引进的；而在 Dirac 方程中，该项是自动出现的，甚至连磁矩和自旋的比值也是自动给出的，并且在二级近似下

自动给出自旋和轨道耦合项(从略)。这些都具体表现出 Dirac 方程的优越性。

以上我们介绍了 Dirac 方程本身在非相对论近似下的情况。下面我们来分析 Dirac 张量在非相对论近似下的数量级。如果所形成的张量是由同频号波函数组成，例如 $\bar{u}\gamma_A u$ 或 $\bar{V}\gamma_A V$，则所有对角元素为零的 γ_A 联系着大分量和小分量，例如

$$\gamma=\begin{vmatrix}0 & -i\sigma\\ i\sigma & 0\end{vmatrix};\quad \alpha=\begin{vmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{vmatrix};$$

$$\gamma_4\gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{vmatrix}\text{和}\quad \gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{vmatrix}。$$

其矩阵元素都是在非相对论近似下为一级微量。

此外当 γ_4 有对角元素时，其矩阵元连系着大分量和大分量以及小分量和小分量，例如有

$$I=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix};\quad \gamma_4=\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{vmatrix};$$

$$\sigma=\begin{vmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{vmatrix};\quad \gamma_4\sigma=\begin{vmatrix}\sigma & 0\\ 0 & -\sigma\end{vmatrix}$$

和

$$i\gamma_5\gamma=\begin{vmatrix}\sigma & 0\\ 0 & -\sigma\end{vmatrix}。$$

其矩阵元在非相对论近似下均为有限项。

如果张量是由异频号波函数所形成，例如 $\bar{u}\gamma_A V$，或 $\bar{V}\gamma_A u$ 则以上结论正好相反。

对于同频波函数间 γ_5 矩阵元，我们可再作进一步讨论。由 Dirac 方程$(6.9)_1$式，有

$$(i\gamma k_1+\Lambda)W_A(k_1)=0。$$

与此同时有

$$\overline{W}_A(k_2)(i\gamma k_2+\Lambda)=0。$$

以 $\overline{W}(k_2)\gamma_5$ 及 $\gamma_5 W(k_1)$ 分别乘上下两式并相加，可得

$$\overline{W}_A(k_2)\gamma_5 W_A(k_1)=i\frac{k_{2\mu}-k_{1\mu}}{2\Lambda}(\overline{W}_A\gamma_5\gamma_\mu W_A)。\quad (11.5)_1$$

在$|k_{10}-k_{20}|\ll|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|$情况下，上式可近似写成：

$$\overline{W}_A(k_2)\gamma_5 W_A(k_1)\cong\overline{W}_A(k_2)\left(\gamma_5\cdot\frac{i(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)}{2A}\gamma\right)W_A(k_1)。$$

以具体的 Pauli 表示代入即为

$$\overline{W}_A(k_2)\gamma_5 W_A(k_1)$$

$$=\overline{W}_A(k_2)\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)}{2A} & 0\\ 0 & \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)}{2A}\end{vmatrix}W_A(k_1)。$$

这就是说，在非相对论近似下

$$\gamma_5\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)}{2m}。\qquad(11.6)_1$$

当$\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_1$时，$\gamma_5=0$。其实这一点是严格成立的，这可直接由$(8.5)_1$和$(8.6)_1$式看出。此结论也可由如下考虑得到。$\overline{W}_A(k)\gamma_5 W_A(k)$已知为一赝标量，其数值不随观察系而改变，对于随粒子运动的观察系而言$\boldsymbol{k}=0$。这时可直接得出$\overline{W}_A(k)\gamma_5 W_A(k)=0$，因而对于所有其他观察系(即$\boldsymbol{k}\neq0$)也应为零。

§1.12 中微子两分量理论

Dirac 方程适用于所有自旋为$\frac{1}{2}$的粒子(统称为 Dirac 粒子)，包括质量为零的中微子。由于中微子的质量为零，可得到更简化的 Weyl 两分量方程。

以$-i\gamma_5\gamma_4$乘 Dirac 方程$(6.9)_1$式，当$m=0$时即得到(参看$(4.11)_1$式)：

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}+\gamma_5 k_0)\psi(k)=0。\qquad(12.1)_1$$

也就是说作用到$\psi(k)$上，对于正能态($k_0>0$)而言，$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$和$-\gamma_5$是等效的，即

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\psi=-\frac{k_0}{|\boldsymbol{k}|}\gamma_5\psi。\qquad(12.2)_1$$

因而当 $m=0(|k_0|=|k|)$时，对于正能态，$\frac{1}{2}(1\mp\gamma_5)$实际上即为涡度 ±1 的投影算符，而对于负能态($k_0<0$)则相反。

Dirac 波函数一般总可以分解成：

$$\psi=\psi_e+\psi_0=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi+\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi。\qquad (12.3)_1$$

其中 ψ_e 和 ψ_0 都是 γ_5 的本征态，其本征值分别为 ±1，即

$$\gamma_5\psi_e=\psi_e,\quad \gamma_5\psi_0=-\psi_0。\qquad (12.4)_1$$

由$(12.2)_1$式可知，对于 $m=0$ 的粒子，当 $k_0=|k|$ 的正能态时，ψ_e 即为涡度是 -1 的态，而 ψ_0 即为涡度是 $+1$ 的态。当 $k_0=-|k|$ 的负能态时，则反之。在 Pauli 表示里

$$\psi_e=\begin{vmatrix}\psi\\-\psi\end{vmatrix};\qquad \psi_0=\begin{vmatrix}\psi\\\psi\end{vmatrix}$$

由此可见实质上它们都是两分量的。

另一方面，由 Dirac 方程看出，该方程在 $\psi\to\pm\gamma_5\psi$ 同时 $m\to-m$ 的变换下保持不变。也就是当 $m=0$ 时，Dirac 方程在 $\psi\to\pm\gamma_5\psi$ 变换下保持不变，即当 $m=0$ 时，$\pm\gamma_5\psi$ 也是 Dirac 方程的解，所以对 $m=0$ 的粒子，我们有可能限取 ψ_e 和 ψ_0 二者之一作为它的波函数，同时对反粒子则取其另一。在这样的限制下(12.1)式就成为：

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}\pm k_0)\psi_e=0。\qquad (12.5)_1$$

由于上式的矩阵在 Pauli 表示下是可约的，可以把该式分解为两个完全相同的两元联立方程，这实质上是一个两分量的方程；基于该方程的理论就是 Wegl 的两分量理论。

中微子两分量理论限取 ψ_e 或 ψ_0 部分，也就是限定中微子只有一个确定的涡度。这一点和中微子质量 $m=0$ 有密切联系。在第七节[参看$(7.6)_1$式前面的叙述]我们曾论证了对于 $m\neq0$ 的粒子经常可有两个观察系，在他们看来粒子的涡度是不相同的，那末若 $m\neq0$ 的粒子只具有一个确定的涡度态，是不符合于 Lorentz 协变的要求的。可是如果 $m=0$，其速度常等于光速 C，也就不存在两个观察系，在他们看来，中微子有相反的动量。因而对于 $m=$

0 粒子，两分量理论可以保持 Lorentz 协变。这一点在上面的数学形式$(12.1)_1$和$(12.4)_1$式上也可以看出。

如果把两分量理论用平面波展开，则得到

$$\psi_e(x)=\psi_L(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{m}{e}}\cdot\left[a_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})u^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})e^{ik\alpha}+b^{+}_{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})e^{-ik\alpha}\right],$$

$$\psi_0(x)=\psi_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{m}{e}}\cdot\left[a_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})u^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})e^{ik\alpha}+b^{+}_{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})V^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{k})e^{-ik\alpha}\right]。\quad (12.6)_1$$

由于 I 和 γ_5，分别相当于标量和赝标量，所以$(12.4)_1$式破坏了空间反演不变性。从物理上讲，空间反演导致涡度的改变。而在两分量理论中，如前所述，中微子只有确定的一个涡度，因此不能保持空间反演不变。同样由$(4.17)_1$式可以看出，在空间反演下：

$$\psi^1_e=i\gamma_4\psi_e=\pm i\gamma_4\gamma_5\psi_e=\mp\gamma_5\psi'_e \qquad (12.7)_1$$

由此可见空间反演后的波函数改变了原来的奇偶性 $e\leftrightarrow 0$。此外两分量理论也破坏了电荷共轭不变性。与$(12.4)_1$式同时有

$$\bar{\psi}_e=\psi^{+}_e\cdot\gamma_4=\pm\psi^{+}_e\gamma_5\gamma_4=\mp\bar{\psi}_e\gamma_5$$

因而电荷共轭变换导致

$$(\psi_e)_c=C(\bar{\psi}_e)_T=\mp C\gamma_{5T}|\bar{\psi}_e|_T=\mp\gamma_5(\psi_e)C。 \qquad (12.8)_1$$

由此可见，电荷共轭后的波函数也改变了原来的奇偶性 $e\leftrightarrow 0$。结合$(12.7)_1$关系可知两分量理论在空间反演和电荷共轭的复合变换下保持不变。

两分量理论由于破坏了空间反演和电荷共轭分别变换下的不变性，长期来被人忽视，直到李政道和杨振宁提出在弱相互作用里宇称不守恒的理论时，才重新引起人们的注意。物理学家们甚至企图利用中微子纵向极化的性质来说明弱相互作用中宇称不守恒

的事实。理论进一步发展，就成为所谓普适的 Fermi 弱相互作用理论，这在以后我们还要讨论到。

极化核 β 衰变的电子角分布实验指明，中微子确是完全纵向极化的，其涡度为 -1，也就是对于中微子应取偶性部分即左手部分。

$$\psi_\nu = \psi_\bullet = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_\bullet,$$

与此同时

$$\bar{\psi}_\bullet = \bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)_\bullet$$

以上的讨论，对 $m \neq 0$ 的电子在极端相对论情况 $E \gg m$ 时也是近似适用的。

参 考 资 料

1. 关于 Dirac 方程的相对论协变性

   朱洪元　量子场论(1965)第五章 p. 88

   J. D. Bjorken & S. D. Drell Relativistic Quantum Mechanics (1964) Chapter 2 p. 15

2. 关于 Dirac 方程的求解和中微子两分量理论

   J. D. Bjorken & S. D. Drell Relativistic Quantum Mechanics (1964) Chapter 3 p. 27, Chapter 10 p. 257

   D. 卢里　粒子和场(1981)第一章 p. 8

3. 关于 Dirac 空穴理论

   Ian. JR. Aitchison & Anthony JG Hey Gauge Theories in Particle Physics (1982) p. 11

第二章　量子场论的基本原理

把描写粒子运动的场看成为一个有无限多自由度的力学体系，并以相对论（尤其是狭义相对论）和量子力学紧密结合的理论，来研究场的运动及其相互作用，这是量子场论的基本出发点。因而相对论和量子力学的基本原理，也是量子场论的基本原理。此外，近年来由于对称性的研究，对于群论的需要愈来愈多，愈来愈深，群论也可算是量子场论的基础之一。不过这些在其他有关课程里都有讨论，在本课程里将不再作详细解释，只在需要时作一些补充说明。

本章首先讨论经典场的场方程，场的守恒物理量等，并将它们归结为统一的作用量原理。在推导过程中，将逐步显示出对称性和守恒定律的对应关系。然后，将经典场量子化，从而过渡为量子场。虽然很多专著都采用了所谓正则量子化方法，但我们仍采用由运动方程的 Poisson 括号的对应来进行量子化。这样做对讨论对易关系的协变形式比较方便，对于存在着 Bose 和 Fermi 两种不同量子化方法的理解也较简明而自然。本课程里，我们只希望有合理的法则来使经典场过渡为量子场，而不预备花过多的篇幅来叙述量子化的历史发展过程。

最后一节介绍在量子场的情况下，对称性与守恒定律的关系。至于确定 Lagrange 函数具体形式的原则，为方便起见，将在以后场相互作用一章里再作介绍。

§2.1　Lagrange 函数与作用量原理

量子场论目前主要应用于基本粒子物理，每种基本粒子与一

种场相对应。任何一种场都可以由有限个函数 $\Phi_r(x)$ $(r=1, 2, \cdots, n)$ 来表征，并把 $\Phi_r(x)$ 作为该力学体系的广义坐标，而把 x_μ 看为独立参数。例如上一章讨论的Dirac波函数 $\psi_\alpha(x)$，此后我们就把它理解为描写Dirac粒子运动的Dirac场，它就是 $\Phi_r(x)$ 中的一种。$\Phi_r(x)$ 与 x 的依赖关系反映出基本粒子的运动自由度，例如动量、能量、角动量等的情况；而它的有限个分量则反映出粒子的内部自由度。例如自旋，同位旋等情况。当对坐标系作 Lorentz 变换。$x'_\mu = L_{\mu\nu}x_\nu$ 时，$\Phi_r(x)$ 的有限分量之间，也应有相应的变换，即 $\Phi_r(x) \to \Phi'_r(x') = S_{rs}\Phi_s(x)$ 或者 $\Phi'_r(x') = S_{rs}\Phi_s(L^{-1}x')$。其中 S_{rs} 为依赖于 Lorentz 变换的 $n\times n$ 矩阵。关于 Dirac 场的变换关系已在上一章讨论过。由于理论需要保持 Lorentz 协变形式，S 应该就是 Lorentz 群的某种表示，而 Φ_r 的有限分量，则就是该表示的基矢。具体地讲，就是 $\Phi_r(x)$ 的有限个分量，要组成 Lorentz 变换下的旋量、矢量或张量，分别对应不同的自旋。如果粒子还具有其他内部自由度，例如同位旋、幺旋。也就是还具有某一内部变换下的对称性质，那末 $\Phi_r(x)$ 也应是这内部对称群的一个表示的基矢，其分量也一并包括在下指标 r 内。

附带指出，以上考虑的是在同一物理时空点的场分量，在变换前后的变更情况。我们以后还常常要考虑同一坐标时空点的场分量，在变换前后的变换关系。例如前面考虑的同一物理时空点之间的变换关系

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_r(x) \to \Phi'_r(x') = S_{rs}\Phi_s(x) = S_{rs}\Phi_s(L^{-1}x'), \\ &\text{与此相应可有对于同一坐标时空点之间的变换关系} \\ &\Phi_r(x) \to \Phi'_r(x) = S_{rs}\Phi_r(L^{-1}x) = J_{rs}\Phi_s(x)。 \end{aligned}\right\} \quad (1.0)_2$$

前者 S_{rs} 中未考虑由于坐标变更所引起的效应，而后者 J_{rs} 中则包括了由坐标变换所引起的场分量之间的变更。例如对于空间坐标旋转变换，S 只相应于自旋角动量算符部分，而 J 则相应于总角动量算符部分（参看下面 $(3.4)_2$ 式）。

由于 K–G 条件（参看 §1.1），自由粒子的 $\Phi_r(x)$ 的每一分量都要满足 K–G 方程。此外 $\Phi_r(x)$ 的分量之间可能还存在附加条件，

例如上章所讲的 Dirac 方程，以及电磁矢势的 Lorentz 条件等。$\Phi_r(x)$ 对时空的依赖关系所满足的方程常称为场方程。所有这些方程都应有 Lorentz 协变的形式。

类似力学里的作用量原理，我们假定对任何一个场的体系，都存在一个 Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}$，它是 $\Phi_r(x)$ 及其对时空微分的泛函数。为使理论满足 Lorentz 协变的要求，$\mathscr{L}[\Phi_r(x), \partial\Phi_r(x)]$ 应在正 Lorentz 变换下保持不变，亦即体系的总的 Lagrange 函数 L 应为一实的标量函数。对于封闭体系来说，其 L 不再是时空的显函数，以使它在坐标平移下，也保持不变。为要使自由场满足迭加原理，自由场的 $\mathscr{L}[(\Phi_r(x), \partial\Phi_r(x)]$ 中不应含有两个以上的 $\Phi_r(x)$ 的乘积。同时为简单计，我们假定 $\mathscr{L}[\Phi_r(x), \partial\Phi(x)]$ 中，不含有 $\Phi_r(x)$ 对时、空的高级微商。

当时、空或内部自由度坐标有一个变换时，场函数 $\Phi_r(x)$ 将发生相应的变换，这在上面已介绍过。至于变换以后的 Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}'$，我们是按照在同一物理时空点上的数值保持不变的原则来定义的。也就是在坐标变换下，在场函数变换的同时，$\mathscr{L}$ 也有相应的变换：

$$\mathscr{L}[\Phi_r(x)] \Rightarrow \mathscr{L}'[\Phi'_r(x')] \equiv \mathscr{L}[S^{-1}\Phi'(x')]。 \qquad (1.1)_2$$

如果在以上变换下，不仅在同一物理时空点的 $\mathscr{L}$ 数值保持不变（$\mathscr{L}$ 为一标量），而且 $\mathscr{L}'[\Phi'_r(x')]$ 对 $\Phi'_r(x')$ 的函数形式和 $\mathscr{L}[\Phi_r(x)]$ 对 $\Phi_r(x)$ 的函数形式也是相同的，亦即 $\mathscr{L}[S^{-1}\Phi'(x')] = \mathscr{L}[\Phi'(x')]$，这时我们就简称 $\mathscr{L}$ 在这样变换下是不变的。由于 $\mathscr{L}$ 是 Lorentz 标量，同样在 $(1.0)_1$ 式变换下，$\mathscr{L}$ 形式也将是不变的。即

$$\mathscr{L}[J^{-1}\Phi'(x)] = \mathscr{L}[\Phi'(x)], \qquad (1.1')_2$$

或

$$\mathscr{L}[\Phi(x)] = \mathscr{L}[J\Phi(x)]。$$

上面的讨论中，为了简便，我们没有把 $\mathscr{L}$ 对 $\partial\Phi(x)$ 的依赖的事实明显表示出来，不过应该有这样的理解。

Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}$ 对空间体积积分即为体系的总 Lagrange 函数 L。

$$L=\int \mathscr{L}\,dx$$

$\mathscr{L}$ 对时、空四维体积积分即为该体系的作用量 I，它也是一个 Lorentz 标量

$$I=\int_{\Omega}\mathscr{L}[\Phi_r(x),\ \partial\Phi_r(x)]dx$$

$$=-i\int_{\Omega}\mathscr{L}[\Phi_r(x),\ \partial\Phi_r(x)]d\Omega_{\circ} \qquad (1.2)_2$$

其中，$dx\equiv dx\,dy\,dz\,dt$，$d\Omega=dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$，$dx_4=i\,dt_{\circ}$ Ω 为某一时、空四维体积。

下面来讨论作用量的变更，为便于以后应用，我们考虑一般的变更情况，积分区的边界及其上的 $\Phi(x)$ 值也都是可以变更的（参看附录 I）。

$$\delta I=-i\int_{\Omega}d\Omega\left[\delta\Phi_r(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_r(x)}+\delta(\partial_\mu\Phi_r(x))\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\right]$$

$$-i\oint_{\Sigma}\mathscr{L}\,\delta x_\mu\,d\sigma_\mu,$$

$$\delta I=-i\int_{\Omega}d\Omega\left\{\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_r(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\right]\delta\Phi_r(x)\right.$$

$$\left.+\partial_\mu\left[\sigma\Phi_r(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\right]\right\}-i\oint_{\Sigma}\mathscr{L}\,\delta\chi_\mu\,d\sigma_{\mu\circ}$$

利用时空四维空间的 Gawss 定理，上式可写成

$$\boxed{\begin{aligned}\delta I=&\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_r(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\right]\delta\Phi_r(x)dx\\&-i\oint_{\Sigma}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\delta\Phi_r(x)+\mathscr{L}\,\delta x_\mu\right]d\sigma_{\mu\circ}\end{aligned}} \qquad (1.3)_2$$

以上推导中，已考虑到 $\mathscr{L}$ 不是时、空以及 $\Phi_r(x)$ 对时空的高级微商的显函数。式中的 Σ 为积分区域 Ω 的边界，为一封闭的超越的三维曲面。δx_μ 为 Σ 的变更，$d\sigma_\mu$ 为 Σ 的面积元在 μ 方向的投影。

如果 $\delta x_\mu=0$，即边界保持不变，且在边界上 $\delta\Phi_r(x)=0$，则由 $\delta I=0$ 的条件，就可决定场方程；这就是所谓作用量原理。此时，$(1.3)_2$ 式后一项面积分为零，因而 $\delta I=0$，即

$$\delta I=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_r(x)}-\partial_\mu\cdot\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}\right)\delta\Phi_r(x)dx=0, \tag{1.4}_2$$

由于 $\delta\Phi_r(x)$ 是任意的，故得

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_r(x)}-\partial_\mu\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r(x))}=0,\\&r=1,\ 2,\ \cdots,\ n。\end{aligned}} \tag{1.5}_2$$

由 $(1.5)_2$ 式各得出场方程。如果 $\mathscr{L}$ 在某一变换下保持不变，则所得场方程在此变换下也保持不变。$(1.5)_2$ 式在该变换前后亦都成立，于是 $(1.3)_2$ 式中的体积分为零。所以如果在某变换下 $\mathscr{L}$ 保持不变，$\delta I=0$ 就导致 $(1.3)_2$ 式中的面积分为零，也就是对应存在一条守恒定律。一般来说，$\mathscr{L}$ 的一个对称性质，对应一条守恒定律。

事实上 $\mathscr{L}$ 允许加上一个四维散度而不影响 $(1.4)_2$ 式的成立，因为四维散度在对四维体积分时，可归结为一面积分，而该面积分在 $(1.4)_2$ 式成立的条件下为零。这就是说如果 $\mathscr{L}$ 满足 $(1.4)_2$ 式，则

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\partial_\mu F_\mu[\Phi_r(x)] \tag{1.6}_2$$

也同样使 $(1.4)_2$ 式成立。其中 $F_\mu[\Phi_r(x)]$ 为任一矢量泛函数。由 $(1.6)_2$ 式所给出的不同的 $\mathscr{L}'$ 所得场方程是相同的。不同的 $\mathscr{L}'$ 之间实际相当于彼此经过一个正则变换，不同的 $\mathscr{L}$ 影响物理量在空间的分布，但不改变体系守恒量的总值。

§2.2 场的能量和动量

考虑时空坐标有一微量变换，其变换的 Jacob 行列式为 1。与此相应场量也有变换如下：

$$\left.\begin{aligned}&\chi_\mu\to\chi'_\mu=\chi_\mu+\delta\chi_\mu,\\&\varphi_r(x)\to\varphi'_r(x')=S\varphi(x)=\varphi_r(x)+S_{rs}\varphi_s(x)。\end{aligned}\right\} \tag{2.0}_2$$

变换后的作用量 I' 为

$$I'=\int_{\Omega'}\mathscr{L}[S^{-1}\varphi'(x')]dx'=\int_{\Omega}\mathscr{L}[S^{-1}\varphi'(x')]\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|dx$$
$$=\int_{\Omega}\mathscr{L}[\varphi(x)]dx。\qquad (2.1)_2$$

以上推导中积分时利用了$(2.0)_2$式的变换关系。上式最后一项其实就是变换前的作用量I。下面我们利用$\delta I=I'-I=0$来导出守恒量的表达式。

考虑

$$\delta I=\int_{\Omega'}\mathscr{L}[S^{-1}\varphi'(x')]\,dx'-\int_{\Omega}\mathscr{L}[\varphi(x)]dx$$
$$=\int_{\Omega'}\mathscr{L}[\varphi'(x')]dx'-\int_{\Omega}\mathscr{L}[\varphi(x)]\cdot dx$$
$$=\int_{\Omega'}\mathscr{L}[\varphi'(x)]dx-\int_{\Omega}\mathscr{L}[\varphi(x)]dx。\qquad (2.2)_2$$

以上利用了$\mathscr{L}$在$(2.0)_2$式变换下保持不变的性质$\mathscr{L}[S^{-1}\varphi'(x')]=\mathscr{L}[\varphi'(x')]$，最后并把第一项积分变量$x'$(哑变量)改写成$x$。把上式同时加减一项$\int_{\Omega}\mathscr{L}[\varphi'(x)]dx$就得到：

$$\delta I=\left(\int_{\Omega'}-\int_{\Omega}\right)\mathscr{L}[\varphi'(x)]dx+\int_{\Omega}\{\mathscr{L}[\varphi'(x)]-\mathscr{L}[\varphi(x)]\}dx$$
$$=-i\oint_{\Sigma}\mathscr{L}[\varphi(x)]\delta x_\mu\,d\sigma_\mu-i\int_{\Omega}\delta\mathscr{L}[\varphi(x)]d\Omega$$
$$=-i\oint_{\Sigma}\left[\mathscr{L}\delta x_\mu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\delta\varphi(x)\right]d\sigma_\mu。\qquad (2.3)_2$$

以上Σ为包围Ω的边界，并忽略了高级微量$\{\mathscr{L}[\varphi'(x)]-\mathscr{L}[\varphi(x)]\}\cdot\delta x_\mu$。其中$\delta x_\mu=x'_\mu-x_\mu$。最后一项中的$\delta\mathscr{L}$就是由于$\delta\varphi(x)=\varphi'(x)-\varphi(x)$所引起的$\mathscr{L}$的变更。最后一步考虑到$\mathscr{L}$在该变换下保持不变，变换前后都满足$(1.4)_2$式，类似$(1.3)_2$式的推导而得到。上式表明，对于由涉及时空坐标变换的变换所引起的作用量变更，可以通过场量和积分边界有相反的变更再类似上节的推导来计算。由$\delta I=0$上式就得到一个四维封闭面积分为零。

坐标平移变换即为

$$x'_\mu=x_\mu+\epsilon_\mu,\qquad (2.4)_2$$

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \epsilon_\mu \circ$$

对应于坐标平移变换，$\Phi_r(x)$的变换为

$$\left.\begin{aligned} &\Phi'_r(x') = \delta_{rs}\Phi_s(x) = \Phi_r(x) = \Phi_r(x'-\epsilon) = \Phi_r(x') - \epsilon_\mu \partial_\mu \Phi_r(x'), \\ &\delta\Phi_r(x) = \Phi'_r(x) - \Phi_r(x) = -\epsilon_\mu \partial_\mu \Phi_r(x) \circ \end{aligned}\right\} \tag{2.5}_2$$

其中 ∂_μ 在量子力学中相应为能量动量算符，而能量动量则分别为时空的共轭动量。

把$(2.4)_2$和$(2.5)_2$式代入$(2.3)_2$式得到

$$\delta I = -i\oint \epsilon_\mu \left[\mathscr{L}\,\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \Phi_r(x) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi_r(x))}\right] d\sigma_\nu = 0 \circ \tag{2.6}_2$$

由于 ϵ_μ 是任意的，因此便有

$$\oint_\Sigma T_{\mu\nu}\, d\sigma_\nu = 0 \circ \tag{2.7}_2$$

其中

$$\boxed{T_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \Phi_r(x)) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi_r(x))} + \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} \circ} \tag{2.8}_2$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \Phi_r(x)) \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi_r(x))} - g_{\mu\nu}\mathscr{L} \circ} \tag{2.8'}_2$$

显然，$T_{\mu\nu}$ 为一个二级张量，称为正则的能量动量密度张量。由$(2.7)_2$式利用四维高斯定理可知它满足连续方程

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \circ \tag{2.9}_2$$

引进

$$P_\mu[\sigma] = -i\int_\sigma T_{\mu\nu}\, d\sigma_\nu \circ \tag{2.10}_2$$

称为场在类空曲面 σ 上的总能量动量矢量，它是一个四维矢量。利用$(2.7)_2$或$(2.9)_2$式可以证明这个四维矢量有守恒性质。如果我们取 σ 为时间 t 是常数的类空平面，则由$(2.7)_2$或$(2.9)_2$式可直

接得出 P_μ 将不是时间的函数，即场的总能量动量具有守恒性质。

$$P_\mu = -i\int T_{\mu 4}\, d\boldsymbol{x} = 常数。 \qquad (2.11)_2$$

其中 $-iT_{\mu 4}$ 可以认为是体系的能量动量密度。$-iP_4 = H$ 称为体系的哈氏函数，$-T_{44} = \mathscr{H}$ 称为体系的哈氏密度。由此可见场的能量动量守恒是和 $\mathscr{L}$ 在坐标平移下保持不变的性质相联系的。

Lagrenye 密度 $\mathscr{L}$ 的不唯一性，也给 $T_{\mu\nu}$ 带来不唯一性。但可证明并不改变 P_μ 的数值。实际上对于任一 $f_{\mu(\nu\lambda)}$ (对 $\nu\lambda$ 为反对称的三级张量)都可定义新的 $T'_{\mu\nu}$

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial_\lambda f_{\mu(\nu\lambda)}。 \qquad (2.12)_2$$

它和 $T_{\mu\nu}$ 同样满足

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0。 \qquad (2.13)_2$$

可以选择 $f_{\mu(\nu\lambda)}$ 使得 $T'_{\mu\nu}$ 为对称张量 $T_{(\mu\nu)}$，此时 $T_{(\mu\nu)}$ 称为对称的能量动量密度张量。

§2.3 场的角动量张量和自旋张量

我们进一步考虑由于微量齐次 Lorentz 变换所引起的作用量变更。由于 $\mathscr{L}$ 和 I 在 Lorentz 变换下均为不变量，这样引起的作用量的变更应为零。类似上节的讨论，如果 $\mathscr{L}$ 在齐次 Lorentz 变换下保持不变，则这样的变更可以用 $(1.3)_2$ 式来计算，只要以 $\delta x = x' - x$，同时 $\delta\Phi = \Phi'(x) - \Phi(x)$ 代入即得。微量齐次 Lorentz 变换为

$$\chi'_\mu = \chi_\mu + \epsilon_{\mu\nu}x_\nu。$$

因而

$$\delta\chi_\mu = x'_\mu - x_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\chi_\nu。 \qquad (3.1)_2$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ 为微量反对称二级张量。

类似 §1.4 的考虑[参看 $(4.2)_1$、$(4.5)_1$、$(4.6)_1$、$(4.7)_1$ 式]可知(Lorentz 变换的 Jacobi 行列式为 1)

$$\Phi'_r(x') = \epsilon_{rs}\Phi_s(x)$$
$$= \Phi_r(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)。 \qquad (3.2)_2$$

其中 $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ 为 16 个(独立的只有六个)$n\times n$ 的矩阵，$-iS_{\mu\nu}$ 的空空分量即为对应的单粒子量子力学里的自旋算符。其具体形式由场的变换性质决定。例如自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 Dirac 粒子场的 $S_{\mu\nu}$ 即由 $(4.9)_1$ 式表示。

上式还可写成

$$\Phi'_r(x') = \Phi_r(x'_\mu - \epsilon_{\mu\nu}x_\nu) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)$$
$$= \Phi_r(x'_\mu) - \epsilon_{\mu\nu}x_\nu(\partial_\mu\Phi_r(x')) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)。$$

这里考虑了 $\epsilon_{\mu\nu}$ 及 $[\Phi(x') - \Phi(x)]$ 均为一级微量，并忽略了高级微量。由上式可得出

$$\delta\Phi_r(x) = \Phi'_r(x) - \Phi_r(x)$$
$$= -\epsilon_{\mu\nu}x_\nu(\partial_\mu\Phi_r(x)) + \epsilon_{\mu\nu}[S_{\mu\nu}/2]_{rs}\Phi_s(x)。$$
$$(3.3)_2$$

如果坐标变换是空间坐标的旋转 $\delta\boldsymbol{\theta}$，则 $\epsilon_{\mu\nu}$ 只有空空部分，而且它与 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 有以下关系，参看 $(4.12)_1$ 式

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ijk}\delta\theta_k, \quad \epsilon_{i4} = 0 = \epsilon_{44},$$

代入 $(3.3)_2$ 式可得

$$\delta\Phi(x) = -\epsilon_{ijk}\delta\theta_k x_j\partial_i\Phi(x) + \epsilon_{ijk}\delta\theta_k(S_{ij}/2)\Phi(x)$$
$$= \delta\boldsymbol{\theta}\cdot[(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\partial}) + \boldsymbol{S}]\Phi(x)。 \qquad (3.4)_2$$

其中

$$S_k = \epsilon_{ijk}\frac{S_{ij}}{2} \qquad (3.5)_2$$

与量子力学中自旋算符相应。而 $(3.4)_2$ 式中右边的方括号内的算符则与量子力学的总角动量算符相应。总角动量也就是坐标旋转角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的共轭动量。

如果 $\mathscr{L}$ 在齐次 Lorentz 变换下保持不变，则 $(1.4)_2$ 式经常成立，把 $(3.1)_2$ 和 $(3.3)_2$ 式代入 $(1.3)_2$ 式即得

$$\delta I = -i\oint_s \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_r(x))}\delta\Phi_r(x)+\mathscr{L}\delta x_\mu\right)d\sigma_\mu$$

$$=\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\oint M_{[\mu\nu]\rho}d\sigma_\rho=0。 \qquad (3.6)_2$$

其中

$$M_{[\mu\nu]\rho}=x_\mu T_{\nu\rho}-x_\nu T_{\mu\rho}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho\Phi_r(x))}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)。 \qquad (3.7)_2$$

对应于$(3.6)_2$式有如下关系式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho}M_{[\mu\nu]\rho}=0。 \qquad (3.8)_2$$

引进

$$M_{[\mu\nu]}=-i\int M_{[\mu\nu]\rho}\,d\sigma_\rho \qquad (3.9)_2$$

称为场在类空曲面σ上的总角动量，它满足二级张量的变换关系。同样由$(3.6)_2$或$(3.8)_2$式知道$M_{[\mu\nu]}$具有守恒性质。当我们取σ为时间t为常数的类空平面，则由$(3.6)_2$式或$(3.8)_2$式直接得到$M_{[\mu\nu]}$不是时间的函数，即场的总角动量具有守恒性质：

$$M_{[\mu\nu]}=-i\int M_{[\mu\nu]}\,d\boldsymbol{x}=\text{常数}。$$

由$(3.7)_2$式的形式，我们可以把$M_{[\mu\nu]}$分成两个部分：

$$M_{[\mu\nu]}=L_{[\mu\nu]}+\Sigma_{[\mu\nu]} \qquad (3.10)_2$$

其中

$$\begin{aligned}
&L_{[\mu\nu]}=-i\int_\sigma L_{[\mu\nu]\rho}\,d\sigma_\rho\\
&\quad=-i\int_\sigma (x_\mu T_{\nu\rho}-x_\nu T_{\mu\rho})d\sigma_\rho,\\
&\Sigma_{[\mu\nu]}=i\int_\sigma \Sigma_{[\mu\nu]\rho}\,d\sigma_\rho\\
&=i\int_\sigma \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho\Phi_r(x))}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)\,d\sigma_\rho。
\end{aligned} \qquad (3.11)_2$$

$L_{[\mu\nu]}$的空空分量正是场的轨道角动量。其实例如

$$L_{[12]}=\int(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})_3 d\boldsymbol{x}$$

(其中 $\boldsymbol{p}=-iT_{i4}$ 为场的动量密度)，正是轨道角动量第三分量的表达形式。故 $L_{[\mu\nu]}$ 称为轨道角动量张量。而 $\Sigma_{[\mu\nu]}$ 则称为场的自旋角动量张量，其空空分量就是场的自旋角动量。当然 $M_{[\mu\nu]}$ 的空空分量即为场的总角动量。如果把 $(3.4)_2$ 式代入 $(3.6)_2$ 式，从而求出 L_{ij} 和 Σ_{ij} 的具体表示，更容易看出以上的论述。而其时空分量则反映场的质心运动。由此可见，场的总角动量守恒是和 $\mathscr{L}$ 的空间坐标旋转下保持不变的性质有密切联系的。

可以证明，量子化以后 $L_{[\mu\nu]}$ 的空空分量满足角动量的对易关系。此外 $-iS_{\mu\nu}$ 实际就是 Lorentz 的无限小产生算符，由群表示论知道它们满足一定的对易关系。而且这种对易关系与具体表示无关，只是由群本身性质所决定。对于 Lorentz 群，$S_{\mu\nu}$ 应满足如下关系

$$[S_{\mu\nu},\ S_{\rho\sigma}]=\delta_{\mu\rho}S_{\sigma\nu}-\delta_{\mu\sigma}S_{\rho\nu}+\delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma}-\delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}。\qquad (3.12)_2$$

由此可见 $-iS_{\mu\nu}$ 的空空分量也是满足角动量对易关系的，并可证明 $\Sigma_{\mu\nu}$ 的空空部分满足角动量对易关系。虽然 $-iS_{\mu\nu}$ 只有空空部分，对应单粒子量子力学的自旋算符，我们还是可以引进 Lorentz 不变的自旋平方算符。

$$S^2=-\frac{1}{2}S_{\mu\nu}S_{\mu\nu}+P^{-2}S_{\lambda\rho}S_{\lambda\sigma}P_\rho P_\sigma。\qquad (3.13)_2$$

§2.4 场的电荷电流矢量

一般情况下，场是由复函数来描写的，此时我们应把 $\Phi_r(x)$ 和 $\Phi_r^*(x)$ 看成相互独立的变量，因而我们上两节所得的结论中的对 r 求和，如果把复函数明白写出就应成为

$$T_{\mu\nu}=\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-(\partial_\mu\Phi_r)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_r)}-(\partial_\mu\Phi_r^*)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\Phi_r^*)},\qquad (4.1)_2$$

$$M_{[\mu\nu]\rho}=x_\mu T_{\nu\rho}-x_\nu T_{\mu\rho}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho\Phi_r)}[S_{\mu\nu}]_{rs}\Phi_s(x)$$

$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho\Phi_r^*(x))}[S_{\mu\nu}^*]_{rs}\Phi_s^*(x)。\qquad(4.2)_2$$

现在我们来讨论由于 $\Phi_r(x)$ 的位相变更所引起作用量的变更，即 $\Phi_r\to\Phi_re^{i\alpha}$ 同时 $\phi_r^*\to\phi_r^*e^{-i\alpha}$(其中 α 为一实数)的变换所引起 I 的变更。由于 $\mathscr{L}$ 为实函数，$\mathscr{L}$ 中的 Φ_r^* 与 Φ 必定成对出现，因而 $\mathscr{L}$ 在位相变换下保持不变。当 $\alpha\to0$，则 $\delta\Phi_r=i\alpha\Phi_r$，同时 $\delta\Phi_r^*=-i\alpha\Phi_r^*$。以此代入 $(1.3)_2$ 式，并考虑到在变换前后 $\Phi(x)$ 都能使 $(1.4)_2$ 式成立，于是

$$\delta I=-i\oint_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)}\delta\Phi_r+\delta\Phi_r^*\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r^*(x))}\right]d\sigma_\mu$$

$$=\alpha\oint_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)}\Phi_r(x)-\Phi_r^*(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r^*)}\right]d\sigma_\mu。\qquad(4.3)_2$$

对应上式有

$$\partial_\mu J_\mu=0,\qquad(4.4)$$

其中

$$\boxed{J_\mu=-ei\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r)}\Phi_r(x)-\Phi_r^*(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_r^*)}\right]。}\qquad(4.5)_2$$

J_μ 称为场的电荷电流矢量，由 $(4.4)_2$ 式可知它满足连续方程。由 $(4.4)_2$ 式有

$$Q=-i\int J_4\,d\sigma_4=\int\rho\,dx=常数,\qquad(4.6)_2$$

即场的电荷是守恒的。可见，电荷守恒是与 $\mathscr{L}$ 在位相变换下保持不变的性质相联系的。

当场函数限于实数时，相位变换失去意义。从 $(4.5)_2$ 的形式上看，对于实数场 $J_\mu=0$，因而实数场不能用来对应荷电粒子。一般讲，只能用实数场来描写正、反粒子相同的粒子；而荷电粒子的场必定是复数场。

把粒子和反粒子互换的变换，即粒子↔反粒子，称为电荷共轭变换。Dirac 场的电荷共轭变换已在第一章中讨论过。对于波色

场的电荷共轭变换，就在于通过 $\Phi_r(x) \leftrightarrow \Phi_r^*(x)$ 而得出。由 $(4.5)_2$ 式可见在电荷共轭变换下，Q 改变符号。

§2.5 场的量子化及其物理基础

前面的讨论中，没有具体涉及量子化的问题，我们现在就来分析场为什么要量子化，以及怎样量子化的问题。

物质的波粒二象性，已为大量事实所证实. 例如光电效应，Compton 散射，以及电子的衍射等。可是在场量子化之前，理论只是停留在由事实总结的唯象阶段，未能得到进一步的深入理解。只有在场量子化以后，关于物质的波粒二象性，才得到更好的说明。

场量是通过它与粒子相互作用来观测的。例如电磁场的强度就是由荷电粒子的动量改变观测的，而电子的动量和位置是满足测不准关系的。同时电子和电磁场相互作用时其总动量守恒，因此要保持量子理论的内部协调，电磁场的动量能量和空间位置也应有相应的测不准关系，以致场强之间也存在着测不准关系。同理，其他场也都应该满足相应的测不准关系，这一点也得到实验事实的支持。但是在场未量子化以前，是无法反映这种事实的；只有场经过量子化以后，才能反映场的测不准关系。

此外，基本粒子分别属于 Bose 子和 Fermi 子两大类。它们满足不同的统计法则。在场未量子化前，理论也只是停留在唯象阶段。场量子化以后，就可以自动得出这两种不同的统计法则，并正确地给出统计和自旋的关系。

最后，我们知道基本粒子的相互转换（例如 $\pi \to \mu + \bar{\nu}_\mu$，$\mu \to e + \nu + \bar{\nu}$ 等），是基本粒子的基本运动规律，这就是说所研究的基本粒子体系，其中各种粒子的数目经常要改变。正确的理论必须反映粒子的湮灭和产生这一基本过程，从而才能研究粒子数目可改变的体系的运动规律。但是即使是 Dirac 的相对论量子力学也只能用于粒子数保持不变的体系，而不能反映粒子的湮灭和产生这一

基本过程。例如原子的自动发光，以及基本粒子的自动衰变等简单过程，都不能用量子力学来圆满地解释。但在场量子化以后，可以自动地得出粒子产生和湮灭的过程。

由上述考虑知道，场必须量子化。下面就来讨论量子化的方法。我们将采取由运动方程的 Poisson 括号的对应方法来进行量子化。此后，我们将认为场量 $\Phi_r(x)$ 不是平常的函数，而是某种算符，它本身是时空参数的函数。既然 $\Phi_r(x)$ 为算符，则作为 $\Phi_r(x)$ 的泛函，如场的能量、动量、角动量等也均为算符。在经典场论以及单粒子量子力学里，算符的运动方程都可以写成

$$\frac{dq}{dx_4}=\{p_4,\ q\}。\qquad (5.1)_2$$

在 Heisenberg 图象里，态矢量不随时间改变；体系的运动随时间的发展，完全反映在算符对时间的明显依赖上。这和经典情况很相似。

我们把上式推广到场的力学体系里去，并以量子的 Poisson 括号，代替经典的 Poisson 括号 q 代以 $\Phi_r(x)$，同时 p_4 代以场的总能量算符，并写成协变形式，于是 $(5.1)_2$ 式成为

$$i\frac{\partial\Phi_r(x)}{\partial x_\mu}=[P_\mu,\ \Phi_r(x)]\equiv(P_\mu\Phi_r(x)-\Phi_r(x)P_\mu]。\qquad (5.2)_2$$

这儿把 i 包含在括号之内，也就是把经典 Poisson 括号 $[A,\ B]$ 过渡为 $\frac{1}{i}[A,\ B]$，以下同此。

以后我们将以 $(5.2)_2$ 式作为场量子化的出发点，来决定场量 $\Phi_r(x)$ 的对易关系。不过只有当 $\Phi_r(x)$ 对时、空的依赖关系已解出时，才能由该式具体决定任意两个时、空点的 $\Phi_r(x)$ 之间的对易关系；这实际上只有对自由粒子场才能做到。p_μ 一般由场 $\Phi_r(x)$ 的二次式所构成，因此满足 $(5.2)_2$ 式的关于 $\Phi_r(x)$ 和 $\Phi_r^*(x)$ 之间的对易关系，可能采取两种不同形式，分别对应粒子的两种不同的统计法则，即分别对应 Bose 子和 Fermi 子的量子化方式。再则，对于有粒子存在的态，体系的能量恒大于没有粒子存在的真空态的能量；

从这一合理的能量恒正原则出发，我们将自动得出自旋和统计的正确关系。上述讨论将在以后讨论具体的场量子化过程中得以体现。场量子化以后，还能正确地反映粒子的湮灭和产生过程、场的粒子性以及测不准关系等重要事实。

$(5.2)_2$式保持与经典场论里 Poisson 括号相同的形式，这将使 $\Phi_r(x)$及由它组成的物理量对时、空的依赖关系，取与由经典的场方程所得到的相同形式。因此前几节所讨论的守恒物理量，在未量子化以前，它们与 H 的(经典)Poisson 括号为零，量子化以后它们则和 H 对易，依然有守恒性质。

由于 K-G 条件，自由场的 $\Phi_r(x)$ 的每一分量都满足 K-G 方程，类似在第一章里对 Dirac 场的解法(参看 § 1.6)，$\Phi_r(x)$可写成负、正频部分之和：

$$\Phi_r(x)=\Phi_r^{(+)}(x)+\Phi_r^{(-)}(x),$$

其中

$$\Phi_r^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{k_0=\epsilon>0} F\,d\boldsymbol{k}e^{\mp ikx}\Phi_r^{(\pm)}(\boldsymbol{k})。\qquad (5.3)_2$$

F 为运动学因子，对于 Bose 子

$$F=\frac{1}{\sqrt{2k_0}},$$

对于 Dirac 粒子

$$F=\sqrt{\frac{m}{E}};$$

这已在第一章介绍过。

利用理论对坐标平移的不变性，可以证明场量的同频部分是相互对易或反对易的。例如由上式得出：

$$[\Phi_r^{(+)}(x),\ \Phi_s^{(+)}(y)]_\pm=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{k_0,k_0'>0}e^{-i(kx+k'y)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\times\frac{1}{\sqrt{2k_0'}}\cdot[\Phi_r^{(+)}(\boldsymbol{k}),\Phi_s^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_\pm\,d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}'。\qquad (5.4)_2$$

通常假定 $[\Phi_r^{(+)}(x),\ \Phi_s^{(+)}(y)]_\pm$ 不再是算符，而是一个普通的函数，即

$$[\Phi_r^{(+)}(x),\ \Phi_s^{(+)}(y)]_{\pm}=\frac{1}{i}\,\Delta_{rs}(x-y)。$$

由坐标平移不变性的要求，上式右边应为某一$(x-y)$的函数，因而$(5.4)_2$式中要求$k=-k'$。可是$(5.4)_2$式中的被积函数的$k_0>0$，同时$k_0'>0$，所以k_0不能等于$(-k_0')$，此时$\Delta_{rs}(x-y)$只能为零。同样的结论适用于$\Phi_r^{(-)}(x)$，亦即

$$[\Phi_r^{(\pm)}(x),\ \Phi_s^{(\pm)}(y)]_{\pm}=0。\qquad (5.5)_2$$

此外$(5.4)_2$式右方积分只有当$[\Phi_r^{(+)}(k),\ \Phi_s^{(+)}(k')]_{\pm}=0$时，才能为零。因此得到

$$[\Phi^{(\pm)}(k),\ \Phi_s^{(\pm)}(k')]_{\pm}=0。\qquad (5.6)_2$$

这就表明粒子的湮灭算符是彼此对易的(或反对易的)。粒子的产生算符也是相互对易的(或反对易的)。这个结论并不需对场量的形式作任何具体假定，所以是经常成立的。

量子化以后，场量$\Phi_r(x)$都是算符，它们在表达式中的排列顺序，一般是不能随意搬动的(而排列顺序在经典场论里却是无关紧要的)。看来应该分析一下，在由经典场过渡到量子场时场量$\Phi_r(x)$的排列顺序，究竟怎样规定为宜的问题。我们所遇到的物理量，例如$\mathscr{L}$、动量、能量以及电荷电流等，最多只是场算符$\Phi_r(x)$的二次式，而且两个场算符对易，最多又只相差一个普通函数。因此，同一物理量，由于$\Phi_r(x)$的排列顺序不同而引起的差异，只在于某一普通函数而已。换言之，这只影响各物理量的绝对数值，并不影响算符之间的对易关系。为了使粒子和反粒子完全处于等价地位。我们通常对$\mathscr{L}$中出现的 Bose 场(记$\varphi_r(x)$)的二次式取对称的形式，而对 Dirac 场(记以$\psi_r(x)$)的二次式取反对称的形式，即

$$\begin{aligned}\varphi^*0\varphi&\to\frac{1}{2}\{\varphi^*,\ 0\varphi\}_+,\\ \bar{\psi}\gamma_A\psi&\to\frac{1}{2}[\bar{\psi},\ \gamma_A\psi]_-。\end{aligned}\qquad (5.7)_2$$

为简便计，除非必要，一般将不明显写出对称化或反对称化的形式。

顺便指出：通常我们也采用所谓正则量子化方法。即把场量

$\Phi_r(x)$看为体系的广义坐标，与其相应的广义坐标定义为

$$\pi_r(x)\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\Phi}_r(x)}。\qquad(5.8)_2$$

根据经典$[\pi_r(x),\varphi_{r'}(x')]$Poison 括号和量子 Poison 括号的对比，可得等时对易关系如下

$$[\pi_r(x),\ \varphi_{r'}(x')]_{t=t'}=\delta_{rr'}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\qquad(5.9)_2$$

不过这样得到的只是等时的对易关系，丧失了形式上的协变性。

§2.6 对称性质与守恒定律

以前我们曾提到过，Lagrange 密度函数的一个对称性质对应一个守恒定律，不过以前的证明，实际上仅对经典场做了分析，而且都限于具有连续变换的对称性质。在这些变换里都存在无限小的变换，因而我们可以利用变分的方法来讨论。例如 Lorentz 变换，空间坐标的平移和旋转，位相变换等，就是如此。我们可以把对称性质与守恒定律的关系，推广到没有无限小变换的非连续变换的情况，例如空间反演、时间反演、电荷共轭等。在这些变换里并不存在无限小变换，与其对应的守恒定律也并无经典的对应情况。在下面的讨论里我们将主要对量子场的情况进行分析。

所谓基本粒子的对称性质，就是讨论描写粒子体系的 Lagrange 函数，具有在哪些变换下保持不变的性质，以及与其对应的守恒定律(或选择条件)；或者相反，由守恒定律来分析 $\mathscr{L}$ 所应满足的对称性质。

如果 Lagrange 密度函数 $\mathscr{L}$ 在某一变换下保持不变，则根据以前的讨论知道，由$(1.5)_2$式所得到的场方程，在该变换下保持不变。如果对易关系在该变换下也保持不变，那末这就是说，变换前后的场算符 $\Phi_r(x)$和 $\Phi'_r(x)$，实际上是描写相同的物理实质，它们是同一物理实质的不同的、但又是等效的表示。把 x 看作为 $\Phi_r(x)$ 的参变数，同时把 $\Phi_r(x)\to\Phi'_r(x)$ 变换看作为在 x 点场 $\Phi_r(x)$的变换，则它们之间应该至少存在着相似变换 (在量子力学

中 $\Phi(x)$ 是波函数，而在量子场论中 $\Phi(x)$ 则成为算符），即存在算符 U 使得（参看 $(1.0)_2$ 式）

$$\Phi_r(x)\to\Phi'_r(x)=S_{rs}\Phi_s(L^{-1}x)=U\Phi_r(x)U^{-1} \qquad (6.1)_2$$

与此同时态矢量有相应的变换

$$|\Phi\rangle\to|\Phi'\rangle=U|\Phi\rangle。 \qquad (6.2)_2$$

在上述相似变换下不改变算符间的代数关系，也不改变算符的本征值谱。可是对于算符的等效表示，还有更多的要求。例如要求算符在某一态的观测值，不随表示的不同而有改变，即要求

$$\langle\Phi|\Phi_r|\Phi\rangle\to\langle\Phi'|\Phi'_r|\Phi'\rangle=\langle\Phi|U^+U\Phi_rU^{-1}U|\Phi\rangle$$
$$=\langle\Phi|U^+U\Phi_r|\Phi\rangle=\langle\Phi|\Phi_r|\Phi\rangle。 \qquad (6.3)_2$$

这里要求 $U^+=U^{-1}$，也就是 U 应该是幺正的，至于 U 的具体形式，则应与具体变换有关。

考虑拉氏密度 $\mathscr{L}$ 在某一变换群（为具体计假定为幺正群）下保持不变。该群的产生算符 T^i 满足以下对易关系

$$[T^i,\ T^j]=iC_{ijk}T^k。 \qquad (6.4)_2$$

其中 C_{ijk} 为群的结构常数。群的元素可写成

$$u=e^{i\alpha^jT^j}。 \qquad (6.5)_2$$

其中 α^i 为参量，如取 T^j 为厄米矩阵则 α^j 为实数。我们的场量 $\Phi_r(x)$ 则是该群的某一个表示。在该群的变换下场量有相应的变换

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_a(x)\to\varphi'_a(x)=(e^{i\alpha^jT^j})_{ab}\varphi_b(x),\\ \text{或简写为}\quad&\\ &\varphi(x)\to\varphi'(x)=e^{i\alpha^jT^j}\cdot\varphi(x)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)_2$$

当 $\alpha^j\to0$ 均为微量时上式可写成

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x)\to\varphi'(x)=\varphi(x)+i\alpha^jT^j\varphi(x),\\ &\delta\varphi(x)=\varphi'(x)-\varphi(x)=i\alpha^jT^j\varphi(x)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)_2$$

如上假定，在这样变换下拉氏密度 $\mathscr{L}$ 保持不变。对应这种不变性质，存在相应的守恒流。类似§ 2.4 电流表示的推导（电流的相变换实际上相应于 $U(1)$ 群的变换）可知其相应的守恒流表示如

$$J^j_\mu = -i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)_a}T^j_{ab}\varphi_b = -i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}T^j\varphi(x)。 \quad (6.8)_2$$

相应的守恒荷为：

$$\boxed{Q^j = -i\int J^j_4\, d\sigma_4 = \int J^j_0(x)d\boldsymbol{x} = i\int d\boldsymbol{x}\pi(x)T^j\varphi(x),} \quad (6.9)_2$$

其中 $\pi(x) = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}$ 为 $\varphi(x)$的共轭动量。

实际上 Q^j 就是和产生算符 T^j 相应的在量子场论中的表示。利用对易关系 $[\pi_a(x),\ \varphi_b(x')]_{t=t'} = \delta_{ab}\dfrac{1}{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$(参看下面 $(5.10)_3$式)可以证明：

$$\boxed{[Q^i,\ Q^j] = iC_{ijk}Q^k。} \quad (6.10)_2$$

它和产生算符 T^i 满足相同的对易关系（参看$(6.5)_2$式)。也可证明：

$$\boxed{[\alpha^jQ^j,\ \varphi_a(x)] = \alpha^jT^j_{ab}\varphi_b(x) = -i\delta\varphi_a(x)。} \quad (6.11)_2$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
&\alpha^j\left[i\int d\boldsymbol{x}'\pi_c(x')T^j_{cb}\varphi_b(x'),\ \varphi_a(x)\right]\\
&= i\int d\boldsymbol{x}'[\pi_c(x'),\ \varphi_a(x)]T^j_{cb}\varphi_b(x')\\
&= \alpha^j i\int d\boldsymbol{x}'\ \delta_{ca}\frac{1}{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})T^j_{cb}\varphi_b(x')\\
&= \alpha^jT^j_{ab}\varphi_b(x) = -i\delta\varphi_a(x)。 \quad (6.12)_2
\end{aligned}$$

实际上 $e^{i\alpha^jQ^j}$ 也就是对应群元素 $u = e^{i\alpha^jT^j}$ 变换在量子场论中的相应表示。把 $(6.12)_2$式与 $(6.4)_2$式相比可知 α^jQ^j 相当于 χ 的地位。Q^j 相当于广义的“荷”，而 α^j 则是广义的位相变更

$$U = e^{i\alpha^jQ^j}。 \quad (6.13)_2$$

算符 U 就是和群元 $u = e^{i\alpha^jT^j}$ 相应的在量子场论的表示，它也就是前面所介绍的幺正算符 U。

同样也可证明

$$[\pi_a(x),\ i\alpha^j Q^j] = -i\alpha^j \pi_c T^j_{ca} = \delta\pi_a(x) \qquad (6.14)_2$$

推导中我们考虑到

$$\pi_a(x) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_a(x)} = \dot{\varphi}^+_a$$

$$\delta\pi_a(x) = \delta\dot{\varphi}^+_a = -i\alpha^j \dot{\varphi}_c(x) T^j_{ca} = -i\alpha^j \pi_c(x) T^j_{ca} \qquad (6.15)_2$$

由 (6.12) 和(6.14)式还可证明任何$\varphi(x)$和 $\pi(x)$的泛函在该群变换下的变更可写成

$$\delta F = [F,\ i\alpha^j Q^j] \qquad (6.16)^2$$

如果 $F=H$ 我们可得到

$$\delta H = [H,\ i\alpha^j Q^j] \qquad (6.17)_2$$

如果 Lagrange 密度函数在该群变换下保持不变，那么在这个内部的群变换下，H 也应保持不变，也就是 $\delta H=0$，于是(6.17)式就成为

$$[H,\ i\alpha^j Q^j] = 0 \qquad (6.18)_2$$

这样 Q^j 就对应一个守恒量。

对于涉及时空变换也有类似的情况，时空变换的产生算符，包括时空的平移和 Lorentz 变换，一般可写成

$$G = i(\epsilon_\mu p_\mu - \epsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu}) \qquad (6.19)_2$$

类似(6.17)式，在时空的微量变换下

$$\delta H = [H,\ G] \qquad (6.20)_2$$

对于时空平移，空间旋转以及内部变换群的变换，$\mathscr{L}$ 的保持不变性质反映在 $\delta\mathscr{L}=0$，同时 $\delta H=0$，这样由(6.20) 式直接可看出 G 对应一个守恒量。可是在一般的 Lorentz 变换下 H 应按动量矢量的第四分量来变换的，即

$$\delta H = i\epsilon_{i4} p_i \qquad (6.21)_2$$

利用 P_μ 和 $M_{\mu\nu}$ 之间的对易关系，可证明

$$[H,\ M_{i4}] = P_i \qquad (6.22)_2$$

可是在 M_{i4} 的表式中明显依赖于时间，因而

$$\dot{M}_{i4} = \frac{1}{i}[M_{i4},\ H] + \frac{\partial M_{i4}}{\partial t} = iP_i - iP_i = 0 \qquad (6.23)_2$$

因此，虽然 M_{i4} 和 H 并不对易，它仍然是一个运动常数。

实际上 U 算符($U=e^{G}=e^{i\alpha^j Q^j+i\epsilon_\mu P_\mu-i\epsilon_{\nu\mu}M_{\mu\nu}}$)就是有限变换的"产生"算子。例如考虑时空平移

$$x'_\mu=x_\mu+\epsilon_\mu$$

$$U=e^{i\epsilon_\mu P_\mu}\simeq(1+i\epsilon_\mu P_\mu) \tag{6.24}_2$$

代入(6.1)式对于标量场

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=U\varphi(x)U^{-1}=(1+i\epsilon_\mu P_\mu)\varphi(x)(1-i\epsilon_\mu P_\mu)$$

$$=\varphi(x)+i[\epsilon_\mu P_\mu,\ \varphi(x)]$$

$$\delta\varphi(x)=\varphi'(x)-\varphi(x)=\varphi(x_\mu-\epsilon_\mu)-\varphi(x_\mu)=i\epsilon_\mu[P_\mu,\ \varphi(x)] \tag{6.25}_2$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\epsilon_\mu=i\epsilon_\mu[P_\mu,\ \varphi(x)]$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}=i[P_\mu,\ \varphi(x)] \tag{6.26}_2$$

上式实际就是 Heisenberg 的运动方程。

用量子场论的语言来讲，Noether 定理可表达为对称变换的产生算符对应于守恒量。

如果变换是分立的，它将没有无限小的变换，但此时 U 常具有 $U^2=1$ 的性质，以致 U 不仅是幺正的，而且也是厄米的。这就是说 U 本身此时也对应某一可观察的物理量。由此可见，我们可以把对称性质与守恒定律(选择规则)的对应关系，推广到分立变换的情况，例如空间反演、电荷共轭等。

一般讲，找出 U 的具体形式是复杂的，不过在实际运算中，我们只需利用它的一般性质，而与 U 的具体表示关系不大。关于分立变换的对称性质与守恒定律将在第六章里作具体讨论。

参 考 资 料

1. 关于作用量原理，对称性与守恒定律
   C. Itzykson & J. B. Zuber Quantum Field Theory (1980) Chapter 1-1, 1-2
2. 关于量子化和对易关系
   D. 卢里　粒子和场(1981)第三、四章

第三章　标量场的量子化理论

此后三章实际上是自由场量子化理论的示例，因为篇幅较长，故分章讨论。本章所讨论的标量场的量子化理论，是自由场量子化理论中最简单、最基本的一种。本章开始引进粒子的产生算符和湮灭算符，这是量子场论的成果之一，也是以后讨论的必要基础。作为典型的例子，本章先后讨论了自由 π 介子的能量动量和电荷的量子化结果，以及同位旋等性质。关于在分立的变换下的变换性质，将集中于第六章讨论。

§3.1　标量场的动量、能量

对于实标量场只需一个标量函数来描述，它满足 K-G 方程

$$(\Box-m^2)\varphi=0。\qquad (1.1)_3$$

对应上式可取 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)+m^2\varphi^2]。\qquad (1.2)_3$$

把上式代入$(2.8)_2$式得到

$$T_{i4}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_4\varphi)}\cdot\partial_i\varphi=-i\pi\partial_i\varphi=(\partial_i\varphi)(\partial_4\varphi)$$

$$=\frac{-i}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}。\qquad (1.3)_3$$

以上 $\pi\equiv\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}=\dot{\varphi}$ 为 φ 的共轭动量。

$$T_{44}=(\partial_4\varphi)(\partial_4\varphi)+\mathscr{L}=(\partial_4\varphi)(\partial_4\varphi)-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)+m^2\varphi^2]$$

$$=-\frac{1}{2}[(\nabla\varphi)^2-(\partial_4\varphi)^2+m^2\varphi^2]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + m^2\varphi^2 \right]。 \qquad (1.4)_3$$

以 φ 的一般解$(5.3)_2$式和上两式代入$(2.11)_2$, 则有

$$\begin{aligned} P_4 &= i\int\frac{1}{2}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + m^2\varphi^2 \right]d\boldsymbol{x} \\ &= i\int\Big[\sum_{\mu=0}^{3}\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^{(+)}\partial_\mu\varphi^{(-)} + \partial_\mu\varphi^{(-)}\partial_\mu\varphi^{(+)}) \\ &\quad + \frac{m^2}{2}(\varphi^{(+)}\varphi^{(-)} + \varphi^{(-)}\varphi^{(+)}) \Big]d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{i}{2}\int d\boldsymbol{k}\cdot k_0[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) + \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\cdot\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]。 \end{aligned} \qquad (1.5)_3$$

其中已考虑到同频部分乘积的贡献为零。为简便起见，我们把异频部分的贡献也一并写在一起, 例如

$$\begin{aligned} &\int d\boldsymbol{x}\Big[\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu^{(+)}\varphi\cdot\partial_\mu\varphi^{(\pm)} + m^2\varphi^{(+)}\varphi^{(\pm)} \Big] \\ &= \int\frac{d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}'}{2\sqrt{k_0k_0'}}\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(\pm)}(k')e^{i(k_0\pm k_0')x_0}\cdot\Big(m^2 \mp \sum_{\mu=0}^{3} k_\mu k_\mu' \Big) \\ &\quad \times\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{x}\, e^{-i(\boldsymbol{k}\pm\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \int\frac{d\boldsymbol{k}}{2k_0}\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(\pm)}(\mp\boldsymbol{k})e^{i(k_0\pm k_0)x_0}\cdot(m^2 \mp k_0^2 + |\boldsymbol{k}|^2) \\ &= 0。 \end{aligned}$$

因为 $m^2 + |\boldsymbol{k}|^2 \mp k_0^2 \underset{2k_0}{=} 0$, 如果是异频部分的贡献, 取下面符号, 上式不为零, 其贡献即为$(1.5)_3$式的第一项。$(1.5)_3$式可写成:

$$P_0 = \int d\boldsymbol{k}\cdot\frac{k_0}{2}[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) + \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\cdot\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]。 \qquad (1.6)_3$$

同样可以证明同频部分对 $\boldsymbol{P}$ 的贡献, 由于其被积函数为 $\boldsymbol{k}$ 的奇函数, 积分亦为零, 最后可得

$$\boldsymbol{P} = \int d\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{2}[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}) + \varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]。 \qquad (1.7)_3$$

归并起来可以写成

$$\boxed{P_\mu=\int d\boldsymbol{k}\cdot\frac{k_\mu}{2}[\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]}。$$

$(1.8)_3$

这就是标量场的动量能量表示式。

标量场在 Lorentz 变换下，$\varphi(x)\to\varphi'(x')=\varphi(x)$，由$(3\text{-}2)_2$式可知标量场的$S_{\mu\nu}=0$。又由$(3.11)_2$式可知标量场的自旋为零。此外在上一章已讨论过实数场对应的粒子电荷应为零。根据这些特性，在实际上我们常用实的赝标场来描写中性π介子的运动。

§3.2 复标量场的电荷、动量、能量

对于荷电(π)粒子应该用复数场来描写，这一点已于上章提过，即需要两个(赝)标量函数$\varphi(x)$和$\varphi^*(x)$来描写荷电自由π介子的运动，此时

$$\mathscr{L}=-\partial_\mu\varphi^*\cdot\partial_\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi,\qquad (2.1)_3$$

或者采用 $\mathscr{L}=\varphi^*(\Box-m^2)\varphi$。

由于 $\varphi^*\Box\varphi=\partial_\mu(\varphi^*\partial_\mu\varphi)-\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi$，

这两个$\mathscr{L}$只相差一个四维散度。

由$(1.5)_2$式可得场方程

$$(\Box-m^2)\varphi=0\quad 或\quad (\Box-m^2)\varphi^*=0。\qquad (2.2)_3$$

由$(4.1)_2$式又可得

$$T_{44}=-\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\varphi^*\cdot\partial_\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi,\qquad (2.3)_3$$

$$T_{i4}=\partial_i\varphi^*\partial_4\varphi+\partial_i\varphi\partial_4\varphi^*。$$

由$(4.5)_2$式还可得电流矢量

$$\boxed{J_\mu=ei[(\partial_\mu\varphi^*)\varphi-\varphi^*(\partial_\mu\varphi)]}。\qquad (2.4)_3$$

引进符号 $\partial\equiv(\partial_\mu-\sigma_\mu)\equiv\mathscr{H}_\mu$

则上式可写成

$$J_\mu=-ei[\varphi^*\partial_\mu\varphi]=-ei[\varphi^*\mathscr{H}_\mu\varphi]。\qquad (2.5)_3$$

该式实质上和第一章里的$(1.2)_1$式和$(1.3)_1$式是一致的。

复数场的一般解也和$(5.3)_2$式一样。值得指出的是

$$(\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k}))^*=\varphi^{*(\mp)}(\boldsymbol{k})。\qquad (2.6)_3$$

量子化以后$\varphi(\boldsymbol{k})$为算符，今后，$*$符号应理解为厄密共轭。类似上节的讨论，以一般解代入上面几式可得：

$$\boxed{P_\mu=\int d\boldsymbol{k}\cdot k_\mu[\varphi^{*(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi^{*(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})],}\qquad (2.7)_3$$

$$\boxed{Q=e\int d\boldsymbol{k}[\varphi^{*(+)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k})-\varphi^{*(-)}(\boldsymbol{k})\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k})]。}\qquad (2.8)_3$$

由上式可以看出，在电荷共轭变换下$\varphi\leftrightarrow\varphi^*$，电荷$Q$要改变符号，而动量能量$P_\mu$不变。

对于复数场我们也常用它的实部和虚部这两个实标函数来描写，即引进$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$：

$$\varphi(x)=\varphi_{(-)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)],\qquad (2.9)_3$$

$$\varphi^*(x)=\varphi_{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)]。$$

以上所得各物理量亦同样可以由φ_1和φ_2来表示，例如

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}[\partial_\mu\varphi_l(x)\cdot\partial_\mu\varphi_l(x)+m^2\varphi_l\varphi_l],\qquad (2.10)_3$$

$$P_\mu=\int d\boldsymbol{k}\,\frac{k_\mu}{2}\sum_{l=1}^{2}[\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k})+\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k})]。\qquad (2.11)_3$$

可以看出这两式就是上一节所讨论的最直接的推广。

把$(2.9)_3$式代入$(2.5)_3$和$(2.8)_3$式可得

$$J_\mu=e[\varphi_2\partial_\mu\varphi_1-\varphi_1\partial_\mu\varphi_2]=e[\varphi_2\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi_1]=e[\varphi_2\mathscr{H}_\mu\varphi_1],\qquad (2.12)_3$$

$$Q=ie\int d\boldsymbol{k}[\varphi_2^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi_1^{(-)}(\boldsymbol{k})-\varphi_2^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi_1^{(+)}(\boldsymbol{k})]。\qquad (2.13)_3$$

此时电荷共轭变换就相当于$\varphi_1\to\varphi_1$而$\varphi_2\to-\varphi_2$。

§3.3 标量场的量子化

在这一节里我们以$(5.2)_2$式为基础，对标量场进行量子化。为简明计，可把荷电和中性的标量场统一起来考虑。以$\varphi(x)$和$\varphi^*(x)$的一般解以及$(1.8)_3$和$(2.11)_3$式代入$(5.2)_2$式并考虑到不同$\boldsymbol{k}$的平面波的相互正交性，可得到

$$-k_\mu\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k})=\int d\boldsymbol{k}'\frac{k'_\mu}{2}\Big[\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k}),\ \sum_{m=1}^{3}(\varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')+\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}'))\Big]_-$$

$$k_\mu\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k})=\int d\boldsymbol{k}'\frac{k'_\mu}{2}\Big[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \sum_{m=1}^{3}(\varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')+\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(+)}(\boldsymbol{k}'))\Big]_- \qquad (3.1)_3$$

$\varphi_3(x)$即为前面讨论过的中性赝标量场。

考虑到不同自由度的各量都相互对易，例如$m\neq l$时上式是对易的。并且认为场量的对易(或反对易)子为一普通函数，即

$$\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k})\varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k})=\pm\varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k})\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k})+\Delta(k),$$

其中$\Delta(k)$为一普通函数。由$(3.1)_3$式可看出，对于标量场上式应取正号，否则$(3.1)_3$式右边为零，也就是应取对易的量子化方式。由$(3.1)_3$式可推出

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-=-\delta_{lm}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k}),\\&[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{+}(\boldsymbol{k}')\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta_{lm}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k})。\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)_3$$

利用等式

$$[a,\ bc]_-=[a,\ b]_\pm c-b[c,\ a]_\pm \qquad (3.3)_3$$

并计及同频部分是对易的(或者反对易的)，参看$(5.6)_2$式，则$(3.2)_3$式左方有：

$$[\varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-=-\varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')[\varphi_m^{(-)}(\boldsymbol{k}'),\ \varphi_l^{(+)}(\boldsymbol{k})]_\pm,$$

$$[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')]_-=[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k})]_\pm\varphi^{(-)}(\boldsymbol{k}')。$$

把上式和$(3.2)_3$式右边相比可得

$$[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}'),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k})]_{\pm}=\delta_{lm}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')。 \qquad (3.4)_3$$

以上$[a,\ b]_{\pm}=ab\pm ba$。

总之，我们可以取两种不同的方式量子化，都满足$(3.2)_3$式。可是如果在$(3.4)_3$式里取（+）号，则导致$(3.1)_3$式为零，而且由$(2.11)_3$和$(1.8)_3$式又得到体系的能量与粒子无关的结论，这些都是我们所不取的，因而我们最后确定了$(3.4)_3$式应取负号。可以指出，在以后对 Dirac 场进行量子化时，类似的考虑却导致应取正号的结论，此系后话，引起注意而已。

综上所得可写成：

$$\boxed{[\varphi_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta_{lm}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')。} \qquad (3.5)_3$$

如以$(2.9)_3$式代入上式可得到

$$\boxed{\begin{array}{c}[\varphi_{(-\beta)}^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_{(\beta)}^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\\ \beta=+,\ -,\ 0。\end{array}} \qquad (3.6)_3$$

其各对易子为零。这儿φ_0就是上面的φ_3，β表明π介子的荷电情况。

§3.4 粒子的湮灭算符和产生算符，场的粒子性

为了以后讨论简便计，我们把以前$\boldsymbol{k}$值为连续的情况过渡为分立的情况，参看$(6.17)_1$式可知这样的过渡可由如下代换完成

$$\varphi^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\to\rho_{\boldsymbol{k}}^{1/2}a^{(\pm)}(\boldsymbol{k});\quad \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')=\rho_{\boldsymbol{k}}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}。 \qquad (4.0)_3$$

把上式代入$(3.5)_3$和$(3.6)_3$式得到

$$\left.\begin{array}{l}[a_l^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ a_m^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta_{lm}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\quad l,\ m,=1,\ 2,\ 3,\\ [a_{(-\beta)}^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ a_\beta^{(+)}(\boldsymbol{k}')]_-=\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\quad \beta=+,\ -,\ 0。\end{array}\right\} \qquad (4.1)_3$$

把$(6.17)_1$和$(4.1)_3$式用到$(2.11)_3$、$(1.8)_3$或$(2.7)_3$式得到

$$P_\mu=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{l=1}^{3}k_\mu\left(a_l^{(+)}(\boldsymbol{k})a_l^{(-)}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right)$$

或 $\qquad (4.2)_3$

$$P_\mu=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\beta=+,-,0}k_\mu\left(a_\beta^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{(-\beta)}^{(-)}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\right)。$$

把$(6.17)_1$和$(4.1)_3$式用到$(2.8)_3$式，并为简单计考虑了它的对称化的形式[参看$(5.7)_2$]于是可得：

$$Q=\sum_{k}\sum_{\beta=+,-,0}e\beta[a_{\beta}^{(+)}(k)a_{(-\beta)}^{(-)}(k)]。\qquad (4.3)_3$$

引进

$$N_l=a_l^{(+)}(k)\cdot a_l^{(-)}(k),\ l=1,2,3,\qquad (4.4)_3$$

$$N_\beta=a_\beta^{(+)}(k)\cdot a_{(-\beta)}^{(-)}(k),\beta=+,-,0。$$

称为动量为k的粒子数算符，下指标表明它的电荷态(或同位旋的指向)。容易看出$N_{l,\beta}$为厄米算符，并且可以证明

$$[N_l,\ N_m]=0=[N_l,\ P_\mu],$$

$$[N_\beta,\ Q]=0=[N_\beta,\ P_\mu]=0=[Q,\ P_\mu]。$$

下面我们来讨论算符N_l和$a_l^{(+)}$的物理意义。为简便计以下略去(k)。由$(4.1)_3$式，可以得到下列关系。

$$\left.\begin{aligned}&[N_l,\ a_l^{(+)}]=\pm a_l^{(\pm)},l=1,2,3,\\&[N_\beta,\ a_{(\beta)}^{(\pm)}]=\pm a_{(\beta)}^{(\pm)},\beta=+,-,0。\end{aligned}\right\}\qquad (4.5)_3$$

$$\left.\begin{aligned}&[P_\mu,\ a_l^{(+)}]=\pm k_\mu a_l^{(\pm)},l=1,2,3\\&[P_\mu,\ a_\beta^{(\pm)}]=\pm k_\mu a_\beta^{(\pm)},\ \beta=+,-,0。\end{aligned}\right\}\qquad (4.6)_3$$

$$[Q,\ a_\beta^{(\pm)}]=\beta e a_\beta^{(\pm)},\ \beta=+,-,0。\qquad (4.7)_3$$

以上有两个符号在同一个等式出现者，我们同时取其上面或下面的那个符号。

令$|n\rangle$为粒子数算符N的本征态，其本征值为n。(为简单计，略去N的下指标)即

$$N\cdot|n\rangle=n|n\rangle。$$

则$a^{\pm}|n\rangle$也是N的本征态，基本征值为$(n\pm1)$。因为

$$Na^{(\pm)}\cdot|n\rangle=[a^{(\pm)}N\pm a^{(\pm)}]|n\rangle=(n\pm1)a^{(\pm)}|n\rangle。\qquad (4.8)_3$$

这就是说如果n为N的本征值，则$(n\pm1)$也是N的本征值。如此类推，得到$(n\pm2)$，$(n\pm3)\cdots\cdots(n\pm m)$也是$N$的本征值，其中$m$为整数。由此看来，当$m$够大时，则$N$的本征值可能出现负值。但是由$(2.6)_3$式可知$(a_{(-\beta)}^{(-)})^*=a_\beta^{(+)}$，因而$N$具有$a^*a(=|a|^2)$的形式，其本征值是恒正的。所以$N$一定存在最小的本征值，记为$n_0$，其本征态记为$|0\rangle$，而$a^{(-)}|0\rangle=0$。因此有

$$\langle 0|N|0\rangle=\langle 0|a^{(+)}a^{(-)}|0\rangle=n_0\langle 0|0\rangle=0。$$

由于$\langle 0|0\rangle$恒大于零，所以得到$n_0=0$。也就是说N的本征值应为0, 1, 2, …取所有的正整数。这样看来我们有理由把算符N理解为某态(k,l)的粒子数算符，其本征值n就表明占有该态的粒子数目。既然n可取任意正整数，那末就说明处于某一态的粒子数目，是可以为任意某一正整数的；这说明标量场的粒子满足玻色统计。

由$(4.5)_3$式和$(4.8)_3$式可以看出$a_l^{(+)}(k)$，$a_l^{(-)}(k)$应分别为处于态(k,l)的粒子的产生算符和湮灭算符。此外由$(4.7)_3$式同样可以看出$a_\beta^{(+)}$为荷电$\beta\cdot e$的π介子的产生算符；$a_{(-\beta)}^{(-)}$为荷电$\beta\cdot e$的π介子的湮灭算符。

这儿所用的符号与文献中常见的符号有如下关系(列出以供查考)：

$$a_{(-)}^{(-)}\to a,\ a_{(+)}^{(+)}\to a^*;\ a_{(+)}^{(-)}\to b,\ a_{(-)}^{(+)}\to b^*。$$

把粒子数算符代入$(4.2)_3$式和$(4.3)_3$式便得

$$P_\mu=\sum_k\sum_{l=1}^{3}k_\mu\left(N_{lk}+\frac{1}{2}\right)$$

或

$$P_\mu=\sum_k\sum_{\beta=+,-,0}k_\mu\left(N_{\beta k}+\frac{1}{2}\right),\qquad (4.9)_3$$

$$Q=\sum_k\sum_{\beta=+,-,0}\beta eN_{\beta k}。$$

由于N的本征值只能取正整数，上式就充分反映出场的粒子性。所有粒子数均为零的态称为π介子的真空态。从上式看出真空态还具有不为零的能量，这就是通常所谓的零点能量。由此可见，即使在所谓真空态，依然不是没有物质存在的。其实粒子数为零的态并不意味着场为零的态，因为它们之间存在着测不准关系，一般并不存在二者的公共本征态，因而在真空态，场并无确定值，可以认为是在零值附近涨落。在以后讨论场相互作用时，的确要考虑到真空中的涨落的场的存在。

下面我们把算符$a^{(\pm)}$在粒子数本征态空间具体表示出来，显然

$$\langle n|N|n'\rangle=n\delta_{nn'},$$

由$(4.5)_s$式和上式可得：

$$\left.\begin{aligned}(n''-n'+1)\langle n''|a^{(-)}|n'\rangle=0,\\(n''-n'-1)\langle n''|a^{(+)}|n'\rangle=0。\end{aligned}\right\}\qquad(4.10)_s$$

即只有当$n''=n'\pm1$时$a^{(\pm)}$的矩阵元才不为零。又由于

$$\begin{aligned}\langle n|N|n\rangle&=\langle n|a^{(+)}a^{(-)}|n\rangle\\&=\sum_{n'}\langle n|a^{(+)}|n'\rangle\langle n'|a^{(-)}|n\rangle\\&=\langle n|a^{(+)}|n-1\rangle\langle n-1|a^{(-)}|n\rangle=n。\end{aligned}$$

上式左方两项是相互共轭的，于是该式即为

$$|\langle n|a^{(+)}|n-1\rangle|^2=|\langle n-1|a^{(-)}|n\rangle|^2=n。$$

因而有

$$\left.\begin{aligned}\langle n''|a^{(+)}|n'\rangle&=\sqrt{n''}\delta_{n'',(n'+1)},\\\langle n''|a^{(-)}|n'\rangle&=\sqrt{n'}\,\delta_{n'',(n'-1)}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.11)_s$$

也就是：

$$\left.\begin{aligned}a^{(-)}|n\rangle&=\sqrt{n}\,|n-1\rangle,\\a^{(+)}|n\rangle&=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle。\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)_s$$

利用上式我们便可用粒子产生算符$a^{(+)}$作用到真空态得到多粒子态，例如有n_β个β态的粒子的态矢量即为：

$$|n_\beta\rangle=\frac{1}{(n_\beta!)^{\frac{1}{2}}}[a_\beta^{(+)}]^{n_\beta}|0\rangle,\qquad(4.13)_s$$

其中$|n_\beta\rangle$是归一化的，即$\langle n_\beta|n_\beta\rangle=1$。

由于上述关系，在具体计算各种态之间的过渡问题时，将最后归结为计算一系列$a^{(\pm)}$算符在真空态的平均值。

§3.5 对易关系及其协变性质

利用$(3.5)_s$式可以找出任意两个时空点x和x'的$[\varphi_l(x),\varphi_m(x')]$的对易关系，并可以看出它具有Lorentz协变性。考虑到同频部分是对易的，便有

$$[\varphi_l(x),\varphi_m(x')]=[\varphi_l^{(+)}(x),\varphi_m^{(-)}(x')]+[\varphi_l^{(-)}(x),\varphi_m^{(+)}(x')]。\qquad(5.1)$$

而

$$[\varphi_l^{(\pm)}(x),\varphi_m^{(\mp)}(x')]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k_0}}\times\int\frac{d\boldsymbol{k}'}{\sqrt{2k_0'}}e^{\mp i(kx-k'x')}[\varphi_l^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\varphi_m^{(\mp)}(\boldsymbol{k}')]=\frac{\mp\delta_{lm}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{2k_0}e^{\mp ik(x-x')}=i\frac{\hbar}{c}\delta_{lm}\Delta^{(\mp)}(x-x')。\tag{5.2}_3$$

其中

$$\Delta^{(\pm)}(x-x')=\frac{\mp i}{(2\pi)^3}\int_c\frac{d\boldsymbol{k}}{2k_0}e^{\pm ik(x-x')}。\tag{5.3}_3$$

代入$(5.1)_3$式可得:

$$[\varphi_l(x),\varphi_m(x')]=i\frac{\hbar}{c}\delta_{lm}[\Delta^{(+)}(x-x')+\Delta^{(-)}(x-x')]=i\frac{\hbar}{c}\delta_{lm}\Delta(x-x')。\tag{5.4}_3$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta(x-x')&=\Delta^{(+)}(x-x')+\Delta^{(-)}(x-x')\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{k_0}\left[\frac{e^{-ik(x-x')}-e^{ik(x-x')}}{2i}\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\cdot\frac{\sin k_0(t-t')}{k_0}d\boldsymbol{k},\ (k_0>0)。\end{aligned}\tag{5.5}_3$$

利用$(6.3)_1$式可以把Δ函数写成明显具有Lorentz不变形式,这样就说明对易关系是Lorentz协变的。

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(\pm)}(\boldsymbol{x})&=\frac{\mp i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\theta(\pm k_0)\delta(k^2+m^2)dk,\\\Delta(x)&=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}[\theta(k_0)-\theta(-k_0)]\delta(k^2+m^2)dk\\&=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\epsilon(k_0)\delta(k^2+m^2)dk。\end{aligned}\right\}\tag{5.6}_3$$

以上各式中 $dk \equiv dk_0\, d\boldsymbol{k}$,

$$\left.\begin{aligned} \theta(k_0) &= \begin{cases} 1 & \text{当 } k_0>0; \\ 0 & \text{当 } k_0<0, \end{cases} \\ \epsilon(k_0) &= \frac{k_0}{|k_0|}。 \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)_3$$

$(5.6)_3$ 式中有 $\delta(k^2+m^2)$存在, 这就说明 $\Delta^{(\pm)}$ 和 Δ 函数都是 K-G 方程的解,而且由$(5.6)_3$ 式或$(5.5)_3$ 式可以看出 $\Delta(x)$对于空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 是偶函数,而对于时间则是奇函数。并且

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(x)=0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta(x)=0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x)=-\delta(\boldsymbol{x})。 \end{aligned}\right\} \text{当 } t=0。 \qquad (5.8)_3$$

由上式可知,对于同时两点,即当 $t=t'$ 时, $\Delta(x-x')=0$。同时已知 $\Delta(x-x')$是一个 Lorentz 标量函数,由此可得,一般对于类空两点 $\Delta(x-x')$也为零。因为经常存在一个观察系,在它看来,原来的类空两点是同时的。

利用$(5.3)_3$ 或$(5.6)_3$ 式还可看出

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^{(+)}(x)=-\Delta^{(-)}(-x), \\ &\partial_\mu\Delta^{(+)}(x)=-\partial_\mu\Delta^{(-)}(-x)。 \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)_3$$

而利用$(5.8)_3$式和$(5.4)_3$式则可得:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_l(\boldsymbol{x},\,t),\,\varphi_m(\boldsymbol{x}',\,t')\right]_{t'\to t} &= [\pi_l(\boldsymbol{x},\,t),\,\varphi_m(\boldsymbol{x}',\,t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[\varphi_l(\boldsymbol{x},\,t),\,\varphi_m(\boldsymbol{x}',\,t')]_{t'\to t} \\ &= \delta_{lm}\frac{\hbar}{i}\delta(x-x'), \qquad (5.10)_3 \end{aligned}$$

其中 $\pi_l \equiv \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_l} = \dot{\varphi}_l$ 为对应 φ_l 的广义动量。

上式就是由正则量子化方法直接得出的结论。对于复数场可得到

$$\boxed{\begin{aligned} &[\varphi^{*(\pm)}(x),\,\varphi^{(\mp)}(x')]=i\Delta^{(\mp)}(x-x'), \\ &[\varphi^{*}(x),\,\varphi(x')]=i\Delta(x-x')。 \end{aligned}} \qquad (5.11)_3$$

§3.6 π 介子的同位旋

三种荷电不同的 π 介子：$\pi^{\pm,0}$，除电磁性质彼此不同外，几乎所有其他性质都是相同的。例如它们的自旋相同，质量相等。虽然中性 π 介子的质量和荷电 π 介子的质量有微量的差异，但据估计这可能就是因电磁性质不同所引起，不过目前还没有很准确的计算而已。而且三种 π 介子和核子之间的相互作用也并非互不相关。而是存在着内在联系的(参看 §7.5)。因此我们有理由认为三种不同荷电的 π 介子，实际是同一粒子的不同电荷态；这样的理解，比以前形式地把三种 π 介子统一在一起的做法，其含意要深刻得多，前者包含丰富的物理内容，需要实验验证，而后者只是为了方便采用一种数学方法罢了。大量的事实是支持把三种不同荷电的 π 介子看成为同一粒子不同电荷态这种观点的。

和自旋类似我们将采用群论的方法来描写 π 介子的电荷态。以后我们就认为 π 介子除自旋外还有另一个内部自由度即电荷态。描写 π 介子电荷态的量子数称为同位旋，类似自旋算符是 $SU(2)$ 群的产生算符，同位旋也是另一 $SU(2)$ 群的产生算符。同时由于 π 介子只有三个不同的电荷态，根据角动量理论知道 π 介子的同位旋应该为 1。设想一个与普通空间无关的抽象三维表示空间，称为同位旋空间，它与普通空间有完全相似的性质。该空间里的自旋算符即称为 π 介子同位旋算符，同位旋在该空间某一方向的投影就直接反映出 π 介子的电荷态。而 π 介子场本身应该是同位旋空间的一个矢量。我们把同位旋空间矢量的箭头，标在符号的下部，以便和普通空间的矢量相区别。

当同位旋空间标架有个微量旋转 $-\underset{\rightarrow}{\delta\theta}$ 时，作为同位旋空间矢量的 π 介子场 $\underset{\rightarrow}{\varphi}$ 也有相应变换(下箭头表示同位旋空间矢量以和普通空间矢量区别)：

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}\to\underset{\rightarrow}{\varphi}'=\underset{\rightarrow}{\delta\theta}\times\underset{\rightarrow}{\varphi}。\tag{6.1}$$

或者写成分量形式：

$$\varphi_l \to \varphi_l' = (\delta_{lm} - \epsilon_{lmn}\delta\theta^{(n)})\varphi_m = (\delta_{lm} - it_{lm}^{(n)}\delta\theta^{(n)})\varphi_m 。 \quad (6.2)_3$$

由上式可见 ϵ_{lmn} 对于指标 l、m 来讲，即为对应 n 方向微量旋转(同位空间)的产生算符，根据角动量理论，单粒子量子力学的同位旋算符就应为：

$$t_{l,m}^{(n)} = -i\epsilon_{lmn} 。 \quad (6.3)_3$$

写出同位旋 $\underset{\sim}{t}$ 的具体矩阵形式为

$$t^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad t^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$t^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad [t^{(1)}]^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$[t^{(2)}]^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |t^{(3)}|^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

容易证明

$$[t^{(l)}, t^{(m)}] = i\epsilon_{lmn}t^{(n)} 。 \quad (6.4)_3$$

$t^{(l)}$ 矩阵实际就是 $SU(2)$ 群的产生算符的三维表示。且 $|\underset{\sim}{t}|^2 = 2 = 1 \times (1+1)$，这说明矩阵 $\underset{\sim}{t}$ 确实具有同位自旋的特性，并且对应同位旋为 1。$t^{(3)}$ 的本征值为 ± 1, 0，与 π 介子具有三个独立的电荷态相对应，可以证明当 $\varphi_1 = \varphi_2$ 时(参看(2.9)式) φ_β 就是 $t^{(3)}$ 的本征态，其本征值即为 $\beta(=+,-,0)$，分别对应 π 介子的三个电荷态。

如果 π 介子的 $\mathscr{L}$ 是同位标量，则 $\mathscr{L}$ 在同位空间旋转下保持不变，这个 $\mathscr{L}$ 的对称性，将对应 π 介子场的同位旋守恒。例如

$$\mathscr{L} = \frac{-1}{2}(\partial_\mu \underset{\rightarrow}{\varphi} \cdot \partial_\mu \underset{\rightarrow}{\varphi} + m^2 \underset{\rightarrow}{\varphi}\underset{\rightarrow}{\varphi}) \quad (6.5)_3$$

就具有上述的性质。下面我们来找出具有守恒性质的、π 介子场的同位旋算符的具体形式。由同位旋转所引起的作用量的变更，可通过将 $(6.1)_2$ 式或 $(6.2)_3$ 式代入 $(1.3)_2$ 式而得出：

$$\left.\begin{aligned}\delta I &= -i\oint\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\varphi}\,d\sigma_\mu=-i\oint\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}\times\underset{\rightarrow}{\varphi}\,d\sigma_\mu\\ &=-i\oint\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})}\times\underset{\rightarrow}{\varphi}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}d\sigma_\mu=i\oint(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})\times\underset{\rightarrow}{\varphi}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}\,d\sigma_\mu=0\end{aligned}\right\}$$

或

$$-i\oint\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\epsilon_{lmn}\varphi_m\delta\theta^{(n)}\,d\sigma_\mu=\oint\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\underset{\sim}{t}\varphi\,\delta\underset{\rightarrow}{\theta}\,d\sigma_\mu=0。\qquad(6.6)_3$$

由于 $\delta\underset{\rightarrow}{\theta}$ 是任意的，类似上一章的考虑得知存在守恒的同位旋流

$$\left.\begin{aligned}\underset{\rightarrow}{J}_\mu&=(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})\times\underset{\rightarrow}{\varphi}\\ \partial_\mu\underset{\rightarrow}{J}_\mu&=0\end{aligned}\right\}\qquad(6.7)_3$$

如取 σ 为时间是常数的类空平面，就得到：

$$\underset{\rightarrow}{T}=\int\varphi(x)i\underset{\sim}{t}\pi(x)d\boldsymbol{x}=\int\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\times\underset{\rightarrow}{\pi}(x)d\boldsymbol{x}=\text{常数},\qquad(6.8)_3$$

式中 $\underset{\rightarrow}{\pi}(x)\equiv\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\rightarrow}{\varphi}}(x)}$，如取 $(6.5)_3$ 式的 $\mathscr{L}$，则 $\underset{\rightarrow}{\pi}(x)=\dot{\underset{\rightarrow}{\varphi}}(x)$。此时

$$\boxed{\underset{\rightarrow}{T}=\int\varphi(x)i\underset{\sim}{t}\dot{\varphi}(x)d\boldsymbol{x}=\int\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\times\dot{\underset{\rightarrow}{\varphi}}(x)d\boldsymbol{x}。}\qquad(6.9)_3$$

与 $(6.10)_2$ 式相比，可知上式 $\underset{\rightarrow}{T}$ 实际就是 $SU(2)$ 群的守恒荷算符。上面在 $\underset{\sim}{t}$ 两边的 φ，$\dot{\varphi}$ 或 π 没有矢量箭头，也没有下标，应理解为矩阵。例：

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_+\\ \varphi_-\\ \varphi_0\end{pmatrix}。$$

$\underset{\rightarrow}{T}$ 称为 π 介子场的同位旋算符，利用 $(5.16)_3$ 对易关系可以证明：

$$[\underset{\rightarrow}{T}\times\underset{\rightarrow}{T}]=i\underset{\rightarrow}{T}。\qquad(6.10)_3$$

类似以前的计算、可以把 $\underset{\rightarrow}{T}$ 算符用粒子产生算符或湮灭算符表示出来，由 $(6.9)_3$ 式可得：

$$\underset{\rightarrow}{T}=-i\sum_{\boldsymbol{k}}(\underset{\rightarrow}{a}^{(+)}(\boldsymbol{k})\times\underset{\rightarrow}{a}^{(-)}(\boldsymbol{k}))。\qquad(6.11)_3$$

同位旋 $\underset{\rightarrow}{T}$ 是一个守恒量，同时满足角动量对易关系 $(6.10)_3$ 式，因而我们可以用 T^2 和 $T^{(3)}$ 来表征 π 介子的态。尤其 $T^{(3)}$ 和电荷算

符Q有简单的关系

$$Q=eT^{(3)}。\qquad (6.12)_3$$

此式可由比较$(6.11)_3$和$(4.3)_3$式而得到。

利用$a(k)$之间的对易关系，可以证明$\pi^{\pm,0}$介子态是T^2和$T^{(3)}$的本征态，它们的本征值分别为$T^2=2$和$T^{(3)}=\pm1, 0$，也就是$\pi^{\pm,0}$形成一个同位旋为1的三重态。对于多π介子体系的同位旋的合成和自旋的合成方法一致，这里不再赘述。

同位旋概念的引进，给π介子以新的自由度，却减少了π介子的数目，同时也简化了π介子和核子以及其他粒子相互作用的描述。事实充分地证实了不同荷电π介子之间的这种内在联系。

按照同位旋空间的概念，π介子场的位相变更，相当于绕同位旋空间第三轴的旋转。因为所谓位相变更即为

$$\varphi_{(-)}\to\varphi'_{(-)}=\varphi_{(-)}e^{i\alpha},$$

亦即

$$\varphi_1-i\varphi_2\to(\varphi'_1-i\varphi'_2)$$
$$=(\varphi_1-i\varphi_2)(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

而

$$\varphi'_1=\varphi_1\cos\alpha+\varphi_2\sin\alpha,$$
$$\varphi'_2=\varphi_2\cos\alpha-\varphi_1\sin\alpha。$$

上式就是绕第三轴转α角的变换公式。也就是说按照同位空间的术语，自由π介子的电荷守恒定律，是与其$\mathscr{L}$在绕同位空间第三轴旋转下保持不变相对应的。此外由$(2.13)_3$式看来，自由π介子的电荷共轭相当于同位旋空间的第二轴的反演。

参 考 资 料

1. 关于 Klein-Gordon 方程

O. Klein Zeits. f. Physics. **37** (1926)895

W. Gordon Zeits. f. Physics. **40**(1926) 117

2. 关于同位旋

B. Cassen & E. U. Condon Phys. Rev. **50** (1936) 846

N. Kemmer Proc. Camb. Phil. Soc. **34**(1938) 354

D. 卢里　粒子和场(1981)第一、三章

朱洪元　量子场论(1965)第三章

第四章　电磁场的量子化理论

电磁场的理论是场论里发展得最早的理论，电磁辐射的量子化又是量子理论的起源。直到现在，量子电动力学还是量子场论里发展得最成熟的一个部分，而且在很多地方也是其他场理论的典范，因此电磁场的量子理论以及它与荷电粒子的相互作用，也在量子场论里占着极重要的地位。

在进行量子化的过程中，有很多步骤和前一章完全一致，对此我们只做简略叙述。而本章将着重讨论作为电磁场特殊性的Lorentz 条件和规范不变性。

本章里还介绍了一般矢量场的量子理论。把它和电磁场理论摆在一起讨论，是因为它们有很多相同的地方。矢量场的讨论不仅具有实际意义，近年来在高能散射过程中，发现了多种矢量玻色共振态，例如 ρ、ω、φ 和 ψ/J，γ 等矢量介子。同时也具有理论上的兴趣，例如在弱电统一的 W-S 理论中，就预言了矢量中间玻色子 $W^{\pm}$，Z^0 的存在。同时有质量的矢量介子，在重整化过程中带来了困难，这又是近年来研究对称性破缺的规范理论的一个动力。

§4.1　电磁场的规范不变性

由经典电动力学理论知道，电磁场可由四维矢势 $A_\mu(x)$来描述：$A_\mu(x)$的每一分量，满足 D'Alembert 方程，即

$$\Box A_\mu(x)=0。 \tag{1.1}_4$$

此式也就是 $m=0$ 时的 K-G 方程。A_μ 的四个分量之间满足另一附加条件，通常取所谓协变的 Lorentz 条件，即

$$\partial_\mu A_\mu(x)=0。 \tag{1.2}_4$$

描写同一场的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，并且满足这一条件的 $A_\mu(x)$ 并不是唯一的，实际上在变换

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\epsilon(x) \qquad (1.3)_4$$

之下(其中 $\epsilon(x)$为某一标函数，且是 D'Alembert 方程的解)，$A'_\mu(x)$ 同样满足$(1.1)_4$式和$(1.2)_4$式，而且与 $A_\mu(x)$描写同样的场强 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，因此 $A'_\mu(x)$和 $A_\mu(x)$是完全等价的，这就是说，A_μ 和 A'_μ 描写同一电磁场的态。电磁矢势 $A_\mu(x)$的这种性质，称为规范不变性。变换 $(1.3)_4$ 式则称为规范变换。由于具有物理本质的是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，所以在用 $A_\mu(x)$描写电磁场时，要随时注意到 $A_\mu(x)$的规范不变性。

类似$(5.3)_2$式，$(1.1)_4$式的一般解可写成：

$$A_\mu(x)=A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x)。$$

其中

$$A_\mu^{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega}}\,e^{\mp ikx}A_\mu^{(\pm)}(\boldsymbol{k})。 \qquad (1.4)_4$$

把上式代入$(1.3)_4$式，可以得到规范变换在动量空间的表示：

$$A_\mu^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\to A'^{(\pm)}_\mu(\boldsymbol{k})=A_\mu^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\mp ik_\mu\epsilon^{(\pm)}(k)。 \qquad (1.5)_4$$

其中 $\epsilon(\boldsymbol{k})$为 $\epsilon(x)$的富氏分量。由此式看来，规范变换相当于矢势 $A_\mu(\boldsymbol{k})$在沿着 k 矢量(四维)方向，增加了一个任意的矢量。我们把矢势方向的单位矢量称为极化矢量，并记以 e_μ。如果规范变换是微量的，则相应于微量的规范变换，极化矢量就有一个微量变更。由$(1.5)_4$式可知当 $\epsilon\to0$ 时

$$\delta e_\mu=e'_\mu-e_\mu=-ik_\mu\epsilon。 \qquad (1.6)_4$$

由上面的分析看来，矢势 $A_\mu(k)$在垂直于k(四维)方向的投影(称为横分量)，在规范变换下保持不变，也就是矢势 $A_\mu(k)$的横分量是规范不变量。所以它是和场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 一样是具有物理实质的量。而矢势平行于(四维) k 的分量在规范变换下是要改变的。因此把矢势 $A_\mu(k)$按照平行于 k 和垂直于 k 的分量分解具有实际的意义，这相当于把 $A_\mu(k)$按非物理实质和有物理实质的部分明显地分解开来。为此我们适当地选取时空坐标轴，使得第三坐标轴沿着

k(空间)方向，而时间方向即为第四坐标轴，这样选取的时空坐标称为纵横坐标，简称 k 坐标。在此坐标下，k 的分量即为$(0, 0, \omega, i\omega)$。矢势 A 沿纵横坐标轴的第一轴、第二轴的分量，统称为矢势 A 的横分量。沿第三轴即 k 方向的投影称为 A 的纵分量，沿第四坐标轴的投影则称为时间分量。以后我们习惯上用 λ 或 σ 来代表纵横坐标系的分量，$\lambda, \sigma=1, 2, 3, 4$。而一般的坐标系仍用 μ 或 ν 来代表其分量，$\mu, \nu=x, y, z, it$。它们各自都是正交坐标系。

引进 e^λ 为 λ 方向的单位矢量，e^λ 在 μ 方向的投影则记以 e^λ_μ。容易证明下列关系：

$$e^\lambda \cdot e^\sigma = \delta_{\lambda\sigma}; \quad \lambda, \sigma=1, 2, 3; \tag{1.7}_4$$

$$e^\lambda \times e^\sigma = \epsilon_{\lambda\sigma\rho} e^\rho;$$

$$e^3 = \frac{k}{|k|}; \quad e^\lambda_4 = \delta_{4\lambda}; \quad e^4_\mu = \delta_{\mu 4};$$

$$e^\lambda_\mu k_\mu = \begin{cases} 0 & \lambda=1, 2 \\ \omega & \lambda=3, \quad \text{或 } k_\mu = \omega(e^3_\mu + i e^4_\mu)。 \\ i\omega & \lambda=4 \end{cases} \tag{1.8}_4$$

$$\left.\begin{aligned} e^\lambda_\mu e^\sigma_\mu &= \delta_{\lambda\sigma}, \\ e^\lambda_\mu e^\lambda_\nu &= \delta_{\mu\nu}。 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}_4$$

矢势在纵横坐标轴的投影记以 $a_\lambda(k)$，它与矢势在一般坐标轴上的投影 $A_\mu(k)$ 有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} A^{(\pm)}_\mu(k) &= e^\lambda_\mu a^{(\pm)}_\lambda(k), \\ a^{(\pm)}_\sigma(k) &= e^\sigma_\mu A^{(\pm)}_\mu(k)。 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}_4$$

以 e^σ_μ 乘 $(1.5)_4$ 式可得

$$\boxed{\begin{aligned} a^{(\pm)\prime}_\sigma(k) &= e^\sigma_\mu A^{(\pm)\prime}_\mu(k) = e^\sigma_\mu\left(A^{(\pm)}_\mu \mp i k_\mu \epsilon^{(\pm)}(k)\right) \\ &= a^{(\pm)}_\sigma(k) \mp i e^\sigma_\mu k_\mu \epsilon^{(\pm)}(k)。 \end{aligned}} \tag{1.11}_4$$

当 $\sigma=1, 2$ 时　　$a'_\sigma(k) = a_\sigma(k)$。

上式说明横分量是规范不变量(这在上面已经提到过)。此外利用$(1.8)_4$ 和$(1.11)_4$ 式可知$(a_3 + i a_4)$也是规范不变量，虽然$(a_3 + i a_4)$也是规范不变量，但由于 Lorentz 条件的要求，其实际效果

为零。Lorentz 条件$(1.2)_4$式的动量表示可写成：

$$\mp ik_\mu A_\mu^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = \mp ik_\mu e_\mu^\lambda a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 0。 \qquad (1.12)_4$$

利用$(1.8)_3$式可得：

$$a_3^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) + ia_4^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 0, \text{ 或 } a_3^{(\pm)} - a_0^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 0。 \qquad (1.13)_4$$

这说明这第三个规范不变的极化矢量其模为零，也就是说它实际是不能观察的。

由上式容易导出：

$$a_3^{(+)}(\boldsymbol{k})a_3^{(-)}(\boldsymbol{k}) + a_4^{(+)}(\boldsymbol{k})a_4^{(-)}(\boldsymbol{k}) = 0。 \qquad (1.14)_4$$

或
$$a_3^{(+)}(\boldsymbol{k})a_3^{(-)}(\boldsymbol{k}) - a_0^{(+)}(\boldsymbol{k})a_0^{(-)}(\boldsymbol{k}) = 0。$$

上述$(1.13)_4$式和$(1.14)_4$式就是由 Lorentz 条件给$a_\sigma(\boldsymbol{k})$带来的一个限制在规范不变的物理量的表式中，a_3和a_4虽然可能以$[a_3 + ia_4]$相伴的形式出现，但其实际效果为零。

§4.2 电磁场的量子化

由经典电动力学知道，电磁场的拉氏密度为

$$\mathscr{L} = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}。 \qquad (2.0)_4$$

由此形式的拉氏密度可推出场方程为：

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0 = \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial_\mu A_\mu)。$$

再考虑到 Lorentz 条件，就得到 D'Alembert 方程：

$$\Box A_\nu = 0。$$

如果要直接得出 D'Alembert 方程，则可取拉氏密度为

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2。$$

其中最后一项$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$称为规范固定项，而$\mathscr{L}'$又和以下的$\mathscr{L}''$

$$\mathscr{L}'' = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)\cdot(\partial_\mu A_\nu) \qquad (2.1)_4$$

相差一个四维散度$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}[A_\nu(\partial_\mu A_\mu) - A_\mu(\partial_\mu A_\nu)]$，因而在计

算体系的能量动量时可采取 $\mathscr{L}''$ 形式。而 $\mathscr{L}''$ 的形式和四个标量场求和所得形式相应，这样在计算体系的能量动量时可以充分利用上一章所得的结果。

类似$(2.11)_3$式的推导，并考虑到$(1.10)_4$式便得：

$$P_\mu = -i\int T_{\mu 4}\, dx$$

$$= \int d\boldsymbol{k} \cdot \frac{k_\mu}{2} \sum_{\lambda=1}^{4} [a_\lambda^{(+)}(\boldsymbol{k}) a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}) + a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}) a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k})]。$$

$(2.2)_4$

又注意到$(1.14)_4$式条件，则上式实际只须对横分量求和

$$\boxed{P_\mu = \int d\boldsymbol{k}\ \frac{k_\mu}{2} \sum_{\lambda=1}^{2} [a_\lambda^{(+)}(\boldsymbol{k}) \cdot a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}) + a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}) a_\lambda^{(+)}(\boldsymbol{k})]。}$$

$(2.3)_4$

电磁场为实数场，故其对应的光子为中性；电荷为零。

类似§3.3的讨论可得（过渡到分立 $\boldsymbol{k}$ 值）：

$$\boxed{\begin{array}{l} [a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ a_\sigma^{(+)}(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\lambda\sigma}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}, \\ \lambda,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ [a_0^{(+)}(\boldsymbol{k}),\ a_0^{(-)}(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \end{array}} \qquad (2.4)_4$$

在 Bjorken 度规下，上式为：

$$\boxed{\begin{array}{l} [a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ a_\sigma^{(+)}(\boldsymbol{k}')] = -g_{\lambda\sigma}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ \lambda,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 0 \\ [a_0^{(+)}(\boldsymbol{k}),\ a_0^{(-)}(\boldsymbol{k}')] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \end{array}} \qquad (2.4')_4$$

类似$(2.9)_3$式和$(4.1)_3$式有：

$$[a_{(-\beta)}^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ a_\beta^{(+)}(\boldsymbol{k})] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \quad \beta = +,\ -, \qquad (2.5)_4$$

其中

$$a_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a,\ \pm i a_2)。$$

引进粒子数算符：

$$\left.\begin{aligned} N_\lambda &= a_\lambda^{(+)}(\boldsymbol{k})a_\lambda^{(-)}(\boldsymbol{k}) \quad \lambda=1,\ 2,\ 3, \\ N_0 &= a_0^{(-)}(\boldsymbol{k})a_0^{(+)}(\boldsymbol{k}) \\ N_\beta &= a_\beta^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{(-\beta)}^{(-)}(\boldsymbol{k}) \quad \beta=+,\ -。 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}_4$$

可以证明：

$$[N_\lambda,\ N_\sigma]=0=[N_\lambda,\ P_\mu]。 \tag{2.7}_4$$

$$\left.\begin{aligned} &[N_\lambda,\ a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\pm a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\ \lambda=1,\ 2,\ 3; \\ &[N_0,\ a_0^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\mp a_0^{(\pm)}(\boldsymbol{k}); \\ &[N_\beta,\ a_\beta^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\pm a_\beta^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\ \beta=+,\ -。 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}_4$$

$$\left.\begin{aligned} &[P_\mu,\ a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\pm k_\mu a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\ \lambda=1,\ 2,\ 3; \\ &[P_\mu,\ a_0^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\mp k_\mu a_0^{(\pm)}(\boldsymbol{k}); \\ &[P_\mu,\ a_\beta^{(\pm)}(\boldsymbol{k})]=\pm k_\mu a_\beta^{(\pm)}(\boldsymbol{k}),\ \beta=+,\ -。 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}_4$$

以上同一等式中有两个符号出现者，规定同时取其上面或下面的符号。

类似§3.4的讨论，可知光子是满足 Bose 统计的，$a^{(\pm)}$ 分别为光子的产生算符和湮灭算符，其具体意义如下：

$a_\lambda^{(+)}$ 为在 λ 方向偏振的光子的产生算符 $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\lambda=1,\ 2$ 为横光子

$a_\lambda^{(-)}$ 为在 λ 方向偏振的光子的湮灭算符 $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\lambda=3$ 为纵光子

$a_0^{(+)}$ 为类时光子湮灭算符

$a_0^{(-)}$ 为类时光子的产生算符

$a_{(\pm)}^{(+)}$ 为右/左圆偏振光子的产生算符

$a_{(\pm)}^{(-)}$ 为左/右圆偏振光子的湮灭算符

这儿的结论和上一章所得是相当的。值得指出的就是类时光子的产生湮灭算符的(±)号和一般的正好相反。

把$(2.4)_4$，$(2.5)_4$ 和$(2.6)_4$ 式代入$(2.3)_4$ 式可得

$$P_\mu=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{2}\left(N_\lambda+\frac{1}{2}\right)k_\mu=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\beta=+,-}\left(N_\beta+\frac{1}{2}\right)k_\mu。 \tag{2.10}_4$$

这里考虑了 Lorentz 条件，以致在表式中只有横分量出现。我们还可证明，纵光子和类时光子对于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的平均值的贡献也为零，这和经典电动力学的结论是一致的。由于 N 的本征值只能取正整

数，因而上式也反映了光子的粒子性。

§4.3 光子的自旋

当时空坐标有一个微量旋转时，即

$$x_\mu \to x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}) x_\nu \text{。} \qquad (3.0)_4$$

矢势 A_μ 为一四维矢量，在上述变换下，它也有相同的变换，即

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = (\delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}) A_\nu(x) \qquad (3.1)_4$$

与$(3.2)_2$式 $\quad A'_r(x') = A_r(x) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_{rs}A_s(x)$

相比可得：

$$\epsilon_{rs} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_{rs} \text{。}$$

那末

$$(S_{\mu\nu})_{rs} = (\delta_{\mu\nu}\delta_{rs} - \delta_{\mu s}\delta_{\nu r}) \text{。} \qquad (3.2)_4$$

其中 $-iS_{\mu\nu}$ 的空空部分就对应单粒子量子力学里光子自旋算符，其具体矩阵形式如下：

$$-iS_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad -iS_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$-iS_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{。} \qquad (3.3)_4$$

此矩阵形式与 π 介子同位旋算符[参看$(6.4)_3$式]是一致的，只是多了均为零的时空、时时分量，由此可见光子的自旋为 1。

以$(2.1)_4$式代入$(3.1)_2$式可得：

$$\sum_{(\mu,\nu)} = i\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_4 A_r)}(S_{\mu\nu})_{rs}A_s(x)d\boldsymbol{x} = -\int \pi_r(S_{\mu\nu})_{rs}A_s(x)d\boldsymbol{x}$$

$$= -\int A_\mu \overleftrightarrow{\partial}_t A_\nu = \int A_\mu \mathcal{H}_0 A_\nu \, d\boldsymbol{x}, \qquad (3.4)_4$$

其中 $\pi_r \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\dot{A}_r)}$。其空空部分就对应电磁场的自旋角动量 S_i，即

$$S_i \epsilon_{ijk} = \sum_{(j,k)}, \qquad (3.5)_4$$

利用 $-iS_{ij}$ 的对易关系以及 $[\pi_r, A_s]$ 的对易关系可以证明 S_i 满足角动量的对易关系以一般解$(1.4)_4$式代入，可得：

$$\boldsymbol{S} = -i\int d\boldsymbol{k}[\boldsymbol{A}^{(+)}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{A}^{(-)}(\boldsymbol{k})。 \qquad (3.6)_4$$

上式和 $(6.11)_3$式在形式上是一致的。取纵横坐标，对于一定的 $\boldsymbol{k}$，则有：

$$S_3 = -i(a_1^{(+)}(\boldsymbol{k})a_2^{(-)}(\boldsymbol{k}) - a_2^{(+)}(\boldsymbol{k})a_1^{(-)}(\boldsymbol{k}))。$$

以$(2.5)_4$式代入可得：

$$\begin{aligned} S_3(\boldsymbol{k}) &= [a_{\{+\}}^{\{+\}}(\boldsymbol{k})a_{\{-\}}^{\{-\}}(\boldsymbol{k}) - a_{\{-\}}^{\{+\}}(\boldsymbol{k})a_{\{+\}}^{\{-\}}(\boldsymbol{k})] \\ &= N_{(+)}(\boldsymbol{k}) - N_{(-)}(\boldsymbol{k})。 \qquad (3.7)_4 \end{aligned}$$

对于一个单光子态(物理光子只有横分量)，由上式可知，其自旋在纵向的投影为 $+1$ 或 (-1)。由此也可看出光子的自旋为 1。不过光子自旋的指向只有两个独立态，相应于 $S_3 = \pm 1$；而无第三个。这一点与一般自旋为 1 的粒子不同。光子场由于附加的 Lorentz 条件和规范不变的要求，它只有两个横分量起实质性的作用，这与光子只有两个自旋态是对应的。

正如前面已提到过的，涡度只是三维空间的不变量，而不是 Lorentz 不变量，因此自旋在粒子运动方向的投影，对于不同的观察系是可以不相同的。一般质量不为零，自旋为 S 的粒子，其自旋在动量方向的投影，不能只取一个值，而是可以取为 $S, S-1, \cdots$ 或 $-S$。但对于质量为零的粒子，情况特殊，其自旋在动量方向的投影可以只取 S 或 $-S$。这是因为质量不为零的粒子，其速度 $v < c$。以致在某一观察系看来，粒子自旋指向动量方向；而在另一观察系，例如相对于原观察系在垂直于粒子速度方向，有相对速度 v' 的观察系看来，自旋的方向就与粒子的动量方向不一致，二者相交一角度 $\theta\left(\tan\theta = \frac{v'}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$。因此限取自旋方向沿着动

量方向，就不能保持 Lorentz 不变的要求。可是如果粒子质量为零，其速度经常为 $v=c$，$\theta=0$(或$=\pi$)，这样在所有观察系看来，都是自旋指向粒子动量方向(或与动量反向)，因而粒子可以只有一个涡度态，另一个(自旋和动量方向相反的)涡度则是由于空间反演不变而得来的；也就是说，对于质量为零的粒子的涡度态只能取 S 或 $-S$ 值，这是满足 Lorentz 不变和空间反演不变的要求所得到的。如果不要求空间反演下不变，那末质量为零的粒子，可以只有一个涡度 S(或只有一个涡度 $-S$)，中微子就是这样。

§4.4 $A_\mu(x)$的对易关系和 Lorentz 条件

类似§3.5 的讨论可得：

$$\boxed{[A_\mu^{(\pm)}(x),\ A_\nu^{(\mp)}(x')]=i\delta_{\mu\nu}D^{(\mp)}(x-x'),} \qquad (4.1)_4$$

$$\boxed{[A_\mu(x),A_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}D(x-x')。} \qquad (4.2)_4$$

在 Bjorken 度规下，上两式为：

$$\boxed{[A_\mu^{(\pm)}(x),\ A_\nu^{(\mp)}(x')]=-ig_{\mu\nu}D^{(\mp)}(x-x'),} \qquad (4.1')_4$$

$$\boxed{[A_\mu(x),\ A_\nu(x')]=-ig_{\mu\nu}D(x-x'),} \qquad (4.2')_4$$

其中 $D(x)$函数就是 $m=0$ 时 $\Delta(x)$函数[参看$(5.6)_3$]。

类似§3.5 的讨论，上式的 Lorentz 协变性是容易证明的。

把$(4.2)_4$式对 x 微分得到：

$$[\partial_\mu A_\mu(x),\ A_\nu(x')]=i\partial_\nu D(x-x')\neq 0。 \qquad (4.3)_4$$

可是根据 Lorentz 条件 $\partial_\mu A_\mu(x)=0$，上式应该为零，这说明量子化条件 $(4.2)_4$ 式直接与 Lorentz 条件相低触。也就是量子化以后的 $A_\mu(x)$算符作为时空参数的函数，其本身不能满足 Lorentz 条件。矛盾来源于：我们进行量子化时把 $A_\mu(x)$看成是彼此之间相互独立的。而 Lorentz 条件，都是给纵分量和类时分量带来一定的联系。这个矛盾似乎可以用只对横分量加以量子化、而不对类时

分量和纵分量进行量子化得到解决，因为 Lorentz 条件实际上只对后者有约束作用 [参看 $(1.13)_4$ 式 $(1.14)_4$ 式]。但是这样做法不是 Lorentz 协变的，因为纵横分量的分解，与观察系有关。作为一个四维矢量，我们应该把四个分量统一起来考虑。

为了解决上述困难，我们认为量子化后的 $A_\mu(x)$ 算符，作为时空的函数，它本身虽不能满足 Lorentz 条件，但可设想实际光子所能出现的态（以后简称光子的物理态）都满足下列条件：

$$\langle|\partial_\mu A_\mu(x)|\rangle=0。 \qquad (4.4)_4$$

这就是经典理论里对 $A_\mu(x)$ 本身加以限制的 Lorentz 条件。转移到对光子物理态加以限制，这便是在光子物理态中 $\partial_\mu A_\mu(x)$ 的平均值总为零；显然如此条件比 $\partial_\mu A_\mu(x)=0$ 放宽了。然而此时同样足以说明经典电磁理论里的 Lorentz 条件。经典理论里电磁场之间的关系，在我们现在看来只是光子物理态平均值之间的关系。

满足 $(4.4)_4$ 式的充分条件：

$$(\partial_\mu A_\mu(x))^{(-)}|\rangle=0, \qquad (4.5)_4$$

与上式同时有

$$\langle|(\partial_\mu A_\mu(x))^{(+)}=0。$$

以后我们就以 $(4.5)_4$ 式作为量子化以后的 Lorentz 条件。

上面的（$^{(-)}_{(+)}$）也同样是指正、负频部分的分解。把 $(\partial_\mu A_\mu(x))$ 分解为正、负部部分，即使对于有相互作用的情况，依然是可能的。虽然此时 $A_\mu(x)$ 本身，由于不满足齐次的 D'Alembert 方程，以致把 $A_\mu(x)$ 分成正、负频部分是不行的。因为在有电荷存在时

$$\Box A_\mu(x)=-j_\mu。$$

然而

$$\Box(\partial_\mu A_\mu(x))=-\partial_\mu j_\mu=0。$$

由于电荷守恒是经常成立的，因而 $(\partial_\mu A_\mu(x))$ 经常满足齐次的 D'Alembert 方程，所以把 $(\partial_\mu A_\mu(x))$ 分解为正、负频部分也是经常可行的。这就是说，即使在有相互作用情况下，我们同样可将 $(4.5)_4$ 式作为 Lorentz 条件的理解。

也许读者会提出这样的问题：我们用下列关系

$$(\partial_\mu A_\mu(x))|\rangle=0$$

来代表$(4.5)_4$，不是更为直接些吗？可是此式对光子物理态的要求是过于苛刻了。它相当于要求在光子物理态上，既不能湮灭某类光子也不能产生该类光子；这实际上就是说几乎没有这样的态存在。再则，即使按照$(4.5)_4$式来选取光子物理态也是有困难的。实际上$(4.5)_4$式说明光子物理态中的纵光子和类时光子的数目，存在一定联系，由于这种联系，导致了光子物理态的模是发散的，以致无法使它归一化。而且保持$a_0^{(-)}$是类时光子的产生算符，就难以得到对真空态的恰当的定义。为了消除上述缺陷，Gupta 引进了不定度规的量子化方案(参看附录 II)。克服了理论上的困难以后，在实际应用上，我们几乎可以完全不考虑纵光子和类时光子的存在，这只是相当于我们选取了某种规范而已。Lorentz 条件的主要作用在于保证纵光子和类时光子实际上是不能物理观察的。

§4.5 矢量场的量子化理论

弱相互作用理论预言了矢量中间玻色子的存在。近年来在高能散射过程中，也陆续发现了一些矢量共振态。

矢量场和电磁场有很多相同之处；其实电磁场只是特殊的一种矢量场。然而一般来说，矢量场的质量并不为零，以致它不具有规范不变性。同时一般矢量场可以是复数场(对应于荷电介子)，而电磁场是实数场。矢量场的 $\mathscr{L}$ 可以由电磁场的 $\mathscr{L}$ 推广为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}\varphi_\mu\varphi_\mu, \qquad (5.1)_4$$

其中 $F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu\varphi_\nu-\partial_\nu\varphi_\mu$。对应于上式的 $\mathscr{L}$ 可得到场方程

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=\Box\varphi_\nu-\partial_\nu(\partial_\mu\varphi_\mu)=m^2\varphi_\nu。$$

上式对 ∂_ν 微商导致 $\partial_\nu\varphi_\nu=0$，因而场方程可写成

$$\left.\begin{aligned}&(\Box-m^2)\varphi=0,\\&\partial_\nu\varphi_\nu=0。\end{aligned}\right\} \qquad (5.2)_4$$

上面的结论可推广到复矢量场，每一分量同样满足 K-G 方程

$$\left.\begin{aligned}(\Box-m^2)\varphi=0,\\(\Box-m^2)\varphi^*=0。\end{aligned}\right\}\qquad (5.3)_4$$

这里我们对复矢量场有如下的约定：$\varphi_\mu=(\boldsymbol{\varphi},\ i\varphi_0)$，而 $\varphi^*_\mu=(\boldsymbol{\varphi}^*,\ i\varphi^*_0)$，也就是 $\varphi^*_4=-\varphi^*_4$。并且各分量之间满足附加条件

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu\varphi_\mu=0,\\\partial^*_\mu\varphi^*_\mu=0。\end{aligned}\right\}\qquad (5.4)_4$$

因而独立的分量只有三个，对应于自旋为 1 粒子的三个不同自旋态。

上式这个条件也可以由选取自旋平方算符[例如参看 $(3.13)_2$ 式]其本征值为 $1\times(1+1)=2$ 的本征态而得到。对于质量不为零的矢量场，作为算符本身亦可满足以上附加条件，这一点也是和电磁场不同的。

如果我们对矢量场的处理，完全模仿以前的方法，只是对电磁场做一些形式上的推广，那就容易得到下列结论：

$$\left.\begin{aligned}&(\Box-m^2)A_\mu=0=(\Box-m^2)A^*_\mu,\\&[A^*_\mu(x),\ A_\nu(x')]=i\delta_{\mu\nu}\Delta(x-x')。\end{aligned}\right\}\qquad (5.5)_4$$

显然上式的对易关系是不能和附加条件 $(5.4)_5$ 式相容[参看 $(4.3)_4$ 式]。因而我们通常不采用上式 A_μ 作为矢量场的描述，而引进以下的矢量场

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\mu(x)&=A_\mu(x)-\frac{1}{m^2}\partial_\mu(\partial_\nu A_\nu(x)),\\\varphi^*_\mu(x)&=A^*_\mu(x)-\frac{1}{m^2}[\partial_\mu(\partial_\nu A_\nu(x))]^*。\end{aligned}\right\}\qquad (5.6)_4$$

容易证明以上的 φ_μ 和 φ^*_μ 是满足 $(5.3)_4$ 式和 $(5.4)_4$ 式的要求的。把 $(5.5)_4$ 式代入上式并利用 Δ 函数满足 K-G 方程，便得到

$$\boxed{[\varphi^*_\mu(x),\ \varphi_\nu(x')]=i\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta(x-x')}\qquad (5.7)_4$$

在 Bjorken 度规下，上式为：

$$\boxed{[\varphi^*_\mu(x),\ \varphi_\nu(x')]=-i\left(g_{\mu\nu}+\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta(x-x')}\qquad (5.7')_4$$

此式的对易关系可与$(5.4)_4$式附加条件相并存。今后我们就采用φ_μ作为矢量场的描述。值得指出，当$m=0$时，$(5.6)_4$式失效，此时我们就只好用A_μ本身作为矢量场的描述，附加条件$(5.4)_5$式也不能作为场本身所须满足的条件，而只是$\partial_\mu A_\mu$在物理态的平均值为零，这正是我们在电磁场所讨论过的情况。

与$(5.7)_4$式相应在动量空间有对易关系。

$$\boxed{\begin{aligned}[\varphi_\mu^{*(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_\nu^{(+)}(\boldsymbol{k}')] &= [\varphi_\mu^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_\nu^{*(+)}(\boldsymbol{k})] \\ &= \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k'_\nu}{m^2}\right)。\end{aligned}} \qquad (5.8)_4$$

在 Bjorken 度规下，上式为

$$\boxed{\begin{aligned}[\varphi_\mu^{*(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_\nu^{(+)}(\boldsymbol{k}')] &= [\varphi_\mu^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \varphi_\nu^{*(+)}(\boldsymbol{k}')] \\ &= -\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k'_\nu}{m^2}\right)。\end{aligned}} \qquad (5.8')_4$$

值得指出：由于上式中第二项$\sim k_\mu k'_\nu$的存在，导致有质量的矢量介子的传播子中也有$\sim k_\mu k'_\nu$项，当$k^2\to\infty$时，这项具有很坏的发散性质，以致理论不能重整化，这个困难直到近年来发展了对称性破缺的规范场论才算得到解决。这些内容将在规范场论中介绍。

参 考 资 料

1. 关于不定度规

   S. N. Gupta Proc. Phys. Soc. **63**(1950) 681

   S. N. Gupta Proc. Phys. Soc. **64**(1951) 850

   K. Bleuler Helv. Phys. Acta. **23**(1950) 567

2. 关于 Maxwell 场的量子化

   D. 卢里　粒子和场(1981)第四章

   李政道　场论与粒子物理(1981)第四章

第五章　Dirac 场的量子化理论

本章的内容是自由场量子化理论的最后一部分，讨论的顺序和前两章相似，不过，为要得到 Dirac 粒子满足 Fermi 统计的正确结论，对于 Dirac 粒子应采取反对易的方式来进行量子化。

本章除了讨论 Dirac 场的一些特点之外，也包括有若干各种场量子化理论的共同结论，例如正规乘积与真空态的物理量，各种场的 Green 函数，都是带有一般性的，这样安排是为了讨论方便。

§5.1　Dirac 场的动量、能量、电荷与自旋

为了反映 Dirac 粒子的产生和湮灭现象，我们今后把 Dirac 的波函数 $\psi(x)$，作为 Dirac 粒子的场，并对它进行量子化。

对应 Dirac 方程的 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi]-m\bar{\psi}\psi。\qquad(1.1)_5$$

引进$(2.4)_3$，式符号 $\vec{\partial}\equiv\vec{\partial}-\overleftarrow{\partial}\equiv\partial\!\!\!/$，则上式可写成

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+2m)\psi]=\frac{-1}{2}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2m)\psi]。\qquad(1.2)_5$$

代入$(1.5)_2$式即得到 Dirac 方程

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=0。$$

代入$(2.8)_2$式并考虑到 Dirac 场方程得到：

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}[\bar{\psi}\vec{\partial}_\mu\gamma_\nu\psi]=\frac{1}{2}[\bar{\psi}\partial\!\!\!/_\mu\gamma_\nu\psi]\qquad(1.3)_5$$

$$P_\mu=-i\int T_{\mu4}\,d\boldsymbol{x}=\frac{-i}{2}\int\bar{\psi}\gamma_4\partial\!\!\!/_\mu\psi\,d\boldsymbol{x}=-i\int\bar{\psi}\gamma_4\partial_\mu\psi d\boldsymbol{x}。\qquad(1.4)_5$$

以$(1.2)_5$式代入$(4.5)_2$式得到

$$J_\mu = e i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \tag{1.5}_5$$

$$Q = -i \int J_4 d\boldsymbol{x} = e \int \psi^+ \psi d\boldsymbol{x}。 \tag{1.6}_5$$

以$(1.2)_5$式代入$(3.9)_2$式并考虑到$(4.9)_1$和$(5.1)_1$式得到

$$\begin{aligned}\sum_{(\mu\nu)} &= i \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_4 \psi_r)} [S_{\mu\nu}]_{rs} \psi_s + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_4 \bar{\psi}_r)} [S^*_{\mu\nu}]_{rs} \bar{\psi}_s \right\} d\boldsymbol{x} \right. \\ &= -\int \{ \pi_\psi S_{\mu\nu} \psi + \bar{\psi} S^{-1}_{\mu\nu} \pi_{\bar{\psi}} \} d\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{1}{4} \int \bar{\psi} (\gamma_4 \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_4) \psi d\boldsymbol{x}。 \end{aligned} \tag{1.7}_5$$

其中空空部分就是对应 Dirac 场的自旋角动量

$$\boldsymbol{S} = \int \bar{\psi} \gamma_4 \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \psi d\boldsymbol{x} = \int \psi^+ \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \psi d\boldsymbol{x}。 \tag{1.8}_5$$

以上所得到的P_μ、Q和$\boldsymbol{S}$的表达式和第一章里量子力学里所得到的形式是一致的，不过现在在量子场论里，它们都是粒子数空间的算符，而不是普通的函数。由$(1.8)_5$式看来，可知Dirac场粒子的自旋为$\frac{1}{2}$。

以$(6.14)_1$和$(6.15)_1$式代入以$(1.4)_5$、$(1.6)_5$和$(1.8)_5$式，并利用$\psi(x)$的正交归一性$(8.8')_1$式，类似$(1.8)_3$式的推导，同频部分无贡献，我们就得到以上各物理在动量空间的表示。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_\mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{h,h'} \int & [a^+_h(\boldsymbol{k}) a_{h'}(\boldsymbol{k}') \bar{u}^h(k) \gamma_4 u^{h'}(\boldsymbol{k}') e^{-i(k-k')x} (k'_\mu) \\ & + b_h(\boldsymbol{k}) b^+_{h'}(\boldsymbol{k}') \bar{V}^h(\boldsymbol{k}) \gamma_4 V^{h'}(\boldsymbol{k}') e^{i(k-k')x} (-k'_\mu)] \\ & \times \frac{m}{\sqrt{\epsilon\epsilon'}} d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{k}' d\boldsymbol{x}。 \end{aligned}$$

利用$(8.8)_1$式$W^+_{\lambda,h}(\boldsymbol{k}) W_{\lambda,h}(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon}{m}$可得到

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mu &= \int d\boldsymbol{k} \cdot k_\mu \sum_{h=-1}^{1} [a^+_h(\boldsymbol{k}) a_h(\boldsymbol{k}) - b_h(\boldsymbol{k}) b^+_h(\boldsymbol{k})], \\ Q &= e \int d\boldsymbol{k} \sum_{h=-1}^{1} [a^+_h(\boldsymbol{k}) a_h(\boldsymbol{k}) + b_h(\boldsymbol{k}) b^+_h(\boldsymbol{k})]。 \end{aligned}} \tag{1.9}_5$$

应该指出上式 P_μ 的表达式中最后一项前面是负号，而对于玻色场，P_μ 的表达式中出现的却是正号。

§5.2 Dirac 场的量子化

类似以前讨论过的关于对场进行量子化的方法，利用 $(5.2)_2$ 式也可以对 Dirac 场进行量子化。在 $(3.4)_3$ 式中，我们看到有两种不同的量子化方法，对于标量场和电磁场，我们以前都采用了对易的量子化方法，可是对于 Dirac 场，由于在 $(1.9)_5$ 式 P_μ 的最后一项前面是负号，如果我们也取对易的量子化方法，则将导致真空态的能量可能大于有粒子的态的能量。为要保持有粒子的态的能量恒大于真空态的能量，我们对于 Dirac 场，取反对易的量子化方法，即相当在 $(3.4)_3$ 式中取(+)号，过渡到分立 $\boldsymbol{k}$ 值的情况就有：

$$\left.\begin{aligned}\{a_h(\boldsymbol{k}),\ a_{h'}^+(\boldsymbol{k}')\}_+&=\delta_{hh'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'},\\ \{b_h(\boldsymbol{k}),\ b_{h'}^+(\boldsymbol{k}')\}_+&=\delta_{hh'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}。\end{aligned}\right\}\qquad (2.1)_5$$

其中

$$\{a,\ b\}_+=\{a,\ b\}\equiv ab+ba$$

所有其他的反对易子为零，例如

$$\begin{aligned}\{a^+,\ a^+\}_+=0=\{b^+,\ b^+\}_+,\\ \{a,\ a\}_+=0=\{b,\ b\}_+\end{aligned}\qquad (2.2)_5$$

利用上式可把 $(1.9)_5$ 式写成：

$$P_\mu=\sum_{\boldsymbol{k}}k_\mu\sum_{h=-1}^{1}[a_h^+(\boldsymbol{k})a_h(\boldsymbol{k})+b_h^+(\boldsymbol{k})b_h(\boldsymbol{k})-1],$$

$$Q=\sum_{\boldsymbol{k}}e\sum_{h=-1}^{1}[a_h^+(\boldsymbol{k})\cdot a_h(\boldsymbol{k})-b_h^+(\boldsymbol{k})b_h(\boldsymbol{k})+1]。\qquad (2.3)_5$$

同样引进粒子数算符(照例我们忽略了它的 $\boldsymbol{k}$ 指标)：

$$\left.\begin{aligned}N_{h(+)}&\equiv a_h^+(\boldsymbol{k})a_h(\boldsymbol{k}),\\ N_{h(-)}&\equiv b_h^+(\boldsymbol{k})b_h(\boldsymbol{k})。\end{aligned}\right\}\qquad (2.4)_5$$

利用 $(2.1)_5$ 和 $(2.2)_5$ 式，也可以证明：(对于相同的 $\boldsymbol{k}$)

$$[P_\mu,\ N_{h(\pm)}]_-=0=[Q,\ N_{h(\pm)}]_-=0=[P_\mu,\ Q]_-\qquad (2.5)_5$$

$$\left.\begin{aligned}
&[N_{h(+)},\ a_h^+]_- = a_h^+,\\
&[N_{h(+)},\ a_h]_- = -a_h,\\
&[N_{h(-)},\ b_h^+]_- = b_h^+,\\
&[N_{h(-)},\ b_h]_- = -b_h。
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)_5$$

$$\left.\begin{aligned}
&[P_\mu,\ a_h^+]_- = k_\mu a_h^+,\\
&[P_\mu,\ a_h]_- = -k_\mu a_h,\\
&[P_\mu,\ b_h^+]_- = k_\mu b_h^+,\\
&[P_\mu,\ b_h]_- = -k_\mu b_h。
\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)_5$$

$$\left.\begin{aligned}
&[Q,\ a_h^+]_- = e a_h^+,\\
&[Q,\ a_h]_- = -e a_h,\\
&[Q,\ b_h^+]_- = -e b_h^+,\\
&[Q,\ b_h]_- = e b_h。
\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)_5$$

由以上各式，类似§3.4的讨论可知：

$a_h^+(\boldsymbol{k})$为态$(h\cdot\boldsymbol{k})$的荷电(e)的Dirac粒子的产生算符。

$a_h(\boldsymbol{k})$为态$(h,\ \boldsymbol{k})$的荷电(e)的Dirac粒子的湮灭算符。

$b_h^+(\boldsymbol{k})$为态$(h\cdot\boldsymbol{k})$的荷电$(-e)$的反Dirac粒子的产生算符。

$b_h(\boldsymbol{k})$为态$(h,\ \boldsymbol{k})$的荷电$(-e)$的反Dirac粒子的湮灭算符。

下面我们来讨论，现在所采用的反对易量子化方法，和以前的对易量子化方法，其差别何在？由$(2.1)_5$式和$(2.2)_5$式得到：

$$(N_{h(+)})^2 = a_h^+ a_h \cdot a_h^+ a_h = a_h^+(1-a_h^+ a_h)a_h$$
$$= a_h^+ a_h = N_{h(+)},$$

也就是

$$N_{h(+)}(N_{h(+)}-1)=0。$$

因而$N_{h(+)}$的本征值只能取零或1。同样可知$N_{h(-)}$也有同样的结论，这说明Dirac粒子，在某一态$(h,\ \boldsymbol{k})$的粒子数目最多只能有一个，也就是说它满足费米统计。这类粒子统称为费米子，这和以前两章所讨论的玻色粒子，是完全不同的，$N_{h(+)}$就是Dirac粒子的粒子数算符，而$N_{h(-)}$就是反Dirac粒子数算符。

把$(2.4)_5$式代入$(2.3)_5$式得到：

$$\left.\begin{aligned} P_\mu &= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{h=-1}^{1} k_\mu (N_{h(+)} + N_{h(-)} - 1), \\ Q &= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{h=-1}^{1} e(N_{h(+)} - N_{h(-)} + 1)。 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}_5$$

上式 P_μ 及 Q 的最后常数，对应真空的零点能量和电荷，这个结论和 Dirac 的空穴理论是一致的。

§5.3 ψ 与 $\bar{\psi}$ 的反对易关系及其协变性质

利用$(2.1)_5$式(为计算方便考虑连续 k 值情况)以及$(6.14)_1$、$(6.15)_1$和$(8.13)_1$式，可得到：

$$\begin{aligned} \{\psi^{(-)}(x),\ \bar{\psi}^{(+)}(x')\}_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}' \\ &\cdot e^{i(kx-k'x')}\{\psi^{(-)}(\boldsymbol{k}),\ \bar{\psi}^{(+)}(\boldsymbol{k}')\}_+ \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}' e^{i(kx-k'x')}\sum_{h,h'} u^h(\boldsymbol{k})\bar{u}^{h'}(\boldsymbol{k}') \\ &\cdot \frac{m}{\sqrt{\epsilon\epsilon'}}\{a_h(\boldsymbol{k}),\ a^*_{h'}(\boldsymbol{k}')\}_+ \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k} e^{ik(x-x')}\sum_h U^h(\boldsymbol{k})\bar{u}^h(\boldsymbol{k})\cdot\frac{m}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\, e^{ik(x-x')}\cdot\frac{(-i\gamma k+m)}{2\epsilon}。 \end{aligned} \tag{3.1}_5$$

上式可写成明显的协变形式(考虑到$(5.6)_3$式的定义)：

$$\begin{aligned} \{\psi^{(-)}_\alpha(x),\ \bar{\psi}^{(+)}_\beta(x')\}_+ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}(-i\gamma k+m)_{\alpha\beta} \\ &\cdot\delta(k^2+m^2)\theta(k_0)e^{ik(x-x')} \\ &= -(\gamma_\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta} i\Delta^{(+)}(x-x') \\ &= \frac{1}{i}S^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x')。 \end{aligned} \tag{3.2}_3$$

同样可证

$$\{\psi^{(+)}_\alpha(x),\ \bar{\psi}^{(-)}_\beta(x')\}_+ = \frac{1}{i}S^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x'), \tag{3.3}_3$$

其中

$$S^{(\pm)}(x-x')=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(\pm)}(x-x')。\qquad (3.4)_5$$

考虑到同频部分的反对易子为零，参看$(5.5)_2$式，由上式可得：

$$\boxed{\begin{aligned}\{\psi(x),\ \bar{\psi}(x')\}_+&=\frac{1}{i}[S^{(+)}(x-x')+S^{(-)}(x-x')]\\&=\frac{1}{i}S(x-x')。\end{aligned}}\qquad (3.5)_5$$

所有其他的对易子为零，例如

$$\{\psi(x),\ \psi(x')\}_+=0=\{\bar{\psi}(x),\ \bar{\psi}(x')\}_+。\qquad (3.6)_5$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{以上}\quad S(x-x')=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta(x-x'),\\&\text{由于}\quad (\Box-m^2)\Delta(x)=0,\\&\text{所以}\quad (\gamma_\mu\partial_\mu+m)S(x)=0。\end{aligned}\right\}\qquad (3.7)_5$$

由于$\Delta(x)$是一个标量函数，因而由上式知道，$S(x)$的变换关系应是二级双旋量的变换关系，由此看出$\psi(x)$和$\bar{\psi}(x')$的反对易关系具有明显的协变性质。

利用以上式$(3.5)_5$和$(5.8)_3$，可知当$t=t'$时

$$\{\psi_\alpha(x),\ \psi^+_\beta(x')\}_+=\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x')。\qquad (3.8)_5$$

这就是由正则量子化方式所直接得到的量子化条件(取

$$\mathscr{L}=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi)。$$

§5.4 核子的同位旋

大量事实表明，质子和中子在没有电磁相互作用的情况下，它们的性质几乎是完全相同的(忽略它们的质量差)，在原子核物理里就有所谓核力的电荷无关性的事实(参看§7.5)，因而我们也可以把质子和中子看成为同一粒子(统称为核子)的两个不同的电荷态，也就是说核子除了有自旋这个内部自由度之外，还有另一个内部自由度来反映它的电荷情况，这种观点，不仅是为了数学形式上的简明，而且更重要的是它反映了客观事实的内在联系，这是需要经得起实验的考验的，到目前为止，事实都是支持这种观点的。

由于核子的独立电荷态只有两个，和核子的自旋状态相似，因

此我们模仿对自旋的描述，而把核子看成为同位旋空间里的一个旋量，简称同位旋量，也就同位旋 $SU(2)$群的二维旋量表示，即把核子场统一写成

$$\psi_N=\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}。\qquad (4.1)_5$$

其中 ψ_p 和 ψ_n 分别为质子和中子的 Dirac 场函数，它们都是普通时空空间里的双旋量。在这一节里，我们将集中力量讨论核子同位旋性质，而暂时忽视它的时空性质，

当同位旋空间坐标有一旋转 $\delta\theta$ 时，$\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}$ 有一相应的变换

$$\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}\psi'_p\\ \psi'_n\end{vmatrix}=U\cdot\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}。\qquad (4.2)_5$$

其中 U 为 -2×2 的么正矩阵，且可忽略不必要的相角取 $\det U=1$，也就是 U 矩阵是 $SU(2)$群的表示，而

$$\psi_N=\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}$$

是该同位 $SU(2)$群的二维基矢。

以上$(4.2)_5$式用矩阵形式写出就成为

$$\psi_N\to\psi'_N=U\psi_N。\qquad (4.2')_5$$

其中

$$U=e^{i\theta\cdot\tau/2},\qquad (4.3)_5$$

式中 τ 为 Panli 矩阵，$\tau/2$即为 $SU(2)$群的产生算符的二维表示。此外还有共轭表示：

$$\psi_N^+\to\psi_N^{+\prime}=(U^*\psi_N^*)_T。\qquad (4.4)_5$$

在一般 $SU(N)$群情况下，ψ_N 和它的共轭表示 ψ_N^*，一般是不同的表示，可是对 $SU(2)$群可以证明，ψ_N 和它的共轭表示 ψ_N^* 是等价的。也就是存在么正算符 S 使得 $S\psi_N^*$ 的变换完全和 ψ_N 的变换一样，即

$$S\psi_N^*\to(S\psi_N^*)'=USS\psi_N^*。\qquad (4.5)_5$$

$$\therefore\quad \psi_N^*\to S^{-1}USS\psi_N^*=U^*\psi_N^*,\qquad (4.6)_5$$

$$\therefore\quad S^{-1}US=U^*。\qquad (4.7)_5$$

由$(4.3)_5$式可得:

$$S^{-1}\underset{\rightarrow}{\tau}S=-\underset{\rightarrow}{\tau}^*。 \tag{4.7'}_5$$

我们可取

$$S=i\tau_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}, \tag{4.8}_5$$

也就是

$$S\psi_N^*=\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix} \tag{4.9}_5$$

和

$$\psi_N=\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_N\end{vmatrix}$$

的变换(同位旋$SU(2)$群)性质相同。其中$\psi_{\bar{N}}=C\bar{\psi}_N^T$,由此看出反核子和核子的同位旋投影异号。还应注意到$\psi_{\bar{p}}$前面的负号。

以上讨论的是单粒子量子力学中的变换关系,与以上$(4.2)_5$和$(4.4)_5$式变换关系相应,在量子场论里在粒子数Hilbert空间应存在相应的幺正算符U_I使得:

$$\begin{aligned}U_I\psi_N U_I^+&=u\cdot\psi_N\\ U_I\psi_N^+U_I^+&=(u^*\psi_N^*)_T\end{aligned} \tag{4.10}_5$$

把ψ_N的平面波展式$(6.14)_1$和$(6.15)_1$式代入上式,由此可得出粒子产生和湮灭算符有相应的关系:

$$\begin{aligned}&U_I\cdot\begin{vmatrix}a_p\\ a_n\end{vmatrix}U_I^+=u\cdot\begin{vmatrix}a_p\\ a_n\end{vmatrix},\\ &U_I\cdot\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}^+\\ b_{\bar{n}}^+\end{vmatrix}U_I^+=u\cdot\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}^+\\ b_{\bar{n}}^+\end{vmatrix},\\ &U_I\cdot\begin{vmatrix}a_p^+\\ a_n^+\end{vmatrix}U_I^+=u^*\cdot\begin{vmatrix}a_p^+\\ a_n^+\end{vmatrix},\\ &U_I\cdot\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}\\ b_{\bar{n}}\end{vmatrix}U_I^+=u^*\cdot\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}\\ b_{\bar{n}}\end{vmatrix}。\end{aligned} \tag{4.11}_5$$

N或$\bar{N}$的态在U_I算符作用下有相应的变换如下:

$$\begin{aligned}&U_I\begin{vmatrix}a_p^+\\ a_n^+\end{vmatrix}|0\rangle=U_I\begin{vmatrix}a_p^+\\ a_n^+\end{vmatrix}U_I^+U_I|0\rangle=u^*\begin{vmatrix}a_p^+\\ a_n^+\end{vmatrix}|0\rangle,\\ &U_I\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}^+\\ b_{\bar{n}}^+\end{vmatrix}|0\rangle=u\begin{vmatrix}b_{\bar{p}}^+\\ b_{\bar{n}}^+\end{vmatrix}|0\rangle。\end{aligned} \tag{4.12}_5$$

以上考虑到真空态 $|0\rangle$ 是同位标量，在同位空间旋转下保持不变。

由以上$(4.11)_5$和$(4.12)_5$式看起来。核子 a_N^+ 和反核子 $b_{\bar{N}}^+$ 的变换关系不同。不过把$(4.9)_5$式代入$(4.5)_5$式，利用类似以上的证明，可得：

$$U_I\begin{vmatrix} b_{\bar{n}}^+ \\ -b_{\bar{p}}^+ \end{vmatrix}|0\rangle = u^*\begin{vmatrix} b_{\bar{n}}^+ \\ -b_{\bar{p}}^+ \end{vmatrix}|0\rangle。 \qquad (4.13)_5$$

也就是如果我们引进 $\tilde{b}_{\bar{N}}^+ = \begin{vmatrix} b_{\bar{n}}^+ \\ -b_{\bar{p}}^+ \end{vmatrix}$，那末 $\tilde{b}_{\bar{N}}^+$ 的变换关系就和$a_N^+ = \begin{vmatrix} a_p^+ \\ a_n^+ \end{vmatrix}$的变换关系相同了。当然这些和我们在$(4.2)_5$式到$(4.9)_5$式所讨论的是一致的。

当同位旋空间旋转是微量 $\delta\underset{\rightarrow}{\theta}$ 时，由$(4.3)_5$式 u 可写成

$$u = 1 + \frac{i}{2}\underset{\rightarrow}{\tau}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}。$$

与此相应 $$U_I = 1 - i\underset{\rightarrow}{\mathcal{T}}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta},$$

其中 $\underset{\rightarrow}{\mathcal{T}}$ 是粒子数空间的算符，以后我们将导出它的表达式。也就是此时

$$\begin{aligned} \psi \to \psi' &= \left(I + \frac{i}{2}\underset{\rightarrow}{\tau}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}\right)\psi = U_I\psi U_I^+, \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\left(I - \frac{i}{2}\underset{\rightarrow}{\tau}\cdot\delta\underset{\rightarrow}{\theta}\right) = U_I\bar{\psi}U_I^+。 \end{aligned} \qquad (4.14)_5$$

根据量子力学的一般原理，由上式可见 $\frac{1}{2}\underset{\rightarrow}{\tau}$ 就是单粒子量子力学里的核子同位旋矩阵，而 $\underset{\rightarrow}{\mathcal{T}}$ 则是 Hilbert 空间的核子同位旋算符。$\underset{\rightarrow}{\tau}$ 的具体表示和 Pauli 矩阵 $\vec{\sigma}$ 相同。在这样表示下，质子态 $\psi_p = \begin{vmatrix} \psi_p \\ 0 \end{vmatrix}$ 和中子态 $\psi_n = \begin{vmatrix} 0 \\ \psi_n \end{vmatrix}$ 都是 τ_3 的本征态，它们的本征值分别为 $+1$ 和 -1。

可以引进投影算符 $\frac{1}{2}(1 \pm \tau_3)$分别为质子或中子的投影算符，即

$$\frac{1}{2}(1+\tau_3)\psi=\psi_p,\qquad \bar{\psi}\frac{1}{2}(1+\tau_3)=\bar{\psi}_p,$$
$$\frac{1}{2}(1-\tau_3)\psi=\psi_n,\qquad \bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\tau_3)=\bar{\psi}_n。 \tag{4.15}_5$$

由于核子只有当它处在质子态时才有电荷，因而核子的电荷算应该比例于质子的投影算符。

$$q=\frac{e}{2}(1+\tau_3)。 \tag{4.16}_5$$

既然我们把质子和中子看成同一核子的不同电荷态，我们就可以把核子(包括质子和中子)的运动，用统一的 $\mathscr{L}$ 来描写，即把(1.2)式推广为(忽略质子和中子的质量差)

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_p+\mathscr{L}_n=-\frac{1}{2}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\vec{\partial}_\mu+2M)\psi]$$
$$=-\frac{1}{2}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2M)\psi]。 \tag{4.17}_5$$

以上 ψ 即为$(4.1)_5$式所表示的核子同位旋量，而 γ_μ 则应理解为 γ_μ 矩阵的对角扩张，即

$$\gamma_\mu\times I=\begin{vmatrix}\gamma_\mu & 0\\ 0 & \gamma_\mu\end{vmatrix}。$$

容易看出$(4.17)_5$式的 $\mathscr{L}$ 是个同位标量，在同位旋空间旋转下保持不变，这个对称性质就导致了核子同位旋守恒定律。当同位旋空间旋转 $\delta\underset{\sim}{\theta}$ 时，所引起的作用量的变更表示如下(考虑到 $(1.3)_2$式，$\delta x_\mu=0$ 和 $(4.14)_5$式)

$$\delta I=\oint_\Sigma -i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi+\delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right)d\sigma_\mu$$
$$=\oint_\Sigma\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1}{4}\underset{\sim}{\tau}\psi+\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{1}{4}\underset{\sim}{\tau}\psi\right)\delta\underset{\sim}{\theta}d\sigma_\mu=0。$$

由于 $\delta\underset{\sim}{\theta}$ 是任意的，这就相当于存在守恒的同位旋流

$$\underset{\rightarrow}{\mathscr{T}}_\mu=\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\underset{\sim}{\tau}\psi,$$
$$\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\mathscr{T}}_\mu=0。 \tag{4.18}_5$$

或
$$\underrightarrow{\mathscr{T}}=\int_{\sigma}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\frac{1}{2}\underline{\tau}\psi d\sigma_{\mu}=\text{常数}。$$

如取 σ 为时间等于常数的类空平面，则上式成为：

$$\underrightarrow{\mathscr{T}}=\int\bar{\psi}\gamma_{4}\frac{1}{2}\underline{\tau}\psi d\boldsymbol{x}=\int\psi^{+}\frac{1}{2}\underline{\tau}\psi d\boldsymbol{x}=\text{常数},\qquad (4.18')_{5}$$

$\underrightarrow{\mathscr{T}}$ 称为核子同位旋算符，为一守恒量。

考虑 $\underrightarrow{\mathscr{T}}_{3}$，利用 $\bar{u}(\boldsymbol{k})\gamma_{4}V(-\boldsymbol{k})=0$ 可知用频部分贡献为零。

$$\underrightarrow{\mathscr{T}}_{3}=\frac{1}{2}\int\bar{\psi}\gamma_{4}\tau_{3}\psi d\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int(\psi_{p}^{+}\psi_{p}-\psi_{n}^{+}\psi_{n})d\boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{h=-1}^{+1}[N_{ph(+)}-N_{ph(-)}-N_{nh(+)}+N_{nh(-)}]。$$

$$(4.19)_{5}$$

以上推导中利用了类似于由 $(1.6)_5$ 到 $(2.9)_5$ 式的推导方法。由上式可见，单核子的同位旋为 1/2，质子的 $\underrightarrow{\mathscr{T}}_{3}=\frac{1}{2}$，中子的 $\underrightarrow{\mathscr{T}}_{3}=-1/2$，反粒子则异号。核子的电荷算符，由 $(4.16)_5$ 式可得：

$$Q=\int\psi^{+}q\psi d\boldsymbol{x}=e\int\psi^{+}\frac{1}{2}(1+\tau_{3})\psi d\boldsymbol{x}\Rightarrow e\left[\frac{1}{2}N+\underrightarrow{\mathscr{T}}_{3}\right]。$$

$$(4.20)_{5}$$

其中 N 为总核子数，即

$$N=(N_{p(+)}-N_{p(-)}+N_{n(+)}-N_{n(-)})。\qquad (4.21)_{5}$$

以上 $N_{p(+)}$ 等已包含了对涡度 h 的求和，不过没有明显写出。

利用 $\underline{\tau}$ 的对易关系 $[\underline{\tau}/2\times\underline{\tau}/2]=i\underline{\tau}/2$，以及 Dirac 场的 $[\bar{a}b,\ \bar{c}d]_{-}=\bar{a}\{b,\ \bar{c}\}_{+}d-\bar{c}\{d,\ \bar{a}\}_{+}b$，以及 $(3.8)_5$ 式反对易关系，由 $(4.18)_5$ 式可证明：

$$[\underrightarrow{\mathscr{T}}\times\underrightarrow{\mathscr{T}}]=i\underrightarrow{\mathscr{T}}。\qquad (4.22)_{5}$$

此外还可以证明

$$[\underrightarrow{\mathscr{T}},\ N]=0,\quad [\underrightarrow{\mathscr{T}},\ P_{\mu}]=0。\qquad (4.23)_{5}$$

这是 $\underrightarrow{\mathscr{T}}$ 为守恒量的又一表示形式，由 $(4.22)_5$ 式看出 $\underrightarrow{\mathscr{T}}$ 满足角动量的对易关系，关于多个粒子的同位旋合成，和角动量的合成相似，在此不再赘述。

对应 $(4.14)_5$ 式的变更。在 $(4.10)_5$ 式中的，相应的，在粒子数

空间的 U_I 算符，可以证明就是

$$U_I = I + i\underset{\rightarrow}{\mathscr{T}} \cdot \delta\theta_{\xi}。 \qquad (4.24)_5$$

§5.5 正规乘积与真空态的平均值

在§2.5里，我们曾讨论了关于算符排列顺序的问题，为了保持粒子和反粒子处在完全等价地位，我们还曾建议对于玻色子和费米子分别采用对称化和反对称化的排列，这种对称化或反对称化的顺序排列和我们下面将要讨论的正规乘积有密切的联系，而且所有物理量的正规乘积的真空态平均值都为零，即把真空态作为所有物理量的零点。这也是我们经常希望的，同时对正规乘积的讨论也是为以后介绍 Wick 定理作好准备。

正规乘积就是把算符按产生、湮灭的顺序排列的乘积，也就是把湮灭算符排在右边，而产生算符排在左边，并同时考虑到费米场的反对易性的乘积。正规乘积通常冠以 N 字样，以表明它为正规乘积，因此正规乘积也常简称为 N 乘积，其数学形式可表示为

$$N(UV\cdots Z) = \delta_p w\cdots y\cdots。 \qquad (5.1)_5$$

式中 $w\cdots y\cdots$ 是按粒子的产生、湮灭的顺序排列的。

$\delta_p = +1$ 或 -1，由自 $UV\cdots Z$ 的排列变为 $w\cdots y\cdots$ 的排列时，其中费米场所须对易的次数为偶或为奇来决定。

下面我们举例来说明正规乘积的意义，对于玻色场 N 乘积内的场算符对调不影响其数值(参看$(5.11)_3$)。

$$\left.\begin{aligned} &N(\varphi^{*(-)}(x)\cdot\varphi^{(+)}(x')) = N(\varphi^{(+)}(x')\cdot\varphi^{*(-)}(x)) \\ &\quad = \varphi^{(+)}(x')\varphi^{*(-)}(x) = \varphi^{*(-)}(x)\varphi^{(+)}(x') - i\Delta^{(+)}(x-x') \\ &N(\varphi^{*(\pm)}(x)\cdot\varphi^{(\pm)}(x')) = \varphi^{*(\pm)}(x)\cdot\varphi^{(\pm)}(x') \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)_5$$

对于费米场，N 乘积内场算符对调要改变符号。

$$\left.\begin{aligned} &N(\psi_\alpha^{(-)}(x)\cdot\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')) = -N(\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\psi_\alpha^{(-)}(x)) \\ &\quad = -\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\cdot\psi_\alpha^{(-)}(x) \\ &\quad = \psi_\alpha^{(-)}(x)\cdot\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x') + iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
&N(\psi_\alpha^{(\pm)}(x)\cdot\bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x'))=-N(\bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')\psi_\alpha^{(\pm)}(x))\\
&\quad=\psi_\alpha^{(\pm)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')=-\bar{\psi}_\beta^{(\pm)}(x')\psi_\alpha^{(\pm)}(x),\\
&N(\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\cdot\psi_\beta^{(+)}(x'))=-N(\psi_\beta^{(+)}(x')\cdot\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x))\\
&\quad=-\psi_\beta^{(+)}(x')\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\\
&\quad=\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\cdot\psi_\beta^{(+)}(x')+iS_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x)。
\end{aligned}\right\}
\tag{5.3}_5
$$

显然 N 乘积对其场算符满足分配律，例

$$
\left.\begin{aligned}
&N(\overset{*}{\varphi}(x),\ \varphi(x'))=N(\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x),\ \varphi^{(+)}(x'))\\
&\quad+N(\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x)\varphi^{(-)}(x'))+N(\overset{*}{\varphi}{}^{(+)}(x),\ \varphi^{(-)}(x'))\\
&\quad+N(\overset{*}{\varphi}{}^{(-)}(x)\varphi^{(+)}(x'))=\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x')-i\Delta^{(+)}(x-x')。
\end{aligned}\right\}
$$

同样
$$
\left.\begin{aligned}
&N(\psi_\alpha(x)\cdot\bar{\psi}_\beta(x'))=\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')+iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'),\\
&N(\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot\psi_\beta(x'))=\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')+iS_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x),\\
&N(\bar{\psi}_\alpha(x)\cdot\bar{\psi}_\beta(x'))=\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'),\\
&N(\psi_\alpha(x)\cdot\psi_\beta(x'))=\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')。
\end{aligned}\right\}
\tag{5.4}_5
$$

两个算符的正规乘积和普通乘积只相差一个普通函数，因而这个差异对于以前推导对易关系并无影响。

在很多情况下，两个场算符的对称化或反对称化是和它的正规乘积相一致的，例如由$(5.4)_5$式有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{\varphi^*(x),\ O'\varphi(x')\}_+=\frac{1}{2}[\varphi^*(x)O'\varphi(x')+O'\varphi(x')\cdot\varphi^*(x)]\\
&=\frac{1}{2}\{N[\varphi^*(x)O'\varphi(x')]+iO'\Delta^{(+)}(x-x')\\
&\quad+N[O'\varphi(x')\cdot\varphi^*(x)]+iO'\Delta^{(+)}(x'-x)\}\\
&=N[\varphi^*(x)O'\varphi(x')]+\frac{1}{2}iO'(\Delta^{(+)}(x-x')-\Delta^{(-)}(x-x'))\\
&=N[\varphi^*(x)O'\varphi(x')]+\frac{1}{2}O'\Delta^{(1)}(x-x')。
\end{aligned}
\tag{5.5}_5
$$

其中 O' 为作用到 x' 上的微分之类的算符。推导中利用到：

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta^{(+)}(-x)=-\Delta^{(-)}(x),\\
&\Delta^{(1)}(x-x')=i(\Delta^{(+)}(x-x')-\Delta^{(-)}(x-x'))。
\end{aligned}\right\}
\tag{5.6}_5
$$

由$(5.6)_5$式知道$\Delta^{(1)}(x)$是x的偶函数，而它对x的微分则是x的奇函数，因此当O'为对x'的奇次微分算符且$x'=x$时，$(5.5)_5$式右边第二项为零。

又如由$(5.4)_5$式有：

$$\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_A\psi(x')]_-=\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x)\gamma_A\psi(x')-\psi_T(x')\gamma_{AT}\bar{\psi}_T(x)]$$

$$=N(\bar{\psi}(x)\gamma_A\psi(x'))+\frac{1}{2}[-i\,\mathrm{Tr}(\gamma_A S^{(-)}(x'-x))$$

$$+i\,\mathrm{Tr}(\gamma_A S^{(+)}(x'-x))]$$

$$=N(\bar{\psi}(x)\gamma_A\psi(x'))+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}[\gamma_A S^{(1)}(x'-x)]。\qquad (5.7)_5$$

其中

$$S^{(1)}(x)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(1)}(x)。\qquad (5.8)_5$$

当$x'=x$时，除$\gamma_A=I$单位矩阵外$(5.7)_5$右边第二项为零。

正规乘积，由于它规定算符按产生湮灭顺序排列，它在真空态的平均值为零，由此利用$(5.3)_5$，$(5.4)_5$，$(5.5)_5$和$(5.7)_5$式可得到

$$\left.\begin{aligned}&\langle 0|\varphi^*(x)\cdot\varphi(x')|0\rangle=\langle 0|\varphi^{*(-)}(x)\cdot\varphi^{(+)}(x')|0\rangle\\&\qquad=i\Delta^{(+)}(x-x'),\\&\langle 0|\{\varphi^*(x),\ \varphi(x')\}_+|0\rangle=\Delta^{(1)}(x-x')。\end{aligned}\right\}\qquad (5.9)_5$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle=\langle 0|\psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(x')|0\rangle\\&\qquad=-iS^{(+)}(x-x'),\\&\langle 0|[\psi(x),\ \bar{\psi}(x')]_-|0\rangle=S^{(1)}(x-x')。\end{aligned}\right\}\qquad (5.10)_5$$

§5.6 各种场方程的 Green 函数

在§3.5里我们介绍了K-G方程的特解$\Delta^{(\pm)}$、Δ，上一节里又介绍另一特解$\Delta^{(1)}$，由其$(5.6)_5$式的定义来看：

$$\Delta^{(1)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\,\delta(k^2+m^2)dk$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\frac{\cos k_0 t}{k_0}\,dk\qquad (6.1)_5$$

我们可以把 $\Delta^{(+)}$ 和 $\Delta^{(-)}$ 或者 Δ 和 $\Delta^{(1)}$ 看成为 K-G 方程两个相互独立的解，由于 K-G 方程是线型的，它们的任意线型组合也还是 K-G 方程的解。

下面我们来讨论 K-G 方程的 Green 函数，也就是讨论满足下列方程的解，即

$$(\Box_x - m^2)G(x-y) = -\delta(x-y)。 \qquad (6.2)_5$$

可以把 $G(x-y)$ 写成：

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)} \cdot G(k)dk \qquad (6.3)_5$$

代入 $(6.2)_5$ 式得到 $G(k)$ 的形式解

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{1}{k^2+m^2}, \\ G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}\, dk。 \end{aligned} \qquad (6.4)_5$$

上式并没有把 $G(x)$ 完全确定下来，因为上式积分的数值，是与对 k_0 的积分路线怎样绕过它的级点 $k_0 = \pm\epsilon$ 有关。不同的积分路线将得到不同的 $G(x)$ 表达式。真实 $(6.2)_5$ 式的解本来就不是唯一的。因为任一 $(6.2)_5$ 式的特解加上任一齐次 K-G 方程的解。依然还是 $(6.2)_5$ 式的解，只有当我们对 $G(x)$ 加上了一定的边界条件，它的解才能被确定下来。不同的积分路线就对应 $G(x)$ 的不同边界条件，通常用到的 $G(x)$ 有以下几种，它对 k_0 的积分路线分别由下图表明：

以上 $\epsilon = \sqrt{|k|^2+m^2}$

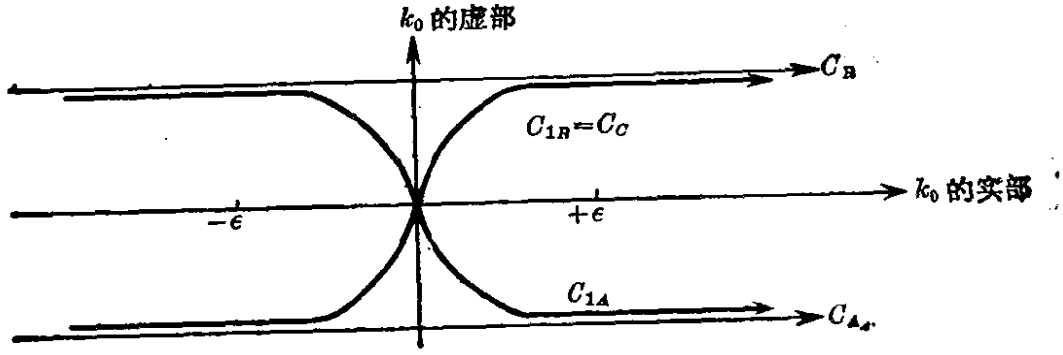


图 5-1

并记以

$$\Delta_i(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_i}\frac{e^{ikx}}{(k^2+m^2)}dk, \qquad (6.5)_5$$

其中

$$\Delta_R(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_R}\frac{e^{ikx}}{(k^2+m^2)}dk。 \qquad (6.6)_5$$

称为 K–G 方程的推迟 Green 函数，它对 k_0 的积分路线在两个极点的上部绕过，如图 5–1。容易证明当 $x_0<0$ 时，积分路线在 k_0 的上半平面形成回路，此时 $\Delta_R(x)=0$，这也是它被称为推迟 Green 函数的原因。当 $x_0>0$ 时，积分回路由 k_0 下半平面形成回路，此时 $\Delta_R(x)=-\Delta(x)$，总结可写成：

$$\Delta_R(x)=-\theta(x_0)\Delta(x)。 \qquad (6.7)_5$$

同样

$$\Delta_A(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_A}\frac{e^{ikx}}{(k^2+m^2)}dk$$

称为 K–G 方程的超前 Green 函数，它对 k_0 的积分路线，在两极点下部绕过，如图。容易证明当 $x_0>0$，$\Delta_A(x)=0$ 这也是它被称为超前 Green 函数的原因，当 $x_0<0$，$\Delta_A(x)=\Delta(x)$（参看图(5–2)总结可写成：

$$\Delta_A(x)=\theta(-x_0)\Delta(x)。 \qquad (6.8)_5$$

此外在场论里常用的还有

$$\Delta_C(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{1R}}\frac{e^{ikx}}{(k^2+m^2)}dk$$

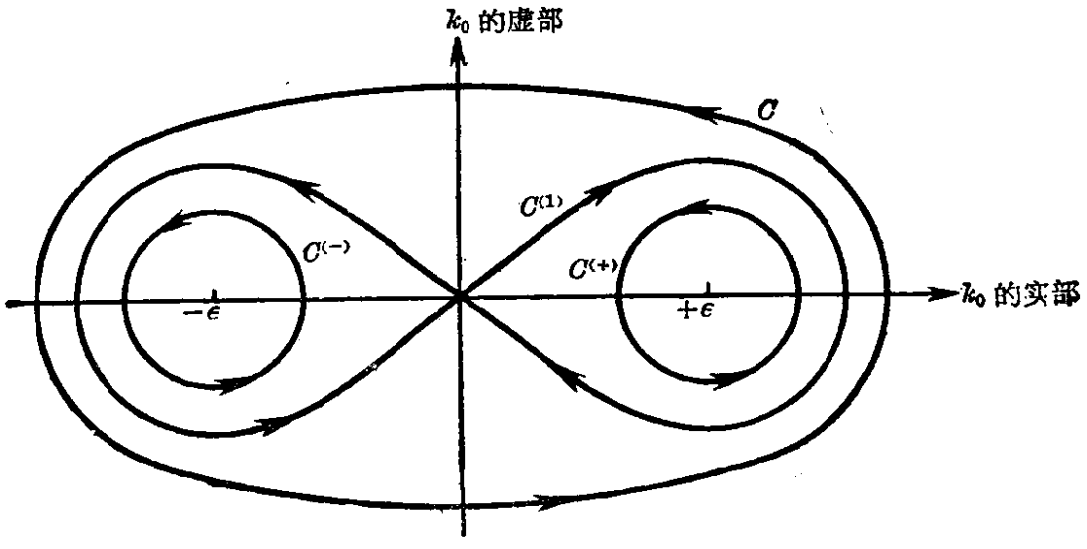


图 5–2

称为 K-G 方程的因果 Green 函数，它对 k_0 的积分路线采取由下部(对于 $-\epsilon$)，或由上部(对于 $+\epsilon$)绕过极点的路线，如图。

取 C_{1R} 积分路线，应该和以下的处理等效，即积分沿 k_0 实轴进行，同时把极点($-\epsilon$)向上移动一个微量，而把极点($+\epsilon$)向下移动一个微量，也就是可以把 $\Delta_c(x)$ 写成

$$\boxed{\Delta_C(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{(k^2+m^2-i0)}dk_0} \qquad (6.9)_5$$

在 Bjorken 度规下，上式为：

$$\boxed{\Delta_C(x)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{(k^2-m^2+i0)}dk_0} \qquad (6.9')_5$$

这也相当于认为粒子的质量有一个负虚部。

不仅 K-G 方程的 Green 函数可以写成(6.5)式积分形式，就是齐次 K-G 方程的解，例如我们以前介绍的 Δ 函数，也都可以写成(6.5)式积分形式，所不同的就在于对于 Green 函数，对 k_0 积分路线都要伸展到无限远区的非封闭的路线，而对于齐次方程解的各种 Δ 函数，对 k_0 积分路线都可限制在有限区域之内的封闭路线，如上图所示。以上路线 C 上角的标号和 Δ 的标号是一致的，即(参看$(5.6)_3$式)

$$\Delta,\ \Delta^{(\pm)},\ \frac{\Delta^{(1)}(x)}{-i}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{c,c^{(+)},c^{(-)}}\frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}dk_0 \qquad (6.10)_5$$

利用以上所给路线，可以得到各种函数之间的关系，总结如下，不作证明。

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=\Delta^{(+)}+\Delta^{(-)}=\Delta_A-\Delta_R,\\ \Delta_C&=\Delta_R+\Delta^{(-)}=\Delta_A-\Delta^{(+)};\\ \Delta^{(1)}&=i(\Delta^{(+)}-\Delta^{(-)})_0\end{aligned}\right\} \qquad (6.11)_5$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_R&=-\theta(x_0)\Delta(x),\\ \Delta_A&=\theta(-x_0)\Delta(x),\\ \Delta_C&=\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x)-\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x)_0\end{aligned}\right\} \qquad (6.12)_5$$

利用函数的表达式可以直接得出以下关系：

$$\Delta^{(+)*}(x)=\Delta^{(-)}(x),\quad \Delta_R^*=\Delta_R,\quad \Delta_A^*=\Delta_A; \tag{6.13}_5$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta(-x)&=-\Delta(x),\quad \Delta^{(1)}(x)=\Delta^{(1)}(-x),\quad \Delta_R(-x)=\Delta_A(x);\\ \Delta_C(x)&=\Delta_C(-x),\quad \Delta^{(+)}(-x)=-\Delta^{(-)}(x)。\end{aligned}\right\} \tag{6.14}_5$$

电磁场或矢量场的 Green 函数，本质上归结为 $\Delta(x)$ 函数。对于 Dirac 场，以前我们曾介绍了有关的 $S^{(i)}(x)$ 函数：

$$S^{(\pm)}(x)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(\pm)}(x),$$

$$S(x)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta(x),$$

$$S^{(1)}(x)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(1)}(x)。$$

容易证明它们都是 Dirac 方程的解。

下面我们来讨论 Dirac 场方程的 Green 函数，即

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)G^e(x-y)=-\delta(x-y)。 \tag{6.15}_5$$

由于 $(\gamma_\mu\partial_\mu+m)(\gamma_\mu\partial_\mu-m)=(\Box^2-m^2)$ 可知：

$$G^{e(i)}(x-y)=(\gamma_\mu\partial_\mu-m)\Delta^{(i)}(x-y)。 \tag{6.16}_5$$

对应上式的动量表示

$$G^e(k)=\frac{i\gamma k-m}{(k^2+m^2)},$$

$$\boxed{G^{e(i)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{(i)}}\frac{i\gamma k-m}{(k^2+m^2)}e^{ikx}dk_。} \tag{6.17}_5$$

在 Bjorken 度规下，上式为：

$$\boxed{G^{e(i)}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^{(i)}}\frac{\gamma k+m}{(k^2-m^2)}e^{ikx}dk_。} \tag{6.17'}_5$$

积分路线与 $\Delta^{(2)}$ 的相同，S 函数之间的关系及其对称性质也与 $\Delta(x)$ 相似。

参 考 资 料

1. 关于自旋与统计

H. A. Bethe & R.F. Bacher

Rev. Mod. Phys. **8**(1936) 82

A. M. L. Messiah & O. W. Greenberg
Phys. Rev. B**136** (1964) **248**

2. 关于 **Feynman** 传播子

R. P. **Feynman** Phys. Rev. **76**(1949)749, **769**

E. C. G. Stückelberg & D. Rivier
Helv. Phys. Acta. **13**(1949)215

C. Itzykson & J. B. Zuber
Quantum Field Theory (1980)Chapter 1–3, **2–5**

第六章　自由场的变换性质

在以上三章自由场的量子理论里，实际上我们已讨论了各种自由场在 Lorantz 变换，以及在同位旋空间旋转的变换下的变换性质。不过那些变换都是具有无限小变换的连续变换，此外还存在有不具有无限小变换的分立变换，例如空间反演；电荷共轭及时间反演等变换就是属于后者。

每一种基本粒子，在某种变换下，究竟应该怎样变换是需要由实验根据守恒定律来确定的。相反，如果每一种粒子的变换性质已知，则我们就可以讨论在怎样的相互作用形式下，能具有那些守恒定律。因此粒子的变换性质是和守恒定律有密切关系的。变换性质的研究，对于说明或预言各种选择规则。是有头等重要的意义。这一点在以上几章里讨论连续的变换时，情况也是如此。

本章主要就是介绍在常见的几种分立的变换下，各种场的变换性质。

§6.1　空间反演与宇称

空间反演的变换就是

$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad t\to t'=t。\tag{1.1}$$

这也就是把空间三个坐标反向，或者说把右手坐标系变为左手坐标系（或者是相反的变换）。右手坐标系和左手坐标系之间，不能通过普通的空间旋转而相互转换，不过把三个坐标轴反向，和把一个坐标轴反向，这两个结果是可以通过普通的空间旋转而相互转换的，因而空间反演实质上和一个坐标轴反向是相当的，由于一个坐标轴反向，和坐标轴变换为它在某一平面镜中的象是一致的，以致这样的变换有时也称为镜象反演。粒子的运动状态在空间反演下所引起的变换，也正是由实在粒子的运动状态变换到它

在镜中的象的运动状态。下面我们就来讨论场在空间反演下的变换性质。

首先讨论标(或赝标)量场的变换性质，在空间反演下，标(或赝标)量场的变换如下：

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\eta_p\phi(-\boldsymbol{x},\ t)。\qquad (1.2)_6$$

由于连续两次反演和不变一致，因此 $\eta_p^2=1$，对于标量场 $\eta_p=+1$，对于赝标场 $\eta_p=-1$。

容易证明，在上式变换下$(2.1)_8$式的 $\mathscr{L}[\phi(x)]$是保持不变的，因而场方程在该变换下保持不变。这一点也可以把上式直接代入 K-G 方程而证实。此外，由于 $\Delta(x)$函数对于空间坐标是偶函数，也可证明$(1.2)_6$式的变换保持对易关系不变，因此根据§ 2.6 的讨论，存在一个幺正算符使得下式成立，此时该幺正算符记以 P，对应 P 的物理量称为宇称。

$$\phi(x)-\phi'(x)=P\phi(x)P^{-1}=\eta_p\phi(-\boldsymbol{x},\ t)。\qquad (1.3)_6$$

以 $\phi(x)$的展开式代入上式得到：

$$\begin{aligned}P\phi(x)P^{-1}=&\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[Pa^{(-)}(\boldsymbol{k})P^{-1}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\\&+Pa^{(+)}(\boldsymbol{k})P^{-1}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]\\=&\eta_p\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[a^{(-)}(\boldsymbol{k})e^{i(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\\&+a^{(+)}(\boldsymbol{k})e^{-i(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]\\=&\eta_p\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega}}[a^{(-)}(-\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\\&+a^{(+)}(-\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]。\end{aligned}$$

比较两边系数得到：

$$\boxed{Pa^{(\pm)}(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p a^{(\pm)}(-\boldsymbol{k})。}\qquad (1.4)_6$$

由此可见，空间反演不改变粒子产生或湮灭的过程，只改变粒子的动量方向，这个结论也是我们在考虑粒子和它的镜象关系时，所能预期的。

下面我们来研究宇称算符 P 的本征态，可以证明具有一定的

动量的单粒子态一般不是 P 的本征态，因为

$$|\boldsymbol{k}\rangle = a^{(+)}(\boldsymbol{k})|0\rangle$$

$$P|\boldsymbol{k}\rangle = Pa^{(+)}(\boldsymbol{k})P^{-1}P|0\rangle = \eta_p a^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle = \eta_p|-\boldsymbol{k}\rangle。$$

(1.5)$_6$

其中考虑到了真空态的宇称为偶即：$P|0\rangle = |0\rangle$。由上式看来，只有当 $\boldsymbol{k}=0$ 时，单粒子态才是宇称的本征态，同时 η_p 就是它的本征值，也就是 η_p 是当粒子静止时的宇称值，因而我们称 η_p 为粒子的内禀宇称。

虽然具有一定动量的单粒子态不是宇称的本征态，可是具有一定角动量的态却是宇称的本征态。

把 K-G 方程在球极坐标分离变量，可以得到 $\phi(x)$ 用球面波展开如下：

$$\phi(x) = \sum_{k,l,m} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a^{(-)}_{k,l,m} g_l(k\gamma) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} + a^{(+)}_{k,l,m} g_l(k\gamma) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) e^{i\omega t}]。 \quad (1.6)_6$$

类似在第三章里的推导，可以证明 $a^{(\pm)}_{k,l,m}$ 分别为相应的粒子产生和湮灭算符。

在球极坐标下，空间反演的变换就是：

$$\left.\begin{aligned} \gamma &\to \gamma' = \gamma, \\ \theta &\to \theta' = \pi - \theta, \\ \varphi &\to \varphi' = \varphi + \pi。 \end{aligned}\right\} \quad (1.7)_6$$

利用 $(9.9)_1$ 式关系

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \to Y_l^m(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.8)_6$$

类似 $(1.4)_6$ 式的推导，可以得到：

$$Pa^{(\pm)}_{k,l,m}P^{-1} = \eta_p(-1)^l a^{(\pm)}_{k,l,m}。 \quad (1.9)_6$$

而且

$$\boxed{P|k, l, m\rangle = Pa^{(+)}_{k,l,m}P^{-1}P|0\rangle = \eta_p(-1)^l|k, l, m\rangle。}$$

(1.10)$_6$

也就是说一定角动量的态 $|k, l, m\rangle$ 是宇称的本征态，其本征值

为：

$$\xi=\eta_p(-1)^l。 \qquad (1.11)_6$$

对于无自旋的粒分轨道角动量 l 就等于它的总角动量 J。以上 $(-1)^l$ 与粒子的运动状态有关，常称为粒子的运动宇称，粒子的总宇称，就是它的内禀宇称和运动宇称的乘积。

一个粒子，例如 π 介子，它的 η_p 究竟应该是偶还是奇，这是要由实验来测定的。实验发现 π^0 可以衰变为两个光子的(参看双粒子体系一节)。可见 π^0 自旋不会为1，因而可以认为 π^0 和 $\pi^{(\pm)}$的自旋都是为零。考虑 π^0 为静止的观察系，这时衰变的两个光子的动量相等而方向相反，同时由于 π 介子的自旋为零，这两个光子的总角动量应为零。于是，两个光子体系的波函数只由他们的相对动量 $\boldsymbol{k}$ 和它们的极化 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 三个矢量来决定。这三个矢量还要满足 $k^2=0$ 及 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{k}=0=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{k}$ 条件，如果它们的极化是相互垂直的(实际情况就是如此)，则由这三个矢量所能做成的不变量只能是赝标量。$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{k}$，由此看来 π^0 也应该是个赝标量，也就是 π 介子的自禀宇称 $\eta_p=-1$。

其次我们来讨论电磁场在空间反演下的变换性质。一般矢量场在空间反演下的变换如下：

$$A_\mu(x)\to A_\mu'(x)=\eta_p S_{\mu\nu}A_\nu(-\boldsymbol{x},\ t)。 \qquad (1.12)_6$$

式中 $$S_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}(-1)^{\delta_{\mu4}}。$$

同样 $\eta_p^2=1$。对于矢量场 $\eta_p=-1$，对于赝矢量场 $\eta_p=+1$。电磁矢势 A_μ 的变换应该和荷电粒子的电流 $\boldsymbol{j}$ 矢量的变换是一致的，也就是应该和荷电粒子的速度的变换是一致的，在这样的要求下 η_p 应取 -1。

同样可以证明在$(1.12)_6$式的变换下，电磁场的场方程和对易关系都保持不变，因而存在幺正算符 P。对每一个分量重复$(1.4)_6$式的推导可得到：

$$Pa_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p a_\lambda^{(\pm)}(-\boldsymbol{k}),\quad \lambda=1,\ 2。 \qquad (1.13)_6$$

或以$(2.5)_4$式代入

$$Pa_\beta^{(\pm)}(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p a_{-\beta}^{(\pm)}(-\boldsymbol{k}),\quad \beta=+,-。 \qquad (1.14)_6$$

上式左边的β相对于$\boldsymbol{k}$,而右边的$-\beta$是相对于$(-\boldsymbol{k})$的。由此看来,在空间反演下动量方向固然要反向,但极化方向不变。因此原来的左圆极化，变换后就成为右圆极化，或者相反。如果考虑在垂直粒子动量方向有一个平面镜，则粒子的真实运动和镜内象的运动的关系,也正是以上所得到的结论。

此外也同样可以证明$(1.5)_6$,$(1.10)_6$和$(1.11)_6$式等关系,因而单光子的总宇称为:

$$\xi=(-1)^{l+1}。\qquad (1.15)_6$$

对于磁多极矩辐射则$l=J$,对于电多极矩辐射则$l=J\pm1$,其中J为光子的总角动量,l为轨道角动量。

最后讨论 Dirac 场的变换性质,这个问题在$(4.17)_1$式曾提到过,即在空间反演下 Dirac 场应有相应的变换,即

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=\eta_p\quad\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x},\ t),\\ \text{同时}\qquad&\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\eta_p^*\quad\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},\ t)\gamma_4。\end{aligned}\right\}\qquad (1.16)_6$$

由于 Dirac场的双值性$\eta_p^2=\pm1$,因而$\eta_p=\pm1$或$\pm i$。η_p为实数的粒子称为实宇称粒子,η_p为虚数的粒子称为虚宇称粒子。在目前理论中,实宇称粒子只能与实宇称粒子耦合组成各种张量。虚宇称粒子也只能和虚宇称粒子耦合组成各种张量。相对宇称为正，即η_p相同的两个 Dirac 场所形成的张量，其变换关系和第一章里所介绍的相同。相对宇称为负，即η_p异号的两个 Dirac 场所形成的张量,其变换关系在空间反演下和前者异号。

可以直接证明在$(1.16)_6$式变换下,场方程和对易关系都是保持不变的,因而也存在守恒的幺正算符P使得

$$P\psi(x)P^{-1}=\eta_p\gamma_4\psi(-\boldsymbol{x},\ t)。\qquad (1.17)_6$$

利用$(6.9)_1$和$(6.11)_1$式适当选取相因子,可以得到以下关系(作为习题):

$$\gamma_4u^h(\boldsymbol{k})=u^{-h}(-\boldsymbol{k}),$$
$$\gamma_4V^h(\boldsymbol{k})=-V^{-h}(-\boldsymbol{k})。$$

代入$(1.17)_6$式,类似$(1.4)_6$式的推导,可以得到

$$\boxed{\begin{aligned}
&Pa_h(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p a_{-h}(-\boldsymbol{k}),\\
&Pb_h^+(\boldsymbol{k})P^{-1}=-\eta_p b_{-h}^+(-\boldsymbol{k}),\\
&Pa_h^+(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p^* a_{-h}^+(-\boldsymbol{k}),\\
&Pb_h(\boldsymbol{k})P^{-1}=-\eta_p^* b_{-h}(-\boldsymbol{k})。
\end{aligned}} \qquad (1.18)_6$$

以上左边 h 是相对于 $\boldsymbol{k}$ 的，而右边的 $-h$ 是相对于 $(-\boldsymbol{k})$ 的。以上结论也是不难由镜象交换来理解的。

利用 γ 矩阵的对易关系可以证明 Dirac 张量在空间反演下的变换性质如下：

$$P\bar{\psi}_1\Omega_i\psi_2P^{-1}=\eta_{p_1}^*\eta_{p_2}\bar{\psi}_1\gamma_4\Omega_i\gamma_4\psi_2=p_i\eta_{p_1}^*\eta_{p_2}\bar{\psi}_1\Omega_i\psi_2。 \qquad (1.19)_6$$

其中 $i=S, V, A, P, T$。

Ω_i	$\gamma_4\Omega_i\gamma_4=p_i\Omega_i$	p_i
1	1	1
$i\gamma_\mu$	$-i\gamma_i$	$-1(i=1, 2, 3)$
	$i\gamma_4$	$+1(\mu=4)$
$\sigma_{\mu\nu}$	σ_{ij}	$+1(i, j=1, 2, 3$;空空部分)
	$-\sigma_{4i}$	-1(时空部分)
$i\gamma_\mu\gamma_5$	$i\gamma_i\gamma_5$	$+1(i=1, 2, 3)$
	$-i\gamma_4\gamma_5$	$-1(\mu=4)$
$i\gamma_5$	$-i\gamma_5$	-1

以上结论，利用由粒子运动到镜象运动的变换也是不难理解的。

可以证明，两个无自旋粒子的宇称为(参看两粒子体系)

$$\xi=\eta_{p_1}\eta_{p_2}(-1)^l。 \qquad (1.20)_6$$

其中 η_{p_1}, η_{p_2} 为两个粒子的自禀宇称，l 为它们的相对运动的轨道角动量，因而如果宇称是守恒的，则一个粒子(静止时)衰变为两个无自旋的粒子时，则

$$\eta_p=\eta_{p_1}\eta_{p_2}(-1)^l。 \qquad (1.21)_6$$

衰变后的两个粒子都是无自旋的，因而 l 也就是它们的总角动量 J，另外由于角动量是守恒的，所以这个 J 也就是衰变前一个粒子

的自旋。于是就有

$$\eta_p(-1)^s=\eta_{p_1}\eta_{p_2}。\qquad(1.22)_6$$

例如 K 介子自旋为零，且能衰变为两个 π 介子，如果宇称是守恒的，则由上式可知 K 介子的自禀宇称是正的。可是事实上 K 介子还可以衰变为三个 π 介子。这样的 $K\to3\pi$ 的衰变，根据宇称守恒的要求，又说明 K 介子的自禀宇称是负的。这些事实曾经使理论陷入困境，又最后导致了在弱相互作用下宇称并不是守恒的推测，并已为实验所证实。值得再一次提出我们以上所得的$(1.20)_6$～$(1.22)_6$关系都是在假定宇称守恒的条件下成立的。

以上我们介绍了关于宇称算符 P 的一般性质。有了这些性质我们就足以应付实际运算的需要。不过正如其它物理量一样，我们还是可以把宇称算符 P 用粒子数产生和湮灭算符表示出来。引进

$$P=e^{i\lambda p}。\qquad(1.23)_6$$

先考虑(赝)标场，利用$(1.4)_6$式

$$\begin{aligned}Pa(\boldsymbol{k})P^{-1}=e^{i\lambda p}a(\boldsymbol{k})e^{-i\lambda p}&=a(\boldsymbol{k})+i\lambda[p,\ a(\boldsymbol{k})]\\&+\frac{(i\lambda)^2}{2!}[p,[p,\ a(\boldsymbol{k})]]+\cdots\\&\frac{(i\lambda)^n}{n!}[p,[\cdots[p,\ a(\boldsymbol{k})]]+\cdots\\&=\eta_p a(-\boldsymbol{k})。\end{aligned}\qquad(1.24)_6$$

上式第一步等式是一般成立的，第二步是考虑了$(1.4)_6$式后得到的。因为上式右边只有 $a(-\boldsymbol{k})$的一次式，我们可以猜想$[p,\ a(\boldsymbol{k})]$的对易子也只能是 $a(\boldsymbol{k})$和 $a(-\boldsymbol{k})$的线型关系。我们取试解

$$\left.\begin{aligned}[p,\ a(\boldsymbol{k})]&=\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})-\eta_p a(-\boldsymbol{k})],\\[p,[p,\ a(\boldsymbol{k})]]&=\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})-\eta_p a(-\boldsymbol{k})],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(1.25)_6$$

代入$(1.24)_6$式得到：

$$Pa(\boldsymbol{k})P=e^{i\lambda p}a(\boldsymbol{k})e^{-i\lambda p}=a(\boldsymbol{k})+\left[i\lambda+\frac{(i\lambda)^2}{2!}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(i\lambda)^n}{n!}+\cdots\right]\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})-\eta_p a(-\boldsymbol{k})]$$
$$=\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})+\eta_p a(-\boldsymbol{k})]$$
$$+e^{i\lambda}\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k})-\eta_p a(-\boldsymbol{k})]。\qquad (1.26)_6$$

如取 $\lambda=\pi$，上式右边就和$(1.24)_6$式右边相等为 $\eta_p a(-\boldsymbol{k})$，这样就满足了我们的要求。满足$(1.25)_6$式的 p 可取为：

$$p=\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{k}[a^+(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-\eta_p a^+(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})]=p^+。\qquad (1.27)_6$$

代入$(1.23)_6$式得到：

$$P=e^{i\lambda p}=\exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int d\boldsymbol{k}[a^{(+)}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-\eta_p a^{(+)}(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})]\right\}。$$
$$(1.28)_6$$

对于复标场可以同样得到：

$$P=e^{i\lambda p}=\exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int d\boldsymbol{k}[a^{(+)}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-\eta_p a^{(+)}(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})\right.$$
$$\left.+b^{(+)}(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})-\eta_p b^+(\boldsymbol{k})b(-\boldsymbol{k})]\right\}。\qquad (1.29)_6$$

同样的方法可以用来推导 Dirac 场的宇称算符 P_D，其结论如下：

$$P_D=e^{i\lambda p_D}=\exp\left\{\frac{-i\pi}{2}\int d\boldsymbol{p}\sum_h[a_h^{(+)}(\boldsymbol{p})a_h(\boldsymbol{p})-a_h^{(+)}(\boldsymbol{p})a_h(-\boldsymbol{p})\right.$$
$$\left.+b_h^{(+)}(\boldsymbol{p})b_h(\boldsymbol{p})-b_h^{(+)}(\boldsymbol{p})b_h(-\boldsymbol{p})]\right\}。\qquad (1.30)_6$$

由于 p 算符是厄米的所以 P 算符是幺正的。同时 p 算符本身已是排成正规乘积，所以真空态的宇称是正的。

§6.2 电荷共轭（正粒子——反粒子共轭）

电荷共轭或正粒子——反粒子共轭变换，就是正粒子和反粒子互换，而时空坐标不变的变换，在电荷共轭变换下，对于复数场

例如 π 介子场有如下的变换：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)\to\varphi'(x)&=\eta_c\varphi^*(x),\\ \text{同时}\qquad \varphi^*(x)\to\varphi^{*\prime}(x)&=\eta_c^*\varphi(x)。\end{aligned}\right\}\qquad (2.1)_6$$

由于连续两次变换应和不变等价，可知 $|\eta_c|^2=1$。或采用同位旋分量来描写(参看 § 3.2 末)：

$$\varphi_l(x)\to\varphi_l'(x)=\eta_c(-1)^{l-1}\varphi_l(x),\quad (l=1,\ 2,\ 3)。\qquad (2.2)_6$$

可以证明$(2.1)_6$式变换保持场方程和对易关系不变，因此存在守恒的幺正算符，记以 C 使得

$$C\varphi(x)C^{-1}=\eta_c\varphi^*(x)$$

以 $\varphi(x)$的展开式代入，类似$(1.4)_6$式的推导可得

$$\left.\begin{aligned}Ca^{(-)}(\boldsymbol{k})C^{-1}&=\eta_c a^{*(-)}(\boldsymbol{k}),\\ Ca^{(+)}(\boldsymbol{k})C^{-1}&=\eta_c a^{*(+)}(\boldsymbol{k}),\end{aligned}\right\}\qquad (2.3)_6$$

或用通常遇到的符号(参看$(4.9)_3$式前面的符号)

$$Ca(\boldsymbol{k})C^{-1}=\eta_c b(\boldsymbol{k}),$$
$$Cb^+(\boldsymbol{k})C^{-1}=\eta_c a^+(\boldsymbol{k})。$$

同样对于$(2.2)_6$式有：

$$\boxed{Ca_l^{(\pm)}(\boldsymbol{k})C^{-1}=\eta_c(-1)^{l-1}a_l^{(\pm)}(\boldsymbol{k})。}\quad (l=1,\ 2,\ 3)\quad (2.4)_6$$

以上 η_c 的数值也还是要由实验来测定的。例如为了说明π^0 介子可衰变为两个光子。即 $\pi^0\to 2\gamma$的事实，我们取 π 介子的 $\eta_c=+1$。

对应算符 C 的物理量称为荷称。虽然荷称是守恒的，但算符 C 和电荷 Q 是反对易的，这一点可以直接由$(2.3)_6$式和$(4.9)_3$式证明。其实这也是一般的结论，因为正粒子和反粒子互换必然导致电荷异号，因此电荷的本征态一般并不是荷称的本征态。只有中性体系 $Q=0$ 才可能是荷称的本征态，例如 π^0 的荷称就是 $\eta_c=+1$。

电磁场是实数场在电荷共轭下的变换如下：

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=\eta_c A_\mu(x)。$$

类似以前的讨论可得：

$$\boxed{Ca_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})C^{-1}=\eta_c a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})}_{\circ}\quad(\lambda=1,\ 2,\ 3,\ 0)\qquad(2.5)_6$$

为了说明荷电粒子所激发的电磁场，和由其反粒子所激发的电磁场异号。也就是荷电粒子的电流在电荷共轭变换下异号，我们取光子的 $\eta_c=-1$。

光子体系都是中性的，可以证明 n 个光子的体系都是荷称的本征态，其本征值为 $(-1)^n$。因为由 $(2.5)_6$ 式可得：

$$\begin{aligned}&Ca_{\lambda_1}^{(+)}(\boldsymbol{k}_1)a_{\lambda_2}^{(+)}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\lambda_n}^{(+)}(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle\\&=Ca_{\lambda_1}^{(+)}(\boldsymbol{k}_1)a_{\lambda_2}^{(+)}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\lambda_n}^{(+)}(\boldsymbol{k}_n)C^{-1}C|0\rangle\\&=(\eta_c)^n a_{\lambda_1}^{(+)}(\boldsymbol{k}_1)a_{\lambda_2}^{(+)}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\lambda_n}^{(+)}(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle\\&=(-1)^n a_{\lambda_1}^{(+)}(\boldsymbol{k}_1)a_{\lambda_2}^{(+)}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\lambda_n}^{(+)}(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle_{\circ}\qquad(2.6)_6\end{aligned}$$

这就是说偶数光子的荷称是偶的，奇数个光子的荷称是奇的。如果相互作用在电荷共轭变换下也保持不变，则奇数个光子不能转换为偶数个光子，反之亦然，这一点我们以后还可以用具体计算加以证明，这就是所谓 Furry 定理。此外由于 π^0 的荷称是 $+1$，它到奇数个光子的衰变也是禁戒的。

Dirac 场在电荷共轭下的变换已在 $(10.7)_1$ 和 $(10.8)_1$ 式讨论过，即

$$\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=\eta_c C\bar{\psi}_T,\\&\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=-\eta_c^*\psi_T C^{-1},\qquad(2.7)_6\\&|\eta_c|^2=1_{\circ}\end{aligned}$$

其中 C 矩阵用小写字母表示，以便和幺正算符 C(大写字母)区别。

如果我们考虑到把 $(1.2)_5$ 式的 $\mathscr{L}$ 反对称化，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\frac{1}{4}[\bar{\psi},\ (\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2m)\psi]_-\\&=-\frac{1}{4}[\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2m)\psi-\psi_T(\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2m)_T\bar{\psi}_T],\qquad(2.8)_6\end{aligned}$$

其中 T 表明调位运算 $m_T=m$，而 $\partial\!\!\!/_T=-\partial\!\!\!/$。则上式 $\mathscr{L}$ 在(2.7)式变换下保持不变。或者也可以直接证明 Dirac 场方程和对易关系在 $(2.7)_5$ 式变换下也是保持不变的，因而存在幺正算符 C 使得

$$C\psi(x)C^{-1}=\eta_c c\bar{\psi}_T,\quad C\bar{\psi}(x)C^{-1}=-\eta_c^*\psi_T C^{-1}。$$

以 $\psi(x)$ 的展开式和 $(10.6)_1$，关系

$$\left.\begin{aligned}c\bar{V}_T^h(\boldsymbol{k})&=u^h(\boldsymbol{k})\\ c\bar{u}_T^h(\boldsymbol{k})&=V^h(\boldsymbol{k})\end{aligned}\right\}$$

代入可得

$$\boxed{\begin{aligned}Ca_h(\boldsymbol{k})C^{-1}&=\eta_c b_h(\boldsymbol{k}),\\ Cb_h^+(\boldsymbol{k})C^{-1}&=\eta_c a_h^+(\boldsymbol{k})。\end{aligned}}\qquad (2.9)_6$$

利用 γ 矩阵的对易关系，可以求得，反对称化以后的 Dirac 张量在电荷共轭下变换如下：

$$C\frac{1}{2}[\bar{\psi},\ \Omega_i\psi]_-C^{-1}=\frac{1}{2}[\bar{\psi},\ (c^{-1}\Omega_i c)_T\psi]_-=c_i\frac{1}{2}[\bar{\psi},\ \Omega_i\psi]_-,$$

$$C\frac{1}{2}[\bar{\psi}_1,\ \Omega_i\psi_2]C^{-1}=\frac{1}{2}\eta_{c_1}^*\eta_{c_2}[\bar{\psi}_2,\ (c^{-1}\Omega_i c)_T\psi_1]_-$$

$$=\frac{1}{2}\eta_{c_1}^*\eta_{c_2}c_i[\bar{\psi}_2,\ \Omega_i\psi_1]_-。\qquad (2.10)_6$$

利用 c 矩阵的性质可得 c_i 的数值如下：

i	Ω_i	c_i
S	1	1
V	$i\gamma_\mu$	−1
T	$\sigma_{\mu\nu}$	−1
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	+1
P	$i\gamma_5$	+1

值得指出，P 和 C 算符对于玻色场和实宇称的 Dirac 场是对易的，但对虚宇称的 Dirac 场则是不对易的，可是无论如何，对于粒子和反粒子的数目相同的体系，PC 或 CP 作用其上将得到相同的结果。

Dirac 粒子对，象电子和正电子的电子偶体系，是中性体系，这个体系可能是荷称的本征态。电荷共轭就是把正、反粒子互换，如果我们再把粒子对的相对运动，和自旋指标互换，那就完成了两个粒子的全部互换，因而由 Pauli 原理对波函数反对称的要求可得

(考虑到 $|\eta_0|^2=1$)。

$$C(-1)^l(-1)^{S+1}=-1。$$

其中 l 为相对运动的轨道角动量，S 为总的自旋角动量。上式右边(−)号来自波函数是反对称的要求，左边$(-1)^l$和$(-1)^{S+1}$分别来自空间波函数和自旋波函数的对称性质。

因此电子偶体系的荷称应该是

$$\boxed{C=(-1)^{l+S}。} \qquad (2.11)_6$$

因而当$(l+S)$为偶时，例如 ^1s 态 $l=0$, $S=0$ 其荷称为偶，这时它可以衰变为两个光子，但却不能衰变为奇数个光子。当$(l+S)$为奇时，例如，^3s 态 $l=0$, $S=1$ 其荷称为奇，这时它可以衰变为三个光子，但不能衰变成偶数个光子。

§6.3 时 间 反 演

时间反演就是指时，空坐标有以下的变换而言

$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x},\quad t\to t'=-t。 \qquad (3.1)_6$$

为了能形象地理解时间反演变换，设想把粒子的运动拍成影片。如果影片按原来的顺序放映，所得到的粒子的运动，就是时间未反演前的粒子运动的描述，如果影片是按相反的顺序放映，所得到粒子的运动，就应该是时间反演后的粒子运动的描述。由此看来，在时间反演下，不仅粒子的运动状态要改变，例如粒子的动量和自旋方向都要改变(但粒子的涡度和位置不变)，而且过程顺序也要改变方向。这一点是以前介绍过的变换中所没有的。

在时间反演下，标量场有相应的变换：

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\eta_t\varphi(\boldsymbol{x},\ -t)。 \qquad (3.2)_6$$

由于连续两次反演和不变一致，因而 $\eta_t^2=I$。

与上式同时有

$$\varphi^*(x)\to\varphi^{*\prime}(x)=\eta_t^*\varphi^*(\boldsymbol{x},\ -t)。$$

在以上变换下虽然场方程可以保持不变，但由于 $\Delta(x)$函数对

于时间是奇函数，对易关系在以上变换下要改变符号，也就是

$$[\varphi(x),\ \varphi^*(y)]=i\Delta(x-y),$$

但

$$\left.\begin{aligned}[\varphi'(x),\ \varphi^{*\prime}(y)]=[\varphi(\boldsymbol{x},\ -x_0),\\ \varphi^*(\boldsymbol{y},\ -y_0)]=-i\Delta(x-y)。\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)_6$$

因而在时间反演下，$(3.2)_6$式的变换，并不是简单地$\varphi(x)$到它本身的一个映照，以致不能由一个普通的幺正变换来完成。为克服上述困难，通常采用两种不同的方案，其一叙述如下：如果我们考虑到以上所讲到的，在时间反演下，不仅要改变粒子运动态的描述，而且要改变过程顺序的方向。如果在普通幺正变换的同时，并进行能把算符排列顺序颠倒的厄米共轭(在粒子数空间)的运算。我们还是能得到不变的理论形式。即

$$\varphi'(x)=U_t\varphi(x)U_t^{-1}=\eta_t\varphi(\boldsymbol{x},\ -t)。\qquad(3.4)_6$$

以上U_t为相应的幺正算符。当然单纯在U_t变换下，只能保持场方程不变，而不能保持对易关系不变，已如上述。现在再引进厄密共轭的运算(在粒子数空间)即

$$\varphi'(x)=T_w\varphi(x)T_w^{-1}=(U_t\varphi(x)U_t^{-1})^+=\eta_t^*\varphi^+(\boldsymbol{x},\ -t)。\qquad(3.5)_6$$

对于一个算符，不存在排列顺序的问题，这时的厄密共轭运算，只是相当对场算符进行一次电荷共轭变换而已。但对一个以上的算符，厄密共轭运算就涉及到排列顺序的改变，例如：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_w\varphi(x)\varphi^*(y)T_w^{-1}&=(U_t\varphi(x)\varphi^*(\boldsymbol{y})U_t^{-1})^+\\&=|\eta_t|^2\varphi(\boldsymbol{y},\ -y_0)\varphi^*(\boldsymbol{x},\ -x_0)。\end{aligned}\qquad(3.6)_6$$

正是这种算符顺序的颠倒，使得对易关系，在T_w变换下也保持不变，可是T_w中包含了粒子数空间的厄密运算，这样的变换不再是幺正变换，因而它并不能和一个可观测的物理量相对应。虽然如此，时间反演不变的对称性质还是有所应用。

与以上考虑相应，态矢量在T_w变换下有相应的变换，

即

$$\left.\begin{aligned}&|\psi\rangle\to T_w|\psi\rangle=(U_t|\psi\rangle)^+=\langle\psi'|,\\ &\text{其中}\qquad |\psi'\rangle=U_t|\psi\rangle。\end{aligned}\right\}\qquad (3.7)_6$$

上式变换反映出在时间反演下初态和末态也要互换。

以上介绍的时间反演变换常称为时间弱反演或 Wigner 反演，此外也常碰到另一种所谓时间强反演或 Schwinger 反演，实际上它相当时间弱反演和电荷共轭的联合变换，不再在此介绍。

以 $\varphi(x)$ 展开式代入 $(3.5)_6$ 式，类似 $(1.4)_6$ 式的推导可得到

$$\left.\begin{aligned}&T_w a^{(-)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t^* a^{*(+)}(-\boldsymbol{k}),\\ &T_w a^{(+)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t^* a^{*(-)}(-\boldsymbol{k}),\\ &T_w a^{*(\pm)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\gamma_{/t} a^{(\mp)}(-\boldsymbol{k}),\end{aligned}\right\}\qquad (3.8)_6$$

或用文献常用符号。（参看 $(4.9)_3$ 式前面）

$$\begin{aligned}&T_w b^{(+)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t^* b^{(-)}(-\boldsymbol{k}),\\ &T_w b^{(-)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t b^{(+)}(-\boldsymbol{k}),\\ &T_w a^{(+)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t a^{(-)}(-\boldsymbol{k}),\\ &T_w a^{(-)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t^* a^{(+)}(-\boldsymbol{k})。\end{aligned}$$

由 $(2.5)_3$ 式又可得到：

$$\left.\begin{aligned}&T_w \boldsymbol{j}(x)T_w^{-1}=-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\ -t),\\ &T_w \rho(x)T_w^{-1}=\rho(\boldsymbol{x},\ -t)。\end{aligned}\right\}\qquad (3.9)_6$$

以上结论都可以由影片反顺序放映的想法而不难理解。

对于电磁场有相似的结论，

$$A_\lambda(x)\to A'_\lambda(x)=T_w A_\lambda(x)T_w^{-1}=\eta_t^* A_\lambda^*(\boldsymbol{x},\ -t),\quad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4。\qquad (3.10)_6$$

由于电流矢量是 $(3.9)_6$ 式的变换，我们可以取电磁场的 $\eta_t=-1$，类似 $(3.8)_6$ 式有：

$$T_w a_\lambda^{(\pm)}(\boldsymbol{k})T_w^{-1}=\eta_t^* a_\lambda^{*(\mp)}(-\boldsymbol{k}),\quad \lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4。\qquad (3.11)_6$$

在时间弱反演下，Dirac 场的变换如下：

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=[\eta_t i\gamma_1\gamma_3\psi(\boldsymbol{x},\ -t)]^*,\\ &\psi^*(x)\to\psi^{*\prime}(x)=\eta_t i\gamma_1\gamma_3\psi(\boldsymbol{x},\ -t)。\end{aligned}\right\}\qquad (3.12)_6$$

即

$$T_w\psi(x)T_w^{-1}=[U_t\psi(x)U_t^{-1}]^+=[\eta_t i\gamma_1\gamma_3\psi(\boldsymbol{x},\ -t)]^*。\qquad (3.13)_6$$

对于单独的 $\psi(x)$场的变换，上式就相当于$(1.18)_1$式的时间反演变换再加以电荷共轭变换。当然有多数个 $\psi(x)$场连乘的变换，也同以上所讲的一样需要考虑颠倒顺序的运算。可以证明，在以上变换下，Dirac 场方程保持不变，对易关系也保持不变。

以 $\psi(x)$的展开式代入上式，并考虑到以下关系：

$$i\gamma_1\gamma_3=\begin{vmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{vmatrix}$$

且

$$\left.\begin{aligned} i\gamma_1\gamma_3 u^h(\boldsymbol{k}) &= -h[u^h(-\boldsymbol{k})]^*,\\ i\gamma_1\gamma_3 V^h(\boldsymbol{k}) &= h[V^h(-\boldsymbol{k})]^*。\end{aligned}\right\} \qquad (3.14)_6$$

可得

$$\boxed{\begin{aligned} T_W a_h(\boldsymbol{k})T_W^{-1} &= -h\eta_t^* a_h^{(+)}(-\boldsymbol{k}),\\ T_W b_h(\boldsymbol{k})T_W^{-1} &= h\eta_t b_h^{(+)}(-\boldsymbol{k})。\end{aligned}} \qquad (3.15)_6$$

以上 h 在等式左边是相对于 $\boldsymbol{k}$，而在等式右边则相对于$(-\boldsymbol{k})$。Dirac 张量在以上变换下的变换性质如下：

$$T_W\frac{1}{2}[\bar{\psi},\Omega_i\psi]T_W^{-1}=t_i\frac{1}{2}[\bar{\psi},\Omega_i\psi]。 \qquad (3.16)_6$$

i	Ω_i	t_i
S	1	1
V	$i\gamma_\mu$	-1 当 $\mu=1,2,3$; 1 当 $\mu=4$
T	$\sigma_{\mu\nu}$	-1 空空部分, 1 时空部分
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	-1 当 $\mu=1,2,3$, 1 当 $\mu=4$
P	$i\gamma_5$	-1

由以上诸关系看出，在时间反演下，电荷 ρ 保持不变，电流 $\boldsymbol{j}$ 要改变方向，粒子的动量和自旋也都要改变方向，但涡度不变。粒子产生、湮灭过程互换。这些结论都不难由把记录粒子运动的影片反

顺序放映的想法来预先得出。

下面介绍关于时间反演变换的另一方案。这一方案在文献和专著中经常被采用。为了克服$(3.3)_6$式的困难，引进反幺正算符。其定义如下：如果算符 K 满足以下关系，$K\lambda=\lambda^*K$，其中 λ 为一复数。

$$K(\lambda|\varphi\rangle+\mu|\psi\rangle)=\lambda^*K|\varphi\rangle+\mu^*K|\psi\rangle \qquad (3.17)_6$$

那末 K 就称为反线型算符。并且定义它的"厄米"共轭如下：

$$\langle \boldsymbol{k}\varphi|\psi\rangle=\langle\varphi|K^+\psi\rangle^*=\langle K^+\psi|\varphi\rangle, \qquad (3.18)_6$$

此外，如果 K 还满足

$$\langle K\varphi|K\psi\rangle=\langle\varphi|K^+K|\psi\rangle^*=\langle\varphi|\psi\rangle^*=\langle\psi|\varphi\rangle, \qquad (3.19)_6$$

那末这时 K 就称为反幺正算符。请注意，对于幺正算符 U

$$\langle U\varphi|U\psi\rangle=\langle\varphi|U^+U|\psi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle。$$

取时间反演算符

$$T=U_TK, \qquad (3.20)_6$$

其中 U_T 为幺正算符，K 为反幺正算符。对于标量场

$$\begin{aligned} T\varphi(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}&=\eta_t\varphi(\boldsymbol{x},\ -t),\\ T\varphi^*(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}&=\eta_t^*\varphi^*(\boldsymbol{x},\ -t), \end{aligned} \qquad (3.21)_6$$

与此相应

$$T|\boldsymbol{k},\ k_0\rangle=\eta_t^*|-\boldsymbol{k},\ k_0\rangle, \qquad (3.22)$$

$$\begin{aligned} U_Ta(\boldsymbol{k})U_T^{-1}&=\eta_ta(-\boldsymbol{k}),\\ U_Tb(\boldsymbol{k})U_T^{-1}&=\eta_cb(-\boldsymbol{k})。 \end{aligned} \qquad (3.23)_6$$

对于电磁场类似

$$TA_\mu(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}=-A_\mu(\boldsymbol{x},\ -t), \qquad (3.24)_6$$

对于 Dirac 场

$$T\psi(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}=\eta_ti\gamma_1\gamma_3\psi(\boldsymbol{x},\ -t)=\eta_t\sigma_2\psi(\boldsymbol{x},\ -t), \qquad (3.25)_6$$

取 $\eta_t=1$

$$\begin{aligned} TT\psi(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}T^{-1}&=T\sigma_2\psi(\boldsymbol{x},\ -t)T^{-1}=\sigma_2^*T\psi(\boldsymbol{x},\ -t)T^{-1}\\ &=-\sigma_2^{-1}T\psi(\boldsymbol{x},\ -t)T^{-1}=-\psi(\boldsymbol{x},\ t), \end{aligned} \qquad (3.26)_6$$

$$Tj_\mu(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}=Ti\bar{\psi}(\boldsymbol{x},\ t)\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{x},\ t)T^{-1}$$

$$= -iT\psi^+(\boldsymbol{x}, t)T^{-1}\gamma_4^*\gamma_\mu^* T\psi(\boldsymbol{x}, t)T^{-1}$$
$$= -i\psi^+(\boldsymbol{x}, -t)\sigma_2^{-1}\gamma_4^*\gamma_\mu^*\sigma_2\psi(\boldsymbol{x}, -t)$$
$$= -i\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, -t)\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{x}, -t) = -j_\mu(\boldsymbol{x}, -t), \quad (3.27)_6$$

$$\left.\begin{aligned} U_T a_h(\boldsymbol{p})U_T^{-1} &= a_h(-\boldsymbol{p})e^{i\alpha_+(\boldsymbol{p},h)}, \\ U_T b_h^+(\boldsymbol{p})U_T^{-1} &= b_h^+(-\boldsymbol{p})e^{i\alpha_-(\boldsymbol{p},h)}。 \end{aligned}\right\} \quad (3.28)_6$$

以上介绍的关于时间反演的两种表示方案，实际上是等效的。例如考虑 $\varphi(x)$ 在某两态之间的矩阵元 $\langle \boldsymbol{k}_2|\varphi(x)|\boldsymbol{k}_1\rangle$（取 $\eta_t=1$）在第一种方案下

$$\langle \boldsymbol{k}_2|T_w^{-1}T_w\varphi(x)T_w^{-1}T_w|\boldsymbol{k}_1\rangle = \langle -\boldsymbol{k}_1|\varphi^+(\boldsymbol{x}, -t)|-\boldsymbol{k}_2\rangle$$
$$= \langle -\boldsymbol{k}_2|\varphi(\boldsymbol{x}, -t)|-\boldsymbol{k}_1\rangle^*,$$

在第二种方案下

$$\langle -\boldsymbol{k}_2|T^{-1}T\varphi(x)T^{-1}T|\boldsymbol{k}_1\rangle = \langle \boldsymbol{k}_2|T^{*-1}\varphi(\boldsymbol{x}, -t)T|\boldsymbol{k}_1\rangle$$
$$= \langle -\boldsymbol{k}_2|\varphi(\boldsymbol{x}, -t)|-\boldsymbol{k}_1\rangle^*$$

两者是一致的。

以前我们曾经提到过，每种粒子在 P, C 或 T 变换下的相因子 η 是要由实验根据守恒定律来确定的。一般讲体系在 P、C 或者 T 的个别变换下并不是不变的。只有在强相互作用里，根据目前的实验看来，它们才是分别保持不变的。因此我们可以利用强相互作用的过程来确定每种粒子的相因子。假若强相互作用是 Yukawa 型的，要保持 P、C 或 T 的不变性，我们就要取标量、赝标、矢量或赝矢量场的相因子，分别和相应的 Dirac 标量、赝标、矢量或赝矢量在各种变换下的相因子（参看本章各表）一致。总结以上所得结果，可知在 PCT 复合变换下，各种场的变换如下（此地的 T 就是以前的 T_w）。

$$\left.\begin{aligned} (PCT)\varphi(x)(PCT)^{-1} &= \varphi(-x), \\ (PCT)\varphi^*(x)(PCT)^{-1} &= \varphi^*(-x), \\ (PCT)A_\mu(x)(PCT)^{-1} &= (-1)A_\mu(-x), \\ (PCT)\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi](PCT)^{-1} &= (-1)^{l_i}\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]。 \end{aligned}\right\} \quad (3.29)_6$$

其中 l_i 表示张量的阶数与是否为赝无关。

§6.4 G 变换与 G 宇称

以前我们讨论了电荷共轭变换，它在很多情况下，尤其是在电子，光子体系，都是个很有实际应用的变换，但是对于核子，π 介子，直接应用电荷共轭变换却有不方便之处。例如电荷共轭对于核子就是 $p\leftrightarrow\bar{p}$，$n\leftrightarrow\bar{n}$ 的变换，可是 p 和 $\bar{n}$ 的 $T_3=\frac{1}{2}$，而 $\bar{p}$ 和 n 的 $T_3=-\frac{1}{2}$。因此单纯的电荷共轭，实际上不仅把核子变为反核子，同时也改变了它们的同位旋指向。

对于 π 介子也有相同的情况，电荷共轭下，$\pi^-\leftarrow\pi^+$ 同时也就改变它们原有的同位旋指向。也就是电荷共轭和同位旋算符不是相互对易的。这一点可直接证明如下：例如核子同位算符由 $(4.18)_5$ 式为：

$$\underrightarrow{\mathscr{T}}=\frac{1}{2}\int\psi^+\underrightarrow{\tau}\psi d\boldsymbol{x},$$

$$C\underrightarrow{\mathscr{T}}C^{-1}=-\frac{1}{2}\int\psi^+\underrightarrow{\tau}_T\psi d\boldsymbol{x},$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} C\mathscr{T}_1C^{-1}&=-\underrightarrow{\mathscr{T}}_1,\\ C\mathscr{T}_2C^{-1}&=\mathscr{T}_2,\\ C\mathscr{T}_3C^{-1}&=-\mathscr{T}_3。\end{aligned}\right\}\qquad (4.1)_6$$

同位旋对于 πN 体系是一个很好的量子数，我们希望找到一个变换，它能把核子变换为反核子，而又保持它的同位旋指向不变，而且 π 介子在这个变换下保持不变。以下要介绍的 G 变换就具有这样的性质，G 变换可以看成是电荷共轭的推广。所谓 G 变换就是电荷共轭再加以绕同位旋空间第二轴旋转 180° 的变换，记以 $T_2(\pi)$。也就是

$$G=CT_2(\pi)=Ce^{i\pi\tau_2/2}=iC\tau_2。\qquad (4.2)_6$$

我们知道在电荷共轭下 $\pi^-\leftrightarrow\pi^+$，而在 $T_2(\pi)$ 下，又把 $\pi^+\leftrightarrow\pi^-$ 所以又把 π 变回到原来状态。

由于在强相互作用下电荷共轭和同位旋都是守恒的，所以在强相互作用里 G 也是守恒的，而且可以证明 G 变换和同位旋算符是相互对易的。

在 G 变换下，核子场有相应的变换，先讨论 $T_2(\pi)$ 下的变换，利用 $(4.2)_5$ 式并参看 $(4.13)_1$ 式得，

$$\left.\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{T_2(\pi)} \psi' = e^{i\tau_2\pi/2}\cdot\psi = i\tau_2\psi, \\ \text{同时}\quad \overline{\Psi} &\xrightarrow{T_2(\pi)} \overline{\Psi}' = \overline{\Psi}e^{-i\tau_2\pi/2} = -i\overline{\Psi}\tau_2 . \end{aligned}\right\} \tag{4.3}_6$$

上式具体写出即为：

$$\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix} \xrightarrow{T_2(\pi)} \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\psi_n\\ -\psi_p\end{vmatrix}.$$

再加以电荷共轭变换，则可写成：

$$\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix} \xrightarrow{G=CT_2(\pi)} \eta_c\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c\overline{\psi}_{pT}\\ c\overline{\psi}_{nT}\end{vmatrix} = \eta_c\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix}. \tag{4.4}_6$$

同样对于 $\overline{\psi}_N = |\overline{\psi}_p,\ \overline{\psi}_n|$ 在 G 变换下，由 $(4.3)_6$ 式

$$|\overline{\psi}_p,\ \overline{\psi}_n| \xrightarrow{G} \eta_c\cdot|\overline{\psi}_{\bar{n}},\ -\overline{\psi}_{\bar{p}}|. \tag{4.5}_6$$

即在 G 变换下 $p\to\bar{n}$，而 $n\to-\bar{p}$。以上 $T_2(\pi)=i\tau_2$ 正是 $(4.8)_5$ 式中的 S。它起着使 $S\psi_N^*$ 和 $\overline{\psi}_N$ 有相同的变换性质的作用。不过应该注意由 $(4.4)_6$ 式

$$G\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix} = \eta_c(-1)\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}. \tag{4.6}_6$$

也就是在 G 变换下 $\bar{n}\to-p$，而 $\bar{p}\to n$。由此容易证明：

$$\left.\begin{aligned} G^2\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}, \\ G^2\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}_6$$

可以证明 $(4.17)_5$ 式的 $\mathscr{L}$ 在 G 变换下保持不变，场方程和反对易关系也都是不变的，因而存在守恒的幺正算符 $\hat{G}$，对应它的物理量称为 G 宇称，使得

$$\left.\begin{aligned}\hat{G}\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}\hat{G}^{-1}&=\eta_c\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix}=\eta_c\begin{vmatrix}c\bar{\psi}_{nT}\\ -c\bar{\psi}_{pT}\end{vmatrix},\\ \hat{G}\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix}\hat{G}^{-1}&=(-1)\eta_c\begin{vmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{vmatrix}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.8)_6$$

值得指出，这里我们用了 $\hat{G}$ 符号表示量子场论中在粒子数空间里的 G 算符，以便和量子力学的 G 矩阵(参看$(4.4)_6$式)相区别。不过在以后我们也常把 G 上的尖角省掉，请注意不要引起误解。

类似$(2.9)_6$式推导由$(4.8)_6$式第一式可得

$$\left.\begin{aligned}&Ga_{hp}(\boldsymbol{k})G^{-1}=\eta_c b_{h\bar{n}}(\boldsymbol{k}),\\ &Gb^{+}_{h\bar{p}}(\boldsymbol{k})G^{-1}=\eta_c a^{+}_{hn}(\boldsymbol{k}),\\ &Ga_{hn}(\boldsymbol{k})G^{-1}=-\eta_c b_{h\bar{p}}(\boldsymbol{k}),\\ &Gb^{+}_{h\bar{n}}(\boldsymbol{k})G^{-1}=-\eta_c a^{+}_{hp}(\boldsymbol{k})。\end{aligned}\right\}\qquad(4.9)_6$$

同样由$(4.8)_6$式第二式可得

$$\left.\begin{aligned}&Gb_{h\bar{n}}(\boldsymbol{k})G^{-1}=-\eta_c a_{hp}(\boldsymbol{k}),\\ &Ga^{+}_{hn}(\boldsymbol{k})G^{-1}=-\eta_c b^{+}_{h\bar{p}}(\boldsymbol{k}),\\ &Gb_{h\bar{p}}(\boldsymbol{k})G^{-1}=\eta_c a_{hn}(\boldsymbol{k}),\\ &Ga^{+}_{hp}(\boldsymbol{k})G^{-1}=\eta_c b^{+}_{h\bar{n}}(\boldsymbol{k})。\end{aligned}\right\}\qquad(4.10)_6$$

以上$(4.9)_6$式右边和$(4.10)_6$式的左边的负号，都是来自$(4.4)_6$式右边 $\psi_{\bar{p}}$ 前面的负号。如果引进 $\tilde{\psi}_p=-\bar{\psi}_p$ 且 $\tilde{\psi}_N\equiv|\bar{\psi}_n,\ -\bar{\psi}_p|$ 来代替 $\bar{\psi}_N=|\bar{\psi}_p,\ \bar{\psi}_n|$ 且

$$\psi_{\bar{N}}=c\tilde{\psi}_{NT}=\begin{vmatrix}c\bar{\psi}_{nT}\\ -c\bar{\psi}_{pT}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\psi_{\bar{n}}\\ -\psi_{\bar{p}}\end{vmatrix},\qquad(4.11)_6$$

则相应以上 $\bar{\psi}_p\sim\tilde{\psi}_p$ 的代换应有

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{b}_{h\bar{p}}=-b_{h\bar{p}},\\ &\tilde{a}^{+}_{hp}=-a^{+}_{hp}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)_6$$

为了统一起见，我们把所有其他粒子产生、湮灭算符都带上“～”号且定义与相应的不带“～”号的算符相同。这样我们就把$(4.9)_6$式和$(4.10)_6$式简化为：

$$\boxed{\begin{aligned}&G\tilde{a}_{h\tau}G^{-1}=\eta_c\tilde{b}_{h\tau},\\&G\tilde{b}^{+}_{h\tau}G^{-1}=\eta_c\tilde{a}^{+}_{h},\\&G\tilde{b}_{h\tau}G^{-1}=-\eta_c\tilde{a}_{h\tau},\\&G\tilde{a}^{+}_{h\tau}G^{-1}=-\eta_c\tilde{b}^{+}_{h\tau}。\end{aligned}}\qquad(4.13)_6$$

以上 τ 表示同位旋第三分量。其实在构造核子对同位旋波函数时本来就是应该以 $\tilde{a}^+$ 和 $\tilde{b}^+$ 为基矢来进行的。

可以证明，一定同位旋的核子对体系是 G 宇称的本征态，它的本征值类似$(2.11)_6$式的考虑，可得(亦可参看下节$(5.11)_6$式)

$$G=(-1)^{l+T+S},\qquad(4.14)_6$$

其中 T 为核子对体系的总同位旋，同样 l 和 S 分别为其轨道角动量和总自旋。

下面我们讨论在 G 变换下，π 介子的变换。由$(6.2)_3$和$(6.3)_3$式可知在 $T_2(\pi)$变换下 φ_l 的变换如下：

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\xrightarrow{T_2(\pi)}\underset{\rightarrow}{\varphi}'(x)=e^{it_2\pi}\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)。\qquad(4.15)_6$$

上式用分量写出就是

$$\varphi_l(x)\xrightarrow{T_2(\pi)}\varphi'_l(x)=e^{i\pi(t_2)_{lm}}\varphi_m(x)。\qquad(4.15')_6$$

利用$(t_2)^3=t_2$可以证明：

$$e^{i\pi t_2}=1-2t_2^2=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&+1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}。\qquad(4.16)_6$$

代入上式得：

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\xrightarrow{T_2(\pi)}\underset{\rightarrow}{\varphi}'(x)=\begin{vmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{vmatrix}\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)。\qquad(4.17)_6$$

其实上式关系也可直接由 $\varphi(x)$为同位旋空间的一个矢量，以及 $T_2(\pi)$的运算含义而得到。此外由$(2.2)_6$式可知在电荷共轭变换下，$\varphi(x)$的变换如下(取 $\eta_c=+1$)：

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\xrightarrow{C}\underset{\rightarrow}{\varphi}'(x)=\begin{vmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{vmatrix}\cdot\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)。\qquad (4.18)_6$$

由此可看出对于 π 介子而言，$T_2(\pi)$和 C 是对易的，而且在 G 变换下 $\varphi(x)$的变换如下：

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)\xrightarrow{G}\underset{\rightarrow}{\varphi}'(x)=\begin{vmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{vmatrix}\cdot\underset{\rightarrow}{\varphi}(x)。$$

即

$$\varphi_i(x)\xrightarrow{G}\varphi_i'(x)=(-1)\varphi_i(x)。\qquad (4.19)_6$$

由此可见，对于 π 介子讲，G 变换相当于同位旋空间的反演。

可以证明在上式 G 变换下，π 介子的场方程和对易关系都保持不变因而存在幺正算符 G 使得：

$$G\varphi_i(x)G^{-1}=(-1)\varphi_i(x)。\qquad (4.20)_6$$

以 $\varphi_i(x)$的展开式代入可得：

$$Ga_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})G^{-1}=(-1)a_i^{(\pm)}(\boldsymbol{k})。\qquad (4.21)_6$$

对于单 π 介子态其 G 宇称是奇的，因为

$$Ga_i^{(+)}|0\rangle=Ga_i^{(+)}G^{-1}G|0\rangle=(-1)a_i^{(+)}|0\rangle。\qquad (4.22)_6$$

一般对于 N 个 π 介子的态其 G 宇称则$(-1)^N$。因为

$$\begin{aligned}Ga_{i_1}^{(+)}a_{i_2}^{(+)}\cdots a_{i_n}^{(+)}|0\rangle&=Ga_{i_1}^{(+)}a_{i_2}^{(+)}\cdots a_{i_n}^{(+)}G^{-1}G|0\rangle\\&=(-1)^Na_{i_1}^{(+)}a_{i_2}^{(+)}\cdots a_{i_n}^{(+)}|0\rangle。\qquad (4.23)_6\end{aligned}$$

在忽略了电磁相互作用之下，强相互作用在 G 变换下是保持不变的。这时奇(偶)数 π 介子到偶(奇)数 π 介子的过渡是禁戒的。同样核子对到 N 个 π 介子体系的过渡也要满足以下条件。由$(4.9)_6$和$(4.18)_6$式。

$$(-1)^{l+T+S}=(-1)^N。\qquad (4.24)_6$$

例如$(\bar{p}n)$的 $T=1$，它在 $^1s_0$ 态$(l=0,\ s=0)$就只能过渡到奇数个 π 介子态，它到偶数个 π 介子态的过渡(忽略电磁相互作用和弱相互作用)是禁戒的。

由以上的讨论看来，G 变换对于(πN)体系的地位，正相当于电荷共轭对于光子和电子体系的地位。

§6.5 双粒子体系

以上我们分析了单粒子态的变换性质。对于多粒子态比较有兴趣的是双粒子态，本节我们就来讨论双粒子的情况，并主要以双 π 介子为例，至于双光子和核子对态我们只列出其重要结论以供参考。

双粒子态也可由粒子产生算符作用真空态而得到参看$(4.13)_3$式。例如：

$$a^{(+)}_{\alpha_1}(\boldsymbol{k}_1)a^{(+)}_{\alpha_2}(\boldsymbol{k}_2)|0\rangle。 \qquad (5.1)_6$$

即为一个 π 介子其动量为 $\boldsymbol{k}_1$ 同位旋指标为 α_1；另一个 π 介子其动量为 $\boldsymbol{k}_2$，同位旋指标为 α_2 的双 π 介子态。

对于双粒子体系，主要在于研究它们的相对运动。引进新的变量来代替原来的 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$。即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\frac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2},\\ \boldsymbol{K}&=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2。\end{aligned}\right\} \qquad (5.2)_6$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 即为体系的总动量，它反映质心的运动，如取质心系坐标则 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0$ 且 $\boldsymbol{k}_1=-\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}$。

因而在质心系里双 π 介子的运动状态，可以用它的相对运动量 $\boldsymbol{k}$，以及它们的同位指标 α_1 和 α_2 来描写。不过最常见的还是用相对运动的角动量，宇称及同位旋来描写它们的运动状态。一定能量 k_0，一定相对运动轨道角动量 l 及其投影 m 的态将是$(5.1)_6$式态的迭加，$|k,\ l,\ m\rangle=\sum_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{k}\rangle\langle\boldsymbol{k}|k,\ l,\ m\rangle$。根据表象理论知道，其迭加系数$\langle\boldsymbol{k}|k,\ l,\ m\rangle$应该就是一定能量，一定轨道角动量的态在动量空间表示里的波函数。考虑到在动量表示里，轨道角动量的表达式为 $\boldsymbol{L}=-i[\boldsymbol{k}\times\nabla_k]$，其形式与在坐标空间表示里它的表达式 $\boldsymbol{L}=-i[\boldsymbol{x}\times\nabla_{\boldsymbol{x}}]$是相同的，只是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 互换了。因而一定能

量，一定轨道角动量的波函数，在动量表示里或坐标表示里，其形式也应该是相同的，只是坐标矢量 x 和动量矢量 k 互换而已。也就是波函数 $\langle \boldsymbol{k}|k,\ l,\ m\rangle = Y_l^m(\hat{k})$ 也是球函数形式。其中 $\hat{k}$ 为 $\boldsymbol{k}$ 的单位矢量。

对于双 π 介子态，我们经常还按其总同位旋来分类：

$$\begin{aligned}|k,\ l,\ m;\ T\rangle = &\int d\Omega_{\hat{k}} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle\langle \boldsymbol{k}|k,\ l,\ m\rangle \\ &a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle \\ -&\int d\Omega_{\hat{k}} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle \\ &\times Y_l^m(\hat{k})a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle。 \qquad (5.3)_6\end{aligned}$$

其中 T 为体系总同位旋。$\int d\Omega_{\hat{k}}$ 为对 $\hat{k}$ 的方向积分。$Y_l^m(\hat{k})$ 为动量空间的球函数。如果两粒子是全同玻色粒子。还要考虑波函数的对称化。

$$\begin{aligned}|k,\ l,\ m;\ T\rangle = &\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k}) \\ &\times [a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k}) + a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})]|0\rangle \\ -&\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} [\langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k}) + \langle \alpha_2,\ \alpha_1|T\rangle \\ &\times Y_l^m(-\hat{k})]a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle。 \qquad (5.4)_6\end{aligned}$$

考虑到球函数的对称性 $(1.8)_6$ 式 $Y_l^m(-\hat{k}) = (-1)^l Y_l^m(\hat{k})$，以及 $\langle \alpha_2,\ \alpha_1|T\rangle = (-1)^T\langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle$。上式 $(5.4)_6$ 式可写成：

$$\boxed{\begin{aligned}|k,\ l,\ m;\ T\rangle = &\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} (1+(-1)^{l+T}) \\ &\times \langle \alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k})a_{\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle。\end{aligned}} \qquad (5.5)_6$$

由此看出：只有当 l 和 T 同时为偶或同时为奇时，上式才不为零。也就是说偶（或奇）同位旋态，只能有偶（或奇）l 态存在。

下面首先考虑上式态的宇称，利用 $(1.4)_6$ 式得：

$$P|k,\ l,\ m;T\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{\alpha_1,\alpha_2}(1+(-1)^{l+T})$$
$$\times\langle\alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k})|\eta_c|^2a_{\alpha_1}^{(+)}(-\boldsymbol{k})a_{\alpha_2}^{+}(\boldsymbol{k})|0\rangle。$$

变换积分变量 $\hat{k}\to-\hat{k}$，即得到

$$\boxed{P|k,\ l,\ m;T\rangle=(\eta_c)^2(-1)^l|k,\ \boldsymbol{l},\ m;T\rangle。}\qquad(5.6)_6$$

其次考虑双 π 介子态的荷称。只有总电荷为零的态，也就是 $Q=0=T_3$ 的态才能是荷称的本征态。因此我们现在限取 $Q=0=T_3$ 的双 π 介子态。如取 $\alpha_1,\ \alpha_2=+,-,0$，则此时要求 $\alpha_1=-\alpha_2$。利用 $(2.3)_6$ 式，由 $(5.5)_6$ 式可得：

$$C|k,\ l,\ m;T\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{\alpha_1,\alpha_2}(1+(-1)^{l+T})$$
$$\times\langle\alpha_1,\alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k})|\eta_c|^2a_{-\alpha_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{-\alpha_2}^{(+)}(-k)|0\rangle。$$

由于 $\alpha_1=-\alpha_2$，且考虑到 $|\eta_c|^2=1$，上式可写成：

$$C|k,\ l,\ m;\ T\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{\alpha_1,\alpha_2}(1+(-1)^{l+T})$$
$$\times\langle\alpha_1,\ \alpha_2|T\rangle Y_l^m(\hat{k})a_{\alpha_2}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{\alpha_1}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle。$$

把 $a_{\alpha_2}^{(+)}(\boldsymbol{k})$ 和 $a_{\alpha_1}^{(+)}(-\boldsymbol{k})$ 对换位置，再进行积分变量变换 $\hat{k}\to-\hat{k}$ 可得到：

$$\boxed{C|k,\ \boldsymbol{l},\ m;T\rangle=(-1)^l|k,\ \boldsymbol{l},\ m;T\rangle。}\qquad(5.7)_6$$

值得指出：通常取的 $|\pi^-,\ \pi^+\rangle+|\pi^+,\ \pi^-\rangle$ 态并非同位旋的本征态，而是 $|2,\ 0\rangle$ 和 $|0,\ 0\rangle$ 态的叠加。不过这时 l 只能取偶数，故其荷称为正。而 $|\pi^-,\ \pi^+\rangle-|\pi^+,\ \pi^-\rangle$ 态则是 $|1,\ 0\rangle$ 态，其 l 只能取奇数，故其荷称为负。

考虑正负电子对体系，类似 $(5.3)_6$ 式

$$|k,\ l,\ m;S\rangle=\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{s_1,s_2}\langle S_1,\ S_2|S\rangle$$
$$\times Y_l^m(\hat{k})a_{s_1}^{(+)}(k)b_{s_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle,$$

其中 S 为体系的总自旋。利用 $(2.9)_6$ 式可得到其荷称为：

$$C|k,\ l,\ m;S\rangle=\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{s_1,s_2}\langle S_1,\ S_2|S\rangle$$
$$\times Y_l^m(\hat{k})|\eta_c|^2b_{s_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})a_{s_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle。$$

把 $b_{s_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})$和 $a_{s_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})$互换位置并考虑到它们的反对易性，再变换积分变量 $\hat{k}\to-\hat{k}$，并互换求和指标 α_1，α_2，并考虑到

$$\langle S_2,\ S_1|S\rangle=(-1)^{s+1}\langle S_1,\ S_2|S\rangle,$$

则上式可写成：

$$\boxed{\begin{aligned}C|k,\ l,\ m;\ S\rangle&=(-1)^{l+S+1+1}|k,\ l,\ m;\ S\rangle\\&=(-1)^{l+S}|k,\ l,\ m;\ S\rangle_{\circ}\end{aligned}}\qquad(5.8)_6$$

这个关系我们在前面$(2.11)_6$式已用过。

同样考虑核子对体系，类似$(5.3)_6$式

$$|k,\ l,\ m;\ T,\ S\rangle=\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{s_1,s_2;\tau_1,\tau_2}\langle S_1,\ S_2|S\rangle\langle\tau_1,\ \tau_2|T\rangle\times Y_l^m(\hat{k})\tilde{a}_{s_1,\tau_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})\tilde{b}_{s_2,\tau_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle_{\circ}\qquad(5.9)_6$$

利用$(4.7)_6$式可得到其 G 宇称。考虑$(4.13)_6$式可得：

$$G|k,\ l,\ m;\ T,\ S\rangle=\int d\Omega_{\hat{k}}\sum_{s_1,s_2;\tau_1,\tau_2}\langle S_1,\ S_2|S\rangle\langle\tau_1,\ \tau_2|T\rangle\times Y_l^m(\hat{k})(-1)|\eta_c|^2\tilde{b}_{s_1\tau_1}^{(+)}(\boldsymbol{k})\tilde{a}_{s_2\tau_2}^{(+)}(-\boldsymbol{k})|0\rangle_{\circ}\qquad(5.10)_6$$

把 $\tilde{b}^{(+)}$ 和 $\tilde{a}^{(+)}$ 互换位置并考虑其反对易性，再变换积分变量 $\hat{k}\to-\hat{k}$，并把求和指标 S_1，S_2 和 τ_1，τ_2 各自互换可得到：

$$\boxed{\begin{aligned}G|k,\ l,\ m;\ T,\ S\rangle&=(-1)^{l+S+1+T+1}|k,l,m;\ T,\ S\rangle\\&=(-1)^{l+S+T}|k,\ l,\ m;\ T,\ S\rangle_{\circ}\end{aligned}}\qquad(5.11)_6$$

以上结论我们以前在(4.14)式已用过。由此看电子对和光子体系的电荷共轭，和核子对和 π 介子体系的 G 变换，确有很多相似之处。

对于其他双粒子体系，情况类似，只是有时稍为复杂一些，例如双光子体系，只是光子的极化代替了 π 介子的同位旋矢量。因而 l 和 S 必须同时为偶或同时为奇。有时还要考虑到 l 和 S 的耦合，此外还要考虑到 Lorentz 条件，现仅将结果列表于下以供参考。

态的数目 \ 字称 / 总角动量J	偶字称(l为偶)		奇字称(l为奇)
	自旋$S=2$	自旋$S=0$, 偏振//	自旋$S=1$, 偏振⊥
0	0	1 $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)$	1 $(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{k}$
1	0	0	0
$2n$	1	1	1
$2n+1$	1	0	0

由上表可见,双光子体系不存在总角动量为1的态,这一点也可由以下的考虑而得到，双光子体系的波函数只能是由两个光子的极化矢量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$以及它们相对动量$\boldsymbol{k}$所组成，由于$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{k}_1=0=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{k}_2$，同时波函数对于两个光子互换应该是对称的,也就是波函数在$\boldsymbol{e}_1\leftrightarrow\boldsymbol{e}_2$互换且$\boldsymbol{k}\rightarrow-\boldsymbol{k}$时保持不变，在这些条件下，我们是无法由$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{k}$这三个矢量来组成另一个矢量的。由此可知自旋为1的粒子到两个光子的过渡是禁戒的。

参 考 资 料

1. 关于质标场的 CPT

   D. 卢里　粒子和场 (1981) 第三章 p. 112

   R. E. Movrshak & C. P. Ryan

   Theory of Weak Interactions in Particle Physics(1969)

   Chapter 2 p. 56

2. 关于旋量场的 CPT

   C. Itzykson & J. B. Zuber

   Quantum Field Theory (1980)Chapter 2 p. 151

3. 关于 G 字称

   W. M. Gibson & B. R. Pollard

   Symmetry Principles in Elementary Particle Physics

   (1976)Chapter 9 p. 251

4. 关于双光子系统

   A. I. Akhiezer & V. B. Berestetskii

   Quantum Electrodynamics (1965) Chapter 1 p. 52

第七章　场的相互作用

本章主要讨论如何由实验上的守恒定律来决定相互作用的形式，以及已知的相互作用形式所具有的对称性质及其对应的守恒定律。关于守恒定律的实验基础以及各种相互作用的历史发展情况，在基本粒子理论课程里有详细介绍，本章仅在必要时做补充说明。

本章前面两节是一般性介绍，接着在§7.3～§7.6中讨论了相应各种守恒定律的数学描述。时、空坐标的变换对所有粒子场都引起相应的变换。有关时空坐标变换下的对称性质所对应的守恒定律。例如能量、动量、角动量守恒定律，我们已在前面介绍过，在场相互作用时并未带来新的内容，我们就不再在这一章里重复。本章着重讨论，体系在部分相关粒子场同时变换下(例如同位旋空间的旋转，相应粒子数或电荷的相变换等)的对称性质及其相应的守恒定律。最后几节是介绍各种相互作用的具体形式和一些重要结论。除了电磁相互作用较为成熟外，其他的相互作用都还处在试探性的研究阶段。我们只介绍它们中较有成效的几种形式。

§7.1　场相互作用的引入

在前面几章关于自由场量子理论的讨论里，我们顺利地得到了场的粒子性，明显地得出基本粒子的产生和湮灭算符，而基本粒子的产生和湮灭正是基本粒子最基本的运动过程，同时还给出了正确的自旋与统计的关系。因而我们有理由认为基本粒子是相应场激发的量子，因而对物质的波粒二象性这一基本的客观事实也有了进一步的理论说明。同一种基本粒子是由同一种场激发而得到的这一概念，对于全同粒子的不可分辨性也是易于理解的，这些

都是自由场量子理论所取得的成就。然而，对于自由场(粒子)，由以上几章讨论看出，其粒子数目是守恒的，亦即是一个运动常数，因而自由场理论不能充分反映基本粒子相互转换这一基本事实。实际上严格的自由场是不存在的。自由场的讨论对象，实在是一种理想的极限情况。当然自由场的研究，的确也是进一步讨论场相互作用的必要准备工作。

实际上场与场(或粒子与粒子)之间，经常存在着多种多样的相互作用。正是由于相互作用的存在，才形成了基本粒子间相互转换的复杂现象，因而研究场(粒子)之间的相互作用是量子场论的重要任务。

目前我们对场相互作用的处理，在于引进相互作用 Lagrange 函数。显然讨论了两种场的相互作用，就足以了解一般多种场的相互作用的处理方法。两种场相互作用的体系的运动，正如自由场理论一样，可由一个实的 Lagrange 函数(量子化以后为厄米算符)来表征。

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\mathrm{I}}+\mathscr{L}_{\mathrm{II}}+\mathscr{L}_{\text{相互}}。\qquad (1.1)_{\mathrm{T}}$$

其中 $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ 分别为第一种和第二种"自由场"的 Lagrange 函数。$\mathscr{L}$ 为整个体系的 Lagrange 函数，而 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 是反映场相互作用的 Lagrange 函数，$\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 中常含有不同场的场算符的连乘积。因此在利用 Lagrange 方程导出第 I 种场的场方程时，常出现有第二种场的场算符，同样在第 II 种场的场方程里，也将出现第 I 种场的场算符，这样第 I、第 II 种场的运动，将不是互相独立的，而是彼此关联的了。

下面我们将介绍决定 Lagrange 函数具体形式的一些原理。首先因为相对论原理是场论的基本原理，因而，除了 $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$，$\mathscr{L}_{\mathrm{II}}$ 在 Lorentz 变换下为不变量外，$\mathscr{L}_{\text{相互}}$ (因而 $\mathscr{L}$)也应该是在 Lorentz 变换下为不变量，这是我们确定 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 具体形式的最基本的原则。除此以外，$\mathscr{L}$ 形式的确定还受到另外一些由实验证实了的守恒定律的限制，例如动量守恒要求 $\mathscr{L}$ 在时空坐标原点平移下为不变量，这相当于要求 $\mathscr{L}$ 不是时空坐标的显函数。角动量守恒要求

$\mathscr{L}$ 在空间坐标旋转下为不变量，电荷守恒要求 $\mathscr{L}$ 在规范变换下为不变量。其他如重粒子数守恒要求 $\mathscr{L}$ 在相应的位相变换下为不变量，这些都是所有 $\mathscr{L}$ 都必须满足的普遍成立的守恒定律。此外如宇称守恒(即要求在空间反演下不变)，电荷共轭下不变，及电荷无关(同位旋守恒)等都是只适用于个别的相互作用的局部守恒定律，它们只是在考虑相应的 $\mathscr{L}$ 的对称性时附加的相应的条件。守恒定律的建立都有实验的启发并还要继续受到实验的检验，尤其还可能遭到事实的否定，例如，李、杨所提出的宇称守恒不适用弱相互作用情况，即为一明显的例子。当然受到愈多事实验证的守恒定律，我们对它的信赖也就愈大，例如动量能量、角动量、电荷守恒定律等我们目前都认为它是完全正确的。

由以前几章的讨论可知，对于自由场(考虑到 $\mathscr{L}$ 的对称化或反对称化)以上所谈的守恒定律都是满足的，因而上述对 $\mathscr{L}$ 形式的限制，实际上是对 $\mathscr{L}_{相互}$ 的限制。所有守恒定律对 $\mathscr{L}_{相互}$ 的对称性质的限制，并不足以完全确定 $\mathscr{L}_{相互}$ 的具体形式，一般情况下我们采用尽量简单的形式。至于表征相互作用强度的耦合常数，则是要依赖实验来确定的。

由此看来 $\mathscr{L}_{相互}$ 的引入，虽然受到若干守恒定律的限制，可是其具体形式的选取还是有相当大的任意性。在近年来发展起来的规范场论中，规范场和其他粒子的相互作用的形式，由于定域规范变换下不变的要求，而被唯一地确定下来了。并且这种被确定下来的相互作用，可以证明是可以重整化的，这些都是规范场论的优点。在电磁作用、弱作用以及强相互作用中，规范场论都起了头等重要的作用。不过这些内容将留在规范场论中去介绍。

动量能量、角动量守恒，以及在 P、C、T 分别变换下不变的问题，与自由场情况相似，已在前面几章里讨论过，以后不再作过多的重复，而重、轻粒子数守恒、电荷守恒以及同位旋守恒将在以下逐节讨论。有了 $\mathscr{L}_{相互}$ 和 $\mathscr{L}$ 的具体形式，我们就可以根据量子场论的一般原理，来研究相互作用场的运动。因为在第二章里所讨论的一般原理对于相互作用场的运动也同样适用。

§7.2 场相互作用的分类

根据目前实验总结所得场(粒子)的相互作用按其形式可以分为 Yakawa 型和 Fermi 型。即 $\mathscr{L}_{相互}$ 由两个费米场和一个玻色场所组成的所谓 Yakawa 型(例如 π 介子和核子的强相互作用)，和 $L_{相互}$ 由四个费米场所组成的所谓 Fermi 型(例如普适的 V-A 相互作用)两个类型。

按照相互作用的强弱程度来分，场(粒子)相互作用又分为强相互作用，电磁相互作用和弱相互作用三类。引力场的相互作用最弱，由牛顿常数 $Gm_p^2/\hbar c \cong 2\times 10^{-39}$ 所表征 (其中 m_p 为质子的质量)，在量子场论里经常把它忽略。

(1) 强相互作用：关于强相互作用，虽然已积累大量实验资料，可是我们对它的理解还是肤浅的，就目前情况来看，强作用又可分为超强和强相互作用两类：

(a) 超强相互作用：是强子内部组元，层子(夸克)和胶子的相互作用，对于这种超强相互作用的研究，近年来有很大发展，已形成了一门类似量子电动力学(简称 Q.E.D) 的量子色动力学(简称 Q.C.D)．这种超强相互作用，除满足所有我们已知的守恒定律外，还要满足色荷守恒定律。简单地讲 Q.E.D 和 Q.C.D 的主要差别，在于 Q.E.D 的规范群是可对易的 $U(1)$ 群，而 Q.C.D 的规范群是非对易的 $SU(3)$ 群，可是正是由于这一点，这两种相互作用却有了本质的不同。关于 Q.C.D 的详细情况，将在讲了规范场论以后，再作介绍。

(b) 强相互作用：介子和重子之间的相互作用即属强相互作用，同样我们对它的本质的认识也很不清楚，不过我们可以唯象地引进介子和重子之间的 $\mathscr{L}_{相互}$ 来描述。据分析表征 K 介子和重子间的相互作用的耦合常数的数量级为 $g_K^2/\hbar c \sim 1$，而 π 介子的 $g_\pi^2/\hbar c \sim 10$，它对不同的重子的强度可能也是不相同的。

这里所介绍的强相互作用，和前面介绍的强子内部的超强相

互作用，究竟有怎样的关系，目前尚不清楚，一个引人注意的猜想，就是很可能象分子内部和原子内部的相互作用都是来源相同的电磁相互作用一样，强作用和超强作用也可能是来源于相同的一种相互作用，很可能强子间的强相互作用是来自夸克间超强相互作用的剩余作用，不过这需要我们继续去研究。

强相互作用里，除了满足动量能量、角动量、粒子数、电荷守恒等普遍规律外，还满足宇称，电荷共轭，同位旋等守恒定律。

(2) 电磁相互作用：其强度由耦合常数 $e^2/\hbar c \cong \frac{1}{137}$ 所表征，所有荷电粒子和光子的相互作用均属此类。电磁作用除了要满足动量角动量、电荷、粒子数守恒等普遍规律外，还满足宇称守恒，电荷共轭不变，及同位旋第三分量 T_3 守恒等规律，但总同位旋是不守恒的。

(3) 弱相互作用：其强度约为电磁相互作用的 10^{-11} 倍，粒子的衰变过程及轻子间的相互作用均属此类，目前较有希望的理论应属由 Weinberg-Salam 相互独立提出的弱、电相互作用统一的规范理论。在这里弱作用也是通过所谓的中间玻色子来传递的，不过由于中间玻色子的质量很大，约数十个GeV，因而在低能时可以和早期的 V-A 型费米相互作用等效。关于弱电统一理论也将在讲了规范场理论以后，再作仔细分析。在弱相互作用里宇称和电荷共轭分别并不守恒，但二者复合变换是守恒的。(不过实验也发现了破坏 PC 守恒的更弱的超弱相互作用。关于超弱相互作用的来源目前更不清楚。)同位旋守恒也遭到破坏。

由此看来，相互作用愈强其所满足的守恒定律也愈多。其 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 所具有的对称性质也愈高。

值得指出，可能有多种的相互作用同时参予同一过程，例如在具有强相互作用的粒子的衰变过程，就应考虑强作用的影响。

此外，$\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 中含有场量 φ 对时空的微商者称为微分相互作用，否则称为直接相互作用。只有在同一时空点的场量才能有相互作用者，称为定域相互作用，否则称为非定域相互作用，这是对

相互作用的另一种分类方法。

§7.3 轻、重粒子数守恒定律

质量等于或大于核子质量的，而且具有强相互作用的Dirac粒子一般统称为重子，例如核子、超子皆是重子。不具有强相互作用的Dirac粒子一般统称为轻子，一般其质量都轻于核子质量，例如μ介子、电子和中微子皆是轻子。可是自1975年发现重轻子τ(它的质量约为电子的四千倍)以后，轻子已不再以质量轻于核子为其特征，而是以不具有强相互作用为特征。我们给每一个重(或轻)子的重子数(或轻子数)定为$+1$，同时给定每一重(或轻)子的反粒子的重子数(或轻子数)为-1。

在自由场的情况下，每一种粒子的粒子数(即正粒子数和反粒子数之差)是分别守恒的。但在场有相互作用时，每一种粒子的粒子数将不再是分别守恒的，也只有这样才能反映出粒子间相互转换的事实。这就是说任一粒子的粒子数分别守恒，将要遭到场相互作用的破坏。可是实验告诉我们重粒子数却经常是保持守恒的。也就是说在过程的前后，所有重粒子数的代数和是保持不变的。重子数守恒是原子核具有稳定结构的根本保证，否则原子核内的核子将会转换为其他更轻的粒子。同样也有大量事实证明轻子数也是经常守恒的，这也是电子具有稳定结构的根本要求。

因此$\mathscr{L}_{相互}$虽不能在任何一种场的单独相变换下保持不变，然而在重粒子(或轻子)的同时相变换下，$\mathscr{L}_{相互}$应具有保持不变的对称性质，也就是在下列相变换下：

$$\left.\begin{aligned}&\psi \to \psi' = e^{i\epsilon}\psi\\&\Psi \to \Psi' = e^{-i\epsilon}\Psi\end{aligned}\right\}\ \text{对于所有的重子(或轻子)}$$
$$\varphi \to \varphi' = \varphi \qquad \text{对于玻色子} \tag{3.1}_7$$

其中ϵ为一任意实数，$\mathscr{L}_{相互}$应保持不变。

自由场的Lagrange在以上变换下，本来就是保持不变的，如果$\mathscr{L}_{相互}$具有上述对称性质，则整个体系的总Lagrange将具有以

上的对称性质。类似§2.4的推导可以得到重子数(或轻子数)守恒的结论。实际上，如果$\mathscr{L}_{相互}$中的重子的$\bar{\psi}_B$和ψ_B（或轻子的$\bar{\psi}_l$和ψ_l)成对出现，则在以上的相变换下$\mathscr{L}_{相互}$将会保持不变。可是如果ψ或$\bar{\psi}$单独出现(这时已不满足$\mathscr{L}$为实的要求)，或者重子和轻子的场算符在一起成对出现，例如$\bar{\psi}_B\psi_l$，都将破坏重子数(或轻子数)守恒，而为我们所不取。

既然重子数(或轻子数)是守恒的，当然两者之和也是守恒的。这样就导致了费米数的守恒。所谓费米数，即规定所有费米粒子的费米数为+1，而所有费米粒子的反粒子的费米数为−1。

近来关于相互作用的大统一理论中，有的理论（例如$SU(5)$大统一理论)预言了质子可能衰变为πe^+。如果真是这样，那末轻、重粒子数将不是严格守恒的，不过到目前为止，质子衰变尚未得到实验证实。

§7.4 电荷守恒定律与规范不变性

电荷守恒定律和动量能量、角动量守恒定律一样都是普遍成立的。虽然以前在自由场情况下，我们也讨论过电荷守恒定律，不过在那里电荷守恒定律实际上和(荷电粒子的)粒子数守恒定律是一致的。上节我们已经谈到在场相互作用时，每种粒子的粒子数并不是保持不变的，因此每一种粒子的荷电状态在过程前后是可能改变的，但体系的总电荷却是保持不变的。例如核子的β衰变$n\to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$，初态核子处于中性的中子状态，而它衰变后就成为带正电的质子态，也就是核子的电荷在过程前后改变了。但体系的总电荷在衰变前后都是为零。在场相互作用下，电荷守恒定律有更深刻的含意，它是和$\mathscr{L}$在即将介绍的规范变换下，保持不变的对称性质相对应。

以前我们已介绍过，粒子数守恒是和相应的、与时空无关的位相变换相联系的，这种变换常称为整体规范变换。电荷守恒则是和更为深刻的，定域规范变换相对应的。考虑荷电粒子同时进

行与时空有关的位相变换，通常就称这种变换为定域规范变换。

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi \to \Phi'(x) = e^{iq\epsilon(x)}\Phi(x),\\&\Phi^* \to \Phi^{*\prime}(x) = \Phi^*(x)e^{-iq\epsilon(x)}。\end{aligned}} \qquad (4.0)_7$$

其中 q 为单粒子量子力学中的电荷算符。要求体系的 $\mathscr{L}$ 在以上定域规范变换下保持不变一般是有困难的；必须在 $\mathscr{L}$ 中引进规范场 $A_\mu(x)$。在我们现在的情况下，就是要引进电磁矢势。并且要求 $A_\mu(x)$ 在 $(4.0)_7$ 式的变换的同时，也要进行相应的规范变换，即

$$\boxed{A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x)。} \qquad (4.1)_7$$

上式的规范变换其实和我们在电动力学里所遇到的规范变换形式是一致的。以上 $(4.0)_7$ 和 $(4.1)_7$ 式中的 $\epsilon(x)$ 是相同的。

对于每一时空点，荷电粒子的场算符的规范变换和普通的位相变换是一致的，可是场算符的时空微商 $\partial_\mu\phi(x)$ 的规范变换和普通的位相变换就并不一致。不过可以证明 $(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi(x)$ 的规范变换是和普通的位相变换相一致的。$(\partial_\mu - iqA_\mu(x))\phi(x)$ 则称为 $\varphi(x)$ 的规范协变微商。

$$\begin{aligned}&(\partial_\mu - iq\,A'_\mu(x))\varphi'(x)\\&= [\partial_\mu - iq(A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x))]\cdot e^{iq\epsilon(x)}\varphi(x)\\&= e^{iq\epsilon(x)}[\partial_\mu + iq\partial_\mu\epsilon(x) - iq\,A_\mu(x) - iq\partial_\mu\epsilon(x)]\varphi(x)\\&= e^{iq\epsilon(x)}\cdot(\partial_\mu - iq\,A_\mu(x))\varphi(x)。\end{aligned} \qquad (4.2)_7$$

同样可得到：

$$\varphi^{*\prime}(x)\cdot(\delta_\mu + iq\,A'_\mu(x)) = \varphi^*(x)(\delta_\mu + iq\,A_\mu)e^{-iq\epsilon(x)}。 \qquad (4.3)_7$$

以上 ∂_μ 符号和 δ_μ 符号分别表示对右和对左边函数的微商。这说明 $(\partial_\mu - iq\,A_\mu(x))\varphi(x)$ 在规范变换下如同 $\partial_\mu\phi(x)$ 经过一个普通（与时空无关）位相 ϵ 变换一样。同时我们已知对于任一种自由场在常数的位相变换下都是保持不变的。因而在自由（复数）场的 $\mathscr{L}$ 中作如下的代换，即

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_\mu\varphi(x)\to(\partial_\mu-iA_\mu q)\varphi(x),\\&\varphi^*\delta_\mu\to\varphi^*(x)(\delta_\mu+iqA_\mu)。\end{aligned}}\qquad(4.4)_7$$

由此所得到的新的$\mathscr{L}$将在规范变换下保持不变。我们以后将由上式代换来得到荷电粒子与光子的电磁相互作用。得到电磁相互作用的这种方式常称为最小电磁作用原理。

值得附带提出，以上的定域规范变换相当于依赖于时空的位相变换，而位相变换则是$U(1)$群的元素，因而电磁场有时也称为$U(1)$群的规范场。杨振宁和Mills(1954年)曾研究了非对易的$SU(2)$群的规范场。并且指出，如果荷电粒子场在$(4.0)_7$式的依赖时空的位相变换下，要求$\mathscr{L}$保持不变，则必然导致要存在另一矢量场$A_\mu(x)$。与荷电粒子的依赖时空的相变换同时，它应有相应的变换$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\epsilon(x)$。而且该矢量场(通常称为规范场)和荷电粒子的相互作用，正是由上述的最小电磁相互作用原理所引入的形式。规范不变原理为场相互作用的引入确定了唯一的方式。

类似§2.4的推导可以得出，与$\mathscr{L}$的规范不变性相应，存在一个守恒定律，这就是电荷守恒定律。类似$(4.3)_2$式的推导。令$\epsilon(x)\to0$得到

$$\begin{aligned}\delta I=&-i\oint_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi+\delta\varphi^*\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*(x))}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu\right]d\sigma_\mu\\=&-i\oint_\Sigma\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}iq\epsilon(x)\varphi(x)-iq\phi^*(x)\epsilon(x)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right.\\&\left.+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\partial_\nu\epsilon(x)\right]d\sigma_\mu=0。\end{aligned}$$

因而
$$\begin{aligned}&\partial_\mu\left\{\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}iq\varphi(x)-i\varphi^*(x)q\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*(x))}\right]\epsilon(x)\right.\\&\left.+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\partial_\nu\epsilon(x)\right\}=0。\end{aligned}\qquad(4.5)_7$$

微分可得

$$\left[j_\mu+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,iq\varphi(x)-i\varphi^*(x)q\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right)\right]\partial_\mu\epsilon(x)$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\,\partial_\mu\partial_\nu\epsilon(x)$$
$$+\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,iq\varphi(x)-i\varphi^*(x)q\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right)\right]\cdot\epsilon(x)=0, \tag{4.6}_7$$

其中 q 为单粒子量子力学的电荷算符，并且以上利用了场方程(参看$(1.5)_2$)

$$\boxed{\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\nu}\equiv j_\nu} \tag{4.7}_7$$

如果自由光子的 $\mathscr{L}_{光子}$ 取为具有规范不变性的 $\mathscr{L}_{光子}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 则 $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-F_{\mu\nu}$，对于 μ，ν 是反对称的，而 $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon(x)$对于 μ，ν 是对称的，因而 $(4.6)_7$ 式第二项为零。此外因为 $\epsilon(x)$满足二阶微分方程 $\Box\epsilon(x)=0$，所以 $\partial_\mu\epsilon(x)$和 $\epsilon(x)$是可以任意变更且相互独立的。因而$(4.6)_7$式为零就要求它们前面的系数为零，即

$$j_\mu=-i\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\,q\varphi-\varphi^*q\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right]。 \tag{4.8}_7$$

上式和$(4.7)_7$式相比实际上就是对电磁相互作用的 $\mathscr{L}_{相互}$ 的一种限制。此外由 $\epsilon(x)$的系数为零就得到电荷守恒定律

$$\partial_\mu j_\mu=0。 \tag{4.9}_7$$

虽然$(4.9)_7$式和$(4.5)_2$式形式上是一致的，但是$(4.8)_7$式中的 $\varphi(x)$或 $\varphi^*(x)$都是有相互作用下的场算符。这一点和$(4.5)_2$式中的 $\varphi(x)$或 $\varphi^*(x)$ 是自由场的场算符，其内容是不相同的。这一点也反映在$(4.8)_7$式中的 $\mathscr{L}$ 包括有 $\mathscr{L}_{相互}$，而在$(4.5)_2$式中的 $\mathscr{L}$ 却没有包括 $\mathscr{L}_{相互}$ 这一事实上面。

§7.5 电荷无关性与同位旋守恒

大量事实证明，在忽略电磁相互作用的效应及中子和质子的

质量差之下，不仅中子和质子的本身特性相近，而且核子之间的核力也是与它们的电荷状态无关的，即(n, n)之间的核力与(p, p)之间的核力(除去电磁效应)是相等的，这一事实通常称之为电荷对称。不仅如此，(n, p)之间的核力与(n, n)或(p, p)之间的核力也是相等的。这些事实则称之为电荷无关性。当然电荷无关性包含了电荷对称，但反之则不然。

电荷对称首先表现在镜象原子核在忽略了电磁效应以后具有相等的结合能和能级。所谓互为镜象的原子核，即它们可由$p\leftrightarrow n$互换而彼此得到对方的一对原子核，例如 H^2, He^2; B^{11}, C^{11}; C^{13}, N^{13}; 以及 C^{14}, O^{14} 等皆是，它们之间的差别在于中子数和质子数不同。应用同位旋的概念，我们可以说它们的差别在于同位旋第三分量不同。镜象原子核都彼此具有相近的能级，其能级的微量差别可以归之为电磁相互作用的不同所引起，这说明在忽略电磁相互作用下(p, p)之间和(n, n)之间的核力作用是相等的。这也就说明了核力的电荷对称性。进一步的研究知道，在一般的情况下(不限于镜象原子核)当忽略电磁相互作用以后，相同核子数所组成的原子核的能级几乎完全由它们的自旋、轨道运动以及总同位旋T所决定，而与T的第三分量$T^{(3)}$的数值无关，例如 B^{12}, C^{12} 和 N^{12} 的基态 $T=1$ 而 $T^{(3)}$ 分别为 -1, 0 和 $+1$，它们的能级只相差~ 4MeV。又如基态 $C^{14}(T=1, J=0^+)$ 和基态 $O^{14}(T=1, J=0^+)$ 它们的能级也是很相近的。原子核的能级只依赖于其总同位旋而与同位旋的第三分量无关。这说明原子核的能级与其中核子处于中子状态或质子态无关。这正是以上所讲的电荷无关性。核子体系的相互作用(忽略电磁相互作用)只与其总同位旋有关，而与同位旋第三分量无关，这正是电荷无关性用同位旋概念的描述。这一事实，可以进一步由核子间的相互作用在同位旋空间旋转下保持不变的对称性质来加以说明。

核子体系在同位旋空间旋转下保持不变，即要求$\mathscr{L}$(因而哈密顿函数H)都应是同位旋空间的不变量。因而当同位旋空间旋转时，不改变H的本征态及其相应的本征值。同样总同位旋也是

同位旋空间的不变量，因此同位旋空间的旋转也不改变总同位旋的数值。可是同位旋的第三分量在同位旋空间旋转时是要改变其数值的。因此在这样对称性质的条件下，能级是不能依赖于同位旋第三分量的。对于一定总同位旋 T 的 $(2T+1)$ 个不同的指向的态，其能级经常是相近的。这些 $(2T+1)$ 个相近的能级的整体称为同位旋多重结构，这和原子的由磁量子数不同所引起的多重结构是相似的。不过前者是由同位旋空间的对称性所引起，而后者则由普通空间里的对称性所引起。

在同位旋空间旋转下保持不变的对称性质，对应体系的总同位旋守恒。这一结论也是有事实支持的。例如在 $O^{16}+d\to\alpha+N^{14}$ 的过程中，我们从未发现 N^{14} 处在第一激发态，虽然根据角动量和宇称等守恒定律，N^{14} 处在第一激发态是完全可能的。可是 O^{14}、氘核 d 及 α 粒子的同位旋都是为零，而 N^{14} 的第一激发态的同位旋为 1（这是由原子核的壳层结构以及其他实验所预料的）。根据同位旋守恒定律，这个过程却是禁戒的。实际上我们也没有观察到这样的过程。在涉及 π 介子的强作用过程中，也同样出现同位旋守恒的情况，例 $d+d\nrightarrow\alpha+\pi^0$，在这个过程中，除 π 介子的同位旋为 1 外，其余粒子的同位旋都为零，因而根据同位旋守恒，这个过程是禁戒的，虽然它可以满足其他的守恒定律，实际上我们确也没有观察到这样的过程。

同位旋概念及其守恒的结论，在忽略电磁相互作用下，也适用于奇异粒子，这将要求体系的 $\mathscr{L}$ 应是个同位旋空间的标量。当然以上这些都是在忽略电磁相互作用和弱相互作用的条件下而言的。

§7.6 PCT 定 理

对于自由场在 P、C 或 T_w 的分别变换下都是保持不变的，这在上章里已讨论过。因而在某类相互作用里，如果在 P，C 或 T_w 分别变换下是守恒的，只须相互作用的 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 在 P，C 或 T_w 分别

变换下保持不变就能保证 $\mathscr{L}$ 在相应的变换下保持不变。总的来说只需要 $\mathscr{L}$ 分别取以下形式就满足了要求，即

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L} &\to \frac{1}{2}(\mathscr{L}+P\mathscr{L}P^{-1}),\\ \mathscr{L} &\to \frac{1}{2}(\mathscr{L}+C\mathscr{L}C^{-1}),\\ \mathscr{L} &\to \frac{1}{2}(\mathscr{L}+T_w\mathscr{L}T_W^{-1})。\end{aligned}\right\} \tag{6.0}$$

P, C 或 T_w 是否分别守恒的问题，在各类相互作用领域里，还要进一步受到实验的检验。可是 P, C, T_w 三者的复合变换，不论在那类相互作用之下，都应该经常是守恒的。这就是所谓 PCT 定理。

Lüders 在 1957 年 [参看 Annals of physics **2**, 1(1957)] 曾证明了以下的定理(PCT 定理)：如果在场论中保持以下的基本要求：

(1) 在正 Lorentz 变换下保持不变；

(2) 哈密顿是厄密的；

(3) 满足通常的自旋和统计的关系；

(4) 场算符是定域的。

则任何体系在 PCT 的复合变换下经常是保持不变的，而且与 PCT 所取的顺序无关，也就是

$$[PCT,\ H]=0。$$

这里我们不再重复 Lüders 的工作，只是利用以前所得到的具体结果，在下面对这个定理做简单的说明。

总结以前对自由场的讨论，我们可以证明在(PCT)变换下所有偶阶张量除了其宗量 $x\to -x$ 外保持不变，而奇阶张量在(PCT)变换下，除 $x\to -x$ 外还要改变符号。这个结论对赝张量也同样适用(参看$(3.29)_6$式)。

此外微商的变换如下，例如

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\to\frac{\partial\varphi'(x)}{\partial x_\mu}=\frac{\partial\varphi(-x)}{\partial x_\mu}=\frac{-\partial\varphi(-x)}{\partial(-x_\mu)}, \tag{6.1}$$

和矢量场在(PCT)变换下相同。此外张量$\delta_{\mu\nu}$和$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$它们都是偶阶的，同时在$(PCT)$变换下，它们也都是保持不变的。因而由$\varphi(x)$，$\varphi^*(x)$，$A_\mu(x)$和$\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]$及其微商和张量$\delta_{\mu\nu}$和$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$相乘所得的各阶张量，在$(PCT)$变换下也将具有同样性质，即偶阶张量不变符号，而奇阶张量改变符号。

我们还应该考虑到在时间反演下，要引起算符顺序的颠倒的运算。我们在以前已讲过(参看$(5.7)_2$式)，体系的$\mathscr{L}$中玻色场都应以对称的组合出现，而Dirac场都应以反对称的组合出现。因而顺序的颠倒并不影响以上的结论。

体系的$\mathscr{L}$不管它的具体形式如何，由Lorentz协变的要求应该为一标量(或赝标量)，总之为一偶阶张量。因而在(PCT)的变换下是经常保持不变的。也就是说Lorentz协变，正确的自旋和统计的关系(这反映在玻色场以对易方式量子化，而Dirac场以反对易方式量子化)等要求下，将自动导致$\mathscr{L}$在(PCT)复合变换下保持不变的结论。虽然在P、C和T中任两个不变同时遭到破坏是完全可能的，例如P和C在弱相互作用里都遭到破坏就是典型的一个例子。可是即使在弱相互作用里(PCT)的复合变换依然是保持不变的。

以上我们讨论了引入具有某种对称性质的$\mathscr{L}_{相互}$的基本原则，下面我们就介绍若干常用的$\mathscr{L}_{相互}$的具体示例。

§7.7 πN的强相互作用

经过数十年的研究，强子是由下一层次的组元夸克所组成的概念，已被人们所接受。而且发展了一套处理夸克之间相互作用的量子色动力学Q. C. D。按照Q. C. D理论，夸克之间是通过交换带"颜色"的胶子而相互作用的，胶子场则是非对易的$SU_c(3)$群的规范场。根据规范不变的原理，胶子和夸克之间的相互作用的形式是完全被确定了。对于非对易的规范理论的研究，发现

Q. C. D 中规范相互作用具有所谓渐近自由的性质，也就是其相互作用常数 g 是与动量转移有关的。当动量转移增大时，也就是当相互距离趋近时，其相互作用常数就减少，反之当动量转移减少，即相互距离增大时，其相互作用常数 g 也增大，因此虽然相互作用形式已知，而实际计算在目前阶段，还只能在高动量转移近距离区域，可用微扰理论来进行。一般情况下，特别是在低动量转移远距离区，尚未有完善的计算方法。在高动量转移近距离区，特别是在深度非弹性散射的过程中，Q. C. D 微扰论的计算结果和目前实验数据是相容的，这就增加了人们对 Q. C. D 的信心，不过关于这方面的计算，暂时还是等到学过规范场论以后再介绍。

由夸克组成的强子和强子之间，例如 π 和 N 之间的强相互作用情况就更为复杂，其本质很可能和强子内部夸克之间的强相互作用有同一来源。不过目前我们还没有很好地建立这样的联系的基础理论。这方面正有待我们进一步去研究。目前我们只能从唯象的角度来研究诸如 πN 之间的强相互作用。也就是唯象地引进 $\mathscr{L}_{相互}$。

根据 Yakawa 的理论，核子间的相互作用是通过核子间交换 π 介子而来，因而核子间相互作用的电荷无关性（也就是在同位旋空间旋转下保持不变的性质）应该是来自 π 介子和核子的相互作用，在同位旋空间旋转不变性。也就是说为了保证核力的电荷无关性，π 介子与核子的相互作用 Lagrange $\mathscr{L}_{相互}$ 应具有在同位旋空间旋转下保持不变的对称性质。同时由 πN 散射的实验数据，也直接证实了这样的对称性质，也就是体系的总同位旋在过程前后是守恒的。简言之也就是 πN 的 $\mathscr{L}_{相互}$ 应该是个同位标量。此外由核子数守恒要求，在 $\mathscr{L}_{相互}$ 中 $\bar{\psi}_N$ 和 ψ_N 要成对出现。Kemmer 根据以上提到的一般考虑，提出了 Yakawa 型直接相互作用，且具有最简单形式的 $\mathscr{L}_{相互}$ 如下：

$$\boxed{\mathscr{L}_{相互} = -iG\bar{\psi}_N\tau\gamma_5\psi_N\cdot\varphi_\pi \rightarrow \frac{i}{2}G[\bar{\psi}_N,\ \tau\gamma_5\psi_N]\cdot\varphi_\pi,} \qquad (7.1)_7$$

其中 G 为相互作用常数。为简单起见，下面我们略去 ψ_N 和 φ_π 的下标 N 和 π 而记为 Ψ 和 φ。

上式实际上就是同位标量同时又是时空标量的最简单的形式。由于上式的标量是由赝标 $\varphi(x)$ 和赝标 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ 相乘而得，所以我们常称上式为赝标-赝标耦合。

此时总 Lagrange 即为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}_N+\mathscr{L}_\pi+\mathscr{L}_{相互}\\&=-\frac{1}{4}[\bar{\Psi},\ (\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu+2M)\Psi]-\frac{1}{2}[\partial_\mu\vec{\varphi}\cdot\partial_\mu\vec{\varphi}+m^2\vec{\varphi}\vec{\varphi}]\\&\quad-\frac{i}{2}G[\bar{\Psi},\vec{\tau}\gamma_5\Psi]\cdot\vec{\varphi}。\end{aligned}\tag{7.2}_7$$

以上我们忽略了质子和中子的质量差，以及电磁相互作用。

容易看出上式在坐标平移、旋转、空间反演以及同位空间旋转和核子位相变换下保持不变，也就是说在上式相互作用下，体系的动量能量、角动量、宇称以及同位旋和核子数都是守恒的。

利用 Lagrange 方程$(1.5)_2$，由上式可得此时场方程为

$$\left.\begin{aligned}&(\Box-m^2)\vec{\varphi}=\frac{i}{2}G[\bar{\Psi},\ \gamma_5\vec{\tau}\psi],\\&(\gamma_\mu\partial_\mu+M)\Psi=-iG\gamma_5\vec{\tau}\Psi\cdot\vec{\varphi},\\&\bar{\Psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial\!\!\!/}_\mu-M)=iG\bar{\Psi}\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}。\end{aligned}\right\}\tag{7.3}_7$$

利用$(2.4)_2$和$(4.5)_2$式可得到动量能量，粒子流和守恒的同位旋流的表达式。

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}[\bar{\Psi}\partial\!\!\!/_\mu\gamma_\nu\Psi]+\partial_\mu\vec{\varphi}\cdot\partial_\nu\vec{\varphi}+\mathscr{L}\delta_{\mu\nu},\\J_\mu&=\frac{i}{2}[\bar{\Psi},\ \gamma_\mu\Psi],\\\vec{J}_\mu&=\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi+(\partial_\mu\vec{\varphi})\times\vec{\varphi}。\end{aligned}\tag{7.4}_7$$

直接由场方程 $(7.3)_7$ 式也可直接证明 $\partial_\nu T_{\mu\nu}=0$，$\partial_\mu J_\mu=0$ 和 $\partial_\mu\vec{J}_\mu=0$ 即动量能量守恒，核子数守恒和同位旋守恒。

由 $T_{\mu\nu}$ 可以求得哈密顿密度函数 $\mathscr{H}$，由此就可求得相互作用的哈密顿密度 $\mathscr{H}_{相互}$

$$\mathscr{H}_{\text{相互}}=\mathscr{H}-\mathscr{H}_N-\mathscr{H}_\pi=-\mathscr{L}_{\text{相互}}=\frac{i}{2}G[\overline{\Psi},\ \gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi]\cdot\underset{\sim}{\varphi}。$$

$$(7.5)_7$$

$\mathscr{H}_{\text{相互}}=-\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 这个结论对于直接相互作用具有一般性。

我们也可以对 πN 体系引进电荷无关的赝矢相互作用，其最简单的形式为

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{相互}}=i\frac{f}{m}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi\partial_\mu\underset{\sim}{\varphi}。}\qquad(7.6)_7$$

其中 m 为 π 介子的质量。根据 Lagrange 方程$(1.5)_2$式此时可得场方程

$$\left.\begin{aligned}&(\Box-m^2)\underset{\sim}{\varphi}=i\frac{f}{m}\partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi),\\&\left[\gamma_\mu\left(\partial_\mu-\frac{if}{m}\partial_\mu\underset{\sim}{\varphi}\cdot\underset{\sim}{\tau}\gamma_5\right)+M\right]\Psi=0。\end{aligned}\right\}\qquad(7.7)_7$$

$(7.6)_7$ 式的 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 也具有我们以上所提到的对称性质。不过它含有对 $\varphi(x)$的微商，即属于微分相互作用，这在应用重整化理论来消除发散时常常带来困难。因而在理论上，赝标相互作用要比赝矢相互作用完整些。不过可以证明赝矢相互作用和赝标相互作用，在非相对论近似，忽略核子对的效应的情况下是相互等效的。

利用 §1.11 的结论，在非相对论近似并忽略核子对的效应的情况下，$\gamma_4\gamma_5$ 为一级微量，而

$$\left.\begin{aligned}&\gamma\gamma_5=\begin{vmatrix}i\sigma & 0\\ 0 & -i\sigma\end{vmatrix}\Rightarrow i\sigma;\\&\gamma_5\Rightarrow\frac{\sigma\cdot(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f)}{2M}\qquad\text{参看}(11.6)_1\end{aligned}\right\}\qquad(7.8)_7$$

因而在非相对论近似下，在动量表象里为

$$\underset{(\text{赝标})}{\mathscr{L}_{\text{相互}}}=-iG\overline{\Psi}\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi\cdot\underset{\sim}{\varphi}\Rightarrow\frac{iG}{2M}\overline{\Psi}(\sigma\cdot\boldsymbol{q})\underset{\sim}{\tau}\Psi\cdot\underset{\sim}{\varphi},$$

而
$$\underset{(\text{赝矢})}{\mathscr{L}_{\text{相互}}}=\frac{if}{m}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi\partial_\mu\underset{\sim}{\varphi}\Rightarrow\frac{-if}{m}\overline{\Psi}(\sigma\cdot\boldsymbol{q})\underset{\sim}{\tau}\Psi\cdot\underset{\sim}{\varphi}。$$

以上我们已考虑了动量守恒定律，有 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_f$ 关系，其中 $\boldsymbol{q}$ 为 π 介子的动量。

比较以上两式可知这两种相互作用在非相对论近似下是等效的，只要取

$$\frac{f}{m}=\frac{G}{2M}。\qquad (7.9)_7$$

更完整的证明可参看 S. O. Drell 和 E. M. Henley: Phys. Rev. **88**(1952)1053. 实际上 Chew 和 Low 就是应用$(7.6)_7$式的$\mathscr{L}_{相互}$讨论了 πN 散射，并近似地认为核子是静止的，得到了一定的成效。

应该指出，以上的等效性只在低级效应下才是适用的。在以上的证明中，曾利用了 γ_5 在非相对论极限下(即 $p_i, p_f \ll M$)是个微量，可是 $\gamma_5^2=1$ 却并不是个微量，因而 γ_5 的二级效应要比其一级效应更为重要，所以对于高级效应这两种相互作用是会有不同结果的。

§7.8 奇异粒子的强相互作用

奇异粒子系指 K 介子和超子的统称，这些粒子发现较迟，早期认为它们是有一些奇异的性质故称为奇异粒子。

在由 πN 碰撞而产生奇异粒子时，根据它的有效截面可知奇异粒子的产生是通过强相互作用所引起，但是在奇异粒子衰变为 π 和 N 时其生命期约为$\sim 10^{-10}$ 秒数量级。而相对于强相互作用相应的典型生命期数量级$\sim 10^{-23}$ 秒来讲，却又是显得很长，这说明奇异粒子的衰变却又是通过弱相互作用引起。此外，在产生奇异粒子的碰撞过程中，从未发现只有单独一个奇异粒子参与。在产生奇异粒子的碰撞过程中，经常要涉及二个或两个以上的奇异粒子，这就是所谓奇异粒子的组合产生的现象；以上这些都是当时认为奇异的性质。

同位旋的概念可以推广到奇异粒子，利用同位旋守恒，根据不同散射过程可以把不同的奇异粒子的同位旋确定下来。而且根据同位旋守恒，也可以说明某些未曾发现的过程，是属于同位禁戒的，但是同位旋守恒还不足以说明奇异粒子的组合产生的现象。为了说明奇异粒子的组合产生的现象。Gell-Mann(1956 年)和

Nishijima(1955 年)提出所谓奇异数守恒定律：按照以下的定义，来赋予强作用粒子以新的量子数称为奇异数，记作 S

$$S=2\left(\frac{Q}{e}-T_3\right)-B。 \qquad (8.1)_7$$

所有轻子和光子其 S 值没有定义。

按照这样的规定，所有较早发现的粒子例如 π 和 N 的奇异数均为零，而较晚发现的粒子，有些其奇异数不为零称为奇异粒子(具体数值，参考下表)。并且认为在强相互作用里奇异数是守恒的(实际上，由于上式右方在电磁相互作用里都是守恒的，因而在电磁相互作用里，奇异数也是守恒)。因此在强作用的碰撞过程中不能只有单独一个奇异粒子参与。这不仅可以很自然地解释了奇异粒子的组合产生现象，而且还得到了另外的实验支持，例如 $\pi^{(-)}+N-K^{(-)}+\Lambda$ 这个过程并不违背组合产生原则，但却不满足奇异数守恒。实际上也是没有发现这样的过程。在弱相互作用里，奇异数则不守恒，$\Delta S=\pm 1$，因而在弱相互作用下的衰变过程中，是允许单独奇异粒子参与的。上面谈到的奇异粒子衰变过程就是属于这种奇异数改变的弱衰变过程。

最好引进超荷(记以 Y)来代替奇异数，并以下式定义之。

$$Y=S+B, \qquad (8.2)_7$$

把$(8.1)_7$式代入上式可得

$$\frac{Q}{e}=T_3+\frac{Y}{2}。 \qquad (8.3)_7$$

自旋宇称	0^-					$1/2^+$				
T_3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$
Y	SU_3 多重结构									
1		K^0		K^+			n		p	
0	π^-		$\begin{bmatrix}\pi^0\\ \eta^0\end{bmatrix}$		π^+	Σ^-		$\begin{bmatrix}\Sigma^0\\ \Lambda^0\end{bmatrix}$		Σ^+
-1		K^-		$\overline{K}^0$			Ξ^-		Ξ^0	

基本粒子				主要性						
分类名称			符号	J^{PC}	I^G	S	粲数 c	I_3	电荷 e	质量(MeV)
光子			γ	1^{--}	0				0	$0(<6\times10^{-22})$
轻子			ν_e	$\frac{1}{2}$					0	$0(<6\times10^{-5})$
			e						-1	0.5110034 ±0.0000014
			ν_μ	$\frac{1}{2}$					0	$0(<0.57)$
			μ						-1	105.65946 ±0.00024
			ν_τ	$\frac{1}{2}$					0	$0(<250)$*
			τ						-1	1807±20
强子	介子	η 介子	π^+	0^-	1^-	0	0	$+1$	$+1$	139.5669±0.0012
			π^0	0^{-+}				0	0	134.9626±0.0039
			π^-	0^-				-1	-1	139.5669±0.0012
		K 介子	K^+	0^-	$\frac{1}{2}$	$+1$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	493.668±0.018
			K^-			-1		$-\frac{1}{2}$	-1	
			$\bar{K}^0$	0^-	$\frac{1}{2}$	-1	0	$+\frac{1}{2}$	0	497.67±0.13
			K^0			$+1$		$-\frac{1}{2}$		
			K_S^0	0^-	$\frac{1}{2}$		0		0	
			K_L^0							
		η 介子	η	0^{-+}	0^+	0	0	0	0	548.8±0.6
			$\eta'(x^0)$							957.6±0.3
		共振介子	ρ^+	1^{--}	1^+	0	0	$+1$	$+1$	~770
			ρ^0					0	0	
			ρ^-					-1	-1	
			K^{*+}	1^-	$\frac{1}{2}$	$+1$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	892.2±0.4
			K^{*-}			-1		$-\frac{1}{2}$	-1	

注：表中只列出稳定粒子及少量共振粒子和新粒子。表中未列出轻子和重子的

* 初步实验数据，尚待进一步确定。

简表

质	衰	变
平均寿命 τ 或全宽度 Γ	主 要 方 式	百 分 比 %
∞	稳 定	
$\sim\infty$ $\sim\infty(>5\times10^{21}$ 年)	稳 定	
$\sim\infty$ $(2.197134\pm0.000077)\times10^{-6}$s	稳 定 $e^-\bar{\nu}\nu, e\bar{\nu}\nu\gamma$	98.6±0.4, 1.4±0.4
$\lesssim10^{-12}$s*	$\mu^-\bar{\nu}\nu, e^-\bar{\nu}\nu$	17.5±1.7, 17.9±2.8
$(2.6030\pm0.0023)\times10^{-8}$s $(0.828\pm0.057)\times10^{-16}$s $(2.6030\pm0.0023)\times10^{-8}$s	$\mu^+\nu_\mu$ $\gamma\gamma, e^+e^-\gamma$ $\mu^-\bar{\nu}_\mu$	~100 98.85±0.05, 1.15±0.05 ~100
$(1.2371\pm0.0026)\times10^{-8}$s	$\mu^\pm\nu_\mu$, $\pi^\pm\pi^0\pi^\pm\pi^\pm\pi^\mp$ $\pi^\pm\pi^0\pi^0$, $\mu^\pm\nu_\mu\pi^0$, $e^\pm\nu_e\pi^0$	65.50±0.6, 21.16±0.15, 5.59±0.03 1.73±0.05, 3.20±0.09, 4.82±0.05
50% K_S, 50% K_L		
$(0.8923\pm0.0022)\times10^{-10}$s $(5.183\pm0.040)\times10^{-8}$s	$\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$ $3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^\pm\mu^\mp\nu_\mu$ $\pi^\pm e^\mp\nu_e$, $\pi e\nu\gamma$	68.61±0.24, 31.39±0.24 21.5±0.7, 12.39±0.18, 27.0±0.5 38.8±0.5, 1.3±0.8
0.85±0.12 keV <1 MeV	$\gamma\gamma$, $\pi^0\gamma\gamma$, $3\pi^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^+\pi^-\gamma$, $\eta\pi\pi$ $\rho^0\gamma, \omega\gamma, \gamma\gamma$	38.0±0.1, 3.1±1.1, 29.9±1.1 23.6±0.6, 4.89±0.13, 66.2±1.7 29.8±1.7, 2.1±0.4, 2.0±0.3
155±3 MeV	$\pi\pi$, $\pi\gamma$	~100, 0.024±0.07
49.5±1.5 MeV	$K\pi$	~100

反粒子。共振重子按同位旋多重态合并写出。

基本粒子			主要性						
分类名称			符号	J^{PO}	I^G	S	粲数 c	I_3	电荷 e	质量(MeV)
强子	介子	共振介子	$\bar{K}^{*0}$ K^{*0}	1^-	$\frac{1}{2}$	-1 $+1$	0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0	892.2±0.4
			ω	1^{--}	0^-	0	0	0	0	782.6±0.3
			ϕ	1^{--}	0^-	0	0	0	0	1019.6±0.2
			A_1^+ A_1^0 A_1^-	1^{++}	1^-	0	0	$+1$ 0 -1	$+1$ 0 -1	~1100
			$f(1270)$	2^{++}	0^+	0	0	0	0	1271±5
			$g(1680)$	3^{--}	1^+	0	0	$+1, 0, -1$	$+1, 0, -1$	1688±20
		新粒子	J/ψ	1^{--}	0^-	0	0	0	0	3097±2
			D^+ D^-	0^-	$\frac{1}{2}$	0	$+1$ -1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+1$ -1	1868.3±0.9
			$\bar{D}^0$ D^0	0^-	$\frac{1}{2}$	0	-1 $+1$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0	1868.3±0.9
			F'^+ F^-	0^-	0	-1 $+1$	$+1$ -1	0	$+1$ -1	~2030
			Υ	1^{--}	0	0	0	0	0	~9500
	重子	核子	p	$\frac{1^+}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	938.2796±0.0027
			n					$-\frac{1}{2}$	0	939.5731±0.0027
		超子	Λ	$\frac{1^+}{2}$	0	-1	0	0	0	1115.60±0.05
			Σ^+ Σ^0 Σ^-	$\frac{1^+}{2}$	1	-1	0	$+1$ 0 -1	$+1$ 0 -1	1189.37±0.06 1192.47±0.08 1197.35±0.06

（续表）

质	衰	变
平均寿命 τ 或全宽度 Γ	主 要 方 式	百 分 比 %
49.5±1.5 MeV	$K\pi$	~100
10.1±0.3 MeV	$\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^0\gamma$, $\pi^+\pi^-$	89.9±0.6, 8.8 ±0.5, 1.3±0.3
4.1±0.2 MeV	K^+K^-, K_LK_S, $\pi^+\pi^-\pi^0(\rho\pi)$, $\eta\gamma$	48.6±1.2, 35.1±1.2, 14.7±0.7, 1.6±0.2
300 MeV	$\rho\pi$	~100
180±20 MeV	$\pi\pi$, $2\pi^+2\pi^-$, $K\bar{K}$	80.3±0.3, 2.8±0.3, 3.1±0.4
180±30 MeV	2π, $4\pi(\pi\pi\rho,\ 2\rho,$ $A_1\pi,\ \omega\pi)$, $K\bar{K}$	24±5, 大, 小
67±12 keV	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$, 强子	7±1, 7±1, 86±2
~10^{-12}s*	$K^\mp\pi^\pm\pi^\pm$, $K^0\pi^\pm$, $e^\pm$ 其它粒子	3.9±1.0, 1.5±0.6, 9.8±1.4
~10^{-12}s*	$K^-\pi^+$, $K^-\pi^+\pi^0$, $K^-\pi^+\pi^+\pi^-$ $K^0\pi^+\pi^-$, $e^\pm$ 其它粒子	1.8±0.5, 12±6, 3.5±0.9 4.4±1.1, 9.8±1.4
	$\eta\pi^+$, $\phi\pi^+$, $K^+K^-\pi^+$, $\bar{K}^0K^{+*}$	
	$\mu^+\mu^-$, e^+e^-	
~∞ (>2×10^{30} 年) 918±14s	$pe^-\nu_e$	100
$(2.632\pm0.020)\times10^{-10}$s	$p\pi^-$, $n\pi^0$	64.2±0.5, 35.8±0.5
$(0.802\pm0.005)\times10^{-10}$s $(5.8\pm1.3)\times10^{-20}$s $(1.433\pm0.015)\times10^{-10}$s	$p\pi^0$, $n\pi^+$ $\Lambda\gamma$ $n\pi^-$	51.6±0.7, 48.4±0.7 ~100 ~100

基本粒子				主要性						
分类名称			符号	J^{PC}	I^G	S	粲数 c	I_3	电荷 e	质量(MeV)
强子	重子	超子	Ξ^0	$\frac{1^+}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1314.9±0.6
			Ξ^-					$+\frac{1}{2}$	-1	1321.32±0.13
			Ω^-	$\frac{3^+}{2}$	0	-3	0	0	-1	1672.2±0.4
		共振重子	$N(1470)$	$\frac{1^+}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0		$\begin{cases}+1\\0\end{cases}$	1390—1470
			$N(1520)$	$\frac{3^-}{2}$						1510—1530
			$N(1668)$	$\frac{5^+}{2}$						1670—1690
			$\Delta(1232)$	$\frac{3^+}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0		$\begin{cases}+2\\+1\\0\\-1\end{cases}$	1230—1234
			$\Delta(1650)$	$\frac{1^-}{2}$						1600—1695
			$\Delta(1890)$	$\frac{5^+}{2}$						1860—1910
			$\Lambda(1405)$	$\frac{1^-}{2}$	0	-1	0		0	1405±5
			$\Lambda(1520)$	$\frac{3^-}{2}$						1520±2
			$\Sigma(1385)$	$\frac{3^+}{2}$	1	-1	0		$\begin{cases}+1\\0\\-1\end{cases}$	(+)1382.3±0.4, (0)1382.0±2.5 (−)1387.5±0.6
			$\Sigma(1765)$	$\frac{5^-}{2}$						1774±7
			$\Xi(1530)$	$\frac{3^+}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	0		$\begin{cases}0\\-1\end{cases}$	(0)1531.8±0.3, (−)1535.0±0.5
		新粒子	$\Lambda_c(2260)$				$\lvert c\rvert=1^*$			~2260
			$\Sigma_c(2430)$							~2430

（续表）

质	衰 变	
平均寿命 τ 或全宽度 Γ	主 要 方 式	百 分 比 %
$(2.90\pm0.10)\times10^{-10}$s	$\Lambda\pi^0$, $\Lambda\gamma$	~100, 0.69 ± 0.18
$(1.654\pm0.021)\times10^{-10}$s	$\Lambda\pi^-$	~100
$1.1^{+0.4}_{-0.3}\times10^{-10}$s	$\Xi^0\pi^-(\Xi^-\pi^0, \Lambda K^-)$	~100
180—240 MeV	$N\pi$, $N\eta$, $N\pi\pi$	60, 18, 25
110—150 MeV	$N\pi$, $N\pi\pi$	55, 45
120—145 MeV	$N\pi$, $N\pi\pi$	60, 40
110—120 MeV	$N\pi(N\pi^+\pi^-)$	99, 4
120—200 MeV	$N\pi$, $N\pi\pi$	32, 65
150—300 MeV	$N\pi$, $N\pi\pi$	15, 80
40 ± 10 MeV	$\Sigma\pi$	~100
16 ± 2 MeV	$N\bar{K}$, $\Sigma\pi$, $\Lambda\pi\pi$, $\Sigma\pi\pi$	46 ± 1, 42 ± 1, 10 ± 1, 0.9 ± 0.1
(+)35 ± 2, (−)40 ± 2 MeV	$\Lambda\pi$, $\Sigma\pi$	88 ± 2, 12 ± 2
105—135 MeV	$N\bar{K}$, $\Lambda\pi$, $\Lambda(1520)\pi$, $\Sigma(1385)\pi$, $\Sigma\pi$	41, 14, 19, 9, 1
(0)9.1 ± 0.5, (−)10.1 ± 1.9 MeV	$\Xi\pi$	~100

上式可看成是$(6.12)_2$和$(4.9)_5$式的推广，上式实际上包括了以上两式的内容。

由上表所列看出，奇异数的数值可达 -2(Ω^-粒子除外)，而超荷 Y 的数值只有 ±1，和零(Ω^-粒子除外)。而且 Y 的数值实际上就等于同一同位旋多重结构里电荷的代数和(Ω^- 粒子除外)。此外，如果我们用 SU_3 群来对强作用粒子进行分类，用超荷 Y 代替奇异数 S，更显得自然而方便。例如我们用超荷 Y 和同位旋第三分量 T_3 来对强作用粒子进行分类可得一表(见 155 页)。这就是用 SU_3 群对强作用进行分类的八重结构。

和奇异数一样，超荷 Y 在强相互作用和电磁相互作用下是守恒的，但在弱相互作用下的衰变过程里 $\Delta Y=\pm1$，超荷 Y 不再守恒。在强相互作用里超荷守恒，要求强相互作用的 $\mathscr{L}_{相互}$ 在超荷位相变更下保持不变，即在 $\psi\to\psi'=e^{i\gamma_6}\psi$，同时 $\psi^*\to\psi^{*\prime}=\psi^*e^{-i\gamma_6}$ 变换下保持不变。这种相变换实际上就是 U_1 群的变换。此外，同位旋守恒则要求在强相互作用下，$\mathscr{L}_{相互}$ 在同位旋空间旋转下保持不变，也就是 $\mathscr{L}_{相互}$ 应为一同位标量。同位空间(三维)的旋转变换，相当于一个 O_3 群的变换，而 O_3 群的李代数和 SU_2 群的李代数是同构的。总结以上所述在强相互作用下，$\mathscr{L}_{相互}$ 要在超荷相变的 U_1 群变换，以及在同位旋转的 SU_2 群变换下保持不变。即为一不变量。如果强作用粒子真的具有更高的 SU_3 对称性，则要求 $\mathscr{L}_{相互}$ 在更大的，以 $U_1\otimes SU_2$ 为其子群的 SU_3 群变换下保持不变，可是在同一个 SU_3 多重结构里的粒子的质量是有显著不同的。这一事实，我们将把它归于存在某一种破坏 SU_3 不变的相互作用，致使同一 SU_3 多重结构的粒子得到不相等的质量分裂。这个情况就和我们把同一同位多重结构的粒子的质量不同，归之于破坏同位旋守恒的电磁相互作用是一样的。这方面，我们将不做过多的叙述。

以上只讨论了在有奇异粒子参与下，决定强相互作用 $\mathscr{L}_{相互}$ 的一些原则，然而不预备给出它们的具体形式，因为实在我们对它的理解还不够成熟，何况在处理强相互作用问题时，又常常缺乏计算方法。

§7.9 费米子和光子的电磁相互作用

电磁相互作用理论是场论里发展得最早，也是发展得最完整的一个部份。研究光子和电子运动及其电磁相互作用的理论，常称之为量子电动力学，它也是量子场论里最基本的一个部份。

根据§7.4讨论的最小电磁相互作用原理，对于Dirac粒子和光子体系的$\mathscr{L}$，可以把$(4.5)_7$式的代换用到$(2.8)_6$式和$(2.0)_4$式得到

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{4}[\overline{\Psi},(\gamma_\mu\partial\!\!\!/_\mu-2i\gamma_\mu A_\mu q+2m)\Psi]_-$$

$$=\mathscr{L}_\gamma+\mathscr{L}_D+\mathscr{L}_{相互}。\qquad(9.1)_7$$

其中$\mathscr{L}_\gamma$和$\mathscr{L}_D$分别为$(2.1)_4$式的自由光子，和$(2.8)_6$式自由Dirac粒子的Lagrange。把上式和$(2.1)_4$及$(2.8)_6$式相比可得

$$\boxed{\mathscr{L}_{相互}=\frac{i}{2}[\overline{\Psi},\gamma_\mu q\psi]\cdot A_\mu=J_\mu A_\mu。}\qquad(9.2)_7$$

由Lagrange方程$(1.5)_2$式利用$(9.1)_7$式的$\mathscr{L}$可得到场方程为：

$$\left.\begin{aligned}&[\gamma_\mu(\partial_\mu-iqA_\mu)+m]\cdot\psi=0,\\&\overline{\Psi}[\gamma_\mu(\partial\!\!\!/_\mu+iqA_\mu)-m]=0,\\&\Box A_\mu=\frac{-\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=\frac{-\partial\mathscr{L}_{相互}}{\partial A_\mu}=-j_\mu=\frac{-i}{2}[\overline{\Psi},\gamma_\mu q\Psi]。\end{aligned}\right\}$$

$$(9.3)_7$$

可以证明$(9.1)_7$式的$\mathscr{L}$是规范不变的。由上式头两式也可直接得出$\partial_\mu[\overline{\Psi},\gamma_\mu q\Psi]=\partial_\mu j_\mu=0$，即满足电荷守恒定律。直接由$(9.1)_7$式看出，$\mathscr{L}$是个Lorentz不变量，而且$\mathscr{L}$不是时空坐标的显函数，因而在$(9.1)_7$式$\mathscr{L}$的情况下，动量能量、角动量守恒定律是得到保证的。此外也容易证明，在P、C和T的分别变换下，$\mathscr{L}$也是保持不变的。可是由于电荷算符q不是同位标量，例如对于核子

$$q_N=\frac{e}{2}(1+\tau_3)。$$

只是同位标量和另一同位矢量第三分量的混合物，因而在电磁相互作用$(9.2)_7$式情况下，同位旋守恒要遭到破坏，可是同位旋的第三分量仍然是守恒的。这一守恒性质是和$\mathscr{L}$在同位旋空间第三轴回转时保持不变的对称性质相应的。对于轻子同位旋没有定义，守恒与否无意义。

值得附带提出：$(9.1)_9$式的$\mathscr{L}$，在 Sakurai(Ann. phys. **11**, 1(1966))提出的质量反演变换下也是保持不变的。即在

$$\psi\to\psi'=\gamma_5\psi \text{ 同时 } \bar{\psi}\to\bar{\psi}'=-\bar{\psi}\gamma_5 \text{ 且 } m\leftrightarrow -m$$

的变换下保持不变。

§7.10 玻色子和光子的电磁相互作用

我们以π介子为典型例子，来说明玻色子和光子的电磁相互作用的引进方法。同样根据§7.4的讨论，以$(4.5)_7$式的代换用到$(2.0)_4$和$(6.5)_3$式得$\pi\gamma$体系的$\mathscr{L}$为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\{[(\partial_\mu-iA_\mu q)\underset{\rightarrow}{\varphi}\cdot(\partial_\mu-iA_\mu q)\underset{\rightarrow}{\varphi}]+m^2\underset{\rightarrow}{\varphi}\cdot\underset{\rightarrow}{\varphi}\}\\&=\mathscr{L}_\gamma+\mathscr{L}_\pi+\mathscr{L}_{相互}。\end{aligned}\qquad(10.1)_7$$

把上式和$(2.1)_4$及$(6.5)_3$式比较可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{相互}&=iA_\mu(\underset{\rightarrow}{q\varphi}\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})+\frac{1}{2}A^2\underset{\rightarrow}{q\varphi}\cdot\underset{\rightarrow}{q\varphi}\\&=iA_\mu(e\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\varphi}\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})+\frac{1}{2}e^2A^2(\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\varphi})(\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\varphi})\end{aligned}\qquad(10.2)_7$$

利用$(1.5)_2$式对A_μ和φ变更可得到相应的场方程为

$$\left.\begin{aligned}&\Box A_\mu=\frac{-\partial\mathscr{L}}{\partial A_\mu}=\frac{-\partial\mathscr{L}_{相互}}{\partial A_\mu}=-j_\mu,\\&[(\partial_\mu-iqA_\mu)(\partial_\mu-iqA_\mu)-m^2]\varphi=0。\end{aligned}\right\}\qquad(10.3)_7$$

其中

$$j_\mu=ie(\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\varphi}\cdot\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})+e^2A_\mu(\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\varphi})(\underset{\longrightarrow}{t^{(3)}\cdot\varphi})$$

$$=e[\partial_\mu \underset{\rightarrow}{\varphi} \times \underset{\rightarrow}{\varphi}]^{(3)} - e^2 A_\mu (\varphi_1 \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_2)。 \qquad (10.4)_7$$

以上推导中我们已利用了 $q_\pi = et^{(3)}$ 以及 $(6.3)_3$ 式关系。如果用 φ 和 φ^* 来表示则上式可写成：

$$j_\mu = -ie(\varphi^* \partial\!\!\!/_\mu \varphi) - 2e^2 A_\mu \varphi^* \varphi \qquad (10.5)_7$$

且

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{相互}} = -ie(\varphi^* \partial\!\!\!/_\mu \varphi) A_\mu - e^2 A^2 \varphi^* \varphi。} \qquad (10.6)_7$$

当 $A_\mu = 0$ 时上式的 j_μ 记以 j_μ^0，其表式就和 $(2.5)_3$ 式的表式相同。上式第二项不仅与 φ 本身有关，而且也与电磁场 A_μ 有关，可以看成由 A_μ 所感应的电流。$(10.2)_7$ 式的第一项和普通电磁相互作用形式上相同。第二项没有经典对应，这一项反映两个 π 介子和两个光子直接散射的过程。由于第二项多出现了一电磁作用常数 e，第二项相对第一项来讲，可以看成一个微量，因而我们常常把第二项忽略。

关于上式的对称性质和其对应的守恒定律，和上节讨论的相同。同样总同位旋守恒遭到破坏，而同位旋第三分量仍然保持守恒。

§7.11 弱相互作用

基本粒子的衰变过程，或轻子之间的相互作用中都含有弱相互作用。早在 1896 年 Becquerel 发现原子核的 β 衰变时，我们就接触到弱作用过程。可是直到 1934 年才由费米提出弱作用的早期理论，虽然现在看来这是很不完善的理论，可是它是弱作用理论的起点，也是以后弱作用理论发展的基础。

费米当时所提出弱作用的 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 是四个费米子，以流-流耦合的形式的直接相互作用。以后这种形式的相互作用就统称为费米相互作用。例如核子的 β 衰变 $n \to p + e + \bar{\nu}_e$ 的 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 可写成：

$$\mathscr{L}_{\text{相互}} = \sum_{i=1}^{5} G_{\beta i} \{ (\bar{\Psi}_p \Omega_i \psi_n)(\bar{\psi}_e \Omega_i \psi_{\nu_e}) + h.c. \}。 \qquad (11.1)_7$$

又如 μ 介子衰变 $\mu\to e+\bar{\nu}_e+\nu_\mu$ 的 $\mathscr{L}_{相互}$ 可写成：

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{i=1}^{5}G_{\mu i}\{(\bar{\psi}_{\nu_\mu}\Omega_i\psi_\mu)\cdot(\bar{\psi}_e\Omega_i\psi_{\nu_e})+h.c.\}。\qquad(11.2)_7$$

以上 h, c 表示为前面的厄密共轭。一般情况可写成

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{i=1}^{5}\frac{G_i}{\sqrt{2}}J^i(x)\bar{J}^i(x)+h.c.。\qquad(11.3)_7$$

其中弱流 $J^i(x)$包括轻子弱流和强子弱流

$$J^i(x)=l^i(x)+h^i(x),\qquad(11.4)_7$$

其中

$$l^i(x)=i\bar{\psi}_e\Omega_i\psi_{\nu_e}+i\bar{\psi}_\mu\Omega_i\psi_{\nu_\mu}+\cdots$$

$$\bar{h}^i(x)=i\bar{\psi}_p\Omega_i\psi_n+i\bar{\psi}_p\Omega_i\psi_\Lambda+\cdots\qquad(11.5)_7$$

以上 $\bar{J}^i(x)$定义为

$$\bar{J}^i(x)\equiv J^{i+}(x)(1-2\delta_{4\mu})\quad 当\ i=V,\ A$$

一般

$$J^i(x)=i\bar{\psi}_1\Omega_i\psi_2$$

则

$$\bar{J}^i(x)\equiv i\bar{\psi}_2\Omega_i\psi_1$$

以上的 $\mathscr{L}_{相互}$ 都是真正的标量，保证了宇称守恒，但在 1956～1958 年李、杨发现在弱作用中宇称不守恒以后，弱作用理论有了新的发展，不再要求弱作用的 $\mathscr{L}_{相互}$ 是一个真正的标量，而可以是标量和赝标量的混合，也就是一般可有以下形式：

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{i=1}^{5}\frac{G_i}{\sqrt{2}}\{[\bar{\psi}_a(1+a_i\gamma_5)\Omega_i\psi_b]\cdot[\bar{\psi}_c(1+b_i\gamma_5)\Omega_i\psi_d]+h.c.\}。$$

$$(11.6)_7$$

这是一般的写法，其中可能有些项不是相互独立的。看来情况更加复杂了，经过长期的实验和理论的比较，最后才确定这五种可能的弱流中只有 V, A 两种弱流，以等权的方式混合才有贡献，而且耦合常数 G 对于各种弱流和各种过程都基本上是相等的。在这样的事实启发下，Feynman 和 Gell-Mann 于 1958 年提出了普适的 $V-A$ 型费米相互作用的理论。

即认为下图中四边形的每一顶点中的费米子对可以配对构成弱流，而任意两个顶点的两对费米子是可以通过流-流作用而直接

相互作用(弱相互作用)的。而且每对费米子中之一荷电，另一则为中性。

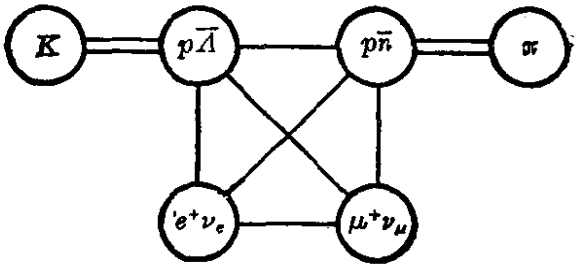


图 7-1

图中左上角包含了所有能与K介子有强相互作用的重子对，在图中我们仅以$p\bar{\Lambda}$为代表，同样图中右上角也应包含所有与π介子有强相互作用的重子对，我们也仅以$p\bar{n}$为代表，根据实验的启示，上述的任一组两对费米子的弱相互作用的强度的数量级是相等的，而且它们相互作用的形式也是相同的。

对于 Dirac 场ψ可以做如下的分解

$$\psi=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi+\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi=\psi_e+\psi_0, \qquad (11.7)_7$$

同时 $$\bar{\psi}=\frac{1}{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5)+\frac{1}{2}\bar{\psi}(1+\gamma_5)=\bar{\psi}_e+\bar{\psi}_0。$$

前者ψ_e称为ψ的偶性 Chiral 部分，后者ψ_0则称为ψ的奇性 Chiral 部分，对于两分量中微子理论，只有偶性部分或奇性部分存在，这已在§1.12 里讨论过。Gell-Mann 和 Feynman 根据实验的启发曾提出以下理论，即认为一般费米弱相互作用也只有偶性部分或奇性部分参加，即

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{i=1}^{5}\{g_i'(\bar{\psi}_{ae}\Omega_i\psi_{be})(\bar{\psi}_{ce}\Omega_i\psi_{de})+h.c.\}$$

或 $$\mathscr{L}_{相互}=\sum_{i=1}^{5}\{g_i'(\bar{\psi}_{ao}\Omega_i\psi_{bo})(\bar{\psi}_{co}\Omega_i\psi_{do})+h.c.\},$$

以$(11.7)_7$式代入即为

$$\mathscr{L}_{相互}=\sum_i\{g_i'[\bar{\psi}_a(1\mp\gamma_5)\Omega_i(1\pm\gamma_5)\psi_b]$$
$$\cdot[\bar{\psi}_c(1\mp\gamma_5)\Omega_i(1\pm\gamma_5)\psi_d]+h.c.\}。 \qquad (11.8)_7$$

以上求和$\sum_i$系对$i=P, S, T, V, A$五种形式进行。其中$h.c.$表示为前式的厄密共轭部分，下标a、b、c、d，代表四个具体费米子，不过可以证明

$$\left.\begin{aligned}&(1\mp\gamma_5)\Omega_i(1\pm\gamma_5)=0,\ \text{当}\ i=S,\ P,\ T;\\&(1\mp\gamma_5)\Omega_i(1\pm\gamma_5)=2\gamma_\mu(1\pm\gamma_5),\ \text{当}\ i=V,\ A。\end{aligned}\right\}$$

$(11.9)_7$

因而最后归之为，仅依赖一个普适常数 g 的所谓普适 $V-A$ 型费米相互作用。

$$\mathscr{L}_{\text{相互}}=g\{[\bar{\psi}_a\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_b]\cdot[\bar{\psi}_c\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_d]+h.c.\}。$$

$(11.10)_7$

根据实验表明中微子是左手的，即涡度 $h=-1$。以上我们统一取了$(1+\gamma_5)$。

如果$(a,\ b)$为轻子对$(e,\ \nu_e)$或$(\mu,\ \nu_\mu)$则可引进

$$i\bar{\psi}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_{\nu_l}=l_\mu=a_\mu^{(l)}+v_\mu^{(l)},\qquad(11.11)_7$$

l_μ 称为轻子流，它有赝矢 $a_\mu^{(l)}$ 和矢量流 $v_\mu^{(l)}$ 两部分。如果$(a,\ b)$为$(p\bar{n})$中的一对则同样可引进

$$i\bar{\psi}_p\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_n=\bar{h}_\mu^{(0)}=\bar{a}_\mu^{(0)}+\bar{v}_\mu^{(0)},\qquad(11.12)_7$$

其中 $h_\mu^{(0)}$ 称为奇异数不变$(\Delta S=0)$的重子弱流，也有赝矢 $a_\mu^{(0)}$ 和矢量流 $v_\mu^{(0)}$ 两部份。如果$(a,\ b)$为$(p\bar{\Lambda})$中的一对则也可引进

$$i\bar{\psi}_p\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\Lambda=\bar{h}_\mu^{(1)}=\bar{a}_\mu^{(1)}+\bar{v}_\mu^{(1)},\qquad(11.13)_7$$

其中 $h_\mu^{(1)}$ 称为奇异数改变$(\Delta S=1)$的重子弱流，也同样有赝矢 $a_\mu^{(1)}$ 和矢量流 $v_\mu^{(1)}$ 两个部份。

Cabbibo 分析了大量的实验，认为弱相互作用的普适性不是严格成立的，并修正了$(11.10)_7$式，提出了以下的有效 V-A 型费米相互作用。

$$\mathscr{L}_{\text{相互}}=\left\{\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\bar{l}_\mu l_\mu+\frac{G_\beta}{\sqrt{2}}(\bar{l}_\mu h_\mu^{(0)}+l_\mu\bar{h}^{(0)})\right.$$
$$\left.+\frac{G'_\beta}{\sqrt{2}}(\bar{l}_\mu h_\mu^{(1)}+l_\mu\bar{h}_\mu^{(1)})\right\}+h.c.,\qquad(11.14)_7$$

其中 G_μ 为 μ 介子的衰变的耦合常数，G_β 为中子的 β 衰变的耦合常数，G'_β 为超子的 β 衰变的耦合常数，它们的数量级约为$\sim 1.4\times10^{-49}$ 尔格(厘米)^3，或者 $Gm_N^2=1.026\times10^{-5}m_p^{-2}$ (自然单位)。实验表明

$$G_\beta^2+G_\beta'^2=G_\mu^2。 \tag{11.15}_7$$

由于近年来我们对强子内部结构进行了认真的研究，我们已了解到强子是由更深一层次(夸克)所组成。前面所讲的强子弱流，实际上可归之于夸克弱流所组成。例如

$$-ih_\mu=\bar{\psi}_{d'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_u+\bar{\psi}_{s'}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_c+\cdots \tag{11.16}_7$$

其中 d' 和 s' 是 d 和 s 夸克的混合

$$\begin{aligned} d'&=d\cos\theta_c+\sin\theta_c\cdot s,\\ s'&=-d\sin\theta_c+\cos\theta_c\cdot s。\end{aligned} \tag{11.17}_7$$

u、d、s 和 c 均为夸克(气味)，它们的量子数由下表给出。

夸克气味	自　旋	重子数 B	奇异数 S	总同位旋 T	$T^{(3)}$	电荷 Q	粲数 c	超 荷
u	1/2	1/3	0	1/2	+1/2	2/3	0	1/3
d	1/2	1/3	0	1/2	−1/2	−1/3	0	1/3
s	1/2	1/3	−1	0	0	−1/3	0	−2/3
c	1/2	1/3	0	0	0	2/3	1	1/3

θ_c 为 Cabbibo 角，实验定出

$$\sin\theta_c\simeq 0.25 \tag{11.18}_7$$

而轻子弱流则为：

$$l_\mu=\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_{\nu_e}+\bar{\psi}_\mu\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}+\cdots \tag{11.19}_7$$

普适的 V-A 型费米相互作用可写成

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{相互}}=\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{J}_\mu J_\mu+h.c.=\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{l}_\mu+\bar{h}_\mu)(l_\mu+h_\mu)+h.c.。} \tag{11.20}_7$$

由以上的 l_μ 和 $h_\mu^{(1)}$ 的形式看来，可知在弱作用下，宇称、电荷共轭、同位旋和超荷守恒性质都遭到破坏。$(11.14)_7$ 式中第二项即带 G_β 项是奇异数不变的强子弱衰变的典型，由 $(11.12)_7$ 式可知它满足 $\Delta S=0$, $\Delta T=1$, $\Delta T_3=1$ 的选择规则。$(11.14)_7$ 式中第三项即带 G'_β 项是奇异数改变的强子弱衰变的典型，由 $(11.13)_7$ 式可知它

满足 $\Delta S=\Delta Q=\pm 1$, $\Delta T=\frac{1}{2}$, $\Delta T_3=\pm\frac{1}{2}$ 选择规则。这些也是由实验总结所得到的。

虽然费米相互作用对于低能的弱作用过程，说明得很好，可是在高能区它有致命的困难。如果我们用上述费米相互作用计算，例如 $\bar{\nu}_e+e^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$ 的散射过程，取一级近似可得到其截面为

$$\sigma\sim G^2E^2/(\hbar c)^4。$$

也就是有效截面 σ 随质心系能量 E 的平方而无限制地增长，这一结果是要破坏过程的幺正性的。

此外，费米相互作用常数 G 是有能量的负的幂次方因次的。这样的相互作用是不能重整化的，因而我们不能把它看成是完整的理论，而只能把它看成是正确理论在低能下的近似。因此在六十年代又重新注意到弱作用的中间玻色子理论，也就是认为弱作用也和电磁相互作用一样，是通过中间媒介，这儿称为中间玻色子来传递的。不过中间玻色子 $W^\pm$ 是荷电的，而且它的静质量很大，估计约有几十 GeV，这些都是和电磁相互作用的媒介光子是不同的。由于中间玻色子的质量很大，这种中间玻色子理论的 Yukawa 型相互作用

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{相互}}=\frac{g}{\sqrt{2}}(J_\mu^+W_\mu+J_\mu W_\mu^+)} \qquad (11.21)_7$$

在低能区就趋近于以前的费米相互作用，只要取

$$G=2^{-5/2}g^2/M_W^2 \qquad (11.22)_7$$

其中 M_W 为中间玻色子 W 的质量。

中间玻色子理论的相互作用，属于 Yukawa 型相互作用，其相互作用常数是无量纲的，因而一般是属于可重整化的理论。然而，如果中间玻色子只是普通的有质量的矢量介子，正如我们在 § 4.5 最后已提到，有质量的矢量介子的传播中出现 $\sim\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$ 一项，这一项带有具有质量 m^{-2} 量纲的因子，而且当交换的中间玻色子

动量 $k_\mu \to \infty$ 时，这一项远比 Dirac 粒子、标量粒子和光子的传播子发散得严重。正是这一项$\sim \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$ 的存在，使得有质量的矢量介子理论成为不可重整化的了。可是如果中间玻色子是规范理论的规范介子，在通过对称性破缺而获得质量后，由于原来规范变换下不变的要求，上述发散可望得到抵销。Weinberg(1967 年)和 Salam(1968 年)提出弱电相互作用统一的规范理论。在这个理论中，不仅存在荷电的中间玻色子 $W^{\pm}$，还预言有中性中间玻色子 Z^0 存在。它们都通过对称性的自发破缺而获得质量。后来在理论上由 t' Hooft 证明，这种由对称性破缺而获得质量的规范理论也可以是可重整化的。同时在实验上又发现了中性流(通过交换 Z^0)的事例。现在 W-S 的弱电统一的规范理论已逐渐被人们所普遍接受。

关于 W-S 的弱电统一的规范理论的详细情况，还是等到讲了规范场论以后，再作介绍。应该指出，在讨论有强相互作用的粒子的弱衰变过程时，不仅要研究它们的弱相互作用的形式，还应考虑强相互作用对过程的影响。

§7.12 弱矢流守恒定律和轴矢流部分守恒 *PCAC*

根据我们对核子的 β 衰变，μ 介子衰变，μ 捕获以及超子的 β 衰变等实验的分析，可以认为弱相互作用是 V-A 型的，而且相互作用常数的数量级也是一致的。然而相互作用常数的具体数值却是稍有差异的。有效相互作用常数有差异，这本是不足为怪的。因为不同的粒子具有不同类型的其他相互作用，例如核子就与 π 介子之间有强相互作用，而 μ 介子就没有这样的相互作用。因此即使裸粒子的原始相互作用(弱)强度是普适的，由于这种其他类型相互作用不同，其重整化效应也是各异的，以致重整化后的有效相互作用(弱)的强度，一般也应该是不同的。倒是在实验上发现的有效的弱矢流相互作用常数的普适性，例如实验发现对应于 μ 衰

变的有效弱相互作用常数 G_μ 和强子 β 衰变的弱有效矢流相互作用常数 $G_{\beta V}$，几乎是相等的，相差只在 2% 之内，$G_{\beta V}/G_\mu=1.006\sim1.011$ 是使我们感惊异而须要进一步加以说明的。为了说明弱矢流相互作用常数的普适性，并不遭到重整化效应的破坏，回忆一下电磁相互作用是有好处的。

原来在电磁相互作用情况下，也存在有类似的现象，质子和电子也是具有不同类型的其他相互作用的，但是它们的有效电荷却始终是保持相等的。这一点在电磁相互作用情况下，我们是利用电荷守恒是一个(来自规范不变性)严格的守恒定律，并不遭到强相互作用破坏来加以说明的。也就是核子在产生或湮灭 π 介子的过程 (包括虚过程) 中，都是严格保持体系的电荷守恒不变的，因而粒子的强相互作用存在与否，不影响电磁相互作用常数的普适性质。由此看来，我们可以期望，利用弱矢流守恒的假定，来说明弱矢流的有效相互作用常数的普适性质不遭破坏的事实。

如同我们在 §7.5，和 §7.6 中已谈到，由于强相互作用具有在同位旋空间旋转下不变的性质，存在守恒的同位旋流，例如对于 πN 体系的同位旋流由 $(7.4)_7$ 式给出为：

$$\underset{\rightarrow}{J}_\mu=\frac{i}{2}\overline{\Psi}\gamma_\mu\underset{\rightarrow}{\tau}\Psi+(\partial_\mu\underset{\rightarrow}{\varphi})\times\underset{\rightarrow}{\varphi}=\underset{\rightarrow}{J}_{N\mu}+\underset{\rightarrow}{J}_{\pi\mu}。\qquad(12.1)_7$$

其中 $\underset{\rightarrow}{J}_\mu$ 为同位旋流，它的第三分量和 πN 体系的总电流有密切关系，而它的第一、第二分量则与弱矢流有密切关系。

例如我们在上节所引进的核子弱矢流 $\bar{v}_\mu^{(0)}$

$$-i\bar{v}_\mu^{(0)}=\overline{\Psi}_p\gamma_\mu\psi_n=\frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma_\mu\tau^{(+)}\Psi=\frac{1}{4}[\overline{\Psi},\ \gamma_\mu\tau^{(+)}\Psi]。$$

$$(12.2)_7$$

其中 $\tau^{(\pm)}=\tau_1\pm i\tau_2$，由此可见 $\bar{v}_\mu^0$ 正是核子同位旋流的第一和第二分量的线型迭加。

由此看来，强子弱矢流一般是与守恒的同位旋流的(+)分量成比例的。因此(在忽略电磁和弱相互作用时)弱矢流是守恒的，这就是弱矢流守恒的假定(CVC)。正如在上节中已提到强子弱流

最后归之为夸克的弱流。例如引进夸克场算符 $q=\begin{vmatrix} u \\ d' \end{vmatrix}$，夸克弱矢流就可写成，参看$(11.16)_7$式

$$-i\bar{v}_\mu^{(0)}\sim\bar{q}\gamma_\mu\tau^{(+)}q。 \qquad (12.3)_7$$

这也就是夸克的守恒的同位旋流的(+)分量部分。

弱矢流守恒和电流守恒相似将导致弱矢流耦合常数的普适性不会遭到强作用的破坏。例如考虑弱矢流 $v_\mu^{(0)}$ 在质子和中子之间的矩阵元，这是在计算中子的 β 衰变中所遇到的矩阵元。因为核子是有强相互作用的，一般要具体计算这种矩阵元是有困难的。不过我们知道它具有若干对称性质可供利用，例如根据 Lorentz 协变的要求，就可得出这一矩阵元，一般可写成：

$$\langle p|v_\mu^{(0)}(x)|n\rangle$$
$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m_N^2}{E_pE_n}}\bar{u}(p)[g_V(q^2)\gamma_\mu-f_V(q^2)\sigma_{\mu\nu}q_\nu$$
$$-ih_v(q^2)q_\mu]u(n)e^{-iqx}, \qquad (12.4)_7$$

其中

$$q_\mu=(p_\mu-n_\mu)。$$

以上我们以 p 和 n 也同时分别表示质子的和中子的动量。并忽略了质子和中子的质量差。由于弱矢流守恒的假定

$$\partial_\mu\langle p|v_\mu^0(x)|n\rangle=0。$$

代入上式得到：

$$\bar{u}(p)[g_V(q^2)\gamma_\mu(p_\mu-n_\mu)-ih_V(q^2)q^2]u(n)=0, \qquad (12.5)_7$$

利用 Dirac 方程可得上式第一项为零，因而导致

$$h_V(q^2)=0。 \qquad (12.6)_7$$

由弱矢荷守恒可得

$$-i\int v_4^{(0)}(x)d\boldsymbol{x}=常数。$$

把上式代入$(12.4)_7$式

$$\left\langle p\left|-i\int v_4^{(0)}(x)d\boldsymbol{x}\right|n\right\rangle$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m_N^2}{E_pE_n}}\bar{u}(p)[g_V(q^2)\gamma_4-f_V(q^2)\sigma_{4\nu}q_\nu]u(n)\int e^{-iqx}\,d\boldsymbol{x}。$$

利用

$$\int e^{-iq\cdot x}d\boldsymbol{x}=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{q}),\qquad (12.7)_7$$

要求 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{n}=0$ 导致 $E_p=E_n=E$（忽略 p 和 n 的质量差），即 $q_0=E_p-E_n=0$。上式确与时间无关。这样上式又可写成

$$\left\langle p\left|-i\int v_4^{(0)}(x)d\boldsymbol{x}\right|n\right\rangle$$

$$=\frac{m}{E}\bar{u}(\boldsymbol{p})\gamma_4 u(\boldsymbol{n})g_V(0)\delta(\boldsymbol{q})。\qquad (12.8)_7$$

上式左边利用

$$\left(-i\int v_4^{(0)}(x)d\boldsymbol{x}\right)|n\rangle=|p\rangle,$$

且

$$\left\langle p\left|-i\int v_4^{(0)}(x)d\boldsymbol{x}\right|n\right\rangle=\langle p(\boldsymbol{p})\,|p(\boldsymbol{n})\rangle=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{n})=\delta(\boldsymbol{q})。$$

$$(12.9)_7$$

而上式右边的

$$\bar{u}(\boldsymbol{p})\gamma_4 u(\boldsymbol{p})=\frac{E}{m}\qquad \text{参看}(8.8)_1\text{式},$$

所以得到

$$g_V(0)=1。\qquad (12.10)_7$$

这也就是说弱矢流相互作用常数（或总弱矢荷）不受强相互作用的影响，和轻子的弱矢荷是相等的。同样的夸克弱流可以用来计算 π 介子的弱衰变，例如 $\pi^\pm\to\pi^0+e^\pm+\nu$ 的衰变，以与核子 β 衰变相等的耦合常数输入。计算结果和实验符合很好，这也可算是对弱矢流守恒假定的一个支持。此外弱矢流作为同位旋流的（+）个分量将和同位旋流 $J_\mu^{(3)}$ 构成一个整体，而 $J_\mu^{(3)}$ 又与电荷算符有密切关系。因此弱矢流的形状因子也将是和电磁形状因子有密切联系的。不过在此地我们不再对此做过多的讨论。

可是对于轴矢流情况就有所不同，实验上发现 $\frac{G_{\beta A}}{G_{\beta V}}\sim\frac{G_{\beta A}}{G_\mu}\simeq 1.22$。理论上也没有什么依据来说明轴矢流在弱作用中是守恒的。即使轴矢流的四维散度为零，也不能保证轴矢相互作用常数

G_A 不受强相互作用影响。由 Lorentz 协变性要求，可以一般写出

$$\langle p|A_\mu^{(0)}(x)|n\rangle = \frac{ie^{tqx}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m_N^2}{E_pE_n}}\bar{u}(\boldsymbol{p})[\gamma_\mu\gamma_5 g_A(q^2)+i\gamma_5 q_\mu f_A(q^2) - i\gamma_5\sigma_{\mu\nu}q_\nu h_A(q^2)]u(\boldsymbol{n})。 \quad (12.11)_7$$

其中 $A_\mu^{(0)}(x)$ 为与$(12.3)_7$式相应的夸克弱轴矢流。

利用 $\partial_u A_\mu^{(0)}(x)=0$ 得到

$$(m_p+m_n)g_A(q^2)+q^2 f_A(q^2)=0。 \quad (12.12)_7$$

考虑

$$\left\langle p\left|-i\int A_4^{(0)}(x)\ d\boldsymbol{x}\right|n\right\rangle = \frac{m_N}{E}\delta(\boldsymbol{q})\bar{u}(\boldsymbol{p})[\gamma_4\gamma_5 g_A(q^2)-\gamma_5(p_0-n_0)f_A(q^2)]u(\boldsymbol{n})。 \quad (12.13)_7$$

以上假定了 $h_A(0)$是正则的，而且考虑到 $q_0=p_0-n_0\sim 0$(忽略 p 和 n 的质量差)。下面分两种情况讨论：(1) $f_A(0)$ 是正则的，则由$(12.12)_7$式得到 $g_A(0)=0$。这样上式$(12.13)_7$式的右边整个为零。(2) $f_A(q^2)$ 当 $q^2=0$ 时不是正则的，这样 $g_A(0)$ 不一定为零。不过考虑到

$$\bar{u}(\boldsymbol{p})\gamma_5 u(\boldsymbol{n})(m_p+m_n)=(p_0-n_0)\bar{u}(\boldsymbol{p})\gamma_4\gamma_5 u(\boldsymbol{n})。$$

如果 m_p 和 m_n 有微量差异，上式右边不一定为零。可是把上式代入$(12.13)_7$式并考虑到$(12.12)_7$式。就得到$(12.13)_7$式右边依然为零。因此由(12.13)式不能确定 $g_A(0)$的数值。也就是这时我们不能由 $\partial_\mu A_\mu^{(0)}=0$，来对重整化效应推出什么结论。

因此轴矢流守恒的假定并不能为我们带来什么可利用的结论，而且严格的轴矢流守恒 $\partial_\mu A_\mu^{(0)}=0$，还可导致 $A_\mu^{(0)}(x)$ 的某些矩阵元为零。特别将导致 $\pi\to\mu+\nu$ 是禁戒的，这当然是与事实不符的。相反如果我们假定轴矢流的四维散度只是近似为零，还是可以有很多应用。例如我们可以认为对于 $\Delta Y=0$ 的轴矢流满足

$$\partial_\mu A_\mu^{(0)}(x)=f_\pi m_\pi^2\pi(x)。 \quad (12.14)_7$$

其中 $\pi(x)$表示 π 介子场，f_π 为某一常数。上式就是所谓的轴矢

流部份守恒的假定 $PCAC$。在理论上也有人证明过赝矢流的四维散度可以用来定义一个定域的赝标场 π 介子场。例如可参看：R. Haag. Phys. Rev. **112**, 669 (1958), K. Nishijma, Phys. Rev. **111**, 995 (1958) 和 W. Zimmerman, Nuovo Cimento **10**, 597 (1958)。

弱矢流守恒 CVC 和轴矢流部分守恒 $PCAC$ 的应用是很广泛的，不过这里我们不能作详细介绍，仅简单介绍而已。

参 考 资 料

1. 关于量子场之间的相互作用
   D. 卢里 粒子和场 (1981) 第五章
   Y. Takahashi An Introduction to Field Quantization (1969) Chapter 8
   J. Bjorken & S. D. Drell Relativistic Quantum Fields (1964) Chapter 15
2. 关于 PCT 定理
   Luders Annals of Physics **21** (1957)
   T. D. Lee Particle Physics and Introduction to Field Theory (1981) Chapter 14
3. 关于弱相互作用，CVC 和 $PCAC$
   D. 卢里 粒子和场 (1981) 第八章
   T. D. Lee Particle Physics and Introduction to Field Theory (1981) Chapter 21, 24

第八章　S 矩阵与协变的微扰理论

S 矩阵是计算实际过程的基础，也是量子场论的核心内容。本章首先讨论相互作用图象，接着在§8.2里介绍了 S 矩阵，以及它的展开表达式，由于展开的每一项都具有协变的形式，这样的展开常称为协变的微扰理论。协变的微扰理论较之旧的非协变的微扰理论，在实际计算和消除发散上都较为方便。

为了使 S 矩阵的展开式便于计算，我们首先介绍了算符的并缩，Wick 定理。以后就把 S 矩阵由原来的时序乘积的形式，改写为正规乘积的形式。由于正规乘积的物理图象比较清楚，在实际计算中也就方便得多。在§8.5介绍了 Feynman 图形以后，更可以通过 Feynman 图形写出相应的 S 矩阵元，这就使问题更为形象化，甚至形成了用微扰理论来计算实际过程的一套标准方法。§8.6举例说明了 Feynman 图的应用，§8.7讨论了有费米子回路的图形以及 Furry 定理，这样可以在实际应用中避免若干不必要的计算。

严格讲，本章所讲的微扰理论，只能适用于弱的相互作用情况，可是有些定性结论，尤其是那些对于各级微扰项都成立的性质，以及用 Feynman 图形来描述过程的方法，即使在强相互作用里也还是常常被利用的。

§8.1　相互作用图象

正如熟知，在量子力学里对于物理问题的描述，可采取不同的图象，例如在量子力学课程里就至少介绍过 Schrödinger 和 Heisenberg 两种图象。实际上我们感兴趣的且有物理意义的量，是算符 O 在各种态之间的矩阵元 $\langle a|O|b\rangle$，因而我们可以把算符

O对时间的依赖关系和态矢量$|b\rangle$对时间的依赖关系做相应的变换，而保持它的矩阵元$\langle a|O|b\rangle$不变，这样就使我们在讨论具体问题时，有选取适当图象的活动余地。

在Schrödinger图象里，算符与时间无关，态矢量则由以下关系而随时间改变

$$H_s|t\rangle_s=\frac{-1}{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_s,\qquad |t\rangle_s=e^{-iHt}|O\rangle_s。\tag{1.1}_s$$

其中H_s是体系的总哈氏函数。在Heisenberg图象里，态矢量与时间无关$\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_H=0$，而算符对时间的依赖关系则由下式表示为

$$[H,\ O(t)]_H=\frac{1}{i}\dot{O}_H(t)。\tag{1.2}_s$$

在量子力学处理较简单的问题时，这两种图象都是行之有效的，可是在处理场运动的复杂情况，这两种图象就表现出有不方便之处。在Schrödinger图象里，场算符$\varphi(x)$不是时间的显函数，这样我们就得不到具有明显协变形式的场方程和对易关系。在我们以前讨论自由场时，所采取的图象，实际就是Heisenberg图象。对于自由场情况，采取Heisenberg图象，我们可以导出具有明显协变形式的场方程和对易关系，可是当场有相互作用时，场方程经常是不能解出的（在自由场情况场方程是可以解出的），因而我们只能利用正则量子化法则，得到同一时间的对易关系，而不能导出场算符，对于任意时空的，具有明显协变形式的对易关系。

为了避免上述缺点，在场论里常常引进另一种新的图象，这就是所谓的相互作用图象。在相互作用图象里，算符O和态矢量$|t\rangle$都与时间有关，其关系如下：

$$\boxed{\begin{aligned}&[H_0,\ O(t)]_I=\frac{+1}{i}\dot{O}_I(t),\\&H_{\text{相互}}|t\rangle_I=\frac{-1}{i}\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I。\end{aligned}}\tag{1.3}_s$$

其中 H_0 为自由场的哈氏函数，而 $H_{相互}$ 为相互作用哈氏函数。

不同图象之间存在着依赖于时间的幺正变换，这些幺正变换关系，表示如下：

$$\left.\begin{aligned} &O_H(t)=(e^{iHt}Oe^{-iHt})_S,\\ &|\rangle_H=e^{iHt}|t\rangle_S,\\ &O_I(t)=(e^{iH_0t}Oe^{-iH_0t})_S,\\ &|t\rangle_I=e^{iH_0t}|t\rangle_S。\end{aligned}\right\}\qquad(1.4)_8$$

结合以上两式可以得到相互作用图象和 Heisenberg 图象之间的关系

$$\begin{aligned} O_I(t)&=(e^{-iHt}e^{iH_0t}Oe^{-iH_0t}e^{iHt})_H,\\ |t\rangle_I&=e^{-iHt}e^{iH_0t}|\rangle_H。\end{aligned}\qquad(1.5)_8$$

以上推导中已考虑到 $H_{II}\equiv H_S$，下角标表明不同的图象。以后除特别说明外，我们都是在相互作用图象下讨论问题，并把下角标除掉。

由 $(1.4)_8$ 式对时间微商，可以直接证明在相互作用图象里，算符 $O(t)$ 和态矢量 $|t\rangle$ 对时间依赖关系的 $(1.3)_8$ 式。由此看出，在相互作用图象里，场方程和场的对易关系是由 H_0 来决定的，而态矢量对时间的依赖关系，则由 $H_{相互}$ 来决定。如果 $H_{相互}=0$，相互作用图象就和 Heisenberg 图象一致，如果 $H_0=0$，相互作用图象就和 Schrödinger 图象一致。在这个意义下，相互作用图象是更为广泛的图象。因此在相互作用图象里，场方程，场的对易关系以及场的平面波被展开，粒子的产生，湮灭算符等，都可以采用我们在以前几章里所介绍的自由场(Heisenberg 图象)的具有明显协变形式的相应结论。这样就克服了以前所讲的，在 Heisenberg 或 Schrödinger 图象中所遇到的困难。

§8.2 S 矩 阵

由 $(1.4)_8$ 和 $(1.5)_8$ 式看来，当 $t=0$ 时，同一物理状态的态矢量在三种图象中是一致的，但随着时间的增加，态矢量的变化在三

种图象中则不一样。现在着重讨论态矢量在相互作用图象里的变化，我们设想在 $t=t_0$ 时的态矢量 $|t_0\rangle$ 和 $t=t$ 时态矢量 $|t\rangle$ 之间存在一个时间演变算符

$$|a,\ t\rangle=U(t,\ t_0)|a,\ t_0\rangle。\qquad (2.1)_S$$

容易看出

$$U(t_0,\ t_0)=1。\qquad (2.2)_S$$

由 $(1.3)_S$ 式可得到 $U(t,\ t_0)$ 应满足关系

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,\ t_0)=H_{相互}(t)U(t,\ t_0)。\qquad (2.3)_S$$

与此相应，且利用 $H^{+}_{相互}=H_{相互}$ 可有

$$-i\frac{\partial}{\partial t}U^{+}(t,\ t_0)=U^{+}(t,\ t_0)H_{相互}(t)\qquad (2.4)_S$$

由 $U^{+}(t,\ t_0)$ 左乘 $(2.3)_S$ 式，并以 $U(t,\ t_0)$ 右乘 $(2.4)_S$ 并相减可得

$$\frac{\partial}{\partial t}[U^{+}(t,\ t_0)U(t,\ t_0)]=0。$$

所以 $U^{+}(t,\ t_0)U(t,\ t_0)=$ 常数，与时间无关，可是已知：

$$U(t_0,\ t_0)=1$$

因而

$$U^{+}(t,\ t_0)U(t,\ t_0)=1。\qquad (2.5)_S$$

由于时间演变算符应满足相加群的关系可知

$$U(t_1,\ t)U(t,\ t_0)=U(t_1,\ t_0),\qquad (2.6)_S$$

$$U(t_0,\ t)U(t,\ t_0)=1,$$

$$\therefore\quad U^{-1}(t,\ t_0)=U(t_0,\ t)。$$

因而由 $(2.5)_S$ 式可知 $U(t,\ t_0)$ 是一个幺正算符

$$U^{+}(t,\ t_0)=U^{-1}(t,\ t_0)=U(t_0,\ t)。\qquad (2.7)_S$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，由 $(2.3)_S$ 式可得到：

$$U(t+\Delta t,\ t_0)=[1-i\Delta t H_{相互}(t)]\cdot U(t,\ t_0)。\qquad (2.8)_S$$

这就是说 $-iH_{相互}(t)$ 是时间演变算符 $U(t,\ t_0)$ 的无限小算子，根据 $U(t,\ t_0)$ 算符的群的性质可以得出：

$$U(t,\ t_0)=\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}H_{\text{相互}}(t)dt\right)$$

$$=\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}\int\mathscr{H}_{\text{相互}}\,d\boldsymbol{x}\,dt\right)。\qquad(2.9)_8$$

如果我们所考虑的是普通的 C 函数，容易看出$(2.9)_8$式就是$(2.3)_8$式的解，可是我们现在所考虑的 $H_{\text{相互}}$ 和 $U(t,\ t_0)$ 都是算符，当我们应用$(2.9)_8$式时，必须注意时间演变的先后顺序。在用$(2.9)_8$式的右边时，必须把时间在前的 $H_{\text{相互}}(t)$摆在右边，而把时间在后的 $H_{\text{相互}}(t)$摆在左边，并以算符乘积前附以 T 字表明之，称为时序乘积。

关于 T 乘积的精确定义如下：

$$T[\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\cdots\psi_n(t_n)]$$

$$=\delta_p\psi_{p_1}(t_{p_1})\cdot\psi_{p_2}(t_{p_2})\cdots\psi_{p_n}(t_{p_n})。\qquad(2.10)_8$$

其中 $$t_{p_1}\geqslant t_{p_2}\geqslant\cdots\geqslant t_{p_n}。$$

$\delta_p=\pm1$ 根据由原排列$(1,\ 2\cdots n)$到排列 $(p_1,\ p_2\cdots p_n)$ 中费米场所须经过的对换为偶$(+1)$或者(-1)来决定，并且在 T 乘积中时间相同的算符则保持原来的排列顺序，例如对费米子

$$T(\psi(x)\cdot\psi(y))=\begin{cases}\psi(x)\psi(y) & \text{当 } x_0>y_0;\\ -\psi(y)\psi(x) & \text{当 } x_0<y_0。\end{cases}\qquad(2.11)_8$$

对于玻色子

$$T(\varphi(x)\cdot\varphi(y))=\begin{cases}\Phi(x)\Phi(y) & \text{当 } x_0>y_0;\\ \Phi(y)\Phi(x) & \text{当 } y_0>x_0。\end{cases}\qquad(2.11')_8$$

值得指出，在 $H_{\text{相互}}$ 中费米场总是成对出现的，因而 $(2.10)_8$式中的 δ_p 对于 $H_{\text{相互}}$ 实际上是不起作用的。所以 $U(t,\ t_0)$ 可写成

$$U(t,\ t_0)=T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}\int\mathscr{H}_{\text{相互}}(x)dx\right)。\qquad(2.12)_8$$

实际应用时，要把上式写成级数以便逐步近似

$$U(t,\ t_0)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t}dx_1\,dx_2\cdots dx_m$$

$$\cdot T[\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_1)\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_2)\cdots\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_m)]。\qquad(2.13)_8$$

当 $t\to\infty$，而 $t_0\to-\infty$ 时，如果 $U(\infty,\ -\infty)$的极限存在，它就是我们所谓的 S 矩阵

$$\boxed{\begin{aligned}S=U(\infty,\ -\infty)&=T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}_{\text{相互}}(x)dx\right)\\&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-i)^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\,dx_2\cdots dx_m\\&\cdot T[\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_1)\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_2)\cdots\mathscr{H}_{\text{相互}}(x_m)]。\end{aligned}}\qquad(2.14)_S$$

我们为什么对 $t\to\infty$，而 $t_0\to-\infty$ 的极限这样有兴趣呢？这是由于在过程中粒子(特别是强子)之间的相互作用常常只是发生在一个很短的时间内。粒子在相互作用发生以前，或结束以后的很长时间内，都常常相距甚远，各处在它们的特定的“自由”粒子状态。因此我们可用$|b,\ \infty\rangle$和$|a,\ -\infty\rangle$，分别作为过程的末态和初态的态矢量。我们通常有兴趣的量就是一定初态$|a\rangle$到一定末态$|b\rangle$的过渡振幅，它就可以表示为

$$\langle b,\ \infty|U(\infty,\ \infty)|a,\ \infty\rangle=\langle b|S|a\rangle。\qquad(2.15)_S$$

这就是相应的 S 矩阵元。

初态$|a\rangle$和末态$|b\rangle$常常是一个或多个“自由粒子”分别处于一定的状态的态，可以用我们以前所介绍的自由粒子的产生算符作用到真空态上而得到。不过应该指出，此地所有“自由”粒子，实际上只是指粒子之间的相互作用可以忽略，而粒子则总是和它们自己的固有的场一道运动的，也就是它们经常处在它们自己的物理质量壳层上，为了反映这一实际情况，我们常常把粒子的质量取为它的物理质量，即实际观测到质量。好在我们在把 H 分为 H_0 和 $H_{\text{相互}}$ 之和时，还可有一定的灵活性，例如我们可以把 H_0 中比例于 m_0(或对于玻色子比例于 m_0^2)的一项，分成为比例于 $m_0=m-\delta m$ 两项，而把$\sim m$ 项保留在 H_0 中，而把$\sim\delta m$ 一项放在 $H_{\text{相互}}$ 之中，其中 m_0 为粒子的固有质量，m 为物理质量，δm 为质量的修正。其实在 H_0 中保留$\sim m$ 项，也是 $U(\infty,\ -\infty)$极限存在，所必要满足的条件。

§8.3 算符的并缩

在具体计算$(2.14)_8$式的S矩阵元之前，需要把$(2.14)_8$式，进一步改进，使得计算时更为方便。由于体系在$t=-\infty$时的初态或$t=\infty$时末态，都是"自由"粒子的定态，因而其态矢量都可以由自由粒子的产生(或湮灭)算符作用到真空态的态矢量上而得到，例如有入射粒子a, b, $c\cdots$等的初态态矢量，可以表示为(参看$(4.13)_8$)

$$a^+b^+\cdots c^+|0,\ -\infty\rangle。\qquad (3.1)_8$$

其中$|0,\ -\infty\rangle$为"自由"粒子的真空态。

经常碰到的具体问题是要求一定初态($t=-\infty$)，例如入射粒子a, $b\cdots c$的初态，到末态($t=+\infty$)为某一特定的，例如出射粒子d、$e\cdots f$态的过渡机率，其过渡振幅由$(2.15)_8$式应为：

$$\langle 0,\ \infty|d、e\cdots f|S|a^+,\ b^+\cdots c^+|0,\ -\infty\rangle;\qquad (3.2)_8$$

其中d、$e\cdots f$为"自由"粒子的湮灭算符(粒子的产生和湮灭算符是互为厄密共轭的)。由此可见一定初态到一定末态的过渡振幅，就是S矩阵在相互作用图象里的相应的矩阵元(不过我们以后常把"$\pm\infty$"的标记省略)。

由$(2.14)_8$式知道S矩阵可以展开为一无穷级数，其中展开的每一项包含有$H_{相互}(x)$的时序乘积，而$H_{相互}(x)$中又包含有各种场算符的乘积，例如在电磁相互作用里，即为

$$\mathscr{L}_{相互}=j_\mu(x)A_\mu(x)=\frac{ie}{2}[\bar{\psi},\ \gamma_\mu\psi]A_\mu=-\mathscr{H}_{相互}(x)$$

另一方面，我们在前面已讨论过在场算符ψ、$\bar{\psi}$、φ或A中又都包含一系列粒子的产生和湮灭算符，总之S矩阵元中包含有一系列按时序先后排列的粒子产生或湮灭算符。我们知道任何一个粒子湮灭算符如果直接向右作用到真空态上其结果为零。同样任何一个粒子产生算符直接向左作用到真空态上，其结果亦为零。因此，如果我们能把S矩阵中的算符排成正规乘积，参看§5.5，就容易

看出S矩阵中的哪些项对某一过程有贡献，而另一些项的贡献为零，例如对于$(3.2)_8$式的过程而言，S矩阵中含有a、b、$\cdots c$以外的粒子的湮灭算符且排在右边的各项，对以上过程均无贡献。因为由$(3.2)_8$式看出，这些湮灭算符可以直接向右作用到真空态上，其结果为零。此外，同样的道理S矩阵中含有d，$e\cdots f$以外的粒子的产生算符且排在左边的各项，对以上过程也是无贡献的，所以对$(3.2)_8$式而言，只有S矩阵中那些项才有贡献，其中只含有a、$b\cdots c$粒子的湮灭算符且排在右边，且同时仅含有d^+、$e^+\cdots f^+$粒子的产生算符且排在左边，此外并无其他算符。

由此看来，把S矩阵中的算符写成正规乘积，是会带来很大方便，而且正规乘积较之时序乘积其物理图象也要清楚得多。在下一节里我们将可以看到时序乘积可以展开为各种正规乘积之和，因此可见S矩阵中每一项时序乘积，实际上是包含了多种多样的物理过程。把时序乘积写成正规乘积以后，我们就很容易地在S矩阵的每一项中选出我们所需要(对某一定过程)的部分，而不必再去考虑对应另外过程的部分。

为了要把时序乘积用正规乘积展开，我们在本节来介绍算符的并缩的概念。两个算符的时序乘积与正规乘积之差称为该两算符的并缩(或称配对)，并以算符间用线相连表示之。即

$$\boxed{\overbrace{UV}\equiv T(UV)-N(UV)。} \qquad (3.3)_8$$

由于算符间的对易关系，两个算符间的并缩应该是一个普通函数，不再是算符函数，例如

$$\overbrace{\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y)}=T(\phi^{(-)}(x)\cdot\phi^{(+)}(y))-N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y))$$
$$=\begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-y), & \text{当 } x_0>y_0; \\ =0, & \text{当 } x_0<y_0。 \end{cases}$$

一般有 $\overbrace{\phi(x)\phi(y)}=\begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-y), & \text{当 } x_0>y_0; \\ -i\Delta^{(-)}(x-y), & \text{当 } x_0<y_0。 \end{cases}$

利用$(6.12)_5$式可得：

$$\overbrace{\phi(x)\phi}(y)=\frac{1}{i}\Delta_c(x-y)$$

$$=\begin{cases}\overbrace{\phi^{(-)}(x)}\phi^{(+)}(y), & \text{当}(x_0>y_0);\\ \overbrace{\phi^{(+)}(x)}\phi^{(-)}(y), & \text{当}(x_0<y_0)。\end{cases}\qquad (3.4)_8$$

同样可以证明

$$\overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)}=-\overbrace{\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)}=iS_{c\alpha\beta}(x-y)。\qquad (3.5)_8$$

$$\overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)}=\frac{1}{i}\delta_{\mu\nu}D_c(x-y)。\qquad (3.6)_8$$

对于一般矢量场，利用$(5.7)_4$式可有

$$\overbrace{\varphi^*_\mu(x)\varphi_\nu}(y)=\frac{1}{i}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta_c(x-y)。\qquad (3.7)_8$$

显然，不同粒子的场算符的并缩，相互对易或反对易的场算符的并缩或在N乘积中的同一时刻的算符的并缩均为零。例如：

$$\overbrace{\psi\psi}=0=\overbrace{\bar{\psi}\bar{\psi}}=0=\overbrace{\psi\phi}=0=\overbrace{\bar{\psi}\phi}=0=\overbrace{\psi A}=0=\overbrace{\phi A}。\qquad (3.8)_8$$

可以把正规乘积的定义推广到含有并缩因子的情况，即

$$\boxed{N(\overbrace{UV\cdots Rxyz})\equiv\delta_p(\overbrace{UZ})(\overbrace{VR})N(\cdots x\cdots y)。}\qquad (3.9)_8$$

其中$\delta_p=+1$或-1，由自$UV\cdots Rxyz$的排列序到$UZVR\cdots xy$顺序时，其中费米场对易的次数为偶或为奇而决定，此外由于N乘积的真空态平均值为零，所以我们有

$$\boxed{\langle 0|\overbrace{UV}|0\rangle=\langle 0|T(UV)|0\rangle。}\qquad (3.10)_8$$

显然，N乘积或T乘积对于括号内的各个算符可以调换位置，不过对于玻色场是对称的，而对费米场则是反对称的，这个性质同样适用于并缩因子中的两个场算符。

§8.4 Wick 定 理

对于每一算符，现在要表明它两方面的特性，其一即为粒子的

产生或湮灭，其另一则为时间的先后（这个情况和我们用性别和年龄来表明人的特性相似），为简单起见我们只用算符的右下标来统一表明算符这两方面的特性，例如 U_i 其脚标 i 中包含有这两方面特性。算符按这两种不同特性来排列，一般是不一致的。也就是上节所提到过的算符的正规乘积和时序乘积一般是不相同的，由于算符间存在着对易关系，我们是可以找到这两种乘积之间存在的一般关系。Wick 研究了这个特殊的数学问题，并且得到了一般的关系，即所谓 Wick 定理。关于 Wick 定理的证明参看附录 III。这里只给出它的结论，并举例说明其应用。

Wick 定理的内容：m 个算符的 T 乘积可以唯一地展开为含有各种可能的并缩因子的 N 乘积之和，其中包括不含有并缩因子即零个并缩因子的 N 乘积。引进符号

$$N^m_{2p}\equiv\sum N(U_n\overbrace{U_{n-1}\cdots\underbrace{U_s\cdots U_2}}U_1)。\qquad(4.1)_8$$

其中求和是对所有含有 p 个并缩因子的项进行，也就是对所有含有 $(m-2p)$ 个未并缩的算符的项进行。求和一共有 $m![(m-2p)!p!2^p]^{-1}$ 项，Wick 定理可由下列算式表明：

$$\boxed{T(U_mU_{m-1}\cdots U_1)=\sum_{p=0}^{n}N^m_{2p}。}\qquad(4.2)_8$$

其中
$$n=\begin{cases}m/2, & \text{当 } m \text{ 为偶数;}\\ \dfrac{m-1}{2}, & \text{当 } m \text{ 为奇数。}\end{cases}$$

且 $N^m_{20}=N(U_mU_{m-1}\cdots U_1)$。即为不含有并缩因子的正规乘积。

下面我们以电磁相互作用为例来说明 Wick 定理的应用，这时

$$\mathscr{L}_{\text{相互}}=\frac{ie}{2}[\bar\psi,\ \gamma_\mu\psi]A_\mu=ieN[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)A_\mu(x)]$$

代入 $(2.14)_8$ 式。

$$S^{(m)}=\frac{(-e)^m}{m!}\int dx_1\cdots\int dx_{m-1}$$

$$\cdots\int dx_m\, T[N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1))\cdot N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu$$

$$\cdot\psi(x_2)A_\nu(x_2))\cdots N(\bar{\psi}(x_m)\gamma_\rho\psi(\gamma_\mu)A_\rho(x_m))]。\quad (4.3)_8$$

为简明计，我们限于讨论 $m=2$ 的情况。利用 Wick 定理和上节的讨论，我们可以把上式的被积函数展开。

$$\begin{aligned}
&T(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1))N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\\
&\quad=N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\}N^6_{2.0}\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\Big\}N^6_{2.1}\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_2)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\Big\}N^6_{2.2}\\
&\qquad+N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\cdot\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2))\}N^6_{2.3}。
\end{aligned}$$

$$(4.4)_8$$

上式等号右边的各个 N 乘积的物理意义是明显的(参看下节)，因此 Wick 定理的重要意义，在于把 T 乘积中对应不同物理过程的各项明显分解开来。由此也可见，S 矩阵的任一级修正 $S^{(m)}$ 其实都包括有多种多样的物理过程，对一定物理过程则只有其中相应的各项 N 乘积才有贡献，即其中只含有初态粒子湮灭算符，末态粒子的产生算符，以及中间态粒子(虚粒子)的并缩因子的各项。

§8.5 Feynman 图

为了使 S 矩阵中的每一项 N 乘积的物理意义能更形象地表

示出来，Feynman 引进了用图形来表示 N 乘积的方法，为此我们须要建立图形与 N 乘积之间的一对一的对应关系，亦即要由 S 矩阵中每一项能画出对应的 Feynman 图形，也可以由 Feynman 图形写出相应的 S 矩阵元来。首先我们要建立 N 乘积中的部件与图形中的部件的对应关系。在此我们着重分析量子电动力学情况，对其他相互作用形式的推广是容易的，因此不再详细讨论。其对应关系作如下之规定：

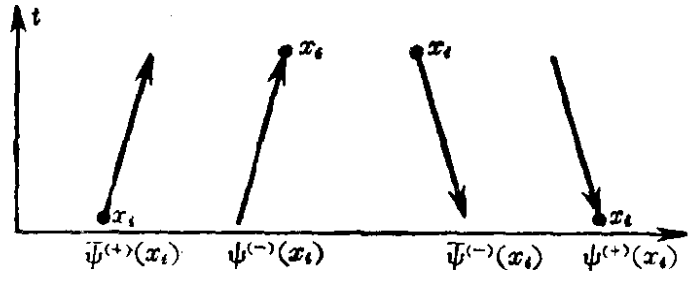
(1) 时空点 x_i 用平面上点表示，该点称为角点，纵轴表示时间，横轴表示空间。

(2) 费米场算符用一端和角点相连的实直线表示，常称为外粒子线，费米粒子的产生算符其角点在实线的始端(时间在先)，其湮灭算符，则角点在实线的末端(时间在后)。

(3) 实直线上标以箭头来区分 $\bar{\psi}$ 和 ψ，对于 ψ 箭头指向角点，$\bar{\psi}$ 则箭头离开角点。

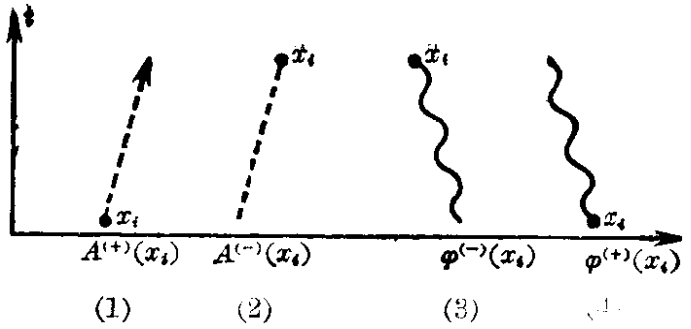
(4) 光子(或介子)场算符以一端和角点相连的虚线(或波动线)表示，常称为外光子(或外介子)线。光子(或介子)的产生算符其角点在虚线(或波动线)的始端(时间在先)。光子(或介子)的湮灭算符其角点在虚线(或波动线)的末端(时间在后)，必要时线上也可符以箭头，但一般是不必要的。

(5) 并缩因子以连接两个角点的实线(费米粒子)、虚线(光子)或波动线(介子)表示，常称为内粒子线总结如下图所示。



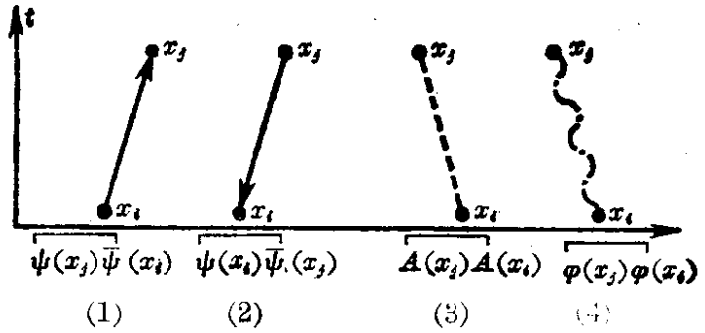
(1) 费米子在 x_i 处产生　(2) 费米子在 x_i 处湮灭　(3) 反费米子在 x_i 处湮灭　(4) 反费米子在 x_i 处产生

图 8-1



(1) 光子在 x_i 处产生　(2) 光子在 x_i 处湮灭　(3) 介子在 x_i 处湮灭　(4) 介子在 x_i 处产生

图 8-2



(1) 虚费米子在 x_i 处产生在 x_j 处湮灭
(2) 虚反费米子在 x_i 处产生在 x_j 处湮灭
(3) 虚光子在 x_i 处产生在 x_j 处湮灭
(4) 虚介子在 x_i 处产生在 x_j 处湮灭

图 8-3

应该指出，以上已考虑到在计算 $S^{(m)}$ 时，我们要对角点坐标 x_i, x_j 进行积分。在积分过程中，角点的时间先后顺序可以发生变化，因而，例如 $x_i \nearrow^{x_j}$ 在对 x_i, x_j 积分时，既包含了 $\overbrace{\psi^{(-)}(x_j)\bar{\psi}^{(+)}(x_i)}$，当 $x_{oj}>x_{oi}$; 也包含了 $\overbrace{\psi^{(+)}(x_j)\bar{\psi}^{(-)}(x_i)}$，当 $x_{oj}<x_{oi}$。所以它就和 $\overbrace{\psi(x_j)\bar{\psi}(x_i)}$ 等效，参看 $(3.5)_8$ 式。

对具体问题的计算以及对 S 矩阵一般性质的分析，在动量空间里较之在坐标空间讨论更为方便，尤其在考虑粒子散射问题时，体系的初态和末态常常是具有一定动量的粒子态，用动量空间来处理更显得自然，回忆一下场算符在动量空间的表示。例如

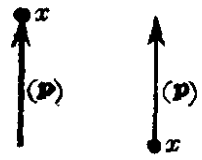
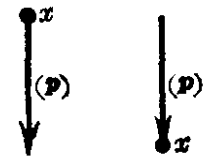
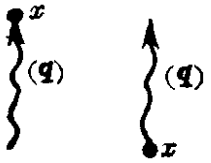
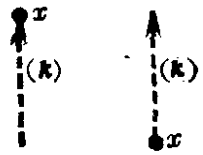
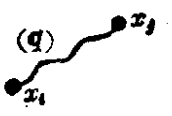
$(5.3)_2$，并缩因子的具体表示 $(3.4)_8$、$(3.5)_8$ 及 $(3.6)_8$ 式，以及 $\Delta_c(x_i-x_j)\cdot S_c(x_i-x_j)$ 及 $D_c(x_i-x_j)$ 函数的动量表示，参看 $(6.9)_5$ 式我们就很容易地得到在动量空间里，Feynman 图形与 S 矩阵元部件之间的对应关系。由于对应内粒子线(并缩因子)的 Δ_c、S_c 和 D_c 都是 (x_i-x_j) 的函数，因而在动量空间里，它们对内粒子线所连结的两个角点 x_i 和 x_j 贡献符号相反的动量(四维)，以致我们可以把内粒子线，认为是代表具有四维动量 k_μ 的虚粒子，在一个角点产生，而在另一个角点湮灭。不过，虚粒子和实粒子不同，其动量能量之间并不存在 $k^2=-m^2$ 关系的限制。

对于 S 矩阵的 m 级修正项 $S^{(m)}$，显然应有 m 个角点，参看 $(4.3)_8$ 式，对于电磁相互作用来讲，由于其 $\mathscr{L}_{相互}=ieN(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)$，每一个角点，都有两根费米子线通过，其一指向角点来自 ψ，另一离开角点来自 $\bar{\psi}$。还有唯一的一根光子线(来自 A_μ)通过。其他相互作用的角点，可以按此类推。由于 $\bar{\psi}$ 和 ψ 经常是成对出现的，因而在一般情况下，每一角点的费米子线将成对出现(也可能没有费米子线出现)，因而任何一个 Feynman 图的外费米子线的总数经常是偶数，这就是费米数守恒的具体反映。总结以上所述，我们把部件之间的对应关系已列表(见 p.191)。

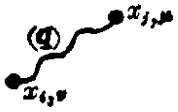
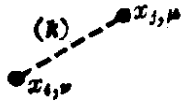
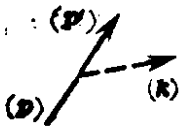
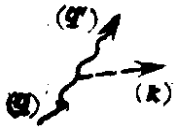
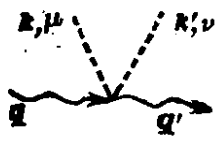
以上对应关系只是 $S^{(m)}$ 中被积函数的 N 乘积中的部件，与 Feynman 图的部件的对应关系。对于 $S^{(m)}$ 全部我们还要考虑积分前面的因子，以及对所有角点时空进行积分，为此我们对于上表还应加以下几点说明。

(1) $S^{(m)}$ 前面还应有 $\left(\frac{-1}{\hbar c}\right)^m$ 因子，这个因子是由微扰展开而来，参看 $(4.3)_8$ 式。其中已包含有 $\mathscr{L}_{相互}$ 中的 i 因子在内。

(2) $S^{(m)}$ 前面还应有 $\left(\frac{1}{m!}\right)$ 因子，这个因子也是由微扰展开而来；但实际上可以不必考虑。因为对于同一物理过程(除真空起伏外)都可以有 $m!$ 个完全相同的图形，它们只是角点的编号不同而已，由于我们要对每个角点时空要进行积分，所以这些图形的贡献相同。我们称这些仅是角点编号顺序不同的图形，彼此为等

Feynman 图的部件	S 矩阵中对应因子 (坐标空间)	S 矩阵中对应因子 (动量空间)	参考公式
外费米子线 	$\psi^{(-)}(x)$ $\bar{\psi}^{(+)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon}}\,u^h(\boldsymbol{p})$ $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon}}\,\bar{u}^h(\boldsymbol{p})$	$(6.15)_1$ $(6.14)_1$ $(6.17)_1$
外费米子线 	$\bar{\psi}^{(-)}(x)$ $\psi^{(+)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon}}\,\bar{v}^h(\boldsymbol{p})$ $\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\epsilon}}\,v^h(\boldsymbol{p})$	$(6.14)_1$ $(6.15)_1$ $(6.17)_1$
外玻色子线 	$\varphi^{(-)}(x)$ $\varphi^{(+)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}$ (标量场) $\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\,e_\mu^\lambda$ (矢量场)	$(5.3)_2$ $(1.4)_4$
外光子线 	$A_\mu^{(-)}(x)$ $A_\mu^{(+)}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\,e_\mu^\lambda$	$(1.4)_4$
内费米子线 	$\overbrace{\psi(x_j)\bar{\psi}(x_i)} = iS_c(x_j-x_i)$	$\frac{i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{i\gamma p-m}{p^2+m^2-i\sigma}$	$(3.5)_8$ $(6.17)_5$
内玻色子线  (标量介子)	$\overbrace{\varphi(x_i)\varphi(x_i)}$ $= \frac{1}{i}\Delta_c(x_j-x_i)$	$\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{i}\,\frac{1}{q^2+m^2-i\sigma}$	$(3.4)_8$ $(6.9)_5$

（续表）

Feynman 图的部件	S 矩阵中对应因子（坐标空间）	S 矩阵中对应因子（动量空间）	参考公式
内玻色子线  （矢量介子）	$\overbrace{\varphi_\mu(x_j)\varphi_\nu(x_i)}$ $=\frac{1}{i}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)$ $\cdot\Delta_c(x_j-x_i)$	$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{1}{q^2+m^2-i\varepsilon}$ $\cdot\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{m^2}\right)$	$(3.7)_8$ $(5.6)_4$
内光子线 	$\overbrace{A_\mu(x_j)A_\nu(x_i)}$ $=\frac{1}{i}\delta_{\mu\nu}D_c(x_j-x_i)$	$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}$	$(3.6)_8$ $(6.9)_5$
强作用角点 	$-g\gamma_5$	$-(2\pi)^4 g\gamma_5\delta(p-p'-q)$	$(7.1)_7$
电磁角点  $(e\gamma)$	$e\gamma_\mu$	$(2\pi)^4 e\gamma_\mu\delta(p-p'-k)$	$(9.2)_7$
 $(\pi\gamma)$	$-e\partial\!\!\!/_\mu$	$-(2\pi)^4 ei(q_\mu+q'_\mu)$ $\cdot\delta(q-q'-k)$	$(10.2)_7$ $(10.6)_7$
 $(\pi\gamma')$	$-e^2$	$-2(2\pi)^4 e^2 i\delta(q-q'$ $-k-k')$	$(10.6)_7$

效图形。如果我们约定只计算 $m!$ 个等效图形中的一个图形，则本应乘上 $m!$ 的因子正好和 $\left(\frac{1}{m!}\right)$ 因子抵消。

(3) 对于同一物理过程可能有不同的图形，其中包括有彼此只是交换了外粒子线的图形。它们相应于 N 乘积中粒子产生(或湮灭)算符的地位互换，它们对同一物理过程的贡献，一般是不同的，要分别处理。此时我们应该考虑到 N 乘积对于其中费米场的反对称性，因而 $S^{(m)}$ 积分前还应有因子 $\delta_p=+1$ 或 -1，由相对于某一原来的图形($\delta_p=+1$)而言，外费米子线互换次数为偶或为奇而定。

(4) N 乘积中出现有一系列 γ_μ 矩阵以及 u, $\bar{u}$, V 或 $\bar{V}$ 等，如果采用通常的矩阵相乘法则，则它们的排列顺序不能随意调动，因而对它们的排列顺序要做适当的规定，以后我们将做如下的规定。以使上表的对应关系保持不变，即沿费米子线箭头方向前进，而把所遇对应因子依次自右到左排列，值得指出的是：上表中的内费米子线对应的因子是

$$\overbrace{\psi(x_j)\bar{\psi}(x_i)}=iS_c(x_j-x_i)$$

一般是不必多加考虑的，可是如果图形的内部出现有费米子线回路时，我们需要仔细分析，例如下图的费米子封闭回路，其对应因子应如下述。

$$\bar{\psi}(x_6)\overbrace{\psi(x_6)\bar{\psi}(x_5)}\cdot\overbrace{\psi(x_5)\bar{\psi}(x_4)}\overbrace{\psi(x_4)}\cdots\overbrace{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)}$$

其中最后一根内费米子线来自

$$\underbrace{\psi(x_j)\cdots\psi(x_i)}=-\overbrace{\psi(x_i)\bar{\psi}(x_j)}。$$

恰与上表的对应关系差一符号，这个情况对于每一个费米子线回路都同样发生，因而如果保持上表的对应关系。则应乘以因子 $(-1)^l$，其中 l 为图形中出现的费米子回路的数目。

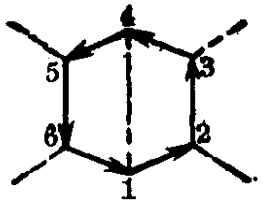


图 8-4

考虑到按以上约定的矩阵排列的乘积运算，对应每一个费米

子回路将会出现相应的 S_c 的求迹运算，即

$$\mathrm{Tr}[S_c(x_6-x_5)\cdots S_c(x_1-x_6)]$$

因子。

(5) 在动量空间里，每一根粒子线。在它通过的角点 x 处，附有因子 $\exp(ikx)$，对于正(或负)频部分，其 k 值将取粒子动量的正(或负)值。也就是在 x 角点湮灭的粒子，其 k 值即为粒子的四维动量，而在 x 角点产生的粒子，其 k 值即为该粒子四维动量的负值。在这样的规定下，对于每一角点 x 将有因子 $\exp(ix\sum k)$，其中求和系对通过角点 x 的所有粒子线进行，由于 $S^{(m)}$ 中的其它部分已不再含有 x 变量，所以对 x 积分后就出现了 δ 函数。

$$\int e^{ix\sum k}dx=(2\pi)^4\delta(\sum k)。\qquad (5.1)_8$$

这就是上表对应关系中，对每一个角点有 $(2\pi)^4\delta(\sum k)$ 的来源，正是由于存在这个 δ 函数，保持了体系在每一个角点的动量守恒，不过还应该再一次指出对于虚粒子。其动量并不存在 $k^2=-m^2$ 关系的限制。

(6) 在上表的动量空间的对应关系中，对于外粒子我们没有写出粒子产生或湮灭算符，它们的正规乘积实际上可以不必写出，因为它们作用到初态，末态的态矢量上，正好和态矢量中的粒子湮灭或产生算符相消，否则 $S^{(m)}=0$，参看 $(4.2)_8$ 式，考虑到

$$a^{(-)}(k)a^{(+)}(k)=N+1$$

等关系可知：

$$\langle 0|a^{(-)}e^{(-)}\cdots f^{(-)}|c\,f^{(+)}\cdots e^{(+)}d^{(+)}\cdots\cdots$$

$$c^{(-)}b^{(-)}a^{(-)}|a^{(+)}b^{(+)}\cdots c^{(+)}|0\rangle=c\cdots\cdots。$$

总结以上所述 $S^{(m)}$ 中对应某一 Feynman 图形的矩阵元 $S_{fi}^{(m)}$ 有如下形式。暂以电磁相互作用为例，其结果不难推广于其他情况。

$$S_{fi}^{(m)}=\delta_p(-1)^{m+l_e^m}\cdot(2\pi)^{4(n_i-F)}(V)^{\frac{-n}{2}}\int dp_1\int dp_2\cdots\int dp_{F_e}$$

$$\int dk_1 \int dk_2 \cdots \int dk_{F_\gamma} \cdot \prod^{n} \delta(\sum k) \cdot O$$
$$\cdot \Big\{ \prod \Big(\sqrt{\frac{m}{\epsilon_f}}\, \bar{u}(\boldsymbol{p}_f) \sqrt{\frac{m_i}{\epsilon_i}}\, \bar{V}(\boldsymbol{p}_i) \frac{(\gamma e_f)}{\sqrt{2\omega_f}} \Big)$$
$$\times \prod^{F_e} i\, \frac{i\gamma p - m}{p^2 + m^2} \prod^{F_\gamma} \gamma_\mu \frac{\delta_{\mu\nu}}{ik^2} \gamma_\nu$$
$$\times \prod \Big(\sqrt{\frac{m}{\epsilon_i}}\, u(\boldsymbol{p}_i) \sqrt{\frac{m}{\epsilon_f}}\, V(\boldsymbol{p}_f) \frac{(\gamma e_i)}{\sqrt{2\omega_i}} \Big) \Big\} 。 \qquad (5.2)_8$$

其中 n 为外粒子线数目总和，F_e 为内费米子线数目，F_γ 为内光子线数目，$F = F_e + F_\gamma$ 为内粒子线总数。下指标 i 和 f 分别表明初态量和末态量，连乘符号 $\prod$ 分别对角点、外粒子线、内粒子线进行。大括号前的 O 符号表明大括号内的因子要按一定顺序排列，参看上述注意(4)·e_i 和 e_f 分别为初态和末态光子的极化矢量，$(\gamma e) = \gamma_\mu e_\mu$。积分对所有内粒子动量进行，并对内粒子极化求和。

在对内粒子动量进行积分时，在 k_0 平面上的积分路线应用 Δ^c 的积分路线，参看 §5.6，积分时可以充分利用每一角点 $\delta(\sum k)$ 函数。积分到最后经常存留一个 δ 函数因子 $\delta(\sum p_i - \sum p_f)$，即所有外粒子的总动量守恒，这也是物理过程中体系动量守恒的具体反映。

§8.6 Feynman 图应用示例

我们以分析 $(4.4)_8$ 式各项来说明 Feynman 图的应用。因为 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$ 及 $A(x)$ 都含有正、负频两部分，所以对应 $(4.4)_8$ 式的第一项

$$N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1) \cdot \bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu A_\nu(x_2)\psi(x_2))$$

含有下列图形中任何两个在一起的各种组合，如图 8–5 所示。

例如其中含有(1)和(4)的组合，以及它们角点编号互换的图形(图 8–6)。

以上两对分立图形组合图形的贡献实际为零，因为每一个角点都有一个 $\delta(\sum k_i)$ 因子。要求每一角点都保持动量守恒。对于

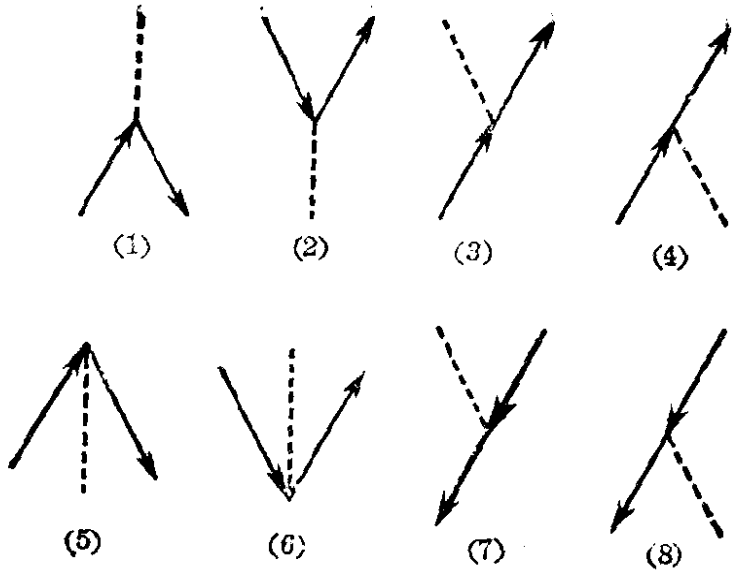


图 8-5

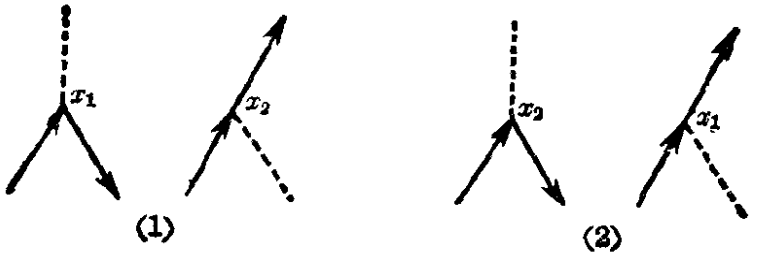


图 8-6

三个粒子都是外粒子的孤立角点(如 8-6 图所示)实际无法满足该角点的四维动量守恒,因此以上分立的角点的图形实际贡献为零。

又如$(4.4)_8$式中第二项中含有以下的图形(考虑到 $A_\mu(x)$ 中含有各种动量的光子的产生和湮灭算符)。

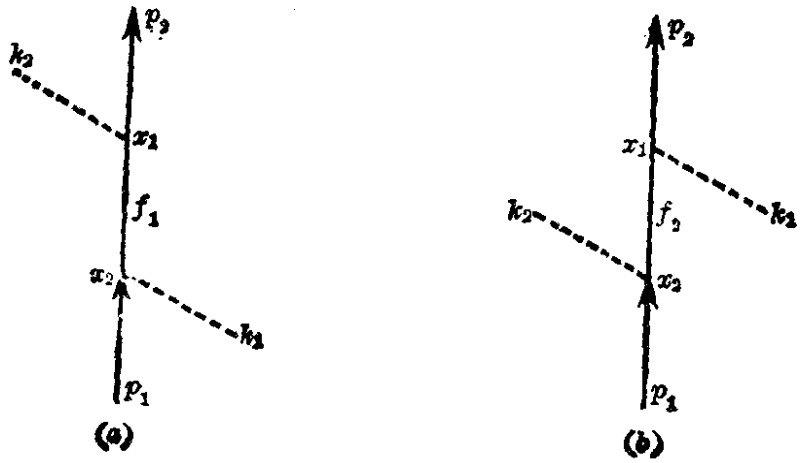


图 8-7

此外在$(4.4)_8$式第三项中可有与以上两图相等效的两个图形，只是$x_1 \leftrightarrow x_2$互换而已。以上各图都是反映 Compton 散射过程的。我们在计算 Compton 散射(二级效应)时；就是要考虑以上图 8-7 的两个 Feynman 图。同样我们对于等效图形只取其一。

由以上 Feynman 图看来，我们可形象地理解 Compton 散射，是通过以下几个过程所完成的。即(由图 8-7(a))电子首先吸收了光子k_1形成虚粒子，以后再放出光子k_2又变换到p_2的实电子。或(由图(b))电子首先放出光子k_2，变成虚电子，以后再吸收光子k_1又成为p_2的实电子。还须指出，我们还要对角点x_1和x_2积分，在积分中实际上在图 8-7(a)和(b)中已分别包含以下的图形：

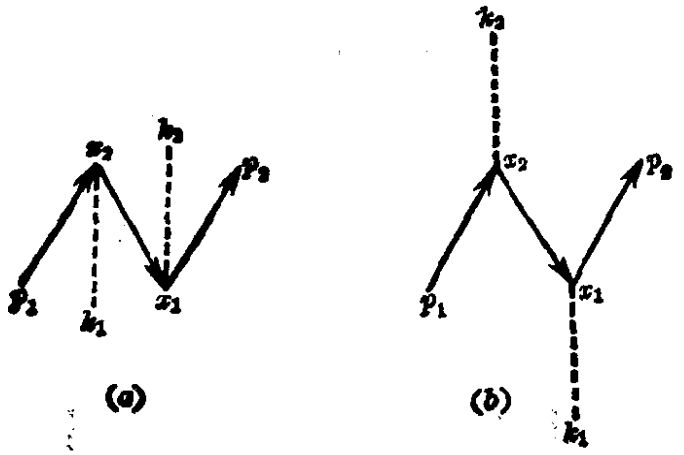


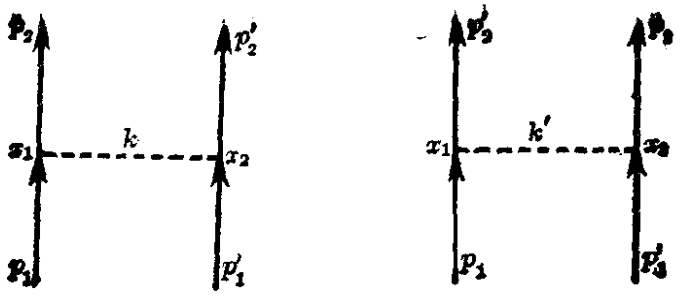
图 8-8

这一点我们在上节讨论内粒子的对应关系时已作说明。

对于图 8-8(a)我们可以解释为在x_1处产生了一对正、负电子和一个光子，这个电子对其中一为p_2电子，其中另一为正电子，该正电子在x_2处和另一电子p_1相湮灭，同时在x_2处还湮灭了一个光子k_1，对于图 8-8(b)解释类似。

考虑到$\psi(x)$中含有各种动量电子的湮灭算符。同样在$\bar{\psi}(x)$中含有各种动量电子的产生算符，在$(4.4)_8$式第四项含有以下图形(图 8-9)。

第四项中也含有与图8-9相等效的图形，这些图形都是反映电子-电子散射过程。按照约定，等效图形只取其一，所以在计算电子-电子散射过程(二级效应)时，我们就只需考虑图 8-9 中的两个



(a) (b)

图 8-9

图形。这两个图形在 $S^{(m)}$ 中相应的 N 乘积分别为

$$N(a^{(+)}(p_2)a^{(-)}(p_1)a^{(+)}(p_2')a^{(-)}(p_1'))$$

和 $$N(a^{(+)}(p_2')a^{(-)}(p_1)a^{(+)}(p_2)a^{(-)}(p_1'))。$$

由于 N 乘积对于其中的费米场是反对称的。因而这两个图形的符号相反，这一点在上节(3)中已作了说明。

由以上 Feynman 图看来，电子间的散射，是由于相互交换光子而产生的，这就是我们通常所谓的电子间的相互作用。

当然在$(4.4)_8$式的第四项中还包含有电子-正电子、正电子-正电子散射的各项，于此不再赘述。

在$(4.4)_8$式第五项中含有

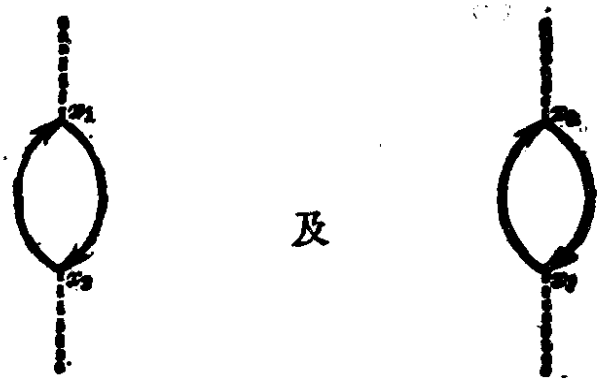


图 8-10

二者为等效图形。计算时只取其一，对应光子的固有能量。

此外第六项中含有以下图形(图 8-11)。

第七项中含有图 8-11 的等效图形，对应电子的固有能量。这个图形表示电子的固有能量是由于电子吸收了自己发放的(虚)光子，这正是我们所常提到的所谓自作用。



图 8-11



图 8-12

最后在第八项中只有一个图形(图 8-12)也无等效图形，对应真空起伏。

由以上的讨论：具体地看出 $S^{(m)}$ 中各项 N 乘积，对应着不同的物理过程，甚至对应物理过程中所参加的粒子的数目，也可以是不相同的。

以上举例说明了 Feynman 图与 N 乘积的对应关系。下面我们以图 8-7 和图 8-9 为例来说明。由 Feynman 图写出矩阵元的法则的具体应用。用 Feynman 图来表明具体物理过程是比较简易的，实际计算中我们也往往是通过 Feynman 图形来写出对应的具体过程的 S 矩阵元的。

首先考虑图 8-7(a)

$m=2$, $\delta_p=+1$, $l=0$, $F=F_e=1$, $n=4$ 代入$(5.2)_s$ 式得

$$S^{(2)}_{(a)}=e^2(2\pi)^4V^{-2}\frac{1}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

$$\cdot\frac{m}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\bar{u}_2(\gamma e_2)i\frac{if_1\gamma-m}{f_1^2+m^2}(\gamma e_1)u_1\delta(p_1+k_1-p_2-k_2)。\tag{6.1a}_s$$

其中 $f_1=p_1+k_1=p_2+k_2$。对内电子动量 f_1 已进行过积分。积分时并已应用了一个角点的 δ 函数。值得再一次指出 $\gamma f_1=\gamma_\mu f_{1\mu}$; $\gamma e_2=\gamma_\nu e_{2\nu}$; $\gamma e_1=\gamma_\mu e_{1\mu}$; 以下同此。

同样对于图 8-7(b)

$m=2$, $\delta_p=+1$, $l=0$, $F=F_e=1$, $n=4$ 代入$(5.2)_s$式得

$$S_{(b)}^{(2)}=e^2(2\pi)^4V^{-2}\frac{1}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}$$

$$\cdot\frac{m}{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}\bar{u}_2(\gamma e_1)i\ \frac{i\gamma f_2-m}{f_2^2+m^2}(\gamma e_2)u_1\delta(p_1+k_1-p_2-k_2)。$$

(6.1b)$_s$

考虑 Compton 散射(二级效应)时，以上两项都要考虑，其总 S 矩阵元为以上两项之和，即

$$S^{(2)}(e\gamma)=S_{(a)}^{(2)}+S_{(b)}^{(2)}。$$

其次考虑图 8-9(a)

$m=2$, $\delta_p=+1$, $l=0$, $F=F_\gamma=1$, $n=4$ 由(5.2)$_s$式有

$$S_{(a)}^{(2)}=e^2(2\pi)^4V^{-2}\frac{m^2}{(\epsilon_1\epsilon_1'\epsilon_2\epsilon_2')^{1/2}}\frac{(\bar{u}_2\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_1')}{i(p_2-p_1)^2}$$

$$\cdot\delta(p_1+p_1'-p_2-p_2')。\qquad(6.2a)_s$$

对于图 8-9(b)

$m=2$, $\delta_p=-1$, $l=0$, $F=F_\gamma=1$, $n=4$ 由(5.2)$_s$式得到

$$S_{(a)}^{(2)}=-e^2(2\pi)^4V^{-2}\frac{m^2}{(\epsilon_1\epsilon_1'\epsilon_2\epsilon_2')^{1/2}}$$

$$\cdot\frac{(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2\gamma_\mu u_1')}{i(p_2'-p_1)^2}\delta(p_1+p_1'-p_2-p_2')。\qquad(6.2b)_s$$

考虑电子-电子散射(二级效应)时，以上两项都应考虑，总 S 矩阵是以上两项之和，即

$$S^{(2)}(ee)=S_{(a)}^{(2)}+S_{(b)}^{(2)}。$$

对应同一物理过程的同级修正项，一般可有几个 Feynman 图与之对应；计算时应全部考虑，并把各图形的矩阵元求和，单独考虑其中任一个图都不具有真实的物理意义。

由以上的讨论看来，协变的微扰理论和旧的微扰理论，形式上有所不同。在旧的微扰理论里，虚过程中只有动量守恒，而无能量严格守恒的要求(受测不准关系的限制)，且粒子处在虚态时也和实态时一样满足质量关系 $p^2=-m^2$。但在协变的微扰理论里，虚过程中动量和能量都是守恒的，这反映在每一角点都有一个

四维 δ 函数存在。可是虚粒子不再象实粒子那样满足质能关系的要求。协变微扰理论中展开的每一项都具有明显的协变形式，这是旧的微扰理论所不具备的。正是由于这种协变形式的特点，协变微扰理论在具体计算上，尤其在消除发散的问题上，都较为方便。

§8.7 费米子线回路，Furry 定理

由于电磁相互作用在电荷共轭变换下保持不变，体系的荷称是守恒的，因而奇数(或偶数)光子到偶数(或奇数)光子的过渡是禁戒的，参看 §6.2。因此，奇数角点的电子线回路图形的贡献为零。同样由于 G 宇称守恒，奇数角点附有奇数个 π 介子线的核子线回路图形，其贡献亦为零，以上结论不论费米子线回路附有的光子线或 π 介子线是外粒子或内粒子都是成立的，这就是所谓 Furry 定理。对于 Furry 定理，可以应用上节介绍的法则，通过具体讨论加以证明，这种证明作为练习，留给读者自己进行。

Furry 定理还可以推广到更一般的情况，考虑有 m 个角点的费米子回路。如图所示。根据上节的对应法则，对于图 8-13(a)将出现因子

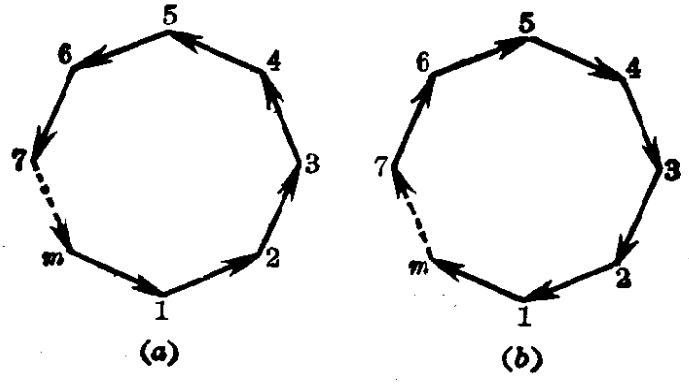


图 8-13

$$\mathrm{Tr}[S_c(x_1-x_m)\gamma_{A_m}\cdots S_c(x_3-x_2)\gamma_{A_2}S_c(x_2-x_1)\gamma_{A_1}]。$$

其中 γ_{A_i} 为五类 γ 矩阵中的某一类，由角点的相互作用形式决定。由求迹(Tr)的性质上式还可以写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[S_c(x_1-x_m)\gamma_{A_m}\cdots S_c(x_3-x_2)\gamma_{A_2}S_c(x_2-x_1)\gamma_{A_1}]\\&=\mathrm{Tr}[C^{-1}S_c(x_1-x_m)\gamma_{A_m}\cdots S_c(x_3-x_2)\gamma_{A_2}S(x_2-x_1)\gamma_{A_1}C]\\&=\mathrm{Tr}[C^{-1}S_c(x_1-x_m)CC^{-1}\gamma_{A_m}CC^{-1}\\&\quad\cdots C^{-1}S_c(x_3-x_2)CC^{-1}\gamma_{A_2}CC^{-1}S_c(x_2-x_1)CC^{-1}\gamma_{A_1}C]。\end{aligned}\tag{7.1}_8$$

上式关系对于任一非奇异的 C 矩阵都是成立的。我们可取 C 就是电荷共轭的 C 矩阵，参见 $(10.1)_1$，则存在下列关系：

$$\left.\begin{aligned}&C^{-1}\gamma_AC=\gamma_{AT},\qquad \text{当 }\gamma_A=I,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu\gamma_5;\\&C^{-1}\gamma_AC=-\gamma_{AT},\quad \text{当 }\gamma_A=\gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}。\end{aligned}\right\}\tag{7.2}_8$$

前者 $\gamma_A=S.\ p.\ A$，称为偶荷称相互作用项，后者 $\gamma_A=V,\ T$ 称为奇荷称相互作用项。同时可证明：

$$C^{-1}S_C(x_j-x_i)C=S_{CT}(x_i-x_j)。\tag{7.3}_8$$

把以上关系代入 $(7.1)_8$ 式得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[S_c(x_1-x_m)\gamma_{A_m}\cdots S_c(x_3-x_2)\gamma_{A_2}S_c(x_2-x_1)\gamma_{A_1}]\\&=(-1)^a\mathrm{Tr}[S_{CT}(x_m-x_1)\gamma_{A_mT}\cdots\\&\quad S_{CT}(x_2-x_3)\gamma_{A_2T}S_{CT}(x_1-x_2)\gamma_{A_1T}]\\&=(-1)^a\mathrm{Tr}[\gamma_{A_1}S_c(x_1-x_2)\gamma_{A_2}S_c(x_2-x_3)\cdots\\&\quad\gamma_{A_m}S_c(x_m-x_1)]。\end{aligned}\tag{7.4}_8$$

其中 a 为 m 角点中所有奇荷称相互作用项的数目，上式左方求迹项来自图 8-13(a)。而右边的求迹项，则来自图 8-13(a)的伴生图形，所谓伴生图形就是把原来图 8-13(a) 的费米子线回路中所有费米线的箭头反向，其余部分不变，所得到的图形，即如图 8-13(b)所示。

$(7.4)_8$ 式就是说明互相伴生的两个图形其贡献当 a 为偶数时相等，当 a 为奇数时则相互差一符号。对于任何一个物理过程，相互伴生的图形，经常同时参与贡献，因此我们得到结论如下：

含有奇数个奇荷称相互作用项的费米子线回路对物理过程的总贡献为零。

虽然 γ_5 是属于偶荷称相互作用项，但由于 γ_5 的以下特性也存在类似的情况，即(参看 $(2.7)_1$)

$$\mathrm{Tr}\gamma_5=0,\ \mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu)=0;$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho)=0;$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\sigma_{\mu\nu})=0。$$

含有三个 γ_5 角点的费米子线回路图形，将出现因子。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\gamma_5(i\gamma_\mu p_\mu-m)\gamma_5(i\gamma_\nu p_\nu-m)\gamma_5(i\gamma_\rho p_\rho-m)\\&=\mathrm{Tr}(\gamma_5(i\gamma_\mu p_\mu-m)(-i\gamma_\nu p_\nu-m)(i\gamma_\rho p_\rho-m)=0。\end{aligned}\tag{7.5}$$

另外一个与电子线回路图形有关的结论：就是当电子线回路的任一外光子线的动量 $k\to 0$ 时，该图形的贡献也为零。考虑由 m 个角点所组成的电子线回路，与几个外光子线相连。由于我们对内粒子线的动量要求积分，对于回路上的 γ 矩阵要求迹。因而对于上述图形的 S 矩阵元将只是外光子的极化矢量 $e_\lambda^{(i)}$ 和动量矢量 $k_\mu^{(i)}$ 的函数(外光子动量矢量 $k_\mu^{(i)}$ 是由于角点的动量守恒，而作为参量进入内粒子的动量表式中的)。由上节的对应法则知道 S 矩阵对任一个 $e_\mu^{(i)}$ 的依赖关系都是线型的。即 $S^{(m)}(n\gamma)$ 可写成以下形式。

$$S^{(m)}(n\gamma)=e_\mu^{(1)}\cdots e_\sigma^{(i)}\cdots e_\rho^{(n)}M^{\mu\cdots\sigma\cdots\rho}(k^{(1)},\ k^{(2)},\ \cdots k^{(n)})。\tag{7.6}$$

其中 $M(k_\mu^{(i)})$ 是 n 个外光子动量 $k_\mu^{(i)}$ 的某一函数。

由于电磁相互作用的规范不变性的要求，任一规范不变的物理量(例如我们的 $S^{(m)}(nr)$)，在任意一个矢势的微量规范变换 $e_\sigma^{(i)}\to e_\sigma^{(i)}+k_\sigma^{(i)}\epsilon_{\mathrm{下}}$，所引起它的变更应为零，最后导致对于任一个 (i) 都有

$$\delta S^{(m)}(n\gamma)=\frac{\partial S^{(m)}(n\gamma)}{\partial e_\sigma^{(i)}}\delta e_\sigma^{(i)}=0,\quad (i)=1,\ 2,\ \cdots n。$$

以 $(1.6)_4$ 式代入上式可得

$$\frac{\partial S^{(m)}(n\gamma)}{\partial e_\sigma^{(i)}}\cdot k_\sigma^{(i)}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots n。\tag{7.7}$$

这相当在 $S^{(m)}(n\gamma)$ 中的任何一个极化矢量 $e_\mu^{(i)}$，如果代以它的波矢量 $k_\mu^{(i)}$，则其结果为零。这个结论只是来自规范不变性的要求，没有依靠其它特殊的假定，因而是有一般性的。

由$(7.7)_8$和$(7.6)_8$式关系就得到

$$k_\sigma^{(i)} \cdot M^{\cdots\sigma\cdots}(k)=0, \quad i=1, 2, \cdots n。 \qquad (7.8)_8$$

当某一 $k_\sigma^{(i)}$ 为微量时，我们可以把 $M(k_\sigma^{(i)})$按 $k_\sigma^{(i)}$ 展开成级数，即(以后我们把 $M^{\mu\cdots\sigma\cdots\rho}(k^{(1)}\cdots k^{(n)})$简写为 $M(k_\sigma^i)$)

$$M^{\mu\cdots\sigma\cdots\rho}(k^{(i)}s)=C_0^{(i)\mu\cdots\sigma\cdots\rho}+C_1^{(i)\mu\cdots\rho}\cdot k_\sigma^i+\cdots\text{高次项}。 \qquad (7.9)_8$$

其中 $C_0^{(i)}$ 和 $C_1^{(i)}$ 是展开系数，它们可以是除(i)以外的 $k_\mu^{(j)}$ 的函数。由于$(7.8)_8$的式的要求，可知 $C_0^{(i)}=0$ 而且对于 $i=1, 2\cdots n$ 都成立，也就是 $M(k_\mu^{(j)})$ 对任一 $k_\mu^{(i)}$ 展开，其常数项都应为零，所以 $M(k_\mu^{(j)})$具有以下展开形式

$$\boxed{M^{\mu\cdots\sigma\cdots\rho}(k's)=Ck_\mu^{(1)}\cdots k_\sigma^{(i)}\cdots k_\rho^{(n)}+\text{高次项}} \qquad (7.10)_8$$

其中 C_1 当 $k_\sigma^{(i)}\to 0$ 时为有限值，这就是说当任一个 $k_\sigma^{(i)}\to 0$ 时 $M(k_\sigma^{(j)})\to 0$，这就是我们所要证明的结论。这个结论同样也适用于有部分光子线实际上是另一更大图形的内光子线情况。因为 $M(k^{(i)}s)$的形式只与回路的内部结构有关，而与其附加的光子线为外(或为内)光子线无关。

由于本节是一般讨论，在实际计算中将可少考虑若干对电子线回路。

参 考 资 料

1. 关于 S 矩阵，Furry 定理
   T. D. Lee Particle Physics and Introduction to Field Theory (1981) Chapter 5, 10
2. 关于 Wick 定理
   G. C. Wick Phys. Rev. **80** (1950) 268
3. 关于 Feynman 规则
   D. 卢里 粒子和场 (1981) 第六章

第九章　关于运动学的计算及其应用

在上一章里我们讨论了有关具体计算 S 矩阵的问题。S 矩阵元的具体计算，通常称为过程的动力学部分。为了能直接和实验观测的数据比较，仅知道 S 矩阵元是不够的。需要对末态粒子可能的态求和，包括对末态粒子相空间积分和对末态粒子的自旋求和。此外还需要对初态粒子的自旋求平均。另一方面，由于 S 矩阵具有的对称性质，可以得出 S 矩阵元之间的若干关系，根据这些关系，我们可以不必逐一具体地计算 S 矩阵元，也能得到不少可由实验检验的重要结论。关于相空间积分，自旋求和（或求平均），以及对称性质的分析等问题常称为过程的运动学部分。

通过运动学的计算，可以对过程的统观背景有所了解，而 S 矩阵元的具体计算则更能使我们知道过程的细观结构。我们对过程的统观背景的了解，常能为我们提供不少有效的应用，而且由于不依赖于 S 矩阵元的具体计算，其结论往往具有普遍性质。本章的任务就是介绍关于上述运动学的计算以及它的若干重要应用。

最后，我们介绍了替换定律，这可以说是 S 矩阵的一个重要对称性质。根据这个定理，我们对于相关过程，只须完整地计算其中一个过程的机率或截面。经过适当的替换就可得到其他相关过程的几率或截面。

§9.1　跃迁几率与有效截面

由上一章的讨论可知，从初态 i 到末态 f 的 S 矩阵元，一般可写成：

$$\boxed{\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi} &= \delta_{fi}+i(2\pi)^4\cdot M_{fi}\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)\\ &= \delta_{fi}+i(2\pi)^4\cdot NT_{fi}\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)。\end{aligned}} \quad (1.1)_9$$

由于体系具有时空平移不变性，上式中的 δ 函数是经常会出现的，这也是过程的动量守恒的具体反映。上式第二步在 M_{fi} 中提出归一化因子 N，为的是使 T_{fi} 在对自旋求和(求平均)后，是一个不变量。我们取因子 N 如下：

$$N=\prod_j^n \frac{1}{\sqrt{2V\epsilon_j}}。 \quad (1.2)_9$$

连乘对所有外粒子进行，包括初态和末态粒子。

一定初态 i 到一定末态 $f\neq i$ 的跃迁几率

$$\begin{aligned}\omega_{fi} &= |\langle f|S|i\rangle|^2=(2\pi)^8|M_{fi}|^2\delta^2(\Sigma p_i-\Sigma p_f)\\ &=(2\pi)^8N^2\cdot|T_{fi}|^2\delta^2(\Sigma p_i-\Sigma p_f)。\end{aligned} \quad (1.3)_9$$

我们可以把上式中的一个 δ 函数用积分表示出来，并进行适当的处理

$$\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(\Sigma p_i-\Sigma p_f)x}dx=V\cdot t(2\pi)^{-4}。$$

其中 V、t 分别为粒子相互作用的空间区域和时间间隔，以上已考虑到存在另一个 δ 函数，而令 $\Sigma p_i-\Sigma p_f=0$。把上式代入 $(1.3)_9$ 式可得自初态 i 到末态 $f\neq i$，单位时间的跃迁几率为

$$\begin{aligned}\frac{\delta\omega_{fi}}{\delta t}=\frac{\omega_{fi}}{t} &= (2\pi)^4\cdot|M_{fi}|^2\cdot V\cdot\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)\\ &=(2\pi)^4N^2\cdot V\cdot|T_{fi}|^2\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)。\end{aligned} \quad (1.4)_9$$

我们经常有兴趣的并不是一定初态 i 到一定末态 f 的跃迁，而是一定初态 i 到末态 f 附近一个范围内的跃迁，例如到末态粒子的动量在 $\prod_f d\boldsymbol{p}_f$ 区间内的跃迁，这样跃迁的单位时间的跃迁几率，记以 $d\omega$。当 $d\boldsymbol{p}_f\to 0$ 时，就应该是 $(1.4)_9$ 式乘上末态粒子其动量在 $\prod_f d\boldsymbol{p}_f$ 区间内的态的数目(参看 $(6.17)_1$ 前部)，即

$$d\omega = (2\pi)^4 \cdot |M_{fi}|^2 V \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} dp_f$$
$$= (2\pi)^4 \cdot N^2 \cdot |T_{fi}|^2 \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod_f \frac{V}{(2\pi)^3} dp_f 。$$

(1.5)。

以上连乘积对所有末态粒子进行。

如果实验并不区分末态粒子的自旋状态，那末我们还应当对上式进行对末态粒子自旋求和，记以 $\sum_f$。如果实验对末态粒子的动量并不限定在某一范围，而是全部接收，则还要对末态粒子动量 p_f 进行积分，记以 $\int$。于是，一定初态 i 单位时间的跃迁总机率记以 ω_i 应为：

$$\omega_i = \sum_f \int (2\pi)^4 \cdot V \cdot |M_{fi}|^2 \frac{V^{n_f}}{(2\pi)^{3n_f}} \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod_f dp_f$$
$$= (2\pi)^{4-3n_f} \int N^2 \cdot V^{(n_f+1)} \sum_f |T_{fi}|^2 \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod_f dp_f 。$$

(1.6)。

以上 n_f 为末态粒子总数目。

以上的讨论，原则上只对各个别粒子的体系才适用，例如一个粒子和另一个靶粒子的散射问题。如果入射的是一束粒子，而其粒子束的密度不大，束中粒子间的距离远比粒子的波色为大时，这时我们就可以把入射粒子束看成近独立子系，以致我们可把以上得到的各个别粒子的体系的跃迁机率，进行系综平均，就可得到粒子束的跃迁几率。在通常的实验装置中，初态粒子并不一定处在某一特定的自旋态，实验装置只提供粒子处于某一自旋态的几率，也就是入射粒子束常是混合系综，而不是一个纯系综。这时我们就要对上式进行初态粒子自旋的系综平均记以 $\overline{\sum_i}$。也就是

$$\bar{\omega} = \overline{\sum_i} \omega_i = (2\pi)^{4-3n_f} \cdot \int N^2 \cdot V^{(n_f+1)} \overline{\sum_i} \sum_f |T_{fi}|^2$$
$$\cdot \delta(\sum p_i - \sum p_f) \prod_f dp_f \qquad (1.7)。$$

关于自旋求和，求平均的计算，下面有专节介绍。

把$(1.2)_9$式代入$(1.7)_9$式可得：

$$\bar{\omega}=(2\pi)^{4-3n_f}\cdot\prod_i^{n_i}\frac{1}{2\epsilon_i}\cdot V^{(1-n_i)}\times\overline{\sum_i}\sum_f\int|T_{fi}|^2\delta(\sum p_i-\sum p_f)\prod_f^{n_f}\frac{d\boldsymbol{p}_f}{2\epsilon_f}。\tag{1.8}_9$$

下面我们来讨论ω对空间体积V的依赖关系。由上章的对应关系知道T_{fi}中不再有依赖V的因子。因此

$$\bar{\omega}\sim V^{-(n_i+n_f)}\cdot V^{(n_f+1)}=V^{(1-n_i)}$$

其中n_i为初态粒子的数目。

如果初态只有一个粒子，则$\bar{\omega}$与V无关，跃迁几率本身就具有直接物理意义，$\bar{\omega}$的例数，$1/\bar{\omega}$就是粒子的生命期。如果初态为两个粒子，则$\bar{\omega}\sim V^{-1}$不再具有直接物理意义，有直接物理意义的乃是有效截面

$$d\sigma=\frac{d\bar{\omega}}{I}。\tag{1.9}_9$$

其中$d\bar{\omega}$就是表示ω不进行积分的表式，即相当于$(1.5)_9$式。I为初态粒子的相对粒子流密度，采用Møller的研究，I可以写成协变形式：

$$I=\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}。\tag{1.10}_9$$

其中ϵ_i，p_i和m_i分别表示初态粒子的能量，四维动量和质量。

对于质心系$\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2$则

$$I=V^{-1}\cdot|\boldsymbol{p}|\left(\frac{1}{\epsilon_1}+\frac{1}{\epsilon_2}\right)\tag{1.11}_9$$

对于实验室系$\boldsymbol{p}_2=0$则

$$I=\frac{1}{V}\cdot\frac{|\boldsymbol{p}_1|}{\epsilon_1}。\tag{1.12}_9$$

由于I经常与V成反比，因而$d\sigma$不再与V有关，积分后就得到两个粒子的散射总截面

$$\sigma=\int d\sigma=(2\pi)^{4-3n_f}\,2^{-2}\,\frac{1}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}$$

$$\times\overline{\sum_i}\sum_f\int|T_{fi}|^2\delta(\sum p_i-\sum p_f)\prod_f^{n_f}\frac{d\boldsymbol{p}_f}{2\epsilon_f}。\qquad(1.13)_9$$

如果在积分中利用以下的代换

$$\prod^{n_f}\frac{d\boldsymbol{p}_f}{2\epsilon_f}\to\prod^{n_f}\delta(p_f^2+m^2)\theta(p_{f0})dp_f,\qquad(1.14)_9$$

我们就可由 $(1.13)_9$ 式知道，两个粒子的散射截面明显具有相对论不变性。

关于两个粒子的散射问题，下面还有较深入的讨论。

下面我们来讨论有外场存在的情况下的 S 矩阵。由于外场可以承受动量，所以不包括外场的所有外粒子的总体，依然不是一个封闭体系，这时外粒子的总动量在过程前后一般是不守恒的。最多在外场为与时间无关的静场时，外粒子的总能量才是守恒的，因而这时 S 矩阵里一般并不包含有四维 δ 函数的因子，最多只有一个反映能量守恒的一维 δ 函数因子。(参看 § 10.5)类似$(1.1)_9$式。这时 S 矩阵元可以写成：

$$S_{fi}=\delta_{fi}+i(2\pi)NT_{fi}\delta(\sum\epsilon_i-\sum\epsilon_f)。\qquad(1.15)_9$$

利用 $\delta(\sum\epsilon_i-\sum\epsilon_f)\to t\cdot(2\pi)^{-1}$ 关系，类似$(1.8)_9$式的推导可得到此时

$$d\bar{\omega}=(2\pi)^{1-3N_f}\prod_i^{n_i}\frac{1}{2\epsilon_i}\cdot V^{-n_i}\overline{\sum_i}\sum_f$$

$$\times|T_{fi}|^2\delta(\sum\epsilon_i-\sum\epsilon_f)\prod^{n_f}\frac{d\boldsymbol{p}_f}{2\epsilon_f}。\qquad(1.16)_9$$

由此得到初态有一个外粒子在外场中的散射截面为

$$d\sigma=\frac{d\omega}{I}=(2\pi)^{1-3N_f}\,\frac{1}{2|\boldsymbol{p}_i|}\overline{\sum_i}\sum_f$$

$$\times|T_{fi}|^2\delta(\sum\epsilon_i-\sum\epsilon_f)\prod^{n_f}\delta(p_f^2+m^2)\theta(\epsilon_f)dp_f。\qquad(1.17)_9$$

§ 9.2 两体衰变的生命期

一个粒子衰变为两个粒子的过程 $a\to b+c$，是基本粒子中最

简单的过程。在这个过程里，由于动量守恒和质能关系的约束，所有不变量都可以由它们的质量表达出来，例如

$$\left.\begin{aligned} &p_a^2=-m_a^2,\ p_b^2=-m_b^2,\ p_c^2=-m_c^2;\\ &p_c^2=(p_a-p_b)^2=-m_a^2-m_b^2-2p_a\cdot p_b=-m_c^2;\\ &\therefore\quad p_a\cdot p_b=\frac{m_c^2-m_a^2-m_b^2}{2}。\end{aligned}\right\}\quad(2.1)_9$$

在对粒子自旋求和求平均以后，由 $\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2$ 的不变性质，可以把它表示成不变量的函数。在上述两体衰体的过程里，也就是可以表示成粒子质量的函数。因此在对末态粒子动量积分时，可以把它看成常数而提到积分号外面来，因此由(1.8)$_9$式并考虑到(1.14)$_9$式关系就得到

$$\begin{aligned}\bar{\omega}=(2\pi)^{-2}\cdot\frac{1}{2\epsilon_a}\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2\\ \times\int\delta(p_a-p_b-p_c)\delta(p_b^2+m_b^2)\theta(p_{b0})\\ \times\delta(p_c^2+m_c^2)\theta(p_{c0})dp_bdp_c。\end{aligned}\qquad(2.2)_9$$

这个过程的运动学计算主要就是上式的积分

$$\begin{aligned}I(p_a;\ p_b,\ p_c)=\int\delta(p_a-p_b-p_c)\delta(p_b^2+m_b^2)\theta(\epsilon_b)\\ \times\delta(p_c^2+m_c^2)\theta(\epsilon_c)dp_bdp_c。\end{aligned}\qquad(2.3)_9$$

这个积分通常称为相空间积分，是可以一般计算的，其结果就反映出两体衰变过程的统观背景，也可以说是反映了两体衰变的一般通性，至于 T_{fi} 的具体形式则有赖于具体粒子间的相互作用形式，它反映出过程的细观结构，也可以说它反映了具体过程的特性。利用第一个 δ 函数可以直接对 dp_c 积分得到

$$\begin{aligned}I(p_a;\ p_b,\ p_c)&=\int d\Omega_b\cdot|\boldsymbol{p}_b|^2\cdot d|\boldsymbol{p}_b|\cdot d\epsilon_b\\ &\quad\times\delta(|\boldsymbol{p}_b|^2-\epsilon_b^2+m_b^2)\theta(\epsilon_b)\\ &\quad\times\delta[(\boldsymbol{p}_a-\boldsymbol{p}_b)^2-(\epsilon_a-\epsilon_b)^2+m_c^2]\theta(\epsilon_a-\epsilon_b)\\ &=\int d\Omega_b\frac{|\boldsymbol{p}_b|}{2\tilde{\epsilon}_b}\cdot d|\boldsymbol{p}_b|\cdot\delta\{-m_a^2\end{aligned}$$

$$-m_b^2-2|\boldsymbol{p}_a||\boldsymbol{p}_b|\cos\theta_{ab}+2\epsilon_a\tilde{\epsilon}_b+m_c^2\}$$
$$\times\theta(\tilde{\epsilon}_b)\theta(\epsilon_a-\tilde{\epsilon}_b)$$
$$=\int d\Omega_b\frac{|\boldsymbol{p}_b|^2}{2\tilde{\epsilon}_b\left(2\epsilon_a\frac{|\boldsymbol{p}_b|}{\epsilon_b}-2|\boldsymbol{p}_a|\cos\theta_{ab}\right)}$$
$$\times\theta(\tilde{\epsilon}_b)\theta(\epsilon_a-\tilde{\epsilon}_b)。\qquad(2.4)_9$$

其中 $\tilde{\epsilon}_b^2=|\boldsymbol{p}_b|^2+m_b^2$。如取 a 粒子静止的坐标系，即 $|\boldsymbol{p}_a|=0$，则上式对方向积分贡献 4π 因子。因此得到

$$I(p_a,\ p_b,\ p_c)=\frac{\pi}{\epsilon_a}|\boldsymbol{p}_b|\theta(\tilde{\epsilon}_b)\cdot\theta(\epsilon_a-\tilde{\epsilon}_b)。\qquad(2.5)_9$$

其中 $|\boldsymbol{p}_b|$ 由于$(2.4)_9$式中的 δ 函数的约束应以下式代入

$$|\boldsymbol{p}_b|=\left[\left(\frac{m_a^2+m_b^2-m_c^2}{2\epsilon_a}\right)^2-m_b^2\right]^{1/2}$$
$$=\frac{1}{2m_a}\sqrt{\lambda(m_a^2,\ m_b^2,\ m_c^2)}。$$

以上我们引进了简化符号 $(2.6)_9$

$$\lambda(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz\qquad(2.7)_9$$

$(\epsilon_a-\tilde{\epsilon}_b)>0$ 的要求，导致了 $m_a>m_b+m_c$。

以上虽然是在一个特殊坐标系，即 $\boldsymbol{p}_a=0$ 里求得的结果。可是由于 $I(p_a,\ p_b,\ p_c)$的不变性，在一般坐标系也是成立的，只要把 m_a^2 或 ϵ_a^2 代以一 p_a^2 即得。

把以上关系代入$(2.5)_9$式最后得到

$$I(p_a,\ p_b,\ p_c)=\frac{\pi}{2m_a^2}\sqrt{\lambda(m_a^2,\ m_b^2,\ m_c^2)}$$
$$\times\theta[m_a-(m_b+m_c)]\cdot\theta(m_a)。\qquad(2.8)_9$$

如果末态两个粒子的质量均为零，例如 $\pi^0\to\gamma+\gamma$ 则

$$I(m_a;\ 0,\ 0)=\frac{\pi}{2}。\qquad(2.9)_9$$

如果末态有一个粒子的质量为零：例如 $\pi\to\mu+\nu$ 则

$$I(m_a,\ m_b,\ 0)=\frac{\pi}{2m_a^2}(m_a^2-m_b^2)。\qquad(2.10)_9$$

当然至此尚未最后解决问题，要得到生命期的数值，还有待于具体计算 T_{fi} 并代入$(2.2)_9$式即

$$\frac{1}{\tau}=\bar{\omega}=(2\pi)^{-2}\cdot\frac{1}{2\epsilon_a}\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2\cdot I(p_a;\ p_b,\ p_c)。$$

(2.11)。

在 a 粒子静止的坐标系里则上式简化为

$$\boxed{\frac{1}{\tau}=\bar{\omega}=\frac{1}{2^4\cdot\pi}\cdot\frac{\sqrt{\lambda(m_a^2,\ m_b^2,\ m_c^2)}}{m_a^3}\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2}$$

(2.12)。

如果初态粒子系综是完全非极化的，也就是粒子处在每个自旋指向的几率是相等的，则对初态自旋的平均就简单归结为对初态粒子自旋求和并除以自旋态的数目，即

$$\frac{1}{\tau}=\bar{\omega}=\frac{1}{2^4\pi}\cdot\frac{\sqrt{\lambda(m_a^2,\ m_b^2,\ m_c^2)}}{m_a^3}\frac{\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2}{2S_i+1}。$$

(2.13)。

其中 S_i 为初态粒子的自旋。

§9.3 三体衰变的能量分布和角关联

对于每一个粒子衰变为三个另外粒子的过程，我们常常是讨论其衰变粒子的能量分布或角关联的情况。在这种过程里，可以独立变更的标量只有两个，因为过程前后共有四个粒子出现，而每个粒子有四个动量(四维)的分量，一共十六个分量，它们要满足四个动量守恒的条件，还要满足四个质能关系的条件。此外，对于 Lorentz 变换，还有六个参量可供调节，因而还剩下两个分量可以独立变更。另外，从以下的考虑，也可以得到同样的结论：每个粒子的动量和其本身的标积，归结为该粒子的质量，剩下还有六个不同粒子动量间的标积，它们还需要满足四个守恒条件，因而独立变更的标量只能有两个。其他的标量都可以归结为这两个标量的函数。

考虑 $a\to b+c_1+c_2$ 的过程，我们可以选取

$$S_i=-(p_a-p_i)^2=-(p_b+p_j)^2;\quad j\neq i=1,\ 2。\qquad(3.1)$$

作为我们的可以变更的标量，以前介绍的 T_{fi} 矩阵元就应该可以表示成为 S_i 的函数，在 a 粒子静止的坐标系，则

$$\epsilon_a = m_a;\quad \boldsymbol{p}_a = 0$$

这时

$$S_i = m_a^2 + m_i^2 - 2m_a\epsilon_i。\tag{3.2}$$

其中 ϵ_i 为 c_i 粒子的能量，余类推，由上式的关系我们又可以把 T_{fi} 矩阵元表示成为 ϵ_i 的函数。因此在对 ϵ_i 以外的变量积分时，我们就可以把 T_{fi} 作为常数提出积分号外，由 $(1.8)_8$ 式和 $(1.14)_8$ 式我们就得到微分的过渡几率：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial\epsilon_1\cdot\partial\epsilon_2} = (2\pi)^{-5}\cdot\frac{1}{2\epsilon_a}\overline{\sum_i}\sum_f |T_{fi}|^2 \\ \times\iiint d\boldsymbol{p}_b\cdot\delta(p_a - p_b - p_1 - p_2) \\ \times\delta(p_b^2 + m_b^2)\theta(\epsilon_b) \\ \times\prod_{i=1}^{2}\delta(p_i^2 + m_i^2)\theta(\epsilon_i)\,d\boldsymbol{p}_i。\end{aligned}\tag{3.3}$$

利用第一个 δ 函数可以直接对 $d\boldsymbol{p}_b$ 积分。上式中的积分则为

$$\begin{aligned}I(p_a;\ p_b,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2) = \int d\Omega_1\,d\Omega_2\,d|\boldsymbol{p}_1|\,d|\boldsymbol{p}_2|\cdot|\boldsymbol{p}_1|^2\cdot|\boldsymbol{p}_2|^2 \\ \times\delta[|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_2|^2 + 2\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 - (m_a - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + m_b^2] \\ \times\theta(m_a - \epsilon_1 - \epsilon_2)\prod_{i=1}^{2}\delta(|\boldsymbol{p}_i|^2 - \epsilon_i^2 + m_i^2)\theta(\epsilon_i)。\end{aligned}\tag{3.4}$$

利用最后两个 δ 函数可以对 $d|\boldsymbol{p}_i|$ 积分得到

$$\begin{aligned}I(p_a;\ p_b,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{2}(\epsilon_i^2 - m_i^2)^{1/2} \\ \times\int\delta\,[\epsilon_1^2 - m_1^2 + \epsilon_2^2 - m_2^2 + 2\sqrt{\epsilon_1^2 - m_1^2}\sqrt{\epsilon_2^2 - m_2^2} \\ \times\cos\theta_{12} - (m_a - \epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + m_b^2] \\ \times\theta(m_a - \epsilon_1 - \epsilon_2)\cdot\prod_{i=1}^{2}\theta(\epsilon_i)\,d\Omega_i。\end{aligned}\tag{3.5}$$

下一步对方向积分时先把 $\boldsymbol{p}_1$ 取为 z 轴，利用前面一个 δ 函数对 $d\Omega_2$ 积分，再对 $d\Omega_1$ 积分最后得到

$$I(p_a;\ p_b,\ p_1,\ p_2)=\pi^2\theta(\epsilon_1)\theta(\epsilon_2)\theta(m_a-\epsilon_1-\epsilon_2)$$
$$\cdot\theta\{4(\epsilon_1^2-m_1^2)(\epsilon_2^2-m_2^2)$$
$$-[m_b^2-m_1^2-m_2^2-m_a^2+2m_a(\epsilon_1+\epsilon_2)-2\epsilon_1\epsilon_2]^2\}。\quad (3.6)_9$$

上式最后一个 θ 函数是由于限制 $d(\cos\theta_{12})$ 的积分限为 $-1\to+1$ 而来。把上式代入$(3.3)_9$式得到在 a 粒子静止的坐标系里的微分过渡几率：

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}=\frac{1}{2^6\pi^3m_a}\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2\theta(\epsilon_1)\theta(\epsilon_2)\cdot\theta(m_a-\epsilon_1-\epsilon_2)\theta(X)。}\qquad (3.7)_9$$

其中
$$X=4(\epsilon_1^2-m_1^2)(\epsilon_2^2-m_2^2)-[m_b^2-m_1^2-m_2^2-m_a^2+2m_a(\epsilon_1+\epsilon_2)-2\epsilon_1\epsilon_2]^2$$
$$-\frac{1}{4m_a^2}\{\lambda(m_a^2,\ S_1,\ m_1^2)\lambda(m_a^2,\ S_2,\ m_2^2)$$
$$-[m_a^2(S_1+S_2-2m_b^2+m_1^2+m_2^2)$$
$$-m_a^4+(S_1-m_1^2)(S_2-m_2^2)]^2\}。\qquad (3.8)_9$$

其中 λ 函数参看$(2.7)_9$式

如令 $X=0$ 则在 ϵ_1, ϵ_2 (或 S_1, S_2)平面里，在 ϵ_1, $\epsilon_2>0$ 的第一象限内确定了一个两次曲线，这种曲线我们常称为 Dalitz 图形，在该图形所围区域以内都是衰变粒子的能量可能出现的范围，由于动量守恒，衰变粒子能量不可能出现该曲线所围范围以外，这就是 $\theta(X)$的作用。

由$(3.7)_9$式看来，如果 T_{fi} 矩阵元为一常数，则衰变粒子的能量在 Dalitz 曲线以内是均匀分布。这种均匀分布可看成是三体衰变的统观背景。衰变粒子能量分布对均匀分布的偏离就是 T_{fi} 矩阵元依赖衰变粒子能量的反映，也就是说 T_{fi} 矩阵元反映了具体过程的细观结构。

如我们要讨论这个过程的角关联问题，我们就需要求出微分过渡几率 $\frac{\partial\omega}{\partial\epsilon_1\partial\cos\theta_{12}}$，这相当于$(3.3)_9$式的积分对 dp_b, $d\boldsymbol{p}_1$,

$d|\boldsymbol{p}_2|$, $d\epsilon_2$, $d\varphi_2$ 进行。即要求出以下相积分

$$\begin{aligned} I(p_a;\ p_b,\ \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2)=&\int\cdots\int dp_b d\boldsymbol{p}_1 d|\boldsymbol{p}_2| d\epsilon_2 d\varphi_2 |\boldsymbol{p}_2|^2 \\ &\times\delta(p_b^2+m^2)\theta(\epsilon_b) \\ &\times\delta(p_a-p_b-p_1-p_2) \\ &\times\prod_{i=1}^{2}\delta(p_i^2+m_i^2)\theta(\epsilon_i)。 \end{aligned} \tag{3.9}$$

采用类似以上的方法，可求得在 a 粒子静止坐标系上式积分为

$$I(p_a,\ p_b,\ p_1,\ p_2)=\frac{\pi^2|\boldsymbol{p}_1|\cdot\ \boldsymbol{p}_2|^2}{W|\boldsymbol{p}_2|+|\boldsymbol{p}_1|\epsilon_2\cos\theta_{12}} \tag{3.10}$$

其中

$$W=m_a-\epsilon_1=m_a-\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2+m_1^2} \tag{3.11}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\cdot\partial\cos\theta_{12}}=&\frac{1}{2^6\pi^3 m_a}\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2 \\ &\times\frac{|\boldsymbol{p}_1|\cdot|\boldsymbol{p}_2|^2}{W|\boldsymbol{p}_2|+|\boldsymbol{p}_1|\epsilon_2\cos\theta_{12}} \end{aligned}} \tag{3.12}$$

其中 $|\boldsymbol{p}_2|$ 和 ϵ_2 应理解为 ϵ_1 和 $\cos\theta_{12}$ 的函数，这种函数关系可以利用动量守恒求得如下（上式也可以利用 ϵ_2 和 $\cos\theta_{12}$ 的函数关系由 $(3.7)_9$ 式经过自变量变换而得到）。

$$\epsilon_2=\frac{W(W^2+m_2^2-|\boldsymbol{p}_1|^2-m_b^2)-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_{12}\sqrt{X}}{2(W^2-|\boldsymbol{p}_1|^2\cos^2\theta_{12})}$$

$$|\boldsymbol{p}_2|=\frac{-|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta_{12}(W^2+m_2^2-|\boldsymbol{p}_1|^2)+W\sqrt{X}}{2(W^2-|\boldsymbol{p}_1|^2\cos^2\theta_{12})}$$

$$\begin{aligned} X=&(W^2+m_2^2-|\boldsymbol{p}_1|^2-m_b^2)^2-4m_2^2 \\ &\times(W^2-|\boldsymbol{p}_1|^2\cos^2\theta_{12}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

以上我们把 T_{fi} 矩阵元自积分中提出来，这样不仅使我们在讨论具体问题时可简化我们的计算，同时在实验上也提供了直接观测 T_{fi} 矩阵元对衰变产物能量的依赖关系，从而提供了推测有关母粒子的若干特性的途径。不过 $\overline{\sum}T_{fi}$ 一般并不一定能提到积分号外边来。现在我们来讨论在对 T_{fi} 作若干具体的假定下，怎

样进一步计算下去。有时我们要测量衰变的某一个粒子的动量分布，这时我们就要求出 $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{p}_b}$，由$(1.8)_9$和$(1.14)_9$式可知

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{p}_b}=(2\pi)^{-5}\cdot\frac{1}{2\epsilon_a}\int\cdots\int\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2$$
$$\times\prod_{i=1}^{2}\delta(p_i^2+m_i^2)\theta(\epsilon_i)$$
$$\times\delta(p_a-p_b-p_1-p_2)\frac{1}{2\epsilon_b}dp_1dp_2。\quad(3.14)_9$$

这时我们要处理的是以下这样的相积分，把$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2$记为$F(p_a;\ p_b,\ p_1,\ p_2)$。

$$I(p_a,\ p_b)=\int\cdots\int F(p_a;\ p_b,\ p_1,\ p_2)$$
$$\times\prod_{i=1}^{2}\delta(p_i^2+m_i^2)\theta(\epsilon_i)dp_i\cdot\delta(p_a-p_b-p_1-p_2)。$$
$$(3.15)_9$$

下面分别对 F 的若干常见的形式进行讨论：

(1) 如果 $F=1$，则上式积分就是$(2.3)_9$式积分，只需进行以下的代换即

$$\begin{aligned}p_a&\to p_a-p_b\equiv K\\ b&\to 1,\ c\to 2。\end{aligned}\qquad(3.15')_9$$

由$(2.8)_9$式可得

$$I_0(p_a,\ p_b)=\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)}。\quad(3.16)_9$$

(2) 如果 $F=(p_i)_\lambda$，则上式积分应是由 K 的函数所做成的四维矢量，记以 I_λ 其一般形式应可写成

$$I_{i\lambda}=a_iK_\lambda\qquad(3.17)_9$$

其中 a 为一待定的 K^2 的函数，以 K_λ 标积上式两边，并利用

$$(K\cdot p_i)=\frac{K^2+m_j^2-m_i^2}{2}\quad i\neq j=1,\ 2\qquad(3.18)_9$$

可得

$$a_iK^2=\frac{K^2+m_j^2-m_i^2}{2}I_0$$

$$\therefore \quad I_{i\lambda}=\frac{K^2+m_j^2-m_i^2}{2K^2}\cdot\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)}\cdot K_\lambda。$$

$$(3.19)_9$$

(3) 又如 $F=(p_1)_\lambda\cdot(p_2)_\rho$，则以上积分应为由 K 函数所做成的对称二级张量，记以 $I_{\lambda\rho}$，其一般形式应如下

$$I_{\lambda\rho}=\alpha\delta_{\lambda\rho}+\beta K_\lambda K_\rho。\qquad (3.20)_9$$

同样，其中 α，β 均为待定的 K^2 的函数，把上式 λ，ρ 指标并缩，得到：

$$4\alpha+\beta K^2=\frac{K^2+m_1^2+m_2^2}{2}\cdot\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)}。$$

$$(3.21)_9$$

以上利用了

$$(p_1\cdot p_2)=\frac{K^2+m_1^2+m_2^2}{2},\qquad (3.22)_9$$

把$(3.20)_9$标积 K_ρ 并利用$(3.18)_9$式又可得到

$$(\alpha+\beta K^2)K_\lambda=\frac{K^2+m_1^2-m_2^2}{2}\cdot\frac{K^2+m_2^2-m_1^2}{2K^2}\times\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)}\cdot K_\lambda。$$

$$(3.23)_9$$

由$(3.21)_9$和$(3.23)_9$两边可以解得，α 和 β

$$\alpha=\frac{K^4+2\mu^2K^2+\rho^4}{12\cdot k^2}\cdot\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)},$$

$$\beta=\frac{K^4-\mu^2K^2-2\rho^4}{6\cdot K^4}\cdot\frac{\pi}{-2K^2}\sqrt{\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)}。$$

$$(3.24)_9$$

其中

$$\mu^2=m_1^2+m_2^2;\quad \rho^2=m_2^2-m_1^2,\qquad (3.24')_9$$

关于 λ 函数可参看$(2.7)_9$式，并且可知

$$K^4+2\mu^2K^2+\rho^4=\lambda(-K^2,\ m_1^2,\ m_2^2)。\qquad (3.25)_9$$

把$(3.24)_9$式代入$(3.20)_9$式就得到 $I_{\lambda\rho}$。一旦积分 $I(p_a;\ \epsilon_b)$求出代入$(3.14)_9$式就得到

$$\boxed{\frac{\partial\omega}{\partial \boldsymbol{p}_b}=(2\pi)^{-5}\cdot\frac{1}{4\epsilon_a\epsilon_b}I(p_a;\ \epsilon_b)} \qquad (3.26)$$

以上积分 $I(p_a;\ \epsilon_b)$ 由(3.15)式表出。

§ 9.4 $\omega\to 3\pi$ 的运动学分析

作为上节讨论的应用示例，我们来分析 $\omega\to 3\pi$ 衰变过程，由于末态的粒子是全同粒子，这个过程的运动学具有极高的对称性质。正如上节所述，这个过程的独立变量只有两个，可是为了表明三个 π 介子的对称性质，我们常常还是把对应的三个物理量同时写出。

在末态的两个 π 介子能量 ϵ_1，ϵ_2 平面里，为了明显地表示出这个问题的对称性，我们将不象通常那样用相互垂直的直交坐标，而采用相互成 60° 角的斜交坐标，参看左图，平面上每一点位置到该两直线的距离，就表明末态中两个 π 粒子的动能分别为 T_1 和 T_2，并且单位长度(中心到一边的距离)代表 π 粒子的平均动能 $\left(\frac{M}{3}-m\right)$。

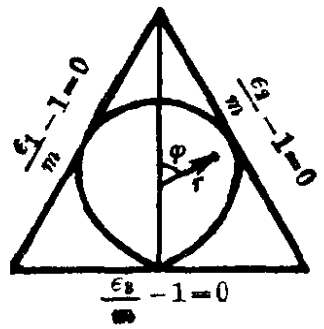


图 9-1

在这样的坐标里，

$$\frac{\epsilon_3}{m}-1=\frac{M-\epsilon_1-\epsilon_2}{m}-1=0$$

关系在图上为另一直线，它与两坐标相交成一等边三角形，以上 M 为 ω 粒子的质量，m 为 π 介子质量，并采用了 ω 静止的体系。在这样坐标里 $(3.8)_9$ 式的 $X=0$ 的 Dalitz 图则成为如图所示的曲线，这个图形充分显示出对于三个 π 介子的对称情况。

如果进一步采用如图所示的极坐标，情况会更加清楚些，两种坐标的关系如下：

$$\epsilon_1=\frac{M}{3}\left[1+\epsilon r\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$\epsilon_2=\frac{M}{3}\left[1+\epsilon r\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right], \qquad (4.1),$$

$$\epsilon_3=\frac{M}{3}\left[1+\epsilon r\cos\varphi\right]。$$

其中

$$\epsilon=1-\frac{3m}{M}。 \qquad (4.2),$$

用极坐标来表达 Dalitz 图形则为

$$1-\left(1+\frac{2\epsilon}{(2-\epsilon)^2}\right)r^2-\frac{2\epsilon}{(2-\epsilon)^2}r^3\cos(3\varphi)=0。 \qquad (4.3),$$

每一个 ω 衰变事件，将可以在 Dalitz 图形里面，找到一点与之对应，我们研究所谓能量分布，就是要研究大量这样代表点在 Dilitz 图形里的密度分布，这种分布是可以由实验来直接观测的。由上节的讨论知道这种分布相对均匀分布的偏离都是来自 T_{fi} 矩阵元的，下面我们就利用运动学的条件来对 ω 衰变过程的 T_{fi} 矩阵元做若干推测。

首先我们知道 ω 粒子只有一个电荷态，其同位旋为零，如果衰变是强作用下面进行的，同位旋是守恒的，则末态的三个 π 介子也应是处于同位旋为零的态，也就是应该是由三个 π 同位矢量所构成的一个同位标量，这样构成的方式，只能以下列形式进行。

$$(\vec{\pi}_1\times\vec{\pi}_2)\cdot\vec{\pi}_3$$

这样构成的同位标量，其末态波函数对 π 介子的同位指标互换是反对称的。另一方面，由于 π 介子是全同的玻色子，其波函数对于两个 π 介子全部指标的互换应该是对称的，因此我们得知末态波函数对于 π 介子的外部运动指标即 $q_i=(\boldsymbol{q}_i,\ \epsilon_i)$ 互换也应是反对称的。

下面我们来讨论 ω 粒子的自旋和宇称对能量分布的影响。采用 ω 静止的体系（以下同此），在这样体系里 ω 的状态只需要用自旋和宇称来表征。如果 ω 是个真正的标量，则末态三个 π 介子也应组成真正的标量。我们已知 π 介子的自禀宇称为负，因此三 π 体系的自禀部分是个赝标量。因而就要求三 π 的 q_i 组成一个

赝标量(三维),这就要求末态三π波函数(因而在T_{fi}矩阵元内)内应有以下因子存在

$$(\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{q}_2)\cdot\boldsymbol{q}_3。$$

这样的因子当然也满足上述的互换反对称性。可是我们知道上式的几何意义就代表由三个$\boldsymbol{q}$矢量为基所组成的空间体积的数值,然而在ω静止体系里,ω的动量为零,因此三个$\boldsymbol{q}$矢量之和为零。也就是三个$\boldsymbol{q}$矢量实际上组成一个封闭三角形,其体积为零,也就是上述因子实际为零,因而我们得到结论:一个O^+的粒子衰变为三个π介子是禁戒的(如果宇称是守恒的话),这就是说ω不会是个标量粒子。

如果ω为一赝标粒子,情况就会不同。这时要求三π的外部运动量组成一个真标量(三维),这需要末态波函数(因而在T_{fi}矩阵元内)内只是粒子的能量ϵ_i的函数即成,不过为了要满足互换反对称性应该存在下列因子,即

$$T_{fi}\sim(\epsilon_1-\epsilon_2)(\epsilon_2-\epsilon_3)(\epsilon_3-\epsilon_1)f, \qquad (4.4)_9$$

上式f为某一ϵ_i的函数,它对于ϵ_i的互换是对称的,假定f对能量ϵ_i的变化是缓慢的,我们可以把f看成常数,因此

$$\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_{0^-}=\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S}\right)_{0^-}\sim|T_{fi}|^2,$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_{0^-}=\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S}\right)_{0^-}\sim(\epsilon_1-\epsilon_2)^2\cdot(\epsilon_2-\epsilon_3)^2\times(\epsilon_3-\epsilon_1)^2\sim r^6\sin^2(3\varphi)。} \qquad (4.5)_9$$

以上dS为ϵ_1、ϵ_2平面里的面积元,上式表明,其分布在中心$r=0$为零。随r增加逐渐上升,直至Dalitz曲线的边界为极大,但沿三条中垂线方向为零。沿边界又有六个高峰存在,即当(如下图所示)

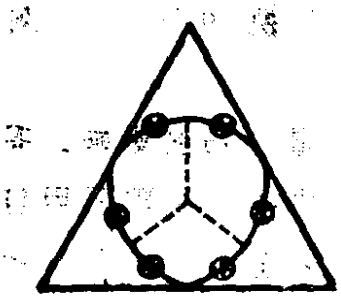


图 9-2 虚线为零点,⊗处为极大

$$\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

时为高峰。

如果 ω 为一矢量介子则要求末态三 π 的外部动量组成一赝矢量(三维),同时要满足互换反对称性,因此可知

$$T_{fi}\sim[\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_2\times\boldsymbol{q}_3+\boldsymbol{q}_3\times\boldsymbol{q}_1]\cdot f\sim 3f\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{q}_2。\quad (4.6)_9$$

同样 f 为某一 ϵ_i 的对称函数,也可近似看成常数。最后一步由考虑了 $\boldsymbol{q}_i$ 形成封闭三角形而得到:

$$\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_{1^-}=\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S_{1^-}}\right)\sim|T_{fi}|^2\sim(\boldsymbol{q}_1\times\boldsymbol{q}_2)^2。$$

上式右边可由 $\boldsymbol{q}_i$ 所形成的三角形面积表示出来,而三角形的面积又可由其三边长度表示出来。由此上式可写成:

$$\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_{1^-}=\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S}\right)_{1^-}\cong-\frac{1}{4}\lambda(|\boldsymbol{q}_1|^2,\ |\boldsymbol{q}_2|^2,\ |\boldsymbol{q}_3|^2)$$

$$=-\frac{1}{4}\lambda(\epsilon_1^2-m^2,\ \epsilon_2^2-m^2,\ (M-\epsilon_1-\epsilon_2)^2-m^2),$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_{1^-}=\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S}\right)_{1^-}\sim\left[1-\left(1+\frac{\partial\epsilon}{(2-\epsilon)^2}\right)r^3-\frac{2\epsilon}{(2-\epsilon)^2}r^3\cos(3\varphi)\right]。}\quad (4.7)_9$$

以上 λ 函数由 $(2.7)_9$ 式定义。上式的分布在中心有极大值,而在边界上为零。如图 9-3 所示。

如果 ω 为一赝矢介子,则要求三 π 的外部动量组成一矢量(三维)并满足互换反对称性,可得

$$T_{fi}\sim f[\epsilon_1(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_3)+\epsilon_2(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1)+\epsilon_2(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2)]$$

$$\sim f[\boldsymbol{q}_1(M-3\epsilon_2)-\boldsymbol{q}_2(M-3\epsilon_1)]。\quad (4.8)_9$$

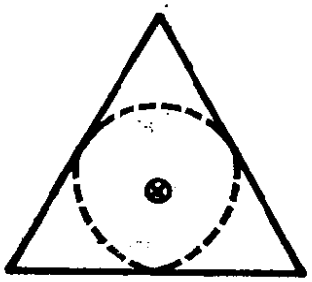


图 9-3 虚线边界为零点中心 ⊗ 处为极大

括号内 ϵ_i 因子是考虑到 T_{fi} 至少应与 $\boldsymbol{q}_i$, $\boldsymbol{q}_j$ 的两次式有关而引进的。同样近似地把 f 看成常数,最后得到

$$\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial S}\right)_{1^+}\sim|T_{fi}|^2\sim[|\boldsymbol{q}_1|^2(M-3\epsilon_2)^2+|\boldsymbol{q}_2|^2(M-3\epsilon_1)^2$$

$$-(|q_3|^2-|\boldsymbol{q}_1|^2-|\boldsymbol{q}_2|^2)(M-3\epsilon_1)(M-3\epsilon_2)]$$

$$\sim\{(\epsilon_1^2-m^2)(M-3\epsilon_2)^2+(\epsilon_2^2-m^2)(M-3\epsilon_1)^2$$
$$-[(M-\epsilon_1-\epsilon_2)^2-\epsilon_1^2-\epsilon_2^2+m^2]$$
$$\times(M-3\epsilon_1)(M-3\epsilon_2)\},\qquad(4.9)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\epsilon_1\partial\epsilon_2}\right)_1=\left(\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial S}\right)_1\sim[2-\epsilon-2r\cos(3\varphi)]r^2。}$$

这个分布在中心为零，随 r 增加逐渐上升，在边界处有三个高峰即当 $\varphi=(1+2n/3)\pi$ 时为高峰，如图 9-4 所示。

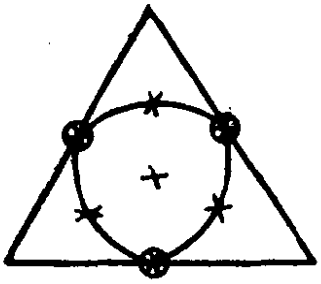


图 9-4 ○处为极大 ×处为零点

由以上的分析看出，即使不对 T_{fi} 矩阵元做具体的计算，而只利用运动学的要求，对 T_{fi} 做初步分析，就可以得到：对于不同的 ω 粒子其衰变粒子的能量分布就有显著不同的结论。由于这个结论，我们就可以由测量三 π 的能量分布来确定 ω 粒子的自旋和宇称，例如实验观测到在 Dalitz 图形中心处，其分布并不为零，这就是以估计到 ω 应为一矢量介子。

§9.5 散射振幅与光学定理

两个粒子的弹性散射即 $a+b\to c+d$ 的过程，是最常见的过程。在这样过程里，和我们在 §9.3 里讨论过的一样，只有两个可以独立变更的标量，这两个独立变更的标量，我们可以取为

$$S=-(p_a+p_b)^2,$$
$$t=-(p_a-p_b)^2。\qquad(5.1)$$

在质心系则 $S=(\epsilon_a+\epsilon_b)^2$，

$$\cos\theta_{ac}=\frac{1}{2|\boldsymbol{p}_a|\cdot|\boldsymbol{p}_c|}(t-m_a^2-m_c^2+2\epsilon_a\epsilon_c)$$
$$=\frac{S^2+S(2t-m_a^2-m_b^2-m_c^2-m_d^2)+(m_a^2-m_b^2)(m_c^2-m_d^2)}{\sqrt{\lambda(S,m_a^2,m_b^2)}\sqrt{\lambda(S,m_c^2,m_d^2)}}。\qquad(5.2)$$

此时 T_{fi}，矩阵元通过 S，t 可以表示成 $(\epsilon_a+\epsilon_b)$ 和 $\cos\theta$ 的函数，因此在对方向以外的变量积分时 T_{fi} 可看成常数而提到积分号外。由 $(1.9)_9$、$(1.13)_9$ 式可得微分有效截面

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}=(2\pi)^{-2}2^{-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(p_a\cdot p_b)^2-m_a^2\cdot m_b^2}}\\ \times\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2\iint dp_d d|\boldsymbol{p}_c|d\epsilon_c\cdot|\boldsymbol{p}_c|^2\\ \times\delta(p_c^2+m_c^2)\theta(\epsilon_c)\delta(p_d^2+m_d^2)\theta(\epsilon_d)\\ \times\delta(p_a+p_b-p_c-p_d)。\end{aligned}\qquad(5.3)_9$$

其中相积分可采用导出 $(2.4)_9$ 式的方法进行，其结果只需在 $(2.4)_9$ 式中进行 $c\to a+b$，及 $b\to c$，$c\to d$ 的代换即得：

$$\left.\begin{aligned}I(p_a,p_b;p_c,p_d)&=\frac{|\boldsymbol{p}_c|^3}{4[(\epsilon_a+\epsilon_b)\cdot|\boldsymbol{p}_c|^2-\epsilon_c(\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{p}_b)\cdot\boldsymbol{p}_c]}\\ &\Rightarrow\frac{|\boldsymbol{p}_c|}{4(\epsilon_a+\epsilon_b)}\ (\text{质心系})\\ \text{参看}(2.4)_9\text{式}\quad&\Rightarrow\frac{|\boldsymbol{p}_c|^3}{4[(\epsilon_a+m_b)|\boldsymbol{p}_c|^2-\epsilon_c\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_c]}\ (\text{实验室系})\end{aligned}\right\}\qquad(5.4)_9$$

把上式代入 $(5.3)_9$ 式得到质心系的微分截面

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{C.M}=(2\pi)^{-2}\cdot2^{-4}\ \frac{|\boldsymbol{p}_c|}{S|\boldsymbol{p}_a|}\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2}\qquad(5.5)_9$$

把 $(5.4)_9$ 式代入 $(5.3)_9$ 式并考虑到 $(1.12)_9$ 式，就得到在实验室系的微分截面为：

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{L.S}&=(2\pi)^{-2}\cdot2^{-4}\cdot\frac{|\boldsymbol{p}_c|^3}{m_b|\boldsymbol{p}_a|[(\epsilon_a+m_b)|\boldsymbol{p}_c|^2-\epsilon_c\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_c]}\\ &\times\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2。\end{aligned}}\qquad(5.6)_9$$

在量子力学里微分截面归结为散射振幅的平方，即

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\overline{\sum_i}\sum_f|f(\theta)|^2\qquad(5.7)_9$$

比较$(5.5)_9$和$(5.7)_9$两式可以看出我们的T_{fi}矩阵元和散射振幅有相应关系的，

$$f(\theta)=(2\pi)^{-1}\cdot 2^{-2}\frac{|\boldsymbol{p}_a|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{S}\,|\boldsymbol{p}_a|^{\frac{1}{2}}}T_{fi}。\qquad (5.8)_9$$

下面我们由S矩阵的幺正性来推导所谓"光学定理"。在§8.2里我们曾经谈到S矩阵是一个幺正矩阵，即

$$S^+S=1=SS^+。\qquad (5.9)_9$$

以$(1.1)_9$式关系代入上式得到

$$\begin{aligned}\delta_{if}=\delta_{if}&+i(2\pi)^4\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_f)N_iN_f\\&\times(\langle f|T|i\rangle-\langle i|T^*|f\rangle)\\&+(2\pi)^8N_iN_f\sum_a N_a^2\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_a)\\&\times\delta(\Sigma p_a-\Sigma p_f)\langle f|T^+|a\rangle\langle a|T|i\rangle。\end{aligned}\qquad (5.10)_9$$

由上式化简可得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}[\langle f|T|i\rangle-\langle i|T^*|f\rangle]\\&=\frac{1}{2}(2\pi)^4\sum_a N_a^2\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_a)\\&\quad\times\langle f|T^*|a\rangle\langle a|T|i\rangle。\end{aligned}\qquad (5.11)_9$$

以上$\sum_a$表示对中间态a求和（包括对自旋求和）在对动量求和时可以令归一化体积$V\to\infty$。对动量求和可以归结为对动量积分。在这样过渡时，我们的归一化因子N_a应有相应的代换，即(参看$(1.2)_9$和$(6.17)_1$式)

$$N_a=\prod_{j=1}^{N_a}\frac{1}{\sqrt{2V\epsilon_j}}\to\prod_{j=1}^{N_a}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_j}}。\qquad (5.12)_9$$

经过这样的过渡并考虑两粒子当$f=i$的特殊情况，由$(5.10)_9$式就得到：

$$\begin{aligned}I_m(\langle i|T|i\rangle)=\frac{1}{2}\sum_{n_a}&\frac{1}{(2\pi)^{3n_a-4}}\int\cdots\int|T_{ai}|^2\\&\times\delta(\Sigma p_i-\Sigma p_a)\\&\times\prod_{a=1}^{n_a}\delta(p_a^2+m_a^2)\theta(\epsilon_a)dp_a。\end{aligned}\qquad (5.13)_9$$

把上式和$(1.13)_9$式比较，我们最后得到：

$$\boxed{I_m(\langle i|T|i\rangle)=2\sqrt{(p_a\cdot p_b)^2-m_a^2m_b^2}\,\sigma_{总}。} \qquad (5.14)_9$$

由$(1.10)_9$和$(1.11)_9$式，得到上式在质心系为

$$\boxed{I_m(\langle i|T|i\rangle)=2|\boldsymbol{p}_a|\sqrt{S}\,\sigma_{总}。} \qquad (5.15)_9$$

把上式代入$(5.8)_9$式并考虑到当$i=f$时$|\boldsymbol{p}_a|=|\boldsymbol{p}_c|$，就得到

$$I_m f(\theta)=\frac{|\boldsymbol{p}_a|}{4\pi}\sigma_{总}, \qquad (5.16)_9$$

这就是所谓光学定理的原始形式，这个定理把向前散射的散射振幅和碰撞粒子的总截面联系起来了。

§9.6 Dirac 粒子自旋的求和与求平均

以上几节我们讨论了关于相空间积分的计算，下面我们就来分析有关自旋态求和，求平均的计算问题。在这一节里，我们主要是对 Dirac 粒子的自旋求和、求平均的计算，做一些一般性的简化工作，以备应用。

我们知道在过程前后，外 Dirac 粒子出现的总数目，经常是偶数，也就是 Dirac 粒子在过程前后是成对出现的。对于每一对 Dirac 粒子来讲，根据§8.5介绍的对应关系，可知它在T_{fi}矩阵元中贡献一个因子$\bar{u}_f\,Qu_i$，其中Q为γ矩阵的函数，其具体形式与具体过程有关。我们在讨论对 Dirac 粒子自旋求和、求平均时，将把所有T_{fi}中的其他因子都吸收到Q中间去。如果过程中有多数对 Dirac 粒子出现，我们可以逐一处理。情况类似，不再重复赘述。

$$\begin{aligned}|T_{fi}|^2&=T\cdot T^+=(\bar{u}_f\,Qu_i)(\bar{u}_f\,Qu_i)^+\\&=(\bar{u}_f\,Qu_i)(\bar{u}_i\,\bar{Q}u_f)。\end{aligned} \qquad (6.1)_9$$

其中

$$\bar{Q}=\gamma_4\cdot Q^+\gamma_4。 \qquad (6.2)_9$$

$(6.1)_9$式中间$u_i\bar{u}_i$直接乘积是一个4×4矩阵，其具体形式

与初态 i 的具体自旋态有关。下面我们对这样的 4×4 矩阵做进一步的分析。如果引进 Dirac 符号 $u_i\equiv|i\rangle$, $\bar{u}_i\equiv\langle i|u_f\equiv|f\rangle$, $\bar{u}_f\equiv\langle f|$, 则$(6.1)_9$式可写成:

$$|T_{fi}|^2=\langle f|Q|i\rangle\langle i|\bar{Q}|f\rangle。\qquad(6.3)_9$$

请注意,我们在这儿暂时以 $\langle i|$ 来表示 u_i 的 Dirac 共轭 $\bar{u}_i$, 而不象通常那样表示 u 的厄米共轭 u^+。其中 $|i\rangle\langle i|$ 为初态 i 的投影算符, 它在 Dirac 旋量空间里是一个 4×4 的矩阵, 通常称这个矩阵为初态 i 的极化矩阵, 记以 $\mathbb{P}_i$, 其具体形式与初态 i 的具体自旋态有关。

我们在第一章中所导出的若干关系, 也可用以上引进的 Dirac 符号表示出来, 例如$(8.6)_1$式(对于一定 $\boldsymbol{k}$)

$$\overline{W}_{\Lambda,h}\cdot W_{\Lambda',h'}=\frac{\Lambda}{m}\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{hh'}\Rightarrow\langle\Lambda,\ h|\Lambda',\ h'\rangle$$

$$=\frac{\Lambda}{m}\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{hh'}。$$

又如$(8.10)_1$式

$$\sum_{\Lambda,h}\frac{m}{\Lambda}W_{\Lambda,h}\overline{W}_{\Lambda,h}=\mathbb{1}\Rightarrow\sum_{\Lambda,h}\frac{m}{\Lambda}|\Lambda,\ h\rangle\langle\Lambda,\ h|=\mathbf{1}。$$

把以上关系代入$(6.3)_9$式中的极化矩阵

$$\mathbb{P}_i=|i\rangle\langle i|=\sum_{\Lambda,h}\sum_{\Lambda',h'}\frac{m}{\Lambda}|\Lambda,\ h\rangle\langle\Lambda,\ h|i\rangle$$

$$\times\langle i|\Lambda',\ h'\rangle\times\langle\Lambda',\ h'|\frac{m}{\Lambda'}$$

$$-\sum_{\Lambda,h}\sum_{\Lambda',h'}\langle\Lambda,\ h|i\rangle\langle i|\Lambda',\ h'\rangle$$

$$\times\frac{m}{\Lambda}\cdot\frac{m}{\Lambda'}|\Lambda,\ h\rangle\langle\Lambda',\ h'|。\qquad(6.4)_9$$

通常我们所考虑的粒子都处在一定的 Λ 的本征态。由于正交性, 上式实际不必对 Λ(或 Λ')求和。定义初态 i 的密度矩阵如下

$$\rho_i(h,\ h')=\frac{m}{\Lambda}\langle\Lambda_i h|i\rangle\langle i|\ \Lambda_i h'\rangle\frac{m}{\Lambda}$$

$$=\langle\Lambda_i h|i\rangle\langle i|\Lambda_i,\ h'\rangle。\qquad(6.5)_9$$

上式 $\rho_i(h,\ h')$实际就初态 i 的投影算符 $|i\rangle\langle i|$在涡度表示下的

矩阵元。ρ_i 是一个 2×2 的矩阵。把$(6.5)_9$式代入$(6.4)_9$式得到

$$\mathbb{P}_i=\sum_{hh'}\rho_i(h,\ h')|A_i,\ h\rangle\langle A_i,\ h|。\qquad (6.6)_9$$

如果初态粒子不是处在一定的自旋态，而是处在 $|a\rangle$ 态的几率为 $\varphi(a)$的混合系综，那末$(6.3)_9$式还应对初态进行系综平均，即

$$\overline{\sum_f}|T_{fi}|^2=\sum_a\varphi(a)\langle f|Q|a\rangle\langle a|\bar{Q}|f\rangle,\qquad (6.7)_9$$

其中

$$\sum_a\varphi(a)=1。$$

同样我们可以引进系综的极化矩阵 $\mathbb{P}$ 和系综的密度矩阵 $\rho(h,\ h')$

$$\mathbb{P}=\sum_a\varphi(a)|a\rangle\langle a|=\rho(h,\ h')|h\rangle\langle h'|,\qquad (6.8)_9$$

其中

$$\rho(h,\ h')=\sum_a\varphi(a)\langle h|a\rangle\langle a|h'\rangle。\qquad (6.9)_9$$

以上我们已省略了 A_i 的标记。

如果取 $\varphi(a)=\delta_{aa'}$ 则该系综归结为自旋态为 a' 的纯系综，也可称初态是完全极化态，如果取 $\varphi(a)=$常数，也就是各自旋态等几率出现，这时初态称为是完全非极化的，其他情况则称为部分极化的态。

关于极化矩阵和密度矩阵的具体形式，将在下节讨论。

把$(6.8)_9$式代入$(6.7)_9$式就得到

$$\overline{\sum_f}|T_{fi}|^2=\langle f|Q\mathbb{P}_i\bar{Q}|f\rangle。\qquad (6.10)_9$$

如果实验不区分末态粒子的自旋，我们还要进一步对末态自旋求和。

$$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2=\sum_h\langle h|Q\mathbb{P}_i\bar{Q}|h\rangle=\mathrm{Tr}\left[\sum_h|h\rangle\langle h|Q\mathbb{P}_i\bar{Q}\right],\qquad (6.11)_9$$

而 $\sum_h|h\rangle\langle h|$ 其中对于 h 求和对一定能态的不同涡度态进行，即为对于一定能态的投影算符。参看$(8.12)_1$式以$(8.13)_1$代入上式可得

$$\overline{\sum_i}\sum_f |T_{fi}|^2 = \pm \mathrm{Tr}(Q\mathbb{P}_i\bar{Q}\Lambda_{\pm f}) = \mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i Q(-i\gamma\mathbb{P}_f \pm m)]\frac{1}{2m}。 \quad (6.12)_9$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\overline{\sum_i}\sum_f |T_{fi}|^2 = \pm \mathrm{Tr}(Q\mathbb{P}_i\bar{Q}\Lambda_{\pm f}) = \pm \mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i\bar{Q}(\gamma^\mu p_{f\mu} \pm m)]\frac{1}{2m}。 \quad (6.12')_9$$

如果末态粒子是 Dirac 粒子(正能态)，则上式同取(+)号。如果末态是反 Dirac 粒子则上式同取负号(−)。其中 p_f 为末态粒子的动量，m 为其质量。

假如实验还要观测末态粒子的自旋投影，也就是要观测末态粒子的极化情况，则我们就不能简单对末态粒子自旋求和，而须要求出末态的密度矩阵或者极化矩阵，通过极化矩阵我们就可以计算末态粒子自旋(实际上可以包括自旋的任一函数)的平均值，这种计算是具有一般性的，例如在处于 a 自旋态的几率为 φ_a 的系综里，任一自旋函数(一般是 γ 矩阵的函数)的物理量 f 的平均值就应该是：

$$\bar{f} = \sum \varphi_a \bar{u}^{(a)}\gamma_4 f u^{(a)} = \sum_a \varphi_a \langle a|\gamma_4 f|a\rangle = \mathrm{Tr}[\gamma_4 f \sum_a \varphi_a |a\rangle\langle a|]。$$

利用$(6.8)_9$式可得：

$$\bar{f} = \mathrm{Tr}(\gamma_4 f \mathbb{P})。 \quad (6.13)_9$$

如果 f 就是自旋本身

$$f = \bar{S} = \frac{\bar{\sigma}}{2},$$

由上式就得到，由$(4.11)_1$

$$\bar{S} = \frac{\bar{\sigma}}{2} = \mathrm{Tr}\left(\gamma_4 \frac{1}{2i}\gamma_4\gamma\gamma_5\mathbb{P}\right) = \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(\gamma\gamma_5\mathbb{P})。 \quad (6.14)_9$$

末态的密度矩阵可以求得如下：

考虑到末态 $|f\rangle=Q|i\rangle$ 和 $\langle f|=\langle i|\bar{Q}$，参看$(6.1)_9$式。并由$(6.6)_9$式

$$\rho(h,\ h')=\langle h|f\rangle\langle f|h'\rangle\sim\overline{\sum_i}\langle h|Q|i\rangle\langle i|\bar{Q}|h'\rangle$$

又由$(6.8)_9$式

$$\rho(h,\ h')=\frac{\langle h|Q\mathbb{P}_i\bar{Q}|h'\rangle}{\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2}$$

$$=\frac{\langle h|Q'\mathbb{P}_i\bar{Q}|h'\rangle}{\frac{1}{2m}\mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i\cdot\bar{Q}(-i\gamma p_f\pm m)]}。\qquad(6.15)_9$$

分母因子是由归一化条件而来，即

$$\mathrm{Tr}\rho=\sum_h\rho(h,\ h)=1\qquad(6.16)_9$$

由此可得末态极化矩阵，参看$(6.8)_9$式。

$$\mathbb{P}_f=\rho(h,\ h')|h\rangle\langle h'|=|h\rangle\rho(h,\ h')\langle h'|$$

$$=\frac{|h\rangle\langle h|Q\mathbb{P}_iQ|h'\rangle\langle h'|}{\frac{1}{2m}\mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i\bar{Q}\,(-i\gamma p_f\pm m)]},$$

$$\boxed{\mathbb{P}_f=\frac{(-i\gamma p_f\pm m)Q\mathbb{P}_i\bar{Q}(-i\gamma p_f\pm m)}{2m\mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i\bar{Q}(-i\gamma p_f\pm m)]}。}\qquad(6.17)_9$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\mathbb{P}_f=\frac{(\gamma^\mu p_{f\mu}\pm m)Q\mathbb{P}_i\bar{Q}(\gamma^\mu p_{f\mu}\pm m)}{2m\mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_i\bar{Q}(\gamma^\mu p_{f\mu}\pm m)}。}\qquad(6.17')$$

以上推导中对于相同指标 h, h' 要求和。当末态粒子处在正能态(Dirac 粒子)取正号，处在负能态(Dirac 粒子)取负号。

求得了末态的极化矩阵，我们就可以由$(6.13)_9$式来求得，一切有关自旋的物理量，在末态的平均值。不过在上式中，我们还留下初态的极化矩阵 $\mathbb{P}_i$，其具体形式有待确定，这将在下一节讨论。

§9.7 极化矩阵及有关 r 矩阵的计算

下面我们来讨论上节遗留下来的、有关确定极化矩阵 $\mathbb{P}_i$ 的具

体形式的问题。我们由$(6.9)_9$式可知：如果系综的密度矩阵ρ已知，就完全确定了极化矩阵，而密度矩阵可以由它的一般性质把它的具体形式确定下来。因此我们首先来分析密度矩阵ρ的一般性质，由于机率φ_a满足归一化条件$\sum_a \varphi_a=1$，由此可得系综的密度矩阵，也应满足归一化条件：

$$\mathrm{Tr}\rho=1=\mathrm{Tr}\rho_a。\qquad (7.1)_9$$

此外由于φ_a为实数，所以系综的密度矩阵ρ和ρ_a一样都是厄米的

$$\rho^+=\rho。\qquad (7.2)_9$$

此外，任一自旋函数的物理量g的系综平均值，在涡度本征态空间里的2×2矩阵可以表成

$$\bar{g}=\mathrm{Tr}(g\rho)\qquad (7.3)_9$$

对于自旋为$\frac{1}{2}$的Dirac粒子来讲，根据以上的一般性质，就足以把ρ的2×2矩阵形式确定下来。也就是ρ一般应有下列形式

$$\rho=\frac{1}{2}[1+(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma})]。\qquad (7.4)_9$$

其中$\boldsymbol{\zeta}$为某一矢量（三维）。实际上由$(7.3)_9$式看来$\boldsymbol{\zeta}$就是Dirac粒子自旋$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$（静止时）的系综平均值（二倍）。这也就是说只要Dirac粒子自旋平均值，即赝矢量$\boldsymbol{\zeta}$已知，就完全确定了ρ，因而也就完全确定了极化矩阵$\mathbb{P}$。此外，由正能态的$|h\rangle\langle h'|$所形成4×4矩阵作用到负能态上，由于正交性均应为零，因此由$(6.5)_9$式看来极化矩阵$\mathbb{P}$后面应该有正能态的投影算符作为公共因子而存在。最后，如果$\boldsymbol{\zeta}=0$，即体系处于完全非极化的状态，则由$(7.4)_9$代入$(6.6)_9$式利用$(8.13)_1$式得到极化矩阵基本上就是正能态的投影算符（除以2）。

$$\mathbb{P}_{\zeta=0}=\frac{1}{2}\Lambda_+(p)=\frac{-i\gamma p+m}{4m}。\qquad (7.5)_9$$

这相当于对自旋求和$\sum_h u^h\bar{u}^h$再除2。这个结论有一般性，即对

于完全非极化的系综，其自旋求平均，就在于对所有自旋指向求和，再除以总共自旋不同指向的数目即$(2S+1)$。

一般情况下$\boldsymbol{\zeta}\neq 0$，这时极化矩阵$\mathbb{P}$中，就还应该包括含有赝矢量的一项，来自$(7.4)_9$式中的$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)_{hh'}|h\rangle\langle h'|$（参看$(6.6)_9$式），并且由$(7.4)_9$式看出，极化矩阵$\mathbb{P}$与该赝矢量只是成直线关系。由§1.5的附表可知$\boldsymbol{\sigma}$矩阵的相对推广可取为$-i\gamma_\mu\gamma_5$，因此我们可取

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}&=(1-iA_\mu\gamma_\mu\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}\Lambda_+\cdot(P)\\&=(1-iA_\mu\gamma_\mu\gamma_5)\frac{-i\gamma p+m}{4m}。\end{aligned}}\qquad(7.6)_9$$

上式在Bjorken度规下为：

$$\boxed{\mathbb{P}=(1-\gamma^\mu A_\mu\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}\Lambda_+(p)=(1-\gamma^\mu A_\mu\gamma_5)\frac{\gamma^\mu p_\mu+m}{4m},}$$

$$(7.6')_9$$

其中A_μ为赝矢量ζ的相对论推广。利用$(6.14)_9$式可以证明自旋的系综平均值即为：

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}{2}=\frac{1}{2i}\overline{(\gamma_4\boldsymbol{\gamma}\gamma_5)}=\frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\gamma}\gamma_5\mathbb{P})=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}。\qquad(7.7)_9$$

虽然形式上A_μ有四个分量，实际上独立的只有三个分量，即$\boldsymbol{A}$的三个分量。而A_4完全可以由$\boldsymbol{A}$来决定。由于协变的要求，由上式看来，我们可以认为A_μ就是算符$\frac{1}{i}\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5$的平均值。利用$(6.13)_9$式，我们可以证明$(p_\mu A_\mu)=0$应为零（作为习题）。因此$A_\mu$中只有三个分量是独立的。由此看来，我们所取的$(7.6)_9$式满足极化矩阵的所有要求，因而我们可以认为它就是我们所要求出的正确的形式。由$(7.8)_1$和$(8.9)_1$式还可证明$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\zeta}$存在下列关系：

$$\boldsymbol{A}_{/\!/}=\frac{\epsilon}{m}\boldsymbol{\zeta}_{/\!/},\quad \boldsymbol{A}_\perp=\boldsymbol{\zeta}_\perp,\quad A_0=\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}}{\epsilon}。\qquad(7.8)_9$$

其中 // 和 ⊥ 是相对 $\boldsymbol{P}$ 方向而言。

对负能态(即反 Dirac 粒子)作同样的考虑，我们可以得到相似的极化矩阵的表示。可以和$(7.6)_9$式统一写成：

$$\boxed{\mathbb{P}^{(\pm)}=(1-iA_\mu\gamma_\mu\gamma_5)\frac{-i\gamma p\pm m}{4m}}。\qquad (7.9)_9$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\mathbb{P}^{(\pm)}=(1-A_\mu\gamma^\mu\gamma_5)\frac{\gamma^\mu p_\mu\pm m}{4m}}。\qquad (7.9')_9$$

上式两边同时取正号或同时取负号，分别对应正、反 Dirac 粒子态。A 的数值可以由实验测定自旋平均值来确定。一旦 $\boldsymbol{A}$ 的数值给出，我们就得到了确定的极化矩阵。

由以上两节的讨论，我们把波函数 $u\bar{u}$ 之类消除，而把问题归结为对 γ 矩阵的求迹运算，关于 γ 矩阵求迹的基本关系，已在第一章里介绍过。下面仅把重要结论摘录，以备查用。根据第一章介绍的关系，其推导是不难的(作为习题)。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\gamma_\mu\gamma_\nu=\delta_{\mu\nu},\\
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho},\\
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}。
\end{aligned}\right\}\qquad (7.10)_9$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[(\gamma_\mu A^1_\mu)\cdot(\gamma_\nu A^2_\nu)]=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\gamma A^1)(\gamma A^2)]=A^1\cdot A^2,\\
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[(\gamma A_1)(\gamma A_2)(\gamma A_3)(\gamma A_4)]=(A_1\cdot A_2)(A_3\cdot A_4)\\
&\quad+(A_1\cdot A_4)(A_2\cdot A_3)-(A_1\cdot A_3)(A_2\cdot A_4),\\
&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_5(\gamma A_1)(\gamma A_2)(\gamma A_3)(\gamma A_4)]=\det(A_1A_2A_3A_4)。
\end{aligned}\right\}$$

$$(7.11)_9$$

以上 A_1, A_2, A_3, A_4 均为某一四维矢量。det 表示行列式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{[(\gamma A_1)+a_1]\cdot[(\gamma A_2)+a_2]\cdot[(\gamma A_3)+a_3]\\&\times[(\gamma A_4)+a_4]\}\\=&(A_1\cdot A_2+a_1\cdot a_2)(A_3\cdot A_4+a_3\cdot a_4)\\&+(A_1\cdot A_4+a_1\cdot a_4)(A_2\cdot A_3+a_2\cdot a_3)\\&-(A_1\cdot A_3-a_1\cdot a_3)\cdot(A_2\cdot A_4-a_2\cdot a_4),\end{aligned}\right\}$$

$$(7.12)_9$$

其中 $a_1a_2a_3a_4$ 为某一普通数目。

此外还有：

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\gamma_\nu,\\&\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu=4\delta_{\lambda\rho},\\&\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda。\end{aligned}\right\}\qquad(7.13)_9$$

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\mu S\gamma_\mu=4S,\\&\gamma_\mu(\gamma A)\gamma_\mu=-2(\gamma A),\\&\gamma_\mu(\gamma A_1)(\gamma A_2)\gamma_\mu=4(A_1\cdot A_2),\\&\gamma_\mu(\gamma A_1)(\gamma A_2)(\gamma A_3)\gamma_\mu=-2(\gamma A_3)(\gamma A_2)(\gamma A_1)。\end{aligned}\right\}$$

$$(7.14)_9$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu=S_{\mu\rho\nu\sigma}\gamma_\sigma-\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma_5,\\&S_{\mu\rho\nu\sigma}\equiv\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\rho\nu}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}。\end{aligned}\right\}\qquad(7.14')_9$$

当 q_μ 为某一四维矢量，且其空间部分为实，而其第四分量为虚数时，则有：

$$\gamma_4(\gamma q)^+\gamma_4=-(\gamma q)。\qquad(7.15)_9$$

由此可见，$\bar{Q}$ 可由 Q 中 $(\gamma q)\to-(\gamma q)$；$i\to-i$ 同时把 (γq) 等算符的顺序颠倒排列而得到。

最后应该再一次指出：奇数 γ 乘积求迹为零，在计算中是经常被利用的。

§9.8 光子极化的求和与求平均

以上两节里，我们讨论了 Dirac 粒子自旋求和求平均的计算，

本节里，我们继续来讨论光子极化的求和与求平均的计算。

一般情况下，光子既非是完全极化的，也不是完全非极化的，而是处在部分极化的状态，对于这样的一个混合系综，正如我们在以前曾讨论过的，须要用密度矩阵来描写。光子的自旋虽然为1，可是由于 Lorentz 条件和规范不变性的约束，其独立的极化态只有两个，也就是我们以前所常讲的所谓横分量。一般纯系综的初态光子的极化可写成(参看 § 4.1)：

$$e^{(i)}=e_1^{(i)}e^1+e_2^{(i)}e^2, \tag{8.0}$$

其中 $e_\lambda^{(i)}$ 就是迭加系数，类似$(6.5)_9$和$(6.9)_9$式的讨论，可知描写光子的一般极化状态的密度矩阵是一个 2×2 的，其迹为 1 的厄米矩阵。类似$(7.4)_9$式其一般形式应为：

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{1}{2}[1+(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\tau})]\\&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1+\xi_3 & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2 & 1-\xi_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e_1^ie_1^{i*} & e_1^ie_2^{i*}\\ e_2^ie_1^{i*} & e_2^ie_2^{i*}\end{vmatrix}。\end{aligned} \tag{8.1}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 就是 Pauli 矩阵，为了和以前区别起见，我们改写成 τ。同时这儿的 $\boldsymbol{\xi}$ 和$(7.4)_9$式中的 $\boldsymbol{\zeta}$ 的物理意义也是不同的。只有弄清楚 $\boldsymbol{\xi}$ 的物理意义，我们才能由实验把光子的密度矩阵确定下来。下面我们就来讨论 $\boldsymbol{\xi}$ 的物理意义。其实 $\boldsymbol{\xi}$ 的三个分量和用来描写光子极化情况的 Stokes 参量是一致的。虽然早在 1852 年 Stokes 就介绍了 Stokes 参量及其意义，可是并不为一般人所熟悉，因此还值得我们对 $\boldsymbol{\xi}$ 的物理意义作一番讨论，推导从简，结论扼要。

由 $(8.1)_9$式直接得出

$$\begin{aligned}\xi_1&=2\mathrm{Re}e_2^ie_1^{i*},\\ \xi_2&=2\mathrm{Im}e_2^ie_1^{i*},\\ \xi_3&=(e_1^ie_1^{i*}-e_2^ie_2^{i*})。\end{aligned} \tag{8.2}$$

光子处于 1 极化态的几率为

$$\rho_{11}=\frac{1}{2}(1+\xi_3),$$

而处于 2 极化态的几率则为

$$\rho_{22}=\frac{1}{2}(1-\xi_3)。$$

由此我们可以认为ξ_3是光子在 1 方向极化的量度。如果我们把坐标轴绕第三轴即 k 方向旋转 45° 即 1′, 2′ 分别和 1, 2 方向成 45° 角,亦即

$$e^1=\frac{e^{1'}-e^{2'}}{\sqrt{2}};\quad e^2=\frac{e^{1'}+e^{2'}}{\sqrt{2}}。$$

则可求得光子处于 1′ 极化态的几率为

$$\rho'_{11}=\frac{1}{2}(1+\xi_1)。$$

而处于 2′ 极化态的几率

$$\rho'_{22}=\frac{1}{2}(1-\xi_1)。$$

同样我们也可以认为ξ_1是光子在与 1 方向成 45° 的方向极化的量度。又如我们把极化基矢作如下的变换,即:

$$e^1=\frac{e^{1''}+e^{2''}}{\sqrt{2}},\quad e^2=\frac{e^{1''}-e^{2''}}{\sqrt{2}\,i}。$$

这相当由线偏振到圆偏振的变换。这时我们又可求得光子处于 1″ 的极化态的几率为

$$\begin{aligned}\rho''_{11}&=\frac{1}{2}[\rho_{11}+\rho_{22}\\&\quad -i(\rho_{12}-\rho_{21})]\\&=\frac{1}{2}(1+\xi_2)。\end{aligned}$$

而处于 2″ 极化态的几率则为

$$\rho''_{22}=\frac{1}{2}(1-\xi_2)。$$

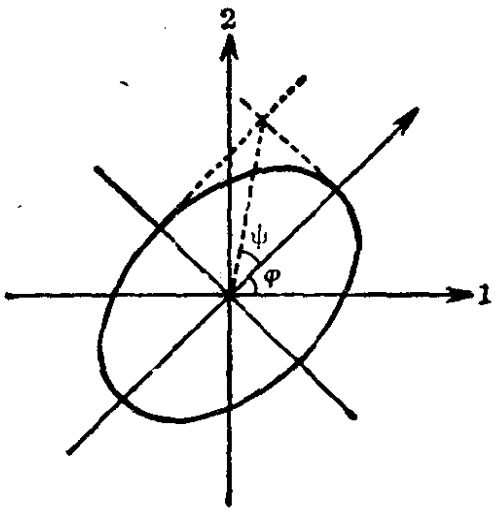


图 9-5

于是,ξ_2应是光子处于圆偏振的极化量度。一般情况下,一个 ξ 的指向就决定了光子系综的极化状态(一般可归结为椭圆偏振)其关系列举如下(参看图 9-5):

$$\left.\begin{aligned}\tan 2\varphi &= \frac{\xi_1}{\xi_3},\\ \tan 2\psi &= \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_3^2}}。\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

上式关系实际上包含了以上全部的讨论：

例如当 $\xi_2=0$ 则 $\psi=0$，即为线偏振。又如 $\xi_1=0=\xi_3$ 而 $\xi_2\neq 0$ 则 $\psi=45°$，即为圆偏振。又如 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $(-\boldsymbol{\xi})$ 对应的极化态是相互正交的。

可以证明 $|\boldsymbol{\xi}|$ 的长度就决定光子极化的程度。如果 $|\boldsymbol{\xi}|=0$，这表明光子是完全非极化的。这一点可直接由(8.2)式看出，另一方面，由于几率总和应为 1 可以证明：

$$\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\leqslant 1。 \tag{8.4}$$

当 $|\boldsymbol{\xi}|=1$ 时就表明光子处于完全极化态，即为确定极化态的纯系综。一般 $|\boldsymbol{\xi}|$ 处于 $0\leqslant|\boldsymbol{\xi}|\leqslant 1$ 就可作为光子极化程度的量度。弄清了 $\boldsymbol{\xi}$ 的物理意义，我们就可以由实验来确定光子的密度矩阵。

当某一过程初态有光子参预时，其 T_{fi} 矩阵元一般可写成(参看§ 8.5)：

$$T_{fi}=a_\alpha e_\mu^{(i)}。 \tag{8.5}$$

如果还有电子参预过程，则上式的 a_α 又可写成(参看(6.1)式)：

$$a_\alpha=\bar{u}Q_\alpha u。 \tag{8.6}$$

其中 Q_α 就是把 Q 算符中的 $(\gamma_\mu e_\mu^{(i)})\to(\gamma_\mu e_\mu^\alpha)$ 代入所得到的算符。以上 e_μ^i 为初态光子的极化矢量的单位矢量，而 e_μ^α 为纵横坐标里光子极化的单位矢量。

类似以上两节的推导，可得到在对初态光子极化求平均时(并对 Dirac 粒子自旋求和平均)归结为(参看(6.12)式)：

$$\begin{aligned}\overline{\sum_i\sum_f}|T_{fi}|^2&=\overline{\sum_i\sum_f}a_\alpha\rho_{\alpha\beta}^{(i)}a_\beta^+=\overline{\sum_{i,f}}\bar{u}Q_\alpha u\rho_{\alpha\beta}^{(i)}(\bar{u}Q_\beta u)^+\\&=\mathrm{Tr}(Q_\alpha\mathbb{P}_i\rho_{\alpha\beta}^{(i)}\bar{Q}_\beta\Lambda_f)。\end{aligned} \tag{8.7}$$

其中 $\rho^{(i)}$ 为初态光子的密度矩阵。上式对 $\alpha,\beta=1,2$ 求和，Tr 表示对 γ_A 等求迹。如果初态光子是完全非极化的。即 $\xi^{(i)}=0$，则

$\rho^{(i)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ 代入上式得：

$$\boxed{\overline{\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\mathrm{Tr}(Q_2\mathbb{P}_i\bar{Q}_\alpha\Lambda_f)。} \qquad (8.8)_9$$

上式求和只对横分 $\alpha=1,2$ 进行，不过我们在 $(7.7)_8$ 式里已知，任何一个规范不变的物理量。当其中的任一极化矢量 e_μ 换以波矢量 k_μ 时其结果为零，利用 $(1.8)_4$ 式就得到：

$$\mathrm{Tr}[(Q_3+iQ_4)\mathbb{P}_i\bar{Q}_\alpha\Lambda_f]=0,$$
$$\mathrm{Tr}[Q_\alpha\mathbb{P}_i(\bar{Q}_3+i\bar{Q}_4)\Lambda_f]=0。$$

如取前式中 $\alpha=3$，后式中 $\alpha=4$ 并乘以 $-i$，再把两式相加就得到

$$\sum_{\alpha=3}^{4}\mathrm{Tr}(Q_\alpha\mathbb{P}_i\bar{Q}_\alpha\Lambda_f)=0。$$

因此在 $(8.8)_9$ 式对 α 求和时实际上可对 $\alpha=1,2,3,4$ 全部进行，利用 $(1.9)_4$ 式 $e^\alpha_\mu e^\alpha_\nu=\delta_{\mu\nu}$。最后可得到，对光子极化求和归结为：

$$\mathrm{Tr}(Q_\mu\mathbb{P}_i\bar{Q}_\mu\Lambda_f), \qquad (8.9)_9$$

其中 Q_μ 就是把 Q 算符中的 $(\gamma e)\to\gamma_\mu$ 所得算符。对完全非极化光子求平均则只需把上式除以 2(参看 $(8.8)_9$ 式)。此外在对光子求和时还可以充分利用以下关系，即：

$$\sum_{\alpha=1}^{2}e^\alpha_r e^\alpha_s=\delta_{rs}-\frac{k_rk_s}{|\boldsymbol{k}|^2},\quad r,s=1,2,3。 \qquad (8.10)_9$$

如果末态有光子出现，则 T_{fi} 一般有以下形式(参看§ 8.5)：

$$T_{fi}=e^{(f)*}_\lambda b_\lambda。 \qquad (8.11)_9$$

于是类似 $(6.15)_9$ 式，参看 $(8.1)_9$ 式末态光子的密度矩阵即为

$$\rho^{(f)}_{\lambda\rho}=\frac{\overline{T_{fi}T^+_{fi}}}{\sum|T_{fi}|^2}=\frac{b_\lambda b^*_\rho}{\sum_\lambda|b_\lambda|^2}。 \qquad (8.12)_9$$

以上分母求和是对末态光子极化进行 $\lambda=1,2$。一横表示对初态光子极化求平均。如果有 Dirac 粒子参与，由 $(8.7)_9$ 式可得到

$$\boxed{\rho^{(f)}_{\lambda\rho}=\frac{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\mathbb{P}_i\rho^{(i)}_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\beta\rho}\Lambda_f]}{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\rho}\mathbb{P}_i\rho^{(i)}_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\beta\rho}\Lambda_f]}。} \qquad (8.13)_9$$

其中 $Q_{\alpha\lambda}$ 是把 Q 算符中的初态光子的$(\gamma e^{\alpha})\to(\gamma e^{\alpha})$ 同时把末态光子的$(\gamma e^{(f)})\to(\gamma e^{\lambda})$所得的算符。

一旦求出末态光子的密度矩阵。我们就可以由$(8.1)_9$式求得末态的 Stokes 参量 ξ。因而就完全知道了末态光子的极化状态。由$(8.1)_9$式并利用$(8.13)_9$式可知：

$$\boxed{\begin{aligned}\xi^{(f)}&=\mathrm{Tr}(\rho^{(f)}\cdot\tau)\\&=\frac{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\mathbb{P}_i\rho^{(i)}_{\alpha\beta}\tau_{\rho\lambda}\bar{Q}_{\beta\rho}\Lambda_f]}{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\mathbb{P}_i\rho^{(i)}_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\beta\lambda}\Lambda_f]}\end{aligned}}\qquad(8.14)_9$$

以上最后式中的 Tr 系对 γ_A 等求迹，此外还要对相同指标 α, β 及 λ 求和，$(8.13)_9$式同此。

有时我们还要计算在末态光子系综里，出现某一确定极化 p 的几率(记以 $W^{(p)}$)。与 p 极化态相应的密度矩阵和 Stokes 参量分别记以 $\rho^{(p)}$ 和 $\xi^{(p)}$ 则

$$W^{(p)}=\mathrm{Tr}(\rho^{(f)}\rho^{(p)})=\frac{1}{2}(1+\xi^{(f)}\xi^{(p)})。\qquad(8.15)_9$$

由此又可得到：如果实验不观测末态光子极化状态，则对末态光子极化求和[一般即相当对 $(\xi^{(p)})$和$(-\xi^{(p)})$求和]，其截面记以 σ。则实验观测末态光子处于某一特定极化态$\xi^{(p)}$的截面$\sigma^{(p)}$ 就应为：

$$d\sigma^{(p)}=d\sigma(1+\xi^{(f)}\cdot\xi^{(p)})。\qquad(8.16)_9$$

如有多数光子出现，则逐一处理，不再重述。

§9.9 对称性质与 S 矩阵元，精细平衡

体系的对称性质，带给 S 矩阵元间若干关系，这些关系可以得到直接的应用，关于 S 矩阵元的对称性质的内容是极其丰富，除了下面我们将举若干应用示例外，我们还要在下面作逐节的讨论。

我们早就知道，体系在某一变换下保持不变，亦即该变换与体系的 Lagrange(或哈尔顿)相对易，就相应于一个守恒定律。这将

在 S 矩阵里得到相应的反映，如果某一物理量算符 F 与体系的哈密顿函数相对易，则由 $(2.12)_8$ 式可知 F 与 S 矩阵也是对易的。即

$$[F, S]=FS-SF=0。 \qquad (9.1)_9$$

如果把 S 矩阵用 F 的本征态表示出来，则利用上式可得

$$\langle F''|S|F'\rangle=\langle F''|F^{-1}FSF^{-1}F|F'\rangle=\frac{F'}{F''}\langle F''|S|F'\rangle,$$

即

$$\left(\frac{F'}{F''}-1\right)\langle F''|S|F'\rangle=0。 \qquad (9.2)_9$$

只有当 $F'=F''$ 时 $\langle F''|S|F'\rangle$ 才不为零。这说明在不同本征值的 F 本征态之间，不存在任何的过渡。这个结论本是平凡的，只是说明一个守恒定律就对应一个选择规则。可是 S 矩阵的对称性质的内容还有另外更丰富的结论，下面仅举数例，以示其多样性。

例如体系在电荷共轭变换下保持不变，即 $[S, C]=0$ 或

$$CSC^{-1}=S$$

则

$$\langle b|S|a\rangle=\langle b|C^{-1}CSC^{-1}C|a\rangle=\langle\bar{b}|S|\bar{a}\rangle。 \qquad (9.3)_9$$

其中 $\bar{b}$ 和 $\bar{a}$ 分别为 b 和 a 粒子的反粒子，上式说明在粒子间的过渡振幅，和相应的反粒子间的过渡振幅是相等的，例如由此可推知 π^-p 的散射截面和 $\pi^+\bar{p}$ 的散射截面应是相等的。此外如果体系在电荷共轭变换下保持不变，则可证明粒子和反粒子的磁矩是相反的。粒子的磁矩就是 $\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(x)d\boldsymbol{x}$ 的观测值。其中 $\boldsymbol{j}(x)$ 为总电流算符

$$\begin{aligned}\mu_a&=\langle a|\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(x)d\boldsymbol{x}|a\rangle\\&=\langle a|C^{-1}C\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(x)d\boldsymbol{x}\ C^{-1}C|a\rangle\\&=-\langle\bar{a}|\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(x)d\boldsymbol{x}|\bar{a}\rangle=-\mu_{\bar{a}}。\end{aligned} \qquad (9.4)_9$$

以上考虑到

$$C\boldsymbol{r}C^{-1}=\boldsymbol{r},$$

但

$$C\boldsymbol{j}(x)C^{-1}=-\boldsymbol{j}(x)。$$

又如体系在时间反演下保持不变，即 $TST^{-1}=S$，则

$$\langle f|S|i\rangle=\langle f|T^{-1}TST^{-1}T|i\rangle=\langle i'|S|f'\rangle。 \qquad (9.5)_9$$

如果初态 i 和末态 f 分别为

$$|i\rangle=|\boldsymbol{p}_i,\ S_i\rangle,\quad \langle f|=\langle \boldsymbol{p}_f S_f|$$

则

$$\left.\begin{aligned} T|i\rangle&=\langle i'|=\langle -\boldsymbol{p}_i,\ -S_i|,\\ \langle f|T^{-1}&=|f'\rangle=|-\boldsymbol{p}_f,\ -S_f\rangle。\end{aligned}\right\} \qquad (9.6)_9$$

代入$(9.5)_9$式可得：

$$\boxed{\langle \boldsymbol{p}_f,\ S_f|S|\boldsymbol{p}_i S_i\rangle=\langle -\boldsymbol{p}_i,\ -S_i|S|-\boldsymbol{p}_f,\ -S_f\rangle。} \qquad (9.7)_9$$

上式常称为可逆理论。

以上 T' 算符就是§6.3中的 T_w，以下同此。以上 S_i，S_f 为自旋矢量，如果体系不仅在时间反演，同时也在空间反演下保持不变，则

$$\langle f|S|i\rangle=\langle f|T^{-1}p^{-1}SpT|i\rangle=\langle i'|p^{-1}Sp|f'\rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{p}_f,\ S_f|S|\boldsymbol{p}_i,\ S_i\rangle=\langle \boldsymbol{p}_i,\ -S_i|S|\boldsymbol{p}_f,\ -S_f\rangle。 \qquad (9.8)_9$$

将上式平方并对自旋指向求和就得到：

$$\boxed{\sum_i\sum_f|\langle \boldsymbol{p}_f,\ S_f|S|\boldsymbol{p}_i,\ S_i\rangle|^2=\sum_f\sum_i|\langle \boldsymbol{p}_i,S_i|S|\boldsymbol{p}_f,S_f\rangle|^2。} \qquad (9.9)_9$$

上式称为(半)精细平衡原理，该原理常被用来确定粒子的自旋，其根据如下：弹性散射的有效截面在质心系，当初态粒子是完全非极化时，则由$(5.5)_9$式可表示如下：

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{c.m.}=(2\pi)^{-2}2^{-4}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\cdot\frac{1}{E_i^2}\cdot\frac{\sum_i\sum|T_{fi}|^2}{\prod_i(2S_i+1)}。} \qquad (9.10)_9$$

其中 E_i 为初态粒子能量之和 $E_i=(\epsilon_a+\epsilon_b)$。

如果过程是互为逆过程，例如(在相同的总能量情况下)

$$\pi^+ + D \rightleftarrows P + P$$

则由$(9.9)_9$式代入$(9.10)_9$式得到：

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega} \Big/ \frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{|\boldsymbol{q}|^2} \cdot \frac{(2S_p+1)\cdot(2S_p+1)}{(2S_\pi+1)(2S_D+1)}。 \tag{9.11}_9$$

以 $S_p=\frac{1}{2}$, $S_D=1$ 代入则得到：

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega} \Big/ \frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega} = \frac{4}{3} \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{|\boldsymbol{q}|^2} \frac{1}{2S_\pi+1}。 \tag{9.12}_9$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 分别为质心系的核子和 π 介子的动量。

考虑到末态两个质子的 Pauli 原理的要求对于总截面有关系

$$\sigma(\rightarrow)/\sigma(\leftarrow) = \frac{2}{3} \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{|\boldsymbol{q}|^2} \frac{1}{2S_\pi+1} \tag{9.13}_9$$

以上各量除 S_π 以外，都可以由实验测量，由此可测得 S_π 值，实验表明 $S_\pi=0$。

当然并非在所有情况下，P、C、T 的分别变换，都是保持不变的，例如在弱相互作用下，P、C 的分别变换并非保持不变，不过由于 PCT 定理：即在 PCT 的复合变换下，经常是保持不变的。由此我们也可得到若干重要结论。例如粒子的质量

$$\begin{aligned} m_a\langle a|a\rangle &= \langle a|H|a\rangle = \langle a|P^{-1}C^{-1}T^{-1}HTCP|a\rangle \\ &= \langle \bar{a}|H|\bar{a}\rangle = m_{\bar{a}}\langle \bar{a}|\bar{a}\rangle。 \end{aligned} \tag{9.14}_9$$

值得指出：在 PCT 变换下粒子的自旋要反向，但对以上的结论：即粒子和反粒子的质量相等，这一点是无关紧要的。因为在空间旋转不变的要求下，矩阵元是与自旋的指向无关的。

下面我们来考虑粒子和反粒子的相应衰变。假定衰变是在弱相互作用下进行的，我们可以只取 S 矩阵元的一级近似，即(参看$(2.8)_8$式)

$$T_{fi} \sim \langle f|\mathscr{L}_{\text{相互}}|i\rangle = \langle f|\mathscr{L}_I + \mathscr{L}_{II}|i\rangle。 \tag{9.15}_9$$

其中 $\mathscr{L}_I$ 和 $\mathscr{L}_{II}$ 分别是 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 中的真正的标量和赝标量。在未讨论粒子与反粒子相应衰变的关系以前，我们在此顺便插入一小段，

先来讨论一下关于宇称守恒破坏的测量问题。由$(1.8)_9$式知道

$$\frac{1}{\tau}=\omega\sim\overline{\sum}|T_{fi}|^2\sim\overline{\sum_i\sum_f}|\langle f|\mathscr{L}_I+\mathscr{L}_{II}|i\rangle|^2。\quad(9.16)_9$$

在求矩阵元绝对值平方时，一般是有$\mathscr{L}_I\cdot\mathscr{L}_{II}$的交叉项出现的，不过我们知道$\mathscr{L}_I$是真标量而$\mathscr{L}_{II}$是赝标量，其交叉项一定是一个赝标量。而生命期$\tau$则是一个标量(三维)，因而在计算$1/\tau$时，其交叉项是不会出现的。其实在我们对自旋指向求和时，就已经把赝标量象$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$之类抵消掉了。这个结论是具有一般性的。即使相互作用里有宇称非守恒项的存在，如果我们不去观察一个赝标物理量，我们是无法确定该非守恒项的存在与否。因为这时正如我们以上考虑的一样，在$1/\tau$中只会出现两个标量之和的形式。即

$$\frac{1}{\tau}=\omega\sim\sum_i\sum_f[|\langle f|\mathscr{L}_I|i\rangle|^2+|\langle f|\mathscr{L}_{II}|i\rangle|^2]。\quad(9.17)_9$$

而我们不能通过测量生命期的实验来确定它们的相对大小。如果相反，我们观测一个赝标物理量，那将有赝标的交叉项出现，而这一赝标交叉项是不能和以前的两个标量之和合并的。我们这时是可以通过赝标物理量来确定$\mathscr{L}_{II}$的相对大小的。事实上，李、杨正是根据以上的分析指出：观测定向自旋的原子核放射电子的角分布，也就是测量$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$这个赝标物理量才足以对是否存在有宇称非守恒项做出决定性的鉴定。

回到我们原来的正粒子和反粒子的相应衰变问题。利用$\mathscr{L}_{相互}$的厄米性可以证明：

$$\begin{aligned}\langle f|\mathscr{L}_{相互}|i\rangle^*&=\langle i|\mathscr{L}_{相互}|f\rangle\\&=\langle i|p^{-1}C^{-1}T^{-1}\mathscr{L}_{相互}TCp|f\rangle\\&=\langle\bar{f}|\mathscr{L}_{相互}|\bar{i}\rangle。\end{aligned}\quad(9.18)_9$$

代入$(9.17)_9$式得到

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\bar{\tau}}。\quad(9.19)_9$$

这就说粒子的生命期在一级近似下和反粒子的生命期相等。

§9.10 旋转不变性，πN 散射的分支比

如果体系在空间旋转下保持不变，则总角动量 J 及其投影 m 是守恒的。根据上一节的讨论，这时 S 矩阵元在角动量的本征态的表示应如下所示：

$$\langle j,\ m|S|j',\ m'\rangle=\delta_{jj'}\delta_{mm'}S(j,\ m)。\qquad (10.1)_9$$

其中 $S(j,\ m)$ 是角动量的函数，也包括是其他守恒量的函数，例如，也可能是能量、宇称、同位旋等的函数。不仅如此，我们还可以进一步证明 $S(j,\ m)$ 实际是与 m 无关的。

由于体系具有空间旋转不变性，因而角动量算符和 S 矩阵是对易的，即

$$[\boldsymbol{J},\ S]=0\quad 或者\quad [J_+,\ S]=[J_x+iJ_y,\ S]=0$$

上式在角动量的表示里就有

$$\sum_{m''}\langle j,\ m|J_+|j,\ m''\rangle\langle j,\ m''|S|j,\ m'\rangle$$
$$=\sum_{m''}\langle j,\ m|S\ j,\ m''\rangle\langle j,\ m''|J_+|j,\ m'\rangle。$$

以 $(10.1)_9$ 式代入上式可得：

$$\langle j,\ m|J_+|j,\ m'\rangle S(j,\ m')=S(j,\ m)\langle j,\ m|J_+|j,\ m'\rangle。$$

可是我们已知只有 $m'=m-1$ 时，

$$\langle j,\ m|J_+|j,\ m'\rangle\neq 0,$$

因而由上式得到

$$S(j,\ m-1)=S(j,\ m)。\qquad (10.2)_9$$

这就是说 $S(j,\ m)$ 实际是与 m 无关的。

在一组完整的守恒物理量的本征态的表示下，S 矩阵是对角的。另一方面，由于 S 矩阵的幺正性，其模为 1，可以把 S 矩阵表示如下：

$$\langle\alpha';j',\ m'|S|\alpha;j,\ m\rangle=\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}\exp[2i\delta_j(\alpha)]。$$
$$(10.3)$$

其中 α 或 α' 代表角动量以外的其他守恒物理量的总合，其中包括

如能量，总同位旋或宇称等。$\delta_j(\alpha)$即为普通所谓的相移。它是守恒量的函数，但是与 m 无关。利用$(1.1)_9$式，我们也可以把过渡矩阵 T_{fi} 用相移表示出来，即

$$T_{fi}\sim S_{fi}-\delta_{if}\sim\exp[2i\delta_j(\alpha)]-1=2ie^{i\delta_j(\alpha)}\cdot\sin\delta_j(\alpha)。$$

$$(10.4)_9$$

以上关于 S 矩阵或 T 矩阵与 m 无关的结论，在物理上也是不难理解的。因为已知 S 矩阵(或 T 矩阵)在空间旋转下，是保持不变的，但角动量的第三分量，在旋转下却是要改变的。因而 S 矩阵不能是第三分量的函数。

上述分析同样适用于同位旋空间的旋转不变性，也就是体系的总同位旋守恒，但 S 矩阵(或 T 矩阵)与同位旋的第三分量无关。甚至类似的结论可以推广到更一般的情况，如果体系在某一变换群例如 SU_3 群变换下保持不变，则 S 矩阵(或 T 矩阵)只与该群表示的维数有关，而与该表示中的分量无关。

通常我们是利用以上结论来求有关过程的分支比的，考虑同位旋分别为$(T^{(a)},\ T_3^{(a)})$和$(T^{(b)},\ T_3^{(b)})$的两个粒子的弹性散射。散射后成为$(T^{(c)},\ T_3^{(c)})$和$(T^{(d)},\ T_3^{(d)})$两个粒子，其有效截面由$(5.5)_9$式是与 $|T_{fi}|^2$ 成正比的。首先求出 T_{fi} 的形式(为明显计，我们把 T 矩阵写成大写 T)

$$\begin{aligned}
&\langle T^{(c)},\ T_3^{(c)};\ T^{(d)},\ T_3^{(d)}|T|T^{(a)},\ T_3^{(a)};\ T^{(b)},\ T_3^{(b)}\rangle\\
&=\sum_{T,T_3}\sum_{T',T_3'}\langle T^{(c)},\ T_3^{(c)};T^{(d)},\ T_3^{(d)}|T,\ T_3\rangle\langle T,\ T_3|T|T',\ T_3'\rangle\\
&\quad\times\langle T',\ T_3'|T^{(a)},\ T_3^{(a)};T^{(b)},\ T_3^{(b)}\rangle\\
&\quad\sim\sum_T e^{i\delta_T}\sin\delta_T\langle T^{(c)},\ T_3^{(c)};T^{(d)},\ T_3^{(d)}|T,\ T_3\rangle\\
&\quad\times\langle T,\ T_3|T^{(a)},\ T_3^{(a)};T^{(b)},\ T_3^{(b)}\rangle。
\end{aligned}\qquad(10.5)_9$$

以上最后一步利用了$(10.4)_9$式。上式后面两项只是有关的 Clebsch-Gordan 系数，这是有表可查的。T 矩阵的平方也只是出现的有关 Clebsch-Gordan 系数的乘积，作为示例，考虑 πN 阵弹性散射。由于荷电状态不同，πN 散射一般可有十个不同的过程，可是其中只有两个独立的散射振幅分别对应总同位旋为 1/2

和 3/2。对于 $\pi^+p\to\pi^+p$，记以 T_+，则

$$T_+\sim\sum_T e^{i\delta_T}\cdot\sin\delta_T\left\langle 1,\ 1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\middle|T,\ T_3\right\rangle$$

$$\times\left\langle T,\ T_3\middle|1,\ 1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle=e^{i\delta_{3/2}}\cdot\sin\delta_{3/2}。\quad(10.6)$$

又如 $\pi^-p\to\pi^-p$ 记以 T_-，则

$$T_-\sim\sum_T e^{i\delta_T}\cdot\sin\delta_T\cdot\left\langle 1,\ -1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\middle|T,\ T_3\right\rangle$$

$$\times\left\langle T,\ T_3\middle|1,\ -1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{3}e^{i\delta_{3/2}}\sin\delta_{3/2}+\frac{2}{3}e^{i\delta_{1/2}}\cdot\sin\delta_{1/2}。\quad(10.7)$$

又如 $\pi^-p\to\pi^0n$ 记以 T_0，则

$$T_0\sim\sum_T e^{i\delta_T}\sin\delta_T\cdot\left\langle 1,\ 0;\ \frac{1}{2},\ \frac{-1}{2}\middle|T,\ T_3\right\rangle$$

$$\times\left\langle T,\ T_3\middle|1,\ -1;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(e^{i\delta_{3/2}}\cdot\sin\delta_{3/2}-e^{i\delta_{1/2}}\sin\delta_{1/2})。\quad(10.8)$$

根据有效截面 $\sigma\sim|T|^2$，我们可以讨论以上各过程之间的分支比。

(1) 如 $\delta_{1/2}=0$ 而 $\delta_{3/2}\neq0$，则

$$\sigma_+:\sigma_-:\sigma_0=9:1:2。$$

(2) 如果 $\delta_{1/2}=\delta_{3/2}$，则

$$\sigma_+:\sigma_-:\sigma_0=1:1:0。$$

(3) 如果 $\delta_{1/2}\neq0$ 而 $\delta_{3/2}=0$，则

$$\sigma_+:\sigma_-:\sigma_0=0:2:1。$$

实验证明：在粒子动能在 100～150 百万电子伏特区域内第一种选取是与实验符合得很好的。这就是说在

$$\delta_{3/2} \to \frac{\pi}{2} \gg \delta_{1/2}$$

的假定下，用同位旋守恒的对称性质，是可以说明实验事实的。

§9.11 两体衰变的角分布

考虑自旋为j(半整数)投影为m的极化粒子，衰变为自旋为$\frac{1}{2}$，例如N，和另一自旋为零的粒子，例如π的角分布。取(jm)粒子的质心系。这时πN体系的轨道角动量

$$l=j\pm\frac{1}{2},$$

其一为偶，其另一则为奇，它们分别对应不同的宇称态。由于衰变过程里，宇称是可以不守恒的，因此奇数l和偶数l是可以混合出现在散射振幅之中的，不过它们的相移是可以不同的，应分别处理。

实验上所测量的常常是某一末态粒子，例如自旋为零粒子的角分布，这时就需要把散射振幅T_{fi}在该粒子的坐标空间里表示出来。

$$\begin{aligned}
T_{fi}&=\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ \theta,\ \varphi|T|j,\ m\right\rangle\\
&=\sum_{l,m_l}\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ \theta,\ \varphi\middle|\frac{1}{2},\ m_s;\ l,\ m_l\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ l,\ m_l|T|j,\ m\right\rangle\\
&=\sum_{l,m_l}Y_l^{m_l}(\Omega)\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ l,\ m_l|T|j,\ m\right\rangle\\
&=\sum_{l,m_l}Y_l^{m_l}(\Omega)\sum_{j',m'}\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ l,\ m_l|j',\ m'\right\rangle\\
&\quad\times\langle j',\ m'|T|j,\ m\rangle。
\end{aligned}\tag{11.1}$$

以上θ，φ为自旋为零粒子的运动方向。考虑到$\langle j',\ m'|T|j,\ m\rangle$中角动量$j$和$m$是守恒的，但是宇称不同其散射振幅可能是不同

的。把正负宇称的散射振幅分别记以 $A_{\pm}$，由上式可得：

$$T_{fi}=\sum_{m_l}\Big[A_+\Big\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j+\frac{1}{2},\ m_l\Big|j,\ m\Big\rangle \times Y^{m_l}_{j+\frac{1}{2}}(\Omega)+A_-\Big\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j-\frac{1}{2},\ m_l\Big|j,\ m\Big\rangle Y^{m_l}_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)\Big]。 \tag{11.2}$$

对末态自旋求和，可求得角分布 $W^m(\theta)$ 来：

$$\begin{aligned}W^m(\theta)\sim&\sum_f|T_{fi}|^2\\=&\sum_{m_l,m_s}\Big|\Big\langle\Omega\Big|j+\frac{1}{2},\ m_l\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j+\frac{1}{2},\ m_l\Big|j,\ m\Big\rangle\\&\times A_++A_-\cdot\Big\langle\Omega\Big|j-\frac{1}{2},\ m_l\Big\rangle\\&\times\Big\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j-\frac{1}{2},\ m_l\Big|j,\ m\Big\rangle\Big|^2\\=&\Big|A_+\Big\langle\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ j+\frac{1}{2},\ m-\frac{1}{2}\Big|\ j,\ m\Big\rangle Y^{m-1/2}_{j+\frac{1}{2}}\\&\times(\Omega)+A_-\Big\langle\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ j-\frac{1}{2},\ m-\frac{1}{2}\Big|\ j,\ m\Big\rangle\\&\times Y^{m-1/2}_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)\Big|^2\\&+\Big|A_+\Big\langle\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2};j+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\Big|j,\ m\Big\rangle Y^{m+1/2}_{j+\frac{1}{2}}(\Omega)\\&+A_-\Big\langle\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2};\ j-\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\Big|j,\ m\Big\rangle Y^{m+1/2}_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)\Big|^2。\end{aligned} \tag{11.3}$$

其中 Ω 为 π 介子的立体角，利用球谐函数的性质，上式可写成：

$$\boxed{\begin{aligned}W^m(\theta)=&|A_+|^2F^m_+(\theta)+|A_-|^2F^m_-(\theta)\\&+2\mathrm{Re}[A_+A^*_-]G^m(\theta)。\end{aligned}} \tag{11.4}$$

其中

$$F^m_{\pm}(\theta)=\left|\left\langle\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ j\pm\frac{1}{2},\ m-\frac{1}{2}\middle|j,\ m\right\rangle\right|^2\cdot|Y^{m-\frac{1}{2}}_{j\pm\frac{1}{2}}(\Omega)|^2$$
$$+\left|\left\langle\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2};j\pm\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\middle|j,\ m\right\rangle\right|^2$$
$$\times|Y^{m+\frac{1}{2}}_{j\pm\frac{1}{2}}(\Omega)|^2$$
$$=\sum_{m_s,\mu}\left|\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j\pm\frac{1}{2},\ \mu|j,\ m\right\rangle\right|^2\cdot|Y^{\mu}_{j\pm\frac{1}{2}}\ (\Omega)|^2。\tag{11.5}_9$$

$$G^m(\theta)=\sum_{m_s,\mu}(-1)^{\mu}\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j+\frac{1}{2},\ \mu|j,\ m\right\rangle$$
$$\times\left\langle\frac{1}{2},\ m_s;\ j-\frac{1}{2},\ \mu|j,\ m\right\rangle$$
$$\times Y^{\mu}_{j+\frac{1}{2}}(\Omega)\,Y^{-\mu}_{j-\frac{1}{2}}(\Omega)。\tag{11.6}_9$$

$F(\theta)$来自平方项是个标量，$G(\theta)$来自交叉项，是个赝标量。为了便于在以后更复杂的一般情况下的应用，我们写下以下一般关系。两个球谐函数的乘积可以化为球谐函数的迭加：利用公式

$$Y^m_{l_1}(\Omega)Y^{-m}_{l_2}(\Omega)=\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2\lambda+1)}{4\pi}}$$
$$\times\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \lambda\\ m & -m & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Y^0_{\lambda}(\Omega)。$$
$$\tag{11.7}_9$$

以上引进了 Wigner $3j$ 符号。它与 Clebsch-Gordan 系数有以下关系。

$$\langle j_1,\ m_1;\ j_2,\ m_2|j,\ m\rangle$$
$$=(-1)^{j_1-j_2+m}\cdot\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j\\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix}。\tag{11.8}_9$$

把$(11.7)_9$和$(11.8)_9$式代入$(11.5)_9$和$(11.6)_9$式，就可以把$F^m(\theta)$和$G^m(\theta)$用一系列 Clebsch-Gordan 系数和$Y^0_{\lambda}(\Omega)$表示出来。由于$\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$只有当$l_1+l_2+\lambda=$偶数时才不为零。因此在

$F^m(\theta)$中只有偶数λ出现，而在$G^m(\theta)$中则只有奇数λ出现。这一点也可以从考虑$(11.7)_9$式两边，在空间反演下的变换性质而得到。经过一系列有关 Clebsch-Gordan 系数的常规的计数可以得到

$$\left.\begin{aligned} F^m_{\pm}(\theta) &= \sum_{\lambda} f^m_{\lambda,\pm}\sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}Y^0_\lambda(\Omega) \quad \lambda=\text{偶数} \\ G^m(\theta) &= \sum_{\lambda} g^m_\lambda \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}Y^0_\lambda(\Omega) \quad \lambda=\text{奇数} \end{aligned}\right\} \quad (11.9)_9$$

其中

$$f^m_{\lambda,+}=f^m_{\lambda,-}=f^m_\lambda=2(-1)^{j-m+\lambda/L}\cdot\begin{pmatrix} j & j & \lambda \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\frac{\lambda!}{\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\right]^2}\cdot\frac{\left(j+\frac{\lambda+1}{2}\right)!}{\left(j-\frac{\lambda+1}{2}\right)!}\cdot\sqrt{\frac{(2j-\lambda)!}{(2j+\lambda+1)!}},$$

$$\lambda=\text{偶数。} \qquad (11.10)_9$$

$$g^m_\lambda=(-1)^{j+m+(\lambda+1)/2}\cdot\begin{pmatrix} j & j & \lambda \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\frac{(\lambda+1)!}{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)!\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)!}\cdot\frac{\left(j+\frac{\lambda}{2}\right)!}{\left(j-\frac{\lambda}{2}\right)!}\sqrt{\frac{(2j-\lambda)!}{(2j+\lambda+1)!}},$$

$$\lambda=\text{奇数。} \qquad (11.11)_9$$

利用$(11.8)_9$式可知：只有当$0\leqslant\lambda\leqslant 2j$时，$f_\lambda$和$g_\lambda$才不为零，因此$(11.9)_9$式中的求和是有限的。

把以上关系代入$(11.4)_9$式得到：

$$\left.\begin{aligned} W^m(\theta) &= N\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}Y^0_\lambda(\Omega)(f^m_\lambda+\alpha g^m_\lambda), \\ \text{其中}\quad \alpha &= 2\frac{\mathrm{Re}[A_+A^*_-]}{|A_+|^2+|A_-|^2}\ 。 \end{aligned}\right\} \quad (11.12)_9$$

N为归一化常数，由以下归一化条件确定，即

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{-1} W^m(\theta)d(\cos\theta)=1,\\&N^{-1}=\frac{1}{2\pi}f_0^m=\frac{1}{\pi}(-1)^{j-m}\begin{pmatrix}j & j & 0\\ m & -m & 0\end{pmatrix}\\&\quad\times\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2j+1}}=\frac{1}{2\pi}\end{aligned}\right\}\qquad(11.13)_9$$

以上已利用了关系

$$\begin{pmatrix}j & j & 0\\ m & -m & 0\end{pmatrix}=(-1)^{j-m}\frac{1}{\sqrt{2j+1}}。\qquad(11.14)_9$$

以上$(11.12)_9$式是初态粒子自旋指向确定的情况下的角分布。如果初态粒子是部分极化的，那么我们还应该对初态粒子自旋指向求平均，如果初态粒子自旋指向为m时的几率为$\varphi(m)$则其角分布应为：

$$\begin{aligned}W(\theta)=2\pi&\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}Y_\lambda^0(\Omega)\\&\times\sum_{m=\frac{1}{2}}^{j}\{[\varphi(m)+\varphi(-m)]f_\lambda^m\\&+2[\varphi(m)-\varphi(-m)]g_\lambda^m\}。\end{aligned}\qquad(11.15)_9$$

以上已利用到以下关系。该关系可由 Clebsch-Gordan 系数性质得到证明

$$f_\lambda^m=f_\lambda^{-m};\quad g_\lambda^m=-g_\lambda^{-m}。\qquad(11.16)_9$$

如果我们利用$(11.15)_9$的角分布函数来计算$\cos\theta$的平均值，我们将会得到可以用来确定粒子自旋的重要关系，即

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\cos\theta\rangle\equiv\int_{-1}^{1}W(\theta)\cos\theta d\cos\theta&=\alpha\sum_{m=1/2}^{j}[\varphi(m)-\varphi(-m)]g_1^m\\&=\frac{\alpha}{2j(j+1)}\sum_{m=\frac{1}{2}}^{j}[\varphi(m)-\varphi(-m)]m。\end{aligned}}$$

$(11.17)_9$

上式最后求和的数值肯定是比j小的，因此我们得到不等式

$$|\langle\cos\theta\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{2(j+1)} \leqslant \frac{1}{2(j+1)}。 \qquad (11.18)_9$$

如果实验直接观测 $\langle\cos\theta\rangle$ 值就可以通过上式，对粒子自旋 j 做有效的确定，用这样的方法，基本上确定了超子的自旋为 1/2。

值得指出，如果我们测量 $\cos\theta$ 偶数方次的平均值，这相当我们测量的不是一个赝标量而是一个标量。例如 $\cos^0\theta$ 的平均值，这相当测量粒子的生命期 τ，这时积分时含有 αg_χ^m 各项均无贡献，因此我们不能通过这样的测量来确定 α 的数值，以致我们也无法确定 A_+ 和 A_- 是否同时存在，或者仅存其一。这一点我们在得到 $(9.20)_9$ 式时已经有过说明，即如果我们不去观测赝标量物理量，我们就无法确定是否有宇称非守恒相互作用存在。此外如果初态粒子是完全非极化，即 $\varphi(m)=\varphi(-m)$。这样由 $(11.15)_9$ 式看出，整个含 αg_χ^m 各项无贡献。这样也是不能确定 A_+ 和 A_- 是否同时存在或某一单独存在。

很多情况，以上所谓初态粒子，乃是在另一碰撞过程中产生的。

例如：
$$\pi+N\to Y+K$$
$$\qquad\qquad\qquad

的几率为零，把这些考虑用到$(11.15)_9$式，则得到这时Y衰变为πN的角分布(在Y的质心系)，如下(与αg_λ^m无关)。

$$W(\theta)=2\pi\sum_\lambda\sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}Y_\lambda^0(\Omega)f_\lambda^{1/2},\quad \lambda<2j。\quad (11.19)_9$$

上式与原π介子的角动量l_π也是无关的，也就是说这时粒子的角分布与Y粒子的宇称无关。上式具体形式可列表如下：

$j=S_Y$	$W(\theta)$
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{2}$	$1+3\cos^2\theta$
$\frac{5}{2}$	$1-2\cos^2\theta+5\cos^4\theta$

以上关系可以通过计算$f_\lambda^{1/2}$，例如$f_0^m=1$参看(10.13)及$f_2^{1/2}=\frac{1}{5}$，…等代入$(11.19)_9$式而得到。也可以直接通过$(11.5)_9$式计算而得到。这个分布函数关系也可以用来决定粒子自旋S_Y。不过这样关系是依赖于K介子的自旋为零这个假定的。而由$(11.18)_9$式来决定粒子自旋时则不受此项限制。当然，如果衰变过程中宇称是守恒的，则$\alpha=0$，这时$|\langle\cos\theta\rangle|$的实验值将为零，这时我们也就不能由$(11.18)_9$式得出什么有决定性的结论。

§9.12 替换定律

根据我们在§6.5介绍的Feynman对应法则，我们可以看出S矩阵具有一个重要的对称性质，即在不同物理过程之间存在着一定的关系，利用这个性质，我们可以由一个物理过程的已知结论，经过适当的替换，就可得到另一与之有关的物理过程的结论，而不需要再经过具体的计算。

考虑二个物理过程，它们分别对应Feynman图形M和M'，

它们的区别仅在于：在M中的某些放射的外粒子线，而在M'中则为相应的入射外粒子线；或者相反，M中的某些入射外粒子线，而在M'中则为放射的外粒子线，也就是把一个图形的某些外粒子线，绕其角点扭转，使其箭头相对于时间的指向与原来图形相反，而不改变其内粒子线的结构。由这样扭转所得到的各个图形，称为相关图形，与相关图形相应的过程则称之为相关过程。由Feynman的对应法则可知，相关过程的S矩阵元之间存在着以下的对称性质：即对于扭转的外粒子线进行以下替换。而保持其内粒子部分不变，就可由其一过程得到另一与之相关的过程的S矩阵元。由于这种对称性质与图形的内粒子线的情况无关，因而对于各级修正项都是适用的，因此S矩阵元的这一重要对称性质是具有一般性的。上述替换定律如下：

图　形　$M'\leftrightarrow M$			S矩阵元的替换
光子	k'(放射)	k(入射)	$k'\leftrightarrow -k$, $\quad e^{\lambda'}\leftrightarrow e^{\lambda}$
Dirac 粒子	p'(放射)	$\bar{p}$(入射)	$p'\leftrightarrow -\bar{p}$, $\quad \bar{u}(p')\leftrightarrow \bar{v}(\bar{p})$
反Dirac 粒子	$\bar{p}'$(放射)	p(入射)	$\bar{p}'\leftrightarrow -p$, $\quad V(\bar{p}')\leftrightarrow u(p)$
介子	q'(放射)	q(入射)	$q'\leftrightarrow -q$, $\quad \beta=-\beta$

以上k、p、$\bar{p}$和q分别为光子，Dirac粒子，反Dirac粒子和介子的动量。带撇的为放射粒子，不带撇的为入射粒子。在外粒子扭转时，光子的极化矢量不变，但如果光子是圆偏振的则左手↔右手互换。在扭转时，π介子的$\pi^+\leftrightarrow\pi^-$互换。

以上是关于相关过程的S矩阵元的替换定律，在求出S矩阵元绝对值平方，并且对自旋求和。求平均后，出现有投影算符，其替换关系如下(参看§9.6，§9.7)。

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_+(p')\leftrightarrow -\Lambda_-(\bar{p})=-\Lambda_+(-\bar{p}),\\ &-\Lambda_-(\bar{p}')\leftrightarrow\Lambda_+(p)=\Lambda_-(-p)。\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)_9$$

总结以上所述可得，在外粒子线扭转时，所得相关过程之间替换定律为

(1) 粒子的四维动量作相应的替换如上表所示。

(2) 如有奇数个外 Dirac 粒子线扭转，则在对自旋求和，求平均时的求迹时改变符号。

相关过程的例子很多，例如 Compton 散射 $e+\gamma\to e+\gamma$ 和 $e+\bar{e}\to\gamma+\gamma$ 及 $\gamma+\gamma\to e+\bar{e}$ 过程就是相关过程的典型例子。此外 $e\to e+\gamma+\gamma$ 过程也是与以上过程相关的，不过由于动量能量守恒，这最后一过程是实际不能实现的。利用替换定律，我们可以由一个过程的已知结论，经过替换而得到相关过程的结论，不过这原始过程的结论须要是一般情况下解出的，而不是在某一特殊坐标下求得的。

参 考 资 料

1. 关于跃迁几率与有效截面，二体衰变的生命期

   V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz & L. P. Pitaevskii Relativistic Quantum Theory (1971) Chapter 7 p. 211

   Y. Takahashi An Introduction to Field Quantization (1969) p. 274

2. 关于散射振幅与光学定理

   C. Itzykson & J. B. Zuber Quantum Field Theory (1980) Chapter 5 p. 241

3. 关于 Dirac 粒子自旋求和，光子极化求和，二体衰变角分布

   V. B. Berestetskii et. al. Relativistic Quantum Theory(1971) Chapter 7 p. 215, 226

4. 关于替换定理

   Y. Takahashi An Introduction to Field Quantization (1969) Chapter 6 p. 188

第十章　场相互作用示例（无辐射修正）

通过前几章的讨论，我们已为完整地解决一个基本粒子过程的问题，准备了足够的条件。本章我们就来分析几个具体过程，以作为前面所讲内容的综合应用。

基本粒子相互作用的过程，其内容是极其丰富的。如求其全，几乎不可能，我们在这里只能略举数例。与上章相同，本章我们也可说是分了三个部分来讨论的。即二体衰变、三体衰变和两体弹性散射。各部分所选示例都具有代表性。除了能得到各过程的重要结论外，也在讨论不同的过程里，介绍了不同典型问题的处理方法。

本章所采用的计算方法，以微扰理论为主。由于微扰理论本身的局限性，我们所选过程内容，也主要限于弱相互作用和电磁相互作用，而且计算都限于各过程的最低级近似，即不考虑辐射修正。关于辐射修正的计算，以后将有专章讨论。

§10.1　$\pi^- \to l^- + \bar{\nu}$ 衰变

根据我们在§7.7和§7.11里介绍的相互作用。我们认为 $\pi \to l + \nu$ 的衰变过程，是通过其内部的夸克对而进行的。如下图所示，右边角点来自费米弱相互作用（低能有效相互作用），左边角点来自 $(\pi q\bar{q})$ 强相互作用。严格讲这个角点涉及到强相互作用及束缚态问题是不能用微扰方法来计算的。不过可以把这个角点的贡献用一个唯象的函数来代替，我们知道，无论

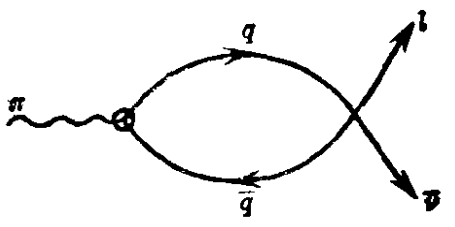


图　10-1

如何，左边强相互作用角点，只能是该角点三个粒子动量的函数，并由于 π 介子是赝标粒子，夸克流应具有 γ_5 变换性质。因此我们可以认为强相互作用角点不是简单的贡献——$iG\gamma_5$，而是贡献 $\gamma_5 F(p_q, p_{\bar{q}}; q_\pi)$。其中 $F(p_q, p_{\bar{q}}; p_\pi)$ 为三个动量的某一待定的标量函数。

按照 §8.5 介绍的对应法则，我们可以直接写出对应上图的 T_{fi} 矩阵元。利用 $(11.11)_7$ 和 $(11.14)_7$ 式可得 T_{fi} 表示如下(参看 $(5.2)_8$ 和 $(1.1)_9$ 式)：

$$T_{fi}=\frac{i\sqrt{2}\sqrt{m_l m_\nu}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{Tr}\left[\frac{i\gamma p_q-M}{p_q^2+M^2}\gamma_5 F(p_q, q_{\bar{q}L}-p_q, q_\pi)\right.$$
$$\left.\times\frac{i\gamma(p_q-q_\pi)-M}{(q_\pi-p_q)^2+M^2}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\right]dp_q$$
$$\times\frac{G_\beta}{\sqrt{2}}[\bar{u}_l\gamma_\mu(1+\gamma_5)V_{\bar{\nu}}]。 \qquad (1.1)_{10}$$

以上我们已对 $p_{\bar{q}}$ 进行了积分，并已利用了强作用角点的一个 δ 函数。在进一步对 dp_q 积分，并求迹时，上式中部积分项为一带有 μ 指标的 q_π 的函数，可归结为 $q_{\pi\mu}F_A(q_\pi^2)$，其中 $F_A(q_\pi^2)$ 为 q_π^2 的某一标量函数。由于初态 π 介子为实粒子 $q_\pi^2=-m_\pi^2$，因此 $F_A(q_\pi)$ 实际上最后归结为 $F_A(-m_\pi^2)$ 的某一待定常数。其下指标 A 表明它仅来自夸克对的赝矢部分。其矢量部分由于强作用角点有 γ_5 因子，因而贡献为零(参看 $(7.4)_8$ 到 $(7.5)_8$ 式及 §9.7 最后)，因而我们得到：

$$T_{fi}=\frac{i\sqrt{m_l m_\nu}}{(2\pi)^4}\sqrt{2}G_\beta F_A(-m_\pi^2)$$
$$\times[\bar{u}_l(p_l)\gamma q_\pi(1+\gamma_5)V_{\bar{\nu}}(q_\pi-p_l)]。 \qquad (1.2)_{10}$$

与 $(6.1)_9$ 式相比，可知此时

$$Q=\frac{i\sqrt{m_l m_{\bar{\nu}}}}{(2\pi)^4}\sqrt{2}G_\beta F_A(-m_\pi^2)\gamma q_\pi(1+\gamma_5)。 \qquad (1.3)_{10}$$

利用 $(7.15)_9$ 式可得(参看 $(6.2)_9$ 式)：

$$\bar{Q}=\gamma_4 Q^+\gamma_4$$
$$=\frac{-i\sqrt{m_l m_{\bar{\nu}}}}{(2\pi)^4}\sqrt{2}G_\beta F_A(-m_\pi^2)(\gamma_5-1)\gamma q_\pi。 \qquad (1.4)_{10}$$

由$(6.12)_9$式可得：

$$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2=\mathrm{Tr}[Q\mathbb{P}_{\bar\nu}\bar Q(-i\gamma p_l+m_l)]\frac{1}{2m_l}$$

$$=\frac{m_\nu}{(2\pi)^8}G_\beta^2F_A^2(-m_\pi^2)$$

$$\times\mathrm{Tr}[\gamma q_\pi(1+\gamma_5)\mathbb{P}_{\bar\nu}(\gamma_5-1)\gamma q_\pi(-i\gamma p_l+m_l)] \qquad (1.5)_{10}$$

本来在$(6.12)_9$式中的$\mathbb{P}_i$是初态粒子的极化矩阵。可是我们现在的反中微子$\bar\nu$是末态粒子，我们要进行的是对它的自旋求和，而并非求平均。此时我们只须象轻子一样，以$\frac{(-i\gamma p_\nu-m_\nu)}{2m_\nu}$代替$\mathbb{P}_\nu$代入上式，就得到：

$$\sum_f|T_{fi}|^2=\frac{G_\beta^2F_A^2(-m_\pi^2)}{2\cdot(2\pi)^8}\mathrm{Tr}[\gamma q_\pi(1+\gamma_5)(-i\gamma(q_\pi-\boldsymbol{p_l}))$$

$$\times(\gamma_5-1)\gamma q_\pi(-i\gamma p_l+m_l)]$$

$$=\frac{G_\beta^2F_A^2(-m_\pi^2)}{(2\pi)^8}\mathrm{Tr}[\gamma q_\pi(1+\gamma_5)(i\gamma(q_\pi-p_l)$$

$$\times\gamma q_\pi(-i\gamma p_l+m_l)]$$

$$=\frac{G_\beta^2F_A^2(-m_\pi^2)}{(2\pi)^8}\{[q_\pi\cdot(q_\pi-p_l)](q_\pi\cdot p_l)$$

$$+(q_\pi\cdot p_l)[(q_\pi-p_l)\cdot q_\pi]-(q_\pi\cdot q_\pi)$$

$$\times[(q_\pi-p_l)\cdot p_l]\}\times 4 \qquad (1.6)_{10}$$

以上最后一步利用了$(7.11)_9$式关系。利用

$$p_{\bar\nu}^2=(q_\pi-p_l)^2=q_\pi^2+p_l^2-2(q_\pi\cdot p_l)=0$$

可以得到：

$$q_\pi\cdot p_l=\frac{-(m_\pi^2+m_l^2)}{2} \qquad (1.7)_{10}$$

代入$(1.6)_{10}$式可得：

$$\sum_f|T_{fi}|^2=\frac{2G_\beta^2F_A^2(-m_\pi^2)}{(2\pi)^8}(m_\pi^2-m_l^2)\cdot m_l^2。 \qquad (1.8)_{10}$$

把上式代入$(2.12)_9$式，并引进

$$f_A=\frac{F_A(-m_\pi^2)}{(2\pi)^4} \qquad (1.9)_{10}$$

相空间积分，利用$(2.10)_9$式并一并代入$(2.11)_9$式结果就得到：

$$\boxed{\frac{1}{\tau_l}=\bar{\omega}=\frac{G_\beta^2 f_A^2}{8\pi}\cdot\frac{m_l^2}{m_\pi^3}(m_\pi^2-m_l^2)^2\ 。} \qquad (1.10)_{10}$$

上式不能看作是检验理论的依据，而只能用它来帮助确定有关的常数，例如f_A^2可由上式和实验比较定出为$f_A\sim 0.931 m_{\pi^0}$。不过根据上式可以求得$\pi\to e+\bar{\nu}$和$\pi\to\mu+\bar{\nu}$的分支比，可以与实验比较，可以作为对理论的检验。由上可得其分支比如下：

$$\frac{\tau_\mu}{\tau_e}=\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2-m_\mu^2}\right)=1.36\times 10^{-4}。 \qquad (1.11)_{10}$$

实验值$\frac{\tau_\mu}{\tau_e}=(1.21\pm 0.007)\times 10^{-4}$。如果考虑电磁相互作用的修正理论可为$1.23\times 10^{-4}$。我们认为这样结果与实验符合得很好。

在相对π介子为静止的观察系看来，轻子和中微子，是在相反的方向发射出来的。由于π介子自旋为零，反中微子是右手的。因而此时发射的电子(π^-情况)也是完全纵向极化的(也是右手的)，如果是π^+情况则相反，所发射的正电子和中微子都是左手的。也就是涡度均为-1(参看§1.12)。以上结论也可利用$(6.14)_9$和$(6.17)_9$及$(1.3)_{10}$式通过直接计算而得到。作为练习，不再写出。

§10.2 μ介子衰变

μ介子衰变过程$\mu\to e+\nu+\bar{\nu}$(在这个过程里我们可以暂时忽略两种中微子的区别)是典型弱相互作用过程。其中没有由于存在强相互作用所引起的麻烦。这个过程也是能直接用来检验弱相互作用理论的关键过程。另一方面，在这个过程所放出的粒子中，有质量为零的中微子和反中微子，它们都是极端相对论的粒子，因而必须用协变的形式来进行计算，所以μ衰变过程也和电动力学一样，最宜于用量子场论的协变微扰理论来计算。作为方法的示例，它也是处理末态有三个粒子过程的典型。

由于弱相互作用是弱的，可以只考虑最低级即第一级效应，μ

衰变过程的 Feynman 图如下(在低能时可忽略中间玻色子的效应)，由$(11.10)_7$式的低能有效 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 可知其对应的 T_{fi} 矩阵元如下：

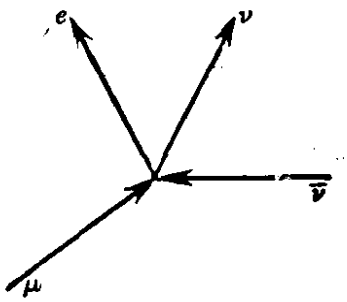


图 10-2

$$T_{fi}=\frac{-iG}{\sqrt{2}}4\sqrt{m_\mu m_e m_\nu m_{\bar\nu}}\times(\bar u_\nu\gamma_\rho(1+\gamma_5)u_\mu)\times(\bar u_e\gamma_\rho(1+\gamma_5)V_{\bar\nu})\quad(2.1)_{10}$$

由$(6.12)_9$式可得

$$\begin{aligned}\sum_s\sum_f|T_{fi}|^2=&G^2 8\cdot m_\mu m_e m_\nu m_{\bar\nu}T_r[\gamma_\rho(1+\gamma_5)\\&\times\mathbb{P}_\mu\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\Lambda_+(\nu)]\\&\times\sum_f(\bar u_e\gamma_\rho(1+\gamma_5)V_{\bar\nu})(\bar u_e\gamma_\sigma(1+\gamma_5)V_{\bar\nu})^+\\=&8G^2m_\mu m_e m_\nu m_{\bar\nu}\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)\mathbb{P}_\mu\gamma_4(1+\gamma_5)\\&\times\gamma_\sigma\gamma_4\Lambda_+(\nu)]\\&\times\mathrm{Tr}[-\gamma_\rho(1+\gamma_5)\Lambda_-(\bar\nu)\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4\Lambda_+(e)]\\=&\frac{G^2}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(1-i\gamma A\gamma_5)(m_\mu-i\gamma p_\mu)\\&\times\gamma_4(1+\gamma_5)\gamma_\sigma\gamma_4(-i\gamma p_\nu)]\\&\times\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(-i\gamma p_{\bar\nu})\gamma_4(1+\gamma_5)\\&\times\gamma_\sigma\gamma_4(m_e-i\gamma p_e)]。\end{aligned}\quad(2.2)_{10}$$

其中利用了$(7.6)_9$式，μ 介子的极化矩阵

$$\mathbb{P}_\mu=(1-i\gamma A\gamma_5)\frac{(m_\mu-i\gamma p_\mu)}{4m^\mu}$$

值得引起注意，在 Q 中出现 γ_ρ 的求和指标 ρ，在 $\bar Q$ 中我们改用了另一求和指标 σ，这是为了避免混淆，以后同此。

根据上一节讨论知道，由 $\pi\to\mu+\nu$ 衰变出来的 μ 介子是纵向极化的。可是 μ 介子在与原子核碰撞时，有去极化的效应，因而初态 μ 介子一般并不一定处在完全纵向极化态。上式中的 $\mathbb{P}_\mu$ 就是反映初态 μ 介子极化状态的极化矩阵(参看$(7.6)_9$式)。

在求迹运算中把 γ_σ 和 γ_4 同时在上式两个求迹中对调，当 $\sigma\neq4$ 时，两项的每一个 Tr 项都改变符号，两项相乘仍不变，如果

$\sigma=4$ 则两项都不变。因此上式求迹可写成

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(1-i\gamma A\gamma_5)(m_\mu-i\gamma p_\mu)(1-\gamma_5)\gamma_\sigma(-i\gamma p_\nu)]$$
$$\times\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(-i\gamma p_{\bar\nu})(1-\gamma_5)\gamma_\sigma(m_e-i\gamma p_e)] \qquad (2.3)_{10}$$

先算第二个求迹项，可以看出 m_e 项贡献为零，利用 $(7.10)_9$ 式

$$\mathrm{Tr}[\mathrm{II}]=2\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(-i\gamma p_{\bar\nu})\gamma_\sigma(-i\gamma p_e)]$$
$$=-8[(p_e)_\sigma(p_{\bar\nu})_\rho+(p_{\bar\nu})_\sigma(p_e)_\rho$$
$$-(p_e\cdot p_{\bar\nu})\delta_{\rho\sigma}+\epsilon_{\delta\sigma\lambda\rho}(p_e)_\lambda(p_{\bar\nu})_\delta]。 \qquad (2.4)_{10}$$

再计算第一个求迹项

$$\mathrm{Tr}[\mathrm{I}]=2\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(-i\gamma p_\mu)\gamma_\sigma(-i\gamma p_\nu)]$$
$$+2\mathrm{Tr}[\gamma_\rho(1+\gamma_5)(-i\gamma A\gamma_5 m_\mu)\gamma_\sigma(-i\gamma p_\nu)]$$
$$=-8\{[(p_\nu)_\sigma(p_\mu)_\rho+(p_\nu)_\rho(p_\mu)_\sigma-(p_\nu\cdot p_\mu)\delta_{\sigma\rho}$$
$$-\epsilon_{\sigma\lambda\rho\delta}(p_\nu)_\lambda(p_\mu)_\delta]$$
$$+m_\mu[(p_\nu)_\sigma\cdot A_\rho+(p_\nu)_\rho\cdot A_\sigma-(p_\nu\cdot A)\delta_{\sigma\rho}$$
$$-\epsilon_{\sigma\lambda\rho\delta}(p_\nu)_\lambda A_\delta]\}。 \qquad (2.5)_{10}$$

利用动量守恒定律

$$p_\mu=p_e+p_\nu+p_{\bar\nu}。 \qquad (2.6)_{10}$$

容易看出

$$(p_\nu)_\sigma(p_\mu)_\rho\epsilon_{\sigma\lambda\rho\delta}(p_e)_\lambda(p_{\bar\nu})_\delta=0。 \qquad (2.7)_{10}$$

此外

$$\epsilon_{\sigma\lambda\rho\delta}(p_e)_\lambda(p_{\bar\nu})_\delta\epsilon_{\sigma\alpha\rho\beta}(p_\nu)_\alpha(p_\mu)_\beta$$
$$=2(\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\delta\beta}-\delta_{\lambda\beta}\delta_{\alpha\delta})(p_e)_\lambda(p_{\bar\nu})_\delta(p_\nu)_\alpha(p_\mu)_\beta$$
$$=2[(p_e\cdot p_\nu)(p_{\bar\nu}p_\mu)-(p_e\cdot p_\mu)(p_{\bar\nu}\cdot p_\nu)]。 \qquad (2.8)_{10}$$

以上推导中利用了以下关系：

$$\epsilon_{\sigma\rho\lambda\delta}\cdot\epsilon_{\sigma\rho\alpha\beta}=2(\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\delta\beta}-\delta_{\lambda\beta}\delta_{\alpha\delta})。 \qquad (2.9)_{10}$$

把 $(2.7)_{10}$ 和 $(2.8)_{10}$ 式代入 $(2.5)_{10}$ 式并和 $(2.4)_{10}$ 式一并代入 $(2.2)_{10}$ 式得到：

$$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2=2^6\cdot G^2[(p_e\cdot p_\nu)(p_{\bar\nu}\cdot p_\mu)+m_\mu(p_e\cdot p_\nu)(p_{\bar\nu}\cdot A)]。$$
$$(2.10)_{10}$$

代入 $(3.26)_9$ 式得到

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_e}=(2\pi)^{-5}\frac{1}{4\epsilon_\mu\epsilon_e}I(p_\mu;\epsilon_e,p_\nu,p_{\bar{\nu}})。\qquad(2.11)_{10}$$

在上式中须要计算的积分，由$(2.10)_{10}$式可知，即为：

$$\begin{aligned}I(p_\mu;\epsilon_e,p_\nu,p_{\bar{\nu}})=2^6G^2\int\cdots\int&[(p_e\cdot p_\nu)(p_{\bar{\nu}}\cdot p_\mu)\\&+m_\mu(p_e\cdot p_\nu)(p_{\bar{\nu}}\cdot A)]\cdot\delta(p_\nu^2+m_\nu^2)\theta(\epsilon_\nu)\\&\times\delta(p_{\bar{\nu}}^2+m_{\bar{\nu}}^2)\theta(\epsilon_{\bar{\nu}})\\&\times\delta(p_\mu-p_e-p_\nu-p_{\bar{\nu}})dp_\nu dp_{\bar{\nu}}。\end{aligned}$$

利用$(3.24)_9$和$(3.20)_9$式，并考虑到目前具体情况，$\mu^2=0=\rho^2$，且$k=p_\mu-p_e$可得：

$$\begin{aligned}I(p_\mu;\epsilon_e,p_\nu,p_{\bar{\nu}})=4\cdot G^2\frac{2\pi}{3}\{&[2(p_e\cdot k)(k\cdot p_\mu)+(p_e\cdot p_\mu)k^2]\\&+m_\mu[(p_e\cdot k)(k\cdot A)\cdot 2+(p_e\cdot A)k^2]\}。\end{aligned}\qquad(2.12)_{10}$$

其中$k=p_\mu-p_e$。如取μ介子静止的坐标系，则$\boldsymbol{P}_\mu=0$，且$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\zeta}$（参看$(7.8)_9$式）。可得：

$$\left.\begin{aligned}(p_e\cdot k)&=p_e(p_\mu-p_e)=m_e^2-m_\mu\epsilon_e,\\(p_\mu\cdot k)&=p_\mu(p_\mu-p_e)=m_\mu(\epsilon_e-m_\mu),\\(A\cdot k)&=A\cdot(p_\mu-p_e)=-(A\cdot p_e)=-\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\boldsymbol{P}_e,\\(k\cdot k)&=-m_\mu^2-m_e^2-2(p_\mu\cdot p_e)\\&=-m_\mu^2-m_e^2+2m_\mu m_e。\end{aligned}\right\}\qquad(2.13)_{10}$$

以上考虑到$(7.7)_9$式以及$A_\mu p_\mu=0$关系，这儿的$\langle\sigma\rangle$就是$(7.7)_9$式的$\bar{\sigma}$。是μ介子自旋平均值的两倍。把$(2.12)_{10}$和$(2.13)_{10}$代入$(2.11)_{10}$式得到：

$$\begin{aligned}d\omega=\frac{G^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{3}\{&[3m_e^2\epsilon_e-2m_e^2m_\mu+3m_\mu^2\epsilon_e-4m_\mu\epsilon_e^2]\\&+(-\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\cdot\boldsymbol{P}_e)\cdot(3m_e^2+m_\mu^2-4m_\mu\epsilon_e)\}\frac{d\boldsymbol{P}_e}{\epsilon_e}\end{aligned}\qquad(2.14)_{10}$$

如果忽略电子质量，即令$\frac{m_e}{m_\mu}\Rightarrow 0$，同时$\frac{m_e}{\epsilon_e}\Rightarrow 0$，并取电子的最大能量$m_\mu/2$作为电子能量单位，取$x=\frac{2\epsilon_e}{m_\mu}\Rightarrow\frac{2|\boldsymbol{P}_e|}{m_\mu}$则上式可写

成：

$$d\omega=\frac{G^2}{(2\pi)^3}\cdot\frac{m_\mu^5}{3\times 2^3}\cdot\left\{[(3-2x)-(2x-1)\langle\sigma\rangle\cdot\boldsymbol{n}]x^2\,dx\frac{d\Omega_e}{2\pi}\right\}。\qquad (2.15)_{10}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为电子动量方面的单位矢量。上式就是电子的能谱和角分布。上式括号内对 $dx\,d\Omega e$ 积分结果为 1，因而括号前的系数，就是 μ 介子衰变的总几率，其倒数就是 μ 介子的生命期，即

$$\frac{1}{\tau}=\frac{G^2}{(2\pi)^3}\,\frac{m_\mu^5}{24}。\qquad (2.16)_{10}$$

与实验相比可以定出

$$G=(1.431\pm0.001)\cdot10^{-49}\ \text{尔格厘米}^3$$
$$=(3.037\pm0.003)10^{-12}\cdot m_e^{-2}\ \text{自然单位}\qquad (2.17)_{10}$$

值得指出，当电子能量趋于最大值，即当 x 趋于 1 时，由 $(2.15)_{10}$ 式看出电子的角分布趋为：

$$W(\theta)\cong1-\langle\sigma\rangle\cdot\boldsymbol{n}。\qquad (2.18)_{10}$$

当 μ 介子是完全极化时，电子几乎不能沿 μ 介子的自旋指向方向发射，而反 μ 自旋指向的发射几率最大。

为了和实验比较我们常把 $d\omega$ 写成：

$$d\omega=\frac{1}{\tau}12x^2\left\{(1-x)+\frac{2}{3}\rho\left(\frac{4}{3}x-1\right)+\langle\sigma\rangle\cdot\boldsymbol{n}\left[\alpha(1-x)+\frac{2}{3}\beta\left(\frac{4}{3}x-1\right)\right]\right\}dx\,\frac{d\Omega_e}{4\pi}$$

$$(2.19)_{10}$$

其中 ρ 称为 Michel 参数，在我们以上计算的 $V-A$ 相互作用理论里比较 $(2.15)_{10}$ 和 $(2.19)_{10}$ 式可得：

$$\rho=\frac{3}{4},\quad \alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=-\frac{3}{4}。$$

实验值：

$$\left.\begin{aligned}&\rho=0.780\pm0.025,\\&|\alpha|=\frac{1}{3}(0.94\pm0.07),\\&\beta=(0.78\pm0.05)\cdot3\alpha。\end{aligned}\right\}\qquad(2.20)_{10}$$

我们把$(2.15)_{10}$写成$(2.19)_{10}$式为的是使得带有ρ和β的两项在对能量积分时贡献均为零。

§10.3 Compton 散 射

电子的 Compton 散射，就是光子和自由电子之间的散射，也就是初态有一个光子其动量为k_1，和一个电子其动量为p_1，末态也是一个光子和一个电子。它们的动量分别为k_2和p_2。这个过程是利用量子场论方法来计算散射过程的最有代表性的例子。对应 Compton 散射最低级效应的 Feynman 图形有如下两个。

按照§3.5的对应法则，并参看$(5.2)_8$和$(1.1)_9$式。我们可由下图直接写出与之对应的T_{fi}矩阵元

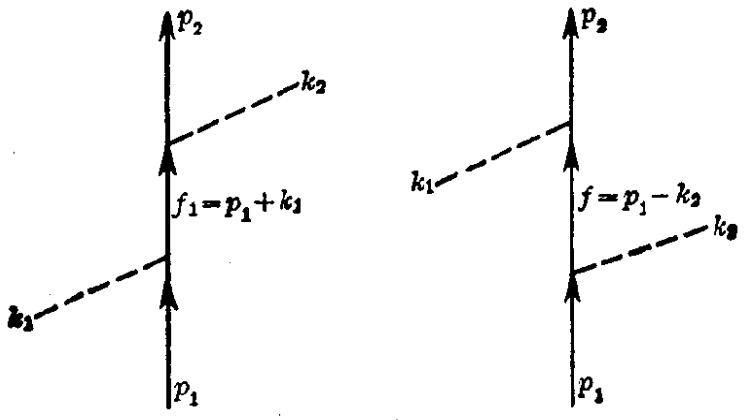


图 10-3

$$T_{fi}=e^2m\cdot2\bar{u}_2\left[\gamma e_2\frac{if_1\gamma-m}{f_1^2+m^2}e_1\gamma+\gamma e_1\frac{if_2\gamma-m}{f_2^2+m^2}e_2\gamma\right]u_1$$
$$=2e^2m\bar{u}_2Qu_1。\qquad(3.1)_{10}$$

以上Q就是括号内算符的总合，其中

$$\left.\begin{aligned}f_1&=p_1+k_1=p_2+k_2\\f_2&=p_1-k_2=p_2-k_1\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)_{10}$$

如取实验室系，即 $\boldsymbol{P}_1=0$ 并且考虑到外(实)光子只有两个横分量 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}=0$, $e^0=0$。

$$\left.\begin{aligned}&(p_1\cdot e_1)=0=(p_1\cdot e_2),\\&f_1^2=(p_1+k)^2=-m^2-2m\omega_1,\\&f_2^2=-m^2+2m\omega_2\ 。\end{aligned}\right\}\qquad (3.3)_{10}$$

考虑到 $(i\gamma p_1+m)u_1=0=\bar{u}_2(i\gamma p_2+m)$，并利用 γ 矩阵的对易关系，则 Q 可以进一步简化为：

$$Q=-\frac{1}{2m}\left[\frac{i(e_2\gamma)(k_1\gamma)(e_1\gamma)}{\omega_1}+\frac{i(e_1\gamma)(k_2\gamma)(e_2\gamma)}{\omega_2}\right]。\qquad (3.4)_{10}$$

把 $(3.1)_{10}$ 式代入 $(6.12)_9$ 式得到：

$$\begin{aligned}\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2=&4m^2e^4\mathrm{Tr}(Q\mathbb{P}_i\bar{Q}\Lambda_{+f})\\&-\frac{e^4}{8m^2}\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\hat{e}_2\hat{k}_1\hat{e}_1}{\omega_1}+\frac{\hat{e}_1\hat{k}_2\hat{e}_2}{\omega_1}\right)\right.\\&\left.\times(i\gamma p_1-m)\left(\frac{\hat{e}_1\hat{k}_1\hat{e}_2}{\omega_1}+\frac{\hat{e}_2\hat{k}_2\hat{e}_1}{\omega_2}\right)(i\gamma p_2-m)\right]\end{aligned}\qquad (3.5)_{10}$$

以上 $\hat{e}_2\equiv(e_2\gamma)$ 余同此。而且考虑初态电子是完全非极化的，参看 $(7.5)_9$ 式。

在计算上述求迹时，只需计算以下一般形式，即：

$$\mathrm{Tr}[\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i(i\hat{p}_1-m)\hat{e}_j\hat{k}_j\hat{e}_j,\ (i\hat{p}_2-m)]$$

其中 $i,\ j;\ i',\ j'=1,\ 2$，但 $i\neq i';\ j\neq j'$。由于奇数个 γ 的求迹为零，上式中交叉项为零，因而上式为：

$$\mathrm{Tr}[\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_im^2\hat{e}_j\hat{k}_j\hat{e}_j,\ -\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i\hat{p}_1\hat{e}_j\hat{k}_j\hat{e}_j,\ \hat{p}_2]\qquad (3.6)_{10}$$

把上式后面一项的 $\hat{p}_1$ 搬到最后。利用

$$\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=2(A\cdot B)$$

并考虑到 $(3.3)_{10}$ 式关系可得到：

$$\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i\hat{p}_1\hat{e}_j\hat{k}_j\hat{e}_j,\ \hat{p}_2 = -\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i\hat{e}_j 2(p_1\cdot k_j)\hat{e}_j,\ \hat{p}_2$$

$$-\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{k}_j\hat{e}_j,\ \hat{p}_1\cdot(\hat{p}_1+\hat{k}_1-\hat{k}_2)$$

$$= -\hat{e}_i,\ \hat{k}_i\hat{e}_i\hat{e}_j\{2(p_1\cdot k_j)\hat{e}_j,\ \hat{p}_2$$

$$-\hat{k}_j\hat{e}_j,\ [m^2-\hat{p}_1(\hat{k}_1-\hat{k}_2)]\}。$$

上式中 m^2 一项正好和$(3.6)_{10}$式的第一项抵销。

当 $i=j$时，利用$(k_i\cdot e_j)=(k_i\cdot e_i)=0$可以把 $\hat{k}_i$ 和 $\hat{k}_i$ 搬到一起相互并缩(利用 $\hat{k}_i\cdot\hat{k}_j=\hat{k}_i\cdot\hat{k}_i=k^2=0$)。如果 $i\neq j$，则 $\hat{k}_i$ 和 $\hat{k}_j$ 可以分别和后面的 $\hat{k}_1$ 或 $\hat{k}_2$ 并缩。进一步再把 $\hat{e}_i$ 和 $\hat{e}_j$ 或 $\hat{e}_j$，搬到一起相互并缩(利用 $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i=1$)最后就只剩下四个 γ 连乘的各项，再利用$(7.11)_9$式计算，并把结果代入$(3.5)_{10}$式得到：

$$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2=e^4\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{\omega_1\omega_2}+4(e_1\cdot e_2)^2\right]。\qquad(3.7)_{10}$$

代入$(5.6)_9$式得到：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{L.S.}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{\omega_2/\omega_1}{4m[m+\omega_1(1-\cos\theta)]}$$

$$\times\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-2+4(e_1\cdot e_2)^2\right]。\qquad(3.8)_{10}$$

可是 ω_1 和 ω_2 要满足所谓 Compton 关系，推导如下：由动量守恒

$$p_1+k_1=p_2+k_2\quad\text{两边平方就得到}$$

$$p_1\cdot k_1=p_2\cdot k_2=(p_1+k_1-k_2)\cdot k_2=p_1\cdot k_2+k_1\cdot k_2。\qquad(3.9)_{10}$$

在 $\boldsymbol{P}_1=0$ 的实验室系上式就可写成：

$$-m\omega_1=-m\omega_2+\omega_1\omega_2(\cos\theta-1)$$

$$\boxed{\omega_2=\frac{\omega_1}{1+\frac{\omega_1}{m}(1-\cos\theta)}}。\qquad(3.10)_{10}$$

上式就是所谓 Compton 公式。以上 θ 是 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 之间的夹角。以上式代入$(3.8)_{10}$式得：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{L.S}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{4m^2}\frac{\omega_2^2}{m_1^2}$$
$$\times\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-2+4(e_1\cdot e_2)^2\right]$$
$$=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{4m^2}\frac{1}{\left[1+\frac{\omega_1}{m}(1-\cos\theta)\right]^2}$$
$$\times\left[\frac{(\omega_1^2/m^2)\cdot(1-\cos\theta)^2}{1+(\omega_1/m)(1-\cos\theta)}+4(e_1\cdot e_2)^2\right]$$
$$=\frac{1}{4}r_0^2\frac{1}{[1+(\omega_1/m)(1-\cos\theta)]^2}$$
$$\times\left[\frac{(\omega_1^2/m^2)(1-\cos\theta)^2}{1+(\omega_1/m)(1-\cos\theta)}+4(e_1\cdot e_2)^2\right]。$$

$(3.11)_{10}$

这就是通常所谓的 Klein–Nishina 公式，其中：

$$r_0=\frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{m}=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\cdot\frac{\hbar}{mc}$$
$$=\alpha\lambda_c=2.818\times10^{-13}\text{ 厘米},$$

r_0 称为电子的经典半径。

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\approx\frac{1}{137}$$ 为电子精细结构常数。

在非相对论情况 $\frac{\omega_1}{m}\to0$（由 $(3.11)_{10}$ 式看出，这个极限情况是和小角散射即 $\theta\to0$ 极限情况一致的），我们得到：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{L.S}\Rightarrow r_0^2(e_1\cdot e_2)^2\quad\text{（非相对论经典情况）}\qquad(3.12)_{10}$$

下面我们再对光子的极化情况，作进一步的讨论，其结论也同样适用于一般高能情况。我们把光子极化矢量 e_1 和 e_2 分解为垂直于 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面，和平行于 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面的两个分量。当 e_1 在垂直方向时，则 e_2 在 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面内的截面应为零，因为 $(e_{1\perp}\cdot e_{2/\!/})=0$。因此 e_1 和 e_2 都在垂直方向极化，其截面记以 $\sigma_\perp$，由 $(3.12)_{10}$ 式应为：

$$\left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}\right)\Rightarrow r_0^2(e_{1\perp}\cdot e_{2\perp})^2=r_0^2。\qquad (3.13)_{10}$$

如果入射光的极化 e_1 在 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面内，$(\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{k}_1)$。则 e_2 在垂直方向的截面应为零。因 $(e_{1/\!/}\cdot e_{2\perp})=0$，此时 e_1 和 e_2 都在 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面内极化，此时其截面记以 $\sigma_{/\!/}$，则由 $(3.12)_{10}$ 式有：

$$\left(\frac{d\sigma_{/\!/}}{d\Omega}\right)\Rightarrow r_0^2(e_{1/\!/}\cdot e_{2/\!/})^2=r_0^2\cos^2\theta。\qquad (3.14)_{10}$$

由于以上两式并非相等，所以即使入射光是完全非极化的，散射后的光子，依然是有部分极化的，其极化程度以 $\theta=90°$ 为最大。

如果初态光子是完全非极化的，而实验又不观测末态光子的极化状态。我们还须对 $(3.11)_{10}$ 式或 $(3.12)_{10}$ 式进行对光子极化求和求平均的计算，由 $(8.10)_9$ 式可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum(e_1\cdot e_2)^2&=\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}(e_r^{\lambda_1}\cdot e_r^{\lambda_2})(e_s^{\lambda_1}\cdot e_s^{\lambda_2})\\&=\frac{1}{2}\left(\delta_{rs}-\frac{k_{1r}k_{2s}}{|\boldsymbol{k}_1|^2}\right)\left(\delta_{rs}-\frac{k_{2r}k_{2s}}{|\boldsymbol{k}_2|^2}\right)\\&=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)。\end{aligned}\qquad (3.15)_{10}$$

以上 $r, s=1, 2, 3$ 并对相同指标求和。显然上式第一项来自 $\sigma_{\perp}$ 而后一项来自 $\sigma_{/\!/}$。把上式代入 $(3.12)_{10}$ 式得到：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\Rightarrow r_0^2\frac{(1+\cos^2\theta)}{2}\quad \text{非相对论经典情况。}\qquad (3.16)_{10}$$

对方向积分就得到 Thomson 散射截面：

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}r_0^2=0.665\times10^{-24}\ \text{厘米}^2\quad \text{非相对论经典情况。}\qquad (3.17)_{10}$$

利用 $(3.15)_{10}$ 式，由 $(3.11)_{10}$ 式，就得到一般情况下的微分截面：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=&\frac{r_0^2}{2}\cdot\frac{1}{[1+(\omega_1/m)(1-\cos\theta)]^2}\\&\times\left[\frac{(\omega_1^2/m^2)(1-\cos\theta)^2}{1+(\omega_1/m)(1-\cos\theta)}+(1+\cos^2\theta)\right]。\end{aligned}\qquad (3.18)_{10}$$

利用 $(3.10)_{10}$ 式关系代入上式，我们还可以求得关于能量的微分

截面(对 φ 角可以直接积分贡献 2π):

$$\frac{d\sigma}{d\omega_2}=\pi r_0^2\frac{m}{\omega_1}\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}+\left(\frac{m}{\omega_2}-\frac{m}{\omega_1}\right)^2-2\left(\frac{m}{\omega_2}-\frac{m}{\omega_1}\right)\right]。\tag{3.19}_{10}$$

把上式对 $d\omega_2$ 积分，并由$(3.10)_{10}$式知道其积分限应取 $\frac{m\omega_1}{m+2\omega_1}\to\omega_1$ 或者由$(3.18)_{10}$式对方向积分就得到总截面:

$$\sigma=2\pi r_0^2\left\{\frac{1+\omega}{\omega^3}\left[\frac{2\omega(1+\omega)}{1+2\omega}-\ln(1+2\omega)\right]+\frac{\ln(1+2\omega)}{2\omega}-\frac{1+3\omega}{(1+2\omega)^2}\right\}。\tag{3.20}_{10}$$

其中

$$\omega=\frac{\omega_1}{m}。$$

在极端相对论情况，即 $\frac{\omega_1}{m}\gg1$, $(3.18)_{10}$ 和 $(3.20)_{10}$ 式分别趋于:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\Rightarrow\frac{r_0^2}{4}\frac{m}{\omega_1}\frac{1}{\sin^2(\theta/2)},\\&\sigma\Rightarrow\pi r_0^2\frac{m}{\omega_1}\left(\ln\frac{2\omega_1}{m}+\frac{1}{2}\right)。\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&(\theta^2\gg2m/\omega_1)\\&(\text{极端相对论情况})\end{aligned}\tag{3.21}_{10}$$

在非相对论情况$(3.20)_{10}$式趋于

$$\sigma\Rightarrow\frac{8\pi}{3}r_0^2\left(1-\frac{2\omega_1}{m}+\frac{26}{5}\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^2+\cdots\right)。\tag{3.22}_{10}$$

以$(3.10)_{10}$和$(3.15)_{10}$式代入$(3.7)_{10}$式可得到:

$$\overline{\sum_i}\sum_f|\overline{T_{fi}}|^2=2e^4\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}+\left(\frac{m}{\omega_2}-\frac{m}{\omega_1}\right)^2-2\left(\frac{m}{\omega_2}-\frac{m}{\omega_1}\right)\right]。$$

利用 T_{fi} 矩阵元的不变性。通过上式可以求得，一般坐标系下的 $|T_{fi}|^2$ 的表达式，即

$$\overline{\sum_i}\sum_f|\overline{T_{fi}}|^2=2e^4\left[\frac{k_1\cdot p_1}{k_2\cdot p_1}+\frac{k_2\cdot p_1}{k_1\cdot p_1}+\left(\frac{m^2}{k_2\cdot p_1}-\frac{m^2}{k_1\cdot p_1}\right)^2\right.$$

$$+2\left(\frac{m^2}{k_2\cdot p_1}-\frac{m^2}{k_1\cdot p_1}\right)\Big]。 \qquad (3.23)_{10}$$

通过上式利用替换定律可以求得相关过程，例如电子对湮灭成两个光子，或其逆过程等的相应$|T_{fi}|^2$矩阵元。值得注意：$p_1\cdot k_1=p_2\cdot k_2$; $p_1\cdot k_2=p_2\cdot k_1$。

§10.4 关于 Compton 散射的极化情况

在上一节的讨论中，我们几乎完全没有涉及初态粒子是部分极化的情况，也没有分析末态粒子的极化情况。在本节里，我们将在这方面做些补充。本节内容可看作是对极化问题处理的示例。

首先考虑初态光子是一般的部分极化的情况，与其对应的Stoke。参量为$\xi^{(i)}$，密度矩阵为$\rho^{(i)}$。由$(8.2)_9$式有

$$\rho^{(i)}=\frac{1}{2}[1+\xi^{(i)}\cdot\tau]。 \qquad (4.0)_{10}$$

又由$(8.7)_9$，和$(3.5)_{10}$式得到：在对初态电子(完全非极化的)，光子的极化态求平均，并对末态电子自旋，末态光子极化求和的结果如下：

$$\overline{\sum_i}\sum_f|\overline{T_{fi}}|^2=4m^2e^4\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\Lambda_{+i}\rho^{(i)}_{\alpha\beta}\bar{Q}_{\beta\lambda}\Lambda_{+f}]。 \qquad (4.1)_{10}$$

其中$Q_{\alpha\lambda}$是把$(3.4)_{10}$式中的Q中$(e_{(i)}\gamma)\to(e^\alpha\gamma)$，同时$(e_{(f)}\gamma)\to(e^\lambda\gamma)$而得到，$\bar{Q}_{\beta\lambda}$的得到亦类似，上式并对相同指标求和。$\alpha$, β, $\lambda=1$, 2。由$(3.4)_{10}$和$(3.5)_{10}$式可得：

$$\left.\begin{aligned}Q_{\alpha\lambda}&=\frac{-1}{2m}\left[\frac{i\hat{e}^\lambda\hat{k}_1\hat{e}^\alpha}{\omega_1}+\frac{i\hat{e}^\alpha\hat{k}_2\hat{e}^\lambda}{\omega_2}\right],\\ \bar{Q}_{\beta\sigma}&=\frac{1}{2m}\left[\frac{i\hat{e}^\beta\hat{k}_1\hat{e}^\sigma}{\omega_1}+\frac{i\hat{e}^\sigma\hat{k}_2\hat{e}^\beta}{\omega_2}\right]。\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)_{10}$$

如果e'就是上节的$e_\perp$；同时e^2就是上节的$e_{/\!/}$，即

$$e'_{(i)}=\frac{k_1\times k_2}{|k_1\times k_2|};\quad e^2_{(i)}=\frac{k_1\times e'_{(i)}}{|k_1|}。 \qquad (4.3)_{10}$$

则类似上节的计算我们可以得到：对于初态光子是部分线偏振的情况下，有效截面为

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}^{(i)})=\frac{1}{2}r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 F d\Omega。 \qquad (4.4)_{10}$$

其中 $$F=F(\boldsymbol{\xi}^{(i)})=\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}+(\xi_3^{(i)}-1)\sin^2\theta。$$

如果 $\xi_3^{(i)}=0$ 就仍回到上节的结论，参看 $(3.11)_{10}$ 和 $(3.15)_{10}$ 式。

下面我们来讨论末态光子的极化情况。这在于求出末态的 $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$。利用$(8.14)_9$式可得到

$$\boldsymbol{\xi}^{(f)}=\mathrm{Tr}(\rho^{(f)}\cdot\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\Lambda_i\rho_{\alpha\beta}^{(i)}\bar{Q}_{\beta\sigma}\boldsymbol{\tau}_{\sigma\lambda}\Lambda_f]}{\mathrm{Tr}[Q_{\alpha\lambda}\Lambda_i\rho_{\alpha\beta}^{(i)}\bar{Q}_{\beta\lambda}\Lambda_f]}。 \qquad (4.5)_{10}$$

如取末态光子的极化态的基矢 e_f^1 和 e_f^2 和上节的 $e_\perp$ 和 $e_/$ 相同，即

$$e'_{(f)}=\frac{\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2}{|\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{k}_2|};\quad e^2_{(f)}=\frac{\boldsymbol{k}_2\times e'_{(f)}}{|\boldsymbol{k}_2|}。 \qquad (4.6)_{10}$$

则由$(4.5)_{10}$式可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_3^{(f)}=[\sin^2\theta+(1+\cos^2\theta)\xi_3^{(i)}]\frac{1}{F},\\
&\xi_1^{(f)}=2\cos\theta\xi_1^{(i)}\frac{1}{F},\\
&\xi_2^{(f)}=\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-2\right)\xi_1^{(i)}+2\xi_2^{(i)}\right]\frac{\cos\theta}{F}。
\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)_{10}$$

当初态光子是完全非极化时，则

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_1^{(f)}=0=\xi_2^{(f)}。\\
&\xi_3^{(f)}=\frac{\sin^2\theta}{F(0)}=\frac{\sin^2\theta}{\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-\sin^2\theta}>0。
\end{aligned}\right\} \qquad (4.8)_{10}$$

这说明即使初态光子是完全非极化的，末态光子也在 e' 即 $e_\perp$ 方向有部分极化。根据§9.8的讨论，末态光子在 $e_\perp$ 方向极化的截面由$(8.16)_9$式，令其中 $\boldsymbol{\xi}^{(p)}=(0,\ 0,\ 1)$得到：

$$\frac{d\sigma_{(\perp)}}{d\Omega}=\frac{d\sigma}{d\Omega}(1+\boldsymbol{\xi}^{(f)}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(p)})=\frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-\sin^2\theta}。 \qquad (4.9)_{10}$$

其中 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 应该就是$(3.18)_{10}$式的微分截面。当 $\frac{\omega_1}{m}\to 0$ 的非相对论情况，上式就趋于 $\frac{d\sigma_{(\perp)}}{d\Omega}=r_0^2$，与$(3.13)_{10}$式一样。

同样，如果利用$(8.12)_9$式来计算末态光子在平行方向极化截面，这相当取其中 $\boldsymbol{\xi}^p=(0,\ 0,\ -1)$，在非相对论情况下，得到 $\frac{d\sigma_{(//)}}{d\Omega}\Rightarrow r_0^2\cos^2\theta$，和$(3.14)_{10}$式一致，当然这不过只是一种对计算的检验而已。

如果初态电子也是部分极化的，则只需把以上的 $\Lambda_{(i)}\to\mathbb{P}_i$。用同样的计算可以得到以下的结论，当初态电子静止时，其 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\xi}$，参看$(7.8)_9$式。

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}^{(i)},\ \boldsymbol{A}^{(i)})=d\sigma(\boldsymbol{\xi}^{(i)})+r_0^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\xi_2^{(i)}\boldsymbol{A}^i\cdot\boldsymbol{G}。\qquad(4.10)_{10}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=-\frac{1}{m}(1-\cos\theta)(\boldsymbol{k}_1\cos\theta+\boldsymbol{k}_2)。\qquad(4.11)_{10}$$

$d\sigma(\boldsymbol{\xi}^{(i)})$即为$(4.4)_{10}$式所示，$\boldsymbol{A}^{(i)}$为初态电子自旋平均值(二倍)，参看$(7.7)_9$式。应该指出，在$(4.10)_{10}$式中第二项只出现初态光子的 $\xi_2^{(i)}$，也就是只有初态光子的圆偏振部分有贡献，参看$(8.3)_9$式。

如果初态光子是完全非极化的。只有初态电子有部分极化，则由$(4.5)_{10}$式，以 $\rho_{\alpha\beta}^{(i)}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$，且 $\Lambda_i\to\mathbb{P}_i$ 代入可以得到 $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$。此时除了$(4.8)_{10}$式的关系以外，还有圆偏振部分如下：

$$\xi_2^{(f)}=\frac{1}{F(0)}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{A}^{(i)}。\qquad(4.12)_{10}$$

最后我们要指出，即使初态电子是完全非极化的。如果初态光子是有极化的，反冲电子还是可能有极化的。利用$(6.17)_9$式可以导出此时末态的电子极化矩阵应为

$$\mathbb{P}_f=\frac{\Lambda_f Q_{\alpha\lambda}\Lambda_i\rho_{\alpha\beta}^{(i)}\bar{Q}_{\beta\lambda}\Lambda_f}{sp[Q_{\alpha\lambda}\Lambda_i\rho_{\alpha\beta}^{(i)}\bar{Q}_{\beta\lambda}\Lambda_f]}。\qquad(4.13)_{10}$$

由上式的 $\mathbb{P}_f$ 再代入$(6.14)_9$式，利用$(7.7)_9$式可求得 $\boldsymbol{A}^{(f)}$，即反冲电子自旋的平均值，这样求得：

$$\boldsymbol{A}^{(f)}=\xi_2^{(f)}\frac{\boldsymbol{G}'}{F}。\qquad (4.14)_{10}$$

其中

$$\boldsymbol{G}'=\frac{-1}{m}(1-\cos\theta)\Big[(\boldsymbol{k}_1\cos\theta+\boldsymbol{k}_2)$$

$$-(1+\cos\theta)\frac{\omega_1+\omega_2}{m_2+\epsilon_2}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\Big]。\qquad (4.15)_{10}$$

由$(4.14)_{10}$式看出。如果初态电子是完全非极化的，则只有当初态光子是圆偏振的，末态电子才在 $\boldsymbol{k}_1\wedge\boldsymbol{k}_2$ 平面内有自旋平均值不为零。

§10.5 轫致辐射

电子在外场中偏转时所产生的辐射称为轫致辐射。这个过程的计算方法基本上和以上两节一致，只是以前的一个外光子代以外场。通过对轫致辐射过程的分析，本节的讨论可算是对有外场存在的情况下处理问题，作了相应的补充。

对应轫致辐射的 Feynman 图如下图所示，其中带有 ⊗ 号的光子线表示外电磁场。对于含有外场的角点，有进一步讨论的必要。所谓外场，就是相互作用对其场源的状态的影响，可以忽略不计。因而由该场源所激发的外场可以认为事先给定的已知时空的函数。对于外电磁场的矢势，记以 $A^e_\mu(x)$。在相互作用 Lagrange $\bar{\psi}\hat{A}\psi$ 中的 $\hat{A}$ 里应该也包含有 $\hat{A}^e(x)$ 存在。例如上图的左图就是

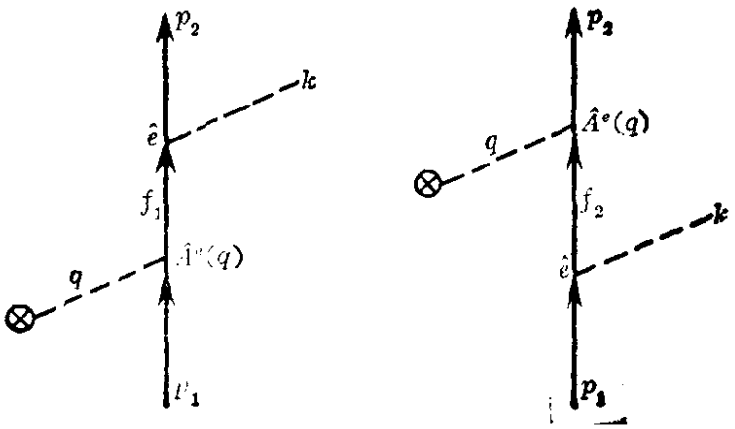


图 10-4

来自 $S^{(2)}$ 中的以下一项，即

$$
\begin{aligned}
&e^2\int dx_2\int dx_1\langle 0|a^{(-)}(\boldsymbol{p}_2)a^{(-)}(\boldsymbol{k})\{N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\\
&\cdot\overbrace{\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)}\hat{A}^e(x_1)\psi(x_1)]\}a^{(+)}(p_1)|0\rangle\\
&=\frac{e^2}{(V)^{3/2}}\frac{m}{(\epsilon_1\epsilon_2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int dx_2\int dx_1\bar{u}_2e^{-ip_2x_2}\hat{e}e^{-ikx_2}\\
&\cdot\int df_1 s_c(f_1)e^{if_1(x_2-x_1)}\hat{A}^{(e)}(x_1)u_1e^{ip_1x_1}\\
&=\frac{e^2}{(V)^{3/2}}\cdot\frac{m}{(\epsilon_1\cdot\epsilon_2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\int df_1(2\pi)^4\\
&\cdot\delta(p_2+k-f_1)\bar{u}_2\hat{e}s_c(f_1)\cdot\left[\int dx_1\hat{A}^e(x_1)e^{i(p_1-f_1)x_1}\right]\cdot u_1\\
&=\frac{e^2}{(V)^{3/2}}\cdot\frac{m}{(\epsilon_1\cdot\epsilon_2)^{1/2}}\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2\omega}}\\
&\cdot\bar{u}_2\hat{e}s_c(p_2+k)\hat{A}^e(f_1-p_1)u_1,
\end{aligned}
\qquad (5.1)_{10}
$$

其中

$$
\hat{A}^e(q)=\int\hat{A}^e(x)e^{-iqx}dx_\circ \qquad (5.2)_{10}
$$

$(5.1)_{10}$ 式不仅给出了对应左图的 S 矩阵元，同时也表明含有外场的角点贡献一个因子 $\hat{A}^e(q)$。这个因子就相当于外光子的 $\hat{e}$。这个结论有一般性。此外，由 $(5.1)_{10}$ 式看出，由于 $A^e(x_1)$ 是时空的函数，因而对 x_1 积分时并不能得到一个关于外粒子的四维的 δ 函数，只有在静场情况 $A^e(x)$不是时间函数时才在对 t 积分时，得到一个反映外粒子能量守恒的 δ 函数。这就是说含有外场的角点不贡献关于外粒子的四维 δ 函数，而最多只能贡献反映外粒子能量守恒的一维 δ 函数。因此在整个 S 矩阵元中一般并不含有反映全过程动量守恒的 δ 函数，正如 $(5.1)_{10}$ 式所示那样。最多在静场情况下，能含有一个反映全过程的外粒子能量守恒的 δ 函数。如果 $A^e(x)$不是时间的函数，则由 $(5.2)_{10}$ 式对 t 积分得到：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\hat{A}^e(q)=\hat{A}^e(\boldsymbol{q})2\pi\delta(q_0)=\hat{A}^e(\boldsymbol{q})2\pi\delta(\epsilon_2+\omega-\epsilon_1),\\
&\text{其中}\quad \hat{A}^e(\boldsymbol{q})=\int\hat{A}^e(x)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}_\circ
\end{aligned}
\right\}(5.3)_{10}
$$

把上式代入$(5.1)_{10}$式，并同样考虑右边一个 Feynman 图形，我们就得到整个 S 矩阵元的$(1.15)_9$式具体示例，并且得到

$$T_{fi}=e^2\cdot 2m\bar{u}_2\left[\hat{e}\,\frac{i\hat{f}_1-m}{f_1^2+m^2}\hat{A}^e(\boldsymbol{q})+\hat{A}^e(\boldsymbol{q})\frac{i\hat{f}_2-m}{f_2^2+m^2}\,\hat{e}\right]u_1$$
$$=2me^2\bar{u}_2Qu_1, \qquad (5.4)_{10}$$

其中 Q 就是上式括号内的算符。

$$\left.\begin{aligned}&f_1=p_2+k,\ f_2=p_1-k,\\&q=f_1-p_1=p_2+k-p_1,\\&f_1^2+m^2=2p_2\cdot k,\\&f_2^2+m^2=-2p_1\cdot k。\end{aligned}\right\} \qquad (5.5)_{10}$$

利用$(i\hat{p}_1+m)u_1=0=\bar{u}(i\hat{p}_2+m)$可以把 Q 简化为

$$Q=\left[\frac{i\hat{e}\hat{k}\hat{A}^e(\boldsymbol{q})+2i(e\cdot p_2)\hat{A}^e(\boldsymbol{q})}{2p_2\cdot k}\right.$$
$$\left.+\frac{-i\hat{A}^e(\boldsymbol{q})\hat{k}\hat{e}+2i(e\cdot p_1)\hat{A}^e(\boldsymbol{q})}{-2p_1\cdot k}\right]。 \qquad (5.6)_{10}$$

把$(5.4)_{10}$式代入$(6.12)_9$式，如果初态粒子是完全非极化的，则得到

$$\sum_i\sum_f|T_{fi}|^2=4m^2e^4sp[QA_i\bar{Q}A_f]$$
$$=\frac{1}{2}e^4\mathrm{Tr}[Q(i\hat{p}_1-m)\bar{Q}(i\hat{p}_2-m)]。 \qquad (5.7)_{10}$$

在求迹时不外出现以下几种类型：

$$\mathrm{Tr}A_1=\mathrm{Tr}[\hat{e}\hat{k}\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_1-m)\hat{e}\hat{k}\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_2-m)],$$
$$\mathrm{Tr}A_2=\mathrm{Tr}[(e\cdot p_2)\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_1-m)(e_1\cdot p_1)\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_2-m)],$$
$$\mathrm{Tr}A_3=\mathrm{Tr}[(e\cdot p_2)\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_1-m)\hat{e}\hat{k}\hat{A}^e(\boldsymbol{q})(i\hat{p}_2-m)]。$$

在求迹时，可以搬动 $\hat{k}$ 或 $\hat{e}$，并利用 $\hat{k}\cdot\hat{k}=0$，$\hat{e}\cdot\hat{e}=1$，以及 $\hat{k}\cdot\hat{e}=-\hat{e}\cdot\hat{k}$ 等关系，使得 $\hat{k}\cdot\hat{k}$ 或 $\hat{e}\cdot\hat{e}$ 相邻并并缩，以减少 γ 的个数直至能直接应用$(7.11)_9$式。

如果外场是库伦场则只有第四分量 $A_4\neq 0$，而 $\boldsymbol{A}=0$。

$$A_0^e(\boldsymbol{q})=-\int\frac{ze}{4\pi r}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}=\frac{-ze}{|\boldsymbol{q}|^2}。 \qquad (5.8)_{10}$$

以上式代入$(5.7)_{10}$式经过计算，并加整理得到

$$\sum_i\sum_j |T_{fi}|^2 = e^4 |A_0^c(\boldsymbol{q})|^2 \cdot \left[\left(\frac{p_2\cdot e}{p_2\cdot k}\right)^2 (4\epsilon_1^2 - q^2)\right.$$

$$+\left(\frac{p_1\cdot e}{p_1\cdot k}\right)^2 (4\epsilon_2^2 - q^2)$$

$$-2\,\frac{p_2\cdot e}{p_2\cdot k}\cdot\frac{p_1\cdot e}{p_1\cdot k}(4\epsilon_1\epsilon_2 - q^2)$$

$$\left.+\left(2+\frac{q^2\omega^2}{(p_2\cdot k)(p_1\cdot k)}-\frac{(p_1\cdot k)}{(p_2\cdot k)}-\frac{(p_2\cdot k)}{(p\cdot k)}\right)\right] \qquad (5.9)_{10}$$

把上式代入$(1.17)_9$式并考虑到

$$\left.\begin{aligned} &d\boldsymbol{p}_2 = |\boldsymbol{p}_2|\epsilon_2 d\epsilon_2 d\Omega_2,\ d\boldsymbol{k} = \omega^2 d\omega d\Omega_k, \\ &\delta(\epsilon_1-\epsilon_2-\omega)d\boldsymbol{p}_2 d\boldsymbol{k} \Rightarrow \omega^2 |\boldsymbol{p}_2|\epsilon_2 d\Omega_2 d\Omega_k d\omega_0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)_{10}$$

得到

$$d\sigma = \frac{\alpha z^2}{(2\pi)^2} r_0^2 \frac{m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\cdot\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}\frac{d\omega}{\omega} d\Omega_2 d\Omega_k$$

$$\cdot\left[\left(2\epsilon_1\omega\,\frac{p_2\cdot e}{p_2\cdot k} - 2\epsilon_2\omega\,\frac{p_1\cdot e}{p_1\cdot k}\right)^2\right.$$

$$+\omega^2 q^2\left(\frac{p_2\cdot e}{p_2\cdot k}-\frac{p_1\cdot e}{p\cdot k}\right)^2$$

$$\left.+\omega^2\left(2+\frac{q^2\omega^2}{(p_2\cdot k)(p_1\cdot k)}-\frac{p_1\cdot k}{p_2\cdot k}-\frac{p_2\cdot k}{p_1\cdot k}\right)\right]_0 \qquad (5.11)_{10}$$

如果不观测光子的极化，上式还须对光子极化求和，这对于与 e 无关的各项，只需简单乘以 2，对于与 e 有关的各项，可利用以下类系$(8.10)_9$式

$$\sum_{\lambda=1}^{2}(e^\lambda\cdot p_1)^2 = \sum_{\lambda=1}^{2} e_r^\lambda p_{1r}\cdot e_s^\lambda p_{1s} = \left(\delta_{rs}-\frac{k_r k_s}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)p_{1r}p_{1s}$$

$$= |\boldsymbol{p}_1|^2 - \frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2} = |\boldsymbol{p}_1|^2\sin^2\theta_{1_0}$$

同样 $$\sum_{\lambda=1}^{2}(e^\lambda\cdot p_2)^2 = |\boldsymbol{p}_2|^2\sin^2\theta_{2_0}$$

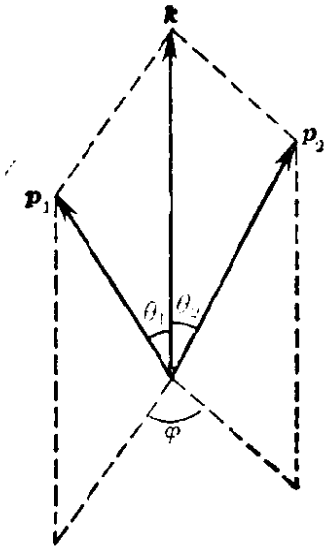


图 10-5

此外 $\sum_{\lambda=1}^{2}(e^{\lambda}\cdot p_1)(e^{\lambda}\cdot p_2)$

$$=\left(\delta_{rs}-\frac{k_r k_s}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)p_{1r}p_{2s}$$

$$=(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)-\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^2}$$

$$=|\boldsymbol{p}_1|\cdot|\boldsymbol{p}_2|\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi。$$

以上 θ_1 为 $\boldsymbol{p}_1\wedge\boldsymbol{k}$ 的夹角，θ_2 为 $\boldsymbol{p}_2\wedge\boldsymbol{k}$ 的夹角。φ 为 $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{p}_1$ 平面与 $\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{p}_2$ 平面的夹角。如图 10-5 所示。

把以上关系代入 $(5.11)_{10}$ 式，参看 $(5.9)_{10}$ 式得到：

$$d\sigma=\frac{\alpha z^2}{(2\pi)^2}r_0^2\frac{m^2}{|\boldsymbol{q}|^4}\cdot\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}\frac{d\omega}{\omega}d\Omega_2 d\Omega_k$$

$$\cdot\left[\frac{\beta_2^2\sin^2\theta_2}{(1-\beta_2\cos\theta_2)^2}(4\epsilon_1^2-q^2)+\frac{\beta_1^2\sin^2\theta_1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^2}(4\epsilon_2^2-q^2)\right.$$

$$-2\frac{\beta_1\beta_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi}{(1-\beta_2\cos\theta_2)(1-\beta_1\cos\theta_1)}(4\epsilon_1\epsilon_2-q^2+2\omega^2)$$

$$\left.+2\omega^2\frac{(\gamma_2/\gamma_1)\beta_2^2\sin^2\theta_2+(\gamma_1/\gamma_2)\beta_1^2\sin^2\theta_1}{(1-\beta_2\cos\theta_2)(1-\beta_1\cos\theta_1)}\right],\quad (5.12)_{10}$$

其中 $|\boldsymbol{p}_i|=\beta_i\epsilon_i=\beta_i\gamma_i m$，$i=1,2$ 且 $\gamma_1=\gamma_2+\omega/m$。上式就是所谓 Bethe-Heitler 公式。由上式可看出当 $\theta_1=0=\theta_2$ 时截面为零。把上式对方向积分就得到能谱

$$d\sigma(\omega)=\alpha z^2 r_0^2\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}\cdot\frac{d\omega}{\omega}\left\{\frac{4}{3}-\frac{2}{(\beta_1\beta_2)^2}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-\frac{2}{\gamma_1\gamma_2}\right)\right.$$

$$+\left(l_1\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2-1}+l_2\frac{\gamma_1}{\gamma_2^2-1}-l_1l_2\right)$$

$$+L\left[\frac{8}{3}\gamma_1\gamma_2+\frac{\omega^2}{m^2}\left(\frac{1}{(\beta_1\beta_2)^2}+1\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\omega}{m}\left(l_1\left(1+\frac{\gamma_2}{\beta_1^2\gamma_1}\right)-l_2\left(1+\frac{\gamma_1}{\beta_2^2\gamma_2}\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\frac{\omega/m}{\beta_1^2\gamma_1\beta_2^2\gamma_2}\right)\right]\right\},\quad (5.13)_{10}$$

其中 $l_i=\dfrac{1}{\beta_i\gamma_i}\ln\dfrac{1+\beta_i}{1-\beta_i}$, $i=1,\ 2,$

$$L=\frac{1}{\beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2}\ln\frac{\gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)-1}{\omega/m}。$$

在非相对论近似下，$\omega\ll|\boldsymbol{p}|$，$\epsilon_1\doteq m\doteq\epsilon_2$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2$，则 $(5.12)_{10}$ 式趋于

$$d\sigma=\frac{\alpha z^2}{\pi^2}r_0^2\frac{m^4}{|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|^4}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{d\omega}{\omega}d\Omega_2d\Omega_k$$
$$\cdot(\beta_2^2\sin^2\theta_2+\beta_1^2\sin^2\theta_1-2\beta_1\beta_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)。\qquad(5.14)_{10}$$

如图 10-5 所示上式可写成

$$d\sigma=\alpha\frac{z^2}{\pi^2}r_0^2m^2\frac{d\omega}{\omega}\frac{|\boldsymbol{p}_2|}{|\boldsymbol{p}_1|}\cdot\frac{d\Omega_2\,d\Omega_k}{|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|^4}$$
$$\cdot\frac{[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)]^2}{\omega^2}。\qquad(5.15)_{10}$$

上式还可写成二个因子的乘积，即

$$\left.\begin{aligned}&d\sigma=d\sigma_R\cdot d\omega_\gamma,\\ \text{其中}\qquad&d\sigma_R=\frac{(2mz\alpha)^2}{|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|^4}d\Omega_2;\\ &d\omega_\gamma=\frac{2}{(2\pi)^2}\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\right]^2\frac{d\omega}{\omega}d\Omega_k。\end{aligned}\right\}\qquad(5.16)_{10}$$

以上 $d\sigma_R$ 实际就是电子在库伦场中弹性散射的卢瑟福截面，而 $d\omega_\gamma$ 则是经典(低频)偶极辐射强度除以 $\hbar\omega$，也就是偶极辐射在单位时间内平均光子数。因此在非相对论情况下，电子在库伦场中的韧致辐射，可以看成是由电子的卢瑟福散射和偶极辐射两个过程所合成。

把$(5.14)_{10}$式对方向积分，或直接由$(5.13)_{10}$式取非相对论近似就得到非相对论情况下能谱如下：

$$\boxed{d\sigma=\frac{16}{3}\alpha z^2r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\beta_1^2}\ln\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}。}\qquad\text{(非相对论)}$$

$$(5.17)_{10}$$

在极端相对论情况下，$\epsilon\gg m$，$\beta\to1$。由$(5.12)_{10}$式可看出：由

于在分母里有$(1-\beta_1\cos\theta_1)$和$(1-\beta_2\cos\theta_2)$因子存在，韧致辐射的光子集中在向前方向一个狭小的区域之内，即在$\theta_1=0$的$\Delta\theta\sim m/\epsilon_1$的范围之内。同时电子传递给库伦场的动量经常是很小的，此时对$d\Omega_2$积分可得到光子的角分布如下：

$$d\sigma(\theta_1)=A\frac{\theta_1 d\theta_1}{\left[\theta_1^2+\left(\frac{m}{\epsilon_1}\right)^2\right]^2}$$
$$\cdot\left[\ln\left(1+\theta_1^2\frac{m^2}{\epsilon_1^2}\right)+B\right],\text{(极端相对论)}\qquad (5.18)_{10}$$

其中A, B均为常数。

对$(5.13)_{10}$式取极端相对论近似，得到光子能谱

$$d\sigma=4\alpha z^2 r_0^2\left[1+\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right]$$
$$\cdot\left(\ln\frac{2m\gamma_1\gamma_2}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\frac{d\omega}{\omega},\quad\text{(极端相对论)}\qquad (5.19)_{10}$$

其中$\gamma_2=\frac{\epsilon_1-\omega}{m}$, $\gamma_1=\frac{\epsilon_1}{m}$。

下面我们来介绍韧致辐射的极化情况，与初态电子极化状态的关系，由$(8.14)_9$, $(8.2)_9$和$(7.9)_9$式并取

$$e^1_{(f)}=\frac{[\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{k}]}{|\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{k}|},\quad e^2_{(f)}=\frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{k}|}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^1]$$

此时$(8.14)_9$式可写成

$$\boldsymbol{\xi}^{(f)}=\mathrm{Tr}(\rho^{(f)}\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{Tr}[Q_\lambda\mathbb{P}_i\bar{Q}_\rho\boldsymbol{\tau}_{\rho\lambda}\Lambda_f]}{\mathrm{Tr}[Q_\lambda\mathbb{P}_i\bar{Q}_\lambda\Lambda_f]},\qquad (5.20)_{10}$$

则类似上节的计算所得结果如下：

$$\xi_3=\frac{m^4}{2(p_2\cdot k)^2}\frac{1}{q^4Q}\left\{(4\epsilon_1^2-q^2)(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}^1)^2\right.$$
$$\left.+\frac{p_2\cdot k}{p_1\cdot k}[(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)\times\boldsymbol{k}]^2\right\}-1,$$
$$\xi_1=\frac{m^2(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}^1)}{(p_2\cdot k)\cdot q^4Q}\left[\frac{m^2(4\epsilon_1^2-q^2)}{2(p_2\cdot k)}(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{e}^2)\right.$$
$$\left.-\frac{m^2(4\epsilon_1\epsilon_2-q^2)}{2(p_1\cdot k)}(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{e}^2)\right],$$

$$\xi_2=-\frac{m}{2\epsilon_1\omega^2q^4Q}\left\{\left[\left(\frac{m^2\boldsymbol{p}_2}{2(p_2\cdot k)}-\frac{m^2\boldsymbol{p}_1}{2(p_1\cdot k)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\cdot(\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)])\right]$$
$$\cdot\left(\frac{m^2(\omega\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{A}+\epsilon_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})}{2(p_2\cdot k)}-\frac{m^2(\omega\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{A}-\epsilon_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})}{2(p_1\cdot k)}\right)$$
$$+\frac{1}{2}m^2\omega\left[\frac{(p_1\cdot k)}{(p_2\cdot k)}-\frac{(p_2\cdot k)}{(p_1\cdot k)}+2\omega\left(\frac{\epsilon_1}{p_2\cdot k}-\frac{\epsilon_2}{p_1\cdot k}\right)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{m^2\epsilon_1}{2(p_2\cdot k)}(\omega\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{A}-\epsilon_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\right.$$
$$\left.\left.-\frac{m^2\epsilon_2}{2(p_1\cdot k)}(\omega\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{A}-\epsilon_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\right]\right\},\qquad(5.21)_{10}$$

其中
$$Q=\frac{m^4}{\omega^2q^4}\left[\boldsymbol{k}\times\left(\frac{\epsilon_1}{p_2\cdot k}\boldsymbol{p}_2-\frac{\epsilon_2}{p_1\cdot k}\boldsymbol{p}_1\right)\right]^2$$
$$-\frac{m^4q^2}{4\omega^2}\left[\boldsymbol{k}\times\left(\frac{\boldsymbol{p}_2}{p_2\cdot k}-\frac{\boldsymbol{p}_1}{p_1\cdot k}\right)\right]^2$$
$$+\frac{m^4}{2(p_1\cdot k)(p_2\cdot k)}[\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)]^2。\qquad(5.22)_{10}$$

以上 $\boldsymbol{A}$ 为初态电子自旋平均值（两倍），$\boldsymbol{\xi}$ 为末态光子的Stokes参量，其意义参看$(8.3)_9$式。由$(5.21)_{10}$式看来，不论初态电子是否极化的，末态光子都是有线极化存在的，即表现在 ξ_3 和 ξ_1 都是与 $\boldsymbol{A}$ 无关的。而光子的圆偏振 ξ_2 是依赖于初态电子极化 $\boldsymbol{A}$ 的，而且当 $\boldsymbol{A}=0$ 时，$\xi_2=0$，即此时光子就无圆偏振极化。因此韧致辐射的圆偏振的极化程度，可用来量度初态电子（或 μ 介子）的极化程度。

§10.6 电子-电子散射

电子-电子散射通常也称为 Moller 散射，它的 Feynman 图如下（二级效应）。与之对应的 T_{fi} 矩阵元如下：本节可看作是对具有多条费米子线 Feynman 图计算的示例。

$$T_{fi}=4m^2e^2\left[(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_1')\frac{1}{(p_2-p_1)^2}(\bar{u}_2\gamma_\mu u_1)\right.$$
$$\left.-\frac{(\bar{u}_2\gamma_\nu u_1')(\bar{u}_2'\gamma_\nu u_1)}{(p_2'-p_1)^2}\right]。\qquad(6.1)_{10}$$

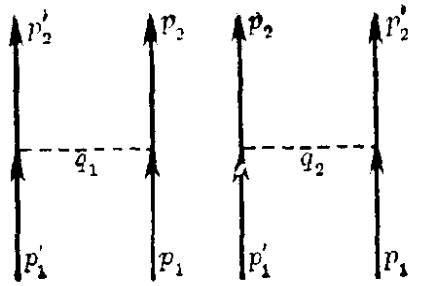


图 10-6

上式第二项前的负号是由于外费米子线交换而来，参看 §8.5 第三点说明。

在未对问题做进一步计算以前，我们先来简单地分析一下虚光子的物理意义。我们把 γ_μ 按照光子的动量 q 分成纵、横和时间分量。

$$\hat{q}=\gamma_\mu q_\mu=\gamma_4 q_4+\gamma_{/\!/}\cdot|\boldsymbol{q}|, \qquad (6.2)_{10}$$

其中 $\gamma_{/\!/}$ 为 γ 在 $\boldsymbol{q}$ 方向的投影，即 γ 的纵分量。另一方面，例如 $q_1=p_2-p_1$，所以 $\bar{u}_2\gamma q u_1=0$，因而在实际运算时，可以作以下代换，即

$$\gamma_{/\!/}=\frac{-q_4}{|\boldsymbol{q}|}\gamma_4。 \qquad (6.3)_{10}$$

因此象

$$(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_1')\frac{1}{q^2}(\bar{u}_2\gamma_\mu u_1)$$
$$=(\bar{u}_2'\gamma_4 u_1')\frac{1}{q^2}\left(1+\frac{q_4^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\right)(\bar{u}_2\gamma_4 u_1)$$
$$+\sum(\bar{u}_2'\gamma_\perp u_1')\frac{1}{q^2}(\bar{u}_2\gamma_\perp u_1)。$$

以上 $\gamma_\perp$ 为 γ 的横分量。求和遍及两个横分量。上式第一项可写成 $(\bar{u}_2'\gamma_4 u_1')\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}(\bar{u}_2\gamma_4 u_1)$，其中 $\frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}$ 正好是库伦势的动量表示，而 $\bar{u}\gamma_4 u$ 部分也就是电荷密度。因而这一项正反映出电荷间的库伦相互作用。由此看来，交换纵分量和时间分量的虚光子就导致了电荷间的库伦相互作用。上式对横分量求和项，如取非相对论近似，就可看出，它们包含电荷间的电流-电流，电流-磁偶极矩以及磁偶极矩-磁偶极矩之间的相互作用。因而可以说这些相互作用是由交换了横光子而来。

类似 $(6.12)_9$ 式，由 $(6.1)_{10}$ 式可得，如果初态电子是完全非极化的，而且也不观测末态电子的自旋，则

$$\overline{\sum_i}\sum_f|T_{fi}|^2=\frac{1}{4}e^4\left\{\frac{1}{(p_2-p_1)^4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1)\bar{\gamma}_\mu(m-i\hat{p}_2)]\right.$$

$$\cdot \mathrm{Tr}[\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1')\bar{\gamma}_\nu(m-i\hat{p}_2')]$$
$$+\frac{1}{(p_2'-p_1)^4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1)\bar{\gamma}_\nu(m-i\hat{p}_2')]$$
$$\cdot \mathrm{Tr}[\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1')\bar{\gamma}_\nu(m-i\hat{p}_2)]$$
$$-\frac{2}{(p_2-p_1)^2(p_2'-p_1)^2}$$
$$\cdot \mathrm{Tr}[\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1)\bar{\gamma}_\nu(m-i\hat{p}_2')\gamma_\mu(m-i\hat{p}_1')$$
$$\cdot \bar{\gamma}_\nu(m-i\hat{p}_2)]\Big\}, \qquad (6.4)_{10}$$

其中 $\bar{\gamma}_\nu=\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4$。由于 $\bar{\gamma}_\nu$ 在各项中经常是成对出现的，因此在实际求迹时可将 $\bar{\gamma}_\nu\to\gamma_\nu$。在计算时上式除最后一项外，其余都可直接应用 $(7.11)_9$ 式，最后一项可通过 $(7.14)_9$ 式简化后，再用 $(7.11)_9$ 式。最后得到

$$\sum_k\sum_j|T_{fi}|^2=8m^4e^4\left[\frac{\varkappa^2+\mu^2-2\lambda+2}{(p_2-p_1)^4}\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa^2+\lambda^2-2\mu+2}{(p_2'-p_1)^4}+\frac{2(\varkappa^2-k-\lambda-\mu+1)}{(p_2'-p_1)^2(p_2-p_1)^2}\right], \qquad (6.5)_{10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}-m^2\varkappa&=(p_1\cdot p_1')=(p_2\cdot p_2'),\\ -m^2\lambda&=(p_1'\cdot p_2')=(p_1\cdot p_2),\\ -m^2\mu&=(p_1'\cdot p_2)=(p_1\cdot p_2')。\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)_{10}$$

如取质心系

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_1',\ \boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_2',\ |\boldsymbol{p}_1|=|\boldsymbol{p}_2|=|\boldsymbol{p}_1'|=|\boldsymbol{p}_2'|=p,\\ &\epsilon_1=\epsilon_1'=\epsilon_2=\epsilon_2',\\ &(p_2'-p_1)^2=(\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1)^2=2p^2(1+\cos\theta)=4p^2\cos^2\frac{\theta}{2},\\ &(p_2-p_1)^2=(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)^2=2p^2(1-\cos\theta)=4p^2\sin^2\frac{\theta}{2},\\ &\varkappa=2\gamma^2-1,\\ &\lambda=\gamma^2-(\gamma^2-1)\cos\theta=\gamma^2(1-\beta^2\cos\theta),\ \rho=\beta\epsilon,\\ &\mu=\gamma^2+(\gamma^2-1)\cos\theta=\gamma^2(1+\beta^2\cos\theta),\ \epsilon=\gamma m。\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)_{10}$$

把以上各式一并代入$(5.5)_9$式得到：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4}{(4\pi)^2}\frac{m^4}{\epsilon^2p^4}\left[\frac{(2\gamma^2-1)^2}{\sin^4\theta}-\frac{2\gamma^4-\gamma^2-1/4}{\sin^2\theta}+\frac{(\gamma^2-1)^2}{4}\right]$$

$$=\frac{r_0^2}{\gamma^2(\gamma^2-1)^2}\left[\frac{(2\gamma^2-1)^2}{\sin^4\theta}-\frac{2\gamma^4-\gamma^2-1/4}{\sin^2\theta}+\frac{(\gamma^2-1)^2}{4}\right]。\quad(\text{质心系})$$

$$(6.8)_{10}$$

在非相对论近似下$\varkappa$, λ, $\mu\to1$。以$(6.7)_{10}$关系代入$(6.5)_{10}$式一并代入$(5.5)_9$式，或直接由上式取$\gamma\to1$近似可得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{r_0^2}{(2\beta)^4}\left[\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}+\frac{1}{\cos^4(\theta/2)}-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right]。(\text{质心系非相对论近似})\quad(6.9)_{10}$$

由质心系到实验室系的变换可由以下代换得到(或直接$(5.6)_9$式)，即

$$\left.\begin{aligned}&\cos\theta_c=\frac{2-(\gamma_L+3)\sin^2\theta_L}{2+(\gamma_L-1)\sin^2\theta_L},\\&\gamma_L=2\gamma_c^2-1,\quad d\Omega_c=\frac{8\cos\theta_L(\gamma_L-1)}{[2+(\gamma_L-1)\sin^2\theta_L]^2}\,d\Omega_L\end{aligned}\right\}。\quad(6.10)_{10}$$

在非相对论近似下，上式就显得比较简单，$\gamma_c\to1\leftarrow\gamma_L$，代入$(6.9)_{10}$式就得到：

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L=\frac{r_0^2}{\beta^4}\cdot4\cos\theta_L\left[\frac{1}{\sin^4\theta_L}+\frac{1}{\cos^4\theta_L}-\frac{1}{\sin^2\theta_L\cos^2\theta_L}\right]。}$$

(实验室系非相对论近似)

$$(6.11)_{10}$$

以上第一项就是经典卢瑟福散射公式，第二项和第三项是由全同粒子交换项所引起。经过替换定律，我们就可以得到电子-正电子散射(通常称为 Bhabba 散射)的相应表示。

§10.7 荷电介子和光子的散射

荷电 π 介子和光子的散射过程，是玻色子和光子电磁相互作用的典型过程。本节可看作是另一种相互作用角点处理的示例。根据 $(10.6)_7$ 式可知 π 介子和光子的电磁相互作用共有两项，对应两个不同的角点，通过这两个角点，所能完成的 π 介子和光子散射的最低效应的 Feynman 图形如下：

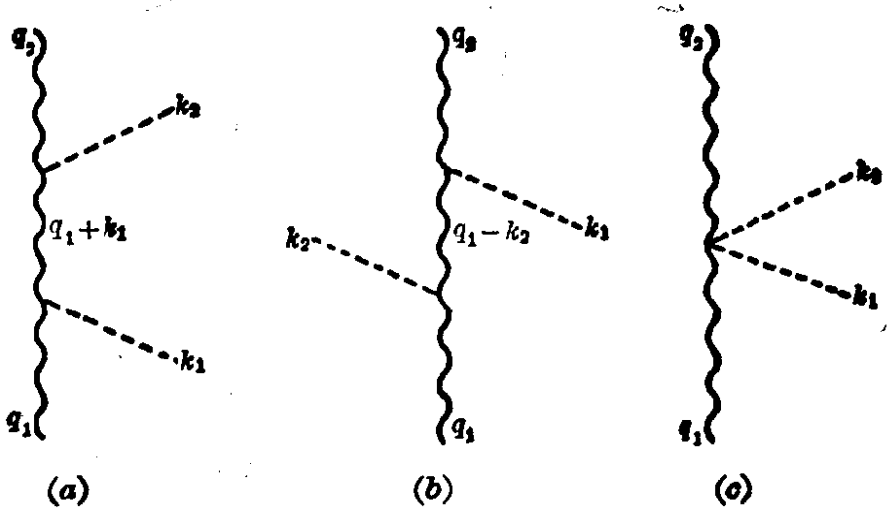


图 10-7

以上波动线代表 π 介子，虚线代表光子，指标 1，2 分别标明初态和末态，q 为 π 介子动量，k 为光子的动量。由 §8.5 的对应关系可直接写出各图形对应的 T_{fi} 矩阵元如下：

$$\left.\begin{aligned} T_{fi}^{(a)} &= -e^2(2q_1+k_1)e^{(1)}\frac{1}{(q_1+k_1)^2+m^2}e^{(2)}\cdot(q_1+q_2+k_1), \\ T_{fi}^{(b)} &= -e^2(2q_1-k_2)\cdot e^{(2)}\frac{1}{(q_1-k_2)^2+m^2}e^{(1)}\cdot(q_1+q_2-k_2), \\ T_{fi}^{(c)} &= -2ie^2e^{(1)}\cdot e^{(2)}。 \end{aligned}\right\} \tag{7.1}_{10}$$

以上角点(c)是来自 $(10.6)_7$ 式第二项 $(-e^2A^2\varphi^2\varphi)$，其中任何一个 A 中都含有吸收第一个光子，和产生第二个光子的算符，也就是实际上应该有两个完全相同的图(c)存在，而我们仅画出了其中一个 Feynman 图(c)。不过我们在 $T_{fi}^{(c)}$ 前乘了因子 2，这就是我们对

以上考虑的补偿。

如取实验室系 $q_1=0$，并考虑到实(外)光子只有两个横分量则

$$q_1\cdot e^{(1)}=q_1\cdot e^{(2)}=0=k_1\cdot e^{(1)}=k_2\cdot e^{(2)}。\qquad (7.2)_{10}$$

利用动量守恒以 $q_2=q_1+k_1-k_2$ 代入$(7.1)_{10}$式，则由上式可知

$$T_{fi}^{(a)}=0=T_{fi}^{(b)}。$$

因而只有 $T_{fi}^{(c)}$ 有贡献

$$|T_{fi}|^2=4e^4(e^{(1)}\cdot e^{(2)})^2。\qquad (7.3)_{10}$$

把上式代入$(5.6)_9$式就得到：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=(2\pi)^{-2}\cdot 2^{-4}\cdot\frac{\omega_2^2\cdot 4e^4(e^{(1)}\cdot e^{(2)})^2}{m\omega_1[(\omega_1+m)\omega_2^2-\omega_2^2\omega_1\cos\theta]}$$

$$=r_\pi^2\cdot\frac{m\omega_2}{\omega_1}\cdot\frac{(e^{(1)}\cdot e^{(2)})^2}{[m+\omega_1(1-\cos\theta)]}$$

$$=r_\pi^2\frac{m^2(e^{(1)}\cdot e^{(2)})^2}{[m+\omega_1(1-\cos\theta)]^2},\qquad \text{(实验室系)}\quad (7.4)_{10}$$

其中 $r_\pi^2=\left(\frac{e^2}{4\pi m}\right)^2$ 为 π 介子的经典半径(平方)，θ 为光子的散射角，即 k_1 和 k_2 的夹角。上式最后一步利用了$(3.10)_{10}$式关系，关于光子极化情况，和$(3.12)_{10}\to(3.14)_{10}$式的讨论相似。如果初态光子是完全非极化的，而且实验又不观测末态光子的极化情况。则利用$(3.15)_{10}$式可得：

$$\left(\overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}}\right)=\frac{1}{2}\,r_\pi^2\,\frac{m^2(1+\cos^2\theta)}{[m^2+\omega_1(1-\cos\theta)]^2}。\ \text{(实验室系)}$$

$$(7.5)_{10}$$

参 考 资 料

1. 关于无辐射修正近似下的场相互作用

H. H. 波戈留波夫，Д. В. 希尔科夫

量子场论导引(1957)第三章

A. N. 阿希叶泽尔，B. Б. 别列斯捷茨基

量子电动力学(1959)第五、六、八章

D. Lurié Particles and Field (1969) Chapter 6

R. P. Feynman Quantum Electrodynamics
(19)
C. Itzykson & J. B. Zuber
Quantum Field Theory (1980) Chapter 5.7

第十一章　S矩阵的发散及其消除，重整化理论

以前我们在讨论自由场的量子理论时，就曾遇到发散的情况，例如真空的能量、电荷等，都可能具有发散值。可是我们只需要简单地引进正规乘积（参看§5.5）。把算符经过适当地排列，就可以把这种发散消除。当然这只是我们认定所有物理量的观测值都是相对于真空态为零的数值而已。我们以后将不再讨论这类发散问题。

以前我们已介绍了计算S矩阵元的微扰展开方法，这种展开是按照相互作用常数来进行的，我们假定这种相互作用常数是很小的。即使暂时不去管这种展开的整个级数是否收敛的问题，在展开的各项中也会出现发散的困难。实际上除了我们在以前计算的最低级项是有限的，一般在计算高级微扰修正时都会出现发散值。目前我们所谓消除发散就是指消除这种各个展开项中的发散值而言。

为了消除这些发散，首先要使在各展开项中可能出现的发散量具有明确的意义，然后按照一定的程序把它分离出来。例如把发散量表示成某一函数的极限值，这种程序常称为正规化程序，然后再把这些分离出来的发散量，吸收到在拉氏量中出现的参数中去，而重新定义这些参数。例如质量，相互作用常数以及场量的标度的重新定义。与此同时在拉氏量$\mathscr{L}$中引进相应的抵销项，以消除在各级展开项中的发散量，这个程序的整体常称为重整化方案，可通过上述程序，由重新调整有限个参数，而使发散消除的理论则称为可重整化理论，否则称为不可重整化的理论。不过到目前为止所有可重整化理论，也只能对微扰展开的各项逐级地消除发散。

本章首先讨论考虑了高级修正后S矩阵元的情况，主要是讨论 Feynman 图形的主要部件，即粒子线和角点在考虑高级修正前后的关系。进而分析原始发散图形的发散情况。在这里只对它们的发散程度做表观的估计。具体计算所得结果，将在下一章里可找到典型的例子。以后就系统地介绍重整化理论，以及具体消除发散的方法。可以证明当我们把原始发散消除以后，对于更复杂的图形可以不再引起新的发散。正如前面已讲到，此地所谓发散的消除，只是对各级修正项而言，至于各级修正项的总和的收敛性，还没有得到可靠的证明，有待我们进一步研究。

本章的具体内容主要在于讨论量子电动力学里的紫外发散的消除，只在最后§11.12和§11.13两节里分别介绍了红外发散的处理方法，和包括介子、核子和光子体系里发散消除的情况。

§11.1 高级修正的一般考虑

以前我们曾计算了各种物理过程的最低级(即不包括辐射修正)效应，得到了基本上与实验相符的结果。可是根据微扰理论的精神，应该还要考虑所有的高级修正。也就是还要考虑S矩阵展开式的以后各项。但在实际计算辐射修正时，却又常出现有发散值，以致使整个理论发生了严重困难。为了克服这样的困难，我们必须对S矩阵的高级修正项，进行全面而深入的研究。

对于任一物理过程，除了最低级 Feynman 图形以外，还必须考虑含有任一元件的所有各级修正的 Feynman 图形。例如我们考虑 Compton 散射，其最低级的 Feynman 图形已在§10.3里介绍过，此外还应考虑下面各种图形，例如其中象内电子线AB实际

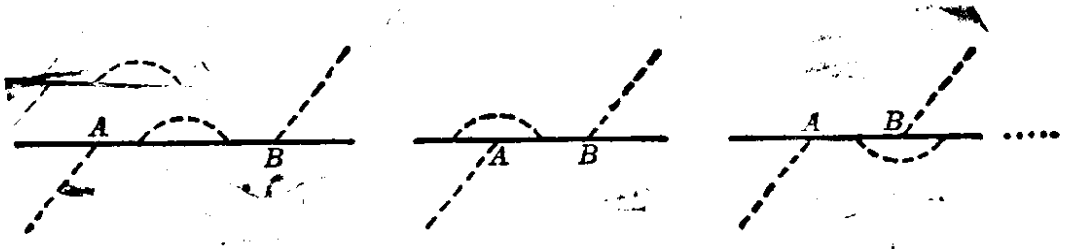


图 11-1

就应该考虑它的各级修正。即除了 $\overline{A}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\overline{B}$ 以外还应包括以下各种图形：

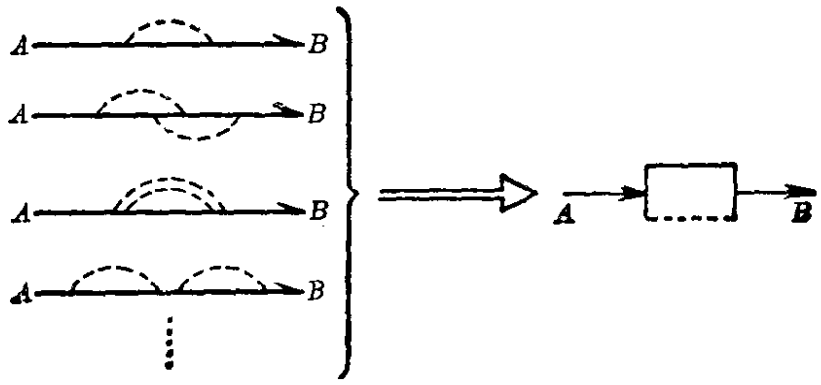


图 11-2

我们以方块 $\boxed{}$ 代表内 Dirac 粒子线的各级修正之和，并称它为 Dirac 粒子固有能量型或简称为 Σ 型修正，并记以 $\Sigma(p)$。

同样对于内光子(一般为玻色子)线，除了 $\overline{A}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\overline{B}$ 以外，还应包括以下各种图形：

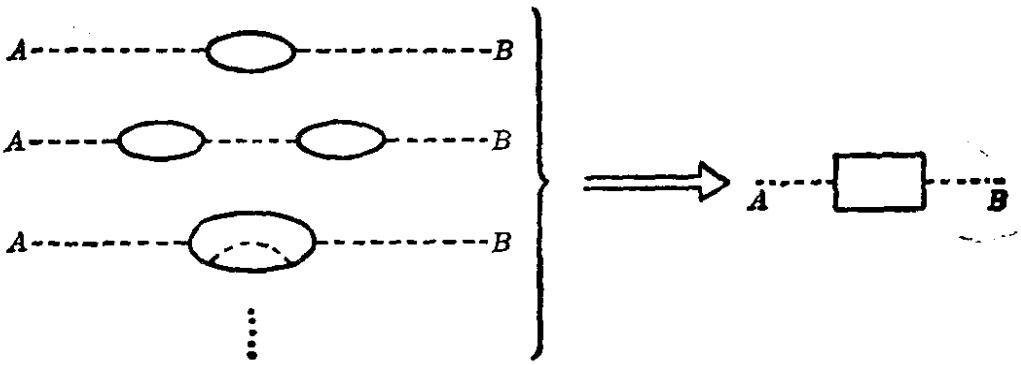


图 11-3

我们以方块 $\boxed{}$ 代表玻色子线的所有修正之和，并称它为玻色子固有能量型或简称 Π 型修正，并记以 $\Pi_{\mu\nu}(k)$。

任一物理过程的内 Dirac 粒子线如果包括了所有修正，我们就以粗实线表示。用图形表示应有以下关系：

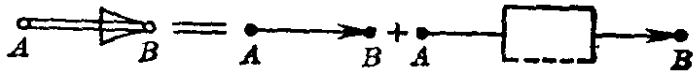


图 11-4a

如果我们以 $G^e(p)$作为  在 S 矩阵元中的对应因子，并称 $G^e(p)$为已载 Dirac 粒子的传播函数（或格林函数），而称以前引进的 $S^e(p)$ 为未载 Dirac 粒子的传播函数(或格林函数)。对应上图就应有以下点：

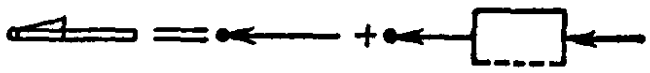
$$\boxed{\begin{aligned} &G^e(p)=S(p)+S(p)\Sigma(p)S(p),\\ &\text{其中}\quad S(p)=i\frac{i\gamma p-m}{p^2+m^2}=\frac{-\gamma p-im}{p^2+m^2}。\end{aligned}} \qquad (1.1)_{11}$$

上式在 Bjorken 度规下，成为

$$\boxed{\begin{aligned} &G^e(p)=S(p)+S(p)\Sigma(p)S(p),\\ &S(p)\equiv\frac{1}{\gamma p-m}=\frac{\gamma p+m}{p^2-m^2}。\end{aligned}} \qquad (1.1')_{11}$$

其中 $$S(p)=i\frac{i\gamma p-m}{p^2+m^2}=\frac{-\gamma p-im}{p^2+m^2}。$$

同样的考虑也适用于外 Dirac 粒子线，即



如果以 $U(p)$作为  在 S 矩阵元中的对应因子，则应有以下关系

$$\boxed{U(p)=u(p)+S(p)\Sigma(p)u(p)。} \qquad (1.2)_{11}$$

我们以粗虚线代表包含所有修正的玻色子线。把以上的考虑应用到玻色子线情况则有：

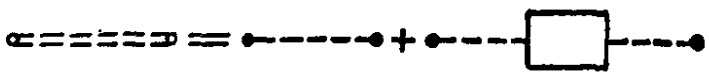
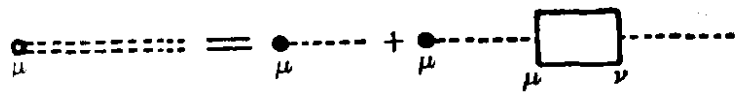


图 11-4b

以 $G^{\gamma}_{\mu\nu}$ 为  在 S 矩阵元中对应的因子，并分别称 G^{γ} 和 D 为已载光子(或玻色子)和未载光子(或玻色子)的传播函数(或格林函数)则有关系。

$$\boxed{G^{\gamma}_{\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}D(k)+D(k)\Pi_{\mu\nu}(k)D(k)。} \qquad (1.3)_{11}$$

对于外光子(或玻色子)线有相似的关系，



以 $\mathbb{A}(k)$作为 ∝:::::::::: 在 S 矩阵元中的对应因子，则有

$$\boxed{\mathbf{A}_{\mu}(k)=a_{\mu}(k)+D(k)\Pi_{\mu\nu}(k)a_{\nu}(k)。} \qquad (1.4)_{11}$$

以上
$$D(k)=\frac{1}{ik^2}。$$

此外对于每一角点，也应该考虑它的所有各级修正，即除了⊥以外，还应该考虑以下各种图形。

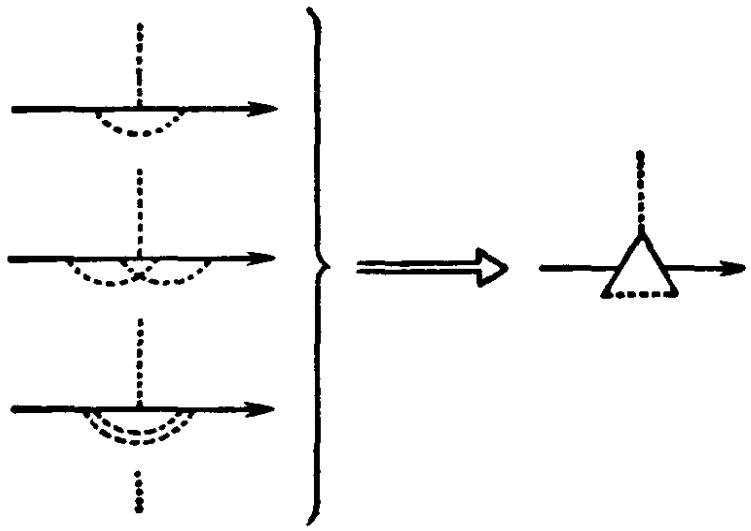


图 11-5

我们以三角形 △ 代表角点的所有修正之和，称为顶角型或简称为 Λ 型修正，并记以 $\Lambda_{\mu}(p_1, p_2, k)$，任一物理过程的角点，如果包含了所有修正，我们以粗点表示，则应有以下关系。

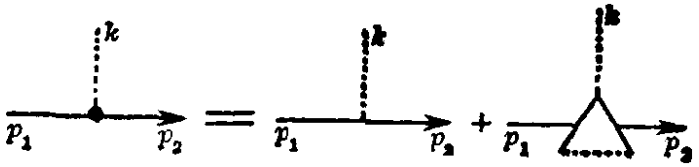
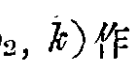


图 11-6

以 $\Gamma(p_1, p_2, k)$作为  在 S 矩阵元中的对应因子，则由上图应有

$$\boxed{\Gamma(p_1, p_2, k)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p_1, p_2, k)。} \qquad (1.5)_{11}$$

以上我们考虑了作为 Feynman 图的三个基本元件(Dirac 粒子线，玻色子线和角点)的所有各级修正。一般来讲，如果我们在某一物理过程的最低级效应的 Feynman 图形，即所谓既约图形(参看下节)中，分别以 $S(p)\to G^e(p)$，$u(p)\to \mathbb{U}(p)$，$D(k)\to G^\gamma(k)$，$a(k)\to \mathbb{A}(k)$ 以及 $\gamma_\mu\to\Gamma_\mu$ 代入，并且它们分别满足 $(1.1)_{11}\to(1.5)_{11}$ 式关系，则我们就得到了该物理过程的准确计算。不过这并没有解决问题，因为我们在前面引进的 Σ、Π 和 Λ 仅仅是个符号而已，它们并没有给我们更多的信息。我们必须进一步研究 G^e、G^γ 和 Γ 或 Σ、Π 和 Λ 的性质，以及它们之间的关系，如果我们能得到它们的具体解析形式，当然问题可说是圆满解决。遗憾的是，直到现在还未能做到这一步。不过，无论如何，对于 G^e、G^γ，及 Γ 或对 Σ，Π，及 Λ 性质的进一步了解，至少对于消除 S 矩阵元的发散问题是有帮助的。首先让我们在下一节里把 $(1.1)_{11}\to(1.5)_{11}$ 式的关系进一步简化。

§11.2 Feynman 图形的分类

上节中的 □，□和三角形△实际包含了多种多样的Feynman图形，为了研究它们的性质，我们最好把 Feynman 图形加以分类，为便于分类，先介绍一些概念。

如果某一 Feynman 图形 M 中有一个部分图形(单纯粒子线不算部分图形)它仅有两根外 Dirac 粒子线，其中至少有一根是整个图形 M 的内 Dirac 粒子线，则该部分图形为 M 的一个 Dirac 粒子固有能量部分。同样如果该部分图形只有两根外光子(玻色子)线，且其中至少有一根是整个图形 M 的内光子(玻色子)线，则

称该部分图形为 M 的一个光子(玻色子)固有能量部分。例如下图(a)中的 AB 即为一个 Dirac 粒子固有能量部分。而下图(b)中的 AB 即为一个光子(玻色子)固有能量部分,图中的▨代表 M 中的其余部分。



(a) (b)

图 11-7

又如某一 Feynman 图形 M 中的一个部分图形,它只有一根外玻色子线,和两根外 Dirac 粒子线,且其中至少有一根是整个图形 M 的内粒子线,则称该部分图形为 M 的顶角部分,例如左图的 ABO 部分就是一个顶角部分。以上所举仅为示例而已,其实固有能量部分和顶角部分也都是多种多样的。为了区别于其它更复杂的部分图形,我们统称以上所介绍的部分为元件部分。如果把 Feynman 图形 M 中的所有元件部分代之以相应的元件,以使原来图形简化而所得到的最简单的图形称为原图形的骨架图形,并记以 M_s。例如:

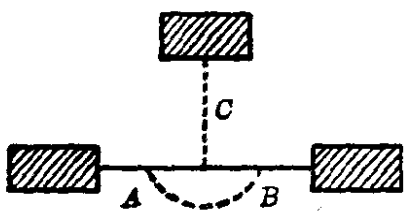


图 11-8

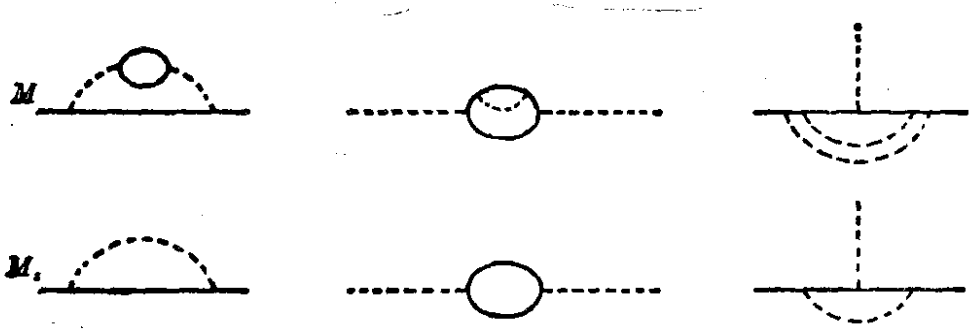


图 11-9

显然可能有很多个 Feynman 图形对应同一个骨架图形,例如:

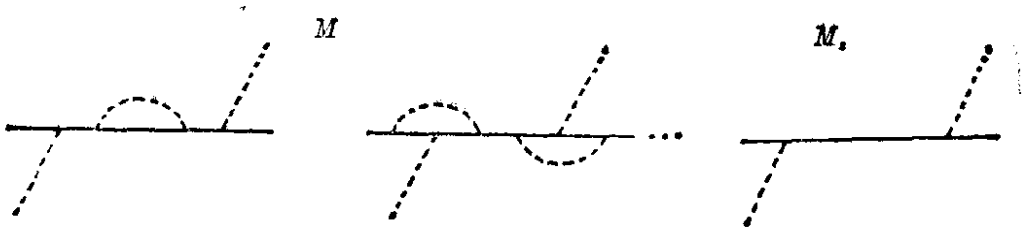


图 11-10

它们有相同的骨架图形。

与其骨架图形相同的 Feynman 图形称为既约图形，否则称为可约图形。例如以上所举的 Feynman 图形均为可约图形的例子。可是如下图形

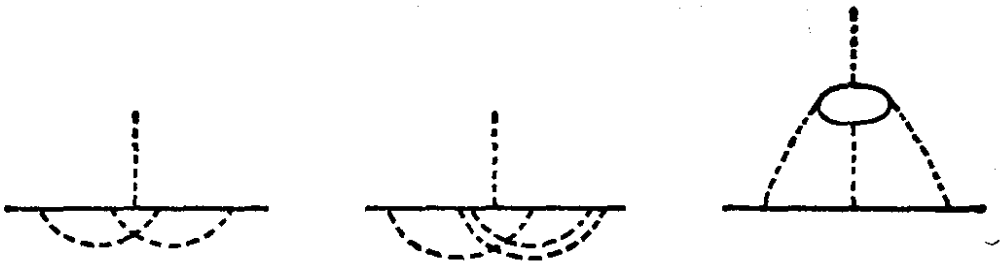


图 11-11

虽然它们外形都是很复杂的，可都是既约图形，因为它们的骨架图形 M_s 分别与自己的原图形相同。固有能量型的既约图形分别都只有一个，而顶角部分的既约图形却有无穷多个。以上所举仅是其中三个而已。

如果把 Feynman 图形中的某一内粒子线割断，它就变成为互不相连的两个 Feynman 图形(单纯粒子除外)，则称原来的 Feynman 图形为复合图形，或称单粒子可约图形否则称为非复合图形，或称为单粒子不可约图形，记以 1PI。例如：

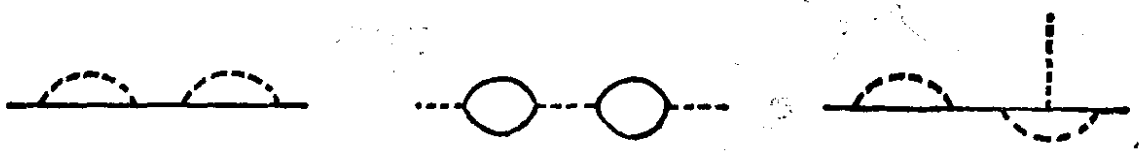


图 11-12

以上均为复合图形。又如



图 11-13

以上均为非复合图形1PI。

值得指出，图形的既约或可约，与图形的复合或非复合，是对Feynman图形分类的两种不同的标准，不可混为一谈。当然复合图形，当其内粒子线所连的是元件部分时，必然是可约的，然而非复合的图形可以是既约也可以是可约的图形。反之，可约图形可以是复合的也可以是非复合的图形。例如



图 11-14

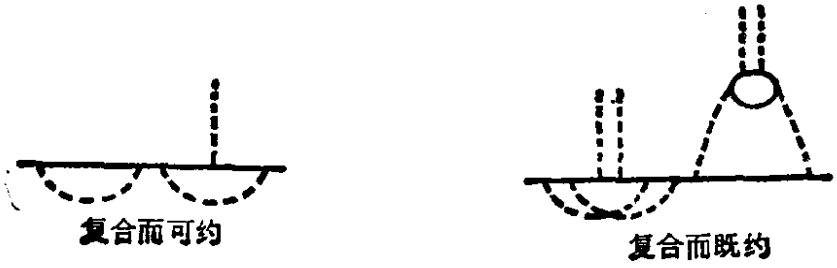


图 11-15

上节我们曾以方块□代表Dirac粒子线所有修正之和，其中包括复合和非复合的各种图形的修正总和。我们以长方形▯代表所有非复合1PI图形对Dirac粒子线的修正之和，并记以 $\Sigma^*(p)$。由于任一个Dirac粒子线修正的复合图形都是由相应的非复合1PI图形用内Dirac粒子线相连而成，因而有下例图形之间的关系。

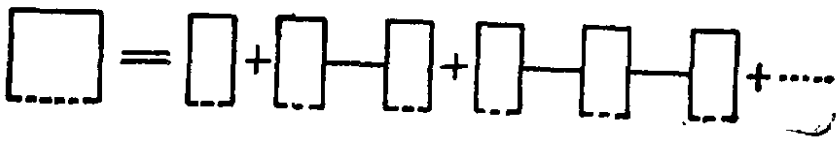


图 11-16

或用符号表示，即为：

$$\Sigma=\Sigma^*+\Sigma^*S(p)\Sigma^*+\Sigma^*S(p)\Sigma^*S(p)\Sigma^*+\cdots$$

或形式地写成

$$\Sigma=\Sigma^*(1-S(p)\Sigma^*)^{-1}。\qquad (2.1)_{11}$$

把上式代入$(1.1)_{11}$式得到，对于内 Dirac 粒子线有

$$G^e(p)=S(p)+S(p)\Sigma^*S(p)+S(p)\Sigma^*S(p)\Sigma^*S(p)+\cdots$$

利用$(2.1)_{11}$式，上式还可写成：

$$\boxed{G^e(p)=S(p)+S(p)\Sigma^*G^e(p)。}\qquad (2.2)_{11}$$

上式用图形来表示即为



图 11-17

同样对于外 Dirac 粒子线，由$(1.2)_{11}$式有：

$$\boxed{\mathcal{U}(p)=u(p)+S(p)\Sigma^*\mathcal{U}(p)。}\qquad (2.3)_{11}$$

上式用图形表示即为

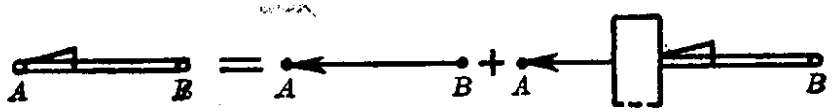


图 11-18

如果我们用长方形□代表所有非复合图形对光子(玻色子)线的修正之和，并记以 $\Pi^*_{\mu\nu}$ 则同样有以下关系(忽略下指标)

$$\Pi=\Pi^*D(k)\Pi^*+\Pi^*D(k)\Pi^*D(k)\Pi^*+\cdots$$

或

$$\Pi=\Pi^*(1-D(k)\Pi^*)^{-1}\qquad (2.4)_{11}$$

代入$(1.3)_{11}$式就得到对于内光子线有：

$$G^\gamma_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}D(k)+D(k)\Pi^*_{\mu\nu}D(k)+D(k)\Pi^*_{\mu\sigma}D(k)\Pi^*_{\sigma\nu}D(k)+\cdots$$

$$\boxed{G^\gamma_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}D(k)+D(k)\Pi^*_{\mu\sigma}G^\gamma_{\sigma\nu}。}\qquad (2.5)_{11}$$

用图形表示即为

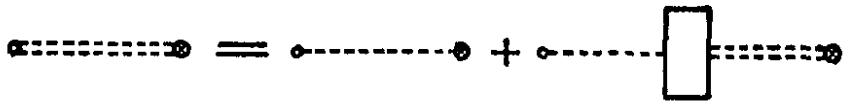


图 11-19

对于外光子则有

$$\boxed{\mathbb{A}_\mu(k)=a_\mu(k)+D(k)\Pi^*_{\mu\nu}\mathbb{A}(k)。} \qquad (2.6)_{11}$$

用图形表示即为

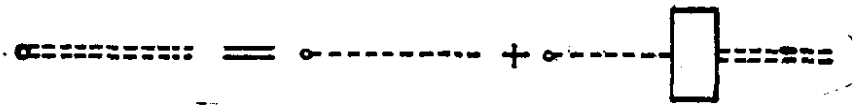


图 11-20

同样的考虑适用于外场情况即

$$\mathbb{A}^e_\mu(k)=a^c_\mu(k)+D(k)\Pi^*_{\mu\nu}\mathbb{A}^e(k) \qquad (2.7)_{11}$$

用图形表示即为

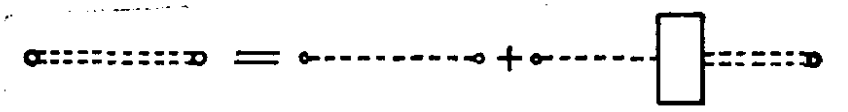


图 11-21

我们对顶角型修正，应理解为只对角点的修正，不包括对它的粒子线的修正，因为这些修正已在粒子线修正里考虑了，因而实际上顶角型修正只限于非复合图形。

看来问题归结为要求出非复合图形的贡献。

§11.3 关于 $\Sigma^*(p)$ 和 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$ 的一般表达式

在没有具体计算 $\Sigma^*(p)$ 和 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$ 以前，先讨论它们一般应具有的形式，对以后讨论是有帮助的，

首先我们知道 $\Sigma^*(p)$ 应该是一个二级双旋量，也即是 $\bar{u}(p)\Sigma^*(p)u(p)$ 应该是一个标量。又由动量守恒知道，它只能是

一个四维动量 p 的函数。由一个四维矢量 p，只能做成标量 p^2 和它本身的矢量 p_μ。其他如赝矢量、赝标量和反对称的二级张量，都无法由一个矢量 p_μ 来做成。因而 $\Sigma^*(p)$ 的一般形式应为

$$\boxed{\Sigma^*(p)=\gamma_\mu p_\mu A(p^2)+imB(p^2),} \qquad (3.1)_{11}$$

其中 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 均为 p^2 的待定标量函数。

其次讨论 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$，它应是一个四维二级张量，又由动量守恒定律知道它本身只是一个四维动量 k_μ 的函数。它的最一般形式应是

$$\Pi^*_{\mu\nu}(k)=C(k^2)k_\mu k_\nu+\Pi^*(k^2)\delta_{\mu\nu}, \qquad (3.2)_{11}$$

其中 $C(k^2)$ 和 $\Pi^*(k^2)$ 均为 k^2 的待定标量函数。对于光子而言，又由于规范不变性的要求(参看 $(7.8)_8$ 式)

$$k_\mu \Pi^*_{\mu\nu}(k)=0。$$

因而

$$k^2C(k^2)+\Pi^*(k^2)=0。 \qquad (3.3)_{11}$$

也就是对于光子而言，$C(k^2)$ 和 $\Pi^*(k^2)$ 这两个标量函数，实际上不是相互独立的。以 $(3.3)_{11}$ 式代入 $(3.2)_{11}$ 式就得到

$$\boxed{\Pi^*_{\mu\nu}(k)=\Pi^*(k^2)\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)。} \qquad (3.4)_{11}$$

由上式知道

$$\boxed{\Pi^*(k^2)=\frac{1}{3}\Pi^*_{\mu\mu}(k)。} \qquad (3.5)_{11}$$

另一方面正如 $(7.10)_8$ 式所指出 $\Pi^*_{\mu\nu}(k\to 0)=0$，所以 $\Pi^*(k^2)$ 中与 k^2 无关的常数项应为零，即

$$\Pi^*(k^2)=\frac{1}{3}\Pi^*_{\mu\mu}(k)=-k^2C(k^2)。 \qquad (3.6)_{11}$$

当 $k^2\to 0$ 时 $C(k^2)$ 应是有限的。

应该指出，对于非电磁场的玻色场，可能不具有规范不变性，此时就不存在$(3.3)_{11}$式关系。

我们可以证明，对于电磁场$(3.4)_{11}$式中最后一项，即$\sim k_\mu k_\nu$项在实际矩阵元的计算中没有贡献。首先我们知道，连结光子固有能量部分的两根光子线中，至少有一根和其他部分图形相连，如下图所示。

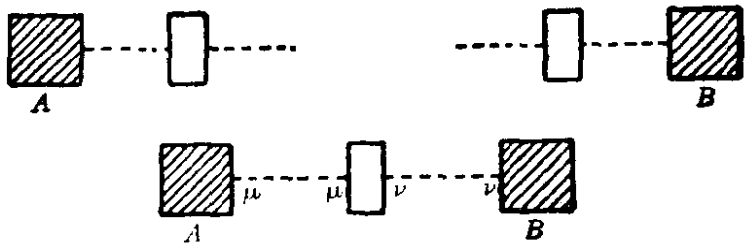


图 11-22

对于其余部分图形 A 和 B 的贡献分别记以$(A\gamma_\mu A')$和$(B\gamma_\mu B')$。这个贡献只与部分图形 A 、 B 的内部结构有关，而与连结其上的光子线是内光子线或外光子线无关。考虑与上图相应的图形，即把一条内光子线割断，使之成为 A 的或 B 的外光子线。则分离出来的 A …… 部分连同外光子线的贡献，即为

$$(A\gamma_\mu A')A_\mu(k)。 \qquad (3.7)_{11}$$

由于规范不变性(参看$(7.8)_8$式)可知：

$$(A\gamma_\mu A')k_\mu=0。 \qquad (3.8)_{11}$$

同样的考虑适用于 B …… 部分，即$k_\mu(B\gamma_\mu B')=0$。这个性质，正如前面已提到，是其余部分 A 或 B 所固有的，与光子线为内光子线或外光子线无关，因此在实际计算上图矩阵元时，其形式为

$$(A\gamma_\mu A')\frac{1}{k^2}\Pi^*_{\mu\nu}(k)\frac{1}{k^2}(B\gamma_\nu B')。 \qquad (3.9)_{11}$$

由$(3.8)_{11}$式可知$\Pi^*_{\mu\nu}(k)$中$(\sim k_\mu k_\nu)$项实际无贡献，因而在实际计算中可以认为

$$\Pi^*_{\mu\nu}(k)=\Pi^*(k)\delta_{\mu\nu}。 \qquad (3.10)_{11}$$

以上的讨论充分利用了电磁场的规范不变性，对于其他不具有规范不变性的矢量场，其 $\Pi^*_{\mu\nu}(k)$ 将仍保留为 $(3.2)_{11}$ 式的一般形式。

§11.4 Dyson 方程与Ward 等式

以上我们讨论了已载粒子的传播函数(考虑了所有修正项)和未载粒子的传播函数(未考虑修正项)之间的关系，以及角点在考虑修正前后之间的关系，问题归结为要确定 Σ^*，Π^* 和 Λ 的具体表达式。进一步找出它们之间的关系，将有助于决定它们的具体形式。

对于非复合 1PI 图形的总和，可以化为对骨架图形的计算，不过以 $S(p)\to G^e(p)$，$D(k)\to G^\gamma(p)$ 以及 $\gamma_\mu\to\Gamma_\mu$ 代入即得。

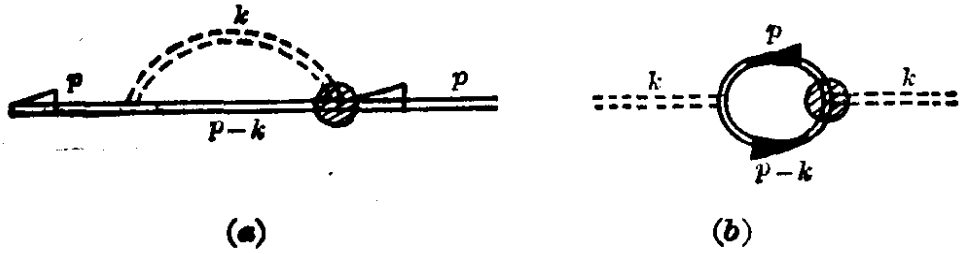
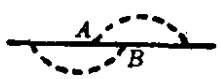
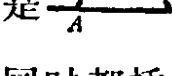


图 11-23

例如 Σ^* 和 Π^* 就可分别由上图(a)和(b)求得。值得提出，我们只应以其中一个角点的 γ_μ 代以 Γ_μ，而另一角点则保持用 γ_μ 不变。因为在对所有非复合 1PI 图形求和时，只能把骨架图形的一个角点看作是插入了各种可能的 Λ 型修正，而不能同时把两个角点都看成是插入了 Λ 型修正。举例说明之，例如，我们考虑图形 

，我们可以认为在 

的 B 点插入了一个顶角部分，或者可以认为是 

的 A 点插入了一个顶角部分，但不能认为 A，B 两点同时都插入了顶角部分。同样的考虑适用于光子(玻色子)线情况。

根据以上图形和相应的 Feynman 法则，我们可以计算固有能量型修正如下：

$$\Sigma^*(p)=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\gamma_\mu G^e(p-k)\Gamma_\nu(p,\ p-k;k)G^\gamma(k)\delta_{\mu\nu}dk。$$

$(4.1)_{11}$

利用$(3.6)_{11}$式得

$$\Pi^*(k)=\frac{e^2}{3(2\pi)^4}\int\mathrm{Tr}[\gamma_\mu G^e(p)\Gamma_\mu(p,\ p-k;k)G^e(p-k)]dp。$$

$(4.2)_{11}$

代入$(2.2)_{11}$和$(2.5)_{11}$式得到

$$\begin{aligned}G^e(p)&=S(p)+\frac{e^2}{(2\pi)^4}S(p)\Big[\int\gamma_\mu G^e(p-k)\Gamma_\nu(p,\ p-k;\ k)\\&\quad\cdot G^\gamma(k)dk\Big]G^e(p),\\G^\gamma(k)&=D(k)+\frac{e^2}{3(2\pi)^4}D(k)\Big[\int\mathrm{Tr}\gamma_\mu G^e(p)\Gamma_\mu(p,p-k;\ k)\\&\quad\cdot G^e(p-k)dp\Big]G^\gamma(k),\end{aligned}$$

$(4.3)_{11}$

其中 $\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;k)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;k)$。

上式$(4.3)_{11}$式称为 Dyson 方程组，它含有两个积分方程(其中$S(p)$和$D(k)$都是已知的)，然而我们要决定的却是三个未知函数$G^e(p)$，$G^\gamma(k)$和$\Gamma_\mu(p_1,p_2;k)$。也就是说，我们还没有找出确定$G^e(p)$，$G^\gamma(p)$和$\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;k)$具体表达式的完备条件，我们希望能再找出一个关于顶角型修正的方程，但这是有困难的，因为Λ型既约图形可有无穷多个，而固有能量型修正的既约图形都是只有一个，这就是我们以上所画的图形。

不过在$k\to0$的特殊条件下，我们可以证明它们之间存在以下关系

$$\Lambda_\mu(p,\ p;\ 0)=\frac{\partial\Sigma^*(p)}{\partial p_\mu}。\qquad(4.4)_{11}$$

上式即所谓 Ward 等式，证明如下。利用以下关系

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}[S(p)S^{-1}(p)]$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu}S(p)\right]S^{-1}(p)+S(p)\frac{\partial}{\partial p_\mu}S^{-1}(p)=0,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial S(p)}{\partial p_\mu}=-S(p)\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}S(p)=S(p)\gamma_\mu S(p)。$$

$$(4.5)_{11}$$

上式用图形来表示(对于电磁相互作用)即为

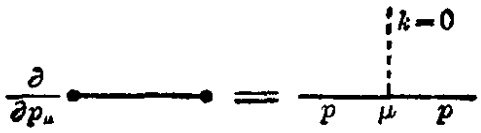


图 11-24

以上只是对于一个粒子线的关系。对于某一非复合 1PI 的 Dirac 粒子固有能量型部分，我们总可以使得 Dirac 粒子动量 p 只出现在始末两端的 Dirac 粒子线上，而使得在其内部的其他 Dirac 粒子线回路上不出现动量 p 变量，如下图所示。

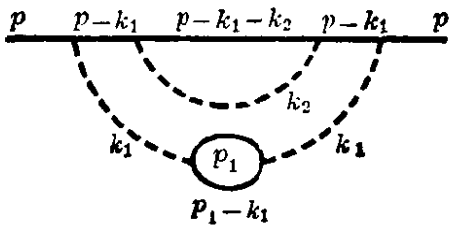


图 11-25a

应用以上$(4.5)_{11}$式的结论，我们可知上图对 p_μ 的微分，有下列三个图形之和与它相等，即

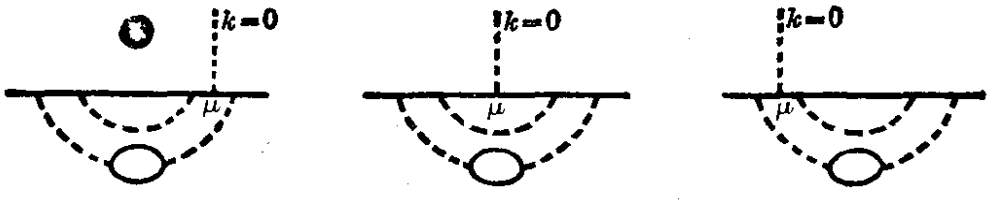


图 11-25b

对于内部 Dirac 粒子线回路部分，因为它不含有动量 p，微分时不出现相应的顶角部分。这样看来在$(4.4)_{11}$式的左方，似乎不

应包括来自内部 Dirac 线回路的顶角部分。不过根据 Furry 定理，含有奇数个光子线的 Dirac 粒子线回路的贡献为零。而且由 $(7.10)_8$ 式知道当 $k=0$ 时，Dirac 粒子线回路一般贡献均为零，因而对以上各种顶角部分求和时，实际上可以包括由内 Dirac 粒子线回路，所引出的 $k=0$ 的光子线的顶角部分，因而得出一般结论为

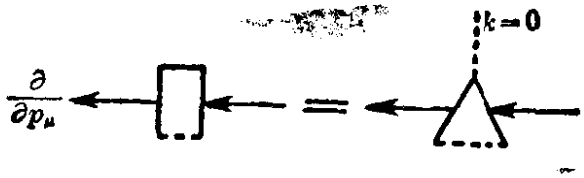


图 11-25c

以上图形关系如用算式表示即为 Ward 等式 $(4.4)_{11}$ 式。

应该指出，以上证明中曾利用了电磁相互作用的具体形式，对于其他相互作用，这种具体形式的 Ward 等式并不一定存在。由于 Ward 等式只给出特殊条件下（即 $p_1=p_2$，$k=0$）的 Λ 和 Σ^* 的关系，我们依然不能利用 $(4.3)_{11}$ 式和 $(4.4)_{11}$ 式来求解 G^e，G^γ 和 Γ_μ 的具体形式，不过我们利用 $(4.1)_{11}$，$(4.2)_{11}$，$(2.2)_{11}$ 和 $(2.5)_{11}$ 式来逐步近似地求出 G^e，G^γ 和 Γ_μ 的近似解，在原则上（至少对于弱相互作用和电磁相互作用）是可以进行的。因为在弱的相互作用下，我们可以把 $S(p)$，$D(k)$ 和 γ_μ 分别作为 G^e，G^γ 和 Γ_μ 的零级近似来输入的，可是当我们具体来计算 G^e，G^γ 或 Γ_μ 时，即使是低级修正就出现了发散值，以致使整个计算无法进行下去。我们必须设法避免这种困难，为此我们进行下面的讨论。

§11.5 既约图形的发散及其分类

计算 S 矩阵元时出现的发散值，主要来自对内粒子动量的积分，由于积分下限即内粒子动量 $\to 0$ 区域所引起的发散常称为红外发散，由于积分上限即内粒子动量 $\to \infty$ 区域所引起的发散常称为紫外发散。红外发散的消除手续比较简单，并不带来严重困难，以后将专节讨论。下面主要讨论紫外发散问题。

显然图形的某一部分出现了发散值，将给整个图形带来发散。另一方面，我们下面将要证明，如果既约图形的发散消除了，则可约图形将可不再产生新的发散，因而图形的发散问题本质上也就是既约图形的发散问题。

既约图形的发散积分常具有这样的性质，即当它所有的内粒子动量积分到最后才出现发散，如果对于其中任一内粒子的动量不积分就不出现发散值。或者说如果任一内粒子线被割断变成两根外粒子线，则新得到的图形就不再是发散的。一般具有这样性质的发散积分常称为原始发散。对于原始发散的最大发散度可作如下的估计。

考虑某一原始发散图形具有m个角点，有$N=N_e+N_\gamma$条外粒子线及$F=F_e+F_\gamma$条内粒子线。计算S矩阵元时要对每条内粒子线进行四维动量积分，即总共要进行$4\times(F_e+F_\gamma)$度重积分。可是积分中有m个四维$\delta^{(4)}$函数，来自m个角点，这m个四维$\delta^{(4)}$函数中，要有一个反映整个过程动量守恒的$\delta^{(4)}$函数保留到最后，因此可以用来减少积分变量的$\delta^{(4)}$函数只有$(m-1)$个$\delta^{(4)}$函数。所以在$4(F_e+F_\gamma)$个积分变量中，只有$4[(F_e+F_\gamma)-(m-1)]$个变量是独立的。由§8.5的对应关系看来，每一条内光子线(或玻色子线)在被积函数中贡献因子$1/k^2$，而每一条内电子线(或Dirac粒子线)将贡献因子$\dfrac{1}{i\gamma p+m}$，因此S矩阵元的积分中分母中的动量级数为$(2F_\gamma+F_e)$，而分子中动量的级数，如前所说，将为$4\times(F_e+F_\gamma-m+1)$，两者之差将为

$$D=4(F_e+F_\gamma-m+1)-2F_\gamma-F_e。\qquad (5.1)_{11}$$

由于每一外粒子线通过一个角点，每一内粒子线通过两个角点。且在电磁相互作用里，每一角点有一根光子线和二根Dirac粒子线通过，因此存在关系

$$m=F_e+\frac{N_e}{2}=2F_\gamma+N_\gamma。\qquad (5.2)_{11}$$

把上式代入$(5.1)_{11}$式，D可以化为

$$D=4-\frac{3}{2}N_e-N_\gamma。 \qquad (5.3)_{11}$$

以上指标 e 和 γ 分别表明电子和光子，而 F 和 N 分别表明内粒子线和外粒子线的数目。当 $D\geqslant 0$ 时积分是发散的，$D=0, 1, 2,$ ……分别表示积分的最大发散度是对数、线型、二次的……等等。

应该指出，$(5.3)_{11}$ 式中 D 的数值与角点数目无关，只与外粒子线数目有关，因而导致原始发散的种类只有有限的几个，这样就可利用调整有限个参数来达到消除发散的目的。我们在量子电动力学里的重整化理论里，利用调整电子的质量和电荷来有效地消除发散的重要条件之一，也就在于 D 与 m 无关。Yakawa 型直接相互作用，一般都具有这样的性质。

在一般情况下，类似的分析可以得到

$$\begin{aligned} D&=4(F_D+F_B-m+1)-2F_B-F_D+dm \\ &=4-4m+dm+3F_D+2F_B, \end{aligned} \qquad (5.4)_{11}$$

其中 F_D 和 F_B 分别为内 Dirac 粒子线和内玻色粒子线的数目。d 为出现在相互作用中的微分(对时空)的次数，因为在相互作用中每出现一次对时空的微分，在 Feynman 图形中每一角点将贡献一个动量因子。如果每一相互作用角点有 n_D 条 Dirac 粒子线，同时有 n_B 条玻色子线通过，则粒子线数目和角点总数之间有以下关系

$$m=\frac{2}{n_B}F_B+\frac{N_B}{n_B}=\frac{2}{n_D}F_D+\frac{N_D}{n_D}, \qquad (5.5)_{11}$$

其中 N_B 和 N_D 为相应的外粒子线数目。把 $(5.5)_{11}$ 式代入 $(5.4)_{11}$ 式可得到

$$D=4+\left(-4+\frac{3}{2}n_D+n_B+d\right)m-\frac{3}{2}N_D-N_B。 \qquad (5.6)_{11}$$

如果理论是可以重整化的，它的发散度必须不随角点数增加而增加。也就是可重整化的条件，是上式中m前的系数

$$-4+\frac{3}{2}n_D+n_B+d\leqslant 0,$$

或

$$\boxed{\frac{3}{2}n_D+n_B+d\leqslant 4。} \qquad (5.7)_{11}$$

否则，理论就不是可重整化的，我们也就无法利用调整有限个参量来消除无限多的发散，例如 Fermi 相互作用

$$\bar{\psi}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\psi\cdot\bar{\psi}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\psi,$$

$n_D=4$, $n_B=0$, $d=0$，上式不能满足。此时

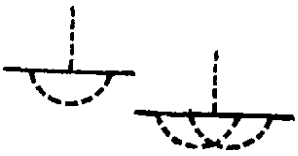
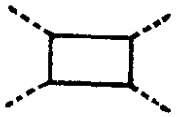
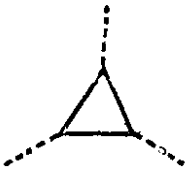
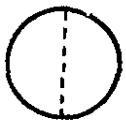
$$D=4+2m-\frac{3}{2}N_D。$$

又如微分型的 Yakawa 相互作用 $\bar{\psi}\gamma_\rho\gamma_5\psi(\partial_\rho\varphi)$，$n_D=2$, $n_B=1$, $d=1$，上式也不能满足。此时

$$D=4+m-\frac{3}{2}N_D-N_B。$$

其他如 φ^5, φ^6 等 这些都是不可重整化的。可是标量场的 φ^4 相互作用 $n_D=0$, $n_B=4$, $d=0$, 上式满足，所以是属于可重整化的理论。其他如 $\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi$, $\varphi^+\partial_\mu\varphi A_\mu$, $\varphi^+\varphi A^2$ 等也都是可重整化的。

由以上的讨论，参看$(5.3)_{11}$式，我们把量子电动力学里各种既约图形的发散分类列举如下表，其中除真空起伏外，其余各类发散也都是原始发散。除了 Furry 定理已在§ 8.7 讲过，知道 $N_\gamma=3$, $N_e=0$ 的图形实际贡献为零外，其余各类发散的消除，将在下面逐节讨论。所有真空图形可以集中成为一个整体来考虑，它只给 S 矩阵带来一个无关紧要的位相因子，实际计算中可以不必去管它。

发散来源	名　　称	代 表 图 形	发散情况	消除方法
紫外发散	电子固有能量型		$N_e=2$ $N_\gamma=0$ $D=1$	重整化理论
	光子固有能量型		$N_e=0$ $N_\gamma=2$ $D=2$	
	顶 角 部 分		$N_e=2$ $N_\gamma=1$ $D=0$	
	光子光子散射		$N_e=0$ $N_\gamma=4$ $D=0$	规范不变性
			$N_e=0$ $N_\gamma=3$ $D=2$	Furry 定理
	真 空 起 伏		非原始发散	参看§ 11.11
红外发散				参看§ 11.13

剩下我们要认真考虑的发散部分，只是 Feynman 图形三大部件的修正，而这三大部件原来在 $\mathscr{L}$ 中就已出现，同时实验又无法把原有的部件和修正的部件分开(至少在质量壳层上)，因此当我们以由实验测得的物理量数值代入原来 $\mathscr{L}$ 的部件中时，实际上已包含了修正部件的相应部分，因而与此同时应在 $\mathscr{L}_{相互}$ 中，引进的相应的抵销项以作相应的扣除，这就是重整化方案的粗略表叙。

§11.6 质量重整化与场量重整化

首先我们来进一步讨论 $\Sigma^*(p)$的物理意义。由$(2.2)_{11}$式得到

$$G^e(p)=S(p)+S(p)\Sigma^*(p)G^e(p)。\qquad (6.0)_{11}$$

以 $S^{-1}(p)$和 $G^{e-1}(p)$分别在左边和右边乘上式可得到

$$\frac{1}{G^e(p)}=\frac{1}{S(p)}-\Sigma^*(p)=-\gamma p+im-\Sigma^*(p)。\qquad (6.1)_{11}$$

以上利用了未载粒子的

$$\frac{1}{S(p)}=-\gamma p+im。\qquad (6.2)_{11}$$

在 $\gamma p=im$ 处为 $S(p)$的极点，由$(6.1)_{11}$式看来，考虑了辐射修正后 $G^e(p)$的极点位置有了变动，由原来的 $\gamma p=im$ 处移动到

$$\gamma p=im-\Sigma^*(p)$$

处。它们的极点位置分别和未载粒子与已载粒子的质量相应。这两者之差称为粒子的电磁质量。

同时由$(2.3)_{11}$式并利用 $(\gamma p-im)u(p)=0$，可得到

$$(\gamma p-im+\Sigma^*(p))\mathcal{U}=0。\qquad (6.3)_{11}$$

对于"自由"已载粒子，其动量经常处在物理质量壳层上，即 $p_c^2=-m_c^2$(在质量壳层上的动量记以 p_c，以下同此)，m_c 为粒子的观测质量。这时已载粒子的波函数满足物理粒子的 Dirac 方程，即

$$(\gamma p-im_c)\mathcal{U}(p)=0。\qquad (6.4)_{11}$$

这一点可以说已经有了实验基础，把上式和$(6.3)_{11}$式比较得到：

$$m_c\mathcal{U}(p)=(m+i\Sigma^*(p_c))\mathcal{U}(p)。\qquad (6.5)_{11}$$

另一方面，粒子的实际观测值 m_c，应该是未载粒子的质量m与辐射修正所引起的电磁质量 δm 之和，即

$$m_c=m+\delta m。$$

因而就有

$$i\Sigma^*(p_c)\mathcal{U}(p)=\delta m\mathcal{U}(p)。\qquad (6.6)_{11}$$

由此看来，算符 $i\Sigma^*(p_c)$在物理质量的壳层上的效应，只是把粒子的质量由未载粒子的质量m改为实际观测的质量值 m_c。可

是对于虚粒子其质量并不限于在质量壳层上，这时 $i\Sigma^*(p)$的效应就对传播子有了内容更丰富的修正。为了把 $\Sigma^*(p)$在质量壳层上的贡献分离出来，我们把 $\Sigma^*(p)$在质量壳层附近展开成多项式和余式之和，即(参看$(3.1)_{11}$式)

$$\Sigma^*(p)=\Sigma_1+\Sigma_0(\gamma p-im_c)+\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)^2。$$

$(6.7)_{11}$

把上式和$(6.1)_{11}$式或$(6.6)_{11}$式比较可知

$$\Sigma_1=\Sigma^*(\hat{p}=im_c)=-i\delta m。$$

$(6.8)_{11}$

在 Bjorken 度规下，以上两式成为

$$\Sigma^*(p)=\Sigma_1+\Sigma_0^{(p)}(\gamma p-m_c)+\Sigma_R(p)(\gamma p-m_c)^2$$

$(6.7')_{11}$

$$\Sigma_1=\Sigma^*(\hat{p}=m_c)=-\delta m$$

$(6.8')_{11}$

$$\Sigma_0=\frac{\partial\Sigma^*(p)}{\partial\hat{p}}\bigg|_{\hat{p}=im_c}。\qquad (6.9)_{11}$$

以上引进了 $\hat{p}\equiv\gamma\cdot p$，以下同此。严格讲$(6.7)_{11}$式展开是有问题的，因为根据我们估计(参看上节)，$\Sigma_1$ 和 Σ_0 分别可能是线型和对数发散的。只有 Σ_R 才是收敛的。

既然 Σ_1 和电磁质量有密切联系，为什么在计算时会出现发散值呢？这个问题目前尚不能彻底解决。我们知道发散是来自虚粒子的高能部分，即所谓紫外发散。目前我们只能把以上问题归之为在极端高能时，或者我们目前所用的场论方法失败，或者我们对粒子的深入核心的结构还不清楚。目前阶段我们暂时只对这个问题作唯象的处理，只形式地把它们记为 Σ_1 和 Σ_0 而不去追究它们的数值为若干。其实，我们并不可能分别来观测未载粒子质量 m

和其电磁质量 δm，我们能观测到的只是物理(已载)粒子的全部质量 m_c。因而 Σ_1 的具体数值并无多大实际意义。如果我们能够在计算实际问题时，避免由 Σ_1 和 Σ_0 之类发散量的牵累，也就满足了我们实际的需要，这也就是这一章的主要目的。

根据微扰理论的观点，在以前的拉氏量，场方程以及传播函数里的质量 m，都本是未载粒子的质量，而未载粒子的质量又不能直接观测，我们需要把它用直接观测的质量 m_c 表示出来。实际上在上章的计算中，也都是以观测值 m_c 来代替 m 的，并且在低级近似下取得了和实验相符的结果。这种方法相当于把"自由"粒子的拉氏量中的 $(-m\bar{\psi}\psi)$ 一项以 $(-m_c\bar{\psi}\psi)$ 来代替，即已包括了 $(-\delta m\bar{\psi}\psi)$ 一项。这一项应该自总拉氏量中减去，也就是说，在以 m_c 代替 m 的同时，应在拉氏量中引进一个抵销项 $\delta m\bar{\psi}\psi$。直到目前，我们都还没有考虑到这样一个抵销项，此后必须对它加以考虑。

我们可以把以上的抵销项归并到相互作用拉氏量 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 中去，因此除了以前的角点 $\overset{\cdot}{\text{—}}$ 以外，还应有一个对应抵销项的角点 $\overset{\times}{\underset{\delta m}{\text{—}}}$ 完全类似以前的分析，抵销项对于 $\Sigma^*(p)$ 也应有相应的贡献，并且由 S 矩阵的 Feynman 法则，可以知道这个贡献就是

$$i\delta m = -\Sigma_1,$$

正好和 Σ_1 抵销，这样在我们以 m_c 代替了 m 的同时，$\Sigma^*(p)$ 就应该成为

$$\boxed{\Sigma^*(p)=\Sigma_0(\gamma\cdot p-im_c)+\Sigma_R(p)(\gamma\cdot p-im_c)^2。}$$

$(6.10)_{11}$

在 Bjorken 度规下，上式为

$$\boxed{\Sigma^*(p)=\Sigma_0(\gamma\cdot p-m_c)+\Sigma_R(p)(\gamma\cdot p-m_c)^2。}$$

$(6.10')_{11}$

把它代入 $(6.0)_{11}$ 和 $(6.1)_{11}$ 式分别就有

$$G^c(p)=S(p)+S(p)\Sigma^*(p)G^c(p),$$

$$\frac{1}{G^e(p)}=\frac{1}{S(p)}-\Sigma^*(p)$$
$$=-\gamma p+im_c-[\Sigma_0+\Sigma_R(\gamma p-im_c)](\gamma p-im_c)$$
$$=(-\gamma p+im_c)[1+\Sigma_0+\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)]\ 。$$

$(6.11)_{11}$

在 Bjorken 度规下，上式为

$$\frac{1}{G^e(p)}=\frac{1}{S(p)}-\Sigma^*(p)$$
$$=-\gamma p+m_c-[\Sigma_0+\Sigma_R(\gamma p-m_c)](\gamma p-m_c)$$
$$=(-\gamma p+m_c)[1+\Sigma_0+\Sigma_R(p)(\gamma p-m_c)]\ ,$$

$(6.11')_{11}$

其中已把原来 $S(p)$ 中的 m 代以 m_c 了，现在的

$$\frac{1}{S(p)}=-\gamma p+im_c。\qquad (6.12)_{11}$$

以上把 $i\Sigma_1$ 吸收到 m_c 中去的做法就称为质量重整化。在质量重整化以后，在 $\gamma p=im_c$ 处为 $S(p)$ 和 $G^e(p)$ 的共同的极点位置，但在该极点处 $S(p)$ 和 $G^e(p)$ 的留数还是不相同的。

对于光子可以做类似的考虑，把 $\Pi^*(k^2)$ 在质量壳层即在 $k^2=0$ 附近展开成多项式和余式之和，即：

$$\Pi^*(k^2)=\Pi_2+\Pi_0\cdot k^2+\Pi_R(k^2)^2,\qquad (6.13)_{11}$$

其中 Π_2 和 Π_0 为与 k^2 无关的常数，它们分别可能是二次或对数发散（$\Pi_R(k)$ 是收敛的），类似以上的考虑，在以光子质量 $m_c=0$ 代入 $\mathscr{L}$ 中的同时，应引入相应的抵销项，结果应该把 Π_2 除掉，这一点也可直接由规范不变性的要求而得到，参看 $(3.6)_{11}$ 式，也就是在严格规范不变的要求下，可以认为光子不需要真正的质量重整化。类似 $(6.11)_{11}$ 式可以证明：

$$G^\gamma(k)=D(k)+D(k)\Pi^*(k)G^\gamma(k)。\qquad (6.14)_{11}$$

$$\frac{1}{G^\gamma(k)}=\frac{1}{D(k)}-\Pi^*(k),\qquad (6.15)_{11}$$

其中

$$\frac{1}{D(k)}=ik^2, \qquad (6.16)_{11}$$

且

$$\Pi^*(k)=\Pi_0\cdot k^2+\Pi_R(k^2)^2。 \qquad (6.17)_{11}$$

代入$(6.15)_{11}$式可得到

$$\frac{1}{G^\gamma(k)}=k^2(i-\Pi_0-\Pi_R k^2)。 \qquad (6.18)_{11}$$

由此可见，在$k^2=0$处是$D(k)$和$G^\gamma(k)$的共同极点位置，可是在该极点处两者的留数还是不同的。

以上我们利用质量重整化方法，把Σ_1^*发散项吸收到质量参量m中去。把m代以m_c，同时在$\mathscr{L}$中引进抵销项$\mathscr{L}_{相互}=\delta m\bar{\psi}\psi$，这样把出现在$\Sigma^*(p)$中的发散量$\Sigma_1^*$消除了，可是还遗留下另一个发散项$\Sigma_0(\gamma p-im_c)$(参看$(6.10)_{11}$式)，由于存在这一项，由$(6.11)_{11}$式看来，将导致传播函数在质量壳层处，也就是在其极点处的留数的改变，其留数由原来的$1\to\frac{1}{1+\Sigma_0}$。考虑到传播子来源于场量的并缩，$G^c(p)\sim\overbrace{\bar{\psi}\psi}$，在极点处留数的改变，相当于场量的标度的改变，这项发散可以由场量的重新标度，也就是由场量的重整化来消除。

由于发散项$\Sigma_0(\gamma p-im_c)$是属于粒子固有能量型修正$\Sigma^*(p)$的一部分，类似以前讨论的电磁质量项，发散项$\Sigma_0(\gamma p-im_c)$相当是由辐射修正所引进的附加作用项$-i\Sigma_0\bar{\psi}(\gamma p-im_c)\psi$(在动量空间)，在坐标空间就相当引进了$-\Sigma_0\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi$作用项。实际上我们也同样无法把由辐射修正所感生的这一项$-\Sigma_0\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi$，和在原来$\mathscr{L}_{自由}$中的具有相同形式的一项$-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi$区分开来。我们对场量的测量(在质量壳层上进行)都是它们的总和

$$-(1+\Sigma_0)\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi=-\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi_c。$$

这相当对场量的重新定标，或者说对场量重整化，由原来未载的

$$\psi\to\psi_c=(1+\Sigma_0)^{1/2}\psi,$$

其中 ψ_c 称为重整化的场量。或者

$$\boxed{\begin{aligned}\psi&=(1+\Sigma_0)^{-1/2}\psi_c=Z_D^{1/2}\psi_c,\\ Z_D&=\frac{1}{1+\Sigma_0},\end{aligned}}\qquad (6.19)_{11}$$

其中 Z_D 称为场量重整化常数。

由 ψ_c 出发计算所得到满载的传播子称为重整化的传播子记以 $G_c^e(p)$则

$$\begin{aligned}G_c^e&=\int dx\, e^{-ipx}\langle 0|T\psi_c(x)\bar{\psi}_c(0)|0\rangle\\ &=Z_D^{-1}\int dx\, e^{-ipx}\langle 0|T\psi(x)\psi(0)|0\rangle=Z_D^{-1}G^e(p)\end{aligned}\qquad (6.20)_{11}$$

光子场情况类似。

如果我们把原来 $\mathscr{L}$ 中的 $-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi$ 利用$(6.19)_{11}$式由 ψ_0 表示出来，

$$\begin{aligned}-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi&=-Z_D\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_c\\ &=-\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_c-(Z_D-1)\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_c,\end{aligned}$$

也就是说用 ψ_c 表示时，就应有相应的抵销项

$$-(Z_D-1)\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=\mathscr{L}_{相互},$$

这一抵销项对传播子的贡献为 $-i(Z_D-1)\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi_c$，在动量空间即为 $(Z_D-1)\bar{\psi}_c(\gamma p-im_c)\psi_c$。这一项在逐级近似计算中，可以和 $\Sigma^*(p)$中的 $\Sigma_0(\gamma p-im_c)$相消，因此在引进场量重整化以后，在逐级近似计算中，我们可以把 Σ_0 项自 $\Sigma^*(p)$中除掉，从而 $\Sigma^*(p)$中只剩下了有限的 $\Sigma_R^*(p)$一项。关于这个问题下面我们还要进行更一般的讨论。

§11.7 满载的传播函数与满载的顶角函数

以上讨论了质量重整化和场量重整化（相互作用常数重整化将在以后讨论）。在具体计算时，拉氏量$\mathscr{L}$中出现的量实际上都是相应的重整化量(同时引进相应的抵消项)以致在进行微扰逐步近似计算时，发散项相互抵消，可以避免发散量的干扰。下面我们在

理论上一般地来分析：由 $\mathscr{L}[\psi, A]$ 出发来计算全部的传播函数和顶角函数，找出它们和 $\mathscr{L}$ 中的 ψ、A 等的关系，暂不管其中的 ψ、A 等是否是相应的物理上直接观测到的量。

由$(6.1)_{11}$式

$$G^e(p)=\frac{1}{-\gamma p+im-\Sigma^*(p)}$$

以$(6.7)_{11}$和$(6.8)_{11}$式代入上式可得到：

$$\begin{aligned}G^e(p)&=\frac{1}{-\gamma p+im-\Sigma^*(p)}\\&=\frac{1}{-\gamma p+im_c-\Sigma_0(\gamma p-im_c)-\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)^2}\\&=\frac{1}{(-\gamma p+im_c)[1+\Sigma_0+\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)]}\\&=\frac{1}{-\gamma p+im-\Sigma^*(p)}\\&=Z_D\frac{1}{-\gamma p+im_c-Z_D\Sigma_R(p)(\gamma p-m_c)^2}。\end{aligned}\qquad (7.1)_{11}$$

上式也可写成

$$\begin{aligned}G^e(p)&=\frac{S(p)}{[1+\Sigma_0+\Sigma_R(\gamma p-im_c)]}\\&=Z_D\frac{S(p)}{[1+Z_D\Sigma_R(\gamma p-im_c)]}。\end{aligned}\qquad (7.2)_{11}$$

引进

$$\boxed{G_c^e(p)=\frac{S(p)}{[1+Z_D\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)]},}\qquad (7.3)_{11}$$

其中$G_c^e(p)$称为重整化的传播函数。在质量壳层上 $G_c^e(p)\to S(p)$，也就是相应于 $\overbrace{\psi_c\bar{\psi}_c}$ 的传播子比较$(7.2)_{11}$和$(7.3)_{11}$式得到满载的传播函数 $G^e(p)$为

$$\boxed{G^e(p)=Z_DG_c^e(p)。}\qquad (7.4)_{11}$$

正如以上已提到，考虑了场量重整化后，应引进相应的抵销项，在逐级近似计算中，可以把 Σ_0 项除掉，这样在逐级近似计算中 $Z_D\to 1$。

对于光子有相似的情况，由$(6.18)_{11}$式可得到满载的光子传播函数为

$$\boxed{G^{\gamma}(k)=Z_B G_c^{\gamma}(k),} \qquad (7.5)_{11}$$

其中

$$\boxed{\begin{aligned} Z_B&=\frac{1}{1+i\Pi_0},\\ G_c^{\gamma}(k)&=\frac{D(k)}{[1+i\Pi_R\cdot k^2]}, \end{aligned}} \qquad (7.6)_{11}$$

其中$G_c^{\gamma}(k)$称为重整化的光子传播函数。在质量壳层上

$$\left.\begin{aligned} G_c^{e}(\hat{p}=im_c)&\Rightarrow S(p)\\ G_c^{\gamma}(k^2=0)&\Rightarrow D(k) \end{aligned}\right\} \qquad (7.7)_{11}$$

现在的$S(p)$实际相应于$\overbrace{\psi_c\bar{\psi}_c}$的传播子($D(k)$类似)。

这也就是当初我们那样定义重整化的传播函数的依据。其实在一般情况下，$D(p)$和$S(p)$也分别还是$G_c^{\gamma}(k)$和$G_c^{e}(p)$的零级近似。

前面已提到，辐射修正对于"自由"粒子不仅引起质量的修正，传播函数的修正，也还要引起相应的场量的修正。下面我们再来分析场量的修正。

在质量重整化以后，把$(6.10)_{11}$代入$(2.3)_{11}$式得到

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(p)=u(p)+S(p)[&\Sigma_0(\gamma p-im_c)\\ &+\Sigma_R(p)(\gamma p-im_c)^2]\mathcal{U}(p), \end{aligned} \qquad (7.8)_{11}$$

其中$u(p)$在质量重整化以后和$\mathcal{U}(p)$(满载的场量)同样满足物理粒子的 Dirac 方程

$$(\gamma p-im_c)u(p)=0。$$

虽然$u(p)$和$\mathcal{U}(p)$满足相同方程。它们之间还是可能相差一个因子。由于$(\gamma p-im_c)\mathcal{U}(p)=0$，$(7.8)_{11}$式右边最后一项为零，但同样的理由不能用来决定$(7.8)_{11}$式右边第二项为零。因为这第二项上实际上是个$\frac{0}{0}$形的不定式，把$(7.8)_{11}$式稍加改写就成为

$$\left[1+\frac{\gamma p+im_c}{p^2+m_c^2}\cdot\Sigma_0(\gamma p-im_c)\right]\mathbb{U}(p)=u(p)。\qquad (7.9)_{11}$$

由于上式第二项是个不定式，这样在我们确定 $u(p)$ 和 $\mathbb{U}(p)$ 之间的因子时，可有适当选择的可能性。

我们知道 $S(p)$ 是由 $\overbrace{u(p)\bar{u}}(p)$ 并缩而来，因而可以设想 $G^e(p)$ 是由 $\overbrace{\mathbb{U}(p)\mathbb{U}}(p)$ 的并缩而来。我们已知在质量壳层上

$$G^e(p)=Z_DG_c^e(p)\Rightarrow Z_DS(p),\qquad (7.10)_{11}$$

为了保持 $S(p)$，$u(p)$，$G^e(p)$ 和 $\mathbb{U}(p)$ 之间的协调关系，我们可以适当地选取

$$\mathbb{U}(p)=Z_D^{1/2}u(p)。\qquad (7.11)_{11}$$

同样的考虑适用于光子情况就得到

$$\mathbb{A}(k)=Z_B^{1/2}A(k)。\qquad (7.12)_{11}$$

以上的重整化常数 Z_D 和 Z_B，与出现在 $\mathscr{L}$ 中的 ψ_1 和 A 等的定标数值有关，我们以前在第十章中计算 S 矩阵元时，实际所用的场算符 $u(p)$ 和 $A(k)$，其实就是它们相应的重整化的场算符 $u_c(p)$ 和 $A_c(k)$。正如以前已提到，在以 $u_c(p)$，和 $A_c(k)$ 出发，进行逐级近似计算时，Z_D，$Z_B\to 1$。

对于顶角型修正，我们可以做相似于传播函数的处理，把 $\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;\ k)$ 在质量壳层附近展开成多项式及余式之和。

$$\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;\ k)=\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)+\Lambda_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k),\qquad (7.13)_{11}$$

其中 $\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)$ 是当 $p_1=p_c$，$p_2=p_c$，且 $k^2=0$ 时的 $\Lambda_\mu(p_c,\ p_c;\ 0)$ 的数值，根据估计它可能是对数发散的，而 $\Lambda_{\mu R}$ 则是收敛的。利用 Ward 等式

$$\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)=\left.\frac{\partial\Sigma^*(p)}{\partial p_\mu}\right|_{p=p_c}。\qquad (7.14)_{11}$$

以 $(6.10)_{11}$ 式代入上式可得到

$$\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)=\Sigma_0\gamma_\mu。\qquad (7.15)_{11}$$

再代入 $(1.5)_{11}$ 式得到满载的顶角函数

$$\boxed{\begin{aligned}&\Gamma_\mu=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;\ k)\\&=(1+\Sigma_0)\gamma_\mu+\Lambda_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k)=Z_D^{-1}\Gamma_{\mu c},\end{aligned}}\qquad (7.16)_{11}$$

其中

$$\boxed{\Gamma_{\mu c}=\gamma_\mu+Z_D\Lambda_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k)。} \qquad (7.17)_{11}$$

$\Gamma_{\mu c}$ 常称为重整化的顶角函数，容易看出，在质量壳层上，即当 $p_1=p_c$, $p_2=p_c$, $k^2=0$ 时 $\Lambda_{\mu R}=0$

$$\Gamma_{\mu c}(p_c,\ p_c;0)\Rightarrow\gamma_\mu。 \qquad (7.18)_{11}$$

应该指出，$(7.16)_{11}$ 式右边的系数，正好就是$(7.4)_{11}$ 式右边的系数的倒数，这是由于 Ward 等式所得到，而 Ward 等式$(6.9)_{11}$式，在电磁相互作用下是成立的，在一般情况下并不一定成立，因而这两个系数互为倒数，在介子理论里一般是不一定成立的。

§11.8 真空极化与电荷重整化

以前我们分析过 $\Sigma^*(p)$ 的物理意义，下面我们来分析一下 $\Pi^*(k)$的物理意义。考虑外场的 $A^e(k)$，以 $-k^2$ 乘$(2.7)_{11}$式得到

$$-k^2\mathbb{A}^e(k)=-k^2a^e(k)+i\Pi^*(k)\mathbb{A}^e(k) \qquad (8.0)_{11}$$

把上式在坐标空间里表示出来就有

$$\Box\mathbb{A}^e(x)=\Box a^e(x)+i\int\Pi^*(x,\ y)\mathbb{A}^e(y)dy \qquad (8.1)_{11}$$

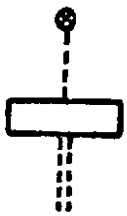


图 11-26

根据微扰理论的观点，以上 $a^e(k)$为未考虑修正的外场电磁矢势，也就是在这一章以前我们所用的外场矢势，它满足

$$\Box a^e(x)=-j(x),$$

其中 $j(x)$ 为场源的电流密度，把上式和 $(8.1)_{11}$ 式相比，我们可以认为$(8.1)_{11}$ 式的最后一项，是来自真空极化所感应的电流密度。我们可以称 $-i\Pi^*$ 为真空极化算符，和粒子的质量的情况相同，我们也无法分别观测原有粒子的电荷，和来自真空极化的电荷。我们所能观测到的只能是它们的总和，也就是所谓物理电荷。既然我们不能观测出粒子原有电荷 e，而能观测物理电荷 $e_c(e_c=e+\delta e)$，那么就应设法把以前理论形式中出现的原有（未考

虑修正)的粒子电荷 e 用 e_c 表示出来。实际上我们在这一章以前都是直接以 e_c 去代替了 e 的。当我们这样做时，应该有相应的补偿。为此我们下面就来讨论电荷重整化的问题。

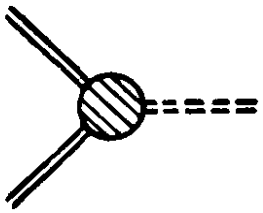


图 11-27

当我们由实验来测定相互作用常数的数值时，实质上只是在于考虑右图的角点。不过我们无法把辐射修正部分分开来测量，因而实际测得的是(在质量壳层上的数值)

$$e\bar{\psi}\Gamma_\mu\psi\mathbb{A}\Rightarrow eZ_D\bar{\psi}Z^{-1}\gamma_\mu\psi Z_B^{1/2}A\equiv e_c\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A,$$

$$\boxed{eZ_DZ^{-1}Z_B^{1/2}=e_c,} \qquad (8.2)_{11}$$

其中 e_c 为测量得到的物理电荷，且

$$\Gamma_\mu\Rightarrow Z^{-1}\gamma_\mu。 \qquad (8.3)_{11}$$

在电动力学里由于 Ward 等式(参看$(7.16)_{11}$和$(7.18)_{11}$式)，$Z=Z_D$，所以$(8.2)_{11}$式成为

$$eZ_B^{1/2}=e_c。 \qquad (8.4)_{11}$$

上式或一般情况下的$(8.2)_{11}$式，相当于相互作用常数的重新定义，这个程序称为相互作用常数或电荷重整化。实际上图 11-27 并不对应实际的物理过程，对于这个问题下面再做更具体的分析。

光子和电子的散射，是光子和电子相互作用的最简单的过程。当光子的 $\boldsymbol{k}\to 0$，电子的 $\boldsymbol{p}\to 0$ 时的极端非相对论情况下(即所谓 Thomson 散射)，是可以用经典电动力学的方法来计算它的散射截面的，得出结果为：

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e_c^2}{4\pi m_c^2}\right)^2。 \qquad (8.5)_{11}$$

实验结果是与此式相符的(当 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时)。我们可以利用上式，通过测量光子($\boldsymbol{k}\to 0$)和荷电粒子($\boldsymbol{p}\to 0$)的散射截面来作为测量粒子的电荷 e_c 的标准方法(这个标准可以说已有了实验基础的)。值得指出，我们在 § 10.3 中用量子电动力学的方法来计算光子和“自由”电子散射，其结果在非相对论极限下也是与$(8.5)_{11}$式相同的

(参看 $(3.17)_{10}$ 式)。只是在那里我们直接以 e_c 代替了 e，这样不谋而合倒是值得我们深思的。为什么简单的以 e_c 代替 e，就可以得到与实验符合的结果呢？当我们精确的计算 Compton 散射过程，而不象 § 10.3 那样只计算到二级近似，情况又怎样呢？

对于光子和电子的散射的精确计算，应该考虑图 11-28 的四个图形(光子线互换图形未包括在内)。其中方块表示电子固有能量型部分 Σ，而圆圈表示电子回路。这个问题一般计算是有困难的，但我们所需要考虑的只是 $k\to 0$，$p\to 0$ 时的极限情况，这就给我们带来不少方便。首先由于规范不变性的要求，当 $k\to 0$ 时，图 (c)和(d)实际贡献为零，参看$(7.10)_8$ 式。类似 Ward 等式的推导，对于图(b)的贡献可写成：

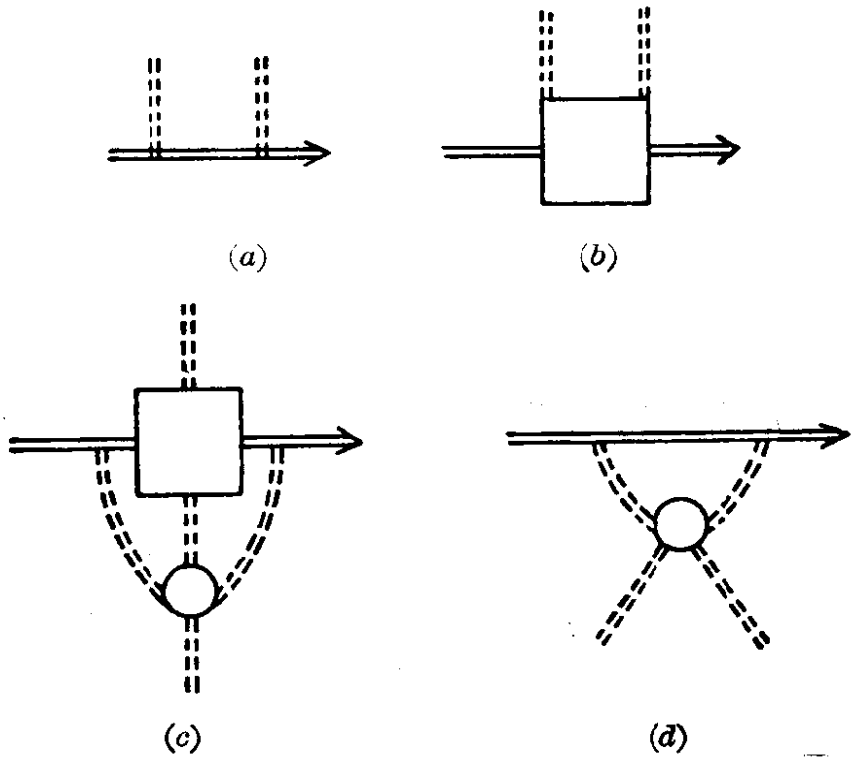


图 11-28

$$M(b)=\bar{\mathbb{U}}(p)\frac{\partial^2\Sigma(p)}{\partial p_\mu\partial p_\nu}\mathbb{U}(p)\mathbb{A}_{1\mu}\mathbb{A}_{2\nu}。\qquad (8.6)_{11}$$

可以证明上式实际贡献为零。以 $S^{-1}(p)$ 左乘和右乘 $(1.11)_{11}$ 式可得到

$$\Sigma(p)=S^{-1}(p)GS^{-1}(p)-S^{-1}(p)。\qquad (8.7)_{11}$$

上式右边最后一项 $S^{-1}(p)$对 p_μ 的两次微分为零，所以

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu}=S^{-1}(p)\frac{\partial^2 G}{\partial p_\mu \partial p_\nu}S^{-1}(p)$$
$$+\left(\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_\nu}+\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\right)S^{-1}(p)$$
$$+S^{-1}(p)\left(\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}+\frac{\partial G}{\partial p_\nu}\cdot\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}\right)G\left(\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}\right)$$
$$+\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}G\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}。\qquad (8.8)_{11}$$

考虑到电子在质量壳层上，

$$S^{-1}(p)\mathbb{U}(p)=0=\bar{\mathbb{U}}(p)S^{-1}(p)。$$

所以上式只需考虑最后两项，可是由$(7.3)_{11}$和$(7.4)_{11}$式

$$G^e=Z_D G_c^e(p)=Z_D\frac{S(p)}{[1+Z_D\Sigma_R(\gamma p-im_0)]}。\qquad (8.9)_{11}$$

例如：

$$\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}G\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}$$
$$=\frac{\partial S^{-1}}{\partial p_\mu}Z_D\frac{S(p)\dfrac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\nu}}{1+Z_D\Sigma_R\cdot(\gamma p-im_c)}$$
$$=\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}Z_D\frac{-\dfrac{\partial S(p)}{\partial p_\nu}\cdot S^{-1}(p)}{1+Z_D\Sigma_R\cdot(\gamma p-im_c)},$$

而 $S^{-1}(p)$ 作用 $\mathbb{U}(p)$ 上为零，所以整个 $M(b)$ 的贡献为零。

最后我们只需要考虑图 11-28(a) 的贡献。由 Feynman 的对应法则，并考虑到 $k_1=0=k_2$ 就得到

$$M=M(a)$$
$$=Z_D Z_B e^2\bar{u}_2\Gamma_\mu(p_e,\ p_c;\ 0)G^e(p_c)\Gamma_\nu(p_c,\ p_c;\ 0)u_1 a_{1\mu}a_{2\nu}。$$
$$(8.10)_{11}$$

考虑到在质量壳层上

$$G^c(p)=Z_D S^{-1}(p),\ \Gamma_N(p_c,\ p_c;\ 0)=Z_D^{-1}\gamma_\mu,$$

代入$(8.10)_{11}$式就得到

$$M=Z_B e^2\bar{u}_2\gamma_\mu S(p_c)\gamma_\nu u_1 e_{1\mu}e_{2\nu}。 \qquad (8.11)_{11}$$

如果以$Z_B e^2=e_c^2$代入上式，就得到$(3.1)_{10}$式第一项，另一项可由光子线互换并做相同的考虑而得到。也就是说，我们以前在第十章里计算二级效应时，如果相应的量都以重整化的量代入，其中

$$e_c=Z_{\frac{1}{2}}^{1/2}e=e+\delta e。 \qquad (8.12)_{11}$$

所得结果在非相对论近似下相当于准确的计算。

按照微扰理论的观点，我们在计算矩阵元时，其中 e 应以未载粒子的电荷输入，而不能如我们在第十章里所做的那样简单地以电荷的观测值 e_c 代入。在今后做准确计算时，我们应该以

$$e=Z_B^{-1/2}e_c=e_c-\delta e$$

代入，或者说在我们以 e_c 来代替 e 时，同时要引进抵销项 $-\delta e$ 这样的处理程序，常称之为电荷重整化。

应该指出，在以上推导中曾利用了有关 Ward 等式的关系，而 Ward 等式在电磁相互作用下是适用的，可是在一般情况，并非一定成立。因此在一般相互作用下，相互作用常数的重整化的比例常数，并非经常是相同的。也就是一般情况下 e 和 e_c 的关系应取$(8.2)_{11}$式。

§11.9 S 矩阵元的重整化及其按 e_c 的展开

通过前面几节的讨论，我们知道在原来 $\mathscr{L}$ 中出现的各项，经过辐射修正以后，将要有所改变。同时我们又不能把这些修正的和原来 $\mathscr{L}$ 中出现的元件分开测量。因此即使不出现发散值，也应该进行相应的重整化，而这种重整化又可表示成相乘的重整化形式。例如由$(6.19)_{11}$，和$(8.4)_{11}$式

$$\left.\begin{aligned}&\psi\to Z_D^{1/2}\psi_c,\\&A\to Z_B^{1/2}A_c,\\&m=Z_m m_c=m_c-\delta m,\ \ e=Z_D^{-1}ZZ_B^{-1/2}e_c=Z_B^{-1/2}e_c。\end{aligned}\right\}(9.1)_{11}$$

我们认为原来 $\mathscr{L}$ 中出现的都是未经重整化的场量和未载的参量 e 和 m。例如在量子电动力学里

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2-\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)+m]\psi。 \tag{9.2}_{11}$$

如果把它用重整化过的量表示出来，利用 $(9.1)_{11}$ 式得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}Z_B(\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c)^2-Z_D\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi_c\\&+Z_D\bar{\psi}_c ie_c\gamma_\mu A_\mu^c\psi_c+Z_D\delta_m\bar{\psi}_c\psi_c\\=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c)-\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi_c+\bar{\psi}_c ie_c\gamma_\mu A_\mu^c\psi_c\\&-(Z_D-1)\bar{\psi}_c(\gamma_\mu\partial_\mu+m_c)\psi_c+(Z_D-1)\bar{\psi}_c ie_c\gamma_\mu A_\mu^c\psi_c\\&+Z_D\delta m\bar{\psi}_c\psi_c-(Z_B-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^c-\partial_\nu A_\mu^c)^2。\end{aligned} \tag{9.3}_{11}$$

上式最后等式右边的前三项和原来 $(9.2)_{11}$ 式的形式相同，而其余四项则是新引进的，都称为抵销项。我们就以重整化的量来进行微扰计算。这些新引进的抵销项，都被看成是新引进的相互作用的拉氏量。在逐级近似的计算中，重整化常数和 m_c 都是 e_c 的级数。Hepp [Comm. Math. Phys. **1** 95 (1965)] 曾证明这些抵销项的贡献，将可逐级抵销所出现的发散项。以致在逐级近似计算中，不再遇到发散量的牵累，这一点在我们以后具体计算中将得到证实。在进行具体计算以前，我们先对 S 矩阵元中发散量的抵销做一般的分析。

在以下的分析中我们对出现在 $\mathscr{L}$ 中的 ψ_1 和 A 等的定标数值，暂不加以限制，以保持选择定标的自由。以前我们讨论了 Feynman 图的各个元件部分的重整化，在质量重整化以后，我们摆脱了 Σ_1 和 Π_2(或由规范不变性的要求)的牵累。可是在 Z_D 和 Z_B 中含有 Σ_0 和 Π_0 依然给我们带来麻烦。现在我们来讨论对 S 矩阵元做整体的考虑，希望能避免这样的麻烦。其实也只有 S 矩阵元才在计算实际过程时起着直接作用。

考虑某一过程的既约图形，并按 Feynman 对应法则，而以相

应的满载的因子代入各个元件(电荷仍以 e 代入)这样来计算 S 矩阵元，就应该得到该过程的准确计算。具有 m 个角点的既约图形的矩阵元应该是

$$M\sim e^m\int(\Gamma)^m(G^e)^{F_e}(G^\gamma)^{F_\gamma}\mathbb{U}^{N_e}\mathbb{A}^{N_\gamma},\qquad(9.4)_{11}$$

其中 F_e, F_γ, N_e 和 N_γ 和以前一样分别表示内电子线，内光子线，外电子线和外光子线的数目，分别以 $(7.4)_{11}$, $(7.5)_{11}$, $(7.11)_{11}$, $(7.12)_{11}$, $(7.16)_{11}$ 和 $(8.12)_{11}$ 式代入上式，并考虑到 $(5.2)_{11}$ 式

$$m=F_e+\frac{N_e}{2}=2F_\gamma+N_\gamma$$

就得到

$$M\sim e_c^m\int(\Gamma_c)^m\cdot(G_e^e)^{F_e}\cdot(G_c^\gamma)^{F_\gamma}\cdot u^{N_e}A^{N_\gamma}\equiv M_c。\qquad(9.5)_{11}$$

以上已利用了 $(8.12)_{11}$ 式 $e_c=Z_B^{1/2}e$ 的关系。上式也说明对任何一个过程的 S 矩阵元 $(8.12)_{11}$ 式关系都是适用的。也就是说对于 S 矩阵元来讲，实际计算时只需以相应的重整化量来代替元件的满载因子，并以电荷观测值 e_c 代替 e 代入，就得到要计算的 S 矩阵元。以上所说的代换，即

$$G^e\to G_c^e,\ G^\gamma\to G_c^\gamma,\ \Gamma_\mu\to\Gamma_{\mu c},\ \mathbb{U}(p)\to u(p),$$
$$\mathbb{A}(k)\to A(k)。\qquad(9.6)_{11}$$

同时 $e\to e_c$ 的变换，可以简称为重整化变换。经过重整化变换以后的 S 矩阵元，就称为重整化的 S 矩阵元，并记以 M_c。$(9.5)_{11}$ 式说明 S 矩阵元在重整化变换下是保持不变的。因此我们可以通过 M_c 来计算 M 值得指出 S 矩阵元在重整化变换下保持不变的对称性质，是与重整化常数 Z_DZ_B 和 Z 的具体数值无关的。

考虑到带 c 的重整化量，在零级近似下，是和我们以前在第十章里所用的相应的未载粒子的量是相等的，因而在计算最低级近似时，其结果就和以前在第十章里介绍的做法所得结果一样。这样也就解释了为什么在没有考虑重整化效应以前，而只简单地以观测量 e_c 代替 e，并以 m_c 代替 m，在计算最低级效应时，会有准确的结果。值得指出，在本节所介绍的计算中，粒子的质量都是以观

测量 m_c 代入的，这一点看来已不需要做更多的解释了。

由此看来，对于低级效应，在理论上已有完全摆脱了 Z_B 和 Z_D 的牵累。可是在计算高级效应时，我们就要计算 G_c^e, G_c^γ, 和 Γ_c 的高级近似，正是这些高级修正项，反映了相互作用时所起的比单纯电荷和质量重整化更多的效应。由 $(7.3)_{11}$, $(7.6)_{11}$ 和 $(7.17)_{11}$ 式看来，计算它们的高级近似时，就要计算 $Z_D\Sigma_R$, $Z_B\Pi_R$ 和 $Z_D\Lambda_R$。因此在形式上还有 Z_D 或 Z_B 存在。不过，这并不带来实际困难。实际上我们并不能求出 G_c^e, G_c^γ 或 Γ_c 的完整表达式。这一点在前几节里已经有过介绍。现在我们也只希望能逐步近似地求出它们的近似解。这种逐步近似的解法，也和以前用微扰理论来计算 S 矩阵元一样，是按作用常数 e_c 来展开的，因而 G_c^e, G_c^γ 和 Γ_c 都应看成是 e_c 的级数。

在逐步近似地计算 $Z_D\Sigma_R$, $Z_B\Pi_R$ 或 $Z_D\Lambda_R$ 时，应该注意 Σ, Π 和 Λ 并不对应完整的 Feynman 图形，而只是某一个元件的部分，它们不带有外粒子线。它们中的 Z_D, Z_B 因子正好补偿了所缺的外粒子线所应有的因子。因而在逐步近似计算 $Z_D\Sigma_R$, $Z_B\Pi_R$ 或 $Z_D\Lambda_R$ 时正好分别和 Σ_{Rc}, Π_{Rc} 和 Λ_{Rc} 相等。其中 c 表示相应量的重整化变换。例如我们计算 m 个角点的既约图形的顶角型修正 $\Lambda(m)$ 时，由 Feynman 法则应有

$$\Lambda^{(m)}\sim e^{m-1}\int(\Gamma)^m(G^e)^{m-1}(G^\gamma)^{(m-1)/2}。\qquad (9.7)_{11}$$

应该注意，其中仍有一个因子 e，这儿没有写出，它将保留到最后出现在 Λ 本身所对应的角点上。以上已利用了 $(5.2)_{11}$ 式，并以 $N_e=2$, $N_\gamma=1$ 代入。把上式用相应的重整化量表示出来就成为

$$\Lambda^{(m)}\sim Z_D^{-1}e_c^{m-1}\int(\Gamma_c)^m\cdot(G_c^e)^{m-1}(G_c^\gamma)^{\frac{m-1}{2}}。\qquad (9.8)_{11}$$

所以

$$Z_D\Lambda^{(m)}\sim e_c^{m-1}\int(\Gamma_c)^m\cdot(G_e)^{m-1}\cdot(G_c^\gamma)^{\frac{m-1}{2}}=\Lambda_c^{(m)}。\qquad (9.9)_{11}$$

当然我们所需要的只是 $Z_D\Lambda_R^{(m)}=\Lambda_{Rc}^{(m)}$，而不是 $\Lambda_c^{(m)}$ 的全部。这只需把 $\Lambda_c^{(m)}$ 按 $(7.11)_{11}$ 式展开，丢掉第一项发散项就得到 $\Lambda_{Rc}^{(n)}$。

具有m个角点的$\Lambda_{Rc}^{(m)}$的最低级项是$\sim e_c^{(m-1)}$一级的项。如果我们只把$\Lambda_{Rc}^{(m)}$的计算准确到$\sim e_c^{m-1}$的最低级项。这时我们就只需要以Γ_c，G_c^e和G_c^γ的零级近似，也就是相应的未载粒子的γ_μ、$S(p)$和$D(k)$代入即得。这样计算就和以前第十章里所讲的一样了，只是我们只保留有限的余项Λ_R而不是Λ的全部。

如果我们在一定的近似下，求出了$Z_D\Lambda_R=\Lambda_{Rc}$的表达式，那么我们就可以通过 Ward 等式来求出相应近似的$Z_D\Sigma_R$，由$(7.13)_{11}$和$(7.14)_{11}$式

$$\frac{\partial\Sigma^*(p)}{\partial p_\mu}=\Lambda_\mu(p,\ p,\ 0)=\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)+\Lambda_{\mu R}(p,\ p;\ 0)。\tag{9.10}_{11}$$

两边(自p_c到p)对p_μ积分

$$\Sigma^*(p)-\Sigma^*(p_c)$$
$$=\Lambda_{\mu 0}(p_c,\ p_c;\ 0)\cdot(p_\mu-p_{c\mu})+\int_{p_c}^{p}\Lambda_{\mu R}(p,\ p;0)dp_\mu。\tag{9.11}_{11}$$

把上式和$(6.10)_{11}$式比较，并考虑到(7.15)式可得到：

$$\Sigma_R=[S(p)]^2\int_{p_c}^{p}\Lambda_{\mu R}(p,\ p;0)dp_\mu,$$
$$Z_D\Sigma_R=[S(p)]^2\int_{p_c}^{p}Z_D\Lambda_{\mu R}(p,\ p;0)dp_\mu$$
$$=[S(p)]^2\int_{p_c}^{p}\Lambda_{\mu Rc}(p,\ p;0)dp_\mu。\tag{9.12}_{11}$$

上式已把Z_D吸收到Λ_{Rc}里面去了，因而在计算中并无Z_D的牵累。在实际计算$Z_D\Sigma_R$的低级近似时，不必通过上式，而可直接由$Z_D\Sigma_R=\Sigma_{Rc}$来计算，其中c同样表示重整化变换。

例如我们考虑具有m个角点的$\Sigma^{*(m)}$修正。由$(5.2)_{11}$式并$N_e=2$，$N_\gamma=0$代入可知$F_e=m-1$，$F_\gamma=\frac{m}{2}$，由此得到

$$\Sigma^{*(m)}(p)\sim e^m\int(\Gamma)^m(G^e)^{m-1}(G^\gamma)^{m/2}。\tag{9.13}_{11}$$

以相应的重整化量表示出来就成为

$$\Sigma^{*(m)}(p)\sim Z_D^{-1}e_0\int(\Gamma_0)^m(G_0^e)^{m-1}(G_0^\gamma)^{m/2}=Z_D^{-1}\Sigma_0^{*(p)}。\quad(9.14)_{11}$$

所以

$$Z_D\Sigma_R^{*(m)}(p)=\Sigma_{R0}^{*}(p)。\quad(9.15)_{11}$$

同样对于具有m个角点的Π^*修正，由$(5.2)_{11}$式并以$N_e=0$，$N_\gamma=2$代入可知$F_e=m$，$F_\gamma=\frac{m-2}{2}=\frac{m}{2}-1$，由此得到：

$$\Pi^{*(m)}(k)\sim e^m\int(\Gamma)^m(G^e)^m(G^\gamma)^{\frac{m}{2}-1}。\quad(9.16)_{11}$$

以相应的重整化量表示出来就成为：

$$\Pi^{*(m)}(k)\sim Z_B^{-1}e_0\int(\Gamma_0)^m(G_0^e)^m(G_0^\gamma)^{\frac{m}{2}-1}。\quad(9.17)_{11}$$

所以

$$Z_B\Pi_R^*(k)=\Pi_{R0}^*(k)。\quad(9.18)_{11}$$

这样在整个计算方案中，就不再受到发散量的牵累了。

最后，我们再来把以后的计算方案做几点说明。在计算S阵元时：

(1) Feynman 法则依然有效，只是要以相应的重整化量(一般带有 c 符号)代入。

(2) 作为零级近似$G_0^e\Rightarrow S(p)$，$G_0^\gamma\Rightarrow D(k)$和$\Gamma_0\Rightarrow\gamma$而且$\Sigma_R$，$\Pi_R$和$\Lambda_R$均趋于零。

(3) 以零级近似的$G_0^e\Rightarrow S(p)$，$G_0^\gamma\Rightarrow D(k)$和$\Gamma\Rightarrow\gamma$代入固有能量型和顶角型修正的既约图形时，就得到

$$Z_D\Sigma_R=\Sigma_{R0},\quad Z_B\Pi_R(k)=\Pi_{R0}(k)$$

或

$$Z_D\Lambda_R=\Lambda_{R0}$$

的一级近似($\sim e_0^2$)。

(4) 以上面所求得的一级近似，分别代入$(7.3)_{11}$，$(7.6)_{11}$或$(7.17)_{11}$式就可求得G_0^e，G_0^γ和Γ_0的高一级近似。

(5) 以G_0^e，G_0^γ和Γ_0的高一级近似，代入固有能量型或顶角型时可以求得$Z_D\Sigma_R=\Sigma_{R0}$，$Z_B\Pi_R=\Pi_{R0}$或$Z_D\Lambda_R=\Lambda_{R0}$的更高一级近似。如此循环计算，逐步近似。

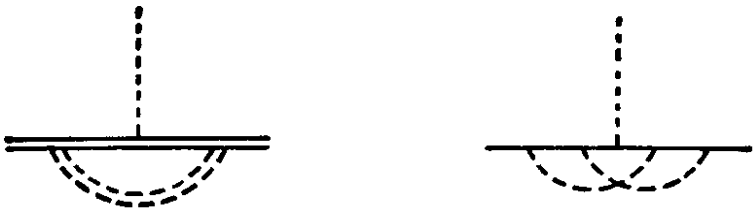


图 11-29

(6) 顶角型修正的既约图形有很多，在计算某一级近似时，所有对该级近似可以有贡献的图形都应考虑。例如我们考虑到 $\sim e_c^2$ 级近似，以下两个即约图形都应考虑。左边图形中的粗线应以相应的，准确到 $\sim e_c^2$ 级的 G_c^e 和 G_c^γ 代入。右边图形中的细线可以只用零级近似 $S(p)$，$D(k)$代入。

(7) 在计算中只涉及到 Σ_{Rc}，Π_{Rc} 和 Λ_{Rc} 带 R 符号的有限余式项，因而避免了发散项的牵累。

(8) 由以上的计算步骤所得 S 阵元的逐步近似，和以前的计算相似是按 e_c 展开级数的。

简单地讲，在计算高级修正时，和以前第十章所介绍的方法一样，只是对于每一元件部分的贡献，只保留它的有限余式，而把它们分别按 $(6.7)_{11}$，$(6.15)_{11}$ 和 $(7.13)_{11}$ 式展开时的 Σ_1，Σ_0，Π_2，Π_0 和 Λ_0 丢掉，因而至少在形式上就摆脱了发散量的牵累。

§11.10 紫外发散的消除

虽然我们在上一节里，证明了在实际计算 S 矩阵元时，可以避免发散量的牵累，可是还遗留了若干零星问题，尚未交待清楚。例如我们说各个元件部分，在质量壳层附近展开时的余式项是收敛的，这需要证明。其次，关于光子光子散射所引起的发散问题，以前也没有谈到。最后，虽然对于一定动量 p 来讲 $G_c^e(p)$，和 $G_c^\gamma(p)$是有限的。但在图形里，它作为内粒子的传播函数，还要对 p 积分。当 $G_c^e(p)$和

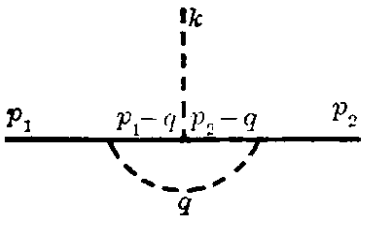


图 11-30

$G_c^{\gamma}(p)$对 p 积分时，是否会出现新的发散呢？也就是说我们还应该检查一下，当 $p\to\infty$ 时，$G(p)$ 的渐近行为。这些问题都集中到这一节里来讨论。至于真空起伏问题将留在下一节讨论。

首先考虑 $\Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2; k)$ 三个角点的顶角部分，如图 11-30 所示。$\Lambda_c^{(3)}$ 的最低级近似即为

$$\Lambda_c^{(3)}(p_1, p_2; k)=\int R(p_1, p_2; q)dq, \qquad (10.1)_{11}$$

其中

$$R(p_1, p_2; q)=\frac{e_c^2}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha S(p_1-q)\gamma_\mu S(p_2-q)\gamma_\beta D_{\alpha\beta}(q)。 \qquad (10.2)_{11}$$

由$(7.13)_{11}$和$(9.9)_{11}$式

$$\begin{aligned}Z_D\Lambda_R^{(3)}(p_1, p_2; k)&=\Lambda_{Rc}(p_1, p_2; k)\\&=\Lambda_c^{(3)}(p_1, p_2; k)-\Lambda_c^{(3)}(p_c, p_c; 0)\\&=\int[R(p_1, p_2; q)-R(p_c, p_c; q)]dq\\&=\int\left[\left(\frac{\partial R}{\partial p_1}\right)_{p_i'}\cdot(p_1-p_c)+\left(\frac{\partial R}{\partial p_2}\right)_{p_i'}\cdot(p_2-p_c)\right]dq,\end{aligned} \qquad (10.3)_{11}$$

其中 p_1' 和 p_2' 分别介于(p_1, p_c)和(p_2, p_c)之间。

由 $(10.2)_{11}$ 式看出 R 函数中的 p_1 和 p_2 经常是和 q 相伴出现的。因而 R 对 p 的微商，也就是 R 对 q 的微商。因此，$\partial R/\partial p$ 中的 $(p-q)$ 的幂数，要比 R 中的 $(p-q)$ 的幂数低一级。也就是 $(10.3)_{11}$ 式 $Z_D\Lambda_R$ 的等式右方的被积函数中 q 的幂数，要比原来 Λ_c 的 $(10.1)_{11}$ 等右方的被积函数 R 中的 q 的幂数低一级。另一方面，由 §11.5 的估计知道对应$(10.1)_{11}$ 的 $D=0$，最大发散为对数发散，因而对应$(10.3)_{11}$式积分的 $D=-1$，即$(10.3)_{11}$式积分是收敛的。类似的结论适用于一般的既约顶角部分 $Z_D\Lambda_R^{(m+1)}=\Lambda_{Rc}^{(m+1)}$。不另证明。

由$(9.12)_{11}$式知道 $Z_D\Lambda_R^{(m+1)}=\Lambda_{Rc}^{(m+1)}$ 的收敛性导致了

$$Z_D\Sigma_R^{(m)}=\Sigma_{Rc}^{(m)}$$

的收敛。也可以直接证明 $Z_D\Sigma_R^{(m)}=\Sigma_{Rc}^{(m)}$ 的收敛性。固有能量型的既约图形只有一个。如图 11-31 所示，其最低级近似即为：

$$\Sigma_c^{(2)}(p)=\int R(p,\ k)dk, \qquad (10.4)_{11}$$

其中

$$R(p,\ k)=\frac{e_c^2}{(2\pi)^4}\gamma_\mu S(p-k)\gamma_\mu D(k)。 \qquad (10.5)_{11}$$

由 $(6.7)_{11}$ 式可得：

$$\begin{aligned}Z_D\Sigma_R^{(2)}(p)\cdot(\gamma p-im_c)^2&=\Sigma_{Rc}^{(2)}(p)\cdot(\gamma p-im_c)^2\\&=\Sigma_c^{(2)}(p)-\Sigma_c^{(2)}(p_c)-\left(\frac{\partial\Sigma_c^{(2)}(p)}{\partial p}\right)_{p_c}\cdot(p-p_c)\\&=\int\left[R(p,\ k)-R(p_c,\ k)-\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)_c(p-p_c)\right]dk\\&=\int\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2R}{\partial p_\mu\partial p_\nu}\right)_{p'}(p_\mu-p_{c\mu})\cdot(p_\nu-p_{c\nu})dk。\end{aligned} \qquad (10.6)_{11}$$

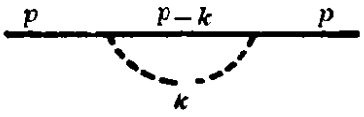


图 11-31

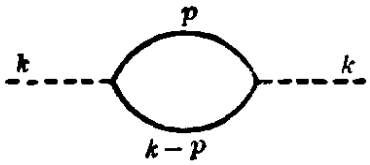


图 11-32

由 $(10.5)_{11}$ 式看出 R 中的 p 经常和 $(p-k)$ 相伴出现，因而 R 对 p 的微商也就是对 k 的微商。因此 $(10.6)_{11}$ 式中的右边被积函数的幂数，要比原来 $(10.4)_{11}$ 式的被积函数中的 k 的幂数低两级。同时 $\Sigma_c^{(2)}(p)$ 为原始发散且其 $D=1$，由此得到 $\Sigma_{Rc}^{(2)}(p)$ 的 $D=-1$，也是 $\Sigma_{Rc}^{(2)}(p)$ 的积分是收敛的。

同样对于光子固有能量型既约图形也只有一个，如图 11-32 所示：其最低级近似应为

$$\Pi_c^{(2)}(k^2)=\int R(k^2,\ p)dp, \qquad (10.7)_{11}$$

其中

$$R(k^2,\ p)=\frac{e_c^2}{(2\pi)^4}Sp[\gamma_\mu S(p)\gamma_\mu S(k-p)]。$$

由 $(6.13)_{11}$ 式可得：

$$Z_B\Pi_R^{(2)}\cdot(k^2)^2=\Pi_c^{(2)}(k^2)-\Pi_c^2(0)-\left(\frac{\partial\Pi_c^2(k^2)}{\partial k^2}\right)\cdot k^2$$
$$-\int\left[R(k^2,\ p)-R(0,\ p)-\left(\frac{\partial R}{\partial k^2}\right)_0\cdot k^2\right]dp$$
$$=\int\left(\frac{\partial^2 R}{(\partial k^2)^2}\right)\cdot(k^2)^2dp。\qquad(10.8)_{11}$$

类似以上的考虑可知 $Z_B\Pi_R^{(2)}=\Pi_{Rc}^{(2)}$ 也是收敛的。

下面我们来分析光子光子散射的发散问题，如图 11-33 所示，其矩阵元可写成：

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)=\int R_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4;\ p)dp。\qquad(10.9)_{11}$$

可以把上式稍加改写

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$$
$$=\int[R_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4;\ p)-R_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\ 0,\ 0,\ 0;\ p)dp$$
$$+M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\ 0,\ 0,\ 0)。\qquad(10.10)_{11}$$

由 $(5.3)_{11}$ 式估计知道 $(10.9)_{11}$ 式积分的 $D=0$ 为对数发散。由类似以上的考虑可知 $(10.10)_{11}$ 式中积分项是收敛的，而 $M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 则可能是对数发散，可是由 $(7.10)_8$ 式可知

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\ 0,\ 0,\ 0)=0。$$

因而得到 $M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ 应就是 $(10.10)_{11}$ 式的积分项，它也是收敛的。

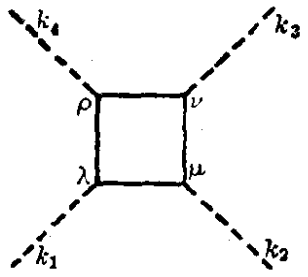


图 11-33

真空起伏和红外发散的消除，将在以下两节里讨论。这样由以上的讨论，我们就达到了消除既约图形的发散的目的。最后我们在下面来分析可约图形的发散的问题。

对于可约图形矩阵元的计算，可由其相应的骨架图形的内粒子线及角点分别以 $G_c^e(p)$，$G_c^\gamma(k)$ 和 Γ_0 代入，并对它们取足够的近似而得到。不过此时我们要对内粒子线动量 p 或 k 积分。因而我们有必要检查一下 $G_c^e(p)$ 和 $G_c^\gamma(k)$ 的渐近行为，看看当对 p 或对 k 积分时是否会出现新的发散。在实际计算中我们可以看出（参

看第十二章的计算)，在高动量区的 $G_c^e(p)$，$G_c^\gamma(k)$ 和 Γ_c 的渐近行为，将分别和 $S(p)$，$D(k)$ 和 γ 具有相同的数量级。实际上经过以前所讲的重整化的考虑以后，它们将分别具有以下的形式(参看下章的计算，例如$(2.18)_{12}$，$(3.12)_{12}$ 和$(4.15)_{12}$式)：

$$\left.\begin{aligned} G_c^e(p) &\sim S(p) f_s\left(\ln\frac{p^2}{m^2}\right), \\ G_c^\gamma(k) &\sim D(k) f_D\left(\ln\frac{k^2}{m^2}\right), \\ \Gamma_c(p,\ p;\ 0) &\sim f_\Gamma\left(\ln\frac{p^2}{m}\right)。 \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)_{11}$$

其中 f_s，f_D 和 f_Γ 分别为其宗量 $\ln\frac{p^2}{m^2}$ 的多项式。因此可约图形的骨架图形的发散程度，是和既约图形的发散程相同的。因而对于骨架图形的发散(通常称为骨架发散)也可以用以上所讲的对既约图形发散的消除方法，加以消除。

§11.11 真空起伏

无外粒子线的 Feynman 图形，对应真空态的修正，常称为真空起伏图形。这些图形的 S 矩阵元，只有对应真空态到真空态的对角元素才不为零。其最简单的典型可有以下各图形作为代表。

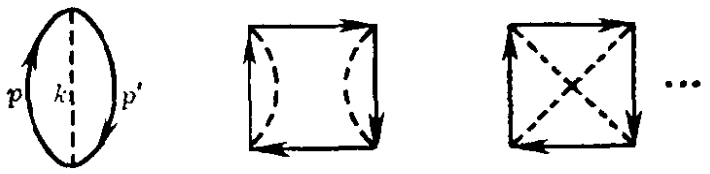


图 11-34

每个这类图形所对应的 S 矩阵元都有发散值出现。现仅分析第一个图形以为示例。根据$(5.2)_8$式的对应关系。第一图形的 S 矩阵元如下：

$$M\sim\iiint\delta(k+p-p')\cdot\delta(k+p-p')\frac{1}{k^2}$$
$$\cdot\mathrm{Tr}\left[\frac{\gamma p+im}{p^2+m^2}\gamma_\mu\frac{\gamma p'+im}{p'^2+m^2}\gamma_\mu\right]dp\,dp'\,dk。 \qquad (11.1)_{11}$$

对 k 积分可得

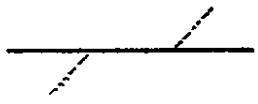
$$M\simeq\iint\delta(0)\frac{1}{(p-p')^2}\,Sp\left[\frac{\gamma p+im}{p^2+m^2}\,\gamma_\mu\,\frac{\gamma p'+im}{p'^2+m^2}\,\gamma_\mu\right]dp\,dp'。$$

$$(11.2)_{11}$$

上式 M 具有发散值，首先表现在 $\delta(0)$ 函数上，它与所考虑的场的四维时空成比例。其次在对内电子线动量 p 或 p' 积分时也会出现发散值。

对于不同图形的真空起伏 S 矩阵元的数值，记以 M_p(其中下标 p 反映不同的图形)一般都具有发散值。令 $C=\sum_p M_p$，其中求和包括对所有不同的真空起伏图形，以及其各种可能的组合进行，也就是 S 矩阵元中所包含的真空起伏的各项的总和。由于动量守恒的要求，真空态只能过渡到真空态，其他由真空态过渡到非真空态的 S 矩阵元均为零。所以真空态应该是 S 矩阵元的本征态，其本征值应该就是上面引进的 C，即 $S|0\rangle=C|0\rangle$。另一方面由于 S 矩阵为幺正矩阵，所以 C 的绝对值应为 1，也就是说可写成 $C=e^{i\alpha}$(α 为实数)。上述 M_p 具有发散值，正反映出位相 α 为发散值。由此看出，真空起伏各项总和的效应只是为真空态矢量，经过一个发散的相位变换而已。

在各种具体过程中，真空起伏的效应本来也应有所作用。因为对于任一具体过程，存在着一系列高级修正项，其中也包括对应各该过程与真空起伏的各项组合。例如 Compton 散射除了以前所讨论过的图形



以外，还要考虑以下各种图形



图 11-35

因此对于任一具体过程的 S 矩阵元，本应是

$$S=(\sum_p M_p)S'=CS'$$

(不相连的 Feynman 图形，所对应的 S 矩阵元，为其各个别矩阵元的乘积)其中 S' 为不考虑真空起伏效应时所得到的 S 矩阵元。我们已知 $C=e^{i\alpha}$，因而 S' 和 S 只相差一个无关紧要的相位，由二者所得到的过渡机率等物理量都是相同的，所以实际上我们可以只简单地考虑 S'(在这以前和以后我们仍把它简写成 S)，而不必考虑真空起伏的效应。

§11.12 红外发散及其消除

以前在§11.5中，我们曾提到当考虑辐射修正，对虚光子动量积分时，在积分下限 $k\to 0$ 区域也会带来发散，另一方面，当我们计算具体过程时，也发现当发射实光子的动量 $k\to 0$ 时其有效截面也会具有发散值。例如韧致辐射的 $(5.14)_{10}$ 式中，当所发射光子的能量 $\omega\to 0$(这样的光子常称为软光子)时，它就具有对数发散的有效截面。这些发散都来自极小的光子能量区，故常称为红外发散。这种红外发散并非来自场具有无穷多的自由度，不是场论的本质困难。

我们以前所用的微扰理论的方法，其实并不适用于来讨论低能量软光子与电子的相互作用。例如我们把 $(1.4)_4$ 式(由于其中有 $\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$ 因子)代入电磁相互作用的拉氏量中，可以看出当 $\omega\to 0$ 时，软光子和电子的相互作用将越来越大。由此我们就会得到以下结论，即发射两个低能光子的几率比发射一个低能软光子的几率还要大。由此可以看出，用量子微扰理论来处理低能($\omega\to 0$)软光子和电子的相互作用是不适宜的。因此我们可以认为，以前利用微扰理论逐步近似所得结论，只适用于光子的 ω 大于一个下限 $\omega_{\min}$ 的情况。不过 ω 并不是一个四维不变量。为此我们在计算 $\omega>\omega_{\min}$ 区时，也可以形式地引进光子静止质量 λ (即与中性矢量介子相当)与之等效。当然在 $\omega>\omega_{\min}$ 区内是不会有红外发散的，不过只引进了参量 $\omega_{\min}$ 或 λ 而已。由于同一过程，例如电子在外场中的

辐射，比较以上两种不同方法所得结果，即取 $\omega>\omega_{\min}$ 或取光子静质量 $\lambda\neq 0$ $\left(\text{即取 } D(k)=\frac{-i}{k^2+\lambda^2}\right)$，计算所得的结果，可以得到两者相应关系如下(在电子能量很小的 $\frac{v}{c}\ll 1$ 的情况下)：

$$\ln 2\omega_{\min}=\ln\lambda+\frac{5}{6}。\qquad (12.1)_{11}$$

对于低能软光子区，即 $\omega<\omega_{\min}$ 区，我们可以用经典电动力学来处理。因为低能光子本身是可以用经典电动力学来处理的，同时由于光子能量很低，则由它产生电子对的几率也是很小的，或者说低能软光子不致使真空引起显著变化。因而在处理低能软光子和电子相互作用时，电子的湮灭和产生的过程也是可以忽略的。也就是此时对于电子场也可以不必量子化。总之在 $\omega<\omega_{\min}$ 的低能区，我们可以用经典电动力学来处理电磁相互作用。把在低能区用经典电动力学计算的结果，和在 $\omega>\omega_{\min}$ 区由量子电动力学计算结果在 $\omega=\omega_{\min}$ 处衔接起来，其结果可与 $\omega_{\min}$ 或 λ 无关，只要 $\omega_{\min}$ 或 λ 够小。这就是我们实际可以采用的方法。

对于红外发散问题，我们还可以作进一步深入的讨论。按照微扰理论的分析，荷电粒子倾向于发散更多的低能软光子，因而如果我们采用微扰方法来计算低能软光子过程时，必须把数目不同的软光子放在同一数量级来考虑。而且对于低能软光子，实光子和虚光子的区分也逐渐消失，我们在考虑红外发散时，还应该把实软光子和虚软光子同时加以考虑。对于软光子我们应以其引起的红外发散的程度来作为数量级的分类。

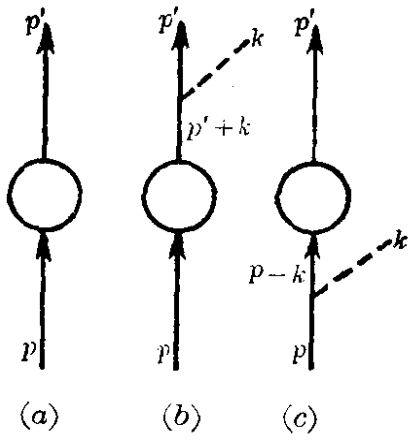


图 11-36

实际上任何测量仪器都有一定的精确度，例如，对于低于某一能量上限 ΔE 的中性粒子，我们就无法测量它的存在。因此当我们测量某一具体过程的截面时，经常都包含了带有不同数目的低能

软光子(其能量总和小于 ΔE)的相应过程的有效截面之和，例如，当我们测量电子在外场中的卢瑟福散射过程时，所得有效截面其中经常包含有电子在外场发射了不同数目的软光子的韧致辐射的截面之和。为了对这个问题作全面讨论做好准备，先来考虑简单的示例，考虑某一过程其中只有一条 Dirac 粒子线直穿初态和末态。如图 11-36(a) 所示，其散射振幅可写成

$$M=\bar{u}(p')Q(p',\ p)u(p)。\qquad (12.2)_{11}$$

与图 11-36(a) 相应考虑该过程伴有一个软光子的散射振幅，如图11-36(b)和(c)所示，其相应的散射振幅(外软光子在整个空间归一化)：

$$M^{(1)}=\frac{ie}{(2\pi)^{3/2}}\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma e(k)}{\sqrt{2\omega}}\cdot\frac{i(p'+k)\gamma-m}{(p'+k)^2+m^2}Q(p'+k,\ p)\right.$$
$$\left.+Q(p',\ p-k)\frac{i(p-k)\gamma-m}{(p-k)^2+m^2}\frac{\gamma e(k)}{\sqrt{2\omega}}\right]u(p)。$$
$$(12.3)_{11}$$

考虑软光子所引起的红外发散，我们把上式中 $|\boldsymbol{k}|=\omega\to 0$ 保留最高发散项，并考虑到 $p'^2=-m^2=p^2$ 且

$$\bar{u}(p')(i\gamma p'+m)=0,\ (i\gamma p+m)u(p)=0$$

可得到(由内部 Dirac 粒子回路上所发射软光子的贡献为零不必考虑)。

其中

$$\left.\begin{aligned}&M^{(1)}=\beta(k)M,\\&\beta(k)=\frac{-e}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{(p'e)}{p'\cdot k}-\frac{pe}{p\cdot k}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (12.4)_{11}$$

由以上计算可以看出，每发射一个软光子，在考虑红外发散时，它对散射振幅贡献一个因子

$$\beta^{(1)}(k)=\frac{-e}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\zeta\frac{\gamma e(k)}{(p,\ k)}。\qquad (12.5)_{11}$$

其中 $\zeta=\pm 1$，当发射软光子来自出射 Dirac 粒子时 $\zeta=+1$，当发射软光子来自入射 Dirac 粒子时 $\zeta=-1$。

下面考虑在同一根 Dirac 粒子线上发射两个软光子的情况，

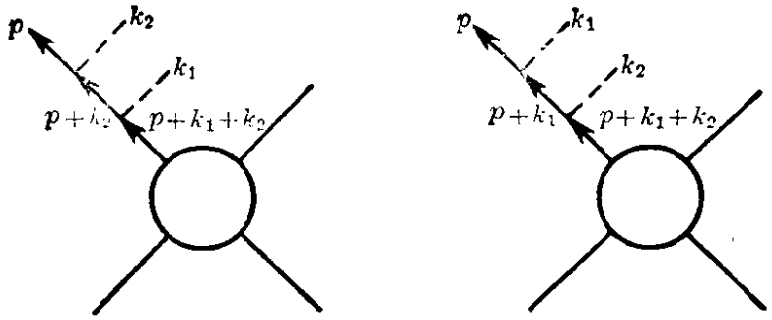


图 11-37

如图 11-37 所示。类似$(12.5)_{11}$式的推导，可得它们贡献一个因子

$$\beta^{(2)}(k_1k_2)\sim\left[\frac{1}{(p\cdot k_1)(p\cdot(k_1+k_2))}+\frac{1}{(p\cdot k_2)(p\cdot(k_2+k_1))}\right]。\qquad(12.6)_{11}$$

把以上两式相加得到

$$\beta^{(2)}(k_1,\ k_2)\sim\frac{1}{(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)}。\qquad(12.7)_{11}$$

依此类推，当有 n 个软光子附加到同一条 Dirac 粒子线(并考虑到 n 个软光子的不同发射顺序)，它们对散射振幅(红外发散)贡献一个因子

$$\beta^{(n)}(k_1,\ k_2\cdots k_n)\sim\frac{1}{(p\cdot k_1)(p\cdot k_2)\cdots(p\cdot k_n)}。\qquad(12.8)_{11}$$

一般可写成

$$\beta^{(n)}(k_1,\ k_2\cdots k_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{-e}{(2\pi)^{3/2}(2\omega)^{1/2}}\ \zeta_i\ \frac{[p\cdot e(k_i)]}{(p\cdot k_i)},\qquad(12.9)_{11}$$

发射的软光子并不限于来自同一条 Dirac 粒子线，我们还应考虑来自不同 Dirac 粒子线的 n 个软光子，对散射振幅(红外发散)贡献的因子，一般可写成

$$\beta^{(n)}(k_1,\ k_2\cdots k_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{-e}{(2\pi)^{3/2}(2\omega)^{1/2}}\sum_{j=1}^{N_e}\zeta_j\ \frac{p_j\cdot e(k_i)}{p_j\cdot k_i},\qquad(12.10)_{11}$$

其中 N_e 为外 Dirac 粒子线数目。带有 n 个软光子的散射振幅应

该就是

$$M^{(n)}=\beta^{(n)}M。\qquad (12.11)_{11}$$

我们最终要计算的是有效截面，n 个软光子对有效截面贡献的因子应是 $\sim\sum_e|\beta^n|^2$，求和是对软光子极化进行的。n 个软光子对有效截面(红外发散)贡献的因子记以 $D^{(n)}$，

$$\begin{aligned}D^{(n)}&=\frac{1}{n!}\sum_e|\beta^n|^2\\&=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^2}{(2\pi)^3 2\omega_i}\left|\sum_{j,k=1}^{N_e}\zeta_j\zeta_k\frac{(p_j\cdot p_k)}{(p_jk_i)(p_k\cdot k_i)}\right|,\end{aligned}\qquad (12.12)_{11}$$

其中 $\frac{1}{n!}$ 是考虑到光子为全同 Boson 对它不能编号而引进的因子。

实际计算有效截面时，我们还要对末态软光子相空间积分。也就是 n 个软光子对有效截面(红外发散)贡献的因子应为

$$\begin{aligned}E^{(n)}&=\int D^{(n)}\prod_{i=1}^{n}d\boldsymbol{k}_i\\&=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int\frac{e^2\,d\boldsymbol{k}_i}{(2\pi)^3(2\omega_i)}\left|\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_jk_i)(p_k\cdot k_i)}\right|\\&=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int_{\lambda}^{\Delta E}\frac{e^2}{(2\pi)^3}dk_i\delta(k^2)\left|\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_j\cdot k_i)(p_k\cdot k_i)}\right|。\end{aligned}\qquad (12.13)_{11}$$

上式最后一步利用了(1.14)$_9$式关系。上式对 $d|\boldsymbol{k}|$ 积分时下限取为 $\lambda>0$，积分最后再令 $\lambda\to0$。积分上限 ΔE 是由仪器的精确度来确定的。还应该注意到，在对 $\prod_i d|\boldsymbol{k}_i|$ 积分时，不仅每个软光子的能量要小于 ΔE，而且所有 n 个软光子能量之和也要低于 ΔE。因此在上式积分时要引进一个 $\sum_i k_{i0}$ 的分布函数(阶梯函数)如图 11-38 所示，可以把 $\theta(k_{i0})$ 用 Fourier 积分表示出来：

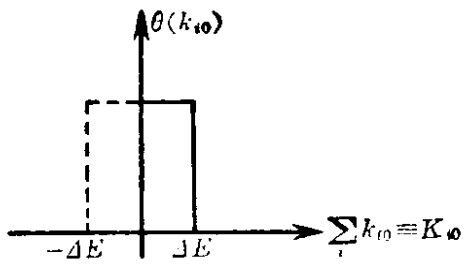


图 11-38

$$\theta(k_{i0})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\tilde{\theta}(x)e^{i\sum k_{i0}\cdot x}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\frac{\sin(\Delta E\cdot x)}{x}e^{i\sum k_{i0}\cdot x}dx, \qquad (12.14)_{11}$$

插入$(12.13)_{11}$式，得到

$$E^{(n)}=\frac{1}{n!}\frac{1}{\pi}\int dx\,\frac{\sin(\Delta E\cdot x)}{x}\exp(i\sum k_{i0}\cdot x)$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}\int_{\lambda}^{\Delta E}\frac{e^2\,d\boldsymbol{k}_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}\left|\sum_{j,k}^{N_q}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_ik_i)(p_k\cdot k_i)}\right|$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{1}{\pi}\int dx\,\frac{\sin(\Delta E\cdot x)}{x}\prod_{i=1}^{n}\left[\int\frac{d\boldsymbol{k}_ie^3}{(2\pi)^3\cdot 2\omega_i}\right|$$

$$\cdot\sum_{j,k}^{N_q}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_jk_i)(p_k\cdot k_i)}\left|e^{ik_{i0}x}\right]。 \qquad (12.15)_{11}$$

发射 n 个软光子的截面(红外发散部分)就是

$$\sigma^{(n)}=E^{(n)}\sigma, \qquad (12.16)_{11}$$

其中 σ 为不带软光子的原来无红外发散的过程的有效截面。还应该指出，实际上我们要计算的应该是发射各种数目软光子的总截面之和。

$$\sigma^{[0-\infty]}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}E^{(n)}\sigma=E\sigma。 \qquad (12.17)_{11}$$

以$(12.15)_{11}$式代入上式可得：

$$E=\sum_{n=0}^{n}E^{(n)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int dx\,\frac{\sin(\Delta E\cdot x)}{x}\exp\left[P\int_{\lambda}^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}e^{ik_0x}\right], \qquad (12.18)_{11}$$

其中 $k_0=|\boldsymbol{k}|$，而 P 表示某一对 $\boldsymbol{k}_i$ 方向的积分，其具体表示参看以下$(12.20)_{11}$式。

下面我们来计算 $(12.15)_{11}$ 式中括号内的积分，取极坐标如图 11-39 所示，

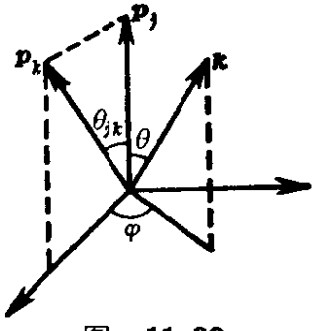


图 11-39

$$I=\int k_0^2\,d\varphi\,d\cos\theta e^{ik_0x}\,dk_0$$

$$\cdot\left|\sum_{j,k}^{N_e}\frac{e^2\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{\left\{\begin{array}{l}(2\pi)^3 2k_0[\epsilon_j k_0-p_j k_0\cos\theta]\\ [\epsilon_k k_0-p_k k_0(\cos\theta\cos\theta_{jk}+\sin\theta\sin\theta_{jk}\cos\varphi)]\end{array}\right\}}\right|$$

$$=\int d\varphi\,d\cos\theta$$

$$\cdot\left|\sum_{j,k}^{N_e}\frac{e^2\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{\left\{\begin{array}{l}2(2\pi)^3[\epsilon_j-p_j\cos\theta]\\ [\epsilon_k-p_k(\cos\theta\cos\theta_{jk}+\sin\theta\sin\theta_{jk}\cos\varphi)]\end{array}\right\}}\right|$$

$$\cdot\int_\lambda^{\Delta E}\frac{e^{ik_0x}}{k_0}dk_0。\qquad (12.19)_{11}$$

把上式和$(12.18)_{11}$式括号内表示相比，可知$(12.18)_{11}$式中的P即为

$$P=\int d\varphi\,d\cos\theta$$

$$\cdot\left|\sum_{j,k}^{N_e}\frac{e^2\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{\left\{\begin{array}{l}2(2\pi)^3[\epsilon_j-p_j\cos\theta]\\ \cdot[\epsilon_k-p_k(\cos\theta\cos\theta_{jk}+\sin\theta\sin\theta_{jk}\cos\varphi)]\end{array}\right\}}\right|\cdot$$

$$(12.20)_{11}$$

以上$p_j\equiv|\boldsymbol{p}_j|$。

余下对dk_0积分具有红外发散作如下处理。并取$\lambda\to0$

$$I'=\int_\lambda^{\Delta E}\frac{e^{ik_0x}}{k_0}dk_0\to\int_\lambda^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}+\int_0^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}(e^{ik_0x}-1)$$

$$=\ln\left(\frac{\Delta E}{\lambda}\right)+\int_0^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}(e^{ik_0x}-1)。\qquad (12.21)_{11}$$

代入$(12.18)_{11}$式得到：

$$\lim_{\lambda\to0}E=\left(\frac{\Delta E}{\lambda}\right)^p\cdot\frac{1}{\pi}\int dx\,\frac{\sin(\Delta Ex)}{x}$$

$$\cdot\exp\left[P\int_0^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}(e^{ik_0x}-1)\right]。\qquad (12.22)_{11}$$

代入$(12.17)_{11}$式得到

$$\boxed{\sigma^{(0-\infty)}=\left(\frac{\Delta E}{\lambda}\right)^p\cdot F\sigma,}\qquad (12.23)_{11}$$

其中

$$F=\frac{1}{\pi}\int dx\,\frac{\sin(\Delta E\cdot x)}{x}\exp\left[\int_0^{\Delta E}\frac{dk_0}{k_0}(e^{ik_0x}-1)\right],$$

$$(12.24)_{11}$$

其中 $p>0$，所以当 $\lambda\to 0$ 时上式出现发散即红外发散。

以上讨论了实软光子所引起的红外发散，与此同时我们还必须考虑虚软光子的效应。考虑与以上讨论的相同的过程，不过现在不是考虑发射实软光子，而且考虑在外 Dirac 粒子之间交换虚光子的效应。内 Dirac 粒子线的动量并不限制在质量壳层上，因此当附加另一虚光子时，当虚光子动量 $k\to 0$ 时并不产生红外发散 $\left(\sim\frac{dp}{(p\pm k)^2+m^2}\not\to\infty,\ \text{当 } k\to 0\right)$。所以至少在讨论最高级红外发散的消除时，可以只考虑外 Dirac 粒子之间交换的虚光子的效应。

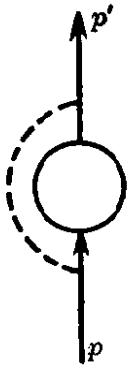


图 11-40

类似以上的推导，在两外 Dirac 粒子之间交换虚光子，将给原来过程的散射振幅带来相乘因子。为了便于理解，先考虑只有两条外 Dirac 粒子线情况，如图 11-40 所示

$$M^{(1)\prime}=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\bar{u}(p')\gamma_\mu\frac{i(p'-k)\gamma-m}{(p'-k)^2+m^2}Q\cdot\frac{i(p-k)\gamma-m}{(p-k)^2+m^2}\gamma_\mu u(p)\frac{dk}{k^2}$$

当 $k\to 0$ 时

$$M^{(1)\prime}=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{-ip'_\mu}{p'\cdot k}\bar{u}(p')Qu(p)\frac{-ip_\mu}{p\cdot k}\frac{dk}{k^2}$$
$$=\rho M。\qquad(12.25)_{11}$$

其中

$$\rho=\int\frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{p'\cdot p}{(p'\cdot k)(p\cdot k)}\frac{dk}{k^2}。\qquad(12.26)_{11}$$

一般有更多的外 Dirac 粒子的情况下，例如有 N_e 个外 Dirac 粒子其间交换了 n 个虚光子，类似以前的考虑可得到相应的因子为（应该注意虚光子线在一端为发射，而另一端则为吸收，而不象以上考

虑的实光子都是发射的)。

$$\rho^{(n)}=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\cdot\frac{ie^2}{(k^2-i\epsilon)}\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_j\cdot k)(p_k\cdot k)}\right]^n,\tag{12.27}_{11}$$

其中 $\frac{1}{2}$ 来自对 $\sum_{j,k}$ 求和有了重复计数,$\frac{1}{n!}$ 来自光子是全同粒子不能编号。交换 n 个虚光子的散射振幅即为

$$M^{(n)\prime}=\rho^{(n)}M。\tag{12.28}_{11}$$

对虚光子数目求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}M^{(n)\prime}=\sum_{n=0}^{n}\rho^{(n)}\cdot M=\varepsilon M,\tag{12.29}_{11}$$

其中

$$\varepsilon=\sum_{n=0}^{n}\rho^{(n)}=\exp\left[\frac{1}{2}\int dkR(k)\right]。\tag{12.30}_{11}$$

与$(12.27)_{11}$ 式相比,其中

$$R(k)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4(k^2-i\epsilon)}\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_jk)(p_kk)}。\tag{12.31}_{11}$$

有效截面则为

$$\sigma'^{(0-\infty)}=|\varepsilon|^2\sigma=\left\{\exp\left[\mathrm{Re}\int dk\,R(k)\right]\right\}\cdot\sigma。\tag{12.32}_{11}$$

其中 Re 表明实部。考虑到

$$\mathrm{Re}\,\frac{i}{k^2-i\epsilon}=-\pi\delta(k^2),\tag{12.33}_{11}$$

代入$(12.31)_{11}$ 式再代$(12.32)_{11}$ 式得到

$$\begin{aligned}|\varepsilon|^2&=\exp\left[\frac{-e^2}{2(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\delta(k^2)\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_j\cdot k)(p_k\cdot k)}\right]\\&=\exp\left[\int_{\lambda}^{\Lambda}\frac{-e^2}{(2\pi)^3}dk\cdot\delta(k^2)\sum_{j,k}^{N_e}\frac{\zeta_j\zeta_k(p_j\cdot p_k)}{(p_j\cdot k)(p_k\cdot k)}\right]\\&=\exp\left[-p\ln\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\right]=\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{-p}=\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{p}。\end{aligned}\tag{12.34}_{11}$$

代入$(12.32)_{11}$ 式得到

$$\sigma'^{(0-\infty)}=|\varepsilon|^2\sigma=\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{p}\sigma。\tag{12.35}_{11}$$

以上推导中考虑了对虚光子动量 k 积分遍及整个 k 空间。积分上限取为 Λ，积分后再令 Λ 趋于 ∞。

最后我们考虑实软光子和虚软光子的总效应由 $(12.23)_{11}$ 和 $(12.35)_{11}$ 式得到

$$\boxed{\sigma_T=\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^p\cdot\left(\frac{\Delta E}{\lambda}\right)^p\cdot F\sigma=\left(\frac{\Delta E}{\Lambda}\right)^p F\sigma。} \quad (12.36)_{11}$$

上式中已不再包含红外发散，但紫外发散依然存在，关于紫外发散的消除，可以用以前介绍的重整化方案来消除。

以上介绍的消除红外发散的分析，看来是比较全面的，不过我们在此所讨论的只是红外发散的最高级项的消除，从这一点讲还是欠完善的。这方面进一步的讨论可参看 Phys. Reports **24** c No. 4(1976)有关部分。

§11.13 介子理论里的发散问题

以上所讨论的有关发散消除的问题，实际上都只限于电动力学的范围，不过其中所讲到的基本程序，对于其他情况也同样适用。本节就来分析 πN 体系的发散问题。πN 体系和 $e\gamma$ 体系在形式上有很多相似之处，在这里我们不再重复以前所讲过的推导运算，而只概要地介绍一下，利用抵销项方法来消除发散的情况。

πN 体系在理论形式和 $e\gamma$ 体系也有不同之处，主要在于 π 介子的静质量不为零，而光子的静质量为零。πN 体系不存在规范不变性，因此在以前利用规范不变性的要求所导出的各种关系，将对 πN 体系不再适用。所以对于 πN 体系，除了有核子的质量抵销项以外，还应有 π 介子的质量抵销项，以及 π 介子和 π 介子散射的抵销项。后面二个抵销项对于 $e\gamma$ 体系，由于规范不变性的要求都应为零。此外，如果我们采用赝标介子，赝标耦合，则由于 G 宇称守恒，三个 π 介子的角点应为零。这和 $e\gamma$ 体系里，由于 Furry 定理所导致的结果是一致的。如果我们不采取赝标介子赝标耦合，

设有 G 宇称守恒的禁戒，那么我们还需要引进三个 π 介子角点的抵销项。不过我们不再做这样的考虑，只是在此提起注意而已。

由$(7.2)_7$式(经过适当改写)可得 πN 体系的拉氏量应为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}_N+\mathscr{L}_\pi+\mathscr{L}_{\text{相互}}\\&=-\frac{1}{4}[\bar{\Psi},(\gamma_\mu\partial_\mu+2M)\Psi]-\frac{1}{2}[\partial_\mu\vec{\varphi}\cdot\partial_\mu\vec{\varphi}+\mu^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}]\\&\quad-G\frac{i}{2}[\bar{\Psi},\vec{\tau}\gamma_5\Psi]\cdot\vec{\varphi}+\frac{1}{2}\delta M[\bar{\Psi},\Psi]\\&\quad-\frac{1}{2}\delta\mu^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}-\delta\lambda(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2。\end{aligned}\tag{13.1}_{11}$$

以上 M 和 μ 分别为核子和 π 介子的质量观测值，并把质量修正部分并入到 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$ 中去了。最后一项是用来抵销 $\pi\pi$ 散射所引起的发散的抵销项。

我们把场算符进行重整化变换。参看$(7.11)_{11}$和$(7.12)_{11}$式

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x)&=Z_D^{1/2}\Psi_c(x),\\\vec{\varphi}(x)&=Z_B^{1/2}\vec{\varphi}_c(x)。\end{aligned}\right\}\tag{13.2}_{11}$$

与此同时，参看$(7.16)_{11}$和$(8.2)_{11}$式

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_5&=Z^{-1}\Gamma_{5c},\\G&=Z_D^{-1}Z_B^{-1/2}ZG_c,\end{aligned}\right\}\tag{13.3}_{11}$$

其中 G_c 为相互作用常数的观测值。把以上变换代入$(13.1)_{11}$式。经过整理可得到，参看$(9.3)_{11}$式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\mathscr{L}_N+\mathscr{L}_\pi+\mathscr{L}_{\text{相互}}\\&=-\frac{1}{4}[\bar{\Psi}_c,(\gamma_\mu\partial_\mu+2M)\Psi_c]-\frac{1}{2}[\partial_\mu\vec{\varphi}_c\cdot\partial_\mu\vec{\varphi}_c+\mu^2\vec{\varphi}_c\vec{\varphi}_c]\\&\quad\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{2}(Z_B-1)\cdot(\partial_\mu\vec{\varphi}_c\cdot\partial_\mu\vec{\varphi}_c+\mu^2\vec{\varphi}_c\cdot\vec{\varphi}_c)\\&-\frac{1}{4}(Z_D-1)[\bar{\Psi}_c,(\gamma_\mu\partial_\mu+2M)\Psi_c]\\&+\frac{1}{2}\delta MZ_D[\bar{\Psi}_c,\Psi]+\frac{1}{2}\delta\mu^2Z_B\vec{\varphi}_c\cdot\vec{\varphi}_c\\&-\delta\lambda Z_B^2\cdot(\vec{\varphi}_c\cdot\vec{\varphi}_c)^2-\frac{i}{2}G_cZ[\bar{\Psi}_c,\vec{\tau}\gamma_5\Psi_c]\vec{\varphi}_c\end{aligned}\right\}=\mathscr{L}_{\text{相互}}\end{aligned}\tag{13.4}_{11}$$

如果我们基于上式并以 ψ_0 和 φ_0 作为我们的出发点，我们就得到以下的各角点分别来自 $\mathscr{L}_{相互}$ 中的各项，即

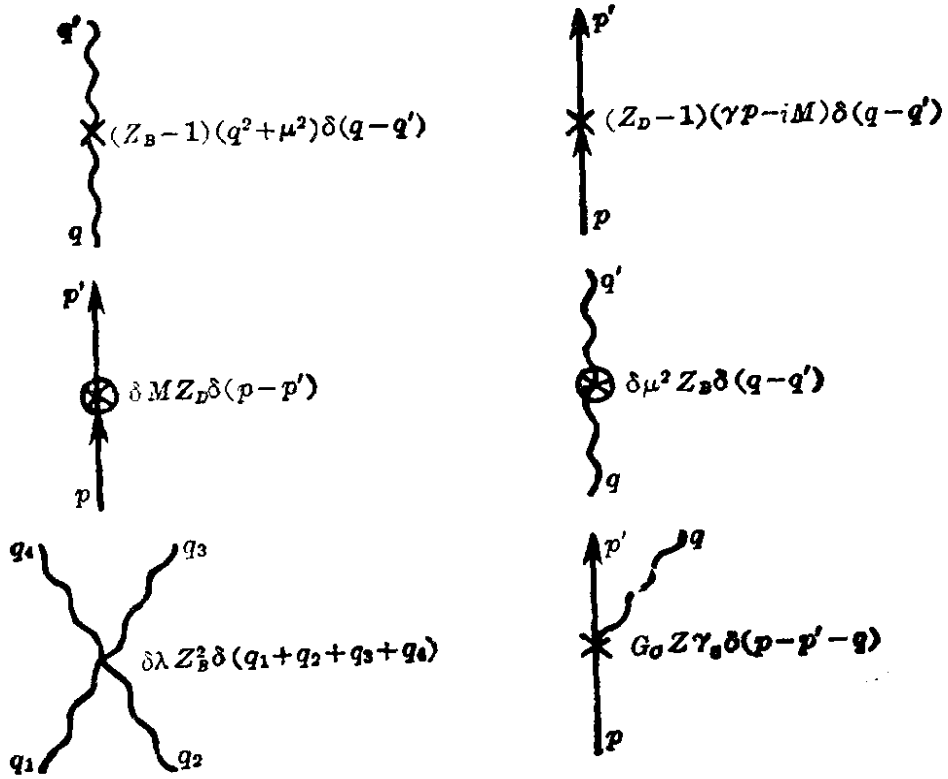


图 11-41

其中只有最后一项

$$-\frac{i}{2}G_0Z[\overline{\Psi}_0,\ \tau\gamma_5\Psi_0]\varphi_0$$

$$=-\frac{i}{2}G_0[\overline{\Psi}_0,\ \tau\gamma_5\Psi_0]\varphi_0-\frac{i}{2}(Z-1)[\Psi_0,\ \tau\gamma_5\Psi_0]\cdot\varphi_0 \qquad (13.5)_{11}$$

包含有 πN 实际相互作用 $-\frac{i}{2}G_0[\Psi_0,\ \tau\gamma_5\Psi_0]\cdot\varphi_0$，而其他各项只是起着抵销项的作用。适当地选取重整化常数 Z_D，Z_B 和 Z，或 δM，$\delta\mu^2$ 和 $\delta\lambda$ 可以把出现在高级修正计算中的发散项逐级抵销。例如由最后一个角点来计算该角点本身的高级修正，类似 $(7.16)_{11}$ 式的推导可得到角点总和，

$$\Gamma_5=G_0Z\gamma_5+G_0Z\Lambda_5(p_1,\ p_2;\ q)$$

$$=G_0Z(1+L)\gamma_5+\Lambda_{5R}(p_1,\ p_2;\ q), \qquad (13.6)_{11}$$

其中 Λ_{5R} 为 $G_0Z\Lambda_5$ 的有限部分，而 $L=\Lambda_{50}(p_0,\ p_0;\ 0)$ 是发散部分。

如果选取

$$Z=\frac{1}{1+L}, \qquad (13.7)_{11}$$

则$(13.6)_{11}$式成为

$$\Gamma_5=G_c\gamma_5+\Lambda_{5R}(p_1, p_2; q)。 \qquad (13.8)_{11}$$

这就是说在适当选取 Z 值之后，角点的高级修正，只是在 G_c 的角点上附加一个有限的修正项。

此外由最后一个角点，也对粒子线有相应的修正，类似$(6.7)_{11}$和$(6.13)_{11}$式有

$$\left.\begin{aligned}\Sigma^*(p)&=\Sigma_1+\Sigma_0(\gamma p-im)+\Sigma_R(p)(\gamma p-im)^2,\\ \Pi^*(q)&=\Pi_2+\Pi_0(q^2+\mu^2)+\Pi_R\cdot(q^2+\mu^2)^2。\end{aligned}\right\} \qquad (13.9)_{11}$$

适当选取 Z_B 值，第一角点可以消除发散值 Π_0 项。适当选取 Z_D 值，第二角点可以消除发散值 Σ_0 项。再适当选取 δM 可以消除发散值 Σ_1 项，适当选取 $\delta\mu^2$ 值可以消除发散值 Π_2 项。此外，适当选取 δ_λ 值，可以消除 $\pi\pi$ 散射的发散项。总之在适当地选取了重整化常数以后，可以使得结果和以前电动力学情况一样，只考虑 G_c 角点并在计算高级修正时，把它按一定程序展开，并把发散项丢掉，而只保留有限项。

由以上的讨论看来，所谓重整化理论，实在还有很多地方不能令人满意。首先这种理论只是形式上消除了发散，并没有彻底解决发散问题。而且所有我们以上的讨论，还只是证明了在 S 矩阵的各级修正项里，经过重整化以后，是可以不再出现发散值。可是各级修正项的总和，即展开级数的收敛性依然是存在问题的。甚至 Dyson 曾指出。对于整个级数可能还是不收敛的。可见理论需要进一步发展，甚至还需要有根本性的改进。

参 考 资 料

1. 关于质量，波函数，耦合常数重整化
   D. Lurié Particles and Fields (1969) Chapter 6
2. 关于 Furry 定理，Ward 等式和 Dyson 方程

W. H. Furry Phys. Rev. **51** (1937) 125
J. C. Ward Phys. Rev. **78** (1950) 1824
Y. Takahashi Nuovo. Ciniento. **6** (1957) 370

3. 关于计算发散积分的正则化程序
F. P. Feynman Phys. Rev. **76** (1949)749. 769

4. 关于将重整化推广到微扰论高阶及对高阶图发散度的分析
F. J. Dyson Phys. Rev. **83** (1951) 608
S. Weinberg Phys. Rev. **118** (1960) 838
J. D. Bjorken & S. D. Drell Relativistic Quantum Fields (1965) Chapter 19

5. 关于可重整性问题的一般性讨论
H. Umezawa Quantum Field Theory (1956) Chapter 15

6. 关于红外发散的处理
D. R. Yennie Ann. Phys. **13** (1961) 379
Phys. Rep. c **24** (1976)
J. D. Bjorken Relativistic Quantum mechanics (1964) Chapter 8
Relativistic Quantum Fields (1965) Chapter 19

7. 关于介子理论的重整化
P. T. Mathews Phys. Rev. **80** (1950)293
A. Salam Phys. Rev. **82** (1951) 217
Phys. Rev. 84 (1951) 426
P. T. Mathews & A. Salam Phys. Rev. **94** (1954) 94

第十二章　辐射修正示例

本章的内容，主要在于应用上章所介绍的方法，对量子电动力学里若干重要过程的高级修正作具体的计算。这样可使得上一章里的论述具体化。首先介绍处理发散积分的方法，这是以后具体计算中经常会用到的，接着就分别对粒子固有能量，顶角型修正，电子的反常磁矩及氢原子能级的 Lamb 迁移进行了计算。后二者的计算结果与实验值高度符合，这可以说是实验对于重整化理论的重大支持。

§12.1　发 散 积 分

我们以后在计算辐射修正时，常遇到的积分可以写成以下的典型形式，即

$$I=\int \frac{F(k)dk}{a_1a_2\cdots a_n}。\qquad (1.1)_{12}$$

其中 a_i 均为 k_μ 的二次式，而 $F(k)$ 则为 k_μ 的 m 级多项式。我们可以按 Feynman 引进的方法，引进新的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得上式中的分母 $a_1a_2\cdots a_n$ 成为 a_i 线型和的 n 次方。这样就使得被积函数的 n 个二级极点转变为两个 n 级极点，积分起来比较方便。可以证明以下关系：

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 d\xi_1\int_0^1 d\xi_2\cdots$$

$$\times\int_0^1 d\xi_n\frac{\delta(\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_n-1)}{[a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots a_n\xi_n]^n}。\qquad (1.2)_{12}$$

例如 $n=3$ 时，

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}=2\int_0^1 d\xi_1\int_0^1 d\xi_2\int_0^1 d\xi_3\frac{\delta(\xi_1+\xi_2+\xi_3-1)}{(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3)^3}$$
$$=2\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1} d\xi_2\frac{1}{[a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3(1-\xi_1-\xi_2)]^3}$$
$$=2\int_0^1 d\xi_1\int_0^{1-\xi_1} d\xi_2\frac{1}{[(a_1-a_3)\xi_1+(a_2-a_3)\xi_2+a_3]^3}。$$
$$(1.3)_{12}$$

一般情况下，先利用 δ 函数由$(1.2)_{12}$式对 ξ_n 积分，并经过变换

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1=x_{n-1},\ \xi_2=x_{n-2}-x_{n-1}\cdots,\ \xi_{n-1}=x_1-x_2,\\&\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_{n-1}=x_1。\end{aligned}\right\}\quad(1.4)_{12}$$

或

$x_{n-1}=\xi_1,\ x_{n-2}=\xi_1+\xi_2,\ x_{n-3}=\xi_1+\xi_2+\xi_3,\ \cdots x_1=\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_{n-1}$。

$(1.2)_{12}$式可写成

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}}dx_{n-1}$$
$$\times\frac{1}{[a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots a_n(1-x_1)]^n}。$$
$$(1.5)_{12}$$

n 个 a_i 将需要$(n-1)$个辅助变量 x_i。上式的证明可用数学归纳法进行。当 $n=2$ 时，上式成为

$$\frac{1}{a_1a_2}=\int_0^1\frac{dx}{[a_1x+a_2(1-x)]^2}。\qquad(1.6)_{12}$$

上式证明很简单，因为

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{a_2-a_1}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)=\frac{1}{a_2-a_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{dz}{z^2}。\qquad(1.7)_{12}$$

经过变换 $z=a_1x+a_2(1-x)$就可由上式得到$(1.6)_{12}$式，对于任何 $a_1,\ a_2\neq0$ 都成立。把$(1.6)_{11}$式对 a_1 微分$(n-1)$次，可得到一般关系

$$\frac{1}{nA^n\cdot B}=\int_0^1\frac{u^{n-1}du}{[Au+B(1-u)]^{n+1}}。\qquad(1.8)_{12}$$

把$(1.5)_{11}$式右方对 x_{n-1} 积分得到

$$(n-1)!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-2}} dx_{n-2}\cdot\frac{1}{(-n+1)(a_1-a_2)}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{[a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\cdots a_n(1-x_1)]^{n-1}}\right]_0^{x_{n-2}}$$
$$-\frac{(n-2)!}{a_1-a_2}\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-3}} dx_{n-2}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{[a_2x_{n-2}+a_3(x_{n-3}-x_{n-2})+\cdots a_n(1-x_1)]^{n-1}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_1x_{n-2}+a_3(x_{n-3}-x_{n-2})+\cdots a_n(1-x_1)]^{n-1}}\right]。$$
$$(1.9)_{12}$$

如果$(1.5)_{12}$式对$(n-1)$是成立的，则上式成为

$$\frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{a_2\cdot a_3\cdots a_n}-\frac{1}{a_1a_3\cdots a_n}\right]=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}。$$

这正是$(1.5)_{11}$式的左方。也就是说对于n，$(1.5)_{12}$式也成立。故$(1.5)_{12}$得证。

如果我们把$(1.5)_{12}$式再经过变换

$$x_1=u_1,\ x_2=u_1u_2,\ \cdots\quad x_{n-1}=u_1u_2\cdots u_{n-1}。\qquad (1.10)_{12}$$

$(1.5)_{12}$式可写成：

$$\boxed{\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=(n-1)!\int_0^1 u_1^{n-2}\cdot du_1\int_0^1 u_2^{n-3}\,du_2\cdots\int_0^1 du_{n-1}\cdot\frac{1}{[a_1u_1\cdots u_{n-1}+a_2u_1\cdots u_{n-2}(1-u_{n-1})+\cdots a_n(1-u_1)]^n}。}$$
$$(1.11)_{12}$$

也可以用数学归纳法直接证明上式是成立的。当$n=2$时上式成立。假定上式对n成立，在上式两边同乘以$\frac{1}{a_{n+1}}$，则

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}=(n-1)!\int_0^1 u_1^{n-2}\,du_1\cdots\int_0^1 du_{n-1}\,\frac{1}{A^na_{n+1}}。$$
$$(1.12)_{12}$$

其中我们已令A为$(1.11)_{12}$式右边分母的括号中的量。利用$(1.8)_{12}$式，并取$u=u_0$，$B=a_{n+1}$则上式成为

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}=n!\int_0^1 u_0^{n-1}du_0\cdots\int_0^1 du_{n-1}$$

$$\cdot\frac{1}{[Au_0+a_{n+1}(1-u_0)]^{n+1}}。\qquad (1.13)_{12}$$

这实际上就是$(1.11)_{12}$式，不过$n\to n+1$而已。因此$(1.11)_{12}$式得证。

利用$(1.5)_{12}$或$(1.11)_{12}$式，我们可以把典型的被积函数的分母，化成为$A^n=[(k-p)^2+a^2]^n$或写成$A^n=(k^2-2k\cdot p+l)^n$形式。其中p为某一四维矢量，a和l为一标量，均与k无关，但可能与辅助变量x_i有关。下面我们首先考虑积分是收敛的情况，此时k空间坐标可以进行平移变换，例如$k_\mu\to k_\mu+p_\mu$，这样又可以使被积函数的分母写成$A^n\to(k^2+a^2)^n$。这样对于利用对称性质来讨论积分的贡献时会带来很大方便。由此可得典型的积分(当其收敛时)就最后归结为以下的典型形式

$$I_{m,n}=\int\frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}\,dk。\qquad (1.14)_{12}$$

以上我们已经考虑到了当分子中的k_μ为奇数幂时，由于对称的关系，其积分结果为零。上式对k_0积分有两个n级极点，即在$k_0=\pm\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+a^2}$处。由此可见$(1.5)_{12}$或$(1.11)_{12}$式的变换，使得原来$2n$个极点变换为2个$n$级极点，因而使得进行积分比较方便，这正是这个方法的优点所在。

应该注意，积分I的被积函数系来自虚粒子的传播函数$\Delta_c(x)$. 根据以前对$\Delta_c(x)$的积分路线的规定，参看§5.6，我们现在的积分路线(在k_0的复平面上)应如图12-1所示：

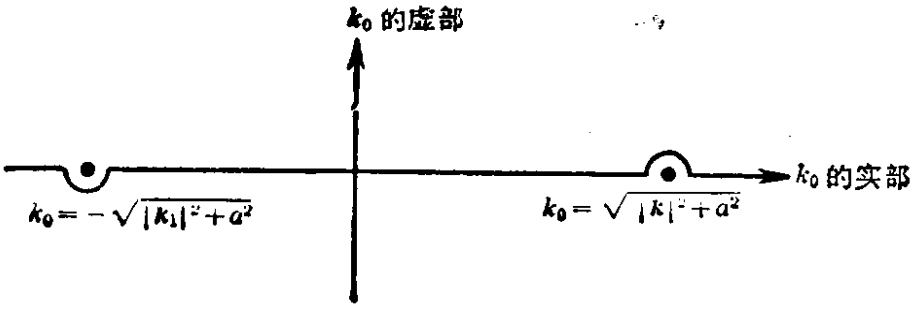


图 12-1

对于收敛的积分 $n>m>0$(以后可看出)即 $I_{m,n}$ 的被积函数$\sim\frac{1}{k^x}$，而 $x>4$。我们可以把积分路线沿反时针方向转动 90°，但并未通极点，以使得对 k_0 的积分是沿虚轴进行。所以

$$I_{m,n}=\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}\int_{-i\infty}^{i\infty}dk_0\frac{(k^2)^{m-2}}{(k^2+a^2)^n}。\qquad(1.15)_{12}$$

经过变换 $k_0=ik_4'$，且 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 则上式可写成

$$I_{m,n}=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k'^2)^{m-2}\,dk_4'\,d\boldsymbol{k}'}{(|\boldsymbol{k}'|^2+k_4^2+a^2)^n}。\qquad(1.16)_{12}$$

下式积分区域中不再有极点存在，可直接进行四维空间的体积分，同时由于被积函数中只有(k'^2)出现，可引用四维空间的球极坐标进行积分。考虑到四维空间的球体积为 $\frac{(2\pi)^2}{4\cdot2}(k')^4$。由此可得：

$$I_{m,n}=i\int_0^{\infty}\frac{(k'^2)^{m-2}\cdot2\pi^2k'^3dk'}{(k'^2+a^2)^n}。\qquad(1.17)_{12}$$

上式中 k' 都是四维空间 k' 的绝对值。再引进 $t=k'^2$ 可得

$$I_{m,n}=i\pi^2\int_0^{\infty}\frac{t^{m-1}dt}{(t+a^2)^n}=\frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}。\qquad(1.18)_{12}$$

或者

$$\boxed{I_{m,n}=\int\frac{(k^2)^{m-2}\,dk}{(k^2+a^2)^n}=\frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}B(m,\,n-m)。}\qquad(1.19)_{12}$$

以上 $\Gamma(z)$和 $B(x\cdot y)$分别为 Gamma 和 Beta 函数。由于 $\Gamma(z)$ 在 $z=$负整数处有单极点，因此得到只有当 $n>m>0$ 时，$I_{m,n}$ 才是收敛的。

下面再来讨论对数发散积分的处理，我们举两个典型的例子来说明处理的方法。考虑积分

$$I_0=\int\frac{dk}{[(k-p)^2+a^2]^2}。\qquad(1.20)_{12}$$

一般对于发散积分，是不能直接平移 k 空间的原点的，不过可以证明，对于如上式的对数发散积分 I_0，这样原点平移的变换是允许

的。由于

$$\boxed{\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}=-\int_\beta^\alpha \frac{n\,dx}{x^{n+1}}=-\int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}}。} \tag{1.21}_{12}$$

其中已经利用了变换 $x=(\alpha-\beta)z+\beta$。利用上式可以把 I_0 写成

$$I_0=\int \frac{dk}{(k^2+a^2)^2}-2\int dk\int_0^1 \frac{[p^2-2p\cdot k]dz}{[k^2+a^2+(p^2-2p\cdot k)z]^3}。 \tag{1.22}_{12}$$

以上已取$(1.21)_{12}$式中 $\alpha=[(k-p)^2+a^2]$, $\beta=(k^2+a^2)$ $n=2$。

上式最后一个积分是有限的，可以变换积分次序，并可平移 k 空间的原点。经过原点平移 $k_\mu\to k_\mu+p_\mu\cdot z$，则上式最后积分成为

$$\begin{aligned}&-2\int dk\int_0^1 dz\frac{p^2-2p\cdot k}{[(k-pz)^2+a^2+p^2z(1-z)]^3}\\&=-2\int_0^1 dz\int\frac{p^2(1-2z)-2p\cdot k}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3}\,dk。\end{aligned} \tag{1.23}_{12}$$

利用对称性质可知奇次幂的 k 项积分结果为零。对于分子不含有 k 的常数项积分，可利用$(1.19)_{12}$式取 $n=3$, $m=2$，上式积分的第一项成为

$$\begin{aligned}&2i\pi^2\,B(2.1)\int_0^1 dz\frac{p^2(1-2z)}{a^2+p^2z(1-z)}\\&=2\,\frac{i\pi^2}{2}\int_0^1 dz\frac{p^2(1-2z)}{a^2+p^2(1-z)z}\\&=2\,\frac{i\pi^2}{2}\ln[a^2+p^2z(1-z)]_0^1=0。\end{aligned} \tag{1.24}_{12}$$

因此得到

$$\boxed{I_0=\int\frac{dk}{[(k-p)^2+a^2]^2}=\int\frac{dk}{[k^2+a^2]^2}。} \tag{1.25}_{12}$$

这就是说对于上式的(对数)发散积分，是可以直接移动 k 空间的原点的。对于一般对数发散积分而言，如果被积函数的渐近行为是一致的，则它们的差别为一收敛积分。上式就是说明了等式两边的对数发散积分的差为零。

我们可以用类似的方法来处理线型发散积分。考虑积分

$$I_1=\int \frac{k_\mu dk}{[(k-p)^2+a^2]^2}=\int \frac{(k_\mu+p_\mu)dk}{(k^2+a^2)^2}+R_1。 \qquad (1.26)_{12}$$

其中

$$R_1=-p_\mu\int\frac{dk}{(k^2+a^2)^2} +\int k_\mu dk\left(\frac{1}{[(k-p)^2+a^2]^2}-\frac{1}{(k^2+a^2)}\right)。 \qquad (1.27)_{12}$$

利用$(1.21)_{12}$式，可知上式 R_1 中第二个积分可写成

$$-2\int k_\mu dk\int_0^1 dz\frac{p^2-2p\cdot k}{[k^2+a^2+(p^2-2p\cdot k)z]^3}。 \qquad (1.28)_{12}$$

上式对 k 积分是对数发散，也是可以直接平移 k 空间的原点的，经过平移 $k\to k+pz$，上式可写成

$$-2\int(k_\mu+p_\mu z)dk\int_0^1 dz\frac{p^2(1-2z)-2p\cdot k}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3}。 \qquad (1.29)_{12}$$

现在被积函数的分母只是 k^2 的函数，所以对于分子中的奇次幂的 k 项的积分，由于对称的考虑其结果均为零。最后得到：

$$R_1=-p_\mu\int\frac{dk}{(k^2+a^2)^2} -2p_\mu\int dk\int_0^1 dz\frac{p^2z(1-2z)}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} +p_\mu\int k^2dk\int dz\frac{1}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3}。 \qquad (1.30)_{12}$$

上式第二项对 z 积分时，利用部分积分可得

$$-2p_\mu\int_0^1 dz\frac{p^2(1-2z)z}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} =p_\mu\frac{1}{(k^2+a^2)^2}-p_\mu\int_0^1\frac{dz}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^2}。 \qquad (1.31)_{12}$$

上式第一项对 k 积分后正好和 R_1 中第一项抵销，结果得到

$$R_1=-p_\mu\int dk\int_0^1 dz\frac{p^2z(1-z)+a^2}{[k^2+a^2+pz(1-z)]^3}=-\frac{i\pi^2}{2}p_\mu。$$

$(1.32)_{12}$

上式积分是收敛的，可先对 k 积分并利用 $(1.19)_{12}$ 式，$n=3$，$m=2$ 由此得到

$$\boxed{\begin{aligned}I_1&=\int\frac{k_\mu dk}{[(k-p)^2+a^2]^3}=\int\frac{(k_\mu+p_\mu)dk}{(k^2+a^2)^3}-\frac{i\pi^2}{2}p_\mu\\&=\int\frac{p_\mu dk}{(k^2+a^2)^3}-\frac{i\pi^2}{2}p_\mu。\end{aligned}}$$

$(1.33)_{12}$

同样利用对称性质，可知上式中含有奇次幂 k 项的积分为零，因而上式实质上只是对数发散。以上所介绍的发散积分其积分结果都是发散的要让它有明确意义，首先要采用正规化程序，我们在此所采用的正规化程序，就是在进一步对 I_1 或 I_0 进行积分时，我们先把积分在一个很大的区间 L(四维球半径)内进行。然后再令积分结果的 $L\to\infty$。

总结以上所述，对于典型积分的处理，不外以下几个步骤，首先利用 $(1.15)_{12}$ 或 $(1.11)_{12}$ 式，把被积函数的分母变换成为

$$A^n=[k^2-2k\cdot p+l]^n \quad 或 \quad A^n=[(k-p)^2+a^2]^n$$

这就使得被积函数的极点集中。这第一步做法可简称为“极点集中”。其次利用 $(1.25)_{12}$ 或 $(1.33)_{12}$ 式，把原点移动；使得被积函数的分母只有 k^2 出现，以便利用对称性质，而把被积函数分子中含有 k 奇次幂的各项积分消除。这第三步做法可以简称为“原点移动”。在进行原点移动时常利用了 $(1.21)_{12}$ 式进行并项再积分。最后对 k 的偶次幂各项进行积分，先把积分在很大的有限区间 L 内进行，再令结果的 $L\to\infty$。这最后一步做法可以简称为“极限处理”。虽然以上所举实例，只是对数和线型发散积分，可是对于二次发散积分也可以用相似的方法处理。下面我们把常碰到的典型积分的结果列举于下，以便查用。

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^2}=\pi^2 i\left(\ln\frac{L^2}{l-p^2}-1\right),\\
&\int\frac{k_\mu\,dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^2}=\pi^2 i p_\mu\left(\ln\frac{L^2}{l-p^2}-\frac{3}{2}\right),\\
&\int\frac{k_\mu k_\nu\,dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^2}=-\frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\mu\nu}\left[(l-p^2)\ln\frac{L^2}{l-p^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{5p^2-3l}{6}-L^2\right]\\
&\quad+\pi^2 i p_\mu p_\nu\left[\ln\frac{L^2}{l-p^2}-\frac{11}{6}\right]。
\end{aligned}\right\}\quad(1.34)_{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^3}=\frac{\pi^2 i}{2}\frac{1}{l-p^2},\\
&\int\frac{k_\mu\,dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^3}=\frac{\pi^2 i}{2}\frac{p_\mu}{l-p^2},\\
&\int\frac{k_\mu k_\nu\,dk}{(k^2-2k\cdot p+l)^3}=\frac{\pi^2 i}{4}\delta_{\mu\nu}\left(\ln\frac{L^2}{l-p^2}-\frac{1}{2}\right)\\
&\quad+\frac{\pi^2 i}{2}\frac{p_\mu p_\nu}{l-p^2}。
\end{aligned}\right\}\quad(1.35)_{12}$$

§12.2 电子的固有能量

为简单计，以后式中的 e 和 m 分别代表电子的电荷和质量的观测值，省去前一章里的下指标 c 记号。利用$(4.1)_{11}$式可得到：

$$\Sigma_c^*(p)=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\gamma_\mu G_c^e(p-k)\Gamma_{\mu c}(p,\,p-k;\,k)G_c^\gamma(k)dk。\quad(2.1)_{12}$$

如果我们只计算 $\Sigma_c^*(p)$的二级近似，则上式中的 G_c^e, G_c^γ 和 Γ_c 可以只取它们的零级近似，即

$$\Sigma_c^{*(2)}(p)=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\gamma_\mu S(p-k)\gamma_\mu D(k)dk。\quad(2.2)_{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
S(p)&=i\frac{ip\gamma-m}{p^2+m^2},\\
D(k)&=-i\frac{1}{k^2+\lambda^2}。
\end{aligned}\right\}\quad(2.3)_{12}$$

以上 $D(k)$中的 $\lambda(\lambda\to 0)$是为了避免红外发散而引进的。参看§ 11.12。把$(2.3)_{12}$代入$(2.2)_{12}$式并利用$(1.6)_{12}$式

$$\frac{1}{(k^2+\lambda^2)[(p-k)^2+m^2]}=\int_0^1\frac{dx}{[(px-k)^2+a^2]^2}。$$

其中

$$a^2=(p^2+m^2)x(1-x)+m^2x^2+\lambda^2(1-x)。\qquad (2.4)_{12}$$

考虑到$(7.14)_9$式 $\gamma_\mu\gamma A\gamma_\mu=-2\gamma A$ 得到

$$\Sigma_c^{*(2)}(p)=-\frac{2e^2}{(2\pi)^4}\int dk\int_0^1\frac{2m+i(\gamma p-\gamma k)}{[(k-px)^2+a^2]^2}\,dx$$

$$=-\frac{2e^2}{(2\pi)^4}\int dk\int_0^1 dx\,\frac{(2m+i\gamma p)-i\gamma k}{[(k-px)^2+a^2]^2}。\qquad (2.5)_{12}$$

前项为对数发散，后项为线型发散，根据以前的讨论，经过原点平移 $k_\mu\to k_\mu+p_\mu x$，再利用$(1.25)_{12}$和$(1.33)_{12}$式可得

$$\Sigma_c^{*(2)}(p)=-\frac{2e^2}{(2\pi)^4}\left\{\int dk\int_0^1 dx\,\frac{2m+i\gamma p(1-x)}{(k^2+a^2)^2}-\frac{\pi^2}{4}\,\gamma\cdot p\right\}。$$

$$(2.6)_{12}$$

被积函数的分子中含有 k 的一项，已由对称关系的考虑，知它为零已把它除掉了。所以原来可能为线型发散的积分，实际上为对数发散积分。

为了更好地了解 $\Sigma^{*(2)}(p)$的物理意义，并求出 $\Sigma_R^{(2)}(p)$，我们把 $\Sigma_c^{*(2)}(p)$在 p_0 附近展开，并写成$(6.7)_{11}$式形式

$$\Sigma_c^{*(2)}(p)=\Sigma_1^{(2)}+(\gamma p-im_0)\Sigma_0^{(2)}+\Sigma_{RC}^{(2)}(p)\cdot(\gamma p-im_0)^2。$$

$$(2.7)_{12}$$

其中 Σ_1 的数值可由$(2.6)_{12}$式中以 $\gamma p=im_0$ 代入即得。此时由$(2.4)_{12}$式 $a^2=m^2x^2+\lambda^2(1-x)$，因此得到：

$$\Sigma_1^{(2)}=-\frac{2me^2}{(2\pi)^4}\left(\int dk\int_0^1 dx\,\frac{(1+x)}{[k^2+m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}-\frac{i\pi^2}{4}\right)。$$

$$(2.8)_{12}$$

变换积分次序并利用公式$(1.34)_{12}$式可得到：

$$\Sigma_1^{(2)}=\frac{2\pi^2}{(2\pi)^4}\,ie^2m\left\{\frac{1}{4}+\int_0^1(1+x)[-2\ln L+1\right.$$

$$\left.+\ln(m^2x^2+\lambda^2(1-x)]\right\}dx。\qquad (2.9)_{12}$$

当 $\lambda\to 0$ 则得到($\Sigma_1^{(2)}$ 中可无红外发散)

$$\boxed{\Sigma_1^{(2)}=-i\frac{3}{4\pi}\alpha m\left(\ln\frac{L^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right)} \qquad (2.10)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\Sigma_1^{(2)}=-i\frac{3}{4\pi}\alpha m\left[\ln\left(-\frac{L^2}{m^2}\right)+\frac{1}{2}\right]} \qquad (2.10')_{12}$$

其中 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}=\frac{1}{137}$。由$(2.6)_{12}$减去$(2.8)_{12}$式得到

$$\begin{aligned}&(\gamma p-im)\Sigma_0^{(2)}+\Sigma_{RC}^{(2)}(p)\cdot(\gamma p-im)^2\\&=\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\left\{\frac{1}{4}(\gamma p-im)-\frac{1}{\pi^2}\int dk\int_0^1[2m+i\gamma p\cdot(1-x)]\right.\\&\cdot\left[\frac{1}{(k^2+a^2)^2}-\frac{1}{[k^2+m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\right]dx\\&\left.+(\gamma p-im)\frac{1}{\pi^2 i}\int dk\int_0^1\frac{(1-x)dx}{[k^2+m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\right\}。\end{aligned} \qquad (2.11)_{12}$$

比较系数知道，上式括号内第一、第三两项都是属于 $\Sigma_0^{(2)}$ 的，而第二项中只有一部分属于 $\Sigma_0^{(2)}$，另一部分则属于 $\Sigma_{RC}^{(2)}(p)\cdot(\gamma p-im)^2$，因为 a^2 中也含有 p^2，我们必须把它们区分开来。利用$(1.21)_{12}$式，把上式括号内第二项积分进行并项并变换积分，再利用$(1.35)_{12}$式

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\pi^2}\int dk\left[\frac{1}{(k^2+a^2)^2}-\frac{1}{[k^2+m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\right]\\&=\frac{2}{\pi^2}\int dk\int_0^1 dz\frac{x(1-x)(p^2+m^2)}{[k^2+m^2+x^2\lambda^2(1-x)+zx(1-x)(p^2+m^2)]^3}\\&=ix(1-x)(p^2+m^2)\\&\cdot\int_0^1\frac{dz}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)+zx(1-x)(p^2+m^2)}。\end{aligned} \qquad (2.12)_{12}$$

把上式以及 $(p^2+m^2)=(\gamma p+im)(\gamma p-im)$ 关系代入$(2.11)_{12}$式的第二项。再把$(2.11)_{12}$式两边提出公因子$(\gamma p-im)$，然后再以 $\gamma p=im$ 代入，并比较两边系数，就得到

$$\Sigma_0^{(2)}=\frac{2\pi^2e^2}{(2\pi)^4}\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(2\ln L-1)\right.$$
$$-\int_0^1(1-x)\ln[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]dx$$
$$\left.-2\int_0^1\frac{x(1-x^2)}{x^2+\frac{\lambda^2}{m^2}(1-x)}dx\right\}。 \qquad (2.13)_{12}$$

当 $\frac{\lambda}{m}\to 0$ 时上式趋于

$$\boxed{\Sigma_0^{(2)}=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{L^2}{m^2}+\ln\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right\}=z_0^{-1}-1。} \qquad (2.14)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\Sigma_0^{(2)}=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{L^2}{m^2}\right)+\ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)+\frac{9}{4}\right\}=z_0^{-1}-1。}$$

$$(2.14')_{12}$$

由$(2.11)_{12}$式减去$(2.13)_{12}$式乘上$(\gamma p-im)$，可得到

$$\Sigma_{RC}^{(2)}(p)=-\frac{i\pi^2 2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 x(1-x)dx$$
$$\cdot\int_0^1\frac{m(1+x)+(i\gamma p-m)(1-x)\left[1-\frac{2m^2x(1+x)z}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)}\right]}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)+x(1-x)z(p^2+m^2)}$$
$$\cdot dz。 \qquad (2.15)_{12}$$

考虑到 $\lambda\ll m$，可得到上式趋于

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_{RC}^{(2)}(p)=&-\frac{i\alpha}{2\pi m}\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\right.\\&\cdot\left(1-\frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right)+\frac{i\gamma p-m}{m}\\&\cdot\left[\frac{1}{2\rho(1-\rho)}\left(-2-\rho+\frac{4-8\rho+\rho^2}{1-\rho}\ln\rho\right)\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda^2}{m^2}\right]\right\}。\end{aligned}}$$

$$(2.16)_{12}$$

其中 $$\rho=\frac{p^2+m^2}{m^2}。$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_{RC}^{(2)}(o)=&-\frac{i\alpha}{2\pi m}\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1-\frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right)+\frac{\gamma^\mu\rho_\mu+m}{m}\right.\\&\cdot\left[\frac{1}{2\rho(1-\rho)}\left(-2-\rho+\frac{4-8\rho+\rho^2}{1-\rho}\ln\rho\right)\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right]\right\}。\end{aligned}}$$

$(2.16')_{12}$

其中 $$\rho=\frac{-p^2+m^2}{m^2},$$

正如在红外发散一节里谈到上式不适用于 $\rho^2\ll\lambda^2$ 区域。

当 $|\boldsymbol{p}|^2\gg m^2$ 时，即 $|\rho|\gg1$ 时上式趋于

$$\boxed{\Sigma_{RC}^{(2)}(p)=\frac{\alpha}{4\pi}(\gamma p)^{-1}\ln\frac{p^2}{m^2}。}\qquad(2.17)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下

$$\boxed{\Sigma_{RC}^{(2)}(p)=\frac{\alpha}{4\pi}(i\gamma^\mu p_\mu)^{-1}\ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)。}\qquad(2.17')_{12}$$

由 $(17.3)_{11}$ 式可得

$$\boxed{G_0^e\sim S(p)\left(1-\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{p^2}{m^2}\right)。}\qquad(2.18)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{G_c^e\sim S(p)\left[1-\frac{\alpha}{4\pi}\ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right)\right]。}\qquad(2.18')_{12}$$

利用 $(6.8)_{11}$ 式和 $(2.10)_{12}$ 式得到

$$\boxed{\delta_m=\frac{3}{4\pi}\alpha m\left(\ln\frac{L^2}{m^2}+\frac{1}{2}\right)。}\qquad(2.19)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\delta_m=\frac{3}{4\pi}\alpha_m\left[\ln\left(-\frac{L^2}{m^2}\right)+\frac{1}{2}\right]_{\circ}} \qquad (2.19')_{12}$$

由此可见电子的电磁质量是对数发散的，不过只要我们把 L 在一定数值下截断，即使 L 是很大的例如 $L/m=137$。这时电子的电磁质量将只占其质量的一小部分。可是另一方面当 $L\to\infty$ 时，我们所求得的 δ_m 就如上式所示是对数发散的。这说明目前的理论，在极高能区域是有问题的。也就是说深入到粒子的核心内部，目前的理论是有问题的，这一点也许与我们目前对于基本粒子的内部结构，小距离的时空性质等问题没有弄清楚有关。

§12.3 真 空 极 化

真空极化最低效应的图形如图 12-2 所示。由$(2.7)_{11}$式看来，对于真空极化效应，主要在于求出 $\Pi(k^2)$。由$(4.2)_{11}$式可知，对于最低级近似 $\Pi_0(k^2)$可写成

$$\begin{aligned}\Pi_0^{*(2)}(k^2)&=\frac{1}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\int\gamma_\mu\frac{i\gamma p-m}{p^2+m^2}\\&\quad\cdot\gamma_\mu\frac{i\gamma(p-k)-m}{(p-k)^2+m^2}dp\\&=\frac{1}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\\&\quad\cdot\int\frac{4m^2+2(\gamma p)\cdot\gamma(p-k)}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}dp\\&=\frac{8}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{2m^2+p^2-p\cdot k}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}dp\\&=\frac{8}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{(p-k)^2+m^2+p\cdot k+m^2-k^2}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}dp_{\circ}\end{aligned}$$

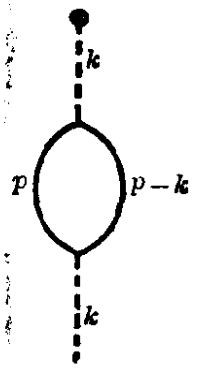


图 12-2

$(3.1)_{12}$

以上推导中利用了$(7.14)_9$和$(7.11)_9$式。

利用$(1.6)_{12}$式，有关系

$$\frac{1}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}=\int_0^1\frac{dx}{[p^2-2pkx+k^2x+m^2]^2}。$$

代入$(3.1)_{12}$式可得

$$\Pi_c^{*(2)}(k^2)=\frac{8}{3}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\left[\int dp\int_0^1\frac{-k^2+p\cdot k+m^2}{[p^2-2pkx+k^2x+m^2]^2}\,dx+\int\frac{dp}{(p^2+m^2)}\right]。\qquad(3.2)_{12}$$

利用(1.34)和(1.19)式可得到

$$\begin{aligned}\Pi_c^{*(2)}(k^2)=\frac{8}{3}\frac{e^2\pi^2 i}{(2\pi)^4}\Big\{&L^2-m^2\ln\frac{L^2}{m^2}-(m^2-k^2)\\&\cdot\int_0^1\Big(-\ln\frac{L^2}{m^2}+1+\ln\Big[1+\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\Big]\Big)dx\\&-k^2\int_0^1 x\Big(-\ln\frac{L^2}{m^2}+\frac{3}{2}\\&+\ln\Big[1+\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\Big]\Big)dx\Big\}。\end{aligned}\qquad(3.3)_{12}$$

为了明显地表示出$\Pi^{(2)}(k)$各项的物理意义并求出$\Pi_{RC}^{(2)}(k)$，我们把$\Pi^{(2)}(k^2)$在$k^2=0$附近展开，并写成$(6.13)_{11}$式形式。

$$\Pi_c^{*(2)}(k^2)=\Pi_2^{(2)}+\Pi_0^{(2)}\cdot k^2+\Pi_{RC}^{(2)}(k^2)\cdot(k^2)^2。$$

由$(3.3)_{12}$式令$k^2=0$得到

$$\Pi_2^{(2)}=\frac{8}{3}\frac{e^2\pi^2 i}{(2\pi)^4}(L^2-m^2)。\qquad(3.4)_{12}$$

此外由$(3.3)_{12}$式

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi_0^{(2)}&=\left(\frac{\partial\Pi_c^{*(2)}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0}\\&=-\frac{4}{3}\frac{e^2\pi^2 i}{(2\pi)^4}\left(\ln\frac{L^2}{m^2}+\frac{1}{6}\right)=-i(z_B^{-1}-1)。\end{aligned}}\qquad(3.5)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi_0^{(2)}&=\left(\frac{\partial\Pi_c^{*(2)}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=0}\\&=-\frac{4}{3}\cdot\frac{e^2\pi^2 i}{(2\pi)^4}\left[\ln\left(-\frac{L^2}{m^2}\right)+\frac{1}{6}\right]=-i(z_B^{-1}-1)。\end{aligned}}\qquad(3.5')_{12}$$

由上式看出准确到两级近似

$$\boxed{z_B=\frac{e^2}{e_c^2}\approx 1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{L^2}{m^2}。} \qquad (3.6)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{z_B=\frac{e^2}{e_c^2}\approx L-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(-\frac{L^2}{m^2}\right)。} \qquad (3.6')_{12}$$

自$(3.3)_{12}$式减去$(3.4)_{12}$式 $\Pi_2^{(2)}$ 和 $k^2\Pi_0^{(2)}$ 就得到

$$\begin{aligned}(k^2)^2\cdot\Pi_{RC}^{(2)}(k^2)=&-\frac{2i}{3\pi}\alpha k^2\left\{\frac{m^2}{k^2}\int_0^1\left[\ln\left(1+\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right)\right.\right.\\&\left.-\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right]dx\\&\left.-\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left(1+\frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right)dx\right\}。\end{aligned} \qquad (3.7)_{12}$$

引进新的变量 $\eta=2x-1$ 代入上式就得到

$$\Pi_{RC}^{(2)}(k^2)=\frac{i\alpha}{4\pi}k^{-2}\int_{-1}^1(1-\eta^2)\ln\left[1+\frac{1}{4}\frac{k^2}{m^2}(1-\eta^2)\right]d\eta。 \qquad (3.8)_{12}$$

利用积分关系

$$\left.\begin{aligned}&\int\ln(a^2+x^2)dx=x\ln(a^2+x^2)-2x+2a\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),\\&\int_{-1}^1\ln\left[1+\frac{1}{4}\frac{k^2}{m^2}(1-\eta^2)\right]d\eta=-4(1-\theta\operatorname{ctg}\theta),\\&\int_{-1}^1\eta^2\ln\left[1+\frac{1}{4}\frac{k^2}{m^2}(1-\eta^2)\right]d\eta\\&\quad=-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)\operatorname{ctg}^2\theta,\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)_{12}$$

其中 $$\sin^2\theta=\frac{-k^2}{4m^2}。$$

对$(3.8)_{12}$式积分得到

$$\boxed{\Pi_{RC}^{(2)}(k^2)=\frac{i\alpha k^{-2}}{\pi}\left\{\frac{1}{9}+(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)\frac{4m^2-2k^2}{3k^2}\right\}。} \qquad (3.10)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\Pi^{(2)}_{KC}(k^2)=-\frac{i\alpha k^{-2}}{\pi}\left\{\frac{1}{9}-(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)\frac{4m^2+2k^2}{3k^2}\right\}。}$$

$$(3.10')_{12}$$

当$|k^2|\ll m^2$时，利用关系$\operatorname{ctg}\theta\approx\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{3}-\frac{\theta^5}{45}+\cdots\right)$及

$$\theta^2\approx\frac{-k^2}{4m^2}+\frac{k^4}{3\times16m^4}-\frac{k^6}{360m^6}+\cdots$$

可得到

$$\left\{\frac{1}{9}+(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)\frac{4m^2-2k^2}{3k^2}\right\}$$
$$\simeq\frac{k^2}{m^2}\left[\frac{1}{15}-\frac{1}{140}\left(\frac{k}{m}\right)^2+\cdots\right]。$$

$$\boxed{\Pi^{(2)}_{KC}(k^2)\approx i\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{15}-\frac{1}{140}\left(\frac{k}{m}\right)^2+\cdots\right]。}\quad(3.11)_{12}$$

以上公式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\Pi^{(2)}_{KC}(k^2)\approx i\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{15}+\frac{1}{140}\left(\frac{k}{m}\right)^2+\cdots\right]。}\quad(3.11')_{12}$$

又当$|k^2|\gg m$时

$$\boxed{\Pi^{(2)}_{KC}(k^2)\Rightarrow i\frac{\alpha}{3\pi}k^{-2}\ln\frac{k^2}{m^2}。}\quad(3.12)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\Pi^{(2)}_{KC}(k^2)\Rightarrow -i\frac{\alpha}{3\pi}k^{-2}\ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)。}\quad(3.12')_{12}$$

由此可见当$|k^2|\gg m^2$时，参看$(7.6)_{11}$式

$$\boxed{G^{\gamma}_{c}(k)\sim D_c(k)\left(1+\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)。}\quad(3.13)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{G_c^{\gamma}(k)\sim D_c(k)\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)\right]_{\circ}} \qquad (3.13')_{12}$$

这一点我们在$(10.10)_{11}$式中就曾利用过。

利用所得结果，我们可以来讨论真空极化对外场的修正。由$(2.7)_{11}$式 $\mathbb{A}_{\nu}^{e}(q)=A_{\nu}^{e}(q)+D(q)\Pi_{\nu\mu}^{*}\mathbb{A}_{\mu}^{e}(q)$ 可看出真空极化对外场修正的二级近似应为：参看$(3.4)_{11}$和(3.10)式（重整化后把Π_2和Π_0项除掉）。

$$\delta A_{\mu}^{e}(q)=D(q)\Pi_{\mu\nu}^{(2)}A_{\nu}^{e}(q)=-\frac{1}{q^2}(q_{\mu}q_{\nu}-\delta_{\mu\nu}q^2)\cdot\left[\frac{4m^2-2q^2}{3q^2}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)+\frac{1}{9}\right]\frac{e^2}{(2\pi)^2}A^{e}(q)_{\circ} \qquad (3.14)_{12}$$

真空极化对外场的修正，也可以看成是真空极化电流对场源电流的修正。该电流修正的 Fourier 分量就可以由上式得到

$$\delta J_{\mu}^{e}(q)=q^2\delta A_{\mu}^{e}(q)=-\frac{\alpha}{\pi}(q_{\mu}q_{\nu}-\delta_{\mu\nu}q^2)\cdot\left[\frac{4m^2-2q^2}{3q^2}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)+\frac{1}{9}\right]A_{\nu}^{e}(q)_{\circ} \qquad (3.15)_{12}$$

由于外场满足 Lorentz 条件，即 $q_{\nu}A_{\nu}^{e}(q)=0$。因而上式头一项实际无贡献。这一点我们以前在§11.3里也曾谈到。考虑到 $q^2A_{\mu}^{e}(q)=J_{\mu}^{e}(q)$，因而上式又可写成

$$\boxed{\delta J_{\mu}^{e}(q)=\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{4m^2-2q^2}{3q^2}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)+\frac{1}{9}\right]J_{\mu}^{e}(q)_{\circ}} \qquad (3.16)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\delta J_{\mu}^{e}(q)=\frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{4m^2+2q^2}{3q^2}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)+\frac{1}{9}\right]J_{\mu}^{e}(q)_{\circ}} \qquad (3.16')_{12}$$

由此可见，真空极化电流和场源电流同样满足电荷守恒定律

$$q_{\mu}\delta J_{\mu}^{e}(q)=0_{\circ}$$

如果把$(3.15)_{12}$式按q^2展开可得

$$\boxed{\delta J^e_\mu(q)=\frac{\alpha}{15\pi m^2}q^2J^e_\mu(q)-\frac{\alpha}{140\pi}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)^2J^e_\mu(q)+\cdots_\circ}$$

$$(3.17)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\delta J^e_\mu(q)=-\frac{\alpha}{15\pi m^2}q^2J^e_\mu(q)-\frac{\alpha}{140\pi}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)^2J^e_\mu(q)+\cdots_\circ}$$

$$(3.17')_{12}$$

或者在坐标空间

$$\delta J^e_\mu(x)=\frac{-\alpha}{15\pi}\frac{1}{m^2}\Box J^e_\mu(x)-\frac{\alpha}{140\pi}\left(\frac{1}{m^2}\Box\right)^2J^e_\mu(x)+\cdots_\circ$$

$$(3.18)_{12}$$

§12.4 顶角型修正

本节里我们来计算角点的最低级修正。如图 12-3 所示，可得

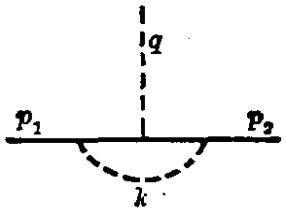


图 12-3

$$\Lambda^{(3)}_{c\mu}(p_1,\ p_2;\ q)=-\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\gamma_\nu S(p_2-k)\gamma_\mu \cdot S(p_1-k)\gamma_\nu D(k)dk_\circ \qquad (4.1)_{12}$$

以 $S(p)=i\frac{i\gamma p-m}{p^2+m^2}$，$D(k)=\frac{1}{i(k^2+\lambda^2)}$ 代入上式，可得到典型的积分形式如下：

$$\begin{aligned}\Lambda^{(3)}_{c\mu}(p_1,\ p_2;\ q)=\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\{&\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\nu\cdot J\\&-i[\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\\&+\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\nu]J_\sigma\\&-\gamma_\gamma\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\nu J_{\sigma\tau}\}_\circ\end{aligned} \qquad (4.2)_{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} J&=\int\frac{dk}{(k^2-2p_1\cdot k+p_1^2+m^2)\\ &\quad\cdot(k^2-2p_2\cdot k+p_2^2+m^2)(k^2+\lambda^2)},\\ J_\sigma&=\int\frac{k_\sigma\,dk}{(k^2-2p_1\cdot k+p_1^2+m^2)\\ &\quad\cdot(k^2-2p_2\cdot k+p_2^2+m^2)(k^2+\lambda^2)},\\ J_{\sigma\tau}&=\int\frac{k_\sigma k_\tau\,dk}{(k^2-2p_1\cdot k+p_1^2+m^2)\\ &\quad\cdot(k^2-2p_2\cdot k+p_2^2+m^2)(k^2+\lambda^2)}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.3)_{12}$$

利用$(1.11)_{12}$式，引进两个辅助变量，可以把上式的极点集中。为简单计，我们考虑比较特殊的情况，即两个电子线均为外电子线的情况，亦即 $p_1^2=-m^2=p_2^2$。这样使上式成为

$$\left.\begin{aligned} J&=\int_0^1dy\int_0^1 2x\,dx\int\frac{dk}{(k^2-2p_x\cdot k+l_x)^3},\\ J_\sigma&=\int_0^1dy\int_0^1 2x\,dx\int\frac{k_\sigma\,dk}{(k^2-2p_x\cdot k+l_x)^3},\\ J_{\sigma\tau}&=\int_0^1dy\int_0^1 2x\,dx\int\frac{k_\sigma k_\tau\,dk}{(k^2-2p_x\cdot k+l_x)^3}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.4)_{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} p_x&=x[yp_1+(1-y)p_2]\equiv xp_y,\\ l_x&=(1-x)\lambda^2。\end{aligned}\right\}\qquad(4.5)_{12}$$

以$(1.35)_{12}$式代入$(4.4)_{12}$式可得到(并令 $\lambda\to0$)

$$\left.\begin{aligned} J&=-\pi^2 i\int_0^1\frac{dy}{p_y^2}(\ln\sqrt{-p_y^2}-\ln\lambda),\\ J_\sigma&=-\pi^2 i\int_0^1\frac{p_{y\sigma}\,dy}{p_y^2},\\ J_{\sigma\tau}&=-\frac{\pi^2 i}{4}\int_0^1\left\{\delta_{\sigma\tau}\left[-\ln\frac{L^2}{-p_y^2}+\frac{1}{2}\right]+2\frac{p_{y\sigma}p_{y\tau}}{p_y^2}\right\}dy。\end{aligned}\right\}$$

$$(4.6)_{12}$$

为了便于以后积分引进新变量

$$\boxed{\sin^2\theta=-\frac{q^2}{4m^2},\ q=p_2-p_1。}\qquad(4.7)_{12}$$

此时

$$-p_y^2=-[p_1+q(1-y)]^2=m^2+q^2(1-y)y$$
$$=m^2[1-4y(1-y)\sin^2\theta]。$$

再进一步引进新变量 ξ 代替 y

$$2y-1=\frac{\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\theta}。 \tag{4.8}_{12}$$

代入上式和$(4.5)_{12}$式得到

$$\left.\begin{aligned}-p_y^2&=m^2\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\xi},\\ p_{y\sigma}&=\frac{\operatorname{tg}\xi}{2\operatorname{tg}\theta}(p_{1\sigma}-p_{2\sigma})+\frac{1}{2}(p_{1\sigma}+p_{2\sigma})。\end{aligned}\right\} \tag{4.9}_{12}$$

代入$(4.6)_{12}$式

$$\left.\begin{aligned}J&=\frac{2\pi^2 i}{m^2\sin 2\theta}\left\{-\int_0^\theta\ln\frac{\cos\xi}{\cos\theta}\,d\xi-\int_0^\theta\ln\frac{\lambda}{m}\,d\xi\right\}\\ &=-\frac{2\pi^2 i}{m^2\sin 2\theta}\int_0^\theta\xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi+\theta\ln\frac{\lambda}{m},\\ J_\sigma&=\frac{\pi^2 i}{m^2}\frac{\theta}{\sin 2\theta}(p_{1\sigma}+p_{2\sigma}),\\ J_{\sigma\tau}&=\frac{\pi^2 i}{2}\left\{\delta_{\sigma\tau}\left(\ln\frac{L}{m}+\frac{1}{4}\right)+\frac{\theta(p_{1\sigma}+p_{2\sigma})(p_{1\tau}+p_{2\tau})}{2m^2\sin 2\theta}\right.\\ &\quad\left.+\left(\delta_{\sigma\tau}+\frac{q_\sigma q_\tau}{-q^2}\right)(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)\right\}。\end{aligned}\right\}$$

$$(4.10)_{12}$$

以上我们具体计算了$(4.2)_{12}$式中的有关积分，下面我们进一步把(4.2)式中积分前面的系数(其中含有 γ 矩阵)简化。由于我们考虑的只是两个电子都处在质量壳层上的情况。即 $i\hat{p}_1$ 或 $i\hat{p}_2$ 处在算符的最外端时和 $-m$ 等效。因此我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\nu\Rightarrow 4m^2\gamma_\mu+2q^2\gamma_\mu,\\ &\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\nu\\ &\quad\Rightarrow-4m\delta_{\sigma\mu}+2i[(\gamma q)\gamma_\mu\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\mu(\gamma q)],\\ &\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\tau\gamma_\nu=-2\gamma_\tau\gamma_\mu\gamma_\sigma。\end{aligned}\right\}$$

$$(4.11)_{12}$$

把$(4.10)_{12}$和$(4.11)_{12}$式代入$(4.2)_{12}$式并经过整理，得到

$$\Lambda^{(3)}_{c\mu}(p_1,\ p_2;\ q)=-\frac{e^2\gamma_\mu}{(2\pi)^2}\left\{\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-1\right)-\frac{2}{\operatorname{tg}2\theta}\right.$$
$$\left.\cdot\int_0^\theta\xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi-\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\ln\frac{L^2}{m^2}\right\}$$
$$+\frac{ie^2}{32\pi^2m}[\gamma_\mu(\gamma q)-(\gamma q)\gamma_\mu]\frac{2\theta}{\sin 2\theta}。$$

$(4.12)_{12}$

以 $q=0$ 值代入上式则得到

$$\Lambda^{(3)}_{c\mu}(p_1,\ p_2;\ 0)=-\gamma_\mu\frac{e^2}{(2\pi)^2}\left\{-\frac{1}{4}\ln\frac{L^2}{m^2}-\frac{9}{8}+\ln\frac{m}{\lambda}\right\}。$$

$(4.13)_{12}$

利用$(2.7)_{12}$和$(2.14)_{12}$式和上式可以证明：

$$\left(\frac{\partial\Sigma^{(2)}_c}{\partial p_\mu}\right)_{p_0}=-\gamma_\mu\Sigma^{(2)}_0=\Lambda^{(3)}_{c\mu}(p_1,\ p_2;\ 0)。$$

上式就是 Ward 等式$(4.4)_{11}$式，在二级近似下的具体表现。

自$(4.12)_{12}$式中减去$(4.13)_{12}$式就得到 $\Lambda^{(3)}_{R\mu}$ 的表式如下。参看$(7.13)_{11}$式

$$\Lambda^{(3)}_{R\mu}(p_1,\ p_2,\ q)=-\frac{\alpha}{\pi}\gamma_\mu\left\{\left(\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}-1\right)\left(\ln\frac{m}{\lambda}-1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\operatorname{tg}2\theta}\int_0^\theta\xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi-\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta\right\}$$
$$+\frac{i\alpha}{8\pi m}[\gamma_\mu(\gamma q)-(\gamma q)\gamma_\mu]\frac{2\theta}{\sin 2\theta}。$$

$(4.14)_{12}$

当$|p|\gg m$，且$|q|\gg m$则上式

$$\boxed{\Lambda^{(3)}_{R\mu}(p_1,\ p_2;\ q)\Rightarrow\frac{-\alpha}{\pi}\gamma_\mu\left\{2\ln\frac{|q|}{2m}\ln\frac{m}{\lambda}+\left(\ln\frac{|q|}{2m}\right)^2\right\}。}$$

$(4.15)_{12}$

这种渐近形式我们在§11.10中就曾介绍过。参看$(10.10)_{11}$式。

当 $\frac{q^2}{m^2}\ll 1$ 时，由$(4.14)_{11}$式可得到：

$$\boxed{\Lambda^{(3)}_{cR\mu}=\frac{-e^2}{8\pi^2}\left[\frac{1}{2m}\sigma_{\mu\nu}q_\nu+\gamma_\mu\frac{2q^2}{3m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)\right]。}$$

$$(4.16)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为:

$$\boxed{\Lambda^{(3)}_{cR\mu}=\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\frac{\alpha}{2\pi}+\gamma_\mu\left[\frac{\alpha q^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right)\right]。}$$

$$(4.16')_{12}$$

最后,再一次指出,以上结论是在两个电子线均为外电子线,即其动量均处在质量壳层上,(光子线不限)的特殊情况下求得的。对于更一般的情况,计算将更为复杂,不过利用与本节类似的方法是可以求得最一般的结果的。因为形式较复杂此地不再赘述。

§12.5 电子在外场中势能的修正、电子的反常磁矩

电子在外场中与外场相互作用的能量,按照我们以前的理解,参看§7.9 应该是

$$\mathscr{H}(x)=-i\bar{\psi}(x)e\gamma_\mu A^{(e)}_\mu(x)\psi(x)。\qquad(5.1)_{12}$$

由此可以引进

$$U=-ie\gamma_\mu A^{(e)}_\mu(x)\qquad(5.2)_{12}$$

作为电子在外场中的势能算符。不过上式实际上只是相互作用的零级近似,也就是只表示未载粒子与外场的相互作用能量,同时也没有考虑真空极化效应所引起的修正。如果考虑到上述的效应对相互作用能量的高级修正,则应有对于 $U(x)$的(Fourier 分量的)修正应为

$$\begin{aligned}i\delta U(q)&=e(\gamma_\mu\delta A^{(e)}_\mu(q)+\delta\gamma_\mu\cdot A^{(e)}_\mu(q))\\&=e[\gamma_\mu\delta A^{(e)}_\mu(q)+\Lambda^{(3)}_{\mu R}(q)A^{(e)}_\mu(q)]。\end{aligned}\qquad(5.3)_{12}$$

以$(3.14)_{12}$和$(4.14)_{12}$式代入上式可得

$$i\delta U(q)=F_\nu(q)A^{(e)}_\nu(q)。$$

其中

$$F_\nu(q)=-\frac{e^3}{(2\pi)^2}\Big\{\gamma_\nu\Big[\Big(\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}-1\Big)\Big(\ln\frac{m}{\lambda}-1\Big)$$
$$-\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta-\frac{2}{\operatorname{tg}2\theta}\int_0^\theta\xi\operatorname{tg}\xi\,d\xi\Big]$$
$$+\frac{i}{8m}\Big[(\gamma q)\gamma_\nu-\gamma_\nu(\gamma q)\Big]\frac{2\theta}{\sin 2\theta}$$
$$-\gamma_\nu\frac{1}{q^2}(q_\mu q_\nu-q^2\delta_{\mu\nu})$$
$$\cdot\Big[\frac{4m-2q^2}{-3q^2}(1-\theta\operatorname{ctg}\theta)-\frac{1}{9}\Big]\Big\}。\qquad(5.4)_{12}$$

由上式可得

$$i\delta U(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int i\delta U(q)e^{iqx}\,dq$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int F_\nu(q)A_\nu^{(e)}(q)e^{iqx}\,dq$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int F_\nu\Big(\frac{1}{i}\partial\Big)A_\nu^{(e)}(q)e^{iqx}\,dq$$
$$-F_\nu(-i\partial)A_\nu^{(e)}(x)。\qquad(5.5)_{12}$$

如果外场对时间、空间的依赖关系的变化是很缓慢的。我们可以近似地忽略$[\partial A_\nu^{(e)}(x)]$的高次项，也就是可以把$F_\nu(q)$中的$q$的高次项忽略。如果只保留到$q^2$项，我们就得到(参看$(3.11)_{12}$和$(4.16)_{12}$式)

$$F_\nu(q)=-\frac{e^3}{(4\pi)^2}\Big\{\frac{4}{3m^2}q^2\Big(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\Big)\gamma_\nu$$
$$+\frac{i}{2m}[(\gamma q)\gamma_\nu-\gamma_\nu(\gamma q)]\Big\}。\qquad(5.6)_{12}$$

代入$(5.5)_{12}$式就得到

$$i\delta U(x)=\frac{e^3}{(4\pi)^2}\Big\{\frac{4}{3m^2}\Big(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\Big)\gamma_\nu\Box A_\nu^{(e)}(x)$$
$$-\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)\Big\}。\qquad(5.7)_{12}$$

其中$\sim\frac{1}{5}$项来自真空极化的贡献，$F_{\mu\nu}(x)$为外场的场张量，即

$$F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu^{(e)}(x)-\partial_\nu A_\mu^{(e)}(x)。$$

为了更明显地表明$(5.7)_{12}$式的各项的物理意义。我们把它用三维形式表示出来，即为

$$\delta U(x)=-\frac{e^3}{(4\pi)^2 m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})+\frac{e^3}{(4\pi)^2}\cdot\frac{4}{3m}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\cdot\gamma_4(\Box\varphi-\boldsymbol{\alpha}\Box\boldsymbol{A})。$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\delta U(x)=-\frac{e^3}{(4\pi)^2 m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\frac{e^3}{(4\pi)^2}\cdot\frac{4}{3m}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\gamma^0(\Box\varphi-\boldsymbol{\alpha}\Box\boldsymbol{A}) \qquad (5.8')_{12}$$

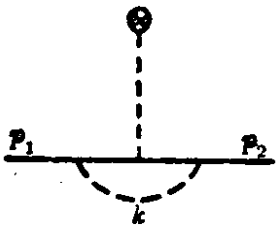


图 12-4

其中 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, φ, 和 $\boldsymbol{A}$ 分别为外场的磁场，电场强度，标势和矢势。

上式第一项来自顶角部分修正，如图 12-4 所示。可以把它集中写成 $\frac{-\mu'}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 的形式。其物理意义是容易理解的。它相当于电子多了一个附加的磁矩。通常称这一项附加的磁矩为电子的反常磁矩。其数值由上式看来应为

$$\mu'=\frac{e^2}{4\pi\hbar C}\cdot\frac{1}{2\pi}\frac{e\hbar}{2mC}=\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0。 \qquad (5.9)_{12}$$

其中 $\mu_0=\frac{e\hbar}{2mC}$，即平常所谓的 Bohr 磁矩。其中正比于 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}$ 的一项，则相当于反常磁矩在外电场中运动时与电磁场的相互作用能量，可以看成是相对论效应。$(5.8)_{12}$式中的第二项除了有来自顶角部分的修正以外，也包含有来自真空极化的效应$\left(\sim\frac{1}{5}\text{项}\right)$。这一项的物理意义可以做如下的理解。电子受到真空中电磁场的起伏作用使得电子在外场中运动时，经常在其平衡位置有微量的偏离，以致引起了它在外场中势能的涨落。这种涨落所带来的能量

修正可作如下的分析。为简单计，我们考虑静外场情况。

$$\delta U(x)=U(x+\delta x)-U(x)$$
$$=e\left[\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla+\frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)^2+\cdots\right]\varphi(x)。$$

考虑到 $\delta\boldsymbol{x}$ 是可正可负的 $\overline{\delta\boldsymbol{x}}=0$。该变更 $\delta U(x)$ 的平均值应为：

$$\overline{\delta U}(x)=\frac{e}{2}\overline{(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)^2\varphi}(x)=\frac{1}{6}e\overline{|\delta\boldsymbol{x}|^2}\nabla^2\varphi。$$

容易理解$(5.8)_{12}$式最后的 $\Box A_\nu^e(x)$ 就是上式中 $\nabla^2\varphi$ 的一个很自然的相对论推广。至于其前面系数$\sim\overline{|\delta\boldsymbol{x}|^2}$的估计，依赖于我们对电子涨落振动的具体设想。

关于 $\delta U(x)$ 的高级修正可作类似处理，其中有出现正比于 $\sim\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 者，都是属于磁矩的高级修正项，它来自顶角的高级修正。例如在计算磁矩更高一级的修正里，就应考虑图 12–5 中各种图形的贡献。

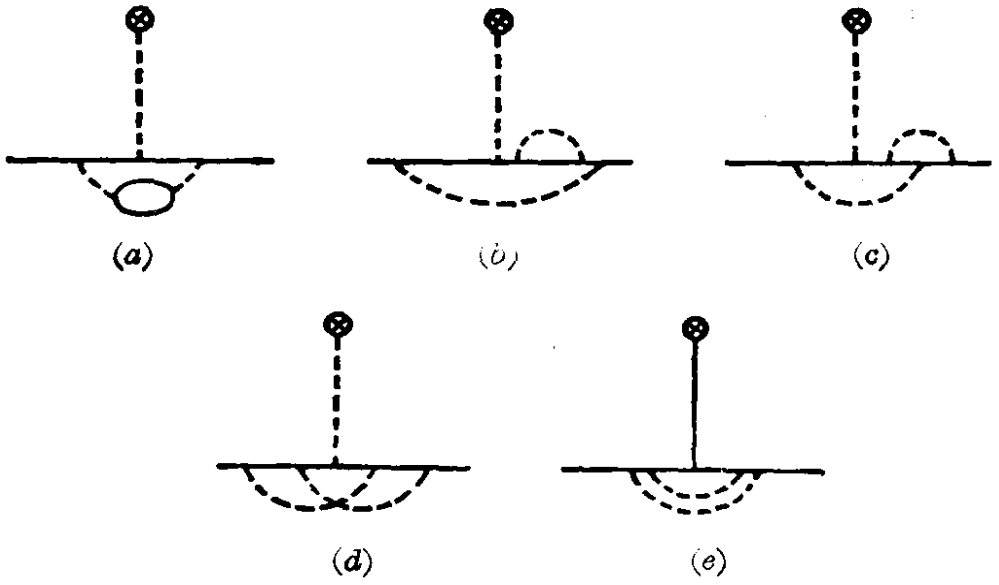


图 12–5

计算结果得到电子的总磁矩为

$$\mu=\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}-0.328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\mu_0=1.0011596\mu_0。\quad(5.10)_{12}$$

顺便指出，由于图 12–5(a)对电子和 μ 介子的贡献不同，其结果对于 μ 介子应为

$$\mu=\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}+0.75\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\mu_0'=1.0011654\mu_0'。\quad (5.11)_{12}$$

其中 $$\mu_0'=\frac{e\hbar}{2m_\mu c}。$$

实验结果是

$(\mu-\mu_0)_{实}=(1.0011\pm0.0020)(\mu-\mu_0)_{理}$，　对于电子。

$(\mu-\mu_0')_{实}=(0.9974\pm0.0042)(\mu-\mu_0')_{理}$，　对于$\mu$介子。

实验结果和理论预告符合得如此之好，以致令人感到惊奇。这当然可以说是对重整化理论的支持。然而却不能因此断言重整化理论是完全正确的。我们还应该去寻找更深入的理解，来说明实验与计算结果相符的内在本质。

§12.6 Lamb 能级迁移

利用上节所考虑的电子在外场中势能的修正，我们可以来计算原子中的电子的能级的微量迁移。例如氢原子中的电子的能级的迁移，由$(5.8)_{12}$式可得

$$\boxed{\begin{aligned}\delta E_n'&=\int\bar{\psi}_n\delta U(x)\psi_n\,dx=\int\psi_n^+\gamma_4\delta U(x)\psi_n\,dx\\&=\alpha\frac{e}{4\pi}\left\{\frac{4}{3m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\cdot\langle\nabla^2\varphi\rangle_n-\frac{1}{m}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}\rangle_n\right\}。\end{aligned}}$$

$(6.1)_{12}$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\begin{aligned}\delta E_n'&=\int\bar{\psi}_n\delta U(x)\psi_n\,dx=\int\psi_n^+\gamma^0\delta U(x)\psi_n\,dx\\&=\alpha\frac{e}{4\pi}\left\{\frac{4}{3\pi^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\langle\nabla^2\varphi\rangle_n+\frac{i}{m}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}\rangle_n\right\}\end{aligned}$$

$(6.1')_{12}$

以上 n 表明电子的能级，并已考虑到氢原子的外场是库伦势 $\boldsymbol{H}=0$ $=\boldsymbol{A}$。

应该指出，以上 $\delta E'$ 实际上还只是能级迁移的一部分。正如

在红外发散一节 (§ 11.12) 里提到，$\delta E'_n$ 只是考虑到当虚光子能量 $\omega>\omega_{\min}$ 情况下所引起的能级迁移，这一点表明在$(6.1)_{12}$式的表式中含有光子的"静质量" λ 这一事实上。关于氢原子中电子和能量 $\omega<\omega_{\min}$ 的虚光子相互作用所引起的能量迁移，我们将要另行处理。在这个低能区域，我们可用非相对论近似、半经典的方法来处理。根据量子力学的二级微扰理论，能量迁移的二级近似应为

$$\Delta E_n=\sum_{n'e}\frac{V_{nn'}V_{n'n}}{E_n-E_{n'}-\omega}。\qquad (6.2)_{12}$$

其中求和遍及所有可能的虚态 n'，各种虚光子能量 ω (不过此地 ω 应限于 $\omega<\omega_{\min}$)及其极化 $e=1.2$。上式中 $V_{nn'}$ 为原子中电子与真空电磁场的相互作用的相应矩阵元。对于低能光子，其波长远大于原子的线度，我们可以忽略在原子线度内光子位相的改变，即令因子 $e^{ikx}\sim1$ 代入。这样

$$V_{nn'}=\frac{-e}{\sqrt{2\omega}}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})_{nn'}。\qquad (6.3)_{12}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为电子的速度算符，可用 $\boldsymbol{v}=\frac{1}{im}\nabla$ 代入。最后得到

$$\Delta E_n=\frac{e^2}{2}\int_0^{\omega_{\min}}\frac{1}{\omega}\sum_{n'e}\frac{|(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})_{nn'}|^2}{(E_n-E_{n'}-\omega)}\cdot\frac{4\pi\omega^2\,d\omega}{(2\pi)^3}。$$

其中最后因子 $\frac{4\pi\omega^2\,d\omega}{(2\pi)^3}$ 为一定极化的光子，其能量处于 $\omega\to\omega+d\omega$ 区域内态的数目。考虑到光子极化方向和电子速度方向的任意性，可有

$$\sum_{e=1,2}|(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})_{nn'}|^2=\frac{2}{3}|\boldsymbol{v}_{nn'}|^2。\qquad (6.4)_{12}$$

代入上式得到

$$\Delta E_n=\frac{2}{3}\frac{e^2}{(4\pi^3)}\int_0^{\omega_{\min}}\omega\,d\omega\sum_{n'}\frac{|(\boldsymbol{v})_{nn'}|^2}{(E_n-E_{n'}-\omega)}。\qquad (6.5)_{12}$$

应该注意，当 $n\to\infty$ 时，电子脱离了原子核的束缚成为自由电子，这时的 ΔE_∞ 应该就是电子的电磁质量中来自低能虚光子的部分。

而电子的电磁质量已在质量重整化过程中，全部被包含到电子质量的观测值中去了。因而我们在计算能级迁移时，应该把 ΔE_∞ 除掉。考虑到对于自由电子，其速度和能量算符是相互对易的，也就是此时速度算符在能量的表示里是对角的。也就是对于自由电子 $v_{nn'}=v\delta_{nn'}$。代入(6.5)式就得到：

$$\Delta E_\infty=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^{\omega_{\min}}\omega\,d\omega\,\frac{v^2}{\omega}。\qquad (6.6)_{12}$$

另一方面 $(v^2)_{nn}$ 可写成 $(v^2)_{nn}=\sum_{n'}|v_{nn'}|^2$。最后得到低能光子所引起的能级迁移应为

$$\delta E_n''=\Delta E_n-\Delta E_\infty=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^{\omega_{\min}}d\omega \cdot\sum_{n'}\frac{|v_{nn'}|^2}{(E_n-E_{n'}-\omega)}(E_n-E_{n'})。\qquad (6.7)_{12}$$

对 ω 积分得到

$$\delta E_n''=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi^2}\sum_{n'}|v_{nn'}|^2\cdot(E_n-E_{n'})\ln\frac{\omega_{\min}+(E_{n'}-E_n)}{|E_{n'}-E_n|}。\qquad (6.8)_{12}$$

其中 $|E_{n'}-E_n|$ 与原子的结合能具有相同的数量级。对于类氢原子 $|E_{n'}-E_n|\sim z^2R_y$。可以认为这样能量远小于 $\omega_{\min}$ 以致可以把 ln 分子中的 $|E_{n'}-E_n|$ 略去。同时由于 ln 函数是个变化缓慢的函数，我们可以把 ln 分母中的 $|E_{n'}-E_n|$ 代以平均值 ϵ_0，这样就使计算大大的简化。简化以后上式就成为

$$\delta E_n''=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi^2}\sum_{n'}|v_{nn'}|^2\cdot(E_{n'}-E_n)\ln\frac{\omega_{\min}}{\epsilon_0}。\qquad (6.9)_{12}$$

其中 ϵ_0 由下式关系所定义，即

$$\ln\epsilon_0\cdot\sum_{n'}|v_{nn'}|^2(E_{n'}-E_n)=\sum_{n'}|v_{nn'}|^2\cdot(E_{n'}-E_n)\ln|E_{n'}-E_n|。\qquad (6.10)_{12}$$

由于在能量本征态的表示里，E_n 为对角矩阵和 H 算符等效。我们可有以下关系

$$\sum_{n'}|\boldsymbol{v}_{nn'}|^2(E_{n'}-E_n)=\sum_{n'}(\boldsymbol{v}_{nn'}E_{n'}\boldsymbol{v}_{n'n}-E_n\boldsymbol{v}_{nn'}\boldsymbol{v}_{n'n})$$
$$=(\boldsymbol{v}H\boldsymbol{v})_{nn}-(H\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})_{nn}$$
$$=(vHv)_{nn}-(vvH)_{nn}$$
$$=\frac{1}{2}[\boldsymbol{v}H\boldsymbol{v}-H\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}H\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}H]_{nn}$$
$$=\frac{1}{2}[\boldsymbol{v},\ [H,\ \boldsymbol{v}]]_{nn}$$
$$=\frac{1}{2m^2}[[H,\ \nabla],\ \nabla]_{\circ}\qquad(6.11)_{12}$$

其中 H 为电子在外场中的哈密顿算，在非相对论近似下即为

$$H=\frac{p^2}{2m}+e\varphi(x)=\frac{-1}{2m}\nabla^2+e\varphi(x)\qquad(6.12)_{12}$$

代入上式可得

$$\sum_{n'}|\boldsymbol{v}_{nn'}|^2(E_{n'}-E_n)=\frac{e}{2m^2}[\nabla^2\varphi(x)]_{nn}$$
$$=\frac{e}{2m^2}\int\psi_n^+(x)\nabla^2\varphi(x)\psi_n(x)d\boldsymbol{x}_{\circ}\qquad(6.13)_{12}$$

代入$(6.9)_{12}$式得到

$$\delta E_n''=\frac{e^2}{12\pi^2m^2}e\int\psi_n^+\nabla^2\varphi(x)\psi_n(x)d\boldsymbol{x}\ln\frac{\omega_{\min}}{\epsilon_0}_{\circ}\qquad(6.14)_{12}$$

把上式和$(6.1)_{12}$式相加，得到能级迁移的总和应为

$$\boxed{\delta E_n=\delta E_n'+\delta E_n''=\frac{\alpha}{3\pi}e\left(\ln\frac{m}{2\epsilon_0}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left\langle\frac{\nabla^2}{m^2}\omega(x)\right\rangle_n-\frac{\alpha e}{4\pi m}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}\rangle_{n\circ}}\qquad(6.15)_{12}$$

上式在 Bjorken 度规下为：

$$\boxed{\delta E_n=\delta E_n'+\delta E_n''=\frac{\alpha}{3\pi}e\left(\ln\frac{m}{2\epsilon_0}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left\langle\frac{\nabla^2}{m}\varphi(x)\right\rangle_n+\frac{i\alpha e}{4\pi m}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}\rangle_n}\qquad(6.15')_{12}$$

以上已利用了$(12.1)_{11}$式关系$\ln\lambda=\ln 2\omega_{\min}-\frac{5}{6}$。以致在最后$(6.15)_{12}$式中就完全不出现$\lambda$或$\omega_{\min}$了。

上式最后一项正比于$\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi$，它来自电子的反常磁矩。可把它分解为分别对$l=0$和$l\neq 0$的角动量态有贡献的两项。我们知道$\boldsymbol{\gamma}$矩阵只当它联系大分量和小分量时才不为零。同时在非相对论近似下，小分量χ和大分量φ可由下列关系联系起来，参看$(9.12)_1$式$\chi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\varphi$。利用 Pauli 表示求得

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi\rangle_n&=\int[\varphi_n^+(-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\chi_n+\chi_n^+(i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\varphi_n]d\boldsymbol{x}\\&=\int\Big[-i\varphi_n^+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\varphi_n\\&\quad+i\varphi_n^+\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\varphi)\varphi_n\Big]d\boldsymbol{x}。\end{aligned}\qquad(6.16)_{12}$$

对于氢原子中的电子，其外场的标势为球形对称的库伦势。这一段我们暂时采用 CGSE 单位制。

$$\varphi=\frac{-ze}{r},\ \nabla\varphi=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\varphi}{dr}=\frac{ze\boldsymbol{r}}{r^3},\ \nabla^2\varphi=4\pi ez\delta(0)。\qquad(6.17)_{12}$$

代入$(6.16)_{12}$式并利用$(9.15)_1$式$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+i(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{\sigma}$得到

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi\rangle_n&=\int\Big[\varphi_n^+\frac{\nabla^2\varphi}{2m}\varphi_n+\varphi_n^+\Big(\frac{1}{mr}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\Big)\varphi_n\Big]d\boldsymbol{x}\\&=-|\varphi_n(0)|^2\cdot\frac{2\pi ez}{m}+\lambda_{lj}\frac{1}{m}ez\\&\quad\cdot\int_0^\infty|\varphi_n(r)|^2\frac{dr}{r}\,d\Omega\cdot l(l+1)\\&=\begin{cases}\Big(\frac{z}{na}\Big)^3\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi ez}{m}=4\frac{m}{e}\alpha^2\frac{z^4}{n^3}R_y,\ \text{当}\ l=0;\\\lambda_{lj}\cdot 4\frac{m}{e}\alpha^2\frac{z^4}{n^3}R_y\frac{1}{2l+1},\ \text{当}\ l\neq 0。\end{cases}\end{aligned}$$

$$(6.18)_{12}$$

上式当$l=0$时，只有第一项有贡献；而当$l\neq 0$时，只有第二项有贡

献。不过可以总结写成

$$\langle \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi\rangle_n=\lambda_{lj}4\frac{m}{e}\alpha^2\frac{z^4}{n^3}R_y\frac{1}{2l+1}。\qquad (6.19)_{12}$$

其中

$$\lambda_{lj}=\begin{cases}\dfrac{1}{l+1}, & 当\ j=l+\dfrac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{-1}{l}, & 当\ j=l-\dfrac{1}{2}。\end{cases}\qquad (6.20)_{12}$$

以上我们已利用了

$$\left\langle\frac{\nabla^2}{m^2}e\varphi\right\rangle=\frac{4\pi e^2}{m^2}z|\psi_n(0)|^2=8\alpha^2\frac{z^4}{n^3}R_y\delta_{l0}\qquad (6.21)_{12}$$

$$|\psi_n(0)|^2=\begin{cases}\left(\dfrac{z}{na}\right)^3\cdot\dfrac{1}{\pi}, & 当\ l=0;\\ 0, & 当\ l\neq 0。\end{cases}\qquad (6.22)_{12}$$

其中

$$a=\frac{\hbar^2}{me^2},\quad R_y=\frac{1}{2}\alpha^2mC^2。\qquad (6.23)_{12}$$

把$(6.19)_{12}$和$(6.21)_{12}$式代入$(6.15)_{12}$式。就可得到最后结果。对于氢原子的能级迁移为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\nu(2s^{1/2})\sim 1034\ \text{兆周/秒},\\ &\Delta\nu(2p^{1/2})\sim -17\ \text{兆周/秒},\\ &\Delta\nu(2p^{3/2})\sim 8\ \text{兆周/秒},\end{aligned}\right\}\qquad (6.24)_{12}$$

其中关于$\ln\dfrac{mC^2}{\epsilon_0}$的计算，需要用数字计算，这儿不再重复。可参看 Hand buch der physik Band 35, p.404。对于氢原子，

$$\ln\frac{mC^2}{\epsilon_0}=7.6876。$$

根据 Dirac 的相对论量子力学的计算，氢原子的$2s^{1/2}$和$2p^{1/2}$态应具有相同的能级。可是由$(6.24)_{12}$式看来，它们的辐射修正数值却是不同的。因而$2p^{1/2}$和$2s^{1/2}$态应有能级差为

$$\Delta\nu(2s^{1/2})-\Delta\nu(2p^{1/2})\simeq 1051\ \text{兆周/秒}。\qquad (6.25)_{12}$$

关于这两个能级差值的观测，首先由 Lamb 和 Ruther ford 于 1947 年进行，其观测值为$\sim 1057.77\pm 0.10$兆周/秒。由此看来，

理论值和实验值相差只是微量。而且如果我们考虑高级修正，以及原子核的质量有限等效应。还可以把理论值和实验值的相差减少到约半个兆周/秒。因此从实用的观点看来、重整化理论至少在电动力学范围内是卓有成效的。然而并不能因此而掩盖了它理论上的缺陷。

参 考 资 料

1. 关于辐射修正

E. M. Lifshitz & L. P. Pitaevskii Relativistic Quantum Theory (1973) Chapter 12

C. Itzykson & J. B. Zuber Quantum Field Theory (1980) Chapter 7

第十三章　路线积分理论形式

以上我们介绍了量子场论的通常的描述形式。掌握以上理论形式，我们就可以处理"点状"粒子在电磁相互作用或弱相互作用下的各种过程。至于对于复合粒子(例如强子)或在强相互作用下许多过程的处理，目前尚无完整的理论，只有若干未完备的片段的理论处理方法。限于篇幅，这些内容将留在另一课程内介绍。

正象牛顿力学逐渐在理论形式上发展成为分析力学那样，量子场论在理论形式上也有新的发展，这就是所谓量子场论的路线积分形式。这种理论形式以精炼的方式给出了量子场论的重要关系，例如微扰展开，Ward-Takahashe 等式等等，并已逐渐在量子场论和量子统计里被广泛应用。在这种理论形式里，场的量子化不需要通过正则量子化方式，而是表示成经典场的路线积分。在前面所遇到的我们感兴趣的重要物理量，例如 Green 函数和 S 矩阵都可表示成产生泛函的对外源的变分。由于在路线积分的理论形式中出现的都是经典量，我们可以有效地运用数学分析中常用的方法，例如积分变量的变换就是一个有用的工具。同样由于形式中出现的都是经典量，我们就可以直接研究，存在于经典拉氏量的对称性，对于量子理论所引起的效应。

本章首先介绍量子力学的路线积分描述形式，再由简入繁，逐步发展到量子场论的路线积分形式。最后以 φ^4 场论为例来说明这种理论形式的应用。用路线积分形式来讨论规范场的量子化和重整化是更为方便。不过规范场理论将另有课程讲授，本课程将不再作详细介绍。

§13.1　单粒子量子力学的路线积分形式

关于量子力学的路线积分形式，R. P. Feynman 和 A. R.

Hibbs 已有著名的专著，我们不必重复。这儿只是为以后讲述量子场论的路线积分形式，引进必要的预备知识。先从一个自由度情况讲起。

考虑 $Q(t)$ 是粒子位置坐标算符。应该指出，在 Heisenberg 图象里，不同时刻的坐标算符，虽然它们可能有相同的本征值谱，可是最好把它看成是不同的算符。不同时刻的 $Q(t)$ 算符的本征矢一般是不同的，即使它们的本征值是相同的，其本征矢也可是不同的，即在 Hibbert 空间中，应由不同的态矢量表示。因此在表征 $Q(t)$ 的本征矢时，除标以它的本征值外，还应标记以 t，即以 $|q, t\rangle$ 标记，但这并不表示 $Q(t)$ 的本征矢是随时间而变的，而是表明 $Q(t)$ 的本征态一般应与参量 t 有关。

$$Q(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle。 \qquad (1.1)_{13}$$

可是我们已知在 Heisenberg 图象里，不同时刻算符之间有 $(1.4)_8$ 式的关系

$$Q(t) = e^{iHt}Q(0)e^{-iHt}。$$

由此我们可以导出本征值相同，但时刻不同的态矢量之间的关系

$$Q(0)|q, 0\rangle = q|q, 0\rangle。$$

$$Q(t)|q, t\rangle = e^{iHt}Q(0)e^{-iHt}|q, t\rangle = q|q, t\rangle。$$

容易看出

$$|q, t\rangle = e^{iHt}|q, 0\rangle \qquad (1.2)_{18}$$

是上式的解。

考虑粒子在 t 时刻位于 q 处，而在 t' 时刻位于 q' 处的机率振幅

$$F(q', t'; q, t) \equiv \langle q', t'|q, t\rangle。 \qquad (1.3)_{18}$$

通常称为 Schwinger 变换函数。

我们知道了 $F(q', t'; q, t)$ 函数，就了解到全部的物理，下面将可证明，这个变换函数可以表示成为对于 q 的路线积分。为此把 $t'-t$ 区间分成 $(n+1)$ 个相等的小区间 $t=t_0, t_1, t_2, \cdots, t'=t_{n+1}$，而 $t_k = t_0 + k\epsilon$。并利用同一时刻 $Q(t)$ 本征矢的完闭性

$$\int dq|q,\ t\rangle\langle t,\ q|=1。$$

于是

$$\begin{aligned}F(q',\ t';q,\ t)&=F(q',\ t_0+(n+1)\epsilon;q,\ t)\\&=\int dq_1dq_2\cdots dq_n\langle q',\ t'|q_n,\ t_n\rangle\\&\quad\cdot\langle q_n,\ t_n|q_{n-1},\ t_{n-1}\rangle\cdots\langle q_1,\ t_1|q,\ t\rangle。\end{aligned}\tag{1.4}_{13}$$

由$(1.2)_{13}$和$(1.3)_{13}$式可知

$$\langle q_l,\ t_l|q_{l-1},\ t_{l-1}\rangle=\langle q_l|\exp(-i\epsilon H)|q_{l-1}\rangle。\tag{1.5}_{13}$$

同一时刻Q的本征矢的完闭性(前面已用过)和正交归一性定义如下

$$\left.\begin{aligned}&\langle q|q'\rangle=\delta(q-q'),\\&\int_{-\infty}^{\infty}dq|q\rangle\langle q|=1。\end{aligned}\right\}\tag{1.6}_{13}$$

动量p的本征矢$|p\rangle$的完闭性和正交归一性定义如下：

$$\left.\begin{aligned}&\langle p|p'\rangle=2\pi\delta(p-p'),\\&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\partial\pi}|p\rangle\langle p|=1。\end{aligned}\right\}\tag{1.7}_{13}$$

则

$$\langle p|q\rangle=e^{-ipq},\ \langle q|p\rangle=e^{ipq}。\tag{1.8}_{13}$$

以上没有标记t的量表示是$t=0$时的量，以下同此。

考虑

$$\begin{aligned}\langle q_l|q^n|q_{l-1}\rangle&=\int\frac{dp}{2\pi}\langle q_l|p\rangle\langle p|q^n|q_{l-1}\rangle\\&=\int\frac{dp}{2\pi}e^{ipq_l}p^ne^{-ipq_{l-1}}=\int\frac{dp}{2\pi}e^{ip\cdot(q_l-q_{l-1})}p^n。\end{aligned}\tag{1.9}_{13}$$

同样可以证明$\epsilon\to0$时

$$\left.\begin{aligned}\langle q_l|Q^n|q_{l-1}\rangle&=\int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(q_l-q_{l-1})}\cdot\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)^n,\\\langle q_l|p^nQ^m|q_{l-1}\rangle&=\int\frac{dp}{2\pi}p^n\left(\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)^me^{ip(q_l-q_{l-1})}。\end{aligned}\right\}\tag{1.10}_{13}$$

通常碰到的 H 是 P, Q 的多项式，常如以下形式

$$H=\frac{P^2}{2}+V(Q)。\qquad (1.11)_{13}$$

设想把$(1.5)_{13}$式的 $\exp(-i\epsilon H)$展开成 P 和 Q 的幂级数，然后逐项利用$(1.9)_{13}$式和$(1.10)_{13}$式就可以得到

$$\begin{aligned}\langle q_l,\ t_l|q_{l-1},\ t_{l-1}\rangle&=\langle q_l|\exp(-i\epsilon H)|q_{l-1}\rangle\\&=\int\frac{dp}{2\pi}\exp[ip(q_l-q_{l-1})]\\&\quad\cdot\exp\left[-i\epsilon H\left(p,\frac{q_l+q_{l-1}}{2}\right)\right]\\&=\int\frac{dp}{2\pi}\exp i\left[p\cdot\frac{(q_l-q_{l-1})}{\epsilon}\right.\\&\quad\left.-H\left(p,\frac{q_l+q_{l+1}}{2}\right)\right]\epsilon。\qquad (1.12)_{13}\end{aligned}$$

把上式代入$(1.4)_{13}$式得到

$$\begin{aligned}F(q',\ t';\ q,\ t)&=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{l=1}^{n}dq_l\int\prod_{l=1}^{n+1}\frac{dp_l}{2\pi}\\&\quad\cdot\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n+1}\left[p_j\frac{(q_j-q_{j-1})}{\epsilon}\right.\right.\\&\quad\left.\left.-H\left(p_j,\ \frac{q_j+q_{j+1}}{2}\right)\right]\epsilon\right\}。\qquad (1.13)_{13}\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$, $\epsilon\to dt$ 时，上式可形式地写成

$$\boxed{F(q',\ t';\ q,\ t)=\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q}-H(p,\ q)]dt\right\}。}$$

$$(1.14)_{13}$$

其中$[dp][dq]$表示对一切可能的路线积分，这些路线只需保持端点位置不变，即 $q(t)=q$, $q(t')=q'$，不过这只是一种简便的符号，实际含意依然是$(1.13)_{13}$式的极限。

在通常情况下，上式对$[dp]$积分是可以进行的。通常遇到的积分大多是高斯型积分。为以后查用方便，现把有关高斯型积分罗列于下：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x^2-\epsilon x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{(i\alpha+\epsilon)}},\\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/4\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x-\alpha x^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\beta^2/4\alpha},\\
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x-(i\alpha+\epsilon)x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{(i\alpha+\epsilon)}}\,e^{-\beta^2/4(i\alpha+\epsilon)}。
\end{aligned}\right\}$$

$(1.15)_{13}$

以上 ϵ 是为使积分有确定意义所引进的截断因子，可令它趋于零。

把$(1.11)_{13}$式的 H 代入$(1.13)_{13}$式并利用$(1.15)_{13}$式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\exp\left[\,i\epsilon\left(p\dot{q}-\frac{p^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi i\epsilon}}\exp\left(\frac{1}{2}\,i\epsilon\dot{q}^2\right)。$$

$(1.16)_{13}$

$$\begin{aligned}
F(q',\,t';\,q,\,t)&=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{i=1}^{n}dq_i\int\prod_{i=1}^{n+1}\frac{dp_i}{2\pi}\\
&\quad\cdot\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n+1}\left[\left(p_j\dot{q}_j-\frac{p_j^2}{2}\right)-V\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)\right]\epsilon\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\int\prod_{i=1}^{n}dq_i\,\frac{1}{(2\pi i\epsilon)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&\quad\cdot\exp\left\{i\epsilon\sum_{j=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2}\,\dot{q}_j^2-V\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)\right]\right\}。
\end{aligned}$$

$(1.17)_{13}$

$$\boxed{\begin{aligned}
F(\dot{q},\,t';\,q,\,t)&=\int\left[\frac{dq}{(2\pi i\epsilon)^{1/2}}\right]\exp\left[i\int_t^{t'}\mathscr{L}(q,\dot{q})dt\right]\\
&=N\int[dq]\exp\left[i\int_t^{t'}\mathscr{L}(q,\,\dot{q})dt\right]。
\end{aligned}}$$

其中 N 为一与 q 无关的常数。$\mathscr{L}$ 为经典拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\,\dot{q}-V(q)。$$

值得指出，上式$(1.17)_{13}$式中不含有算符，我们可以采用经典

的数学分析的方法来讨论量子体系的性质。上式表明粒子由 q, t 到达 q', t' 的机率振幅，是由各种路线(端点不变)以相对"权重" $\exp iI$ 迭加所得，其中 I 为该路线的作用量。

一般情况下，例如动能部分不是简单的 $\frac{p^2}{2}$ 或 $\mathscr{L}$ 中的势能与 $\dot{q}$ 有关，那末对 $[dp]$ 的路线积分就要复杂得多，其结果常对 $(1.17)_{13}$ 式中的 $\mathscr{L}(q, \dot{q})$ 有适当的修改需要逐个地计算。考虑了修改以后的 $\mathscr{L}$ 称为有效拉氏量，记为 $\mathscr{L}_{eff}(q, \dot{q})$。例如，可参看 T. D. Lee 和 C. N. Yang 的 phys. Rev. **128**(1962)885，这儿不进一步研究。

§13.2 矩阵元的路线积分形式

不仅变换函数可表示成路线积分的形式，如同上节已介绍。物理量的矩阵元也可表成路线积分形式。考虑 t_i 落在时间的某一分点上，当然这并不丧失一般性，只是为了讨论方便而已。$Q(t_i)|q_i t_i\rangle = q_i|q_i, t_i\rangle$。考虑 $Q(t_i)$ 的以下矩阵元，并利用类似 $(1.4)_{13}$ 式的推导。

$$\begin{aligned}
&\langle q', t'|Q(t_i)|q, t\rangle \\
&= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_n \langle q', t'|q_n, t_n\rangle\langle q_n, t_n|q_{n-1}, t_{n-1}\rangle\cdots \\
&\quad \cdot\langle q_{i+1}, t_{i+1}|Q(t_i)|q_i, t_i\rangle\cdots\langle q_1, t_1|q, t\rangle \\
&= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_n\, q(t_i)\langle q', t'|q_n, t_n\rangle\cdots\langle q_1, t_1|q, t\rangle \\
&= \int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq] q(t_i)\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q} - H(p, q)]dt\right\}。
\end{aligned} \tag{2.1}_{13}$$

上式最后一步可由重复 $(1.14)_{13}$ 式的推导而得到。

同样当 $t' > t_i > t_j > t$ 时可得到

$$
\begin{aligned}
&\langle q',\ t'|Q(t_i)Q(t_j)|q,\ t\rangle \\
&=\int dq_1dq_2\cdots dq_n\langle q',\ t'|q_n,\ t_n\rangle\cdots \\
&\quad\cdot\langle q_{i+1},\ t_{i+1}|Q(t_i)|q_i,\ t_i\rangle\cdots \\
&\quad\cdot\langle q_{j+1},\ t_{j+1}|Q(t_j)|q_j,\ t_j\rangle\cdots\langle q_1,\ t_1|q,\ t\rangle \\
&=\int dq_1dq_2\cdots dq_n\,q(t_i)q(t_j)\langle q',\ t'|q_n,\ t_n\rangle\cdots\langle q_1,\ t_1|q,\ t\rangle \\
&=\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]q(t_i)q(t_j)\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q}-H(p,\ q)]dt\right\}。
\end{aligned}
\tag{2.2}_{18}
$$

上式右边的 $q(t_i)$和 $q(t_j)$是 C 函数，其排列次序可以调换，但在上式左边 $Q(t_i)$和 $Q(t_j)$却是算符，其顺序不能随意调换。因此上面等式成立应对左边的 $Q(t_i)$和 $Q(t_j)$的排列顺序有所规定。应该注意，在我们推导上式过程中曾利用了 $t'>t_i>t_j>t$ 的条件。因为 t只有这样才能使 $Q(t_i)$和 $Q(t_j)$安排在适当的时间格点上，如果 $t'<t_j$，那末我们就不能把它们安排在适当的时间格点上，而不改变 $Q(t_i)Q(t_j)$的排列顺序。也就是当 $t_i>t_j$ 时，我们只能把它们排成 $Q(t_i)Q(t_j)$，而当 $t_i<t_j$ 时，我们只能把它们排成 $Q(t_j)Q(t_i)$，才能重复我们以上的推导。因此上式的成立，要求左边算符 $Q(t_i)Q(t_j)$一定要按时间先后顺序排列。

以上结论容易推广到有多数个 $Q(t_i)$的情况。

$$
\begin{aligned}
&\langle q',\ t'|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|q,\ t\rangle \\
&\quad=\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\cdot\exp\left\{i\int_t^{t'}(p\dot{q}-H)dt\right\}。
\end{aligned}
\tag{2.3}_{18}
$$

算符的时序乘积一般都可写成相应的经典量的路线积分形式。如同在以前讨论中一样，通常有兴趣的是算符时序乘积对真空态的期待值，它直接和格林函数和 S 矩阵有密切联系。例如

$$\begin{aligned}&\langle 0|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|0\rangle\\&=\int\langle 0|q',\ t'\rangle\langle q',\ t'|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|q,\ t\rangle\\&\quad\cdot\langle q,\ t|0\rangle dq'dq\\&=\int dq'\,dq\,\Phi_0^*(q',\ t')\Phi_0(q,\ t)\\&\quad\cdot\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]\,q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\cdot\exp\left\{i\int_t^{t'}(p\dot{q}-H)dt\right\}。\end{aligned}\tag{2.4}_{13}$$

以上利用了$(2.3)_{13}$式并引进了下面的符号：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n^*(q',\ t')&\equiv\langle n|q',\ t'\rangle=\langle n|e^{iHt'}|q'\rangle\\&=e^{iE_nt'}\langle n|q'\rangle=e^{iE_nt'}\phi_n^*(q'),\\\Phi_n(q,\ t)&\equiv\langle q,\ t|n\rangle=\langle q|e^{-iHt}|n\rangle\\&=e^{-iE_nt}\langle q|n\rangle=e^{-iE_nt}\phi_n(q)。\end{aligned}\right\}\tag{2.5}_{13}$$

其中 $\Phi_n(q,\ t)=\langle q,\ t|n\rangle$ 和 $\phi_n(q)=\langle q|n\rangle$ 分别为能量本征态$|n\rangle$，在$\langle q,\ t|$完备基矢和$\langle q|$完备基矢下的波函数。能量本征态$|n\rangle$满足本征方程

$$H|n\rangle=E_n|n\rangle。\tag{2.6}_{13}$$

$|0\rangle$为最低能态也就是所谓真空态。

把$(2.4)_{13}$式特殊化可得到：当所有 $Q(t_i)=1$ 时，

$$\langle 0^+|0^-\rangle=\int dq'\,dq\,\Phi_0^*(q',\ t')\langle q',\ t'|q,\ t\rangle\Phi_0(q,\ t)。\tag{2.7}_{13}$$

这就是真空态到真空态的过渡振幅，相当以前在相互作用图象里的$\langle 0|e^{iS}|0\rangle$。

§13.3 产生泛函

可以把格林函数写成精炼的路线积分形式。为此我们采用Schwinger的技巧，也就是在拉氏量中引进一项外源项 $L_{外}=J(t)$

$\cdot q(t)$。与此相应，重复$(1.14)_{13}$式的推导，可得到相应的变换函数为

$$\langle Q', t'|Q, t\rangle^J=\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q}-H(p,q)+Jq]dt\right\}。\tag{3.1}_{13}$$

上指标 J 表明为有外源项情况下的相应的量，以下同此。同样积分时要保持 $Q(t)=Q$，且 $Q(t')=Q'$。其中 $J(t)$ 为某一 t 的函数的经典外源，并假定只在 $t\to t'$ 之间才不为零。

类似$(2.3)_{13}$式的推导可得到

$$\begin{aligned}&\langle q', t'|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|q, t\rangle^J\\&=\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\\&\cdot\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q}-H(p,q)+Jq]dt\right\}。\end{aligned}\tag{3.2}_{13}$$

类似$(2.7)_{13}$式的推导可得到

$$\boxed{\begin{aligned}&W[J]\equiv\langle 0^+|0^-\rangle^J\\&=\int dq'\,dq\,\Phi_0^*(q', t')\langle q', t'|q, t\rangle^J\Phi_0(q, t)。\end{aligned}}\tag{3.3}_{13}$$

以$(3.1)_{13}$式代入$(3.3)_{13}$式，可以看出：当 $W[J]$ 对 J 变分时，只是在$(3.1)_{13}$式的指数函数前面多了一个 iq 因子。因此

$$\begin{aligned}&\lim_{J\to 0}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_n)}\\&=i^n\int dq'\,dq\,\Phi_0^*(q', t')\Phi_0(q, t)\\&\cdot\int\left[\frac{dp}{2\pi}\right][dq]q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\\&\cdot\exp\left\{i\int_t^{t'}[p\dot{q}-H(p, q)]dt\right\}。\end{aligned}\tag{3.4}_{13}$$

其中 $t'>t_n>t_{n-1}\cdots>t_1>t_0$。

与(2.4)式相比，上式可写成

$$\lim_{J\to 0}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_n)}=(i)^n\langle 0|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|0\rangle。\qquad (3.5)_{13}$$

在具体计算 $W[J]$ 时，$(3.3)_{13}$ 式还可进一步简化。考虑

$$\langle Q',T'|Q,T\rangle^J=\int\langle Q',T'|q',t'\rangle\langle q',t'|q,t\rangle^J\cdot\langle q,t|Q,T\rangle dq'dq。\qquad (3.6)_{13}$$

其中 $T'>t'>t>T$，并已考虑到 J 只在 $t\to t'$ 之间才不为零。因为在(T',t')之间和(t,T)之间 $J=0$，我们可以直接求出$\langle q,t|Q,T\rangle$ 和 $\langle Q',T'|q',t'\rangle$ 对时间的依赖关系。参看 $(1.2)_{18}$ 和 $(1.3)_{18}$ 式可知

$$\begin{aligned}\langle q,t|Q,T\rangle&=\langle q|\exp[-iH(t-T)]|Q\rangle\\&=\sum_{n,n'}\langle q|n\rangle\langle n|\exp[-iH(t-T)]|n'\rangle\langle n'|Q\rangle\\&=\sum_{n,n'}\phi_n(q)\exp[-iE_n(t-T)]\langle n|n'\rangle\phi^*_{n'}(Q)\\&=\sum_n\phi^*_n(Q)\phi_n(q)\exp[-iE_n(t-T)]。\end{aligned}\qquad (3.7)_{13}$$

为了只把基态的贡献保留下来。考虑到如果上式乘以 $\exp[-iE_0T]$ 则当 $T\to i\infty$ 时，求和中只有最低能态 $n=0$ 贡献最大，其余高能态贡献均为高级微量可忽略。

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to i\infty}\exp(-iE_0T)\langle q,t|Q,T\rangle\\&=\phi^*_0(Q)\exp(-iE_0t)\phi_0(q)\\&=\phi^*_0(Q)\Phi_0(q,t)。\end{aligned}\qquad (3.8)_{13}$$

同样可以证明

$$\begin{aligned}&\lim_{T'\to -i\infty}\exp(iE_0T')\langle Q',T'|q',t'\rangle\\&=\phi^*_0(q')\exp(iE_0t')\phi_0(Q')\\&=\Phi^*_0(q',t')\phi_0(Q')。\end{aligned}\qquad (3.9)_{13}$$

把 $(3.8)_{13}$ 和 $(3.9)_{13}$ 式代入 $(3.6)_{13}$ 式可得

$$\lim_{\substack{T\to i\infty\\ T'\to -i\infty}} \frac{\langle Q', T'|Q, T\rangle^J}{\exp[-iE_0(T'-T)]\phi_0^*(Q)\phi_0(Q')}$$

$$=\int dq'\,dq\,\Phi_0^*(q', t')\langle q', t'|q, t\rangle^J\Phi_0(q, t)=W[J]。$$

$(3.10)_{13}$

应该指出：由于 $J(t)$ 只在 (t', t) 之间才不为零，上式左边也和右边一样也是依赖于 t' 和 t 的。不过没有明显写出而已。

上式右边实际上就是 $(3.3)_{13}$ 式，它表明 $W[J]$ 和 $\langle q', t')q, t\rangle^J$ 的关系是需要进行对 $\int dq'dq\Phi_0^*(q', t')\Phi_0(q, t)\cdots$ 的积分才能得到。这个运算是比较麻烦的。但上式左边表明 $W[J]$ 和 $\langle Q', T'|Q, T\rangle^J$ 之间只相差一个与 J 无关的因子。在实际应用中这个与 J 无关的因子是无关紧要的。我们通常把 $W[J]$ 归一化为 $W[0]=1$，这相当取 $\langle 0^+|0^-\rangle=1$。在实际应用时我们可取（参看 $(1.17)_{13}$ 式）。

$$W[J]\simeq \lim_{\substack{T\to i\infty\\ T'\to -i\infty}} \langle Q', T'|Q^+, T\rangle^J$$

$$= \lim_{\substack{T\to i\infty\\ T'\to -i\infty}} \int [dq]\exp\left\{i\int_T^{T'} dt[\mathscr{L}_{eff}(q,\dot{q})+J(t)q(t)]\right\}。$$

$(3.11)_{13}$

同时在应用 $(3.5)_{13}$ 式时在等式左边再除以 $W[0]$。

一旦我们求得 $W[J]$ 就可以通过 $(3.5)_{13}$ 式求得各种格林函数，例如 $\langle 0|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|0\rangle$ 这就是量子场论里的 n 点格林函数，是个很关键的物理量。由于 $(3.5)_{13}$ 式关系我们常称 $W[J]$ 为格林函数的产生泛函。

在未对 $(3.11)_{13}$ 式做进一步的具体计算以前，我们先来看看它对 t 的积分路线。积分路线在复 t 平面上如右图所示。在 (t, t') 之外区域 $J=0$。我们明显地知道它对时间的依赖关系，可以把时间延拓到虚轴上去。实际上 $(3.11)_{13}$ 式的泛函积分的意义不是很明确的，即使我们使时间晶格化以后也是如此。不过我们可以通过把时间延拓到虚轴上去，也就是进行一次 Wick 旋转，而

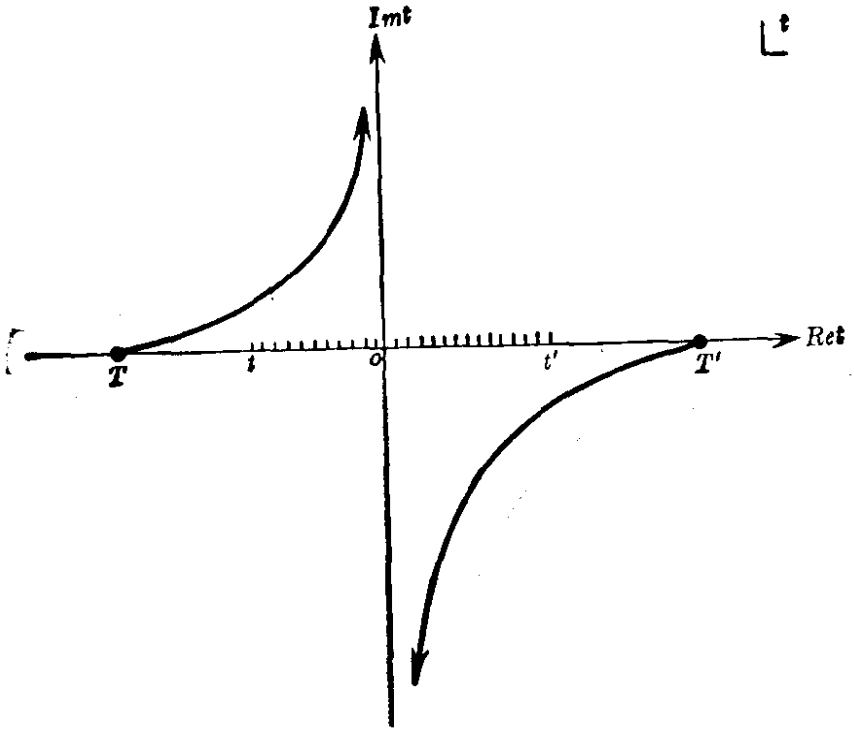


图 13-3-1

把问题变得简单。这相当由闵氏时空转变到欧氏时空。根据 Wightman 公设，如果我们能在欧氏空间构造一套场论，再将其中欧氏时间代以虚的欧氏时间，我们就得到物理的、闵氏空间里的场论。定义

$$t_i=-i\tau_i。\tag{3.12}_{13}$$

并且也把 τ_i 沿着虚轴按顺序排列，在前(后)的 t_i 对应在前(后)的 τ_i。同时

$$\epsilon=\frac{t'-t}{n+1}\to\epsilon'=\frac{\tau'-\tau}{n+1}=i\epsilon。\tag{3.13}_{13}$$

这样$(1.17)_{13}$式可表成

$$\begin{aligned}&F(q',\ t';\ q,\ t)\\&=\langle q',\ t'\,|\,q,\ t\rangle=\lim_{n\to\infty}\int\prod_j\frac{dq_j}{(2\pi\epsilon')^{1/2}}\\&\quad\cdot\exp\left\{\sum_i\epsilon'\mathscr{L}_{eff}\left(\frac{q_i+q_{i-1}}{2},\ \frac{q_i-q_{i-1}}{-i\epsilon'}\right)\right\}\\&\simeq\int[dq]\exp\left[\int_\tau^{\tau'}\mathscr{L}_{eff}\left(q,\ i\frac{dq}{d\tau}\right)d\tau\right]。\end{aligned}\tag{3.14}_{13}$$

同样$(3.11)_{13}$式也可做相应的延拓。引进欧氏空间里的产生泛函，

定义为

$$W_E[J]\simeq\int[dq]\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\mathscr{L}_{eff}\left(q,i\frac{dq}{d\tau}\right)+J(\tau)q(\tau)\right]\right\}。$$

$(3.15)_{13}$

当我们在欧氏空间计算出 $W[J]$ 以后，再由虚时间延拓回到实时间，从而可得到物理的格林函数。由$(3.5)_{13}$式可得到

$$\begin{aligned}&(i)^n\langle 0|T[Q(t_1)Q(t_2)\cdots Q(t_n)]|0\rangle\\&=\frac{\delta^n W[J]}{W[J]\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0}\\&=i^n\frac{\delta^n W_E[J]}{W_E[J]\delta J(\tau_1)\delta J(\tau_2)\cdots\delta J(\tau_n)}\Big|_{\substack{J=0\\ \tau_i=it_i}}。\end{aligned}$$

$(3.16)_{13}$

§13.4 线型谐振子

简谐振动在理论上经常是作为典型例子来讨论的，在经典力学和量子力学里都详细地讨论过。这里我们不是想用路线积分的方法来解简谐振动的问题，而是把它作为典型来说明以上所讲的路线积分内容的具体应用。正如熟知线型谐振子的拉氏量如下

$$\mathscr{L}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-\omega^2q^2)。\qquad(4.1)_{13}$$

按照$(3.15)_{13}$式

$$\begin{aligned}W_E(J)&=\int[dq]\exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2+\omega^2q^2\right)-J(\tau)q(\tau)\right]\right\}\\&=\int[dq]\exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\mathscr{L}_E(J)\right]。\end{aligned}\qquad(4.2)_{13}$$

其中

$$\mathscr{L}_E(\tau)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2+\omega^2q^2\right]-J(\tau)q(\tau)。\qquad(4.3)_{13}$$

考虑积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2+\omega^2q^2\right]-J(\tau)q(\tau)\right\}$$
$$=\int d\tau\left\{q\,\frac{1}{2}\left[\frac{-d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right]q-J(\tau)q(\tau)\right\}$$
$$=\int d\tau\left\{q(\tau)\frac{1}{2}\left[\frac{-d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right]\delta(\tau-\tau')q(\tau')\right.$$
$$\left.-J(\tau)\delta(\tau-\tau')q(\tau')\right\}d\tau',$$

引进算符

$$K(\tau,\ \tau')\equiv\left[\frac{-d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right]\delta(\tau-\tau'),\qquad (4.4)_{13}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\mathscr{L}_E(J)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\frac{1}{2}q(\tau)K(\tau,\ \tau')q(\tau')\right.$$
$$\left.-J(\tau)\delta(\tau-\tau')q(\tau')\right]d\tau'。\qquad (4.5)_{13}$$

应该指出$(4.4)_{13}$式$K(\tau,\ \tau')$算符中，因有微分运算，它联系着不相同的τ和τ'，因而$K(\tau,\ \tau')$不是对角的矩阵。为了简化书写表示，我们把虚时间τ“晶格化”，并以i，j…标记格点，同时还采用常用的约定，相同指标表示求和。这样经过代换$d\tau\to\epsilon$，$\delta(\tau_i-\tau_j)\to\frac{\delta_{ij}}{\epsilon}$，$\int\to\Sigma$。上式可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \mathscr{L}_E(J)=\left[\epsilon\frac{1}{2}q_iK_{ij}q_j\epsilon-J_iq_i\epsilon\right]。\qquad (4.6)_{13}$$

代入$(4.2)_{13}$式得到

$$W_E(J)=\int\prod_i\left(\frac{dq_i}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\right)\exp\left[-\left(\epsilon\frac{1}{2}q_iK_{ij}q_j\epsilon-J_iq_i\epsilon\right)\right]。$$
$$(4.7)_{13}$$

这里我们所遇到的积分是下面的典型积分。其实这也是高斯型积分，不过比$(1.15)_{13}$式所介绍的要复杂些。考虑一般积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_i\frac{du_i}{\sqrt{2\pi}}e^{-Q(u)}。\qquad (4.8)_{13}$$

式中

$$Q(u)=\frac{1}{2}u_iA_{ij}u_j-b_iu_i。\qquad (4.9)_{13}$$

其中 u_i, b_i 和 A_{ij} 均为实数，且 A_{ij} 为非奇异的对称矩阵。其本征值为 a_1, $a_2\cdots$。$Q(u)$在 u_0 处有极值，其中 $u_{0i}=A_{ij}^{-1}b_j$ 此处极值为 $Q(u_0)=-\frac{1}{2}(b_iA_{ij}^{-1}b_j)$。经过平移 $u_i'=u_i-u_{0i}$ 把 u_i 的一次项除消(平移变换的 Jacobi 行列式为 1)。

$$Q(u)=-\frac{1}{2}(b_iA_{ij}^{-1}b_j)+\frac{1}{2}[(u-u_0)_iA_{ij}(u-u_0)_j], \quad (4.10)_{18}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_i\frac{du_i}{\sqrt{2\pi}}e^{-Q(u)}$$

$$=e^{+\frac{1}{2}(b_iA_{ij}^{-1}b_j)}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_i\frac{du_i}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u_iA_{ij}u_j}。 \quad (4.11)_{18}$$

可以存在一个正交变换 $u_i'=S_{ij}u_j$ 使得 A_{ij} 对角化。即 $S_{ij}A_{jk}S_{kl}^{-1}=a_i\delta_{il}$。同时这个变换的 Jacobi 行列式为 1，所以上式可写成(参看(1.15)式)。

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\prod_i\frac{du_i}{\sqrt{2\pi}}e^{-Q(u)}=e^{\frac{1}{2}b_iA_{ij}^{-1}b_j}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_i\frac{du_i}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}a_iu_i^2}$$

$$=e^{\frac{1}{2}b_iA_{ij}^{-1}b_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{\prod_i a_i}}=\frac{e^{\frac{1}{2}b_iA_{ij}^{-1}b_j}}{\sqrt{\det A}}。$$

$(4.12)_{18}$

把上式关系代入$(4.7)_{13}$式

$$W_E(J)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\det K_{ij}}}\prod_i\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon^2}}\exp\left[\frac{1}{2}\in J_i\frac{K_{ij}^{-1}}{\epsilon^2}J_j\epsilon\right]$$

$$\simeq C\exp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}d\tau\,J(\tau)\frac{K^{-1}}{\epsilon^2}(\tau,\tau')J(\tau')d\tau'。$$

$(4.13)_{18}$

其中 C 为一与 J 无关的常数。$\frac{K^{-1}(\tau,\tau')}{\epsilon^2}$ 满足以下关系

$$\epsilon K_{ij}\frac{K_{jk}^{-1}}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon}\delta_{ik} \quad (4.14)_{18}$$

记

$$\frac{K^{-1}(\tau,\tau')}{\epsilon^2}\equiv\Delta_E(\tau,\tau')。 \quad (4.15)_{13}$$

则考虑到$(4.4)_{13}$式

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)\Delta_E(\tau,\ \tau')=\delta(\tau-\tau')。\qquad (4.16)_{13}$$

$$\therefore\quad W_E(J)=C\exp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\,d\tau\,J(\tau)\Delta_E(\tau-\tau')J(\tau')d\tau'。\qquad (4.17)_{13}$$

由$(3.15)_{13}$式

$$\langle 0|T(Q(\tau)Q(\tau'))|0\rangle=-\frac{1}{W_E[J]}\frac{\delta^2W_E[J]}{\delta J(\tau)\delta J(\tau')}\bigg|_{\substack{J=0\\ \tau=it}}=\Delta_E(\tau-\tau')。\qquad (4.18)_{13}$$

把$(4.16)_{13}$式两边进行 Fourier 展开，以

$$\Delta_E(\tau,\ \tau')=\int\Delta_E(\nu)e^{-i\nu(\tau-\tau')}\,d\nu$$

代入$(4.16)_{13}$式得到

$$\int\Delta_E(\nu)\left(\frac{-d^2}{dt^2}+\omega^2\right)e^{-i\nu(\tau-\tau')}\,d\nu=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\nu(\tau-\tau')}\,d\nu,$$

比较两边得

$$\Delta_E(\nu)(\nu^2+\omega^2)=\frac{1}{2\pi},$$

由此得到

$$\Delta_E(\tau,\ \tau')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{2\pi}\,\frac{e^{-i\nu(\tau-\tau')}}{\nu^2+\omega^2}=\frac{e^{-\omega|\tau-\tau'|}}{2\omega}。\qquad (4.19)_{13}$$

让 $\tau\to it$ 就得到 Green 函数(传播子)。

$$G_2(t)=\Delta_E(it)=\frac{1}{2\omega}[\theta(t)e^{-i\omega t}+\theta(-t)e^{i\omega t}]\qquad (4.20)_{13}$$

以上我们通过欧氏空间的产生泛函 $W_E[J]$ 得到了 Green 函数。我们也可以直接由闵氏空间里的产生泛函 $W[J]$ 来得到。不过计算更要繁琐(从略)。其实以经典的水平来看，对应$(4.1)_{13}$式的运动方程为

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)q(t)=0。$$

与之对应的 Green 函数为

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)\Delta_c(t)=\delta(t)。\qquad (4.21)_{13}$$

由此也得到

$$G_2(t)=i\Delta_0(t)=-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{2\pi}\frac{\exp(+i\nu t)}{\nu^2-\omega^2+i\epsilon}\Rightarrow(4.20)_{13}\text{式}$$

上式中 $i\epsilon$ 是为了得到所需要的边界条件而引进的。

值得指出，上式的积分表式也可由$(4.19)_{13}$式的积分表式经过Wick旋转而得到。不过在考虑坐标空间的变换 $\tau\to it$ 的同时，也要考虑动量空间的相应变换 $\nu\to i\nu$。

§13.5 量子场论的路线积分形式(Green 函数)

以上我们讨论了一维量子力学的路线积分理论形式。这个理论形式在形式上推广到多自由度情况是容易的，不过把它推广到具有无限多而且是连续的自由度的场论情况，严格讲是有问题的。然而我们还是把这个问题留给严谨的数学家去研究，目前我们还是接受以下的猜想，经过把时空晶格化，把路线积分理论形式推广到场论情况依然可行。本节以标量场 $\phi(x)$ 为示例来说明这种推广及其应用。

正如我们以前把时间区分为 N 个间隔为 ϵ 的单元一样，现在把时空区分为体积(四维)为 ϵ^4 的无限多个单元($\epsilon\to0$)，并且把这些单元按一定顺序编号，空间格子编号记以 $\alpha\cdots$，时间格子编号记以 $i,\cdots$。并做如下的定义：

$$q_\alpha\Rightarrow\phi_\alpha(t)\equiv\frac{1}{\epsilon^3}\int_{V_\alpha}d\boldsymbol{x}\,\phi(\boldsymbol{x},t)。\qquad(5.1)_{13}$$

积分限于空间第2个单元的空间体积 ϵ^3 内进行。体系的拉氏量可写成

$$L=\int d\boldsymbol{x}\,\mathscr{L}=\sum_\alpha\epsilon^3\mathscr{L}_\alpha(\dot\phi_\alpha(t),\phi_\alpha(t),\phi_{\alpha\pm s}(t))。\qquad(5.2)_{13}$$

和 $\phi_\alpha(t)$相应的广义动量根据定义为

$$p_\alpha(t)=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi_\alpha(t)}=\epsilon^3\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha}{\partial\dot\phi_\alpha(t)}\equiv\epsilon^3\Pi_\alpha(t)。\qquad(5.3)_{13}$$

哈氏量为

$$\left.\begin{aligned}&H=\sum_\alpha p_\alpha\dot\phi_\alpha-L=\sum_\alpha\epsilon^3\mathscr{H}_\alpha,\\&\mathscr{H}_\alpha=\Pi_\alpha\dot\phi_\alpha-\mathscr{L}_\alpha=\mathscr{H}_\alpha(\Pi_\alpha,\phi_\alpha,\phi_{\alpha\pm s})。\end{aligned}\right\}\qquad(5.4)_{13}$$

重复以前的推导步骤，并考虑到要对不同自由度 α 求和，可得相应于$(1.13)_{13}$ 或$(1.14)_{13}$式的变换矩阵为：

$$
\begin{aligned}
&F[\varphi(\boldsymbol{x}', t'); \varphi(x, t)] = \langle \varphi(\boldsymbol{x}', t') | \varphi(x, t) \rangle \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int \prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} d\varphi_\alpha(t_i) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\epsilon^3}{2\pi} d\Pi_\alpha(t_i) \\
&\quad \cdot \exp\Big[i \sum_{j=1}^{n+1} \in \sum_{\alpha=1}^{N} \epsilon^3 \Big\{ \Pi_\alpha(t_j) \frac{\phi_\alpha(t_j) - \phi_\alpha(t_{j-1})}{\epsilon} \\
&\quad - \mathscr{H}\Big(\Pi_\alpha(t_j), \frac{\phi_\alpha(t_j) + \phi_\alpha(t_{j-1})}{2}, \frac{\phi_{\alpha\pm s}(t_j) + \phi_{\alpha\pm s}(t_{j-1})}{2} \Big) \Big\} \Big] \\
&\equiv \int [d\varphi] \Big[\frac{\epsilon^3}{2\pi} d\Pi \Big] \exp\Big\{ i \int_t^{t'} dt \int d\boldsymbol{x} \\
&\quad \cdot \Big[\Pi(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} - \mathscr{H}(\boldsymbol{x}, t) \Big] \Big\}。
\end{aligned}
\tag{5.5}_{13}
$$

与$(3.1)_{13}$ 式相应有

$$
\begin{aligned}
&\langle \varphi(\boldsymbol{x}', T') | \varphi(\boldsymbol{x}, T) \rangle^J \\
&= \int [d\varphi] \Big[\frac{\epsilon^3}{2\pi} d\Pi \Big] \exp\Big\{ i \int_T^{T'} \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{x}\, dt \Big[\Pi(x) \dot{\varphi}(x) \\
&\quad - \mathscr{H}(x) + \frac{i}{2} \in \varphi^2(x) + J(x)\phi(x) \Big] \Big\}。
\end{aligned}
\tag{5.6}_{13}
$$

式中额外引进了一项 $\frac{1}{2} i \in \varphi^2(x)$，这样在对 $\varphi(x)$积分时提供了一项截断因子，同时这相当于 $m^2 \to m^2 - i\epsilon$，这样可表明如何转动对时间 t 的积分路线并选取正确极限为 $T \to i\infty$，$T' \to -i\infty$，最终我们要令 $\epsilon \to 0$。在多数情况，上式对 $d\Pi$ 积分可以进行到底，得到相应于$(3.11)_{13}$ 式有

$$
\begin{aligned}
W[J] &\simeq \lim_{\substack{T\to i\infty \\ T'\to -i\infty}} \langle \varphi(\boldsymbol{x}, T') | \varphi(\boldsymbol{x}, T) \rangle^J \\
&= \lim_{\substack{T\to i\infty \\ T'\to -i\infty}} \int [d\varphi] \exp\Big\{ i \int [\mathscr{L}_{eff}(x) + J(x)\varphi(x)] dx \Big\}。
\end{aligned}
\tag{5.7}_{13}
$$

重复$(3.5)_{13}$ 式的推导，同样可得到

$$\frac{1}{W[0]}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdot\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}$$
$$=i^n\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)|0\rangle$$
$$=i^n G_n(x_1, x_2\cdots x_n)。 \qquad (5.8)_{13}$$

上式中右边就是场论中的 n 点 Green 函数。

其实$(5.7)_{13}$式的泛函积分，如果不引进截断因子即使在时空晶格化以后也不是很明确定义的。不过我们和以前的猜想一样，认为可以把 Green 函数延拓到虚时间上。也就是我们可以在虚时间上，或者说在欧氏空间里来计算 $W_E[J]$，从而求得 Green 函数再延拓回到实时间，就得到我们所要求的物理的 Green 函数。与$(3.15)_{13}$式相应有

$$W_E[J]\simeq\int[d\varphi]\exp\int d\boldsymbol{x}\,d\tau$$
$$\cdot\left[\mathscr{L}_{eff}\left(\varphi(x),\ \nabla\varphi(x),\ i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\tau}\right)+J(x)\varphi(x)\right]。$$
$$(5.9)_{13}$$

同样与$(3.16)_{13}$式相应有

$$\begin{aligned}&i^nG_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=i^n\langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)]|0\rangle\\&=\frac{1}{W[J]}\cdot\frac{\delta^nW[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}\\&=(i)^n\frac{1}{W_E(J)}\cdot\frac{\delta^nW_E[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{\substack{J=0\\ \tau_j=it_j}}。\end{aligned}$$
$$(5.10)_{13}$$

下面我们以自由标量场为具体示例，来说明以上所述的内容含意及其具体应用。场论里的自由标量场相当于量子力学里的谐振子，是个既简单而又包含主要实质的典型。我们已知自由标量场的拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{-1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2]。$$

为了保证 $W[J]$的存在，需要引进衰减因子，通常是把上式中的 m^2 代以 $m^2\to m^2-i\epsilon$，并在最后结果中令 $\epsilon\to 0$。这里没有把 ϵ 明

显写出，但应有这样的理解。代入$(5.9)_{13}$式得到

$$W_E[J]\simeq\int[d\varphi]\exp\int dx\,d\tau \cdot\left\{\frac{-1}{2}\left[(\nabla\varphi)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2+m^2\varphi^2\right]+J(x_E)\varphi(x_E)\right\}$$

$$=\int[d\varphi]\exp\int dx_E\left[\frac{+1}{2}\varphi(x_E)(\Box_E-m^2)\varphi(x_E)+J(x_E)\varphi(x_E)\right]。$$

$$\boxed{W_E[J]=\int[d\varphi]\exp\int dx_E\left[-\frac{1}{2}\varphi(x_E)K_E(x_E,\,y_E)\varphi(y_E)+J(x_E)\delta(x_E-y_E)\varphi(y_E)\right]dy_E。}$$

$(5.11)_{13}$

以上脚标 E 表明是欧氏空间的坐标，并且引进了

$$K_E(x_E,\,y_E)=(-\Box_E+m^2)\delta(x_E-y_E)。\qquad(5.12)_{13}$$

下面我们把时空晶格化并按顺序标记为 $\alpha,\,\beta,\,\cdots$。而把下标 E 去掉，并采用相同指标表示求和的惯例。类似上节的考虑 $dx_E\to\epsilon^4$，$\delta(x_E-y_E)\to\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\epsilon^4}$，$\int\to\Sigma$。

$$W_E[J]=\lim_{\epsilon\to0}\int\prod_\alpha d\phi_\alpha\exp\left[-\frac{1}{2}\epsilon^4\phi_\alpha K_{\alpha\beta}\phi_\beta\epsilon^4+\epsilon^4J_\alpha\phi_\alpha\right]。$$

$(5.13)_{13}$

利用$(4.12)_{13}$式得到

$$W_E[J]\simeq\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{\det K_{\alpha\beta}}}\left(\prod_\alpha\sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon^8}}\right)\exp\left[\frac{1}{2}\epsilon^4J_\alpha\frac{1}{\epsilon^8}K^{-1}_{\alpha\beta}J_\beta\epsilon^4\right]。$$

$(5.14)_{13}$

其中

$$K_{\alpha\beta}=\frac{1}{\epsilon^4}(-\Box_E+m^2)_{\alpha\beta}。\qquad(5.15)_{13}$$

而 K^{-1} 为 K 的逆矩阵，满足 $K_{\alpha\beta}K^{-1}_{\beta\gamma}=\delta_{\alpha\gamma}$。

$$\epsilon^4K_{\alpha\beta}\frac{K^{-1}_{\beta\gamma}}{\epsilon^8}=\frac{\delta_{\alpha\gamma}}{\epsilon^4}。\qquad(5.16)_{13}$$

引进 $\frac{1}{\epsilon^8}K^{-1}_{\alpha\beta}\Rightarrow\Delta_E(x_E-y_E)$并回到连续时空。则上式写成

$$(-\Box_E+m^2)\Delta_E(x_E-y_E)=\delta^4(x_E-y_E)。\qquad (5.17)_{13}$$

$(5.14)_{13}$ 式可精炼地写成

$$W_E[J]\sim C\exp\left[\int\frac{1}{2}J(x_E)\Delta_E(x_E-y_E)J(y_E)dx_E\,dy_E\right]。$$

$$(5.18)_{13}$$

利用$(5.10)_{13}$式可得到两点 Green 函数

$$G_2(x,\ y)=\frac{1}{W_E[J]}\cdot\frac{\delta^2W_E[J]}{\delta J(x_E)\delta J(y_E)}\Big|_{\substack{J=0\\ \tau=it}}=\Delta_E(x_E-y_E)\Big|_{\tau=it}。$$

$$(5.19)_{13}$$

利用$(5.17)_{13}$式可得到

$$G_2(x,\ y)=i\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-y)}}{(k^2+m^2-i\epsilon)}=i\Delta_c(x-y)=i\Delta_F(x-y)。$$

$$(5.20)_{13}$$

这正是我们在前面用 Poisson 括号进行量子化所得到的自由标量场的传播子。

§13.6 费米场的路线积分形式

以上所讨论的都是玻色场情况。路线积分形式用于费米场还需要做些修改。不过我们还是尽可能地采用最接近于玻色场的方式。我们知道在通常的量子化方式下，玻色场的对易子是个比例于 $\hbar$ 的普通函数。而费米场的反对易子也是个比例于 $\hbar$ 的普通函数。在路线积分下，让 $\hbar\Rightarrow0$ 玻色场成为相互对易的 C 数。与此相应费米场应成为相互反对易的 C 数，也就是

$$\{\psi_i,\ \bar{\psi}_j\}_+=\{\psi_i,\ \psi_j\}_+=\{\bar{\psi}_i,\ \bar{\psi}_j\}_+=0。\qquad (6.1)_{13}$$

i, j 表明 ψ, $\bar{\psi}$ 的不同自由度 $i, j=1, 2\cdots n$。由于上式的反对易关系，容易看出相同元素的乘积为零。例如：

$$\psi_1\psi_1=\psi_2\psi_2=\cdots=\bar{\psi}_1\bar{\psi}_1=\bar{\psi}_2\bar{\psi}_2=\cdots=\bar{\psi}_n\bar{\psi}_n=0\qquad (6.2)_{13}$$

因此对于每一自由度我们只需考虑到它的线型项。

由这些反对易的 C 数就可产生出一种代数称为 Grassman 代数。ψ_i, $\bar{\psi}_j(i, j=1, 2, \cdots n)$即为 Grassman 代数的产生算子。这种代数的基元即为以下 2^{2n} 个的乘积。为了书写方便引进 $\tau_i=\psi_i$, $\bar{\psi}_j=\tau_j^*$ 并且按一定顺序排列：

$$1, \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \tau_1^*, \tau_2^*, \cdots, \tau_n^*, \tau_1\tau_2, \cdots, \tau_1\tau_1^*, \cdots,$$
$$\tau_n\tau_n^*, \cdots, \tau_{n-1}^*\tau_n^*, \tau_1\tau_2\tau_3, \cdots, \tau_1\tau_2\tau_3\cdots\tau_1^*\tau_2^*\cdots\tau_n^*。 \qquad (6.3)_{18}$$

这种代数的具体表现是很困难的。考虑最简单的 $i=1$, $j=1$ 的情况，要实现它就需要 4×4 的矩阵。例如可取

$$\tau=\tau_1=\frac{\gamma_1+i\gamma_2}{2}, \qquad \tau^*=\frac{\gamma_3+i\gamma_4}{2}。$$

以上 γ_μ 就是 Dirac 的 γ 矩阵，容易证明它们满足 $\tau^2=0=\tau^{*2}$，而 $\tau\tau^*+\tau^*\tau=0$。一般情况下我们不再讨论它的具体实现的问题，只讨论它的一般性质。

再引进简化的符号

$$\tau_{n+1}=\tau_1^*, \ \tau_{n+2}=\tau_2^*, \ \cdots, \ \tau_{n+n}=\tau_n^*。 \qquad (6.4)_{18}$$

对 Grassman 代数也可引进微分，积分的运算。考虑到它们彼此反对易性。做如下规定：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau_i}(\tau_{l_1}\tau_{l_2}\cdots\tau_{l_j})&=\delta_{il_1}\tau_{l_2}\tau_{l_3}\cdots\tau_{l_j}-\delta_{il_2}\tau_{l_1}\tau_{l_3}\cdots\tau_{l_j}+\cdots\\&+(-1)^{j-1}\delta_{il_j}\tau_{l_1}\tau_{l_2}\cdots\tau_{l_{j-1}}。\end{aligned}} \qquad (6.5)_{18}$$

对 τ_i 的函数的函数的微分和普通函数的情况相似。考虑 $f(\tilde{\tau})$，其中 $\tilde{\tau}_i=a_{ij}(x)\tau_j$。

且

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial\tau_k}&=\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial\tilde{\tau}_i}\cdot\frac{\partial\tilde{\tau}_i}{\partial\tau_k}=\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial\tilde{\tau}_i}\cdot a_{ik}(x),\\\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial x_\mu}&=\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial\tilde{\tau}_i}\cdot\frac{\partial\tilde{\tau}_i}{\partial x_\mu}=\frac{\partial f(\tilde{\tau})}{\partial\tilde{\tau}_i}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_\mu}\tau_j。\end{aligned}\right\} \qquad (6.6)_{18}$$

Grassman 代数的积分变量 $d\tau_i$ 也满足反对易关系：

$$\left.\begin{aligned}&\{d\tau_i,\ \tau_j\}_+=d\tau_i\cdot\tau_j+\tau_j d\tau_i=0,\\&\{d\tau_i,\ d\tau_j\}_+=d\tau_i d\tau_j+d\tau_j d\tau_i=0。\end{aligned}\right\}\qquad (6.7)_{13}$$

对 Grassman 代数的积分运算规定如下：

$$\boxed{\left.\begin{aligned}&\int d\tau_i=0,\ \int\tau_i d\tau_j=\delta_{ij},\\&\int d\tau^* d\tau=\int\tau d\tau^* d\tau=\int\tau^* d\tau^* d\tau=0,\\&\int\tau^*\tau d\tau d\tau^*=1。\end{aligned}\right\}}$$

$$(6.8)_{13}$$

应该指出所有这些积分在平移变换 $\tau_i\Rightarrow\tau_i+\omega_i$ 下不变(其中 ω_i 为常数 Grassman 量)。实际上有贡献的积分只有

$$I=\int\tau_{2n}\tau_{2n-1}\cdots\tau_1 d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_{2n}=1。\qquad (6.9)_{13}$$

一般要考虑到 τ_i 以及 $d\tau_j$ 之间的反对易性，例如

$$\left.\begin{aligned}&I=\int\prod_{j=1}^{2n}\tau_i\prod_{j=1}^{2n}d\tau_j=\int\tau_1\tau_2\cdots\tau_{2n}d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_{2n}=(-1)^{n(2n-1)},\\&I=\int\tau_{l_1}\cdot\tau_{l_2}\cdots\tau_{l_i}d\tau_{l_1}\cdot d\tau_{l_2}\cdots d\tau_{l_i}\\&\quad=(-1)^{\frac{i}{2}(i-1)}\int\tau_{l_i}\tau_{l_{i-1}}\cdots\tau_{l_1}d\tau_{l_1}d\tau_{l_2}\cdots d\tau_{l_i}=(-1)^{\frac{i}{2}(i-1)}。\end{aligned}\right\}$$

$$(6.10)_{13}$$

在 Grassman 空间中也可考虑积分变量的变换。在普通代数空间的多元积分的变量变换时，是按照体积元不变的原则来进行的，例如由$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$变换到$(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$时。

$$dx_1 dx_2\cdots dx_n=\left|\frac{D(x_1,\ x_2\cdots x_n)}{D(u_1,\ u_2\cdots u_n)}\right|du_1 du_2\cdots du_n。$$

其中 $\left|\frac{D(x_1,\ x_2\cdots x_n)}{D(u_1,\ u_2\cdots u_n)}\right|$ 为 Jacobi 行列式。在 Grassman 代数空间进行积分变量变换时，则按$(6.9)_{13}$式保持不变的条件来寻找出积分变量的变换关系，考虑变换。

$$\left.\begin{aligned}&\tau_i=a_{ij}\tilde{\tau}_j,\\&\prod_{i=1}^{2n}\tau_i=\prod_{i=1}^{2n}a_{ij}\tilde{\tau}_j=a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{2n\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\cdots\gamma}\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2\cdots\tilde{\tau}_{2n}。\end{aligned}\right\}\quad(6.11)_{13}$$

其中 $\epsilon_{\alpha\beta\cdots\gamma}$ 为反对称的单位张量，是由于考虑到 $\tilde{\tau}_i$ 之间满足反对易关系而引进的，上式可写成

$$\prod_{i=1}^{2n}\tau_i=\det a_{ij}\prod_{j=1}^{2n}\tilde{\tau}_j。\qquad(6.12)_{13}$$

设在$(6.11)_{13}$式变换下积分体积元有以下的相应的变换：

$$\prod_i d\tau_i=J(a)\prod_i d\tilde{\tau}_i。\qquad(6.13)_{13}$$

要保持$(6.9)_{13}$或$(6.10)_{13}$式积分不变则要求

$$\boxed{J(a)=|\det a|^{-1}。}\qquad(6.14)_{13}$$

这一点和普通代数空间中积分变量变换关系是不同的，玻色场的 $J(a)=\det a$ 而费米场的 $J(a)=(\det a)^{-1}$。在一般函数的积分情况下，变量变换 $\tau_i=A_{ij}\tilde{\tau}_j$

$$\int f(\tau)\prod_i d\tau_i=|\det A|^{-1}\int f(A\tilde{\tau})\prod_i d\tilde{\tau}_i。\qquad(6.15)_{13}$$

作为以上所述的应用，考虑自由 Dirac 场的生成泛函(参看$(5.9)_{13}$式)

$$W_E[J,\ \bar{J}]\simeq\int(D\psi)(D\bar{\psi})e^{\int dx_E\{\bar{\psi}[-(\gamma\partial+m)]_E\psi+J\psi-\bar{\psi}J\}}。\qquad(6.16)_{13}$$

其中外源 $\bar{J}$ 和 J 也都是 Grassman 变量，同时考虑到 Grassman 变量的反对易性，而且为了保持$(5.10)_{13}$式关系，我们把外源项 $\bar{\psi}J$ 前取了负号。类似上节的讨论，上式可写成

$$\begin{aligned}W_E[J,\ \bar{J}]=\int(D\psi)(D\bar{\psi})\exp\int dx_E[&-\bar{\psi}(x_E)D_E(x_E,\ y_E)\psi(y_E)\\&+\bar{J}(x_E)\psi(y_E)\delta(x_E-y_E)\\&-\bar{\psi}(x_E)J(y_E)\delta(x_E-y_E)]dy_E。\end{aligned}\qquad(6.17)_{13}$$

其中

$$D_E(x_E,\ y_E)=(\gamma\partial+m)_E\delta(x_E-y_E)。\qquad(6.18)_{13}$$

把时空晶格化，类似对$(5.13)_{13}$式的处理，

$$W_E[J,\ \bar{J}]=\int\pi d\psi_j\Pi d\bar{\psi}_i\exp[-\epsilon^4\bar{\psi}_iD_{ij}\psi_j\epsilon^4+\bar{J}_j\psi_j\epsilon^4-\bar{\psi}_iJ_i\epsilon^4]。$$

$(6.19)_{13}$

其中 $$D_{ij}=\frac{1}{\epsilon^4}(\gamma\partial_E+m)_{ij}。$$

前面已讲过在Grassman空间中平移不改变对Grassman变量的积分。类似$(4.11)_{13}$式进行变量平移，上式$(6.19)_{13}$式右边括号内经过平移可写成

其中
$$\left.\begin{aligned}&-[(\epsilon^4\bar{\psi}_i-\bar{u}_{0i})D_{ij}(\epsilon^4\psi_j-u_{0j})-\bar{J}_iD_{ij}^{-1}J_j],\\&u_{0i}=-D_{ij}^{-1}J_j;\quad\bar{u}_{0j}=\bar{J}_iD_{ij}^{-1}。\end{aligned}\right\}\qquad(6.20)_{13}$$

我们得到

$$W_E[J,\ \bar{J}]\simeq\exp(\bar{J}_iD_{ij}^{-1}J_j)\int\Pi\,d\psi_j\,\Pi\,d\bar{\psi}_i\exp[-\epsilon^4\bar{\psi}_iD_{ij}\psi_j\epsilon^4]。$$

$(6.21)_{13}$

可以设想存在幺正变换，$\psi_i=S_{ij}\tilde{\tau}_j$，$\bar{\psi}_j=\tilde{\bar{\tau}}_iS_{ij}^{-1}$使得$D_{ij}$对角化成$S_{ik}^{-1}D_{kl}S_{lj}=d_i\delta_{ij}$。上式右边的路线积分成为(参看$(6.15)_{13}$式)

$$\int\Pi\,d\tilde{\tau}_j\,\Pi\,d\tilde{\bar{\tau}}_i\exp[-\epsilon^4\tilde{\bar{\tau}}_id_i\tilde{\tau}_j\epsilon^4\delta_{ij}]\,|\det S_{ij}|^{-1}\cdot|\det S_{ij}^{-1}|^{-1}。$$

$(6.22)_{13}$

幺正变换的$|\det S_{ij}|=1$，以上对相同指标要求和。

引进

$$x=\sum_{i=1}^{n}(-\epsilon^8d_i\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i),\qquad(6.23)_{13}$$

其中n为空间分格点的总数，也等于$\tilde{\bar{\tau}}_i\tau_i$的个数。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{x^m}{m!}+\cdots,$$

$$x^m=\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-\epsilon^8d_i\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i)_j\Big)。$$

由于Grassman代数的反对易性。上式乘积连乘必须在不同的j括号内取出不同的$\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i$来才有贡献。相同的$\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i=0$。同时考虑到$\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i$在连乘中成对搬移时不改变符号。因此

$$x^m=\sum_p m!\prod_i^m(-\epsilon^8 d_i\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i), \qquad (6.24)_{13}$$

其中 $\prod_i^m$ 表示在 n 个格点中取 m 个不同格点上的因子连乘。并且限取这 m 个因子中的某一固定排列。因为不同排列的贡献相同，已包括在 $m!$ 因子之中。求和 $\sum_p$ 是对 n 个格点中选取 m 个不同格点的不同组合进行，共有 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 项

$$e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\sum_p\prod_i^m(-\epsilon^8 d_i\tilde{\bar{\tau}}_i\tilde{\tau}_i)\Big]。 \qquad (6.25)_{13}$$

代入$(6.22)_{13}$式得到

$$\int\Pi\, d\tilde{\tau}_j\,\Pi\, d\tilde{\bar{\tau}}_i\, e^{(-\epsilon^8\tilde{\bar{\tau}}_i d_i\tilde{\tau}_i)}=\int\Pi\, d\tilde{\tau}_j\,\Pi\, d\tilde{\tau}_i\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\sum_p\prod_i^m(-\epsilon^8\tilde{\bar{\tau}}_i d_i\tilde{\tau}_i)\Big]$$

$$=\prod_i^n(-\epsilon^8 d_i)=\det(-\epsilon^8 D_{ij})。 \qquad (6.26)_{13}$$

以上在对 grassman 变量进行积分时，利用了$(6\text{-}8)_{13}$式关系，只当 $m=n$ 时才有贡献。而当 $m=n$ 时。求和 $\sum_p$ 只有一项

一般讲，考虑到$(6.21)_{13}$式和上式，可得到

$$\boxed{\int(D\tau)(D\bar{\tau})e^{(\bar{\tau}_i D_{ij}\tau_j+J_i\tau_i-\bar{\tau}_i J_i)}=(\det D)\cdot e^{-(JD^{-1}J)}。}$$

$$(6.27)_{13}$$

其实$(6.21)_{13}$式右边的路线积分我们不必把它积出。这仅是一个与 J 无关的常数。以上的求积分不过只是给出积分公式$(6.27)_{13}$式。作为产生泛函

$$W_E[J,\bar{J}]\simeq\exp[\bar{J}_i D_{ij}^{-1}J_j]\simeq\exp[\epsilon^4\bar{J}_i\frac{D_{ij}^{-1}}{\epsilon^8}J_j\epsilon^4]$$

引进 $$\frac{1}{\epsilon^8}D_{ij}^{-1}\Rightarrow S_0(x-y)_E$$

$$W_E[J,\bar{J}]\simeq\exp\int dx_E\bar{J}(x_E)S_0(x_E-y_E)J(y_E)dy_E。$$

$$(6.28)_{13}$$

由$(5.10)_{13}$式得到

$$G_2(x-y)=\frac{1}{W_E[J,\bar{J}]}\frac{\delta^2 W_E[J,\bar{J}]}{\delta\bar{J}(x)\delta J(y)}\Big|_{\substack{J,\bar{J}=0\\ \tau=it}}=iS_c(x-y)_E。$$

$(6.29)_{13}$

其中 $S_c(x-y)$满足 Green 函数方程

$$(\gamma_\mu\partial_\mu+m)S_c(x-y)=\delta(x-y)。\qquad (6.30)_{13}$$

这正是我们在以前用普通量子化方法所找到的 Dirac 粒子的传播子。

§13.7 微扰展开与 Feynman 图形

以上对于自由场情况我们可以把 $W[J]$ 具体求出，但在一般有相互作用情况下，很难把 $W[J]$全部求出，而需要按一定的参数展开取逐步近似。在一般有相互作用情况下，拉氏量 $\mathscr{L}$ 可分为两部分，一部分是自由场的 $\mathscr{L}_0$，和另一部分相互作用的 $\mathscr{L}_I$。为简单计，假定 $\mathscr{L}_I$ 中只含有场量 $\varphi(x)$的多项式，并且照例我们还是以 $\varphi(x)$代表所有的场量。$\mathscr{L}_0$ 通常都和以上介绍的一样，可以写成场量的二次型，与之相应的作用量 I_0 为

$$I_0=\int\mathscr{L}_0\,dx=\int\varphi(x)\varkappa(x,y)\varphi(y)dy\,dx。\qquad (7.1)_{13}$$

此时(参看$(5.18)_{13}$式)

$$W[J]=\int[d\varphi]\exp\int i\,dx[\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_I+J\phi]$$

$$=\exp\Big[i\int dx\,\mathscr{L}_I\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)\Big]$$

$$\cdot\int[d\varphi]\exp\Big\{i\int dx[\mathscr{L}_0+J\phi]\Big\}$$

$$\boxed{W(J)=\exp\Big[i\int dx\,\mathscr{L}_I\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)\Big]\cdot\exp\Big[\frac{i}{2}\int dx\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)dy\Big]。}$$

$(7.2)_{13}$

如同以前一样，$\Delta_F(x-y)$就是$(7.1)_{13}$式中 $K(x,y)$算符的 Green 函数，在实际应用中上式的 $\exp\left[i\int dx\,\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]$可展开为级数。

$$\exp\left[i\int dx\,\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\left[\int dx\,\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]^n。\qquad (7.3)_{13}$$

把$(7.3)_{13}$式代入$(7.2)_{13}$式就可以进行逐步近似的计算。在路线积分的理论形式中，$(7.2)_{13}$和$(7.3)_{13}$式就是我们计算 Green 函数的 Feynman-Dyson 展开的基础。

下面我们以 φ^4 理论作为我们具体的示例。

$$\mathscr{L}_I=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x)。\qquad (7.4)_{13}$$

由$(7.2)_{13}$和$(7.3)_{13}$式

$$W[J]\simeq\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)^n\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n\cdot\left[\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right]^4\left[\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right]^4\cdots\left[\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right]^4\right]\cdot W_0[J]。$$

$(7.5)_{13}$

前面所求得的自由场的传播子，实际也就是当 $\lambda=0$ 时的零级近似，$W[J]=W_0[J]$，由 $W_0[J]$所得传播子用一根内粒子线与之对应

$$\underset{x\quad y}{\text{——}}\qquad G_2^{(0)}(x,y)=(5.20)_{13}\text{式}。\qquad (7.6)_{13}$$

利用$(7.5)_{13}$式可以计算两点 Green 函数的一级修正。取$(7.5)_{13}$式中 $n=1$，并利用$(5.10)_{13}$式，得到

$$G_2^{(1)}(x,y)=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\int dx'\left[\frac{\delta}{\delta J(x')}\right]^4\cdot\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}。\qquad (7.7)_{13}$$

为了书写方便，我们采用相同下标表明求和的惯例，并把时空晶格

化，以 $i, j\cdots$ 标记之。

$$G_2^{(1)}(1,2)=-\frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\sum_i\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^4 \cdot\exp\frac{1}{2}[J_jG_{jk}J_k]\Big|_{J=0}。 \tag{7.8}_{13}$$

其中

$$G_{jk}=i\Delta_F(j-k)=i\Delta_F(k-j)=G_{kj}。 \tag{7.9}_{13}$$

利用

$$\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^4\exp\frac{1}{2}[J_jG_{jk}J_k]$$
$$=\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^3\cdot\left[G_{ij}J_j\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)\right]$$
$$-\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^2\left\{\left[G_{ii}+(G_{ij}J_j)^2\right]\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)\right\}。$$
$$\tag{7.10}_{13}$$

上式右边第一项可写成

$$G_{ii}\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^2\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)$$
$$=G_{ii}[G_{ii}+(G_{ij}J_j)^2]\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)。 \tag{7.11}_{13}$$

$(7.10)_{13}$ 式右边第二项可写成

$$\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^2\cdot\left[(G_{ij}J_j)^2\exp\frac{1}{2}J_jG_{jk}J_k\right]$$
$$=\frac{\delta}{\delta J_i}[2G_{ij}J_j\cdot G_{ii}+(G_{ij}J_j)^3]\cdot\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)$$
$$=[2G_{ii}^2+3(G_{ij}J_j)^2G_{ii}+2G_{ii}(G_{ij}J_j)^2$$
$$+(G_{ij}J_j)^4]\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)。 \tag{7.12}_{13}$$

把$(7.11)_{13}$和$(7.12)_{13}$式代入$(7.10)_{13}$式得到

$$\boxed{\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^4\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)=[3G_{ii}^2+6G_{ii}(G_{ij}J_j)^2+(G_{ij}J_j)^4]\cdot\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)} \tag{7.13}_{13}$$

$$G_2^{(1)}(1,\ 2)=\frac{-i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J_1}\cdot\frac{\delta}{\delta J_2}\sum_i[3G_{ii}^2+6G_{ii}(G_{ij}J_j)^2$$

$$+(G_{ij}J_j)^4]\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)\Big|_{J=0}\qquad(7.14)_{13}$$

应该指出，上式右边最终要令 $J=0$ 代入，因此上式括号内第三项 $\sim J^4$ 项无贡献。上式括号内第一项只有当 $\frac{\delta}{\delta J_1}$ 和 $\frac{\delta}{\delta J_2}$ 都作用到最后的 $\exp\frac{1}{2}(J_jG_{jk}J_k)$ 上才有贡献，其贡献为

$$(1)\quad -\frac{i\lambda}{4!}3\sum_i G_{ii}^2\cdot G(1,\ 2)\Rightarrow-\frac{i\lambda}{8}G_0(x_1-x_2)$$

$$\cdot\int dx'\,G_0(x'-x')G_0(x'-x')。\qquad(7.15)_{13}$$

用图形表示为

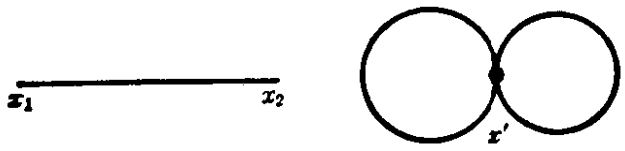


图 13-2a

这是真空图形和 $G_2^{(0)}(x_1-x_2)$ 图形两个不连接的图形合并而成的图形。正如我们在前面已讨论过，对于真空图形，在作全盘考虑时实际上可以不予考虑。其实我们在利用 $(7.7)_{13}$ 式时还应乘上归一化因子 $1/W[J=0]$，而在 $W[0]$ 中就包括了全部的真空图形。

以上 $(7.14)_{13}$ 式右边括号内第二项，只有当 $\frac{\delta}{\delta J_1}$ 和 $\frac{\delta}{\delta J_2}$ 全部作用到 $G_{ii}(G_{ij}J_j)^2$ 上时才有贡献，其贡献为

$$(2)\quad -\frac{i\lambda}{4!}12\sum_i G_{ii}G(1,\ i)G(2,\ i)$$

$$\Rightarrow-\frac{i\lambda}{2}\int dx'\,G_0(x'-x')G_0(x_1-x')G_0(x_2-x')。$$

$$(7.16)_{13}$$

用图形表示为

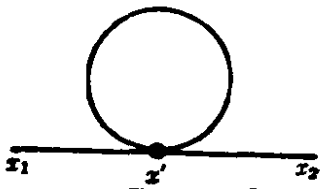


图 13-2b

二点 Green 函数的高级修正的计算可以如法炮制。下面来计算四点 Green 函数的零级近似。利用$(5.10)_{13}$和$(7.5)_{13}$式并令$\lambda=0$。

$$
\begin{aligned}
&G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4)\\
&=\Big[\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_4)}\\
&\quad\cdot\exp\Big\{\frac{1}{2}\int J(x)G_0(x-y)J(y)dx\,dy\Big\}\Big]_{J=0}\\
&=\Big[\frac{\delta}{\delta J_1}\cdot\frac{\delta}{\delta J_2}\,\frac{\delta}{\delta J_3}\Big\{\int G_0(4-y)J(y)dy\Big\}\\
&\quad\cdot\exp\Big\{\frac{1}{2}\int J(x)G_0(x-y)J(y)dx\,dy\Big\}\Big]_{J=0}\\
&=\Big[\frac{\delta}{\delta J_1}\,\frac{\delta}{\delta J_2}\Big\{G_0(4-3)+\int G_0(4-y)J(y)dy\cdot\\
&\quad\cdot\int G_0(3-y)J(y)dy\Big\}\\
&\quad\cdot\exp\Big\{\frac{1}{2}\int J(x)G_0(x-y)J(y)dx\,dy\Big\}\Big]_{J=0}\\
&=\Big[\frac{\delta}{\delta J_1}\Big\{G_0(4-3)\int G_0(2-y)J(y)dy\\
&\quad+G_0(3-2)\int G_0(4-y)J(y)dy\\
&\quad+G_0(4-2)\int G_0(3-y)J(y)dy\\
&\quad+\int G_0(4-y)J(y)dy\cdot\int G_0(3-y)J(y)dy\\
&\quad\cdot\int G_0(2-y)J(y)dy\Big\}\\
&\quad\cdot\exp\Big\{\frac{1}{2}J(x)G_0(x-y)J(y)dx\,dy\Big\}\Big]_{J=0}\\
&=G_0(x_1-x_2)G_0(x_3-x_4)+G_0(x_1-x_3)G_0(x_2-x_4)\\
&\quad+G_0(x_1-x_4)G_0(x_2-x_3)
\end{aligned}
\qquad (7.17)_{13}
$$

用图形表示为

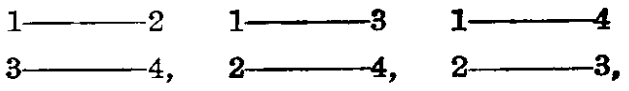


图 13-3a

这都是不相连接的图形，不过其中没有包括真空图形。

下面计算四点 Green 函数的一级修正。利用$(5.10)_{13}$和$(7.5)_{13}$式并取 $n=1$。

$$G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{i\lambda}{4!}\frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\frac{\delta}{\delta J_3}\frac{\delta}{\delta J_4}\cdot\sum_i\left(\frac{\delta}{\delta J_i}\right)^4\exp\frac{1}{2}[J_jG_{jk}J_k]\Big|_{J=0}。\tag{7.18}_{13}$$

利用$(7.13)_{13}$式经过微分运算可得到，(1)来自$(7.13)_{13}$式右边第三项

$$(1)=\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)24\int G_0(x_1-x')G_0(x_2-x')\cdot G_0(x_3-x')G_0(x_4-x')dx'$$

(2)来自$(7.13)_{13}$式右边第二项：

$$(2)=\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)12\left[\int G_0(x_1-x')G_0(x'-x')G_0(x'-x_2)dx'\right]\cdot G_0(x_3-x_4)$$

加5个不同组合项共有六项

(3)来自$(7.13)_{13}$式右边第一项：

$$(3)=\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)3\left[\int G_0(x'-x')\,G_0(x'-x')dx'\right]\cdot G_0(x_1-x_2)G_0(x_3-x_4)$$

加2个不同组合项共有三项

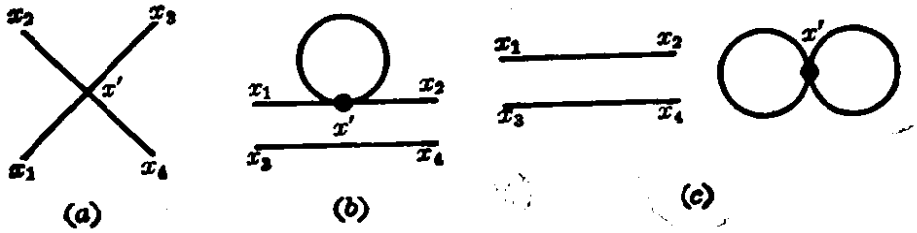


图 13-3b

最后包含有真空图形照例可以不予考虑。四点Green函数的高级修正可以如此类推，当然要复杂得多。

通过以上的计算，我们也可以对φ^4场理论建立Feynman图形与Green函数之间的对应关系。对于N点Green函数，我们取N个外点并标记以1, 2, $\cdots N$。对于它的n级修正$\sim\lambda^n$，则另外再取n个内点，或称相互作用点并标记以$1'$, $2'\cdots n'$。每一内点有四根粒子线通过。每一外点只能作为一根粒子线的端点。每根粒子线的端点必须落在外点或内点上，每根粒子线也可以和另一根粒子线相连，形成一根两个端点落在相同内点上的粒子线圈。在计算Green函数时，每个内点贡献$\frac{\lambda}{4!}$，每根粒子线贡献$G(x_i-x_j)$，在动量空间则为$\frac{-i}{p^2+m^2-i\epsilon}$。对每一个内点的$x'$都要积分，这使得在动量空间里，每一个内点都有一个保证动量守恒的$\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)$因子。这一点和我们在前面用通常的场论方法所得结果是一样的。此外还有一个整体的因子$\frac{1}{n!}$，它来自指数函数的展开系数。还有一个整体的对称因子，即具有相同拓扑结构但不同编号组合的图形的数目。

例如在$(7.18)_{18}$式中所含的四点Green函数的一级修正的三个图形，它们都有四个外点和一个内点  。对于第一个图形  。当我们取出第一个外点和粒子线端点相接时可有四种安排方式，当取第二个外点再安排在粒子线端点时就只有三种方式，如此类推，一共有$4!=24$种方式。这就是在$(7.18)_{18}$式下面(1)项前的对称因子24的来源。对于第二类图形 ，对于一定的$i, j=1, 2, 3, 4$，当我们取第一个外点($\neq i, j$)和粒子线端点相接时可有四种安排方式。当取第二外点(另一外点$\neq i, j$)再和另一粒子线端点相接时只有三种方式。(另外二个未和外点相接的粒子线端相连形成一个单粒子线圈图)。所以一共

有 $4\times3=12$ 种不同安排方式。这就是$(7.18)_{13}$式下面(2)项前面的对称因子 12 的来源。以上我们是对取定的 i, j 情况下讨论的。在四个不同编号的外点中选取两个 i, j 的不同选取方式共有六种。这相当于在四个外点编号中分成两组，每组中有两个不同编号的分法共有六种 $\frac{4!}{2!2!}=6$。这就是在(2)项后面还要加上五个不同组合项的来源。$(7.18)_{13}$式第三个图形 。通过内点的粒子线不和外点相接，只和另一粒子线相连形成粒子线圈，这种相连只有三种不同方式。这就是(3)项前对称因子 3 的来源。外点编号的组合与(2)相同共有六种，可是两根通过外点的粒子线的位置互换并不是新的组合，所以实际上只有三种不同组合。这就是(3)项后面要加上两个不同组合项的来源。不同组合项的 Feynman 图形分别写出如下：

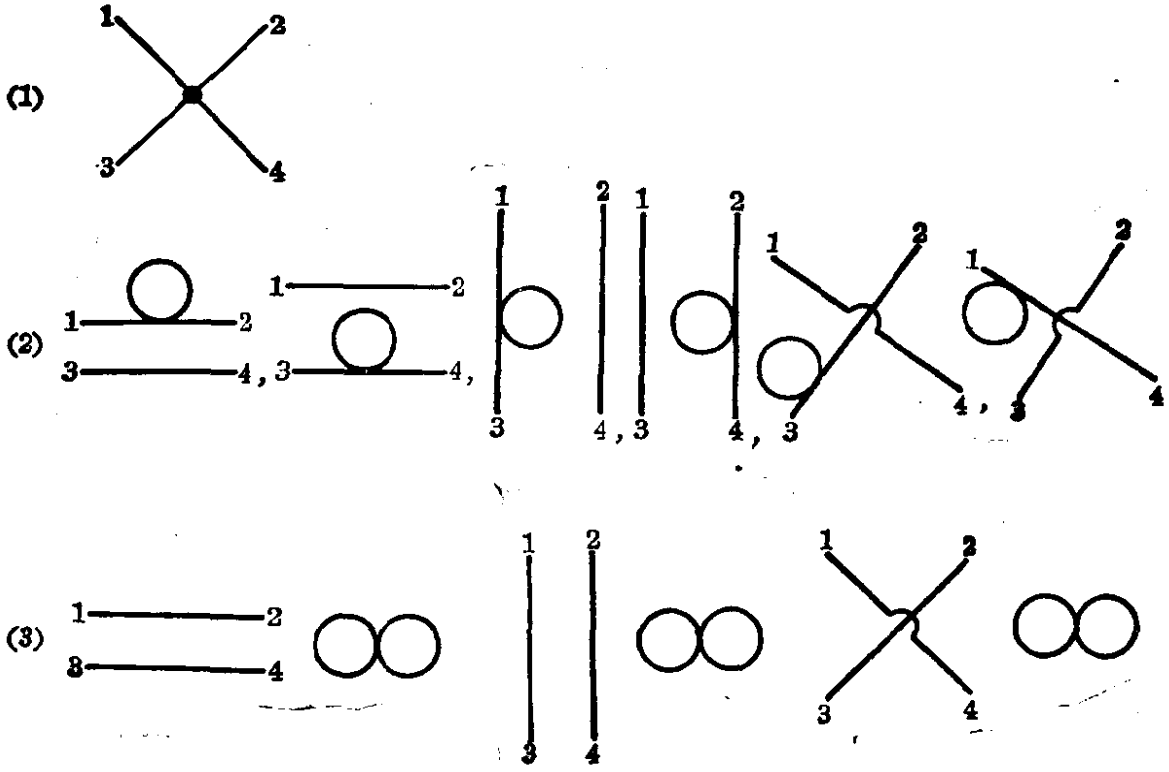


图 13-4

关于真空到真空图形可以完全不予考虑的问题，我们再来作进一步具体的说明。前面已提到过，我们实际所用的产生泛函应该是归一化的产生泛函，也就是应该考虑的是 $W[J]/W[0]$。准确到

～λ 一级时，分子分母分别都应准确到～λ 一级，它可写成

$$\frac{W[J]}{W[0]}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\int[d\varphi]\exp\left[i\int dx\left\{\dfrac{-(\partial_u\varphi)^2}{2}-\dfrac{m^2\varphi^2}{2}+J\varphi\right\}\right]\\ \cdot\left[1+\int dx\,\dfrac{i\lambda}{4!}\,\phi^4(x)\right]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\int[d\varphi]\exp\left[i\int dx\left\{\dfrac{-(\partial_u\varphi)^2}{2}-\dfrac{m^2\varphi^2}{2}\right\}\right]\\ \cdot\left[1+\int dx\,\dfrac{i\lambda}{4!}\,\varphi^4(x)\right]\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{A[J]+\lambda B[J]}{A[0]+\lambda B[0]}=\frac{A[J]+\lambda B[J]}{A[0]\left(1+\lambda\dfrac{B[0]}{A[0]}\right)}$$

$$=\frac{1}{A[0]}\left[A[J]+\lambda B[J]-\lambda\frac{A[J]B[0]}{A[0]}+\cdots\right]。$$

$(7.19)_{13}$

其中

$$\left.\begin{aligned}A[J]&=\int[d\varphi]\exp\left[i\int dx\left\{\frac{-(\partial_u\varphi)^2}{2}-\frac{m^2\varphi^2}{2}+J\varphi\right\}\right],\\ B[J]&=\int[d\varphi]\exp\left[i\int dx\left\{\frac{-(\partial_u\varphi)^2}{2}-\frac{m^2\varphi^2}{2}+J\varphi\right\}\right]\\ &\quad\cdot\left[\int dx\,\frac{i}{4!}\,\varphi^4(x)\right]=\int dx\,\frac{i}{4!}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4A[J]。\end{aligned}\right\}$$

$(7.20)_{13}$

以上$(7.19)_{13}$式的右边第一项 $A[J]/A[0]=W^{(0)}[J]$就是零级近似下(归一化的)的产生泛函，而第二和第三项则是产生泛函的一级修正(考虑到$(7.20)_{13}$式)。

$$W^{(1)}[J]=\frac{\lambda B[J]}{A[0]}-\frac{\lambda A[J]B[0]}{A^2[0]}=\lambda\int dx\,\frac{i}{4!}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4$$

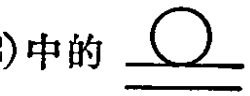
$$\cdot W^{(0)}[J]-\lambda W^{(0)}[J]\,\frac{B[0]}{A[0]}$$

$$-\lambda\int dx\,\frac{i}{4!}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4W^{(0)}[J]$$

$$-\lambda W^{(0)}[J]\left[\int dx\,\frac{i}{4!}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4W^{(0)}[J]\right]_{J=0}$$

$(7.21)_{13}$

上式右边第一项就是$(7.5)_{13}$式中取$n=1$的产生泛函的一级修正项。因此由这第一项通过它对$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_4)}$微商，所得到的四点格林函数的一级修正$G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$，就是由$(7.18)_{13}$式所给出的共十项。而上式右边第二项则是我们以前所未考虑的。上式右边第二项中的括号内的$J=0$，因此括号内的量是与J无关的。根据$W^{(0)}[J]$是产生泛函的性质，可知括号内的量实际就是真空到真空的一级修正，相当于右图的贡献。而由上式右边第二项括号前的$W^{(0)}[J]$对$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\cdot\frac{\delta}{\delta J(x_4)}$微商，就得到四点格林函数的零级近似。因此由上式右边第二项所得到四点格林函数，就是零级四点格林函数和一级真空图形的乘积，也就是我们在$(7.18)_{13}$式下面的(3)项，可是符号相反，两者相互抵销。也就是真空图形的效应总和为零。虽然我们以上只是在一级近似下，证明了这种真空图形的相销性质，可是实际上在任何一级近似下这种相销性都是成立的。

除了上述的真空到真空图形(上面已证明它们可以相销)，在$G_4^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$中还有单粒子线形成圈图的贡献，例如在$(7.18)_{13}$式下面(2)中的这类图形。单粒子形成的圈图对应的因子应是$G_2(0)$，这是一个发散函数。不过这些图形的贡献，可以简单地通过引进N乘积来代替$\mathscr{L}_I$中的普通乘积，而使它销除。其实在$\mathscr{L}_I$中引进N乘积的做法，我们在前面已应用过。相当于Wick展开，例如对于$\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)$我们可有：

$$
\begin{aligned}
&N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)]\\
&\quad=T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)]\\
&\qquad-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]|0\rangle\cdot N[\phi(x_3)\phi(x_4)]\\
&\qquad-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_4)]|0\rangle\cdot N[\varphi(x_2)\varphi(x_3)]\\
&\qquad-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_3)]|0\rangle N[\phi(x_2)\varphi(x_4)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\langle 0|T[\varphi(x_3)\varphi(x_4)]|0\rangle\cdot N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]\\
&-\langle 0|T[\varphi(x_2)\varphi(x_4)]|0\rangle\cdot N[\varphi(x_1)\varphi(x_3)]\\
&-\langle 0|T[\varphi(x_2)\varphi(x_3)]|0\rangle N[\varphi(x_1)\varphi(x_4)]\\
&-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)]|0\rangle\langle 0|T[\varphi(x_3)\varphi(x_4)]|0\rangle\\
&-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_3)]|0\rangle\cdot\langle 0|T[\varphi(x_2)\varphi(x_4)]|0\rangle\\
&-\langle 0|T[\varphi(x_1)\varphi(x_4)]|0\rangle\langle 0|T[\varphi(x_2)\varphi(x_3)]|0\rangle。
\end{aligned}
\tag{7.22}_{13}
$$

我们在前面的 $\mathscr{L}_I=\frac{\lambda\varphi^4(x)}{4!}$ 应理解为 $\mathscr{L}_I=N\frac{\lambda\varphi^4(x)}{4!}$。这二者的关系可由上式令 $x_1=x_2=x_3=x_4=x$ 得到，此时 $T[\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)]$ 的时序符号 T 可以消除。由此得到 $N\varphi^4(x)=\varphi^4(x)$ ——…… 其中要减除的各项正好都是带有单粒子圈图的图形的贡献，这些要减去的各项正好和以前所得到单粒子圈图的贡献抵销。这样看来似乎真空到真空图形也可通过此法消除，其实不然。例如在高阶真空图形中，可能出现  这类图形。这类图形并不属于单粒子线形成的圈图。这类图形的相销还是要利用我们前面所介绍的 $\frac{W[J]}{W[0]}$ 分子分母展开到相同数量级的方法来进行。下面我们顺便把一般情况下的 N 乘积，表示成泛函微商的形式写下备用：

$$
\begin{aligned}
N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]&=T[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]\\
&-\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int dx\,dy\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle\right.\right.\\
&\left.\left.\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right\}-1\right]\cdot N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]\\
&-T[\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]\\
&-\left[\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,dy\,\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right\}-1\right]\\
&\cdot N[\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)]。
\end{aligned}
\tag{7.23}_{13}
$$

以上讨论也适用于其他场论，例如量子电动力学的 Feynman 法则也可由上述方法求得。这些具体结果我们已在前面用通常场

论的方法求得，这儿不再赘述。应该指出，在路线积分理论形式里，我们得到 Feynman 法则时所需用的数学工具，只不过是泛函积分和微分而已。而且那些对称因子之类也会在微分运算中自动给出。

由上面的讨论可看出，由 $W[J]$ 所得到的 Green 函数，一般包括有复杂的 Feynman 图形，其中也包括由若干不相连的图形组合而成的图形。也可包括单粒子可约图形，所谓单粒子可约图形，就是把其中某一粒子线割断就成为两个互不相连的图形的图形。不连结图形的贡献就是不相连的部分图形的贡献的乘积。而单粒子可约图形的贡献，也就是单线子的贡献乘上由它所连部分图形的贡献的乘积。因此我们主要只是要求得连接的而且是单粒子不可约图形的贡献。

§13.8 连接的 Green 函数

定义：

$$\boxed{W[J]\equiv e^{iz[J]}=\int[d\varphi]\exp\left\{i\int dx[\mathscr{L}[\varphi(x)]+J(x)\varphi(x)]\right\},} \tag{8.1}_{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\delta z[J]}{\delta J(x_i)}&=\frac{1}{iW[J]}\cdot\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_i)}\\&=\frac{\langle 0^+|\varphi(x_i)|0^-\rangle^J}{\langle 0^+|0^-\rangle_J}\equiv\varphi_{i0}(x)\text{。}\end{aligned}} \tag{8.2}_{13}$$

上式右边的 $\varphi_{i0}(x)$ 是有外源 J 存在时所感应的 $\varphi_i(x)$ 在真空态的平均值，当 $J=0$ 时上式左边有时空平移不变性，因此这时的 φ_{i0}（一般情况下，例如有对称性自发破缺的情况下 $\varphi_0\neq 0$）应与时空无关。记

$$\boxed{\left.\frac{\delta z[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0}=\varphi_{i0}\text{。}} \tag{8.3}_{13}$$

以上$(2.8)_{18}$或$(8.3)_{13}$式可用图形表示



$(8.4)_{13}$

利用关系

$$G_2=\frac{(-i)^2}{W}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1\delta J_2}\bigg|_{J=0}=\frac{(-i)^2}{W}\frac{\delta}{\delta J_1}\left(\frac{\delta}{\delta J_2}e^{iz[J]}\right)\bigg|_{J=0}$$

$$=\frac{(-i)^2}{e^{iz}}\frac{\delta}{\delta J_1}\left(ie^{iz[J]}\frac{\delta z[J]}{\delta J_2}\right)\bigg|_{J=0}$$

$$=(-i)\frac{\delta^2 z[J]}{\delta J_1\delta J_2}\bigg|_{J=0}+\frac{\delta z[J]}{\delta J_1}\cdot\frac{\delta z[J]}{\delta J_2}\bigg|_{J=0}$$

$$\frac{\delta^2 z[J]}{\delta J_1\delta J_2}\bigg|_{J=0}=iG_2-i\varphi_0^2$$

$$=i\frac{\langle 0^+|T(\varphi(x_1)-\varphi_0)\cdot(\varphi(x_2)-\varphi_0)|0\rangle^-}{\langle 0^+|0^-\rangle}$$

$$=i\frac{\langle 0^+|T\bar{\varphi}(x_1)\cdot\bar{\varphi}(x_2)|0^-\rangle}{\langle 0^+|0^-\rangle}=i\bar{G}_2=i\bar{G}_{20}。$$

$(8.5)_{13}$

其中$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-\varphi_0$, $\bar{G}_2$为对于$\bar{\varphi}(x)$场的二点 Green 函数。$\bar{G}_{2c}$中的下标C表明为连接的 Green 函数。二点 Green 函数都是连接的。在以后讨论中我们都以$\bar{\varphi}(x)$代替原来$\varphi(x)$的地位，但不必明显写出。用归纳法可以证明

$$\frac{\delta^n z[J]}{\delta J_1\delta J_2\cdots\delta J_n}\bigg|_{J=0}=(i)^{n-1}\frac{\langle 0^+|T(\bar{\varphi}_1\cdot\bar{\varphi}_2\cdots\bar{\varphi}_n)|0^-\rangle^c}{\langle 0^+|0^-\rangle}$$

$$=(i)^{n-1}\bar{G}_{nc}(1,\ 2\cdots n)。$$

$(8.6)_{13}$

假定上式对于n成立，可证明它对$n+1$也成立。由$(5.10)_{13}$式全部的 Green 函数为

$$G_{n+1}=(-i)^{n+1}\frac{1}{W[J]}\frac{\delta^{n+1}W[J]}{\delta J\,\delta J_1\delta J_2\cdots\delta J_n}$$

$$-(-i)\frac{1}{W}\frac{\delta}{\delta J}\left[(-i)^n\frac{\delta^n W[J]}{\delta J_1\delta J_2\cdots\delta J_n}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&=(-i)\frac{1}{W}\frac{\delta}{\delta J}[W[J]G_n]\\
&=(-i)\frac{1}{W}\frac{\delta}{\delta J}[e^{iz}(G_{n,c}+G_{n,d})]\\
&=(-i)\frac{1}{W}\frac{\delta}{\delta J}\left\{e^{iz}\left(G_{n,d}+(-i)^{n-1}\frac{\delta^n z[J]}{\delta J_1\delta J_2\cdots\delta J_n}\right)\right\}\\
&=(-i)\frac{1}{W}\left[\frac{\delta}{\delta J}(e^{iz}G_{n,d})\right.\\
&\quad\left.+\frac{\delta z}{\delta J}(-i)^{n-2}\frac{\delta^n z[J]}{\delta J_1\delta J_2\cdots\delta J_n}e^{iz}\right]\\
&\quad+(-i)^n\frac{\delta^{n+1}z}{\delta J\,\delta J_1\cdots\delta J_n}。
\end{aligned}
\tag{8.7}_{13}
$$

以上推导中我们把全部 Green 函数 G_n 分解为非相连的部分 $G_{n,d}$ 和相连的部分 $G_{n,c}$。可以看出上式右边括号内两项中，每项都是非相连图形的贡献，属于 $G_{n+1,d}$ 部分(下标 d 表明为不相连的图形)。上式右边所余最后一项则属于连接部分 Green 函数 $G_{n+1,c}$ 所以

$$
\frac{\delta^{n+1}z[J]}{\delta J\,\delta J_1\cdots\delta J_n}=(i)^n\bar{G}_{n+1,c}(1,\ 2\cdots n)。
\tag{8.8}_{13}
$$

所以$(8.6)_{13}$式得证。不过以上证明中并未严格排除 $\dfrac{\delta^n z[J]}{\delta J_1\cdots\delta J_n}$ 中包含有非连接图形贡献的可能性。下面介绍另一种证明的方法。其实所要证明的只是 $Z[J]$ 对 J 展开式可写成。

$$
\begin{aligned}
iZ[J]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\left[\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n G_{nc}(x_1,\ x_2\cdots x_n)\right.\\
&\quad\left.\cdot J(x_1)\,J(x_2)\cdots J(x_n)\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}G_{cc}(i,\ j,\ \cdots,\ n)J_iJ_j\cdots J_n。
\end{aligned}
\tag{8.9}_{13}
$$

由$(5.10)_{13}$式已知 $W[J]$ 对 J 展开可写成

$$
\begin{aligned}
W[J]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n G_n(x_1,\ x_2\cdots x_n)\\
&\quad\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_3)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{1}{n!}G_n(i,\ j,\ \cdots,\ n)J_iJ_1\cdots J_n。
\end{aligned}
\tag{8.10}_{13}
$$

上式中的 $G_n(i, j, \cdots, n)$ 为全部 n 点 Green 函数，其中包括连接图形及各种可能的非相连图形的贡献之和。例如 n 个外点的图形中可包含有：由 σ_{ni} 个有 n_i 外点的连结图形组合而成的图形。当然外点总数应为 n，即

$$n=\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3+\cdots=\sum_k k\sigma_k \qquad (8.11)_{13}$$

给出一组满足上式关系的 $\{\sigma_{ni}\}$，就给定了 n 的一个分布。

$$G_n(1, 2, \cdots n)=\sum_{\{\sigma_k\}}\sum_P P[\underbrace{G_1(\cdot)\cdot G_1(\cdot)\cdots G_1(\cdot)}_{\sigma_1\text{个因子}}]$$
$$\cdot[\underbrace{G_2(\cdot\cdot)G_2(\cdot\cdot)\cdots G_2(\cdot\cdot)}_{\sigma_2\text{个因子}}]\cdots \qquad (8.12)_{13}$$

其中 P 表明对 $x_1, x_2\cdots x_n$ 的不同组合。对于某一种分布 $\{\sigma_k\}$，对 P 求和时共有

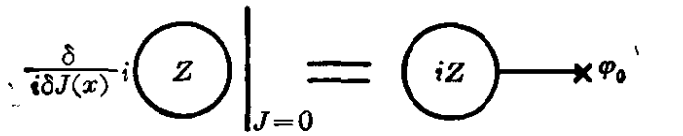
$$\frac{n!}{(\sigma_1!\sigma_2!\cdots)[(1!)^{\sigma_1}(2!)^{\sigma_2}\cdots]}=\frac{n!}{\Pi\sigma_k!\Pi(k!)^{\sigma_k}} \qquad (8.13)_{13}$$

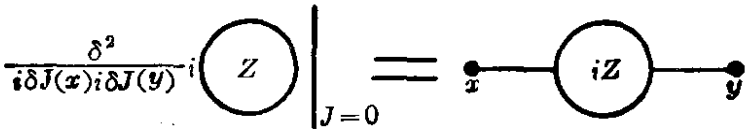
项，而且每一项贡献是相同的，把 $(8.12)_{13}$ 和 $(8.13)_{13}$ 式代入 $(8.10)_{13}$ 式

$$W[J]=\sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{1}{n!}\sum_{\{\sigma_k\}}\Big[\frac{n!}{(\Pi\sigma_k!)\Pi(k!)^{\sigma_k}}\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$
$$\cdot\prod_k[G_{kc}(x_1\cdots x_k)]^{\sigma_k}\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_k)\Big]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\{\sigma_k\}}\prod_k\frac{\left\{\left[\int i^k G_{kc}(x_1, x_2\cdots x_k)J(x_1)J(x_2)\cdots \cdot J(x_k)dx_1\,dx_2\cdots dx_k\right]^{\sigma_k}\right\}}{\sigma_k!\,k!^{\sigma_k}}$$
$$=\prod_k\Big\{\sum_{\sigma_k=0}^{\infty}\frac{[i^kG_{kc}(i, j\cdots k)J_iJ_j\cdots J_k]^{\sigma_k}}{\sigma_k!(k!)^{\sigma_k}}\Big\}$$
$$=\prod_k\exp\cdot\frac{i^kG_{kc}(i, j\cdots k)J_iJ_j\cdots J_k}{=k!}$$
$$=\exp\Big[i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{(k-1)}G_{kc}(i, j\cdots k)}{k!}J_iJ_j\cdots J_k\Big]$$
$$=\exp\Big[i\sum_{k=0}^{\infty}\int\frac{G_{kc}(x_1, x_2\cdots x_k)}{k!}$$
$$\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_k)dx_1\,dx_2\cdots dx_k\Big]。 \qquad (8.14)_{13}$$

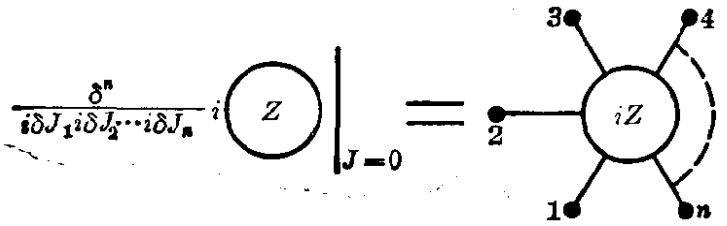
$$\ln W[J]=iZ[J]=i\sum_{k=0}^{\infty}\int i^{(k-1)}\frac{G_{kc}(x_1,\ x_2\cdots x_k)}{k!}$$
$$\cdot J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_k)dx_1dx_2\cdots dx_k。\quad (8.15)_{13}$$

这就是我们所证明的结论，从而就得到$(8.6)_{13}$式的结论。正因此我们常称$Z[J]$为连结的 Green 函数的产生泛函。$(8.6)_{13}$式关系可用图形表示如下





一般情况下



$(8.16)_{13}$

§13.9 单粒子不可约 Green 函数(1PI)

连结图形中包含有单粒子可约和单粒子不可约图形，简记为1PI。单粒子可约图形就是把其中某一根单粒子线割断，它就成为不相连的部分图形的图形。单粒子可约图形的贡献可以写成相应的单粒子不可约图形贡献的乘积，再乘以该单粒子的传播子。因此单粒子不可约的图形是最为基本的。我们希望能在连接的 Green 函数中分出单粒子不可约的 Green 函数来。

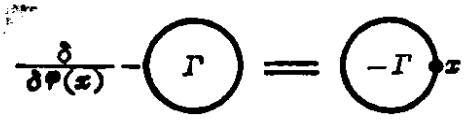
在$(8.2)_{13}$式中我们得到由外源J所感应的场量$\varphi(x)$，我们也可以问得到这个场量$\varphi(x)$的外源应是怎样得到。这就需要采用$\varphi(x)$作为独立变量。利用我们在经典力学或热力学中常用的 Legendre 变换可以满足改变独立变量的要求，引进新的泛函

$$\boxed{\Gamma(\phi)=Z[J]-\int dx\,J(x)\phi(x)。} \qquad (9.1)_{13}$$

应该注意 $\Gamma[\phi]$ 应理解为 ϕ 的泛函，上式右边的 J 应通过 $(8.3)_{13}$ 式理解为 $\phi(x)$ 的函数。由上式对 $\phi(x)$ 变分

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi(x)}&=\int dy\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}-J(x)\\&\quad-\int dy\,\phi(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\phi x}=-J(x)。\end{aligned}} \qquad (9.2)_{13}$$

最后一步利用了 $(8.3)_{13}$ 式。上式关系可用图形表示



$$(9.3)_{13}$$

由 $(9.2)_{13}$ 式得到的 $J(x)$ 应理解为 $\phi(x)$ 的泛函 $J[\phi]$，而 $(8.3)_{13}$ 式所得到 $\phi(x)$ 应理解为 $J(x)$ 的泛函 $\phi[J]$。这两个函数应互为逆函数。因此相应于(8.3)式有：

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi(x)=\varphi_0}=-J(x)=0 \qquad (9.4)_{13}$$

为书写方便我们还是把时空晶格化，并保留相同指标求和的惯例，把(8.2)式两边对 φ_i 变分。

$$\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J_i\delta J_j}\cdot\frac{\delta J_j}{\delta\phi_k}=\frac{\delta\varphi_i}{\delta\phi_k}=\delta_{ik}。 \qquad (9.5)_{13}$$

而由 $(9.4)_{13}$ 式

$$\frac{\delta J_j}{\delta\phi_k}=-\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi_j\delta\phi_k}\equiv K_{jk}。 \qquad (9.6)_{13}$$

另一方面由 $(8.2)_{13}$ 和 $(8.6)_{13}$ 式可知

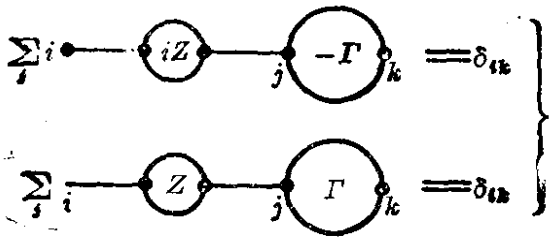
$$\frac{\delta\varphi_j}{\delta J_i}=\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J_i\delta J_j}=i\,\frac{\delta^2iZ[J]}{i\delta J_i\cdot i\delta J_j}=iG_{ijc}。 \qquad (9.7)_{13}$$

代入 $(9.5)_{13}$ 式可知 iG_c 和 k 是互为逆矩阵

$$\boxed{iG_cK=1。} \qquad (9.8)_{13}$$

用图形表示

或



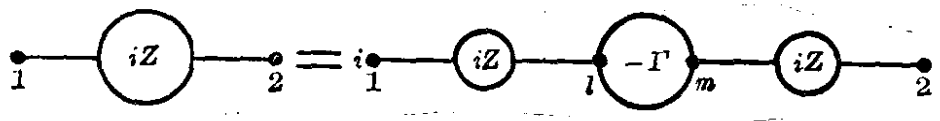
$$(9.9)_{13}$$

又由

$$\boxed{\frac{\partial\varphi_l}{\partial J_i}\frac{\delta^2(-\Gamma)}{\delta\varphi_l\delta\varphi_m}\frac{\partial\varphi_m}{\partial J_j}=\frac{\partial\varphi_l}{\partial J_i}\frac{\partial J_m}{\partial\varphi_l}\frac{\partial\varphi_m}{\partial J_j}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial J_j}=\frac{\delta^2 z[J]}{\delta J_i\delta J_j}。}$$

$$(9.10)_{13}$$

用图形表示即为



$$(9.11)_{13}$$

以上对 l, m 求和符号省略。

把$(9.8)_{13}$式对 J 变分得

$$iG_c\frac{\delta K}{\delta J}+\frac{\delta iG_c}{\delta J}\cdot k=0。$$

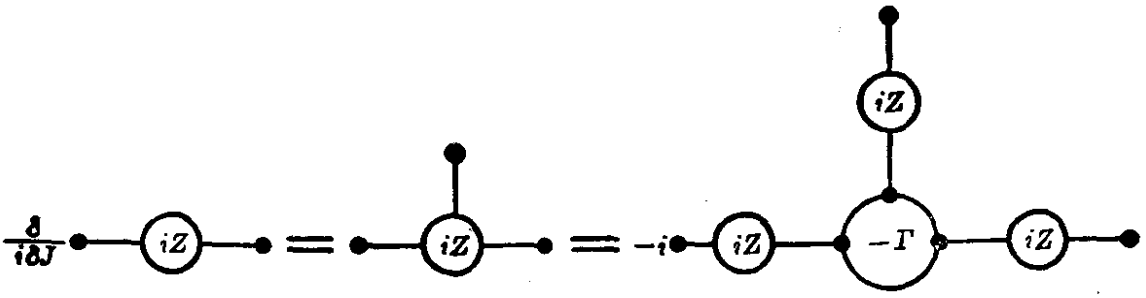
把上式右边乘以 iG_c 得到(以下省略下标 c)

$$\begin{aligned}\frac{\delta iG_{jk}}{\delta J_i}&=iG_{jl}\frac{-\delta K_{lm}}{\delta J_i}iG_{mk}=iG_{jl}\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta J_i\delta\phi_l\delta\varphi_m}iG_{mk}\\&=iG_{jl}\frac{\delta\varphi_n}{\delta J_i}\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\varphi_n\delta\varphi_l\delta\varphi_m}iG_{mk}\\&=iG_{jl}iG_{in}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_n\delta\varphi_l\delta\varphi_m}iG_{mk}。\end{aligned}\qquad(9.12)_{13}$$

$$\boxed{\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_i\delta J_j\delta J_k}=iG_{il}iG_{jm}iG_{kn}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_l\delta\varphi_m\delta\varphi_n}。}$$

$$(9.13)_{13}$$

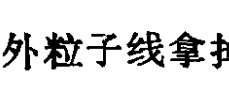
用图形表示为



$(9.14)_{13}$

取极限 $J=0$，此时 $\varphi(x)=\varphi_0$ 且 G_{ij} 就是粒子的传播子。引进

$$\left.\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_i\delta\varphi_j\delta\varphi_k}\right|_{\varphi(x)=\varphi_0}\equiv\Gamma^{(3)}_{ijk} \qquad (9.15)_{13}$$

称为三点正规顶角函数或三点单粒子不可约顶角。它相当于把三点连结的 Green 函数的三条外粒子线拿掉变成 

，也就是把三点连结的 Green 函数 G_{3c} 除以三个相当于外粒子的传播子。

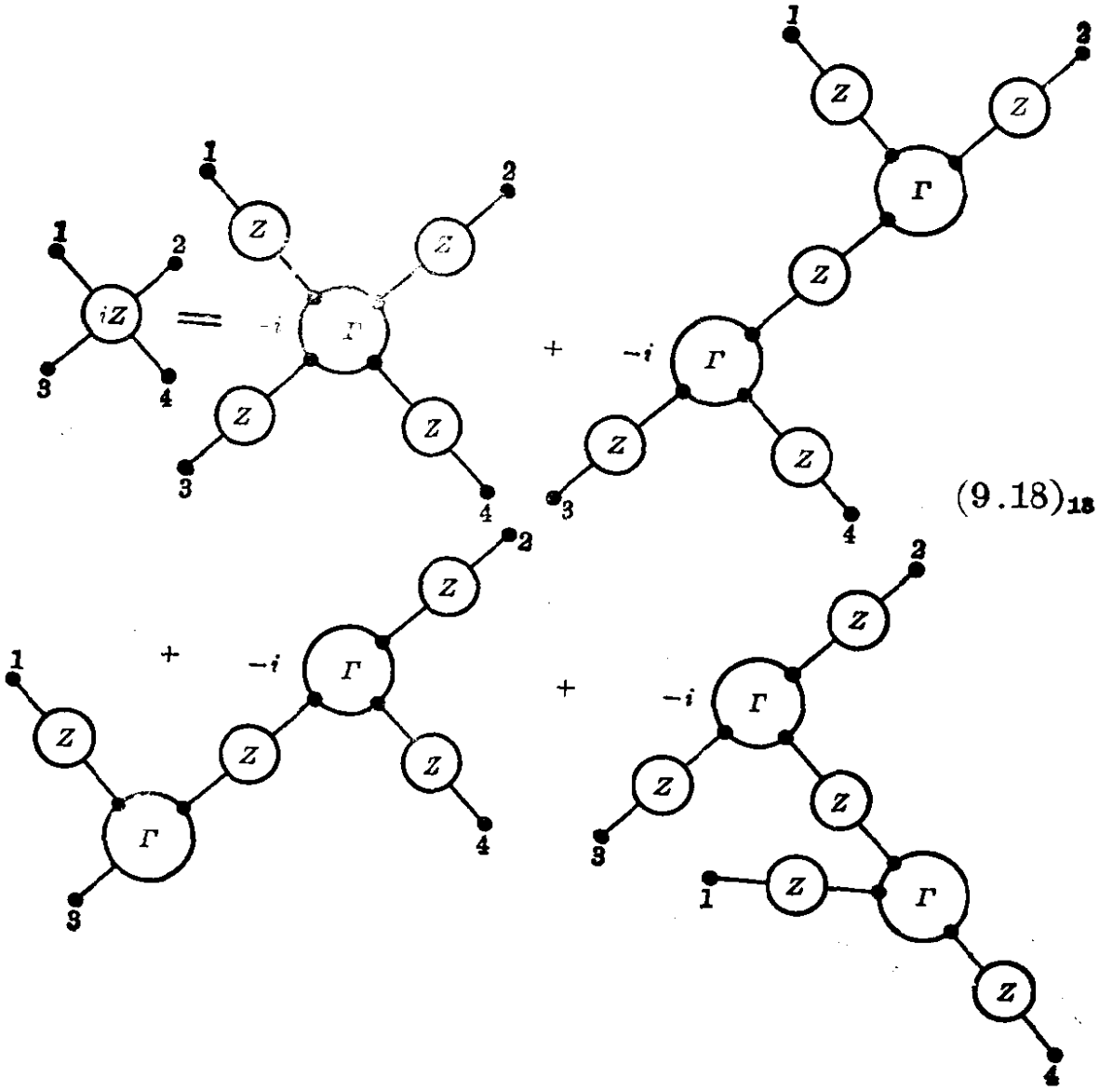
再把 $(9.12)_{13}$ 式对 J 变分。应该注意变分时，不仅直接作用到 G 上(利用 $(9.12)_{13}$ 式)而且要利用

$$\frac{\delta}{\delta J}=\frac{\delta\varphi_l}{\delta J}\frac{\delta}{\delta\varphi_l}=iG\frac{\delta}{\delta\varphi}。 \qquad (9.16)_{13}$$

作用到 $\Gamma[\varphi]$ 上去，这样得到

$$\begin{aligned}\frac{\delta^4Z[J]}{\delta J_1\delta J_2\delta J_3\delta J_4}=&iG_{1i}iG_{2j}iG_{3k}iG_{4l}\frac{\delta^4\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_i\delta\varphi_j\delta\varphi_k\delta\varphi_l}\\&+iG_{1\alpha}iG_{2\beta}iG_{j\gamma}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_\alpha\delta\varphi_\beta\delta\varphi_\gamma}\\&\cdot iG_{3k}iG_{4l}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_j\delta\varphi_k\delta\varphi_l}\\&+iG_{1\alpha}iG_{3\beta}iG_{k\gamma}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_\alpha\delta\varphi_\beta\delta\varphi_\gamma}\\&\cdot iG_{2j}iG_{4l}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_j\delta\varphi_k\delta\varphi_l}\\&+iG_{1\alpha}iG_{4\beta}iG_{l\gamma}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_\alpha\delta\varphi_\beta\delta\varphi_\gamma}\\&\cdot iG_{2j}iG_{3k}\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_j\delta\varphi_k\delta\varphi_l}。\end{aligned} \qquad (9.17)_{13}$$

用图形表示如下。



$(9.18)_{18}$

图 13-5

右边第一个图是单粒子不可约图形，其余的均为单粒子可约图形，可是其中每一个以 Γ 相连的部分图形本身也是 1PI 图形。

一般情况下可以证明

$$\left.\frac{\delta^n\Gamma[\phi]}{\delta\phi_1\delta\phi_2\cdots\delta\phi_n}\right|_{\phi(x)=\varphi_c}=\Gamma^{(n)}_{1,2,\cdots,n}。\tag{9.19}_{18}$$

$\Gamma^{(n)}_{1,2,\cdots,n}$ 即为所有连接的 n 个外粒子的 1PI 图形（把外粒子线除掉）的贡献之和，称为 n 点单粒子不可约顶角函数式 n 点正规顶角函数。证明采用归纳法进行。假定以上论述对 n 点成立，证明对于 $n+1$ 也成立。$n=3$，4 成立以上已证明。

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \cdots \delta J_n} = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i \delta \phi_j \cdots \delta \phi_l} iG_{i1} iG_{j2} \cdots iG_{ln}$$
$$+\text{单粒子可约项}, \qquad (9.20)_{18}$$

把上式再对 J 变分一次。变分 $\frac{\delta}{\delta J}$ 作用到单粒子可约项上，仍然还是单粒子可约的。根据$(9.14)_{18}$式图形看来，$\frac{\delta}{\delta J}$ 作用到 G 上也得到单粒子可约项。只有 $\frac{\delta}{\delta J} = iG \frac{\delta}{\delta \varphi}$ 作用到 $\Gamma[\varphi]$ 上得到的才是 1PI 项。

$$\frac{\delta^{n+1} Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \cdots \delta J_{n+1}} = \frac{\delta^{n+1} \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j \cdots \delta \varphi_m} iG_{i1} iG_{j2} \cdots iG_{m,n+1}$$
$$+\text{单粒子可约项} \qquad (9.21)_{18}$$

成立，所以$(9.19)_{18}$式得证。由于 1PI 顶角可由 $\Gamma[\varphi]$ 对 φ 的变分而得到，我们称 $\Gamma[\varphi]$ 为 1PI 顶角函数的产生泛函。我们可以把 $\Gamma[\varphi]$ 在 φ_0 附近对 φ 展开，并利用$(9.17)_{18}$式。

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j \cdots \delta \varphi_n} \right|_{\varphi_0} \cdot (\varphi - \varphi_0)_i (\varphi - \varphi_0)_j \cdots (\varphi - \varphi_0)_n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \cdots x_n; \varphi_0) \cdot (\varphi(x_1) - \varphi_0)$$
$$\cdot (\varphi(x_2) - \varphi_0) \cdots (\varphi(x_n) - \varphi_0) dx_1 dx_2 \cdots dx_n。 \qquad (9.22)_{18}$$

以上我们取 $\Gamma[\varphi_0] = 0$ 并考虑到当 $n=1$ 时，由$(9.4)_{18}$式

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -J(x) = 0,$$

这也就是考虑到 φ_0 乃是 $\Gamma[\varphi]$ 的极值位置。上式中我们也明显地表明了 $\Gamma^{(n)}(x's; \varphi_0)$ 对 φ_0 的依赖关系。不过我们并不能常常事先知道 φ_0 的位置，当我们未能事先确定 φ_0 值时，我们可以把 $\Gamma[\varphi]$ 在 $\varphi = 0$ 附近展开。

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \cdots x_n) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots$$
$$\cdot \varphi(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n。 \qquad (9.23)_{13}$$

然后再由

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} = 0。 \qquad (9.24)_{18}$$

条件来定出 φ_0。如 $\varphi_0\neq 0$ 就表示有对称性自发破缺。$\varphi_0=0$ 就表示没有对称性自发破缺。由于 $\dfrac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\bar{\phi}_1\delta\bar{\phi}_2}=G_c^{-1}(1,2)$ 而

$$G_c^{(2)}(1,2)=-\langle|(\varphi_1-\varphi_0)\cdot(\varphi_2-\varphi_0)|\rangle$$

是半正定的矩阵，所以在 φ_0 的 $\Gamma[\phi]$ 的极值实际上是极小值。

对于均匀的 $\varphi(x)=\varphi=$ 常数的 $\Gamma[\phi]$ 是一个很有用的泛函。

$$\Gamma[\phi]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{N!}\int\Gamma^{(N)}(x_1,x_2,\cdots x_N)\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2\cdots\bar{\phi}_N\,dx_1\,dx_2\cdots dx_N。$$

$$(9.25)_{18}$$

由于平移不变性 Γ^N 中的 N 个 x 实际只有 $(N-1)$ 个相对距离 (x_i-x_j) 是独立的，因此它的 Fourier 分量可写成

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(k_1,k_2,\cdots k_N)&=\int\Gamma^{(n)}(x_1,x_2,\cdots x_N)\left(\prod_{i=1}^{N}d^4x_i\exp(ik_ix_i)\right)\\&=\tilde{\Gamma}^n(k_1,k_2,\cdots k_N)(2\pi)^4\delta(\Sigma k_i)。\end{aligned}$$

$$(9.26)_{18}$$

代入前式得到，对于多分量的场量可得

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma[\phi]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\tilde{\Gamma}^{(N)}_{i_1,\cdots,i_N}(0,0,\cdots,0)(\phi-\varphi_0)_{i_1}\\\cdot(\phi-\varphi_0)_{i_2}\cdots(\phi-\varphi_0)_{i_N}(2\pi)^4\delta^4(0)\\\equiv-(2\pi)^4\delta^4(0)U(\phi)=-\Omega U(\varphi)。\end{aligned}}$$

$$(9.27)_{18}$$

其中 Ω 为四维时空的体积。由此可得

$$\left.\frac{d^NU[\phi]}{\delta\phi_{i_1}\delta\phi_{i_2}\cdots\delta\phi_{i_N}}\right|_{\phi=\varphi_0=v}=-\tilde{\Gamma}_{i_1,i_1\cdots i_N}(0,0,\cdots 0)。\quad(9.28)_{18}$$

其中 $U[\varphi]$ 的零级近似就是拉氏量 $\mathscr{L}$ 中除去动能项以外的势函数，参看 $(10.13)_{13}$ 式，所以 $U[\varphi]$ 称为超势或有效势。上式右边为 N 点的正规顶角函数，在所有外动量为零的条件的取值。由 $(9.4)_{18}$ 式条件导致

$$\left.\frac{dU[\phi]}{d\phi_i}\right|_{\phi=v}=0。\qquad(9.29)_{18}$$

而且

$$\left.\frac{d^2U[\phi]}{d\phi_i d\phi_j}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -[\tilde{G}_c^{-1}(0)]_{ij} = +m^2(\text{重整化质量}) \tag{9.30}_{13}$$

对于 φ^4 理论

$$\left.\frac{\delta^4 U[\phi]}{\delta\phi_1\delta\phi_2\delta\phi_3\delta\phi_4}\right|_{\varphi=\varphi_0} = \lambda(\text{重整化耦合常数})。 \tag{9.31}_{13}$$

§13.10 圈图展开

在§13.7我们曾考虑过微扰展开的计算方法，在那里我们是按相互作用常数的幂级数展开的，展开的每一项有时会破坏整个拉氏量的对称性，例如规范不变性。现在我们来考虑另一种方式的展开。设想整个拉氏量乘上一个因子 $\mathscr{L}\to a^{-1}\mathscr{L}$ 则$(7.2)_{13}$式写成

$$\begin{aligned}
\exp\{iZ[J]\} &= W[J] \\
&= \int [d\varphi]\exp\int i\,dx\left[\frac{1}{a}\mathscr{L}_0+\frac{1}{a}\mathscr{L}_I+J(x)\cdot\phi(x)\right] \\
&= \exp\left[i\int dx\,\frac{1}{a}\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] \\
&\quad\cdot\int[d\varphi]\exp i\int dx\,[\varphi a^{-1}G^{-1}\phi+J(x)\phi(x)] \\
&= \exp\left[i\int dx\,\frac{1}{a}\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] \\
&\quad\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\int dx\,dy\,J(x)aG(x-y)J(y)\right\}。
\end{aligned} \tag{10.1}_{13}$$

以上已取 $\mathscr{L}_0$ 的作用量为$(7.1)_{13}$形式并省去了对 y 的积分，并且考虑到 $K=G^{-1}$。

由§(13.7)的分析可知内粒子的传播子由 $\mathscr{L}_0$ 所决定，相互作用的顶角由 $\mathscr{L}_I$ 所决定。由上式可见在 $\mathscr{L}\to\frac{1}{a}\mathscr{L}$ 变换下，每一根内粒子线要乘上因子 a，而每一顶点要乘上因子 a^{-1}。考虑某一

个 Feynman 图：有 V 个角点，I 根内粒子线，E 根外粒子线；每一根内粒子线带有一个四维动量需要积分，而每一个角点带有一个 δ 函数。可以用减少一个四维动量的积分，不过最后还将保留一个保证外粒子动量守恒的 δ 函数。因此独立的需要进行积分的内粒子动量(四维)的数目，也就是独立的封闭回路的数目 l 应是

$$l=I-(V-1)=I-V+1。 \qquad (10.2)_{13}$$

当我们引进整体的参量 a^{-1} 并使 $\mathscr{L}\to a^{-1}\mathscr{L}$，且把 $Z[J]$ 按 a 展开成幂级数时，对某一一定数目的外粒子线的 Feymann 图形将出现因子 $a^{I-V}=a^{l-1}$。因此按 a 的展开也就是按圈的数目展开。其实在量子场论里 $\hbar$ 就起到 a 的作用。实际上把 $\hbar$ 明显写出

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}Z[J]\right\}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dx\,\mathscr{L}_I\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,dy\,\frac{J(x)}{\hbar}\cdot\hbar G(x-y)\frac{J(y)}{\hbar}\right\},$$

如果让 $\frac{J}{\hbar}\to J$，则上式可写成

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}Z[J]\right\}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dx\,\mathscr{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\int dx\,dy\,J(x)\hbar G(x-y)J(y)\right\}。 \qquad (10.3)_{18}$$

所以按圈图展开也就是按 $\hbar$ 展开，也就是在经典解附近展开。$l=0$ 就是没有圈的图形，称为树图，也就是经典近似。

下面以 φ^4 理论为例来说明这种圈图展开。

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2]-V_0(\varphi)$$
$$=-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2]-\frac{1}{4!}\lambda_0\varphi^4。 \qquad (10.4)_{18}$$

在 $(10.1)_{18}$ 式中对 $[d\varphi]$ 积分时，采用最速下降法。考虑作用量 $I_J[\varphi]=\int dx[\mathscr{L}(\varphi)+J(x)\varphi(x)]=S[\varphi]+\int dx\,J(x)\,\varphi(x)$ 并把 $I_J[\varphi]$ 在经典解 $\varphi(x)=\varphi_0(x)$ 附近展开。

$$I_J[\varphi]=S[\varphi]+\int dx\,J(x)\varphi(x)$$

$$=S[\varphi_0]+\int dx\,J(x)\varphi_0(x)$$

$$+\int dx\Big[\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)}+J(x)\Big][\varphi(x)-\varphi_0(x)]$$

$$+\frac{1}{2!}\int dx\,dy[\varphi(x)-\varphi_0(x)]$$

$$\cdot\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}[\varphi(y)-\varphi_0(y)]+\cdots \qquad (10.5)_{13}$$

选取 $\varphi_0(x)$ 为使 $\sim[\varphi(x)-\varphi_0(x)]$ 线型项为零。也就是

$$\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)}=-J(x)。 \qquad (10.6)_{13}$$

即在 φ_0 处附近 $I_J[\varphi]$ 的变更为零，也就是 $\varphi_0(x)$ 为有外源 $J(x)$ 的经典解。由 $(10.4)_{13}$ 式的 $\mathscr{L}$ 代入上式得到

$$(-\partial_\mu^2+m^2)\varphi_0(x)+V_0'(\varphi_0)$$

$$=(-\partial_\mu^2+m^2)\varphi+\frac{\lambda_0}{6}\varphi_0^3(x)=J(x)。 \qquad (10.7)_{13}$$

把 $(10.5)_{13}$ 式代入 $(10.1)_{13}$ 式，并考虑到对 $[d\varphi]$ 积分时，$\varphi_0(x)$ 为一常数可以拿到积分号外边去。

$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}Z[J]\Big\}=\exp\Big[\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0]+\frac{i}{\hbar}\int dx\,J(x)\varphi_0(x)\Big]$$

$$\cdot\int[d\varphi]\exp\Big\{i\int dx\,dy\,\frac{1}{2!}[\varphi(x)-\varphi_0(x)]$$

$$\cdot\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}[\varphi(y)-\varphi_0(y)]+\cdots\Big\}。$$

$$(10.8)_{13}$$

在对 $[d\varphi]$ 积分时采取平移 $\varphi(x)-\varphi_0(x)\to\varphi(x)$，忽略高级项，并利用 $(4.12)_{13}$ 式

$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}Z[J]\Big\}=\exp\Big[\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0]+\frac{i}{\hbar}\int dx\,J(x)\varphi_0(x)\Big]$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{\det\Big(\dfrac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta x_0(y)}\Big)}}$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0]+\frac{i}{\hbar}\int dx\,J(x)\varphi_0(x)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]\right\}。\qquad (10.9)_{13}$$

以上最后一步利用了

$$\det{}^{-1/2}A=\left(\prod_i a_i\right)^{-1/2}=\exp\left[\frac{-1}{2}\ln\left(\prod_i a_i\right)\right]$$
$$=\exp\left[\frac{-1}{2}\sum_i\ln a_i\right]=\exp\left[\frac{-1}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln A\right]。$$

$$(10.10)_{13}$$

比较$(10.9)_{13}$式两边可得

$$Z[J]\simeq z^{(1)}[J]=S[\varphi_0]+\int dx\,J(x)\varphi_0(x)$$
$$+\frac{i\hbar}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]。$$

$$(10.11)_{13}$$

作为最低级近似忽略最后一项得到

$$Z^{(0)}[J]=S[\varphi_0]+\int dx\,J(x)\varphi_0(x)。\qquad (10.12)_{13}$$

应该指出以上$\varphi_0(x)$通过$(10.6)_{13}$或$(10.7)_{13}$式是$J(x)$的泛函。

在零级近似下,可以由$Z^0[J]$求得其他物理量的零级近似。例如

$$\varphi^0(x)=\frac{\delta Z^0[J]}{\delta J}=\int dy\left\{\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(y)}\cdot\frac{\delta\varphi_0(y)}{\delta J(x)}\right.$$
$$\left.+J(y)\frac{\delta\varphi_0(y)}{\delta J(x)}\right\}+\varphi_0(x)。$$

由$(10.6)_{13}$式知道上式右边积分为零。所以

$$\varphi^0(x)=\varphi_0(x)。\qquad (10.13)_{13}$$

又如

$$\Gamma^0[\varphi]=Z^0[J]-\int dx\,J(x)\varphi(x)$$
$$=S[\varphi_0]+\int dx\,J(x)\varphi_0(x)-\int dx\,J(x)\varphi_0(x)=S[\varphi_0]。$$

$(10.14)_{13}$

由此看来在零级近似下，正规顶角函数的产生泛函 $\Gamma^0[\varphi]$ 就是对应 $\mathscr{L}$ 的作用量本身。由此所产生的 1PI 图形的部件都是未经修正的，因而所得图形都是不带圈的树图。

以 $\varphi=$常数代入上式，并由 $(9.24)_{13}$ 式可得在零级近似下

$$\Gamma^0[\varphi=\text{常数}]=S[\varphi_0=\text{常数}]=-\Omega U(\varphi),$$

$$U^0[\varphi]=\frac{1}{2}m^2\varphi^2+V_0[\varphi]=\frac{1}{2}m^2\varphi^2+\frac{1}{4!}\lambda_0\varphi^4。\quad (10.15)_{13}$$

由 $(10.11)_{13}$ 式可计算考虑了一级修正后的各物理量，例如

$$\varphi^{(1)}(x)=\frac{\delta Z^{(1)}[J]}{\delta J(x)}=\varphi_0(x)+\epsilon(x)。\qquad (10.16)_{13}$$

其中

$$\epsilon(x)=\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{i\hbar}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]。\quad (10.17)_{13}$$

不过在计算一级近似下的 $\Gamma^{(1)}[\varphi]$ 并不需要知道 $\epsilon(x)$ 的具体形式

$$\Gamma^{(1)}[\varphi]=Z^{(1)}[J]-\int dx\,J(x)\varphi(x)$$
$$=Z^{(0)}[J]+\frac{i\hbar}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2S[\varphi_0]}{\hbar\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]$$
$$-\int dx\,J(x)\varphi(x)。\qquad (10.18)_{13}$$

而

$$Z^0[J]=S[\varphi_0]+\int dx\,J(x)\varphi_0(x)$$
$$=S[\varphi]+\int dx\,J(x)\varphi(x)-\int dy\left\{\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(y)}+J(y)\right\}\epsilon(y)$$
$$+O(\epsilon^2)=S[\varphi]+\int dx\,J(x)\varphi(x)+O(\epsilon^2)。\qquad (10.19)_{13}$$

以上最后一步利用了 $(10.6)_{13}$ 式。上式说明当以 $\varphi_0(x)\to\varphi(x)$ 代

入$Z_0[J]$时，其修正只在$O(\epsilon^2)$级。以$(10.19)_{13}$代入$(10.18)_{18}$式得

$$\boxed{\Gamma^{(1)}[\varphi]=S[\varphi]+\frac{i\hbar}{2}\,\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2 S[\varphi]}{\hbar\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right]}。$$

$$(10.20)_{18}$$

其中最后一项中的$S[\varphi]$(参看$(10.5)_{18}$式和$(10.4)_{13}$式)

$$S[\varphi]=\int dx\,\mathscr{L}[\varphi]=\int dx\left[\frac{-1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)-V_0[\varphi]\right]$$

$$=\int dx\left[\frac{-1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2(x)-\frac{1}{4!}\lambda_0\varphi^4\right]。\qquad(10.21)_{18}$$

由此可求得

$$\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}=\left(\partial^2-m^2-\frac{\lambda_0}{2}\varphi_0^2(x)\right)\delta(x-y)$$

$$=(\partial^2-m^2+i\epsilon)\left(1-\frac{\frac{\lambda_0}{2}\varphi_0^2}{\partial^2-m^2+i\epsilon}\right)\delta(x-y)。$$

$$(10.22)_{18}$$

$$\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]=\mathrm{Tr}\ln(\partial^2-m^2+i\epsilon)$$

$$+\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\left(1-\frac{\frac{\lambda_0}{2}\varphi_0^2}{\partial^2-m^2+i\epsilon}\right)\delta(x-y)\right]。$$

上式第一项与φ_0无关也就是与J无关。这一项代入$(10.9)_{13}$式中去只是对$W[J]$提供一个与J无关的因子。这实际上是归一化因子，可以取为一。由此得到(10.20)式中的最后一项(就是对$\Gamma[\varphi]$的单圈修正)

$$\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\cdot\ln\left[\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)}\right]\simeq\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\cdot\ln\left(1-\frac{\lambda_0}{2}\cdot\frac{\varphi_0^2(x)}{\partial^2-m^2+i\epsilon}\right)$$

$$=-\frac{i}{2}\sum_{n=1}\frac{\left(-i\frac{\lambda_0}{2}\right)^n}{n}\int dx_1\cdots dx_n G(x_1-x_2)\varphi_0^2(x_2)$$

$$\cdot G(x_2-x_3)\cdots G(x_n-x_1)\varphi_0^2(x_1)。\qquad(10.23)_{13}$$

其中的某一项用图形表示即为

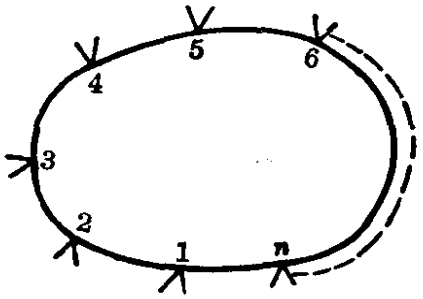


图 13-6

以 $\varphi=$常数代入上式并和$(9.24)_{18}$式比较可得到

$$U[\varphi]=\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4+\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\cdot\ln\left(1-\frac{\frac{\lambda_0}{2}\varphi^2}{\partial^2-m^2+i\epsilon}\right)$$

$$=\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4$$

$$+\frac{i}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\left\langle k\left|\ln\left(1-\frac{\frac{\lambda_0}{2}\varphi^2}{\partial^2-m^2+i\epsilon}\right)\right|k\right\rangle$$

$$=\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4+\frac{i}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\ln\left(1-\frac{\frac{\lambda_0}{2}\varphi^2}{-k^2-m^2+i\epsilon}\right),$$

$$U[\varphi]=\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4$$

$$+\frac{i}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\sum_{n=1}\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{-\lambda_0}{2}\varphi^2}{-k^2-m^2+i\epsilon}\right)^n。\quad(10.24)_{18}$$

上式最后积分项中，当$n=1$时正比于φ^2(其系数是二次发散的)。当$n=2$时正比于φ^4(其系数是对数发散的)。这两项可分别和上式左边第一项和第二项合并，归之为对m^2和λ_0的重新定义。所以上式可写成

$$\boxed{\begin{aligned}U[\varphi]=&\frac{m_R^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda_R}{4!}\varphi^4\\&+\frac{i}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\sum_{n=3}\frac{1}{n}\left(\frac{-\frac{\lambda_0}{2}\varphi^2}{-k^2-m^2+i\epsilon}\right)^n。\end{aligned}}\quad(10.25)_{13}$$

最后一项是单圈图对超势的修正。上式中

$$\left.\begin{aligned} m_R^2 &= m^2+\frac{\lambda_R}{2}\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+m_R^2-i\epsilon} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\bigg|_{\varphi=0} = \tilde{\Gamma}^{(2)}(k=0), \\ \lambda_R &= \lambda-\frac{3}{2}\lambda_R^2\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+m_R^2)^2} \\ &= \frac{\partial^4 U}{\partial\varphi^4}\bigg|_{\varphi=0} = \tilde{\Gamma}^{(4)}(k=0)。 \end{aligned}\right\} \quad (10.26)_{18}$$

这些我们在$(9.27)_{13}$和$(9.28)_{18}$式中已提到。

§13.11 Ward-Takahashi 等式及 Goldstone 理论

我们以前所得到的各种产生泛函都可表示为场量的路线积分，在进行路线积分时，可以对作为积分变量的场量引进变量变换，而不改变积分的最终取值。利用这种产生泛函对于其积分变量变换而保持不变的性质，可以得到各种 Green 函数之间的关系，这些关系统称为 Ward-Takahashi 等式。这类关系在重整化理论中将起着重要作用。由于变量变换是多种多样的，因此我们也可得到多种不同的 Ward-Takahashi 等式。下面我们将通过具体的示例，来说明上面所介绍的推导 Ward-Takahashi 等式的一般原则，并给出相应的具体结论。

考虑有两个实分量的场量 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} \Pi(x) \\ \sigma(x) \end{vmatrix}$。它的拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\varphi] &= -\frac{1}{2}\{[\partial_\mu\varphi(x)]^2+m^2\varphi^2\}-\frac{\lambda}{4!}[\varphi^2(x)]^2 \\ &= -\frac{1}{2}\{(\partial_\mu\Pi(x))^2+(\partial_\mu\sigma(x))^2\} \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2[\Pi^2(x)+\sigma^2(x)] \\ &\quad -\frac{\lambda}{4!}[\Pi^2(x)+\sigma^2(x)]^2。 \end{aligned} \quad (11.1)_{18}$$

容易看出上式拉氏量具有在由 $\Pi(x)$ 和 $\sigma(x)$ 组成的两维平面上的转动不变性，也就是具有一个 $U(1)$ 不变性。与这个整体的 $U(1)$ 规范不变性相应，存在一个守恒流

$$A_\mu(x)=\Pi(x)\partial_\mu\sigma(x)-\sigma(x)\partial_\mu\Pi(x)。\qquad (11.2)_{13}$$

前面所讨论的一般理论可直接应用到这个体系上。例如在零级树图近似下，由 $(10.12)_{13}$，$(10.13)_{13}$ 和 $(10.14)_{13}$ 式得到

$$U^{(0)}[\varphi]=V_0[\varphi]=\frac{1}{2}m^2\varphi^2(x)+\frac{\lambda}{4!}[\varphi^2(x)]^2。\qquad (11.3)_{13}$$

又由 $(9.26)_{13}$ 式得到在外源 $J=0$ 时

$$\left.\frac{\partial U[\varphi]}{\partial\varphi_i}\right|_{\varphi_i=\varphi_{i0}}=0=2\varphi_i\left.\frac{dU[\varphi]}{d\varphi^2}\right|_{\varphi_i=\varphi_{i0}},$$

$$\partial\varphi_{i0}\cdot\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{\lambda}{12}\varphi_0^2\right)=0。\qquad (11.4)_{13}$$

以上 $i=1,2$，且 $\varphi_1=\Pi(x)$，$\varphi_2=\sigma(x)$。满足上式的解 $\varphi_{i0}=0$ 或 $\varphi_0^2=\frac{-6m^2}{\lambda}$ 即为 $\varphi(x)$ 的真空期待值，一般可以不为零。也就是一般可有真空自发破缺。

考虑

$$W[J]=\exp\{iZ[J]\}$$

$$=\int[d\pi][d\sigma]\exp\left\{i\int dx[\mathscr{L}[\varphi]+J_\sigma\sigma(x)+J_\pi\pi(x)]\right\}$$

$$=\int[\prod_i d\varphi_i]\exp\left\{i\int dx[\mathscr{L}[\varphi]+J_i\varphi_i]\right\}。\qquad (11.5)_{13}$$

对积分变量 φ_i 引进变量变换，相当于在 Π 和 σ 平面内的微量旋转

$$\varphi(x)\to\varphi'(x)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\pi(x)\\ \sigma(x)\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\theta\to0}\begin{vmatrix}1 & -\delta\theta\\ \delta\theta & 1\end{vmatrix}\cdot\varphi(x),\qquad (11.6)_{13}$$

$$\varphi'(x)=(I-i\sigma_2\delta\theta)\varphi(x)。$$

这样变量变换的 Jacobi 行列式为 1，且在这样变量变换下 $W[J]$ 的值不变。即

$$\frac{\partial W[J]}{\partial\theta}=0=\int[\prod_i d\varphi_i]\int\left[i\frac{\delta\mathscr{L}[\varphi]}{\delta\varphi_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}+iJ_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right]dy$$
$$\cdot\exp\left\{i\int dx[\mathscr{L}[\varphi]+J_i\varphi_i]\right\}。\qquad (11.7)_{13}$$

我们已知 $\mathscr{L}[\varphi]$ 在 π 和 σ 二维平面上旋转保持不变的，因此 $\frac{\delta\mathscr{L}[\varphi]}{\delta\varphi_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}=0$。所以由上式可得到

$$\int[\prod_i d\varphi_i]\cdot\left[\int dy\,J_i\sigma_{2ij}\varphi_j(y)\right]$$
$$\cdot\exp\left\{i\int dx[\mathscr{L}[\varphi]+J_i\varphi_i]\right\}=0。\qquad (11.8)_{13}$$

利用上式我们可得到 $W[J]$ 或 $Z[J]$ 对于 J 在如下的变换下保持不变，即

$$J_i\to J'_i=J_i(I-i\sigma_2\delta\theta)_{ij}。\qquad (11.9)_{13}$$

也就是 J_i 作为在 π 和 σ 平面上一个矢量，在该平面上旋转不改变 $W[J]$ 或 $Z[J]$ 的值。这一点也可直接由以下的分析得到。当 J 有一个旋转时，我们在进行路线积分时，可对积分变量 φ 作相同的旋转变换。(其 Jacobi 行列式为 1)这样变换下整个 $(11.5)_{13}$ 式的形式不变，故 $W[J]$ 或 $Z[J]$ 值不变。由此得到

$$\delta Z[J]=\int dx\frac{\delta Z[J]}{\delta J_i}\frac{\delta J_i}{\delta\theta}\,d\theta$$
$$=\delta\theta\int dx\left[\frac{\delta Z[J]}{\delta J_\sigma}J_\pi-\frac{\delta Z[J]}{\delta J_\pi}J_\sigma(x)\right]=0。$$
$$(11.10)_{13}$$

其实上式也可直接由 $\varphi_j=\frac{\delta}{\delta J_j}$ 代入 $(11.8)_{13}$ 式并把它搬到路线积分的外边而得到。以 $(8.3)_{13}$ 和 $(9.4)_{13}$ 式代入上式又可得到

$$\boxed{\int dx\left\{\sigma_0(x)\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\pi_0}-\pi_0(x)\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma_0}\right\}=0。}\qquad (11.11)_{13}$$

上式正表明 $\Gamma[\varphi]$ 在 $\varphi_0\to\varphi'_0=(I-i\sigma_2\delta\theta)\varphi_0$ 变换下保持不变。而且这一点与 $(11.4)_{13}$ 式解的取值无关。也就是与真空期待值是否为零无关。上式也就是我们所考虑的体系的正规顶角的产生泛函

的 Ward-Takahashi 等式。如果我们把上式对 π 和 σ 重复微分，就可得到一系列的 Ward-Takahashi 等式。例如把上式对 π_0 微分，得到

$$\int dx\Big[\sigma(x)\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\pi(x)\delta\pi(y)}-\delta(x-y)\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma(x)}$$

$$-\pi(x)\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma(x)\delta\pi(y)}\Big]=0。\qquad (11.12)_{13}$$

以上暂时省略了真空期待值的下标"0"。考虑$(11.4)_{13}$式的非零解，并取 φ_0 的极化方向沿 σ 方向。即取对称破缺的解为

$$\varphi_0=\begin{vmatrix}0\\u\end{vmatrix}。$$

代入$(11.12)_{13}$式得到

$$u\cdot\int dx\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\pi(x)\delta\pi(y)}=\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma(y)}=-J_\sigma(y)。\qquad (11.13)_{13}$$

当 $\sigma(y)$ 取真空期待值 u 时，$J_\sigma(y)=0$(参看$(9.4)_{13}$式)。而上式左边被积函即为 $K(x-y)$，由此导致

$$\left.\begin{aligned}&u\cdot\int dx\int\frac{dk}{(2\pi)^4}K_{\pi\pi}(k)e^{ik(x-y)}=u\cdot\int K_{\pi\pi}(k)\delta^4(k)\,dk,\\&\boxed{u\cdot\lim_{k\to0}K_{\pi\pi}(k)=0。}\end{aligned}\right\}$$

$$(11.14)_{13}$$

上式表明当 $\sigma_0=u\neq0$ 时，$K_{\pi\pi}(k)$在 $k\to0$ 处有一个零点。由$(9.6)_{13}$和$(9.8)_{13}$式这说明传播子 $G_{\pi\pi}(k)$在 $k\to0$ 处有个极点。用场论的语言就是存在一个质量为零的 π 粒子。这就是著名的 Goldstone 玻色子。

如果再把$(11.12)_{13}$式对 $\sigma(z)$微分，而且同样取 $\varphi_0=\begin{vmatrix}0\\u\end{vmatrix}$就得到

$$\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma(y)\delta\sigma(z)}-\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\pi(y)\delta\pi(z)}=u\cdot\int dx\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\sigma(z)\delta\pi(x)\delta\pi(y)}。$$

$$(11.15)_{13}$$

对上式两边乘上 $e^{i(k_yy+k_zz)}$ 并对 y 和 z 积分，利用$(9.23)_{13}$，$(9.6)_{13}$和$(9.8)_{13}$式可得到

$$\boxed{G_\sigma^{(2)-1}(k^2)-G_\pi^{(2)-1}(k^2)=u\tilde{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(k,\ 0,\ -k)。}\quad (11.16)_{13}$$

这又是另一种形式的 Ward-Takahashi 等式。

对产生泛函做相应的推广，我们可以得到其他物理量的产生泛函，同样利用泛函积分在变量变换下保持不变的性质，就可以得到相应的各种 Ward-Takahashi 等式。举例说明之。考虑 Dirac 粒子和规范场体系

$$\mathscr{L}[\psi,\ B]=\bar{\psi}\left(-\gamma_\mu\partial_\mu-m+igB_\mu^a\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\mu\right)\psi-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^aB_{\mu\nu}^a。$$

$$(11.17)_{13}$$

其中 $\frac{\lambda^a}{2}$ 是规范群的产生算子满足以下关系

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\lambda^a}{2},\ \frac{\lambda^b}{2}\right]_-&=if^{abc}\frac{\lambda^c}{2},\\ \left[\frac{\lambda^a}{2},\ \frac{\lambda^b}{2}\right]_+&=d^{abc}\frac{\lambda^c}{2}。\end{aligned}\right\}\quad (11.18)_{13}$$

引进推广的产生泛函

$$\begin{aligned}&\tilde{W}[J,\ \bar{J},\ b_\mu v_\mu,\ a_\mu,\ p,\ s]\\&=\int[d\psi][d\bar{\psi}][dB_\mu]\exp\Big\{iS[\psi,\ B]\\&\quad+i\int[\bar{J}\psi-\bar{\psi}J+b_\mu^aB_\mu^a+v_\mu^aV_\mu^a+a_\mu^aA_\mu^a\\&\quad+p^aP^a+s^aS^a]dx\Big\}。\end{aligned}\quad (11.19)_{13}$$

以上 $S[\psi,\ B]$ 为对应 $(11.17)_{13}$ 式的作用量，所有小写字母对应于外源。大写字母为由 ψ 构成的各种张量。其定义如下。

$$\left.\begin{aligned}V_\mu^a(x)&=\bar{\psi}(x)i\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi(x),\\A_\mu^a(x)&=\bar{\psi}(x)i\gamma_5\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi(x),\\P^a(x)&=\bar{\psi}(x)(-i\gamma_5)\frac{\lambda^a}{2}\psi(x),\\S^a(x)&=\bar{\psi}(x)\frac{\lambda^a}{2}\psi(x)。\end{aligned}\right\}\quad (11.20)_{13}$$

考虑对$(11.19)_{13}$式的泛函积分进行如下的微量的变量变换

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x)\to\psi'(x)=\left[1-i\delta\omega^a(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\right]\psi(x),\\&\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)\left[1-i\delta\omega^a(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\right],\\&B^a_\mu(x)\to B^{a'}_\mu(x)=B^a_\mu(x)。\end{aligned}\right\}\quad(11.21)_{13}$$

可以证明对应上式变换的Jacobi行列式为1。上式变换也写成

$$\left.\begin{aligned}&\psi'(x)=\int K(x,y)\psi(y)dy,\\&K(x,y)=\delta(x-y)-i\delta\omega^a(x)\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\delta(x-y)。\end{aligned}\right\}$$

$$(11.22)_{13}$$

其中$\delta\omega^a(x)\to0$。记

$$\langle x|K|y\rangle=K(x,y)。$$

变量变换$(11.22)_{13}$式的Jacobi行列式为

$$\begin{aligned}J\left(\frac{\delta\psi'}{\delta\psi}\right)&=\det{}^{(\pm1)}K=e^{\pm\ln\det K}\\&=e^{\pm\mathrm{Tr}\ln K}\simeq1\pm\mathrm{Tr}(K-1)。\end{aligned}\quad(11.23)_{13}$$

以上正号适用玻色场，负号适用于费米场(参看$(6.14)_{13}$式)。求迹不仅对时空空间求和，还要对旋量指标，内部指标进行。考虑到$\mathrm{Tr}\gamma_5=0$，以及$\mathrm{Tr}\frac{\lambda^a}{2}=0$，得到$J\left(\frac{\delta\psi'}{\delta\psi}\right)=1$。

在$(11.21)_{13}$式变换下，除了$\psi(x)$有变更外，其他的物理量也有相应的变更，例如

$$\left.\begin{aligned}&\delta V^b_\mu=f^{abc}\delta\omega^aA^c_\mu,\ \delta A^b_\mu=f^{abc}\delta\omega^aV^c_\mu,\\&\delta S^b=d^{abc}\delta\omega^aP^c,\ \delta P^b=-d^{abc}\delta\omega^aS^c。\end{aligned}\right\}\quad(11.24)_{13}$$

与此相应作用量$S[\psi,B]$也有相应的变更

$$\delta S=\int dx\,\delta\omega^a(x)\left[\partial_\mu A^a_\mu(x)-2mP^a(x)+gf^{abc}B^b_\mu A^c_\mu\right]。$$

$$(11.25)_{13}$$

但这些变换并不引起$\overline{W}$的变更即

$$0=\frac{\delta\overline{W}}{\delta\omega^a(x)}=\int[d\psi][d\bar{\psi}][dB_\mu^a]\exp\Big\{iS+i\int dy[\bar{J}(y)\psi(y)$$

$$-\bar{\psi}J+b_\mu^aB_\mu^a+v_\mu^aV_\mu^a+a_\mu^aA_\mu^a+p^aP^a+s^a(y)S^a(y)]\Big\}$$

$$\cdot\Big\{i\Big[\partial_\mu A_\mu^c(x)-2mP^a(x)+gf^{abc}B_\mu^bA_\mu^c$$

$$+\bar{J}\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi-\bar{\psi}\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}J$$

$$+if^{abc}[v_\mu^bA_\mu^c+a_\mu^bV_\mu^c]+\cdots\Big]\Big\}。\qquad(11.26)_{13}$$

由于 $\omega^a(x)$ 在任一时空是独立变更的，上式右边不必再对 x 积分。把上式对外源 $v_\nu^b(y)$ 和 $v_\lambda^c(z)$ 变分，并最后令所有外源为零，就得到另一个 Ward-Takahashi 等式

$$0=\int[d\psi][d\bar{\psi}][dB_\mu^a]\exp\Big\{iS+i\int dy[\bar{J}(y)\psi(y)$$

$$-\bar{\psi}J+b_\mu^aB_\mu^a+v_\mu^aV_\mu^a+\cdots]\Big\}$$

$$\cdot\{i[\partial_\mu A_\mu^a(x)-2mP^a(x)+gf^{ab'c'}B_\mu^{b'}A_\mu^{c'}]V_\nu^b(y)V_\lambda^c(z)$$

$$-f^{abd}A_\nu^d(y)V_\lambda^c(z)\delta(x-y)-f^{acd}A_\lambda^d(z)V_\nu^b(y)\cdot\delta(x-z)\}。$$

$$(11.27)_{18}$$

用算符表示上式即为

$$\partial_\mu\langle0|T[A_\mu^a(x)V_\nu^b(y)V_\lambda^c(z)]|0\rangle$$

$$=2m\langle0|T[P^a(x)V_\nu^b(y)V_\lambda^c(z)]|0\rangle$$

$$-gf^{ab'c'}\langle0|T[B_\mu^{b'}(x)A_\mu^{c'}(x)V_\nu^b(y)V_\lambda^c(z)]0\rangle$$

$$+i\delta(x-y)f^{abd}\langle0|T[A_\nu^d(y)V_\lambda^c(z)]|0\rangle$$

$$+i\delta(x-z)f^{acd}\langle0|T[A_\lambda^d(z)V_\nu^b(y)]|0\rangle。\qquad(11.28)_{13}$$

如果规范群为 $U(1)$ 则 $f^{abc}=0$，上式简变为

$$\partial_\mu\langle0|T[A_\mu(x)V_\nu(y)V_\lambda(z)]|0\rangle$$

$$=2m\langle0|T[P(x)V_\nu(y)V_\lambda(z)]|0\rangle。\qquad(11.29)_{13}$$

上式左边和 $\pi^0\to2\gamma$ 的衰变振幅成比例，当 $m\to0$ 时上式和轴矢流守恒是相容的。这时就导致 $\pi^0\to2\gamma$ 的衰变机率为零，这当然与实际不符的。不过当我们用微扰展开计算时，却会出现发散积分，这就是所谓 Adler 反常。这个问题以后在 § 14.6 还要谈到。

参 考 资 料

1. 关于量子力学中的路线积分形式

R. P. Feynman & A. R. Hibbs Quantum mechanics and Path Integrals (1965) Chapter 3.7.9

P. Ramond Field Theory——A Modern Primer (1981) Chapter 2

L. S. Schulman Techniques and Applications of Path Integration (1981)

2. 关于量子场论的路线积分形式

T. D. Lee Particle Physics and Introduction to Field Theory (1981) Chapter 19

C. Itzykson & J. B. Zuber Quantum Field Theory (1980) Chapter 9

E. S. Abers & B. W. Lee Phys. Rep. C9(1973)

第十四章　维数正规化与重整化群方法

在前面第十一，第十二章里，我们已讨论了量子电动力学中的重整化理论。我们已知在用重整化来消除发散的方案中，包括有两步程序，第一就是所谓的正规化程序，其二就是所谓重整化程序。我们以前在量子电动力学里所采用的正规化程序，是所谓截断动量正规化程序，也就是对内粒子动量积分时的上限取为截断动量 Λ。当截断动量 Λ 为一任意取定值时，所有结果都是有限的。可是物理的振幅则是取 $\Lambda\to\infty$ 的极限值。这个极限值常常是发散的。这些发散值，通过对理论中的参量，例如质量、相互作用常数和场量的重新定义，并同时在 $\mathscr{L}$ 中引进相应的抵销项而得以消除。

这种截断动量的正规化程序有它的缺点，首先它常常破坏原来拉氏量 $\mathscr{L}$ 的对称性质，例如规范场论中的定域规范不变性。因此这种正规化程序用于规范场的重整化是很不方便的。此外在这种截断动量的正规化程序中，所得重整化常数常常是与粒子质量有关的，这样对于质量为零的场论的重整化方案也带来红外发散的困难。

关于重整化问题的研究，近年来又有新的发展，主要在于由 t'Hooft 和 Veltman 所发展的时空维数正规化，和重整化群方法这两方面。这两方面的进展和近年来对非 Abel 群规范场的研究进展密切相关，而且它们用于非 Abel 群规范场的重整化上也是特别有效的。可是这两方面的方法是具有一般性的，其应用范围并非限于规范场。因此虽然本课程不准备讨论规范场理论，还是值得把这两方面的成就做简单的介绍。

时空维数正规化程序具有以下两个特点：(一)在进行正规化

程序中，可以保持拉氏量的所有主要对称性质，包括定域规范不变性。(二)在计算 S 矩阵时，所有发散项都是以时空维数 $n\to4$ 时的单极点的形式出现的。应用量纲分析可以推论出重整化时相应的减除项可与粒子的质量无关，所得到的重整化常数也是与质量无关的。这种重整化方案常称为质量无关的重整化方案。而在以前介绍的正规化程序和重整化方案就不具备这两方面的优点。它常常破坏了定域规范不变性，其减除项也是与质量有关的，实际上是在质量壳层上进行减除的。这种方案称为质量有关的重整化方案。当然维数正规化程序也会破坏原来拉氏量的某些对称性质，例如 γ_5 的对称性和 Scaling 变换。因为 γ_5 只在四维时空里才有明确的定义，在 n 维里如何推广目前尚不明确。此外拉氏量的量纲是与时空维数有关的，原来在四维时空有 Scaling 变换下不变性的拉氏量，一般在 n 维时空中在共形变换下不再是不变的了。

维数正规化的概念，在于把 Feynman 积分的积分变量所处在的时空的维数，由 $n=4$ 延拓到任意整数，甚至延拓到 n 的复平面上。积分的结果是依赖于 n 的函数。再令 $n\to4$，如果是收敛积分其结果和普通所得结果相同，如果是发散积分，则当 $n\to4$ 时出现极点。维数正规化程序如下：首先把 Feynman 积分定义在任意的 n 维空间，再把发散积分定义为收敛积分在 n 空间的延拓，积分的最后结果在 n 空间是半单纯函数，在 $n=$ 正整数包括 $n=4$ 处出现单极点。

在重整化过程中其减除手续是在动量空间的某一点进行的，该点常称为重整化点。对于可重整化理论，物理结果将不与重整化点的选取有关，这样一个对称性质就导致了重整化群方程，这个方程给 Green 函数在高能和抵能行为带来一定的联系。这些内容将在本章中逐节讨论。不过我们着重讨论维数正规化和重整化群方法的应用。而不准备用过多的幅篇去讨论关于它们的严格证明。

§14.1 n 维空间的 Feynman 积分

考虑积分

$$J=\int d^nl\,\frac{\prod_i^j l_i^{n_i}}{[l^2+2\cdot l\cdot p+\Delta]^\alpha},\ j\leqslant n。\qquad (1.1)_{14}$$

其中 n 为时空维数，l_i 为一 n 维空间的动量的 i 分量，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，其中 0 分量相当时间分量。n_i 为 l_i 的幂数。p 为某一不变的 n 维动量。Δ 为一不变量，α 为某一正数。我们已把积分 J 经过 Wick 旋转到欧氏空间。

为了避免 $l_i\to 0$ 时发散

$$n_i>-1,\ i=1,2,3,\cdots j\leqslant n。\qquad (1.2)_{14}$$

为了避免 $l_i\to\infty$ 时发散

$$n+\sum_i n_i-2\alpha<0。\qquad (1.3)_{14}$$

利用

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial l_k}\right)l_k=1。\qquad (1.4)_{14}$$

可得到

$$\begin{aligned}J&=\int d^nl\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial l_k}\right)l_k\right]\frac{\prod_i^j l_i^{n_i}}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^\alpha}\\&=\frac{1}{n}\int d^nl\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial}{\partial l_k}\,\frac{l_k\Pi l_i^{n_i}}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^\alpha}\right.\\&\quad\left.-l_k\frac{\partial}{\partial l_k}\,\frac{\Pi l_i^{n_i}}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^\alpha}\right\}\end{aligned}\qquad (1.5)_{14}$$

上式右边第一项是个 n 维散度积分为零，所以

$$\begin{aligned}J&=\frac{-1}{n}\int d^nl\left\{\frac{(\sum_i n_i)\prod_i^j l_i^{n_i}}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^\alpha}+\frac{\prod_i l_i^{n_i}[-2\alpha(l^2+l\cdot p)]}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^{\alpha+1}}\right\}\\&=\frac{-1}{n}(\sum_i n_i)J+\frac{2\alpha}{n}J-\frac{2\alpha}{n}\int d^nl\,\frac{\Pi l_i^{n_i}(l\cdot p+\Delta)}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^{\alpha+1}}\end{aligned}\qquad (1.6)_{14}$$

$$\boxed{J=\frac{-2\alpha}{(n+\Sigma n_i-2\alpha)}\int d^nl\,\frac{\Pi\, l_i^{n_i}(\Delta+l\cdot p)}{[l^2+2l\cdot p+\Delta]^{\alpha+1}}} \qquad (1.7)_{14}$$

上式右边积分为避免 $l\to 0$ 处发散

$$n_i>-1,\ i=1,\ 2,\ 3\cdots j。 \qquad (1.8)_{14}$$

为避免 $l\to\infty$ 时发散，要求

$$n+\sum n_i-2\alpha<1。 \qquad (1.9)_{14}$$

值得指出，上式右边为1，而不象 $(1.3)_{14}$ 式右边为零。我们用 $(1.7)_{14}$ 式来定义 $(1.1)_{14}$ 式的 J，它在 n 维空间的收敛区就由 $(1.3)_{14}$ 式扩大到 $(1.9)_{14}$ 式。

以上由 $(1.1)_{14}$ 式延拓到 $(1.7)_{14}$ 式的方法，由 t'Hooft 和 Veltman 所给出，称为 Partial P 延拓。继续利用 Partial P 延拓，我们可以把积分 J 的收敛区延拓到更大范围。下面我们根据这种延拓性质来制造一些重要的积分表。

考虑闵氏空间积分并经过 Wiok 旋转，类似我们在 $(1.5)_{12}$ 式所进行的。

$$J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=\int d^nl\,\frac{1}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=i\int_E d^nl\,\frac{1}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}。 \qquad (1.10)_{14}$$

经过 Partial P 延拓我们经常可以认为它是收敛的(除了 n 平面里的单极点)，因而可以进行积分变量平移，得到

$$J^{(\alpha)}(p\cdot\Delta)=\int d^nl\,\frac{1}{[l^2+(\Delta-p^2)]^\alpha}$$

$$=i\int_E d^nl\,\frac{1}{[l^2+(\Delta-p^2)]^\alpha}。 \qquad (1.11)_{14}$$

下标 E 表示积分在欧氏空间进行，这时其中 $l^2=l_0^2+l_1^2+\cdots l_{n-1}^2$。

n 维(欧氏空间)空间的体积元

$$d^nl=l^{n-1}dl\,d\Omega_{n-1}, \qquad (1.12)_{14}$$

$$d\Omega_{n-1}=\sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta_{n-1}\cdot\sin^{n-3}\theta_{n-2}d\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2 d\theta_2\cdot d\theta_1。 \qquad (1.13)_{14}$$

积分限为 $0\leqslant l\leqslant\infty$, $0\leqslant\theta_{j-1}\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi$。$J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)$ 积分 $(1.11)_{14}$ 式与角度无关，对角度积分可以先积。利用公式

$$\int_0^{\pi}\sin^m\theta\,d\theta=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+2)\right]}。\qquad (1.14)_{14}$$

$$\int d\Omega_{n-1}=(\sqrt{\pi})^{n-2}\cdot 2\pi\,\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}[(n-2)+1]\right\}}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}[(n-2)+2]\right\}}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}[(n-3)+1]\right\}}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}[(n-3)+2]\right\}}\cdots\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+2)\right]}$$

$$=\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}。\qquad (1.15)_{14}$$

利用 $(1.6)_{12}$ 公式

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta}}{(x^2+c)^{\alpha}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\beta+1)\right]\cdot\Gamma\left[\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right]}{\Gamma(\alpha)\,(c)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}。\qquad (1.16)_{14}$$

可得到 $(1.12)_{14}$ 式

$$J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_0^{\infty}l^{n-1}dl\,\frac{1}{[l^2+(\Delta-p^2)]^{\alpha}}\int d\Omega_{n-1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{\pi})^n i}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\cdot\frac{1}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}。$$

$$\boxed{J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{(\Delta-p^{2})^{\alpha-n/2}}}\qquad(1.17)_{14}$$

我们已知 $\Gamma(z)$ 在 $z=0,\ -1,\ -2\cdots$ 有单极点，所以由上式看出 $J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)$ 当 $n=2\alpha,\ 2\alpha+1,\ 2\alpha+2\cdots$ 处也有单极点为发散值。

其次考虑积分

$$\begin{aligned}J_{\mu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)&=\int d^{n}l\,\frac{l_{\mu}}{(l^{2}+2p\cdot l+\Delta)^{\alpha}}\\&=i\int_{E}d^{n}l\,\frac{l_{\mu}}{(l^{2}+2p\cdot l+\Delta)^{\alpha}},\end{aligned}\qquad(1.18)_{14}$$

利用

$$\boxed{J_{\mu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=\frac{-1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}J^{(\alpha-1)}(p,\ \Delta)}\qquad(1.19)_{14}$$

关系可由 $(1.17)_{14}$ 式得到

$$\boxed{J_{\mu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{-p_{\mu}}{(\Delta-p^{2})^{\alpha-n/2}}}\qquad(1.20)_{14}$$

用类似方法我们可求得更高阶的积分，现把结果罗列于下成为积分表，备查

$$\left.\begin{aligned}J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)&=i\int_{E}d^{n}l\,\frac{1}{(l^{2}+2l\cdot p+\Delta)^{\alpha}}\\&=i(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\Delta-p^{2})^{\alpha-n/2}},\\J_{\mu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)&=i\int_{E}d^{n}l\,\frac{l_{\mu}}{(l^{2}+2l\cdot p+\Delta)^{\alpha}}\\&=i(\sqrt{\pi})^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{-p_{\mu}}{(\Delta-p^{2})^{\alpha-n/2}}\end{aligned}\right\}\qquad(1.21)_{14}$$

$$J_{\mu\nu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\,\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=(\sqrt{\pi})^n\left\{\frac{+\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)}\,\frac{\delta_{\mu\nu}}{(\Delta-p^2)^{\alpha-1-n/2}}\right.$$

$$\left.\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}\right\},$$

$$J_{\mu\mu}^{\alpha}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\,\frac{l^2}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=\frac{i(\sqrt{\pi})^n}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)p^2\right.$$

$$\left.+\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}(\Delta-p^2)\right\},$$

$$J_{\mu\nu\lambda}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=i(\sqrt{\pi})^n\left\{\frac{-\Gamma(\alpha-1-n/2)}{2\Gamma(\alpha)}\,\frac{p_\mu\delta_{\nu\lambda}+p_\nu\delta_{\mu\lambda}+p_\lambda\delta_{\mu\nu}}{(\Delta-p^2)^{\alpha-1-n/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}\right\},$$

$$J_{\nu\nu\mu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\,\frac{l^2 l_\mu}{(l+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=\frac{i(\sqrt{\pi})^n}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-p_\mu)$$

$$\times\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)p^2+\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}-1\right)\frac{n+2}{2}(\Delta-p^2)\right\},$$

$$J_{\mu\nu\lambda\rho}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\,\frac{l_\mu l_\nu l_\lambda l_\rho}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)^\alpha}$$

$$=i(\sqrt{\pi})^n\left\{\frac{\Gamma(\alpha-2-n/2)}{4\Gamma(\alpha)}\,\frac{\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}}{(\Delta-p^2)^{\alpha-2-n/2}}\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha-1-n/2)}{2\Gamma(\alpha)}[\delta_{\mu\nu}p_\lambda p_\rho+\delta_{\mu\lambda}p_\nu p_\rho+\delta_{\mu\rho}p_\nu p_\lambda$$

$$\left.+\delta_{\nu\lambda}p_\mu p_\rho+\delta_{\nu\rho}p_\mu p_\lambda+\delta_{\lambda\rho}p_\mu p_\nu]\frac{1}{(\Delta-p^2)^{\alpha-1-n/2}}\right.$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{(\Delta-p^2)^{\alpha-n/2}}\Big\}。 \qquad (1.22)_{14}$$

§14.2 重整化和正规化程序简介

为了便于以后的讨论，我们先把以前在第十一章里所介绍的重整化程序做一番简单的总结，并以量子电动力学作为具体的示例。在量子电动力学里，对应费曼图的原件是内、外粒子线和角点，由这些原件可以组合成各式各样的费曼图形，其中也包括对内、外粒子线和三粒子角点这三个原件本身的修正。在 $\mathscr{L}$ 中包含有场量 $\bar{\psi}$, ψ_1 和 A, 还有参量 e_0 和 m_0。这些场量和参量的数值都需要依靠实验来测定的。可是实际上我们无法把出现在原来的 $\mathscr{L}$ 中的原件，和与其相应的修正分离开来，因此我们必须把原来出现在 $\mathscr{L}$ 中场量和参量重新调整，以使它包括相应的修正部分，并可直接由实验测定，同时引进相应的抵销项，正如我们在第十一章里所做的那样。

如果我们把 Dirac 粒子线的修正 $\Sigma^*(p)$ 在 $\gamma p_0=im_0$ 处展开，如同 $(6.7)_{11}$ 式

$$\Sigma^*(p)=\Sigma_1+\Sigma_0(\gamma p-im_0)+\Sigma_R(p)(\gamma p-im_0)^2。 \qquad (2.1)_{14}$$

由质量重整化

$$\left.\begin{aligned} m_0=m-\delta m=m-i\Sigma_1=\left(1-i\frac{\Sigma_1}{m}\right)m=Z_m m,\\ Z_m=\left(1-i\frac{\Sigma_1}{m}\right)。\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)_{14}$$

其中 Z_m 称为质量重整化常数。同时在 $\mathscr{L}$ 中引进抵销项 $\delta m\bar{\psi}\psi=\bar{\psi}i\Sigma_1\psi$ 就消除了 $(2.1)_{14}$ 式中的 Σ_1 发散项。

为消除 $\Sigma_0(\gamma p-im_0)$ 发散项，可进行场量重整化，由 $(6.19)_{11}$ 式

$$\left.\begin{aligned} \psi=(1+\Sigma_0)^{-1/2}\psi_0=Z_D^{1/2}\psi_0,\\ Z_D=\frac{1}{1+\Sigma_0}。\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)_{14}$$

Z_D 称为 Dirac 场量的重整化常数。把 $\mathscr{L}$ 中的场量用重整化的 ψ_0 表示，相应地同时引进和 $\Sigma_0(\gamma p - im_0)$ 相消的抵销项，就消除了 $\Sigma_0(\gamma p - im_0)$ 发散项。

光子的情况与此类似。把 $\Pi^*(k^2)$ 在 $k^2=0$ 处展开，由 $(6.13)_{11}$ 式

$$\Pi^*(k^2) = \Pi_2 + \Pi_0 \cdot k^2 + \Pi_R(k^2) \times (k^2)^2。 \qquad (2.4)_{14}$$

其中由于规范不变性要求应取 $\Pi_2=0$。所余 $\Pi_0 \cdot k^2$ 发散项可由场量重整化消除，由 $(6.19)_{11}$ 式

$$\left.\begin{aligned} A &= Z_B^{1/2} A_0, \\ Z_B &= \frac{1}{1+i\Pi_0}。 \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)_{14}$$

其中 Z_B 称为光子场量的重整化常数。

对于角点的修正，参看 $(7.16)_{11}$ 式。

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(p_1, p_2; k) &= Z^{-1}\Gamma_{\mu 0}(p_1, p_2; k) \\ &= Z^{-1}(\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}(p_1, p_2; k))。 \end{aligned} \qquad (2.6)_{14}$$

其中 Z 称为角点重整化常数。

在电动力学里由于 Ward 等式 $Z=Z_D$，利用相互作用常数重整化可以消除 Γ_μ 中的发散部分，由 $(8.2)_{11}$ 式

$$e_0 = eZ_D Z^{-1} Z_B^{1/2} \qquad (2.7)_{14}$$

在前面第十一章里我们曾分析过，在通过重整化变换 $(2.2)_{14}$，$(2.3)_{14}$，$(2.5)_{14}$，$(2.6)_{14}$ 和 $(2.7)_{14}$ 式变换，可以把 S 矩阵由重整化的即带 C 的量表示出来，而在重整化的或带 C 的量中不再有发散量出现。这样就达到了我们预期的消除发散的目的。

以上所介绍的是我们在第十一章里所讨论的重整化手续的简单总结，这种重整化手续，是在质量壳层上进行的。例如我们把 $\Sigma^*(p)$，$\Pi^*(h^2)$ 和 $\Gamma_\mu(p_1 p_2 h)$ 都是在质量壳层上展开的，所引进的抵销项也是在质量壳层上的 $\Sigma^*(p_0)$，$\Pi^*(0)$ 和 $\Gamma(p_0, p_0; k_0)$ 的发散值。这样的重整化方案有个优点就是，所得重整化量都有直接的物理意义，可以直接由实验测定。不过在理论上并无此必要，而且对于零质量理论，在质量壳层上的重整化方案，还会引起红外

奇性的问题，实际上我们可选取动量空间里的某一点 μ（其量纲为质量），通常称为重整化点，来同样进行展开和减除（引进相应的抵销项）用同样的方法可以把 S 矩阵用重整化的量（一般情况下我们用下标 R 表示）表示出来。虽然这些带 R 的重整化量，一般不一定有直接的物理意义，可是它们也都是有限的。而且一个物理的 S 矩阵元应该与我们所取的重整化点无关。不管我们所取的重整化点为何。所得物理的 S 矩阵元应该都是相等的。这样一个对称性质就是重整化群方法的物理基础。

下面我们对一般的重整化方法做一简单介绍，以资比较。类似 $(3.1)_{11}$ 式，$\Sigma^*(p)$ 可以一般写成

$$\Sigma^*(p)=\gamma_\mu p_\mu A(p^2, m)+imB(p^2, m)。 \qquad (2.8)_{14}$$

由 $(6.1)_{11}$ 或 $(6.11)_{11}$ 式可知

$$G^c(p)=\frac{1}{-\gamma p+im-\Sigma^*(p)}$$

$$=\frac{1}{-\gamma p[1+A(p^2, m)]+im[1-B(p^2, m)]}。 \qquad (2.9)_{14}$$

遗憾的是在用微扰理论计算 $\Sigma^*(p)$ 时，其中 $A(p^2, m)$ 和 $B(p^2, m)$ 都具有发散值。这正是我们必须克服的困难。可是 $G^c(p)$ 应该是物理的。我们可以用 $G^c(p)$ 在动量空间某一点的数值来使它"归一化"，也就是在某一点使它定标。所取动量空间的这一点称为重整化点。从而消除发散量的牵累。由 $G^c(p)$ 在结构看来，在重整化点处 $G^c(p)$ 不外是以下形式。取 $p^2=-\mu^2$（μ 不一定是 Fermi 粒子的质量）为重整化点，也就是在 $p^2=-\mu^2$ 处

$$\boxed{G^c(p)|_{p^2=-\mu^2}=\frac{Z_D}{-\gamma p+im_R}。} \qquad (2.10)_{14}$$

上式在 Bjorken 度规下为

$$\boxed{G^c(p)_{p^2=\mu^2}=\frac{Z_D}{\gamma\cdot p-m_R}} \qquad (2.10')_{14}$$

和 $(2.9)_{14}$ 式相比可知

$$\left.\begin{aligned} &Z_D^{-1}=1+A(-\mu^2,\ m),\\ &m_R=Z_D[1-B(-\mu^2,\ m)]m_0。\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)_{14}$$

其中 m_R 称为重整化质量。如果 μ^2 取为质量壳层上，则应有 $m_R=m_0$，这就是我们在第十一章里所采用的。

引进重整化的全部传播子定义为

$$G^e(p)=Z_D G_R^e(p)。 \qquad (2.12)_{14}$$

$$\begin{aligned} G_R^{e-1}(p)&=Z_D[G^e(p)]^{-1}\\ &=Z_D\{-\gamma p[1+A(p^2,\ m)]+im[1-B(p^2,\ m)]\}\\ &=\left\{-\gamma p\frac{[1+A(p^2,\ m)]}{[1+A(-\mu^2,\ m)]}+im_R\frac{[1-B(p^2,\ m)]}{[1-B(-\mu^2,\ m)]}\right\}\\ &\sim\{-\gamma p[1+A(p^2,\ m)-A(-\mu^2,\ m)]\\ &\quad+im_R[1-B(p^2,\ m)+B(-\mu^2,\ m)]\}+\cdots \qquad (2.13)_{14}\end{aligned}$$

$$G_R^{e-1}(p)\cong\{-\gamma p[1+A_R(p^2,\ m)]+im_R[1-B_R(p^2,\ m)]\}。$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &A_R(p^2,\ m)=A(p^2,\ m)-A(-\mu^2,\ m),\\ &B_R(p^2,\ m)=B(p^2,\ m)-B(-\mu^2,\ m)。\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)_{14}$$

值得指出，经过减除以后上式的 $A_R(h^2,\ m)$ 和 $B_R(h^2,\ m)$ 都是有限的，因此 $G_R^e(p)$ 也是有限的。

对于光子线情况也可类似地讨论。类似 $(3.4)_{11}$ 式（稍做改写）

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^*(k)&=\Pi^*(k^2)\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\\ &=\Pi^{*\prime}(k^2)\cdot(k^2)\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)。 \qquad (2.15)_{14}\end{aligned}$$

类似 $(6.14)_{11}$ 式有

$$G^\gamma(k)=\frac{1}{ik^2-\Pi^{*\prime}(h^2)\cdot k^2}=\frac{1}{ik^2[1+i\Pi^{*\prime}(h^2)]}, \qquad (2.16)_{14}$$

取 $k^2=-\mu'^2$ 时

$$\boxed{G^\gamma(k)\big|_{k^2=-\mu'^2}=\frac{Z_B}{ik^2}。}$$

$$Z_B^{-1}=[1+i\Pi^{*\prime}(-\mu'^2)]。 \qquad (2.17)_{14}$$

引进重整化的全部光子传播子

$$G^\gamma(k)=Z_BG_R^\gamma(k)。 \qquad (2.18)_{14}$$

$$\boxed{\begin{aligned}G_R^{\gamma-1}(k)&=Z_BG^{\gamma-1}(k)\\&=Z_Bik^2[1+i\Pi^*(k^2)]=ik^2\frac{[1+i\Pi^*(k^2)]}{[1+i\Pi^*(-\mu^2)]}\\&\sim ik^2[1+i\Pi^*(k^2)-i\Pi^*(-\mu^2)]+\cdots\\&\sim ik^2[1+i\Pi_R^*(k^2)]。\end{aligned}} \qquad (2.19)_{14}$$

其中

$$\Pi_R^*(k^2)=\Pi^*(k^2)-\Pi^*(-\mu^2)。 \qquad (2.20)_{14}$$

经过减除后的 $\Pi_R^*(k)$ 是有限的，因此 $G_R^\gamma(k)$ 也是有限的。

对于角点修正也可同样讨论。类似 $(7.17)_{11}$ 式

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;\ k)&=\gamma_\mu+\gamma_\mu\Lambda(p_1,\ p_2;\ k)\\&=\gamma_\mu(1+\Lambda(p_1,\ p_2;\ k))。\end{aligned} \qquad (2.21)_{14}$$

取在 $p_1^2=p_2^2=-\mu^2$ 和 $k^2=-\mu'^2$ 处

$$\boxed{\begin{aligned}&\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;\ k)\big|_{\substack{p_1^2=p_2^2=-\mu^2\\k^2=-\mu'^2}}\\&=(1+\Lambda(i\mu,\ i\mu,\ i\mu'))\gamma_\mu=Z^{-1}\gamma_\mu,\\&Z^{-1}=[1+\Lambda(i\mu,\ i\mu,\ i\mu')]。\end{aligned}} \qquad (2.22)_{14}$$

引进重整化的角点函数 $\Gamma_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k)$

$$\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;\ k)=Z^{-1}\Gamma_{\mu R}(p_1,\ p_2,\ k) \qquad (2.23)_{14}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k)&=Z\Gamma_\mu(p_1,\ p_2;\ k)=Z\gamma_\mu[1+\Lambda(p_1,\ p_2;\ k)]\\&=\gamma_\mu\frac{[1+\Lambda(p_1,\ p_2;\ k)]}{[1+\Lambda(i\mu,\ i\mu,\ i\mu')]}\\&\sim\gamma_\mu[1+\Lambda(p_1,\ p_2;\ k)-\Lambda(i\mu,\ i\mu,\ i\mu')]+\cdots\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_{\mu R}(p_1,\ p_2;\ k)=\gamma_\mu[1+\Lambda_R(p_1,\ p_2;\ k)]} \qquad (2.24)_{14}$$

其中

$$\Lambda_R(p_1,\ p_2;\ k)=\Lambda(p_1,\ p_2;\ k)-\Lambda(i\mu,\ i\mu,\ i\mu') \qquad (2.25)_{14}$$

经过减除后 $\Lambda_R(p_1,\ p_2;\ k)$ 是有限的，因此 $\Gamma_{\mu R}$ 也是有限的。利用有限的初级近似可以计算高级近似，所得结果经过重整化后依然是有限的。如此逐级计算，可以得到微扰展开级数的每一项都是有限的结果。正如前面已证明 S 矩阵元可以由重整化的量表示出来，因此 S 矩阵元的展开每一项也是有限的。

正如前面第十一章里已谈到，实际上在进行重整化以前，要把发散部分进行正规化处理。所谓正规化程序，就是以一定的方式把发散积分表示为某一函数的极限值，再按一定的程序把发散部分和有限部分分开。在以前第十一章里，我们所采用的是动量截断的正规化程序。也就是把物理的发散积分表示成截断动量 $\Lambda\to\infty$ 时的极限。详细情况以前已介绍不再赘述。在这一章里我们将要介绍维数正规化程序。在这里物理的发散积分将表示成时空维数 $n\to4$ 的极限值。由上节的结果看出，我们所常遇到的发散积分，当 $n\to4$ 时，发散部分都是以极点的形式出现的。因此把发散部分分离开来的方式是明确的。而且对于规范场论，维数正规化还有能保持原有的整体和定域规范不变性的优点。下节中我们将举例说明发散积分的维数正规化程序。

§14.3 发散积分的维数正规化

我们可以证明当积分是收敛时，§14.1 的积分表和 §12.6 里所得结果是一致的，例如当 $n=4$, $\alpha=3$ 时。由 $(1.17)_{14}$ 式

$$J^{(3)}(p,\ \Delta)=i(\sqrt{\pi})^4\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{(\Delta-p^2)}。$$

这个结果和 $(1.6)_{12}$ 式以 $m=2$, $n=3$ 代入所得结果一致。

对于发散积分我们需要把它的发散部分分离出来。在 §14.1

所介绍的积分表中，发散积分的发散都是以极点形式出现，因而把它的发散部分分离出来的正规化程序是比较明确的采用 t'Hooft 的最小减除方案，那就是直接自发散量中减除极点项。不过在具体计算时还是要非常细致的，因为此处所遇的问题是很灵敏的。本节就在于举若干示例，把以前的发散积分的极点（发散）部分和有限部分明显的分离开来。例如当 $n \Rightarrow 4$, $\alpha=2$ 时

$$J^{(2)}(p,\ \Delta)=i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(2)}\frac{1}{(\Delta-p^2)^{2-n/2}}$$

$$\xrightarrow{n\to 4} i\pi^2\frac{1}{2-\frac{n}{2}}。\qquad (3.1)_{14}$$

在 $n\to 4$ 处是 $J^{(2)}(p,\ \Delta)$ 的极点项。把极点项除掉就是它的有限部分记以 $J^{(2)}_{\ominus}(p,\ \Delta)$

$$J^{(2)}_{\ominus}(p,\ \Delta)=\left\{i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma(2)}\frac{1}{(\Delta-p^2)^{2-n/2}}-\frac{i\pi^2}{2-\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\xrightarrow{n\to 4} i\pi^2\lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[\frac{1}{(\Delta-p^2)^{2-n/2}}-1\right]\right\}$$

$$=i\pi^2\lim_{n\to 4}\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[e^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln(\Delta-p^2)}-1\right]\right\},$$

$$\boxed{J^{(2)}_{(-)}(p,\ \Delta)=-i\pi^2\ln(\Delta-p^2)。}\qquad (3.2)_{14}$$

与 $(1.11)_{12}$ 式相比，它们的有限部份只相差一个与 p 和 Δ 无关的常数。其实在我们取 $n\to 4$ 极限时，也还有些不确定之处。例如

$$(\sqrt{\pi})^n=\pi^{n/2}=\pi^2\pi^{\frac{n}{2}-2}$$

$$=\pi^2\exp\left[-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\pi\right]。$$

代入 $(3.2)_{14}$ 式就得到

$$J^{(2)}_{(-)}(p,\ \Delta)=-i\pi^2[\ln(\Delta-p^2)+\ln\pi]。\qquad (3.3)_{14}$$

此外

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(1+z)}{z}\underset{z\to 0}{\sim}\frac{1-\gamma z}{z}=\frac{1}{z}-\gamma。\qquad (3.4)_{14}$$

其中 γ 为 Euler 常数

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}-\ln m\right)=0.577215\cdots$$

所以

$$\lim_{n\to 4}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\sim\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\gamma。\qquad (3.5)_{14}$$

此外在积分表式中出现 $M^{\rho(4-n)}$ 这样的因子，都会带来类似的不确定性。例如 $M^{\rho(4-n)}=M^{2\rho\left(2-\frac{n}{2}\right)}$，这样

$$M^{\rho(4-n)}J^{(2)}_{\ominus}(p,\ \Delta)$$
$$=-i\pi^2[\ln(\Delta-p^2)-\rho\ln M^2]。\qquad (3.6)_{14}$$

这种不确定性将在重整化方案中消除。总结以上所得结果一般可写成

$$\boxed{J^{(2)}(p,\ \Delta)=i\pi^2\left[\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\ln(\Delta-p^2)+K\right]。}\qquad (3.7)_{14}$$

由 §14.1 的积分表容易看出：

$$\boxed{J^{(2)}_{\mu}(p,\ \Delta)=-i\pi^2 p_{\mu}\left[\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\ln(\Delta-p^2)+K\right]。}\qquad (3.8)_{14}$$

以上 K 为某一常数。又如 $\alpha=1$，$n\to 4$ 时

$$J^{(1)}(p,\ \Delta)=\int d^nl\,\frac{1}{(l^2+2l\cdot p+\Delta)}$$
$$=i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}(\Delta-p^2)$$

$$=i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(\alpha+2-\frac{n}{2}\right)}{\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\left(\alpha+1-\frac{n}{2}\right)}\frac{(\Delta-p^2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$=i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)。$$

当 $n\to4$ 时为极点项

$$J^{(1)}(p,\ \Delta)\xrightarrow{n\to4}\frac{-i\pi^2(\Delta-p^2)}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}。\qquad(3.9)_{14}$$

其有限部分

$$J^{(1)}_{\Theta}(p,\ \Delta)=\frac{i\pi^2}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)\left[\frac{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{n}{2}\right)}+1\right]$$

$$=\frac{i\pi^2}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)\left[-\Gamma\left[1+\left(2-\frac{n}{2}\right)\right]+1\right]$$

$$=\frac{i\pi^2}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)\left[-\left[1-\gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)+1\right]\right.$$

$$=i\pi^2\gamma(\Delta-p^2),\qquad(3.10)_{14}$$

$$\boxed{J^{(1)}(p,\ \Delta)=-i\pi^2(\Delta-p^2)\left[\frac{1}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}-\gamma\right]。}\qquad(3.11)_{14}$$

由 § 14.1 积分表容易看出

$$\boxed{\begin{aligned}J^{(1)}_{\mu}(p,\ \Delta)&=-p_{\mu}J^{(1)}(p,\ \Delta)\\&=-i\pi^2(\Delta-p^2)p_{\mu}\left[\frac{1}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}-\gamma\right.\end{aligned}}\qquad(3.12)_{14}$$

又如由第一节积分表看出

$$J^{(\alpha)}_{\mu\nu}(p,\ \Delta)=p_\mu p_\nu J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\delta_{\mu\nu}}{\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)$$
$$=\left[p_\mu p_\nu+\frac{\delta_{\mu\nu}}{2\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}(\Delta-p^2)\right]J^{(\alpha)}(p,\ \Delta)。$$

$(3.13)_{14}$

由 $(3.7)_{14}$ 式代入上式可得。

$$\boxed{J^{(2)}_{\mu\nu}(p,\ \Delta)=\left[p_\mu p_\nu-\frac{\delta_{\mu\nu}}{2}(\Delta-p^2)\right]i\pi^2\cdot \cdot\left[\frac{1}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}-\ln(\Delta-p^2)+K\right]。}\quad(3.14)_{14}$$

由此看来，在维数正规化程序中，把发散部份分离出来的手续是明确的，不过在所余下的有限部分中，在取 $n\to4$ 极限时还会有不确定的常数。

§14.4 量纲分析与 γ 矩阵

前面我们曾谈到在自然单位里 $\hbar=1=c$，方程式里只遗留下一个明显的量纲可取为长度 L 或动量 Λ，它们互为倒数。物理量的量纲一般是与空间的维数有关的。我们以后决定物理量量纲的出发点，就是 $\mathscr{L}$ 必须具有体积倒数的量纲，也就是作用量是无量纲的($\hbar$)。由此得到在 n 维时空里

$$\left.\begin{aligned}[\mathscr{L}]&=L^{-n}\quad 或\quad \Lambda^n,\\ [\partial_\mu]&=L^{-1}\quad 或\quad \Lambda。\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)_{14}$$

玻色场

费米场

$$\left.\begin{aligned}[\varphi]&=L^{1-n/2}\quad 或\quad \Lambda^{\frac{n}{2}-1},\\ [\psi]&=L^{(1-n)/2}\quad 或\quad \Lambda^{(n-1)/2}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.2)_{14}$$

由此我们也可确定相互作用常数的量纲。例如对于玻色场的自作用

$$\left.\begin{aligned}&[\lambda_r\varphi^r]=L^{-n}\quad 或\quad \Lambda^n,\\ &[\lambda_r]=L^{\frac{1}{2}rn-r-n}\quad 或\quad \Lambda^{r+n-\frac{1}{2}rn}。\end{aligned}\right\}\tag{4.3}_{14}$$

导致

例如

$$\left.\begin{aligned}&[\lambda_2=m^2]=L^{-2}\quad 或\quad \Lambda^2,\\ &[\lambda_6]=L^{\frac{1}{2}(n-6)}\quad 或\quad \Lambda^{\frac{1}{2}(6-n)},\\ &[\lambda_4]=L^{n-4}\quad 或\quad \Lambda^{4-n}。\end{aligned}\right\}\tag{4.4}_{14}$$

又如 Yakawa 型相互作用

$$\left.\begin{aligned}&[g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu]=L^{-n}\quad 或\quad \Lambda^n,\\ &[g]=L^{-n+\frac{n}{2}-1+n-1}=L^{\frac{n}{2}-2}\quad 或\quad \Lambda^{2-\frac{n}{2}}。\end{aligned}\right\}\tag{4.5}_{14}$$

对于每种相互作用，其作用常数在某一相应维数的空间里是无量纲的。在该空间里它也就是可以重整化的。

n 点玻色场的 Green 函数的量纲

$$\left.\begin{aligned}&[G^N(x_1, x_2, \cdots, x_N)]=[\varphi]^N=L^{N\left(1-\frac{n}{2}\right)}\quad 或\quad \Lambda^{N\left(\frac{n}{2}-1\right)}\\ &它的\ \text{Fourier}\ 分量的量纲\\ &[G^N(k_1, k_2\cdots k_N)]=L^{Nn}[G^N(x_1, x_2\cdots x_N)]\\ &\qquad=L^{N\left(\frac{n}{2}+1\right)}\quad 或\quad \Lambda^{-N\left(\frac{n}{2}+1\right)}\end{aligned}\right\}$$

$$(4.6)_{14}$$

$G^N(k_1, k_2\cdots k_N)$ 经常可以提出一个保持整体动量守恒的 $\delta^r(\sum k_i)$ 因子，也就是

$$G^N(k_1, k_2\cdots k_N)=\bar{G}^N(k_1, k_2\cdots k_N)\delta^n(\sum k_i)。\tag{4.7}_{14}$$

这样 $\bar{G}^N(k_1, k_2\cdots k_n)$ 的量纲为

$$\boxed{[\bar{G}^N(k_1, k_2\cdots k_N)]=L^{N\left(\frac{n}{2}+1\right)-n}\quad 或\quad \Lambda^{n-N\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$$

$$(4.8)_{14}$$

由 $(9.18)_{13}$ 式 $G^N\simeq\int\Gamma^N(G^{(2)})^N dx_1 dx_2\cdots dx_N$ 可知正规顶角

的量纲为

$$\boxed{\begin{aligned}[\Gamma^N(x)] &= [G^N(x)]\,[V]^{-N}[G^{(2)}(x)]^{-N} \\ &= L^{-N\left(1+\frac{n}{2}\right)} \quad \text{或} \quad \Lambda^{N\left(1+\frac{n}{2}\right)},\end{aligned}} \tag{4.9}_{14}$$

其中 V 为 n 维空间的体积。正规顶角的 Fourier 分量 $\Gamma(k)$ 的量纲为

$$\boxed{\begin{aligned}[\Gamma^{N_B}(k)] &= L^{N_B n}[\Gamma(x)] \\ &= L^{N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)} \quad \text{或} \quad \Lambda^{-N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)}。\end{aligned}} \tag{4.10}_{14}$$

同样可以证明，对于 Dirac 粒子

$$\boxed{[\Gamma^{N_D}(p)] = L^{N_D\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad \text{或} \quad \Lambda^{-N_D\left(\frac{n-1}{2}\right)}。} \tag{4.11}_{14}$$

在 $\Gamma^N(k)$ 中可以提出一个 $\delta^n(\sum k_i)$ 因子。

$$\Gamma^N(k) = \tilde{\Gamma}^N(k)\delta^n(\Sigma k_i)。 \tag{4.12}_{14}$$

$\tilde{\Gamma}^N(k)$ 的量纲则应为

$$\boxed{[\tilde{\Gamma}^{N_B}(k)] = L^{N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)+n} \quad \text{或} \quad \Lambda^{N_B+n-\frac{nN_B}{2}}。} \tag{4.13}_{14}$$

同样可以证明，对于一般 Dirac 粒子和 Bose 粒子体系

$$\boxed{\begin{aligned}&[\tilde{\Gamma}^{N_D+N_B}(k's)] = L^{-\left[n-N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)-N_D\frac{(n-1)}{2}\right]} \\ &\text{或} \quad \Lambda^{\left[n-N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)-N_D\frac{(n-1)}{2}\right]}。\end{aligned}} \tag{4.14}_{14}$$

一般有量纲的参量 a_i 或有量纲的物理量 G

$$\left.\begin{aligned}[a_i] &= L^{-\Delta_i} \quad \text{或} \quad \Lambda^{\Delta_i}, \\ [G] &= L^{-g} \quad \text{或} \quad \Lambda^{g}。\end{aligned}\right\} \tag{4.15}_{14}$$

在长度的尺度变换

$$\left.\begin{aligned}&L \to L' = \alpha^{-1}L \\ &\Lambda \to \Lambda' = \alpha\Lambda\end{aligned}\right\} \tag{4.16}_{14}$$

下，a_i 和 G 有相应的变换

$$\left.\begin{aligned} a_i \to a_i' &= \alpha^{\Delta_i} a_i, \\ G \to G' &= \alpha^g G_\circ \end{aligned}\right\} \qquad (4.17)_{14}$$

例如：$$[\bar{G}^{(2)}(k)] = \Lambda^{-2\left(\frac{n}{2}-1\right)+n} \xrightarrow{n=4} \Lambda^{-2}_\circ$$

因此在尺度变换下 $\Lambda \to \Lambda' = \alpha\Lambda$ 下，$k \to k' = \alpha k$，$m^2 \to \alpha^2 m^2$

$$\bar{G}^{(2)}(k) \Rightarrow \bar{G}'^{(2)}(k) = \alpha^{-2}\bar{G}^2(k)_\circ \qquad (4.18)_{14}$$

这一点在自由粒子传播子情况下可以直接证明

$$\bar{G}_0^{(2)}(k) = \frac{1}{k^2+m^2} \to \frac{1}{\alpha^2(k^2+m^2)} = \alpha^{-2}\bar{G}_0^{(2)}(k)$$

维数正规化方法不仅要应用于玻色场情况还要应用于费米场情况。因此我们必须把 Dirac 的 γ 矩阵也推广到 n 维空间。我们可以根据 γ 矩阵的一些基本的，与时空无关的性质，例如 γ 矩阵的对易关系，以及它们乘积的求迹性质来把它推广到 n 维空间。具体的推广步骤可如下进行：

$$\left.\begin{aligned} &\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}_+ = 2\delta_{\mu\nu} I, \\ &\mathrm{Tr}[\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu] = f(n)\delta_{\mu\nu} = 2^{n/2}\delta_{\mu\nu}, \\ &\mathrm{Tr}[\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n+1}}] = 0, \\ &\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = f(n)(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) \\ &\qquad\qquad = 2^{n/2}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})_\circ \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)_{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu I \gamma_\mu = n, \\ &\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu = 4\delta_{\lambda\rho} - (4-n)\gamma_\lambda\gamma_\rho, \\ &\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda + (4-n)\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu, \\ &\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda = (\delta_{\rho\nu}\gamma_\lambda + \delta_{\rho\lambda}\gamma_\nu) - \frac{1}{2}(\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\lambda + \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho), \end{aligned}\right\}$$

$$(4.20)_{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_\mu p_\nu \gamma_\nu \gamma_\mu = (2-n)p_\nu\gamma_\nu, \\ &\gamma_\mu p_\nu\gamma_\nu\gamma_\rho p_\sigma\gamma_\sigma\gamma_\mu \\ &\quad = 2(2-n)p_\rho p_\nu\gamma_\nu - (2-n)p^2\gamma_\rho{}_\circ \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)_{14}$$

以上 $f(n)$ 是 n 的函数，有一定任意性，只要当 $n=4$ 时 $f(n)=4$ 即可，实际上我们可取 $f(n)=2^{n/2}$。四维空间里定义的 $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

和反对称张量 $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ 怎样推广到一般的 n 维空间目前尚不清楚，要另行处理。

真正的物理空间依然还是四维闵氏空间，因此实物理量例如外动量依然是四维空间的矢量，它有 0，1、2，3 分量。在 n 维空间的其他分量可看作是非物理分量。对于实际物理量可以令其非物理分量为零。

§14.5 *QED* 的维数正规化

本节内容主要是以量子电动力学为具体示例，来说明维数正规化方法的应用。计算只准确到一圈图形，重点放在重整化常数的计算上。这些内容也为以后计算重整化群参量做好准备。由 $(2.2)_{12}$ 式可得电子自能图形的贡献

$$\Sigma(p,4)=\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int dk\frac{\gamma_\mu[i\gamma\cdot(p-k)-m]\gamma_\mu}{(k^2-i\epsilon)[(p-k)^2+m^2-i\epsilon]},\tag{5.1}_{14}$$

$$\Sigma(p,n)=\frac{e^2\left(\frac{\mu^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}\int\frac{d^nk\gamma_\mu[i\gamma(p-k)-m]\gamma_\mu}{(k^2-i\epsilon)[(p-k)^2+m^2]}。\tag{5.2}_{14}$$

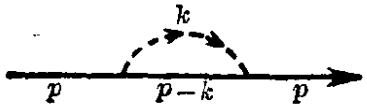


图 14-1

利用 Feynman 的参数积分把分母因子合并，参看 $(2.4)_{12}$ 式

$$\Sigma(p,n)=e^2\left(\frac{\mu^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}\int_0^1 dx\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\cdot\frac{\gamma_\mu[i\gamma\cdot(p-k)-m]\gamma_\mu}{[(k-px)^2+a^2]^2}。\tag{5.3}_{14}$$

其中 a 由 $(2.4)_{12}$ 式给出为

$$a^2=(p^2+m^2)x(1-x)+m^2x^2-i\epsilon。\tag{5.4}_{14}$$

利用 $(4.20)_{14}$，$(4.21)_{14}$ 和 $(1.21)_{14}$ 式可得

$$\Sigma(p,\ n)=e^2\left(\frac{\mu^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon}\int_0^1 dx\frac{1}{(2\pi)^n}\ \frac{i(2-n)\gamma\cdot(p-px)-nm}{(a^2)^{\epsilon}}$$
$$\cdot i(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)}$$
$$=ie^2\left(\frac{\mu^2}{\mu^2}\right)^{\epsilon}\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\ \frac{i(2-n)\gamma\cdot(p-px)-nm}{(a^2)^{\epsilon}}$$
$$\cdot\Gamma(\epsilon),\qquad (5.5)_{14}$$

其中

$$\epsilon=2-\frac{n}{2}。\qquad (5.6)_{14}$$

当 $n\to4$ 时，$\epsilon\to0$ 利用 $(3.5)_{14}$ 式代入上式得到

$$\Sigma(p,\ n)=ie^2(\mu^2)^{-\epsilon}\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)e^{-\epsilon\ \ln\frac{a^2}{\mu^2}}$$
$$\cdot[-i2(1-x)\gamma\cdot p-4m]$$
$$=-ie^2(\mu^2)^{-\epsilon}\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma-\ln\frac{a^2}{\mu^2}\right)$$
$$\cdot[2i(1-x)\gamma\cdot p+4m]。\qquad (5.7)_{14}$$

其中右边第一个括号内的 γ 是 Euler 常数，参看 $(3.4)_{14}$ 和 $(3.5)_{14}$ 式。上式的极点项记以 $\Sigma_p(p,\ n)$ 为

$$\Sigma_p(p,\ n)=\frac{1}{\epsilon}\cdot ie^2(\mu^2)^{-\epsilon}\frac{1}{(4\pi)^2}(-i\gamma p-4m)。\qquad (5.8)_{14}$$

采用最小减除程序，除掉极点项所留下的有限项记以 $\Sigma_f(p,\ n)$ 为

$$\Sigma_f(p,\ n)=i\frac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\left\{\int_0^1 dx[2i(1-x)(\gamma\cdot p)+4m]\ln\left[\frac{p^2+m^2}{\mu^2}(1-x)x+\frac{m^2}{\mu^2}x^2\right]+\gamma(i\gamma\cdot p+4m)\right\}。$$

$$(5.9)_{14}$$

以上我们考虑到在 n 维空间里，e^2 具有质量量纲为 $\Lambda^{4-n}=\Lambda^{2\epsilon}$，引进了 $(\mu^2)^{-\epsilon}$ 以使 $e^2(\mu^2)^{-\epsilon}$ 为无量纲量。其中 μ 为某一具有质量量纲的量。同时也以 $(5.4)_{14}$ 式代入了上式。

以 $\gamma p=im$ 代入极点项 $(5.8)_{13}$ 式，并参看 $(6.7)_{11}$ 和 $(6.8)_{11}$ 式可见

$$\left.\begin{aligned}\Delta m&=\frac{3e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\frac{m}{\epsilon},\\ m_0=m-\Delta m&=\left(1-\frac{3e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\right)m=Z_m m,\end{aligned}\right\}\quad(5.10)_{14}$$

即

$$\boxed{Z_m=\left(1-\frac{3e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\right)。}$$

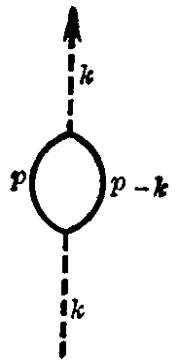


图 14-2

这个结论在一般情况下，也可直接由 $(2.11)_{14}$ 式得到。由 $(2.11)_{14}$ 式 $Z_D^{-1}=1+A(-\mu^2,\epsilon)$ 还可得到

$$\boxed{Z_D=\frac{1}{1+\dfrac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\dfrac{1}{\epsilon}}\sim 1-\frac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}。}\quad(5.11)_{14}$$

由以上各式看来重整化常数都是与电子质量无关的。

又如真空极化函数，参看 $(3.1)_{12}$ 式并利用 $(4.19)_{14}$ 式

$$\begin{aligned}\Pi(k^2)&=\frac{e^2}{3}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\frac{\gamma_\mu(i\gamma p-m)\gamma_\mu[i\gamma(p-k)-m]}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}\\&=\frac{e^2}{3}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\frac{[i(2-n)\gamma p-nm][i\gamma(p-k)-m]}{(p^2+m^2)[(p-k)^2+m^2]}\\&=\frac{e^2}{3}\int_0^1dx\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\frac{(n-2)(\gamma\cdot p)\gamma\cdot(p-k)-nm^2}{(p^2-2pkx+k^2x+m^2)^2}\\&=\frac{4e^2}{3}\int dx\int\frac{(n-2)(p^2-p\cdot k)-nm^2}{(p^2-2pkx+k^2x+m^2)^2}\frac{d^np}{(2\pi)^n}。\end{aligned}\quad(5.12)_{14}$$

上式利用了 Feynman 变换，参看 $(3.2)_{12}$ 式，并考虑到关于 γ 矩阵的求迹运算。利用公式 $(1.21)_{14}$ 和 $(1.22)_{14}$ 式，上式可写成

$$\begin{aligned}\Pi(k^2)=i\frac{4e^2}{3}\int_0^1\frac{dx}{(2\pi)^n}&\frac{(\sqrt{\pi})^n}{(k^2x+m^2-k^2x^2)^\epsilon\cdot\Gamma(2)}\\&\cdot\left\{(n-2)\left[\Gamma(\epsilon)k^2x^2+\frac{\Gamma(\epsilon)}{\epsilon-1}\cdot\frac{n}{2}(k^2x+m^2-k^2x^2)\right]\right.\end{aligned}$$

$$+\Gamma(\epsilon)[(-k^2x)(n-2)+nm^2]\Big\}$$

$$=i\frac{4e^2}{3}\int_0^1\frac{dx}{(2\pi)^n}\frac{(\sqrt{\pi})^n\Gamma(\epsilon)}{(k^2x+m^2-k^2x^2)^\epsilon}(6x^2-6x)k^2。$$

$$(5.13)_{14}$$

当 $n\to4$, $\epsilon\to0$ 时，上式成为

$$\Pi(k^2)=i\frac{4}{3}\frac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2}\int_0^1dx\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)e^{-\epsilon\ln\frac{a^2}{\mu^2}}$$

$$\cdot6x(x-1)k^2。\qquad(5.14)_{14}$$

其中极点项记以 $\Pi_p(k^2)$ 为

$$\Pi_p(k^2)=-i\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{k^2}{\epsilon}。\qquad(5.15)_{14}$$

除掉极点项后剩下的有限项记以 $\Pi_f(k^2)$ 为

$$\Pi_f(k^2)=-\frac{4i}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\cdot k^2\int_0^1dx\left(\gamma+\ln\frac{a^2}{\mu^2}\right)6x(x-1)$$

$$=-\frac{ie^2}{2\pi^2}k^2\Bigg[C+\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{k^2}\right)^{1/2}\ln\left\{\frac{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{k^2}\right)^{1/2}\right]}{\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{k^2}\right)^{1/2}\right]}\right\}\Bigg]。\qquad(5.16)_{14}$$

其中 $$a^2=m^2+k^2x(1-x),$$

C 为一常数。

当 $m\Rightarrow0$ 时

$$\Pi_f(k^2)\simeq\frac{\alpha}{3\pi}\left[\ln\frac{k^2}{\mu^2}+\text{常数}+O(\epsilon^2)\right]k^2。\qquad(5.17)_{14}$$

对于 $(5.16)_{14}$ 式我们应该指出：在 $-k^2=4m^2$ 处出现方根式的分支点，这是幺正性所要求的。此外在 $k^2=0$ 处看来好象出现了极点，不过如果我们把 ln 项在 $k^2\to0$ 处仔细的展开，会发现整个 $(5.16)_{14}$ 式在 $k^2\to0$ 处其实是有限的。

由 $(2.17)_{14}$ 或 $(7.5)_{11}$ 式得到光子场的重整化常数

$$\boxed{Z_B=\frac{1}{1+i\pi'(0)}=\frac{1}{1+\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2\epsilon}}。} \qquad (5.18)_{14}$$

又如顶角函数，参看 $(4.1)_{12}$ 式

$$\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;\ q)=ie^2\int\frac{dk}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\gamma_\nu[i\gamma(p_1-k)-m]\gamma_\mu[i\gamma(p_2-k)-m]\gamma_\nu}{[(p_1-k)^2+m^2]\cdot[(p_2-k)^2+m^2]}。$$

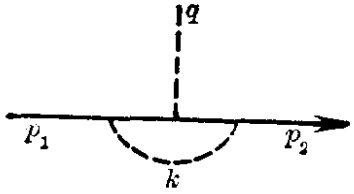


图 14-3

在 n 维空间可写成

$$\Lambda_\mu(p_1;\ p_2;\ q,\ n)=ie^2(\mu^2)^{2-\frac{n}{2}}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\gamma_\nu[i\gamma(p_1-k)-m]\gamma_\mu[i\gamma(p_2-k)-m]\gamma_\nu}{[(p_1-k)^2+m^2]\cdot[(p_2-k)^2+m^2]}。 \qquad (5.19)_{14}$$

利用 Feynman 公式 $(1.1)_{12}$ 式取 $n=3$，并参看 $(4.4)_{12}$ 式

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p_1,\ p_2;\ q,\ n)&=ie^2(\mu^2)^{2-\frac{n}{2}}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\int_0^1dy\int_0^1dx\\&\cdot2x\frac{\gamma_\nu[i\gamma(p_1-k)-m]\gamma_\mu[i\gamma(p_2-k)-m]\gamma_\nu}{[k^2-2p_xk]^3}\\&=ie^2(\mu^2)^{2-\frac{n}{2}}\int_0^1dy\int_0^1dx\cdot2x\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\\&\cdot\frac{\gamma_\nu[i\gamma(p_1-k)-m]\gamma_\mu[i\gamma(p_2-k)-m]\gamma_\nu}{[(k-p_x)^2-p_x^2]^3}\end{aligned} \qquad (5.20)_{14}$$

以上为简单计，我们只考虑 p_1 和 p_2 都在质量壳层上情况，即 $p_1^2=p_2^2=-m^2$。

其中

$$p_x\equiv x[yp_1+(1-y)p_2]\equiv xp_y。 \qquad (5.21)_{14}$$

$(5.20)_{14}$ 式中的分子可写成

$$-\gamma_\nu\gamma(p_1-k)\gamma_\mu\gamma(p_2-k)\gamma_\nu$$
$$-im\gamma_\nu[\gamma(p_1-k)\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma[(p_2-k)]\gamma_\nu+m^2\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu, \qquad (5.22)_{14}$$

其中只有 k 的二次幂项才是发散的，也就是利用 $(4.18)_{14}$ 式

$$-\gamma_\nu\gamma_\sigma k_\sigma\gamma_\mu\gamma_\lambda k_\lambda\gamma_\nu=(2-n)[k^2\gamma_\mu-2(\gamma k)k_\mu], \quad (5.23)_{14}$$

我们先来考虑这个发散项。利用公式 $(1.22)_{14}$ 式

$$J_{\mu\nu}^{(\alpha)}(p,\ \Delta)=i\int_E d^nl\frac{l_\mu l_\nu}{(l^2-2lp-\Delta)^\alpha}$$

$$=(i)(\sqrt{\pi})^n\left\{\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)}\frac{\delta_{\mu\nu}}{(\Delta-p^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{p_\mu p_\nu}{(\Delta-p^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right\}$$

$$=(i)(\sqrt{\pi})^n\frac{1}{(\Delta-p^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\left\{\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)}\right.$$

$$\left.\cdot(\Delta-p^2)\delta_{\mu\nu}+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\cdot p_\mu p_\nu}{\Gamma(\alpha)}\right\}。 \qquad (5.24)_{14}$$

把上式和 $(5.23)_{14}$ 式代入 $(5.20)_{14}$ 式，并考虑到 $(3.5)_{14}$ 式，得到 Λ_μ 的来自 $(5.23)_{14}$ 式的发散项为

$$\Lambda_{\mu\infty}(p_1,\ p_2;\ q)=ie^2(\mu^2)^{2-\frac{n}{2}}\int_0^1dy\int_0^1 2x$$
$$\cdot dx\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{(2-n)[k^2\gamma_\mu-2(\gamma k)k_\mu]}{[k^2-2p_x\cdot k]^3}$$
$$=-e^2(\mu^2)^{2-\frac{n}{2}}\int_0^1dy\int_0^1 2x$$
$$\cdot dx\frac{\pi^2}{(2\pi)^4}\left\{\left[-2\left(\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\gamma\right)(-p_x^2)^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)}\gamma_\mu+\frac{p_x^2}{-p_x^2}\gamma_\mu\right]\right.$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\gamma\right)(-p_x^2)^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)}\gamma_\mu-\frac{2}{-p_x^2}(\gamma p_x)p_{x\mu}\right]\Big\}$$

$$(5.25)_{14}$$

$$=e^2\int_0^1 dy\int_0^1 2x\cdot dx\frac{1}{(4\pi)^2}\left\{\left(\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-\gamma\right)\left(\frac{-p_x^2}{\mu^2}\right)^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\gamma_\mu-\frac{1}{-p_x^2}\left[p_x^2\gamma_\mu-2(\gamma p_x)p_{x\mu}\right]\right\}。$$

由上式看出当 $n\to4$ 时，Λ_μ 的极点项的留数为

$$\frac{e^2}{(4\pi)^2}\gamma_\mu。\qquad(5.26)_{14}$$

利用以下关系

$$\frac{1}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}\left[e^{-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\frac{-p_x^2}{\mu^2}}-1\right]$$

$$=\frac{1}{\left(2-\frac{n}{2}\right)}\left\{-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\frac{-p_x^2}{\mu^2}+O\left[\left(2-\frac{n}{2}\right)^2\right]\right\}$$

$$\simeq-\ln\frac{-p_x^2}{\mu^2}。\qquad(5.27)_{14}$$

我们可以求出自 $(5.25)_{14}$ 式减除极点项以后的有限项。

$$\Lambda_{\mu\Theta}(4.25)=\frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dy\int_0^1 2x\cdot dx\left\{\left(-\gamma-\ln\frac{-p_x^2}{\mu^2}\right)\gamma_\mu\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p_x^2}\left[p_x^2\gamma_\mu-2(\gamma p_x)p_{x\mu}\right]\right\}。\qquad(5.28)_{14}$$

下面我们来考虑分子 $(5.22)_{14}$ 式中除掉 $(5.23)_{14}$ 式所余下的收敛项。对于收敛项我们可以直接令 $n=4$ 代入并利用 $(4.20)_{14}$ 和 $(4.21)_{14}$ 式，得到 $(5.22)_{14}$ 式减除 $(5.23)_{14}$ 式所剩下的有限项的分子是：

$$2[(p_1+p_2)\cdot k\gamma_\mu-\gamma\cdot(p_1+p_2)k_\mu-(\gamma k)(p_1+p_2)_\mu$$

$$-\gamma_\mu(p_1\cdot p_2)+(\gamma\cdot p_1)p_{2\mu}+(\gamma\cdot p_2)p_{1\mu}]$$

$$+i[8mk_\mu-4m(p_1+p_2)_\mu]-2m^2\gamma_\mu。\qquad(5.29)_{14}$$

利用 $(1.21)_{14}$ 式可以求得相应于上式的有限积分，和 $(5.28)_{14}$ 式

相并可得到 Λ_μ 的减除极点项以后所余的全部有限项如下：

$$\Lambda_{\mu f}(p_1, p_2, q)=\frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dy\int_0^1 2x\cdot dx\frac{1}{p_x^2}[p_x^2\gamma_\mu$$
$$-2(\gamma\cdot p_x)p_{x\mu}-(p_1+p_2)\cdot p_x\gamma_\mu+\gamma\cdot(p_1+p_2)p_{x\mu}$$
$$+(\gamma\cdot p_x)(p_1+p_2)_\mu+\gamma_\mu(p_1\cdot p_2)-(\gamma\cdot p_1)p_{2\mu}$$
$$-(\gamma\cdot p_2)p_{1\mu}-i4mp_{x\mu}+i2m(p_1+p_2)_\mu+m^2\gamma_\mu]。$$

$(5.30)_{14}$

由重整化理论，参看$(7.11)_{11}$式

$$\Gamma_\mu=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p_1, p_2; q)=Z^{-1}\Gamma_{\mu 0}$$
$$=Z^{-1}[\gamma_\mu+\Lambda_{\mu f}(p_1, p_2; q)]。$$

由此可得

$$Z^{-1}=\left(1+\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\right),$$
$$Z\simeq\left(1+\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\right)^{-1}\simeq\left(1-\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\right)。$$

$(5.31)_{14}$

与 $(5.11)_{14}$ 式相比可知

$$Z=Z_D。$$

而这也是 Ward 等式的结论。

§14.6 Adler 反 常

作为维数正规化的又一具体应用，我们再来计算 Adler 反常。在上一章最后，我们介绍了 Ader 反常问题。在那里我们得到了 $(11.29)_{13}$ 式等式，此式表示当费米子质量 $m=0$ 时，轴矢流的散度为零，可是当我们用微扰论来对具体模型计算时，发现$(11.29)_{13}$式的右边还应有另一反常项出现。也就是发现了微扰修正可破坏经典近似下的对称性质的反常现象。这种反常项的存在，可以有不同的方法得到，我们在这里将用维数正规化方法来计算。由于

$(11.29)_{18}$ 式中含有 γ_5 矩阵，通常认为不宜用维数正规化方法来计算，不过我们对 γ_5 作形式上的推广以后，也可用维数正规化方法来得到反常项。

在动量空间里 $(11.25)_{13}$ 式可写成

$$k_\lambda \int dx\, dy e^{-ikx} e^{iqy} \langle 0|T\{A_\lambda(x) V_\mu(y) V_\nu(o)\}|0\rangle$$
$$= 2mi \int dx\, dy e^{-ikx} e^{iqy} \langle 0|T\{p(x) V_\mu(y) V_\nu(o)\}|0\rangle 。 \qquad (6.1)_{14}$$

对应上式左边的微扰计算的最低级修正，相当于计算以下 Feynman 图形的贡献。

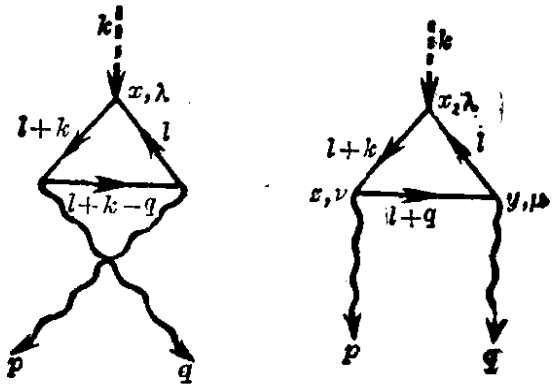


图 14-4

$$-ik_\lambda \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr}\left\{\underline{\gamma}_\lambda \gamma_5 \frac{i}{-i\gamma l - m + i\epsilon} \underline{\gamma}_\mu \right.$$
$$\cdot \frac{i}{-i(\gamma l + \underline{\gamma q}) - m + i\epsilon} \underline{\gamma}_\nu \frac{i}{-i(\gamma l + \underline{\gamma k}) - m + i\epsilon}$$
$$+ \underline{\gamma}_\lambda \gamma_5 \frac{i}{-i\gamma l - m + i\epsilon} \underline{\gamma}_\nu \frac{i}{-i(\gamma l - \underline{\gamma q} + \underline{\gamma k}) - m + i\epsilon}$$
$$\left. \cdot \underline{\gamma}_\mu \frac{i}{-i(\gamma l + \underline{\gamma k}) - m + i\epsilon} \right\} 。 \qquad (6.2)_{14}$$
$$= -ik_\lambda \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \mathrm{Tr}\left\{\underline{\gamma}_\lambda \gamma_5 \frac{\gamma l + im}{-l^2 - m^2} \underline{\gamma}_\mu \right.$$
$$\left. \cdot \frac{\gamma l + \underline{\gamma q} + im}{-[(\underline{l} + \underline{q})^2 + \underline{l}^2 + m^2]} \underline{\gamma}_\nu \frac{\gamma l + \underline{\gamma k} + im}{-[(\underline{l} + \underline{k})^2 + \underline{l}^2 + m^2]} \right.$$

$$+\underline{\gamma}_\lambda\gamma_5\frac{\gamma l+im}{-l^2-m^2}\underline{\gamma}_\nu\frac{\gamma l-\gamma q+\gamma k+im}{-[(\underline{l}-\underline{q}+\underline{k})^2+\underline{l}^2+m^2]}$$

$$\cdot\underline{\gamma}_\mu\frac{\gamma l+\gamma k+im}{-[(\underline{l}+\underline{k})^2+\underline{l}^2+m^2]}\Big\}。\qquad (6.3)_{14}$$

其中 k 和 q 都为外粒子动量，是四维空间的矢量，它只有第 0, 1, 2, 3 四个分量。为避免混淆，我们把四维矢量下边加一横实线，表示为物理空间的矢量，例如：$\underline{k}$ 和 $\underline{q}$。存在于与物理四维空间正交的其余$(n-4)$维空间的矢量，则以在其下面加横虚线标记之，例如 $\underline{\underline{l}}$，表示它只有第四，五，……第$(n-1)$分量。存在于整个 n 维空间的矢量则不附加标记。它的分量有第 0，第 1，……第$(n-1)$分量。例如 $l=\underline{l}+\underline{\underline{l}}$。与四维矢量相并缩的 γ 矩阵都应理解为四维物理矢量，例如 $\underline{\gamma k}$，和 $\underline{\gamma q}$。内粒子动量 l，也就是积分变量，以及与之相并缩的 γ 矩阵都是整个 n 维空间的矢量，例如 $\gamma l=\underline{\gamma l}+\underline{\underline{\gamma l}}$。

关于 γ 矩阵的对易关系可推广为(参看 $(4.19)_{14}$ 式)：

$$\left.\begin{aligned}&\{\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\}_+=2\delta_{\mu\nu}\\&\{\underline{\gamma}_\mu,\ \underline{\gamma}_\nu\}_+=2\delta_{\mu\nu}\\&\{\underline{\underline{\gamma}}_\mu,\ \underline{\underline{\gamma}}_\nu\}_+=2\delta_{\mu\nu}\\&\{\underline{\gamma}_\mu,\ \underline{\underline{\gamma}}_\nu\}_+=0\end{aligned}\right\}\qquad (6.4)_{14}$$

γ_5 是定义在四维空间的，因而

$$\{\gamma_5,\ \underline{\gamma}_\mu\}_+=0,\ [\gamma_5,\ \underline{\underline{\gamma}}]_-=0。\qquad (6.5)_{14}$$

这样我们可以把 $\underline{\gamma k}\gamma_5$ 改写成

$$\begin{aligned}-i\underline{\gamma k}\gamma_5&=(-i\underline{\gamma l}-i\underline{\gamma k}-m)\gamma_5\\&\quad+\gamma_5(-i\underline{\gamma l}-m)-2mi(i\gamma_5)\\&=(-i\gamma l-i\underline{\gamma k}-m)\gamma_5+\gamma_5(-i\gamma l-m)\\&\quad-2mi(i\gamma_5)+i2\gamma_5\underline{\gamma l}。\end{aligned}\qquad (6.6)_{14}$$

把$(6.6)_{14}$式代入$(6.3)_{14}$式(把 k_λ 搬进求迹号内)，可以证明其中 $(6.6)_{14}$ 式右边第一和第二项无贡献，例如 $(6.6)_{14}$ 式右边第一项代入 $(6.3)_{14}$ 式的第一项 (经过求迹号内算符的循环搬动)，由于 $(\gamma l+\underline{\gamma k}-im)(\gamma l+\underline{\gamma k}+im)=[(\underline{l}+\underline{k})^2+\underline{\underline{l}}^2-m^2]$ 不再含有 γ 矩阵，这时 $(6.3)_{14}$ 式的第一项的分子要计算的有以下因子

$$\mathrm{Tr}[\gamma_5(\gamma l+im)\underline{\gamma}_\mu(\gamma l+\underline{\gamma q}+im)\underline{\gamma}_\nu]。 \qquad (6.7)_{14}$$

其中只有 γ_5 和另外四个 γ 矩阵乘积的求迹才不为零。因此 m 项无贡献。此外 $\underline{\gamma l}$ 项也无贡献，因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\nu] &= -\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma l}\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\nu]\\ &= -\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma}_\mu\underline{l^2}\underline{\gamma}_\nu]=0。\end{aligned}$$

此外又如

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma q}\underline{\gamma}_\nu] &= \mathrm{Tr}[\underline{\gamma l}\gamma_5\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma q}\underline{\gamma}_\nu]\\ &= -\mathrm{Tr}[\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma q}\underline{\gamma}_\nu\gamma_5]=-\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma q}\underline{\gamma}_\nu]=0。\end{aligned}$$

因此 $(6.7)_{14}$ 式实际可写成，利用 $(7.11)_9$ 式 $\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho]=\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma q})\underline{\gamma}_\nu] &= \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}l_\sigma(l_\rho+q_\rho)\\ &= \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}l_\sigma q_\rho。\end{aligned} \qquad (6.8)_{14}$$

同样把 $(6.6)_{14}$ 式的第二项代入 $(6.3)_{14}$ 式的第一项得到分子为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma q})\underline{\gamma}_\nu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma k})] &= \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(l+q)_\sigma(l+k)_\rho\\ &= \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(l_\sigma k_\rho+q_\sigma l_\rho+q_\sigma k_\rho)。\end{aligned} \qquad (6.9)_{14}$$

把 $(6.6)_{14}$ 式第一项代入 $(6.3)_{14}$ 式第一项，并利用 $(6.8)_{14}$ 式得到其贡献记以 $1I$ 为

$$\begin{aligned}1I &= \int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}\underline{l}_\sigma\underline{q}_\rho}{(l^2+m^2)[(\underline{l}+\underline{q})^2+m^2]}\\ &= \int_0^1 dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}\underline{l}_\sigma\underline{q}_\rho}{[l^2+2\underline{q}\underline{l}x+(q^2x+m^2)]^2}\\ &= \int_0^1 dx\int\frac{d^{n-4}\underline{l}}{(2\pi)^n}\int d^4l\,\frac{\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}\underline{l}_\sigma\underline{q}_\rho}{[\underline{l}^2+2\underline{q}\underline{l}x+(\underline{l}^2+q^2x+m^2)]^2}\\ &= \int_0^1 dx\int\frac{d^{n-4}\underline{l}}{(2\pi)^n}i(\sqrt{\pi})^4\frac{-\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}(qx)_\sigma\underline{q}_\rho}{[(\underline{l}^2+q^2x+m^2-q^2x^2]}\\ &= 0。\end{aligned} \qquad (6.10)_{14}$$

把 $(6.6)_{14}$ 式第二项代入 $(6.3)_{14}$ 式第一项，并利用 $(6.9)_{14}$ 式得

到其贡献记以 $1I$ 为

$$2I=\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}\frac{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(\underline{l}_\sigma\underline{k}_\rho+\underline{q}_\sigma\underline{l}_\rho+\underline{q}_\sigma\underline{k}_\rho)}{[(l+\underline{q})^2+m^2][(l+k)^2+m^2]}=\int_0^1dx\int\frac{d^nl}{(2\pi)^n}$$

$$\cdot\frac{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(\underline{l}_\sigma\underline{k}_\rho+q_\sigma\underline{l}_\rho+\underline{q}_\sigma\underline{k}_\rho)}{\{l^2+2\underline{l}[\underline{q}x+\underline{k}(1-x)]+(q^2x+k^2(1-x)+m^2\}^2}$$

$$=\int_0^1dx\int\frac{d^{n-4}\underline{l}}{(2\pi)^n}\int d^4\underline{l}$$

$$\cdot\frac{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(\underline{l}_\sigma\underline{k}_\rho+\underline{q}_\sigma\underline{l}_\rho+q_\sigma\underline{k}_\rho)}{\{\underline{l}^2+2\underline{l}[\underline{q}x+\underline{k}(1-x)]+[\underline{l}^2+q^2x+k^2(1-x)+m^2]\}^2}$$

$$=\int_0^1dx\int\frac{d^{n-4}l}{(2\pi)^n}i(\sqrt{\pi})^4$$

$$\cdot\frac{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\{-[\underline{q}x+\underline{k}(1-x)]_\sigma\cdot k_\rho-\underline{q}_\sigma[\underline{q}x+\underline{k}(1-x)]_\rho+\underline{q}_\sigma k_\rho\}}{\{\underline{l}^2+q^2x+k^2(1-x)+m^2-[qx+k(1-x)]^2\}}$$

$$=\int_0^1dx\int\frac{d^{n-4}l}{(2\pi)^n}i(\sqrt{\pi})^4$$

$$\cdot\frac{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}\{-(qx)_\sigma k_\rho-\underline{q}_\sigma[k(1-x)]_\rho+q_\sigma k_\rho\}}{\{\underline{l}^2+q^2x+k^2(1-x)+m^2-[qx+k(1-x)]^2\}}$$

$$=0。\qquad(6.11)_{14}$$

同样把 $(6.6)_{14}$ 式的头两项代入 $(6.3)_{14}$ 式第二项所得结果亦为零。因此所余下的就是 $(6.6)_{14}$ 式右边的第三项和第四项代入 $(6.3)_{14}$ 式所得结果。第三项代入 $(6.3)_{14}$ 式所得结果就是 $(6.1)_{14}$ 式的右边，而第四项代入 $(6.3)_{14}$ 式所得即为反常项，记以 $A_{\mu\nu}(q,k)$

$$A_{\mu\nu}(q,\ k)=-\frac{2i^3}{(2\pi)^n}\int d^4\underline{l}\int d^{n-4}\underline{l}$$

$$\cdot\Bigg\{\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}+im)\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}+\underline{\gamma q}+im)\underline{\gamma}_\nu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}+\underline{\gamma k}+im)]}{(-\underline{l}^2-\underline{l}^2-m^2)[-(\underline{l}+\underline{q})^2-\underline{l}^2-m^2][-(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}$$

$$+\frac{\mathrm{Tr}[\gamma_5\underline{\gamma l}(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}+im)\underline{\gamma}_\nu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}-\underline{\gamma q}+\underline{\gamma k}+im)\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma l}+\underline{\gamma k}+im)]}{[-\underline{l}^2-\underline{l}^2-m^2][-(\underline{l}+\underline{k}-\underline{q})^2-\underline{l}^2-m^2][-(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}\Bigg\}$$

$$(6.12)_{14}$$

上式分母中的 $\underline{l}$ 都是以 $\underline{l}^2$ 的形式出现的，所以分子中的奇幂次 $\underline{l}$ 项的积分都为零。考虑到 $(6.4)_{14}$ 式的对易关系 $\{\underline{\gamma l}, \underline{\gamma l}\}=0=\{\underline{\gamma l}, \underline{\gamma q}\}$，$\{\underline{\gamma}, \underline{lk}\}=0$，同时注意到前面有 γ_5 存在，所以此外少于四个 γ 矩阵的各项求迹都为零。上式第一项的分子中有贡献的可写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\{\gamma_5[\underline{l}^2\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma q})\gamma_\nu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma k})\\&\quad+\underline{l}^2\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu\underline{\gamma}_\nu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma k})+\underline{l}^2\underline{\gamma l}\underline{\gamma}_\mu(\underline{\gamma l}+\underline{\gamma q})\underline{\gamma}_\nu]\}\\&=\underline{l}^2 4\{\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(\underline{l}+\underline{q})_\sigma(l+k)_\rho\\&\quad+\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\underline{l}_\sigma(l+k)_\rho+\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}l_\sigma(l+q)_\rho\}\\&=\underline{l}^2 4\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\underline{q}_\sigma\underline{k}_\rho。\end{aligned}\qquad (6.13)_{14}$$

同样 $(6.12)_{14}$ 式的第二项的分子，只要把上式中的 $q\to k-q$，同时 $\mu\leftrightarrow\nu$ 就可得到和上式同样的结果。所以最后得到反常项

$$A_{\mu\nu}(q,\ k)=\frac{-2}{(2\pi)^n}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}q_\sigma k_\rho I。\qquad (6.14)_{14}$$

其中 I 由 $(6.12)_{14}$ 式为

$$\begin{aligned}I=\int d^4\underline{l}\int d^{n-4}\underline{l}\Big\{&\frac{\underline{l}^2}{(-\underline{l}^2-\underline{l}^2-m^2)[-(\underline{l}+\underline{q})^2-\underline{l}^2-m^2]\cdot[-(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}\\&+\frac{\underline{l}^2}{(-\underline{l}^2-\underline{l}^2-m^2)[-(\underline{l}-\underline{q}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2][-(\underline{l}+\underline{k})^2-\underline{l}^2-m^2]}。\end{aligned}\qquad (6.15)_{14}$$

利用 Feynman 公式 $(1.4)_{12}$ 式，上式可写成

$$\begin{aligned}I=&\int_0^1 dx\int_0^1 dy\cdot 2y\int d^{n-4}\underline{l}\cdot\underline{l}^2\int d^4\underline{l}\\&\cdot\left[\frac{1}{(\underline{l}^2+\underline{l}^2+2\underline{l}\cdot p_y-\Delta_y)^3}+\frac{1}{(\underline{l}^2+\underline{l}^2+2\underline{l}p'_y-\Delta'_y)^3}\right]。\end{aligned}\qquad (6.16)_{14}$$

其中

$$\begin{aligned}&p_y=-[\underline{q}x+\underline{k}(1-x)]y,\\&\Delta_y=m^2-xyq^2-(1-x)y\underline{k}^2。\end{aligned}\qquad (6.17)_{14}$$

$$\begin{aligned}&p'_y=-[(-\underline{q}+\underline{k})x+\underline{k}(1-x)]y=-[-\underline{q}x+\underline{k}]y,\\&\Delta'_y=m^2-xy(-\underline{q}+\underline{k})^2-(1-x)yk^2。\end{aligned}\qquad (6.18)_{14}$$

利用公式 $(1.21)_{14}$ 式可得

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 2y\cdot dy\Big[(-1)^3 i(\sqrt{\pi})^4 \cdot\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)}\int\Big[\frac{1}{(\underline{l}^2+\Delta_y-p_y^2)}+\frac{1}{(\underline{l}^2+\Delta_y-p_y^2)}\Big]\cdot\underline{l}^2 d^{n-4}\underline{l}$$

$$(6.19)_{14}$$

以上最后一个积分可以写成以下标准形式:

$$\int d^{n-4}\underline{l}\frac{\underline{l}^2}{(\underline{l}^2+\delta)}=\int d\Omega_{(n-4)}\int_0^\infty dL\frac{L^{n-5}\cdot L^2}{(L^2+\delta)}。\qquad (6.20)_{14}$$

当 $n\to 4$ 时上式左边应用 $(1.22)_{14}$ 式实际上是个不定式,我们直接由上式右边来进行计算,利用 $(1.15)_{14}$ 和 $(1.16)_{14}$ 式可得上式为

$$\int d^{n-4}\underline{l}\frac{\underline{l}^2}{(\underline{l}^2+\delta)}=\int d\Omega_{(n-4)}\int_0^\infty dL\frac{L^{n-5}\cdot L^2}{(L^2+\delta)}$$

$$=\frac{(\sqrt{\pi})^{n-4}\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\cdot\Gamma\Big[\alpha-\frac{1}{2}(n-2)\Big]}{\Gamma(\alpha)\Gamma\Big[\frac{1}{2}(n-4)\Big]\delta^{\alpha-\frac{1}{2}(n-2)}}$$

$$\xrightarrow{\alpha=1,\ n\to 4}\frac{-(\sqrt{\pi})^{n-4}}{\delta^{\alpha-\frac{1}{2}(n-2)}}。\qquad (6.21)_{14}$$

代入 $(6.19)_{14}$ 式得到

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 2y\cdot di\Big(\frac{i\pi^2}{2}\Big)(\sqrt{\pi})^{n-4}\Big[\frac{1}{(\Delta_y-P_y)^{2-n/2}}$$

$$+\frac{1}{(\Delta_y-P_y)^{2-n/2}}\Big]\xrightarrow{n\to 4} i\pi^2。\qquad (6.22)_{14}$$

代入 $(6.14)_{14}$ 式得到反常项为

$$\boxed{A_{\mu\nu}(q,\ k)=\frac{-i}{2\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\sigma k_\rho。}\qquad (6.23)_{14}$$

这个结论和 Adler 用不同的方法所得到的结果是一致的。

以上我们计算了 Adler 反常项的最低级近似,Adler-Bardeen 在理论上已证明,高级修正只是把以上所得到的结论中的耦合常数换为重整化的耦合常数而已。

正如我们在矢量介子理论中已提到过,由于有质量的矢量介

子的传播子含有在高能时发散很严重的一项，它一般要破坏可重整性。不过 P. T. Mathewe, D. G. Boulware, Salam 和 Strathader 等曾指出如果有质量矢量介子是与守恒流相耦合，则有质量的矢量介子的传播子中的发散严重的一项，在经过 Stueckberg 变换后不参与耦合，从而又可使理论可重整化。因此原来无反常项时，则轴矢流守恒，理论本是可以重整的，可是出现了反常项，又破坏了轴矢流守恒，也就是破坏了理论的可重整性。因此想出各种办法来消除 Adler 反常，成了近来理论研究的重要课题。

§14.7 φ^4 理论的维数正规化

标量场 φ^4 理论的拉氏量如下，参看 $(10.4)_{13}$ 式

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2+m^2\varphi^2]-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \qquad (7.1)_{14}$$

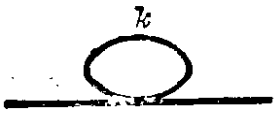


图 14-5

考虑最低级自能修正，（虽然我们在§13.7中讨论过，如果我们把 φ^4 项理解为正规乘积 $N(\varphi^4)$，则所有单粒子线圈图都可抵销而不予考虑，为了简单的示例我们还是考虑右图的计算）如图所示其贡献为（参看 $(1.21)_{14}$ 式）：

$$\Sigma=\frac{i\lambda}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2+m_R^2-i\epsilon}$$

$$=-\frac{\lambda}{2(2\pi)^n}(\sqrt{\pi})^n\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(1)}(m_R^2)^{-1+\frac{n}{2}}$$

$$=+\frac{\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^{n/2}}m_R^2\cdot\left(\frac{m_R^2}{\mu^2}\right)^{-\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)+\cdots \qquad (7.2)_{14}$$

以上考虑到 λ 的量纲 $[\lambda]=\Lambda^{r-n}=(\Lambda^2)^{\epsilon}$，其中 $\epsilon=2-\frac{n}{2}$，我们引进 $(\mu^2)^{-\epsilon}$ 因子使得 $\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}$ 是无量纲的。类似 $(2.9)_{14}$ 和 $(2.10)_{14}$ 式可知场量重整化常数定义为（采用最小减除程序）：

$$\frac{Z_F^{-1}}{k^2+m^2+\Sigma}=\frac{1}{k^2+m_R^2+\text{有限项}}。 \qquad (7.3)_{14}$$

得到在一级近似下

$$m^2=m_R^2-\frac{\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}m_R^2}{2(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}=Z_m^2m_R^2。\qquad (7.4)_{14}$$

$$Z_m^2=1-\frac{\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\cdot\frac{1}{\epsilon},\qquad (7.5)_{14}$$

$$Z_B\sim 1,$$

$$\lambda\sim\lambda_R\qquad (7.6)_{14}$$

由此看来在一级近似下，我们没有得到场量重整化的修正项。要得到这种修正项，需要考虑自能的高级修正。要考虑高级的自能修正，需要考虑相互作用常数的高一级修正。下面我们就来讨论角点的二级修正。其贡献如下图所示。实际上在维数正规化的

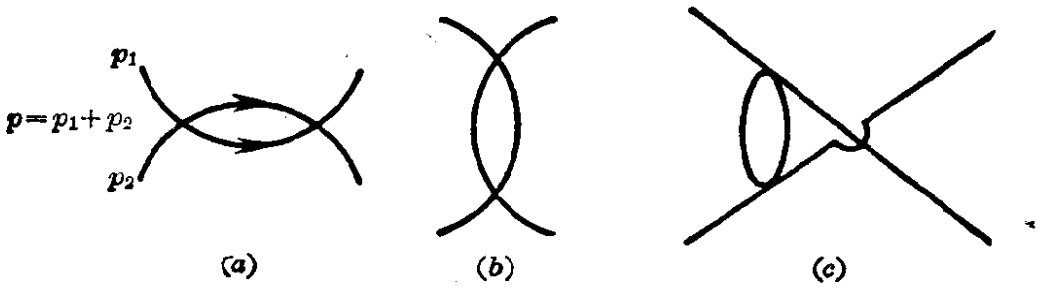


图 14-6

方法下，这三个图形的发散部分都与外粒子线的动量无关，而且彼此相等。我们现在只计算它们的发散部分，所以我们只需计算其中一个图形，然后再乘以 3。例如我们计算图形 (a)（对称因子 $=\frac{1}{2}$）参看 $(1.6)_{12}$ 和 $(1.21)_{14}$ 式

$$\frac{i\lambda^2}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2+m_R^2)[(k-p)^2+m_R^2]}$$

$$=\frac{i\lambda^2}{2}\Gamma(2)\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{d\alpha\,d\beta\,\delta(\alpha+\beta-1)}{[\alpha(k^2+m_R^2)+\beta\{(k-p)^2+m_R^2\}]^2}$$

$$=\frac{i\lambda^2}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{d\alpha}{[k^2-2(1-\alpha)kp+m_R^2+(1-\alpha)p^2]^2}$$

$$=-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2}\Gamma(\epsilon)\int_0^1 d\alpha[m_R^2+p^2\alpha(1-\alpha)]^{-\epsilon}$$

$$= -\frac{\lambda^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)\int_0^1 d\alpha\left[\frac{m_R^2+p^2\alpha(1-\alpha)}{\mu^2}\right]^{-\epsilon}$$

$$= -\frac{\lambda^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\int_0^1 d\alpha\cdot\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)$$

$$\cdot\left(1-\epsilon\ln\frac{m_R^2+p^2(1-\alpha)\alpha}{\mu^2}\right)。 \qquad (7.7)_{14}$$

三个图形总共贡献就是上式乘以3。

$$\Lambda^4(p,\ n) = -\frac{3\lambda^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\cdot\frac{1}{\epsilon}+\text{有限项}$$

$$=\Lambda_p^4+\text{有限项} \qquad (7.8)_{14}$$

同样以上的$\epsilon=2-\frac{n}{2}$·Λ_p^4表示Λ^4的极点部份，类似$(2.22)_{14}$式角点重整化常数

$$\boxed{Z_\lambda^{-1}=1+\Lambda_p^4=1-\frac{3\lambda^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\cdot\frac{1}{\epsilon}。} \qquad (7.9)_{14}$$

类似$(2.7)_{14}$式，重整化的相互作用常数λ_R有以下关系

$$\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}=Z_B^{-2}Z_\lambda\lambda_R\sim\left(1+\frac{3\lambda^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\cdot\frac{1}{\epsilon}\right)\lambda_R。 \qquad (7.10)_{14}$$

由以上计算结果可以看出，所有重整化常数都与质量无关。在更高级近似的计算中，当我们把所有同数量级图形都加以考虑时，所得的重整化常数依然是与质量无关的。

为了进行比较，下面我们以通常的场论中消除发散方法，对上面四粒子角点修正再计算一次，由以上的分析知道四粒子角点修正$\Lambda^4(p,\ 4)$是发散的，而且一般是p_i的函数。为了消除发散通常在拉氏量中引进抵销项$\mathscr{L}'=\frac{A\lambda\varphi^4}{4!}$，选择适当的$A$值(也是发散的)可以消除$\Lambda^4(p,\ 4)$中的发散值。不过$\mathscr{L}'$对角点的贡献只是一个(发散的)与$p_i$无关的常数项，因此$\mathscr{L}'$的引进实际上相当于把$\Lambda^4(p,\ 4)$在某一确定的$p_i$点上定标，使它成有限的。单纯满足消除发散的要求，$A$的取值是有不确定性的，$A$值是可以允许有一个有限值的差异。这个不确定性和我们所取定标的p_i点不确定性相联系的。不过这并不应影响我们的物理结果。这就是重整化

群的依据。

按照通常消除发散方法，我们把 $(7.7)_{14}$ 式积分在 $p=0$ 附近展开(并在 k 空间进行坐标平移)

$$\begin{aligned}\Lambda^4(p)&=\frac{i\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d\alpha}{[k^2+m_R^2+\alpha(1-\alpha)p]^2}\\&=\frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4}\int^{\Lambda}\frac{dk\,d\alpha}{[k^2+m_R^2]^2}\\&\quad+\left\{\frac{-i\lambda^2}{(2\pi)^4}\int^{\Lambda}\frac{dk\,d\alpha\cdot\alpha(1-\alpha)}{[k^2+m_R^2+\alpha(1-\alpha)s]^3}\right\}s+\cdots\end{aligned}\tag{7.11}_{14}$$

上式中只有第一项是对数发散的，以下各项积分都是有限的。第一项发散积分可以通过标准方法计算得到

$$\begin{aligned}&\frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4}\int^{\Lambda}\frac{dk\,d\alpha}{[k^2+m_R^2]^2}\\&=-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{\pi^2}{2}\left\{1+\frac{1}{(1-\Lambda^2/m^2)}+\ln\left(1-\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right\}。\end{aligned}\tag{7.12}_{14}$$

为了消除发散并使结果与 Λ 无关，我们取 A 值为下式即可，

$$A=-\frac{\lambda\pi^2}{(2\pi)^4\cdot2}\left\{\frac{1}{(1-\Lambda^2/m^2)}+\ln\left(1-\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right\}。\tag{7.13}_{14}$$

上式 $(7.13)_{14}$ 式的 A 值和 $(7.8)_{14}$ 式中的 Λ_p^4 值是不相同的，不过可以证明 $(7.11)_{14}$ 式中所余有限部分，和 $(7.8)_{14}$ 式中的有限部分却是一致的。其实 $(7.11)_{14}$ 式第二项中的括号内就是

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Lambda^4(p)}{\partial p}&=\frac{-i\Lambda^2}{(2\pi)^4}\int\frac{dk\,d\alpha\cdot\alpha(1-\alpha)}{[k^2+m_R^2+\alpha(1-\alpha)p]^3}\\&=\frac{-i\pi^2\lambda^2}{(2\pi)^4\Gamma(3)}\int_0^1\frac{d\alpha\cdot\alpha(1-\alpha)}{[\alpha(1-\alpha)p+m_R^2]}。\end{aligned}\tag{7.14}_{14}$$

把上式对 p 积分得到

$$\begin{aligned}\Lambda^4(p)&=\frac{\lambda^2\pi^2}{2(2\pi)^4}\int_0^1d\alpha\ln[\alpha(1-\alpha)p^2+m_R^2]+O\\&=\frac{\lambda^2\pi^2}{2(2\pi)^4}\left[-2+2\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{p^2}\right)^{1/2}\right.\end{aligned}$$

$$\cdot \ln \frac{\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{p^2}\right)^{1/2}\right]}{\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{p^2}\right)^{1/2}\right]}\Big]+C。 \qquad (7.15)_{14}$$

其中 C 为积分常数，这个常数值的不确定性和抵销项 A 可以有不确定性相关联。容易看出上式的表式实际上和 $(7.7)_{14}$ 或 $(7.8)_{14}$ 式的有限项是一致的。

§14.8 重整化群的简单回顾

对于质量为零的场论，例如无质量的标量场 φ^4 理论其拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{-1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi)+\frac{\lambda}{4!}\varphi^4。 \qquad (8.1)_{14}$$

其中没有具有量纲的参数。初看起来，在这样的参数都是无量纲的理论中不会出现质量的标度。不过实际上在这样的理论中却隐含着质量的标度。因为我们经常要对它进行重整化(即使无发散量出现也应要重整化)。在进行重整化时，我们需要在动量空间选取一点 μ (由于红外奇性的困难，对于零质量的理论，μ 不能取为零) 来定义重整化的质量和重整化的相互作用常数等参量。例如对于 φ^4 理论，四点 Green 函数 $\Gamma^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 在 $p_i^2=-\mu^2$ 处的数值常定义为重整化的相互作用常数 $\lambda=\Gamma(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$。这样我们就引进了质量标度。显然重整化参量都是 μ 的函数。在动量空间里所选取的这样一点通常称为重整化点。在以前第十一章里重整化点是取在质量壳层上的。上述的在无量纲的理论中出现了质量标度的情况称为量纲改变 (Dimensional Transmutation)。

虽然把重整化点选在质量壳层上，所得重整化量可以具有直接的物理意义，可是这并不是必要的。其实重整化点 μ 是一个任意选取的参量，任何对 μ 的改变只是和重整化参量的重新定义和场量的重新标度相当，并不改变物理实质。重整化点的不同选取，将导致不同的有限部分，它们之间可由有限的标度变换相联系。但

它们都是等效的，它们会给出相同的矩阵元。这种重整化点μ的不同选取，或者说参量的不同的重新标度形成半群，通常称为重整化群。表明可重整化理论，在通过重新标度变换，或改变重整化点的变换下，保持不变的对称性质的方程称为重整化方程。

早在1953年Stueckelberg和Peterman(Helv. Phys. Acta **26** 499(1953))就注意到重整化群的存在，以及它在量子场论中的重要地位，并且还指出引进相应的无限小算符的可能性，从而指出构造Lie微分方程的可能性。1954年，Gell-Mann和Low(Phys. Rev. **95** 1300(1954))得到从不同的观点出发但本质上相同的重整化群方程，并把它用于量子电动力学中的Green函数，分析Green函数在大动量(类空)区的渐近行为。不过他未考虑到重整化的光子Green函数的横向性质。在Gell-Mann和Low的方程里，粒子质量参量看成是不随μ的不同而改变，因此在方程中不出现对m的微商$\partial/\partial m$项。Gell-Mann和Low的方程限于应用于量子电动力学。

由于在重整化群方程中讨论的大动量常属于类空的，同时电动力学不是渐近自由的，在大动量区又不能用微扰计算。因此在当时其实用价值是有限的。在场论中重整化群方法当时并未受到应有的重视。直到深度非弹以及l-N散射过程(在这里动量转移属于类空区)的大量研究，实验发现在Bjorken极限下的标度性，以及在Q. C. D理论中的渐近自由性的证明。同时重整化群方程的应用技巧也有所发展。重整化群方法才又受到人们的广泛重视。

1970年Callan-Symanik又导出了新的重整化群方程(Phys. Rev. **D2** 1541(1970)), (Commun. Math. Phys. **18** 227(1970))。对于大类空动量区这个方程就归结为早在1956年就由Qsviannikov (Dokl. Akad nauk SSSR **109** 1112 (1956))所导出的重整化群方程。在Callan-Symanzik方程中考虑到当μ改变时，将引起质量参量的标度的改变，因此方程中出现有$m\frac{\partial}{\partial m}$项。方程中包括有质量插入项作为这个方程的非齐次项。只有在大动

量区忽略了质量插入项时才是可解的，而且也只对动量的领头项才是适用的。

1973 年 t'Hooft-Weinberg 又发展第三套的所谓零质量的重整化群方程(Nucl. Phys. **B61**, 455 (1973)), (Phys. Rev. **D8** 3497 (1973)) 在这里引进了重整化质量 m_R, 它和重整化的相互作用常数一样，并不是可以直接测量的。不过 m_R 和 λ_R 都是表征理论的参量，而且所有物理量都可表示成 m_R 和 λ_R 的函数。这新的一套方程是齐次的。而且对于所有动量区都是可以求解的。

§14.9 重整化群方程

我们以后约定，经过重整化以后的量都标以下标 R, 未经过重整化的量则不加标记。考虑 n 点 $1PI$ Green 函数

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, q, m, \Lambda)。 \qquad (9.1)_{14}$$

括号内符号表示 $\Gamma^{(n)}$ 对它们的依赖。p_i 为 n 点的动量，g 为相互作用常数，m 为质量，Λ 为截断动量。未重整化的量与重整化点 μ 无关。如果采用维数正规化，则

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, g, m, \epsilon)。 \qquad (9.2)_{14}$$

其中

$$\epsilon=2-\frac{n}{2},$$

n 为时空的维数。重整化以后

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, \mu)。 \qquad (9.3)_{14}$$

其中 μ 为重整化点。$\Gamma_R^{(n)}$ 和 $\Gamma^{(n)}$ 之间由相应的重整化常数相联系。由 $(9.18)_{13}$, $(2.3)_{14}$, $(2.5)_{14}$ 或 $(2.12)_{14}$, $(2.18)_{14}$ 式可得到:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, \mu)=Z_D^{N_D/2}Z_B^{N_B/2}\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, g, m, \epsilon),\\ \text{或}\quad&\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, \mu)=Z_D^{N_D/2}Z_B^{N_B/2}\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i, g, m, \epsilon)。\end{aligned}\right\} \qquad (9.4)_{14}$$

其中 Z_D 和 Z_B 分别为 Dirac 粒子场量和 Bose 场量的重整化常数。N_D 和 N_B 分别为 Dirac 外粒子和 Bose 外粒子的数目。引进

$$Z_\Gamma = Z_D^{N_D/2} Z_B^{N_B/2}。 \qquad (9.5)_{14}$$

当采用动量截断正规化时 $Z_\Gamma\left(g, m, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$。当采用维数正规化时 $Z_\Gamma(g, \mu)$与m无关，后者是属于质量无关的正规化程序。

把 $(9.4)_{14}$ 式对 μ 微商并保持 g 和 m 不变。不过要注意到 $g_R(\mu)$ 和 $m_R(\mu)$ 是 μ 的函数。考虑到 $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ 与 μ 无关得到。

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R} + \mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i, g_R, m_R, \mu)$$
$$= \mu\frac{\partial \ln Z_\Gamma}{\partial\mu}\tilde{\Gamma}_R。 \qquad (9.6)_{14}$$

引进

$$\beta(g_R) \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g_R(g\mu^{2\rho\epsilon}, \mu, \epsilon), \qquad (9.7)_{14}$$

$$\gamma_\Gamma(g_R) \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\Gamma = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{N_D}{2}\ln Z_D + \frac{N_B}{2}\ln Z_B\right]$$
$$= \frac{N_D}{2}\gamma_D + \frac{N_B}{2}\gamma_B。 \qquad (9.8)_{14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma_D &\equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_D,\\ \gamma_B &\equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_B。\end{aligned}\right\} \qquad (9.9)_{14}$$

$\rho=1$ 对于 φ^4 理论，参看$(4.4)_{14}$式，

$\rho=\frac{1}{2}$ 对于 Yakawa 相互作用，参看$(4.5)_{14}$式。

$$\mu\frac{\partial m_R}{\partial\mu} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_m^{-1}m) = \mu\frac{mZ_m}{Z_m}\frac{\partial Z_m^{-1}}{\partial\mu}$$
$$= m_R\mu\frac{\partial \ln Z_m^{-1}}{\partial\mu} = -m_R\gamma_m。 \qquad (9.10)_{14}$$

以上已引进了

$$\gamma_m \equiv \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m。 \qquad (9.11)_{14}$$

把以上的定义代入 $(9.6)_{14}$ 式就得 t'Hooft Weinberg 形式的重整化群方程

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}-\gamma_m(g_R)m_R\frac{\partial}{\partial m_R}-\left(\frac{N_D}{2}\gamma_D+\frac{N_B}{2}\gamma_B\right)\right]\tilde{\Gamma}_R(p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=0。$$

$(9.12)_{14}$

应该指出，以上引进的重整化群的函数β和γ都不再是μ的函数。因为它们是无量纲的，其中μ只能以$\frac{\Lambda}{\mu}$的形式出现，而另一方面要保证上式成立，它们又应与Λ无关，所以它们也与μ无关，它们只是g_R的函数。当具体计算β或γ时，我们会发现实际情况就是这样。

由$(4.10)_{14}$式知道$\Gamma^{N_B}(k)$的量纲为

$$[\Gamma^{N_B}(k)]=\Lambda^{-N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)}。\qquad (9.13)_{14}$$

同样由$(4.11)_{14}$式得到

$$[\Gamma^{N_D}(p)]=\Lambda^{-N_B\left(\frac{n-1}{2}\right)}。\qquad (9.14)_{14}$$

由$(4.14)_{14}$式得到

$$[\tilde{\Gamma}^{N_D+N_B}(k)]=\Lambda^{n-N_B\left(\frac{n}{2}-1\right)-N_D\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\Lambda^{D_\Gamma}。\qquad (9.15)_{14}$$

当$n=4$时

$$D_\Gamma=4-N_B-\frac{3}{2}N_D。\qquad (9.16)_{14}$$

类似$(4.17)_{14}$式的考虑，当动量的标度变换时$\tilde{\Gamma}(k)$应有相应的变换。

$$\tilde{\Gamma}_R(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=\lambda^{D_\Gamma}\tilde{\Gamma}_R(p_i,\ g_R,\ m_R/\lambda,\ \mu/\lambda)。$$

$(9.17)_{14}$

把上式对$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}$微商

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{\Gamma}_R(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$$

$$=D_\Gamma\lambda^{D_\Gamma}\tilde{\Gamma}_R\left(p_i,\ g_R,\ \frac{m_R}{\lambda},\ \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

$$+\lambda^{D_\Gamma}\left[\lambda\frac{\partial\left(\frac{m_R}{\lambda}\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial m_R}{\partial\left(\frac{m_R}{\lambda}\right)}\frac{\partial}{\partial m_R}\right.$$

$$\left.+\lambda\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\tilde{\Gamma}_R\left(p,\ g_R,\ \frac{m_R}{\lambda},\ \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

$$=D_\Gamma\tilde{\Gamma}_R(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$$

$$+\left(-m_R\frac{\partial}{\partial m_R}-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\tilde{\Gamma}_R(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)。$$

所以

$$\boxed{\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m_R\frac{\partial}{\partial m_R}-D_\Gamma\right]\cdot\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=0。}\qquad(9.18)_{14}$$

这是由量纲分析所得到的方程。把 $(9.18)_{14}$ 和 $(9.12)_{14}$ 式结合起来消除 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ 就得到

$$\boxed{\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}-\beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}+[1+\gamma_m(g_R)]m_R\frac{\partial}{\partial m_R}-D_\Gamma+\left(\frac{N_D}{2}\gamma_D+\frac{N_B}{2}\gamma_B\right)\right]\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=0。}$$

$$(9.19)_{14}$$

应该指出 $(9.12)_{14}$ 式是与 λ 无关的而与 μ 有关的方程，而 $(9.18)_{14}$ 式是与 λ 有关而不出现对 μ 微商的方程。由此看来我们可以有两种等效的看法来理解重整化群方程的意义。(1) 由 $(9.12)_{14}$ 式看来，它表示 μ 是可以任意选取的。当 μ 改变时 g_R 和 m_R 有相应的改变，而理论的物理结论保持不变。也就是在重整化点变换下

$$\mu\to\mu'=e^t\mu=\bar{\mu}(t)=\dot{\mu}。\qquad(9.20)_{14}$$

物理结论保持不变。其中 t 为某一参量。理论的物理实质在重整

化点变换下保持不变，正如我们已讲过的，这正是重整化群的物理基础。为了说明这种不变性，我们来考虑无量纲的 1PI Green 函数的比值。

$$\frac{\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)}{\tilde{\Gamma}^{(n)}(\mu,\ g_R,\ m_R,\ \mu)}\equiv F^{(n)}\left(\frac{p_i}{\mu},\ g_R,\ m_R\right)。\quad (9.21)_{14}$$

其中 $\tilde{\Gamma}^{(n)}(\mu,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$ 表示所有的 p_i 都以 $p_i^2=-\mu^2$ 代入。类似 $(9.12)_{14}$ 式的推导，$F^{(n)}$ 满足相应的重整化群方程 $(9.12)_{14}$ 式只是没有 γ_Γ 项，即

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}-\gamma_m(g_R)m_R\frac{\partial}{\partial m_R}\right]\cdot F^{(n)}\left(\frac{p_i}{\mu},\ g_R,\ m_R\right)=0。\quad (9.22)_{14}$$

另一方面，在 $(9.20)_{14}$ 式变换下，g_R 和 m_R 有相应的变换，但 $F^{(n)}\cdot\left(\frac{p_i}{\mu},\ g_R,\ m_R\right)$ 保持不变

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\dot{g}_R\frac{\partial}{\partial g_R}+\dot{m}_R\frac{\partial}{\partial m_R}\right)F\left(\frac{p_i}{\mu},\ g_R,\ m_R\right)=0。\quad (9.23)_{14}$$

g_R 和 m_R 通过 μ 都是 t 的函数，分别记以 $\bar{g}_R(t)$ 和 $\bar{m}_R(t)$，且 $\bar{g}_R(0)=g_R$ 和 $\bar{m}_R(0)=m_R$，分别称为运动的重整化的相互作用常数和运动的重整化质量，它们表示当重整化点选为 $\bar{\mu}(t)$ 时的重整化参量的数值。把上式和 $(9.22)_{14}$ 式相比就得到

$$\boxed{\beta(\bar{g}_R(t))=\dot{g}_R=\frac{\partial}{\partial t}\bar{g}_R(t),\ \bar{g}_R(0)=g_R。}\quad (9.24)_{14}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&-\gamma(\bar{g}_R(t))\bar{m}_R=\dot{\bar{m}}_R=\frac{\partial\bar{m}_R}{\partial t},\\ \text{或}\quad &-\gamma_m(\bar{g}_R(t))=\frac{\partial\ln\bar{m}_R(t)}{\partial t}。\end{aligned}}\quad (9.25)_{14}$$

以上两式就是当重整化点改变时，$\bar{g}_R$ 和 $\bar{m}_R$ 相应改变的规律。它们分别和 $(9.7)_{14}$，$(9.10)_{14}$ 式是一致的，满足这样规律才可使

$F\left(\frac{p_i}{\mu}, g_R, m_R\right)$ 保持不变。

(2) 由 $(9.19)_{14}$ 式看来，重整化群(和量纲分析相结合)方程表示当所有动量同时改变相同的标度时，理论结构的变化。类似以上 $(9.24)_{14}$ 和 $(9.25)_{14}$ 式的推导，当动量有标度变换时

$$\lambda \to e^{t}\lambda = \bar{\lambda}(t) = \overset{+}{\lambda}_{\circ} \qquad (9.26)_{14}$$

由 $(9.19)_{14}$ 式可导出 $g_R(\lambda(t))$ 和 $m_R(\lambda(t))$ 等的相应变换。而 $\tilde{\Gamma}^n_R(\lambda p_i, g_R, m_R, \mu)$ 的高(低)能渐近行为，将取决于 $t \to \infty(-\infty)$ 时的 $g_R(\lambda(t))$ 和 $m_R(\lambda(t))$ 等的行为。具体情况将可在下节讨论 $(9.19)_{14}$ 式的求解时看出。

§14.10 重整化群方程的解

方程 $(9.19)_{14}$ 式是一阶拟线型偏微分方程。解这类方程可通过先解以下的微分方程组。

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dg_R}{-\beta(g_R)} = \frac{dm_R}{[1+\gamma_m(g_R)]m_R} = \frac{d\tilde{\Gamma}^{(n)}_R(\lambda p_i, g_R, m_R, \mu)}{[D_\Gamma - \gamma_\Gamma(g_R)]\tilde{\Gamma}^{(n)}_R(\lambda p_i, g_R, m_R, \mu)}_{\circ} \qquad (10.1)_{14}$$

其中我们引进了(参看(9.8)式)

$$\gamma_\Gamma(g_R) = \frac{N_D}{2}\gamma_D(g_R) + \frac{N_B}{2}\gamma_B(g_R)_{\circ} \qquad (10.2)_{14}$$

解 $(10.1)_{14}$ 式方程可得

$$\ln\lambda_0 - \ln\lambda = \int_{g_0}^{g_R} \frac{dg'_R}{\beta(g'_R)}, \qquad (10.3)_{14}$$

$$m_0 = m_R \exp\left[\int_{g_0}^{g_R} \frac{[1+\gamma_m(g'_R)]}{\beta(g'_R)} dg'_R\right], \qquad (10.4)_{14}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{R0} = \tilde{\Gamma}^{(n)}_R \exp\left[\int_{g_1}^{g_R} \frac{(D_\Gamma - \gamma_\Gamma(g'_R))}{\beta(g'_R)} dg'_R\right]_{\circ} \qquad (10.5)_{14}$$

由此得到 $(9.18)_{14}$ 式的一般解

$$F(\ln\lambda_0, m_0, \tilde{\Gamma}_{R0}) = 0_{\circ} \qquad (10.6)_{14}$$

F 是以 $\ln\lambda_0$, m_0, 和 $\tilde{\Gamma}_{R0}$ 为宗量的任意函数。

也就是一般解为

$$F\Big(\ln\lambda+\int_{g_0}^{g_R}\frac{\alpha g'}{\beta(g')},\ m_R\exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{[1+\gamma_m(g'_R)]}{\beta(g'_R)}dg'_R,$$
$$\tilde{\Gamma}_R^n\exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{(D_\Gamma-\gamma_\Gamma(g))}{\beta(g)}dg\Big)=0。\qquad(10.7)_{14}$$

由上式可解出

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$$
$$=\exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{\gamma_\Gamma(g)-D_\Gamma}{\beta(g)}dg\cdot\Phi\Big(\ln\lambda+\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg}{\beta(g)},$$
$$m_R\exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg\Big)。\qquad(10.8)_{14}$$

上式中$(\gamma_\Gamma(g)-D_\Gamma)$相伴出现，而$D_\Gamma$是$\tilde{\Gamma}$的量纲。故$\gamma_\Gamma(g)$常被称为反常量纲。它来自场量重整化常数。其中$\Phi$为以$\ln\lambda+\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg}{\beta(g)}$和$m_R\exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg$为宗量的任意函数。引进$\bar{g}(\lambda)$称为运动的有效相互作用常数使得

$$\ln\lambda+\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg}{\beta(g)}=\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)}。\qquad(10.9)_{14}$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned}&\ln\lambda=\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)},\\&\frac{d\ln\lambda}{d\bar{g}(\lambda)}=\frac{1}{\beta(\bar{g}(\lambda))}。\end{aligned}\right\}\qquad(10.10)_{14}$$

或者说$\bar{g}(\lambda)$满足以下方程和初始条件。

$$\boxed{\left.\begin{aligned}&\beta[\bar{g}(\lambda)]=\frac{d\bar{g}(\lambda)}{d\ln\lambda}=\lambda\frac{d\bar{g}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d\bar{g}[\lambda(t)]}{dt},\\&\bar{g}(1)=g_R。\end{aligned}\right\}}$$

$$(10.11)_{14}$$

这样宗量由$(10.9)_{14}$式

$$\ln\lambda+\int_{g_0}^{g_R}\frac{dg}{\beta(g)}\Rightarrow\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)}$$

相当于原宗量中$\lambda\to1$，同时$g_R\to\bar{g}(\lambda)$。

同样可以引进 $\bar{m}_R(\lambda)$ 称为运动的有效质量，使得

$$m_R \exp\int_{g_1}^{g_R}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg=\bar{m}(\lambda)\exp\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg。$$

$$(10.12)_{14}$$

$$\frac{\bar{m}(\lambda)}{m_R}=\exp\left[\int_{g_1}^{g_R}-\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}\right]\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg$$

$$=\exp\left\{-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg\right\}$$

$$=\exp\left[-\int_1^{\lambda}[1+\gamma_m[g(\lambda)]]d\ln\lambda\right]。\quad(10.13)_{14}$$

$$\ln\frac{\bar{m}(\lambda)}{m_R}=-\int_1^{\lambda}[1+\gamma_m[g(\lambda)]]d\ln\lambda$$

$$=-\ln\lambda-\int_1^{\lambda}\gamma_m[g(\lambda)]d\ln\lambda$$

$$=-\ln\lambda-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}dg。\quad(10.14)_{14}$$

由上式第一步可知

$$\frac{d\ln\bar{m}(\lambda)}{d\ln\lambda}=-[1+\gamma_m(\lambda)],$$

或

$$-[1+\gamma_m(\lambda)]\bar{m}(\lambda)=\lambda\frac{d}{d\lambda}\bar{m}(\lambda)。\quad(10.15)_{14}$$

由 $(10.14)_{14}$ 式可得

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{m}(\lambda)&=\frac{m_R}{\lambda}\exp\left[-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}dg\right]\\&=\frac{m_R}{\lambda}\exp\left[-\int_1^{\lambda}\gamma_m(\lambda)d\ln\lambda\right]。\end{aligned}}\quad(10.16)_{14}$$

由上式可知 $\bar{m}(1)=m_R$。以上 $(10.12)_{14}$ 式也只是相当把第二宗量中 $m_R\to\bar{m}(\lambda)$ 同时 $g_R\to\bar{g}(\lambda)$。

把 $(10.11)_{14}$ 和 $(10.12)_{14}$ 式代入 $(10.8)_{14}$ 式得到

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)$$

$$=\exp\left[\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}+\int_{\bar{g}(\lambda)}^{g_R}\right]\frac{\gamma_\Gamma(g)-D_\Gamma}{\beta(g)}dg\cdot\Phi\left[\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)},\right.$$

$$\overline{m}(\lambda)\exp\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg\Big]$$

$$=\lambda^{D_\Gamma}\exp\Big[-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g)}{\beta(g)}dg\Big]\exp\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g)-D_\Gamma}{\beta(g)}dg$$

$$\cdot\Phi\Big[\int_{g_0}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)},\ \overline{m}(\lambda)\exp\int_{g_1}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{[1+\gamma_m(g)]}{\beta(g)}dg\Big]。$$

$(10.17)_{14}$

上式右边除了前面因子 $\lambda^{D_\Gamma}\exp\Big[-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g)}{\beta(g)}dg\Big]$ 以外，其余各项实际就是 $(10.8)_{14}$ 式的右边，不过其中 $\lambda\to1$，$m_R\to\overline{m}(\lambda)$ 同时 $g_R\to g(\lambda)$ 而已，所以我们最后得到

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=\lambda^{D_\Gamma}\exp\Big[-\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g)}{\beta(g)}dg\Big]\cdot\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i,\ \bar{g}(\lambda),\ \overline{m}(\lambda),\ \mu)。}$$

$(10.18)_{14}$

这是由重整化群和量纲分析相结合所得到的一个很重要的关系式，它联系了 $1PI$ Green 函数在 λp_i 区和在 p_i 区的行为，它表明在大动量 λp 区的动力学性质，是可由在 p_i 区的，其有效相互作用常数为 $\bar{g}(\lambda)$，其有效质量为 $\overline{m}(\lambda)$ 的动力学来决定。

我们以上所得到的 t'Hooft-Weinberg 方程以及 $(10.18)_{14}$ 式解对所有动量都适用的。而以前的 Callan-Symanzik 方程，则只有在忽略质量插入项，在高动量区才是可解的。

如果 $\gamma_m[g(\lambda)]>-1$ 且 $\lambda>1$ 则由 $(10.13)_{14}$ 式

$$\overline{m}(\lambda)=m(R)\exp\Big[-\int_1^\lambda[1+\gamma_m[g(\lambda)]\frac{d\lambda}{\lambda}\Big]。$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，$\overline{m}(\lambda)\to0$。再假定 $\tilde{\Gamma}_R^{(n)}$ 对 $\overline{m}(\lambda)$ 的头 l 级微商都是有限的。我们可以把 $(10.18)_{14}$ 式右边的 $\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_i\bar{g}(\lambda),\ \overline{m}(\lambda),\ \mu)$ 在 $\overline{m}(\lambda)=0$ 附近展开得到

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=\lambda^{D_\Gamma}\exp\Big[-\int_1^\lambda\frac{\gamma_\Gamma(\lambda)}{\lambda}d\lambda\Big]$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{l}\frac{(\overline{m}(\lambda))^k}{k!}\tilde{\Gamma}_R^{(k)}(p_i,\ \bar{g}(\lambda),\ 0,\ \mu)。\qquad(10.19)_{14}$$

不难知道上式中的 $\tilde{\Gamma}_R^{(k)}$ 是 $\tilde{\Gamma}_R^{(n)}$ 对 $\bar{m}(\lambda)$ 的 k 次微商。上式的领头项为

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p_i,\ g_R,\ m_R,\ \mu)=\lambda^{D_\Gamma}\exp\left[-\int_1^\lambda\frac{\gamma_\Gamma(\lambda)}{\lambda}d\lambda\right]\cdot\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p,\ \bar{g}(\lambda),\ 0,\ \mu)。}\qquad(10.20)_{14}$$

这正是当忽略了质量插入项时的 Callan-Symanzik 方程所常见的解。

§14.11 重整化群函数的性质与 Green 函数的渐近行为

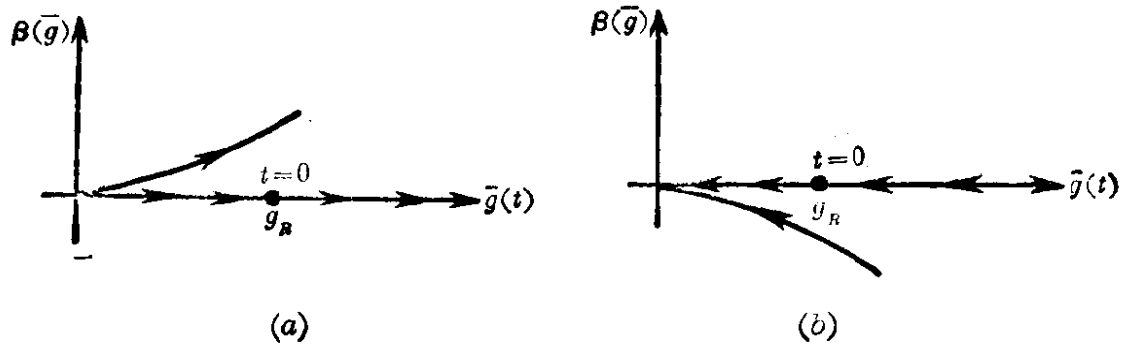
首先讨论 $\beta(\bar{g})$ 的性质。由通常微扰计算可以得到 $\beta(\bar{g})$ 对于 g 的级数，在下节我们将给出具体的计算。

$$\beta(g)=a_1g^3+a_2g^5+a_3g^7+\cdots。\qquad(11.1)_{14}$$

$g=0$ 处是 $\beta(g)$ 的零点。由 $(10.10)_{14}$ 式知道

$$\frac{d\bar{g}[\bar{\lambda}(t)]}{dt}=\beta[\bar{g}(\lambda)]。\qquad(11.2)_{14}$$

如果 $\beta(g)$ 无其他零点，则当 $\beta(g)>0$ 时 $\bar{g}[\bar{\lambda}(t)]$ 将随 t 增加而增加，如图 14-3(a)所示。反之当 $\beta(g)<0$ 时，$\bar{g}[\bar{\lambda}(t)]$ 随 t 增加而下降，如图 14-3(b) 所示。图中箭头表示当 t 增加时 $g[\bar{\lambda}(t)]$ 和 $\beta(g)$ 的运动方向。



(a)　　(b)

图 14-7

如果 $\beta(g)$ 除了 $g=0$ 处的零点外还有其他零点 g_∞，即 $\beta(g_\infty)=0$。这时分两种情况讨论。(1) $\frac{g_\infty-g_R}{\beta(g_R)}>0$ 则当 t 增加 $t\to\infty$ 时，$\lambda(t)\to\infty$，$\bar{g}(\lambda)\to g_\infty$。这时 g_∞ 称为紫外稳定固定点(记以 UV 表示紫外固定点)。反之当 t 下降 $t\to-\infty$ 时，$\lambda\to0$ 时 $\bar{g}(\lambda)=0$ 达到 $\beta(0)=0$ 的零点，这时 $\bar{g}=0$ 称为红外固定点(记以 IR)，如图 14-4(a) 所示。(2) 如果 $\frac{g_{-\infty}-g_R}{\beta(g_R)}<0$，当 t 增加 $\bar{\lambda}(t)\to\infty$ 时，$\bar{g}(\lambda)\to0$ 如图 14-4(b) 所示。这时 $g(\lambda)=0$ 这一点称为紫外稳定固定点，记以 UV。反之，当 t 下降 $t\to-\infty$ 时，$\lambda\to0$ $\bar{g}(\lambda)\to g_{-\infty}$。

当然 $\beta(\bar{g})$ 函数还可能有更复杂的情况。不过我们最感兴趣的是 $\beta(g)$ 在 $g\to0$ 附近的性质。实际上目前我们还只能在 $g=0$ 附近，用微扰方法来计算 $\beta(g)$。由以上分析看来，如果在 $g\to0$ 附近，$\beta(g)<0$，则 $g=0$ 是个紫外稳定固定点。当 $\lambda\to\infty$ 时，也即是所有动量都类空地趋于 ∞ 时。在这样的高能区，有效相互作用常数趋于零。

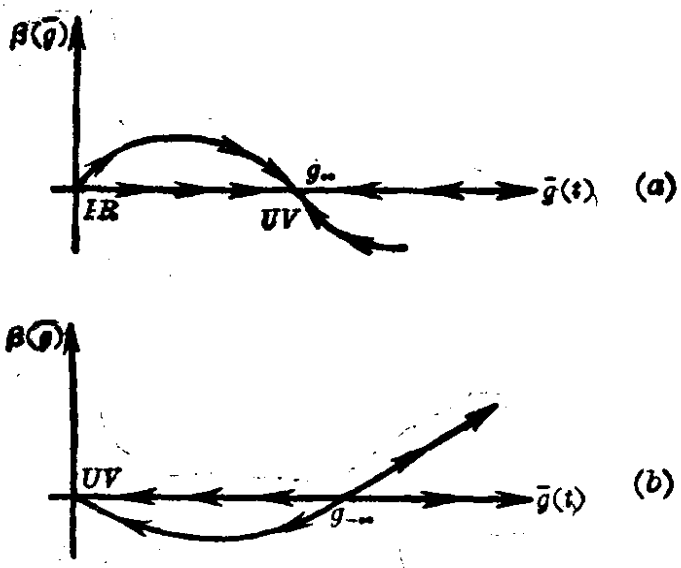


图 14-8

对于渐近自由的理论，$(11.1)_{14}$ 式右边系数 a_1 应是负值，把 $(11.1)_{14}$ 式代入 $(10.9)_{14}$ 式得到

$$\ln\lambda=\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{\beta(g)}\simeq\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{dg}{-|a_1|g^3+\cdots}$$

$$=\frac{1}{2|a_1|}\left[\frac{1}{[\bar{g}(\lambda)]^2}-\frac{1}{g_R^2}\right]+\cdots \qquad (11.3)_{14}$$

$$\boxed{\bar{g}^2_{(\lambda)}\simeq\frac{g_R^2}{1+2g_R^2|a_1|\ln\lambda}+\cdots=\frac{g_R^2}{1-2a_1g_R^2\ln\lambda}。} \qquad (11.4)_{14}$$

其中 g_R^2 是 g^2 当 k 在重整化点处 $k=k_R$ 时的值，而 $\bar{g}^2(\lambda)$ 则是 g^2 当 $k=\lambda k_R$ 时的值。

其次讨论反常量纲 $\gamma_\Gamma(\bar{g})$ 的性质。通常也只能通过微扰来计算 $\gamma_\Gamma(g)$。可以一般写出

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_\Gamma(\bar{g})&=b_1\bar{g}^2+b_2\bar{g}^4+\cdots=\frac{b_1g_R^2}{1+2|a_1|g_R^2\ln\lambda}+\cdots\\&=\frac{b_1g_R^2}{1-2a_1g_R^2\ln\lambda}+\cdots\simeq\frac{b_1}{2|a_1|\ln\lambda}+\cdots\end{aligned}} \qquad (11.5)_{14}$$

$$\int_{g_R}^{\bar{g}(\lambda)}\frac{\gamma_\Gamma(g)}{\beta(g)}dg=\int_1^\lambda\gamma_\Gamma(\lambda)d\ln\lambda\simeq\int\frac{b_1}{2|a_1|\ln\lambda}d\ln\lambda$$

$$=\frac{b_1}{2|a_1|}\ln(\ln\lambda)=L_\Gamma\ln(\ln\lambda)。 \qquad (11.6)_{14}$$

其中

$$L_\Gamma=\frac{b_1}{2|a_1|}=\frac{-3}{4}\frac{\gamma_\Gamma''(0)}{\beta'''(0)}。 \qquad (11.7)_{14}$$

再来讨论 $\gamma_m(\bar{g})$ 的性质，它也是通过微扰来计算的，一般可写成下式，类似以上的推导。

$$\gamma_m(\bar{g})=C_1\bar{g}^2+C_2\bar{g}^4+\cdots$$

$$\simeq\frac{C_1}{2|a_1|\ln\lambda}+\cdots=L_m(\ln\lambda)^{-1}+\cdots \qquad (11.8)_{14}$$

其中

$$L_m=\frac{C_1}{2|a_1|}=\frac{-3}{4}\frac{\gamma_m''(0)}{\beta'''(0)}。 \qquad (11.9)_{14}$$

由 $(10.16)_{14}$ 式

$$\bar{m}(\lambda)=\frac{m_R}{\lambda}\exp\left[-\int_1^\lambda\gamma_m(\lambda)d\ln\lambda\right]$$

$$= \frac{m_R}{\lambda} \exp[-L_m \ln(\ln \lambda)]$$

$$= \frac{m_R}{\lambda} (\ln \lambda)^{-L_m} \to 0。 \qquad (11.10)_{14}$$

当 $O_1>0$ 时，$L_m>0$，上式当 $\lambda\to\infty$ 时趋于零，这一点我们在前面已提到。

把$(11.6)_{14}$和$(11.10)_{14}$式代入$(10.20)_{14}$式得到当$\lambda\to\infty$时

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p, g_R, m_R, \mu) = \lambda^{D_r} (\ln \lambda)^{-L_r} \cdot \tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p, \bar{g}(\lambda), 0, \mu)。} \qquad (11.11)_{14}$$

$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p)$ 的渐近行为主要由 λ^{D_r} 来决定。这是我们由普通的量纲分析所得到的结论，现在看来重整化效应，又使它增加了一个 $(\ln \lambda)^{-L_r}$ 因子。这是由于外粒子线场量重整化常数 γ_r 而来，因此我们通常称 $\gamma_r(g)$ 为反常量纲。应该指出，上式右边 $\tilde{\Gamma}_R(p, \bar{g}(\lambda), 0, \mu)$ 中的 $\bar{g}(\lambda)$，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\bar{g}(\lambda)\to 0$ (对于渐近自由理论)，这样使得我们在高能区可以用微扰来计算 $\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\lambda p, g_R, m_R, \mu)$。

以上我们讨论了重整化函数 β、γ_r、γ_m 的性质和 Green 函数的渐近行为。这些讨论都是以微扰论的结果为基础的。这些重整化函数的微扰展开系数，例如 a、b 和 c 对于理论性质起着重要作用。这些系数 a, b 和 c 有待我们去具体地去计算才能确定。这将是我们在下一节所要讨论的内容。

§14.12 重整化群函数的计算

由 $(9.7)_{14}$, $(9.8)_{14}$, $(9.9)_{14}$, $(9.10)_{14}$ 和 $(9.11)_{14}$ 式看来，对于重整化群参量 β, γ 的计算归结为对重整化常数的计算。而量子电动力学中的重整化常数的计算，我们先后在第十一章和§14.5中都讨论过。为了进行比较，我们先介绍在重整化点附近进行减除的程序。然后再介绍 t'Hooft 的最小减除的程序。我们

先以 $\Sigma(p, n)$ 为例进行讨论。以 $n\to 4$ 代入 $(5.5)_{14}$ 式得到

$$\Sigma(p, n)=e^2\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\frac{2\gamma\cdot p(1-x)-i4m}{(a^2)^\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)$$
$$=e^2\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\frac{2\gamma\cdot p(1-x)-i4m}{[p^2(1-x)x-m^2x]^\epsilon}\cdot\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)。$$
$$(12.1)_{14}$$

与 $(2.8)_{14}$ 式相比得到

$$A(p^2, m, \epsilon)=e^2\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\frac{2(1-x)}{[p^2(1-x)x-m^2x]^\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)。$$

当 $m\to 0$ 时

$$A(p^2, 0, \epsilon)=e^2\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\frac{2(1-x)}{[(1-x)x]^\epsilon}[p^2]^{-\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right),$$
$$A(-\mu^2, 0, \epsilon)=e^2(\mu^2)^{-\epsilon}\int_0^1\frac{dx}{(4\pi)^2}\frac{2(1-x)}{[(1-x)x]^\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma\right)。$$
$$(12.2)_{14}$$

前面的系数正是 $(5.8)_{14}$ 式的留数。按照普通在 μ 附近进行减除的程序，减除项 $A(-\mu^2, 0, \epsilon)$ 中不仅包含有发散的极点项也包含有限项。而按照 t'Hooft 的最小减除程序，减除项 $A(-\mu, 0, \epsilon)$ 中就只包含发散的极点项。不过实际上当 $\epsilon\to 0$ 时，有限项不是 μ 的函数。在计算重整化群函数时没有贡献。以后我们在计算重整化常数和重整化群函数时，和我们在 §14.5 所做的一样采用最小减除程序。由 $(2.11)_{14}$ 式

$$Z_D^{-1}=1+A(-\mu, 0, \epsilon)=1+\frac{1}{\epsilon}e^2(\mu^2)^{-\epsilon}\frac{1}{(4\pi)^2}。$$
$$(12.3)_{14}$$

式中的 μ 起了重整化点的作用。其实上式就是 $(5.11)_{14}$ 式。

同样由 $(5.18)_{14}$ 式可得

$$Z_B^{-1}=1+\frac{4}{3}\frac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2\epsilon}。\qquad(12.4)_{14}$$

由 $(5.31)_{14}$ 式得到

$$Z^{-1}-Z_D^{-1}=1+\frac{e^2(\mu^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^2\cdot\epsilon}。\qquad(12.5)_{14}$$

这是 Ward 等式的具体反映。

由 $(2.7)_{14}$ 式

$$e_0 = Z_D Z^{-1} Z_B^{1/2} e_0 \qquad (12.6)_{14}$$

由 $(9.7)_{14}$ 式并以 $(12.4)_{14}$ 式代入

$$\beta(e_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}e_R = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{Z_B}e) = \frac{e_R^3}{12\pi^2} + \cdots \qquad (12.7)_{14}$$

由$(9.9)_{14}$式并分别以$(12.4)_{14}$和$(12.5)_{14}$式代入得到反常量纲。

$$\gamma_D = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_D = \frac{1}{Z_D}\frac{\partial Z_D}{\partial \ln\mu}$$

$$= \frac{1}{Z_D}\frac{e_R^2}{8\pi^2} \sim \frac{e_R^2}{8\pi^2} + \cdots \qquad (12.8)_{14}$$

$$\gamma_B = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_B \simeq \frac{e_R^2}{6\pi^2} + \cdots \qquad (12.9)_{14}$$

由 $(9.11)_{14}$ 式并以(5.10)式代入得到

$$\gamma_m = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m \sim \frac{6e_R^2}{(4\pi)^2} + \cdots \qquad (12.10)_{14}$$

应该注意 $(12.7)_{14}$ 式右边符号为正，类似 $(11.4)_{14}$ 式的推导，可得到

$$\boxed{\bar{e}^2(\lambda) = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2}\ln\lambda} = \frac{e_C^2}{1 - \frac{e_C^2}{12\pi^2}\ln\left(\frac{k^2}{m^2}\right)}}\,。$$

$$(12.11)_{14}$$

由上式看到 QED 不是渐近自由的理论，而且当

$$k^2 = +m^2 e^{3\pi/\alpha} \sim m^2 \times 10^{560}。$$

其中 $\alpha = \frac{e_C^2}{4\pi}$，上式出现极点。这个极点也将会在全部光子传播子中出现。这个极点位置处在极大的类空动量上，常称这个极点为 Landan 鬼。存在这个极点也许说明，在这样大的动量区，我们用低级图形计算 $\beta(g_R)$，从而推得大动量区的行为已不再适用。我们需要考虑更多的高级图形。也就是在研究大动量区的行为时，微扰计算已告失效。是否含有其他更深入的内容有待我们进一步

研究。

在 QCD 中由于胶子不仅与夸克作用，同时还有胶子的自作用。正是胶子的自作用，导致 $\beta(g_R)$ 函数在 $g_R\to 0$ 附近是负值，它的有效作用常数 $\bar{g}(\lambda)$ 由 $(11.4)_{14}$ 式给出，QCD 是渐近自由的理论。

对于 φ^4 理论准确到一圈图由 $(7.5)_{14}$ 式。

$$Z_m=1-\frac{\lambda(\mu^2)^{-\epsilon}}{2(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}。\qquad (12.12)_{14}$$

代入 $(9.11)_{14}$ 式得到

$$\gamma_m=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m\simeq\frac{\lambda}{(4\pi)^2}。\qquad (12.13)_{14}$$

不过应该指出：根据我们在 § 13.7 和 § 14.7 中的讨论，单粒子所形成的圈图是不必考虑的。上式只是为了简单的说明计算方法才介绍的。我们实际要考虑的应是传播函数多圈图的修正，因为复杂我们暂不讨论。

由 $(7.9)_{14}$ 式代入 (9.7) 式。

$$\beta(\lambda_R)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_R\sim\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_\lambda^{-1}\lambda)\sim\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}\sim\frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2}。\qquad (12.14)_{14}$$

由此看来 φ^4 理论也不是渐近自由的。

如果考虑多圈图用维数正规化方法得到重整化常数一般具有高阶极点项。例如

$$\left.\begin{aligned} g(\mu)^{-2\rho\epsilon}&=g_R+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu(g_R)}{(n-4)^\nu},\\ Z&=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(g_R)}{(n-4)^\nu},\\ Z_m&=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu(g_R)}{(n-4)^\nu}。\end{aligned}\right\}\qquad (12.15)_{14}$$

以上 g 一般表示相互作用常数，Z 为场量重整化常数。在 g 后引进 $(\mu)^{-2\rho\epsilon}$ 因子是为了使 $g(\mu)^{-2\rho\epsilon}$ 在任何维数空间中都是无量纲的。在电动力学中 $\rho=\frac{1}{2}$，在 φ^4 理论中 $\rho=1$。可以证明在

$(12.15)_{14}$式中的系数 a_ν, b_ν 和 c_ν 都是与 m_R 或 μ 无关。因为 a_ν, b_ν 和 c_ν 都是无量纲的，而在维数正规化程序中 μ 只能以 $(\mu)^{-2\rho\epsilon}$ 形式进入这些系数中，而另一方面 m_R 只能以正幂次形式进入系数中。这是由于在 Feynman 积分中，在极点处的留数中，m_R 只能以正幂次出现。因此 a_ν、b_ν 和 c_ν 都不是 m_R 或 μ 的函数。在我们前几节的计算中也具体地说明了这一点。

由于重整化群函数 $\beta(g_R)$、$\gamma(g_R)$ 和 $\gamma_m(g_R)$ 都是解析函数，可以证明 $(12.15)_{14}$ 式中的高阶极点项对重整化群函数 $\beta(g_R)$、$\gamma(g_k)$ 和 $\gamma_m(g_R)$ 无贡献。先以 $\beta(g_R)$ 为例，由于当 $n\to 4$ 时，$\beta(g_R)$ 是解析的，我们可以把它在 $n\to 4$ 附近展开成级数

$$\beta(g_R)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g_R=h_0+h_1(n-4)+h_2(n-4)^2+\cdots \tag{12.16}_{14}$$

我们直接对 $(12.15)_{14}$ 第一式进行 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ 微商又可得：左边

$$-2\rho\epsilon g(\mu)^{-2\rho\epsilon}=-2\rho\epsilon\left(g_R+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu(g_R)}{(n-4)^\nu}\right)$$
$$=\rho\left[(n-4)g_R+a_1+\frac{a_2}{n-4}+\cdots\right]。$$

右边

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g_R\left[1+\frac{a_1'}{n-4}+\frac{a_2'}{(n-4)^2}+\cdots\right]$$
$$-\rho\left[(n-4)g_R+a_1+\frac{a_2}{n-4}+\cdots\right]。 \tag{12.17}_{14}$$

其中

$$a_\nu'=\frac{da_\nu}{dg_R}。 \tag{12.18}_{14}$$

把 $(12.16)_{14}$ 式代入 $(12.17)_{14}$ 式左边再比较两边系数，由于上式右边 $(n-4)$ 的最高次项为 $(n-4)'$ 次项。所以

$$\left.\begin{aligned}&h_2=h_3=h_4=\cdots=0,\\&h_1=g_R\rho,\\&h_0=a_1\rho-h_1a_1'=(a_1-a_1'g_R)\rho,\\&a_{\nu-1}'h_0+a_\nu'h_1=\rho a_\nu,\ \nu=2,3\cdots\end{aligned}\right\} \tag{12.19}_{14}$$

当 $n\to 4$ 时

$$\boxed{\beta(g_R)=h_0=(a_1-a_1'g_R)\rho_0} \qquad (12.20)_{14}$$

也就是它只与单极点的留数有关。同样的方法可求得

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma(g_R)&=\rho g_R b_1'\\ \gamma_m(g_R)&=\rho g_R c_1'\end{aligned}} \qquad (12.21)_{14}$$

也都是只与单极点的留数有关。

参 考 资 料

1. 关于维数正规化

S. Narison Phys. Rep. **84** (1982)

G. 't Hooft & M. Vertman Nucl. Phys. B**44** (1972) 189

G. 't Hooft Nucl. Phys. B**61** (1973) 465

J. D. Lawrie Journal of Physics A**9** (1975) 961

D. J. Amit Journal of Physics A**9** (1976) 1441

2. 关于重整化群

P. Ramond Field Theory (1981) Chapter 4

M. Gell-Mann & F. E. Low Phys. Rev. **95** (1954) 1300

E. C. G. Stueckelberg & A. Peterson Helevetia Physica Acta **26** (1953) 499

C. G. Callan Phys. Rev. D**2** (1970) 1541

K. Symanzik Communication in Mathematical Physics **18** (1970) 227

K. G. Wilson Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 548

Osviannikov Dokl. Akad. Nauk. SSSR. **109** (1956) 1112

G. 't Hooft & S. Weinberg Nucl. Phys. B**61** (1973) 455 Phys. Rev. D**8** (1973) 3497

附录Ⅰ 泛函微商

考虑 $E[f(x)]$ 是 $f(x)$ 的泛函，其中 $f(x)$ 是 x 的函数。泛函微商的定义类似于普通函数（多变量）的微商的定义。当 $f(x)$ 在 $x\to y$ 处的函数值有一个变更时，这种变更记以 $\delta f(y)$，它所引起的 $E[f(x)]$ 的变更记以 $\delta E[f(x)]$，它们的比值，当变更趋于零时的极限，就定义为 $E[f(x)]$ 的泛函微商，记以 $\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}$。用数学形式表示如下

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{E[f(x)+\epsilon\delta(x-y)]-E[f(x)]}{\epsilon}。\tag{1.1}$$

[例 1] $E[f(x)]=f(x)$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\frac{f(x)+\epsilon\delta(x-y)-f(x)}{\epsilon}\Bigg|_{\epsilon\to 0}$$

$$=\delta(x-y)。\tag{1.2}$$

[例 2] $E[f(x)]=\int dx f(x)$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left\{\int dx[f(x)+\epsilon\delta(x-y)]-\int dx f(x)\right\}}{\epsilon}$$

$$=\int dx\,\delta(x-y)=1。\tag{1.3}$$

或者直接由 $E[f(x)]=\int dx f(x)$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\int dx\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}=\int dx\,\delta(x-y)=1。\tag{1.3'}$$

[例 3] $E[f(x)]=\frac{\partial f(x)}{\partial x}$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\epsilon\delta(x-y)-\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}}{\epsilon}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)。 \qquad (1.4)_A$$

或者直接由 $E[f(x)]=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}=\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)。 \qquad (1.4')_A$$

由此看来泛函微商的运算可以和对 x 的积分或微分的运算对易。因此我们容易得到。

[例 4] $$E_x[f(x')]=\int dx'K(x,\ x')f(x') \qquad (1.5)_A$$

上式 $E_x[f(x')]$ 的下标 x 表明 $E_x[f(x)]$ 不仅是 $f(x')$ 的泛函，同时它也与参变量 x 有关。

$$\frac{\delta E_x[f(x')]}{\delta f(y)}=\int dx'K(x,\ x')\frac{\delta f(x')}{\delta f(y)}$$

$$=\int dx'K(x,\ x')\delta(x'-y)=K(x,\ y)。 \qquad (1.6)_A$$

以上讨论了 $E[f(x)]$ 和 $f(x)$ 有线型关系的一般情况，更一般的情况，我们还可考虑 $E[f(x)]$ 是 $f(x)$ 的任意函数关系，包括是 $f(x)$ 泛函的泛函。按照 $(1.1)_A$ 式的定义，并类似函数的函数的微商的推导方法可以得到：

$$E[f(x)]=f(x)f(x)\cdots f(x)=f^n(x),$$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=nf^{n-1}(x)\delta(x-y)$$

$$=\frac{\partial f^n(x)}{\partial f}\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}。 \qquad (1.7)_A$$

其中 $\dfrac{\partial f^n}{\partial f}$ 为普通微商。

[例 5] $$E[f(x)]=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^n,$$

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)}=n\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)$$

$$=\frac{\partial\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^n}{\partial\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]}\cdot\frac{\delta\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]}{\delta f(y)}。\qquad (1.8)_A$$

[例 6] 一般 $L=\int\mathscr{L}\left[f(x),\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]dx$。其中 $\mathscr{L}\left[f(x),\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]$ 是 $f(x)$ 和 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ 的任意性质很好的泛函，即它可以展开为 $f(x)$ 和 $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ 的级数

$$\frac{\delta L}{\delta f(y)}=\int dx\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta f(y)}$$

$$=\int dx\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial f(y)}\delta(x-y)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)\right]$$

$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial f(y)}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial f(y)}{\partial y}\right)}\right)。\qquad (1.9)_A$$

[例 7] $E=\left[\int dxf(x)\right]^n$

$$=\int dx_1f(x_1)\int dx_2f(x_2)\cdots\int dx_nf(x_n),$$

$$\frac{\delta E}{\delta f(y)}=n\left[\int dxf(x)\right]^{n-1}\int dx\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}$$

$$=n\left[\int dxf(x)\right]^{n-1}。\qquad (1.10)_A$$

[例 8] $E[f(x)]$ 是对 $f(x)$ 的展开的级数，

$$E[f(x)]=K_0(x)+\int K_1(x,\ x_1)f(x_1)dx_1$$

$$+\int K_2(x;\ x_1,\ x_2)f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2$$

$$+\cdots+\int K_n(x;x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)\prod_{i=1}^{n}f(x_i)dx_i+\cdots$$

$$(1.11)_A$$

$$\lim_{f\to 0}\frac{\delta^n E[f(x)]}{\prod_{j=1}^{n}\delta f(y_j)}=\int K_n(x;\ x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)\frac{\delta^n\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\right)}{\prod_{j=1}^{n}\delta f(y_j)}$$

$$=\sum_{p}\int K_n(x;\ x_1,\ x_2\cdots x_n)\prod_{i=1}^{n}\delta(x_i-y_j)\,dx_i$$

$$=\sum_{p}K_n(x;\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)。\qquad (1.12)_A$$

其中 $\sum_{p}$ 表示对 $\{y_i\}=y_1,\ y_2,\ \cdots y_n$ 的可能排列求和共 $n!$ 项。如果 $K_n(x;\ y_1,\ y_2\cdots y_n)$ 对于 y_j 的对易是对称的，那末上式右边求和各项都相等，上式右边就等于 $n!\ K_n(x;\ y_1,\ y_2\cdots y_n)$。

附录 II　光子物理态与不定度规量子化方法

满足 $(4.5)_4$ 式定义的光子物理态记以 $|L\rangle$。在动量空间，由 $(1.13)_4$ 式可知 $(4.5)_4$ 式可写成

$$(a_3^{(-)}(\boldsymbol{k})-a_0^{(-)}(\boldsymbol{k}))|L\rangle=0。\qquad (2.1)_4$$

它表明在光子物理态中从光子和类时光子有一定关系，但对横光子没有任何限制。以后我们讨论光子物理态的性质时，不必再标记横分量 1, 2 标号以及动量 $\boldsymbol{k}$ 的标号。首先应该指出，从光子和类时光子数目均为零的态(记以 $|0\rangle$) 并不是光子物理态。甚至一般讲纵光子数为 n_3, 类时光子数为 n_0 的态也不一定是光子物理态。类似 $(4.13)_3$ 式并考虑到 $(2.4)_4$ 式可有

$$|n_3,\ n_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\frac{1}{\sqrt{n_0!}}(a_3^{(+)})^{n_3}(a_0^{(-)})^{n_0}|0\rangle。\qquad (2.2)_4$$

而光子物理态可以表成上式态的叠加

$$\begin{aligned}|L\rangle&=\sum_{n_3,n_0}C(n_3,\ n_0)\,|n_3,\ n_0\rangle\\&=\sum_{n_3,n_0}C(n_3,\ n_0)\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\frac{1}{\sqrt{n_0!}}(a_3^{(+)})^{n_3}\cdot(a_0^{(-)})^{n_0}|0\rangle。\end{aligned}\qquad (2.3)_4$$

其中 $C(n_3,\ n_0)$ 为叠加系数，可由 $(2.1)_4$ 式定出。

$$\begin{aligned}(a_3^{(-)}-a_0^{(-)})|L\rangle&=\sum_{n_3,n_0}C(n_3,\ n_0)\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\frac{1}{\sqrt{n_0!}}\\&\cdot(a_3^{(-)}-a_0^{(-)})(a_3^{(+)})^{n_3}\cdot(a_0^{(-)})^{n_0}|0\rangle=0。\end{aligned}\qquad (2.4)_4$$

利用 $[a_3^{(-)},\ (a_3^{(+)})^{n_3}]=n_3(a_3^{(+)})^{n_3-1}$ 且 $a_3^{(-)}|0\rangle=0$, 可由上式得到

$$\begin{aligned}\sum_{n_3,n_0}C(n_3,\ n_0)\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_0!}}&[n_3(a_3^{(+)})^{n_3-1}(a_0^{(-)})^{n_0}\\&-(a_3^{(+)})^{n_3}(a_0^{(-)})^{n_0+1}]|0\rangle=0。\end{aligned}\qquad (2.5)_4$$

即要求上式前面系数为零。以 $n_3-1\to n_3$ 代入前项，同时以 $n_0+1\to n_0$ 代入后项得

$$\sum_{\substack{n_3\geqslant 0\\ n_0\geqslant 1}}\Big[C(n_3+1,\ n_0)\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\frac{1}{\sqrt{n_0!}}\sqrt{n_3+1}$$

$$-C(n_3,\ n_0-1)\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_0!}}\sqrt{n_0}\Big](a_3^{(+)})^{n_3}$$

$$\cdot(a_0^{(-)})^{n_0}=0。 \tag{2.6}_A$$

比较两边系数得到

$$C(n_3+1,\ n_0)\sqrt{n_3+1}=\sqrt{n_0}C(n_3,\ n_0-1),\ n_3\geqslant 0,\ n_0\geqslant 1。 \tag{2.7}_A$$

且

$$C(n_3,\ 0)=0 \tag{2.7'}_A$$

以上又可写成

$$\left.\begin{aligned} &C(n_3,\ n_0)=\frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_3}}C(n_3-1,\ n_0-1)\quad n_3\geqslant 1, n_0\geqslant 1\\ &C(\geqslant 1,\ 0)=0。\end{aligned}\right\} \tag{2.8}_A$$

上式还可写成

$$\left.\begin{aligned} &C(n_3,\ n_0)=0\quad n_3>n_0,\\ &C(n_3,\ n_0)=\frac{\sqrt{n_0!}}{\sqrt{n_3!}\sqrt{(n_0-n_3)!}}C(0,\ n_0-n_3)\quad n_3\leqslant n_0。\end{aligned}\right\} \tag{2.9}_A$$

由 $(2.3)_A$ 式得到

$$\langle L|L\rangle=\sum_{n_3,n_0}\langle n_3,\ n_0|\,|C(n_3,\ n_0)|^2|n_3,\ n_0\rangle$$

$$=\sum_{n_3,n_0}|C(n_3,\ n_0)|^2=\sum_{n_3}\sum_{m\geqslant 0}|C(0,\ m)|^2\cdot\frac{(n_3+m)!}{n_3!m!}。 \tag{2.10}_A$$

上式中 $m=n_0-n_3$。由上式看出上边右边是发散的，$|L\rangle$ 竟是无法归一化的。

此外我们所定义的真空态(记以 $|L_0\rangle$) 满足下列关系

$$a_\mu^{(-)}|L_0\rangle=0。 \tag{2.11}_A$$

由 $(2.1)_A$ 式检查可知 $|L_0\rangle$ 也是个光子物理态。考虑 $a_0^{(-)}a_0^{(+)}$ 算符在 $|L_0\rangle$ 态的平均值

$$\langle L_0|a_0^{(-)}\cdot a_0^{(+)}|L_0\rangle=\langle L_0|\,[a_0^{(-)},\ a_0^{(+)}]_-|L_0\rangle$$

$$=-1\langle L_0|L_0\rangle。 \tag{2.12}_A$$

下式最后一步利用了$(2.4)_4$式对易关系。另一方面$a_0^{(-)}$和$a_0^{(+)}$是互为厄密的，所以$a_0^{(-)}\cdot a_0^{(+)}$为厄密算符，其本征值不能为负值。这样又得出了模$\langle L_0|L_0\rangle$为负值的结论。这当然又是一个不合理的结论。

为了避免上述的一些困难，Gupta把不定度规的量子化方法应用到电磁场的量子化理论上。下面我们对它作简单的介绍。通常在量子力学里，物理量Q均用厄密算符表示，它在某一态的平均值表示为

$$\bar{Q}=\langle|Q|\rangle。\qquad(2.13)_4$$

态的归一化条件为

$$\langle 1\rangle=1。\qquad(2.14)_4$$

我们可以把以上理论形式加以推广，让平均值为

$$\bar{Q}=\langle|\eta Q|\rangle。\qquad(2.15)_4$$

态的归一化条件为

$$\langle|\eta|\rangle=\pm 1。\qquad(2.16)_4$$

其中η为某一厄米算符，称为度规算符。且满足

$$\left.\begin{aligned}\eta^2&=1,\\ \eta^+&=\eta。\end{aligned}\right\}\qquad(2.17)_4$$

由于$(2.16)_4$式的归一化条件可正可负，故称为不定度规。

定义算符

$$\bar{\bar{Q}}\equiv\eta^{-1}Q^+\eta。\qquad(2.18)_4$$

称为Q的adjoin共轭算符或简称Q的ad共轭算符。可以证明ad共轭$\bar{\bar{Q}}$和厄米共轭Q^+有相似的代数性质。例如：

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\lambda Q}}&=\lambda^*\bar{\bar{Q}},\\ \overline{\overline{A+B}}&=\bar{\bar{A}}+\bar{\bar{B}},\\ \overline{\overline{A\cdot B}}&=\bar{\bar{B}}\cdot\bar{\bar{A}}。\end{aligned}\right\}\qquad(2.19)_4$$

其中λ为普通常数。

在不定度规量子化理论中，物理量Q应用自ad共轭算符。即

$$\bar{\bar{Q}}=Q\qquad(2.20)_4$$

容易证明，当$\bar{\bar{Q}}=Q$时，在$(2.15)_4$式的定义下Q的平均值为实

数。因为由 $(2.15)_A$ 式

$$\bar{Q}^*=\langle|\eta Q|\rangle^*=\langle|Q^+\eta^+|\rangle=\langle|\eta\eta^{-1}Q^+\eta|\rangle$$
$$=\langle|\eta\bar{\bar{Q}}|\rangle=\langle|\eta Q|\rangle=\bar{Q}。 \qquad (2.21)_A$$

当 η 取为单位矩阵时，上述不定度规量子化方法就回到通常的量子理论。

在一般的不定度规理论形式下，对于实数场的电磁矢量 A_μ 应是自 ad 共轭的，这相当 $a_\mu^{(-)}$ 和 $a_\mu^{(+)}$ 是相互 ad 共轭的，这相似于在通常量子理论形式里 $a_\mu^{(-)}$ 和 $a_\mu^{(+)}$ 是相互厄米共轭的。也就是现在

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{a_\mu^{(-)}}}&=a_\mu^{(+)}\\ \overline{\overline{a_\mu^{(+)}}}&=a_\mu^{(-)}\end{aligned}\right\}\quad \mu=1,\ 2,\ 3,\ 0 \qquad (2.22)_A$$

量子化条件 $(2.4)_4$ 式现在成为

$$\left.\begin{aligned}&[a_j^{(-)},\ a_{j'}^{(+)}]=[a_j^{(-)},\ \overline{\overline{a_{j'}^{(-)}}}]=\delta_{jj'},\ j,\ j'=1,\ 2,\ 3。\\ &[a_0^{(-)},\ a_0^{(+)}]=[a_0^{(-)},\ \overline{\overline{a_0^{(-)}}}]=-1。\end{aligned}\right. \qquad (2.23)_A$$

我们可以选取 η 使得

$$\left.\begin{aligned}a_j^{(\mp)+}&=\overline{\overline{a_j^{(\mp)}}}\\ a_0^{(\mp)+}&=-\overline{\overline{a_0^{(\mp)}}}\end{aligned}\right\}\quad 或\quad \left.\begin{aligned}a_j^{(\mp)+}\eta&=\eta a_j^{(\mp)+}\\ a_0^{(\mp)+}\eta&=-\eta a_0^{(\mp)+}\end{aligned}\right\} \qquad (2.24)_A$$

这样 $(2.23)_{14}$ 式可总结为

$$[a_\mu^{(\mp)},\ a_{\mu'}^{(\mp)+}]=\pm\delta_{\mu\mu'},\ \mu,\ \mu'=1,\ 2,\ 3,\ 0。 \qquad (2.25)_A$$

以上等式两边同时取上边符号或下边符号。

类似 $(4.12)_3$ 式的推导可得到

$$\left.\begin{aligned}a_j^{(-)}|n_j\rangle&=\sqrt{n_j}\,|n_j-1\rangle,\\ a_j^{(+)}|n_j\rangle&=\sqrt{n_j+1}\,|n_j+1\rangle;\\ a_0^{(-)}|n_0\rangle&=-\sqrt{n_0}\,|n_0-1\rangle,\\ a_0^{(+)}|n_0\rangle&=\sqrt{n_0+1}\,|n_0+1\rangle。\end{aligned}\right\}\quad j=1,\ 2,\ 3 \qquad (2.26)_A$$

值得注意，此时 $a_0^{(+)}$ 和 $a_0^{(-)}$ 又和 $a_j^{(+)}$ 和 $a_j^{(-)}$ 相似，分别为类时光子的产生和湮灭算符。不过此时态矢量的归一化条件，由 $(2.16)_A$ 式可得

$$\left.\begin{aligned}&\langle n_j|\eta|n_j'\rangle=\delta_{n_jn_j'},\ j=1,\ 2,\ 3\\ &\langle n_0|\eta|n_0'\rangle=(-1)^{n_0}\delta_{n_0n_0'}。\end{aligned}\right. \qquad (2.27)_A$$

在新的理论形式下，以前无光子的态 $(n_0=0=n_3)|0\rangle$，满足 Lorentz 条件，因为现在 $a_\mu^{(-)}|0\rangle=0$，所以 $|0\rangle$ 属于光子物理态。此外还可证明

$$|n\rangle\equiv(a_3^{(+)}-a_0^{(+)})^n|0\rangle。\qquad(2.28)_A$$

也是光子物理态。由 $(2.25)_A$ 式可以证明

$$[(a_3^{(-)}-a_0^{(-)}),\ (a_3^{(+)}-a_0^{(+)})]=0\qquad(2.29)_A$$

所以

$$(a_3^{(-)}-a_0^{(-)})|n\rangle=(a_3^{(-)}-a_0^{(-)})\cdot(a_3^{(+)}-a_0^{(+)})^n|0\rangle=0。\qquad(2.30)_A$$

这说明 $|n\rangle$ 也是光子物理态。而且利用 $(2.24)_A$ 式可得

$$\begin{aligned}\langle n|\eta|m\rangle&=\langle 0|(a_3^{(+)+}-a_0^{(+)+})^n\cdot\eta(a_3^{(+)}-a_0^{(+)})^m|0\rangle\\&=\langle 0|\eta(a_3^{(+)+}+a_0^{(+)+})^n(a_3^{(+)}-a_0^{(+)})^m|0\rangle\\&=\langle 0|\eta(a_3^{(-)}-a_0^{(-)})^n\cdot(a_3^{(+)}-a_0^{(+)})^m|0\rangle=0,\\&\quad\text{当 } m\neq 0\neq n。\end{aligned}\qquad(2.31)_A$$

只有当 $m=0=n$ 时上式才不为零。

由此看来，我们已找出一系列相互正交的光子物理态 $|n\rangle$。不过除了 $n=0$ 外，其余态的模为零。即 $\langle n|n\rangle=\delta_{n0}$。一般的光子物理态应是 $|n\rangle$ 的线型叠加

$$|L\rangle=\sum_n C_n|n\rangle。\qquad(2.32)_A$$

其中 C_n 为叠加系数，除了要求它是有限的以外，不受其他限制。利用 $(2.31)_A$ 式可得

$$\langle L|\eta|L\rangle=|C_0|^2\geqslant 0。\qquad(2.33)_A$$

由此可见任一光子物理态的模，就等于其中的 $|0\rangle$ 态的模，而与 $C_n(n\neq 0)$ 无关。这就解决了以前所讲到的关于光子物理态归一化的困难。

其实所有规范不变的物理量，都只与光子的横分量有关，而与其纵分量或类时分量无关。相同横光子数，而纵光子或类时光子数不同的光子物理态，反映相同的物理事实，只是选取了不同的规

范而已。为简便计，我们通常选取规范使得 $n_3=0=n_0$，在这样选取下 η 的作用就和单位矩阵相当。这样就和通常的量子理论一致了。虽然如此，不定度规理论形式，在理论上可使光子物理态归一化，而且可使真空态有较合理的定义。它既是能量最低的态，也是无任何光子的态。这些都是它的优点。

附录 III　Wick 定 理

对于每一个算符需要表明它两方面的特性，其一为粒子的产生或湮灭，我们以下标 $S=\pm 1$ 表示之。另一为时间的先后，我们以下标 t 表之，例如 $U_{s,t}$。为简单计我们也常以 U_i 来代替 U_{s_i,t_i}。为了证明由 $(4.1)_8$ 式所表明的 Wick 定理，先证明下面的预备定理。即

$$N(U_m\cdot U_{m-1}\cdots U_1)V_0=N(U_m\cdot U_{m-1}\cdots U_1V_0)+\sum_{i=1}^{m}N(U_m\cdot U_{m-1}\cdots\overbrace{U_i\cdots U_1V_0}) \tag{3.1}_4$$

当 $t_0<t_1,\ t_2\cdots t_{m-1},\ t_m$ 时上式成立即为预备定理的内容。证明如下：

(1) 当 V_0 的 $S_0=-1$，也就是 V_0 为粒子湮灭算符，此时

$$T(U_jV_0)=N(U_jV_0)$$

$\therefore\ \overbrace{U_jV_0}=0$ 对于所有的 j 都成立，这时 $(3.1)_4$ 式右边只有头一项有贡献，$(3.1)_4$ 式自动成立。

(2) 当 $S_0=+1$ 同时所有 j 的 $S_j=+$，即 U_j 和 V_0 均为粒子产生算符。同样此时 $\overbrace{U_jV_0}=0$。同样 $(3.1)_4$ 式自动成立。

(3) 当 $S_0=+1$ 同时所有 j 的 $S_j=-1$，即 V_0 为粒子产生算符，而 U_j 为粒子湮灭算符。

$$\begin{aligned}&N(U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_1^{(-)})V_0^{(+)}\\&=(U_m^{(-)}\cdot U_{m-1}^{(-)}\cdots U_1^{(-)})V_0^{(+)}=U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_2^{(-)}T(U_1^{(-)}V_0^{(+)})\\&=U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_2^{(-)}[\overbrace{U_1^{(-)}V_0^{(+)}}+N(U_1^{(-)}V_0^{(+)})]\\&=\delta_{p_1}U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_2^{(-)}V_0^{+}U_1^{(-)}+U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_2^{(-)}\overbrace{U_1^{(-)}V_0^{(+)}}。\end{aligned} \tag{3.2}_4$$

如此类推继续把 $V_0^{(+)}$ 搬到最左边。考虑到每搬过一个 U_j 就多出

一个配对 $\overbrace{U_j^{(-)}V_0^{(+)}}$ 项。得到

$$\begin{aligned}
&N(U_m^{(-)}\cdots U_{m-1}^{(-)}\cdots U_1^{(-)})V_0^{(+)}\\
&=\delta_{p_m}V_0^{(+)}U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_1^{(-)}+\sum_{j=1}^{m}U_m^{(-)}\cdot U_{m-1}^{(-)}\cdots\overbrace{U_j^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)}}\\
&=N(U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)})\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m}N(U_m^{(-)}U_{m-1}^{(-)}\cdots\overbrace{U_j^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)}})。\qquad(3.3)_A
\end{aligned}$$

(4) 当 $S_0=+1$ 而 U_j 不限，即 V_0 为粒子产生算符，而 U_j 中既有粒子产生算符也有粒子湮灭算符。此时我们把 U_j 中产生算符排在左边，而把其中湮灭算符排在右边。并利用上述第三种情况的结论：

$$\begin{aligned}
&N(U_mU_{m-1}\cdots U_1)V_0^{(+)}\\
&=\delta_p[U_k^{(+)}U_j^{(+)}U_i^{(+)}\cdots N(U_m^{(-)}\cdots U_1^{(-)})]V_0^{(+)}\\
&=\delta_pU_k^{(+)}U_j^{(+)}U_i^{(+)}\cdots[N(U_m^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)}\\
&\quad+\sum_l(U_m^{(-)}\cdots\overbrace{U_l^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)}})]\\
&=N(U_m^{(-)}\cdots U_k^{(+)}\cdots U_j^{(+)}\cdots U_i^{(+)}\cdots U_l^{(-)}\cdots U_1^{(-)}V_0^{(+)})\\
&\quad+\sum_{l=1}^{m}N(U_mU_{m-1}\cdots\overbrace{U_l\cdots U_1V_0^{(+)}})。\qquad(3.4)_A
\end{aligned}$$

对 l 求和本应限于 $S_l=-1$，但可遍及所有 $l=1\to m$，因为当 $S_l=+1$ 时，正如在(2)中已讨论过此时 $\overbrace{U_lV_0^{(+)}}=0$ 自动没有贡献。至此 $(3.1)_A$ 式预备定理证明完毕。

以上的预备定理可以推广到括号内含有并缩因子的情况（并缩因子已成为普通数），利用 $(3.1)_A$ 式可知当 $t_0<t_m, t_{m-1}, \cdots, t_1$ 时

$$N_{2\cdot p}^{m}V_0=V_{2\cdot p}^{m+1}|_{0\notin p}+N_{2\cdot(p+1)}^{m+1}|_{0\in(p+1)}。\qquad(3.5)_A$$

其中 $N_{2\cdot p}^{m}$ 的含义请参看 $(4.1)_S$ 式。以上 $0\notin p$ 表明 V_0 不在 p 个配对之中，而 $0\in(p+1)$ 表 V_0 在 $(p+1)$ 个配对之中。

同样

$$N_{2(p-1)}^{m}V_0=N_{2(p-1)}^{m+1}|_{0\notin(p-1)}+N_{2q}^{m+1}|_{0\in p}。\qquad(3.6)_A$$

如此类推可得

$$
\begin{aligned}
&N^m_{2\cdot 0}V_0 = N^{m+1}_{2\cdot 0} + N^{m+1}_{2\cdot 1}\big|_{0\in 1}\\
&N^m_{2\cdot 1}V_0 = \quad N^{m+1}_{2\cdot 1}\big|_{0\notin 1} + N^{m+1}_{2\cdot 2}\big|_{0\in 2}\\
&N^m_{2\cdot 2}V_0 = \quad N^m_{2\cdot 2}\big|_{\quad\notin 2} + N^m_{2\cdot 3}\big|_{0\in 3}\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (3.7)_A\\
&N^m_{2\cdot\frac{m}{2}}V_0 = \quad (\text{当}m\text{为偶数}) \qquad N^{m+1}_{2\cdot\frac{m}{2}}\big|_{0\notin\frac{m}{2}}\\
&\text{或}\ U^m_{2\cdot\frac{m-1}{2}}V_0 = \quad (\text{当}m\text{为奇数}) \qquad N^{m+1}_{2\cdot\frac{m-1}{2}}\big|_{0\notin\frac{m-1}{2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + N^{m+1}_{2\cdot\frac{m+1}{2}}\big|_{0\in\frac{m+1}{2}}
\end{aligned}
$$

把上式各式相加得到

$$\left(\sum_{p=0}^{n} N^m_{2\cdot p}\right)V_0 = \sum_{p=0}^{n'} N^{m+1}_{2\cdot p} \qquad (3.8)_A$$

其中

$$n' = \begin{cases} \dfrac{m+1}{2} = n+1, & \text{当}m\text{为奇数;}\\ \dfrac{m}{2} = n, & \text{当}m\text{为偶数。}\end{cases} \qquad (3.9)_A$$

有了以上的预备知识，由 $(4.2)_8$ 式表明的 Wick 定理可用数学归纳法来证明：

$$T(U_mU_{m-1}\cdots U_1) = \sum_{p=0}^{n} N^m_{2\cdot p}。 \qquad (3.10)_A$$

假定上式成立，则当 $t_0<t_m$, $t_{m-1}\cdots t$ 时，利用 $(3.8)_A$ 式

$$T(U_mU_{m-1}\cdots U_1)V_0 = \sum_{p=0}^{n} N^m_{2\cdot p}V_0 = \sum_{p=0}^{n'} N^{m+1}_{2\cdot p}。$$

上式实际即为

$$T(U_mU_{m-1}\cdots U_1V_0) = \sum_{p=0}^{n'} N^{m+1}_{2\cdot p}。 \qquad (3.11)_A$$

也就是 $(3.10)_A$ 对 $m+1$ 也成立。而 $m=2$ 时 $(3.10)_A$ 式显然成立。其实这正是并缩因子的定义。至此我们最终证明了 Wick 定理。

习　题

第　一　章

1．A、B 和 C 分别都是 4×4 矩阵可以写成

$$A=\begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22} \end{vmatrix}。$$

其中 a^{ik}，b^{ik} 和 c^{ik} 都是 2×2 矩阵。若 $C=AB$，证明

$$c^{ik}=\sum_j a^{ij}b^{jk}。$$

2．A、B、C 和 D 都是 2×2 矩阵。因而定义为

$$M=\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix},\quad N=\begin{vmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{vmatrix}$$

的矩阵 M 和 N 均为 4×4 矩阵。分别称 $M(N)$ 为偶(奇)型的矩阵。(1)试证明两个偶型或两个奇型的乘积都是偶型的，偶乘奇或奇乘偶均为奇型的。(2)试说明四个 Dirac γ 矩阵能否全是偶型，或全是奇型。

3．考察一个 Loreutz 变换其中 $L_{4\rho}=L_{\rho4}=\delta_{\rho4}$。试证明此时 ψ 的变换矩阵 S 与 γ_4 对易，如 $L_{4\rho}=L_{\rho4}=-\delta_{\rho4}$ 则它们是反对易的。而且在 Pauli 表象中，S 必为偶型的。

4．证明 $U=e^{i\varphi(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n})}=\cos\varphi+i(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n})\sin\varphi$。其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 Dirac γ 矩阵，$\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{k}$ 的单位矢量。

5．在 Pauli 表示里，α^i 和 $\beta\equiv\alpha^4$ 矩阵取如下形式

$$\boldsymbol{\alpha}^i=\begin{vmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix},\quad \beta=\alpha^4=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

其中 σ^i 为 2×2 的 Pauli 矩阵，0 和 1 均为 2×2 的对角矩阵。证明：

(1) $\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i=2\delta^{ij}$，$i$，$j=1$，2，3，4；

(2) α^i 的本征值为 ±1；

(3) 哈氏量 $H=-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m$ $(7.2)_1$ 式的本征值为实的。

6．对于另一种选取 $\alpha^i=\begin{vmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{vmatrix}$，$\alpha^4=\beta=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

证明：α^i 同样满足第 1 题所给的三个基本要求。如果把 Dirac 波函数写成 $\begin{vmatrix} \varphi \\ \chi \end{vmatrix}$，写出相应于 $(7.6)_1$ 式的联立方程，并证明当 $m=0$ 时，联立方程可以退耦成分立的方程。

7．对于自由 Dirac 粒子的轨道角动量算符 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ 和它的哈氏量算

符 $H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m$ 并不对易；而总角动量算符定义为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$ 确可以和 H 对易。

8．证明 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla V(x)\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=\nabla V(\boldsymbol{x})\cdot\nabla+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V(x)\times\nabla)+V(x)\nabla^2$。并由此关系利用 $(9.12)_1$ 式证明：在只保留到 $(E^2-V)/2mc^2$ 时大分量 φ 满足以下方程

$$(E'-V)\varphi=\left\{\left(1-\frac{E'-V}{2mc^2}\right)\frac{p^2}{2m}-\frac{i\hbar}{4m^2c^2}\nabla V\cdot\boldsymbol{p}+\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V\times\boldsymbol{p})\right\}\varphi$$

其中 $E-mc^2=E'$，$V(x)=-eA^0(x)$，$\boldsymbol{A}=0$。

上式如果只保留到 v^2/c^2 项可以写成

$$E'\varphi=\left\{\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+V-\frac{i\hbar}{4m^2c^2}\nabla V\cdot\boldsymbol{p}+\frac{\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V\times\boldsymbol{p})\right\}\varphi。$$

9．习题 8．中最后一个方程右边括号内算符，看来可以作为哈氏量算符 H（准确到 v^2/c^2）。可是在准确到 v^2/c^2 级时，证明：$\psi^+\psi\simeq\varphi^+\left(1+\frac{p^2}{4m^2c^2}\right)\varphi$。我们应取 $\varphi'=\left(1+\frac{p^2}{4m^2c^2}\right)^{1/2}\simeq\left(1+\frac{p^2}{8m^2c^2}\right)\varphi$，与此同时应取 $H'\simeq\left(1+\frac{p^2}{8m^2c^2}\right)H\left(1-\frac{p^2}{8m^2c^2}\right)$ 作为哈氏量算符。利用 $p^2V-Vp^2=-\hbar^2\nabla^2V-2i\hbar\nabla V\cdot\boldsymbol{p}$，证明

$$H'=\left\{\frac{p^2}{2m}+V-\frac{p^4}{8m^3c^2}+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla^2V+\frac{\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla V\times\boldsymbol{p})\right\}。$$

10．计算 $\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\gamma_5\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau=A_{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$。

11．由微量 Lorentz 变换关系式 $(4.15)_1$ 导出有限 Lorentz 变换关系式 $(4.16)_1$。

12．直接由 Lorentz 变换 $(4.16)_1$ 由静止的 Dirac 波函数（自由粒子）$W_m=\begin{vmatrix}\varphi\\0\end{vmatrix}$ 和 $W_{-m}=\begin{vmatrix}0\\\chi\end{vmatrix}$ 导出一般情况下的 Dirac 波函数 $(7.8)_1$ 式。

13．取幺正变换 $U=e^{i\varphi(\gamma\cdot\boldsymbol{n})}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为动量方向的单位矢量。对 Dirac 平面波函数 $\psi(x)$ 进行幺正变换 $\psi'(x)=U\psi(x)$ 使其小分量为零。问 φ 应取何值？此时单粒子 Dirac 的哈氏量 H 取何形式？

14．利用 $(2.9)_1$ 式推导 $(\bar\psi^a\psi^a)(\bar\psi^c\psi^b)=\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{16}(\bar\psi^a\gamma_A\psi^b)(\bar\psi^c\gamma_A\psi^d)$（不考虑 $\bar\psi$，ψ，…之间反对易性）。引进

$$J_S\equiv(\bar\psi^a\psi^b)(\bar\psi^c\psi^d),\quad J_P=(\bar\psi^a\gamma_5\psi^b)(\bar\psi^c\gamma_5\psi^d),$$

$$J_V=(\bar\psi^a\gamma_\mu\psi^b)(\bar\psi^c\gamma_\mu\psi^d),\quad J_A=(\bar\psi^a i\gamma_\mu\gamma_5\psi^b)(\bar\psi^c i\gamma_\mu\gamma_5\psi^d),$$

$J_i \equiv (\bar{\psi}^a \Gamma^i \psi^b)(\bar{\psi}^c \Gamma_i \psi^d)$。

且 $J'_i \equiv J_i(b \leftrightarrow d) \quad i = S, p, V, A, T$。

证明：

$$
\begin{aligned}
4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_p, \\
4J'_V &= 4J_S - 2J_V \quad + 2J_A - 4J_p, \\
4J'_T &= 6J_S \quad - 2J_T \quad + 6J_p, \\
4J'_A &= 4J_S + 2J_V \quad - 2J_A - 4J_p, \\
4J'_p &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_p。
\end{aligned}
$$

15. 引进 $J^{ab,cd} \equiv (\bar{\psi}^a \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi^d)$，证明 $J^{ab,cd} = -J^{ad,cb}$。

16. 对于平面波 Dirac 波函数 $u^h(\boldsymbol{k})$ 计算 $\bar{u}^h(\boldsymbol{k})\gamma_A u^h(\boldsymbol{k})$，其中 γ_A 分别为 γ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$, $i\gamma_5\gamma_\mu$ 和 γ_5。同样还计算 $\bar{V}^h(\boldsymbol{k})\gamma_A V^h(\boldsymbol{k})$。

17. 证明：自由 Dirac 粒子的涡度算符 $S_f(\boldsymbol{k}) = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ 和哈氏量 H 对易，并求出基本征值和相应的归一化的波函数。

18. 计算 $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}]_-$ 的对易关系，并证明 $\gamma_5\sigma_{\sigma\rho} = -\dfrac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$，以及 $\gamma_\mu a_\mu \cdot \gamma_\nu b_\nu = (a_\mu b_\mu) + i\sigma_{\mu\nu}a_\mu b_\nu$。其中 a_μ 和 b_μ 为两个任意相互对易的矢量。

19. 对应自由粒子的 Dirac 方程可导出相应 k-G 方程(二级方程)，试用类似方法推导在外场中的 Dirac 方程的相应的二级方程：

$$
\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}A_0\right)^2 - (i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 - m^2c^2 \right.
$$

$$
\left. + \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{H} - i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right]\psi = 0。
$$

20. 利用上题结论试求电子在均匀磁场中的能级。

21. 证明 $\bar{W}_A(\boldsymbol{k})\gamma_4 W_{-A}(-\boldsymbol{k}) = 0$。

22. 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为三维矢量，证明 $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$。其中 $\partial_i\partial_j + \partial_j\partial_i = 2\delta_{ij}$，且 $\dfrac{1}{4}[\partial_i, \partial_j] = \dfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_k$。

23. 证明在静磁场中运动的 Dirac 方程，在非相对论近似下约化为 Pauli 方程。

24. $\Sigma_{\mu\nu} = \dfrac{-i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ 证明

(1) $\left[\gamma_\mu, \dfrac{i\Sigma_{\nu\lambda}}{2}\right] = \delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda - \delta_{\mu\lambda}\gamma_\nu$,

(2) $\partial_\mu M_{\mu\nu\lambda} = 0$ 其中 $M_{\mu\nu\lambda} = \bar{\psi}\gamma_\mu\left[-ix_\nu\partial_\lambda + ix_\lambda\partial_\nu + \dfrac{\Sigma_{\nu\lambda}}{2}\right]\psi$。

25. 封闭在球腔内的 Dirac(场)粒子，在球内满足自由粒子 Dirac 方程，

在球边界上满足边界条件 $\bar{\psi}\psi=0$。求该粒子的能级谱。

26. 已知静止坐标系中，Dirac 旋量波函数的解为

$$W_{m,1}=\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix},\quad W_{m,-1}=\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix},$$

$$W_{-m,1}=\begin{vmatrix}0\\0\\1\\0\end{vmatrix},\quad W_{-m,-1}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\1\end{vmatrix}。$$

试利用 Dirac 旋量波函数的 Lorentz 变换关系，求出沿 x 方向以速度 v 运动的 Dirac 旋量波函数 $WS'_{A,h}=SW_{A,h}$。证明它为

$$W_{m,1}(k)=A\begin{vmatrix}1\\0\\0\\B\end{vmatrix},\quad W_{m,-1}(k)=A\begin{vmatrix}0\\1\\B\\0\end{vmatrix},$$

$$W_{-m,+1}(-k)=A\begin{vmatrix}0\\B\\1\\0\end{vmatrix},\quad W_{-m,-1}(-k)=A\begin{vmatrix}B\\0\\0\\1\end{vmatrix}。$$

其中 $A=\left(\dfrac{E+mc^2}{2mc^2}\right)^{1/2}$，$B=\dfrac{-kc}{E+mc^2}$。

27. 寻找一个幺正变换使原来的 Dirac 方程改变为

$$H\varphi^{\pm}=\pm|E|\varphi^{\pm}$$

(其中 H 在原来 Dirac 表象中为 $H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\gamma_4 m$)

且

$$\varphi^{(+)}=\begin{vmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\0\\0\end{vmatrix},\quad \varphi^{(-)}=\begin{vmatrix}0\\0\\\varphi_3\\\varphi_4\end{vmatrix}。$$

28. 在外电磁场中运动的 Dirac 粒子的 $H=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})+\beta m+eA_0$。试用 Foldy-Wouthrysen 变换使 H 对角化。

29. 假定 $[A_\mu, A_\nu]=C\delta_{\mu\nu}$。证明 $[A_\mu^n, A_\nu]=nC\delta_{\mu\nu}A_\mu^{n-1}$。

30. 证明：$i\gamma_1\gamma_3 u^h(\boldsymbol{k})=-h[u^h(-\boldsymbol{k})]^*$，

$$i\gamma_1\gamma_3 V^h(\boldsymbol{k})=h[V^h(-\boldsymbol{k})]^*。$$

31. 定义 $\psi_{\substack{L\\R}}\equiv\frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi=p_{\substack{L\\R}}\psi$，证明：

$$\bar{\psi}_{\substack{L\\R}}=\bar{\psi}p_{\substack{R\\L}}=\bar{\psi}_{\substack{R\\L}}=\bar{\psi}\left(\frac{1\mp\gamma_5}{2}\right),$$

$$\bar{\psi}\psi=\bar{\psi}_L\psi_R+\bar{\psi}_R\psi_L,\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi=\bar{\psi}_L\gamma\psi_L+\bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R。$$

32. 证明

$$\bar{u}^{h'}(\boldsymbol{p}')\gamma_\mu u^h(\boldsymbol{p})=\bar{u}^{h'}(\boldsymbol{p})\left[\frac{p'_\mu+p_\mu}{2im}-\frac{1}{2m}\sigma_{\mu\nu}(p'_\nu-p_\nu)\right]u^h(\boldsymbol{p})。$$

33. 由 $\mathrm{Det}(i\gamma k+m)=0$ 导出 $k^2+m^2=0$。

34. 定义 Majorana 共轭为 $\bar{\psi}^M\equiv\psi_TC$，证明 $\bar{\psi}^M\psi$ 为 Lorentz 标量，则要求 $C\sigma_{\mu\nu}C^{-1}=-(\sigma_{\mu\nu})_T$。

35. 证明以下等式

$$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\sigma_{\sigma\rho}=-2\gamma_5\sigma_{\mu\nu},$$

$$\begin{cases}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma+\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu=2(\delta_{\mu\nu}\gamma_\sigma+\delta_{\nu\sigma}\gamma_\mu-\delta_{\mu\sigma}\gamma_\nu),\\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu=2\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma_5\gamma_\rho。\end{cases}$$

或

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma=S_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma_\rho+\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma_5\gamma_\rho。$$

其中

$$S_{\mu\nu\sigma\rho}\equiv\delta_{\mu\nu}\delta_{\sigma\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho},$$

$$\gamma_\rho\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho=0=\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho\sigma_{\mu\nu},$$

$$\sigma_{\mu\nu}\cdot\sigma_{\mu\nu}=12。$$

第 二 章

1. 试由 $\mathscr{L}(\varphi_r(x),\partial_\mu\varphi_r(x))$ 在无穷小 Lorentz 变换下的不变性，导出场的总角动量张量的表示式及总角动量守恒定律。

2. 试证明对于 Dirac 场的无穷小 Lorentz 变换矩阵 $S=I+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ 中的 $S_{\mu\nu}$ 满足以下关系

$$[S_{\mu\nu},\ S_{\rho\sigma}]=\delta_{\mu\rho}S_{\sigma\nu}-\delta_{\mu\sigma}S_{\rho\nu}+\delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma}-\delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}。$$

3. 试证明总角动量张量可写成

$$M_{(\mu,\nu)\rho}=x_\nu T_{\mu\rho}-x_\mu T_{\nu\rho}-f_{\mu(\nu\rho)}+f_{\nu(\mu\rho)}。$$

其中 $f_{\mu(\nu\rho)}$ 是对于指标 ν，ρ 为反对称的三级张量。并证明如下的能量动量张量 $T'_{\mu\nu}$ 是对称的

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}f_{\mu(\nu\rho)}。$$

而且 $T'_{\mu\nu}$ 与 $T_{\mu\nu}$ 给出相同的四维能量动量矢量即

$$-i\int T'_{\mu4}\,d\sigma_4=-i\int T_{\mu4}\,d\sigma_4。$$

4. 在无穷小 Lorentz 变换 $x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}x_\nu$ 下，与此相应场量有一个么正变换 $U\phi(x)U^{-1}$，其中 U 与 10 个变换参量 α_μ 和 $\epsilon_{\mu\nu}$ 有关，试证在 U 中与这些参量相应的系数 p_μ 和 $M_{\mu\nu}$ 满足下列关系

$$[p_\mu, \phi_r(x)] = i\partial_\mu\phi_r(x),$$

$$[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = -i\{(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi_r(x) + (S_{\mu\nu})_{rs}\phi_s(x)\}。$$

5. 设 $\mathscr{L}$ 在某一变换 $\phi(x)\to\phi'(x) = U\phi(x)$ 但 $\delta x_\mu = 0$ 下保持不变，试证明该变换下不变所对应的守恒量为

$$Q^r(x) = \int \pi(x) T^r \phi(x) dx。$$

其中 $\phi(x)$ 为场量，$\pi(x) = \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}$，而 T^r 为变换群的生成元。

6. 场量 $\phi(x)$ 的定域规范变换定义为

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)T^\alpha}\phi(x) = U(\theta)\phi(x)$$

如果要求 $D'_\mu\phi'(x) = U(\theta)D_\mu\phi(x)$，其中 $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA^\alpha_\mu(x)T^\alpha$。$A_\mu(x)$ 应如何变换。以上 T^α 为变换群的生成元，$A^\alpha_\mu(x)$ 为相应于 T^α 的规范场。

7. 某一矢量场的 $\mathscr{L} = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \dfrac{\lambda}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2$。试求场方程及场方程的 Green 函数在动量空间的 Fourier 积分表达式。并用正则量子化方法求 $[A_\mu(x), A_\nu(x')]$，$[\dot{A}_\mu(x), A_\nu(x')]$ 及 $[\dot{A}_\mu(x), \dot{A}_\nu(x')]$ 的同时对易关系。

8. 导出自旋为零粒子的角动量 $L_{(i)}$ 所满足的对易关系。$[L_{jk}, L_{lm}] =$?。

第 三 章

1. 试证明下列一组等式

(1) $[N_l, a_l^{(\pm)}] = \pm a_l^{(\pm)}$，
$[N_l, p_\mu] = [N_l, Q] = 0$。 $\quad l = 1, 2, 3$

(2) $[N_\beta, a_\beta^{(\pm)}] = \pm a_\beta^{(\pm)}$，
$[N_\beta, p_\mu] = [N_\beta, Q] = 0$。 $\quad \beta = +, -, 0$

2. 试证明 $(5.8)_3$ 式，即

$$\begin{cases} \Delta(x) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Delta(x) = 0, \quad \text{当 } t = 0。 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta(x) = -\delta(x), \end{cases}$$

3. 推导 $(6.11)_3$ 式，即 $\vec{T} = -i\sum_k (\vec{a}^{(+)}(k) \times \vec{a}^{(-)}(k))$，并证明 $\pi^{\pm,0}$ 介子

态均是 T^2 的本征值为 2 的本征态。

4．已知 π 介子同位算符为 $\underset{\rightharpoonup}{T}=\int\varphi_l(x)it_{lm}\varphi_m(x)dx$，证明 $\underset{\rightharpoonup}{T}$ 满足角动量对易关系 $[\underset{\rightharpoonup}{T}\times\underset{\rightharpoonup}{T}]=i\underset{\rightharpoonup}{T}$。

5．标量场的轨道角动量算可以写成以下形式

$$L_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\int\pi(x)(x_j\partial_k-x_k\partial_i)\varphi(x)dx。$$

其中 $\pi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的广义动量，证明 $[L_i,\ L_j]=i\epsilon_{ijk}L_k$。

6．利用粒子产生算符 a^+ 和粒子湮灭算符 a 的对易关系。证明以下关系(α, β 为普通常数)：

$$e^{-\alpha a^+}\cdot a\cdot e^{\alpha a^+}=a+\alpha,$$
$$e^{-\alpha a}\cdot a^+\cdot e^{\alpha a}=a^+-\alpha,$$
$$e^{-\alpha a^+}\cdot e^{\beta a}e^{\alpha a^+}=e^{\beta a}e^{\alpha\beta}。$$
$$e^{\alpha a^+ a}\cdot a\cdot e^{-\alpha a^+ a}=e^{-\alpha}\cdot a,$$
$$e^{\alpha a^+ a}a^+e^{-\alpha a^+ a}=e^{\alpha}\cdot a^+。$$

7．对于满足 k-G 方程的(复)标量场 $\varphi(x)$，引进

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi+\frac{i}{m}\dot{\varphi}\right),\quad \psi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi-\frac{i}{m}\dot{\varphi}\right)。$$

证明
$$\int\rho(x)dx=i\int\varphi\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi\,dx=m\int\psi^+\tau_3\psi\,dx,$$

$$\int\psi^+\tau_3H\psi\,dx=\frac{1}{m}\int(-\varphi^+\nabla^2\varphi+\dot{\varphi}^+\dot{\varphi}+m^2\varphi^+\varphi)dx。$$

其中 $\psi=\begin{vmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{vmatrix}$，$H=(\tau_3+i\tau_2)\frac{-\nabla^2}{2m}+m\tau_3$，且 τ 为 Pauli 矩阵。

8．如果 $\mathscr{L}$ 在某一变换下保持不变，由 (1.3)$_3$ 式可知存在一个相应的守恒的积分，$G=\int\left[\mathscr{L}\delta t+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}_r(x)}\cdot\delta\varphi_r(x)\right]dx$。

利用正则量子化的等时对易关系，证明以下关系

$$\delta\varphi(x)=\frac{1}{i}[\varphi(x),\ G],\quad 和\quad \delta\pi(x)=\frac{1}{i}[\pi(x),\ G]。$$

且从而证明 $[H,\ M_{i4}]=p_i$ 和 $[p_j,\ M_{i4}]=\delta_{ij}H$。

9．中性标量场 $\varphi(x)=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_kV}}[a_k(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+a_k^+(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$ 在实外场 $j(x)$(c 函数)中它的哈氏量为

$$H=H_0+\int j(x)\varphi(x)dx$$

其中 $H_0=\frac{1}{2}\int[\pi^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2]dx$。

证明: $$SHS^+ = H_0 + V\lambda_j$$

其中 $S = \exp\sum_k (-a_k j_k^* + a_k^+ j_k)(2\omega_k^3)^{-1/2}$,

$$j_k = \frac{1}{\sqrt{V}}\int j(x) e^{-ik\cdot r} dx,$$

$$\lambda_j = -\int (16\pi^3\omega_k^2)^{-1} |j_k|^2 dk。$$

且与 H_0 之本征态 $|n_k\rangle_0 \equiv \Pi (n_k!)^{-1/2}(a_k^+)^{n_k}|0\rangle$ 相应的 H 的本征态 $|n_k\rangle = S^+|n_k\rangle_0$。这里 $H|n_k\rangle = (\sum_k n_k\omega_k + V\lambda_j)|n_k\rangle$。相应 H 的真空态满足 $H|0\rangle = V\lambda_j|0\rangle$。

10. 上题的 $V\lambda_j$ 是 $j(x)$ 的泛函，证明 $\frac{\delta\lambda_j}{\delta j(x)} \equiv \bar{\phi}(k) = -\sum_k \frac{1}{2\omega_k^2 V^{1/2}} \cdot (j_k e^{ik\cdot r} + j_k^* e^{-ik\cdot r})$ 而 $\bar{\phi}(\gamma)$ 是 $\varphi(x)$ 的真空期待值。$\bar{\varphi}(x) = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle$。

11. 由以上两题证明 $\varepsilon(\bar{\phi}) \equiv V\lambda_j - \int j(x)\bar{\phi}(x)\,dx$ 是 $\langle|H_0|\rangle$ 的极小值。

第 四 章

1. 导出一般对易关系 $(4.1)_4$ 式 $[A_\mu(x), A_\nu(x')]$。

2. 试取库仑规范 $(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\ A_0=0)$ 对电磁场进行量子化，求出对易关系。

3. 试证明 $D(x)$ 函数可明显地表为

$$D(x) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}[\delta(t+|\boldsymbol{x}|) - \delta(t-|\boldsymbol{x}|)]。$$

4. 证明库仑规范下的量子 Hamilton 运动方程

$$\dot{\boldsymbol{A}}^t = \frac{1}{i}[\boldsymbol{A}^t,\ H],\quad \dot{\boldsymbol{E}}^t = \frac{1}{i}[\boldsymbol{E}^t,\ H]。$$

其中 $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int (E_i^t E_i^t + \nabla A_i^t\cdot\nabla A_i^t)dx$。可以约化成统一的方程 $\Box\boldsymbol{A}^t = 0$。

5. 记 $L(\boldsymbol{k}) \equiv |\boldsymbol{k}|(a_3^{(-)}(\boldsymbol{k}) - a_0^{(-)}(\boldsymbol{k})) = |\boldsymbol{k}|(a_3^{(-)}(\boldsymbol{k}) + ia_4^{(-)}(\boldsymbol{k}))$，则

$$L^+(k) = |\boldsymbol{k}|(a_3^{(+)}(\boldsymbol{k}) - a_0^{(+)}(\boldsymbol{k})) = |\boldsymbol{k}|(a_3^{(+)}(\boldsymbol{k}) + ia_4^{(+)}(\boldsymbol{k}))。$$

证明: $$[L(\boldsymbol{k}),\ L^+(k)] = 0,$$

$$[L(\boldsymbol{k}), A_\mu(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} k_\mu e^{-ikx}。$$

6. 试证 $\langle a_t|b_t\rangle = \langle a_0|b_0\rangle$。其中 $|a_0\rangle$ 和 $|b_0\rangle$ 只有横光子而无纵光子和类时光子。$|a_t\rangle$ 和 $|b_t\rangle$ 中有纵光子和类时光子，同时横光子数及其状态则

分别和 $|a_0\rangle$ 与 $|b_0\rangle$ 中一样。

7．证明 $\langle a_i|A_\mu(x)|a_i\rangle=\langle a_0|A_\mu(x)|a_0\rangle=\partial_\mu\Lambda(x)$。

其中 $\Lambda(x)=\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{\omega_k}}\{f^*(\boldsymbol{k})e^{-ikx}-f(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}$。

8．由 $(5.1)_4$ 式 $\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-m^2\varphi_\mu\varphi_\mu$ 直接导出 $(5.7)_4$ 式的对易关系

$$[\varphi_\mu^*(x),\ \varphi_\nu(x')]=i(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-x')。$$

9．导出有质量的矢量场的场方程(类似 Maxwell 方程)如果引进

$$\psi_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{A}-\frac{i}{m}\boldsymbol{E}\right),\ \psi_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{A}+\frac{i}{m}\boldsymbol{E}\right)。$$

证明场方程又可写成

$$i\partial_0\psi_1=-\frac{\nabla^2}{2m}(\psi_1+\psi_2)+m\psi_1+\frac{1}{m}\nabla(\nabla\cdot\psi_2),$$

$$i\partial_0\psi_2=\frac{\nabla^2}{2m}(\psi_1+\psi_2)-m\psi_2-\frac{1}{m}\nabla(\nabla\cdot\psi_1)。$$

10．证明 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=[\nabla^2-(\boldsymbol{S}\cdot\nabla)^2]\boldsymbol{A}$。其中 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{vmatrix}$，$(S_k)_{ij}=-i\epsilon_{kij}$，

并由以上关系导出 $i\partial_0\psi=H\psi$，式中 $\psi=\begin{vmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{vmatrix}$，其中 ψ_1 和 ψ_2 由上题给出。

且 $H=(\tau_3+i\tau_2)\frac{k^2}{2m}+m\tau_3-i\tau_2\frac{k^2-(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k})^2}{m}$。

11．利用以上两题的结论证明

$$-i\int j_4(x)d\boldsymbol{x}=\int(F^+_{4\nu}A_\nu-F_{4\nu}A^+_\nu)d\boldsymbol{x}=m\int\psi^+\tau_3\psi\,d\boldsymbol{x}$$

$$=\int(\boldsymbol{E}^+\cdot\boldsymbol{E}+m^2\boldsymbol{A}^+A+\boldsymbol{A}^+\nabla x(\nabla xA)-\frac{1}{m^2}\boldsymbol{E}^+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}))d\boldsymbol{x}。$$

12．假定中性矢量场的拉氏函数密度 $\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}m^2A_\mu A_\mu$，导出它的哈氏函数 $H=\frac{1}{2}\int[\boldsymbol{E}^2+m^2\boldsymbol{A}^2+(\nabla x\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{m^2}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})^2]d\boldsymbol{x}$。并由正则量子化方法导出等时对易关系。$[A_i(x),\ E_j(x')]$，$[A_i(x),\ A_j(x')]$ 和 $[E_i(x),\ E_j(x')]=?$

13．利用上题的结论，由量子运动方程 $\dot{\boldsymbol{A}}(x)=\frac{1}{i}[\boldsymbol{A}(x),H]$ 和 $\dot{\boldsymbol{E}}(x)=\frac{1}{i}[\boldsymbol{E}(x),H]$ 导出场方程。$\dot{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{E}+\frac{1}{m^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$，和 $\dot{\boldsymbol{E}}=m^2A+\nabla x(\nabla\times\boldsymbol{A})$。

14．有质量的矢量场满足 $(5.2)_4$ 式场方程。该方程具有平面特解 $\epsilon_k e^{\pm ikx}$，

其中极化矢量 ϵ_k 由于要满足 $k\cdot\epsilon=0$ 条件，只有三个相互独立的极化矢量。证明这三个四维矢量可以选为 $\epsilon_{k1}=(\boldsymbol{\epsilon}_{k1},\ 0)$，$\epsilon_{k2}=(\boldsymbol{\epsilon}_{k2},\ 0)$ 和 $\epsilon_{k3}=\left(\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\ \frac{\omega}{m},\ i\frac{|\boldsymbol{k}|}{m}\right)$，且它们满足正交归一化 $\epsilon_{k\lambda}\cdot\epsilon_{k\lambda'}=\delta_{\lambda\lambda'}$。还证明 $\epsilon_{k\lambda}$ 可统一写成

$$\epsilon^{\alpha}_{k\lambda}=\begin{cases}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}+\dfrac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda})}{m(\omega+m)} & (\alpha=1,\ 2,\ 3),\\ i\dfrac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}}{m} & (\alpha=4),\end{cases}\qquad \lambda=1,\ 2,\ 3。$$

以上 $\boldsymbol{\epsilon}_{k1}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_{k2}$ 为横分量的单位矢量，$\boldsymbol{\epsilon}_{k3}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ 为沿 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量（三维矢量）。

15. 由上题如取

$$A'_{\mu}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^{\mu}_{k\lambda}(a_{k\lambda}e^{ikx}+a^{+}_{k\lambda}e^{-ikx})。$$

其空间分量可写成

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}(a_{k\lambda}e^{ikx}+a^{+}_{k\lambda}e^{-ikx})+\frac{\omega}{m}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}(a_{k3}e^{ikx}+a^{+}_{k3}e^{-ikx})\right]。$$

证明

$$\boldsymbol{E}(x)=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left[\sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}(a_{k\lambda}e^{ikx}-a^{+}_{k\lambda}e^{-ikx})+\frac{m}{\omega}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}(a_{k3}e^{ikx}-a^{+}_{k3}e^{-ikx})\right]。$$

且 $a_{k\lambda}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int dx e^{-ikx}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}\cdot\boldsymbol{A}(x)-\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}\cdot\boldsymbol{E}(x)\right)$，$\lambda=1,\ 2$；

$a_{k3}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int dx e^{-ikx}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{m}{\omega}\boldsymbol{\epsilon}_{k3}\cdot\boldsymbol{A}(x)-\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\frac{\omega}{m}\boldsymbol{\epsilon}_{k3}\cdot\boldsymbol{E}(x)\right)$；

$a^{+}_{k\lambda}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int dx e^{ikx}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}\cdot\boldsymbol{A}(x)+\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\boldsymbol{\epsilon}_{k\lambda}\cdot\boldsymbol{E}(x)\right)$，$\lambda=1,\ 2$；

$a^{+}_{k3}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int dx e^{ikx}\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{m}{\omega}\boldsymbol{\epsilon}_{k3}\cdot\boldsymbol{A}(x)+\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\frac{\omega}{m}\boldsymbol{\epsilon}_{k3}\cdot\boldsymbol{E}(x)\right)$。

16. 对于有质量的矢量场导出 $H=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{3}\omega_k a^{+}_{k\lambda}a_{k\lambda}$。

17. 对于荷电的有质量的矢量场导出 $Q=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{3}(a^{+}_{k\lambda}a_{k\lambda}-b^{+}_{k\lambda}b_{k\lambda})$。

第 五 章

1. 验证 $(1.9)_5$ 式即

$$p_\mu=\int d\boldsymbol{k}k_\mu\sum_{h=-1}^{1}[a_h^{(+)}(\boldsymbol{k})a_h^{(-)}(\boldsymbol{k})-b_h^{(-)}(\boldsymbol{k})b_h^{(+)}(\boldsymbol{k})],$$

$$Q=e\int d\boldsymbol{k}\sum_{h=-1}^{1}[a_h^{(+)}(\boldsymbol{k})a_h^{(-)}(\boldsymbol{k})+b_h^{(-)}(\boldsymbol{k})b_h^{(+)}(\boldsymbol{k})]。$$

2. 验证对于静止的 Dirac 单粒子态，自旋的第三分量 S_z 的期待值为 $\pm\frac{1}{2}$。

3. 导出一般对易关系 $\{\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')\}=iS_{\alpha\beta}(x-x')$，并证明它具有 Lorentz 协变性。

4. 已知核子同位旋的表式如下

$$\mathcal{I}=\int dx\psi^+(x)\frac{\tau}{2}\psi(x)。$$

证明 $\mathcal{I}\times\mathcal{I}=i\mathcal{I}$，且 $[\mathcal{I},\ N]=0=[\mathcal{I},\ p_\mu]$。并求出 $[\mathcal{I}^{(i)},\ \Psi_\alpha(x)]=?$

5. 验证以下关系

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)=\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)]_-,$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)=\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x),\ \gamma_\mu\psi(x)]_-+\delta_{\mu_4}\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}2。$$

6. 试说明如果对标量场进行反对易量子化，对 Dirac 场进行对易量子化，则导致微观因果律的破坏。

7. 试说明对于中微子 $m=0$，可将其 ψ 分解成 $\psi=\psi_L+\psi_R$。

其中

$$\psi_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{m}{E}}[a_{-1}^{(-)}(\boldsymbol{k})u^{-1}(\boldsymbol{k})e^{ikx}+b_{+1}^{(+)}(\boldsymbol{k})v^{+1}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}]。$$

$$\psi_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{m}{E}}[a_{+1}^{(-)}(\boldsymbol{k})u^{+1}(\boldsymbol{k})e^{ikx}+b_{-1}^{(-)}(\boldsymbol{k})v^{-1}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}]。$$

8. 利用 Dirac 粒子产生算符 a^+ 和 Dirac 粒子湮灭算符 a 的反对易关系，证明以下关系（α 为普通常数）。

$$e^{-\alpha a^+}ae^{\alpha a^+}=a-\alpha^2a^+-\alpha(aa^+-a^+a),$$

$$e^{-\alpha a^+}a^+e^{\alpha a^+}=a^+-\alpha^2 a-\alpha(aa^+-a^+a),$$

$$e^{\alpha a^+ a}ae^{-\alpha a^+ a}=e^{-\alpha}a,$$

$$e^{\alpha a^+ a}a^+\cdot e^{-\alpha a^+ a}=e^{\alpha}a^+。$$

9. 验证 $(1.8)_5$ 式 $S=\int\bar{\psi}\gamma_4\frac{\sigma}{2}\psi\,dx$。

10. 证明在以下变换下，$\psi(x)\to i\gamma_5\psi(-x)$，且 $\bar{\psi}(x)\to i\bar{\psi}(-x)\gamma_5$，同时把乘积中的场算符顺序颠倒过来。Dirac 场的场方程和对易关系不变。

第 六 章

1. 证明等式 $e^{-i\lambda S}Oe^{i\lambda S}=O+i\lambda[O,\ S]+\frac{i^2\lambda^2}{2!}[[O,\ S],\ S]+\cdots$ 其中 O 和 S 为任意算符，λ 为一常数。

2. 空间反演算符 P 满足 $(1.4)_6$ 式关系 $Pa(\boldsymbol{k})P^{-1}=\eta_p a(-\boldsymbol{k})$，对于标量场 $\eta_p=+1$ 此时 P 记以 P_S，对于赝标场 $\eta_p=-1$，此时 P 记以 P_{pS} 以资区别。试用粒子数产生和湮灭算符把 P_S 和 P_{pS} 具体表达出来。

3. 证明空间反演算符 P_S 或 P_{pS} 和标量场的角动量算符 $M_{(\mu\nu)}=-i\int(x_\mu T_{\nu 4}-x_\nu T_{\mu 4})dx$ 相互对易。

4. 标量场的电荷共轭算符 C 满足 $(2.3)_6$ 式关系 $Ca(k)C^{-1}=\eta_c b(k)$。导出在粒子数空间的 C 的具体表达式。

5. 在粒子数空间把 Dirac 场的电荷共轭和时间反演算符表达出来。

6. 验证 $(2.10)_6$ 式 $C\frac{1}{2}[\bar{\psi}_1,\ \Omega_i\psi]C^{-1}=\frac{1}{2}\eta^*_{c_1}\eta_{c_2}C_i[\bar{\psi}_2,\ \Omega_i\psi_1]$。

7. 具体验证在 TCP 变换下的变换关系。

$$TCP\,\varphi(x)P^{-1}C^{-1}T^{-1}=\varphi(-x),$$

$$TCP[\bar{\psi}(x),\ \psi(x)]P^{-1}C^{-1}T^{-1}=[\bar{\psi}(-x),\ \psi(-x)],$$

$$TCP\,i[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)]P^{-1}C^{-1}T^{-1}=i[\bar{\psi}(x),\ \gamma_5\psi(x)]。$$

而且中性矢量场在 TCP 变换下，按矢量流 $i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ 或轴矢流 $i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 同样的方式变换。

8. 在量子电动力学中，可定义如下的电荷共轭算符

$$C=\exp[i\pi\sum_{\boldsymbol{k},h}(\alpha^{+h}(k)a^h(\boldsymbol{k})+a^h(\boldsymbol{k})a^h(\boldsymbol{k}))]\exp\left[\frac{\pi}{2}\sum_{\boldsymbol{k},h}(b^{+h}(\boldsymbol{k})a^h(\boldsymbol{k})-a^{+h}(\boldsymbol{k})b^h(\boldsymbol{k}))\right]。$$

证明以上定义的 C 确实满足以下关系

$$Ca^h(\boldsymbol{k})C^{-1}=-\alpha^h(\boldsymbol{k}),\ Ca^h(k)C^{-1}=b^h(\boldsymbol{k}),$$

$$Cb^h(\boldsymbol{k})C^{-1}=a^h(\boldsymbol{k}),\ C^+C=C^2=1。$$

其中 $\alpha^h(\boldsymbol{k})$，$a^h(\boldsymbol{k})$ 和 $b^h(\boldsymbol{k})$ 分别为相应的光子，Dirac 粒子和反 Dirac 粒子的湮灭算符。

9．已知 π 介子的量子数 $J^{Pc}(I)=O^{-+}$。(1)试分析两 π 体系的 G 宇称，同位旋 I 和荷称 C。

第 七 章

1．如取 πN 的相互作用 $\mathscr{L}_{相互}=i\frac{f}{m}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi\partial_\mu\underset{\sim}{\varphi}$，即 $(7.6)_7$ 式，导出它的相互作用

$$\mathscr{H}_{相互}=-i\frac{f}{m}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\Psi\partial_\mu\underset{\sim}{\varphi}+\frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\right)^2(\overline{\Psi}\gamma_4\gamma_5\underset{\sim}{\tau}\psi)^2。$$

2．如取 Dirac 粒子和中性矢量介子的相互作用为 $\mathscr{L}_{相互}=ig\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$。导出场的运动方程，并证明相互作用的

$$\mathscr{H}_{相互}=-ig\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu-\frac{1}{2m^2}g^2(\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2。$$

3．如取 πN 的相互作用 $\mathscr{L}_{相互}=-iG\overline{\Psi}_N\underset{\sim}{\tau}\gamma_5\Psi_N\underset{\sim}{\varphi}_\pi$，即 $(7.1)_7$ 式。证明上式可写成

$$\mathscr{L}_{相互}=-iG\overline{\Psi}_i\gamma_5\varphi_{ij}\Psi_j,$$

其中
$$\varphi_{ij}=(\underset{\sim}{\tau}\cdot\underset{\sim}{\varphi}_\pi)_{ij}=\begin{vmatrix}\varphi_{\pi^0} & \sqrt{2}\,\varphi_{\pi^+}\\ \sqrt{2}\,\varphi_{\pi^-} & -\varphi_{\pi^0}\end{vmatrix}$$

4．Σ 粒子也是同位矢量粒子。如取 $\Sigma\pi$ 相互作用 $\mathscr{L}_{相互}=G'\bar{\Sigma}_{ij}\gamma_5\varphi_{jk}\Sigma_k$ $=G'Tr\,\bar{\Sigma}\gamma_5\varphi\Sigma$。证明 $\mathscr{L}_{相互}$ 可写成 $\mathscr{L}_{相互}=-2iG'\bar{\underset{\sim}{\Sigma}}\gamma_5\times\underset{\sim}{\Sigma}\cdot\underset{\sim}{\varphi}$。

5．证明 $(11.10)_7$ 式 $\mathscr{L}_{相互}=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_{\nu\mu}\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_\mu][\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+\gamma_5)\psi_{\nu\mu}]+h.c.$ 在空间反演和电荷共轭复合变换下保持不变。

6．如场的相互作用 $\mathscr{H}_{相互}(x)$ 为正 Lorentz 标量。证明在以下（强反射）变换下，即 $\varphi(x)\to\varphi(-x)$，$\varphi^*(x)\to\varphi^*(-x)$。$A(x)\to-A_\mu(-x)$，$\psi(x)\to i\gamma_5\psi(-x)$，且 $\bar{\psi}(x)\to i\bar{\psi}(-x)\gamma_5$，同时在乘积中的场算符的排列顺序要颠倒过来。则 $\mathscr{H}_{相互}(x)\to\mathscr{H}_{相互}(-x)$。

7．定义以下共轭变换。$\varphi(x)\to\varphi^*(x)$，$\varphi^*(x)\to\varphi(x)$，$A_\mu(x)\to A_\mu(x)$，$\psi(x)\to\gamma_{4T}\bar{\psi}_T(x)$，且 $\bar{\psi}(x)\to\psi_T(x)\gamma_{4T}$ 普通 C 数$\to C^*$，同把乘积中场算符的顺序颠倒过来。试证在以共轭变换下自由场的场方程和对易关系不变。且证明在共轭变换和上题的强反射变换的复合变换下，场算符的变换如下 $\varphi(x)\to\varphi^*(-x)$，$\varphi^*(x)\to\varphi(-x)$ $A_\mu(x)\to-A_\mu(-x)$，$\psi(x)\to-i\gamma_{5T}\gamma_{4T}\bar{\psi}_T$

$(-x)$，且 $\bar{\psi}(x)\to -i\psi_n(x)\gamma_{1n}\gamma_{2n}$，$C\to C^*$ 同时乘积中场算符顺序不变。

8. 证明上题的复合变换于 $P.C.T$ 的复合变换。

9. 如 $\mathscr{H}_{相互}(x)$ 为正 Lorentz 标量且为厄米的，试证体系在 $P.C.T$ 复合变换下保持不变。

10. 如取 $\mathscr{L}_{相互}=\sum_{A=1}^{5}(\bar{\psi}_1\gamma_A\psi_2)(\bar{\psi}_3\gamma_A(C_A+C'_A\gamma_5)\psi_4)+h.c.$ 若要求 $\mathscr{L}_{相互}$ $P.C.T$ 变换下不变，求各对常数 C_A，C'_A 有什么要求。

第 八 章

1. 导出矢量场的传播子 $(3.7)_8$ 式

$$\overbrace{\varphi^*_\mu(x)\varphi_\nu(0)}=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{k^2+(m-i\epsilon)^2}dk(\delta_{\mu\nu}+m^{-2}k_\mu k_\nu)$$

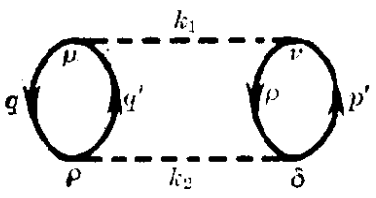
$$=\frac{1}{i}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{m^2}\partial_\mu\partial_\nu\right)\Delta_c(x)。$$

2. 导出 Dirac 场的传播子 $(3.5)_8$ 式

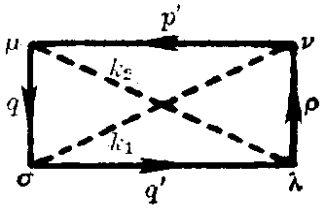
$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}}(0)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}}{\hat{k}-(m-i\epsilon)}dk=iS_c(x)。$$

3. 由 S 矩阵展开式的二级修正项 $S^{(2)}$ 中分出对应电子-正电子散射的各项，并在动量表示下导出电子-正电子散射的 $S^{(2)}$ 矩阵元 $\langle 0|b_{\tau'}(\boldsymbol{q}')a_{\sigma'}(\boldsymbol{p}')S^{(2)}a^+_\sigma(\boldsymbol{p})b^+_\tau(\boldsymbol{q})|0\rangle$。并和由 Feynman 法则所得 $S^{(2)}$ 矩阵元进行比较。

4. 按 Feynman 法则写出以下两个图形所对应的 S 矩阵元。



(a)



(b)

第 九 章

1. 推导 $(3.10)_9$ 式 $I(P_a;\ P_b,\ P_1,\ P_2)=-\dfrac{\pi^2|\boldsymbol{p}_1|\cdot|\boldsymbol{p}_2|^2}{W|\boldsymbol{p}_2|+|\boldsymbol{p}_1|\varepsilon_2\cos\theta_{12}}$，其中 $W=m_a-\varepsilon_1=m_a-\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2+m_1^2}$。

2. 证明 $k_\mu A_\mu = 0$，其中 A_μ 为 (7.9)$_9$ 式中的 A_μ。

3. 推导 (3.8)$_9$ 式。

4. 推导 (7.10)$_9$ 和 (7.13)$_9$ 式。

5. 推导 (11.19)$_9$ 式。

6. 假定 $f^0 \to 2\pi$ 为强衰变，且 f^0 的同位旋为零求 $\dfrac{f^0 \to \pi^+\pi^-}{f^0 \to \pi^0\pi^0}$ 的分支比。

第 十 章

1. 选取 $K\pi$ 体系最简的有效强相互作用 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$，并从而计算 $K\pi \to K\pi$ 散射的微分截面。

2. 计算 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的散射截面，可忽略粒子的静质量。

3. 计算 $e^-p \to e^-p$ 的散射截面，假定质子无结构。

4. 取 πN 相互作用 $\mathscr{H}_{\text{相互}} = -iG\dfrac{1}{2}[\bar{\psi}, \gamma_5\psi]\varphi(x)$。计算 πN 散射截面。

5. 取弱相互作用 $\mathscr{L}_{\text{相互}} = \dfrac{G}{\sqrt{2}} J_\mu W_\mu = \dfrac{G}{\sqrt{2}} \bar{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi \cdot W_\mu$ 计算 $\mu^- \to \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^-$ 的几率。并和 (2.14)$_{10}$ 式比较。

6. 选取 $\Sigma\pi$ 体系最简单的有效强相互作用 $\mathscr{L}_{\text{相互}}$，并从而计算 $\Sigma\pi \to \Sigma\pi$ 的散射截面。

7. 假定 ω 为矢量介子且其同位旋为零。选取最简单的有效强相互作用，计算 $\omega \to 3\pi$ 的末态三 π 的动量分布。

单位、度规与符号

本书所采取的单位制和通常专著或文献所用的单位制一样，也就是采用所谓的自然单位制。在经典物理里，通常取长度 L、时间 T 和质量 M 为基本单位，其他物理量的单位都可以由这三个基本单位推导出来。其实基本单位的选取并非唯一，在一定程度上只是一种约定。从相对论和量子论的观点看来，另一种选取更为自然。即取速度 V，作用量 A 以及另外一个长度 L（或者取能量 E）作为我们的基本单位。并且约定以光速 c 作为速度测量的单位，普朗克常数 $\hbar$ 作为作用量的测量单位。另外长度的单位则可任意取为厘米或费米（$=10^{-13}$ 厘米）。这就是所谓的自然单位制。在这里相当取 $\hbar=1=c$。因此除了个别情况，为了清楚起见把 $\hbar$ 或 c 明显地写出外，一般在公式中可不必出现 $\hbar$ 或 c，而只出现长度（或能量）的量纲。容易得出两种单位制的量纲互换关系如下：

$$\begin{cases} L=L \\ T=LV^{-1} \\ M=L^{-1}V^{-1}A \end{cases} \qquad \begin{cases} L=L \\ A=ML^2T^{-1} \\ V=LT^{-1} \end{cases}$$

两种单位制之间的单位互换关系如下：

$$1\text{ 厘米}=1\text{ 厘米}$$

$$1\text{ 克}=\left(\frac{c}{\hbar}\right)(\text{厘米})^{-1}c^{-1}\hbar$$

$$1\text{ 秒}=(c)(\text{厘米})c^{-1}$$

其中 $(f(c,\hbar))$ 是括号中的 $\hbar$ 和 c 的函数，就是把相应的

$$(c)=3\times10^{10} \quad \text{和} \quad (\hbar)=10^{-27}$$

代入所得到的数值。例如

$$1\text{ 克}\simeq3\times10^{37}(\text{厘米})^{-1} \quad \text{自然单位，}$$

$$1\text{ 秒}\simeq3\times10^{10}(\text{厘米}) \quad \text{自然单位。}$$

电荷和 $\hbar^{1/2}c^{1/2}$ 有相同量纲。电子的电荷 e 在 CGS 制里为

$$|e| \simeq \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \hbar^{1/2} c^{1/2}。$$

在自然单位制里写成

$$\frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}。$$

其中 4π 是由于采取了合理化的电荷单位制。这样可使得在我们所需用的基本公式中不再出现 π。

对于物理量的相对论描述，目前流行的有两类度规。其一为在闵柯夫斯基空间的度规 $g^{\mu\nu}$。另一为欧氏空间度规 $\delta_{\mu\nu}$。采用前者的专著有 Bjorken 和 Drell 的"Relasivistic Quautum Fields"。采用后者的有 David Lurie 的 "Particles and Fields" 以及本书。在闵氏空间中描述物理量可避免虚数的干扰，但要区别协变和抗变量。在欧氏空间描述物理量受到虚数牵累，可是可以不必区分协变和抗变。这两种描述方式各有利弊。采用者也各参其半，大有平分秋色之势。

为今后阅读专著或文献方便起见，我们把这两种方式所用的符号及相互关系列表如下，以便查考。

闵氏空间(例 Bjorken 和 Drell)	欧氏空间[例本书(或 D. Lurie)]
$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{vmatrix}$	$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$
$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}=\delta_\mu^\nu$	
$x^\mu=(x^0, x^1, x^2, x^3)=(t, x, y, z)=(t, \boldsymbol{x})$ $x_\mu=(x_0, x_1, x_2, x_3)=(t, -x, -y, -z)$ $=(t, -\boldsymbol{x})$	$x_\mu=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x, y, z, it)$ $(=\boldsymbol{x}, it)$
$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ $=\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ $\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{-\partial}{\partial x}, \frac{-\partial}{\partial y}, \frac{-\partial}{\partial y}\right)$ $=\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$	$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i\partial t}\right)$ $=\left(\nabla, -i\frac{\partial}{\partial t}\right)$

闵氏空间(例 Bjorken 和 Drell)	欧氏空间[例本书(或 D. Lurie)]
$p^\mu=(E,\ \boldsymbol{p})=(E,\ p_x,\ p_y,\ p_z)$ $p_\mu=(E,\ -\boldsymbol{p})=(E,\ -p_x,\ -p_y,\ -p_z)$ $\Rightarrow i\partial_\mu$ $p^2=p^\mu p_\mu=E^2-\lvert\boldsymbol{p}\rvert^2=m^2$ $p_1\cdot p_2=p_1^\mu\cdot p_{2\mu}=E_1E_2-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2$	$p_\mu=(\boldsymbol{p},\ iE)\Rightarrow-i\partial_\mu$ $p^2=p_\mu p_\mu=\lvert\boldsymbol{p}\rvert^2-E^2=-m^2$ $p_1\cdot p_2=\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2-E_1E_2$
$\Box=\partial_\mu\partial^\mu=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-(\nabla)^2$	$\Box=\partial_\mu\partial_\mu=(\nabla)^2-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$
$A^\mu=(A^0,\ \boldsymbol{A})$ $A_\mu=(A^0,\ -\boldsymbol{A})$	$A_\mu=(\boldsymbol{A},\ iA_0)$
$\partial_\mu B^\mu=\frac{\partial B^0}{\partial t}+\frac{\partial B^x}{\partial x}+\frac{\partial B^y}{\partial y}+\frac{\partial B^z}{\partial z}$	$\partial_\mu B_\mu=\partial_x B_x+\partial_y B_y+\partial_z B_z+\frac{\partial B_0}{\partial t}$
$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu},\ \{\gamma^\mu,\ \gamma^5\}=0$ $\gamma^0=\beta,\ \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}$ $\gamma^5=i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\gamma_5$	$\{\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu},\ \{\gamma_\mu,\ \gamma_5\}=0$ $\gamma_4=\beta,\ \boldsymbol{\gamma}=i\boldsymbol{\alpha}\beta=-i\beta\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}=i\gamma_4\boldsymbol{\gamma}$ $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$
$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]$	$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu]$
$p_\mu\gamma^\mu=E\gamma^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}$	$p_\mu\gamma_\mu=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+iE\gamma_4$
$\gamma^\mu\partial_\mu=\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\gamma}\nabla$	$\gamma_\mu\partial_\mu=\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-i\gamma_4\frac{\partial}{\partial t}$
$\boldsymbol{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix},\ \beta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=\gamma^0$	$\boldsymbol{\alpha}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix},\ \beta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=\gamma_4$
$\gamma^5=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix}$ $\gamma^{0+}=\gamma^0,\ \boldsymbol{\gamma}^+=-\boldsymbol{\gamma}$	$\gamma_5=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}0 & -i\boldsymbol{\sigma}\\ i\boldsymbol{\sigma} & 0\end{vmatrix}$ $\gamma_\mu^*=\gamma_\mu$

互 换 关 系

闵氏空间(例 Bjorken 和 Drell)	欧氏空间(例本书或 Lurié)
$A\cdot B$	$-A\cdot B$
$\partial_\mu B^\mu$	$\partial_\mu B_\mu$
$\gamma^\mu\partial_\mu$	$i\gamma_\mu\partial_\mu$
$\gamma^\mu B_\mu$	$-i\gamma_\mu B_\mu$
γ^0	γ_4
$\boldsymbol{\gamma}$	$i\boldsymbol{\gamma}$
$\Box=\partial_\mu\partial^\mu$	$-\Box=-\partial_\mu\partial_\mu$